بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار کلفت FGM در حالت گذرای حرارتی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل

نگارنده:

سیّدامیررضا وزیری

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد

دی ۱۳۹۵

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **سیدامیررضا وزیری** رشته ....**مهندسی مکانیک**........ گرایش ....**طراحی کاربردی**........ تحت **تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار کلفت FGM درحالت گذرای حرارتی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل** که در تاریخ .... با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: .... ا☐ز...............)	☐فاع مجدد	☐ مردود

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹)   ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶)   ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنما			
۲ـ استاد مشاور			
۳ـ استاد داور			
۴- استاد داور			
۵ ـ نماینده تحصیلات تکمیلی			

رئیس دانشکده :   **امضاء**

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه :جامدات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد سیدامیررضا وزیری

تحت عنوان:

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار کلفت FGM درحالت گذرای حرارتی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... موردپذیرش قرار گرفت.

استاد راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تعهدنامه

اینجانب **سیدامیررضا وزیری** دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک- گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی **تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار کلفت FGM درحالت گذرای حرارتی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل**، تحت راهنمایی دکتر مهدی متعهّد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحّت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحلّ انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحلّ انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

تشکر و قدردانی

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم ودانش تلاش نمایم.

والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چرا که این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند.

آموزگارانی که برایم زندگی؛ بودن و انسان بودن را معنا کردند

حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان....

با تشکر از استادهای محترم دانشکده‌ی مکانیک که در محضر آنان علم و اخلاق را فرا گرفتم و با تشکر ویژه از جناب دکتر مهدی قنّاد که زحمت راهنمایی پایان‌نامه‌ی اینجانب بر دوش ایشان است

چکیده

هدف از مطالعه‌ی حاضر، تحلیل و مدل‌سازی جابه‌جایی و تنش‌های ایجاد شده در استوانه‌های جدار ضخیم همگن و ناهمگن با ضخامت ثابت در حالت متقارن محوری تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی گذرا می‌باشد. در ابتدا معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم با استفاده از روش انرژی برای مادّه‌ی همگن و ناهمگن FG با توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی تحت بارگذاری حرارتی گذرا استخراج و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی برای شرایط مرزی دوسرگیردار آورده شده است. همچنین معادله‌ی مربوط به انتقال حرارت گذرا با استفاده از روش جداسازی متغیّرها، قوانین بسل تعمیم یافته و بسط توابع ویژه به‌صورت تحلیلی محاسبه شده است. به‌منظور بررسی صحّت نتایج حلّ تحلیلی ارائه شده، مدل‌سازی عددی استوانه‌ی مورد نظر در نرم‌افزار آباکوس انجام شده و نتایج با یگدیگر مقایسه شده است. همچنین تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ی چرخان همگن و ناهمگن FG با توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی تحت فشار داخلی و بارحرارتی گذرا انجام و توزیع تنش و جابه‌جایی این استوانه به‌صورت جدول و نمودار ارائه شده است و نتایج حاصل در انتهای هر فصل آورده شده است. همچنین در مطالعه‌ی حاضر تأثیر زمان بر معادلات و رفتار استوانه‌های جدار ضخیم تحت بارگذاری مختلف نیز مورد بررسی قرار گرفته است. درنهایت نتیجه‌گیری و جمع‌بندی از مطالعه‌ی حاضر صورت گرفته و پیشنهادها ارائه شده است.

واژگان کلیدی: استوانه‌ی جدار ضخیم، بارگذاری حرارتی گذرا، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل، مواد متغیّر تابعی(FGM)، توزیع توانی خواص، اصل کار مجازی.

مقالات

۱- وزیری س.ا.ر، قنّاد م.، (۱۳۹۵)، " حلّ تحلیلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تحت بارگذاری حرارتی گذرا وفشاری با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل"، دومین کنفرانس بین‌المللی دستاوردهای نوین ژوهشی در مکانیک، صنابع و هوافضا، دانشگاه خواجه‌نصیرالدین طوسی، تهران.

2- Vaziri S.A.R, Ghannad M., (2016), ”analytical solution of transient heating on axisymmetric thick walled cylinder according to the first shear deformation theory’’, 5th international conference on research in science and technologhy, LSB University, London, United kingdom.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها و نمودارها

فهرست جداوّل

فهرست علائم و اختصارات

جابه‌جایی شعاعی	U_r
جابه‌جایی محوری	U_x
مؤلفه‌های جابه‌جایی محوری در FSDT	u,ϕ
مؤلفه‌های جابه‌جایی شعاعی در FSDT	w,ψ
تنش محیطی	σ_θ
تنش برشی	τ_{xz}
تنش شعاعی	σ_r
تنش محوری	σ_x
کرنش محیطی	ε_θ
کرنش برشی	γ_{xz}
کرنش شعاعی	ε_r
کرنش محوری	ε_x
کرنش حرارتی	$\varepsilon^T(z)$
مدول الاستیسیته	E
نسبت پواسون	ν
چگالی	ρ
ضریب هدایت حرارتی	K
ضریب انبساط حرارتی	α
شار حرارتی	q
حرارت مخصوص	C
ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی	$h_{i,o}$
دمای مرجع	T_∞
دما	T
توزیع اختلاف دما	$\Delta T(r,t)$
زمان	t
تابع بسل نوع اوّل	J
تابع بسل نوع دوم	Y
ثابت ناهمگنی مادّه	n_i
ثوابت لامه	μ,λ
فشارداخلی	P_i

سرعت دورانی	ω
نیروهای محوری	N_x, N_θ, N_z
لنگرهای خمشی	M_x, M_θ, M_z
نیروی برشی	Q_x
لنگر پیچشی	M_{xz}
انرژی کرنشی	U
چگالی انرژی کرنشی	U^*
کار نیروهای خارجی	W
نیروهای حجمی	$\vec{f}_{bf}$
نیروهای سطحی	$\vec{f}_{sf}$
نسبت شعاع به شعاع داخلی	$\bar{r}$
ضخامت پوسته	h
طول استوانه	L
مختصات در جهت طولی استوانه	x
مختصات در جهت شعاعی استوانه	r
مختصات در جهت محیطی استوانه	θ
شعاع صفحه‌ی میانی استوانه	R
فاصله‌ی هر نقطه استوانه از صفحه میانی	z
بردار ناهمگنی	$\{f\}$
ماتریس‌های ضرایب	$[A],[B],[C]$
ضریب تصحیح برشی	k
مقادیر ویژه	m_i
بردارهای ویژه	ξ_i

فصل ۱

مروری بر روش‌های تحلیل پوسته‌ها

۱-۱مقدمه

پوسته‌ها[1] یا سازه‌های پوسته‌ای از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع پوسته‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها در اشکال طبیعی مانند جمجمه‌ی سر انسان‌ها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند و در اشکال مصنوعی در صنایع مختلف: ساختمانی نیروگاهی خودروسازی نظامی هوا و فضا همانند: سقف‌ها، لوله‌ها، بدنه‌ی خودروها، هواپیماها، پرتابه‌ها، پرتاب‌کننده‌ها، موشک‌ها و سفینه‌ها تولید می‌شوند.

پوسته‌ها به‌طورکلی سازه‌های خمیده‌ای هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به‌تناسب مطلوبیت رفتاری پیچیدگی تحلیل آن‌ها نیز حائز اهمیّت است. روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل فراوانی کاربرد از اهمیّت ویژه‌تری برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این‌گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه‌چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش‌پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و مادّه‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش و در صورت امکان وزن آن‌ها را کاهش دهند.

۲-۱دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

الف-از دیدگاه هندسی:

پوسته‌های حاصل از انتقال[2]: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس حاصل می‌شود.

[1].shells

[2].shell of translation

پوسته‌های حاصل از دوران:[1] از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه قوس حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک:[2] پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن کوچک‌تر از ۱/۲۰ باشد.

پوسته‌ی جدار ضخیم:[3] پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگ‌تر از ۱/۲۰ باشد.

ب- از دیدگاه مادی:

پوسته‌ی همگن:[4] خواص مکانیکی مادّه‌ی پوسته در نقاط مختلف یک جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نیست.

پوسته‌ی ناهمگن:[5] خواص مکانیکی مادّه‌ی پوسته‌ی در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط است.

پوسته‌ی همسانگرد:[6] خواص مکانیکی (E,ν) مادّه‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه یکسان است.

پوسته‌ی ناهمسانگرد:[7] خواص مکانیکی (E,ν) مادّه‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه یکسان نیست.

ج- از دیدگاه رفتاری:

پوسته با تغییر شکل‌های کوچک:[8] جابجایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری کوچک است (رفتار خطی ازنظر هندسی).

---

[1] Shell of rotation
[2] Thin shell
[3] Thick shell
[4] Homogeneous shell
[5] Inhomogeneous (heterogeneous) shell
[6] Isotropic shell
[7] Anisotropic shell
[8] Small deflection

پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ:[1] جابجایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری کوچک نیست (رفتار غیرخطی ازنظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان:[2] تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیرند و روابط تنش -کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند (رفتار ازنظر مادی خطی).

پوسته با رفتار مومسان:[3] تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیرخطی ازنظر مادی).

۳-۱تئوری‌های پوسته‌های نازک

در پوسته‌های نازک نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی R کوچک‌تر از ۱/۲۰ است. تئوری این دسته از پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به‌طورکلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود، بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته روش‌های تحلیلی- تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک به‌دست می‌آورند. دقت نتایج تئوری‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد. اوّلین فرضیات را کیرشهف[4](۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته‌ها به کار گرفته شد. ارون[5](۱۸۷۴) تئوری پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لوو[6](۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری لاو-کیرشهف مشهور است. رایسنر[7](۱۹۱۲) با استفاده از

[1] Large deflection
[2] Elastic behavior
[3] Plastic behavior
[4] Kirchhoff
[5] Aron
[6] Love
[7] Reissner

فرضیات لوو تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری[1] را ارائه نمود. فلوگه[2](۱۹۳۲) اوّلین کسی است که تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالتهای خاص قابل حلّ می‌باشد. با ساده‌سازی آن‌ها تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به‌دست می‌آیند. نظریات فلوگه توسط بیرنه[3](۱۹۴۴) تکمیل شد. نقدی[4](۱۹۵۷) تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که به‌کارگیری آن‌ها مشکل است. سندرز[5](۱۹۵۹) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلف[6](۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادلات به‌صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

تئوری‌های کلاسیک پوسته‌های نازک را می‌توان به این گونه تقسیم نمود.

۱- تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی)[7]

۲- تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)[8]

۱-۳-۱ تئوری غشایی

غشاء[9] از دیدگاه مکانیکی یک تار[10] دو بعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری را تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی[11] آن‌ها بسیار کم است و ازنظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته ازنظر ایستایی معین است. در تئوری غشایی، جابه‌جایی

[1] Axisymmetric shell of revolution
[2] Flugge
[3] Byrne
[4] Naghdi
[5] sanders
[6] Novozhilov
[7] Membrane theory
[8] Bending theory
[9] Membrane
[10] String
[11] Bending stiffness

پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسائل در حالت تنش صفحه‌ای[1] و کرنش صفحه‌ای[2] با چشم پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی تحلیل می‌شوند. [۲]

۲-۳-۱ تئوری خمشی

ورق[3] از دیدگاه مکانیکی یک تیر[4] دو بعدی است که علاوه بر نیروهای محوری نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آن‌ها قابل توجه باشند وازنظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناویر[5] ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورقها تعمیم داده شد ولوو با همین فرضیات تئوری خمشی را صورت‌بندی کرد.

در حالت کلی معادلات تعادل به تنهایی برای به‌دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر پوسته ازنظر ایستایی نامعین است. در تئوری خمشی نیز جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لوو-کیرشهف می‌نامند که عبارتند از [۲]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با سطح واحد کوچک است (پوسته‌ی نازک).

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته کوچک هستند (خیز کوچک).

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش قابل چشم پوشی است (تنش صفحه‌ای).

[1] Plane stress
[2] Plane strain
[3] Plate
[4] Beam
[5] Navier

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته پس از بارگذاری و تغییر شکل همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض کرنش‌های برشی و مؤلفه‌های کرنش عمود بر سطح میانی صفر در نظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

۴-۱ تئوری پوسته‌های ضخیم

اوّلین بار لامه[1](۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (PET)[2]حلّ دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از مادّه‌ی همگن و همسانگرد را ارائه کرد [۳] که تا کنون در حلّ مسائل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین[3](۱۹۳۰) روابط پوسته‌ی ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف[4](۱۹۴۹) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی معادلات قابل حلّی را برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی تئوری تغییر شکل برشی[5] را برای پوسته‌های ضخیم پایه گذاری نمود [۴]. میرسکی و هرمان[6](۱۹۵۸) با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند [۵]. گرینس پن[7](۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود [۶].

تئوری عمومی پوسته‌های ضخیم را می‌توان به این‌گونه تقسیم نمود.

۱- تئوری الاستیسیته‌ی مستوی

۲- تئوری تغییر شکل برشی

---

[1] lame
[2] Plane elasticity theory
[3] Galerkin
[4] Vlassov
[5] Shear deformation
[6] Mirsky-hermann
[7] Greenspon

۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی

به‌طورکلی در تئوری الاستیسیته‌ی سه‌بعدی ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول را بدست آورد معادلات عبارتند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارتند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی (بردار جابه‌جایی). تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی هر چند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به‌طور کامل توصیف می‌کند و منجر به حلّ دقیق می‌شود ولی حلّ معادلات آن بسیار پیچیده است و عملاً به کارگیری آن‌ها امکانپذیر نیست. با فرضیات ساده شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه‌ها بکار برد. در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه پس از اعمال فشار و تغییر شکل همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌ماند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، جابه‌جایی هرنقطه از پوسته برابر جابه‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این تئوری را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از مادّه همگن و همسانگرد به کار برد وتوزیع تنش را در استوانه‌ها بدست آورد. تئوی لامه به تئوری کلاسیک استوانه‌ی ضخیم مشهور است [۷].

معادله دیفرانسیل حاکم بر استوانه جدار ضخیم جدار ثابت عبارتست از:

$$\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{1}{r^2}u_r=0 \quad \text{or} \quad r^2u_r''+ru_r'-u_r=0 \qquad (۱-۱)$$

و جابه‌جایی استوانه u_r برابر است با:

$$u_r=C_1r+\frac{C_2}{r} \qquad (۱-۲)$$

r شعاع استوانه، $C_۱$ و $C_۲$ ثابت‌های معادله هستند که با شرایط مرزی بدست می آیند.

۲-۴-۱ تئوری تغییر شکل برشی

در این تئوری جابه‌جایی هر نقطه از پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف نمی‌شود بلکه با مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌شود. به‌طورکلی فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (r) برابر است با شعاع سطح میانی (R) به علاوه‌ی فاصله‌ی آن از سطح میانی (z)، یعنی:

$$r = R + z \quad , \quad \left|\frac{z}{h}\right| < 1 \tag{۱-۳}$$

بر اساس تئوری لامه، جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی توخالی:

$$u_r = c_1 r + \frac{c_2}{r} = c_1(R+z) + \frac{c_2}{R+z} \tag{۱-۴}$$

به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت:

$$u_r = c_1(R+z) + \frac{c_2}{R}\left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \ldots\right) = \left(c_1 R + \frac{c_2}{R}\right) + \left(c_1 - \frac{c_2}{R^2}\right) z + \frac{c_2}{R^3} z^2 + \ldots \tag{۱-۵}$$

$$\Rightarrow u_r = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots$$

براساس رابطه‌ی بالا، جابه‌جایی شعاعی را به‌صورت یک چندجمله‌ای بر حسب z می‌توان نوشت. اگر $z = 0$ باشد نشانگر جابه‌جایی سطح میانی است. اگر فقط چند جمله‌ی اوّل در نظر گرفته شود $u = u_0$ تحلیل با تقریب مرتبه‌ی صفر پوسته‌های کلفت می‌شود که مشابه تئوری خمشی (تئوری مرتبه‌ی یک در پوسته‌های نازک) و اگر دو جمله در نظر گرفته شود $u = u_0 + u_1 z$، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی یک پوسته‌های کلفت می‌شود که مشابه تئوری فلوگه (تئوری مرتبه‌ی دو در پوسته‌های نازک) می‌باشد [۶].

در این تئوری، علاوه بر اثر نیروهای محوری، اثرات برش، خمش، پیچش و نیز اثرات اینرسی دورانی و میدان حرارتی را می‌توان در نظر گرفت. تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک به تئوری تغییر شکل برشی

مرتبه‌ی اوّل میرسکی – هرمان شهرت دارد که تعمیم تئوری تیموشنکو[1]در تیرها و همچنین تئوری میندلین[2]در ورق‌ها است [۸]. میدان جابه‌جایی در این تئوری عبارتست از:

$$\begin{cases} U_x = u(x,t) + \phi(x,t)z \\ U_\theta = v + \theta z \\ U_z = w(x,t) + \psi(x,t)z \end{cases} \Rightarrow \{U\} = \{u_0\} + \{u_1\}z \qquad (۱-۶)$$

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل، مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، مستوی باقی می‌مانند ولیکن الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند. هرچند به کارگیری تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، منجر به حلّ دقیق مسائله می‌شود، ولیکن به دلیل اینکه تا کنون هیچ راه حلّ کاملی برای پوسته‌های کلفت (به غیر از موارد خاص) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی سه‌بعدی ارائه نشده است، تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای مختلف با انواع جداره، انواع مواد، انواع بارگذاری، و شرایط مرزی، حتی نامتقارن محوری،[3] روش مناسبی است.

۱-۵ مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM[4])

مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و... محدویت هایی در صنایع نظامی، هوافضا، نفت و گاز، خودرو سازی و ... ایجاد می‌کنند. از این رو دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اندکه از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کاممپوزیت ها) در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند مادّه‌ی ناهمساز به وجود می آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری همزمان مکانیکی

[1] Timoshenko
[2] Mindlin
[3] Nonaxisymmetric
[4] Functionally graded materials

وحرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالوژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و همسانگرد هستند، ولیکن از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و همسانگرد تلقی می‌شوند.

لخنیتسکی (۱۹۵۰) تئوری الاستیسیته‌ی اجسام مرکب را فرمول‌بندی کرد [۹]. و پس از وی دیگران، تئوری حاکم بر پوسته‌های کامپوزیتی را ارائه نمودند. وینسون (۱۹۷۴) تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی را در تحلیل استاتیکی پوسته‌های کامپوزیتی به کار برد و بین نتایج دو روش مقایسه‌ای انجام داد.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب تغییر ناگهانی مواد و خواص آنهاست که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خاص پایه ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM) در ساختار ارگانیسم‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به عنوان مثال استخوان در لایه بیرونی که نیاز به مقاومت نسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه درونی که کاملاً نرم است تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشند. از این رو تغییرات خواص کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. مواد FG، ناهمگن هستند ولیکن آن‌ها را همسانگرد در نظر می‌گیرند.

شکل ۱- ۱ نمایی از مقطع یک استخوان

۱-۵-۱ ویژگی مواد FG

مواد ناهمگن FG در مقایسه با مواد همگن (ایزوتروپ‌ها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها) داری ویژگی‌های به شرح زیر می‌باشند [۱۰]:

۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمای بالا. در حقیقت این گونه مواد با کاهش تنش‌های حرارتی، آثار منفی آن‌ها را تا حد قبل توجهی کاهش می‌دهند. به کمک مواد FG می‌توان در ناحیه‌هایی که تنش‌های حرارتی به حالت بحرانی می‌رسند آن‌ها را کنترل کرد.

۲- مقاومت زیاد در مقابل بارهای مکانیکی بالا. به کمک مواد FG می‌توان استحکام مواد را افزایش داد تا از ورود اجسام به ناحیه‌ی مومسان وحتی شکست تا حدود زیادی جلوگیری کرد.

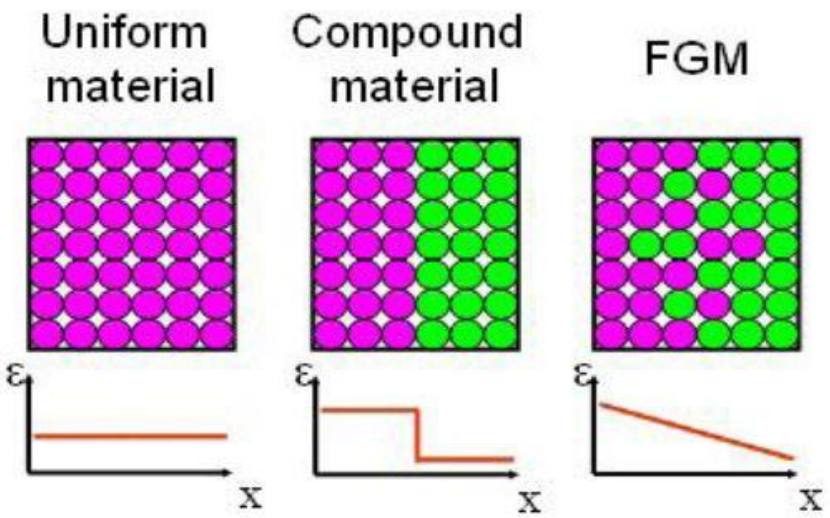
۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد FG، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از جسام به دلیل وجود شکلهای خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود، مانند لبه‌ای جسم و نزدیک سوراخ‌ها و گشودگی‌ها به کمک مواد FG می‌توان آثار تمرکز تنش را به‌صورت چشم‌گیری کاهش داد.

۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص مادّه که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد هدفمند FG است.

۵- اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به‌صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد FG این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

۶- تغییرات تدریجی خواص در مواد FG، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیتی در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد FG به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌هاو گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث

استحکام مادّه می‌شوند. شکل (۲-۲) مقایسه بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و FGM را نشان می‌دهد.



شکل ۱- ۲ مقایسه‌ی تغییر خواص در مواد مختلف [۱۰]

۲-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد FG

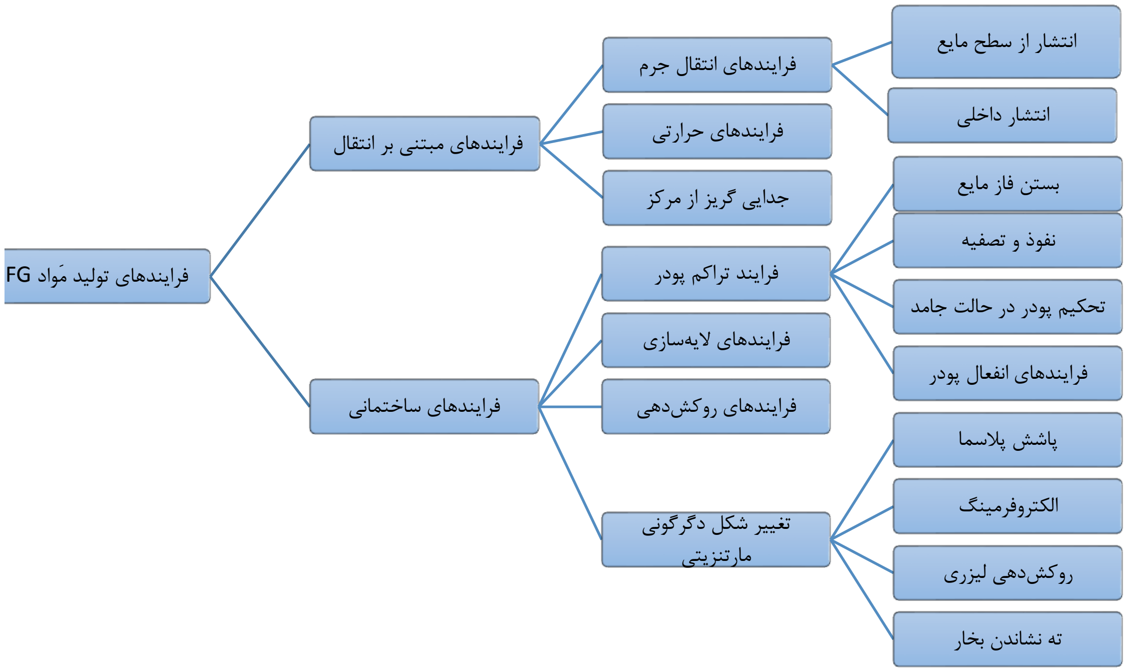
مفهوم اوّلیه‌ی FGM توسط نینو و همکارانش در ۱۹۸۴ در سازمان هوا و فضای ژاپن مطرح و از ۱۹۸۶ مطالعات امکان سنجی تولید FGM در این کشور شروع شد [۱۱ و ۱۲]. مرحلّه‌ی اوّل پروژه‌ی ملی ((فناوری گسترش FGM)) طی سال ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد. در این پروژه سه گروه ساخت مواد، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید مادّه‌ی جدیدی بود که با استفاده از سرامیک ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزان با مقاوت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی مادّه از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء شود.

پس از دست یابی به هدف پروژه که ساخت و آمادّه سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلیمتر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلیمتر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ درجه‌ی کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ درجه کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اوّلین سمپوزیم

جهانی در ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند. مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلیمتر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلیمتر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد [۱۳]. دومین سمپوزیوم جهانی FGM، در ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به ویژه تحلیل سازه‌های FGM فراگیر شد.

۳-۵-۱ فرایندهای تولید مواد FG

تاکنون فرایندهای تولید مواد FG در محدوده‌ی آزمایشاههای تخصصی بوده و هنوز روش تولید نیمه صنعتی باصرفه‌ی اقتصادی ارائه نشده است. به‌طورکلی روش‌های تولید موجود را می‌توان به دو گروه عمده تقسیم کرد [۱۰].



شکل ۱- ۳ دسته بندی روش‌های گوناگون تولید مواد FG [۱۰]

گروه اوّل: فرایندهای تولید مواد FG به‌صورت لایه لایه، که به آن فرایندهای ساختمانی می‌گویند. این نوع فرایندها، نتیجه‌ای از پیشرفت‌های شگرف ایجاد شده در زمینه‌ی اتوماسیون ساخت مواد پیشرفته می‌باشد. در فرایندهای ساختمانی، تغییرات تدریجی توسط انباشته شدن مواد بایک روش برنامه ریزی شده انجام می‌شود. با روش‌های ساخت در این گروه، مدل‌های مواد FG را می‌توان به

هر شکل یا هرگونه تغییرات دلخواهی سازگار کرد. به همین دلیل هیچ گونه محدودیتی در چگونگی تغییرات تدریجی وجود ندارد. این نکته موجب انعطاف پذیری در طراحی می‌شود. با وجود نکات مثبت فراوان این روش‌ها، تولید مواد FG با آن‌ها، بسیار پرهزینه، وقت گیر و دشوار است که با افزایش دقت، مشکلات آن چند برابر می‌شوند. در شکل (۳-۱) روش‌های این گروه نشان داده شده است.

گروه دوم: فرایندهای تولید مواد FG مبتنی بر پدیده‌ی انتقال برای ایجاد تغییرات تدریجی در یک جزء از مواد می‌باشند. این نوع فرایندها از جریان سیال، انتشار اتمی یا انتقال حرارت برای تولید تغیرات تدریجی در زیرساختارهای محلّی یا ترکیب‌های موجود بهره می‌گیرند. جریان سیال و انتشار حالت جامد در طول فرایند جامدسازی، پاسخ‌گوی تفکیک کریستالها در ساخت مواد آلیاژی است. به این ترتیب به گونه‌ای دیگر، روش‌هایی برای ایجاد تغییرات تدریجی به‌دست می‌آیند. روش‌های تولید فرایند انتقال انعطاف پذیری روش‌های تولید فرایندهای ساختمانی را ندارند ولی از لحاظ زمان و هزینه، بسیار مناسب‌تر از روش‌های گروه اوّل می‌باشند.

۴-۵-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد FG

با توجه به اینکه مواد FG اساساً ناهمگن می‌باشند و خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی آن‌ها به‌صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند، می‌توان تغییر خواص را با یک تابع پیوسته‌ی ریاضی، مدل کرد و از آن در روش‌های تحلیلی و عددی بهره گرفت. روش مرسوم در مدل سازی خواص مکانیکی و حرارتی مواد FG، استفاده از یک تابع توانی یا تابع نمایی برای بیان توزیع پیوسته خواص در مادّه است. معمولاً در عبارات مربوط به توزیع خواص، تغییرات مدول کشسانی (E)، ضریب هدایت حرارتی، ضریب انبساط حرارتی و چگالی را در نظر می‌گیرند و تغییرات نسبت پواسون (ν)، را لحاظ نمی‌کنند. دلیل آن، مقدار نسبت پواسون است که بسیار نزدیک به هم است، به گونه‌ای که می‌توان از تغییرات ناچیز آن در جسم چشم پوشی کرد، یعنی مادّه را ناهمگن همسانگرد (FG ایزوتروپ) در نظر گرفت.

اُباتا و نودا (۱۹۹۴) تابع توانی [۱۴]، هورگان و چان (۱۹۹۹) تابع توانی [۱۵]، یانگ (۲۰۰۰) تابع توانی [۱۶]، توتونچو (۲۰۰۱) تابع توانی [۱۷]، تارن (۲۰۰۱) تابع توانی [۱۸]، جباری و همکاران (۲۰۰۳) تابع توانی [۱۹]، اراسلان و آکیز (۲۰۰۶) تابع نمایی [۲۰] و هونگ جون و ژیفای (۲۰۰۶) تابع نمایی [۲۱] را در روش‌های تحلیلی به کار بردند.

تابع توانی در اکثر مراجع به‌صورت رابطه‌ی (۷-۱) در نظر گرفته می‌شود:

$$P(z)=P_a\left(\frac{z}{a}\right)^n \qquad (۱-۷)$$

P_a خاصیت مادّه (مکانیکی، حرارتی و..) در یک لایه‌ی مشخص و n ثابت ناهمگنی است.

رایج‌ترین مادّه FG، تلفیق فلز-سرامیک است که با افزودن برخی عناصر آلیاژی دیگر خواص دلخواه تأمین می‌شود. پراوین و ردی (۱۹۹۸)، رابطه‌ی ویژه‌ای برای یک ورق FGM با ضخامت ثابت h ارائه کردند. ایشان تغییر خواص را در ورق به‌صورت زیر بیان نمودند [۲۲]:

$$P(z)=(P_c-P_m)V^n+P_m \qquad (۱-۸)$$

P_m خواص فلز، P_c خواص سرامیک و V نسبت جمی در جسم است.

$$V=\left(\frac{z}{h}\right)+\frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2} \qquad (۱-۹)$$

اگر $n=0$ باشد، ورق همگن سرامیک به‌دست می‌آید؛ اگر $z=-h/2$ باشد، خاصیت فلزی و اگر $z=h/2$ باشد، خاصیت سرامیک به‌دست می‌آید. این مادّه در اجسامی که لبه‌ی بالایی آن در معرض گرادیان دمایی بالا و لبه‌ی پایینی آن تحت بارهای مکانیکی قرار دارند، بسیار مفید است.

رابطه‌ی بالا را می‌توان به‌صورت کلی‌تر برای دو خاصیت به شکل زیر بیان نمود:

$$P(z)=(P_1-P_2)V^n+P_2 \qquad (۱-۱۰)$$

P_1 و P_2 خواص در دو لایه‌ی مختلف می‌باشند. به عنوان مثال رابطه برای یک استوانه‌ی توخالی جدار ثابت به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} E(r) = (E_o - E_i)V^n + E_i \\ V = \dfrac{r/r_i - 1}{r_o/r_i - 1} \end{cases} \qquad (1-11)$$

E_i و E_o به ترتیب، مدول یانگ مادّه‌ی FG در شعاع داخلی و خارجی استوانه است.

توتونچو (۲۰۰۹) سه مدل تابع توانی ساده، تابع توانی مشابه تابع پراوین و ردی و نیز تابع نمایی به‌صورت تلفیق فلز-سرامیک ارائه کرد [۲۳]. شاوُ (۲۰۰۸) برای خواص مادّه‌ی ناهمگن تابع نمایی به‌صورت رابطه‌ی (۱۲-۱) ارائه کرد [۲۴]:

$$\begin{cases} A(R) = A_o e^{m_i(R-R_1)} \\ R_1 = \dfrac{r_1}{r_m}, R_2 = \dfrac{r_2}{r_m} \end{cases} \qquad (1-12)$$

که در این رابطه m_i ثابت ناهمگنی مادّه، r_1 و r_2 به ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و r_m میانگین شعاع داخلی و خارجی و A_0 خواص لایه‌ی خارجی استوانه است.

توتونچو (۲۰۰۷) [۲۵] و همچنین کلس و کانکر (۲۰۱۱) [۲۶] تغییرات خواص در جداره‌ی استوانه را به‌صورت تابع نمایی طبق رابطه‌ی زیر بیان نمودند:

$$A(r) = A_o e^{\beta r} \qquad (1-13)$$

که در آن r شعاع استوانه، β ثابت ناهمگنی مادّه و A_0 نیز خواص لایه‌ی خارجی استوانه است.

حسینی و همکاران در (۲۰۰۹) تغییرات خواص در جداره‌ی استوانه را به‌صورت تابع توانی طبق رابطه‌ی زیر بیان نمودند:

$$A(r) = A_i r^m \qquad (1-14)$$

که در آن r شعاع استوانه، m ثابت ناهمگنی مادّه و A_0 نیز خواص لایه‌ی داخلی استوانه است.

۱-۶ پیشینه‌ی پژوهش

تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد به روش‌های مختلف، همان‌گونه که در بخش ۱-۴ بیان شده، دارای قدمتی نسبتاً طولانی است. تحلیل استوانه‌های ناهمسانگرد به حدود نیم قرن

پیش برمی‌گردد، ولی تحلیل استوانه‌های ناهمگن مربوط به دهه‌ی اخیر است. در این بخش، مطالعات انجام شده بر روی استوانه‌های همگن و ناهمگن در رابطه با موضوع پروژه گزارش می‌شود.

استوانه‌های همگن: برای اوّلین بار لامه در ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از مواد همگن وهمسانگرد تحت فشار یکنواخت داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای را ارائه کرد [۳ و ۷]. گالرکین در ۱۹۳۰ روابط حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف در ۱۹۴۹ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلّ برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی در ۱۹۵۶ با لحاظ اثر برش عرضی، تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود [۴]. میرسکی و هرمان در ۱۹۸۵ با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل، تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم را ارائه کردند [۵]. در ۱۹۶۰ مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را گرینسپن با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم، محاسبه و با یکدیگر مقایسه نمود [۶].

زیو و پرل در ۱۹۷۳ با بکارگیری تئوری میرسکی-هرمان و روش عددی تفاضل محدود، پاسخ ارتعاشی استوانه‌های نیمه‌بلند را به‌دست آوردند [۲۷]. سوزوکی و تاکاهاشی در ۱۹۸۱ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، معادلات ارتعاشی حاکم بر استوانه‌های همگن جدار متغیّر را استخراج و آن‌ها را به کمک سری فریبینیوس حلّ کردند. ایشان برای همگرایی، ۵۰ جمله از سری را در نظر گرفتند [۲۸]. سوزوکی و همکاران در ۱۹۸۶ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، معادلات ارتعاشی حاکم بر مخروط‌های همگن جدار متغیّر را به‌دست آورده و آن‌ها را به کمک سری فریبینیوس با لحاظ ۱۰۰ جمله از سری، حلّ کردند [۲۹]. اپیک‌چی و همکاران در ۲۰۰۳ معادلات استوانه‌های همگن و همسانگرد با جدار متغییر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی، اوّل استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات حلّ کردند [۳۰]. ایشان در ۲۰۰۸ معادلات مخروط‌های همگن و همسانگرد با جدار متغییر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی دوم، استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات حلّ کردند [۳۱]. قنّاد و همکاران در ۲۰۰۹ حلّ عمومی پوسته‌های مخروطی شکل ناقص

جدار ضخیم همگن و همسانگرد را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل به کمک تئوری اغتشاشات ارائه نمودند [۳۲]. در سال ۲۰۱۰ نیز قنّاد و زمانی‌نژاد با استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم همگن و همسانگرد بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت حاصل را برای شرایط مرزی دوسر گیردار حلّ نمودند [۳۳]. ایپک‌چی در ۲۰۱۰ نیز معادلات پوسته‌های جدار ضخیم مخروطی شکل همگن و همسانگرد با جدار متغیّر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات حلّ کرد [۳۴].

استوانه‌های ناهمگن: پس از اوّلین سمپوزیوم جهانی FGM در ۱۹۹۰، فوکوپی و یامانکا در ۱۹۹۲ روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و آن‌ها را به روش عددی رانگ-کوتا حلّ کردند [۳۵]. اَباتا و نودا در ۱۹۹۴ تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه و کره‌ی توخالی FGM استخراج و مادّه‌ی بهینه را به‌دست آوردند [۱۴]. لوی و ردی در ۱۹۹۹ ارتعاشات پوسته‌های نازک استوانه‌ای FGM را با استفاده از تئوری لوو-کیرشهف استخراج و آن‌ها را به کمک روش ریلی-ریتز حلّ کردند [۳۶]. هورگان و چانگ در ۱۹۹۹ معادلات حاکم بر استوانه‌ی توخالی FGM در حالت کرنش صفحه‌ای را به کمک معادلات لامه استخراج و توزیع تنش را به‌دست آوردند [۱۴]. ایشان در ۱۹۹۹ با همین روش، تنش‌ها را در یک دیسک وار FGM بررسی کردند [۳۷]. توتونچو در ۲۰۰۱ حلّ دقیق مخازن استوانه‌ای و کروی جدار ثابت FGM با توزیع توانی مدول الاستیسیته تحت فشار یکنواخت داخلی را رائه کردند. ایشان معادلات استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک تئوری لامه استخراج و توزیع تنش را به ازای ریشه‌های مثبت معادله مشخصه به‌دست آوردند. در مقاله‌ی ایشان، رابطه و نمودار تنش محیطی و نمودار تنش شعاعی اشتباه است که در برخی از پژوهش‌های پیشین نیز استفاده شده است [۱۷]. جباری و همکاران در ۲۰۰۳ تنش‌های مکانیکی و حرارتی در

یک استوانه‌ی توخالی FGM تحت بارهای متقارن [۱۹] و در ۲۰۰۳ تحت بارهای نامتقارن حرارتی [۳۸] را به‌دست آوردند.

هونگ چون و ژیفای در ۲۰۰۶ حلّ دقیق استوانه‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی مدول یانگ در راستای شعاعی با لایه‌های همگن را ارائه کردند [۲۱]. ژیفای و همکاران در ۲۰۰۷ با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به‌صورت توانی و خطی، استوانه‌ی FGM را با روش چندلایه‌ای کردن، تحلیل و با حلّ توتونچو مقایسه و در نتیجه به اشتباه مقاله‌ی نامبرده پی‌بردند [۲۵]. شاو در ۲۰۰۸ تحلیل ترمومکانیکی استوانه‌های توخالی تشکیل شده ازمواد FG با تغییرات نمایی خواص تحت بارهای مکانیکی و افزایش خطی دمای مرزی را با انتقال معادلات دیفرانسیل حاکم به حوزه‌ی لاپلاس و استفاده از روش حلّ به کمک سری‌ها انجام داد [۲۴]. توتونچو در ۲۰۰۹ نیز توزیع میدان جابه‌جایی و مقادیر تنش مربوط به دیسک، استوانه و کره‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی و توانی خواص مادّه در راستای شعاع تحت فشار داخلی را توسط تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و روش تابع متمم تعیین نمود [۲۳]. زمانی‌نژاد و قنّاد در ۲۰۰۹ با ارائه‌ی دستگاه معادلات سه‌بعدی براساس تحلیل تانسوری، رفتار پوسته‌های جدار ضخیم FGM حاصل از دوران با انحنای دلخواه و ضخامت متغیّر در راستای نصف‌النّهاری را بررسی کردند [۴۰]. قنّاد و همکاران در ۲۰۱۰ حلّ عمومی استوانه‌های جدار کلفت FGM را بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی به ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط در شرایط تنش صفحه‌ای و استوانه‌ی بسته ارائه و اشتباه مقاله‌ی توتونچو را نشان داده و آن را تصحیح کردند [۴۱]. ایشان در ۲۰۱۱ حلّ عمومی استوانه‌های جدار کلفت FGM را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، ارائه و نتایج آن را با حلّ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی مقایسه نمودند [۴۲]. در ۲۰۱۰ عارفی و رحیمی تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را تحت فشار داخلی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل در حالت کرنش صفحه‌ای انجام دادند [۴۳]. قربانپور و همکاران در ۲۰۱۱ اثر ناهمگنی را بر روی رفتار الکتریکی، حرارتی و مکانیکی یک استوانه‌ی چرخان جدار ضخیم

FGPM با تغییرات توانی خواص تحت فشار داخلی و خارجی بررسی و معادلات حاصل را برای این استوانه حلّ کردند [۴۴].

بارگذاری حرارتی پایا وگذرا: سوگانو و اوساکا در ۱۹۸۷ توزیع تنش در یک ورق ناهمگن با توزیع دلخواه خواص مکانیکی تحت دمای گذرا را توسط تئوری کلاسیک ورق‌ها به‌دست آوردند و تاثیرات ناهمگنی را بر تنش و دما بررسی کردند [۴۵]. اُواتا و تانیگاوا در ۱۹۹۱ توزیع تنش‌های استوانه‌ی توخالی کامپوزیتی چند لایه تحت بارگذاری حرارتی گذرا را با استفاده از تئوری لاو-کیرشهف ارائه نمودند. آن‌ها توزیع حرارت را در راستای شعاعی و طولی در نظر گرفته و برای حلّ آن از تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه‌ی کسینوسی استفاده نمودند [۴۶]. اسلادک و ژانگ در ۲۰۰۳ تحلیل هدایت حرارتی گذرا در مواد FG با استفاده از روش معادلات انتگرال محلّی بدون مش را ارائه نمودند [۴۷]. اُوتا و تانیگاوا در ۲۰۰۵ حلّ سه بعدی ورق مستطیلی FGM تحت بارگذاری حرارتی گذرا را ارائه نموند. آن‌ها در این تحقیق توزیع خواص مکانیکی را به‌صورت نمایی در نظر گرفتند و معادله‌ی انتقال حرارت را با روش لاپلاس و تبدیل کسینوسی محدود حلّ نمودند [۴۸]. حسینی و همکاران در ۲۰۰۹ حلّ تحلیلی استوانه‌ی جدار ضخیم FGM تحت بارگذاری حرارتی گذرا به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی را ارائه نمودند. آن‌ها خواص مکانیکی را به‌صورت تابع توانی در نظر گرفته‌اند و استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای حلّ نموده‌اند [۴۹]. عسگری واخلاقی در ۲۰۰۹ انتقال حرارت گذرای دو بعدی استوانه‌ی توخالی FGM با طول محدود را با روش اجزاء محدود (FEM) ارائه نمودند. آن‌ها از روش Crank-Nicolson برای حلّ تابعیت دمایی استفاده کردند و تاثیرات توزیع خواص در دو جهت شعاعی و طولی بر روی توزیع دما و پاسخ زمانی را ارائه نمودند[۵۰]. رحمتی‌نژاد و همکاران در ۲۰۱۱ حلّ میدان حرارتی گذرای استوانه‌ی توخالی FGM را به وسیله‌ی روش چندلایه کردن ارائه نمودند. آن‌ها از روش چندلایه کردن که مبتنی بر تئوری‌های کامپوزیتی است برای این منظور استفاده کردند و توزیع حرارات وابسته به زمان و شعاع را ارائه نمودند[۵۱]. زمانی‌نژاد و همکاران در ۲۰۱۳ حلّ تحلیلی ترموالاستیک گذرا برای پوسته‌های

استوانه‌ای چرخان همگن تحت شرایط مرزی کلی و فشار داخلی و خارجی توأمان را ارائه نمودند. آن‌ها برای حلّ معادله‌ی انتقال حرارت از روش جدایی متغیّرها استفاده نمودند و توزیع حرارت و تنش را ارائه نمودند [۵۲]. زمانی‌نژاد و همکاران در ۲۰۱۴ حلّ دقیق ترموالاستیک گذرای دیسک چرخان همگن تحت شرایط مرزی دلخواه ارائه نمودند. و معادله‌ی انتقال حرارت را به وسیله‌ی روش جدایی متغیّرها حلّ و توزیع حرارت و تنش‌ها را ارائه نمودند [۵۳].

۱-۷ جمع‌بندی

برای تحلیل استوانه‌های ضخیم همگن و ناهمگن با جدار ثابت، فشار یکنواخت و شرایط انتهایی متفاوت، به گونه‌ای که مسأله از حالت الاستیسیته‌ی دوبعدی خارج نشود، می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و تئوری تغییر شکل برشی استفاده کرد ولی برای تحلیل استوانه‌های کلفت همگن و ناهمگن با جدار متغیّر و یا فشار یکنواخت، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مناسب‌تر است. همچنین با توجه به اینکه در تئوری تغییر شکل برشی بر خلاف تئوری الاستیسیته‌ی مستوی کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفته می‌شود استفاده از تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل استوانه‌ها تحت شرایط مرزی مختلف مناسب‌تر می‌باشد. به دلیل اهمیّت تحلیل پوسته‌ها و همچنین مادّه‌ی تشکیل دهنده‌ی آن‌ها و با توجه به اینکه تاکنون حلّ تحلیلی با استفاده از روش انرژی برای استوانه‌های جدار کلفت FGM با تغییرات توانی خواص تحت بارگذاری‌های فشاری، حرارتی گذرا و دورانی به‌طور همزمان ارائه نشده است، در این پروژهش با ارائه حلّ تحلیلی برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم با شرایط انتهایی دوسر گیردار به کمک تئوری تغییر شکل برشی، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حلّ عددی به‌منظور بررسی صحّت نتایج صورت پذیرفته است.

ابتدا در فصل اوّل این پژوهش، ضمن مرور تئوری پوسته‌های نازک و کلفت، مطالعات انجام شده در خصوص پوسته‌های استوانه‌ای ارائه شده است. همچنین مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM) تعریف و ضمن بیان تاریخچه و ویژگی‌های آن‌ها فرایندهای تولید و مدل‌سازی آن‌ها مورد بررسی

قرار گرفته و پیشینه‌ی پژوهشی مواد FG ارائه شده است. فصل دوم شامل استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم با استفاده از روش انرژی برای استوانه‌ی همگن می‌باشد. همچنین در این فصل حلّ معادله‌ی انتقال حرارت گذرا برای استوانه‌ی همگن ارائه شده است. درنهایت نمودارهای مربوط به توزیع جابه‌جایی و تنش در دو حالت مختلف فقط بارگذاری حراراتی، فشار داخلی و بارگذاری حراراتی توأمان ارائه شده است و تاثیر زمان بر مطالعه‌ی موردی مربوطه برای استوانه‌ی دوسر گیردار ارائه شده است. برای سنجش درستی نتایج حاصل، استوانه‌ی مربوطه در نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس مدل شده است ونتایج با یکدیگر مقایسه شده است. در فصل سوم تأثیر چرخش بر معادلات و توزیع جابه‌جایی و تنش بررسی شده است. در این فصل قسمت مربوط به چرخش به معادلات تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل اضافه شده و نمودارهای توزیع تنش و جابه‌جایی برای استوانه‌ی دوسرگیردار درحضور چرخش، فشار و بارگذاری حراراتی گذرا ارائه شده است. و نتایج با حلّ عدی نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس مقایسه و صحّت‌سنجی شده است. در فصل چهارم معادلات و روابط مربوط به استوانه‌ی ناهمگن سخته شده از مواد FG با توزیع توانی مدول الاستیسیته تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل ارائه شده و نتایج مربوط به توزیع جابه‌جایی و تنش در راستاهای مختلف طولی وشعاعی و براساس زمان نشان داده شده است. نتایج حاصل با نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس مقایسه شده است. در فصل پنجم اثر چرخش بر معادلات استوانه‌ی جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد FG با توزیع توانی مدول الاستیسیته براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل گزارش شده و نتایج آن با حلّ عددی آباکوس مقایسه شده است. نتیجه‌گیری، جمع‌بندی نهایی و ارائه پیشنهادها در فصل ششم انجام شده است.

