
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

شبیه سازی مستقیم عددی جریان اختلاطی با شرایط مرزی آزاد خروجی با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد مغربی

دانشجو:

امیر محمدی ویسرودی

زمستان ۱۳۸۸

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

گروه تبدیل انرژی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای امیر محمدی ویسرودی

تحت عنوان:

شبیه سازی مستقیم عددی جریان اختلاطی با شرایط مرزی آزاد خروجی با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده

در تاریخ ۸۸/۱۲/۱۸ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر محمد جواد مغربی		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر محمد محسن شاه مردان		نام و نام خانوادگی: دکتر مجتبی قطعی	
نام و نام خانوادگی: دکتر علی جباری مقدم			
نام و نام خانوادگی:			

حقیقت انسان به آنچه اظهار می کند نیست بلکه حقیقت او، نهفته در آن چیزی است که از اظهار آن عاجز است، بنابراین اگر خواستی او را بشناسی نه به گفته هایش بلکه به ناگفته هایش گوش کن!

تقدیم به

پدر و مادرعزیزم

که در تمامی این سالها حامی من بودند.

تقدیر و تشکر

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، بویژه استاد محترم جناب آقای دکتر محمد جواد مغربی که با ارائه راهنمائی‌های مدبرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین جای دارد از دوستان گرامی خود، آقایان مهندس حمید رضا سنندجی، مهندس احد ضرغامی، مهندس بابک حقیقی و مهندس داود رجبی ویسرودی نیز تشکر نمایم و از درگاه خداوند طلب موفقیت در تمامی مراحل زندگی را برای ایشان خواستارم.

امیر محمدی ویسرودی

a.visroodi@gmail.com

زمستان ۱۳۸۸

چکیده

جریان اختلاطی صفحه‌ای در نتیجه یکی شدن دو جریان موازی سیال، که دارای سرعتهای مختلف می-باشند بوجود می‌آید. این دو جریان در انتهای یک صفحه جداکننده، که فرض می‌شود دارای ضخامت ناچیزی می‌باشد با هم مخلوط می‌شوند. در پایین دست این تلاقی. انتقال مومنتوم بین دو جریان سیال صورت می‌گیرد. لایه اختلاطی در واقع به ناحیه ای که در آن فرایند یکی شدن اتفاق می‌افتد اطلاق می-گردد.

در این تحقیق معادله بی بعد شده ناویر–استوکس در فرم چرخشی برای جریان اختلاطی دو بعدی و تراکم ناپذیر با شرط مرزی آزاد خروجی به روش مستقیم عددی شبیه سازی (DNS) شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده لیله [5] در جهات جریان (x) و عمود بر جریان (y) گسسته شده اند.

از نگاشت $y=-\beta\cot(\pi\zeta)$ جهت مرتبط نمودن دامنه فیزیکی $-\infty \le y \le +\infty$ به دامنه محاسباتی $0 \le \zeta \le 1$ استفاده شده است. برای توسعه محاسبات در دامنه زمان نیز از روش رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده شده است. در مرز خروجی از شرط مرزی آزاد استفاده کرده ایم بدین صورت که معادلات حاکم بر جریان در مرز خروجی نیز صدق می کند.

در این تحقیق هر دو جریان اختلاطی آرام و مغشوش مورد بررسی قرار گرفته است. برای مغشوش کردن جریان، یک اغتشاش زمانی بر مولفه سرعت v اعمال شده است. از جواب های تحلیلی غیر ویسکوز (استوارت) و معادله نفوذ وابسته به زمان برای ارزیابی صحت نتایج شبیه سازی استفاده گردیده است. مشخصه های جریان لایه اختلاطی به دست آمده و با نرمال کردن مولفه های سرعت لحظه ای و گردابه های جریان، به وسیله اختلاف سرعت جریان های آزاد و نصف عرض پروفیل سرعت، خاصیت خود تشابهی بررسی شده است.

فهرست مطالب

فهرست نمودارها

فصل اول

تاریخچه جریان اختلاطی

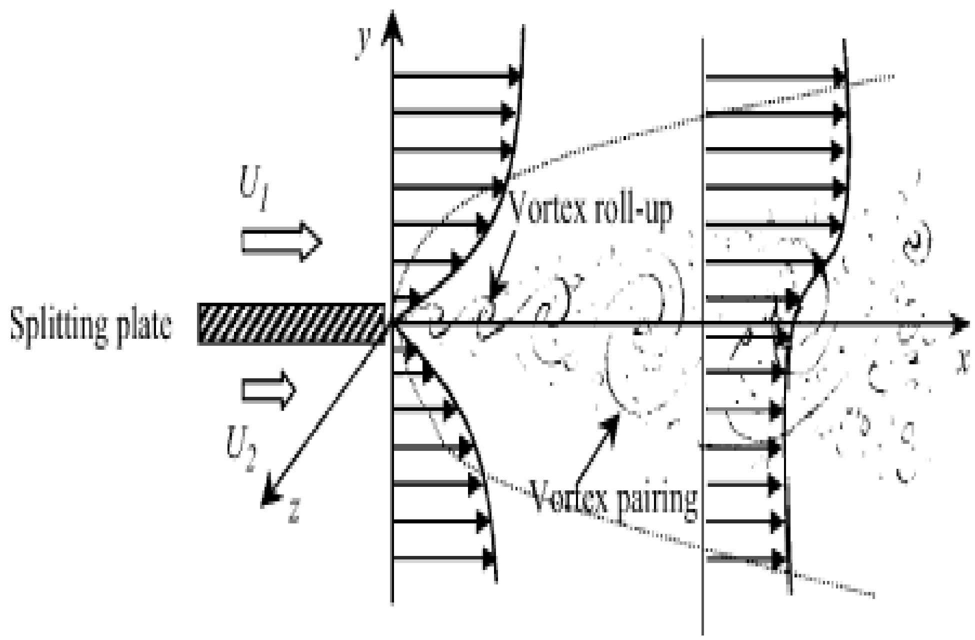
۱-۱- مقدمه

جریان اختلاطی صفحه‌ای[1] در نتیجه یکی شدن دو جریان موازی سیال، که دارای سرعتهای مختلف می‌باشند بوجود می‌آید. این دو جریان در انتهای یک صفحه جداکننده[2]، که فرض می‌شود دارای ضخامت ناچیزی می‌باشد با هم مخلوط می‌شوند (شکل ۱-۱). در پایین دست این تلاقی، انتقال مومنتوم بین دو جریان سیال صورت می‌گیرد. لایه اختلاطی در واقع به ناحیه ای که در آن فرایند یکی‌شدن[3] اتفاق می‌افتد اطلاق می‌گردد.

ساختار ساده تشکیل لایه اختلاطی دلیلی بر متعارف بودن این پدیده در طبیعت می‌باشد. در بسیاری از کاربردهای صنعتی با لایه اختلاطی مواجه می‌شویم. لبه فرار یک ایرفویل، لبه فرار پره توربین، لیزرهای شیمیایی و کوره‌های احتراق تنها معدود از مواردی هستند که در آنها با پدیده لایه اختلاطی مواجه می-

[1]- plane mixing layer
[2]- splitter plate
[3]- merging

شویم. بنابراین فهم دقیق فرایندهای فیزیکی لایه اختلاطی در طراحی بهینه این وسایل نقش بسیار مهمی دارد [4].



شکل ۱-۱ شکل شماتیک لایه اختلاطی دو بعدی [۲۵].

از بعضی از پارامترها بصورت عمومی برای مشخص کردن خصوصیات این جریان استفاده می‌شود. یکی از این پارامترها نسبت سرعت جریان های آزاد[1] بوده که بصورت $r = U_2 / U_1$ که $U_2 < U_1$ نشان داده می-شود . این پارامتر شدت برش[2] موجود در لایه را مشخص می کند. مقدار کوچک r بیانگر شدت برش بیشتر می‌باشد. محدوده r را بصورت $0 \le r \le 1$ تعریف می‌کنیم. مقدار $r = 0$ بیانگر حالت یک جریانه

1- free-stream velocity ratio
2- shearing intensity

بوده (یعنی یکی از جریانها در ابتدا ساکن است) و $r=1$ بیانگر جریان یکنواخت بر روی یک جسم میباشد که بدین ترتیب این جریان در واقع یک جریان لایه اختلاطی نبوده بلکه بیشتر شبیه جریان گردابه[1] می-باشد. پارامتر مهم دیگر در تعیین مشخصه های جریان لایه اختلاطی عدد رینولدز می‌باشد. برای لایه اختلاطی تراکم ناپذیر این پارامترها برای مشخص کردن مقیاس طولی و زمانی جریان کافی می‌باشند. همچنین تعدادی پارامتر های اضافی نیز وجود دارد که ممکن است در بعضی از مواقع برای توصیف وضعیت لایه اختلاطی بکار رود که می‌توان به نسبت چگالی دو سیال $\left(\rho_2/\rho_1\right)$ اشاره کرد که برای حالتی می‌باشد که در آن جریان بصورت لایه‌ای در نظر گرفته می‌شود.

۱-۲- مروری بر تحقیقات انجام شده

گرتلر[2] در سال ۱۹۴۲ با به کارگیری تحلیل لزجت گردابه پروفیل سرعت در یک لایه اختلاطی دو بعدی در حالی که جریان بالایی با سرعت U_2 و جریان پایینی با سرعت U_1 حرکت می کند را حل کرد. با توجه به فیزیک مساله شرایط مرزی زیر را خواهیم داشت:

$$\bar{u}(-\infty)=U_1 \qquad ۱-۱$$

$$\bar{u}(+\infty)=U_2 \qquad ۲-۱$$

$$\bar{u}(0)=\frac{1}{2}(U_1+U_2) \qquad ۳-۱$$

1- wake
2- Gortler

از شرایط مرزی مشخص می شود که جریان در خط مرکزی نامتقارن می باشد. وی جواب مساله را به صورت زیر به دست آورد:

$$u^{*}=\frac{\bar{u}-U_1}{U_2-U_1}=\frac{1}{2}\left[1+erf\left(\sigma y/x\right)\right]\ \ ;\ \ \sigma\approx 13.5 \qquad ۴-۱$$

اولین تحقیق تجربی در مورد لایه اختلاطی توسط لیپمان و لاوفر[۱] در سال ۱۹۴۷ انجام گرفت. بسیاری از کمیت های آماری در این تحقیق بدست آمدند. رشد در ضخامت لایه به همراه تنش برشی، سرعت، توزیع میکروسکوپی و کمیت‌های حاصله از معادله بالانس انرژی توربولانس، بخوبی تشریح شدند.

براون و روشکو[۲] در سال ۱۹۷۱، تحقیقی در زمینه تاثیرات چگالی در لایه اختلاطی انجام دادند. در این تحقیق، آنها حضور ساختاری را در سرتاسر لایه کشف کردند. در رینولدز پایین، وجود ساختارهایی که بخوبی شکل گرفته‌اند، یک واقعیت پذیرفته شده می‌باشد. همزمان با تحقیقات براون و روشکو، نتایج آزمایشگاهی منتشر شده توسط وینانت و برواند[۳] درسال ۱۹۷۴ مشخص کرد که جفت شدن گردابه‌ها، که عاملی اساسی در رشد لایه آرام می‌باشد، یک فاکتور مهم و کلی در رشد لایه اختلاطی در رینولدزهای متوسط می‌باشد. وجود این ساختارها در رینولدزهای بالا توسط دیموتاکیس[۴] و براون در سال ۱۹۷۶ به اثبات رسید.

