بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

حلّ تحلیلی و عددی استوانه‌های جدار ضخیم چرخان FG تحت فشار و بار حرارتی گذرا

نگارنده : دانیال وطنی

استاد راهنما :

دکتر مهدی قنّاد کهتویی

شهریور ۹۵

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای ....دانیال وطنی.......... رشته ....مهندسی مکانیک....... گرایش ....طراحی کاربردی...... **تحت حلّ تحلیلی و عددی استوانه‌های جدار ضخیم چرخان FG تحت فشار و بار حرارتی گذرا** که در تاریخ ۱۳۹۵/۶/۱۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : .... امتیاز ....) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما			
۲ـ استاد مشاور			
۳ـ استاد داور			
۴- استاد داور			
۵ ـ نماینده تحصیلات تکمیلی			

رئیس دانشکده : **امضاء**

تعهدنامه

اینجانب دانیال وطنی دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک-گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی **حلّ تحلیلی و عددی استوانه‌های جدار ضخیم چرخان FG تحت فشار و بار حرارتی گذرا** ، تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهتویی متعهّد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

تقدیم

تقدیم به

پدرم و مادرم

به‌خاطر محبّت و دلگرمی بی‌نهایتشان

در مسیر زندگی.........

چکیده

پوسته‌ها یکی از پرکاربردترین سازه‌های مهندسی به‌شمار می‌روند. تحلیل و بررسی رفتار این سازه-ها تحت بارگذاری‌های مختلف، یکی از مسائل مهم مهندسی می‌باشد که علاقه‌مندان و محقّقان زیادی را به سمت خود کشیده‌است. سازه‌های مختلف مهندسی از جمله کشتی، هواپیما، زیردریایی و موشک، عمدتاً به دلیل کاربردهایشان تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی به صورت هم‌زمان قرار می‌گیرند. بنابراین طراحی درست پوسته‌ها، مستلزم دانستن اطلاعات دقیق در مورد تغییر شکل و توزیع تنش در نقاط مختلف ورق به‌ویژه در اطراف گشودگی است. در تحقیق حاضر، به کمک روش الاستیسیته مستوی، حلّ تحلیلی و عددی استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار چرخان FG تحت بار حرارتی گذرا در دو حالت کلی تنش‌صفحه‌ای و کرنش‌صفحه‌ای ارائه می‌شود. بارگذاری به صورت ترکیبی از بار حرارتی، چرخشی و مکانیکی است؛ خواص ماده به صورت غیر خطی نسبت به شعاع تغییر می‌کند و نسبت پواسون ثابت فرض می‌شود. توزیع دما یک بعدی و در جهت شعاعی در نظر گرفته می‌شود؛ که با استفاده از روش جداسازی متغیرها، توابع بسل تعمیم‌یافته و بسط تابع ویژه به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن جابه‌جایی شعاعی، از معادله کوشی- اویلر و هم‌چنین روش تغییر پارامترها برای حلّ معادله تعادل استفاده شده است. با جای‌گزینی تابع جابه‌جایی در معادله‌های ساختاری، تنش‌های شعاعی، محیطی به‌دست می‌آیند. مقادیر در این تحقیق دلخواه انتخاب می‌شوند تا تأثیر زمان و ناهمگنی را در توزیع دما، جابه‌جایی و تنش‌ها نشان دهند. از روش اجزای محدود برای راستی‌سنجی نتایج حلّ تحلیلی، در تمام حالات بارگذاری برای پوسته ناهمگن استفاده شده‌است.

کلیدواژگان: بار حرارتی گذرا، استوانه FG، روش جداسازی متغیرها، توابع بسل تعمیم‌یافته، حل اجزا محدود

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست علائم

σ_r	تنش شعاعی
σ_θ	تنش محیطی
u_r	جابه‌جایی شعاعی
ε_r	کرنش شعاعی
X_i	خواص مکانیکی، دورانی و حرارتی
ε_θ	کرنش محیطی
T_∞	دمای مرجع
α	ضریب انبساط حرارتی
ρ	چگالی
Q	نرخ تولید گرما
T	دما
P_i	فشار داخلی
υ	نسبت پواسون
K	ضریب هدایت گرمایی
E	مدول الاستیسیته
C	ظرفیت گرمایی ویژه
J	تابع بسل نوع اول
Y	تابع بسل نوع دوم
a	شعاع داخلی
b	شعاع خارجی
ω	سرعت زاویه‌ای
n	ثابت ناهمگنی
h_i	ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در لایه داخلی
h_o	ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در لایه خارجی
$w(r)$	تابع رونسکین

مقالات

1- Vatani D., Ghannad M., (2016), "**Analytical and Numerical Solution of FG Pressurized Thick Cylindrical Shells Under Transient Thermal Load**", 11th International Congerss on Thermal Stress.

۲- وطنی د.، قناد م.، (۱۳۹۴)، " حل تحلیلی و عددی استوانه‌های جدار ضخیم FG تحت بار حرارتی گذرا "، سومین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین‌المللی مهندسی برق، مکانیک و مکاترونیک، تهران.

فصل۱ مقدّمه و تاریخچه

۱-۱ پیش‌گفتار

پوسته‌ها[1] یا سازه‌های پوسته‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها در اشکال طبیعی مانند جمجمه‌ی سر انسانها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند؛ در اشکال مصنوعی در صنایع مختلف: ساختمانی، نیروگاهی، خودروسازی، نظامی، هوا و فضا همانند: سقف‌ها، لوله‌ها، بدنه‌ی خودروها و هواپیماها، پرتابه‌ها و پرتاب‌کننده ها، موشک‌ها و سفینه‌ها تولید می‌شوند.

پوسته‌ها به طور کلّی، سازه‌های خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به تناسب مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آنها نیز حائز اهمیت می‌باشد. روش های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیت ویژه‌تری برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش‌پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آنها را در برابر انواع تنش-های مکانیکی و حرارتی افزایش و درصورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند.

۱-۲ دسته‌بندی پوسته‌ها[۲]

در این بخش، پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

1. Shells

الف- از دیدگاه هندسی:

پوسته‌ی حاصل از انتقال[۲]: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران[۳]: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک[۴]: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی[۵] آن کوچکتر از ۱/۲۰ باشد.

پوسته‌ی جدار ضخیم[۶]: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگتر از ۱/۲۰ باشد.

ب- از دیدگاه مادی:

پوسته‌ی همگن[۷]: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

پوسته‌ی ناهمگن : خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

---

1. Shell of Translation
2. Shell of Rotation
3. Thin Shell
4. Midsurface
5. Thick Shell
6. Homogeneous Shell

پوسته‌ی همسانگرد[8]: خواص مکانیکی (E,υ) ماده‌ی پوسته در جهات مختلف در هر نقطه، یکسان است.

پوسته‌ی ناهمسانگرد[9]: خواص مکانیکی (E,υ) ماده‌ی پوسته در جهات مختلف در هر نقطه، یکسان نیست.

ج- از دیدگاه رفتاری:

پوسته با تغییر شکل های کوچک[10]: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک است(رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییر شکل های بزرگ[11]: جابه جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک نیست(رفتار غیرخطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان[12] : تغییر شکل‌ها بازگشت پذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند(رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان[13] : تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند(رفتار غیر خطی از نظر مادی).

---

1. Isotropic Shell
2. Anisotropic Shell
3. Small Deflection
4. Large Deflection
5. Elastic Behavior
6. Plastic Behavior

۱-۳ تئوری پوسته‌های نازک

در پوسته‌های نازک، نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی R کوچکتر از ۱/۲۰ می‌باشد. تئوری این دسته از پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به طور کلّی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود؛ بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی-تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک به‌دست می‌آورند. دقت نتایج تئوری‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد. اوّلین فرضیات را کیرشهف[۱] (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته‌ها به‌کار گرفته شد. ارون[۲] (۱۸۷۴) تئوری پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لوو[۳] (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری لوو-کیرشهف مشهور است. رایسنر[۴] (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لوو تحلیل پوسته‌های های حاصل از دوران متقارن محوری[۵] را ارائه نمود. فلوگه[۶](۱۹۳۲) اوّلین کسی است که تئوری پوسته‌ها پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشد. با ساده‌سازی آنها تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به‌دست می‌آیند. نظریات فلوگه توسط

1. Kirchhoff
2. Aron
3. Love
4. Reissner
5. Axisymmetric Shell of Revolution
6. Flugge

بیرنه[1] (۱۹۴۴) تکمیل شد. نقدی (۱۹۵۷) تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که به‌کارگیری آنها مشکل می‌باشد. سندرز[2] (۱۹۵۹) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلف[3] (۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به‌این ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

تئوری عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به‌این‌گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱- تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی)[4]

۲- تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)[5]

۳- تئوری با تقریب مرتبه‌ی دو (تئوری فلوگه)[۱]

۱-۳-۱ تئوری غشایی

غشاء از دیدگاه مکانیکی، یک تار[6] دو بعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری (نیروهای غشایی) را تحمّل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی[7] آنها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می شود و ازاین جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل

7. Byrne

1. Sanders

2. Novozhilov

3. Membrane Theory

4. Bending Theory

5. String

6. Bending Stiffness

ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در تئوری غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسایل در حالت تنش‌صفحه‌ای[1] و کرنش‌صفحه‌ای با چشم‌پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می شوند[۲].

۱-۳-۲ تئوری خمشی

ورق[2] از دیدگاه مکانیکی، یک تیر[3] دو بعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آنها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناویر[4] ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لوو باهمین فرضیات، تئوری خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلّی، معادلات تعادل به تنهایی برای به‌دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در تئوری خمشی نیز، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لوو- کیرشهف می‌نامند که عبارتند از[۲]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک)؛

7. Plane Stress

1. Plate

2. Beam

3. Navier

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود برسطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

۱-۴ تئوری پوسته‌های ضخیم

اولین بار لامه[1] (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی(PET)[2]، حلّ دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسانگرد را ارائه کرد[۳]، که تاکنون نیز در حلّ مسایل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین[3] (۱۹۳۰) روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف[4] (۱۹۴۹) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلّی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. گرینس‌پن[5] (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود[۴].

---

1. Lame
2. Plane Elasticity Theory
3. Galerkin
4. Vlassov
5. Greenspon

۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطی

به طور کلّی در تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول رابه‌دست آورد؛ معادلات عبارتند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جابه جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارتند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی (بردار جابه‌جایی). تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی هرچند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به طور کامل توصیف می‌کند و منجر به حلّ دقیق می شود ولی حلّ معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به‌کارگیری آنها امکان‌ناپذیر است. با فرضیات ساده‌شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه‌ها به‌کار برد. در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جابه‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این تئوری را لامه[1] برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد به‌کار برد و توزیع تنش را در استوانه‌ها به‌دست آورد. تئوری لامه به تئوری کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است[۵].

1. Lame

۱-۵ مقدمه‌ای بر مواد ناهمگن

۱-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد ناهمگن

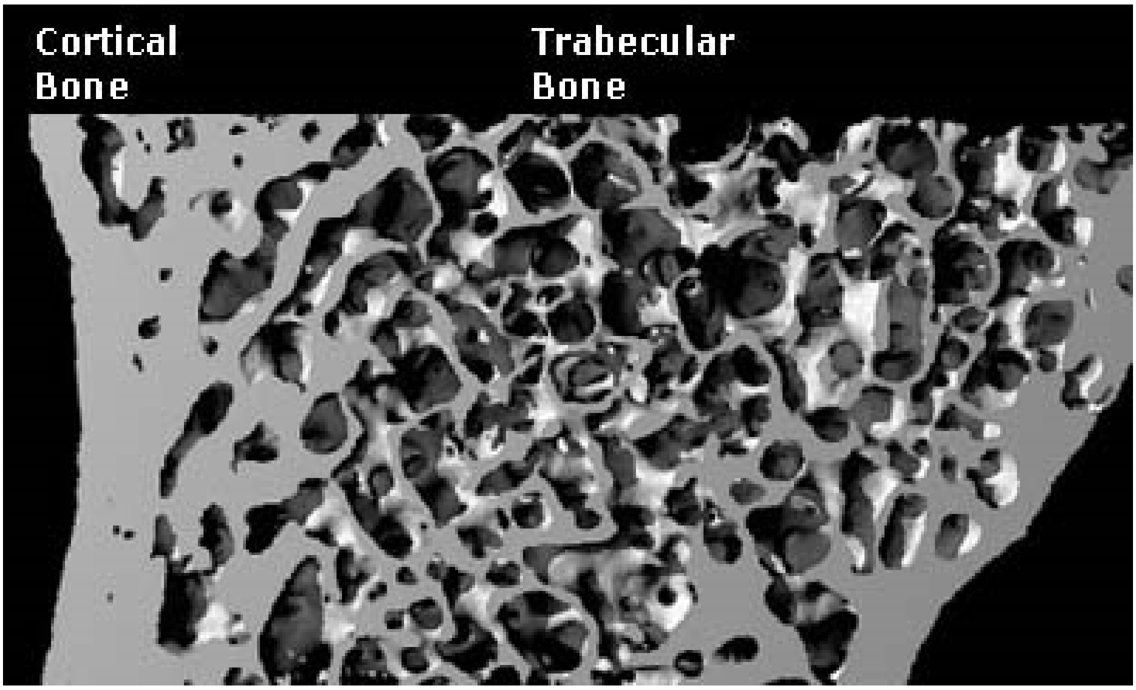
مواد همگن و همسانگرد به‌دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوافضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند. بنابراین دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند؛ که از موادی جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها) در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهمساز در دیدگاه ماکروسکپی به‌وجود می‌آیند، که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری توأم مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، اما از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد محسوب می‌شوند.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آن‌هاست، که درنتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به‌ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی‌ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص[1] در ساختار ارگانیسم‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به‌عنوان مثال، استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد؛ از استحکام بیشتری برخوردار است و به‌تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد؛ تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. ازاین‌رو تغییرات خواص

1- Functionally Graded Materials (FGM)

به‌صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. این گونه مواد که خصوصیات آن تحت یک تابع ریاضی به‌صورت تدریجی تغییر می‌کند، مواد FG یا مواد ناهمگن، نامیده می‌شوند [۶].

مفهوم اولیه‌ی مواد ناهمگن توسط نینو[1] و همکارانش در سال ۱۹۸۴در سازمان هوافضای ژاپن مطرح گردید و از سال ۱۹۸۶مطالعات امکان‌سنجی تولید آن، در این کشور شروع شد. مرحله‌ی اول پروژه ملی (فناوری گسترش مواد متغیر تابع) طی سال‌های ۸۹-۱۹۸۷در ژاپن انجام شد[۷].



شکل ۱-۱ نمای مقطع استخوان

در این پروژه، سه گروه: ساخت، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء شود. پس از دست‌یابی به هدف پروژه که

2- Niino

ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۱تا ۱۰ میلی‌متر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ کلوین و اختلاف دمایی در حدود۱۰۰۰ کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در سال۱۹۹۰در اختیار همگان قرار دادند.

مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در سال ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد، که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلی‌متر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر۵۰ میلی‌متر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد. دومین سمپوزیوم جهانی مواد متغیر تابعی در سال ۱۹۹۲برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به‌ویژه تحلیل سازه‌هایی از این جنس، فراگیر شد.

مواد ناهمگن در مقایسه با مواد همگن دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر می‌باشند:

۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا.

۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا.

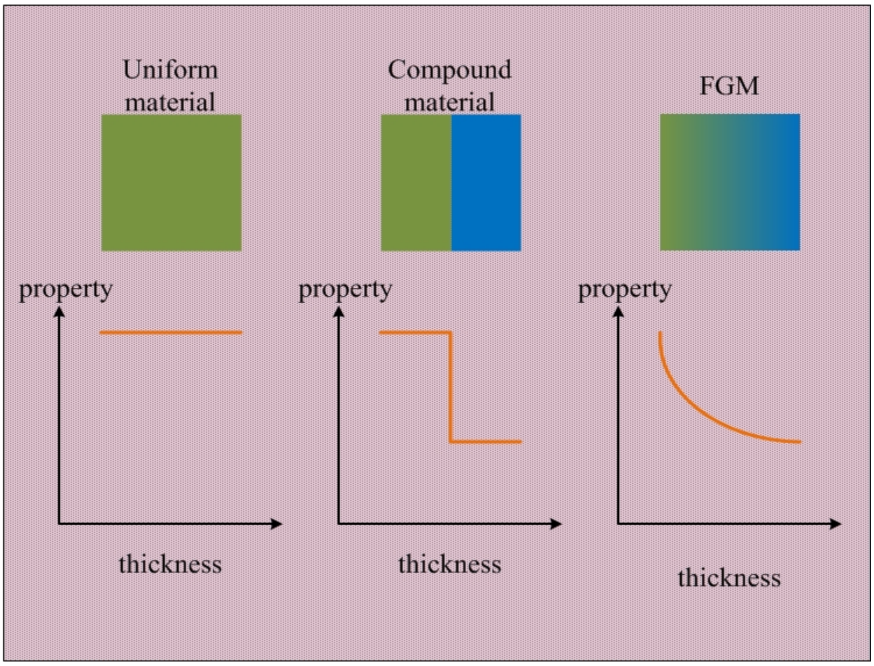
۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد ناهمگن، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود، که به کمک مواد ناهمگن می‌توان آثار نامطلوب تمرکز تنش را به‌صورت چشم‌گیری کاهش داد.

۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد ناهمگن است.

۵- اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به‌صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد ناهمگن، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد ناهمگن، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. درصورتی‌که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به‌عنوان مثال هنگامی‌که مواد کامپوزیت در معرض

بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد ناهمگن، به‌دلیل پیوستگی مود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند؛ که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل ۱-۲ مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و ناهمگن را نشان می‌دهد [۷].



شکل ۱-۲ تغییرات خواص در مواد مختلف

۱-۵-۲ مدل‌سازی ریاضی مواد ناهمگن

مطابق توضیحات داده شده، خواص مکانیکی در مواد ناهمگن به‌صورت تدریجی و پیوسته تغییر می‌کند. این توابع از این قرارند [۷].

الف) توزیع توانی

$$X(r) = X_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n = X_i \bar{r}^n \tag{۱-۱}$$

ب) توزیع نمایی

$$X(r) = X_i e^{n\left(\frac{r}{r_i}-1\right)} = X_i\, e^{n(\bar{r}-1)} \qquad (۲-۱)$$

ج) توزیع کسر حجمی[1]

$$X(r) = (X_o - X_i)\left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i}\right)^n + X_i = (X_o - X_i)\left(\frac{\bar{r} - 1}{k - 1}\right)^n + X_i \qquad (۳-۱)$$

در روابط فوق r_i ، r_o به‌ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و X_i ، X_o خاصیت ماده به ترتیب در لایه‌ی داخلی و خارجی جسم می‌باشد، که می‌توانند خاصیت مکانیکی، حرارتی و الکتریکی از قبیل: نسبت پوآسون، مدول الاستیسیته، چگالی[2]، ضریب هدایت حرارتی[3]، ضریب انبساط خطی حرارتی[4] باشند. n در روابط فوق ثابت ناهمگنی خاصیت است؛ جز رابطه‌ی (۱-۱) که ثابت ناهمگنی فقط می‌تواند مقادیر حقیقی مثبت را اختیار کند؛ در سایر روابط (۱-۲) و (۱-۳) مقادیر حقیقی منفی را نیز می‌تواند اختیار کند. $n=0$ در کلیه‌ی توابع، نشان‌دهنده‌ی مواد همگن است، همچنین $\bar{r}$ نسبت شعاع به شعاع داخلی و k نسبت شعاع خارجی به داخلی می‌باشد.

۱-۶ پیشینه‌ی تحقیق

تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد به روش‌های مختلف، همان‌گونه که در بخش ۱-۵ بیان شد، دارای قدمتی نسبتاً طولانی است. تحلیل استوانه‌های ناهمسانگرد به حدود نیم قرن پیش

---

1. Volume Fraction
2. Density
3. Heat Conduction Coefficient
4. Thermal Linear Expansion Coefficient

برمی‌گردد، ولی تحلیل استوانه‌های ناهمگن مربوط به دهه‌ی اخیر است. در این بخش، مطالعات انجام شده بر روی استوانه‌های همگن و ناهمگن در رابطه با موضوع پروژه گزارش می‌شود.

استوانه‌های همگن: برای اولین بار لامه در ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از مواد همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای را ارائه کرد[۳و۵]. گالرکین در ۱۹۳۰ روابط حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف[5] در ۱۹۴۹ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلّ برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. میرسکی و هرمان در ۱۹۸۵ با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم را ارائه کردند[۸]. در ۱۹۶۰ مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را گرینسپن با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم، محاسبه و با یکدیگر مقایسه نمود[۴]. زیو و پرل[6] در ۱۹۷۳ با به‌کارگیری تئوری میرسکی-هرمان و روش عددی تفاضل محدود، پاسخ ارتعاشی استوانه‌های نیمه‌بلند را به‌دست آوردند[۹].

استوانه‌های ناهمگن: پس از اولین سمپوزیوم جهانی FGM در ۱۹۹۰، فوکویی و یاماناکا[7] در ۱۹۹۲ روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و آنها را به روش عددی رانگ-کوتا حل کردند[۱۰]. در سال ۱۹۹۰ تنش‌های حرارتی گذرا در استوانه‌های ارتوتروپیک همگن- که یک سطح آن، تحت دمای ثابت

---

1. Vlassov

2. Ziv & Perl

3. Fukui & Yamanaka

4. Ashida

5. Loy & Reddy

و در سطح دیگر آن انتقال حرارت جابه‌جایی می‌باشد- توسط کاردوماتس مطالعه گردید[۱۱]. آشیدا[۴] و همکاران در سال ۱۹۹۳ تکنیک حلّ عمومی ترموالاستیسته گذرا برای جامدهای همسان‌گرد عرضی را در مختصات استوانه‌ای ارائه کردند[۱۲]. اُباتا و نودا در ۱۹۹۴ تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه و کره‌ی توخالی FGM استخراج و ماده‌ی بهینه را به‌دست آوردند[۱۳]. لوی و ردی[۵] در ۱۹۹۹ ارتعاشات پوسته‌های نازک استوانه‌ای FGM را با استفاده از تئوری لوو-کیرشهف استخراج و آنها را به کمک روش ریلی-ریتز حل کردند[۱۴]. هورگان و چان[۸] در ۱۹۹۹ معادلات حاکم بر یک استوانه‌ی توخالی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و توزیع تنش را به‌دست آوردند[۱۵]. ایشان در ۱۹۹۹ با همین روش، تنش‌ها را در یک دیسک دوار FGM بررسی کردند[۱۶]. اوباتا و همکاران تنش‌های حرارتی برای استوانه جدار ضخیم FG تحت توزیع دمای گذرای دوبعدی را تحلیل کردند[۱۷]. زیمرمن[۲] و همکاران ویژگی‌های ماده‌ی ناهمگن را تابع خطی نسبت به شعاع در نظر گرفتند و حل تحلیلی استوانه‌های FG را به صورت یک بعدی ارائه دادند [۱۸]. توتونچو در ۲۰۰۱ حلّ دقیق مخازن استوانه‌ای و کروی جدار ثابت FGM با توزیع توانی مدول الاستیسیته تحت فشار یکنواخت داخلی را ارائه کردند. ایشان معادلات استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک تئوری لامه استخراج و توزیع تنش را به‌ازای ریشه‌های مثبت معادله مشخصه به‌دست آورد. در مقاله‌ی ایشان، رابطه و نمودار تنش محیطی و نمودار تنش شعاعی اشتباه است که در برخی از پژوهش‌های پسین نیز استفاده شده است[۱۹]. جبّاری و همکاران در ۲۰۰۲ تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه‌ی توخالی FGM تحت بارهای متقارن[۲۰] و در ۲۰۰۳ تحت بارهای نامتقارن حرارتی[۲۱] را به‌دست آوردند. وِل و بترا در سال ۲۰۰۳ تنش‌های حرارتی گذرای سه‌بعدی در ورق مستطیلی FG- که

---

1. Horgan & Chan

2. Zimmerman

خصوصیات ماده در جهت ضخامت، با سری تیلور بیان می شود- را تحلیل کردند[۲۲]. لیو و همکاران تحلیل رفتار ترمومکانیکی استوانه جدار ضخیم FG را با فرض این‌که استوانه شامل تعداد زیادی استوانه همگن می‌باشد، ارائه کردند[۲۳]. حل عمومی تنش‌های مکانیکی و دمایی پایا در حالت یک-بعدی برای کره‌ی جدار ضخیم FG توسط اسلامی و همکاران ارائه شد[۲۴].

