بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق مستطیلی ترک‌دار

نگارنده:

پیمان جوهر

استاد راهنما:

دکتر اردشیر کرمی محمّدی

بهمن ۱۳۹۵

مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم شماره ۷: صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **پیمان جوهر** به شماره دانشجویی **۹۲۰۴۵۹۴** .رشته **مهندسی مکانیک** گرایش **طراحی کاربردی** تحت عنوان **ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار** که در تاریخ **۹۵/۱۱/۱۸** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه : بسیارخوب امتیاز ۱۸/۵۵) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)
۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر اردشیر کرمی محمّدی	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	سید وحید حسینی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر حمیدرضا ایپک‌چی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر حبیب احمّدی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تقدیم به

با شکوه‌ترین جلوه هستی

مادر

و مظهر صلابت و محبّت

پدر

پروردگارا

مبادا روزی برسد که ما...

بارمان را بسته باشیم به این قیمت که بالمان را بسته باشیم...

و از یاد ببریم که برای اوج و حرکت:

بال می‌خواهیم نه بار...

تشکر و قدردانی

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب

" من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ ":

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوارم، که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

و از استاد ارجمند و شایسته؛ **جناب آقای دکتر اردشیر کرمی محمّدی**، که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛

و از اساتید محترم؛ **جناب آقایان دکتر حمیدرضا ایپک چی و دکتر حبیب احمدی**، که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تعهد نامه

اینجانب **پیمان جوهر** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار** تحت راهنمائی دکتر اردشیر کرمی محمّدی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

- **استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.**

چکیده

ورق‌ها مشابه با سایر سازه‌های انعطاف‌پذیر، در طول دوره‌ی کاری خود عملاً تحت بارگذاری‌های دینامیکی و ارتعاشی قرار خواهند گرفت، که این بارگذاری‌ها سبب به وجود آمدن عیوبی در ورق‌ها می‌شوند. ترک یکی از مهم‌ترین عیوبی است که ممکن است در قسمت‌های مختلف یک سازه انعطاف پذیر بوجود آید و سبب تغییر در مشخصه‌های فیزیکی نظیر سفتی، جرم و به دنبال آن تغییر در مشخصه‌های دینامیکی و ارتعاشی نظیر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها می‌شود که کاهش کارایی و مقاومت سازه را به دنبال خواهد داشت.

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم و ترک‌دار مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. برای بررسی مسائل ارتعاشاتی، اغلب از توابعی به شکل بسط سری فوریه استفاده می‌شود، اما بسط سری فوریه مرسوم در حالت کلی برای شرایط مرزی مختلف دارای مشکل همگرایی در راستای مرز لبه‌ها خواهد بود. به همین دلیل در این تحقیق ابتدا مؤلفه‌های جابجایی ورق با استفاده از بسط سری فوریه بهبود یافته، تعریف می‌شوند. سپس در ادامه برای بررسی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم از روش سری فوریه بهبود یافته و تکنیک مرز فنردار فرضی بهره گرفته می‌شود. سپس در بخش‌های بعدی، برای بررسی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار از روش رایلی – ریتز بهبود یافته و تکنیک مرز فنردار فرضی استفاده خواهد شد. بدین صورت که ورق ترک‌دار با استفاده از تکنیک مرز فنردار فرضی شبیه‌سازی خواهد شد و سپس با جایگذاری مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته در توابع انرژی و با استفاده از تابع لاگرانژین و روش رایلی – ریتز، مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق ترک‌دار با شرایط مرزی یکسر گیردار استخراج می‌شوند. با بررسی و اعتبار سنجی دقت و همگرایی روش‌های سری فوریه بهبود یافته و رایلی – ریتز بهبود یافته می‌توان گفت که با استفاده از این روش‌ها، با انتخاب مقدار مناسبی از تعداد

جملات گسترش دهنده مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته، نتایجی با دقت مطلوب بدست می‌آید. در بخش‌های بعدی، تأثیرات پارامترهای هندسی و فیزیکی بر تغییرات فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق سالم با استفاده از روش رایلی-ریتز بهبود یافته مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. همچنین در ادامه تأثیرات عمق نسبی ترک، پارامترهای هندسی و فیزیکی بر روی مشخصات دینامیکی و ارتعاشی مانند نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم و شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار برای شرایط مرزی یکسر گیردار با استفاده از روش رایلی-ریتز بهبود یافته مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است.

کلمات کلیدی

ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق، تکنیک مرز فنردار فرضی، روش سری فوریه بهبود یافته، روش رایلی-ریتز بهبود یافته

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

فصل ۱

مقدمه

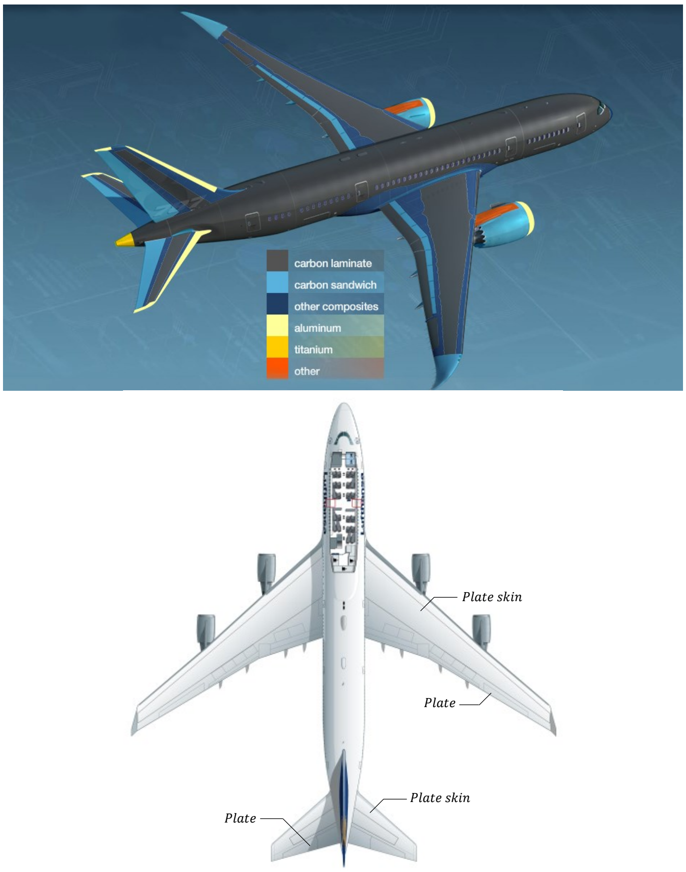
۱-۱ مقدمه

طراحی انواع سازه‌های مهندسی در مرحله‌ی اول نیازمند شناخت و تسلط کامل بر رفتار ارتعاشی و دینامیکی بخش‌های انعطاف‌پذیر به کار رفته در سازه، نظیر تیرها، کابل‌ها، ورق‌ها، پوسته‌ها و... می‌باشد. در این بین سازه‌های تشکیل شده از ورق، دارای کاربردهای وسیعی در علوم مهندسی نظیر مکانیک، دریا، هوافضا، عمران و غیره هستند که به عنوان نمونه به دلیل محدودیت‌هایی که در سازه‌های صنایع مختلف وجود دارد، می‌توان استفاده از ورق‌های سبک در ساخت بدنه و بال هواپیما (شکل۱-۱) و ساخت بدنه کشتی (شکل۱-۲) را نام برد.

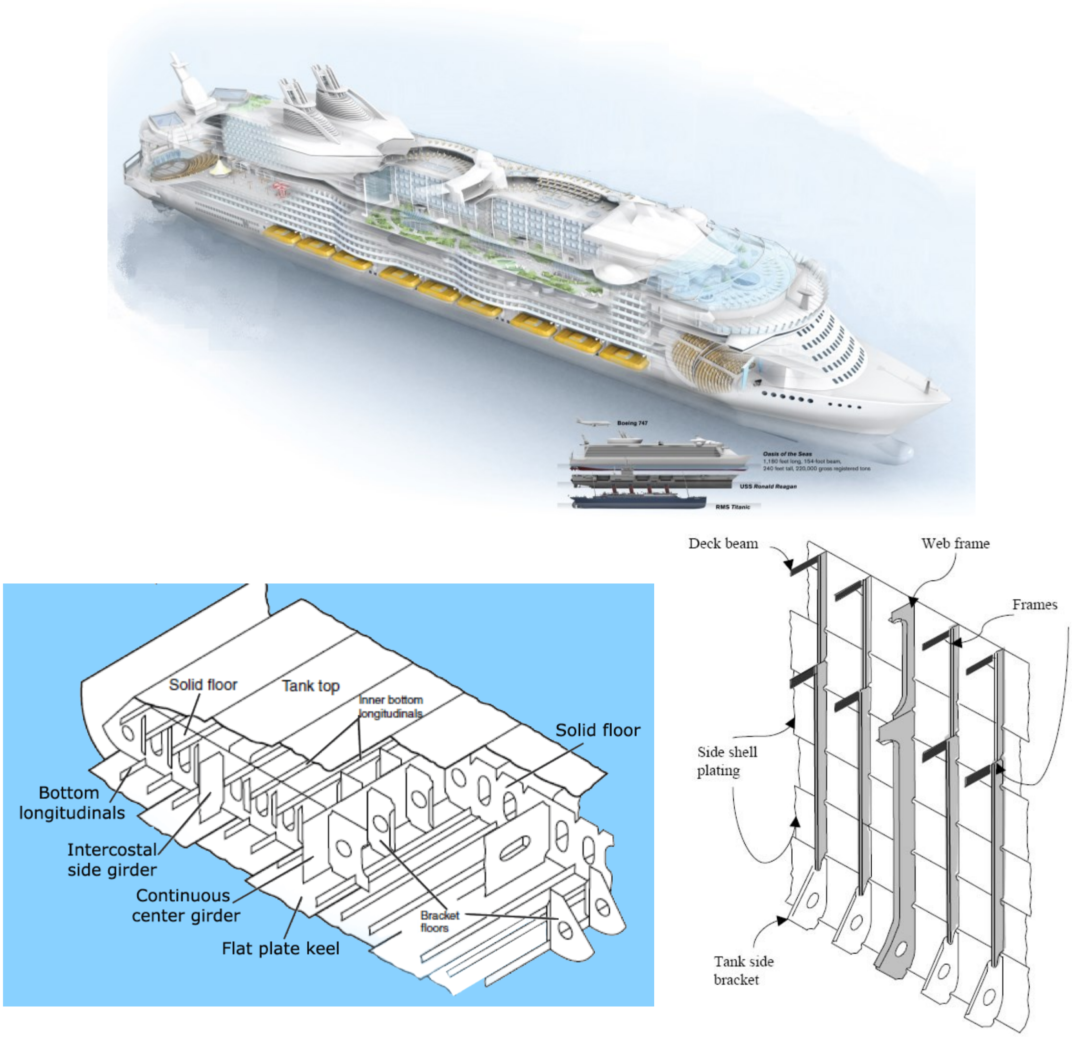
این سازه‌ها مشابه با انواع سازه‌های انعطاف‌پذیر، در طول دوره‌ی کاری خود به صورت بالقوه دچار بارگذاری‌های دینامیکی و ارتعاش می‌شوند، که این موضوع سبب به وجود آمدن عیوبی در سازه می‌شود. این عیوب ممکن است هر زمانی در حین فرایند ساخت و یا در طول عمر کاری قطعه به وجود آیند و موجب کاهش کارایی و مقاومت سازه و به تبع آن، در برخی قطعات سبب کاهش ضریب اطمینان و منجر به شکست فاجعه بار کل سازه خواهد شد و پیامد آن پدید آمدن زیان‌های اقتصادی و جانی فراوانی خواهد بود. ترک یکی از عمده‌ترین عیوبی است که در قسمت‌های مختلف یک سازه انعطاف پذیر بوجود می‌آید. لازم به ذکر است که، کارکرد هر قطعه از جمله ورق‌ها بر اثر وجود ترک‌های مختلف، تحت تاثیر قرار می‌گیرند. بدین صورت که وجود ترک، در سازه‌های انعطاف پذیری که تحت تاثیر ارتعاشات قرار گرفته‌اند، سبب تغییر در مشخصه‌های فیزیکی آن‌ها مثل سفتی و جرم و به دنبال آن باعث تغییر در مشخصه‌های دینامیکی و ارتعاشی، نظیر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها می‌شود. از آنجائیکه شکست نهایی در قطعات و سازه‌ها اغلب بوسیله شروع و رشد ترک در نواحی مستعد سازه اتفاق می‌افتد، لذا

بررسی و تحقیق در زمینه چنین عیوبی سودمند خواهد بود. به همین دلیل یکی از ساده‌ترین، کم‌هزینه‌ترین و سریعترین روش‌ها در حوزه‌ی شناسایی عیوب، بررسی رفتار ارتعاشی سازه‌ها از طریق تغییرات به وجود آمده در فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای آن سازه، ناشی از وجود عیوبی همانند ترک می‌باشد.

از اینرو در سال‌های اخیر مطالعه رفتار دینامیکی ورق‌های مستطیلی و مدلسازی سازه‌های معیوب در جهت شناخت و درک فیزیکی کامل از ماهیت عیب، به دلیل اهمیت بالای کاربردی آنها موجب توجه فزاینده‌ی محققان قرار گرفته شده است.



شکل ۱-۱ ورق‌های به کار برده شده در ساختار بدنه هواپیما



شکل ۱-۲ ورق‌های به کار برده شده در ساختار بدنه کشتی

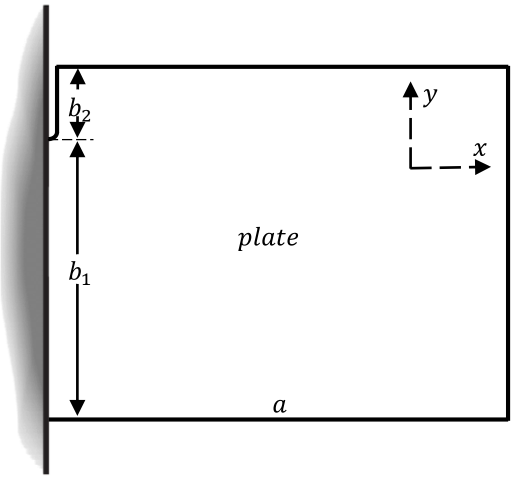
مسائل موجود در زمینه علوم مهندسی به طور گسترده، بر پایه‌ی دو نوع تئوری ورق با نام‌های تئوری ورق کلاسیک CPT[۱] و تئوری ورق میندلین - ریسنر[۲] مورد بررسی قرار می‌گیرند. سابقه‌ی تحقیقات اولیه‌ای که بر روی ورق‌ها انجام پذیرفت، به سال ۱۹۵۹ توسط تیموشنکو[۳] و وینووسکی کریگر[۴] [۱] بر می‌گردد که محققین قادر بودند با استفاده از روش‌های مختلف ارائه شده، سیستم‌های مختلف در زمینه‌ی مهندسی را مورد بررسی قرار بدهند.

---

[۱] Classic plate theory
[۲] Mindlin – Reissner plate theory
[۳] Timoshenko
[۴] Woinowsky Krieger

در اواخر قرن ۱۹ به بعد، تئوری ورق به طور مرتب در مسائل مربوط به علوم مهندسی در زمینه‌ی ساختارهای مرتعش توسط سیلارد[1] در سال ۲۰۰۴ [۲] و همچنین در بسیاری از مقالات در زمینه تحلیل و بررسی ارتعاشات ورق‌های ترک‌دار، به کار گرفته شده است.

تاکنون عمده تحقیقات انجام شده در زمینه‌ی تحلیل و بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌های ترک‌دار که توسط محققین همچون مارویاما و ایچینومیا[2] در سال ۱۹۸۹ [۳]، وو و لاو در سال ۲۰۰۴ [۴; ۵; ۶]، هوانگ و لیسا در سال ۲۰۰۹ [۷] و هوانگ و همکاران در سال ۲۰۱۱ [۸; ۹] ارائه شده است، مربوط به بررسی و تحلیل ارتعاشات ورق‌هایی که ترک‌های سطحی در لبه‌های ورق و ترک‌های داخلی با طول محدود که همواره به صورت موازی و زاویه‌دار نسبت به لبه‌های ورق رخ می‌دهند، می‌باشند. لذا می‌توان گفت که، مطالعات کمی در خصوص مواردی از ترک که به علت بارگذاری‌ها و ارتعاشات متناوب در تکیه‌گاه‌های سازه‌های انعطاف‌پذیر رخ می‌دهند، انجام شده است (شکل۱-۳).



شکل۱-۳ ورق ترک‌دار مدل شده با شرایط مرزی CFFF

علاوه بر این لازم به ذکر است که، تاکنون عمده تحقیقات صورت گرفته در زمینه بررسی رفتار ارتعاشی ورق‌های ترک‌دار، عمدتا به بررسی ارتعاشات جانبی ورق‌های ترک‌دار پرداخته شده است و

---

[1] Szilard

[2] Maruyama and Ichinomiya

می‌توان گفت که تا به حال ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار مورد بررسی و تحقیق قرار گرفته نشده است. از سوی دیگر عمده تحقیقات مرتبط با تحلیل ارتعاشات جانبی ورق‌های ترک‌دار در ادبیات فن، شامل ورق با شرایط تکیه‌گاهی خاصی بوده‌اند و کمتر راه حل دقیقی ارائه شده است که به واسطه‌ی آن بتوان تمام شرایط مرزی را به مسئله اعمال کرد.

از این جهت، نوعی کاستی در جامعیت مدل‌های ارائه شده، از نظر بررسی و تحقیق در زمینه‌ی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق‌های ترک‌دار و شرایط مربوط به ترک‌هایی خاص که در اثر بارگذاری و ارتعاشات متناوب در تکیه‌گاه‌های سازه‌های متناوب رخ می‌دهد و همچنین ارائه راه حل دقیق جهت اعمال انواع شرایط مرزی حاکم بر ورق در ادبیات فن وجود دارد.

۱-۲ اهداف تحقیق

با توجه به توضیحات داده شده در بخش قبل، بدیهی است محدودیت و کاستی‌هایی در مدل‌های ارائه شده در زمینه‌ی بررسی و تحلیلی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار وجود دارد. بدین منظور در این تحقیق به بررسی و تحلیل ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق‌های انعطاف‌پذیری که در اثر بارگذاری و ارتعاشات متناوب دچار عیوبی همانند ترک در تکیه‌گاه گیردار خود می‌شوند، پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است، برای بررسی موضوع مورد نظر در این تحقیق پارامترهای هندسی و فیزیکی موثر بر مشخصات دینامیکی و ارتعاشی مهم از جمله فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم و ترک‌دار با بهره گرفتن از تکنیک مرز فنردار فرضی و به واسطه‌ی دو روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی - ریتز بهبود یافته، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته می‌شوند. همچنین همانطور که در بخش قبل صحبت شد، با توجه به اینکه مطالعات محدودی در زمینه‌ی راه حل‌های ارائه شده برای بررسی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم با شرایط مرزی مختلف، انجام شده است. به همین علّت در این تحقیق برای اعتبار سنجی نتایج ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق، دو نوع راه حل

با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی – ریتز بهبود یافته، ارائه می‌شود، که به واسطه‌ی این دو روش و تکنیک مرز فنردار فرضی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم با شرایط مرزی FFFF، CCCC و CFFF مورد بررسی قرار خواهد گرفت. لازم به ذکر است که تمام نتایج استخراج شده از بررسی و تحلیل ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم با نتایج استخراج شده‌ای که به واسطه‌ی مدلسازی ورق سالم با شرایط مرزی FFFF، CCCC و CFFF در نرم افزار المان محدود ANSYS حاصل شده است، مقایسه و مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در ادامه با استفاده از روش رایلی - ریتز بهبود یافته و تکنیک مرز فنردار فرضی مشخصات دینامیکی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت و همچنین نتایج حاصل با نتایج استخراج شده از ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار مدلسازی شده در نرم افزار المان محدود ANSYS مقایسه و مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

از اینرو در این تحقیق اهداف زیر دنبال می‌شود:

۱- صحت تکنیک استفاده شده در این تحقیق که تحت عنوان تکنیک مرز فنردار فرضی می‌باشد مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت. بدین صورت که، نتایج استخراج شده برای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم با شرایط مرزی CCCC و CFFF و شرایط ابعادی $\frac{a}{b}=$۳ با نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS، مقایسه و مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲- اعتبار سنجی و بررسی همگرایی و دقت نتایج حاصل از راه حل‌های دقیق ارائه شده در روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی-ریتز بهبود یافته، برای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم با شرایط مرزی FFFF و CCCC، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته می‌شود. همچنین نتایج حاصل با نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS مقایسه و مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۳- فرکانس‌های طبیعی ورق سالم با شرایط مرزی FFFF، CCCC و CFFF و شرایط ابعادی مختلف با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی-ریتز بهبود یافته استخراج و نتایج حاصل با نتایج استخراج شده توسط محققین دیگر که در این زمینه تحقیق کرده‌اند و نتایج استخراج شده‌ای که توسط نرم افزار المان محدود ANSYS حاصل می‌شود، مقایسه و مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین برای بررسی کامل‌تر و جامع‌تر چند نمونه از شکل مودهای فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از حل دقیق ارائه شده توسط روش رایلی-ریتز بهبود یافته با شکل مودهای استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS مقایسه و مورد بررسی قرار خواهد گرفت و تغییراتی را که در شکل مودهای فرکانس‌های طبیعی ورق سالم رخ می‌دهد مورد تحلیل قرار خواهد گرفت. در ادامه پارامترهای هندسی موثر بر مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق سالم مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت.

۴- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق یکسر گیردار ترک‌دار و اثراتی را که تغییرات عمق نسبی ترک و شرایط ابعادی مختلف بر روی مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق ترک‌دار وارد می‌کند با استفاده از روش رایلی-ریتز بهبود یافته، مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت و نتایج حاصل با نتایج استخراج شده برای ورق ترک‌دار مدلسازی شده در نرم افزار المان محدود ANSYS مقایسه و مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین برای بررسی کامل‌تر و جامع‌تر چند نمونه از شکل مودهای فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار بدست آمده از نرم افزار المان محدود ANSYS مورد بررسی قرار خواهد گرفت و تغییراتی را که در شکل مودهای فرکانس‌های طبیعی ورق‌ها رخ می‌دهد مورد تحلیل قرار خواهد گرفت. در ادامه پارامترهای هندسی و فیزیکی مؤثر بر مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق ترک‌دار با استفاده از تکنیک رایلی-ریتز بهبود یافته مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت.

۱-۳ ساختار پایان نامه

۱- در فصل اول، مقدمه‌ای از تاریخچه‌ی ورق‌های موجود در صنعت و عیوبی که ممکن است تحت بارگذاری‌های دینامیکی و ارتعاشی رخ بدهند، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین اهداف تحقیق و ساختارهای پایان‌نامه ذکر خواهند شد.

۲- در فصل دوم، مروری بر تحقیقات انجام شده در زمینه ارتعاشات ورق‌های سالم و ترک‌دار انجام خواهد شد.

۳- در فصل سوم، معادلات حاکم و شرایط مرزی برای ورق در حالت دوبعدی با استفاده از تکنیک مرز فنردار فرضی استخراج خواهند شد. همچنین تکنیک مرز فنردار فرضی مورد استفاده در این تحقیق مورد تحلیل قرار خواهد گرفت.

۴- در فصل چهارم، با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت.

۵- در فصل پنجم، با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار یکسر گیردار مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت. همچنین چگونگی اعتبارسنجی روش رایلی – ریتز بهبود یافته ارائه شده در این تحقیق با روش سری فوریه بهبود یافته شرح داده خواهد شد.

۶- در فصل ششم، ابتدا صحت سنجی تکنیک مرز فنردار فرضی مورد بررسی قرار خواهد گرفت و سپس دقت و همگرایی روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی - ریتز بهبود مورد بررسی قرار خواهند گرفت و روش رایلی - ریتز بهبود یافته ارائه شده اعتبار سنجی قرار خواهد شد. در ادامه با استفاده از روش رایلی - ریتز بهبود یافته تأثیرات پارامتر هندسی بر مشخصات دینامیکی و ارتعاشی، ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم مورد بررسی و تحلیل قرار

خواهند گرفت. نیز با استفاده از روش رایلی - ریتز بهبود یافته و تکنیک مرز فنردار فرضی تأثیرات عمق نسبی ترک، پارامترهای هندسی و فیزیکی بر نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم و شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار با شرایط مرزی CFFF مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت.

۷- در فصل هفتم، با توجه به نتایج استخراج شده با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی - ریتز بهبود یافته برای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم و ترک‌دار، در این فصل در رابطه با این موضوع نتیجه‌گیری خواهد شد.

۸- در فصل هشتم، جهت توسعه‌ی و پیشرفت در بررسی و تحلیل مسائل موجود در زمینه ارتعاشات ورق‌ها پیشنهادهایی ارائه داده خواهد شد.

فصل ۲

مروری بر پژوهش‌های پیشین

۲-۱ ورق‌های سالم (بدون ترک)

سازه‌های انعطاف‌پذیر به طور گسترده در بسیاری از صنایع مرتبط با هوافضا، دریا نوردی و... بکار برده می‌شوند. ورق‌ها، تیرها، قاب‌ها و پوسته‌ها جزو عناصر اساسی برای تجزیه و تحلیل در علوم مهندسی عمران، مکانیک، هوافضا و در دیگر علوم مرتبط می‌باشند. ساختار ورق‌های انعطاف پذیر به گونه‌ای هستند که ضخامت آنها در مقایسه با دیگر ابعاد هندسی آن بسیار کوچک می‌باشد. همچنین ورق‌ها را می‌توان به دو گروه ورق با تغییر شکل کوچک، ورق با تغییر شکل بزرگ و ورق‌های ضخیم طبقه بندی کرد. به طور کلی مسائل موجود در زمینه علوم مهندسی، بر پایه‌ی دو نوع تئوری ورق با نام‌های تئوری ورق کلاسیک CPT[1] و تئوری ورق میندلین-ریسنر[2] مورد استفاده قرار می‌گیرند. که این دو نوع تئوری وابسته به ضخامت ورق در علوم مهندسی به کار برده می‌شوند. بدین صورت که، برای ورق‌های که می‌توان از تغییر شکل برشی در راستای ضخامت ورق صرف نظر کرد، از تئوری ورق کلاسیک استفاده می‌شود و در حالی که برای ورق‌های ضخیم با در نظر گرفتن نیروهای برشی، از تئوری ورق میندلین-ریسنر استفاده می‌شود. سابقه‌ی تحقیقات اولیه‌ای که بر روی ورق‌ها انجام پذیرفت، به سال ۱۹۵۹ توسط تیموشنکو[3] و وینووسکی کریگر[4] [۱] بر می‌گردد که محققین قادر بودند با استفاده از روش‌های مختلف ارائه شده، سیستم‌های مختلف در زمینه‌ی مهندسی را مورد بررسی قرار بدهند. این تحقیق انجام شده بر روی ساختار ورق با هدف بررسی و طراحی سازه‌های سبک با ضرایب اطمینان بالا متمرکز شده است. که به واسته‌ی آن تحقیقات صورت گرفته به سمتی متمرکز شدند که بتوان ورق‌هایی نازک، سبک و در ابعادی بزرگ طراحی کرد. همچنین برای در نظر گرفتن ساختار یک ورق یک معیار برای ضخامت ورق در نظر گرفته شده است، بدین صورت که نسبت ضخامت به دیگر ابعاد ورق باید کمتر از $\frac{1}{20}$ باشد. لذا اگر این نسبت بزرگتر از این مقدار باشد، باید تغییر شکل برشی عرضی نسبت به ضخامت ورق را در نظر گرفت

---

[1] Classic plate theory

[2] Mindlin – Reissner plate theory

[3] Timoshenko

[4] Woinowsky Krieger

که محققینی مانند یوگورال[۱] در سال ۱۹۹۹ [۱۰] در این زمینه تحقیقاتی را انجام داده است. اما لازم به ذکر است که، سازه‌های با ساختاری نازک، سبک و بزرگ پتانسیل به وجود آوردن ارتعاشاتی با مقدار زیاد را افزایش می‌دهد. همچنین به طور کلی در سازه‌های انعطاف پذیری مانند ورق ارتعاشات موجب کاهش کارایی، مقاومت، ایمنی سیستم و موجب خستگی سازه می‌شود که به تبع آن سبب پدید آمدن زیان‌های اقتصادی و جانی فراوانی خواهد شد. لذا به واسته‌ی به وجود آمدن این‌گونه مشکلات تحقیق بر روی این گونه مسائل مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفت.

۲-۱-۱ مروری بر تحقیقات انجام شده در زمینه ارتعاشات ورق‌های سالم

به طور گسترده مسائل مربوط به ارتعاشات ورق‌ها توسط لیسا از سال ۱۹۷۱ [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفتند، و از اهمیت به سزایی در طراحی سازه‌های ورق و بسیاری از مطالعات مهم در این زمینه برخوردار می‌باشند [۱۲]. در اواخر قرن ۱۹، تئوری ورق در مسائل مربوط به علوم مهندسی در زمینه‌ی ساختارهای مرتعش توسط سیلارد[۲] در سال ۲۰۰۴ [۲] مورد بررسی قرار گرفت. بر اساس تحقیقی که توسط سیلارد در سال ۲۰۰۴ [۲] انجام پذیرفت، راه حل‌های اولیه ریاضی در زمینه مسائل ارتعاشات آزاد بر پایه تئوری ورق‌ها توسط اویلر[۳] در سال ۱۷۷۶ و برنولی[۴] در سال ۱۷۸۹ فرمول بندی شد، و پس از آن لاگرانژ[۵] در سال ۱۸۱۳ معادلات حاکم را برای بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌ها را توسعه داد. سپس ناویر[۶] در سال ۱۸۳۶ معادلات دیفرانسیلی را برای ورق‌هایی که تحت توزیع بارگذاری عرضی استاتیکی هستند را استخراج

---

[۱] Ugural

[۲] Szilard

[۳] Euler

[۴] Bernoulli

[۵] Lagrange

[۶] Navier

کرد، و در ادامه کیرشهف[1] در سال ۱۸۸۷ یک معادله دیفرانسیل مشابه را برای مسائل مرتبط با سازه‌های ورق را از طریق روش‌های مختلف انرژی استخراج کرد.

واربرتون[2] در سال ۱۹۵۴ [۱۳] نخسین مجموعه کامل برای بررسی ارتعاشات ورق مستطیلی را ارائه کرده است. در این تحقیق مفید او با استفاده از روش رایلی[3] فرمولی تقریبی برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی مختلف را معرفی کرده است. در این روش تمام شرایط مرزی کلاسیک از جمله شرایط آزاد، ساده و گیردار و مخلوطی از این حالات که به طور کلی شامل ۲۱ حالت هستند مورد بررسی قرار گرفته شده است. تومار[4] در سال ۱۹۶۲ [۱۴] ارتعاشات عرضی ورق‌های آیزوتروپیک الاستیک را با در نظر گرفتن اثرات نیروهای برشی و اینرسی چرخشی و با استفاده از تئوری مدلین[5] مورد بررسی قرار داده است. در ادامه لیسا در سال ۱۹۷۳ [۱۱] یک راه حل دقیق برای ارتعاشات آزاد عرضی ورق‌های مستطیلی شکل با شرایط مرزی مختلف که شامل ۲۱ حالت هستند را مورد بررسی قرار داد. همچنین در این تحقیق پارامترهای فرکانس طبیعی دقیق را برای نسبت ابعادی مختلف بدست آورده است و همچنین نتایج بدست آمده را با نتایجی که از فرمول تقریبی مفید واربرتون که در سال ۱۹۵۴ [۱۳] ارائه شد، مورد مقایسه قرار داد. دیو و روفائل[6] در سال ۱۹۸۰ [۱۵] با استفاده از روش رایلی-ریتز و بر پایه تئوری مدلین فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد عرضی ورق‌های آیزوتروپیک را مورد بررسی قرار داده‌اند، و همچنین بات[7] در سال ۱۹۸۵ [۱۶] با استفاده از ار روش رایلی-ریتز بهره گرفتن از چند جمله‌ای‌های متعامد مسائل مربوط به ورق‌های مستطیلی مرتعش را مورد بررسی قرار داد.

---

[1] Kirchhoff

[2] Warburton

[3] Rayleigh’s method

[4] Tomar

[5] Mindlin’s theory

[6] Dawe and Roufaeil

[7] Bhat

کیتی پرونچای و همکاران[۱] در سال ۱۹۹۳ [۱۷] نیز با استفاده از روش رایلی-ریتز به تجزیه و تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم پرداختند.

روش گالرکین[۲] یکی از روش‌های عددی قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل به شمار می‌آید، که توسط سعادت‌پور و همکاران[۳] در سال ۲۰۰۰ [۱۸] با روش‌های عددی مانند روش تربیع دیفرانسیل مورد مقایسه قرار گرفته است. ان جی و ارآر[۴] در سال ۱۹۸۹ [۱۹] با استفاده از روش گالرکین معادلات دیفرانسیل مرتبه چهارم را برای مسائل ارتعاشات آزاد و کمانش ورق‌های مستطیلی آیزوتروپیک با ضخامت متغیر را مورد بررسی قرار داد. اظهری و سعادت‌پور[۵] در سال ۱۹۹۸ [۲۰] با استفاده از روش گالرکین دینامیک و استاتیک ورق‌هایی با شرایط مرزی ساده را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌اند. پس از آن سعادت‌پور و همکاران در سال ۲۰۰۰ تحقیقات خود را در زمینه تجزیه و تحلیل ارتعاشات ورق‌ها گسترش داده‌اند. در ادامه روش گالرکین توسط کوپماز و تلی[۶] فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات ورق را با استفاده از مسائل مقادیر ویژه استخراج کرده‌اند. که در این تحلیل با استفاده از روش گالرکین معادلات حرکت به شکل معادلات دیفرانسیل معمولی کاهش پیدا می‌کند، که به واسطه‌ی آن فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات ورق استخراج می‌شود.

گورمن[۷] در سال‌های ۱۹۹۵ و ۲۰۰۵ [۲۱; ۲۲] با استفاده از روش جمع آثار[۸] راه حلی را برای استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشات آزاد عرضی ورق‌های آیزوتروپیک یکسر گیردار ارائه کرد. در این تحقیق شکل مودهای سیستم با استفاده از یک سری مثلثاتی بیان شده است. قبل از آن، باردل[۹]

---

[۱] Kitipornchai et al.

[۲] Galerkin method

[۳] Saadatpour et al.

[۴] Ng and Araar

[۵] Azhari and Saadatpour

[۶] Kopmaz and Telli

[۷] Gorman

[۸] Superposition method

[۹] Bardell

در سال ۱۹۹۱ [۲۳] با استفاده از روش المان محدود مرتبه‌ای[1] HFEM یک راه حل را برای مشخص کردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشات آزاد عرضی ورق‌های مستطیلی با ده نوع از شرط مرزی مختلف ارائه کرده است. با توجه به تحقیقی که باردل در این زمینه انجام داده است می‌توان گفت که، روش المان محدود به عنوان موردی خاص از روش رایلی-ریتز می‌باشد. HFEM به عنوان یک تکنیک دیگر از روش المان محدود می‌باشد که در این روش دقت تقریب روش المان محدود به مراتب بالاتر می‌باشد. لذا به همین منظور باردل در سال ۱۹۹۱ [۲۳] نتایج بدست آمده از روش HFEM را با نتایج استخراج شده‌ای که توسط دیگر محققین ارائه شده است مورد مقایسه قرار داد، که بررسی‌های انجام شده دقت مطلوبی از این را نشان داده‌اند. پس از آن هان و پتیت[2] در سال ۱۹۹۶ [۲۴] با استفاده از روش HFEM ارتعاشات ورق‌های مستطیلی چندلایه متقارن با شرایط مرزی گیردار را مورد مطالعه قرار داده‌اند. همچنین نتایج این تحقیق نشان داد که با افزایش تعداد چند جمله‌ای‌های روش مورد نظر نتایج با سرعت قابل ملاحظه‌ای همگرا می‌شوند. علاوه بر این ملاحظه شد که در روش FEM معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی[3] PDEs را نیز می‌توان با استفاده از روش تفاضل محدود[4] FDM و روش تربیع دیفرانسیل[5] DQM حل کرد. با این وجود با توجه به اینکه سازه‌هایی با پیچیدگی بالا با مشکلاتی همچون منطبق نشدن خطوط و مرزهای مش روبرو هستیم. در همین راستا شو و همکاران[6] در سال ۲۰۰۷ [۲۵] به منظور رفع این مشکل روش بدون مش[7] را که به اصلاح شامل حداقل مربعات در حال حرکت[8] MLS تقریبی، روش مشتقات جزئی کرنل گسترش یافته[9] RKPM، روش المان آزاد گالرکین[10] EFG، روش

---

[1] Hierarchical finite element method

[2] Han and Petyt

[3] Partial differential equation models

[4] Finite difference method

[5] Differential quadrature method

[6] Shu et al.

[7] Meshless methods

[8] Moving least-square

[9] Reproducing kernel particle methods

[10] Element-free Galerkin method

دیفرانسیلی مکعب[۱] DCM و غیره می‌باشند را معرفی کرده‌اند. در همین راستا شو و همکاران در سال ۲۰۰۷ [۲۵] با استفاده از روش بدون مش LFSD مسائلی همچون ارتعاشات ورق‌های آیزوتروپیک با شکل غیر متعارف با شرایط مرزی ساده و گیردار لبه‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند. محققان با توجه به این تحقیق دریافتند که روش بدون مش LFSD مزایای بیشتری نسبت به روش‌های دیگر همچون روش‌های FDM و DQM را دارا می‌باشد. علاوه بر این مشخص شد که روش مورد نظر از دقت بسیار مطلوب نسبت به دیگر روش‌ها برخوردار می‌باشد.

وو و همکاران[۲] در سال ۲۰۰۷ [26] روش تابع بسل[۳] را برای استخراج یک راه حل دقیق برای تجزیه و تحلیل ارتعاشات آزاد عرضی ورق مستطیلی شکل با شرایط مرزی ساده، گیردار برای چهار لبه و نیز شرایط مرزی دولبه مخالف ساده و دو لبه مخالف دیگر گیردار، ارائه کرده‌اند. در ادامه ژینگ و لیو[۴] در سال ۲۰۰۹ [۲۷] روش همیلتون دوگانه[۵] را که پیش‌تر توسط اویانگ و ژونگ[۶] در سال ۱۹۹۳، بائو و دنگ[۷] در سال ۲۰۰۵ و ژونگ و ژانگ[۸] در سال ۲۰۰۶ ارائه شده است را برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشات آزاد عرضی ورق مستطیلی به کار بردند. در این تحقیق ژینگ و لیو[۹] [۲۷] با استفاده از روش همیلتون دوگانه و بهره بردن از جداسازی متغیرها مسائل مربوط به ارتعاشات آزاد عرضی ورق مستطیلی را مورد بررسی قرار داده‌اند. نیز سن و همکاران[۱۰] در سال ۲۰۰۴ یک سری معادلات دیفرانسیل روش همیلتون دوگانه را برای ورق‌ها ارائه کرده‌اند. در این تحقیق سن و همکاران ده فرکانس طبیعی و شکل مود اول را برای ارتعاشات آزاد عرضی ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی

---

[۱] Differential cubature method

[۲] Wu et al.

[۳] Bessel function method

[۴] Xing and Liu

[۵] Hamilton dual method

[۶] Ouyang and Zhong

[۷] Bao and Deng

[۸] Zhong and Zhang

[۹] Xing and Liu

[۱۰] Cen et al.

SSCC، SCCC و CCCC بدست آورده و نتایج را با نتایج استخراج شده از نرم افزارهای المان محدود مورد مقایسه قرار داده‌اند. ژینگ و لیو[۱] در سال ۲۰۰۹ [۲۷] به این نتیجه رسیدند که، روش دقیق ارائه شده را می‌توان به عنوان یک معیار برای تأیید روش‌های تقریبی مختلف ارائه شده در نظر گرفت.

همانطور که ملاحظه می‌شود، طی سالیان اخیر محققین بررسی‌های بسیاری در زمینه تحقیق و مطالعه‌ی تحلیل ارتعاشات ورق انجام داده‌اند. اما با این وجود عمدتاً بسیاری از تحقیقات به ارتعاشات عرضی محدود شده است و توجه نسبتاً کمی به ارتعاشات درون صفحه‌ای شده است. اولین مطالعه در مورد بررسی راه حل‌های تحلیلی دقیق ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی ساده برای حداقل دو مرز مخالف در سال ۲۰۰۶ توسط گورمن [۲۸] ارائه شده است. در این تحقیق ارائه شده دو نوع از شرایط مرزی ساده نوع ۱ (SS1) که در آن تنش نرمال و جابجایی مماس بر راستای لبه ورق برابر با صفر و شرایط مرزی ساده نوع ۲ (SS2) که در آن تنش مماسی و جابجایی نرمال بر راستای لبه ورق برابر صفر می‌باشند، مورد بررسی قرار گرفته شده است. اگر چه گورمن این ادعا را انجام داده است که، او اولین محقق در زمینه ارائه راه حل دقیق برای ارتعاشات درون صفحه‌ای می‌باشد، اما چیزی در حدود ۳۵ سال قبل این چنین راه حل‌های دقیقی توسط ویتریک و ویلیامز[۲] در سال ۱۹۷۱ [۲۹] ارائه شده است. ویتریک و ویلیامز [۲۹] همچنین با استفاده از ماتریس سختی دینامیکی، فرکانس‌های ورق مستطیلی را استخراج کرده‌اند. وانگ و ورلی[۳] در سال ۲۰۰۲ [۳۰] با استفاده از روش کانتروویچ – کرایلوف[۴] ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی ترکیبی از تکیه گاه ساده و گیردار را مورد مطالعه قرار داده‌اند.

گورمن در سال ۲۰۰۴ [۳۱] روش سوپرپوزیشن را که پیش از آن در سال ۱۹۷۸ وی [۳۲] برای مسائل ارتعاشات عرضی ورق‌ها توسعه یافته بود، برای بدست آوردن راه حل‌های تحلیلی برای ارتعاشات

---

[۱] Xing and Liu

[۲] Wittrick and Williams

[۳] Wang and Wereley

[۴] Kantorovich–Krylov method

درون صفحه‌ای ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی کلاسیک معرفی کرد. با استفاده از روش سوپرپوزیشن، حل دقیق فرکانس‌ها و شکل مودهای ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی گیردار و ساده محاسبه شده است [۳۳].

دوزیو[۱] در سال ۲۰۱۰ [۳۴] با استفاده از توابع مثلثاتی روش ریتز[۲] راه حل دقیقی را برای بررسی خواص مودال ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق مستطیلی با شرایط مرزی فنردار غیر یکنواخت را مورد بررسی قرار داده است. لازم به ذکر است که، باردل و همکاران[۳] در سال ۱۹۹۶ [۳۵] سهم قابل توجه‌ای در مبحث ارتعاشات درون صفحه‌ای دارند. آنها مرجع نسبتاً کاملی از کارهای تحقیقاتی انجام شده و نتایج بدست آمده در این زمینه که توسط محققین انجام شده است را ارائه کرده‌اند، که از این تحقیقات برای اولین بار می‌توان به عنوان یک معیار اعتبار سنجی برای توسعه‌ی روش‌های دیگر مدل‌سازی استفاده شود. فرنگ و پن[۴] در سال ۱۹۹۹ [۳۶] معادلات ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق با دو لبه‌ی گیردار مقابل هم را بررسی کرده‌اند. ژینگ و لیو[۵] در سال‌های ۲۰۰۹ و ۲۰۱۱ [۳۷; ۳۸] سهم قابل توجهی در بررسی‌های انجام شده در این زمینه را دارند، زیرا آن‌ها با استفاده از جداسازی متغیرها، راه حل دقیقی را برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق مستطیلی آیزوتروپیک و اورتوتروپیک با شرایط مرزی ساده برای حداقل دو مرز مخالف را ارائه کرده‌اند. در کنار معادلات و بررسی‌های فوق در شرایط مرزی کلاسیک که شامل شرایط آزاد، ساده و گیردار می‌باشند، ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق‌های مستطیل شکل با شرایط مرزی پیچیده نیز توسط محققین مورد توجه قرار گرفته شد. گورمن در سال ۲۰۰۵ [۳۹] با استفاده از روش جمع آثار، تحلیل ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق‌های مستطیلی آیزوتروپک با شرایط مرزی الاستیک روی مرز عمود و شرایط مرزی کلاسیک روی

---

[۱] Dozio

[۲] Ritz method

[۳] Bardell

[۴] Farag and Pan

[۵] Xing and Liu

مرز مماسی را مورد بررسی قرار داده است. علاوه بر آن وی در سال ۲۰۰۹ [۴۰] با استفاده از روش سوپرپوزیشن، تحلیل ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق‌های مستطیلی اورتوتروپیک با شرایط مرزی گیردار را مورد بررسی قرار داده است. علاوه بر این، دوزیو در سال‌های ۲۰۱۰ و ۲۰۱۱ [۳۴; ۴۱] یک روش ریتز با استفاده از مجموعه‌ای از توابع مثلثاتی، برای یک راه حل دقیق خواص مودال درون صفحه‌ای ورق‌های مستطیلی آیزوتروپیک و اورتوتروپیک با لبه الاستیک غیر یکنواخت مهار شده را پیشنهاد داده است. جیاراج، درومولی و گینسان[۱] در سال‌های ۲۰۰۸ و ۲۰۰۹ [۴۲; ۴۳] با استفاده از نرم افزارهای المان محدود ANSYS و SYSNOISE به مطالعه‌ی ارتعاشات و ویژگی‌های ورق‌های کامپوزیتی آیزونتروپیکی که در معرض افزایش درجه حرارت می‌باشند، پرداختند. این محققین در تحقیقات خود نشان دادند که فرکانس‌های طبیعی ورق با افزایش درجه حرارت کاهش پیدا می‌کنند. بافرانی و سعیدی[۲] در سال ۲۰۱۲ [۴۴] ورق‌های ضخیمی که تحت بارگذاری‌های حرارتی و میکانیکی قرار دارند را مورد مطالعه قرار دادند، همچنین آن‌ها دریافتند که برای شرایط مرزی که لبه‌ها دارای شرایط ساده و گیردار می‌باشند، تاثیرات نیروهای کمانش که در اثر تغییرات درجه حرارت و نیروهای میکانیکی به وجود می‌آیند بر روی تئوری کلاسیک ورق و تئوری برشی مرتبه اول[۳] مقداری ناچیز می‌باشد. وودکوک، بات و همکاران[۴] در سال ۲۰۰۸ [۴۵] و دوزیو در سال ۲۰۱۱ [۴۱] با استفاده از روش ریتز تاثیرات جهت گیری لایه‌های ورق کامپوزیت تک لایه بر ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای را مورد بررسی قرار داده‌اند. سینگ و همکاران[۵] در سال ۲۰۰۴ [۴۶] خواص مودال ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق با ابعادی غیر یکنواخت را مورد بررسی

---

[۱] Jeyaraj and Chandramouli and Ganesan

[۲] Baferani and Saidi

[۳] first order shear theory

[۴] Woodcock and Bhat and Stiharu

[۵] Singh and Muhammad

قرار داده‌اند. مهذب و دوزیو[1] در سال ۲۰۱۵ [۴۷] و وانگ[2] و همکاران در سال ۲۰۱۴ [۴۸] ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق‌های با اشکال غیر یکنواخت را مورد بررسی قرار داده‌اند.

۲-۲ ورق‌های ترک‌دار

شکست در سازه‌ها می‌تواند به دلایل بسیاری، از جمله بارگذاری‌های متناوب نامشخص، شرایط محیطی، وجود نقص در مواد بکار رفته در سازه‌ها، نوع طراحی و سهل‌انگاری در تعمیر و نگهداری از سازه، رخ بدهد. این نوع عیوب به صورت ترک، خستگی و شل شدن مفاصل نمایان خواهند شد. با توجه به اینکه در سازه‌های ورق امکان به وجود آمدن ارتعاشات بالا وجود دارد. لذا با گذشت زمان، اثرات ناشی از ارتعاشات بالا سبب به وجود آمدن عیوبی مانند ترک در ورق می‌شود. ترک می‌تواند در دراز مدت سبب کاهش عملکرد و ایمنی سازه که به طبع، موجب شکست در سازه می‌شود. همچنین لازم به ذکر است که، این اتفاق می‌تواند زیان‌های بسیاری از لحاظ اقتصادی و جانی به وجود بیاورد.

به همین دلیل مشخصات دینامیکی و ارتعاشی و پاسخ دینامیکی ورق‌های مستطیلی ترک‌دار با شرایط مرزی مختلف طی سالیان اخیر مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. همچنین روش‌های متعددی در این زمینه و برای مقابله با این مشکل توسط محققین معرفی شده است [۴۹].

۲-۲-۱ مروری بر تحقیقات انجام شده در زمینه ارتعاشات ورق‌های ترک‌دار

در این راستا اولین تحقیق صورت گرفته در زمینه آنالیز ارتعاشات ورق‌های ترک‌دار، توسط لین وکومباسار[3] در سال ۱۹۶۷ [۵۰] روی ورق ترک‌دار با تکیه‌گاه‌های ساده انجام شده است که در این

---

[1] Mohazzab and Dozio

[2] Wang

[3] Lynn and Kumbasar

تحقیق با استفاده از توابع گرین، معادلات انتگرالی فردهلم از نوع اول[۱] استخراج شده و پس از حل آن‌ها، تغییرات فرکانسی ناشی از تغییر در طول ترک، و گشتاورهای نسبی توزیع شده در بخشهای بی ترک ارائه شده است. استال و کییر[۲] در سال ۱۹۷۲ [۵۱] مسئله ارتعاش و پایداری ورق ترک‌دار دارای تکیه‌گاه‌های ساده را به صورت معادلات سری دوگانه فرمول‌بندی کرده و پس از کاهش آن‌ها به معادلات انتگرالی همگن فردهلم از نوع دوم، فرکانس‌های طبیعی و گشتاورهای توزیعی را استخراج کردند. نزو[۳] در سال ۱۹۸۲ [۵۲] با تلفیق روش لوی و توابع گرین و با بهبود روش کومباسار، به آنالیز ارتعاشی ورق با تکیه‌گاه‌های ساده که دارای ترک در مرکز صفحه یا در یکی از لبه‌های ورق است، پرداخت و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مربوطه را استخراج کرد. هیرانو و اوکازاکی[۴] در سال ۱۹۸۰ [۵۳] ورقی ترک‌دار با سه شرط مرزی SSSS، SCSC و SFSF را مورد بررسی قرار دادند و با استفاده از روش حل لوی فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کردند. پس از آن، سولکی[۵] در سال ۱۹۸۳ [۵۴] ارتعاشات عرضی ورق‌های مستطیلی با ترک‌هایی در مکان‌های مختلف و موازی با لبه‌ها و شرایط مرزی ساده را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. در این تحقیق برای تحلیل از یک تبدیل فوریه محدود توابع ناپیوسته[۶] که نشان دهنده‌ی جابجایی و شیب در سراسر ترک بودند، استفاده شده است.

لی و لیم[۷] در سال ۱۹۹۳ [۵۵] یک روش عددی را بر پایه اصل رایلی[۸] برای بررسی فرکانس‌های طبیعی ورق مستطیلی با شرایط مرزی ساده و با یک ترک در مرکز، ارائه کرد. همچنین در این روش اثرات ناشی از تغییر شکل برشی عرضی[۹] و اینرسی چرخشی[۱۰] را با استفاده از معادل دینامیکی تئوری

---

[۱] Fredholm Integral equations of the first Kind

[۲] Stahl and Keer

[۳] Nezu

[۴] Hirano and Okazaki

[۵] Solecki

[۶] Finite Fourier transformation of discontinuous functions

[۷] Lee and Lim

[۸] Rayleigh principle

[۹] Transverse shear deformation

[۱۰] Rotary inertia

رایزنر بهبود یافته[۱] در نظر گرفته است. در این تحقیق ورق‌های مستطیلی آیزوتروپیک و اورتوتروپیک ترک‌دار مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. همچنین مشخص شد که تاثیر اینرسی چرخشی در مقایسه با اثر تغییر شکل برشی بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق اورتوتروپیک ترک‌دار بسیار ناچیز می‌باشد، اما برای ورق‌های آیزوتروپیک ضخیم با ترک طولانی اثر اینرسی چرخشی در مقایسه با اثر تغییر شکل برشی بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق بسیار موثر می‌باشد.

