

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک
پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی هوا فضا-سازه‌های هوایی

تحلیل تنش در ورق بلند ساخته‌شده از مواد FG با گشودگی

دایروی تحت بارگذاری مکانیکی به روش تفکیک متغیرها

نگارنده : فرزانه‌سادات موسوی تبار

استادان راهنما

دکتر مهدی قنّاد

دکتر محمد جعفری

استاد مشاور

امین عامری

بهمن ۱۳۹۵



مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم شماره ۷: صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای فرزانه سادات موسوی تبار به شماره دانشجویی ۹۲۱۳۷۵۴، رشته مهندسی هوافضا گرایش سازه-های هوایی تحت عنوان تحلیل تنش در ورق مربعی بلند ساخته شده از مواد FG با گشودگی دایروی تحت بارگذاری مکانیکی به روش تفکیک متغیرها که در تاریخ ۱۸ بهمن ۱۳۹۵ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: خوب - امتیاز ۱۹,۵۷) <input checked="" type="checkbox"/>	دفاع مجدد <input type="checkbox"/>	مردود <input type="checkbox"/>
نوع تحقیق: نظری <input checked="" type="checkbox"/>	عملی <input type="checkbox"/>	

۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹)
۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۱- عالی (۱۹ - ۲۰)
۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	دانشیار	دکتر مهدی فناد کتولئی	۱- استاد راهنمای اول
	استادیار	دکتر محمد جعفری	۲- استاد راهنمای دوم
	مربی	مهندس امین عامری	۳- استاد مشاور
	استادیار	دکتر سید هادی قادری	۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	استادیار	دکتر علیرضا شاطرزاده	۵- استاد ممتحن اول
	استادیار	دکتر محمد باقر نظری	۶- استاد ممتحن دوم

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقدیم

تقدیم به

خانواده عزیزم

که بدون ایشان هیچم...

تشکر و قدردانی

با تشکر فراوان از اساتید محترم آقایان دکتر مهدی قنّاد کهنوی، دکتر محمد جعفری و مهندس امین عامری به دلیل یاری‌ها و راهنمایی‌های بی چشم‌داشت ایشان که بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان نمودند و بسیار دلسوزانه من را در این تحقیق یاری کردند.

تعهدنامه

اینجانب فرزانه سادات موسوی تبار دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی هوافضا- گرایش سازه‌های هوایی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی تحلیل تنش در ورق بلند ساخته‌شده از مواد FG با گشودگی دایروی تحت بارگذاری مکانیکی به روش تفکیک متغیرها، تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهنوی و دکتر محمد جعفری متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این تحقیق سعی می‌شود، به کمک روش تفکیک متغیرها، حلی تحلیلی برای محاسبه توزیع تنش دوبعدی اطراف گشودگی دایروی در ورق بلند ناهمگن ارائه شود و با نتایج حاصل از روش توابع پتانسیل مختلط مقایسه شود. بارگذاری به صورت کشش ثابت و یکنواخت تک‌محوری و دومحوری به ورق اعمال می‌شود؛ دور گشودگی نیز بار به صورت فشار یکنواخت به گشودگی اعمال می‌شود. بررسی تأثیر مقدار بار فشاری اعمال شده بر مرز گشودگی در توزیع تنش اطراف آن، یکی از اهداف مهم این تحقیق است. جهت ناهمگنی و تغییرات مدول الاستیسیته، در جهت شعاعی و هم‌مرکز با گشودگی در نظر گرفته شده است. برای توصیف تغییر خواص مکانیکی ورق مورد نظر از یک تابع نمایی که دارای شعاع همگرایی مشخصی است، استفاده می‌شود. از روش اجزای محدود برای راستی‌سنجی نتایج حل تحلیلی، در تمام حالات بارگذاری برای ورق همگن و ناهمگن استفاده شده است. با وجود بارگذاری فشاری در داخل گشودگی دایروی علاوه بر تنش محیطی، مقدار تنش شعاعی نیز قابل توجه است؛ از تنش فن‌میزس برای بررسی تنش در اطراف گشودگی استفاده شده است. با بررسی نتایج تنش محیطی برای حالات مختلف بارگذاری می‌توان نتیجه گرفت، که تأثیر جنس لایه‌های میانی بر روی مقدار تنش محیطی، بدون فشار داخلی، بیشتر است.

کلیدواژگان: ورق FG، مواد ناهمگن، گشودگی دایروی، روش تفکیک متغیرها، تمرکز تنش

مقالات

فهرست مطالب

فصل ۱ تاریخچه علمی.....	۱
۱-۱ پیش‌گفتار.....	۲
۲-۱ مقدمه‌ای بر ورق‌ها.....	۲
۳-۱ تقسیم‌بندی ورق‌ها.....	۳
۴-۱ روش‌های تحلیل ورق‌ها.....	۴
۱-۴-۱ تئوری کلاسیک خیز کوچک ورق نازک.....	۶
۲-۴-۱ تئوری غشایی ورق‌ها.....	۹
۵-۱ تاریخچه و ضرورت ورق‌های FGM.....	۱۳
۱-۵-۱ تاریخچه مواد ناهمگن.....	۱۳
۶-۱ انواع فرآیندهای ساخت مواد FG.....	۱۴
۷-۱ روابط حاکم بر مواد FG.....	۱۷
۸-۱ پیشینه‌ی تحقیق.....	۱۸
۹-۱ جمع‌بندی.....	۲۳
۱۰-۱ ساختار پایان‌نامه.....	۲۳
فصل ۲ ورق همگن با کشودگی دایروی تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای.....	۲۵
۱-۲ پیش‌گفتار.....	۲۶
۲-۲ استخراج معادلات.....	۲۶
۱-۲-۲ موقعیت مکانی $K(\rho)$	۲۸
۲-۲-۲ تابع تنش برای بارگذاری کشش دومیوری.....	۳۰
۳-۲-۲ تعریف تابع کومر $M(a,b,z)$	۳۱
۴-۲-۲ بارگذاری برش خالص $m=2$	۳۲
۳-۲ حل تحلیلی موجود در مراجع.....	۳۸
۴-۲ تحلیل اجزای محدود.....	۴۰
۵-۲ معرفی نرم‌افزار اجزای محدود انسیس.....	۴۱
۶-۲ روند تحلیل عددی.....	۴۲
۱-۶-۲ هندسه ورق.....	۴۲
۲-۶-۲ تعریف خواص مواد.....	۴۳
۳-۶-۲ مشبندی و اعمال شرایط حل.....	۴۴

۴۷.....	۴-۶-۲ اعمال شرایط مرزی و بارگذاری.....
۴۸.....	۷-۲ بررسی نتایج.....
۴۹.....	۱-۷-۲ کشش تک محوری.....
۵۰.....	۲-۷-۲ بارگذاری دو محوری.....
۵۲.....	۸-۲ جمع بندی.....
۵۳.....	فصل ۳ ورق ناهمگن با گشودگی دایروی تحت بارگذاری درون صفحه ای.....
۵۴.....	۱-۳ پیش گفتار.....
۵۴.....	۲-۳ مدل ریاضی ورق همگن.....
۵۵.....	۳-۳ استخراج معادلات.....
۵۶.....	۴-۳ بررسی نتایج.....
۵۸.....	۱-۴-۳ کشش تک محوری.....
۵۹.....	۲-۴-۳ بارگذاری دو محوری.....
۶۳.....	۵-۳ جمع بندی.....
۶۵.....	فصل ۴ ورق همگن و ناهمگن تحت بار فشاری در داخل گشودگی.....
۶۶.....	۱-۴ پیش گفتار.....
۶۶.....	۲-۴ معادلات حاکم.....
۶۸.....	۳-۴ بررسی نتایج.....
۶۹.....	۱-۳-۴ کشش تک محوری.....
۷۶.....	۲-۳-۴ بارگذاری دو محوری $n=1$
۸۱.....	۳-۳-۴ بارگذاری دو محوری $n=-1$
۸۷.....	۴-۳-۴ مقایسه نتایج روش تفکیک متغیرها و تابع پتانسیل مختلط در $n=2$ و $n=-2$
۹۰.....	۴-۴ جمع بندی.....
۹۱.....	فصل ۵ نتیجه گیری و پیشنهادها.....
۹۲.....	۱-۵ نتیجه گیری.....
۹۲.....	۱-۱-۵ ورق همگن تحت بارگذاری درون صفحه ای.....
۹۲.....	۲-۱-۵ ورق ناهمگن تحت بارگذاری درون صفحه ای.....
۹۲.....	۳-۱-۵ ورق تحت بارگذاری درون صفحه ای و بارگذاری فشار یکنواخت درون گشودگی.....
۹۳.....	۲-۵ پیشنهادها.....
۹۴.....	مراجع.....

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ شماتیک یک ورق نازک مستطیلی در مختصات کارتزین..... ۸
- شکل ۲-۱ فرض‌های لایه میانی تئوری رایسنر..... ۱۱
- شکل ۳-۱ نیروهای داخلی و خارجی در المانی از لایه میانی ۱۲
- شکل ۴-۱ پدیده تورق در کامپوزیت‌های لایه‌ای ۱۴
- شکل ۵-۱ ورق FG با تغییر تدریجی مواد تشکیل‌دهنده فقط در راستای ضخامت ۱۵
- شکل ۶-۱ انواع ریزساختار ماده FG ۱۶
- شکل ۱-۲ شماتیک کلی ورق با گشودگی دایروی..... ۲۶
- شکل ۲-۲ ورق تحت بارگذاری کشش دو محوری $m = 0$ ۳۰
- شکل ۳-۲ ورق تحت بارگذاری برش خالص..... ۳۲
- شکل ۴-۲ همگرایی مقدار تابع $f(\rho)$ به ازای تعداد جملات سری..... ۳۷
- شکل ۵-۲ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت $\sigma_1 = \sigma_2 = 1MPa$ ۳۹
- شکل ۶-۲ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت $\sigma_1 = 1MPa, \sigma_2 = 0$ ۳۹
- شکل ۷-۲ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1MPa$ ۴۰
- شکل ۸-۲ هندسه ورق با نسبت ابعادی در نرم‌افزار ANSYS ۴۳
- شکل ۹-۲ مقایسه‌ی نحوه‌ی قرارگیری مش مثلثی و مربعی روی مرز گشودگی ورق..... ۴۵
- شکل ۱۰-۲ مش‌بندی کل ورق در نرم‌افزار انسیس ۴۶
- شکل ۱۱-۲ بیشینه مقدار تنش محیطی حاصل از تحلیل عددی ۴۷
- شکل ۱۲-۲ اعمال شرایط مرزی متقارن ورق در ANSYS ۴۸
- شکل ۱۳-۲ توزیع تنش در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوری..... ۵۰
- شکل ۱۴-۲ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوری..... ۵۰
- شکل ۱۵-۲ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دو محوری..... ۵۱
- شکل ۱۶-۲ جابه‌جایی شعاعی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دو محوری..... ۵۲
- شکل ۱-۳ تغییرات مدول الاستیسیته در جهت شعاعی برای ورق ناهمگن با روند افزایشی مدول الاستیسیته ۵۵

- شکل ۳-۲ شماتیک ورق ناهمگن و تقسیم‌بندی آن به حلقه‌های هم مرکز همگن.....۵۶
- شکل ۳-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف ۷.....۵۷
- شکل ۳-۴ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف ۷.....۵۷
- شکل ۳-۵ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن و ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک‌محوری.....۵۹
- شکل ۳-۶ مقدار جابه‌جایی شعاعی در اطراف گشودگی ورق همگن و ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک‌محوری.....۵۹
- شکل ۳-۷ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق نوع اول تحت بارگذاری دو محوری.....۶۰
- شکل ۳-۸ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق نوع دوم تحت بارگذاری دو محوری.....۶۰
- شکل ۳-۹ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دو محوری.....۶۱
- شکل ۳-۱۰ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دو محوری.....۶۲
- شکل ۴-۱ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک‌محوری.....۶۹
- شکل ۴-۲ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک‌محوری.....۷۰
- شکل ۴-۳ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک‌محوری.....۷۱
- شکل ۴-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوری.....۷۲
- شکل ۴-۵ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوری.....۷۳
- شکل ۴-۶ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوری.....۷۳
- شکل ۴-۷ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوری.....۷۴
- شکل ۴-۸ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوری.....۷۵
- شکل ۴-۹ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوری.....۷۵
- شکل ۴-۱۰ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دو محوری $n=1$۷۶
- شکل ۴-۱۱ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دو محوری $n=1$۷۷
- شکل ۴-۱۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دو محوری $n=1$۷۷
- شکل ۴-۱۳ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دو محوری $n=1$۷۸
- شکل ۴-۱۴ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دو محوری $n=1$۷۹
- شکل ۴-۱۵ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دو محوری $n=1$۷۹
- شکل ۴-۱۶ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دو محوری $n=1$۸۰
- شکل ۴-۱۷ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دو محوری $n=1$۸۰

- شکل ۱۸-۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$ ۸۱
- شکل ۱۹-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری $n=-1$ ۸۲
- شکل ۲۰-۴ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری $n=-1$ ۸۲
- شکل ۲۱-۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری $n=-1$ ۸۳
- شکل ۲۲-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری $n=-1$ ۸۴
- شکل ۲۳-۴ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری $n=-1$ ۸۴
- شکل ۲۴-۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری $n=-1$ ۸۵
- شکل ۲۵-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری $n=-1$ ۸۶
- شکل ۲۶-۴ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری $n=-1$ ۸۶
- شکل ۲۷-۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری $n=-1$ ۸۷

فهرست جدول‌ها

- جدول ۳-۱ خواص مکانیکی مواد ورق FG..... ۵۸
- جدول ۳-۲ بیشینه تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری دوماحوری..... ۶۱
- جدول ۳-۳ بیشینه جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن (واحد $10^{-4}m$)..... ۶۲
- جدول ۴-۱ افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی به فشار داخلی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری... ۷۲
- جدول ۴-۲ افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی به فشار داخلی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری.. ۷۴
- جدول ۴-۳ افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی به فشار داخلی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری... ۷۸
- جدول ۴-۴ تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به فشار داخلی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری ... ۸۱
- جدول ۴-۵ تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به فشار داخلی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری... ۸۴
- جدول ۴-۶ تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به فشار داخلی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری... ۸۵
- جدول ۴-۷ جدول مقایسه نتایج دو تابع در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری $n = 2$ ۸۷
- جدول ۴-۸ جدول مقایسه نتایج دو تابع در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری $n = -2$ ۸۸
- جدول ۴-۹ جدول مقایسه نتایج دو تابع در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری $n = 2$ ۸۸
- جدول ۴-۱۰ جدول مقایسه نتایج دو تابع در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری $n = -2$ ۸۹

فهرست علائم

تنش شعاعی	σ_ρ
تنش محیطی	σ_θ
تنش برشی در صفحه‌ی $\rho\theta$	$\tau_{\rho\theta}$
تابع تنش ایری	$U(x, y)$
تابع تنش	$\psi(\rho, \theta)$
نسبت پواسون	ν
ضریب ثابت وابسته به جنس ماده	K
مدول الاستیسیته	E
تعداد لایه‌های ورق	N
زاویه‌ی نقاط نسبت به محور 1	θ
فاصله‌ی نقاط از مبدأ	r
تابع توصیف ناهمگنی اول	g
تابع توصیف ناهمگنی دوم	h
ضریب مشخص کننده نوع بارگذاری	m
تابع کومر	$M(a, b, x)$
ثابت اختیاری	q
ثابت اختیاری	A_n
تابع تنش متناظر با $q = 2$	f_1
تابع تنش متناظر با $q = -2$	f_2
تابع تنش متناظر با $q = 0$	f_3
ضریب بدون بعد شعاع	ρ
قطر گشودگی	D
طول ورق	L
ضریب همگرایی	ν
نسبت مدول الاستیسیته‌ی لایه‌ی داخلی به خارجی	k
مدول الاستیسیته‌ی لایه‌ی داخلی	E_i
مدول الاستیسیته‌ی لایه‌ی خارجی	E_o
شعاع گشودگی	ρ_o
خاصیت مکانیکی ماده در لایه‌ی داخلی	P_i
تنش فن میزس	σ_{Von}
تنش نرمال وارد بر مرز خارجی در جهت محور ۱	σ_1

تنش نرمال وارد بر مرز خارجی در جهت محور ۲	σ_2
نسبت σ به σ_0	n

فصل ۱ تاریخچه علمی

۱-۱ پیش‌گفتار

در این فصل ابتدا تعریفی از ورق و انواع تقسیم‌بندی آن بیان می‌شود. سپس تاریخچه‌ی مواد مرکب و ورق‌های FG و روابط حاکم بر آنها و انواع تئوری تحلیل ورق‌ها ارائه می‌شود. همچنین بر تحقیقات انجام شده در زمینه‌ی تحلیل تنش در ورق‌های نازک همگن و ناهمگن، مرور خواهد شد. در نهایت موضوع مورد مطالعه در این پایان‌نامه و موضوعات هر فصل به صورت خلاصه بیان می‌شوند.

۲-۱ مقدمه‌ای بر ورق‌ها

ورق‌ها اجزای سازه‌ای مسطح دوبعدی هستند که در آن‌ها بعد ضخامت نسبت به سایر ابعاد، بسیار کوچک‌تر است. ورق را می‌توان مدل سازه‌ای تعمیم یافته دوبعدی تیر دانست. این رفتار دوبعدی منجر به افزایش ظرفیت باربری ورق‌ها می‌گردد. از این رو امروزه ورق‌ها کاربرد گسترده‌ای در صنایع گوناگون یافته‌اند. ورق‌ها را علاوه بر اجزای ساختمان‌ها، در بدنه خودروها، کشتی‌ها، هواپیماها و سفینه‌های فضایی نیز می‌توان یافت. یکی از روش‌های تحلیل مسائل ورق و درک عملکرد این قبیل سازه‌ها استفاده از تئوری الاستیسیته است. در چارچوب تئوری مذکور، معادلات حاکم بر رفتار مکانیکی ورق به طور دقیق قابل بیان است هر چند حل صریح سه بعدی و ارائه شکل بسته پاسخ‌ها امکان‌پذیر نیست؛ از این رو با به کارگیری مجموعه‌ای از فرضیات ساده‌کننده، مدل‌سازی سه‌بعدی ورق به مدل دوبعدی ساده‌تر و خلاصه‌تر اما کاربردی‌تر تبدیل می‌گردد که دسته مجزایی از مسائل مکانیک جامدات به نام تئوری ورق‌ها را تشکیل می‌دهند. برای این منظور اثر بعد ضخامت ورق به صورت کلی در محدوده دو سطح بالایی و پایینی آن برآورد گشته و به شکل ضمنی در معادلات تعادل مربوط، منظور می‌گردد. [۱]

۳-۱ تقسیم‌بندی ورق‌ها

یکی از رایج‌ترین گونه‌های تقسیم‌بندی ورق‌ها، دسته بندی براساس ضخامت است. با صرف نظر از ورق‌های بسیار نازک که عملکرد غالب در آن‌ها به صورت غشایی است؛ ورق‌ها را از نظر هندسی می‌توان به سه دیدگاه دسته‌بندی کرد [۲]

۱. ورق‌های نازک با خیز کم: به ورق‌هایی گفته می‌شود، که نسبت ضخامت به کوچک‌ترین

ضلع کمتر از $\frac{1}{20}$ باشد و لایه میانی بدون کرنش باقی بماند. همچنین خیز ورق در برابر

ضخامت ورق قابل صرف‌نظر کردن، باشد.

۲. ورق نازک با خیز زیاد: به ورق‌هایی گفته می‌شود، که نسبت ضخامت به کوچک‌ترین ضلع

آن کمتر از $\frac{1}{20}$ باشد و از کرنش لایه میانی و همچنین نسبت خیز لایه میانی به ضخامت

ورق در مقایسه با یک، قابل توجه است.

۳. ورق ضخیم: به ورق‌هایی گفته می‌شود، که نسبت ضخامت به کوچک‌ترین ضلع بیشتر از

$\frac{1}{20}$ باشد.

نوع دیگر از تقسیم بندی ورق‌ها را براساس ساختار تشکیل‌دهنده‌ی آن می‌توان تصور نمود. این دسته بندی خود از دو دیدگاه متفاوت قابل بررسی است؛ یکی از لحاظ همگنی و ناهمگنی^۱ اجزای تشکیل‌دهنده و دیگری از جنبه تغییر رفتار مکانیکی ورق در راستاهای مختلف. در دسته‌ی نخست، یکنواختی پراکندگی و توزیع ذرات سازنده، مورد توجه بوده و در دسته دوم، حساسیت ورق به هندسه مسأله و دستگاه مختصات مکانی مطرح است. در آخر مواد ایزوتروپیک (همسانگرد)، ایزوتروپیک عرضی^۲،

1-Homogeneity and heterogeneity

2-Transversely isotropic

اورتوتروپیک و غیرایزوتروپیک (ناهمسانگرد) تعریف می گردند. ماده ایزوتروپیک در تمام راستاها از خود رفتار مکانیکی یکسان بروز می دهد حال آن که در ماده ایزوتروپیک عرضی، رفتار ایزوتروپیک فقط در صفحه ی تقارن عرضی ورق دیده می شود و در اورتوتروپیک سه صفحه ی تقارن مادی وجود دارد. از ترکیب این دو دیدگاه می توان ورق ها را به چهار دسته تقسیم کرد:

۱. ورق همگن و همسانگرد: خواص مکانیکی ماده ی ورق، در تمام نقاط و در تمام جهت ها یکسان می باشد.

۲. ورق همگن و ناهمسانگرد: خواص مکانیکی ماده ی ورق، در نقاط مختلف یکسان است؛ ولی در هر نقطه از ماده در جهت های مختلف یکسان نیست.

۳. ورق ناهمگن و همسانگرد: خواص مکانیکی ماده ی ورق، در نقاط مختلف یکسان نیست؛ ولی در هر نقطه، در جهت های مختلف یکسان است.

۴. ورق ناهمگن و ناهمسانگرد: خواص مکانیکی ماده ی ورق، در نقاط مختلف و در جهت های مختلف یکسان نیست [۳].

۴-۱ روش های تحلیل ورق ها

روش های تحلیل ورق ها نیز متنوع است؛ با مدنظر قرار دادن روابط تنش- کرنش و برحسب نیاز می توان تحلیل های الاستیک یا غیرالاستیک، خطی یا غیرخطی و نیز تغییر شکل های کوچک و بزرگ را مورد استفاده قرار داد. در تحلیل الاستیک، تنش ها از تنش تسلیم ماده ی سازنده ی ورق فراتر نمی رود و در تحلیل خطی، تنش بر حسب تابعی خطی از کرنش، قابل بیان است. تاکنون روش های متفاوتی برای تحلیل ورق ها ارائه شده است. این روش ها شامل تحلیل سه بعدی رفتار ورق با تئوری الاستیسیته و تحلیل رفتار ورق با انواع تئوری های دوبعدی می شوند. روش تحلیل رفتار ورق با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی اگر چه روشی پایه ای و دقیق محسوب می شود، اما به دلیل تحلیل سه بعدی ورق

با پیچیدگی‌ها و دشواری‌هایی همراه است. ساده‌ترین تئوری در تحلیل ورق‌ها، تئوری کلاسیک ورق^۱ (CPT) است. این تئوری که بر پایه فرضیات کیرشهف استوار است، اثر تغییر شکل برشی و تنش عمودی را در راستای ضخامت در نظر نمی‌گیرد. در این تئوری فرض می‌شود که هر مقطع مسطح و عمود بر صفحه میانی ورق، پس از تغییر شکل نیز مسطح و عمود بر صفحه‌ی میانی باقی می‌ماند. اگر چه تئوری کلاسیک ورق گزینه‌ای مناسب در تحلیل ورق‌های نازک با نسبت ضخامت به طولی در حدود ۰/۰۵ است، اما به دلیل صرف‌نظر کردن از کرنش‌های برشی و عمودی در راستای ضخامت، استفاده از این تئوری در تحلیل ورق‌های ضخیم همواره با خطا همراه است. به منظور کاهش خطا در تحلیل ورق‌های نسبتاً ضخیم، تئوری دیگری موسوم به تئوری تغییر شکل برشی^۲ (SDT) معرفی شده است. در این تئوری، اثر تغییر شکل برشی در راستای ضخامت در نظر گرفته می‌شود. با توجه به تعداد جملات نگاه داشته شده در بسط میدان جابه‌جایی در راستای ضخامت، مرتبه‌ی تئوری مشخص می‌شود. در تئوری برشی مرتبه اول^۳ (FSDT) که به تئوری میندیلین - رایسنر معروف است، فرض می‌شود که هر صفحه مسطح و عمود بر صفحه میانی ورق، پس از تغییر شکل مسطح و نه الزاماً عمود، باقی می‌ماند. مرتبه‌های بالاتر این تئوری نیز برای ورق‌های نسبتاً ضخیم و ضخیم مورد استفاده قرار می‌گیرند. رایج-ترین تئوری مرتبه بالاتر برشی، تئوری برشی مرتبه سوم^۴ (TSDT) است که توسط ردی مطرح شده است. گر چه تئوری‌های برشی ورق در تحلیل ورق‌های ضخیم نتایج خوبی از خود به جای گذاشته‌اند، اما به دلیل در نظر نگرفتن اثر کرنش‌های عمودی، هنوز با جواب‌های دقیق فاصله دارند. برای رفع این مشکل و بالا بردن حداکثری دقت، تئوری جدیدی به نام تئوری تغییر شکل برشی و عمودی توسط

1-Classical plate theory

2-Shear deformation theory

3-First-order shear deformation theory

4-Third-order shear deformation theory

باترا^۱ و ویدولی^۲ معرفی شده است. [۴] این تئوری، کامل کننده تئوری‌های قبل بوده و هر دو اثر تغییر شکل برشی و عمودی را در راستای ضخامت در نظر می‌گیرد. در اینجا به تقسیم‌بندی انواع تئوری‌ها و فرض‌هایی که برای ساده‌سازی استفاده شده است، پرداخته می‌شود.

۱-۴-۱ تئوری کلاسیک خیز کوچک ورق نازک^۳

در این تئوری برای ساده‌سازی، از فرض‌های پایه‌ای زیر جهت به‌دست آوردن معادلات حاکم بر ورق استفاده می‌شود.

۱. جنس ورق همگن و همسانگرد است و مدول الاستیسیته آن از قانون هوک پیروی می‌کند.
۲. ورق در حالت اولیه صاف است.
۳. صفحه‌ی میانی ورق در هنگام خمش بدون کرنش باقی می‌ماند.
۴. ضخامت در کل ورق ثابت و نسبت به دو بعد دیگر کوچک است؛ بدین معنا که بزرگی ابعاد ورق بیش از ۲۰ برابر ضخامت آن است.
۵. تغییر شکل ورق در جهت ضخامت (خیز ورق) در برابر ضخامت آن کوچک است. به طوری که بزرگ‌ترین مقدار خیز برابر $\frac{1}{20}$ ضخامت است. در این صورت در محدوده‌ی تئوری تغییر شکل کوچک شمرده می‌شود.
۶. شیب خیز در صفحه‌ی میانی، در مقایسه با یک کوچک است.

1- Batra

2-Vidoli

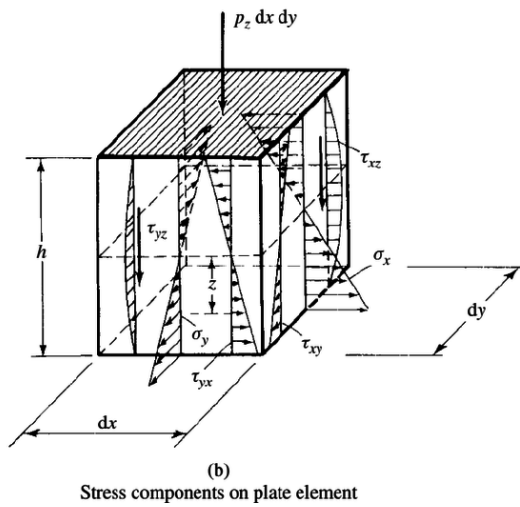
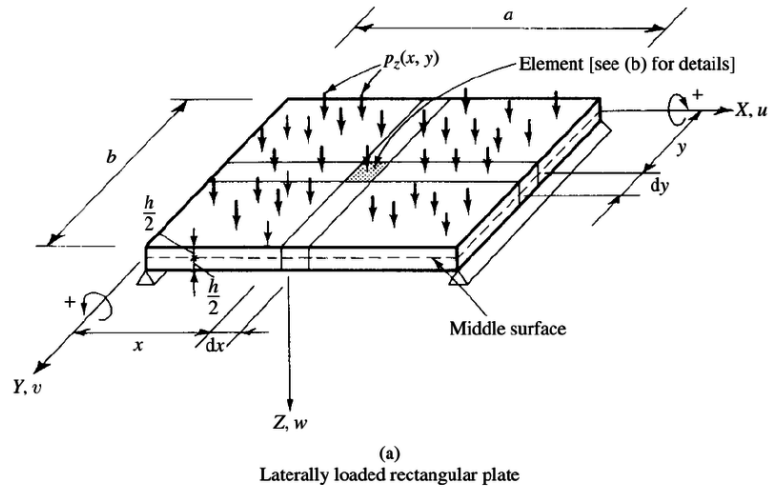
3-Classical theory of thin plates with small-deformation

۷. صفحه‌ی عمود بر صفحه‌ی میانی، قبل و بعد از تغییر شکل صفحه‌ی میانی، همچنان صاف و عمود بر صفحه‌ی میانی باقی می‌ماند. این شرط بدین معناست که مؤلفه‌های کرنشی γ_{xz} γ_{yz} قابل صرف‌نظر کردن هستند. در نتیجه خیز ورق به‌طور عمده با کرنش‌های خمشی همراه است. کرنش عمودی ϵ_z نیز قابل صرف‌نظر کردن است.

۸. از تنش نرمال در جهت ضخامت می‌توان صرف‌نظر کرد.

اگر ورق‌ی تحت بار عمود بر سطح قرار گیرد، اگرچه در عمل با یک مسأله‌ی سه‌بعدی روبه‌رو هستیم؛ ولی با استفاده از فرض‌های بالا، این مسأله به یک مسأله‌ی دوبعدی تبدیل می‌شود. بسیاری از آزمایش‌ها و تست‌های انجام شده توسط محققین در گذشته بر روی نمونه‌های کوچک و بزرگ از ورق نازک، درستی فرض‌های فوق را اثبات می‌کند. در شکل ۱-۲ یک المان مستطیلی از ورق نازک در دستگاه مختصات کارتزین نشان داده شده است.

برای یک ورق مربعی استفاده از دستگاه مختصات کارتزین مناسب است (شکل ۱-۱).



شکل ۱-۱ شماتیک یک ورق نازک مستطیلی در مختصات کارتزین [۳]

نیروهای داخلی و خارجی، تنش‌ها و جابه‌جایی‌های u ، v و w در حالتی که هم جهت با محورهای اصلی دستگاه مختصات باشند، به صورت مثبت فرض می‌شوند. در این تئوری اثبات می‌شود، که معادله‌ی حاکم بر خیز ورق با رابطه‌ی (۱-۱) بیان می‌شود [۳].

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P_z(x, y)}{D} \quad (1-1)$$

که در آن P_z بارگسترده بر واحد سطح ورق در جهت محور z است (شکل ۱-۲). w خیز ورق و D صلبیت خمشی است که در تیرها برابر EI می‌باشد.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2-1)$$

در اینجا E مدول الاستیسیته^۱، ν نسبت پواسون^۲ و h ضخامت ورق است.

همچنین با استفاده از عملگر دوبعدی لاپلاسین

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} \quad (3-1)$$

می‌توان معادله‌ی (۱-۱) را به صورت زیر نوشت.

