دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی تبدیل انرژی

عنوان

جریان مگنتوهیدرودینامیک یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی

نگارنده

حسن پناه‌دوست

استاد راهنما

دکتر پوریا اکبرزاده

اسفند ۱۳۹۵

بسم الله

تقدیم

این پایان‌نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می‌نمایم به

والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم
و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی‌ام بوده‌اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند.

برادرانم که وجودشان مایه دلگرمی من می‌باشد.

تشکر و قدردانی

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.
اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ برحسب وظیفه و از باب " من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ. "

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای **دکتر پوریا اکبرزاده** که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛

از جناب آقای **مهدی باقریان** و سرکار خانم **سیده زهرا میکائیلی** به دلیل یاری‌ها و راهنمایی‌های بی چشمداشت ایشان که بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان‌تر نمودند؛

و همچنین دوستان گران مایه‌ام آقایان **بنیامین ابراهیمی** و **امین امامیان** که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری داده‌اند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم، باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

حسن پناه‌دوست

اسفند ۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **حسن پناه‌دوست** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک** گرایش **تبدیل انرژی** دانشکده **مهندسی مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **جریان مگنتوهیدرودینامیک یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی** تحت راهنمایی **دکتر پوریا اکبرزاده** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه صنعتی شاهرود" و یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

چکیده

علاقه به تحقیق در جریان‌های با دیواره موج‌دار به‌طور قابل ملاحظه‌ای در چند دهه اخیر افزایش یافته است. این امر به‌واسطه اهمیت آشکار در علم فیزیولوژی و همچنین در صنعت می‌باشد. از این پدیده به طور گسترده برای سیستم‌های گوارشی و دفع ادرار، انتقال اسپرم در رگ‌های مجرای تناسلی مردانه، عبور دادن غذا از مری، چرخش خون در رگ‌های خونی کوچک استفاده می‌شود. بسیاری از ابزارهای مدرن پزشکی مثل پمپاژ موج‌دار برای انتقال سیال بدون حرکت قسمت‌های داخلی و پمپ‌های مورد استفاده در ریه و قلب و دستگاه‌های دیالیز طراحی شده‌اند. پمپ‌های انگشتی و غلتکی، شلنگ‌ها و پمپ‌های داخلی، پمپ‌های مدیریت زباله در صنعت هسته‌ای نیز براساس قوانین دیواره‌های موج‌دار کار می‌کنند.

در این پایان‌نامه جریان هیدرودینامیک مغناطیسی نانوسیال در یک کانال منحنی در محیط متخلخل با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. در مطالعه حاضر، جریان تراکم ناپذیر می‌باشد. معادلات حاکم برای جریان، انتقال حرارت و انتقال جرم با استفاده از فرض طول موج بلند به‌دست آمده‌اند و برای حل عددی معادلات، برنامه‌ای با استفاده از الگوریتم روش تقریب تفاضل محدود مرکزی و با استفاده از روش ضمنی جعبه‌ای کلر نوشته شده است.

در مطالعه حاضر با استفاده از نتایج به‌دست آمده از حل عددی، اثر کمیت‌های مختلف نظیر عدد هارتمن، عدد رینولدز مغناطیسی، عدد دارسی بر روی توزیع دما و غلظت، تابع جریان، تابع نیروی مغناطیسی، میدان مغناطیسی القائی، افزایش فشار بر طول موج و عدد ناسلت و همچنین پدیده به دام افتادگی جریان مورد بررسی قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: جریان با دیواره موج‌دار، هیدرودینامیک مغناطیسی، نانوسیال، محیط متخلخل، چشمه حرارتی، روش جعبه‌ای کلر، به دام افتادگی

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست نشانه‌ها

نیمه عرضی کانال	a
دامنه موج	b
عدد دارسی	Da
ضریب پخش براونی	$\mathrm{D_B}$
ضریب پخش ترموفورتیک	$\mathrm{D_T}$
قدرت میدان الکتریکی	E
عدد اکرت	Ec
عدد بدون بعد غلظت	Gc
عدد گراشف	Gr
میدان مغناطیسی ثابت	H_0
میدان مغناطیسی در راستای شعاعی	H_0^*
میدان مغناطیسی القا شده محوری	h_x
ماتریس همانی	$\bar{\boldsymbol{I}}$
نفوذپذیری محیط متخلخل	K_p
ضریب انتشار حرارتی نانوسیال	k_{nf}^*
عدد هارتمن	M
کمیت حرکت براونی	Nb
کمیت حرکت ترموفورتیک	Nt
فشار	P
عدد پرانتل	Pr
چشمه حرارتی	Q_0
عدد رینولدز	Re
عدد رینولدز مغناطیسی	$\mathrm{R_m}$
عدد استومر	S
زمان	$\bar{t}$
دما	$\bar{T}$
سرعت در راستای محوری	$\bar{U}$
سرعت در راستای شعاعی	$\bar{V}$
تابع جریان	ψ
تابع نیروی مغناطیسی	φ
تخلخل محیط متخلخل	$\bar{\varepsilon}$
تلفات ویسکوز	$\bar{\phi}$
چشمه حرارتی بدون بعد	ζ
چگالی نانوذره	ρ_p
چگالی سیال	ρ_f
چگالی نانوسیال	ρ_{nf}
دمای بدون بعد	γ
طول موج	δ
غلظت بدون بعد	Ω
لزجت دینامیکی نانوسیال	μ_{nf}
نسبت ظرفیت گرمایی مخصوص نانوذرات به ظرفیت گرمایی مخصوص سیال	τ
نفوذپذیری مغناطیسی	μ_e

فصل ۱ مقدمه

۱-۱- نانو سیال

امروزه استفاده از نانوذرات[1] به‌عنوان فناوری و دانشی با دامنه تحقیقاتی بسیار گسترده، موردتوجه محققین دنیا قرارگرفته و هر شاخه‌ای از این علم نیازمند مطالعات، آزمایش‌ها و تحقیقات تخصصی و ویژه است. از دیدگاه علوم پیشرفته، از فناوری نانو می‌توان در صنایع پزشکی و دارویی و سرطانی، درمان سرطان، انرژی، نساجی، خودرو و همچنین به‌منظور توسعه دستگاه‌های کنترل حرارت در بسیاری کاربردها ازجمله وسایل نقلیه سنگین استفاده نمود. کنترل حرارت یکی از عوامل کلیدی در فناوری‌های مربوط به محصولاتی مانند پیل‌های سوختی و وسایل نقلیه‌ی دوگانه‌سوز – الکتریکی می‌باشد که بیشتر آن‌ها عمدتاً تحت دماهای کم‌تر از دمای موتورهای احتراقی داخلی متداول، عمل می‌کنند. همچنین استفاده از این فناوری در بسیاری از علوم کاربردی دیگر دریچه‌ای نو به‌سوی پیشرفت‌های شگرف گشوده و توانسته است برای بسیاری از آرزوهای علمی بشر پاسخ قابل قبولی ارائه نماید[۱].

[1] Nanoparticles

یکی از شاخه‌های فناوری نانو مربوط به استفاده از نانوذرات با خواص حرارتی بسیار بالا در سیالات پایه دارای خواص حرارتی کم‌تر می‌باشد که محصول آن مخلوطی با خواص حرارتی بیشتر از سیال اولیه است که با نام نانوسیال[1] شناخته می‌شود. به نظر می‌رسد این روش راهی مناسب جهت غلبه بر مشکل راندمان پایین تجهیزات انتقال حرارت ناشی از خواص حرارتی کم‌تر سیالات پایه خالص حامل انرژی می‌باشد. تحقیقات تئوری و تجربی بسیاری در این زمینه صورت پذیرفته است. اما نتایج متفاوت آن‌ها مبین نیاز به تحقیقات وسیع‌تر و جامع‌تر می‌باشد[۲].

چوی [۳] در سال ۱۹۹۳، افزودن مواد فلزی با ابعاد نانومتر در سیالات عامل معمولی مانند آب، اتیلن گلیکول و روغن صنعتی را برای بهبود خواص حرارتی این‌گونه سیالات پیشنهاد نمود. وی مخلوطی از سیال پایه و ذرات با ابعاد نانومتر را نانوسیال نامید که در منابع علمی نیز بیشتر به همین نام خوانده شده است. اندازه متوسط ذرات در نانوسیالات می‌تواند از ۱۰ نانومتر تا ۱۰۰ نانومتر یا حتی کوچک‌تر در نظر گرفته شود. این ذرات می‌توانند ذرات فلزی مثل آلومینیوم و مس، اکسیدها نظیر اکسید آلومینیوم، کربیدها مثل کربید سیلیسیوم می‌باشند. چوی عنوان نمود که نانوسیالات می‌توانند به‌عنوان نسل بعدی سیالات عامل باشند، زیرا قابلیت بهتری برای انتقال گرما نسبت به سیالات پایه (سیالات بدون نانوذرات) از خود نشان می‌دهند. خواص نانوسیالات از مخلوط‌های حاوی ذرات با ابعاد میکرونی و میلی‌متری بهتر است زیرا با کوچک‌تر شدن ذرات نه‌تنها نسبت سطح به حجم ذرات بیشتر شده (که خود می‌تواند عاملی در بهبود خواص باشد)، بلکه پایداری مخلوط‌های نانوسیال نیز از مخلوط‌های میکرونی و میلی‌متری بیشتر می‌شود. همچنین حرکت براونی[2] نانوذرات به سبب جرم کمترشان، بیشتر بوده و باعث افزایش بیشتر ضریب هدایت حرارتی می‌شود. با مطرح‌شدن نانوسیال به‌عنوان سیال عامل مناسب در تبادل حرارت و پیشرفت علوم مرتبط با فنّاوری، بررسی و مطالعه رفتار حرارتی نانوسیالات طی دو دهه اخیر بسیار موردتوجه قرارگرفته است. در این راستا، محققان زیادی به مدل‌سازی و شبیه‌سازی عددی میدان جریان و انتقال حرارت نانوسیالات در مجاری و محفظه‌ها پرداخته‌اند. در شبیه‌سازی عددی مسائل نانوسیالات دو دیدگاه وجود دارد. در دیدگاه اول که

---

[1] Nanofluid
[2] Brownian Motion

رایج‌تر است، نانوسیال، تک فازی در نظر گرفته می‌شود و اثر نانوذرات در خواص معادل لحاظ می‌شود و در دیدگاه دوم از طرح دوفازی بهره گرفته می‌شود که در تحقیقات کم‌تر استفاده شده است. طرح تک‌فازی ساده‌تر بوده و ازنظر محاسباتی مقرون‌به‌صرفه است ولی دقت کم‌تری نسبت به طرح‌های دوفازی دارد. رفتار نانوسیال تحت اثر عوامل مختلفی مانند حرکت براونی، بلوری‌شدن در سطح مشترک سیال – جامد، زنجیره‌ای شدن نانوذرات و اصطکاک بین سیال و ذرات جامد است. گفتنی است که توصیف ریاضی و شبیه‌سازی تمامی این موارد از مشکلات مدل‌سازی عددی نانوسیالات می‌باشد[۳, ۴].

تاکنون انتقال حرارت جابجایی نانوسیال به‌صورت اجباری و طبیعی توسط محققان زیادی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. در سال ۱۹۹۵ چوی [۳] به‌صورت آزمایشگاهی ثابت کرد که سوسپانسیون نانوذرات با مقیاس طولی معمولی ۱ تا ۵۰ نانومتر با ضریب هدایت حرارتی بالا، ضریب هدایت مؤثر و ضریب انتقال حرارت جابجایی سیال پایه را افزایش می‌دهد. چوی و همکارانش [۵] در سال ۲۰۰۱ نشان دادند که مقدار کم اضافی (کم‌تر از ۱ درصد حجمی) نانوذرات در انتقال حرارت جابجایی مایعات، هدایت گرمایی سیال را در حدود ۲ برابر افزایش می‌دهد. خانافر و همکاران [۶] در سال۲۰۰۳ به بررسی نانوسیال آب – اکسید مس در یک محفظه بسته مربعی پرداختند و گزارش نمودند که انتقال حرارت با افزایش درصد حجمی نانوذرات در هر عدد گراشف افزایش می‌یابد. در سال۲۰۰۴ ماییگا و همکاران [۷, ۸] به‌صورت عددی خواص حرارتی و هیدرودینامیکی نانوسیالات عبوری از لوله‌ای که به‌صورت یکنواخت حرارت داده می‌شود را در جریان آرام با مدل تک‌فازی بررسی نموده‌اند. نتایج نشان داده است که افزودن نانوذرات، انتقال حرارت را نسبت به سیال پایه به طرز قابل‌توجهی افزایش می‌دهد. معایب نانوسیالات در انتقال حرارت نیز توسط ماییگا و همکاران [۹] در سال ۲۰۰۵ موردبررسی قرار گرفت. بدین ترتیب که افزودن نانوذرات سبب می‌شود تا تنش برشی دیواره زیادتر شود که این افزایش با نسبت حجمی نانوذرات نسبت مستقیم دارد. در سال ۲۰۰۶ بانجیورنو[۱۰] بیان کرد که افزایش بیش‌تر در هدایت حرارتی به علت حضور دو اثر مهم پخش براونی[1] و پخش ترموفورتیک[2] نانوذرات می‌باشد. ابوندا و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۰۸ نشان دادند که افزایش انتقال

[1] Brownian Diffusion
[2] Thermophoretic Diffusion

حرارت جابجایی طبیعی به‌طور عمده وابسته به مقدار عدد رایلی[1] است. مثلاً برای عدد رایلی ۱۰۴ افزایش نانوذرات اثری بر انتقال حرارت ندارد درحالی‌که برای اعداد رایلی بالاتر مؤثر است.

بررسی نانوسیال با خواص متغیر (لزجت و ضریب هدایت حرارتی متغیر با دما) در یک محفظه بسته توسط ابوندا و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۰۸ با استفاده از تقریب بوزینسک[2] انجام شد. آن‌ها دریافتند که در اعداد رایلی بالا عدد ناسلت[3] متوسط به مدل لزجت متغیر بیشتر از مدل ضریب هدایت حرارتی متغیر وابسته است. آن‌ها گزارش دادند که برای نانوسیال آب – اکسید آلومینیوم در اعداد رایلی[4] بالا با افزایش درصد حجمی نانوذرات بالای ۵٪، عدد ناسلت کاهش و در اعداد رایلی پایین افزایش می‌یابد. برای نانوسیال آب – اکسید مس، عدد ناسلت در اعداد رایلی بالا به‌طور پیوسته کاهش می‌یابد و در اعداد رایلی پایین به تغییرات کسر حجمی نانوذرات حساس نیست. ابوندا [۱] در سال۲۰۱۰ نشان داد که افزایش انتقال حرارت در جابجایی طبیعی اساساً به‌اندازه عدد رایلی وابسته است. در حقیقت، برای یک عدد رایلی معین، مثل $۱۰^۴$، انتقال حرارت به نانوذرات وابسته نیست. درحالی‌که مقادیر بالاتر عدد رایلی، افزایش در انتقال حرارت را نشان می‌دهد. به‌طور مفهومی، انتقال حرارت جابجایی طبیعی به‌وسیله خواص نانوسیال نظیر لزجت و ضریب انتقال حرارت هدایت تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

۱-۲- هیدرودینامیک مغناطیسی

هیدرودینامیک مغناطیسی[5] به بررسی جریان آن دسته از سیالاتی می‌پردازد که قابلیت هدایت الکتریکی دارند و در داخل میدان مغناطیسی قرار گرفته‌اند. از جمله این سیالات می‌توان به پلاسما، فلزات مایع، آب‌نمک و الکترولیت‌ها اشاره کرد. در واقع مبنای این جریان این است که میدان مغناطیسی می‌تواند باعث القای میدان الکتریکی در سیال هادی الکتریسیته شود[۱۲].

---

[1] Rayleigh Number
[2] Boussinesq Approximation
[3] Nusselt Number
[4] Rayleigh Number
[5] Magneto Hydrodynamics

معادلات حاکم بر این دسته از سیالات معادلات ناویراستوکس[1] دینامیک سیال و معادلات الکترومغناطیس ماکسول[2] می‌باشند که باید به‌طور هم‌زمان حل شوند. یکی از کمیت‌های مهم در هیدرودینامیک مغناطیسی نیروی لورنز[3] می‌باشد که بر تمام رساناهای متحرک که در معرض میدان مغناطیسی قرار گرفته‌اند عمل می‌کند و به‌واسطه برهم‌کنش چگالی جریان با میدان مغناطیسی به وجود می‌آید[۱۲].

یک کمیت بدون بعد که در مسائل هیدرودینامیک مغناطیسی مطرح می‌شود عدد رینولدز مغناطیسی[4] نام دارد که به‌صورت نسبت میدان مغناطیسی القایی به میدان مغناطیسی اعمالی تعریف می‌شود. در اعداد رینولدز مغناطیسی بزرگ، میدان مغناطیسی القایی بر میدان مغناطیسی اعمالی غلبه می‌کند. خواص سوسپانسیون‌های کلوئیدی به‌طور عمده می‌تواند تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی تغییر کند. این سوسپانسیون‌ها شامل فروسیال‌ها و نانوسیال‌های مغناطیسی، سیالات مگنتورئولوژیکی[5] و ژل‌های قابل مغناطیس شدن می‌باشند. توسعه اخیر در علم پزشکی استفاده از شارهای مغناطیسی برای افزایش بازده و ویژگی سیستم‌های دارورسانی را ممکن ساخته است. این شارها برای هدایت دارو به سمت جریان خون به مکان تومور یا بیماری استفاده می‌شوند[۱۲].

استود و همکاران [۱۳] در سال۲۰۱۵ با مطالعه اثر میدان مغناطیسی متحرک روی جریان خون به این نتیجه رسیدند که در اثر اعمال میدان مغناطیسی متحرک مناسب جریان خون سریع‌تر می‌شود. در سال۱۹۷۷ ونکاتاچالایا و همکاران [۱۴] جریان آزاد را در محفظه‌های مربعی و مستطیلی شکل و در حضور میدان مغناطیسی برای حالتی که بر دیواره‌های عمودی آن‌ها شار حرارتی یکنواختی اعمال می‌شد و برای سیالی با عدد پرانتل[6] برابر با ۰/۷۳۳ به‌طور عددی مورد تحلیل و بررسی قراردادند. آن‌ها دریافتند برای اعداد گراشف[7] پایین و اعداد هارتمن[8] بالا، خطوط جریان در مرکز محفظه کشیده می‌شوند و خطوط دما ثابت تقریباً به‌صورت موازی دیواره‌های عمودی محفظه درمی‌آیند. این توزیع دما نشان‌دهنده این امر است که

---

1 Navier-Stokes Equations
2 Maxwell
3 Lorentz Force
4 Magnetic Reynolds Number
5 Magnetorheological
6 Prandtl Number
7 Grashof Number
8 Hartmann Number

مکانیزم انتقال حرارت به هدایت خالص تغییر می‌یابد. رودره و همکاران [۱۵] در سال۱۹۹۳ تأثیر اعمال میدان مغناطیسی را بر روی جریان جابجایی آزاد را درون یک محفظه مربعی شکل با دیوارهای عمودی ثابت و دیوارهای افقی عایق برای سیال با عدد پرانتل ۰/۷۳۳ به‌صورت عددی بررسی کردند و متوجه شدند که با افزایش قدرت میدان مغناطیسی، جریان جابجایی از بین رفته و نرخ انتقال حرارت کاهش می‌یابد.

۱-۳- دیواره موج‌دار

دیواره موج‌دار[1] پدیده‌ای است که در علوم فیزیولوژی مختلف و فرایندهای صنعتی پدیدار شد. دیواره موج‌دار مکانیزم پمپاژ سیال به‌وسیله انبساط و انقباض یک کانال و یا لوله توسعه‌پذیر می‌باشد و به‌صورت ترکیب و انتقال سیال در راستای موج روی می‌دهد. دیواره‌های موج‌دار نقش بسیار مهمی در علم فیزیولوژی و انتقال سیالات فیزیولوژی نظیر انتقال ادرار از کلیه به مثانه، زردابه از کیسه صفرا به روده اثنی عشر، انتقال لقمه غذا در دستگاه گوارش، حمل و نقل غدد لنفاوی در عروق لنفاوی، انتقال اسپرم[2] در رگ‌های مجرای تناسلی مردانه، تخمک[3] در لوله رحم[4] و غیره ایفا کند. پمپ‌های انگشتی و غلتکی، شلنگ‌ها و پمپ‌های داخلی، پمپ‌های مدیریت زباله در صنعت هسته‌ای، پمپ‌های مورداستفاده در ریه، قلب و دستگاه‌های دیالیز براساس قوانین دیواره‌های موج‌دار کار می‌کنند. جریان با دیواره موج‌دار به‌واسطه حرکت امواج در امتداد دیواره‌هایی است که دارای ویژگی‌های الاستیک است. در نظر گرفتن ویژگی‌های دیوار مثل تنش و نوسانات در موقعیت‌های کاربردی ضروری هستند[۴, ۱۶]. کارهای پیشنهادی لاتام، شاپیرو در سال ۱۹۶۴و لئو را می‌توان ازجمله کارهای اولیه در این زمینه معرفی نمود. پس از آن، مطالعات رو به جلو برای جریان با دیواره موج‌دار تحت پیکربندی‌های مختلف جریان انجام شد[۱۸,۱۷]. در سال ۱۹۶۹ شاپیرو و همکاران [۱۸]مکانیزم پمپ موج‌دار سیال در ارتباط با سیستم‌های حالب، دستگاه گوارش، رگ‌های خونی کوچک و

---

[1] Peristaltic
[2] Sperm Transfer
[3] Ovum
[4] Fallopian Tube

مجراهای غدوی را مورد بررسی قراردادند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که دو پدیده فیزیولوژیکی[1] مهم که برگشت[2] و به دام افتادگی[3] جریان موج‌دار نامیده می‌شود، وجود دارد.

لئو و همکاران [۱۹]در سال ۱۹۷۱ با بررسی جریان با دیواره موج‌دار در روده کوچک مشاهده کردند که عدد رینولدز را می‌توان بسیار کوچک در نظر گرفت. در سال ۱۹۸۸ تاکاباتاک و همکاران[۲۰] با استفاده از توسعه روش عددی تاکاباتاک و آی یو کاوا[۲۱] مسئله پمپ موج‌دار را برای یک لوله متقارن محوری حل کردند. همچنین، آن‌ها پدیده به دام افتادگی و برگشت در خط مرکزی را مورد مطالعه قراردادند و به این نتیجه رسیدند که ماهیت پدیده برگشت جریان در جریان متقارن به عدد رینولدز و طول موج بستگی دارد. به این معنا که برگشت جریان نزدیک محور لوله در اعداد رینولدز بزرگ و یا در طول موج‌های بلند به وجود می‌آید درحالی‌که این پدیده در اعداد رینولدز و طول‌موج کوچک در نزدیکی دیواره‌های لوله اتفاق می‌افتد.

علی و همکارانش [۱۶]در سال ۲۰۰۹ نتایج حاصل از بررسی انتقال حرارت جریان با دیواره موج‌دار در یک کانال منحنی را ارائه دادند. آن‌ها با استفاده از روش شوتینگ[4] و مقادیر مختلف کمیت انحنا و عدد برینکمن[5] مشاهده کردند که نرخ پمپ موج‌دار در کانال منحنی در مقایسه با کانال مستقیم بیشتر می‌باشد، علاوه براین نرخ انتقال حرارت در کانال منحنی در مقایسه با کانال مستقیم کاهش می‌یابد. در سال ۲۰۱۵ اکبر و همکاران [۲۲] نتایج خود را در مورد تحلیل عددی نانولوله‌های کربنی[6] برای دیواره موج‌دار در کانال منحنی با انتقال حرارت را به‌صورت زیر منتشر کردند: (۱) گرادیان فشار در مرکز کانال در مقایسه با دیواره‌ها بیشتر است. گرادیان فشار به‌طور مستقیم با عدد گراشف و نرخ جریان و به‌طور معکوس با کمیت انحنا در ارتباط است. (۲) افزایش فشار با عدد گراشف به‌طور مستقیم در ارتباط است و تغییراتش درنانوسیال آب - مس نسبت به آب خالص سریع‌تر است.

با این وجود، در گذشته مطالعات کمی در زمینه اثر میدان مغناطیسی روی جریان با دیواره موج‌دار صورت گرفته است. اولین بررسی‌ها راجع به میدان مغناطیسی القائی توسط ویشنیاکوف و پاولوف [۲۳]در

---

[1] Physiologically
[2] Reflux
[3] Trapping
[4] Shooting Method
[5] Brinkman Number
[6] Carbon Nanotubes

سال ۱۹۷۲ ارائه گردید. بیشتر مطالعات جریان با دیواره موج‌دار در کانال‌های مستقیم ولوله‌ها صورت گرفته است. بااین‌حال هندسه اکثر مجراهای فیزیولوژیکی، کانال‌های غده‌ای[1] و شبکه‌های شریانی[2] به‌صورت منحنی می‌باشد. پاندی[۲۴] در سال ۲۰۰۹ اثر میدان مغناطیسی را بر روی جریان با دیواره موج‌دار سیال لزج در داخل لوله استوانه‌ای با طول محدود بررسی کرد. نتایج نشان داد که کمیت‌های هیدرودینامیک مغناطیسی، سیال را بیشتر در معرض جریان معکوس قرار می‌دهند. نورین و همکاران [۲۵]در سال ۲۰۱۴ جریان فشاری هیدرودینامیک مغناطیسی نانوسیال را در یک کانال منحنی بررسی کردند. آن‌ها مشاهده کردند که تقارن پروفیل‌های نیروی مغناطیسی، میدان مغناطیسی القایی محوری و سرعت براثر انحنا از بین می‌رود. آگراوال به همراه همکاران [۲۶] اثر میدان مغناطیسی روی جریان خون را با استفاده از یک مدل ساده ریاضی برای خون داخل یک کانال با دیواره‌های انعطاف‌پذیر را با استفاده از فرض طول‌موج بلند بررسی کردند و مشاهده کردند که برای جریان خون داخل عروق خونی با بیماری عروقی نظیر تنگی عروق، اثر میدان مغناطیسی می‌تواند به‌عنوان یک پمپ خونی در عملیات قلبی به کار گرفته شود. بنابراین، اصل میدان مغناطیسی در قالب یک دستگاه تصویربرداری رزونانسی مغناطیسی[3] نامیده می‌شود. امروزه از این فناوری برای تشخیص بیماری‌های عروقی و مغزی استفاده می‌شود.

در بین سال‌های ۲۰۰۲ تا ۲۰۰۸ مطالعات فراوانی در زمینه اثر میدان مغناطیسی روی جریان موج‌دار سیالات فیزیولوژیکی انجام شد که ازجمله آن‌ها می‌توان به مطالعات الحسینی و همکاران در سال ۲۰۰۲، مخیمر در سال ۲۰۰۴، هیات و علی در سال های ۲۰۰۶، ۲۰۰۷ و ۲۰۰۸، مخیمر و عبدالمعبود در سال ۲۰۰۸ و وانگ در سال ۲۰۰۸ اشاره کرد [۲۷-۳۳].

در سال ۲۰۰۸ هیات [۲۷] اثر انتقال حرارت روی جریان موج‌دار در محیط متخلخل را به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار داد. وی یک سیال تراکم ناپذیر هیدرودینامیک مغناطیسی را در یک کانال متقارن در نظر گرفت. او به این نتیجه رسید که اثرات هیدرودینامیک مغناطیسی در مناطق پمپاژ افزوده و آزاد با منطقه پمپاژ موج‌دار متفاوت می‌باشد. در سال ۲۰۱۱، ردی و همکاران[۳۲] انتقال موج‌دار سیال هادی درون یک

---

[1] Glandular Ducts
[2] Arterial Network
[3] Magnetic Resonance Imaging (MRI)

محیط متخلخل در یک کانال عمودی متقارن را بررسی کرد. وی نتیجه گرفت که با افزایش عدد هارتمن، سرعت افزایش می‌یابد. همچنین با کاهش عدد دارسی[1]، سرعت ماکزیمم افزایش می‌یابد اما زمانی‌که عدد دارسی $Da < 0.01$ باشد، تغییرات در سرعت ماکزیمم قابل صرف نظر کردن است.

۱-۴- اهداف پایان‌نامه

در این پایان‌نامه برای نخستین بار جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در محیطی متخلخل و درکانال منحنی با دیواره موج‌دار به‌همراه چشمه حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مطالعه ابتدا معادلات حاکم معرفی می‌شوند و سپس به روش خطی‌سازی نیوتن، خطی‌سازی می‌شوند و سپس برنامه عددی آن به کمک روش جعبه‌ای کلر[2] نوشته می‌شود و سپس حل عددی ارائه شده با نتایج موجود مقایسه و ارزیابی شده است و سپس اثر ترم‌های چشمه حرارتی و نفوذپذیری محیط متخلخل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱-۴-۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه

این پایان‌نامه از یک فصل به‌عنوان مقدمه (فصل حاضر) و ۴ فصل اصلی و یک بخش جهت معرفی مراجع مورد استفاده تشکیل شده است. در فصل دوم مفاهیم استفاده شده در این مطالعه به تفصیل توضیح داده شده است.

در فصل سوم به معرفی مسئله پرداخته شده است و الگوریتم حل مسئله ارائه شده است و معادلات برای حل عددی گسسته و خطی‌سازی شده‌اند. در فصل چهارم ابتدا اعتبار و صحت سنجی و سپس نتایج حاصل از این مطالعه ارائه می‌گردد. فصل پنجم به معرفی نتایج این پایان‌نامه و ارائه پیشنهادها و توصیه‌هایی برای ارتقای سطح کیفی تحقیق حاضر و انجام مطالعه جامع‌تر در راستای موضوع این پایان‌نامه، می‌پردازد.

---

[1] Darcy Number
[2] Keller-Box

فصل ۲ مفاهیم

۲-۱- مفهوم نانوسیالات

کاربرد وسیع انتقال حرارت در صنایع گوناگون سبب گردیده است که افزایش راندمان دستگاه‌های حرارتی در الویت طراحان واحدهای صنعتی قرار گیرد. تلاش‌های زیاد محققان در سال‌های گذشته جهت افزایش انتقال حرارت به ابداع روش‌های مختلف در این راستا منجر شده است. افزایش راندمان و بهبود عملکرد دستگاه‌های حرارتی از یک‌سو سبب صرفه‌جویی در انرژی شده و از طرف دیگر می‌تواند کوچک شدن ابعاد دستگاه‌ها و درنتیجه کاهش هزینه مواد و ساخت دستگاه را به دنبال داشته باشد. متأسفانه بسیاری از روش‌های مذکور با ازدیاد سطح در واحد حجم دستگاه امکان‌پذیر است که این مسئله سبب افزایش افت فشار می‌شود و با توجه به نیاز به پمپ قوی‌تر هزینه لازم جهت انتقال سیال بیشتر می‌گردد. پیشرفت در فناوری نانو در دو دهه اخیر و استفاده از نانوسیال به‌عنوان محیط جدید و مناسبی برای انتقال حرارت افق جدیدی را فرا روی پژوهشگران ایجاد کرده است. ازآنجا که محیط‌های سیال انتقال حرارت در صنایع از قبیل آب، اتیلن گلیکول و روغن از ضریب هدایت حرارتی کمی در مقایسه با فلزات و اکسیدهای فلزی برخوردارند، می‌توان با افزودن

مواد جامد با مشخصه‌های حرارتی بهتر عملکرد حرارتی سیالات فوق را بهبود بخشید. بحث افزودن ذرات جامد با اندازه میکرو به سیالات پایه از ده‌ها سال قبل مطرح گردیده است ولی ازآنجاکه سوسپانسیون حاصل به‌سرعت ته‌نشین می‌شود گرفتگی معابر ولوله‌های عبوری را در پی دارد. از طرف دیگر وجود ذرات با اندازه میکرو سبب سایش جداره لوله‌ها شده و به پمپ‌ها و وسایل انتقال نیز آسیب جدی وارد می‌کند. در نانوسیالات به دلیل وجود ذرات با اندازه نانو در داخل سیال پایه مشکلات مربوط به ته‌نشینی، گرفتگی لوله‌ها و سایش کاهش فراوانی خواهد داشت. از مزیت‌های مهم نانوسیالات افزایش شدید ضریب هدایت حرارتی و همچنین ضریب جابه‌جایی انتقال حرارت بدون افزایش قابل‌توجه درافت فشار می‌باشد. پژوهش‌های مختلف انجام‌شده بیانگر بهبود وسیع شاخص‌های انتقال حرارت نانوسیالات است اگرچه در برخی موارد نیز اطلاعات منفی هم گزارش شده است[۳۴].

در صورت کاربردی شدن استفاده از نانوسیال یکی از مشکلات اصلی صنایع که انتقال حرارت ناکافی دستگاه‌ها و سیالات مختلف است برطرف می‌گردد و در مواردی می‌توان با بهبود عملکرد حرارتی سیال ظرفیت دستگاه‌های موجود را افزایش داد که این خود منجر به افزایش ظرفیت واحد عملیاتی می‌شود. در برخی از دستگاه‌ها مثل کوره‌ها در صورت افزایش قدرت جذب حرارت توسط سیال داخل لوله می‌توان از سوخت کمتری استفاده کرد که سبب کاهش آلودگی محیط‌زیست می‌گردد. استفاده از نانوسیال در صنایع الکترونیک ازجمله کامپیوترها نیز می‌تواند بسیار مفید باشد. تولید حرارت زیاد در واحد سطح توسط المان‌های الکتریکی و المان‌های کامپیوترها از مشکلات جدی وسایل الکتریکی و الکترونیکی می‌باشد که می‌توان از پتانسیل نانوسیال در جذب بالای حرارت برای حل این مسئله بهره برد[۳۴].

در مسئله بازده انتقال حرارت در تجهیزاتی نظیر مبدل‌های حرارتی، هدایت حرارتی سیال حامل انرژی و ضریب جابه‌جایی انتقال حرارت نقش اساسی را بر عهده‌دارند. سیالات متداول در انتقال حرارت و حامل انرژی در صنایع را معمولاً سیالاتی نظیر آب، روغن‌ها و اتیلن گلیکول تشکیل می‌دهند. با افزایش رقابت جهانی در زمینه صنایع مختلف و نقش انرژی در هزینه تولید، این صنایع به‌شدت به سمت توسعه سیالات پیشرفته و جدید با شاخص‌های حرارتی بالا پیش می‌روند[۳۴].

به‌خوبی مشخص است که فلزات در شکل جامد دارای هدایت حرارتی بسیار بالایی نسبت به سیالات هستند. به‌عنوان مثال هدایت حرارتی مس در دمای محیط حدود ۷۰۰ برابر آب و ۳۰۰۰ برابر روغن موتور است، از طرفی هدایت حرارتی مواد فلزی نیز بسیار بیشتر از هدایت حرارتی مواد غیرفلزی است. به همین دلیل، انتظار می‌رود که سیالات حاوی ذرات جامد معلق فلزی یا اکسید فلزی دارای هدایت حرارتی بیشتری نسبت به سیالات خالص باشند. درواقع در رابطه با نانوسیالات مطالعات، بررسی‌ها و مدل‌سازی‌ها به سال‌ها قبل برمی‌گردد، به‌طوری‌که کار تئوری و نظری ماکسول حدود ۱۰۰ سال پیش منتشر شده است. لیکن تا سال‌های اخیر بررسی‌ها برای ذراتی که دارای اندازه میلی‌متری یا میکرومتری بودند، صورت گرفته بود. در این اندازه‌ها ذرات با مشکل جدی ته‌نشینی سریع روبه‌رو بودند. به این مشکل باید مسئله ایجاد سایش در مسیر جریان و افزایش افت فشار را نیز اضافه کرد. به‌علاوه برای سیستم‌های میکرونی انتقال حرارت، این ذرات بسیار درشت بودند. فن‌آوری جدید نانوتکنولوژی این امکان را فراهم آورده تا بتوان ذراتی با اندازه بسیار کوچک نانومتری تولید و فرآوری کرد. این پیشرفت سبب شد تا در سال ۱۹۹۳ فکر استفاده از نانوذرات فلزی در داخل سیالات حامل انرژی نظیر آب و اتیلن گلیکول ایجاد و موضوع نانوسیال به‌عنوان موضوع جدید انتقال حرارت مطرح گردد. چوی از بخش فن‌آوری انرژی آزمایشگاه ملی آرگون[1] آمریکا، در سال ۱۹۹۵ اولین بار موضوع نانوسیال را به‌عنوان محیط جدید انتقال حرارت مطرح نمود و نانوسیالات طبقه جدیدی از سیالات انتقال حرارت می‌باشند که از طریق معلق سازی نانوذرات در درون سیالات معمولی و متداول انتقال حرارت که به‌عنوان سیال پایه شناخته می‌شوند به دست می‌آیند. پراکندگی نانوذرات درون سیال می‌تواند کاملاً یا تقریباً همگن باشد[۳۴].

متوسط اندازه ذرات استفاده‌شده در نانوسیالات، زیر ۵۰ نانومتر است. با توسعه تحقیقات در زمینه نانوسیالات، امروزه نانوسیال را نه فقط از طریق افزودن نانوذرات فلزی، بلکه از طریق افزودن نانوذرات اکسیدهای فلزی و نانولوله‌های کربنی نیز می‌توان تهیه کرد. افزودن نانوذرات اعم از فلزی، اکسیدهای فلزی یا نانولوله‌های کربنی به یک سیال نظیر آب فقط هدایت حرارتی آن را تحت تأثیر قرار داده بلکه سایر خواص

[1] Argonne

فیزیکی نظیر ظرفیت حرارتی سیال نیز تحت تأثیر قرار می‌گیرد. مجموعه تغییرات ایجاد شده در خواص ترمودینامیکی سیال سبب می‌شود تا علاوه بر افزایش هدایت حرارتی در انتقال حرارت جابه‌جایی نیز شاهد افزایش چشمگیر ضریب انتقال حرارت باشیم[۳۴, ۳۵].

امروزه تحقیقات در زمینه نانوسیالات ابعاد گسترده‌ای پیدا کرده است. از یک‌سو محققین در رابطه با افزایش هدایت حرارتی سیال و افزایش هدایت حرارتی سیالات و افزایش انتقال حرارت، پیگیر ساخت و تهیه نانوسیالات با انواع نانوذرات و نانولوله‌ها با توزیع اندازه‌های مختلف هستند، درحالی‌که برخی دیگر از محققین به بررسی مسئله پایداری و عدم ته‌نشینی نانوذرات در طی فرآیند انتقال حرارت و عدم کلوخه شدن یا مهاجرت آن‌ها می‌پردازد. ایجاد تغییرات در خواص رئولوژیکی سیال پایه با افزودن نانوذرات، بخشی از تلاش‌های محققین را به بررسی این موضوع معطوف داشته است و این در حالی است که محققین دیگر در حال تهیه و ساخت نانوسیالات هیبریدی پیشرفته، اعم از پلی نانوسیالات[1] و نانوسیالات کاهش‌دهنده اصطکاک[2] می‌باشند. شیوه تهیه و فرآوری نانوسیال یا به‌عبارت‌دیگر نحوه معلق سازی ذرات جامد در سیال پایه و افزودن نانوذره به سیال پایه نیز یکی از حوزه‌های تحقیقاتی مهم درزمینه نانوسیالات می‌باشند[۳۴].

۲-۱-۱ مزایای نانوسیال

فرایند انتقال حرارت و استفاده از مبدل‌های حرارتی در اغلب صنایع کوچک و بزرگ وجود دارد. افزایش میزان انتقال حرارت و کارایی مبدل‌های حرارتی به معنی صرفه‌جویی میلیون‌ها دلار در هزینه‌های صنایع می‌باشد. با رفتاری که نانوسیال از خود در زمینه انتقال حرارت نشان داده است، امید به چنین صرفه‌جویی در صنایع، به‌ویژه صنایع بزرگ بیشتر شده است. برخی از مزایا و قابلیت‌های بالقوه نانوسیالات به‌قرار زیر است:

[1] Poly-Nanofluids (Polymer-Nanofluids)
[2] DR-Nanofluids (Drag-Reduction-Nanofluid)

۱. بهبود انتقال حرارت و پایداری

کاهش اندازه ذرات یک جامد که توأم با افزایش تعداد آن‌ها در واحد جرم می‌باشد، منجر به افزایش سطح مخصوص می‌گردد. به‌طوری‌که سطح مخصوص ذراتی با اندازه نانومتری در حدود ۱۰۰۰ برابر سطح مخصوصی ذراتی با ابعاد میکرومتر می‌باشد. با کاهش ذرات به حدود نانومتر درصد بیشتری از اتم‌های آن در نزدیکی سطح قرار می‌گیرند. سطح ذرات در انتقال حرارت مؤثر بوده و استفاده از نانوسیال به افزایش سطح انتقال حرارت منجر می‌گردد. نانوذرات به کار گرفته شده یک سطح بسیار زیاد برای موضوع انتقال حرارت ایجاد می‌کند و همین عامل یک مزیت برای نانوسیال می‌باشد. مقایسه سطح ایجاد شده برای انتقال حرارت نانوذرات با سطح پودرهای متداول میکرومتری بیان‌گر توانایی و قابلیت زیاد نانوذرات در افزایش انتقال حرارت و ایجاد سوسپانسیون پایدار می‌باشد. لازم به ذکر است که یکی از مشکلات افزودن ذرات به اندازه میکرو به سیال پایه ته‌نشینی سریع آن‌ها می‌باشد که با کاهش اندازه به مقیاس نانو تا حدود زیادی مرتفع می‌گردد[۳۴].

متوسط اندازه ذرات استفاده شده در نانوسیالات، زیر ۵۰ نانومتر است. هرچند امروزه تحقیقات به این اندازه محدود نبوده و ذراتی با توزیع اندازه‌های مختلف در دامنه ۱ نانومتر تا ۱۰۰ نانومتر مورد مطالعه قرار می‌گیرند[۳۶] . با توسعه تحقیقات درزمینه نانوسیالات، امروزه نانوسیال را نه فقط از طریق افزودن نانوذرات فلزی، بلکه از طریق افزودن نانوذرات اکسیدهای فلزی و نانولوله‌های کربنی نیز می‌توان تهیه کرد. افزودن نانوذرات اعم از فلزی، اکسیدهای فلزی یا نانولوله‌های کربنی به یک سیال نظیر آب فقط هدایت حرارتی آن را تحت تأثیر قرار نداده بلکه سایر خواص فیزیکی نظیر ظرفیت حرارتی سیال تحت تأثیر قرار می‌گیرد. مجموعه تغییرات ایجاد شده در خواص ترمودینامیکی سیال سبب می‌شود تا علاوه بر افزایش هدایت حرارتی در انتقال حرارت جابه‌جایی نیز شاهد افزایش چشمگیر ضریب انتقال حرارت باشیم. امروزه تحقیقات در زمینه نانوسیالات ابعاد بسیار گسترده‌ای پیدا کرده است. از یک‌سو محققین در رابطه با افزایش هدایت حرارتی سیالات و افزایش انتقال حرارت، پیگیر ساخت و تهیه نانوسیالات با انواع نانوذرات و نانولوله‌ها با

توزیع اندازه‌های مختلف هستند، درحالی‌که برخی دیگر از محققین به بررسی مسئله پایداری و عدم ته‌نشینی نانوذرات در طی فرایند انتقال حرارت و عدم کلوخه شدن یا مهاجرت آن‌ها می‌پردازند[۳۴].

ایجاد تغییرات در خواص رئولوژیکی سیال پایه با افزودن نانوذرات، بخشی از تلاش‌های محققین را به بررسی این موضوع معطوف داشته است و این در حالی است که محققین دیگر در حال تهیه و ساخت نانوسیالات هیبریدی پیشرفته، اعم از پلی نانو سیالات و نانوسیالات کاهش‌دهنده اصطکاک می‌باشند. شیوه تهیه و فرآوری نانوسیال یا به‌عبارت‌دیگر نحوه معلق سازی ذرات جامد در سیال پایه و افزودن نانوذره به سیال پایه نیز یکی از حوزه‌های تحقیقاتی مهم در زمینه نانوسیالات می‌باشد[۳۴].