بسیاری از محققین از جمله بیانکولینی[۲] و همکاران در سال ۲۰۰۵ [۵۶] و ژینگ[۳] و همکاران در سال ۲۰۰۹ [۵۷] تحقیقات خود را بر پایه‌ی تئوری ورق کلاسیک قرار داده‌اند و فرکانس‌های طبیعی سیستم را بر این مبنا استخراج کرده‌اند. همچنین رایس و لوی[۴] در سال ۱۹۷۲ [۵۸] تکنیک مدل فنر خطی[۵] LMS را برای مدلسازی ترک در مسائل موجود در این زمینه ارائه کرده‌اند، که این تکنیک بر مبنای تئوری ورق کلاسیک ارائه شده است. خادم و رضائی[۶] در سال ۲۰۰۰ [۵۹] با استفاده از تکنیک مدل فنر خطی به تحلیل ارتعاشی ورق ترک‌دار با چهار طرف تکیه‌گاه‌های ساده پرداختند و در آن تحقیق طی معرفی توابعی جدید تحت عنوان توابع مقایسه‌ای بهبود یافته[۷] و با استفاده از روش رایلی-ریتز اثر وجود ترک روی فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار با طول و عمق دلخواه ترک و نیز در مرکز و موازی با لبه‌های ورق را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند.

همچنین در تحقیق دیگری هوانگ و لیسا[۸] در سال‌های ۲۰۰۹ و ۲۰۱۱ [۷; ۸] تحلیل ارتعاشی ورق ترک‌دار با دو وضعیت ترک زاویه‌دار کاملاً فرورفته واقع در لبه و ترک مورب کاملاً فرورفته واقع در مرکز

---

[۱] Simplified Reissner theory

[۲] Biancolini

[۳] Xing

[۴] Rice and Levy

[۵] Line spring model

[۶] Khadem and Rezaee

[۷] Modified comparison functions

[۸] Huang and Leissa

صفحه را برای دو شرط تکیه‌گاهی FFFF و SSSS انجام دادند. آن‌ها از توابع چند جمله‌ای منظم ترکیب شده با توابع مکمل به‌عنوان توابع پذیرا[۱] در روش رایلی-ریتز استفاده کردند و فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی را بدست آوردند. همچنین می‌توان گفت که هوانگ و لیسا جزو اولین محققینی بودند که این روش را ارائه کرده‌اند. بات در سال ۱۹۸۵ [۱۶] اولین بار از چندجمله‌ای‌های متعامد بدست آمده از فرایند گرام- اشمیت[۲]، به عنوان توابع پذیرا در روش رایلی-ریتز استفاده کرد و فرکانس‌های طبیعی ورق مستطیلی سالم با شرایط تکیه‌گاهی مختلف را بدست آورد. لام[۳] و همکاران در سال ۱۹۸۹ [۶۰] از چندجمله‌ای‌های متعامد در استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق دارای بریدگی[۴] با شرایط تکیه‌گاهی SSSS، CCCC و CSCS استفاده کردند. لیو[۵] و همکاران در سال ۱۹۹۴ [۶۱] چندجمله‌ای‌های متعامد تولید شده با استفاده از فرایند گرام-اشمیت را در محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی ورق دارای ترک کاملاً فرورفته با شرایط مرزی SSSS، FCFC و SCSC بکار بردند و به نتایجی با دقت مطلوب دست یافتند.

با توجه به تحقیقات انجام شده طی سالیان اخیر، محققین به این نتیجه رسیدند که موفقیت روش‌های تقریبی در حل مسائل، به انتخاب مناسب توابع پذیرا بستگی دارد، که در این میان در مسائل مربوط به ورق‌ها توابع پذیرا تیر، پرکاربردترین توابع هستند. در همین رابطه در سال ۱۹۷۵ باسیلی و دیکینسون[۶] در سال ۱۹۷۵ [۶۲] نشان دادند که در حل تقریبی مسائل ارتعاشی مرتبط با ورق‌هایی که دارای لبه‌های آزاد هستند، توابع شکل مود تیر ناکارآمد هستند. سپس مجموعه توابع جدید تحت عنوان توابع تیر باز تولید شده را ارائه کردند که توصیف دقیق‌تری از رفتار ارتعاشی چنین ورق‌هایی داشتند، ولی باز تولید چنین توابعی بسیار دشوار است [۱۶]. در این راستا ایسرار[۷] و همکاران در سال ۲۰۰۹ [۶۳]، با استفاده

---

[۱] Admissible Functions

[۲] Gram - Schmidt

[۳] Hung

[۴] Cutout

[۵] Liew

[۶] Bassily and Dickinson

[۷] Israr

از تکنیک مدل فنر خطی، معادله‌ی حاکم بر ارتعاشات غیرخطی ورق معیوب، دارای ترک افقی فرورفته به طول محدود و واقع در مرکز ورق را استخراج کردند، سپس با اعمال روش گالرکین[۱] برای سه شرط تکیه‌گاهی SSSS، CCSS وCCFF معادله‌ی غیرخطی حاکم بر مسئله را استخراج کردند. پس از آن با اعمال روش تقریبی رابطه‌ی بین فرکانس و دامنه و همچنین فرکانس طبیعی اول را محاسبه کرده و نمودارهای پاسخ فرکانسی مربوطه را استخراج کردند. در این تحقیق از توابع تیر به عنوان توابع پذیرا استفاده شده است که این مورد باعث ایجاد خطای نسبتاً زیاد در محاسبه‌ی فرکانس ورق‌های سالم و ترک‌دار با شرایط تکیه‌گاهی آزاد می‌شود. اسماعیل و کارتمل[۲] در سال ۲۰۱۲ [۶۴] با توسعه‌ی مدل ایسرار[۳] [۶۳] از ترک افقی و به موازات یکی از لبه‌های ورق به ترک فرورفته با زاویه‌ی جهت‌گیری دلخواه، مدل او را بهبود بخشید. همچنین او نیز از شرایط تکیه‌گاهی و توابع پذیرا مشابه [۶۳] در کار خود استفاده کرد.

کیان[۴] و همکاران در سال ۱۹۹۱ [۶۵] برای اولین بار یک مدل المان محدود و یک رابطه تقریبی جهت محاسبه فاکتور شدت تنش[۵] SIF در ورق ترک‌دار تحت خمش، برش و پیچش را ارائه کردند. در این تحقیق ویژگی‌های ارتعاشات یک ورق مربعی شکل ترک‌دار با شرایط مرزی ساده و یکسر گیردار مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و فرکانس‌های ورق مربعی شکل ترک‌دار با طول متفاوت با استفاده از روش المان محدود استخراج گردید. بنا به گفته کیان و همکاران، انرژی کرنشی افزایش یافته یک ترک مربوط به فاکتور شدت تنش SIF که بیانگر ضریب انعطاف‌پذیری[۶] می‌باشد، که می‌توان از این ضریب برای بدست آوردن ماتریس سختی ورق ترک‌دار استفاده کرد و همچنین مدل المان محدود ورق را تشکیل داد. با توجه به این تحقیق می‌توان گفت که ماتریس سختی ارتعاشات ورق ترک‌دار را می‌توان با

---

[۱] Galerkin

[۲] Ismail and Cartmell

[۳] Leissa

[۴] Qian

[۵] Stress intensity factor (SIF)

[۶] Flexibility coefficient

ادغام فاکتور شدت تنش بدست آورد. در ادامه کیان[1] و همکاران نتایج استخراج شده خود در این تحقیق را با نتایجی که خود در سال ۱۹۸۳ بدست آوردند مورد مقایسه قرار دادند، و مدعی شدند که این تکنیک نسبت به روشی که در سال ۱۹۸۳ ارائه کردند بسیار کارآمدتر و از لحاظ محاسباتی بسیار کوتاه‌تر می‌باشد، همچنین بیان کردند که مش‌بندی در محل نوک ترک امری غیر ضروری می‌باشد. در ادامه کراوچزوک[2] در سال ۱۹۹۳ [۶۶] با استفاده از روش المان محدود ارتعاشات ورق‌های مستطیلی با ترک فرورفته[3] را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. در این تحقیق تغییرات سختی ترک در نظر گرفته شد و همچنین نتایج نشان داد که تغییرات مکان ترک و طول ترک بر روی فرکانس‌های طبیعی سیستم موثر می‌باشد. وفایی و همکاران در سال ۲۰۰۲ [۶۷] رفتار ناپایدار ورق مستطیلی ترک‌دار با شرایط مرزی ساده بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم را مورد بررسی و تحلیل قرار دادند. نتایج حاصل از تحقیق این محققان گویای این موضوع بود که نسبت ابعاد ترک و طول ترک بر ناپایدار بودن رفتار ورق کاملاً موثر می‌باشد. در ادامه باچنه[4] و همکاران در سال ۲۰۰۹ [۶۸] با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته ارتعاشات عرضی ورق مستطیلی با ترک افقی را مورد بررسی قرار دادند. ویولا[5] و همکاران در سال ۲۰۱۳ [۶۹] با استفاده از روش المان محدود تربیع دیفرانسیل ارتعاشات عرضی ورق کامپوزیتی ضخیم با ترک در حال رشد را مورد بررسی قرار دادند.

حسینی و هاشمی و همکاران در سال ۲۰۱۰ [۷۰] بر پایه تئوری ورق میندلین[6] ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی شکل نسبتاً ضخیم با ترک باز و شرایط مرزی مختلف را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. در این تحلیل نشان داده شده ترک‌هایی که نزدیک به تکیه‌گاه گیردار می‌باشند موجب کاهش قابل توجه

---

[1] Qian

[2] Krawczuk

[3] through

[4] Bachene

[5] Viola

[6] Mindlin plate theory

فرکانس‌های طبیعی می‌شوند. هوانگ[1] و همکاران در سال ۲۰۱۲ [۷; ۷۱] با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی[2] ارتعاشات عرضی ورق‌های مستطیلی با با ترک‌های فرورفته را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌اند، در این تحقیق توابع ترک را به عنوان مکملی برای توابع چند جمله‌ای‌های متعامد ارائه کرده است. همچنین هوانگ و همکاران در سال ۲۰۱۴ [۷۲] توابع درون‌یابی[3] را در روش تقریبی حداقل مربعات در حال حرکت[4] برای بررسی ارتعاشات ورق‌های ترک‌دار ارائه کرده‌اند.

---

[1] Huang

[2] Three-dimensional elasticity theory

[3] Interpolation

[4] Moving least squares method

فصل ۳

استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی

۳-۱ مقدمه

ورق یکی از اساسی‌ترین عناصر سازه‌ای است که به طور گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف مهندسی کاربرد دارد. یک ورق را می‌توان به عنوان یک جسم جامد که به وسیله‌ی دو صفحه‌ی تخت موازی که ابعادشان در مقایسه با ضخامت بزرگتر می‌باشد تعریف کرد. همچنین آن را می‌توان به عنوان حالتی خاص از یک پوسته با انحنای صفر (شعاع انحنای بی نهایت) در نظر گرفت. لازم به ذکر است که بررسی ارتعاشات ورق‌ها از قدیم برای بسیاری از محققین از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده است. در همین راستا لیسا[1] در سال ۱۹۶۹ [۷۳] یک پژوهش مروری تحت عنوان ارتعاشات در ورق‌ها منتشر کرده است که در آن نتایج تئوری و عملی حدود ۵۰۰ مقاله و رساله تحقیقاتی بررسی شده است.

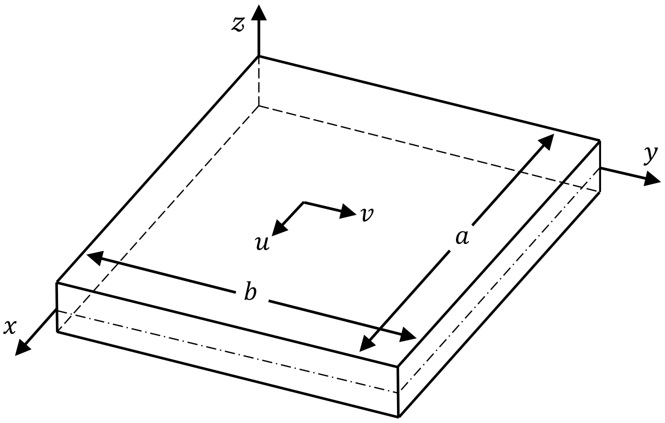
در تحقیق حاضر، حالت کلی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق سالم و ترک‌دار با شرایط مرزی مختلف مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. ابتدا در این بخش معادلات اساسی ورق برای شرایط مرزی مختلف، استخراج می‌شود و روابط کرنش-جابجایی، برآیند نیرو، توابع انرژی، معادلات حاکم و شرایط‌های مرزی مختلف برای تئوری ورق توصیف و ارائه می‌شود.

۳-۲ معادلات حاکم بر ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق

همانطور که در شکل۳-۱ نشان داده شده است، مدل ورق با طول a، عرض b و ضخامت h مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیستم مختصات xyz مطابق با شکل۳-۱ انتخاب شده و جابجایی سطح میانی ورق در راستای x و y به ترتیب به صورت u و v تعریف می‌شود.

---

[1] Leissa



شکل۳-۱ شماتیک ورق

۳-۲-۲ روابط سینماتیکی

روابط کرنش - جابجایی برای مسئله ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق‌های به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{۱-۳}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{۲-۳}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{۳-۳}$$

۳-۲-۳ روابط تنش - کرنش و برآیند تنش

با توجه به قانون هوک و با در نظر گرفتن حالت تنش صفحه‌ای، رابطه‌ی تنش- کرنش مربوط به ورق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۴-۳}$$

ضرایب سختی ($i,j =$۱،۲،۳) Q_{ij}که بر حسب خواص ورق می‌باشند، را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\mu^2} \tag{۳-۵}$$

$$Q_{12} = \frac{\mu E}{1-\mu^2} \tag{۳-۶}$$

$$Q_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} \tag{۳-۷}$$

$$Q_{66} = G \tag{۳-۸}$$

که پارامترهای E ، G و μ به ترتیب مدول الاستیسیته، مدول برشی و نسبت پواسون هستند. در ادامه می‌توان برآیند نیروهای ورق را با استفاده از انتگرال تنش‌ها به صورت زیر تعیین کرد:

$$[N_x \quad N_y \quad N_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]\, dz \tag{۳-۹}$$

لذا با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۴) در (۳-۹) رابطه‌ی کلی برآیند نیروها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \tag{۳-۱۰}$$

که در این رابطه N_x، N_y و N_{xy} برآیند نیروهای نرمال و برشی ورق هستند. همچنین A_{ij} ضریب سختی حاصل از انتگرال می‌باشد که به ضخامت و خصوصیات ورق وابسته است. این ضرایب را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$A_{11}=\frac{Eh}{1-\mu^2}\quad،\quad A_{12}=\frac{\mu Eh}{1-\mu^2}\quad،\quad A_{12}=\frac{\mu Eh}{1-\mu^2}\quad،\quad A_{66}=Gh \qquad (۱۱-۳)$$

۳-۲-۴ اصول انرژی و تغییرات

با استفاده از اصول انرژی و تغییرات می‌توان معادلات اساسی در الاستیسیته را به سادگی استخراج کرد، همچنین به کمک این اصول و به کار بردن تکنیک‌های متعدد می‌توان به ساختار بسیاری از سیستم‌ها دست پیدا کرد، و نیز این سیستم‌ها را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. در همین راستا در دهه‌ی اخیر استفاده از این تکنیک‌ها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است [۷۴; ۷۵]. اما استفاده از این تکنیک‌ها باعث به وجود آمدن محدودیت‌هایی در مسیر بررسی می‌شود، به عبارت دیگر می‌توان گفت که برای بررسی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق اعمال بعضی شرایط مرزی مشکل است، و شرایط مرزی خاص را می‌توان مورد بررسی و تحلیل قرار داد. لذا به منظور رفع این مشکل در این بخش از تحقیق با بهره گیری از تکنیک مرز فنردار فرضی، توابع انرژی که شامل انرژی کرنشی کل، انرژی جنبشی و کار ناشی از نیروهای خارجی (کار انجام شده توسط نیروهای غیر پتانسیلی) استخراج می‌شوند.

۳-۲-۴-۱ توابع انرژی ورق با مرز فنردار فرضی

انرژی کرنشی ورق U_s در حین ارتعاشات درون صفحه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U_s = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left\{N_x\varepsilon_x^0 + N_y\varepsilon_y^0 + N_{xy}\gamma_{xy}^0\right\} dxdy \qquad (۱۲\text{-}۳)$$

با جایگذاری روابط (۳-۱) تا (۳-۳) و رابطه‌ی (۳-۱۰) در رابطه (۳-۱۲) می‌توان رابطه‌ی انرژی کرنشی ورق را بر حسب جابجایی‌ها به صورت زیر بدست آورد:

$$U_s = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left\{\begin{matrix} A_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2A_{16}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ +A_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2A_{26}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + A_{66}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \end{matrix}\right\} dxdy \qquad (۱۳\text{-}۳)$$

انرژی جنبشی ورق T در حین ارتعاشات درون صفحه‌ای با صرف نظر از مؤلفه‌ی جابجای در راستای z به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \rho h\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right\} dxdy \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

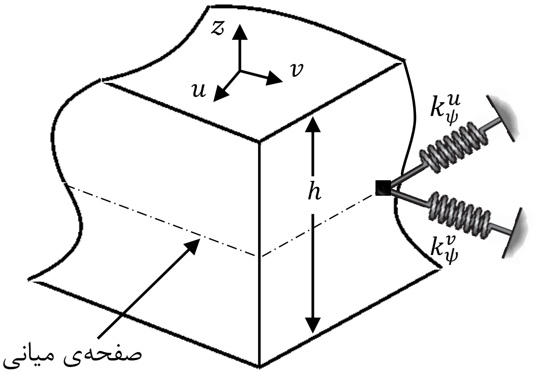
که در آن ρ نمایانگر چگالی ورق می‌باشد.

همچنین کار ناشی از نیروهای خارجی (کار انجام شده توسط نیروهای غیر پتانسیل) W_e در حین ارتعاشات درون صفحه‌ای با صرف نظر از مؤلفه‌ی جابجای در راستای z به صورت زیر بیان می‌شود:

$$W_e = \int_0^a\int_0^b \{q_x u + q_y v\} dxdy \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

که در آن q_x و q_y به ترتیب بارگذاری‌های خارجی در راستاهای x و y می‌باشند.

در ادامه می‌توان انرژی کرنشی تغییر شکل فنرهای فرضی موجود در مرز ورق U_{sp} را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد (شکل۳-۲):



شکل۳-۲ علامت‌گذاری تکنیک مرز فنردار فرضی برای ورق

$$U_{sp} = \frac{1}{2}\int_{0}^{b}\left\{\begin{matrix} [k_{x0}^{u}u^2 + k_{x0}^{v}v^2]|_{x=0} \\ +[k_{x1}^{u}u^2 + k_{x1}^{v}v^2]|_{x=a} \end{matrix}\right\}dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left\{\begin{matrix} [k_{y0}^{u}u^2 + k_{y0}^{v}v^2]|_{y=0} \\ +[k_{y1}^{u}u^2 + k_{y1}^{v}v^2]|_{y=a} \end{matrix}\right\}dx \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

همانطور که در شکل۳-۲ نشان داده شده است، علائم k_{ψ}^{u} و k_{ψ}^{v} ($\psi = x0، y0، x1$ و $y1$) به طور مشخص اشاره به سختی فنرهای مرزی در مرزهای $x = 0$، $y = 0$، $x = a$ و $y = b$ دارند (واحد آن‌ها بصورت گسترده و در واحد طول است، مگر آنکه خلاف آن ذکر شده باشد، و همچنین $\frac{N}{m}$ واحد سختی فنرهای خطی می‌باشند).

در ادامه این تحقیق با استفاده از توابع انرژی ورق استخراج شده در این بخش، معادلات حاکم و شرایط مرزی ورق استخراج می‌شوند.

۳-۲-۴-۲ استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی ورق با استفاده از اصل همیلتون تعمیم یافته

اصل همیلتون [۷۶] برای استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی یک سیستم گسترده بسیار مناسب است. لذا در این بخش با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حاکم و شرایط مرزی مربوط به ورق مهار شده توسط فنرهای فرضی موجود در مرزها استخراج می‌شود.

انرژی کرنشی کل ورق را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$U_{Total} = U_s + U_{sp} - W_e \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

که در این رابطه U_s انرژی کرنشی ورق ، U_{sp} انرژی کرنشی تغییر شکل فنرهای فرضی موجود در مرزها و W_e کار ناشی از نیروهای خارجی می‌باشند.

حال می‌توان تابع لاگرانژین $\mathcal{L}$ یک ورق را به صورت زیر تعریف کرد [۷۷; ۷۸]:

$$\mathcal{L} = T - U_{Total} \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

$$\mathcal{L} = T - U_s - U_{sp} + W_e \qquad (۱۹\text{-}۳)$$

می‌توان تغییرات انتگرال تابع لاگرانژین را برابر با صفر در نظر گرفت:

$$\delta \int_0^t (T - U_s - U_{sp} + W_e)dt = 0 \qquad (۲۰\text{-}۳)$$

با جایگذاری روابط (۳-۱۲) تا (۳-۱۶) در رابطه‌ی (۳-۱۹) و اعمال اصل همیلتون می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\delta \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \rho h \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right\} dydx \right\} dt \\
&-\delta \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ N_x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + N_y \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + N_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right\} dxdy \right\} dt \\
&-\delta \int_0^t \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \int_0^b \{ [k_{x0}^u u^2 + k_{x0}^v v^2]|_{x=0} + [k_{x1}^u u^2 + k_{x1}^v v^2]|_{x=a} \} dy \\ + \frac{1}{2} \int_0^a \{ [k_{y0}^u u^2 + k_{y0}^v v^2]|_{y=0} + [k_{y1}^u u^2 + k_{y1}^v v^2]|_{y=a} \} dx \end{matrix} \right\} dt \\
&+\delta \int_0^t \left\{ \int_0^a \int_0^b \{ q_x u + q_y v \} dydx \right\} dt = 0
\end{aligned} \qquad (۲۱\text{-}۳)$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \left\{ \int_0^a \int_0^b \rho h \left\{ \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \delta v}{\partial t} \right\} dydx \right\} dt \\
&- \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \delta\left(N_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \delta\left(N_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \delta\left(N_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right\} dxdy \right\} dt \\
&- \int_0^t \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^b \{ [k_{x0}^{u} u\delta u + k_{x0}^{v} v\delta v]|_{x=0} + [k_{x1}^{u} u\delta u + k_{x1}^{v} v\delta v]|_{x=a} \} dy \\ \displaystyle + \int_0^a \{ [k_{y0}^{u} u\delta u + k_{y0}^{v} v\delta v]|_{y=0} + [k_{y1}^{u} u\delta u + k_{y1}^{v} v\delta v]|_{y=a} \} dx \end{array} \right\} dt \\
&+ \int_0^t \left\{ \int_0^a \int_0^b \{ q_x \delta u + q_y \delta v \} dydx \right\} dt = 0
\end{aligned}
\tag{۲۲-۳}
$$

پس از انجام عملیات مربوطه:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \delta u}{\partial t} dt = \frac{\partial u}{\partial t}\delta u|_0^t - \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u \right) dt \; ; \\
&\int_0^a \int_0^b N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} dxdy = \int_0^b \left\{ N_x \delta u|_0^a - \int_0^a \frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u dx \right\} dy \; ;
\end{aligned}
\tag{۲۳-۳}
$$

بنابراین معادلات حاکم کلی و روابط شرایط مرزی ورق را می‌توان به صورت زیر استخراج کرد:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_y &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{۲۴-۳}
$$

شرایط مرزی برای لبه های $x = 0$ و $x = a$:

$$
x = 0 : \begin{cases} N_x - k_{x0}^{u} u = 0 \\ N_{xy} - k_{x0}^{v} v = 0 \end{cases}
\qquad
x = a : \begin{cases} N_x + k_{x1}^{u} u = 0 \\ N_{xy} + k_{x1}^{v} v = 0 \end{cases}
\tag{۲۵-۳}
$$

و شرایط مرزی برای لبه های $y = 0$ و $y = b$:

$$x = b : \begin{cases} N_{xy} + k_{y1}^{u} u = 0 \\ N_y + k_{y1}^{v} v = 0 \end{cases} \qquad y = 0 : \begin{cases} N_{xy} - k_{y0}^{u} u = 0 \\ N_y - k_{y0}^{v} v = 0 \end{cases} \tag{۲۶-۳}$$

۳-۳ شرح تکنیک مرز فنردار فرضی

یک ورق می‌تواند انواع شرایط مرزی ممکن از قبیل شرایط لبه آزاد، ساده (لولا)، لبه گیردار، شرایط الاستیکی و ترکیبی از آن‌ها را دارا باشد. در این تحقیق تمام شرایط مرزی را در چهار مرز ورق بررسی خواهد شد. بدین منظور شرایط مرزی ممکن را با استفاده از تکنیک مرز فنردار فرضی[۱] که شامل دو دسته فنرهای خطی k_u و k_v که به طور یکنواخت در امتداد مرزها توزیع شده‌اند و بیان کننده‌ی شرایط مرزی کلاسیک مختلف برای ورق و همچنین معرف اعمال برآیند نیروهای محوری، نیروهای مماسی و نیروهای جانبی هستند، شبیه سازی شده‌است (شکل۳-۲). همچنین لازم به ذکر است که با انتخاب مقدار مناسب برای سختی فنرهای مرزی بین صفر تا بینهایت می‌توان تمام شرایط مرزی کلاسیک همانند F، SD، S و C را شبیه‌سازی کرد. به عنوان مثال، برای اعمال شرایط مرزی تکیه‌گاهی گیردار می‌توان با در نظر گرفتن مقداری بسیار بزرگ برای سختی فنرها نسبت به سختی کششی، این شرایط مرزی را با دقت بسیار بالایی شبیه‌سازی کرد و یا برای اعمال شرایط مرزی آزاد می‌توان سختی فنرها را برابر با مقدار صفر در نظر گرفت. در همین راستا می‌توان تمام شرایط مرزی کلاسیک مختلف F، SD، S و C را برای ورق در نظر گرفته شده در این تحقیق، به صورت زیر شبیه‌سازی کرد:

---

[۱] Artifical spring boundary technique

$$
\begin{aligned}
&F: k_{x0}^{u} = k_{x0}^{v} = k_{x0}^{w} = K_{x0}^{w} = 0 \\
&SD: k_{x0}^{v} = k_{x0}^{w} = 10^{10}, \qquad k_{x0}^{u} = K_{x0}^{w} = 0 \\
&S: k_{x0}^{u} = k_{x0}^{v} = k_{x0}^{w} = 10^{10}, \qquad K_{x0}^{w} = 0 \\
&C: k_{x0}^{u} = k_{x0}^{v} = k_{x0}^{w} = K_{x0}^{w} = 10^{10}
\end{aligned}
\qquad (۲۷\text{-}۳)
$$

فصل ۴

ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و تکنیک مرز فنردار فرضی

۴-۱ مقدمه

در بخش قبل معادلات حاکم و شرایط مرزی مرتبط با ورق استخراج شدند. حال در این بخش روشی دقیق برای بررسی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق که بتوان تمام شرایط مرزی کلاسیک را مورد بررسی قرار داد ارائه خواهد شد. محققین معتقدند که روش‌های دقیق اندکی برای بررسی مسائل ارتعاشاتی ورق‌ها و پوسته‌ها که در آن‌ها بتوان تمام شرایط مرزی را به صورت دقیق شبیه‌سازی کرد وجود دارد [۲۸; ۳۷; ۳۸]. با توجه به تحقیقاتی که در دهه‌ی اخیر در این زمینه انجام شده است، می‌توان از راه‌حل‌های دقیقی نام برد که برای ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی ساده روی حداقل یک جفت از لبه‌های مخالف، و یا راه حل‌های تقریبی که برای دیگر شرایط مرزی خاص ارائه شده‌اند [۷۹]. بنابراین یافتن یک راه حل دقیق برای مسائلی که نمی‌توان به راحتی بررسی دقیقی بر روی تمام شرایط مرزی آنها انجام داد، بسیار حائز اهمیت هستند و کاربردهای زیادی در مسائل موجود مهندسی دارند.

در دهه‌های اخیر، روش‌های تحلیلی و تجربی بسیاری برای توسعه‌ی تحلیل ارتعاشاتی تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها ارائه شده است. همچنین از روش‌هایی چون، روش ریتز[۱]، روش تربیع دیفرانسیلی[۲]، روش گالرکین[۳]، روش انتشار موج[۴]، روش المان محدود[۵] و غیره بهره گرفته شده است. همچنین به عنوان نمونه می‌توان گفت که، روش المان محدود FEM[۶] از اولین زمانی که مورد استفاده قرار گرفته شد تا به امروز کاربردهای زیادی در محاسبات مهندسی پیدا کرده است. این روش در شرایط مرزی مختلف هم قابل استفاده است. با این وجود، هنوز هم برخی مشکلات در شبکه‌بندی این روش وجود دارد. همچنین پیچیدگی ساختار و مواد سازه‌ها موجب افزایش محاسبات در این روش خواهد شد [۸۰; ۸۱].

---

[۱] Ritz method

[۲] Differential quadrature method (DQM)

[۳] Galerkin method

[۴] Wave propagation approach

[۵] Finite element method (FEM)

[۶] Finite element method

همان طور که مشخص است، بسیاری از روش‌های موجود در این زمینه برای یک شرایط مرزی خاص مناسب هستند، لذا شبیه‌سازی حالت‌های مختلف شرایط مرزی مستلزم بهبود روش اینگونه راه حل‌ها خواهد بود. از اینرو استفاده از روش‌های موجود منجر به محاسبات خسته کننده‌ای خواهد شد و استفاده از روش‌های موجود به راحتی با انواع شرایط مرزی مورد استفاده در کاربردهای مختلف منطبق نخواهد بود. به این دلیل که در واقعیت شرایط مرزی یک تیر، ورق و یا پوسته امکان دارد همواره به صورت کلاسیک وجود نداشته باشد و حتی امکان دارد که در عمل با انواع حالت‌های مهار کننده مرزی از جمله شرایط مرزی مختلف کلاسیک، مهار کننده‌های الاستیک و ترکیبی از آنها مواجه شود. به همین منظور توسعه و بدست آوردن یک روش واحد، کارآمد و دقیق، لازم و از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، لذا در همین راستا، در این تحقیق هدف ارائه روشی دقیق می‌باشد که این روش با مواجهه با شرایط مرزی کلاسیک مختلف، به تحلیلی دقیق و کاربردی دست پیدا کند.

در این بخش نشان داده شده که می‌توان با بهبود روش بسط سری فوریه، روش‌های دقیقی را برای بررسی ارتعاشات ورق سالم ارائه کرد و تمام شرایط مرزی کلاسیک مختلف را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد.

۴-۲ سری فوریه بهبود یافته

برای بررسی مسائل ارتعاشاتی، اغلب از توابعی به شکل بسط سری فوریه استفاده می‌شود، زیرا این توابع تعامد و جامعیت و همچنین پایداری خوب خود را در محاسبات عددی حفظ می‌کنند. علاوه بر این با توجه به اینکه ارتعاشات به صورت طبیعی به شکل امواج هستند، بطور معمول توسط سری فوریه قابل توصیف هستند [۸۲]. اما لازم به ذکر است که بسط سری فوریه مرسوم در حالت کلی دارای مشکل همگرایی در راستای مرز لبه‌ها می‌باشد و می‌توان گفت که کاربرد بسط سری فوریه فقط به چند شرایط

مرزی ایده آل محدود می‌باشند. به عبارت دیگر از لحاظ ریاضی می‌توان گفت در حالت کلی ناپیوستگی‌هایی در جابجایی و مشتقات آن در لبه‌ها وجود دارد. در این حالت، نمی‌توان به راحتی دیفرانسیل را به صورت ترم به ترم بر روی بسط سری فوریه انجام داد، و در نتیجه ممکن است راه حل همگرا نشود و یا به آهستگی همگرا شود. به همین منظور برای رفع این مشکل باید یک تابع پریودیک مکمل برای بسط سری فوریه استخراج شود که به واسطه‌ی آن نرخ همگرایی در راستای مربوطه هموارتر شود. لی[1] در سال‌های ۲۰۰۰ و ۲۰۰۲ [۸۲; ۸۳] روشی تحت عنوان سری فوریه بهبود یافته را برای تحلیل ارتعاشات تیرهای اویلر-برنولی[2] با شرایط مرزی الاستیکی پیشنهاد داد و توانست مشکلاتی را که پیش‌تر ذکر شد برطرف کند. لازم به ذکر است که روش سری فوریه بهبود یافته معرف راه حلی قابل اجرا برای تمام شرایط مرزی می‌باشد و همچنین، همگرایی بسط سری را می‌توان به صورت قابل ملاحظه‌ای بهبود یافته و تضمین شده دانست، به شکلی که سرعت همگرایی این روش حداقل $(m\pi)^3$، خواهد بود.

در ادامه‌ی این تحقیق، این روش پیش‌تر توسعه یافته، برای تحلیل ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق با شرایط مرزی مختلف، تعمیم داده می‌شود.

۴-۲-۱ مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته

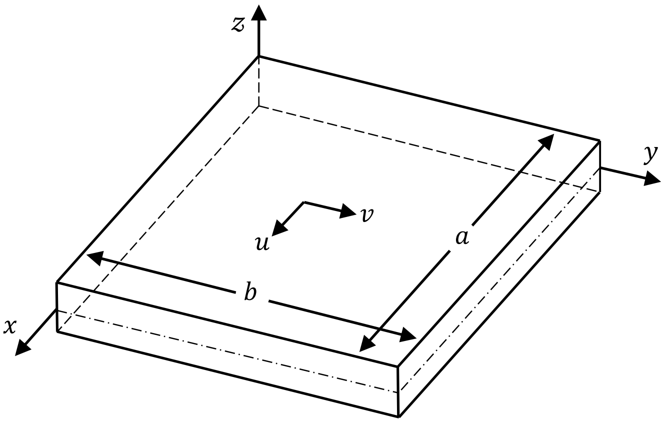
همان‌طور که مشخص است، مسائل مربوط به ارتعاشات درون صفحه‌ای، شامل دو متغیر مستقل $u(x,y)$ و $v(x,y)$ می‌باشند که این دو متغیر در راستای x و y با زمان تغییر می‌کنند (شکل۴-۱). در این بخش به عنوان نمونه، مولفه‌ی جابجایی ورق $u(x,y)$ با استفاده از این روش بهبود داده می‌شود. در این راستا، می‌توان مولفه‌ی جابجایی ورق $u(x,y)$ را به صورت یک سری فوریه دوگانه کسینوسی

---

[1] Li

[2] Euler-Bernoulli

استاندارد و توابع چند جمله‌ای کمکی که دامنه آنها به صورت $[0,a]\times[0,b]$، است تعریف کرد. لذا می‌توان مولفه‌ی جابجایی ورق $u(x,y)$ را به صورت زیر تعریف کرد:



شکل۴-۱ شماتیک ورق

$$u(x,y)=U(x,y)+\xi_x(x,y)+\xi_y(x,y)$$ (۱-۴)

و همچنین می‌توان گفت:

$$U(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y$$ (۲-۴)

در این رابطه $\lambda_{am}=\frac{m\pi}{a}$ و $\lambda_{bn}=\frac{n\pi}{b}$ می‌باشد، و همچنین $\xi_x(x,y)$ و $\xi_y(x,y)$ توابع چند جمله‌ای کمکی برای اطمینان و سرعت بخشیدن به همگرایی بسط سری مولفه‌ی جابجایی $u(x,y)$ می‌باشند. با توجه به معادلات حاکم کلی (۳-۲۴) بدست آمده و رابطه کلی تنش-کرنش مربوط به ورق (۳-۴) می‌توان به این نتیجه رسید که مولفه‌ی جابجایی ورق طی روند حل به مشتق دوم نیاز دارد. بنابراین، توابع چند جمله‌ای کمکی $\xi_x(x,y)$ و $\xi_y(x,y)$ با انتخاب مشتق مرتبه اول در مرزها برای از بین بردن ناپیوستگی‌های به وجود آمده در جابجایی‌های اصلی می‌باشند. این چند جمله‌ای‌های کمکی $\xi_x(x,y)$ و $\xi_y(x,y)$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_x(0,y)}{\partial x} &= \frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = P_{x0}(y) \\
\frac{\partial \xi_x(a,y)}{\partial x} &= \frac{\partial u(a,y)}{\partial x} = P_{x1}(y) \\
\frac{\partial \xi_y(x,0)}{\partial y} &= \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = P_{y0}(x) \\
\frac{\partial \xi_y(x,b)}{\partial y} &= \frac{\partial u(x,b)}{\partial y} = P_{y1}(x)
\end{aligned} \tag{۳-۴}$$

در این رابطه $P_{x0}(y)$، $P_{x1}(y)$، $P_{y0}(x)$ و $P_{y1}(x)$ به ترتیب مشتقات در مرزهای $x = 0$، $x = a$، $y = 0$ و $y = b$ می‌باشند و همچنین آنها را می‌توان به شکل سری فوریه کسینوسی بسط داد:

$$\begin{aligned}
P_{y0}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos \lambda_{am} x \\
P_{y1}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos \lambda_{am} x \\
P_{x0}(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \lambda_{bn} y \\
P_{x1}(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos \lambda_{bn} y
\end{aligned} \tag{۴-۴}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۴-۳) می‌توان روابط چند جمله‌ای کمکی $\xi_x(x,y)$ و $\xi_y(x,y)$ را به صورت زیر تعریف کرد [۷۲]:

$$\xi_x(x,y) = \begin{bmatrix} \xi_{1a}(x) \\ \xi_{2a}(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{x0}(y) \\ P_{x1}(y) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \xi_{1a}(x) \\ \xi_{2a}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\zeta_x(\zeta_x - 1)^2 \\ a\zeta_x^2(\zeta_x - 1) \end{bmatrix}, (\zeta_x = x/a) \tag{۵-۴}$$

و

$$\xi_y(x,y) = \begin{bmatrix} \xi_{1b}(y) \\ \xi_{2b}(y) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{y0}(x) \\ P_{y1}(x) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \xi_{1b}(y) \\ \xi_{2b}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\zeta_y\left(\zeta_y - 1\right)^2 \\ b\zeta_y^2\left(\zeta_y - 1\right) \end{bmatrix}, (\zeta_y = y/b) \tag{۶-۴}$$

لازم به ذکر است که در ادامه روند روش‌های مورد استفاده در این تحقیق مشاهده می‌شود که این چند جمله‌ای‌های کمکی به منظور سرعت بخشیدن به همگرایی پاسخ، کاهش پیچیدگی محاسبات و بالا بردن دقت حل در محاسبات کامپیوتری، در بسط سری فوریه بهبود یافته استفاده خواهند شد. لذا چند جمله‌ای های تعریف شده‌ی (۴-۵) و (۴-۶) طبق تئوری خاصی انتخاب نشده‌اند، بلکه صرفاً جهت ساده‌تر کردن روابط مورد استفاده در راه حل روش‌های مورد استفاده در این تحقیق می‌باشند. همچنین به راحتی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_x(0,y)}{\partial x} &= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P_{x0}(y)\\P_{x1}(y)\end{bmatrix}\\
\frac{\partial \xi_x(a,y)}{\partial x} &= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P_{x0}(y)\\P_{x1}(y)\end{bmatrix}\\
\frac{\partial \xi_y(x,0)}{\partial y} &= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P_{y0}(x)\\P_{y1}(x)\end{bmatrix}\\
\frac{\partial \xi_y(x,b)}{\partial y} &= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}P_{y0}(x)\\P_{y1}(x)\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۴-۷}$$

به صورتی که:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(0,y)}{\partial x} &= \frac{\partial U(a,y)}{\partial x} = 0\\
\frac{\partial U(x,0)}{\partial y} &= \frac{\partial U(x,b)}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{۴-۸}$$

بنابراین، مولفه‌ی جابجایی بهبود یافته ورق $u(x,y)$، را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$\begin{aligned}u(x,y) = {} & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y \\ & +\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} a_m\cos\lambda_{am}x + \xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} b_m\cos\lambda_{am}x \\ & +\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cos\lambda_{bn}y + \xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} d_n\cos\lambda_{bn}y\end{aligned} \tag{۹-۴}$$

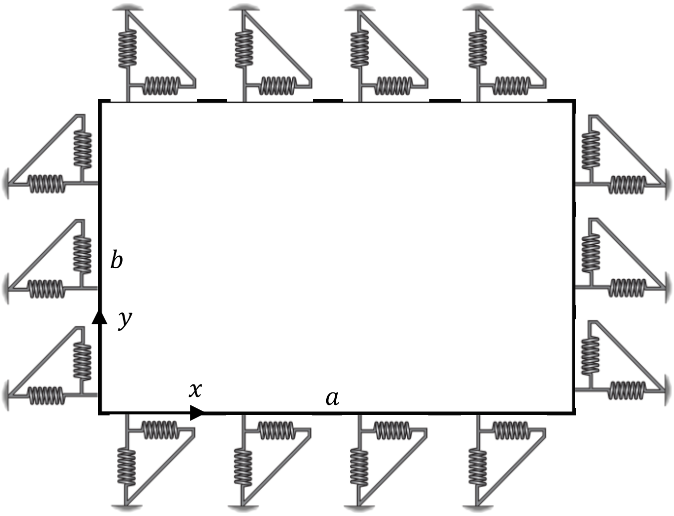
به طور مشابه مولفه‌ی جابجایی بهبود یافته ورق $v(x,y)$ در راستای y با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته را که روند آن در بالا به صورت کامل شرح داده شد، می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}v(x,y) = {} & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y \\ & +\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} e_m\cos\lambda_{am}x + \xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} f_m\cos\lambda_{am}x \\ & +\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} g_n\cos\lambda_{bn}y + \xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} h_n\cos\lambda_{bn}y\end{aligned} \tag{۱۰-۴}$$

که در این رابطه A_{mn} و B_{mn} ضرایب گسترش سری فوریه استاندارد هستند، و همچنین a_m، b_m، c_n، d_n، e_m، f_m، g_n و h_n ضرایب مکمل بسط سری فوریه بهبود یافته می‌باشند.

۴-۳ استفاده از تکنیک مرز فنردار فرضی برای مدلسازی ورق سالم

در این بخش، هدف توسعه‌ی روشی برای بررسی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق با شرایط مرزی مختلف با استفاده از تکنیک مرز فنردار فرضی می‌باشد (که در آن a و b به ترتیب نشان دهنده‌ی طول و عرض ورق هستند). از لحاظ تئوری، این روش اهمیت اساسی در اینگونه مسائل دارد.



شکل۴-۲ شماتیک ورق سالم مدلسازی شده با استفاده از تکنیک مرز فنردار فرضی

در این راستا، می‌توان انواع شرایط مرزی کلاسیک را طبق جدول۴-۱ برای ورق سالم شبیه سازی کرد [۲۸; ۸۴].

جدول۴-۱ مقدار سختی فنرهای خطی در راستای نرمال و مماس با لبه‌های ورق برای شبیه‌سازی شرایط مرزی کلاسیک مختلف

k_y^v	k_x^u	
$۱۰^{۲۰}$	$۱۰^{۲۰}$	گیردار
۰	۰	آزاد
۰	$۱۰^{۲۰}$	ساده (لولا) حالت SS1
$۱۰^{۲۰}$	۰	ساده (لولا) حالت SS2

همچنین در ادامه روش سری فوریه بهبود یافته ارائه شده، جزئیات کامل در مورد چگونگی راه حل بررسی ارتعاشات ورق مدلسازی شده با استفاده از تکنیک مرز فنردار فرضی، به صورت گام به گام در بخش بعدی ارائه شده است.

۴-۴ استخراج روابط شرایط مرزی

با توجه به رابطه‌ی کلی برآیند نیروها (۳-۱۰) و در نظر گرفتن حالت تنش صفحه‌ای، رابطه‌ی تنش-کرنش ورق در حالت درون صفحه‌ای به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Eh}{1-\mu^2} & \frac{\mu Eh}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{\mu Eh}{1-\mu^2} & \frac{Eh}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & Gh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \tag{۱۱-۴}$$

در ادامه می‌توان رابطه‌ی فوق را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{۱۲-۴}$$

که در رابطه (۴-۱۱) $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ مدول برشی ورق می‌باشد و همچنین u و v به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته درون صفحه‌ای ورق در راستای x و y هستند و نیز E و μ به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون می‌باشند.

همانطور که در فصل استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی بررسی شد، با استفاده از اصل همیلتون شرایط مرزی کلی ورق استخراج شدند. بدین ترتیب با توجه به روابط (۳-۲۵) و (۳-۲۶) شرایط مرزی ورق در حالت درون صفحه‌ای را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$N_x - k_{x0}^u u = 0, \qquad x = 0$$ (۱۳-۴)

$$N_{xy} - k_{x0}^v v = 0, \qquad x = 0$$ (۱۴-۴)

$$N_x + k_{x1}^u u = 0, \qquad x = a$$ (۱۵-۴)

$$N_{xy} + k_{x1}^v v = 0, \qquad x = a$$ (۱۶-۴)

$$N_y - k_{y0}^v v = 0, \qquad y = 0$$ (۱۷-۴)

$$N_{xy} - k_{y0}^u u = 0, \qquad y = 0$$ (۱۸-۴)

$$N_y + k_{y1}^v v = 0, \qquad y = b$$ (۱۹-۴)

$$N_{xy} + k_{y1}^u u = 0, \qquad y = b$$ (۲۰-۴)

با جایگذاری رابطه‌ی (۴-۱۲) در روابط (۴-۱۳) تا (۴-۲۰)، شرایط مرزی را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$\bar{k}_{nx0} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y}\right), \qquad x = 0$$ (۲۱-۴)

$$\bar{k}_{px0} v = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad x = 0$$ (۲۲-۴)

$$\bar{k}_{nx1} u = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad x = a$$ (۲۳-۴)

$$\bar{k}_{px1} v = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad x = a$$ (۲۴-۴)

$$\bar{k}_{ny0} v = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \qquad y = 0$$ (۲۵-۴)

$$\bar{k}_{py0} u = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad y = 0$$ (۲۶-۴)

$$\bar{k}_{ny1} v = -\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad y = b$$ (۲۷-۴)

$$\bar{k}_{py1} u = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad y = b$$ (۲۸-۴)

که در این روابط ضرایب $\bar{k}_n$ و $\bar{k}_p$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

جدول۴-۲ پارامترهای سختی فنرهای فرضی $\boldsymbol{\bar{k}_n}$ و $\boldsymbol{\bar{k}_p}$ در راستای نرمال و مماس بر لبه‌های ورق

	$x0$	$x1$	$y0$	$y1$
$\boldsymbol{\bar{k}_n}$	$\frac{k_{x0}^u(1-\mu^2)}{Eh}$	$\frac{k_{x1}^u(1-\mu^2)}{Eh}$	$\frac{k_{y0}^u(1-\mu^2)}{Eh}$	$\frac{k_{y1}^u(1-\mu^2)}{Eh}$
$\boldsymbol{\bar{k}_p}$	$\frac{2k_{x0}^v(1+\mu)}{Eh}$	$\frac{2k_{x1}^v(1+\mu)}{Eh}$	$\frac{2k_{y0}^v(1+\mu)}{Eh}$	$\frac{2k_{y1}^v(1+\mu)}{Eh}$

همچنین ملاحظه می‌شود که این پارامترها با سختی فنرهای فرضی در راستای نرمال و مماسی، مدول یانگ و ضخامت ورق رابطه دارند. همچنین در ادامه مراحل محاسباتی این تحقیق بطور مشخص می‌توان با استفاده از اندیس محل قرار گرفته شده و راستای فنرهای در نظر گرفته شده را مشخص کرد. به عنوان مثال $\bar{k}_{nx0}$ و $\bar{k}_{py1}$ به ترتیب سختی فنر در راستای فنرهای نرمال بر روی لبه‌ی $x = 0$ و راستای فنرهای مماسی بر روی لبه‌ی $y = b$ می‌باشند. با انتخاب مقدار مناسب برای سختی فنرهای خطی، می‌توان تمام شرایط مرزی کلاسیک را شبیه سازی کرد.

۴-۵ جایگذاری مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته در روابط شرایط مرزی

با توجه به اینکه در بخش ۴-۲-۱ مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته در راستای x و y ، با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته استخراج شد، و همچنین نشان داده شد که جابجایی‌های بهبود یافته ورق در حالت درون صفحه‌ای را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned} u(x,y) = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y \\ & +\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} a_m\cos\lambda_{am}x+\xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} b_m\cos\lambda_{am}x \\ & +\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cos\lambda_{bn}y+\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} d_n\cos\lambda_{bn}y \end{aligned}$$ (۹-۴)

$$\begin{aligned} v(x,y) = & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y \\ & +\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} e_m\cos\lambda_{am}x+\xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} f_m\cos\lambda_{am}x \\ & +\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} g_n\cos\lambda_{bn}y+\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} h_n\cos\lambda_{bn}y \end{aligned}$$ (۱۰-۴)

با توجه به بخش ۴-۲-۱ در این رابطه A_{mn} و B_{mn} ضرایب گسترش سری فوریه استاندارد هستند، و همچنین a_m، b_m، c_n، d_n، e_m، f_m، g_n و h_n ضرایب مکمل مربوطه هستند. همچنین به راحتی می‌توان بررسی کرد که چند جمله‌ای‌های کمکی در راستای x در مرزهای ورق به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\xi_{1a}(0)=\xi_{1a}(a)=\acute{\xi}_{1a}(a)=0,\qquad \acute{\xi}_{1a}(0)=1$$ (۲۹-۴)

$$\xi_{2a}(0)=\xi_{2a}(a)=\acute{\xi}_{2a}(0)=0,\qquad \acute{\xi}_{2a}(a)=1$$ (۳۰-۴)

با شرایطی مشابه، برای چند جمله‌ای‌های کمکی در راستای y می‌توان نوشت:

$$\xi_{1b}(0)=\xi_{1b}(b)=\acute{\xi}_{1b}(b)=0,\qquad \acute{\xi}_{1b}(0)=1$$ (۳۱-۴)

$$\xi_{2b}(0)=\xi_{2b}(b)=\acute{\xi}_{2b}(0)=0,\qquad \acute{\xi}_{2b}(b)=1$$ (۳۲-۴)

لازم به ذکر است که روابط (۴-۲۹) تا (۴-۳۲) صرفاً برای ساده سازی روابط و ایجاد سهولت در مسیر محاسبات می‌باشند. این مطلب در مسیر راه حل به کار گرفته شده در ادامه‌ی تحقیق مشخص می‌شود.

حال در ادامه‌ی این بخش، با استفاده از مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته بدست آمده از روش سری فوریه بهبود یافته و معادلات حاکم ورق و شرایط مرزی بدست آمده در بخش ۳-۲-۴-۲، روشی برای استخراج فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق ارائه خواهد شد. در همین راستا با جایگذاری روابط (۴-۹) و (۴-۱۰) در روابط شرایط مرزی(۴-۲۱) تا (۴-۲۸)، به عنوان مثال برای لبه‌ی $x = 0$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\bar{k}_{nx0}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\cos\lambda_{bn}y+\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}a_m+\xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}b_m\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos\lambda_{bn}y+\mu\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}-B_{mn}\lambda_{bn}\sin\lambda_{bn}y+\xi'_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}e_m+\xi'_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}f_m\right)\end{aligned}\tag{۳۳-۴}$$

و

$$\begin{aligned}&\bar{k}_{px0}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B_{mn}\cos\lambda_{bn}y+\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}e_m+\xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}f_m\right)\\&=-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\lambda_{bn}\sin\lambda_{bn}y+\xi'_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}a_m+\xi'_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}b_m+\sum_{n=0}^{\infty}g_n\cos\lambda_{bn}y\end{aligned}\tag{۳۴-۴}$$

به منظور ساده سازی روابط، به عنوان مثال با تقسیم رابطه‌ی (۴-۳۳) بر $\cos\lambda_{bn}y$ می‌توان گفت که:

$$\begin{aligned}&\bar{k}_{nx0}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}+\frac{\xi_{1b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}a_m+\frac{\xi_{2b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}b_m\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}c_n+\mu\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-B_{mn}\lambda_{bn}\sin\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{bn}y}+\frac{\xi'_{1b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}e_m+\frac{\xi'_{2b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}f_m\right)\end{aligned}\tag{۳۵-۴}$$

همانطور که مشخص است، در رابطه‌ی (۴-۳۵) ضرایبی شامل ضرایب سری فوریه بهبود یافته، چند جمله‌ای‌های کمکی سری فوریه بهبود یافته و جملات سینوس و کسینوس ظاهر می‌شود، که این ضرایب ممکن است در ادامه‌ی مسیر تحقیق به دلیل حجم زیاد روابط در مسیر محاسباتی مشکلاتی را ایجاد

کنند. لذا برای رفع این مشکل از تعاریف کمکی ارائه شده در پیوست (أ) استفاده شده است. لازم به ذکر است که این تعاریف با کمک گرفتن از رابطه‌ی سری فوریه استاندارد حاصل شده‌اند.