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = P_z(x,y) \quad (4-1)$$

۱-۴-۲ تئوری غشایی ورق‌ها

پوسته‌ها ورق‌هایی بسیار نازک هستند، که نسبت ابعادی ضخامت به طول آنها کمتر از $\frac{1}{50}$ است. تئوری غشایی مورد بحث در ورق‌ها براساس تغییر شکل کوچک لایه‌ی میانی است. به هر حال در بسیاری از مواقع پوسته‌ها تغییر شکل‌هایی به مراتب بزرگتر از ضخامتشان دارند. این یک موضوع بسیار مهم در تحلیل و طراحی پوسته‌ها است. [۳]

1- Elasticity modulus
2- Poisson's ratio

الف - تئوری‌های ورق‌های ضخیم

اگرچه تئوری کلاسیک ورق برای مسائل مربوط به ورق نازک پاسخ صحیح می‌دهد؛ ولی با افزایش ضخامت ورق از دقت پاسخ آن کاسته می‌شود. حل دقیق سه‌بعدی بعضی از مسائل ورق نشان می‌دهد؛ که این مقدار خطا با مرتبه‌ی دوم ضخامت ورق نسبت مستقیم دارد. پس به دلیل محدودیت‌های عمومی تئوری کلاسیک برای ورق‌های نازک می‌بایست، بسط‌ها و بازنویسی‌های لازم در تئوری‌های ورق‌های ضخیم انجام شود؛ تا در این دسته مسائل، نتایج بهتری به دست آید. [۲]

ب - تئوری رایسنر^۱

در تئوری رایسنر علاوه بر اثر تنش‌ها و کرنش‌های عرضی اثر تنش در جهت ضخامت نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این تئوری توزیع تنش‌های τ_{xy} ، σ_x و σ_y مشابه تئوری کلاسیک ورق‌ها به صورت خطی فرض شد؛ ولی تنش‌های τ_{xz} و τ_{yz} به کمک معادلات تعادل به صورت تابع درجه دو و تنش σ_z با به دست آمدن تنش‌های برشی τ_{xz} و τ_{yz} از معادلات دیفرانسیل تعادل، حاصل می‌شوند. [۳]

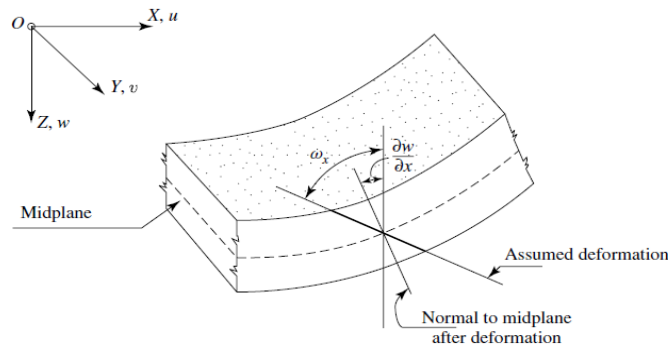
ج - تئوری میندلین^۲

بیشتر مسائل، که در حل آنها از تئورهای مبتنی بر جابه‌جایی در ورق‌های ضخیم استفاده می‌شوند؛ توسط میندلین گسترش یافتند. مبنای اصلی آن، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول است، که از فرضیات سینماتیک برای جابه‌جایی درون صفحه‌ای استفاده می‌کند.

$$u = u_0(x, y) - z\psi_x(x, y), \quad v = v_0(x, y) - z\psi_y(x, y) \quad (5-1)$$

1- Reissner
2- Mindlin

که در آن $\psi_x(x, y)$ و $\psi_y(x, y)$ نشان دهنده‌ی چرخش صفحه‌ی میانی هستند. به دلیل مستقل بودن خیز نسبت به z ، هیچ تغییر ضخامتی در ورق رخ نمی‌دهد. فرض‌های اعمالی نشان داده شده در شکل ۲-۱، در سطح مقطع ورق، در تئوری میندلین و رایسنر یکسان است.



شکل ۲-۱ فرض‌های لایه میانی تئوری رایسنر [۳]

در این تئوری $\omega_x = \psi_x$ و $\omega_y = \psi_y$ است. از آنجاکه توزیع تنش در ورق ضخیم به صورت تابع درجه‌ی دو است [۳]، فرض خطی بودن تنش‌ها که از تئوری رایسنر گرفته شده است، نادرست می‌باشد. علاوه بر این مقدار تنش در لبه‌ی بالایی و پایینی ورق با وجود این فرض صفر نمی‌شود. بنابراین لازم است، تا ضریب تصحیح K که با مقایسه حل دقیق الاستیسیته ارزیابی می‌شود، معرفی گردد. به عنوان مثال، با توجه به روش اولیه تیموشنکو، که در لایه‌ی میانی تیرهای ضخیم مورد استفاده قرار می‌گیرد، مقدار $K = \frac{5}{6}$ انتخاب شد. [۳] با کمک روابط تئوری مینیم انرژی پتانسیل و محاسبه‌ی معادلات دیفرانسیل تعادل مقادیر منتجه‌های گشتاور در تئوری ورق میندلین به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$M_x = D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \quad (۶-۱)$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \quad (۷-۱)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \quad (۸-۱)$$

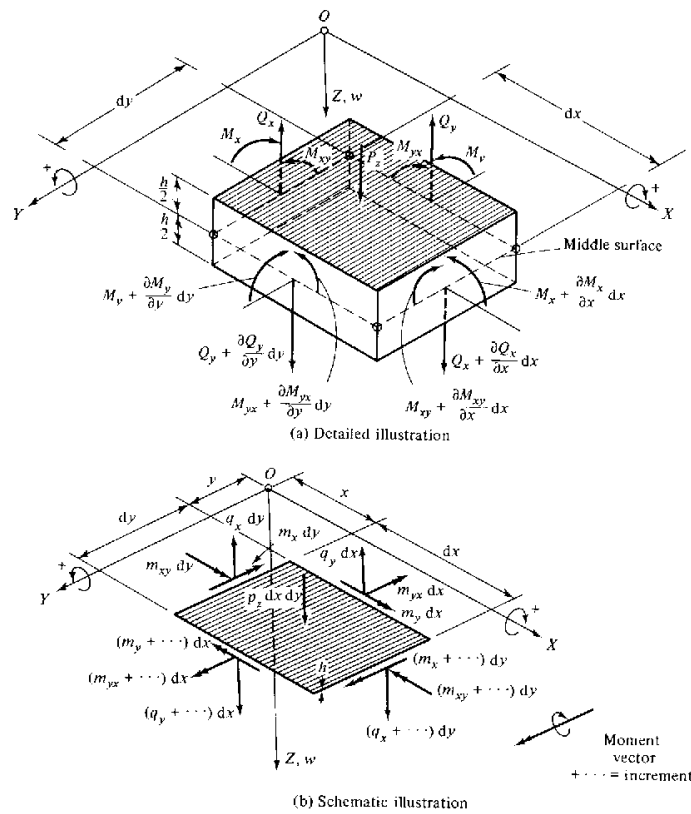
$$Q_x = KGh \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (۹-۱)$$

$$Q_y = KGh \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (10-1)$$

در روابط (۶-۱) تا (۱۰-۱)، D از رابطه‌ی (۲-۱) به دست می‌آید. M_x ، M_y به ترتیب منتهی

گشتاور در جهت y و x ، M_{xy} منتهی پیچشی گشتاور و Q_x و Q_y به ترتیب نیروی درونی برش

عرضی در جهت‌های x و y هستند (شکل ۳-۱). [۳]



شکل ۳-۱ نیروهای داخلی و خارجی در المانی از لایه میانی [۳]

۵-۱ تاریخچه و ضرورت ورق‌های FGM

۵-۱-۱ تاریخچه مواد ناهمگن

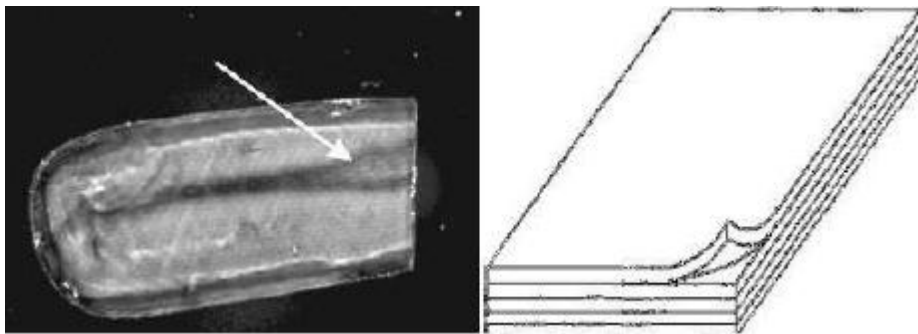
مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوافضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند. بنابراین دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند؛ که از موادی جدید با خواص برتر استفاده کنند.

ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها) در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهم‌ساز در دیدگاه ماکروسکوپی به‌وجود می‌آیند، که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری توأم مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، اما از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد محسوب می‌شوند. دو بخش اصلی مواد کامپوزیت، عبارت از ماتریس (زمینه) و فیبر (رشته) است. نقش باربری عمدتاً بر عهده فاز فیبر بوده و ماتریس با احاطه الیاف، آن‌ها را کنار هم و در جای خود نگه می‌دارد. به عنوان مثال بتن آرمه که امروزه یکی از پرکاربردترین مصالح ساختمانی است ماده کامپوزیتی متشکل از سیمان، سنگدانه‌ها و میلگردها است. به طور کلی می‌توان مواد کامپوزیت را به سه دسته با زمینه‌های فلزی، سرامیکی و پلیمری تفکیک نمود که کامپوزیت‌های زمینه پلیمری متداول‌ترین نوع آن‌ها به حساب می‌آید.

مواد کامپوزیت لایه‌ای^۱، گونه‌ای ناهمگن و غیرایزوتروپیک از این نوع کامپوزیت‌ها به شمار می‌روند که با وزن کم دارای مقاومت بالایی هستند. در این گونه مواد با انتخاب چیدمان مناسب لایه‌ها و نیز

1- Composite laminates

تنظیم زاویه قرارگیری الیاف در هر لایه می‌توان به ترکیبی مناسب از خواص مکانیکی مورد نیاز دست یافت. ویژگی‌های مطلوب ذکر شده، باعث شده تا این‌گونه مواد، دهه‌ها مورد توجه مهندسان به‌ویژه متخصصان صنایع هواپیماسازی قرار گیرد. اما در کنار همه این ویژگی‌های مناسب، یک ضعف اساسی و مهم، پیوسته ذهن کارشناسان را به خود مشغول می‌داشت. در مواد کامپوزیتی لایه‌ای در فصل مشترک لایه‌های مجاور به علت تغییر ناگهانی خواص مکانیکی تمرکز تنش و در پی آن جدایش لایه‌ها اتفاق می‌افتد. این پدیده را تورق^۱ می‌نامند و چنانچه در یک سازه مورد توجه و اصلاح قرار نگیرد؛ با توسعه در سطح مشترک لایه‌ها موجب فروپاشی کلی سازه می‌شود.



شکل ۴-۱ پدیده تورق در کامپوزیت‌های لایه‌ای

۱-۶ انواع فرآیندهای ساخت مواد FG

با تنظیم تغییرات ریزساختار ورق FG به صورت مقتضی، توزیع بهینه تنش، تغییر شکل و دما مشخص می‌شود. این مسأله می‌تواند به خوبی مورد استفاده قرار گیرد تا مقاومت خستگی^۲ حرارتی و همچنین دوام عایق حرارتی سرامیکی، بهبود بخشیده شود.

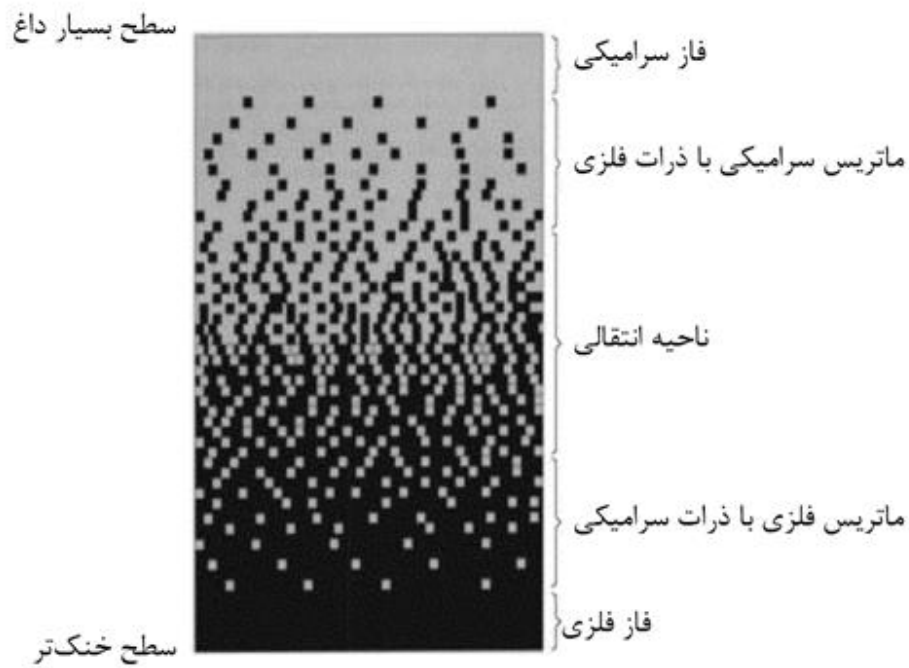
1-Delamination

2- Fatigue

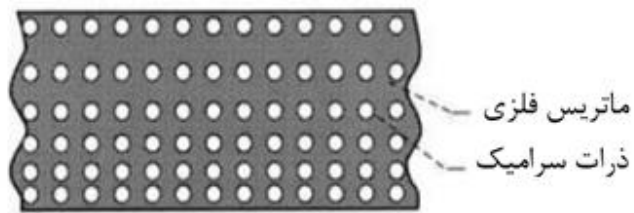
هر چند به لطف فرآیندهای پیچیده ساخت مواد FG، تغییرات اجزای تشکیل دهنده این مواد را می توان در هر راستا و جهتی ایجاد نمود اما تغییرات مذکور در ورق های FG غالباً فقط در راستای ضخامت، اعمال می شود در نتیجه ورقی همگن در سطح و ناهمگن ضخامت، حاصل می گردد. [۱]



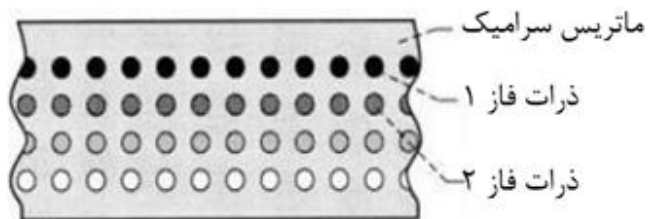
شکل ۱-۵ ورق FG با تغییر تدریجی مواد تشکیل دهنده فقط در راستای ضخامت



ریزساختار با تغییرات پیوسته



ریزساختار با تغییرات گسسته



ریزساختار با تغییرات چندفازی

شکل ۱-۶ انواع ریزساختار ماده FG [۱]

۷-۱ روابط حاکم بر مواد FG

مواد هدفمند، موادی با ریز ساختار ناهمگن می‌باشند که خواص مکانیکی و حرارتی آنها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. معمولاً این مواد از دو ماده ساختاری سرامیک و فلز ساخته می‌شوند ماده ساختاری سرامیک به علت ضریب انتقال حرارت کم و مقاومت زیاد در مقابل درجه حرارت، دماهای بسیار بالا را تحمل کرده و ماده ساختاری فلز، انعطاف‌پذیری لازم را فراهم می‌کند. مدلی که به طور رایج در تحلیل مواد هدفمند استفاده می‌شود، بر پایه کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده بوده و به قانون توانی ماده هدفمند معروف است. در این مدل، تغییرات خواص در راستای ضخامت به صورت رابطه (۱۱-۱) در نظر گرفته می‌شود: [۶]

$$\Gamma(Z) = \Gamma_M + (\Gamma_C - \Gamma_M) \left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2h} \right)^N \quad (11-1)$$

که در این رابطه، Γ بیانگر خواص فیزیکی یا مکانیکی جسم مانند چگالی، ضریب انبساط حرارتی، مدول الاستیسیته، مدول برشی و غیره است. زیرنویس‌های M و C به ترتیب معرف فلز و سرامیک بوده و پارامتر N نشان‌دهنده‌ی توان ماده هدفمند است. با توجه به ناچیز بودن تغییرات ضریب پواسون، این کمیت به صورت ثابت در راستای ضخامت ورق در نظر گرفته می‌شود. [۶] با توجه به ماهیت همسانگرد بودن مواد FG، روابط تنش-کرنش موسوم به روابط متشکل از دو ثابت مستقل بیان می‌شوند. روابط تنش-کرنش را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (12-1)$$

که λ و μ ضرایب لامه نامیده می‌شوند. این ضرایب که معرف خواص مکانیکی مواد هستند، برای مواد هدفمند ثابت نبوده و در راستای ضخامت ورق تغییر می‌کنند. این تغییرات را می‌توان در قالب قانونی توانی بیان نمود. ε_{kk} مجموع درایه‌های روی قطر تانسور اصلی کرنش بوده و برای تغییر شکل‌های کوچک معرف تغییر حجم نسبی است.

۸-۱ پیشینه‌ی تحقیق

ورق‌ها به‌دلیل کاربرد وسیع در صنایع مختلف از اهمیت بسیاری برخوردار هستند. تنوع کاربرد، بسته به نیاز، وجود انواع شیارها و گشودگی‌ها با ابعاد و اشکال مختلف را در ورق‌ها می‌طلبد. از جمله این موارد، می‌توان به گشودگی درها و پنجره‌ها در بدنه‌ی هواپیماها و زیردریایی‌ها، محل اتصال فشارسنج‌ها و دماسنج‌ها در بدنه‌ی کوره‌ها، محل اتصال دو ورق به همدیگر توسط پیچ‌ها و پرچ‌ها، وجود سوراخ‌هایی در پره‌های توربین‌ها جهت جریان یافتن سیال خنک‌کننده در آنها و... را اشاره کرد. وجود گشودگی‌ها در جسم، باعث به‌وجود آمدن تمرکز تنش در اطراف گشودگی می‌شود. با کمک طراحی صحیح جنس و هندسه قطعه می‌توان مقدار تمرکز تنش را کاهش داد، که دستیابی به طراحی بهینه و توانایی مقابله با شکست‌های مکانیکی نیازمند دانستن اطلاعات دقیق در مورد نحوه‌ی توزیع تنش در اطراف گشودگی است. از این‌رو بررسی و محاسبه‌ی مقدار و نحوه‌ی توزیع تنش در اطراف گشودگی‌ها، برای طراحی و بهینه‌سازی ورق بسیار مهم است.

در مورد بررسی تنش صفحات همسانگرد و ناهمسانگرد دارای گشودگی از روش‌های گوناگون اعم از تجربی، عددی و تحلیلی استفاده شده است. به‌کارگیری روش متغیر مختلط در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته دوبعدی، اولین بار توسط موشخلی‌شویلی [۷] برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه شد. کاربردهایی از روش ارائه شده توسط وی در مطالعات ساوین [۸] بر روی ورق‌های همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف و تحت کشش دیده می‌شود. همچنین ساوین برای ورق‌های ناهمسانگرد با گشودگی بیضوی و دایروی، مطالعاتی را انجام داد. [۸] توسعه کامل روش موشخلی‌شویلی به مسائل

الاستیسیته دویعدی مواد ناهمسانگرد توسط اشلبای^۱ [۹]، اشترو^۲ [۱۰] و لخنیتسکی^۳ [۱۱] انجام شد. هگپیت^۴ [۱۲] در سال ۱۹۶۱، جزء اولین کسانی بود که به بررسی تمرکز تنش در اطراف الیاف مجاور یک ترک قائم در یک تک‌لایه با طول و عرض بی‌نهایت پرداخت. او تحقیق خود را بر روی مواد مرکبی که نسبت سفتی ماتریس به سفتی الیاف آن پایین است؛ متمرکز کرد. زندر^۵ و دیتون^۶ [۱۳] در سال ۱۹۶۳، درستی آنالیز هگپیت را با آزمایش‌هایی بر روی مواد مرکب نشان دادند. تان^۷ [۱۴] مطالعات متعددی بر روی محاسبه ضریب تمرکز تنش در صفحات ارتوتروپیک انجام داد. تان با اطلاعات مربوط به تمرکز تنش صفحات کامپوزیتی نامحدود حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل و با معرفی ضرایب تصحیح مناسب، تمرکز تنش صفحات حاوی این گشودگی‌ها را با عرض محدود به دست آورد. هافنباخ^۸ و همکارانش [۱۵] تمرکز تنش بر روی صفحات چندلایه ضخیم کامپوزیتی تحت تنش برشی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند. یکی از کاربردهای عمده تمرکز تنش در اتصالات ورق‌های مختلف به یکدیگر می‌باشد؛ در اتصالات ورق‌ها به وسیله پیچ‌ها و پین‌ها، غالباً از طرف پیچ یا پین نیرویی به مرکز گشودگی وارد می‌شود. تحلیل این‌گونه مسائل با استفاده از توابع پتانسیل مختلط در تحقیقات متعددی انجام شده است [۱۶-۱۸]. در مورد ورق‌های محدود حاوی گشودگی تحقیقات کمی صورت گرفته است. در این زمینه، پین و همکارانش [۱۹] ورق محدود مربعی

1-Eshelby

2-Stroh

3-Lekhnitskii

4-Hedgepeth

5-Zender

6-Deaton

7-Tan

8- Hafenbach

همگن و همسانگرد دارای گشودگی به شکل مربع در مرکز را مورد بررسی قرار دادند. آنها با استفاده از تابع نگاشت، ورق مذکور را به ورق مربعی با گشودگی دایروی تبدیل کردند و به کمک معادلات به دست آمده توسط موشخلی شولی، به حل این ورق پرداختند. ورق تحت بار کششی تک محوری قرار داشت. آنها معادلات لازم را از شرایط مرزی ورق با کمک روش حداقل مربعات خطا در نقاطی با تقسیم بندی منظم در مرز^۱، به دست آوردند.

از سال ۱۹۹۲ به بعد، حضور تحقیقات مختلف و سمینارها و کنفرانس‌هایی با محوریت این مواد ناهمگن هرساله بیشتر می‌شد. تحقیق بر روی این نوع از ورق‌ها در زمینه‌های مختلف صورت گرفته است. ژانگ و همکارانش [۲۰] به حلّ دقیق برای محاسبه‌ی تنش حرارتی در یک ورق نامحدود ناهمگن دارای گشودگی دایروی پرداختند. در تحقیق آنها، خواص مواد و دمای اعمالی در جهت شعاعی تغییر می‌کرد. در مقاله‌ای یانگ^۲ و همکارانش [۲۱] به تحلیل تنش دینامیکی یک ورق از جنس مواد ناهمگن با گشودگی دایروی پرداختند. آنها از روش متغیرهای مختلط، توزیع تنش دینامیکی ورق ناهمگن را که خواص ماده در جهت شعاعی تغییر می‌کرد؛ به دست آوردند. آنها دریافتند، که توزیع تنش دینامیکی اطراف گشودگی دایروی به‌طور چشمگیری به انتخاب تابع مناسب برای تغییر خواص مواد وابسته است. ردی [۲۲] خیز ورق را تحت بار مکانیکی به شیوه‌ی ناویر برای ورق مربعی با تکیه‌گاه ساده بررسی کرد. یانگ و همکارانش [۲۳] برای اولین بار حل نیمه‌تحلیلی را برای ورق‌ها با مواد تابعی تحت بار جانبی ارائه کردند.

در مورد تمرکز تنش در ورق‌های ناهمگن حاوی گشودگی، تحقیقات بسیار کمی صورت گرفته است. کوبایر و همکارانش [۲۴] با استفاده از فرمول بندی اجزای محدود ایزوپارامتریک، تأثیر ناهمگنی خواص مواد را بر روی ضریب تمرکز تنش در ورق‌های ناهمگن حاوی گشودگی دایروی بررسی کردند. ورق

1-Least square boundary collocation technique

2-Yang

مورد بحث آنها تحت کشش تک‌محوری بود. نتایج تحقیقات آنها نشان داد؛ وقتی که مدول یانگ با دور شدن از مرکز گشودگی افزایش می‌یابد؛ تمرکز تنش کاهش می‌یابد. در تحقیق مذکور تابع مورد استفاده برای نشان دادن تغییر خواص، تابعی توانی بود. کاو و همکارانش [۲۵] از روش اجزای محدود، ورق تابعی با هندسه‌های مختلف از قبیل ورق بیضوی، دایروی و چندضلعی دارای گشودگی‌هایی به شکل‌های گوناگون را مورد بررسی قرار دادند. حسینی [۲۶] به بررسی نحوه توزیع و گسترش ترک در ورق با مواد تابعی تحت بارگذاری حرارتی-مکانیکی پرداخت. وی از روش اجزای محدود توسعه‌یافته^۱ برای محاسبه و تحلیل شکست مواد تابعی ایزوتروپیک و اورتوتروپیک تحت بارگذاری مکانیکی و حالت دمایی پایدار استفاده کرد. با توجه به کاربرد مواد ناهمگن به‌عنوان موادی مقاوم در برابر تغییرات زیاد دما، تحلیل تنش حرارتی ورق‌های حاوی گشودگی مورد توجه محققان بوده است.

محمدی [۲۷] ضریب تمرکز تنش در اطراف گشودگی دایروی به روش تفکیک متغیرها در ورق نامحدود ناهمگن بدون در نظر گرفتن فشار داخلی در گشودگی را مورد مطالعه قرار داد. تغییر خواص مکانیکی ورق از قبیل مدول الاستیسیته و نسبت پواسون، در جهت شعاعی در نظر گرفته شد. وی حلی تحلیلی را برای محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش در ورقی تحت کشش یکنواخت دومیحوری و بارگذاری برشی خالص ارائه کرد. همچنین تأثیر تغییر خواص مکانیکی بر تمرکز تنش در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت و افزایش ضریب تمرکز تنش به‌ازای تغییرات نسبت پواسون را به‌دست آورد و نتایج به‌دست آمده را با حالتی که نسبت پواسون ثابت است، مقایسه کرد. چارون سوک^۲ و همکارانش [۲۸] با روش حجم کنترل المان محدود مرتبه بالا به بررسی آنالیز تنش گرمایی در مواد FG پرداخته است، در بخشی از مقاله خود به توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی در ورقی از جنس مواد ناهمگن و تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی پرداختند. یانگ و همکارانش [۲۹ و ۳۰] به بررسی تنش دوبعدی یک ورق ناهمگن محدود حاوی گشودگی دایروی و تحت بارگذاری یکنواخت، پرداختند. آنها از روش متغیر

1- Extended finite element method
2- Chareonsuk

مختلط و استفاده از تابع تنش ابری برای حل خود کمک گرفتند. نتایج برای شرایط مختلف بارگذاری، خواص مواد و اندازه‌های مختلف ورق ارائه شد. آنها نشان دادند، که تمرکز تنش در ورق محدود در مقایسه با ورق نامحدود در شرایط یکسان افزایش می‌یابد و با انتخاب صحیح تابع خواص ماده، از قبیل مدول الاستیک در مواد ناهمگن، می‌توان کاهش چشم‌گیری را در تمرکز تنش شاهد بود اشرفی و همکاران [۳۱]، پاسخ ورق ناهمگن با گشودگی دایروی را به بارگذاری دومحوری، در حالت سه‌بعدی از روش المان مرزی مدرج^۱ مورد مطالعه قرار دادند. خواص مکانیکی در جهت طولی و در امتداد ضخامت به صورت تابعی توانی تغییر می‌کرد. از نقاط قوت این مقاله بررسی اثر کوپلینگ خمش-کشش در نتیجه‌ی توزیع نامتقارن خواص مواد، تحت بارگذاری دومحوری بود. در این تحقیق، تأثیر فاصله گشودگی از مرز و نسبت بار، بر توزیع تنش مورد بررسی قرار گرفت. کاردناس گارسیا^۲ و همکارانش [۳۲] به محاسبه‌ی کرنش‌ها و تنش‌های محیطی و شعاعی و جابجایی شعاعی اطراف گشودگی دایروی برای ورق از جنس مواد ناهمگن و تحت بارگذاری حرارتی پرداختند. کوبایر [۳۳] ضریب تمرکز تنش در نتیجه حضور گشودگی دایروی در یک ورق ناهمگن تحت بار برشی خارج‌صفحه‌ای را مورد بررسی قرار داد. خواص مواد در جهت شعاعی و با فرض اینکه مبدأ در مرکز ورق قرار دارد، تغییر کرد. در این تحقیق، تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها برای ورق، با و بدون گشودگی به صورت تابعی تحلیلی به دست آورده شد. وی نتیجه گرفت، که وقتی مدول الاستیسیته با فاصله از مرکز گشودگی کاهش پیدا کند؛ وجود گشودگی دایروی باعث افزایش تمرکز تنش می‌شود. کاهش مؤثر تمرکز تنش در حالتی که مدول الاستیسیته با فاصله از مرکز گشودگی، افزایش پیدا می‌کند؛ نتیجه مفیدی در طراحی به حساب می‌آید.

1-Graded boundary element
2-Cardenas-Garcia

۹-۱ جمع‌بندی

در این فصل به صورت مختصر تئوری‌های مختلف در زمینه‌ی ورق‌ها مرور شد. با بیان تعریف و خصوصیات مواد FG و بررسی پیشینه‌ی تحقیقات علمی بر روی ورق‌های ناهمگن این نتیجه حاصل شد، که در زمینه‌ی تمرکز تنش ورق‌های ناهمگن حاوی گشودگی که در آن گشودگی فاقد بار است؛ تحقیقات بسیار کمی انجام شده است. در اتصالات ورق‌های مختلف از طریق پیچ و پرچ معمولاً گشودگی تحت فشار خارجی قرار می‌گیرد. تأثیر بار خارجی در مرز گشودگی بر تحلیل تنش ورق‌های ناهمگن با روش تفکیک متغیرها تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. در این تحقیق سعی می‌شود، نحوه توزیع تنش و جابه‌جایی در نقاط اطراف گشودگی دایروی، در یک ورق نازک و بلند همسانگرد و ناهمگن با گشودگی دایروی، تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای در مرزهای بیرونی و فشار یکنواخت در اطراف گشودگی، تحلیل شود. در این تحقیق از روش تفکیک متغیرها برای تحلیل استفاده می‌شود تأثیر نسبت بار و روند تغییرات خواص مکانیکی از دیگر پارامترهای مورد بررسی است و در آخر نتایج تحلیل با روش توابع پتانسیل مختلط مقایسه می‌شود.

۱۰-۱ ساختار پایان‌نامه

در فصل دوم، روابط و معادلات حاکم بر ورق استخراج می‌شوند. همچنین توزیع تنش در اطراف گشودگی در ورق همگن، تحت بار درون‌صفحه‌ای با استفاده از حل پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل سوم نتایج حاصل از تحلیل ورق ناهمگن تحت بار درون‌صفحه‌ای مطالعه خواهد شد. فصل چهارم برای ورق همگن و ناهمگن علاوه بر بارگذاری درون‌صفحه‌ای، تأثیر فشار در داخل گشودگی بر توزیع تنش در نقاط اطراف گشودگی بررسی می‌شود و نتایج مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در نهایت در فصل پنجم به نتیجه‌گیری و ارائه‌ی پیشنهادها برای تحقیقات آینده پرداخته می‌شود.

فصل ۲ ورق همگن با گشودگی دایروی تحت

بارگذاری درون صفحه‌ای

۱-۲ پیش‌گفتار

در بخش اول این فصل، معادلات حاکم بر ورق بلند همگن با استفاده از روش تفکیک متغیرها در تئوری الاستیسیته استخراج می‌گردند. سپس با توجه به شرایط مرزی ورق و با معادلات مربوط به شرایط مرزی ورق مشخص و تعیین می‌شوند.

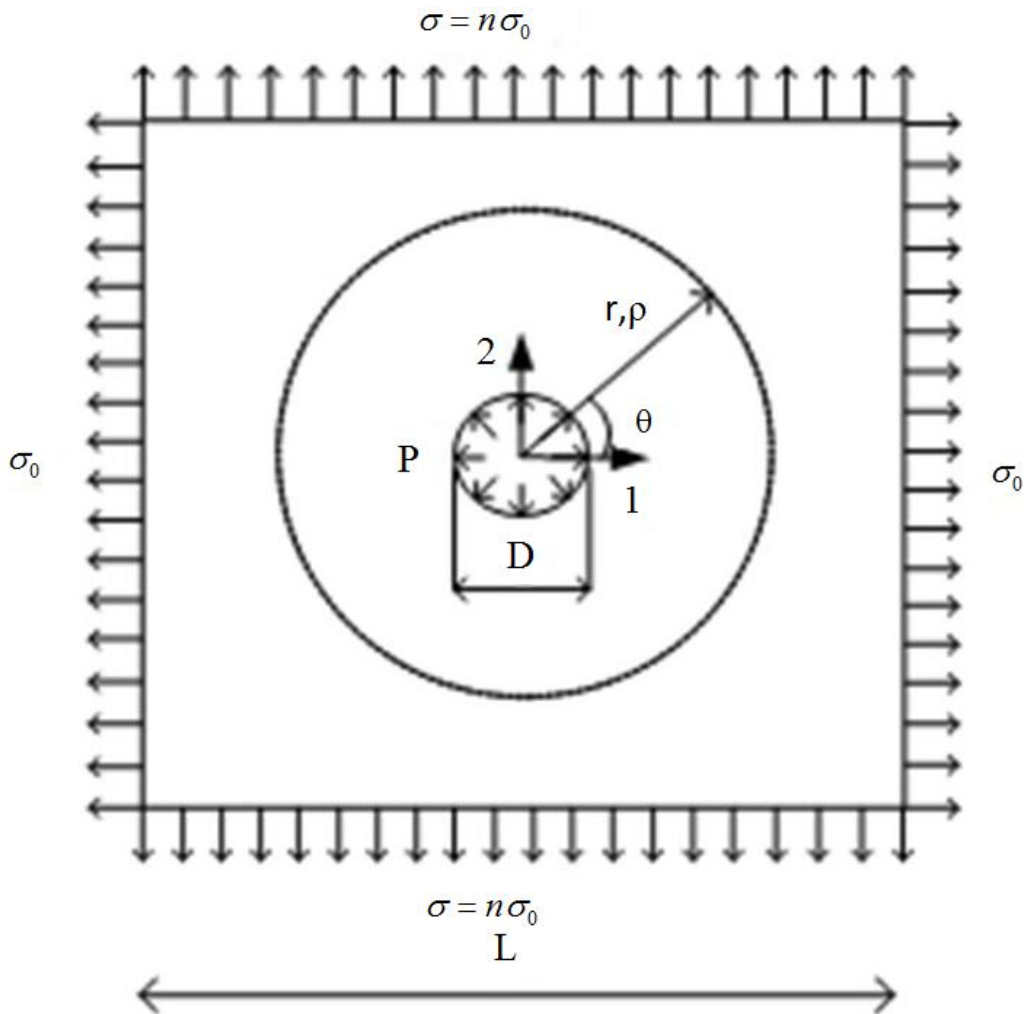
در بخش بعد، روند تحلیل عددی با کمک نرم‌افزار اجزای محدود انسیس^۱ بیان و با تعریف یک مسأله، نتایج حاصل از حل تحلیلی انجام شده و تحلیل عددی مربوط به مسأله با هم مقایسه و بررسی خواهند شد.