کنراد[۵] در سال ۱۹۷۶حضور ناپایداریهای ثانویه، که منجر به تشکیل ساختارهای اضافی در لایه اختلاطی گازی می‌شود، را نشان داد. این ساختارها، گردابه های در جهت جریان[۶]، در نتیجه حرکت سه بعدی لایه و

[1]- Liepmann & Laufer
[2]- Brown & Roshko
[3]- Winant & Brownd
[4]- Dimotakis
[5]- Konrad
[6]- stream wise vortex

شدت یافتن آن بوسیله غلتک های بزرگ در جهت عرضی جریان[۱]، مشخص می‌شوند. مونگال[۲] و دیموتاکیس در سال ۱۹۸۴، اختلاط و واکنش بین دو واکنش دهنده، (F_2, H_2)، را در لایه اختلاطی گازی بررسی کردند. اثرات نیروی خارجی[۳] بر روی این پدیده توسط روبرتز[۴] و روشکو در سال ۱۹۸۵ بررسی شد. نتایج آنها مشخص کرد تشکیل محصولات بوجود آمده در لایه، به عدد رینولدز جریان بسیار حساس می‌باشد. در رینولدزهای پایین، نیروی خارجی باعث افزایش اختلاط می‌شود در حالیکه در رینولدزهای بالا، اختلاط در نتیجه نیروی خارجی، می‌تواند بطور کامل متوقف شود.

در سال ۲۰۰۶ یوشیتسوگو ناکا[۵] [19] و همکاران وی لایه اختلاطی مغشوش را مورد بررسی قرار دادند. آنها پروفیل سرعت، نمودار توزیع فشار، تنش رینولدز و نوسانات سرعت را به دست آوردند و نشان دادند که نتایج آنها با داده های حاصل از DNS تطابق خوبی دارد. تحقیقات آزمایشگاهی جدید در زمینه حضور واکنش شیمیایی در لایه اختلاطی و افزاش دما در آن می‌باشد که درحقیقت کوششی برای فهمیدن نحوه تبادل بین علم مکانیک سیالات و علم شیمی می‌باشد.

با پیشرفت در علم کامپیوتر و ظهور ابر کامپیوترها، تحقیقات عددی در زمینه های مختلف علم مکانیک سیالات، از جمله لایه اختلاطی، در کنار تحقیقات تجربی آغاز شد. در فهم صحیح فیزیک لایه اختلاطی، سه نگرش اساسی در زمینه شبیه سازی وجود دارد:

۱- روش ورتکس[۶].

1- span wise rollers
2- Mungal
3- forcing
4- Roberts
5- Yoshitsugu Naka, et al.
6- vortex method

۲- شبیه‌سازی لایه اختلاطی توسعه یافته زمانی[1].

۳- شبیه‌سازی لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی[2].

محاسبات اولیه بیشتر به روش ورتکس انجام می‌شد که این به دلیل حضور و اهمیت ورتیسیته های بزرگ در این جریان بوده که بازدهی این روش عددی را تضمین می‌کرد.

اکتون[3] در سال ۱۹۷۶ انباشتگی صفحه ورتکس را برای فهم نحوه رشد لایه اختلاطی، شبیه‌سازی کرد. آشورت[4] در سال ۱۹۷۹ اولین کسی بود که نتایج خود را در مورد لایه‌اختلاطی توسعه یافته مکانی به روش ورتکس منتشر کرد.

در شبیه سازی لایه اختلاطی توسعه یافته زمانی، دامنه محاسباتی به طرف پایین دست جریان با سرعت متوسط لایه جابجا می‌شود. جریان سپس در محاسبات در گام زمانی اجازه توسعه می‌یابد. اولین شبیه سازی با این نگرش در سال ۱۹۷۸ توسط منصور[5] و همکاران انجام شد. نتایج حاصله از تحقیقات وی نشان داد که مکانیزم جفت‌شدن گردابه ها، دلیل بر رشد لایه می‌باشد. شبیه سازی وی، حضور رفتار خود تشابهی[6] را در مومنتوم متوسط و مرتبه اول متغیرهای جریان، نشان داد. کین[7] در سال ۱۹۸۱ این تحقیق را با اعمال یک تابع تطبیق[8]، که منجر به محدود شدن دامنه فیزیکی جریان آزاد در جهت y، از $y \to \pm\infty$ به یک دامنه محدود محاسباتی شد، ادامه داد. نتایج وی اشاره‌ای به تشکیل تاثیرات سه بعدی ناشی از بی نظمی های در جهت عرضی جریان، در گردابه‌های اولیه داشت.

[1]- Time-developing layer
[2]- Spatially-developing layer
[3]- Acton
[4]- Ashurts
[5]- Mansour ,et al.
[6]- self similarity
[7]- Cain , et al.
[8]- mapping

رایلی و متکالف[1] در سال ۱۹۸۰ شبیه سازی توسعه یافته مکانی را با افزایش میزان تراکم شبکه بندی گسترش داد. نتایج آنها تقابل بین اغتشاشات هارمونیک و تاثیرات این اغتشاشات بر روی رشد لایه را مشخص‌کرد. شبیه سازی وی حضور مود های زیر هارمونیک[2] و نقش مهم آنها را در توسعه لایه مشخص کرد.

در تحقیقات اخیر، معادله انتقال بعضی اجزا، به شبیه سازی توسعه یافته زمانی انجام گرفته توسط رایلی، اضافه شد. در این تحقیقات رشد لایه واکنشی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این تحقیقات نشان داد که آزاد شدن گرما منجر به کاهش ضخامت لایه می‌شود.

شبیه‌سازی توسعه یافته مکانی از دو روش قبلی مشکل‌تر می‌باشد. تنها با استفاده از ابرکامپیوترها امکان این نوع شبیه‌سازی ممکن می‌باشد. در بسیاری از این نوع شبیه‌سازیها، مساله محدود به مسایل دوبعدی می‌باشد. منصور در سال ۱۹۸۵ از یک روش جالب برای حل استفاده‌کرد. او روش ورتکس را در محدوده اولیه لایه استفاده نمود، سپس شبکه‌بندی اویلری را در انتهای محدوده اعمال کرد تا بدین ترتیب محاسبات جزئیات حوزه‌جریان در ناحیه عمل متقابل‌گردابه ها امکان پذیرگردد.

گرین استین[3] و همکاران در سال ۱۹۸۶ شبیه‌سازی لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی را با استفاده از تفاضل محدود[4] انجام دادند. در این نوع شبیه‌سازیها از شبکه بندی و تعداد گره های زیاد استفاده نشد.

در سال ۲۰۰۳ قیبینگ لی[5] [16] و سانگ فو[6] لایه اختلاطی با سرعت بالا را برای عدد ماخ مختلف با استفاده از روش BGK شبیه سازی عددی کردند. آنها با به دست آوردن پروفیل سرعت متوسط، تنش

[1]- Riley & Metcalfe
[2]- sub harmonic
[3]- Grinstein ,et al.
[4]- finite difference
[5]- Qibing Li
[6]- Song Fu

های رینولدز متوسط و مولفه های نوسانات سر عت، نشان دادند که نتایج آنها با داده های تجربی و نتایج عددی قبلی تطابق خوبی دارد. تحقیقات جدید بیشتر در زمینه شبیه‌سازی توسعه یافته زمانی لایه اختلاطی اجباری[1] و لایه اختلاطی واکنشی[2] می‌باشد.

[1]- forced mixing layer
[2]- interaction layer

فصل دوم

شبیه سازی مستقیم عددی

۲-۱- مقدمه

حل جریان توربولانس، بعلت پیچیدگی ماهیت جریان و نبود امکانات کافی در گذشته چندان مورد توجه نبوده است، زیرا یک حل تحلیلی، حتی برای ساده‌ترین جریانهای توربولانس وجود ندارد. یک توصیف کامل از جریان‌توربولانس که در آن متغیرهای‌جریان (یعنی سرعت و فشار)، بعنوان توابعی از زمان یا مکان شناخته شوند، تنها با حل عددی معادله ناویر _ استوکس ممکن می‌باشد. حل عددی استفاده شده در این تحقیق، شبیه‌سازی مستقیم عددی[۱] یا به اختصار DNS می باشد [13].

هدف اصلی DNS حل معادلات حاکم بر جریان‌توربولانس بدون استفاده از هیچگونه مدل توربولانسی می‌باشد و برای این منظور می‌بایستی معادلات ناویر _ استوکس بدون هیچگونه ساده سازی مورد استفاده قرار گیرند.

در حال حاضر با ظهور ابرکامپیوترها می‌توان جریانهای توربولانس کاملاً توسعه یافته را به کمک روشهای DNS بطور دقیق تحلیل کنیم و خواص آنرا بدست آوریم. جهت گسسته سازی، یک شبکه‌بندی

1- Direct Numerical Simulation

دقیق و کامل مورد احتیاج است. در نتیجه اجرای هر برنامه DNS احتیاج به مدت زمان طولانی دارد، بنابراین تا امروز محاسبات DNS فقط تا رینولدز های متوسط امکان پذیر بوده است.

۲-۲- تاریخچه

استفاده از DNS برای اولین بار توسط اورزاگ و پترسون[1] در سال ۱۹۷۲ در مرکز تحقیقات اتمسفریک آمریکا صورت‌گرفت. این اشخاص از روش طیفی[2] برای انجام 32^3 محاسبه جریان توربولانس ایزوتروپیک در $Re = 35$ (بر اساس مقیاسهای تیلور)، استفاده کردند.

گام مهم بعدی در این زمینه توسط روگالو[3] در سال ۱۹۸۱ برداشته شد. تحقیقات بعدی توسط اسپالارت[4] انجام گرفت. او با استفاده از یک روش ابتکاری، جریان لایه مرزی توربولانس را بر روی یک صفحه تخت، تحت گرادیان فشارهای مختلف حل‌کرد.

جریانات محدود به دیواره مانند جریان تراکم پذیر در کانال و لایه مرزی توربولانس در دهه اخیر مورد توجه قرار گرفته است. به تازگی از DNS جهت بررسی لایه اختلاطی توربولانس با سرعت زیاد و عمل متقابل بین موجهای شوک و توربولانس استفاده می‌شود[15].

جهت تحلیل جریانهای پیچیده تر به کمک DNS احتیاج به کامپیوترهایی با حافظه و سرعت بیشتر و همچنین استفاده از برنامه های هوشمندتر و الگوریتم های سریعتر می‌باشد. برای جریانهای پریودیک از روش FFT[5] در جهت شبیه سازی زمانی[6] استفاده می شود، در حالیکه برای استفاده از شبیه سازی مکانی[7] استفاده از روش های تفاضل محدود مرتبه بالا[8]، معمول می باشد. اخیراً از روش تفاضل محدود

[1]- Orszag & Patterson
[2]- Spectral Method
[3]- Rogallo
[4]- Spalart
[5]- Fast Fourier Transformation
[6]- Temporal
[7]- Spatial
[8]- High order finite difference

فشرده مرتبه بالا Lele [5] در بسیاری از روشهای DNS، استفاده شده است. المانهای طیفی[1] و روشهای جمعی[2]، جهت گسسته سازی مکانی در هندسه های پیچیده بکار می‌رود.

استفاده از روش های طیفی محدود به جریان هایی است که شرایط مرزی ساده ای دارند. به همین دلیل است که اخیرا بیشتر از روش های تفاضل محدود استفاده می شود هرچند که دقت پایین تری نسبت به روش های طیفی دارند. از چندجمله ایهای چبیشف در جریانهای غیر پریودیک، لایه مرزی وکانال استفاده می‌شود.