بدین ترتیب، با در نظر گرفتن تعاریف کمکی می‌توان رابطه‌ی (۴-۳۵) را به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$
\begin{aligned}
&-\bar{k}_{nx0}\beta_{1n}\sum_{m=0}^{\infty} a_m - \bar{k}_{nx0}\beta_{2n}\sum_{m=0}^{\infty} b_m + c_n + \mu\eta_{1n}\sum_{m=0}^{\infty} e_m + \mu\eta_{2n}\sum_{m=0}^{\infty} f_m \\
&= \bar{k}_{nx0}\sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} + \mu\sum_{m,q} B_{mq}\,\lambda_{bq}\kappa_{bn}^{q}\ , \qquad (n = 0,1,2,\dots)
\end{aligned}
$$

(۳۶-۴)

در ادامه به طور مشابه، با جایگذاری روابط (۴-۹) و (۴-۱۰) در شرایط مرزی باقی مانده و ساده سازی آنها با استفاده از تعاریف کمکی در مجموع به هشت رابطه می‌توان دست پیدا کرد، که این هشت معادله را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$
\begin{aligned}
&a_m - \bar{k}_{ny0}\alpha_{1m}\sum_{n=0}^{\infty} c_n - \bar{k}_{ny0}\alpha_{2m}\sum_{n=0}^{\infty} d_n + \gamma_{1m}\sum_{n=0}^{\infty} g_n + \gamma_{2m}\sum_{n=0}^{\infty} h_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{k}_{ny0}A_{mn} + \sum_{p,n} B_{pn}\lambda_{ap}\tau_{am}^{p}\ , \qquad (m = 0,1,2,\dots)
\end{aligned}
$$

(۳۷-۴)

$$
\begin{aligned}
&b_m + \bar{k}_{py1}\alpha_{1m}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n + \bar{k}_{py1}\alpha_{2m}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n d_n + \gamma_{1m}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n \\
&+\gamma_{2m}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h_n \\
&= -\bar{k}_{py1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_{mn} + \sum_{p,n} B_{pn}(-1)^n\lambda_{ap}\,\tau_{am}^{p}\ , \qquad (m = 0,1,2,\dots)
\end{aligned}
$$

(۳۸-۴)

$$
\begin{aligned}
&-\bar{k}_{nx0}\beta_{1n}\sum_{m=0}^{\infty} a_m - \bar{k}_{nx0}\beta_{2n}\sum_{m=0}^{\infty} b_m + c_n + \mu\eta_{1n}\sum_{m=0}^{\infty} e_m + \mu\eta_{2n}\sum_{m=0}^{\infty} f_m \\
&\qquad = \bar{k}_{nx0}\sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} + \mu\sum_{m,q} B_{mq}\lambda_{bn}\kappa_{bn}^{q} \quad (n = 0,1,2,..)
\end{aligned}
$$

(۳۹-۴)

$$\begin{aligned}
&\bar{k}_{nx1}\beta_{1n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m a_m+\bar{k}_{nx1}\beta_{2n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m b_m+d_n+\mu\eta_{1n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m e_m\\
&+\mu\eta_{2n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m f_m\\
&=-\bar{k}_{nx1}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m A_{mn}+\mu\sum_{m,q}B_{mq}(-1)^m\lambda_{bq}\kappa_{bn}^{q}\ ,\qquad (n=0.1.2)
\end{aligned}$$
(۴۰-۴)

$$\begin{aligned}
&\mu\gamma_{1m}\sum_{n=0}^{\infty}c_n+\mu\gamma_{2m}\sum_{n=0}^{\infty}d_n+e_m-\bar{k}_{ny0}\alpha_{1m}\sum_{n=0}^{\infty}g_n-\bar{k}_{ny0}\alpha_{2m}\sum_{n=0}^{\infty}h_n\\
&=\mu\sum_{p,n}A_{pn}\lambda_{ap}\tau_{am}^{p}+\bar{k}_{ny0}\sum_{n=0}^{\infty}B_{mn}\quad (m=0,1,2,\dots)
\end{aligned}$$
(۴۱-۴)

$$\begin{aligned}
&\mu\gamma_{1m}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n+\mu\gamma_{2m}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n d_n+f_m+\bar{k}_{ny1}\alpha_{1m}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n\\
&+\bar{k}_{ny1}\alpha_{2m}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h_n\\
&=\mu\sum_{p,n}A_{pn}(-1)^n\lambda_{ap}\tau_{am}^{p}-\bar{k}_{ny1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{mn}\ ,\qquad (m=0,1,2,\dots)
\end{aligned}$$
(۴۲-۴)

$$\begin{aligned}
&\eta_{1n}\sum_{m=0}^{\infty}a_m+\eta_{2n}\sum_{m=0}^{\infty}b_m-\bar{k}_{px0}\beta_{1n}\sum_{m=0}^{\infty}e_m-\bar{k}_{px0}\beta_{2n}\sum_{m=0}^{\infty}f_m+g_n\\
&=\sum_{m,q}A_{mq}\lambda_{bq}\kappa_{bn}^{q}+\bar{k}_{px0}\sum_{m=0}^{\infty}B_{mn}\ ,\qquad (n=0,1,2,\dots)
\end{aligned}$$
(۴۳-۴)

$$\begin{aligned}
&\eta_{1n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m a_m+\eta_{2n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m b_m+\bar{k}_{px1}\beta_{1n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m e_m+h_n\\
&+\bar{k}_{px1}\beta_{2n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m f_m\\
&=\sum_{m,q}A_{mq}(-1)^m\lambda_{bq}\kappa_{bn}^{q}-\bar{k}_{px1}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m B_{mn}\ ,\qquad (n=0,1,2,\dots)
\end{aligned}$$
(۴۴-۴)

با توجه به روابط بالا کاملاً مشخص است که ضرایب بسط سری فوریه بهبود یافته یک بعدی a_m، b_m، c_n، d_n، e_m، f_m، g_n و h_n در سری فوریه بهبود یافته مستقل نیستند، آنها در واقع به ضرایب بسط سری فوریه دوگانه کسینوسی استاندارد A_{mn}، B_{mn} وابسته هستند و همچنین تمام این ضرایب به

شرایط مرزی مهار کننده بستگی دارند. لازم به ذکر است که با در نظر گرفتن اینکه که ضرایب بسط در محاسبات عددی تا $m = M$ و $n = N$ ادامه پیدا کنند، روابط (۴-۳۷) تا (۴-۴۴) را می‌توان به صورت زیر با استفاده از شکل ماتریسی خلاصه نویسی کرد:

$$\bar{H}\alpha = \bar{Q}\Gamma$$ (۴-۴۵)

که در آن:

$$\begin{gathered}\alpha = \{a_0, \dots, a_M, b_0, \dots, b_M, c_0, \dots, c_N, d_0, \dots, d_N, \dots \\ e_0, \dots, e_M, f_0, \dots, f_M, g_0, \dots, g_n, h_0, \dots, h_N\}\end{gathered}$$ (۴-۴۶)

$$\Gamma = [\,\Gamma_1^T \quad \Gamma_2^T]^T$$ (۴-۴۷)

$$\Gamma_1^T = \{A_{00}, A_{01}, \dots, A_{m'0}, A_{m'1}, \dots, A_{m'n'}, \dots, A_{MN}\}^T$$ (۴-۴۸)

$$\Gamma_2^T = \{B_{00}, B_{01}, \dots, B_{m'0}, B_{m'1}, \dots, B_{m'n'}, \dots, B_{MN}\}^T$$ (۴-۴۹)

و همچنین می‌توان نوشت:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} & d_{14} & e_{15} & f_{16} & g_{17} & h_{18} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} & d_{24} & e_{25} & f_{26} & g_{27} & h_{28} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} & d_{34} & e_{35} & f_{36} & g_{37} & h_{38} \\ a_{41} & b_{42} & c_{43} & d_{44} & e_{45} & f_{46} & g_{47} & h_{48} \\ a_{51} & b_{52} & c_{53} & d_{54} & e_{55} & f_{56} & g_{57} & h_{58} \\ a_{61} & b_{62} & c_{63} & d_{64} & e_{65} & f_{66} & g_{67} & h_{68} \\ a_{71} & b_{72} & c_{73} & d_{74} & e_{75} & f_{76} & g_{77} & h_{78} \\ a_{81} & b_{82} & c_{83} & d_{84} & e_{85} & f_{86} & g_{87} & h_{88} \end{bmatrix}$$ (۴-۵۰)

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} q_{11}^T & q_{21}^T & q_{31}^T & q_{41}^T & q_{51}^T & q_{61}^T & q_{71}^T & q_{81}^T \\ q_{12}^T & q_{22}^T & q_{32}^T & q_{42}^T & q_{52}^T & q_{62}^T & q_{72}^T & q_{82}^T \end{bmatrix}$$ (۴-۵۱)

لازم به ذکر است که همه‌ی عناصر ماتریس‌های $\overline{H}$ و $\overline{Q}$ را می‌توان از روابط (۴-۳۷) تا (۴-۴۴) استخراج کرد. برای جلوگیری از بالا رفتن حجم متن تحقیق، این عناصر به صورت کامل در پیوست (ب) ارائه شده است.

در همین راستا می‌توان گفت تعداد معادلات در رابطه‌ی (۴-۳۷)، $m + 1$ معادله جبری خطی خواهند بود، در نتیجه روابط (۴-۳۷) تا (۴-۴۴) بیانگر $4(M + N + 2)$ معادله‌ی جبری خطی می‌باشند، که این معادلات جبری خطی شامل $2[(M + 1) \times (N + 1)] + 4(M + N + 2)$ ضرایب مجهول سری فوریه بهبود یافته هستند، این ضرایب در روابط (۴-۴۶) تا (۴-۴۹)(۴-۴۷) نشان داده شده‌اند. لازم به ذکر است که برای بدست آوردن این ضرایب مجهول به $2[(M + 1) \times (N + 1)]$ معادله‌ی دیگر نیاز است. به همین منظور در ادامه‌ی این روش برای بدست آوردن معادلات مورد نیاز از معادلات حاکم کلی (۳-۲۴) استفاده خواهد شد.

۴-۶ استفاده از معادلات حاکم و بدست آوردن مشخصات دینامیکی و ارتعاشی

در این تحقیق با توجه به اینکه ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق مورد بررسی قرار گرفته شده است، لذا معادلات حاکم را می‌توان به شکل زیر باز نویسی کرد:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{۴-۵۲}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{۴-۵۳}$$

با در نظر گرفتن جابجایی‌های ورق در حالت درون صفحه‌ای به صورت زیر:

$$u(x,y,t)=U(x,y)e^{j\omega t}$$ (۵۴-۴)

$$v(x,y,t)=V(x,y)e^{j\omega t}$$ (۵۵-۴)

که در این روابط ω نشان دهنده‌ی فرکانس طبیعی ارتعاشات (rad) و t نشان دهنده‌ی زمان می‌باشند. ($j=\sqrt{-1}$)

و همچنین با جایگذاری روابط (۴-۱۲)، (۴-۵۴) و (۴-۵۵) در روابط (۴-۵۲) و (۴-۵۳) می‌توان معادلات حاکم بدست آمده در حالت را به شکل زیر باز نویسی کرد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(1-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}(1+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{1}{c_L^2}\omega^2 u=0$$ (۵۶-۴)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1}{2}(1-\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{2}(1+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{c_L^2}\omega^2 v=0$$ (۵۷-۴)

که در این روابط u و v به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته ورق در راستاهای x و y هستند. همچنین $c_L=\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}}$ و ω به ترتیب نشان دهنده‌ی سرعت موج طولی و فرکانس زاویه‌ای می‌باشند.

در ادامه با جایگذاری مولفه‌های جابجایی بهبود یافته ورق (۴-۹) و (۴-۱۰) در روابط(۴-۵۶) و (۴-۵۷) می‌توان به روابطی که کمک بسیاری در مسیر بررسی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق خواهند کرد دست پیدا کرد:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}\lambda_{am}^{2}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y+\xi_{1a}''(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cos\lambda_{bn}y+\xi_{2a}''(x)\sum_{n=0}^{\infty} d_n\cos\lambda_{bn}y\\
&-\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} a_m\lambda_{am}^{2}\cos\lambda_{am}x-\xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} b_m\lambda_{am}^{2}\cos\lambda_{am}x\\
&+\frac{1-\mu}{2}\Bigg[-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}\lambda_{bn}^{2}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y+\xi_{1b}''(y)\sum_{m=0}^{\infty} a_m\cos\lambda_{am}x\\
&+\xi_{2b}''(y)\sum_{m=0}^{\infty} b_m\cos\lambda_{am}x-\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda_{bn}^{2}\cos\lambda_{bn}y-\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} d_n\lambda_{bn}^{2}\cos\lambda_{bn}y\Bigg]\\
&+\frac{1+\mu}{2}\Bigg[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}\lambda_{am}\lambda_{bn}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{bn}y-\xi_{1b}'(y)\sum_{m=0}^{\infty} e_m\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\\
&-\xi_{2b}'(y)\sum_{m=0}^{\infty} f_m\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x-\xi_{1a}'(x)\sum_{n=0}^{\infty} g_n\lambda_{bn}\sin\lambda_{bn}y-\xi_{2a}'(x)\sum_{n=0}^{\infty} h_n\lambda_{bn}\sin\lambda_{bn}y\Bigg]\\
&+\frac{1}{c_L^{2}}\omega^{2}\Bigg[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y+\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} a_m\cos\lambda_{am}x\\
&+\xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} b_m\cos\lambda_{am}x+\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cos\lambda_{bn}y+\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} d_n\cos\lambda_{bn}y\Bigg]=0
\end{aligned}\tag{۵۸-۴}$$

$$\begin{aligned}
&-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}\lambda_{bn}^{2}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y+\xi_{1b}''(y)\sum_{m=0}^{\infty} e_m\cos\lambda_{am}x+\xi_{2b}''(y)\sum_{m=0}^{\infty} f_m\cos\lambda_{am}x\\
&-\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} g_n\lambda_{bn}^{2}\cos\lambda_{bn}y-\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} h_n\lambda_{bn}^{2}\cos\lambda_{bn}y\\
&+\frac{1-\mu}{2}\Bigg[-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}\lambda_{am}^{2}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y-\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} e_m\lambda_{am}^{2}\cos\lambda_{am}x\\
&-\xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} f_m\lambda_{am}^{2}\cos\lambda_{am}x+\xi_{1a}''(x)\sum_{n=0}^{\infty} g_n\cos\lambda_{bn}y+\xi_{2a}''(x)\sum_{n=0}^{\infty} h_n\cos\lambda_{bn}y\Bigg]\\
&+\frac{1+\mu}{2}\Bigg[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}\lambda_{am}\lambda_{bn}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{bn}y-\xi_{1b}'(y)\sum_{m=0}^{\infty} a_m\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\\
&-\xi_{2b}'(y)\sum_{m=0}^{\infty} b_m\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x-\xi_{1a}'(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\lambda_{bn}\sin\lambda_{bn}y-\xi_{2a}'(x)\sum_{n=0}^{\infty} d_n\lambda_{bn}\sin\lambda_{bn}y\Bigg]\\
&+\frac{1}{c_L^{2}}\omega^{2}\Bigg[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y+\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} e_m\cos\lambda_{am}x\\
&+\xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty} f_m\cos\lambda_{am}x+\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} g_n\cos\lambda_{bn}y+\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} h_n\cos\lambda_{bn}y\Bigg]=0
\end{aligned}\tag{۵۹-۴}$$

حال به منظور ساده سازی روابط، با تقسیم رابطه‌ی (۴-۵۸) را بر $\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\lambda_{am}^{2}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y+\xi''_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}\cos\lambda_{bn}y+\xi''_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}d_{n}\cos\lambda_{bn}y\\
&-\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}a_{m}\lambda_{am}^{2}\cos\lambda_{am}x-\xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}b_{m}\lambda_{am}^{2}\cos\lambda_{am}x\\
&+\frac{1-\mu}{2}\left[-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\lambda_{bn}^{2}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y+\xi''_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}a_{m}\cos\lambda_{am}x\right.\\
&\left.+\xi''_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}b_{m}\cos\lambda_{am}x-\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}\lambda_{bn}^{2}\cos\lambda_{bn}y-\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}d_{n}\lambda_{bn}^{2}\cos\lambda_{bn}y\right]\\
&+\frac{1+\mu}{2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B_{mn}\lambda_{am}\lambda_{bn}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{bn}y-\xi'_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}e_{m}\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\right.\\
&\left.-\xi'_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}f_{m}\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x-\xi'_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}g_{n}\lambda_{bn}\sin\lambda_{bn}y-\xi'_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}h_{n}\lambda_{bn}\sin\lambda_{bn}y\right]\\
&+\frac{1}{c_{L}^{2}}\omega^{2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y+\xi_{1b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}a_{m}\cos\lambda_{am}x\right.\\
&\left.+\xi_{2b}(y)\sum_{m=0}^{\infty}b_{m}\cos\lambda_{am}x+\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}\cos\lambda_{bn}y+\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}d_{n}\cos\lambda_{bn}y\right]=0
\end{aligned}\tag{۶۰-۴}$$

$$\begin{aligned}
&-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\lambda_{am}^{2}\frac{\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y}+\frac{\xi''_{1a}(x)}{\cos\lambda_{am}x}\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}\frac{\cos\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{bn}y}+\frac{\xi''_{2a}(x)}{\cos\lambda_{am}x}\sum_{n=0}^{\infty}d_{n}\frac{\cos\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{bn}y}\\
&-\frac{\xi_{1b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}a_{m}\lambda_{am}^{2}\frac{\cos\lambda_{am}x}{\cos\lambda_{am}x}-\frac{\xi_{2b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}b_{m}\lambda_{am}^{2}\frac{\cos\lambda_{am}x}{\cos\lambda_{am}x}\\
&+\frac{1-\mu}{2}\left[-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\lambda_{bn}^{2}\frac{\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y}+\frac{\xi''_{1b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}a_{m}\frac{\cos\lambda_{am}x}{\cos\lambda_{am}x}\right.\\
&\left.+\frac{\xi''_{2b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}b_{m}\frac{\cos\lambda_{am}x}{\cos\lambda_{am}x}-\frac{\xi_{1a}(x)}{\cos\lambda_{am}x}\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}\lambda_{bn}^{2}\frac{\cos\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{bn}y}-\frac{\xi_{2a}(x)}{\cos\lambda_{am}x}\sum_{n=0}^{\infty}d_{n}\lambda_{bn}^{2}\frac{\cos\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{bn}y}\right]\\
&+\frac{1+\mu}{2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{mn}\lambda_{am}\lambda_{bn}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y}-\frac{\xi'_{1b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e_{m}\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x}{\cos\lambda_{am}x}\right.\\
&\left.-\frac{\xi'_{2b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_{m}\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x}{\cos\lambda_{am}x}-\frac{\xi'_{1a}(x)}{\cos\lambda_{am}x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_{n}\lambda_{bn}\sin\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{bn}y}-\frac{\xi'_{2a}(x)}{\cos\lambda_{am}x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_{n}\lambda_{bn}\sin\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{bn}y}\right]\\
&+\frac{1}{c_{L}^{2}}\omega^{2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}\frac{\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{bn}y}+\frac{\xi_{1b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}a_{m}\frac{\cos\lambda_{am}x}{\cos\lambda_{am}x}\right.\\
&\left.+\frac{\xi_{2b}(y)}{\cos\lambda_{bn}y}\sum_{m=0}^{\infty}b_{m}\frac{\cos\lambda_{am}x}{\cos\lambda_{am}x}+\frac{\xi_{1a}(x)}{\cos\lambda_{am}x}\sum_{n=0}^{\infty}c_{n}\frac{\cos\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{bn}y}+\frac{\xi_{2a}(x)}{\cos\lambda_{am}x}\sum_{n=0}^{\infty}d_{n}\frac{\cos\lambda_{bn}y}{\cos\lambda_{bn}y}\right]=0
\end{aligned}\tag{۶۱-۴}$$

همانطور که مشخص است، در این قسمت هم ضرایبی ظاهر می‌شوند که روند محاسبات را پیچیده می‌کنند، لذا با توجه به توضیحات داده شده در بخش قبل می‌توان از تعاریف کمکی ارائه شده در پیوست (أ) استفاده کرد و روابط بالا را ساده سازی و به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda_{am}^2+\frac{1-\mu}{2}\lambda_{bn}^2\right)A_{mn}+\left(\beta_{1n}\lambda_{am}^2-\frac{1-\mu}{2}\sigma_{1n}\right)a_m+\left(\beta_{2n}\lambda_{am}^2-\frac{1-\mu}{2}\sigma_{2n}\right)b_m\\
&+\left(\frac{1-\mu}{2}\alpha_{1m}\lambda_{bn}^2-\varepsilon_{1m}\right)c_n+\left(\frac{1-\mu}{2}\alpha_{2m}\lambda_{bn}^2-\varepsilon_{2m}\right)d_n\\
&-\frac{1+\mu}{2}\sum_p\sum_q B_{pq}\,\lambda_{ap}\lambda_{bq}\tau_{am}^p\kappa_{bn}^q\\
&+\frac{1+\mu}{2}\sum_p e_p\,\eta_{1n}\lambda_{ap}\tau_{am}^p+\frac{1+\mu}{2}\sum_p f_p\,\eta_{2n}\lambda_{ap}\tau_{am}^p\\
&+\frac{1+\mu}{2}\sum_q g_q\,\gamma_{1m}\lambda_{bq}\kappa_{bn}^q+\frac{1+\mu}{2}\sum_q h_q\,\gamma_{2m}\lambda_{bq}\kappa_{bn}^q\\
&-\frac{1}{c_L^2}\omega^2(A_{mn}+\beta_{1n}a_m+\beta_{2n}b_m+\alpha_{1m}c_n+\alpha_{2m}d_n)=0
\end{aligned}\tag{۶۲-۴}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda_{bn}^2+\frac{1-\mu}{2}\lambda_{am}^2\right)B_{mn}+\left(\frac{1-\mu}{2}\beta_{1n}\lambda_{am}^2-\sigma_{1n}\right)e_m+\left(\frac{1-\mu}{2}\beta_{2n}\lambda_{am}^2-\sigma_{2n}\right)f_m\\
&+\left(\alpha_{1m}\lambda_{bn}^2-\frac{1-\mu}{2}\varepsilon_{1m}\right)g_n+\left(\alpha_{2m}\lambda_{bn}^2-\frac{1-\mu}{2}\varepsilon_{2m}\right)h_n\\
&-\frac{1+\mu}{2}\sum_p\sum_q A_{pq}\,\lambda_{ap}\lambda_{bq}\tau_{am}^p\kappa_{bn}^q\\
&+\frac{1+\mu}{2}\sum_p a_p\,\eta_{1n}\lambda_{ap}\tau_{am}^p+\frac{1+\mu}{2}\sum_p b_p\,\eta_{2n}\lambda_{ap}\tau_{am}^p\\
&+\frac{1+\mu}{2}\sum_q c_q\,\gamma_{1m}\lambda_{bq}\kappa_{bn}^q+\frac{1+\mu}{2}\sum_q d_q\,\gamma_{2m}\lambda_{bq}\kappa_{bn}^q\\
&-\frac{1}{c_L^2}\omega^2\big(B_{mn}+\beta_{1n}e_m+\beta_{2n_m}+\alpha_{1m}g_n+\alpha_{2m}h_n\big)=0
\end{aligned}\tag{۶۳-۴}$$

در ادامه می‌توان با در نظر گرفتن اینکه ضرایب بسط در محاسبات عددی تا $m = M$ و $n = N$ ادامه پیدا کنند، روابط (۴-۶۲) و (۴-۶۳) را با استفاده از شکل ماتریسی به صورت زیر خلاصه نویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \Gamma + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \alpha - \frac{\omega^2}{c_L^2} \left\{ \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \Gamma + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \alpha \right\} = 0 \qquad (۴\text{-}۶۴)$$

که در این رابطه عناصر ماتریس‌های A، B، E و F را می‌توان به راحتی از روابط (۴-۶۲) و (۴-۶۳) استخراج کرد. لازم به ذکر است که به منظور جلوگیری از بالا رفتن حجم متن تحقیق این عناصر به صورت کامل در پیوست (ب) ارائه شده‌اند. همچنین به عنوان مثال می‌توان گفت که رابطه‌ی (۴-۶۲) بیانگر $(N + 1) \times (M + 1)$ معادله‌ی جبری خطی خواهد بود.

با توجه به اینکه، رابطه‌ی (۴-۶۴) و (۴-۴۵) با یکدیگر کوپل هستند و همچنین ضرایب بسط سری فوریه بهبود یافته یک بعدی و در این دو رابطه مستقل نیستند. لذا می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۴-۴۵)، ضرایب α را در رابطه‌ی (۴-۶۴) حذف کرد، بدین ترتیب می‌توان گفت که:

$$\alpha = \bar{H}^{-1}\bar{Q}\Gamma \qquad (۴\text{-}۶۵)$$

در ادامه با جایگذاری رابطه‌ی (۴-۶۵) در رابطه‌ی (۴-۶۴) می‌توان این رابطه را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left\{ (A + B\bar{H}^{-1}\bar{Q}) - \frac{\omega^2}{c_L^2}(E + F\bar{H}^{-1}\bar{Q}) \right\} \Gamma = 0 \qquad (۴\text{-}۶۶)$$

و همچنین با در نظر گرفتن $\boldsymbol{K} = A + B\bar{H}^{-1}\bar{Q}$ و $\boldsymbol{M} = E + F\bar{H}^{-1}\bar{Q}$ رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left(\boldsymbol{K}-\frac{\omega^2}{c_L^2}\boldsymbol{M}\right)\Gamma=0 \qquad (۴-۶۷)$$

حال به راحتی می‌توان از رابطه‌ی (۴-۶۷) و نیز با استفاده راه حل مسائل ویژه ماتریس استاندارد، فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق را استخراج کرد. همچنین با استفاده از روابط (۴-۹)، (۴-۱۰) و (۴-۴۵) به راحتی می‌توان شکل مودهای ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق را استخراج کرد.

فصل ۵

ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبودیافته و تکنیک مرز فنردار فرضی

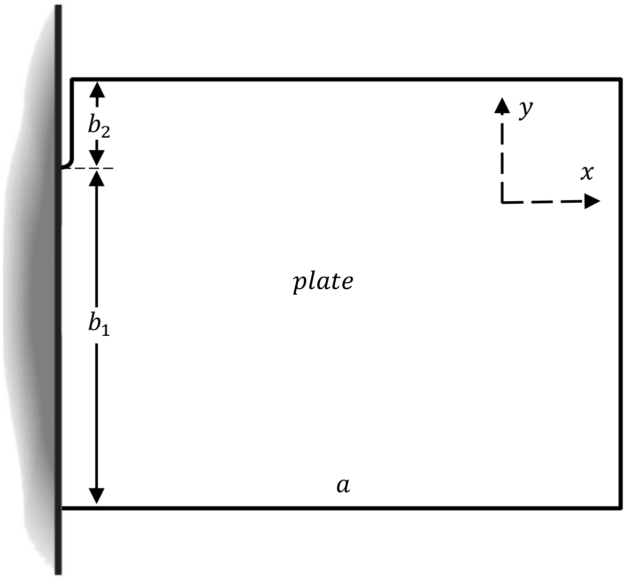
۵-۱ مقدمه

در این بخش از تحقیق برای رفع مشکل اعمال شرایط مرزی مختلف و شبیه‌سازی ترک در سازه از تکنیک مرز فنردار فرضی بهره گرفته می‌شود. با استفاده از این تکنیک می‌توان اثر ترک‌های به وجود آمده در سازه‌های موجود در صنعت را بدون استفاده از روش‌های تقریبی مورد بررسی و تحلیل قرار داد. در این تحقیق از روش رایلی-ریتز استفاده می‌شود. لازم به ذکر است برای مواجه نشدن با مشکلاتی برای روند تحلیل، دقت و همگرایی مسئله، روش رایلی - ریتز، با استفاده از مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته بهبود داده خواهد شد.

در ادامه، روند مورد استفاده در این تحقیق به صورت گام به گام با جزئیات کامل شبیه‌سازی و بررسی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار، با استفاده از روش رایلی-ریتز بهبود یافته با بهره گرفتن از تکنیک مرز فنردار فرضی ارائه خواهد شد و همچنین در مورد چگونگی اعمال شرایط برای شبیه‌سازی ورق ترک‌دار توضیح داده خواهد شد.

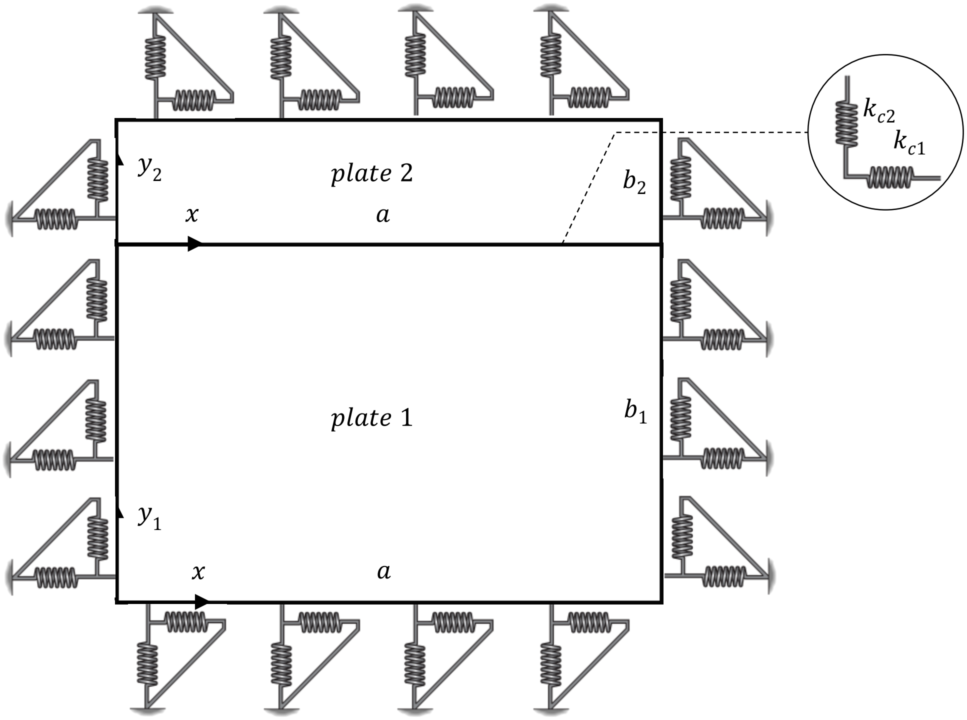
۵-۲ استفاده از تکنیک مرز فنردار فرضی برای مدلسازی ورق ترک‌دار

در این بخش از تحقیق ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق یکسرگیردار که ترکی در لبه‌ی متصل شده‌ی آن به وجود آمده است، مورد بررسی قرار گرفته است (شکل۵-۱). همچنین نشان داده می‌شود که به واسطه‌ی تکنیک رایلی-ریتز بهبود یافته و با بهره گرفتن از تکنیک مرز فنردار فرضی چگونه می‌توان ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق یکسر گیردار سالم و ترک‌دار را مورد بررسی و تحلیل قرار داد.



شکل۵-۱ شماتیک ورق ترک‌دار یکسر گیردار

در همین راستا به منظور اینکه بتوان تمام شرایط را شبیه‌سازی کرد، مدلی از دو ورق که با استفاده از فنرهای خطی در راستای نیروهای طولی k_{c1} و نیروهای برشی k_{c2} به یکدیگر متصل شده‌اند در نظر گرفته می‌شود، که طبق تکنیک مرز فنردار فرضی، توسط فنرهای خطی در راستای نیروهای نرمال k_u و مماسی k_v از سه طرف باقی مانده مهار شده‌اند (شکل۵-۲).



شکل۵-۲ شماتیک ورق ترک‌دار مدلسازی شده با استفاده از تکنیک مرز فنردار فرضی

ساختار ورق‌های به هم چسبیده، متشکل از ورق ۱ و ۲ می‌باشد. لازم به ذکر است که ورق ۱ که با طول a، عرض b_1 و ضخامت h مشخص می‌شود، در صفحه‌ی $x - y_1$ و ورق ۲ که با طول a، عرض b_2 و ضخامت h مشخص می‌شود، در صفحه‌ی $x - y_2$ قرار دارند.

۵-۳ مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته

با توجه به مطالب بخش‌های قبل، مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته ورق را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$u(x, y, t) = U(x, y)e^{j\omega t} \tag{۵-۱}$$

$$v(x, y, t) = V(x, y)e^{j\omega t} \tag{۵-۲}$$

که در این روابط ω نشان دهنده‌ی فرکانس طبیعی ارتعاشات (rad) و t نشان دهنده‌ی زمان می‌باشند. ($j = \sqrt{-1}$)

در ادامه با جایگذاری روابط (۴-۹) و (۴-۱۰) در روابط بالا می‌توان مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته ورق را برای ورق ۱ و ۲ به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} u_1(x,y_1,t) = \Bigg\{ & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1 \\ & +\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty} a_m\cos\lambda_{am}x + \xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty} b_m\cos\lambda_{am}x \\ & +\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cos\lambda_{b_1n}y_1 + \xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} d_n\cos\lambda_{b_1n}y_1 \Bigg\} e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{۳-۵}$$

$$\begin{aligned} v_1(x,y_1,t) = \Bigg\{ & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1 \\ & +\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty} e_m\cos\lambda_{am}x + \xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty} f_m\cos\lambda_{am}x \\ & +\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} g_n\cos\lambda_{b_1n}y_1 + \xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} h_n\cos\lambda_{b_1n}y_1 \Bigg\} e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{۴-۵}$$

و

$$\begin{aligned} u_2(x,y_2,t) = \Bigg\{ & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A'_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2 \\ & +\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty} a'_m\cos\lambda_{am}x + \xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty} b'_m\cos\lambda_{am}x \\ & +\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} c'_n\cos\lambda_{b_2n}y_2 + \xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} d'_n\cos\lambda_{b_2n}y_2 \Bigg\} e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{۵-۵}$$

$$\begin{aligned} v_2(x,y_2,t) = \Bigg\{ & \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} B'_{mn}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2 \\ & +\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty} e'_m\cos\lambda_{am}x + \xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty} f'_m\cos\lambda_{am}x \\ & +\xi_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} g'_n\cos\lambda_{b_2n}y_2 + \xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty} h'_n\cos\lambda_{b_2n}y_2 \Bigg\} e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{۶-۵}$$

در این روابط A_{mn}، B_{mn}، A'_{mn} و B'_{mn} ضرایب گسترش سری فوریه استاندارد برای ورق ۱ و ۲ ، و a_m، b_m، c_n، d_n، e_m، f_m، g_n، h_n، a'_m، b'_m، c'_n، d'_n، e'_m، f'_m، g'_n و h'_n ضرایب مکمل مربوط به ورق

۱ و ۲ می‌باشند. همچنین با توجه به بخش مربوط به استخراج مؤلفه‌های جابجایی ورق، چند جمله‌ای‌های کمکی روابط (۵-۵) و (۵-۶) مربوط به مؤلفه‌های جابجایی ورق ۱ و ۲ را با توجه به شرایط ابعادی، می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\xi_{1a}(x) = a\zeta_x(\zeta_x - 1)^2, \qquad \xi_{2a}(x) = a\zeta_x^2(\zeta_x - 1), \qquad (\zeta_x = x/a) \tag{۵-۷}$$

$$\xi_{1b_1}(y_1) = b_1\zeta_{y_1}\left(\zeta_{y_1} - 1\right)^2, \qquad \xi_{2b_1}(y_1) = b_1\zeta_{y_1}^2\left(\zeta_{y_1} - 1\right), \qquad (\zeta_{y_1} = y_1/b_1) \tag{۵-۸}$$

$$\xi_{1b_2}(y_2) = b_2\zeta_{y_2}\left(\zeta_{y_2} - 1\right)^2, \qquad \xi_{2b_2}(y_2) = b_2\zeta_{y_2}^2\left(\zeta_{y_2} - 1\right), \qquad (\zeta_{y_2} = y_2/b_2) \tag{۵-۹}$$

با توجه به مطالبی در بخش‌های قبل ارائه شده است، روابط (۵-۷) تا (۵-۹) چند جمله‌ای‌های کمکی بسط سری فوریه بهبود یافته می‌باشند.

همان طور که مشخص است، در مدل در نظر گرفته شده در شکل (شکل۵-۲) دو گروه از فنرهای خطی در راستای نیروهای نرمال k_u و نیروهای مماسی k_v در لبه‌های ورق ۱ و ۲ قرار دارند و همچنین دو گروه از فنرهای خطی در راستای نیروهای نرمال k_{c1} و نیروهای مماسی k_{c2} که در بین دو ورق ۱ و ۲ قرارگرفته‌اند، که به ترتیب به منظور اعمال شرایط مرزی مختلف و اعمال شرایط پیوستگی می‌باشند.

۴-۵ بدست آوردن مشخصات دینامیکی و ارتعاشی

انرژی پتانسیل کل V_{Total} و انرژی جنبشی کل T_{Total} ورق در نظر گرفته شده در حالت ارتعاشات درون صفحه‌ای را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد:

$$V_{Total} = V_{in}^{1} + V_{in}^{2} + V_{12\_c} \tag{۱۰-۵}$$

$$T_{Total} = T_{in}^{1} + T_{in}^{2} \tag{۱۱-۵}$$

که در این روابط V_{in}^{1} و V_{in}^{2} به ترتیب برابرند با:

$$V_{in}^{1} = V_{p\_in}^{1} + V_{b\_in}^{1} \tag{۱۲-۵}$$

$$V_{in}^{2} = V_{p\_in}^{2} + V_{b\_in}^{2} \tag{۱۳-۵}$$

همچنین در این روابط $V_{p\_in}^{1}$ و $V_{p\_in}^{2}$ به ترتیب انرژی پتانسیل به وجود آمده در اثر ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق ۱ و ۲ و $V_{b\_in}^{1}$ و $V_{b\_in}^{2}$ به ترتیب انرژی کرنشی به وجود آمده در اثر تغییر شکل فنرهای خطی مرزی موجود بر لبه‌های ورق ۱ و ۲ می‌باشند. V_{12_c} انرژی پتانسیل در اثر ارتعاشات درون صفحه‌ای فنرهای خطی موجود در بین ورق‌ها می‌باشد. همچنین T_{in}^{1} و T_{in}^{2} به ترتیب انرژی جنبشی به وجود آمده در اثر ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق ۱ و ۲ می‌باشند.

حال با توجه به بخش توابع انرژی ورق با مرز فنردار فرضی و با جایگذاری ضرایب سختی A_{ij} (رابطه‌ی (۳-۱۱)) در رابطه‌ی (۳-۱۳) انرژی کرنشی ورق و سپس با ساده سازی این رابطه، می‌توان رابطه‌ی انرژی کرنشی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$V_{in}=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{Eh}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\dfrac{\mu Eh}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\\ +\dfrac{Eh}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+Gh\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\end{array}\right\}dxdy \tag{۱۴-۵}$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۵-۱۴) می‌توان انرژی کرنشی ورق ۱ و ۲ را به صورت زیر بیان کرد:

$$V_{p\_in}^{1}=\frac{G_k}{2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)^2-2(1-\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)^2\right\}dxdy \tag{۱۵-۵}$$

$$V_{p\_in}^{2}=\frac{G_k}{2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\left\{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y_2}\right)^2-2(1-\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial v_2}{\partial y_2}+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y_2}\right)^2\right\}dxdy \tag{۱۶-۵}$$

در این روابط $G_k=\frac{Eh}{1-\mu^2}$ سختی کششی ورق می‌باشد، و همچنین با استفاده از رابطه‌ی (۳-۱۶) انرژی کرنشی تغییر شکل فنرهای مرزی برای ورق ۱ و ۲ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}V_{b\_in}^{1}=&\frac{1}{2}\int_{0}^{b_1}\left\{\left[k_{nx10}u_1^2+k_{px10}v_1^2\right]|_{x=0}+\left[k_{nx11}u_1^2+k_{px11}v_1^2\right]|_{x=a}\right\}dy_1\\&+\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left\{\left[k_{ny10}u_1^2+k_{py10}v_1^2\right]|_{y_1=0}\right\}dx\end{aligned} \tag{۱۷-۵}$$

$$\begin{aligned}V_{b\_in}^{2}=&\frac{1}{2}\int_{0}^{b_2}\left\{\left[k_{nx20}u_2^2+k_{px20}v_2^2\right]|_{x=0}+\left[k_{nx21}u_2^2+k_{px21}v_2^2\right]|_{x=a}\right\}dy_2\\&+\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left\{\left[k_{ny21}u_2^2+k_{py21}v_2^2\right]|_{y_2=a}\right\}dx\end{aligned} \tag{۱۸-۵}$$

در این رابطه به عنوان نمونه k_{nx10} و k_{py21} سختی فنرهای خطی در مرز هستند، که به ترتیب سختی فنر ورق ۱ در لبه‌ی $x=0$ و در راستای نیروهای نرمال و سختی فنر ورق ۲ در لبه‌ی $y=b_2$ در راستای نیروهای مماسی می‌باشند. همچنین با جایگذاری روابط (۴-۵۴) و (۴-۵۵) در رابطه‌ی انرژی

جنبشی ورق (۳-۱۴) می‌توان انرژی جنبشی ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق ۱ و ۲ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$T_{in}^{1}=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b_1}\rho h\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2\right\}dxdy_1=\frac{1}{2}\rho h\omega^2\int_{0}^{a}\int_{0}^{b_1}(u_1^2+v_1^2)\,dxdy_1 \qquad (۱۹\text{-}۵)$$

$$T_{in}^{2}=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b_2}\rho h\left\{\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)^2\right\}dxdy_2=\frac{1}{2}\rho h\omega^2\int_{0}^{a}\int_{0}^{b_2}(u_2^2+v_2^2)\,dxdy_2 \qquad (۲۰\text{-}۵)$$

در این روابط ω، ρ، μ و h به ترتیب فرکانس زاویه‌ای (طبیعی)، چگالی، نسبت پواسون و ضخامت ورق مدنظر می‌باشند.

حال در ادامه با توجه به فنرهای خطی موجود در بین ورق ۱ و ۲ می‌توان انرژی پتانسیل ارتعاشات درون صفحه‌ای در اثر فنرهای موجود در بین ورق‌ها V_{12_c} را به صورت زیر بیان کرد:

$$V_{12\_c}=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left\{k_{c1}\left(u_1|_{y_1=b_1}-u_2|_{y_2=0}\right)^2+k_{c2}\left(v_1|_{y_1=b_1}-v_2|_{y_2=0}\right)^2\right\}dx \qquad (۲۱\text{-}۵)$$

که در این رابطه k_{c1} و k_{c2} سختی فنرهای موجود در بین ورق ۱ و ۲ می‌باشند. لازم به ذکر است که، رابطه‌ی (۵-۲۱) عملاً به منظور ایجاد شرایط پیوستگی در بین ورق ۱ و ۲ می‌باشد و همچنین یکی از مزایای این نوع مدلسازی این است که، وقتی که لازم است ورق ۱ و ۲ به صورت یکپارچه در نظر گرفته بشود، می‌توان با انتخاب مقدار مناسب برای سختی فنرهای موجود در بین ورق‌ها شرایطی را شبیه سازی کرد که نشان دهنده‌ی یکپارچه بودن این دو ورق می‌باشد. در این تحقیق برای اعمال این نوع شرایط، سختی فنرهای بین دو ورق برابر $10^{10}\ \frac{N}{m}$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از این تکنیک از روبرو شدن با روابط پیوستگی که سبب پیچیده شدن روابط در دیگر راه‌حل‌های دقیق می‌شوند، جلوگیری می‌شود.

با توجه به اینکه عبارت‌های انرژی و مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته ورق ۱ و ۲ استخراج شد، در ادامه می‌توان تابع لاگرانژین $\mathcal{L}$ ورق‌های مدل شده را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathcal{L} = T_{Total} - V_{Total} \tag{۲۲-۵}$$

سپس طبق روش رایلی - ریتز برای استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار یکسر گیردار باید تابع لاگرانژین را به حداقل رساند، لذا ابتدا مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته ورق‌های رابطه‌ی (۵-۳) تا (۵-۶) را در انرژی پتانسیل کل و انرژی جنبشی کل موجود در تابع لاگرانژین $\mathcal{L}$ جایگذاری کرده و سپس از تابع لاگرانژین نسبت به ضرایب بسط سری فوریه استاندارد و ضرایب بسط سری فوریه کمکی مشتق گرفته و نتیجه برابر با صفر قرار داده شود. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Xi} = 0, \qquad \Xi = \begin{cases} A_{mn}, a_m, b_m, c_n, d_n, B_{mn}, e_m, f_m, g_n, h_n, \dots \\ A'_{mn}, a'_m, b'_m, c'_n, d'_n, B'_{mn}, e'_m, f'_m, g'_n, h'_n \\ (m = 0,1,\dots,M), \qquad (n = 0,1,\dots,N) \end{cases} \tag{۲۳-۵}$$

قابل ذکر است که، با در نظر گرفتن تعداد جملات گسترش دهنده‌ی مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته ورق‌های ۱ و ۲ برابر با $m = M$ و $n = N$، تعداد معادلات جبری خطی برابر با $5 \times [(M+1) \times (N+1)] + 10 \times (M+N+2)$ خواهند شد.

حال با انجام عملیات ذکر شده و خلاصه نویسی و با در نظر گرفتن اینکه ضرایب بسط در محاسبات عددی تا $m = M$ و $n = N$ ادامه پیدا کنند، می‌توان به فرمی به شکل ماتریسی دست پیدا کرد:

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0} \tag{۲۴-۵}$$

که در این رابطه $\boldsymbol{K}$ و $\boldsymbol{M}$ به ترتیب ماتریس سختی و ماتریس جرم ورق می‌باشند. این دو ماتریس را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} K_{1-1} & K_{1-2} & K_{1-3} & K_{1-4} & \cdots & K_{1-20} \\ K_{1-2} & K_{2-2} & K_{2-3} & K_{2-4} & \cdots & K_{2-20} \\ K_{1-3} & K_{2-3} & K_{3-3} & K_{3-4} & \cdots & K_{3-20} \\ K_{1-4} & K_{2-4} & K_{3-4} & K_{4-4} & \cdots & K_{4-20} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1-20} & K_{2-20} & K_{3-20} & K_{4-20} & \cdots & K_{20-20} \end{bmatrix} \quad (۵-۲۵)$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} M_{1-1} & M_{1-2} & M_{1-3} & M_{1-4} & \cdots & M_{1-20} \\ M_{1-2} & M_{2-2} & M_{2-3} & M_{2-4} & \cdots & M_{2-20} \\ M_{1-3} & M_{2-3} & M_{3-3} & M_{3-4} & \cdots & M_{3-20} \\ M_{1-4} & M_{2-4} & M_{3-4} & M_{4-4} & \cdots & M_{4-20} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1-20} & M_{2-20} & M_{3-20} & M_{4-20} & \cdots & M_{20-20} \end{bmatrix} \quad (۵-۲۶)$$

لازم به ذکر است که به منظور جلوگیری از بالا رفتن حجم متن عناصر ماتریس‌های سختی و جرم $\boldsymbol{K}$ و $\boldsymbol{M}$ به صورت کامل در پیوست (ت) ارائه شده است.

همچنین پارامتر $\boldsymbol{G}$ در رابطه‌ی (۵-۲۴) نشان دهنده‌ی ماتریس ضرایب بسط سری فوریه استاندارد و ضرایب بسط سری فوریه کمکی می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{G}=[\boldsymbol{G}^{u_1},\boldsymbol{G}^{v_1},\boldsymbol{G}^{u_2},\boldsymbol{G}^{v_2}] \quad (۵-۲۷)$$

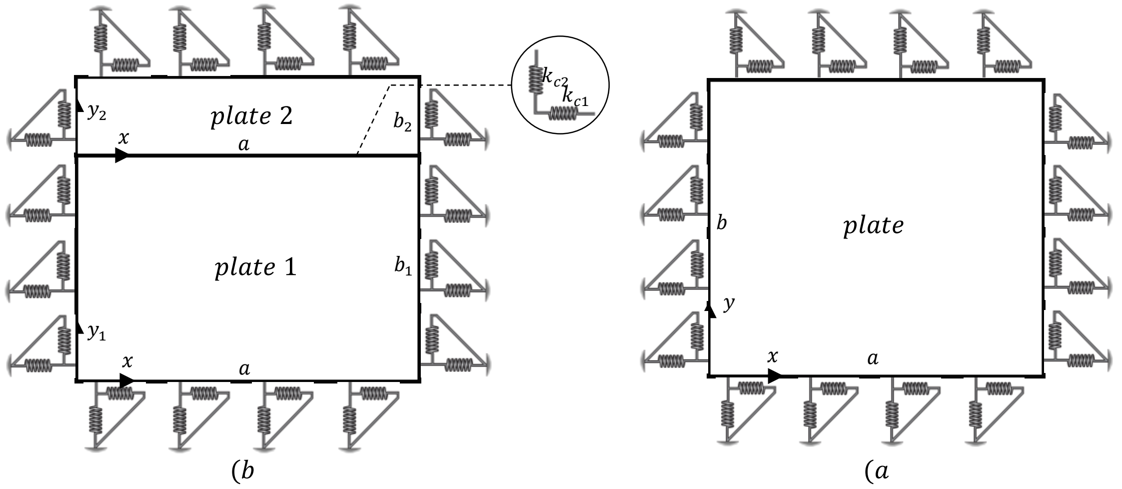
که در این رابطه :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}^{u_1} &= [A_{00},A_{01},\dots,A_{m'0},A_{m'1},\dots,A_{m'n'},\dots,A_{MN},a_0,\dots,a_M,b_0,\dots,b_M,c_0,\dots,c_N,d_0,\dots,d_N] \\ \boldsymbol{G}^{v_1} &= [B_{00},B_{01},\dots,B_{m'0},B_{m'1},\dots,B_{m'n'},\dots,B_{MN},e_0,\dots,e_M,f_0,\dots,f_M,g_0,\dots,g_N,h_0,\dots,h_N] \\ \boldsymbol{G}^{u_2} &= [A'_{00},A'_{01},\dots,A'_{m'0},A'_{m'1},\dots,A'_{m'n'},\dots,A'_{MN},a'_0,\dots,a'_M,b'_0,\dots,b'_M,c'_0,\dots,c'_N,d'_0,\dots,d'_N] \\ \boldsymbol{G}^{v_2} &= [B'_{00},B'_{01},\dots,B'_{m'0},B'_{m'1},\dots,B'_{m'n'},\dots,B'_{MN},e'_0,\dots,e'_M,f'_0,\dots,f'_M,g'_0,\dots,g'_N,h'_0,\dots,h'_N] \end{aligned} \quad (۵-۲۸)$$

بدیهی است که با استفاده از مسائل ویژه ماتریس استاندارد می‌توان فرکانس‌های طبیعی ورق مورد نظر را از رابطه‌ی (۵-۲۴) استخراج نمود.

۵-۵ روش اعتبار سنجی

در این تحقیق جهت اعتبار سنجی روش رایلی – ریتز بهبود یافته ارائه شده برای ورق ترک‌دار، این روش با روش سری فوریه بهبود یافته و نیز نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS مقایسه و مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین صورت که با انتخاب مشخصات مکانیکی و ابعادی مناسب برای ورق مدلسازی شده در روش رایلی – ریتز بهبود یافته (شکل۵-۳-b) می‌توان ورق را به صورت یک ورق سالم شبیه‌سازی کرد و سپس مشخصات دینامیکی و ارتعاشی بدست آمده از این روش را با مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق سالم بدست آمده از روش سری فوریه بهبود یافته (شکل۵-۳-a) مقایسه و مورد بررسی قرار داد.



شکل۵-۳ مدلسازی ورق با استفاده از تکنیک مرز فنردار فرضی برای a) روش سری فوریه بهبود یافته b) روش رایلی – ریتز بهبود یافته

فصل ۶

ارائه نتایج

۶-۱ مقدمه

در این بخش، یک بررسی و مقایسه‌ی جامع بین نتایج استخراج شده از راه‌حل‌های دقیق ارائه شده با نتایج استخراج شده از تئوری‌هایی که توسط محققین دیگر در این زمینه انجام شده است و همچنین نتایج استخراج شده‌ای که توسط نرم افزار المان محدود ANSYS حاصل شده است، انجام گرفته است. لازم به ذکر است که این بررسی‌ها و مقایسه‌ها بر روی مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق سالم و ترک‌دار مورد بحث قرار خواهد گرفت و همچنین یک مطالعه‌ی جامع در مورد اثرات پارامترهای مختلف بر روی مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق سالم و ترک‌دار، انجام می‌شود.