۲-۲ استخراج معادلات

مسأله بر پایه‌ی تئوری الاستیسیته یک ورق همسانگرد تحلیل و بررسی خواهد شد. ماتریس تنش در هر نقطه از ماده‌ی الاستیک در مسأله‌های دوبعدی همانند ورق نازک، تحت بار درون‌صفحه‌ای، دارای سه تنش σ_ρ ، σ_θ و $\tau_{\rho\theta}$ می‌باشد. که ρ شعاع بی‌بعد است و $\rho = \frac{r}{\rho_0}$ اینگونه تعریف شده که ρ_0 شعاع گشودگی است، در شکل ۱-۲ شماتیک کلی ورق نشان داده شده است. معادلات تعادل برای مسأله‌ی دوبعدی در مختصات قطبی با دو معادله زیر بیان می‌شود، که سه تنش بیان شده باید این دو معادله را ارضا کنند.

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0 \quad (2-2)$$



شکل ۱-۲ شماتیک کلی ورق با گشودگی دایروی

اگر تابع تنش را به صورت $\psi(\rho, \theta)$ فرض کرده، روابط زیر به وجود می‌آید: [۲۷]

$$\sigma_{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad (۳-۲)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \quad (۴-۲)$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \theta} \quad (۵-۲)$$

برای ماده در محدوده الاستیک خطی و در حالت تنش صفحه‌ای، قانون هوک به صورت زیر نوشته

می‌شود:

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{1}{E(\rho)} (\sigma_{\rho} - \nu \sigma_{\theta}) \quad (6-2)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E(\rho)} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_{\rho}) \quad (7-2)$$

$$\gamma_{\rho\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E(\rho)} \tau_{\rho\theta} \quad (8-2)$$

با ترکیب روابط بالا می‌توان کرنش‌ها را به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{1}{E(\rho)} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \nu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \right) \quad (9-2)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E(\rho)} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{\nu_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\nu_0}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (10-2)$$

$$\gamma_{\rho\theta} = \frac{2(1+\nu_0)}{E(\rho)} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial \theta} \right) \quad (11-2)$$

که $E(\rho)$ به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$E(\rho) = E_0 K(\rho) \quad (12-2)$$

۱-۲-۲ موقعیت مکانی $K(\rho)$

$K(\rho)$ به شکل زیر تعریف شده است:

$$K(\rho) = E_0 \left[1 + (k-1) \exp\left(\nu \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)\right) \right] \quad (13-2)$$

که $k = \frac{E_i}{E_0}$ نسبت مدول‌ها، ν ضریب میرایی برای کنترل دامنه ناحیه ناهمگنی در ورق، ρ شعاع

نقطه مورد بررسی و ρ_0 شعاع گشودگی دایروی هستند.

$$x = \ln(K(\rho)) \quad (14-2)$$

که x فاصله هر نقطه از مبدأ را نمایش می‌دهد. P_1 و P_2 دو جواب مستقل خطی P اند، که به شکل زیر مشخص می‌شوند [۲۷].

$$P_1(\rho) = \rho^{n_1} M(a_1, b_1, x), \quad (15-2)$$

$$P_2(\rho) = \rho^{n_2} M(a_2, b_2, x). \quad (16-2)$$

تابع $M(a, b, x)$ ، تابع کومر^۱ است و $n_1, n_2, a_1, a_2, b_1, b_2$ به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$n_1 = m + t, \quad n_2 = m - t, \quad (17-2)$$

$$a_1 = \frac{n_1 - \nu_0}{s}, \quad a_2 = \frac{n_2 - \nu_0}{s}, \quad (18-2)$$

$$b_1 = \frac{s + 2t}{s}, \quad b_2 = \frac{s - 2t}{s}. \quad (19-2)$$

که s نرخ کاهش سختی اطراف گشودگی نام دارد و ثابتی قابل تغییر است که باید به صورتی تعریف

شود که شکل تابع، منطقی باشد و مقداری منفی دارد [۲۷] و $t = \sqrt{1 - 2m\nu_0 + m^2}$ [۳۴].

رابطه سازگاری به شکل زیر است: [۳۵]

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial(\rho \varepsilon_\theta)}{\partial \rho} - \varepsilon_\rho \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \gamma_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{\gamma_{\rho\theta}}{\rho} \right) \quad (20-2)$$

با جاگذاری مقادیر کرنش‌ها در رابطه (۲۰-۲) رابطه زیر به وجود می‌آید:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \psi - \frac{K'}{K} \left\{ 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \rho^3} + \left(\frac{2 - \nu_0}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{3}{\rho^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^2 \partial \rho} \right\} \\ + \frac{2K'' - K''K}{K^2} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{\nu_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\nu_0}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (21-2)$$

معادله بای هارمونیک $\nabla^2 \nabla^2 \psi$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right). \quad (22-2)$$

تابع تنش $\psi(\rho, \theta)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\psi(\rho, \theta) = f(\rho) \cos(m\theta) \quad (23-2)$$

با جاگذاری تابع تنش ψ ، رابطه (۲۱-۲) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

1- Kummer function

$$\rho^4 f^{(iv)} + \rho^3 [2 - 2g] f''' + \rho^2 [g(v_0 - 2) + h - 1 - 2m^2] f'' + \rho [(g + 1)(1 + 2m^2) - hv_0] f' + [m^4 + m^2(hv_0 - 3g - 4)] f = 0, \quad (24-2)$$

که g و h توابع بدون بعدی هستند که برای ساده‌سازی روابط به کار می‌روند:

$$g = \frac{\rho K'}{K}, \quad (25-2)$$

$$h = g^2 + g - g' \rho. \quad (26-2)$$

۲-۲-۲ تابع تنش برای بارگذاری کشش دوماحوری: $m = 0$

در رابطه (۲۳-۲) تابع تنش به صورتی تعریف شده است که با جاگذاری $m = 0$ در زاویه $\theta = 0$ و

$\theta = 90$ مقدار تابع تنش برابر با $f(\rho)$ است و بارگذاری به صورت کشش دوماحوری درمی‌آید؛ ورق

تحت بارگذاری کشش دو محوری در شکل (۱-۲) نشان داده شده‌است؛ با جاگذاری $m = 0$ در رابطه

(۲۴-۲) روابط به شکل زیر کاهش می‌یابد:

$$\rho^4 f^{(iv)} + 2\rho^3 [1 - g] f''' + \rho^2 [g(v_0 - 2) + h - 1] f'' + \rho [g + 1 - hv_0] f' = 0, \quad (27-2)$$

با ساده‌سازی و روابط جبری ساده رابطه بالا به شکل زیر خواهد شد:

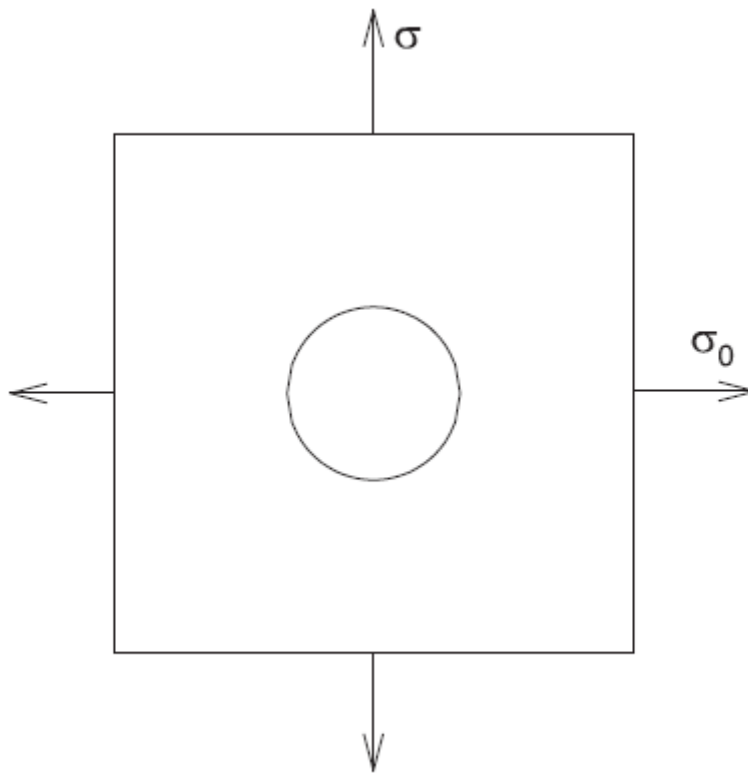
$$\left[\frac{\rho}{K} \left\{ f''' + \left(\frac{1-g}{\rho} \right) f'' - \left(\frac{1-v_0 g}{\rho^2} \right) f' \right\} \right]' = 0. \quad (28-2)$$

با تغییر متغیر $P \equiv f'$ به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم کاهش می‌یابد:

$$P'' + \left(\frac{1-g}{\rho} \right) P' - \left(\frac{1-v_0 g}{\rho^2} \right) P = \frac{\varepsilon K}{\rho} \quad (29-2)$$

که ε ثابت انتگرال‌گیری است و حل خصوصی این معادله مربوط به بارگذاری خمشی است [۲۷] و در

اینجا نیاز به بررسی نیست و پاسخ حل عمومی، پاسخ مورد نیاز است.



شکل ۲-۲ ورق تحت بارگذاری کشش دو محوری $m = 0$

شرایط مرزی به این صورت است که در اطراف گشودگی فشار داخلی وجود ندارد و در بی نهایت

کششی معادل σ_0 وارد می شود.

$$P(1) = 0, \quad (30-2)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{P}{\rho} = \sigma_0. \quad (31-2)$$

اگر p_1 و p_2 دو جواب مستقل خطی P باشند و ثابت ε را مساوی با صفر فرض شود، تابع تنش P به

صورت زیر نوشته می شود [۲۷].

$$P = \sigma_0 \left(\frac{p_1(\rho)p_2(1) - p_2(\rho)p_1(1)}{p_2(1)} \right). \quad (32-2)$$

۳-۲-۲ تعریف تابع کومر $M(a, b, z)$

به معادله ای که به شکل زیر نوشته می شود، معادله کومر گفته می شود.

$$z \frac{d^2 \omega}{dz^2} + (b-z) \frac{d\omega}{dz} - a\omega = 0 \quad (33-2)$$

که یک تکینگی منظم در $z = 0$ و یک تکینگی نامنظم در بی‌نهایت دارد؛ حل مستقل این معادله به

شکل تابع کومر است: [۳۶]

$$M(a, b, z) = 1 + \frac{az}{b} + \frac{(a)_2 z^2}{(b)_2 2!} + \dots + \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} + \dots \quad (34-2)$$

که

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), \quad (35-2)$$

$$(a)_0 = 1.$$

و

$$U(a, b, z) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left\{ \frac{M(a, b, z)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right\} \quad (36-2)$$

مشخصه‌های n_1 و n_2 اعداد صحیح نامنفی‌اند و تابع کومر به ازای مقادیر مختلف به شکل‌های زیر در می‌آید:

$$b \neq -n_1, a \neq -n_2 \quad \text{سری همگرا به ازای تمام مقادیر } a, b, z \quad (37-2)$$

$$b \neq -n_1, a = -n_2 \quad \text{چندجمله‌ای درجه } n_2 \text{ از } z \quad (38-2)$$

$$b = -n_1, a = -n_2 \quad \text{قطب ساده } b = -n_1 \quad (39-2)$$

$$n_2 > n_1$$

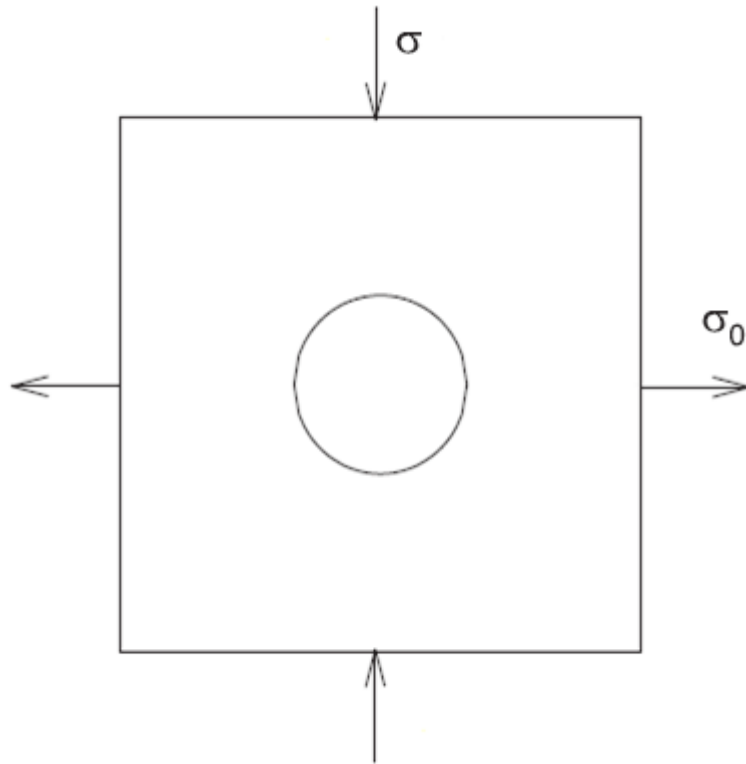
$$b = -n_1, a = -n_2 \quad \text{تعریف نشده} \quad (40-2)$$

$$n_2 \leq n_1$$

۲-۲-۴ بارگذاری برش خالص: $m = 2$

در رابطه (۲۳-۲) اگر m را مساوی با دو فرض کنیم، همانطور که در شکل (۳-۲) نمایش داده شده است، در زاویه $\theta = 0$ مقدار $f(\rho)$ و در $\theta = 90$ مقدار تابع تنش برابر با $f(\rho)$ خواهد بود و بارگذاری به صورت برش خالص در می‌آید پس تابع تنش ψ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(\rho, \theta) = f(\rho) \cos(2\theta) \quad (41-2)$$



شکل ۳-۲ ورق تحت بارگذاری برش خالص $m = 2$

با جاگذاری m, g و h در (۲۴-۲)، روابط به شکل زیر کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} & \rho^4 f^{(iv)} + 2[1-sx] \rho^3 f''' - [9 - (v_0 - 1 - s)sx - s^2 x^2] \rho^2 f'' \\ & + [9 + (9 + v_0 s - v_0)sx - v_0 s^2 x^2] \rho f' + [4(v_0 - v_0 s - 3)sx + 4v_0 s^2 x^2] f = 0. \end{aligned} \quad (42-2)$$

و با توجه به اینکه در مرز گشودگی باری اعمال نمی‌شود و توجه به بارگذاری در لبه‌های ورق، شرایط

مرزی زیر به وجود می‌آید:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(1) &= 0, \\ \tau_{\rho\theta}(1) &= 0, \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sigma_\rho|_{\theta=0} &= \sigma_0. \end{aligned} \quad (43-2)$$

با جاگذاری رابطه تنش در روابط (۴۳-۲) روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\frac{f'(\rho)}{\rho} - \frac{4f(\rho)}{\rho^2} \right) &= \sigma_0, \\ f'(1) &= 0, \\ f(1) &= 0. \end{aligned} \quad (44-2)$$

فرم بسته‌ای برای حل وجود ندارد و به حل سری نیاز است، با توجه به شرایط مرزی سری پیشنهادی برای حل به صورت توانی به شکل زیر قابل بیان است:

$$f(\rho) = \rho^q \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \quad (45-2)$$

که q ثابت تعیین نشده است و با توجه به شرایط مسأله محاسبه می‌شود. با جاگذاری $f(\rho)$ در رابطه (42-2) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\rho^q \sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_n A_n + \beta_{n-1} A_{n-1} + \gamma_{n-2} A_{n-2} \} x^n = 0, \quad (46-2)$$

که ضرایب $A_{-1} = A_{-2} \equiv 0$ و ضرایب $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (q + ns - 4)(q + ns - 2)(q + ns)(q + ns + 2), \\ \beta_n &= s(q + ns) \left[(q + ns - 1) \{ -2(q + ns) + v_0 + 3 - s \} + 9 + v_0 s - v_0 \right] \\ &+ 4s(v_0 - v_0 s - 3), \\ \gamma_n &= s^2(q + ns) [q + ns - 1 - v_0] + 4s^2 v_0. \end{aligned} \quad (47-2)$$

در $n=0$ ، $\alpha_0 A_0$ مساوی با صفر به دست می‌آید و از آن جا که $A_0 \neq 0$ است، پس q از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\alpha_0 = q(q-4)(q-2)(q+2) = 0. \quad (48-2)$$

ریشه‌هایی که از این معادله برای q بدست می‌آید، عبارتند از $q = (-2, 0, 2, 4)$.

برای $n > 0$ مقادیر A_n از طریق روابط بازگشتی زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha_1 A_1 + \beta_0 A_0 &= 0, n=1, \\ \alpha_2 A_2 + \beta_1 A_1 + \gamma_0 A_0 &= 0, n=2, \\ \alpha_3 A_3 + \beta_2 A_2 + \gamma_1 A_1 &= 0, n=3, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \alpha_n A_n + \beta_{n-1} A_{n-1} + \gamma_{n-2} A_{n-2} &= 0. \end{aligned} \quad (49-2)$$

که ضریب ثابت دلخواه است و ضرایب A_1, A_2, \dots به عنوان مضرب A_0 بدست می‌آیند. ریشه $q = 4$

برای تنش نامحدود به کار می‌آید و در اینجا مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، حل متناظر با $q = (-2, 0, 2)$

محاسبه شده است. f_1 حل متناظر با $q = 2$ ، f_2 حل متناظر با $q = -2$ و f_3 حل متناظر با $q = 0$ است.

الف - حل متناظر با تنش یکنواخت

$f_1(\rho)$ را حل متناظر با تنش یکنواخت یعنی $q = 2$ فرض کرده، پس به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f_1(\rho) = \frac{\rho^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n, \quad (50-2)$$

به طوری که ضرایب F_n به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha_1 F_1 + \beta_0 F_0 &= 0, n = 1, \\ \alpha_2 F_2 + \beta_1 F_1 + \gamma_0 F_0 &= 0, n = 2, \\ \alpha_3 F_3 + \beta_2 F_2 + \gamma_1 F_1 &= 0, n = 3, \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \alpha_n F_n + \beta_{n-1} F_{n-1} + \gamma_{n-2} F_{n-2} &= 0. \end{aligned} \quad (51-2)$$

که ضرایب $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ به شکل زیر هستند:

$$\alpha_n = ns(ns+4)(ns-2)(ns+2), \quad (52-2)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= s(2+ns)[(1+ns)\{-2ns + \nu_0 - 1 - s\} + 9 + \nu_0 s - \nu_0] \\ &+ 4s(\nu_0 - \nu_0 s - 3), \end{aligned} \quad (53-2)$$

$$\gamma_n = s^2(2+ns)[ns+1-\nu_0] + 4s^2\nu_0. \quad (54-2)$$

از دو رابطه اول ضرایب F_1 و F_2 براساس F_0 بدست می‌آیند:

$$F_1 = \left[\frac{2(1+\nu_0)}{(s+4)(s+2)} \right] F_0, \quad (55-2)$$

$$F_2 = \left[\frac{(1+\nu_0)(2s^2 + s^3 - 2 - \nu_0 s^2 - 2\nu_0 - 4s)}{4(s+4)(s+2)^2(s+1)(s-1)} \right] F_0. \quad (56-2)$$

و فرض می‌کنیم $F_0 = 1$.

ب - حل متناظر با $q = -2$

$f_2(\rho)$ حل متناظر با $q = -2$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$f_2(\rho) = \frac{1}{2\rho^2} \sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n, \quad (57-2)$$

به طوری که ضرایب G_n به صورت زیر حاصل می شوند:

$$\begin{aligned} \alpha_1 G_1 + \beta_0 G_0 &= 0, n=1, \\ \alpha_2 G_2 + \beta_1 G_1 + \gamma_0 G_0 &= 0, n=2, \\ \alpha_3 G_3 + \beta_2 G_2 + \gamma_1 G_1 &= 0, n=3, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \alpha_n G_n + \beta_{n-1} G_{n-1} + \gamma_{n-2} G_{n-2} &= 0. \end{aligned} \quad (58-2)$$

که ضرایب $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ به شکل زیر هستند:

$$\alpha_n = ns(ns-6)(ns-4)(ns-2), \quad (59-2)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= s(ns-2)[(ns-3)\{-2ns + \nu_0 + 7 - s\} + 9 + \nu_0 s - \nu_0] \\ &+ 4s(\nu_0 - \nu_0 s - 3), \end{aligned} \quad (60-2)$$

$$\gamma_n = s^2(ns-2)[ns-3-\nu_0] + 4s^2\nu_0. \quad (61-2)$$

از دو رابطه اول ضرایب G_1 و G_2 براساس G_0 بدست می آیند:

$$G_1 = \left[\frac{6(1+\nu_0)}{(s-4)(s-6)} \right] G_0, \quad (62-2)$$

$$G_2 = \left[\frac{3(1+\nu_0)(10s + 6\nu_0 s + s^3 - 6 - 6\nu_0 - 6s^2 - \nu_0 s^2)}{4(s-4)(s-6)(s-3)(s-2)(s-1)} \right] G_0. \quad (63-2)$$

و فرض می کنیم $G_0 = 1$.

ج- حل متناظر با $q = 0$

$f_3(\rho)$ حل متناظر با $q = 0$ که به صورت زیر نوشته می شود:

$$f_3(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n, \quad (64-2)$$

که ضرایب G_n به صورت زیر حاصل می شوند:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 H_1 + \beta_0 H_0 &= 0, n = 1, \\
\alpha_2 H_2 + \beta_1 H_1 + \gamma_0 H_0 &= 0, n = 2, \\
\alpha_3 H_3 + \beta_2 H_2 + \gamma_1 H_1 &= 0, n = 3, \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\alpha_n H_n + \beta_{n-1} H_{n-1} + \gamma_{n-2} H_{n-2} &= 0.
\end{aligned}
\tag{۶۵-۲}$$

که ضرایب $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ به شکل زیر هستند:

$$\alpha_n = ns(ns-4)(ns-2)(ns+2), \tag{۶۶-۲}$$

$$\beta_n = ns^2 \left[(ns-1) \{-2ns + \nu_0 + 3 - s\} + 9 + \nu_0 s - \nu_0 \right] \tag{۶۷-۲}$$

$$\begin{aligned}
&+ 4s(\nu_0 - \nu_0 s - 3), \\
\gamma_n &= ns^3 [ns - 1 - \nu_0] + 4s^2 \nu_0.
\end{aligned}
\tag{۶۸-۲}$$

از دو رابطه اول ضرایب H_1 و H_2 براساس H_0 بدست می‌آیند:

$$H_1 = \left[\frac{4(\nu_0 s + 3 - \nu_0)}{(s-4)(s-2)(s+2)} \right] H_0, \tag{۶۹-۲}$$

$$H_2 = \left[\frac{2s^3 \nu_0 - \nu_0 s^2 - 2\nu_0^2 s^2 + 9s^2 - 4\nu_0 s + 4\nu_0^2 s - 2\nu_0^2 + 12\nu_0 - 18}{4(s-4)(s-2)(s-1)(s+1)(s+2)} \right] H_0. \tag{۷۰-۲}$$

و فرض می‌کنیم $H_0 = 1$.

د- تابع تنش $f(\rho)$

با توجه به شرایط مرزی و حل‌های متناظر با ریشه‌های q تابع تنش $f(\rho)$ به صورت زیر بدست

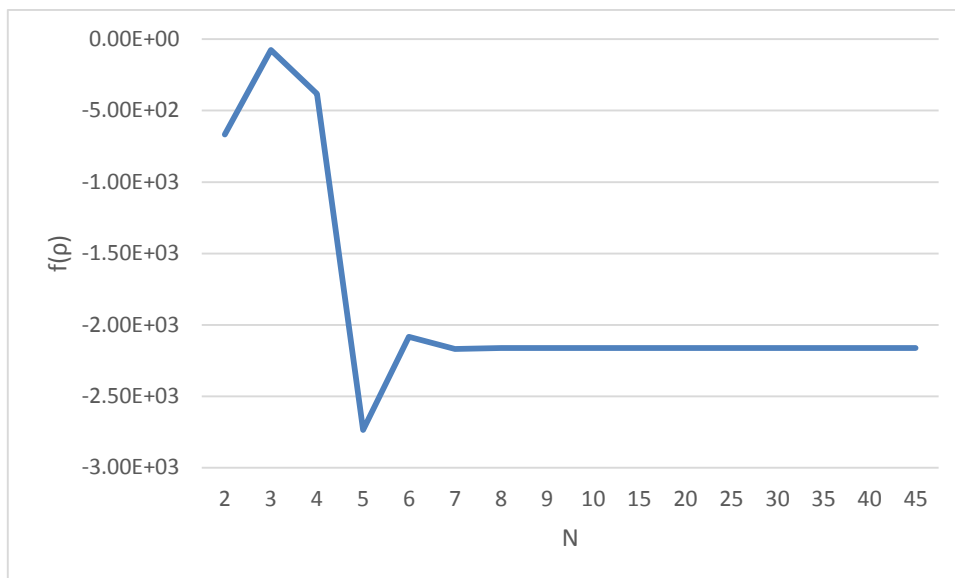
می‌آید:

$$f(\rho) = \sigma_0 \left(\frac{[f_2 f_3' - f_3 f_2']_1 f_1(\rho) + [f_3 f_1' - f_1 f_3']_1 f_2(\rho) + [f_1 f_2' - f_2 f_1']_1 f_3(\rho)}{[f_2 f_3' - f_3 f_2']_1} \right) \tag{۷۱-۲}$$

که ترم‌هایی که به صورت $[...]_1$ هستند به معنی مقدار آن تابع در $\rho = 1$ است. در شکل ۲-۴ مقدار

$f(\rho)$ به ازای جملات مختلف سری آورده شده، که با توجه به این شکل به ازای تعداد جملات سری

برابر با هفت، مقدار سری همگرا شده است.



شکل ۲-۴ همگرایی مقدار تابع $f(\rho)$ به ازای تعداد جملات سری

که N تعداد جملات به کار رفته در سری $f(\rho)$ می‌باشد.

برای سایر بارگذاری‌ها از جمع آثار دو حالت قبل استفاده می‌شود و چون ورق در محدوده الاستیک خطی است، این روش صحیح است.

همان‌گونه که مشاهده شد، تعداد معادلات برای حل این روش بسیار کمتر است از حل به روش پتانسیل مختلط، که کوتاهی معادلات در رسیدن به جواب مزیت روش تفکیک متغیرها است.

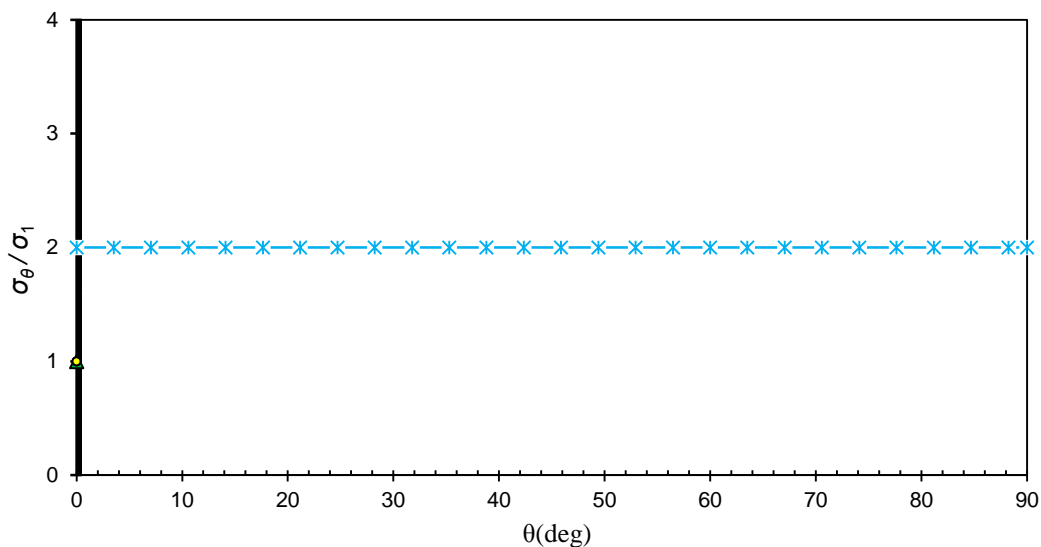
۳-۲ حل تحلیلی موجود در مراجع

برای ورق بلند همگن با گشودگی دایروی حل دقیق وجود دارد، که بسیاری از مراجع مانند والتر دی. پیلکی [۳۷] و مارتین اچ. ساد [۳۸] در کتاب‌های خود به آن اشاره کرده‌اند.

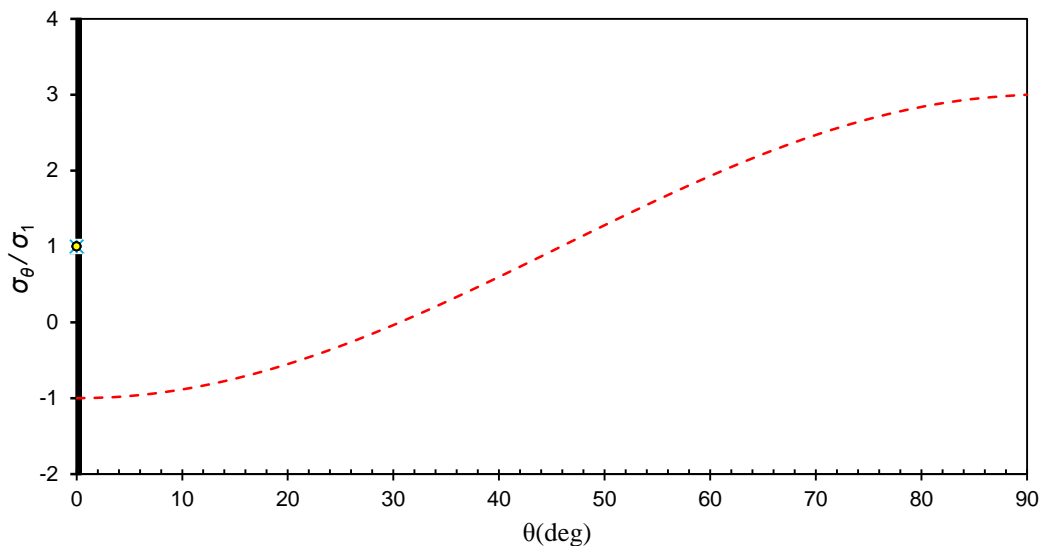
$$\sigma_\rho = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 + 3\frac{\rho_0^4}{\rho^4} - 4\frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) \cos(2\theta) \quad (۷۲-۲)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1) \left(1 + \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 + 3\frac{\rho_0^4}{\rho^4}\right) \cos(2\theta) \quad (۷۳-۲)$$

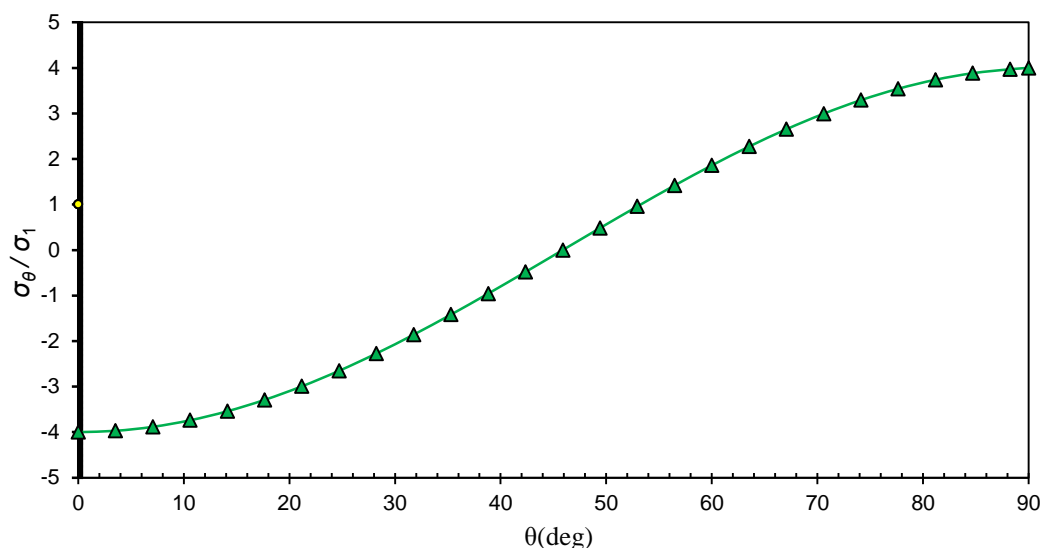
در اینجا ρ_0 شعاع گشودگی و σ_1 و σ_2 به ترتیب تنش در مرزهای $x = \pm \frac{L}{2}$ و $y = \pm \frac{L}{2}$ شکل می‌باشند. نتایج این تنش محیطی در مرز گشودگی برای ورق همگن مورد بررسی به ازای سه بارگذاری در شکل‌های ۲-۵ تا ۲-۷ آمده است.