۲. کاهش توان لازم برای پمپاژ سیال

در سیالات متداول حامل انرژی، افزایش میزان انتقال حرارت جابه‌جایی مستلزم افزایش سرعت سیال برای بالا رفتن عدد رینولدز و به‌تبع آن عدد ناسلت و در نتیجه ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی است. این افزایش سرعت در درون تجهیزات به نوبه خود، مستلزم افزایش توان مصرفی پمپ می‌باشد. اما اگر نانوسیال برای انتقال حرارت به کار گرفته شود، در یک سرعت مشخص و معین افزایش انتقال حرارت نتیجه افزایش هدایت حرارتی سیال خواهد بود. به‌عنوان مثال افزایش انتقال حرارت به میزان ۲ برابر، با استفاده از سیال پایه، نیازمند افزایش پمپ به حدود ۱۰ برابر می‌باشد. درحالی‌که اگر نانوذرات به سیال پایه افزوده شده و ضریب هدایت حرارتی نانوسیال حاصل حدود ۳ برابر سیال پایه گردد، بدون نیاز به افزایش پمپ می‌توان به همان ۲ برابر افزایش در انتقال حرارت دست پیدا کرد. بنابراین کاهش هزینه انرژی و کاهش توان مصرفی پمپ‌ها، از دیگر مزایای نانوسیالات است[۳۴].

۳. کاهش گرفتگی و انسداد مجاری

ایده افزایش انتقال حرارت با استفاده از افزودن ذرات به یک سیال پایه قدمتی نزدیک به صد سال دارد. لیکن ذراتی که در تحقیقات قدیمی به سیالات افزوده می‌شد دارای اندازه‌های میکرومتری بودند. این ذرات پایداری لازم در سوسپانسیون را نداشته و به‌سرعت ته‌نشین می‌شوند. همین امر سبب می‌شود که مجاری عبور سیال

به‌سرعت مسدود گردد. درحالی‌که ذرات با اندازه نانو، تشکیل سوسپانسیون‌های بسیار پایدارتری داده و پایین بودن سرعت ته‌نشینی آن‌ها سبب می‌گردد تا مشکل گرفتگی و انسداد مجاری به حداقل برسد. از طرفی بزرگی ذرات میکرومتری سبب می‌شود تا نتوان از آن‌ها در مجاری میکروکانال‌ها[1] استفاده کرد درحالی‌که اندازه نانویی ذرات این امکان را می‌دهد تا از نانوسیال بتوان در میکروکانال‌ها نیز استفاده کرد[۳۴].

۴. کاهش اندازه سیستم‌های انتقال حرارت

با توجه به قابلیتی که نانوسیال از خود در افزایش انتقال حرارت نشان داده است، برای انتقال یک مقدار مشخص حرارت، مبدل‌های حرارتی لازم وقتی‌که از نانوسیال به‌جای سیال معمولی برای انتقال حرارت استفاده شود، از حجم و اندازه کوچک‌تری برخوردار خواهند شد[۳۴].

۵. کاهش هزینه‌ها

به دلیل کاهش توان مصرفی پمپ‌های انتقال سیال از طرفی و کاهش اندازه و وزن تجهیزات انتقال حرارت از طرف دیگر، با به‌کارگیری نانوسیال صرفه‌جویی قابل‌ملاحظه‌ای در هزینه‌های سرمایه‌گذاری و عملیاتی واحدهای صنعتی ایجاد می‌گردد[۳۴].

[1] Microchannels

۲-۲- هیدرودینامیک مغناطیسی

هیدرودینامیک مغناطیسی به بررسی جریان آن دسته از سیالاتی می‌پردازد که هدایت الکتریکی دارند و در داخل میدان مغناطیسی قرارگرفته‌اند. ازجمله این سیالات می‌توان به پلاسما، فلزات مایع، آب‌نمک و الکترولیت‌ها اشاره کرد. واژه هیدرودینامیک مغناطیسی از یک اصل ساده بنیادی الکتریسیته و مغناطیس مشتق می‌شود. بنا به این اصل هنگامی‌که سیال با زاویه‌ای نسبت به جهت میدان مغناطیسی جریان یابد، نیرویی عمود برجهت جریان سیال به وجود خواهد آمد که برجهت میدان مغناطیسی نیز عمود است. این نیرو به‌افتخار هنریک لورنز، فیزیک‌دان و برنده‌ی جایزه‌ی نوبل ۱۹۰۴، نیروی لورنز[1] نامیده شده است. در مباحث ژئوفیزیک مباحث مربوط به هسته سیال زمین و سایر سیارات و در بخش مهندسی مباحث مربوط به سرد شدن فلزات مایع راکتورهای هسته‌ای، الکترومغناطیس و موارد دیگر با استفاده از این نظریه موردمطالعه قرار می‌گیرد[۱۲].

ژنراتورهای هیدرودینامیک مغناطیسی در یک چرخه هیدرودینامیک مغناطیسی در نقش یک ماشین الکتریکی ظاهر می‌شوند، به این معنی که می‌توان از انرژی حرکتی خطی ذرات پلاسمای متحرک برای تولید جریان برق مستقیم[2] استفاده کرد و بلعکس می‌توان از انرژی جریان برق مستقیم برای شتاب دادن ذرات پلاسما استفاده نمود، به‌عبارت‌دیگر تبدیل هیدرودینامیک مغناطیسی یک فرآیند دوطرفه است. مبدل‌های هیدرودینامیک مغناطیسی در حال حاضر، علاوه بر آن‌که به‌عنوان نیروگاه‌های تولید برق مطرح می‌باشند، دارای مصارف نظامی هم شده‌اند. به‌عنوان مثال می‌توان از ژنراتورهای هیدرودینامیک مغناطیسی برای تأمین انرژی الکتریکی موردنیاز سیستم‌های هدایت داخلی موشک‌ها و سفینه‌های فضایی و یا از موتورهای هیدرودینامیک مغناطیسی برای پیش‌رانش[3] موشک‌ها استفاده کرد[۱۲].

هنگامی‌که جریان الکتریکی از داخل یک جسم هادی الکتریسیته عبور می‌کند، یک میدان مغناطیسی در اطراف آن جسم تشکیل می‌گردد. به همین نحو، جریان‌های الکتریکی که در درون بدن انسان در حرکت می‌باشند نیز در داخل و اطراف بدن، میدان‌های مغناطیسی خاصی به نام بیومغناطیس تولید می‌کند. دکتر

---

[1] Lorentz Force
[2] Direct Current(DC)
[3] Propulsion

جان زیمرمن برای درک بهتر نحوه عملکرد بدن و تشخیص بیماری‌ها اقدام به اندازه‌گیری دقیق میدان‌های بیومغناطیسی بسیاری از اعضای بدن ازجمله مغز و قلب نموده است. او مشاهده کرد که قلب دارای میدان مغناطیسی پرقدرتی است که تا فاصله ۱۵ فوتی ادامه دارد. مغز و کلیه ارگان‌های بدن نیز دارای میدان‌های بیومغناطیسی مخصوص به خود هستند که آن‌ها را احاطه نموده و با یکدیگر در تعامل می‌باشند[۱۲].

سیالات بیومغناطیس، سیالات بیولوژیکی هستند که در حضور میدان مغناطیسی تحت تأثیر قرار می‌گیرند. شناخت رفتار سیالات بیومغناطیس در حضور میدان‌های مغناطیسی بسیار موردتوجه محققان قرار دارد. تاکنون در این زمینه کاربردهای زیادی در علوم پزشکی و مهندسی پزشکی ارائه شده است که از میان آن‌ها جدایش سلولی[۱]، تحویل هدف‌دار دارو[۲]، بهبود زخم به سبب اثر میدان‌های مغناطیسی را می‌توان نام برد. بارزترین سیال مغناطیسی بیومغناطیس، خون است. هموگلوبین جزء مبتنی بر پروتئین سلول‌های قرمز خون است که اصولاً مسئول انتقال اکسیژن درون بدن انسان است. اکسیژن به اتم‌های آهن موجود در ساختار هموگلوبین پیوند می‌خورد. بررسی‌ها نشان می‌دهد سلول‌های قرمز خون تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی جهت‌گیری می‌کنند. اتصال اکسیژن به هموگلوبین سبب تغییر در حساسیت مغناطیسی هموگلوبین می‌شود به‌طوری‌که هموگلوبین اکسیژن‌دار به‌صورت یک ماده دیامغناطیس[۳] و هموگلوبین بدون اکسیژن به‌صورت یک ماده پارامغناطیس[۴] رفتار می‌کند[۱۲].

۲-۲-۱ رفتار مواد تحت تأثیر میدان مغناطیسی

مواد مختلف بر اساس رفتاری که در میدان مغناطیسی از خود نشان می‌دهند، به چند گروه مواد دیامغناطیس، پارامغناطیس و مواد فرو مغناطیسی[۵] تقسیم‌بندی می‌شوند. مواد دیامغناطیس باعث تضعیف شار مغناطیسی می‌گردند. به‌بیان‌دیگر، جهت جریان سیال در دیامغناطیس واقع در میدان مغناطیسی خارجی چنان است که میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی‌های حاصل از آن ماده، مخالف میدان خارجی است؛ بنابراین مواد دیامغناطیس با آهن‌ربا دفع می‌شوند[۱۲].

---

[1] Cell Separation
[2] Targeted drug delivery
[3] diamagnetic
[4] paramagnetic
[5] ferromagnetic

مواد پارامغناطیس گروهی از مواد هستند که موجب تقویت جزئی میدان مغناطیسی می‌شوند، به‌نحوی‌که اگر نمونه‌ای از یک ماده پارامغناطیس را تحت میدان مغناطیسی قرار دهیم، دوقطبی‌های اتم می‌کوشند با میدان مغناطیسی هم سو شوند. مواد فرومغناطیس از بخش‌های بسیار کوچکی با ابعاد کوچک‌تر از میلی‌متر تشکیل‌شده‌اند، به‌طوری‌که دوقطبی‌های مغناطیسی هر بخش هم خط هستند، اما جهت‌گیری دوقطبی‌های هر بخش با بخش مجاور متفاوت است؛ بنابراین این‌گونه مواد هنگامی تحت تأثیر میدان مغناطیسی قرار می‌گیرند، موجب تقویت میدان مغناطیسی می‌شوند که این اثر به‌مراتب بیشتر از تأثیر مواد پارامغناطیس می‌باشد. اثر نیروی ناشی از میدان مغناطیسی بر سیالات در علم هیدرودینامیک مغناطیسی بررسی می‌شود. علم هیدرودینامیک مغناطیسی از جمع دو علم هیدرودینامیک و الکترومغناطیس پدید آمده است. با این‌حال گستره علمی که هیدرودینامیک مغناطیسی پوشش می‌دهد بسیار فراتر از دامنه علم هیدرودینامیک به‌علاوه الکترومغناطیس است[۱۲].

۲-۳- جریان با دیواره موج‌دار

مهندسی پزشکی علوم فیزیک، شیمی، ریاضی و محاسبات قوانین مهندسی را برای مطالعه زیست‌شناسی، پزشکی، رفتار و سلامت ادغام می‌کند که این مفاهیم دانشی از سطح مولکولی به سطح سیستم‌های بدن به وجود می‌آورد و خلاقیت‌های بیولوژیکی، دستگاه‌ها و دستاوردهای انفورماتیکی را برای پیشگیری، تشخیص و درمان بیماری‌ها و برای بهبود سلامتی را توسعه می‌دهد. این تعریف گسترده است و می‌تواند بسیاری از رشته‌های مختلف مهندسی را در برگیرد. مهندسی پزشکی می‌تواند قوانین مهندسی مواد، شیمی، مکانیک، الکترونیک را برای مطالعه بافت‌های بیولوژیکی[1] به کار ببرد [۳۷].

حرکت موج‌دار[2] از کلمه یونانی Peristaltikos که به معنی کشش و انقباض می‌باشد، گرفته شده است. حرکت موج‌دار، مانند سیستم قلبی عروقی[3] یک جریان تحت کنترل عضله می‌باشد و در بیشتر اعضای بدن اتفاق می‌افتد. جریان موج‌دار جریان تولیدی در مایع موجود در یک لوله انبساط پذیر می‌باشد که یک موج

---

1 Biological Tissue
2 Peristalsis
3 Cardiovascular System

پیشرو در طول دیواره لوله حرکت می‌کند. اگرچه قابلیت ارتجاعی دیوار به‌طور مستقیم وارد معادلات جریان نمی‌شود، ولی روی جریان موج پیشرو در راستای طولی اثر می‌گذارد. جریان موج‌دار به‌صورت گسترده در عملکرد حالب[1] (حالب به طول ۳۰ سانتی‌متر می‌باشد که کلیه را به مثانه وصل می‌کند)، انتقال اسپرم، انتقال صفرا[2] و ... اتفاق می‌افتد. جریان موج‌دار در حالب، روده[3] و معده[4] از نظر مهندسی پزشکی بسیار مهم هستند.

به‌طور طبیعی، در امتداد طول کلی حالب بیشتر از یک موج وجود دارد که اندازه آن در حدود ۳۰ سانتی‌متر می‌باشد. اندازه موج در حدود ۵ میلی‌متر و سرعتش در حدود ۶ سانتی‌متر بر ثانیه می‌باشد. فرکانس انقباضات حدود ۱ تا ۸ در هر دقیقه می‌باشد. هر انقباض حدود ۱/۵ تا ۹ ثانیه به طول می‌انجامد، همچنین فاز انبساط حدود دو برابر فاز انقباض است. فشار در طول انقباض از ۲ تا ۸ میلی‌متر جیوه در لگن خاصره[5]، از ۲ تا ۱۰ میلی‌متر جیوه در قسمت بالایی حالب، و از۲ تا ۱۴ میلی‌متر جیوه در قسمت پایینی تغییر می‌کند[۳۷].

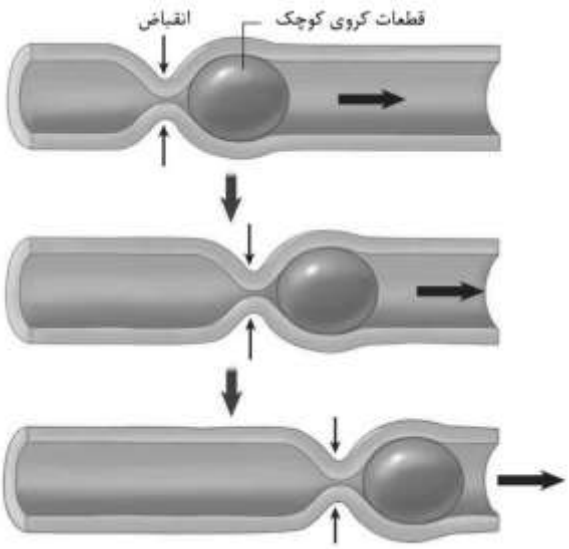
حرکت موج‌دار، حرکات غیرارادی ماهیچه‌های غیرمستقیم و طولی می‌باشد، که در درجه اول در دستگاه گوارش اما گهگاه در دیگر رگ‌های بدن به‌صورت انقباض موج پیشرونده اتفاق می‌افتد. حرکت موج‌دار در مری[6]، معده و روده اتفاق می‌افتد. این امواج می‌توانند کوتاه، به‌صورت موضعی و یا بلند و مداوم باشند. انقباضات که در تمام طول اندام حرکت می‌کنند، وابسته به مکان و زمان وقوعشان می‌باشد. در مری، حرکت موج‌دار، در قسمت بالایی لوله شروع می‌شود و در تمام طول آن حرکت می‌کنند و غذا را به سمت معده هدایت می‌کنند. ذره‌های باقی‌مانده غذا در مری حرکت موج‌دار ثانویه را آغاز می‌کنند که پس مانده‌های غذا را حذف می‌کنند. یک موج، تمام طول رگ را در ۹ ثانیه طی می‌کند. انقباضات شامل حرکت موج‌دار در مری انسان‌ها در مقایسه با سایر پستانداران ضعیف‌تر می‌باشد. در حیوانات نشخوار کننده[7]، مانند گاو، حرکات

---

[1] Ureter
[2] Bile
[3] Intestine
[4] Stomach
[5] Pelvis
[6] Esophagus
[7] Cud-Chewing

موج‌دار برعکس نیز اتفاق می‌افتد به‌طوری‌که غذا از معده به دهان، برای انجام شدن فرایند نشخوار، پس آورده می‌شود[۳۸].

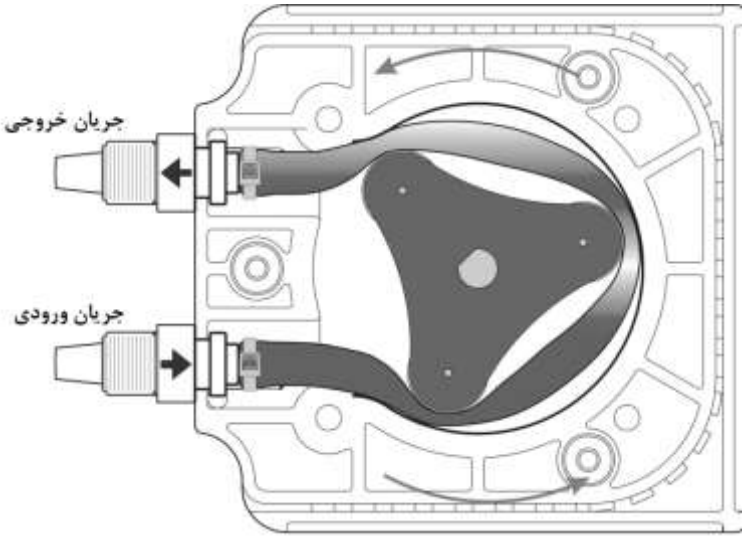
در روده کوچک، تحریک موضعی[1] عضله صاف روده توسط حضور ذرات غذا باعث انقباضاتی می‌شوند که تمایل دارند از نقطه تحریک در هر دو جهت حرکت کنند. در حالت معمولی، موج انقباضات در جهت دهان به‌سرعت مهار می‌شود، درحالی‌که انقباضات متحرک دور از دهان تمایل به ادامه دادن این حرکت، دارند. معمولاً، حرکات موج‌دار در روده کوچک در فواصل نامنظم اتفاق می‌افتند و در فواصل مختلف حرکت می‌کنند، که برای جذب غذا به دیواره روده و حرکت آن‌ها به سمت جلو استفاده می‌شوند[۳۷].



شکل ۲-۱: حرکت موج‌دار

[1] Local Stimulation

در روده بزرگ، حرکت موج‌دار یا انتقال جرم ادامه‌دار و پیشرونده می‌باشد، که این پیشرفت تا مقعد ادامه دارد، و مواد زائد را در جلوی امواج پیش می‌برد. زمانی که این تحرکات به‌اندازه کافی شدید باشند توده مدفوع را به سمت مقعد هدایت می‌کنند، و سپس این امواج برای ذخیره‌سازی به‌صورت برعکس به انتهای روده بزرگ بازمی‌گردند. حرکت موج‌دار عموماً در کمک به خروج گاز از روده بزرگ و کنترل رشد باکتری‌ها، بسیار مهم می‌باشند [۳۷]. جریان موج‌دار کاربردهای زیادی در صنعت دارد. رایج‌ترین استفاده صنعتی، پمپ موج‌دار می‌باشد که نوعی از پمپ جابجایی مثبت است که برای پمپ کردن سیالات متنوع استفاده می‌شود.

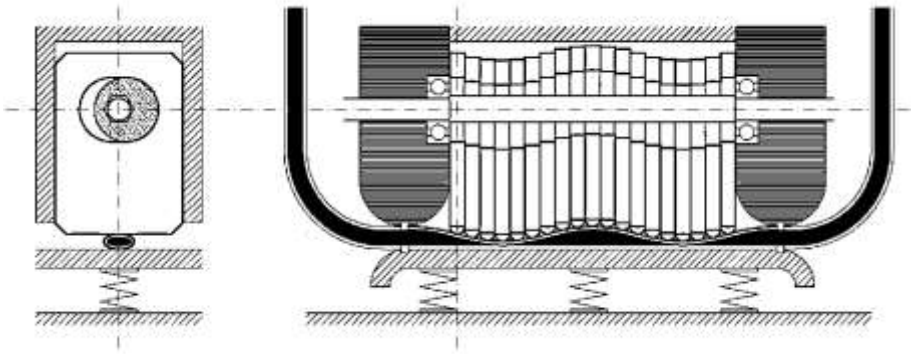


شکل ۲-۲: شماتیکی از پمپ موج‌دار

جریان در داخل محفظه پمپ غلتکی به یک لوله منعطف مجهز شده است که یک روتور به محیط خارجی متصل شده که لوله منعطف را متراکم می کندکه باعث می‌شود به سیال فشار بیاورد و سیال داخل لوله پمپ شود. هنگامی‌که لوله به حالت طبیعی خودش بازمی‌گردد، جریان سیال به پمپ القاء می‌گردد. این فرایند در بسیاری از سیستم‌های بیولوژیکی نظیر دستگاه گوارش استفاده می‌گردد. سیال سپس در فشار محیط به سمت خروجی پمپ انتقال می‌یابد. پمپ‌های موج‌دار به‌طور مداوم ادامه می‌یابند و می‌توانند از طریق چرخش‌های کوچک تقسیم شوند تا مقدار کمی از سیال را به بدن فرد برسانند.. همچنین از این گونه پمپ‌ها در ماشین‌های قلب-ریه برای گردش خون در حین عمل بای پس[1] (درمان کاهش خون‌رسانی سرخرگ‌های

[1] Bypass Surgery

قلب) استفاده می‌شود به طوری‌که لخته خون قابل توجهی تولید نمی کنند[۳۷].



شکل ۲-۳: شماتیکی از پمپ موج‌دار خطی[۲۸]

دو پدیده جالب در ارتباط با جریان‌های موج‌دار به دام افتادگی سیال[1] و برگشت مواد[2] می‌باشد. مورد اول، توسعه و انتقال گردابه‌های آزاد جریان پایین دست معروف به بخش‌های کروی کوچک سیال را توضیح می‌دهد. مورد دوم، به جابه‌جایی خالص ذرات سیال بالادست در مقابل امواج مرزی متحرک اشاره می‌کند. این دو پدیده از اهمیت فیزیولوژیکی زیادی برخوردار هستند، به‌طوری‌که آن‌ها در مقابل تشکیل لخته در خون، انتقال پاتولوژیکی[3] باکتری مسئول هستند. از نقطه نظر مکانیک سیالات، این پدیده‌ها، پیچیدگی را نشان می‌دهند، اما همچنین برای مطالعه بنیادی جریان‌های موج‌دار ایجاد انگیزه می‌کنند[۲۸].

---

1 Fluid Trapping
2 Material Reflux
3 Pathological Transport

۲-۴- محیط متخلخل

مکانیک محیط‌های متخلخل شاخه‌ای از فیزیک است که به رفتار موادی متخلخل را که با یک سیال مثل آب اشباع شده‌اند را بررسی می‌کند. ماده متخلخل به ماده‌ای گفته می‌شود که شامل یک شبکه بهم پیوسته از خلل و فرج[1] باشد که توسط آب یا سیال دیگر پر شده باشد. بسیاری از مواد طبیعی مثل خاک یا بافت‌های بدن مثل غضروف، استخوان، ماهیچه مثال‌هایی از مواد متخلخل می‌باشند.

معادلات مکانیک محیط‌های متخلخل طبق معادلات بیو از معادلات زیر بدست آورده می‌شوند:

۱. معادله خطی الاستیسیته
۲. معادلات ناویراستوکس برای سیال لزج
۳. قانون دارسی برای عبور سیال از خلل و فرج

تخلخل: این کمیت معیاری برای تشخیص اندازه‌ی خلل و فرج موجود در محیط متخلخل می‌باشد و به صورت نسبت حجم منافذ و سوراخ‌های موجود در ماده به حجم کل آن می‌باشد. این کمیت با عنوان تخلخل[2] کامل نیز شناخته می‌شود. عبارت دیگری در همین زمینه به نام تخلخل موثر نیز ارائه شده است که فقط محدود به فضایی از محیط متخلخل می‌شود که در آن جریان وجود دارد.

نفوذپذیری: نفوذپذیری[3] خاصیتی از محیط متخلخل می‌باشد که به سیال اجازه می‌دهد، بدون این‌که تأثیر شیمیایی و یا فیزیکی از محیط بپذیرد، از محیط متخلخل عبور کند. هرچه مقدار این کمیت برای یک محیط بیشتر باشد، عبور سیال از آن نیز آسان‌تر است. این کمیت یک خاصیت محیط متخلخل است و از ویسکوزیته یا چگالی سیال مستقل می‌باشد. در بررسی جریان در محیط متخلخل، معمولا این کمیت همگن و همسانگرد در نظر گرفته می‌شود. علاوه بر این اکثراً نسبت به زمان نیز ثابت فرض می‌شود.

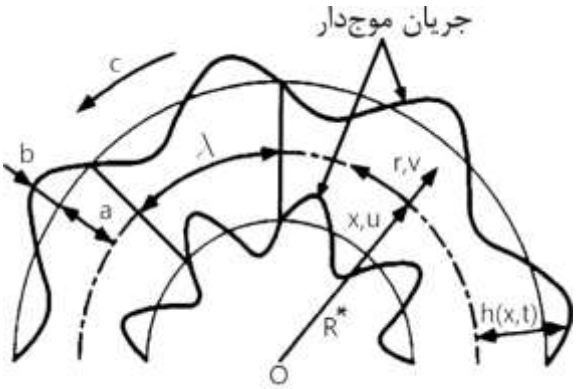
---

[1] Pores
[2] Porosity
[3] Permeability

فصل ۳ معرفی مسئله، روابط حاکم، الگوریتم حل مسئله، گسسته‌سازی عددی

۳-۱- تعریف هندسه مسئله

یک کانال منحنی دوبعدی نامحدود با محیطی متخلخل که با نانوسیال تراکم ناپذیر پرشده است در نظر گرفته می‌شود. کانال مانند یک دایره با مرکز O و شعاع R می‌باشد که یک موج سینوسی با سرعت c روی دیواره آن منتشر می‌شود (شکل۱).



شکل ۳-۱: هندسه مسئله

مختصات استوانه‌ای $(\bar{R},\bar{X})$ برای کانال در نظر گرفته می شود که $\bar{X}$ راستای انتشار موج و $\bar{R}$ عمود بر آن است. میدان مغناطیسی در راستای شعاعی با شدت $H_0^*(=H_0R^*/(R^*+\bar{R}))$ (که در آن H_0 میدان مغناطیسی ثابت است) و چشمه حرارتی[1] با قدرت Q_0 به کانال اعمال می‌شوند. بنابراین میدان مغناطیسی کلی برای کانال به صورت $\boldsymbol{H}(H_0^*+\bar{h}_{\bar{r}}(\bar{R},\bar{X},\bar{t}),\bar{h}_{\bar{x}}(\bar{R},\bar{X},\bar{t}),0)$ نوشته می شود. معادله کلی دیواره‌ها توسط رابطه زیر بیان می‌شود[۳۹]:

$$\bar{h}(\bar{X},\bar{t})=a+b\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\bar{X}-c\bar{t}) \qquad (۱-۳)$$

در رابطه فوق λ طول موج، a نصف عرض کانال، $\bar{t}$ زمان و b دامنه موج می باشد. همچنین کمیت‌های $\bar{V}$ و $\bar{U}$، به ترتیب کمیت‌های سرعت در راستای شعاعی$(\bar{R})$ و راستای محوری $(\bar{X})$ در حالت ثابت می باشند. در نتیجه میدان سرعت را می توان به صورت زیر نشان داد[۳۹]:

$$\boldsymbol{V}=[\bar{V}(\bar{R},\bar{X},\bar{t}),\bar{U}(\bar{R},\bar{X},\bar{t}),0] \qquad (۲-۳)$$

۳-۲- معادلات حاکم

معادلات پیوستگی، حرکت، انرژی و غلظت برای یک کانال منحنی دوبعدی نامحدود که با نانوسیال تراکم ناپذیر پرشده است و میدان مغناطیسی در راستای شعاعی و یک چشمه حرارتی با قدرت Q_0 برآن اعمال می‌گردد، در ادامه به‌دست آورده می‌شود.

۳-۲-۱ معادله پیوستگی

با استفاده از تعریف زیر، معادله پیوستگی در مختصات استوانه‌ای محاسبه می‌گردد:

$$div(\vec{V})=0$$

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial(R^*+\bar{R})}+\frac{1}{R^*+\bar{R}}\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{\theta}}+\bar{V}\right)=0\rightarrow\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{R}}+\left(\frac{1}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{\theta}}+\frac{1}{R^*+\bar{R}}\bar{V}\right)=0$$

$$\rightarrow\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{R}}+\left(\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{X}}+\frac{\bar{V}}{R^*+\bar{R}}\right)=0\ \rightarrow$$

[1] Source Term

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{R}} + \left(\frac{R^*}{R^* + \bar{R}}\right)\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} + \frac{\bar{V}}{R^* + \bar{R}} = 0 \qquad (۳-۳)$$

۳-۲-۲ معادلات حرکت

فرم کلی معادله حرکت در مختصات استوانه‌ای در محیط متخلخل به‌همراه میدان مغناطیسی القایی شعاعی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\rho_{nf}\frac{D\vec{V}}{Dt} = div(\bar{\boldsymbol{\tau}}) - \mu_e\left[\left(\vec{H}^+ \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{H}^+ + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{H}^{+2}\right] - \frac{\mu_{nf}}{K_p}\vec{V} + \rho g \beta \Delta T \qquad (۴-۳)$$

که در رابطه بالا، ρ_{nf} بیانگر چگالی نانوسیال، μ_e بیانگر نفوذپذیری مغناطیسی و K_p بیانگر نفوذپذیری محیط متخلخل می‌باشد.

با استفاده از تعریف مشتق مادی، اولین عبارت سمت چپ معادله فوق به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \bar{t}} + \left[\vec{\nabla}\vec{V}\right]\vec{V} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}}(\bar{V}\vec{e}_r + \bar{U}\vec{e}_x) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{R}} & \frac{1}{R^* + \bar{R}}\left(R^*\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} - \bar{U}\right) \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{R}} & \frac{1}{R^* + \bar{R}}\left(R^*\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} + \bar{V}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}}\vec{e}_r + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}}\vec{e}_x + \left(\bar{V}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{R}} + \frac{\bar{U}}{R^* + \bar{R}}\left(R^*\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} - \bar{U}\right)\right)\vec{e}_r + \left(\bar{V}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{R}} + \frac{\bar{U}}{R^* + \bar{R}}\left(R^*\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} + \bar{V}\right)\right)\vec{e}_x$$

$$= \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \bar{V}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{R}} + \frac{R^*\bar{U}}{R^* + \bar{R}}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} - \frac{\bar{U}^2}{R^* + \bar{R}}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + \bar{V}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{R}} + \frac{R^*\bar{U}}{R^* + \bar{R}}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} + \frac{\bar{U}\bar{V}}{R^* + \bar{R}}\right)\vec{e}_x \qquad (۵-۳)$$

عبارت $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد [۲۵]:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = -p\bar{\boldsymbol{I}} + \mu_{nf}\left(\vec{\nabla}\vec{V} + \vec{\nabla}\vec{V}^T\right) \qquad (۶-۳)$$

که در آن $\bar{\mathbf{I}}$ ، p و μ_{nf} به ترتیب بیانگر ماتریس همانی[1]، فشار و لزجت دینامیکی نانوسیال می‌باشد.

[1] Identity Tensor

با استفاده از تعاریف دیورژانس اولین عبارات سمت راست رابطه (۳-۴) به‌صورت زیر ساده می‌شوند:

$$div(\bar{\boldsymbol{\tau}}) = div\left(-p\bar{\boldsymbol{I}} + \mu_{nf}\left(\vec{\nabla}\vec{V} + \vec{\nabla}\vec{V}^T\right)\right)$$

$$= div\begin{bmatrix} -\bar{p} + 2\mu_{nf}\dfrac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{R}} & \dfrac{\mu_{nf}}{R^* + \bar{R}}\left(R^*\dfrac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} - \bar{U}\right) + \mu_{nf}\dfrac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{R}} \\ \dfrac{\mu_{nf}}{R^* + \bar{R}}\left(R^*\dfrac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} - \bar{U}\right) + \mu\dfrac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{R}} & -\bar{p} + \dfrac{2\mu_{nf}}{R^* + \bar{R}}\left(R^*\dfrac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} + \bar{V}\right) \end{bmatrix}$$

با ساده کردن رابطه فوق، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} = \Bigg(& -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{R}} + 2\mu_{nf}\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{R}^2} + \mu_{nf}\left(\frac{R^*}{R^* + \bar{R}}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{X}^2} - \frac{3\mu_{nf}R^*}{(R^* + \bar{R})^2}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} + \frac{\mu_{nf}R^*}{R^* + \bar{R}}\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{R}\partial \bar{X}} \\ & + \frac{2\mu_{nf}}{R^* + \bar{R}}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{R}} - \frac{2\mu_{nf}}{(R^* + \bar{R})^2}\bar{V}\Bigg)\vec{e}_r \\ & + \Bigg(\frac{\mu_{nf}R^*}{R^* + \bar{R}}\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{R}\partial \bar{X}} + \frac{3\mu_{nf}R^*}{(R^* + \bar{R})^2}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} - \frac{\mu_{nf}}{(R^* + \bar{R})^2}\bar{U} + \mu_{nf}\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{R}^2} \\ & - \frac{R^*}{R^* + \bar{R}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{X}} + 2\mu_{nf}\left(\frac{R^*}{R^* + \bar{R}}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{X}^2} + \frac{\mu_{nf}}{R^* + \bar{R}}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{R}}\Bigg)\vec{e}_x \end{aligned} \tag{۳-۷}$$

در رابطه (۳-۴)، با استفاده از تعریف گرادیان، می توان عبارت $(\vec{H}^+ \cdot \vec{\nabla})\vec{H}^+$ را به‌صورت زیر ساده کرد:

$$(\vec{H}^+ \cdot \vec{\nabla})\vec{H}^+ = grad(\vec{H}^+)\vec{H}^+ = grad\left(\left[\frac{R^*H_0}{R^* + \bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}}\right]\vec{e}_r + \bar{h}_{\bar{x}}\vec{e}_x\right)\vec{H}^+$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \bar{R}}\left(\dfrac{R^*H_0}{R^* + \bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}}\right) & \dfrac{1}{R^* + \bar{R}}\left(R^*\dfrac{\partial}{\partial \bar{X}}\left(\dfrac{R^*H_0}{R^* + \bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}}\right) - \bar{h}_{\bar{x}}\right) \\ \dfrac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}} & \dfrac{1}{R^* + \bar{R}}\left(R^*\dfrac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{X}} + \dfrac{R^*H_0}{R^* + \bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{R^*H_0}{R^* + \bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}} \\ \bar{h}_{\bar{x}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \Bigg(\Bigg(& -\frac{R^*H_0}{(R^* + \bar{R})^2} + \frac{\partial \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{R}}\Bigg)\left(\frac{R^*H_0}{R^* + \bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}}\right) + \left(\frac{R^*}{R^* + \bar{R}}\frac{\partial \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{X}} - \frac{\bar{h}_{\bar{x}}}{R^* + \bar{R}}\right)\bar{h}_{\bar{x}}\Bigg)\vec{e}_r \\ & + \Bigg(\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}}\left(\frac{R^*H_0}{R^* + \bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}}\right) + \left(\frac{R^*}{R^* + \bar{R}}\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{X}} + \frac{R^*H_0}{(R^* + \bar{R})^2} + \frac{\bar{h}_{\bar{r}}}{R^* + \bar{R}}\right)\bar{h}_{\bar{x}}\Bigg)\vec{e}_x \end{aligned}$$

در نهایت عبارت فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$= \left(-\frac{(R^* H_0)^2}{(R^* + \bar{R})^3} + \frac{R^* H_0}{R^* + \bar{R}} \frac{\partial \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{R}} - \frac{R^* H_0}{(R^* + \bar{R})^2} \bar{h}_{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{R}} \bar{h}_{\bar{r}} + \frac{R^*}{R^* + \bar{R}} \frac{\partial \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{X}} \bar{h}_{\bar{x}} - \frac{\bar{h}_{\bar{x}}^2}{R^* + \bar{R}} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{R^* H_0}{R^* + \bar{R}} \frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}} + \frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}} \bar{h}_{\bar{r}} + \frac{R^*}{R^* + \bar{R}} \frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{X}} \bar{h}_{\bar{x}} + \frac{R^* H_0}{(R^* + \bar{R})^2} \bar{h}_{\bar{x}} + \frac{\bar{h}_{\bar{r}} \bar{h}_{\bar{x}}}{R^* + \bar{R}} \right) \vec{e}_x \tag{۸-۳}$$

همچنین با استفاده از تعریف گرادیان برای عبارت ${\vec{\nabla} \vec{H}^+}^2$، عبارت زیر بدست می‌آید:

$$\vec{\nabla} {\vec{H}^+}^2 = \vec{\nabla}\left(\vec{H}^+ \cdot \vec{H}^+\right) = \frac{\partial {H^+}^2}{\partial \bar{R}} \vec{e}_r + \frac{R^*}{R^* + \bar{R}} \frac{\partial {H^+}^2}{\partial \bar{X}} \vec{e}_x \tag{۹-۳}$$

$${H^+}^2 = \left[\frac{R^* H_0}{R^* + \bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}} \right]^2 + \bar{h}_{\bar{x}}^2 \tag{۱۰-۳}$$

با جایگذاری روابط (۳-۵) تا (۳-۱۰) در رابطه (۳-۴)، و با ساده‌سازی آن، معادله حرکت در راستای شعاعی $\bar{R}$ و در راستای محوری $\bar{X}$ به‌ترتیب زیر نوشته می‌شوند:

$$\rho_{nf} \left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}^2} \left(\bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{R}} + \frac{R^* \bar{U}}{R^* + \bar{R}} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} - \frac{\bar{U}^2}{R^* + \bar{R}} \right) \right) = \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{R}} + \frac{2\mu_{nf}}{R^* + \bar{R}} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{R}} + 2\mu_{nf} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{R}^2} + \mu_{nf} \left(\frac{R^*}{R^* + \bar{R}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{X}^2} - \frac{3\mu_{nf} R^*}{(R^* + \bar{R})^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} + \frac{\mu_{nf} R^*}{R^* + \bar{R}} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{R} \partial \bar{X}} - \frac{2\mu_{nf}}{(R^* + \bar{R})^2} \bar{V} \right) - \frac{\mu_{nf}}{K_p} \bar{V} + \mu_e \left(-\frac{(R^* H_0)^2}{(R^* + \bar{R})^3} + \frac{R^* H_0}{R^* + \bar{R}} \frac{\partial \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{R}} - \frac{R^* H_0}{(R^* + \bar{R})^2} \bar{h}_{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{R}} \bar{h}_{\bar{r}} + \frac{R^*}{R^* + \bar{R}} \frac{\partial \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{X}} \bar{h}_{\bar{x}} - \frac{\bar{h}_{\bar{x}}^2}{R^* + \bar{R}} \right) - \frac{\mu_e}{2} \frac{\partial {H^+}^2}{\partial \bar{R}} \tag{۱۱-۳}$$

$$\rho_{nf}\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{t}}+\frac{1}{\bar{\varepsilon}^2}\left(\bar{V}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{R}}+\frac{R^*\bar{U}}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{X}}+\frac{\bar{U}\bar{V}}{R^*+\bar{R}}\right)\right)$$
$$=\left(-\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{X}}+\frac{\mu_{nf}R^*}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial\bar{R}\partial\bar{X}}+\frac{3\mu_{nf}R^*}{(R^*+\bar{R})^2}\frac{\partial\bar{V}}{\partial\bar{X}}-\frac{\mu_{nf}}{(R^*+\bar{R})^2}\bar{U}\right.$$
$$+\mu_{nf}\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\bar{R}^2}+2\mu_{nf}\left(\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\right)^2\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\bar{X}^2}+\frac{\mu_{nf}}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{R}}\Bigg)-\frac{\mu_{nf}}{K_p}\bar{U}$$
$$-\mu_e\left(\frac{R^*H_0}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial\bar{h}_{\bar{x}}}{\partial\bar{R}}+\frac{\partial\bar{h}_{\bar{x}}}{\partial\bar{R}}\bar{h}_{\bar{r}}+\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial\bar{h}_{\bar{x}}}{\partial\bar{X}}\bar{h}_{\bar{x}}+\frac{R^*H_0}{(R^*+\bar{R})^2}\bar{h}_{\bar{x}}\right.$$
$$\left.+\frac{\bar{h}_{\bar{r}}\bar{h}_{\bar{x}}}{R^*+\bar{R}}\right)-\frac{\mu_e}{2}\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial H^{+2}}{\partial\bar{X}}+\rho g\beta(\bar{T}-\bar{T}_0)+\rho g\beta(\bar{C}-\bar{C}_0) \qquad (۱۲-۳)$$

۳-۲-۳ معادله انرژی

معادله انرژی با درنظر گرفتن عبارت تلفات ویسکوز[1] و همچنین حرکت ترموفورتیک و براونی در مختصات استوانه‌ای برای یک محیط متخلخل در حضور چشمه حرارتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود[۴۰, ۴۱]:

$$\frac{D\bar{T}}{D\bar{t}}=\alpha_{nf}\left(\vec{\nabla}^2\bar{T}\right)+\tau\bar{\varepsilon}\left(\mathrm{D_B}(\nabla\bar{C}.\nabla\bar{T})+\frac{\mathrm{D_T}}{T_m}(\nabla\bar{T}.\nabla\bar{T})\right)+\frac{\mu_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}\bar{\Phi}+\frac{1}{(\rho C_p)_{nf}}Q_0 \qquad (۱۳-۳)$$

در رابطه بالا، کمیت‌های $\bar{T}$، $\mathrm{D_B}$، $\mathrm{D_T}$ و Q_0 به‌ترتیب بیانگر دما، ضریب پخش براونی، ضریب پخش ترموفورتیک و چشمه حرارتی می‌باشند. همچنین $\bar{\varepsilon}$ معرف تخلخل محیط متخلخل می‌باشد و τ بیانگر نسبت ظرفیت گرمایی مخصوص مواد نانوذرات و ظرفیت گرمایی مخصوص سیال و $\bar{\Phi}$ بیانگر عبارت تلفات ویسکوز می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_{nf}=\frac{k^*_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}\ ,\tau=\frac{(\rho C_p)_p}{(\rho C_p)_f}$$

عبارت تلفات ویسکوز موجود در رابطه (۳-۱۳) را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

[1] Viscous Dissipation

$$\bar{\Phi} = \left(2\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{R}}\right)^2 + \left(\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}} - \frac{\bar{U}}{R^*+\bar{R}}\right)\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{R}} - \frac{\bar{U}}{R^*+\bar{R}} + \frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}}\right) + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{R}}\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{R}} - \frac{\bar{U}}{R^*+\bar{R}} + \frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{X}}\right) + 2\left(\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} + \frac{\bar{V}}{R^*+\bar{R}}\right)^2\right)$$

در این روابط k_{nf}^*، ضریب انتشار حرارتی نانوسیال، ρ_p چگالی ذره و ρ_f چگالی سیال می‌باشند. با ساده کردن رابطه(۳-۱۲)، معادله انرژی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \frac{R^*\bar{U}}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{X}} + \bar{V}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{R}} = \alpha_{nf}\left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{R}^2} + \frac{1}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{R}} + \left(\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{X}^2}\right) + \left(\frac{\nu}{C_p}\right)_{nf}\bar{\Phi} + \tau\bar{\varepsilon}\left(\mathrm{D_B}(\nabla\bar{C}.\nabla\bar{T}) + \frac{\mathrm{D_T}}{T_m}(\nabla\bar{T}.\nabla\bar{T})\right) + \frac{1}{(\rho C_p)_{nf}}Q_0 \quad (۱۴-۳)$$

۳-۲-۴ معادله غلظت

حالت کلی معادله غلظت به صورت زیر می‌باشد[۴۲]:

$$\frac{D\bar{C}}{D\bar{t}} = \left(\mathrm{D_B}\nabla^2\bar{C} + \frac{\mathrm{D_T}}{T_m}\nabla^2\bar{T}\right) \quad (۱۵-۳)$$

که شکل ساده شده این عبارت در محیط متخلخل به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\left[\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}}\frac{R^*\bar{U}}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{X}} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}}\bar{V}\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{R}}\right] = \mathrm{D_B}\left[\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \bar{R}^2} + \frac{1}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{R}} + \left(\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \bar{X}^2}\right] + \frac{\mathrm{D_T}}{T_m}\left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{R}^2} + \frac{1}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{R}} + \left(\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{X}^2}\right] \quad (۱۶-۳)$$

که در این رابطه، $\bar{\mathrm{C}}$ بیانگر غلظت می‌باشد.