فصل ۲

تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا

۲-۱ مقدمه

از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای جدار کلفت دارای اهمیّت ویژه‌ای می‌باشند و همواره مهندسان و دانش‌پژوهان به دنبال اعمال تغییرات بر روی ضخامت و مادّه‌ی این دسته از پوسته‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر نیروهای وارد شده افزایش داده و در صورت امکان وزن آن‌ها را کاهش دهند. استوانه‌های جدار ضخیم در مخازن تحت فشار و لوله‌های توپ استفاده می‌شوند.

در این فصل ابتدا به معرفی و مقایسه‌ی تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و تئوری تغییر شکل برشی به‌طور مختصر پرداخته می‌شود. سپس برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای همگن، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد همگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل، حلّ عمومی استوانه‌های جدار ضخیم همگن تحت بار حراراتی گذرا و فشار یکنواخت داخلی ارائه شده است. درنهایت با ارائه‌ی حلّ عددی توسط نرم افزار اجزاء محدود Abaqus برای استوانه‌ی تحت بار حراراتی گذرا و فشار داخلی، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، به کمک روش تغییر شکل برشی، با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده است.

۲-۲ تئوری تغییر شکل برشی

در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی همان‌طور که در فصل اوّل به آن اشاره شد فرض می‌شودکه مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار وتغییر شکل، هم‌چنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند و تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور استوانه متقارن بوده و مقدار آن‌ها در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفته نمی‌شوند. همچنین تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می‌کند، به عبارت دیگر تغییر مکان شعاعی فقط تابع شعاع $U_r(r)$ است. بنابراین به دلیل عدم وجود تنش برشی، تنش‌های عمودی، تنش‌های اصلی می‌باشند. در تئوری کلاسیک پوسته‌های

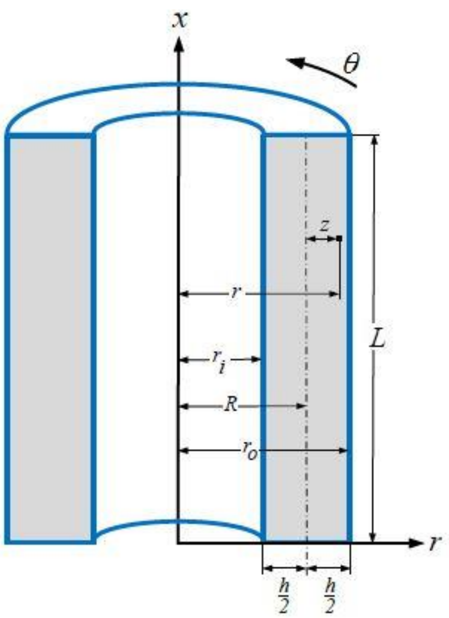
نازک فرض می‌شود که خطوط راست وعمود بر صفحه‌ی میانی، پس از تغییر شکل همچنان راست و عمود باقی می‌مانند و جابه‌جایی هر نقطه از پوسته، همان جابه‌جایی صفحه‌ی میانی در نظر گرفته می‌شود. در این تئوری نیز از کرنش برشی و تنش برشی چشم پوشی می‌شود. در تئوری تغییر شکل برشی، خطوط راست و عمود بر لایه‌ی میانی، پس از تغییر شکل راست باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود نیستند، یعنی تنش و کرنش برشی لحاظ می‌شوند.

اگر مطابق شکل (۱-۲)، فاصله هر نقطه‌ی پوسته از محور تقارن (r) برابر با مجموع شعاع صفحه‌ی میانی (R) و فاصله‌ی آن نقطه از صفحه‌ی میانی (z) در نظر گرفته شود.

$$r = R + z \quad , \quad -\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2} \tag{۲-۱}$$

همچنین h ضخامت و L طول استوانه است.

$$0 \le x \le l \quad , \quad h = r_0 - r_i \tag{۲-۲}$$



شکل۲-۱ پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت

بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، جابه‌جایی استوانه برابر است با:

$$u_r = c_1 r + \frac{c_2}{r} = c_1(R+z) + \frac{c_2}{R+z} \qquad (۲-۳)$$

با توجه به شرط $\left|\frac{z}{R}\right| < 1$ و به کمک بسط تیلور، جابه‌جایی شعاعی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_r = c_1(R+z) + \frac{c_2}{R}\left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \ldots\right) = \left(c_1 R + \frac{c_2}{R}\right) + \left(c_1 - \frac{c_2}{R^2}\right)z + \frac{c_2}{R^3}z^2 + \ldots \qquad (۲-۴)$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$u_r = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots \qquad (۲-۵)$$

بر اساس رابطه‌ی (۵-۲) جابه‌حایی شعاعی استوانه را به‌صورت یک چند جمله‌ای بر حسب z می‌توان نوشت که حالت $z = 0$ بیانگر جابه‌جایی صفحه‌ی میانی است.

با استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اوّل (اشاره شده در فصل اوّل)، میدان جابه‌جایی برای استوانه‌ی جدار ضخیم در حالت متقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{cases} U_x = u(x,t) + \phi(x,t)z \\ U_\theta = 0 \\ U_z = w(x,t) + \psi(x,t)z \end{cases} \qquad (۲-۶)$$

همچنین مقادیر کرنش‌ها بر اساس روابط سینماتیک در حالت تقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial U_x}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi}{\partial x} z \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{U_z}{R} = \dfrac{w}{R+z} + \dfrac{\psi}{R+z} z \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial U_z}{\partial z} = \psi \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\partial U_x}{\partial z} + \dfrac{\partial U_z}{\partial x} = \left(\phi + \dfrac{dw}{dx}\right) + \dfrac{d\psi}{dx} z \end{cases} \qquad (۲-۷)$$

بر اساس روابط رفتاری برای مواد همگن و همسانگرد تنش‌ها بر حسب مقادیر کرنش عبارتند از:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} - \dfrac{\alpha E\,\Delta T\,(r,t)}{1-2\nu} \\ \tau_{xz} = \dfrac{E}{2(1-\nu)}\gamma_{xz} \end{cases} \qquad (۲-۸)$$

با تعریف پارامتر جدید λ برای خلاصه نویسی داریم:

$$\begin{cases} \sigma_i = \lambda E\left[(1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k) - \alpha(1+\nu)\Delta T\,(r,t)\right] \\ \tau_{xz} = \dfrac{1-2\nu}{2}\lambda\gamma_{xz} \\ \lambda = \dfrac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \qquad (۲-۹)$$

نیروهای محوری بر حسب منتجه‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x (1+\dfrac{z}{R}) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z (1+\dfrac{z}{R}) \end{Bmatrix} dz \qquad (۲-۱۰)$$

لنگرهای خمشی بر حسب منتجه‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x (1+\dfrac{z}{R}) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z (1+\dfrac{z}{R}) \end{Bmatrix} z\,dz \qquad (۲-۱۱)$$

نیروهای برشی بر حسب تنش برشی برابر است با:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} (1+\frac{z}{R})dz \qquad (۲-۱۲)$$

و لنگر پیچشی بر حسب تنش برشی برابر است با:

$$M_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} (1+\frac{z}{R})z\,dz \qquad (۲-۱۳)$$

۲-۳ حلّ معادله‌ی انتقال حرارت گذرا برای استوانه‌ی همگن

استوانه‌ای تو خالی با شعاع داخلی r_i و خارجی r_o در نظر گرفته شده است. معادله‌ی انتقال حرارت یک‌بعدی برای استوانه‌ی جدارضخیم همگن در غیاب منبع دمایی برای حالت متقارن محوری به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} \\ \alpha=\dfrac{k}{\rho c} \end{cases} \qquad (۲-۱۴)$$

که $T(r,t)$ توزیع دما، α ضریب پخش حرارتی و k، ρ و c به ترتیب ضریب هدایت حراراتی، چگالی حجمی و حرارت مخصوص است.

شرایط اوّلیه و مرزی مسئله به شکل زیر است:

$$\begin{cases} B.C:\begin{cases} C_{11}T(r_i,t)+C_{12}\dfrac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r_i}=g_1 \\ C_{21}T(r_o,t)+C_{22}\dfrac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r_o}=g_2 \end{cases} \\ I.C: T(r,0)=T_i(r) \end{cases} \qquad (۲-۱۵)$$

که $C_{ij}(i,j=1,2)$ و $g_i(i=1,2)$ ثابت هستند و به شرایط مرزی و اوّلیه‌ی دمایی بستگی دارد. معادله‌ی (۲-۱۴) با استفاده از جدایی متغیّرها، قوانین بسل و توابع مقدار ویژه به‌صورت زیر قابل حلّ است:

$$T(r,t)=T_h(r,t)+T_s(r) \qquad (۲-۱۶)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_s}{\partial r}\right)=0 \qquad (۲-۱۷)$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_h}{\partial t}=\frac{\partial^2 T_h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_h}{\partial r} \qquad (۲-۱۸)$$

شرایط مرزی برای $T_s(r)$ نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} C_{11}T_s(r_i,t)+C_{12}\dfrac{\partial T_s}{\partial r}\Big|_{r_i}=g_1 \\ C_{21}T_s(r_o,t)+C_{22}\dfrac{\partial T_s}{\partial r}\Big|_{r_o}=g_2 \end{cases} \tag{۲-۱۹}$$

با دو بار انتگرال گیری از معادله‌ی (۲-۱۷) داریم:

$$T_s=C_1\ln(r)+C_2 \tag{۲-۲۰}$$

که ثابت‌های C_1 و C_2 از شرایط مرزی قابل محاسبه هستند:

$$C_1=\frac{C_{11}g_2-C_{21}g_1}{C_{21}C_{11}\ln(\frac{r_o}{r_i})-\frac{C_{21}C_{12}}{r_i}+\frac{C_{22}}{r_o}} \tag{۲-۲۱}$$

$$C_2=\frac{1}{C_{11}}\left(g1-\frac{(C_{11}g_2-C_{21}g_1)\left(C_{11}\ln r_i+\frac{C_{12}}{r_i}\right)}{C_{21}C_{11}\ln(\frac{r_o}{r_i})-\frac{C_{21}C_{12}}{r_i}+\frac{C_{22}}{r_o}}\right) \tag{۲-۲۲}$$

برای $T_h(r,t)$ شرایط مرزی و اوّلیه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} B.C: \begin{cases} C_{11}T_h(r_i,t)+C_{12}\dfrac{\partial T_h}{\partial r}\Big|_{r_i}=0 \\ C_{21}T_h(r_o,t)+C_{22}\dfrac{\partial T_h}{\partial r}\Big|_{r_o}=0 \end{cases} \\ I.C: T_h(r,0)=T_i(r)-T_s(r) \end{cases} \tag{۲-۲۳}$$

بنابراین حلّ $T_h(r,t)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} T_h(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\|f(r,\beta_n)\|^2}\Bigg(&\int_{r_i}^{r_o}T_i(r)f(r,\beta_n)rdr+\Bigg[\left(\frac{r_o}{\beta_n{}^2}(C_1\ln(r_o)+C_2)\frac{\partial f(r,\beta_n)}{\partial r}\Big|_{r=r_o}\right) \\ &-\left(\frac{r_i}{\beta_n{}^2}(C_1\ln(r_i)+C_2)\frac{\partial f(r,\beta_n)}{\partial r}\Big|_{r=r_i}\right)+\frac{C_1}{\beta_n{}^2}((f(r_o,\beta_n)-f(r_i,\beta_n)))\Bigg]\Bigg)f(r,\beta_n)e^{-\alpha t\beta_n{}^2} \end{aligned} \tag{۲-۲۴}$$

که:

$$\frac{\partial f(r,\beta_n)}{\partial r}=-\beta_n(AJ_1(\beta_n r)+BY_1(\beta_n r)) \tag{۲-۲۵}$$

و β_n مقادیر ویژه که همان ریشه‌های مثبت معادله‌ی مشخصه زیر است:

$$\left(C_{11}Y_0(\beta_n r_i)-\beta_n C_{12}Y_1(\beta_n r_i)\right)\left(C_{21}J_0(\beta_n r_o)-\beta_n C_{22}J_1(\beta_n r_o)\right) \\ -\left(C_{21}Y_0(\beta_n r)-\beta_n C_{22}Y_1(\beta_n r_o)\right)\left(C_{11}J_0(\beta_n r_i)-\beta_n C_{12}J_1(\beta_n r_i)\right)=0 \qquad (۲-۲۶)$$

که J_0 و Y_0 توابع بسل نوع اوّل و دوم می‌باشند. معادله‌ی مقدار ویژه‌ی $f(r,\beta_n)$ به شکل زیر است:

$$f(r,\beta_n)=AJ_0(\beta_n r)+BY_0(\beta_n r) \qquad (۲-۲۷)$$

A و B پارامترهای ثابتی هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} A=C_{11}Y_0(\beta_n r_i)-C_{12}\beta_n Y_1(\beta_n r_i) \\ B=-C_{11}J_0(\beta_n r_i)-C_{12}\beta_n J_1(\beta_n r_i) \end{cases} \qquad (۲-۲۸)$$

$\|f(r,\beta_n)\|^2$ نُرم معادله‌ی مقدار ویژه است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

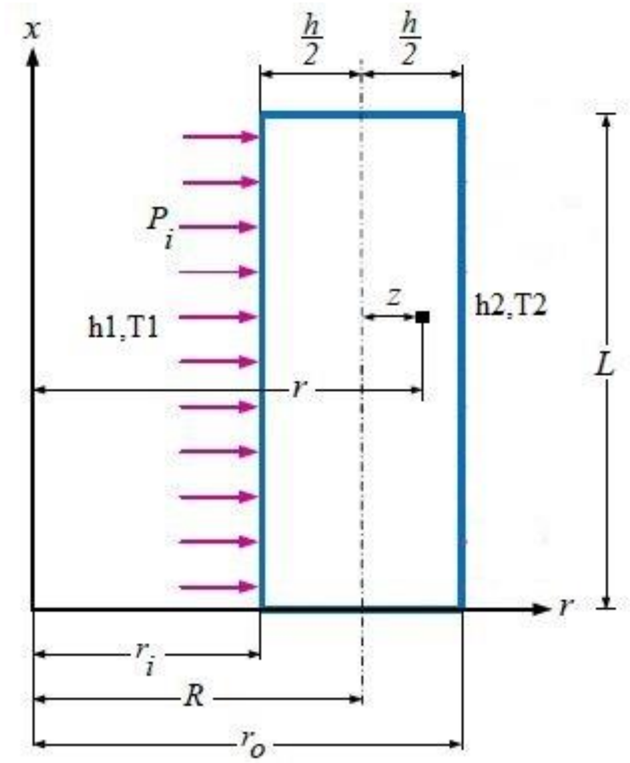
$$\|f(r,\beta_n)\|^2=\int_{r_i}^{r_o} rf^2(r,\beta_n)dr \qquad (۲-۲۹)$$

درنهایت با توجه به اینکه در معادله‌ی کرنش حرارتی، عبارت توزیع اختلاف دما یعنی $\Delta T(z,t)$ ظاهر می‌شود بنابراین به جای r از $R+z$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\Delta T(z,t)=T(z,t)-T_\infty$$

۲-۴ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ی همگن

یک پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی را به‌صورت شکل (۲-۲) در نظر می‌گیریم:



شکل۲- ۲ پروفیل استوانه‌ی جدارثابت تحت فشار داخلی و بارگذاری حرارتی گذرا

بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \tag{۲-۳۰}$$

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\begin{cases} U = \iiint\limits_V U^* dV \\ dV = r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \end{cases} \tag{۲-۳۱}$$

$$\begin{aligned} U^* &= \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz}\gamma_{xz}) \\ &= \frac{1}{2} E \lambda \left[(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \varepsilon_z \varepsilon_\theta) + \frac{1-2\nu}{2}\gamma_{xz}^2 \right] \end{aligned} \tag{۲-۳۲}$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار داخلی:

$$\begin{cases} W = \iint_s (\overrightarrow{f_{sf}}\,\vec{u})dS \\ dS = rd\theta dx = (R+z)d\theta dx \\ W = \int_0^{2\pi}\int_0^L (P_i r_i)U_z dxd\theta \end{cases} \tag{۲-۳۳}$$

و با انتگرال گیری در محدوده‌ی:

$$-\frac{h}{2} \le z \le +\frac{h}{2} \tag{۲-۳۴}$$

برای تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی داریم:

$$\delta U = R\int_0^{2\pi}\int_0^L\int_{-h/2}^{h/2}\delta U^*(1+\frac{z}{R})dzdxd\theta \tag{۲-۳۵}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} = R\int_0^L\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz})\left(1+\frac{z}{R}\right)dzdx$$

$$\delta W = \int_0^{2\pi}\int_0^L (P_i r_i)\delta U_z dxd\theta \tag{۲-۳۶}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} = \int_0^L\left[P_i(R-\frac{h}{2})\right](\delta w + z\,\delta\psi)dx$$

با جایگذاری کرنش‌های رابطه‌ی (۷-۲) در روبط (۳۵-۲) و نیز (۳۶-۲) و نیز به‌کارگیری اصول حساب وردشی و اصل کار مجازی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{2\pi} = \frac{\delta W}{2\pi} \tag{۲-۳۷}$$

$$\begin{cases} R\,\dfrac{dN_x}{dx} = 0 \\ R\,\dfrac{dM_x}{dx} - RQ_x = 0 \\ R\,\dfrac{dQ_x}{dx} - N_\theta = -P_i\left(R-\dfrac{h}{2}\right) \\ R\,\dfrac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - RN_z = P_i\left(R-\dfrac{h}{2}\right) \end{cases} \tag{۲-۳۸}$$

$$R\left[N_x\,\delta u + M_x\,\delta\phi + Q_x\,\delta w + M_{xz}\,\delta\psi\right]_0^L = 0 \qquad (۲-۳۹)$$

روابط (۳۸-۲) همان معادلات تعادل را تشکیل می‌دهند. رابطه‌ی کمکی (۳۹-۲) شرایط مرزی مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌بایست در هر دو انتهای استوانه صفر باشد.

معادلات (۳۸-۲) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل است. برای حلّ آن باید نیروها و لنگرها را با استفاده از روابط (۱۰-۲) تا (۱۳-۲) به منتجه‌های تنش و با جایگذاری در روابط (-۲ ۹) به مولفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۷-۲) بر حسب مولفه‌های میدان جابه‌جایی نوشت. درنهایت یک دستگاه چهار معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به‌دست می‌آید که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$[A]\frac{d^2}{dx^2}\{y\}+[B]\frac{d}{dx}\{y\}+[C]\{y\}=\{F\} \qquad (۲-۴۰)$$

که در آن بردار مجهول $\{y\}$ شامل مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی به‌صورت رابطه‌ی (۴۱-۲) است:

$$\{y\}=\{u \;\; \phi \;\; \mathrm{w} \;\; \psi\}^T \qquad (۲-۴۱)$$

رابطه‌ی (۴۱-۲) نیز قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به‌صورت بردار نیروی $\{F\}$ را نشان می‌دهد. عبارات مربوط به اختلاف دما پس از بدست آوردن مقادیر منتجه‌های تنش از سمت چپ معادله به سمت راست آمده و در حلّ ناهمگن (خصوصی) معادله قرار می‌گیرند:

$$\{F\}=\frac{1}{\lambda E}\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad 0 \\ \qquad\qquad 0 \\ -P_i\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\lambda E\,\alpha\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\Delta T(z,t)(1+\nu)dz \\ P_i\,\dfrac{h}{2}\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\lambda E\,\alpha\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\Delta T(z,t)(1+\nu)(R+2z)dz \end{array}\right\} \qquad (۲-۴۲)$$

در دستگاه معادلات (۴۰-۲) ماتریس‌های $[A]_{4\times4}$ و $[C]_{4\times4}$ متقارن و $[B]_{4\times4}$ پادمتقارن هستند که در ادامه درایه‌های مربوط به آن‌ها آورده شده است:

$$A_{11}=R(1-\nu)\int_{-h/2}^{h/2}\left(1+\frac{z}{R}\right)dz \qquad (۲-۴۳)$$

$$A_{12} = R(1-\nu)\int_{-h/2}^{h/2}\left(1+\frac{z}{R}\right)z\,dz = A_{21} \qquad (۲\text{-}۴۴)$$

$$A_{22} = R(1-\nu)\int_{-h/2}^{h/2}\left(1+\frac{z}{R}\right)z^{2}dz \qquad (۲\text{-}۴۵)$$

$$A_{33} = R\mu\int_{-h/2}^{h/2}\left(1+\frac{z}{R}\right)dz \qquad (۲\text{-}۴۶)$$

$$A_{34} = R\mu\int_{-h/2}^{h/2}\left(1+\frac{z}{R}\right)z\,dz = A_{43} \qquad (۲\text{-}۴۷)$$

$$A_{44} = R\mu\int_{-h/2}^{h/2}\left(1+\frac{z}{R}\right)z^{2}dz \qquad (۲\text{-}۴۸)$$

$$A_{13} = A_{14} = A_{23} = A_{24} = A_{31} = A_{32} = A_{41} = A_{42} = 0 \qquad (۲\text{-}۴۹)$$

$$B_{13} = \nu h = -B_{31} \qquad (۲\text{-}۵۰)$$

$$B_{14} = \nu\int_{-h/2}^{h/2}\left(R+2z\right)dz = -B_{41} \qquad (۲\text{-}۵۱)$$

$$B_{23} = \int_{-h/2}^{h/2}\left[\left(\nu-\mu\right)z - R\mu\right]dz = -B_{32} \qquad (۲\text{-}۵۲)$$

$$B_{24} = \int_{-h/2}^{h/2}\left[R\left(\nu-\mu\right)+z\,(2\nu-\mu)\right]z\,dz = -B_{42} \qquad (۲\text{-}۵۳)$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = B_{33} = B_{34} = B_{43} = B_{44} = 0 \qquad (۲\text{-}۵۴)$$

$$C_{22} = -R\mu\int_{-h/2}^{h/2}\left(1+\frac{z}{R}\right)dz \qquad (۲\text{-}۵۵)$$

$$C_{33} = -(1-\nu)\int_{-h/2}^{h/2}\frac{1}{R+z}dz \qquad (۲\text{-}۵۶)$$

$$C_{34} = -\nu h - (1-\nu)\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{z}{R+z}\right)dz = C_{43} \qquad (۲\text{-}۵۷)$$

$$C_{44} = -2\nu\int_{-h/2}^{h/2}z\,dz - \left(1-\nu\right)\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{z^{2}}{R+z}\right)dz - R(1-\nu)\int_{-h/2}^{h/2}\left(1+\frac{z}{R}\right)dz \qquad (۲\text{-}۵۸)$$

$$C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{21} = C_{23} = C_{24} = C_{31} = C_{32} = C_{41} = C_{42} = 0 \qquad (۲\text{-}۵۹)$$

که پارامتر μ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu = \frac{K}{2}(1-2\nu) \tag{۲-۶۰}$$

K ضریب تصحیح برشی[1]است که بسته به هندسه‌ی پوسته در عبارت تنش برشی وارد می‌شود. این ضریب در حالت استاتیک برای استوانه $K = 5/6$ در نظر گرفته می‌شود.

۲-۴-۱ حلّ ترموالاستیک استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی

همانطور که توضیح داده شد، دستگاه معادله‌ی (۴۰-۲) یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن با ضرایب ثابت است که دارای حلّ عمومی و حلّ خصوصی است. اگر این دستگاه معادلات را به‌صورت ساده شده‌ی زیر بنویسیم:

$$A\{y''\} + B\{y'\} + C\{y\} = \{F\} \tag{۲-۶۱}$$

داریم:

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p \tag{۲-۶۲}$$

برای حلّ عمومی دستگاه فوق مقدار $\{y\} = \{\xi\}e^{mx}$ رادر معادلات آن می‌گذاریم، داریم:

$$e^{mx}\left[m^2A_1 + mA_2 + A_3\right]\{\xi\} = \{0\} \tag{۲-۶۳}$$

با توجه به اینکه $e^{mx} \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$\left|m^2A + mB + C\right| = 0 \tag{۲-۶۴}$$

از حلّ معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه‌ی m_i محاسبه شده که به‌صورت چهار جفت ریشه‌ی مزدوج حاصل می‌شوند که یک جفت آن صفر می‌باشند. از سه جفت ریشه‌ی باقیمانده، یک جفت آن حقیقی و دو جفت دیگر اعداد مختلط به‌صورت مزدوج می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه‌ی حاصل در معادله‌ی (۴۹-۲)، بردارهای ویژه‌ی ξ_i متناظر با مقادیر ویژه‌ی فوق به‌دست می‌آیند. درنهایت حلّ عمومی عبارتست از:

---
[1] Shear Correction Factor

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^{6} c_i \{\xi\}_i e^{m_i x} \qquad (۲-۶۵)$$

با توجه به این نکته که مقادیر ویژه‌ی حاصل شامل اعداد مختلط می‌باشند، برای به‌دست آوردن بردارهای ویژه‌ی متناظر با این اعداد مختلط، باید از روابط حاکم بر بردارهای ویژه‌ی مربوط به اعداد مختلط استفاده کرد [۵۶-۵۴].

برای حلّ خصوصی، قسمت ناهمگن معادلات (۲-۴۰) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری با ضخامت ثابت و تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی یکنواخت، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از x نیست. بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس $[C]$ طبق معادله‌ی زیر جواب خصوصی را به‌دست آورد:

$$[C]\{y\} = \{F\} \Rightarrow \{y\} = [C]^{-1}\{F\} \qquad (۲-۶۶)$$

اما با توجه به معکوس ناپذیری (منفرد بودن) ماتریس $[C]$، به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، با ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حلّ می‌شود. بدین منظور در اوّلین معادله از سری معادلات (۲-۲۱)، از طرفین آن انتگرال‌گیری کرده و خواهیم داشت:

$$RN_x = C_0 \qquad (۲-۶۷)$$

همانطور که در معادلات (۲-۴۰) مشخص است، عبارت u وجود ندارد و لیکن du/dx در معادلات وجود دارد. با در نظر گرفتن du/dx به عنوان پارامتر جدیدی به نام v و انتگرال‌گیری از طرفین اوّلین معادله از سری معادلات داریم:

$$u = \int v\,dx + C_7 \qquad (۲-۶۸)$$

بنابراین دستگاه معادلات قدیم به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} [A]\dfrac{d^2}{dx^2}\{y\} + [B]\dfrac{d}{dx}\{y\} + [C]\{y\} = \{F\} \\ \{y\} = \{\mathrm{v}\ \phi\ \mathrm{w}\ \psi\}^T \end{cases} \qquad (۲-۶۹)$$

که در آن بردار نیروی $\{F\}$ با توجه به انتگرال‌گیری از طرفین اوّلین معادله، به‌صورت زیر است:

$$\{F\}=\frac{1}{\lambda E}\left\{\begin{array}{c} \mathrm{C0} \\ 0 \\ -P_i\left(R-\frac{h}{2}\right)-\lambda E\,\alpha\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{2n}\Delta T\,(z,t)(1+\nu)dz \\ P_i\,\frac{h}{2}\left(R-\frac{h}{2}\right)-\lambda E\,\alpha\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{2n}\Delta T\,(z,t)(1+\nu)(R+2z)dz \end{array}\right\} \qquad (۲-۷۰)$$

بنابراین با حلّ دستگاه معادلات فوق به‌صورت مطالعه‌ی موردی می‌توان مؤلفه‌های میدان جابجایی را به‌دست آورد.

شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۲-۲) توسط رابطه‌ی (۳۹-۲) بیان می‌شوند. به عبارتی باید مقادیر $\{\mathrm{u}\ \phi\ \mathrm{w}\ \psi\}$ و $\{N_x\ \ \mathrm{M}_x\ \ \mathrm{Q}_{xz}\ \ \mathrm{M}_{xz}\}$ در دو انتهای استوانه طوری در نظر گرفته شوند که همواره رابطه‌ی (۳۹-۲) برابر صفر باشد. با داشتن ۶ مجهول $C_6,\dots,$ C_1 در جواب عمومی و ۲ ثابت C_0 و C_7 در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل ۴ شرط مرزی در هر سمت، ۸ ثابت مجهول را محاسبه کرد. درنهایت با به‌دست آوردن ثوابت مجهول، بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه‌ی (۶۲-۲) بر حسب متغییرهای x,z به‌دست می‌آیند. با استفاده از رابطه‌ی (۶-۲) می‌توان میدان جابه‌جایی شعاعی و طولی را به‌دست آورده و با استفاده از روابط (۷-۲) تا (۱۳-۲) مقادیر تنش، کرنش، نیرو و لنگر را نیز محاسبه کرد.

۲-۵ مطالعه‌ی موردی

استوانه‌ی دوسر گیردار:

برای شرایط مرزی دوسر گیردار با توجه به رابطه‌ی(۳۹-۲) داریم:

$$\begin{cases} x=0\Rightarrow u=0\ ,\ \phi=0\ ,\ w=0\ ,\ \psi=0 \\ x=L\ \Rightarrow u=0\ ,\ \phi=0\ ,\ w=0\ ,\ \psi=0 \end{cases} \qquad (۲-۷۱)$$

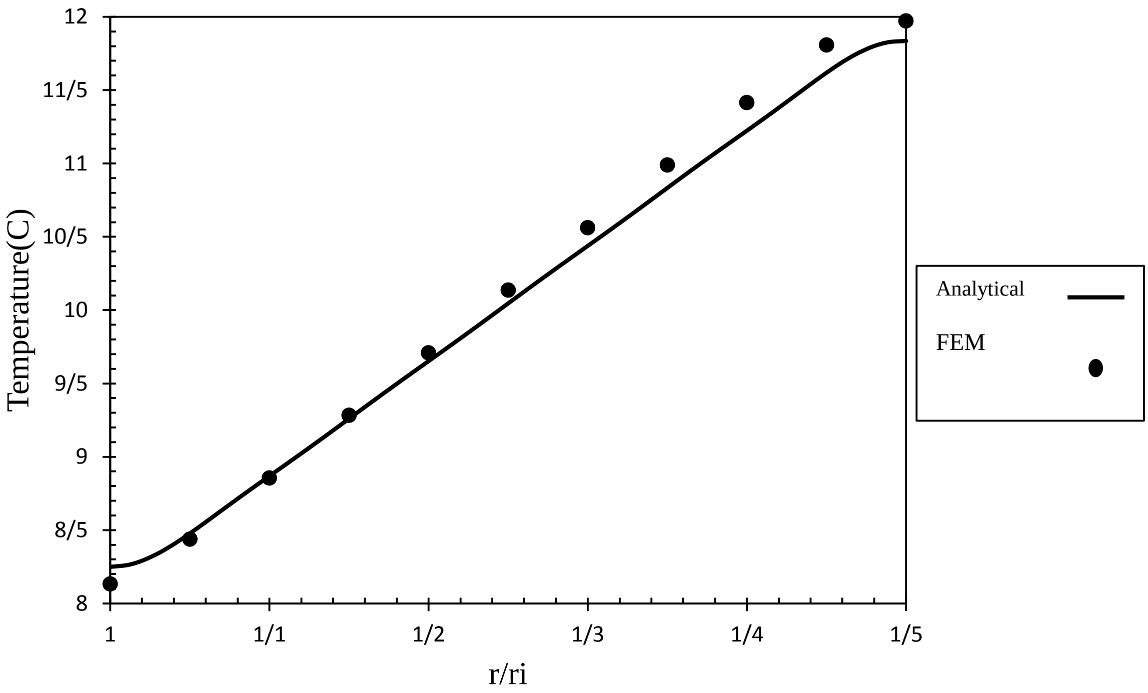
با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مولفه‌های میدان جابه‌جایی به‌دست می‌آید.

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج عددی، یک استوانه جدار ضخیم با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است. استوانه‌ی جدار ثابت به شعاع داخلی $r_i = 0.4m$ و شعاع خارجی $r_o = 0.6m$ با طول $L = 8m$ تحت فشار داخلی $P = 70Mpa$ قرار گرفته است. مدول الاستیسیته برابر با $E = 200Gpa$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ می‌باشد. چگالی برابر با $\rho = 7854 kg/m^3$ و ضریب پخش حرارتی، حرارت مخصوص و ضریب انتقال حرارت به ترتیب برابر با $\alpha = 12(10^{-6})1/^{\circ}C$، $C = 434 J/Kg.^{\circ}K$ و $K = 60.5 W/m.^{\circ}K$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن نتایج عددی، مقادیر زیر برای ثابت‌های شرایط مرزی دمایی در نظر گرفته شده است[۵۲]:

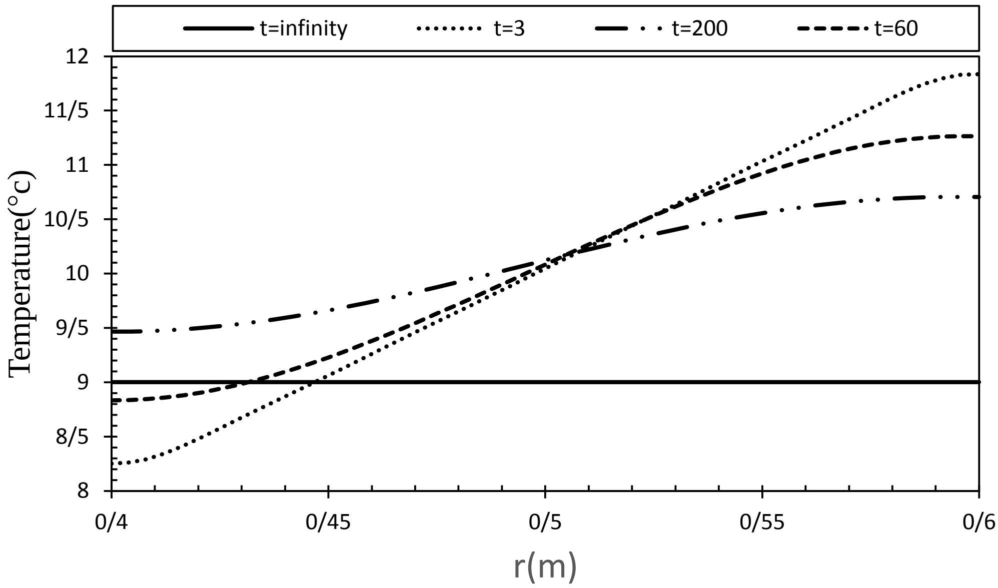
$$\begin{aligned} &T_i(r,0) = 20r \quad , \; C_{11} = 6W/m^2K \quad , \; C_{21} = 25W/m^2K \\ &C_{12} = C_{22} = K \quad , \; T_{\infty 1} = 7^{\circ}C \quad , \; T_{\infty 2} = 9^{\circ}C \end{aligned} \tag{۲-۷۲}$$

تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط انتهایی دوسر گیردار انجام شده است. حلّ تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط Maple 16 صورت گرفته است. نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جابی در دو حالت بارگذاری حراراتی گذرا و فشار داخلی به‌صورت جدا و توأمان مورد بحث قرار گرفته است.

شکل (۳-۲) توزیع دمای گذرا برای استوانه‌ی جدار ضخیم همگن برای زمان ۳ ثانیه را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود دما با افزایش شعاع بیشتر می‌شود. شکل (۴-۲) توزیع دما را برای زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار مشاهده می‌شود که با افزایش زمان انتقال حرارت، دمای استوانه به دمای محیط نزدیکتر شده، تا اینکه در بی نهایت به دمای محیط رسیده و ثابت می‌ماند.



شکل۲- ۳ توزیع دمای استوانه‌ی همگن در راستای شعاعی برای زمان t=3s

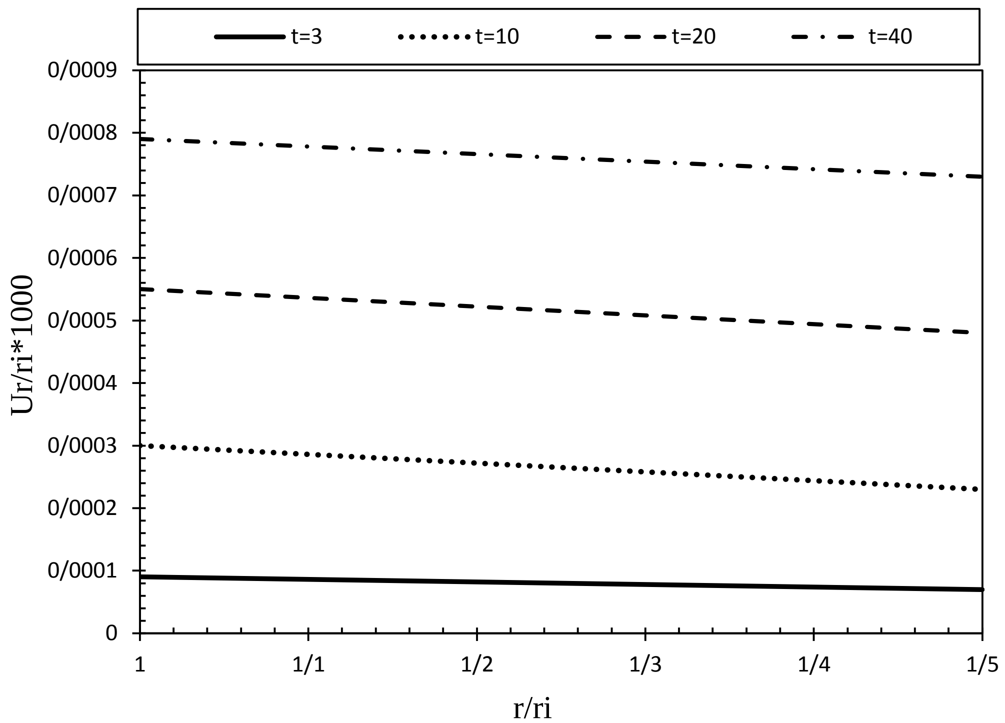


شکل۲-۴ توزیع دمای در راستای شعاعی برای استوانه‌ی همگن در زمان‌های مختلف

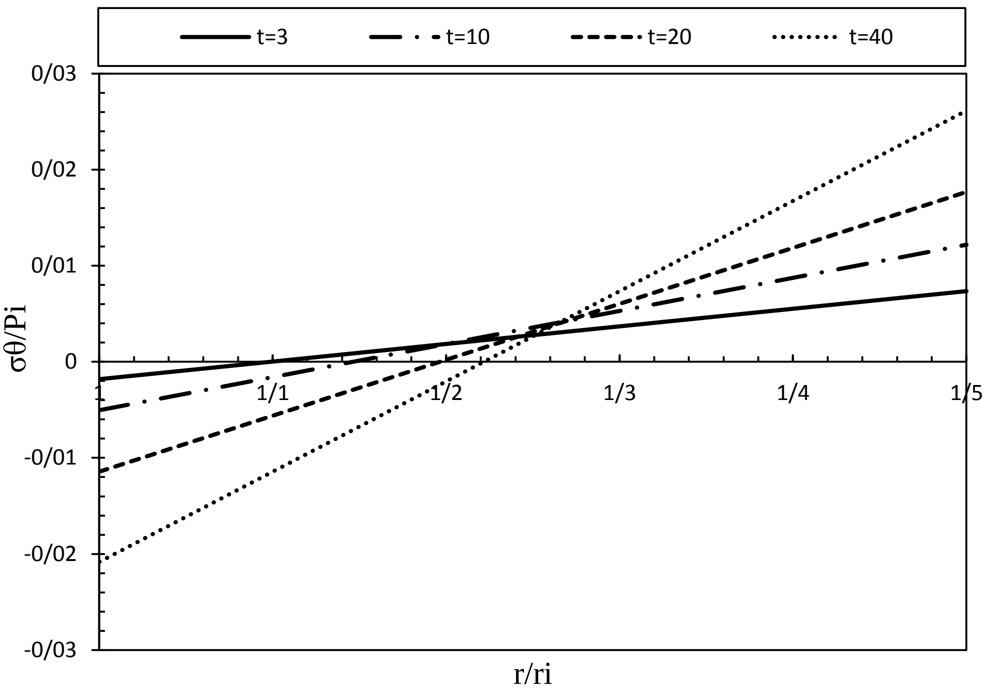
شکل (۵-۲) توزیع جابه‌جایی در راستای ضخامت استوانه برای استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی گذرا در زمان‌های مختلف را نشان می‌دهد. بدیهی است که با افزایش زمان جابه‌جایی در راستای

ضخامت، افزایش یافته ولی به دلیل شرایط بارگذاری این افزایش بسیار ناچیز می‌باشد. مقادیر جابه‌جایی برای استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا، مثبت می‌باشد و قدرمطلق مقادیر آن از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد.

شکل (۶-۲) توزیع تنش محیطی در راستای شعاعی در وسط استوانه را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مقادیر قدرمطلق تنش محیطی با افزایش زمان در لایه‌ی داخلی و خارجی افزایش می‌یابند. مقادیر تنش محیطی در لایه‌ی داخلی منفی و درلایه‌ی خارجی مثبت می‌باشد. این مقادیر در نقطه وسط استوانه روی لایه‌ی میانی ناچیز می‌باشد.

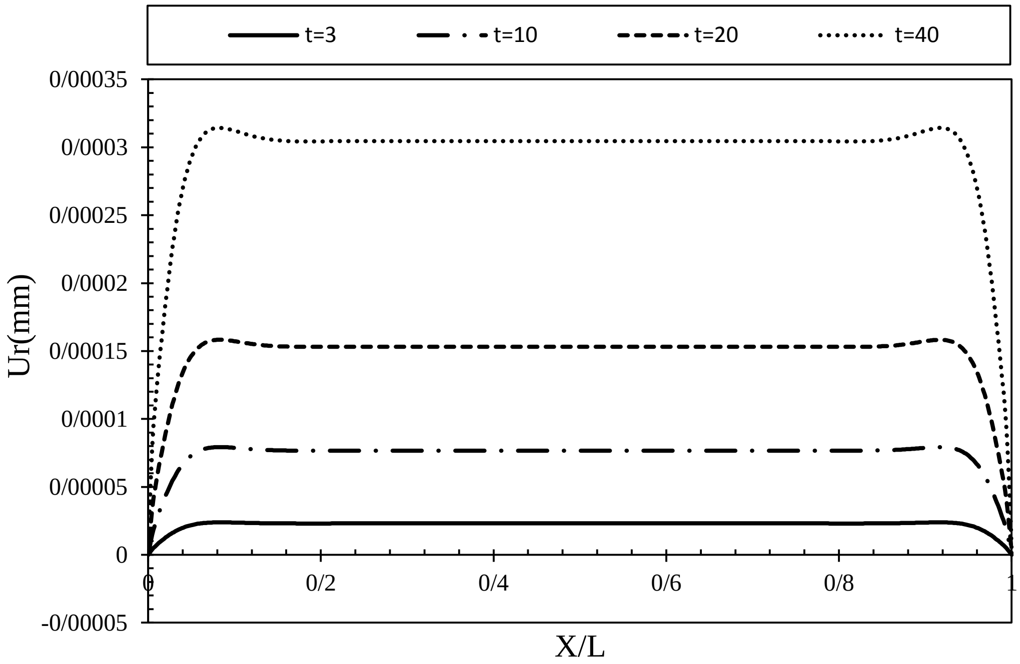


شکل۲- ۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا برای زمان‌های مختلف در x=L/2



شکل۲- ۶ توزیع تنش محیطی در راستای شعاعی در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا در زمان‌های مختلف برای X=L/2

شکل (۷-۲) توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای طول استوانه برای زمان‌های مختلف تحت بارگذاری حرارتی گذرا را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل با افزایش زمان جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد، اما این افزایش مرحلّه به مرحلّه با افزایش زمان کم شده تا در زمان‌های زیاد در نرخ این افزایش تغییر چندانی نمی‌کند.

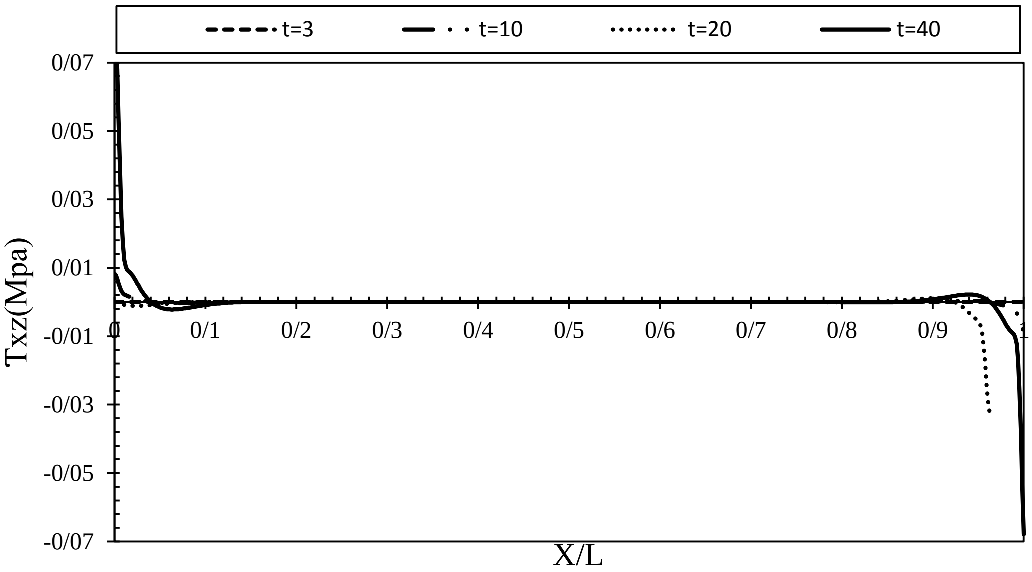


شکل۲- ۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا در لایه میانی برای زمان‌های مختلف

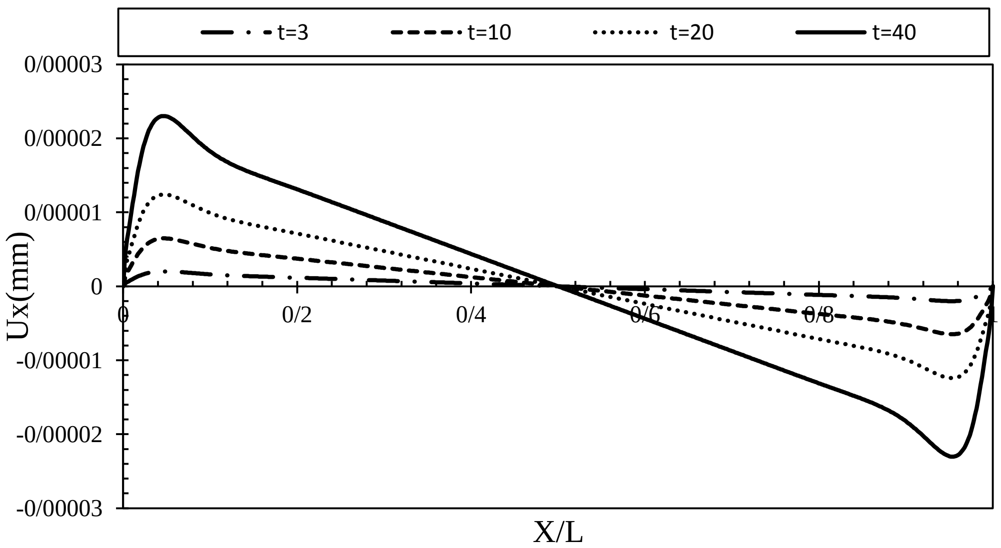
شکل (۲-۸) توزیع تنش برشی در راستای طولی استوانه برای لایه‌ی میانی در زمان‌های مختلف تحت بار حرارتی گذرا را نشان می‌دهد. با توجه به شکل از آن‌جایی که تنش برشی فقط در نقاط نزدیک به دو انتهای مرز(ابتدا و انتهای استوانه) وجود دارد و در نقاط دور از مرز تقریبا صفر می‌باشد، مقادیر تنش برشی در ابتدا و انتهای استوانه با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

شکل (۹-۲) توزیع جابه‌جایی طولی در راستای طول استوانه (لایه‌ی میانی) برای زمان‌های مختلف تحت بار حرارتی گذرا را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مقادیر جابه‌جایی با گذشت زمان در هر نقطه (از لحاظ قدر مطلقی) افزایش می‌یابد.