در گام زمانی از روشهایی همچون رانج _ کوتا[3]، کرانک _ نیکلسون[4]، آدامز _ بشفورد[5] و. .. استفاده می-شود. معمولاً معادلات پواسون یا هلمهولتز (شرایط مرزی دیریشله و نیومن) در طی استفاده از DNS بایستی حل شوند. الگوریتم های مختلفی تاکنون برای حل معادلات پواسون و هلمهولتز آزمایش و استفاده شده است.

۲-۳- روش طیفی

مساله اصلی در هر روش عددی، محاسبه دقیق مشتق‌ها می‌باشد و این علت اصلی استفاده تقریباً تمام DNS های انجام شده اخیر در زمینه توربولانس، از روش طیفی می‌باشد. زیرا این روش، یک روش بسیار دقیق و یک ابزار مناسب جهت محاسبه مشتق های عبارات گسسته شده می‌باشد. روش طیفی یک فضای واقعی با استفاده از سریهای توابع متعامد برای شبیه سازی فراهم می‌آورد.

$$f\left(x_j\right)=\sum_{n=0}^{N-1} Q_{n,j}\hat{f}_n \qquad j=0,1,\ldots,N-1 \tag{۱-۲}$$

1- Spectral elements
2- Collocation method
3- Runge - Kutta
4- Crank - Nicolson
5- Adams - Bashford

انتخاب معمول برای توابع متعامد استفاده از سریهای فوریه[1] است. ممکن است این انتخاب کمی پیچیده به نظر برسد، اما با این انتخاب مشتق‌های مکانی f به راحتی محاسبه می‌شوند.

$$f(x_j)=\sum_{k=0}^{N-1}\hat{f}_k e^{i\,k\,x_j} \quad \& \quad \hat{f}_k=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_j) e^{-i\,k\,x_j} \qquad j=0,1,\ldots,N-1 \qquad (۲-۲)$$

عبارت بالا به ترتیب تبدیل معکوس فوریه و تبدیل فوریه می‌باشد. حال با مشتق گیری f داریم :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\sum_{k=0}^{N-1} ik\,\hat{f}_k e^{i\,k\,x_j} \qquad (۳-۲)$$

بنابراین برای محاسبه مشتق های f رابطه (۲-۱) تبدیل فوریه را محاسبه می‌کند، رابطه (۲-۲) محاسبه ضرایب جدید فوریه و رابطه (۲-۳) محاسبه تبدیل معکوس فوریه سریهای جدید را انجام می‌دهد.

۲-۴- شرایط مرزی[2]

در DNS، انتخاب شرایط مرزی یک انتخاب مهم و حساس می‌باشد. انتخاب شرایط مرزی در مرزهای آزاد یک برآورد مشکل می‌باشد. برای جریانات تراکم‌ناپذیر که دارای جهات آماری هموژن می‌باشند، مانند جهت عرضی لایه مرزی دو بعدی، معمولاً شرایط مرزی پریودیک اعمال می‌شوند.

اما بسیاری از جریانات پیچیده توسعه یافته، در جهت جریان غیرهموژن بوده، که بنابراین احتیاج به انتخاب شرایط مرزی مناسب دارند. همچنین تراکم پذیر بودن جریان، واکنش پذیری سیال و تولید حرارت در سیال منجر به اعمال شرایط مرزی اضافی می‌شوند. بهترین روش برای اعمال شرط مرزی مناسب در مرز های دلخواه (به خصوص در مرز خروجی)، شرط مرزی آزاد است. این روش به این معنی است که هیچ شرط مرزی را در مرز خروجی قرار ندهیم و فرض کنیم که معادلات حاکم بر جریان در مرز خروجی نیز صادق باشد. با استفاده از این روش نشان داده شده است که جریان از مرز خروجی عبور می کند بدون

[1]- Fourier Series
[2]- Boundary condition

اینکه کوچک ترین اثری بر روی جواب داخلی داشته باشد. به عبارت دیگر، اغتشاشات ایجاد شده در داخل جریان بعد از برخورد با مرز خروجی به داخل جریان بر نمی گردند [6,17].

فصل سوم

شرایط مرزی آزاد[1]

۳-۱- مقدمه

حل عددی معادلات حاکم بر جریان سیال، نیازمند پیاده سازی شرایط مرزی صحیح در مکان های مناسب است. خیلی از استراتژی های عددی کارآیی ضعیفی را به نمایش می گذارند و جواب های نادرستی را ارائه می دهند اگر شرایط مرزی در مکان های مناسبی قرار داده نشوند. متاسفانه، بسیاری از مسائل کاربردی جریان سیال، مانند آنهایی که در اقیانوس شناسی بررسی می شوند، شامل مشکلاتی در مرزها هستند زیرا که اطلاعات لازم برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی در آنجا وجود ندارد. از طرف دیگر، حل چنین مسائلی با دامنه محاسباتی بزرگ و شرایط مرزی مطمئن به مش های کوچک تری نیاز دارد که این، هزینه محاسبات را شدیدا افزایش می دهد. چنین مشکلاتی، CFD کاران را بر آن داشت تا برای کاهش اندازه دامنه جریان و حل مسائل با شرایط مرزی مختلف و نا مطمئن دست به کار شوند [17].

یکی از بهترین روش ها برای پیاده سازی شرایط مرزی مناسب در مرز های دلخواه (به خصوص در مرز خروجی)، شرط مرزی آزاد است. این روش به این معنی است که هیچ شرط مرزی را در مرز خروجی قرار ندهیم

1- free boundary condition

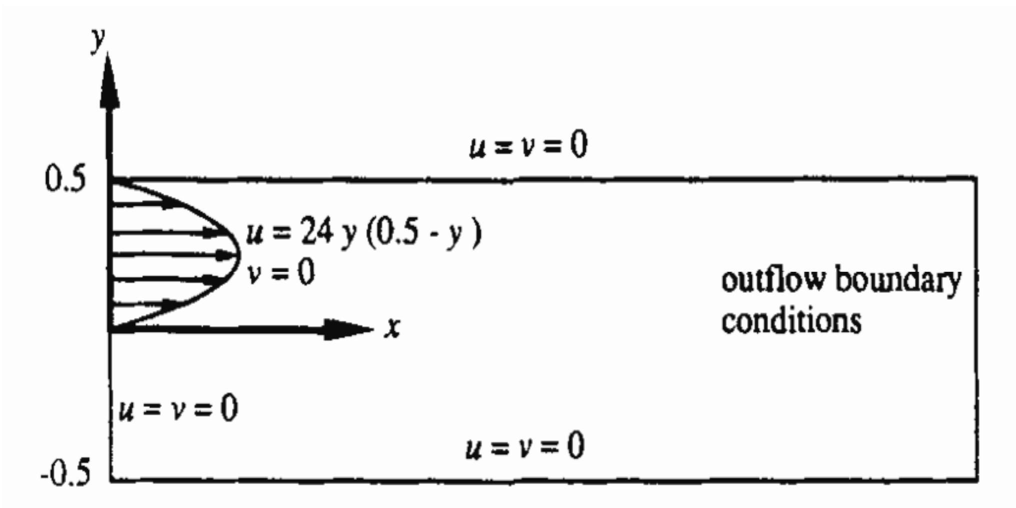
و فرض کنیم که معادلات حاکم بر جریان در مرز خروجی نیز صادق باشد. با استفاده از این روش نشان داده شده است که جریان از مرز خروجی عبور می کند بدون اینکه کوچک ترین اثری بر روی جواب داخلی داشته باشد. به عبارت دیگر، اغتشاشات ایجاد شده در داخل جریان بعد از برخورد با مرز خروجی به داخل جریان بر نمی گردند (خاصیت انعکاس ناپذیری).

۳-۲- بررسی چند نمونه از کار های انجام گرفته با شرایط مرزی آزاد

برای نشان دادن اهمیت و دقت روش شرایط مرزی آزاد، چند نمونه از کار هایی که از این روش استفاده شده است، را نشان می دهیم.

۳-۲-۱- بررسی جریان سیال در داخل یک کانال با شرط مرزی خروجی [6]

هندسه جریان در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. یک سیال نیوتنی غیر قابل تراکم پایدار، وارد نیمه بالایی کانال مستطیلی می شود.



شکل ۳-۱: هندسه جریان داخل کانال و شرایط مرزی آن [6].

معادله حاکم بر جریان، معادله ناویر-استوکس می باشد:

$$\left(\overline{U}.\vec{\nabla}\right)\overline{U} = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{\text{Re}}\left(\nabla^2\overline{U}\right) \qquad (۱-۳)$$

که در آن، $\vec{U} = (U,V)$ می باشد.

۳-۲-۱-۱ شرایط مرزی مساله

در مرزهای فیزیکی ورودی، شرایط مرزی به صورت زیر می باشد:

$$u = v = 0 \;\; ; \quad -0.5 \le y \le 0 \qquad (۲-۳)$$

$$\begin{array}{l} u = 24 \times y \times (0.5 - y) \\ v = 0 \end{array} \; ; \quad 0 \le y \le 0.5$$

در مرز های جامد با توجه به شرط عدم لغزش، مولفه های سرعت برابر صفر می باشند. در مرز خروجی، شرایط مرزی زیر اعمال و نتایج با هم مقایسه شده است:

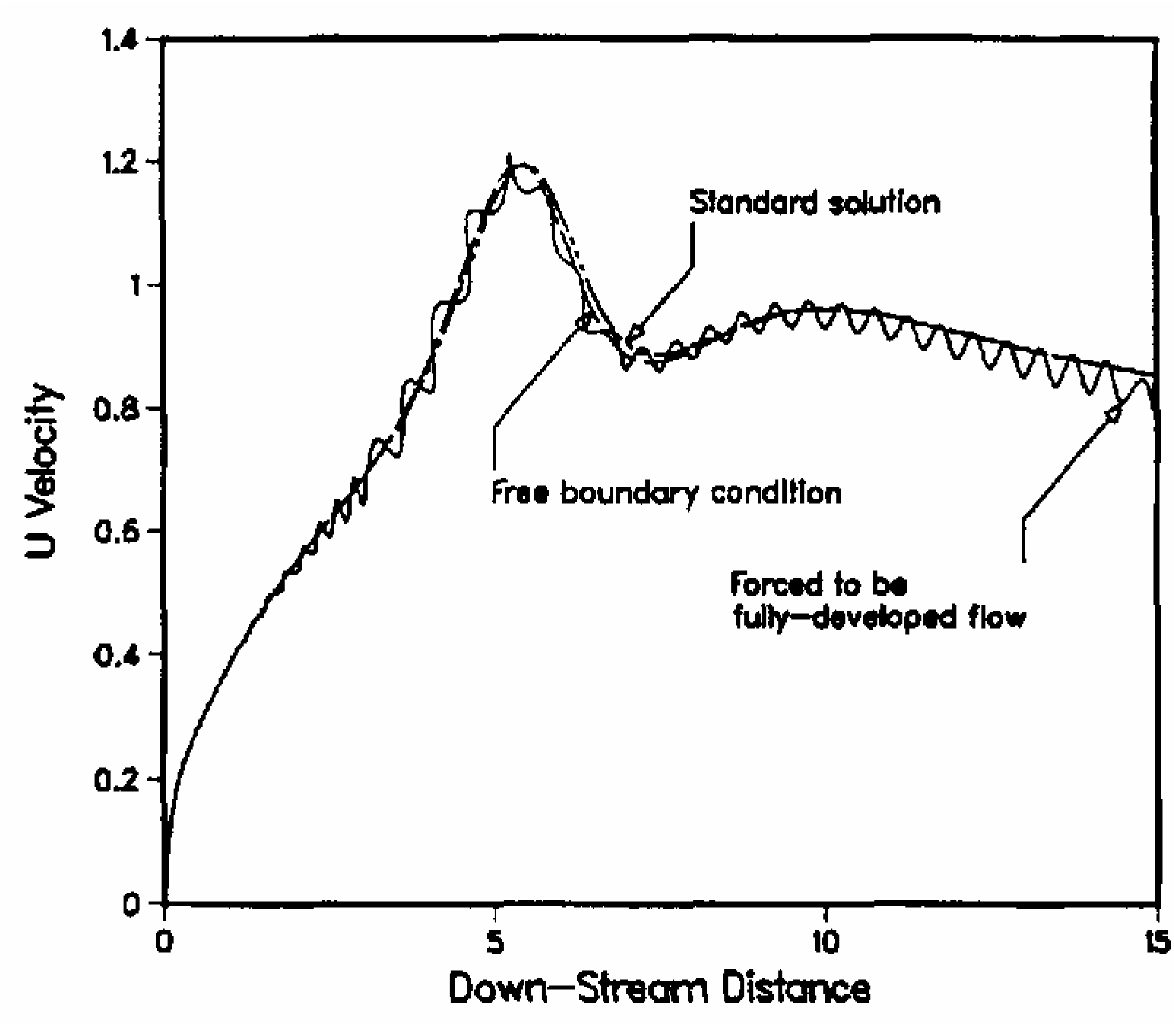
۱. جریان کاملا توسعه یافته با تابع سرعت:

$$y = -3y^2 + 0.75 \qquad (۳-۳)$$

۲. شرط مرزی آزاد

۳-۲-۱-۲- نتایج

برای اعتبار سنجی شرایط مرزی خروجی، یک جواب استاندارد برای $\text{Re} = 800$ محاسبه شده است. این جواب استاندارد با به کار بردن شرط مرزی کاملا توسعه یافته در دامنه محاسباتی بسیار طویل $(x = 50)$ به دست آمده است. مولفه u سرعت بر حسب طول، برای هر دو شرط مرزی محاسبه شده و در شکل ۳-۲ با جواب استاندارد مقایسه شده است.

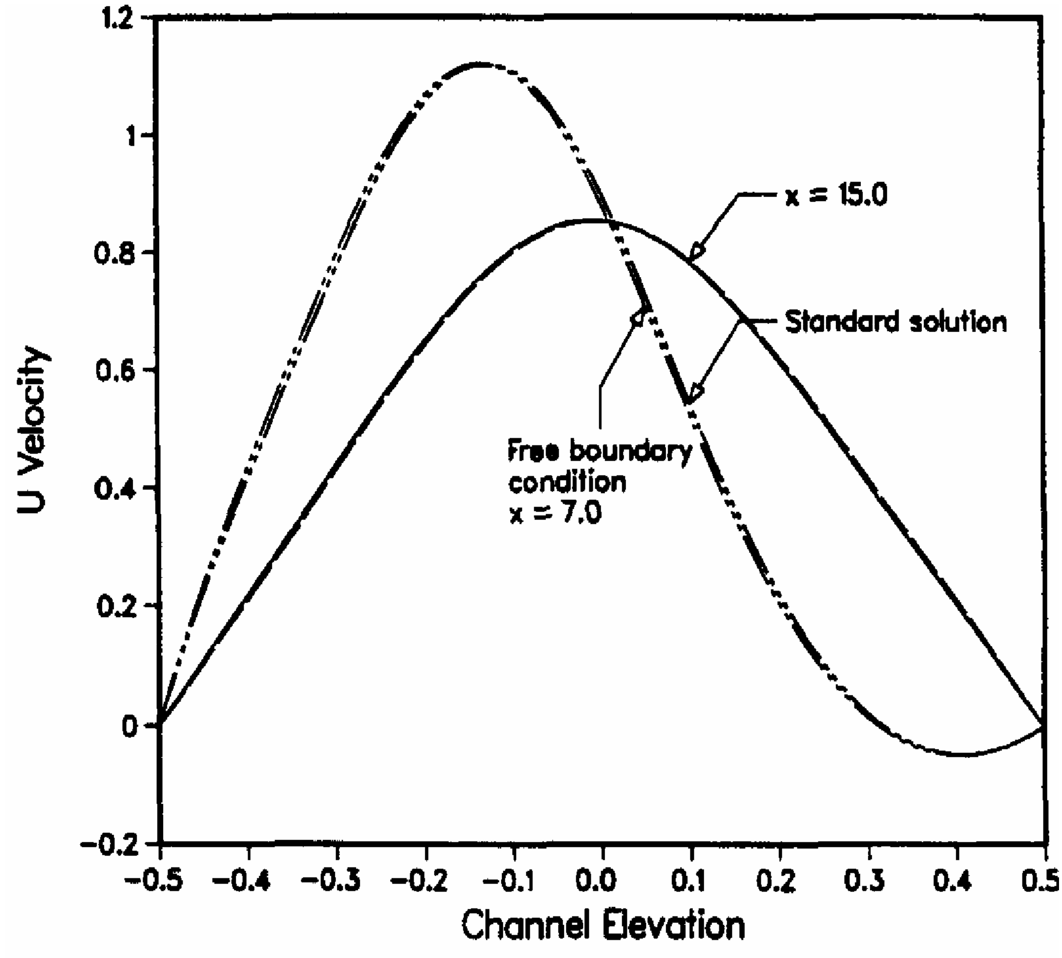


شکل ۳-۲: مقایسه سرعت ها با سرعت استاندارد [6]

با توجه به این نمودار می بینیم که فرض توسعه یافتگی جریان در $x = 15$، فرض نامناسبی بوده و اعمال این شرط مرزی، اغتشاش هایی را تولید می کند که ویگل[1] نامیده می شود. در حالی که با اعمال شرط مرزی آزاد در خروجی، نمودار سرعت برای این شرط مرزی و جواب استاندارد تقریبا روی هم می افتند.

در شکل ۳-۳ پروفیل های سرعت خروجی با اعمال شرط مرزی در $x = 15$ و $x = 7$ رسم شده و با پروفیل های حاصل از جواب استاندارد مقایسه شده است.

1- wiggle



شکل ۳-۳: پروفیل های سرعت بر حسب ارتفاع کانال [6]

همان طور از شکل ۳-۳ پیداست، پروفیل های سرعت تقریبا یکی هستند و این نشان می دهد که دقت روش شرط مرزی آزاد فوق العاده بالا می باشد.

۳-۲-۲ اعمال شرط مرزی آزاد در مرز های دلخواه خروجی [17]

در این تحقیق، جریان دو بعدی پایدار در داخل یک کانال با ارتفاع H و طول $30H$ مورد بررسی قرار گرفته است. فرق این مساله با مساله قبلی در شرط مرزی ورودی و استفاده از روش حل عددی می باشد.

برای حل این مساله از روش المان محدود استفاده شده است.

معالات حاکم شامل معادله پیوستگی و معادلات ناویر-استوکس می باشد:

$$\vec{\nabla}.\left(\rho\vec{V}\right)=0 \tag{۴-۳}$$

$$\vec{\nabla}.\left(\rho\vec{V}u\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\vec{\nabla}.\left(\mu\vec{\nabla}u\right) \tag{۵-۳}$$

$$\vec{\nabla}.\left(\rho\vec{V}v\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\vec{\nabla}.\left(\mu\vec{\nabla}v\right) \tag{۶-۳}$$

۳-۲-۲-۱ شرایط مرزی مساله

شرایط مرزی در همه مرز های جامد، شرط مرزی عدم لغزش بوده و در ورودی یک پروفیل سرعت سهموی به صورت زیر اعمال شده است:

$$U\left(y\right)=1.5\times U_{mean}\times\left(4y^{+}\right)\times\left(2-4y^{+}\right) \tag{۷-۳}$$

که در آن y^{+} برابر است با:

$$0\le y^{+}\left(=\frac{y}{H}\right)\le 0.5 \tag{۸-۳}$$

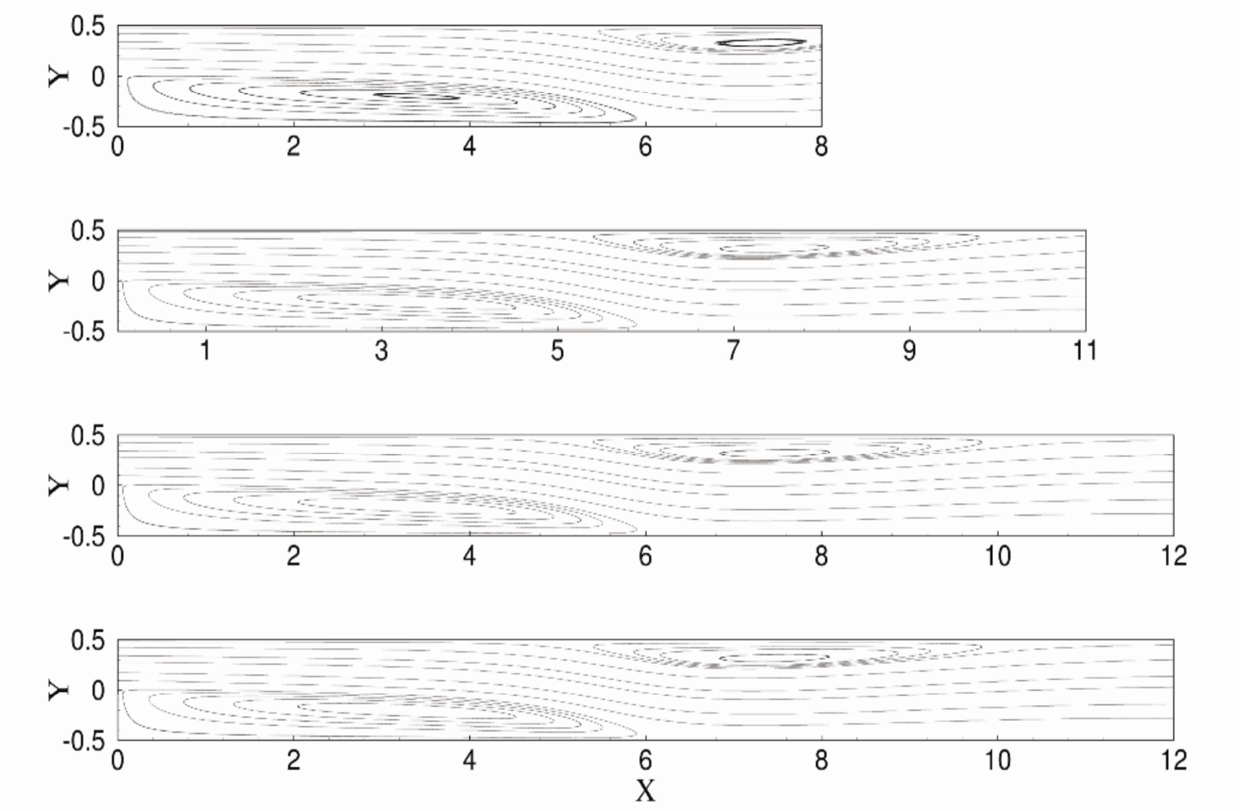
در خروجی نیز، شرط مرزی آزاد اعمال شده است.

