بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی

رساله دکتری

حل تحلیلی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد شامل نقص اولیه با ضخامت متغیر

دانشجو: فرید محبوبی نسرکانی

استاد راهنما:

دکتر حمیدرضا ایپک‌چی

شهریور ۱۳۹۶

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

رساله دکتری مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

رساله دکتری آقای فرید محبوبی نسرکانی به شماره دانشجویی:۹۲۱۶۳۳۵

تحت عنوان: حل تحلیلی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد شامل نقص اولیه با ضخامت متغیر

در تاریخ ۱۳۹۶/۶/۷ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک دکتری تخصصی مورد ارزیابی و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

استاد راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : **دکتر حمیدرضا ایپک چی**		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : **دکتر مهدی قناد کهتوئی**		نام و نام خانوادگی : **دکتر سید هادی قادری**	
نام و نام خانوادگی **دکتر مسعود طهانی**			
نام و نام خانوادگی : **دکتر علیرضا شاطرزاده**			

تقدیم به

چشمان منتظر مادرم

دستان خسته پدرم

صبر و شکیبایی همسرم

و باران

به جبران قطره ای از دریای صبر و محبتشان.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجاییکه تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب:

«من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الخالق»

بسی شایسته است از **پدر و مادر** عزیزم، این دو معلم بزرگوارم، که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛ از همسر مهربانم که در تمام طول تحصیل همراه و همگام من بوده است؛

همچنین از فرزند دلبندم که صبورانه من را همراهی نموده است تا بتوانم در کمال آرامش و آسایش به تهیه و تنظیم این رساله بپردازم؛

و از استاد ارجمند و شایسته؛ **جناب آقای دکتر حمیدرضا ایپک چی** که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تعهد نامه

اینجانب فرید محبوبی نسرکانی دانشجوی دوره دکتری رشته مکانیک دانشکده مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله **حل تحلیلی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد شامل نقص اولیه با ضخامت متغیر** تحت راهنمائی جناب آقای دکتر حمیدرضا ایپک‌چی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این رساله، بار کمانش استاتیکی پوسته استوانه‌ای همگن و همسانگرد با ضخامت متغیر با در نظر گرفتن نقص اولیه با استفاده از روش تحلیلی به دست می‌آید. پوسته استوانه‌ای مورد نظر دارای شعاع خارجی ثابت و شعاع داخلی متغیر است. میدان جابجایی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تعریف شده است. رابطه کرنش-جابجایی با استفاده از روابط غیر خطی فن-کارمن تعیین شده و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کند. پوسته به صورت متقارن محوری، تحت فشار ثابت محوری و فشار خارجی متغیر بوده و معادلات تعادل با استفاده از اصل کار مجازی به دست می‌آید. شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار مورد بررسی قرار می‌گیرند. این معادلات که شامل یک دستگاه معادلات غیر خطی با ضرایب متغیر است با بکارگیری روش اغتشاشات حل می‌شود. معادلات پایداری با دو روش مختلف تعیین و به صورت تحلیلی حل می‌شوند. همچنین تأثیر نقص اولیه که به شکل یک جابجایی شعاعی اولیه در پوسته است بر روی مقدار بار کمانش مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج با حل اجزای محدود و برخی مراجع دیگر مقایسه می‌شوند. روش ارائه شده برای حل معادلات، قادر به بررسی رفتار پوسته با انواع پروفیل‌های مختلف ضخامت و همچنین هر نوع بارگذاری خارجی متقارن محوری است. نتایج نشان می دهد استفاده از روش اغتشاشات، جابجایی طولی و شعاعی را با دقت بالایی حتی در نزدیکی مرزها محاسبه می کند. همچنین نقص اولیه می تواند بر بار کمانش موثر باشد. علاوه بر آن تئوری تغییر شکل برشی برای تعیین بار کمانش پوسته های ضخیم تر، مناسب تر است.

کلمات کلیدی: کمانش، پوسته استوانه‌ای ضخامت متغیر، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، حل تحلیلی، نقص اولیه

مقاله‌های مستخرج از رساله

- Mahboubi Nasrekani F., Eipakchi H.R. (**2015**) ‘‘Nonlinear analysis of cylindrical shells with varying thickness and moderately large deformation under non-uniform compressive pressure using first order shear deformation theory’’, *Journal of Engineering Mechanics(ASCE),* 141(5).
- Mahboubi Nasrekani F., Eipakchi H.R. (**2017**) ‘‘An analytical procedure for buckling load determination of cylindrical shells with variable thickness using first order shear deformation theory’’, *Amirkabir Journal of Science & Research Mechanical Engineering (AJSR-ME),* Published online.
- Mahboobi Nasrekani F., Eipakchi H.R. (**2015**) ‘‘Effects of thickness profiles on buckling load of cylindrical shells with variable thickness’’,*3rd National and First International Conference in Applied Research on Electrical, Mechanical and Mechatronics Engineering*, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.
- Mahboobi Nasrekani F., Eipakchi H.R. (**2017**) ‘‘A mathematical method to investigate different profiles on deformation of cylindrical shells with variable thickness’’, *The 2nd National Conference of Mathematics: Advanced Engineering with Mathematical Techniques*, Islamic Azad University-Urmia Branch, Urmia, Iran.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

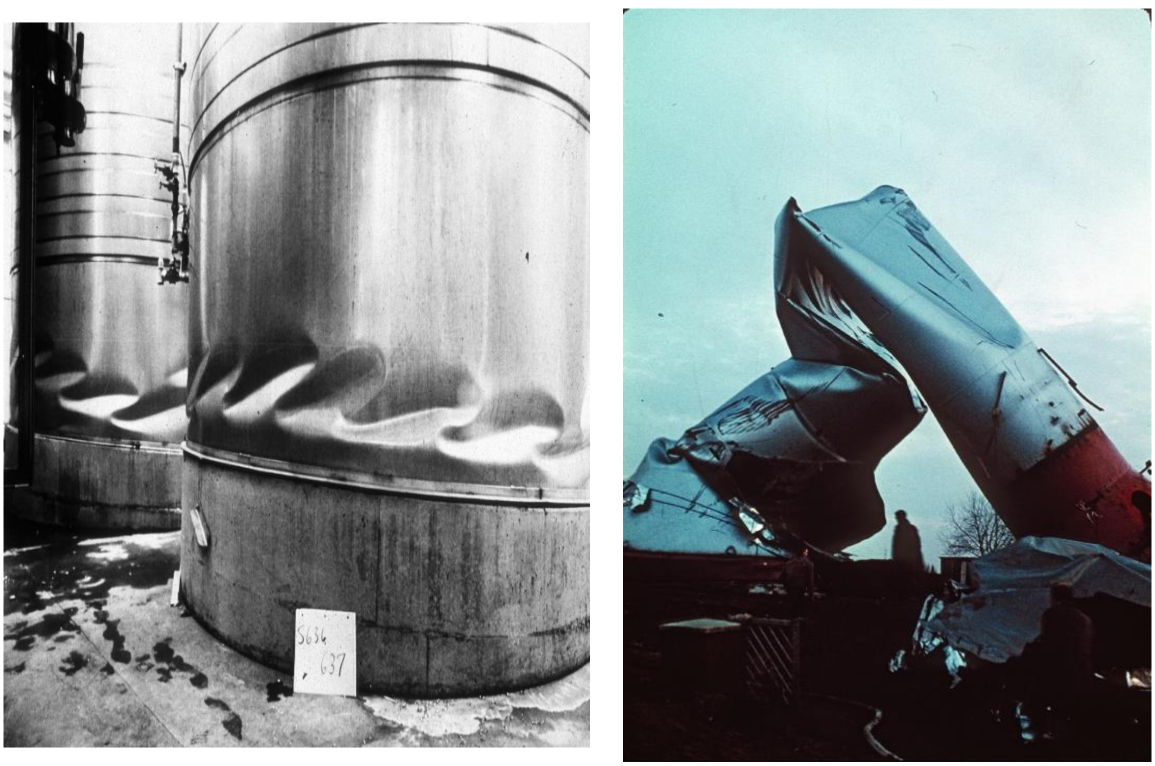
فهرست جدول‌ها

فصل اول:

کلیات و مرور مطالب

۱-۱ مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای سازه‌هایی با کاربردهای وسیع در صنایعی همچون نفت و گاز، کشتیرانی، هوا فضا، حمل و نقل و... می‌باشند. با توجه به کاربردهای گوناگون آنها، استفاده از پوسته با ضخامت متغیر به ویژه در بهینه‌سازی وزن سازه ممکن است مناسب‌تر باشد. تعیین بار کمانش[1] در برخی سازه‌ها از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است و دانستن مقدار این پارامتر در طراحی و استفاده از سازه‌های مکانیکی بسیار حیاتی است. در پوسته‌های استوانه‌ای نیز بروز پدیده کمانش بسیار رایج است و این سازه‌ها به شدت در معرض وقوع این پدیده مخرب قرار دارند. شکل (۱-۱)، نمونه‌هایی از وقوع پدیده کمانش را در صنایع مختلف نشان می‌دهد.



شکل(۱-۱) نمونه‌هایی از وقوع پدیده کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای

[1] Buckling Load

پدیده کمانش در یک بار مشخص، به عنوان یک حالت بالقوه شکست برای عناصر سازه‌ای در مهندسی مکانیک، توجه بسیار زیادی را به خود جلب کرده است. لئونارد اولر[1](۱۷۳۰) به بررسی موضوع کمانش پرداخت و برای اولین بار این پدیده را در ستون های ساختمان‌ها و ورق‌های موجود در کشتی‌ها مورد مطالعه قرار داد. بعد از ایشان افراد زیادی در این زمینه تحقیق کردند که از آن جمله می‌توان به تیموشنکو [2](۱۹۰۰) اشاره نمود که کتاب وی در زمینه پایداری سازه‌ها، تا امروز نیز یکی از مهم‌ترین مراجع است.

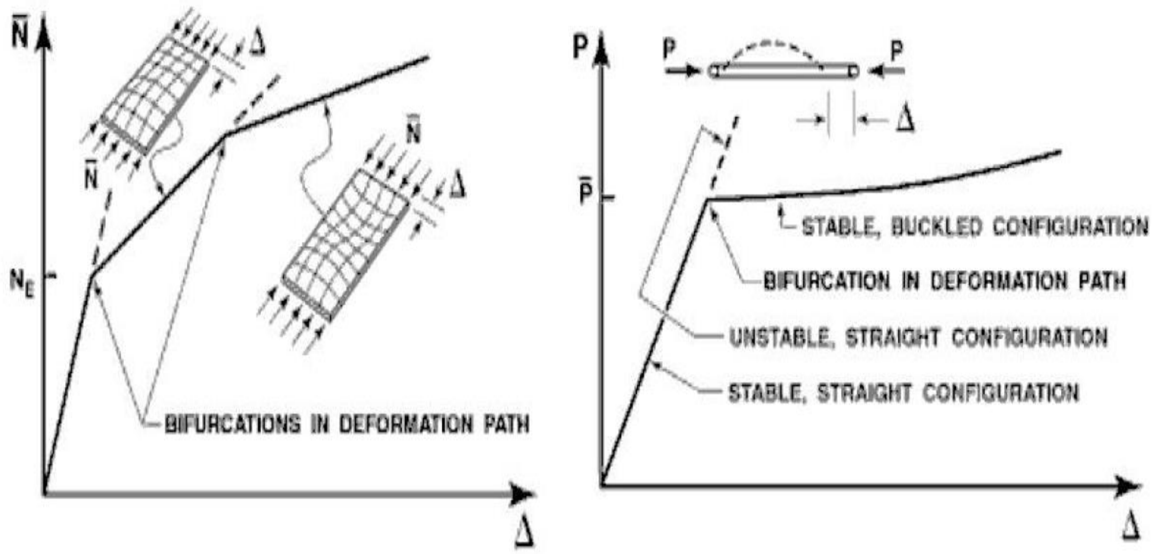
در این فصل، برخی از اصطلاحات اساسی در بحث پایداری و کمانش و همچنین برخی از مهمترین تئوری-های موجود در مورد پوسته‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین مروری بر مطالعات انجام شده صورت می‌گیرد.

۲-۱ پدیده کمانش

پدیده کمانش، انتقال وضعیت سازه از یک حالت تعادل به حالت تعادل دیگر (نقطه انشعاب[3]) و یا یک جهش از یک مسیر تعادل پایدار به یک مسیر تعادل ناپایدار (نقطه حدی[4]) بر روی نمودار بار- جابجایی است و مقدار باری که در آن سازه پایداری خود را ازدست داده و پدیده کمانش رخ می دهد را بار کمانش می‌گویند[۱]. برای بسیاری از سازه‌ها، ممکن است در مرحله تعادل با اعمال بار، مقداری جابجایی و یا قوس در سازه ایجاد شود که این تغییرات در شکل سازه را نباید به عنوان کمانش تلقی کرد زیرا که این تغییرات به صورت ناگهانی نبوده و تنها تغییر شکل‌های معمول در مرحله تعادل هستند. در یک سطح

[1] Leonhard Euler
[2] Timoshenko
[3] Bifurcation Point
[4] Limit Point

خاص از بارگذاری، برخی سازه‌ها به صورت ناگهانی تغییر شکل داده که به این رفتار کمانش گفته می‌شود. شکل (۱-۲)، نقاط انشعاب را برای یک میله و یک ورق نشان می‌دهد.



الف: نمودار بار- تغییر شکل یک میله تحت فشار محوری

ب: نمودار بار- تغییر شکل یک ورق تحت نیروی درون صفحه‌ای

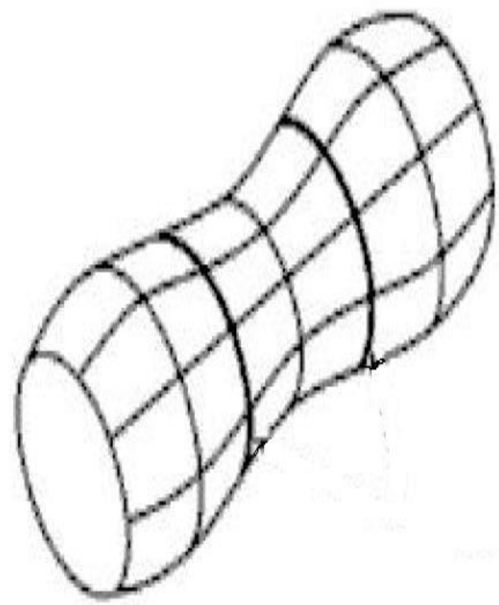
شکل(۱-۲) نقطه انشعاب در نمودار بار- تغییر شکل[۱]

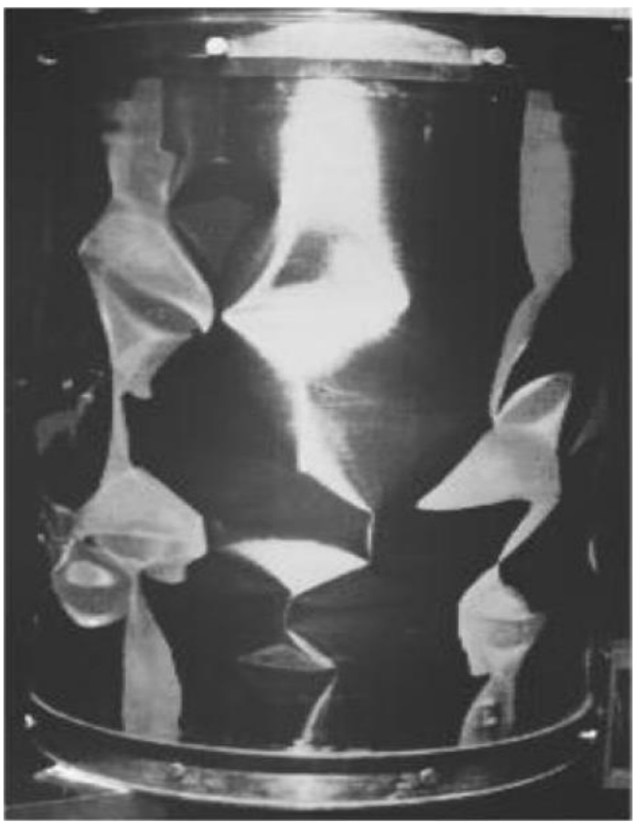
در یک سازه ممکن است بیش از یک بار، پدیده کمانش رخ دهد و این امکان وجود دارد که یک سازه کمانش یافته در یک بار مشخص، به یک شکل مد دیگر، کمانش کند. بنابراین برخی سازه‌ها ممکن است که بارهای کمانش زیادی داشته باشند که کمترین مقدار در بین آنها بار کمانش سازه در نظر گرفته می‌شود (مانند شکل (۱-۲-ب)) [۱].

۱-۳ کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای[۲]

برای بررسی رفتار کمانشی در پوسته‌های استوانه‌ای، در اکثر کارهای انجام شده از یک فرض ساده شونده استفاده می‌شود. طبق این فرض، شکل مدهای کمانش در جهت طولی و محیطی، به صورت سینوسی در

نظر گرفته می‌شود. در جهت محیطی همواره تعداد موج‌های سینوسی باید یک عدد صحیح باشد تا پیوستگی در شکل مد حفظ شود. ولی در واقعیت، شکل مدهای کمانشی برای یک پوسته استوانه‌ای بسیار پیچیده تر از یک شکل سینوسی است. حتی این امکان وجود دارد که در مواردی که پوسته تحت بارگذاری متقارن بوده و به صورت متقارن محوری فرض شود؛ مدهای کمانش متقارن نبوده و شکلی بسیار پیچیده داشته باشد.





الف: شکل مد کمانش تئوری

ب: شکل مد کمانش واقعی تحت فشار محوری

شکل(۱-۳) شکل مدهای کمانش برای یک پوسته استوانه‌ای[۱]

در شکل(۱-۳)، شکل مد فرضی و واقعی، نشان داده شده است. مشخص است که در واقعیت، شکل مد کمانش، اختلاف بسیار زیادی با شکل مد فرضی در اکثر کارها دارد[۱-۳].

۱-۴ تقسیم‌بندی رفتار کمانش و پس کمانش[۱]

بار کمانش در یک سازه با استفاده از حل معادلات پایداری به دست می‌آید. معادله یا معادلات پایداری، خطی است ولی برای طراحی و بررسی دقیق رفتار یک سازه، مطالعه رفتار غیر خطی سازه ضروری است زیرا پدیده کمانش اساسا یک پدیده غیر خطی است و در آن جابجایی‌های بزرگ اتفاق می‌افتد. بنابراین تحلیل غیر خطی پس کمانش مطرح است. تحلیل غیر خطی پس کمانش، بررسی رفتار سازه پس از رسیدن سازه به بار کمانش است. ماهیت عمومی نتایج، از یک مدل رفتار خطی شده با استفاده از تحلیل مقدار ویژه خطی به دست می‌آید که در آن مقادیر ویژه، بار کمانش و بردارهای ویژه، شکل مد کمانش هستند اما دامنه این جابجایی‌ها در مرحله بعد از کمانش مشخص نخواهد شد. این موضوع با تحلیل پس کمانش غیر خطی سازه انجام می‌شود.

۱-۵ تاثیر نقص اولیه بر روی رفتار کمانشی سازه[۱]

رفتار کمانش و پس‌کمانش پوسته ها، تحت تاثیر نقص هندسی اولیه است که در طول فرآیند ساخت، ایجاد می‌شوند. نقص هندسی باعث می‌شود که مقدار بار کمانش سازه کاهش یابد. نقص‌ها به طور کلی به سه دسته اصلی تقسیم می شوند که عبارتند از نقص هندسی، سازه‌ای و نقص در بارگذاری سازه. نقص هندسی در شکل و ظاهر سازه وجود دارد. برای مثال، وجود دندانه‌ها، تورم در سازه یا ناصاف بودن در سازه از این جمله هستند. نقص سازه‌ای شامل وجود نقص یا تغییر ناخواسته در جنس سازه می‌باشد. مانند وجود تنش‌های پسماند یا ناهمگن و یا ناهمسانگرد بودن در نقطه‌ای از سازه. نقص در بارگذاری سازه نیز به واسطه عامل‌هایی مانند وجود ممان‌های ناخواسته در لبه‌ها، ایجاد لنگرهای خمشی به واسطه خارج از مرکز بودن نیروها، به وجود می‌آیند. در مسائل مربوط به کمانش، در نظر گرفتن نقص هندسی بسیار مرسوم و رایج می‌باشد و تقریبا در اکثر مقالات مرتبط با این موضوع، نقص های هندسی به عنوان نقص

اولیه در سازه در نظر گرفته می‌شوند. نقص اولیه هندسی نیز در مقالات مختلف به شکل‌های متفاوتی اعمال می‌شوند. نقص هندسی به شکل یک جابجایی اولیه ، تغییر شکل اولیه و یا تغییر در ضخامت سازه در نظر گرفته می‌شود.

۱-۶ تئوری‌های رایج کمانش پوسته‌های استوانه‌ای[۲]

مطالعه بر روی پوسته‌ها به خصوص پوسته استوانه‌ای تاریخچه کهنی دارد به طوری که معادلات پایداری پوسته‌های استوانه‌ای از قبل از سال ۱۸۰۰ موجود بوده است ولی برای نخستین این با بار به وسیله لورنز[۱](۱۹۱۱) به طور خاص به بررسی رفتار کمانشی یک پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری پرداخته شد. سپس توسط ساوتول[۲](۱۹۱۳) و فن میزز[۳](۱۹۱۴) حل کمانش پوسته تحت فشار یکنواخت جانبی به دست آمد. فلوگه[۴] (۱۹۳۲) به بررسی رفتار پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری مرکب و همچنین تحت خمش پرداخت و روش‌هایی برای حل ارائه داد. اما چیزی که امروز بیش از هر تئوری و روشی مورد استفاده قرار می‌گیرد بسط روابط ساده‌ای است که برای پایداری استوانه تحت پیچش توسط دانل[5](۱۹۳۴) و شورین[۶] (۱۹۲۵) ارائه شد. دانل (۱۹۳۴) تئوری غیر خطی پوسته‌های خود را منتشر کرد که بر اساس فرضیات ساده شده‌ی پوسته‌های نازک بوده و به دلیل سادگی و دقت، ب به طور وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در تئوری دانل عوامل زیادی همچون نیروهای اینرسی درون صفحه‌ای[۷]، تغییر

1 Lorenz
2 Southwell
3 Von Mises
4 Flugge
5 Donnel
6 Schwerin
7 In-Plane Inertia

شکل‌های برشی و اینرسی‌های دورانی[1] در نظر گرفته نمی‌شوند و به همین خاطر نتایج این تئوری فقط برای پوسته‌های نازک از دقت بالایی برخوردار است. از دیگر اشکالات این تئوری آن است که به غیر از یک سری جملات سینماتیک غیر خطی غالب، سایر جملات غیر خطی حذف شده‌اند. فن کارمن[2] و تسین[3] (۱۹۴۱) یک مطالعه بر پایه تئوری دانل انجام دادند و تئوری غیر خطی فن کارمن را ارائه دادند. ساندرس[4] (۱۹۶۳) یک تئوری بهبود یافته برای پوسته‌های استوانه‌ای بیان کرد که برای حالت کشش بیان شده بود. همان معادلات توسط کویتر[5] (۱۹۶۶) دوباره تعیین گردید که به همین خاطر به آنها معادلات تئوری ساندرس-کویتر گفته می‌شود. بر اساس تئوری ساندرس-کویتر هر سه جابجایی در معادلات حرکت ظاهر شدند. نقدی و نوردگرن[6] (۱۹۶۳) بر اساس فرضیات کیرشهف تئوری غیر خطی خود را ارائه دادند. در سال ۱۹۸۵ تئوری غیر خطی تغییر شکل برشی مرتبه اول توسط ردی[7] و چاندراشخارا[8] به منظور کاربرد در پوسته‌های ضخیم لایه‌ای ارائه شد [۲-۴].

۱-۶-۱ تئوری کلاسیک پوسته‌ها

تیموشنکو برای به دست آوردن بار کمانش در یک پوسته استوانه‌ای که تحت فشار محوری متقارن قرار دارد جابجایی را در جهت شعاعی به صورت سینوسی در نظر گرفته است. این فرض بر این اساس استوار است که جابجایی‌ها در جهت شعاعی نسبت به محور مرکزی متقارن می‌باشند[۵]. رابطه سینوسی در نظر گرفته شده برای جابجایی توسط تیموشنکو، امروزه نیز در بسیاری از مقالات برای تعیین جابجایی‌ها استفاده می‌شود. تیموشنکو با استفاده از این میدان جابجایی، مقادیر کرنش را به دست آورده است. برای

[1] Rotary Inertia
[2] Von Karman
[3] Tsien
[4] Sanders
[5] Koiter
[6] Nordgren
[7] Reddy
[8] Chandrashekhara

به دست آوردن کرنش‌ها در هنگامی که کمانش رخ می‌دهد فرض شده که مقدار تنش در مدت زمان کمانش ثابت باقی می‌ماند. با محاسبه انرژی کرنشی قبل و بعد از کمانش و همچنین محاسبه کار انجام شده توسط نیروی فشاری اعمالی و در نهایت با برابر قرار دادن آنها مقدار بار کمانش به دست می آید [۶]. نتایج تجربی نشان می دهد که تئوری کلاسیک به خصوص در مواردی که پوسته ضخیم باشد با واقعیت دارای اختلاف است که این اختلاف با نازک شدن پوسته کاهش می‌یابد.

۱-۶-۲ تئوری غیر خطی دانل

تئوری دانل از مهمترین و پرکاربردترین تئوری‌ها است. در فرضیات دانل در حوزه تغییر مکان‌های کوچک، چرخش‌ها حول محورهای درون صفحه‌ای[1] کوچک فرض شده در نتیجه تمامی سینوس‌ها و کسینوس‌ها در روابط تعادل به ترتیب با خود زاویه و عدد یک جایگزین می‌شوند. عبارت‌های درجه دوم نشان دهنده رابطه غیر خطی بین نیروهای برشی عرضی، کوچک و چرخش‌ها قابل اغماض هستند. همچنین با نازک فرض کردن پوسته از منتجه تنش برشی در جهت محیطی صرفنظر می‌شود. فرضیات دانل عبارتند از [۷]:

الف- پوسته نازک است و ضخامت در مقایسه با شعاع میانی و طول پوسته کوچک است (در کاربردهای عملی: $R/h \geq 20$).

ب- جابجایی شعاعی هم مرتبه با ضخامت پوسته می‌باشد، یعنی خیز پوسته نیز در مقابل شعاع و طول پوسته کوچک است.

ج- شیب در هر نقطه کوچک است.

د- اجزای کرنش کوچک هستند و در نتیجه تمامی فرضیات و تئوری‌های الاستیسیته خطی قابل استفاده می‌باشند.

---
[1] In-plane Axes

ه- تنش در جهت عمود بر لایه میانی پوسته قابل چشم پوشی است.

و- جابجایی‌ها در راستای طولی و محیطی قابل صرفنظر است. در روابط کرنش- جابجایی تمامی جمله های غیر خطی بر اساس جابجایی شعاعی می‌باشد.

در اکثر تئوری‌ها بعد از دانل تقریبا تمامی فرضیات دانل به غیر از فرض آخر معمولا رعایت می‌شود که علت آن هم به دست آوردن معادلاتی دقیق و نزدیکتر به واقعیت است. روابط کرنش – جابجایی به دست آمده توسط دانل، شکل ساده شده معادلات دانل- مشتری- والسو می‌باشد که برای دستگاه استوانه‌ای ساده شده است. با جایگزینی این روابط در معادلات بنیادین، محاسبه منتجه‌ها و قرار دادن آنها در معادلات تعادل، معادلات غیر خطی دانل به دست آمده است.

۱-۶-۳ تئوری غیر خطی فلوگه- لور- بایرن

در این تئوری فرض آخر در تئوری دانل حذف شده است. تمامی جابجایی‌ها بر حسب جابجایی صفحه میانی تعریف می‌شوند[۴]. در این تئوری جملات غیر خطی شامل جابجایی‌های در راستای طولی و محیطی نیز موجود می‌باشند.

۱-۶-۴ تئوری غیر خطی ساندرس-کویتر

در این تئوری نیز مانند تئوری فلوگه از فرضیه آخر دانل و کرنش‌های برشی عرضی صرفنظرشده است. بر طبق این تئوری تغییرات پیچش و انحنا به صورت خطی فرض شده است[۴].

۱-۶-۵ تئوری غیر خطی دانل برای پوسته‌های کم عمق[1]

به طور کلی اصطلاح کم عمق به پوسته‌هایی گفته می‌شود که شیب در مقایسه با شعاع انحنای آنها کوچک است. این تئوری یک توسعه برای تئوری دانل می‌باشد. مانند تئوری دانل، نیروهای اینرسی درون صفحه‌ای

[1] Shallow Shells

قابل چشم پوشی بوده و از تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی دورانی نیز صرفنظر شده است. این تئوری فرض آخر در تئوری دانل را در نظر نگرفته و در نتیجه از منتجه‌های تنش عرضی صرفنظر نشده است[۴].

۱-۶-۶ تئوری تغییر شکل برشی

میدان جابجایی برای هر نقطه پوسته به صورت رابطه(۱-۱) می‌باشد:

$$U_x = u\left(x,y,z,t\right) \;, U_\theta = v\left(x,y,z,t\right) \;, U_z = w(x,y,z,t) \qquad (۱-۱)$$

که در آن u و v وw به ترتیب جابجایی در جهت x و y و z بوده و t زمان است. پارامتر z فاصله نسبت به صفحه میانی می‌باشد. با بسط تیلور رابطه(۱-۱) حول z=۰ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
u\left(x,y,z,t\right) &= u\left(x,y,0,t\right) + z\,\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} + \frac{z^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big|_{z=0} + \dots \\
v\left(x,y,z,t\right) &= v\left(x,y,0,t\right) + z\,\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0} + \frac{z^2}{2!}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big|_{z=0} + \dots \\
w\left(x,y,z,t\right) &= w\left(x,y,0,t\right) + z\,\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0} + \frac{z^2}{2!}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big|_{z=0} + \dots
\end{aligned} \qquad (۲-۱)$$

در روابط (۱-۲)، با در نظر گرفتن دو جمله، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[۱] به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
u\left(x,y,z,t\right) &= u_0\left(x,y,t\right) + z u_1\left(x,y,t\right) \\
v\left(x,y,z,t\right) &= v_0\left(x,y,t\right) + z v_1\left(x,y,t\right) \\
w\left(x,y,z,t\right) &= w_0\left(x,y,t\right) + z w_1\left(x,y,t\right)
\end{aligned} \qquad (۳-۱)$$

با توجه به تعاریف بالا کاملا مشخص است که میدان جابجایی به صورت یک چند جمله‌ای از z تقریب زده شده است. ضرایب z مستقل از z بوده، که این موضوع کمک بسیار زیادی در محاسبات کرده و عملا یکی

---

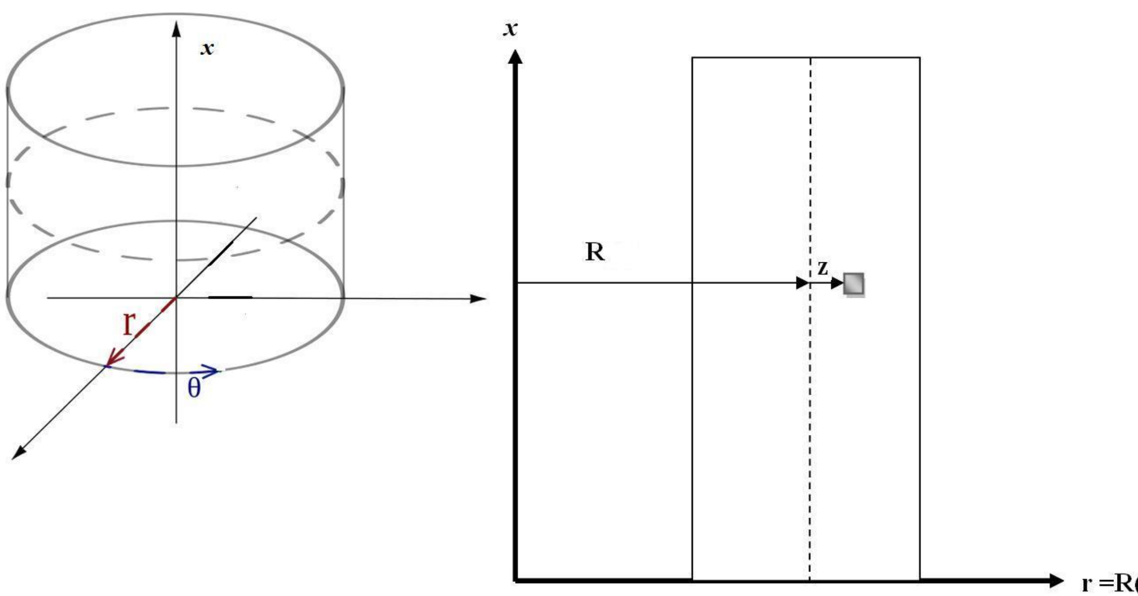
[۱] First Order Shear Deformation Theory (FSDT)

از متغیرهای مساله را در معادلات حاکم، حذف می‌کند. برای پوسته استوانه‌ای، میدان جابجایی با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی در حالت استاتیکی به صورت رابطه(۱-۴) می‌تواند تعریف شود:

$$\begin{aligned} U_x &= u_0\left(x,\theta\right)+zu_1\left(x,\theta\right) \\ U_\theta &= v_0\left(x,\theta\right)+zv_1\left(x,\theta\right) \\ U_z &= w_0(x,\theta)+zw_1(x,\theta) \end{aligned} \tag{۱-۴}$$

که در آن u و v و w به ترتیب جابجایی در جهت x (جهت محور پوسته) و θ (جهت محیطی) و z (جهت عمود بر محور x یا راستای شعاع) می‌باشند. شکل(۱-۴)، این جهت‌ها را نشان می‌دهد. در حالت متقارن محوری، رابطه (۱-۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} U_x &= u_0\left(x\right)+zu_1\left(x\right) \\ U_\theta &= 0 \\ U_z &= w_0(x)+zw_1(x) \end{aligned} \tag{۱-۵}$$



شکل (۱-۴) جهت‌ها به همراه برش مقطع طولی برای پوسته استوانه‌ای

۱-۷ مرور کارهای انجام شده توسط سایر محققین

تا کنون مطالعات بسیار زیادی در زمینه پوسته‌های استوانه‌ای انجام شده است. در این بخش برخی مقالات و کارهای انجام شده، در زمینه رفتار کمانشی پوسته‌ها مورد مطالعه قرار گرفته و روش‌های حل و دستاوردهای آنها، بیان می‌شوند.

۱-۷-۱ تحلیل های استاتیکی و دینامیکی پوسته‌ها

میرسکی و هرمن [۸](۱۹۵۸) با استفاده از روابط سینماتیک خطی و با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، روشی برای حل معادلات حرکت پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد ارائه دادند. سوزوکی و همکاران [۹](۱۹۸۲) معادلات حرکت حاکم بر یک لوله استوانه‌ای را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی و روابط سینماتیک خطی، به دست آورده و این معادلات را با استفاده از سری فروبنیوس حل کردند. یه و هان [۱۰](۱۹۹۵) خمش غیر خطی یک پوسته استوانه‌ای ناهمسانگرد با ضخامت ثابت را با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی بررسی کردند. آنها با استفاده از تابع گرین معادلات غیر خطی را به تعدادی معادلات انتگرالی تبدیل کرده و تاثیر پروفیل‌های مختلف بارگذاری را مورد بررسی قرار دادند. یه[۱۱](۱۹۹۷) حلی را برای تحلیل خمش غیر خطی پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متغیر مانند پوسته-های مخروطی، با استفاده از روش‌های عددی ارائه داد. ایپک‌چی و همکاران[۱۲](۲۰۰۳) با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول معادلات خطی حاکم بر پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر را استخراج و به کمک روش اغتشاشات[1] این معادلات را حل کردند. معادلات خطی حاکم بر پوسته مخروطی با ضخامت متغیر توسط ایپک‌چی و همکاران[۱۳](۲۰۰۸) با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه دو استخراج و به روش تحلیلی حل شد. ایپک‌چی [۱۴](۲۰۱۰) با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه معادلات حاکم بر

[1] Perturbation Theory

پوسته مخروطی با ضخامت متغیر تحت فشار داخلی را برای روابط سینماتیک خطی استخراج و به کمک روش اغتشاشات، این معادلات را حل کرد. قناد و زمانی‌نژاد [۱۵](۲۰۱۰) معادلات حاکم بر یک پوسته استوانه ضخیم با ضخامت ثابت را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی به دست آورده و به صورت تحلیلی حل نمودند. جیامیپریچا و همکاران[۱۶](۲۰۱۴) پوسته متقارن که از یک مایع تراکم ناپذیر پر شده است را به صورت یک فشار داخلی هیدرواستاتیک مدل کرده و معادلات غیر خطی حاصل را به کمک روش عددی و حلقه تکرار حل کردند. سیوالک [۱۷](۲۰۱۴) حل غیر خطی استاتیکی و دینامیکی یک پوسته کروی کم عمق را بر روی یک بستر الاستیک وینکلر- پسترناک[۱] تعیین کرد. معادلات غیر خطی حاکم در حوزه فضا و زمان با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی[۲] حل شد.

۱-۷-۲ کمانش پوسته‌ها

ان جی و لام [۱۸](۱۹۹۹) به بررسی پایداری یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیت[۳] به روش تحلیلی و عددی پرداختند. آنها از سه تئوری دانل، لاو و فلوگه استفاده کردند. پوسته تحت بارگذاری مرکب ثابت و پریودیک محوری قرار داشت. تاثیر پارامترهای گوناگون همچون نسبت طول به شعاع یا نسبت شعاع به ضخامت بر پایداری پوسته مورد بررسی قرار گرفت. کای و همکاران[۱۹](۲۰۰۲) تاثیر نقص هندسی را بر مقاومت کمانشی یک پوسته استوانه‌ایی محوری متمرکز، مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله نقص هندسی به صورت یک تورفتگی در وسط با نرم افزار ABAQUS بود. ژیو و همکاران[۲۰](۲۰۰۲) سعی کردند با بررسی رفتار کمانشی یک پوسته، تناقض موجود بین تئوری و تجربه را برطرف سازند بحرانی با توان ضخامت در مساله کمانش بود. در روابط کلاسیک نشان داده شده که تنش بحرانی رابطه مستقیم با ضخامت (h) دارد ولی در آزمایش‌های تجربی دیده می‌شدکه این تنش با توان سه دوم ضخامت($h^{3/2}$) رابطه مستقیم دارد.

---
[1] Winkler-Pasternak Elastic Foundation
[2] Differential Quadrature Method (DQM)
[3] Composite

بررسی‌های انجام شده نشان می‌داد در نظر گرفتن عواملی مانند نقص‌های هندسی، وزن خود پوسته واستفاده از تئوری کلاسیک می‌تواند باعث ایجاد اختلاف شود. هانت و همکاران [۲۱](۲۰۰۳) به معرفی یک روش جدید برای پیش‌بینی تعداد موج‌های کمانش پوسته استوانه‌ای نازک تحت بار محوری پرداختند. برای بررسی صحت این تئوری، تعداد موج‌های پیش بینی شده توسط تئوری با تعداد موج‌های حاصل از حل عددی و تجربی مقایسه شد. خملیچی و همکاران [۲۲](۲۰۰۴) کمانش پوسته استوانه‌ای الاستیک را با در نظر گرفتن نقص هندسی متقارن با روش تحلیلی بررسی کردند. بارگذاری به صورت یک فشار یکنواخت خارجی در راستای محور پوسته بود. برای به دست آوردن معادله حاکم از رابطه فن کارمن- دانل استفاده و با روش گالرکین این معادلات حل شد. در این مقاله، ابتدا بار کمانش برای پوسته کامل، بررسی شده و سپس برای پوسته با نقص هندسی راه حل تحلیلی ارائه می‌شود. در قسمت اول بار بحرانی، همان بار بحرانی کلاسیک است. این پاسخ با مقادیر واقعی اختلاف زیادی داشت. در مرحله بعد با در نظر گرفتن نقص هندسی، بار بحرانی به صورت تابعی از دامنه نقص هندسی به صورت عددی به دست آمد. کاردومتیس و سیمیتسس [۲۳](۲۰۰۵) به بررسی رفتار کمانشی یک پوسته استوانه‌ای ساندویچی تحت فشار خارجی پرداخته و یک راه حل الاستیسیته برای آن ارائه دادند. مساله به صورت پوسته ارتوتروپیک است. همچنین بارگذاری به صورت یک فشار هی کمانش نیز به صورت عمود بر روی سطح خمیده حاصل از کمانش باقی می‌ماند. روابط کرنش- جابجایی در این مقاله به صورت خطی در نظر گرفته شد. لی و باترا [۲۴](۲۰۰۶) به بررسی رفتار کمانشی یک پوسته که از سه لایه تشکیل شده، پرداختند. لایه بیرونی و درونی این پوسته از جنس و از نوع همگن[۱] و همسانگرد[۲] بودند و لایه میانی آن از جنس مواد ناهمگن FGM[۳] بوده و مدول الاستیسیته آن به صورت سهمی از لایه داخلی تا لایه بیرونی تغییر می‌کند. برای به دست آوردن معادلات حاکم بر پوسته از

[1] Homogeneous
[2] Isotropic
[3] Functionally Graded Material

تئوری فلوگه استفاده کردند. پوسته تحت فشار محوری یکنواخت قرار داشت و رابطه کرنش جابجایی خطی فرض شده بود. با در نظر گرفتن بسط فوریه مثلثاتی برای جابجایی‌ها که شرایط مرزی مساله را ارضا می‌کنند یک معادله جبری برای به دست آوردن بار کمانش نتیجه شد و برای حل معادله جبری حاصل، از روش عددی تکرار نیوتن استفاده شد. کراسووسکی و کاستیرکو [۲۵](۲۰۰۷) به بررسی تجربی کمانش یک پوسته استوانه‌ای تقویت شده تحت بارگذاری فشاری محوری پرداختند. در این مقاله تاثیر پارامترهایی مثل طول پوسته، تعداد نوارهای تقویت کننده، موقعیت آنها و شرایط مرزی پوسته بر روی بار کمانش مورد بررسی قرار گرفت. قربانپور و همکاران[۲۶](۲۰۰۷) به بررسی کمانش پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری با استفاده از روش انرژی با وجود هسته الاستیک در داخل پوسته پرداختند. در استخراج معادلات از فرضیات کویتر استفاده شد. نتایج نشان می‌داد وجود هسته الاستیک باعث افزایش پایداری پوسته شده و بار کمانش افزایش می‌یابد. پاپاداکیس [۲۷](۲۰۰۸) یک عبارت ریاضی برای بار بحرانی در یک پوسته استوانه‌ای ضخیم تعیین و این عبارت را با بار بحرانی به دست آمده از تئوری کلاسیک مقایسه کرد. در این مقاله اثر برش عرضی و تغییرات غیر خطی تنش‌ها و کرنش‌ها نیز در محاسبات لحاظ شد. در این تحقیق بارگذاری به صورت یک فشار هیدرواستاتیک خارجی می‌باشد. مساله به صورت کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده و تنها جابجایی‌ها در دو جهت شعاعی و محیطی مد نظر است. در انتهای این مقاله نشان داده می‌شود که پاسخ تئوری کلاسیک با دقیق ترین حل ارائه شده توسط این مقاله کمتر از ۱۵درصد اختلاف دارد وبرای پوسته نازک، تئوری کلاسیک تقریب مناسبی به حساب می‌آید. یکی از کارهای تحلیلی انجام شده در زمینه کمانش پوسته‌ها، تحقیق عبدالمولا و همکاران[۲۸] (۲۰۰۸) است. ایشان در مقاله خود به بررسی کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای با پارامتر بتدورف[۱] تحت فشار خارجی پرداختند. یک تحلیل مجانبی[۲]، برای تعیین اثرات شرایط مرزی بر روی بار کمانش و همچنین شکل مدهای کمانش صورت گرفت. ابتدا با یک ساده سازی و

[1] Batdorf Parameter
[2] Asymptotic Analysis

حذف جمله های غیر خطی، بار کمانش به دست آمد. سپس با استفاده از روش اغتشاشات به حل دقیق تر معادله پرداخته و صحت حل مرحله قبل همراه با دقت جوابها مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین نشان داده شده که شکل کمانش پوسته استوانه‌ای در جهت محیطی دارای تغییرات بیشتری نسبت به طول پوسته می‌باشد. در این مقاله برای استخراج معادلات از تئوری غیر خطی دانل استفاده شده است. ژیانگ و شن [۲۹] (۲۰۰۸) کمانش یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیت با ضخامت ثابت تحت پیچش و بار محوری را بررسی کردند. پوسته مورد نظر دارای یک نقص هندسی اولیه می‌باشد. معادلات بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها و همچنین روابط سینماتیک غیر خطی فن-کارمن به دست آمده است. برای به دست آوردن بار کمانش از روش اغتشاشات استفاده شده است. شرایط مرزی در دو لبه به صورت تکیه گاه ساده[1] یا گیر دار[2] است. بار کمانش برای دو حالت پیچش و فشار مجزا به دست آمده و با نتایج به دست آمده از حل تجربی در مقالات دیگر، مورد مقایسه قرار گرفته است.