مباحث در نظر گرفته شده در این بخش از تحقیق به شرح زیر مرتب شده‌اند:

در مرحله اول، صحت تکنیک مرز فنردار فرضی مورد استفاده در این تحقیق مورد بررسی قرار خواهد گرفت و همچنین تاثیراتی را که مقادیر سختی فنرهای فرضی مورد استفاده در مرزها بر روی مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق سالم دارد مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت و نیز اثبات می‌شود که چگونه می‌توان با انتخاب مقادیر مناسب برای سختی فنرهای فرضی مورد استفاده در مرزها، می‌توان شرایط مرزی مختلف را به مسئله اعمال کرد.

در مرحله‌ی دوم، اعتبار سنجی همگرایی و دقت راه حل‌های دقیق ارائه شده با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی-ریتز بهبود یافته و همچنین تاثیراتی را که مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته بر روی همگرایی و دقت راه حل‌های ارائه شده در روش‌های ارائه شده دارد، مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت.

در مرحله سوم، مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق سالم با شرایط مرزی مختلف و اثراتی را که پارامترهای ابعادی بر روی مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق سالم می‌گذارند، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین برای بررسی کامل‌تر و جامع‌تر چند نمونه از شکل مودهای فرکانس‌های طبیعی بدست

آمده از حل دقیق را با شکل مودهای استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS مقایسه کرده و علاوه بر این تغییراتی را که در شکل مودهای فرکانس‌های طبیعی ورق‌های سالم رخ می‌دهد مورد تحلیل قرار قرار خواهد گرفت.

در مرحله چهارم، به طور کلی با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته تاثیرات پارامترهای هندسی بر مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق با شرایط مرزی مختلف مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت.

در مرحله نهایی، مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق یکسر گیردار سالم و ترک‌دار و نیز اثراتی را که تغییرات عمق نسبی ترک و شرایط ابعادی مختلف بر روی مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق ترک‌دار وارد می‌کند، مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهد گرفت. همچنین برای بررسی بهتر و جامع‌تر چند نمونه از شکل مودهای فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار بدست آمده از نرم افزار المان محدود ANSYS مورد بررسی قرار خواهد گرفت و تغییراتی را که در شکل مودهای فرکانس‌های طبیعی ورق‌های یکسر گیردار ترک‌دار رخ می‌دهد مورد تحلیل قرار خواهد گرفت. علاوه بر این با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته تاثیرات پارامترهای هندسی و فیزیکی بر مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق یکسر گیردار ترک‌دار مورد تجزیه و تحلیل گرفته خواهد شد.

۶-۲ خصوصیات مکانیکی و مشخصات ابعادی ورق

در این تحقیق به منظور بررسی روش‌های دقیق ارائه شده، یک ورق از جنس آلومینیوم را به عنوان مدل در نظر گرفته شده است. همچنین خصوصیات مکانیکی مواد و مشخصات ابعادی ورق به کار برده شده در روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی –ریتز بهبود یافته به شرح زیر در نظر گرفته شده است (جداول ۳-۱ و ۳-۲):

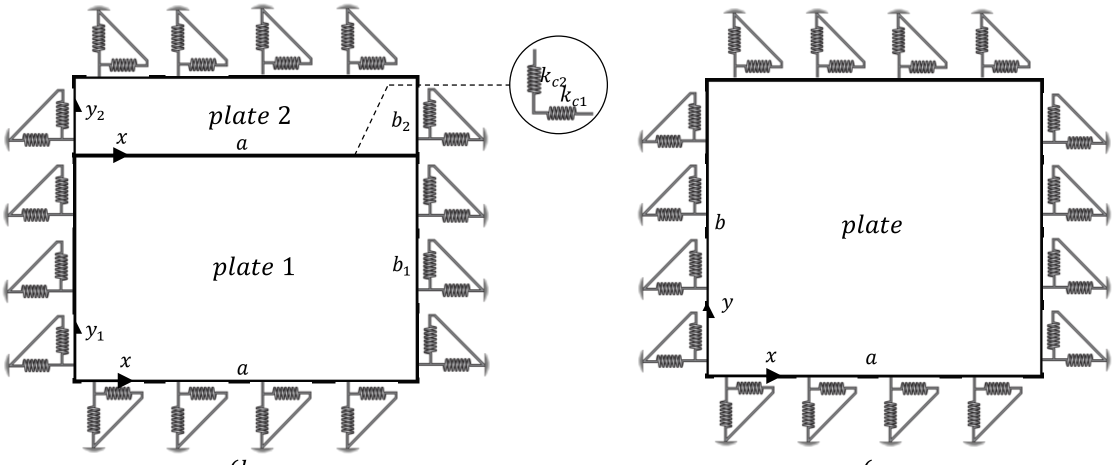
جدول۶-۱ خصوصیات مکانیکی مواد و مشخصات ابعادی ورق سالم به کار برده شده در روش سری فوریه بهبود یافته

μ	$\rho\ (kg/m^3)$	$E\ (GN/m^2)$	$h\ (mm)$	$b\ (mm)$	$a\ (mm)$
۰.۳	۲۷۸۰	۷۲	۶.۴۴۴	۱۵۰۰	۱۵۰۰

جدول۶-۲ خصوصیات مکانیکی مواد و مشخصات ابعادی ورق سالم به کار برده شده در روش رایلی – ریتز بهبود یافته

μ	$\rho\ (kg/m^3)$	$E\ (GN/m^2)$	$h\ (mm)$	$b_2\ (mm)$	$b_1\ (mm)$	$a_1\ (mm)$
۰.۳	۲۷۸۰	۷۲	۶.۴۴۴	۷۵۰	۷۵۰	۱۵۰۰

که مطابق با جداول بالا E، ρ، μ و h به ترتیب مدول یانگ، چگالی، نسبت پواسون و ضخامت ورق‌های مدل شده می‌باشند، همچنین a، b،b_1 و b_2 مطابق با شکل۴-۲ مشخصات ابعادی ورق‌های مدل شده در روش سری فوریه بهبود یافته (شکل۶-۱-a) و روش رایلی – ریتز بهبود یافته (شکل۶-۱-b) می‌باشند.



(b

(a

شکل۶-۱ مدلسازی ورق با استفاده از تکنیک مرز فنردار فرضی برای a) روش سری فوریه بهبود یافته b) روش رایلی – ریتز بهبود یافته

۶-۳ صحت سنجی تکنیک مرز فنردار فرضی

همان طور که ملاحظه شد، طی راه حل‌های روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی - ریتز بهبود یافته ارائه شده در این تحقیق برای شبیه سازی و اعمال شرایط مرزی مختلف موجود از تکنیک مرز فنردار فرضی بهره گرفته شد، که با انتخاب مقدار مناسب برای سختی فنرهای فرضی موجود در راستاهای نرمال و مماسی لبه‌ها می‌توان تمام شرایط مرزی مختلف را به مسئله اعمال کرد. بدین منظور در این بخش به عنوان نمونه با استفاده از راه حل روش سری فوریه بهبود یافته ارائه شده فرکانس‌های طبیعی برای یک ورق سالم با شرایط ابعادی $\frac{a}{b} = ۳$ را از حالتی که شرایط مرزی به صورت چهار لبه آزاد FFFF است تا حالتی که شرایط مرزی به صورت چهار لبه گیردار CCCC و یکسر گیردار CFFF می‌باشد استخراج شده است، و همچنین تغییرات هشت فرکانس طبیعی اول نسبت به تغییرات مقدار سختی فنرهای فرضی موجود در راستاهای نرمال و مماسی لبه‌ها مورد بررسی قرار گرفته شده است. لذا تغییرات مقدار سختی فنرهای فرضی موجود در راستاهای نرمال و مماسی لبه‌های ورق را از کمترین مقدار ۰ تا بیشترین مقدار $۱۰^{۲۰}$ در نظر گرفته شده است و نیز اثرات ناشی از تغییرات مقادیر سختی فنرهای فرضی را بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته شده است و همچنین نشان داده شده که چگونه می‌توان با انتخاب مقدار مناسب، شرایط مرزی مختلف را برای ورق مورد نظر شبیه سازی کرد. در ادامه نتایج حل دقیق را با نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS مقایسه و مورد تحلیل قرار گرفته شده است (جداول ۳-۳ و ۳-۴).

جدول۶-۳ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق با شرایط ابعادی ۳=$\frac{a}{b}$ نسبت به مقدار سختی فنرهای فرضی برای حالتی که شرایط مرزی FFFF به CCCC تغییر می‌کند

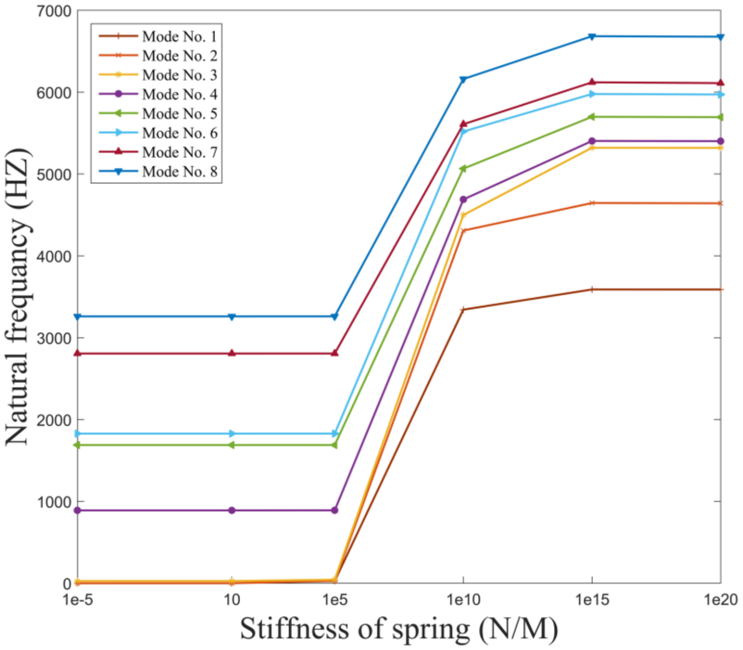
شماره مود								K	شرایط مرزی
۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱		
۳۲۵۶.۷۷۳	۲۸۰۲.۳۶۱	۱۸۲۵.۰۳۸	۱۶۸۸.۶۰۲	۸۸۹.۳۶۴	۱۴.۸۵	۰	۰	۰	**FFFF**
۳۲۵۹.۹۲۴	۲۸۰۶.۳۵	۱۸۲۷.۶۷۹	۱۶۸۸.۶۲۴	۸۹۰.۰۷۲	۲۶.۸۵۴	۰.۰۰۰۰۲۷۴	۰.۰۰۰۰۲۷۴	$۱۰^{-۵}$	
۳۲۵۹.۹۲۵	۲۸۰۶.۳۵	۱۸۲۷.۶۸	۱۶۸۸.۶۲۵	۸۹۰.۰۷۳	۲۶.۸۵۶	۰.۲۷۴۶	۰.۲۷۴۶	۱۰	
۳۲۶۰.۰۹۴	۲۸۰۶.۵۹۶	۱۸۲۸.۰۶۳	۱۶۸۸.۸۹۵	۸۹۰.۸۸۲	۴۳.۸۷۵	۲۷.۴۶	۲۷.۴۵۸	$۱۰^{۵}$	
۶۱۵۹.۲۶۴	۵۶۰۷.۳۰۷	۵۵۱۸.۳۴۹	۵۰۶۴.۹۴۴	۴۶۸۸.۱۶۶	۴۴۹۹.۰۷۵	۴۳۰۸.۰۲۲	۳۳۴۲.۱۴۸	$۱۰^{۱۰}$	
۶۶۸۲.۹۰۳	۶۱۱۹.۵۶۱	۵۹۷۶.۶۸۲	۵۶۹۸.۰۹۹	۵۴۰۲.۹۷۵	۵۳۱۹.۹۶۹	۴۶۴۵.۰۹۵	۳۵۸۸.۵۹۸	$۱۰^{۱۵}$	
۶۶۷۶.۳۷۱	۶۱۰۹.۶۰۲	۵۹۷۰.۶۱۴	۵۶۹۴.۰۱۵	۵۴۰۰.۹۱	۵۳۱۸.۶۴۳	۴۶۴۱.۴۱۳	۳۵۸۸.۱۳۳	$۱۰^{۲۰}$	**CCCC**
۳۲۵۶.۴	۲۸۰۲	۱۸۲۲.۴	۱۶۸۴.۸	۸۸۶.۹۵	۰	۰	۰		**ANSYS_FFFF**
۶۷۰۲.۲	۶۱۱۶.۳	۵۹۶۸.۵	۵۶۹۵.۴	۵۴۰۲.۹	۵۳۱۸.۳	۴۶۳۶.۴	۳۵۸۵.۲		**ANSYS_CCCC**

جدول۶-۴ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق با شرایط ابعادی ۳=$\frac{a}{b}$ نسبت به مقدار سختی فنرهای فرضی برای حالتی که شرایط مرزی FFFF به CFFF تغییر می‌کند

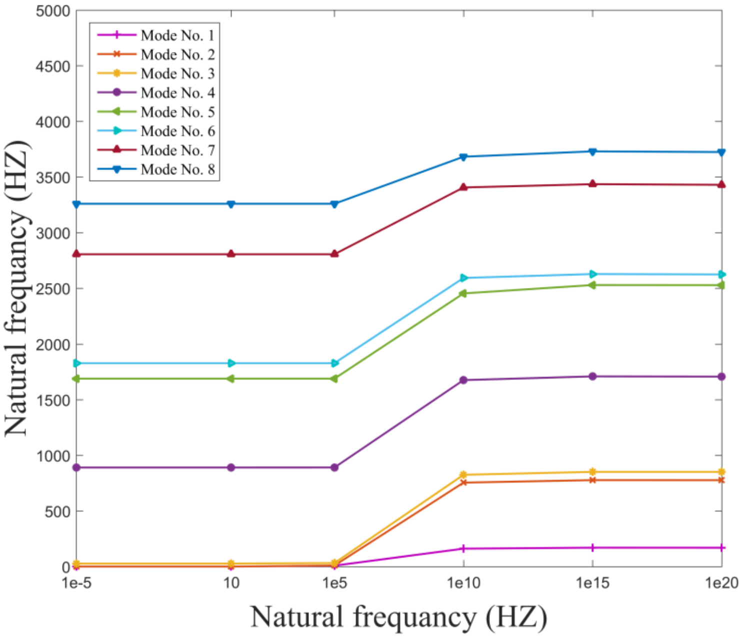
شماره مود								K	شرایط مرزی
۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱		
۳۲۵۶.۷۷۳	۲۸۰۲.۳۶۱	۱۸۲۵.۰۳۸	۱۶۸۸.۶۰۲	۸۸۹.۳۶۴	۱۴.۸۵	۰	۰	۰	**FFFF**
۳۲۵۹.۹۲۴	۲۸۰۶.۳۵	۱۸۲۷.۶۷۹	۱۶۸۸.۶۲۴	۸۹۰.۰۷۲	۲۶.۸۵۴	۰.۰۰۰۰۰۹۷	۰.۰۰۰۰۰۹۷	$۱۰^{-۵}$	
۳۲۵۹.۹۲۵	۲۸۰۶.۳۵	۱۸۲۷.۶۸	۱۶۸۸.۶۲۵	۸۹۰.۰۷۳	۲۶.۸۵۴	۰.۰۹۷۱	۰.۰۹۷۱	۱۰	
۳۲۵۹.۹۳۷	۲۸۰۶.۳۸۹	۱۸۲۷.۷۴۹	۱۶۸۸.۶۸	۸۹۰.۲۴۵	۳۱.۷۸۱	۹.۷۰۸	۸.۲۵۵	$۱۰^{۵}$	
۳۶۸۲.۵۶	۳۴۰۶.۴۴۸	۲۵۹۳.۴۲	۲۴۵۴.۵۹۴	۱۶۷۵.۵۶۸	۸۲۴.۸۶۶	۷۵۴.۵۲۹	۱۶۱.۱۴۳	$۱۰^{۱۰}$	
۳۷۳۰.۷۵	۳۴۳۵.۹۶۳	۲۶۲۸.۴۱۷	۲۵۲۹.۶۲۸	۱۷۰۸.۹	۸۵۱.۰۱۳	۷۷۶.۸۸۶	۱۶۹.۹۹۳	$۱۰^{۱۵}$	
۳۷۲۴.۶۵۱	۳۴۳۰.۳۹۵	۲۶۲۴.۸۵۶	۲۵۲۸.۹۱	۱۷۰۶.۸۹۳	۸۵۰.۹۲۶	۷۷۶.۴۱۸	۱۶۹.۵۷	$۱۰^{۲۰}$	**CFFF**
۳۲۵۶.۴	۲۸۰۲	۱۸۲۲.۴	۱۶۸۴.۸	۸۸۶.۹۵	۰	۰	۰		**ANSYS_FFFF**
۳۷۲۵.۷	۳۴۳۰.۷	۲۶۲۴.۳	۲۵۲۳.۶	۱۷۰۴.۳	۸۴۸.۸۱	۷۷۴.۶	۱۶۸.۸		**ANSYS_CFFF**

همانطور که در نتایج ارائه شده در جداول بالا نشان داده شده است، مشاهده می‌شود که اگر مقادیر سختی فنرهای فرضی در راستاهای نرمال و مماسی لبه‌ها را برای اعمال شرایط لبه آزاد برابر با صفر و برای اعمال شرایط لبه گیردار برابر $۱۰^{۲۰}$ در نظر گرفته شود، می‌توان شرایط مرزی چهار لبه آزاد و چهار لبه گیردار و یکسر گیردار را شبیه سازی کرد. همچنین با مقایسه نتایج استخراج شده از راه حل دقیق روش سری فوریه بهبود یافته با نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS ملاحظه می‌شود که به دقت بسیار مطلوبی دست پیدا شده است. علاوه بر این برای اثبات بهتر و جامع‌تر این موضوع، تغییرات مقادیر سختی فنرهای فرضی در راستاهای نرمال و مماسی لبه‌ها نسبت به تغییرات هشت

فرکانس طبیعی اول ورق برای دو شرایط مرزی چهار لبه گیردار CCCC و یکسر گیردار CFFF در زیر نشان داده شده است (شکل‌های ۳-۲ و ۳-۳).



شکل۶-۲ تغییرات مقادیر سختی فنرهای فرضی در راستای‌های نرمال و مماسی لبه‌ها بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق با ابعاد ۳= $\frac{a}{b}$ برای حالتی که شرایط مرزی FFFF به CCCC تغییر می‌کند



شکل۶-۳ تغییرات مقادیر سختی فنرهای فرضی در راستای‌های نرمال و مماسی لبه‌ها بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق با ابعاد ۳= $\frac{a}{b}$ برای حالتی که شرایط مرزی FFFF به CFFF تغییر می‌کند

با توجه به شکل‌های بالا و با بررسی و مقایسه اثرات حاصل از تغییرات مقادیر سختی فنرهای فرضی بر روی فرکانس‌های طبیعی ملاحظه می‌شود که مقدار تغییر فرکانس‌های طبیعی در هر یک از شکل مودهای ارائه شده از یک مقدار کمتر و یا از یک مقدار بیشتر تقریباً بدون تغییر باقی خواهند ماند، به این صورت که به طور مثال در شکل۶-۲ از مقدار سختی برابر با ۰ تا $۱۰^{۵}$ فرکانس طبیعی در شکل مود اول تقریبا بدون تغییر باقی خواهد ماند و ولی از مقدار سختی برابر $۱۰^{۵}$ تا $۱۰^{۱۵}$ فرکانس طبیعی دچار یک جهش می‌شود و از آن مقدار به بعد باز هم تغییرات فرکانس طبیعی تقریبا ثابت باقی می‌ماند. این جهش به این دلیل رخ می‌دهد که شرایط مرزی در لبه‌ها از شکل آزاد به سمت شرایط مرزی گیردار حرکت می‌کند و به تبع به دلیل افزایش سختی در لبه‌های ورق فرکانس طبیعی نیز افزایش پیدا خواهد کرد. لازم به ذکر است که، فرکانس طبیعی این قسمت‌های بدون تغییر تقریبا برابر با فرکانس طبیعی هر یک از شرایط مرزی در نظر گرفته شده می‌باشند. لذا می‌توان این نکته را بیان کرد که با در نظر گرفتن مقدار سختی کمتر از $۱۰^{۵}$ یا بیشتر از $۱۰^{۱۵}$ می‌توان به راحتی به ترتیب شرایط مرزی لبه گیردار یا لبه آزاد را برای ورق شبیه سازی کرد. بدین ترتیب در ادامه این تحقیق برای بالا رفتن دقت و اطمینان از نتایج بدست آمده برای شبیه سازی شرایط مرزی، مقادیر سختی فنرهای فرضی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

- روش سری فوریه بهبود یافته

$$FFFF:\begin{cases} k^{u}_{x0}=k^{u}_{x1}=k^{u}_{y0}=k^{u}_{y1}=0 \\ k^{v}_{x0}=k^{v}_{x1}=k^{v}_{y0}=k^{v}_{y1}=0 \end{cases}, \qquad CCCC:\begin{cases} k^{u}_{x0}=k^{u}_{x1}=k^{u}_{y0}=k^{u}_{y1}=10^{20} \\ k^{v}_{x0}=k^{v}_{x1}=k^{v}_{y0}=k^{v}_{y1}=10^{20} \end{cases}$$

- روش رایلی – ریتز بهبود یافته

$$FFFF:\begin{cases} k_{nx10}=k_{nx11}=k_{ny10}=k_{ny11}=0 \\ k_{nx20}=k_{nx21}=k_{ny20}=k_{ny21}=0 \\ k_{px10}=k_{px11}=k_{py10}=k_{py11}=0 \\ k_{px20}=k_{px21}=k_{py20}=k_{py21}=0 \end{cases}, \qquad CCCC:\begin{cases} k_{nx10}=k_{nx11}=k_{ny10}=k_{ny11}=10^{20} \\ k_{nx20}=k_{nx21}=k_{ny20}=k_{ny21}=10^{20} \\ k_{px10}=k_{px11}=k_{py10}=k_{py11}=10^{20} \\ k_{px20}=k_{px21}=k_{py20}=k_{py21}=10^{20} \end{cases}$$

علائم اختصاری شرایط مرزی به صورت لبه آزاد F و لبه گیردار C در نظر گرفته شده است.

۶-۴ اعتبار سنجی و بررسی همگرایی روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی-ریتز بهبود یافته

در این بخش به منظور بررسی و اعتبار سنجی دقت و همگرایی راه حل‌های دقیق ارائه شده با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی-ریتز بهبود یافته که با بهره گرفتن از مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته روند این راه حل‌ها طی شده است، به عنوان نمونه یک ورق سالم با شرایط ابعادی $\frac{a}{b}=۱$ و با دو نوع شرایط مرزی چهار لبه آزاد و چهار لبه گیردار در نظر گرفته شده است و فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم استخراج می‌شود.

از آنجایی که مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته به کار برده شده در روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی-ریتز بهبود یافته به واسطه‌ی تعداد جملات گسترش دهنده m و n روابط محاسبات عددی را گسترش می‌دهند، بدین منظور در این بخش باید در ابتدا به دنبال مقداری از تعداد جملات گسترش دهنده مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته بود، که بتوان به واسطه‌ی آن‌ها همان گونه که قبل در مورد دقت و همگرایی این روش‌های ارائه شده در این تحقیق صحبت شد، نتایجی با دقت بسیاری مطلوبی استخراج کرد و همچنین نشان داد که این نتایج در مقایسه با نتایج تئوری تحقیقاتی که توسط محققین دیگر در این زمینه انجام شده است و نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS، به دقت بسیاری مطلوبی دست پیدا کرد. علاوه بر این بتوان به مقدار مناسبی برای انتخاب تعداد جملات گسترش دهنده مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته به منظور استخراج دیگر نتایج این تحقیق دست یافت. لازم به ذکر است، برای استخراج نتایج با استفاده از نرم افزار المان محدود ANSYS، المان مورد استفاده در این نرم افزار را SHELL181 انتخاب خواهد شد.

بدین ترتیب در ادامه همانطور که در جداول ۳-۵ و ۳-۶ نشان داده شده است، هشت فرکانس طبیعی اول ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق برای تعداد جملات گسترش دهنده مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته مختلفی بدست آورده شده است. همچنین نتایج استخراج شده با استفاده از روش سری فوریه بهبود

یافته و روش رایلی-ریتز بهبود یافته با نتایج تئوری استخراج شده‌ای که توسط محققین در دیگر مراجع ارائه شده است و نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS مقایسه و مورد بررسی قرار گرفته شده است.

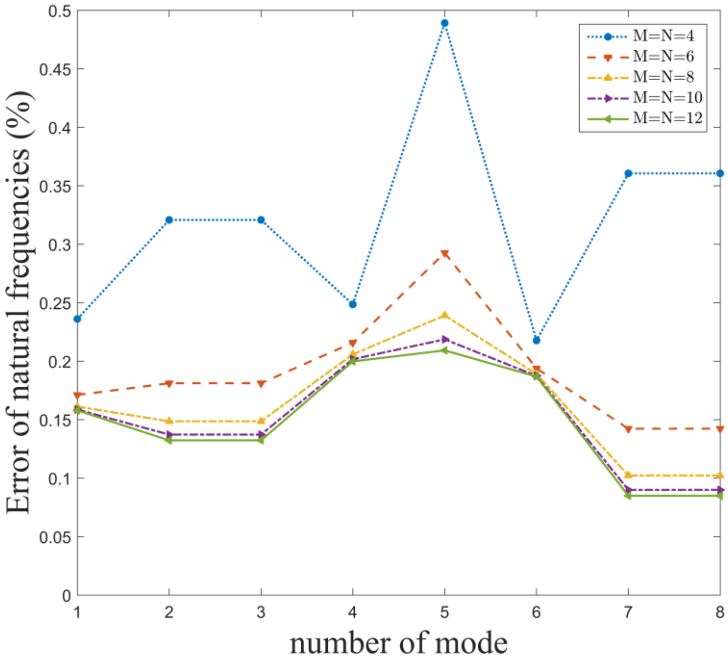
جدول۶-۵ فرکانس طبیعی (Hz) ورق سالم با شرایط ابعادی $\frac{a}{b}=$۱ و شرایط مرزی FFFF

شماره مود								**M × N**	**روش ها**
۸	**۷**	**۶**	**۵**	**۴**	**۳**	**۲**	**۱**		
۲۱۱۳.۳۹۳	۲۱۱۳.۳۹۳	۱۹۵۴.۷۴۶	۱۶۹۵.۹۵۵	۱۴۸۸.۵۹	۱۴۰۱.۷۸۲	۱۴۰۱.۷۸۲	۱۳۱۴.۵۹۶	**۴×۴**	**روش سری فوریه بهبود یافته**
۲۱۰۸.۷۹۶	۲۱۰۸.۷۹۶	۱۹۵۴.۲۸	۱۶۹۲.۶۳۸	۱۴۸۸.۱۰۵	۱۳۹۹.۸۳۱	۱۳۹۹.۸۳۱	۱۳۱۳.۷۴۴	**۶×۶**	
۲۱۰۷.۹۵۳	۲۱۰۷.۹۵۳	۱۹۵۴.۱۸۶	۱۶۹۱.۷۳۴	۱۴۸۷.۹۵۶	۱۳۹۹.۳۷۶	۱۳۹۹.۳۷۶	۱۳۱۳.۶۱۳	**۸×۸**	
۲۱۰۷.۶۹۴	۲۱۰۷.۶۹۴	۱۹۵۴.۱۵۶	۱۶۹۱.۳۹	۱۴۸۷.۸۹۵	۱۳۹۹.۲۱۷	۱۳۹۹.۲۱۷	۱۳۱۳.۵۸۱	**۱۰×۱۰**	
۲۱۰۷.۵۸۸	۲۱۰۷.۵۸۸	۱۹۵۴.۱۴۴	۱۶۹۱.۲۳۱	۱۴۸۷.۸۶۷	۱۳۹۹.۱۴۸	۱۳۹۹.۱۴۸	۱۳۱۳.۵۷۱	**۱۲×۱۲**	
۲۶۴۳.۵۵۲	۲۶۴۳.۵۵۲	۲۷۰۴.۱۸۳	۲۲۴۳.۳۳۸	۱۶۳۴.۹۰۳	۱۵۴۵.۱۲۴	۱۵۴۵.۱۲۴	۱۴۲۳.۲۵۷	**۶×۶**	**روش رایلی ریتز بهبود یافته**
۲۱۲۳.۶۵۷	۲۱۲۳.۶۵۷	۱۹۶۱.۷۷۴	۱۷۰۲.۱۳	۱۴۹۴.۳۵۹	۱۴۱۱.۴۲۶	۱۴۱۱.۴۲۶	۱۳۲۲.۶۶۱	**۸×۸**	
۲۱۱۰.۰۹۶	۲۱۱۰.۰۹۶	۱۹۵۳.۳۲۸	۱۶۹۰.۸۸۹	۱۴۸۶.۶۵۲	۱۴۰۰.۵۵۶	۱۴۰۰.۵۵۶	۱۳۱۴.۰۷	**۱۰×۱۰**	
۲۱۰۹.۶۱۱	۲۱۰۹.۶۱۱	۱۹۵۳.۲۷	۱۶۹۰.۳۵	۱۴۸۶.۲۶۶	۱۳۹۹.۶۴۷	۱۳۹۹.۶۴۷	۱۳۱۳.۲۴۴	**۱۲×۱۲**	
۲۱۰۹.۴۴۳	۲۱۰۹.۴۴۳	۱۹۵۳.۲۱۱	۱۶۸۹.۹۲۷	۱۴۸۶.۱۴۷	۱۳۹۹.۳۱۲	۱۳۹۹.۳۱۲	۱۳۱۳.۱۵۲	**۱۴×۱۴**	
۲۱۰۷.۹۵۷	۲۱۰۷.۹۵۷	۱۹۵۵.۱۲۴	۱۶۹۲.۴۷۸	۱۴۸۹.۲۶۸	۱۴۰۰.۳۹۸	۱۴۰۰.۳۹۸	۱۳۱۳.۷۹۴		**مرجع [۸۵]**
۲۱۰۷.۹۵۷	۲۱۰۷.۹۵۷	۱۹۵۳.۹۹۲	۱۶۹۱.۳۴۷	۱۴۸۷.۵۷	۱۳۹۹.۲۶۷	۱۳۹۹.۲۶۷	۱۳۱۳.۲۲۸		**مرجع [۲۸]**
۲۱۰۷.۵۰۴	۲۱۰۷.۵۰۴	۱۹۵۴.۱۰۵	۱۶۹۱.۰۰۷	۱۴۸۷.۷۹۶	۱۳۹۹.۰۴	۱۳۹۹.۰۴	۱۳۱۳.۵۶۷		**مرجع [۸۶]**
۲۱۰۵.۸	۲۱۰۵.۸	۱۹۵۰.۵	۱۶۸۷.۷	۱۴۸۴.۹	۱۳۹۷.۳	۱۳۹۷.۳	۱۳۱۱.۵		**ANSYS**

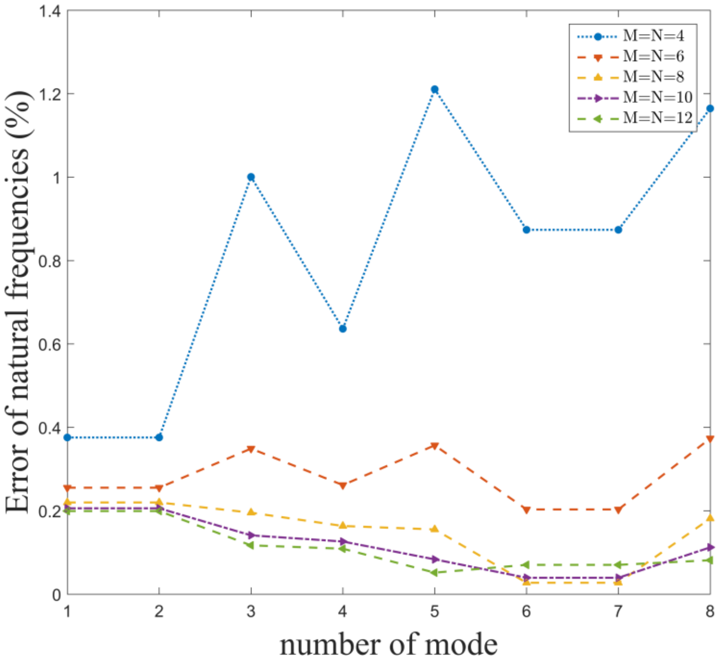
جدول۶-۶ فرکانس طبیعی (Hz) ورق سالم با شرایط ابعادی $\frac{a}{b}=$۱ و شرایط مرزی CCCC

شماره مود								**M × N**	**روش ها**
۸	**۷**	**۶**	**۵**	**۴**	**۳**	**۲**	**۱**		
۳۸۳۹.۶	۳۳۶۹.۵۸۱	۳۳۶۹.۵۸۱	۳۳۵۶.۱۴۸	۲۹۵۱.۵۶	۲۴۱۹.۱۶۶	۲۰۱۶.۱۴۵	۲۰۱۶.۱۴۵	**۴×۴**	**روش سری فوریه بهبود یافته**
۳۸۰۹.۵۷۳	۳۳۴۷.۱۸۶	۳۳۴۷.۱۸۶	۳۳۲۷.۸۳۳	۲۹۴۰.۵۷۳	۲۴۰۳.۵۶	۲۰۱۳.۷۲۷	۲۰۱۳.۷۲۷	**۶×۶**	
۳۸۰۲.۲۸۳	۳۳۴۱.۳۱۶	۳۳۴۱.۳۱۶	۳۳۲۱.۱۴۷	۲۹۳۷.۶۹۴	۲۳۹۹.۸۸	۲۰۱۳.۰۱۶	۲۰۱۳.۰۱۶	**۸×۸**	
۳۷۹۹.۶۶	۳۳۵۹.۰۸۶	۳۳۳۹.۰۸۶	۳۳۱۸.۷۶۸	۲۹۳۶.۶۰۲	۲۳۹۸.۵۷۸	۲۰۱۲.۷۳۶	۲۰۱۲.۷۳۶	**۱۰×۱۰**	
۳۷۹۸.۴۹	۳۳۳۸.۰۵۲	۳۳۳۸.۰۵۲	۳۳۱۷.۷۱۳	۲۹۳۶.۰۹۷	۲۳۹۸.۰۰۴	۲۰۱۲.۶۰۳	۲۰۱۲.۶۰۳	**۱۲×۱۲**	
۵۹۰۷.۱۸	۴۶۶۱.۰۸۴	۴۶۶۱.۰۸۴	۵۱۳۷.۲۴	۳۲۸۷.۸۳۷	۲۵۰۳.۴۹۴	۲۳۰۱.۴۴	۲۳۰۱.۴۴	**۶×۶**	**روش رایلی ریتز بهبود یافته**
۳۸۳۵.۳۵	۳۳۷۲.۴۴۱	۳۳۷۲.۴۴۱	۳۳۵۱.۲۴۲	۲۹۵۶.۶۱۲	۲۴۰۲.۴۸۱	۲۰۲۲.۰۶۴	۲۰۲۲.۰۶۴	**۸×۸**	
۳۸۰۲.۶۶۴	۳۳۴۸.۴۱	۳۳۴۸.۴۱	۳۳۲۲.۴۰۶	۲۹۳۹.۲۴۷	۲۳۹۸.۸۴۱	۲۰۱۳.۷۲۸	۲۰۱۳.۷۲۸	**۱۰×۱۰**	
۳۷۹۸.۸۴۲	۳۳۴۵.۷۴۱	۳۳۴۵.۷۴۱	۳۳۱۹.۰۰۴	۲۹۳۷.۰۰۶	۲۳۹۷.۴۳۲	۲۰۱۲.۲۰۷	۲۰۱۲.۲۰۷	**۱۲×۱۲**	
۳۷۹۸.۵۷۷	۳۳۴۴.۴۰۵	۳۳۴۴.۴۰۵	۳۳۱۸.۸۰۵	۲۹۳۶.۵۷۵	۲۳۹۷.۳۸۴	۲۰۱۱.۸۰۶	۲۰۱۱.۸۰۶	**۱۴×۱۴**	
۳۷۶۹.۳۰۳	۳۳۶۷.۴۱	۳۳۶۷.۴۱	۳۳۰۹.۱۰۷	۲۹۳۶.۰۸۳	۲۴۰۰.۶۰۳	۲۰۱۰.۰۳۱	۲۰۱۰.۰۳۱		**مرجع [۸۵]**
۳۷۹۷.۰۴	۳۳۳۶.۲۷۷	۳۳۳۶.۲۷۷	۳۳۱۶.۴۶۶	۲۹۳۴.۹۵	۲۳۹۷.۲۰۶	۲۰۱۲.۲۹۵	۲۰۱۲.۲۹۵		**مرجع [۲۸]**
۳۷۹۶.۹۲۶	۳۳۳۶.۴۴۷	۳۳۳۶.۴۴۷	۳۳۱۶.۲۳۹	۲۹۳۵.۲۹	۲۳۹۷.۲۰۶	۲۰۱۲.۴۰۸	۲۰۱۲.۴۰۸		**مرجع [۸۶]**
-	-	۳۳۳۶.۵۰۴	۳۳۱۶.۲۴	۲۹۳۵.۳۴۷	۲۳۹۷.۲۰۶	۲۰۱۲.۴۰۸	۲۰۱۲.۴۰۸		**مرجع [۴۷]**
۳۷۹۵.۴	۳۳۴۰.۴	۳۳۴۰.۴	۳۳۱۶	۲۹۳۲.۹	۲۳۹۵.۲	۲۰۰۸.۶	۲۰۰۸.۶		**ANSYS**

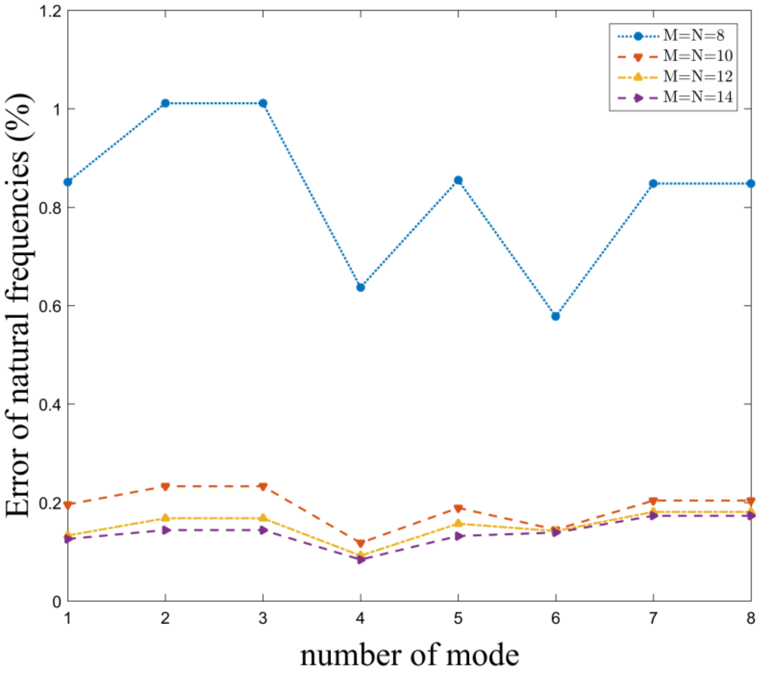
با توجه به نتایج ارائه داده شده در جداول بالا مشاهده می‌شود که صحت همگرایی سریع راه حل‌های دقیق ارائه شده با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی-ریتز بهبود یافته کاملاً مشهود است و همچنین از نتایج بدست آمده می‌توان نتیجه گرفت که، در روش سری فوریه بهبود یافته در مقدار جملات گسترش دهنده مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته ۱۲×۱۲ و روش رایلی-ریتز بهبود یافته در مقدار جملات گسترش دهنده مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته ۱۴×۱۴ می‌توان به نتایج قابل قبولی دست یافت. در ادامه برای اثبات و اعتبار سنجی بهتر و جامع‌تر دقت و همگرایی راه حل‌های دقیق ارائه شده، نتایج استخراج شده در این تحقیق با نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته شده است. برای این منظور تغییرات خطای نسبی در هر مرحله از انتخاب تعداد جملات گسترش دهنده مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته را در شماره مودهای اول تا هشتم مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته شده است (شکل‌های ۳-۴، ۳-۵، ۳-۶ و ۳-۷).



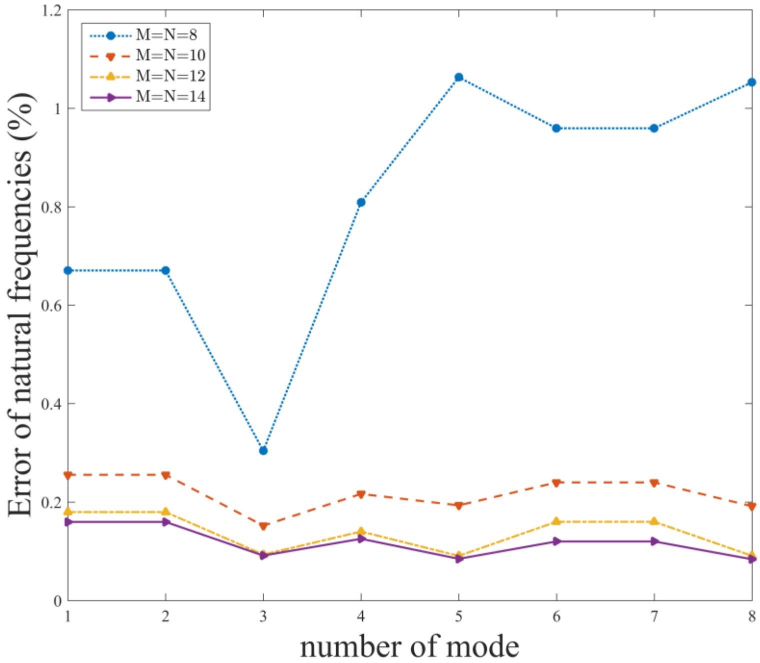
شکل۶-۴ بررسی دقت و همگرایی فرکانس‌های طبیعی (Hz) استخراج شده با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته برای ورق سالم با شرایط ابعادی $\frac{a}{b}=۱$ و شرایط مرزی FFFF بر اساس تعداد جملات گسترش دهنده M = N = ۴،۶،۸،۱۰،۱۲



شکل۶-۵ بررسی دقت و همگرایی فرکانس‌های طبیعی (Hz) استخراج شده با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته برای ورق سالم با شرایط ابعادی $\frac{a}{b}=۱$ و شرایط مرزی CCCC بر اساس تعداد جملات گسترش دهنده M = N = ۴،۶،۸،۱۰،۱۲



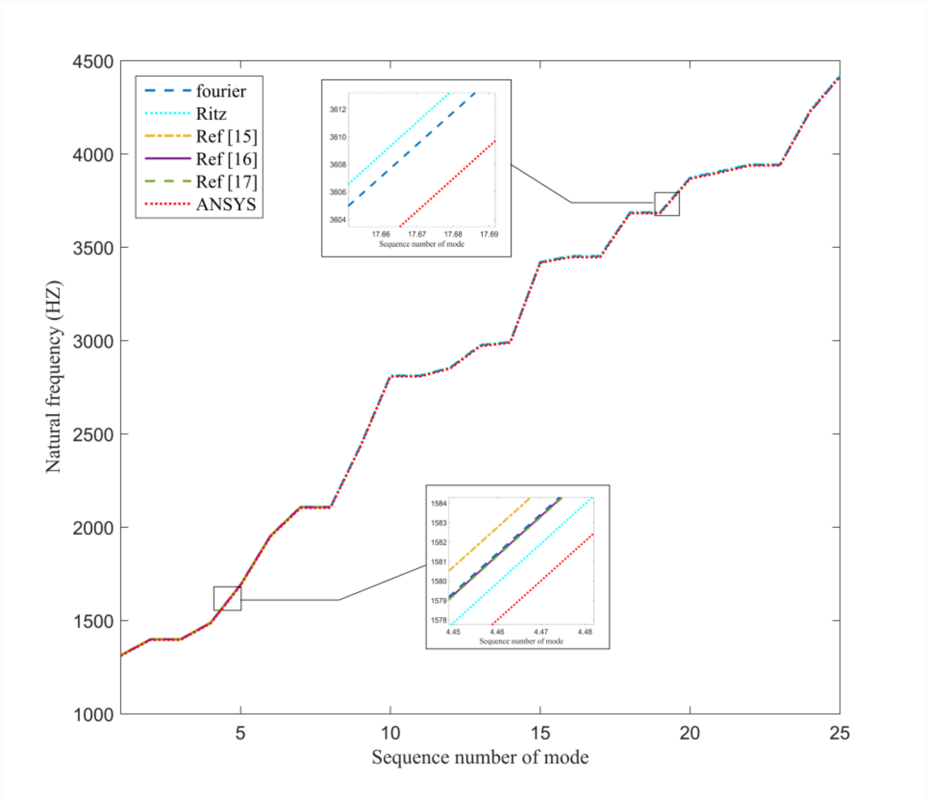
شکل۶-۶ بررسی دقت و همگرایی فرکانس‌های طبیعی (Hz) استخراج شده با استفاده از ر روش رایلی-ریتز بهبود یافته برای ورق سالم با شرایط ابعادی $\frac{a}{b}=۱$ و شرایط مرزی FFFF بر اساس تعداد جملات گسترش دهنده M = N = ۸،۱۰،۱۲،۱۴



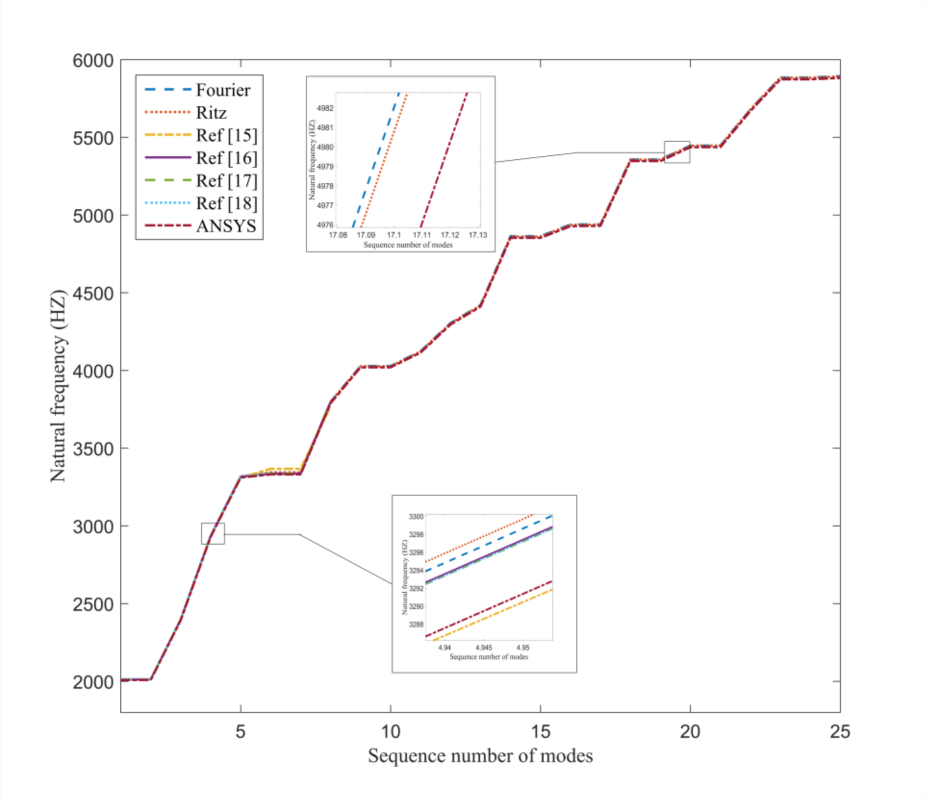
شکل۶-۷ بررسی دقت و همگرایی فرکانس‌های طبیعی (Hz) استخراج شده با استفاده از ر روش رایلی-ریتز بهبود یافته برای ورق سالم با شرایط ابعادی $\frac{a}{b}=$ ۱ و شرایط مرزی CCCC بر اساس تعداد جملات گسترش دهنده M = N = ۸،۱۰،۱۲،۱۴

همانطور که در نمودارهای بالا مشاهده می‌شود، مقدار خطای نسبی بین فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد ورق سالم استخراج شده از روش سری فوریه بهبود یافته نسبت به نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS در مقدار جملات گسترش دهنده $M = N =$ ۱۲ شکل۶-۴ در بدترین حالت به مقدار (٪ ۰.۲۰۹۲)، و در بهترین حالت به مقدار (٪ ۰.۰۸۵)، و در شکل۶-۵ بدترین حالت به مقدار (٪ ۰.۱۹۹۳) و در بهترین حالت به مقدار (٪ ۰.۰۵۱۶) می‌باشند، و همچنین مقدار خطای نسبی بین فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد ورق سالم استخراج شده از روش رایلی-ریتز بهبود یافته نسبت به نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS در مقدار جملات گسترش دهنده ۱۴ $M = N =$ شکل۶-۶ در بدترین حالت به مقدار (٪ ۰.۱۷۳) و در بهترین حالت به مقدار (٪ ۰.۰۸۴) و شکل۶-۷ در بدترین حالت به مقدار (٪ ۰.۱۵۹۶) و در بهترین حالت به مقدار (٪ ۰.۰۸۳۷) می‌باشند.

علاوه بر این به منظور اینکه نتایج استخراج شده از روش‌های ارائه شده در این تحقیق را به شکلی جامع‌تر و کامل‌تر بررسی بشود، فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد ورق استخراج شده از روش‌های ارائه شده در این تحقیق را با نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS و نتایج تئوری استخراج شده در دیگر مراجع را تا شماره مودهای بالاتر مورد بررسی قرار گرفته شده است، و نیز نتیجه این بررسی در قالب دو نمودار نشان داده شده است (شکل‌های ۳-۸ و ۳-۹). همانطور که ملاحظه می‌شود با وجود اینکه در شماره مودهای بالاتر خطای نسبی اندکی افزایش پیدا می‌کند ولی با این حال نتایج استخراج شده از روش‌ها، نشان دهنده‌ی دقتی مطلوب و قابل قبول می‌باشند.



شکل۶-۸ مقایسه فرکانس‌های طبیعی (Hz) ارتعاشات آزاد ورق سالم استخراج شده از روش‌های ارائه شده با نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS و نتایج تئوری استخراج شده در مراجع [۲۸; ۸۵; ۸۶] با شرایط ابعادی $\frac{a}{b} = ۱$ و شرایط مرزی FFFF



شکل۶-۹ مقایسه فرکانس‌های طبیعی (Hz) ارتعاشات آزاد ورق سالم استخراج شده از روش‌های ارائه شده با نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS و نتایج تئوری استخراج شده در مراجع [۲۸; ۴۷; ۸۵; ۸۶] با شرایط ابعادی $\frac{a}{b} = ۱$ و شرایط مرزی CCCC

بررسی‌ها و تحلیل‌های انجام شده کاملا گویای این موضوع هستند که، دقت و سرعت همگرایی در هر یک از نتایج استخراج شده با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی - ریتز بهبود یافته کاملاً مطلوب و از دقت بسیار خوبی برخوردار می‌باشند و به تبع، برای استخراج دیگر نتایج مربوط به ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق در این تحقیق کافیست که نتایج استخراج شده با مقدار جملات گسترش دهنده مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته M = N =۱۲ برای روش سری فوریه بهبود یافته و M = N =۱۴ برای روش رایلی - ریتز بهبود یافته استخراج بشود.

لازم به ذکر است که در این تحقیق برای شرایط مرزی FFFF به دلیل اینکه مقادیر فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم برابر با صفر می‌باشند، لذا از لحاظ کردن این این مقادیر صرف نظر می‌کنیم.

۶-۵ استخراج مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق سالم با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی-ریتز بهبود یافته

در این بخش به منظور استخراج مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق سالم، از دو روشی که در این تحقیق ارائه شده است بهره گرفته می‌شود و همچنین نتایج استخراج شده با نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS و نتایج تئوری استخراج شده دیگر محققینی که در این زمینه کار کرده‌اند، مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت. لازم به ذکر است که، برای روش سری فوریه بهبود یافته (روش اول) از خصوصیات مکانیکی مواد و مشخصات ابعادی ورق در نظر گرفته شده در جدول۶-۱ و همچنین برای روش رایلی – ریتز بهبود یافته (روش دوم) از خصوصیات مکانیکی مواد و مشخصات ابعادی ورق در نظر گرفته شده در جدول۶-۲ استفاده خواهد شد.