شکل ۲-۵ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت بار $\sigma_1 = \sigma_2 = 1MPa$



شکل ۲-۶ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت $\sigma_1 = 1MPa, \sigma_2 = 0$



شکل ۲-۷ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1MPa$

۴-۲ تحلیل اجزای محدود

در حقیقت تمامی عناصر و پدیده‌های موجود در جهان را می‌توان با قوانین فیزیک اثبات و با کمک علم ریاضی شامل معادلات جبری، معادلات دیفرانسیلی یا انتگرالی برای آنها فرمول‌بندی بر پایه‌ی ریاضی پیدا کرد. در علم مکانیک می‌توان میزان و نحوه توزیع تنش در یک جسم با هندسه‌های مختلف و انواع بارگذاری، میزان توزیع دما در ماده با شرایط مرزی مختلف، ارتعاشات جسم بر اثر بارهای دینامیکی و ضربه‌ای و... را با استفاده از فرمول‌بندی ریاضی به‌دست آورد. برخی از مسائل با شرایط مرزی و هندسه‌ی خاص دارای حل دقیق می‌باشند. ولی واقعیت این است، که بسیاری از مسائل فاقد راه‌حل تحلیلی و دقیق می‌باشند؛ که در این شرایط روش حل عددی راه مناسبی برای به‌دست آوردن یک فرمول‌بندی ریاضی برای این دسته مسائل است. روش اجزای محدود نیز یک روش حل عددی است. ویژگی آن نسبت به دیگر روش‌ها در دسته‌بندی دامنه‌ی جسم به دامنه‌های ساده‌تر به نام المان-های محدود، است. این عمل باعث می‌شود، که هندسه‌های سخت و پیچیده به یک مجموعه هندسه‌های ساده‌تر که حل آن آسان می‌باشد، تبدیل شود. هر المان از نقاطی که متعلق به کل جسم است، تشکیل می‌شود و هر نقطه بین چند المان مشترک است؛ که در معادلات تعادل تمام آن المان‌ها شرکت می‌کنند.

این امر باعث برقراری شرط پیوستگی بین المان‌های کل جسم در هنگام حل دستگاه معادلات سفتی می‌شود. المان‌های مختلفی برای شرایط هندسی و بارگذاری متفاوت در تحلیل‌ها استفاده می‌شوند، که برای مثال می‌توان به دو دسته زیر که در این تحلیل کاربرد دارند، اشاره کرد. [۳۹]

۱. المان تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای: برای حالتی که مسأله مورد نظر دارای هندسه دوبعدی بوده که بارگذاری درون‌صفحه‌ای داشته باشد. این المان جابه‌جایی درون‌صفحه‌ای جسم را بررسی می‌کند.

۲. المان خمش صفحه‌ای: این المان برای حالتی که ورق تحت بارگذاری خارج صفحه است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این المان برای پوسته‌ها و ورق‌های فضایی مناسب است، که علاوه بر خیز، شیب در دو جهت محورهای اصلی ورق را محاسبه می‌کند.

پس همان‌طور که گفته شد، روش اجزای محدود یک روش حل عددی می‌باشد. این روش برای مسائل پیچیده، که امکان به‌دست آوردن حل دقیق یا حل تحلیلی در آن امکان‌پذیر نیست، گزینه مناسبی است. در این تحقیق از روش اجزای محدود برای راستی‌سنجی حل تحلیلی استفاده شده است؛ ولی در شرایطی که حل دقیق یا حل تحلیلی مورد تأیید در مراجع، برای مسأله وجود دارد؛ مانند کشش ساده‌ی ورق بلند همگن با گشودگی دایروی، مقایسه‌ی حل تحلیلی و اجزای محدود می‌تواند معیاری برای درستی تحلیل عددی باشد. این مقایسه، در این تحقیق انجام شده که با دقت قابل قبولی روند حل اجزای محدود مورد تأیید قرار گرفت.

۲-۵ معرفی نرم‌افزار اجزای محدود انسیس

هنگامی که هندسه‌ی مسأله پیچیده و بزرگ باشد، استفاده از روش اجزای محدود به صورت دستی بسیار سخت و طاقت‌فرسا بوده و به‌طور قطع منشأ ایجاد خطا خواهد بود. به همین دلیل در سال‌های اخیر با پیشرفت روزافزون تکنولوژی، استفاده از رایانه برای انجام محاسبات زیاد مورد استقبال قرار گرفت و نرم‌افزارهای مختلفی بر پایه‌ی زبان‌های برنامه‌نویسی وارد بازار شدند. نرم‌افزار انسیس، یکی از

نرم افزارهای قدرتمند مهندسی در زمینه‌ی تحلیل اجسام با استفاده از روش المان محدود می‌باشد. این نرم افزار اولین بار در سال ۱۹۷۰ توسط جان سوانسون^۱ ساخته شد. هدف اصلی او از ساخت این نرم افزار، توسعه‌ی روش المان محدود و استفاده از آن در مسائل دارای قابلیت شبیه سازی مانند تحلیل‌های استاتیکی، دینامیکی و حرارتی بود. این نرم افزار به مرور زمان و با پیشرفت تکنولوژی روزبه روز قدرت بیشتری در تحلیل‌های متفاوت پیدا کرده که از جمله‌ی آن می‌توان به تحلیل الکترونیکی و مسائل مربوط به مهندسی برق، تحلیل مسائل دینامیک گذرا و لحظه‌ای مانند ضربه و انفجار، تحلیل جریان‌های سیالاتی و حرارتی و بسیاری موارد دیگر اشاره کرد. این شرکت در سال ۲۰۰۳ نرم افزارهای قدرتمندی هم چون AutoDyna، CFX، Fluent، ICEM را به منظور افزایش توان تحلیل خود خریداری کرده و زیرمجموعه‌ی خود قرار داده است. اخیراً نیز با اضافه شدن نرم افزار آباکوس^۲ به زیرمجموعه‌ی انسیس قدرت تحلیل این نرم افزار المان محدود بیشتر از پیش شده است.

۲-۶ روند تحلیل عددی

۲-۶-۱ هندسه ورق

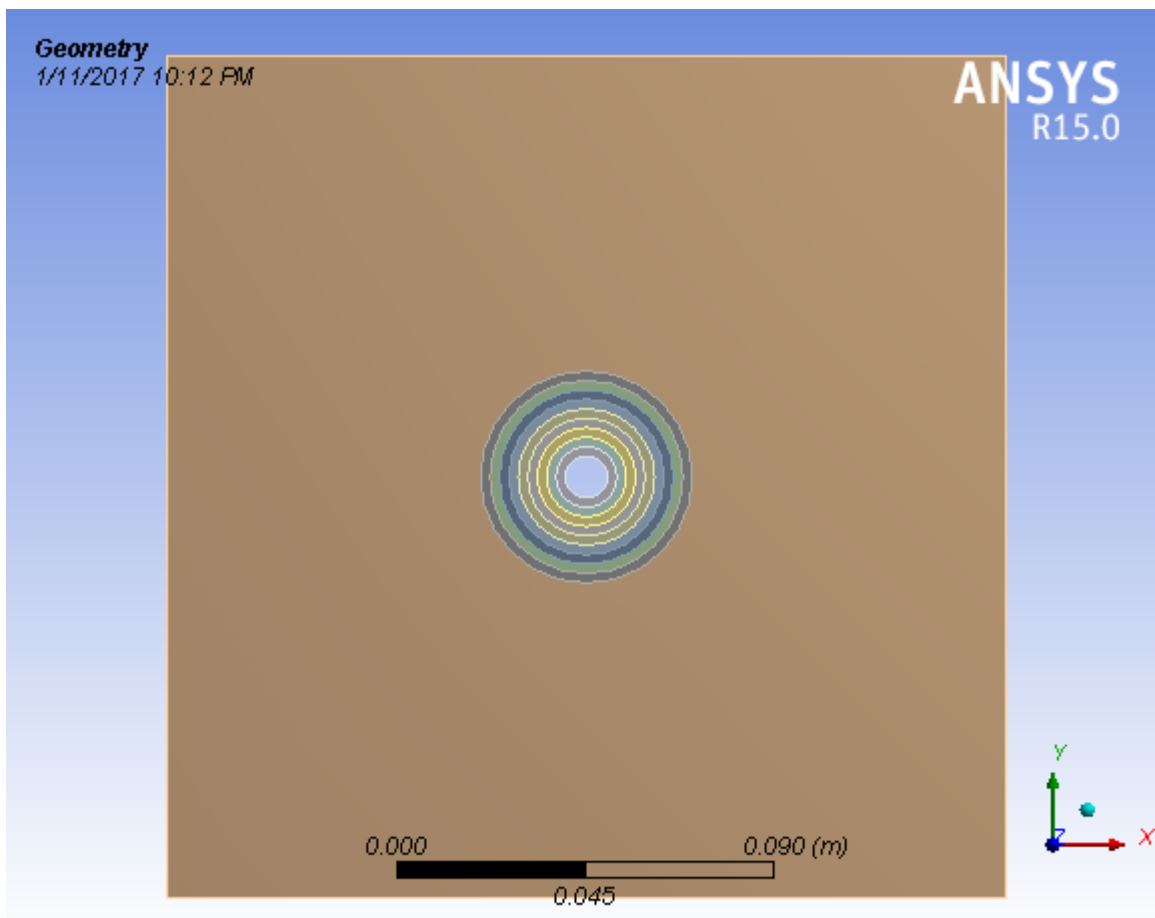
همان طور که در فصل قبل بیان شد، در این تحلیل از ورق مربعی با نسبت ابعادی $\frac{D}{L} = \frac{1}{20}$ استفاده

شد. بنابراین می‌توان با دقت خوبی ورق را بلند در نظر گرفت. ورق مورد نظر در محیط Static Structural و به صورت دوبعدی مدل شده است. انتخاب صحیح محیط تحلیل نقش زیادی در درستی نتایج حاصل از آن دارد. در نرم افزار انسیس، به دلیل قابلیت‌های ذکر شده، تحلیل مسأله در محیط استاتیکی بسیار روان و سریع تر از تحلیل دینامیکی انجام می‌شود.

1-John A. swanson

2-ABAQUS

ورق همگن به صورت رینگ‌هایی هم مرکز با گشودگی، در نظر گرفته شده است. همان طور که در شکل صفحه‌ی بعد نیز قابل مشاهده است، ورق با تعداد 10 رینگ هم مرکز با گشودگی مدل می‌شود که قطر هر لایه 5 mm انتخاب شده است. در تحلیل ورق همگن، بدون لایه لایه کردن ورق، مشاهده می‌شود که تنش‌های محیطی و شعاعی در فاصله‌ی $\rho = 10\rho_0$ (شعاع گشودگی) مقداری برابر با ۹۷٪ تنش اعمال شده در مرزها دارند؛ بنابراین تنها ناحیه‌ی ناهمگنی به صورت حلقه‌های هم مرکز مدل شده‌اند.



شکل ۲-۸ هندسه ورق با نسبت ابعادی در نرم افزار ANSYS

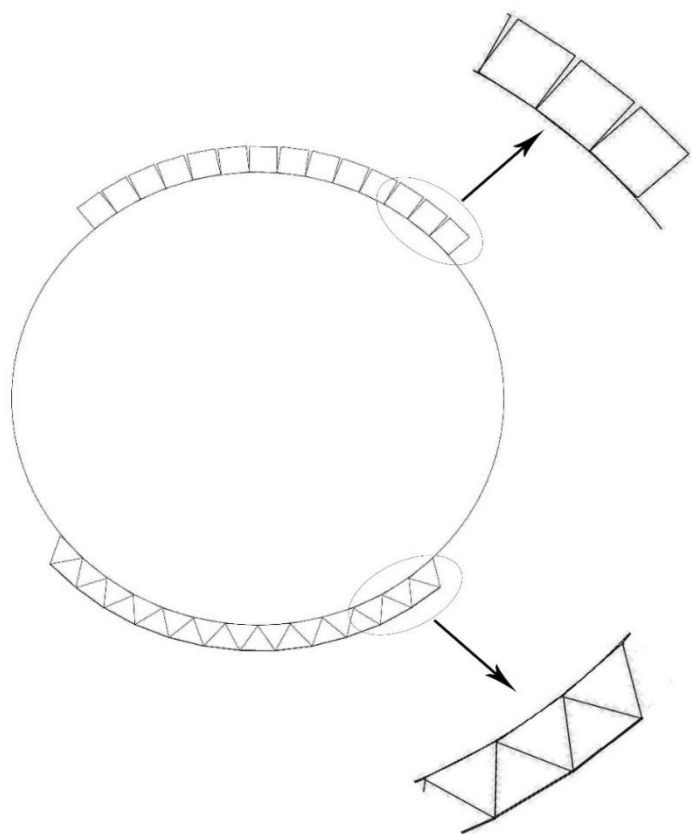
۲-۶-۲ تعریف خواص مواد

در این مرحله خواص مکانیکی ماده تعریف می‌شود. در نرم افزار انسیس برای هر لایه می‌توان ماده‌ی دلخواهی را نسبت داد و از آن جایی که در این فصل هدف مدل کردن ورق همگن می‌باشد، به همه‌ی لایه‌ها خواص یکسانی نسبت داده می‌شود. واضح است که تحلیل نرم افزاری جهت راستی سنجی

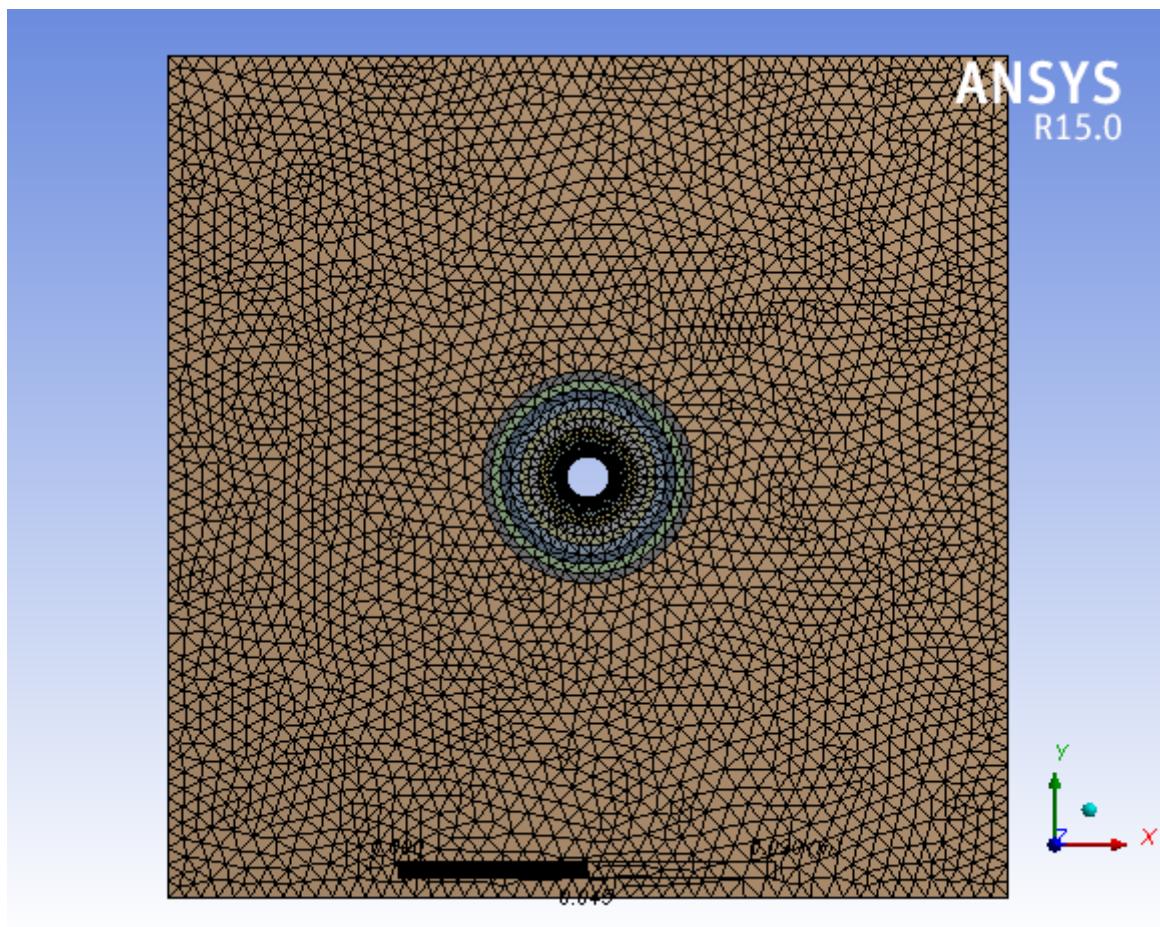
حل پیشنهادی برای ورق می‌باشد؛ از این رو از نظر هندسی و خواص مکانیکی در هر نقطه می‌بایست بیشترین انطباق را با حل پیشنهادی داشته باشد. بنابراین خواص لایه‌ها وابسته به شرایط جنس ورق مورد تحلیل، از حل تحلیلی گرفته شد.

۳-۶-۲ مش‌بندی و اعمال شرایط حل

برای تحلیل ورق در نرم‌افزار انسیس از مش مثلثی استفاده شده‌است؛ زیرا مدل‌سازی یک مرز دایره‌ای با المان مثلثی بسیار دقیق‌تر و منطقی‌تر از المان چهارضلعی می‌باشد و به دلیل وجود گشودگی دایره‌ای در ورق و همچنین اهمیت بالای این ناحیه در تحلیل تنش و جابه‌جایی، برای تحلیل ورق در نرم‌افزار انسیس از مش مثلثی استفاده شده‌است؛ زیرا همان‌گونه که در شکل ۲-۹ مشاهده می‌شود، مدل‌سازی یک مرز دایره‌ای با المان مثلثی بسیار دقیق‌تر و منطقی‌تر از المان چهارضلعی می‌باشد و به دلیل وجود گشودگی دایره‌ای در ورق و همچنین اهمیت بالای این ناحیه در تحلیل تنش و جابه‌جایی، در این تحقیق نیز از المان مثلثی برای مرز گشودگی استفاده شده‌است:



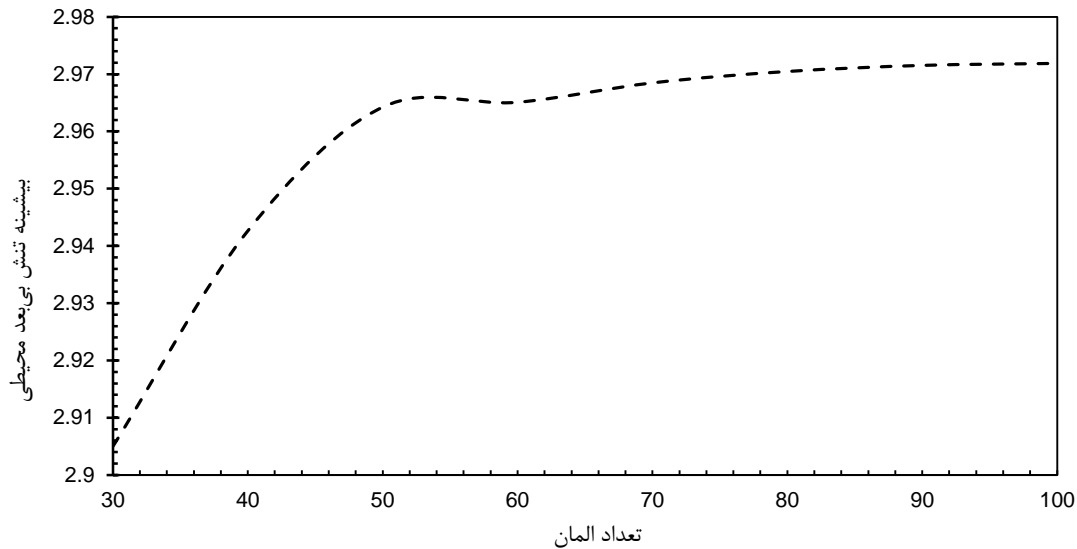
شکل ۹-۲ مقایسه‌ی نحوه‌ی قرارگیری مش مثلثی و مربعی روی مرز گشودگی ورق



شکل ۱۰-۲ مش بندی کل ورق در نرم افزار انسیس

همان طور که در شکل ۱۰-۲ مشخص است، ابعاد مش در اطراف گشودگی بسیار کوچکتر از مش‌ها در مرزهای خارجی است. با این حالت علاوه بر دقت حل در اطراف گشودگی، که برای تحلیل مهم است، از تولید و حل معادلات بی‌پایه در نقاط دور از گشودگی و اطراف مرزهای خارجی جلوگیری می‌شود. با این روند، سرعت حل در نرم‌افزار بالا می‌رود. برای یافتن بهینه‌ترین اندازه‌ی مش در ناحیه‌ی اطراف گشودگی یک ورق همگن با گشودگی دایروی، تحت بارگذاری تک‌محوری، مورد بررسی قرار گرفت. در نرم‌افزار انسیس، این ورق با اندازه‌های مختلف مش در ناحیه‌ی اطراف گشودگی مورد تحلیل قرار گرفت و نتایج حاصل شده در شکل ۱۱-۲ بیشینه مقدار تنش محیطی در تحلیل عددی برای ورق همگن تحت کشش تک‌محوری آورده شد. همان طور که مشاهده می‌شود، بیشترین مقدار تنش برای تعداد ۷۰

مش در اطراف گشودگی است. که با توجه به این نتیجه، در تمام تحلیل‌ها از این تعداد مش استفاده خواهد شد.

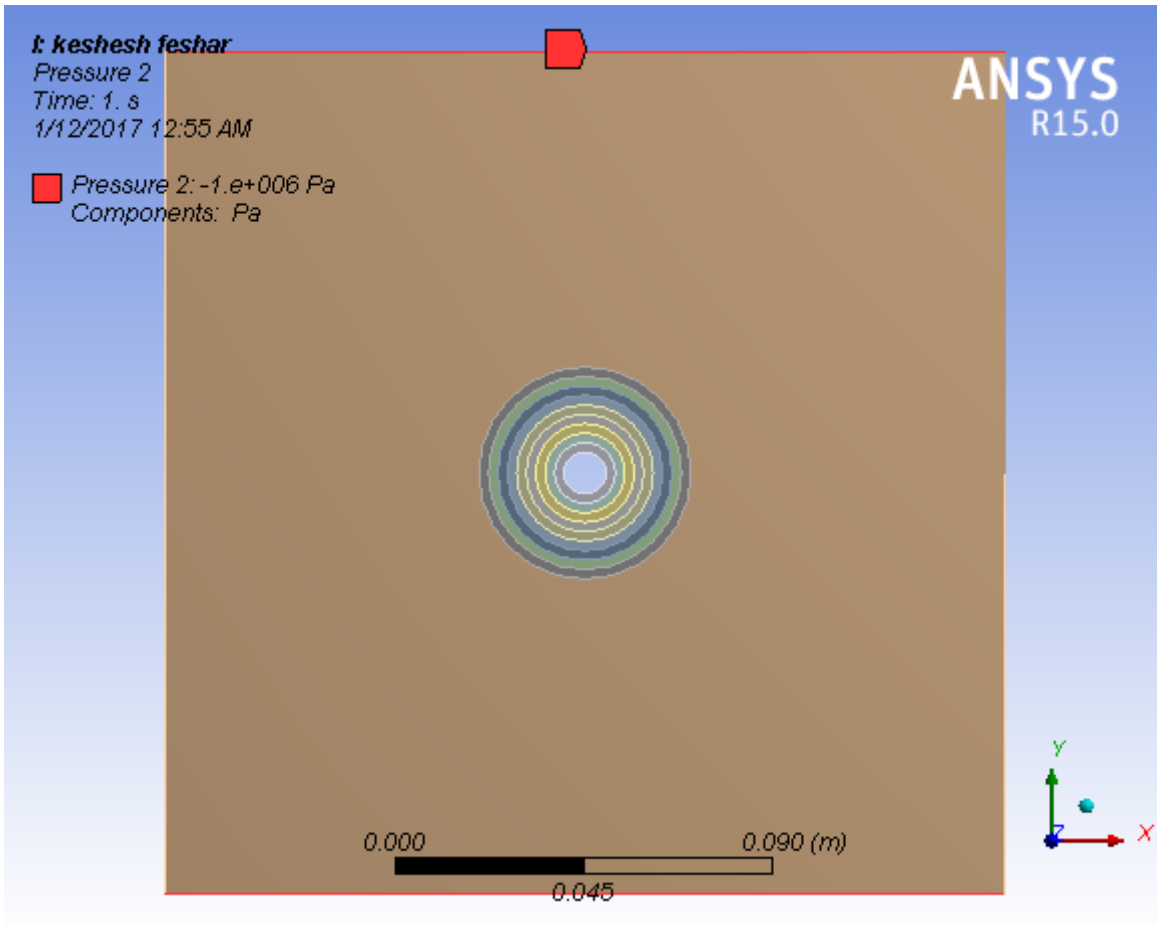


شکل ۱۱-۲ بیشینه مقدار تنش محیطی حاصل از تحلیل عددی

۴-۶-۲ اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

در این مرحله شرایط مرزی و بارگذاری ورق تعریف می‌شود. شکل ۱۲-۲ ورق را تحت شرایط مرزی اعمال شده نشان می‌دهد.

با توجه به محیط طراحی و مش انتخابی، بارگذاری مکانیکی اعمالی بر روی مرزهای خارجی به صورت فشار یکنواخت، انتخاب شد. این بارگذاری اثر یکنواختی تنش در مرزهای ورق، بر طبق فرض مسأله را ارضا می‌کند.



شکل ۲-۱۲ اعمال شرایط مرزی متقارن ورق در ANSYS

۷-۲ بررسی نتایج

ورق مورد بررسی به‌عنوان مطالعه‌ی موردی، ورق با نسبت ابعاد $\frac{L}{D} = 20$ می‌باشد. مشخصات ابعادی

یک ورق نازک ۱۰ لایه با طول ۲۰ میلی‌متر و قطر گشودگی دایروی ۱ میلی‌متر و ضخامت یکنواخت ۱ میلی‌متر می‌باشد. در این فصل هیچ بارگذاری در داخل گشودگی وجود ندارد؛ از این‌رو در اطراف گشودگی تنش شعاعی و تنش برشی نیز، حضور ندارند.

$$\sigma_r = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (۷۴-۲)$$

بار اعمالی به ورق، در مرزهای خارجی به صورت تک محوری و دومحوری و در مرز داخل گشودگی

بدون حضور فشار است. جهت بی بعد سازی محور قائم در شکل‌ها، از نسبت تنش $\frac{\sigma_0}{\sigma_0}$ استفاده شده

است. در اینجا σ_0 تنش اعمالی در مرز ورق در جهت محور x و σ_0 تنش محیطی است.

بارگذاری مورد مطالعه در این تحقیق به صورت بارگذاری تک محوری و دومحوری است؛ که در حالت

تک محوری به صورت کششی به اندازه‌ی $\sigma_0 = \sigma = 1 \text{ MPa}$ و در حالت دومحوری، بارگذاری در جهت محور

۱ به حالت کششی و مقدار $\sigma_0 = \sigma = 1 \text{ MPa}$ و در جهت محور ۲ به مقدار $n\sigma$ وارد می‌شود. برای نمایش

دادن نوع بارگذاری در روابط، متغیر m استفاده می‌شد که فقط برای بارگذاری کشش دومحوره و برش

خالص قابل تعریف بود و برای سایر بارگذاری‌ها مقداری نداشت، متغیر n برای نشان دادن تمامی

بارگذاری‌ها تعریف می‌شود که معرف رابطه بین σ_0 و σ است، که n مقادیر زیر را می‌گیرد:

$$n = \{-1, 0, 1\}$$

$n = -1$ برش خالص، $n = 0$ کشش تک محوری و $n = 1$ کشش دومحوری را نشان می‌دهد. در

فصل چهارم برای بهتر نشان دادن مقایسه نتایج این روش با نتایج روش تابع پتانسیل از همان بارگذاری

ارائه شده، استفاده شده یعنی n مقادیر -2 و 2 را داراست.

۲-۷-۱ کشش تک محوری

شکل‌های ۲-۱۳ و ۲-۱۴ به ترتیب تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را، در نقاط اطراف گشودگی

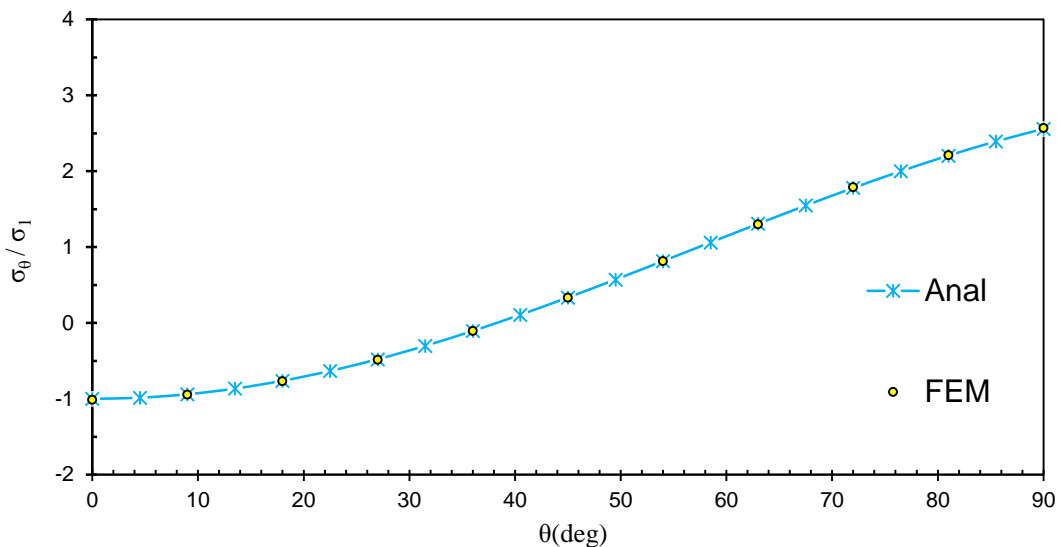
دایروی، تحت بارگذاری کشش تک محوری، نشان می‌دهند. مقایسه‌ی حلّ تحلیلی مورد بررسی و روش

FE در نمودارهای مربوط به تنش محیطی در ورق همگن آورده شده است. همان‌طور که در شکل ۲-

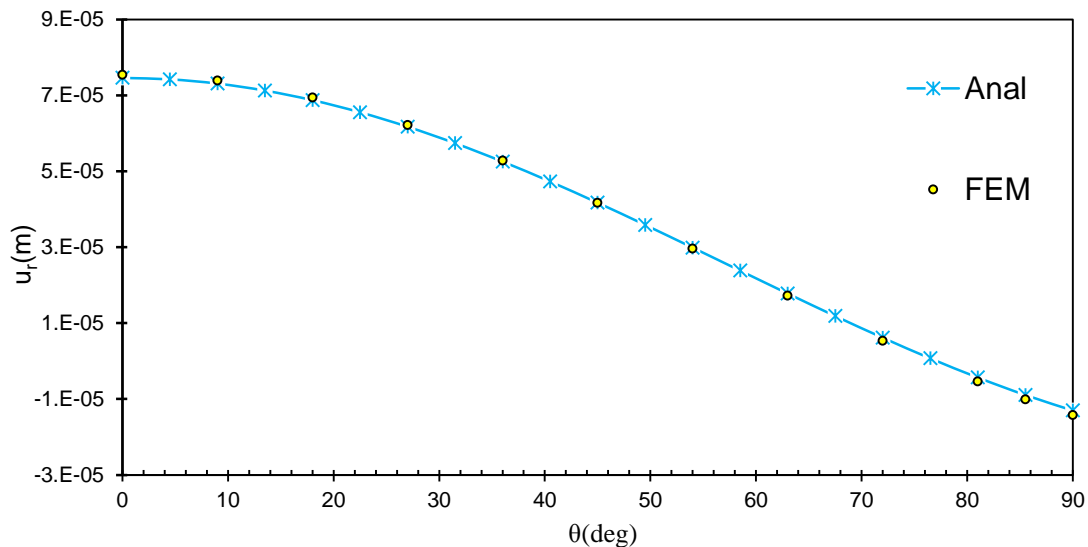
۱۳ مشاهده می‌شود، تنش حاصل از حلّ تحلیلی پیشنهادی برای ورق همگن تحت بارگذاری اشاره

شده، دارای دقت قابل قبولی است. همچنین مقادیر به دست آمده برای جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف

گشودگی، از هر دو روش تحلیل عددی و حل تحلیلی مورد بررسی به یکدیگر بسیار نزدیک می‌باشند. این خطای کم نشان‌دهنده‌ی دقت بالای حل پیشنهادی است.