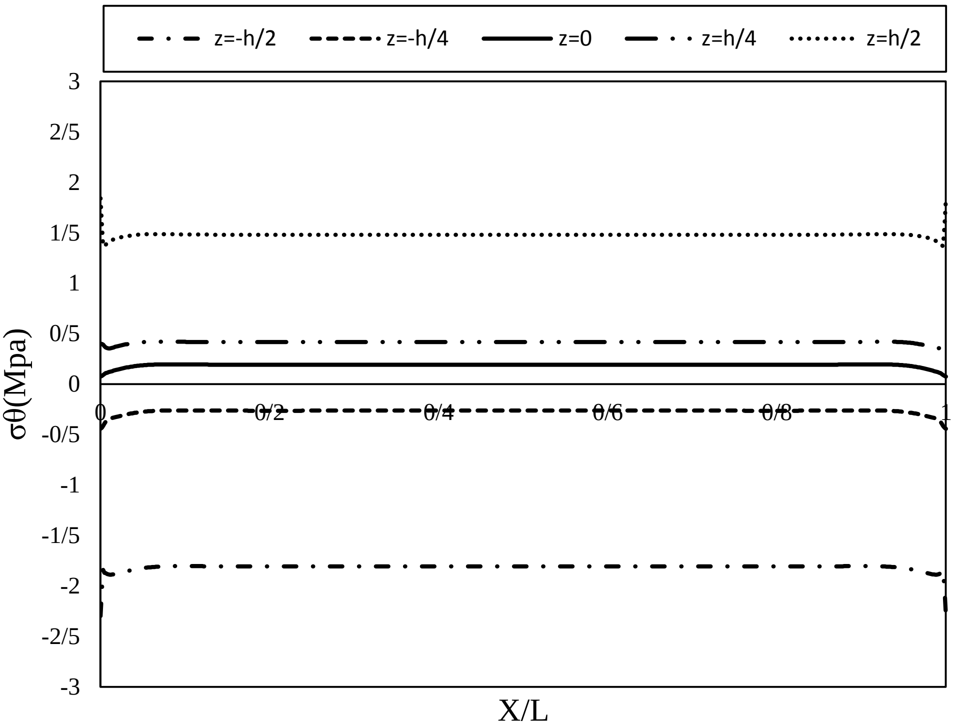
شکل(۱۰-۲) توزیع تنش محیطی در راستای طولی استوانه تحت بار حرارتی گذرا در زمان t=40 s را نشان می‌دهد. با توجه به شکل تنش محیطی در جدار داخل و خارج بیشترین مقدار را دارا هستند و با نزدیک شدن به لایه‌ی میانی (از دو طرف) مقدار این تنش‌ها کاهش می‌یابد.



شکل۲- ۸ توزیع تنش برشی در راستای طولی استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حراراتی گذرا در لایه‌ی میانی در زمان‌های مختلف



شکل۲- ۹ توزیع جابه‌حایی طولی در طول استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حراراتی گذرا برای زمان‌های مختلف در لایه‌ی میانی

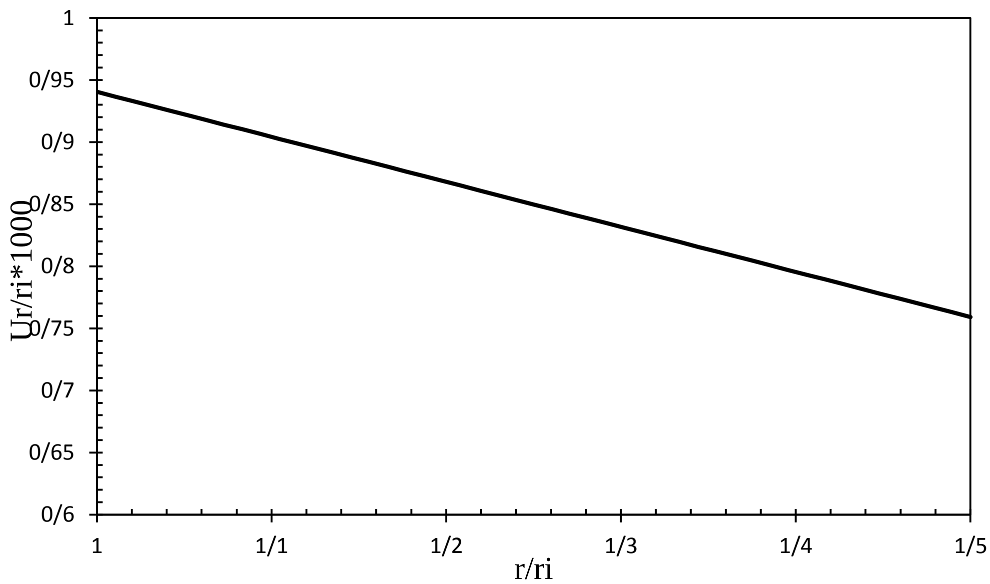


شکل۲- ۱۰ توزیع تنش محیطی در راستای طولی استوانه‌ی همگن در ضخامت‌های مختلف تحت بارگذاری حرارتی گذرا در t=40 s

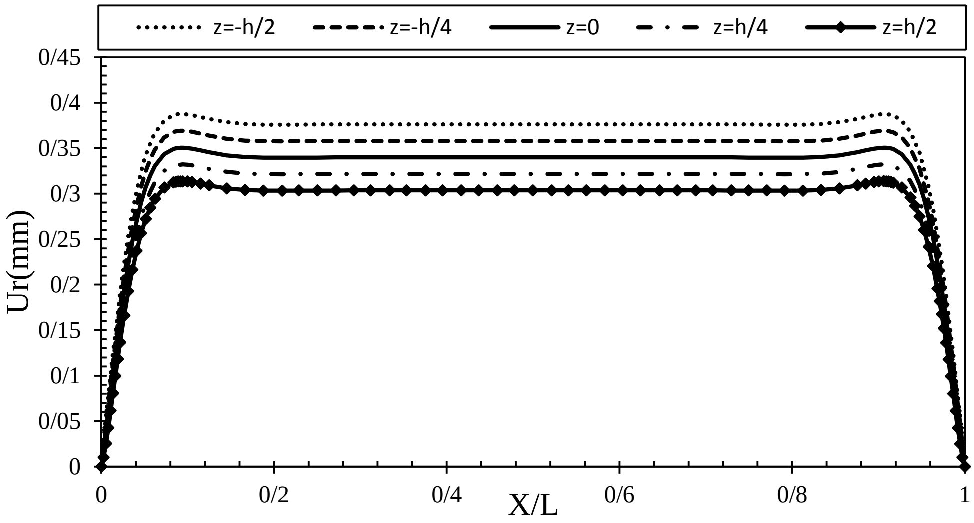
شکل ۲-۱۱ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در راستای شعاعی تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی را نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار مقادیر جابه‌جایی شعاعی از شعاع داخلی به سمت شعاع خارجی کاهش می‌یابد و مقادیر این جابه‌جایی در راستای ضخامت استوانه تحت بارگذاری ذکر شده مقدار مثبتی است.

شکل (۲-۱۲) تا (۲-۱۵) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی را تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی نشان می‌دهد. براساس این نمودارها جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های داخلی بیشتر از لایه‌های خارجی می‌باشد. این جابه‌جایی در نقاط دور از مرز برای بارگذاری ذکر شده مقادیر مثبتی دارد، تغییرات این جابه‌جایی در نقاط نزدیک مرز زیاد است ولی با دور شدن از دو انتهای استوانه مقادیر جابه‌جایی شعاعی تقریبا ثابت باقی می‌ماند و بیشترین مقدار جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی داخلی اتفاق می‌افتد.در خصوص جابه‌جایی محوری می‌توان به این نکته اشاره کرد که تحت شرایط مرزی، در نقاط نزدیک مرز بیشترین جابه‌جایی محوری اتفاق می‌افتد و

در بقیه‌ی نقاط این جابه‌جایی با نرخ ثابتی از لایه‌ی داخلی به خارجی کاهش می‌یابد. تنش محیطی در راستای محوری استوانه در لایه‌ی داخلی بیشترین مقدار خود را داراست و مقادیر این تنش در نقاط نزدیک به مرز برای لایه‌های نزدیک به لایه‌ی خارجی دارای مقدار منفی تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی می‌باشد.تنش برشی در طول استوانه به غیر از نزدیکی دو انتهای آن، دارای مقادیر صفر می‌باشد. این امر نشان می‌دهد که تنش برشی در نزدیکی مرزهای انتهایی استوانه تحت تأثیر شریط مرزی بوجود می‌آید. در استوانه‌ی تحت بارحرارتی گذرا و فشار داخلی تنش برشی در لایه‌ی داخلی دارای بیشترین مقدار است که در اطراف مرز x=0 تنش برشی مثبت و در نزدیک مرز x=L تنش برشی دارای مقدار منفی می‌باشد.

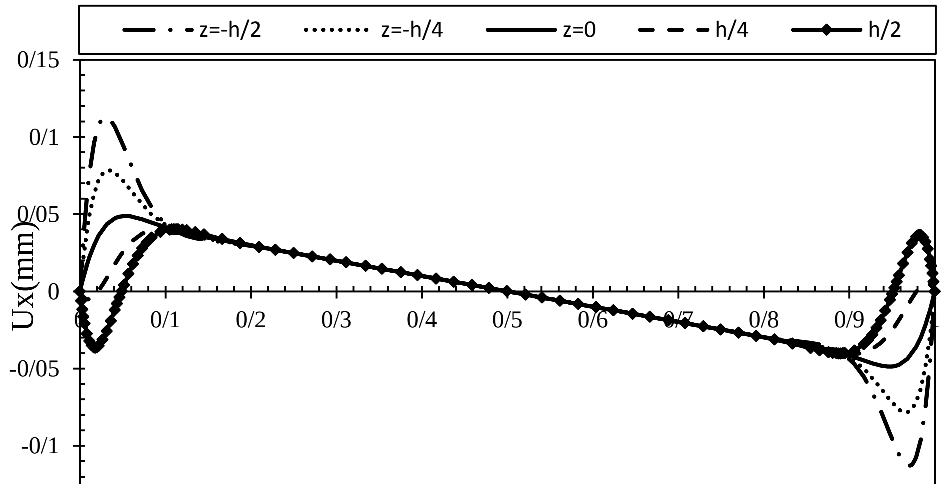


شکل۲- ۱۱ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه‌ی همگن تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی در X=L/2 , t=40 s



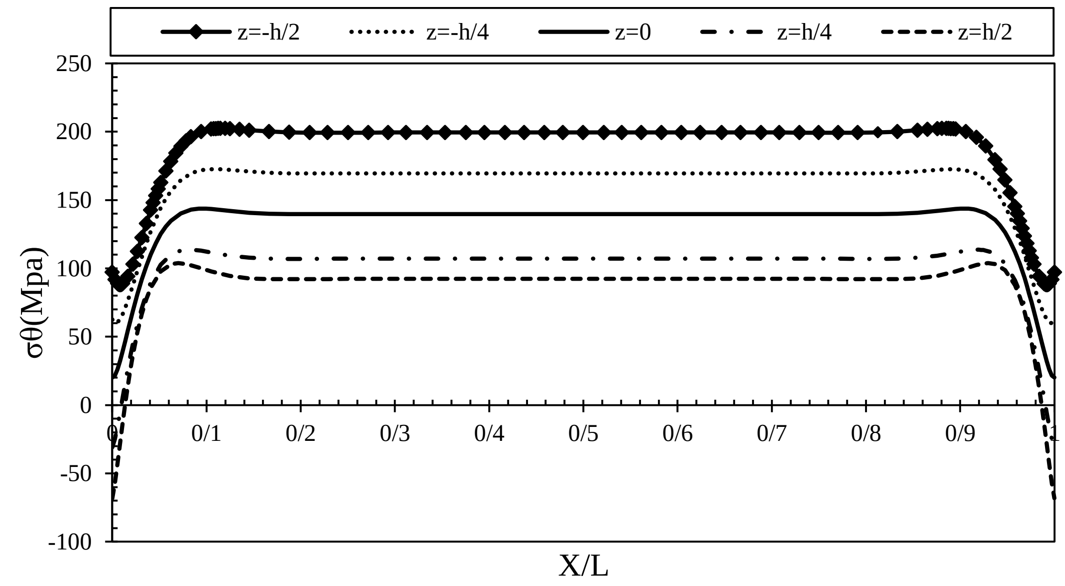
شکل۲- ۱۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی استوانه‌ی همگن برای لایه‌های مختلف تحت بارگذاری

حرارتی گذرا و فشار داخلی در t=40 s وX=L/2



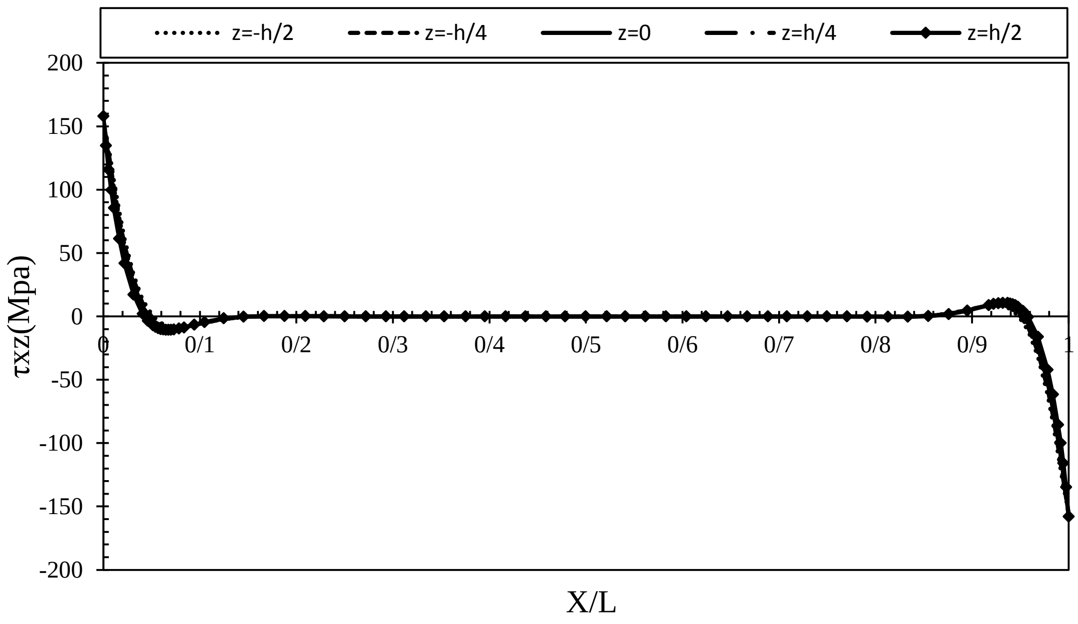
شکل۲- ۱۳ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی

در X=L/2 و t=40 s



شکل۲- ۱۴ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی

در X=L/2 و t=40 s

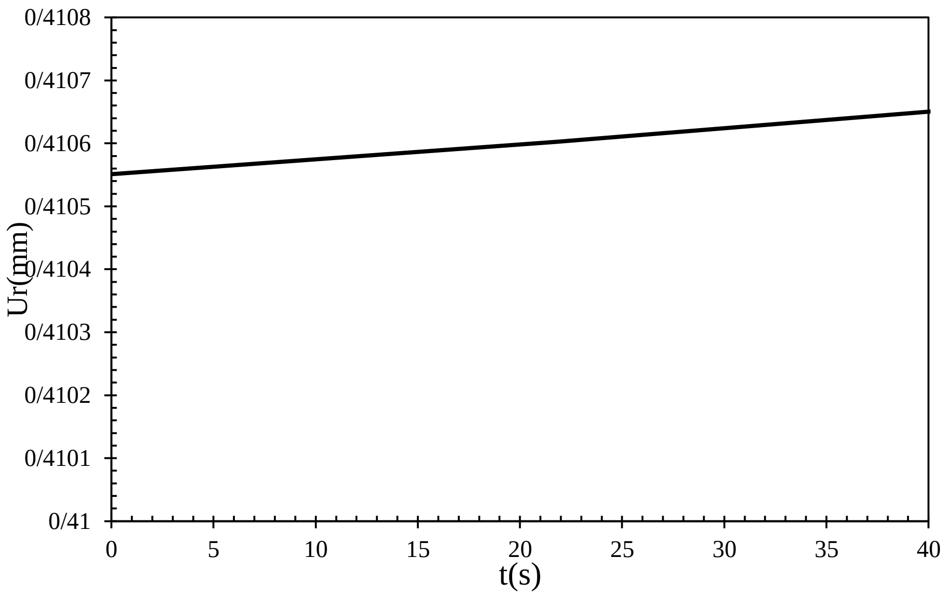


شکل۲- ۱۵ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی در

t=40 s و X=L/2

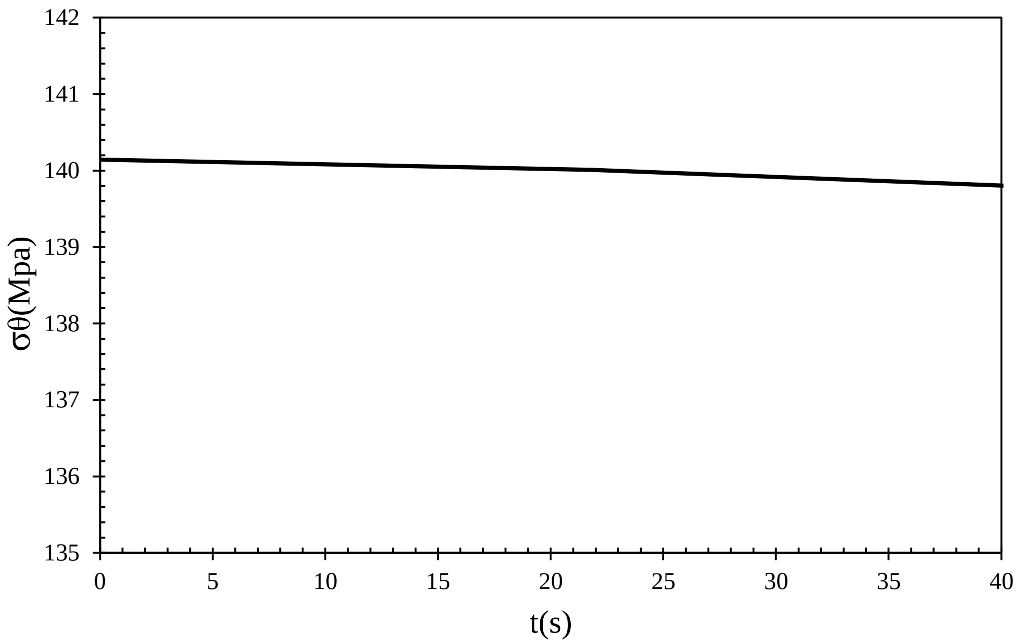
شکل (۱۶-۲) و (۱۷-۲) به‌ترتیب توزیع جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی بر اساس زمان را برای بارگذاری حراراتی گذرا و فشار داخلی در نقطه‌ی وسط استوانه نشان می‌دهند. با توجه به شکل

جابه‌جایی شعاعی با گذشت زمان افزایش یافته و در زمان‌های زیاد این نرخ تغییرات ثابت شده و مقدار جابه‌جایی شعاعی ثابت باقی می‌ماند. لازم به ذکر است که تغییرات در جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی برای بارگذاری حرارتی گذرا در مقابل مقادیر ایجاد شده توسط فشار داخلی برای مطالعه‌ی موردی ذکر شده در مراحلّ قبل بسیار ناچیز می‌باشد. همچنین با افزایش زمان تنش محیطی در لایه‌ی میانی کاهش می‌یابد و پس از گذشت زمان تغییرات به مقدار ثابتی میل می‌کند.



شکل۲- ۱۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی برحسب زمان در استوانه همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار دخلی

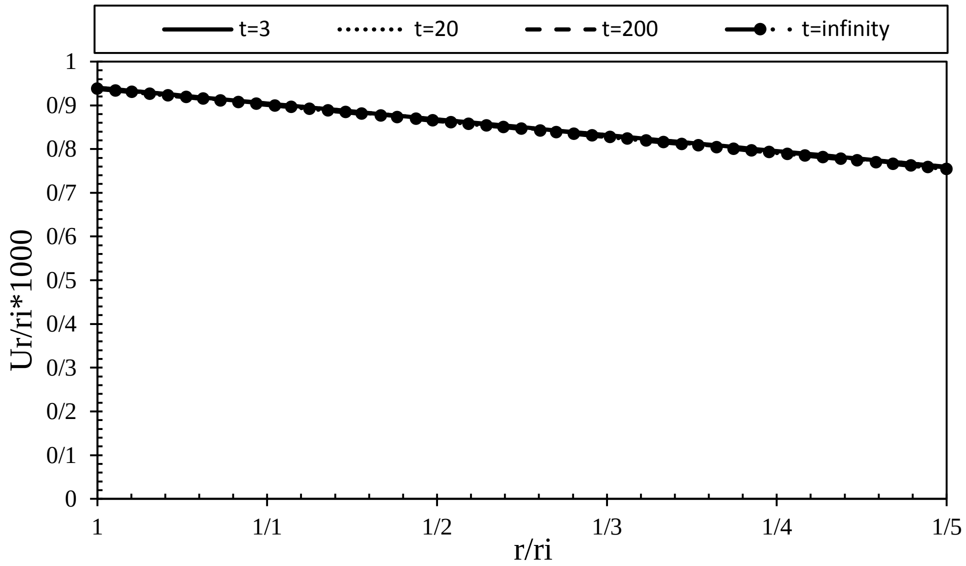
در $Z=0$ و $X=L/2$



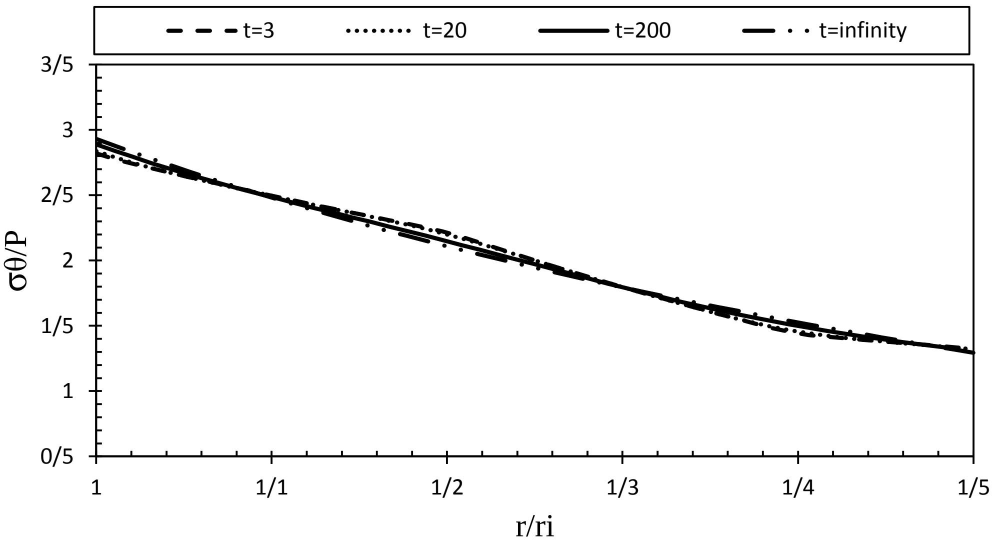
شکل۲- ۱۷ توزیع تنش محیطی در استوانه همگن برحسب زمان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار دخلی در

Z=0 و X=L/2

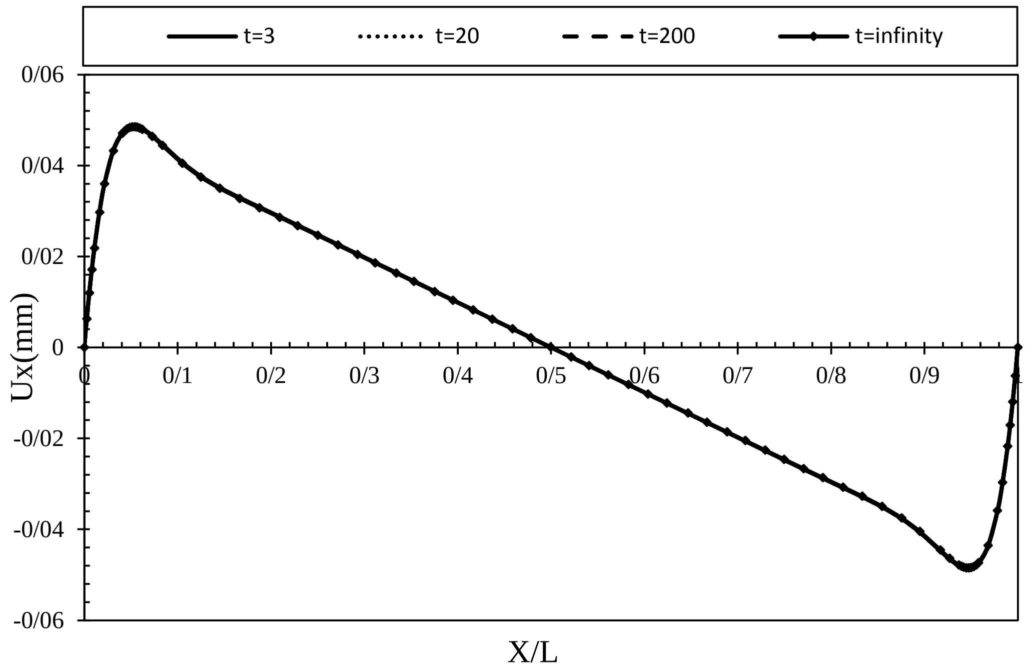
شکل (۱۸-۲) تا (۲۱-۲) توزیع جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در دو راستای شعاعی و طولی و جابه‌جایی محوری در راستای طولی تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی در زمان‌های مختلف را نشان می‌دهد. با توجه به این نمودارها و مطالعه‌ی موردی ذکر شده، گذشت زمان تأثیر زیادی بر مقادیر جابه‌جایی و تنش ندارد و مقادیر جابه‌جایی و تنش با گذشت زمان تغییرات چندانی نخواهند داشت.



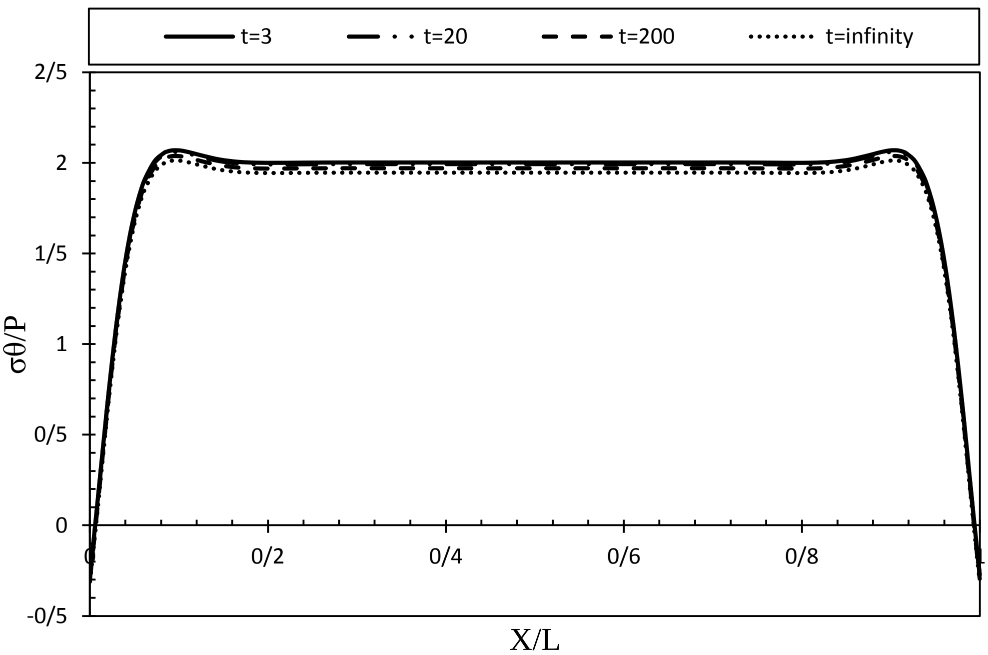
شکل۲- ۱۸ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی همگن برحسب زمان تحت بارگذاری حراراتی گذرا و فشار داخلی در X=L/2



شکل۲- ۱۹ توزیع بی بعد تنش محیطی در راستای شعاعی تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی برای زمان‌های مختلف در X=L/2



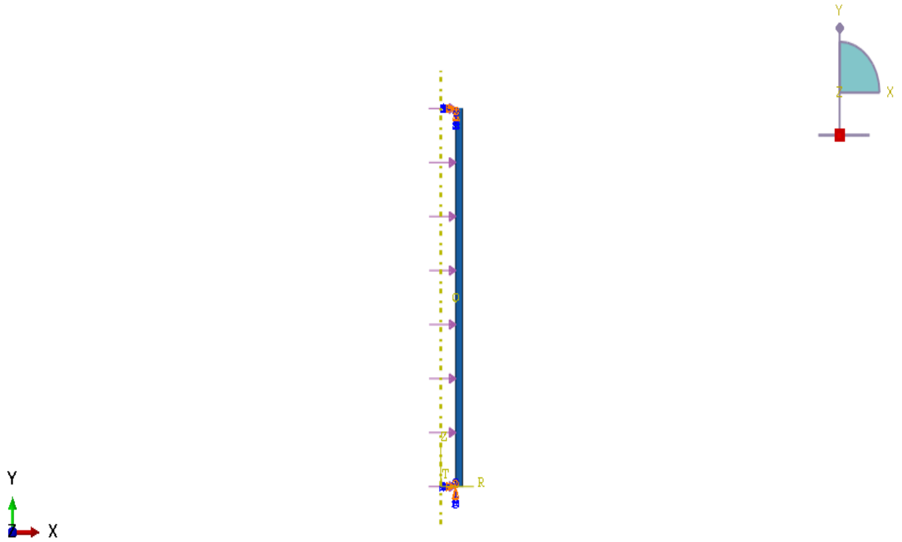
شکل۲- ۲۰ توزیع بی بعد جابه‌جایی محوری در راستای طولی تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی برای زمان‌های مختلف در لایه‌ی میانی



شکل۲- ۲۱ توزیع بی بعد تنش محیطی در راستای طولی تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی برای زمان‌های مختلف در لایه‌ی میانی

۲- ۶ حلّ عددی مسئله با نرم‌افزار آباکوس

با توجه به شرایط مسئله و متقارن محوری بودن آن، نیاز به رسم کل مدل در فضای آباکوس نمی‌باشد. بنابراین در هنگام رسم شکل از گزینه‌ی متقارن محوری[۱] و شکل پذیر[۲] استفاده می‌کنیم و نوار باریکی که نشان دهنده‌ی مقطعی از استوانه می‌باشد را ترسیم می‌کنیم(شکل ۲-۲۲). نتایج حاصل از بارگذاری بر روی این مقطع همان نتایج حاصل از استوانه‌ی کامل خواهد بود. در رسم این مدل از المان CAX4T[۳] از خانواده‌ی couple temperature and displacement استفاده شده است که هر المان از این تحلیل دارای ۴ گره می باشد. شرایط مرزی دمایی در دو لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه مدل شده است. از آنجایی که ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (h) در نرم‌افزار آباکوس به‌صورت مستقیم وجود ندارد از قسمت Interaction گزینه‌ی Film condition را انتخاب و انتقال حرارات جابه‌جایی مدل شده است. شرایط مرزی دو سر گیردار نیز با مقید کردن دو سر استوانه و بستن تمامی درجات آزادی دو سر استوانه مدل شده است.



شکل۲- ۲۲ نمای کلی استوانه‌ی جدار ضخیم همگن تحت بارگذاری فشاری و حراراتی گذرا در نرم افزار آباکوس

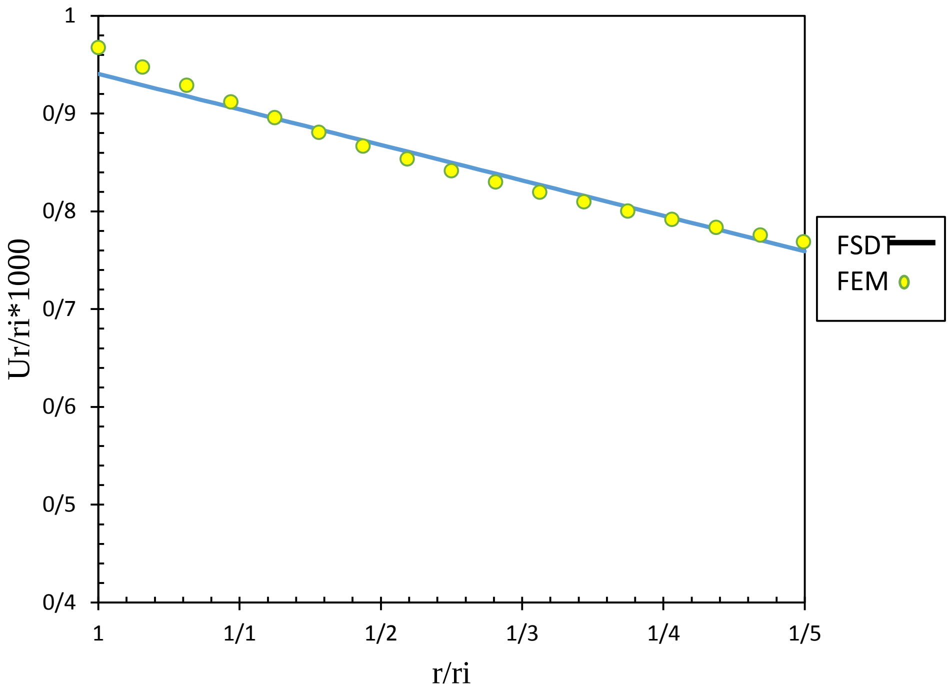
[1] Axisymmetric
[2] Deformable
[3] A 4-node axisymmetric thermally coupled quadrilateral, bilinear displacement and temperature.

۱-۶-۲ مقایسه‌ی نتایج حلّ تحلیلی با حلّ عددی

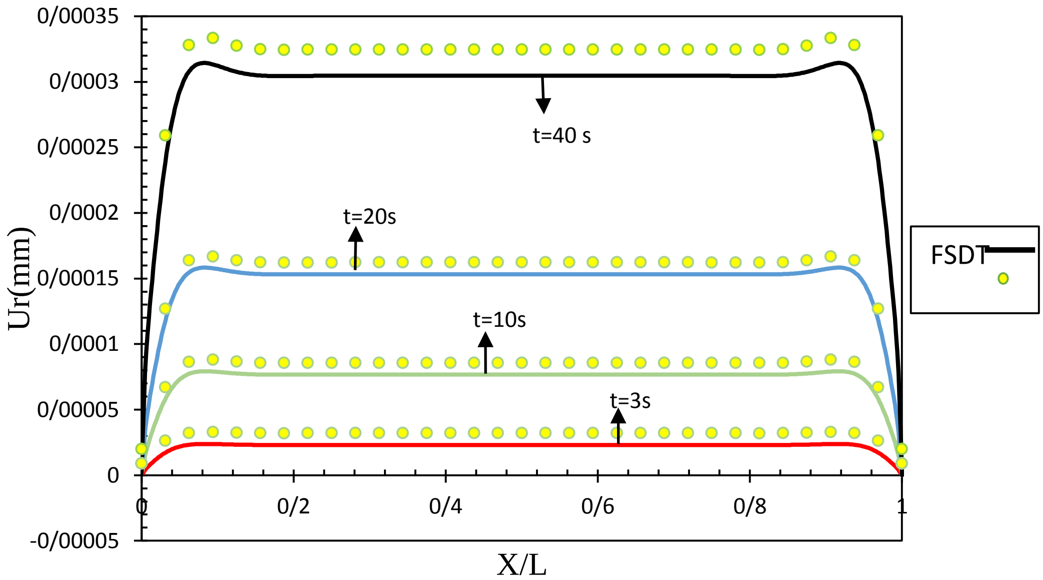
شکل (۲۳-۲)جابه‌جایی شعاعی در x=L/2 و زمان t=40 s در راستای شعاع استوانه برای شرایط مرزی دوسرگیردار تحت بار حراراتی گذرا و فشار داخلی را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل مشخص است مقادیر جابه‌جایی محاسبه شده در شعاع‌های نزدیک به لایه‌ی میانی از انطباق خوبی برخوردار است. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل توزیع جابه‌جایی شعاعی را در طول جداره‌ی استوانه به‌صورت تابع خطی از شعاع استوانه فرض می کند در حالی که مطابق تئوری الاستیسیته‌ی مستوی در حقیقت یک توزیع هذلولوی به‌صورت رابطه‌ی(۷۳-۲) در طول جداره‌ی استوانه وجود دارد.

$$U_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \qquad (۲-۷۳)$$

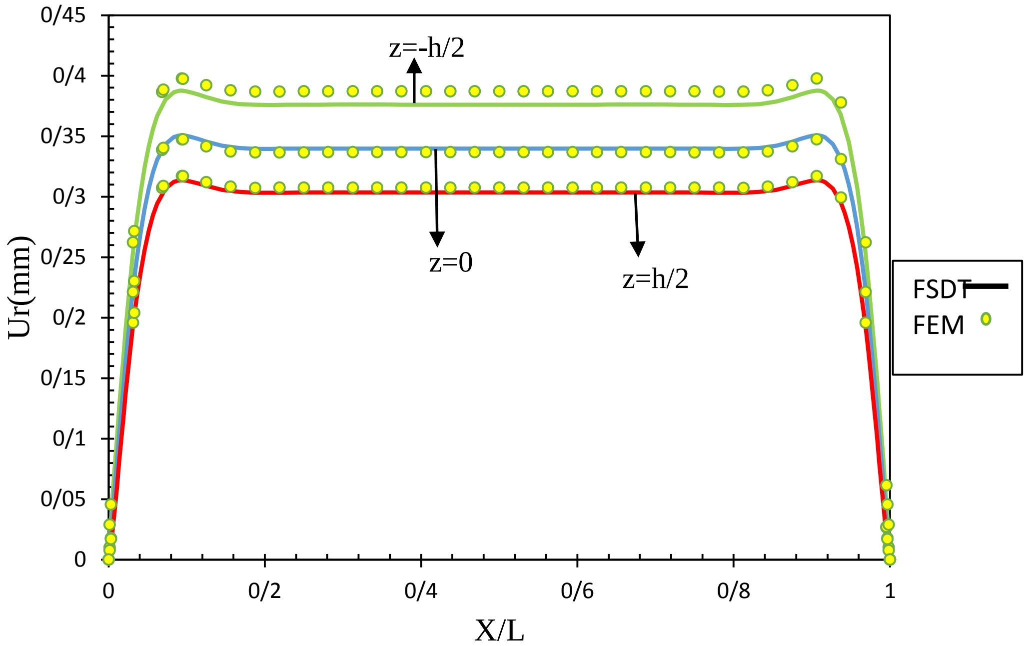
این تقریب خطی در لایه‌ی میانی استوانه از دقت بالاتری برخوردار می‌باشد لیکن در لایه‌های داخلی و خارجی از توزیع پیش‌بینی شده توسط روش PET فاصله می‌گیرد. این مسئله در مورد استوانه‌ی تحت باگذاری حرارتی تشدید می‌شود؛ دلیل این امر فاصله گرفتن توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه از حالت خطی می‌باشد. در حقیقت تقریب یک تابع هذلولوی با یک توزیع خطی منشأ خطا می‌باشد. شکل (۲۴-۲) تا (۲۷-۲) جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری به‌دست آمده از روش FSDT و FE در راستای طول استوانه برای دو حالت بارگذاری حرارتی گذرا به تنهایی و فشار داخلی توأم با بارگذاری حراراتی گذرا برای استوانه‌ی همگن دوسر گیردار را نشان می‌دهد. با توجه به این نمودارها می‌توان دریافت که در لایه‌ی میانی بیشترین انطباق بین روش‌های FE وFSDT وجود دارد. اختلاف موجود بین دو روش در لایه‌ی خارجی و داخلی بیشتر می‌باشد. دلیل این اختلاف صرفنظر کردن از جملات بالاتر در بسط تیلور در رابطه (۵-۲) به‌دلیل استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اوّل می‌باشد.



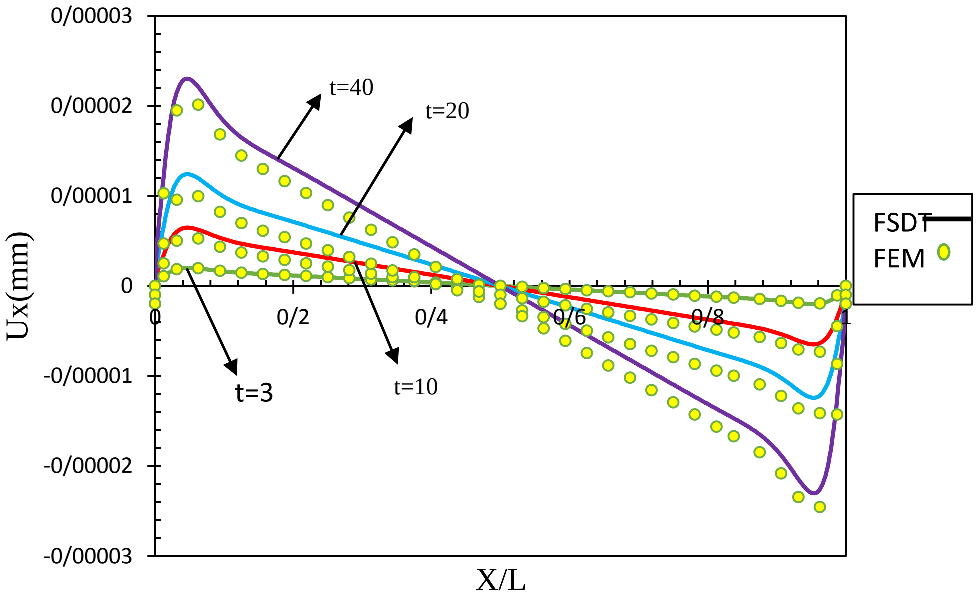
شکل۲- ۲۳ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده از روش FSDT و FE در راستای ضخامت استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی در t=40 s و x=L/2



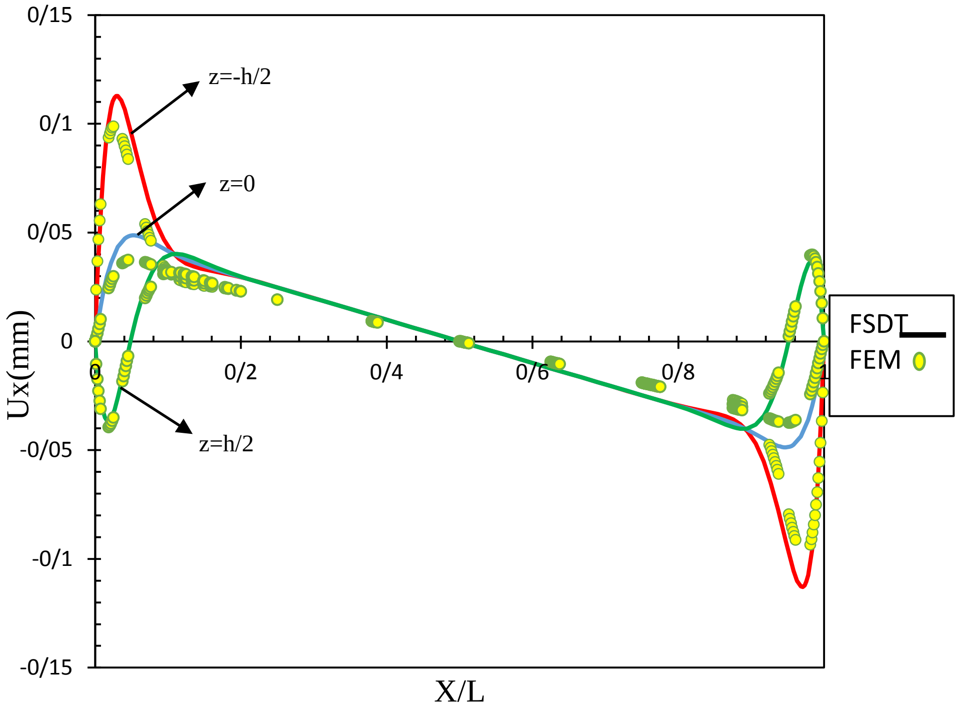
شکل۲- ۲۴ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده از روش FSDT و FE در راستای طولی استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا برای زمان‌های مختلف در x=L/2



شکل۲- ۲۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده از روش FSDT و FE در راستای طولی استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی در t=40 s و x=L/2



شکل۲- ۲۶ جابه‌جایی محوری محاسبه شده از روش FSDT و FE در راستای طولی استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا برای زمان‌های مختلف در x=L/2



شکل۲- ۲۷ جابه‌جایی محوری محاسبه شده از روش FSDT و FE در راستای طولی استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی برای لایه‌های مختلف در x=L/2

جدول (۲-۱) و (۲-۲) نشان دهنده‌ی تنش‌های محیطی محاسبه شده از روش FE و FSDT برای استوانه‌ی همگن در زمان‌های مختلف می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود با گذشت زمان تنش‌های محیطی از نظر اندازه افزایش می‌یابند و درنهایت در زمان‌های بالا مقدار ثابتی اختیار کرده و تغییرات تنش محیطی بسیار اندک می‌شود و هم‌چنین می‌توان مشاهده کرد که تنش‌های محیطی محاسبه شده از این دو روش در لایه‌ی میانی حداقل اختلاف را دارا می‌باشند.