هونگ‌جون و ژیفای در ۲۰۰۶ حلّ دقیق استوانه‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی مدول یانگ در راستای شعاعی با لایه‌های همگن را ارائه کردند[۲۵]. ژیفای و همکاران در ۲۰۰۷ با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به صورت توانی و خطی، استوانه‌ی FGM را با روش چند لایه‌ای کردن، تحلیل و با حلّ توتونچو مقایسه و درنتیجه به اشتباه مقاله‌ی نامبرده پی‌بردند[۲۶]. توتونچو در۲۰۰۷ تحلیل استوانه‌ی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع نمایی مدول یانگ، ارائه کرد[۲۷]. شاو در ۲۰۰۸ تحلیل ترمومکانیکی استوانه‌های توخالی تشکیل شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص تحت بارهای مکانیکی و افزایش خطی دمای مرزی را با انتقال معادلات دیفرانسیل حاکم به حوزه‌ی لاپلاس و استفاده از روش حل به کمک سری‌ها انجام داد[۲۸]. توتونچو در ۲۰۰۹ نیز توزیع میدان جابه‌جایی و مقادیر تنش مربوط به دیسک، استوانه و کره‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی و توانی خواصّ ماده در راستای شعاع تحت فشار داخلی را توسط تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و روش تابع متمّم تعیین نمود[۲۹]. در سال ۲۰۰۹ زمانی‌نژاد و رحیمی حلّ یک‌بعدی تنش‌های حرارتی ناگذر در استوانه‌ی مدوّر جدارضخیم FG تحت فشار را ارائه کردند[۳۰]. زمانی‌نژاد و قنّاد در ۲۰۰۹ با ارائه‌ی دستگاه معادلات سه‌بعدی بر اساس تحلیل تانسوری، رفتار پوسته‌های جدار ضخیم FGM حاصل از دوران با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر در راستای نصف‌النّهاری را بررسی کردند[۳۱]. قنّاد و همکاران در ۲۰۱۰ حلّ عمومی استوانه‌های جدار ضخیم FGM را بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی به ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط در شرایط تنش‌صفحه‌ای، کرنش‌صفحه‌ای و استوانه‌ی بسته ارائه و اشتباه مقاله‌ی توتونچو را نشان داده و آن را تصحیح کردند[۳۲]. ایشان در ۲۰۱۱ حلّ عمومی استوانه‌های جدار کلفت FGM را برمبنای تئوری تغییر شکل برشی، ارائه و نتایج آن را با

حلّ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی مقایسه نمودند[۳۳]. پنگ و لی در سال ۲۰۱۰ مسأله‌ی تنش‌های حرارتی پایا در دیسک‌های مدور چرخان FG را تحلیل کردند[۳۴]. در ۲۰۱۱ کلس و کانکر حلّ گذرای هدایت حرارتی به صورت هذلولوی برای استوانه و کره‌ی توخالی ناهمگن تشکیل شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص را ارائه نمودند[۳۵]. قربانپور و همکاران در ۲۰۱۱ اثر ناهمگنی را بر روی رفتار الکتریکی، حرارتی و مکانیکی یک استوانه‌ی چرخان جدار ضخیم FGPM[۹] با تغییرات توانی خواص تحت فشار داخلی و خارجی بررسی و معادلات حاصل را برای این استوانه حل کردند[۳۶]. زمانی‌نژاد و افشین در سال ۲۰۱۳ حل عمومی پاسخ گذرای ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم تحت شرایط مرزی عمومی را به‌دست آوردند[۳۷].

۱-۷ جمع‌بندی

برای تحلیل استوانه‌های ضخیم همگن و ناهمگن با جدار ثابت، به گونه‌ای که مسأله از حالت الاستیسیته‌ی دو بعدی خارج نشود، می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی استفاده کرد . به دلیل اهمیت تحلیل پوسته‌ها و همچنین ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی آن‌ها و با توجه اینکه تاکنون حلّ تحلیلی برای **استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار چرخان FG تحت بار حرارتی گذرا در دو حالت کلی تنش‌صفحه‌ای و کرنش‌صفحه‌ای** ارائه نشده است، در این پژوهش با ارائه‌ی حلّ تحلیلی برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حلّ عددی به منظور بررسی صحت نتایج صورت پذیرفته است.

---

1. Functionally Graded Porous Materials

ابتدا درفصل اوّل این پژوهش، ضمن مرور تئوری پوسته‌های نازک و کلفت، مطالعات انجام شده در خصوص پوسته‌های استوانه‌ای ارائه شده است. همچنین مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM) ضمن تعریف تاریخچه و ویژگی‌های آن‌ها بیان می‌شوند. فصل دوّم شامل استخراج معادلات حاکم بر استوانه-های جدار ضخیم با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی برای ماده‌ی همگن تحت بارگذاری به ترتیب فشاری، دورانی و دمایی گذرا می‌باشد. سپس روش حلّ معادلات نهایی بیان و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی برای حالت تنش‌صفحه‌ای آورده شده است. به‌منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، مدل‌سازی عددی استوانه‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. فصل سوّم شامل استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی برای ماده‌ی FG با تغییرات توانی خواص تحت بارگذاری به ترتیب فشاری، دورانی و دمایی گذرا می‌باشد. سپس روش حلّ معادلات نهایی بیان و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی برای حالت تنش‌صفحه‌ای آورده شده است. به‌منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، مدل‌سازی عددی استوانه‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. نتیجه-گیری، جمع‌بندی نهایی و ارائه‌ی پیشنهادها در فصل چهارم انجام شده است.

فصل۲ تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های چرخان استوانه‌ای همگن تحت فشار و بار حرارتی گذرا

۲-۱ پیش‌گفتار

همان‌طور که در فصل اول نیز عنوان شد، مقاومت منحصر به فرد استوانه‌های جدار ضخیم (FGM) در برابر بارهای حرارتی، دانشمندان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آنها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، بپردازند. کاربرد گسترده‌ی این استوانه‌ها در رآکتورها، ژنراتورها و سانتریفیوژها که نیروی گریز از مرکز در آنها نقش مهمی ایفا می‌کند، باعث شده تا تحلیل این استوانه‌ها تحت تاثیر فشار، حرارت و دوران به طور همزمان مورد بررسی قرار گیرد. به همین منظور در فصل حاضر، برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد همگن، حلّ عمومی استوانه‌های چرخان جدار ضخیم تحت بارگذاری‌های حرارتی گذرا و فشار یکنواخت داخلی صورت پذیرفته است. نهایتاً با ارائه‌ی حل عددی توسط نرم‌افزار المان محدود Ansys، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند.

در ابتدا لازم است فرض‌هایی که برای استخراج معادلات در این فصل استفاده شده‌اند را بیان کنیم:

۱-جابه‌جایی‌ها کوچک و در محدوده‌ی الاستیک بررسی شده و اثرات ناحیه‌ی پلاستیک درنظر گرفته نشده‌است.

۲-از اصل جمع آثار[1]، به منظور تحلیل مکانیکی، دورانی و حرارتی به‌صورت مجزّا، استفاده شده‌است. لازم به‌ذکر است که اصل مذکور در مسأله‌ی موردنظر صادق می‌باشد.

۳- توزیع دما یک بعدی و در جهت شعاعی در نظر گرفته می‌شود.

1- Super position

در بخش اول این فصل، به کمک روش الاستیسیته مستوی، حلّ تحلیلی استوانه‌های جدار ضخیم چرخان تحت فشار و بار حرارتی گذرا در دو حالت کلی تنش‌صفحه‌ای و کرنش‌صفحه‌ای ارائه می‌شود؛ بارگذاری به صورت ترکیبی از بار حرارتی، دورانی و مکانیکی است. توزیع دمای یک بعدی با استفاده از روش جداسازی متغیرها، توابع بسل تعمیم‌یافته و بسط تابع ویژه به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن جابه‌جایی شعاعی، از معادله کوشی- اویلر و هم‌چنین روش تغییر پارامترها برای حلّ معادله تعادل استفاده شده است. با جای‌گزینی تابع جابه‌جایی در معادله‌های ساختاری، تنش‌های شعاعی و محیطی به‌دست می‌آیند. توزیع دما، جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های حرارتی در حالت گذرا به‌دست می‌آیند و در جهت‌های شعاعی و زمان رسم می‌شوند. مقادیر در این تحقیق دل‌خواه انتخاب می‌شوند تا تأثیر زمان را در توزیع دما، جابه‌جایی و تنش‌ها نشان دهند.

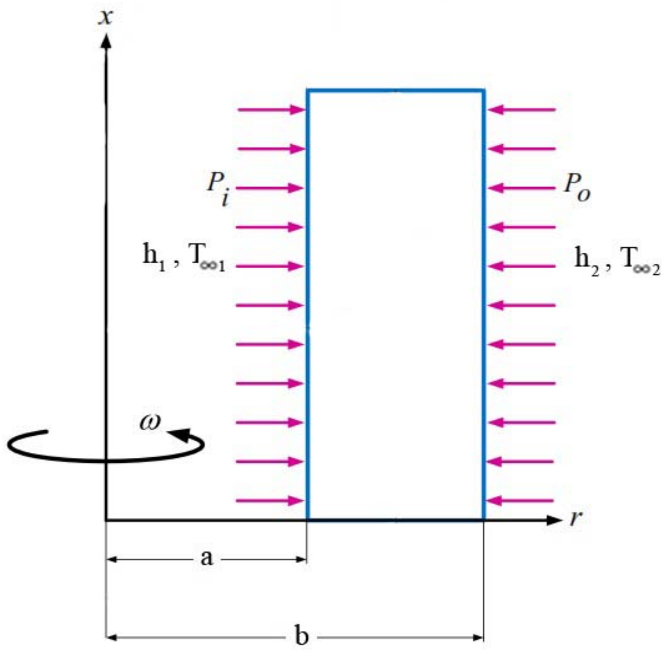
در بخش بعد، روند تحلیل عددی با کمک نرم‌افزار اجزای محدود انسیس[11] بیان و با تعریف یک مسأله، نتایج حاصل از حل تحلیلی انجام شده و تحلیل عددی مربوط به مسأله مقایسه و بررسی خواهند شد.

۲-۲ استخراج معادلات

۲-۲-۱ معادله‌ی حرارتی گذرا

یک پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم تحت بار مکانیکی، دورانی و حرارتی گذرا به صورت شکل (۲-۱) در نظر گرفته می‌شود:

۱۱- ANSYS



شکل ۲-۱ پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم تحت بارگذاری ترکیبی

یک استوانه جدار ضخیم به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b در نظر گرفته می‌شود. معادله حرارتی گذرای یک‌بعدی استوانه جدار ضخیم بدون منبع حرارتی، برای این مسأله‌ی متقارن، بر اساس قانون فوریه به صورت معادله‌ی (۲-۱) می‌باشد.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + Q$$

$$Q = 0 \qquad (۲-۱)$$

$$\frac{\rho c}{k}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

که $T(r,t)$، توزیع دما و k، ρ، c به ترتیب هدایت گرمایی، چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه می‌باشند.

شرایط مرزی و اولیه در حالت کلی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{cases} c_{11}T(a,t) + c_{12}\dfrac{\partial T}{\partial r}(a,t) = g_1 \\ c_{21}T(b,t) + c_{22}\dfrac{\partial T}{\partial r}(b,t) = g_2 \end{cases} \qquad (۲-۲)$$

$$T(r,0) = T_i(r)$$

(۲-۳)

$c_{ij}\ (i,j=1,2)$ و $g_i\ (i=1,2)$ ثابت‌هایی وابسته به شرایط مرزی و $T_i(r)$، شرط اولیه داده شده می‌باشند.

حل معادله (۲-۱) با استفاده از روش جداسازی متغیرها، تابع بسل تعمیم‌یافته و بسط تابع ویژه به‌دست می‌آید.

$$T(r,t)=T_h(r,t)+T_s(r) \tag{۲-۴}$$

با قرار دادن معادله (۲-۴) در معادله (۲-۱) معادله‌های (۲-۵) و (۲-۶) حاصل می‌شوند.

$$\frac{\rho c}{k}\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial r}+\frac{dT_s(r)}{dr}\right)\right) \tag{۲-۵}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\rho c}{k}\dfrac{\partial T_h(r,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 T_h(r,t)}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_h(r,t)}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT_s(r)}{dr}\right)=0\end{cases} \tag{۲-۶}$$

و شرایط مرزی T_s مطابق معادله‌ی:

$$\begin{cases}c_{11}T_s(a)+c_{12}\dfrac{dT_s}{dr}(a)=g_1\\ c_{21}T_s(b)+c_{22}\dfrac{dT_s}{dr}(b)=g_2\end{cases} \tag{۲-۷}$$

حال برای به‌دست آوردن $T_s(r)$، از معادله(۲-۷) دو بار انتگرال می‌گیریم و ثابت‌های C_1 و C_2 را به‌دست می‌آوریم.

$$r\frac{dT_s}{dr}=C \tag{۲-۸}$$

$$T_s=\int\frac{C}{r}\,dr=C_1\ln r+C_2 \tag{۲-۹}$$

$$C_1=\frac{g_2c_{11}-g_1c_{21}}{c_{11}c_{21}\ln\dfrac{b}{a}+\dfrac{c_{22}c_{11}}{b}-\dfrac{c_{12}c_{21}}{a}} \tag{۲-۱۰}$$

$$C_2 = \frac{g_1 - c_1\left(c_{11}\ln a + \dfrac{c_{12}}{a}\right)}{c_{11}} \tag{۱۱-۲}$$

شرایط مرزی و اولیه T_h نیز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} c_{11}T_h\left(a,t\right)+c_{12}\dfrac{\partial T_h}{\partial r}\left(a,t\right)=0 \\ c_{21}T_h\left(b,t\right)+c_{22}\dfrac{\partial T_h}{\partial r}\left(b,t\right)=0 \end{cases} \tag{۱۲-۲}$$

$$T_h\left(r,0\right)=T_i\left(r\right)-T_s\left(r\right) \tag{۱۳-۲}$$

در نتیجه حلّ معادله‌ی T_h به شکل روابط زیر بیان می‌شود.

$$\frac{\rho c}{k}\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 T_h(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial r} \tag{۱۴-۲}$$

$$T_h(r,t)=f(r)g(t) \tag{۱۵-۲}$$

$$\frac{\rho c}{k}\frac{\partial g(t)}{\partial t}f(r)=g(t)\left(\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right) \tag{۱۶-۲}$$

$$\frac{\rho c}{kg(t)}\frac{\partial g(t)}{\partial t}=\frac{1}{f(r)}\left(\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right)=-S^2 \tag{۱۷-۲}$$

$$\begin{cases} r^2\dfrac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+r\dfrac{\partial f(r)}{\partial r}+S^2r^2f(r)=0 \\ \dfrac{\partial g(t)}{\partial t}+S^2\dfrac{\rho c}{k}g(t)=0 \end{cases} \tag{۱۸-۲}$$

$$r^2\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+r\frac{\partial f(r)}{\partial r}+S^2r^2f(r)=0 \tag{۱۹-۲}$$

که این معادله‌ی تابع بسل می‌باشد.

$$f(r) = d_1 J_0(sr) + d_2 Y_0(sr) \tag{۲۰-۲}$$

$$g(t) = e^{-\frac{k}{\rho c} s^2 t} \tag{۲۱-۲}$$

که J و Y به ترتیب توابع بسل نوع اول و دوم می‌باشند.

$$T_h(r,t) = f(r) g(t) = \left(d_1 + d_2 \ln r\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n J_0(s_n r) + B_n Y_0(s_n r)\right) e^{-\frac{k}{\rho c} s_n^2 t} \tag{۲۲-۲}$$

با جای‌گزینی $T_h(r,t)$ در معادله‌ی (۲-۱۲) داریم:

$$A_n \left(c_{11} J_0\left(s_n a^x\right) - c_{12} s_n J_1\left(s_n a\right)\right) = -B_n \left(c_{11} Y_0\left(s_n a\right) - c_{12} s_n Y_1\left(s_n a\right)\right) \tag{۲۳-۲}$$

$$d_1 = d_2 = 0 \tag{۲۴-۲}$$

$$\begin{aligned} &\left(c_{21} Y_0\left(s_n b\right) - c_{22} s_n Y_1\left(s_n b\right)\right)\left(c_{11} J_0\left(s_n a\right) - c_{12} s_n J_1\left(s_n a\right)\right) \\ &-\left(c_{11} Y_0\left(s_n a\right) - c_{12} s_n Y_1\left(s_n a\right)\right)\left(c_{21} J_0\left(s_n b\right) - c_{22} s_n J_1\left(s_n b\right)\right) = 0 \end{aligned} \tag{۲۵-۲}$$

که s_n مقادیر ویژه و ریشه‌های مثبت معادله (۲-۲۵) می‌باشند. از رابطه (۲۵) می‌توان G_n را به دو صورت به‌دست آورد.

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{c_{11} Y_0\left(s_n a\right) - c_{12} s_n Y_1\left(s_n a\right)}{c_{21} Y_0\left(s_n b\right) - c_{22} s_n Y_1\left(s_n b\right)} \\ G_n &= \frac{c_{11} J_0\left(s_n a\right) - c_{12} s_n J_1\left(s_n a\right)}{c_{21} J_0\left(s_n b\right) - c_{22} s_n J_1\left(s_n b\right)} \end{aligned} \tag{۲۶-۲}$$

معادله‌ی(۲-۲۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$c_{22} s_n f_1(s_n, b) - c_{21} f_0(s_n, b) = 0 \tag{۲۷-۲}$$

و $f_{\frac{q}{x}}\left(\mathrm{s_n}, r\right)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f_i(s_n,r)=J_i(s_nr)\left(c_{11}Y_0(s_na)-c_{12}s_nY_1(s_na)\right)$$
$$-Y_i(s_nr)\left(c_{11}J_0(s_na)-c_{12}s_nJ_1(s_na)\right) \tag{۲-۲۸}$$

$$T_h(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}r^{-p}\left(A_nJ_0(sr)+B_nY_0(sr)\right)e^{-\frac{k}{\rho c}s_n{}^2t} \tag{۲-۲۹}$$

$$T_h(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nf_0(s_n,r)e^{-\frac{k}{\rho c}s_n{}^2t} \tag{۲-۳۰}$$

با اعمال شرایط مرزی اولیه داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nf_0(s_n,r)=T_i(r)-(C_1\ln r+C_2) \tag{۲-۳۱}$$

برای به‌دست آوردن A_n، طرفین تساوی را در $rf_0(\mathrm{s_m},r)$ ضرب می‌کنیم. حال از دو طرف تساوی از a تا b انتگرال می‌گیریم.

به ازای $m\neq n$ حاصل انتگرال برابر صفر می‌باشد.

اکنون برای $m=n$ حاصل انتگرال محاسبه می‌شود.

$$\int_a^b r\left(f_0(s_n,r)\right)^2dr=\frac{r^2}{2}\left(\left(f_0(s_n,r)\right)^2+\left(f_1(s_n,r)\right)^2\right)\Bigg|_a^b \tag{۲-۳۲}$$

انتگرال طرف چپ و راست تساوی به ترتیب به صورت معادله‌های (۲-۳۳) و(۲-۳۴) به‌دست می‌آیند.

$$\int_a^b r\left(f_0(s_n,r)\right)^2dr=\frac{2}{\pi^2s_n{}^2}\left(s_n{}^2\left(c_{22}{}^2G_n{}^2-c_{12}{}^2\right)+c_{21}{}^2G_n{}^2-c_{11}{}^2\right)=L \tag{۲-۳۳}$$

$$\int_a^b\left(T_i(r)-(C_1\ln r+C_2)\right)rf_0(s_n,r)dr=\int_a^bT_i(r)rf_0(s_n,r)dr$$
$$-\frac{2}{\pi s_n{}^2}\left(G_n\left(c_{21}c_1\ln b+c_{21}c_2+\frac{c_{22}c_1}{b}\right)+\left(-c_{11}c_1\ln a-c_{11}c_2-\frac{c_{12}c_1}{a}\right)\right)=M \tag{۲-۳۴}$$

از تقسیم $\frac{M}{L}$، نیز A_n به‌دست می‌آید.

اکنون بر اساس معادله‌ی (۲-۴)، $T(r,t)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\mathrm{T}(\mathrm{r},\mathrm{t})=\sum_{n=1}^{\infty}A_n f_0(s_n,r)e^{-\frac{k}{\rho c}s_n^2 t}+c_1\ln r+c_2 \tag{۲-۳۵}$$

۲-۲-۲ روابط ترموالاستیک

استوانه جدار ضخیم با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور مرکزی خود می‌چرخد. در مختصات استوانه‌ای(r,θ,z)، برای مسأله‌ی متقارن، کرنش‌های شعاعی و محیطی (ε_θ , ε_r) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{۲-۳۶}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r} \tag{۲-۳۷}$$

هم‌چنین دمای مرجع (T_∞) را ۲۵ درجه سانتی‌گراد در نظر می‌گیریم. تحلیل برای دیگر مقادیر نیز معتبر می‌باشد.

$$\Delta T=T(r,t)-T_\infty=T(r,t)-25 \tag{۲-۳۸}$$

برای استوانه روابط ساختاری ترموالاستیک خطی در مسائل تنش‌صفحه‌ای و کرنش‌صفحه‌ای می‌تواند به شکل زیر بیان شود.

$$\begin{pmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{pmatrix}=E\left(\begin{bmatrix}A & B\\ B & A\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}C\\ C\end{pmatrix}\alpha\Delta T\right) \tag{۲-۳۹}$$

که E، مدول الاستیسیته و α، ضریب انبساط حرارتی می‌باشند. ثابت‌های A و B نیز برای حالت کرنش‌صفحه‌ای برابرند با:

$$A = \frac{1-\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$$
$$B = \frac{\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \qquad (۴۰-۲)$$
$$C = \frac{1}{(1-2\upsilon)}$$

و هم‌چنین برای حالت تنش‌صفحه‌ای:

$$A = \frac{1}{(1-\upsilon^2)}$$
$$B = \frac{\upsilon}{(1-\upsilon^2)} \qquad (۴۱-۲)$$
$$C = \frac{1}{(1-\upsilon)}$$

که υ ، نسبت پواسون می‌باشد.

اکنون معادله تعادل استوانه جدار ضخیم برای مسأله‌ی متقارن به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\rho r \omega^2 \qquad (۴۲-۲)$$

حال با جای‌گزینی معادله‌های (۲-۳۶) و (۲-۳۷) در معادله (۲-۳۹) و با استفاده از معادله (۲-۴۲) رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u_r = \frac{C\alpha}{A}\frac{\partial(\Delta T)}{\partial r} - \frac{\rho r \omega^2}{AE} \qquad (۴۳-۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r u_r)}{\partial r}\right) = \frac{C\alpha}{A}\frac{\partial(\Delta T)}{\partial r} - \frac{\rho r \omega^2}{AE} \qquad (۴۴-۲)$$

درنتیجه u_r به‌دست می‌آید:

$$u_r(r,t) = C_3 r + \frac{C_4}{r} + \frac{C\alpha}{Ar}\int_a^r r\Delta T \, dr - \frac{\rho r^3 \omega^2}{8AE} \qquad (۴۵-۲)$$

با جای‌گزینی معادله جابه‌جایی در روابط ساختاری، تنش‌ها در دو حالت تنش‌صفحه‌ای و کرنش-صفحه‌ای به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_r = E\left(C_3\left(A+B\right)+\frac{C_4\left(B-A\right)}{r^2}+\frac{\left(B-A\right)C\alpha}{Ar^2}\int_a^r r\Delta T\, dr-\frac{\rho r^2\omega^2}{8AE}\left(3A+B\right)\right) \tag{۴۶-۲}$$

$$\sigma_\theta = E\left(C_3\left(A+B\right)-\frac{C_4\left(B-A\right)}{r^2}-\frac{\left(B-A\right)C\alpha}{Ar^2}\int_a^r r\Delta T\, dr-\frac{\rho r^2\omega^2}{8AE}\left(3B+A\right)+\left(\frac{B}{A}-1\right)C\alpha\Delta T\right) \tag{۴۷-۲}$$

حال با استفاده از شرایط مرزی مکانیکی در لایه داخلی و خارجی زیر:

$$\begin{aligned}\sigma_r\big|_{r=a} &= -P_i\\ \sigma_r\big|_{r=b} &= -P_o\end{aligned} \tag{۴۸-۲}$$

ثابت‌های C_3 و C_4 به‌دست می‌آیند.

$$C_3=\frac{1}{\left(b^2-a^2\right)\left(A+B\right)}\left(\frac{\left(P_i a^2-P_o b^2\right)}{E}-\frac{\left(B-A\right)C\alpha}{A}\int_a^b r\Delta T\, dr+\frac{\rho\omega^2}{8AE}\left(3A+B\right)\left(b^2-a^2\right)\left(b^2+a^2\right)\right) \tag{۴۹-۲}$$

$$C_4=\frac{a^2b^2}{\left(b^2-a^2\right)\left(B-A\right)}\left(\frac{\left(P_o-P_i\right)}{E}+\frac{\left(B-A\right)C\alpha}{Ab^2}\int_a^b r\Delta T\, dr+\frac{\rho\omega^2}{8AE}\left(3A+B\right)\left(a^2-b^2\right)\right) \tag{۵۰-۲}$$

۲-۳ تحلیل اجزای محدود

در طول تاریخ مهندسی، گاهی اوقات به‌دست‌آوردن یک جواب دقیق برای مسأله بسیار سخت و مشکل بوده تا حدی که در برخی موارد باعث توقف انجام تحقیق خاصی می‌شده است. واقعیت این است که رسیدن به حلّ دقیق بسیار وابسته به شرایط مرزی مسأله از جمله هندسه، بارگذاری، قیدها و ... بوده‌است. برخی از مسائل با شرایط مرزی و هندسه‌ی خاص دارای حلّ دقیق می‌باشند. ولی واقعیت این است، که بسیاری از مسائل فاقد راه‌حلّ تحلیلی و دقیق می‌باشند؛ که با معرفی روش‌های جدید حل عددی، در این شرایط راه مناسبی برای به‌دست آوردن یک شکل‌بندی ریاضی برای این دسته

مسائل به‌وجود آمد. روش اجزای محدود نیز یکی از این روش‌های حلّ عددی است. ویژگی آن نسبت به دیگر روش‌ها در دسته‌بندی دامنه‌ی جسم به دامنه‌های ساده‌تر به نام المان‌های محدود، است. این عمل باعث می‌شود، که هندسه‌های سخت و پیچیده به یک مجموعه هندسه‌های ساده‌تر که حلّ آن آسان می‌باشد، تبدیل شود. هر المان از نقاطی که متعلق به کلّ جسم است، تشکیل می‌شود و هر نقطه بین چند المان مشترک است؛ که در معادلات تعادل تمام آن المان‌ها شرکت می‌کنند. این امر باعث برقراری شرط پیوستگی بین المان‌های کل جسم در هنگام حل دستگاه معادلات سفتی می‌شود. المان‌های مختلفی برای شرایط هندسی و بارگذاری متفاوت در تحلیل‌ها استفاده می‌شوند، که برای مثال می‌توان به دو دسته زیر که در این تحلیل کاربرد دارند، اشاره کرد.