۳-۳- معادلات حاکم در مختصات متحرک

با توجه به این‌که روابط فوق همگی در مختصات ثابت $(\bar{X},\bar{R},\bar{U},\bar{V})$ بیان شده‌اند و مسئله دارای هندسه ای متحرک می‌باشد، مختصات و سرعت در حالت ثابت با استفاده از روابط زیر به مختصات و سرعت در حالت موجدار $(\bar{x},\bar{r},\bar{u},\bar{v})$ تبدیل می‌شوند[۲۵]:

$$\bar{x}=\bar{X}-c\bar{t},\ \ \bar{r}=\bar{R},\ \ \bar{u}=\bar{U}-c,\ \ \bar{v}=\bar{V} \tag{۳-۱۷}$$

برای ساده‌تر شدن روابط پیوستگی، حرکت، انرژی و غلظت تعریف کمیت‌های بدون بعد و همچنین فرضیات ساده کننده ضروری می‌باشد. در این قسمت کمیت‌های بدون بعد مهم آورده شده است.

$$x=\frac{\bar{x}}{\lambda},\qquad r=\frac{\bar{r}}{a},\qquad t=\frac{c\bar{t}}{\lambda},$$

$$k=\frac{R^*}{a},\qquad u=\frac{\bar{u}}{c},\qquad v=\frac{\bar{v}}{c},$$

$$\delta=\frac{a}{\lambda},\qquad \mathrm{Pr}=\frac{(\mu C_p)_{nf}}{k^*},\qquad \bar{h}_{\bar{r}}=\delta\frac{kH_0}{k+r}\frac{\partial\phi}{\partial x},$$

$$\bar{h}_{\bar{x}}=-H_0\frac{\partial\phi}{\partial r},\qquad p=\frac{a^2\bar{p}}{c\lambda\mu_{nf}},\qquad \Omega=\frac{\bar{C}-\bar{C}_0}{\bar{C}_1-\bar{C}_0},$$

$$\gamma=\frac{\bar{T}-\bar{T}_0}{\bar{T}_1-\bar{T}_0},\qquad \mathrm{Re}=\frac{ac\rho_{nf}}{\mu_{nf}},\qquad \mathrm{Da}=\frac{K_P}{a^2}, \tag{۳-۱۸}$$

$$\mathrm{ReS}^2=\frac{a}{c\mu_{nf}}H_0^2\mu_e,\qquad E=-\frac{\bar{E}}{cH_0\mu_e},\qquad \phi=\frac{\bar{\phi}}{H_0a},$$

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial r},\qquad v=\delta\frac{k}{k+r}\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \mathrm{S}^2=\frac{H_0^2}{c^2}\frac{\mu_e}{\rho},$$

$$\mathrm{Ec}=\frac{c^2}{c_p(\bar{T}_1-\bar{T}_0)},\qquad \mathrm{M}^2=\mathrm{ReS}^2\mathrm{R_m},\qquad \mathrm{R_m}=\sigma\mu_e ac,$$

$$\zeta=\frac{Q_0a^2}{(\bar{T}_1-\bar{T}_0)\nu_{nf}(\rho C_p)_{nf}},\qquad \mathrm{Nb}=\frac{\tau\mathrm{D_B}(\bar{C}_1-\bar{C}_0)}{\nu_{nf}},\qquad \mathrm{Nt}=\frac{\tau\mathrm{D_T}(\bar{T}_1-\bar{T}_0)}{\nu_{nf}T_m},$$

$$\mathrm{Gc} = \frac{g\beta a^2(\bar{C}_1 - \bar{C}_0)}{\nu_{nf} c} \quad , \qquad \mathrm{Gr} = \frac{g\beta a^2(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)}{\nu_{nf} c} \quad , \tag{۱۹-۳}$$

$$p_m = p + \frac{1}{2} Re\, \delta \frac{\mu_e (H^+)^2}{\rho c^2} \ .$$

که در روابط فوق کمیت‌های δ، Pr، Ec، Nb، Nt، Re، $\mathrm{R_m}$، S و M به ترتیب بیانگر موج، عدد پرانتل، عدد اکرت، کمیت حرکت براونی، کمیت حرکت ترموفورتیک، عدد رینولدز، عدد رینولدز مغناطیسی[1]، عدد استومر[2] و عدد هارتمن می‌باشند. فشار کل p_m برابر مجموع فشار معمولی و فشار مغناطیسی می‌باشد. همچنین دراینجا E قدرت میدان الکتریکی، ψ تابع جریان، γ دمای بدون بعد، Ω غلظت بدون بعد و ϕ تابع نیروی مغناطیسی، ζ عبارت بدون بعد چشمه حرارتی، Gr عدد گراشف و Gc عدد بدون بعد غلظت درنظر گرفته شده‌اند. همچنین کمیت بدون بعد Da، معرف عدد دارسی می‌باشد.

با استفاده از کمیت‌های بدون بعد ذکر شده در بالا و همچنین فرض طول موج بلند ($\delta \to 0$)، معادلات (۳-۱۱)، (۳-۱۲)، (۳-۱۴) و (۳-۱۶) را می‌توان به‌صورت زیر ساده و بدون بعد کرد.

ابتدا با تبدیل مختصات و سرعت رابطه (۳-۱۱) از حالت ثابت به حالت متحرک، رابطه‌ای به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\rho_{nf}\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}^2}\left(\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{R^*(\bar{u}+c)}{R^*+\bar{r}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{(\bar{u}+c)^2}{R^*+\bar{r}}\right)\right) \\
= \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{2\mu_{nf}}{R^*+\bar{r}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + 2\mu_{nf}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \mu_{nf}\left(\frac{R^*}{R^*+\bar{r}}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{3\mu_{nf}R^*}{(R^*+\bar{r})^2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right. \\
\left. + \frac{\mu_{nf}R^*}{R^*+\bar{r}}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}\partial \bar{x}} - \frac{2\mu_{nf}}{(R^*+\bar{r})^2}\bar{v}\right) - \frac{\mu_{nf}}{K_p}\bar{v} \\
+ \mu_e\left(-\frac{(R^*H_0)^2}{(R^*+\bar{r})^3} + \frac{R^*H_0}{R^*+\bar{r}}\frac{\partial \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{r}} - \frac{R^*H_0}{(R^*+\bar{r})^2}\bar{h}_{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{r}}\bar{h}_{\bar{r}} + \frac{R^*}{R^*+\bar{r}}\frac{\partial \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{x}}\bar{h}_{\bar{x}}\right. \\
\left. - \frac{\bar{h}_{\bar{x}}^2}{R^*+\bar{r}}\right) - \frac{\mu_e}{2}\frac{\partial {H^+}^2}{\partial \bar{r}}
\end{aligned}$$

[1] Magnetic Prandtl Number
[2] Stomer Number

با توجه به تعریف مقادیر بدون بعد $v = \delta \frac{k}{k+r}\frac{\partial \psi}{\partial x}$ و $\bar{h}_{\bar{r}} = \delta \frac{kH_0}{k+r}\frac{\partial \phi}{\partial x}$ و همچنین با استفاده از فرض طول موج بلند، معادله فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\rho_{nf}\left(-\frac{c^2}{\bar{\varepsilon}^2 a}\frac{(u+1)^2}{k+r}\right)$$
$$= \left(-\frac{c\lambda\mu_{nf}}{a^3}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{c}{a\lambda}\frac{3\mu_{nf}k}{(k+r)^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{a\lambda}\frac{\mu_{nf}k}{k+r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial x}\right)$$
$$+ \frac{\mu_e H_0^2}{a}\left(\frac{k^2}{(k+r)^3} + \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2}{k+r}\right) - \frac{\mu_e H_0^2}{2a}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left[\frac{k}{k+r}\right]^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2\right)$$
$$= \left(-\frac{c\lambda\mu_{nf}}{a^3}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{c}{a\lambda}\frac{3\mu_{nf}k}{(k+r)^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{a\lambda}\frac{\mu_{nf}k}{k+r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial x}\right) + \frac{\mu_e H_0^2}{a}\left(\frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2}{k+r}\right)$$
$$- \frac{\mu_e H_0^2}{2a}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2\right)$$
$$= \left(-\frac{c\mu_{nf}}{a^2\delta}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{c\delta}{a^2}\frac{3\mu_{nf}k}{(k+r)^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c\delta}{a^2}\frac{\mu_{nf}k}{k+r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial x}\right) + \frac{\mu_e H_0^2}{a}\left(\frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2}{k+r}\right)$$
$$- \frac{\mu_e H_0^2}{2a}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2\right)$$

می‌توان عبارت بالا را به‌صورت زیر نوشت:

$$\rho_{nf}\left(-\frac{c^2\delta}{\bar{\varepsilon}^2 a}\frac{(u+1)^2}{k+r}\right)$$
$$= \left(-\frac{c\mu_{nf}}{a^2}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{c\delta^2}{a^2}\frac{3\mu_{nf}k}{(k+r)^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c\delta^2}{a^2}\frac{\mu_{nf}k}{k+r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial x}\right) + \frac{\mu_e H_0^2\delta}{a}\left(\frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2}{k+r}\right)$$
$$- \frac{\mu_e H_0^2\delta}{2a}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2\right)$$

و با توجه به فرض طول موج بلند($\delta \to 0$)، رابطه ساده شده زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{۲۰-۳}$$

با اعمال مقادیر بدون بعد در رابطه (۳-۱۲) و با استفاده از تعریف $\delta = \frac{a}{\lambda} \to 0$، شکل ساده شده رابطه مذکور به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} 0 = &\left(-\frac{c\mu_{nf}}{a^2}\frac{k}{k+r}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{c}{a^2}\frac{\mu_{nf}}{(k+r)^2}(u+1) + \frac{c}{a^2}\mu_{nf}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{c}{a^2}\frac{\mu_{nf}}{k+r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\mu_{nf}c}{K_p}(u+1) \\ &- \mu_e\left(-\frac{1}{a}\frac{k}{k+r}H_0^2\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} - \frac{1}{a}\frac{kH_0^2}{(k+r)^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right) + \rho g\beta\gamma(\bar{T}_1 - \bar{T}_0) \\ &+ \rho g\beta\Omega(\bar{C}_1 - \bar{C}_0) \to \end{aligned}$$

با ساده کردن رابطه بالا و همچنین استفاده از تعاریف $\frac{K_p}{a^2} = \mathrm{Da}$ ، $u = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$ ، رابطه فوق به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = &-\frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right) - \frac{k+r}{k}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}\right) - \frac{1}{k(k+r)}(M^2k^2 - 1)\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{k(k+r)} \\ &- \frac{k+r}{k}\frac{1}{\mathrm{Da}}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial r} + 1\right) + \frac{k+r}{k}(\mathrm{Gr}\gamma + \mathrm{Gc}\Omega) \\ &+ \mathrm{M}^2\left[\frac{k}{(k+r)}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{Re_m}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{۲۱-۳}$$

با توجه به رابطه فوق، میدان الکتریکی (E) به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود.

$$E = \left[\frac{k}{(k+r)}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{R_m}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right)\right] \tag{۲۲-۳}$$

با مشتق گرفتن از رابطه (۳-۲۱) نسبت به r، فشار از این رابطه حذف می‌شود.

$$0 = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}\right) - \frac{k+r}{k}\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial r^4}\right) - \frac{1}{k}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}\right) - \frac{1}{k(k+r)}(\mathrm{M}^2k^2-1)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{k(k+r)^2}(\mathrm{M}^2k^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{(k*\mathrm{Da})}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{k+r}{(k*\mathrm{Da})}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{(k*\mathrm{Da})} + \mathrm{M}^2\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{k}{(k+r)}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{R_m}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right)\right] + \frac{1}{k(k+r)^2} + \frac{1}{k}(\mathrm{Gr}\gamma + \mathrm{Gc}\Omega) + \frac{k+r}{k}\left(\mathrm{Gr}\frac{\partial\gamma}{\partial r} + \mathrm{Gc}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) \quad (۲۳-۳)$$

برای ساده‌تر شدن رابطه (۳-۲۳)، از معادله میدان مغناطیسی القایی استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial\vec{H}^+}{\partial\bar{t}} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{V}\times\vec{H}^+\right) + \frac{1}{\sigma\mu_e}\nabla^2\vec{H}^+ \quad (۲۴-۳)$$

در این رابطه σ، بیانگر کمیت رسانایی الکتریکی می‌باشد.

$$\frac{\partial\vec{H}^+}{\partial\bar{t}} = \frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}}(\bar{R},\bar{X},\bar{t})\right]\vec{e}_r + \left[\bar{h}_{\bar{x}}(\bar{R},\bar{X},\bar{t})\right]\vec{e}_x\right) = \frac{\partial\bar{h}_{\bar{r}}}{\partial\bar{t}}\vec{e}_r + \frac{\partial\bar{h}_{\bar{x}}}{\partial\bar{t}}\vec{e}_x \quad (۲۵-۳)$$

$$\left(\vec{V}\times\vec{H}^+\right) = \left[\bar{V}\bar{h}_{\bar{x}} - \bar{U}\left(H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}}\right)\right]\vec{e}_z \quad (۲۶-۳)$$

با استفاده از رابطه (۳-۲۶) و با استفاده از تعریف گرادیان، عبارت $\vec{\nabla}\times\left(\vec{V}\times\vec{H}^+\right)$ به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{V}\times\vec{H}^+\right) = \frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial}{\partial\bar{X}}\left(\bar{V}\bar{h}_{\bar{x}} - \bar{U}\left(H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}}\right)\right)\vec{e}_r - \frac{\partial}{\partial\bar{R}}\left(\bar{V}\bar{h}_{\bar{x}} - H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\bar{U} - \bar{h}_{\bar{r}}\bar{U}\right)\vec{e}_x \quad (۲۷-۳)$$

برای ساده کردن دومین عبارت موجود در سمت راست رابطه (۳-۲۴) از تعریف زیر استفاده می‌شود:

$$\nabla^2\vec{H}^+ = \nabla^2\left\{\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}} + \bar{h}_{\bar{r}}\right]\vec{e}_r + \bar{h}_{\bar{x}}\vec{e}_x\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{\frac{\partial^2}{\partial \bar{R}^2}\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}+\bar{h}_{\bar{r}}\right]+\frac{1}{(R^*+\bar{R})^2}\frac{\partial^2}{\partial \bar{\theta}^2}\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}+\bar{h}_{\bar{r}}\right]\right.\\
&\quad+\frac{1}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial}{\partial \bar{R}}\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}+\bar{h}_{\bar{r}}\right]-\frac{2}{(R^*+\bar{R})^2}\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{\theta}}\\
&\quad\left.-\frac{1}{(R^*+\bar{R})^2}\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}+\bar{h}_{\bar{r}}\right]\right\}\vec{e}_r\\
&\quad+\left\{\frac{\partial^2 \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}^2}+\frac{1}{(R^*+\bar{R})^2}\frac{\partial^2 \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{\theta}^2}+\frac{1}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}}+\frac{2}{(R^*+\bar{R})^2}\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}}\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}+\bar{h}_{\bar{r}}\right]\right.\\
&\quad\left.-\frac{\bar{h}_{\bar{x}}}{(R^*+\bar{R})^2}\right\}\vec{e}_x
\end{aligned}
$$

و با ساده کردن عبارت فوق، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\vec{H}^+ &= \left\{\frac{\partial^2}{\partial \bar{R}^2}\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}+\bar{h}_{\bar{r}}\right]+\frac{R^{*2}}{(R^*+\bar{R})^2}\frac{\partial^2 \bar{h}_{\bar{r}}}{\partial \bar{X}^2}\right.\\
&\quad+\frac{1}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial}{\partial \bar{R}}\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}+\bar{h}_{\bar{r}}\right]-\frac{2R^*}{(R^*+\bar{R})^2}\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{X}}\\
&\quad\left.-\frac{1}{(R^*+\bar{R})^2}\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}+\bar{h}_{\bar{r}}\right]\right\}\vec{e}_r\\
&\quad+\left\{\frac{\partial^2 \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}^2}+\frac{R^{*2}}{(R^*+\bar{R})^2}\frac{\partial^2 \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{X}^2}+\frac{1}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}}\right.\\
&\quad\left.+\frac{2R^*}{(R^*+\bar{R})^2}\frac{\partial}{\partial \bar{X}}\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}+\bar{h}_{\bar{r}}\right]-\frac{\bar{h}_{\bar{x}}}{(R^*+\bar{R})^2}\right\}\vec{e}_x
\end{aligned}
\tag{۳-۲۸}
$$

با استفاده از روابط (۳-۲۵) تا (۳-۲۸)، میدان مغناطیسی القایی در راستای محوری به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{t}}\right) &= -\frac{\partial}{\partial \bar{R}}\left(\bar{V}\bar{h}_{\bar{x}}-H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}\bar{U}-\bar{h}_{\bar{r}}\bar{U}\right)\\
&\quad+\frac{1}{\sigma\mu_e}\left\{\frac{\partial^2 \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}^2}+\frac{R^{*2}}{(R^*+\bar{R})^2}\frac{\partial^2 \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{X}^2}+\frac{1}{R^*+\bar{R}}\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}}\right.\\
&\quad\left.+\frac{2R^*}{(R^*+\bar{R})^2}\frac{\partial}{\partial \bar{X}}\left[H_0\frac{R^*}{R^*+\bar{R}}+\bar{h}_{\bar{r}}\right]-\frac{\bar{h}_{\bar{x}}}{(R^*+\bar{R})^2}\right\}
\end{aligned}
\tag{۳-۲۹}
$$

با استفاده از مقادیر بدون بعد رابطه (۳-۲۹) را می‌توان به‌صورت زیر ساده کرد:

$$\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{t}} = \left(\frac{H_0 R^*}{R^* + \bar{R}}\right)\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{R}} - \frac{H_0 R^* \bar{U}}{(R^* + \bar{R})^2} + \frac{1}{\sigma \mu_e}\left\{\frac{\partial^2 \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}^2} + \frac{R^{*2}}{(R^* + \bar{R})^2}\frac{\partial^2 \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{X}^2} + \frac{1}{R^* + \bar{R}}\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}} - \frac{\bar{h}_{\bar{x}}}{(R^* + \bar{R})^2}\right\}$$

می‌توان رابطه فوق را به‌صورت ساده شده زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{c\delta}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left(-H_0\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = \frac{c}{a}\left(\frac{H_0 k}{k + r}\right)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{H_0 k c(u + 1)}{a(k + r)^2} + \frac{1}{\sigma \mu_e}\left\{\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(-H_0\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{\delta^2 k^2}{a^2(k + r)^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-H_0\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{a^2(k + r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(-H_0\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) - \frac{1}{a^2(k + r)^2}\left(-H_0\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)\right\}$$

و با استفاده از فرض طول موج بلند ($\delta \sim 0$) رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{1}{ac\sigma \mu_e}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{(k + r)}\frac{\partial \phi}{\partial r}\right\} = -\left(\frac{k}{k + r}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{k}{(k + r)^2} + \frac{k}{(k + r)^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)$$

و در نهایت رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{\mathrm{R_m}}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{k + r}\frac{\partial \phi}{\partial r}\right\} = -\left(\frac{k}{k + r}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{k}{(k + r)^2} + \frac{k}{(k + r)^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) \qquad (۳-۳۰)$$

با بازنویسی رابطه (۳-۲۳) به‌صورت زیر:

$$\frac{1}{(k+r)^2} = (k+r)\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial r^4}\right) + 2\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}\right) + \frac{(\mathrm{M}^2k^2-1)}{(k+r)}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{(\mathrm{M}^2k^2-1)}{(k+r)^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$
$$+ \frac{1}{(k*\mathrm{Da})}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{k+r}{(k*\mathrm{Da})}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{(k*\mathrm{Da})}$$
$$- \mathrm{M}^2k\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{k}{(k+r)}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right\} + \frac{1}{\mathrm{Re_m}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right)\right]$$
$$- (\mathrm{Gr}\gamma + \mathrm{Gc}\Omega) - (k+r)\left(\mathrm{Gr}\frac{\partial\gamma}{\partial r} + \mathrm{Gc}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) \qquad (۳۱\text{-}۳)$$

و با جایگذاری رابطه (۳-۳۰) در رابطه (۳-۳۱)، و ساده کردن رابطه به‌دست آمده، شکل نهایی رابطه (۳-۲۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(k+r)\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial r^4}\right) + 2\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}\right) + \left(\frac{(\mathrm{M}^2k^2-1)}{(k+r)} - \frac{k+r}{\mathrm{Da}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$
$$- \left(\frac{(\mathrm{M}^2k^2-1)}{(k+r)^2} + \frac{1}{\mathrm{Da}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r} - (\mathrm{Gr}\gamma + \mathrm{Gc}\Omega) \qquad (۳۲\text{-}۳)$$
$$- (k+r)\left(\mathrm{Gr}\frac{\partial\gamma}{\partial r} + \mathrm{Gc}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{\mathrm{Da}} = \frac{1-\mathrm{M}^2k^2}{(k+r)^2}$$

برای تبدیل مختصات ثابت به مختصات متحرک و بدون بعد کردن رابطه انرژی، مانند بالا عمل کرده و ابتدا با استفاده از مقادیر رابطه (۳-۱۷)، رابطه (۳-۱۴) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{c}{\lambda}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{t}} + \frac{R^*(\bar{u}+c)}{R^*+\bar{r}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{r}}$$
$$= \left(\frac{k^*}{\rho C_p}\right)_{nf}\left(\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{r}^2} + \frac{1}{R^*+\bar{r}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{r}} + \left(\frac{R^*}{R^*+\bar{r}}\right)^2\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{x}^2}\right) + \left(\frac{\nu}{C_p}\right)_{nf}\bar{\Phi}$$
$$+ \tau\bar{\varepsilon}\left(\mathrm{D_B}(\nabla\bar{C}.\nabla\bar{T}) + \frac{\mathrm{D_T}}{T_m}(\nabla\bar{T}.\nabla\bar{T})\right) + \frac{1}{(\rho C_p)_{nf}}Q_0$$

که در آن:

$$\bar{\Phi} = \left(2\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{R^*}{R^*+\bar{r}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{u}+c}{R^*+\bar{r}}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}+c}{R^*+\bar{r}} + \frac{R^*}{R^*+\bar{r}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}+c}{R^*+\bar{r}} + \frac{R^*}{R^*+\bar{r}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right) + 2\left(\frac{R^*}{R^*+\bar{r}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{v}}{R^*+\bar{r}}\right)^2\right) \quad (۳۳\text{-}۳)$$

می‌باشد. که با در نظر گرفتن $\delta \sim 0 \rightarrow v \sim 0$، رابطه‌ای ساده شده مطابق رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$0 = \left(\frac{k^*}{\rho C_p}\right)_{nf}\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{(k+r)}\frac{\partial \bar{T}}{\partial r}\right) + \left(\frac{\nu}{C_p}\right)_{nf}\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(-\frac{u+1}{k+r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u+1}{k+r}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u+1}{k+r}\right)\right) + \tau\bar{\varepsilon}\left(\mathrm{D_B}(\nabla \bar{C}.\nabla \bar{T}) + \frac{\mathrm{D_T}}{T_m}(\nabla \bar{T}.\nabla \bar{T})\right) + \frac{1}{(\rho C_p)_{nf}}Q_0 \quad (۳۴\text{-}۳)$$

و با استفاده از مقادیر بدون بعد رابطه (۳-۱۸)، رابطه (۳-۳۴) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$0 = \frac{(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)}{Pr}\nu_{nf}\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} + \frac{1}{(k+r)}\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right) + \left(\frac{\nu}{C_p}\right)_{nf} c^2\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{k+r}(u+1)\right)^2 + (\bar{T}_1 - \bar{T}_0)\nu_{nf}\bar{\varepsilon}\left(\mathrm{Nb}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}.\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right) + \mathrm{Nt}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)^2\right) + \zeta(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)\nu_{nf} \rightarrow$$

و با قرار دادن مقدار $u = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$ در عبارت ساده شده فوق، در نهایت رابطه بدون بعد انرژی به‌دست می‌آید.

$$0 = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} + \frac{1}{(k+r)}\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right) + \mathrm{Ec}\left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - 1\right)\right)^2 + \mathrm{Nb}\bar{\varepsilon}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}.\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right) + \mathrm{Nt}\,\bar{\varepsilon}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)^2 + \zeta \quad (۳۵\text{-}۳)$$

معادله غلظت رابطه (۳-۱۶) به کمک رابطه (۳-۱۷) به مختصات متحرک انتقال داده می‌شود و با استفاده از مقادیر بدون بعد تعریف شده، به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\left[\frac{c\delta}{a}\frac{\partial\bar{C}}{\partial t}+\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\frac{kc\delta}{k+r}(u+1)\frac{\partial\bar{C}}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\frac{vc}{a}\frac{\partial\bar{C}}{\partial r}\right]$$
$$=\frac{\mathrm{Nb}\nu_{nf}}{\tau(\bar{C}_1-\bar{C}_0)}\left[\frac{(\bar{C}_1-\bar{C}_0)}{a^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{(\bar{C}_1-\bar{C}_0)}{(k+r)a^2}\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\left(\frac{k}{k+r}\right)^2\right.$$
$$\left.*\frac{(\bar{C}_1-\bar{C}_0)\delta^2}{a^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right]$$
$$+\frac{\mathrm{Nt}\,\nu_{nf}}{\tau(\bar{T}_1-\bar{T}_0)}\left[\frac{(\bar{T}_1-\bar{T}_0)}{a^2}\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}+\frac{(\bar{T}_1-\bar{T}_0)}{(k+r)a^2}\frac{\partial\gamma}{\partial r}+\left(\frac{k}{k+r}\right)^2*\frac{(\bar{T}_1-\bar{T}_0)\delta^2}{a^2}\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right]$$

با استفاده از فرض طول موج بلند $\delta\sim 0$ و همچنین $v\sim 0$ عبارت ساده شده زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r+k}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)+\frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}+\frac{1}{r+k}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)=0 \qquad (۳۶\text{-}۳)$$

عبارت‌های بدون بعد میدان مغناطیسی القایی محوری (h_x) و افزایش فشار(ΔP_λ) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$h_x=-\frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad (۳۷\text{-}۳)$$

$$\Delta P_\lambda=\int_0^1\left(\frac{dp}{dx}\right)_{r=0}dx \qquad (۳۸\text{-}۳)$$

همچنین عدد ناسلت محلی و ناسلت متوسط به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$Nu_x=-\frac{\partial\gamma}{\partial r} \qquad (۳۹\text{-}۳)$$

$$Nu_{ave}=\int_0^1 Nu_x\,dx \qquad (۴۰\text{-}۳)$$

۳-۴- شرایط مرزی

در حالت آزمایشگاهی $(\bar{R},\bar{X})$، جریان در کانال به‌صورت ناپایا می‌باشد. با این حال، در دستگاه مختصات متحرک $(\bar{r},\bar{x})$ که با سرعت c حرکت می‌کند به‌صورت پایا رفتار می‌کند. در حالت آزمایشگاهی، نرخ جریان حجمی به‌صورت زیر تعریف می‌شود[۱۶]:

$$Q = \int_{-\bar{H}}^{\bar{H}} \bar{U} d\bar{R} \qquad (۴۱\text{-}۳)$$

که در آن $\bar{H}$ تابعی از $\bar{X}$ و $\bar{t}$ می‌باشد. رابطه فوق در حالت موج‌دار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F = \int_{-\bar{H}}^{\bar{H}} \bar{u} d\bar{r} \qquad (۴۲\text{-}۳)$$

که در این رابطه $\bar{H}$ تنها تابعی از $\bar{x}$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از رابطه‌های (۳-۱۷)، (۳-۴۱) و (۳-۴۲) می‌توان این‌گونه نوشت که:

$$Q = F + 2c\bar{H} \qquad (۴۳\text{-}۳)$$

در موقعیت ثابت $\bar{X}$، جریان متوسط زمانی در یک دوره T به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\bar{Q} = \frac{1}{T}\int_0^T Q dt \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۴۳)در رابطه (۳-۴۴) و انتگرال‌گیری از آن، رابطه ساده شده زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{Q} = q + 2ca \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

با تعریف q در حالت موج‌دار و جریان متوسط بدون بعد θ در حالت ثابت،

$$\theta = \frac{\bar{Q}}{ca}\ , \qquad q = \frac{F}{ca} \qquad (۴۶\text{-}۳)$$

معادله (۳-۴۲) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\theta = q + 2\ , \qquad (۴۷\text{-}۳)$$

که q به‌صورت زیر می‌باشد:

$$q = -\int_{-h}^{h} \frac{\partial \psi}{\partial r}\, dr = -\big(\psi(h) - \psi(-h)\big) \qquad (۴۸\text{-}۳)$$

شرایط مرزی مناسب در حالت موج‌دار برای حل معادلات به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

در $r = h = -1 - \alpha(\cos 2\pi x)$:

$$\psi = +\frac{q}{2}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 1\,, \qquad \gamma = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \Omega = 0,$$

(۴۹-۳)

در $r = h = +1 + \alpha(\cos 2\pi x)$:

$$\psi = -\frac{q}{2}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 1\,, \qquad \gamma = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \Omega = 0,$$

۳-۵- الگوریتم حل مسئله

برای حل مسئله، باید رابطه‌های (۳-۳۲)، (۳-۳۵) و (۳-۳۶) با توجه به شرایط مرزی ارائه شده، به‌صورت همزمان حل شوند. اما با توجه به رابطه (۳-۳۶) به همراه شرایط مرزی بیان شده، همان‌طور که در ذیل مشاهده می‌شود می‌توان این رابطه را به‌صورت تحلیلی حل کرد:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(r+k)\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right] + \frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\frac{\partial}{\partial r}\left[(r+k)\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left[(r+k)\left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)\right] = 0$$

با انتگرال گیری از عبارت فوق،

$$(r+k)\left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right) = C \Rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\frac{\partial \gamma}{\partial r} = \frac{C}{r+k} \qquad (۵۰\text{-}۳)$$

و با انتگرال گیری از رابطه (۳-۵۰)، عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\Omega + \frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\gamma\right) = \frac{C}{r+k} \Rightarrow \Omega + \frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\gamma = C\,ln(r+k) + D \qquad (۵۱\text{-}۳)$$

با اعمال شرایط مرزی در رابطه‌های (۳-۵۰) و (۳-۵۱)، در نهایت رابطه (۳-۳۶) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\Omega = -\frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\gamma \qquad (۵۲\text{-}۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۵۲) در روابط (۳-۳۲) و (۳-۳۵)، شکل ساده شده این روابط به صورت زیر خواهد بود:

$$(k+r)\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial r^4}\right)+2\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}\right)+\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{k+r}-\frac{k+r}{\mathrm{Da}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{(k+r)^2}+\frac{1}{\mathrm{Da}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}$$
$$-\left(\mathrm{Gr}-\frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\mathrm{Gc}\right)\left(\gamma+(k+r)\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)-\frac{1-\mathrm{M}^2k^2}{(k+r)^2}+\frac{1}{\mathrm{Da}}=0 \qquad (۵۳\text{-}۳)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}+\frac{1}{(k+r)}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)+\mathrm{Ec}\left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}-1\right)\right)^2+\zeta=0 \qquad (۵۴\text{-}۳)$$

بنابراین دو رابطه (۳-۵۳) و (۳-۵۴) باید به‌صورت همزمان حل شوند.

همان‌طور که از این روابط مشخص است، در هر دو رابطه مقادیر ψ و γ مجهول می‌باشد. برای شروع حل ابتدا مقداری برای کمیت γ حدس زده و براساس این حدس رابطه (۳-۵۳) حل می‌شود و مقدار ψ به‌دست می‌آید. با استفاده از این مقدار و حل رابطه (۳-۵۴)، مقدار γ مشخص می‌شود و مقدار اولیه حدس زده شده برای γ، اصلاح می‌شود.

در این پایان‌نامه، برای حل عددی از زبان برنامه‌نویسی C++ استفاده شده است. الگوریتم این برنامه عددی براساس روش جعبه‌ای کلر[1] می‌باشد. روش جعبه‌ای کلر (کلر-۱۹۷۰) یک روش ضمنی[2] با دقت مرتبه دوم در بعد زمان و مکان (Δx^2 و Δt^2) در حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است[۴۳]. این روش گسسته سازی اجازه می‌دهد تا گام‌های زمانی و مکانی بدون کاهش دقت مرتبه دوم تغییر کنند. در این روش مشتق‌های مرتبه دوم به‌وسیله مشتق‌های مرتبه اول و به کمک تغییر متغیر جایگزین می‌شوند، به‌این‌ترتیب یک دستگاه از معادله‌های مرتبه یک به دست می‌آید[۴۴].

دستگاه جبری معادلات حاکم به‌دست آمده از گسسته‌سازی جعبه‌ای کلر را می‌توان به‌صورت ماتریسی زیر نشان داد:

$$A_j^n\vec{\delta}_{j-1}^n+B_j^n\vec{\delta}_j^n+C_j^n\vec{\delta}_{j+1}^n=\vec{R}_j^n \qquad (۵۵\text{-}۳)$$

در روش جعبه‌ای کلر شکل کلی ماتریس‌های سه قطری به‌صورت زیر درمی‌آید:

[1] Keller-Box Method
[2] Implicit

$$\begin{bmatrix} B_1^n & C_1^n & & & & & \\ A_2^n & B_2^n & C_2^n & & & & \\ & A_3^n & B_3^n & C_3^n & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & A_{jmax-1}^n & B_{jmax-1}^n & C_{jmax-1}^n \\ & & & & & A_{jmax}^n & B_{jmax}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\delta}_1^n \\ \vec{\delta}_2^n \\ \vec{\delta}_3^n \\ \vdots \\ \vec{\delta}_{jmax-1}^n \\ \vec{\delta}_{jmax}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{R}_1^n \\ \vec{R}_2^n \\ \vec{R}_3^n \\ \vdots \\ \vec{R}_{jmax-1}^n \\ \vec{R}_{jmax}^n \end{bmatrix} \quad (۵۶\text{-}۳)$$

۳-۶- گسسته‌سازی عددی

در این قسمت گسسته‌سازی روابط به همراه خطی سازی آن‌ها به‌صورت کامل شرح داده می‌شود.

۳-۶-۱ گسسته و خطی‌سازی معادله حرکت

گسسته سازی رابطه (۳-۵۳) که از ساده سازی معادله حرکت در راستای محوری به دست آمد، به ترتیب زیر می باشد:

الف) تبدیل به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

برای معادله دیفرانسیل رابطه (۳-۵۳) با تعریف متغیرهای u، v، w که به‌ترتیب مبین مشتق مرتبه اول، دوم و سوم نسبت به r هستند، می‌توان دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را تشکیل داد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= u \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= v \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= w \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= -\frac{2w}{(k+r)} - \left(\frac{(\mathrm{M}^2k^2-1)}{(k+r)^2} - \frac{1}{\mathrm{Da}}\right)v + \left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{(k+r)^3} + \frac{1}{k+r}\frac{1}{\mathrm{Da}}\right)u \\ &\quad + \left(\mathrm{Gr} - \frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\mathrm{Gc}\right)\left(\frac{1}{k+r}\gamma + \gamma'\right) + \frac{1-\mathrm{M}^2k^2}{(k+r)^3} - \frac{1}{k+r}\frac{1}{\mathrm{Da}} \end{aligned} \quad (۵۷\text{-}۳)$$

ب)تقریب معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با استفاده از روش تفاضل محدود

اکنون دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳-۵۷) را با استفاده از تقریب تفاضل محدود مرکزی حول نقطه $\eta_{j-\frac{1}{2}}$ به‌صورت زیر می‌توان گسسته سازی نمود.

$$\frac{\psi_j-\psi_{j-1}}{h_j}=u_{j-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(u_j+u_{j-1}\right)\ \rightarrow \psi_j-\psi_{j-1}=\frac{h_j}{2}\left(u_j+u_{j-1}\right)$$

$$\frac{u_j-u_{j-1}}{h_j}=v_{j-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(v_j+v_{j-1}\right)\ \rightarrow u_j-u_{j-1}=\frac{h_j}{2}\left(v_j+v_{j-1}\right)$$

$$\frac{v_j-v_{j-1}}{h_j}=w_{j-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(w_j+w_{j-1}\right)\ \rightarrow v_j-v_{j-1}=\frac{h_j}{2}\left(w_j+w_{j-1}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{w_j-w_{j-1}}{h_j}=&-\frac{w_j+w_{j-1}}{\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)}-\left(\frac{M^2k^2-1}{\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^2}-\frac{1}{\mathrm{Da}}\right)\left(\frac{v_j+v_{j-1}}{2}\right)\\&+\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3}+\frac{1}{k+r_{j-\frac{1}{2}}}\frac{1}{\mathrm{Da}}\right)\left(\frac{u_j+u_{j-1}}{2}\right)\\&+Z\left(\frac{1}{k+r_{j-\frac{1}{2}}}\gamma_{j-\frac{1}{2}}+\gamma'_{\mathrm{j}-\frac{1}{2}}\right)+\frac{1-\mathrm{M}^2k^2}{\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3}-\frac{1}{k+r_{j-\frac{1}{2}}}\frac{1}{\mathrm{Da}}\end{aligned}$$

(۳-۵۸)

در عبارت فوق $\left(\mathrm{Gr}-\frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\mathrm{Gc}\right)$ برابر با Z درنظر گفته شده است.