شکل ۱۳-۲ توزیع تنش در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوری



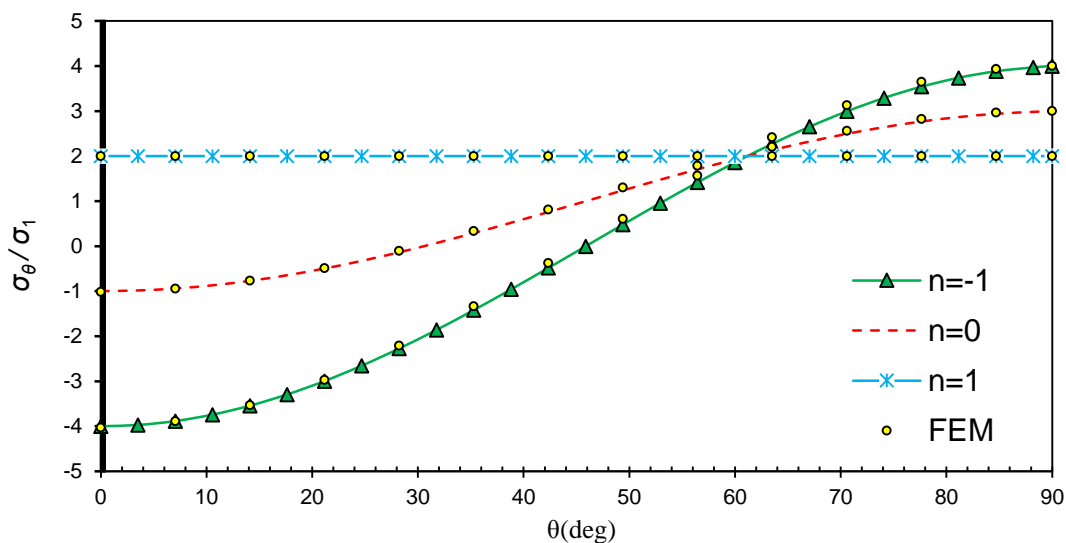
شکل ۱۴-۲ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوری

۲-۷-۲ بارگذاری دوماحوری

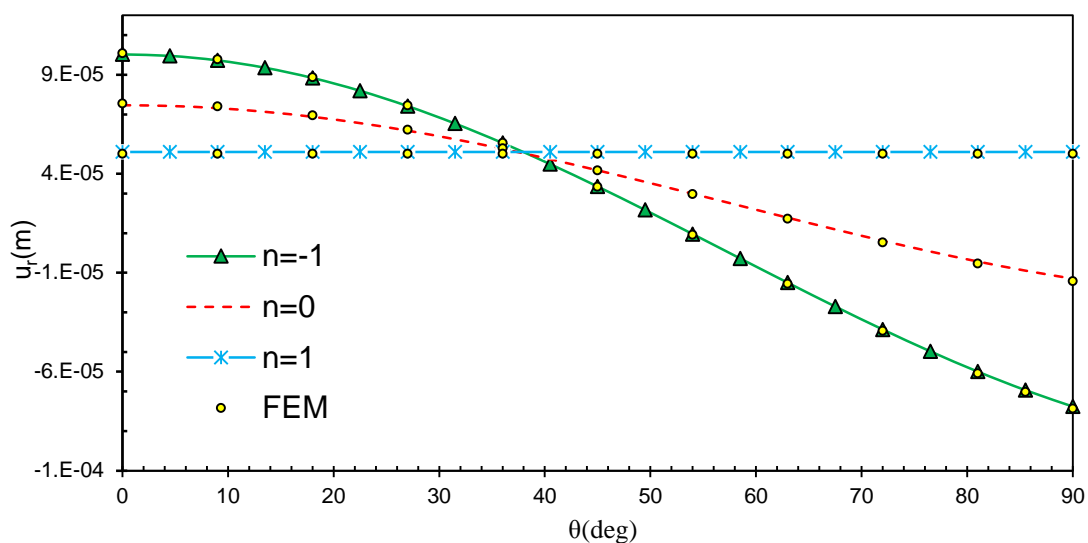
شکل‌های ۱۵-۲ و ۱۶-۲ به ترتیب تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را در نقاط اطراف گشودگی دایروی، تحت بارگذاری دوماحوری نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۱۵-۲ مشاهده می‌شود، همانند

کشش تک‌محوره، تنش حاصل از حل پیشنهادی با کمک توابع پتانسیل برای ورق همگن تحت بارگذاری اشاره شده، دارای دقت قابل قبولی است. در این شکل، با تغییر مقدار n از -1 تا 1 ، اختلاف میان مقدار تنش محیطی بی‌بعد بیشینه و کمینه در اطراف گشودگی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد، به طوری که در $n = 1$ در تمام نقاط اطراف گشودگی، این تنش دارای مقداری ثابت می‌باشد. علت این امر رابطه‌ی مستقیم تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به بارگذاری درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی می‌باشد.

در شکل ۲-۱۶ جابه‌جایی شعاعی در اطراف گشودگی نشان داده می‌شود. با کاهش بار فشاری درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی در جهت محور دوم ابتدا تغییر شکل گشودگی دایروی ورق، از بیضوی شکل به سمت دایروی شکل میل می‌کند. در $n = 1$ با توجه به یکنواختی مقدار تنش محیطی در اطراف گشودگی دایروی بعد از تغییر شکل، همچنان دایروی باقی می‌ماند.



شکل ۲-۱۵ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری



شکل ۲-۱۶ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری

۸-۲ جمع‌بندی

در این فصل با کمک روابط الاستیسیته، توابع تنش ایری، روش تفکیک متغیرها و تابع کومر برای دو بارگذاری مختلف معادلات حاکم بر ورق بلند، استخراج شد. بارگذاری به صورت درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی و بدون فشار در داخل گشودگی اعمال گردید. همچنین شبیه‌سازی ورق در نرم‌افزار اجزای محدود انسیس همانند روش تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از حلّ تحلیل ورق بلند و تحلیل نرم‌افزاری مقایسه و دقت قابل قبول حلّ مورد بررسی، برای ورق همگن مورد تأیید قرار گرفت.

فصل ۳ ورق ناهمگن با گشودگی دایروی تحت

بارگذاری درون صفحه‌ای

۱-۳ پیش‌گفتار

در این فصل، تابع ناهمگنی مورد استفاده در ورق ناهمگن معرفی می‌شود. همچنین توزیع تنش و مقدار جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن با روند صعودی و نزولی مدول الاستیسیته مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج آنها با ورق همگن مقایسه خواهند شد.

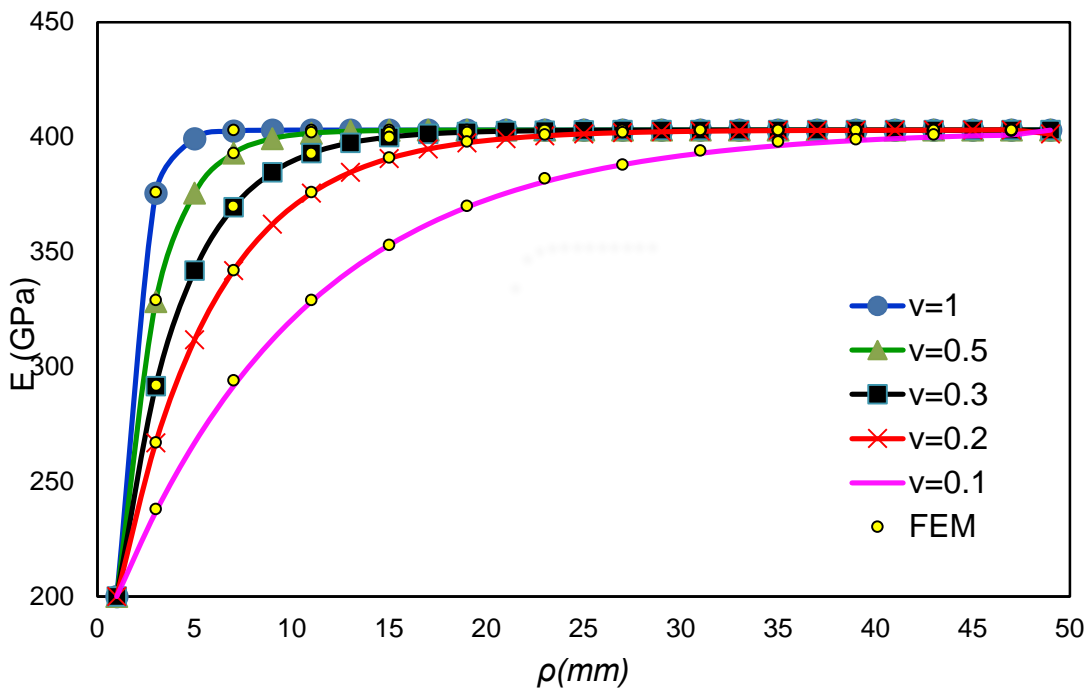
۲-۳ مدل ریاضی ورق همگن

همان‌طور که در فصل دوم بیان شد، ورق به صورت حلقه‌هایی هم‌مرکز و با ضخامت و اندازه‌ی یکسان فرض و تقسیم‌بندی شد. علت این فرض امکان در نظر گرفتن ورق ناهمگن به صورت ورق‌ی با حلقه‌های همگن ولی خواص مکانیکی متفاوت با یکدیگر می‌باشد. در این صورت می‌توان با کمک روابط استخراج شده در فصل دوم ورق ناهمگن را تحلیل کرد. به دلیل آنکه ورق مورد بررسی یک ورق بلند است؛ می‌بایست مدول الاستیسیته در نقاط دور معین و معلوم باشد. از این‌رو برای تابع ناهمگنی در این مسأله، تابع نمایی انتخاب شد، که دارای شعاع همگرایی مشخص و قابل تنظیمی است.

$$E(\rho) = E_0 \left[1 + (k-1) \exp\left(v \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)\right) \right] \quad (1-3)$$

که در آن $k = \frac{E_i}{E_0}$ و v ضریب همگرایی برای کنترل دامنه‌ی ناحیه‌ی ناهمگن در ورق می‌باشد. در

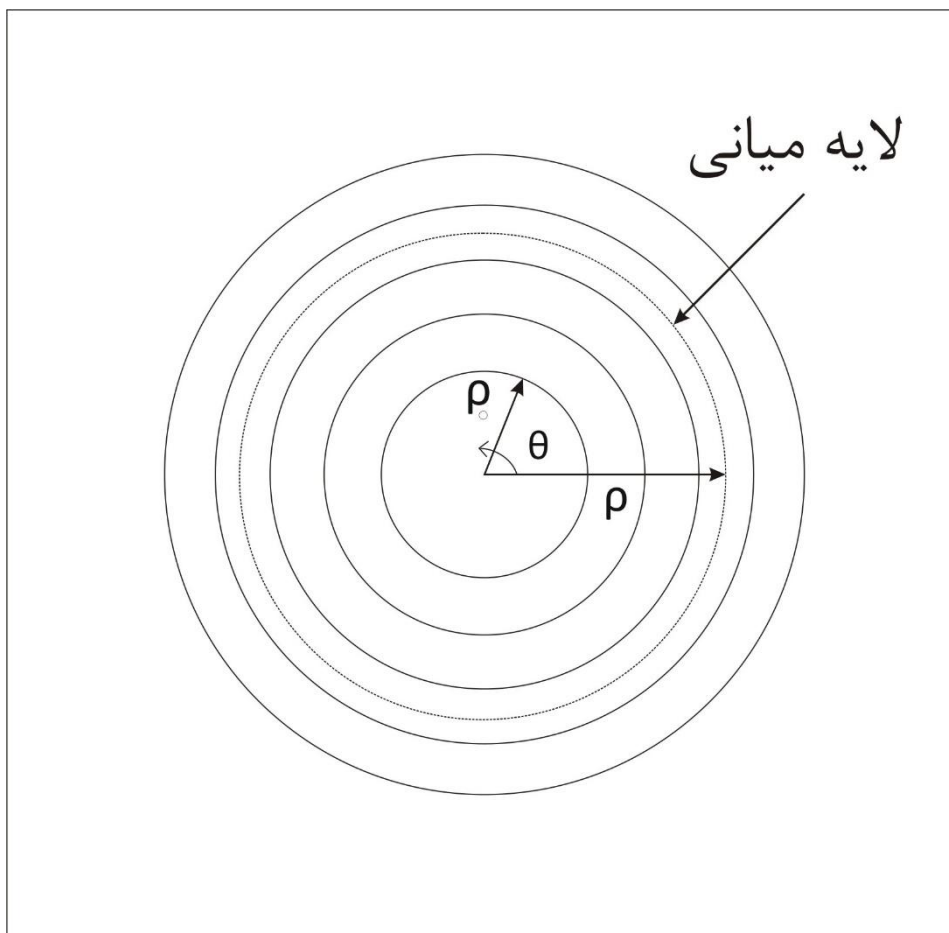
شکل ۱-۳ تغییرات مدول الاستیسیته براساس شعاع برای شعاع همگرایی‌های مختلف در ورق ناهمگن با روند افزایشی مدول الاستیسیته نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار v ، شعاع همگرایی ناحیه ناهمگنی، کم می‌شود.



شکل ۳-۱ تغییرات مدول الاستیسیته در جهت شعاعی برای ورق ناهمگن با روند افزایش مدول الاستیسیته

۳-۳ استخراج معادلات

معادلات استخراج شده در فصل دوم به صورتی به دست آمد، که هم برای ورق همگن و هم ورق ناهمگن قابل استفاده باشند. از این رو تغییری در معادلات و کد نوشته شده از آن داده نخواهد شد. در ورق همگن به دلیل یکسان بودن خواص مکانیکی در تمام نقاط ورق، تنها مقدار $E(\rho)$ برای تمام ورق مقداری یکسان داشت. در ورق ناهمگن، لایه‌های آن دارای خواص مکانیکی متفاوتی نسبت به یکدیگر هستند؛ اما هر لایه به تنهایی همگن فرض شده است. پس با توجه به مطالب ذکر شده در بالا، در حل مورد بررسی مقدار $E(\rho)$ در هر لایه همانند شکل ۳-۲ با توجه به شعاع میانی آن لایه، تعیین می‌شود، لازم به ذکر است این تغییرات تدریجی می‌باشد.

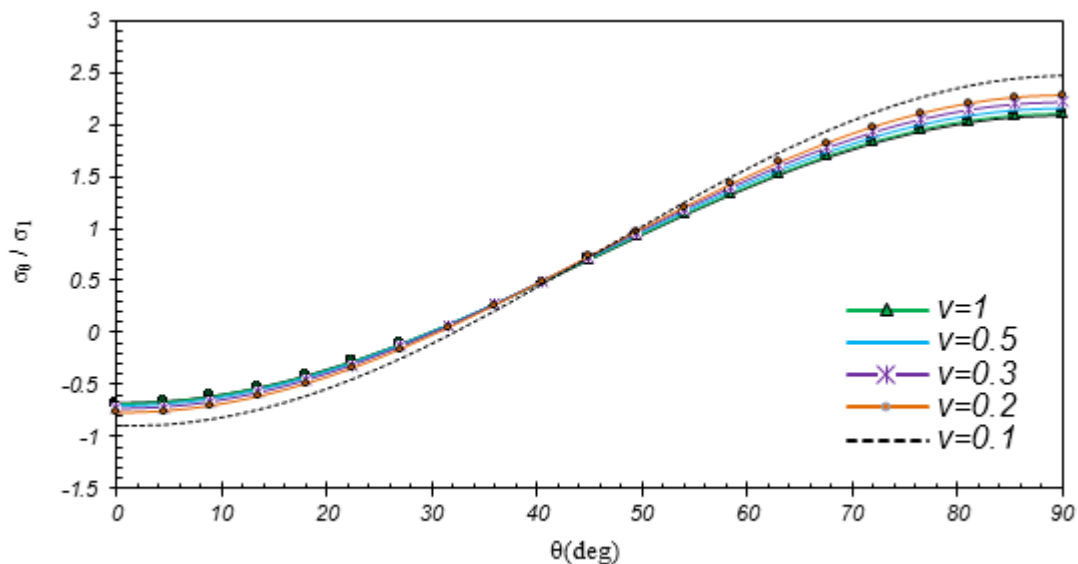


شکل ۳-۲ شماتیک ورق ناهمگن و تقسیم‌بندی آن به حلقه‌های هم مرکز همگن

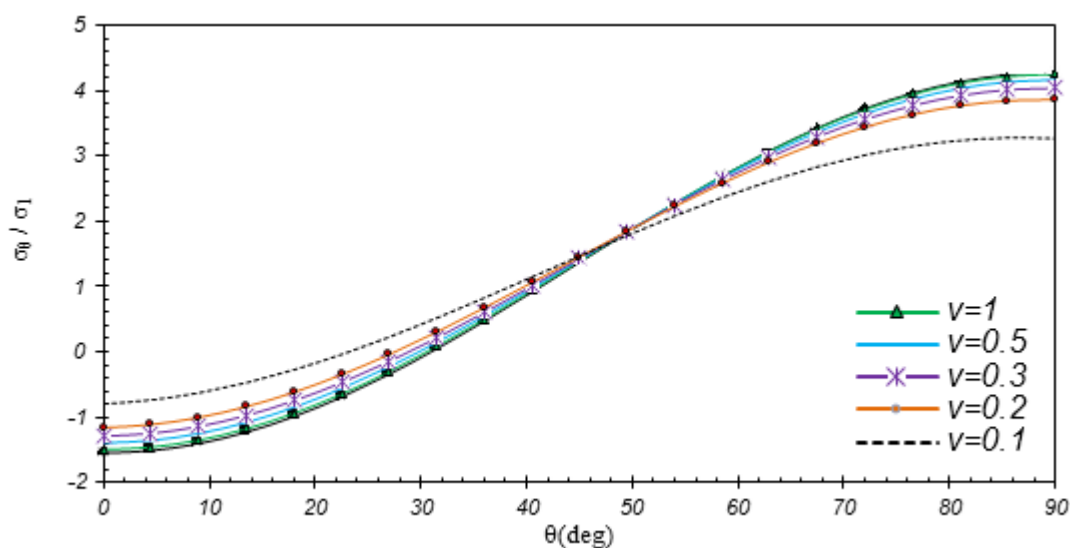
۴-۳ بررسی نتایج

همانند فصل دوم، ورق مورد بررسی با نسبت ابعادی $\frac{D}{L} = \frac{1}{20}$ ، تحت بارگذاری درون صفحه‌ای به صورت بار خارجی تک‌محوری و دومحوری مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به روابط (۲-۷۲) و (۲-۷۳) از کتاب پیلکی [۳۷] برای ورق همگن تحت کشش تک‌محوری در جهت محور ۱، در $\rho = 10\rho_0$ مقدار تنش شعاعی در راستای محور ۱ و تنش محیطی در راستای محور ۲، در حدود ۹۷٪ بار اعمالی در مرکز ورق می‌باشد؛ که در اینجا ρ_0 شعاع گشودگی دایروی است. از این رو برای بررسی اثرات بار خارجی بر روی ورق، ناحیه‌ی ناهمگنی هم اندازه با ناحیه‌ای که توزیع تنش به صورت غیر یکنواخت می‌باشد، در نظر گرفته شده است. همچنین در شکل‌های ۳-۳ و ۴-۳ تأثیر مقدار ضریب همگرایی ν بر مقدار تنش در نقاط اطراف گشودگی بررسی شده است. با توجه به نمودارها مقدار $\nu = 0/65$ انتخاب شد همچنین به

دلیل مقایسه بهتر با کار انجام شده به روش تابع پتانسیل همان عدد در نظر گرفته شده است [۵]. با وجود مقدار در نظر گرفته شده برای v ، شعاع همگرایی ده برابر شعاع گشودگی دایروی می‌شود.



شکل ۳-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف v



شکل ۳-۴ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف v ماده‌ای که در اطراف گشودگی برای هر سه ورق در نظر گرفته می‌شود، دارای خواص مکانیکی فولاد ساختمانی است. برای ورق ناهمگن نوع اول با روند افزایشی مدول الاستیسیته، از فولاد به سرامیک آلومینا و برای ورق ناهمگن نوع دوم با روند کاهش مدول الاستیسیته از فولاد به آلیاژ TA-2024 تغییر می‌کنند. جدول ۲ خصوصیات مکانیکی این سه ماده را نشان می‌دهد.

جدول ۳-۱ خواص مکانیکی مواد ورق FG

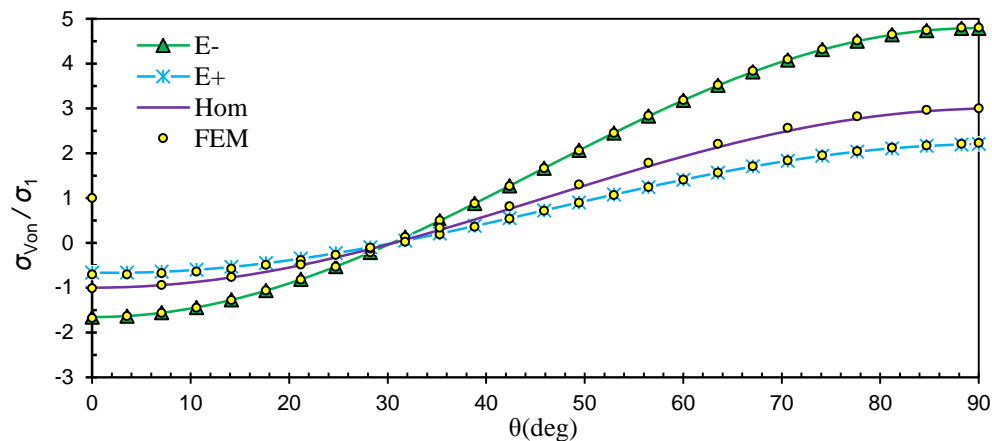
نسبت پواسون	مدول الاستیسیته (GPa)	
۰/۳۴	۲۰۰	فولاد
۰/۳۳	۷۳	آلیاژ آلومینیوم TA-2024
۰/۲۴	۴۰۳	آلومینا ARP

برای سهولت در کار، ورق با روند صعودی مدول الاستیسیته، ورق ناهمگن نوع اول و ورق با روند نزولی مدول الاستیسیته، ورق ناهمگن نوع دوم نام گذاری می شود.

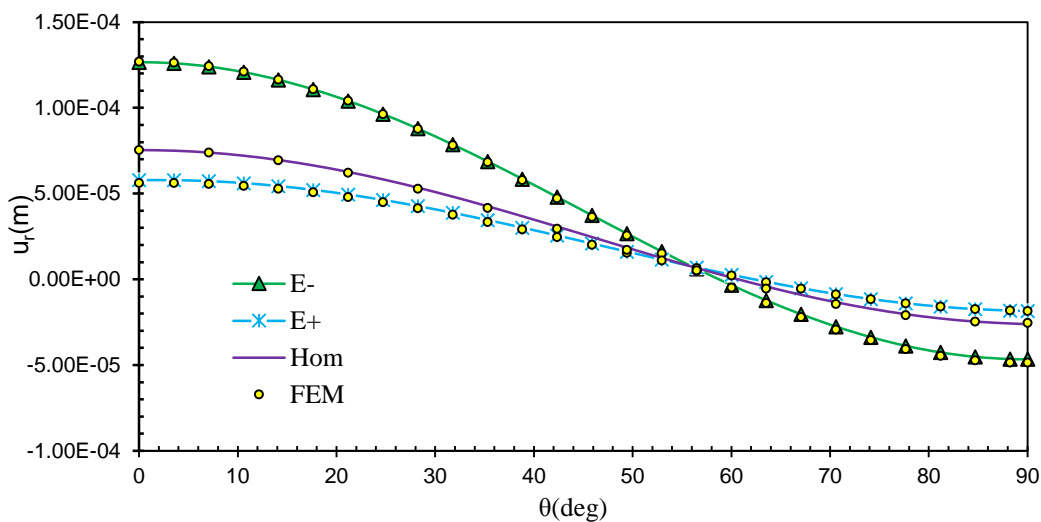
۳-۴-۱ کشش تک محوری

با توجه به شکل ۳-۵ مقدار تنش در اطراف گشودگی دایروی در ورق ناهمگن نوع دوم (E-) از ورق ناهمگن نوع اول (E+) بیشتر می باشد. با مقایسه این نتایج با نتایج ورق همگن می توان دریافت، که مقدار تنش محیطی در ورق همگن، نسبت به ورق ناهمگن نوع اول بیشتر و نسبت به ورق ناهمگن نوع دوم کمتر می باشد. در ورق ناهمگن نوع اول لایه های میانی سفتی بیشتری نسبت به لایه های میانی ورق همگن دارند؛ به همین دلیل انرژی کرنش این لایه ها بیشتر از ورق همگن بوده و مقدار کمتری از انرژی حاصل از بارگذاری در مرزهای خارجی ورق، به نقاط اطراف گشودگی وارد می شود. واضح است، که با کاهش انرژی در اطراف گشودگی از مقدار تنش در این نقاط کاسته می شود. این روند برای ورق با روند کاهشی مدول الاستیسیته به صورت معکوس می باشد. با کاهش مدول الاستیسیته در این نوع ورق مقدار جذب انرژی حاصل از بارگذاری در لایه های میانی کاهش می یابد.

در شکل ۳-۶ مشاهده می شود، که جابه جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق ناهمگن نوع اول کمتر از ورق ناهمگن نوع دوم می باشد و گشودگی دایروی پس از تغییر شکل، کمتر از شکل دایروی خارج می شود؛ علت این اتفاق، کاهش شدت تنش در اطراف گشودگی است.



شکل ۳-۵ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن و ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک-محوری

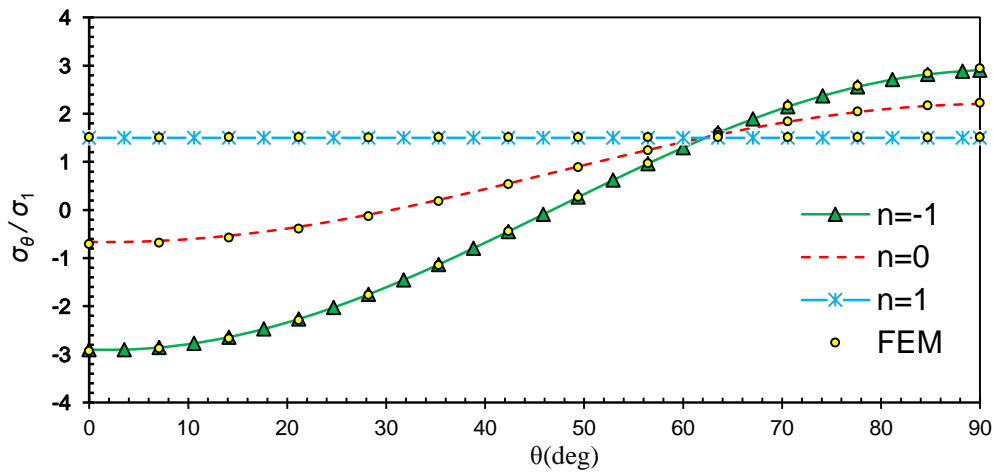


شکل ۳-۶ مقدار جابه‌جایی شعاعی در اطراف گشودگی ورق همگن و ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک-محوری

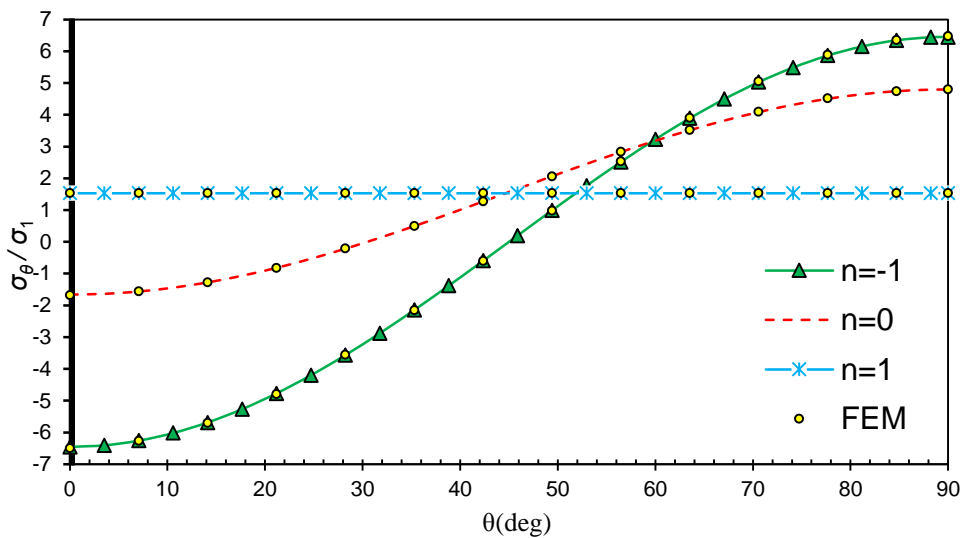
۳-۴-۲ بارگذاری دومحوری

همان‌طور که در شکل‌های ۳-۷ و ۳-۸ مشاهده می‌شود، در ورق ناهمگن نوع اول و دوم، با تغییر مقدار n از ۱ تا ۱ اختلاف میان مقدار تنش محیطی بیشینه و کمینه در اطراف گشودگی، مشابه ورق همگن (شکل ۲-۱۱) رفتار می‌کنند. همانند بارگذاری تک‌محوری، در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوری، کاهش شدید مقدار تنش در اطراف گشودگی قابل مشاهده است. با مقایسه‌ی شکل‌های ۳-۷ و ۳-۸ دریافته می‌شود، که مقدار تنش در ورق ناهمگن نوع دوم تا حدود دوبرابر ورق

ناهمگن نوع اول افزایش پیدا می‌کند. با توجه به جدول ۳-۲ در تمام حالت‌های بارگذاری، به ترتیب درصد کاهش و افزایش، مقدار تنش بیشینه در ورق ناهمگن نوع اول و نوع دوم نسبت به ورق همگن به صورت تقریبی ثابت می‌ماند. پس می‌توان نتیجه گرفت نوع و شدت بارگذاری درون صفحه‌ای، تأثیری بر درصد کاهش و یا افزایش تنش محیطی بیشینه در اطراف گشودگی ندارد.