۱. المان تنش‌صفحه‌ای و کرنش‌صفحه‌ای: برای حالتی که مسأله مورد نظر دارای هندسه دوبعدی بوده که بارگذاری درون‌صفحه‌ای داشته باشد. این المان جابه‌جایی درون‌صفحه‌ای جسم را بررسی می-کند.

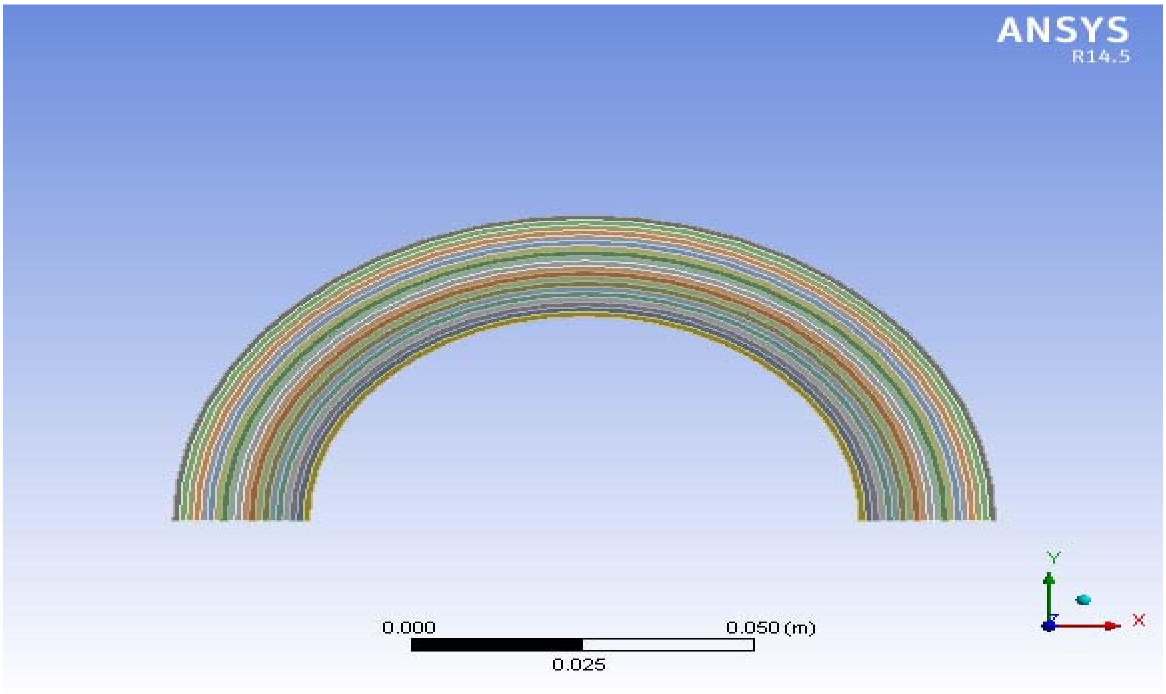
۲. المان خمش صفحه‌ای: این المان برای حالتی که ورق تحت بارگذاری خارج صفحه است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این المان برای پوسته‌ها و ورق‌های فضایی مناسب است، که علاوه بر خیز، شیب در دو جهت محورهای اصلی ورق را محاسبه می‌کند.

پس همان‌طورکه گفته شد، روش اجزای محدود یک روش حلّ عددی می‌باشد. این روش برای مسائل پیچیده، که امکان به‌دست آوردن حل دقیق یا حل تحلیلی در آن امکان‌پذیر نیست، گزینه مناسبی است. در این تحقیق از روش اجزای محدود برای راستی سنجی حلّ تحلیلی استفاده شده است؛ ولی در شرایطی که حلّ دقیق یا حل تحلیلی مورد تأیید در مراجع برای مسأله وجود دارد؛ مانند کشش ساده‌ی ورق بلند همگن با گشودگی دایروی، مقایسه‌ی حلّ تحلیلی و اجزای محدود می‌تواند معیاری برای درستی تحلیل عددی باشد. این مقایسه، در این تحقیق انجام شده که با دقت قابل قبولی روند حل اجزای محدود مورد تأیید قرار گرفت.

۲-۳-۱ معرفی نرم‌افزار اجزای محدود انسیس

هنگامی که هندسه‌ی مسأله پیچیده و بزرگ باشد، استفاده از روش اجزای محدود به صورت دستی بسیار سخت و طاقت‌فرسا بوده و به‌طور قطع منشأ ایجاد خطا خواهد بود. به همین دلیل در سال‌های اخیر با پیشرفت روزافزون تکنولوژی، استفاده از رایانه برای انجام محاسبات زیاد مورد استقبال قرار گرفت و نرم‌افزارهای مختلفی بر پایه‌ی زبان‌های برنامه‌نویسی وارد بازار شدند. نرم‌افزار انسیس، یکی از نرم‌افزارهای قدرتمند مهندسی در زمینه‌ی تحلیل اجسام با استفاده از روش المان محدود می‌باشد. این نرم‌افزار اولین بار در سال ۱۹۷۰ توسط جان سوانسون[۱] ساخته‌شد. هدف اصلی او از ساخت این نرم‌افزار، توسعه‌ی روش المان محدود و استفاده از آن در مسائل دارای قابلیت شبیه‌سازی مانند تحلیل‌های استاتیکی، دینامیکی و حرارتی بود. این نرم‌افزار به مرور زمان و با پیشرفت تکنولوژی روزبه‌روز قدرت بیشتری در تحلیل‌های متفاوت پیدا کرده که از جمله‌ی آن می‌توان به تحلیل الکترونیکی و مسائل مربوط به مهندسی برق، تحلیل مسائل دینامیک گذرا و لحظه‌ای مانند ضربه و انفجار، تحلیل جریان‌های سیالاتی و حرارتی و بسیاری موارد دیگر اشاره کرد. این شرکت در سال ۲۰۰۳ نرم‌افزارهای قدرتمندی هم‌چون Fluent، CFX، AutoDyna، ICEM را به‌منظور افزایش توان تحلیل خود خریداری کرده و زیرمجموعه‌ی خود قرارداده‌است. اخیراً نیز با اضافه‌شدن نرم‌افزار آباکوس به زیرمجموعه‌ی انسیس قدرت تحلیل این نرم‌افزار المان محدود بیشتر ازپیش شده‌است.

[1] John A. Swanson



شکل ۲-۲ هندسه مقطع عرضی استوانه جدار ضخیم در نرم‌افزار انسیس

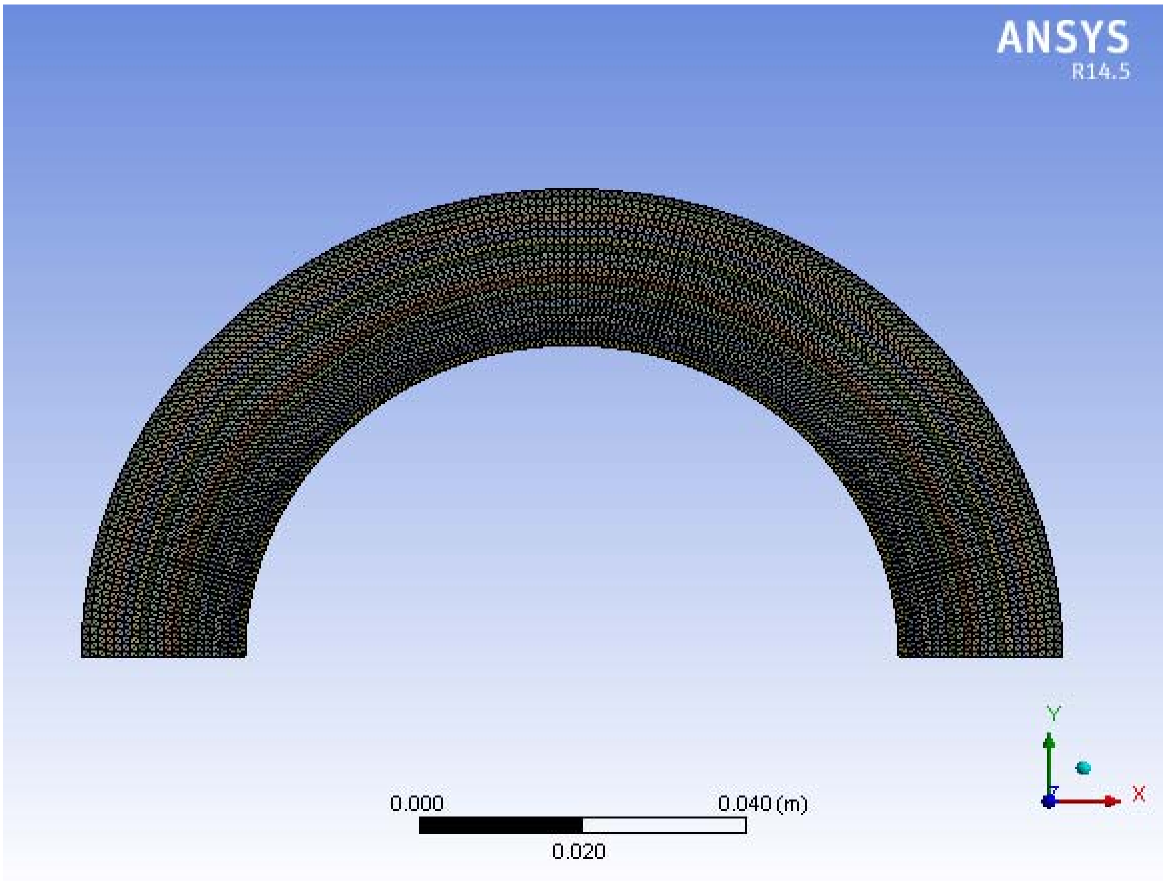
۲-۳-۲ مدل‌سازی استوانه

برای المان‌بندی استوانه، المان solid از نوع plane 8node 183 انتخاب شده است که گزینه‌ی plane stress مربوط به این المان فعال شده است. مقطع این المان ۴ ضلعی با اضلاع خمیده و دارای ۸ گره[13] (۴ گره در رئوس و ۴ گره در وسط اضلاع) است که درجه‌ی آزادی هر گره، دو می‌باشد. این المان برای مسائل تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و متقارن محوری کاربرد دارد. استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلیمتر و شعاع خارجی ۶۰ میلیمتر با جداره‌ی ثابت به طول ۸۰۰ میلیمتر مدل‌سازی شده است. برای ایجاد خواص ناهمگنی که به صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است، با تقسیم جداره‌ی استوانه به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مکانیکی، دورانی و حرارتی

---

1. Node

در هر لایه بسته به فاصله‌ی مرکز هر لایه از لایه‌ی داخلی، نهایتاً پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از ۲۰ استوانه‌ی همگن و همسانگرد (ایزوتروپ) به‌هم چسبیده تشکیل می‌شود. بارگذاری حرارتی گذرا در دو step انجام شد؛ time step اول در ۰/۰۰۰۱ ثانیه مدل می‌شود که مربوط به شرط اولیه بوده و time step دوم از ۰/۰۰۰۱ ثانیه تا ۲۰ ثانیه برای ادامه‌ی روند حل مدل می‌شود.



شکل ۲-۳ نمایی از مش‌بندی مقطع عرضی استوانه در نرم‌افزار انسیس

۲-۴ مطالعه‌ی موردی

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج حلّ تحلیلی و عددی، یک استوانه‌ی ضخیم همگن و همسانگرد با ضخامت ثابت و بارگذاری حرارتی گذرا مطابق شکل (۲-۱) به شعاع داخلی $a=40\ mm$، شعاع خارجی $b=60\ mm$ و توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی در نظر گرفته می‌شود. مدول الاستیسیته، چگالی، هدایت گرمایی، ظرفیت گرمایی ویژه و ضریب انبساط

حرارتی در استوانه به ترتیب برابر مقادیر $E=۲۰۰\,GPa$، $\rho=۷۸۶۰\,\frac{kg}{m^3}$، $K=۶۰/۵\,w/m^2k$، $C=۴۳۴\,J/kg\,°C$ و $\alpha=۱۲\times۱۰^{-۶}\,\frac{1}{°C}$ و نسبت پواسون ثابت $\upsilon=۰/۳$ را تحت فشار یکنواخت داخلی $P_i=۸۰\,MPa$، دمای سطح داخلی ثابت $T_{\infty_1}=۱۲۵°C$ و دمای سطح خارجی ثابت برابر دمای محیط $T_{\infty_2}=۲۵°C$ $(h_i, h_o\rightarrow\infty)$ و سرعت دورانی ثابت $\omega=۳۰۰\,rad/s$ در نظر می‌گیریم.شرایط اولیه مرزی نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$T(r,0)=-5000r+325 \qquad (۲-۵۱)$$

تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای در حالت تنش‌صفحه‌ای انجام شده است. حلّ تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 16 صورت گرفته است.

برای حلّ استوانه تحت بارگذاری ترکیبی می‌توان با در نظر گرفتن اثر هر کدام از جملات حاصل از بارگذاری‌های حرارتی، فشاری و دورانی به تنهایی و محاسبه‌ی مقادیر جابه‌جایی و تنش حاصل از هر بارگذاری، نهایتاً با استفاده از اصل جمع آثار مقادیر مربوط به جابه‌جایی‌های شعاعی و نیز تنش-های محیطی و شعاعی حاصل از بارگذاری ترکیبی را به‌دست آورد.

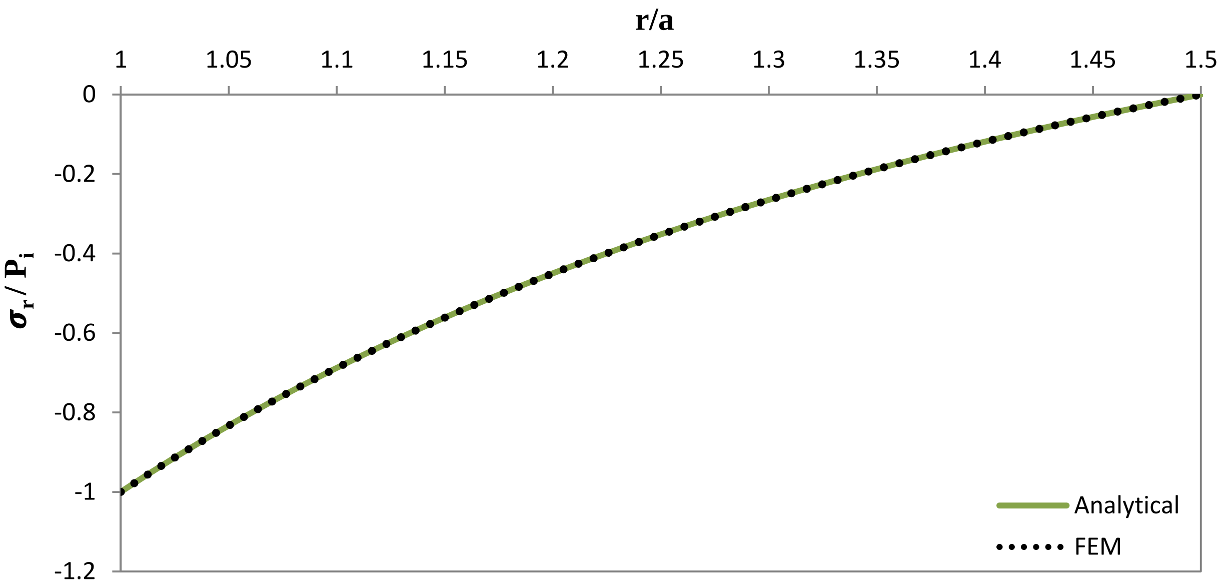
۲-۵ بررسی نتایج

در این بخش نتایج مربوط به حلّ تحلیلی با نتایج عددی حاصل از روش اجزاء محدود در استوانه-ی همگن تحت بارگذاری‌های حرارتی، فشاری و دارای سرعت دورانی ثابت مقایسه شده است. نحوه‌ی مدل‌سازی توسط نرم‌افزار Ansys R14.5 در بخش قبلی بیان شده است.

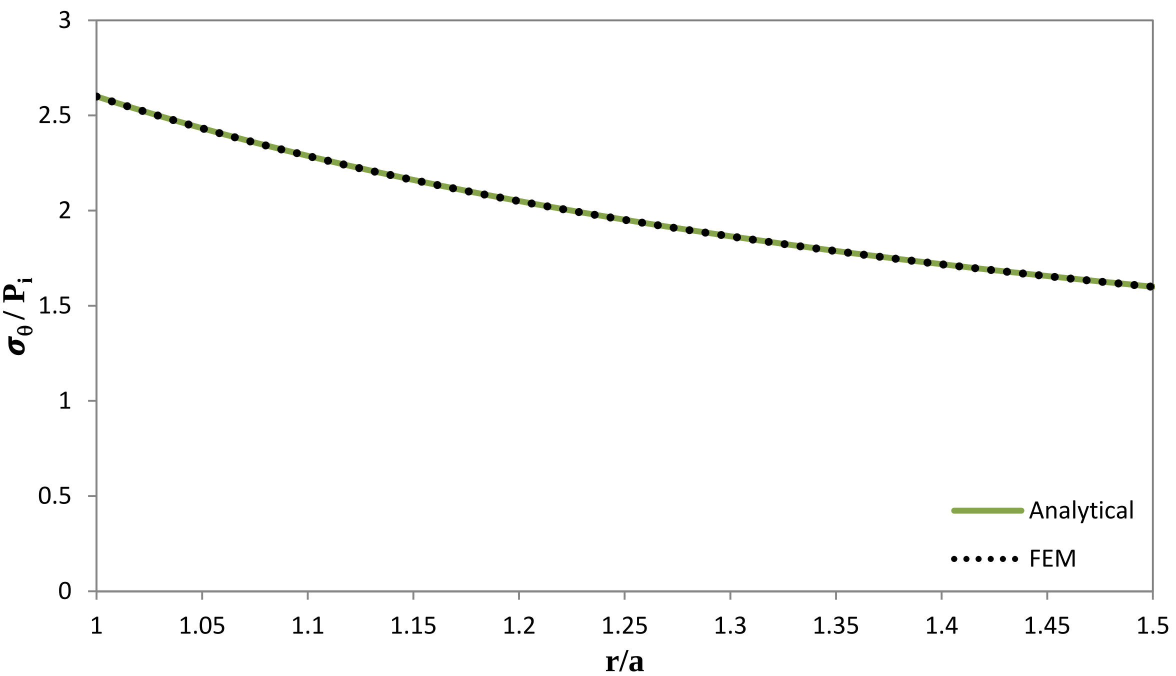
۲-۵-۱ مقایسه‌ی نتایج

شکل‌های (۲-۴) تا (۲-۱۷) توزیع جابه‌جایی شعاعی، تنش شعاعی و تنش محیطی بی‌بعد

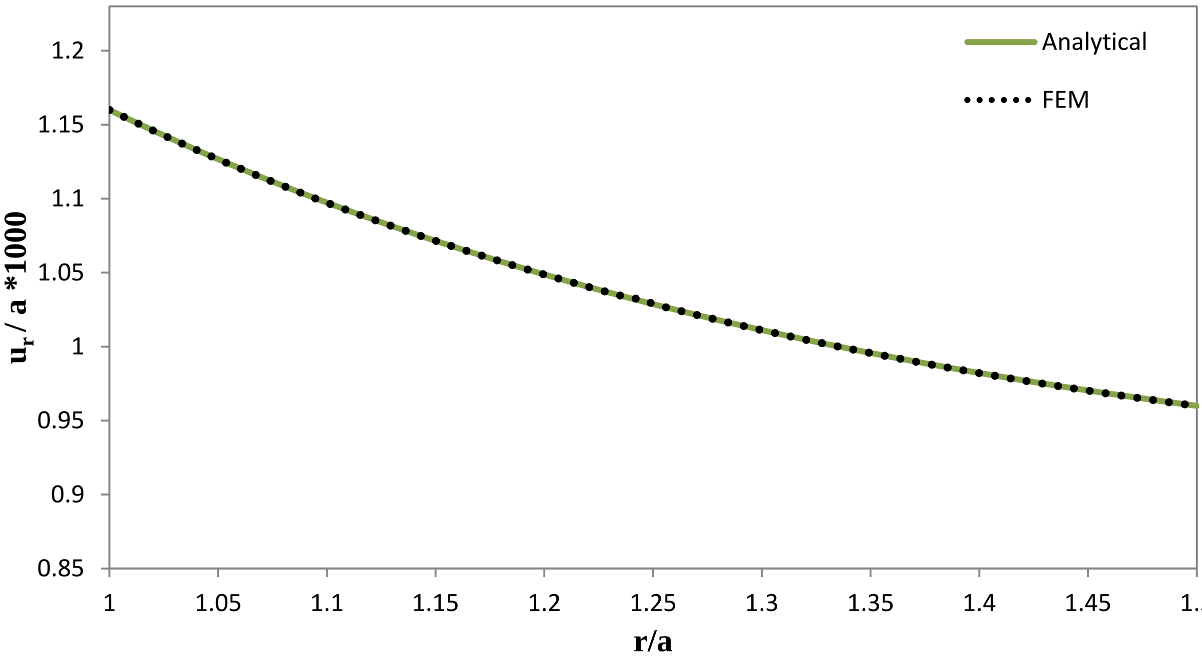
محاسبه شده با روش‌های FE و تحلیلی برای سه حالت بارگذاری برای حالت تنش‌صفحه‌ای را در راستای جدار استوانه ذکر شده و هم‌چنین بر حسب زمان نشان می‌دهد.



شکل ۲-۴ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در استوانه جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و t=5s

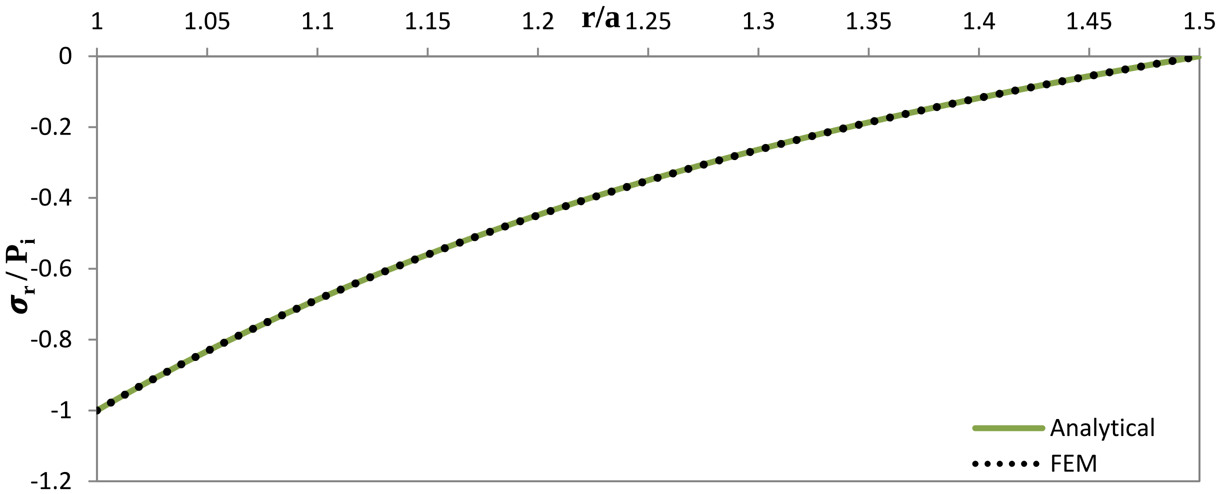


شکل ۲-۵ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در استوانه جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و t=5s

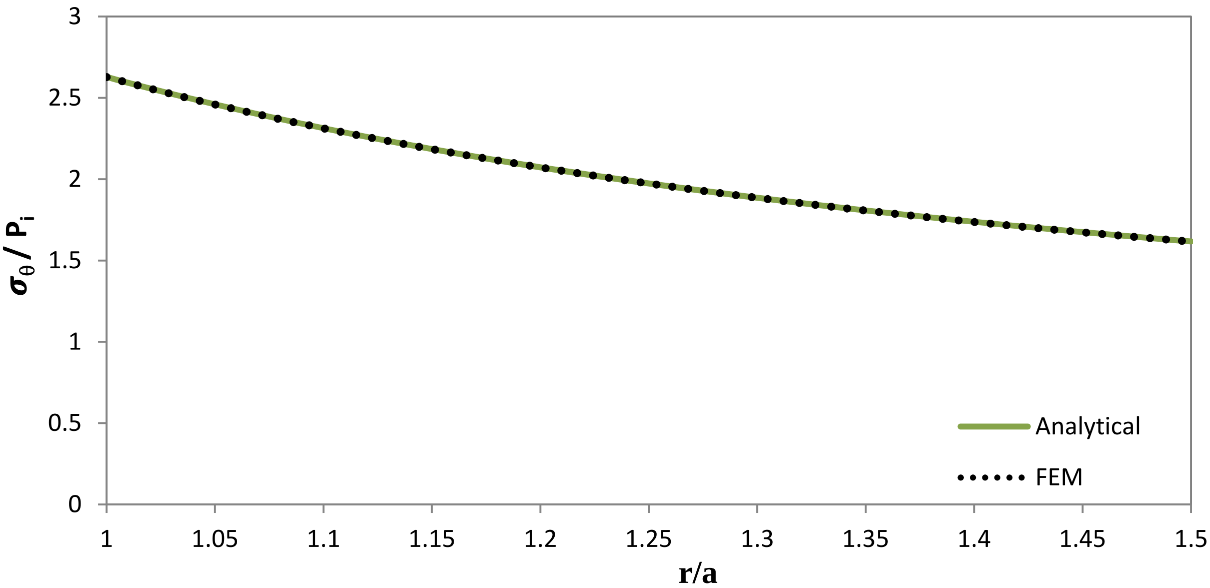


شکل ۲-۶ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در استوانه جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و ۵ s t=

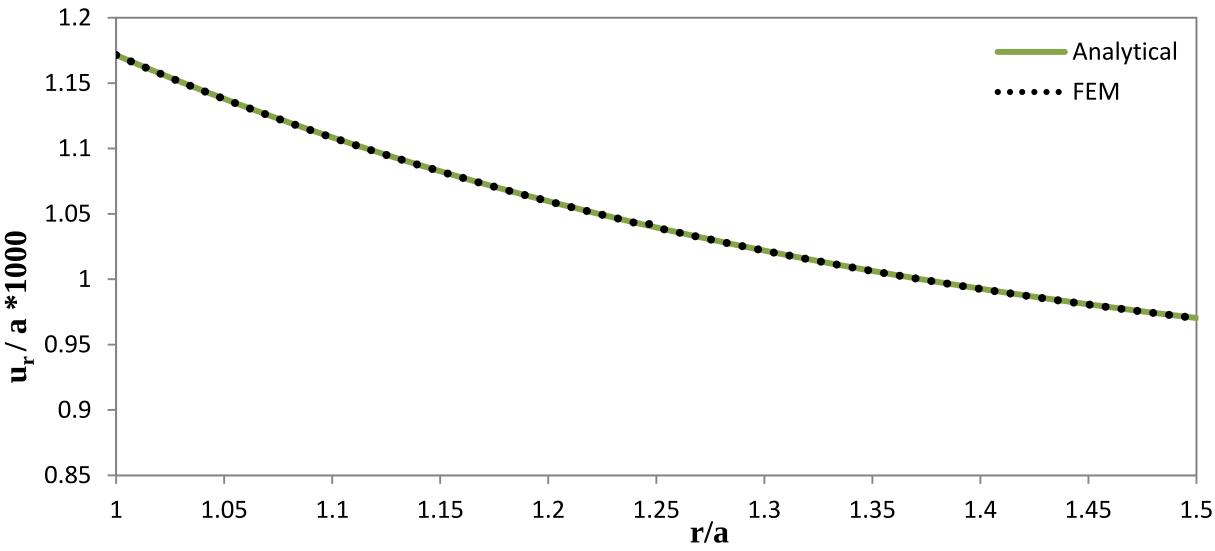
مقادیر جابه‌جایی و تنش محیطی برای استوانه تحت فشار داخلی، از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی در کلیه‌ی نقاط استوانه تحت فشار داخلی مثبت می‌باشند.