پ)خطی‌سازی زمانی متغیرها (روش خطی سازی نیوتن)

از آن‌جا که روابط (۳-۵۸) در گام زمانی $n+1$ تقریب زده می‌شوند، می‌توان با به‌کارگیری روش زیر آن را به مقادیر متناظرشان در گام زمانی n با یک مقدار خطایی از جنس خود متغیر تعریف نمود. سپس در تحلیل عددی، معیار همگرایی را کوچک شدن تمام خطاها به‌طور هم‌زمان از یک مقدار ε در نظر گرفته خواهد شد. این فرآیند در زیر آورده شده است:

$$\psi_k^{n+1} = \psi_k^n + \delta\psi_k^n$$
$$u_k^{n+1} = u_k^n + \delta u_k^n \qquad (۵۹\text{-}۳)$$
$$v_k^{n+1} = v_k^n + \delta v_k^n$$
$$w_k^{n+1} = w_k^n + \delta w_k^n$$

با جایگذاری عبارات (۳-۵۹) در روابط (۳-۵۸)، روابط زیر به‌دست خواهند آمد.

$$\psi_j^n + \delta\psi_j^n - \left(\psi_{j-1}^n + \delta\psi_{j-1}^n\right) = \frac{h_j}{2}\left(u_j^n + \delta u_j^n + u_{j-1}^n + \delta u_{j-1}^n\right) \quad \rightarrow$$

$$\delta\psi_j^n - \delta\psi_{j-1}^n - \frac{h_j}{2}\left(\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n\right) = r_j^n \qquad (۶۰\text{-}۳)$$

که در رابطه فوق عبارت r_j^n به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$r_j^n = \psi_{j-1}^n - \psi_j^n + \frac{h_j}{2}\left(u_j^n + u_{j-1}^n\right) \qquad (۶۱\text{-}۳)$$

با خطی سازی دومین عبارت از رابطه (۳-۵۹) به شکل زیر

$$u_j^n + \delta u_j^n - \left(u_{j-1}^n + \delta u_{j-1}^n\right) = \frac{h_j}{2}\left(v_j^n + \delta v_j^n + v_{j-1}^n + \delta v_{j-1}^n\right) \quad \rightarrow$$

$$\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n - \frac{h_j}{2}\left(\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n\right) = t_j^n \qquad (۶۲\text{-}۳)$$

مقدار عبارت t_j^n با استفاده از رابطه زیر بیان می‌شود:

$$t_j^n = u_{j-1}^n - u_j^n + \frac{h_j}{2}\left(v_j^n + v_{j-1}^n\right) \qquad (۶۳\text{-}۳)$$

با خطی‌سازی عبارت v_k^{n+1} ، رابطه (۳-۶۴) حاصل می‌شود که در آن، عبارت s_j^n به صورت رابطه (۳-۶۵) بیان می‌گردد:

$$v_j^n + \delta v_j^n - \left(v_{j-1}^n + \delta v_{j-1}^n\right) = \frac{h_j}{2}\left(w_j^n + \delta w_j^n + w_{j-1}^n + \delta w_{j-1}^n\right) \quad \rightarrow$$

$$\delta v_j^n - \delta v_{j-1}^n - \frac{h_j}{2}\left(\delta w_j^n + \delta w_{j-1}^n\right) = s_j^n \qquad (۶۴\text{-}۳)$$

$$s_j^n = v_{j-1}^n - v_j^n + \frac{h_j}{2}\left(w_j^n + w_{j-1}^n\right) \tag{۶۵-۳}$$

و در نهایت با خطی سازی w_k^{n+1} به صورت زیر

$$\begin{aligned} w_j^n + \delta w_j^n - \left(w_{j-1}^n + \delta w_{j-1}^n\right) &= -\frac{h_j}{\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\left(w_j^n + \delta w_j^n + w_{j-1}^n + \delta w_{j-1}^n\right) \\ &- h_j\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2 - 1}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)^2} - \frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)\left(v_j^n + \delta v_j^n + v_{j-1}^n + \delta v_{j-1}^n\right) \\ &+ h_j\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2 - 1}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3} + \frac{1}{k + r_{j-\frac{1}{2}}}\frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)\left(u_j^n + \delta u_j^n + u_{j-1}^n + \delta u_{j-1}^n\right) \\ &+ Zh_j\left(\frac{1}{k + r_{j-\frac{1}{2}}}\gamma_{j-\frac{1}{2}} + \gamma'_{j-\frac{1}{2}}\right) - \frac{h_j(1 - \mathrm{M}^2k^2)}{\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3} - \frac{h_j}{k + r_{j-\frac{1}{2}}}\frac{1}{\mathrm{Da}} \end{aligned}$$

و با ساده کردن رابطه فوق، عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{h_j}{k + r_{j-\frac{1}{2}}}\right)\delta w_j^n + \left(-1 + \frac{h_j}{k + r_{j-\frac{1}{2}}}\right)\delta w_{j-1}^n + h_j\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2 - 1}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)^2} - \frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)\delta v_j^n \\ &+ h_j\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2 - 1}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)^2} - \frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)\delta v_{j-1}^n - h_j\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2 - 1}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3} + \frac{1}{k + r_{j-\frac{1}{2}}}\frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)\delta u_j^n \\ &- h_j\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2 - 1}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3} + \frac{1}{k + r_{j-\frac{1}{2}}}\frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)\delta u_{j-1}^n = x_j^n \end{aligned} \tag{۶۶-۳}$$

که در این رابطه عبارت x_j^n به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
x_j^n = &\left(-1-\frac{h_j}{k+r_{j-\frac{1}{2}}}\right)w_j^n+\left(1-\frac{h_j}{k+r_{j-\frac{1}{2}}}\right)w_{j-1}^n \\
&-h_j\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{2\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^2}-\frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)v_j^n-h_j\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{2\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^2}-\frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)v_{j-1}^n \\
&+h_j\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{2\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3}+\frac{1}{k+r_{j-\frac{1}{2}}}\ \frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)u_j^n \\
&+h_j\left(\frac{\mathrm{M}^2k^2-1}{2\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3}+\frac{1}{k+r_{j-\frac{1}{2}}}\ \frac{1}{2\mathrm{Da}}\right)u_{j-1}^n \\
&+Zh_j\left(\frac{1}{k+r_{j-\frac{1}{2}}}\gamma_{j-\frac{1}{2}}+d\gamma_{j-\frac{1}{2}}\right)-\frac{h_j(1-\mathrm{M}^2k^2)}{\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3}-\frac{h_j}{k+r_{j-\frac{1}{2}}}\ \frac{1}{\mathrm{Da}}
\end{aligned}
\tag{۶۷-۳}
$$

همان‌طور که در رابطه (۳-۵۵) ذکر شد دستگاه جبری معادلات حاکم به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A_j^n\vec{\delta}_{j-1}^n+B_j^n\vec{\delta}_j^n+C_j^n\vec{\delta}_{j+1}^n=\vec{R}_j^n$$

که در آن:

$$\vec{\delta}_j^n=\begin{bmatrix}\delta\psi_j^n & \delta u_j^n & \delta v_j^n & \delta w_j^n\end{bmatrix}^T \tag{۶۸-۳}$$

آرایه‌های ماتریس‌های C_j^n، B_j^n و A_j^n رابطه (۳-۵۶) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$A_j^n=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -\frac{h_j}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad 2\le j\le jmax \tag{۶۹-۳}$$

ماتریس B_j^n در بازه $2\le j\le jmax-1$ ، به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$B_j^n = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_j}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{h_j}{2} \\ 0 & -\frac{h_{j+1}(\mathrm{M}^2k^2-1)}{2\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3}+\frac{h_{j+1}}{2\mathrm{Da}\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)} & \frac{h_{j+1}(\mathrm{M}^2k^2-1)}{2\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^2}-\frac{h_{j+1}}{2\mathrm{Da}} & -1+\frac{h_{j+1}}{k+r_{j-\frac{1}{2}}} \\ 0 & -1 & -\frac{h_{j+1}}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad (۷۰\text{-}۳)$$

همچنین ماتریس C_j^n در بازه $1 \le j \le jmax-1$ ، به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$C_j^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h_{j+1}(\mathrm{M}^2k^2-1)}{2\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^3}+\frac{h_{j+1}}{2\mathrm{Da}\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)} & \frac{h_{j+1}(\mathrm{M}^2k^2-1)}{2\left(k+r_{j-\frac{1}{2}}\right)^2}-\frac{h_{j+1}}{2\mathrm{Da}} & 1+\frac{h_{j+1}}{k+r_{j-\frac{1}{2}}} \\ 0 & 1 & -\frac{h_{j+1}}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad (۷۱\text{-}۳)$$

و در نهایت ماتریس $\vec{R}_j^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vec{R}_j^n = \begin{bmatrix} r_j^n \\ s_j^n \\ x_{j+1}^n \\ t_{j+1}^n \end{bmatrix} \qquad 2 \le j \le jmax-1 \qquad (۷۲\text{-}۳)$$

ث)شرایط مرزی

شرایط مرزی این مسئله به دو بخش شرایط روی سطح جامد یا شرط عدم لغزش و شرایط بی‌نهایت تقسیم می‌شوند. مجموعه شرایط مرزی سطح جامد شامل صفر بودن مقادیر خط جریان و سرعت هستند. بنابراین، در هر سیکل تکرار مقدار خطای متناظر این متغیرها باید برابر با صفر باشد ($\delta\psi_1 = \delta u_1 = 0$). در بی‌نهایت مقدار سرعت برابر با سرعت لبه لایه مرزی است. در نتیجه مقدار خطای خطی سازی این نقطه از میدان محاسباتی نیز در هر سیکل باید برابر با صفر قرار داده شود. با اعمال این شرایط در ماتریس‌های متناظر با هر اندیس ($j = 1, j_{max}$)، روابط زیر برای $[B_1]$، $[R_1]$، $[B_{jmax}]$ و $[R_{jmax}]$ به‌دست خواهند آمد.

$$B_1^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{h_2(\mathrm{M}^2k^2-1)}{2\left(k+r_{\frac{1}{2}}\right)^3}+\dfrac{h_2}{2\mathrm{Da}\left(k+r_{\frac{1}{2}}\right)} & \dfrac{h_2(\mathrm{M}^2k^2-1)}{2\left(k+r_{\frac{1}{2}}\right)^2}-\dfrac{h_2}{2\mathrm{Da}} & -1+\dfrac{h_2}{k+r_{\frac{1}{2}}} \\ 0 & -1 & -\dfrac{h_2}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{۷۳-۳}$$

$$\vec{R}_1^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2^n \\ t_2^n \end{bmatrix} \tag{۷۴-۳}$$

$$B_{jmax}^n = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{h_{jmax}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{h_{jmax}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۷۵-۳}$$

$$\vec{R}_{jmax}^n = \begin{bmatrix} r_{jmax}^n \\ s_{jmax}^n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۷۶-۳}$$

۳-۶-۲ گسسته و خطی‌سازی معادله انرژی

با درنظر گرفتن رابطه (۳-۵۱) که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}+\frac{1}{(k+r)}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)+\mathrm{Ec}\left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}-1\right)\right)^2+\zeta=0$$

گسسته سازی این رابطه همانند آن‌چه که در بالا گفته شد، انجام می‌شود:

$$\frac{\gamma_j-\gamma_{j-1}}{h_j}=n_{j-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(n_j+n_{j-1}\right)\ \rightarrow \gamma_j-\gamma_{j-1}=\frac{h_j}{2}\left(n_j+n_{j-1}\right) \tag{۷۷-۳}$$

$$n_j - n_{j-1} = -\frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\left(n_j + n_{j-1}\right) - \mathrm{Ec.Pr.}\, h_j\left(-\frac{v_j + v_{j-1}}{2} + \frac{u_j + u_{j-1} - 2}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\right)^2 - \zeta.\mathrm{Pr.}\, h_j \quad (۷۸-۳)$$

$$\delta\gamma_j^n - \delta\gamma_{j-1}^n - \frac{h_j}{2}\left(\delta n_j^n + \delta n_{j-1}^n\right) = P_j^n \quad (۷۹-۳)$$

$$P_j^n = \gamma_{j-1}^n - \gamma_j^n + \frac{h_j}{2}\left(n_j^n + n_{j-1}^n\right) \quad (۸۰-۳)$$

$$\left(1 + \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\right)\delta n_j^n + \left(-1 + \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\right)\delta n_{j-1}^n = G_j^n \quad (۸۱-۳)$$

$$G_j^n = \left(-1 - \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\right)n_j^n + \left(1 - \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\right)n_{j-1}^n - \mathrm{Ec.Pr.}\, h_j\left(-\frac{v_j + v_{j-1}}{2} + \frac{u_j + u_{j-1} - 2}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\right)^2 - \zeta.\mathrm{Pr.}\, h_j \quad (۸۲-۳)$$

باید توجه داشت که در اینجا:

$$\vec{\delta}_j^n = [\delta\gamma_j^n \quad \delta n_j^n]^T \quad (۸۳-۳)$$

و آرایه‌های ماتریس‌های C_j^n، B_j^n و A_j^n رابطه (۳-۵۶) در زیر مشاهده می‌شوند:

$$A_j^n = \begin{bmatrix} 0 & -1 + \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 2 \le j \le jmax \quad (۸۴-۳)$$

$$B_j^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)} \\ -1 & -\frac{h_{j+1}}{2} \end{bmatrix} \qquad 2 \le j \le jmax - 1 \quad (۸۵-۳)$$

$$C_j^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{h_{j+1}}{2} \end{bmatrix} \qquad 1 \le j \le jmax - 1 \tag{۸۶-۳}$$

$$\vec{R}_j^n = \begin{bmatrix} G_j^n \\ P_{j+1}^n \end{bmatrix} \qquad 2 \le j \le jmax - 1 \tag{۸۷-۳}$$

و با اعمال شرایط مرزی:

$$B_1^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\frac{h_2}{2} \end{bmatrix} \tag{۸۸-۳}$$

$$\vec{R}_1^n = \begin{bmatrix} 0 \\ P_2^n \end{bmatrix} \tag{۸۹-۳}$$

$$B_{jmax}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \frac{h_{jmax}}{2\left(k + r_{jmax}\right)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{۹۰-۳}$$

$$\vec{R}_{jmax}^n = \begin{bmatrix} G_{jmax}^n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۹۱-۳}$$

۳-۶-۳ گسسته و خطی‌سازی معادله میدان الکتریکی

با توجه به آن چه که در بخش ۳-۳ بیان شد، رابطه (۳-۲۲) که برای محاسبه قدرت میدان الکتریکی (E) بود و به شکل زیر بیان می‌شد:

$$E = \left[\frac{k}{(k+r)}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{Re_m}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right)\right]$$

به صورت زیر و با توجه به آنچه در گسسته و خطی سازی دو رابطه قسمت قبل گفته شد، گسسته و خطی‌سازی می‌شود:

$$\frac{\phi_j - \phi_{j-1}}{h_j} = L_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(L_j + L_{j-1}\right) \rightarrow \phi_j - \phi_{j-1} = \frac{h_j}{2}\left(L_j + L_{j-1}\right) \tag{۹۲-۳}$$

$$\frac{L_j - L_{j-1}}{h_j} = \mathrm{ER_m} - \frac{L_j + L_{j-1}}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)} - \frac{R_m k}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\left(u_j + u_{j-1}\right) \tag{۹۳-۳}$$

$$\delta\phi_j^n - \delta\phi_{j-1}^n - \frac{h_j}{2}\left(\delta L_j^n + \delta L_{j-1}^n\right) = H_j^n \tag{۹۴-۳}$$

$$H_j^n = \phi_{j-1}^n - \phi_j^n + \frac{h_j}{2}\left(L_j^n + L_{j-1}^n\right) \tag{۹۵-۳}$$

$$\left(1 - \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\right)\delta L_j^n + \left(-1 - \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\right)\delta L_{j-1}^n = I_j^n \tag{۹۶-۳}$$

$$I_j^n = \left(1 - \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\right)L_{j-1}^n + \left(-1 - \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\right)L_j^n - \frac{h_j k \mathrm{R_m}}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)}\left(u_j^n + u_{j-1}^n\right) + h_j \mathrm{ER_m} \tag{۹۷-۳}$$

ماتریس مجهولات به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\delta}_j^n = [\delta\phi_j^n \quad \delta L_j^n]^T \tag{۹۸-۳}$$

و آرایه‌های ماتریس‌های C_j^n، B_j^n و A_j^n رابطه (۳-۵۳) به قرار زیر می‌باشد:

$$A_j^n = \begin{bmatrix} 0 & -1 + \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 2 \le j \le jmax \tag{۹۹-۳}$$

$$B_j^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \frac{h_j}{2\left(k + r_{j-\frac{1}{2}}\right)} \\ -1 & -\frac{h_{j+1}}{2} \end{bmatrix} \qquad 2 \le j \le jmax - 1 \tag{۱۰۰-۳}$$

$$C_j^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{h_{j+1}}{2} \end{bmatrix} \qquad 1 \le j \le jmax - 1 \tag{۱۰۱-۳}$$

$$\vec{R}_j^n = \begin{bmatrix} I_j^n \\ H_{j+1}^n \end{bmatrix} \qquad 2 \le j \le jmax - 1 \tag{۱۰۲-۳}$$

و با اعمال شرایط مرزی:

$$B_1^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\frac{h_2}{2} \end{bmatrix} \tag{۱۰۳-۳}$$

$$\vec{R}_1^n = \begin{bmatrix} 0 \\ H_2^n \end{bmatrix} \tag{۱۰۴-۳}$$

$$B_{jmax}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \frac{h_{jmax}}{2\left(k + r_{jmax}\right)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{۱۰۵-۳}$$

$$\vec{R}_{jmax}^n = \begin{bmatrix} I_{jmax}^n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۱۰۶-۳}$$

در ادامه و در فصل ۴ به بررسی صحت برنامه عددی نوشته شده و ارائه نتایج به دست آمده از این برنامه عددی پرداخته می‌شود.

فصل ۴ نتایج عددی

در این فصل نتایج به‌دست آمده از شبیه سازی عددی ارائه خواهد شد. در این پایان‌نامه برای شبیه سازی انجام شده برنامه‌ای با زبان برنامه‌نویسی C++ نوشته شده است. همانطور که در بخش‌های پیشین به تفضیل بیان گردید، در این برنامه عددی الگوریتم بر اساس روش تقریب تفاضل محدود مرکزی پایه ریزی و از روش ضمنی[1] جعبه‌ای کلر استفاده شده است. به منظور اعتبارسنجی مطالعه انجام شده، ابتدا یک حالت ساده با نتیجه حاصله از حل تحلیلی به کمک حساب اغتشاشات[2] مقایسه می‌شود و برای حالت جامع‌تر از نتایج عددی موجود استفاده می‌شود. پس از بررسی صحت نتایج، تاثیر چشمه حرارتی و تخلخل بر روی کمیت‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

[1] Implicit
[2] Expansion Perturbation

۴-۱- شبکه محاسباتی

دامنه محاسباتی شامل تقسیم عرض لایه مرزی در راستای عمود بر جهت حرکت سیال است. در این راستا از شبکه‌های یک بعدی یکنواخت استفاده شده است. تعداد گره‌ها در عرض لایه مرزی برابر ۲۰۰ بوده و فاصله اولین گره محاسباتی از مرز برابر ۰/۲۶ می‌باشد.

۴-۲- صحت سنجی و اعتبارسنجی

برای مقایسه نتایج به‌دست آمده از الگوریتم عددی استفاده شده در این پایان‌نامه، از نتایج حاصل شده از حساب اغتشاشات و نتایج عددی به‌دست آمده توسط نورین و همکاران [۲۵] استفاده شده است.

۴-۲-۱ حساب اغتشاشات

این قسمت برای بررسی صحت الگوریتم عددی، حل همزمان شکل ساده شده روابط (۳-۳۲) و (۳-۳۴) را با حل تحلیلی به وسیله حساب اغتشاشات مورد بررسی قرار می‌دهد. شکل ساده شده رابطه (۳-۳۲) بدون در نظر گرفتن محیط متخلخل و اثر هیدرودینامیک مغناطیسی و همچنین با صرف نظر از اثر انتقال جرم به صورت زیر می‌باشد:

$$(k+r)\frac{\partial^4\psi}{\partial r^4}+2\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}-\frac{1}{k+r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{(k+r)^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\mathrm{Gr}\left((k+r)\frac{\partial\gamma}{\partial r}+\gamma\right)-\frac{1}{(k+r)^2}=0 \qquad (۴-۱)$$

همچنین شکل ساده شده رابطه (۳-۳۵) بدون درنظر گرفتن اثر حرکت ترموفورتیک و حرکت براونی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial r}+\frac{1}{k+r}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)+\mathrm{Ec}\left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}-1\right)\right)^2+\zeta=0 \qquad (۴-۲)$$

بنابراین شکل ساده شده شرایط مرزی (۳-۴۹) به قرار زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&\psi=+\frac{q}{2}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r}=1, \quad \gamma=0, \quad r=-h=-1-\alpha(\cos 2\pi x)\\
&\psi=-\frac{q}{2}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r}=1, \quad \gamma=0, \quad r=h=+1+\alpha(\cos 2\pi x)
\end{aligned} \qquad (۴-۳)$$

فرض کنید که در عبارت (۴-۱)، کمیت Gr کوچک می‌باشد ($\mathrm{Gr} = \varepsilon \ll 1$)، و مولفه‌های ψ و γ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \cdots$$
$$\gamma = \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 + \cdots \tag{۴-۴}$$

با جایگذاری کمیت‌های رابطه (۴-۴) در رابطه (۴-۱)، شکل ساده شده این رابطه به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}(k+r)\left(\frac{\partial^4\psi_0}{\partial r^4}+\varepsilon\frac{\partial^4\psi_1}{\partial r^4}\right)+2\left(\frac{\partial^3\psi_0}{\partial r^3}+\varepsilon\frac{\partial^3\psi_1}{\partial r^3}\right)-\frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}\right)\\ +\frac{1}{(k+r)^2}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial r}+\varepsilon\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)-(k+r)\varepsilon\left(\frac{\partial\gamma_0}{\partial r}+\varepsilon\frac{\partial\gamma_1}{\partial r}\right)-\frac{1}{(k+r)^2}\\ -\varepsilon(\gamma_0+\varepsilon\gamma_1)=0\end{aligned} \tag{۵-۴}$$

همچنین می‌توان رابطه (۴-۲) را بااستفاده از مقادیر به دست آمده از حساب اغتشاشات به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial r^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial r^2}+\frac{1}{k+r}\frac{\partial\gamma_0}{\partial r}+\frac{\varepsilon}{k+r}\frac{\partial\gamma_1}{\partial r}\right)\\ +\mathrm{Ec}\left[\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}\right)^2\right.\\ +\frac{1}{(k+r)^2}\left\{\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial r}+\varepsilon\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)^2-2\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial r}+\varepsilon\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)+1\right\}\\ -\frac{2}{k+r}\left(\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial r}+\varepsilon\frac{\partial\psi_1}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\right.\\ \left.\left.-\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}\right)\right)\right]+\zeta=0\end{aligned} \tag{۶-۴}$$

شرایط مرزی را با استفاده از حساب اغتشاشات می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\psi-\frac{q}{2}=0\ \rightarrow \psi_0+\varepsilon\psi_1-\frac{q}{2}=0$$
$$\frac{d\psi}{dr}-1=0\rightarrow\ \frac{d\psi_0}{dr}+\varepsilon\frac{d\psi_1}{dr}-1=0 \tag{۷-۴}$$
$$\gamma=0\rightarrow\ \gamma_0+\varepsilon\gamma_1=0$$

سپس مسئله به دو مسئله با مرتبه صفر[1] و مرتبه یک[2] تقسیم می‌شود. با اعمال شرایط مرزی مربوطه، روابط به‌صورت همزمان حل می‌شوند.

۴-۲-۱-۱ مسئله با مرتبه صفر

در این مرحله با در نظرگرفتن ضرایب دارای مرتبه صفر، تابع چرخش جریان به صورت رابطه (۴-۸) و معادله انرژی به‌صورت رابطه (۴-۹) بدست می‌آید که با قرار دادن شرایط مرزی (۴-۱۰) در این رابطه‌ها مقدار تابع جریان و دما بدست می‌آید.

$$(k+r)\frac{\partial^4\psi_0}{\partial r^4}+2\frac{\partial^3\psi_0}{\partial r^3}-\frac{1}{k+r}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r^2}+\frac{1}{(k+r)^2}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}-\frac{1}{(k+r)^2}=0 \tag{۴-۸}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\gamma_0}{\partial r^2}+\frac{1}{k+r}\frac{\partial\gamma_0}{\partial r}\right)&\\ +\mathrm{Ec}\Bigg[\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r^2}\right)^2+\frac{1}{(k+r)^2}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right)^2-\frac{2}{(k+r)^2}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}+\frac{1}{(k+r)^2}&\\ -\frac{2}{k+r}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r^2}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}+\frac{2}{r+k}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r^2}\Bigg]+\zeta=0&\end{aligned} \tag{۴-۹}$$

شرایط مرزی مسئله با مرتبه صفر و با در نظر گرفتن ضرایب دارای مرتبه صفر به‌شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{cases}\psi_0(-h)-\dfrac{q}{2}=0;\\ \dfrac{d\psi_0(-h)}{dr}-1=0;\\ \gamma_0(-h)-1=0;\\ \psi_0(+h)+\dfrac{q}{2}=0;\\ \dfrac{d\psi_0(+h)}{dr}-1=0;\\ \gamma_0(+h)=0;\end{cases} \tag{۴-۱۰}$$

[1] Zeroth Order
[2] First Order

۴-۲-۱-۲ مسئله با مرتبه یک

در این قسمت با در نظر گرفتن ضرایب دارای مرتبه یک در روابط (۴-۵) و (۴-۶)، روابط زیر بدست می‌آیند.

$$(k+r)\frac{\partial^4\psi_1}{\partial r^4}+2\frac{\partial^3\psi_1}{\partial r^3}-\frac{1}{k+r}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{(k+r)^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}-(k+r)\left(\frac{\partial\gamma_0}{\partial r}\right)-\gamma_0=0 \qquad (۱۱\text{-}۴)$$

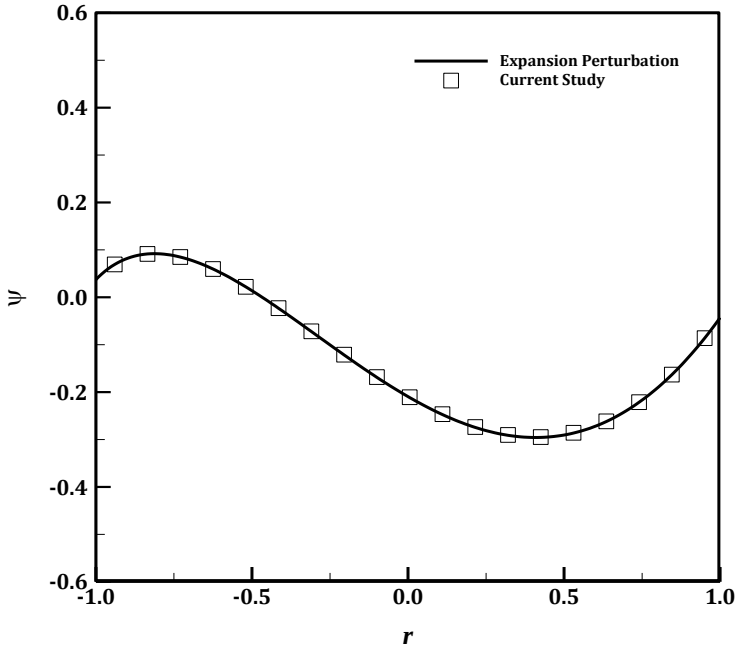
$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial r^2}+\frac{1}{k+r}\frac{\partial\gamma_1}{\partial r}\right)\\&\quad+\mathrm{Ec}\left[2\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{(k+r)^2}\left\{2\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right)-2\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right\}\right.\\&\quad\left.-\frac{2}{k+r}\left\{\frac{\partial^2\psi_0}{\partial r^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2}\right\}\right]=0\end{aligned} \qquad (۱۲\text{-}۴)$$

با استفاده از شرایط مرزی دارای مرتبه یک بیان شده در رابطه (۴-۱۳) و همچنین با استفاده از مقادیر به‌دست آمده از روابط (۴-۸) و (۴-۹) مقدار تابع جریان و دما بدست می‌آید.

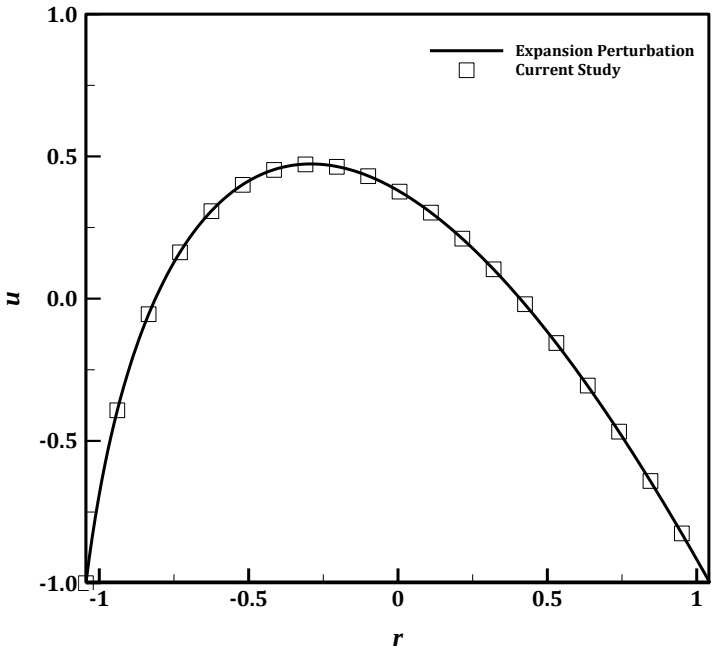
$$\begin{cases}\psi_1(-h)=0;\\ \dfrac{d\psi_1(-h)}{dr}=0;\\ \gamma_1(-h)=0;\\ \psi_1(+h)=0;\\ \dfrac{d\psi_1(+h)}{dr}=0;\\ \gamma_1(+h)=0;\end{cases} \qquad (۱۳\text{-}۴)$$

در نهایت بر اساس تعریف رابطه (۴-۴) شکل کلی تابع جریان و دما، به‌صورت جمع مقادیر به‌دست آمده از مسائل مرتبه صفر و مرتبه یک حاصل می‌شود.

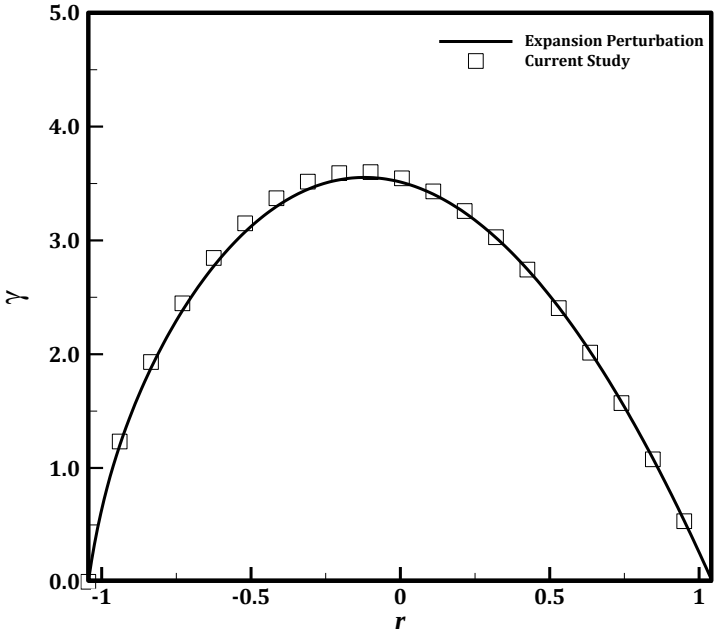
شکل ۴-۱، شکل ۴-۲ و شکل ۴-۳، به ترتیب پروفیل تابع جریان، پروفیل سرعت و پروفیل دما را به ترتیب در شرایط $x=0.15, \mathrm{Ec}=0.5, \mathrm{Pr}=3.97$ و $\varepsilon=0.1$ و بدون در نظر گرفتن چشمه حرارتی در مقایسه با نتایج حاصل شده از حساب اغتشاشات نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱: پروفیل تابع جریان در شرایط $x = 0.15, \mathrm{Ec} = 0.5, \mathrm{Pr} = 3.97$ و $\varepsilon = 0.1$ بدون در نظر گرفتن چشمه حرارتی



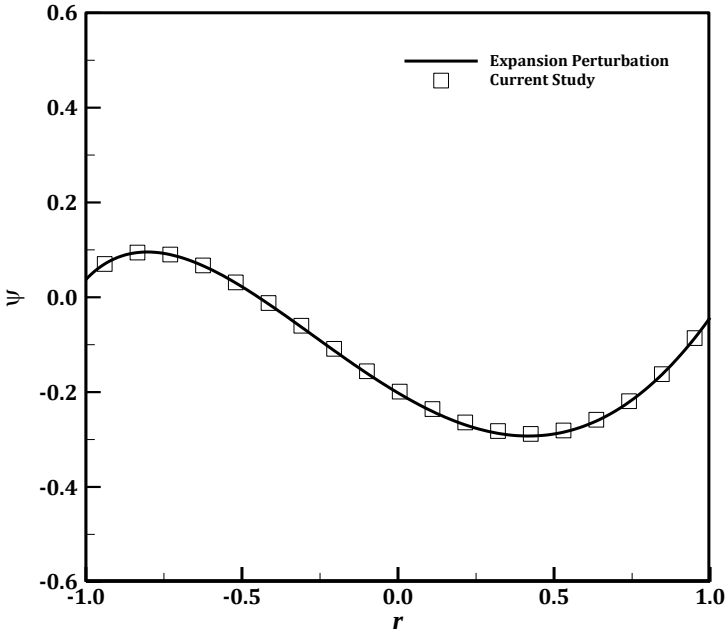
شکل ۴-۲: پروفیل سرعت در شرایط $x = 0.15, \mathrm{Ec} = 0.5, \mathrm{Pr} = 3.97$ و $\varepsilon = 0.1$ بدون در نظر گرفتن چشمه حرارتی



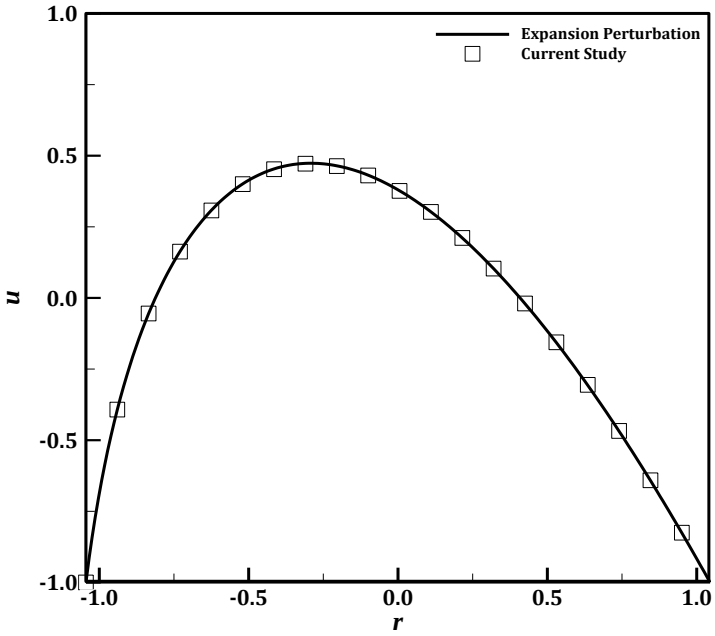
شکل ۴-۳: پروفیل دما در شرایط $x = 0.15, \mathrm{Ec} = 0.5, \mathrm{Pr} = 3.97$ و $\varepsilon = 0.1$ بدون در نظر گرفتن چشمه حرارتی

همان‌طور که از شکل ۴-۱ تا شکل ۴-۳ مشخص می‌باشد حل حساب اغتشاشات و حل عددی با روش جعبه‌ای کلر در $\varepsilon = 0.1$ دارای مقدار کمی خطا می‌باشد، که این خطا با کوچک‌تر شدن مقدار کمیت اغتشاش (ε) به صفر میل می‌کند.

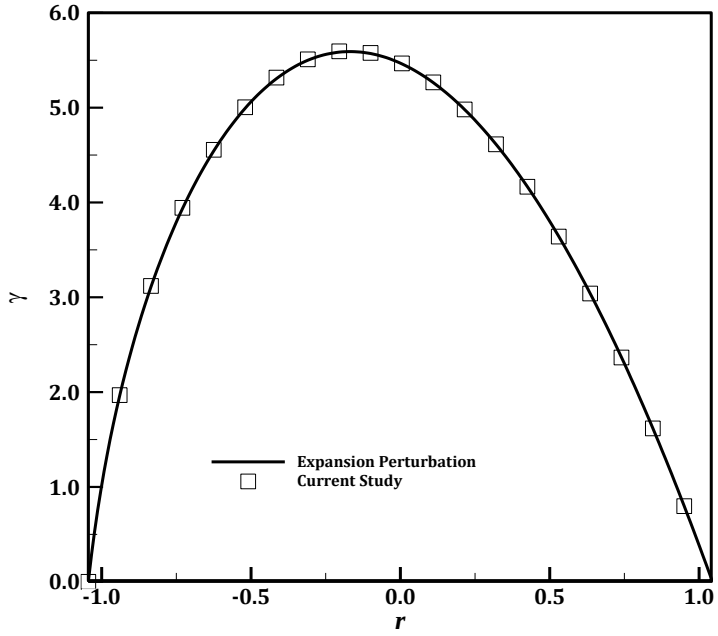
شکل ۴-۴، شکل ۴-۵ وشکل ۴-۶، نیز به ترتیب پروفیل‌های تابع جریان، سرعت و دما را در شرایط $x = 0.15, \mathrm{Ec} = 0.5, \mathrm{Pr} = 3.97$ و $\varepsilon = 0.01$ به همراه چشمه حرارتی در مقایسه با نتایج حاصل شده از حساب اغتشاشات نشان می‌دهد.



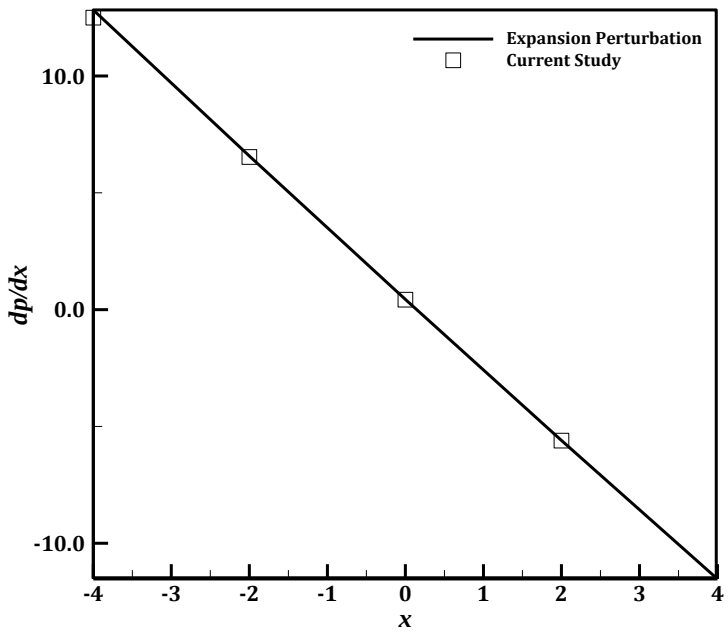
شکل ۴-۴: پروفیل تابع جریان در شرایط $x = 0.15, \mathrm{Ec} = 0.5, \mathrm{Pr} = 3.97$ و $\varepsilon = 0.01$ به همراه چشمه حرارتی($\zeta = 0.8$)



شکل ۴-۵: پروفیل سرعت در شرایط $x = 0.15, \mathrm{Ec} = 0.5, \mathrm{Pr} = 3.97$ و $\varepsilon = 0.01$ به همراه چشمه حرارتی($\zeta = 0.8$)



شکل ۴-۶: پروفیل دما در شرایط $x = 0.15, \mathrm{Ec} = 0.5, \mathrm{Pr} = 3.97$ و $\varepsilon = 0.01$ به همراه چشمه حرارتی($\zeta = 0.8$)



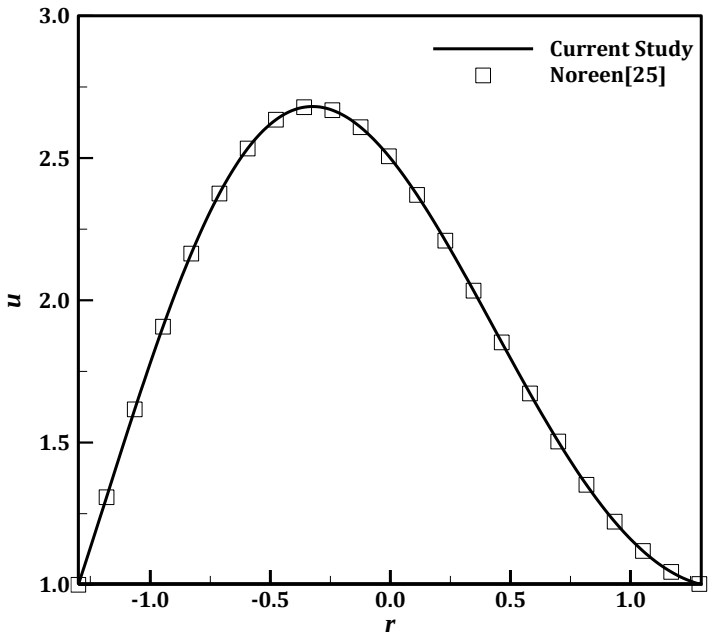
شکل ۴-۷: نمودار گرادیان فشار در شرایط $x = 0.15, \mathrm{Ec} = 0.5, \mathrm{Pr} = 3.97$ و $\varepsilon = 0.01$ به همراه چشمه حرارتی($\zeta = 0.8$)

همان‌طور که در سه شکل فوق مشخص است، مقدار خطا در $\varepsilon = 0.01$ به صفر میل می کند. همچنین در این شکل‌ها مشخص است که مقادیر به‌دست آمده از دو روش حساب اغتشاشات و روش جعبه‌ای کلر برای پروفیل تابع جریان، پروفیل سرعت، پروفیل دما و همچنین نمودار گردایان فشار همخوانی بسیار خوبی با یکدیگر دارند.

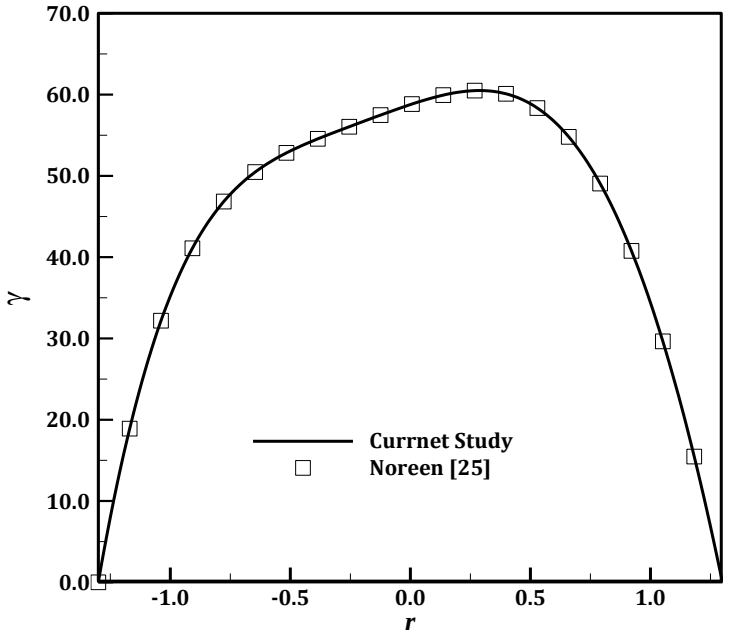
۴-۲-۲ نتایج عددی به‌دست آمده توسط نورین و همکاران

یک کانال منحنی دوبعدی نامحدود که با نانوسیال تراکم ناپذیر پرشده است در نظر گرفته می‌شود. کانال مانند یک دایره با مرکز O و شعاع R می‌باشد که یک موج سینوسی با سرعت c روی دیواره آن منتشر می‌شود. مختصات استوانه‌ای $(\bar{R},\bar{X})$ برای کانال در نظر گرفته می شود. میدان مغناطیسی در راستای شعاعی با شدت $H_0^*(= H_0R^*/(R^* + \bar{R}))$ (که در آن H_0 میدان مغناطیسی ثابت است) به کانال اعمال می‌شوند. برای اعتبارسنجی روش جعبه‌ای کلر از نتایج عددی نورین و همکاران [۲۵] استفاده شده است. به همین منظور $x = 1$ و $\alpha = 0.3$ در نظر گرفته شده‌اند.

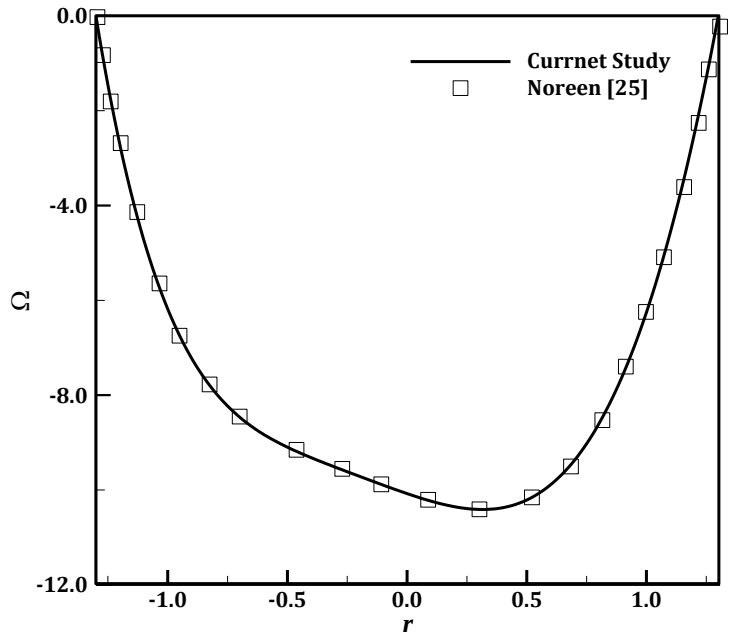
در شکل ۴-۸ پروفیل سرعت، در حالتی که $k = 6$ و $M = 1.8$ می‌باشد مورد مقایسه قرار گرفته است.