جدول۲- ۱ تنش محیطی محاسبه شده از دو روش FE و FSDT برای استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا برای حالت دوسر گیردار در در وسط استوانه

	σ_θ [Mpa]	t=3	t=10	t=20	t=40	t=infinity
لایه‌ی داخلی Z=-h/2	FEM	۰/۱۲	۰/۱۳۶	۰/۱۶۲	۰/۱۹۸	۶/۴
	FSDT	-۰/۲۶۵	-/۷۰۳	-۱/۱۵	-۱/۴۵۷	-۷/۰۵
لایه‌ی میانی Z=0	FEM	۰/۳۰۴	۰/۳۴۳	۰/۳۹۷	۰/۴۲۱	۸
	FSDT	۰/۲۶۷	۰/۲۹۷	۰/۳۰۶	۰/۳۲۴	۴

جدول۲- ۲ تنش محیطی محاسبه شده از دو روش FE و FSDT برای استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی برای حالت دوسر گیردار در وسط استوانه

	σ_θ [Mpa]	t=3	t=10	t=20	t=40	t=infinity
لایه‌ی داخلی Z=-h/2	FEM	۱۷۶/۱۴	۱۷۶/۲۵۵	۱۷۶/۳۷	۱۷۶/۴	۱۸۲/۲۳
	FSDT	۲۰۰/۴	۲۰۰/۰۵	۱۹۹/۶۱	۱۹۹/۳۹	۱۹۲/۴
لایه‌ی میانی Z=0	FEM	۱۳۶/۵۳	۱۳۶/۵۸	۱۳۶/۶۵	۱۳۶/۶۸	۱۳۶/۹۱
	FSDT	۱۳۹/۶	۱۳۹/۶۸	۱۳۹/۸	۱۳۹/۸۷	۱۴۳/۴

۲-۷ جمع‌بندی

با توجه به آنچه در قسمت قبل بیان شد، استفاده از روش FSDT در تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل صرف‌نظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور رابطه‌ی (۲-۵) و استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی –هرمان مرتبه‌ی اوّل مناسب نمی‌باشد. در حقیقت با توجه به اینکه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل توزیع جابه‌جایی شعاعی را در

طول جداره‌ی استوانه به‌صورت خطی در نظر می‌گیرد و توجه به این نکته که جابه‌جایی شعاعی در استوانه تحت بارگذاری حرارتی و فشاری درای یک توزیع غیرخطی با انحنای زیادتری نسبت به استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای مناسب نمی‌باشد، در حالیکه دقت نتایج حاصل از این روش برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری مناسب می‌باشد. در این تحقیق جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری و تنش‌های محیطی به‌دست آمده از دو روش FE و FSDT برای حالت بارگذاری حرارتی گذرا در مقایسه با بارگذاری فشاری اندک می‌باشد. می‌توان با توجه به شکل‌ها و جداوّل ارائه شده برای بارگذاری حرارتی گذرا به نتایج فوق رسید.

همچنین می‌توان دریافت که افزایش زمان در مطالعه‌ی موردی ارائه شده تاثیر چندانی بر جابه‌جایی‌ها و تنش در حالت فشار و حرارت گذرا ندارد و با گذشت زمان مقادیر جابه‌جایی و تنش به مقدار ثابتی میل می‌کنند. همچنین بارگذاری فشاری در این تحقیق بر بارگذاری حرارتی گذرا غالب می‌باشد و تئوری FSDT برای مطالعه‌ی موردی ذکر شده برای گزارش تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در حالت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا به‌صورت توأمان نتایج قابل قبولی را داراست. در حالت کلی نتایج در لایه‌ی میانی از تطابق بهتری نسبت به لایه‌های دیگر برخوردار است.

فصل ۳

تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان همگن

۳-۱ مقدمه

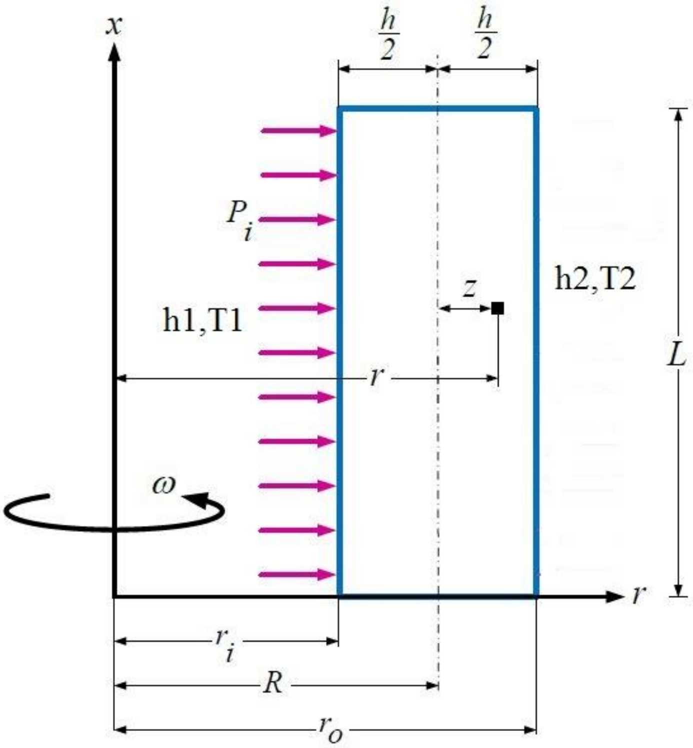
استوانه‌های چرخان دارای کاربرد وسیعی در صنعت می‌باشند. لذا بررسی و تحلیل تنش در آن‌ها در شرایط مختلف کاری از اهمیّت بسزایی برخوردار است. اکثر سازه‌هایی که نیاز به مقاومت بالا در شرایط کاری دارند از قبیل سازه‌های هوافضایی، موشک‌ها، سازه‌های دوار واقع در رآکتورهای اتمی و ... به غیراز نیروهای مکانیکی، دارای دوران نیز می‌باشند؛ از اینرو تحلیل و بررسی این بارگذاری حائز اهمیّت است. در اکثر محورهای استوانه‌ای توپر یا توخالی، تأثیر دوران عامل مهم ایجاد تنش در استوانه می‌باشد.

در این فصل برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های چرخان جدار ضخیم متقارن محوری همگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل، حلّ عمومی استوانه‌های چرخان جدار ضخیم همگن تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی ارائه شده است. نهایتاً با انجام حلّ عددی توسط نرم‌افزار اجزاء محدود Abaqus برای استوانه‌ی چرخان تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک روش تغییر شکل برشی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند.

۳-۲ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان همگن

یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم چرخان تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی به‌صورت شکل (۳-۱) در نظر گرفته می‌شود. همانطور که در فصل دوم نیز بیان شد بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \qquad (۳-۱)$$



شکل ۳- ۱ پروفیل استوانه‌ی همگن چرخان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\begin{cases} U = \iiint_v U^* dV \\ dV = rdrd\theta dx = (R+z)dxd\theta dz \\ U^* = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\} = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xz}\gamma_{xz}) \\ \quad = \frac{1}{2}E\lambda\left[(1-\nu)(\varepsilon_x^2+\varepsilon_\theta^2+\varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_\theta + \varepsilon_z\varepsilon_\theta) + \frac{1-2\nu}{2}\gamma_{xz}^2\right] \end{cases} \tag{۳-۲}$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار داخلی و خارجی و سرعت دورانی:

$$\begin{cases} W = \iint_s (\vec{f}_{sf}\,.\vec{u})ds + \iiint_v (\vec{f}_{bf}\,.\vec{u})dv \\ ds = rdxd\theta = (R+z)dxd\theta \\ dV = rd\theta drdx = (R+z)dzdxd\theta \end{cases} \tag{۳-۳}$$

که درآن نیروی حجمی حاصل از دوران با سرعت ثابت به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{f}_{bf} = \rho r\omega^2 = \rho(R+z)\omega^2 \qquad (۳-۴)$$

نهایتاً کار نیروهای خارجی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$W = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}(P_i r_i)U_z\,dx\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2}\rho(R+z)\omega^2 U_z(R+z)\,dz\,dx\,d\theta \qquad (۳-۵)$$

و با انتگرال‌گیری در محدوده‌ی:

$$-\frac{h}{2} \le z \le +\frac{h}{2} \quad , \quad 0 \le x \le L \qquad (۳-۶)$$

برای تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه‌ی چرخان باسرعت دورانی ثابت تحت فشار داخلی و خارجی داریم:

$$\delta U = R\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2}\delta U^*(1+\frac{z}{R})\,dz\,dx\,d\theta \qquad (۳-۷)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} = R\int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz})\left(1+\frac{z}{R}\right)dz\,dx$$

$$\delta W = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}(P_i r_i)\delta U_z\,dx\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2}\rho(R+z)^2\omega^2\delta U_z\,dz\,dx\,d\theta \qquad (۳-۸)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} = \int_0^{L}P_i\left(R-\frac{h}{2}\right)(\delta w + z\,\delta\psi)\,dx + \int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2}\rho\omega^2(\delta w + z\,\delta\psi)(R+z)^2\,dz\,dx$$

با جایگذاری کرنش‌های رابطه‌ی (۷-۲) در روابط (۷-۳) و (۸-۳) و نیز بکارگیری اصول حساب وردشی و اصل کار مجازی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای چرخان تحت فشار داخلی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{2\pi} = \frac{\delta W}{2\pi} \qquad (۳-۹)$$

$$
\begin{cases}
R\,\dfrac{dN_x}{dx}=0\\
R\,\dfrac{dM_x}{dx}-RQ_x=0\\
R\,\dfrac{dQ_x}{dx}-N_\theta=-P_i\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho(R+z)^2dz\\
R\,\dfrac{dM_{xz}}{dx}-M_\theta-RN_z=P_i\,\dfrac{h}{2}\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho z\,(R+z)^2dz
\end{cases}
\qquad (۳-۱۰)
$$

$$
R\left[N_x\delta u+M_x\delta\phi+Q_x\delta w+M_{xz}\delta\psi\right]_0^L=0 \qquad (۳-۱۱)
$$

روابط (۱۰-۳) همان معادلات اصلی را تشکیل می‌دهند. رابطه‌ی کمکی (۱۱-۳) نیز شرایط مرزی مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌بایست در دو انتهای استوانه صفر باشد.

معادلات (۱۰-۳) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد. برای حلّ آن باید نیروها و لنگرها را با استفاده از روابط (۱۰-۲) تا (۱۳-۲) به منتجه‌های تنش و با جایگذاری در رابطه‌ی (۲-۹) به مؤلفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۷-۲) بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نوشت. نهایتاً یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به‌دست می‌آیدکه می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$
[A]\frac{d^2}{dx^2}\{y\}+[B]\frac{d}{dx}\{y\}+[C]\{y\}=\{F\} \qquad (۳-۱۲)
$$

$$
\{y\}=\{\mathrm{u}\ \phi\ \mathrm{w}\ \psi\}^T \qquad (۳-۱۳)
$$

همچنین قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به‌صورت بردار نیروی $\{F\}$ در رابطه‌ی (۱۹-۳) نشان داده شده است:

$$
\{F\}=\frac{1}{\lambda E}
\begin{Bmatrix}
0\\
0\\
-P_i\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho(R+z)^2dz-\lambda E\alpha\int_{-h/2}^{h/2}\Delta T(z,t)(1+\nu)dz\\
P_i\,\dfrac{h}{2}\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho z\,(R+z)^2dz-\lambda E\alpha\int_{-h/2}^{h/2}\Delta T(z,t)(1+\nu)(R+2z)dz
\end{Bmatrix}
\qquad (۳-۱۴)
$$

در دستگاه معادلات (۱۲-۳) ماتریس‌های $[A]_{4\times4}$ و $[C]_{4\times4}$ متقارن و $[B]_{4\times4}$ پادمتقارن هستند که درایه‌های مربوط به آن‌ها در فصل گذشته آورده شده است.

۳-۲-۱ حلّ معادله‌ی انتقال حرارات گذرا

حلّ معادله‌ی انتقال حرارت گذرا برای استوانه‌ی همگن متقارن محوری در فصل گذشته به طور مفصل مورد بحث قرار گرفته است.

۳-۲-۲ حلّ ترموالاستیک استوانه‌های چرخان تحت بارگذاری حراراتی گذرا و فشار داخلی

همانطور که توضیح داده شد دستگاه معادله‌ی (۱۲-۳) یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت می‌باشد که دارای حلّ عمومی و حلّ خصوصی است. اگر این دستگاه معادلات را به‌صورت ساده شده‌ی زیر بنویسیم:

$$A\{y''\}+B\{y'\}+C\{y\}=\{F\} \qquad (۳-۱۵)$$

داریم:

$$\{y\}=\{y\}_g+\{y\}_p \qquad (۳-۱۶)$$

برای حلّ عمومی دستگاه فوق مقدار $\{y\}=\{\xi\}e^{mx}$ را ر معادلات آن می‌گذاریم، داریم:

$$e^{mx}\left[m^2A_1+mA_2+A_3\right]\{\xi\}=\{0\} \qquad (۳-۱۷)$$

با توجه به اینکه $e^{mx}\neq 0$ می‌توان نوشت:

$$\left|m^2A_1+mA_2+A_3\right|=0 \qquad (۳-۱۸)$$

از حلّ معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه‌ی m_i محاسبه شده که به‌صورت سه جفت ریشه‌ی مزدوج غیر صفر حاصل می‌شوند. از این سه جفت ریشه، یک جفت آن عدد حقیقی و دو جفت دیگر آن نیز اعداد مختلط مزدوج می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه‌ی حاصل در معادله‌ی (۱۷-۳)، بردارهای ویژه‌ی ξ_i متناظر با مقادیر ویژه‌ی فوق به‌دست می‌آیند. درنهایت حلّ عمومی عبارتست از:

$$\{y\}_g=\sum_{i=1}^{6}c_i\,\{\xi\}_i\,e^{m_ix} \qquad (۳-۱۹)$$

با توجه به این نکته که مقادیر ویژه‌ی حاصل شامل اعداد مختلط می‌باشند، برای به‌دست آوردن بردارهای ویژه‌ی متناظر با این اعداد مختلط، باید از روابط حاکم بر بردارهای ویژه‌ی مربوط به اعداد مختلط استفاده نمود.

برای حلّ خصوصی، قسمت ناهمگن معادلات (۱۵-۳) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری چرخان با ضخامت ثابت و تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از X نمی‌باشد. بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس $[C]$ طبق معادله‌ی زیر جواب خصوصی را به‌دست آورد.

$$[C]\{y\}=\{F\}\Rightarrow\{y\}=[C]^{-1}\{F\} \tag{۳-۲۰}$$

اما با توجه به معکوس ناپذیری ماتریس $[C]$ به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، با ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حلّ می‌شود. بدین منظور در اوّلین معادله از سری معادلات (۱۰-۳) از طرفین آن انتگرال‌گیری کرده و خواهیم داشت:

$$u=\int v dx + C_7 \tag{۳-۲۱}$$

بنابراین دستگاه معادلات قدیم به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} [A]\dfrac{d^2}{dx^2}\{y\}+[B]\dfrac{d}{dx}\{y\}+[C]\{y\}=\{F\} \\ \{y\}=\{\mathrm{v}\ \phi\ \mathrm{w}\ \psi\}^T \end{cases} \tag{۳-۲۲}$$

که در آن بردار نیرویی $\{F\}$ با توجه به انتگرال‌گیری از طرفین اوّلین معادله، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\{F\}=\frac{1}{\lambda E}\left\{\begin{matrix} C_0 \\ 0 \\ -P_i\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho(R+z)^2dz-\lambda E\alpha\int_{-h/2}^{h/2}\Delta T(z,t)(1+\nu)dz \\ P_i\dfrac{h}{2}\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho z(R+z)^2dz-\lambda E\alpha\int_{-h/2}^{h/2}\Delta T(z,t)(1+\nu)(R+2z)dz \end{matrix}\right\} \tag{۳-۲۳}$$

بنابراین با حلّ دستگاه معادلات فوق به‌صورت مطالعه‌ی موردی می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به‌دست آورد.

شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۱-۳) توسط رابطه‌ی (۱۱-۳) بیان می‌شوند. به عبارتی مقادیر $\{u\ \phi\ w\ \psi\}$ و $\{N_x\quad M_x\quad Q_{xz}\quad M_{xz}\}$ در دو انتهای استوانه طوری در نظر گرفته می‌شوند که همواره رابطه‌ی (۱۱-۳) برابر صفر باشد. با داشتن ۶ مجهول $C_6,...,C_1$ در جواب عمومی و ۲ ثابت C_0 و C_7 در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل ۴ شرط مرزی در هر سمت، ۸ ثابت مجهول را محاسبه کرد. نهایتاً با به‌دست آوردن ثوابت مجهول، بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه‌ی (۱۶-۳) برحسب متغیّرهای x,z,t به‌دست می‌آیند.با استفاده از رابطه‌ی (۶-۲) می‌توان میدان جابه‌جایی شعاعی و طولی را به‌دست آورد و با استفاده از روابط (۷-۲) تا (۱۳-۲) مقادیر تنش، کرنش، نیرو و لنگر را نیز محاسبه کرد.

۳-۳ مطالعه‌ی موردی

استوانه‌ی دوسر گیردار:

برای شرایط مرزی دوسر گیردار با توجه به رابطه‌ی(۱۱-۳) داریم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0\ ,\ \phi=0\ ,\ w=0\ ,\ \psi=0 \\ x=L \Rightarrow u=0\ ,\ \phi=0\ ,\ w=0\ ,\ \psi=0 \end{cases} \tag{۳-۲۴}$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مولفه‌های میدان جابه‌جایی به‌دست می‌آید.

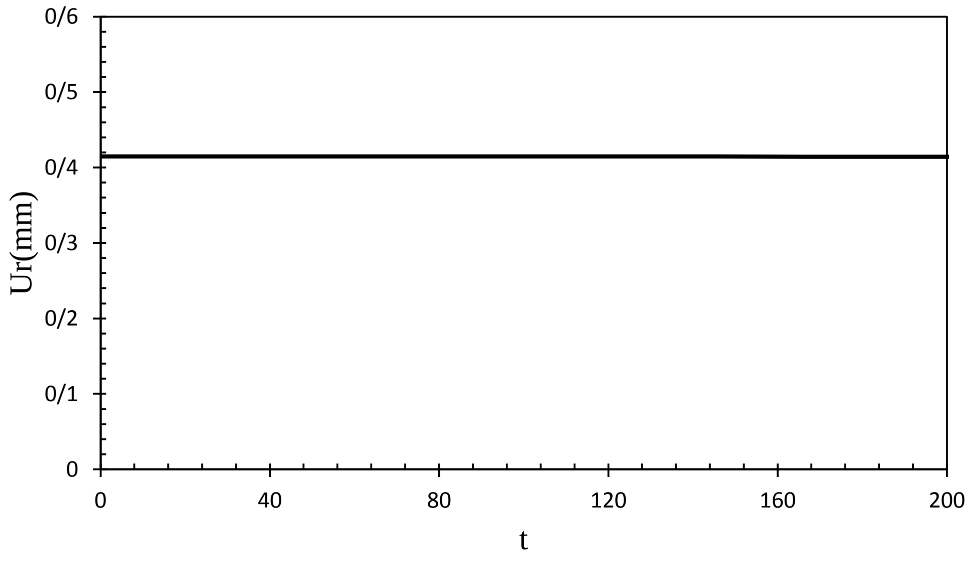
برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج عددی، یک استوانه جدار ضخیم با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است. استوانه‌ی جدار ثابت به شعاع داخلی $r_i=0.4m$ و شعاع خارجی $r_o=0.6m$ با طول $L=8m$ تحت فشار داخلی $P=70Mpa$ و سرعت‌های دورانی مختلف قرار گرفته است. مدول الاستیسیته برابر با $E=200Gpa$ و نسبت پواسون $\nu=0.3$ می‌باشد. چگالی برابر با $\rho=7854kg/m^3$ و ضریب پخش حرارتی، حرارت مخصوص و ضریب انتقال حرارت به ترتیب برابر با $\alpha=12(10^{-6})1/^\circ C$، $C=434J/Kg.^\circ K$ و $K=60.5W/m.^\circ K$

می‌باشد. برای به‌دست آوردن نتایج عددی مقادیر زیر برای ثابت‌های شرایط مرزی دمایی در نظر گرفته شده است[۵۲]:

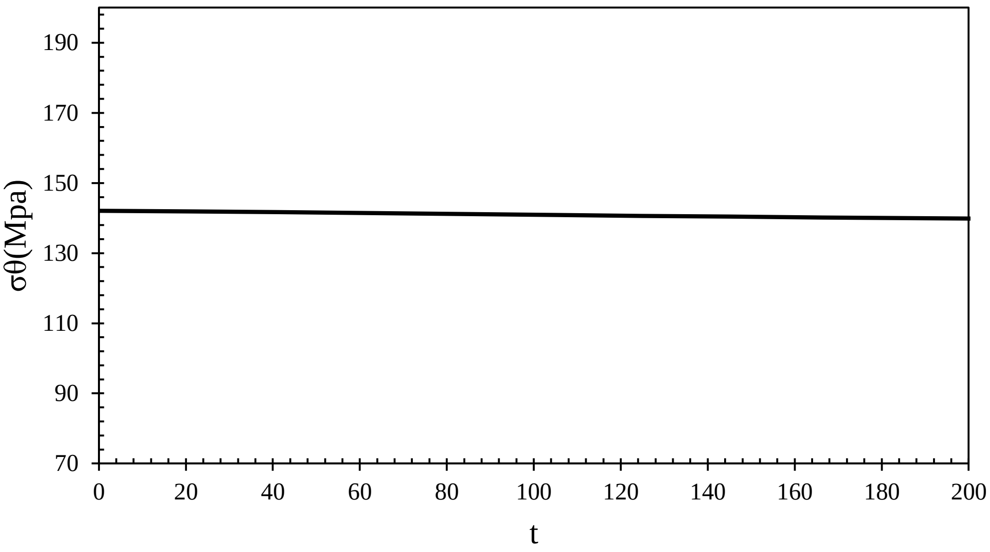
$$
\begin{aligned}
&T_i(r,0)=20r \quad , \ C_{11}=6W\ /m^2K \quad , \ C_{21}=25W\ /m^2K \\
&C_{12}=C_{22}=K \qquad , \ T_{\infty 1}=7^{\circ}C \qquad , \ T_{\infty 2}=9^{\circ}C
\end{aligned}
\tag{۳-۲۵}
$$

تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط انتهایی دوسر گیردار انجام شده است. حلّ تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط Maple 16 صورت گرفته است.

شکل (۲-۳) و (۴-۲) به ترتیب جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در استوانه‌ی چرخان همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل با افزایش زمان تنش و جابه‌جایی مقادیر ثابتی را اختیار کرده‌اند. به عبارت دیگر زمان تأثیر چندانی بر مقادیر تنش و جابه‌جایی در بارگذاری فشاری و دورانی همراه با حرارت گذرا ندارد.

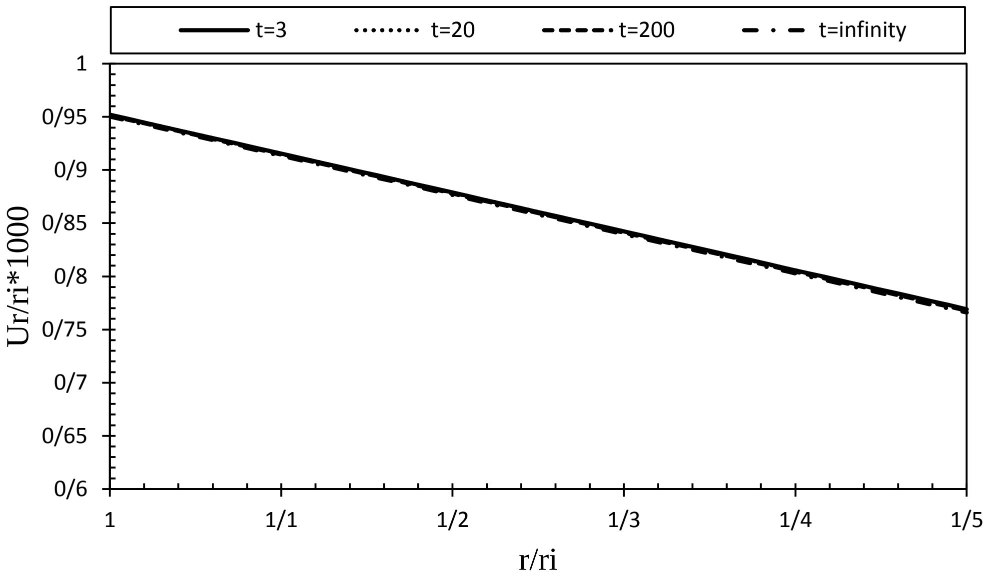


شکل ۳-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی چرخان همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی بر اساس زمان برای وسط استوانه

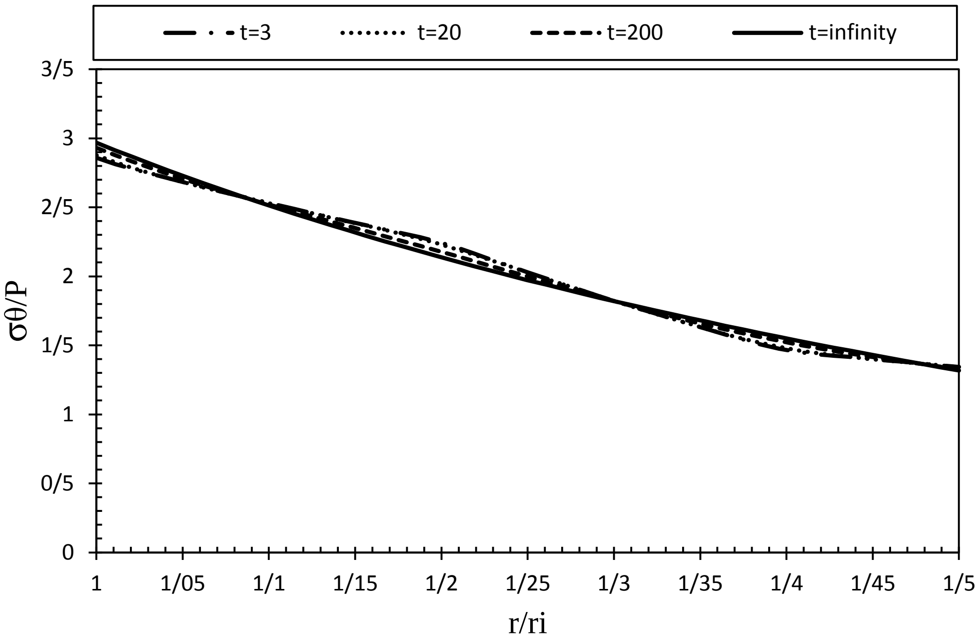


شکل ۳-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی چرخان همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی بر اساس زمان برای وسط استوانه

شکل (۴-۳) و (۵-۳) توزیع جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در راستای شعاع استوانه را نشان می‌دهد. همانطور که از این شکل‌ها پیداست با افزایش زمان تغییر چندانی در مقادیر جابه‌جایی و تنش محیطی در راستای شعاع نداریم.

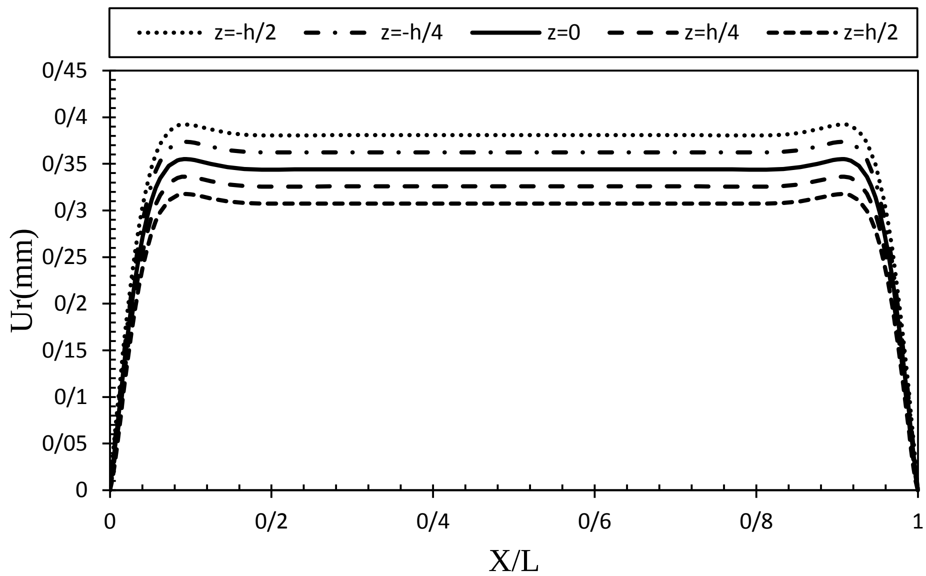


شکل ۳-۴ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای شعاع استوانه‌ی همگن چرخان تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی برای زمان‌های مختلف در $X=L/2$ و $\omega=300$ rpm

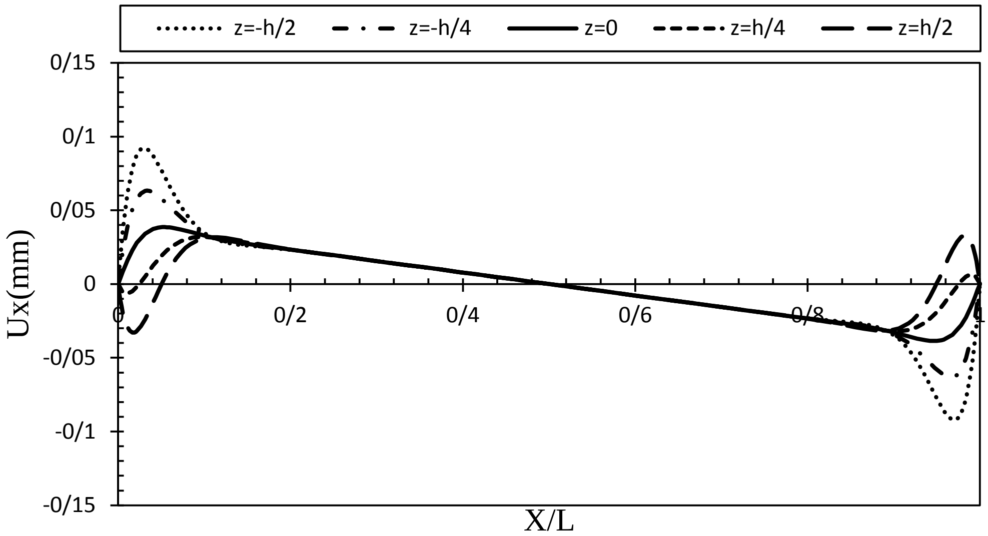


شکل ۳- ۵ توزیع نرمال تنش محیطی در راستای شعاع استوانه‌ی همگن چرخان تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی برای زمان‌های مختلف در X=L/2 و ω=300 rpm

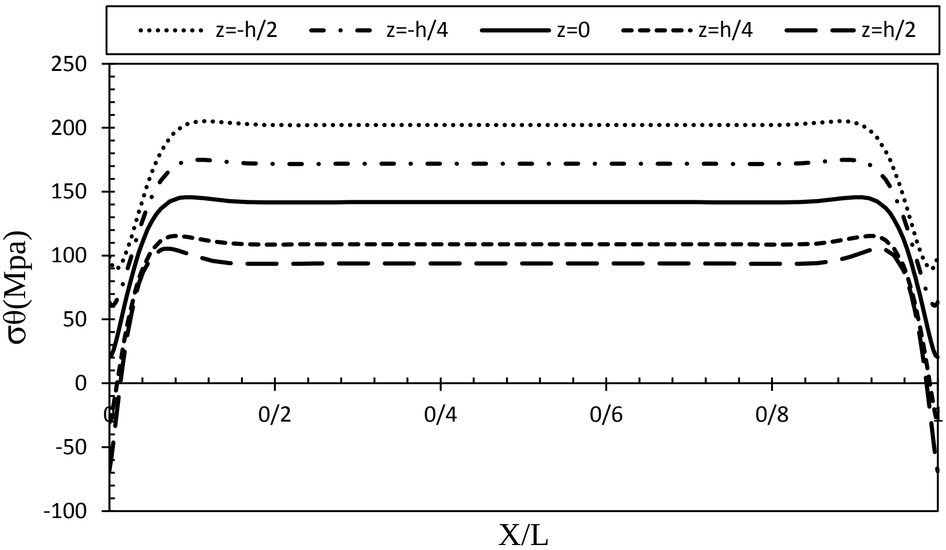
شکل (۶-۳) تا (۹-۳) به ترتیب جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی برای لایه‌های مختلف در راستای طولی استوانه‌ی همگن چرخان را نشان می‌دهد.



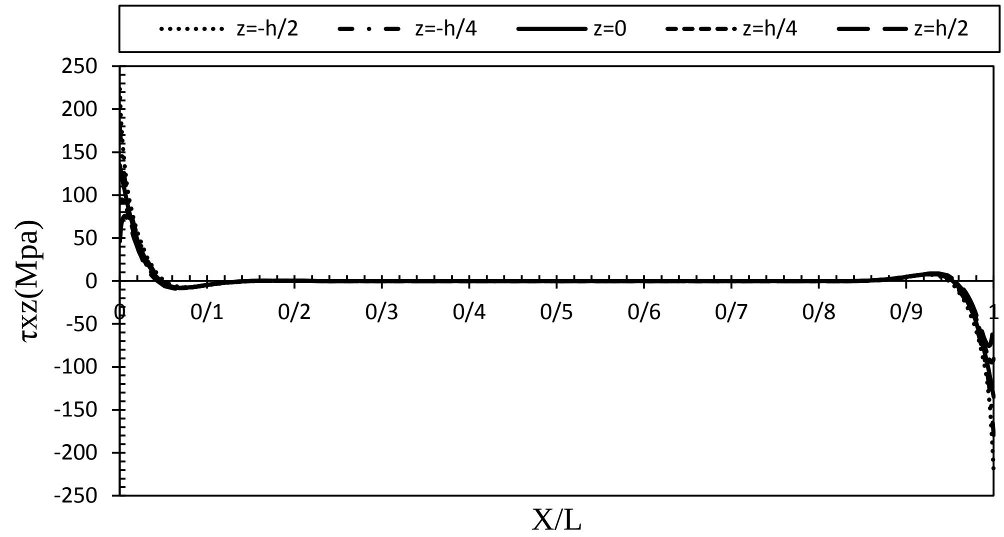
شکل ۳- ۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن چرخان تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی در ω=300 rpm و t=40 s



شکل ۳- ۷ توزیع جابه‌جایی محوری در راستای طولی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن چرخان تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی در ω=300 rpm و t=40 s

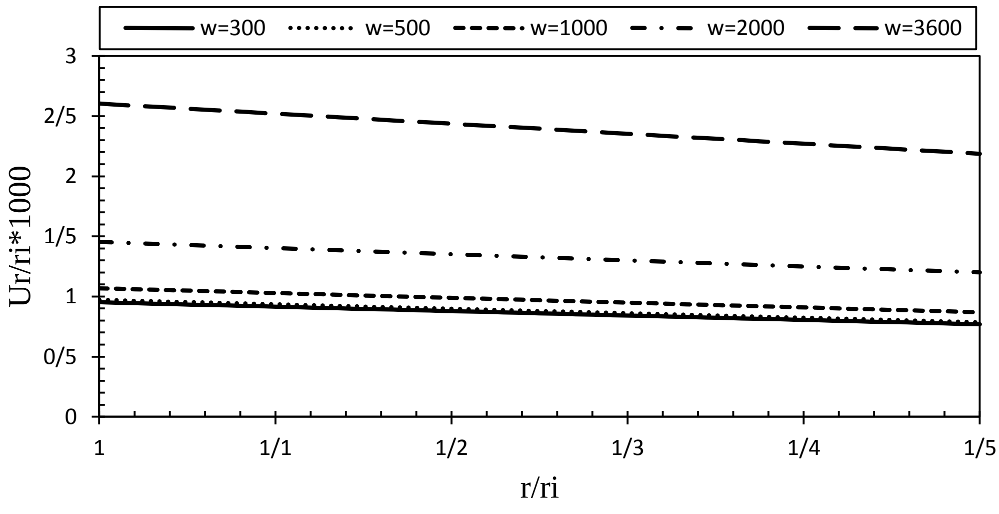


شکل ۳- ۸ توزیع تنش محیطی در راستای طولی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن چرخان تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی در ω=300 rpm و t=40 s

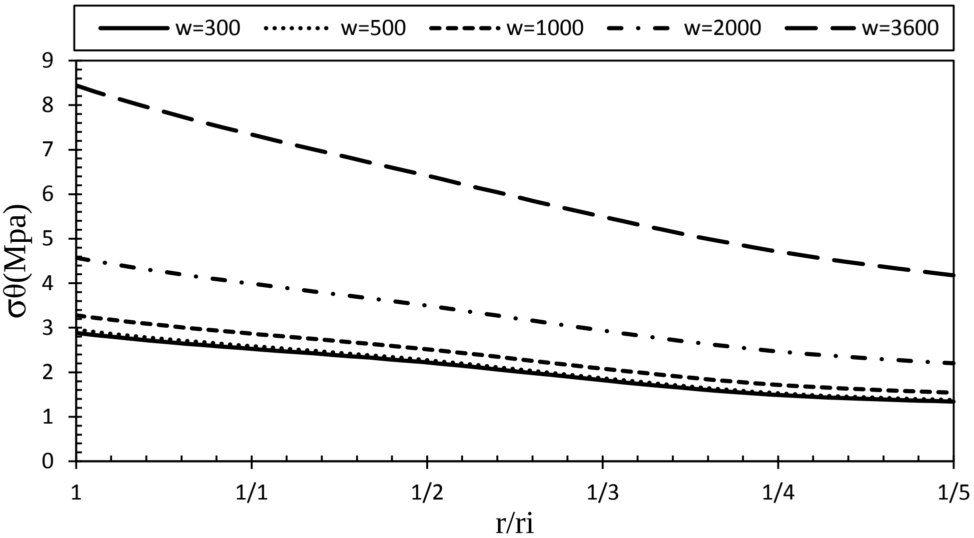


شکل ۳- ۹ توزیع تنش برشی در راستای طولی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن چرخان تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی در ω=300 rpm و t=40 s

شکل (۳-۱۰) و (۳-۱۱) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی را در استوانه‌ی چرخان همگن نشان می‌دهد. با توجه به شکل با افزایش سرعت دوران مقادیر تنش و جابه‌جایی نیز به‌صورت چشم‌گیری افزایش می‌یابد. در سرعت‌های پایین تغییرات جابه‌جایی و تنش بسیار ناچیز بوده است ولی در سرعت‌های بالا چرخش بر بارگذاری فشاری و دمایی غلبه می‌کند.



شکل ۳- ۱۰ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای شعاعی استوانه‌ی چرخان همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی برای سرعت‌های زاویه‌ای مختلف در X=L/2



شکل ۳- ۱۱ توزیع نرمال تنش محیطی در راستای شعاعی استوانه‌ی چرخان همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی برای سرعت‌های زاویه‌ای مختلف در X=L/2

۳-۴ حلّ عددی استوانه‌های چرخان همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی

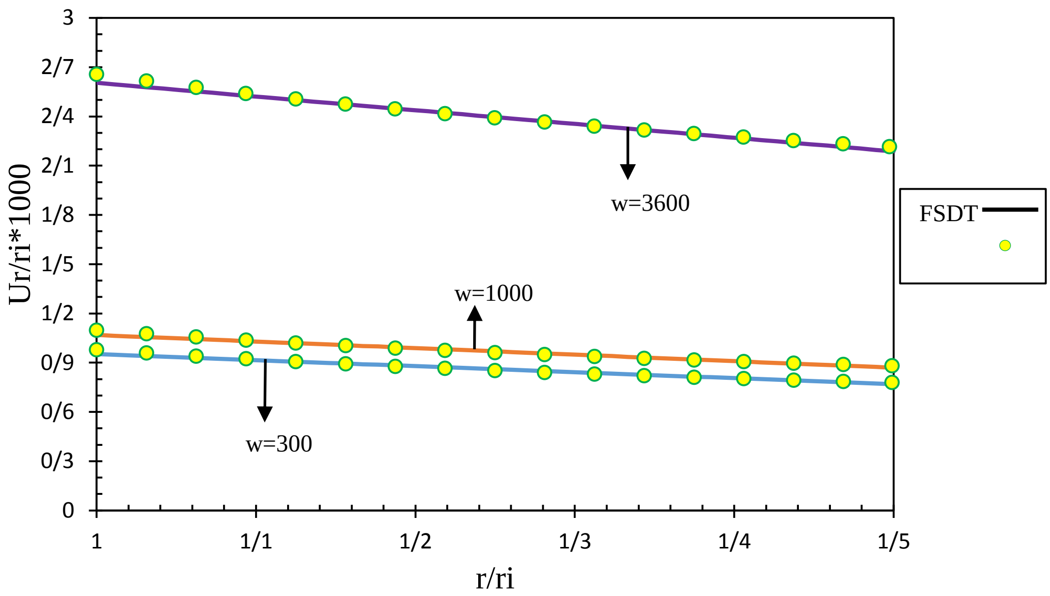
مدل‌سازی عددی استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی و بارگذاری حرارتی گذرا مطابق فصل ۲ می‌باشد با این تفاوت که یک سرعت دورانی ثابت به کل مجموعه اعمال می‌شود. در دامه نتایج حلّ عددی و حلّ تحلیلی با یکدیگر مقایسه می‌شود.

۳-۴-۱ مقایسه‌ی نتایج

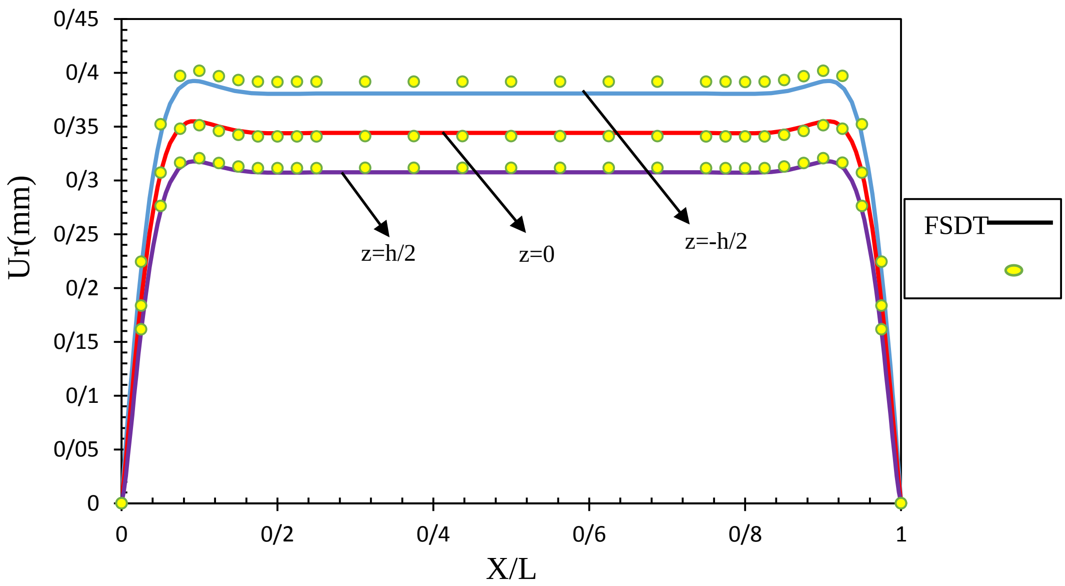
به‌منظور بررسی صحّت نتایج حلّ تحلیلی ارائه شده، مطالعه‌ی موردی ذکر شده در مراحلّ قبل در نرم‌افزار اجزاء محدود Abaqus مدل شده است.

شکل (۳-۱۲) جابه‌جایی نرمال شعاعی محاسبه شده با دو روش FE و FSDT در استوانه‌ی همگن چرخان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی در X=L/2 و زمان t=40 s برای سرعت‌های دورانی مختلف را نشان می‌دهد. شکل (۳-۱۳) جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با دو روش FE و FSDT در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن چرخان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی برای ω=300 rpm در زمان t=40 s نشان می‌دهد. شکل (۳-۱۴) جابه‌جایی محوری محاسبه

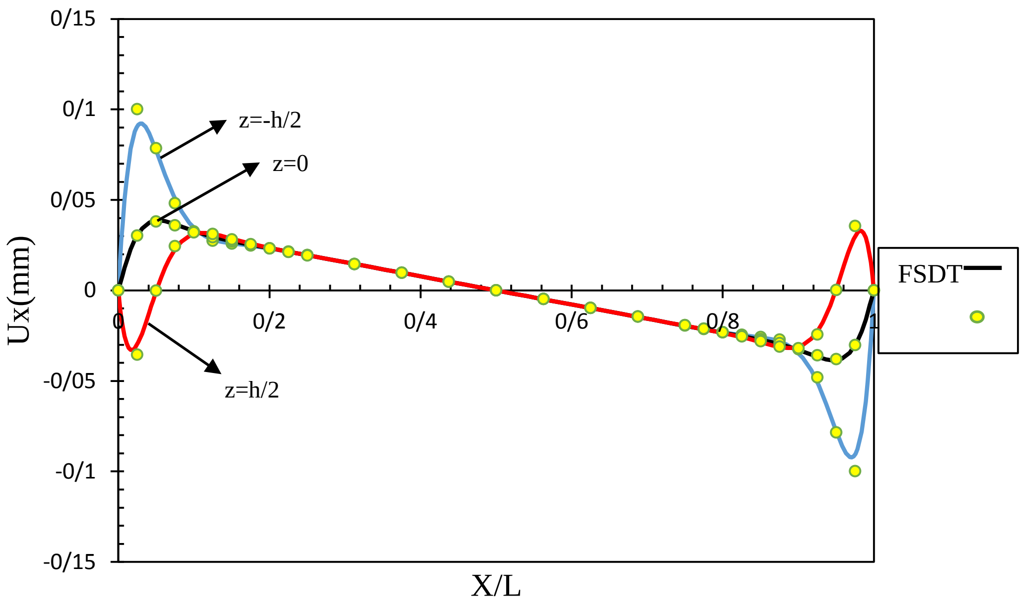
شده با دو روش FE و FSDT در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن چرخان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی برای ω=300 rpm در t=40 s نشان می‌دهد.



شکل ۳- ۱۲ جابه‌جایی نرمال شعاعی محاسبه شده با دو روش FE و FSDT در استوانه‌ی همگن چرخان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی برای سرعت‌های دوران مختلف در X=L/2 و t=40 s



شکل ۳- ۱۳ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با دو روش FE و FSDT در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن چرخان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی برای ω=300 rpm و t=40 s



شکل ۳- ۱۴ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با دو روش FE و FSDT در لایه‌های مختلف استوانه‌ی همگن چرخان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی برای ω=300 rpm و t=40 s

جدول(۳-۱) مقادیر جابه‌جایی شعاعی در X=L/2 و زمان t=40 s را برای سرعت‌های دورانی مختلف نشان می‌دهد. با توجه به این نتایج بدیهی است که با افزایش سرعت دوران مقادیر جابه‌جایی افزایش چشم‌گیری دارند. در سرعت‌های پایین مقادیر جابه‌جایی ایجاد شده توسط چرخش در مقابل فشار ناچیز می‌باشد و تقریبا با مقادیر ایجاد شده توسط بارگذاری حرارتی گذرا در زمان‌های بالا برابر می‌باشد (با توجه به نتایج فصل ۲). با افزایش سرعت دوران، چرخش بر فشار و بارگذاری حرارتی غالب می‌شود.