هوانگ و هان [۳۰](۲۰۰۹) به بررسی رفتار غیر خطی و الاستیک، کمانش و پس از کمانش پوسته با جنس FGM تحت بارگذاری فشار محوری پرداختند. معادلات بنیادین، تابع قانون هوک بوده اما به لحاظ هندسی رفتار ماده غیر خطی است. در این مقاله بر اساس تئوری غیر خطی دانل، معادلات استخراج و با استفاده از روش ریتز[3] حل شدند. تمامی خواص ماده(مدول یانگ، ضریب پواسون و...) تابعی توانی از متغیر در راستای ضخامت پوسته (z) می‌باشند. همچنین در این مقاله تاثیرات تغییر دما بر رفتار ماده مورد بررسی قرار گرفته است. دما نیز به صورت تابعی از ضخامت بیان شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش دما، مقدار بار کمانش کاهش می‌یابد. بررسی کمانش و پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای FGM تحت پیچش در یک محیط حرارتی توسط شن [۳۱](۲۰۰۹) انجام شده است. خواص پوسته تابعی از دما بوده و میدان حرارتی به صورتی در

[1] Simply Supported
[2] Clamped
[3] Ritz Method

نظر گرفته شده که دما فقط در جهت ضخامت دارای تغییرات باشد. خواص ماده تشکیل دهنده پوسته نیز در جهت ضخامت تغییر کرده و تابع قانون ساده توانی است. معادله حاکم بر سیستم با در نظر گرفتن روابط غیر خطی سینماتیک فن کارمن و همچنین تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی به دست آمده است و در آنها نقص های هندسی اولیه و همچنین روابط غیر خطی سینماتیکی پیش از کمانش نیز لحاظ شده است. با استفاده از روش اغتشاشات بار کمانش و مسیرهای تعادل پس‌کمانش به دست آمدند. لی و لین [۳۲](۲۰۱۰) به بررسی رفتار غیر خطی کمانشی پوسته غیر همسانگرد لایه‌ای[1] استوانه‌ای تحت بارگذاری خارجی غیر یکنواخت پرداختند. هر لایه از پوسته به صورت الاستیک خطی و غیر همسانگرد در نظر گرفته شده است. معادله حاکم بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و همچنین روابط سینماتیک غیر خطی فن کارمن بوده و معادلات حاصل، شامل کوپلینگ کشش-پیچش، کشش-خمش و خمش- پیچش است. از فرضیات دیگر، نقص هندسی اولیه و تغییر شکل‌های غیر خطی در مرحله پیش‌کمانش می‌باشد. مدل ریاضی نقص اولیه هندسی به شکل اولین مد کمانشی پوسته در نظر گرفته شده است. با تعریف یک تابع تنش به جای منتجه‌های تنش و دو پارامتر چرخش، حول محورهای طولی و محیطی، معادلات حاکم به صورت چهار معادله غیر خطی و چهار مجهول که شامل سه مجهول مذکور و جابجایی شعاعی پوسته می‌باشد به دست آمده است. شرایط مرزی در دو لبه به صورت تکیه گاه ساده یا گیردار در نظر گرفته شده است. برای حل معادلات از روش اغتشاشات استفاده شده است و به کمک آن فشار بحرانی و مسیرهای تعادل پس‌کمانش به صورت تحلیلی به دست آمده است. با روش عددی نیز معادلات حل شده و نتایج با نتایج چند مقاله دیگر مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به طور موثری پیش‌بینی‌های مربوط به بار کمانش را نسبت به تئوری کلاسیک بهبود بخشیده است. وانگ و کویزومی [۳۳](۲۰۱۰) به بررسی عددی و تجربی رفتار کمانشی یک پوسته تحت فشار خارجی که دارای مفصل‌های

[1] Anisotropic Laminated Shell

طولی می‌باشد پرداختند. هدف بررسی تاثیر مفصل و ابعاد هندسی در رفتار کمانشی پوسته با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک پوسته‌ها است. نتایج نشان می‌دهد که مفصل های مختلف نه تنها روی شکل مد کمانش بلکه روی مقدار بار کمانش هم اثر می‌گذارد. همچنین مقدار فشار بحرانی با افزایش سفتی خمشی مفصل، افزایش می‌یابد. برای حل عددی از یک نرم افزار المان محدود استفاده شده است. ایپک چی و شریعتی[۳۴](۲۰۱۰) به بررسی کمانش یک پنل استوانه‌ای پرداختند. معادله حاکم بر سیستم، معادلات خطی دانل است و با استفاده از ترکیب دو روش اغتشاشات و سری‌ها، تنش بحرانی برای یک پنل با دو لبه با تکیه گاه ساده و بارگذاری محوری یکنواخت به دست آمده است. تاثیر پارامترهای طول، شعاع و زاویه قطاع پنل بر بار کمانش بررسی و نتایج با حل عددی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد افزایش طول پنل و یا افزایش شعاع پنل باعث کاهش بار کمانش می‌شود که البته تغییرات شعاع دارای اثر بیشتری بر روی بار کمانش می‌باشد. همچنین یک ضریب تصحیح برای فرمول لورنز[۱] به دست آمده است. محبوبی و ایپک‌چی[۳۵](۲۰۱۲) بار کمانش برای یک پوسته استوانه‌ای نازک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به روش تحلیلی به دست آوردند. روابط کرنش- جابجایی غیر خطی بر اساس تئوری فن – کارمن در نظر گرفته شده است. نتایج با حل اجزای محدود و تئوری کلاسیک مقایسه شده و تاثیر پارامترهای هندسی همچون ضخامت، طول و شعاع بر بار کمانش مورد بررسی قرار گرفته است.

هوتچینسون[۳۶](۱۹۶۵) بار کمانش محوری برای یک پوسته استوانه‌ای تحت فشار محوری با نقص هندسی اولیه را به دست آورد. در این مقاله اختلاف بین نتایج تئوری کلاسیک و نتایج حاصل از آزمایش‌های تجربی برای تعیین بار کمانش، ناشی از وجود نقص های هندسی مطرح شده است. نقص هندسی که به صورت یک جابجایی اولیه در پوسته در نظر گرفته شده باعث کاهش مقدار بار کمانش پیش بینی شده می‌شود. مورگان و همکاران[۳۷](۱۹۶۵) با استفاده از روش تجربی و آزمایش بر روی تعداد زیادی نمونه از پوسته استوانه‌ای

[1] Lorens Formula

و مخروطی، تاثیر نسبت شعاع به ضخامت بر روی بار کمانش را مورد بررسی قرار دادند. چانگ و لو [۳۸](۱۹۶۸) بار کمانش حرارتی را برای یک پوسته مخروطی الاستیک به دست آوردند. روابط کرنش – جابجایی به صورت غیر خطی در نظر گرفته شده و معادلات بر حسب یک تابع تنش به دست آمده است. تغییرات دما به صورت متقارن اعمال شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش گالرکین تبدیل به معادلات جبری شده و با اعمال شرایط مرزی و صفر قرار دادن دترمینان ضرایب با روش عددی، بار کمانش به دست آمده است. هوتچینسون و همکاران[۳۹](۱۹۷۱) تاثیر نقص هندسی بر روی بار کمانش یک پوسته استوانه‌ای تحت فشار محوری مورد بررسی قرار داده‌اند. نقص هندسی به صورت یک تورفتگی یا بیرون زدگی در وسط پوسته که به صورت متقارن، محیط پوسته را احاطه کرده در نظر گرفته شده است. نتایج با استفاده از روش تجربی و عددی به دست آمده و با هم مورد مقایسه قرار گرفته است. رمسی [۴۰](۱۹۷۷) بار کمانش پلاستیک را برای یک پوسته مخروطی با جنس الاستیک به دست آورد. روش کار تجربی بوده و از یک نوع آلومینیوم خاص و یک نوع فولاد ضد زنگ به عنوان دو نمونه مختلف استفاده شده است. با توجه به خواص مکانیکی مختلف دو ماده، در این آزمایش نشان داده شده که شکل مدهای کمانشی یکسانی برای دو پوسته با مواد مختلف اما هندسه یکسان اتفاق افتاده است. ملیک و همکاران[۴۱](۱۹۷۹) بار کمانش را برای یک پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر تحت فشار خارجی به روش تجربی به دست آوردند. تغییرات ضخامت به صورت پله‌ای در نظر گرفته شده است. تونگ و همکاران[۴۲](۱۹۹۲) حلی برای بار کمانش پوسته ارتوتروپیک مخروطی ارائه دادند. در این مقاله برای شعاع که تابعی از متغیر طولی پوسته است با استفاده از میانگین گیری، مقداری ثابت قرار داده شده و معادلات تبدیل به معادلاتی خطی با ضرایب ثابت شده است. کویتر و همکاران[۴۳](۱۹۹۴) بار کمانش را برای یک پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر تحت فشار محوری با استفاده از روش تحلیلی به دست آوردند. معادلات حاکم به صورت یک دستگاه معادلات خطی با دو مجهول جابجایی شعاعی و تابع تنش می‌باشد که یک معادله آن همان معادله سازگاری بوده و از حل آن

تابع تنش به دست می‌آید. بار کمانش به دست آمده از روش تحلیلی با نتایج حل عددی مقایسه شده است. لی و همکاران[۴۴](۱۹۹۵) بار کمانش محوری برای یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با ضخامت متغیر را تعیین کردند. تغییرات ضخامت به صورت سینوسی در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم با استفاده از روابط سینماتیک خطی تعیین شده و به کمک روش تفاضل محدود[1] و یک الگوریتم کامپیوتری حل شده است. آندریانوف و همکاران[۴۵](۲۰۰۰) بار کمانش پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر را تحت فشار خارجی به دست آوردند. تغییرات ضخامت در پوسته به صورت یک نوار تقویت کننده است که با طولی کمتر از طول پوسته اصلی به صورت یک کمربند دور پوسته قرار گرفته است. معادلات حاکم به صورت خطی در نظر گرفته شده و برای هر ناحیه با ضخامت ثابت، یک حل به دست آمده که نتایج در مرزها باید پیوستگی داشته باشند و به کمک این فرض بار کمانش به صورت تحلیلی به دست آمده است. گاسیک و همکاران[۴۶](۲۰۰۰) تاثیر تغییرات ضخامت در راستای محیط را بر روی بار کمانش پوسته استوانه‌ای مورد بررسی قرار دادند. روابط سینماتیک به صورت غیر خطی در نظر گرفته شده و معادلات با استفاده از روش اجزای محدود حل شده است. آقاجری و همکاران[۴۷](۲۰۰۶) رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر را مورد بررسی قرار دادند. ایشان بارگذاری را به صورت یک فشار یکنواخت خارجی در نظر گرفته‌اند. روش حل در این تحقیق، حل عددی و بررسی تجربی است. نتایج این دو روش، بسیار به یکدیگر نزدیک است. یکی دیگر از نتایج این تحقیق اثبات این موضوع می باشد که در صورت کوچک بودن تغییرات ضخامت پوسته در راستای طول، مد کمانشی در تمام طول پوسته قابل ایجاد شدن می‌باشد و برای پوسته با تغییرات ضخامت زیاد مد کمانشی تنها در نواحی نازکتر ظاهر می‌شودکه این موضوع با واقعیت تطابق دارد. بر اساس نظر مولف، ضخامت متغیر خود نیز نوعی نقص هندسی در شکل پوسته می‌باشد که تاثیر آن در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است. لیونگ و هوچ [۴۸](۲۰۰۶) به بررسی پایداری یک پنل استوانه‌ای با ضخامت متغیر

[1] Finite Difference Method (FDM)

پرداختند. ضخامت پنل به صورت سینوسی تغییر کرده و معادلات با فرض جابجایی کوچک، به صورت خطی به دست آمده است. بار کمانش برای پنل به کمک روش گالرکین به دست آمده است. لیونگ و همکاران[۴۹](۲۰۰۹) به بررسی رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر تحت فشار خارجی پرداختند. برای حل با استفاده از روش اغتشاشات و روش گالرکین، یک بسط مجانبی برای پاسخ به دست آمده است. همچنین با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یک حل تحلیلی عددی نیز ارائه شده و با کارهای دیگر در این زمینه مقایسه انجام شده است. روابط سینماتیک با فرض خیز کوچک، خطی و معادلات حاکم نیز خطی می‌باشند. شرایط مرزی تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است و دو پارامترخیز و تابع تنش به صورت توابعی تعریف شده‌اند که این شرایط مرزی را ارضا کنند. با تعریف توابع مناسب برای این دو پارامتر و جایگذاری آنها در معادلات حاکم، معادلات تبدیل به دو معادله دیفرانسیل معمولی می‌شوند. از معادله اول که تنها بر حسب تابع تنش است به کمک روش اغتشاشات تابع تنش به دست آمده است. سپس با استفاده از روش گالرکین در معادله دوم و همچنین تعریف به دست آمده برای تابع تنش به یک مساله مقدار ویژه رسیده است که از حل آن مقدار بار بحرانی محاسبه شده است. نتایج برای پوسته با ضخامت ثابت با نتایج مقالات دیگر مورد مقایسه قرار گرفته است. فخیم و همکاران[۵۰](۲۰۰۹) به بررسی تجربی بار کمانش یک پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر تحت فشار هیدرواستاتیک پرداختند. تغییرات ضخامت در پوسته به صورت پله‌ای بوده و بالای پوسته یک درپوش مخروطی دارد. آزمایش برای سه نمونه با هندسه‌های مختلف انجام شده است و تاثیر پارامتر لاغری (L/R) بر روی بار کمانش بررسی شده است. خلیفه [۵۱](۲۰۰۹) کمانش یک پوسته با ضخامت متغیر تحت بار غیر یکنواخت محوری را بررسی کرد. هندسه مقطع پوسته شبیه به مربعی است که گوشه‌های آن به صورت منحنی می‌باشند. معادلات حاکم که دارای ضرایب متغیر می‌باشد با انتگرال گیری و مقدار متوسط تبدیل به ضرایب ثابت شده و در نهایت معادله حاصل با روش عددی حل شده است. سوفیو[۵۲](۲۰۱۰) بار کمانش محوری برای یک پوسته مخروطی

ناهمگن که بر روی بستر وینکلر – پسترناک قرار داشت را به دست آورد. معادلات پایداری و سازگاری با استفاده از روش گالرکین و به کمک روش عددی حل شده و بار کمانش برای دو حالت بستر الاستیک و در غیاب بستر الاستیک، به دست آمده است. بار کمانش پوسته تحت بار محوری و ضخامت متغیر توسط خلیفه [۵۳](۲۰۱۱) به دست آمد. هندسه مقطع پوسته شبیه به مثلثی با ضلع‌های منحنی می‌باشد. روند حل مساله کاملا شبیه به مرجع[۵۱] بوده با این تفاوت که در این مقاله فرکانس‌های طبیعی نیز به دست آمده است.

بار کمانش یک پوسته استوانه‌ای که ضخامت آن به صورت پله‌ای تغییر می‌کند تحت فشار خارجی یکنواخت، توسط چن و همکاران[۵۴](۲۰۱۱) به دست آمده است. در این مقاله با استفاده از روش پراکندگی وزن دیواره[1] معادلات حل شده و با مقایسه نتایج با حل اجزای محدود مشخص شده است که این روش برای پوسته با طول کم دقت خوبی دارد. علی و همکاران[۵۵](۲۰۱۱) تاثیر وجود نقص های هندسی متقارن بر پایداری یک پوسته استوانه‌ای را مورد بررسی قرار دادند. نقص هندسی به صورت یک تورفتگی به شکل مثلث که مثل یک کمربند به دور پوسته پیچیده، در نظر گرفته شده است. بارگذاری به صورت فشار یکنواخت محوری بوده و بار کمانش به کمک روش اجزای محدود به دست آمده است. معادلات به دست آمده توسط کویتر، بار دیگر توسط چن و همکاران [۵۶](۲۰۱۲) حل شد با این تفاوت که تغییرات ضخامت در این مقاله به صورت پله‌ای در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم خطی بوده و برای هر قسمت پوسته با ضخامت ثابت یک حل به کمک روش اغتشاشات به دست آمده است.

شرعیات و عسگری[۵۷](۲۰۱۳) کمانش حرارتی یک پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر را مورد تحلیل قرار دادند. جنس پوسته از ماده ناهمگن و وابسته به دما تشکیل شده است. معادلات با استفاده از تئوری

[1] Weighted Smeared Wall Method

مرتبه سوم تغییر شکل برشی و تئوری غیر خطی فن-کارمن به دست آمده و با استفاده از روش اجزای محدود، دمای کمانش به دست آمده است.

آلاشتی و احمدی [۵۸](۲۰۱۴) کمانش یک پوسته استوانه‌ای ناقص به شکل یک پنل تحت فشار یکنواخت خارجی را بررسی کردند. روابط به دست آمده برای یک قطاع از استوانه است که قابل تعمیم به یک استوانه کامل نیز می‌باشد. ضخامت در راستای طول به صورت سینوسی تغییر می‌کند به طوری که در دو لبه پنل ضخامت یکسان بوده و در جهت محیطی، تغییرات ضخامت متقارن است. با استفاده از روابط سینماتیک خطی، معادلات حاکم به دست آمده و به کمک روش DQM به یک دستگاه معادلات جبری خطی همگن تبدیل شده است. شهرجردی و بهرامی [۵۹](۲۰۱۵) تاثیر نقص هندسی اولیه را بر بار کمانش پوسته استوانه‌ای کامپوزیت با استفاده از روش اجزای محدود، بررسی کردند. امینی [۶۰](۲۰۱۵) بار کمانش را برای پوسته استوانه کامپوزیت با استفاده از روش نوار محدود[1] به دست آورد. در این مقاله راستای نیروهای خارجی متغیر در نظر گرفته شده است. میدان جابجایی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تعریف شده است. ژو و همکاران [۶۱](۲۰۱۶) بار کمانش پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر پله‌ای تحت فشار یکنواخت خارجی، مورد مطالعه قرار دادند. معادلات با استفاده از روش تفکیک متغیرها، سری فوریه و روش اغتشاشات حل شده است. این روش برای پوسته‌ها با ضخامت پله‌ای مناسب است.

بیساگنی[۶۲](۲۰۱۶) بار کمانش را برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیت با در نظر گرفتن گشودگی و بدون گشودگی به روش تجربی به دست آورده و تاثیر اندازه گشودگی بر روی بار کمانش را بررسی کرد. قاسمی و حاج محمدی[۶۳](۲۰۱۷) تحلیل کمانش و پس کمانش پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر تحت فشار هیدرواستاتیک خارجی را با استفاده از روش اجزای محدود انجام دادند. نتایج

[1] Finite Strip Method

روش اجزای محدود با نتایج تجربی مقایسه شده است و نشان داده شده است که بار کمانش پوسته با ضخامت متغیر نزدیک به مقدار بار کمانش همان پوسته با ضخامت متوسط است. حسینی و طالبی[۶۴](۲۰۱۷) بار کمانش نانو لوله کربنی پوسته مخروطی کامپوزیتی تقویت شده را تحت فشار محوری با استفاده از روش عددی DQM به دست آوردند. برای استخراج معادلات تعادل از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی استفاده نموده‌اند.

در جدول (۱-۱) خلاصه‌ای از کارهای انجام شده در زمینه کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متغیر، ارائه شده است.

جدول (۱-۱) مرور خلاصه بر مقالات ارائه شده در زمینه کمانش پوسته‌ها

مولف	سال انتشار	هندسه و جنس پوسته	تئوری مورد استفاده	روش حل	توضیحات
هوتچینسون [۳۶]	۱۹۶۵	استوانه ضخامت ثابت با نقص اولیه، همگن و همسانگرد	تئوری کلاسیک و تئوری غیر خطی دانل	شبه تحلیلی	نقص اولیه به صورت یک جابجایی اولیه در نظر گرفته شده است.
مورگان و همکاران[۳۷]	۱۹۶۵	استوانه ای و مخروطی، همگن و همسانگرد	-	تجربی	نسبت شعاع به ضخامت بر روی بار کمانش بررسی شده است.
چانگ و لو[۳۸]	۱۹۶۸	مخروطی، همگن و همسانگرد	غیر خطی	گالرکین	
هوتچینسون و همکاران[۳۹]	۱۹۷۱	استوانه ضخامت ثابت با نقص اولیه، همگن و همسانگرد	تئوری کلاسیک	شبه تحلیلی	نقص اولیه به شکل یک تو رفتگی متقارن در محیط پوسته در نظر گرفته شده است.
رمسی[۴۰]	۱۹۷۷	مخروطی، همگن و همسانگرد	-	تجربی	شکل مدهای کمانشی یکسانی برای دو پوسته با مواد مختلف اما هندسه یکسان اتفاق افتاده است .
ملیک و همکاران [۴۱]	۱۹۷۹	استوانه ضخامت متغیر، همگن و همسانگرد	-	تجربی	ضخامت به صورت پله ای تغییر می کند .

جدول (۱-۱) مرور خلاصه بر مقالات ارائه شد ه در زمینه کمانش پوسته‌ها (ادامه)

مولف	سال انتشار	هندسه و جنس پوسته	تئوری مورد استفاده	روش حل	توضیحات
تونگ و همکاران[۴۲]	۱۹۹۲	مخروطی، ارتوتروپیک	تئوری کلاسیک	شبه تحلیلی	ضخامت به صورت میانگین در نظر گرفته شده است.
کویتر و همکاران [۴۳]	۱۹۹۴	استوانه ای ضخامت متغیر، همگن و همسانگرد	تئوری کلاسیک	شبه تحلیلی	
لی و همکاران [۴۴]	۱۹۹۵	استوانه ای ضخامت متغیر، کامپوزیت	تئوری کلاسیک	تفاضل محدود	
آندریانوف و همکاران[۴۵]	۲۰۰۰	استوانه جدار ثابت با یک نوار تقویت دور آن، همگن و همسانگرد	تئوری کلاسیک	شبه تحلیلی	تغییرات ضخامت به صورت پله‌ای و برای هر ناحیه با ضخامت ثابت پاسخ تعیین شده است.
گاسیک و همکاران [۴۶]	۲۰۰۰	استوانه ای ضخامت متغیر، همگن و همسانگرد	تئوری غیر خطی پوسته‌ها	اجزای محدود	
آقاجری و همکاران[۴۷]	۲۰۰۶	استوانه ضخامت متغیر، همگن و همسانگرد	-	تجربی	
لیونگ و هوچ [۴۸]	۲۰۰۶	پنل استوانه ضخامت متغیر، همگن و همسانگرد	تئوری خطی لاو-کیرشهف	گالرکین	
لیونگ و همکاران[۴۹]	۲۰۰۹	استوانه ضخامت متغیر، همگن و همسانگرد	تئوری کلاسیک	گالرکین-روش اغتشاشات	
فخیم و همکاران [۵۰]	۲۰۰۹	استوانه ضخامت متغیر، همگن و همسانگرد	-	تجربی	تغییرات ضخامت به صورت پله ای

جدول (۱-۱) مرور خلاصه بر مقالات ارائه شد ه در زمینه کمانش پوسته‌ها (ادامه)

مولف	سال انتشار	هندسه و جنس پوسته	تئوری مورد استفاده	روش حل	توضیحات

خلیفه [۵۱]	۲۰۰۹	استوانه ضخامت متغیر، همگن و همسانگرد	تئوری کلاسیک	عددی	ضخامت با انتگرالگیری به صورت متوسط در نظر گرفته شده است.
سوفیو [۵۲]	۲۰۱۰	مخروطی، ناهمگن	تئوری خطی لاو-کیرشهف	گالرکین	پوسته بر روی بستر الاستیک قرار دارد.
خلیفه[۵۳]	۲۰۱۱	استوانه ضخامت متغیر، همگن و همسانگرد	تئوری کلاسیک	عددی	ضخامت با انتگرالگیری به صورت متوسط در نظر گرفته شده است.
چن و همکاران[۵۴]	۲۰۱۱	استوانه ضخامت متغیر، همگن و همسانگرد	تئوری غیر خطی پوسته‌ها	پراکندگی وزن دیواره	ضخامت به صورت پله‌ای تغییر می-کند.
علی و همکاران[۵۵]	۲۰۱۱	استوانه ضخامت ثابت با نقص اولیه، همگن و همسانگرد	تئوری کلاسیک	اجزای محدود	نقص هندسی به شکل یک تورفتگی مثلثی در دور پوسته فرض شده است.
چن و همکاران[۵۶]	۲۰۱۲	استوانه ای ضخامت متغیر، همگن و همسانگرد	تئوری کلاسیک	شبه تحلیلی	تغییرات ضخامت به صورت پله‌ای
شرعیات و عسگری[۵۷]	۲۰۱۳	پوسته استوانه با ضخامت متغیر، ناهمگن و وابسته به دما	تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی و تئوری غیر خطی فن-کارمن	اجزای محدود	
آلاشتی و احمدی[۵۸]	۲۰۱۴	پنل استوانه با نقص اولیه، همگن و همسانگرد	تئوری خطی لاو-کیرشهف	DQM	
شهرجردی و بهرامی [۵۹]	۲۰۱۵	استوانه کامپوزیت با نقص اولیه	-	روش اجزای محدود	
امینی [۶۰]	۲۰۱۵	استوانه کامپوزیت	تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول	روش نوار محدود	

جدول (۱-۱) مرور خلاصه بر مقالات ارائه شد ه در زمینه کمانش پوسته‌ها (ادامه)

مولف	سال انتشار	هندسه و جنس پوسته	تئوری مورد استفاده	روش حل	توضیحات
ژو و همکاران [۶۱]	۲۰۱۶	استوانه ضخامت متغیر	تئوری کلاسیک	شبه تحلیلی	تغییرات ضخامت به صورت پله‌ای
بیساگنی[۶۲]	۲۰۱۶	استوانه کامپوزیت	-	تجربی	تاثیر گشودگی بر بار کمانش مورد بررسی قرار گرفته است.
قاسمی و حاج محمدی[۶۳]	۲۰۱۷	استوانه ضخامت متغیر	-	اجزای محدود و تجربی	
حسینی و طالبی[۶۴]	۲۰۱۷	نانو لوله کربنی پوسته مخروطی کامپوزیتی تقویت شده	تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول	DQM	

۱-۸ جمع‌بندی

در این فصل سعی شد تا برخی مفاهیم اولیه بیان شود و مروری بر مقالات در زمینه کمانش پوسته‌ها و به خصوص پوسته‌ها با ضخامت متغیر، ارائه گردد. همچنین جدولی برای بیان کارهای گذشته به صورت خلاصه ارائه شده است. با توجه به مطالب ارائه شده در این فصل، مشاهده می‌شود که در اکثر مقالات ارائه شده برای مساله کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متغیر از روش‌های عددی و تقریبی استفاده شده است. نوآوری‌ها در این رساله به شکل زیر بیان می‌شوند:

- معادلات تعادل تحت بار محوری و فشار خارجی متغیر بر اساس تئوری FSDT که یک دستگاه معادلات غیر خطی با ضرایب متغیر است با استفاده از روش اغتشاشات به صورت تحلیلی حل می‌شوند. در این حل علاوه بر جابجایی عرضی، جابجایی طولی نیز تعیین می شود.
- معادلات پایداری تحت بار محوری و فشار خارجی که یک دستگاه معادلات همگن با ضرایب متغیراست حل و مقدار ویژه آن به صورت تقریبی تحلیلی تعیین می‌گردد.

- تاثیر نقص اولیه به صورت تحلیلی بر روی بار کمانش پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر، بررسی می‌شود.

فصل دوم:

استخراج معادلات تعادل و پایداری پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر

۲-۱ مقدمه

معادلات تعادل برای یک پوسته استوانه‌ای ضخامت متغیر با در نظر گرفتن جملات غیر خطی در روابط کرنش - جابجایی، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر است. در این فصل، معادلات تعادل و پایداری برای یک پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر با استفاده از اصل کار مجازی به دست می‌آید. میدان جابجایی، در این تحقیق با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تعریف شده است.

۲-۲ استخراج معادلات تعادل

برای استخراج معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای، از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود. در شکل(۲-۱)، این دستگاه مختصات و پارامترهای آن نشان داده شده است. برای استخراج معادلات از فرضیات زیر استفاده شده است:

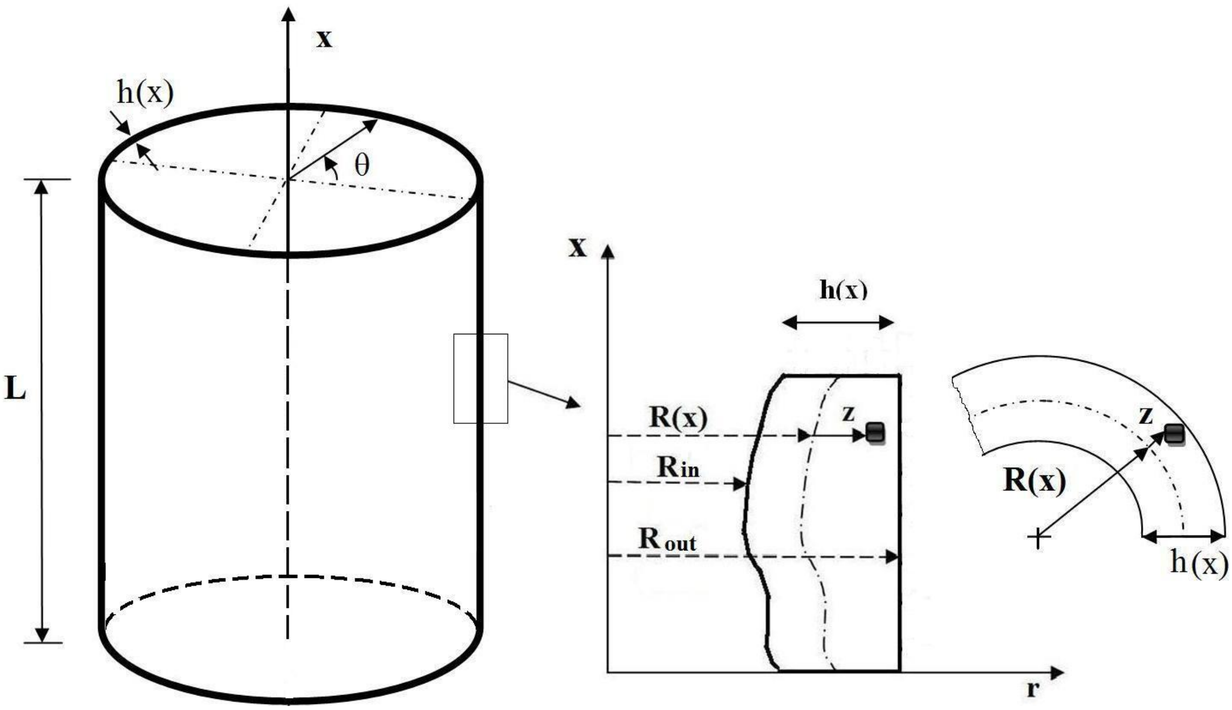
۱. بارگذاری و هندسه متقارن محوری بوده و جابجایی در راستای محیطی صفر است.

۲. پوسته همگن و همسانگرد است.

۳. جابجایی‌ها نسبتا بزرگ است (جابجایی شعاعی در مقایسه با ضخامت پوسته کوچکتر نیست ولی هنوز در مقایسه با دیگر ابعاد پوسته کوچک است) و از روابط فن کارمن برای تعریف روابط کرنش - جابجایی مساله استفاده می‌شود.

۴. پوسته در طی فرآیند بارگذاری و رسیدن به حد کمانش، از ناحیه الاستیک خارج نشده و روابط تنش – کرنش از قانون هوک پیروی می‌کند.

۵. نقص اولیه از نوع هندسی فرض شده و به صورت یک جابجایی اولیه متقارن در راستای شعاع می‌باشد.



شکل(۲-۱) هندسه پوسته استوانه‌ای

با داشتن میدان جابجایی و با استفاده از روابط سینماتیکی مناسب، می‌توان کرنش‌ها را محاسبه کرد. همانطور که اشاره شد در این تحقیق برای میدان جابجایی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده می‌شود. به این منظور از رابطه (۱-۵)، استفاده می‌شود. بر اساس فرضیات تئوری فن-کارمن، رابطه(۲-۱) را می‌توان به شکل ساده‌تری بازنویسی کرد[۴].

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_z}{\partial x}\right)^2 \;;\; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_z}{r} \;;\; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right)^2$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial x}\frac{\partial U_z}{\partial z} \;;\; \gamma_{\theta z} = 0; \;\; \gamma_{x\theta} = 0 \quad (۱-۲)$$

برای یک ماده الاستیک خطی، همگن و همسانگرد، بر اساس قانون هوک، روابط تنش- کرنش به صورت رابطه(۲-۲) است.

$$\sigma_x = A\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)\ ;\ \sigma_\theta = A\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\ ;\ \sigma_z = A\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_\theta + \varepsilon_x)\ ;\ \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz} \tag{۲-۲}$$

در رابطه فوق ضرایب μ و λ ثوابت لامه بوده و $A=\lambda+2\mu$ می‌باشد. معادلات حاکم با استفاده از اصل کار مجازی به دست می‌آید. برای استفاده از اصل کار مجازی، باید مقادیر انرژی کرنشی و کار نیروهای خارجی را به دست آورد. مقدار انرژی کرنشی و تغییرات آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{gathered} U = \iiint \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_z\varepsilon_z+\sigma_\theta\varepsilon_\theta+\tau_{xz}\gamma_{xz})dV;\ \ dV = r dx d\theta dz \\ 0 \le \theta \le 2\pi; \quad -\frac{h(x)}{2} \le z \le \frac{h(x)}{2}; \quad 0 \le x \le L; \quad r = R(x) + z \end{gathered} \tag{۲-۳-الف}$$

$$\begin{aligned} \delta U = 2\pi\iint [&R(x)\sigma_x\delta(\frac{du_0}{dx})+z\sigma_x\delta(\frac{du_1}{dx})+\sigma_x\left(\frac{dw_0}{dx}+z\frac{dw_1}{dx}\right)\delta\left(\frac{dw_0}{dx}+z\frac{dw_1}{dx}\right) \\ &+ \frac{\sigma_\theta}{r}\delta w_0 + z\frac{\sigma_\theta}{r}\delta w_1 + \sigma_z\,\delta w_1(1+w_1)+\tau_{xz}\,\delta u_1 + \tau_{xz}\,\delta(\frac{dw_0}{dx}) \\ &+ z\tau_{xz}\delta(\frac{dw_1}{dx}) + \tau_{xz}(\frac{dw_0}{dx} + z\frac{dw_1}{dx})\delta w_1 + \tau_{xz}w_1\delta(\frac{dw_0}{dx} + z\frac{dw_1}{dx})](1+z/R(x))dx \end{aligned} \tag{۲-۳-ب}$$

در روابط فوق، $R(x)$ شعاع صفحه میانی است. برای محاسبه کار نیروهای خارجی و تغییرات آنها، با فرض ثابت بودن یا نبودن راستای نیروها دو حالت به وجود خواهد آمد. در روابط (۲-۴) و (۲-۵) به ترتیب کار بار محوری و فشار خارجی و تغییرات آنها، برای حالتی که راستای نیروها ثابت فرض می‌شوند به دست آمده است.

$$\begin{aligned} W_p &= \iint -PU_x(R(x)+z)d\theta dz = \iint -P(u_0+zu_1)(R(x)+z)d\theta dz \\ &= -2\pi Ph(R(x)u_0 + \frac{h(x)^2}{12}u_1) \\ \delta W_p &= -2\pi Ph(x)(R(x)\delta u_0 + \frac{h(x)^2}{12}\delta u_1)\ ;\ at\ x=L \end{aligned} \tag{۲-۴}$$

$$W_q = -\int 2\pi q U_z (R(x)+z)dx = \int -2\pi q(w_0+zw_1)(R(x)+z)dx$$
$$\delta W_q = -\int 2\pi q(\delta w_0+ z\delta w_1)(R(x)+ z)dx \quad ; at\ z = \frac{h(x)}{2}$$
(۵-۲)

در روابط فوق، P و $q(x)$ به ترتیب بار محوری و فشار خارجی وارد بر پوسته بوده و جهت‌های مثبت آن‌ها مطابق با شکل (۲-۲) است. در شکل (۲-۲)، هندسه کلی پوسته تحت بارگذاری و محورهای مختصات نشان داده شده است. در روابط (۲-۶) و (۲-۷) به ترتیب مقادیر کار بار محوری و فشار خارجی و تغییرات آنها برای حالتی داده شده است که راستای نیروهای خارجی ثابت فرض نمی‌شوند [۶۵]. در این حالت، مقادیر کار نیروهای خارجی و تغییرات آنها در حالتی محاسبه می‌شود که سازه تغییر شکل پیدا کرده است.

$$W_p = \iiint \frac{1}{2}P(\frac{\partial U_z}{\partial x})^2 dV = \iiint \frac{1}{2}P(\frac{dw_0}{dx}+z\frac{dw_1}{dx})^2 (R(x)+z)d\theta dz dx$$
$$0 \le \theta \le 2\pi; -\frac{h(x)}{2} \le z \le \frac{h(x)}{2}; 0 \le x \le L$$
(۲-۶-الف)

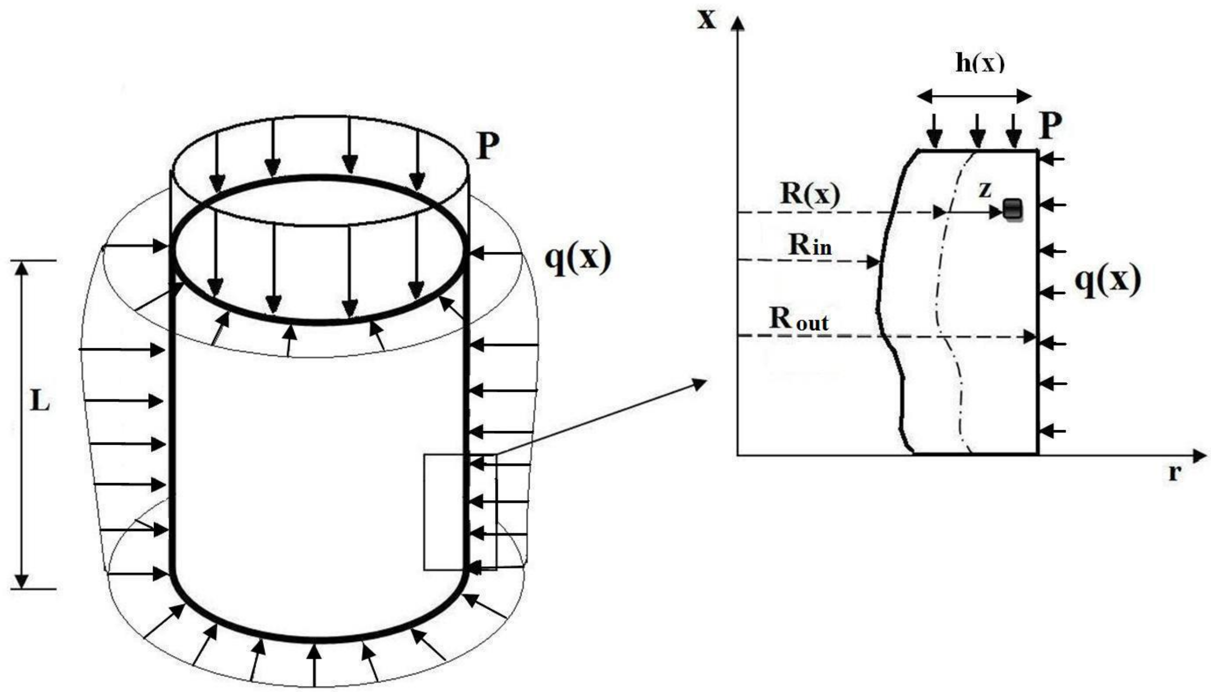
$$\begin{aligned}\delta W_p &= \iiint P(\frac{dw_0}{dx}+z\frac{dw_1}{dx})\delta(\frac{dw_0}{dx}+z\frac{dw_1}{dx})(R(x)+z)d\theta dz dx\\ &= -2\pi\int\left(\delta w_0\left(\frac{d}{dx}(\frac{Ph(x)^3}{12}\frac{dw_1}{dx}+PR(x)h(x)\frac{dw_0}{dx})\right)+\delta w_1\left(\frac{d}{dx}(\frac{Ph(x)^3}{12}(\frac{dw_0}{dx}+R(x)\frac{dw_1}{dx}))\right)\right)dx\\ &+\delta w_0(\frac{Ph(x)^3}{12}\frac{dw_1}{dx}+PR(x)h(x)\frac{dw_0}{dx})\Big|_{x=0..L} + \delta w_1(\frac{Ph(x)^3}{12}(\frac{dw_0}{dx}+R(x)\frac{dw_1}{dx}))\Big|_{x=0..L} = 0\end{aligned}$$
(۲-۶-ب)

$$q_r = -q(x)\cos\theta ; q_x = -q(x)\sin\theta ;\ \sin\theta \approx \frac{\partial U_z}{\partial x}, \cos\theta \approx 1-\frac{1}{2}(\frac{\partial U_z}{\partial x})^2$$
$$W_q = \iint\left(-q(x)\cos\theta U_z - q(x)\sin\theta U_x\right) d\theta\ dx ;\ 0 \le \theta \le 2\pi ; 0 \le x \le L$$
(۲-۷-الف)

$$
\begin{aligned}
\delta W_q &= \iint\left(-q(x)\delta(w_0+zw_1)(1-\frac{1}{2}(\frac{dw_0}{dx}+z\frac{dw_1}{dx})^2)-q(x)(\frac{dw_0}{dx}+z\frac{dw_1}{dx})\delta(u_0+zu_1)\right)d\theta dx \\
&=2\pi\int(R(x)+\frac{h(x)}{2})-\delta w_0\left[q(x)(1-\frac{1}{2}(\frac{dw_0}{dx}+z\frac{dw_1}{dx})^2)\right]-\delta w_1\left[q(x)z(1-\frac{1}{2}(\frac{dw_0}{dx}+z\frac{dw_1}{dx})^2)\right] \\
&\quad -\delta u_0\left[q(x)(\frac{dw_0}{dx}+z\frac{dw_1}{dx})\right]-\delta u_1\left[q(x)z(\frac{dw_0}{dx}+z\frac{dw_1}{dx})\right]dx \quad ; \quad at\ z=\frac{h(x)}{2}
\end{aligned}
$$
(۲-۷-ب)

با استفاده از رابطه (۲-۸) منتجه‌های تنش تعریف می‌شوند.

$$
\{N_x, M_x, P_x\} = \int_{-h/2}^{h/2}\{1, z, z^2\}\sigma_x(1+\frac{z}{R(x)})dz \;;\; \{N_\theta, M_\theta\} = \int_{-h/2}^{h/2}\{1, z\}\sigma_\theta dz
$$
$$
\{Q_x, M_{xz}\} = \kappa\int_{-h/2}^{h/2}\{1, z\}\tau_{xz}(1+\frac{z}{R(x)})dz; \; N_z = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_z(1+\frac{z}{R(x)})dz
$$
(۲-۸)



شکل (۲-۲) پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر تحت بارگذاری مرکب

در رابطه فوق، κ ضریب تصحیح برشی بوده و $\frac{5}{6}$در نظر گرفته شده است[۴]. با فرض ثابت بودن راستای نیروهای خارجی و با استفاده از روابط فوق و به کمک اصل کار مجازی، معادلات تعادل بر حسب منتجه‌های تنش به شکل رابطه (۲-۹) به دست می‌آید. با جایگزینی منتجه‌های تنش بر حسب جابجایی در روابط فوق، معادلات تعادل برحسب جابجایی‌ها به دست می‌آیند. این معادلات در پیوست (الف) آورده شده است. این معادلات یک دستگاه شامل چهار معادله دیفرانسیل کوپل غیر خطی و با ضرایب متغیر است.

$$eq1: \frac{d}{dx}(R(x)N_x) = 0 \qquad \text{(۲-۹-الف)}$$

$$eq2: \frac{d}{dx}(R(x)M_x) - R(x)Q_x = 0\ ; \qquad \text{(۲-۹-ب)}$$

$$eq3: \frac{d}{dx}(R(x)(N_x \frac{dw_0}{dx} + M_x \frac{dw_1}{dx} + Q_x(1+w_1))) - N_\theta + (R(x) + \frac{h(x)}{2})q(x) = 0 \qquad \text{(۲-۹-ج)}$$

$$\begin{aligned} eq4\ :\ & \frac{d}{dx}(R(x)(M_x \frac{dw_0}{dx} + P_x \frac{dw_1}{dx} + M_{xz})) - M_\theta - R(x)N_z(1+w_1) - R(x)Q_x \frac{dw_0}{dx} \\ & + \frac{d}{dx}(R(x)M_{xz})w_1 + \frac{1}{2}h(x)(R(x) + \frac{h(x)}{2})q(x) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(۲-۹-د)}$$

شرایط مرزی مساله نیز با برابر صفر قرار دادن جملات باقی مانده، به شکل رابطه (۲-۱۰) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} & R(x)N_x\delta u_0\big|_{x=0} - R(x)(N_x - P\,h(x))\delta u_0\big|_{x=L} = 0; \quad R(x)(N_x\frac{dw_0}{dx} + M_x\frac{dw_1}{dx} + Q_x(1+w_1))\delta w_0\Big|_{x=0,L} = 0 \\ & R(x)M_x\delta u_1\big|_{x=0} - (R(x)M_x - \frac{1}{12}P\,h(x)^3)\delta u_1\Big|_{x=L} = 0; \quad R(x)(M_x\frac{dw_0}{dx} + P_x\frac{dw_1}{dx} + M_{xz}(1+w_1))\delta w_1\Big|_{x=0,L} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(۲-۱۰)}$$

از رابطه (۲-۱۰)، می‌توان شرایط مرزی مساله را به دست آورد. برای مثال در شرایط تکیه گاه ساده و گیردار به ترتیب روابط (۲-۱۱-الف) و (۲-۱۱-ب) تعیین می‌شوند.

$$R(x)N_x\big|_{x=0} - R(x)\,(N_x - P\,h(x))\big|_{x=L} = 0$$

$$R(x)(N_x \frac{dw_0}{dx} + M_x \frac{dw_1}{dx} + Q_x(1+w_1))\Big|_{x=0,L} = 0 \qquad \text{(۲-۱۱-الف)}$$

$$u_0 = 0\,, w_0 = 0 \;\; at \;\; x = 0 \; and \;\; x = L$$

$$R(x)N_x\big|_{x=0} = 0\,; R(x)\,(N_x - P\,h(x))\big|_{x=L} = 0$$

$$u_0 = 0\,, w_0 = 0\,, u_1 = 0\,, w_1 = 0 \;\; at \;\; x = 0 \qquad \text{(۲-۱۱-ب)}$$

$$w_0 = 0\,, w_1 = 0 \;\; at \;\; x = L$$

۲-۳ استخراج معادلات پایداری

برای استخراج معادلات پایداری، در این تحقیق از دو روش استفاده شده است. در روش اول، معادلات پایداری به صورت مستقیم و از روش اصل کار مجازی با در نظر گرفتن راستای غیر ثابت برای بارهای خارجی و کار آنها به دست می‌آیند. به معادلات به دست آمده از این روش، معادلات تعادل کمانشی می‌گویند زیرا تعادل در شرایطی بررسی می‌شود که جسم، تغییر شکل داده است. در روش دوم، ابتدا معادلات تعادل استخراج و حل شده و سپس با استفاده از این معادلات و در نظر گرفتن یک رشد کوچک در جابجایی‌ها، معادلات پایداری به دست می‌آیند. این روش را تعادل در مجاورت[1] می‌گویند.