شکل ۲-۷ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در استوانه چرخان جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و t=۵s

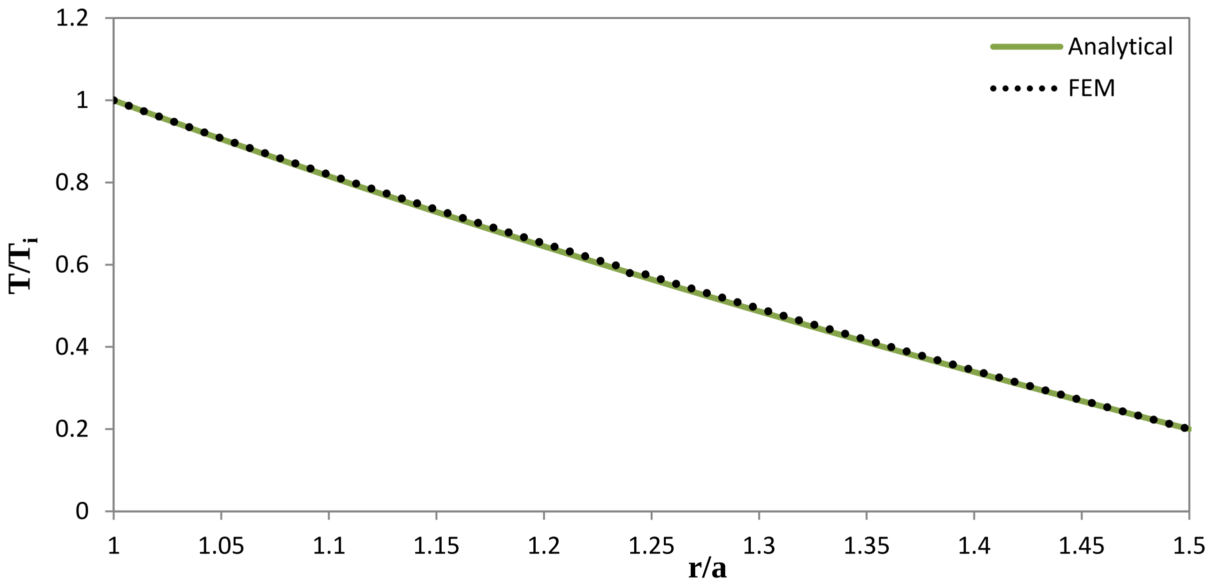


شکل ۲-۸ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در استوانه چرخان جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و t=۵s

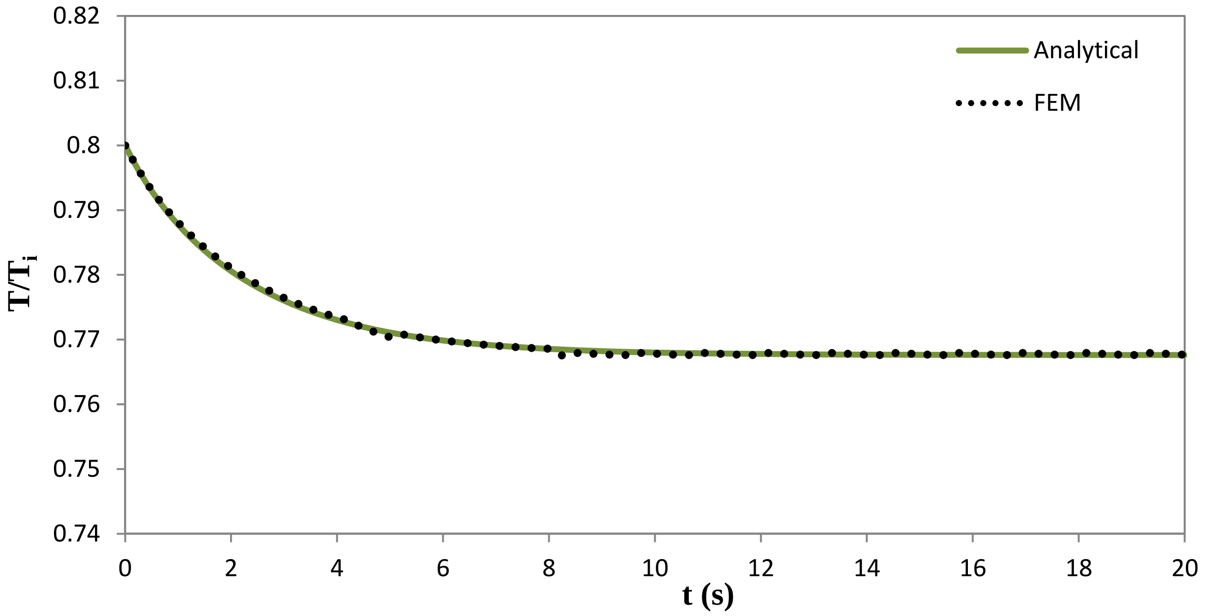


شکل ۲-۹ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در استوانه چرخان جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و t=۵s

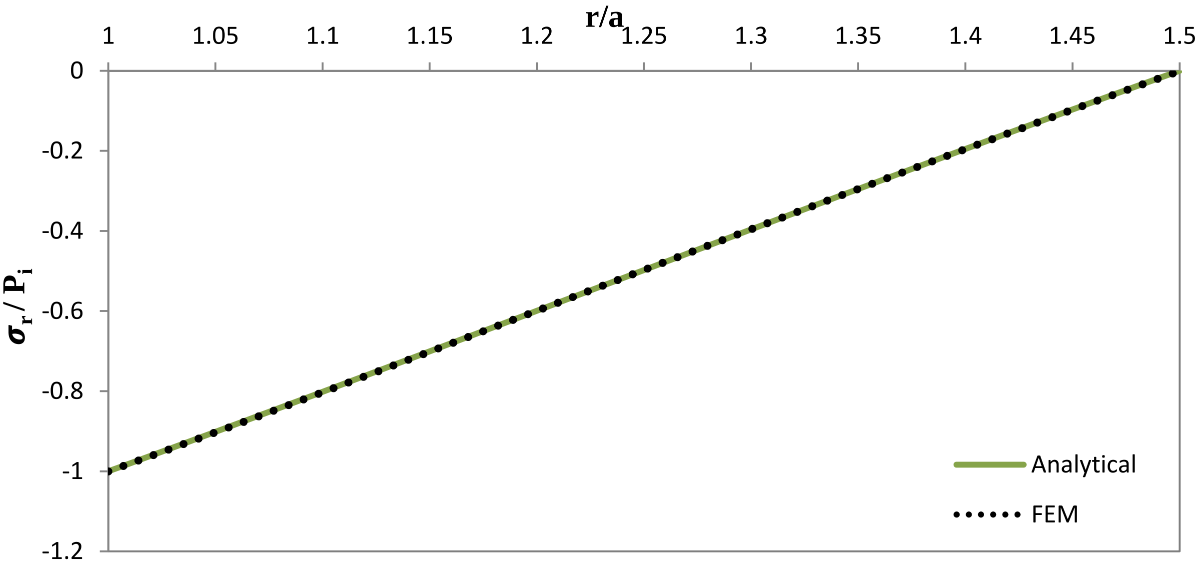
با توجه با تأثیر بسیار کم بارگذاری دورانی برای مطالعه‌ی موردی مورد نظر، مشاهده می‌شود که رفتار استوانه تحت بارگذاری دورانی و فشاری مشابه رفتار استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. به عبارتی می‌توان از نتایج مربوط به استوانه تحت فشار برای بررسی رفتار استوانه‌ی چرخان تحت فشار استفاده کرد. در استوانه‌ی جدار کلفت با ضخامت ثابت، دوران با سرعت ثابت برای سرعت‌های نه چندان زیاد سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی بسیار اندکی می‌شود. به عنوان مثال مقدار جابه‌جایی شعاعی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت ۳۰۰ rad / s در وسط استوانه برای لایه‌های داخلی، میانی و خارجی حدود ۰/۴ μm می‌باشد. هم‌چنین حداکثر مقدار تنش محیطی ایجاد شده توسط دوران کمتر از ۲/۳ MPa می‌باشد.



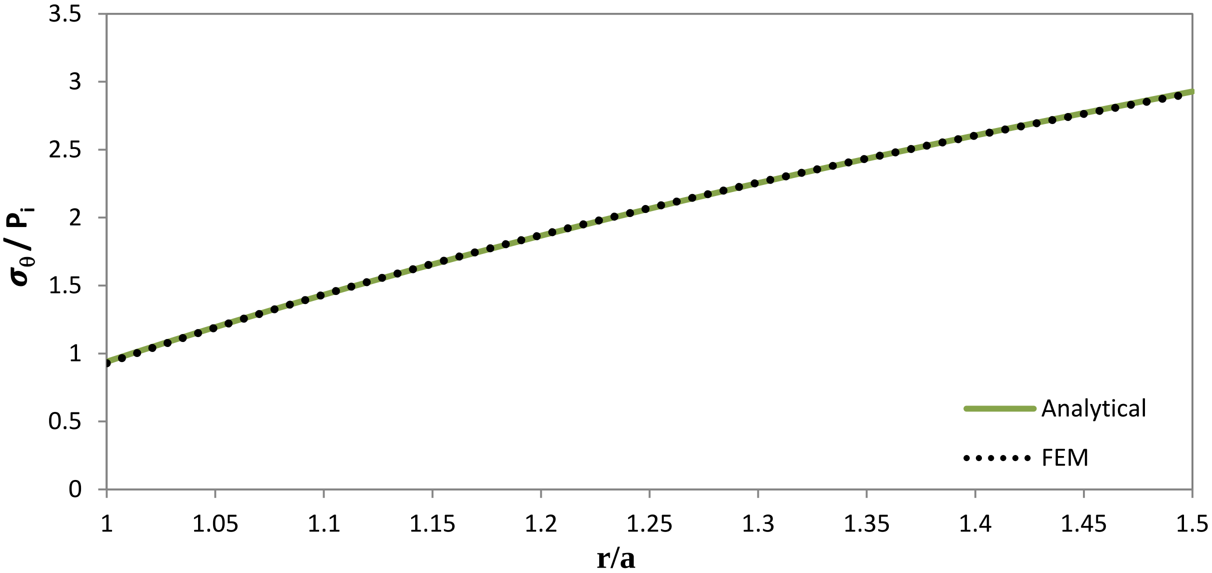
شکل ۲-۱۰ توزیع بی‌بعد دما در استوانه جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در راستای شعاعی و t=۵s



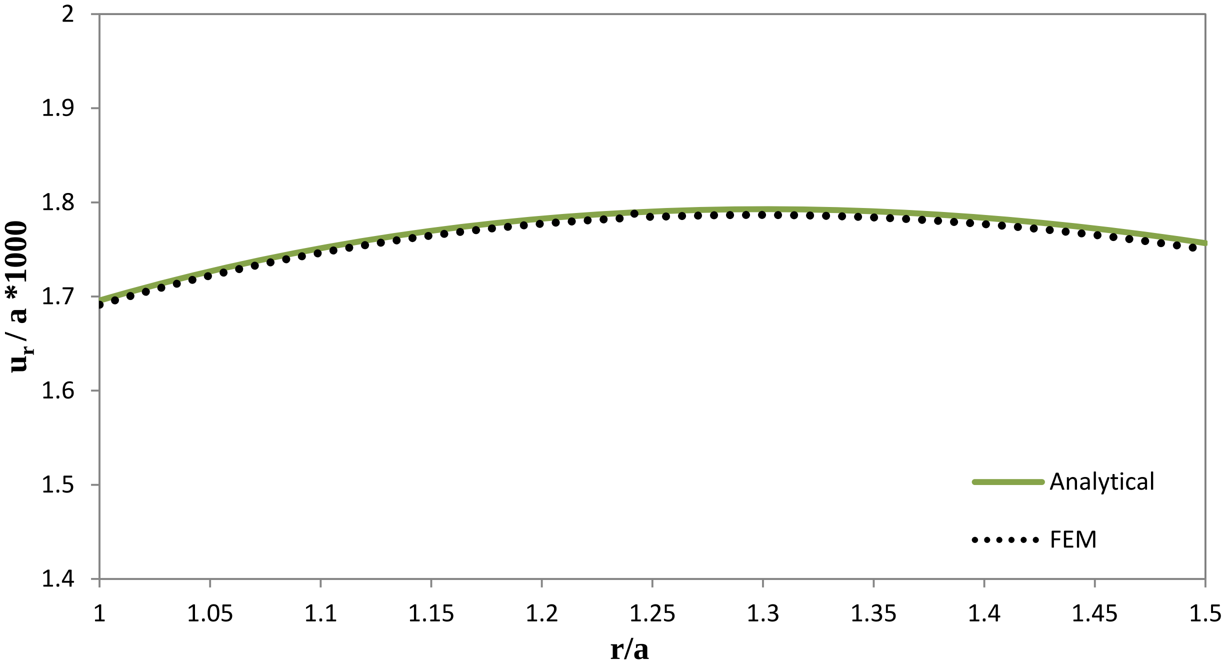
شکل ۲-۱۱ توزیع بی‌بعد دما در استوانه جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا در r=۰/۰۴۵m



شکل ۲-۱۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در استوانه چرخان جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در راستای شعاعی و t=5s

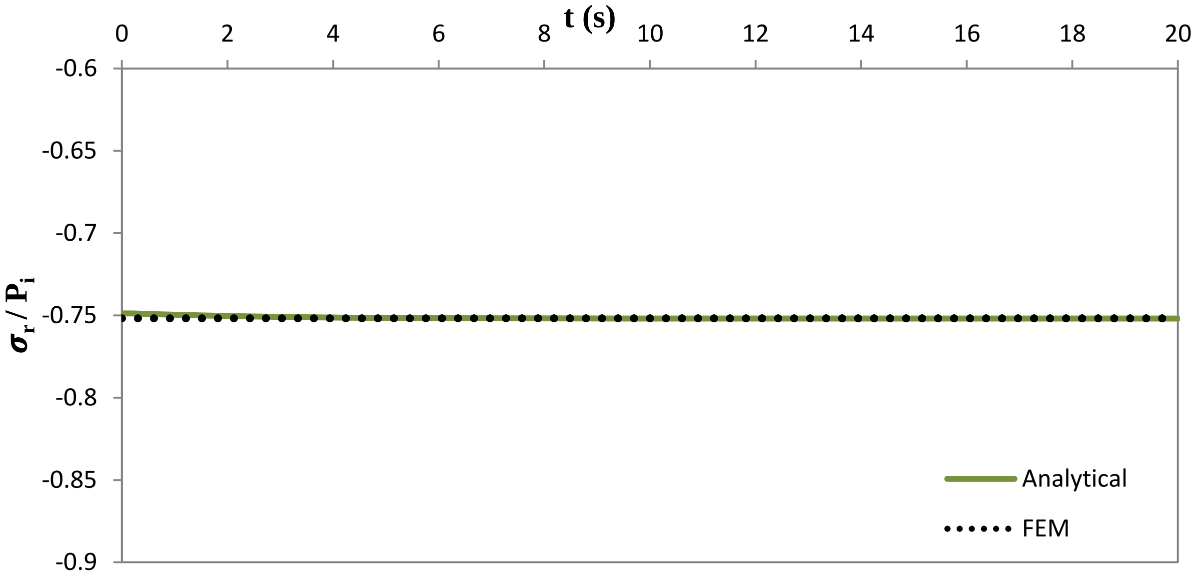


شکل ۲-۱۳ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در استوانه چرخان جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در راستای شعاعی و t=5s

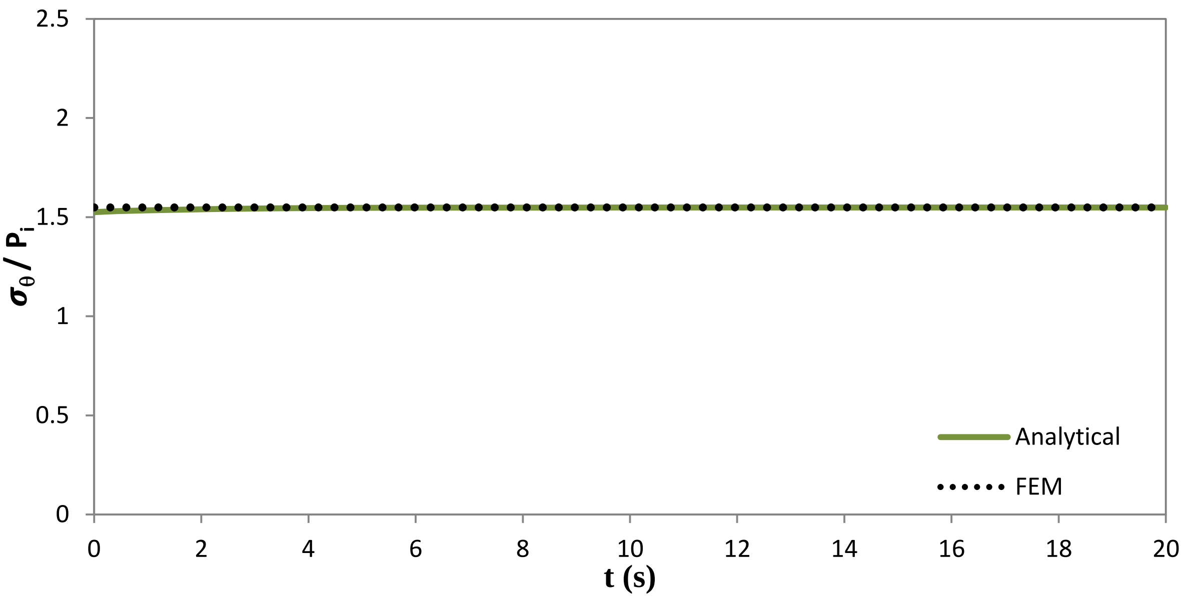


شکل ۲-۱۴ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در استوانه چرخان جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در راستای شعاعی و t=۵ s

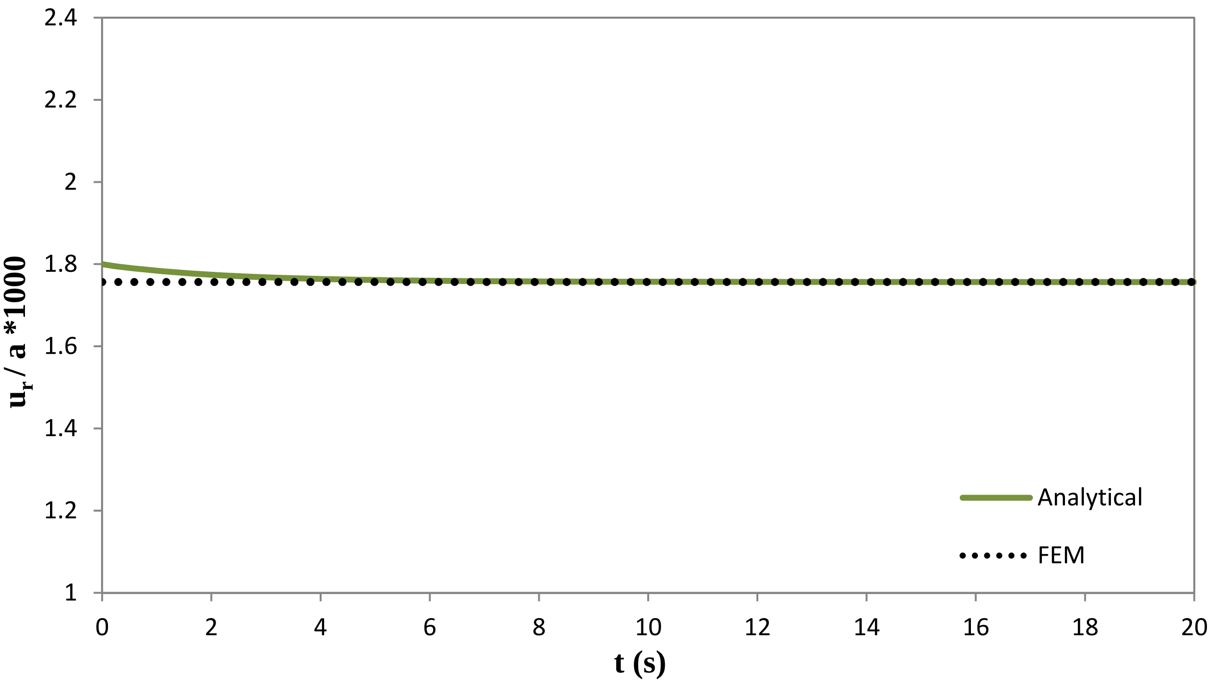
با دقت در نمودار شکل (۲-۱۴) می‌توان دریافت که جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی در حال افزایش می‌باشد. سپس در نیمه‌ی خارجی جداره‌ی استوانه، جابه‌جایی شعاعی از نزدیکی لایه‌ی میانی تا لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. مقدار حداکثر جابه‌جایی در طول جداره‌ی استوانه در نقطه‌ی $\bar{r} = ۱/۳$ مشاهده می‌شود. هم‌چنین تنش محیطی که در بارگذاری فشاری و دورانی کاهش پیدا می‌کرد در بارگذاری حرارتی افزایش می‌یابد و بیشینه‌ی تنش در لایه خارجی می‌باشد.



شکل ۲-۱۵ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در استوانه چرخان جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در r=۰/۰۴۵m



شکل ۲-۱۶ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در استوانه چرخان جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در r=۰/۰۴۵m



شکل ۲-۱۷ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در استوانه چرخان جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در r=۰/۰۴۵ m

با توجه به شکل (۲-۱۱) از آن‌جایی که دما در شعاع خاصی از جسم بر حسب زمان ثابت است و تغییر چندانی ندارد، بنابراین تنش‌های شعاعی، محیطی و جابه‌جایی شعاعی تحت بارگذاری حرارتی تقریبا ثابت باقی می‌مانند. نمودارهای شکل (۲-۱۵)، (۲-۱۶) و (۲-۱۷) گواهی بر این ادعاست.

جدول (۲-۱) حاوی مقادیر جابه‌جایی‌های شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و دورانی در سه لایه‌ی داخلی، میانی و خارجی استوانه می‌باشد. در جدول (۲-۲) نیز مقادیر تنش بیشینه‌ی محاسبه شده با روش‌های FE و تحلیلی در سه لایه‌ی مختلف تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و دورانی آورده شده است.