جداول ۳-۷، ۳-۸ و ۳-۹ به ترتیب نشان دهنده‌ی فرکانس‌های طبیعی استخراج شده یک ورق با شرایط ابعادی $\frac{a}{b}$=۱،۱.۵،۲،۳ و شرایط مرزی FFFF، CCCC و CFFF می‌باشند. همانطور که در بخش ۶-۴ دقت و همگرایی روش‌های ارائه شده در این تحقیق مورد بررسی و تایید قرار گرفت شد، مشاهده می‌شود که در این بخش نیز دقت و همگرایی نتایج استخراج شده کاملاً مشهود می‌باشند. به صورتی که با بررسی و مقایسه‌ی مقدار خطاهای نسبی که بین نتایج استخراج شده از روش‌های ارائه شده و نتایج استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS و همچنین نتایج تئوری دیگر مراجع انجام گرفته شده، مقادیر خطاهای نسبی به صورتی می‌باشند که می‌توان گفت، نتایج استخراج شده از دقت مطلوبی برخوردار هستند. با اندکی تأمل در نتایج نشان داده شده در جداول زیر می‌توان به این نکته دست پیدا کرد که با افزایش نسبت ابعادی $\frac{a}{b}$ فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد ورق سالم با شرایط مرزی CCCC به طور کلی سیر صعودی و فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد ورق با شرایط مرزی FFFF و CFFF به طور کلی سیر نزولی را طی می‌کنند.

جدول۶-۷ فرکانس‌های طبیعی (Hz) استخراج شده با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی – ریتز بهبود یافته برای ورق سالم با شرایط مرزی FFFF و شرایط ابعادی ۱، ۱.۵، ۲، ۳ $\frac{a}{b}=\frac{a}{b_1+b_2}$

درصد خطا(%)	ANSYS	درصد خطا(%)	مرجع [۲۸]	درصد خطا(%)	مرجع [۸۵]	روش اول		درصد خطا(%)	ANSYS	روش دوم	شماره مود
						M = N =۱۲				**M = N =۱۴**	$\frac{a}{b}=$ ۱
-۰.۱۵۸	۱۳۱۳.۵	-۰.۰۲۶۱	۱۳۱۳.۲۲۸	۰.۰۱۷	۱۳۱۳.۷۹۴	۱۳۱۳.۵۷۱		-۰.۱۲۶	۱۳۱۳.۵	۱۳۱۳.۱۵۲	۱
-۰.۱۳۲	۱۳۹۷.۳	۰.۰۰۸۶	۱۳۹۹.۲۶۷	۰.۰۸۹۳	۱۴۰۰.۳۹۸	۱۳۹۹.۱۴۷		-۰.۱۴۴	۱۳۹۷.۳	۱۳۹۹.۳۱۲	۲
-۰.۱۳۲	۱۳۹۷.۳	۰.۰۰۸۶	۱۳۹۹.۲۶۷	۰.۰۸۹۳	۱۴۰۰.۳۹۸	۱۳۹۹.۱۴۷		-۰.۱۴۴	۱۳۹۷.۳	۱۳۹۹.۳۱۲	۳
-۰.۱۹۹	۱۴۸۴.۹	-۰.۰۰۲	۱۴۸۷.۵۷	۰.۰۹۴۱	۱۴۸۹.۲۶۸	۱۴۸۷.۸۶۷		-۰.۰۸۴	۱۴۸۴.۹	۱۴۸۶.۱۴۷	۴
-۰.۲۱	۱۶۸۷.۷	۰.۰۰۶۹	۱۶۹۱.۳۴۷	۰.۰۷۳۷	۱۶۹۲.۴۷۸	۱۶۹۱.۲۳۱		-۰.۱۳۲	۱۶۸۷.۷	۱۶۸۹.۹۲۷	۵
-۰.۱۸۷	۱۹۵۰.۵	-۰.۰۰۷۸	۱۹۵۳.۹۹۲	۰.۰۵۰۱	۱۹۵۵.۱۲۴	۱۹۵۴.۱۴۴		-۰.۱۳۹	۱۹۵۰.۵	۱۹۵۳.۲۱۱	۶
-۰.۰۸۵	۲۱۰۵.۸	۰.۰۱۷۵	۲۱۰۷.۹۵۷	۰.۰۱۷۵	۲۱۰۷.۹۵۷	۲۱۰۷.۵۸۸		-۰.۱۷۳	۲۱۰۵.۸	۲۱۰۹.۴۴۳	۷
-۰.۰۸۵	۲۱۰۵.۸	۰.۰۱۷۵	۲۱۰۷.۹۵۷	۰.۰۱۷۵	۲۱۰۷.۹۵۷	۲۱۰۷.۵۸۸		-۰.۱۷۳	۲۱۰۵.۸	۲۱۰۹.۴۴۳	۸

درصد خطا(%)	ANSYS	روش اول		درصد خطا(%)	ANSYS	روش دوم	شماره مود
		M = N =۱۲				**M = N =۱۴**	$\frac{a}{b}=$ ۱.۵
-۰.۲۱	۱۲۴۰.۸	۱۲۴۳.۳۸۱		-۰.۰۷	۱۲۴۰.۸	۱۲۴۱.۶۶۸	۱
-۰.۱۹	۱۶۲۷.۸	۱۶۳۰.۹۰۱		-۰.۱۰۵	۱۶۲۷.۸	۱۶۲۹.۵۱	۲
-۰.۲۲۵	۱۶۴۶.۲	۱۶۴۹.۹۰۲		-۰.۱۰۱	۱۶۴۶.۲	۱۶۴۷.۸۶۳	۳
-۰.۱۸۷	۲۲۲۴.۹	۲۲۲۹.۰۷۲		-۰.۰۹۲	۲۲۲۴.۹	۲۲۲۶.۹۴۷	۴
-۰.۱۵	۲۲۴۴.۵	۲۲۴۷.۸۵۹		-۰.۱۶۲	۲۲۴۴.۵	۲۲۴۸.۱۳۶	۵
-۰.۱۵	۲۴۷۶.۰	۲۴۷۹.۴۸۹		۰.۰۳۵	۲۴۷۶.۰	۲۴۷۵.۱۳۳	۶
-۰.۱۹۳	۲۵۵۹.۲	۲۵۶۴.۱۴۳		۰.۱۴۱	۲۵۵۹.۲	۲۵۵۵.۵۹۱	۷
-۰.۰۴۷	۲۵۹۸.۶	۲۵۹۹.۸۱		۰.۱۹۸	۲۵۹۸.۶	۲۵۹۳.۴۵۵	۸

درصد خطا(%)	ANSYS	درصد خطا(%)	مرجع [۲۸]	درصد خطا(%)	مرجع [۸۵]	روش اول		درصد خطا(%)	ANSYS	روش دوم	شماره مود
						M = N =۱۲				**M = N =۱۴**	$\frac{a}{b}=$ ۲
-۰.۲۱۴	۱۱۰۳.۷	۰.۱۰۱	۱۱۰۷.۱۸۷	۰.۲۰۴	۱۱۰۸.۳۱۹	۱۱۰۶.۰۵۹		-۰.۲۴۱	۱۱۰۳.۷	۱۱۰۶.۳۶	۱
-۰.۲۲۵	۱۶۷۲.۲	-۰.۰۲۹	۱۶۷۵.۴۹۷	۰.۰۷۳	۱۶۷۷.۱۹۵	۱۶۵۷.۹۷۱		-۰.۰۸۴	۱۶۷۲.۲	۱۶۷۳.۶۰۵	۲
-۰.۱۶۱	۱۸۴۷.۰	-۰.۰۰۷	۱۸۴۹.۸۴	۰.۰۵۴	۱۸۵۰.۹۷۲	۱۸۴۹.۹۷		-۰.۰۷۱	۱۸۴۷.۰	۱۸۴۸.۳۱۱	۳
-۰.۰۴۷	۲۶۷۳.۵	۰.۰۱۴	۲۶۷۵.۱۳۵	۰.۰۵۴	۲۶۷۶.۲۶۷	۲۶۷۴.۷۶۹		-۰.۱۶۱	۲۶۷۳.۵	۲۶۷۷.۸۰۴	۴
-۰.۱۱۲	۲۷۰۵.۶	-۰.۰۲۴	۲۷۰۷.۹۶۵	۰.۰۱۷	۲۷۰۹.۰۹۸	۲۷۰۸.۶۱۹		-۰.۰۸۱	۲۷۰۵.۶	۲۷۰۷.۷۹۱	۵
-۰.۰۹۷	۲۹۴۳.۴	۰.۰۵۸	۲۹۴۷.۹۷	۰.۰۵۸	۲۹۴۷.۹۷	۲۹۴۶.۲۴۴		-۰.۱۴	۲۹۴۳.۴	۲۹۴۷.۵۲۱	۶
-۰.۱۶۷	۲۹۷۱.۰	۰.۰۱	۲۹۷۶.۲۷۲	۰.۰۳	۲۹۷۶.۸۳۸	۲۹۷۵.۹۶۷		-۰.۱۶۸	۲۹۷۱.۰	۲۹۷۵.۹۹۱	۷
-۰.۱۰۳	۳۰۳۴.۶	۰.۰۶۴	۳۰۳۹.۶۷	۰.۰۴۶	۳۰۳۹.۱۰۳	۳۰۳۷.۷۱۵		۰.۰۸۷	۳۰۳۴.۶	۳۰۳۱.۹۶	۸

درصد خطا(%)	ANSYS	روش اول		درصد خطا(%)	ANSYS	روش دوم	شماره مود
		M = N =۱۲				**M = N =۱۴**	$\frac{a}{b}=$ ۳
-۰.۲۷۲	۸۸۶.۹۵	۸۸۹.۳۶۴		-۰.۱۱۶	۸۸۶.۹۵	۸۸۷.۹۷۹	۱
-۰.۲۲۶	۱۶۸۴.۸	۱۶۸۸.۶۰۲		-۰.۳۳۷	۱۶۸۴.۸	۱۶۹۰.۴۷۸	۲
-۰.۱۴۵	۱۸۲۲.۴	۱۸۲۵.۰۳۸		-۰.۰۹۶	۱۸۲۲.۴	۱۸۲۴.۱۶۸	۳
-۰.۰۱۳	۲۸۰۲.۰	۲۸۰۲.۳۶۱		-۰.۱۶۱	۲۸۰۲.۰	۲۸۰۴.۹۰۱	۴
-۰.۰۱۱	۳۲۵۶.۴	۳۲۵۶.۷۷۳		-۰.۰۴	۳۲۵۶.۴	۳۲۵۷.۷۰۲	۵
-۰.۱۵۴	۳۲۹۴.۹	۳۲۹۹.۹۶۷		۰.۳۸۷	۳۲۹۴.۹	۳۲۸۲.۱۴۸	۶
۰.۱۱۸	۴۰۱۳.۵	۴۰۰۸.۷۴۶		۰.۰۵۶	۴۰۱۳.۵	۴۰۱۱.۲۵۲	۷
۰.۱۳۶	۴۰۹۲.۹	۴۰۸۷.۳۴۸		-۰.۲۰۵	۴۰۹۲.۹	۴۱۰۱.۲۹	۸

روش اول: روش سری فوریه بهبود یافته   روش دوم: روش رایلی - ریتز بهبود یافته

جدول۶-۸ فرکانس‌های طبیعی (Hz) استخراج شده با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی – ریتز بهبود یافته برای ورق سالم با شرایط مرزیCCCC و شرایط ابعادی ۱،۱.۵،۲،۳ $\frac{a}{b} = \frac{a}{b_1+b_2}$

شماره مود	روش دوم	ANSYS	درصد خطا(%)		روش اول	مرجع [۸۵]	درصد خطا(%)	مرجع [۲۸]	درصد خطا(%)	ANSYS	درصد خطا(%)
$\frac{a}{b}=$۱	M = N =۱۴				M = N =۱۲						
۱	۲۰۱۱.۸۰۶	۲۰۰۸.۶	-۰.۱۵۹		۲۰۱۲.۶۰۳	۲۰۱۰.۰۳۱	-۰.۱۱۴	۲۰۱۲.۲۹۵	-۰.۰۱۵	۲۰۰۸.۶	-۰.۲
۲	۲۰۱۱.۸۰۶	۲۰۰۸.۶	-۰.۱۵۹		۲۰۱۲.۶۰۳	۲۰۱۰.۰۳۱	-۰.۱۲۸	۲۰۱۲.۲۹۵	-۰.۰۱۵	۲۰۰۸.۶	-۰.۲
۳	۲۳۹۷.۳۸۴	۲۳۹۵.۲	-۰.۰۹۱		۲۳۹۸.۰۰۴	۲۴۰۰.۶۰۳	۰.۱۰۸	۲۳۹۷.۲۰۶	-۰.۰۳۳	۲۳۹۵.۲	-۰.۱۱۷
۴	۲۹۳۶.۵۷۵	۲۹۳۲.۹	-۰.۱۲۵		۲۹۳۶.۰۹۷	۲۹۳۶.۰۸۳	-۰.۰۰۱	۲۹۳۴.۹۵	-۰.۰۴	۲۹۳۲.۹	-۰.۱۱
۵	۳۳۱۸.۸۰۵	۳۳۱۶.۰	-۰.۰۸۵		۳۳۱۷.۷۱۳	۳۳۰۹.۱۰۷	-۰.۲۶	۳۳۱۶.۴۶۶	-۰.۰۳۸	۳۳۱۶.۰	-۰.۰۵۱
۶	۳۳۴۴.۴۰۵	۳۳۴۰.۴	-۰.۱۲		۳۳۳۸.۰۵۲	۳۳۶۷.۴۱	۰.۸۷۲	۳۳۳۶.۲۷۷	-۰.۰۵۳	۳۳۴۰.۴	۰.۰۷
۷	۳۳۴۴.۴۰۵	۳۳۴۰.۴	-۰.۱۲		۳۳۳۸.۰۵۲	۳۳۶۷.۴۱	۰.۸۷۲	۳۳۶.۲۷۷	-۰.۰۵۳	۳۳۴۰.۴	۰.۰۷
۸	۳۷۹۸.۵۷۷	۳۷۹۵.۴	-۰.۰۸۴		۳۷۹۸.۴۹	۳۷۶۹.۳۰۳	-۰.۷۷۴	۳۷۹۷.۰۴	-۰.۰۳۸	۳۷۹۵.۴	-۰.۰۸۱

شماره مود	روش دوم	ANSYS	درصد خطا(%)		روش اول	ANSYS	درصد خطا(%)
$\frac{a}{b}=$۳	M = N =۱۴				M = N =۱۲		
۱	۲۳۲۵.۸۷۲	۲۳۲۳.۲	-۰.۱۱۵		۲۳۲۸.۲۰۲	۲۳۲۳.۲	-۰.۲۱۵
۲	۲۷۸۷.۴۹۲	۲۷۸۲.۴	-۰.۱۸۳		۲۷۸۸.۱۸۹	۲۷۸۲.۴	-۰.۲۱
۳	۳۰۵۵.۵۱	۳۰۵۳.۸	-۰.۰۵۶		۳۰۵۸.۹۳۲	۳۰۵۳.۸	-۰.۱۶۸
۴	۳۷۱۹.۴۱۶	۳۷۱۰.۴	-۰.۲۴۳		۳۷۱۷.۲۸۳	۳۷۱۰.۴	-۰.۱۸۵
۵	۳۷۳۲.۳۴۳	۳۷۳۳.۵	۰.۰۳۱		۳۷۳۸.۳۸۵	۳۷۳۳.۵	-۰.۱۳۱
۶	۳۷۴۴.۷۴۴	۳۷۴۱.۹	-۰.۰۷۶		۳۷۴۶.۶۹۸	۳۷۱۴.۹	-۰.۱۲۸
۷	۴۶۵۰.۷۳۶	۴۶۴۳.۴	-۰.۱۵۸		۴۶۴۶.۳۷۲	۴۶۴۳.۴	-۰.۰۶۴
۸	۴۷۴۱.۴۲۵	۴۷۳۵.۶	-۰.۱۲۳		۴۷۳۳.۴۱۴	۴۷۳۵.۶	۰.۰۴۶

شماره مود	روش دوم	ANSYS	درصد خطا(%)		روش اول	مرجع [۸۵]	درصد خطا(%)	مرجع [۲۸]	درصد خطا(%)	ANSYS	درصد خطا(%)
$\frac{a}{b}=$۲	M = N =۱۴				M = N =۱۲						
۱	۲۷۰۸.۱۱۱	۲۷۰۶.۰	-۰.۰۷۸		۲۷۱۱.۰۱۵	۲۷۱۳.۶۲۶	۰.۰۹۶	۲۷۱۰.۷۹۶	-۰.۰۰۸	۲۷۰۶	-۰.۱۸۵
۲	۳۶۰۱.۶۵۸	۳۶۰۵.۳	۰.۱۰۱		۳۶۱۰.۹۸	۳۵۹۳.۲۶۲	-۰.۴۹۳	۳۶۱۰.۸۱	-۰.۰۰۵	۳۶۰۵.۳	-۰.۱۵۷
۳	۳۸۰۱.۵۴۲	۳۷۹۶.۰	-۰.۱۴۶		۳۸۰۰.۲۸۴	۳۷۹۴.۲۱	-۰.۱۶	۳۷۹۹.۳۰۳	-۰.۰۲۶	۳۷۹۶	-۰.۱۱۳
۴	۳۹۸۸.۴۰۵	۳۹۸۴.۵	-۰.۰۹۸		۳۹۹۱.۴۴۲	۴۰۱۹.۴۹۵	۰.۶۹۸	۳۹۹۰.۰۶۱	-۰.۰۳۵	۳۹۸۴.۵	-۰.۱۷۴
۵	۴۳۰۹.۸۴	۴۳۰۳.۹	-۰.۱۳۸		۴۳۰۸.۲۱۹	۴۳۳۰.۲۵۵	۰.۵۱	۴۳۰۶.۴۸۱	-۰.۰۴	۴۳۰۳.۹	-۰.۱۰۱
۶	۴۶۱۷.۶۷۵	۴۶۰۹.۷	-۰.۱۷۳		۴۶۰۹.۵۸۵	۴۶۳۰.۲۶	۰.۴۴۶	۴۶۰۷.۶۱۸	-۰.۰۴۳	۴۶۰۹.۷	۰.۰۰۲
۷	۵۰۹۹.۱۰۸	۵۰۹۶.۰	-۰.۰۶۱		۵۰۹۷.۶۰۴	۵۰۸۷.۰۵۹	-۰.۲۰۷	۵۰۹۳.۲۸۵	-۰.۰۸۵	۵۰۹۶	-۰.۰۳۱
۸	۵۳۹۱.۲۰۱	۵۳۸۶.۳	-۰.۰۹۱		۵۳۸۹.۳۸۳	۵۳۹۷.۲۵۲	۰.۱۴۶	۵۳۸۵.۹۳۱	-۰.۰۶۴	۵۳۸۶.۳	-۰.۰۵۷

شماره مود	روش دوم	ANSYS	درصد خطا(%)		روش اول	ANSYS	درصد خطا(%)
$\frac{a}{b}=$۳	M = N =۱۴				M = N =۱۲		
۱	۳۵۸۹.۵۴	۳۵۸۵.۲	-۰.۱۲۱		۳۵۸۸.۱۳۳	۳۵۸۵.۲	-۰.۰۸۲
۲	۴۶۴۵.۷۲	۴۶۳۶.۴	-۰.۲۰۱		۴۶۴۱.۴۱۳	۴۶۳۶.۴	-۰.۱۱
۳	۵۳۲۴.۸۶۶	۵۳۱۸.۳	-۰.۱۱۷		۵۳۱۸.۶۴۳	۵۳۱۸.۳	-۰.۰۰۶
۴	۵۳۹۹.۵۵	۵۴۰۲.۹	۰.۰۶۲		۵۴۰۰.۹۱	۵۴۰۲.۹	۰.۰۳۷
۵	۵۷۰۶.۳۹۲	۵۶۹۵.۴	-۰.۱۹۳		۵۶۹۴.۰۱۵	۵۶۹۵.۴	۰.۰۲۴
۶	۵۹۷۶.۵۵۷	۵۹۶۸.۵	-۰.۱۳۵		۵۹۷۰.۶۱۴	۵۹۶۸.۵	-۰.۰۳۵
۷	۶۱۱۸.۳۷۹	۶۱۱۶.۳	-۰.۰۳۴		۶۱۰۹.۶۰۲	۶۰۱۶.۳	۰.۱۱
۸	۶۷۱۳.۵۹۴	۶۷۰۲.۲	-۰.۱۷		۶۶۷۶.۳۷۱	۶۷۰۲.۲	۰.۳۸۵

روش اول: روش سری فوریه بهبود یافته روش دوم: روش رایلی - ریتز بهبود یافته

جدول۶-۹ فرکانس‌های طبیعی (Hz) استخراج شده با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته و روش رایلی – ریتز بهبود یافته برای ورق سالم با شرایط مرزی CFFF و شرایط ابعادی ۱،۱.۵،۲،۳ $\frac{a}{b}=\frac{a}{b_1+b_2}$

شماره مود	روش دوم	ANSYS	درصد خطا(%)	روش اول	ANSYS	درصد خطا(%)
$\frac{a}{b}$ =۱	M = N =۱۴			M = N =۱۲		
۱	۳۵۴.۳۰۸	۳۵۴.۵۱	۰.۰۵۷	۳۵۵.۲۰۷	۳۵۴.۵۱	-۰.۱۹۷
۲	۸۵۱.۸۷۸	۸۵۰.۸۴	-۰.۱۲۲	۸۵۲.۸۰۲	۸۵۰.۸۴	-۰.۲۳۱
۳	۹۵۷.۲۳	۹۵۴.۸۹	-۰.۲۴۵	۹۵۶.۶۴۹	۹۵۴.۸۹	-۰.۱۸۴
۴	۱۵۱۹.۳۶	۱۵۱۷.۶	-۰.۱۱۶	۱۵۲۰.۵۷۶	۱۵۱۷.۶	-۰.۱۹۶
۵	۱۶۳۸.۵۰۴	۱۶۳۶.۹	-۰.۰۹۸	۱۶۳۸.۹۸۵	۱۶۳۶.۹	-۰.۱۲۷
۶	۱۷۳۸.۳۸۸	۱۷۳۶.۶	-۰.۱۰۳	۱۷۴۰.۲۹۴	۱۷۳۶.۶	-۰.۲۱۳
۷	۲۱۹۸.۰۶۲	۲۱۹۲.۱	-۰.۲۷۲	۲۱۹۳.۱۶۱	۲۱۹۲.۱	-۰.۰۴۸
۸	۲۳۱۳.۵۶۴	۲۳۰۶.۰	-۰.۳۲۸	۲۳۰۸.۱۵	۲۳۰۶	-۰.۰۹۳

شماره مود	روش دوم	ANSYS	درصد خطا(%)	روش اول	ANSYS	درصد خطا(%)
$\frac{a}{b}$ =۱.۵	M = N =۱۴			M = N =۱۲		
۱	۲۸۵.۳۸	۲۸۴.۹۵	-۰.۱۵۱	۲۸۵.۶۸	۲۸۴.۹۵	-۰.۲۵۶
۲	۸۵۰.۹۲۵	۸۵۰.۲۷	-۰.۰۷۷	۸۵۲.۳۱۸	۸۵۰.۲۷	-۰.۲۴۱
۳	۹۴۱.۶۸۶	۹۴۰.۵۲	-۰.۱۲۴	۹۴۲.۲۴۱	۹۴۰.۵۲	-۰.۱۸۳
۴	۱۸۵۹.۱۴۶	۱۸۵۷.۴	-۰.۰۹۴	۱۸۶۰.۲۴۷	۱۸۵۷.۴	-۰.۱۵۳
۵	۲۱۹۶.۷۸۳	۲۱۹۵.۴	-۰.۰۶۳	۲۱۹۸.۰۷۱	۲۱۹۵.۴	-۰.۱۲۲
۶	۲۲۴۰.۹۵	۲۲۳۶.۷	-۰.۱۹	۲۲۴۰.۵۰۷	۲۲۳۶.۷	-۰.۱۷
۷	۲۳۱۳.۰۴۶	۲۳۰۷.۹	-۰.۲۲۳	۲۳۱۲.۴۲۳	۲۳۰۷.۹	-۰.۱۹۶
۸	۲۸۱۱.۱۲۲	۲۸۰۶.۸	-۰.۱۵۴	۲۸۱۱.۹۳۵	۲۸۰۶.۸	-۰.۱۸۳

شماره مود	روش دوم	ANSYS	درصد خطا(%)	روش اول	ANSYS	درصد خطا(%)
$\frac{a}{b}$ =۲	M = N =۱۴			M = N =۱۲		
۱	۲۳۴.۲۳۳	۲۳۳.۹۸	-۰.۱۰۸	۲۳۴.۷۱۶	۲۳۳.۹۸	-۰.۳۱۵
۲	۸۵۱.۲۸۴	۸۴۹.۶۷	-۰.۱۹	۸۵۱.۷۴۹	۸۴۹.۶۷	-۰.۲۴۵
۳	۸۹۳.۶۷۳	۸۹۳.۳۶	-۰.۰۳۵	۸۹۵.۰۴۶	۸۹۳.۳۶	-۰.۱۸۹
۴	۱۸۷۶.۲۶۵	۱۸۷۳.۱	-۰.۱۶۹	۱۸۷۵.۶۸	۱۸۷۳.۱	-۰.۱۳۸
۵	۲۴۰۱.۸۶۸	۲۳۹۷.۶	-۰.۱۷۸	۲۴۰۰.۵۸	۲۳۹۷.۶	-۰.۱۲۴
۶	۲۴۷۵.۱۵	۲۴۷۲.۹	-۰.۰۹۱	۲۴۷۷.۸۵۲	۲۴۷۲.۹	-۰.۲۰۱
۷	۲۹۸۸.۶۶۶	۲۹۸۴.۱	-۰.۱۵۳	۲۹۸۷.۱۲۴	۲۹۸۴.۱	-۰.۱۰۱
۸	۳۱۱۶.۹۲۱	۳۱۱۱.۶	-۰.۱۷۱	۳۱۱۱.۶۷۲	۳۱۱۱.۶	-۰.۰۰۲

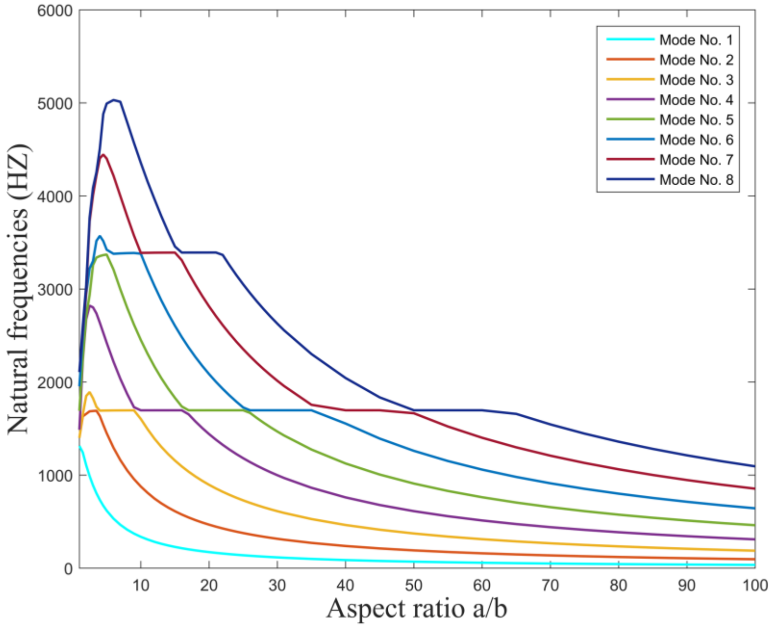
شماره مود	روش دوم	ANSYS	درصد خطا(%)	روش اول	ANSYS	درصد خطا(%)
$\frac{a}{b}$ =۳	M = N =۱۴			M = N =۱۲		
۱	۱۶۸.۸۷	۱۶۸.۸	-۰.۰۴۱	۱۶۹.۵۷	۱۶۸.۸	-۰.۴۵۶
۲	۷۷۵.۰۸	۷۷۴.۶	-۰.۰۶۲	۷۷۶.۴۱۸	۷۷۴.۶	-۰.۲۳۵
۳	۸۵۰.۱۴۳	۸۴۸.۸۱	-۰.۱۵۷	۸۵۰.۹۲۶	۸۴۸.۸۱	-۰.۲۵
۴	۱۷۰۵.۸	۱۷۰۴.۳	-۰.۰۸۸	۱۷۰۶.۸۹۳	۱۷۰۴.۳	-۰.۱۵۲
۵	۲۵۲۷.۹۴۱	۲۵۲۳.۶	-۰.۱۷۲	۲۵۲۸.۹۱	۲۵۲۳.۶	-۰.۲۱
۶	۲۶۲۷.۲۱۳	۲۶۲۴.۳	-۰.۱۱۱	۲۶۲۴.۸۵۶	۲۶۲۴.۳	-۰.۰۲۱
۷	۳۴۳۹.۱۷۴	۳۴۳۰.۷	-۰.۲۴۷	۳۴۳۰.۳۹۵	۳۴۳۰.۷	۰.۰۰۹
۸	۳۷۳۰.۳۹۴	۳۷۲۵.۷	-۰.۱۲۶	۳۷۲۴.۶۵۱	۳۷۲۵.۷	۰.۰۲۸

روش اول: روش سری فوریه بهبود یافته روش دوم: روش رایلی - ریتز بهبود یافته

۶-۶ بررسی و تحلیل پارامتر هندسی مؤثر بر تغییرات مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق سالم با استفاده از روش رایلی-ریتز بهبود یافته

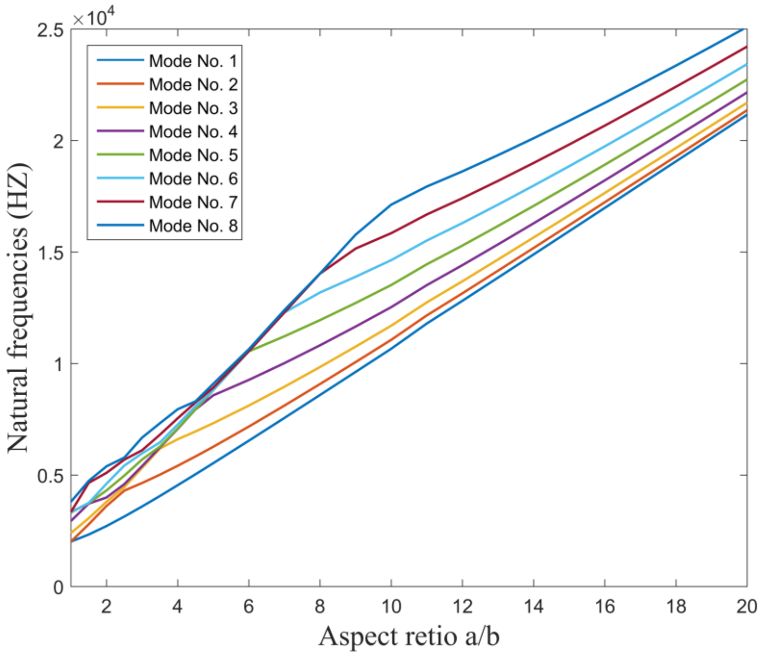
در این بخش به منظور بررسی کامل‌تر و جامع‌تر موضوع ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم تاثیرات پارامترهای هندسی همچون ابعاد ($\frac{a}{b_1+b_2}$) بر روی مشخصات دینامیکی و ارتعاشی مانند فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت. همان طور که در جداول ۳-۱۰، ۳-۱۱ و ۳-۱۲ مشاهده می‌شود نتایج استخراج شده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته برای نسبت‌های ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ مورد تحلیل قرار گرفته شده است.

در شکل۶-۱۰ مشاهده می‌شود که، فرکانس‌های طبیعی برای شکل مود اول با افزایش نسبت ابعاد $\frac{a}{b_1+b_2}$ از همان ابتدا کاهش پیدا می‌کند، اما فرکانس‌های طبیعی برای شکل مودهای دوم تا هشتم تا یک مقدار نسبت ابعادی ابتدا افزایش و سپس بعد از آن مقدار نسبت ابعادی شروع به کاهش می‌کنند. این سیر نزولی تا جایی ادامه پیدا می‌کند که بعد از مقدار نسبت ابعادی۱۰۰= $\frac{a}{b_1+b_2}$ فرکانس‌های طبیعی تقریبا ثابت باقی می‌مانند. از این نتایج بررسی شده می‌توان به این نکته دست پیدا کرد که فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم با شرایط مرزی FFFF با افزایش نسبت ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ در نهایت کاهش پیدا می‌کنند.



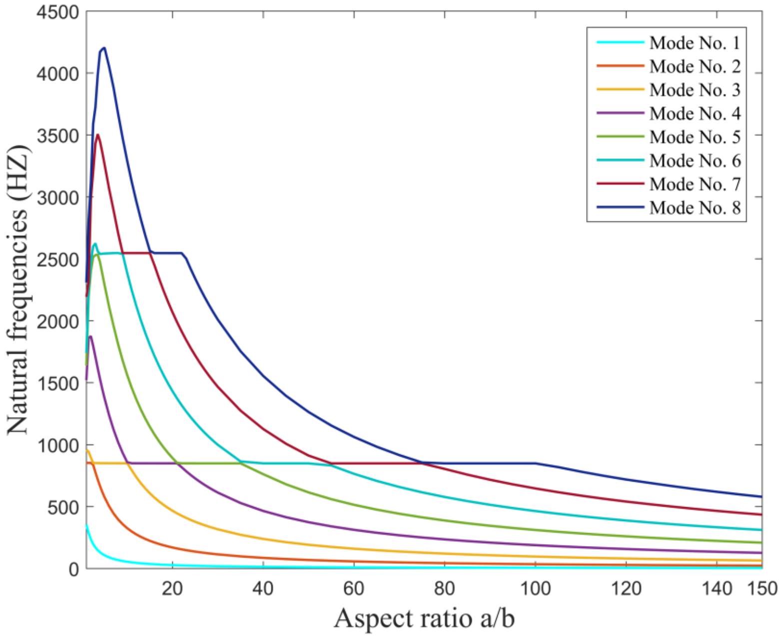
شکل۶-۱۰ بررسی اثرات تغییرات نسبت ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ بر روی فرکانس‌های طبیعی (Hz) ورق سالم استخراج شده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته برای شرایط مرزی FFFF

در شکل۶-۱۱ مشاهده می‌شود که، فرکانس‌های طبیعی برای شکل مود اول با افزایش نسبت ابعاد $\frac{a}{b_1+b_2}$ از همان ابتدا به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند، اما فرکانس‌های طبیعی برای شکل مودهای دوم تا هشتم تا یک مقدار نسبت ابعادی ابتدا به صورت غیر خطی افزایش و این سیر صعودی غیر خطی تا جایی ادامه پیدا می‌کنند که بعد از یک مقدار نسبت ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ مشخص فرکانس‌های طبیعی به صورت خطی افزایش پیدا می‌کنند. از این نتایج بررسی شده می‌توان به این نکته دست پیدا کرد که فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم با شرایط مرزی CCCC با افزایش نسبت ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ در نهایت افزایش پیدا خواهند کرد.



شکل۶-۱۱ بررسی اثرات تغییرات نسبت ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ بر روی فرکانس‌های طبیعی (Hz) ورق سالم استخراج شده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته برای شرایط مرزی CCCC

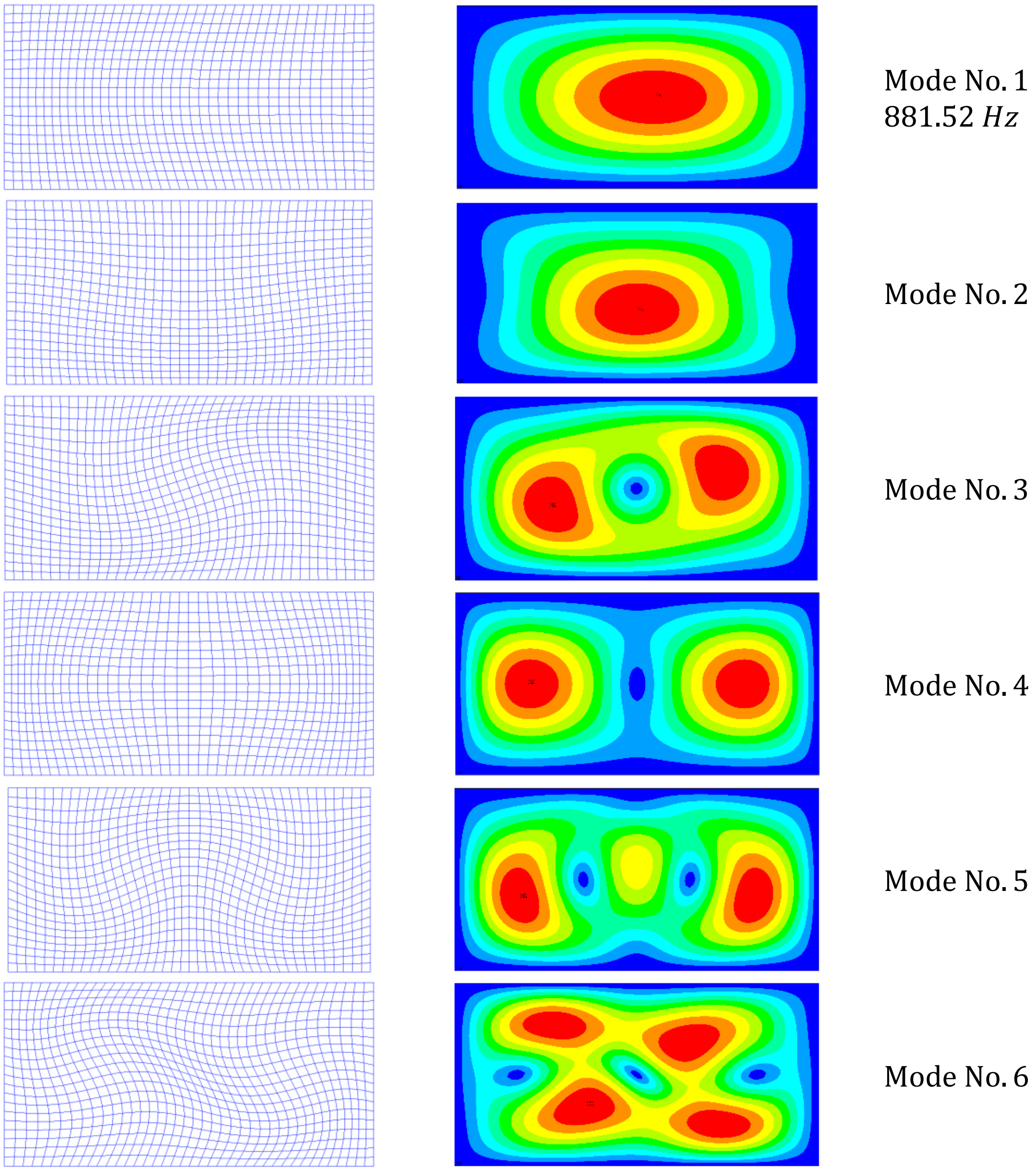
در شکل۶-۱۲ مشاهده می‌شود که، فرکانس‌های طبیعی برای شکل مود اول تا سوم با افزایش نسبت ابعاد $\frac{a}{b_1+b_2}$ از همان ابتدا کاهش پیدا می‌کنند، اما فرکانس‌های طبیعی برای شکل مودهای چهارم تا هشتم تا یک مقدار نسبت ابعادی ابتدا افزایش و سپس بعد از آن مقدار نسبت ابعادی شروع به کاهش می‌کنند. این سیر نزولی تا جایی ادامه پیدا می‌کند که بعد از مقدار نسبت ابعادی ۱۵۰= $\frac{a}{b_1+b_2}$ فرکانس-های طبیعی تقریبا ثابت باقی می‌مانند، که اگر این نتایج با نتایج ورق با شرایط مرزی CCCC مقایسه بشود می‌توان دید که، مقادیر فرکانس طبیعی در ورق با شرایط مرزی CFFF دیرتر به مقدار ثابتی می‌رسند. از این نتایج بررسی شده می‌توان به این نکته دست پیدا کرد که، فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم با شرایط مرزی یکسر گیردار با افزایش نسبت ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ در نهایت کاهش پیدا خواهند کرد.



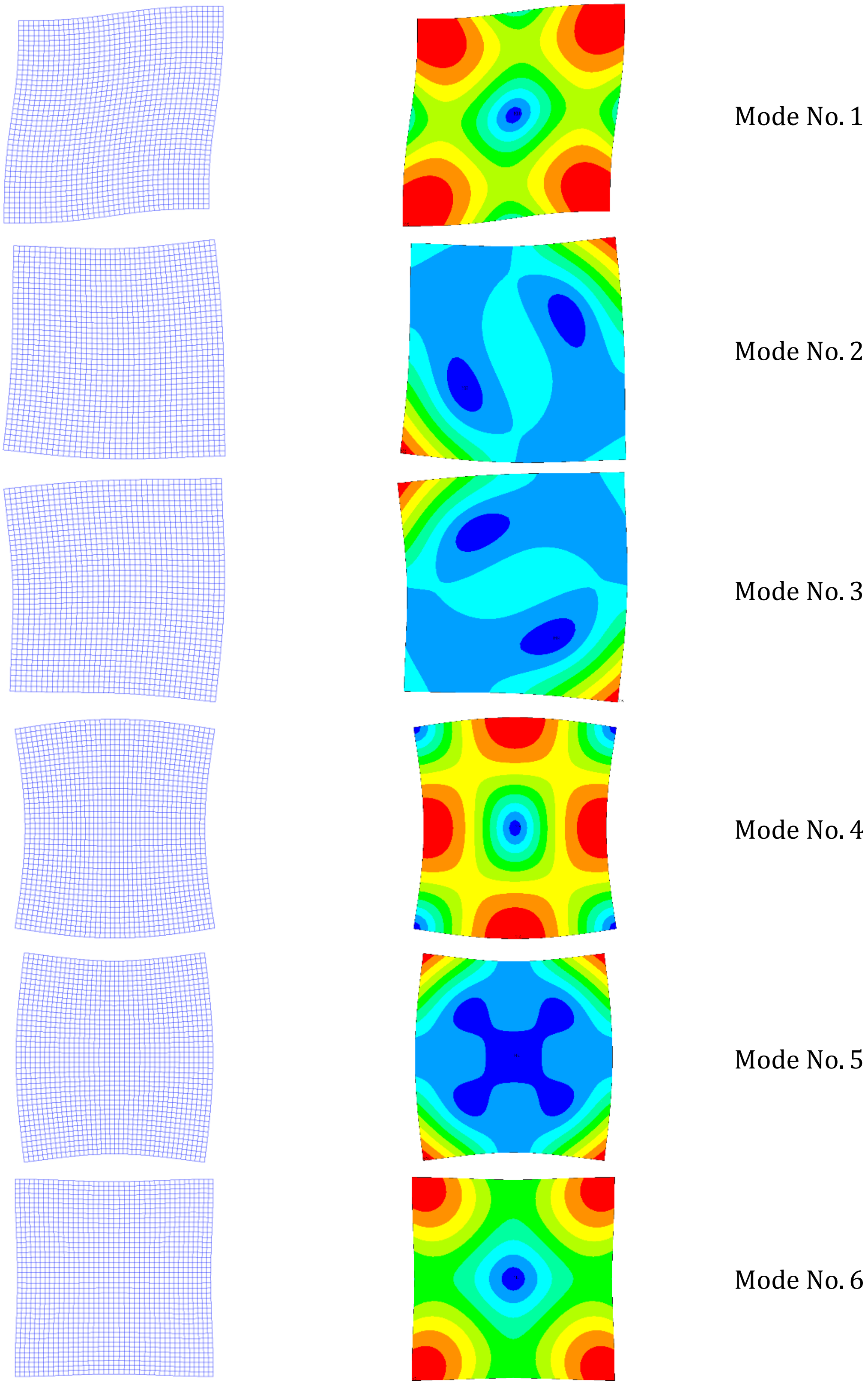
شکل۶-۱۲ بررسی اثرات تغییرات نسبت ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ بر روی فرکانس‌های طبیعی (Hz) ورق سالم استخراج شده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته برای شرایط مرزی CFFF

حال در ادامه برای درک بهتر از نتایج استخراج شده در این تحقیق، چند نمونه از شکل مودهای ورق با شرایط ابعادی و شرایط مرزی مختلف را با استفاده از ضرایب گسترش سری فوریه استاندارد و ضرایب مکمل که از روش رایلی – ریتز بهبود یافته برای هر فرکانس طبیعی ارتعاشات آزاد استخراج می‌شوند و با جایگذاری در مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته u و v (روابط (۴-۹) و (۴-۱۰))، بدست آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌کنید، شکل‌های ۳-۱۳، ۳-۱۴ و ۳-۱۵ به ترتیب شکل مودهای اول تا ششم ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم با شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$=۱،۲،۳ و با شرایط مرزی FFFF، CCCC و CFFF می‌باشند و با مقایسه شکل مودهای بدست آمده و شکل مودهای استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS به این نتیجه می‌توان دست پیدا کرد که نتایج استخراج شده از دقت مطلوبی برخوردار می‌باشند. با اندکی دقت به نتایج نشان داده شده در شکل‌های ۳-۱۳، ۳-۱۴ و ۳-۱۵ به این نکته می‌توان دست یافت که با وجود اینکه نتایج نشان داده شده مربوط به شکل مودهای ابتدایی ارتعاشات آزاد درن صفحه‌ای ورق می‌باشند، ولی با این حال به عنوان مثال در شکل۶-۱۴ می‌بینیم که در مودهای ۲ و ۳ یا ۴ و ۵ در حالی که در قسمتی از ورق حالت فشاری رخ داده است ولی در مود بعدی در همان

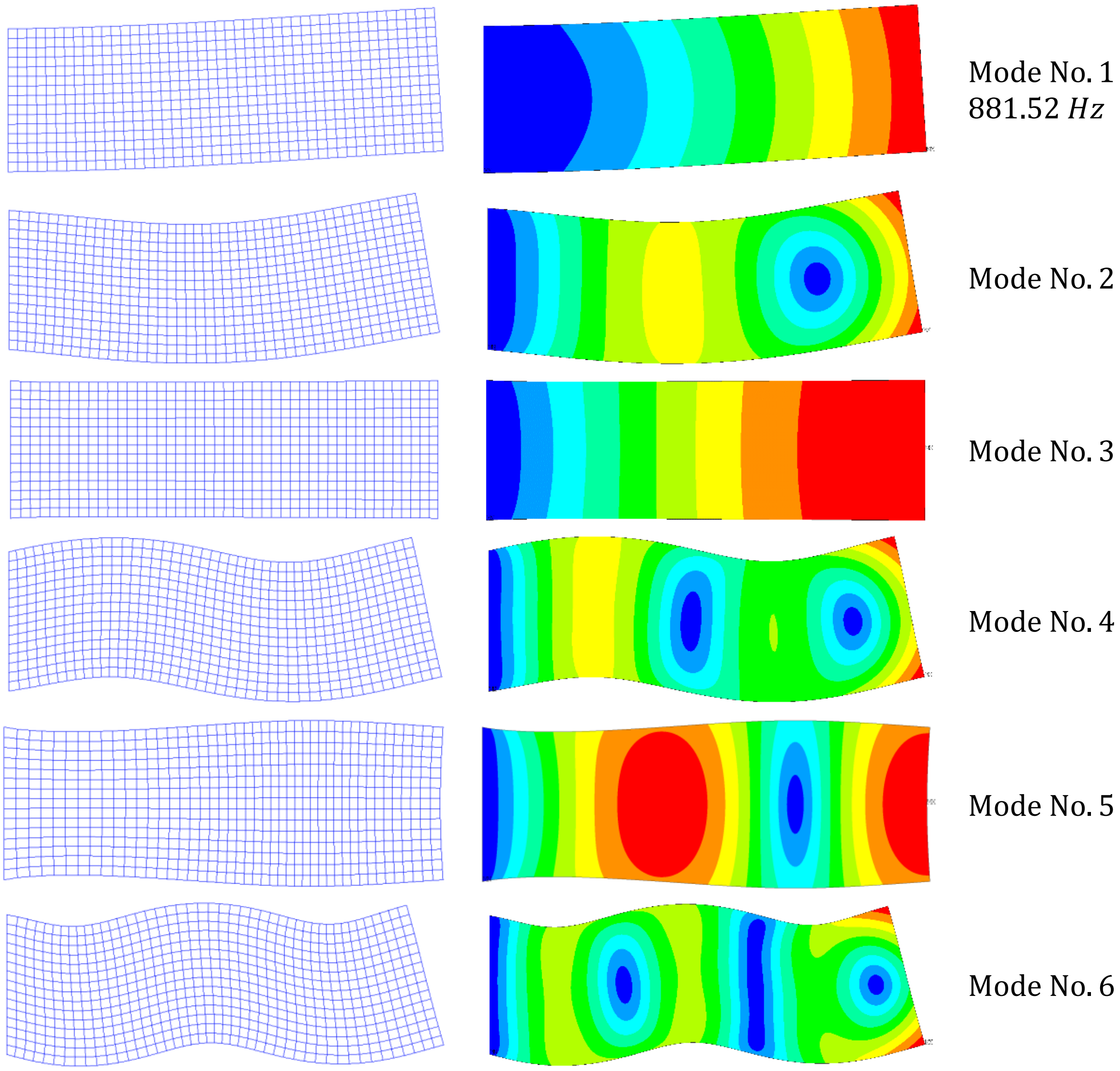
قسمت حالت کششی رخ می‌دهد، که این موضوع نشان دهنده‌ی پیچیدگی در تغییر شکل مودهای فرکانس‌های طبیعی ارتعاشت آزاد درون صفحه‌ای ورق می‌باشند. که این پیچیدگی‌های به وجود آمده سبب بروز ترک‌ها و ناپیوستگی‌هایی در اتصالات سازه‌ها و قطعات خواهند شد، به طبع این ترک‌ها و ناپیوستگی‌ها موجب تغییراتی در مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ورق از جمله فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق می‌شوند.



شکل۶-۱۳ شکل مودهای اول تا ششم ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق دوبعدی برای نتایج استخراج شده از روش رایلی–ریتز بهبود یافته و نرم افزار المان محدود ANSYS با شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}=۲$ و شرایط مرزی CCCC



شکل۶-۱۴ شکل مودهای اول تا ششم ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق دوبعدی برای نتایج استخراج شده از روش رایلی–ریتز بهبود یافته و نرم افزار المان محدود ANSYS با شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}=$۱ و شرایط مرزی FFFF

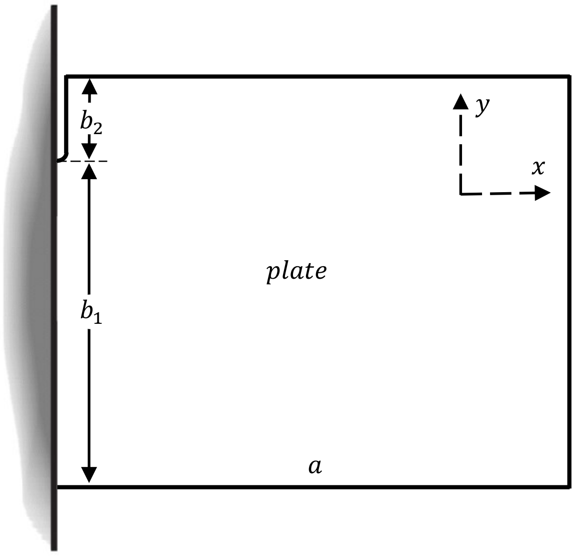


شکل۶-۱۵ شکل مودهای اول تا ششم ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق دوبعدی برای نتایج استخراج شده از روش رایلی– ریتز بهبود یافته و نرم افزار المان محدود ANSYS با شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}=$۳ و شرایط مرزی CFFF

۶-۷ بررسی و تحلیل پارامترهای مؤثر بر تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار یکسر گیردار با استفاده از روش رایلی-ریتز بهبود یافته

در این بخش تاثیرات تغییر عمق نسبی ترک $\frac{b_2}{b_1+b_2}$ و پارامترهای هندسی همچون ابعاد ($\frac{a}{b_1+b_2}$)، ضخامت (h) و نیز پارامترهای فیزیکی همچون مدول یانگ (E)، چگالی (ρ)، نسبت پواسون (μ) بر روی مشخصات دینامیکی و ارتعاشی مانند نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega_{cp}}{\omega}$) ورق ترک‌دار و شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار با شرایط مرزی CFFF مورد بررسی و تحلیل قرار خواهد گرفت.

همانطور که در بخش قبل شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق سالم مورد بررسی قرار گرفته شد، به این نتیجه دست یافته شد، پیچیدگی که در تغییرات شکل مودهای ورق رخ می‌دهند ممکن است سبب بروز ترک‌ها و ناپیوستگی‌هایی بشوند. لذا در این بخش از تحقیق هدف، بررسی مشخصات دینامیکی و ارتعاشی ارتعاشات آزاد درون صفحه ورق یکسر گیردار تحت تاثیر تغییرات عمق نسبی ترک و تغییرات شرایط ابعادی مختلف، می‌باشد که به سبب بروز مشکلات ذکر شده، ترکی در لبه‌ی متصل شده‌ی آن‌ها به وجود آمده است (شکل۶-۱۶).