۳-۲-۲-۲ نتایج

در شکل ۳-۴، خطوط جریان در کانال نشان داده شده است. همان طوری که مشاهده می شود خطوط جریان، وقتی x_{end} در مکان های مختلفی قرار می گیرد، یکی هستند. یکی از فاکتور های مهم در حل مسائل جریان در داخل کانال، محاسبه دقیق مکان نقاط جدایش[1] و بازگشت[2]، به ترتیب، در دیواره های

1- separatory point
2- reattachment point

بالایی و پایینی می باشد. این شکل نشان می دهد که حتی با انتخاب x_{end} های مختلف، مکان نقطه جدایش در دیواره بالایی و نقطه بازگشت در دیوار پایینی تغییر نمی کند.



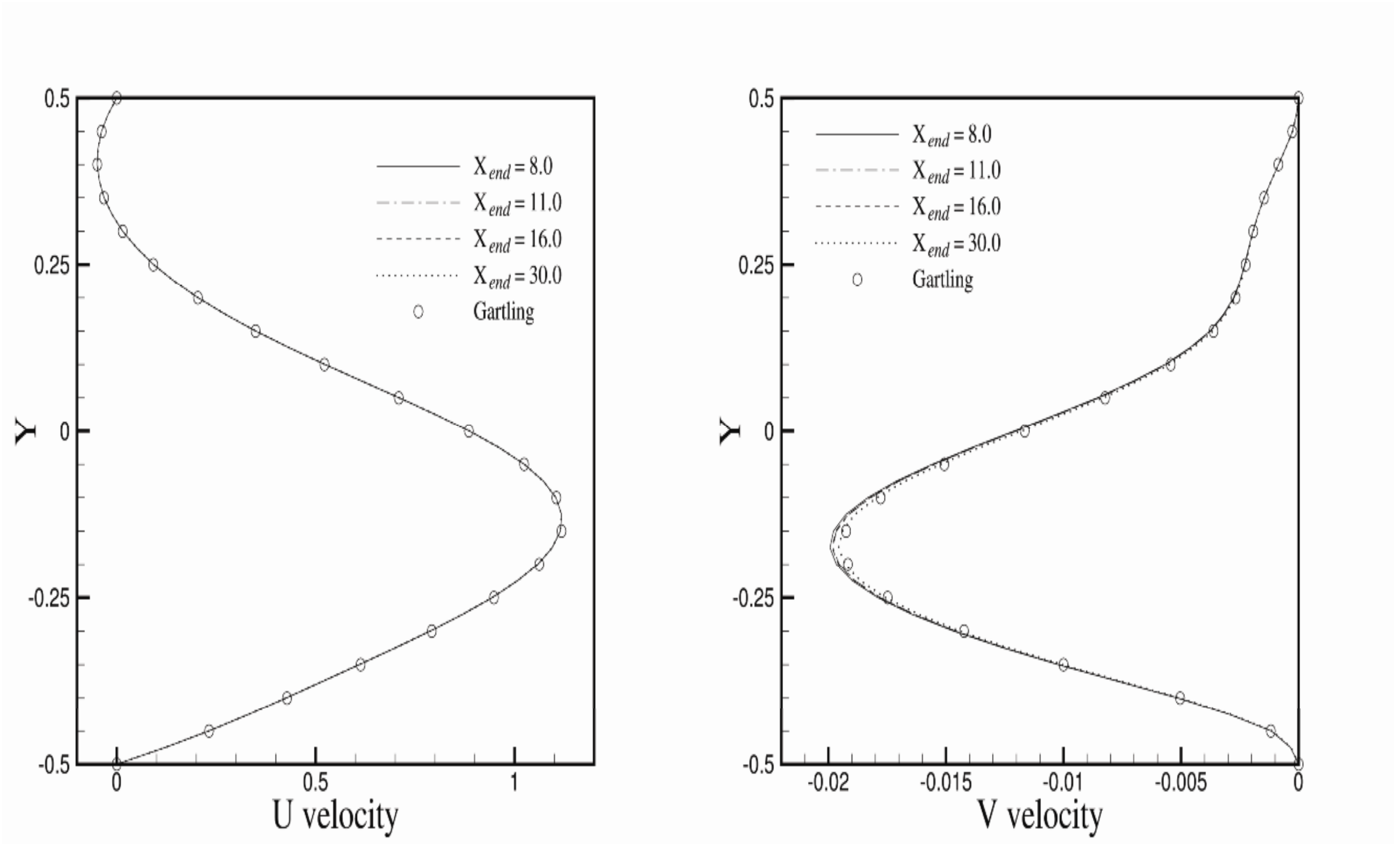
شکل ۳-۴: خطوط جریان داخل کانال وقتی که $x_{end} = 8,11,16,30$، به ترتیب، از بالا به پایین [17]

در شکل های ۳-۵ و ۳-۶، پروفیل های سرعت U و V در ایستگاه $x = 7$ و همچنین توزیع فشار در دیواره های بالایی و پایینی نشان داده شده اند و با نتایج آزمایش هایی که توسط گارتلینگ[1] انجام شده، مقایسه شده است.

این نمودار ها و همچنین نمودار های مساله قبلی نشان می دهند که دقت جواب حاصل، به مکانی که شرط مرزی آزاد اعمال می شود، بستگی ندارد. به عبارت دیگر، شرط مرزی آزاد را می توان در هر مکان

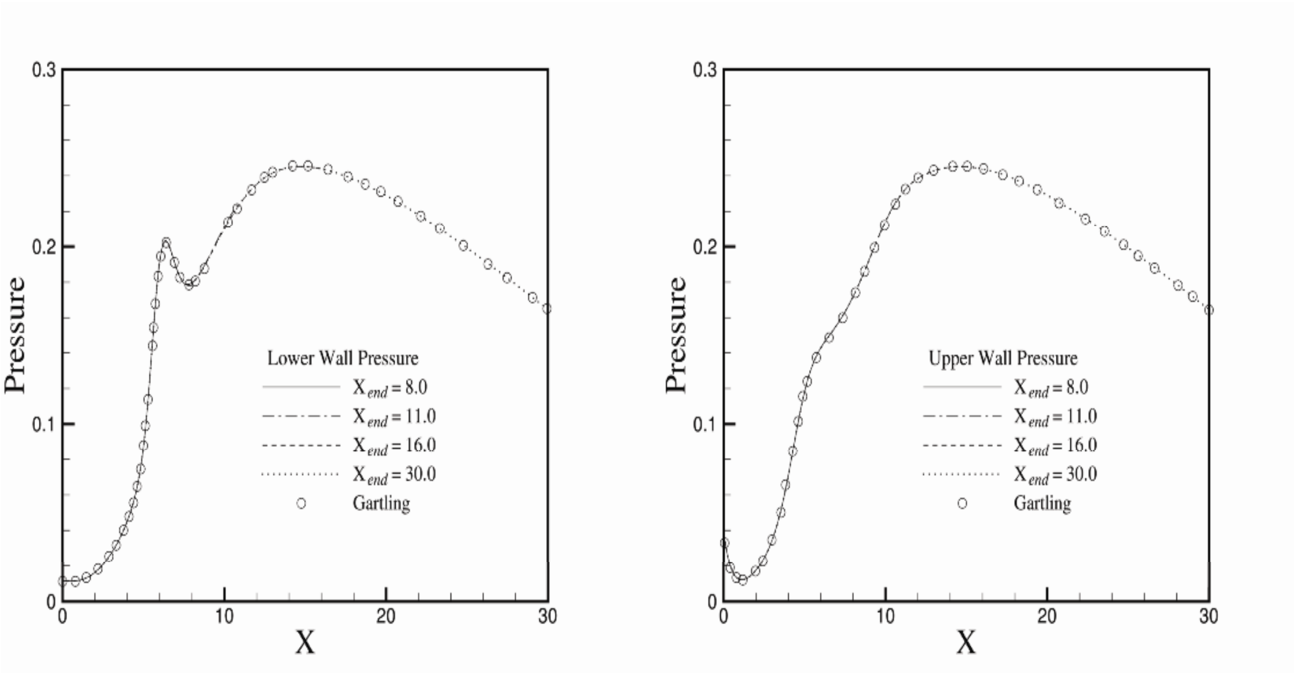
1- Gartling

دلخواهی اعمال کرد. در حالی که بایو[1] و بهر[2] با اعمال شرایط مرزی دیگر، نشان دادند که دقت جواب به مکانی که شرط مرزی در آن اعمال می شود، بستگی دارد. یعنی هر چه فاصله این مکان دورتر از ورودی جریان انتخاب شود، دقت جواب افزایش پیدا می کند.



۳-۵: پروفیل های سرعت U و V در مکان $x = 7$ با x_{end} های مختلف و مقایسه با جواب استاندارد [17]

1- Bao
2- Behr



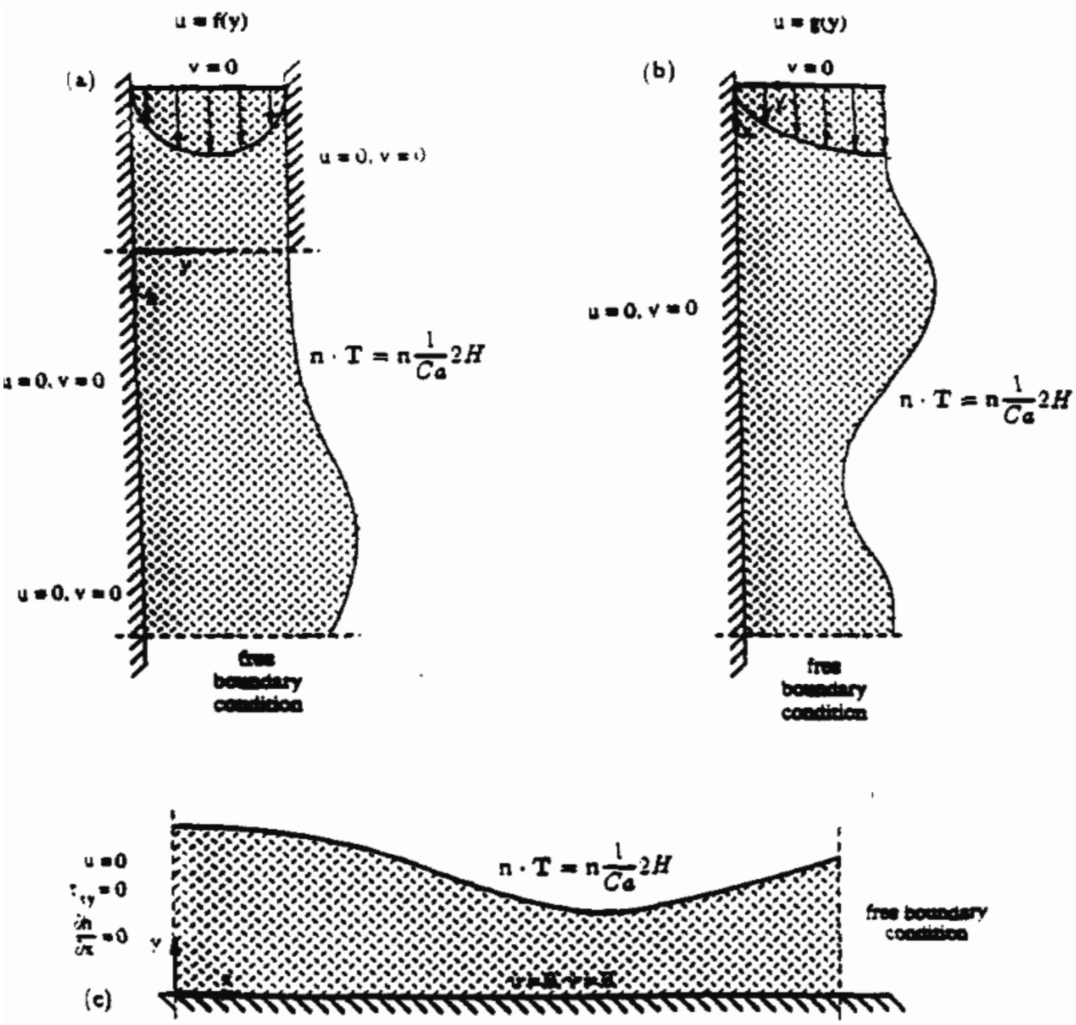
شکل ۳-۶: توزیع سرعت در دیواره های بالایی و پایینی با x_{end} های مختلف و مقایسه با جواب استاندارد [17]