جدول ۳- ۱ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با دو روش FE و FSDT در استوانه‌ی همگن چرخان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی در X=L/2 و t=40 s

	Ur[mm]	**ω=300**	**ω=500**	**ω=1000**	**ω=2000**	**ω=3600**
r=ri	FEM	۰/۳۹۱	۰/۳۹۹	۰/۴۳۹	۰/۵۹۵	۱/۰۶۲
	FSDT	۰/۳۸	۰/۳۸۸	۰/۴۲۷	۰/۵۸۱	۱/۰۴۱
r=R	FEM	۰/۳۴	۰/۳۴۸	۰/۳۸۴	۰/۵۲۷	۰/۹۵۶
	FSDT	۰/۳۴۴	۰/۳۵۱	۰/۳۸۷	۰/۵۳	۰/۹۵۸

جدول (۲-۳) تنش‌های محیطی محاسبه شده با دو روش FE و FSDT در استوانه‌ی همگن چرخان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی در X=L/2 و زمان t=40 s را نشان می‌دهد. با توجه به جدول در سرعت‌های پایین تنش‌های ایجاد شده مقادیر بسیار کمی دارا می‌باشند و این مقادیر به مقادیر تنش ایجاد شده بوسیله‌ی بارگذاری حراراتی گذرا نزدیک می‌باشد. در این حالت بارگذاری فشاری بر بارگذاری حرارتی و چرخش غالب است. با افزایش سرعت دورانی مقادیر تنش حاصل از چرخش افزایش یافته بطوری که بر بارگذاری فشاری غالب می‌شود.

جدول ۳- ۲ تنش محیطی محاسبه شده با دو روش FE و FSDT در استوانه‌ی همگن چرخان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی در X=L/2 و t=40 s

	σθ[Mpa]	ω=300	ω=500	ω=1000	ω=2000	ω=3600
لایه داخلی r=ri	FEM	۱۷۸/۹۴	۱۸۳/۴۲	۲۰۴/۴۳	۲۸۸/۴۹	۵۳۹/۵۵
	FSDT	۲۰۲/۱۱	۲۰۶/۹۴	۲۲۹/۵۹	۳۲۰/۲۱	۵۹۰/۸۶
لایه میانی r=R	FEM	۱۳۸/۶۲۲	۱۴۲/۰۷	۱۵۸/۲۳	۲۲۲/۸۸	۴۱۵/۹۹
	FSDT	۱۴۱/۷۲	۱۴۵/۱۳	۱۶۱/۱۴	۲۲۵/۱۴	۴۱۶/۳۱

۳-۵ جمع بندی

با توجه به نتایج به‌دست آمده در این فصل می‌توان دریافت که مقادیر تنش و جابه‌جایی ایجاد شده در سرعت‌های دورانی پایین، ناچیز می‌باشد و به‌جای استفاده از معادلات استوانه‌های تحت بارگذاری فشاری و چرخش در سرعت‌های پایین، می‌توان از معادلات مربوط به استوانه‌های تحت فشار استفاده نمود. با افزایش سرعت دورانی مقادیر جابه‌جایی و تنش، افزایش یافته بطوریکه چرخش بر فشار داخلی و انتقال حرارت گذرا غلبه می‌کند. بنابراین در سرعت‌های بالا نمی‌توان از فرض فوق استقاده نمود. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار، دوران و حرارت گذرا در قسمت ناهمگنی معادلات ظاهر می‌شود می‌توان هر کدام از بارگذاری‌های فوق را به‌صورت جدا حلّ نمود و از اصل برهم‌نهی برای به‌دست آوردن نتایج مربوط به بارگذاری‌های ذکر شده استفاده نمود و نتایج را با هم جمع

کرد. به طور کلی مطابقت قابل قبولی بین تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل و حلّ عددی در مطالعه‌ی موردی مورد بررسی وجود دارد و با توجه به تاثیر اندک بارگذاری حرارتی گذرا می‌توان از نتایج مربوط به بارگذاری فشاری و چرخش به‌جای استفاده از نتایج حرارت گذرا توأم با چرخش و فشار استفاده نمود.

در حالت کلی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل برای تحلیل الاستیک استوانه‌های چرخان تحت بارگذاری فشاری مناسب می‌باشد.

فصل ۴

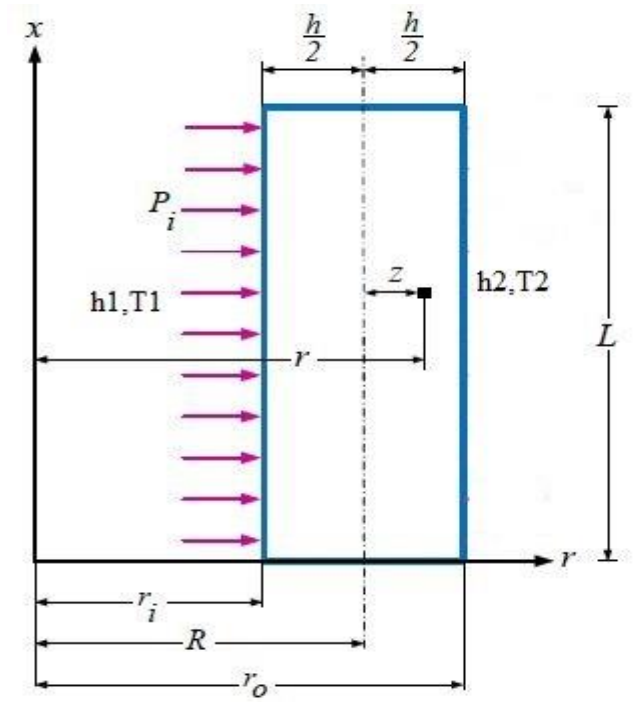
تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن تحت بارحرارتی گذرا

۴-۱ مقدمه

طراحی مواد FG در ابتدا به‌منظور کاربردهای حرارتی آن‌ها در شرایط ویژه بود و مقاومت منحصر به فرد استوانه‌های جدار ضخیم (FGM) در برابر بارهای حرارتی، محققان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آن‌هادر مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، بپردازند. در این فصل برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای، با استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل، حلّ عمومی استوانه‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت داخلی و بار حرارتی گذرا ارائه شده است. درنهایت حلّ عددی توسط نرم‌افزار اجزاء محدود Abaqus انجام شده و نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک روش تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده است.

۴-۲ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن

یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فشار داخلی و انتقال حرارت گذرا در شعاع داخلی و خارجی استوانه را به‌صورت شکل (۴-۱) در نظر می‌گیریم:



شکل۴- ۱ پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی گذرا

همانطور که در فصول قبلی بیان شد بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \tag{۴-۱}$$

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\begin{cases} U = \iiint\limits_{v} U^{*} dV \quad , \quad dV = rd\theta drdx = (R+z)dxd\theta dz \\ U^{*} = \dfrac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{xz}\gamma_{xz}) \end{cases} \tag{۴-۲}$$

بر اساس روابط رفتاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد و با در نظر گرفتن کرنش‌های حرارتی، تنش‌ها بر حسب مقادیر کرنش عبارتند از:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \dfrac{E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} - \dfrac{\alpha(r)E(r)\Delta T(r,t)}{1-2\nu} \\ \tau_{xz} = \dfrac{E(r)}{2(1-\nu)}\gamma_{xz} \end{cases} \tag{۴-۳}$$

که در آن $\Delta T(r,t)$ تابع توزیع دمای گذرا در طول جداره‌ی استوانه بوده و $\alpha(r)$ نیز ضریب انبساط حرارتی می‌باشد. با تعریف پارامتر λ برای خلاصه نویسی داریم:

$$\begin{cases} \sigma_i = \lambda E(r)\left[(1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k) - \alpha(r)(1+\nu)\Delta T(r,t)\right] \\ \tau_{xz} = \dfrac{1-2\nu}{2}\lambda E(r)\gamma_{xz} \\ \lambda = \dfrac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \tag{۴-۴}$$

با جایگذاری تنش از رابطه‌ی (۴-۴) در رابطه‌ی (۴-۲) برای انرژی کرنشی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} U = \iiint\limits_{V} U^{*} dV \\ dV = rdrd\theta dx = (R+z)dxd\theta dz \\ U = \dfrac{1}{2}E(r)\lambda\Big[(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta\varepsilon_z) \\ \qquad + \dfrac{1-2\nu}{2}\gamma_{xz}^2 - \alpha(r)\Delta T(r,t)(1+\nu)(\varepsilon_x + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z)\Big] \end{cases} \tag{۴-۵}$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار داخلی:

$$\begin{cases} W = \iint_s (\overrightarrow{f_{sf}}\,\vec{u})dS \\ dS = rd\theta dx = (R+z)d\theta dx \\ W = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}(P_i r_i)U_z dx d\theta \end{cases} \tag{۴-۶}$$

و با انتگرال‌گیری در محدوده‌ی:

$$0 \le x \le L \quad , \quad -\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2} \tag{۴-۷}$$

برای تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه‌ی تحت شار حرارتی و فشار داخلی یکنواخت داریم:

$$\delta U = R\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2}\delta U^*(1+\frac{z}{R})dzdxd\theta \tag{۴-۸}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} = R\int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz})\left(1+\frac{z}{R}\right)dzdx$$

$$\delta W = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}(P_i r_i)\delta U_z dx d\theta \tag{۴-۹}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} = \int_0^{L}\left[P_i(R-\frac{h}{2})\right](\delta w + z\,\delta\psi)dx$$

با جایگذاری کرنش‌های (۷-۲) در روابط (۸-۴) و (۹-۴) و نیز به‌کارگیری اصول حساب وردشی و اصل کار مجازی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای تحت حرارت گذرا و فشار داخلی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{2\pi} = \frac{\delta W}{2\pi} \tag{۴-۱۰}$$

$$\begin{cases} R\dfrac{dN_x}{dx} = 0 \\ R\dfrac{dM_x}{dx} - RQ_x = 0 \\ R\dfrac{dQ_x}{dx} - N_\theta = -P_i\left(R-\dfrac{h}{2}\right) \\ R\dfrac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - RN_z = P_i\dfrac{h}{2}\left(R-\dfrac{h}{2}\right) \end{cases} \tag{۴-۱۱}$$

$$R\left[N_x \delta u + M_x \delta\phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta\psi\right]_0^L = 0 \quad (۴-۱۲)$$

روابط (۱۱-۴) همان معادلات اصلی را تشکیل می‌دهند.رابطه‌ی کمکی (۱۲-۴) هم شرایط مرزی مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌بایست در هر دو انتهای استوانه صفر باشند.

۴-۲-۱ توزیع ناهمگنی خواص مکانیکی و حرارتی

در استوانه‌های تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، خواص مکانیکی از قبیل مدول الاستیسیته Eو ضریب پواسون ν توابعی از شعاع بی‌بعد $\bar{r}$ می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و بالاخص در این بررسی، به علت تغییرات جزئی، ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. همچنین در بحث انتقال حرارت ضریب انبساط حرارتی α، ضریب رسانش حرارتی K، ظرفیت گرمایی ویژه C و چگالی نیز توابعی از شعاع بی‌بعد $\bar{r}$ می‌باشند. در این تحلیل تمامی ثابت‌های ذکر شده را به‌صورت توزیع توانی از شعاع بی بعد $\bar{r}$ در راستای ضخامت استوانه در نظر می‌گیریم و داریم:

$$K = K_i (\bar{r})^{n_1} \quad (۴-۱۳)$$

$$\rho = \rho_i (\bar{r})^{n_2} \quad (۴-۱۴)$$

$$C = C_i (\bar{r})^{n_3} \quad (۴-۱۵)$$

$$E(r) = E_i (\bar{r})^{n_4} \quad (۴-۱۶)$$

$$\alpha = \alpha_i (\bar{r})^{n_5} \quad (۴-۱۷)$$

که در این رابطه $\bar{r} = r / r_i$ مختصات شعاعی بی‌بعد است. همچنین E_i، α_i، K_i، C_i و ρ_i به ترتیب مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی، ضریب رسانش حرارتی، ظرفیت گرمای ویژه و چگالی در شعاع داخلی استوانه و n_1، n_2، n_3، n_4 و n_5 ثابت‌های ناهمگنی مادّه می‌باشند. با جایگذاری مقادیر $r = R + z$ در روابط (۱۳-۴) تا (۱۷-۴) داریم:

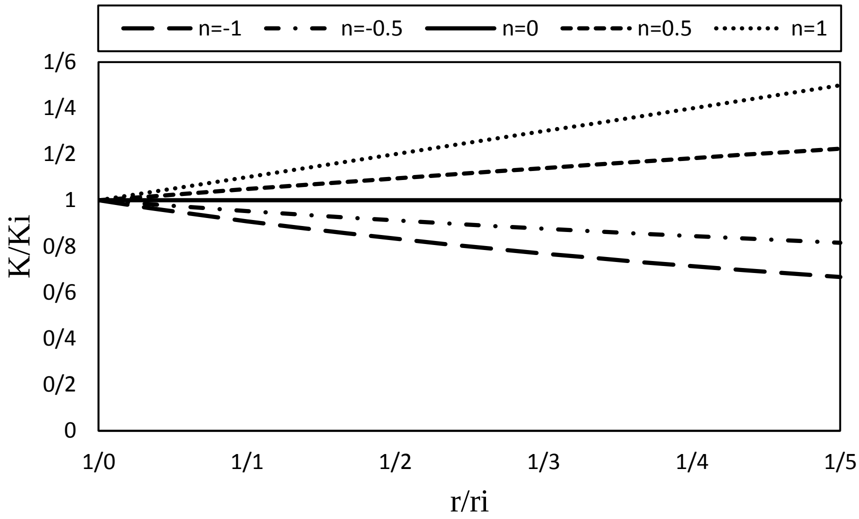
$$K = K_i \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{n1} \quad (۴-۱۸)$$

$$\rho = \rho_i \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{n_2} \quad (۴-۱۹)$$

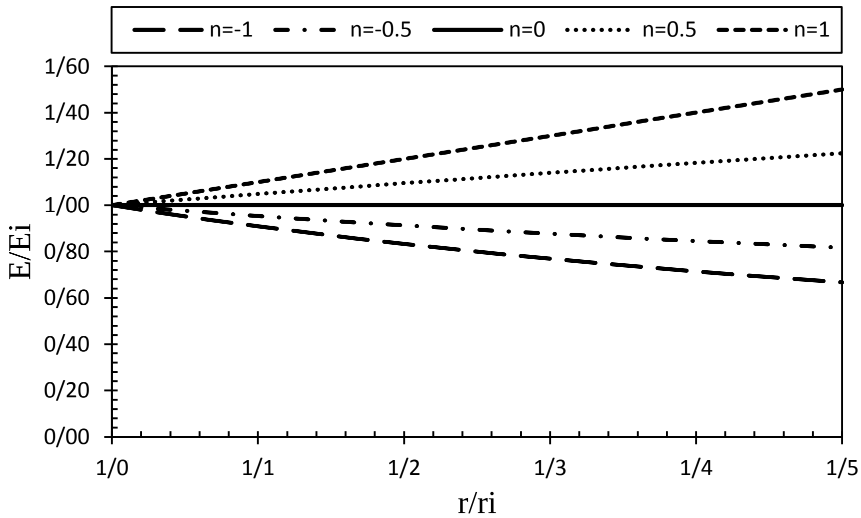
$$C = C_i \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{n3} \quad (۴-۲۰)$$

$$E(r) = E_i \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{n4} \qquad (۴-۲۱)$$

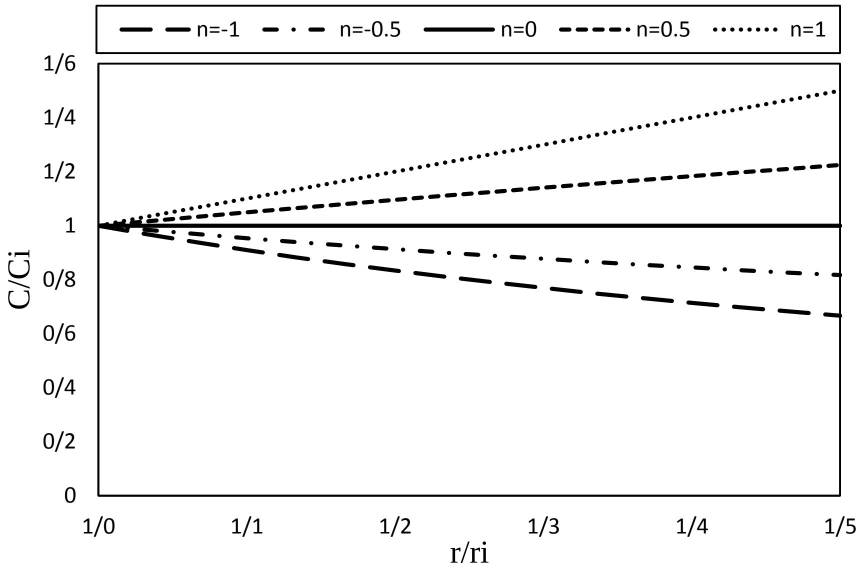
$$\alpha = \alpha_i \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{n5} \qquad (۴-۲۲)$$



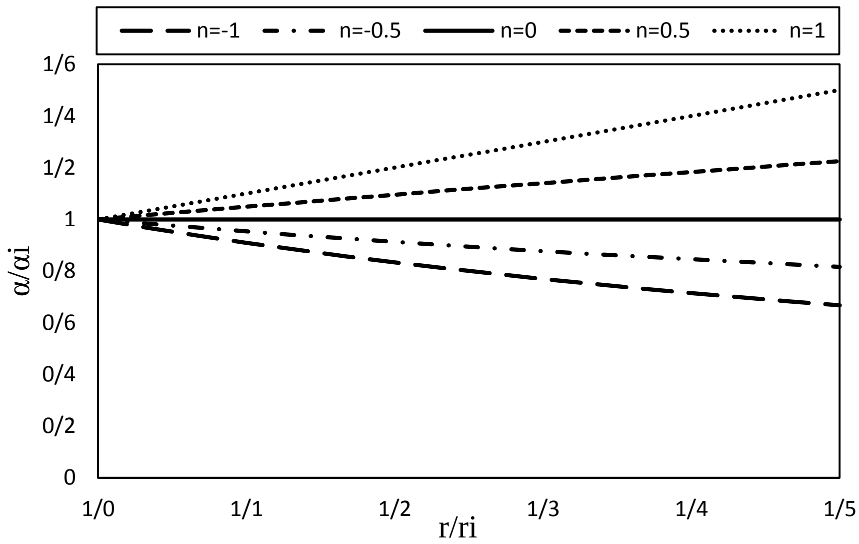
شکل۴- ۲ توزیع بی‌بعد ضریب رسانش حرارتی در راستای شعاعی



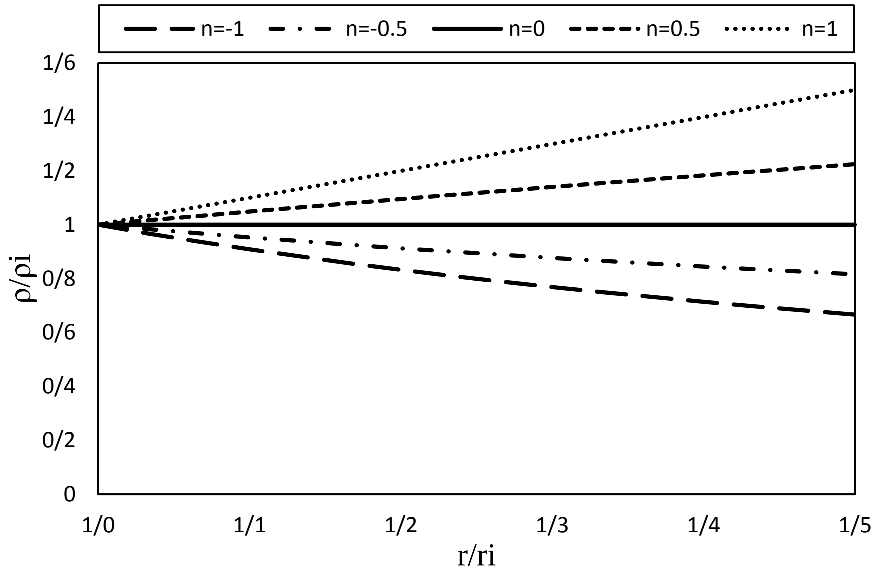
شکل۴- ۳ توزیع بی‌بعد مدول الاستیسیته در راستای شعاعی



شکل۴- ۴ توزیع بی‌بعد حرارت مخصوص در راستای شعاعی



شکل۴- ۵ توزیع بی‌بعد ضریب انبساط حرارتی در راستای شعاعی



شکل۴- ۶ توزیع بی‌بعد چگالی در راستای شعاعی

۲-۲-۴ حلّ معادله‌ی انتقال حرارت گذرا

معادله‌ی انتقال حرارت گذرای یک‌بعدی برای یک استوانه‌ی جدار ضخیم متقارن محوری در غیاب منبع حرارتی، براساس قانون فوریه به شکل زیر می‌باشد:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + Q \tag{۴-۲۳}$$

با توجه به عدم حضور منبع حرارتی داریم:

$$Q = 0 \tag{۴-۲۴}$$

بنابراین معادله‌ی انتقال حرارت گذرا در غیاب منبع حرارتی به‌صورت شکل زیر ساده می‌شود:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(K r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \tag{۴-۲۵}$$

که T(r,t)، توزیع دما و C،ρ،K به ترتیب ضریب رسانش حرارتی، چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه می‌باشند. که در بخش قبل تعریف شده‌اند.

شرایط مرزی و اوّلیه در حالت کلی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{cases} c_{11}T(r_i,t)+c_{12}\dfrac{\partial T}{\partial r}(r_i,t)=g_1 \\ c_{21}T(r_o,t)+c_{22}\dfrac{\partial T}{\partial r}(r_o,t)=g_2 \end{cases} \tag{۴-۲۶}$$

$$T(r,0)=T_i(r) \tag{۴-۲۷}$$

$c_{ij}\ (i,j=1,2)$ و $g_i\ (i=1,2)$ ثابت‌هایی وابسته به شرایط مرزی و $T_i(r)$، شرط اوّلیه‌ی مسئله می‌باشند. حلّ معادله‌ی (۴-۲۵) با استفاده از روش جدایی متغیّرها، تابع بسل تعمیم یافته و بسط تابع ویژه به‌دست می‌آید.

در ابتدا شرایط مرزی ناهمگن را به شرایط مرزی همگن تبدیل میکنیم، برای این کار تابع انتقال حرارت $T(r,t)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$T(r,t)=T_h(r,t)+T_s(r) \tag{۴-۲۸}$$

با قرار دادن معادله‌ی (۴-۲۸) درمعادله (۴-۲۵) داریم:

$$\rho c\,\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\left(\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial r}+\frac{\partial T_s(r)}{\partial r}\right)\right) \tag{۴-۲۹}$$

معادله‌ی (۴-۲۹) را می‌توان به‌صورت دو معادله زیر جدا نمود:

$$\begin{cases} \rho c\,\dfrac{\partial T_h(r,t)}{\partial t}=k\,\dfrac{\partial^2 T_h(r,t)}{\partial r^2}+\left(\dfrac{\partial k}{\partial r}+\dfrac{k}{r}\right)\dfrac{\partial T_h(r,t)}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(kr\,\dfrac{\partial T_s(r)}{\partial r}\right)=0 \end{cases} \tag{۴-۳۰}$$

شرایط مرزی برای معادله‌ای که دارای عبارت T_sاست مطابق معادله‌ی (۴-۳۱) تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} c_{11}T_s(r_i,t)+c_{12}\dfrac{\partial T_s}{\partial r}(r_i,t)=g_1 \\ c_{21}T_s(r_o,t)+c_{22}\dfrac{\partial T_s}{\partial r}(r_o,t)=g_2 \end{cases} \tag{۴-۳۱}$$

با دو بار انتگرال‌گیری از معادله‌ی دوم (۴-۳۰) تابع T_s به‌دست آمده و با اعمال شرایط مرزی ثابت‌های c_1 و c_2 به‌دست می‌آیند:

$$kr\,\frac{\partial T_s}{\partial r}=C \tag{۴-۳۲}$$

$$T_s = \int \frac{C}{kr}\,dr = \int \frac{Ca^{n_1}}{k_1 r^{n_1+1}}\,dr = \frac{-Ca^{n_1}}{k_1 n_1} r^{-n_1} + C_2 = C_1 r^{-n_1} + C_2 \tag{۴-۳۳}$$

$$C_1 = \frac{g_1 c_{21} - g_2 c_{11}}{c_{11}c_{21}\left(r_i^{-n_1} - r_o^{-n_1}\right) + n_1\left(c_{22}c_{11}r_o^{-n_1-1} - c_{12}c_{21}r_i^{-n_1-1}\right)} \tag{۴-۳۴}$$

$$C_2 = \frac{g_1 - c_1\left(c_{11}r_i^{-n_1} - c_{12}n_1 r_i^{-n_1-1}\right)}{c_{11}} \tag{۴-۳۵}$$

شرایط مرزی و اوّلیه‌ی مربوط به تابع T_h به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} c_{11}T_h(r_i,t) + c_{12}\dfrac{\partial T_h}{\partial r}(r_i,t) = 0 \\ c_{21}T_h(r_o,t) + c_{22}\dfrac{\partial T_h}{\partial r}(r_o,t) = 0 \end{cases} \tag{۴-۳۶}$$

$$T_h(r,0) = T_i(r) - T_s(r) \tag{۴-۳۷}$$

شکل ساده‌ی معادله‌ی (۲۵-۴) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\rho c\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T_h(r,t)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r}\right)\frac{\partial T_h(r,t)}{\partial r} \tag{۴-۳۸}$$

معادله‌ی (۳۸-۴) با استفاده از قوانین جدایی متغیّر به‌صورت زیر قابل حلّ می‌باشد:

$$T_h(r,t) = f(r)g(t) \tag{۴-۳۹}$$

$$\frac{1}{g(t)}\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho c}\left(\frac{k}{f(r)}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r}\right)\frac{1}{f(r)}\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right) = -S^2 \tag{۴-۴۰}$$

درنهایت با تعریف متغییر S دو معادله به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} k\dfrac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \left(\dfrac{\partial k}{\partial r} + \dfrac{k}{r}\right)\dfrac{\partial f(r)}{\partial r} + S^2\rho c f(r) = 0 \\ \dfrac{\partial g(t)}{\partial t} + S^2 g(t) = 0 \end{cases} \tag{۴-۴۱}$$

با جایگذاری مقدار K در رابطه‌ی اوّل (۴۱-۴) داریم:

$$r^2\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + (n_1+1)r\frac{\partial f(r)}{\partial r} + S^2\frac{r_i^{n_1-n_2-n_3}\rho_1 c_1}{k_1}r^{2-n_1+n_2+n_3}f(r) = 0 \tag{۴-۴۲}$$

بسط تابع بسل تعمیم یافته به شکل زیر می‌باشد:

$$r^{2}\frac{\partial^{2} f(r)}{\partial r^{2}}+(2p+1)r\frac{\partial f(r)}{\partial r}+\left(a^{2}r^{2x}+b^{2}\right)f(r)=0 \tag{۴-۴۳}$$

$$f(r)=r^{-p}\left[d_{1}J_{\frac{q}{x}}\left(\frac{a}{x}r^{x}\right)+d_{2}Y_{\frac{q}{x}}\left(\frac{a}{x}r^{x}\right)\right] \tag{۴-۴۴}$$

که J و Y به ترتیب توابع بسل نوع اوّل و دوم می‌باشند و ثابت های موجود در این معادلات به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$q=\sqrt{p^{2}-b^{2}}=p \tag{۴-۴۵}$$

$$\frac{a}{x}=s' \tag{۴-۴۶}$$

$$p=q=\frac{n_{1}}{2} \tag{۴-۴۷}$$

$$x=\frac{2-n_{1}+n_{2}+n_{3}}{2} \tag{۴-۴۸}$$

$$s_{n}'=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{r_{i}^{\,n_{1}-n_{2}-n_{3}}s_{n}^{\,2}r_{1}c_{1}}{k_{1}}} \tag{۴-۴۹}$$

درنهایت تابع $T_{h}(r,t)$ به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$T_{h}(r,t)=f(r)g(t)=r^{-p}\left[d_{1}J_{\frac{q}{x}}(0)+d_{2}Y_{\frac{q}{x}}(0)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-p}\left[A_{n}J_{\frac{q}{x}}(s'^{x})+B_{n}Y_{\frac{q}{x}}(s'^{x})\right]e^{-s_{n}^{2}t} \tag{۴-۵۰}$$

با اعمال شرایط مرزی (۴-۳۶) بر روی $T_{h}(r,t)$ داریم:

$$B_{n}\left[c_{21}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_{n}'r_{o}^{x}\right)-c_{22}s_{n}'xr_{o}^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_{n}'r_{o}^{x}\right)\right]-B_{n}\frac{\left[c_{11}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_{n}'r_{i}^{x}\right)-c_{12}s_{n}'xr_{i}^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_{n}'r_{i}^{x}\right)\right]}{\left[c_{11}J_{\frac{q}{x}}\left(s_{n}'r_{i}^{x}\right)-c_{12}s_{n}'xr_{i}^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_{n}'r_{i}^{x}\right)\right]}\left[c_{21}J_{\frac{q}{x}}\left(s_{n}'r_{o}^{x}\right)-c_{22}s_{n}'xr_{o}^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_{n}'r_{o}^{x}\right)\right]=0 \tag{۴-۵۱}$$

با فاکتورگیری از B_{n} معادله‌ی مشخصه‌ی مربوط به یک مسئله‌ی مقدار ویژه به‌دست می‌آید:

$$\left\{c_{21}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_o^{x}\right)-c_{22}s_n' x r_o^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_o^{x}\right)\right\}\left\{c_{11}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_i^{x}\right)-c_{12}s_n' x r_i^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_i^{x}\right)\right\}$$
$$-\left\{c_{11}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_i^{x}\right)-c_{12}s_n' x r_i^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_i^{x}\right)\right\}\left\{c_{21}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_o^{x}\right)-c_{22}s_n' x r_o^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_o^{x}\right)\right\}=0 \qquad (۴-۵۲)$$

که s_n' مقادیر ویژه و ریشه‌های معادله‌ی(۵۲-۴) می‌باشند و ریشه‌های این معادله از طریق روش ترسیمی یا نیوتن رافسون قابل محاسبه می‌باشد. عبارت G_n را می‌توان به دو صورت زیر، برای سادگی روابط، تعریف نمود:

$$G_n=\frac{c_{11}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_i^{x}\right)-c_{12}s_n' x r_i^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_i^{x}\right)}{c_{21}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_o^{x}\right)-c_{22}s_n' x r_o^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_o^{x}\right)} \qquad (۴-۵۳)$$

$$G_n=\frac{c_{11}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_i^{x}\right)-c_{12}s_n' x r_i^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_i^{x}\right)}{c_{21}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_o^{x}\right)-c_{22}s_n' x r_o^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_o^{x}\right)} \qquad (۴-۵۴)$$

معادله‌ی (۵۲-۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$c_{21}g_{\frac{q}{x}}(s_n', r_o^{x})-c_{22}x\, s_n' r_o^{x-1}g_{\frac{q}{x}+1}(s_n', r_o^{x})=0 \qquad (۴-۵۵)$$

که $g_i(s_n', r^{x})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_i(s_n', r^{x})=Y_i(s_n' r^{x})\left\{c_{11}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_i^{x}\right)-c_{12}s_n' x r_i^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_i^{x}\right)\right\}-J_i(s_n' r^{x})\left\{c_{11}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_i^{x}\right)-c_{12}s_n' x r_i^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_i^{x}\right)\right\} \qquad (۴-۵۶)$$

از طرفی تابع $f_i(s_n', r^{x})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{\frac{q}{x}}\left(s_n', r^{x}\right)=J_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r^{x}\right)\left\{c_{11}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_i^{x}\right)-c_{12}s_n' x r_i^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_i^{x}\right)\right\}-Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r^{x}\right)\left\{c_{11}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_i^{x}\right)-c_{12}s_n' x r_i^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_i^{x}\right)\right\} \qquad (۴-۵۷)$$

با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی (۵۶-۴) و (۵۷-۴) می‌توان نتیجه گرفت:

$$g_i(s_n', r^x) = -f_i(s_n', r^x) \tag{۴-۵۸}$$

در نتیجه می‌توان تابع $T_h(r,t)$ را به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$T_h(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} r^{-p}\left[A_n J_{\frac{q}{x}}(s' r^x)+B_n Y_{\frac{q}{x}}(s' r^x)\right]e^{-s_n^2 t}=\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-p}\left\{\left[c_{11}Y_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_i^x\right)-c_{12}s_n' x r_i^{x-1}Y_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_i^x\right)\right]\right.$$
$$\left. J_{\frac{q}{x}}(s' r^x)-Y_{\frac{q}{x}}(s' r^x)\left[c_{11}J_{\frac{q}{x}}\left(s_n' r_i^x\right)-c_{12}s_n' x r_i^{x-1}J_{\frac{q}{x}+1}\left(s_n' r_i^x\right)\right]\right\}e^{-s_n^2 t} \tag{۴-۵۹}$$

با جایگذاری روابط (۴-۵۶) و (۴-۵۷) در رابطه‌ی (۴-۵۹) داریم:

$$T_h(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} -A_n r^{-p} g_{\frac{q}{x}}(s_n', r^x)e^{-s_n^2 t}=\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-p} f_{\frac{q}{x}}(s_n', r^x)e^{-s_n^2 t} \tag{۴-۶۰}$$

با اعمال شرط اوّلیه بر روی معادله‌ی (۴-۶۰) داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-p} f_{\frac{q}{x}}\left(s_n', r^x\right)=T_i(r)-\left(C_1 r^{-n_1}+C_2\right) \tag{۴-۶۱}$$

برای به‌دست آوردن A_n، طرفین تساوی را در $r^{p+2x-1} f_{\frac{q}{x}}\left(s_m', r^x\right)$ ضرب می‌کنیم. حال از دو طرف تساوی از r_i تا r_o انتگرال می‌گیریم در حقیقت از تعامد توابع بسل استفاده می‌کنیم[۵۷]. انتگرال طرف چپ و راست معادله‌ی (۴-۶۱) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_a^b r^{2x-1} f_{\frac{q}{x}}\left(s_n', r^x\right)^2 dr=\frac{2}{x\pi^2 s_n'^2}\left\{q^2\left(\frac{c_{22}^2 G_n^2}{r_o^2}-\frac{c_{12}^2}{r_i^2}\right)+2q\left(\frac{c_{22}c_{21}G_n^2}{r_o}-\frac{c_{12}c_{11}}{r_i}\right)\right.$$
$$\left.+s_n'^2 x^2\left(r_o^{2x-2}c_{22}^2 G_n^2-r_i^{2x-2}c_{12}^2\right)+c_{21}^2 G_n^2-c_{11}^2\right\} \tag{۶۲-۴}$$

$$\int_a^b \left(T_i(r)-\left(C_1 r^{-n_1}+C_2\right)\right) r^{p+2x-1} f_{\frac{q}{x}}\left(s_n', r^x\right)dr=\int_a^b T_i(r)\, r^{p+2x-1} f_{\frac{q}{x}}\left(s_n', r^x\right)dr$$
$$-\frac{2}{x\pi s_n'^2}\left(G_n\left(-c_{21}c_1 r_o^{-q}-c_{21}c_2 r_o^{q}+n_1 c_{22}c_1 r_o^{-q-1}\right)+\left(c_{11}c_1 r_i^{-q}+c_{11}c_2 r_i^{q}-n_1 c_{12}c_1 r_i^{-q-1}\right)\right) \tag{۶۳-۴}$$

با توجه به معادله‌ی (۴-۶۱) از تقسیم رابطه‌ی (۴-۶۳) بر (۴-۶۲) ثابت A_n به‌دست می‌آید. درنهایت با توجه به معادله‌ی (۴-۲۸)، تابع انتقال حرارت گذرای $T(r,t)$ به‌دست می‌آید:

$$\mathrm{T}(\mathrm{r},\mathrm{t})=\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-p} f_{\frac{q}{x}}\left(s_n', r^x\right)e^{-s_n^2 t}+c_1 r^{-n_1}+c_2 \tag{۴-۶۴}$$

درنهایت با توجه به اینکه در معادله‌ی کرنش حرارتی، عبارت توزیع اختلاف دما یعنی $\Delta T(z,t)$ ظاهر می‌شود بنابراین به جای r از $R+z$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\Delta T(z,t)=T(z,t)-T_{\infty} \tag{۴-۶۵}$$

معادلات (۴-۱۱) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی می‌باشند. برای حلّ آن باید نیروها و لنگرها را با استفاده از روابط (۲-۱۰) تا (۲-۱۳) به منتجه‌های تنش و با جایگذاری راوابط (۴-۲۱) و (۴-۲۲) در روابط (۴-۴) و استفاده از رابطه‌ی (۴-۶۵) به مولفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۲-۷) بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی نوشت. نهایتاً یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به‌دست می‌آید که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$[A]\frac{d^2}{dx^2}\{y\}+[B]\frac{d}{dx}\{y\}+[C]\{y\}=\{F\} \tag{۴-۶۶}$$

که در آن بردار مجهول $\{y\}$ شامل مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی به‌صورت رابطه‌ی (۴-۶۷) می‌باشد:

$$\{y\}=\{u\ \ \phi\ \mathrm{w}\ \psi\}^T \tag{۴-۶۷}$$

همچنین قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به‌صورت بردار نیروی $\{F\}$ در رابطه‌ی (۴-۶۸) نشان داده شده است:

$$\{F\}=\frac{1}{\lambda E}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_i\left(R-\frac{h}{2}\right)-\lambda E_i\alpha_i\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{2n}\Delta T(z,t)(1+\nu)dz \\ P_i\frac{h}{2}\left(R-\frac{h}{2}\right)-\lambda E_i\alpha_i\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{2n}\Delta T(z,t)(1+\nu)(R+2z)dz \end{Bmatrix} \tag{۴-۶۸}$$

جملات حاصل در بردار ناهمگنی $\{F\}$ شامل دو بخش حاصل از بارگذاری حرارتی و ناشی از بارگذاری مکانیکی می‌باشند. جملات مربوط به بارگذاری حرارتی با توجه به روابط رفتاری (۴-۴) و در نظر گرفتن کرنش‌های حرارتی، در عبارت انرژی کرنشی وارد شده که نهایتاً در مؤلفه‌های سوم

و چهارم قسمت ناهمگن دستگاه معادلات (۶۶-۴) در نقش نیروی حجمی ظاهر می‌شوند .جملات مربوط به بارگذاری مکانیکی نیز از جملات مربوط به کار نیروهای خارجی حاصل می‌شود. در دستگاه معادلات (۶۶-۴) ماتریس‌های $[A]_{4\times4}$ و $[C]_{4\times4}$ متقارن و $[B]_{4\times4}$ پادمتقارن هستند که در ادامه درایه‌های مربوط به آن‌ها آورده شده است:

$$A_{11} = R(1-\nu)\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n\left(1+\frac{z}{R}\right)dz \tag{۴-۶۹}$$

$$A_{12} = R(1-\nu)\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n\left(1+\frac{z}{R}\right)z\,dz = A_{21} \tag{۴-۷۰}$$

$$A_{22} = R(1-\nu)\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n\left(1+\frac{z}{R}\right)z^2 dz \tag{۴-۷۱}$$

$$A_{33} = R\mu\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n\left(1+\frac{z}{R}\right)dz \tag{۴-۷۲}$$

$$A_{34} = R\mu\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n\left(1+\frac{z}{R}\right)z\,dz = A_{43} \tag{۴-۷۳}$$

$$A_{44} = R\mu\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n\left(1+\frac{z}{R}\right)z^2 dz \tag{۴-۷۴}$$

$$A_{13} = A_{14} = A_{23} = A_{24} = A_{31} = A_{32} = A_{41} = A_{42} = 0 \tag{۴-۷۵}$$

$$B_{13} = \nu\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n dz = -B_{31} \tag{۴-۷۶}$$

$$B_{14} = \nu\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n (R+2z)\,dz = -B_{41} \tag{۴-۷۷}$$

$$B_{23} = \int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left[(\nu-\mu)z - R\mu\right]dz = -B_{32} \tag{۴-۷۸}$$

$$B_{24} = \int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left[R(\nu-\mu)+z(2\nu-\mu)\right]z\,dz = -B_{42} \tag{۴-۷۹}$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = B_{33} = B_{34} = B_{43} = B_{44} = 0 \qquad (۴\text{-}۸۰)$$

$$C_{22} = -R\mu \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(1+\frac{z}{R}\right) dz \qquad (۴\text{-}۸۱)$$

$$C_{33} = -(1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right) / (R+z) dz \qquad (۴\text{-}۸۲)$$

$$C_{34} = -\nu \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n dz - (1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(\frac{z}{R+z}\right) dz = C_{43} \qquad (۴\text{-}۸۳)$$

$$\ldots\Big)^n zdz - (1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(\frac{z^2}{R+z}\right) dz - R(1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n \left(1+\frac{z}{R}\right) dz \qquad (۴\text{-}۸۴)$$

$$C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{21} = C_{23} = C_{24} = C_{31} = C_{32} = C_{41} = C_{42} = 0 \qquad (۴\text{-}۸۵)$$

۴-۲-۳ حلّ ترموالاستیک استوانه تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی

همانطور که توضیح داده شد، دستگاه معادله‌ی (۶۶-۴) یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت می‌باشد که دارای حلّ عمومی و حلّ خصوصی است. اگر این دستگاه معادلات را به‌صورت ساده شده‌ی زیر بنویسیم:

$$A\{y''\} + B\{y'\} + C\{y\} = \{F\} \qquad (۴\text{-}۸۶)$$

داریم:

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p \qquad (۴\text{-}۸۷)$$

برای حلّ عمومی دستگاه فوق مقدار $\{y\} = \{\xi\} e^{mx}$ را در معادلات آن می‌گذاریم، داریم:

$$e^{mx}\left[m^2 A_1 + mA_2 + A_3\right]\{\xi\} = \{0\} \qquad (۴\text{-}۸۸)$$

با توجه به اینکه $e^{mx} \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$\left|m^2 A_1 + mA_2 + A_3\right| = 0 \qquad (۴\text{-}۸۹)$$

از حلّ معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه‌ی m_i محاسبه شده که به‌صورت سه جفت ریشه‌ی مزدوج غیر صفر حاصل می‌شوند. از این سه جفت ریشه، یک جفت آن عدد حقیقی و دو جفت دیگر آن نیز

اعداد مختلط مزدوج می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه‌ی حاصل در معادله‌ی (۸۸-۴)، بردارهای ویژه‌ی ξ_i متناظر با مقادیر ویژه‌ی فوق به‌دست می‌آیند. درنهایت حلّ عمومی عبارتست از:

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^{6} c_i \, \{\xi\}_i \, e^{m_i x} \tag{۴-۹۰}$$

با توجه به این نکته که مقادیر ویژه‌ی حاصل شامل اعداد مختلط می‌باشند، برای به‌دست آوردن بردارهای ویژه‌ی متناظر با این اعداد مختلط، باید از روابط حاکم بر بردارهای ویژه‌ی مربوط به اعداد مختلط استفاده نمود.

برای حلّ خصوصی، قسمت ناهمگن معادلات (۶۶-۴) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری ناهمگن با ضخامت ثابت و تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از X نمی‌باشد. بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس $[C]$ طبق معادله‌ی زیر جواب خصوصی را به‌دست آورد.

$$[C]\{y\} = \{F\} \Rightarrow \{y\} = [C]^{-1}\{F\} \tag{۴-۹۱}$$

اما با توجه به معکوس ناپذیری ماتریس $[C]$ به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، با ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حلّ می‌شود. بدین منظور در اوّلین معادله از سری معادلات (۱۱-۴) از طرفین آن انتگرال‌گیری کرده و خواهیم داشت:

$$u = \int v dx + C_7 \tag{۴-۹۲}$$

بنابراین دستگاه معادلات قدیم به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} [A]\dfrac{d^2}{dx^2}\{y\} + [B]\dfrac{d}{dx}\{y\} + [C]\{y\} = \{F\} \\ \{y\} = \{\mathrm{v}\ \phi\ \mathrm{w}\ \psi\}^T \end{cases} \tag{۴-۹۳}$$

که در آن بردار نیرویی $\{F\}$ با توجه به انتگرال‌گیری از طرفین اوّلین معادله، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\{F\}=\frac{1}{\lambda E}\left\{\begin{array}{c} \mathrm{C}_0 \\ 0 \\ -P_i\left(R-\frac{h}{2}\right)-\lambda E_i\alpha_i\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{2n}\Delta T(z,t)(1+\nu)dz \\ P_i\frac{h}{2}\left(R-\frac{h}{2}\right)-\lambda E_i\alpha_i\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{2n}\Delta T(z,t)(1+\nu)(R+2z)dz \end{array}\right\} \tag{۴-۹۴}$$

بنابراین با حلّ دستگاه معادلات فوق به‌صورت مطالعه‌ی موردی می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به‌دست آورد.

شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۱-۴) توسط رابطه‌ی (۱۲-۴) بیان می‌شوند. به عبارتی مقادیر $\{\mathrm{u}\ \phi\ \mathrm{w}\ \psi\}$ و $\{N_x\ \ \mathrm{M}_x\ \ \mathrm{Q}_{xz}\ \ \mathrm{M}_{xz}\}$ در دو انتهای استوانه طوری در نظر گرفته می‌شوند که همواره رابطه‌ی (۱۲-۴) برابر صفر باشد. با داشتن ۶ مجهول $C_1,...,C_6$ در جواب عمومی و ۲ ثابت C_0 و C_7 در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل ۴ شرط مرزی در هر سمت، ۸ ثابت مجهول را محاسبه کرد. نهایتاً با به‌دست آوردن ثوابت مجهول، بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه‌ی (۸۷-۴) برحسب متغیّرهای x,z,t به‌دست می‌آیند.با استفاده از رابطه‌ی (۶-۲) می‌توان میدان جابه‌جایی شعاعی و طولی را به‌دست آورد و با استفاده از روابط (۴-۴)، (۷-۲) تا (۱۳-۲) مقادیر تنش، کرنش، نیرو و لنگر را نیز محاسبه کرد.

۳-۴ مطالعه‌ی موردی

برای شرایط مرزی دوسر گیردار با توجه به رابطه‌ی(۱۲-۴) داریم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0\ ,\ \phi=0\ ,\ w=0\ ,\ \psi=0 \\ x=L \Rightarrow u=0\ ,\ \phi=0\ ,\ w=0\ ,\ \psi=0 \end{cases} \tag{۴-۹۵}$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مولفه‌های میدان جابه‌جایی به‌دست می‌آید.