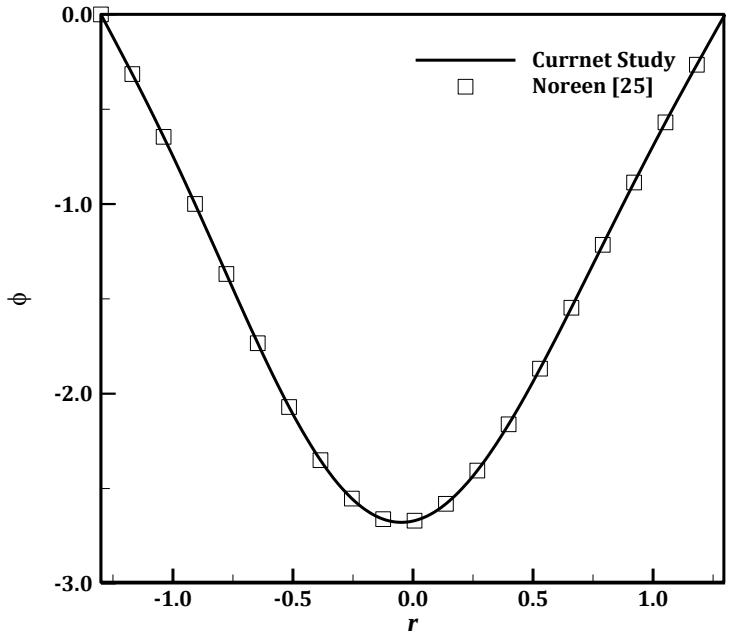
شکل ۴-۸: پروفیل سرعت بدون بعد در شرایط: $M = 1.8, \theta = -3, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, x = 1,$ $\mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{Gr} = 1, \mathrm{Gc} = 1, k = 6$



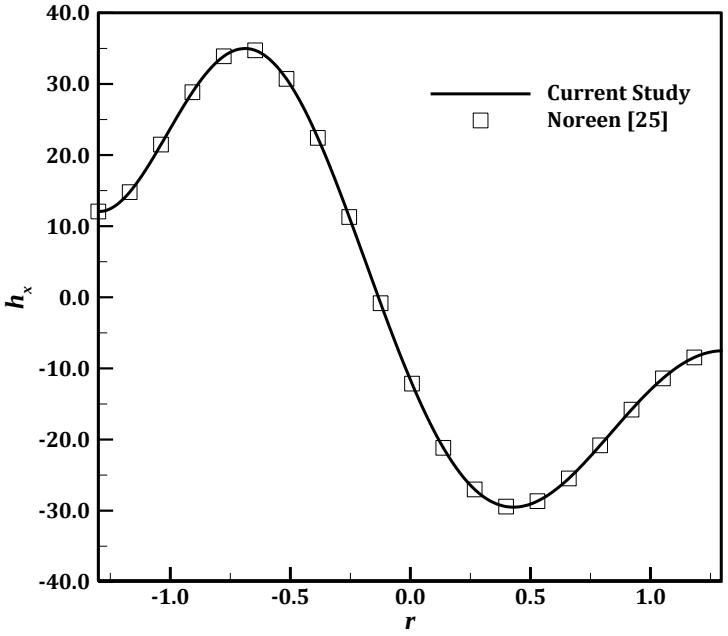
شکل ۴-۹: پروفیل دما بدون بعد در شرایط: $M = 1, \theta = 4, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, x = 1, \mathrm{Ec} =$ $1, \mathrm{Pr} = 21, \mathrm{Gr} = 1, \mathrm{Gc} = 1, k = 7$



شکل ۴-۱۰: پروفیل غلظت بدون بعد در شرایط: $M = 0, \theta = 4, \mathrm{Nt} = \mathrm{Nb} = 0.3, x = 1,\ \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{Gr} = \mathrm{Gc} = 2, k = 7$



شکل ۴-۱۱: پروفیل تابع نیروی مغناطیسی بدون بعد در شرایط: $M = 3, \theta = 4, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, x = 1,\ \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 21, \mathrm{Gr} = \mathrm{Gc} = 2, k = 7, \mathrm{Re_m} = 4, E = 1$



شکل ۴-۱۲: پروفیل میدان مغناطیسی القائی محوری بدون بعد در شرایط: $\boldsymbol{M = 3.3, \theta = 4, \mathrm{Nt} = 0.1, \mathrm{Nb} = 0.3, x = 1,\ \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{Gr} = \mathrm{Gc} = 2, k = 5, \mathrm{Re_m} = 4, E = 1}$

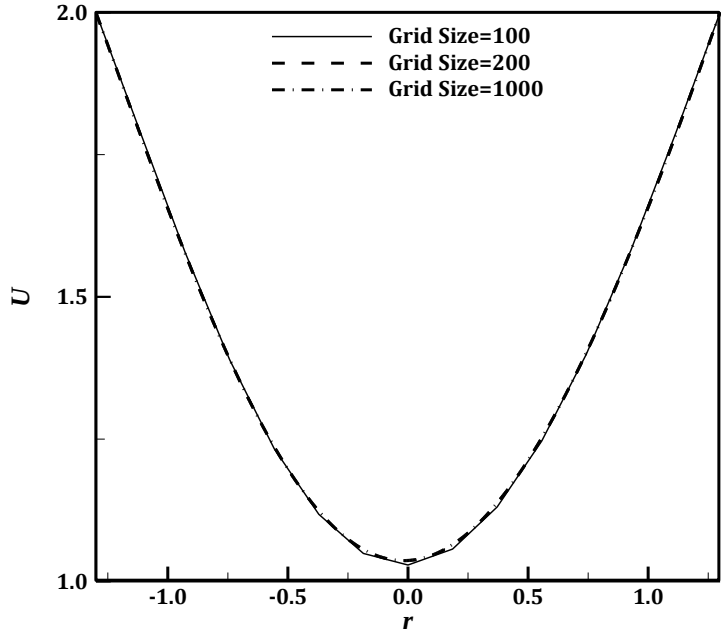
همان‌طور که از شکل ۴-۸ مشخص است، بین نتیجه حاصل از روش جعبه‌ای کلر و نتیجه حاصل از روش شوتینگ[1] که توسط نورین[۲۵] استفاده شده است، همخوانی خوبی وجود دارد. در شکل ۴-۹، مقایسه پروفیل دما و در شکل ۴-۱۰، مقایسه پروفیل غلظت با نتایج نورین و همکاران [۲۵] در $k = 7, x = 1$ نشان داده شده است. همچنین شکل ۴-۱۱و شکل ۴-۱۲، به‌ترتیب تابع نیروی مغناطیسی و میدان مغناطیسی القایی محوری را در مقادیر $\mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, E=1$ مورد مقایسه قرار داده است. نتایج به دست آمده تطابق مناسبی را بین نتایج عددی موجود و مرجع ذکر شده نشان می‌دهد.

در نهایت، با توجه به نتایج به دست آمده، الگوریتم عددی حاضر قابلیت و دقت لازم برای حل جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار را داراست. پس از اعتبارسنجی و بررسی صحت نتایج شبیه‌سازی عددی، تاثیر چشمه حرارتی و محیط متخلخل در جریان داخل یک لوله منحنی موج‌دار همراه با هیدرودینامیک مغناطیسی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

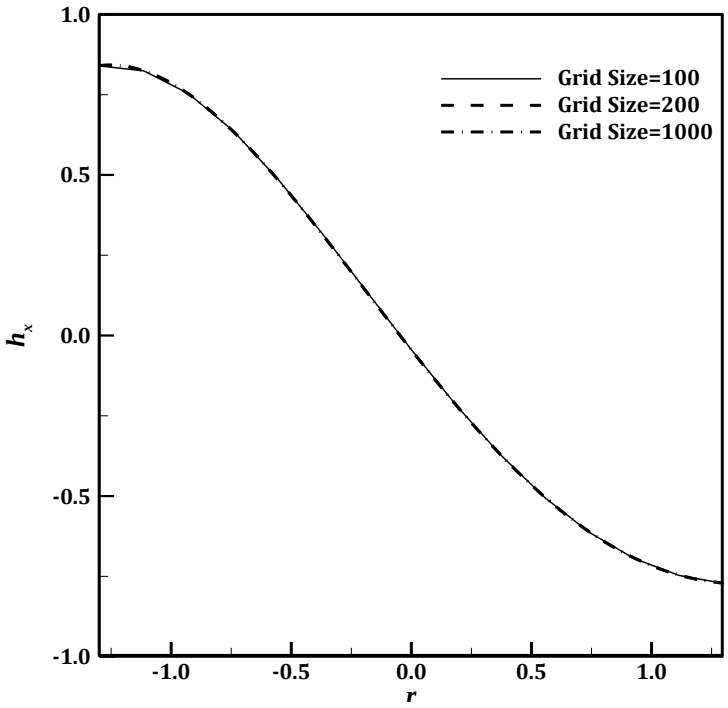
[1] Shooting Method

۴-۲-۳ استقلال حل از شبکه

جهت مطالعه استقلال حل از شبکه محاسباتی، سه شبکه با ابعاد ۱۰۰،۲۰۰ و ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به پروفیل سرعت بدون بعد و میدان مغناطیسی القا شده محوری را در شرایط بیان شده در شکل ۴-۱۳ و شکل ۴-۱۴ نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج با شبکه با ابعاد ۲۰۰، ۱۰۰۰ همپوشانی و انطباق خوبی دارند که با عنایت به اعتبارسنجی صورت گرفته در شکل‌های قبلی که جزئیات آن در مطالب پیشین ارائه شد دارای دقت کافی هستند. لذا با توجه به نیاز به کاهش زمان محاسباتی، در این مطالعه و شبیه‌سازی‌های بعدی از شبکه ۲۰۰ استفاده شده است.



شکل ۴-۱۳: مطالعه استقلال حل از شبکه برای پروفیل سرعت بدون بعد در شرایط: $M = 3, \theta = 4, \mathrm{Nt} = 0.1, M = 1.2, \mathrm{Nb} = 0.3, x = 1,\ \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{Gr} = \mathrm{Gc} = 2, k = 7, \mathrm{Re_m} = 1, E = 1$



شکل ۴-۱۴: مطالعه استقلال حل از شبکه برای میدان مغناطیسی القا شده محوری بدون بعد در شرایط:
$M = 3, \theta = 4, \mathrm{Nt} = 0.1, M = 1.2, \mathrm{Nb} = 0.3, x = 1,\ \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{Gr} = \mathrm{Gc} = 2, k = 7, \mathrm{Re_m} = 1, E = 1$

۴-۲-۴ نتایج

همان‌طور که در قسمت‌های قبل بیان شد، جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار درون یک محیط متخلخل به‌همراه چشمه حرارتی به‌صورت عددی مورد بررسی قرار گرفت. در این قسمت به بررسی اثر عدد هارتمن (M)، کمیت انحنا (k)، عدد گراشف (Gr)، عدد Gc، کمیت فورتیک (Nt)، کمیت حرکت براونی (Nb)، عدد اکرت (Ec)، عدد پرانتل (Pr)، میدان الکتریکی (E)، عدد رینولدز مغناطیسی (R_m) که در مقادیر مختلف جریان نظیر سرعت محوری (u)، دما (γ)، غلظت (Ω)، میدان مغناطیسی القائی محوری (h_x) و افزایش فشار بر طول موج (ΔP_λ) ظاهر می‌شوند، به همراه کمیت تخلخل و چشمه حرارتی پرداخته شده است.

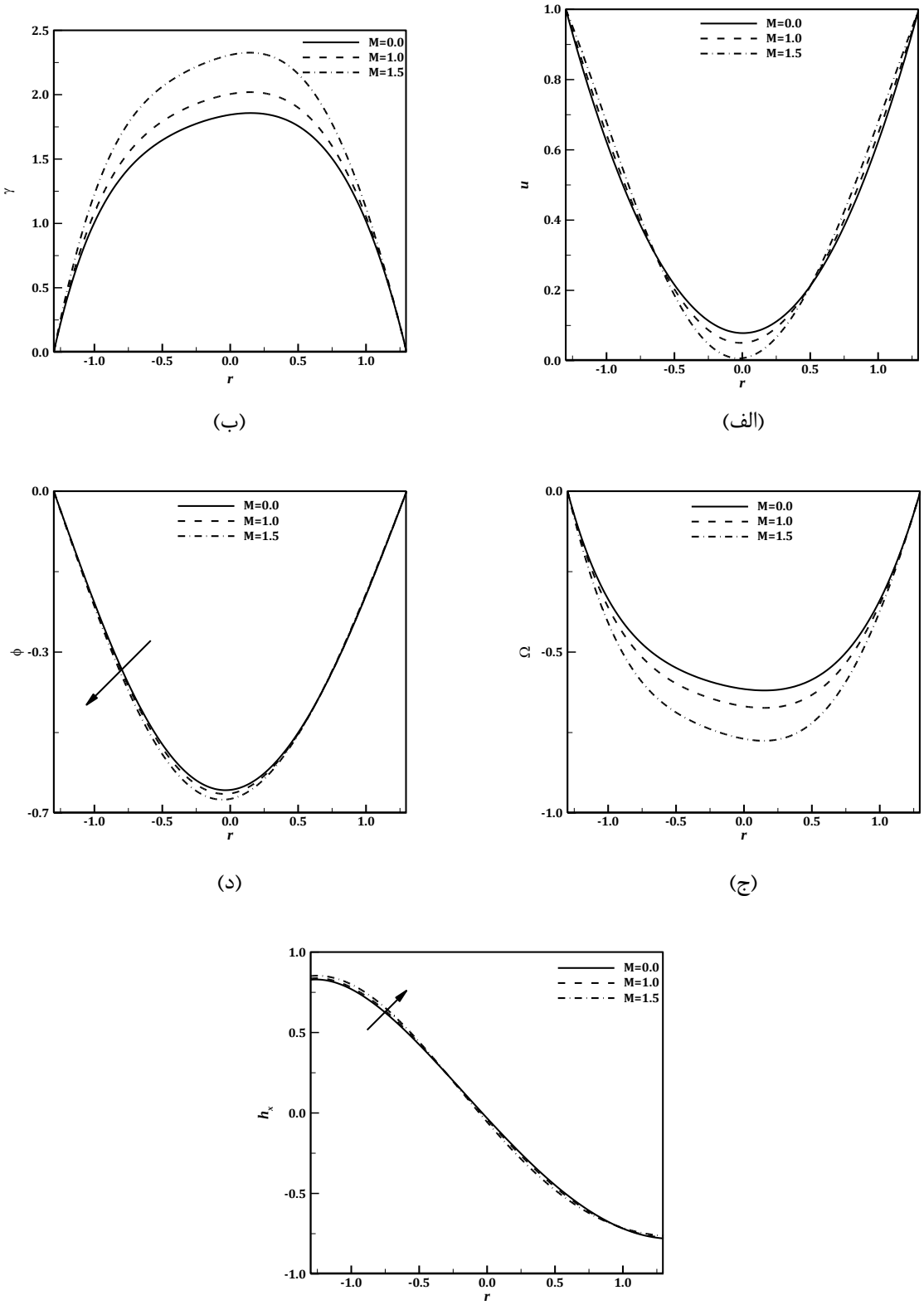
۴-۲-۴-۱ بررسی تأثیر عدد هارتمن

عبور جریان الکتریکی از داخل سیم باعث می‌شود که میدان مغناطیسی حول سیم حامل جریان ایجاد گردد بنابراین با داشتن سیم حامل جریان می‌توان میدان مغناطیسی تولید کرد که جهت این میدان مغناطیسی طبق قانون دست راست مشخص می‌گردد. هنگامی‌که جریان داخل کانال حاوی نانوذرات مغناطیسی تحت تأثیر میدان مغناطیسی خارجی قرار می‌گیرد روی پروفیل سرعت جریان داخل کانال اثر می‌گذارند. با توجه به مطالب گفته شده و تعریف عدد هارتمن که به‌صورت نسبت نیروی الکترومغناطیس به نیروی لزجت می‌باشد اگر خطوط میدان مغناطیسی خلاف جهت جریان باشند سبب کاهش سرعت نانوذرات در مرکز کانال می‌شود (شکل ۴-۱۵، الف). هدف از تزریق نانوذرات در سیال، کاهش انتقال حرارت جابه‌جایی و افزایش انتقال حرارت هدایتی می‌باشد. با استفاده از رابطه بدون بعد دما و با افزایش عدد بدون بعد دما، میزان انتقال حرارت کاهش می‌یابد (شکل ۴-۱۵، ب). درنتیجه می‌توان این‌گونه بیان کرد که میدان مغناطیسی تأثیر بسزایی روی میدان جریان و تبع آن روی میزان انتقال حرارت دارد، زیرا وجود میدان

مغناطیسی سبب به وجود آمدن نیروی لورنتز در میدان جریان می‌شود و این نیرو در حالت کلی سبب کاهش جریان جابجایی و میزان انتقال حرارت می‌شود.

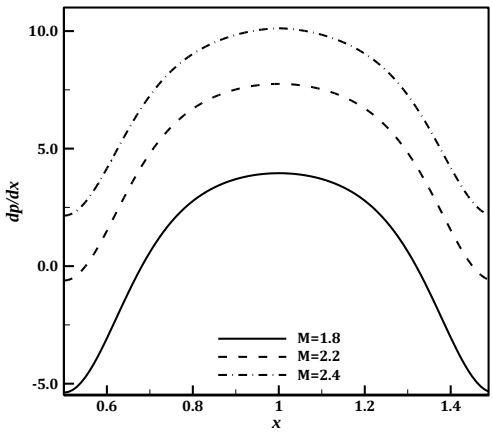
همان‌طور که در شکل ۴-۱۵ مشخص می‌باشد و با استفاده از رابطه بدون بعد $\phi = \frac{\bar{\phi}}{H_0 a}$ ، این‌گونه می‌توان بیان کرد که با افزایش شدت میدان مغناطیسی (H_0)، تابع نیروی مغناطیسی در جهت شعاع کاهش می‌یابد. با توجه به این‌که زمانی که یک آهنربا در نزدیکی یک ذره آهنی یا آلیاژی از آهن قرار می‌گیرد، در ابتدا ذره آهن به یک آهنربای کوچک تبدیل می‌شود یعنی دارای دو قطب آهنربایی می‌گردد بنابراین ذرات آهنی در میدان مغناطیسی مانند یک آهنربا عمل می‌کنند، بدین معنی که میدان مغناطیسی خارجی باعث القای خاصیت مغناطیسی در ذرات می‌شود درنتیجه علاوه بر میدان مغناطیسی خارجی در راستای شعاع کانال، به دلیل حرکت ذرات در کانال میدان مغناطیسی القائی در راستای محور کانال هم وجود دارد. با توجه به این‌که غلظت نانوذرات در نیمه پایینی کانال نسبت به نیمه بالایی کانال بیشتر است و همچنین تأثیر میدان مغناطیسی خارجی به دلیل قرار گرفتن نانوذرات در نزدیکی دیواره پایینی بیشتر است، درنتیجه در نیمه پایینی کانال با افزایش شدت میدان مغناطیسی القا شده محوری افزایش بیشتری نسبت به نیمه بالایی کانال دارد. پس با افزایش شدت میدان، نانوذرات به سمت دیواره پایینی کانال حرکت می‌کنند درنتیجه میدان مغناطیسی القا شده محوری در نیمه بالایی کانال رو به کاهش می‌رود (شکل ۴-۱۵، ه).

با توجه به شکل ۴-۱۶الف با افزایش عدد هارتمن، گرادیان فشار افزایش می‌یابد، این بدین معنی است که با اعمال میدان مغناطیسی بزرگ به میدان جریان، گرادیان فشار بزرگ‌تری برای عبور جریان نیاز است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که فشار سیال می‌تواند با به کار بردن مناسب قدرت میدان مغناطیسی کنترل شود. این پدیده در طول عمل جراحی برای کنترل خون‌ریزی بیش از حد مفید است.

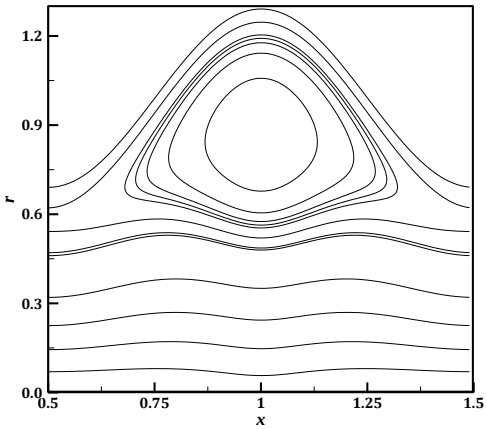


(الف) (ب) (ج) (د) (ه)

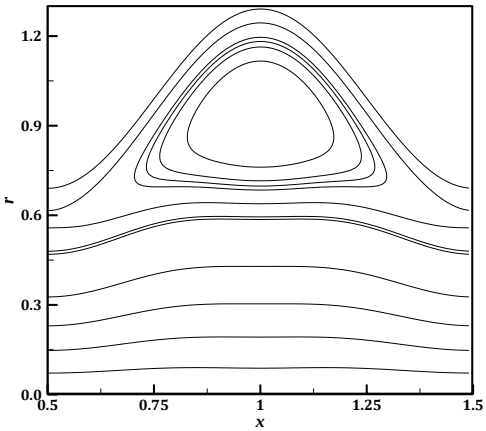
شکل ۴-۱۵: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف عدد هارتمن در شرایط $k = 7, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, Nt = 0.1, Nb = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$



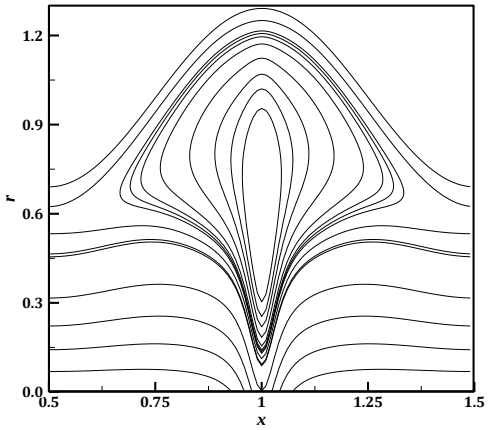
(الف)



$M = 2.2$(ج)



$M = 1.8$(ب)



$M = 2.4$(د)

شکل ۴-۱۶: (الف) نمودار گرادیان فشار، خط جریان در (ب)$M = 1.8$، (ج)$M = 2.2$، (د)$M = 2.4$ در شرایط $k = 100, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, Nt = 0.3, Nb = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2,\ \mathrm{Da} = 100, \alpha = 0.3$

همان‌طور که در قسمت ب تا ج شکل ۴-۱۶ مشاهده می‌شود با افزایش عدد هارتمن گردابه‌های نسبی که در حالت موج‌دار مشاهده می‌گردد با قدرت بیشتری در دیواره خارجی تشکیل می‌گردد. همچنین این گردابه‌های نسبی با افزایش عدد هارتمن از دیواره خارجی به سمت مرکز کانال متمایل می‌گردند و این امر سبب می‌شود که جریان به سختی از مقطع مشخص شده عبور کند.

در جدول ۴-۱ ، اثر عدد هارتمن روی عدد ناسلت متوسط بیان شده است. همان‌طور مشخص می‌باشد، افزایش عدد هارتمن سبب کاهش عدد ناسلت می‌شود.

جدول ۴-۱ تاثیر عدد هارتمن روی عدد ناسلت

M	۰	۱	۱/۵
Nu	۳/۳۹۲۵۱	۳/۳۶۰۱۸	۳/۳۴۱۸۱

۴-۲-۴-۲ بررسی تأثیر انحنای کانال

در شکل ۴-۱۷ به بررسی تأثیر انحنای کانال بر روی سرعت، دما، غلظت، تابع نیروی مغناطیسی و میدان مغناطیسی القا شده محوری پرداخته شده است. همان‌طور که در قسمت الف مشاهده می‌شود با افزایش انحنای کانال (k)، محل وقوع حداکثر سرعت به سمت دیواره داخلی متمایل می‌شود، همچنین با توجه به این‌که دبی ثابت می‌باشد سرعت در دیواره خارجی کاهش می‌یابد.

هنگام عبور سیال از کانال‌های منحنی، به دلیل انحنای لوله، نیروی گریز از مرکز تولید می‌شود. جریان ثانویه‌ای که در اثر این نیرو به وجود می‌آید، توانایی مؤثری در افزایش انتقال حرارت دارد. درنتیجه با افزایش نسبت انحنا، جریان‌های ثانویه تشدید شده و انتقال حرارت افزایش می‌یابد (شکل ۴-۱۷، ب). همان‌طور که از قسمت ج شکل ۴-۱۷ مشاهده می‌شود با افزایش انحنای کانال توزیع بدون بعد غلظت در مرکز کانال

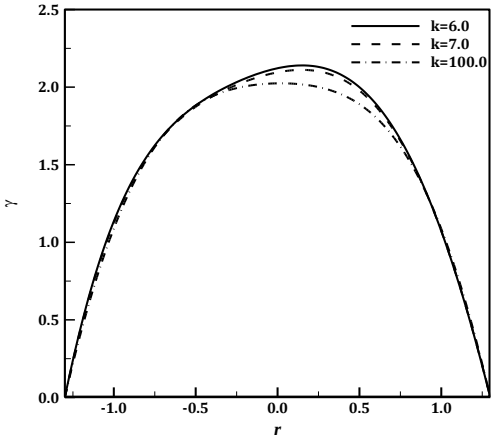
افزایش می‌یابد. با استفاده از تعریف تابع نیروی مغناطیسی (ϕ)، با ثابت در نظر گرفتن قدرت میدان مغناطیسی خارجی H_0، افزایش انحنا موجب کاهش نیمه عرضی کانال می‌گردد که این کاهش سبب می‌شود تابع نیروی مغناطیسی در مرکز کانال افزایش یابد و همان‌طور که در قسمت د شکل ۴-۱۷ مشاهده می‌شود این مقدار در دیواره داخلی افزایش می‌یابد. با توجه به این‌که غلظت در دیواره داخلی کانال کاهش می‌یابد بنابراین میدان مغناطیسی القا شده محوری در دیواره داخلی کانال کاهش پیدا می‌کند.

با توجه به رابطه‌های $k = \frac{R^*}{a}$ و $p = \frac{a^2\bar{p}}{c\lambda\mu}$، با افزایش مقدار k، نیمه عرضی کانال کاهش می‌یابد و با استفاده از $p = \frac{a^2\bar{p}}{c\lambda\mu}$، با کاهش نیمه عرضی کانال از مقدار فشار کاسته می‌شود، در نتیجه هر چه که مقدار k بیشتر شود، کانال به‌صورت مستقیم درمی‌آید و هرچه که کانال صاف‌تر شود مقدار گرادیان فشار کاهش می‌یابد که این امر را می‌توان در شکل ۴-۱۸ الف مشاهده کرد. با افزایش کمیت انحنا اندازه گردابه‌های نسبی در حالت موج‌دار کاهش می‌یابد و هرچه کانال صاف‌تر باشد گردابه‌های نسبی در حالت موج‌دار حول خط مرکزی در دیواره‌های داخلی و خارجی متقارن‌تر می‌شود.

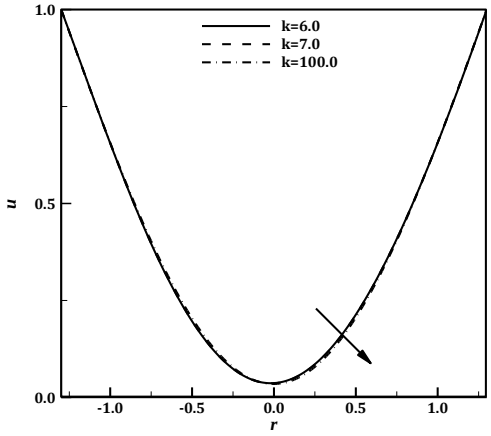
در جدول ۴-۲، تغییرات عدد ناسلت در برابر افزایش اثر انحنای کانال مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در این جدول ملاحظه می‌شود، افزایش انحنای کانال سبب افزایش عدد ناسلت می گردد.

جدول ۴-۲ تاثیر انحنای کانال روی عدد ناسلت

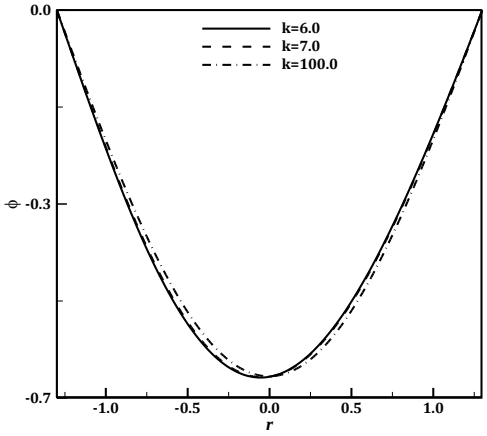
k	۶	۷	۱۰۰
Nu	۳/۳۲۸۴۶	۳/۳۵۰۲۵	۳/۵۰۲۷



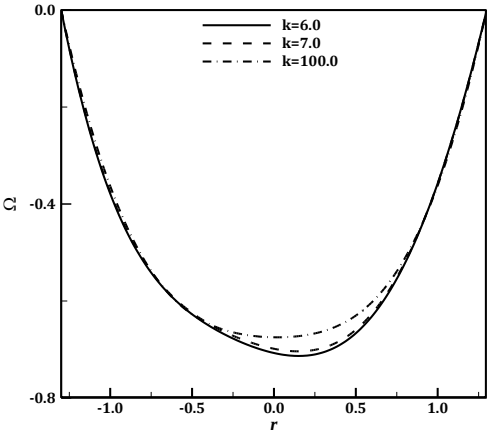
(ب)



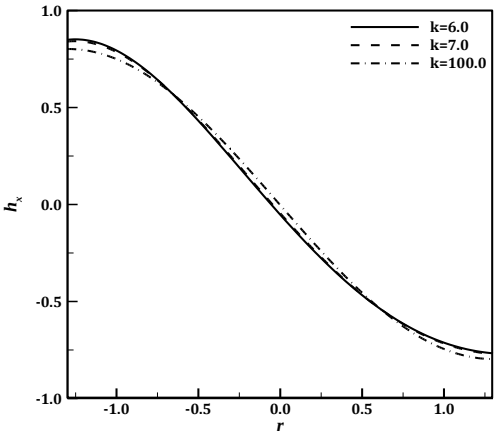
(الف)



(د)

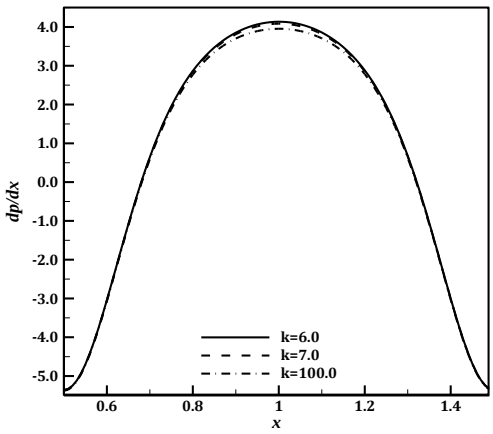


(ج)

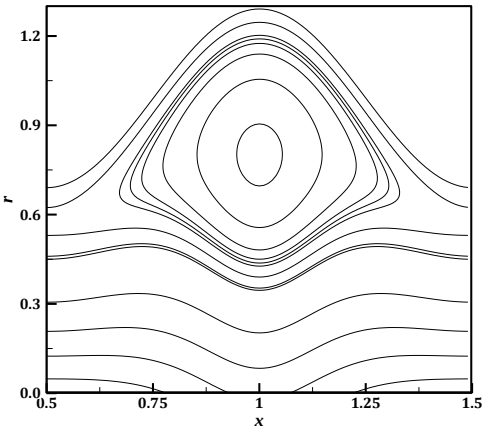


(ه)

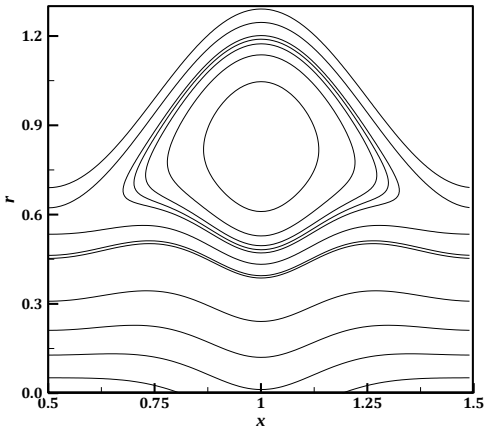
شکل ۴-۱۷: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف انحنای کانال در شرایط $M = 1.2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, Nt = 0.1, Nb = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$ ،



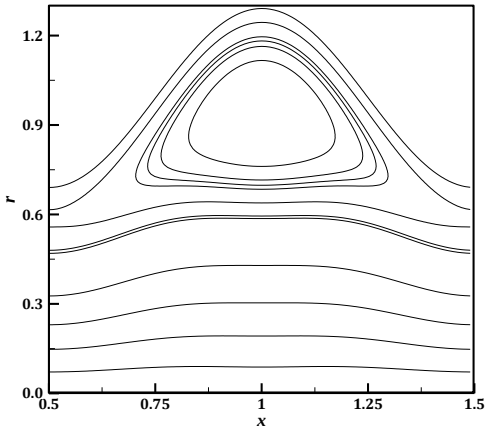
(الف)



$k = 6$(ب)



$k = 7$(ج)



$k = 100$(د)

شکل ۴-۱۸: (الف) نمودار گرادیان فشار، خط جریان در (ب)$k = 6$، (ج)$k = 7$، (د)$k = 100$ در شرایط $, M = 1.8, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, Nt = 0.3, Nb = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2,\ \mathrm{Da} = 100, \alpha = 0.3$

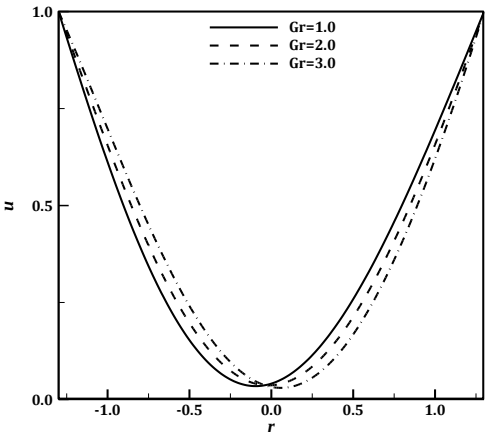
۴-۲-۴-۳ بررسی تأثیر عدد گراشف

در این قسمت به بررسی تأثیر عدد گراشف بر پروفیل سرعت و دمای بدون بعد، توزیع غلظت و کمیت‌های مختلف دیگر از جمله افزایش فشار و خطوط جریان پرداخته شده است. با افزایش عدد گراشف پروفیل سرعت به سمت مرکز کانال متمایل می‌گردد و باعث می‌شود که پروفیل سرعت حول مرکز کانال متقارن گردد و سرعت در دیواره خارجی کانال کاهش می‌یابد و افزایش سرعت در دیواره خارجی سبب ثابت ماندن دبی جریان می‌گردد. با افزایش عدد گراشف، انتقال حرارت جابه‌جایی بر اتلافات لزجت غالب می‌شود، انتقال حرارت جابه‌جایی از تأثیرات اتلافات لزجت می‌کاهد (شکل ۴-۱۹-ب). در فصل سوم رابطه بین پروفیل توزیع دمای بدون بعد و توزیع بدون بعد غلظت به‌صورت $\Omega = -\frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\gamma$ بیان شد، بنابراین انتظار می‌رود که روند افزایش و یا کاهش نمودار توزیع غلظت برخلاف روند نمودار توزیع دما باشد. بنابر مطالب بیان شده در قبل کاهش توزیع غلظت سبب می‌شود تا تابع نیروی مغناطیسی در بخش عمده‌ای از کانال کاهش پیدا کند که این امر سبب افزایش میدان مغناطیسی القا شده محوری می‌گردد. همان‌طور که درشکل ۴-۲۰ دیده می‌شود با افزایش عدد گراشف، گردابه‌های نسبی که با توجه به حرکت موج‌دار ایجاد می‌شوند در دیواره خارجی کانال کاهش می‌یابد.

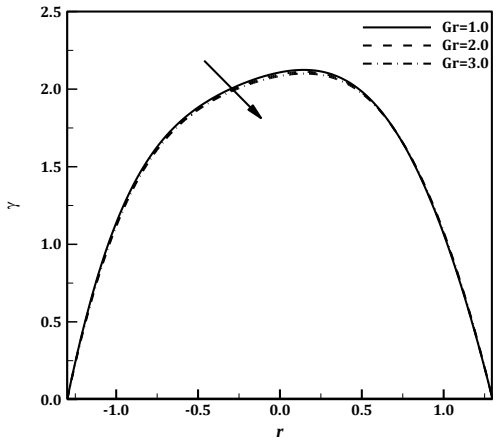
جدول ۴-۳ تغییرات عدد ناسلت را همراه با تغییرات عدد گراشف نشان می‌دهد، همانطور که از این جدول مشخص می‌باشد، افزایش عدد گراشف سبب افزایش عدد ناسلت می‌شود.

جدول ۴-۳ تاثیر عدد گراشف روی عدد ناسلت

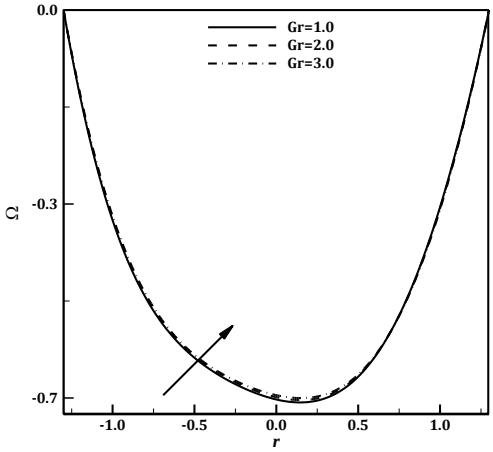
Gr	۱	۲	۳
Nu	۳/۳۲۰۳۶	۳/۳۵۰۲۵	۳/۳۸۱۳۳



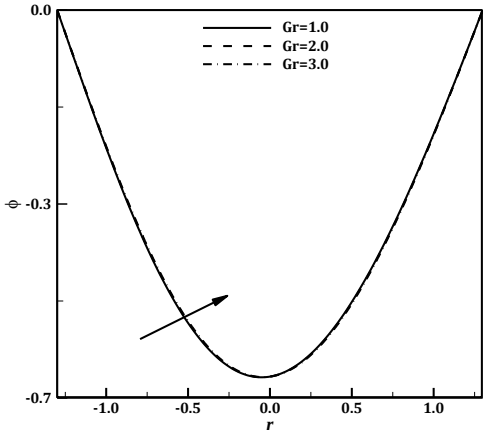
(الف)



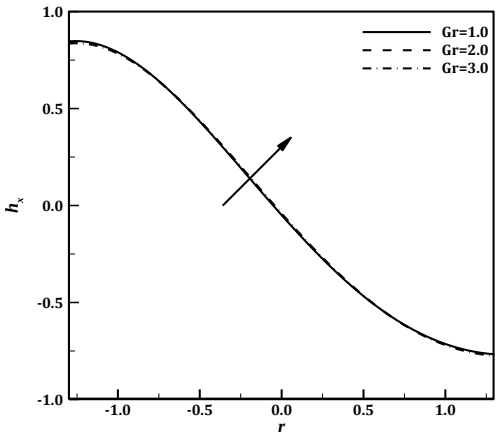
(ب)



(ج)

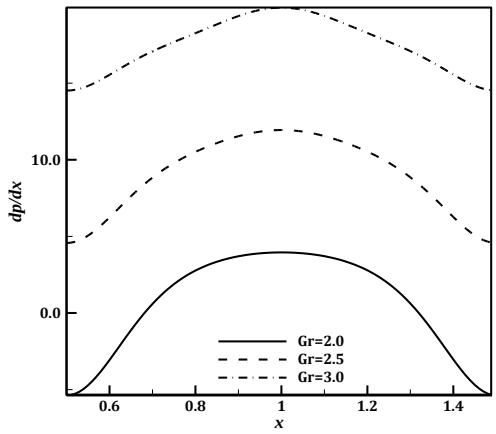


(د)

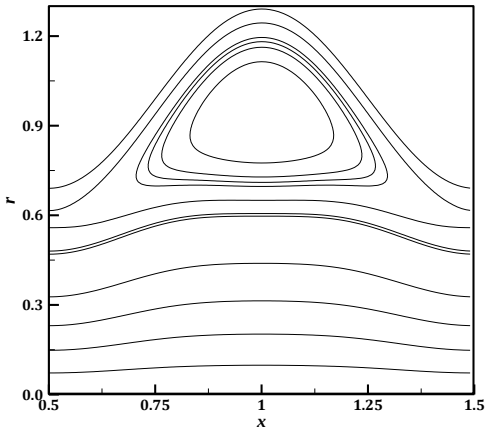


(ه)

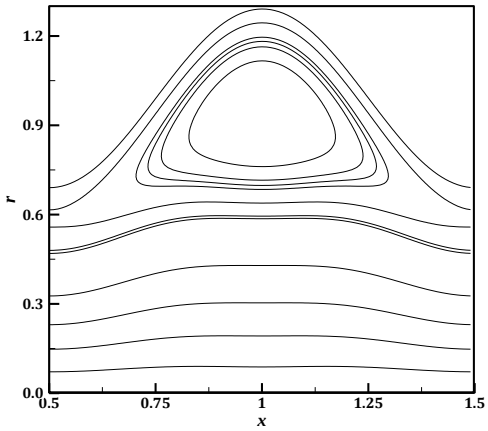
شکل ۴-۱۹: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف Gr در شرایط $M = 1.2, k = 7, \mathrm{Gc} = 2, Nt = 0.1, Nb = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$



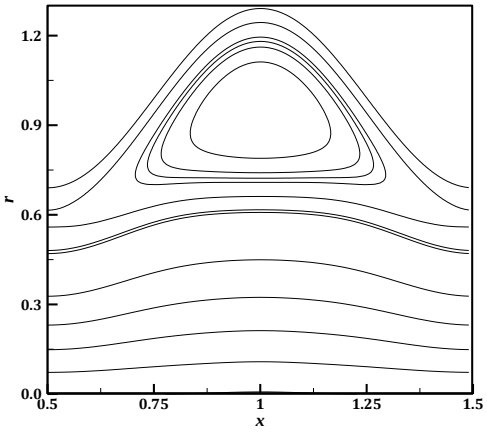
(الف)



$\mathrm{Gr} = 2.5$(ج)



$\mathrm{Gr} = 2$(ب)



$\mathrm{Gr} = 3$(د)

شکل ۴-۲۰: (الف) نمودار گرادیان فشار، خط جریان در (ب) $\mathrm{Gr} = 2$، (ج) $\mathrm{Gr} = 2.5$، (د) $\mathrm{Gr} = 3$ در شرایط $\mathrm{M} = 1.8, k = 100, \mathrm{Gc} = 2, Nt = 0.3, Nb = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2, \mathrm{Da} = 100x = 1, \alpha = 0.3$

۴-۲-۴-۴ بررسی تأثیر عدد Gc

کمیت Gc معرف عدد بدون بعد غلظت می‌باشد که همانند عدد بدون بعد گراشف به‌صورت نسبت نیروی شناوری به نیروی لزجت بیان می‌گردد. افزایش عدد Gc همراه با غلبه نیروی شناوری به نیروی لزجت می‌باشد. همان‌گونه که از قسمت الف شکل ۴-۲۱ مشاهده می‌گردد با افزایش عدد Gc، تغییرات سرعت در مرکز کانال تقریباً ناچیز می‌باشد. ولی افزایش این کمیت باعث افزایش سرعت در دیواره خارجی و کاهش سرعت در دیواره داخلی می‌گردد.

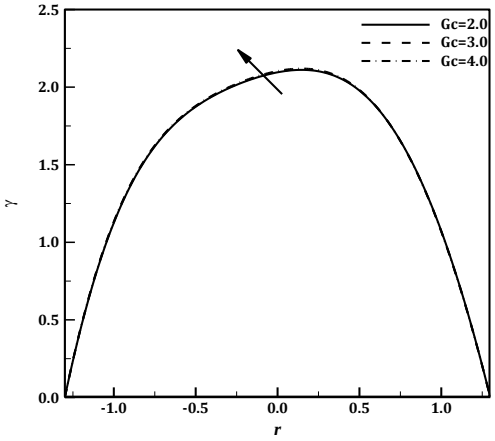
با توجه به قسمت ب شکل ۴-۲۱ افزایش عدد بدون بعد Gc، با کاهش انتقال حرارت (و یا افزایش عدد بدون بعد γ) همراه می‌باشد. با توجه به افزایش عدد بدون بعد Gc، غلظت نانوذرات در نیمه پایینی کانال نسبت به نیمه بالایی کانال بیشتر است، در نتیجه تأثیر میدان مغناطیسی خارجی القا شده محوری به دلیل قرار گرفتن نانوذرات در نزدیکی دیواره پایینی بیشتر می‌باشد (شکل ۴-۲۱ د). همچنین می‌توان در شکل ۴-۲۲ مشاهده کرد که با افزایش عدد Gc، اندازه گردابه‌های نسبی ایجاد شده در حرکت موج‌دار در دیواره خارجی کانال افزایش پیدا خواهد کرد. همچنین افزایش عدد Gc، سبب کاهش عدد ناسلت می‌گردد.

جدول ۴-۴ تاثیر عدد Gc روی عدد ناسلت

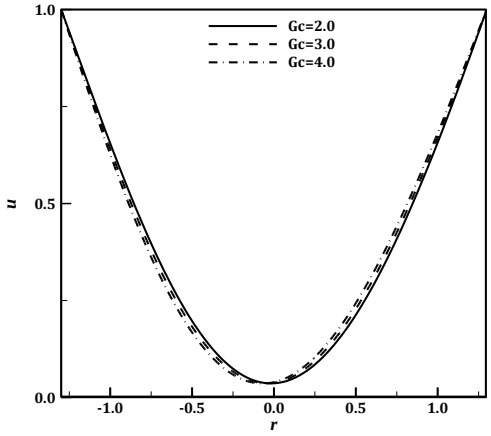
Gc	۲	۳	۴
Nu	۳/۳۵۰۲۵	۳/۳۴۰۱۶	۳/۳۳۰۱۹

۴-۲-۴-۵ بررسی تأثیر حرکت براونی

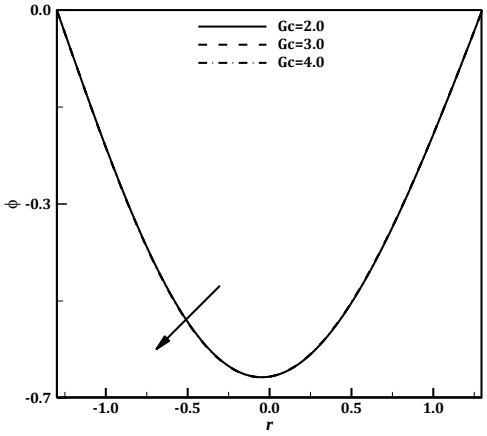
حرکت تصادفی نانوذرات داخل سیال پایه، پخش براونی نامیده و از برخورد پیوسته بین نانوذرات و مولکول‌های سیال پایه نتیجه می‌شود. حرکت براونی توسط ثابت پخش براونی D_B توصیف می‌شود. حرکت براونی در ذراتی با قطر حدود ۰/۰۰۱ میلی‌متر دیده می‌شود. این ذرات به‌قدری کوچک هستند که در حرارت گرمایی تقسیم شوند.