۳-۲-۳ جریان های با سطح آزاد ناپایدار [8]

یکی دیگر از مسائلی که در آن از شرط مرزی آزاد استفاده شده است، مساله جریان های با سطح آزاد ناپایدار می باشد که توسط آقای مالاماتاریس[1] و همکاران وی، انجام شده است (شکل ۳-۷). آنها سه حالت از این جریان ها، عبور جریان از روی صفحه عمودی، عبور موج از روی صفحه عمودی و عبور موج از روی صفحه افقی را با استفاده از شرط مرزی خروجی آزاد و شرط مرزی خروجی پریودیک بررسی کردند.

با مقایسه نتایج حاصل از این شرایط مرزی با نتایج تحلیلی و تجربی، مشخص شده است که بهترین شرط مرزی برای این جریان ها، شرط مرزی آزاد می باشد. چرا که به جریان اجازه می دهد که از مرز خروجی عبور کند بدون اینکه کوچکترین اثری بر جریان داخلی داشته باشد که کاملا با نتایج تحلیلی و تجربی سازگاری دارد. در حالی که نتایجی که با اعمال شرط مرزی آزاد در مرز خروجی به دست آمده با نتایج تحلیلی و تجربی، اختلاف زیادی دارد.

1- Malamataris



شکل ۳-۷: سه نمونه از جریان با سطح آزاد غیر یکنواخت [8]

فصل چهارم

فرمول بندی ریاضی

۴-۱- مقدمه

در این فصل معادلات حاکم[1]، شرایط مرزی و شرایط اولیه بکار رفته در محاسبات شبیه‌سازی مستقیم لایه اختلاطی صفحه‌ای تشریح می‌شود. معادلات حاکم از معادلات ناویر - استوکس غیر قابل تراکم بدست می‌آیند. این معادلات در یک دامنه محاسباتی که در جهت x محدود و در جهت y نامحدود می‌باشد، حل می‌شوند. در جهت x از روش تفاضل محدود فشرده مرتبه بالا و در جهت y از روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی مرتبه بالا[2] استفاده شده است.

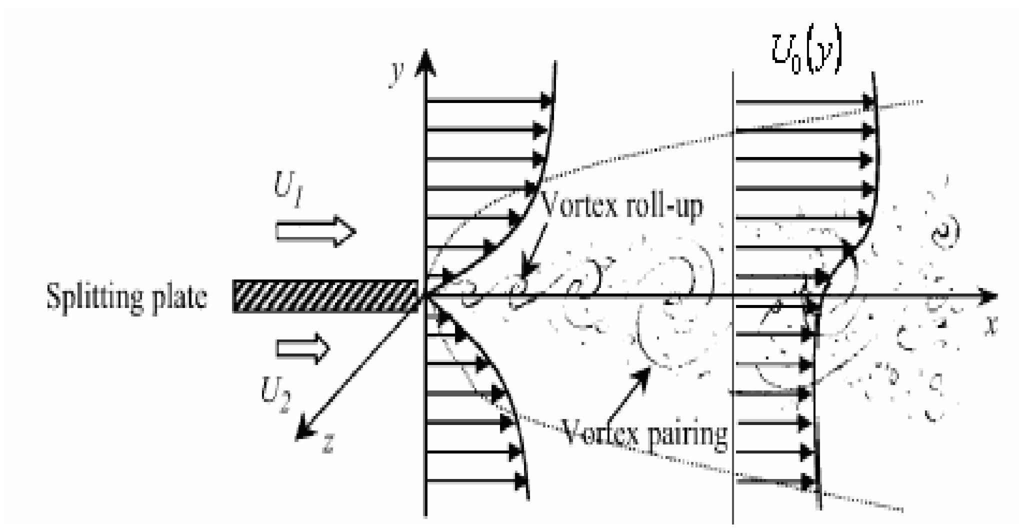
تمام پارامترها بوسیلهٔ مقیاس طولی و سرعت مناسب بی‌بعد شده‌اند. تمام طولها بوسیله ضخامت ورتیسیته δ_{ω_0} مربوط به پروفیل سرعت اصلی[3]، بی بعد شده‌اند. بی بعد سازی زمانی نیز بر اساس $\delta_{\omega_0}/\Delta U$ انجام شده است که در آن $\Delta U = U_1 - U_2$، اختلاف سرعت در جریانهای آزاد می‌باشد

1- governing equations
2- high order mapped compact finite difference
3- base flow

$(U_1 > U_2)$. جمله فشار نیز بوسیله $\rho \Delta U^2$ بی بعد شده است. عدد رینولدز براساس این پارامترها بصورت $\mathrm{Re} = {\Delta U\, \delta_{\omega_0}}/{\nu}$ می‌باشد که در آن ν ویسکوزیته سینماتیک[1] می‌باشد.

۴-۲- معادلات حاکم

نمای شماتیک لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی، سیستم مختصات و دامنه محاسباتی در شکل ۴-۱ مجدداً نشان داده شده‌است. در این دامنه معادلات حاکم برای جریان لایه اختلاطی دوبعدی غیرقابل تراکم حل می‌شوند. پروفیل ورودی جریان لایه اختلاطی با $U_0(y)$ نشان داده می‌شود، که بر روی دامنه محاسباتی اعمال می‌شود. جریان لایه اختلاطی در جهت x بصورت مکانی[2] توسعه می‌یابد.



شکل ۴-۱- شکل شماتیک لایه اختلاطی دو بعدی توسعه یافته مکانی [۲۵].

[1]- Kinematic viscosity
[2]- spatial

با اعمال قانون دوم نیوتن برای ذرات سیال نیوتنی به معادلات حرکت می‌رسیم. این معادلات که به معادلات ناویر _ استوکس معروف می‌باشند، به همراه معادله بقای جرم، بعنوان معادلات حاکم برای جریان تراکم ناپذیر لایه اختلاطی معرفی می‌شوند. معادلات حاکم بوسیلۀ سرعت مشخصه ΔU و طول مشخصه δ_{ω_0} بی بعد شده‌اند.

$$\frac{\partial \overrightarrow{U}}{\partial t}+\left(\overrightarrow{U}.\vec{\nabla}\right)\overrightarrow{U}=-\vec{\nabla}P+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\nabla^2\overrightarrow{U}\right) \qquad (۱-۴)$$

$$\vec{\nabla}.\overrightarrow{U}=0 \qquad (۲-۴)$$

یکی از مشکلات اصلی در حل معادله ناویر _ استوکس، نبود اطلاعات در مورد فشار در مرزها می‌باشد. برای رفع این مشکل یا بایستی از شبکه بندی بسیار ریز و متراکم برای گسسته‌سازی استفاده کنیم که این، منجر به ارزیابی متغیرهای مختلف در نقاط مختلف شبکه می شود یا اینکه جمله فشار را از معادله ناویر _ استوکس حذف کنیم.

با توجه به رابطه زیر

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}+\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B}+\vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)+\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \qquad (۳-۴)$$

برای حالتی که $\vec{A}=\vec{B}=\overrightarrow{U}=\left(U,V,W\right)$ معادله فوق به صورت زیر در می آید

$$\left(\overrightarrow{U}.\vec{\nabla}\right)\overrightarrow{U}=\vec{\omega}\times\overrightarrow{U}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\overrightarrow{U}.\overrightarrow{U}\right) \qquad (۴-۴)$$

که $\vec{\omega}=\left(\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)$ است. اگر معادله (۴-۴) را در (۱-۴) جایگزین کنیم معادله زیر بدست می آید.

$$\frac{\partial \overrightarrow{U}}{\partial t}=\overrightarrow{H}-\vec{\nabla}\left(P+\frac{\overrightarrow{U}.\overrightarrow{U}}{2}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\nabla^2\overrightarrow{U}\right) \qquad (۵-۴)$$

که در آن $\overrightarrow{H}=\left(H_1,H_2,H_3\right)=\overrightarrow{U}\times\vec{\omega}$. اگر عملگر دل را بر معادله (۴-۵) اعمال کنیم، داریم

$$\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{U}\right)}{\partial t}=\vec{\nabla}\times\vec{H}-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\left(P+\frac{\vec{U}.\vec{U}}{2}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\left(\vec{\nabla}\times\vec{U}\right) \qquad (۶-۴)$$

با توجه به اتحاد $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\left(Scaler\right)=0$، داریم

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}=\vec{\nabla}\times\vec{H}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{\omega} \qquad (۷-۴)$$

با اعمال عملگر دل بر معادله (۴-۷) داریم

$$\frac{\partial\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{U}\right)}{\partial t}=\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\left(\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{U}\right)\right) \qquad (۸-۴)$$

با توجه به رابطه پیوستگی و با به کار بردن رابطه (۴-۹)، معادله (۴-۸) به معادله (۴-۱۰) تبدیل می گرد که معروف به "معادله چرخشی ناویر-استوکس" می باشد.

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{U}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{U}\right)-\nabla^2\vec{U} \qquad (۹-۴)$$

$$\frac{\partial\nabla^2\vec{U}}{\partial t}=\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{U}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^4\vec{U} \qquad (۱۰-۴)$$

معادلات (۴-۷) و (۴-۱۰)، معادلات تکامل یافته‌ای هستند که برای پیشرفت زمانی[1] در شبیه‌سازی استفاده می‌شود. سرعت لحظه ای $\vec{U}=\left(U,V\right)$، برای حالت دوبعدی بصورت ترکیبی از سرعت جریان اصلی $\left(U_0\left(y\right),0\right)$ و سرعت محاسباتی $\left(u\left(x,y,t\right),v\left(x,y,t\right)\right)$ نوشته می‌شود.

$$U\left(x,y,t\right)=u\left(x,y,t\right)+U_0\left(y\right) \qquad (۱۱-۴)$$

$$V\left(x,y,t\right)=v\left(x,y,t\right) \qquad (۱۲-۴)$$

[1]- Time advancement

با جایگزینی معادله (۴-۱۱) در معادله (۴-۷) و (۴-۱۰)، برای مولفه در جهت جریان[1] داریم

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial y^2}H_1 - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}H_2 + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^4 U \qquad (۱۳\text{-}۴)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_1 = \frac{\partial}{\partial y}H_3 + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\omega_1 \qquad (۱۴\text{-}۴)$$

باید توجه داشت که برای حالت دوبعدی $\omega_1 = \omega_2 = H_3 = 0$. لذا معادله (۴-۱۴) از محاسبات حذف می‌گردد. در نتیجه معادله (۴-۱۳) به همراه شرایط مرزی، معادلات اصلی برای پیشرفت زمانی شبیه‌سازی می‌باشند. سرعت در جهت متقاطع جریان، v، با استفاده مستقیم از معادلهٔ پیوستگی بدست می‌آید.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (۱۵\text{-}۴)$$

مولفه ورتیسیته ω_3، با استفاده از تعریف آن بدست می‌آید

$$\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

هنگامی که معادلات حاکم بصورت مستقیم و بدون استفاده از هیچگونه مدلی حل شوند، بـه روش حـل، شبیه سازی مستقیم عددی یا به اختصار DNS گفته می‌شود.