شکل ۳-۷ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق نوع اول تحت بارگذاری دومحوری

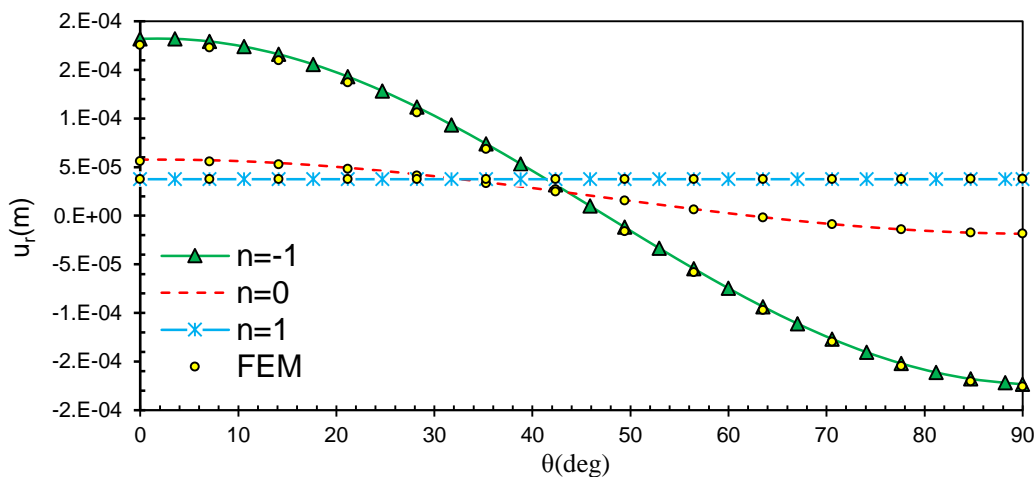


شکل ۳-۸ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق نوع دوم تحت بارگذاری دومحوری

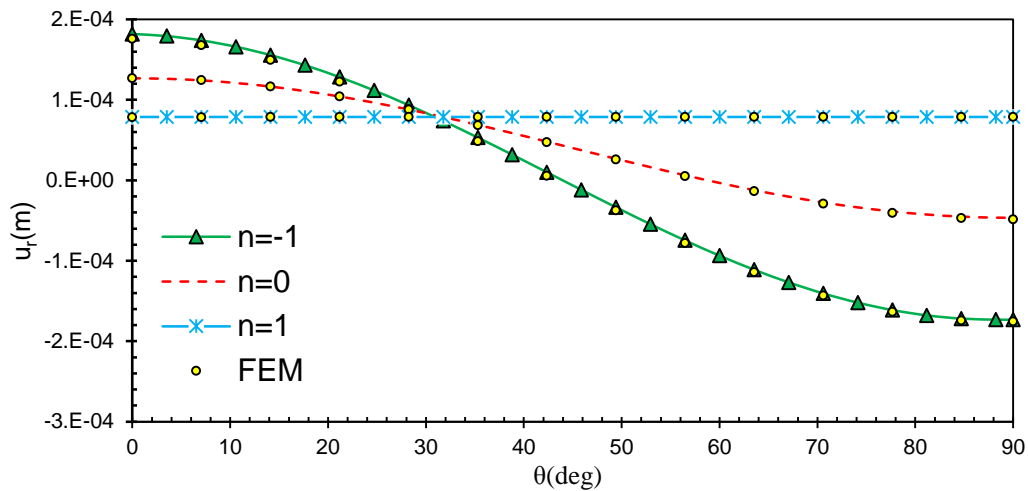
جدول ۲-۳ بیشینه تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی نسبت به فشار داخلی تحت بارگذاری دوماحوری (واحد MPa)

n	همگن	ناهمگن نوع اول	ناهمگن نوع دوم	درصد کاهش	درصد افزایش
۱	۲	۱/۵	۳/۱۴	۲۵	۵۷
۰	۳	۲/۲۱	۴/۷۹۱	۲۶/۳	۵۹/۷
-۱	۴	۲/۹۰۶	۶/۴۴۲	۲۷/۳۵	۶۱/۰۵

شکل‌های ۳-۹ و ۳-۱۰ به ترتیب مربوط به جابه‌جایی شعاعی ورق ناهمگن نوع اول و دوم می‌باشند. در ورق ناهمگن نوع اول، کاهش مقدار جابه‌جایی نقاط در اطراف گشودگی از شدت بیضوی شدن گشودگی دایروی تحت بارگذاری‌های مختلف درون صفحه‌ای می‌کاهد. در ورق ناهمگن نوع دوم این روند معکوس می‌باشد و تغییر شکل گشودگی شدت بیشتری می‌یابد. گذشته از جنس ورق‌ها و تأثیر آن بر شدت تغییر شکل، همانند ورق همگن، در ورق ناهمگن نوع اول و دوم با تغییر مقدار ضریب n از -۱ به ۱ بعد از تغییر شکل، گشودگی ابتدا به سمت دایروی شکل و سپس به سمت بیضوی شکل پیش می‌رود.



شکل ۳-۹ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری



شکل ۳-۱۰ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری

جدول ۳-۳ تغییرات بیشینه جابه‌جایی شعاعی را برای سه ورق همگن و ناهمگن مقایسه می‌کند. همانند تنش محیطی، کاهش و افزایش درصد جابه‌جایی شعاعی ورق‌های ناهمگن نسبت به ورق همگن مستقل از نوع بارگذاری درون‌صفحه‌ای می‌باشد. به‌علت صرف‌نظر کردن از تنش شعاعی نسبت به تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی، جابه‌جایی شعاعی تنها تابعی از تنش محیطی و جنس ورق می‌باشد؛ بنابراین درصد کاهش و افزایش این دو متغیر به یکدیگر نزدیک می‌باشد.

جدول ۳-۳ بیشینه جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی نسبت به فشار داخلی (واحد $10^{-5}m$)

n	همگن	ناهمگن نوع اول	ناهمگن نوع دوم	درصد کاهش در ورق نوع اول	درصد افزایش در ورق نوع دوم
۱	۵/۰۲	۳/۷۶	۷/۸۵	۲۵/۱	۵۶/۳۷
۰	۷/۵۶	۵/۷۸	۱/۲۷	۲۳/۵	۸۳/۲
-۱	۱/۰۱	۱/۷۳	۱/۷۶	۷۱/۳	۷۴/۲

با توجه به شکل‌های ۳-۷ تا ۳-۱۰ و مقایسه نتایج حاصل از حل پیشنهادی و حل نرم‌افزاری اجزای محدود می‌توان نتیجه گرفت، که همانند کشش تک‌محوری حل مورد بررسی برای بارگذاری دوماحوری دقت قابل قبولی دارد.

۳-۵ جمع بندی

در این فصل، تابع ناهمگنی مورد استفاده در این تحقیق معرفی و مزایا و خصوصیات آن بررسی شد. همچنین با بررسی ورق بلند ناهمگن و همگن مشخص شد، ورق ناهمگن نوع اول با خصوصیات مکانیکی تعریف شده در جدول ۳-۱، باعث کاهش مقدار تنش بین ۲۵-۳۸ درصد با توجه به نوع بارگذاری می شود. این امر برای ورق ناهمگن نوع دوم معکوس می باشد و مقدار تنش حدود ۶۰ درصد افزایش می یابد.

فصل ۴ ورق همگن و ناهمگن تحت بار فشاری

در داخل گشودگی

۱-۴ پیش‌گفتار

در این فصل علاوه بر بارگذاری درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی، فشار یکنواخت درون گشودگی دایروی ورق همگن و ناهمگن وارد می‌شود. هدف این فصل، بررسی تأثیر بارگذاری مورد نظر بر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی است. در ابتدا تعمیم حل تحلیلی (۲-۷۲) و (۲-۷۳) موجود مراجع در هنگام حضور بارگذاری درون گشودگی بررسی می‌شود. سپس نتایج حاصل از ورق همگن و ناهمگن تحت کشش تک‌محوری و دو‌محوری به همراه بارگذاری فشاری یکنواخت استخراج و مطالعه می‌شوند.

۲-۴ معادلات حاکم

در این فصل علاوه بر بارگذاری در مرزهای خارجی، برای ورق همگن و ناهمگن، فشار در داخل گشودگی نیز وارد محاسبات خواهد شد. بار فشاری به صورت یکنواخت به تمام نقاط اطراف گشودگی دایروی وارد می‌شود. برای حل این مسأله نیاز به تغییرات زیادی در روند حل پیشنهادی نیست؛ تنها کافیست که در رابطه‌ی مربوط به مرز داخل گشودگی مقدار فشار وارد بر گشودگی اضافه شود.

در این دو رابطه، تأثیر بارگذاری فشار یکنواخت در داخل گشودگی دایروی دیده نشده است. برای تعمیم این حل تحلیلی برای بارگذاری مورد نظر در این فصل، از رابطه‌ی تابع تنش ایری، به دست آمده از معادله‌ی بای‌هارمونیک استفاده می‌شود.

$$\nabla^4 U = 0 \quad (1-4)$$

حل پیشنهادی برای تابع تنش ایری [۴۶] به صورت زیر می‌باشد:

$$U = [c_1 \ln(\rho) + c_2] \rho^2 + [c_3 \ln(\rho) + c_4] + \left[(c_5 \rho^2 + c_6) \rho^2 + \left(\frac{c_7}{\rho^2} \right) + c_8 \right] \cos(2\theta) \quad (2-4)$$

رابطه‌ی تابع تنش ایری با تنش‌های نرمال و برشی در مختصات قطبی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \\ \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (3-4)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۲-۴) در (۳-۴) مقادیر تنش برحسب ضرایب مجهول حل پیشنهادی به دست

می‌آیند.

$$\begin{cases} \sigma_\rho = c_1 (1 + 2 \ln(\rho)) + 2c_2 + \frac{c_3}{\rho^2} - \left(2c_6 + \frac{6c_7}{\rho^4} + \frac{4c_8}{\rho^2} \right) \cos(2\theta) \\ \sigma_\theta = c_1 (3 + 2 \ln(\rho)) + 2c_2 - \frac{c_3}{\rho^2} + \left(2c_6 + 2c_5 \rho^2 + \frac{6c_7}{\rho^4} \right) \cos(2\theta) \\ \tau_{\rho\theta} = \left(6c_5 \rho^2 + 2c_6 - \frac{6c_7}{\rho^4} - \frac{2c_8}{\rho^2} \right) \sin(2\theta) \end{cases} \quad (4-4)$$

شریط مرزی ورق در بی‌نهایت برابر σ_1 ، σ_2 و τ_{12} می‌باشد. با استفاده از روابط تبدیل تنش، این

مقادیر در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) + \tau_{12} \sin(2\theta) \quad (5-4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) - \tau_{12} \sin(2\theta) \quad (6-4)$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\theta) + \tau_{12} \cos(2\theta) \quad (7-4)$$

با قرار دادن $\rho = \pm\infty$ در رابطه‌ی (۴-۴) داریم:

$$\rho = \infty \Rightarrow \begin{cases} \sigma_\rho = 2c_2 - 2c_6 \cos(2\theta) \\ \sigma_\theta = +2c_2 + (2c_6 + 2c_5 \rho^2) \cos(2\theta) \\ \tau_{\rho\theta} = (6c_5 \rho^2 + 2c_6) \sin(2\theta) \end{cases} \quad (8-4)$$

باتوجه به معین بودن مقدار تنش محیطی و برشی در نقاط دور از گشودگی در بی‌نهایت، مقدار

ضرایب c_1 و c_5 برابر صفر هستند. با برابر قرار دادن روابط (۵-۴) تا (۷-۴) با رابطه‌ی (۸-۴) داریم:

$$c_6 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4}, \quad c_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{4}, \quad c_5 = 0, \quad c_1 = 0$$

با قرار دادن شرایط مرزی در اطراف گشودگی در رابطه‌ی (۳-۴) روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$\rho = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_\rho = -P \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -P = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{c_3}{\rho_0^2} - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + 6 \frac{c_7}{\rho_0^4} + \frac{4c_8}{\rho_0^2} \right) \cos(2\theta) \\ 0 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} - 6 \frac{c_7}{\rho_0^4} - \frac{2c_8}{\rho_0^2} \right) \sin(2\theta) \end{cases} \quad (۹-۴)$$

با مرتب سازی و تجزیه‌ی روابط (۸-۴) ضرایب مجهول به‌صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$c_3 = \rho_0^2 \left(-P - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right), \quad c_8 = \rho_0^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right), \quad c_7 = \rho_0^4 \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right)$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده برای ضرایب، روابط (۳-۴) به‌صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) - P \frac{\rho_0^2}{\rho^2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left(1 + 3 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^4 - 4 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \right) \cos(2\theta) \quad (۱۰-۴)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 + \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) + P \frac{\rho_0^2}{\rho^2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left(1 + 3 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^4 \right) \cos(2\theta) \quad (۱۱-۴)$$

$$\tau_{\rho\theta} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin(2\theta) \quad (۱۲-۴)$$

با به‌دست آمدن این روابط، امکان مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل تحلیلی پیشنهادی و روابط بالا وجود دارد.

۳-۴ بررسی نتایج

درحالتی که ورق تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی بوده و فشار در داخل گشودگی صفر باشد (گشودگی عاری از بار است)؛ تنش‌های شعاعی و برشی در مرز گشودگی صفر هستند؛ ولی در صورت اعمال بار فشاری در مرز گشودگی دایروی، مقدار عددی تنش شعاعی در اطراف گشودگی، برابر مقدار بار فشاری وارد شده بر آن است. به همین دلیل علاوه بر بررسی مجزای تنش محیطی در اطراف گشودگی دایروی، از فرمول‌بندی معیار تسلیم فن‌میزس^۱، که در رابطه‌ی (۴-۱۳) نمایش داده شده است، برای محاسبه‌ی تنش معادل در این نقاط استفاده می‌شود؛ تا علاوه بر تنش محیطی در صورت

1-Von Mises yielding criterion

حضور تنش شعاعی در اطراف گشودگی بتوان به صورت کلی تنش را در نقاط مختلف، مورد بررسی قرار داد.

$$\sigma_{Von} = \sqrt{\sigma_{\rho}^2 + \sigma_{\theta}^2 - (\sigma_{\rho}\sigma_{\theta})} \quad (13-4)$$

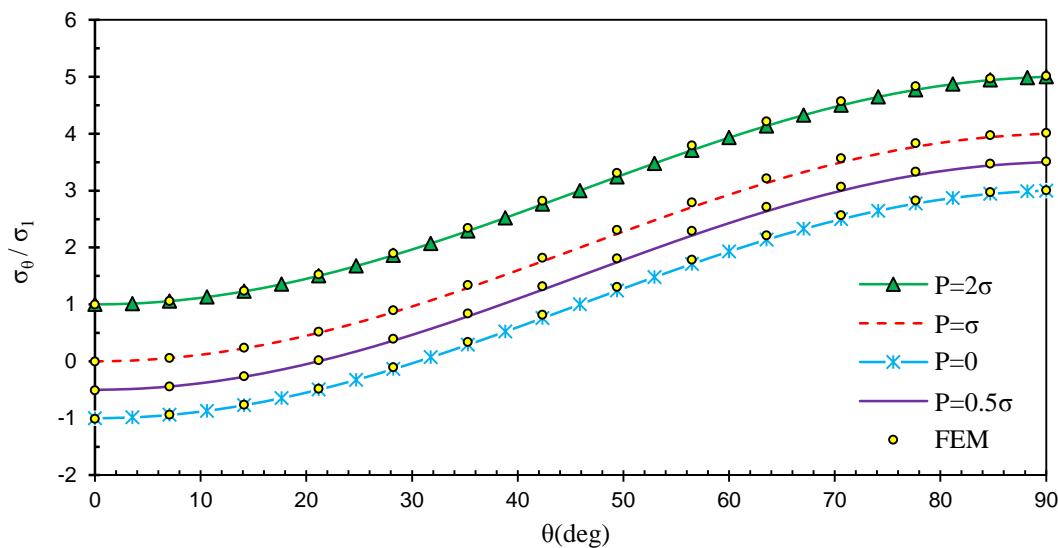
در این بخش نتایج حاصل از بارگذاری درون صفحه‌ای در مرزهای خارجی و فشار یکنواخت در مرز

گشودگی بررسی می‌شود.

۱-۳-۴ کشش تک‌محوری

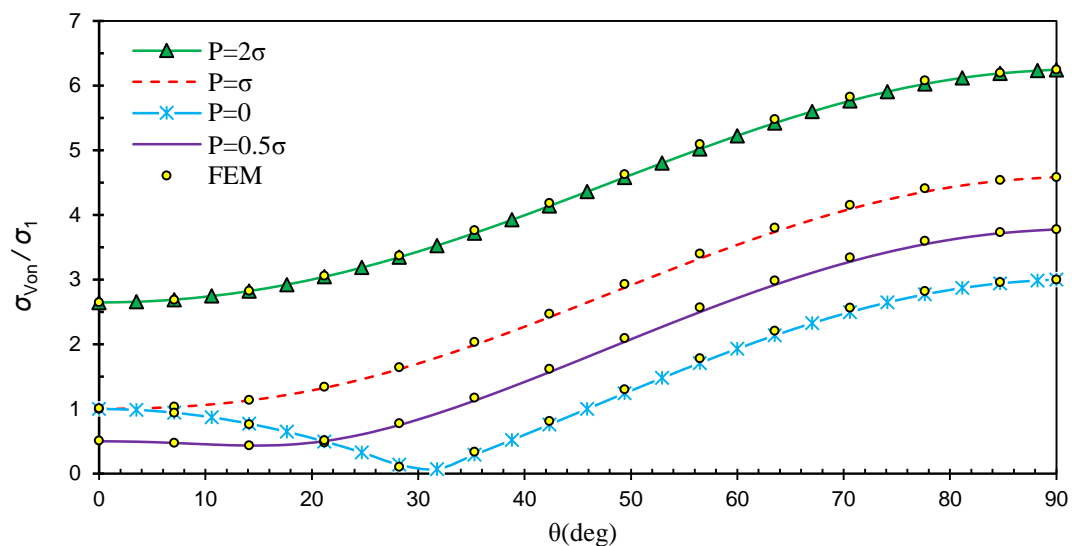
الف- ورق همگن

با توجه به شکل ۱-۴ می‌توان دریافت، که حضور فشار یکنواخت در داخل گشودگی دایروی ورق، باعث افزایش یکنواخت تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی می‌شود. این مقدار افزایش برابر مقدار فشار یکنواخت وارد شده به داخل گشودگی است. با مقایسه‌ی حل پیشنهادی و حل تحلیلی، برای هر کدام از بارگذاری‌ها، می‌توان دقت بالای حل تحلیلی پیشنهادی و تحلیل نرم‌افزاری انجام شده را تأیید نمود.



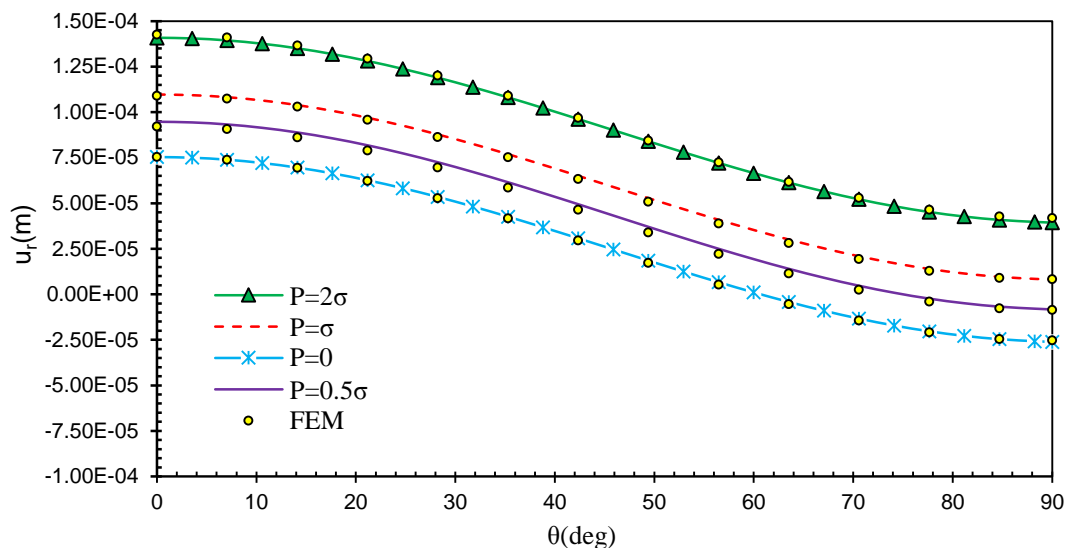
شکل ۱-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک‌محوری

با توجه به حضور تنش شعاعی در اطراف گشودگی همان‌طور که گفته شد، از معیار فن‌میزس برای به‌دست آوردن مقدار تنشی واحد در نقاط اطراف گشودگی استفاده می‌شود. با توجه به شکل ۲-۴ افزایش مقدار تنش فن‌میزس نسبت به تنش محیطی به‌طور کامل مشهود می‌باشد. حفظ شکل کلی نمودار تنش معادل نسبت به تنش محیطی نشان‌دهنده‌ی ثابت بودن مقدار تنش شعاعی در تمام زوایای گشودگی است. نزدیکی جواب تحلیل عددی و حل پیشنهادی، دقت خوب حل مورد بررسی را نشان می‌دهد. در نمودار $P=0$ و $P=0.5\sigma$ تفاوتی در رفتار تنش مشاهده می‌شود. در حالت $P=0$ به علت ذات تنش معادل فن‌میزس، که نمی‌تواند مقدار منفی بپذیرد، در نقاطی که تنش محیطی مقادیر منفی می‌پذیرد، تنش معادل فن‌میزس به‌صورت قدر مطلق، خود را نشان می‌دهد. در مورد $P=0.5\sigma$ در نقاطی که تنش محیطی دارای مقادیر نزدیک به صفر است؛ از جملاتی که این تنش در آن حضور دارند، می‌توان صرف نظر کرد؛ زیرا تنش شعاعی در تمام نقاط اطراف گشودگی، دارای یکنواخت 0.5σ و در نتیجه نمودار تنش معادل نیز در این نقاط تقریباً یکنواخت و برابر 0.5σ است.



شکل ۲-۴ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک‌محوری

در مورد شکل ۳-۴ با مقایسه‌ی نمودارهای مربوط به بارگذاری‌های فشاری $P=0$ می‌توان نتیجه گرفت، که همانند نمودارهای تنش محیطی مقدار افزایش جابه‌جایی در تمام نقاط به صورت یکسان رخ داده است. این رفتار به علت حضور تنش شعاعی یکنواخت در اطراف گشودگی است.



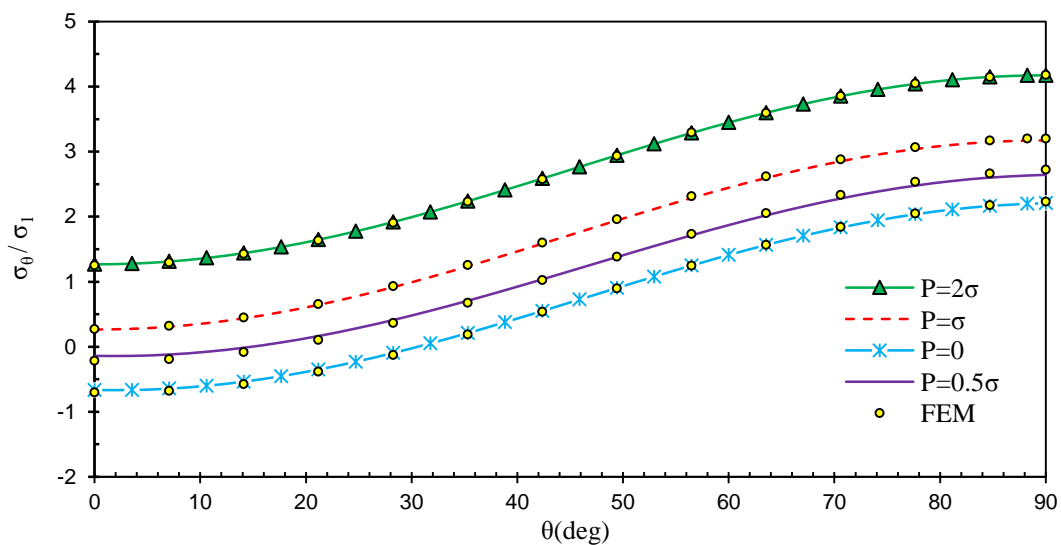
شکل ۳-۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک‌محوری

ب- ورق ناهمگن نوع اول

در شکل ۴-۴ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی دایروی در ورق ناهمگن نوع دوم، همانند ورق همگن با افزایش مقدار فشار درون گشودگی افزایش می‌یابد؛ ولی این مقدار افزایش برابر با مقدار بار فشاری نیست. با توجه به جدول ۴-۱ در تمامی مقادیر بار فشاری در داخل گشودگی، تنش محیطی حدود $0/96-1/05$ مقدار بار فشاری افزایش می‌یابد. به علت آنکه فشار وارد شده در گشودگی به‌طور مستقیم به نقاط اطراف گشودگی وارد می‌شود، افزایش سفتی لایه‌های میانی در ورق ناهمگن نوع اول، تأثیر چندانی بر مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر بارگذاری فشاری ندارد.

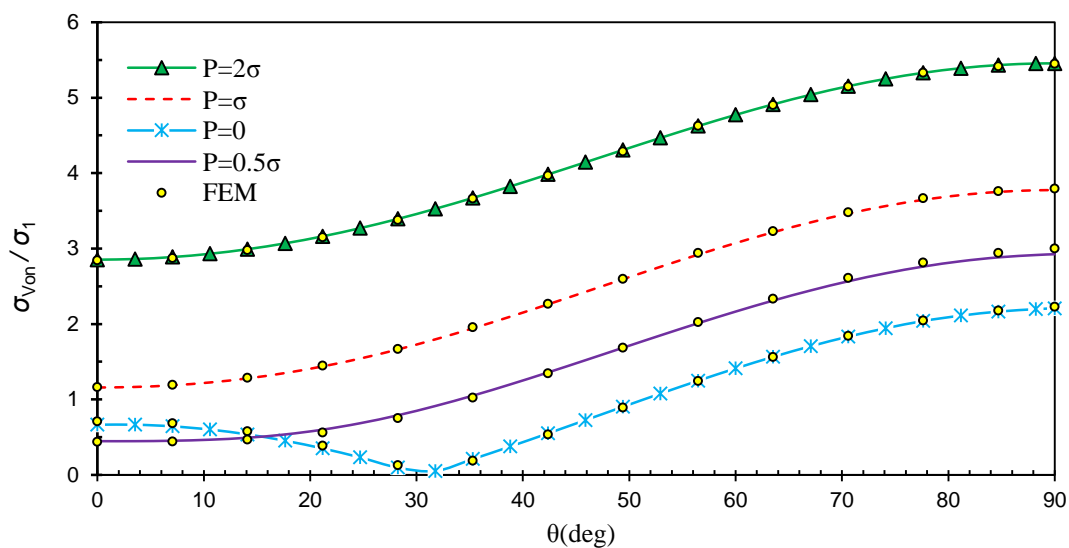
جدول ۴-۱ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به فشار داخلی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری (واحد MPa)

درصد افزایش	$\sigma_{\theta_{P=0}} - \sigma_{\theta}$	$\sigma_{\theta_{P=0}}$	σ_{θ}	P
۱۰/۵	۰/۵۲۵	-۰/۶۶۵	-۰/۱۴۰	۰/۵
۳۹/۸	۰/۳۹۸	-۰/۶۶۵	۰/۲۶۷	۱
۹۶/۶	۱/۸۵۳	-۰/۶۶۵	۱/۲۶۷	۲



شکل ۴-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوری

رفتار تنش معادل فن‌میزس برای ورق ناهمگن نوع اول در شکل ۴-۵، همانند ورق همگن می‌باشد. هرچند تفاوت‌های بیان شده در توزیع تنش محیطی برای هر دو نوع از ورق ناهمگن، در تنش معادل فن‌میزس نیز مشاهده می‌شود. مقدار تنش شعاعی در اطراف گشودگی ورق مستقل از جنس ورق و وابسته به بارگذاری فشاری می‌باشد. علت این رفتار، ارضای معادله‌ی تعادل در نقاط اطراف گشودگی می‌باشد.

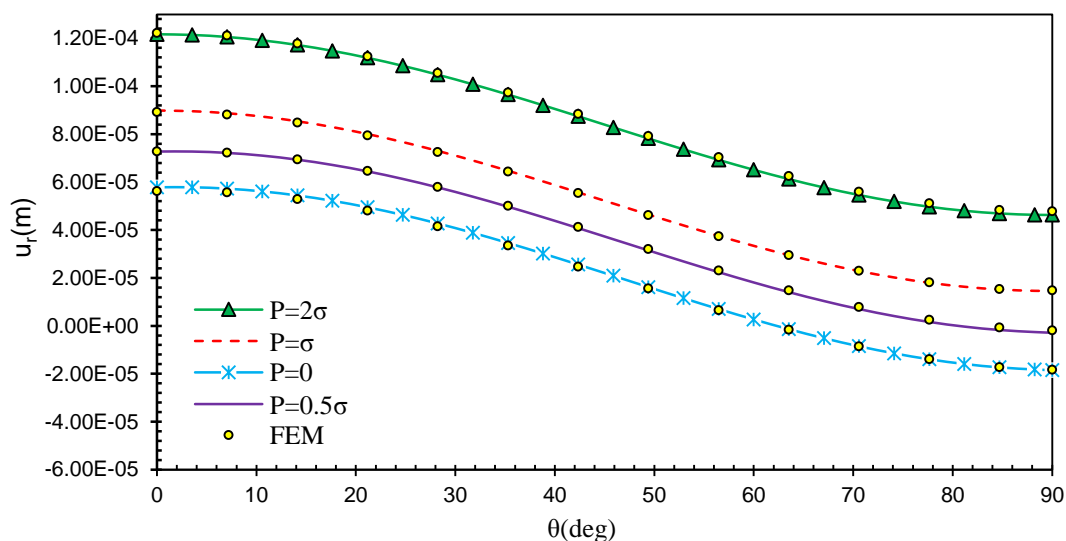


شکل ۴-۵ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک محوری

شکل ۴-۶ نشان می دهد، که جابه جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی این ورق نسبت به افزایش

بارگذاری فشار یکنواخت، همانند ورق همگن با نرخ افزایشی همراه است. ولی مقدار این افزایش همانند

تنش محیطی کمتر از ورق همگن می باشد.



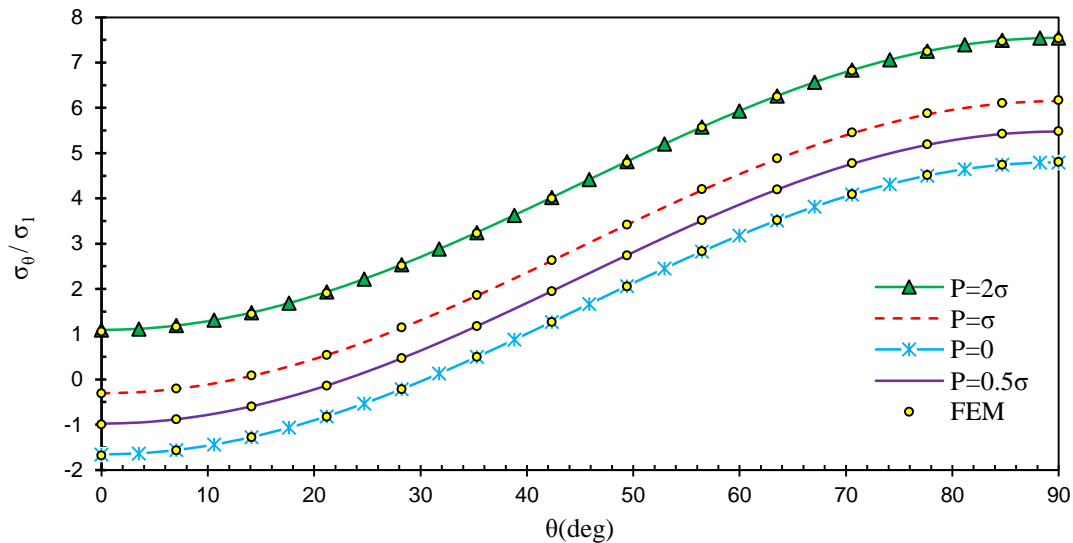
شکل ۴-۶ جابه جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک محوری

ج- ورق ناهمگن نوع دوم

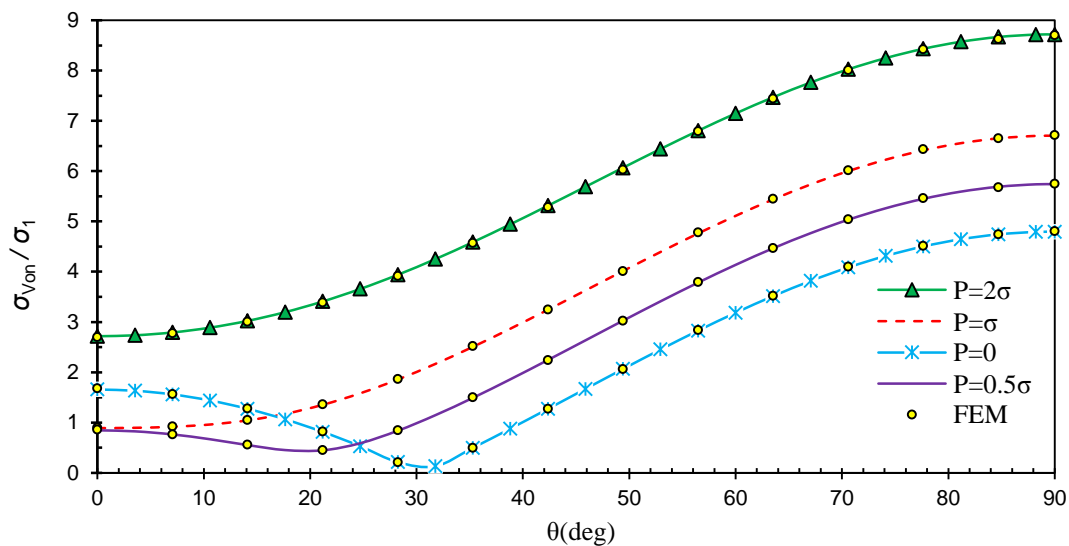
در شکل ۷-۴ و ۸-۴ مربوط به ورق ناهمگن نوع دوم، مانند ورق همگن، با افزایش مقدار فشار داخلی مقدار تنش محیطی و تنش معادل فن میزس افزایش می‌یابد. برخلاف ورق ناهمگن نوع اول، در این نوع ورق مقدار افزایش تنش محیطی و به سبب آن تنش معادل فن میزس، بر اثر بارگذاری فشاری در درون گشودگی، بیشتر از مقدار بار فشاری می‌باشد. در جدول ۲-۴ مشاهده می‌شود، که این مقدار افزایش تنش محیطی نسبت به مقدار بار فشاری، بین ۱۳۶-۱۳۷ درصد می‌باشد.