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج عددی، یک استوانه جدار ضخیم با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است. استوانه‌ی جدار ثابت به شعاع داخلی $r_i = 0.4m$ و شعاع خارجی $r_o = 0.6m$ با طول $L = 8m$ تحت فشار داخلی $P = 70Mpa$ قرار گرفته است. مدول الاستیسیته برای جدار داخلی استوانه‌ی ناهمگن $E_i = 200Gpa$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ می‌باشد. چگالی برای جدار داخلی استوانه‌ی ناهمگن برابر با $\rho_i = 7854 kg / m^3$ و ضریب پخش حرارتی، حرارت مخصوص و ضریب انتقال حرارت نیز برای جدار داخلی استوانه‌ی ناهمگن به ترتیب برابر با $\alpha_i = 12(10^{-6}) 1/^{\circ}C$، $C_i = 434 J / Kg.^{\circ}K$ و $K_i = 60.5 W / m.^{\circ}K$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن نتایج عددی، مقادیر زیر برای ثابت‌های شرایط مرزی دمایی در نظر گرفته شده است[۵۲]:

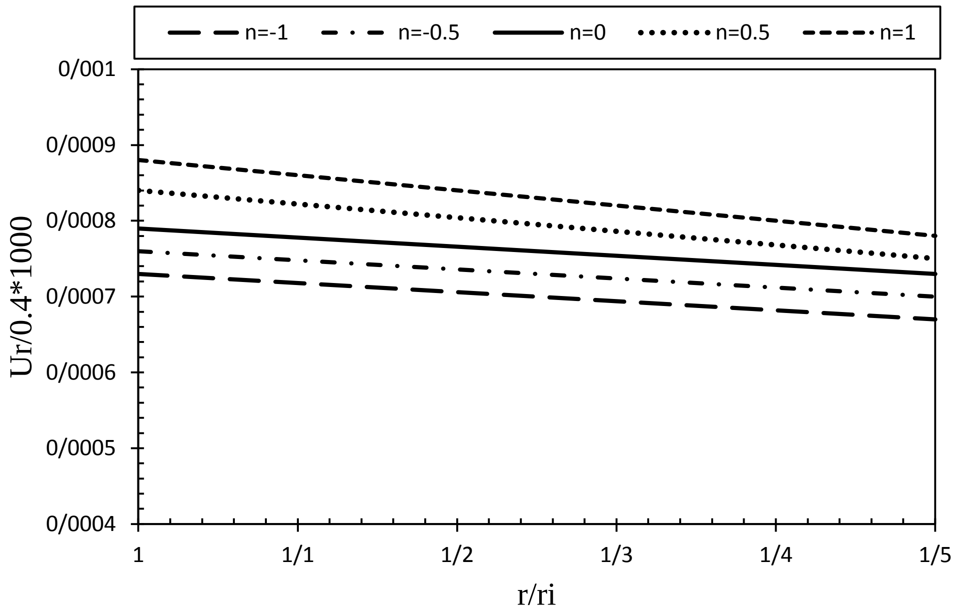
$$\begin{aligned} &T_i(r,0) = 20r \quad , \; C_{11} = 6W / m^2 K \quad , \; C_{21} = 25W / m^2 K \\ &T_{\infty 1} = 7^{\circ}C \qquad , \; T_{\infty 2} = 9^{\circ}C \end{aligned} \tag{۴-۹۶}$$

تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط انتهایی دوسر گیردار برای دو حالت فقط بارگذاری حرارتی گذرا و همچنین بارگذاری حرارتی همراه با فشار داخلی انجام شده است. حلّ تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط Maple 16 صورت گرفته است. نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جابی در دو حالت بارگذاری حراراتی گذرا و فشار داخلی به‌صورت جدا و توأمان مورد بحث قرار گرفته است.

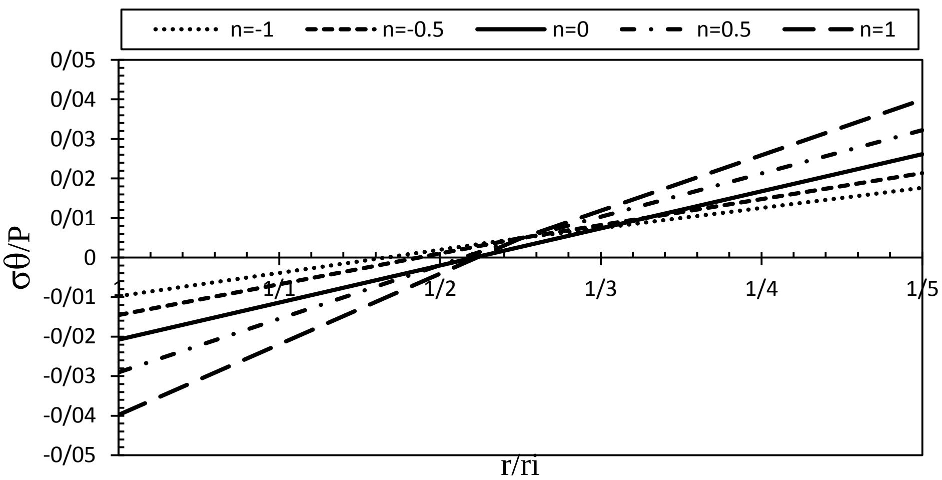
شکل (۴-۷) توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره‌ی استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در وسط استوانه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که جابه‌جایی به ازای nهای منفی نسبت به حالت همگن از نظر مقدار کمتر و به ازای nهای مثبت از نظر مقدار نسبت به حالت همگن بیشتر می‌باشد.

شکل (۴-۸) توزیع بی‌بعد تنش محیطی در راستای جداره‌ی استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در وسط استوانه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مقادیر تنش به ازای nهای منفی در جداره‌ی داخلی بیشتر از مادّه‌ی همگن و در جداره‌ی خارجی

کمتر از مادّه‌ی همگن می‌باشد. همچنین تنش محیطی به ازای nهای مثبت در جداره‌ی داخلی کمتر از مادّه‌ی همگن و در جداره‌ی خارجی بیشتر از مادّه‌ی همگن می‌باشند. در محدوده‌ی لایه‌ی میانی رفتار مادّه‌ی ناهمگن و همگن تقریبا مشابه یکدیگر می‌باشند. در محدوده‌ی لایه‌ی داخلی استوانه با nهای مثبت و در محده‌ی لایه‌ی خارجی استوانه با nهای منفی سبب کاهش تنش می‌شوند.



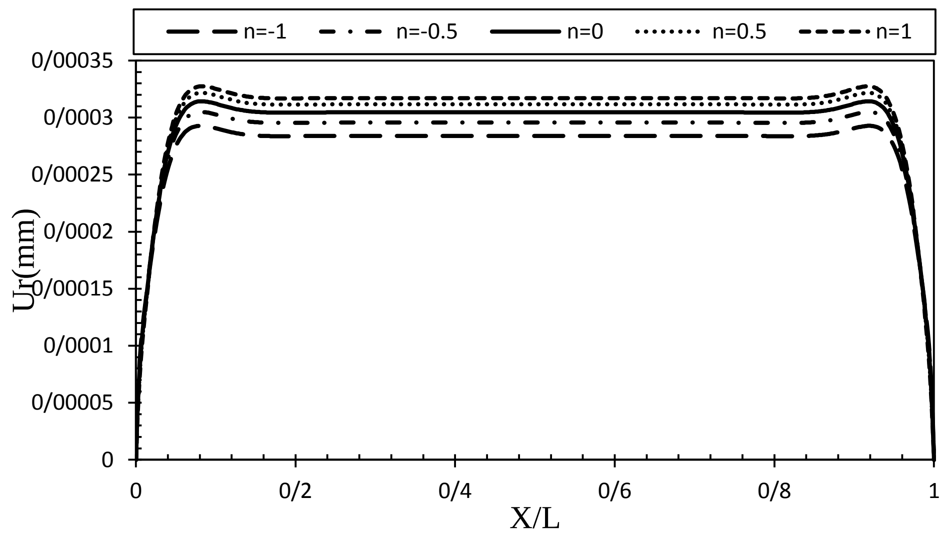
شکل۴- ۷ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا در x=L/2 و t=40 s



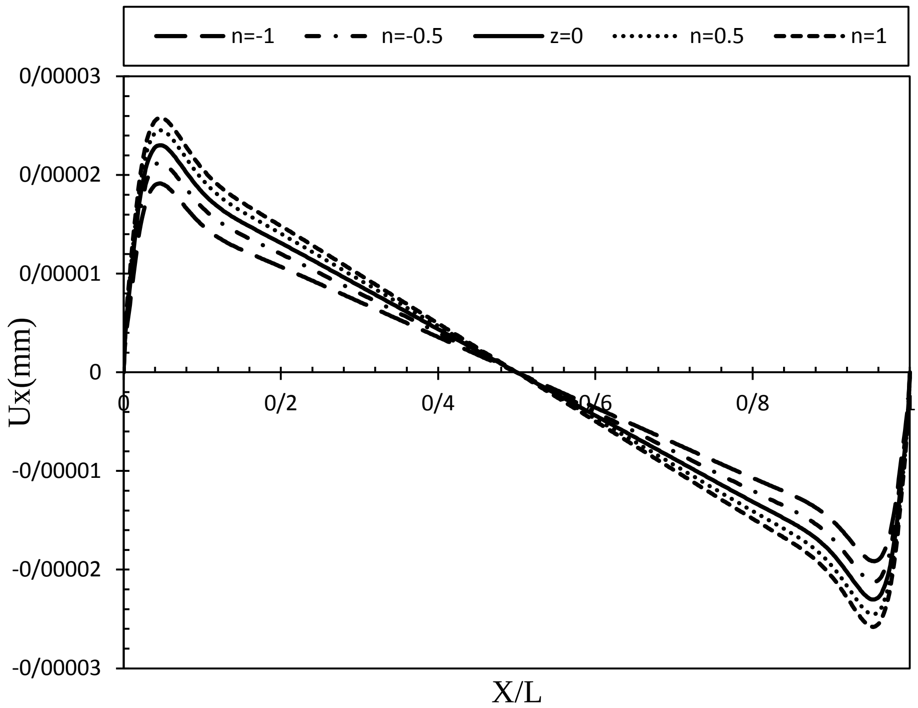
شکل۴- ۸ توزیع بی‌بعد تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا در x=L/2 و t=40 s

شکل(۹-۴) توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی استوانه تحت بارگذاری حرارتی برای لایه‌ی میانی را به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل جابه‌جایی برای nهای منفی نسبت به مادّه‌ی همگن کمتر می‌باشد. همچنین جابه‌جایی به ازای nهای مثبت نسبت به مادّه‌ی همگن بیشتر می‌باشد.

شکل (۱۰-۴) توزیع جابه‌جایی محوری استوانه‌ی ناهمگن به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف تحت بارگذاری حرارتی گذرا در راستای طولی برای لایه‌ی میانی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل جابه‌جایی محوری در راستای طولی به ازای nهای منفی مقدار کمتری نسبت به مادّه‌ی همگن و به ازای nهای مثبت مقدار بیشتری نسبت به مادّه‌ی همگن دارا می‌باشد. با توجه به شکل رفتار استوانه به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی در وسط آن با رفتار مادّه‌ی همگن از تطابق خوبی داراست.

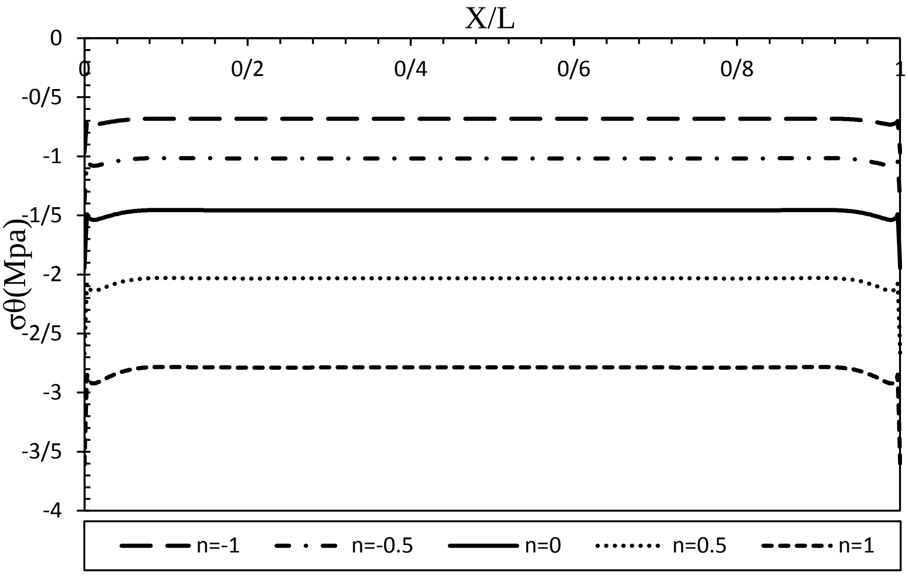


شکل۴- ۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا z=0 و t=40 s

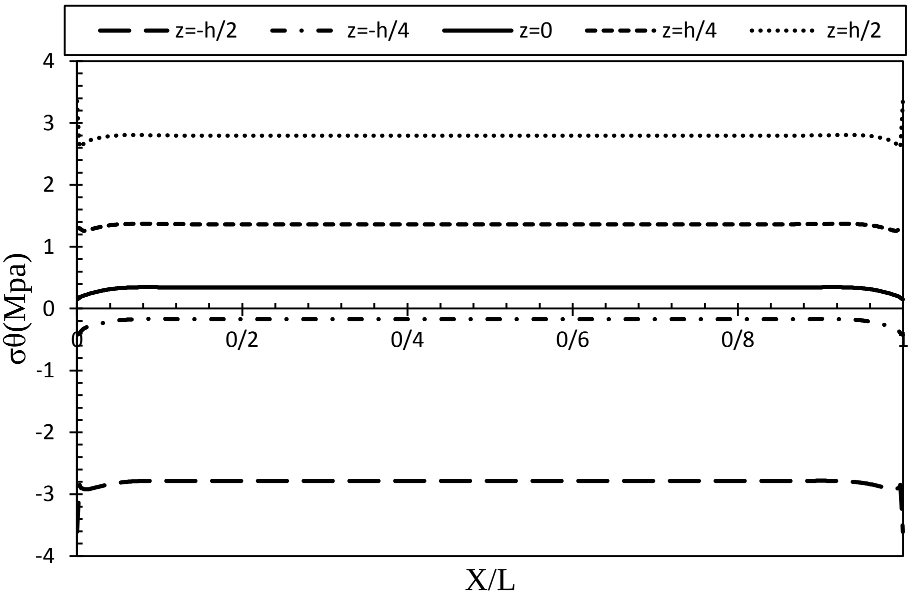


شکل۴- ۱۰ توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا z=0 و t=40 s

شکل (۱۱-۴) و (۱۲-۴) تنش محیطی استوانه ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا در راستای طولی استوانه به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف و در لایه‌های داخلی استوانه نشان داده شده است. با توجه به شکل (۱۱-۴) تنش محیطی از لحاظ قدرمطلقی به ازای nهای منفی مقادیر کمتری نسبت به مادّه‌ی همگن و به ازای nهای مثبت مقادیر بیشتری نسبت به حالت همگن دارا می‌باشد. همچنین با توجه به شکل (۱۲-۴) می‌توان مشاهده نمود که مقادیر تنش در لایه‌ی داخلی منفی بوده و با عبور از لایه داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش مثبت می‌شوند. در لایه‌ی میانی مقادیر تنش ناچیز می‌باشد.



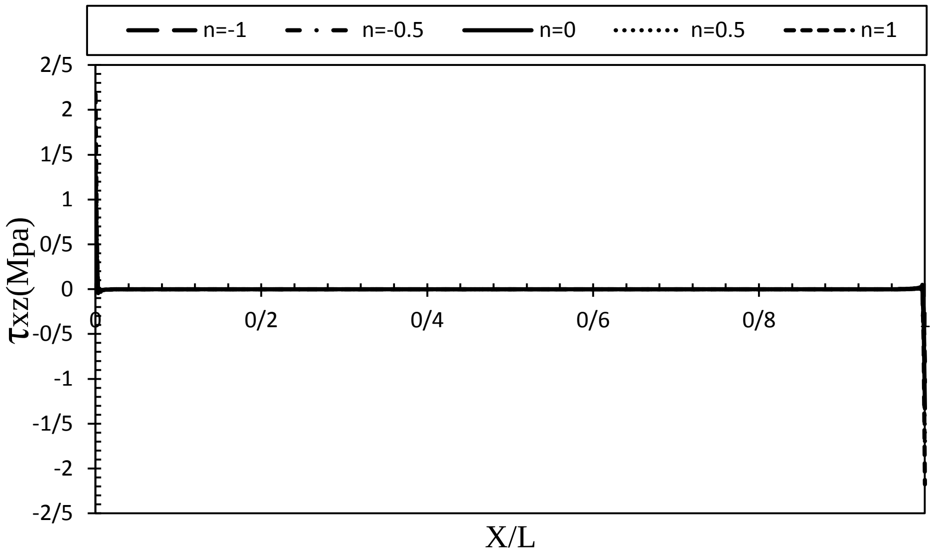
شکل۴- ۱۱ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا در t=40 s و z=-h/2



شکل۴- ۱۲ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا به ازای n=1 در t=40 s

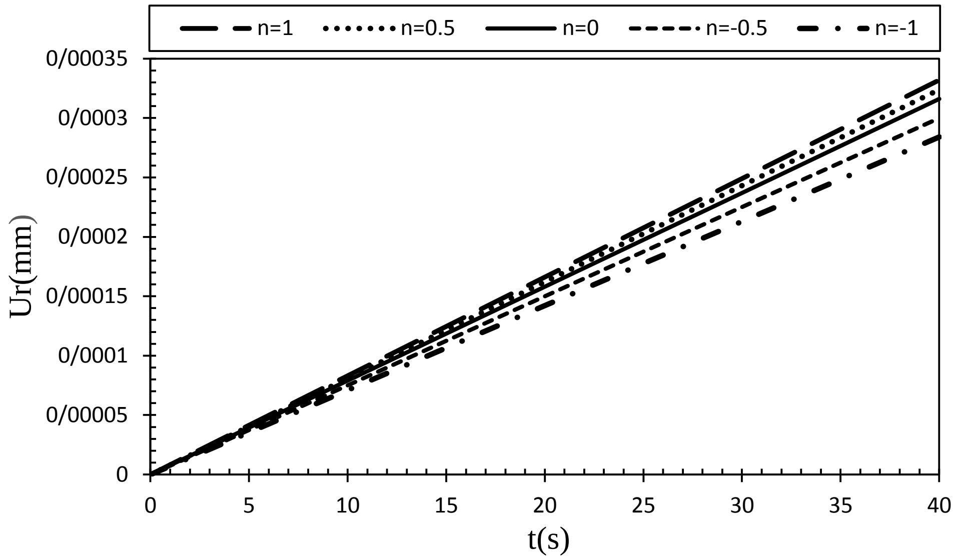
شکل (۱۳-۴) مقادیر تنش برشی برای استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در لایه‌ی میانی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل رفتار مادّه‌ی ناهمگن در این

بررسی برای تنش برشی بسیار شبیه به مادّه‌ی همگن می‌باشد. تنش برشی در ابتدا و انتهای استوانه و در نقاط مرزی وجود دارد و در نقاط دور از مرز صفر می‌باشد.



شکل۴- ۱۳ توزیع تنش برشی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارت گذرا در t=40 s

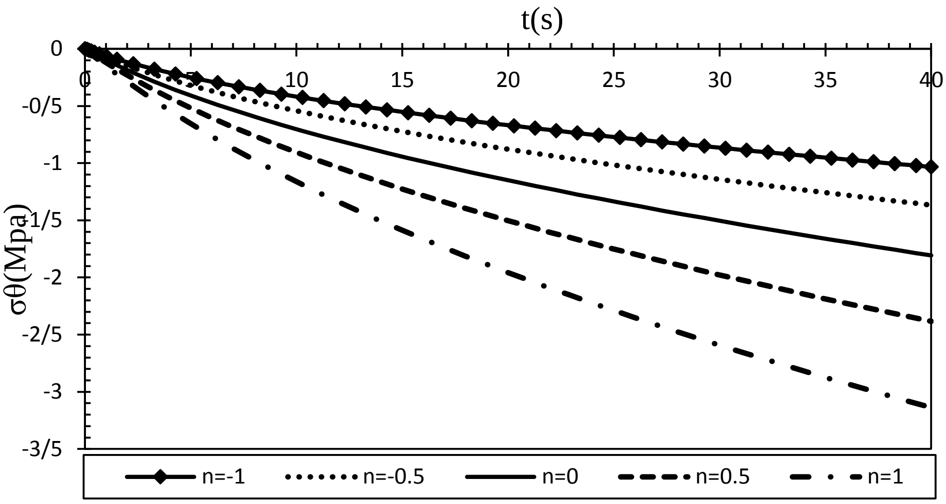
شکل (۴-۱۴) توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت بارگذاری حرارتی گذرا بر اساس زمان را به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل توزیع جابه‌جایی نسبت به زمان در زمان‌های کم یک توزیع خطی می‌باشد. همچنین می‌توان دریافت جابه‌جایی به ازای nهای منفی دارای تغییرات کمتری نسبت به مادّه‌ی همگن و به ازای nهای مثبت دارای تغییرات بیشتری نسبت به مادّه‌ی همگن در راستای زمان می‌باشند. با گذشت زمان مقادیر جابه‌جایی بیک مقدار ثابت میل می‌کند.



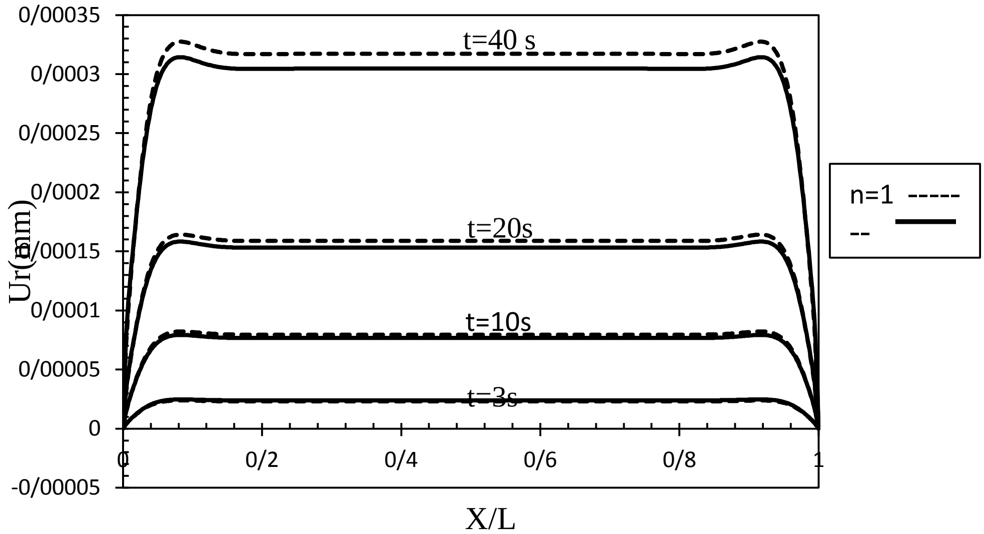
شکل۴- ۱۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا بر اساس زمان در x=L/2 و z=0

شکل (۱۴-۴) توزیع تنش محیطی استوانه تحت بارگذاری حرارتی گذرا بر اساس زمان را به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل توزیع تنش محیطی نسبت به زمان یک توزیع غیر خطی می‌باشد. همچنین می‌توان دریافت تنش به ازای nهای منفی دارای تغییرات کمتری نسبت به مادّه‌ی همگن و به ازای nهای مثبت دارای تغییرات بیشتری نسبت به مادّه‌ی همگن در راستای زمان می‌باشند. با گذشت زمان مقادیر تنش به یک مقدار ثابت میل می‌کند.

شکل(۱۶-۴) نیز تاثیر ناهمگنی و زمان را بر جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی ناهمگن نشان می‌دهد. با توجه به این شکل در زمان‌های کم رفتار استوانه‌ی ناهمگن شبیه رفتار استوانه‌ی همگن می‌باشد اما با افزایش زمان تفاوت بین مادّه‌ی همگن و ناهمگن مشاهده می‌شود.



شکل۴- ۱۵ توزیع تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا بر اساس زمان در x=L/2 و z=-h/2

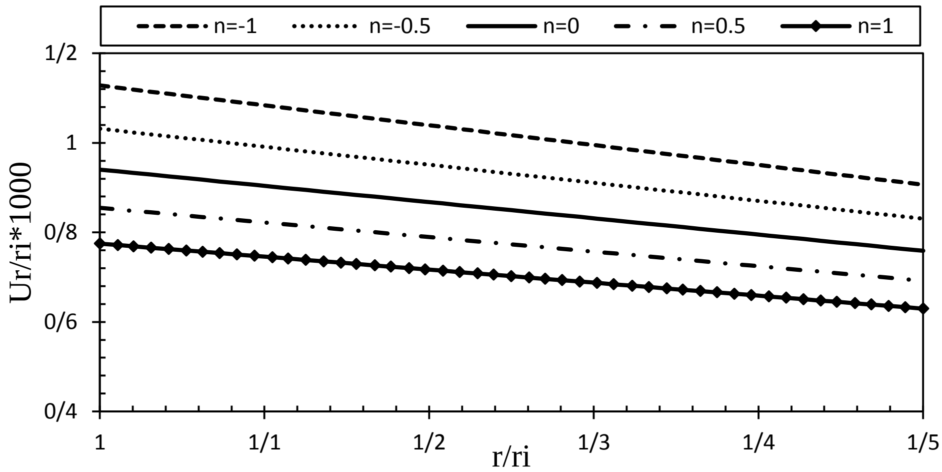


شکل۴- ۱۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی استوانه‌ی ناهمگن برای زمان‌ها و ثابت ناهمگنی مختلف در لایه‌ی میانی

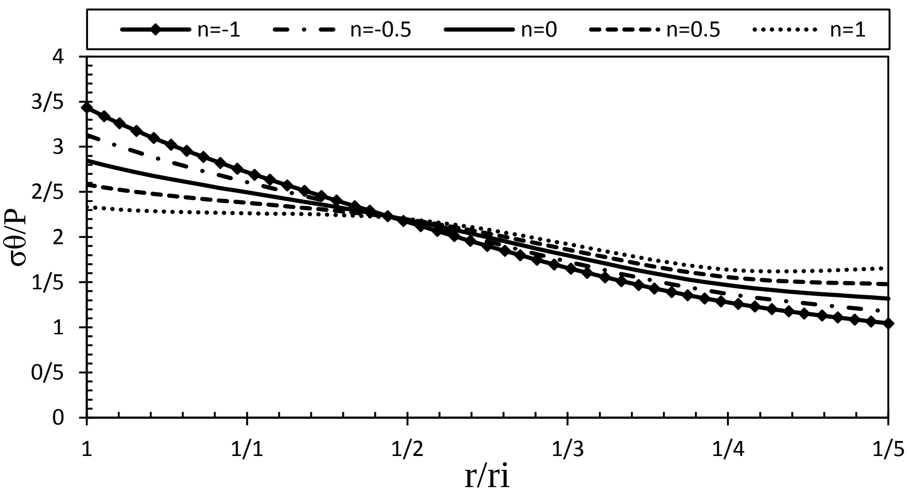
شکل (۴-۱۷) توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل به ازای nهای منفی مقادیر جابه‌جایی نسبت به مادّه‌ی همگن بیشتر و به ازای nهای مثبت مقادیر جابه‌جایی نسبت به مادّه‌ی همگن کمتر است.

نحوه‌ی تغییرات جابه‌جایی به ازای nهای منفی تقریبا شبیه مادّه‌ی همگن است ولی این تغییرات اندکی با توزیع جابه‌جایی به ازای nهای مثبت فرق می‌کند.

شکل (۱۸-۴) توزیع بی‌بعد تنش در راستای جداره‌ی استوانه‌ی ناهمگن تحت بار حراراتی گذرا و فشار داخلی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مقادیر تنش به ازای nهای منفی نسبت به مادّه‌ی همگن در لایه‌ی داخلی بیشتر و در لایه‌ی خارجی کمتر می‌باشد. همچنین به ازای nهای مثبت مقادیر تنش نسبت به مادّه‌ی همگن در لایه‌ی داخلی کمتر و در لایه‌ی خارجی بیشتر می‌باشند.



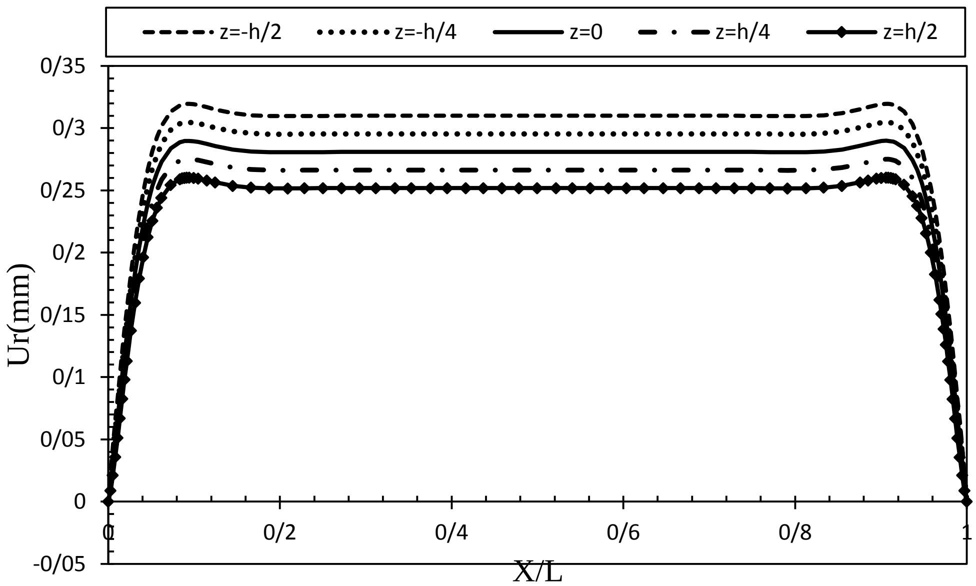
شکل۴- ۱۷ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی در x=L/2 و t=40 s



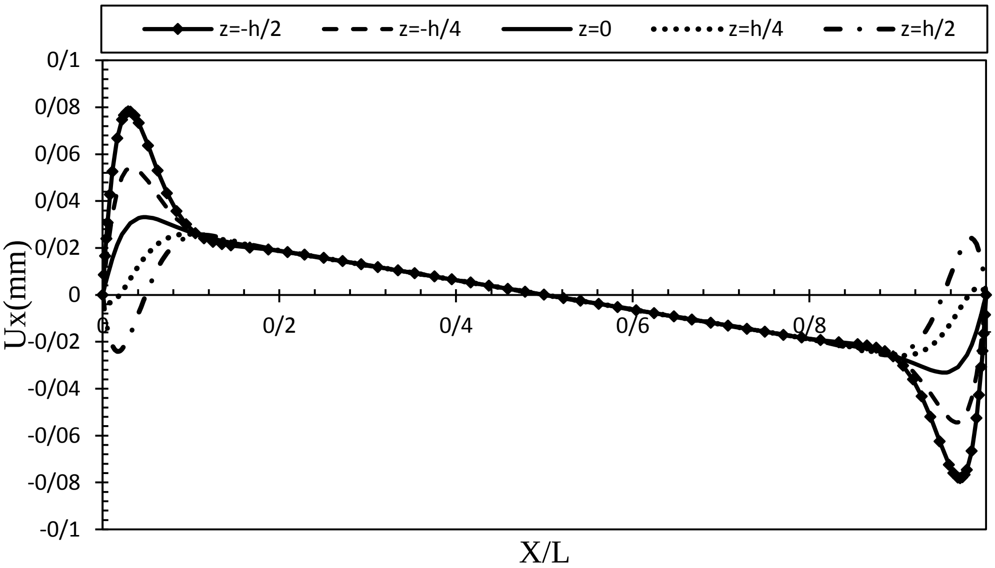
شکل۴- ۱۸ توزیع بی‌بعد تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا وفشار داخلی در x=L/2 و t=40 s

شکل (۴-۱۹) توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی استوانه‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل بیشترین مقدار جابه‌جایی به ازای n=1، در لایه‌ی داخلی و کمترین مقدار آن در لایه‌ی خارجی اتفاق می‌افتد. مقادیر جابه‌جایی در نقاط نزدیک به مرز برای تمامی لایه‌ها یکسان و منطبق بر یکدیگر می‌باشد. اما با دور شدن از مرز تنش‌ها برای هر لایه با یکدیگر متفاوت می‌شوند.

شکل (۴-۲۰) توزیع جابه‌جایی محوری در راستای طولی استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل در نقاط نزدیک به مرز بیشترین جابه‌جایی مربوط به لایه‌ی داخلی و کمترین جابه‌جایی مربوط به لایه‌ی خارجی می‌باشد. در نقاط دور از مرز جابه‌جایی محوری برای لایه‌های مختلف یکسان می‌شود.



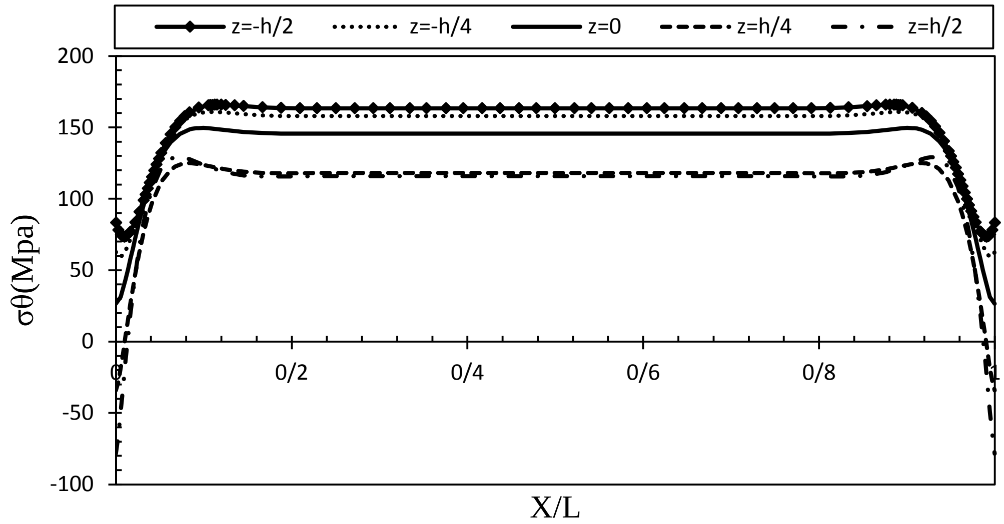
شکل۴- ۱۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی و در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای ثابت n=1 و زمان t=40 s



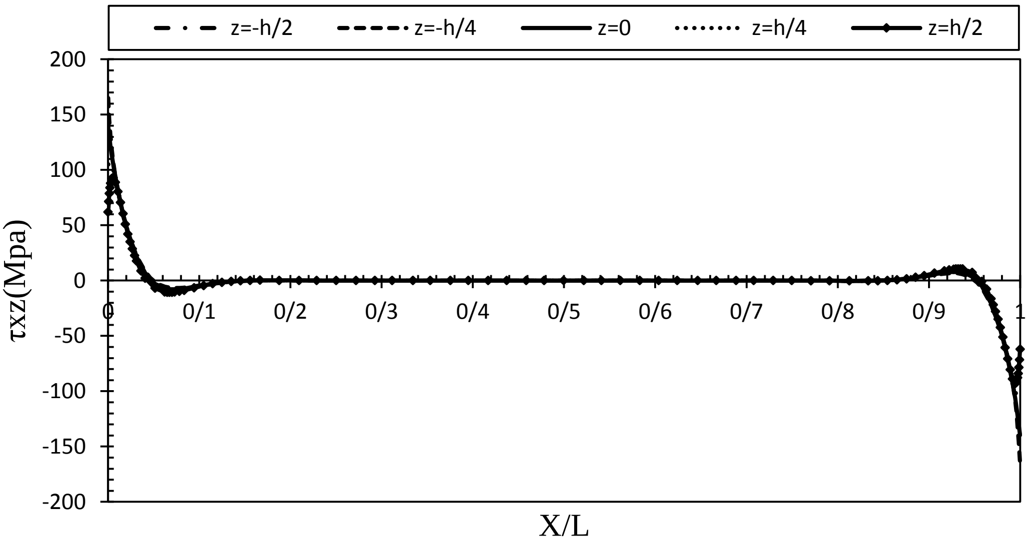
شکل۴- ۲۰ توزیع جابه‌جایی محوری در راستای طولی و در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای ثابت n=1 و زمان t=40 s

شکل (۲۱-۴) توزیع تنش محیطی در راستای طولی استوانه‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل بیشترین مقدار تنش درلایه‌ی داخلی و کمترین مقدار تنش مربوط به لایه‌ی خارجی می‌باشد.

شکل (۲۲-۴) توزیع تنش برشی در راستای طولی استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل تنها در نقاط نزدیک به مرز اثر تنش برشی که در تئوری تغییر شکل برشی لحاظ شده است مشاهده می‌شود که برای همه‌ی لایه‌ها تقریبا بر یکدیگر منطبق می‌باشند. در نقاط دور از مرز مقادیر تنش برشی برابر صفر می‌شود.



شکل۴- ۲۱ توزیع تنش محیطی در راستای طولی و در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای ثابت n=1 و زمان t=40 s



شکل۴- ۲۲ توزیع تنش برشی در راستای طولی و در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای ثابت n=1 و زمان t=40 s

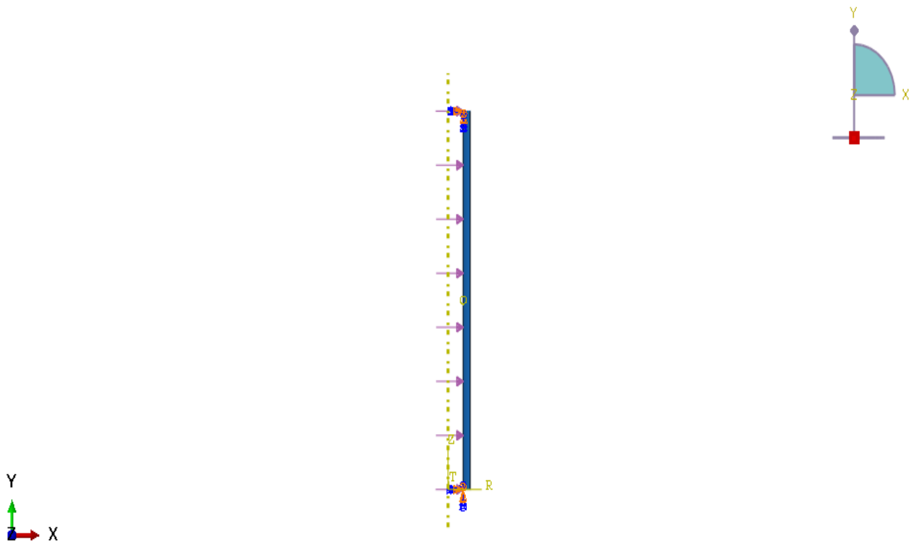
۴-۴ حلّ عددی استوانه‌های ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی

در این بخش نحوه‌ی مدل‌سازی استوانه‌ی FGM تحت بارگذاری حرارتی گذرا و مکانیکی توضیح داده شده است. همچنین نتایج مربوط به حلّ تحلیلی توسط روش تغییر شکل برشی با نتایج عددی

حاصل از روش اجزاء محدود در استوانه‌های همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی و حرارت گذرا مقایسه شده است.

برای المان‌بندی استوانه از المان CAX4T [1] از خانواده‌ی couple temperature and displacement استفاده شده است که هر المان از این تحلیل دارای ۴ گره می باشد. شرایط مرزی دمایی در دو لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه مدل شده است. از آنجایی که ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (h) در نرم‌افزار آباکوس به‌صورت مستقیم وجود ندارد از قسمت Interaction گزینه‌ی Film condition را انتخاب و انتقال حرارات جابه‌جایی مدل شده است. شرایط مرزی دو سر گیردار نیز با مقید کردن دو سر استوانه و بستن تمامی درجات آزادی دو سر استوانه مدل شده است. برای ایجاد خواص ناهمگنی که به‌صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است، با تقسیم جداره‌ی استوانه به تعداد ۱۶ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته، چگالی، حرارت مخصوص، ضریب انتقال حرارت و ضریب پخش حرارتی در هرلایه بسته به فاصله‌ی مرکز هر لایه از لایه‌ی داخلی به‌صورت تابع توانی، نهایتاً پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از ۱۶ استوانه‌ی همگن و همسانگرد به‌هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محلّ اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محلّ اتصال لایه‌ها، حد میانگین چپ و راست مرز دو لایه در نظر گرفته می‌شود. برای اعمال بار مکانیکی نیز در لایه‌ی داخلی استوانه از قسمت بارگذاری در نرم‌افزار فشار داخلی را انتخاب کرده و به استوانه اختصاص می‌دهیم.

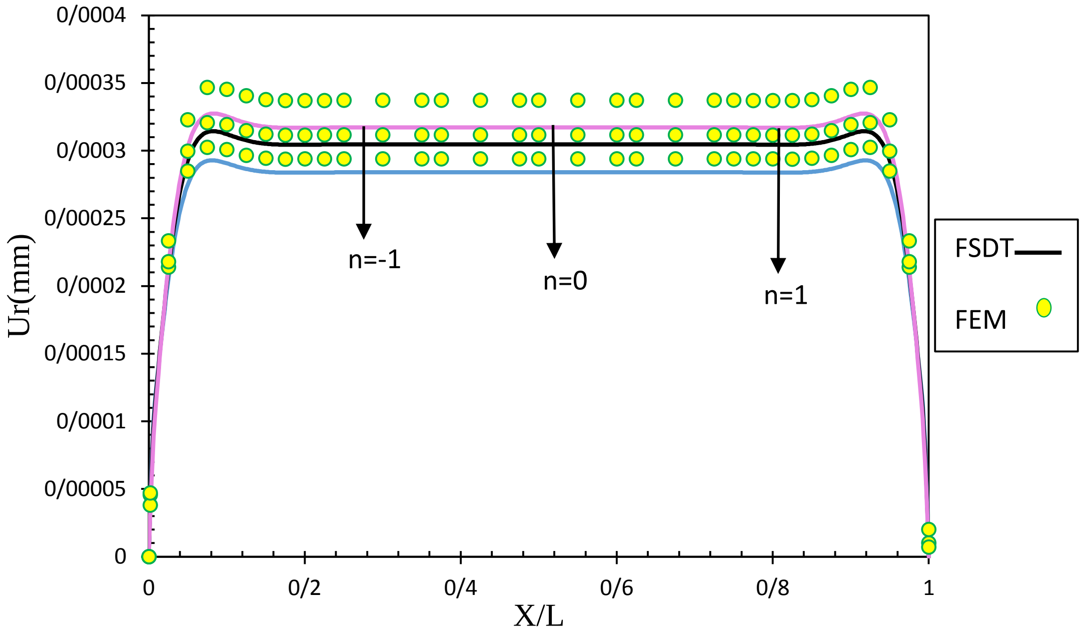
[1] A 4-node axisymmetric thermally coupled quadrilateral, bilinear displacement and temperature.



شکل۴- ۲۳ نمای کلی استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن تحت بارگذاری فشاری و حراراتی گذرا در نرم افزار آباکوس

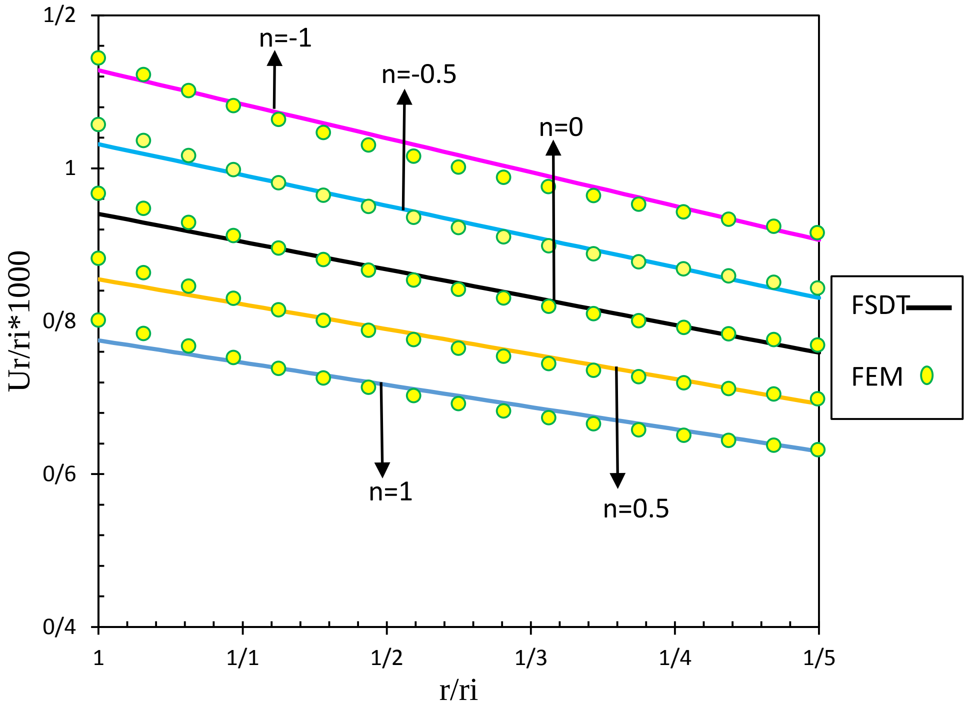
۱-۴-۴ مقایسه‌ی نتایج

در ادامه به‌منظور بررسی صحّت روش حلّ تحلیلی ارائه شده، نتایج حاصل از حلّ عددی به کمک نرم‌افزار Abaqus آورده شده است. شکل (۴-۲۴) جابه‌جایی شعاعی به‌دست آمده از دو روش FE و FSDT در راستی طولی استوانه تحت بارگذاری حرارتی گذرا را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل جابه‌جایی‌ها به ازای مادّه‌ی ناهمگن اختلاف بیشتری نسبت به حالت همگن دارند. همچنین مقادیر جابه‌جایی استوانه‌ی همگن از تطابق خوبی برخوردار می‌باشند.