جدول ۲-۱ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و تحلیلی برای بارگذاری‌های مختلف

$U_r[mm]$	مکانیکی		دورانی		حرارتی	
	FEM	PET	FEM	PET	FEM	PET
$r=a$	۰/۰۴۶۴	۰/۰۴۶۴	۰/۰۰۰۴۶	۰/۰۰۰۴۶	۰/۲۰۷	۰/۲۰۹
$r=\frac{a+b}{2}$	۰/۰۴۱۱	۰/۰۴۱۱	۰/۰۰۰۴۳	۰/۰۰۰۴۳	۰/۰۲۹۷	۰/۰۳۰۰
$r=b$	۰/۰۳۸۴	۰/۰۳۸۴	۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۳۱۲	۰/۰۳۱۵

جدول ۲-۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و تحلیلی برای بارگذاری‌های مختلف

$\sigma_\theta[MPa]$	مکانیکی		دورانی		حرارتی	
	FEM	PET	FEM	PET	FEM	PET
$r=a$	۲۰۷/۹۶	۲۰۸	۲/۳	۲/۲۹	-۱۳۶	-۱۳۵/۱
$r=\frac{a+b}{2}$	۱۵۶/۱۵	۱۵۶/۱۶	۱/۷۷	۱/۷۷	۷/۷۶	۷/۲۵
$r=b$	۱۲۷/۹۹	۱۲۸	۱/۳۸	۱/۳۸	۱۰۳/۹۷	۱۰۴/۸۶

با دقت در این جداول می‌توان دریافت که در مطالعه‌ی موردی مورد نظر توزیع جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در استوانه تحت بارگذاری مکانیکی بیشتر از بارگذاری حرارتی می‌باشد. بارگذاری دورانی نیز کمترین مقدار جابه‌جایی و تنش را در استوانه ایجاد می‌کند. با توجه به اثر ناچیز دوران می‌توان رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای را تحت بارگذاری کلی به برآیند نیروهای حرارتی و مکانیکی نسبت داد. با توجه به اختلاف دمای ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد بین سطح داخلی و خارجی استوانه‌ی جدار ثابت و فشار داخلی ۸۰ مگاپاسکال مشاهده می‌شود که کرنش‌های مکانیکی بر کرنش‌های حرارتی

غلبه می‌کنند. با توجه به اینکه جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی در بارگذاری حرارتی افزایش و در بارگذاری فشاری (فشار داخلی) کاهش می‌یابد، نهایتاً مشاهده می‌شود که در بارگذاری ترکیبی جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی تا نزدیکی لایه‌ی میانی افزایش و سپس کاهش می‌یابد. همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد، این کاهش در طول جداره‌ی استوانه در نقطه-ی $\bar{r} = ۱/۳$ مشاهده می‌شود و سبب شده تا کاهش جابه‌جایی از این نقطه تا لایه‌ی خارجی به نحوی باشد که مقادیر جابه‌جایی شعاعی در وسط استوانه برای لایه‌های میانی و خارجی نزدیک به یکدیگر حاصل شود.

تنش محیطی در بارگذاری فشاری (فشار داخلی) و دورانی حاصل از روش‌های FE و تحلیلی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش، ولی در بارگذاری حرارتی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

۲-۶ جمع‌بندی

در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی افزایش می‌یابند، در حالیکه در مورد جابه‌جایی عکس این مطلب صادق است. جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی در حال افزایش می‌باشد. سپس در نیمه‌ی خارجی جداره‌ی استوانه، جابه‌جایی شعاعی از نزدیکی لایه‌ی میانی تا لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. با استفاده از اصل جمع آثار می‌توان هر یک از این بارگذاری‌ها را به تنهایی در نظر گرفته و در نهایت نتایج بارگذاری ترکیبی از مجموع مقادیر جابه‌جایی و تنش حاصل از هر یک از این بارگذاری‌ها به تنهایی به دست خواهد آمد. در میان انواع بارگذاری، در مطالعه‌ی موردی مورد نظر بارگذاری مکانیکی بیشترین اثر را نسبت به دو بارگذاری دیگر داشته و کمترین تأثیر را دوران بر روی نتایج نهایی می‌گذارد.

فصل۳ تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان ناهمگن تحت فشار و بار حرارتی گذرا

۳-۱ پیش‌گفتار

همان‌طور که در فصل اول نیز عنوان شد، مقاومت منحصر به فرد استوانه‌های جدار ضخیم (FGM) در برابر بارهای حرارتی، دانشمندان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آنها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، بپردازند. کاربرد گسترده‌ی این استوانه‌ها در رآکتورها، ژنراتورها و سانتریفیوژها که نیروی گریز از مرکز در آنها نقش مهمی ایفا می‌کند، باعث شده تا تحلیل این استوانه‌ها تحت تاثیر فشار، حرارت و دوران به طور همزمان مورد بررسی قرار گیرد. به همین منظور در فصل حاضر، برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن، حلّ عمومی استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM تحت بارگذاری‌های حرارتی گذرا و فشار یکنواخت داخلی صورت پذیرفته است. نهایتاً با ارائه‌ی حل عددی توسط نرم‌افزار المان محدود Ansys، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند.

در ابتدا لازم است فرض‌هایی که برای استخراج معادلات در این فصل استفاده شده‌اند را بیان کنیم:

۱-خواص ماده به صورت غیر خطی(توانی) نسبت به شعاع تغییر می‌کند.

۲-جابه‌جایی‌ها کوچک و در محدوده‌ی الاستیک بررسی شده و به‌هیچ عنوان اثرات ناحیه‌ی پلاستیک درنظر گرفته نشده‌است.

۳-از اصل جمع آثار[۱۴]، به منظور تحلیل مکانیکی، دورانی و حرارتی به‌صورت مجزّا، استفاده شده‌است. لازم به‌ذکر است که اصل مذکور در مسأله‌ی موردنظر صادق می‌باشد.

1- Super position

۴-از آنجایی که تقریباً در بیشتر موادّ مهندسی ضریب پواسون مقداری نزدیک به‌هم دارد، در این‌جا نیز ضریب پواسون برخلاف باقی خواصّ ماده، ثابت درنظر گرفته شده‌است.

۵- توزیع دما یک بعدی و در جهت شعاعی در نظر گرفته می‌شود.

در بخش اول این فصل، به کمک روش الاستیسیته مستوی، حلّ تحلیلی استوانه‌های جدار ضخیم چرخان ناهمگن تحت فشار و بار حرارتی گذرا در دو حالت کلی تنش‌صفحه‌ای و کرنش‌صفحه‌ای ارائه می‌شود؛ بارگذاری به صورت ترکیبی از بار حرارتی، دورانی و مکانیکی است. توزیع دمای یک بعدی با استفاده از روش جداسازی متغیرها، توابع بسل تعمیم‌یافته و بسط تابع ویژه به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن جابه‌جایی شعاعی، از معادله کوشی- اویلر و هم‌چنین روش تغییر پارامترها برای حلّ معادله تعادل استفاده شده است. با جای‌گزینی تابع جابه‌جایی در معادله‌های ساختاری، تنش‌های شعاعی و محیطی به‌دست می‌آیند. ضرایب ناهمگنی خواص ماده متفاوت از هم هستند؛ ولی در مطالعه موردی این تحقیق هر پنج ضریب برابر فرض می‌شوند. توزیع دما، جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های حرارتی در حالت گذرا به‌دست می‌آیند و در جهت‌های شعاعی و زمان رسم می‌شوند. مقادیر در این تحقیق دل‌خواه انتخاب می‌شوند تا تأثیر زمان و ناهمگنی را در توزیع دما، جابه‌جایی و تنش‌ها نشان دهند. در بخش بعد، روند تحلیل عددی با کمک نرم‌افزار اجزای محدود انسیس[۱۵] بیان و با تعریف یک مسأله، نتایج حاصل از حل تحلیلی انجام شده و تحلیل عددی مربوط به مسأله مقایسه و بررسی خواهند شد.

۳-۲ استخراج معادلات

۳-۲-۱ معادله‌ی حرارتی گذرا

یک پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b تحت بار مکانیکی، دورانی و حرارتی گذرا از فصل قبل (شکل (۲-۱)) در نظر گرفته می‌شود.

۱۵- ANSYS

معادله حرارتی گذرای یک‌بعدی استوانه جدار ضخیم بدون منبع حرارتی، برای این مسأله‌ی متقارن، بر اساس قانون فوریه به صورت معادله‌ی (۳-۱) می‌باشد.

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla^2(kT)+Q$$

$$Q=0 \tag{۳-۱}$$

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

که $T(r,t)$، توزیع دما و k، ρ، c به ترتیب هدایت گرمایی، چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه می‌باشند. و به شکل معادله‌های (۳-۲) تعریف می‌شوند.

$$k=k_1\left(\frac{r}{a}\right)^{n_1}$$

$$\rho=\rho_1\left(\frac{r}{a}\right)^{n_2} \tag{۳-۲}$$

$$c=c_1\left(\frac{r}{a}\right)^{n_3}$$

که n_1، n_2 و n_3 ضرایب ناهمگنی می‌باشند. شرایط مرزی و اولیه در حالت کلی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{cases} c_{11}T(a,t)+c_{12}\dfrac{\partial T}{\partial r}(a,t)=g_1 \\ c_{21}T(b,t)+c_{22}\dfrac{\partial T}{\partial r}(b,t)=g_2 \end{cases} \tag{۳-۳}$$

$$T(r,0)=T_i(r) \tag{۴-۳}$$

$c_{ij}\left(i,j=1,2\right)$ و $g_i\left(i=1,2\right)$ ثابت‌هایی وابسته به شرایط مرزی و $T_i(r)$، شرط اولیه داده شده می‌باشند. حل معادله (۳-۱) با استفاده از روش جداسازی متغیرها، تابع بسل تعمیم‌یافته و بسط تابع ویژه به‌دست می‌آید.

$$T\left(r,t\right)=T_h\left(r,t\right)+T_s\left(r\right) \tag{۳-۵}$$

با قرار دادن معادله (۳-۵) در معادله (۳-۱) معادله‌های (۳-۶) و (۳-۷) حاصل می‌شوند.

$$\rho c\,\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\left(\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial r}+\frac{dT_s(r)}{dr}\right)\right) \tag{۳-۶}$$

$$\begin{cases}\rho c\,\dfrac{\partial T_h(r,t)}{\partial t}=k\,\dfrac{\partial^2 T_h(r,t)}{\partial r^2}+\left(\dfrac{\partial k}{\partial r}+\dfrac{k}{r}\right)\dfrac{\partial T_h(r,t)}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(kr\,\dfrac{dT_s(r)}{dr}\right)=0\end{cases} \tag{۳-۷}$$

و شرایط مرزی T_s مطابق معادله‌ی:

$$\begin{cases}c_{11}T_s\left(a\right)+c_{12}\dfrac{dT_s}{dr}\left(a\right)=g_1\\ c_{21}T_s\left(b\right)+c_{22}\dfrac{dT_s}{dr}\left(b\right)=g_2\end{cases} \tag{۳-۸}$$

حال برای به‌دست آوردن $\mathrm{T_s}(r,t)$ ، از معادله(۳-۷) دو بار انتگرال می‌گیریم و ثابت‌های C_1 و C_2 را به‌دست می‌آوریم.

$$kr\frac{dT_s}{dr}=C \tag{۳-۹}$$

$$T_s=\int\frac{C}{kr}\,dr=\int\frac{Ca^{n_1}}{k_1r^{n_1+1}}\,dr=\frac{-Ca^{n_1}}{k_1n_1}r^{-n_1}+C_2=C_1r^{-n_1}+C_2 \tag{۳-۱۰}$$

$$C_1=\frac{g_1c_{21}-g_2c_{11}}{c_{11}c_{21}\left(a^{-n_1}-b^{-n_1}\right)+n_1\left(c_{22}c_{11}b^{-n_1-1}-c_{12}c_{21}a^{-n_1-1}\right)} \tag{۳-۱۱}$$

$$C_2=\frac{g_1-c_1\left(c_{11}a^{-n_1}-c_{12}n_1a^{-n_1-1}\right)}{c_{11}} \tag{۳-۱۲}$$

شرایط مرزی و اولیه T_h نیز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} c_{11}T_h\left(a,t\right)+c_{12}\dfrac{\partial T_h}{\partial r}\left(a,t\right)=0 \\ c_{21}T_h\left(b,t\right)+c_{22}\dfrac{\partial T_h}{\partial r}\left(b,t\right)=0 \end{cases}$$ (۱۳-۳)

$$T_h\left(r,0\right)=T_i\left(r\right)-T_s\left(r\right)$$ (۴-۳)

در نتیجه حلّ معادله‌ی T_h به شکل روابط زیر بیان می‌شود.

$$\rho c\,\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial t}=k\,\frac{\partial^2 T_h(r,t)}{\partial r^2}+\left(\frac{\partial k}{\partial r}+\frac{k}{r}\right)\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial r}$$ (۱۵-۳)

$$T_h(r,t)=f(r)g(t)$$ (۱۶-۳)

$$\frac{1}{g(t)}\frac{\partial g(t)}{\partial t}=\frac{1}{\rho c}\left(\frac{k}{f(r)}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\left(\frac{\partial k}{\partial r}+\frac{k}{r}\right)\frac{1}{f(r)}\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right)=-S^2$$ (۱۷-۳)

$$\rho c\,\frac{\partial g(t)}{\partial t}f(r)=k\,\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}g(t)+\left(\frac{\partial k}{\partial r}+\frac{k}{r}\right)g(t)\frac{\partial f(r)}{\partial r}$$ (۱۸-۳)

$$\begin{cases} k\,\dfrac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\left(\dfrac{\partial k}{\partial r}+\dfrac{k}{r}\right)\dfrac{\partial f(r)}{\partial r}+S^2\rho c f(r)=0 \\ \dfrac{\partial g(t)}{\partial t}+S^2 g(t)=0 \end{cases}$$ (۱۹-۳)

$$r^2\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\left(\frac{r^2}{k}\frac{\partial k}{\partial r}+r\right)\frac{\partial f(r)}{\partial r}+S^2\frac{\rho c}{k}r^2 f(r)=0$$ (۵-۳)

$$r^2\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}+\left(n_1+1\right)r\frac{\partial f(r)}{\partial r}+S^2\frac{a^{n_1-n_2-n_3}\rho_1 c_1}{k_1}r^{2-n_1+n_2+n_3}f(r)=0$$ (۲۱-۳)

که این معادله‌ی تابع بسل تعمیم یافته می‌باشد.

$$r^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + (2p+1) r \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \left(\alpha^2 r^{2x} + \beta^2\right) f(r) = 0 \tag{۲۲-۳}$$

$$f(r) = r^{-p} \left(d_1 J_{\frac{q}{x}} \left(\frac{\alpha}{x} r^x\right) + d_2 Y_{\frac{q}{x}} \left(\frac{\alpha}{x} r^x\right) \right) \tag{۲۳-۳}$$

که J و Y به ترتیب توابع بسل نوع اول و دوم می‌باشند.

و

$$q = \sqrt{p^2 - \beta^2} = p$$
$$\frac{\alpha}{x} = s' \tag{۲۴-۳}$$

$$p = q = \frac{n_1}{2}$$
$$x = \frac{2 - n_1 + n_2 + n_3}{2}$$
$$s_n' = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{a^{n_1 - n_2 - n_3} s_n^{\ 2} \rho_1 c_1}{k_1}} \tag{۶-۳}$$

$$T_h(r,t) = f(r) g(t) = r^{-p} \left(d_1 J_{\frac{q}{x}}(0) + d_2 Y_{\frac{q}{x}}(0) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-p} \left(A_n J_{\frac{q}{x}}(s' r^x) + B_n Y_{\frac{q}{x}}(s' r^x) \right) e^{-s_n^{\ 2} t} \tag{۲۶-۳}$$

با جای‌گزینی $T_h(r,t)$ در معادله‌ی (۳-۱۳) داریم:

$$B_n \left(c_{21} Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n' b^x\right) - c_{22} s_n' x b^{x-1} Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' b^x\right) \right) - B_n \frac{\left(c_{11} Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n' a^x\right) - c_{12} s_n' x a^{x-1} Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' a^x\right) \right)}{\left(c_{11} J_{\frac{q}{x}}\left(s_n' a^x\right) - c_{12} s_n' x a^{x-1} J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' a^x\right) \right)}$$
$$\left(c_{21} J_{\frac{q}{x}}\left(s_n' b^x\right) - c_{22} s_n' x b^{x-1} J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' b^x\right) \right) = 0 \tag{۲۷-۳}$$

$$\left(c_{21}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n'b^x\right)-c_{22}s_n'xb^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'b^x\right)\right)\left(c_{11}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n'a^x\right)-c_{12}s_n'xa^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'a^x\right)\right)$$
$$\left(c_{11}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n'a^x\right)-c_{12}s_n'xa^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'a^x\right)\right)\left(c_{21}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n'b^x\right)-c_{22}s_n'xb^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'b^x\right)\right)=0 \qquad (۳-۲۸)$$

که s_n' مقادیر ویژه و ریشه‌های مثبت معادله (۳-۲۸) می‌باشند. از رابطه (۳-۲۸) می‌توان G_n را به دو صورت به‌دست آورد.

$$G_n=\frac{c_{11}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n'a^x\right)-c_{12}s_n'xa^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'a^x\right)}{c_{21}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n'b^x\right)-c_{22}s_n'xb^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'b^x\right)}$$
$$G_n=\frac{c_{11}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n'a^x\right)-c_{12}s_n'xa^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'a^x\right)}{c_{21}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n'b^x\right)-c_{22}s_n'xb^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'b^x\right)} \qquad (۳-۲۹)$$

معادله‌ی(۳-۲۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$c_{21}g_{\frac{q}{x}}(s_n',b^x)-c_{22}x\,s_n'b^{x-1}g_{\frac{q}{x}+1}(s_n',b^x)=0 \qquad (۳-۳۰)$$

و $f_{\frac{q}{x}}\left(\mathrm{s_n}',r^x\right)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$g_i(s_n',r^x)=Y_i(s_n'r^x)\left(c_{11}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n'a^x\right)-c_{12}s_n'xa^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'a^x\right)\right)-J_i(s_n'r^x)$$
$$\left(c_{11}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n'a^x\right)-c_{12}s_n'xa^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'a^x\right)\right)=-f_i(s_n',r^x) \qquad (۳-۳۱)$$

$$f_{\frac{q}{x}}\left(s_n',r^x\right)=J_{\frac{q}{x}}\left(s_n'r^x\right)\left(c_{11}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n'a^x\right)-c_{12}s_n'xa^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'a^x\right)\right)-Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n'r^x\right) \qquad (۳-۳۲)$$
$$\left(c_{11}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n'a^x\right)-c_{12}s_n'xa^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n'a^x\right)\right)$$

$$T_h(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} r^{-p}\left(A_n J_{\frac{q}{x}}(s'r^x)+B_n Y_{\frac{q}{x}}(s'r^x)\right)e^{-s_n{}^2 t}=\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-p}\left(\left(c_{11}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n{}'a^x\right)-c_{12}s_n{}'xa^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n{}'a^x\right)\right)\right.$$
$$\left.J_{\frac{q}{x}}(s'r^x)-Y_{\frac{q}{x}}(s'r^x)\left(c_{11}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n{}'a^x\right)-c_{12}s_n{}'xa^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n{}'a^x\right)\right)\right)e^{-s_n{}^2 t} \quad (۳۳-۳)$$

$$T_h(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} -A_n r^{-p} g_{\frac{q}{x}}(s_n{}',r^x)e^{-s_n{}^2 t}=\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-p} f_{\frac{q}{x}}(s_n{}',r^x)e^{-s_n{}^2 t} \quad (۳۴-۳)$$

با اعمال شرایط مرزی اولیه داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-p} f_{\frac{q}{x}}\left(s_n{}',r^x\right)=T_i\left(r\right)-\left(C_1 r^{-n_1}+C_2\right) \quad (۳۵-۳)$$

برای به‌دست آوردن A_n، طرفین تساوی را در $r^{p+2x-1} f_{\frac{q}{x}}\left(\mathrm{s_m}{}',r^x\right)$ ضرب می‌کنیم. حال از دو طرف تساوی از a تا b انتگرال می‌گیریم.

به ازای $m \neq n$ حاصل انتگرال زیر برابر صفر می‌باشد.

$$\int_a^b r^{2x-1} f_{\frac{q}{x}}\left(s_n{}',r^x\right) f_{\frac{q}{x}}\left(s_m{}',r^x\right)dr=\int_{a^x}^{b^x}\frac{h}{x} f_{\frac{q}{x}}\left(s_n{}',r^x\right) f_{\frac{q}{x}}\left(s_m{}',r^x\right)dh \quad (۳۶-۳)$$
$$=\frac{h}{x\left(s_m{}'^2-s_n{}'^2\right)}\left(s_m{}' f_{\frac{q}{x}}(s_n{}',h) f_{\frac{q}{x}+1}(s_m{}',h)-s_n{}' f_{\frac{q}{x}}(s_m{}',h) f_{\frac{q}{x}+1}(s_n{}',h)\right)$$

یک تغییر متغیر به صورت زیر اعمال می‌کنیم.

$$r^x=h \rightarrow xr^{x-1}dr=dh \rightarrow xr^{2x-1}dr=h\,dh \rightarrow r^{2x-1}dr=\frac{h}{x}dh \quad (۳۷-۳)$$

$$f_{\frac{q}{x}}(s_n{}',a^x)=\frac{-2c_{12}x}{\pi a} \qquad f_{\frac{q}{x}+1}(s_n{}',a^x)=\frac{-2c_{11}}{\pi s_n{}' a^x}$$

$$f_{\frac{q}{x}+1}(s_n{}',a^x)=\frac{c_{11}}{c_{12}xs_n{}'a^{x-1}}f_{\frac{q}{x}}(s_n{}',a^x) \qquad f_{\frac{q}{x}+1}(s_n{}',b^x)=\frac{c_{21}}{xs_n{}'c_{22}b^{x-1}}f_{\frac{q}{x}}(s_n{}',b^x) \tag{۳-۳۸}$$

$$=\frac{b^x}{x\left(s_m{}'^2-s_n{}'^2\right)}\left(s_m{}'f_{\frac{q}{x}}(s_n{}',b^x)\frac{c_{21}}{xs_m{}'c_{22}b^{x-1}}f_{\frac{q}{x}}(s_m{}',b^x)-s_n{}'f_{\frac{q}{x}}(s_m{}',b^x)\frac{c_{21}}{xs_n{}'c_{22}b^{x-1}}f_{\frac{q}{x}}(s_n{}',b^x)\right) \tag{۳-۳۹}$$
$$-\frac{a^x}{x\left(s_m{}'^2-s_n{}'^2\right)}\left(s_m{}'\left(\frac{-2c_{12}x}{\pi a}\right)\left(\frac{-2c_{11}}{\pi s_m{}'a^x}\right)-s_n{}'\left(\frac{-2c_{11}}{\pi s_n{}'a^x}\right)\left(\frac{-2c_{12}x}{\pi a}\right)\right)=0$$

$$\rightarrow\int_a^b r^{2x-1}f_{\frac{q}{x}}\left(s_n{}',r^x\right)f_{\frac{q}{x}}\left(s_m{}',r^x\right)dr=0 \tag{۳-۴۰}$$

اکنون برای $m = n$ حاصل انتگرال محاسبه می‌شود.

$$\frac{h^2}{2x}\left(\left(f_{\frac{q}{x}}(s_n{}',h)\right)^2+\left(f_{\frac{q}{x}}'(s_n{}',h)\right)^2\right)=\frac{h^2}{2x}\left(\left(\frac{n}{s_n{}'h}-\frac{c_{21}b}{xs_n{}'c_{22}h}\right)^2+1\right)\left(f_{\frac{q}{x}}(s_n{}',h)\right)^2 \tag{۳-۴۱}$$

انتگرال طرف چپ و راست تساوی به ترتیب به صورت معادله‌های (۳-۴۲) و (۳-۴۳) به‌دست می‌آیند.

$$\int_a^b r^{2x-1}f_{\frac{q}{x}}\left(s_n{}',r^x\right)^2dr=\frac{2}{x\pi^2s_n{}'^2}\left(q^2\left(\frac{c_{22}{}^2G_n{}^2}{b^2}-\frac{c_{12}{}^2}{a^2}\right)-2q\left(\frac{c_{22}c_{21}G_n{}^2}{b}-\frac{c_{12}c_{11}}{a}\right)\right.$$
$$\left.+s_n{}'^2x^2\left(b^{2x-2}c_{22}{}^2G_n{}^2-a^{2x-2}c_{12}{}^2\right)+c_{21}{}^2G_n{}^2-c_{11}{}^2\right)=L \tag{۳-۴۲}$$

$$\int_a^b\left(T_i(r)-\left(C_1r^{-n_1}+C_2\right)\right)r^{p+2x-1}f_{\frac{q}{x}}\left(s_n{}',r^x\right)dr=\int_a^b T_i(r)r^{p+2x-1}f_{\frac{q}{x}}\left(s_n{}',r^x\right)dr$$
$$-\frac{2}{x\pi s_n{}'^2}\left(G_n\left(-c_{21}c_1b^{-q}-c_{21}c_2b^q+n_1c_{22}c_1b^{-q-1}\right)+\left(c_{11}c_1a^{-q}+c_{11}c_2a^q-n_1c_{12}c_1a^{-q-1}\right)\right)=M \tag{۳-۴۳}$$

از تقسیم $\frac{M}{L}$، نیز A_n به‌دست می‌آید. اکنون بر اساس معادله‌ی (۳-۵)، $T(r,t)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\mathrm{T}(\mathrm{r},\mathrm{t})=\sum_{n=1}^{\infty}A_nr^{-p}f_{\frac{q}{x}}\left(s_n{}',r^x\right)e^{-s_n{}^2t}+c_1r^{-n_1}+c_2 \tag{۳-۴۴}$$

۳-۲-۲ روابط ترموالاستیک

استوانه جدار ضخیم FG با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور مرکزی خود می‌چرخد. در مختصات استوانه‌ای(r,θ,z)، برای مسأله‌ی متقارن، کرنش‌های شعاعی و محیط(ε_r , ε_θ) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{۳-۴۵}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \tag{۳-۴۶}$$

هم‌چنین دمای مرجع (T_∞) را ۲۵ درجه سانتی‌گراد در نظر می‌گیریم. تحلیل برای دیگر مقادیر نیز معتبر می‌باشد.

$$\Delta T = T\left(r,t\right) - T_\infty = T\left(r,t\right) - 25 \tag{۳-۴۷}$$

برای استوانه FG روابط ساختاری ترموالاستیک خطی در مسائل تنش‌صفحه‌ای و کرنش‌صفحه‌ای می‌تواند به شکل زیر بیان شود.