شکل۶-۱۶ شماتیک ورق ترک‌دار یکسر گیردار

لازم به ذکر است که در این بخش یک ورق از جنس آلومینیوم را به عنوان مدل انتخاب شده است. همچنین خصوصیات مکانیکی مواد و مشخصات ابعادی ورق به کار برده شده به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

جدول۶-۱۰ خصوصیات مکانیکی مواد و مشخصات ابعادی ورق به کار برده شده در روش رایلی – ریتز بهبود یافته

μ	$\rho\ (kg/m^3)$	$E\ (GN/m^2)$	$h\ (mm)$
۰.۳	۲۷۸۰	۷۲	۶.۴۴۴

که مطابق با جداول بالا E، ρ، μو h به ترتیب مدول یانگ، چگالی، نسبت پواسون و ضخامت ورق‌های مدل شده می‌باشند. در این بخش مطابق با شکل بالا عمق نسبی ترک بی بعد به صورت $\frac{b_2}{b_1+b_2}$ و شرایط ابعادی به صورت $\frac{a}{b_1+b_2}$ و همچنین فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد ورق ترک‌دار نیز بی بعد و به صورت نسبت فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار به سالم $(\frac{\omega_{cp}}{\omega})$، تعریف می‌شوند.

۶-۷-۲ تأثیر تغییرات عمق نسبی ترک و نسبت ابعادی بر نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم و شکل مودها

در این بخش ابتدا تأثیر تغییرات عمق نسبی ترک را بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق یکسر گیردار با شرایط ابعادی ۳= $\frac{a}{b_1+b_2}$ با استفاده از روش رایلی - ریتز بهبود یافته مورد بررسی قرار داده می‌شود. به این صورت که به عنوان نمونه در نظر گرفته شده که یک ورق سالم با شرایط مرزی CFFF بر اثر شکل مودهای متناوبی که تحت تأثیر تغییرات فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ، دچار ترک یا شکافی در لبه‌ی گیردار می‌شود، همان طور که توضیح داده شد این ترک به وجود آمده به مرور زمان بر اثر بارگذاری‌های متناوب شروع به رشد می‌کند و که به سبب آن فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد ورق یکسرگیردار دچار تغییراتی می‌شوند. همچنین مقدار عمق نسبی ترک تا جایی افزایش پیدا

می‌کند که بعد از یک مقدار مشخص می‌توان گفت که ورق در نظر گرفته از دیوار جدا شده و عملاً شرایط مرزی ورق را می‌توان به صورت FFFF در نظر گرفت. در جدول۶-۱۱ نتایج هشت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار یکسر گیردار تحت تأثیر تغییرات عمق نسبی ترک نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج استخراج شده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته در مقایسه با نتایج استخراج از نرم افزار المان محدود ANSYS به نتایج مطلوبی دست پیدا شده است. در ادامه با اندکی دقت به نتایج استخراج شده می‌توان به این نتیجه رسید که با افزایش مقدار عمق نسبی ترک فرکانس‌های طبیعی ورق کاهش پیدا می‌کنند. این روند نزولی تا جایی ادامه پیدا می‌کند که تقریبا می‌توان گفت که فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار با شرایط مرزی CFFF به سمت فرکانس‌های طبیعی ورق سالم با شرایط مرزی FFFF همگرا خواهند شد.

جدول۶-۱۱ تأثیر تغییر عمق نسبی ترک ($\frac{b_2}{b_1+b_2}$) بر روی فرکانس‌های طبیعی (Hz) ورق ترک‌دار با شرایط مرزی CFFF و شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}=$۳

ترک‌دار									سالم یکسر گیردار	شکل مود
درصد خطا	ANSYS	روش دوم	درصد خطا	ANSYS	روش دوم	درصد خطا	ANSYS	روش دوم	روش دوم	
$b_2/(b_1+b_2)=$۰.۲			$b_2/(b_1+b_2)=$۰.۱			$b_2/(b_1+b_2)=$۰.۰۵			$a/b=$ ۳	
-۰.۱۶۶	۱۵۲.۵۱	۱۵۲.۲۵۷	-۰.۳۷۶	۱۶۳.۶۶	۱۶۳.۰۴۴	-۰.۲۹۱	۱۶۷.۲۲	۱۶۶.۷۳۳	۱۶۸.۸۷	۱
-۰.۳۱۴	۷۳۳.۲۸	۷۳۰.۹۷۷	-۰.۱۹۵	۷۵۹.۱۸	۷۵۷.۷	-۰.۱۲۷	۷۶۸.۹۲	۷۶۷.۹۴۳	۷۷۵.۰۸	۲
-۰.۰۹۳	۸۳۴.۷۱	۸۳۳.۹۳۴	-۰.۲۷۳	۸۴۳.۴۱	۸۴۱.۱۰۷	-۰.۱۰۸	۸۴۶.۹۷	۸۴۶.۰۵۵	۸۵۰.۱۴۳	۳
-۰.۲۵۱	۱۶۶۶.۷	۱۶۶۲.۵۱۶	-۰.۳۱۴	۱۶۸۵.۳	۱۶۸۰.۰۰۸	-۰.۳۶۴	۱۶۹۵.۳	۱۶۸۶.۱۳	۱۷۰۵.۸	۴
-۰.۱۴۲	۲۴۵۶.۵	۲۴۵۳.۰۱۲	-۰.۱۶۱	۲۵۰۲.۱	۲۴۹۸.۰۷۱	-۰.۲۱۷	۲۵۱۶.۳	۲۵۱۰.۸۴	۲۵۲۷.۹۴۱	۵
-۰.۲۹۷	۲۶۰۶.۰	۲۵۹۸.۲۶	-۰.۱۷۹	۲۶۱۱.۶	۲۶۰۶.۹۲۵	-۰.۴۴۳	۲۶۱۴.۸	۲۶۰۳.۲۱۶	۲۶۲۷.۲۱۳	۶
-۰.۲۳	۳۳۹۱.۲	۳۳۸۳.۴	-۰.۴۷	۳۴۰۸.۳	۳۳۹۲.۲۸۱	-۰.۲۸	۳۴۱۶.۴	۳۴۰۶.۸۳۴	۳۴۳۹.۱۷۴	۷
-۰.۴۰۸	۳۶۷۹.۰	۳۶۶۳.۹۸	-۰.۴۰۵	۳۷۱۳.۲	۳۶۹۸.۱۶۱	-۰.۳۳۹	۳۷۱۶.۳	۳۷۰۳.۷۰۱	۳۷۳۰.۳۹۴	۸

ترک‌دار									شکل مود
درصد خطا	ANSYS	روش دوم	درصد خطا	ANSYS	روش دوم	درصد خطا	ANSYS	روش دوم	
$b_2/(b_1+b_2)=$۰.۵			$b_2/(b_1+b_2)=$۰.۴			$b_2/(b_1+b_2)=$۰.۳			
-۰.۴۲۷	۱۰۰.۶۷	۱۰۰.۲۴	-۰.۲۱۱	۱۱۹.۸۴	۱۱۹.۵۸۷	-۰.۲۰۲	۱۳۷.۶۲	۱۳۷.۳۴۲	۱
-۰.۲۷۳	۶۳۳.۵۶	۶۳۱.۸۳	-۰.۳۲۵	۶۶۹.۱۵	۶۶۶.۹۷۵	-۰.۱۵۳	۷۰۲.۸۶	۷۰۱.۷۸۵	۲
-۰.۱۷۵	۸۰۲.۲۹	۸۰۰.۸۸۶	-۰.۲۵	۸۱۴.۸۱	۸۱۲.۷۷۳	-۰.۲۹۹	۸۲۵.۳۹	۸۲۲.۹۲۲	۳
-۰.۳۷۸	۱۶۰۴.۱	۱۵۹۸.۰۳۶	-۰.۴۱۱	۱۶۳۰.۳	۱۶۲۳.۶	-۰.۱۷۴	۱۶۴۹.۷	۱۶۴۶.۸۳	۴
-۰.۱۹۳	۲۱۹۷.۶	۲۱۹۳.۳۵۷	-۰.۱۵۹	۲۳۰۳.۳	۲۲۹۹.۶۳۸	-۰.۴۲۰	۲۳۹۰.۷	۲۳۸۰.۶۶	۵
-۰.۲۴۹	۲۴۷۴.۲	۲۴۶۸.۰۴	-۰.۳۹۱	۲۵۴۵.۸	۲۵۳۵.۸۴۶	-۰.۱۳۳	۲۵۸۸.۹	۲۵۸۵.۴۵۷	۶
-۰.۱۷۱	۳۲۰۵.۷	۳۲۰۰.۲۱۸	-۰.۳۵۷	۳۳۴۷.۴	۳۳۳۵.۴۵	-۰.۲۶۴	۳۳۷۰.۹	۳۳۶۲.۰	۷
-۰.۴۷۳	۳۳۲۵.۹	۳۳۱۰.۱۶۸	-۰.۱۱۶	۳۳۷۳.۶	۳۳۶۹.۶۸۷	-۰.۵۸۱	۳۵۶۴.۴	۳۵۴۳.۶۹	۸

ترک‌دار									شکل مود
درصد خطا	ANSYS	روش دوم	درصد خطا	ANSYS	روش دوم	درصد خطا	ANSYS	روش دوم	
$b_2/(b_1+b_2)=$۰.۸			$b_2/(b_1+b_2)=$۰.۷			$b_2/(b_1+b_2)=$۰.۶			
-۰.۵۸۸	۳۹.۶۹۴	۳۹.۴۶	-۰.۴۶۹	۶۰.۱۴۴	۵۹.۸۶۲	-۰.۳۴	۸۰.۶۲۳	۸۰.۳۴۸	۱
-۰.۳۷۴	۵۰۶.۹	۵۰۵.۰۰۴	-۰.۳۵۷	۵۵۴.۰۸	۵۵۲.۱۰۲	-۰.۲۱۱	۵۹۵.۵۷	۵۹۴.۳۱۳	۲
-۰.۴۹۷	۷۳۴.۸	۷۳۱.۱۴۸	-۰.۴۶۱	۷۶۴.۹۲	۷۶۱.۳۹۴	-۰.۳۷۴	۷۸۶.۳۴	۷۸۳.۴	۳
-۰.۲۵۵	۱۴۲۱.۴	۱۴۱۷.۷۷۵	-۰.۲۷۶	۱۵۰۷.۱	۱۵۰۲.۹۴	-۰.۱۵۳	۱۵۶۵.۴	۱۵۶۳.۰۰۵	۴
-۰.۳۸۷	۱۸۸۴.۹	۱۸۷۷.۶۰۵	-۰.۱۹۴	۱۹۷۳.۳	۱۹۶۹.۴۷۲	-۰.۲۶۱	۲۰۸۲.۱	۲۰۷۶.۶۶۶	۵
-۰.۱۹۱	۲۱۹۱.۹	۲۱۸۷.۷۱۳	-۰.۲۰۵	۲۲۸۸.۷	۲۲۸۴.۰۱	-۰.۲۹	۲۳۸۳.۸	۲۳۷۶.۸۸۷	۶
-۰.۲۱۴	۲۹۹۴.۳	۲۹۸۷.۸۹۲	-۰.۲۴۱	۳۰۳۷.۰	۳۰۲۹.۶۸۱	-۰.۱۴۴	۳۰۹۹.۲	۳۰۹۴.۷۳۷	۷
-۰.۳۸۲	۳۲۸۵.۵	۳۲۷۲.۹۵	-۰.۱۹۸	۳۲۹۳.۴	۳۲۸۶.۸۸	-۰.۲۸۳	۳۳۰۶.۸	۳۲۹۷.۴۴۲	۸

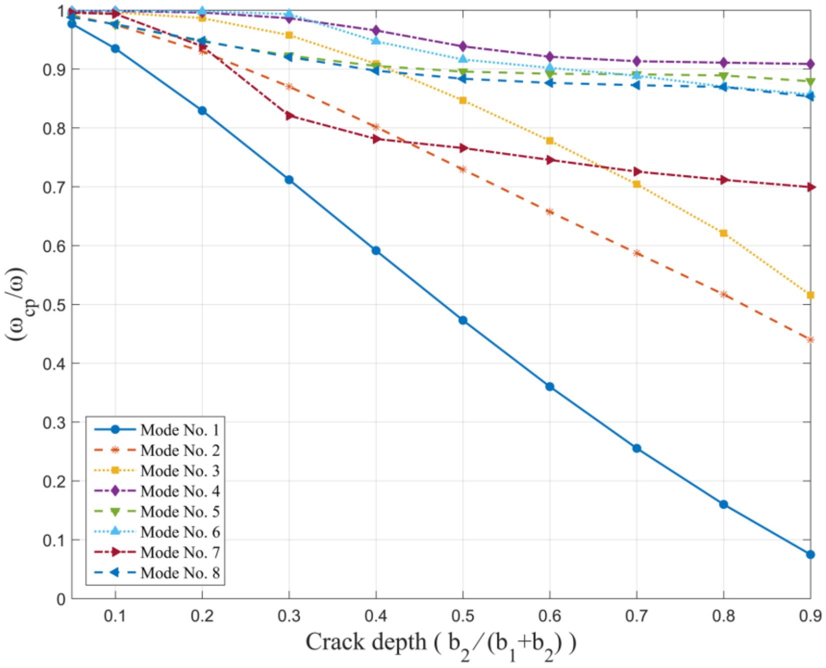
سالم چهار لبه آزاد	ترک‌دار			شکل مود
روش دوم	درصد خطا	ANSYS	روش دوم	
$a/b=$ ۳	$b_2/(b_1+b_2)=$۰.۹			
۰	-۰.۷۴	۱۹.۶۰۸	۱۹.۴۶۳	۱
۰	-۰.۵۴۳	۴۴۶.۹۱	۴۴۴.۴۸۳	۲
۰	-۰.۶۱۷	۶۸۷.۶۴	۶۸۳.۳۹۷	۳
۸۸۷.۹۷۹	-۰.۳۷۴	۱۲۹۸.۸	۱۲۹۳.۹۴۲	۴
۱۶۹۰.۴۷۸	-۰.۴۵۷	۱۸۱۸.۳	۱۸۰۹.۹۹	۵
۱۸۲۴.۱۶۸	-۰.۲۰۹	۲۰۸۴.۹	۲۰۸۰.۵۴۲	۶
۲۸۰۴.۹۰۱	-۰.۳۵۱	۲۹۵۱.۴	۲۹۴۱.۰۴	۷
۳۲۵۷.۷۰۲	-۰.۲۷۷	۳۲۸۲.۰	۳۲۷۲.۹۱	۸

روش دوم: روش رایلی –ریتز بهبود یافته

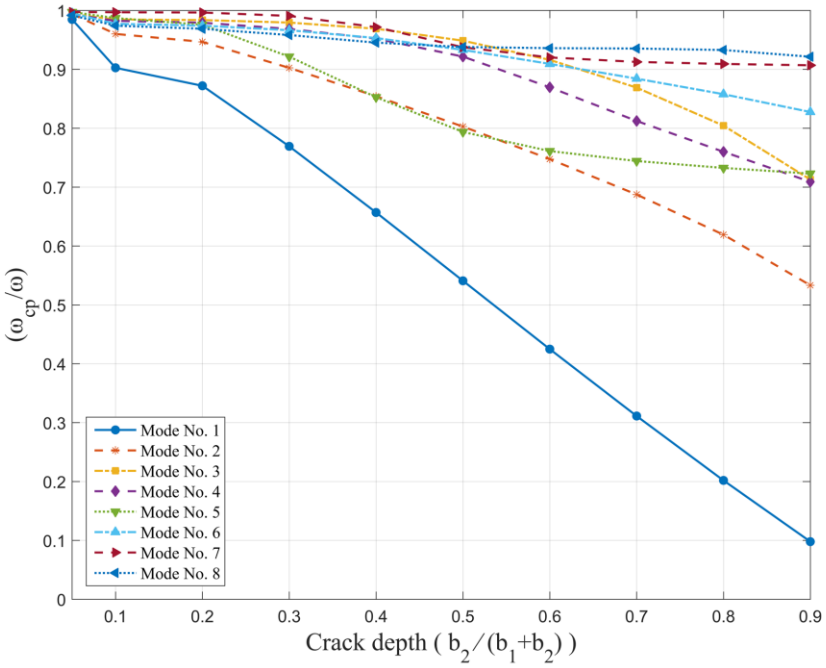
می‌توان گفت که این موضوع از لحاظ فیزیک مسئله مفهوم درستی را نشان می‌دهد. البته لازم به ذکر است که، اگر در صنعت این چنین مشکلاتی در سازه‌ها به وجود بیاید، فقط با اندکی افزایش در مقدار عمق نسبی ترک، عملا سازه از لحاظ کارایی قابلیت خود را از دست داده و سبب بروز مشکلاتی جبران ناپذیر خواهد شد. لذا هدف از انجام چنین مقایسه‌ای، بررسی و اثبات صحت نتایج استخراج شده در این بخش از تحقیق می‌باشد.

حال در ادامه به منظور بررسی و تحلیل جامع‌تر و کامل‌تر نتایج استخراج شده در این بخش از تحقیق، تأثیرات تغییر عمق نسبی ترک را بر روی نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار یکسر گیردار به سالم با شرایط ابعادی مختلف ($\frac{a}{b_1+b_2}$ =۱،۲،۳) مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

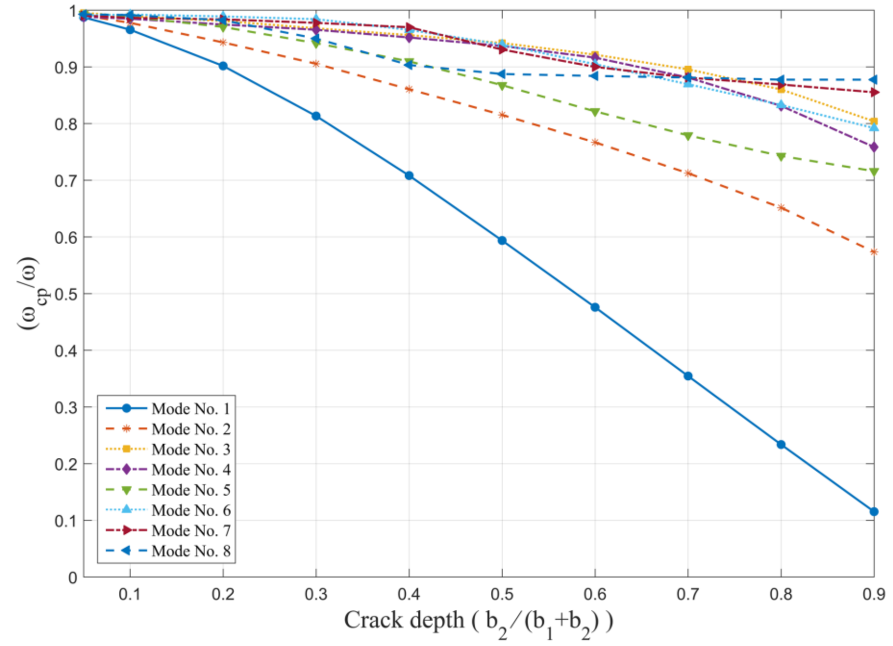
همانطور که در شکل‌های ۶-۱۷، ۶-۱۸ و ۶-۱۹ نشان داده شده است، نتایج استخراج شده برای شرایط ابعادی مختلف هم گویای این موضوع است که با افزایش مقدار عمق نسبی ترک، فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار نسبت به فرکانس‌های طبیعی ورق سالم کاهش پیدا می‌کنند. همچنین با اندکی دقت به شکل‌های زیر می‌توان به این نتیجه رسید که هرچه عمق نسبی ترک افزایش پیدا می‌کند، نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega_{cp}}{\omega}$) کاهش بیشتری را نشان می‌دهند. علاوه بر این، با بررسی نتایج نشان داده شده برای شرایط ابعادی مختلف مشاهده می‌شود که، با افزایش عمق نسبی ترک شرایطی مشابه در ابعاد مختلف رخ می‌دهد و در هر سه حالت نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega_{cp}}{\omega}$) به صورت غیر خطی کاهش پیدا می‌کنند. هر چند که مقادیر عددی نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega_{cp}}{\omega}$) برای هر یک از شرایط ابعادی متفاوت می‌باشند. با بررسی و مقایسه نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega_{cp}}{\omega}$) اول تا هشتم استخراج شده برای شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ =۱،۲،۳ مشاهده می‌شود که تأثیر تغییرات عمق نسبی ترک بر روی نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega_{cp}}{\omega}$) شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ =۳ نسبت به شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ =۳ بیشتر می‌باشند.



شکل۶-۱۷ تأثیر طول عمق نسبی ترک بر نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم $(\frac{\omega_{cp}}{\omega})$ ورق ترک‌دار با شرایط مرزی CFFF و شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}=$۱



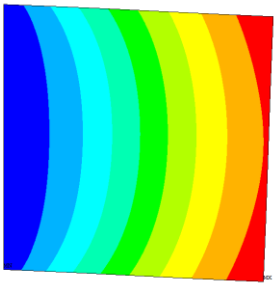
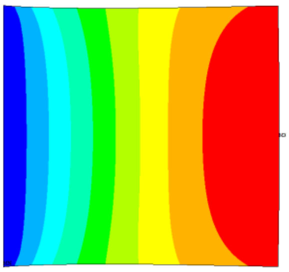
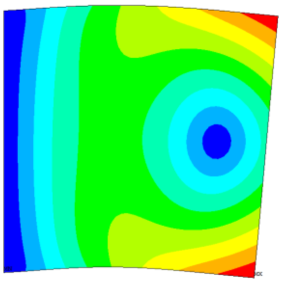
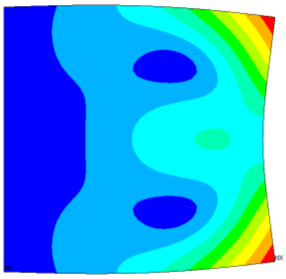
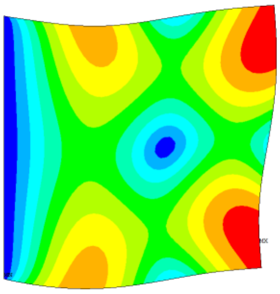
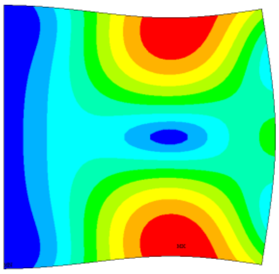
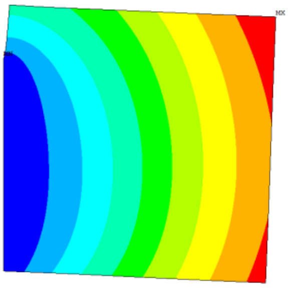
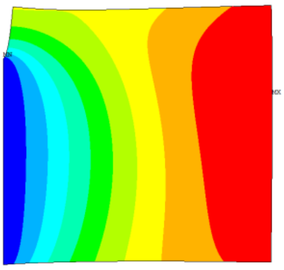
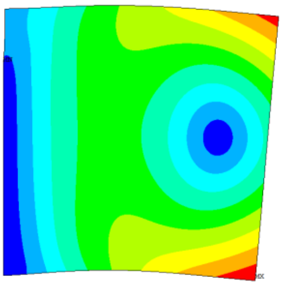
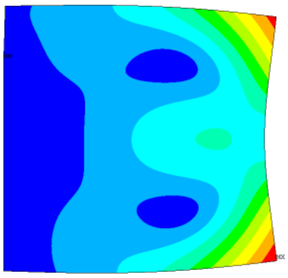
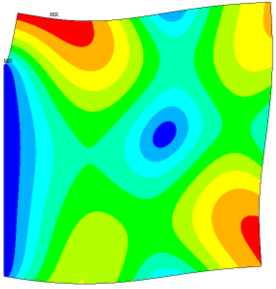
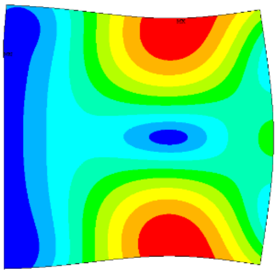
شکل۶-۱۸ تأثیر طول عمق نسبی ترک بر نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم $(\frac{\omega_{cp}}{\omega})$ ورق ترک‌دار با شرایط مرزی CFFF و شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}=$۲

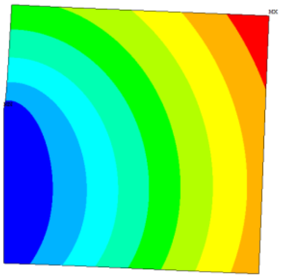
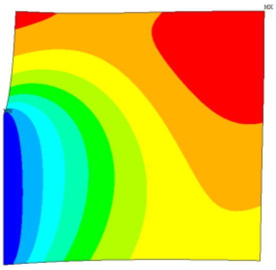
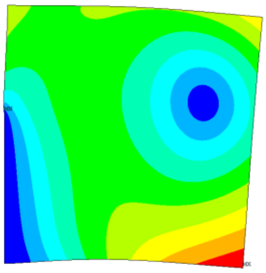
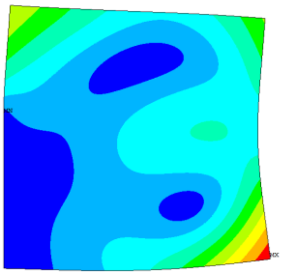
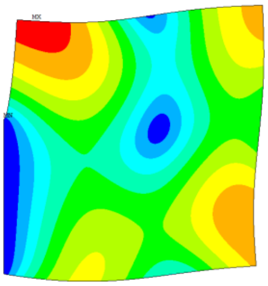
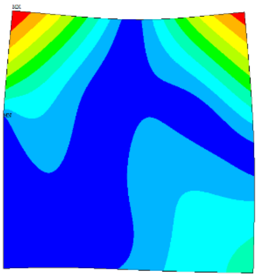
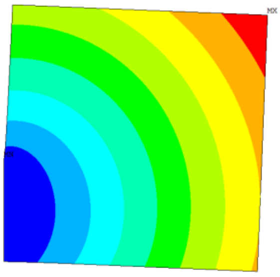
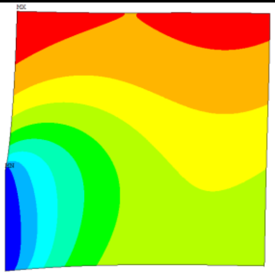
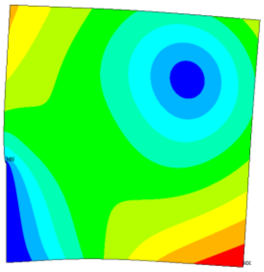
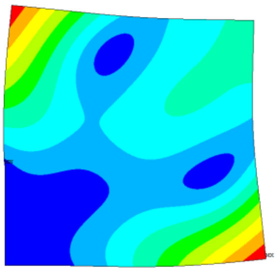
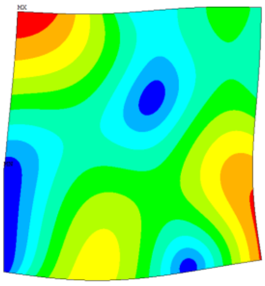
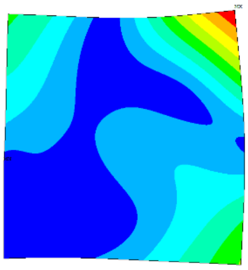


شکل۶-۱۹ تأثیر طول عمق نسبی ترک بر نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم $(\frac{\omega_{cp}}{\omega})$ ورق ترک‌دار با شرایط مرزی CFFF و شرایط ابعادی ۳= $\frac{a}{b_1+b_2}$

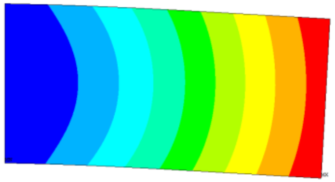
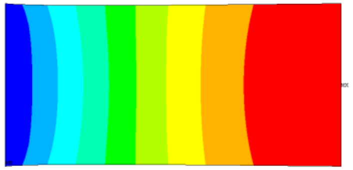
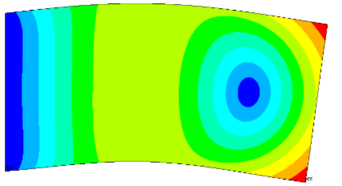
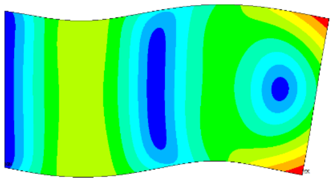
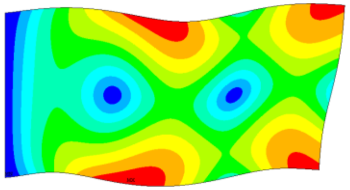
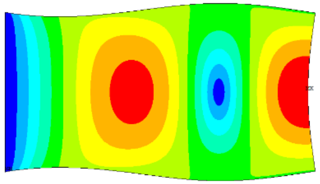
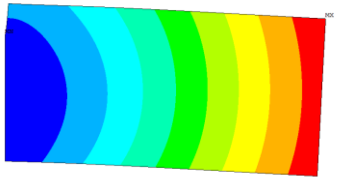
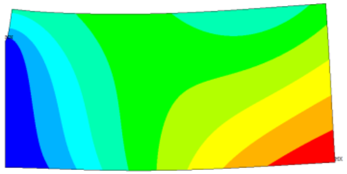
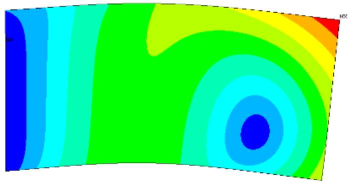
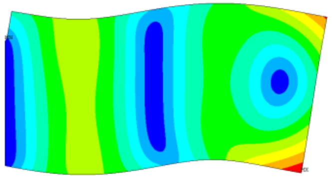
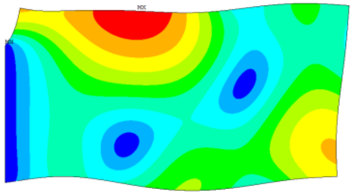
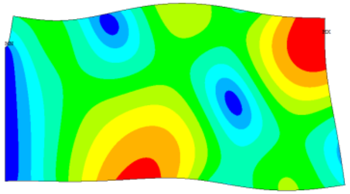
حال در ادامه برای درک بهتر از نتایج استخراج شده در این تحقیق، چند نمونه از شکل مودهای ورق ترک‌دار با شرایط ابعادی مختلف و شرایط مرزی CFFF از نرم افزار المان محدود ANSYS استخراج شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، جداول ۶-۱۲، ۶-۱۳ و ۶-۱۴ به ترتیب شکل مودهای اول تا ششم ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار با شرایط مرزی CFFF و با شرایط ابعادی ۱،۲،۳= $\frac{a}{b_1+b_2}$ می‌باشند و با مقایسه شکل مودهای استخراج شده از نرم افزار المان محدود ANSYS مشاهده می‌شود که ترک‌های به وجود آمده در لبه‌ی گیردار ورق موجب تغییراتی در شکل مودهای ارتعاشات آزاد ورق خواهند شد.

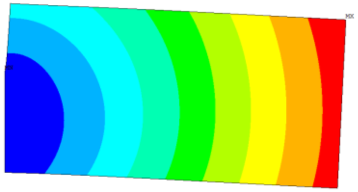
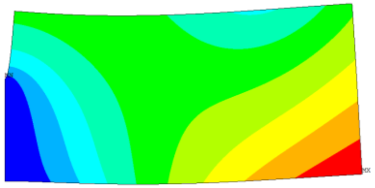
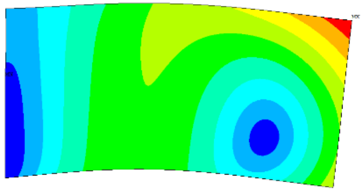
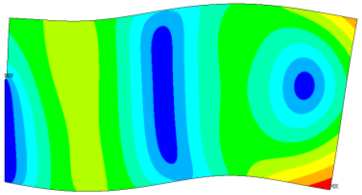
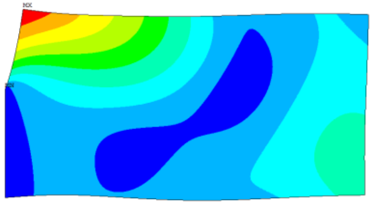
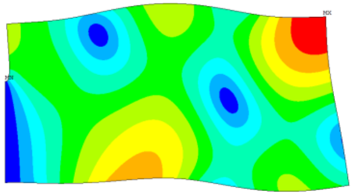
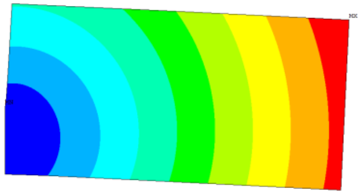
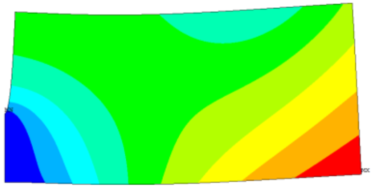
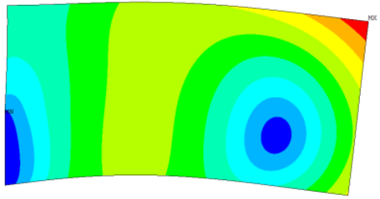
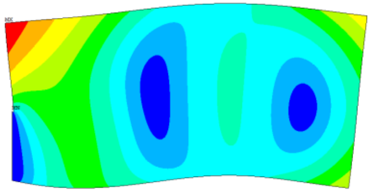
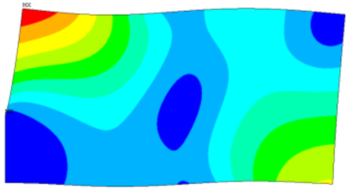
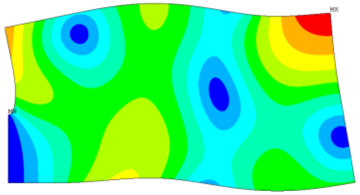
جدول۶-۱۲ تغییر شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق دوبعدی ترک‌دار تحت تأثیر تغییرات عمق نسبی ترک $\frac{b_2}{b_1+b_2}$ برای شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}=۱$

شماره مود	$\frac{b_2}{b_1+b_2}$	$\frac{a}{b_1+b_2}$
 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6	۰	۱
 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6	۰.۲	

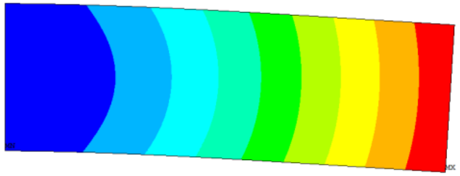
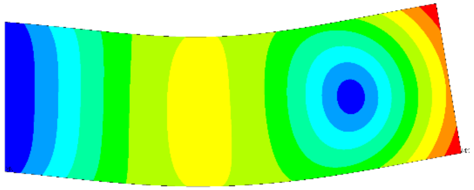
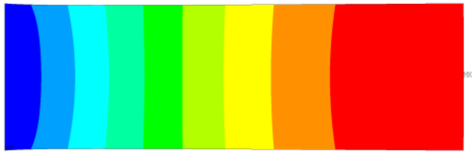
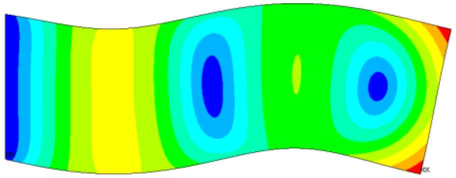
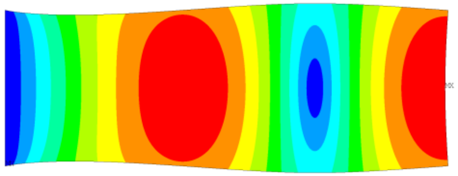
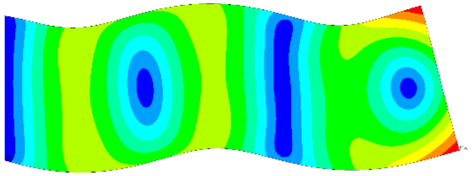
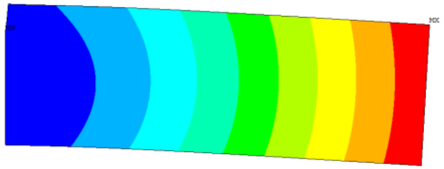
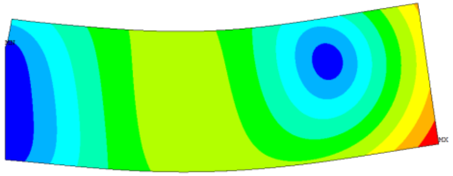
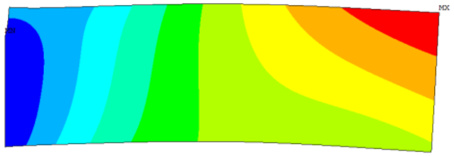
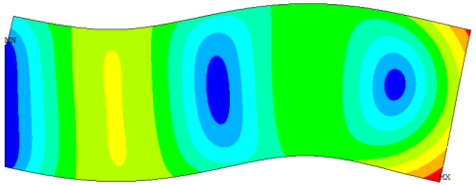
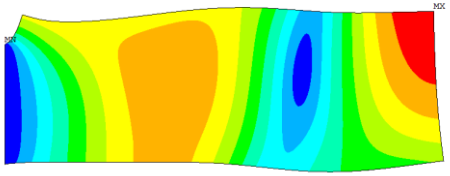
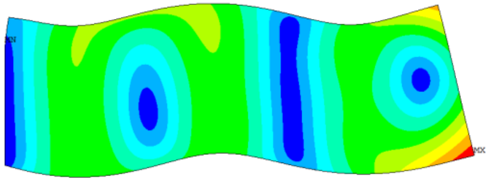
 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6	۰.۴	۱
 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6	۰.۶	

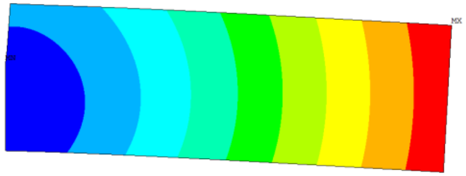
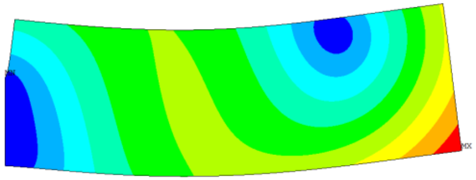
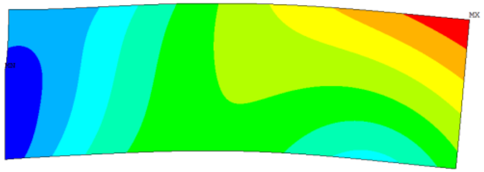
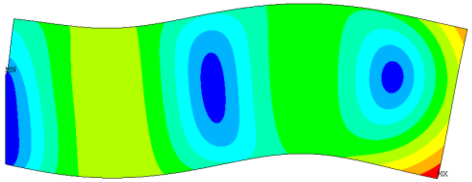
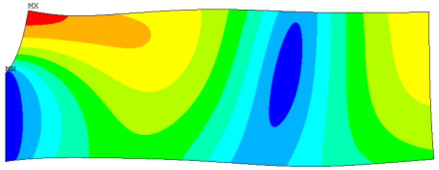
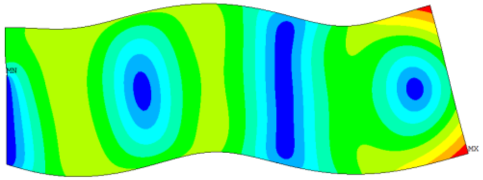
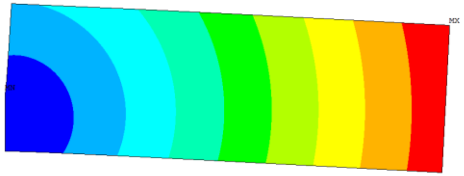
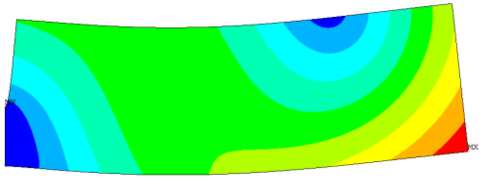
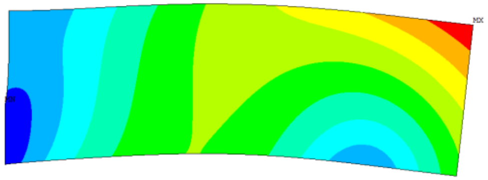
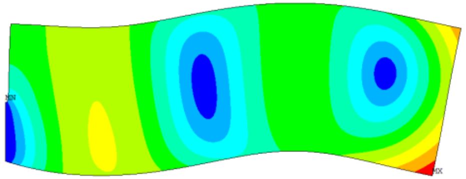
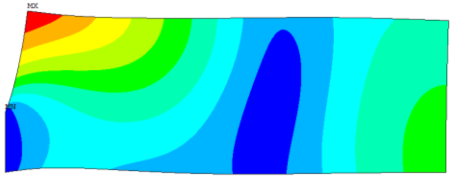
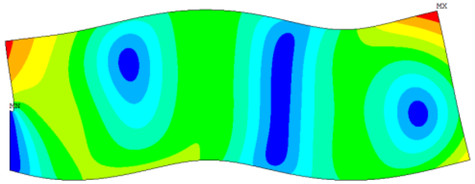
جدول۶-۱۳ تغییر شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق دوبعدی ترک‌دار تحت تأثیر تغییرات عمق نسبی ترک $\frac{b_2}{b_1+b_2}$ برای شرایط ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}=$ ۲

$\frac{a}{b_1+b_2}$	$\frac{b_2}{b_1+b_2}$	شماره مود
۲	۰	 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6
	۰.۲	 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6

۲	۰.۴	 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6
	۰.۶	 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6

جدول۶-۱۴ تغییر شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق دوبعدی ترک‌دار تحت تأثیر تغییرات عمق نسبی ترک $\frac{b_2}{b_1+b_2}$ برای شرایط ابعادی $\frac{b}{b_1+b_2}=$۱

شماره مود	$\frac{b_2}{b_1+b_2}$	$\frac{a}{b_1+b_2}$
 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6	۰	۳
 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6	۰.۲	

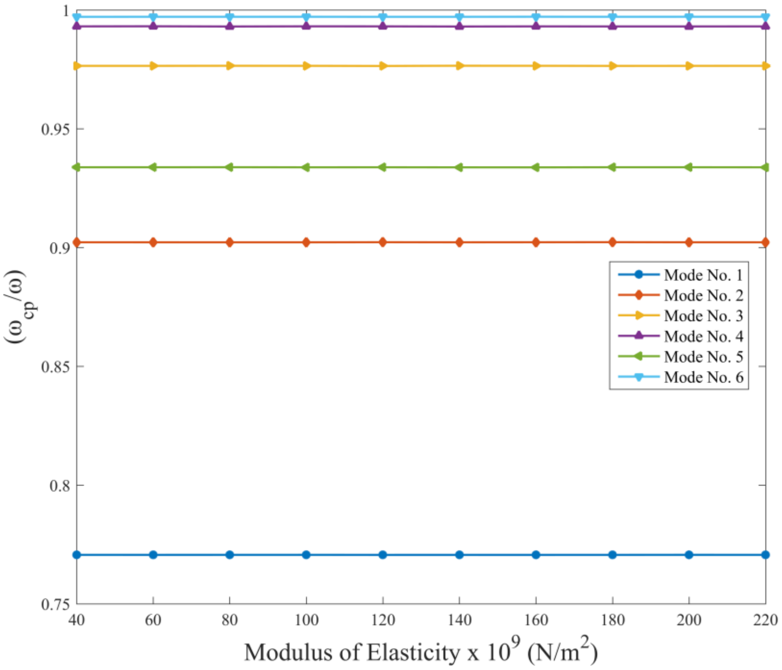
 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6	۰.۴	۳
 Mode No. 1  Mode No. 2  Mode No. 3  Mode No. 4  Mode No. 5  Mode No. 6	۰.۶	

۶-۷-۳ تأثیر پارامترهای هندسی و فیزیکی بر نسبت فرکانس‌های طبیعی ورق سالم به ترک‌دار

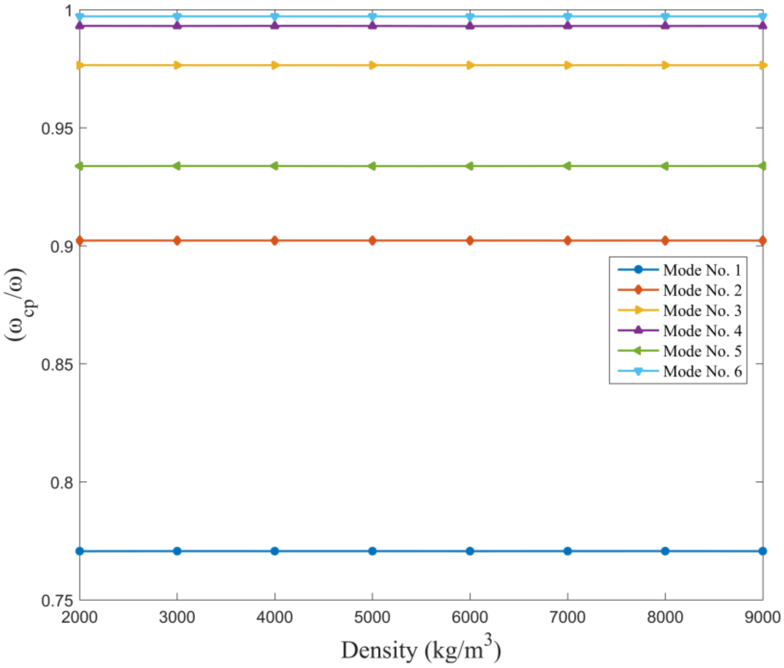
حال در ادامه‌ی این بخش از تحقیق، برای بررسی بهتر و جامع‌تر تأثیراتی را که پارامترهای هندسی و فیزیکی مانند مدول یانگ (E)، چگالی (ρ)، نسبت پواسون (μ) بر روی نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega_{cp}}{\omega}$) ورق یکسر گیردار ترک‌دار می‌گذارند مورد بررسی قرار خواهند گرفت. همچنین لازم به ذکر است که، نتایج با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته و شرایط ابعادی ۱ $=\frac{a}{b_1+b_2}$ و نیز با در نظر گرفتن مشخصات مکانیکی مواد و مشخصات ابعادی نشان داده شده در جدول۶-۱۵ بدست آمده‌اند.

جدول۶-۱۵ خصوصیات مکانیکی مواد و مشخصات ابعادی ورق سالم به کار برده شده
در روش رایلی – ریتز بهبود یافته

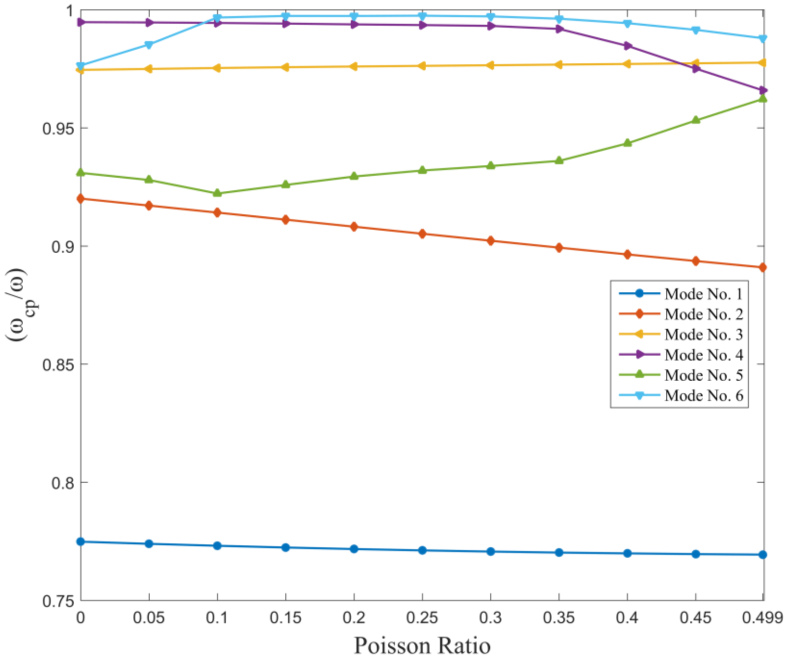
$a_1\ (mm)$	$b_1\ (mm)$	$b_2\ (mm)$	$h\ (mm)$	$E\ (GN/m^2)$	$\rho\ (kg/m^3)$	μ
۱۵۰۰	**۷۵۰**	**۷۵۰**	**۶۴۴۴.۰**	**۷۲**	**۲۷۸۰**	**۳.۰**



شکل۶-۲۰ تأثیر تغییرات مدول یانگ (E) بر نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega cp}{\omega}$) ورق ترک‌دار با شرایط ابعادی ۱= $\frac{a}{b_1+b_2}$ و شرایط مرزی CFFF



شکل۶-۲۱ تأثیر تغییرات چگالی (ρ) بر نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega cp}{\omega}$) ورق ترک‌دار با شرایط ابعادی ۱= $\frac{a}{b_1+b_2}$ و شرایط مرزی CFFF



شکل۶-۲۲ تأثیر تغییرات نسبت پواسون (μ) بر نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega cp}{\omega}$) ورق ترک‌دار با شرایط ابعادی ۱= $\frac{a}{b_1+b_2}$ و شرایط مرزی CFFF

همان طور که در شکل‌های ۶-۲۰، ۶-۲۱ و ۶-۲۲ مشاهده می‌شود، با بررسی نتایج استخراج شده به این نکته می‌توان دست یافت که، تغییرات مدول یانگ (E) و چگالی (ρ) تأثیری بر نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega cp}{\omega}$) ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار نخواهند داشت. بنابراین می‌توان گفت که، تأثیر تغییرات مدول یانگ (E) و چگالی (ρ) بر فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار مانند ورق سالم می‌باشند. به همین دلیل در شکل‌های ۳۶-۲۰، ۶-۲۱ و ۶-۲۲ تغییراتی در نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega cp}{\omega}$) اتفاق نیفتاده است. همچنین با اندکی دقت در نتایج مشاهده می‌شود که، تأثیر ترک بر روی فرکانس‌های طبیعی اول تا چهارم ورق یکسر گیردار به مراتب بیشتر از فرکانس‌های طبیعی پنجم و ششم می‌باشند. که موضوع فوق نشان دهنده‌ی این نکته است که، تأثیرات ترک در فرکانس‌های طبیعی ابتدایی ورق بیشتر خواهند بود. اما در شکل۶-۲۲ نتایج نشان دهنده‌ی این موضوع می‌باشند که، تغییرات نسبت پواسون (μ) بر نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega cp}{\omega}$) ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار تأثیر خواهد داشت. که دلیل این موضوع به پارامتر سرعت موج طول

$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}}$ و نیز نسبت رابطه‌ای که نسبت پواسون در رابطه‌ی سرعت موج طولی با فرکانس‌های طبیعی دارد، بر خواهد گشت. به این دلیل که با توجه به اینکه پارامتر نسبت پواسون رابطه ($\omega \alpha \sqrt{\frac{1}{(1-\mu^2)}}$) با فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد ورق دارد. به همین دلیل در شکل۶-۲۲ مشاهده می‌شود که، با تغییرات نسبت پواسون رفتاری غیر خطی در فرکانس‌های طبیعی ورق یکسر گیردار ترک‌دار رخ خواهد داد. ولی با این وجود با اندکی دقت در نتایج مشاهده می‌شود که، به شکلی مشابه با پارامترهای قبلی تأثیر ترک بر روی فرکانس‌های طبیعی اول تا چهارم ورق یکسر گیردار به مراتب بیشتر از فرکانس‌های طبیعی پنجم و ششم می‌باشند. که موضوع فوق نشان دهنده‌ی این نکته است که، برای پارمتر نسبت پواسون نیز هم، تأثیرات ترک در فرکانس‌های طبیعی ابتدایی ورق بیشتر خواهند بود.

فصل ۷

نتیجه گیری

موضوع این تحقیق بررسی و تحلیل ارتعاشات درون صفحه‌ای ورق سالم با شرایط مرزی FFFF، CCCC و CFFF و ورق ترک‌دار با شرایط مرزی CFFF با استفاده از روش‌های سری فوریه بهبود یافته و رایلی – ریتز بهبود یافته و تکنیک مرز فنردار فرضی بوده است.

در این تحقیق ابتدا صحت سنجی و اعتبار سنجی روش سری فوریه بهبود یافته و رایلی – ریتز بهبود یافته و تکنیک مرز فنردار فرضی ارائه شده مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. همچنین با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته تأثیرات پارامترهای هندسی و فیزیکی بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکل‌مودهای ورق سالم مورد بررسی قرار گرفته شده است. در ادامه با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته و تکنیک مرز فنردار فرضی تأثیرات عمق نسبی ترک، پارامترهای هندسی و فیزیکی بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکل‌مودهای ورق یکسر گیردار ترک‌دار مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت.