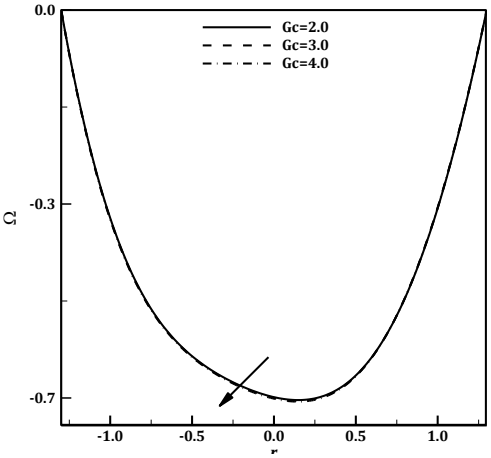
(ب)



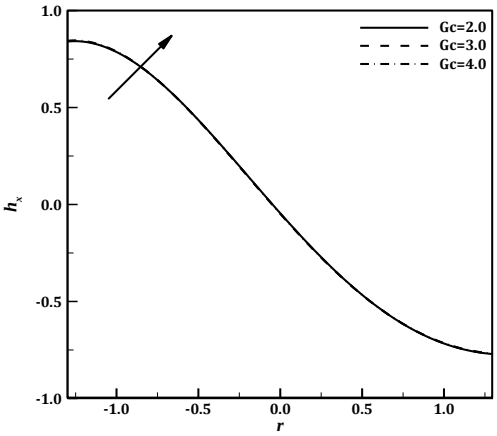
(الف)



(د)

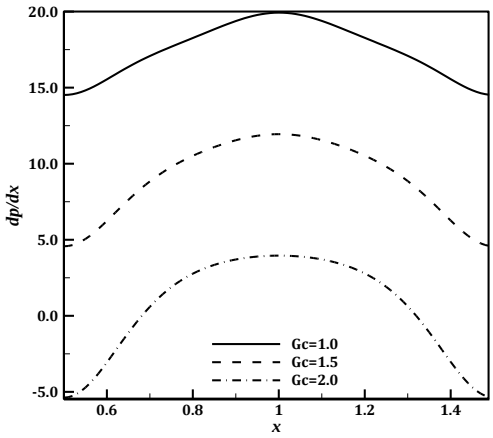


(ج)

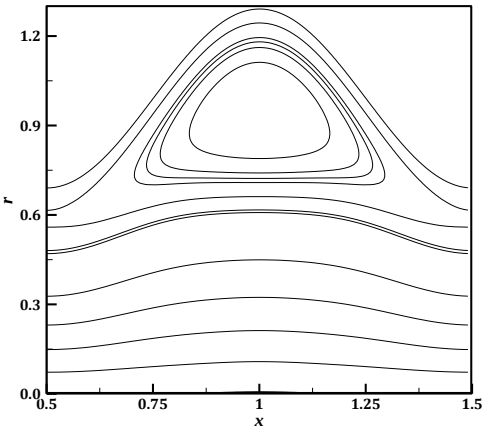


(ه)

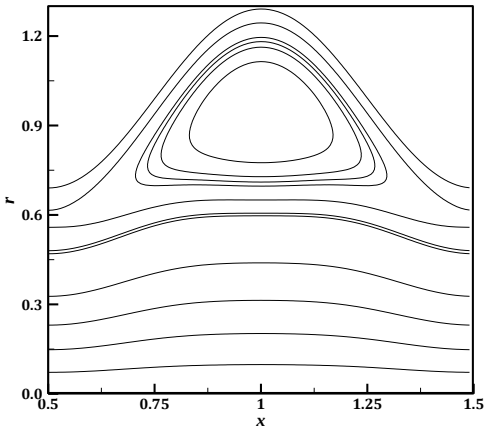
شکل ۴-۲۱: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف عدد Gc در شرایط $k = 7, M = 1.2, \mathrm{Gr} = 2, Nt = 0.1, Nb = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$



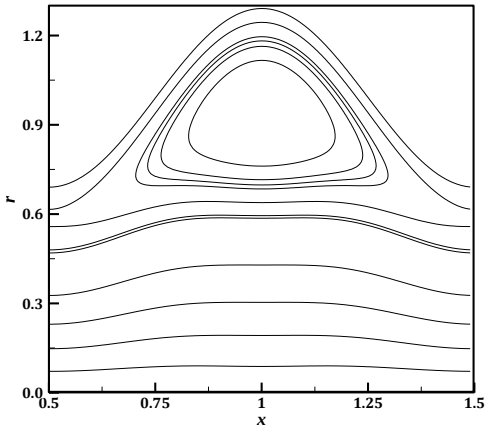
(الف)



$Gc = 1$(ب)

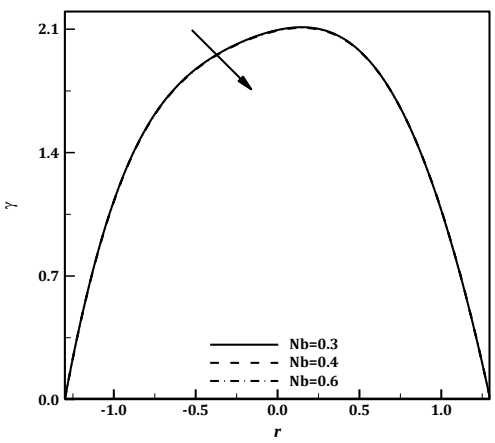


$Gc = 1.5$(ج)

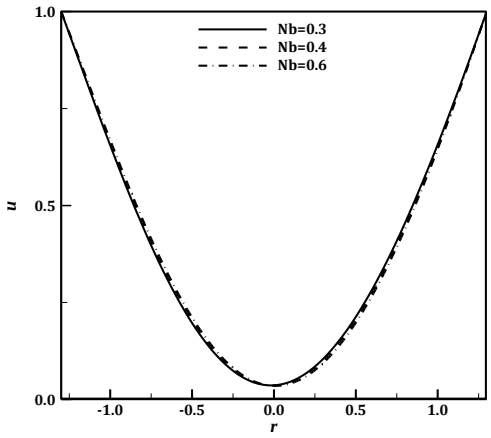


$Gc = 2$(د)

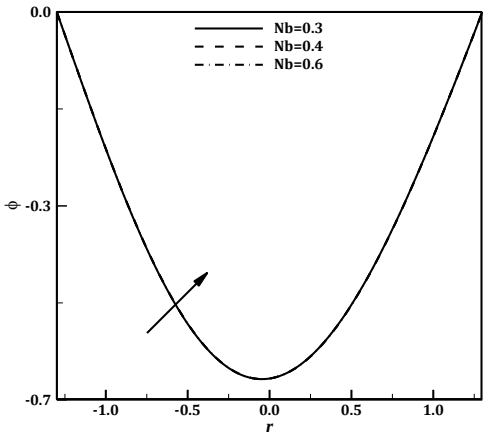
شکل ۴-۲۲: (الف) نمودار گرادیان فشار، خط جریان در (ب) $\mathbf{Gc = 1}$، (ج) $\mathbf{Gc = 1.5}$، (د) $\mathbf{Gc = 2}$ در شرایط $\boldsymbol{M = 1.8, Gr = 2, k = 100, Nt = 0.3, Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2,\ Da = 100, \alpha = 0.3}$



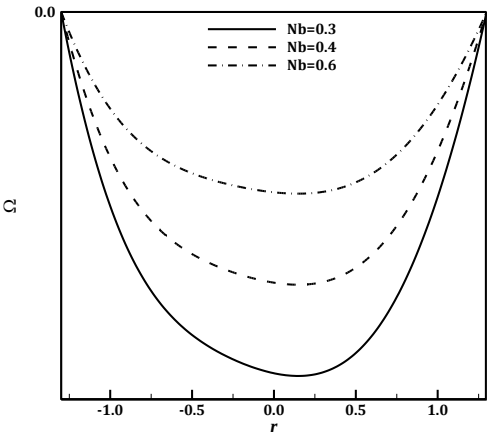
(ب)



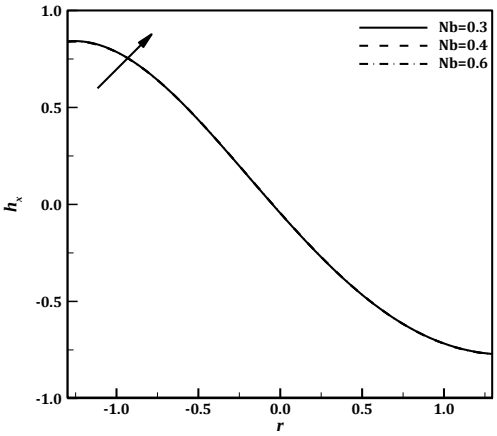
(الف)



(د)

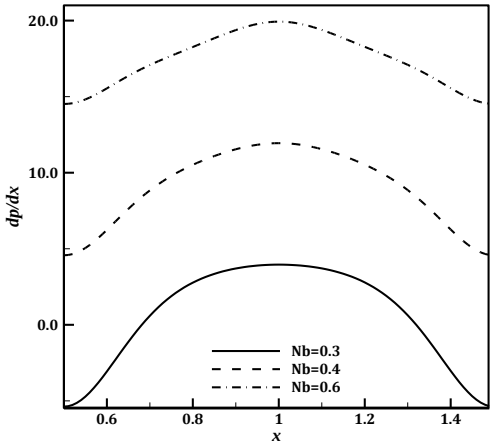


(ج)

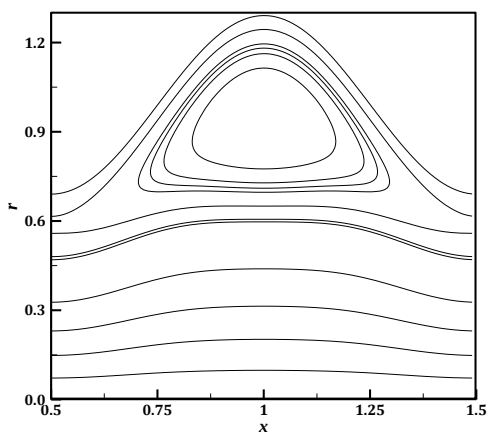


(ه)

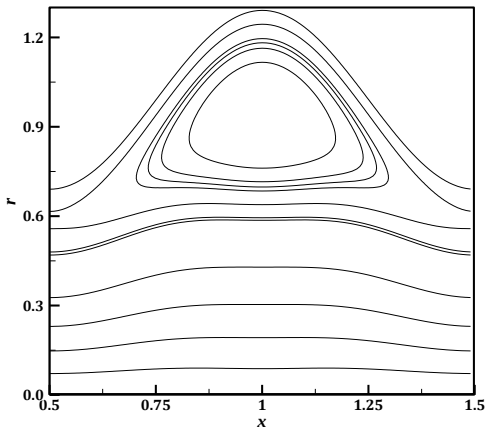
شکل ۴-۲۳: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف عدد Nb در شرایط $k = 7, M = 1.2, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, Nt = 0.1,\ \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$



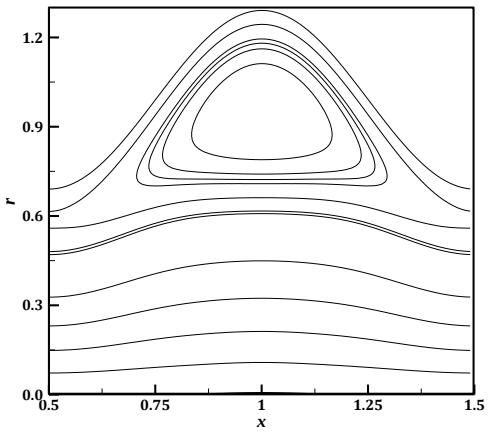
(الف)



$Nb = 0.4$(ج)



$Nb = 0.3$(ب)



$Nb = 0.6$(د)

شکل ۴-۲۴: (الف) نمودار گرادیان فشار، خط جریان در (ب) $Nb = 0.2$، (ج) $Nb = 0.3$، (د) $Nb = 0.6$ در شرایط $M = 1.8, Nt = 0.3, k = 100, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$

با افزایش عدد بروانی تغییرات سرعت در کانال ناچیز می‌باشد و مقدار بیشینه آن به سمت دیواره داخلی کانال متمایل می‌گردد. با توجه به قسمت (ب) شکل ۴-۲۳، با افزایش عدد براونی، پروفیل توزیع دمای بدون بعد کاهش می‌یابد.

با توجه به این موضوع که غلظت در دیواره داخلی بیشتر می‌باشد در این منطقه میدان مغناطیسی نسبت به دیواره خارجی که غلظت کمتری دارد، بیشتر می‌باشد بنابراین با استفاده از تعریف $\phi = \frac{\bar{\phi}}{H_0 a}$ با افزایش میدان مغناطیسی، تابع نیروی مغناطیسی کاهش می‌یابد که در قسمت د شکل ۴-۲۳ قابل ملاحظه می‌باشد. بنابر آنچه در گذشته توضیح داده شد میدان مغناطیسی القا شده محوری رفتاری خلاف تابع میدان مغناطیسی دارد.

مطابق آنچه که در قسمت الف شکل ۴-۲۴ مشاهده می‌گردد، با افزایش عدد براونی، گردایان فشار در راستای محوری کانال افزایش می‌یابد. همچنین می‌توان در قسمت‌های ب - د مشاهده نمود که با افزایش عدد براونی، اندازه گردابه‌های نسبی در حالت موج‌دار در دیواره خارجی کانال کاهش می‌یابد و جریان به سادگی از مقطع مشخص شده عبور می‌کند. در جدول ۴-۵ ، اثر حرکت براونی روی عدد ناسلت آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش حرکت براونی سبب افزایش عدد ناسلت می‌گردد.

جدول ۴-۵ تاثیر حرکت براونی روی عدد ناسلت

Nb	۰/۳	۰/۴	۰/۶
Nu	۳/۳۵۰۲۵	۳/۳۵۵۳۵	۳/۳۶۰۴۸

۴-۲-۴-۶ بررسی تأثیر حرکت ترموفورتیک

ترموفورتیک پدیده‌ای است که در مخلوط ذرات کوچک دیده می‌شود که در انواع مختلف ذرات، واکنش‌های مختلفی به نیروی گرادیان دما نشان می‌دهند. رسوب ذرات موضوع مورد علاقه برای طیف وسیعی از کاربردهای صنعتی است و ترموفورتیک پدیده‌ای است که می‌تواند با گرادیان دمایی روی رسوب ذرات تأثیر بگذارد. پدیده‌ای که ذرات تحت تأثیر نیروی فورتیک می‌باشد را ترموفورسیس می‌نامند.

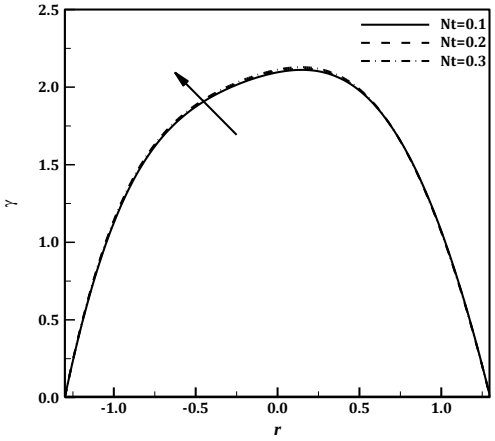
همان‌طور که در شکل ۴-۲۵، الف دیده می‌شود با افزایش پارامتر ترموفورتیک سرعت در دیواره خارجی افزایش می‌یابد و با توجه به این‌که دبی در طول کانال ثابت است، بنابراین سرعت در دیواره داخلی کاهش می‌یابد. با توجه به این‌که گرادیان دمایی و پارامتر ترموفورتیک رابطه مستقیم دارند با افزایش گرادیان دمایی در کانال، پارامتر ترموفورتیک افزایش می‌یابد؛ بنابراین هرچه پارامتر ترموفورتیک افزایش یابد، افزایش گرادیان دمایی باعث انتقال نانوذرات از نقاطی با دمای بیشتر به نقاطی با دمای کمتر می‌شود. دلیل این امر هم اختلاف انرژی نقاط متناظر است که باعث می‌شود نانوذرات از نقاطی با انرژی بالاتر به نقاطی با انرژی پایین‌تر مهاجرت کنند. با توجه به قسمت ب شکل ۴-۲۵ با افزایش پارامتر ترموفورتیک، تغییرات دمای بدون بعد در نزدیکی دیواره بسیار ناچیز می‌باشد ولی در مرکز کانال همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر ترموفورتیک، توزیع دما افزایش می‌یابد و این یعنی انتقال حرارت کاهش می‌یابد.

با توجه به این‌که غلظت در دیواره پایینی کانال بیشتر می‌باشد بنابراین تأثیر نیروی مغناطیسیH_0، در دیواره پایینی بیشتر می‌باشد. حال مانند آنچه در قسمت‌های قبلی بیان شد و با استفاده از رابطه $\phi = \frac{\bar{\Phi}}{H_0 a}$ ، باافزایش قدرت نیروی مغناطیسی، تابع نیروی مغناطیسی کاهش می‌یابد. با توجه به اینکه با افزایش گرادیان دمایی، ذرات از دیواره بالایی به دیواره پایینی انتقال پیدا می‌کنند، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت غلظت نانوذرات در دیواره بالایی کاهش می‌یابد بنابراین، میدان مغناطیسی القا شده محوری افزایش می‌یابد. در دیواره بالایی نیز، قدرت میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد بنابراین تابع نیروی مغناطیسی افزایش می‌یابد.

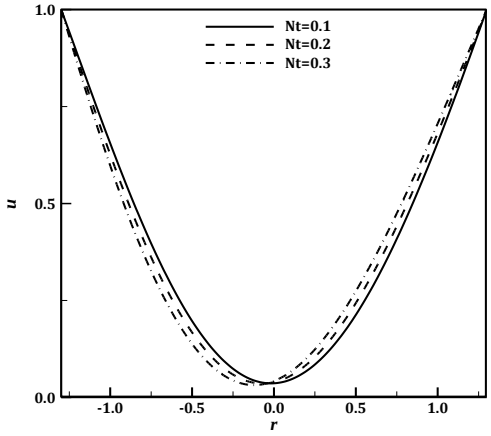
اندازه گردابه‌های نسبی در حالت موجدار در دیواره خارجی کانال با افزایش عدد Nt، افزایش می‌یابد (شکل ۴-۲۸، ب-د). افزایش حرکت ترموفورتیک، سبب کاهش عدد ناسلت می‌شود (جدول ۴-۶).

جدول ۴-۶ تاثیر حرکت ترموفورتیک روی عدد ناسلت

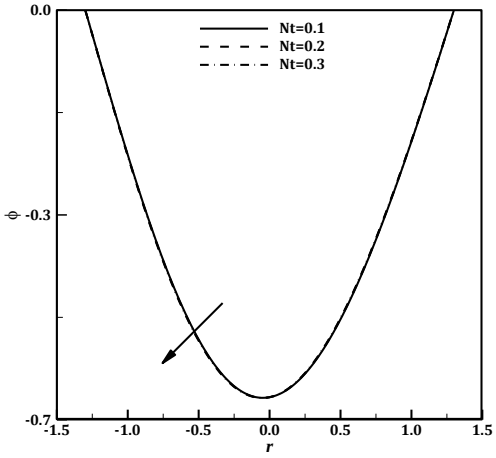
Nt	۰/۱	۰/۲	۰/۳
Nu	۳/۳۵۰۲۵	۳/۳۳۰۱۹	۳/۳۱۰۶۶



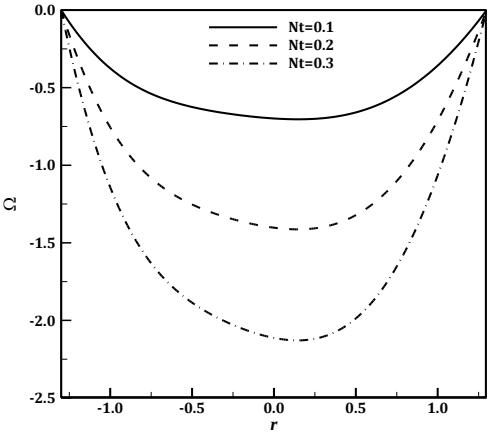
(ب)



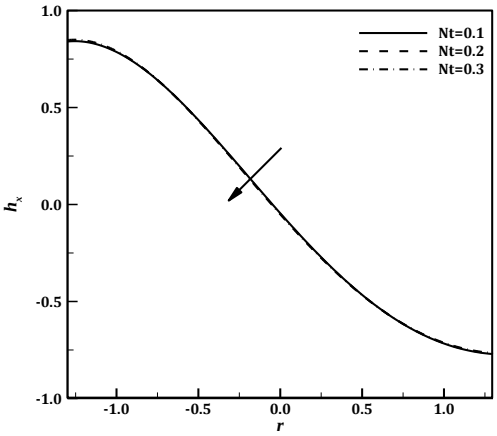
(الف)



(د)

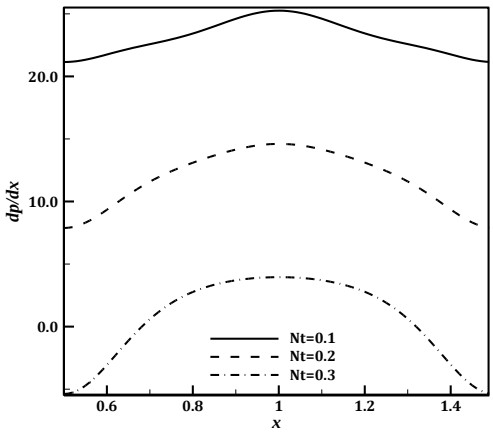


(ج)

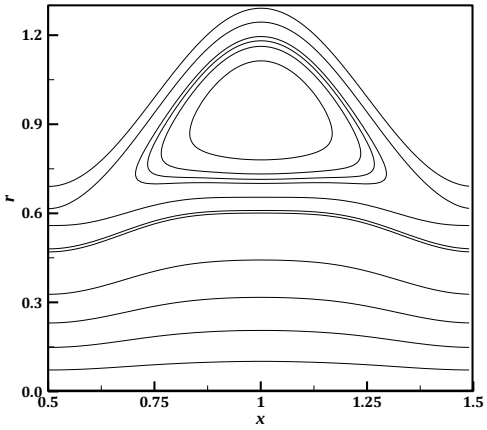


(ه)

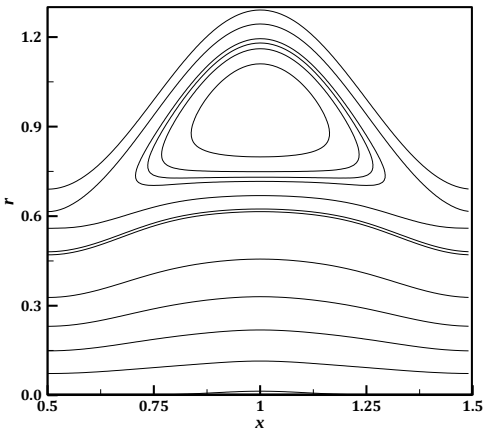
شکل ۴-۲۵: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف عدد Nt در شرایط $k = 7, M = 1.2, \mathrm{Gr} = 2, Ec = 1, Nb = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$



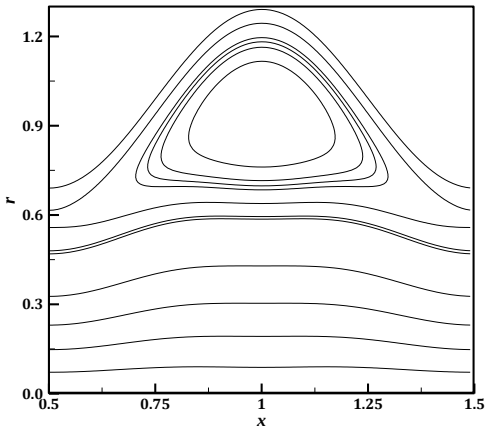
(الف)



$Nt = 0.2$(ج)



$Nt = 0.1$(ب)



$Nt = 0.3$(د)

شکل ۴-۲۶: نمودار گرادیان فشار، خط جریان در (الف)$Nt = 0.1$، (ب)$Nt = 0.2$، (ج)$Nt = 0.3$ در شرایط $M = 1.8, k = 100, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, Nb = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$

۴-۲-۴-۷ بررسی تأثیر عدد رینولدز مغناطیسی

همان‌طور که در فصل ۳ بیان شد، میدان مغناطیسی القائی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \vec{H}^{+}}{\partial \bar{t}} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{V} \times \vec{H}^{+}\right) + \frac{1}{\sigma \mu_e} \nabla^2 \vec{H}^{+} \tag{۱۴-۴}$$

که در این رابطه σ بیان‌گر کمیت رسانایی الکتریکی می‌باشد. بنابراین میدان مغناطیسی القائی محوری به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

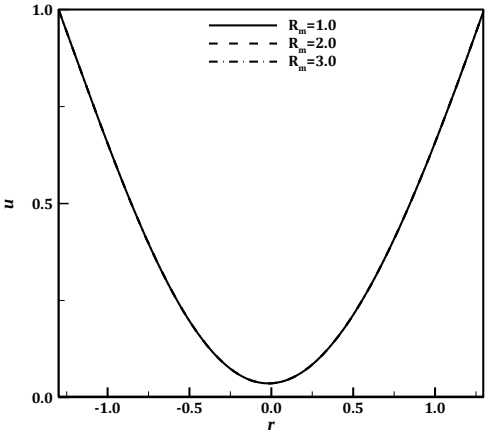
$$\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{t}} = \left(\frac{H_0 R^*}{R^* + \bar{R}}\right)\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{R}} - \frac{H_0 R^* \bar{U}}{(R^* + \bar{R})^2} + \frac{1}{\sigma \mu_e}\left\{\frac{\partial^2 \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}^2} + \frac{R^{*2}}{(R^* + \bar{R})^2}\frac{\partial^2 \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{X}^2} + \frac{1}{R^* + \bar{R}}\frac{\partial \bar{h}_{\bar{x}}}{\partial \bar{R}} - \frac{\bar{h}_{\bar{x}}}{(R^* + \bar{R})^2}\right\} \tag{۱۵-۴}$$

با ساده کردن این رابطه (همانند آنچه در فصل ۳ بیان شد) و با استفاده از فرض طول موج بلند ($\delta \to 0$) میدان مغناطیسی القائی محوری به شکل زیر نوشته می‌شود:

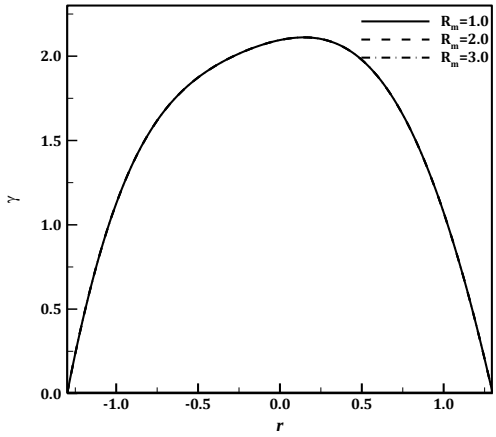
$$\frac{1}{\mathrm{R_m}}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{k + r}\frac{\partial \phi}{\partial r}\right\} = -\left(\frac{k}{k + r}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{k}{(k + r)^2} + \frac{k}{(k + r)^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) \tag{۱۶-۴}$$

بنابراین با توجه به معادله حرکت در راستای محوری، اثر کمیت رینولدز مغناطیسی از این معادله حذف می‌گردد، در نتیجه این کمیت تأثیری در مقادیر به‌دست آمده برای سرعت، توزیع دمای بدون بعد، توزیع غلظت بدون بعد و همچنین گرادیان فشار و در نتیجه خطوط جریان ندارد که صحت این امر از شکل ۴-۲۷(الف – ج) و شکل ۴-۲۸ مشخص می‌باشد.

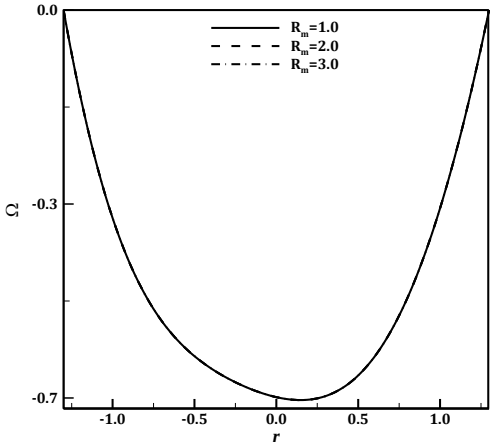
با افزایش عدد رینولدز مغناطیسی، ضریب هدایت الکتریکی افزایش می‌یابد که این امر موجب افزایش نیروی مغناطیسی می‌گردد. با توجه به این‌که تابع نیروی مغناطیسی رابطه عکس با نیروی مغناطیسی دارد بنابراین تابع نیروی مغناطیسی کاهش می‌یابد (شکل ۴-۲۷، د). در نتیجه نیمه پایینی کانال با افزایش میدان مغناطیسی القا شده محوری و نیمه بالایی کانال با کاهش میدان مغناطیسی القا شده محوری روبه‌رو می‌شوند (شکل ۴-۲۷، ه).



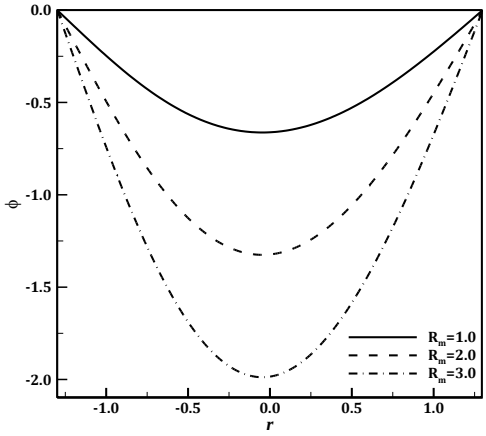
(الف)



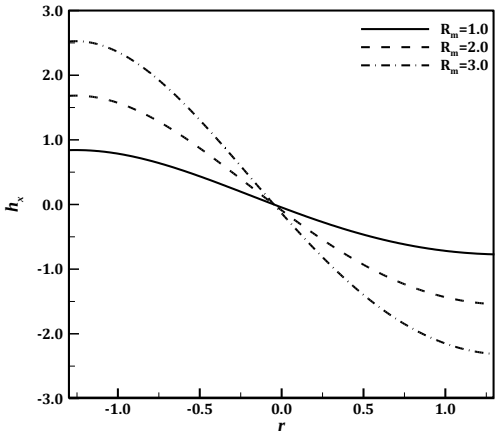
(ب)



(ج)

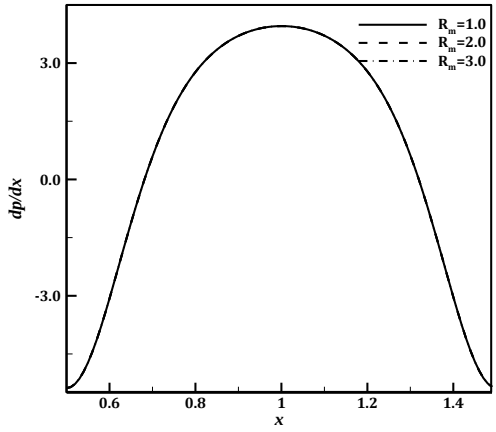


(د)

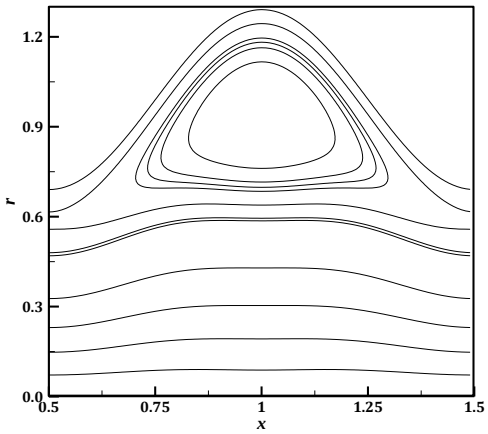


(ه)

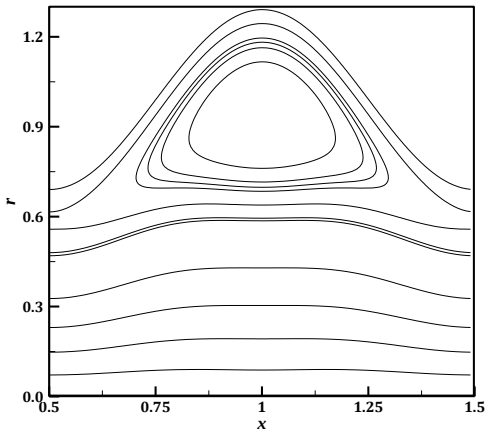
شکل ۴-۲۷: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف عدد رینولدز مغناطیسی در شرایط $k = 7, M = 1.2, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, Nb = 0.3, Nt = 0.1,\ \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{Pr} = 3.97,\ E = 1, \zeta = 0.2, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$



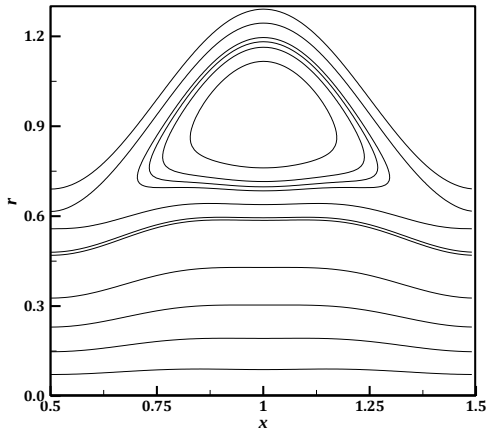
(الف)



$R_m = 2$(ج)



$R_m = 1$(ب)



$R_m = 3$(د)

شکل ۴-۲۸: (الف) نمودار گرادیان فشار، خط جریان در (ب) $R_m = 1$، (ج) $R_m = 2$، (د) $R_m = 3$ در شرایط $, M = 1.8, Gr = 2, Gc = 2, k = 100, Nt = 0.3, Nb = 0.3, Pr = 3.97, Ec = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2,\ Da = 100, \alpha = 0.3$

همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش عدد رینولدز مغناطیسی سبب تغییری در گرادیان فشار نمی‌شود. همچنین با افزایش R_m تغییری در اندازه گردابه‌های نسبی ایجاد شده در حالت موج‌دار در دیواره خارجی کانال حاصل نمی‌شود (شکل ۴-۲۸). همانطور که در جدول ۴-۷ مشاهده می‌شود افزایش عدد رینولدز مغناطیسی تاثیری در عدد ناسلت نخواهد داشت.

جدول ۴-۷ تاثیر عدد رینولدز مغناطیسی روی عدد ناسلت

R_m	۱	۲	۳
Nu	۳/۳۵۰۲۵	۳/۳۵۰۲۵	۳/۳۵۰۲۵

۴-۲-۴-۸ بررسی تأثیر میدان الکتریکی

با توجه به رابطه (۴-۱۷) که در ذیل مشاهده می‌گردد، میدان الکتریکی در رابطه مذکور وجود ندارد، بنابراین نمی‌توان اثری از این کمیت در نتایج به‌دست آمده برای سرعت و گردابه‌های نسبی ایجاد شده در حالت موج‌دار مشاهده کرد که این امر از شکل ۴-۲۹ الف و قسمت‌های ب تا د شکل ۴-۳۰ مشخص می‌باشد.

$$(k+r)\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial r^4}\right)+2\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}\right)+\left(\frac{(\mathrm{M}^2k^2-1)}{(k+r)}-\frac{k+r}{\mathrm{Da}}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\left(\frac{(\mathrm{M}^2k^2-1)}{(k+r)^2}+\frac{1}{\mathrm{Da}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}-(\mathrm{Gr}\gamma+\mathrm{Gc}\Omega)-(k+r)\left(\mathrm{Gr}\frac{\partial\gamma}{\partial r}+\mathrm{Gc}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)+\frac{1}{\mathrm{Da}}=\frac{1-\mathrm{M}^2k^2}{(k+r)^2} \quad (۴-۱۷)$$

$$0=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}+\frac{1}{(k+r)}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)+\mathrm{Ec}\left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}-1\right)\right)^2+\mathrm{Nb}\bar{\varepsilon}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}.\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)+\mathrm{Nt}\,\bar{\varepsilon}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)^2+\zeta \quad (۴-۱۸)$$

همچنین با توجه به رابطه انرژی، میدان الکتریکی تأثیری در این رابطه نیز ندارد و مطابق شکل ۴-۲۹، قسمت ب، همراه با افزایش و یا کاهش میدان الکتریکی، تغییری در انتقال حرارت و توزیع دمایی به وجود نمی‌آید. با توجه به رابطه $\Omega = -\frac{Nt}{Nb}\gamma$ و ارتباط بین توزیع دمایی و توزیع غلظت، بنابراین تغییری در منحنی توزیع غلظت نیز دیده نمی‌شود.

حال با استفاده از رابطه بدون بعد میدان الکتریکی که به‌صورت $E = -\frac{\bar{E}}{cH_0\mu_e}$ می‌باشد با افزایش مقدار میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی (H_0) افزایش می‌یابد که این افزایش منجر به کاهش مقدار تابع میدان مغناطیسی می‌گردد. از طرفی با استفاده از نمودار توزیع غلظت بدون بعد، تجمع نانوذرات در نیمه پایینی کانال بیشتر می‌باشد بنابراین تأثیر میدان مغناطیسی روی میدان مغناطیسی القا شده محوری در این نیمه بیشتر می‌باشد و با افزایش میدان الکتریکی (E)، افزایش می‌یابد ولی در نیمه بالایی کانال عکس این حالت رخ می‌دهد، که می‌توان به ترتیب در قسمت د و قسمت ه شکل ۴-۲۹مشاهده کرد.

در رابطه (۴-۱۹)، گرادیان فشار در راستای محوری نشان داده شده است که این رابطه افزایش گرادیان فشار را همراه با افزایش میدان الکتریکی بیان می‌کند.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right) - \frac{k+r}{k}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}\right) - \frac{1}{k(k+r)}(M^2k^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{k(k+r)} - \frac{k+r}{k}\frac{1}{\mathrm{Da}}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial r}+1\right) + \frac{k+r}{k}(\mathrm{Gr}\gamma + \mathrm{Gc}\Omega) + \mathrm{M}^2E \quad (۴-۱۹)$$

مطابق آنچه در شکل ۴-۳۰ دیده می‌شود، میدان الکتریکی تأثیری در بزرگی و یا کوچکی اندازه گردابه‌های نسبی حالت موج‌دار ندارد. ، جدول ۴-۸ اثر میدان الکتریکی را روی عدد ناسلت نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است، میدان الکتریکی تأثیری روی عدد ناسلت ندارد.

جدول ۴-۸ تاثیر میدان الکتریکی روی عدد ناسلت

E	۱	۲	۳
Nu	۳/۳۵۰۲۵	۳/۳۵۰۲۵	۳/۳۵۰۲۵

۴-۲-۴-۹ بررسی تأثیر عدد اکرت

با افزایش عدد اکرت سرعت در دیواره خارجی کاهش می‌یابد و به سمت این دیواره متمایل می‌گردد، بنابراین سرعت در دیواره داخلی افزایش می‌یابد. با توجه به رابطه $\gamma = \frac{\bar{T}-\bar{T}_0}{\bar{T}_1-\bar{T}_0}$، با افزایش عدد اکرت پروفیل دمای بدون بعد افزایش می‌یابد، پس می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت که انتقال حرارت کاهش می‌یابد.

همان‌طور که از شکل ۴-۳۱، قسمت ج، مشخص می‌باشد پروفیل توزیع غلظت کاهش می‌یابد بنابراین غلظت افزایش می‌یابد. ولی با توجه به رابطه (۴-۲۰) عدد اکرت نقشی در این رابطه ندارد بنابراین هیچ اثری بر روی تابع نیروی مغناطیسی و میدان مغناطیسی القا شده محوری ندارد که این امر از نمودارهای شکل ۴-۳۱ قابل مشاهده می‌باشد.

$$E = \left[\frac{k}{(k+r)}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{R_m}}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{k+r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\right)\right] \qquad (۴-۲۰)$$

از شکل ۴-۳۲ مشخص می‌باشد عدد اکرت تأثیری در گرادیان فشار جریان داخل نیز کانال ندارد و همچنین گردابه‌های نسبی حالت موج‌دار در هر سه حالت ثابت و بدون تغییر باقی می‌مانند. افزایش عدد اکرت، سبب افزایش عدد ناسلت می‌شود (جدول ۴-۹).

جدول ۴-۹ تاثیر عدد اکرت روی عدد ناسلت

Ec	۰	۰/۵	۱
Nu	۰/۷۵۹۷۸	۲/۰۵۵۰۲	۳/۳۵۰۲۵

۴-۲-۴-۱۰ بررسی تأثیر عدد پرانتل

در این قسمت به بررسی اثر عدد پرانتل روی مقادیر مختلف جریان پرداخته شده است. عدد پرانتل بیانگر نسبت نفوذ اندازه حرکت (ویسکوزیته سینماتیک) به نفوذ گرمایی است. همان‌طور که در قسمت الف شکل ۴-۳۳ مشاهده می‌شود با افزایش عدد پرانتل، ماکزیمم سرعت در مرکز لوله کاهش می‌یابد و تقارن آن حول

مرکز کانال از بین می‌رود و به سمت دیواره خارجی متمایل می‌گردد. با توجه به آن‌چه در بررسی سایر کمیت‌ها توضیح داده شد دبی جریان باید ثابت باشد بنابراین سرعت در دیواره داخلی افزایش پیدا می‌کند.

رابطه جابه‌جایی درون لوله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Re}^{0.5}\mathrm{Pr}^{0.3} \tag{۲۱-۴}$$

با ساده کردن رابطه فوق به شکل زیر:

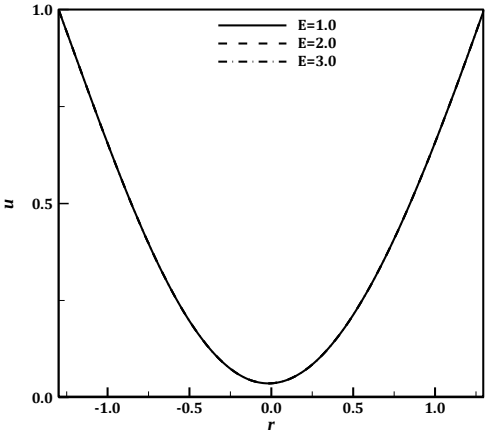
$$\frac{hD}{k} = \mathrm{Re}^{0.5}\left(\frac{\mu c_p}{k}\right)^{0.3} \rightarrow hD = \mathrm{Re}^{0.5}\left(\mu c_p\right)^{0.3}\frac{k}{k^{0.3}} \rightarrow hD = \mathrm{Re}^{0.5}\left(\mu c_p\right)^{0.3}k^{0.7} \tag{۲۲-۴}$$

و با در نظر گرفتن $\mathrm{Re}^{0.5}\left(\mu c_p\right)^{0.3}$ به‌صورت یک ضریب ثابت، با افزایش عدد پرانتل و کاهش مقدار k، مقدار h نیز کاهش می‌یابد. بنابراین همان‌طور که در شکل ۴-۳۳ دیده می‌شود پروفیل توزیع دما افزایش و در نتیجه انتقال حرارت کاهش می‌یابد. پس می‌توان این‌گونه بیان کرد که با افزایش عدد پرانتل ضخامت لایه مرزی حرارتی کاهش پیدا می‌کند و به‌طور فیزیکی جریان با عدد پرانتل بالا مانع از گسترش حرارت در سیال می‌شود. همان‌طور که از رابطه (۴-۲۰) مشخص می‌باشد، عدد پرانتل تأثیری در قدرت میدان الکتریکی و در نتیجه در تابع نیروی مغناطیسی و میدان مغناطیسی القا شده محوری ندارد. با توجه به این‌که افزایش عدد پرانتل تأثیری در افزایش و یا کاهش گرادیان فشار ندارد، بنابراین اندازه گردابه‌های نسبی حالت موجدار با افزایش عدد پرانتل تغییری نمی‌کنند (شکل ۴-۳۴).