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{pmatrix} = E\left(r\right)\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}\alpha\left(r\right)\Delta T\right) \tag{۳-۴۸}$$

که $E(r)$، مدول الاستیسیته و $\alpha(r)$، ضریب انبساط حرارتی می‌باشند و به صورت زیر تعریف می-شوند.

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1\left(\frac{r}{a}\right)^{n_5} \\ E &= E_1\left(\frac{r}{a}\right)^{n_4} \end{aligned} \tag{۳-۴۹}$$

که n_4 و n_5 ضرایب ناهمگنی به ترتیب برای مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی می‌باشند.

ثابت‌های A و B نیز برای حالت کرنش‌صفحه‌ای برابرند با:

$$A=\frac{1-\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$$
$$B=\frac{\upsilon}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \qquad (۳-۵۰)$$
$$C=\frac{1}{(1-2\upsilon)}$$

و هم‌چنین برای حالت تنش‌صفحه‌ای:

$$A=\frac{1}{(1-\upsilon^2)}$$
$$B=\frac{\upsilon}{(1-\upsilon^2)} \qquad (۳-۵۱)$$
$$C=\frac{1}{(1-\upsilon)}$$

که υ ، نسبت پواسون می‌باشد و در این مقاله ثابت فرض می‌شود.

اکنون معادله تعادل استوانه جدار ضخیم FG برای مسأله‌ی متقارن به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=-\rho(r)r\omega^2 \qquad (۳-۵۲)$$

حال با جای‌گزینی معادله‌های (۳-۴۵) و (۳-۴۶) در معادله (۳-۴۸) و با استفاده از معادله (۳-۵۲) رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{(1+n_4)}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\left(\frac{n_4 B}{A}-1\right)\frac{1}{r^2}u_r=N(r,t) \qquad (۳-۵۳)$$

$$N(r,t)=\frac{\dfrac{C\,\partial\left(E(r)\alpha(r)\Delta T\right)}{\partial r}-\rho(r)r\omega^2}{AE(r)} \qquad (۳-۵۴)$$

برای حل همگن معادله (۳-۵۳) از معادله کوشی-اویلر استفاده شده است، که با قرار دادن $u_r = r^m$ ، معادله مشخصه زیر به‌دست می‌آید. m_1 و m_2 از رابطه‌ی (۳-۵۷) به‌دست می‌آیند.

$$u_r = r^m \tag{۵۵-۳}$$

$$m^2 + n_4 m + \frac{n_4 B}{A} - 1 = 0 \tag{۵۶-۳}$$

$$\Delta = {n_4}^2 - \frac{4n_4 B}{A} + 4$$

(۵۷-۳)

$$m_1 = \frac{-n_4 + \sqrt{\Delta}}{2} \qquad , \qquad m_2 = \frac{-n_4 - \sqrt{\Delta}}{2}$$

مقدار $\Delta(\Delta)$ در دو حالت تنش و کرنش‌صفحه‌ای کوچکتر از صفر می‌باشد، یعنی Δ همواره بزرگتر از صفر است. در نتیجه معادله (۳-۵۶) دو ریشه m_1 و m_2 دارد.

$$\Delta(\Delta) = 16\left(\frac{B}{A}\right)^2 - 16 < 0 \rightarrow \left(\frac{B}{A}\right)^2 < 1 \rightarrow \left|\frac{B}{A}\right| < 1 \rightarrow -1 < \frac{B}{A} < 1 \tag{۵۸-۳}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\upsilon}{1-\upsilon} \qquad plane\ strain$$
$$\frac{B}{A} = \upsilon \qquad plane\ stress \tag{۵۹-۳}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} < 1 \rightarrow \quad \upsilon > 1 \ , \quad \upsilon < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} > -1 \rightarrow \ \upsilon < 1 \end{cases} \rightarrow \ \upsilon < \frac{1}{2} \tag{۶۰-۳}$$

$$-1 < \upsilon < 1 \tag{۶۱-۳}$$

$$u_{r_1} = r^{m_1} \qquad , \qquad u_{r_2} = r^{m_2}$$

(۶۲-۳)

$$(u_r)_h = C_3 u_{r_1} + C_4 u_{r_2}$$

برای حل ناهمگن از روش تغییر پارامترها استفاده شده است. بدین گونه که در معادله (۳-۶۳) مشاهده می‌شود.

$$(u_r)_p = U_1(r)u_{r_1} + U_2(r)u_{r_2} \tag{۶۳-۳}$$

$$U_1(r) = -\int_a^r \frac{u_{r_2} N(r,t)}{W(r)} \tag{۶۴-۳}$$

$$U_2(r) = \int_a^r \frac{u_{r_1} N(r,t)}{W(r)} \tag{۶۵-۳}$$

که $w(r)$، تابع رونسکین تعریف می‌شود.

$$W(r) = \begin{vmatrix} u_{r_1} & u_{r_2} \\ \dfrac{\partial u_{r_1}}{\partial r} & \dfrac{\partial u_{r_2}}{\partial r} \end{vmatrix} = (m_2 - m_1) r^{m_2+m_1-1} \tag{۶۶-۳}$$

$$u_1(r) = \frac{C}{A}\left(-\frac{\alpha \Delta T r^{1-m_1}}{m_2 - m_1} + \frac{(1-m_1-n_4)\alpha_1}{(m_2-m_1)a^{n_5}}\int_a^r r^{n_5-m_1}\Delta T dr\right) + \frac{\rho_1 \omega^2 a^{n_4-n_2}}{AE_1(n_2-n_4-m_1+3)} r^{n_2-n_4-m_1+3} \tag{۶۷-۳}$$

$$u_2(r) = \frac{C}{A}\left(\frac{\alpha \Delta T r^{1-m_1}}{m_2 - m_1} - \frac{(1-m_2-n_4)\alpha_1}{(m_2-m_1)a^{n_5}}\int_a^r r^{n_5-m_2}\Delta T dr\right) - \frac{\rho_1 \omega^2 a^{n_4-n_2}}{AE_1(n_2-n_4-m_2+3)} r^{n_2-n_4-m_2+3} \tag{۶۸-۳}$$

درنتیجه از مجموع حل همگن و ناهمگن u_r به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} u_r(r,t) = &\left(\frac{C}{A}\frac{(1-m_1-n_4)\alpha_1}{(m_2-m_1)a^{n_5}}\int_a^r r^{n_5-m_1}\Delta T dr + \frac{\rho_1\omega^2 a^{n_4-n_2}}{AE_1(n_2-n_4-m_1+3)} r^{n_2-n_4-m_1+3} + C_3\right) r^{m_1} \\ &-\left(\frac{C}{A}\frac{(1-m_2-n_4)\alpha_1}{(m_2-m_1)a^{n_5}}\int_a^r r^{n_5-m_2}\Delta T dr + \frac{\rho_1\omega^2 a^{n_4-n_2}}{AE_1(n_2-n_4-m_2+3)} r^{n_2-n_4-m_2+3} + C_4\right) r^{m_2} \end{aligned} \tag{۶۹-۳}$$

با جای‌گزینی معادله جابه‌جایی در روابط ساختاری، تنش‌ها در دو حالت تنش‌صفحه‌ای و کرنش-صفحه‌ای به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\sigma_r = E(r)\Bigg(& C_3(Am_1+B)r^{m_1-1} + \left(\frac{C}{A}\frac{(1-m_1-n_4)\alpha_1}{(m_2-m_1)a^{n_5}}(Am_1+B)r^{m_1-1}\int_a^r r^{n_5-m_1}\Delta T dr\right) \\ &+ C_4(Am_2+B)r^{m_2-1} - \frac{\rho_1\omega^2 a^{n_4-n_2} r^{n_2-n_4+4}}{AE_4(m_2-m_1)}\left(\frac{Am_1+B}{n_2-n_4-m_1+3} - \frac{Am_2+B}{n_2-n_4-m_2+3}\right) \\ &- \left(\frac{C}{A}\frac{(1-m_2-n_4)\alpha_1}{(m_2-m_1)a^{n_5}}(Am_2+B)r^{m_2-1}\int_a^r r^{n_5-m_2}\Delta T dr\right)\Bigg)\end{aligned} \quad (۷۰\text{-}۳)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta = E(r)\Bigg(& C_3(Bm_1+A)r^{m_1-1} + \left(\frac{C}{A}\frac{(1-m_1-n_4)\alpha_1}{(m_2-m_1)a^{n_5}}(Bm_1+A)r^{m_1-1}\int_a^r r^{n_5-m_1}\Delta T dr\right) + C_4(Bm_2+A)r^{m_2-1} \\ &+ C\alpha(r)T(r,t)\left(\frac{B}{A}-1\right) - \frac{\rho_1\omega^2 a^{n_4-n_2} r^{n_2-n_4+4}}{AE_4(m_2-m_1)}\left(\frac{Bm_1+A}{n_2-n_4-m_1+3} - \frac{Bm_2+A}{n_2-n_4-m_2+3}\right) \\ &- \left(\frac{C}{A}\frac{(1-m_2-n_4)\alpha_1}{(m_2-m_1)a^{n_5}}(Bm_2+A)r^{m_2-1}\int_a^r r^{n_5-m_2}\Delta T dr\right)\Bigg)\end{aligned} \quad (۷۱\text{-}۳)$$

حال با استفاده از شرایط مرزی مکانیکی در لایه داخلی و خارجی زیر:

$$\begin{aligned}\sigma_r\big|_{r=a} &= -P_i \\ \sigma_r\big|_{r=b} &= -P_o\end{aligned} \quad (۷۲\text{-}۳)$$

ثابت‌های C_3 و C_4 به‌دست می‌آیند.

$$C_3 = \frac{-\dfrac{P_i}{E(r)} + \dfrac{\rho_1\omega^2 a^2}{AE_4(m_2-m_1)}\left(\dfrac{Am_2+B}{n_2-n_4-m_2+3} - \dfrac{Am_1+B}{n_2-n_4-m_1+3}\right) - (Am_2+B)C_2 a^{m_2-1}}{(Am_1+B)a^{m_1-1}} \quad (۷۳\text{-}۳)$$

$$\begin{aligned}C_4 = \frac{1}{(Am_2+B)\left(b^{m_2-1} - b^{m_1-1}a^{m_2-m_1}\right)}\Bigg(& -\frac{P_o}{E(r)} + \frac{\alpha_1 C(1-m_2-n_4)(Am_2+B)b^{m_2-1}}{Aa^{n_5}(m_2-m_1)}\int_a^r r^{n_5-m_2}\Delta T dr \\ &+ \frac{\rho_1\omega^2 a^{n_4-n_2} b^{n_2-n_4+2}}{AE_4(m_2-m_1)}\left(\frac{Am_2+B}{n_2-n_4-m_2+3} - \frac{Am_1+B}{n_2-n_4-m_1+3}\right) - \frac{\alpha_1 C(1-m_1-n_4)(Am_1+B)b^{m_1-1}}{Aa^{n_5}(m_2-m_1)}\int_a^r r^{n_5-m_1}\Delta T dr \\ &- \left(\frac{b}{a}\right)^{m_1-1}\left(\frac{\rho_1\omega^2 a^2}{AE_4(m_2-m_1)}\left(\frac{Am_2+B}{n_2-n_4-m_2+3} - \frac{Am_1+B}{n_2-n_4-m_1+3}\right) - \frac{P_i}{E(r)}\right)\Bigg)\end{aligned} \quad (۷۴\text{-}۳)$$

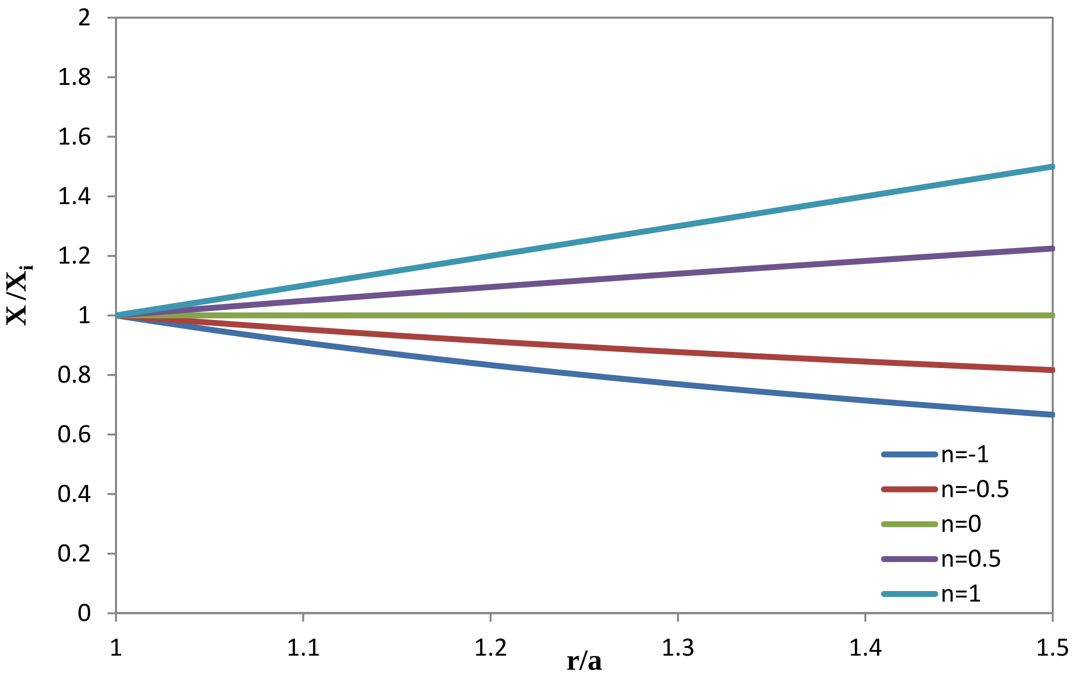
۳-۳ توزیع ناهمگنی خواص مکانیکی،دورانی و حرارتی

در استوانه‌های تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، مدول الاستیسیته E، نسبت پواسون υ، چگالی ρ، هدایت گرمایی K، ظرفیت گرمایی ویژه C و ضریب انبساط حرارتی α توابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد $\bar{r}$ می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و بالاخص در این بررسی، به علت تغییرات جزئی نسبت پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن توزیع توانی برای مدول الاستیسیته، چگالی، هدایت گرمایی، ظرفیت گرمایی ویژه و ضریب انبساط حرارتی در طول جداره‌ی استوانه به صورت تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد $\bar{r}$ به صورت رابطه‌ی (۳-۷۵) خواهیم داشت:

$$X(r) = X_i \bar{r}^n \qquad (۷۵\text{-}۳)$$

که در این رابطه $\bar{r} = r/a$ مختصات شعاعی بی‌بعد است. همچنین X_i نشان دهنده‌ی خواص مکانیکی و فیزیکی شامل مدول الاستیسیته‌چگالی، هدایت گرمایی، ظرفیت گرمایی ویژه و ضریب انبساط حرارتی در شعاع داخلی استوانه و n نیز ثابت ناهمگنی ماده می‌باشد که $n = 0$ همان ماده‌ی همگن است.

شکل (۳-۱) توزیع خواص مکانیکی،دورانی و حرارتی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی-بعد در استوانه‌ی ناهمگن و همسانگرد به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱ توزیع ناهمگنی خواص مکانیکی،دورانی و حرارتی در راستای ضخامت پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمگن

۳-۴ مطالعه‌ی موردی

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج حلّ تحلیلی و عددی، یک استوانه‌ی ضخیم ناهمگن و همسانگرد با ضخامت ثابت مطابق شکل (۲-۱) به شعاع داخلی $a=40\ mm$، شعاع خارجی $b=60\ mm$ و توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی را در نظر می‌گیریم. مدول الاستیسیته، چگالی و ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی استوانه به ترتیب برابر مقادیر $E_i=200\ GPa$، $\rho_i=7860\ \frac{kg}{m^3}$، $K_i=60/5\ w/m^2k$، $C_i=434\ J/kg\,^\circ C$ و $\alpha_i=12\times10^{-6}\ \frac{1}{^\circ C}$ و نسبت پواسون ثابت $\upsilon=0/3$ را تحت فشار یکنواخت داخلی $P_i=80\ MPa$، دمای سطح داخلی ثابت $T_{\infty_1}=125^\circ C$ و دمای سطح خارجی ثابت برابر دمای محیط $T_{\infty_2}=25^\circ C$ $(h_i, h_o\to\infty)$ و سرعت دورانی ثابت $\omega=300\ rad/s$ در نظر می‌گیریم.شرایط اولیه نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$T(r,0)=-5000r+325 \qquad (۳-۷۶)$$

تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای در حالت تنش‌صفحه‌ای انجام شده است. حلّ تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 16 صورت گرفته است.

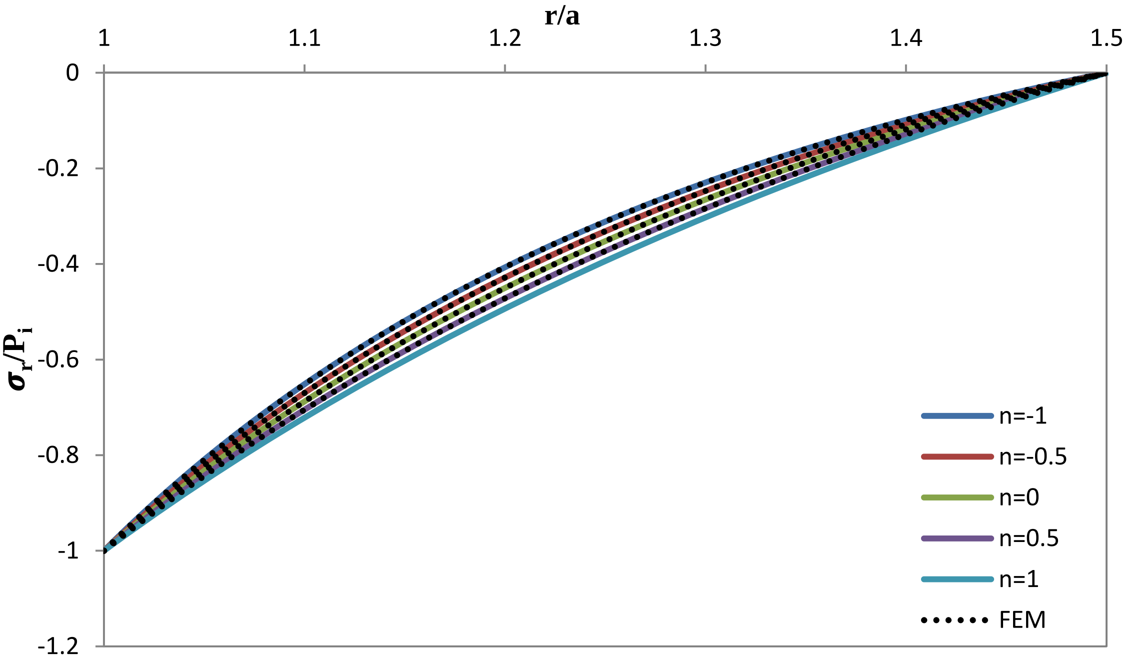
برای حلّ استوانه تحت بارگذاری ترکیبی می‌توان با در نظر گرفتن اثر هر کدام از جملات حاصل از بارگذاری‌های حرارتی، فشاری و دورانی به تنهایی و محاسبه‌ی مقادیر جابه‌جایی و تنش حاصل از هر بارگذاری، نهایتاً با استفاده از اصل جمع آثار مقادیر مربوط به جابه‌جایی‌های شعاعی و نیز تنش‌های محیطی و شعاعی حاصل از بارگذاری ترکیبی را به‌دست آورد.

۳-۵ بررسی نتایج

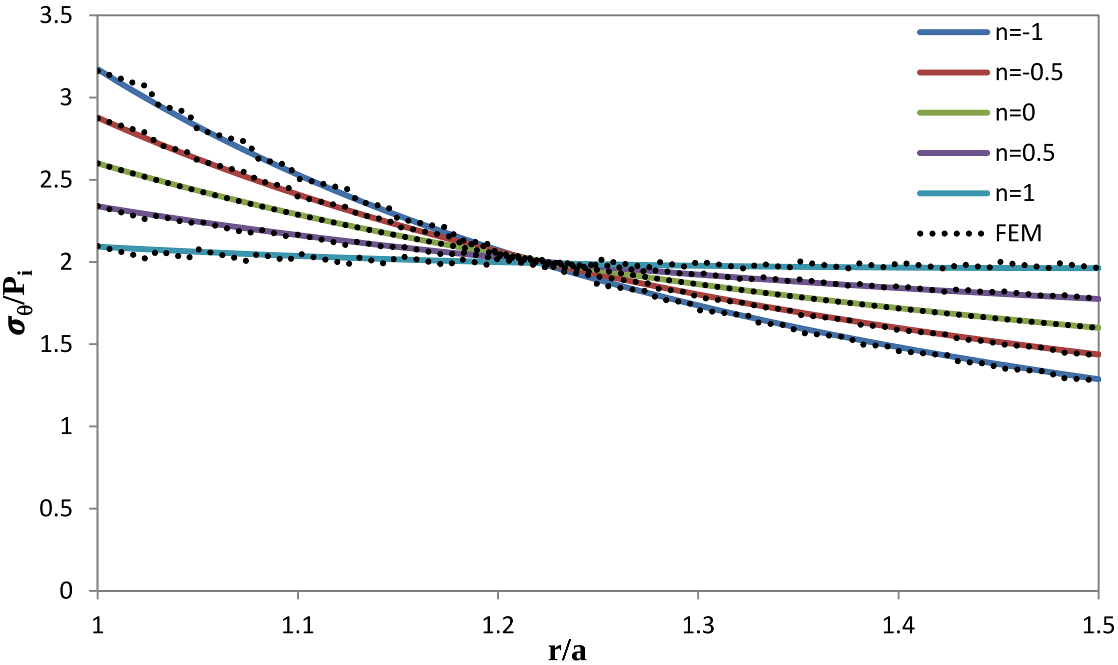
در این بخش نتایج مربوط به حلّ تحلیلی با نتایج عددی حاصل از روش اجزاء محدود در استوانه‌های همگن و ناهمگن تحت بارگذاری‌های حرارتی، فشاری و دارای سرعت دورانی ثابت مقایسه شده است. نحوه‌ی مدل‌سازی توسط نرم‌افزار Ansys در فصل قبلی بیان شده است.

۳-۵-۱ مقایسه‌ی نتایج

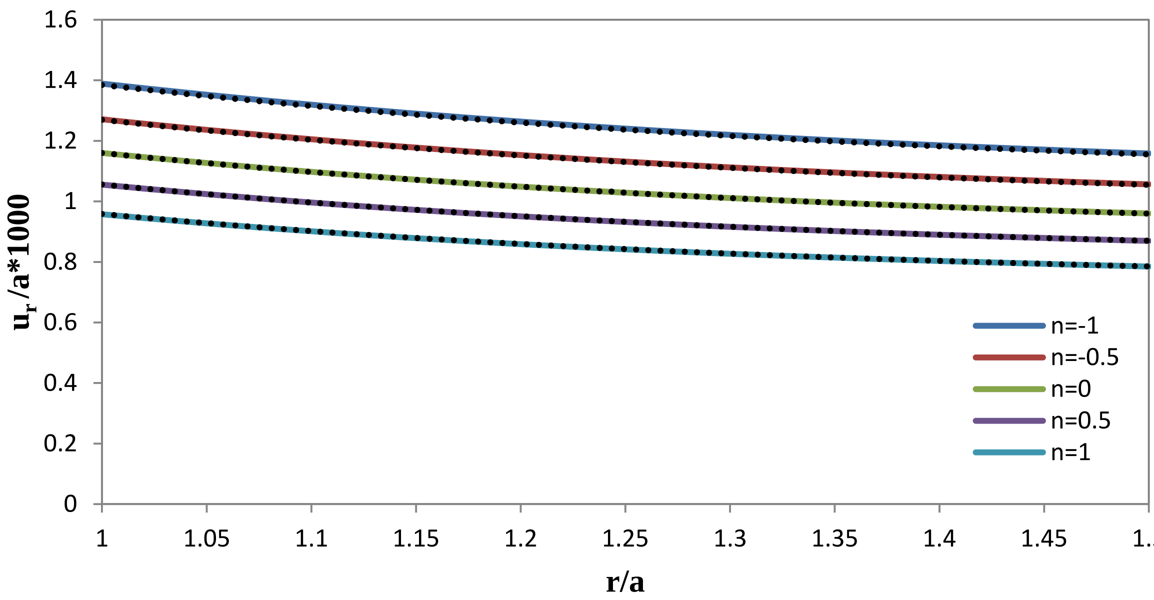
همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی و شعاعی بی‌بعد محاسبه شده با روش‌های FE و تحلیلی برای بارگذاری‌های مختلف به‌ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در طول جداره‌ی استوانه و هم‌چنین زمان برای حالت تنش‌صفحه‌ای آورده شده است.