جدول ۲-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به فشار داخلی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری (واحد MPa)

P	σ_{θ}	$\sigma_{\theta_{P=0}}$	$\sigma_{\theta_{P=0}} - \sigma_{\theta}$	درصد افزایش σ_{θ}
۰/۵	-۰/۹۷۷	-۱/۶۵۷	۰/۶۸۰	۱۳۶
۱	-۰/۳۰۷	-۱/۶۵۷	۱/۳۵	۱۳۵
۲	۱/۰۹۲	-۱/۶۵۷	۲/۷۴۹	۱۳۷

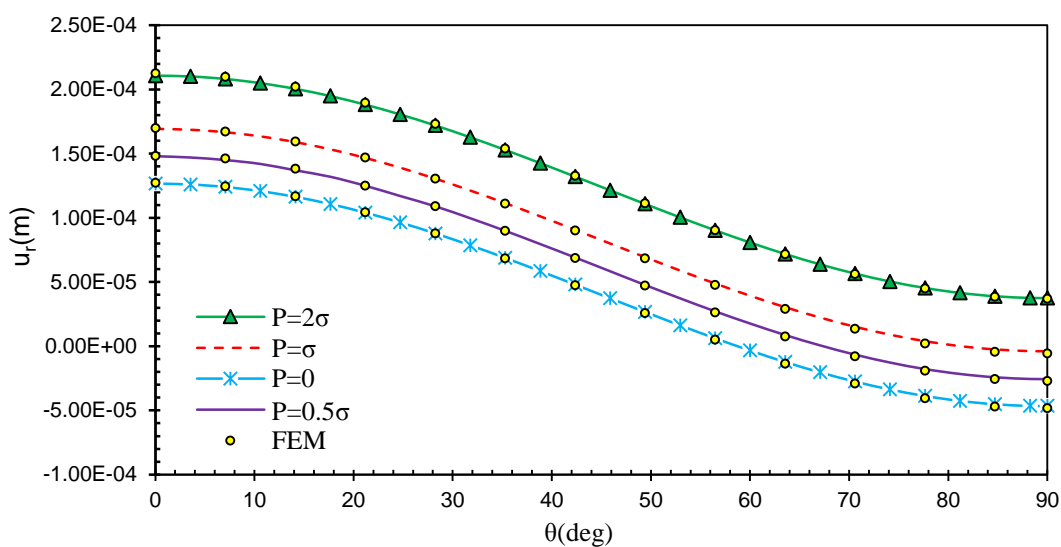


شکل ۷-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوری



شکل ۴-۸ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک محوری

شکل ۴-۹ جابه جایی شعاعی در ورق ناهمگن نوع دوم را نشان می دهد؛ که در مقایسه با ورق ناهمگن نوع اول می توان دریافت، که مقدار بیضوی شکل شدن گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم بیشتر از ورق نوع اول است؛ ولی حضور بار فشاری تغییری در اختلاف جابه جایی نقاط نسبت به هم در هر دو نوع ورق ایجاد نمی کند. علت این امر حضور مؤلفه ی تنش شعاعی و مستقل بودن آن نسبت به زاویه (θ) است.

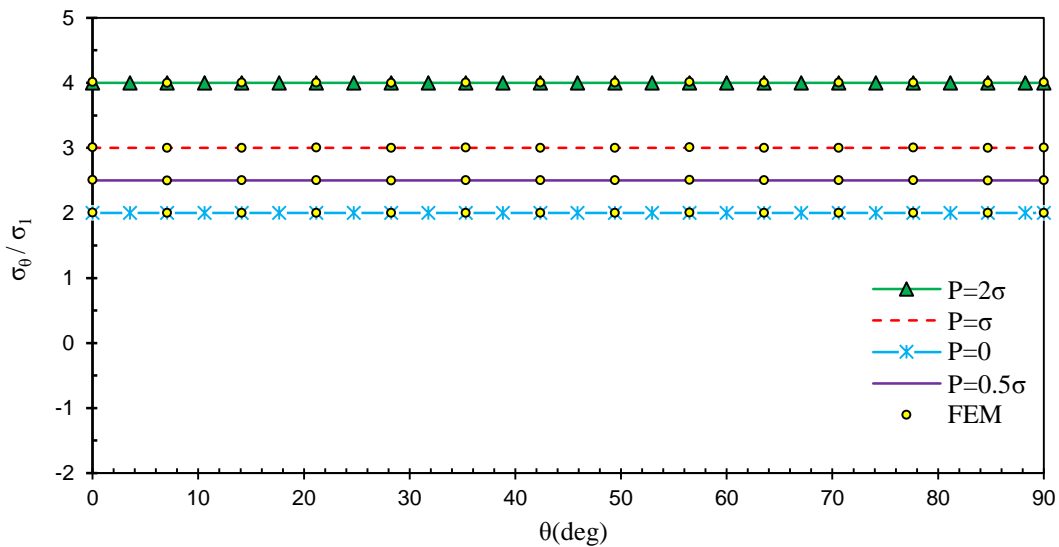


شکل ۴-۹ جابه جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک محوری

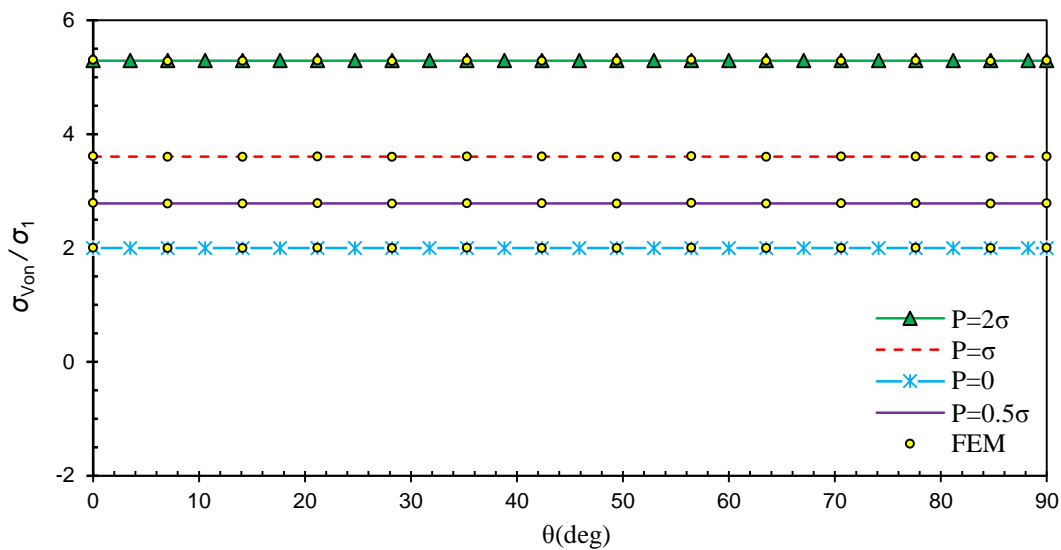
۲-۳-۴ بارگذاری دوماحوری $n=1$

الف- ورق همگن

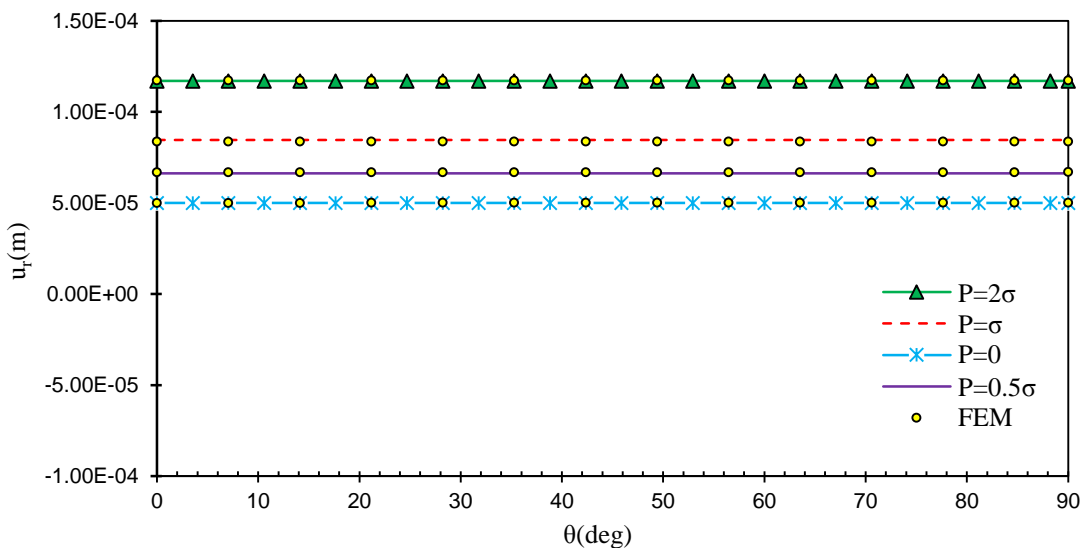
در شکل ۱۰-۴ دقت بالای حل تحلیلی پیشنهادی برای ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری با $n=1$ و بار فشاری داخل گشودگی مشاهده می‌شود. شکل‌های ۱۱-۴ و ۱۲-۴ مربوط به تنش معادل فن میزس دارای روند و نتایج مشابهی هستند؛ به‌غیراز شکل مربوط به $P=0$ و $P=0.5$ ، که به دلیل مثبت بودن مقادیر تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی، در شکل ۱۱-۴ تنش معادل فن میزس بر خلاف بارگذاری کشش تک‌محوری در تمام مقادیر فشار داخل گشودگی روندی مشابه دارد. شکل‌های ۱۲-۴ و ۳-۴ نیز نتایجی یکسان را برای جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری‌های فشاری مشابه، به همراه دارند.



شکل ۱۰-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$



شکل ۱۱-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دومحوری $n=1$



شکل ۱۲-۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دومحوری $n=1$

ب- ورق ناهمگن نوع اول

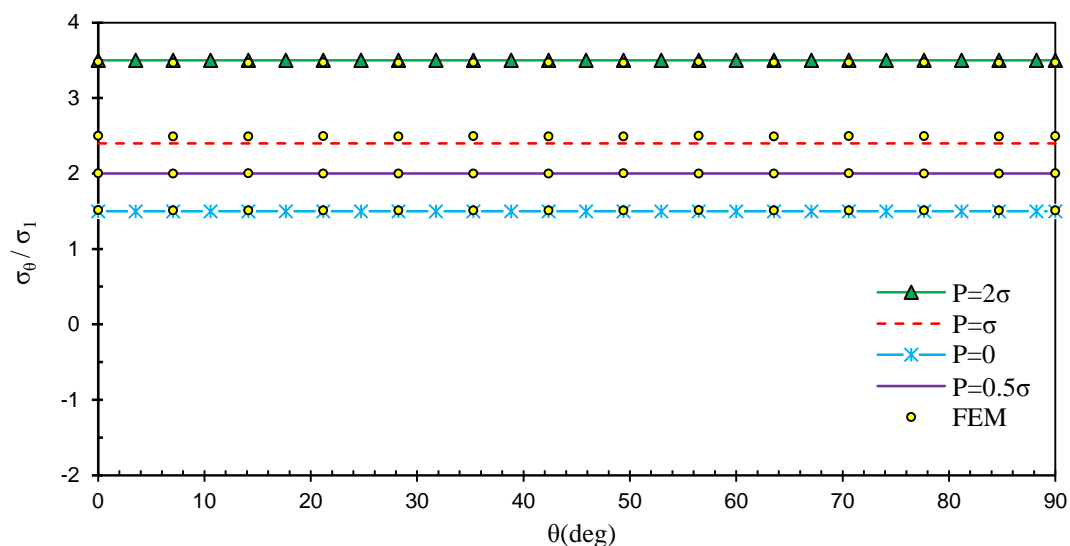
ورق ناهمگن نوع اول، همانند بار کشش تک‌محوری، در بارگذاری دومحوری $n=1$ نیز رفتاری مشابه

نسبت به بارگذاری فشاری نشان می‌دهد. در شکل ۱۳-۴ این رفتار مشهود است. با توجه به جدول ۴-۴

۳ مقدار افزایش تنش محیطی در ورق ناهمگن نوع اول تحت این بارگذاری، حدود ۰/۹۵ مقدار بار فشاری وارد شده بر گشودگی افزایش می‌یابد.

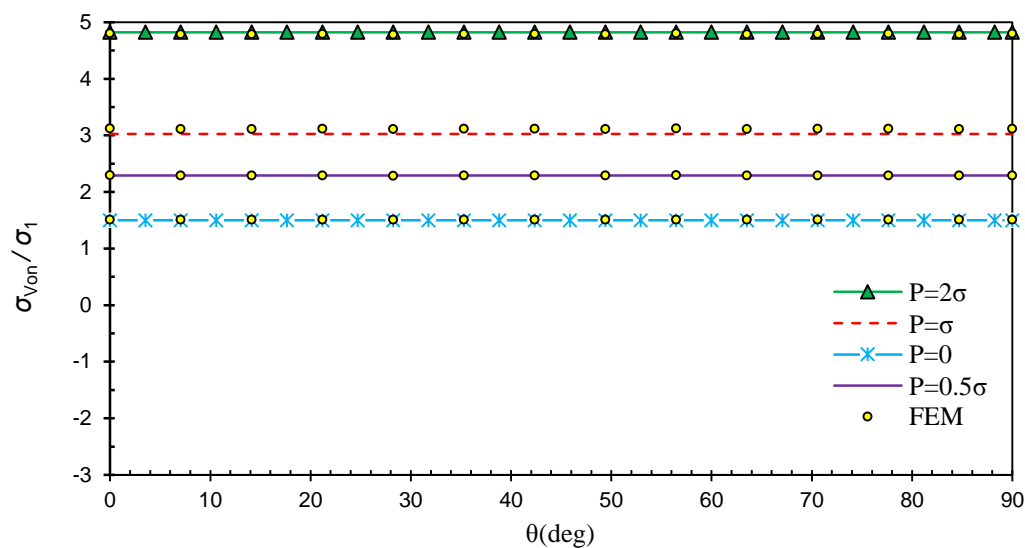
جدول ۳-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به فشار داخلی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری (واحد MPa)

درصد افزایش σ_{θ}	$\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta_{P=0}}$	$\sigma_{\theta_{P=0}}$	σ_{θ}	P
۱۰۰	۰/۵۰۱	۱/۴۹۹	۲	۰/۵
۹۰	۰/۹۰۰	۱/۴۹۹	۲/۳۹۹	۱
۱۰۰	۲	۱/۴۹۹	۳/۴۹۹	۲

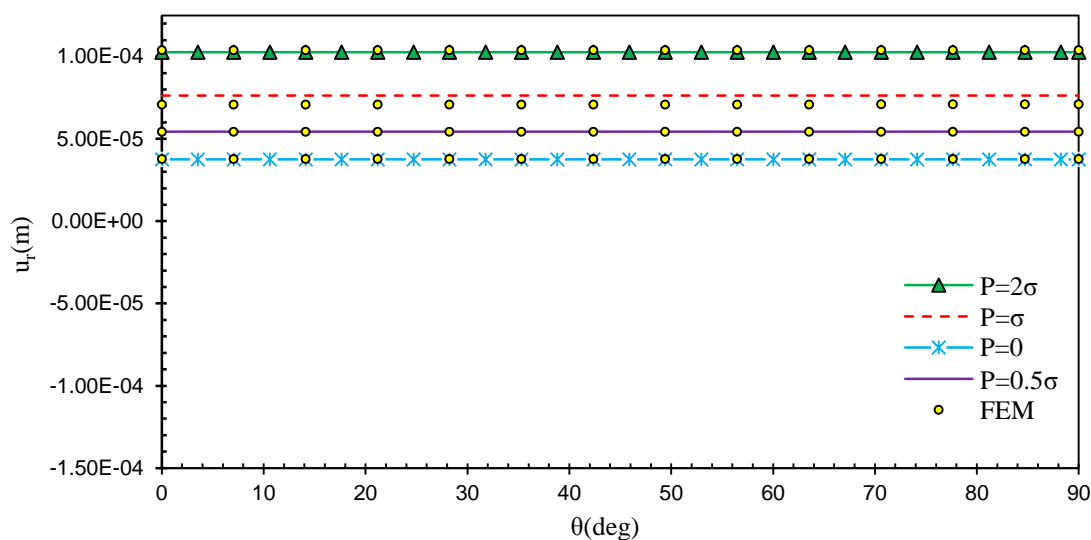


شکل ۳-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$

شکل ۳-۴ و ۳-۵ به ترتیب توزیع تنش معادل فن میزس و جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی ورق تحت بارگذاری مورد بررسی هستند. در این نوع بارگذاری در ورق ناهمگن نوع اول، تنش معادل فن میزس رفتاری مشابه ورق همگن را از خود نشان می‌دهد. افزایش یکنواخت تنش‌ها و جابه‌جایی شعاعی، نشان‌دهنده‌ی مستقل بودن تنش محیطی و شعاعی حاصل از بار فشاری است.



شکل ۴-۱۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$

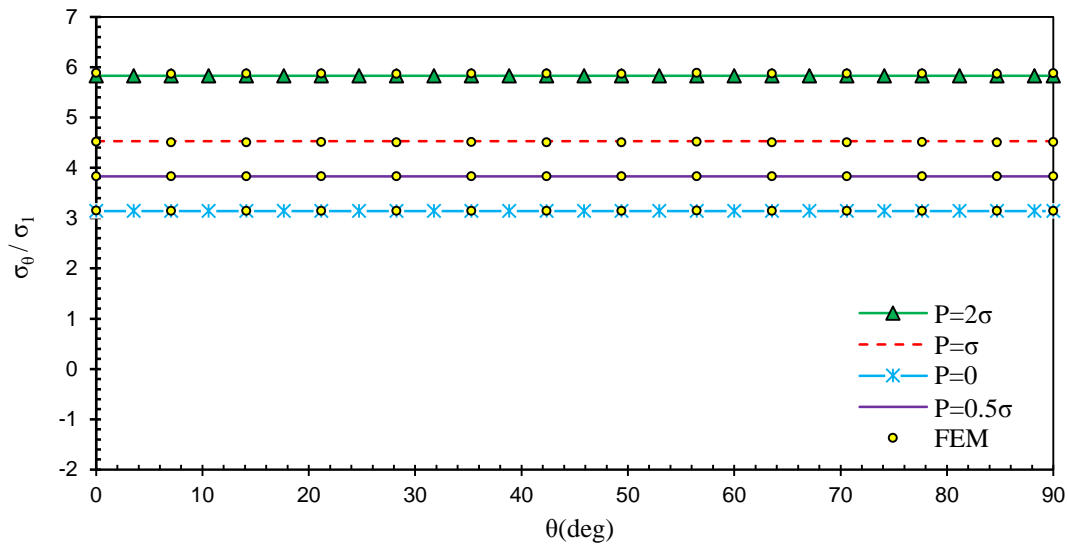


شکل ۴-۱۵ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$

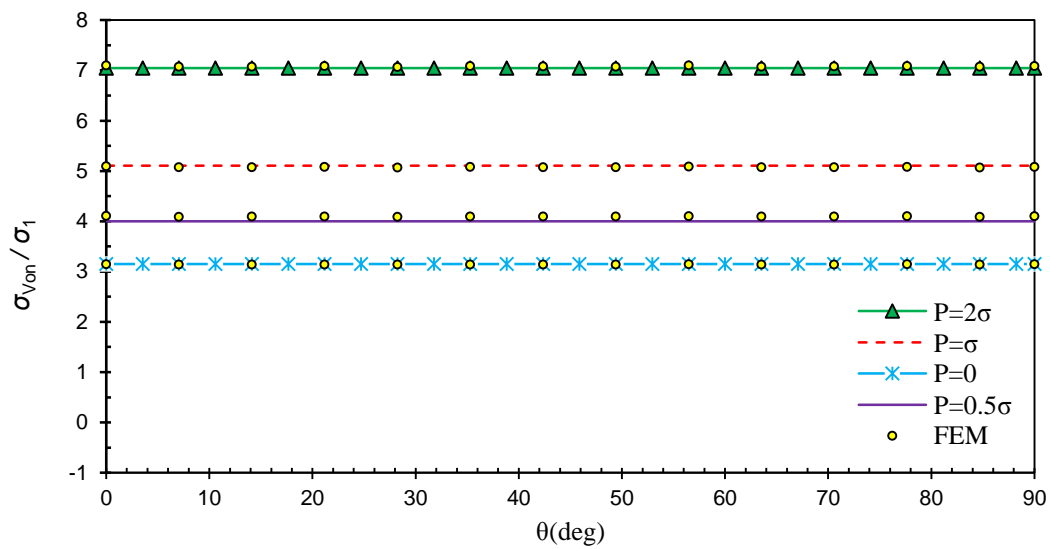
ج- ورق ناهمگن نوع دوم

با توجه به شکل‌های ۴-۱۶، ۴-۱۷ و ۴-۱۸ مشاهده می‌شود، که روند افزایش مقادیر تنش و جابه‌جایی، مشابه ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوری و بار فشاری درون گشودگی، است. با این

تفاوت که در بارگذاری دومحوری $n=1$ ، مقدار افزایش تنش محیطی $1/38$ بیشتر از حالت بدون فشار داخلی می باشد (جدول ۴-۴).



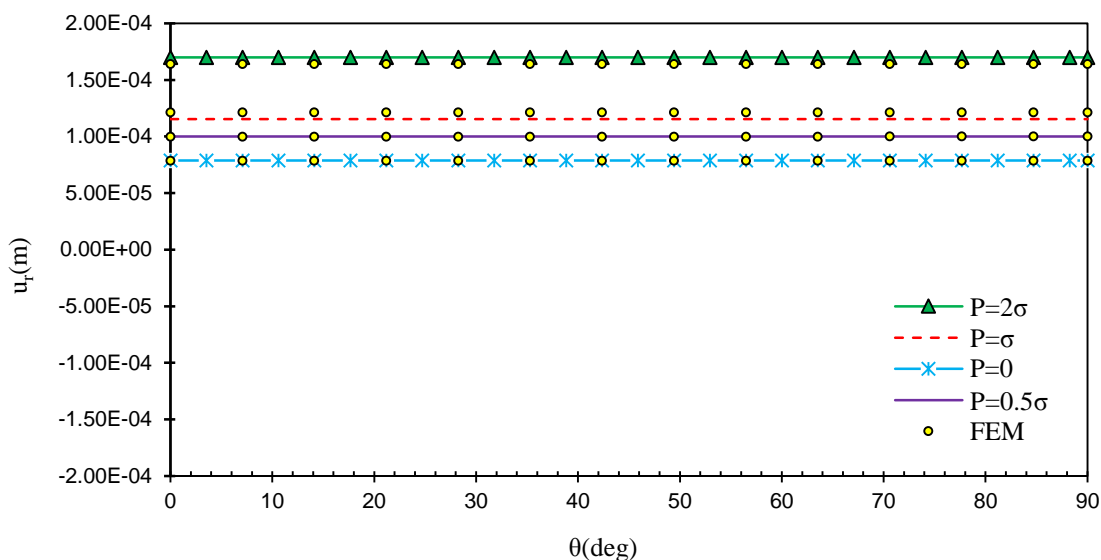
شکل ۴-۱۶ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوری $n=1$



شکل ۴-۱۷ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوری $n=1$

جدول ۴-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری (واحد MPa)

درصد افزایش σ_{θ}	$\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta_{P=0}}$	$\sigma_{\theta_{P=0}}$	σ_{θ}	P
۱۳۸	۰/۶۹	۳/۱۴	۳/۸۳	۰/۵
۱۳۹	۱/۳۹	۳/۱۴	۴/۵۳	۱
۱۳۴/۵	۲/۶۹	۳/۱۴	۵/۸۳	۲



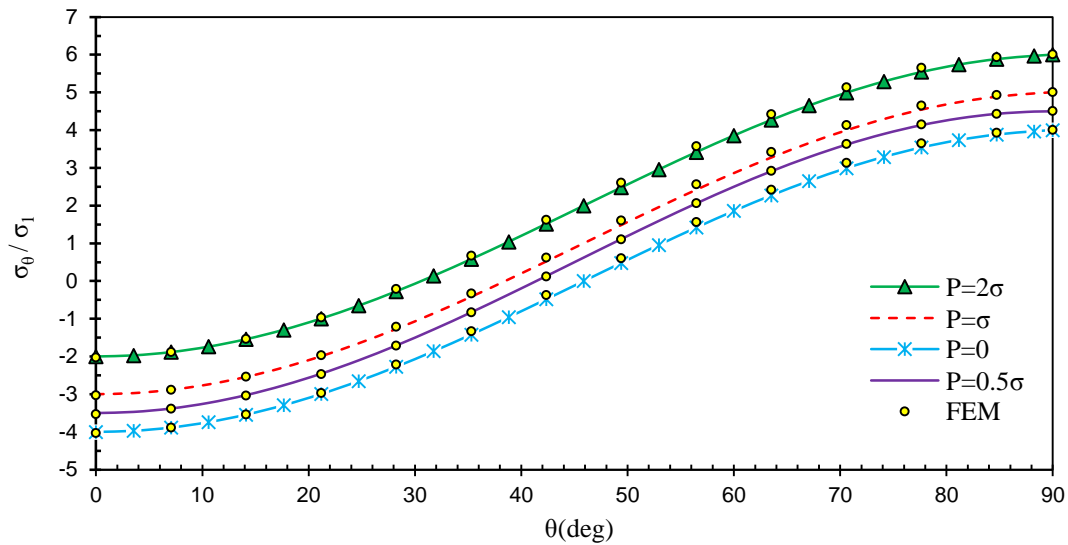
شکل ۴-۱۸ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$

۴-۳-۳ بارگذاری دوماحوری $n=-1$

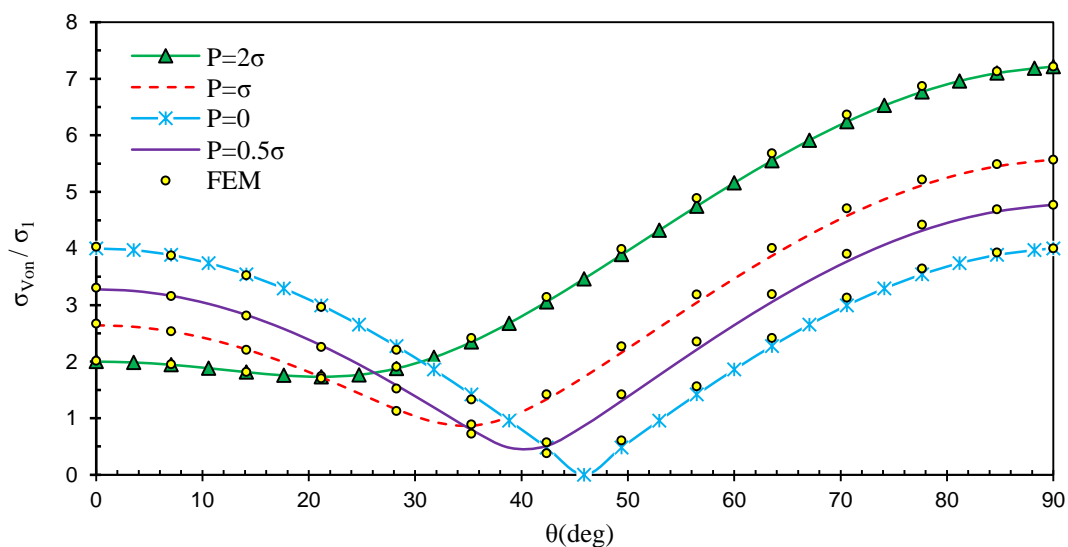
الف- ورق همگن

همانند ورق همگن تحت بار تک‌محوری و دوماحوری با $n=1$ ، در شکل ۴-۱۹ برای ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری با $n=-1$ و بار فشاری داخل گشودگی، مقدار تنش محیطی به دست آمده از حلّ تحلیل پیشنهادی بسیار نزدیک به نتایج حلّ FEM و مقدار خطای حلّ پیشنهادی ناچیز است. در شکل ۴-۲۰ که مربوط به تنش معادل فن میزس است، دو نکته قابل بیان می‌باشد. نکته‌ی اول؛ به دلیل منفی بودن مقادیر تنش محیطی در نقاطی از اطراف گشودگی در زوایایی خاص، نمودار تنش معادل فن میزس

به صورت ۷ شکل می شود. نکته ی دوم به علت حضور تنش شعاعی در تنش معادل فن میزس، متناسب با مقدار فشار وارد شده در داخل گشودگی، کل نمودار با افزایش، مواجه می شود. این پدیده در تمام حالات ورق با بارگذاری های مختلف به همراه فشار یکنواخت در داخل گشودگی، مشاهده می شود؛ ولی به علت شکل خاص نمودار در این نوع بارگذاری، مشاهده ی این پدیده قابل فهم تر و ملموس تر شده است.



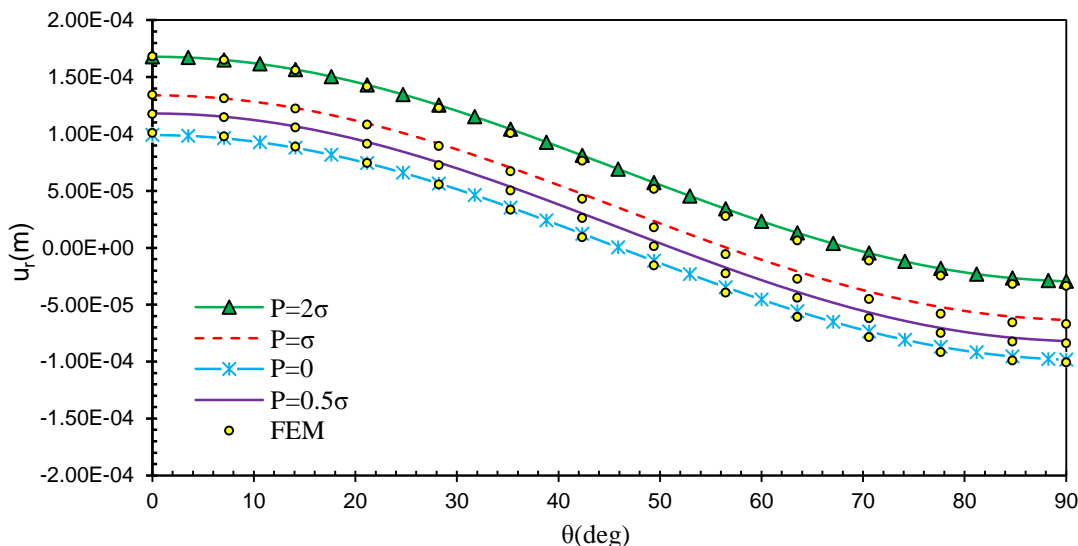
شکل ۴-۱۹ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری $n=-1$



شکل ۴-۲۰ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری $n=-1$

شکل ۴-۲۱ مربوط به جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی است که این نمودار نیز مستقل

بودن تأثیر بارگذاری فشاری بر مقدار جابه‌جایی شعاعی، نسبت به نوع بارگذاری را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲۱ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$

ب- ورق ناهمگن نوع اول

با توجه به شکل ۴-۲۲ تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی دایروی همانند ورق ناهمگن نوع اول

تحت بارگذاری دوماحوری با $n=1$ و فشار یکنواخت در داخل گشودگی، است. بدان معنا که مقدار افزایش

تنش محیطی بر اثر بار فشاری کمتر از مقدار بار فشاری می‌باشد. با توجه به جدول ۴-۵ و مقایسه‌ی آن

با جدول ۴-۳ می‌توان نتیجه گرفت، که مقدار بار وارد شده در مرز خارجی چه به صورت فشاری و چه

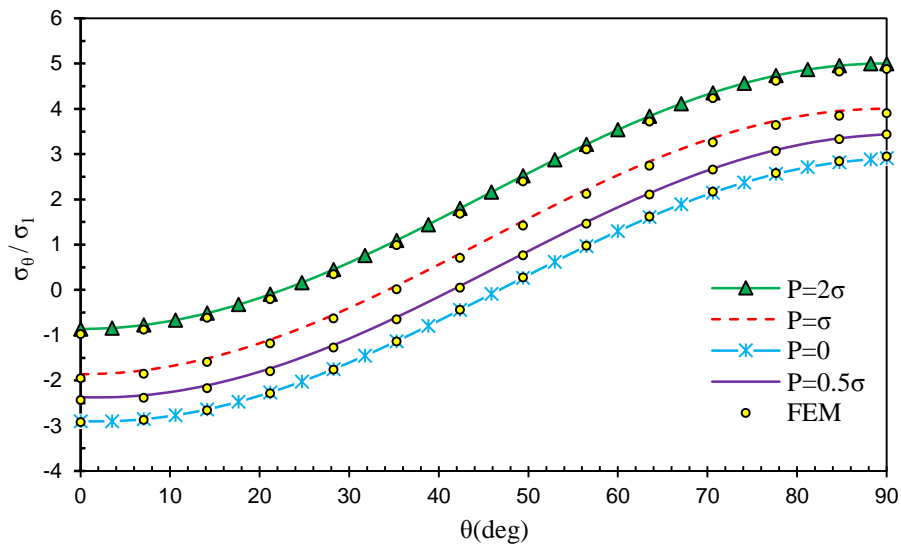
کششی تغییری در میزان افزایش تنش محیطی نسبت به افزایش بار فشاری در داخل گشودگی ندارد.