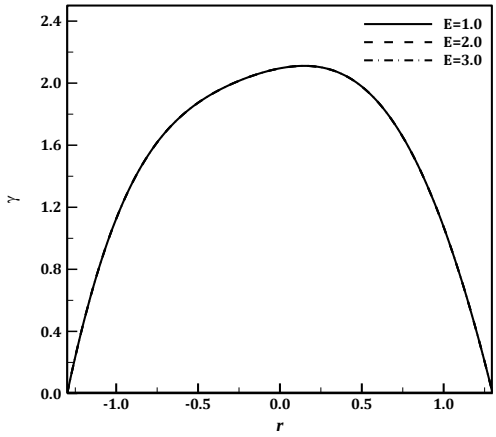
جدول ۴-۱۰ تاثیر عدد پرانتل را روی عدد ناسلت نشان می‌دهد. همان‌طور که از این جدول مشخص می‌باشد افزایش عدد پرانتل سبب کاهش مقدار عدد ناسلت می‌گردد.

جدول ۴-۱۰ تاثیر عدد پرانتل روی عدد ناسلت

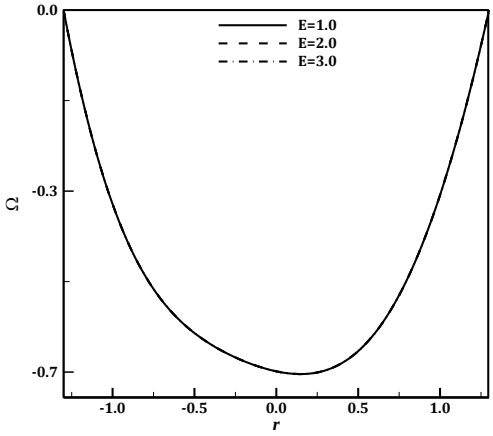
Pr	۳/۹۷	۶/۲	۱۴/۲
Nu	۳/۳۵۰۲۵	۵/۲۳۲۱۳	۱۱/۹۸۳۳



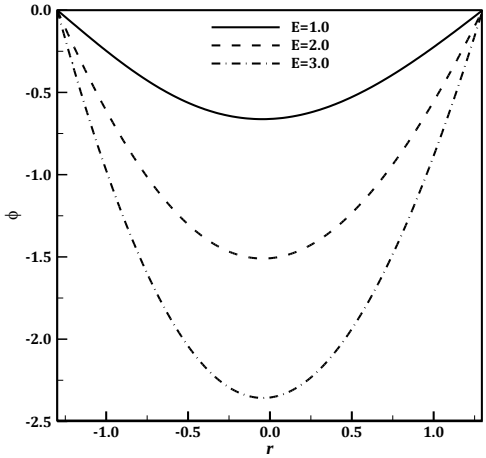
(الف)



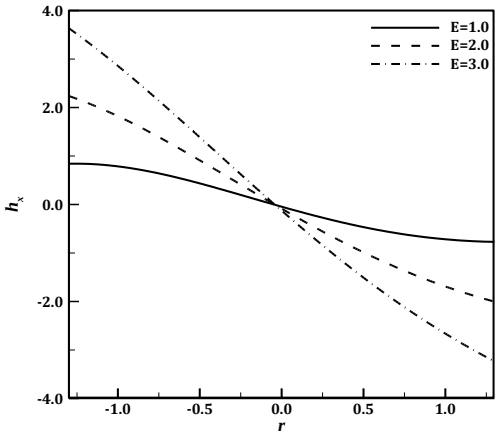
(ب)



(ج)

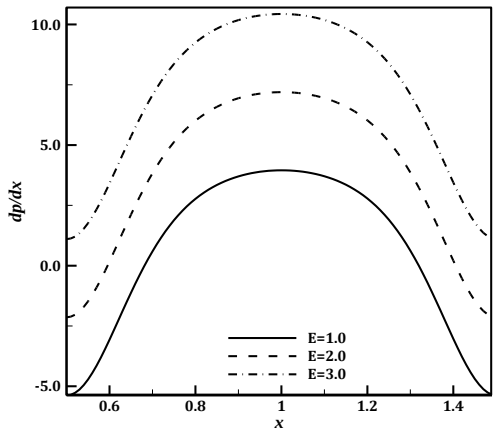


(د)

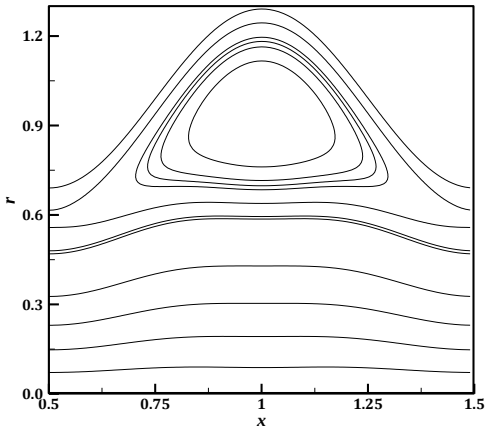


(ه)

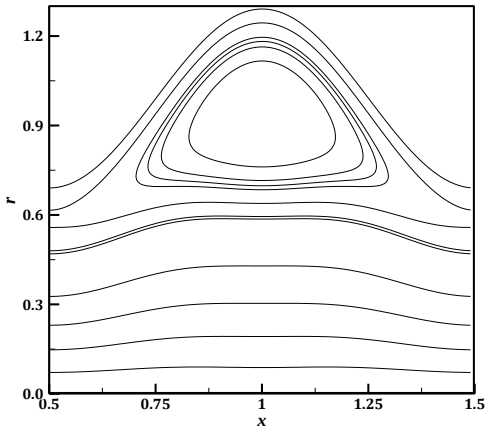
شکل ۴-۲۹: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف میدان الکتریکی در شرایط $k = 7, M = 1.2, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, Nb = 0.3, Nt = 0.1, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, Ec = 1, \zeta = 0.2, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$



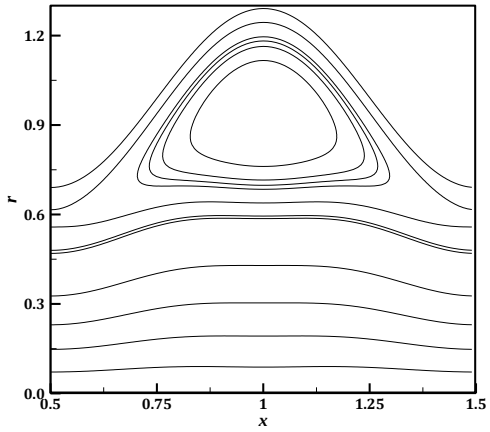
(الف)



$E = 2$(ج)

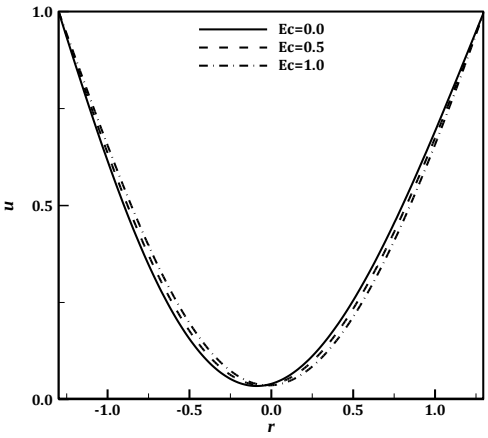


$E = 1$(ب)

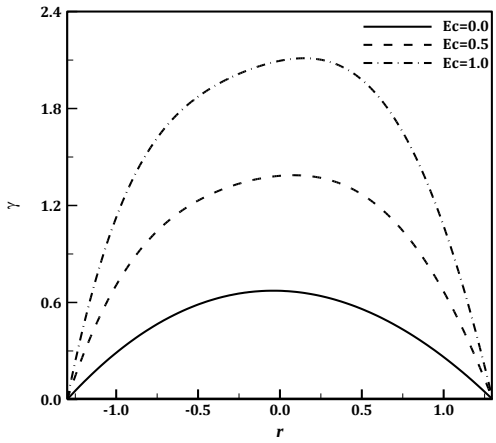


$E = 2$(د)

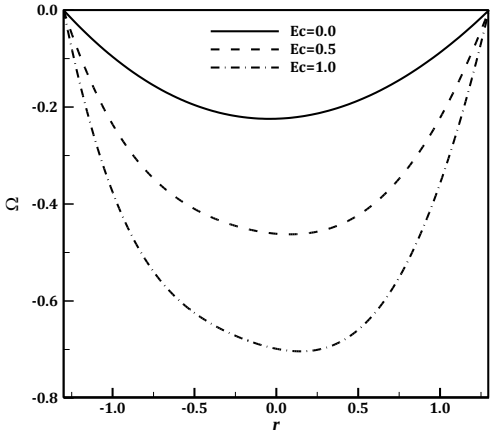
شکل ۴-۳۰: (الف) نمودار گرادیان فشار، خط جریان در (ب) $E = 1$، (ج) $E = 2$، (د) $E = 3$ در شرایط $M = 1.8, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, k = 100, Nt = 0.3, Nb = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, Ec = 1, \zeta = 0.2, F = 2, \mathrm{Da} = 100, \alpha = 0.3$



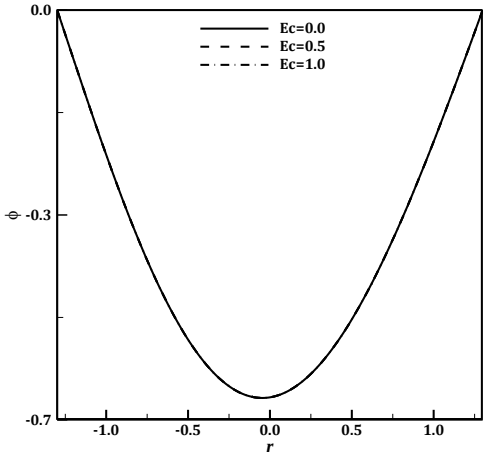
(الف)



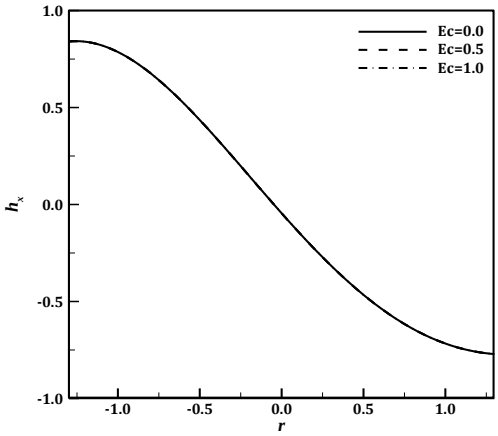
(ب)



(ج)

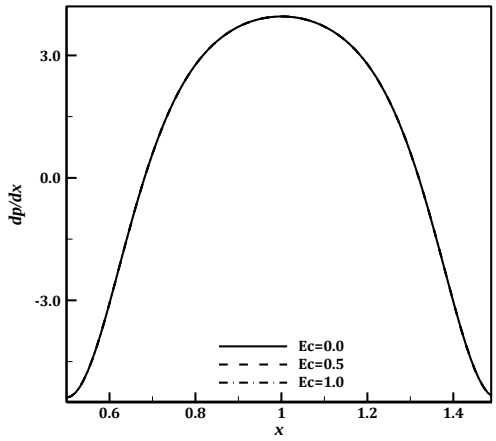


(د)

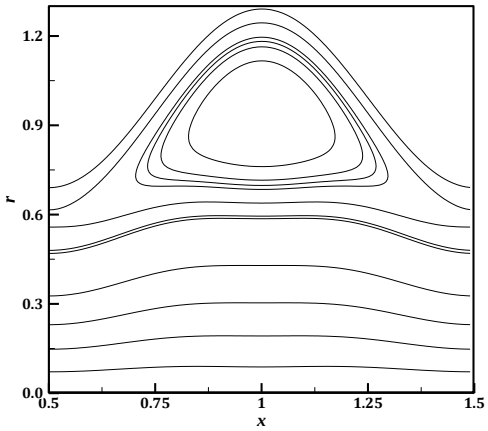


(ه)

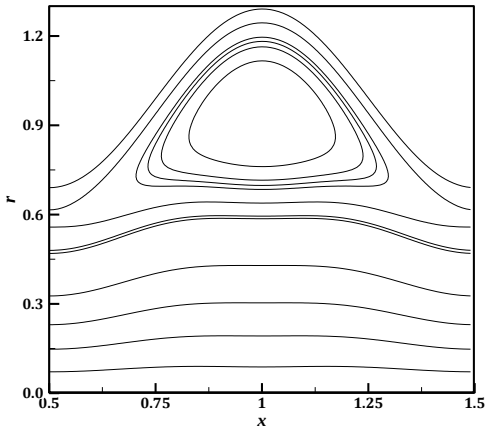
شکل ۴-۳۱: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف عدد اکرت در شرایط $M = 1.2, k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, Nt = 0.1, Nb = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, E = 1, \mathrm{R_m} = 1, \zeta = 0.2, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$



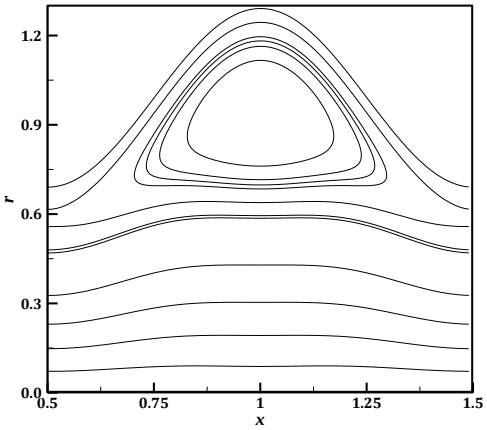
(الف)



$Ec = 0.5$(ج)

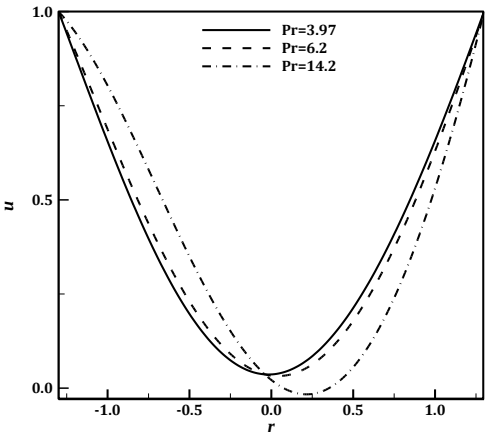


$Ec = 0$(ب)

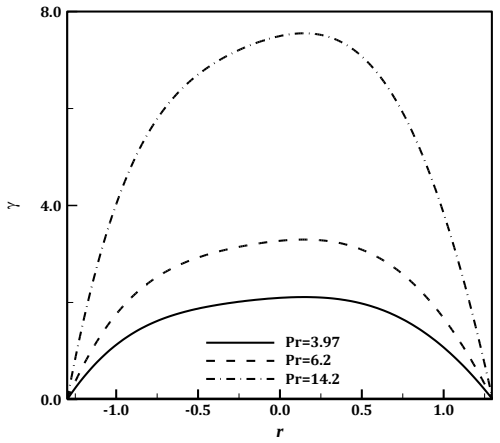


$Ec = 1$(د)

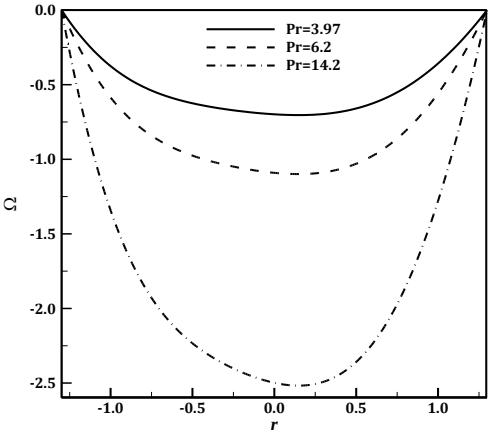
شکل ۴-۳۲: (الف) نمودار افزایش فشار، خط جریان در (ب)$Ec = 0$، (ج)$Ec = 0.5$، (د)$Ec = 1$ در شرایط $M = 1.8, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, k = 100, Nt = 0.3, Nb = 0.3, \mathrm{Pr} = 3.97, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2,\ \mathrm{Da} = 100, = 0.3$



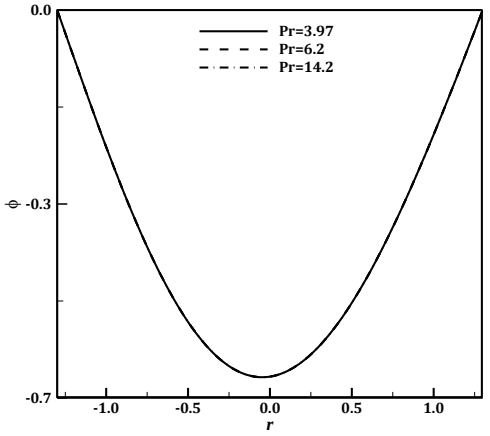
(الف)



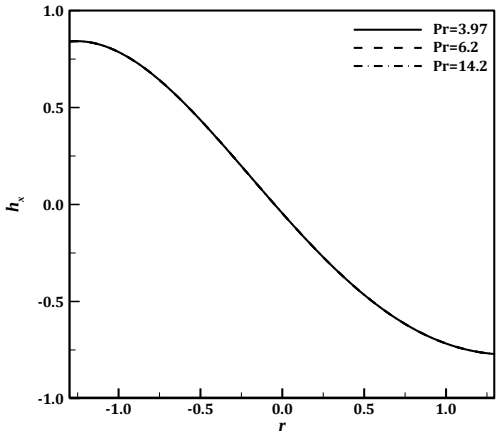
(ب)



(ج)

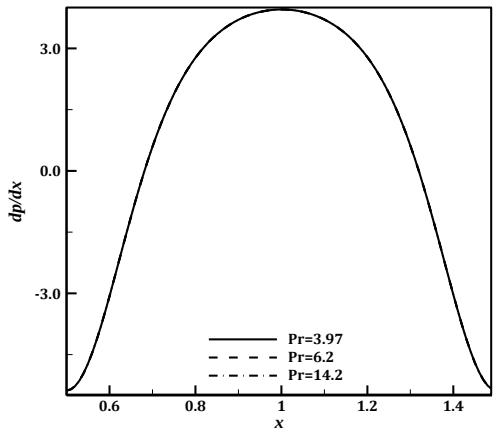


(د)

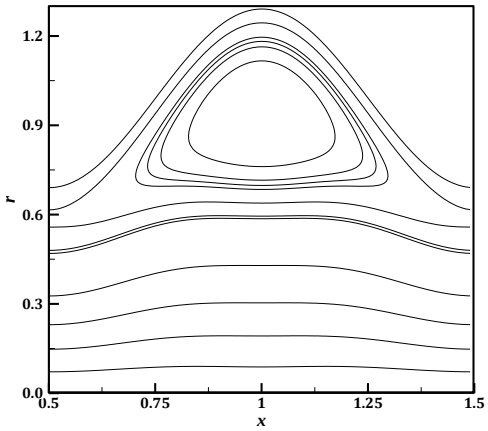


(ه)

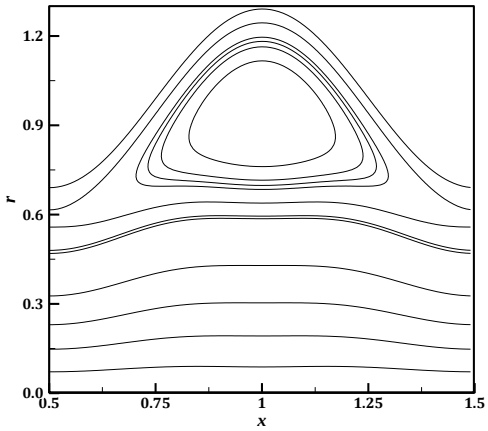
شکل ۴-۳۳: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف عدد پرانتل در شرایط $M = 1.2, k = 7, \mathrm{Gc} = 2, \mathrm{Gr} = 2, Nt = 0.1, Nb = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = -1, \mathrm{Da} = 100, x = 1, \alpha = 0.3$



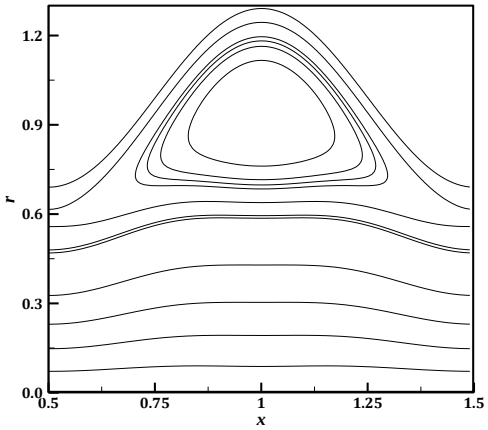
(الف)



$\mathrm{Pr} = 6.2$(ج)



$\mathrm{Pr} = 3.97$(ب)



$\mathrm{Pr} = 14.2$(د)

شکل ۴-۳۴: (الف) نمودارگرادیان فشار، خط جریان در (ب) $\mathrm{Pr} = 3.97$، (ج) $\mathrm{Pr} = 6.2$، (د) $\mathrm{Pr} = 14.2$ در شرایط $M = 1.8, \mathrm{Gr} = 2, \mathrm{Gc} = 2, k = 100, Nt = 0.3, Nb = 0.3, \mathrm{Ec} = 1, \mathrm{R_m} = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = 2,\ \mathrm{Da} = 100, \alpha = 0.3$

۴-۲-۴-۱۱ بررسی تأثیر چشمه حرارتی

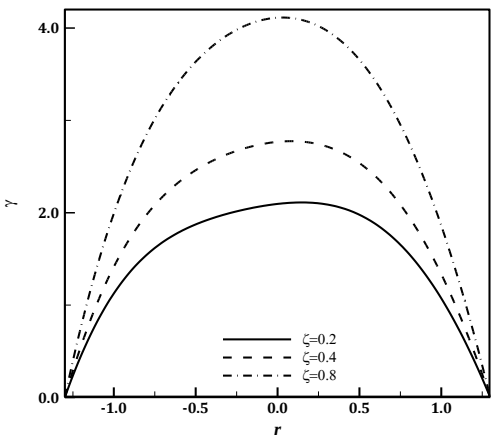
بنابر تعریف، با افزودن چشمه حرارتی، حرارت به میزان یکنواخت و به شکل یکسان به‌کل سیال داخل کانال اعمال می‌شود. بدین معنی که تمام نقاط در واحد حجم کانال به یک میزان حرارت دریافت می‌کنند. عدد بدون بعد چشمه حرارتی با رابطه (۴-۲۳) بیان می‌شود.

$$\zeta = \frac{Q_0 a^2}{(\bar{T}_1 - \bar{T}_0)\nu_{nf}\left(\rho C_p\right)_{nf}} \qquad (۴-۲۳)$$

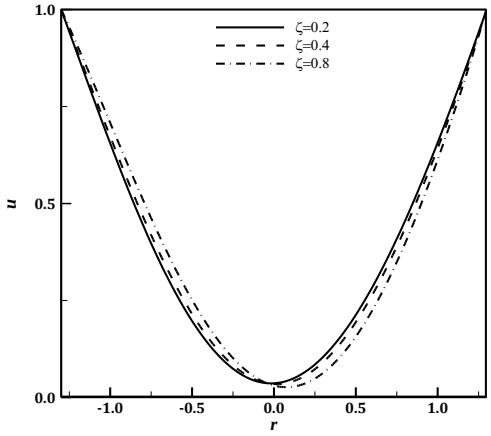
با توجه به این رابطه می‌توان دریافت که با افزایش قدرت چشمه حرارتی، سرعت نزدیک خط مرکزی کاهش می‌یابد و به سمت دیواره خارجی متمایل می‌گردد. قسمت ب شکل ۴-۳۱ اثرات تغییرات چشمه حرارتی بر انتقال حرارت را نشان می‌دهد. واضح است که با افزایش قدرت چشمه حرارتی، پروفیل توزیع دمای بدون بعد افزایش پیدا می‌کند در نتیجه، دما کاهش و متعاقباً انتقال حرارت کاهش می‌یابد. با دقت در نمودار می‌توان دریافت که اختلاف دمای بی‌بعد در دو نقطه خاص در کانال با افزایش چشمه حرارتی، افزایش می‌یابد؛ بنابراین با افزایش چشمه حرارتی اختلاف دما در همان نقاط کاهش می‌یابد در نتیجه انتقال حرارت رو به کاهش خواهد بود؛ و دلیل این امر، دمای بیشتر سیال نسبت به چشمه حرارتی قرار گرفته در جریان می‌باشد. در قسمت ج شکل ۴-۳۱، می‌توان مشاهده کرد که با افزایش قدرت چشمه حرارتی، توزیع غلظت در جریان داخل کانال کاهش می‌یابد. همان‌طور که از رابطه (۴-۲۰) مشخص است تغییر قدرت چشمه حرارتی، تأثیری در تابع نیروی مغناطیسی و میدان مغناطیسی القا شده محوری نخواهد داشت. همان‌طور که در قسمت الف شکل ۴-۳۶ مشخص می‌باشد با افزایش قدرت چشمه حرارتی، گرادیان فشار افزایش می‌یابد. ولی این امر موجب کاهش اندازه گردابه‌های نسبی حالت موجدار می‌گردد (شکل ۴-۳۶، ب-د) که این امر سبب عبور ساده‌تر جریان از مقطع درنظر گرفته شده می‌شود.

جدول ۴-۱۱ تاثیر چشمه حرارتی روی عدد ناسلت

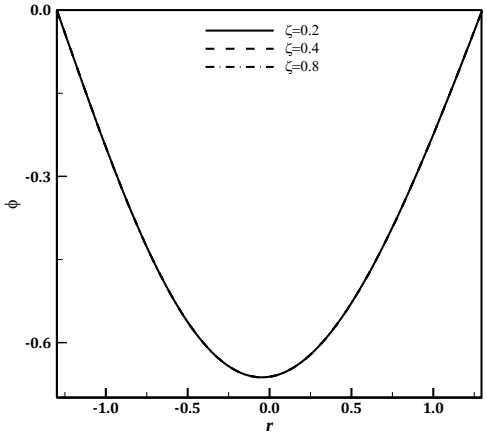
ζ	۰/۲	۰/۴	۰/۸
Nu	۳/۳۵۰۲۵	۴/۱۱۰۰۳	۵/۶۲۹۵۹



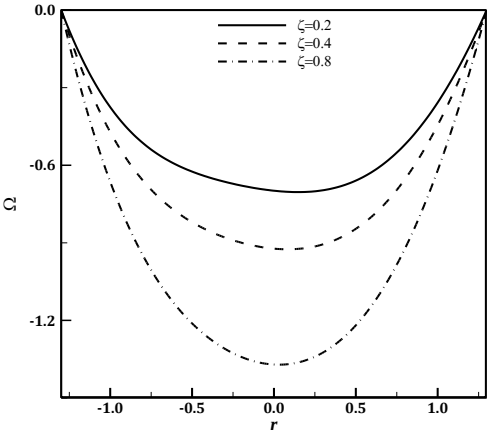
(ب)



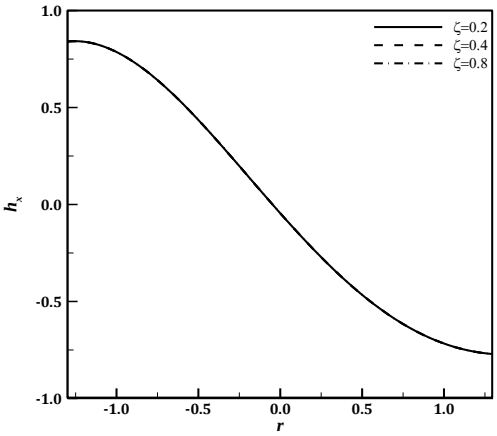
(الف)



(د)

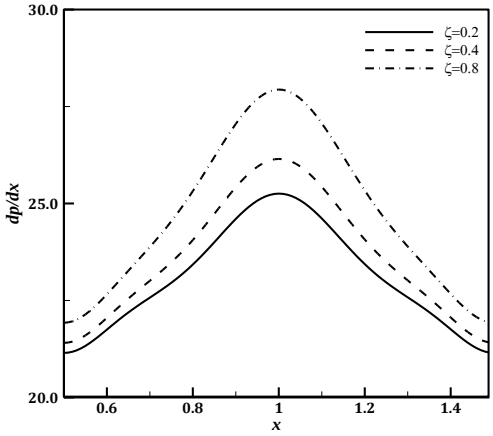


(ج)

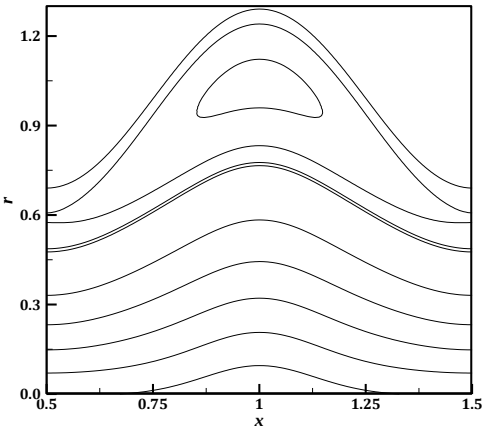


(ه)

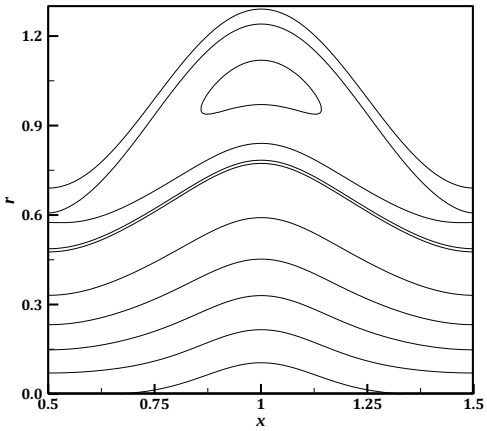
شکل ۴-۳۵: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف چشمه حرارتی در شرایط $\mathbf{M = 1.2, k = 7, Gc = 2, Gr = 2, Nt = 0.1, Nb = 0.3, Pr = 3.97, R_m = 1, E = 1, Ec = 1, F = -1, Da = 100, x = 1, \alpha = 0.3}$



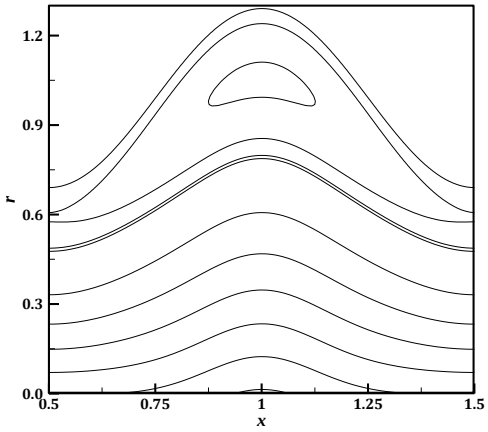
(الف)



$\zeta = 0.2$(ب)



$\zeta = 0.4$(ج)



$\zeta = 0.8$(د)

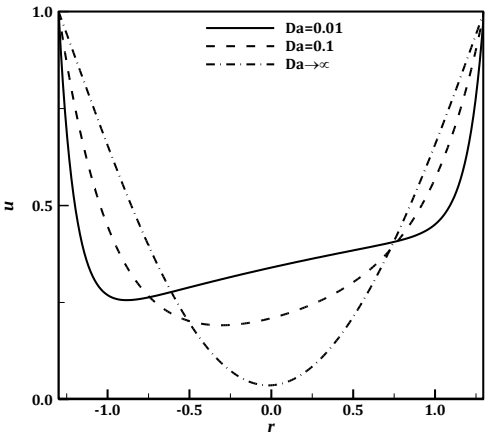
شکل ۴-۳۶: (الف) نمودار گرادیان فشار، خط جریان در (ب)$\zeta = 0.2$، (ج)$\zeta = 0.4$، (د)$\zeta = 0.8$ در شرایط $\mathbf{M = 1.8, Gr = 2, Gc = 2, k = 100, Nt = 0.3, Nb = 0.3, Pr = 3.97, R_m = 1, Ec = 1, E = 1, F = 2,\ Da = 100, = 0.3}$

۴-۲-۴-۱۲ بررسی تأثیر عدد دارسی

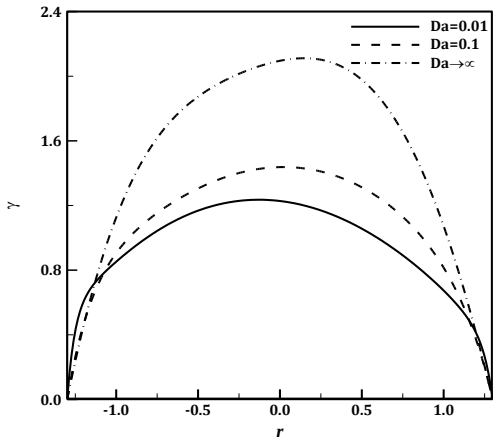
نفوذپذیری خاصیتی از محیط متخلخل می‌باشد که با نماد K_p نشان داده می‌شود و عدد بدون بعد آن به صورت $Da = \frac{K_p}{a^2}$ تعریف می‌شود، که عدد دارسی نام دارد. بنابراین همان‌طور که مشخص است نفوذپذیری محیط متخلخل و عدد دارسی رابطه مستقیم با هم دارند. پس می‌توان این‌گونه تعریف کرد که نفوذپذیری به سیال اجازه می‌دهد، بدون این‌که تأثیر شیمیایی و یا فیزیکی از محیط بپذیرد، از محیط متخلخل عبور کند. هرچه مقدار این کمیت برای یک محیط بیشتر باشد، عبور سیال از آن نیز آسان‌تر است. این کمیت یک خاصیت محیط متخلخل است و از لزجت یا چگالی سیال مستقل می‌باشد. بنابراین با افزایش مقدار نفوذپذیری (در نتیجه عدد دارسی)، سرعت سیال داخل کانال کاهش می‌یابد.

همان‌طور که از قسمت ب شکل ۴-۳۷ مشخص می‌باشد، هرچه که مقدار نفوذپذیری محیط افزایش پیدا می‌کند، توزیع دمای بدون بعد افزایش می‌یابد و با در نظر گرفتن رابطه عکس توزیع دما و توزیع غلظت، بنابراین توزیع بدون بعد غلظت کاهش پیدا می‌کند (شکل ۴-۳۷، ج). از دیگر نکات حائز اهمیت در این بخش می‌توان به کاهش تابع نیروی مغناطیسی در طول کانال و همچنین افزایش میدان مغناطیسی القا شده محوری در نیمه پائینی کانال اشاره کرد که می‌توان به‌ترتیب در قسمت د و قسمت ه شکل ۴-۳۷ مشاهده نمود.

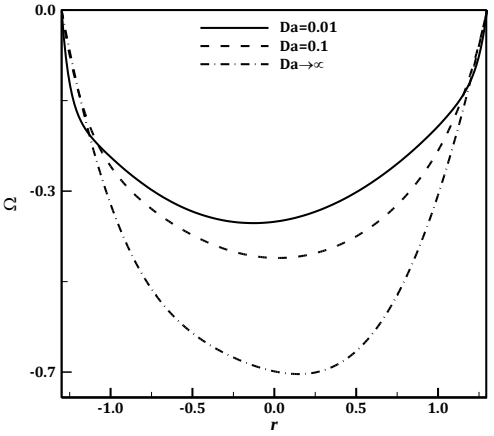
از شکل ۴-۳۸، الف می‌توان مشاهده کرد که با افزایش عدد دارسی، گرادیان فشار افزایش می‌یابد. با توجه به گردابه‌های نسبی که در اثر افزایش عدد دارسی و در حالت موج‌دار شکل گرفته‌اند، می‌توان به این نتیجه رسید که در محیطی با نفوذپذیری پایین امکان تشکیل گردابه نسبی بسیار پایین می‌باشد. با افزایش نفوذپذیری محیط، گردابه‌های نسبی تشکیل می‌شود و هرچه که مقدار نفوذپذیری افزایش می‌یابد بنابراین گردابه نسبی به سمت مرکز لوله گرایش پیدا می‌کند و سبب می‌شود که حرکت سیال از مقطع مشخص شده به سختی صورت می‌گیرد (شکل ۴-۳۸، ب-د).



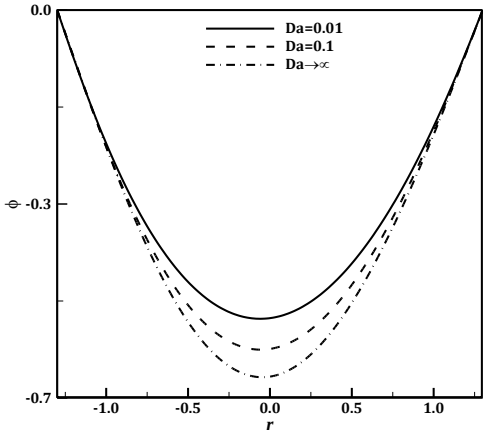
(الف)



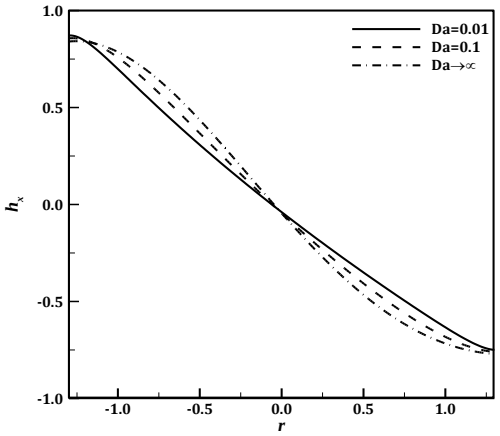
(ب)



(ج)

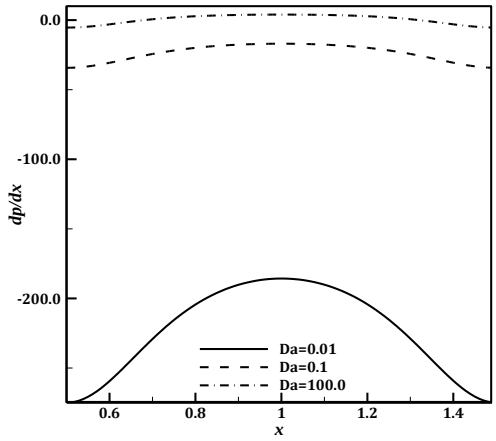


(د)

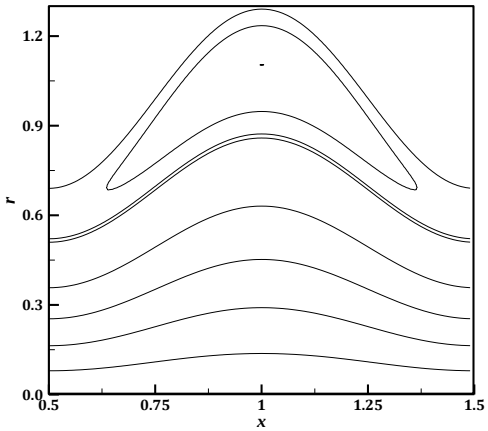


(ه)

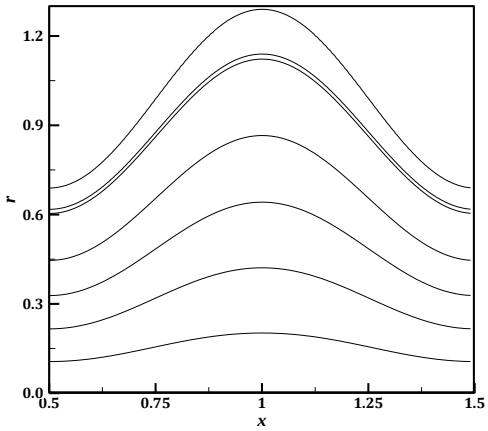
شکل ۴-۳۷: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف عدد دارسی در شرایط $\mathbf{M = 1.2, k = 7, Gc = 2, Gr = 2, Nt = 0.1, Nb = 0.3, Pr = 3.97, R_m = 1, E = 1, Ec = 1, F = -1, \zeta = 0.2, x = 1, \alpha = 0.3}$



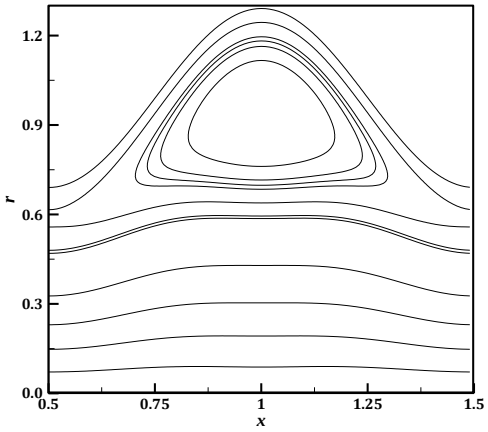
(الف)



$Da = 0.1$(ج)



$Da = 0.01$(ب)



$Da \to \infty$(د)

شکل ۴-۳۸: (الف) نمودار گرادیان فشار، خط جریان در (ب)$Da = 0.01$، (ج)$Da = 0.1$، (د)$Da \to \infty$ در شرایط $\mathbf{M = 1.8, Gr = 2, Gc = 2, k = 100, Nt = 0.3, Nb = 0.3, Pr = 3.97, R_m = 1, Ec = 1, E = 1, F = 2,\ \zeta = 0.2, \alpha = 03}$

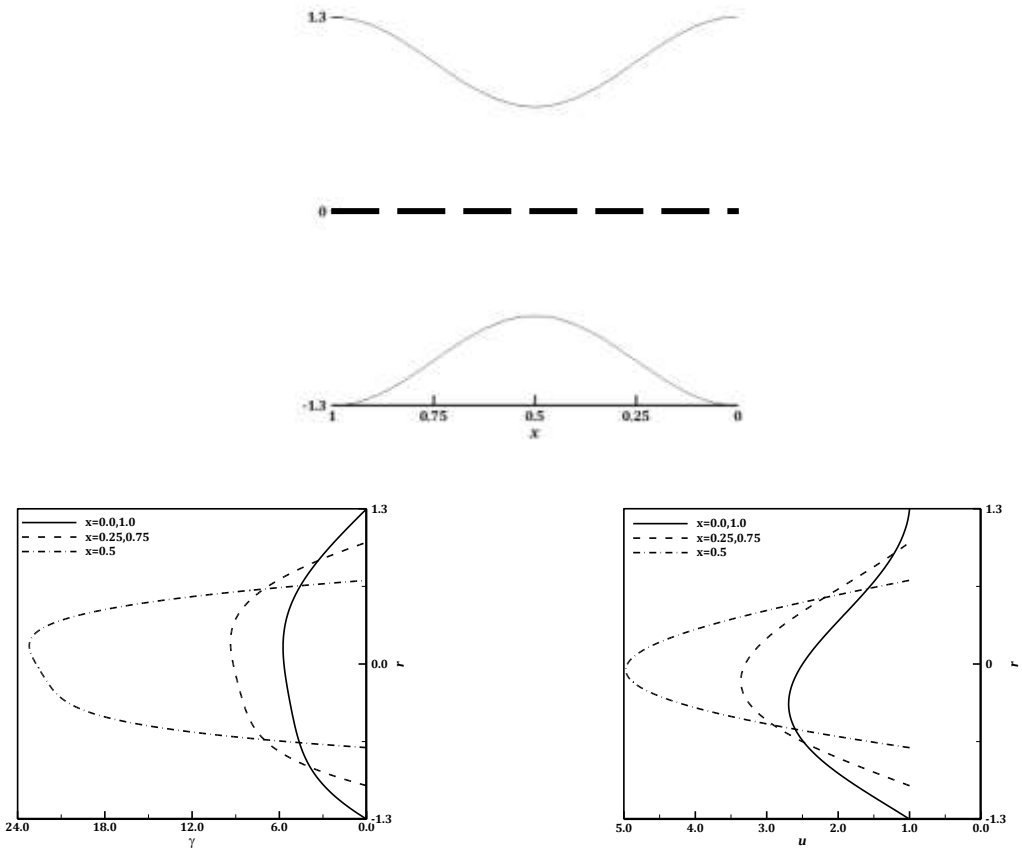
اثر عدد دارسی روی عدد ناسلت در جدول ۴-۱۲ آمده است. مشاهده می‌شود که با افزایش عدد دارسی، عدد ناسلت کاهش پیدا می‌کند.