همانطور که گفته شد در حالت اول، با در نظر گرفتن روابط (۲-۶) و (۲-۷) برای حالتی که راستای نیروهای خارجی ثابت فرض نمی‌شود و با توجه به رابطه (۲-۳) برای انرژی کرنشی و تغییرات آن، معادلات پایداری به صورت رابطه (۲-۱۲) به دست می‌آیند. این روابط مربوط به پوسته‌ای است که تحت فشار محوری می‌باشد. این معادلات بر حسب جابجایی‌ها در پیوست (ب) آورده شده است.

[1] Adjacent Equilibrium Criterion

$$eq1: \frac{d}{dx}(R(x)N_x) = 0$$ (۲-۱۲-الف)

$$eq2: \frac{d}{dx}(R(x)M_x) - R(x)Q_x = 0$$ (۲-۱۲-ب)

$$eq3: \frac{d}{dx}\left(R(x)(N_x\frac{dw_0}{dx}+M_x\frac{dw_1}{dx}+Q_x(1+w_1))\right) - N_\theta - P\frac{d}{dx}(\frac{h(x)^3}{12}\frac{dw_1}{dx} + R(x)h(x)\frac{dw_0}{dx}) = 0$$

(۲-۱۲-ج)

$$eq4: \frac{d}{dx}\left(R(x)(M_x\frac{dw_0}{dx}+P_x\frac{dw_1}{dx}+M_{xz})\right) - R(x)Q_x\frac{dw_0}{dx} - R(x)N_z(1+w_1) + w_1\frac{d}{dx}\left(R(x)M_{xz}\right)$$
$$-M_\theta - P\frac{d}{dx}(\frac{h(x)^3}{12}(\frac{dw_0}{dx}+R(x)\frac{dw_1}{dx}))=0$$ (۲-۱۲-د)

شرایط مرزی نیز به صورت رابطه (۲-۱۳) به دست می‌آیند.

$$R(x)N_x\delta u_0\Big|_{x=0} - R(x)N_x\delta u_0\Big|_{x=L} = 0;\ R(x)M_x\delta u_1\Big|_{x=0} - R(x)M_x\delta u_1\Big|_{x=L} = 0$$
$$R(x)(N_x\frac{dw_0}{dx}+M_x\frac{dw_1}{dx}+Q_x(1+w_1)-(\frac{Ph(x)^3}{12}\frac{dw_1}{dx}+PR(x)h(x)\frac{dw_0}{dx}))\delta w_0\Big|_{x=0,L} = 0$$ (۲-۱۳)
$$R(x)(M_x\frac{dw_0}{dx}+P_x\frac{dw_1}{dx}+M_{xz}(1+w_1)-(\frac{Ph(x)^3}{12}(\frac{dw_0}{dx}+R(x)\frac{dw_1}{dx})))\delta w_1\Big|_{x=0,L} = 0$$

برای به دست آوردن معادلات پایداری به روش دوم، جابجایی‌ها به دو بخش، یکی لحظه‌ای قبل از کمانش و در حالت تعادل و دیگری لحظه‌ای بعد از کمانش، تقسیم می‌شوند. یعنی جابجایی‌ها طبق رابطه (۲-۱۴)، در نظر گرفته می‌شود که در آن u_{00}، w_{00}، u_{10} و w_{10} همگی نتایج حل تعادل بوده و u_{01}، w_{01}، u_{11} و w_{11} نموهای کوچک اختیاری می‌باشند.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ w_0 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{00} \\ u_{10} \\ w_{00} \\ w_{10} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_{01} \\ u_{11} \\ w_{01} \\ w_{11} \end{Bmatrix} \tag{۲-۱۴}$$

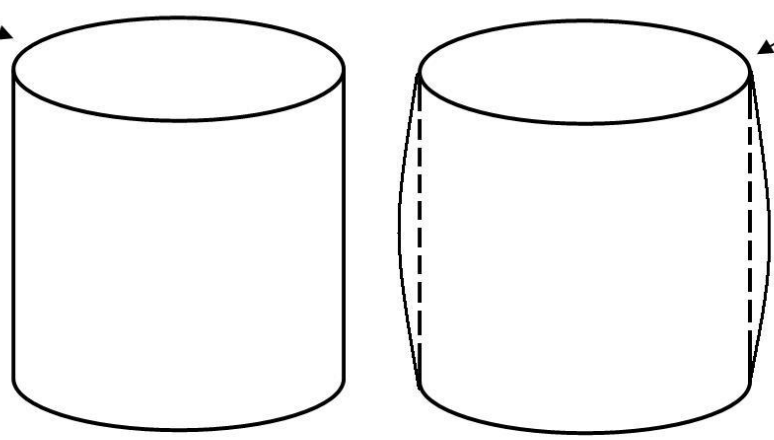
پارامترها با اندیس صفر بیانگر حالت تعادل بوده و پارامترها با اندیس یک بیانگر نمو کوچک بعد از تعادل می‌باشند[۲]. با جایگذاری رابطه (۲-۱۴) در معادلات تعادل (۲-۹) و با حذف عبارت‌های غیر خطی بر حسب جملات با اندیس یک (u_{01}، w_{01}، u_{11} و w_{11})، به دلیل کوچک بودن و با جایگزینی عبارت‌ها با اندیس صفر (u_{00}، w_{00}، u_{10} و w_{10}) از حل معادلات تعادل، معادلات پایداری به دست می‌آیند. در پیوست (ج)، این معادلات آورده شده است. بنابراین در این روش، ابتدا باید معادلات تعادل رابطه (۲-۹) را حل کرد و سپس با جایگزینی این حل در معادلات پایداری، بار کمانش را تعیین کرد.

۲-۴ اثر نقص اولیه

نقص اولیه هندسی در این تحقیق به شکل یک جابجایی شعاعی اولیه در پوسته در نظر گرفته شده است [۴]. با این فرض، شکل میدان جابجایی به صورت رابطه (۲-۱۵) تغییر می‌کند.

$$
\begin{aligned}
U_x(x,z) &= u_0(x) + z u_1(x) \\
U_z(x,z) &= w_0(x) + z w_1(x) + \hat{w}(x) \qquad (۲-۱۵) \\
U_\theta &= 0
\end{aligned}
$$

در رابطه فوق $\hat{w}(x)$ نقص اولیه می‌باشد. تابع نقص اولیه در مراجع مختلف با توجه به تابع جابجایی، به صورت‌های مختلف مانند نمایی و یا سینوسی در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال، هوتچینسون[۳۶] تابع نقص اولیه را به شکل رابطه $\zeta h \cos(q_0(x/R))$ در نظر گرفته است که در آن ζ اندازه دامنه تابع و متناسب با ضخامت پوسته است. h و R به ترتیب ضخامت و شعاع صفحه میانی پوسته، x پارامتر طول پوسته و q_0 یک ضریب ثابت بر حسب ضریب پواسون و ضخامت است. شکل (۲-۳)، اثر نقص را به صورت یک جابجایی اولیه نشان می‌دهد.



شکل (۲-۳) پوسته استوانه‌ای با در نظر گرفتن نقص اولیه به شکل جابجایی شعاعی اولیه

با استفاده از رابطه (۲-۱۵) به عنوان میدان جابجایی، رابطه کرنش جابجایی بازنویسی می‌شود. رابطه (۲-۱۶) میدان کرنش – جابجایی در حضور نقص اولیه می‌باشد [۴].

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial U_z}{\partial x}\frac{d\tilde{w}(x)}{dx}\;;\;\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{U_z}{r}\;;\;\varepsilon_{zz}=\frac{\partial U_z}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}\right)^2$$
$$\gamma_{xz}=\frac{\partial U_x}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial x}+\left(\frac{\partial U_z}{\partial x}+\frac{d\tilde{w}(x)}{dx}\right)\frac{\partial U_z}{\partial z}\;;\;\gamma_{\theta z}=0;\;\gamma_{x\theta}=0 \qquad (۲-۱۶)$$

با استفاده از روابط (۲-۸)، (۲-۳) تا (۲-۵) و (۲-۱۶) و به کارگیری اصل کار مجازی، معادلات تعادل برای پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر با در نظر گرفتن نقص اولیه، به شکل رابطه (۲-۱۷) تعیین می‌شود. در پیوست (د)، این معادلات بر حسب جابجایی‌ها آورده شده است.

$$eq1:\ \frac{d}{dx}(R(x)N_x)=0 \qquad (۲-۱۷-الف)$$

$$eq2:\ \frac{d}{dx}(R(x)M_x)-R(x)Q_x=0 \qquad (۲-۱۷-ب)$$

$$eq3:\ \frac{d}{dx}\left(R(x)N_x\frac{dw_0}{dx}+R(x)M_x\frac{dw_1}{dx}+R(x)Q_x(1+w_1)+R(x)N_x\frac{d\hat{w}}{dx}\right)$$
$$-N_\theta+\left(R(x)+\frac{h(x)}{2}\right)q(x)=0 \qquad (۲-۱۷-ج)$$

$$eq4:\ \frac{d}{dx}\left(R(x)M_x\frac{dw_0}{dx}+R(x)P_x\frac{dw_1}{dx}+R(x)M_{xz}(1+w_1)+R(x)M_x\frac{d\hat{w}}{dx}\right)$$
$$-M_\theta-R(x)N_z(1+w_1)-R(x)Q_x\frac{dw_0}{dx}-R(x)M_{xz}\frac{dw_1}{dx}-R(x)Q_x\frac{d\hat{w}}{dx} \qquad (۲-۱۷-د)$$
$$+\frac{1}{2}h(x)\left(R(x)+\frac{h(x)}{2}\right)q(x)=0$$

شرایط مرزی معادلات فوق، به شکل رابطه (۲-۱۸) تبدیل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&R(x)N_x\delta u_0\big|_{x=0} = 0;\ R(x)(N_x - P\,h(x))\delta u_0\big|_{x=L} = 0\\
&R(x)M_x\delta u_1\big|_{x=0} = 0;\ (R(x)M_x - \frac{1}{12}P\,h(x)^3)\delta u_1\Big|_{x=L} = 0\\
&R(x)(N_x\frac{dw_0}{dx}+M_x\frac{dw_1}{dx}+Q_x(1+w_1)+N_x\frac{d\widehat{w}(x)}{dx})\delta w_0\Big|_{x=0,L} = 0\\
&R(x)(M_x\frac{dw_0}{dx}+P_x\frac{dw_1}{dx}+M_{xz}(1+w_1)+M_x\frac{d\widehat{w}(x)}{dx})\delta w_1\Big|_{x=0,L} = 0
\end{aligned}
\tag{۱۸-۲}
$$

۵-۲ جمع‌بندی

در این فصل با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روابط سینماتیک غیر خطی فن- کارمن، روند استخراج معادلات تعادل که یک دستگاه معادلات غیر خطی با ضرایب متغیر می‌باشد؛ توضیح داده شد. معادلات پایداری با دو روش مختلف استخراج شد. معادلات پایداری شامل یک دستگاه با چهار معادله کوپل با ضرایب متغیر است که از حل آنها بار کمانش به دست می‌آید. تمامی معادلات بر حسب منتجه‌های تنش گزارش شده‌اند و شکل بی‌بعد آنها بر حسب پارامترهای میدان جابجایی در فصل‌های بعد استخراج می‌شوند. روش حل این معادلات نیز در فصل‌های بعد با استفاده از روش اغتشاشات، توضیح داده می‌شود.

فصل سوم:

حل معادلات تعادل و پایداری

۳-۱ مقدمه

در این فصل حلی تحلیلی و عددی برای معادلات تعادل و پایداری ارائه می‌شود. برای ارائه حل تحلیلی از روش اغتشاشات استفاده می‌شود. با استفاده از این روش، معادلات حاکم که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با ضرایب متغیر است تبدیل به دو دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و یک دستگاه معادلات جبری می‌شود. این حل، جابجایی‌ها را با دقت خوب حتی در نزدیکی مرزها پیش‌بینی می‌کند. بار کمانش نیز از هر دو روش استخراج می‌شود. همچنین میدان جابجایی و بار کمانش، با استفاده از نرم‌افزار اجزای محدود انسیس به دست می‌آید.

۳-۲ حل تحلیلی معادلات تعادل

برای حل معادلات تعادل در این تحقیق، از بسط مجانبی[1] در روش اغتشاشات استفاده می‌شود. ابتدا معادلات به شکل بی بعد تبدیل می شود. برای این منظور پارامترهای بی بعد زیر تعریف شده‌اند [۱۴]:

$$
\begin{aligned}
&x^* = \frac{x}{L}\ ;\ h^* = \frac{h}{h_0}\ ;\ R^* = \frac{R}{R_0}\ ;\ u_0^* = \frac{u_0}{h_0}\ ;\ w_0^* = \frac{w_0}{h_0}\ ;\ \varepsilon = \frac{h_0}{L},\ m = \ln\frac{2R+h}{2R-h} \\
&V^* = \varepsilon\frac{du_0^*}{dx^*};\ P_1^* = \frac{P}{A\varepsilon};\ q_1^* = \frac{q(x^*)}{A\varepsilon};\ \theta_1 = \frac{\lambda}{A};\ \theta_2 = \frac{\mu}{A}\ ;\ \mathrm{Z}_2 = \frac{h_0}{R_0}
\end{aligned}
\tag{۳-۱}
$$

در رابطه فوق، R_0 و h_0 به ترتیب شعاع و ضخامت شاخص در یک نقطه از پوسته می‌باشند($x^*=1$). همچنین، L طول پوسته و ε، پارامتر بی‌بعد کوچک برای روش اغتشاشات می‌باشد. با استفاده از پارامترهای بی بعد فوق و جایگذاری آنها در معادلات تعادل (۲-۹) و انتگرال‌گیری از معادله اول در این رابطه، شکل بی بعد معادلات به صورت رابطه (۳-۲) به دست می‌آیند.

[1] Matched Asymptotic Expansion (MAE)

$$eq1\ :\ \left(\frac{R^{*}h^{*}}{2Z_2}(w_0^{*\prime})^2+\frac{h^{*3}}{12}w_0^{*\prime}w_1^{*\prime}+\frac{R^{*}h^{*3}}{24Z_2}(w_1^{*\prime})^2\right)\varepsilon^2+\left(\frac{h^{*3}}{12}u_1^{*\prime}-\frac{P_1^{*}}{Z_2}\right)\varepsilon+\frac{R^{*}h^{*}}{Z_2}V^{*}+\frac{\theta_1R^{*}h^{*}}{2Z_2}w_1^{*}(w_1^{*}+2)$$
$$+\theta_1h^{*}w_0^{*}=0$$

(۳-۲-الف)

$$eq2\ :\ \left(\frac{h^{*}a_7}{12Z_2}w_0^{*\prime}w_1^{*\prime}+\frac{R^{*}h^{*2}}{12Z_2}(w_0^{*\prime}w_1^{*\prime\prime}+w_1^{*\prime}w_0^{*\prime\prime})+\frac{h^{*2}}{12}w_0^{*\prime}w_0^{*\prime\prime}+\frac{h^{*4}}{80}w_1^{*\prime}w_1^{*\prime\prime}+\frac{h^{*3}h^{*\prime}}{32}(w_1^{*\prime})^2+\frac{h^{*}h^{*\prime}}{8}(w_0^{*\prime})^2\right)\varepsilon^3+$$
$$\left(\frac{h^{*}a_7}{12Z_2}u_1^{*\prime}+\frac{R^{*}h^{*2}}{12Z_2}u_1^{*\prime\prime}\right)\varepsilon^2+\left(\frac{h^{*}h^{*\prime}}{4}V^{*}+\frac{(\theta_1-\theta_2)h^{*2}}{12}w_1^{*\prime}w_1^{*}-\frac{\theta_2h^{*2}}{12}w_1^{*\prime}+\frac{h^{*}h^{*\prime}\theta_1}{8}w_1^{*}(w_1^{*}+4)+\frac{h^{*2}}{12}V^{*\prime}-\frac{\theta_2R^{*}w_0^{*\prime}}{Z_2}(w_1^{*}+1)\right.$$
$$\left.+\frac{\theta_1h^{*2}}{6}w_1^{*\prime}\right)\varepsilon-\frac{\theta_2R^{*}}{Z_2}u_1^{*}=0$$

(۳-۲-ب)

$$eq3\ :\ h^{*3}\left(\frac{h^{*2}}{160}(w_1^{*\prime})^2+\frac{1}{24}(w_0^{*\prime})^2+\frac{R^{*}}{12Z_2}w_1^{*\prime}w_0^{*\prime}\right)w_1^{*\prime\prime}\varepsilon^4+\left(\frac{R^{*}h^{*3}}{12Z_2}u_1^{*\prime}w_1^{*\prime\prime}+\frac{P_1^{*}}{Z_2}w_0^{*\prime\prime}\right)\varepsilon^3+\left(\frac{(\theta_2-\theta_1)h^{*3}}{12}(w_1^{*\prime})^2(3+2w_1^{*})\right.$$
$$+\frac{\theta_2R^{*}h^{*\prime}}{Z_2}w_0^{*\prime}(2w_1^{*}+1+w_1^{*2})-\frac{\theta_1h^{*}}{2}(w_0^{*\prime})^2+\frac{h^{*3}}{12}w_1^{*\prime\prime}(\theta_2(1+w_1^{*2})+2\theta_1w_1^{*})+\frac{h^{*3}}{12}V^{*}w_1^{*\prime\prime}+\frac{\theta_2h^{*3}}{4}(w_1^{*\prime})^2w_1^{*}$$
$$+\frac{\theta_2R^{*}h^{*}}{Z_2}w_0^{*\prime\prime}+\frac{\theta_1h^{*3}}{24}w_1^{*2}w_1^{*\prime\prime}+\frac{\theta_2h^{*}R^{*\prime}}{Z_2}w_0^{*\prime}w_1^{*2}+\theta_2h\left(\frac{h^{*\prime}h^{*}}{2}+\frac{3R^{*}}{Z_2}w_0^{*\prime}\right)w_1^{*}w_1^{*\prime}+\frac{\theta_2h^{*}R^{*\prime}}{Z_2}w_0^{*\prime}(1+2w_1^{*})$$
$$\left.+\frac{3\theta_2R^{*}h^{*}}{Z_2}w_0^{*\prime}w_1^{*\prime}+\frac{\theta_2h^{*2}h^{*\prime}}{4}w_1^{*\prime}(1+w_1^{*2})+\frac{\theta_2R^{*}h^{*}}{Z_2}w_0^{*\prime\prime}(w_1^{*2}+2w_1^{*})\right)\varepsilon^2+\frac{\theta_2}{Z_2}\left(R^{*}h^{*\prime}+h^{*}R^{*\prime}(1+w_1^{*\prime})u_1^{*}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{h^{*}}{2}+\frac{R^{*}}{Z_2}\right)q_1^{*}+\frac{\theta_2R^{*}h^{*}}{Z_2}(u_1^{*\prime}+2u_1^{*}w_1^{*\prime}+u_1^{*\prime}w_1^{*})+\frac{\theta_2R^{*}h^{*\prime}}{Z_2}u_1^{*}w_1^{*}\right)\varepsilon-Z_2\frac{h^{*}}{R^{*}}w_0^{*}-\theta_1h^{*}\left(V^{*}+w_1^{*}+\frac{w_1^{*2}}{2}\right)=0$$

(۳-۲-ج)

$$
\begin{aligned}
eq4\ :\ & (h^{*3}(\frac{h^{*\prime}}{16} w_0^{*\prime} + \frac{3h^*}{160} w_0^{*\prime\prime} + \frac{3R^* h^*}{160 Z_2} w_1^{*\prime\prime})(w_1^{*\prime})^2 + \frac{R^* h^{*2}}{24 Z_2}((w_0^{*\prime})^2 w_1^{*\prime\prime} + 4 w_1^{*\prime} w_0^{*\prime} w_0^{*\prime\prime}) + h^{*3}(\frac{h^* R^{*\prime}}{160 Z_2} + \frac{R^* h^{*\prime}}{32 Z_2})(w_1^{*\prime})^3)\varepsilon^4 - \frac{\theta_1 R^*}{Z_2} V^* w_1^* \\
& +(\frac{h^{*4}}{140} w_1^{*\prime} w_0^{*\prime} w_1^{*\prime\prime} + h^*((\frac{R^* h^{*\prime}}{8Z_2} + \frac{h^* R^{*\prime}}{24 Z_2}) w_1^{*\prime} + \frac{h^*}{24} w_0^{*\prime\prime})(w_0^{*\prime})^2)\varepsilon^4 + (\frac{h^{*4}}{80}(u_1^{*\prime} w_1^{*\prime\prime} + u_1^{*\prime\prime} w_1^{*\prime}) + h^{*2}(\frac{h^* h^{*\prime}}{16} w_1^{*\prime} + \frac{R^*}{12 Z_2} w_0^{*\prime\prime}) u_1^{*\prime})\varepsilon^3 \\
& +(h^*(\frac{\theta_2 h^{*\prime}}{4} - \frac{(\theta_1-\theta_2)h^*}{12} w_1^{*\prime}) w_0^{*\prime} + \frac{h^{*2}}{12 Z_2} w_1^{*\prime}(R^* V^{*\prime} + R^{*\prime} V^*) - \frac{\theta_1 R^*}{2 Z_2}(w_0^{*\prime})^2(1+w_1^*) + h^{*2}(\frac{(\theta_2 w_1^* + 2\theta_1)}{12} + \frac{(\theta_1 w_1^* + 4\theta_2)}{24}) w_1^* w_0^{*\prime\prime} \\
& + \frac{V^*}{12} w_0^{*\prime\prime} + h^{*2}(\frac{\theta_1}{12} w_0^* + \frac{R^*}{12 Z_2} V^*) w_1^{*\prime\prime} + \frac{\theta_2 h^{*2}}{12 Z_2}(R^*(w_1^{*\prime})^2 + R^{*\prime} w_1^{*\prime} + Z_2(w_0^{*\prime\prime} + w_1^* w_0^{*\prime} w_1^{*\prime})) + \frac{h^{*\prime} h^*}{4}(\theta_2 w_0^{*\prime} w_1^*(w_1^* + 2) \\
& + \theta_1 w_0^* w_1^{*\prime}) + \frac{h^{*\prime} h^*}{4}\theta_2 u_1^* w_1^* - \frac{\theta_1 h^{*2}}{12} w_1^{*\prime} w_0^{*\prime} w_1^* + \frac{R^* h^{*2}}{12 Z_2}(\theta_2 w_1^{*\prime\prime} + (w_1^{*\prime})^2 (w_1^*(\theta_2 + \frac{\theta_1}{2}) + \frac{\theta_1}{2})) + (\frac{(\theta_1 + 2\theta_2)}{12 Z_2} w_1^* \\
& + \frac{(2\theta_2+\theta_1)}{24 Z_2} w_1^{*2}) R^{*\prime} h^{*2} w_1^{*\prime} + \frac{R^* h^* h^{*\prime}}{4 Z_2} w_1^{*\prime}(\theta_2 + V^*) + \frac{((2\theta_2+\theta_1) R^* h^* w_1^*(w_1^*+2)}{24 Z_2}(h^* w_1^{*\prime\prime} + 3h^{*\prime} w_1^{*\prime}))\varepsilon^2 + (\frac{\theta_2 h^{*\prime} h^*}{4} u_1^* \\
& - \frac{(2\theta_1-\theta_2)h^{*2}}{12} u_1^{*\prime} - q_1^*(\frac{R^*}{2 Z_2} + \frac{h^*}{4}) + \frac{(\theta_2-\theta_1)h^{*2}}{12} u_1^{*\prime} w_1^*)\varepsilon - \frac{R^*}{2 Z_2} w_1^{*2}(w_1^* - 3) - \frac{\theta_1 R^*}{Z_2} V^* - \frac{R^*}{Z_2} w_1^* - \theta_1 w_0^*(w_1^* + 1) = 0
\end{aligned}
\tag{۳-۲-د}
$$

دستگاه معادلات فوق، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دو می‌باشد. با صفر قرار دادن ε در این معادلات، مرتبه آنها دوبار کاهش پیدا کرده و تبدیل به معادلات جبری می‌شوند. با توجه به این کاهش مرتبه معادلات، مشخص می‌شود که دو لایه مرزی وجود دارد و با توجه به وجود دو لایه مرزی، یک حل خارجی برای نواحی دور از مرزها و دو حل داخلی برای هر یک از مرزها وجود خواهد داشت. نهایتا حل کلی یا مرکب[1] به صورت مجموع این حل‌ها منهای نواحی هم‌پوشانی خواهد بود [۶۶].

برای حل معادلات به روش بسط مجانبی، پاسخ معادلات به صورت سری یکنواخت رابطه (۳-۳) در نظر گرفته می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
& Y = \varepsilon(Y_0 + \varepsilon^{\gamma} Y_1)\ ;\ Y = \left\{V^*, u_1^*, w_0^*, w_1^*\right\} \\
& Y_0 = \{v_0(x^*), u_{10}(x^*), w_{00}(x^*), w_{10}(x^*)\}^T \\
& Y_1 = \{v_1(x^*), u_{11}(x^*), w_{01}(x^*), w_{11}(x^*)\}^T
\end{aligned}
\tag{۳-۳}
$$

[1] Composite Solution

با قرار دادن رابطه (۳-۳) در معادلات (۳-۲) و بالانس جملات غالب[1]، مقدار پارامتر γ در رابطه (۳-۳)، یک به دست می‌آید(γ=۱).

۳-۲-۱ حل خارجی

با قرار دادن رابطه (۳-۳) برای γ=۱ در معادلات تعادل بی‌بعد و جداسازی جملات هم مرتبه بر حسب پارامتر بی‌بعد ε، جملات مرتبه[2] یک و دو طبق رابطه (۳-۴) به دست می‌آیند. این معادلات یک دستگاه معادلات جبری بوده و به سادگی حل می‌شوند. حل این معادلات که به عنوان حل خارجی شناخته می‌شود تنها برای نواحی دور از مرزها (دور از لبه‌های پوسته) صادق است.

$$O(\varepsilon^1)\ :\ [\mathrm{A}_1]\{\mathrm{Y}_0\}=\{\mathrm{F}_1\}\ ;\{\mathrm{F}_1\}=\left\{\frac{P_1^*}{Z_2},\ 0, R^* q_1^*\left(\frac{h^*}{2}+\frac{R^*}{Z_2}\right), q_1^*\left(\frac{h^*}{4}+\frac{R^*}{2Z_2}\right)\right\}^{\mathrm{T}} \tag{الف-۴-۳}$$

$$O(\varepsilon^2)\ :\ [\mathrm{A}_1]\{\mathrm{Y}_1\}=\{\mathrm{F}_2\};\ \{\mathrm{F}_2\}=\left\{\begin{array}{c} \frac{h^{*3}}{12}u_{10}'+\frac{\theta_1 h^* R^*}{2Z_2}w_{10}^2 \\ \frac{h^* h^{*\prime}}{4}v_0+\frac{h^{*2}}{12}v_0'-\frac{\theta_2 R^*}{Z_2}w_{00}'+\frac{\theta_1 h^* h^{*\prime}}{2}w_{10}+\frac{(2\theta_1-\theta_2)h^{*2}}{12}w_{10}' \\ \theta_2 R^*\left(h^* R^{*\prime}+\frac{R^* h^{*\prime}}{Z_2}\right)u_{10}+\frac{\theta_2 R^{*2} h^*}{Z_2}u_{10}'-\frac{\theta_1 R^* h^*}{2}w_{10}^2 \\ -\frac{\theta_1}{Z_2}w_{10}v_0+\frac{\theta_2 h^* h^{*\prime}}{4}u_{10}-\frac{(2\theta_1-\theta_2)h^{*2}}{12}u_{10}'-\theta_1 w_{00}w_{10}-\frac{3R^*}{2}w_{10}^2 \end{array}\right\} \tag{ب-۴-۳}$$

$$[A_1]=\begin{bmatrix} R^* h^*/Z_2 & 0 & \theta_1 h^* & \theta_1 R^* h^*/Z_2 \\ 0 & \theta_2 R^*/Z_2 & 0 & 0 \\ -\theta_1 R^* h^* & 0 & -h^* Z_2 & -\theta_1 R^* h^* \\ -\theta_1 R^*/Z_2 & 0 & -\theta_1 & -R^* \end{bmatrix} \tag{ج-۴-۳}$$

[1] Dominant Terms
[2] Order

معادلات (۳-۴)، معادلات جبری هستند که به سادگی حل می‌شوند. با در نظر گرفتن نقص اولیه در معادلات، معادلات تعادل مرتبه دو به شکل رابطه (۳-۵) تعیین می‌شوند.

$$O(\varepsilon^2):[\mathrm{A}_1]\{\mathrm{Y}_1\}=\{\mathrm{F}_2\}$$

$$\{\mathrm{F}_2\}=\left\{\begin{matrix} \dfrac{h^{*3}}{12}u_{10}'+\dfrac{\theta_1 h^* R^*}{2Z_2}w_{10}^2 \\ h^*h^{*\prime}\left(\dfrac{v_0}{4}+\dfrac{\theta_1 w_{10}}{2}\right)+\dfrac{h^{*2}}{12}\left(v_0'+(2\theta_1-\theta_2)w_{10}'\right)-\dfrac{\theta_2 R^*}{Z_2}\left(w_{00}'+\hat{w}^{*\prime}\right) \\ \theta_2 R^*\left(h^* R^{*\prime}+\dfrac{R^* h^{*\prime}}{Z_2}\right)u_{10}+\dfrac{\theta_2 R^{*2} h^*}{Z_2}u_{10}'-\dfrac{\theta_1 R^* h^*}{2}w_{10}^2 \\ \dfrac{\theta_2 h^* h^{*\prime}}{4}u_{10}-\dfrac{(2\theta_1-\theta_2)h^{*2}}{12}u_{10}'-\theta_1\, w_{10}\left(w_{00}+\dfrac{v_0}{Z_2}\right)-\dfrac{3R^*}{2}w_{10}^2 \end{matrix}\right\} \tag{۳-۵}$$

معادلات مرتبه اول، همان معادلات (۳-۴-الف) است و ماتریس $[\mathrm{A}_1]$ مطابق رابطه (۳-۴-ج) است.

۳-۲-۲ حل داخلی در مرز $x^* = 0$

برای حل در این ناحیه، در ابتدا از تغییر متغیر رابطه (۳-۶) استفاده می‌شود.

$$\eta=\frac{x^*}{\varepsilon^\gamma} \tag{۳-۶}$$

از بالانس جملات غالب γ=۱، به دست می‌آید. همچنین روابط مربوط به شعاع صفحه میانی، ضخامت و فشار خارجی با استفاده از بسط تیلور حول ε=0 به صورت رابطه (۳-۷) برای این ناحیه بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{aligned} &R^*(x^*)=R^*(0)+\varepsilon\eta\, dR_0\ ;\ dR_0=\left.\frac{dR^*}{dx^*}\right|_{x^*=0} \\ &h^*=h^*(0)+\varepsilon\eta\, dh_0+\ldots;\quad dh_0=\left.\frac{dh^*}{dx^*}\right|_{x^*=0} \\ &q_1^*=q_1(0)+\varepsilon\eta\, dq_0+\ldots;\ dq_0=\left.\frac{dq_1^*}{dx^*}\right|_{x^*=0} \end{aligned} \tag{۳-۷}$$

حل در این ناحیه به صورت یک سری یکنواخت به شکل رابطه (۳-۸) در نظر گرفته می‌شود.

$$Y_i = \varepsilon(Y_{0i} + \varepsilon Y_{1i}) \ ;$$
$$Y_{0i} = \{v_{0i}(\eta), u_{10i}(\eta), w_{00i}(\eta), w_{10i}(\eta)\}^T \qquad (۳-۸)$$
$$Y_{1i} = \{v_{1i}(\eta), u_{11i}(\eta), w_{01i}(\eta), w_{11i}(\eta)\}^T$$

با قرار دادن روابط (۳-۶) تا (۳-۸) در معادلات تعادل بی‌بعد رابطه (۳-۲) و جداسازی جملات هم مرتبه ε معادلات مرتبه یک و دو، در این ناحیه به ترتیب به شکل روابط (۳-۹) و (۳-۱۰) به دست می‌آیند. این معادلات شامل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دو با ضرایب ثابت می‌باشند که با استفاده از روش‌های معمول در حل معادلات دیفرانسیل قابل حل می‌باشند. ماتریس‌های ضرایب برای معادلات برای حالتی که نقص اولیه نیز در نظر گرفته می‌شود به همین شکل می‌باشند.

$$O(\varepsilon):[D_2]\frac{d^2\{Y_{0i}\}}{d\eta^2} + [D_1]\frac{d\{Y_{0i}\}}{d\eta} + [D_0]\{Y_{0i}\} = \{F_1\} \qquad (۳-۹-الف)$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^* h^{*2}}{12Z_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta_2 h^* R^{*2}}{Z_2} & \frac{\theta_2 R^* h^{*3}}{12} \\ 0 & 0 & \frac{\theta_2 h^{*2}}{12} & \frac{\theta_2 R^* h^{*2}}{12Z_2} \end{bmatrix} ; [D_0] = \begin{bmatrix} \frac{h^* R^*}{Z_2} & 0 & h^*\theta_1 & \frac{h^* R^* \theta_1}{Z_2} \\ \frac{h^* h^{*\prime}}{4} & -\frac{\theta_2 R^*}{Z_2} & 0 & \frac{h^* h^{*\prime}\theta_1}{2} \\ -h^*\theta_1 R^* & \frac{\theta_2 R^* a_6}{Z_2} & -Z_2 h^* & -h^*\theta_1 R^* \\ \frac{-R^*\theta_1}{Z_2} & \frac{\theta_2 h^* h^{*\prime}}{4} & -\theta_1 & -\frac{R^*}{Z_2} \end{bmatrix}$$

$$[\mathrm{D}_1] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h^{*3}}{12} & 0 & 0 \\ \frac{h^{*2}}{12} & \frac{h^* a_7}{12Z_2} & \frac{-\theta_2 R^*}{Z_2} & \frac{(2\theta_1 - \theta_2)h^{*2}}{12} \\ 0 & \frac{\theta_2 h^* R^{*2}}{Z_2} & \frac{\theta_2 R^* a_6}{Z_2} & \frac{\theta_2 R^* h^{*2} h^{*\prime}}{4} \\ 0 & -\frac{(2\theta_1 - \theta_2)h^{*2}}{12} & \frac{\theta_2 h^* h^{*\prime}}{4} & \frac{\theta_2 h^* a_7}{12Z_2} \end{bmatrix} ; \{\mathrm{F}_1\} = \begin{Bmatrix} -\frac{P_1^*}{Z_2} \\ 0 \\ -R^* q_1^* (\frac{h^*}{2} + \frac{R^*}{Z_2}) \\ \frac{-q_1^*}{2}(\frac{h^*}{2} + \frac{R^*}{Z_2}) \end{Bmatrix} ; at \ x^* = 0 \qquad (۳-۹-ب)$$

$$a_6 = h^* R^{*\prime} + R^* h^{*\prime} ; a_7 = h^* R^{*\prime} + 3R^* h^{*\prime}$$

$$O(\varepsilon^2):[D_2]\frac{d^2\{Y_{1i}\}}{d\eta^2} + [D_1]\frac{d\{Y_{1i}\}}{d\eta} + [D_0]\{Y_{1i}\} = \{F_2\} \qquad (۳-۱۰-الف)$$

$$F_{21}=\frac{h^{*3}}{12}w_{10i}{}'w_{00i}{}'+\frac{R^{*}h^{*}}{2Z_2}\left(w_{00i}{}'^{2}+\frac{h^{*2}}{12}w_{10i}{}'^{2}\right)+\frac{\theta_1R^{*}h^{*}w_{10i}{}^{2}}{2Z_2}$$

$$\begin{aligned}F_{22}=&(\theta_1-\theta_2)\frac{h^{*2}}{12}w_{10i}{}'w_{10i}+\frac{h^{*}a_7}{12Z_2}w_{10i}{}'w_{00i}{}'+\frac{h^{*}h^{*\prime}}{8}(w_{00i}{}'^{2}+\theta_1w_{10i}{}^{2})+\frac{h^{*3}h^{*\prime}}{32}w_{10i}{}'^{2}\\&+\frac{R^{*}h^{*2}}{12Z_2}(w_{10i}{}'w_{00i}{}''+w_{00i}{}'w_{10i}{}'')+\frac{h^{*2}}{12}w_{00i}{}'w_{00i}{}''-\frac{\theta_2R^{*}}{Z_2}w_{00i}{}'w_{10i}+\frac{h^{*4}}{80}w_{10i}{}'w_{10i}{}''\end{aligned}$$

(۳-۱۰-ب)

$$\begin{aligned}F_{23}=&\frac{\theta_2R^{*}h^{*}R^{*\prime}}{Z_2}(u_{10i}w_{10i}+2w_{00i}{}'w_{10i})+\frac{\theta_2R^{*2}h^{*}}{Z_2}(3w_{10i}{}'w_{00i}{}'+u_{10i}{}'w_{10i}+2u_{10i}w_{10i}{}'+2w_{00i}{}''w_{10i})\\&-\frac{(\theta_1-6\theta_2)}{2}\frac{R^{*}h^{*3}}{12}w_{10i}{}'^{2}+2(\theta_1+\theta_2)\frac{R^{*}h^{*3}}{12}(w_{10i}{}''w_{10i}+v_{0i}w_{10i}{}'')+\frac{\theta_2R^{*2}h^{*\prime}}{Z_2}(u_{10i}w_{10i}+2w_{00i}{}'w_{10i})\\&-\frac{\theta_1R^{*}h^{*}}{2}(w_{00i}{}'^{2}+w_{10i}{}^{2})+\frac{R^{*}P_1^{*}}{Z_2}w_{00i}{}''+\frac{R^{*2}h^{*3}}{12Z_2}u_{10i}{}'w_{10i}{}''+\frac{\theta_2R^{*}h^{*2}h^{*\prime}}{2}w_{10i}{}'w_{10i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{24}=&\frac{(\theta_1+2\theta_2)h^{*2}R^{*\prime}a_7}{12Z_2}w_{10i}{}'w_{10i}-\frac{\theta_1R^{*}}{Z_2}w_{10i}v_{0i}-\theta_1w_{10i}w_{00i}+\frac{R^{*}h^{*}h^{*\prime}}{4Z_2}w_{10i}{}'v_{0i}\\&+\frac{h^{*2}}{12}(\theta_1w_{10i}{}''w_{00i}+w_{00i}{}''v_{0i}+(\theta_2-\theta_1)(w_{00i}{}'w_{10i}{}'+w_{10i}u_{10i}{}'))-\frac{3R^{*}w_{10i}{}^{2}}{2Z_2}\\&+\frac{(\theta_1+2\theta_2)R^{*}h^{*2}}{24Z_2}w_{10i}{}'^{2}+\frac{h^{*}h^{*\prime}}{4}(\theta_2(u_{10i}w_{10i}+2w_{00i}{}'w_{10i})+\theta_1w_{10i}{}'w_{00i})-\frac{\theta_1R^{*}w_{00i}{}'^{2}}{2Z_2}\\&+\frac{h^{*2}}{12Z_2}(R^{*}w_{10i}{}'v_{0i}{}'+R^{*\prime}w_{10i}{}'v_{0i}+R^{*}(w_{10i}{}''v_{0i}+w_{00i}{}''u_{10i}{}'))+\frac{h^{*3}h^{*\prime}R^{*}}{16}w_{10i}{}'u_{10i}{}'\\&+R^{*}(\theta_1+2\theta_2)w_{10i}{}''w_{10i})+\frac{(\theta_2+\theta_1)h^{*2}}{6}w_{00i}{}''w_{10i}+\frac{h^{*4}}{80}(w_{10i}{}'u_{10i}{}''+w_{10i}{}''u_{10i}{}')\end{aligned}$$

(۳-۱۰-ج)

در روابط فوق بالانویس (') برای نشان دادن مشتق نسبت به متغیر η می‌باشد. بردارهای F_1 و F_2، جملات ناهمگن در معادلات می‌باشند. حل معادلات (۳-۹) برابر با مجموع حل عمومی و حل خصوصی می‌باشد. برای تعیین حل عمومی، پاسخ معادله به شکل کلی رابطه (۳-۱۱) در نظر گرفته می‌شود که در آن $\{V\}$، بردار ویژه و λ_i مقدار ویژه معادله می‌باشند.

$$\{Y\}=\{V\}\exp(\lambda_i\,\eta)$$

(۳-۱۱)

با قرار دادن رابطه (۳-۱۱) در شکل همگن معادلات (۳-۹)، معادله ماتریسی رابطه (۳-۱۲) به دست می‌آید که مقادیر ویژه از دترمینان ماتریس ضرایب تعیین می‌گردند. با حل معادله دترمینان ماتریس ضرایب، شش ریشه مشخص می‌شود و به ازای هر ریشه (مقدار ویژه)، یک بردار ویژه تعیین می‌شود.

$$[C]_{4*4}\{V\} = \{0\} \; ; \; [C] = \lambda_i^{\,2}[D_2] + \lambda_i [D_1] + [D_0] \tag{۱۲-۳}$$

با توجه به این‌که این حل برای ناحیه مرزی $x^*=0$ صورت می‌گیرد و با در نظر گرفتن شرایط تطابق[1] در این مرز، حل باید در بی‌نهایت محدود باشد. بنابراین، ریشه‌های دترمینان با قسمت حقیقی منفی انتخاب می‌شوند و شکل عمومی حل همگن معادلات به شکل رابطه (۳-۱۳) به دست می‌آید.

$$\{Y\}_g = \sum_{i=1}^{3} C_i \{V_i\} \exp(\lambda_i \eta) \tag{۱۳-۳}$$

ضرایب ثابت با اعمال شرایط مرزی تعیین می‌شوند. شکل حل خصوصی معادلات، به شکل جملات ناهمگن بستگی دارد. برای تعیین حل خصوصی معادله (۳-۹)، حل به شکل رابطه (۳-۱۴) در نظر گرفته می‌شود و با جایگذاری در رابطه (۳-۹-الف)، با توجه به این‌که سمت راست معادلات، برداری ثابت است بردارهای مجهول $\{K_0\}$ و $\{K_1\}$ تعیین می‌شوند.

$$\{Y\}_p = \{K_1\}\eta + \{K_0\} \tag{۱۴-۳}$$

حل عمومی معادله (۳-۱۰) شبیه به معادله (۳-۹) می‌باشد. اما حل خصوصی آنها متفاوت است زیرا جملات ناهمگن در این معادلات فرق می‌کنند. همانطور که از روابط (۳-۱۰-ب) و (۳-۱۰-ج) مشخص می‌شود جملات ناهمگن در معادلات (۳-۱۰-الف) چندجمله‌ای است. بعد از جایگزینی بخش ناهمگن روابط (۳-۱۰)، شامل جملات نمایی و چند جمله‌ای خواهد بود. به همین دلیل، حل خصوصی معادله (۳-۱۰-الف) به

[1] Matching Principle

شکل رابطه (۳-۱۵) در نظر گرفته می‌شود. رابطه (۳-۱۵-ب)، حل خصوصی مربوط به جملات ناهمگن چند جمله‌ای و رابطه (۳-۱۵-ج) مربوط به جملات ناهمگن نمایی می‌باشند. بردارهای ثابت در این روابط مانند بردارهای ثابت در حل خصوصی معادلات مرتبه قبل، با جایگذاری در معادلات (۳-۱۰-الف)، تعیین می‌شوند. در رابطه (۳-۱۵-ج)، λ_i مقادیر ویژه معادله همگن بوده که از رابطه (۳-۱۲) به دست می‌آیند و α_i ضریب نمایی بقیه جملات ناهمگن می‌باشند.

$$\{Y\}_p = \{Y\}_{p1} + \{Y\}_{p2} \qquad \text{(۳-۱۵-الف)}$$

$$\{Y\}_{p1} = \{K_2\}\eta^2 + \{K_1\}\eta + \{K_0\} \qquad \text{(۳-۱۵-ب)}$$

$$\{Y\}_{p2} = \sum_i (\{V_2\}_i\,\eta^2 + \{V_1\}_i\,\eta + \{V_0\}_i)\exp(\lambda_i \eta) + \sum_j \{V_3\}_j\,\exp(\alpha_j \eta) \qquad \text{(۳-۱۵-ج)}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۵-ج) در معادله (۳-۱۰-الف)، بردارهای ثابت $\{V_0\}$,..., $\{V_3\}_j$ تعیین می‌شوند. در نهایت حل کلی در این مرز از رابطه (۳-۱۶) تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^1) &: \{Y_{0i}\} = \{Y\}_g + \{Y\}_p \\ O(\varepsilon^2) &: \{Y_{1i}\} = \{Y\}_g + \{Y\}_{p1} + \{Y\}_{p2} \end{aligned} \qquad \text{(۳-۱۶)}$$

ضرایب ثابت در رابطه فوق از اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند.