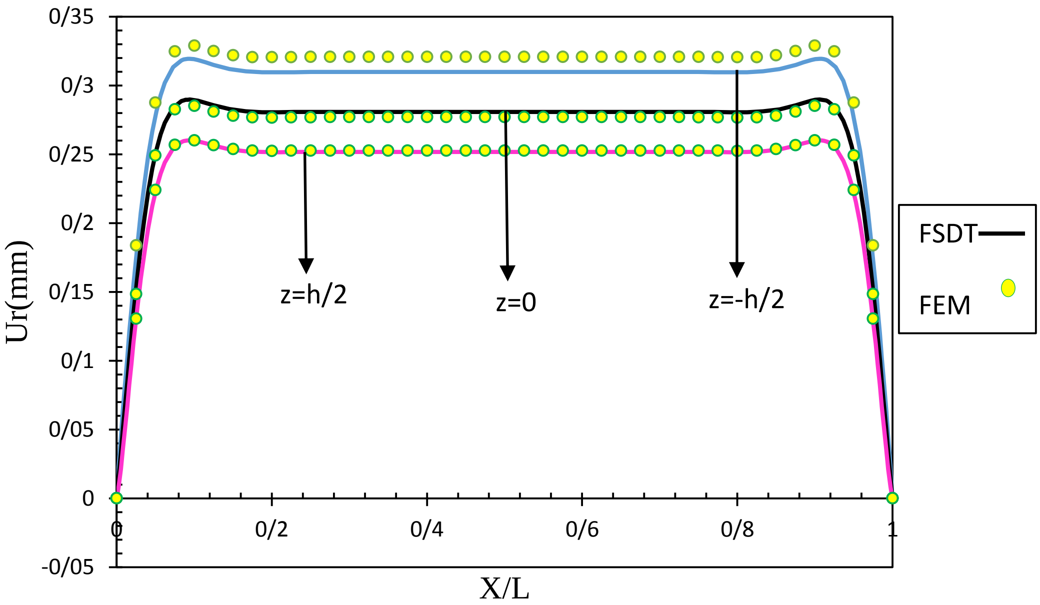


شکل۴- ۲۴ جابه‌جایی شعاعی در رستای طولی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی تحت بار گذاری حرارتی گذرا در z=0 و t=40 s

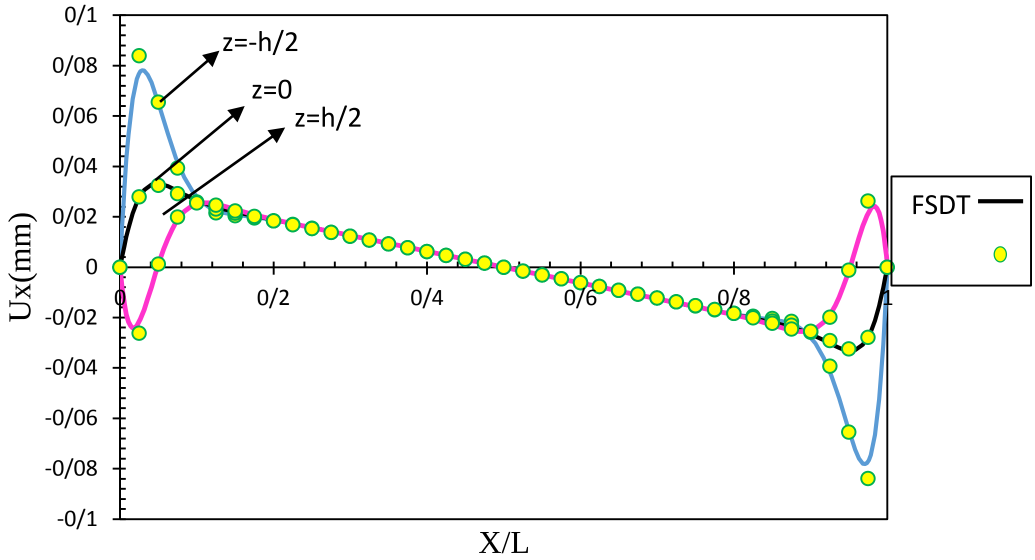
شکل (۴-۲۵) و (۴-۲۶) مقادیر جابه‌جایی محاسبه شد به دو روش FE و FSDT را برای استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی نشان می‌دهد. با توجه به شکل نتایج از انطباق خوبی برخوردار می‌باشند. در مطالعه‌ی موردی موجود در این گزارش بارگذاری فشاری بر بارگذاری حرارتی گذرا غالب می‌باشد در نتیجه می‌توان برای این مطالعه‌ی موردی هنگام بارگذاری ترکیبی حرارتی گذرا و فشار داخلی از نتایج مربوط به فشار داخلی استفاده نمود. لازم به ذکر است که نتایج مربوط به این بارگذاری، از جمع نتایج مربوط به بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به‌دست آمده بنابراین اصل جمع آثار برای این مسئله صادق می‌باشد. شکل (۴-۲۷) توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی n=1 را نشان می‌دهد. با توجه به شکل بیشترین تطابق مربوط به لایه‌ی داخلی و دلیل آن صفر شدن عبارت مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور میرسکی-هرمان می‌باشد.



شکل۴- ۲۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی تحت بار گذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی در X=L/2 و t=40 s



شکل۴- ۲۶ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی تحت بار گذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی n=1 و t=40 s



شکل۴- ۲۷ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی تحت بار گذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی n=1 و t=40 s

جدول (۱-۴) تنش‌های محاسبه شده به دو روش FE و FSDT را برای استوانه تحت بارگذاری‌های مختلف به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف و در لایه‌های مختلف نشان می‌دهد. با توجه به این جدول مقادیر تنش در لایه‌ی میانی از اختلاف کمتری برخوردار می‌باشد.

جدول۴- ۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش FE و FSDT برای بارگذاری‌های مختلف به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف

σθ[Mpa]		r=ri		r=R	
		FEM	FSDT	FEM	FSDT
n=-1	بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا	۱۹۹/۵	۲۴۰/۳۴	۱۲۰/۵۷	**۱۳۳/۲۱**
	بارگذاری حرارتی گذرا	۰/۲۲۷	-۰/۶۸۲	۰/۴۳۵	**۰/۳۴۴**
n=-0.5	بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا	۱۸۵/۲۳	۲۱۹/۲۸	۱۲۶/۲۹	**۱۳۶/۶۵**
	بارگذاری حرارتی گذرا	۰/۲۰۴	-۱/۰۱۷	۰/۴۳	**۰/۳۴۳**
n=0	بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا	۱۷۶/۴	۱۹۹/۳۹	۱۳۶/۶۸	**۱۳۹/۸۷**
	بارگذاری حرارتی گذرا	۰/۱۹۸	-۱/۴۵۷	۰/۴۲۱	**۰/۳۲۴**
n=0.5	بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا	۱۵۴/۹۶	۱۸۰/۷۵	۱۳۵/۲۶	**۱۴۲/۸۹**
	بارگذاری حرارتی گذرا	۱/۲۲	-۲/۰۳۳	۰/۳۸۷	**۰/۳۴۰۵**
n=1	بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا	۱۴۰/۵۲	۱۶۳/۴	۱۳۹/۱۳	**۱۴۵/۷۷**
	بارگذاری حرارتی گذرا	۱/۴۵۱	-۲/۷۸۷	۰/۳۸۳	**۰/۳۳۹**

۵-۴ جمع‌بندی

با توجه به مطالب گفته شده استفاده از روش FSDT در تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل صرف‌نظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور و استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اوّل مناسب نمی‌باشد. در بارگذاری حرارتی شرایط انتهایی تأثیر بیشتری نسبت به دو بارگذاری دیگر بر روی رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای می‌گذارد. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار و دمای گذرا در بردار ناهمگنی ظاهر می‌شود می‌توان برای استوانه‌ی تحت فشار و بارگذاری حرارتی گذرا با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌ها به طور جداگانه معادلات حاکم را حلّ نمود و نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در تحلیل ارائه شده بارگذاری فشاری غالب بر بارگذاری حرارتی گذرا می‌باشد و در بارگذاری ترکیبی نقش زمان کم‌رنگ می‌شود به گونه‌ای که پس از گذشت زمان مقادیر مورد مطالعه به یک عدد ثابت میل کرده و زمان روی آن‌ها تأثیری نمی‌گذارد. همچنین در بارگذاری فقط حرارتی گذرا در زمان‌های کم مقادیر جابه‌جایی به‌صورت خطی با زمان تغییر می‌کند به عبارت دیگر می‌توان مقادیر جابه‌جایی را در لحظات قبل از رسیدن به حالت تعادل خطی فرض کرد و پس از گذشت زمان این مقادیر ثابت باقی می‌مانند. مقادیر تنش نیز به‌صورت تابع غیر خطی از زمان تغییرات دارند و پس از گذشت زمان این مقادیر نیز به عدد ثابتی میل می‌کنند و تغییراتی نسبت به زمان ندارند.

فصل ۵

تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان ناهمگن تحت بارحرارتی گذرا

۵-۱ مقدمه:

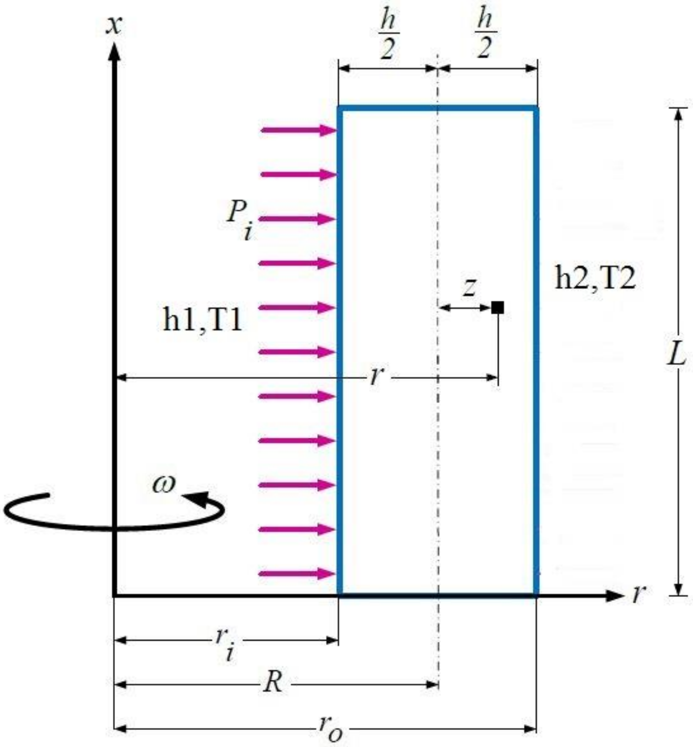
همانطور که در فصل قبل نیز عنوان شد، مقاومت منحصر به فرد استوانه‌های جدرا ضخیم (FGM) در برابر بارهای حرارتی، دانشمندان را بر آن داشت تا با بررسی و تحلیل عملکرد آن‌ها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، بپردازند. کاربرد گسترده‌ی این استوانه‌ها در رآکتورها، ژنراتورها و سانتریفیوژها که نیروی گریز از مرکز در آن‌ها نقش مهمی ایفا می‌کند باعث شده تا تحلیل استوانه‌ها تحت تأثیر فشار، حرارت و دوران به طور همزمان مورد بررسی قرار گیرد.

در این فصل برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان ناهمگن، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های چرخان جدار ضخیم متقارن محوری ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل، حلّ عمومی استوانه‌های چرخان جدار ضخیم ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی ارائه شده است. نهایتاً با انجام حلّ عددی توسط نرم‌افزار اجزاء محدود Abaqus برای استوانه‌ی چرخان تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک روش تغییر شکل برشی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند.

۵-۲ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان ناهمگن

یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم چرخان تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی به‌صورت شکل (۵-۱) در نظر گرفته می‌شود. همانطور که در فصل دوم نیز بیان شد بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \qquad (۵-۱)$$



شکل ۵- ۱ پروفیل استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\begin{cases} U = \iiint_v U^* dV \\ dV = r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \\ U^* = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz}\gamma_{xz}) \\ \quad = \frac{1}{2}E(r)\lambda\left[(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_\theta + \varepsilon_z\varepsilon_\theta) + \frac{1-2\nu}{2}\gamma_{xz}^2\right] \end{cases} \tag{۵-۲}$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار داخلی و سرعت دورانی:

$$\begin{cases} W = \iint_s (\vec{f}_{sf}.\vec{u}) ds + \iiint_v (\vec{f}_{bf}.\vec{u}) dv \\ ds = r dx d\theta = (R+z) dx d\theta \\ dV = r d\theta dr dx = (R+z) dz dx d\theta \end{cases} \tag{۵-۳}$$

که درآن نیروی حجمی حاصل از دوران با سرعت ثابت به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{f}_{bf} = \rho(r) r\omega^2 = \rho(z)(R+z)\omega^2 \tag{۵-۴}$$

نهایتاً کار نیروهای خارجی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$W = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}(P_i r_i)U_z dx d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(R+z)\omega^2 U_z (R+z) dz dx d\theta \tag{۵-۵}$$

و با انتگرال‌گیری در محدوده‌ی:

$$-\frac{h}{2} \le z \le +\frac{h}{2} \quad , \quad 0 \le x \le L \tag{۵-۶}$$

برای تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه‌ی چرخان باسرعت دورانی ثابت تحت فشار داخلی وبارگذاری حرارتی گذرا داریم:

$$\delta U = R\int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2} \delta U^{*}(1+\frac{z}{R}) dz dx d\theta \tag{۵-۷}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} = R\int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_\theta \delta\varepsilon_\theta + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz})\left(1+\frac{z}{R}\right) dz dx$$

$$\delta W = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}(P_i r_i)\delta U_z dx d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)(R+z)^2 \omega^2 \delta U_z dz dx d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} = \int_0^{L} P_i\left(R-\frac{h}{2}\right)(\delta w + z\,\delta\psi) dx + \int_0^{L}\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)\omega^2(\delta w + z\,\delta\psi)(R+z)^2 dz dx \tag{۵-۸}$$

با جایگذاری کرنش‌های رابطه‌ی (۷-۲) در روابط (۷-۵) و (۸-۵) و نیز بکارگیری اصول حساب وردشی و اصل کار مجازی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای چرخان تحت فشار داخلی و خارجی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{2\pi} = \frac{\delta W}{2\pi} \tag{۵-۹}$$

$$\begin{cases} R\,\dfrac{dN_x}{dx}=0 \\ R\,\dfrac{dM_x}{dx}-RQ_x=0 \\ R\,\dfrac{dQ_x}{dx}-N_\theta=-P_i\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)(R+z)^2dz \\ R\,\dfrac{dM_{xz}}{dx}-M_\theta-RN_z=P_i\,\dfrac{h}{2}\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)z\,(R+z)^2dz \end{cases} \tag{۵-۱۰}$$

$$R\left[N_x\delta u+M_x\delta\phi+Q_x\delta w+M_{xz}\delta\psi\right]_0^L=0 \tag{۵-۱۱}$$

روابط (۱۰-۵) همان معادلات اصلی را تشکیل می‌دهند. رابطه‌ی کمکی (۱۱-۵) نیز شرایط مرزی مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌بایست در دو انتهای استوانه صفر باشد.

معادلات (۱۰-۵) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد. برای حلّ آن باید نیروها و لنگرها را با استفاده از روابط (۱۰-۲) تا (۱۳-۲) به منتجه‌های تنش و با جایگذاری در رابطه‌ی (-۲ ۹) به مؤلفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۷-۲) بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نوشت. نهایتاً یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به‌دست می‌آیدکه می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$[A]\frac{d^2}{dx^2}\{y\}+[B]\frac{d}{dx}\{y\}+[C]\{y\}=\{F\} \tag{۵-۱۲}$$

$$\{y\}=\{\mathrm{u}\ \phi\ \mathrm{w}\ \psi\}^T \tag{۵-۱۳}$$

همچنین قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به‌صورت بردار نیروی $\{F\}$ در رابطه‌ی (۱۹-۳) نشان داده شده است:

$$\{F\}=\frac{1}{\lambda E_i}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_i\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)(R+z)^2dz-\lambda\int_{-h/2}^{h/2}E(z)\alpha(z)\Delta T(z,t)(1+\nu)dz \\ P_i\,\dfrac{h}{2}\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho(z)z\,(R+z)^2dz-\lambda\int_{-h/2}^{h/2}E(z)\alpha(z)\Delta T(z,t)(1+\nu)(R+2z)dz \end{Bmatrix} \tag{۵-۱۴}$$

در دستگاه معادلات (۵-۱۲) ماتریس‌های $[A]_{4\times4}$ و $[C]_{4\times4}$ متقارن و $[B]_{4\times4}$ پادمتقارن هستند که درایه‌های مربوط به آن‌ها در فصل گذشته آورده شده است.

۵-۲-۱ توزیع ناهمگنی خواص مکانیکی وحرارتی

در استوانه‌های تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، خواص مکانیکی از قبیل مدول الاستیسیته Eو ضریب پواسون ν توابعی از شعاع بی‌بعد $\bar{r}$ می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و بالاخص در این بررسی، به علت تغییرات جزئی، ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. همچنین در بحث انتقال حرارت ضریب انبساط حرارتی α، ضریب رسانش حرارتی K، ظرفیت گرمایی ویژه C و چگالی نیز توابعی از شعاع بی‌بعد $\bar{r}$ می‌باشند. در این تحلیل تمامی ثابت‌های ذکر شده را به‌صورت توزیع توانی از شعاع بی بعد $\bar{r}$ در راستای ضخامت استوانه در نظر می‌گیریم و داریم:

$$K = K_i(\bar{r})^{n_1} \tag{۵-۱۵}$$

$$\rho = \rho_i(\bar{r})^{n_2} \tag{۵-۱۶}$$

$$C = C_i(\bar{r})^{n_3} \tag{۵-۱۷}$$

$$E(r) = E_i(\bar{r})^{n_4} \tag{۵-۱۸}$$

$$\alpha = \alpha_i(\bar{r})^{n_5} \tag{۵-۱۹}$$

که در این رابطه $\bar{r} = r/r_i$ مختصلت شعاعی بی‌بعد است. همچنین E_i، α_i، K_i، C_i و ρ_i به ترتیب مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی، ضریب رسانش حرارتی، ظرفیت گرمای ویژه و چگالی در شعاع داخلی استوانه و n_1، n_2، n_3، n_4 و n_5 ثابت‌های ناهمگنی مادّه می‌باشند. با جایگذاری مقادیر $r = R + z$ در روابط (۵-۱۵) تا (۵-۱۹) داریم:

$$K = K_i\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{n1} \tag{۵-۲۰}$$

$$\rho = \rho_i\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{n_2} \tag{۵-۲۱}$$

$$C = C_i\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{n3} \tag{۵-۲۲}$$

$$E(r) = E_i\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{n4} \tag{۵-۲۳}$$

$$\alpha = \alpha_i \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{n5} \tag{۵-۲۴}$$

۵-۲-۲ حلّ معادله‌ی انتقال حرارات گذرا

حلّ معادله‌ی انتقال حرارت گذرا برای استوانه‌ی همگن متقارن محوری در فصل چهار به طور مفصل مورد بحث قرار گرفته است.

۵-۲-۳ حلّ ترموالاستیک استوانه‌های چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حراراتی گذرا و فشار داخلی

همانطور که توضیح داده شد دستگاه معادله‌ی (۵-۱۲) یک دستگاه چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت می‌باشد که دارای حلّ عمومی و حلّ خصوصی است. اگر این دستگاه معادلات را به‌صورت ساده شده‌ی زیر بنویسیم:

$$A\{y''\}+B\{y'\}+C\{y\}=\{F\} \tag{۵-۲۵}$$

داریم:

$$\{y\}=\{y\}_g+\{y\}_p \tag{۵-۲۶}$$

برای حلّ عمومی دستگاه فوق مقدار $\{y\}=\{\xi\}e^{mx}$ را ر معادلات آن می‌گذاریم، داریم:

$$e^{mx}\left[m^2A_1+mA_2+A_3\right]\{\xi\}=\{0\} \tag{۵-۲۷}$$

با توجه به اینکه $e^{mx}\neq 0$ می‌توان نوشت:

$$\left|m^2A_1+mA_2+A_3\right|=0 \tag{۵-۲۸}$$

از حلّ معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه‌ی m_i محاسبه شده که به‌صورت سه جفت ریشه‌ی مزدوج غیر صفر حاصل می‌شوند. از این سه جفت ریشه، یک جفت آن عدد حقیقی و دو جفت دیگر آن نیز اعداد مختلط مزدوج می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه‌ی حاصل در معادله‌ی (۵-۲۷)، بردارهای ویژه‌ی ξ_i متناظر با مقادیر ویژه‌ی فوق به‌دست می‌آیند. درنهایت حلّ عمومی عبارتست از:

$$\{y\}_g=\sum_{i=1}^{6}c_i\,\{\xi\}_i\,e^{m_i x} \tag{۵-۲۹}$$

با توجه به این نکته که مقادیر ویژه‌ی حاصل شامل اعداد مختلط می‌باشند، برای به‌دست آوردن بردارهای ویژه‌ی متناظر با این اعداد مختلط، باید از روابط حاکم بر بردارهای ویژه‌ی مربوط به اعداد مختلط استفاده نمود.

برای حلّ خصوصی، قسمت ناهمگن معادلات (۳-۲۵) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری چرخان با ضخامت ثابت و تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از X نمی‌باشد. بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس $[C]$ طبق معادله‌ی زیر جواب خصوصی را به‌دست آورد.

$$[C]\{y\}=\{F\}\Rightarrow\{y\}=[C]^{-1}\{F\} \qquad (۵\text{-}۳۰)$$

اما با توجه به معکوس ناپذیری ماتریس $[C]$ به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، با ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حلّ می‌شود. بدین منظور در اوّلین معادله از سری معادلات (۵-۱۰) از طرفین آن انتگرال‌گیری کرده و خواهیم داشت:

$$u=\int v dx + C_7 \qquad (۵\text{-}۳۱)$$

بنابراین دستگاه معادلات قدیم به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases}[A]\dfrac{d^2}{dx^2}\{y\}+[B]\dfrac{d}{dx}\{y\}+[C]\{y\}=\{F\} \\ \{y\}=\{\mathrm{v}\ \phi\ \mathrm{w}\ \psi\}^T\end{cases} \qquad (۵\text{-}۳۲)$$

که در آن بردار نیرویی $\{F\}$ با توجه به انتگرال‌گیری از طرفین اوّلین معادله، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\{F\}=\frac{1}{\lambda E_i}\begin{Bmatrix} C_0 \\ 0 \\ -P_i\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n(R+z)^2dz-\lambda E_i\alpha_i\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{2n}\Delta T(z,t)(1+\nu)dz \\ P_i\dfrac{h}{2}\left(R-\dfrac{h}{2}\right)-\omega^2\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n z(R+z)^2dz-\lambda E_i\alpha_i\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{R+z}{r_i}\right)^{2n}\Delta T(z,t)(1+\nu)(R+2z)dz \end{Bmatrix} \qquad (۵\text{-}۳۳)$$

بنابراین با حلّ دستگاه معادلات فوق به‌صورت مطالعه‌ی موردی می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به‌دست آورد.

شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۱-۵) توسط رابطه‌ی (۱۱-۵) بیان می‌شوند. به عبارتی مقادیر $\{\mathrm{u}\ \phi\ \mathrm{w}\ \psi\}$ و $\{N_x\ \ \mathrm{M}_x\ \ \mathrm{Q}_{xz}\ \ \mathrm{M}_{xz}\}$ در دو انتهای استوانه طوری در نظر گرفته می‌شوند که همواره رابطه‌ی (۱۱-۵) برابر صفر باشد. با داشتن ۶ مجهول $C_1,...,C_6$ در جواب عمومی و ۲ ثابت C_0 و C_7 در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل ۴ شرط مرزی در هر سمت، ۸ ثابت مجهول را محاسبه کرد. نهایتاً با به‌دست آوردن ثوابت مجهول، بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه‌ی (۲۶-۵) برحسب متغیّرهای x,z,t به‌دست می‌آیند.با استفاده از رابطه‌ی (۶-۲) می‌توان میدان جابه‌جایی شعاعی و طولی را به‌دست آورد و با استفاده از روابط (۷-۲) تا (۱۳-۲) مقادیر تنش، کرنش، نیرو و لنگر را نیز محاسبه کرد.

۳-۵ مطالعه‌ی موردی

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج عددی، یک استوانه جدار ضخیم با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است. استوانه‌ی جدار ثابت به شعاع داخلی $r_i = 0.4m$ و شعاع خارجی $r_o = 0.6m$ با طول $L = 8m$ تحت فشار داخلی $P = 70Mpa$ و سرعت‌های دورانی مختلف قرار گرفته است. مدول الاستیسیته برای جدار داخلی استوانه‌ی ناهمگن $E_i = 200Gpa$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ می‌باشد. چگالی برای جدار داخلی استوانه‌ی ناهمگن برابر با $\rho_i = 7854\,kg/m^3$ و ضریب پخش حرارتی، حرارت مخصوص و ضریب انتقال حرارت نیز برای جدار داخلی استوانه‌ی ناهمگن به ترتیب برابر با $\alpha_i = 12(10^{-6})1/^\circ C$، $C_i = 434J/Kg.^\circ K$ و $K_i = 60.5W/m.^\circ K$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن نتایج عددی، مقادیر زیر برای ثابت‌های شرایط مرزی دمایی در نظر گرفته شده است[۵۲]:

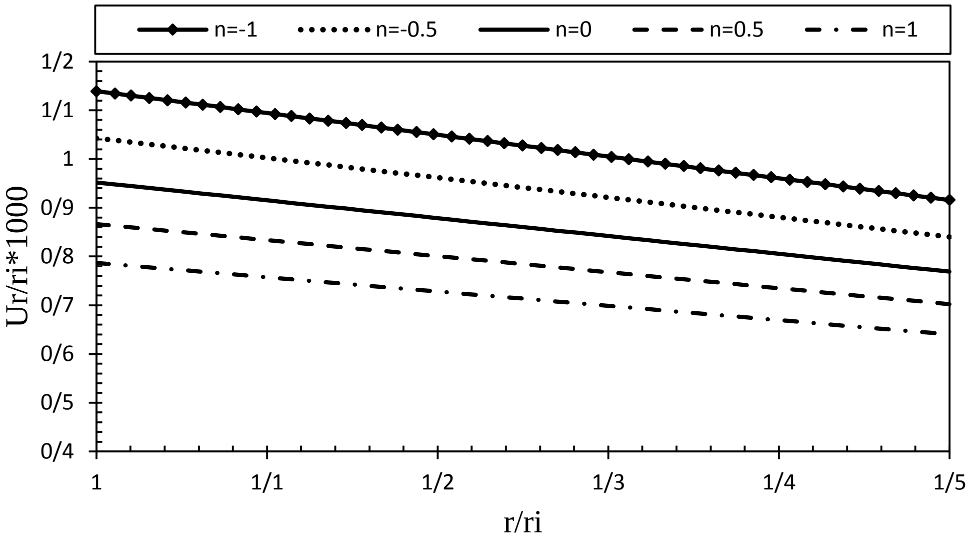
$$\begin{array}{lll} T_i(r,0) = 20r & , C_{11} = 6W/m^2K & , C_{21} = 25W/m^2K \\ T_{\infty 1} = 7^\circ C & , T_{\infty 2} = 9^\circ C & \end{array} \tag{۳۴-۵}$$

تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط انتهایی دوسر گیردار برای بارگذاری ترکیبی فشار داخلی، دوران و حرارت گذرا انجام شده است. حلّ تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط Maple 16 صورت گرفته است.

برای شرایط مرزی دو سر گیردار با توجه به رابطه‌ی (۱۱-۵) داریم:

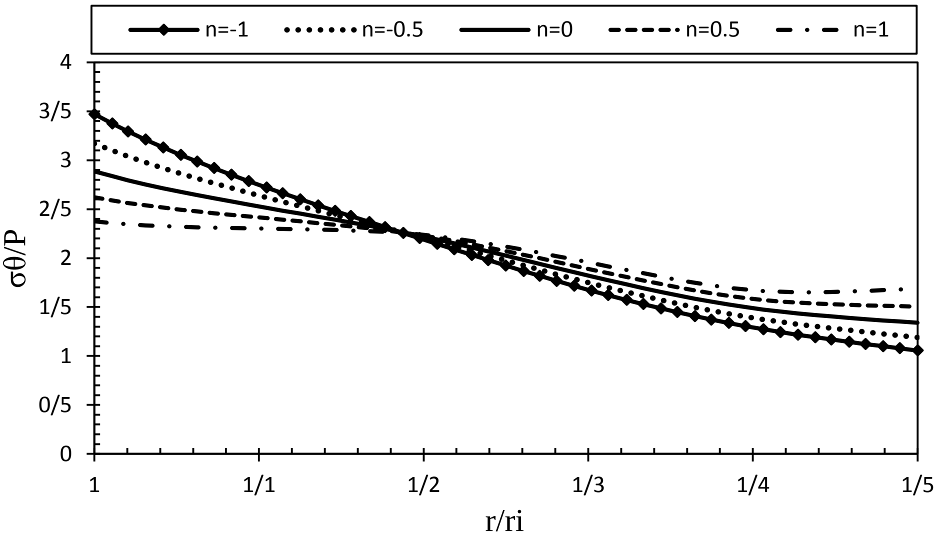
$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \ , \ \phi = 0 \ , w = 0 \ , \ \psi = 0 \\ x = L \Rightarrow u = 0 \ , \ \phi = 0 \ , w = 0 \ , \ \psi = 0 \end{cases} \qquad (۵-۳۵)$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مؤلفه‌های میدان جابه‌حایی به‌دست می‌آیند. درنهایت مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری و همچنین تنش محوری محاسبه می‌شوند. شکل (۲-۵) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره‌ی استوانه‌ی چرخان ناهمگن را به ازای ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل جابه‌جایی شعاعی به ازای nهای منفی نسبت به مادّه‌ی همگن بیشتر و به ازای nهای مثبت نسبت به مادّه‌ی همگن کمتر می‌باشد. شکل(۳-۵) توزیع نرمال تنش محیطی در راستای جداره‌ی استوانه‌ی چرخان ناهمگن در وسط استوانه تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل به ازای nهای منفی میزان تنش محیطی در لایه‌ی داخلی نسبت به مادّه‌ی همگن بیشتر و در لایه‌ی خارجی کمتر می‌باشد. همچنین به ازای nهای مثبت تنش محیطی در جداره‌ی داخلی نسبت به مادّه‌ی همگن کمتر و در جداره‌ی خارجی نسبت به مادّه‌ی همگن بیشتر می‌باشد. بنابراین در لایه‌ی داخلی nهای مثبت و در لایه‌ی خارجی nهای منفی مفیدتر می‌باشند.



شکل ۵- ۲ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی

در X=L/2 و ω=300 rpm و t=40 s

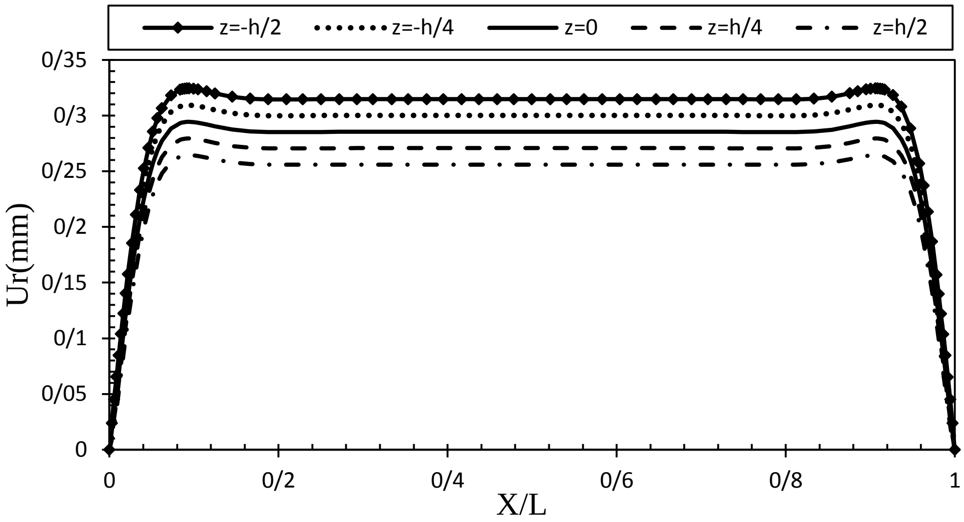


شکل ۵- ۳ توزیع بی‌بعد تنش محیطی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی در

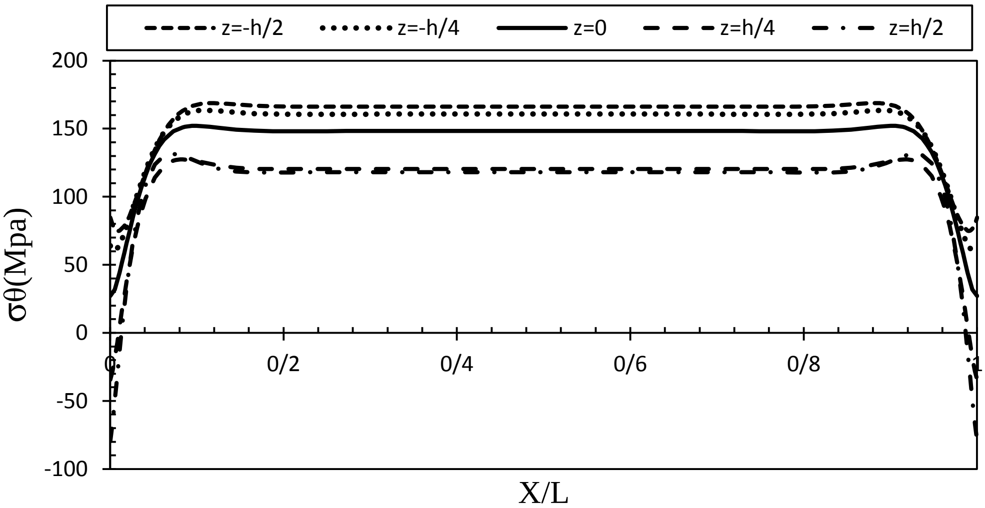
X=L/2 و ω=300 rpm و t=40 s

شکل (۵-۴) توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای n=1 را نشان می‌دهد. شکل (۵-۵) توزیع تنش محیطی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای n=1 را نشان می‌دهد.

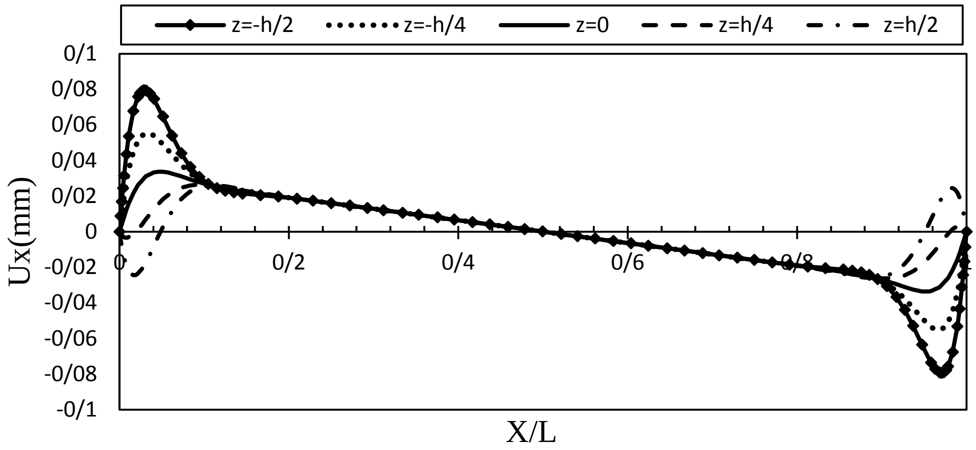
شکل (۶-۵) توزیع جابه‌جایی محوری استوانه چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای n=1 را نشان می‌دهد. شکل (۷-۵) توزیع تنش برشی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای n=1 را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل تنش برشی در نقاط دور از مرز بر طبق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل برابر صفر می‌باشد.



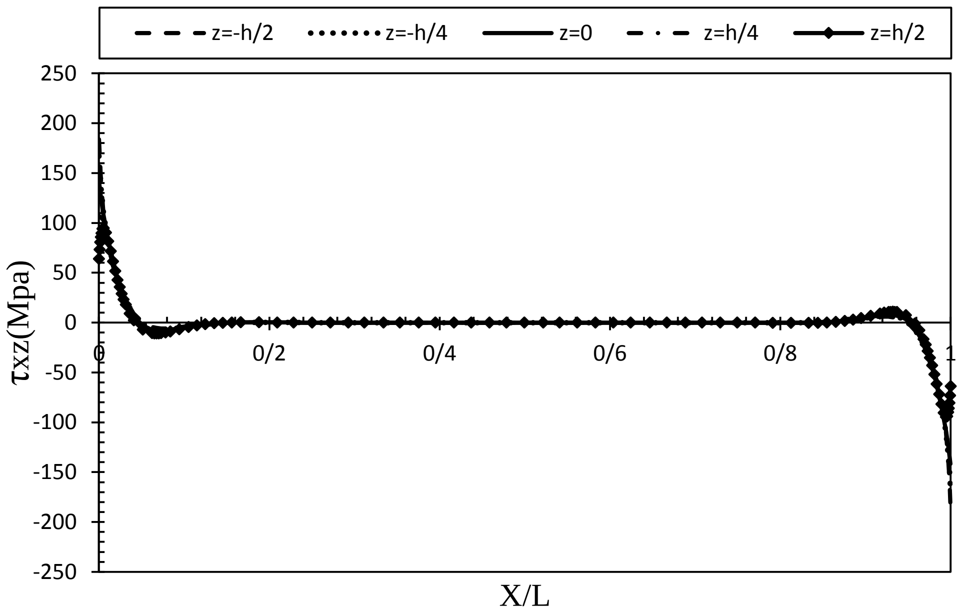
شکل ۵- ۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای n=1 و ω=300 rpm و t=40 s



شکل ۵- ۵ توزیع تنش محیطی در راستای طولی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای n=1 و ω=300 rpm و t=40 s



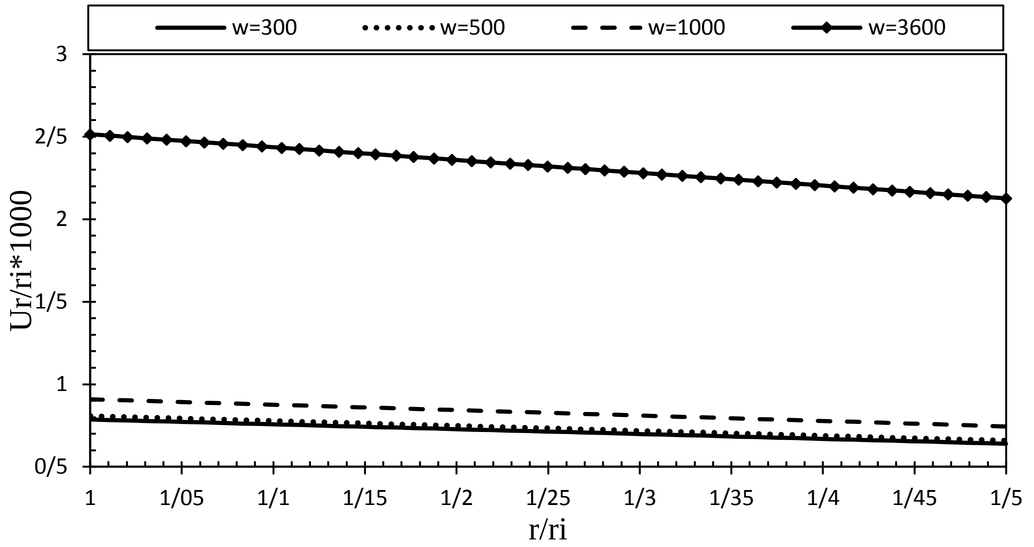
شکل ۵- ۶ توزیع جابه‌جایی محوری در راستای طولی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای $n=1$ و $\omega=300$ rpm و $t=40$ s



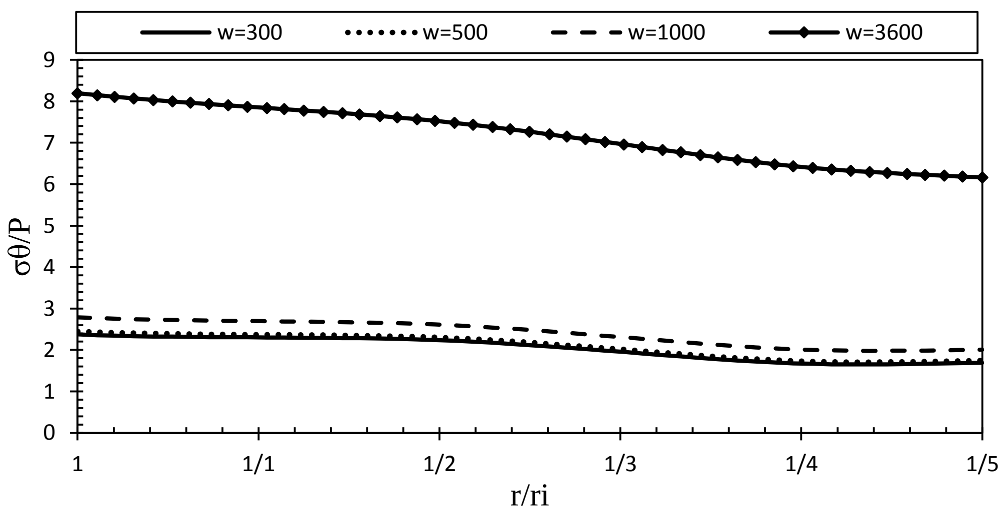
شکل ۵- ۷ توزیع تنش برشی در راستای طولی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای $n=1$ و $\omega=300$ rpm و $t=40$ s

شکل (۸-۵) توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای شعاع استوانه‌ی چرخان همگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای $n=1$ و برای سرعت‌های مختلف چرخشی نشان می‌دهد. با توجه به شکل با افزایش سرعت دورانی مقادیر جابه‌جایی بیشتر می‌شوند. از آنجایی که دوران خود عامل ناپایداری جسم می‌باشد با افزایش سرعت دوران در این گزارش جسم به سمت ناپایداری پیش

می‌رود و چرخش بر فشار و بار حرارتی گذرا غلبه می‌کند. شکل(۹-۵) توزیع تنش محیطی در راستای جداره‌ی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی به ازای n=1 و سرعت‌های مختلف دورانی را نشان می‌دهد.



شکل ۵- ۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی برای سرعت‌های چرخشی مختلف و به ازای n=1 و t=40 s



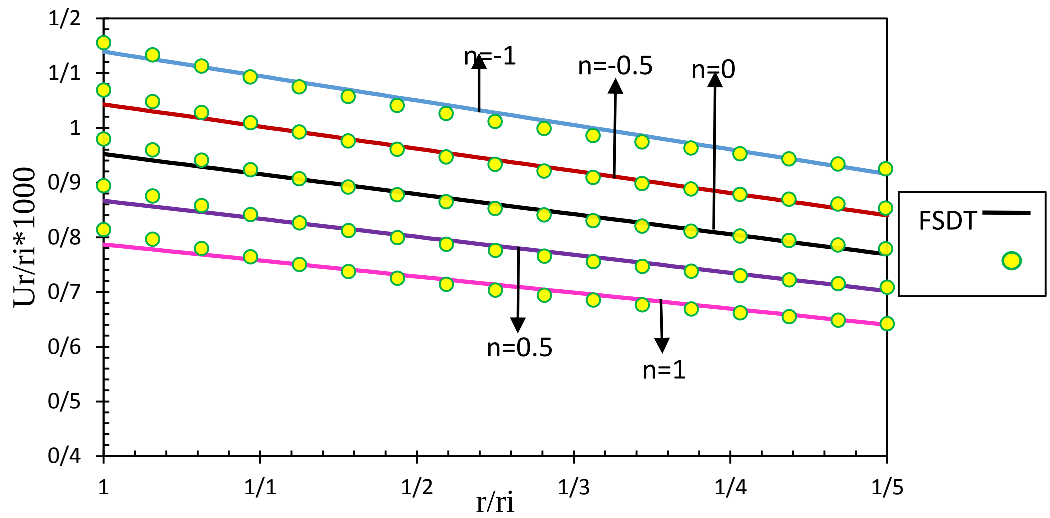
شکل ۵- ۹ توزیع تنش محیطی در جداره‌ی استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی گذرا و فشار داخلی برای سرعت‌های مختلف چرخشی به ازای n=1 و t=40 s

۵-۴ حلّ عددی استوانه‌های چرخان ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا و فشار داخلی

نحوه‌ی مدلسازی استوانه‌ی FGM چرخان همانند فصل قبل می‌باشد. در این قسمت با در نظر گرفتن کل گره‌های موجود در پوسته‌ی استوانه‌ای، یک سرعت دورانی ثابت نیز به مجموعه وارد می‌شود. در این بخش نیز نتایج مربوط به حلّ تحلیلی توسط روش تغییر شکل برشی با نتایج عددی حاصل از حلّ اجزاء محدود در استوانه‌های همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی و حرارت گذرا دارای سرعت دورانی مقایسه شده است.

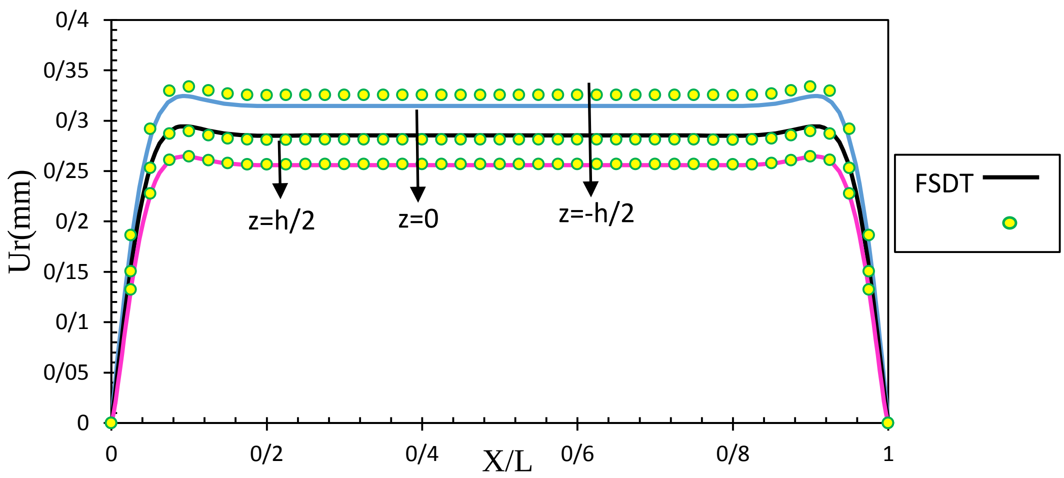
۵-۴-۱ مقایسه‌ی نتایج

در ادامه به‌منظور بررسی صحّت روش حلّ تحلیلی ارائه شده، نتایج حاصل از روش تئوری تغییر شکل برشی و نتایج حاصل از حلّ عددی به کمک نرم‌افزار Abaqus آورده شده است. در شکل (۵-۱۰) نتایج جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT برای ثوابت ناهمگنی مختلف در طول جداره‌ی استوانه و در X=L/2 آورده شده است. با توجه به این شکل می‌توان دریافت که در لایه‌ی میانی همانند استوانه‌ی تحت فشار داخلی بیشترین انطباق بین روش‌های FE و FSDT وجود دارد. همچنین اختلاف موجود بین دو روش در لایه‌ی داخلی بیشتر و در لایه‌ی خارجی کمتر می‌باشد. قابل ذکر است که میزان این اختلاف در استوانه‌ی تحت بارگذاری فشاری و دورانی بیشتر از استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد.

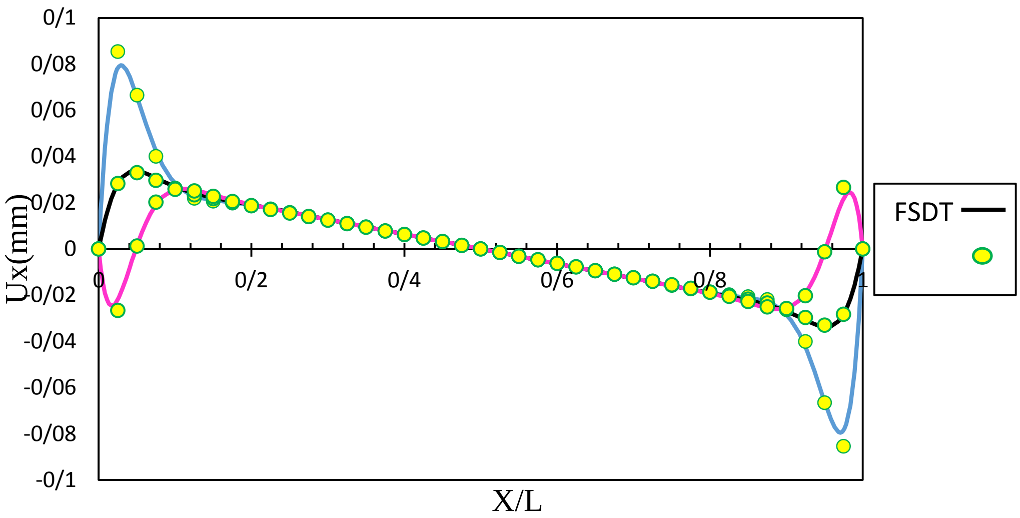


شکل ۵- ۱۰ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی و حرارتی گذرا برای ω=rpm ۳۰۰ و t=40 s

شکل (۵-۱۱) نتایج جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه‌ی دوسر گیردار برای ثابت ناهمگنی n=1 می‌باشد. توزیع جابه‌جایی محوری محاسبه شده توسط دو روش عددی و تحلیلی برای سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی n=1 در شکل (۵-۱۲) نشان داده شده است.