شکل ۳-۲ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در استوانه جدار ضخیم ناهمگن تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و t=۵s



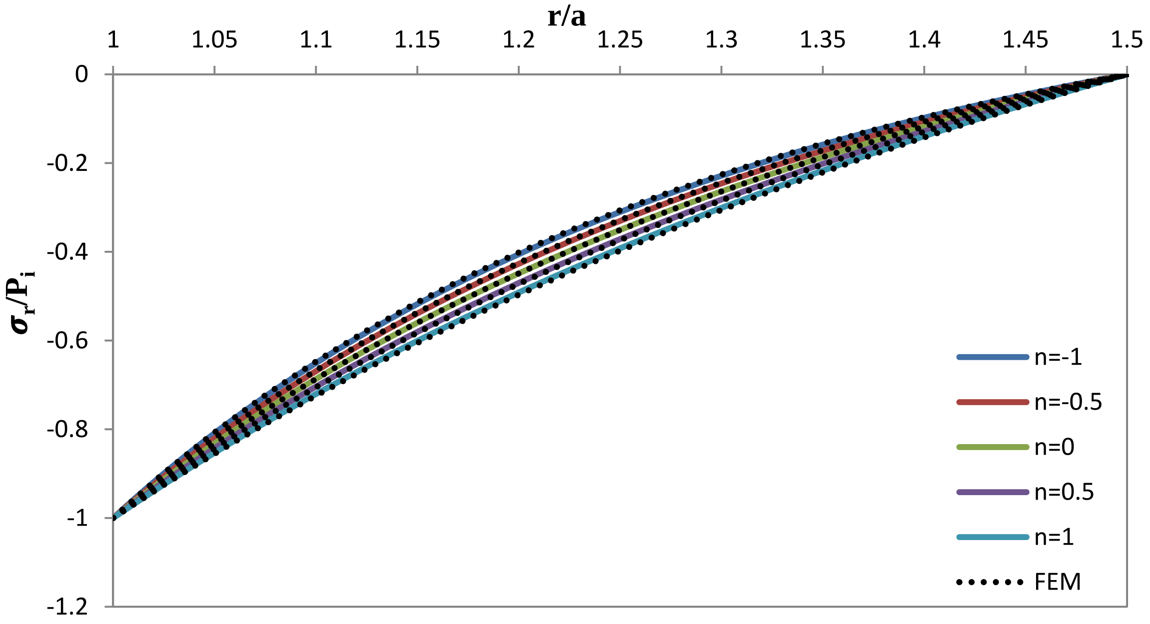
شکل ۳-۳ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در استوانه جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و t=۵s



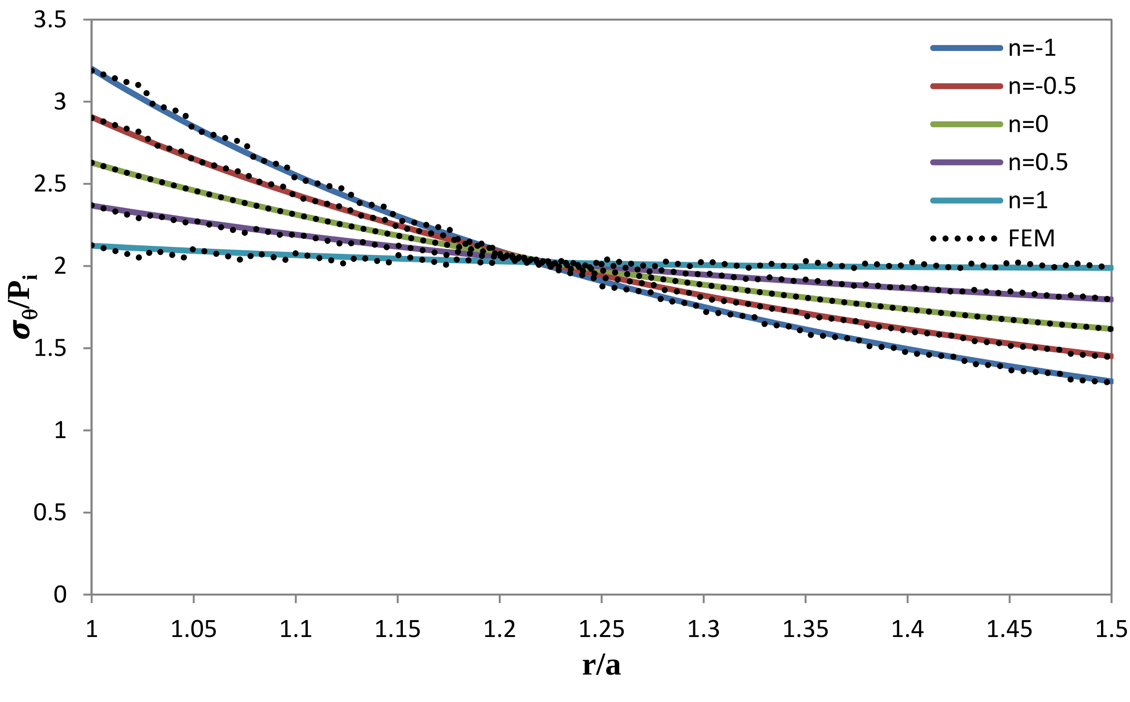
شکل ۳-۴ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در استوانه جدار ضخیم تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و

t=۵s

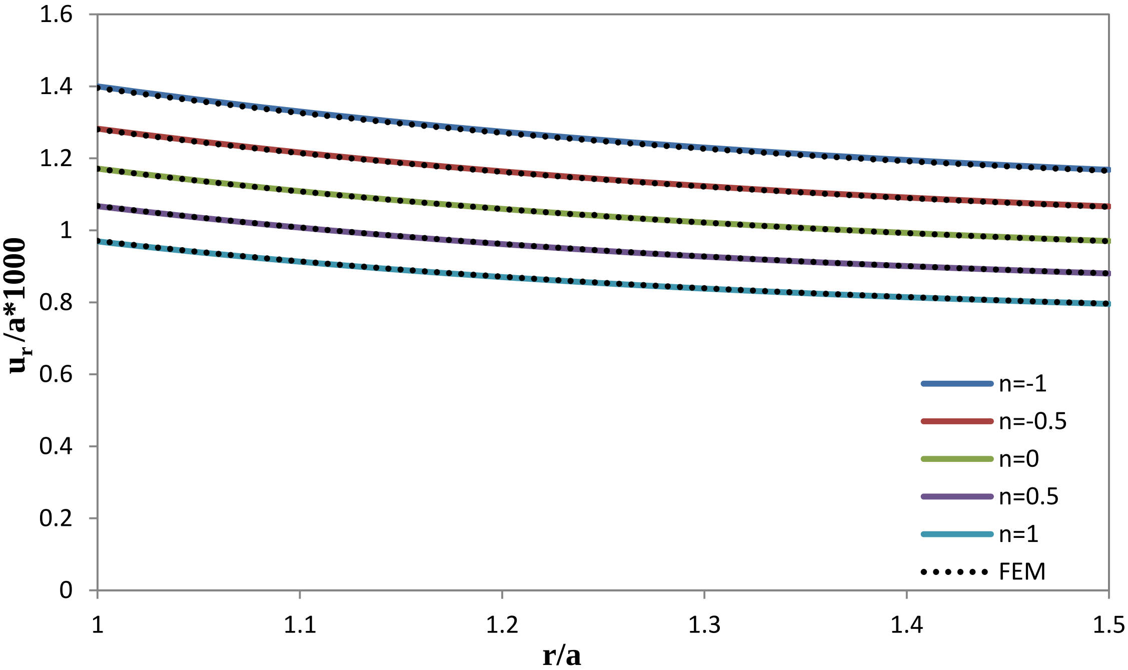
همان‌طور که از شکل (۳-۴) مشخص است به ازای nهای منفی جابه‌جایی استوانه نسبت به ماده‌ی همگن از نظر مقدار بیشتر است و به ازای nهای مثبت کمتر می‌شود. این نسبت در استوانه تحت فشار داخلی در طول جداره تقریباً ثابت می‌ماند ولیکن در استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری حرارتی فشار داخلی به‌ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در طول جداره ثابت نمانده و در لایه‌ی داخلی نسبت به لایه‌ی خارجی دارای اختلاف بیشتری از ماده‌ی همگن می‌باشد. در شکل (۳-۳) مشاهده می‌شود که تنش محیطی برای nهای منفی در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از ماده همگن و در نیمه خارجی کمتر از ماده‌ی همگن می‌باشد و برعکس برای nهای مثبت در نیمه‌ی داخلی کمتر و در نیمه خارجی بیشتر از ماده‌ی همگن است. در محدوده لایه میانی رفتار ماده ناهمگن همانند رفتار ماده همگن می‌باشد که در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی این محدوده به سمت لایه‌ی بیرونی میل کرده درحالیکه در استوانه تحت فشار داخلی این محدوده به سمت لایه‌ی داخلی تمایل پیدا می‌کند.



شکل ۳-۵ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در استوانه جدار ضخیم ناهمگن تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و ۵s
t=

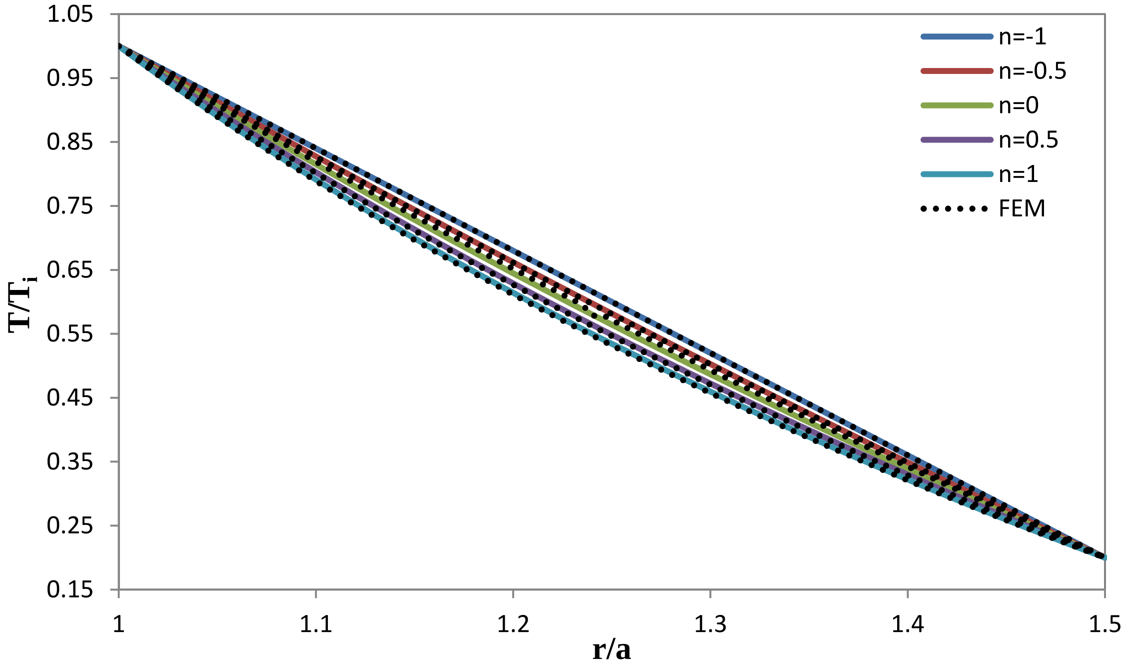


شکل ۳-۶ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در استوانه جدار ضخیم چرخان ناهمگن تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و t=۵s

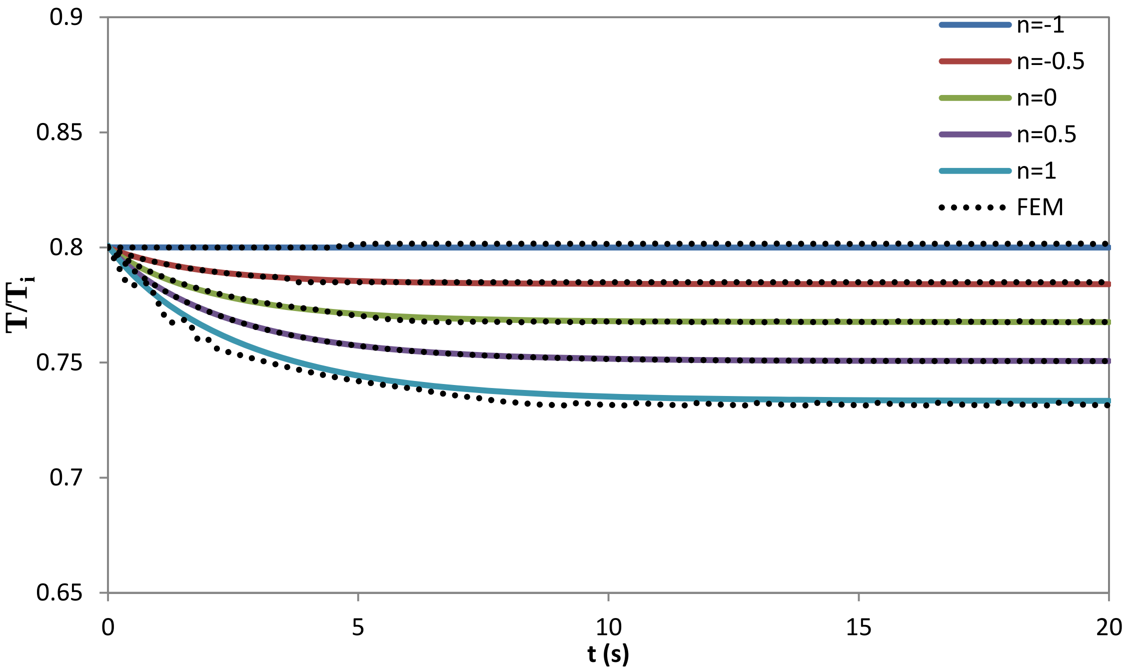


شکل ۳-۷ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در استوانه جدار ضخیم چرخان ناهمگن تحت بارگذاری فشاری در راستای شعاعی و t=۵s

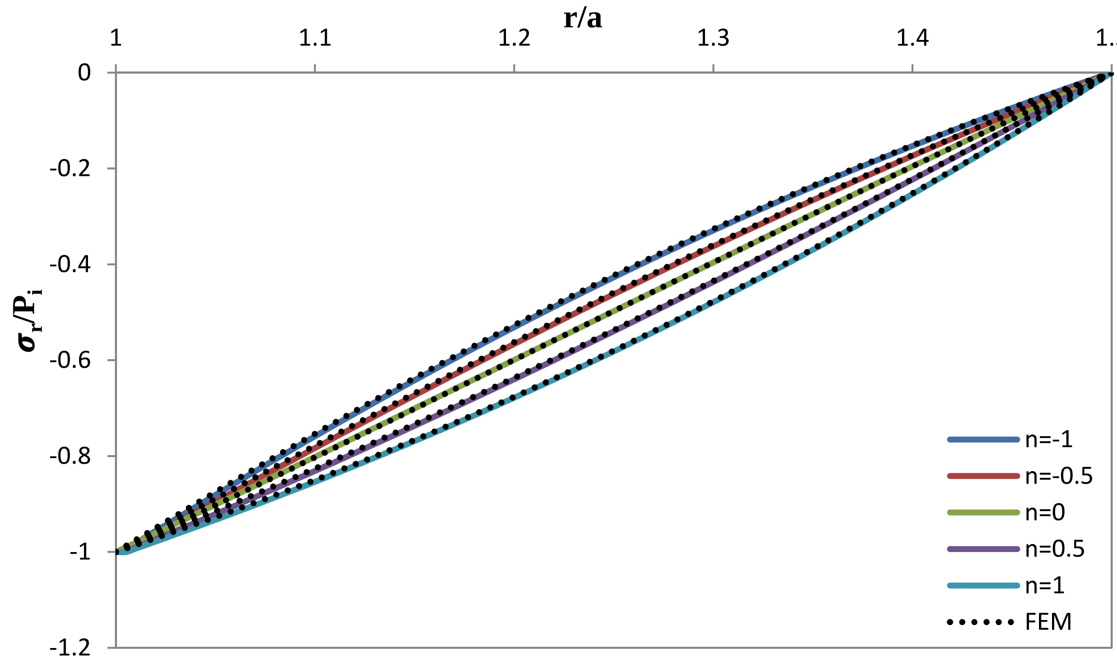
با توجه با تأثیر بسیار کم بارگذاری دورانی در مطالعه‌ی موردی مورد نظر، مشاهده می‌شود که رفتار استوانه تحت بارگذاری دورانی و فشاری مشابه رفتار استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. به عبارتی می‌توان از نتایج مربوط به استوانه چرخان برای بررسی رفتار استوانه‌ی چرخان تحت فشار استفاده کرد. در استوانه‌ی جدار کلفت با ضخامت ثابت، دوران با سرعت ثابت برای سرعت‌های نه چندان زیاد سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی بسیار اندکی می‌شود. به عنوان مثال مقدار جابه‌جایی شعاعی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت $۳۰۰\ rad/s$ در وسط استوانه با n=۱ برای لایه‌های داخلی، میانی و خارجی حدود $۰/۴۵\ \mu m$ می‌باشد. هم‌چنین حداکثر مقدار تنش محیطی ایجاد شده توسط دوران کمتر از $۲/۴\ MPa$ می‌باشد.



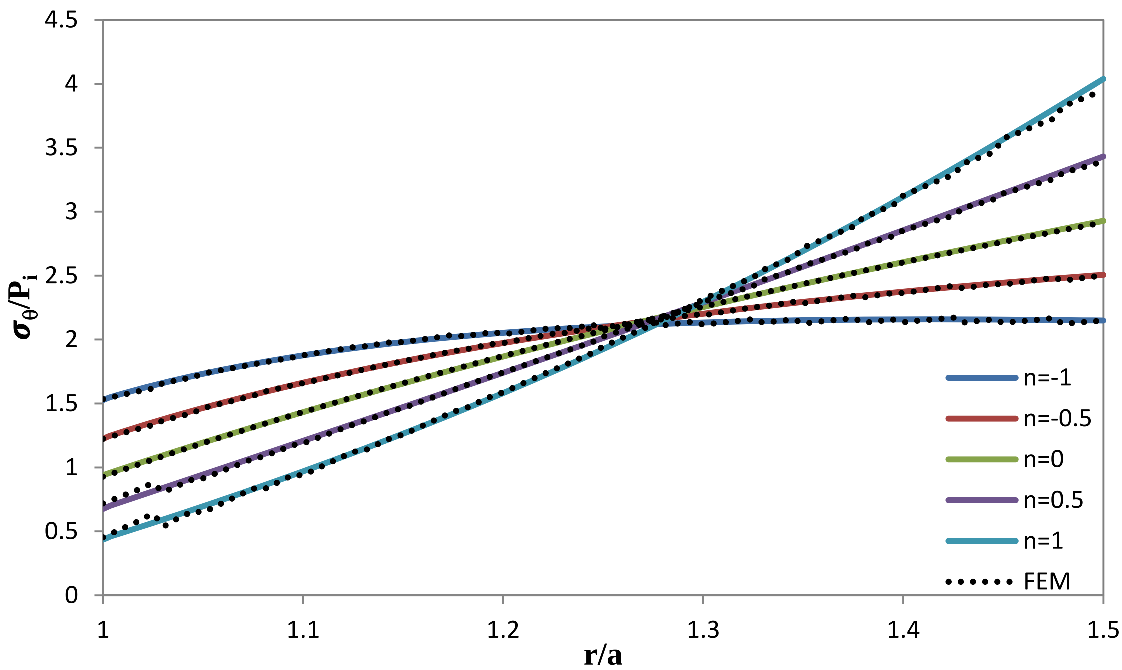
شکل ۳-۸ توزیع بی‌بعد دما در استوانه جدار ضخیم ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا در راستای شعاعی و ۵s t=



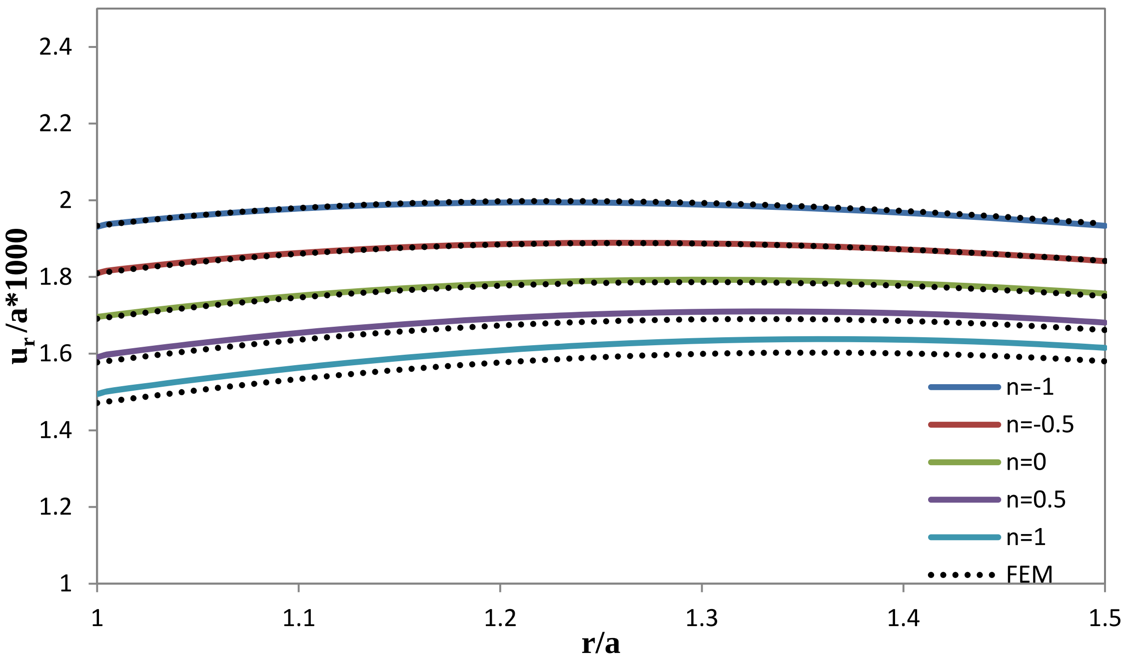
شکل ۳-۹ توزیع بی‌بعد دما بر حسب زمان در استوانه جدار ضخیم ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا در r=۰/۰۴۵m



شکل ۳-۱۰ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در استوانه ناهمگن جدار ضخیم چرخان تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در راستای شعاعی و t=۵s

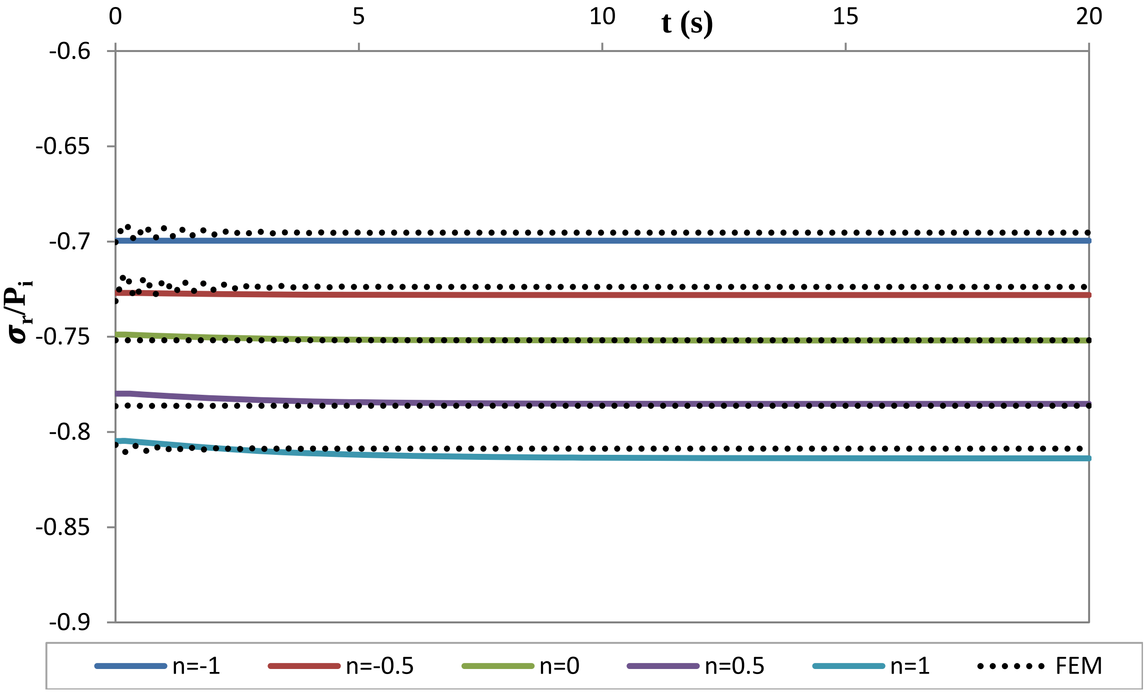


شکل ۳-۱۱ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در استوانه ناهمگن جدار ضخیم چرخان تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در راستای شعاعی و t=۵s