۳-۲-۳ حل داخلی در مرز $x^* = 1$

در این ناحیه از متغیر سریع، طبق رابطه (۳-۱۷) استفاده می‌شود.

$$\zeta = \frac{\left(x^* - 1\right)}{\varepsilon^{\gamma}} \qquad \text{(۳-۱۷)}$$

از بالانس جملات غالب γ=۱، تعیین می‌شود. با استفاده از این تغییر متغیر و بسط تیلور حول $\varepsilon=0$ رابطه (۳-۷) به صورت رابطه (۳-۱۸) بازنویسی می‌شود.

$$R^*(x^*) = R^*(1) + \varepsilon\zeta\, dR_1 \; ; \; h^* = h^*(1) + \varepsilon\zeta\, dh_1 + \ldots ; \; q_1^{\;*} = q(1) + \varepsilon\zeta\, dq_1 + \ldots$$

$$dh_1 = \left.\frac{dh^*}{dx^*}\right|_{x^*=1} \; ; \; dR_1 = \left.\frac{dR^*}{dx^*}\right|_{x^*=1} \; ; \quad dq_1 = \left.\frac{dq_1^{\;*}}{dx^*}\right|_{x^*=1} \qquad (۱۸-۳)$$

در این ناحیه، حل معادلات به شکل سری یکنواخت رابطه (۳-۱۹) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} &Y_I = \varepsilon(U_{0I} + \varepsilon U_{1I}) \\ &U_{0I} = \{v_{0I}(\zeta), u_{10I}(\zeta), w_{00I}(\zeta), w_{10I}(\zeta)\} \\ &U_{1I} = \{v_{1I}(\zeta), u_{11I}(\zeta), w_{01I}(\zeta), w_{11I}(\zeta)\} \end{aligned} \qquad (۱۹-۳)$$

با قرار دادن رابطه (۳-۱۹) در معادلات تعادل بی‌بعد رابطه (۳-۲)، و جداسازی جملات هم مرتبه از ε، دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و دوم مربوط به این مرز به شکل رابطه (۳-۲۰) تعیین می‌گردند. ماتریس ضرایب و جملات ناهمگن، در این مرز و مرز صفر یکسان است. البته باید توجه داشت که مقادیر ضخامت، شعاع و فشار خارجی در $x^*=1$ محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} &O(\varepsilon): [B_2]\frac{d^2U_{0I}}{d\zeta^2} + [B_1]\frac{dU_{0I}}{d\zeta} + [B_0]U_{0I} = \{F_3\}; \\ &O(\varepsilon^2): [B_2]\frac{d^2U_{1I}}{d\zeta^2} + [B_1]\frac{dU_{1I}}{d\zeta} + [B_0]U_{1I} = \{F_4\} \\ &[B_i] = [D_i], i = 0,1,2 \; ; \; \{F_1\} = \{F_3\} \; ; \; \{F_2\} = \{F_4\} \; ; \; at\ x^* = 1 \end{aligned} \qquad (۲۰-۳)$$

روش حل معادلات (۳-۲۰) شبیه معادلات (۳-۱۰) است که در بخش قبل توضیح داده شد. در این مرز، مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت در نظر گرفته می‌شوند زیرا حل در منفی بی‌نهایت باید محدود باشد. ضرایب ثابت در رابطه فوق از اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند.

۳-۲-۴ حل مرکب

در روش اغتشاشات، حل مرکب برابر با مجموع حل خارجی و حل‌های داخلی منهای حل‌های هم‌پوشانی در مرزها می‌باشد. بنابراین شکل کلی حل معادلات تعادل بی‌بعد، به شکل رابطه (۳-۲۱) می‌باشد که در آن،

$(Y_{out})^I$ و $(Y_{out})^i$ بخش‌های مشترک حل خارجی با دو حل داخلی می‌باشند و با استفاده از اصل تطابق فن دایکه[1] تعیین می‌شوند[۶۶].

$$Y_{composite} = Y_{out} + Y_I + Y_i - (Y_{out})^I - (Y_{out})^i \qquad (۲۱-۳)$$

۳-۳ حل تحلیلی معادلات پایداری

همانطور که در فصل قبل اشاره شد معادلات پایداری به دو روش استخراج می‌شوند. بنابراین در این تحقیق، معادلات پایداری با دو روش متفاوت حل می‌شوند. در روش اول، معادلات پیوست (ب)، بی‌بعد می‌شوند. به این منظور، با استفاده از رابطه (۳-۱) و تغییر متغیر رابطه (۳-۶) با در نظر گرفتن γ=۱، شکل بی‌بعد معادلات پایداری (معادلات تعادل کمانشی) بر حسب جابجایی‌ها به صورت رابطه (۳-۲۲) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} eq1:\ &(\theta_1 Z_1 (w_0^{*} h^{*})' + (\frac{h^{*3} Z_1}{12}(w_1^{*\prime} w_0^{*\prime} + u_1^{*\prime}))')\varepsilon + \frac{1}{2}(R^{*} h^{*}((w_0^{*\prime})^2 + (w_1^{*})^2))' + (R^{*} h^{*}(V^{*} + \theta_1 w_1^{*}))' \\ &+ \frac{1}{24}(R^{*} h^{*3}(w_1^{*\prime})^2)' - q_1^{*}\left((\frac{h^{*} Z_1}{2} w_0^{*\prime} + \frac{h^{*2} Z_1}{4} w_1^{*\prime})^2 \varepsilon + \frac{R^{*} h^{*}}{2} w_1^{*\prime} + R^{*} w_0^{*\prime}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (۳-۲۲-\text{الف})$$

$$\begin{aligned} eq2:\ &(\frac{1}{4} h^{*} h^{*\prime} V^{*} + \frac{1}{32} h^{*3} h^{*\prime} (w_1^{*\prime})^2 + \frac{1}{8} h^{*} h^{*\prime} (w_0^{*\prime})^2 + \frac{1}{12} h^{*2} w_0^{*\prime} w_0^{*\prime\prime} + \frac{1}{80} h^{*4} w_1^{*\prime} w_1^{*\prime\prime} + \frac{1}{6} h^{*2} \theta_1 w_1^{*\prime} + \frac{1}{12} h^{*2} \theta_1 w_1^{*} w_1^{*\prime} \\ &- \frac{1}{12} h^{*2} \theta_2 (w_1^{*\prime} + w_1^{*\prime} w_1^{*}) + \frac{1}{12} h^{*2} V^{*\prime} + \frac{1}{8} h^{*} h^{*\prime} \theta_1 (4 w_1^{*} + w_1^{*2})) h^{*} Z_1 \varepsilon + ((\frac{1}{12} h^{*2} R^{*\prime} + \frac{1}{4} h^{*} h^{*\prime} R^{*})(u_1^{*\prime} + w_0^{*\prime} w_1^{*\prime}) \\ &+ \frac{1}{12} h^{*2} R^{*} (w_0^{*\prime} w_1^{*\prime\prime} + u_1^{*\prime\prime} + w_1^{*\prime} w_0^{*\prime\prime}) - \theta_2 R^{*} (u_1^{*} + w_0^{*\prime} w_1^{*} + w_0^{*\prime})) h^{*} - q_1^{*} h^{*} (\frac{h^{*2} Z_1}{8} w_1^{*\prime} + \frac{h^{*} Z_1}{4} w_0^{*\prime}) \varepsilon - q_1^{*} h^{*2} (\frac{h^{*} R^{*}}{4} w_1^{*\prime} \\ &+ \frac{R^{*}}{2} w_0^{*\prime}) = 0 \end{aligned} \qquad (۳-۲۲-\text{ب})$$

---
[1] Van Dyke's Matching Principle

$$
\begin{aligned}
eq3:\; & -h^* Z_1^2 w_0^* \varepsilon^2 + (2h^* R^* \theta_1 ((w_0^{*\prime})^2 - 2V^* - 2w_1^* - (w_1^*)^2) + R^* h^{*3} (w_1^{*\prime})^2 (\frac{1}{6}\theta_2 (1+w_1^*) + \frac{1}{8}\theta_1 + \frac{1}{12}\theta_1 w_1^*) \\
& + \frac{1}{4} h^{*\prime} R^* h^{*2} (w_1^{*\prime} (V^* - P_1^* + \frac{3}{2}(w_0^{*\prime})^2 + \theta_2 w_1^* (1+w_1^*) + \frac{\theta_1}{2} w_1^* (4+w_1^*) + \theta_2) + w_0^{*\prime}(u_1^{*\prime})) + h^{*\prime} R^* \theta_1 w_0^{*\prime} w_0^* \\
& + \frac{1}{32} h^{*\prime} R^* h^{*4} (w_1^{*\prime})^3 + \frac{1}{12} R^* h^{*3} (w_1^{*\prime} V^{*\prime} + 3w_0^{*\prime} w_1^{*\prime} w_0^{*\prime\prime} + w_0^{*\prime\prime} u_1^{*\prime} + w_1^{*\prime\prime}(-P_1^* + 1 + V^* + 2w_1^* \theta_1 + \frac{w_1^{*2}\theta_1}{2} \\
& + w_1^{*2}\theta_2 + 2w_1^* \theta_2) + \frac{3}{2}(w_0^{*\prime})^2 w_1^{*\prime\prime} + w_0^{*\prime} u_1^{*\prime\prime}) + h^* R^* \theta_1 w_0^* w_0^{*\prime\prime} + \frac{3}{160} R^* h^{*5} (w_1^{*\prime})^2 w_1^{*\prime\prime}) Z_1 \varepsilon + R^{*2} h^{*\prime} (2w_0^{*\prime} w_1^* \\
& - w_0^{*\prime} P_1^* + \frac{1}{2}(w_0^{*\prime})^3 + u_1^{*\prime} w_1^* + w_0^{*\prime} V^* + \frac{1}{2}\theta_1 w_0^{*\prime} (w_1^*)^2 + \theta_1 w_0^{*\prime} w_1^*) + h^* R^{*2} w_0^{*\prime} w_1^{*\prime} (\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_1 w_1^*) \\
& - h^* R^* R^{*\prime} (w_0^{*\prime} P_1^* - \theta_2 (u_1^{*\prime} + w_0^{*\prime}) - \frac{1}{2}(w_0^{*\prime})^3) + \theta_2 R^{*2} h^{*\prime} w_0^{*\prime} ((w_1^*)^2 + 1) + \theta_2 R^{*2} h^* (w_1^{*\prime} u_1^{*\prime})' + \frac{1}{12} R^* h^{*3} R^{*\prime} w_1^{*\prime} u_1^{*\prime} \\
& + \frac{1}{8} R^* h^{*3} R^{*\prime} w_0^{*\prime} (w_1^{*\prime})^2 + \frac{3}{8} R^{*2} h^{*\prime} h^{*2} w_0^{*\prime} (w_1^{*\prime})^2 + h^* R^* R^{*\prime} w_0^{*\prime} (V^* + \theta_1 w_1^* + 2\theta_2 w_1^* + \theta_2 w_1^{*2} + \frac{\theta_1 w_1^{*2}}{2}) \\
& + 2R^{*2} h^* \theta_2 w_0^{*\prime} w_1^{*\prime} w_1 + h^* R^* R^{*\prime} \theta_2 u_1^{*\prime} w_1^* + R^{*2} h^{*\prime} u_1^{*\prime} + R^{*2} h^* w_0^{*\prime\prime} (\frac{3}{2}(w_0^{*\prime})^2 + \theta_2 - P_1^* + V^* + 2w_1^* + (w_1^*)^2 \\
& + \theta_1 w_1^* + \frac{1}{2}\theta_1 (w_1^*)^2) + \frac{1}{4} R^{*2} h^{*\prime} h^{*2} u_1^{*\prime} w_1^{*\prime} + R^{*2} h^* (w_0^{*\prime} V^{*\prime} + \theta_2 u_1^{*\prime}) + R^{*2} h^{*3} (\frac{1}{12}(u_1^{*\prime} w_1^{*\prime})' + \frac{1}{8}(w_1^{*\prime})^2 w_0^{*\prime\prime} \\
& + \frac{1}{4} w_0^{*\prime} w_1^{*\prime} w_1^{*\prime\prime}) + q_1^* (\frac{R^{*2} h^*}{2} w_0^{*\prime} w_1^{*\prime} + \frac{R^{*2}}{2}(w_0^{*\prime})^2 + \frac{R^{*2} h^{*2}}{8}(w_1^{*\prime})^2 - R^{*2} + (\frac{R^* h^{*2} Z_1}{4} w_0^{*\prime} w_1^{*\prime} + \frac{R^* h^* Z_1}{4}(w_0^{*\prime})^2)\varepsilon) \\
& + q_1^* (\frac{R^* h^{*3} Z_1}{16}(w_1^{*\prime})^2 - \frac{R^* h^* Z_1}{2})\varepsilon = 0
\end{aligned}
\tag{۳-۲۲-ج}
$$

$$
\begin{aligned}
eq4:\; & (\frac{1}{12} h^{*2} (u_1^{*\prime} w_1^* (\theta_2 - \theta_1) + \theta_1 w_0^{*\prime} w_1^{*\prime} + (w_0^{*\prime} V^*)' + \theta_1 w_0^* w_1^{*\prime\prime} + 2w_1^* w_0^{*\prime\prime} (\theta_2 + \theta_1) + \frac{1}{2} w_0^{*\prime\prime} (w_1^*)^2 (\theta_1 + 2\theta_2) \\
& - w_0^{*\prime\prime} (P_1^* - \theta_2) + u_1^{*\prime} (\theta_2 - 2\theta_1)) - \theta_1 w_0^* w_1^* + \frac{1}{4} h^* h^{*\prime} (\theta_2 (u_1^* + w_0^{*\prime}) + \frac{1}{2}(w_0^{*\prime})^3 - w_0^{*\prime} P_1^* + w_0^{*\prime} V^* \\
& + \theta_1 w_1^{*\prime} w_0^* + \theta_2 w_1^* ((u_1^* + w_1^* w_0^{*\prime}) + 2w_0^{*\prime}) + \frac{1}{2}\theta_1 w_0^{*\prime} ((w_1^*)^2 + 4w_1^*)) + \frac{1}{16} h^{*3} h^{*\prime} (u_1^{*\prime} w_1^{*\prime} + \frac{3}{2} w_0^{*\prime} (w_1^{*\prime})^2) \\
& - \theta_1 w_0^* + \frac{1}{80} h^{*4} ((w_1^{*\prime} u_1^{*\prime})' + \frac{3}{2} w_1^{*\prime} w_0^{*\prime\prime} + 3w_0^{*\prime} w_1^{*\prime} w_1^{*\prime\prime}) + \frac{1}{8} h^{*2} (w_0^{*\prime})^2 w_0^{*\prime\prime}) Z_1 \varepsilon + \frac{1}{4} h^* h^{*\prime} R^* (w_1^{*\prime} ((\theta_2 - P_1^*) \\
& + V^* + \theta_2 (w_1^*)^2 + \theta_1 w_1^* + \frac{\theta_1 (w_1^*)^2}{2} + 2\theta_2 w_1^* + \frac{3(w_0^{*\prime})^2}{2}) + u_1^{*\prime} w_0^{*\prime}) + \frac{1}{160} h^{*4} R^{*\prime} (w_1^{*\prime})^3 - R^* \theta_2 w_0^{*\prime} u_1^* \\
& - R^* \theta_1 w_1^* (V^* + \frac{1}{2}(w_0^{*\prime})^2) + \frac{1}{12} h^{*2} R^* ((u_1^{*\prime} w_0^{*\prime})' + \frac{3}{2}(w_0^{*\prime})^2 w_1^{*\prime\prime} + \frac{1}{2}(w_1^{*\prime})^2 (\theta_1 + 2\theta_2) + w_1^{*\prime\prime} (V^* + \theta_2 (2w_1^* \\
& + (w_1^*)^2 + 1) + \theta_1 w_1^* + \frac{\theta_1 (w_1^*)^2}{2} - P_1^*) + w_1^{*\prime} (3w_0^{*\prime} w_0^{*\prime\prime} + V^{*\prime}) + w_1^* (w_1^*)^2 (\theta_2 + \frac{\theta_1}{2})) - R^* (\theta_1 V^* + \frac{1}{2}(w_1^*)^3 \\
& + (w_0^{*\prime})^2 (\theta_2 + \theta_2 w_1^* + \frac{1}{2}) + \frac{3}{2}(w_1^*)^2 + w_1^*) + \frac{1}{12} h^{*2} R^{*\prime} (w_0^{*\prime} u_1^{*\prime} - w_1^{*\prime} (P_1^* - \theta_2) + \frac{3}{2} w_1^{*\prime} (w_0^{*\prime})^2 + w_1^{*\prime} (V^* \\
& + \theta_1 w_1^* + 2\theta_2 w_1^* + \frac{\theta_1 (w_1^*)^2}{2} + \theta_2 (w_1^*)^2)) + \frac{1}{32} h^{*3} h^{*\prime} R^* (w_1^{*\prime})^3 + \frac{3}{160} h^{*4} R^* (w_1^{*\prime})^2 w_1^{*\prime\prime} + q_1^* \frac{R^*}{4} (w_0^{*\prime})^2 \\
& + q_1^* \left(+ \frac{h^{*2} R^*}{16} (w_1^{*\prime})^2 - \frac{R^*}{2} + \frac{h^* R^*}{4} w_0^{*\prime} w_1^{*\prime} + (\frac{h^{*3} Z_1}{32} (w_1^{*\prime})^2 - \frac{h^* Z_1}{4} + \frac{h^* Z_1}{8} (w_0^{*\prime})^2 + \frac{h^{*2} Z_1}{8} w_0^{*\prime} w_1^{*\prime}) \varepsilon \right) = 0
\end{aligned}
\tag{۳-۲۲-د}
$$

در رابطه (۳-۲۲)، بالانویس (') نشان دهنده مشتق نسبت به متغیر η می‌باشند. برای حل این معادلات از روش بسط مستقیم روش اغتشاشات استفاده می‌شود. به این منظور با استفاده از سری یکنواخت رابطه (۳-۲۳) و رابطه (۳-۷) و جایگذاری آن در معادلات (۳-۲۲)، و جداسازی جملات هم مرتبه بر حسب پارامتر بی‌بعد ε، معادلات مرتبه‌های یک و دو استخراج می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} V^*(\eta) \\ u_1^*(\eta) \\ w_0^*(\eta) \\ w_1^*(\eta) \end{Bmatrix} = \varepsilon \begin{Bmatrix} V_0^*(\eta) \\ u_{10}^*(\eta) \\ w_{00}^*(\eta) \\ w_{10}^*(\eta) \end{Bmatrix} + \varepsilon^2 \begin{Bmatrix} V_1^*(\eta) \\ u_{11}^*(\eta) \\ w_{01}^*(\eta) \\ w_{11}^*(\eta) \end{Bmatrix} \qquad (۲۳\text{-}۳)$$

جملات مرتبه یک به شکل رابطه (۳-۲۴) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
&eq1: \left(R^* h^* (\theta_1 w_{10}{}^* + V_0{}^*)\right)' = 0 \\
&eq2: -12\kappa\theta_2 R^* \left(u_{10}{}^* + w_{00}{}^{*\prime}\right) + h^{*2}\left(R^* u_{10}{}^{*\prime}\right)' + 3R^* h^* h^{*\prime} u_{10}{}^{*\prime} = 0 \\
&eq3: \kappa\theta_2 R^{*2}\left(h^{*\prime} w_{00}{}^{*\prime} + h^* u_{10}{}^{*\prime}\right) + \kappa\theta_2 (R^{*2} h^*)' u_{10}{}^* - h^*(P_1{}^* - \kappa\theta_2)\left(R^{*2} w_{00}{}^{*\prime}\right)' - P_1{}^* R^{*2} h^{*\prime} w_{00}{}^{*\prime} = 0 \\
&eq4: (-\frac{h^{*2}}{12}(w_{10}{}^{*\prime} R^*)' - \frac{1}{4} w_{10}{}^{*\prime} h^* h^{*\prime} R^*)(P_1{}^* - \kappa\theta_2) - R^* w_{10}{}^* - \theta_1 R^* V_0{}^* = 0
\end{aligned} \qquad (۲۴\text{-}۳)$$

در روابط فوق بالانویس (')، نشان دهنده مشتق نسبت به متغیر η می‌باشد. معادلات فوق به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت است و به راحتی قابل حل می‌باشد. معادلات مرتبه دو نیز از روابط فوق استخراج می‌شود و به شکل یک دستگاه معادلات ناهمگن می‌باشد که برای استخراج بار کمانش کمکی نمی‌کند ولی برای اصلاح شکل مد کمانش و بررسی پس‌کمانش کاربرد دارد. بنابراین برای استخراج بار کمانش از رابطه (۳-۲۴) استفاده می‌شود. به این منظور، حل دستگاه معادلات فوق به شکل رابطه (۳-۲۵) در نظر گرفته می‌شود.

$$\left\{V_0{}^*, u_{10}{}^*, w_{00}{}^*, w_{10}{}^*\right\} = \left\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\right\}\exp(m\eta) \qquad (۲۵-۳)$$

با قرار دادن رابطه (۳-۲۵) در دستگاه معادلات (۳-۲۴)، مقادیر ویژه (m_i) و بردارهای ویژه دستگاه معادلات به دست می‌آیند که بر حسب فشار محوری ($P_1{}^*$) هستند. در نهایت، حل دستگاه معادلات فوق به شکل رابطه (۳-۲۶) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\left\{V_0{}^*, u_{10}{}^*, w_{00}{}^*, w_{10}{}^*\right\}^T = \sum_{i=1}^{6} C_i \{V\}_i \exp(m_i \eta) \\ &\{V\}_i = \left\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\right\}^T_{m=m_i}\ ; i = 1..6 \end{aligned} \qquad (۲۶-۳)$$

در رابطه فوق، $\{V\}_i$ بردار ویژه دستگاه معادلات و C_i ضرایب ثابت می‌باشند. برای تعیین ضرایب ثابت با استفاده از شرایط مرزی رابطه ماتریسی (۳-۲۷) به دست می‌آید که شرط وجود جواب در این دستگاه از صفر کردن دترمینان ماتریس [M] تعیین می‌شود و با محاسبه ریشه‌های این دترمینان مقدار بار کمانش مشخص می‌شود.

$$[\mathrm{M}]_{6*6}\left\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right\}^{\mathrm{T}} = \{0\}_{6*1} \qquad (۲۷-۳)$$

بار کمانش به روش دوم، چنان که در فصل قبل توضیح داده شد نیز به دست می‌آید. به این منظور، رابطه (۲-۱۶) در معادلات تعادل بی‌بعد شده رابطه (۳-۲)، جایگذاری می‌شود و جملات غیر خطی به دلیل کوچک بودن حذف می‌شوند. با استفاده از پارامترهای بی‌بعد (۳-۱)، معادلات پایداری به شکل رابطه (۳-۲۸) تعیین می‌شوند.

$$\left[A_2\right]\left\{\frac{d^2\chi}{dx^{*2}}\right\} + \left[A_1\right]\left\{\frac{d\chi}{dx^*}\right\} + \left[A_0\right]\{\chi\} = \{0\}_{4*1}\ ; \{\chi\} = \left\{V_1{}^*, u_{11}{}^*, w_{01}{}^*, w_{11}{}^*\right\}^T \qquad (۲۸-۳)$$

عناصر غیر صفر ماتریس‌های ضرایب، در معادله فوق در رابطه (۳-۲۹) آورده شده است. دستگاه معادلات (۳-۲۸) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر می‌باشد که مقادیر ویژه این دستگاه، بار کمانش سازه می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
&A_{0,11} = R^* \;;\; A_{0,13} = Z_2\theta_1 \;;\; A_{0,14} = R^*\theta_1(w_{10}^*+1) \;;\; A_{0,21} = \frac{\varepsilon h^* Z_2}{4}\frac{dh^*}{dx^*} \;;\; A_{0,22} = -\frac{5R^*\theta_2}{6}\\
&A_{0,33} = Z_2^2 h^* \;;\; A_{0,24} = \frac{\varepsilon h^{*2}}{12}\left(\frac{3Z_2\theta_1}{h^*}\frac{dh^*}{dx^*}(w_{10}^*+2) - \frac{10R^*\theta_2}{h^{*2}}\frac{dw_{00}^*}{dx^*} + Z_2\left(\theta_1-\frac{5\theta_2}{6}\right)\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)\\
&A_{0,31} = -\frac{\varepsilon^2 R^* h^{*3}}{12}\frac{d^2 w_{10}^*}{dx^{*2}} + R^* h^* Z_2\theta_1 \;;\; A_{0,32} = -\frac{5\varepsilon R^* h^*\theta_2}{6}\left(\frac{1}{h^*}\frac{d}{dx^*}(R^*h^*)(w_{10}^*+1) + 2R^*\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)\\
&A_{0,34} = -\frac{\varepsilon^2 R^* h^{*3}}{12}\Bigg[\left(\frac{10R^*\theta_2}{h^{*2}}\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}} + Z_2\theta_1\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}}\right)(w_{10}^*+2) + \frac{30R^*\theta_2}{h^{*2}}\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)\\
&\qquad + \frac{5\theta_2 Z_2}{2h^*}\frac{dh^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}(2w_{10}^*+1) + \frac{5Z_2\theta_2}{2}\left(\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)^2 + \left(\frac{20}{h^{*3}}\frac{d}{dx^*}(R^*h^*)\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right.\\
&\qquad \left. + \frac{5Z_2}{3}\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}}\right)(w_{10}^*+1)\theta_2\Bigg] - \frac{5\varepsilon R^*\theta_2}{6}\frac{d}{dx^*}(R^*h^*u_{10}^*) + R^*h^*Z_2\theta_1(w_{10}^*+1)\\
&A_{0,41} = -\varepsilon^2\left(\frac{Z_2h^{*2}}{12}\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}} + \frac{1}{12h^*}\frac{d}{dx^*}\left(R^*h^{*3}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)\right) + R^*\theta_1(1+w_{10}^*)\\
&A_{0,42} = \frac{5\varepsilon h^* Z_2\theta_2}{24}\frac{dh^*}{dx^*}(w_{10}^*+1) \;;\; A_{0,43} = Z_2\theta_1\left(-\frac{\varepsilon^2}{12h^*}\frac{d}{dx^*}\left(h^{*3}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right) + (w_{10}^*+1)\right)\\
&A_{0,44} = -\varepsilon^2\Bigg[\frac{h^{*2}Z_2\theta_1}{12}\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}}(2+w_{10}^*) + \frac{h^{*2}Z_2(5\theta_2+6\theta_1)}{72}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\frac{dw_{00}^*}{dx^*} + \frac{R^*h^{*2}(5\theta_2+3\theta_1)}{72}\left(\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)^2\\
&\qquad + \frac{R^*\theta_1}{2}\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)^2 + (w_{10}^*+1)\left((5\theta_2+3\theta_1)\left(\frac{h^{*2}}{36}\frac{dR^*}{dx^*} + \frac{R^*h^*}{12}\frac{dh^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*} + \frac{R^*h^{*2}}{12}\right)\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}}\right.\\
&\qquad \left. + \frac{5h^{*2}Z_2\theta_2}{36}\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}}\right) + \frac{5h^*Z_2\theta_2}{12}\frac{dh^*}{dx^*}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\Bigg] + \varepsilon\left(-\frac{5h^*Z_2\theta_2}{24}\frac{dh^*}{dx^*}u_{10}^* + \frac{h^{*2}Z_2(5\theta_2+6\theta_1)}{72}\frac{du_{10}^*}{dx^*}\right)\\
&\qquad + Z_2\theta_1 w_{00}^* + \frac{3}{2}R^*w_{10}^*(w_{10}^*+2) + R^* + R^*\theta_1 V_{00}^*
\end{aligned}
$$

(۳-۲۹-الف)

$$A_{1,12}=\frac{\varepsilon h^{*2}Z_2}{12}\ ;\ A_{1,13}=\frac{\varepsilon^2 h^{*2}Z_2}{12}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+\varepsilon^2 R^*\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\ ;\ A_{1,14}=\frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{12}\left(R^*\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+Z_2\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)\ ;\ A_{1,21}=\frac{\varepsilon h^{*2}Z_2}{12}$$

$$A_{1,22}=\frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{12}\left(\frac{dR^*}{dx^*}+\frac{3R^*}{h^*}\frac{dh^*}{dx^*}\right)\ ;A_{1,23}=\frac{\varepsilon^3 h^{*2}}{12}\left(R^*\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}}+\frac{Z_2}{h^{*3}}\frac{d}{dx^*}(h^{*3}\frac{dw_{00}^*}{dx^*})+\frac{1}{h^{*3}}\frac{d}{dx^*}(R^*h^{*3})\frac{dw_{10}^*}{dx^*}-\frac{10R^*\theta_2}{\varepsilon^2 h^{*2}}(w_{10}^*+1)\right)$$

$$A_{1,24}=\frac{\varepsilon^3 h^{*2}}{12}\left(R^*\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}}+\frac{3Z_2}{20h^{*3}}\frac{d}{dx^*}(h^{*5}\frac{dw_{10}^*}{dx^*})+\frac{1}{h^{*3}}\frac{d}{dx^*}(R^*h^{*3})\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)+\frac{h^{*2}\varepsilon}{12}\left(Z_2\theta_1(2+w_{10}^*)-\frac{5Z_2\theta_2}{6}(w_{10}^*+1)\right)$$

$$A_{1,32}=-\frac{\varepsilon^3R^{*2}h^{*3}}{12}\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}}-\frac{5\varepsilon R^{*2}h^*\theta_2}{6}(w_{10}^*+1)$$

$$A_{1,33}=-\frac{\varepsilon^4R^*h^{*3}}{12}\left((R^*\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+\frac{Z_2}{2}\frac{dw_{00}^*}{dx^*})\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}}\right)-\frac{\varepsilon^2R^*h^{*3}}{12}[-\frac{12Z_2\theta_1}{h^{*2}}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}+\frac{10\theta_2}{h^{*3}}\frac{d}{dx^*}(R^*h^*)(1+w_{10}^*)^2$$

$$+\frac{30R^*\theta_2}{h^{*2}}(\frac{dw_{10}^*}{dx^*}(1+w_{10}^*))]$$

$$A_{1,34}=-\frac{R^*h^{*3}}{12}[\varepsilon^4(R^*+\frac{3Z_2h^{*2}}{20}\frac{dw_{10}^*}{dx^*})(\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}})+\varepsilon^2[-\frac{30R^*\theta_2}{h^{*2}}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}(1+w_{10}^*)-\frac{5Z_2\theta_2}{2h^*}\frac{dh^*}{dx^*}(1+w_{10}^*)^2+Z_2(\theta_1$$

$$-\frac{5\theta_2}{2}(w_{10}^*+2))\frac{dw_{10}^*}{dx^*}]]+\frac{5\varepsilon R^{*2}h^*\theta_2}{3}u_{10}^*$$

(۳-۲۹-ب)

$$A_{1,41}=-\frac{\varepsilon^2R^*h^{*2}}{12}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\ ;\ A_{1,42}=-\varepsilon^3\left(\frac{R^*h^{*2}}{12}\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}}+\frac{Z_2}{80h^*}\frac{d}{dx^*}(h^{*5}\frac{dw_{10}^*}{dx^*})\right)-\varepsilon h^{*2}Z_2\left(\frac{\theta_1}{12}(w_{10}^*+2)+\frac{5\theta_2}{72}(1+w_{10}^*)\right)$$

$$A_{1,43}=-\varepsilon^4[\frac{R^*h^*}{6}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}(h^*\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}}+\frac{3}{2}\frac{dw_{00}^*}{dx^*})+\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}}(\frac{Z_2h^{*4}}{40}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+\frac{R^*h^{*2}}{12}\frac{dw_{00}^*}{dx^*})+\frac{h^{*3}Z_2}{16}\frac{dh^*}{dx^*}(\frac{dw_{10}^*}{dx^*})^2$$

$$+\frac{h^{*2}}{12}(\frac{dR^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+Z_2\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}})\frac{dw_{00}^*}{dx^*}]+\varepsilon^2[\frac{5h^*Z_2\theta_2}{24}\frac{dh^*}{dx^*}(1+w_{10}^*)^2+(w_{10}^*+1)[h^{*2}Z_2\frac{dw_{10}^*}{dx^*}(\frac{5\theta_2}{72}$$

$$+\frac{\theta_1}{12})+R^*\theta_1\frac{dw_{00}^*}{dx^*}]]$$

$$A_{1,44}=-\varepsilon^4[(\frac{R^*h^{*2}}{6}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}+\frac{3h^{*4}Z_2}{80}\frac{dw_{10}^*}{dx^*})\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}}+(\frac{h^{*4}Z_2}{40}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}+\frac{3R^*h^{*4}}{80}\frac{dw_{10}^*}{dx^*})\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}}+\frac{h^{*3}Z_2}{8}\frac{dh^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}$$

$$+(\frac{h^{*2}}{24}\frac{dR^*}{dx^*}+\frac{R^*h^*}{8}\frac{dh^*}{dx^*})(\frac{dw_{00}^*}{dx^*})^2+(\frac{3R^*h^{*3}}{32}\frac{dh^*}{dx^*}+\frac{3h^{*4}}{160}\frac{dR^*}{dx^*})(\frac{dw_{10}^*}{dx^*})^2]-\varepsilon^3[\frac{h^{*3}Z_2}{16}\frac{dh^*}{dx^*}\frac{du_{10}^*}{dx^*}+\frac{h^{*4}Z_2}{80}\frac{d^2u_{10}^*}{dx^{*2}}]$$

$$-\varepsilon^2[(\frac{h^{*2}\theta_1}{24}\frac{dR^*}{dx^*}+\frac{R^*h^*\theta_1}{8}\frac{dh^*}{dx^*})(w_{10}^{*2}+2w_{10}^*)+(\frac{5h^{*2}\theta_2}{72}\frac{dR^*}{dx^*}+\frac{5R^*h^*\theta_2}{24}\frac{dh^*}{dx^*})(1+w_{10}^*)^2+(\frac{R^*}{4}\frac{dh^*}{dx^*}+\frac{h^*}{12}\frac{dR^*}{dx^*})h^*V_{00}^*$$

$$+\frac{R^*h^{*2}}{12}\frac{dV_{00}^*}{dx^*}+\frac{dh^*}{dx^*}\frac{h^*Z_2\theta_1}{4}w_{00}^*+(\frac{5^{*2}Z_2(5\theta_2+6\theta_1)}{72}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}+\frac{R^*h^{*2}(5\theta_2+3\theta_1)}{36}\frac{dw_{10}^*}{dx^*})(1+w_{10}^*)]$$

$$A_{2,22}=\frac{\varepsilon^2 R^* h^{*2}}{12}\;;\;A_{2,23}=\frac{\varepsilon^3 h^{*2}}{12}\left(R^*\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+Z_2\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)\;;\;A_{2,24}=\frac{\varepsilon^3 h^{*2}}{12}\left(R^*\frac{dw_{00}^*}{dx^*}+\frac{3h^{*2}Z_2}{20}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)$$

$$A_{2,33}=\varepsilon^3 R^* P_1^*-\frac{10\varepsilon^2 R^{*2}h^*\theta_2}{12}(1+w_{10}^*)^2\;;\;A_{2,42}=\frac{\varepsilon^3 h^{*4}Z_2}{80}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}$$

$$A_{2,34}=\frac{\varepsilon^4 R^* h^{*3}}{12}\left(R^*\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}-\frac{3Z_2h^{*2}}{40}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)\frac{dw_{10}^*}{dx^*}-\frac{Z_2}{2}\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)^2\right)-\frac{\varepsilon^3 R^{*2}h^{*3}}{12}\frac{du_{10}^*}{dx^*}-\frac{\varepsilon^2 R^* h^{*3}}{12}[V_{00}^*$$
$$+\frac{5Z_2\theta_2}{6}(1+w_{10}^*)^2+\frac{Z_2\theta_1}{2}w_{10}^*(w_{10}^*+4)]$$

$$A_{2,43}=-\varepsilon^4\left(\frac{R^*h^{*2}}{6}\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)+\frac{3}{160}h^{*4}Z_2\left(\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)^2+\frac{h^{*2}Z_2}{24}\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)^2\right)-\varepsilon^3\left(\frac{R^*h^{*2}}{12}\frac{du_{10}^*}{dx^*}\right)\qquad \text{(۳-۲۹-ج)}$$
$$-\varepsilon^2 h^{*2}Z_2[\frac{1}{12}V_{00}^*+\frac{5\theta_2}{72}(w_{10}^*+1)^2+\frac{\theta_1 w_{10}^*}{24}(w_{10}^*+4)]$$

$$A_{2,44}=-\varepsilon^4 h^{*2}\left(\frac{R^*}{24}\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)^2+\frac{h^{*2}Z_2}{40}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+\frac{3R^*h^{*2}}{160}\left(\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)^2\right)-\varepsilon^3\left(\frac{h^{*4}Z_2}{80}\frac{du_{10}^*}{dx^*}\right)$$
$$-\varepsilon^2 R^* h^{*2}\left(\frac{5\theta_2}{72}(w_{10}^*+1)^2+\frac{\theta_1 w_{10}^*}{24}(w_{10}^*+2)+\frac{1}{12}V_{00}^*+\frac{Z_2\theta_1}{12R^*}w_{00}^*\right)$$