نتایج حاصل شده از شکل‌های ۴-۲۳ و ۴-۲۴ به ترتیب برای تنش معادل فن‌میزس و جابه‌جایی

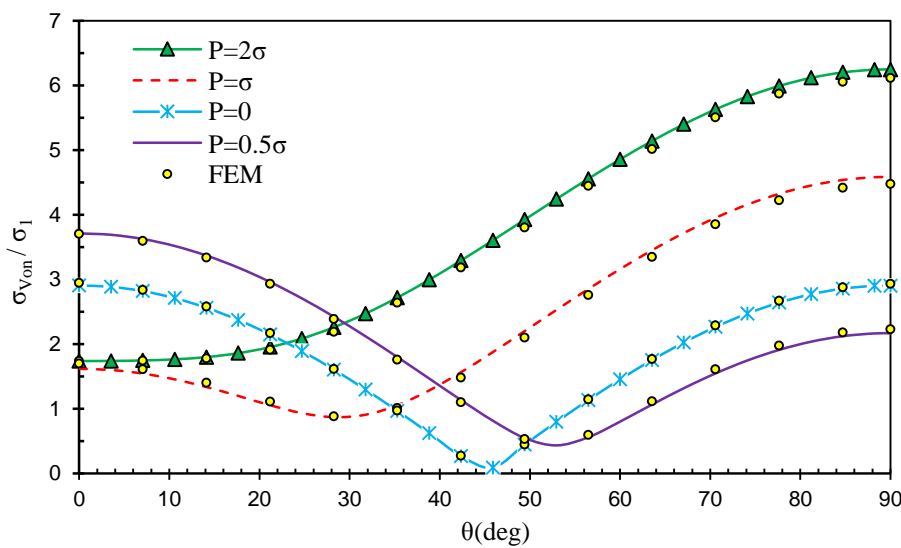
شعاعی برای این نوع ورق با ورق همگن با بارگذاری مورد بررسی مشابه می‌باشد.

جدول ۴-۵ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به فشار داخلی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری (واحد MPa)

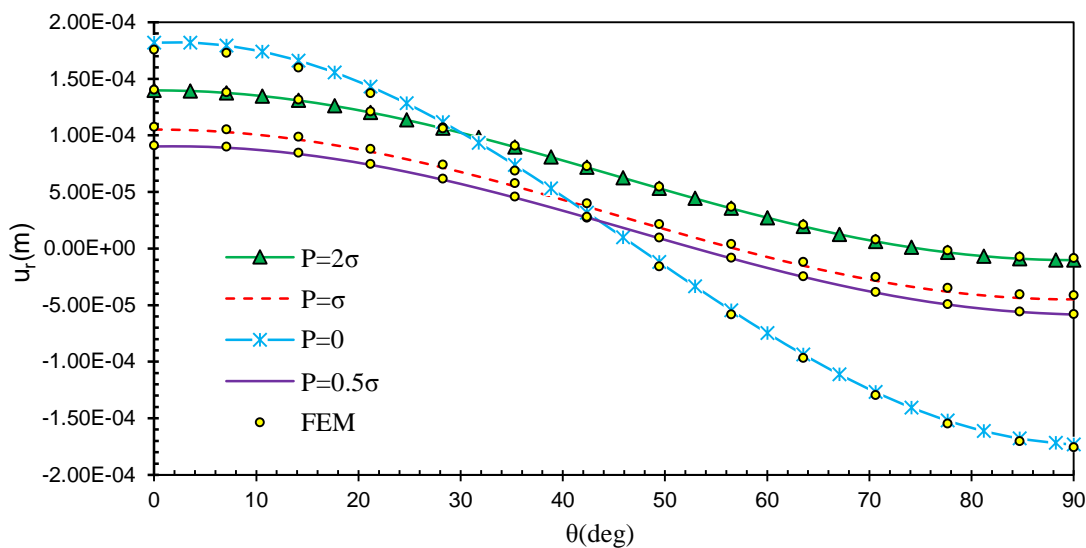
درصد افزایش σ_θ	$\sigma_\theta - \sigma_{\theta P=0}$	$\sigma_{\theta P=0}$	σ_θ	P
۱۰۶	۰/۵۳۰	-۲/۹۰۱	-۲/۳۷۱	۰/۵
۱۰۳/۷	۱/۰۳۷	-۲/۹۰۱	-۱/۸۶۴	۱
۱۰۱/۸	۲/۰۳۷	-۲/۹۰۱	-۰/۸۶۴	۲



شکل ۴-۲۲ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری n=-۱



شکل ۴-۲۳ تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری n=-۱



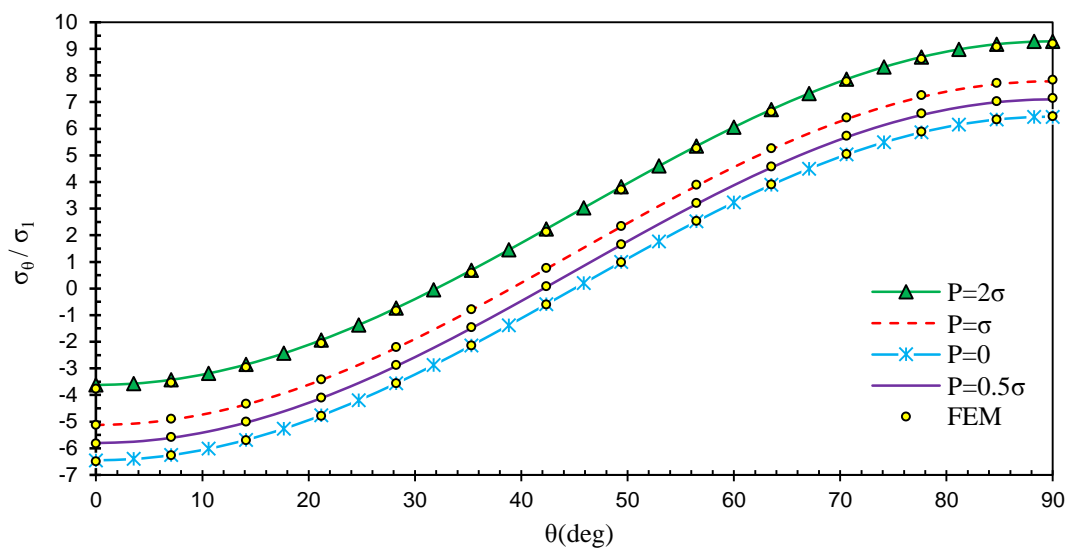
شکل ۴-۲۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$

ج- ورق ناهمگن نوع دوم

با بررسی شکل ۴-۲۵ می‌توان دریافت، که رفتار تنش محیطی در نقاط اطراف ورق ناهمگن نوع دوم، همانند ورق ناهمگن نوع اول مستقل از فشاری یا کششی بودن بارگذاری در مرز خارجی ورق است. جدول ۴-۶ نیز این نتیجه را نشان می‌دهد. به‌طوری‌که هم در جدول ۴-۴ و ۴-۶ مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر حضور بارگذاری یکنواخت فشاری در داخل گشودگی، در حدود $1/34$ بار فشاری است.

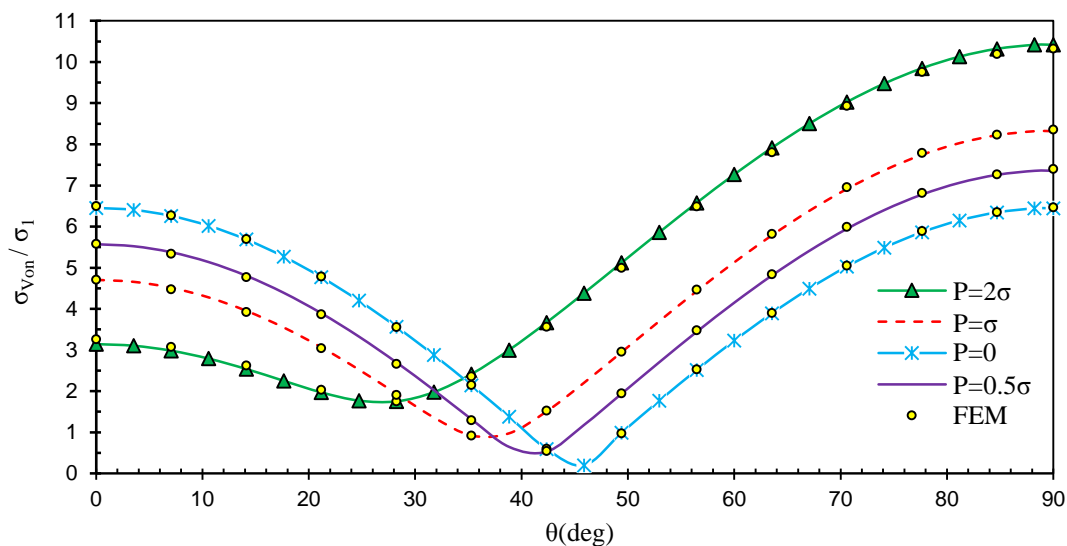
جدول ۴-۶ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به فشار داخلی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری (واحد MPa)

درصد افزایش σ_{θ}	$\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta_{P=0}}$	$\sigma_{\theta_{P=0}}$	σ_{θ}	P
۱۳۰	۰/۶۵۰	-۶/۴۵۴	-۵/۸۰۴	۰/۵
۱۳۳	۱/۳۳۰	-۶/۴۵۴	-۵/۱۲۴	۱
۱۴۱/۵	۲/۸۳۰	-۶/۴۵۴	-۳/۶۲۴	۲

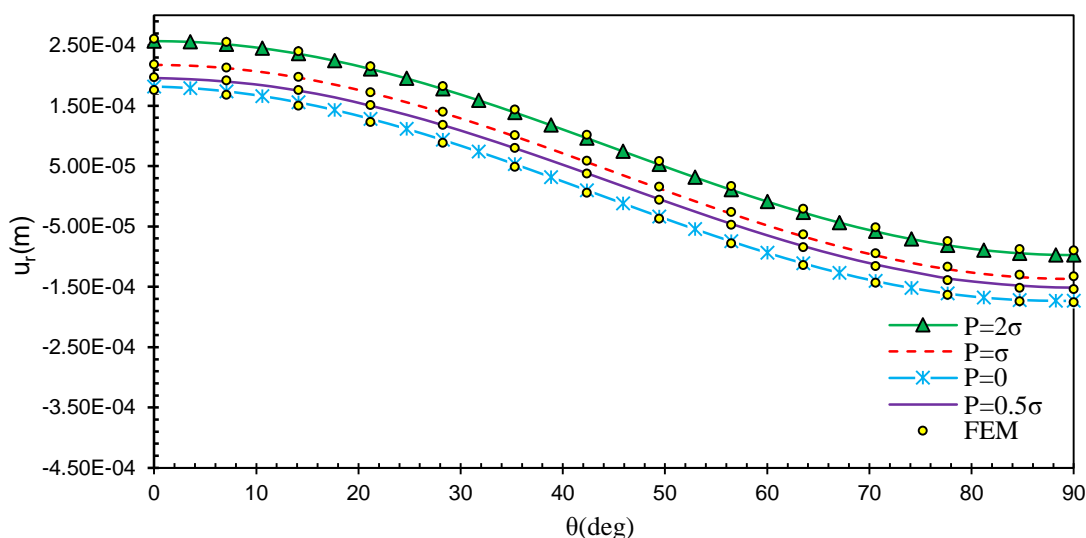


شکل ۴-۲۵ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوری $n=1$

با توجه به توضیحات بیان شده برای نمودار تنش محیطی و همچنین مستقل بودن مقدار تنش شعاعی از جنس ورق، نمودار تنش معادل فن میزس و جابه‌جایی شعاعی رفتار افزایشی مشابه را با بارگذاری دومحوری با $n=1$ را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲۶ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوری $n=1$



شکل ۴-۲۷ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گوشه‌دگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$

۴-۳-۴ مقایسه نتایج حاصل از تحلیل ورق به روش تفکیک متغیرها و تابع پتانسیل

مختلط در $n=2$ و $n=-2$

در این بخش نتایج حاصل از روشهای تفکیک متغیرها و تابع پتانسیل مختلط [۵] با یکدیگر مقایسه می‌شوند. برای این منظور مقادیر بیشینه و کمینه‌ی سه کمیت تنش محیطی و تنش فن میزز و جابه‌جایی شعاعی در ورق ناهمگن تحت بارگذاری دو محوری با $n=2$ و $n=-2$ جدول‌های زیر بررسی شده‌اند.

جدول ۴-۷ جدول مقایسه نتایج دو تابع در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری $n=2$ (واحد MPa)

درصد اختلاف	کمینه σ_{von}	کمینه σ_{θ}	بیشینه σ_{von}	بیشینه σ_{θ}	توابع
درصد اختلاف σ_{θ} : ۲٪	۱/۴۹	۱/۱۸	۴/۴۱	۴/۱۴	تابع پتانسیل مختلط $P=0.5$
درصد اختلاف σ_{von} : ۱٪	۱/۶۱	۱/۳۰	۴/۴۹	۴/۲۳	تابع تفکیک متغیرها $P=0.5$
درصد اختلاف σ_{θ} : ۲٪	۲/۳۱	۱/۶۴	۵/۱۷	۴/۶۱	تابع پتانسیل مختلط $P=1$
درصد اختلاف σ_{von} : ۲٪	۲/۴۵	۱/۷۹	۵/۲۸	۴/۷۱	تابع تفکیک متغیرها $P=1$

تابع پتانسیل مختلط $P = 2$	۵/۵۳	۶/۷۷	۲/۵۷	۳/۹۷	درصد اختلاف σ_{θ} : ۲٪
تابع تفکیک متغیرها $P = 2$	۵/۶۹	۶/۹۱	۲/۷۷	۴/۱۵	درصد اختلاف σ_{von} : ۲٪

جدول ۴-۸ جدول مقایسه نتایج دو تابع در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری $n = -2$ (واحد MPa)

توابع	بیشینه σ_{θ}	بیشینه σ_{von}	کمینه σ_{θ}	کمینه σ_{von}	درصد اختلاف
تابع پتانسیل مختلط $P = 0.5$	۴/۱۷	۴/۴۵	-۴/۷۰	۰/۴۳	درصد اختلاف σ_{θ} : ۲٪
تابع تفکیک متغیرها $P = 0.5$	۴/۱۳	۴/۴۱	-۴/۶۵	۰/۴۶	درصد اختلاف σ_{von} : ۱٪
تابع پتانسیل مختلط $P = 1$	۴/۶۴	۵/۲۱	-۴/۲۴	۰/۸۶	درصد اختلاف σ_{θ} : ۱٪
تابع تفکیک متغیرها $P = 1$	۴/۶۳	۵/۱۹	-۴/۱۶	۰/۸۷	درصد اختلاف σ_{von} : ۱٪
تابع پتانسیل مختلط $P = 2$	۵/۵۶	۶/۷۹	-۳/۳۱	۱/۷۴	درصد اختلاف σ_{θ} : ۱٪
تابع تفکیک متغیرها $P = 2$	۵/۶۱	۶/۸۲	-۳/۱۸	۱/۷۳	درصد اختلاف σ_{von} : ۱٪

جدول ۴-۹ جدول مقایسه نتایج دو تابع در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری $n = 2$ (واحد MPa)

توابع	بیشینه σ_{θ}	بیشینه σ_{von}	کمینه σ_{θ}	کمینه σ_{von}	درصد اختلاف
تابع پتانسیل مختلط $P = 0.5$	۷/۳۱	۷/۵۹	۱/۹۵	۲/۲۴	درصد اختلاف σ_{θ} : ۱۸٪
تابع تفکیک متغیرها $P = 0.5$	۸/۶۳	۸/۸۸	۲/۱۵	۲/۴۴	درصد اختلاف σ_{von} : ۱۶٪
تابع پتانسیل مختلط $P = 1$	۷/۸۶	۸/۴۲	۲/۵	۳/۱۲	درصد اختلاف σ_{θ} : ۱۸٪
تابع تفکیک متغیرها $P = 1$	۹/۳۱	۹/۸۴	۲/۸۳	۳/۴۵	درصد اختلاف σ_{von} : ۱۶٪

تابع پتانسیل مختلط $P = 2$	۸/۹۶	۱۰/۱۲	۳/۵۹	۴/۹۱	درصد اختلاف σ_{θ} : ۱۹٪
تابع تفکیک متغیرها $P = 2$	۱۰/۶۸	۱۱/۷۹	۴/۲	۵/۴۹	درصد اختلاف σ_{von} : ۱۶٪

جدول ۴-۱۰ جدول مقایسه نتایج دو تابع در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری $n = -2$ (واحد MPa)

توابع	بیشینه σ_{θ}	بیشینه σ_{von}	کمینه σ_{θ}	کمینه σ_{von}	درصد اختلاف
تابع پتانسیل مختلط $P = 0.5$	۹/۸۸	۱۰/۲۶	۰	۰/۷۶	درصد اختلاف σ_{θ} : ۱۱٪
تابع تفکیک متغیرها $P = 0.5$	۸/۸۶	۱۰/۳۲	۰	۰/۵۲	درصد اختلاف σ_{von} : ۱٪
تابع پتانسیل مختلط $P = 1$	۱۰/۵۲	۱۱/۰۱	۰	۰/۹	درصد اختلاف σ_{θ} : ۱۰٪
تابع تفکیک متغیرها $P = 1$	۹/۵۴	۱۰/۰۶	۰	۰/۸۷	درصد اختلاف σ_{von} : ۹٪
تابع پتانسیل مختلط $P = 2$	۱۱/۴۷	۱۲/۶	۰	۱/۷۳	درصد اختلاف σ_{θ} : ۱٪
تابع تفکیک متغیرها $P = 2$	۱۰/۹۱	۱۲/۰۲	۰	۱/۸	درصد اختلاف σ_{von} : ۱٪

با مقایسه این نتایج به نزدیکی نتایج در ورق ناهمگن نوع اول رسیده و تفاوتها در ورق ناهمگن نوع دوم ظاهر می شود علت این اختلاف را می توان به دلیل تفاوت در روش حلّ تحلیلی دانست، در روش پتانسیل مختلط تابع تنش به صورت یک سری توانی برحسب متغیر مختلط Z نوشته شده است و یکی از پارامترهای مؤثر برای دستیابی به حلّ دقیق تر بررسی همگرایی این سری است؛ اگر توان n مربوط به این سری به درستی انتخاب نشود اختلاف پیش آمده در نتایج دقیق زیاد خواهد بود، در صورتی که حلّ انجام شده در این پایان نامه از حلّ دقیق معادله حاکم بر بخشی از تابع تنش $f(\rho)$ می باشد؛ یکی دیگر از دلایل این اختلاف روش استفاده شده در توابع پتانسیل مختلط به صورت لایه لایه است ولی حلّ تفکیک متغیرها به صورت دقیق است.

۴-۴ جمع‌بندی

در این فصل، مقدار تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی در ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی و فشار یکنواخت داخل گشودگی، بررسی شد. با توجه به نتایج تنش محیطی در ورق همگن دقت بالای حلّ تحلیلی پیشنهادی نسبت به حلّ استخراج شده از منابع مورد تأیید قرار گرفت. به‌علت حضور تنش شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در بارگذاری مورد مطالعه در این فصل، پیشنهاد شد، که به‌جای بررسی تنش محیطی تنش معادل حاصل از معیار فن‌میزس مورد بررسی قرار گیرد. با مقایسه‌ی نتایج این دو تنش در بارگذاری‌های متفاوت مشخص شد، که تنش شعاعی کاملاً مستقل از جنس ماده و بارگذاری در مرزهای خارجی ورق است؛ درحالی‌که تنش محیطی در برابر بارگذاری فشار یکنواخت در داخل گشودگی به جنس ماده ورق وابسته می‌باشد. در ورق ناهمگن نوع اول، مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر بارگذاری فشار یکنواخت داخل گشودگی بین $1/1$ - $1/0.1$ و برای ورق ناهمگن نوع دوم این مقدار بین $1/3$ - $1/43$ مقدار فشار وارد شده می‌باشد.

فصل ۵ نتیجه گیری و پیشنهادها

۵-۱ نتیجه‌گیری

۵-۱-۱ ورق همگن تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

در اولین قدم حلّ تحلیل پیشنهادی و تحلیل عددی صورت گرفته با نرم‌افزار اجزای محدود انسیس، برای ورق همگن تحت بارگذاری درون صفحه‌ای در مرزهای خارجی مقایسه شد. دقت بالای حلّ پیشنهادی و تحلیل عددی نشان دهنده‌ی درستی روند حل برای ورق همگن می‌باشد.

۵-۱-۲ ورق ناهمگن تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

حلّ تحلیلی پیشنهادی طوری به دست آمد، که هم برای ورق همگن و هم ناهمگن قابل استفاده می‌باشد. نتایج حاصل از حلّ تحلیلی پیشنهادی و تحلیل عددی انجام شده با نرم‌افزار انسیس، انحراف بسیار کمی از یکدیگر داشتند؛ که نشان دهنده‌ی درستی روند حلّ پیشنهادی برای ورق ناهمگن است. جنس ورق ناهمگن نوع اول در مقایسه با ورق همگن باعث کاهش مقدار تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی شد، در ورق ناهمگن نوع دوم، به علت سفتی کم لایه‌های میانی نسبت به ورق همگن، مقدار تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی افزایش یافت. به علت آنکه جابه‌جایی شعاعی در این نوع بارگذاری تنها وابسته به تنش محیطی می‌باشد؛ درصد افزایش و کاهش این دو کمیت به هم نزدیک می‌باشند.

۵-۱-۳ ورق تحت بارگذاری درون صفحه‌ای و بارگذاری فشار یکنواخت درون گشودگی

با وجود بار فشاری یکنواخت درون گشودگی، تنش شعاعی مقدار قابل توجهی در نقاط اطراف گشودگی پیدا می‌کند. به همین دلیل، پیشنهاد می‌شود، که برای مطالعه‌ی تنش در نقاط اطراف گشودگی از تنش معادل فن میزس به جای تنش محیطی استفاده شود. با مقایسه‌ی تنش محیطی و تنش معادل فن میزس دریافته شد، که تنش شعاعی کاملاً مستقل از جنس ماده و بارگذاری در مرزهای خارجی ورق است؛ در حالی که تنش محیطی در برابر بار فشاری یکنواخت در داخل گشودگی به جنس ماده ورق وابسته می‌باشد. در ورق ناهمگن نوع اول، مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر بارگذاری فشار

یکنواخت داخل گشودگی بین ۱/۱-۱/۰۱ و برای ورق ناهمگن نوع دوم این مقدار برابر ۱/۳۳ مقدار فشار وارد شده می‌باشد. همان‌طور که از مقادیر افزایش تنش محیطی مشخص می‌شود؛ تأثیر جنس ورق بر شدت مقدار افزایش تنش محیطی کم می‌باشد. به دلیل آنکه، فشار یکنواخت به صورت مستقیم به مرز داخلی گشودگی وارد می‌شود، لایه‌های داخلی ورق تأثیر چندانی بر مقدار تنش محیطی ندارند.

۲-۵ پیشنهادها

با توجه به روند حل برای ادامه‌ی این تحقیق پیشنهادهایی در زیر مطرح می‌گردد.

۱. بررسی تنش و جابه‌جایی ورق نازک و بلند ناهمگن با گشودگی چندضلعی، تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای. همچنین بررسی تأثیر چرخش گشودگی بر مقادیر تنش و مکان بیشینه تنش.
۲. بررسی تنش و جابه‌جایی ورق نازک و بلند ناهمگن با گشودگی چندضلعی، تحت بارگذاری حرارتی و بار درون‌صفحه‌ای و فشار داخل گشودگی. تعیین بهینه‌ی شکل گشودگی ورق برای کاهش تنش در نقاط اطراف گشودگی بر اثر بارگذاری‌های ترکیبی مکانیکی و حرارتی.
۳. بررسی ورق ناهمگن تحت بار خمشی در مرزهای خارجی و داخلی و ترکیب آن با بارگذاری درون‌صفحه‌ای. همچنین به دست آوردن یک شعاع همگرایی مناسب برای این نوع بارگذاری.

مراجع

- [1]. مهرکش م.، (۱۳۹۰)، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، "بررسی مسأله‌ی انتشار موج الاستیک در ورق‌های FGM تحت اثر بار ضربه بر اساس تئوری‌های ورق و حل الاستودینامیک"، دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [2]. Ugral A.C. (1981), "**Stresses in Plates and Shells**", McGraw-Hill Book Company, New York.
- [3]. Szilard R., (2003), "**Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Method**", John Wiley & Sons, New Jersey.
- [4]. R. C. Batra, S. Vidoli, (2002), Higher Order Piezoelectric Plate Theory Derived from a Three Dimensional Variational Principle, **AIAA Journal**, Vol. 40, pp. 91–104.
- [5]. عامری ا.، (۱۳۹۳)، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، "تحلیل تنش در ورق مربعی ساخته‌شده از مواد FG با گشودگی دایروی تحت بارهای درون‌صفحه‌ای"، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [6]. N. Wu, Q. Wang, S. T. Quek, (2010), Free Vibration Analysis of Piezoelectric Coupled Circular Plate with Open Circuit, **J. of Sound and Vibration**, Vol. 329, pp. 1126–36.
- [7]. Muskhelishvili N. I., (1962), "**Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity**", 2nd English ed., P. Noordhoff Ltd., Netherlands.
- [8]. Savin G. N., (1961), "**Stress Concentration around Holes**", Pergamon Press, New York.
- [9]. Eshelby J.D., Read W.T., Shockley W., (1953), "Anisotropic Elasticity With Applications to Dislocation Theory", *Acta Metallurgica*, 1, pp. 251–259.
- [10]. Stroh, A.N., (1958) "Dislocations and Cracks in Anisotropic Elasticity". **Philosophical Magazine**, Vol. 7, pp. 625–646.
- [11]. Lekhnitskii S. G., (1986), "**Anisotropic Plates**", 2nd ed., Gordon and Breach Science Publishers, New York.
- [12]. Hedgepeth, J. M. (1961). "**Stress concentrations in filamentary structures**". NASA TND-882, May.
- [13]. Zender, G. W., & Deaton, J. W. (1963). "**Strength of Filamentary Sheets with One or More Fibers Broken**". National Aeronautics and Space Administration. NASA TND-1609.
- [14]. Tan, S. C. (1988) "**Finite-width correction factors for anisotropic plate containing a central opening**". *J Comp Mat*, Vol. 22, no. 11, pp. 1088-1097.
- [15]. Hufenbach W, Gottwald R, Grüber B, Lepper M, Zhou B (2008), "**Stress concentration analysis of thick-walled laminate composites with a loaded circular cut-out by using a first order shear deformation theory**". *J Composites Science and Technology*, Vol. 68, no. 10, pp. 2238–2244.
- [16]. Rangavittal H. K., Naidu A. C. B., Dattagurub B., Ramamurthy T. S., (1995), "Analytical Solutions for Load Transfer Through Smooth Elastic Pin in an Infinite Orthotropic Plate", **Compos. Struct.**, Vol. 30, pp. 329–339.
- [17]. Madenci E. and Ileri L., (1995), "Analysis of Pin-Loaded Holes in Composite Laminates Under Combined Bearing- Bypass and Shear", **Int. J. Solids Struct.**, Vol. 32, pp. 2053–2062.
- [18]. Okutan B. B., (2006), "Behavior of Pin-loaded Laminated Composites", **Experimental Mech.**, Vol. 46, pp. 589–600.

- [19]. Pen Z., Yuansheng C. and Liu J., (2013), "Stress Analysis of a Finite Plate with a Rectangular Hole Subjected to Uniaxial Tension Using Modified Stress Functions", **Int. J. Mech. Sciences**, Vol. 75, pp. 265–277.
- [20]. Zhang X. Z., Kitipornchai S., Liew KM., (2003), "Thermal Stresses around a Circular Hole in a Functionally Graded Plate" **J. Therm Stresses**, Vol. 26, pp. 379–390.
- [21]. Yang Q., Gao C. F., (2013), "Dynamic Stress Analysis of a Functionally Graded Material Plate with a Circular Hole", **Meccanica**, Vol. 48, pp. 91–101.
- [22]. Reddy J. N., (2000), "Analysis of Functionally Graded Plates", **Int. J. Numer. Eng.**, Vol. 47, pp. 663–684.
- [23]. Yang J., Shen H. S., (2003), "Non-linear Analysis of Functionally Graded Plates Under Transverse and in-Plane Loads", **Int. J. Non-linear Mech.**, Vol. 38, no. 4, pp. 467–82.
- [24]. Kubair D.V., Bhanu–Chandar B., (2008), "Stress Concentration Factor Due to a Circular Hole in Functionally Graded Panels Under Uniaxial Tension" **Int. J. of Mech. Sciences**, Vol. 50, pp. 732–742.
- [25]. Cao Z. Y., Tang S. G. and Cheng G. H., (2009), "3D Analysis of Functionally Graded Material Plates with Complex Shapes and Various Holes" **Appl. Mathematics Mech. (English Edition)**, Vol. 30, no. 1, pp. 13–18.
- [26]. Hosseini S., Bayesteh H. and Mohammadi S., (2013), "Thermo-Mechanical XFEM Crack Propagation Analysis of Functionally Graded Materials", **Materials Science Eng. A**, Vol. 561, pp. 285–302.
- [27]. Mohammadi M., Dryden J.R., Jiang L.Y., (2011), "Stress Concentration around a Hole in a Radially Inhomogeneous Plate", **Int. J. Solids Struct.**, Vol. 48, pp. 483–491.
- [28]. Chareonsuk J., Passakorn V., (2011), "Numerical Solutions for Functionally Graded Solids under Thermal and Mechanical Loads Using a High-Order Control Volume Finite Element Method", **Appl. Thermal Eng.**, Vol. 31, pp. 213–227.
- [29]. Yang Q., Gao C. F., Chen W. T., (2012), "Stress Concentration in a Finite Functionally Graded Material Plate", **Science China Physics, Mech. and Astronomy**, Vol. 55, no. 7 pp. 1263–1271.
- [30]. Yang Q., Gao C. F., Chen W., (2010), "Stress Analysis of a Functionally Graded Material Plate with a Circular Hole", **Archive Appl. Mech.**, Vol. 80, pp. 895–907.
- [31]. Ashrafi H., Asemi K., Shariyat M., (2013), "A three-Dimensional Boundary Element Stress and Bending Analysis of Transversely/Longitudinally Graded Plates with Circular Cutouts Under Biaxial Loading", **European J. of Mechanics/A Solids**.
- [32]. Cardenas-Garcia J.F., Shabana Y. M. and Medina R. A., (2006), "Thermal Loading and Material Property Characterization of a Functionally Graded Plate With a Hole Using an Inverse Problem Methodology", **J. Therm Stresses**, Vol. 29, pp. 1–20.
- [33]. Kubair, D.V., (2014), "Stress Concentration Factor in Functionally Graded Plates With Circular Holes Subjected to Anti-plane Shear Loading", **J. of Elasticity**, Vol. 114, no. 2, pp. 179–196.
- [34]. Mohammadi M., Dryden J.R., (2009), "Influence of the spatial variation of Poisson's ratio upon the elastic field in nonhomogeneous axisymmetric bodies", **Int. J. Solids Struct.**, 46, pp. 225–232.
- [35]. Wang, C., (1953). *Appl. Elasticity*. McGraw-Hill, New York.

- [36]. Abramowitz, M., Stegun, I.A., (1972), "Handbook of Mathematical Functions.", **Dover Publications, New York.**
- [37]. Pilkey W.D., (1977), "**Peterson's Stress Concentration Factors**", 2nd ed, A Wiley-Interscience Publication, New York.
- [38]. ساد.ام. اچ، (۱۳۸۹)، "الاتیسیتة: نظری، کاربرد ی و محاسباتی"، ترجمه علی اصغر عطائی، انتشارات علمی و فنی، تهران.
- [39]. Reddy J. N., (1993), "**An Introduction to the Finite Element Method**", 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

Abstract

In this paper, is tried to present the analytical solution for calculations the stress distribution around a circular hole in finite FG plate, by using the separating variable method and compared with result of the complex potential functions method. The plate subjected to constant uniaxial or biaxial stress; In addition, the boundary of hole is subjected to uniform pressure loading. One of the most important goal of this research is to study the effect of compression stress applied to the hole boundary on stress distribution around the hole. The variation of material properties, especially Young's modulus, is in a radial direction and concentric to the hole. The special exponential function, with specific convergence radius is used to describe the variation of mechanical properties. The finite element method has been used to check the accuracy of analytical results for homogeneous and inhomogeneous plates, also for all loading cases. In the presence of applied load at the boundary of circular hole, amount of radial stress in addition to hoop stress is considerable. Therefore the Von Mises stress is used to study the stress around the hole.

Keywords: FG Plate, Inhomogeneous Materials, Circular Hole, Separating of variables Functions, Stress Concentration.



Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Aerospac - Space Structures Engineering

Stress analysis of functionally graded plate with circular
hole subjected to mechanical load using separation
variable method

By: Farzaneh Sadat Mousavi Tabar

Supervisors:

Dr. Mehdi Ghannad

Dr. Mohammad Jafari

February 2017