[1]- stream wise component

۴-۳- شرایط مرزی

ابتدا باید بیان کرد که تمامی شرایط مرزی کـه در ایـن بخـش بیـان مـی شـود را بایـد بـه متغیرهـای محاسباتی تبدیل کرد. این کار به دلیل آن است که معادلات حاکم بر مسئله یعنـی همـان معادلـه نـاویر- استوکس و پیوستگی برای متغیرهای محاسباتی حل شده است.

معادله دیفرانسیل حاکم بر دامنه محاسباتی در جهت y ها از درجه دوم است (معادله ۵-۱۸) و نیاز به به دو شرط مرزی در مثبت و منفی بینهایت دارد. با توجه به اینکه در مثبت و منفی بینهایت سرعت معلوم است، می توان به آسانی سرعت را روی گرههای بالایی و پایینی دامنه محاسباتی قرار داد. ولی معادله دیفرانسیل حاکم بر دامنه محاسباتی در جهت x ها از درجه چهارم بوده لذا احتیاج به چهار شرط مرزی در این جهت داریم.

برای حل چنین معادله ای دو تا از شرایط مرزی را در مرز ورودی و دو تای دیگر را در مرز خروجی قرار می دهند که معمولا نیز از شرط دیریشله (u) و شرط نیومن ($\frac{\partial u}{\partial x}$) برای مرز ورودی و خروجی استفاده می کنند.

اما یکی از بهترین روش ها برای پیاده سازی شرایط مرزی مناسب در مرز های دلخواه (به خصوص در مرز خروجی)، شرط مرزی آزاد است. این روش به این معنی است که هیچ شرط مرزی را در مرز خروجی قرار ندهیم و فرض کنیم که معادلات حاکم بر جریان در مرز خروجی نیز صادق باشد. با استفاده از این روش نشان داده شده است که جریان از مرز خروجی عبور می کند بدون اینکه کوچک ترین اثری بر روی جواب داخلی داشته باشد. [17].

در این تحقیق، از شرط مرزی آزاد در مرز خروجی استفاده شده و به جای دو شرط مرزی خروجی حذف شده، دو شرط مرزی دیگر (مشتق دوم و سوم مولفه سرعت) در ورودی استفاده شده است یعنی هر چهار شرط مرزی را در ورودی قرار داده ایم.

این چهار شرط مرزی برای جریان اختلاطی آرام به صورت زیر می باشد:

$$u\left(0,y,t\right)=0,\frac{\partial}{\partial x}u\left(0,y,t\right)=0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u\left(0,y,t\right)=0,\frac{\partial^3}{\partial x^3}u\left(0,y,t\right) \qquad (۱۷-۴)$$

وقتی همه شرایط مرزی صفر می باشند بدین معنی است که هیچ گونه اغتشاشی در ورود قرار داده نشده است.

برای جریان اختلاطی با اغتشاش ورودی، اغتشاش را بر مولفه v سرعت در ورودی اعمال می نماییم. اغتشاش روی مولفه u سرعت نیز امکان پذیر است به شرط آنکه قید حل پذیری[1] در نظر گرفته شود [7].

$$v\left(x,y,t\right)=10^{-4}\times e^{-y^2}\times\sin\left(x-ct\right) \qquad (۱۸-۴)$$

که در آن c برابر با سرعت زاویه ای جریان می باشد.

در نتیجه اولین شرط برای u برابر صفر می باشد (شرط مرزی دیریشله). برای بـه دسـت آوردن شـرط مرزی دوم (شرط مرزی نیومن)، از معادله پیوستگی استفاده شده است. بـرای شـرط هـای مـرزی سـوم و چهارم هم، به ترتیب، از مشتق های دوم و سوم u استفاده شده است. در معادلـه (۴-۱۹) شـرایط مـرزی برای معادله سرعت در جهت x، نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}
&u\left(0,y,t\right)=0\\
&\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}=2\times10^{-4}\times y\times e^{-y^2}\times\sin\left(x-ct\right)\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2\times10^{-4}\times y\times e^{-y^2}\times\cos\left(x-ct\right)\\
&\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=-2\times10^{-4}\times y\times e^{-y^2}\times\sin\left(x-ct\right)
\end{aligned} \qquad (۱۹-۴)$$

باید توجه داشت که در معادلات (۴-۱۸) و (۴-۱۹)، $x=0$ می باشد.

1- solvability condition

در شبیه سازی عددی، مولفه سرعت لحظه‌ای در مرز ورودی با استفاده از یک پروفیل سرعت تانژانت هایپربولیک، به همراه سرعت اغتشاشی (محاسباتی) می‌باشد (معادله (۴-۱۱)). پروفیل سرعت جریان $U_0(y)$، بصورت زیر معرفی می‌شود:

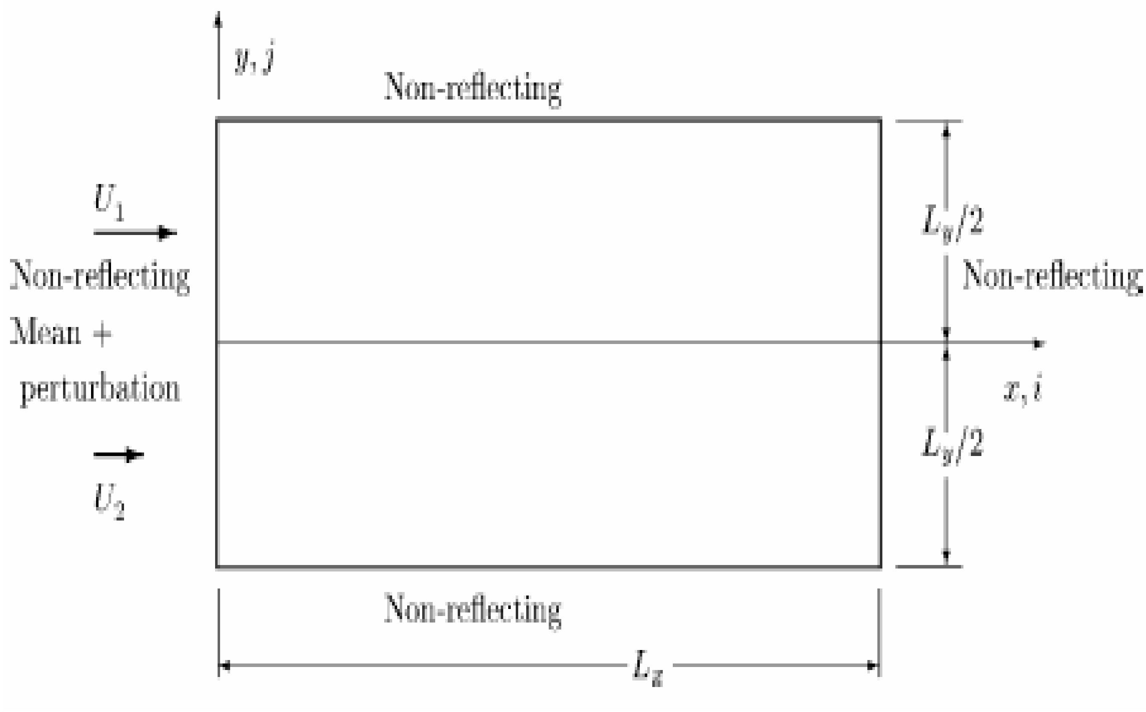
$$U_0(y) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \tanh(2y)\right\} \quad (۴-۱۹)$$

که در آن $\lambda = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}$ بیانگر شدت برش در لایه اختلاطی می‌باشد. عدد 2 در آرگومان tanh، برای اینکه ضخامت ورتیسیته پروفیل را متناسب با بی بعد کردن ضمنی y روی δ_{ω_0} نماید، لازم می‌باشد [۲۴].

۴-۴- شرایط اولیه

پروفیل سرعت متوسط تانژانت هایپربولیک بطور یکنواخت در تمام ایستگاههای x، شرط اولیه برای جریان دو بعدی لایه اختلاطی غیر اجباری می‌باشد. از همین شرط برای شرط اولیه جریان اجباری لایه اختلاطی نیز استفاده می‌شود. بر مبنای مطالعات آماری، این شرط اولیه برای شبیه سازی جریان اجباری و غیر اجباری لایه اختلاطی مناسب می‌باشد. به بیان دیگر، هر ذره در ورودی، $x = 0$، باید که مجاز به خروج از مرزها، $x = L_x$، باشد. جریان لایه اختلاطی همچنین بایستی به حالت ایستای آماری[1]، هنگامیکه مولفه‌های سرعت متوسط مستقل از زمان می‌باشند، برسد [2,7].

[1]- statistical stationary



شکل ۴-۲- محدوده دامنه محاسباتی و شرایط مرزی.

فصل پنجم

الگوریتم حل و روش های عددی

۵-۱- مقدمه

معادلات حاکم بر جریان لایه اختلاطی، فرم چرخشی معادلات ناویر-استوکس است که از درجه چهار می باشد. در نتیجه برای استفاده از این معادلات باید بتوانیم مشتقات در دو جهت x و y را محاسبه کنیم. همچنین نیازمند توسعه محاسبات در دامنه زمان هستیم. برای محاسبه مشتقات مکانی از روش اختلاف محدود فشرده در جهت x و y استفاده کرده ایم. البته لازم به ذکر است که معادلات به کار برده در جهت y همراه با نگاشت کتانژانت بوده که بنابر اصل قانون زنجیره ای، این امر اپراتور های مشتق گیری را مشخص می نماید. برای محاسبه مشتقات زمانی هم از روش رانج کوتای فشرده مرتبه سوم استفاده شده است. در این فصل ابتدا الگوریتم حل توضیح داده شده و سپس به روش های محاسبه مشتق پرداخته شده است.

۵-۲-الگوریتم حل

الگوریتم کاری برای حل معادله ناویر استوکس با توجه به ۴ شرط مرزی و یک شرط اولیه در زیر توضیح داده شده است:

۱. با توجه به شرط اولیه مشخص برای u، مقدار v محاسبه می‌شود.

۲. باتوجه به اینکه $\vec{\omega}=\vec{\nabla}\times\vec{U}$ است و برای حالت دوبعدی $\omega_1=0$ و $\omega_2=0$ است، مقدار $\omega_3=\omega=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}$ حساب می‌شود.

۳. مقدار $\vec{H}=\vec{U}\times\vec{\omega}$ می‌باشد که برای حالت دو بعدی $H_3=0$ است مقادیر $H_1=V\,\omega$ و $H_2=-U\,\omega$ محاسبه می‌شود.

۴. محاسبه جملات غیر خطی در معادله که به صورت $\frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 H_2}{\partial x\,\partial y}$ است.

۵. محاسبه جملات لزجتی در معادله که به صورت $\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^4 U$ است.