با در نظر گرفتن نقص اولیه در معادلات، عناصر غیر صفر ماتریس‌های ضرایب معادله (۳-۲۸) به شکل رابطه (۳-۳۰) تعیین می‌شوند.

$$A_{0,11}=R^*h^*\;;A_{0,13}=h^*Z_2\theta_1\;;A_{0,14}=R^*h^*\theta_1(w_{10}^*+1)\;;A_{0,21}=\frac{\varepsilon h^*Z_2}{4}\frac{dh^*}{dx^*}\;;\;A_{0,31}=-\frac{\varepsilon^2R^*h^{*3}}{12}\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}}+R^*h^*Z_2\theta_1$$

$$A_{0,24}=\frac{\varepsilon h^{*2}}{12}\left(\frac{3Z_2\theta_1}{h^*}\frac{dh^*}{dx^*}(w_{10}^*+2)-\frac{10R^*\theta_2}{h^{*2}}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}+Z_2(\theta_1-\frac{5\theta_2}{6})\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+\frac{5R^*\theta_2}{6}\right);A_{0,22}=-\frac{5R^*\theta_2}{6};A_{0,33}=Z_2^2h^*$$

$$A_{0,32}=-\frac{5\varepsilon R^*\theta_2}{6}\left(\frac{d}{dx^*}(R^*h^*)(w_{10}^*+1)+2h^*R^*\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right);A_{0,42}=\frac{5\varepsilon h^*Z_2\theta_2}{24}\frac{dh^*}{dx^*}(w_{10}^*+1)\;;A_{0,43}=Z_2\theta_1(-\frac{\varepsilon^2}{12h^*}\frac{d}{dx^*}(h^{*3}\frac{dw_{10}^*}{dx^*})+(w_{10}^*+1))$$

$$A_{0,34}=-\frac{\varepsilon^2R^*h^{*3}}{12}[(\frac{10R^*\theta_2}{h^{*2}}\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}}+Z_2\theta_1\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}})(w_{10}^*+2)+\frac{30R^*\theta_2}{h^{*2}}(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*})+\frac{5\theta_2Z_2}{2h^*}\frac{dh^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}(2w_{10}^*+1)$$
$$+\frac{5Z_2\theta_2}{2}(\frac{dw_{10}^*}{dx^*})^2+(\frac{20}{h^{*3}}\frac{d}{dx^*}(R^*h^*)\frac{dw_{00}^*}{dx^*}+\frac{5Z_2}{3}\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}})(w_{10}^*+1)\theta_2+\frac{10\theta_2}{R^*h^{*3}}(\frac{d}{x^*}(R^*h^*)(1+2w_{10}^*)+3R^*h^*\frac{dw_{10}^*}{dx^*})\frac{d\hat{w}^*}{dx^*}]$$
$$-\frac{5\varepsilon R^*\theta_2}{6}\frac{d}{dx^*}(R^*h^*u_{10}^*)+R^*h^*Z_2\theta_1(w_{10}^*+1)\;;A_{0,41}=-\varepsilon^2\left(\frac{Z_2h^{*2}}{12}(\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}}+\frac{d^2\hat{w}^*}{dx^{*2}})+\frac{1}{12h^*}\frac{d}{dx^*}(R^*h^{*3}\frac{dw_{10}^*}{dx^*})\right)+R^*\theta_1(1+w_{10}^*)\qquad \text{(۳-۳۰-الف)}$$

$$A_{0,44}=-\varepsilon^2[\frac{h^{*2}Z_2\theta_1}{12}\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}}(2+w_{10}^*)+\frac{h^{*2}Z_2(5\theta_2+6\theta_1)}{72}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}+\frac{R^*h^{*2}(5\theta_2+3\theta_1)}{72}(\frac{dw_{10}^*}{dx^*})^2+\frac{R^*\theta_1}{2}(\frac{dw_{00}^*}{dx^*})^2$$
$$+\frac{5h^*Z_2\theta_2}{12}\frac{dh^*}{dx^*}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}+(w_{10}^*+1)((5\theta_2+3\theta_1)(\frac{h^{*2}}{36}\frac{dR^*}{dx^*}+\frac{R^*h^*}{12}\frac{dh^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+\frac{R^*h^{*2}}{12})\frac{d^2w_{10}^*}{dx^{*2}}+\frac{5h^{*2}Z_2\theta_2}{36}\frac{d^2w_{00}^*}{dx^{*2}})$$
$$+\frac{5R^*h^*\theta_2}{6}(1+2w_{10}^*)\frac{d^2\hat{w}^*}{dx^{*2}}+\frac{h^{*3}Z_2}{720}((60\theta_1+100\theta_2)w_{10}^*+(120\theta_1+50\theta_2))\frac{d^2\hat{w}^*}{dx^{*2}}+\frac{h^*Z_2}{360}(h^{*2}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}(30\theta_1+25\theta_2)$$
$$+h^*\frac{dh^*}{dx^*}\theta_2(150w_{10}^*+75)-\frac{360R^*\theta_1}{Z_2}\frac{dw_{00}^*}{dx^*})\frac{d\hat{w}^*}{dx^*}]+\varepsilon\left(-\frac{5h^*Z_2\theta_2}{24}\frac{dh^*}{dx^*}u_{10}^*+\frac{h^{*2}Z_2(5\theta_2+6\theta_1)}{72}\frac{du_{10}^*}{dx^*}\right)+Z_2\theta_1w_{00}^*$$
$$+\frac{3}{2}R^*w_{10}^*(w_{10}^*+2)+R^*+R^*\theta_1V_{00}^*$$

$$A_{1,12}=\frac{\varepsilon h^{*3}Z_2}{12}\;;\;A_{1,13}=\frac{\varepsilon^2 h^{*3}Z_2}{12}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}+\varepsilon^2 R^{*}h^{*}\left(\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\right)+\;;\;A_{1,14}=\frac{\varepsilon^2 h^{*3}}{12}\left(R^{*}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}+Z_2\left(\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\right)\right)\;;\;A_{1,21}=\frac{\varepsilon h^{*2}Z_2}{12}$$

$$A_{1,22}=\frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{12}\left(\frac{dR^{*}}{dx^{*}}+\frac{3R^{*}}{h^{*}}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\right)\;;\;A_{1,32}=-\frac{\varepsilon^3 R^{*2}h^{*3}}{12}\frac{d^2 w_{10}^{*}}{dx^{*2}}-\frac{5\varepsilon R^{*2}h^{*}\theta_2}{6}\left(w_{10}^{*}+1\right)\;;\quad A_{1,41}=-\frac{\varepsilon^2 R^{*}h^{*2}}{12}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}$$

$$A_{1,23}=\frac{\varepsilon^3 h^{*2}}{12}\left(R^{*}\frac{d^2 w_{10}^{*}}{dx^{*2}}+\frac{Z_2}{h^{*3}}\frac{d}{dx^{*}}\left(h^{*3}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}\right)+\frac{1}{h^{*3}}\frac{d}{dx^{*}}\left(R^{*}h^{*3}\right)\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}-\frac{10R^{*}\theta_2}{\varepsilon^2 h^{*2}}\left(w_{10}^{*}+1\right)+h^{*}Z_2\frac{d^2\hat{w}^{*}}{dx^{*2}}+3Z_2\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\right)$$

$$A_{1,24}=\frac{\varepsilon^3 h^{*2}}{12}\left(R^{*}\left(\frac{d^2 w_{00}^{*}}{dx^{*2}}+\frac{d^2\hat{w}^{*}}{dx^{*2}}\right)+\frac{3Z_2}{20h^{*3}}\frac{d}{dx^{*}}\left(h^{*5}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\right)+\frac{1}{h^{*3}}\frac{d}{dx^{*}}\left(R^{*}h^{*3}\right)\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+\left(3R^{*}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}+\frac{dR^{*}}{dx^{*}}\right)\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\right)+\frac{h^{*2}\varepsilon}{12}\left[Z_2\theta_1\left(2+w_{10}^{*}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{5Z_2\theta_2}{6}\left(w_{10}^{*}+1\right)\right]$$

$$A_{1,33}=-\frac{\varepsilon^4 R^{*}h^{*3}}{12}\left(\left(R^{*}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}+\frac{Z_2}{2}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+Z_2\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\right)\frac{d^2 w_{10}^{*}}{dx^{*2}}\right)-\frac{\varepsilon^2 R^{*}h^{*3}}{12}\left[-\frac{12Z_2\theta_1}{h^{*2}}\left(\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\right)+\frac{10\theta_2}{h^{*3}}\frac{d}{dx^{*}}\left(R^{*}h^{*}\right)\left(1+w_{10}^{*}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{30R^{*}\theta_2}{h^{*2}}\left(\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\left(1+w_{10}^{*}\right)\right)\right]$$

$$A_{1,34}=-\frac{R^{*}h^{*3}}{12}\left[\varepsilon^4\left(R^{*}+\frac{3Z_2h^{*2}}{20}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}+\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\right)\left(\frac{d^2 w_{10}^{*}}{dx^{*2}}\right)+\varepsilon^2\left[-\frac{30R^{*}\theta_2}{h^{*2}}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}\left(1+w_{10}^{*}\right)-\frac{5Z_2\theta_2}{2h^{*}}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\left(1+w_{10}^{*}\right)^2+Z_2\left(\theta_1-\frac{5\theta_2}{2}\left(w_{10}^{*}\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.+2\right)\right)\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}-\frac{5R^{*}h^{*}\theta_2}{6}\left(3w_{10}^{*}+1\right)\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\right]\right]+\frac{5\varepsilon R^{*2}h^{*}\theta_2}{3}u_{10}^{*}$$

$$A_{1,42}=-\varepsilon^3\left(\frac{R^{*}h^{*2}}{12}\frac{d^2 w_{00}^{*}}{dx^{*2}}+\frac{Z_2}{80h^{*}}\frac{d}{dx^{*}}\left(h^{*5}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\right)\right)-\varepsilon h^{*2}Z_2\left(\frac{\theta_1}{12}\left(w_{10}^{*}+2\right)+\frac{5\theta_2}{72}\left(1+w_{10}^{*}\right)\right)$$

(۳-۳۰-ب)

$$A_{1,43}=-\varepsilon^4\left(\begin{array}{l}\frac{R^{*}h^{*}}{6}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\left(h^{*}\frac{d^2 w_{00}^{*}}{dx^{*2}}+\frac{3}{2}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}\right)+\frac{d^2 w_{10}^{*}}{dx^{*2}}\left(\frac{Z_2h^{*4}}{40}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}+\frac{R^{*}h^{*2}}{12}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}\right)+\frac{h^{*3}Z_2}{16}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\left(\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\right)^2+360R^{*}\theta_1\left(w_{10}^{*}+1\right)\Big)\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\\ +\frac{h^{*2}}{12}\left(\frac{dR^{*}}{dx^{*}}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}+Z_2\frac{d^2 w_{00}^{*}}{dx^{*2}}\right)\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{5h^{*}Z_2\theta_2}{24}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\left(1+w_{10}^{*}\right)^2+\left(w_{10}^{*}+1\right)\left(h^{*2}Z_2\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\left(\frac{5\theta_2}{72}+\frac{\theta_1}{12}\right)+R^{*}\theta_1\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}\right)\right)\\ +\frac{h^{*2}}{12}\left(2R^{*}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}+Z_2\left(\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\right)\right)\frac{d^2\hat{w}^{*}}{dx^{*2}}+\frac{h^{*}}{360}\left(30h^{*2}\left(R^{*}\frac{d^2 w_{10}^{*}}{dx^{*2}}+Z_2\frac{d^2 w_{00}^{*}}{dx^{*2}}\right)+\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\left(90R^{*}h^{*}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}+30h^{*2}\frac{dR^{*}}{dx^{*}}\right)\right.\end{array}\right)$$

$$A_{1,44}=-\varepsilon^4\left(\begin{array}{l}\left(\frac{R^{*}h^{*2}}{6}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+\frac{3h^{*4}Z_2}{80}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\right)\frac{d^2 w_{00}^{*}}{dx^{*2}}+\left(\frac{h^{*4}Z_2}{40}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+\frac{3R^{*}h^{*4}}{80}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\right)\frac{d^2 w_{10}^{*}}{dx^{*2}}+9h^{*4}Z_2\frac{d^2 w_{10}^{*}}{dx^{*2}}\Big)\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\\ +\frac{h^{*3}Z_2}{8}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+\left(\frac{h^{*2}}{24}\frac{dR^{*}}{dx^{*}}+\frac{R^{*}h^{*}}{8}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\right)\left(\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}\right)^2+\left(\frac{3R^{*}h^{*3}}{32}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}+\frac{3h^{*4}}{160}\frac{dR^{*}}{dx^{*}}\right)\left(\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\right)^2\\ +\frac{h^{*3}}{720}\left(27h^{*2}Z_2\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}+120R^{*}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+60R^{*}\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\right)\frac{d^2\hat{w}^{*}}{dx^{*2}}+\frac{h^{*}}{360}\left(45h^{*3}Z_2\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}+30h^{*2}\frac{dR^{*}}{dx^{*}}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}\right.\\ \left.+60R^{*}h^{*2}\frac{d^2 w_{00}^{*}}{dx^{*2}}+90R^{*}h^{*}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}\right.+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{h^{*3}Z_2}{16}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\frac{du_{10}^{*}}{dx^{*}}+\frac{h^{*4}Z_2}{80}\frac{d^2 u_{10}^{*}}{dx^{*2}}\right)\end{array}\right)$$
$$-\varepsilon^2\left(\begin{array}{l}\left(\frac{h^{*2}\theta_1}{24}\frac{dR^{*}}{dx^{*}}+\frac{R^{*}h^{*}\theta_1}{8}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\right)\left(w_{10}^{*2}+2w_{10}^{*}\right)+\left(\frac{5^{*2}Z_2\left(5\theta_2+6\theta_1\right)}{72}\frac{dw_{00}^{*}}{dx^{*}}+\frac{R^{*}h^{*2}\left(5\theta_2+3\theta_1\right)}{36}\frac{dw_{10}^{*}}{dx^{*}}\right)\left(1+w_{10}^{*}\right)\\ +\frac{R^{*}h^{*2}}{12}\frac{dV_{00}^{*}}{dx^{*}}+\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\frac{h^{*}Z_2\theta_1}{4}w_{00}^{*}+\left(\frac{5h^{*2}\theta_2}{72}\frac{dR^{*}}{dx^{*}}+\frac{5R^{*}h^{*}\theta_2}{24}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}\right)\left(1+w_{10}^{*}\right)^2+\left(\frac{R^{*}}{4}\frac{dh^{*}}{dx^{*}}+\frac{h^{*}}{12}\frac{dR^{*}}{dx^{*}}\right)h^{*}V_{00}^{*}\\ +h^{*2}Z_2\left(\left(25\theta_2-30\theta_1\right)w_{10}^{*}+\left(25\theta_2-60\theta_1\right)\right)\frac{d\hat{w}^{*}}{dx^{*}}\end{array}\right)$$

$$A_{2,22}=\frac{\varepsilon^2 R^* h^{*2}}{12}\;;\; A_{2,23}=\frac{\varepsilon^3 h^{*2}}{12}\left(R^*\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+Z_2\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}+\frac{d\hat{w}^*}{dx^*}\right)\right)\;;\; A_{2,24}=\frac{\varepsilon^3 h^{*2}}{12}\left(R^*\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}+\frac{d\hat{w}^*}{dx^*}\right)+\frac{3h^{*2}Z_2}{20}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right);\; A_{2,42}=\frac{\varepsilon^3 h^{*4}Z_2}{80}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}$$

$$A_{2,33}=\varepsilon^3 R^* P_1^* - \frac{10\varepsilon^2 R^{*2} h^* \theta_2}{12}(1+w_{10}^*)^2$$

$$A_{2,34}=\frac{\varepsilon^4 R^* h^{*3}}{12}\left(R^*\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}-\frac{3Z_2 h^{*2}}{40}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}-\frac{d\hat{w}^*}{dx^*}\right)\frac{dw_{10}^*}{dx^*}-Z_2\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\frac{d\hat{w}^*}{dx^*}-\frac{Z_2}{2}\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)^2\right)-\frac{\varepsilon^3 R^{*2} h^{*3}}{12}\frac{du_{10}^*}{dx^*}-\frac{\varepsilon^2 R^* h^{*3}}{12}[V_{00}^*+\frac{5Z_2\theta_2}{6}(1$$
$$+w_{10}^*)^2+\frac{Z_2\theta_1}{2}w_{10}^*(w_{10}^*+4)]$$

$$;A_{2,43}=-\varepsilon^4[\frac{R^* h^{*2}}{6}\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)+\frac{3}{160}h^{*4}Z_2\left(\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)^2+\frac{h^{*2}Z_2}{24}\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)^2+\frac{h^{*3}}{12}\left(2R^*\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+Z_2\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)\frac{d\hat{w}^*}{dx^*}]-\varepsilon^3\left(\frac{R^* h^{*2}}{12}\frac{du_{10}^*}{dx^*}\right)$$
$$-\varepsilon^2 h^{*2} Z_2\left(\frac{1}{12}V_{00}^*+\frac{5\theta_2}{72}(w_{10}^*+1)^2+\frac{\theta_1 w_{10}^*}{24}(w_{10}^*+4)\right) \qquad (\text{۳-۳۰-ج})$$

$$A_{2,44}=-\varepsilon^4 h^{*2}[\frac{R^*}{24}\left(\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)^2+\frac{h^{*2}Z_2}{40}\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+\frac{3R^* h^{*2}}{160}\left(\frac{dw_{10}^*}{dx^*}\right)^2+\frac{h^*}{360}\left(9Z_2\frac{dw_{10}^*}{dx^*}+30R^*\frac{dw_{00}^*}{dx^*}\right)\frac{d\hat{w}^*}{dx^*}]-\varepsilon^3\left(\frac{h^{*4}Z_2}{80}\frac{du_{10}^*}{dx^*}\right)$$
$$-\varepsilon^2 R^* h^{*2}[\frac{5\theta_2}{72}(w_{10}^*+1)^2+\frac{\theta_1 w_{10}^*}{24}(w_{10}^*+2)+\frac{1}{12}V_{00}^*+\frac{Z_2\theta_1}{12R^*}w_{00}^*]$$

برای حل این دستگاه معادلات دیفرانسیل، با استفاده از انتگرال وزنی گاوس، ماتریس‌های ضرایب متغیر تبدیل به ضرایب ثابت می‌شوند. به عبارت دیگر، پارامترهای شعاع صفحه میانی، ضخامت و جابجایی‌های به دست آمده از حل معادلات تعادل و مشتق‌های آنها با استفاده از رابطه (۳-۳۱) جایگزین می‌شوند که معرف انتگرال وزنی با پنج نقطه است[۶۷]. در این رابطه، ابتدا باید با استفاده از تغییر متغیر داده شده تابع g را تشکیل داده وسپس با قرار دادن مقادیر داده شده در رابطه، مقدار انتگرال به دست می‌آید.

$$\int_0^1 f(x^*)dx^*=\frac{1}{2}\big(w_1.(g(-p_1)+g(p_1))+w_2.(g(-p_2)+g(p_2))+w_3.g(0)\big);\; g(x^*)=f(2x^*-1) \qquad (\text{۳-۳۱})$$
$$w_1=0.23692689;\,p_1=0.90617975;\,w_2=0.47862867;\,p_2=0.53846931;\,w_3=0.56888889$$

با استفاده از رابطه فوق، معادلات پایداری به صورت رابطه (۳-۳۲) بازنویسی می‌شود که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت است.

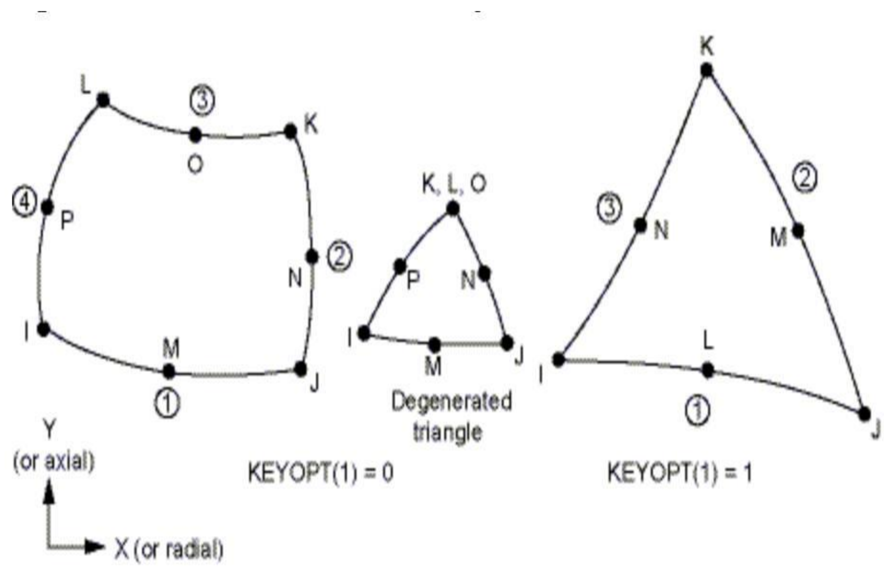
$$\left[\overline{A_2}\right]_{4\times4}\frac{d^2\{\chi\}}{dx^{*2}}+\left[\overline{A_1}\right]_{4\times4}\frac{d\{\chi\}}{dx^{*}}+\left[\overline{A_0}\right]_{4\times4}\{\chi\}=\{0\} \qquad (۳-۳۲)$$

معادله رابطه فوق به سادگی قابل حل بوده و بر حسب ثابت‌ها تعیین می‌شود. با اعمال شرایط مرزی، یک معادله ماتریسی شبیه رابطه (۳-۲۷) حاصل می‌شود که ریشه‌های دترمینان ماتریس ضرایب بار کمانش سازه می‌باشند.

۳-۴ حل عددی معادلات به کمک نرم افزار انسیس

۳-۴-۱ المان PLANE183

برای بررسی تغییرات در راستای ضخامت از این المان استفاده شده است که یک المان دو بعدی مرتبه بالا بوده و برای مدل کردن پوسته در حالت متقارن محوری، از این المان استفاده می‌شود. این المان دارای هشت یا شش گره و در هر گره دارای دو درجه آزادی می‌باشد. این المان قابلیت تعریف مسائل با جابجایی-های بزرگ را دارد. در شکل (۳-۱) این المان رسم شده است.



شکل (۳-۱) المان PLANE183 در محیط انسیس

۳-۴-۲ تعیین مش‌بندی بهینه

برای تعیین مش بهینه در تحلیل اجزای محدود، برای یک پوسته با ضخامت متغیر با ابعاد و خواص مکانیکی داده شده در جدول (۳-۱)، مقدار بار کمانش به دست می‌آید. مش‌بندی در این تحلیل به صورت دستی انجام شده است.

جدول (۳-۱) مشخصات پوسته با ضخامت متغیر و پروفیل ضخامت خطی

طول پوسته	L=۱m
شعاع داخلی در $x^*=$ ۰	R_{in}=۰/۱۴(m)
شعاع داخلی در $x^*=$ ۱	R_{in}=۰/۱۵(m)
شعاع خارجی	R_{out}=۰/۱۵۵(m)
مدول الاستیسیته	E=۲۰۰(GPa)

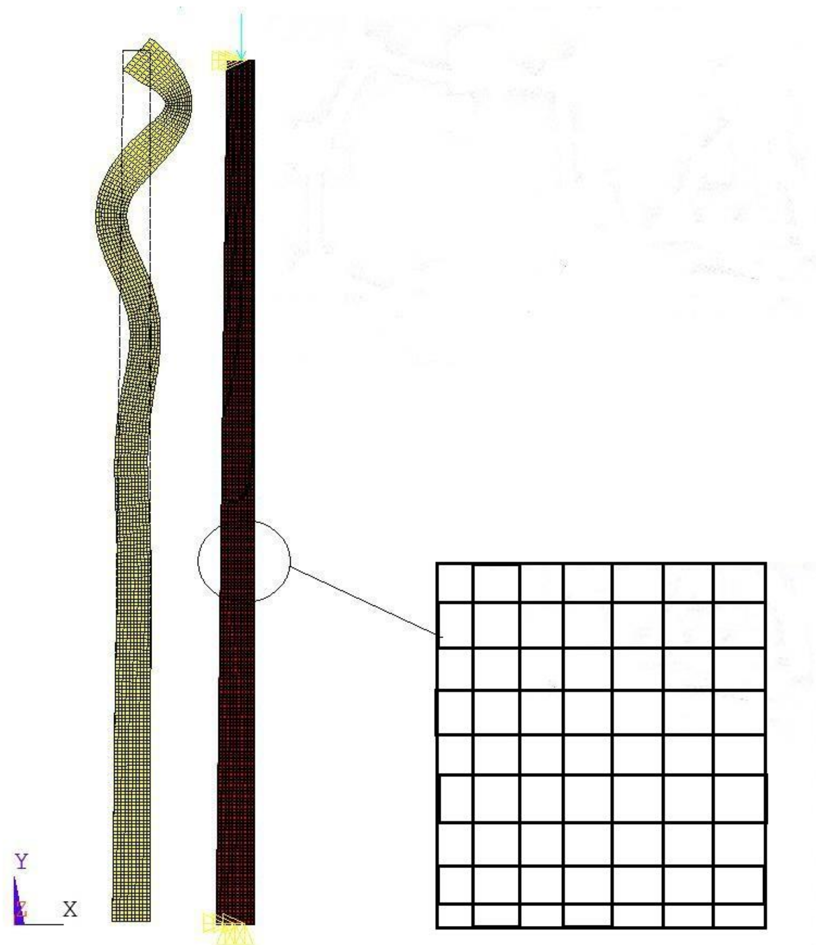
ضریب پواسون	ν=۰/۳

در جدول (۳-۲) مقدار بار کمانش برای پوسته با تعداد المان‌های مختلف داده شده است. با توجه به این جدول مشخص می‌شود که اضافه کردن تعداد المان بعد از ۱۶۰ تاثیری بر روی نتایج ندارد. بنابراین تعداد المان در حدود ۱۶۰، یک مقدار بهینه و مناسب می‌باشد. البته با افزایش ابعاد پوسته ممکن است این تعداد المان کافی نباشد اما برای این تحقیق، همین تعداد المان در مش‌بندی کفایت می‌کند زیرا تمامی پوسته‌های مورد مطالعه در این تحقیق، دارای ابعادی در همین حدود می‌باشند.

جدول (۳-۲) مقادیر بار کمانش به ازای مش‌بندی‌های مختلف

تعداد المان‌ها	۴۰	۶۰	۸۰	۱۰۰	۱۲۰	۱۴۰	۱۶۰	۱۸۰	۲۰۰
بار کمانش محوری (GPa)	۵/۱۴۹	۴/۸۳۲	۴/۷۷۷	۴/۷۶۱	۴/۷۵۵	۴/۷۵۳	۴/۷۵۲	۴/۷۵۲	۴/۷۵۲

شکل (۳-۲)، یک نمونه از المان مش‌بندی شده را تحت بار نشان می‌دهد.



شکل (۳-۲) نمونه مش‌بندی المان PLANE183 و نمونه کمانش کرده در محیط نرم افزار

۳-۴-۳ حل استاتیکی

برای تحلیل مدل‌های مستقل از زمان، از این نوع تحلیل استفاده می شود. در مدل‌سازی دوبعدی پس از مش‌بندی، در مرحله بارگذاری ابتدا شرایط مرزی تعیین می‌گردد. بارگذاری در این مساله شامل دو قسمت فشار محوری و فشار خارجی (شعاعی) می‌باشد. ب رای در نظر گرفتن   خیز بزرگ در مساله از قسمت

تنظیمات حل، گزینه مربوط به خیز بزرگ[1] انتخاب می‌شود و گزینه مربوط به پیش تنش نیز فعال می‌گردد.

برای تعیین بار کمانش نیز در ابتدا تحلیل استاتیکی تحت بارگذاری واحد انجام می‌گیرد. برای این حالت نیز گزینه پیش‌تنش فعال می‌شود.

۳-۴-۴ حل کمانش

با استفاده از این تحلیل، مقدار بار کمانش و نیز تغییر شکل سازه پس از به وجود آمدن کمانش، مشخص می‌شود. پیش از تحلیل کمانش مساله، حل استاتیکی با فعال کردن گزینه مربوط به پیش تنش انجام می‌گیرد.

۳-۵ جمع‌بندی

در این فصل، ابتدا روند بی‌بعد سازی معادلات و سپس روش اغتشاشات برای حل معادلات تعادل بیان شد. با استفاده از این روش، دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با ضرایب متغیر به یک دستگاه معادلات جبری و دو دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت تبدیل شد. در ادامه، روند حل معادلات پایداری با استفاده از روش اغتشاشات و استفاده از انتگرال گاوس توضیح داده شد. شکل بی‌بعد معادلات با در نظر گرفتن نقص اولیه و همچنین بدون نقص اولیه در این فصل گزارش شد. در پایان روند حل عددی معادلات تعادل و پایداری و چگونگی انتخاب المان مورد مطالعه در محیط نرم افزار انسیس به اختصار توضیح داده شد. مشخصات این المان و خواص آن بیان و با انجام یک بررسی ساده، تعداد مش بهینه برای تحلیل عددی پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر تعیین گردید. نتایج حاصل در فصل‌های بعد ارائه می‌شود.

[1] Large Displacement

فصل چهارم:

بررسی نتایج

۴-۱ مقدمه

در این فصل به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی و عددی ارائه شده در فصل‌های قبل پرداخته می‌شود. محاسبات در محیط نرم افزار MAPLE 2015 انجام می‌گیرد. در ابتدا نتایج حاصل از حل معادلات تعادل و تاثیر فشار خارجی و محوری مورد بررسی قرار گرفته و اثر پارامترهای مختلف مانند ضخامت، نوع پروفیل ضخامت و نقص اولیه بر بار کمانش مورد بررسی قرار می‌گیرد. بار کمانش در حالات مختلف بارگذاری مانند فشار محوری خالص، فشار خارجی خالص و بارگذاری مرکب، تعیین می‌گردد.

جدول (۴-۱)، مقادیر انتخابی برای مساله می‌باشند و در تمامی نمودارها و جدول‌ها به جز مواردی که ذکر شده است از این مقادیر استفاده می‌شود. شرایط مرزی در این فصل، در دو لبه گیردار و لبه بالا فقط در راستای طول پوسته (x) حرکت می‌کند و تنها در مواردی که ذکر می‌شود شرایط مرزی متفاوت است.

جدول (۴-۱) مقادیر انتخابی برای پوسته

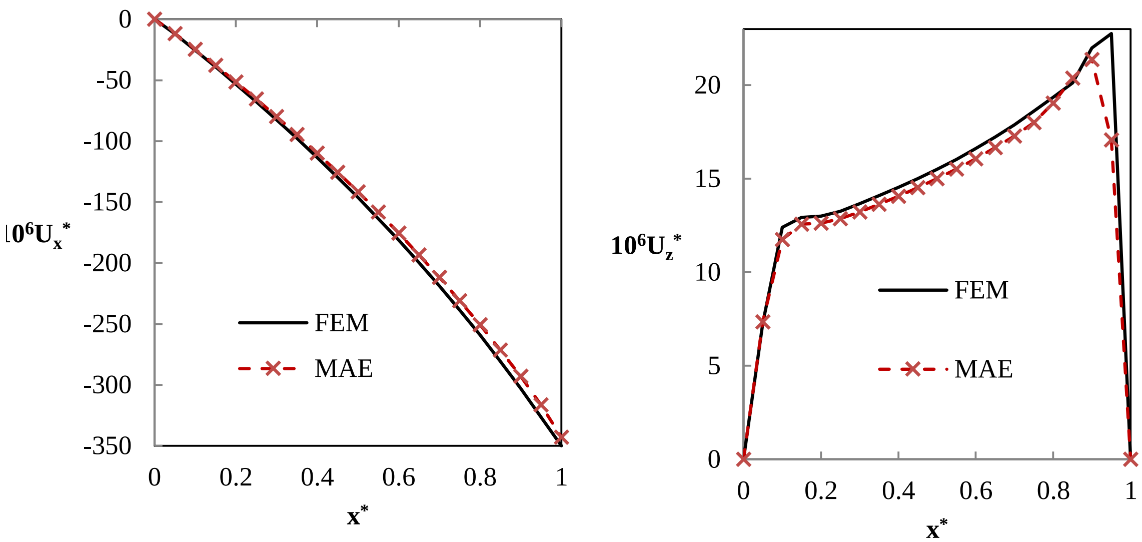
مدول یانگ	E=۲۰۰(GPa)
ضریب پواسون	ν=۰/۳
مقدار فشار محوری (P)	P=۱ (MPa)

فشار محوری و دیگرپارامترهای هندسی، در شکل (۲-۲) نشان داده شده‌اند.

۴-۲ حالت تعادل

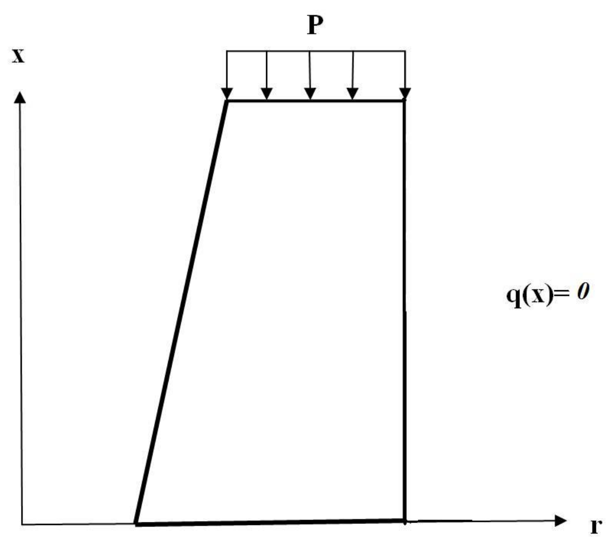
با استفاده از فرمول‌بندی ارائه شده در بخش ۳-۲، جابجایی شعاعی و طولی برای پوسته با ضخامت متغیر برای هر نوع پروفیل ضخامت و بارگذاری، به دست می‌آید. شکل (۴-۱)، جابجایی شعاعی و طولی صفحه میانی را برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی در حالتی که پوسته فقط تحت فشار محوری قرار دارد نشان می‌دهد. در این حالت فشار خارجی صفر می‌باشد. همچنین نتایج حل عددی با نرم افزار انسیس (FEM) با نتایج حل تحلیلی (MAE) مقایسه شده است. بارگذاری و مقطع پوسته در شکل (۲-۲) نشان داده شده

است. در پروفیل‌های خطی، شعاع خارجی ثابت و شعاع داخلی متغیر است و $R_{in}(x^*)=(R_{in}(x^*=1)-R_{in}(x^*=0))x^*+R_{in}(x^*=0)$.



(الف) جابجایی شعاعی

(ب) جابجایی طولی

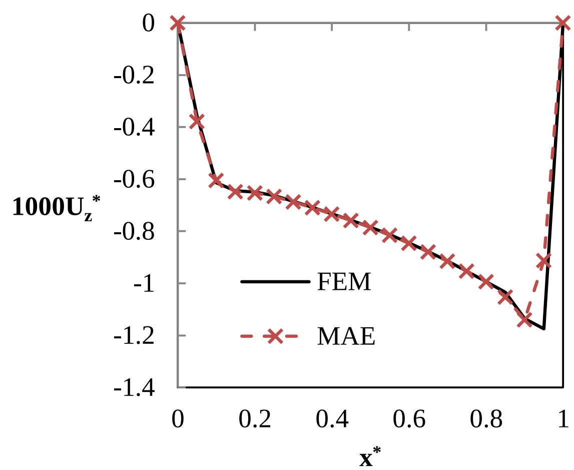


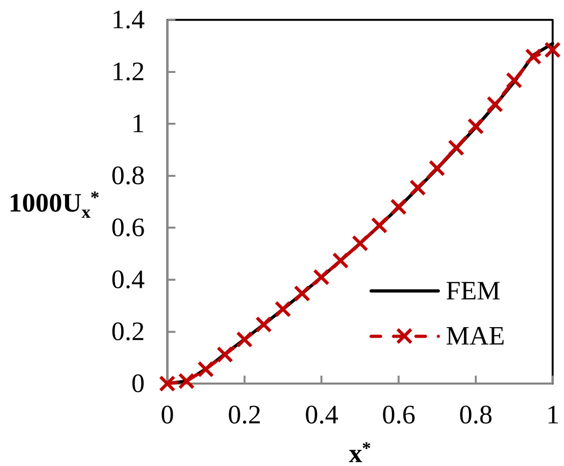
(ج) مقطع طولی و پروفیل بارگذاری

شکل(۴-۱) جابجایی‌های بی‌بعد صفحه میانی برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی

($R_{in}(x^*=۰)=۰/۱۴$m, $R_{in}(x^*=۱)=۰/۱۵$ m, $R_{out}=۰/۱۶$m, $L=۱$m, q(x)=۰)

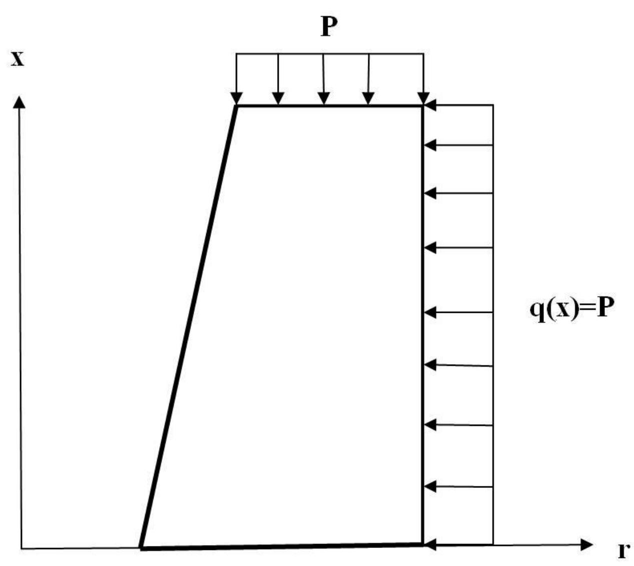
شکل (۴-۲) نیز مقدار جابجایی‌ها را برای همان پوسته، در حالتی که پوسته تحت فشار خارجی و محوری به صورت همزمان قرار دارد را نشان می‌دهد. در شکل (۴-۲)، مقدار فشار خارجی ثابت و برابر با فشار محوری است.





(الف) جابجایی شعاعی

(ب) جابجایی طولی

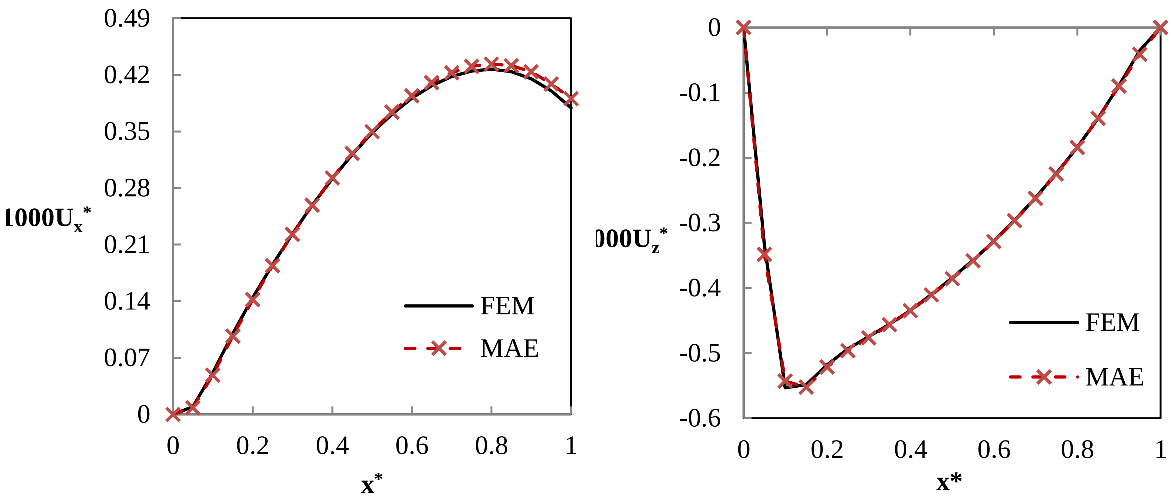


(ج) مقطع طولی و پروفیل بارگذاری

شکل(۴-۲) جابجایی‌های بی‌بعد صفحه میانی برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی

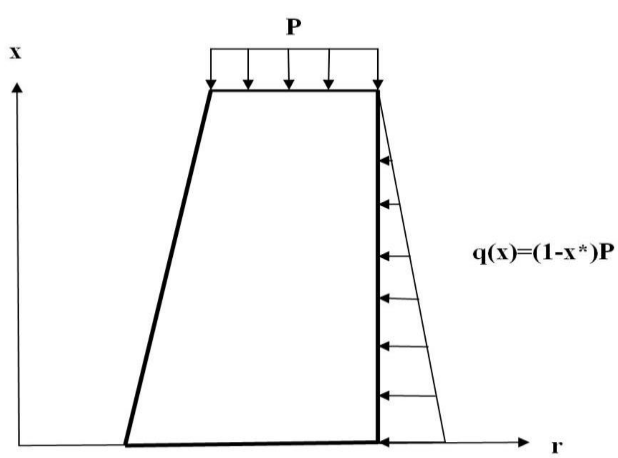
($R_{in}(x^*=۰)$=۰/۱۴m, $R_{in}(x^*=۱)$=۰/۱۵ m, R_{out}=۰/۱۶m, L=۱m, q(x)=P)

شکل (۴-۳) نیز همان نتایج را برای حالتی نشان می‌دهد که فشار خارجی به صورت خطی تغییر می‌کند. در این نمودار، پروفیل ضخامت پوسته نیز خطی بوده و شعاع داخلی به صورت خطی از ابتدا تا انتهای پوسته تغییر می‌کند. جابجایی‌ها برای صفحه میانی رسم شده است.



(الف) جابجایی شعاعی

(ب) جابجایی طولی



(ج) مقطع طولی و پروفیل بارگذاری

شکل(۴-۳) جابجایی‌های بی‌بعد صفحه میانی برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی

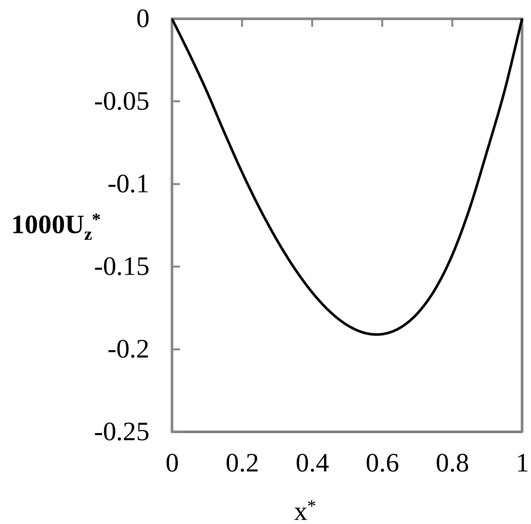
(R_{in}(x^*=۰)=۰/۱۴m, R_{in}(x^*=۱)=۰/۱۵ m, R_{out}=۰/۱۶m, L=۱m, q(x)=(۱-x^*)P)

با توجه به شکل‌های فوق، مشخص می‌شود که نتایج حل اجزای محدود و تحلیلی بسیار نزدیک بوده و حتی در نزدیکی مرزها نیز نتایج تحلیلی اختلاف بسیار کمی با نتایج اجزای محدود دارد. حل معادلات تعادل اولین گام برای تعیین بار کمانش است که با توجه به نمودارهای موجود در شکل‌های (۴-۱) تا (۴-۳)، به خوبی و با دقت بالا تعیین می‌شوند.