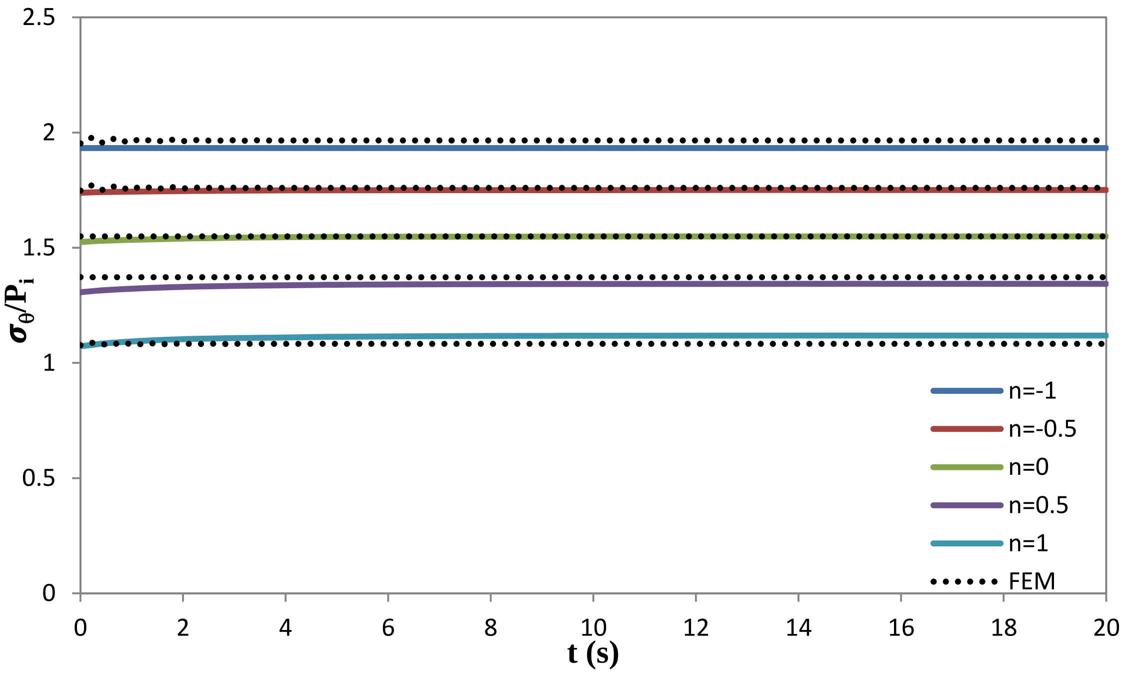


شکل ۳-۱۲ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در استوانه ناهمگن جدار ضخیم چرخان تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در راستای شعاعی و t=۵s

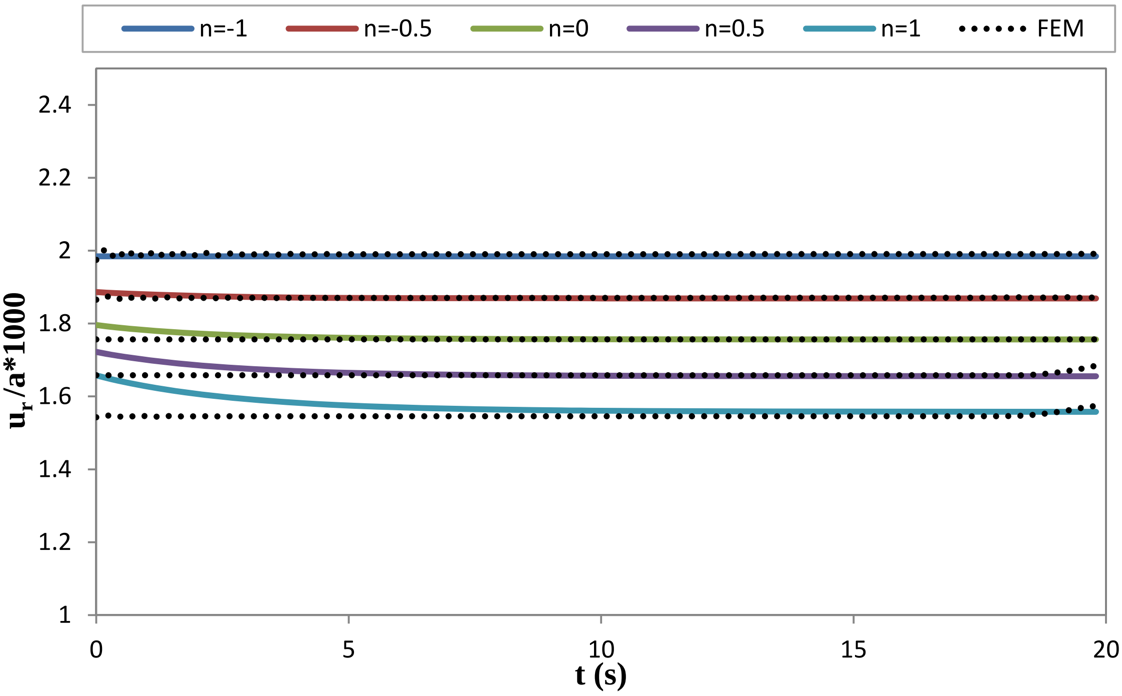
با دقت در نمودار شکل (۳-۱۲) می‌توان دریافت که جابه‌جایی شعاعی برای nهای مختلف از لایه-ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی در حال افزایش می‌باشد. سپس در نیمه‌ی خارجی جداره‌ی استوانه، جابه‌جایی شعاعی از نزدیکی لایه‌ی میانی تا لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. مقدار حداکثر جابه‌جایی در طول جداره‌ی استوانه برای n=-۱ در نقطه‌ی $\bar{r}=$ ۱/۲۲ مشاهده می‌شود و با افزایش ثابت ناهمگنی ماده این مقدار به سمت لایه‌ی خارجی میل می‌کند به طوریکه برای n=۱ این نقطه در $\bar{r}=$ ۱/۳۶ رخ می‌دهد. با کاهش مقدار $|n|$ بر دقت نتایج افزوده می‌شود.



شکل ۳-۱۳ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی در استوانه ناهمگن جدار ضخیم چرخان تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در r=۰/۰۴۵m



شکل ۳-۱۴ توزیع بی‌بعد تنش محیطی در استوانه ناهمگن جدار ضخیم چرخان تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در r=۰/۰۴۵m



شکل ۳-۱۵ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در استوانه ناهمگن جدار ضخیم چرخان تحت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا در r=۰/۰۴۵m

با توجه به شکل (۳-۹) از آن‌جایی که دما در شعاع خاصی از جسم بر حسب زمان ثابت است و تغییر چندانی ندارد، بنابراین تنش‌های شعاعی، محیطی و جابه‌جایی شعاعی تحت بارگذاری حرارتی تقریبا ثابت باقی می‌مانند. نمودارهای شکل (۳-۱۳)، (۳-۱۴) و (۳-۱۵) گواهی بر این ادعاست.

جدول (۳-۱) حاوی مقادیر جابه‌جایی‌های شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و تحلیلی تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و دورانی در سه لایه‌ی داخلی، میانی و خارجی استوانه برای ثابت ناهمگنی n=۱ می‌باشد. در جدول (۳-۲) نیز مقادیر تنش بیشینه‌ی محاسبه شده با روش‌های FE و تحلیلی در سه لایه‌ی مختلف تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و دورانی برای n=۱ آورده شده است.

جدول ۳-۱ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و تحلیلی برای بارگذاری‌های مختلف برای ثابت ناهمگنی n=۱

$U_r[mm]$	مکانیکی		دورانی		حرارتی	
	FEM	PET	FEM	PET	FEM	PET
$r=a$	۰/۰۳۸۳	۰/۰۳۸۳	۰/۰۰۰۴۸	۰/۰۰۰۴۸	۰/۲۰	۰/۲۱
$r=\frac{a+b}{2}$	۰/۰۳۳۷	۰/۰۳۳۶	۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۲۹۴	۰/۰۳۰۷
$r=b$	۰/۰۳۱۴	۰/۰۳۱۴	۰/۰۰۰۴۳	۰/۰۰۰۴۳	۰/۰۳۱۴	۰/۰۳۲۸

جدول ۳-۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و تحلیلی برای بارگذاری‌های مختلف برای ثابت ناهمگنی n=۱

$\sigma_\theta[MPa]$	مکانیکی		دورانی		حرارتی	
	FEM	PET	FEM	PET	FEM	PET
$r=a$	۱۶۷/۷۲	۱۶۷/۴۷	۲/۴	۲/۳۹	-۱۳۳/۸	-۱۳۵
$r=\frac{a+b}{2}$	۱۶۱/۰۶	۱۵۸/۹۳	۲/۳۳	۲/۳۰	-۷/۶۴	-۷/۲۴
$r=b$	۱۵۷/۰۴	۱۵۶/۹۸	۲/۱۶	۲/۱۵	۱۵۶/۹۰	۱۶۳/۸۸

با دقت در این جداول می‌توان دریافت که در مطالعه‌ی موردی مورد نظر توزیع جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در استوانه تحت بارگذاری مکانیکی بیشتر از بارگذاری حرارتی می‌باشد. بارگذاری دورانی نیز کمترین مقدار جابه‌جایی و تنش را در استوانه ایجاد می‌کند. با توجه به اثر ناچیز دوران می‌توان رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای را تحت بارگذاری کلی به برآیند نیروهای حرارتی و مکانیکی نسبت

داد. با توجه به اختلاف دمای ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد بین سطح داخلی و خارجی استوانه‌ی جدار ثابت و فشار داخلی ۸۰ مگاپاسکال مشاهده می‌شود که کرنش‌های مکانیکی بر کرنش‌های حرارتی غلبه می‌کنند. با توجه به اینکه جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی در بارگذاری حرارتی افزایش و در بارگذاری فشاری (فشار داخلی) کاهش می‌یابد، نهایتاً مشاهده می‌شود که در بارگذاری ترکیبی جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی تا نزدیکی لایه‌ی میانی افزایش و سپس کاهش می‌یابد. همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد، این کاهش در طول جداره‌ی استوانه برای n=۱ در نقطه‌ی $\bar{r} = ۱/۳۶$ مشاهده می‌شود و سبب شده تا کاهش جابه‌جایی از این نقطه تا لایه‌ی خارجی به نحوی باشد که مقادیر جابه‌جایی شعاعی در وسط استوانه برای لایه‌های میانی و خارجی نزدیک به یکدیگر حاصل شود.

تنش محیطی در بارگذاری فشاری (فشار داخلی) و دورانی حاصل از روش‌های FE و تحلیلی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش، ولی در بارگذاری حرارتی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. تنش محیطی به ازای ثابت ناهمگنی n=۱ در بارگذاری حرارتی با استفاده از روش تحلیلی نیز با توجه شکل (۳-۱۱) و جدول (۳-۲) دارای مقداری اختلاف در لایه‌ی خارجی با روش FE می‌باشد که برای ثوابت ناهمگنی کوچکتر از نظر مقدار این اختلاف از بین می‌رود.

۳-۶ جمع‌بندی

در استوانه تحت بارگذاری حرارتی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و افزایش می‌یابند، در حالیکه در مورد جابه‌جایی عکس این مطلب صادق است. جابه‌جایی شعاعی برای nهای مختلف از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی در حال افزایش می‌باشد. سپس در نیمه‌ی خارجی جداره‌ی استوانه، جابه‌جایی شعاعی از نزدیکی لایه‌ی میانی تا لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. مقدار حداکثر جابه‌جایی در طول جداره‌ی استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی ماده به سمت لایه‌ی خارجی میل می‌کند. با توجه به نتایج حاصل در بارگذاری ترکیبی، استفاده از ماده‌ی ناهمگن با ثابت

ناهمگنی منفی که سبب کاهش تنش محیطی بیشینه‌ی در استوانه می‌شود، نسبت به ماده‌ی همگن مناسب‌تر می‌باشد درحالیکه در مورد جابه‌جایی شعاعی، استفاده از ماده با ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش مقادیر جابه‌جایی درون استوانه می‌شود. در مجموع می‌توان بیان داشت که اثر هر یک از بارگذاری‌های فشاری، دورانی و حرارتی ظاهر می‌شود. بنابراین با استفاده از اصل جمع آثار می‌توان هر یک از این بارگذاری‌ها را به تنهایی در نظر گرفته و در نهایت نتایج بارگذاری ترکیبی از مجموع مقادیر جابه‌جایی و تنش حاصل از هر یک از این بارگذاری‌ها به تنهایی به دست خواهد آمد. در میان انواع بارگذاری، در مطالعه‌ی موردی مورد نظر بارگذاری فشاری بیشترین اثر را نسبت به دو بارگذاری دیگر داشته و کمترین تأثیر را دوران بر روی نتایج نهایی می‌گذارد.

فصل۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۴-۱ مقدمه

استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری، به دلیل مقاومت بالا در برابر انـواع فشـارهـای داخلـی و خارجی، نیروها و لنگرها، گرادیان دمایی و بارگذاری‌های متنوّع دیگر کـاربرد فراوانـی در صـنعت پیـدا کرده‌اند. دست‌یابی به روش‌های مختلف تحلیل ایـن گـروه از پوسـته‌هـا بـا تغییـرات هندسـه، مـاده و بارگذاری مورد علاقه‌ی پژوهشگران و نیاز صنعتگران می‌باشد. در همین راستا در این رساله سعی شده است تا با ارائه‌ی روش حلّ تحلیلی برای استوانه‌های جدار ضخیم بـا ضـخامت ثابـت در حالـت تقـارن محوری تحت بارگذاری فشاری، بارگذاری دورانی با سرعت ثابت و بارگذاری حرارتی به صورت گذرا در جداره‌ی استوانه، اثر هریک از این بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلف بر روی مقادیر تنش و جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ای بررسی شود. در این فصل ضمن جمع‌بندی کارهای صورت گرفتـه در ایـن رسـاله، نتیجه‌گیری جامعی صورت پذیرفته است و نهایتاً پیشنهادهایی برای ادامه و تکمیل کار نیز ارائـه شـده است.

۴-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

نتایج مربوط به انواع بارگذاری به طور مجزّا بیان شده است.

حالت اوّل: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

همانطور که قبلا اشاره شد، در استوانه‌ی جدار کلفت با ضـخامت ثابـت، فشـار داخلـی یکنواخـت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت در استوانه می‌شود. مواد ناهمگن با مقادیر ثابت نـاهمگنی مثبـت سبب کاهش جابه‌جایی در استوانه نسب به ماده‌ی همگن می‌شود در حالیکـه مقـادیر ثابـت نـاهمگنی منفی باعث افزایش جابه‌جایی نسب به ماده‌ی همگن می‌شود. در استوانه تحت فشار داخلـی از لایـه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و همچنین جابه‌جایی‌های شعاعی کاهش می‌یابد.

در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه‌ی تحت فشار وجود دارد.

حالت دوّم: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

با توجه با تأثیر بسیار کم بارگذاری دورانی برای سرعت‌های نه چندان زیاد، مشاهده می‌شود که رفتار استوانه تحت بارگذاری دورانی مشابه رفتار استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. به عبارت دیگر نتیجه‌گیری‌های مربوط به بارگذاری فشاری برای بررسی رفتار استوانه‌ی چرخان تحت فشار نیز صادق است. همان‌طور که در طول فصل سوّم نیز اشاره شد، در استوانه‌ی جدار کلفت با ضخامت ثابت، چرخش سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی بسیار اندکی در حدود ۰/۴۵ μm برای سرعت دورانی rad/s ۳۰۰ به‌ازای n=1 می‌شود. هم‌چنین حداکثر مقدار تنش محیطی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت ۳۰۰ rad/s کمتر از ۲/۴ MPa می‌باشد که این میزان در سطح داخلی بیشتر از سطح میانی می‌باشد. می‌توان برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌های دورانی و فشاری به طور جداگانه، نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه تحت بارگذاری‌های دورانی و فشاری وجود دارد.

حالت سوم: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

در بارگذاری حرارتی مشاهده می‌شود که جابه‌جایی شعاعی به‌ازای nهای مختلف از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی در حال افزایش می‌باشد. سپس در نیمه‌ی خارجی جداره‌ی استوانه، جابه‌جایی شعاعی از نزدیکی لایه‌ی میانی تا لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. مقدار حداکثر جابه‌جایی در طول جداره‌ی استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی ماده به سمت لایه‌ی خارجی میل می‌کند. با توجه به نتایج حاصل در بارگذاری ترکیبی، استفاده از ماده‌ی ناهمگن با ثابت ناهمگنی منفی که سبب کاهش تنش محیطی بیشینه‌ی در استوانه می‌شود، نسبت به ماده‌ی همگن مناسب‌تر می‌باشد، درحالیکه در مورد

جابه‌جایی شعاعی، استفاده از ماده با ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش مقادیر جابه‌جایی درون استوانه می‌شود. در مجموع می‌توان بیان داشت که اثر هر یک از بارگذاری‌های فشاری، دورانی و حرارتی را می‌توان با استفاده از اصل جمع آثار هر یک از این بارگذاری‌ها به تنهایی در نظر گرفته و نهایتاً نتایج بارگذاری ترکیبی از مجموع مقادیر جابه‌جایی و تنش حاصل از هر یک از این بارگذاری‌ها به تنهایی به دست خواهد آمد. در میان انواع بارگذاری، بارگذاری فشاری بیشترین اثر را نسبت به دو بارگذاری دیگر داشته و کمترین تأثیر را دوران بر روی نتایج نهایی می‌گذارد.

۴-۳ پیشنهادها

با توجه به کارهایی که در گذشته در رابطه با موضوع این رساله انجام شده و آن‌چه در این پژوهش ارائه شد، جهت تکمیل این بررسی‌ها با توجه به کاربرد وسیع و متنوع پوسته‌های استوانه‌ای پیشنهادات زیر ارائه می‌گردد:

۱- حلّ تحلیلی و عددی استوانه‌های جدار ضخیم چرخان FG تحت فشار و بار حرارتی گذرا با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

۲- تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم FG در حالت نامتقارن محوری تحت بارگذاری حرارتی گذرا با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

۳- تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم FG تحت فشار متغیّر در طول استوانه با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

۴- تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم FG با تغییرات نمایی خواص تحت بار حرارتی گذرا با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی

مراجع

[1] Flugge W., (1973), "**Stresses in Shells**" 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.

[۲] یوگورال ای. سی.، (۱۳۷۵)، "**تنش در ورق‌ها و پوسته‌ها**"، ترجمه‌ی غلامحسین رحیمی، چ اوّل، انتشارات دانشگاه تربیت مدرّس، دانشگاه تهران.

[3] Timoshenko S.P. and Goodier J.N., (1983), "**Theory of Elasticity**" 3rd ed., McGraw-Hill, New York.

[4] Greenspon J.E., (1960), "Vibration of a thick-walled cylindrical shell, camparison of the exact theory with approximate theories", **J. Acoustical Sci. America**, 32(5), pp. 571-578.

[5] Timoshenko S.P., (1976), "**Strength of Materials: Part II (Advanced Theo. and Prob.)**" 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York.

[6] Koizumi M., (1993), "The concept of FGM, Ceramic Transactions Functionally Graded Material", 34, pp. 3-10.

[7] Koizumi M. and Niino M., (1995), "**Overview of FGM research in Japan, MRS Bulletin**", 20, pp. 19-21.

[8] Mirsky I. and Hermann G., (1958), "Axially motions of thick cylindrical shells", **J. Appl. Mech.**, **25**, pp. 97-102.

[9] Ziv M. and Perl M., (1973), "Impulsive deformation of Mirsky-Hermann's thick cylindrical shells by a numerical methods", **J. Appl. Mech.**, pp. 1009-1016.

[10] Fukui Y. and Yamanaka N., (1992), "Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded materials subjected to internal pressure", **JSME**, **Ser. I**, 35(4), pp. 891-900.

[11] Kardomateas G.A., (1990), "The initial phase of transient thermal stresses due to general boundary thermal loads in orthotropic hollow cylinders", **J. Appl. Mech.**, 57(3), pp. 719-724.

[12] Ashida F., Noda N., Okumura I.A., (1993), "General solution technique for transient thermo elasticity of transversely isotropic solids in cylindrical coordinates", **Acta. Mech.**, 101(1-4), pp. 215-230.

[13] Obata Y. and Noda N., (1994), "Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material", **J. Thermal Stresses**, 17, pp. 471-487.

[14] Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N., (1999), "Vibration of functionally graded cylindrical shells", **Int. J. Mech. Sci.**, 41, pp. 309-324.

[15] Horgan C.O. and Chan A.M., (1999), "The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials", **J. Elasticity**, 55, pp. 43-59.

[16] Horgan C.O. and Chan A.M., (1999), "The stress response of functionally graded isotropic linearly rotating disks", **J. Elasticity**, 55, pp. 219-230.

[17] Obata Y., Kanayama K., Ohji T., Noda, N., (1999), "Two-dimensional unsteady thermal stresses in a partially heated circular cylinder made of functionally graded material", **International Congress On Thermal Stresses**.

[18] Zimmerman R.W., and Lutz M.P., (1999) "Thermal Stress and Thermal Expansion in A Uniformly Heated Functionally Graded Cylinder", **Journal of Thermal Stresses**, 22(2), pp. 177-88,

[19] Tutuncu N. and Ozturk M., (2001), "Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels", **J. Composites: Part B(Engineering)**, 32(B), pp. 683-686.

[20] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R., (2002), "Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads", **Int. J. Pressure Vessel and Piping**, 79, pp 493-497.

[21] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R., (2003), "General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads", **J. Appl. Mech.**, 70, pp. 111-118.

[22] Vel S.S., and Batra C., (2003), "Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates", **Int. J. Solids Struct.**, 40(25), pp. 7181-7196.

[23] Liew K.M., Kitiporncai S., Zhang X.Z., Lim, C.W., (2003), "Analysis of the thermal stress behavior of functionally graded hollow circular cylinders", **International Journal of Solids Structures**, 40(10), pp. 2355–80.

[24] Eslami M.R., Babaei M.H., Poultangari R., (2005), "Thermal and mechanical stresses in a functionally graded thick sphere", **Int. J. of Pressure Vessels and Piping**, 82(7), pp. 522-527.

[25] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z., (2007), "Elastic analysis of heterogeneous elastic hollow cylinders", **J. Composite Struc.**, 79, pp. 140-147.

[26] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X., (2007), "Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders", **J. Composite Struc.**, 79, pp. 140-147.

[27] Tutuncu N., (2007), "Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties", **J. Eng. Struc.**, 29, pp. 2032-2035.

[28] Shao Z.S. and Ma G.W., (2008), "Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature", **J. Composite Struc.**, 83, pp. 259-265.

[29] Tutuncu N. and Temel B., (2009), "A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres", **J. Composite Struc.**, 91, pp. 385-390.

[30] Zamani Nejad M., Rahimi G.H., Ghannad M., (2009) "Set of field equations for thick shell of revolution made of functionally graded materials in curvilinear coordinate system", **J. Mechanika**, 77(3), pp. 18-26.

[31] Ghannad M. and Zamani nejad M., (2010), "Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clapmed ends", **J. Mechanika**, 85(5), pp. 11-18.

[۳۲] قناد م.، رحیمی غ.، اسماعیل‌زاده خادم س.، (۱۳۸۹)، "حل کلّی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی"، **مجله فنی و مهندسی مدرس- مهندسی مکانیک**، ۱۰، ۳، ص‌ص.۳۱-۴۱.

[۳۳] قناد م.، رحیمی غ.، اسماعیل‌زاده خادم س.، (۱۳۸۹)، "حل کلّی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی"، **مجله‌ی فنی و مهندسی مدرس-مهندسی مکانیک** ، ۱۰، ۴، ص‌ص.۱۳- ۲۵.

[34] Peng X.L. and Li X.F., (2010), "Thermal stress in rotating functionally graded hollow circular disks", **Comp. Struct.**, 92(8), pp. 1896-1904.

[35] Keles and Conker C., (2011), "Transient hyperbolic heat condition in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties", **European Journal of Mechanics A/Solids**, 30, pp. 449-455.

[36] Ghorbanpour Arani A., Kolahchi R., Mosallaie Barzoki A.A., (2011), "Effect of material in-homogeneity on elec. thermo-mechanical behaviors of functionally graded piezoelectric rotating shaft", **J. Applied Mathematical Modelling**, 35(6), pp. 2771-2789.

[37] Nejad M.Z. and Afshin A., (2013), "Thermoelastic transient response of rotating thick cylindrical shells under general boundary conditions", **Int. Res. Jnl. Applied and Basic Sciences**, 4(9), pp. 2796-2809.

Abstract

Plates and shells are most applicable structures in engineering. Analysis and investing this structures under mechanical and thermal loading is one of most important engineering problems that many scientists are interested in. Different engineering structures such as ships, airplanes, submarines and rockets are always subtended to mechanical and thermal loading in order to their application; Therefor it is necessary to know accurate information about deformation and stress distribution in different points of shell. In this paper, analytical and numerical solution of FG rotating pressurized thick cylindrical shells under transient thermal load is presented under generalized plane strain and plane stress assumptions, respectively using plane elasticity theory. The loading is in the form of thermal, rotational and mechanical at the same time. The material properties are assumed to vary non-linearly in the radial direction, and the Poisson ratio is assumed constant. Temperature distribution assumed to be one dimensional through the radial direction that is obtained using the method of the separation of variables, generalized Bessel functions and eigen function method. The distribution of temperature, radial displacement and thermal stresses are obtained in a transient state for general thermal boundary conditions and through the radial direction of the cylinder and time are plotted. the results are compared with the solution using finite element method (FEM), which showed good agreement. The values used in this study are arbitrarily chosen to demonstrate the effect of inhomogeneity on the distribution of displacements and stresses. To obtain displacement through the radial direction, Cauchy-Euler equation and method of variation of parameters is used to solve equilibrium equation. By substituting displacement function in constitutive equation radial and circumferential stresses are obtained The values used in this study are arbitrarily chosen to demonstrate the effect of time and inhomogeneity on the distribution of temperature, displacements and stresses. to check the results accuracy of analytical solution, a finite element solution has been used in all cases of loadings for inhomogeneous shell.

Keywords: Transient Thermoelastic Analysis, FG Cylinders, Separation of Variables, Generalized Bessel Function, FEM.

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Analytical and numerical solution of FG rotating pressurized thick cylindrical shells under transient thermal load

Danial Vatani

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

September 2016