نتایج زیر بدست آمد:

۱- با توجه به تکنیک مرز فنردار فرضی در روش‌های سری فوریه بهبود یافته و رایلی – ریتز بهبود یافته با انتخاب مقدار مناسب صفر برای شرایط لبه آزاد (F) و $۱۰^{۲۰}$ برای شرایط لبه گیردار (C) می‌توان تمام شرایط مرزی کلاسیک را برای ورق شبیه‌سازی کرد.

۲- با توجه به بررسی و اعتبار سنجی دقت و همگرایی روش‌های سری فوریه بهبود یافته و رایلی – ریتز بهبود یافته می‌توان گفت که با انتخاب مقدار جملات گسترش دهنده مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته $M = N = ۱۲$ برای روش سری فوریه بهبود یافته و مقدار جملات گسترش دهنده مؤلفه‌های جابجایی بهبود یافته $M = N = ۱۴$ برای روش رایلی-ریتز بهبود یافته می‌توان به نتایجی با دقت و همگرایی مطلوب دست یافت.

۳- با توجه به بررسی و تحلیل تأثیرات پارامتر هندسی بر تغییرات فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ورق سالم با استفاده از روش رایلی-ریتز بهبود یافته می‌توان گفت که، فرکانس‌های

طبیعی ارتعاشات آزاد دورن صفحه‌ای ورق سالم با افزایش نسبت ابعادی $\frac{a}{b_1+b_2}$ برای شرایط مرزی FFFF و CFFF در نهایت کاهش و برای برای شرایط مرزی CCCC در نهایت افزایش پیدا خواهند کرد.

۴- با توجه به بررسی و تحلیل تأثیرات عمق نسبی ترک $\frac{b_2}{b_1+b_2}$ و پارامترهای هندسی همچون ابعاد ($\frac{a}{b_1+b_2}$) و پارامترهای فیزیکی همچون مدول یانگ (E)، چگالی (ρ)، نسبت پواسون (μ) بر روی مشخصات دینامیکی و ارتعاشی مانند نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega_{cp}}{\omega}$) و شکل مودهای ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار برای شرایط مرزی CFFF با استفاده از روش رایلی-ریتز بهبود یافته می‌توان به نتایج زیر دست یافت:

۴-۱- با افزایش عمق نسبی ترک $\frac{b_2}{b_1+b_2}$ نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega_{cp}}{\omega}$) ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار برای شرایط مرزی CFFF و شرایط ابعادی ۱،۲،۳= $\frac{a}{b_1+b_2}$ به صورت غیر خطی کاهش پیدا خواهند کرد.

۴-۲- تغییرات مدول یانگ (E) بین ۴۰ (GN/m^2) تا ۲۲۰ (GN/m^2) و چگالی (ρ) بین ۲۰۰۰ (kg/m^3) تا ۹۰۰۰ (kg/m^3) تأثیری بر نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega_{cp}}{\omega}$) ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار نخواهند داشت. به عبارتی دیگر می‌توان گفت که، تأثیر این تغییرات بر فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار مانند ورق سالم خواهند بود.

۴-۳- نسبت فرکانس طبیعی ورق ترک‌دار به سالم ($\frac{\omega_{cp}}{\omega}$) ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق ترک‌دار تحت تأثیر تغییرات نسبت پواسون (μ) بین ۰ تا ۰.۴۹۹ رفتاری غیر خطی از خود نشان خواهند داد. به عبارتی دیگر می‌توان گفت که، تأثیر تغییرات

نسبت پواسون بر فرکانس‌های طبیعی ورق ترک‌دار با تأثیری که بر فرکانس‌های طبیعی ورق سالم می‌گذارد متفاوت خواهد بود.

فصل ۸

پیشنهادها

جهت توسعه‌ی و پیشرفت در بررسی و تحلیل مسائل موجود در زمینه ارتعاشات درون ورق می‌توان پیشنهادهایی را به صورت زیر بیان کرد:

۱- بررسی ارتعاشات اجباری درون صفحه‌ای ورق با شرایط مرزی کلاسیک مختلف با استفاده از روش سری فوریه بهبود یافته

۲- بررسی ارتعاشات اجباری درون صفحه‌ای ورق با شرایط مرزی کلاسیک مختلف با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته

۳- بررسی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق با ترک‌های به وجود آمده در لبه‌های ورق با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته و تکنیک مرز فنر فرضی

۴- بررسی ارتعاشات آزاد درون صفحه‌ای ورق با ترک‌های عمقی موازی با لبه‌ها ورق با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته و تکنیک مرز فنر فرضی.

مراجع

[1] TIMOSHENKO S. P., WOINOWSKY-KRIEGER S., (**1959**), "**Theory of plates and shells**", McGraw-Hill, New York.

[2] Szilard R., (**2004**), "**Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods**", Wiley.

[3] Maruyama K., Ichinomiya O., (**1989**). "Experimental Study of Free Vibration of Clamped Rectangular Plates with Straight Narrow Slits", **JSME International Journal, Ser. 3, Vibration, Control Engineering, Engineering for Ind ustry 32**, **32**, **187-193** .

[4] Wu D., Law S. S., (**2004**). "Anisotropic damage model for an inclined crack in thick plate and sensitivity study for its detection", **International Journal of Solids and Structures**, **41**, **4321-4336** .

[5] Wu D., Law S. S., (**2004**). "Damage-detection-oriented model for a cracked rectangular plate", **Smart Structures and Materials**, **5391**, **470-481** .

[6] Wu D., Law S. S., (**2004**). "Damage localization in plate structures from uniform load surface curvature", **Journal of Sound and Vibration**, **276**, **227-244** .

[7] Huang C. S., Leissa A. W. , (**2009**). "Vibration analysis of rectangular plates with side cracks via the Ritz method", **Journal of Sound and Vibration**, **323**(**3**), **974-988** .

[8] Huang C. S., Leissa A. W., Chan C., (**2011**). "Vibrations of rectangular plates with internal cracks or slits", **International Journal of Mechanical Sciences**, **53**(**6**), **436-445** .

[9] Huang C. S., Leissa A. W. , (**2011**). "Accurate vibration analysis of thick, cracked rectangular plates", **Journal of Sound and Vibration**, **330**, **2079-2093** .

[10] Ugural A. C., (**1999**), "**Stresses in Plates and Shells**", McGraw-Hill.

[11] Leissa A. W., (**1973**). "The free vibration of rectangular plates.", **Journal of Sound and Vibration**, **31**(**3**), **257-293** .

[12] Zhou L., Zheng W. X., (**2006**). "Moving least square Ritz method for vibration analysis of plates", **Journal of Sound and Vibration**, **290**, **968-990 .**

[13] Warburton G. B. , (**1954**). "The vibration of rectangular plates", **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, **371-384** .

[14] Tomar J. S., (**1962**). "On flexural vibrations of isotropic elastic thin square plates according to Mindlin's theory", **19(2), 169-179 .**

[15] Dawe D. J., Roufaeil O. L., (**1980**). "Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates", **Journal of Sound and Vibration**, **69**, **345-359** .

[16] Bhat R. B., (**1985**). "Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method", **Journal of Sound and Vibration**, **102**(**4**), **493-499** .

[17] Kitipornchai S., Xiang Y.,Wang C. M.,LIEW K. M. , (**1993**). "Buckling of thick skew plates", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, **36**, **1299-1310** .

[18] Saadatpour M. M., AZHARI M., BRADFORD M. A., (**2000**). "Vibration analysis of simply supported plates of general shape with internal point and line supports using the Galerkin method", **Engineering Structures**, **22**, **1180-1188** .

[19] Ng S. F., Araar Y., (**1989**). "Free vibration and buckling analysis of clamped rectangular plates of variable thickness by the Galerkin method", **Journal of Sound and Vibration of plates**, **135**, **263-274** .

[20] Saadatpour M. M., Azhari M., Bradford M. A., (**1998**). "The Galerkin method for static analysis of simply supported plates of general shape", **Computers & Structures**, **69**, **1-9** .

[21] Gorman D. J., (**1995**). "Accurate free vibration analysis of the orthotropic cantilever plate", **Journal of Sound and Vibration**, **181**, **605-618** .

[22] Gorman D. J., (**2005**). "Highly accurate free vibration eigenvalues for the completely free orthotropic plate", **Journal of Sound and Vibration**, **280**, **1095-1115** .

[23] Bardell N. S., (**1991**). "Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method", **Journal of Sound and Vibration**, **151**, **263-289** .

[24] Han W., Petyt M., (**1996**). "Linear vibration analysis of laminated rectangular plates using Hierarchical finite element method I: Forced vibration analysis", **Computers and Structures**, **61(4)**, **713-724** .

[25] Shu C., Wu W. X., Ding H., Wang C. M., (**2007**). "Free vibration analysis of plates using least-square-based finite difference method", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, **196**, **1330-1343** .

[26] Wu J. H., Liu A. Q., Chen H. L., (**2007**). "Exact solutions for free-vibration analysis of rectangular plates using Bessel functions", **Journal of Applied Mechanics**, **74**, **1247-1251** .

[27] Xing Y., Liu B., (**2009**). "New exact solutions for free vibrations of rectangular thin plates by symplectic dual method", **Acta Mechanica Sinica**, **25**, **265-270** .

[28] Gorman D. J., (**2006**). "Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported", **Journal of Sound and Vibration**, **294**, **131–161** .

[29] Wittrick W.H. , Williams F.W. , (**1971**). "A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures", **Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics 24**, **263–284** .

[30] Wang G. , Wereley N. M. , (**2002**). "Free in-plane vibration of rectangular plates", **AIAA Journal 40**, **953–959** .

[31] Gorman D. J., (**2004**). "Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition", **Journal of Sound and Vibration**, **272**, **831–851** .

[32] Gorman D. J. , (**1978**). "Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition", **Journal of Sound and Vibration**, **57**, **432–447** .

[33] Gorman D. J. , (**2004**). "Accurate analytical type solutions for the free in-plane vibration of clamped and simply supported rectangular plates", **Journal of Sound and Vibration**, **276**, **311-333 .**

[34] Dozio L. , (**2010**). "Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with arbitrary elastic boundaries", **Mechanics Research Communications**, **37**, **627–635** .

[35] Bardell N.S., Langley R. S., Dunsdon J. M., (**1996**). "On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates", **Journal of Sound and Vibration**, **191**(**3**), **459-467** .

[36] Farag N. H., Pan J., (**1999**). "Modal characteristics of in-plane vibration of rectangular plates", **The Journal of the Acoustical Society of America**, **105**, **3295–3310** .

[37] Xing Y. F., Liu B., (**2009**). "Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates", **International Journal of Mechanical Sciences**, **51**, **246–255** .

[38] Liu B., Xing Y. F., (**2011**). "Comprehensive exact solutions for free in-plane vibrations of orthotropic rectangular plates", **European Journal of Mechanics-A/Solids**, **30**, **383–395** .

[39] Gorman D. J. , (**2005**). "Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastic support normal to the boundaries", **Journal of Sound and Vibration**, **285**, **941–966 .**

[40] Gorman D. J., (**2009**). "Accurate in-plane free vibration analysis of rectangular orthotropic plates", **Journal of Sound and Vibration**, **323**, **426–443** .

[41] Dozio L. , (**2011**). "In-plane free vibrations of single-layer and symmetrically laminated rectangular composite plates", **93**, **1787–1800** .

[42] Jeyaraj P., Chandramouli Padmanabhan, Ganesan N., (**2008**). "Vibration and acoustic response of an isotropic plate in a thermal environment", **J. Vib. Acoust**, **5**, **130** .

[43] Jeyaraj P., Ganesan N., Chandramouli Padmanabhan, (**2009**) ."Vibration and acoustic response of a composite plate with inherent material damping in a thermal environment", **J. Sound Vib**, **320**, **1-2** .

[44] Baferani A. H.m Saidi A. R., (**2012**). "Accurate critical buckling temperature of thick annular sector plates", **J .Eng. Mech**, **136**(**6**), **614–630** .

[45] Woodcock R.L., Bhat R.B., Stiharu I.G. , (**2008**). "Effect of ply orientation on the in-plane vibration of single-layer composite plates", **Journal of Sound and Vibration**(**312**), **94-108** .

[46] Singh A.V., Muhammad T. , (**2004**). "Free in-plane vibration of isotropic non-rectangular plates", **Journal of Sound and Vibration**, **273**, **219-231** .

[47] Mohazzab A. H., Dozio L., (**2015**). "A spectral collocation solution for in-plane eigenvalue analysis of skew plates", **International Journal of Mechanical Sciences**, **94–95**, **199–210** .

[48] Wang X., Wang Y.,Yuan Z. , (**2014**). "Accurate vibration analysis of skew plates by the new version of the differential quadrature method", **Applied Mathematical Modelling**, **38**, **926-937** .

[49] **Israr A. (2008), PhD. Thesis, "Vibration analysis of cracked aluminium plates". University of Glasgow, Glasgow, UK** ,

[50] Lynn P., Kumbasar N., (**1967**). "Free vibration of thin rectangular plates having narrow cracks with simply supported edges", **Development in mechanics**, **4**, **911-928** .

[51] Stahl B., Keer L., (**1972**). "Vibration and stability of cracked rectangular plates", **International Journal of Solids and Structures**, **8**(**1**), **69-91** .

[52] Nezu K. , (**1982**). "Free vibration of a simply-supported rectangular plate with a straight through-notch", **Bulletin of JSME**, **25**(**199**), **16-23** .

[53] Hirano Y., Okazaki K., (**1980**). "Vibrarfon of Cracked Rectangular Plates", **Bulletin of JSME**, **23**(**179**), **732-740** .

[54] Solecki R., (**1983**). "Bending vibration of a simply supported rectangular plate with a crack parallel to one edge", **Engineering fracture mechanics**, **18**, **1111-1118** .

[55] Lee H. P., Lim S. P., (**1993**). "Vibration of cracked rectangular plates including transverse shear deformation and rotary inertia", **Comput. Struct.**, **49**, **715–718** .

[56] Biancolini M. E., Brutti C., Reccia L.,, (**2005**" .(Approximate solution for free vibrations of a thin orthotropic rectangular plates", **J. Sound Vib**, **288**(**1-2**), **321–344** .

[57] Xing Y. F., Liu B., (**2009**). "New exact solutions for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates", **Compos. Struct.**, **89**(**4**), **567-578 .**

[58] Rice J. R., Levy N., (**1972**). "The Part through surface crack in an elastic plate", **J. Appl. Mech.**, **39**(**1**), **185–194** .

[59] Khadem S., Rezaee M., (**2000**). "Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate", **Journal of Sound and Vibration**, **236**(**2**), **245-258** .

[60] Lam K., Hung K., Chow S., (**1989**). "Vibration analysis of plates with cutouts by the modified Rayleigh-Ritz method", **Applied Acoustics**, **28**(**1**), **49- 60** .

[61] Liew K., Hung K., Lim M., (**1994**). "A solution method for analysis of cracked plates under vibration", **Engineering fracture mechanics**, **48**(**3**), **393-404** .

[62] Bassily S., Dickinson S., (**1975**). "On the use of beam functions for problems of plates involving free edges", **Journal of Applied Mechanics**, **2**, **858** .

[63] Israr A., Cartmell M. P., Manoach E., Trendafilova I., Ostachowicz W., Krawczuk M., Zak A., (**2009**). "Analytical modelling and vibration analysis of cracked rectangular plates with different loading and boundary conditions", **Journal of Applied Mechanics**, **76(1)**, **11005-11013.**

[64] Ismail R., Cartmell M., (**2012**). "An investigation into the vibration analysisof a plate with a surface crack of variable angular orientation", **Journal of Sound and Vibration**, **331**(**12**), **2929-2948** .

[65] Qian G. L., Gu S. N., Jiang J. S., (**1991**). "A Finite Element Model of Cracked Plates Application to Vibration Problems", **Computers and Structures**, **39**, **483-487** .

[66] Krawczuk M., (**1993**). "Natural vibrations of rectangular plates with a through crack", **Arch. Appl.**, **63**(7), **491–504** .

[67] Vafai A., Javidruzi M., Estekanchi H. E., (**2002**). "Parametric instability of edge cracked plates", **Thin-Walled Struct.**, **40**, **29–44** .

[68] Bachene M., Tiberkak R., Rechak S., (**2009**). "Vibration analysis of cracked plates using the extended finite element method", **Arch. Appl. Mech.**, **79**(**3**), **249–262** .

[69] Viola E., Tornabene F., Fantuzzi N., (**2013**). "Generalized differential quadrature finite element method for cracked composite structures of arbitrary shape", **Compos. Struct.**, **106**, **815–834** .

[70] Hosseini-Hashemi S., Roohi Gh, H., Rokni H., (**2010**). "Exact free vibration study of rectangular Mindlin plates with all-over part-through open cracks", **Computers & Structures**, **88**, **1015-1032** .

[71] Huang C. S., Yang P. J., Chang M. J., (**2012**). "Three-dimensional vibrations of functionally graded material cracked rectangular plates with through internal cracks", **Compos. Struct.**, **94**, **2764–2776** .

[72] Hongan Xu., Wen L. Li., Du J., (**2014**). "Modal Analysis of General Plate Structures", **Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME**, **136**(2), **865-892** .

[73] Leissa A. W., (**1969**), "**Vibration of plates (NASA SP-160)**", US Government Printing Office, Washington, **1–353**.

[74] Reddy J. N., (**1984b**), "**Energy and Variational Methods in Applied Mechanics** ", McGraw-Hill, New York.

[75] Lanczos C., (**1986**), "**The Variational Principles in Mechanics**", 4th ed, Fover, New York.

[76] Soedel W. , (**1993**), "**Vibrations of Shells and Plates**", 2nd ed, Marcel Dekker, New York.

[77] Reddy J. N., (**2002**), "**Energy and principles and variational methods in applied mechanics**", 2nd ed, Wiley, New Jersey, **1– 572**.

[78] Qatu M. S., (**2004**), "**Vibration of laminated shells and plates**", Elsevier, San Diego, **1– 409**.

[79] Zhang X., Li W. L., (**2009**). "Vibrations of rectangular plates with arbitrary non-uniform elastic edge restraints", **J Sound Vib**, **326**, **221– 234** .

[80] Price N. M., Liu M., Taylor R. E. et al (**1998**). "Vibrati ons of cylindrical pipes and open shells", **J Sound Vibration**, **218(3)**, **361– 387** .

[81] Liew K. M., Zhao X., Ferreira A. J. M., (**2011**). "A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells", **Composite Structures**, **93**, **2031– 2041** .

[82] Li W. L., (**2000**). "Free vibrations of beams with general boundary conditions", **J Sound Vib**, **237**, **709– 725** .

[83] Li W. L., (**2002**). "Comparison of Fourier sine and cosine series expansions for beams with arbitrary boundary conditions", **J Sound Vib**, **255(1)**, **185– 194** .

[84] Jingtao Du., Wen L., Guoyong J., Tiejun Y., Zhigang L., (**2007**). "An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges", **Journal of Sound and Vibration**, **306**(**3–5**), **908–927** .

[85] Lucas A., Franco-Villafañe J. A., Báez G., Méndez-Sánchez R. A. , (**2015**). "In-plane vibrations of a rectangular plate: Plane wave expansion modelling and experiment", **Journal of Sound and Vibration**, **342**, **168-176 .**

[86] Papkov S. O. , (**2016**). "A new method for analytical solution of inplane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems", **Journal of Sound and Vibration**, **369**, **228–245**

پیوست أ: تعاریف کمکی

$$\xi_{1a}(x) = a\xi_x(\xi_x - 1)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{1m} \cos \lambda_{am} x$$

$$\alpha_{1m} = \begin{cases} \dfrac{a}{12}, \quad m = 0 \\ -\dfrac{2a[m^2\pi^2 - 6 + 6(-1)^m]}{m^4\pi^4}, \quad m \neq 0 \end{cases}$$

(أ-۱)

$$\xi'_{1a}(x) = \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \frac{2x}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{1m} \cos \lambda_{am} x$$

$$\gamma_{1m} = \begin{cases} 0, \quad m = 0 \\ -\dfrac{4[2 + (-1)^m]}{m^2\pi^2}, \quad m \neq 0 \end{cases}$$

(أ-۲)

$$\xi''_{1a}(x) = \frac{4}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right) + \frac{2x}{a^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{1m} \cos \lambda_{am} x$$

$$\varepsilon_{1m} = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}, \quad m = 0 \\ \dfrac{12[-1 + (-1)^m]}{am^2\pi^2}, \quad m \neq 0 \end{cases}$$

(أ-۳)

$$\xi_{2a}(x) = \frac{1}{a}x^2\left(\frac{x}{a} - 1\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{1m} \cos \lambda_{am} x$$

$$\alpha_{1m} = \begin{cases} -\dfrac{a}{12}, \quad m = 0 \\ \dfrac{2a[m^2\pi^2(-1)^m + 6 - 6(-1)^m]}{m^4\pi^4}, \quad m \neq 0 \end{cases}$$

(أ-۴)

$$\xi'_{2a}(x) = \frac{2x}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right) + \frac{x^2}{a^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{2m} \cos \lambda_{am} x$$

$$\gamma_{2m} = \begin{cases} 0, \quad m = 0 \\ \dfrac{4[1 + 2(-1)^m]}{m^2\pi^2}, \quad m \neq 0 \end{cases}$$

(أ-۵)

$$\xi''_{2a}(x) = \frac{2}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right) + \frac{4x}{a^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} \cos \lambda_{am} x$$

$$\varepsilon_{2m} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, \quad m = 0 \\ \dfrac{12[-1 + (-1)^m]}{am^2\pi^2}, \quad m \neq 0 \end{cases}$$

(أ-۶)

$$\xi_{1b}(y) = y\left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{1n} \cos \lambda_{bn} y$$

$$\beta_{1n} = \begin{cases} \dfrac{b}{12}, \quad n = 0 \\ -\dfrac{2b[n^2\pi^2 - 6 + 6(-1)^n]}{n^4\pi^4}, \quad n \neq 0 \end{cases}$$

(أ-۷)

$$\xi'_{1b}(y) = \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 + 2\frac{y}{b}\left(\frac{y}{b} - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{1n} \cos \lambda_{bn} y$$

$$\eta_{1n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ -\dfrac{4[2 + (-1)^n]}{n^2\pi^2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

(أ-٨)

$$\xi''_{1b}(y) = \frac{4}{b}\left(\frac{y}{b} - 1\right) + \frac{2y}{b^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{1n} \cos \lambda_{bn} y$$

$$\sigma_{1n} = \begin{cases} -\dfrac{1}{b}, & n = 0 \\ \dfrac{12[-1 + (-1)^n]}{an^2\pi^2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

(أ-٩)

$$\xi_{2b}(y) = \frac{1}{b} y^2 \left(\frac{y}{b} - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{1n} \cos \lambda_{bn} y$$

$$\beta_{1n} = \begin{cases} -\dfrac{b}{12}, & n = 0 \\ \dfrac{2b[n^2\pi^2(-1)^n + 6 - 6]}{n^4\pi^4}, & n \neq 0 \end{cases}$$

(أ-١٠)

$$\xi'_{2b}(y) = 2\frac{y}{b}\left(\frac{y}{b} - 1\right) + \frac{y^2}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{2n} \cos \lambda_{bn} y$$

$$\eta_{12n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \dfrac{4[1 + 2(-1)^n]}{n^2\pi^2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

(أ-١١)

$$\xi''_{2b}(y) = \frac{2}{b}\left(\frac{y}{b} - 1\right) + \frac{4y}{b^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2n} \cos \lambda_{bn} y$$

$$\sigma_{2n} = \begin{cases} \dfrac{1}{b}, & n = 0 \\ \dfrac{12[-1 + (-1)^n]}{bn^2\pi^2}, & n \neq 0 \end{cases}$$

(أ-١٢)

$$\sin \lambda_{am} x = \sum_{p} \tau_{ap}^{m} \cos \lambda_{ap} x = \sin \lambda_{ap} x = \sum_{m} \tau_{am}^{p} \cos \lambda_{am} x$$

$$p = 0,\ \tau_{am}^{p} = 0$$

$$p \neq 0,\ \tau_{am}^{p} = \begin{cases} m = 0, & \dfrac{1 - (-1)^p}{p\pi} \\ m \neq 0, & \begin{cases} m = q, & 0 \\ m \neq q, & \dfrac{2p[(-1)^{m+p} - 1]}{(m^2 - p^2)\pi} \end{cases} \end{cases}$$

(أ-١٣)

$$\sin \lambda_{bn} y = \sum_{q} \kappa_{bq}^{n} \cos \lambda_{bq} y = \sin \lambda_{bq} y = \sum_{n} \kappa_{bn}^{q} \cos \lambda_{bn} y$$

$$q = 0,\ \kappa_{bn}^{q} = 0$$

$$q \neq 0,\ \kappa_{bn}^{q} = \begin{cases} n = 0, & \dfrac{1 - (-1)^q}{q\pi} \\ n \neq 0, & \begin{cases} n = q, & 0 \\ n \neq q, & \dfrac{2q[(-1)^{n+q} - 1]}{(n^2 - q^2)\pi} \end{cases} \end{cases}$$

(أ-١٤)

پیوست ب: عناصر ماتریس‌های $\boldsymbol{\bar{H}}$، $\boldsymbol{\bar{Q}}$، $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{F}$

عناصر ماتریس $\bar{H}$ را می‌توان با در نظر گرفتن $m' = 0,1,2,\dots,M$ و $n' = 0,1,2,\dots,N$ از روابط (۴-۳۷) تا (۴-۴۴) به صورت زیر استخراج کرد:

$$\begin{aligned}
&\{a_{11}\}_{m+1,m'+1} = \delta_{mm'} && \{b_{12}\}_{m+1,m'+1} = 0 \\
&\{c_{13}\}_{m+1,n'+1} = -\bar{k}_{py0}\alpha_{1m} && \{d_{14}\}_{m+1,n'+1} = -\bar{k}_{py0}\alpha_{2m} \\
&\{e_{15}\}_{m+1,m'+1} = 0 && \{f_{16}\}_{m+1,m'+1} = 0 \\
&\{g_{17}\}_{m+1,n'+1} = \gamma_{1m} && \{h_{18}\}_{m+1,n'+1} = \gamma_{2m}
\end{aligned}$$

(ب-۱)

$$\begin{aligned}
&\{a_{21}\}_{m+1,m'+1} = 0 && \{b_{22}\}_{m+1,m'+1} = \delta_{mm'} \\
&\{c_{23}\}_{m+1,n'+1} = (-1)^n\bar{k}_{py1}\alpha_{1m} && \{d_{24}\}_{m+1,n'+1} = (-1)^n\bar{k}_{py1}\alpha_{2m} \\
&\{e_{25}\}_{m+1,m'+1} = 0 && \{f_{26}\}_{m+1,m'+1} = 0 \\
&\{g_{27}\}_{m+1,n'+1} = (-1)^n\gamma_{1m} && \{h_{28}\}_{m+1,n'+1} = (-1)^n\gamma_{2m}
\end{aligned}$$

(ب-۲)

$$\begin{aligned}
&\{a_{31}\}_{n+1,m'+1} = -\bar{k}_{nx0}\beta_{1n} && \{b_{32}\}_{n+1,m'+1} = -\bar{k}_{nx0}\beta_{2n} \\
&\{c_{33}\}_{n+1,n'+1} = \delta_{nn'} && \{d_{34}\}_{n+1,n'+1} = 0 \\
&\{e_{35}\}_{n+1,m'+1} = \mu\eta_{1n} && \{f_{36}\}_{n+1,m'+1} = \mu\eta_{2n} \\
&\{g_{37}\}_{n+1,n'+1} = 0 && \{h_{38}\}_{n+1,n'+1} = 0
\end{aligned}$$

(ب-۳)

$$\begin{aligned}
&\{a_{41}\}_{n+1,m'+1} = (-1)^m\bar{k}_{nx1}\beta_{1n} && \{b_{42}\}_{n+1,m'+1} = (-1)^m\bar{k}_{nx1}\beta_{2n} \\
&\{c_{43}\}_{n+1,n'+1} = 0 && \{d_{44}\}_{n+1,n'+1} = \delta_{nn'} \\
&\{e_{45}\}_{n+1,m'+1} = (-1)^m\mu\eta_{1n} && \{f_{46}\}_{n+1,m'+1} = (-1)^m\mu\eta_{2n} \\
&\{g_{47}\}_{n+1,n'+1} = 0 && \{h_{48}\}_{n+1,n'+1} = 0
\end{aligned}$$

(ب-۴)

$$\begin{aligned}
&\{a_{51}\}_{m+1,m'+1} = 0 && \{b_{52}\}_{m+1,m'+1} = 0 \\
&\{c_{53}\}_{m+1,n'+1} = \mu\gamma_{1m} && \{d_{54}\}_{m+1,n'+1} = \mu\gamma_{2m} \\
&\{e_{55}\}_{m+1,m'+1} = \delta_{mm'} && \{f_{56}\}_{m+1,m'+1} = 0 \\
&\{g_{57}\}_{m+1,n'+1} = -\bar{k}_{ny0}\alpha_{1m} && \{h_{58}\}_{m+1,n'+1} = -\bar{k}_{ny0}\alpha_{2m}
\end{aligned}$$
(ب-۵)

$$\begin{aligned}
&\{a_{61}\}_{m+1,m'+1} = 0 && \{b_{62}\}_{m+1,m'+1} = 0 \\
&\{c_{63}\}_{m+1,n'+1} = (-1)^{n}\mu\gamma_{1m} && \{d_{64}\}_{m+1,n'+1} = (-1)^{n}\mu\gamma_{2m} \\
&\{e_{65}\}_{m+1,m'+1} = 0 && \{f_{66}\}_{m+1,m'+1} = \delta_{mm'} \\
&\{g_{67}\}_{m+1,n'+1} = (-1)^{n}\bar{k}_{ny1}\alpha_{1m} && \{h_{68}\}_{m+1,n'+1} = (-1)^{n}\bar{k}_{ny1}\alpha_{2m}
\end{aligned}$$
(ب-۶)

$$\begin{aligned}
&\{a_{71}\}_{n+1,m'+1} = \eta_{1n} && \{b_{72}\}_{n+1,m'+1} = \eta_{2n} \\
&\{c_{73}\}_{n+1,n'+1} = 0 && \{d_{74}\}_{n+1,n'+1} = 0 \\
&\{e_{75}\}_{n+1,m'+1} = -\bar{k}_{px0}\beta_{1n} && \{f_{76}\}_{n+1,m'+1} = -\bar{k}_{px0}\beta_{2n} \\
&\{g_{77}\}_{n+1,n'+1} = \delta_{nn'} && \{h_{78}\}_{n+1,n'+1} = 0
\end{aligned}$$
(ب-۷)

$$\begin{aligned}
&\{a_{81}\}_{n+1,m'+1} = (-1)^{m}\eta_{1n} && \{b_{82}\}_{n+1,m'+1} = (-1)^{m}\eta_{2n} \\
&\{c_{83}\}_{n+1,n'+1} = 0 && \{d_{84}\}_{n+1,n'+1} = 0 \\
&\{e_{85}\}_{n+1,m'+1} = (-1)^{m}\bar{k}_{px1}\beta_{1n} && \{f_{86}\}_{n+1,m'+1} = (-1)^{m}\bar{k}_{px1}\beta_{2n} \\
&\{g_{87}\}_{n+1,n'+1} = 0 && \{h_{88}\}_{n+1,n'+1} = \delta_{nn'}
\end{aligned}$$
(ب-۸)

عناصر ماتریس $\bar{Q}$ را نیز می‌توان با در نظر گرفتن دو اندیس $s = m(N+1) + n + 1$ و $t = m'(N+1) + n' + 1$ به صورت زیر استخراج کرد:

$$\begin{aligned}
&\{q_{11}\}_{m+1,t} = \bar{k}_{py0}\delta_{mm'} && \{q_{12}\}_{m+1,t} = \lambda_{am'}\tau_{am}^{m'} \\
&\{q_{21}\}_{m+1,t} = (-1)^{n+1}\bar{k}_{py1}\delta_{mm'} && \{q_{22}\}_{m+1,t} = (-1)^{n}\lambda_{am'}\tau_{am}^{m'}
\end{aligned}$$
(ب-۹)

$\{q_{31}\}_{n+1,t} = \bar{k}_{nx0}\delta_{nn'}$ $\{q_{32}\}_{n+1,t} = \mu\lambda_{bn'}\kappa_{bn}^{n'}$

$\{q_{41}\}_{n+1,t} = (-1)^{m+1}\bar{k}_{nx1}\delta_{nn'}$ $\{q_{42}\}_{n+1,t} = (-1)^{m}\mu\lambda_{bn'}\kappa_{bn}^{n'}$

$\{q_{51}\}_{m+1,t} = \mu\lambda_{am'}\tau_{am}^{m'}$ $\{q_{52}\}_{m+1,t} = \bar{k}_{ny0}\delta_{mm'}$

$\{q_{61}\}_{m+1,t} = (-1)^{n}\lambda_{am'}\tau_{am}^{m'}$ $\{q_{62}\}_{m+1,t} = (-1)^{n+1}\bar{k}_{ny1}\delta_{mm'}$

$\{q_{71}\}_{n+1,t} = \lambda_{bn'}\kappa_{bn}^{n'}$ $\{q_{72}\}_{n+1,t} = \bar{k}_{px0}\delta_{nn'}$

$\{q_{81}\}_{n+1,t} = (-1)^{m}\lambda_{bn'}\kappa_{bn}^{n'}$ $\{q_{82}\}_{n+1,t} = (-1)^{m+1}\bar{k}_{px1}\delta_{nn'}$

عناصر ماتریس‌های $\boldsymbol{A}$، $\boldsymbol{B}$، $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{F}$ را نیز می‌توان از روابط (۴-۶۲) و (۴-۶۳) به صورت زیر استخراج کرد:

ماتریس A:

$$\{A_{11}\}_{s,\mathrm{t}} = \left(\lambda_{am}^2 + \frac{1-\mu}{2}\lambda_{bn}^2\right)\delta_{st} \qquad \{A_{12}\}_{s,\mathrm{t}} = -\frac{1-\mu}{2}\lambda_{am'}\lambda_{bn'}\tau_{am}^{m'}\kappa_{bn}^{n'}$$

$$\{A_{21}\}_{s,\mathrm{t}} = -\frac{1-\mu}{2}\lambda_{am'}\lambda_{bn'}\tau_{am}^{m'}\kappa_{bn}^{n'} \qquad \{A_{22}\}_{s,\mathrm{t}} = \left(\lambda_{am}^2 + \frac{1-\mu}{2}\lambda_{bn}^2\right)\delta_{st}$$ (ب-۱۰)

ماتریس B:

$$\{B_{11-\mathrm{a}}\}_{s,m'+1} = \left(\beta_{1n}\lambda_{am}^2 - \frac{1-\mu}{2}\sigma_{1n}\right)\delta_{mm'} \qquad \{B_{11-\mathrm{b}}\}_{s,m'+1} = \left(\beta_{2n}\lambda_{am}^2 - \frac{1-\mu}{2}\sigma_{2n}\right)\delta_{mm'}$$

$$\{B_{11-\mathrm{c}}\}_{s,n'+1} = \left(\frac{1-\mu}{2}\alpha_{1m}\lambda_{bn}^2 - \varepsilon_{1m}\right)\delta_{nn'} \qquad \{B_{11-\mathrm{d}}\}_{s,n'+1} = \left(\frac{1-\mu}{2}\alpha_{2m}\lambda_{bn}^2 - \varepsilon_{2m}\right)\delta_{nn'}$$ (ب-۱۱)

$$\{B_{12-\mathrm{e}}\}_{s,m'+1} = \frac{1+\mu}{2}\eta_{1n}\lambda_{am'}\tau_{am}^{m'} \qquad \{B_{12-\mathrm{f}}\}_{s,m'+1} = \frac{1+\mu}{2}\eta_{2n}\lambda_{am'}\tau_{am}^{m'}$$

$$\{B_{12-\mathrm{g}}\}_{s,n'+1} = \frac{1+\mu}{2}\gamma_{1m}\lambda_{bn'}\kappa_{bn}^{n'} \qquad \{B_{12-\mathrm{h}}\}_{s,n'+1} = \frac{1+\mu}{2}\gamma_{2m}\lambda_{bn'}\kappa_{bn}^{n'}$$ (ب-۱۲)

$$\{B_{21-\mathrm{a}}\}_{s,m'+1}=\frac{1+\mu}{2}\eta_{1n}\lambda_{am'}\tau_{am}^{m'} \qquad \{B_{21-\mathrm{b}}\}_{s,m'+1}=\frac{1+\mu}{2}\eta_{2n}\lambda_{am'}\tau_{am}^{m'}$$

$$\{B_{21-\mathrm{c}}\}_{s,n'+1}=\frac{1+\mu}{2}\gamma_{1m}\lambda_{bn'}\kappa_{bn}^{n'} \qquad \{B_{21-\mathrm{d}}\}_{s,n'+1}=\frac{1+\mu}{2}\gamma_{2m}\lambda_{bn'}\kappa_{bn}^{n'}$$

(ب-۱۳)

$$\{B_{22-\mathrm{e}}\}_{s,m'+1}=\left(\frac{1-\mu}{2}\beta_{1n}\lambda_{am}^{2}-\sigma_{1n}\right)\delta_{mm'} \qquad \{B_{22-\mathrm{f}}\}_{s,m'+1}=\left(\frac{1-\mu}{2}\beta_{2n}\lambda_{am}^{2}-\sigma_{2n}\right)\delta_{mm'}$$

$$\{B_{22-\mathrm{g}}\}_{s,n'+1}=\left(\alpha_{1m}\lambda_{bn}^{2}-\frac{1-\mu}{2}\varepsilon_{1m}\right)\delta_{nn'} \qquad \{B_{22-\mathrm{h}}\}_{s,n'+1}=\left(\alpha_{2m}\lambda_{bn}^{2}-\frac{1-\mu}{2}\varepsilon_{2m}\right)\delta_{nn'}$$

(ب-۱۴)

ماتریس E:

$$\{E_{11}\}_{s,\mathrm{t}}=\delta_{st} \qquad \{E_{12}\}_{s,\mathrm{t}}=0$$

$$\{E_{21}\}_{s,\mathrm{t}}=0 \qquad \{E_{22}\}_{s,\mathrm{t}}=\delta_{st}$$

(ب-۱۵)

ماتریس F:

$$\{F_{11-\mathrm{a}}\}_{s,m'+1}=\beta_{1n}\delta_{mm'} \qquad \{F_{11-\mathrm{b}}\}_{s,m'+1}=\beta_{2n}\delta_{mm'}$$

$$\{F_{11-\mathrm{c}}\}_{s,n'+1}=\alpha_{1m}\delta_{nn'} \qquad \{F_{11-\mathrm{d}}\}_{s,n'+1}=\alpha_{2m}\delta_{nn'}$$

(ب-۱۶)

$$\{F_{12-\mathrm{e}}\}_{s,m'+1}=0 \qquad \{F_{12-\mathrm{f}}\}_{s,m'+1}=0$$

$$\{F_{12-\mathrm{g}}\}_{s,n'+1}=0 \qquad \{F_{12-\mathrm{h}}\}_{s,n'+1}=0$$

(ب-۱۷)

$$\{F_{21-\mathrm{a}}\}_{s,m'+1}=0 \qquad \{F_{21-\mathrm{b}}\}_{s,m'+1}=0$$

$$\{F_{21-\mathrm{c}}\}_{s,n'+1}=0 \qquad \{F_{21-\mathrm{d}}\}_{s,n'+1}=0$$

(ب-۱۸)

$$\{F_{22-\mathrm{e}}\}_{s,m'+1}=\beta_{1n}\delta_{mm'} \qquad \{F_{22-\mathrm{f}}\}_{s,m'+1}=\beta_{2n}\delta_{mm'}$$

$$\{F_{22-\mathrm{g}}\}_{s,n'+1}=\alpha_{1m}\delta_{nn'} \qquad \{F_{22-\mathrm{h}}\}_{s,n'+1}=\alpha_{2m}\delta_{nn'}$$

(ب-۱۹)

پیوست ت: عناصر ماتریس‌های $\boldsymbol{K}$ و $\boldsymbol{M}$

عناصر ماتریس سختی $\boldsymbol{K}$ را می‌توان با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته به صورت زیر استخراج کرد:

$$\begin{aligned}\{K_{1\_1}\}_{s,\mathrm{t}} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\, sin^2\lambda_{am}x\, cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}^2\, cos^2\lambda_{am}x\, sin^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{nx10}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\, cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{nx11}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\, cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{ny10}\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\, cos^2\lambda_{am}x\right)\right]dx+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{c1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\, cos^2\lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}\tag{ت-۱}$$

$$\begin{aligned}\{K_{1\_2}\}_{s,m'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\, sin^2\lambda_{am}x\, cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1\mathrm{n}}\, cos^2\lambda_{am}x\, sin\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{nx10}\xi_{1b_1}(y_1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\, cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{nx11}\xi_{1b_1}(y_1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\, cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1\end{aligned}\tag{ت-۲}$$

$$\begin{aligned}\{K_{1\_3}\}_{s,m'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\, sin^2\lambda_{am}x\, cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1\mathrm{n}}\, cos^2\lambda_{am}x\, sin\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{nx10}\xi_{2b_1}(y_1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\, cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{nx11}\xi_{2b_1}(y_1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\, cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1\end{aligned}\tag{ت-۳}$$

$$\begin{aligned}\{K_{1\_4}\}_{s,n'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\, sin\,\lambda_{am}x\, cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}^2\, cos\,\lambda_{am}x\, sin^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{ny10}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\, cos\,\lambda_{am}x\right)\right]dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{ny11}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\, cos\,\lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}\tag{ت-۴}$$

$$\begin{aligned}\{K_{1\_5}\}_{s,n'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\right.\\&\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}^2\cos\lambda_{am}x\sin^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dxdy_1\\&+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{ny10}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\\&+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{ny11}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۵)

$$\begin{aligned}\{K_{1\_6}\}_{s,t} = &\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right.\\&+2(1-\mu)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\\&\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dxdy_1\end{aligned}$$

(ت-۶)

$$\begin{aligned}\{K_{1\_7}\}_{s,m'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\xi'_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right.\\&+2(1-\mu)\left(\xi'_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\\&\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dxdy_1\end{aligned}$$

(ت-۷)

$$\begin{aligned}\{K_{1\_8}\}_{s,m'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right.\\&+2(1-\mu)\left(\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\\&\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dxdy_1\end{aligned}$$

(ت-۸)

$$\begin{aligned}\{K_{1\_9}\}_{s,n'+1} = &\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right.\\&+2(1-\mu)\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\\&\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dxdy_1\end{aligned}$$

(ت-۹)

$$\begin{aligned}\left\{K_{1\_10}\right\}_{s,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\end{aligned}\tag{ت-۱۰}$$

$$\left\{K_{1\_11}\right\}_{s,\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\cos^2\lambda_{am}x\right)\right]dx\tag{ت-۱۱}$$

$$\left\{K_{1\_12}\right\}_{s,m'+1} = 0 \qquad\qquad \left\{K_{1\_13}\right\}_{s,m'+1} = 0\tag{ت-۱۲}$$

$$\left\{K_{1\_14}\right\}_{s,n'+1} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\tag{ت-۱۳}$$

$$\left\{K_{1\_15}\right\}_{s,n'+1} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\tag{ت-۱۴}$$

$$\left\{K_{1\_16}\right\}_{s,\mathrm{t}} = 0\tag{ت-۱۵}$$

$$\left\{K_{1\_17}\right\}_{s,m'+1} = 0 \qquad\qquad \left\{K_{1\_18}\right\}_{s,m'+1} = 0\tag{ت-۱۶}$$

$$\left\{K_{1\_19}\right\}_{s,n'+1} = 0 \qquad\qquad \left\{K_{1\_20}\right\}_{s,n'+1} = 0\tag{ت-۱۷}$$

$$\begin{aligned}\left\{K_{2\_2}\right\}_{m+1,m'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{1b_1}^2(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\sin^2\lambda_{am}x\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_1}'^2(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\cos^2\lambda_{am}x\right)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{nx10}\xi_{1b_1}^2(y_1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{nx11}\xi_{1b_1}^2(y_1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_1\end{aligned}\tag{ت-۱۸}$$

$$
\begin{aligned}
\{K_{2\_3}\}_{m+1,m'+1} = {} & \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\Bigg(\xi_{1b_1}(y_1)\xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\,sin^2\,\lambda_{am}x\Bigg)\\
& +\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi'_{1b_1}(y_1)\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\,cos^2\,\lambda_{am}x\Bigg)\Bigg]dxdy_1\\
& +\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\Bigg[k_{nx10}\xi_{1b_1}(y_1)\xi_{2b_1}(y_1)\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\Bigg)\Bigg]dy_1\\
& +\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\Bigg[k_{nx11}\xi_{1b_1}(y_1)\xi_{2b_1}(y_1)\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\Bigg)\Bigg]dy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۱۹)

$$
\begin{aligned}
\{K_{2\_4}\}_{m+1,n'+1} = {} & -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\Bigg(\xi_{1b_1}(y_1)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\\
& -\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi'_{1b_1}(y_1)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۲۰)

$$
\begin{aligned}
\{K_{2\_5}\}_{m+1,n'+1} = {} & -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\Bigg(\xi_{1b_1}(y_1)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\\
& -\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi'_{1b_1}(y_1)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۲۱)

$$
\begin{aligned}
\{K_{2\_6}\}_{m+1,\mathrm{t}} = {} & \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\Bigg(\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\\
& +2(1-\mu)\Bigg(\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\\
& +\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi'_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۲۲)

$$
\begin{aligned}
\{K_{2\_7}\}_{m+1,m'+1} = {} & -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\Bigg(\xi_{1b_1}(y_1)\xi'_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\Bigg)\\
& +2(1-\mu)\Bigg(\xi_{1b_1}(y_1)\xi'_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\Bigg)\\
& +\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi_{1b_1}(y_1)\xi'_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\Bigg)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۲۳)

$$
\begin{aligned}
\{K_{2\_8}\}_{m+1,m'+1} = {} & -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\Bigg(\xi_{1b_1}(y_1)\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\Bigg)\\
& +2(1-\mu)\Bigg(\xi_{1b_1}(y_1)\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\Bigg)\\
& +\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi_{2b_1}(y_1)\xi'_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\Bigg)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۲۴)

$$\begin{aligned}\{K_{2\_9}\}_{m+1,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{1b_1}(y_1)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{1b_1}(y_1)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_1}(y_1)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\end{aligned}$$ (ت-۲۵)

$$\begin{aligned}\{K_{2\_10}\}_{m+1,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{1b_1}(y_1)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{1b_1}(y_1)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_1}(y_1)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\end{aligned}$$ (ت-۲۶)

$\{K_{2\_11}\}_{m+1,\mathrm{t}} = 0$ $\{K_{2\_12}\}_{m+1,m'+1} = 0$ (ت-۲۷)

$\{K_{2\_13}\}_{m+1,m'+1} = 0$ $\{K_{2\_14}\}_{m+1,n'+1} = 0$ (ت-۲۸)

$\{K_{2\_15}\}_{m+1,n'+1} = 0$ $\{K_{2\_16}\}_{m+1,\mathrm{t}} = 0$ (ت-۲۹)

$\{K_{2\_17}\}_{m+1,m'+1} = 0$ $\{K_{2\_18}\}_{m+1,m'+1} = 0$ (ت-۳۰)

$\{K_{2\_19}\}_{m+1,n'+1} = 0$ $\{K_{2\_20}\}_{m+1,n'+1} = 0$ (ت-۳۱)

$$\begin{aligned}\{K_{3\_3}\}_{m+1,m'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{2b_1}^2(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\sin^2\lambda_{am}x\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_1}^2(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\cos^2\lambda_{am}x\right)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{nx10}\xi_{2b_1}^2(y_1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{nx11}\xi_{2b_1}^2(y_1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_1\end{aligned}$$ (ت-۳۲)

$$\begin{aligned}\{K_{3\_4}\}_{m+1,n'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{2b_1}(y_1)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\end{aligned}$$ (ت-۳۳)

$$
\begin{aligned}
\{K_{3\_5}\}_{m+1,n'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{2b_1}(y_1)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
\tag{ت-۳۴}
$$

$$
\begin{aligned}
\{K_{3\_6}\}_{m+1,\mathrm{t}} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&+2(1-\mu)\left(\xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
\tag{ت-۳۵}
$$

$$
\begin{aligned}
\{K_{3\_7}\}_{m+1,m'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi'_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\\
&+2(1-\mu)\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi'_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\\
&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_1}(y_1)\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
\tag{ت-۳۶}
$$

$$
\begin{aligned}
\{K_{3\_8}\}_{m+1,m'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\\
&+2(1-\mu)\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\\
&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
\tag{ت-۳۷}
$$

$$
\begin{aligned}
\{K_{3\_9}\}_{m+1,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&+2(1-\mu)\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_1}(y_1)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
\tag{ت-۳۸}
$$

$$
\begin{aligned}
\{K_{3\_10}\}_{m+1,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&+2(1-\mu)\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{2b_1}(y_1)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
\tag{ت-۳۹}
$$

$$
\{K_{3\_11}\}_{m+1,\mathrm{t}} = 0 \qquad\qquad \{K_{3\_12}\}_{m+1,m'+1} = 0
\tag{ت-۴۰}
$$

$$\left\{K_{3\_13}\right\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \left\{K_{3\_14}\right\}_{m+1,n'+1} = 0$$ (ت-۴۱)

$$\left\{K_{3\_15}\right\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \left\{K_{3\_16}\right\}_{m+1,\mathrm{t}} = 0$$ (ت-۴۲)

$$\left\{K_{3\_17}\right\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \left\{K_{3\_18}\right\}_{m+1,m'+1} = 0$$ (ت-۴۳)

$$\left\{K_{3\_19}\right\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \left\{K_{3\_20}\right\}_{m+1,n'+1} = 0$$ (ت-۴۴)

$$\begin{aligned}\left\{K_{4\_4}\right\}_{n+1,n'+1} = &+\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\left(\xi_{1a}'^{2}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\,cos^2\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}^2(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}^2\,sin^2\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{ny10}\xi_{1a}^2(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{1a}^2(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\end{aligned}$$ (ت-۴۵)

$$\begin{aligned}\left\{K_{4\_5}\right\}_{n+1,n'+1} = &\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\left(\xi_{1a}'(x)\xi_{2a}'(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\,cos^2\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\,sin^2\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{ny10}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\end{aligned}$$ (ت-۴۶)

$$\begin{aligned}\left\{K_{4\_6}\right\}_{n+1,\mathrm{t}} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\left(\xi_{1a}'(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{1a}'(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_1n}\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\end{aligned}$$ (ت-۴۷)

$$\begin{aligned}\left\{K_{4\_7}\right\}_{n+1,m'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\left(\xi_{1a}'(x)\xi_{1b_1}'(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\,cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &-2(1-\mu)\left(\xi_{1a}'(x)\xi_{1b_1}'(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\end{aligned}$$ (ت-۴۸)

$$
\begin{aligned}
\{K_{4\_8}\}_{n+1,m'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi'_{1a}(x)\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\,cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&-2(1-\mu)\left(\xi'_{1a}(x)\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۴۹)

$$
\begin{aligned}
\{K_{4\_9}\}_{n+1,n'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{1a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&+2(1-\mu)\left(\xi_{1a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۵۰)

$$
\begin{aligned}
\{K_{4\_10}\}_{n+1,n'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\left(\xi_{2a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&+2(1-\mu)\left(\xi_{2a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\\
&-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_1n}\,sin\,\lambda_{b_1n}y_1\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۵۱)

$$
\{K_{4\_11}\}_{n+1,\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2(-1)^n\,cos\,\lambda_{am}x\right)\right]dx
$$

(ت-۵۲)

$$
\{K_{4\_12}\}_{n+1,m'+1} = 0 \qquad \{K_{4\_13}\}_{n+1,m'+1} = 0
$$

(ت-۵۳)

$$
\{K_{4\_14}\}_{n+1,n'+1} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{1a}^2(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\right)\right]dx
$$

(ت-۵۴)

$$
\{K_{4\_15}\}_{n+1,n'+1} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\right)\right]dx
$$