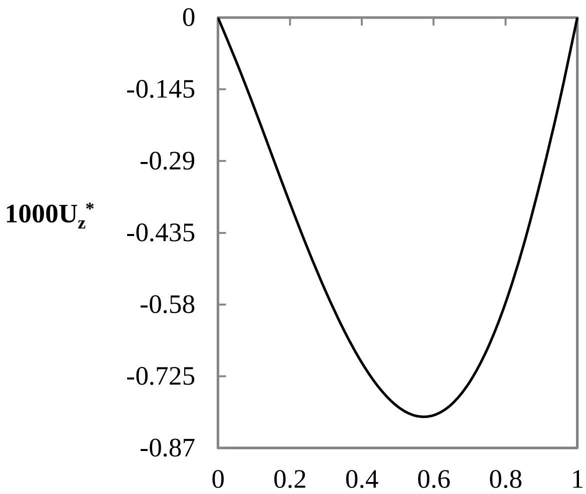
شکل (۴-۴)، مقادیر بی‌بعد جابجایی شعاعی را برای صفحه میانی، در حالتی نشان می‌دهد که پروفیل ضخامت پوسته، خطی تغییر کند. در این نمودارها علاوه بر بار محوری، فشار خارجی نیز وجود دارد. مقدار فشار خارجی در این نمودارها تابعی غیر خطی از متغیر طولی پوسته است که روابط مربوط به تابع فشار خارجی در زیر شکل‌ها مشخص شده است. نتایج نمودار شکل (۴-۴)، تنها برای حل تحلیلی ارائه شده است. زیرا در محیط نرم افزار انسیس، مدل کردن فشار خارجی غیر خطی دشوار است در حالی‌که با استفاده از روش تحلیلی و فرمول‌بندی ارائه شده هر نوع بارگذاری و ضخامت که با توابع پیوسته بیان شوند به راحتی قابل بررسی و حل می‌باشد.

در تمامی شکل‌های (۴-۱) تا (۴-۴)، شماتیکی از پروفیل بارگذاری محوری و شعاعی و مقطع طولی پروفیل ضخامت پوسته رسم شده است.

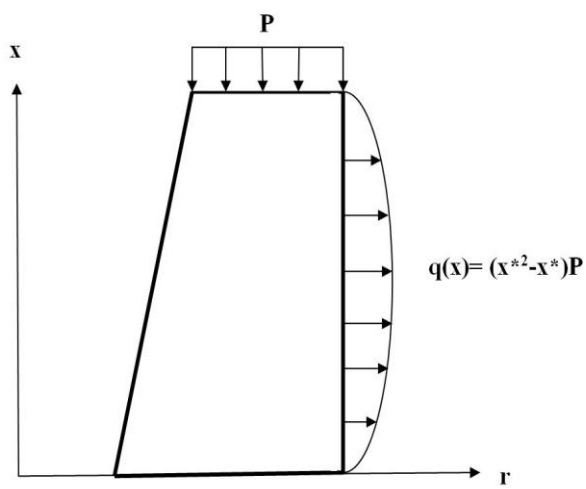
شکل (۴-۵)، مقادیر بی‌بعد جابجایی شعاعی را برای پوسته با پروفیل‌های ضخامت غیر خطی نشان می‌دهد. در این حالت فشار محوری و خارجی به صورت همزمان وجود دارند و مقدار فشار خارجی ثابت و برابر با فشار محوری است. پروفیل ضخامت در این پوسته‌ها دارای شعاع خارجی ثابت و شعاع داخلی متغیر و غیر خطی است. تابع تغییرات شعاع داخلی بر حسب متغیر طولی پوسته در هر شکل نشان داده شده است.



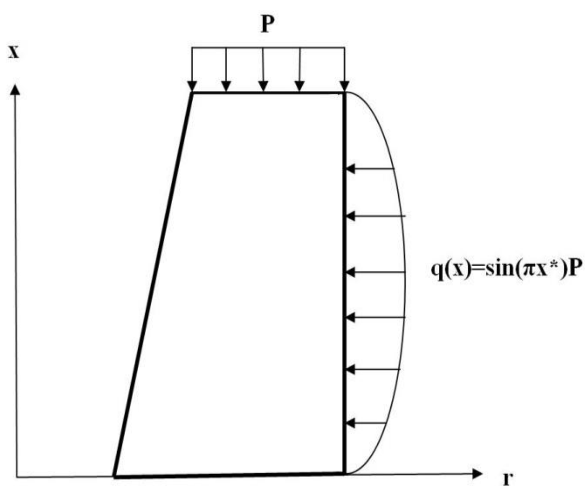
(الف) $q(x)=(x^{*۲}-x^{*})P$



(ب) $q(x)=\sin(\pi x^{*})P$



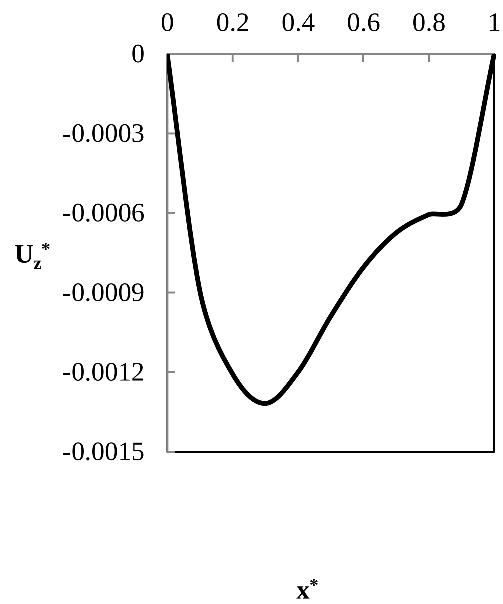
(ج) مقطع طولی و پروفیل بارگذاری برای حالت الف



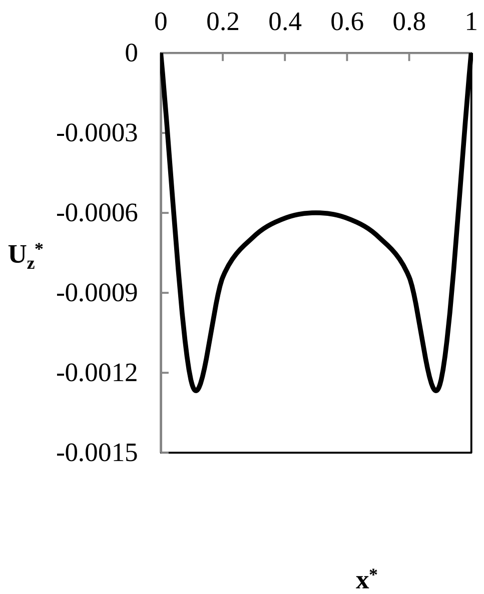
(د) مقطع طولی و پروفیل بارگذاری برای حالت ب

شکل(۴-۴) جابجایی شعاعی بی‌بعد صفحه میانی برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی برای دو نوع پروفیل فشار

$(R_{in}(x^*=۰)=۰/۱۴m, R_{in}(x^*=۱)=۰/۱۵\ m, R_{out}=۰/۱۶m, L=۱m\ )$



(الف) $R_{in}=-۰/۱۱۹x^{*۳}+۰/۲۵۸x^{*۲}-۰/۱۶۶x^{*}+۰/۱۶۲$



(ب) $R_{in}=۰/۰۶x^{*۲}-۰/۰۶x^{*}+۰/۱۵۵$

شکل(۴-۵) جابجایی شعاعی بی‌بعد صفحه میانی برای پوسته با پروفیل ضخامت غیر خطی
(L=۱m, q(x)=P)

در جدول (۴-۲)، مقادیر جابجایی بی‌بعد طولی و شعاعی صفحه میانی، برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی تحت بارگذاری‌های مختلف (فشار خارجی) ارائه شده است. مقادیر ارائه شده برای نقطه میانی پوسته(x^*=۰/۵) است. با توجه به نتایج ارائه شده در این جدول، در حضور فشار خارجی، مقادیر قدرمطلق جابجایی‌ها به صورت چشم‌گیری افزایش می‌یابد. در این تحلیل‌ها، فشار معادل استاتیکی (که متناظر با سطح زیر منحنی فشار-مکان می‌باشد) در تمام موارد یکسان است. با توجه به این نکته، مشخص می‌شود که فشار خارجی سینوسی بیشترین تاثیر را بر روی جابجایی شعاعی و فشار خارجی با تغییرات خطی بیشترین تاثیر را بر روی جابجایی طولی، در پوسته با پروفیل خطی دارد.

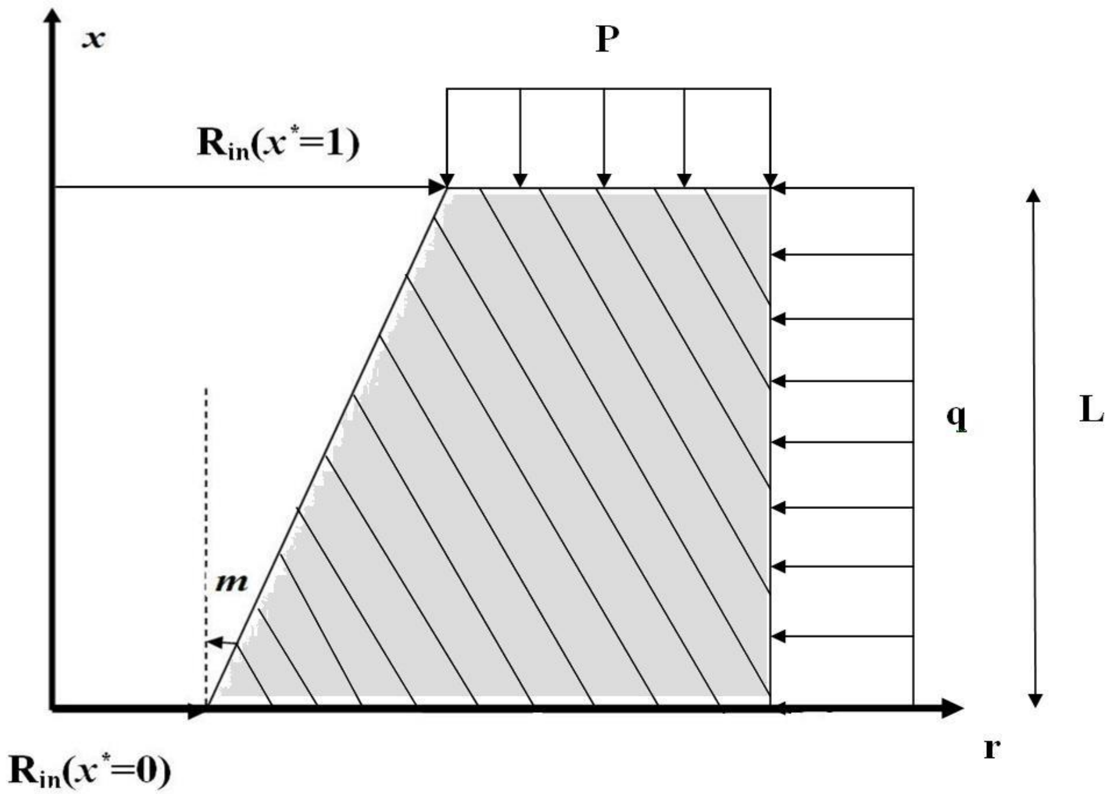
جدول(۴-۲) مقادیر بی‌بعد جابجایی برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی

($R_{in}(x^*=۰)=۰/۱۴$ m, $R_{in}(x^*=۱)=۰/۱۵$ m, $R_{out}=۰/۱۶$m, $L=۱$ m)

$q(x^*)$	$۱۰^۵\times U_z^*(x^*=۰/۵)$	$۱۰^۴\times U_x^*(x^*=۰/۵)$
۰	۱/۵	۱/۴۲
P	۸۲	۵/۴۱
۲(۱-x*)P	۷۹	۸/۴۲
۶(x*۲-x*)P	۱۱۹	۶/۱۳
(π/۲)sin(πx*)P	۱۲۴	۶/۱۵

شیب شعاع داخلی پوسته که با m نمایش داده شده است برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی، به شکل رابطه (۴-۱) تعریف می‌شود و در شکل (۴-۶) به صورت شماتیک، این پارامتر بر روی برش طولی سطح مقطع پوسته با پروفیل خطی نشان داده شده است. در جدول (۴-۳)، تاثیر این پارامتر بر جابجایی بی‌بعد شعاعی در وسط پوسته و برای صفحه میانی، بررسی شده است. با توجه به نتایج این جدول، کاملا مشخص است که با افزایش شیب، مقدار قدر مطلق جابجایی نیز افزایش می‌یابد. بنابراین، می‌توان پیش‌بینی کرد که افزایش این پارامتر منجر به کاهش مقدار بار کمانش خواهد شد و این مطلب در بخش‌های بعدی بررسی می‌شود. در این جدول، تغییرات ضخامت به صورتی است که وزن پوسته ثابت است.

$$m = tan^{-1}(R_{in}(x^* = 1) - R_{in}(x^* = 0)) \qquad (۱-۴)$$



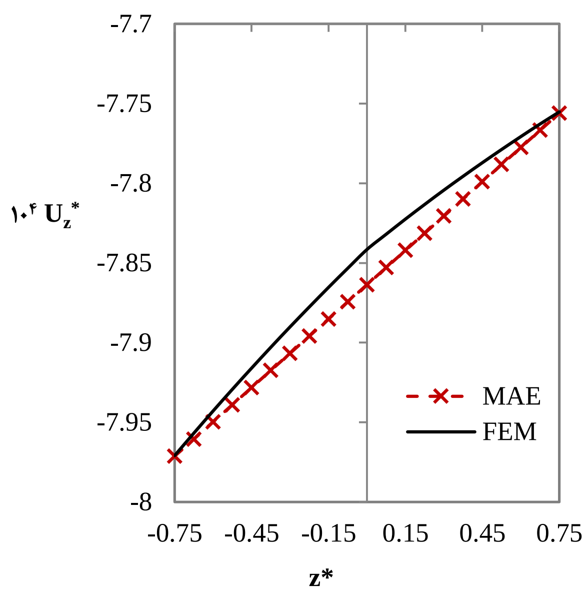
شکل (۴-۶) نمایش شیب شعاع داخلی پوسته، بر روی برش طولی سطح مقطع

جدول(۴-۳) مقادیر بی‌بعد جابجایی برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی

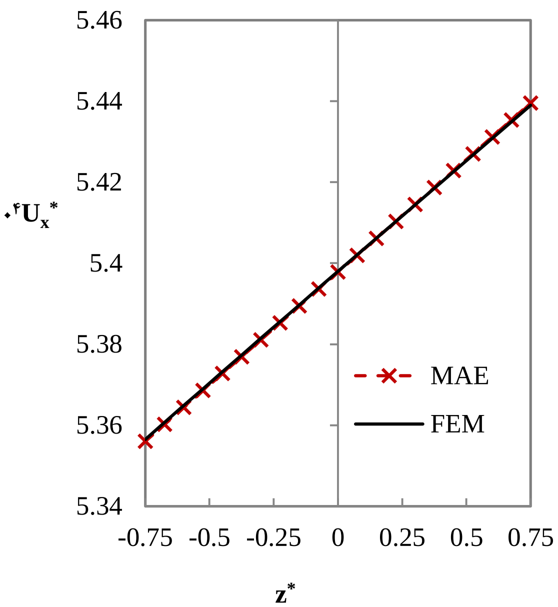
(R_{out}=۰/۱۶m, L=۱m, q(x)=P)

m	$R_{in}(x^*=۱)$	$R_{in}(x^*=۰)$	$۱۰^۴ \times U_z^*(x^*=۰/۵)$
۰/۱	۰/۱۴	۰/۱۳۹	-۳/۱۷
۰/۶	۰/۱۴۵	۰/۱۳۴	-۴/۰۹
۱/۱	۰/۱۴۹	۰/۱۳۰	-۵/۷۶
۱/۶	۰/۱۵۳	۰/۱۲۶	-۹/۸۵
۲/۱	۰/۱۵۸	۰/۱۲۱	-۳۵/۴

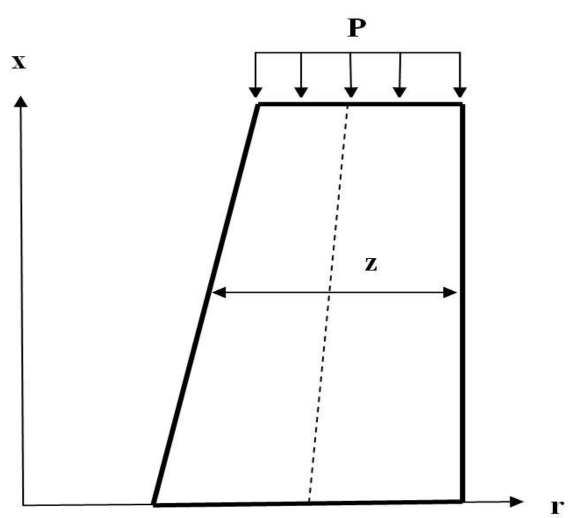
در شکل (۴-۷-ج)، مقطع طولی و محور z نشان داده شده که تغییرات جابجایی بر روی راستای آن رسم شده است.



(الف) تغییرات جابجایی شعاعی در x^{*}=۰/۵

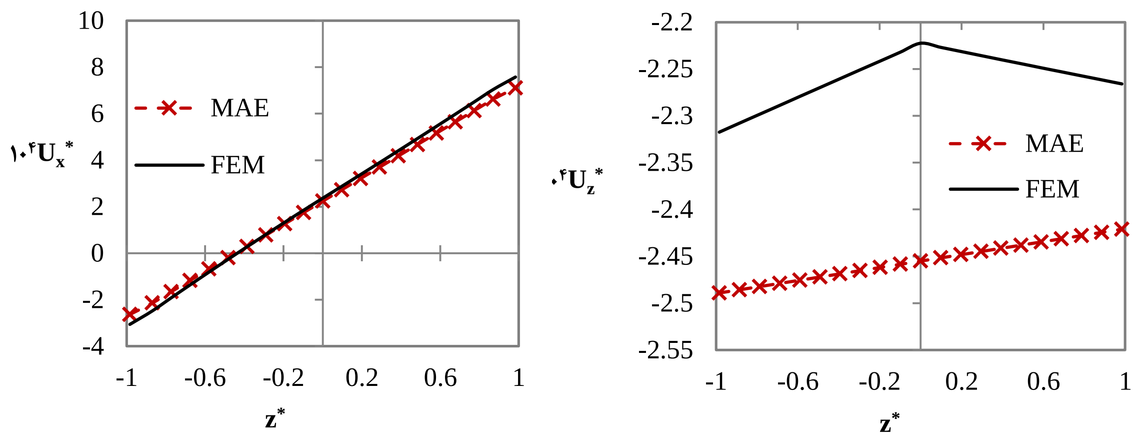


(ب) تغییرات جابجایی طولی در x^{*}=۰/۵



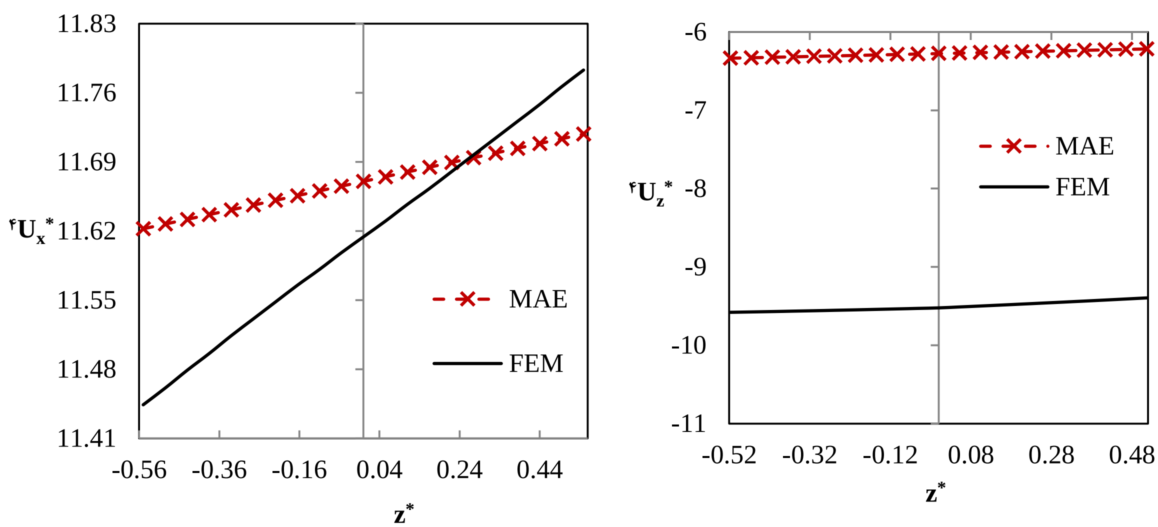
(ج) مقطع طولی و محور z

شکل(۴-۷) تغییرات جابجایی شعاعی و طولی بی‌بعد صفحه میانی در راستای ضخامت برای پوسته با پروفیل ضخامت نواحی دور از مرزها (R_{in}(x^{*}=۰)=۰/۱۴m, R_{in}(x^{*}=۱)=۰/۱۵ m, R_{out}=۰/۱۶m, L=۱m, q(x)=P)



(الف) تغییرات جابجایی شعاعی در x^*=۰/۰۵   (ب) تغییرات جابجایی طولی در x^*=۰/۰۵

شکل(۴-۸) تغییرات جابجایی شعاعی و طولی بی‌بعد صفحه میانی در راستای ضخامت برای پوسته با پروفیل ضخامت نواحی نزدیک مرز $x^*=0$ ($R_{in}(x^*=۰)$=۰/۱۴m, $R_{in}(x^*=۱)$=۰/۱۵ m, R_{out}=۰/۱۶m, L=۱m, q(x)=P)



(الف) تغییرات جابجایی شعاعی در x^*=۰/۹۵   (ب) تغییرات جابجایی طولی در x^*=۰/۹۵

شکل(۴-۹) تغییرات جابجایی شعاعی و طولی بی‌بعد صفحه میانی در راستای ضخامت برای پوسته با پروفیل ضخامت نواحی نزدیک مرز $x^*=1$ ($R_{in}(x^*=۰)$=۰/۱۴m, $R_{in}(x^*=۱)$=۰/۱۵ m, R_{out}=۰/۱۶m, L=۱m, q(x)=P)

شکل‌های (۴-۷) تا (۴-۹)، تغییرات جابجایی‌های شعاعی و طولی در راستای ضخامت پوسته را برای یک پوسته با پروفیل ضخامت خطی و تحت بارگذاری محوری و فشار خارجی نشان می‌دهند. این شکل‌ها برای سه ناحیه مختلف، به ترتیب برای نواحی دور از مرز و برای مرزها، تغییرات جابجایی‌ها در راستای ضخامت را نشان می‌دهند. در این شکل‌ها، نتایج برای حل تحلیلی و حل اجزای محدود رسم شده است. با توجه به این شکل‌ها کاملا مشخص است که فرض تغییرات خطی در راستای ضخامت (استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول) برای نواحی دور از مرزها، فرضی مناسب و قابل قبول است. اما برای نواحی نزدیک به مرزها اختلاف بین نتایج به خصوص برای جابجایی شعاعی زیاد است. در نزدیکی مرزها نیز میزان اختلاف برای جابجایی طولی در $z=\pm h/2$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

جدول (۴-۴) جابجایی شعاعی سطح داخلی پوسته با ضخامت ثابت برای ضخامت‌های مختلف و در نواحی نزدیک و دور از مرزها برای حالت‌های معادلات خطی و غیر خطی ($q(x)=P=۳\times۱۰^۸$ Pa, $R_{out}=۰/۱۶$ m, $z=-h/۲$)

h (mm)	*R/h*	x^*	FEM	MAE₁ جابجایی کوچک	MAE₂ جابجایی بزرگ	درصد اختلاف برای جابجایی کوچک	درصد اختلاف برای جابجایی بزرگ
۵	۳۱/۵	۰/۰۵	-۱/۳۸۸۶	-۱/۴۵۹۹	-۱/۳۶۹۴	۵/۱۸	۱/۳۴
		۰/۵۰	-۱/۴۰۱۳	-۱/۴۹۷۴	-۱/۴۹۷۴	۶/۸۸	۶/۸۸
		۰/۹۵	-۱/۴۶۹۳	-۱/۴۵۹۹	-۱/۴۶۰۲	۰/۶۲	۰/۵۹
۱۰	۱۵/۵	۰/۰۵	-۰/۲۹۰۰	-۰/۲۹۴۱	-۰/۲۸۶۱	۱/۴۱	۱/۳۴
		۰/۵۰	-۰/۳۵۲۰	-۰/۳۶۴۶	-۰/۳۶۴۶	۳/۵۸	۳/۵۸
		۰/۹۵	-۰/۳۵۸۰	-۰/۲۹۴۱	-۰/۲۹۶۶	۱۷/۸۵	۱۷/۱۵
۱۵	۱۰/۲	۰/۰۵	-۰/۱۱۲۰	-۰/۱۰۹۹	-۰/۱۱۰۶	۱/۸۸	۱/۲۵
		۰/۵۰	-۰/۱۵۴۳	-۰/۱۵۷۶	-۰/۱۵۷۶	۲/۱۴	۲/۱۴
		۰/۹۵	-۰/۱۴۶۸	-۰/۱۰۹۹	-۰/۱۱۰۵	۲۵/۱۴	۲۴/۷۳
۲۰	۷/۵	۰/۰۵	-۰/۰۵۵۰	-۰/۰۵۴۲	-۰/۰۵۴۴	۱/۴۵	۱/۰۹
		۰/۵۰	-۰/۰۸۵۰	-۰/۰۸۰۲	-۰/۰۸۶۰	۵/۶۵	۱/۱۸
		۰/۹۵	-۰/۰۷۵۰	-۰/۰۵۴۲	-۰/۰۵۴۴	۲۷/۷۳	۲۷/۴۷
۳۰	۴/۸۳	۰/۰۵	-۰/۰۲۰۳	-۰/۰۱۹۹	-۰/۰۲۰۰	۱/۹۷	۱/۴۸
		۰/۵۰	-۰/۰۳۵۹	-۰/۰۳۶۰	-۰/۰۳۶۰	۰/۲۸	۰/۲۸
		۰/۹۵	-۰/۰۲۹۰	-۰/۰۱۹۹	-۰/۰۲۰۰	۳۱/۳۸	۳۱

جدول (۴-۵) جابجایی طولی سطح داخلی پوسته با ضخامت ثابت برای ضخامت‌های مختلف و در نواحی نزدیک و دور از مرزها برای حالت‌های معادلات خطی و غیر خطی ($q(x)=P=۳\times۱۰^{۸}$ Pa, $R_{out}=۰/۱۶$ m, $z=-h/۲$)

h (mm)	**R/h**	**x^***	**FEM**	**MAE1 جابجایی کوچک**	**MAE2 جابجایی بزرگ**	**درصد اختلاف برای جابجایی کوچک**	**درصد اختلاف برای جابجایی بزرگ**
۵	۳۱/۵	۰/۰۵	-۰/۰۵۴۰	۰/۰۳۴۲	-۰/۰۸۲۶	۱۶۳/۳۳	۵۲/۹۶
		۰/۵۰	۱/۲۷۷۰	۱/۲۴۹۴	۱/۲۴۳۲	۲/۱۶۱	۲/۶۴
		۰/۹۵	۲/۵۹۲۰	۲/۴۶۴۵	۲/۴۶۶۳	۴/۹۱۹	۴/۸۴
۱۰	۱۵/۵	۰/۰۵	-۰/۰۱۹۰	-۰/۰۱۴۱	-۰/۰۲۳۱	۲۵/۸	۱۵/۵
		۰/۵۰	۰/۲۸۲۰	۰/۲۷۵۲	۰/۲۷۶۱	۲/۴۱	۲/۰۹
		۰/۹۵	۰/۵۷۵۰	۰/۵۶۴۶	۰/۵۶۷۸	۲/۱۴	۱/۵۹
۱۵	۱۰/۲	۰/۰۵	-۰/۰۱۴۴	-۰/۰۱۳۰	-۰/۰۱۴۹	۹/۷۲	۳/۴۷
		۰/۵۰	۰/۱۰۹۵	۰/۱۰۶۸	۰/۱۰۷۸	۲/۴۷	۰/۷۳
		۰/۹۵	۰/۲۳۰۶	۰/۲۲۶۶	۰/۲۳۰۹	۱/۷۳	۰/۱۳
۲۰	۷/۵	۰/۰۵	-۰/۰۱۰۷	-۰/۰۱۰۰	-۰/۰۱۰۶	۶/۵۴	۰/۹۳
		۰/۵۰	۰/۰۵۲۹	۰/۰۵۱۷	۰/۰۵۳۸	۲/۲۷	۱/۷
		۰/۹۵	۰/۱۱۵۸	۰/۱۱۳۳	۰/۱۱۷۹	۲/۱۶	۱/۸۱
۳۰	۴/۸۳	۰/۰۵	-۰/۰۰۶۴	-۰/۰۰۵۹	-۰/۰۰۶۱	۷/۸۱	۴/۶۹
		۰/۵۰	۰/۰۱۶۱	۰/۰۱۵۷	۰/۰۱۵۶	۲/۴۸	۳/۱۱
		۰/۹۵	۰/۰۳۹۴	۰/۰۳۷۵	۰/۰۳۷۳	۴/۸۲	۵/۳۳

جدول‌های (۴-۴) و (۴-۵) به ترتیب مقادیر جابجایی شعاعی و طولی را برای سطح داخلی پوسته با پروفیل ضخامت ثابت، نشان می‌دهند. پوسته تحت فشار محوری و خارجی به صورت همزمان قرار دارد. در این جدول‌ها نتایج برای ضخامت‌های مختلف و در سه ناحیه (نزدیک مرزها و دور از مرزها)، گزارش شده است. نتایج تحلیلی شامل دو حالت حل معادلات مرتبه یک و مرتبه دو می‌باشند که به ترتیب معادلات با در نظر گرفتن تغییر شکل کوچک (خطی) و معادلات با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ (غیر خطی)، می‌باشند. حل اجزای محدود نیز با در نظر گرفتن جابجایی‌های بزرگ است. در این جدول، شعاع صفحه میانی R در نظر گرفته می‌شود. درصد اختلاف از رابطه $Diff\ (\%)=|(MAE-FEM)/FEM|*100$ به دست می‌آید.

با توجه به جدول‌های (۴-۴) و (۴-۵)، معمولا با افزایش ضخامت، میزان اختلاف بین حل با جابجایی‌های کوچک و بزرگ کاهش می‌یابد و اختلاف بین نتایج دو روش حل تحلیلی برای پوسته‌های ضخیم کمتر است. همچنین مشخص می‌شود که درصد اختلاف برای جابجایی طولی در نزدیکی مرز صفر و برای جابجایی شعاعی در نزدیکی مرز یک، افزایش می‌یابد.

$$U_z^* h_0 = \frac{1-\nu}{E}\left(\frac{-R_{Out}^2 q}{R_{Out}^2 - R_i^2}\right) r - \frac{1+\nu}{E} \frac{R_{in}^2 R_{Out}^2 q}{(R_{Out}^2 - R_{in}^2) r} \;;\; R_{Out} = R + \frac{h}{2} \;;\; R_{in} = R - \frac{h}{2} \;;\; r = R_{in} \qquad (۴-۲)$$

جدول (۴-۶) مقایسه جابجایی شعاعی سطح داخلی پوسته با ضخامت ثابت برای ضخامت‌های مختلف با استفاده از تئوری شکل برشی، روش اجزای محدود و تئوری الاستیسیته (x^*=۰/۵, z= -h/۲, q=۳×۱۰^۸ Pa, P=۰, R_{out}=۰/۱۶ m)تغییر مستوی

h (mm)	**R/h**	**FEM**	**FSDT**	**PET**	**درصد اختلاف FSDT**	**درصد اختلاف PET**
۵	۳۱/۵	-۱/۵۱۱۶	-۱/۵۰۴۸	-۱/۴۹۷۹	۰/۴۴	۰/۹
۱۰	۱۵/۵	-۰/۳۷۱۶	-۰/۳۶۸۴	-۰/۳۶۵۱	۰/۸۶	۱/۷۵
۱۵	۱۰/۲	-۰/۱۶۲۲	-۰/۱۶۰۲	-۰/۱۵۸۲	۱/۲۳	۲/۴۶
۲۰	۷/۵	-۰/۰۸۹۶	-۰/۰۸۸۲	-۰/۰۸۶۸	۱/۵۶	۳/۱۲
۳۰	۴/۸	-۰/۰۳۸۲	-۰/۰۳۷۴	-۰/۰۳۶۶	۲/۰۹	۴/۱

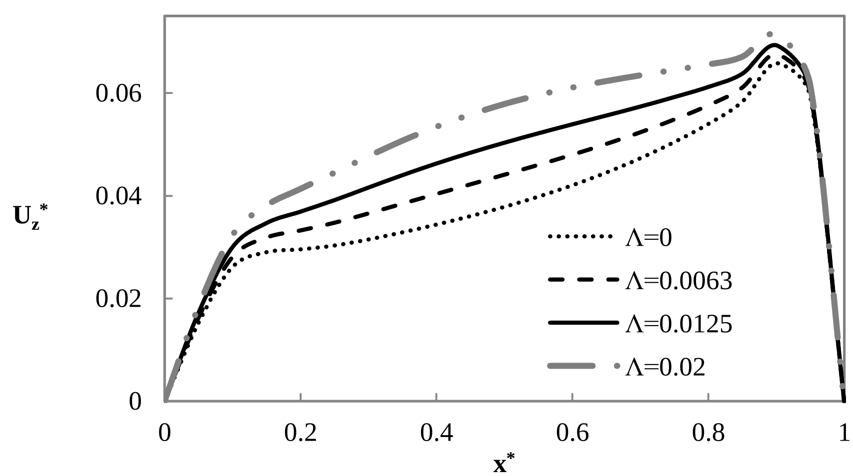
به منظور بررسی صحت نتایج، علاوه بر مقایسه با نتایج حل اجزای محدود، نتایج حل تحلیلی با رابطه تئوری الاستیسیته مستوی[1] (PET) نیز مقایسه می‌شوند. در جدول (۴-۶)، مقدار جابجایی سطح داخلی پوسته با ضخامت ثابت تحت فشار خارجی ثابت برای قسمت میانی دور از مرز پوسته گزارش شده است. طبق رابطه (۴-۲) مقدار جابجایی برای این مورد بر اساس تئوری الاستیسیته مستوی به دست می‌آید. این رابطه با این فرض به دست می‌آید که پوسته تنها تحت فشار خارجی بوده و شرایط مرزی به شکلی است که سطح مقطع

[1] Plane Elasticity Theory (PET)

پوسته بعد از تغییر شکل ثابت باقی می‌ماند و دو لبه پوسته گیردار است[۵]. درصد اختلاف برای تئوری تغییر شکل برشی و تئوری الاستیسیته از رابطه $Diff\,(Y)=|(Y\text{-}FEM)/FEM|*100$ به دست می‌آید. با توجه به این جدول، درصد اختلاف تئوری الاستیسیته مستوی نسبت به تئوری تغییر شکل برشی در ضخامت‌های بالا، بیشتر است. البته میزان این اختلاف در نزدیکی مرزها بیشتر است.

۴-۳ تاثیر نقص اولیه بر حالت تعادل

نقص اولیه در این تحقیق، به شکل یک خیز اولیه در راستای شعاعی می‌باشد. برای بررسی تاثیر نقص اولیه بر روی معادلات، در ابتدا یک تابع مناسب برای نقص اولیه در نظر گرفته می‌شود. دو نوع تابع نقص اولیه سینوسی و نمایی مورد بررسی قرار می‌گیرند. شکل (۴-۱۰)، جابجایی بی‌بعد شعاعی را برای یک پوسته با پروفیل ضخامت خطی، تحت فشار محوری ثابت با در نظر گرفتن تابع نقص سینوسی با دامنه‌های متفاوت را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، با افزایش دامنه تابع نقص اولیه (Λ)، تاثیر این تابع بر میدان جابجایی بیشتر می‌شود.



شکل (۴-۱۰) جابجایی شعاعی بی بعد صفحه میانی برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی و با در نظر گرفتن نقص اولیه

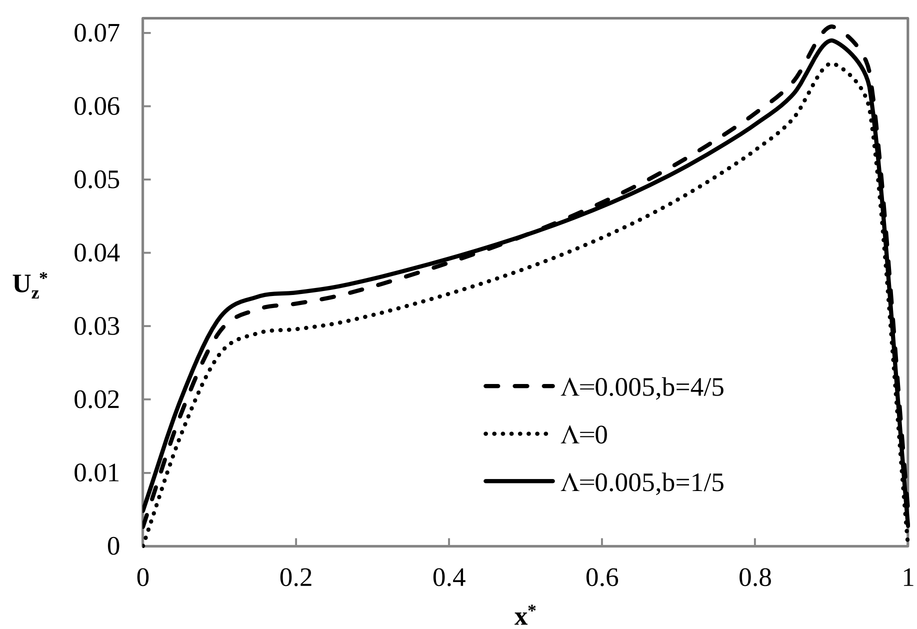
سینوسی

$(R_{out}=۰/۱۵۵m, R_{in}(x^*=۰)=۰/۱۴m, R_{in}(x^*=۱)=۰/۱۵m, L=۰/۸m, z=۰, \hat{w}(x^*)=\Lambda sin(\pi x^*))$

تابع نقص نمایی با استفاده از رابطه (۴-۳) تعریف می‌شود. در این رابطه، با تغییر مقدار b می‌توان نقطه بیشینه تابع نقص را در طول پوسته تغییر داد. برای مثال اگر مقدار این پارامتر ۰,۲ باشد مقدار بیشینه دامنه تابع نقص اولیه، در نزدیکی مرز $x^*=0$ و برای مقدار ۰,۸ این بیشینه در نزدیکی مرز $x^*=1$ اتفاق می‌افتد.

$$\hat{w}(x^*)=\Lambda exp\left(-(x^*-b)^2\right) \qquad (۴-۳)$$

شکل (۴-۱۱)، تاثیر تابع نقص را به کمک تابع نقص اولیه نمایی، نشان می‌دهد. این شکل برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی و تحت فشار محوری ثابت، رسم شده است.



شکل (۴-۱۱) جابجایی شعاعی بی بعد صفحه میانی برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی و با در نظر گرفتن نقص اولیه نمایی

(R_{out}=۰/۱۵۵m, R_{in} (x^*=۰)=۰/۱۴m, R_{in} (x^*=۱)=۰/۱۵m, L=۰/۸ m, z=۰, $\hat{w}(x^*)=A\exp(-(x^*-b)^{۲})$)

۴-۴ تعیین بار کمانش

با حل معادلات رابطه (۳-۲۲) با استفاده از روشی که در فصل‌های قبل توضیح داده شد بار کمانش بی‌بعد پوسته به روش اول و به صورت تحلیلی به دست می‌آید. بار کمانش در این روش، ریشه‌های معادله ماتریسی رابطه (۳-۲۷) است. برای تعیین این ریشه‌ها از روش تنصیف[۱] استفاده شده است. برای استفاده از روش تنصیف، مهم‌ترین عامل، تعیین یک بازه مناسب برای انجام حلقه تکرار و تعیین پاسخ مناسب است. به این منظور از رابطه (۴-۴) که از تئوری کلاسیک پوسته‌ها به دست می‌آید؛ استفاده می‌شود.

$$\sigma_{cr} = 0.605\frac{Eh}{R} \qquad (۴-۴)$$

این رابطه برای تعیین بار کمانش پوسته استوانه‌ای با ضخامت ثابت بر اساس تئوری کلاسیک می‌باشد [۵]. حد بالا و پایین بازه تنصیف، با استفاده از قرار دادن مقدار بیشینه و کمینه ضخامت پوسته مورد مطالعه در این رابطه، تعیین می‌گردد.

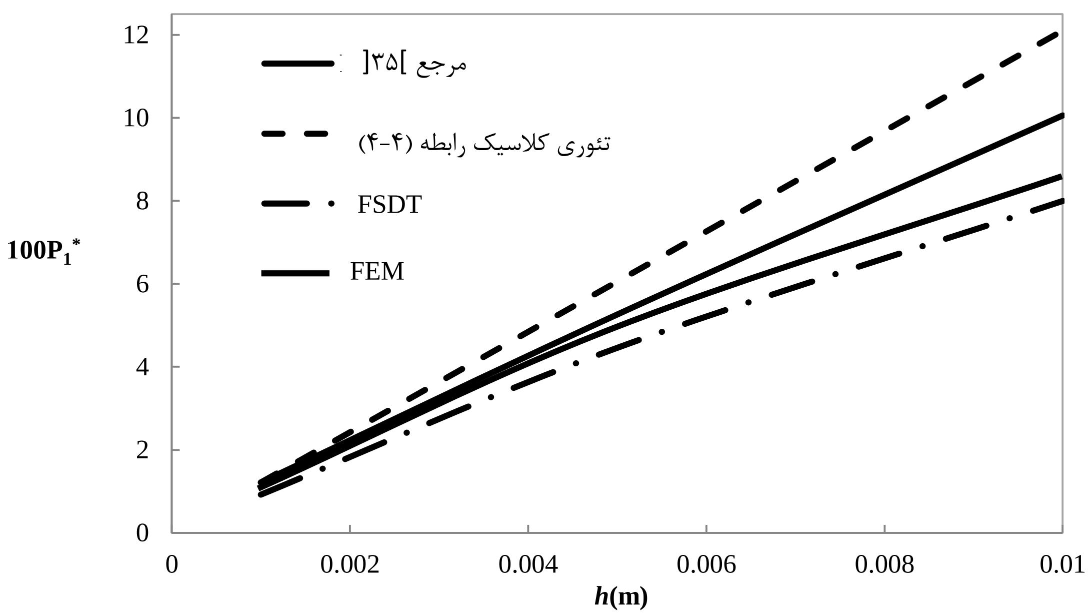
جدول (۴-۷)، مقدار بار کمانش بی‌بعد (P_1^*) را برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی، نشان می‌دهد. آنچنان که انتظار است با افزایش ضخامت، بار کمانش نیز افزایش می‌یابد. با افزایش ضخامت، مقدار اختلاف حل تحلیلی و اجزای محدود کاهش می‌یابد. با توجه به این نکته، اثر در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی در تعیین بار کمانش پوسته‌های با ضخامت بیشتر به وضوح مشاهده می‌شود.