جدول ۴-۱۲ تاثیر عدد دارسی روی عدد ناسلت

Da	۰/۰۱	۰/۱	۱۰۰
Nu	۵/۴۰۲۵۶	۳/۳۹۵۴۶	۳/۳۵۰۲۵

۴-۲-۴-۱۳ بررسی جریان و انتقال حرارت در مقاطع مختلف کانال

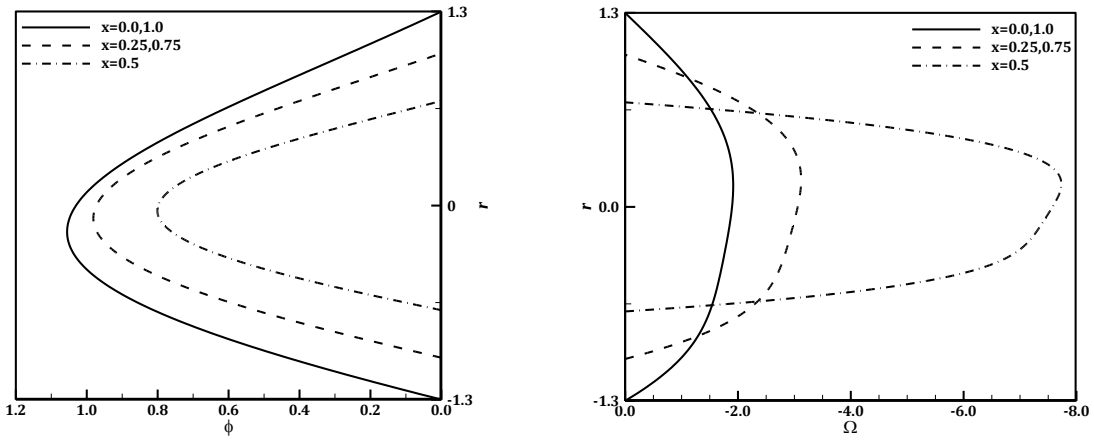
در این قسمت، به بررسی پارامترهای مختلف در راستای محوری x پرداخته شده است.



(ب) (الف)

شکل ۴-۳۹: (الف) نمودار سرعت، (ب) دما بدون بعد در شرایط $\mathbf{M = 1.8, k = 6, Gr = 1, Gc = 1, Nt = 0.1, Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = -5, Da = 100, \alpha = 0.3}$

در قسمت الف، با پیشروی در راستای محوری x، سطح مقطع کانال کاهش می‌یابد، بنابراین انتظار می‌رود با افزایش سرعت، این کاهش جبران گردد تا دبی جریان در طول کانال ثابت باقی بماند.

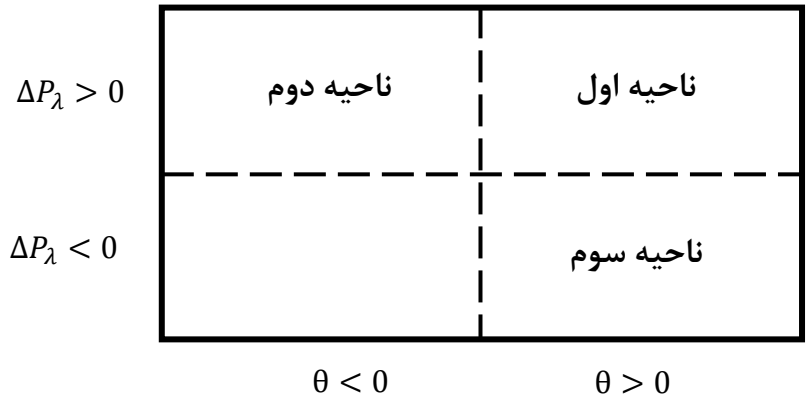


(د) (ج)

شکل ۴-۴۰: (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی در شرایط $\mathbf{M = 1.8, k = 6, Gr = 1, Gc = 1, Nt = 0.1, Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = 1, E = 1, \zeta = 0.2, F = -5, Da = 100, \alpha = 0.3}$

۴-۲-۴-۱۴ بررسی افزایش فشار

در ادامه به بررسی تغییرات افزایش فشار با نرخ جریان حجمی θ برای پارامترهای مختلف پرداخته شده است. این نمودارها همانند آنچه در شکل دیده می‌شود به سه بخش مهم دسته‌بندی می‌گردند.

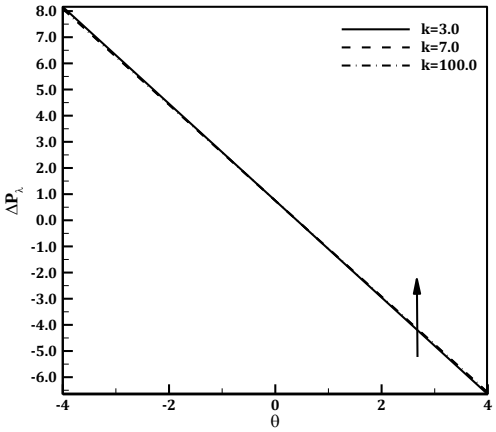


شکل ۴-۴۱: شکل شماتیک ناحیه‌های افزایش فشار

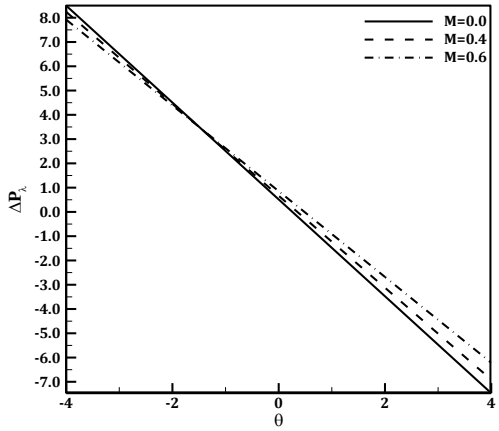
ناحیه اول ($\Delta P_\lambda > 0 , \theta > 0$) به آن ناحیه پمپاژ موج‌دار گفته می‌شود. در این ناحیه مقدار دبی مثبت و گرادیان فشار معکوس می‌باشد. ناحیه دوم که در آن $\Delta P_\lambda > 0 , \theta < 0$ می‌باشد، ناحیه پمپاژ منفی می‌باشد که در آنجا گرادیان فشار به‌صورت معکوس می‌باشد. ناحیه سوم که در آن $\Delta P_\lambda < 0 , \theta > 0$ می‌باشد، ناحیه پمپاژ افزوده و یا پمپاژ کمکی گفته می‌شود. در ناحیه پمپاژ افزوده، گرادیان فشار به‌صورت مطلوب وجود دارد. همچنین به خطی که روی آن $\Delta P_\lambda = 0$ می‌باشد را ناحیه پمپاژ آزاد می‌نامند.

همان‌طور که در شکل ۴-۴۲ دیده می‌شود، افزایش در مقدار عدد هارتمن موجب بیشتر شدن افزایش فشار در منطقه پمپاژ افزوده می‌گردد. همچنین مشاهده می‌شود که در اثر افزایش مقدار انحنای کانال، ΔP_λ در منطقه پمپاژ افزوده افزایش می‌یابد و این بدان معنی است که پارامتر انحنا نقش مهمی را در جریان درون کانال ایفا می‌کند. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش در مقادیر گراشف، عدد براونیان موجب افزایش پمپاژ در ناحیه سوم می‌گردد. هرچه که محیط دارای نفوذپذیری بیشتری باشد و مقدار عدد دارسی آن به سمت بی‌نهایت میل کند، سبب می‌شود که ΔP_λ به‌شدت در ناحیه اول افت کند، ولی در منطقه پمپاژ افزوده، موجب افزایش چشمگیری می‌گردد. عدد گراشف و پارامتر حرکت ترموفورتیک هیچ‌گونه اثری بر روی افزایش فشار در داخل جریان ندارند.

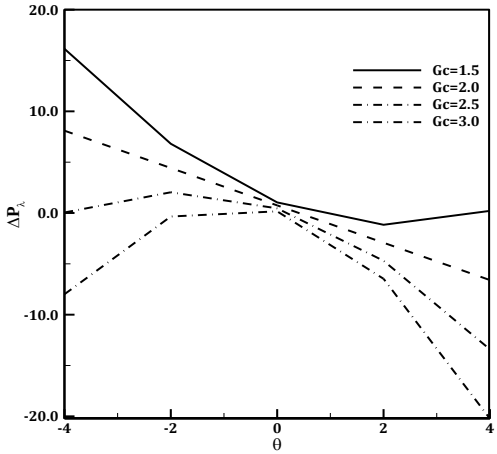
افزایش قدرت میدان الکتریکی و قدرت چشمه حرارتی سبب افزایش در سرتاسر نواحی اعلام شده در خصوص افزایش فشار می‌گردند.



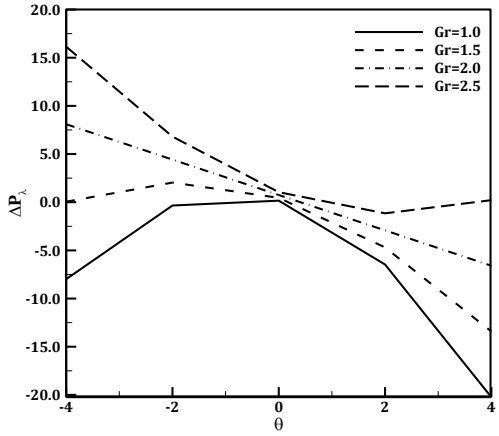
(ب) $M = 1.8, Gr = Gc = 2, Nt = Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = E = 1, \zeta = 0.2, Da = 100, \alpha = 0.3$



(الف) $k = 7, Gr = Gc = 2, Nt = Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = E = 1, \zeta = 0.2, Da = 100, \alpha = 0.3$

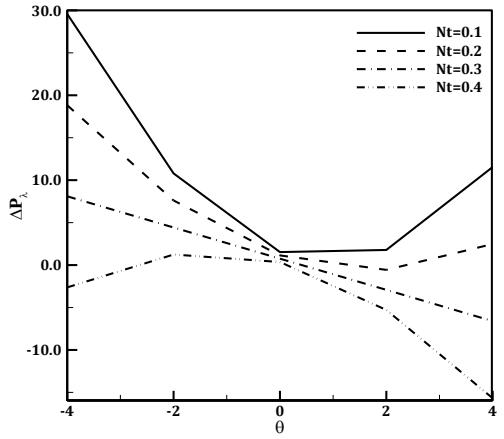


(د) $M = 1.8, k = 7, Gr = 2, Nt = Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = E = 1, \zeta = 0.2, Da = 100, \alpha = 0.3$

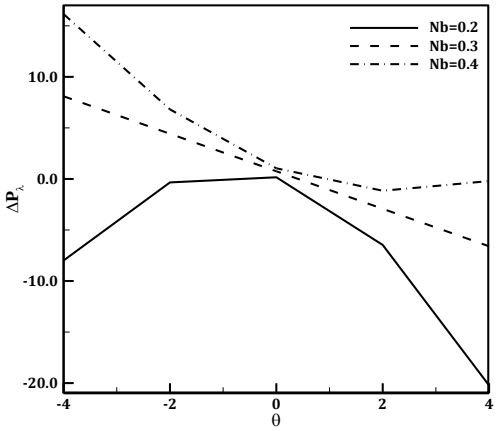


(ج) $M = 1.8, k = 7, Gc = 2, Nt = Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = E = 1, \zeta = 0.2, Da = 100, \alpha = 0.3$

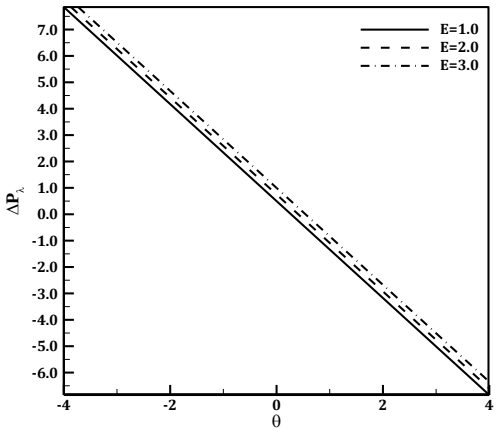
شکل ۴-۴۲: نمودار افزایش فشار حالت‌های مختلف



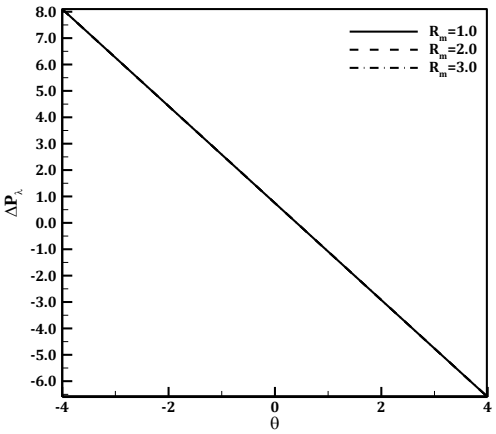
(و) $M = 1.8, k = 7, Gr = Gc = 2, Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = E = 1, \zeta = 0.2, Da = 100, \alpha = 0.3$



(ه) $M = 1.8, k = 7, Gr = Gc = 2, Nt = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = E = 1, \zeta = 0.2,, Da = 100, \alpha = 0.3$

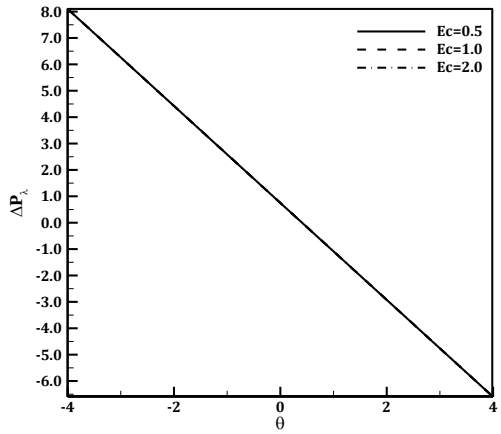


(ح) $M = 1.8, k = 7, Gr = Gc = 2, Nt = Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = 1, \zeta = 0.2, Da = 100, \alpha = 0.3$

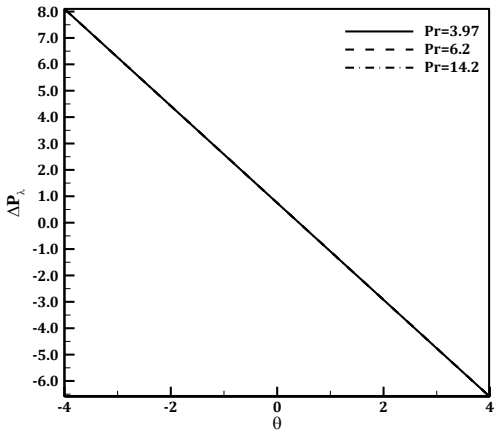


(ز) $M = 1.8, k = 7, Gr = Gc = 2, Nt = Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, E = 1, \zeta = 0.2, Da = 100, \alpha = 0.3$

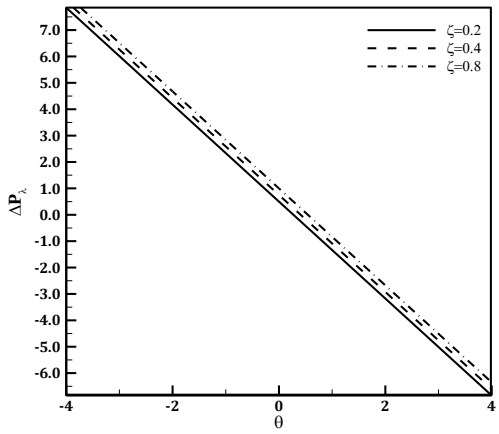
ادامه شکل ۴-۴۲: نمودار افزایش فشار در حالت‌های مختلف



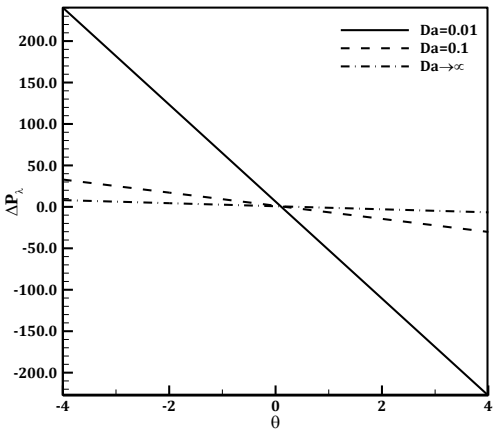
(ط) $M = 1.8, k = 7, Gr = Gc = 2, Nt = Nb = 0.3, Pr = 3.97, R_m = E = 1, \zeta = 0.2, Da = 100, \alpha = 0.3$



(و) $M = 1.8, k = 7, Gr = Gc = 2, Nt = Nb = 0.3, Ec = 1, R_m = E = 1, \zeta = 0.2, Da = 100, \alpha = 0.3$



(ی) $M = 1.8, k = 7, Gr = Gc = 2, Nt = Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = E = 1, Da = 100, \alpha = 0.3$



(ک) $M = 1.8, k = 7, Gr = Gc = 2, Nt = Nb = 0.3, Ec = 1, Pr = 3.97, R_m = E = 1, \zeta = 0.2, \alpha = 0.3$

ادامه شکل ۴-۴۲: نمودار افزایش فشار در حالت‌های مختلف

۴-۲-۴-۱۵ بررسی اثر تخلخل محیط متخلخل

این کمیت معیاری برای تشخیص اندازه‌ی خلل و فرج موجود در محیط متخلخل می‌باشد و به‌صورت نسبت حجم منافذ و سوراخ‌های موجود در ماده به حجم کل آن می‌باشد. این کمیت با عنوان تخلخل کامل نیز شناخته می‌شود. عبارت دیگری در همین زمینه به نام تخلخل مؤثر نیز ارائه شده است که فقط محدود به فضایی از محیط متخلخل می‌شود که در آن جریان وجود دارد.

رابطه (۴-۲۴)، بیانگر رابطه غلظت می‌باشد.

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r+k}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)+\frac{\mathrm{Nt}}{\mathrm{Nb}}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}+\frac{1}{r+k}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)=0 \qquad (۲۴\text{-}۴)$$

در $r = h = -1 - \alpha(\cos 2\pi x)$:

$$\psi=+\frac{q}{2},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial r}=1\,,\qquad \gamma=1,\qquad \varphi=0,\qquad \Omega=0,$$

در $r = h = +1 + \alpha(\cos 2\pi x)$: (۲۵-۴)

$$\psi=-\frac{q}{2},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial r}=1\,,\qquad \gamma=0,\qquad \varphi=0,\qquad \Omega=0,$$

که با استفاده از شرط مرزی (۴-۲۵)، به‌صورت رابطه (۴-۲۶) ساده می‌شود:

$$\Omega=-\frac{Nt}{Nb}\gamma+c_1Ln(r+k)+c_2 \qquad (۲۶\text{-}۴)$$

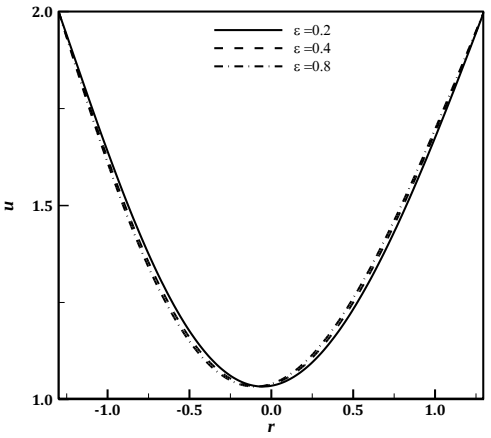
حال با در نظر گرفتن رابطه انرژی و ساده کردن آن بر اساس رابطه (۴-۲۶)، شکل نهایی این رابطه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}+\frac{(\varepsilon Nt)}{Ln(k-h)-Ln(k+h)}\right)\left(\frac{1}{r+k}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial r}+Ec\left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r+k}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}-1\right)\right)^2=0 \qquad (۲۷\text{-}۴)$$

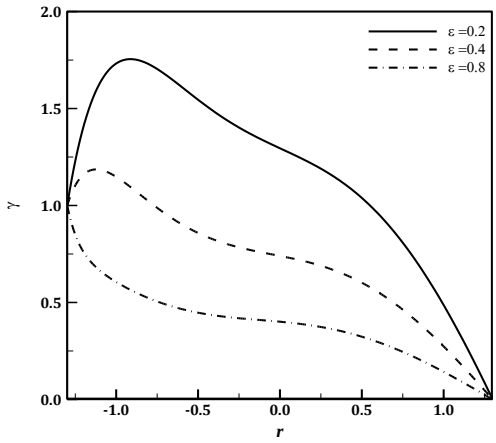
در رابطه (۴-۲۷)، ε بیانگر کمیت تخلخل محیط متخلخل می‌باشد. با استفاده از آنچه در فصل ۳ بیان شد و شیوه گسسته سازی روابط، به بررسی جریان و انتقال حرارت در محیط متخلخل پرداخته می‌شود.

با افزایش تخلخل محیط متخلخل، همان‌طور که مشاهده می‌شود تقارن سرعت در مرکز کانال از بین می‌رود و سرعت در دیواره خارجی افزایش پیدا می‌کند. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش تخلخل، پروفیل بدون بعد دما کاهش می‌یابد بنابراین انتقال حرارت افزایش می‌یابد (شکل ۴-۴۳، ب). در مورد غلظت با توجه به شکل می‌توان دریافت که با افزایش تخلخل، غلظت در نزدیکی دیواره‌ها ثابت می‌باشد و در راستای شعاع پروفیل غلظت بدون بعد افزایش می‌یابد.

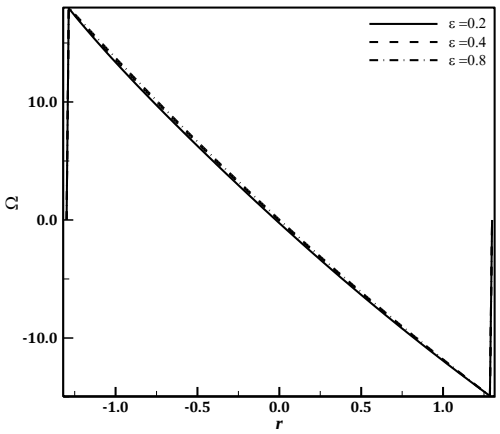
ضریب تخلخل، اثری در روابط مربوط به تابع میدان مغناطیسی و میدان القا شده محوری ندارد بنابراین همان‌طور که انتظار می‌رفت تأثیری در روند افزایشی و کاهشی این نمودارها ندارد. با توجه به شکل ۴-۴۴، گرادیان فشار در ضرایب مختلف تخلخل تغییری نمی‌کند همچنین گردابه‌های نسبی در حالت موجدار در قسمت بالایی کانال نیز ثابت و بدون تغییر باقی می‌مانند.



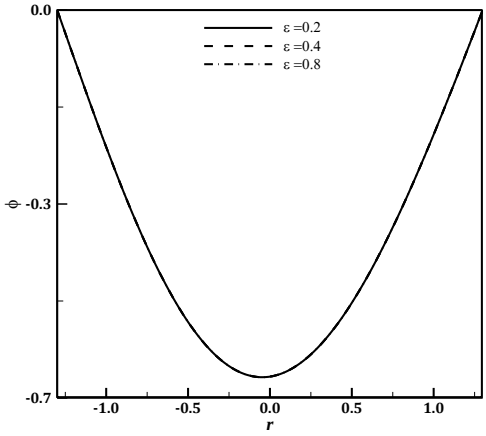
(الف)



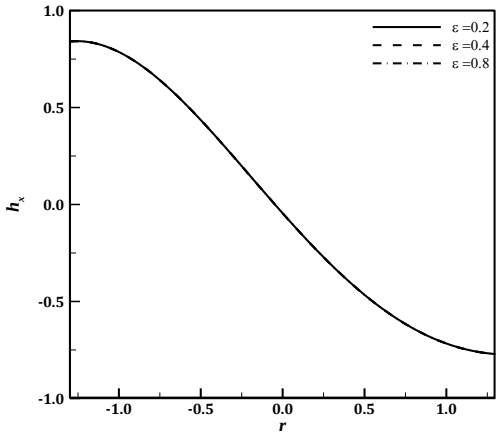
(ب)



(ج)

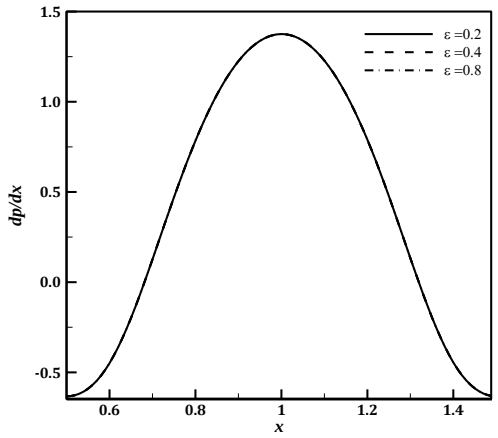


(د)

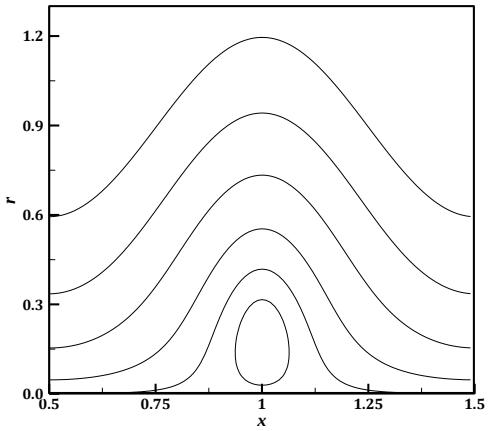


(ه)

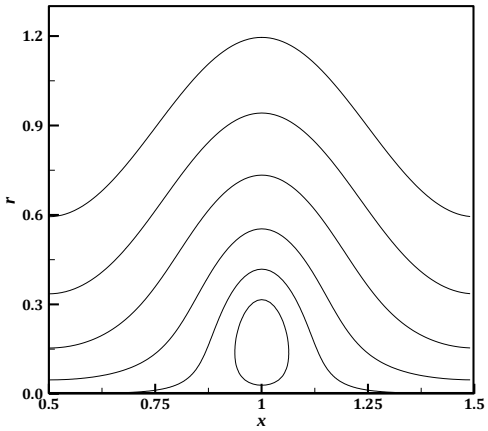
شکل ۴-۴۳: نمودار (الف) سرعت بدون بعد، (ب) دما بدون بعد، (ج) توزیع غلظت، (د) تابع نیروی مغناطیسی، (ه) میدان مغناطیسی القا شده محوری برای مقادیر مختلف تخلخل در شرایط $\mathbf{M = 1.2, k = 7, Gc = 2, Gr = 2, Nt = 0.1, Nb = 0.3, Pr = 3.97, R_m = 1, E = 1, Ec = 1, F = 2, Da = 100, x = 1, \alpha = 0.3}$



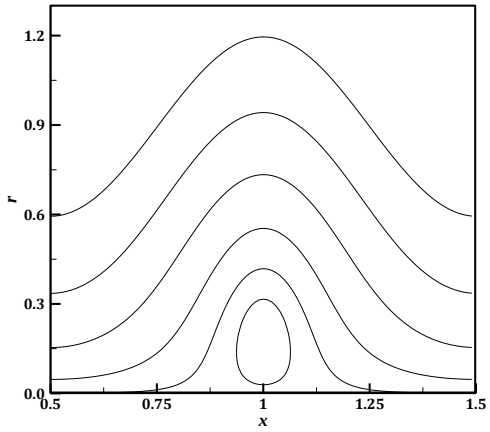
(الف)



$\varepsilon = 0.2$(ب)



$\varepsilon = 0.4$(ج)



$\varepsilon = 0.8$(د)

شکل ۴-۴۴: (الف) نمودار گرادیان فشار، خط جریان در (ب) $\varepsilon = 0.2$، (ج) $\varepsilon = 0.4$، (د) $\varepsilon = 0.8$ در شرایط $\mathbf{M = 1.8, Gr = 2, Gc = 2, k = 100, Nt = 0.3, Nb = 0.3, Pr = 3.97, R_m = 1, Ec = 1, E = 1, F = 2,\ \zeta = 0.2, \alpha = 0.3, Da = 100}$

فصل ۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این فصل خلاصه‌ای از نتایج به‌دست آمده در این پایان‌نامه ارائه می‌گردد و درنهایت موضوعاتی جدید و مکمل در راستای موضوع پایان‌نامه، پیشنهاد می‌گردد.

۵-۱- بحث و نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه به بررسی عددی جریان مگنتوهیدرودینامیک یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی در محیطی متخلخل پرداخته شد. معادلات حاکم ابتدا گسسته سازی شده و سپس برنامه‌ای با زبان برنامه‌نویسی C + + نوشته شد. سپس اثر کمیت‌های مختلفی نظیر عدد هارتمن، کمیت انحنا، چشمه حرارتی، عدد دارسی و ... مورد بررسی قرار گرفت.

از مهم‌ترین نتایج و دستاوردهای این پایان‌نامه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

انتقال حرارت به دلیل وجود هیدرودینامیک مغناطیسی کاهش پیدا کرده و همچنین گرادیان فشار همراه با افزایش عدد هارتمن افزایش می‌یابد که از این موضوع می‌توان برای کنترل خون‌ریزی بیش از حد در طی عمل‌های جراحی استفاده کرد.

با افزایش انحنا کانال، ماکزیمم سرعت به سمت دیواره داخلی متمایل می‌گردد و به دلیل وجود نیروی گریز از مرکز، جریان ثانویه‌ای ایجاد می‌گردد که عاملی در جهت افزایش انتقال حرارت می‌باشد. افزایش مقدار k به‌منزله صاف‌تر شدن کانال و در نتیجه کاهش گرادیان فشار می‌باشد.

با توجه به این‌که عدد گراشف به صورت نسبت انتقال حرارت جابه‌جایی بر اتلافات لزجت است، بنابراین افزایش این کمیت، موجب غالب شدن جمله انتقال حرارت بر تلفات می‌شود و در نتیجه انتقال حرارت افزایش می‌یابد. با توجه به این‌که عدد رینولدز مغناطیسی در روابط مربوط به‌سرعت و دما حضور ندارد بنابراین اثر این کمیت بر روی سرعت و دما برابر صفر می‌باشد، ولی با افزایش عدد رینولدز مغناطیسی ضریب هدایت الکتریکی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش کمیت‌های براونی و فورتیک انتقال حرارت به‌ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد.

میدان الکتریکی نیز باعث کاهش تابع نیروی مغناطیسی و افزایش میدان مغناطیسی القاشده محوری می‌گردد، ولی تأثیری بر خطوط جریان داخل کانال ندارد.

افزایش عدد پرانتل سبب می‌شود که ضخامت لایه مرزی حرارتی کاهش بیاید و مانع از گسترش حرارت در سیال می‌شود. افزایش قدرت چشمه حرارتی نیز همراه با کاهش سرعت در خط مرکزی کانال در حالت موجدار می‌باشد همچنین باعث کاهش انتقال حرارت می‌گردد. افزایش عدد دارسی میزان نفوذپذیری و در نتیجه سرعت سیال را در حالت موجدار کاهش می‌دهد و از طرفی باعث کاهش انتقال حرارت و تابع نیروی مغناطیسی می‌گردد.

با افزایش تخلخل در محیط، تقارن سرعت در مرکز کانال از بین رفته و همچنین انتقال حرارت افزایش می‌یابد. از طرفی این کمیت برروی کمیت‌های تابع میدان مغناطیسی و میدان القاشده محوری اثری ندارد.

۵-۲- پیشنهادها

به‌منظور ارتقای سطح کیفی تحقیق حاضر و انجام مطالعه‌ی جامع‌تر در راستای موضوع این پایان‌نامه، پیشنهادها و توصیه‌هایی به شرح زیر مطرح می‌گردد:

- حل عددی جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی به همراه واکنش شیمیایی
- حل عددی جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی همراه با در نظر گرفتن اثرات تشعشع[1]
- حل عددی جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی با در نظر گرفتن میدان مغناطیسی متغیر زاویه‌ای
- حل عددی جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی با در نظر گرفتن ویژگی‌های یک سیال غیرنیوتنی
- حل تحلیلی جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی
- حل تحلیلی جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی همراه با در نظر گرفتن اثرات تشعشع
- حل تحلیلی جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی با در نظر گرفتن میدان مغناطیسی متغیر زاویه‌ای
- حل تحلیلی جریان هیدرودینامیک مغناطیسی یک نانوسیال در کانال منحنی با دیواره موج‌دار به همراه چشمه حرارتی با در نظر گرفتن ویژگی‌های یک سیال غیرنیوتنی

[1] Radiation Effect

مراجع

[1] E. Abu-Nada, Z. Masoud, H. F. Oztop, and A. Campo, "Effect of nanofluid variable properties on natural convection in enclosures," *International Journal of Thermal Sciences,* vol. 49, pp. 479-491, 2010.

[2] G. Barakos, E. Mitsoulis, and D. Assimacopoulos, "Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions," *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* vol. 18, pp. 695-719, 1994.

[3] S. Chol, "Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles," *ASME-Publications-Fed,* vol. 231, pp. 99-106, 1995.

[4] M. Mustafa, S. Hina, T. Hayat, and A. Alsaedi, "Influence of wall properties on the peristaltic flow of a nanofluid: analytic and numerical solutions," *International Journal of Heat and Mass Transfer,* vol. 55, pp. 4871-4877, 2012.

[5] S. Choi, Z. Zhang, W. Yu, F. Lockwood, and E. Grulke, "Anomalous thermal conductivity enhancement in nanotube suspensions," *Applied physics letters,* vol. 79, pp. 2252-2254, 2001.

[6] K. Khanafer, K. Vafai, and M. Lightstone, "Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids," *International journal of heat and mass transfer,* vol. 46, pp. 3639-3653, 2003.

[7] S. E. B. Maïga, C. T. Nguyen, N. Galanis, and G. Roy, "Heat transfer behaviours of nanofluids in a uniformly heated tube," *Superlattices and Microstructures,* vol. 35, pp. 543-557, 2004.

[8] S. Maiga, C. Nguyen, N. Galanis, and G. Roy, "Hydrodynamic and thermal behaviours of a nanofluid in a uniformly heated tube," *WIT Transactions on Engineering Sciences,* vol. 46, 2004.

[9] S. E. B. Maiga, S. J. Palm, C. T. Nguyen, G. Roy, and N. Galanis, "Heat transfer enhancement by using nanofluids in forced convection flows," *International Journal of Heat and Fluid Flow,* vol. 26, pp. 530-546, 2005.

[10] J. Buongiorno, "Convective transport in nanofluids," *Journal of Heat Transfer,* vol. 128, pp. 240-250, 2006.

[11] E. Abu-Nada, Z. Masoud, and A. Hijazi, "Natural convection heat transfer enhancement in horizontal concentric annuli using nanofluids," *International Communications in Heat and Mass Transfer,* vol. 35, pp. 657-665, 2008.

[12] ن. ش. س. آبادی, "بررسی عددی اثر میدان مغناطیسی بر روی جریان درون کانال با سطح مقطع متغیر," دانشکده مهندسی مکانیک, دانشگاه صنعتی شیراز ۱۳۹۴.

[13] S. Shehzad, F. Abbasi, T. Hayat, F. Alsaadi, and G. Mousa, "Peristalsis in a curved channel with slip condition and radial magnetic field," *International Journal of Heat and Mass Transfer,* vol. 91, pp. 562-569, 2015.

[14] M. Venkatachalappa and C. Subbaraya, "Natural convection in a rectangular enclosure in the presence of a magnetic field with uniform heat flux from the side walls," *Acta Mechanica,* vol. 96, pp. 13-26, 1993.

[15] N. Rudraiah, R. Barron, M. Venkatachalappa, and C. Subbaraya, "Effect of a magnetic field on free convection in a rectangular enclosure," *International Journal of Engineering Science,* vol. 33, pp. 1075-1084, 1995.

[16] N. Ali, M. Sajid, T. Javed, and Z. Abbas, "Heat transfer analysis of peristaltic flow in a curved channel," *International Journal of Heat and Mass Transfer,* vol. 53, pp. 3319-3325, 2010.

[17] T. Latham, "Motion in a peristaltic pump [MS thesis]," ed: MIT-Press, Cambridge, Mass, USA, 1966.

[18] A. H. Shapiro, M. Y. Jaffrin, and S. L. Weinberg, "Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number," *Journal of Fluid Mechanics,* vol. 37, pp. 799-825, 1969.

[19] H. Lew, Y. Fung, and C. Lowenstein, "Peristaltic carrying and mixing of chyme in the small intestine (an analysis of a mathematical model of peristalsis of the small intestine)," *Journal of Biomechanics,* vol. 4, pp. 297-315, 1971.

[20] S. Takabatake, K. Ayukawa, and A. Mori, "Peristaltic pumping in circular cylindrical tubes: a numerical study of fluid transport and its efficiency," *Journal of Fluid Mechanics,* vol. 193, pp. 267-283, 1988.

[21] K. AYUKAWA and S. TAKABATAKE, "Numerical Analysis of Two-Dimensional Peristaltic Flows: 1st Report, Flow Pattern," *Bulletin of JSME,* vol. 25, pp. 1061-1069, 1982.

[22] N. S. Akbar and A. W. Butt, "Carbon nanotubes analysis for the peristaltic flow in curved channel with heat transfer," *Applied Mathematics and Computation,* vol. 259, pp. 231-241, 2015.

[23] K. Pavlov and V. Vishnyakov, "Peristaltic flow of a conductive liquid in a transverse magnetic field," *Translated from Magnitnaya Gidrodinamika,* vol. 8, pp. 174-178, 1972.

[24] S. Pandey and D. Tripathi, "Influence of magnetic field on the peristaltic flow of a viscous fluid through a finite-length cylindrical tube," *Applied Bionics and Biomechanics,* vol. 7, pp. 169-176, 2010.

[25] S. Noreen, M. Qasim, and Z. Khan, "MHD pressure driven flow of nanofluid in curved channel," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials,* vol. 393, pp. 490-497, 2015.

[26] H. Agrawal and B. Anwaruddin, "Peristaltic flow of blood in a branch," *Ranchi Univ. Math. J,* vol. 15, pp. 111-121, 1984.

[27] N. Ali, Q. Hussain, T. Hayat, and S. Asghar, "Slip effects on the peristaltic transport of MHD fluid with variable viscosity," *Physics Letters A,* vol. 372, pp. 1477-1489, 2008.

[28] E. El-Shehawey and S. Z. Husseny, "Peristaltic transport of a magneto-fluid with porous boundaries," *Applied mathematics and computation,* vol. 129, pp. 421-440, 2002.

[29] T. Hayat and N. Ali, "Peristaltically induced motion of a MHD third grade fluid in a deformable tube," *Physica A: Statistical Mechanics and its applications,* vol. 370, pp. 225-239, 2006.

[30] T. Hayat and N. Ali, "A mathematical description of peristaltic hydromagnetic flow in a tube," *Applied Mathematics and Computation,* vol. 188, pp. 1491-1502, 2007.

[31] K. S. Mekheimer, "Peristaltic flow of blood under effect of a magnetic field in a non-uniform channels," *Applied Mathematics and Computation,* vol. 153, pp. 763-777, 2004.

[32] K. S. Mekheimer, "The influence of heat transfer and magnetic field on peristaltic transport of a Newtonian fluid in a vertical annulus: application of an endoscope," *Physics Letters A,* vol. 372, pp. 1657-1665, 2008.

[33] Y. Wang, T. Hayat, N. Ali, and M. Oberlack, "Magnetohydrodynamic peristaltic motion of a Sisko fluid in a symmetric or asymmetric channel," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,* vol. 387, pp. 347-362, 2008.

[34] س. ا. محمد نصیری, محمد حجت, نانوسیال، محیط جدید انتقال حرارت :1 .vol ارکان دانش, ۱۳۹۳.

[35] S. U. Choi, "Nanofluid technology: current status and future research," The Second Korean-American Scientists and Engineers Association Research Trend Study, Vienna, 1998.

[36] P. Keblinski, J. A. Eastman, and D. G. Cahill, "Nanofluids for thermal transport," *Materials today,* vol. 8, pp. 36-44, 2005.

[37] H. Bergman, *The ureter*: Hoeber Medical Division, Harper & Row, 1967.

[38] J. N. Mazumdar, "Biofluid Mechanics," *World Scientific, Singapore,* 1992.

[39] K. S. Mekheimer, "Effect of the induced magnetic field on peristaltic flow of a couple stress fluid," *Physics Letters A,* vol. 372, pp. 4271-4278, 2008.

[40] A. Al-Hadhrami, L. Elliott, and D. Ingham, "A new model for viscous dissipation in porous media across a range of permeability values," *Transport in Porous media,* vol. 53, pp. 117-122, 2003.

[41] S. Nadeem and I. Shahzadi, "Mathematical analysis for peristaltic flow of two phase nanofluid in a curved channel," *Communications in Theoretical Physics,* vol. 64, p. 547, 2015.

[42] S. Nadeem, E. Maraj, and N. S. Akbar, "Investigation of peristaltic flow of Williamson nanofluid in a curved channel with compliant walls," *Applied Nanoscience,* vol. 4, pp. 511-521, 2014.

[43] L. Budugur, "Fluid Dynamics and Heat Transfer of Turbomachinery," ed: Wiley-Interscience, 1995.

[44] R. H. Pletcher, J. C. Tannehill, and D. Anderson, *Computational fluid mechanics and heat transfer*: CRC Press, 2012.

Abstract

Interest in the study of flows with peristaltic walls has increased substantially in recent decades. This is due to the obvious importance in physiology and also in the industry. This phenomenon is widely used for the digestive and excretion of urine systems, transfer sperm in the male reproductive duct vessels, ferry the food from the esophagus and blood circulation in small blood vessels. Many modern medical instruments such as peristaltic pump are designed to move the fluid without moving internal parts and the pumps that are used in heart, lung and dialysis machines. Fingered and roller pumps, hoses and internal pumps, pumps for waste management in the nuclear industry are also working on the wavy walls rules.

In this thesis, the nanofluids magnetic hydrodynamic flow have been studied in a curved channel, in porous media with peristaltic walls with the thermal source. In the present study, the flow is incompressible. The governing equations for the flow, heat transfer and mass transfer obtained by using an assumption of long wavelength, and for numerical solution, a program has written by using central finite difference approximation algorithm and Keller box method.

In this study by using the numerical solution results, the effect of various parameters such as Hartmann number, the magnetic Reynolds number, Darcy number on the distribution of temperature and concentration, flow function, the function of the magnetic force, induced magnetic field, increase the pressure on the wavelength, Nusselt number and also the flow trapping phenomenon has been studied.

Keywords: Peristaltic, Magnetohydrodynamic, Nanofluids, Porous Media, Thermal Source, Keller Box Method, Trapping.

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Energy Conversion Engineering

MHD flow of nanofluid in peristaltic curved channel with thermal source

by

Hassan Panahdoost

Supervisor

Dr. Pooria Akbarzadeh

March 2017