(ت-۵۵)

$$
\{K_{4\_16}\}_{n+1,\mathrm{t}} = 0
$$

(ت-۵۶)

$$
\{K_{4\_17}\}_{n+1,m'+1} = 0 \qquad \{K_{4\_18}\}_{n+1,m'+1} = 0
$$

(ت-۵۷)

$$
\{K_{4\_19}\}_{n+1,n'+1} = 0 \qquad \{K_{4\_20}\}_{n+1,n'+1} = 0
$$

(ت-۵۸)

$$
\begin{aligned}
\{K_{5\_5}\}_{n+1,n'+1} = {} & \frac{G}{2}\int_0^a \int_0^{b_1} \left[\left(\xi_{2a}'^{2}(x)\sum_{n=0}^{\infty} 2\cos^2 \lambda_{b_1n} y_1\right)\right. \\
& \left. + \frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}^2(x)\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{b_1n}^2 \sin^2 \lambda_{b_1n} y_1\right)\right] dxdy_1 \\
& + \frac{1}{2}\int_0^a \left[k_{ny10}\xi_{2a}^2(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2\delta_{nn'}\right)\right] dx \\
& + \frac{1}{2}\int_0^a \left[k_{c1}\xi_{2a}^2(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2\delta_{nn'}\right)\right] dx
\end{aligned}
$$

(ت-۵۹)

$$
\begin{aligned}
\{K_{5\_6}\}_{n+1,\mathrm{t}} = {} & -\frac{G}{2}\int_0^a \int_0^{b_1} \left[\left(\xi_{2a}'(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{b_1n} \cos \lambda_{am} x \sin \lambda_{b_1n} y_1 \cos \lambda_{b_1n} y_1\right)\right. \\
& + 2(1-\mu)\left(\xi_{2a}'(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{b_1n} \cos \lambda_{am} x \sin \lambda_{b_1n} y_1 \cos \lambda_{b_1n} y_1\right) \\
& \left. + \frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{am}\lambda_{b_1n} \sin \lambda_{am} x \sin \lambda_{b_1n} y_1 \cos \lambda_{b_1n} y_1\right)\right] dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۶۰)

$$
\begin{aligned}
\{K_{5\_7}\}_{n+1,m'+1} = {} & \frac{G}{2}\int_0^a \int_0^{b_1} \left[\left(\xi_{2a}'(x)\xi_{1b_1}'(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\cos \lambda_{am} x \cos \lambda_{b_1n} y_1\right)\right. \\
& - 2(1-\mu)\left(\xi_{2a}'(x)\xi_{1b_1}'(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \cos \lambda_{am} x \cos \lambda_{b_1n} y_1\right) \\
& \left. + \frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{am}\lambda_{b_1n} \sin \lambda_{am} x \sin \lambda_{b_1n} y_1\right)\right] dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۶۱)

$$
\begin{aligned}
\{K_{5\_8}\}_{n+1,m'+1} = {} & \frac{G}{2}\int_0^a \int_0^{b_1} \left[\left(\xi_{2a}'(x)\xi_{2b_1}'(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\cos \lambda_{am} x \cos \lambda_{b_1n} y_1\right)\right. \\
& - 2(1-\mu)\left(\xi_{2a}'(x)\xi_{2b_1}'(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \cos \lambda_{am} x \cos \lambda_{b_1n} y_1\right) \\
& \left. + \frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{am}\lambda_{b_1n} \sin \lambda_{am} x \sin \lambda_{b_1n} y_1\right)\right] dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۶۲)

$$
\begin{aligned}
\{K_{5\_9}\}_{n+1,n'+1} = {} & -\frac{G}{2}\int_0^a \int_0^{b_1} \left[\left(\xi_{1a}(x)\xi_{2a}'(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{b_1n} \sin \lambda_{b_1n} y_1 \cos \lambda_{b_1n} y_1\right)\right. \\
& + 2(1-\mu)\left(\xi_{1a}(x)\xi_{2a}'(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{b_1n} \sin \lambda_{b_1n} y_1 \cos \lambda_{b_1n} y_1\right) \\
& \left. - \frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\xi_{1a}'(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{b_1n} \sin \lambda_{b_1n} y_1 \cos \lambda_{b_1n} y_1\right)\right] dxdy_1
\end{aligned}
$$

(ت-۶۳)

$$\begin{aligned}\{K_{5\_10}\}_{n+1,n'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\Bigg(\xi_{2a}(x)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\\ &+2(1-\mu)\Bigg(\xi_{2a}(x)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\\ &-\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi_{2a}(x)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_1n}\sin\lambda_{b_1n}y_1\cos\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\Bigg]dxdy_1\end{aligned}$$
(ت-۶۴)

$$\{K_{5\_11}\}_{n+1,t} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2(-1)^n\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx$$
(ت-۶۵)

$$\{K_{5\_12}\}_{n+1,m'+1} = 0 \qquad \{K_{5\_13}\}_{n+1,m'+1} = 0$$
(ت-۶۶)

$$\{K_{5\_14}\}_{n+1,n'+1} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\right)\right]dx$$
(ت-۶۷)

$$\{K_{5\_15}\}_{n+1,n'+1} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{2a}^2(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\right)\right]dx$$
(ت-۶۸)

$$\{K_{5\_16}\}_{n+1,t} = 0$$
(ت-۶۹)

$$\{K_{5\_17}\}_{n+1,m'+1} = 0 \qquad \{K_{5\_18}\}_{n+1,m'+1} = 0$$
(ت-۷۰)

$$\{K_{5\_19}\}_{n+1,n'+1} = 0 \qquad \{K_{5\_20}\}_{n+1,n'+1} = 0$$
(ت-۷۱)

$$\begin{aligned}\{K_{6\_6}\}_{s,t} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}^2\cos^2\lambda_{am}x\sin^2\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\sin^2\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{px10}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{px11}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{py10}\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\right)\right]dx+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{c2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}$$
(ت-۷۲)

$$\begin{aligned}\{K_{6\_7}\}_{s,m'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[&\Bigg(\xi'_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\cos^2\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\sin^2\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{px10}\xi_{1b_1}(y_1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{px11}\xi_{1b_1}(y_1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1\end{aligned}$$
(ت-۷۳)

$$\begin{aligned}\{K_{6\_8}\}_{s,m'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\cos^2\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\right)\right.\\&\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\sin^2\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dxdy_1\\&+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{px10}\xi_{2b_1}(y_1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1\\&+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{px11}\xi_{2b_1}(y_1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dy_1\end{aligned}$$

(ت-۷۴)

$$\begin{aligned}\{K_{6\_9}\}_{s,n'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}^2\cos\lambda_{am}x\sin^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\right.\\&\left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dxdy_1\\&+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{py10}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\\&+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{c2}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۷۵)

$$\begin{aligned}\{K_{6\_10}\}_{s,n'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}^2\cos\lambda_{am}x\sin^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\right.\\&\left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dxdy_1\\&+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{py10}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\\&+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{c2}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۷۶)

$$\{K_{6\_11}\}_{s,t} = 0 \qquad\qquad \{K_{6\_12}\}_{s,m'+1} = 0$$

(ت-۷۷)

$$\{K_{6\_13}\}_{s,m'+1} = 0 \qquad\qquad \{K_{6\_14}\}_{s,n'+1} = 0$$

(ت-۷۸)

$$\{K_{6\_15}\}_{s,n'+1} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx$$

(ت-۷۹)

$$\{K_{6\_16}\}_{s,t} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\cos^2\lambda_{am}x\right)\right]dx$$

(ت-۸۰)

$$\{K_{6\_17}\}_{s,m'+1} = 0 \qquad\qquad \{K_{6\_18}\}_{s,m'+1} = 0$$

(ت-۸۱)

$$\{K_{6\_19}\}_{s,n'+1} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c2}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx$$

(ت-۸۲)

$$\{K_{6\_20}\}_{s,n'+1} = \frac{1}{2}\int_0^a \left[k_{c2}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \cos\lambda_{am}x\right)\right]dx \qquad \text{(ت-۸۳)}$$

$$\begin{aligned}\{K_{7\_7}\}_{m+1,m'+1} &= \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\xi'^2_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty} 2\cos^2\lambda_{am}x\right)\right. \\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi^2_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty} 2\lambda^2_{am}\sin^2\lambda_{am}x\right)\right]dxdy_1 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{px10}\xi^2_{1b_1}(y_1)\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2\delta_{mm'}\right)\right]dy_1 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{px11}\xi^2_{1b_1}(y_1)\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2\delta_{mm'}\right)\right]dy_1\end{aligned} \qquad \text{(ت-۸۴)}$$

$$\begin{aligned}\{K_{7\_8}\}_{m+1,m'+1} &= \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\xi'_{1b_1}(y_1)\xi'_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty} 2\cos^2\lambda_{am}x\right)\right. \\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_1}(y_1)\xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty} 2\lambda^2_{am}\sin^2\lambda_{am}x\right)\right]dxdy_1 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{px10}\xi_{1b_1}(y_1)\xi_{2b_1}(y_1)\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2\delta_{mm'}\right)\right]dy_1 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\left[k_{px11}\xi_{1b_1}(y_1)\xi_{2b_1}(y_1)\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2\delta_{mm'}\right)\right]dy_1\end{aligned} \qquad \text{(ت-۸۵)}$$

$$\begin{aligned}\{K_{7\_9}\}_{m+1,n'+1} &= -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\xi'_{1b_1}(y_1)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{b_1n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\right)\right. \\ &\left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_1}(y_1)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\,\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dxdy_1\end{aligned} \qquad \text{(ت-۸۶)}$$

$$\begin{aligned}\{K_{7\_10}\}_{m+1,n'+1} &= -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\left[\left(\xi'_{1b_1}(y_1)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{b_1n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\right)\right. \\ &\left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_1}(y_1)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\,\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)\right]dxdy_1\end{aligned} \qquad \text{(ت-۸۷)}$$

$$\{K_{7\_11}\}_{m+1,\mathrm{t}} = 0 \qquad \{K_{7\_12}\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \text{(ت-۸۸)}$$

$$\{K_{7\_13}\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \{K_{7\_14}\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \text{(ت-۸۹)}$$

$$\{K_{7\_15}\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \{K_{7\_16}\}_{m+1,\mathrm{t}} = 0 \qquad \text{(ت-۹۰)}$$

$$\{K_{7\_17}\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \{K_{7\_18}\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \text{(ت-۹۱)}$$

$$\{K_{7\_19}\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \{K_{7\_20}\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \text{(ت-۹۲)}$$

$$\begin{aligned}\{K_{8\_8}\}_{m+1,m'+1} = {} & \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\Bigg(\xi'^2_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\Bigg) \\ & +\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi^2_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^2_{am}\sin^2\lambda_{am}x\Bigg)\Bigg]dxdy_1 \\ & +\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\Bigg[k_{px10}\xi^2_{2b_1}(y_1)\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\Bigg)\Bigg]dy_1 \\ & +\frac{1}{2}\int_0^{b_1}\Bigg[k_{px11}\xi^2_{2b_1}(y_1)\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\Bigg)\Bigg]dy_1\end{aligned} \qquad \text{(ت-۹۳)}$$

$$\begin{aligned}\{K_{8\_9}\}_{m+1,n'+1} = {} & -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\Bigg(\xi'_{2b_1}(y_1)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\Bigg) \\ & -\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi_{2b_1}(y_1)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\,\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\Bigg]dxdy_1\end{aligned} \qquad \text{(ت-۹۴)}$$

$$\begin{aligned}\{K_{8\_10}\}_{m+1,n'+1} = {} & -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\Bigg(\xi'_{2b_1}(y_1)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_1n}y_1\Bigg) \\ & -\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi_{2b_1}(y_1)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\,\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\Bigg]dxdy_1\end{aligned} \qquad \text{(ت-۹۵)}$$

$$\{K_{8\_11}\}_{m+1,\mathrm{t}}=0 \qquad \{K_{8\_12}\}_{m+1,m'+1}=0 \qquad \text{(ت-۹۶)}$$

$$\{K_{8\_13}\}_{m+1,m'+1}=0 \qquad \{K_{8\_14}\}_{m+1,n'+1}=0 \qquad \text{(ت-۹۷)}$$

$$\{K_{8\_15}\}_{m+1,n'+1}=0 \qquad \{K_{8\_16}\}_{m+1,\mathrm{t}}=0 \qquad \text{(ت-۹۸)}$$

$$\{K_{8\_17}\}_{m+1,m'+1}=0 \qquad \{K_{8\_18}\}_{m+1,m'+1}=0 \qquad \text{(ت-۹۹)}$$

$$\{K_{8\_19}\}_{m+1,n'+1}=0 \qquad \{K_{8\_20}\}_{m+1,n'+1}=0 \qquad \text{(ت-۱۰۰)}$$

$$\begin{aligned}\{K_{9\_9}\}_{n+1,n'+1} = {} & +\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\Bigg(\xi^2_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda^2_{b_1n}\sin^2\lambda_{b_1n}y_1\Bigg) \\ & +\frac{1-\mu}{2}\Bigg(\xi'^2_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\Bigg)\Bigg]dxdy_1 \\ & +\frac{1}{2}\int_0^{a}\Bigg[k_{py10}\xi^2_{1a}(x)\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\Bigg)\Bigg]dx \\ & +\frac{1}{2}\int_0^{a}\Bigg[k_{c2}\xi^2_{1a}(x)\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\Bigg)\Bigg]dx\end{aligned} \qquad \text{(ت-۱۰۱)}$$

$$\begin{aligned}\{K_{9\_10}\}_{n+1,n'+1} = &+\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\left(\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}^2\sin^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1a}(x)\xi'_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{py10}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c2}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\end{aligned}$$ (ت-۱۰۲)

$$\{K_{9\_11}\}_{n+1,\mathrm{t}} = 0$$ (ت-۱۰۳)

$$\{K_{9\_12}\}_{n+1,m'+1} = 0 \qquad \{K_{9\_13}\}_{n+1,m'+1} = 0$$ (ت-۱۰۴)

$$\{K_{9\_14}\}_{n+1,n'+1} = 0 \qquad \{K_{9\_15}\}_{n+1,n'+1} = 0$$ (ت-۱۰۵)

$$\{K_{9\_16}\}_{n+1,\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c2}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2(-1)^n\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx$$ (ت-۱۰۶)

$$\{K_{9\_17}\}_{n+1,m'+1} = 0 \qquad \{K_{9\_18}\}_{n+1,m'+1} = 0$$ (ت-۱۰۷)

$$\{K_{9\_19}\}_{n+1,n'+1} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c2}\xi_{1a}^2(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\right)\right]dx$$ (ت-۱۰۸)

$$\{K_{9\_20}\}_{n+1,n'+1} = \frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c2}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n\right)\right]dx$$ (ت-۱۰۹)

$$\begin{aligned}\{K_{10\_10}\}_{n+1,n'+1} = &+\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_1}\Bigg[\left(\xi_{2a}^2(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_1n}^2\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'^2_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)\Bigg]dxdy_1\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{py10}\xi_{2a}^2(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c2}\xi_{2a}^2(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\end{aligned}$$ (ت-۱۱۰)

$$\{K_{10\_11}\}_{n+1,\mathrm{t}} = 0$$ (ت-۱۱۱)

$$\{K_{10\_12}\}_{n+1,m'+1} = 0 \qquad \{K_{10\_13}\}_{n+1,m'+1} = 0$$ (ت-۱۱۲)

$$\left\{K_{10\_14}\right\}_{n+1,n'+1}=0 \qquad \left\{K_{10\_15}\right\}_{n+1,n'+1}=0$$

(ت-۱۱۳)

$$\left\{K_{10\_16}\right\}_{n+1,\mathrm{t}}=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left[k_{c2}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2(-1)^{n}\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx$$

(ت-۱۱۴)

$$\left\{K_{10\_17}\right\}_{n+1,m'+1}=0 \qquad \left\{K_{10\_18}\right\}_{n+1,m'+1}=0$$

(ت-۱۱۵)

$$\left\{K_{10\_19}\right\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left[k_{c2}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^{n}\right)\right]dx$$

(ت-۱۱۶)

$$\left\{K_{10\_20}\right\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left[k_{c2}\left(\xi_{2a}^{2}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^{n}\right)\right]dx$$

(ت-۱۱۷)

$$\begin{aligned}\left\{K_{11\_11}\right\}_{s,\mathrm{t}}=\frac{G}{2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b_2}&\left[\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}^{2}\sin^{2}\lambda_{am}x\cos^{2}\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\&\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}^{2}\cos^{2}\lambda_{am}x\sin^{2}\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\\&+\frac{1}{2}\int_{0}^{b_2}\left[k_{nx20}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^{2}\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2+\frac{1}{2}\int_{0}^{b_2}\left[k_{nx21}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^{2}\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2\\&+\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left[k_{ny20}\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos^{2}\lambda_{am}x\right)\right]dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left[k_{c1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos^{2}\lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۱۱۸)

$$\begin{aligned}\left\{K_{11\_12}\right\}_{s,m'+1}=\frac{G}{2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b_2}&\left[\left(\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\sin^{2}\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\&\left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_2}'(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2\mathrm{n}}\cos^{2}\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\\&+\frac{1}{2}\int_{0}^{b_2}\left[k_{nx20}\xi_{1b_2}(y_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2\\&+\frac{1}{2}\int_{0}^{b_2}\left[k_{nx21}\xi_{1b_2}(y_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۱۹)

$$\begin{aligned}\left\{K_{11\_13}\right\}_{s,m'+1}=\frac{G}{2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b_2}&\left[\left(\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}^{2}\sin^{2}\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\&\left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_2}'(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\cos^{2}\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\\&+\frac{1}{2}\int_{0}^{b_2}\left[k_{nx20}\xi_{2b_2}(y_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2\\&+\frac{1}{2}\int_{0}^{b_2}\left[k_{nx21}\xi_{2b_2}(y_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۲۰)

$$\begin{aligned}\{K_{11\_14}\}_{s,n'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}^2\cos\lambda_{am}x\sin^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{ny20}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{ny21}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۱۲۱)

$$\begin{aligned}\{K_{11\_15}\}_{s,n'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}^2\cos\lambda_{am}x\sin^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{ny20}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{ny21}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۱۲۲)

$$\begin{aligned}\{K_{11\_16}\}_{s,\mathrm{t}} = &\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ &+2(1-\mu)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۲۳)

$$\begin{aligned}\{K_{11\_17}\}_{s,m'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ &+2(1-\mu)\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۲۴)

$$\begin{aligned}\{K_{11\_18}\}_{s,m'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ &+2(1-\mu)\left(\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۲۵)

$$\begin{aligned}\{K_{11\_19}\}_{s,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\,cos\,\lambda_{b_2n}y_1\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۲۶)

$$\begin{aligned}\{K_{11\_20}\}_{s,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۲۷)

$$\begin{aligned}\{K_{12\_12}\}_{m+1,m'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{1b_2}^2(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\,sin^2\,\lambda_{am}x\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'^2_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\,cos^2\,\lambda_{am}x\right)\Bigg]dxdy_2\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{nx20}\xi_{1b_2}^2(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{nx21}\xi_{1b_2}^2(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۲۸)

$$\begin{aligned}\{K_{12\_13}\}_{m+1,m'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\,sin^2\,\lambda_{am}x\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\,cos^2\,\lambda_{am}x\right)\Bigg]dxdy_2\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{nx20}\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{2b_2}(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{nx21}\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2b_2}(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۲۹)

$$\begin{aligned}\{K_{12\_14}\}_{m+1,n'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۳۰)

$$\begin{aligned}\{K_{12\_15}\}_{m+1,n'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۳۱)

$$\begin{aligned}\{K_{12\_16}\}_{m+1,\mathrm{t}} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۳۲)

$$\begin{aligned}\{K_{12\_17}\}_{m+1,m'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi'_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi'_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi'_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۳۳)

$$\begin{aligned}\{K_{12\_18}\}_{m+1,m'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi'_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{am}x\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۳۴)

$$\begin{aligned}\{K_{12\_19}\}_{m+1,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۳۵)

$$\begin{aligned}\{K_{12\_20}\}_{m+1,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\,sin\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۳۶)

$$\begin{aligned}\{K_{13\_13}\}_{m+1,m'+1} = {}& \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi_{2b_2}^2(y_2)\sum_{m=0}^{\infty} 2\lambda_{am}^2 \sin^2\lambda_{am}x\right)\right.\\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_2}^2(y_2)\sum_{m=0}^{\infty} 2\lambda_{am}^2 \cos^2\lambda_{am}x\right)\right]dxdy_2\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{nx20}\xi_{2b_2}^2(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{nx21}\xi_{2b_2}^2(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\end{aligned} \tag{ت-۱۳۷}$$

$$\begin{aligned}\{K_{13\_14}\}_{m+1,n'+1} = {}& -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{1a}'(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ &\left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_2}'(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{b_2n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\end{aligned} \tag{ت-۱۳۸}$$

$$\begin{aligned}\{K_{13\_15}\}_{m+1,n'+1} = {}& -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{2a}'(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ &\left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_2}'(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{b_2n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\end{aligned} \tag{ت-۱۳۹}$$

$$\begin{aligned}\{K_{13\_16}\}_{m+1,\mathrm{t}} = {}& \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_2}'(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\end{aligned} \tag{ت-۱۴۰}$$

$$\begin{aligned}\{K_{13\_17}\}_{m+1,m'+1} = {}& -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{1b_2}'(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\right)\right.\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{1b_2}'(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\right)\\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2b_2}'(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\right)\right]dxdy_2\end{aligned} \tag{ت-۱۴۱}$$

$$\begin{aligned}\{K_{13\_18}\}_{m+1,m'+1} = {}& -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{2b_2}'(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\right)\right.\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{2b_2}'(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\right)\\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{2b_2}'(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{am}x\right)\right]dxdy_2\end{aligned} \tag{ت-۱۴۲}$$

$$\begin{aligned}\{K_{13\_19}\}_{m+1,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+2(1-\mu)\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۴۳)

$$\begin{aligned}\{K_{13\_20}\}_{m+1,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+2(1-\mu)\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{2b_2}(y_2)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۴۴)

$$\begin{aligned}\{K_{14\_14}\}_{n+1,n'+1} = +\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi'^2_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi^2_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda^2_{b_2n}\sin^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\\&+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{ny20}\xi^2_{1a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\\&+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi^2_{1a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۱۴۵)

$$\begin{aligned}\{K_{14\_15}\}_{n+1,n'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi'_{1a}(x)\xi'_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\sin^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\\&+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{ny20}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\\&+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۱۴۶)

$$\begin{aligned}\{K_{14\_16}\}_{n+1,\mathrm{t}} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+2(1-\mu)\left(\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_2n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۴۷)

$$\begin{aligned}\{K_{14\_17}\}_{n+1,m'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[\left(\xi'_{1a}(x)\xi'_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &-2(1-\mu)\left(\xi'_{1a}(x)\xi'_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned} \tag{ت-۱۴۸}$$

$$\begin{aligned}\{K_{14\_18}\}_{n+1,m'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[\left(\xi'_{1a}(x)\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &-2(1-\mu)\left(\xi'_{1a}(x)\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned} \tag{ت-۱۴۹}$$

$$\begin{aligned}\{K_{14\_19}\}_{n+1,n'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[\left(\xi_{1a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{1a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned} \tag{ت-۱۵۰}$$

$$\begin{aligned}\{K_{14\_20}\}_{n+1,n'+1} = &-\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[\left(\xi_{2a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+2(1-\mu)\left(\xi_{2a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned} \tag{ت-۱۵۱}$$

$$\begin{aligned}\{K_{15\_15}\}_{n+1,n'+1} = &\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[\left(\xi'^2_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\\ &+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi^2_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda^2_{b_2n}\sin^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{ny20}\xi^2_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\\ &+\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c1}\xi^2_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\end{aligned} \tag{ت-۱۵۲}$$

$$\begin{aligned}\left\{K_{15\_16}\right\}_{n+1,\mathrm{t}} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+2(1-\mu)\left(\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_2n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۵۳)

$$\begin{aligned}\left\{K_{15\_17}\right\}_{n+1,m'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi'_{2a}(x)\xi'_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&-2(1-\mu)\left(\xi'_{2a}(x)\xi'_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۵۴)

$$\begin{aligned}\left\{K_{15\_18}\right\}_{n+1,m'+1} = \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi'_{2a}(x)\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&-2(1-\mu)\left(\xi'_{2a}(x)\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{am}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۵۵)

$$\begin{aligned}\left\{K_{15\_19}\right\}_{n+1,n'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{1a}(x)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+2(1-\mu)\left(\xi_{1a}(x)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۵۶)

$$\begin{aligned}\left\{K_{15\_20}\right\}_{n+1,n'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\Bigg[&\left(\xi_{2a}(x)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&+2(1-\mu)\left(\xi_{2a}(x)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\\&-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}(x)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{b_2n}\sin\lambda_{b_2n}y_2\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\Bigg]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۵۷)

$$\begin{aligned}\left\{K_{16\_16}\right\}_{s,t} = \frac{G}{2}\int_0^a \int_0^{b_2} &\left[\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{b_2n}^2 \cos^2 \lambda_{am}x \sin^2 \lambda_{b_2n}y_2\right)\right. \\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{am}^2 \sin^2 \lambda_{am}x \cos^2 \lambda_{b_2n}y_2\right)\right] dxdy_2 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px20}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2\cos^2 \lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2 + \frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px21}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2\cos^2 \lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{py20}\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2\cos^2 \lambda_{am}x\right)\right]dx + \frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{c2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2\cos^2 \lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۱۵۸)

$$\begin{aligned}\left\{K_{16\_17}\right\}_{s,m'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a \int_0^{b_2} &\left[\left(\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{b_2n} \cos^2 \lambda_{am}x \sin \lambda_{b_2n}y_2\right)\right. \\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{am}^2 \sin^2 \lambda_{am}x \cos \lambda_{b_2n}y_2\right)\right] dxdy_2 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px20}\xi_{1b_2}(y_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2\cos \lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px21}\xi_{1b_2}(y_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2\cos \lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۵۹)

$$\begin{aligned}\left\{K_{16\_18}\right\}_{s,m'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a \int_0^{b_2} &\left[\left(\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{b_2n} \cos^2 \lambda_{am}x \sin \lambda_{b_2n}y_2\right)\right. \\ &\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{am}^2 \sin^2 \lambda_{am}x \cos \lambda_{b_2n}y_2\right)\right] dxdy_2 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px20}\xi_{2b_2}(y_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2\cos \lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px21}\xi_{2b_2}(y_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2\cos \lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۶۰)

$$\begin{aligned}\left\{K_{16\_19}\right\}_{s,n'+1} = -\frac{G}{2}\int_0^a \int_0^{b_2} &\left[\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{b_2n}^2 \cos \lambda_{am}x \sin^2 \lambda_{b_2n}y_2\right)\right. \\ &\left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda_{am} \sin \lambda_{am}x \cos^2 \lambda_{b_2n}y_2\right)\right] dxdy_2 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{py20}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2\cos \lambda_{am}x\right)\right]dx \\ &+\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{c2}\xi_{1a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty} 2\cos \lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۱۶۱)

$$\begin{aligned}\left\{K_{16\_20}\right\}_{s,n'+1} = & -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}^2\cos\lambda_{am}x\sin^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ & \left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\\ & +\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{py20}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\\ & +\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c2}\xi_{2a}(x)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\right)\right]dx\end{aligned}\tag{ت-۱۶۲}$$

$$\begin{aligned}\left\{K_{17\_17}\right\}_{m+1,m'+1} = & \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi'^2_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\right)\right.\\ & \left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi^2_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\sin^2\lambda_{am}x\right)\right]dxdy_2\\ & +\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px20}\xi^2_{1b_2}(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\\ & +\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px21}\xi^2_{1b_2}(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\end{aligned}\tag{ت-۱۶۳}$$

$$\begin{aligned}\left\{K_{17\_18}\right\}_{m+1,m'+1} = & \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\xi'_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\right)\right.\\ & \left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}2\lambda_{am}^2\sin^2\lambda_{am}x\right)\right]dxdy_2\\ & +\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px20}\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2b_2}(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\\ & +\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px21}\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2b_2}(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\end{aligned}\tag{ت-۱۶۴}$$

$$\begin{aligned}\left\{K_{17\_19}\right\}_{m+1,n'+1} = & -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ & \left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\,\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\end{aligned}\tag{ت-۱۶۵}$$

$$\begin{aligned}\left\{K_{17\_20}\right\}_{m+1,n'+1} = & -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\cos\lambda_{am}x\sin\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ & \left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\,\lambda_{am}\sin\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\end{aligned}\tag{ت-۱۶۶}$$

$$\begin{aligned}\{K_{18\_18}\}_{m+1,m'+1} = {} & \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi'^2_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\,cos^2\,\lambda_{am}x\right)\right.\\ & \left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi^2_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^2_{am}\,sin^2\,\lambda_{am}x\right)\right]dxdy_2\\ & +\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px20}\xi^2_{2b_2}(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\\ & +\frac{1}{2}\int_0^{b_2}\left[k_{px21}\xi^2_{2b_2}(y_2)\left(\sum_{m=0}^{\infty}2\delta_{mm'}\right)\right]dy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۶۷)

$$\begin{aligned}\{K_{18\_19}\}_{m+1,n'+1} = {} & -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi'_{2b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ & \left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi'_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\,\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۶۸)

$$\begin{aligned}\{K_{18\_20}\}_{m+1,n'+1} = {} & -\frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi'_{2b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}\,cos\,\lambda_{am}x\,sin\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ & \left.-\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi'_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\,\lambda_{am}\,sin\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\end{aligned}$$

(ت-۱۶۹)

$$\begin{aligned}\{K_{19\_19}\}_{n+1,n'+1} = {} & \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi^2_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda^2_{b_2n}\,sin^2\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ & \left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'^2_{1a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\,cos^2\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\\ & +\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{py20}\xi^2_{1a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\\ & +\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{c2}\xi^2_{1a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۱۷۰)

$$\begin{aligned}\{K_{19\_20}\}_{n+1,n'+1} = {} & \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda^2_{b_2n}\,sin^2\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ & \left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi'_{1a}(x)\xi'_{2a}(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\,cos^2\,\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\\ & +\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{py20}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\\ & +\frac{1}{2}\int_0^{a}\left[k_{c2}\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\end{aligned}$$

(ت-۱۷۱)

$$\begin{aligned}\{K_{20\_20}\}_{n+1,n'+1} = {} & \frac{G}{2}\int_0^a\int_0^{b_2}\left[\left(\xi_{2a}^2(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\lambda_{b_2n}^2\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\right.\\ & \left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\xi_{2a}'^2(x)\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)\right]dxdy_2\\ & +\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{py20}\xi_{2a}^2(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\\ & +\frac{1}{2}\int_0^a\left[k_{c2}\xi_{2a}^2(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2\delta_{nn'}\right)\right]dx\end{aligned} \tag{ت-۱۷۲}$$

عناصر ماتریس جرم $\boldsymbol{M}$ را می‌توان با استفاده از روش رایلی – ریتز بهبود یافته به صورت زیر استخراج کرد:

$$\{M_{1\_1}\}_{s,t} = \frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1 \tag{ت-۱۷۳}$$

$$\{M_{1\_2}\}_{s,m'+1} = \frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1 \tag{ت-۱۷۴}$$

$$\{M_{1\_3}\}_{s,m'+1} = \frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1 \tag{ت-۱۷۵}$$

$$\{M_{1\_4}\}_{s,n'+1} = \frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1 \tag{ت-۱۷۶}$$

$$\{M_{1\_5}\}_{s,n'+1} = \frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1 \tag{ت-۱۷۷}$$

$$\{M_{1\_6}\}_{s,t} = 0 \tag{ت-۱۷۸}$$

$$\{M_{1\_7}\}_{s,m'+1} = 0 \qquad \{M_{1\_8}\}_{s,m'+1} = 0 \tag{ت-۱۷۹}$$

$$\{M_{1\_9}\}_{s,n'+1} = 0 \qquad \{M_{1\_10}\}_{s,n'+1} = 0 \tag{ت-۱۸۰}$$

$$\{M_{1\_11}\}_{s,t} = 0 \qquad \{M_{1\_12}\}_{s,m'+1} = 0 \tag{ت-۱۸۱}$$

$$\{M_{1\_13}\}_{s,m'+1} = 0 \qquad \{M_{1\_14}\}_{s,n'+1} = 0 \tag{ت-۱۸۲}$$

$$\{M_{1\_15}\}_{s,n'+1} = 0 \qquad \{M_{1\_16}\}_{s,t} = 0 \tag{ت-۱۸۳}$$

$$\{M_{1\_17}\}_{s,m'+1} = 0 \qquad \{M_{1\_18}\}_{s,m'+1} = 0$$
(ت-۱۸۴)

$$\{M_{1\_19}\}_{s,n'+1} = 0 \qquad \{M_{1\_20}\}_{s,n'+1} = 0$$
(ت-۱۸۵)

$$\{M_{2\_2}\}_{m+1,m'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{1b_1}^2(y_1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\, cos^2\, \lambda_{am} x \right) dx dy_1$$
(ت-۱۸۶)

$$\{M_{2\_3}\}_{m+1,m'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{1b_1}(y_1) \xi_{2b_1}(y_1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\, cos^2\, \lambda_{am} x \right) dx dy_1$$
(ت-۱۸۷)

$$\{M_{2\_4}\}_{m+1,n'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{1b_1}(y_1) \xi_{1a}(x) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\, cos\, \lambda_{am} x\, cos\, \lambda_{b_1 n} y_1 \right) dx dy_1$$
(ت-۱۸۸)

$$\{M_{2\_5}\}_{m+1,n'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{1b_1}(y_1) \xi_{2a}(x) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\, cos\, \lambda_{am} x\, cos\, \lambda_{b_1 n} y_1 \right) dx dy_1$$
(ت-۱۸۹)

$$\{M_{2\_6}\}_{m+1,t} = 0$$
(ت-۱۹۰)

$$\{M_{2\_7}\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \{M_{2\_8}\}_{m+1,m'+1} = 0$$
(ت-۱۹۱)

$$\{M_{2\_9}\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \{M_{2\_10}\}_{m+1,n'+1} = 0$$
(ت-۱۹۲)

$$\{M_{2\_11}\}_{m+1,t} = 0 \qquad \{M_{2\_12}\}_{m+1,m'+1} = 0$$
(ت-۱۹۳)

$$\{M_{2\_13}\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \{M_{2\_14}\}_{m+1,n'+1} = 0$$
(ت-۱۹۴)

$$\{M_{2\_15}\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \{M_{2\_16}\}_{m+1,t} = 0$$
(ت-۱۹۵)

$$\{M_{2\_17}\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \{M_{2\_18}\}_{m+1,m'+1} = 0$$
(ت-۱۹۶)

$$\{M_{2\_19}\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \{M_{2\_20}\}_{m+1,n'+1} = 0$$
(ت-۱۹۷)

$$\{M_{3\_3}\}_{m+1,m'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{2b_1}^2(y_1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\, cos^2\, \lambda_{am} x \right) dx dy_1$$
(ت-۱۹۸)

$$\{M_{3\_4}\}_{m+1,n'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{2b_1}(y_1) \xi_{1a}(x) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\, cos\, \lambda_{am} x\, cos\, \lambda_{b_1 n} y_1 \right) dx dy_1$$
(ت-۱۹۹)

$$\left\{M_{3\_5}\right\}_{m+1,n'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi_{2a}(x) \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\,cos\,\lambda_{am}x\,cos\,\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۰۰)

$$\left\{M_{3\_6}\right\}_{m+1,t} = 0$$ (ت-۲۰۱)

$$\left\{M_{3\_7}\right\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \left\{M_{3\_8}\right\}_{m+1,m'+1} = 0$$ (ت-۲۰۲)

$$\left\{M_{3\_9}\right\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \left\{M_{3\_10}\right\}_{m+1,n'+1} = 0$$ (ت-۲۰۳)

$$\left\{M_{3\_11}\right\}_{m+1,t} = 0 \qquad \left\{M_{3\_12}\right\}_{m+1,m'+1} = 0$$ (ت-۲۰۴)

$$\left\{M_{3\_13}\right\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \left\{M_{3\_14}\right\}_{m+1,n'+1} = 0$$ (ت-۲۰۵)

$$\left\{M_{3\_15}\right\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \left\{M_{3\_16}\right\}_{m+1,t} = 0$$ (ت-۲۰۶)

$$\left\{M_{3\_17}\right\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \left\{M_{3\_18}\right\}_{m+1,m'+1} = 0$$ (ت-۲۰۷)

$$\left\{M_{3\_19}\right\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \left\{M_{3\_20}\right\}_{m+1,n'+1} = 0$$ (ت-۲۰۸)

$$\left\{M_{4\_4}\right\}_{n+1,n'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{1a}^2(x) \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\,cos^2\,\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۰۹)

$$\left\{M_{4\_5}\right\}_{n+1,n'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x) \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2\,cos^2\,\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۱۰)

$$\left\{M_{4\_6}\right\}_{n+1,t} = 0$$ (ت-۲۱۱)

$$\left\{M_{4\_7}\right\}_{n+1,m'+1} = 0 \qquad \left\{M_{4\_8}\right\}_{n+1,m'+1} = 0$$ (ت-۲۱۲)

$$\left\{M_{4\_9}\right\}_{n+1,n'+1} = 0 \qquad \left\{M_{4\_10}\right\}_{n+1,n'+1} = 0$$ (ت-۲۱۳)

$$\left\{M_{4\_11}\right\}_{n+1,t} = 0 \qquad \left\{M_{4\_12}\right\}_{n+1,m'+1} = 0$$ (ت-۲۱۴)

$$\left\{M_{4\_13}\right\}_{n+1,m'+1} =0 \qquad \left\{M_{4\_14}\right\}_{n+1,n'+1} = 0$$ (ت-۲۱۵)

$$\left\{M_{4\_15}\right\}_{n+1,n'+1} = 0 \qquad \left\{M_{4\_16}\right\}_{n+1,t} = 0$$ (ت-۲۱۶)

$$\left\{M_{4\_17}\right\}_{n+1,m'+1} = 0 \qquad \left\{M_{4\_18}\right\}_{n+1,m'+1} = 0$$ (ت-۲۱۷)

$\{M_{4\_19}\}_{n+1,n'+1}=0$ $\{M_{4\_20}\}_{n+1,n'+1}=0$ (ت-۲۱۸)

$$\{M_{5\_5}\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{2a}^2(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۱۹)

$\{M_{5\_6}\}_{n+1,t}=0$ (ت-۲۲۰)

$\{M_{5\_7}\}_{n+1,m'+1}=0$ $\{M_{5\_8}\}_{n+1,m'+1}=0$ (ت-۲۲۱)

$\{M_{5\_9}\}_{n+1,n'+1}=0$ $\{M_{5\_10}\}_{n+1,n'+1}=0$ (ت-۲۲۲)

$\{M_{5\_11}\}_{n+1,t}=0$ $\{M_{5\_12}\}_{n+1,m'+1}=0$ (ت-۲۲۳)

$\{M_{5\_13}\}_{n+1,m'+1}=0$ $\{M_{5\_14}\}_{n+1,n'+1}=0$ (ت-۲۲۴)

$\{M_{5\_15}\}_{n+1,n'+1}=0$ $\{M_{5\_16}\}_{n+1,t}=0$ (ت-۲۲۵)

$\{M_{5\_17}\}_{n+1,m'+1}=0$ $\{M_{5\_18}\}_{n+1,m'+1}=0$ (ت-۲۲۶)

$\{M_{5\_19}\}_{n+1,n'+1}=0$ $\{M_{5\_20}\}_{n+1,n'+1}=0$ (ت-۲۲۷)

$$\{M_{6\_6}\}_{s,t}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۲۸)

$$\{M_{6\_7}\}_{s,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{1b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۲۹)

$$\{M_{6\_8}\}_{s,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{2b_1}(y_1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۳۰)

$$\{M_{6\_9}\}_{s,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۳۱)

$$\{M_{6\_10}\}_{s,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۳۲)

$\{M_{6\_11}\}_{s,t}=0$ $\{M_{6\_12}\}_{s,m'+1}=0$ (ت-۲۳۳)

$$\{M_{6\_13}\}_{s,m'+1} = 0 \qquad \{M_{6\_14}\}_{s,n'+1} = 0$$ (ت-۲۳۴)

$$\{M_{6\_15}\}_{s,n'+1} = 0 \qquad \{M_{6\_16}\}_{s,t} = 0$$ (ت-۲۳۵)

$$\{M_{6\_17}\}_{s,m'+1} = 0 \qquad \{M_{6\_18}\}_{s,m'+1} = 0$$ (ت-۲۳۶)

$$\{M_{6\_19}\}_{s,n'+1} = 0 \qquad \{M_{6\_20}\}_{s,n'+1} = 0$$ (ت-۲۳۷)

$$\{M_{7\_7}\}_{m+1,m'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{1b_1}^2(y_1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\cos^2 \lambda_{am} x \right) dx dy_1$$ (ت-۲۳۸)

$$\{M_{7\_8}\}_{m+1,m'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{1b_1}(y_1) \xi_{2b_1}(y_1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\cos^2 \lambda_{am} x \right) dx dy_1$$ (ت-۲۳۹)

$$\{M_{7\_9}\}_{m+1,n'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{1b_1}(y_1) \xi_{1a}(x) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\cos \lambda_{am} x \cos \lambda_{b_1 n} y_1 \right) dx dy_1$$ (ت-۲۴۰)

$$\{M_{7\_10}\}_{m+1,n'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{1b_1}(y_1) \xi_{2a}(x) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\cos \lambda_{am} x \cos \lambda_{b_1 n} y_1 \right) dx dy_1$$ (ت-۲۴۱)

$$\{M_{7\_11}\}_{m+1,t} = 0 \qquad \{M_{7\_12}\}_{m+1,m'+1} = 0$$ (ت-۲۴۲)

$$\{M_{7\_13}\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \{M_{7\_14}\}_{m+1,n'+1} = 0$$ (ت-۲۴۳)

$$\{M_{7\_15}\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \{M_{7\_16}\}_{m+1,t} = 0$$ (ت-۲۴۴)

$$\{M_{7\_17}\}_{m+1,m'+1} = 0 \qquad \{M_{7\_18}\}_{m+1,m'+1} = 0$$ (ت-۲۴۵)

$$\{M_{7\_19}\}_{m+1,n'+1} = 0 \qquad \{M_{7\_20}\}_{m+1,n'+1} = 0$$ (ت-۲۴۶)

$$\{M_{8\_8}\}_{m+1,m'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{2b_1}^2(y_1) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\cos^2 \lambda_{am} x \right) dx dy_1$$ (ت-۲۴۷)

$$\{M_{8\_9}\}_{m+1,n'+1} = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\xi_{2b_1}(y_1) \xi_{1a}(x) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\cos \lambda_{am} x \cos \lambda_{b_1 n} y_1 \right) dx dy_1$$ (ت-۲۴۸)

$$\left\{M_{8\_10}\right\}_{m+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{2b_1}(y_1)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۴۹)

$\left\{M_{8\_11}\right\}_{m+1,t}=0$ $\left\{M_{8\_12}\right\}_{m+1,m'+1}=0$ (ت-۲۵۰)

$\left\{M_{8\_13}\right\}_{m+1,m'+1}=0$ $\left\{M_{8\_14}\right\}_{m+1,n'+1}=0$ (ت-۲۵۱)

$\left\{M_{8\_15}\right\}_{m+1,n'+1}=0$ $\left\{M_{8\_16}\right\}_{m+1,t}=0$ (ت-۲۵۲)

$\left\{M_{8\_17}\right\}_{m+1,m'+1}=0$ $\left\{M_{8\_18}\right\}_{m+1,m'+1}=0$ (ت-۲۵۳)

$\left\{M_{8\_19}\right\}_{m+1,n'+1}=0$ $\left\{M_{8\_20}\right\}_{m+1,n'+1}=0$ (ت-۲۵۴)

$$\left\{M_{9\_9}\right\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{1a}^2(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۵۵)

$$\left\{M_{9\_10}\right\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۵۶)

$\left\{M_{9\_11}\right\}_{n+1,t}=0$ $\left\{M_{9\_12}\right\}_{n+1,m'+1}=0$ (ت-۲۵۷)

$\left\{M_{9\_13}\right\}_{n+1,m'+1}=0$ $\left\{M_{9\_14}\right\}_{n+1,n'+1}=0$ (ت-۲۵۸)

$\left\{M_{9\_15}\right\}_{n+1,n'+1}=0$ $\left\{M_{9\_16}\right\}_{n+1,t}=0$ (ت-۲۵۹)

$\left\{M_{9\_17}\right\}_{n+1,m'+1}=0$ $\left\{M_{9\_18}\right\}_{n+1,m'+1}=0$ (ت-۲۶۰)

$\left\{M_{9\_19}\right\}_{n+1,n'+1}=0$ $\left\{M_{9\_20}\right\}_{n+1,n'+1}=0$ (ت-۲۶۱)

$$\left\{M_{10\_10}\right\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_1}\left(\xi_{2a}^2(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_1n}y_1\right)dxdy_1$$ (ت-۲۶۲)

$\left\{M_{10\_11}\right\}_{n+1,t}=0$ $\left\{M_{10\_12}\right\}_{n+1,m'+1}=0$ (ت-۲۶۳)

$\left\{M_{10\_13}\right\}_{n+1,m'+1}=0$ $\left\{M_{10\_14}\right\}_{n+1,n'+1}=0$ (ت-۲۶۴)

$\left\{M_{10\_15}\right\}_{n+1,n'+1}=0$ $\left\{M_{10\_16}\right\}_{n+1,t}=0$ (ت-۲۶۵)

$$\left\{M_{10\_17}\right\}_{n+1,m'+1}=0 \qquad \left\{M_{10\_18}\right\}_{n+1,m'+1}=0$$ (ت-۲۶۶)

$$\left\{M_{10\_19}\right\}_{n+1,n'+1}=0 \qquad \left\{M_{10\_20}\right\}_{n+1,n'+1}=0$$ (ت-۲۶۷)

$$\left\{M_{11\_11}\right\}_{s,t}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۶۸)

$$\left\{M_{11\_12}\right\}_{s,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۶۹)

$$\left\{M_{11\_13}\right\}_{s,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۷۰)

$$\left\{M_{11\_14}\right\}_{s,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۷۱)

$$\left\{M_{11\_15}\right\}_{s,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۷۲)

$$\left\{M_{11\_16}\right\}_{s,t}=0$$ (ت-۲۷۳)

$$\left\{M_{11\_17}\right\}_{s,m'+1}=0 \qquad \left\{M_{11\_18}\right\}_{s,m'+1}=0$$ (ت-۲۷۴)

$$\left\{M_{11\_19}\right\}_{s,n'+1}=0 \qquad \left\{M_{11\_20}\right\}_{s,n'+1}=0$$ (ت-۲۷۵)

$$\left\{M_{12\_12}\right\}_{m+1,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1b_2}^2(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\right)dxdy_2$$ (ت-۲۷۶)

$$\left\{M_{12\_13}\right\}_{m+1,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\right)dxdy_2$$ (ت-۲۷۷)

$$\left\{M_{12\_14}\right\}_{m+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۷۸)

$$\left\{M_{12\_15}\right\}_{m+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۷۹)

$$\left\{M_{12\_16}\right\}_{m+1,t}=0$$ (ت-۲۸۰)

$$\left\{M_{12\_17}\right\}_{m+1,m'+1}=0 \qquad \left\{M_{12\_18}\right\}_{m+1,m'+1}=0$$ (ت-۲۸۱)

$$\left\{M_{12\_19}\right\}_{m+1,n'+1}=0 \qquad \left\{M_{12\_20}\right\}_{m+1,n'+1}=0$$ (ت-۲۸۲)

$$\left\{M_{13\_13}\right\}_{m+1,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{2b_2}^2(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\right)dxdy_2$$ (ت-۲۸۳)

$$\left\{M_{13\_14}\right\}_{m+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۸۴)

$$\left\{M_{13\_15}\right\}_{m+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۸۵)

$$\left\{M_{13\_16}\right\}_{m+1,t}=0$$ (ت-۲۸۶)

$$\left\{M_{13\_17}\right\}_{m+1,m'+1}=0 \qquad \left\{M_{13\_18}\right\}_{m+1,m'+1}=0$$ (ت-۲۸۷)

$$\left\{M_{13\_19}\right\}_{m+1,n'+1}=0 \qquad \left\{M_{13\_20}\right\}_{m+1,n'+1}=0$$ (ت-۲۸۸)

$$\left\{M_{14\_14}\right\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1a}^2(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۸۹)

$$\left\{M_{14\_15}\right\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۹۰)

$$\left\{M_{14\_16}\right\}_{n+1,t}=0$$ (ت-۲۹۱)

$$\left\{M_{14\_17}\right\}_{n+1,m'+1}=0 \qquad \left\{M_{14\_18}\right\}_{n+1,m'+1}=0$$ (ت-۲۹۲)

$$\left\{M_{14\_19}\right\}_{n+1,n'+1}=0 \qquad \left\{M_{14\_20}\right\}_{n+1,n'+1}=0$$ (ت-۲۹۳)

$$\left\{M_{15\_15}\right\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{2a}^2(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۲۹۴)

$$\left\{M_{15\_16}\right\}_{n+1,t}=0$$ (ت-۲۹۵)

$$\left\{M_{15\_17}\right\}_{n+1,m'+1}=0 \qquad \left\{M_{15\_18}\right\}_{n+1,m'+1}=0$$ (ت-۲۹۶)

$$\left\{M_{15\_19}\right\}_{n+1,n'+1}=0 \qquad \left\{M_{15\_20}\right\}_{n+1,n'+1}=0$$ (ت-۲۹۷)

$$\{M_{16\_16}\}_{s,t}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$
(ت-۲۹۸)

$$\{M_{16\_17}\}_{s,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$
(ت-۲۹۹)

$$\{M_{16\_18}\}_{s,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$
(ت-۳۰۰)

$$\{M_{16\_19}\}_{s,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$
(ت-۳۰۱)

$$\{M_{16\_20}\}_{s,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$
(ت-۳۰۲)

$$\{M_{17\_17}\}_{m+1,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1b_2}^2(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\right)dxdy_2$$
(ت-۳۰۳)

$$\{M_{17\_18}\}_{m+1,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2b_2}(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\right)dxdy_2$$
(ت-۳۰۴)

$$\{M_{17\_19}\}_{m+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$
(ت-۳۰۵)

$$\{M_{17\_20}\}_{m+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$
(ت-۳۰۶)

$$\{M_{18\_18}\}_{m+1,m'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{2b_2}^2(y_2)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{am}x\right)dxdy_2$$
(ت-۳۰۷)

$$\{M_{18\_19}\}_{m+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{1a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$
(ت-۳۰۸)

$$\{M_{18\_20}\}_{m+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{2b_2}(y_2)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos\lambda_{am}x\cos\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$
(ت-۳۰۹)

$$\left\{M_{19\_19}\right\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1a}^2(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۳۱۰)

$$\left\{M_{19\_20}\right\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{1a}(x)\xi_{2a}(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۳۱۱)

$$\left\{M_{20\_20}\right\}_{n+1,n'+1}=\frac{1}{2}\rho h\int_0^a\int_0^{b_2}\left(\xi_{2a}^2(x)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}2\cos^2\lambda_{b_2n}y_2\right)dxdy_2$$ (ت-۳۱۲)

Abstract

Similar to any flexible structure, plates undergo dynamic and vibrational loads when in operation, Such loads result in Defects in the plate. Cracks are the most important Defect that can be formed in different parts of a flexible structure and change its physical properties such as stiffness or mass, consequently changing dynamic and vibrational properties such as natural frequencies and the shape of modes which in turn reduce functionality and strength of the structure. Free in-plane vibrations were examined in this study for intact and cracked plates. Fourier series expansions are often employed for solving vibrational problems but these expansions could be problematic for convergence along boundary edges.

That is why in this study, the Displacement components of the plate are first defined by modified Fourier series expansions; then, in order to examine free in-plane vibrations in an intact plate, modified Fourier series expansion and artificial spring boundary techniques are employed. In the following sections, in order to investigate free in-plane vibrations of cracked plates, modified Rayleigh-Ritz method is used. The cracked plate is simulated using the artificial spring boundary technique and then, substituting the modified displacement components in energy functions and using Lagrangian function and Rayleigh-Ritz method, dynamic and vibrational properties of the cracked plate are extracted in cantilever boundary conditions. Examining and evaluating the accuracy and convergence of the modified Fourier series and modified Raleigh-Ritz, it is safe to say that using these methods along with an adequate number of displacement component expansion sentences provides accurate results. In the following sections, the effect of geometrical and physical parameters on changes in natural frequencies and shapes of the modes are analyzed using the modified Rayleigh-Ritz method for intact plates. Moreover, the effect of relative depth of cracks, and geometrical and physical parameters on dynamic and vibrational properties of the cracked plate, such as the ratio of intact plate natural frequency to that of the cracked plate, and the shapes of modes free in-plane vibration in cantilever boundary conditions, are analyzed using the modified Rayleigh-Ritz method.

Keywords

Free in-plane vibration of plate, Artifical spring boundary technique, Modified Fourier series method, Modified Rayleigh-Ritz method

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Free In-Plane Vibration of Cracked Rectangular Plate

By:
Peyman Johar

Supervisor:
Dr Ardeshir Karami Mohammadi

February 2017