[1] Bisection Method

جدول (۴-۷) بارکمانش بی‌بعد محوری برای پوسته استوانه‌ای با پروفیل ضخامت خطی

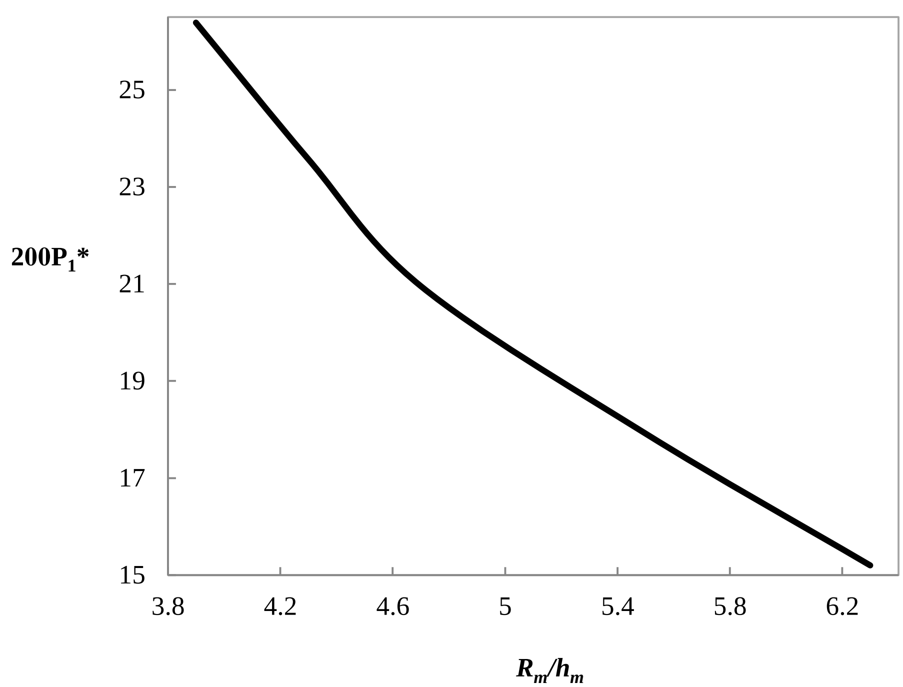
(R_{in} (x^*=۰)=۰/۱۴, R_{in} (x^*=۱)=۰/۱۵, L=۰/۸)

R_{out} (m)	FEM	FSDT	درصد اختلاف نسبت به FEM
۰/۱۵۴	۰/۰۲۰۹	۰/۰۲۰۳	۲/۸
۰/۱۵۶	۰/۰۲۹۷	۰/۰۲۶۰	۱۲/۴
۰/۱۵۸	۰/۰۳۸۰	۰/۰۳۶۷	۳/۴
۰/۱۶۰	۰/۰۴۷۲	۰/۰۴۶۰	۲/۵
۰/۱۶۵	۰/۰۶۴۲	۰/۰۶۰۴	۶
۰/۱۷۰	۰/۰۸۱۰	۰/۰۷۸۰	۳/۶
۰/۱۷۵	۰/۰۹۶۰	۰/۰۹۵۳	۰/۸



شکل (۴-۱۲) مقایسه بار کمانش بی‌بعد، برای پوسته با ضخامت ثابت با استفاده از روش تحلیلی، تئوری کلاسیک، مرجع [۳۵] و روش اجزای محدود (R=۰/۰۶ m)

برای بررسی صحت نتایج حل تحلیلی ارائه شده در فصل قبل، نتایج حل تحلیلی علاوه بر مقایسه با حل اجزای محدود، با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک که در رابطه (۴-۴) به آن اشاره شد و نتایج حاصل از یک مرجع دیگر نیز مقایسه می‌شود. البته به این منظور، پوسته با ضخامت ثابت در نظر گرفته می‌شود. شکل (۴-۱۲)، مقدار بار کمانش بی‌بعد محوری را برای حل اجزای محدود، حل تحلیلی ارائه شده در این تحقیق، تئوری کلاسیک و حل مرجع [۳۵] را نشان می‌دهد. مشخص است که با افزایش ضخامت، نتایج حل تحلیلی ارائه شده اختلاف کمتری با نتایج حل اجزای محدود دارد. با توجه به این‌که اختلاف مرجع [۳۵] و تئوری ارائه شده در اینجا، استفاده از جمله w_1 در رابطه (۱-۵) است می‌توان گفت وجود این جمله در ضخامت‌های بالاتر دقت حل را بیشتر کرده ولی در ضخامت‌های پایین‌تر استفاده از این جمله، امتیازی محسوب نمی‌شود.



شکل (۴-۱۳) تاثیر پارامتر R_m/h_m بر روی مقدار بار کمانش بی‌بعد محوری

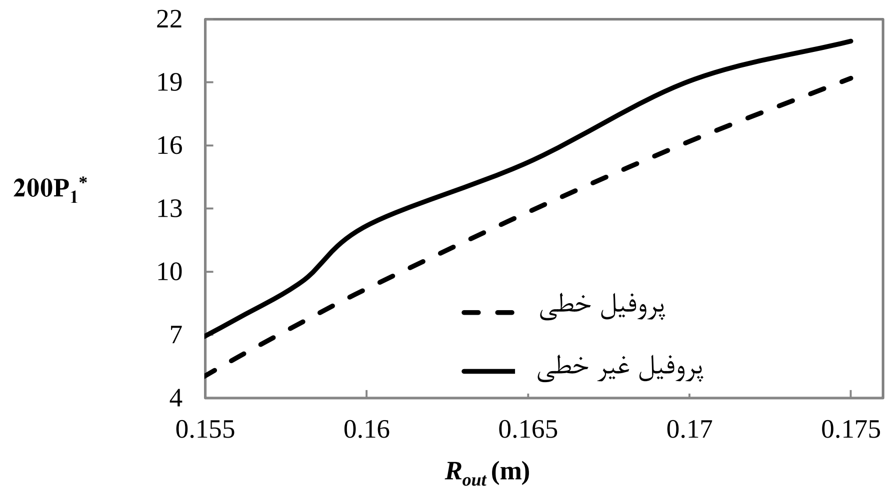
(L=۰/۸ m)

شکل (۴-۱۳)، تاثیر پارامتر R_m/h_m بر بار کمانش محوری در یک پوسته با پروفیل ضخامت خطی را نشان می‌دهد. پارامترهای R_m و h_m به ترتیب مقادیر شعاع صفحه میانی و ضخامت، در وسط پوسته می‌باشند. در این شکل، شعاع خارجی بین ۰/۱۱ تا ۰/۱۷ متر، شعاع داخلی در مرز صفر بین ۰/۸ تا ۰/۱۴ متر و شعاع داخلی در مرز یک بین ۰/۹ تا ۰/۱۵ متر، تغییر می‌کنند. بر اساس تئوری کلاسیک، بار کمانش با $(h/R)^n$ متناسب است که n=1 است (رابطه (۴-۴)). با تقریب زدن[1] نمودار شکل (۴-۱۳)، رابطه (۴-۵)، نتیجه می‌شود.

$$P^{*}=123.7\left(\frac{h_m}{R_m}\right)^{1.13} \qquad (۵-۴)$$

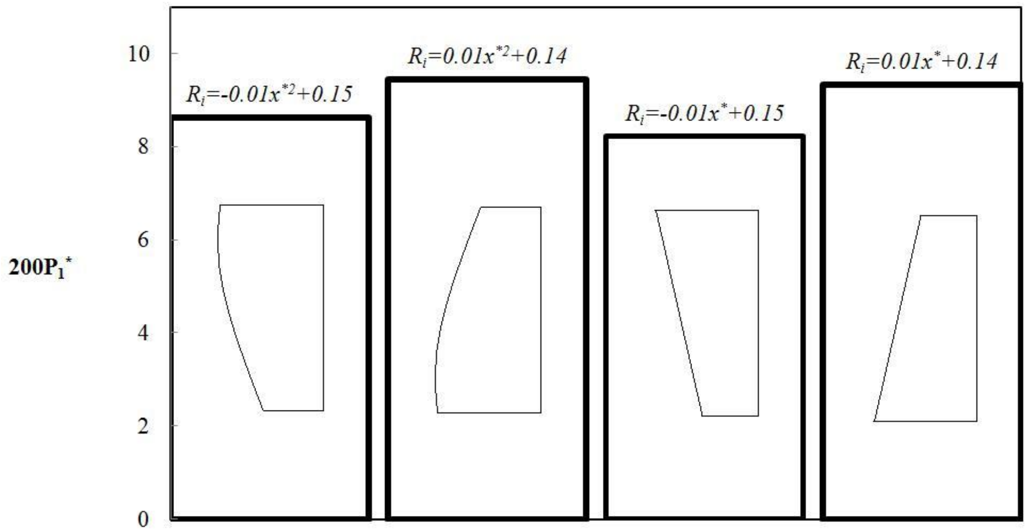
شکل (۴-۱۴)، بار کمانش بی‌بعد را برای پوسته استوانه‌ای با پروفیل ضخامت خطی و غیر خطی بر حسب شعاع خارجی متفاوت، نشان می‌دهد. هر دو نوع پروفیل ضخامت خطی و غیر خطی، به گونه‌ای در نظر گرفته شده‌اند که پوسته‌ها در نهایت دارای حجم یکسان باشند. با توجه به یکسان بودن حجم پوسته‌ها، مشخص می‌شود که پوسته‌های با پروفیل غیر خطی، کارایی بیشتری دارند. یعنی این پوسته‌ها قادر به تحمل بار خارجی بیشتری در مقایسه با پوسته‌های با پروفیل ضخامت خطی هستند. رابطه مربوط به شعاع داخلی پوسته‌ها در زیر شکل مشخص شده است.

[1] Curve Fitting



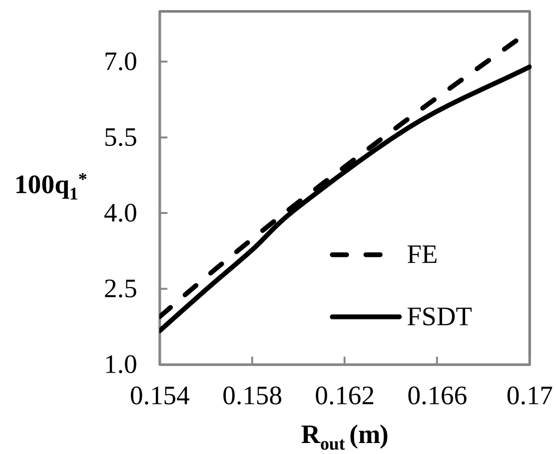
شکل (۴-۱۴) بار کمانش محوری بی‌بعد برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی و غیر خطی
($R_{in\ (\text{خطی})} =۰/۰۱x^{*}+۰/۱۴$, $R_{in\ (\text{غیر خطی})}= ۰/۰۶x^{*۲}-۰/۰۶x^{*}+۰/۱۵۵$, $L=۰/۸$ m)

شکل (۴-۱۵)، بار کمانش محوری را برای حالات مختلف از پروفیل‌های خطی و غیر خطی نشان می‌دهد. بر روی هر یک از ستون‌ها، یک نمای شماتیک از سطح مقطع پروفیل‌ها رسم شده است. با توجه به این شکل، در هر دو نوع از پروفیل‌های خطی و غیر خطی، با افزایش ضخامت لبه پایین، بار کمانش محوری افزایش می‌یابد. باید توجه داشت که در تمامی موارد، پوسته‌ها دارای حجم یکسان می‌باشند. بنابراین با افزایش ضخامت لبه پایین در پوسته‌های با ضخامت متغیر، مقدار بار کمانش افزایش می‌یابد.

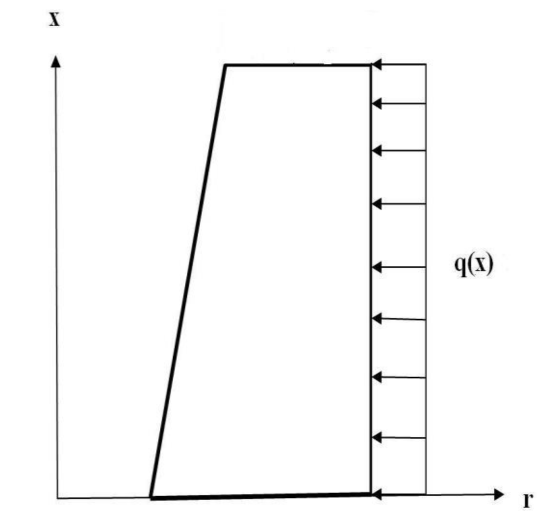


شکل (۴-۱۵) بار کمانش محوری برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی و غیر خطی با شعاع‌های داخلی مختلف
(R_{out} =۰/۱۶ m, L=۰/۸ m)

در این تحقیق، بار کمانش به روش دیگری نیز به دست آمده است. در این روش، برای استخراج بار کمانش، معادلات (۳-۳۲) حل می‌شود. به این منظور، مقدار متوسط ماتریس ضرایب، با استفاده از رابطه (۳-۳۱) محاسبه می‌شوند. شکل (۴-۱۶)، تغییرات فشار خارجی کمانش، برای حالتی که فشار محوری صفر است را نشان می‌دهد. در این شکل پروفیل ضخامت پوسته به صورت خطی تغییر می‌کند. این شکل نشان دهنده دقت قابل قبول نتایج حل ارائه شده بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، در مقایسه با حل اجزای محدود می‌باشد. با افزایش شعاع خارجی، مقدار بار کمانش نیز افزایش می‌یابد.



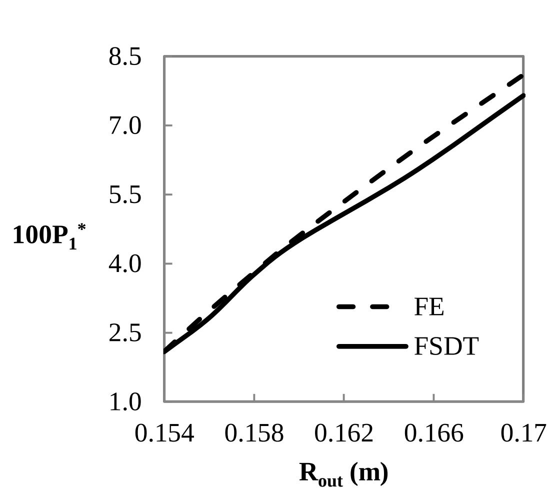
(الف) بار کمانش



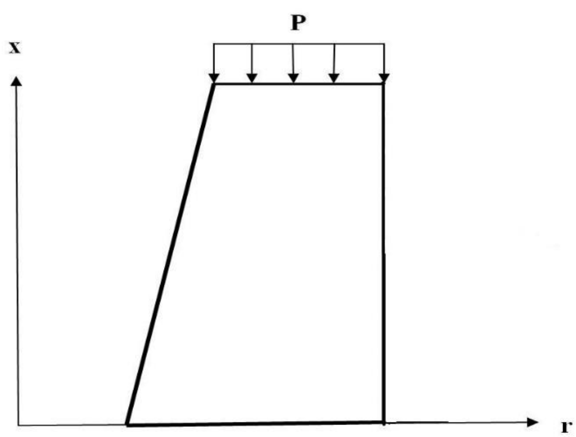
(ب) مقطع طولی پروفیل ضخامت

شکل (۴-۱۶) بار کمانش شعاعی بی‌بعد برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی

$(R_{in}\ (x^{*}=۰)=۰/۱۴\ \mathrm{m},\ R_{in}\ (x^{*}=۱)=۰/۱۵\ \mathrm{m},\ L=۰/۸\ \mathrm{m})$



(الف) بار کمانش



(ب) مقطع طولی پروفیل ضخامت

شکل (۴-۱۷) بار کمانش محوری بی‌بعد برای پوسته با پروفیل ضخامت خطی

$(R_{in}\ (x^{*}=۰)=۰/۱۴\ \mathrm{m},\ R_{in}\ (x^{*}=۱)=۰/۱۵\ \mathrm{m},\ L=۰/۸\ \mathrm{m})$

شکل (۴-۱۷)، نتایج را برای حالتی نشان می‌دهد که فشار خارجی صفر است. در این شکل بار کمانش محوری برای پوسته با همان ابعاد نشان داده شده است. البته راه حل ارائه شده برای پوسته‌ها با پروفیل ضخامت غیر خطی نیز قابل استفاده می‌باشد که نتایج آن شبیه به نتایج حاصل از روابط قبل و شکل‌های فوق می‌باشند.

برای بررسی نتایج حل ارائه شده در این تحقیق، جدول (۴-۸) مقادیر بار کمانش بی‌بعد شعاعی را برای پوسته با ضخامت ثابت برای نسبت طول به شعاع (*L/R*) و شعاع به ضخامت‌های (*R/h*) مختلف گزارش می‌کند. هم‌چنین نتایج با مراجع [۴۹ و ۶۸] مورد مقایسه قرار گرفته است. با توجه به این جدول، مشخص است که نتایج حاصل از حل ارائه شده در این تحقیق بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، با نتایج مراجع فوق تطابق دارد. البته این جدول تنها برای پوسته‌های خیلی نازک ارائه شده زیرا نتایج این مراجع برای پوسته‌های ضخیم گزارش نشده است. حل ارائه شده در مراجع فوق، برای پوسته‌های ضخیم نتایج قابل قبولی ندارد ولی حل ارائه شده در این تحقیق، برای پوسته‌های ضخیم نیز نتایج قابل قبولی را ارائه می‌دهد.

جدول (۴-۸) بارکمانش شعاعی بی‌بعد برای پوسته استوانه‌ای با ضخامت ثابت با استفاده از روش موجود و مراجع [۴۹ و ۶۸]

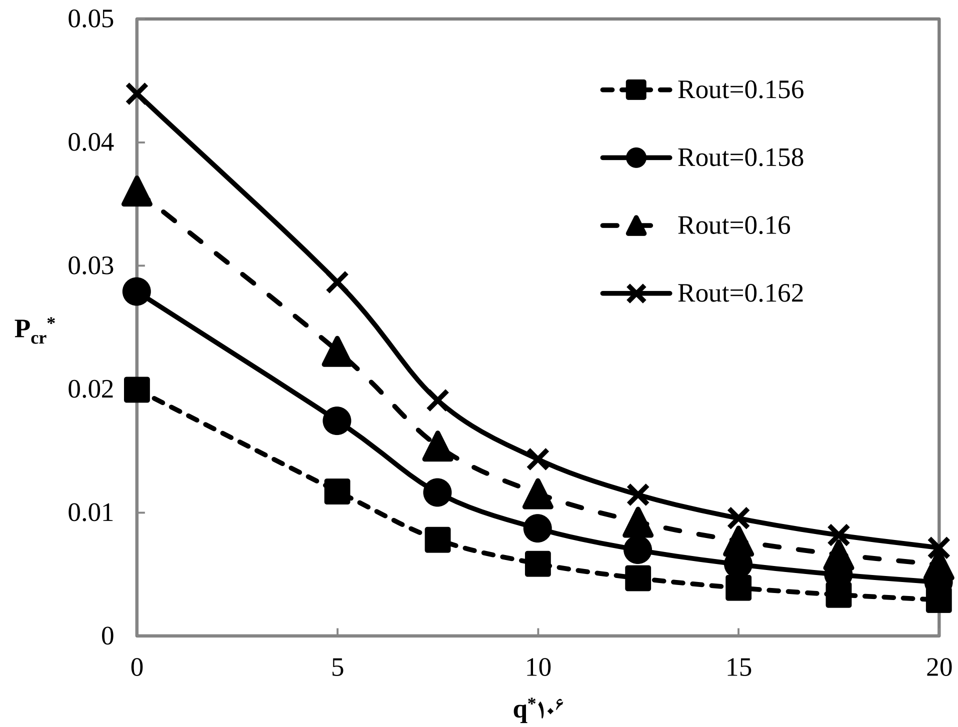
L/R	*R/h0*	*FSDT*	مرجع [۴۹]	مرجع [۶۸]
۰/۵	۳۰۰	$۱/۳۸۱\times ۱۰^{-۶}$	$۱/۳۸۱\times ۱۰^{-۶}$	$۱/۳۸۳\times ۱۰^{-۶}$
	۳۰۰۰	$۳/۹۱۵\times ۱۰^{-۹}$	$۳/۹۰۷\times ۱۰^{-۹}$	$۳/۹۰۸\times ۱۰^{-۹}$
۱	۳۰۰	$۶/۳۴۹\times ۱۰^{-۷}$	$۶/۳۳۳\times ۱۰^{-۷}$	$۶/۳۴۸\times ۱۰^{-۷}$
	۵۰۰	$۱/۷۴۴\times ۱۰^{-۷}$	$۱/۷۳۹\times ۱۰^{-۷}$	$۱/۷۴۲\times ۱۰^{-۷}$
	۱۰۰۰	$۳/۰۲۸\times ۱۰^{-۸}$	$۳/۰۲۰\times ۱۰^{-۸}$	$۳/۰۲۴\times ۱۰^{-۸}$
	۱۵۰۰	$۱/۰۹۰\times ۱۰^{-۸}$	$۱/۰۸۷\times ۱۰^{-۸}$	$۱/۰۸۸\times ۱۰^{-۸}$
	۲۰۰۰	$۵/۲۸۸\times ۱۰^{-۹}$	$۵/۲۷۵\times ۱۰^{-۹}$	$۵/۲۷۹\times ۱۰^{-۹}$
۲	۳۰۰	$۳/۰۳۲\times ۱۰^{-۷}$	$۳/۰۲۵\times ۱۰^{-۷}$	$۳/۰۳۶\times ۱۰^{-۷}$
	۳۰۰۰	$۹/۴۳۰\times ۱۰^{-۱۰}$	$۹/۴۱۰\times ۱۰^{-۱۰}$	$۹/۴۲۰\times ۱۰^{-۱۰}$
۳	۳۰۰	$۲/۰۳۴\times ۱۰^{-۷}$	$۲/۰۲۹\times ۱۰^{-۷}$	$۲/۰۳۵\times ۱۰^{-۷}$
	۳۰۰۰	$۶/۲۶۰\times ۱۰^{-۱۰}$	$۶/۲۴۵\times ۱۰^{-۱۰}$	$۶/۲۵۵\times ۱۰^{-۱۰}$

در جدول (۴-۹)، بار کمانش یک پوسته استوانه‌ای با ضخامت ثابت تحت بار ترکیبی محوری و فشار خارجی به صورت همزمان، محاسبه شده است. مقدار پارامتر b_1 و تنش بحرانی در این جدول از رابطه (۴-۶)، به دست می‌آید. در این جدول، فشار خارجی و محوری با استفاده از پارامتر b_1 با هم ارتباط دارند. به همین منظور در روش تحلیلی، مقدار فشار محوری با استفاده از این ضریب بر حسب فشار خارجی، در معادلات پایداری جایگزین شده و معادلات پایداری تنها بر حسب فشار خارجی شعاعی حل می‌شوند و مقادیر تنش بحرانی از رابطه (۴-۶) به دست می‌آیند. نتایج حاصل از حل تئوری تغییر شکل برشی با نتایج مراجع تطابق دارد. حل ارائه شده در مراجع فوق تنها برای پوسته‌ها با ضخامت ثابت است که با استفاده از تئوری غیر خطی فن کارمن و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا به دست آمده است.

$$\sigma_{cr} = q_{cr}\left(\frac{R}{h}\right)\ ;\ b_1 = \frac{P}{\pi R^2 q}\ ;\ \sigma_{cr}{}^{*} = \frac{\sigma_{cr}}{E} \qquad (۶-۴)$$

جدول (۴-۹) تنش کمانش بی‌بعد (σ_{cr}^{*}) برای پوسته با ضخامت ثابت برای نسبت L/R و R/h مختلف تحت بارگذاری مرکب (R=0.254m, E=204GPa)

L/R	R/h	b_1	FSDT	مرجع[۷۰]	مرجع[۶۹]
۰/۴۱۸	۳۰۴	۸	۲/۶۶۷×۱۰$^{-۸}$	۲/۶۳۲×۱۰$^{-۸}$	۲/۸۵۷×۱۰$^{-۸}$
۰/۴۱۵	۳۰۸	۴	۳/۷۳۲×۱۰$^{-۸}$	۳/۴۵۷×۱۰$^{-۸}$	۲/۸۶۲×۱۰$^{-۸}$
۰/۴۱۸	۳۰۴	۱/۰۵	۴/۶۲۳×۱۰$^{-۸}$	۴/۵۲۸×۱۰$^{-۸}$	۴/۷۶۴×۱۰$^{-۸}$

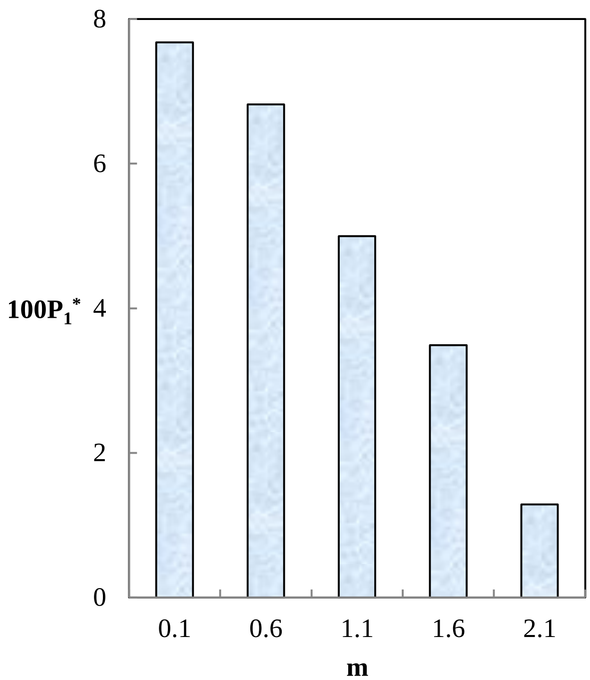


شکل (۴-۱۸) بار کمانش محوری بی‌بعد پوسته ضخامت متغیر بر حسب فشار خارجی برای شعاع‌های خارجی مختلف
(R_{in} (x*=۰)=۰/۱۵۴ m, R_{in} (x*=۱)=۰/۱۵ m, L=۰/۸ m)

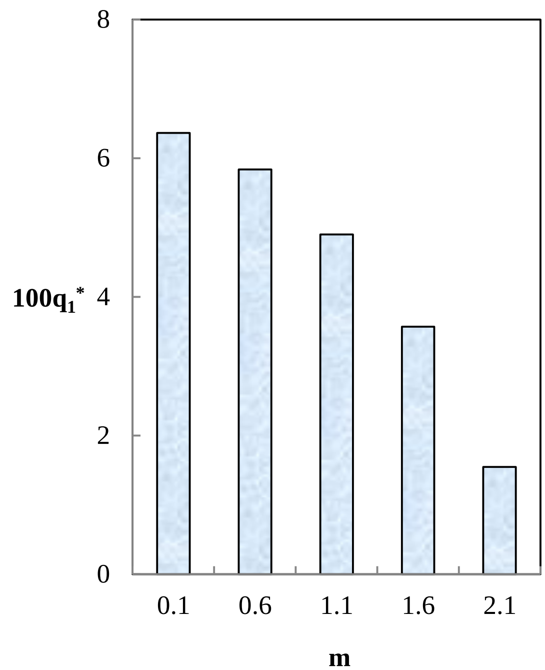
شکل (۴-۱۸)، مقادیر مختلف بار کمانش محوری را برای استوانه ضخامت متغیر با پروفیل ضخامت خطی تحت فشارهای خارجی مختلف و شعاع‌های خارجی متفاوت نشان می‌دهد. با افزایش فشار خارجی و شعاع خارجی، مقدار بار کمانش محوری کاهش می‌یابد. در این شکل، مقادیر بار کمانش با استفاده از روش تحلیلی به دست آمده است. در معادلات پایداری، مقدار فشار خارجی وارد شده و معادلات بر حسب فشار محوری حل می‌شوند.

شکل (۴-۱۹)، تاثیر شیب پروفیل شعاع داخلی پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر و پروفیل خطی را بر بار کمانش محوری و شعاعی نشان می‌دهد. مقدار m در این شکل از رابطه (۴-۱) به دست می‌آید و در شکل (۴-۶) نشان داده شده است. نتایج این شکل با توجه به نتایج جدول (۴-۳) نیز قابل انتظار می‌باشد. با

افزایش شیب پروفیل شعاع داخلی در پوسته‌های استوانه‌ای با پروفیل ضخامت خطی، بار کمانش کاهش می‌یابد.



(ب) بار کمانش محوری



(الف) بار کمانش شعاعی

شکل(۴-۱۹) تاثیر شیب داخلی پروفیل شعاع داخلی بر بار کمانش محوری و شعاعی

(R_{out}=۰/۱۶m, L=۱m)

جدول (۴-۱۰) برای بررسی اثر w_1 در رابطه (۱-۵) و نشان دادن تاثیر این پارامتر بر دقت نتایج، ارائه شده است. در این جدول مقدار بار کمانش محوری بی‌بعد برای پوسته استوانه‌ای با ضخامت ثابت برای نسبت R/h مختلف داده شده است. با توجه به نتایج این جدول مشخص می‌شود که با افزایش ضخامت پوسته، تاثیر این پارامتر تا حدودی پررنگ می‌شود. البته باید توجه داشت که در نظر گرفتن این پارامتر، باعث بالا رفتن حجم محاسبات تا حد بسیار زیادی می‌شود و سرعت اجرای برنامه به شدت کاهش می‌یابد. بنابراین

استفاده از این پارامتر در روابط میدان جابجایی برای پوسته‌های با ضخامت کم (مثلا R/h بیشتر از ۲۵) توصیه نمی‌شود.

جدول (۴-۱۰) بار کمانش محوری بی‌بعد پوسته استوانه‌ای با ضخامت ثابت برای نسبت R/h مختلف (L=1 m, R_{out}=0.155 m)

FEM	**در صد اختلاف نسبت به FEM**	**FSDT(w_1=0)**	**در صد اختلاف نسبت به FEM**	**FSDT(w_1≠0)**	***R/h***	***h*(mm)**
۵/۹×۱۰$^{-۳}$	۱/۶	۶/۰×۱۰$^{-۳}$	۱/۶	۶/۰×۱۰$^{-۳}$	۱۰۲	۱/۵
۷/۹×۱۰$^{-۳}$	۱/۲	۸/۰×۱۰$^{-۳}$	۱/۲	۸/۰×۱۰$^{-۳}$	۷۶/۵	۲
۹/۹×۱۰$^{-۳}$	۲/۰	۱۰/۱×۱۰$^{-۳}$	۱/۰	۱۰/۰×۱۰$^{-۳}$	۶۱	۲/۵
۱۴/۰×۱۰$^{-۳}$	۱/۴	۱۴/۲×۱۰$^{-۳}$	۱/۴	۱۴/۲×۱۰$^{-۳}$	۴۳	۳/۵
۱۸/۰×۱۰$^{-۳}$	۱/۶	۱۸/۳×۱۰$^{-۳}$	۱/۱	۱۸/۲×۱۰$^{-۳}$	۳۳/۵	۴/۵
۲۴/۱×۱۰$^{-۳}$	۲/۹	۲۴/۸×۱۰$^{-۳}$	۱/۲	۲۴/۴×۱۰$^{-۳}$	۲۵	۶
۳۰/۲×۱۰$^{-۳}$	۶/۳	۳۲/۱×۱۰$^{-۳}$	۲/۸	۳۱/۱×۱۰$^{-۳}$	۱۹	۸
۵۱/۲×۱۰$^{-۳}$	۹/۵	۵۶/۱×۱۰$^{-۳}$	۲/۷	۵۲/۶×۱۰$^{-۳}$	۱۰/۵	۱۴
۷۲/۱×۱۰$^{-۳}$	۲۳/۵	۸۹/۱×۱۰$^{-۳}$	۶/۵	۷۶/۸×۱۰$^{-۳}$	۷/۲۵	۲۰

در جدول (۴-۱۱) مقادیر بار کمانش محوری نرمال شده برای یک پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر، با استفاده از نتایج مرجع[۵۸] و روش ارائه شده در این تحقیق گزارش شده است. در این مرجع، نقص اولیه به صورت ضخامت متغیر در نظر گرفته شده است. ضخامت در این مورد با استفاده از رابطه (۴-۷)، به صورت تابعی از متغیر طولی پوسته، تعریف می‌شود. در این رابطه، h_0 مقدار ضخامت در لبه پوسته است. همچنین در این مورد خاص، شعاع داخلی پوسته ثابت و شعاع خارجی متغیر فرض شده است. با مقایسه نتایج جدول (۴-۱۱)، مشخص می‌شود که نتایج این تحقیق با نتایج مرجع[۵۸]، مطابقت خوبی دارد.

$$h = h_0\left(1-\varepsilon cos\left(\pi(x^*-0.5)\right)\right) \tag{۷-۴}$$

مقدار نرمال شده بار کمانش در جدول (۴-۱۱)، از رابطه (۴-۸)، تعیین می‌شود.

$$P_n = P_{cr}R_{out} / \pi Eh\left({R_{out}}^2 - {R_i}^2\right)\left(at\ x^*=1\right) \tag{۸-۴}$$

جدول (۴-۱۱) بار کمانش محوری نرمال شده پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر
(E=14GPa, $R_{out}(x^*=1)$=1m, L=5m, $\hat{w}(x^*)=A sin(\pi x^*)$)

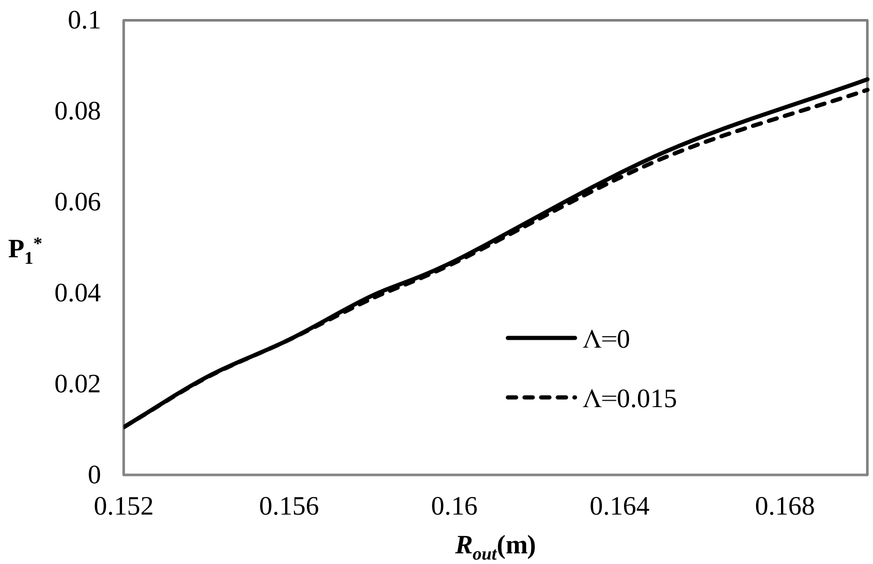
R_{out}/R_{in} (at x^*=1)	روش ارائه شده	مرجع[۵۸]
۱/۱۵	۰/۴۲۸۱	۰/۴۲۷۸
۱/۲	۰/۴۲۰۹	۰/۴۱۷۶
۱/۲۵	۰/۴۲۱۲	۰/۴۱۹۱

۴-۵ تاثیر نقص اولیه بر بار کمانش

نقص اولیه، همانطور که بر حالت تعادل و نتایج معادلات تعادل اثر می‌کند؛ بر معادلات پایداری و مقدار بار کمانش نیز اثر می‌گذارد. با استفاده از رابطه (۳-۲۸) و عناصر ماتریس ضرایب داده شده در رابطه (۳-۳۰) و روش توضیح داده شده در بخش‌های قبل برای محاسبه بار کمانش، مقدار بار کمانش پوسته با در نظر گرفتن نقص اولیه به دست می‌آید. در این تحقیق نقص اولیه به شکل یک جابجایی شعاعی اولیه در میدان جابجایی در نظر گرفته می‌شود. در معادلات، شکل تابع نقص به صورت یک تابع کلی از متغیر طولی پوسته در نظر گرفته شده است. در این تحقیق، مانند بخش ۴-۳، دو نوع تابع سینوسی و نمایی بررسی شده است.

شکل (۴-۲۰)، بار کمانش محوری بی‌بعد را برای پوسته استوانه با ضخامت متغیر نشان می‌دهد. در این شکل از تابع نقص سینوسی استفاده شده است. پروفیل ضخامت به صورت خطی تغییر می‌کند. با توجه به شکل مشخص می‌شود که با افزایش شعاع خارجی (ضخامت پوسته)، نتایج حل تحلیلی با در نظر گرفتن

نقص اولیه دارای اختلاف بیشتری با نتایج حل تحلیلی بدون در نظر گرفتن نقص اولیه است. در پوسته‌های نازک، مقدار این اختلاف بسیار ناچیز است و بر روی این شکل مشخص نمی‌شود.



شکل (۴-۲۰) بار کمانش محوری بی‌بعد پوسته ضخامت متغیر برای شعاع‌های خارجی مختلف

(R_{in} $(x^*=۰)=۰/۱۴$ m, R_{in} $(x^*=۱)=۰/۱۵$ m, $L=۰/۸$ m, $\hat{w}(x^*)=\Lambda sin(\pi x^*)$)

جدول (۴-۱۲) بار کمانش محوری بی‌بعد پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر با در نظر گرفتن نقص اولیه

($R_{in}=0.06x^{*2}-0.06x^*+0.155$, $\hat{w}(x^*)=\Lambda sin(\pi x^*)$)

R_{out}(m)	Λ	**حالت اول با در نظر گرفتن نقص اولیه($\Lambda\neq0$)**	**حالت دوم بدون در نظر گرفتن نقص اولیه($\Lambda=0$)**	**درصد اختلاف نسبت به حالت اول**
۰/۱۶۰	۰/۰۰۵	۱۷/۰۴۰×۱۰$^{-۳}$	۱۷/۲۱۰×۱۰$^{-۳}$	٪۱
۰/۱۶۲	۰/۰۰۷	۲۲/۷۱۱×۱۰$^{-۳}$	۲۴/۲۳۴×۱۰$^{-۳}$	٪۶/۷
۰/۱۶۴	۰/۰۰۹	۳۲/۲۷۲×۱۰$^{-۳}$	۳۵/۱۰۲×۱۰$^{-۳}$	٪۸/۷
۰/۱۶۶	۰/۰۱۱	۳۹/۳۰۲×۱۰$^{-۳}$	۴۳/۲۶۰×۱۰$^{-۳}$	٪۱۰
۰/۱۶۸	۰/۰۱۳	۴۳/۸۴۸×۱۰$^{-۳}$	۴۸/۷۳×۱۰$^{-۳}$	٪۱۱/۲

جدول (۴-۱۲)، بار کمانش محوری بی‌بعد را برای پوسته استوانه‌ای با پروفیل ضخامت غیرخطی گزارش می‌کند. در این جدول، ضریب تابع نقص با افزایش ضخامت پوسته افزایش می‌یابد و نشان می‌دهد در ضخامت‌های بالا اختلاف بین نتایج تحلیلی برای دو حالت (حالت اول با در نظر گرفتن نقص اولیه و حالت دوم بدون در نظر گرفتن نقص اولیه) افزایش می‌یابد.

جدول (۴-۱۳)، بار کمانش محوری برای پوسته استوانه‌ای با پروفیل ضخامت خطی را برای شرایط مرزی گیردار و تکیه گاه ساده (رابطه (۲-۱۱)) نشان می‌دهد. مقدار بار کمانش برای شرایط مرزی گیردار نسبت به شرایط مرزی ساده، بیشتر است.

جدول (۴-۱۳) بار کمانش محوری بی‌بعد پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر بدون در نظر گرفتن نقص اولیه
(R_{in} (x^*=۰) =۰/۱۴۷ m, R_{in} (x^*=۱) =۰/۱۵ m, L=۱ m)

شرایط مرزی گیردار	شرایط مرزی ساده (رابطه (۲-۱۱))	R_{out}(m)
$۱۶/۱۸\times۱۰^{-۳}$	$۱۳/۷۰\times۱۰^{-۳}$	۰/۱۵۲
$۲۲/۵۱\times۱۰^{-۳}$	$۱۹/۲۰\times۱۰^{-۳}$	۰/۱۵۴
$۲۵/۳۳\times۱۰^{-۳}$	$۲۴/۴۴\times۱۰^{-۳}$	۰/۱۵۶
$۳۴/۸۵\times۱۰^{-۳}$	$۳۲/۲۷\times۱۰^{-۳}$	۰/۱۵۸
$۴۰/۹۲\times۱۰^{-۳}$	$۴۰/۱۹\times۱۰^{-۳}$	۰/۱۶۰
$۴۶/۹۹\times۱۰^{-۳}$	$۴۶/۷۸\times۱۰^{-۳}$	۰/۱۶۲

۴-۶ جمع‌بندی

در این فصل به بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل‌های قبل پرداخته شد. تاثیر پروفیل‌های مختلف ضخامت و فشار خارجی بر روی میدان جابجایی و بار کمانش، مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج حل تحلیلی با نتایج حل اجزای محدود و مراجع دیگر مورد مقایسه قرار گرفت و دقت نتایج حل تحلیلی نشان داده شد. با رسم شکل‌ها و ارائه جدول‌های مختلف، تاثیر پارامترهای هندسی مختلف و نقص اولیه بر روی میدان جابجایی و مقدار بار کمانش بررسی شد.

فصل پنجم:

نتیجه گیری و پیشنهادها

۵-۱ مقدمه

در این رساله، مقدار بار کمانش برای پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر با استفاده از روش تحلیلی به دست آمد. میدان جابجایی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تعریف شد و روابط سینماتیک با به کارگیری تئوری غیر خطی فن- کارمن تعیین گردید. معادلات تعادل با استفاده از اصل کار مجازی استخراج و با اعمال روش بسط مجانبی در روش اغتشاشات حل شد. معادلات پایداری به دو روش تعیین شد. در روش اول، معادلات پایداری با فرض ثابت نبودن راستای نیروهای خارجی مستقیما به دست آمد و در روش دوم، ابتدا معادلات تعادل حل و سپس با استفاده از آنها، معادلات پایداری با فرض یک رشد بسیار کوچک در حالت تعادل تعیین گردید. با هر دو روش معادلات پایداری حل و تاثیر پارامترهای گوناگون بر روی مقدار بار کمانش بررسی شد. نقص اولیه نیز به شکل یک جابجایی شعاعی اولیه در معادلات وارد و اثر آن بر روی بار کمانش مورد بررسی قرار گرفت. نتایج با استفاده از روش اجزای محدود و سایر مراجع مقایسه گردید.

در این فصل به صورت خلاصه، یک نتیجه‌گیری کلی از نتایج فصل‌های قبل، گزارش می‌شود. همچنین برای ادامه کار در آینده، پیشنهادهایی ارائه می‌شود.

۵-۲ نتایج

- نتایج حاصل از روش بسط مجانبی دارای دقت بسیار خوبی در مقایسه با نتایج حل اجزای محدود است و مقادیر جابجایی را حتی در نزدیکی مرزها به خوبی پیش‌بینی می‌نماید.
- با استفاده از روش بسط مجانبی، هر نوع پروفیل ضخامت (خطی و غیر خطی) و همچنین هر نوع بارگذاری خارجی (فشار خارجی ثابت، خطی و غیر خطی)، قابل بررسی و حل می‌باشد.