شکل ۵- ۱۱ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی و حرارتی گذرا برای ω=rpm ۳۰۰ و t=40 s به ازای n=1



شکل ۵- ۱۲ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی و حرارتی گذرا برای ω=rpm ۳۰۰ و t=40 s به ازای n=1

جدول (۵-۱) حاوی نتایج تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT به ازای سرعت‌های مختلف دورانی در دو لایه‌ی داخلی و میانی استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت دو سر گیردار می‌باشد. همانطور که مشخص است با افزایش سرعت دورانی مقادیر تنش محیطی افزایش می‌یابد. جدول (۵-۲) تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT به ازای ثابت ناهمگنی مختلف را نشان می‌دهد.

جدول ۵- ۱ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی و حرارتی گذرا در x=L/2 به ازای n=1 و t=40 s

	σθ[Mpa]	**ω=300**	**ω=500**	**ω=1000**	**ω=3600**
Z=-h/2	FEM	۱۴۳/۲۲۸	۱۴۷/۹۳	۱۶۷	۵۲۱/۷۳۶
	FSDT	۱۶۶/۲۵۴	۱۷۱/۳۱۶	۱۹۵/۹۴۶	۵۷۳/۴۸۷
Z=0	FEM	۱۴۱/۷۳۲	۱۴۶/۲۳	۱۶۷/۳۲	۵۰۳/۶۶
	FSDT	۱۴۸/۲۸۹	۱۵۲/۷۷۷	۱۷۳/۷۷۳	۵۰۸/۶۱۶

جدول ۵- ۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FE و FSDT در استوانه‌ی چرخان ناهمگن تحت فشار داخلی و حرارتی گذرا در x=L/2 و ω=300 rpm

	σθ[Mpa]	n=-1	n=-0.5	n=0	n=0.5	n=1
r=ri	FEM	۲۱۷	۱۹۸/۲۳	۱۷۸/۹۴	۱۶۰/۵۴	۱۴۳/۲۲
	FSDT	۲۴۳	۲۲۱/۹۴	۲۰۲/۱۱۱	۱۸۳/۵۳	۱۶۶/۲۵
r=R	FEM	۱۲۸/۸۳	۱۳۳/۳	۱۳۸/۶۲	۱۳۹/۴	۱۴۱/۷۳
	FSDT	۱۳۴/۶۷	۱۳۸/۳۳	۱۴۱/۷۹	۱۴۵/۰۹	۱۴۸/۳

۵-۵ جمع‌بندی

با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که در سرعت‌های دورانی پایین، دوران تأثیر زیادی بر روی جابه‌جایی و تنش‌ها ندارد و می‌توان به‌جای استفاده از روابط مربوط به بارگذاری‌های دورانی توأم با فشار در سرعت های پایین از روابط فشاری استفاده نمود. اما با افزایش سرعت دورانی، دوران بر فشار و بارگذاری حرارتی گذرا غلبه می‌کند و نمی‌توان روابط را به روابط فشاری محدود نمود. با افزایش سرعت دورانی استوانه به سمت ناپایداری پیش می‌رود. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار، بارگذاری حرارتی و دوران در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات حاکم ظاهر می‌شوند، می‌توان برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی و حرارت گذرا با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌ها به طور جداگانه، معادلات حاکم را حلّ کرد و نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در مجموع مطابقت خوبی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه تحت بارگذاری حرارتی گذرا، دوران و فشار داخلی وجود دارد. این مطابقت در لایه‌ی میانی بیشتر و در لایه‌ی داخلی کمتر می‌باشد. با توجه به مطالب گفته شده در این فصل تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل برای تحلیل بیان شده در این گزارش مناسب می‌باشد.

فصل ۶

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۶-۱ مقدمه

استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری، به دلیل مقاومت بالا در برابر انواع فشارهای داخلی و خارجی، نیروها و لنگرها، گرادیان دمایی و بارگذاری‌های متنوع دیگر کاربرد فراوانی در صنعت پیدا کرده‌اند. دست‌یابی به روش‌های مختلف تحلیل این گروه از پوسته‌ها با تغییرات هندسه، مادّه و بارگذاری مورد علاقه‌ی پژوهشگران و نیاز صنعتگران می‌باشد. در همین راستا در این رساله سعی شده است تا با ارائه‌ی روش حلّ تحلیلی بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی برای استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت ثابت در حالت تقارن محوری تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی، دورانی شامل چرخش با سرعت ثابت و بارگذاری حرارتی گذرا، اثر هر یک از این بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلف بر روی مقادیر تنش و جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ای بررسی شود. همچنین قابلیت‌های تئوری تغییر شکل برشی و نکات ضعف و قوت آن بیان شده است. در این فصل ضمن جمع‌بندی کارهای صورت گرفته در این رساله، نتیجه‌گیری جامعی از مباحث مربوط به هر فصل صورت پذیرفته است و نهایتاً پیشنهادهایی برای ادامه و تکمیل کار نیز ارائه شده است.

۶-۲ جمع‌بندی

به طور کلی تحلیل استوانه‌های جدار کلفت (با جدار ثابت یا متغییر) در حالت متقارن محوری تحت انواع بارگذاری‌ها (شامل فشار محوری، فشار شعاعی، نیروهای دورانی، حرارتی و ...) با شرایط انتهایی مختلف با استفاده از اصل کار مجازی بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، منجر به‌دستگاه معادلات ناهمگن با مجهولاتی شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی می‌شود. وجود هر گونه غیر یکنواختی در بارگذاری و جداره‌ی پوسته و همچنین ایجاد مؤلفه‌ی محوری بارگذاری منجر به‌دستگاه معادلاتی با ضرایب متغیّر می‌شود، در غیر اینصورت دستگاه معادلات ناهمگن با ضرایب ثابت حاصل می‌شود. تعداد معادلات دستگاه حاصل وابسته به مرتبه‌ی تئوری تغییر شکل برشی مورد استقاده می‌باشد. استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی n منجر به یک دستگاه $2(n+1)$ معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن شامل $4(n+1)$ مجهول می‌شود. حلّ دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل با تکنیک به کار

گرفته شده در این رساله برای ضرایب ثابت و یا تئوری اغتشاشات برای ضرایب متغیّر با اعمال شرایط مرزی، منجر به محاسبه‌ی ضرایب مجهول مربوط به مسائل مقدار ویژه و نهایتاً مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی می‌شود. مقادیر حاصل از حلّ معادله‌ی مشخصه‌ی مربوط به جواب عمومی دستگاه معادلات حاکم، به‌صورت جفت ریشه‌های مزدوج شامل مقادیر حقیقی و مختلط می‌باشند. استفاده از روابط سینماتیک، منجر به محاسبه‌ی مؤلفه‌های تانسور کرنش می‌شود؛ نهایتاً استفاده از روابط رفتاری توزیع تنش در پوسته‌ی استوانه‌ای تعیین می‌شود. توجه به این نکته ضروری است که در استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، میدان جابه‌جایی به طور مستقیم محاسبه می‌شود، در حالیکه مؤلفه‌های کرنش و تنش به‌صورت غیر مستقیم و با استفاده از روابط سینماتیک و رفتاری از میدان جابه‌جایی محاسبه شده به‌دست می‌آیند. در این میان مشتق‌گیری از میدان جابه‌جایی در رابط سینماتیک منشأ ایجاد خطا در محاسبه‌ی مقادیر کرنش و نهایتاً تنش می‌شود. با افزایش مرتبه‌ی تئوری تغییر شکل برشی، تقریب اوّلیّه‌ی میدان جابه‌جایی بهبود یافته و منجر به نتایج دقیقتر می‌شود. در بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و بارگذاری دورانی، توأم با بار حرارتی گذرای مطالعه شده در این رساله، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل دارای دقّت قابل قبولی می‌باشد. در مورد بارگذاری‌های حرارتی در حالت گذرا و پایدار ناشی از شار حرارتی درون جسم، به دلیل دور شدن توزیع جابه‌جایی از حالت خطی و افزایش انحنای تابع متناظر با این توزیع، استفاد از تقریب خطی موجود در تئوری تغییر شکل برشی اوّل سبب افزایش اختلاف، مخصوصاً در بارگذاری حالت گذرای حرارتی، بین حالت دقیق و حلّ تحلیلی مورد نظر می‌شود. افزایش جملات مراتب بالاتر در تئوری تغییر شکل برشی سبب نزدیکتر شدن توریع جابه‌جایی حاصل از این تئوری به توزیع حقیقی موجود در سازه‌ی مورد نظر شامل ورق، پوسته، تیر و ... می‌شود. در ادامه نتایج مربوط به انواع بارگذاری به طور مجزا بیان شده است.

حالت اوّل: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای همگن تحت بار حرارتی گذرا

با توجه به آنچه در فصل دوم بیان شد، استفاده از روش FSDT در تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل صرف‌نظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور رابطه‌ی (۵-۲) و استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی –هرمان مرتبه‌ی اوّل مناسب نمی‌باشد. در حقیقت با توجه به اینکه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل توزیع جابه‌جایی شعاعی را در طول جداره‌ی استوانه به‌صورت خطی در نظر می‌گیرد و توجه به این نکته که جابه‌جایی شعاعی در استوانه تحت بارگذاری حرارتی و فشاری دارای یک توزیع غیرخطی با انحنای زیادتری نسبت به استوانه‌ی تحت بارگذاری فشاری می‌باشد، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای مناسب نمی‌باشد، در حالیکه دقت نتایج حاصل از این روش برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری مناسب می‌باشد. در این تحقیق جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری و تنش‌های محیطی به‌دست آمده از دو روش FE و FSDT برای حالت بارگذاری حرارتی گذرا در مقایسه با بارگذاری فشاری اندک می‌باشد. می‌توان با توجه به شکل‌ها و جداوّل ارائه شده برای بارگذاری حرارتی گذرا به نتایج فوق رسید.

همچنین می‌توان دریافت که افزایش زمان در مطالعه‌ی موردی ارائه شده تاثیر چندانی ندارد و با گذشت زمان مقادیر جابه‌جایی و تنش به مقدار ثابتی میل می‌کنند. همچنین بارگذاری فشاری در این تحقیق بر بارگذاری حرارتی گذرا غالب می‌باشد و تئوری FSDT برای مطالعه‌ی موردی ذکر شده برای گزارش تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در حالت بارگذاری فشاری و حرارتی گذرا به‌صورت توأمان نتایج قابل قبولی را داراست. در حالت کلی نتایج در لایه‌ی میانی از تطابق بهتری نسبت به لایه‌های دیگر برخوردار است.

حالت دوم: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان همگن

با توجه به نتایج به‌دست آمده در فصل سوم می‌توان دریافت که مقادیر تنش و جابه‌جایی ایجاد شده در سرعت‌های دورانی پایین، ناچیز می‌باشد و به‌جای استفاده از معادلات استوانه‌های تحت بارگذاری فشاری و چرخش در سرعت‌های پایین، می‌توان از معادلات مربوط به استوانه‌های تحت فشار استفاده

نمود. با افزایش سرعت دورانی مقادیر جابه‌جایی و تنش، افزایش یافته بطوریکه چرخش بر فشار داخلی و انتقال حرارت گذرا غلبه می‌کند. بنابراین در سرعت‌های بالا نمی‌توان از فرض فوق استقاده نمود. از آنجایی که دوران خود عامل ناپایداری است با افزایش بیش از حد سرعت دورانی سازه به سمت ناپایدار شدن پیش می‌رود. همچنین زمان در تحلیل پوسته‌ی استوانه‌ای چرخان همگن تأثیر چندانی ندارد به این معنی که تنش‌ها و کرنش‌ها پس از زمان مشخص به مقدار ثابتی میل می‌کنند. زمان رسیدن به حالت تعادل برای استوانه‌ها با شرایط مرزی مختلف متفاوت می‌باشد.

با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار، دوران و حرارت گذرا در قسمت ناهمگنی معادلات ظاهر می‌شود می‌توان هر کدام از بارگذاری‌های فوق را به‌صورت جدا حلّ نمود و از اصل برهم‌نهی برای به‌دست آوردن نتایج مربوط به بارگذاری‌های ذکر شده استفاده نمود و نتایج را با هم جمع کرد. به طور کلی مطابقت قابل قبولی بین تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل و حلّ عددی در مطالعه‌ی موردی مورد بررسی وجود دارد و با توجه به تأثیر اندک بارگذاری حرارتی گذرا می‌توان از نتایج مربوط به بارگذاری فشاری و چرخش به‌جای استفاده از نتایج حرارت گذرا توأم با چرخش و فشار استفاده نمود.

در حالت کلی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل برای تحلیل الاستیک استوانه‌های چرخان تحت بارگذاری فشاری مناسب می‌باشد.

حالت سوم: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM تحت بار حرارتی گذرا

با توجه به مطالب گفته شده در فصل چهارم استفاده از روش FSDT در تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل صرف‌نظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور و استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اوّل مناسب نمی‌باشد. در حقیقت با توجه به اینکه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل توزیع جابه‌جایی شعاعی را در طول جداره‌ی استوانه به‌صورت خطی در نظر می‌گیرد و توجه به این نکته که جابه‌جایی شعاعی در استوانه تحت بارگذاری حرارتی دارای یک توزیع غیرخطی با انحنای زیادتری نسبت به استوانه با بارگذاری فشاری می‌باشد،

استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای خصوصاً تحت بارگذاری‌های حرارتی مناسب نمی‌باشد، در حالیکه دقت نتایج حاصل از این روش برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری مناسب می‌باشد. در بارگذاری حرارتی شرایط انتهایی تأثیر بیشتری نسبت به دو بارگذاری دیگر بر روی رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای می‌گذارد. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار و دمای گذرا در بردار ناهمگنی ظاهر می‌شود می‌توان برای استوانه‌ی تحت فشار و بارگذاری حرارتی گذرا با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌ها به طور جداگانه معادلات حاکم را حلّ نمود و نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در تحلیل ارائه شده بارگذاری فشاری غالب بر بارگذاری حرارتی گذرا می‌باشد و در بارگذاری ترکیبی نقش زمان کم‌رنگ می‌شود به گونه‌ای که پس از گذشت زمان مقادیر مورد مطالعه به یک عدد ثابت میل کرده و زمان روی آن‌ها تأثیری نمی‌گذارد. همچنین در بارگذاری فقط حرارتی گذرا مقادیر جابه‌جایی به‌صورت خطی با زمان تغییر می‌کند (به عبارت دیگر می‌توان مقادیر جابه‌جایی را در لحظات قبل از رسیدن به حالت تعادل خطی فرض کرد) و پس از گذشت زمان این مقادیر ثابت باقی می‌مانند. مقادیر تنش نیز به‌صورت تابع غیر خطی از زمان تغییرات دارند و پس از گذشت زمان این مقادیر نیز به عدد ثابتی میل می‌کنند و تغییراتی نسبت به زمان ندارند.

حالت چهارم: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM تحت بار حرارتی گذرا

با توجه به نتایج به‌دست آمده در فصل پنجم می‌توان نتیجه گرفت که در سرعت‌های دورانی پایین، دوران تأثیر زیادی بر روی جابه‌جایی و تنش‌ها ندارد و می‌توان به‌جای استفاده از روابط مربوط به بارگذاری‌های دورانی توأم با فشار در سرعت های پایین از روابط فشاری استفاده نمود. اما با افزایش سرعت دورانی، دوران بر فشار و بارگذاری حرارتی گذرا غلبه می‌کند و نمی‌توان روابط را به روابط فشاری محدود نمود. با افزایش سرعت دورانی استوانه به سمت ناپایداری پیش می‌رود. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار، بارگذاری حرارتی و دوران در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات حاکم

ظاهر می‌شوند، می‌توان برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی و حرارت گذرا با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌ها به طور جداگانه، معادلات حاکم را حلّ کرد و نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در مجموع مطابقت خوبی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه تحت بارگذاری حرارتی گذرا، دوران و فشار داخلی وجود دارد. این مطابقت در لایه‌ی میانی بیشتر و در لایه‌ی داخلی کمتر می‌باشد. با توجه به مطالب گفته شده در این فصل تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل برای تحلیل بیان شده در این گزارش مناسب می‌باشد.

۳-۶ پیشنهادها

با توجه به کارهایی که در گذشته در رابطه با موضوع این رساله انجام شده و آنچه در این پژوهش ارائه شد، می‌توان دریافت که تئوری تغییر شکل برشی دارای قابلیت‌های بسیار فراوانی در تحلیل مسائلی است که تئوری کلاسیک قادر به حلّ آن‌ها نمی‌باشد. به همین منظور جهت تکمیل این بررسی‌ها پیشنهادها زیر ارائه می‌گردد:

۱- تحلیل پوسته‌های کروی تحت بارگذاری حرارتی گذرا با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی
۲- تحلیل ترموالاستیک گذرای پوسته‌های استوانه‌ای در حالت نامتقارن محوری از نظر هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی
۳- تحلیل ترموالاستیک گذرای پوسته‌های استوانه‌ای با توزیع نمایی خواص
۴- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای تحت شوک حرارتی
۵- بهینه‌سازی پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن تحت بار حرارتی گذرا

مراجع

[1] Flugge, W., (1973), ***Stresses in shells***, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.

[۲] یوگورال ای. سی.، (۱۳۷۵)، ***تنش در ورق‌ها و پوسته‌ها***، ترجمه‌ی غلامحسین رحیمی، چاپ اوّل، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، تهران.

[3] Timoshenko, S.P. & Goodier, J.N., (1983), ***Theory of elasticity***, 3rd ed., McGraw-Hill, New York.

[4] Naghdi, P.M. and Cooper, R.M., (1956), ***Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia***, J. Acous. Society America, 28: pp. 56-63.

[5] Mirsky, I. and Hermann, G., (1958), ***Axially motions of thick cylindrical shells***, J. Appl. Mech., 25: pp. 97-102.

[6] Greenspon, J.E., (1960), ***Vibration of a thick-walled cylindrical shell, comparison of the exact theory with approximate theories***, J. Acous. Society America, 32: pp. 571-578.

[7] Timoshenko, S.P., (1976), ***Strength of materials: Part II (Advanced theory and problem)***, 3th ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York.

[8] Mindlin, R.D., (1951), ***Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates***, J. Appl. Mech., 18: pp. 31-38.

[9] Lekhnitskii, S.G., (1981), ***Theory of elasticity of an anisotropic body***" Mir Pub., Moscow.

[10] Suresh S. and Mortensen, A., (1998), ***Fundamentals of functionally graded materials***, Cambridge Pub., London.

[11] Koizumi, M. and Niino, M., (1995), ***Overview of FGM research in Japan***, MRS Bulletin, 20: pp. 19-21.

[12] Koizumi, M., (1997), ***FGM activities in Japan***, Compos. Part B: Eng., 28: pp. 1-4.

[13] Koizumi, M., (1993), ***The concept of FGM***, Ceramic Transactions Functionally Graded Material, pp. 3-10.

[14] Obata, Y. and Noda, N., (1994), ***Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material***, J. Thermal Stresses, 17: pp. 471-487.

[15] Horgan, C.O. and Chan, A.M., (1999), ***The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials***, J. Elasticity, 55: pp. 43-59.

[16] Yang, Y.Y., (2000), ***Time-dependet stress analysis in functionally graded materials***, Int. J. Solids and Structure, 37: pp. 7593-7608.

[17] Tutuncu, N., and Ozturk, M., (2001), ***Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels***, J. Compos. Part B: Eng., 32: pp. 683-686.

[18] Tarn, J.Q., (2001), ***Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads***, Int. J. Solids and Structure, 38: pp. 9189-8206.

[19] Jabbari, M., Sohrabpour, S. and Eslami, M.R., (2002), ***Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads***, Int. J. Pressure Vessel and Piping, 79: pp. 493-497.

[20] Eraslan, A.N. and Akis, T., (2006), ***The stress response of partially plastic rotating FGM hollow shafts: analytical treatment for axially constrained ends***, J. Acta Mechanica, 181: pp. 43-63.

[21] Hongjun, X., Zhifei, S., and Taotao, Z., (2007), ***Elastic analysis of heterogeneous elastic hollow cylinders***, J. Compos. Struc., 79: pp. 140-147.

[22] Praveen, G.N., and Reddy, J.N., (1998), ***Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates***, Int. J. Solids and Struc., 35: pp. 4457-4476.

[23] Tutuncu, N., and Temel, B., (2009), ***A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres***, J. Compos. Struc., 91: pp. 385-390.

[24] Shao, Z.S. and Ma, G.W., (2008), ***Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature***, J. Compos. Struc., 83: pp. 259-265.

[25] Tutuncu, N., (2007), ***Stresses in thick-walled fgm cylinders with exponentially-varying properties***, J. Eng. Struc., 29: pp. 2032-2035.

[26] Keles and Conker, C., (2011), ***Transient hyperbolic heat condition in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties***, European J. Mechanics Solids, 30: pp. 449-455.

[27] Ziv, M., and Perl, M., (1973), ***Impulsive deformation of Mirsky-Hermann's thick cylindrical shells by a numerical methods***, J. Appl. Mech., pp. 1009-1016.

[28] Suzuki, K., Konnon, M., and Takahashi, S., (1981), ***Axisymmetric vibration of a cylindrical shell with variable thickness***, JSME, 24: pp. 2122-2132.

[29] Takahashi, S., Suzuki, K., and Kosawada, T., (1986), ***Vibrations of conical shells with variable thickness***, JSME, 29: pp. 4306-4311.

[30] Eipakchi, H.R., Rahimi, G.H., and Esmaeilzadeh, K.S., (2003), ***Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to nonuniform internal pressure***, Struc. Eng. and Mech., 16: pp 731-748.

[31] Eipakchi, H.R., Esmaeilzadeh, Kh. S. and Rahimi, G.H., (2008), ***Axisymmetric stress analysis of a thick conical shell with varying thickness under nonuniform internal pressure***, J. Eng. Mech. ASCE, 134: pp 601-610.

[32] Ghannad, M., Zamani-Nejad, M., and Rahimi, G.H., (2009), ***Elastic solution of axisymmetric thick truncated conical shells based on first-order shear deformation theory***, Mechanika, 5: pp. 13-20.

[33] Ghannad, M., and Zamani-Nejad, M., (2010), ***Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clapmed ends***, Mechanika, 5: pp. 11-18.

[34] Eipakchi, H.R., (2010), ***Third-order shear deformation theory for stress analysis of a thick conical shell under pressure***, J. Mechanics of Materials and Structures, 1: pp. 1-17.

[35] Fukui, Y., and Yamanaka, N., (1992), ***Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded materials subjected to internal pressure***, JSME, Ser. I, 35: pp. 891-900.

[36] Loy, C.T., Lam, K.Y., and Reddy, J.N., (1999), ***Vibration of functionally graded cylindrical shells***, Int. J. Mech. Sci., 41: pp. 309-324.

[37] Horgan, C.O., and Chan, A.M., (1999), ***The stress response of functionally graded isotropic linearly rotating disks***, J. Elasticity, 55: pp. 219-230.

[38] Jabbari, M., Sohrabpour, S., and Eslami, M.R., (2003), ***General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads***, J. Appl. Mech., 70: pp. 111-118.

[39] Zhifei, S., Taotao, Z., and Hongjun, X., (2007), ***Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders***, J. Compos. Struc., 79: pp. 140-147.

[40] Zamani-Nejad, M., Rahimi, G.H., and Ghannad, M., (2009), ***Set of field equations for thick shell of revolution made of functionally graded materials in curvilinear coordinate system***, Mechanika, 3: pp. 18-26.

[۴۱] قنّاد م.، رحیمی غ. و اسماعیل‌زاده خادم س.، پاییز ۱۳۸۹ ***حلّ کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی*** ، مجله‌ی فنی مهندسی مدرس-مهندسی مکانیک، جلد ۱۰، شماره ۳، ص. ۴۱-۳۱.

[۴۲] قنّاد م.، رحیمی غ. و اسماعیل‌زاده خادم س.، زمستان ۱۳۸۹ "***حلّ کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی***"، مجله‌ی فنی و مهندسی مدرس-مهندسی مکانیک، جلد ۱۰- شماره ۴، ص۱۳-۲۵.

[43] Arefi, M., and Rahimi, G.H., (2010), ***Thermo elastic analysis of a functionally graded cylinder under internal pressure using first order shear deformation theory***, J. Scientific Research and Essays, 5: pp. 1442-1454.

[44] Ghorbanpour-Arani, A., Kolahchi, R., and Mosallaie-Barzoki, A.A., (2011), ***Effect of material in-homogeneity on elec. thermo-mechanical behaviors of functionally graded piezoelectric rotating shaft***, J. Applied Mathematical Modelling, 6: pp. 2771-2789.

[45] Vlachoutsis, S., (1992), ***Shear correction factors for plates and shells***, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, 33: pp. 1537-1552.

[46] Ootao, Y., Tanigawa, Y., Fukuda, T., (1991), ***Axisymmetric transient thermal stress analysis of a multilayered composite hollow cylinder***, J. Thermal Stresses, 14: pp. 201-213.

[47] Sladek, J., Sladek, V., Zhang, C., (2003), ***Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method***, Computational Materials Science, 28: pp. 494-504.

[48] Ootao, Y., and Tanigawa, Y., (2005), ***Three-dimensional solution for transient thermal stresses of functionally graded rectangular plate due to nonuniform heat supply***, Int. J. Mechanical Sciences, 47: pp, 1769-1788.

[49] Hosseini, S. M., and Akhlaghi, M., (2009), ***Analytical solution in transient thermo-elasticity of functionally graded thick hollow cylinders (Pseudo-dynamic analysis)***, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 32: pp. 2019-2034.

[50] Asgari, M., and Akhlaghi, M., (2009), ***Transient heat conduction in two-dimensional functionally graded hollow cylinder with finite length***, Heat and Mass Transfer, 45: pp. 1383-1392.

[51] Rahmati-Nezhad, Y., Asemi, K., Akhlaghi, M., (2011), ***Transient solution of temperature field in functionally graded hollow cylinder with finite length using multi layered approach***, Int. J. Mechanics and Materials in Design, 7: pp. 71-82.

[52] Zamani-Nejad, M. and Afshin A. (2013), ***Thermoelastic transient response of rotating thick cylindrical shells under general boundary conditions***, Int. R. J. Applied and Basic Sciences, 4: pp. 2796-2809.

[53] Zamani-Nejad, M. and Afshin, A., (2014), ***Transient thermoelastic analysis of pressurized rotating disks subjected to arbitrary boundary and initial conditions***, Chinese J. Eng., 2014: pp. 14-20.

[54] Wylie, C.R., (1960), ***Diffrential equations***, McGraw-Hill, New York.

[55] Wylie, C.R. and Brratt, L.C., (1995), ***Advanced engineering mathematics***, 6th ed., McGraw-Hill, New York.

[56] Fogiel, M., (1992), ***The differential equations problem solver***, Research and Education Association, New Jersey.

[57] Mushref, M. A., (2010), "***Fourier-bessel expansions with arbitrary radial boundaries***, Applied Mathematics, 1: pp.18-24.

[58] Hetnarski, Richard, B., Eslami, M.R, and Gladwell, G.M.L., (2009), ***Thermal Stresses: Advanced Theory and Applications***, Springer, New York.

[۵۹] قارونی ح.، (۱۳۹۰)، پایان‌نامه ارشد، ***تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی مدول الاستیسیته به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل***، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود.

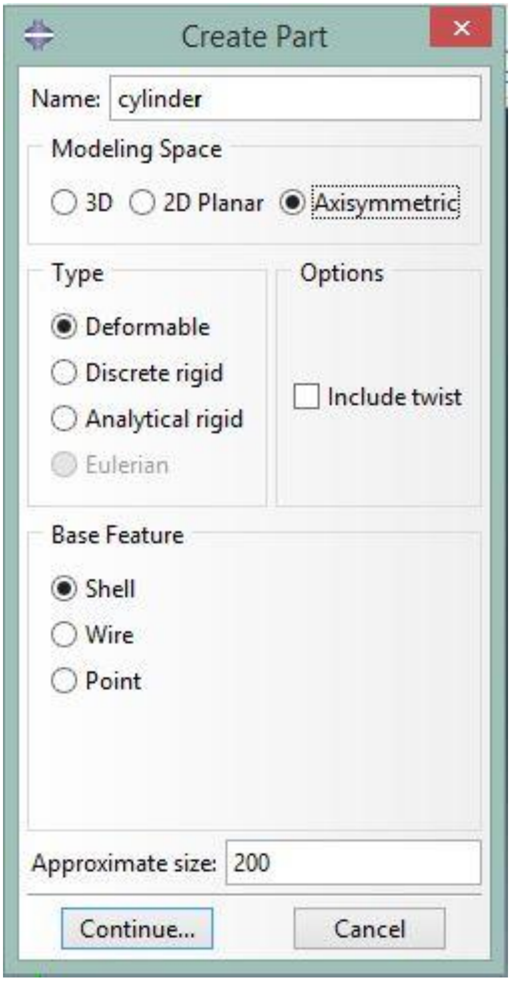
پیوست

مراحل مدل‌سازی پایان‌نامه در نرم‌افزار آباکوس

برای مدل‌سازی هندسه مورد نظر از نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است. با توجه به اینکه مدل‌سازی دمایی در این نرم‌افزار اندکی دشوار می‌باشد لذا در این قسمت سعی شده است تا مراحل مدل‌سازی در این نرم‌افزار توضیح داده شود.

مرحله‌ی ۱

در ابتدا برای رسم هندسه شرایط خاصی را در نظر می‌گیریم. از منوی part و از قسمت part manager هندسه مورد نظر را اتخاب می‌کنیم.

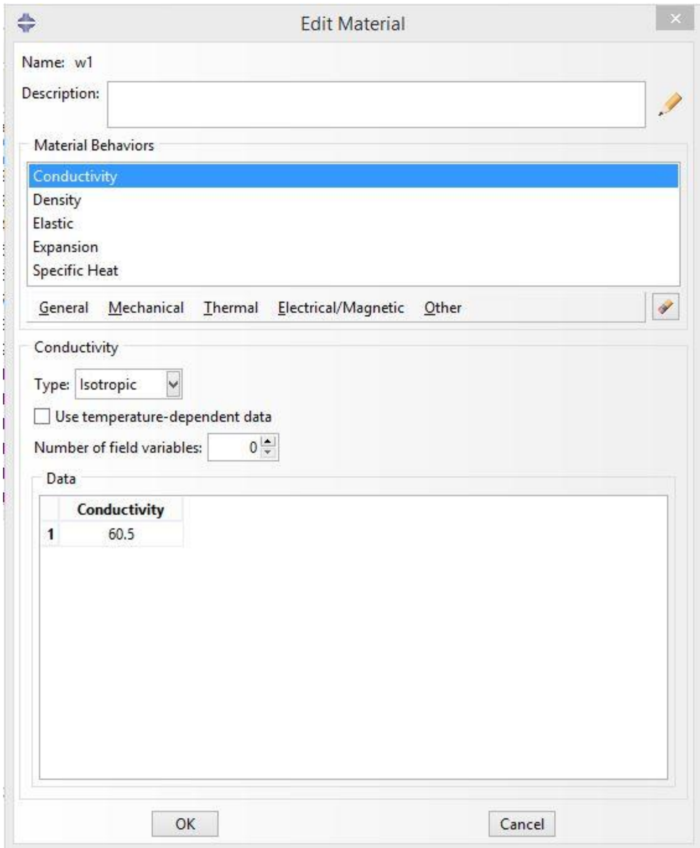


همان‌طور که از شکل مشخص است استوانه متقارن محوری، شکل‌پذیر و به صورت پوسته انتخاب شده است. در مرحل بعد شروع به کشیدن شکل در محیط آباکوس می‌کنیم.

مرحله‌ی ۲

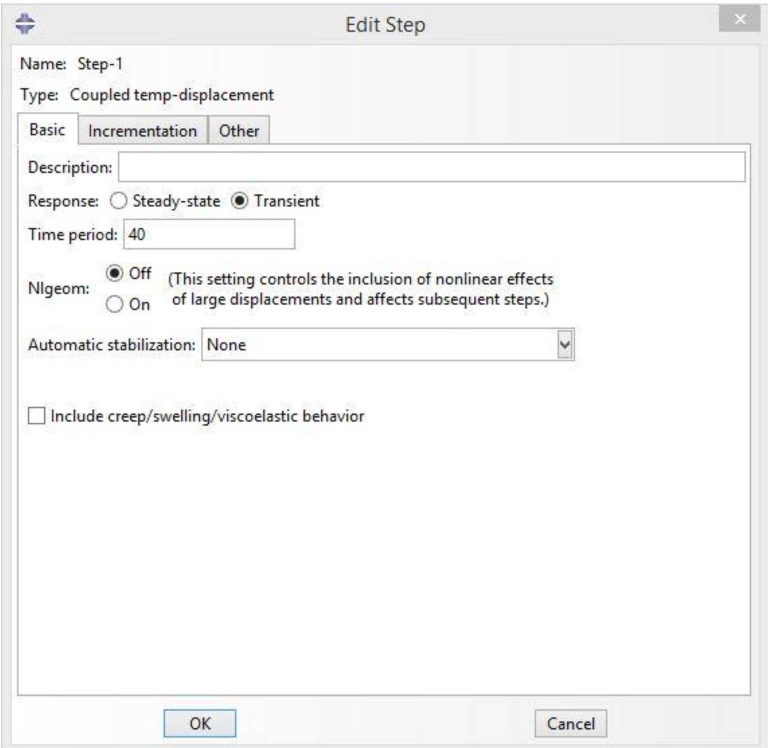
قبل از اختصاص دادن خصوصیات مکانیکی و حرارتی ابتدا برای اینکه بتوان ماده‌ی ناهمگن را مدل‌سازی کرد از روش قطعه کردن استفاده می‌کنیم. به این شکل که استوانه ترسیم شده را به ۱۶ قسمت مساوی تقسیم نموده و برای هر قسمت خواص مختلفی را در نظر می‌گیریم. روش‌های دقیق‌تری برای مدل‌سازی مواد ناهمگن FGM نیز وجود دارد.

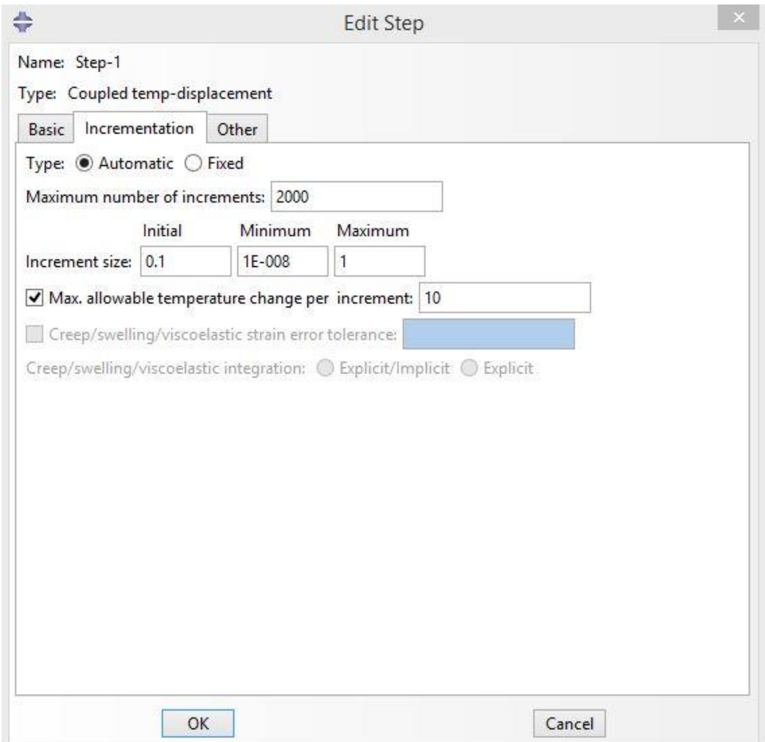
در این ادامه از منوی properties برای وارد کردن خصوصیات مکانیکی و حرارتی اعم از مدول کشسانی، ضریب انتقال حرارت هدایتی و ... استفاده می‌کنیم و به هر قسمت خواص خاص را که متغییر با شعاع می‌باشد را اختصاص می‌دهیم.



مرحله‌ی ۳

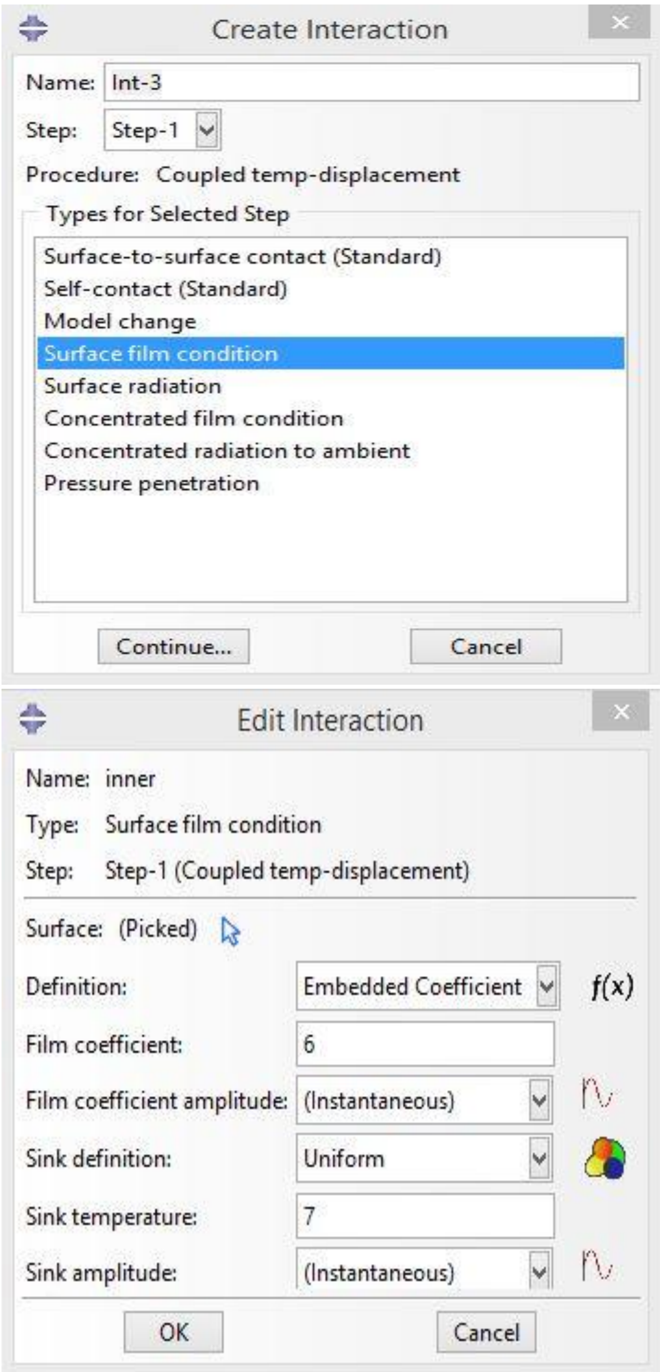
در این مرحله از منوی Step شرایط و زمان تحلیل را تعیین می‌کنیم.





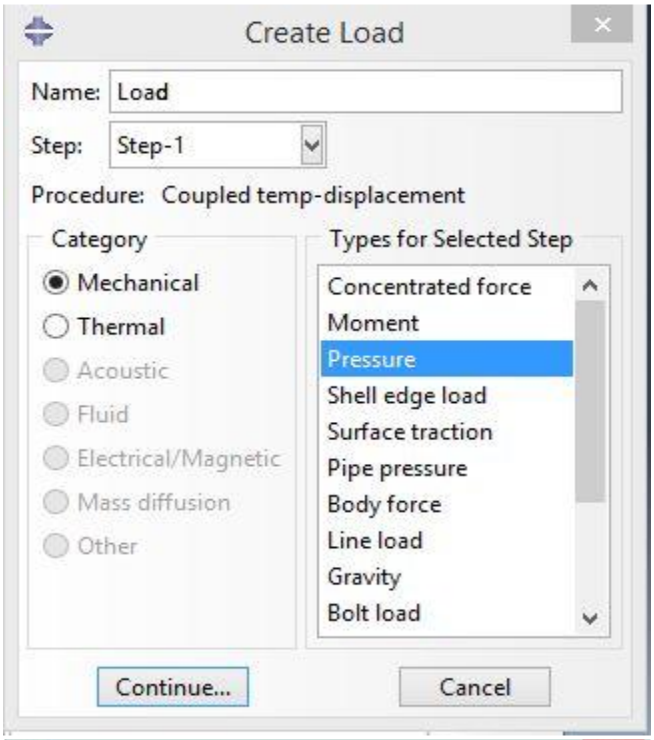
مرحله‌ی ۴

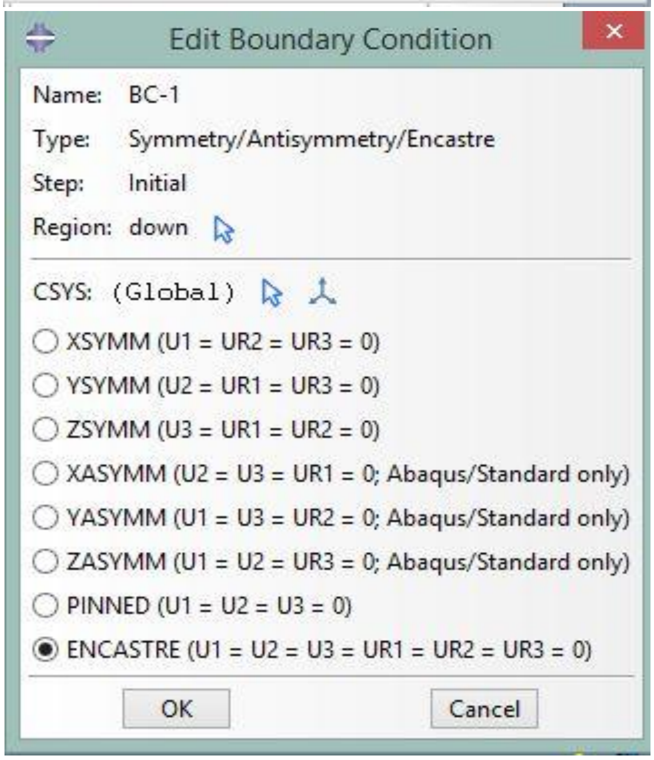
با توجه به اینکه تعریف ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در آباکوس به صورت مستقیم امکانپذیر نمی‌باشد از منوی Interaction قسمت Create interaction گزینه‌ی film condition را انتخاب نموده و دمای سیال و سرعت آن را در این قسمت مطابق شکل وارد می‌کنیم و آن را به سطح مورد نظر تخصیص می‌دهیم.



مرحله‌ی ۵

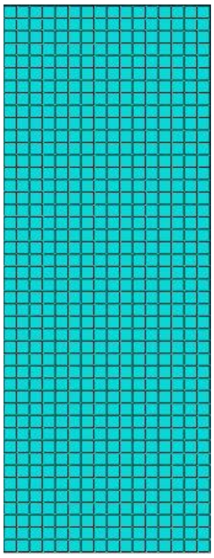
در این قسمت از منوی load شرایط مرزی و بارگذاری مورد نظر را مطابق شکل به سطوح مورد نظر اعمال می‌کنیم.

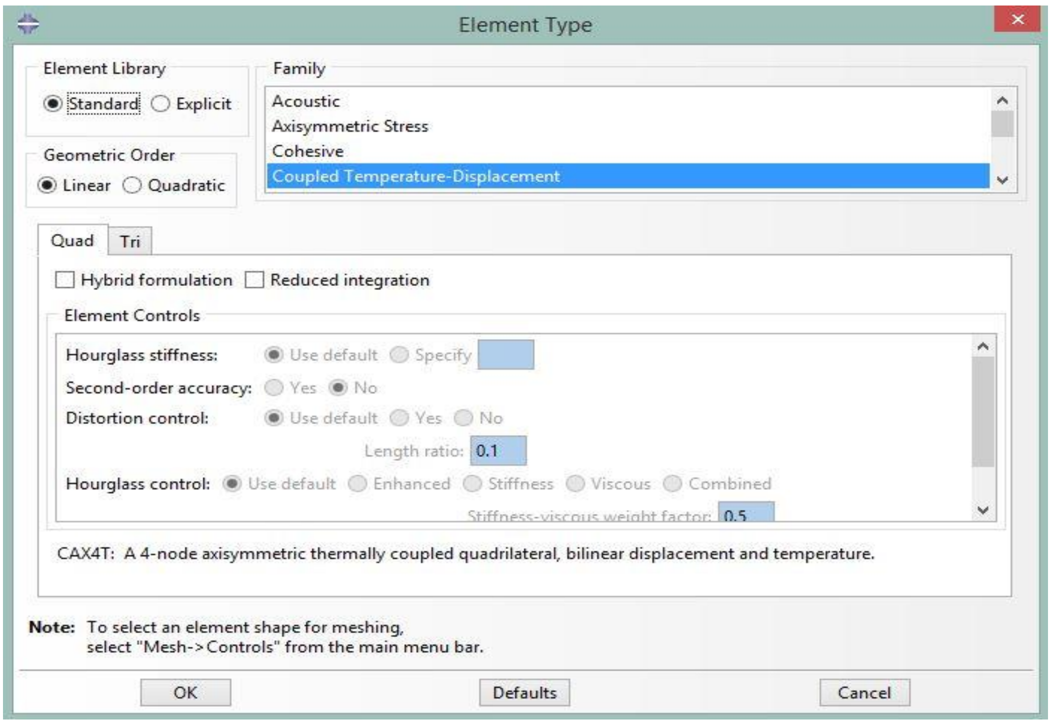




مرحله‌ی ۶

در این قسمت از منوی Mesh، مش‌های مناسب اعمال می‌شود و نوع المان مورد تحلیل نیز انتخاب می‌شود.





مرحله‌ی ۷

در این مرحله از منوی Job تحلیل مورد نظر صورت خواهد گرفت و نتایج مورد نظر قابل مشاهده خواهد بود.

Abstract

The aims of the present study are analyzing and modeling the stress and displacement distribution of axisymmetric hemogeneous and hetrogeneous thick walled cylinder under transient heating, rotation and pressure loding by considering first shear deformation theory. Energy method has been used to derive the equations of homogeneous and heterogeneous cylinder in which mechanical and thermal peropertises are varying according to the power law distribution. The transient heat equation has been solved by sepration of variables, generalized Bessel function and eigen function methods.

To prove the precision of analytical solution, finite element methods (abaqus software) has been used. Also FG rotating cylinder equations has been investigate to survey the effects of rotation on thick cylinders.

In this thesis the effects of time varying has been considered and behavior of thick cylinder due to time varying has been shown. At the end conclusion and recommendations has been presented.

Key words: thick walled cylinder, transient heating, first order shear deformation theory, functionally graded materials, power distribution of properties, virtual work principle.

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Transient thermoelastic analysis of functionally graded thick cylinders using first order shear deformation theory

By:

Seyyed AmirReza Vaziri

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

January 2017