- در بین پروفیل‌های گوناگون بارگذاری فشار خارجی، فشار خارجی سینوسی بیشترین تاثیر را بر روی مقادیر جابجایی دارد.
- در پوسته‌های استوانه‌ای با پروفیل ضخامت خطی، با تعریف پارامتر شیب پروفیل شعاع داخلی، مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار این پارامتر، مقادیر جابجایی‌ها افزایش می‌یابند.
- فرض تغییرات خطی جابجایی‌ها در راستای ضخامت (استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول)، برای نواحی دور از مرزها، فرض مناسب و قابل قبولی است. اما برای نواحی نزدیک به مرزها، اختلاف نتایج به خصوص برای جابجایی شعاعی افزایش می‌یابد.
- تئوری تغییر شکل برشی دارای دقت بیشتری نسبت به تئوری الاستیسیته مستوی است و نتایج دقیق‌تری نسبت به این تئوری به خصوص برای پوسته‌های ضخیم دارد.
- در نظر گرفتن نقص اولیه در معادلات تعادل، باعث افزایش مقادیر جابجایی‌ها می‌شود.
- بر اساس تئوری کلاسیک، بار کمانش با h/R متناسب است اما بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، مشخص می‌شود که با $(h/R)^{۱/۱۳}$ رابطه دارد.
- پوسته‌های استوانه‌ای با پروفیل ضخامت غیر خطی دارای بار کمانش بیشتری نسبت به پوسته با همان حجم و پروفیل ضخامت خطی می‌باشند. به عبارت دیگر، پروفیل‌های ضخامت غیر خطی، بار کمانش بیشتری را تحمل می‌کنند.
- در پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متغیر(پروفیل ضخامت خطی و غیر خطی)، افزایش ضخامت لبه پایین (لبه بالایی پوسته تحت فشار محوری قرار دارد)، باعث افزایش بار کمانش می‌شود.
- در حضور فشار خارجی، مقدار بار کمانش محوری به شدت کاهش می‌یابد.
- با افزایش شیب پروفیل شعاع داخلی برای پوسته با ضخامت خطی، بار کمانش کم می‌شود.

- در نظر گرفتن تغییرات جابجایی شعاعی به صورت خطی در راستای ضخامت (در نظر گرفتن پارامتر w_1 در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول)، برای پوسته‌های ضخیم مناسب است.
- اعمال نقص اولیه در معادلات پایداری، برای هر نوع پروفیل ضخامت با هر نوع شرایط مرزی باعث کاهش مقدار بار کمانش در پوسته‌ها می‌شود.
- پوسته با تکیه‌گاه گیردار دارای بار کمانش بیشتری نسبت به پوسته با تکیه‌گاه ساده است.

۵-۳ پیشنهادها

جهت انجام مطالعه‌ای جامع‌تر در ادامه این رساله، می‌توان پیشنهادهای زیر را ارئه نمود:

- استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه بالاتر؛
- در نظر گرفتن شرایط غیر متقارن مانند بارگذاری محوری غیر متقارن، نقص هندسی غیر متقارن، هندسه غیر متقارن و ....؛
- در نظر گرفتن جنس سازه به شکل مواد FG ؛
- بررسی رفتار پس کمانش سازه و به دست آوردن نمودارهای جابجایی سازه پس از کمانش ؛
- بررسی کمانش تحت بارگذاری دینامیکی محوری و یا فشار خارجی متغیر با زمان؛
- در نظر گرفتن جنس پوسته از مواد ویسکوالاستیک؛

پیوست‌ها

پیوست(الف)- معادلات تعادل بر حسب جابجایی‌ها

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2 h^3+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)\right)h\right)R+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)\right)h^3\right.\\
&\quad\left.\vphantom{\frac{1}{2}}\right)A-P1\,\varepsilon\,h_0\,R_0+\left(\frac{1}{2}w_1{}^2+w_1\right)\lambda\,h\,R+w_0\,\lambda\,h=0
\end{aligned}
$$
(الف-۱)

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)w_1-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)-u_1\right)k\,h\,R+\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)w_1-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\right)k\,h^3\right)G+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\right.\right.\\
&\quad\frac{1}{480}h^3\left(3\,A\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2h^2+40\,A\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)R+40\,A\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)R+20\,A\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2\right.\\
&\quad\left.\left.\left.+20\,w_1{}^2\,\lambda+40\,A\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)+80\,w_1\,\lambda\right)\right)\right)=0
\end{aligned}
$$
(الف-۲)

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\right)h^3\right.\right.\\
&\quad\left.+(\ln(2\,R+h)-\ln(2\,R-h))\,w_1\right)R+\frac{1}{160}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)h^5\\
&\quad+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)+\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\right)h^3-w_1\,h\\
&\quad\left.+(-\ln(2\,R+h)+\ln(2\,R-h))\,w_0\right)A+\left(\right.\\
&\quad\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)u_1+\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)w_1+\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\right)k\,h\,R\\
&\quad\left.+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2w_1+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2\right)k\,h^3\right)G+P1\,\varepsilon\,R0\,h0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)-\mathrm{q1}(x)\,\varepsilon\,R\\
&\quad-\frac{1}{2}\mathrm{q1}(x)\,h\,\varepsilon+\left(\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)w_1{}^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)w_1-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2\right)\lambda\,h^3\\
&\quad+\left(-\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2-w_1-\frac{1}{2}w_1{}^2\right)\lambda\,h+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\right.\right.\\
&\quad\frac{1}{12}k\,G\,h\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)h^2w_1+12\,w_1\,R\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)h^2+12\,R\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)+12\,R\,u_1\right)\\
&\quad\left.\left.\right)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{12}\right.\right.\\
&\quad k\,G\,h\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)h^2w_1+12\,w_1\,R\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)h^2+12\,R\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)+12\,R\,u_1\right)w_1\\
&\quad\left.\left.\right)\right)=0
\end{aligned}
$$
(الف-۳)

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\left(-\ln(2\,R+h)+\ln(2\,R-h)\right) w_1\, R^2+\Bigg(\\
&\quad\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_1\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)\right) h^3+\left(-\frac{1}{2}\, w_1{}^3-\frac{3}{2}\, w_1{}^2\right) h\\
&\quad+\left(\ln(2\,R+h)-\ln(2\,R-h)\right) w_0\Bigg) R+\frac{1}{160}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right) h^5\\
&\quad+\left(\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right)+\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)\right) h^3-w_0\, h\right) A+\Bigg(-\frac{1}{2}\,\mathrm{q1}(x)\, h\, \varepsilon\\
&\quad+\left(-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^2-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^2 w_1\right)\lambda\, h^3\\
&\quad+\left(\left(\left(-\left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)^2\right) w_1-\left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)^2\right)\lambda\, h\right) R-\frac{1}{4}\,\mathrm{q1}(x)\, h^2\, \varepsilon+\Bigg(\\
&\quad\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right) w_1{}^2+\left(\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} u_1\right)\right) w_1\\
&\quad-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x} u_1\right)\Bigg)\lambda\, h^3+\left(-w_1-1\right) w_0\, \lambda\, h\\
&\quad+w_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{12}\, k\, G\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right) R\, w_1+\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right) w_1+\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right) R+\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)+u_1\right) h^3\right)\right)\right)+\Bigg(\\
&\quad\frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\frac{1}{480}\, h^3\Bigg(3\, A\, R\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^3 h^2+6\, A\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right) h^2+20\, A\, R\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)^2\\
&\quad+6\, A\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_1\right) h^2+40\, G\, w_1\, R\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right) k+20\, w_1{}^2\, R\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\lambda\\
&\quad+40\, A\, R\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right)+40\, G\, w_1\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right) k+40\, G\, R\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right) k\\
&\quad+40\, w_1\, R\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\lambda+40\, G\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right) k+40\, G\, u_1\, k+40\, w_0\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\lambda\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)=0
\end{aligned}
$$

(الف-۴)

پیوست(ب)- معادلات پایداری بر حسب جابجایی‌ها با روش اول (معادلات تعادل کمانشی)

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\bigg(\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)h^3\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)+\frac{1}{8}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)^2h^2\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)+\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)+\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\Big)\Big)h\\
&\quad+\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_0\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)^2\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)\bigg)R+\\
&\quad\bigg(\frac{1}{24}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)^2\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\Big)\bigg)h^3\\
&\quad+\bigg(\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_1\Big)+\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\bigg)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)h^2+\bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_0\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)^2\bigg)\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)h\Bigg)A\\
&\quad+\bigg(\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)w_1+\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big)\lambda\,h+\Big(w_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)+\frac{1}{2}w_1^{\,2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)\Big)\lambda\bigg)R\\
&\quad+\bigg(\frac{1}{2}w_1^{\,2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)+w_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)+\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\bigg)\lambda\,h+w_0\,\lambda\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)=0
\end{aligned}
\tag{ب-۱}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\bigg(\Big(\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\Big)\Big)h^3\\
&\quad+\Big(\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_1\Big)+\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)h^2\bigg)R+\frac{1}{80}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)h^5\\
&\quad+\frac{1}{32}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)^2\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)h^4+\\
&\quad\bigg(\Big(\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_1\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\Big)\bigg)h^3\\
&\quad+\bigg(\frac{1}{8}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)^2+\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_0\Big)\bigg)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)h^2\Bigg)A\\
&\quad+\bigg(\Big(-\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)w_1-\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)-u_1\Big)k\,h\,R+\Big(-\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)w_1-\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big)k\,h^3\bigg)G\\
&\quad+\bigg(\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)w_1+\frac{1}{6}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\bigg)\lambda\,h^3+\bigg(\frac{1}{8}w_1^{\,2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)+\frac{1}{2}w_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)\bigg)\lambda\,h^2=0
\end{aligned}
\tag{ب-۲}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\Bigg(\Bigg(\Bigg(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_1\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)\\
&\quad+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1\right)\Bigg)\Bigg) h^3\\
&\quad+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_1\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right) h^2\\
&\quad+\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)\right) h\\
&\quad+(\ln(2\,R+h)-\ln(2\,R-h))\, w_1+\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)^3\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)\right) R\\
&\quad+\frac{3}{160} h^5\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^2+\frac{1}{32} h^4\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)+\Bigg(\\
&\left(\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_1\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} R\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right)\\
&\quad+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} u_1\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0\right)\Bigg) h^3\\
&\quad+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_1\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right) h^2\\
&\quad+\left(-w_1+\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)^3\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} R\right)\right)\right) h\\
&\quad+(-\ln(2\,R+h)+\ln(2\,R-h))\, w_0\Bigg) A+\Bigg(\Bigg(\Bigg(\Bigg(\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right) u_1+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right) w_1^{\,2}\\
&\quad+\left(2\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)+2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x} u_1\right)\right) w_1+2\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_0\right)\\
&\quad+\left(\frac{\partial}{\partial x} u_1\right)\Bigg)\, k\, h+\Bigg(\left(w_1\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)\right) u_1+\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right) w_1^{\,2}\\
&\quad+2\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right) w_1+\left(\frac{\partial}{\partial x} w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)\Bigg)\, k\Bigg) R+\\
&\left(\frac{1}{12} w_1^{\,2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1\right)+\left(\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1\right)\right) w_1+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_1\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_1\right)\right) k\, h^3
\end{aligned}
\qquad \text{(ب-۳)}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)w_1^{\,2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)w_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)+\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)\Big)k\,h^2+\Big(\\
&\Big(w_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)+\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)\Big)u_1+\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)w_1^{\,2}+2\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)w_1\\
&+\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big)k\,h\Big)G+\Big(\Big(\Big(-\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)-\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)h\Big)R-\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)h\\
&-\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)h^2-\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)h^3\Big)PP1+\Big(\\
&\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)w_1^{\,2}+\Big(\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)+\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)\Big)w_1+\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big)\lambda\,h\\
&+\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)w_1^{\,2}+\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)w_1\Big)\lambda\Big)R\\
&+\Big(\frac{1}{24}w_1^{\,2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)+\Big(\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)^2+\frac{1}{6}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big)w_1+\frac{1}{8}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)^2\Big)\lambda\,h^3\\
&+\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)w_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)+\frac{1}{8}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)w_1^{\,2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)\Big)\lambda\,h^2+\Big(w_0\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)\\
&+\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big)w_1^{\,2}+\Big(\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)-1\Big)w_1+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)^2-\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_0\Big)\Big)\\
&\lambda\,h+\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)w_0\,\lambda\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big((-\ln(2\,R+h)+\ln(2\,R-h))\,w_1\,R^2+\Big(\frac{3}{160}h^5\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)^2\\
&\quad+\frac{1}{32}h^4\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)^3\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)+\Big(\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_0\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_1\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)\\
&\quad+\frac{1}{8}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)+\Big(\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\\
&\quad+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\Big)\Big)h^3\\
&\quad+\Big(\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_0\Big)+\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_1\Big)+\frac{3}{8}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)^2\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)h^2\\
&\quad+\Big(-\frac{1}{2}w_1^{\,3}-\frac{3}{2}w_1^{\,2}\Big)h+(\ln(2\,R+h)-\ln(2\,R-h))\,w_0\Big)R+\Big(\frac{3}{160}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)\\
&\quad+\frac{1}{160}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)^3\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)+\frac{1}{80}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_1\Big)+\frac{1}{80}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\Big)\\
&\quad+\frac{3}{80}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big)h^5
\end{aligned}
$$

(ب-۴)

$$+\left(\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)+\frac{3}{32}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)h^4+\Bigg($$

$$\left(\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\Bigg)h^3$$

$$+\left(\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)h^2-w_0\,h\Bigg)A+\Bigg(\Bigg($$

$$\left(\frac{1}{12}w_1{}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\right)w_1+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\right)k$$

$$h^3+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)w_1{}^2\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)w_1\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\right)k\,h^2$$

$$+\left(-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2w_1-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)u_1\right)k\,h\Bigg)R+\Bigg($$

$$\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\right)w_1{}^2$$

$$+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\right)w_1+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)$$

$$+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\Bigg)k\,h^3+\left(\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)+\frac{1}{4}w_1\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\right)u_1+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_1+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_1{}^2\right)k\,h^2\Bigg)G+\Bigg($$

$$\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)h^2-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)h^3\right)R$$

$$+\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\right)h^3-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)h^2\Bigg)PP1+\Bigg($$

$$\left(\frac{1}{24}w_1{}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)+\left(\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\right)w_1+\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2\right)\lambda\,h^3$$

$$+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)w_1\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)w_1{}^2\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\right)\lambda\,h^2$$

$$+\left(\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)\right)w_1-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)\right)\lambda\,h\Bigg)R+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)w_0\right.$$

$$+\left(\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)+\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\right)w_1{}^2$$

$$+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\right)w_1-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)$$

$$+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\Bigg)\lambda h^3$$

$$+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)w_0\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_1+\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right){w_1}^2\right)\lambda h^2$$

$$+(-w_1-1)\,w_0\,\lambda\,h=0$$

در روابط فوق PP1=P1 است. که P1 فشار محوری است.

پیوست(ج)- معادلات پایداری بر حسب جابجایی‌ها با روش دوم

$$\Bigg(\bigg(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)h^3+\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)\right)h\bigg)R$$
$$+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{11}\right)\right)h^3\Bigg)A+(w_{10}\,w_{11}+w_{11})\,\lambda\,h\,R \qquad \text{(ج-۱)}$$
$$+w_{10}\,h\,\lambda=0$$

$$\Bigg(\bigg(\bigg(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{11}\right)\bigg)$$
$$h^3+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{11}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)h^2\bigg)R$$
$$+\left(\frac{1}{80}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)+\frac{1}{80}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\right)h^5$$
$$+\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)h^4+\bigg($$
$$\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{11}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)$$
$$+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{10}\right)\bigg)h^3 \qquad \text{(ج-۲)}$$
$$+\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)h^2\Bigg)A+\bigg($$
$$\left(-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)w_{11}-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)w_{10}-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)-u_{11}\right)k\,h\,R$$
$$+\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)w_{10}-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)w_{11}-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\right)k\,h^3\bigg)G$$
$$+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)w_{10}+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)w_{11}+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\right)\lambda\,h^3$$
$$+\left(\frac{1}{4}w_{11}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{10}+\frac{1}{2}w_{11}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\right)\lambda\,h^2=0$$

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\Bigg(\Bigg(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{11}\right)\\
&\quad+\Bigg(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\Bigg)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\\
&\quad-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\Bigg)h^3+(-\ln(2R+h)+\ln(2R-h))\,w_{11}\Bigg)R\\
&\quad+\Bigg(-\frac{1}{160}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)-\frac{1}{80}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\Bigg)h^5+\Bigg(\\
&\quad-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{0}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)\\
&\quad-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\Bigg)\Bigg)h^3+w_{11}\,h+(\ln(2R+h)-\ln(2R-h))\,w_{10}\Bigg)A+\\
&\quad\Bigg(\Bigg(\Bigg(\Bigg(-2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)u_{10}-2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)u_{11}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\Bigg)w_{10}^{\ 2}+\\
&\quad\Bigg(-2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{0}\right)w_{11}-3\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)-3\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2-2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{11}\right)\Bigg)w_{10}\\
&\quad+\Bigg(-3\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)-2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{0}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)\Bigg)w_{11}-3\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\\
&\quad-3\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{11}\right)\Bigg)k\,h+\Bigg(-\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{11}\,u_{10}\\
&\quad+\Bigg(-\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{10}-\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\Bigg)u_{11}-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{10}^{\ 2}\\
&\quad+\Bigg(-2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{11}-2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\Bigg)w_{10}-2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{11}\\
&\quad+\Bigg(-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\Bigg)w_{11}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)\Bigg)k\,h^3+\Bigg(\\
&\quad-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{10}^{\ 2}+\Bigg(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{11}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\Bigg)w_{10}\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{11}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\Bigg)k\,h^2+\Bigg(-w_{11}\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)u_{10}\\
&\quad+\Bigg(-w_{10}\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\Bigg)u_{11}-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)w_{10}^{\ 2}
\end{aligned}
\tag{ج-۳}
$$

$$+\left(-2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)w_{11}\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)-2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\right)w_{10}-2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)w_{11}\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\Bigg)k\,h\Bigg)G+P1\,\varepsilon\,h0\,R0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)+\left(-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)w_{10}^{\;2}\right.$$

$$+\left(-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)w_{11}\right)w_{10}-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)w_{11}+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\Bigg)$$

$$\lambda\,h^3+\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)+w_{10}\,w_{11}+\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)+w_{11}\right)\lambda\,h=0$$

$$\Bigg((\ln(2\,R+h)-\ln(2\,R-h))\,w_{11}\,R^2+\Bigg($$

$$\left(-\frac{3}{160}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)-\frac{3}{80}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\right)h^5$$

$$-\frac{3}{32}h^4\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)+\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{11}\right)-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2$$

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\Bigg)h^3+\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)\right.$$

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\Bigg)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)h^2 \qquad \text{(ج-۴)}$$

$$+\left(\frac{3}{2}w_{10}^{\;2}\,w_{11}+3\,w_{10}\,w_{11}\right)h+(-\ln(2\,R+h)+\ln(2\,R-h))\,w_{10}\Bigg)R+\Bigg($$

$$-\frac{3}{160}\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)-\frac{1}{80}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)-\frac{1}{80}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{11}\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{40}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)-\frac{1}{40}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)$$

$$-\frac{7}{160}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)+\left(-\frac{3}{80}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)-\frac{1}{80}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{11}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)$$

$$-\frac{1}{80}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\Bigg)h^5+\left(-\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{11}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{0}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)^{3}\Bigg)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)h^{4}+\Bigg(\Bigg(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_{10}\right)$$

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)^{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{0}\right)-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{0}\right)^{2}-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_{0}\right)\Bigg)\left(\frac{\partial}{\partial x} R\right)$$

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{0}\right)-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{0}\right)^{2}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{10}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} u_{0}\right)\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{10}\right)$$

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} u_{10}\right)\Bigg)h^{3}+w_{10}\,h\Bigg)A+\Bigg(\Bigg(\Bigg(\Bigg(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{11}\right)w_{10}^{\;2}$$

$$+\Bigg(-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{11}\right)\Bigg)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{10}\right)w_{11}-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)\Bigg)w_{10}$$

$$+\Bigg(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)^{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{10}\right)\Bigg)w_{11}-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{11}\right)\Bigg)\Bigg)k\,h^{3}+\Bigg($$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)w_{10}^{\;2}+\Bigg(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)w_{11}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)\Bigg)w_{10}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)w_{11}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)\Bigg)k\,h^{2}\Bigg)R+\Bigg($$

$$\Bigg(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} R\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{10}\right)\Bigg)w_{10}^{\;2}+\Bigg($$

$$\Bigg(-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{0}\right)\Bigg)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} R\right)\Bigg)w_{11}-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} R\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)$$

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} u_{11}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{10}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)^{2}\Bigg)w_{10}$$

$$+\Bigg(-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} R\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} u_{10}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{0}\right)\Bigg)w_{11}$$

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} R\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{11}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} u_{11}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)^{2}$$

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{10}\right)\Bigg)\Bigg)k\,h^{3}+\Bigg(-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)w_{11}\,u_{10}+\Bigg(-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)w_{10}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)\Bigg)u_{11}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)w_{10}^{\;2}+\Bigg(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)w_{11}\Bigg)w_{10}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)w_{11}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)\Bigg)k\,h^{2}\Bigg)G+\Bigg(\Bigg(-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} w_{11}\right)w_{10}^{\;2}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)w_{11}-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)\right)w_{10}\\
&+\left(-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)\right)w_{11}-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\Bigg)\lambda\,h^3+\Bigg(\\
&-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{10}{}^2+\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{11}\right)w_{10}\\
&-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{11}\Bigg)\lambda\,h^2+\left(\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)\right)w_{10}\right.\right.\\
&+\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2\right)w_{11}+\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)\right)\lambda\,h\Bigg)R+\Bigg(\\
&-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{11}\right)w_0+\left(-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\right)w_{10}{}^2+\Bigg(\\
&\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\right)w_{11}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_{10}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2\\
&+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{11}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)\Bigg)w_{10}\\
&+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{10}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)\right)w_{11}\\
&+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{11}\right)\Bigg)\lambda\,h^3\\
&+\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{10}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{10}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{11}\right)w_0\right)\lambda\,h^2+(w_0\,w_{11}+w_{10}{}^2+w_{10})\,\lambda\,h\\
&=0
\end{aligned}
$$

پیوست(د)- معادلات تعادل با در نظر گرفتن نقص اولیه بر حسب جابجایی‌ها

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\left(\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2h^3+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{w}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)\right)h\right)R\right.\\
&+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{w}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)\right)h^3\Bigg)A+P1\,\varepsilon\,h0\,R0 \qquad (۱-د)\\
&+\left(\frac{1}{2}w_1{}^2+w_1\right)\lambda\,h\,R+w_0\,\lambda\,h=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\bigg(\Big(\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)+\Big(\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sim_w\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\Big)\\
&\quad+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\Big)\Big)h^3+\Big(\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)+\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\Big)+\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_1\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)h^2\\
&\quad\bigg)R+\frac{1}{80}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)h^5+\frac{1}{32}\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)^2h^4+\bigg(\\
&\quad\Big(\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_1\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}R\Big)\\
&\quad+\Big(\Big(\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sim_w\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\Big)+\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\Big)\Big)h^3\\
&\quad+\Big(\frac{1}{8}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)^2+\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\Big)+\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_0\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)h^2\bigg)A+\bigg(\\
&\quad\Big(-u_1+\Big(-\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)-\Big(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\Big)\Big)w_1-\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big)k\,h\,R\\
&\quad+\Big(-\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)w_1-\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big)k\,h^3\bigg)G+\Big(\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)w_1+\frac{1}{6}\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big)\lambda\,h^3\\
&\quad+\Big(\frac{1}{8}\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)w_1^{\,2}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}h\Big)w_1\Big)\lambda\,h^2=0
\end{aligned}
\tag{د-۲}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\bigg(\Big(-\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_1\Big)-\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\Big)-\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\\
&\quad\Big)h^3+(-\ln(2R+h)+\ln(2R-h))\,w_1\bigg)R-\frac{1}{160}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)^2h^5\\
&\quad+\Big(-\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\Big)-\frac{1}{12}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_0\Big)-\frac{1}{24}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)^2\Big)h^3\\
&\quad+w_1\,h+(\ln(2R+h)-\ln(2R-h))\,w_0\Bigg)A+\Bigg(\bigg(\Big(\Big(-2\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)u_1\\
&\quad+\Big(-\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)-\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sim_w\Big)\Big)w_1^{\,2}\\
&\quad+\Big(-3\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_0\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)-3\Big(\frac{\partial}{\partial x}w_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\Big)-2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\Big)-\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sim_w\Big)-\Big(\frac{\partial}{\partial x}u_1\Big)\Big)w_1
\end{aligned}
\tag{د-۳}
$$

$$-3\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_{w}\right)-\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{0}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{1}\right)\Bigg)k\,h+\Bigg($$

$$\left(-\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{1}-\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\right)u_{1}+\left(-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_{w}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{1}^{\;2}$$

$$+\left(-2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_{w}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_{1}-\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\Bigg)k\Bigg)R+$$

$$\Bigg(-\frac{1}{12}w_{1}^{\;2}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{1}\right)+\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)^{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{1}\right)\right)w_{1}-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{1}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)^{2}\Bigg)k$$

$$h^{3}+\left(-\frac{1}{4}w_{1}^{\;2}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)-\frac{1}{2}w_{1}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)\right)k\,h^{2}+\Bigg($$

$$\left(-\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)w_{1}-\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\right)u_{1}+\left(-\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_{w}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)w_{1}^{\;2}$$

$$+\left(-2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_{w}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)w_{1}-\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\Bigg)k\,h\Bigg)G$$

$$+\left(\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{0}\right)+\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\sim_{w}\right)\right)h0\;\varepsilon\;R0\;P1$$

$$+\left(\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)^{2}-\frac{1}{24}w_{1}^{\;2}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{1}\right)-\frac{1}{6}w_{1}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{1}\right)\right)\lambda\,h^{3}$$

$$+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)^{2}+\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{0}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_{w}\right)+\frac{1}{2}w_{1}^{\;2}+w_{1}\right)\lambda\,h=0$$

$$\Bigg((\ln(2\,R+h)-\ln(2\,R-h))\,w_{1}\,R^{2}+\Bigg(-\frac{3}{160}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)^{2}h^{5}$$

$$-\frac{1}{32}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)^{3}h^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)+\Bigg(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{0}\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{0}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\sim_{w}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{1}\right)-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)^{2}$$

$$+\left(\left(-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{0}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\sim_{w}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_{w}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right) \quad (۴-د)$$

$$+\left(\left(-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}w_{0}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\sim_{w}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_{w}\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}u_{0}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)\Bigg)h^{3}+$$

$$\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_{w}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{0}\right)^{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_{1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_{0}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)h^{2}$$

$$
+\left(\frac{1}{2}w_1{}^3+\frac{3}{2}w_1{}^2\right)h+(-\ln(2\,R+h)+\ln(2\,R-h))\,w_0\Bigg)R+\left(-\frac{1}{160}\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^3\right.
$$

$$
-\frac{1}{80}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)-\frac{1}{40}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)
$$

$$
+\left(-\frac{3}{160}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)-\frac{3}{160}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sim_w\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2
$$

$$
\left.+\left(-\frac{1}{80}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\right)-\frac{1}{40}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\right)h^5
$$

$$
+\left(-\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)h^4+
$$

$$
\Bigg(
$$

$$
\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)
$$

$$
+\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sim_w\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)+\left(-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sim_w\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2
$$

$$
+\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sim_w\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\Bigg)h^3+w_0\,h\Bigg)A+\Bigg(\Bigg(
$$

$$
\left(-\frac{1}{12}w_1{}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)+\left(-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2\right)w_1-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\right)
$$

$$
k\,h^3+\left(-\frac{1}{4}w_1{}^2\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)-\frac{1}{2}w_1\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\right)k\,h^2\Bigg)R+
$$

$$
\Bigg(\Bigg(\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sim_w\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\right)w_1{}^2+\Bigg(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)
$$

$$
-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sim_w\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)
$$

$$
-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\right)\Bigg)w_1-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)
$$

$$
-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\Bigg)k\,h^3+\Bigg(
$$

$$
\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_1\right)u_1+\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sim_w\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_1{}^2
$$

$$+\left(\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{}_{w}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_1-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\right)k\,h^2\Bigg)G+\Bigg($$

$$\left(-\frac{1}{24}w_1{}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)+\left(-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)\right)w_1-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)^2\right)\lambda\,h^3$$

$$+\left(-\frac{1}{8}w_1{}^2\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)-\frac{1}{4}w_1\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\right)\lambda\,h^2+\Bigg($$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{}_{w}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)\right)w_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{}_{w}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}u_0\right)\Bigg)\lambda\,h\Bigg)R+\left(-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_1\right)w_0\right.$$

$$+\left(-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{}_{w}\right)-\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\right)w_1{}^2+\left(\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{}_{w}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)-\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{}_{w}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w_0\right)\right)$$

$$\left.w_1+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_1\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tilde{}_{w}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)\right)\lambda\,h^3$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}w_1\right)h^2\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)w_0\,\lambda+(w_1+1)\,w_0\,\lambda\,h=0$$

مراجع

1. Jones R. M. (**2006**) ‘‘*Buckling of bars, plates and shells*’’, Bull Ridge Publishing, Blacksburg, Virginia, USA.
2. Brush D. O., Almroth B. O. (**1975**) ‘‘*Buckling of bars, plates and shells*’’, McGraw-Hill, New York, USA.
3. Calladine C. R. (**1983**) ‘‘*Theory of shell structure*’’, Cambridge University Press, New York, USA.
4. Amabili M. (**2008**) ‘‘*Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*’’, Cambridge University Press, New York, USA.
5. Timoshenko S. P., Gere J. M. (**1963**) ‘‘*Theory of elastic stability*’’, 2nd Edition, McGraw-Hill, New York, USA.
6. Samuelson L. A., Eggwertz S. (**2005**) ‘‘*Shell stability handbook*’’, Taylor & Francis e-library.
7. Donnell L. H. (**1933**) ‘‘Stability of thin-walled tubes under torsion’’, *NACA Rep*.479.
8. Mirsky I., Hermann G. **(1958**) ‘‘Axially motions of thick cylindrical shells”, *Journal of Applied Mechanics*, 25, pp. 97-102.
9. Suzuki K., Konno M., Kosawada T., Takahashi S. (**1982**) “Axisymmetric vibrations of a vessel with variable thickness”, *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 25, pp. 1591-1600.
10. Ye Z., Han R. P. S. (**1995**) “On the nonlinear analysis of orthotropic shallow shells of revolution”, *Computers and Structures*, 55(2), pp. 325-331.
11. Ye Z. (**1997**) “Nonlinear analysis and optimization of shallow shells of variable thickness”, *Journal of Shanghai University*, 1(2), pp. 105-111.
12. Eipakchi H. R., Rahimi G. H., Khadem S. E. (**2003**) “Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to non-uniform internal pressure”, *Structural Engineering and Mechanics*, 16(6), pp. 731-748.
13. Eipakchi H. R., Khadem S. E., Rahimi G. H. (**2008**) “Axisymmetric stress analysis of a thick conical shell with varying thickness under non-uniform internal pressure”, *Journal of Engineering Mechanics*, 134(8), pp. 601-610.

14. Eipakchi H. R. (**2010**) “Third-order shear deformation theory for stress analysis of a thick conical shell under pressure”, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 5(1), pp. 1-17.
15. Ghannad M., Nejad M.Z. (**2010**) “Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clamped ends”, *Mechanika*, 5(85), pp. 11-18.
16. Jiammeepreecha W., Chucheepsakul S., Huang T. (**2014**) “Nonlinear static analysis of an axisymmetric shell storage container in spherical polar coordinates with constraint volume”, *Engineering Structures*, 68, pp. 111-120.
17. Civalek Ö. (**2014**) “Geometrically nonlinear dynamic and static analysis of shallow spherical shell resting on two- parameters elastic foundations”, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 113, pp. 1-9.
18. Ng T. Y., Lam K. Y. (**1999**) ‘‘Dynamic stability analysis of cross-ply laminated cylindrical shells using different thin shell theories’’, *Acta Mechanica*, 134, pp. 147-167.
19. Cai M., Mark J., Holst F. G., Rotter J. M. (**2002**) ‘‘Buckling strength of thin cylindrical shells under localized axial compression’’, 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, Columbia University, New York, USA.
20. Zhu E., Mandal P., Calladine C. R. (**2002**) ‘‘Buckling of thin cylindrical shells: An attempt to resolve a paradox’’, *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, pp. 1583-1601.
21. Hunt G. W., Lord G. J., Peletier M. A. (**2003**) ‘‘Cylindrical shell buckling: A characterization of localization and periodicity’’, *Discrete and Continuous Dynamical Systems–Series B*, 3(4), pp. 505-518.
22. Khamlichi A., Bezzazi M., Limam A. (**2004**) ‘‘Buckling of elastic cylindrical shells considering the effect of localized axisymmetric imperfections’’, *Thin Walled Structures*, 42, pp. 1035-1047.
23. Kardomateas G. A., Simitses G. J. (**2005**) ‘‘Buckling of long sandwich cylindrical shells under external pressure’’, *Journal of Applied Mechanics*, 72, pp. 493-499.
24. Li S., Batra R. C. (**2006**) ‘‘Buckling of axially compressed thin cylindrical shells with functionally graded middle layer’’, *Thin Walled Structures*, 44, pp. 1039-1047.

25. Krasovsky V. L., Kostyrko V. V. (**2007**) ‘‘Experimental study of buckling of stringer cylindrical shells under axial compression’’, *Thin Walled Structures*, 45, pp. 877-882.
26. Ghorbanpour Arani A., Golabi S., Loghman A., Daneshi H. (**2007**) ‘‘Investigation elastic stability of cylindrical shell with an elastic core under axial compression by energy method ’’, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 21, pp. 983-996.
27. Papadakis G. (**2008**) ‘‘Buckling of thick cylindrical shells under external pressure: A new analytical expression for the critical load and comparison with elasticity solutions’’, *International Journal of Solids and Structures*, 45, pp. 5308-5321.
28. Abdelmoula R., Leger A. (**2008**) ‘‘Singular perturbation analysis of the buckling of circular cylindrical shells’’, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27, pp. 706-729.
29. Shen H., Xiang Y. (**2008**) ‘‘Buckling and post-buckling of anisotropic laminated cylindrical shells under combined axial compression and torsion’’, *Composite Structures*, 84, pp. 375-386.
30. Huang H., Han Q. (**2009**) ‘‘Nonlinear elastic buckling and post-buckling of axially compressed functionally graded cylindrical shell’’, *International Journal of Mechanical Sciences*, 51, pp. 500-507.
31. Shen H. (**2009**) ‘‘Torsional buckling and post-buckling of FGM cylindrical shells in thermal environments’’, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44, pp. 644-657.
32. Li Z. M., Lin Z. Q. (**2010**) ‘‘Non-linear buckling and post-buckling of shear deformable anisotropic laminated cylindrical shell subjected to varying external pressure loads’’, *Composite Structures*, 92, pp. 553-567.
33. Wang J. H., Koizumi A. (**2010**) ‘‘Buckling of cylindrical shells with longitudinal joints under external pressure’’, *Thin Walled Structures*, 48, pp. 897-904.
34. Eipakchi H. R., Shariati M. (**2010**) ‘‘Buckling analysis of cylindrical panel under axial stress using perturbation technique’’, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM)*, 91(2), pp. 138-145.

35. Mahboubi Nasrekani F., Eipakchi H. R. (**2012**) ‘‘Elastic buckling of axisymmetric cylindrical shells under axial load using first order shear deformation theory’’, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM)*, 92(11-12), pp. 937 – 944.
36. Hutchinson J. W. (**1965**) ‘‘Axial buckling of pressurized imperfect cylindrical shells’’, *AIAA Journal*, 3(8), pp.1461–1466.
37. Morgan E. J., Seide P., Weingarten V. I. (**1965**) ‘‘Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under axial compression’’, *AIAA Journal*, 3(3), pp. 500-505.
38. Chang L. K., Lu S. Y. (**1968**) ‘‘Nonlinear thermal elastic buckling of conical shells’’, *Nuclear Engineering and Design*, 7, pp. 159-169.
39. Hutchinson J. W., Tennyson R. C., Muggeridge D. B. (**1971**) ‘‘Effect of a local axisymmetric imperfection on the buckling behavior of a circular cylindrical shell under axial compression’’, *AIAA Journal*, 9(1), pp. 48-52.
40. Ramsey H. (**1977**) ‘‘Plastic buckling of conical shells under axial compression’’, *International Journal of Mechanical Sciences*, 19, pp. 257-272.
41. Malik Z., Morton J., Ruiz C. (**1979**) ‘‘An experimental investigation into the buckling of cylindrical shells of variable-wall thickness under radial external pressure’’, *Experimental Mechanics*, 19(3), pp. 87-92.
42. Tong L., Tabarrok B., Wang T. K. (**1992**) ‘‘Simple solutions for buckling of orthotropic conical shells’’, *International Journal of Solids and Structures*, 29(8), pp.933-946.
43. Koiter W. T., Elishakoff I., Li Y. W., Starnes J. H. (**1994**) ‘‘Buckling of an axially compressed cylindrical shell of variable thickness’’, *International Journal of Solids and Structures*, 31(6), pp. 797-805.
44. Li Y. W., Elishakoff I., Starnes J. H. (**1995**) ‘‘Axial buckling of composite cylindrical shells with periodic thickness variation’’, *Computers and Structures*, 56(1), pp. 65–74.
45. Andrianov I. V., Ismagulov B. G., Matyash M. V. (**2000**) ‘‘Buckling of cylindrical shells of variable thickness, loaded by external uniform pressure’’, *Technische Mechanik*, 20(4), pp. 349-354.

46. Gusic G., Combescure A., Jullien J. F. (**2000**) ‘‘The influence of circumferential thickness variation on the buckling of cylindrical shells under external pressure’’, *Computers and Structures*, 74, pp. 461-477.
47. Aghajari S., Abedi K., Showkati H. (**2006**) ‘‘Buckling and post-buckling behavior of thin-walled cylindrical steel shells with varying thickness subjected to uniform external pressure’’ , *Thin Walled Structures*, 44 , pp. 904-909.
48. Luong N. T. H., Hoach T. S. S. (**2006**) ‘‘Stability of cylindrical panel with variable thickness’’, *Vietnam Journal of Mechanics*, 28(1), pp. 56–65.
49. Luong H., Nguyen T., Elishakoff I., Nguyen V. T. (**2009**) ‘‘Buckling under the external pressure of cylindrical shells with variable thickness ’’, *International Journal of Solids and Structures*, 46, pp. 4163-4168.
50. Fakhim Y. G., Showkati H., Abedi K. (**2009**) ‘‘Experimental study on the buckling and post-buckling behavior of thin-walled cylindrical shells with varying thickness under hydrostatic pressure’’, In Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium, Valencia, Spain.
51. Khalifa A. M. (**2009**) ‘‘Elastic buckling behavior of a four-lobed cross section cylindrical shell with variable thickness under non-uniform axial loads’’, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 829703, 17 Pages.
52. Sofiyev A. H. (**2010**) ‘‘The buckling of FGM truncated conical shells subjected to axial compressive load and resting on winkler-pasternak foundations’’, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 87, pp. 753-761.
53. Khalifa A. M. (**2011**) ‘‘Vibration and buckling approximation of an axially loaded cylindrical shell with a three lobed cross section having varying thickness’’, *Applied Mathematics*, 2, pp. 329-342.
54. Chen L., Rotter J. M., Doerich C. (**2011**) ‘‘Buckling of cylindrical shells with variable thickness under uniform external pressure’’, *Engineering Structures*, 33, pp. 3570-3578.
55. Ali L., Jalal E. B., Abdellatif K., Larbi E. B. (**2011**) ‘‘Effect of multiple localized geometric imperfections on stability of thin axisymmetric cylindrical shells under

axial compression'', *International Journal of Solids and Structures*, 48(6), pp. 1034–1043.

56. Chen Z., Yang L., Cao G., Guo W. (**2012**) ''Buckling of the axially compressed cylindrical shells with arbitrary axisymmetric thickness variation'', *Thin-Walled Structures*, 60, pp. 38-45.
57. Shariyat M., Asgari D. (**2013**) ''Nonlinear thermal buckling and post-buckling analysis of imperfect variable thickness temperature-dependent bidirectional functionally graded cylindrical shells'', *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 111-112, pp. 310-320.
58. Alashti A. R., Ahmadi S. A. (**2014**) ''Buckling of imperfect thick cylindrical shells and curved panels with different boundary conditions under external pressure'', *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 52(1), pp. 25-36.
59. Shahrjerdi A., Bahramibabamiri B. (**2015**) ''The effect of different geometrical imperfection of buckling of composite cylindrical shells subjected to axial loading'', *International Journal of Mechanical and Materials Engineering*, 10(6).
60. Amini A. (**2015**) ''Buckling of cylindrical composite shells under deformation-related loads by using finite strip method'', *European Scientific Journal*, 11(27), pp. 176-187.
61. Zhou F., Chen Z. P., Fan H. G., Huang S. (**2016**) ''Analytical study on the buckling of cylindrical shells with stepwise variable thickness subjected to uniform external pressure'', *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(10), pp. 1207-1215.
62. Bisagni C. (**2016**) ''Buckling tests of sandwich cylindrical shells with and without cut-out'', Proceedings of American Society for Composites: 31st Technical Conference and ASTM Committee D30 Meeting, Williamsburg, Virginia, USA.
63. Ghasemi A. R., Hajmohammad M. H. (**2017**) ''Evaluation of buckling and post buckling of variable thickness shell subjected to external hydrostatic pressure'', *Journal of Solid Mechanics*, 9(2), pp. 239-248.
64. Hosseini M., Talebitooti M. (**2017**) ''Buckling analysis of moderately thick FG carbon nanotube reinforced composite conical shells under axial compression by DQM'', *Mechanical of Advanced Materials and Structures*, Published online.

65. Xinsheng, X., Jianqing, M., Lim, C.W., Hongjie, C. (**2009**) ‘‘Dynamic local and global buckling of cylindrical shells under axial impact’’, *Engineering Structures*, 31, pp.1132-1140.
66. Nayfeh, A. H. (**1981**) ‘‘*Introduction to perturbation Techniques*’’, John Wiley, New York, USA.
67. Dahlquist G., Bjorck A. (2008) ‘‘*Numerical methods in scientific computing*’’, Volume 1, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA.
68. Vodenitcharova T., Ansourian P. (**1996**) ‘‘Buckling of circular cylindrical shells subjected to uniform lateral pressure’’, *Engineering Structures*, 18(8), pp. 604-614.
69. Galletly G. D., James S., Kruzelecki J., Pemsing K. (**1987**) ‘‘Interactive buckling tests on cylinders subjected to external pressure and axial compression’’, *Journal of Pressure Vessel Technology,* 109(1), pp. 10-18.
70. Shen S. H., Noda N. (**2005**) ‘‘Postbuckling of FGM cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environments’’, *International Journal of Solids and Structures,* 42, pp. 4641-4662.

Abstract

In this thesis, the buckling load of homogenous and isotropic cylindrical shell with varying thickness is determined analytically by considering the initial imperfection. The outer radius is constant and the inner has linear variations. The displacement field is defined by using the first order shear deformation theory. The strain-displacement relations are determined by applying the von-Karman relations and the constitutive equations obey the Hook's law. The shell is axisymmetric and it is subjected to constant axial and variable external pressures. The equilibrium equations are extracted using the virtual work principles. The equations which are a system of nonlinear ordinary differential equations with variable coefficients are solved by using the perturbation technique. The stability equations are derived by two different methods and they are solved analytically. Also, the effect of initial imperfection which is assumed as an initial radial displacement, on the buckling load is investigated. The results are compared with the finite element method and some other references. The presented method for solving the equations, is capable to investigate the behavior of shell with different profiles of thickness and different external pressures. The boundary conditions are considered clamped and simply supported. By using perturbation technique the axial and radial displacements are extracted with a high accuracy even near the boundaries. The initial imperfection can also affect buckling load. In addition, the first order of shear deformation theory is more appropriate for determining the buckling load of thicker shells.

Keywords: Buckling, Cylindrical shells with varying thickness, First order shear deformation theory, Analytical solution, Initial imperfection.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering and Mechatronics

PhD Dissertation in Applied Mechanics

Analytical Solution for Buckling of Homogeneous and Isotropic Cylindrical Shells with Variable Thickness by Considering Initial Imperfection

By: Farid Mahboubi Nasrekani

Supervisor:

Dr. Hamidreza Eipakchi

September 2017