۶. شرایط مرزی باید برای مرحله زمانی بعد، به روز گردد. ضمناً مقدار $\Delta u=u^{n+1}-u^n$ در مرزها برای حل معادله پواسون لازم است.

۷. بعد از محاسبه طرف راست معادله، با توجه به روش رانج کوتای فشرده مرتبه سوم مقدار $\nabla^2\Delta u$ محاسبه می شود.

۸. با حل معادله پواسون و مشخص شدن Δu، مقدار u از آن استخراج می‌شود.

۹. تمام مراحل ذکر شده در بالا برای یک گام زمانی است که از u تولید شده در مرحله قبل به عنوان شرط اولیه استفاده می‌شود.

برای حل معادله ۴-۱ و طبق الگوریتم بالا، ما باید قادر به انجام اعمال زیر باشیم:

۱- محاسبه مشتقات مادی

۲- انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی به منظور بدست آوردن v از معادله ۴-۲ .

۳- محاسبه جملات غیرخطی.

۴- حل معادله پواسون [1] برای حالت دو بعدی.

۵- پیشرفت زمانی (بدست آوردن داده های جدید که در اصل، آنها به صورت شرط اولیه برای زمان بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت).

۵-۳- محاسبه مشتقات مادی

مشتقات مادی با بکار بردن طرح اختلاف محدوده فشرده استاندارد ارائه شده توسط لیله [5] محاسبه شده است. لیله[۱] مشتق اول تابع $f(x)$ را به طور ضمنی[۲] مطابق معادله (۵-۱) بیان کرده است.

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha+2}{3h}(f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha-1}{12h}(f_{j+2} - f_{j-2}) \qquad (۵-۱)$$

که علامت پریم نمایانگر مشتق اول، j بیان کننده تعداد گره $(1 \le j \le J)$ و $h = \Delta x = Lx / Nx$ است که $Nx = J - 1$ است.

اگر در معادله (۵-۱)، $\alpha = 1/4$ یا $\alpha = 1/3$ قرار داده شود به طرحهایی با مرتبه خطای چهارم و ششم می‌رسیم. برای جلوگیری از ناهنجار بودن ماتریس طرف چپ معادله فوق، طرفین آن را در $1/\alpha$ ضرب می‌کنیم. نتیجه به صورت زیر می‌شود:

$$f'_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f'_j + f'_{j+1} = \frac{1+2/\alpha}{3h}(f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4-1/\alpha}{12h}(f_{j+2} - f_{j-2}) \qquad (۵-۲)$$

در مرزها یعنی جایی که $j = 1$ یا $j = J$ است یک طرح مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f'_1 + 2f'_2 = \frac{1}{2h}(-5f_1 + 4f_2 + f_3) \qquad (۵-۳)$$

---

[1]- S.K.Lele

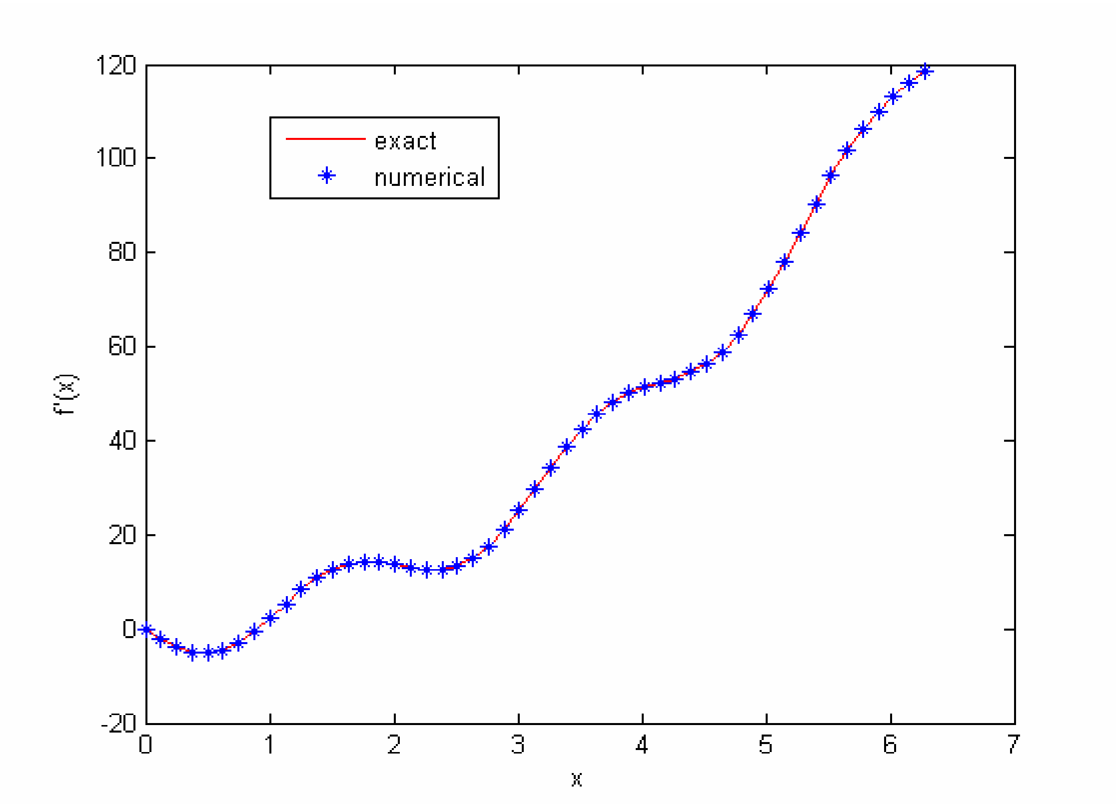
[2]- implicit

$$f'_J + 2f'_{J-1} = \frac{1}{2h}(5f_J - 4f_{J-1} - f_{J-2}) \qquad (۴-۵)$$

در همسایگی مرزها یعنی جایی که $j = 2$ یا $j = J-1$ است از معادله (۵-۲) درحالتی‌که $\alpha = 1/4$ است، استفاده می‌شود.

همانطور که توسط لیله بحث شده است، با قرار دادن $\alpha' = (16\alpha + 32)/(40\alpha - 1)$ به جای α در معادله (۵-۲) برای گره‌های $j = 3$ و $j = J-2$ می‌توان پایداری و بقای عددی معادله $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} f(u)$ را تضمین کرد.

در شکل ۵-۱ می‌توان میزان دقت آن را برای تابعی به فرم $y = 2\cos(3x) + x^3$ ملاحظه کرد. انتظار داریم که طرحی با مرتبه خطای سوم در مرز و مرتبه خطای ششم در گره های مرکزی داشته باشیم. شکل ۵-۲ مرتبه دقت را نشان می دهد [7].



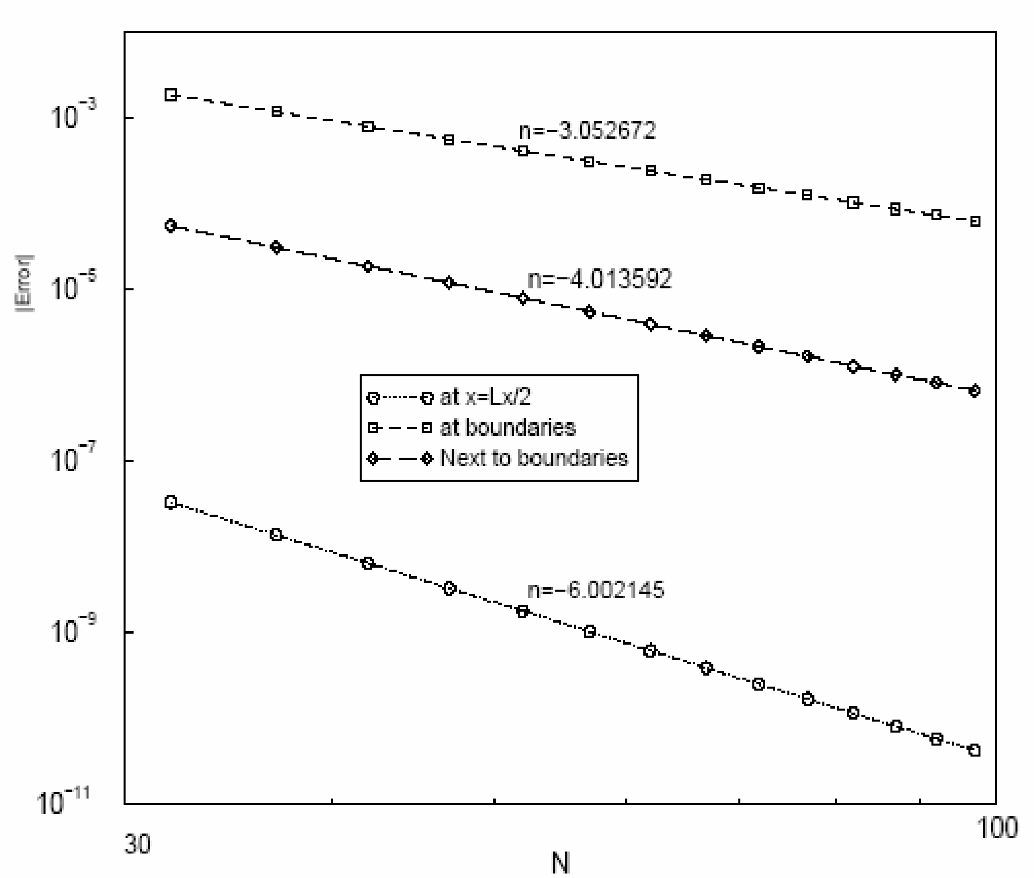
شکل ۵-۱: تقریب مشتق اول تابع $y = 2\cos(3x) + x^3$.

معادله (۵-۵) مشتق دوم تابع $f(x)$ را نشان می دهد که یک طرح اختلاف محدود فشرده و با دقت مرتبه چهارم است.

$$\alpha f''_{j-1} + f''_j + \alpha f''_{j+1} = \frac{4(1-\alpha)}{3h^2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) + \frac{10\alpha - 1}{12h^2}(f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2}) \qquad (۵-۵)$$

که در آن $\alpha = 1/4$ است. در اینجا مسئله ناهنجاری هم مورد توجه قرار گرفته‌است و معادله در $1/\alpha$ ضرب شده است (معادله ۵-۶).

$$f''_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f''_j + f''_{j+1} = \frac{4(\frac{1}{\alpha} - 1)}{3h^2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) + \frac{10 - \frac{1}{\alpha}}{12h^2}(f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2}) \qquad (۶-۵)$$



شکل ۵-۲: مرتبه دقت برای مشتق اول با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد[7].

در مرزها از یک طرح مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f_1''+11f_2''=\frac{1}{h^2}(13f_1-27f_2+15f_3-f_4) \quad (۷-۵)$$

$$f_J''+11f_{J-1}''=\frac{1}{h^2}(13f_J-27f_{J-1}+15f_{J-2}-f_{J-3}) \quad (۸-۵)$$

با مشتق گیری از معادله (۵-۳) معادله (۵-۹) تولید می‌شود

$$f_1''+2f_2''=\frac{1}{2h}(-5f_1'+4f_2'+f_3')=\frac{-3}{h}f_1'+\frac{1}{2h}(f_1'+4f_2'+f_3') \quad (۹-۵)$$

اگر جمله طرف راست معادله (۵-۹) را با معادله (۵-۲) در حالتی که $\alpha=1/4$ جایگزین کنیم داریم:

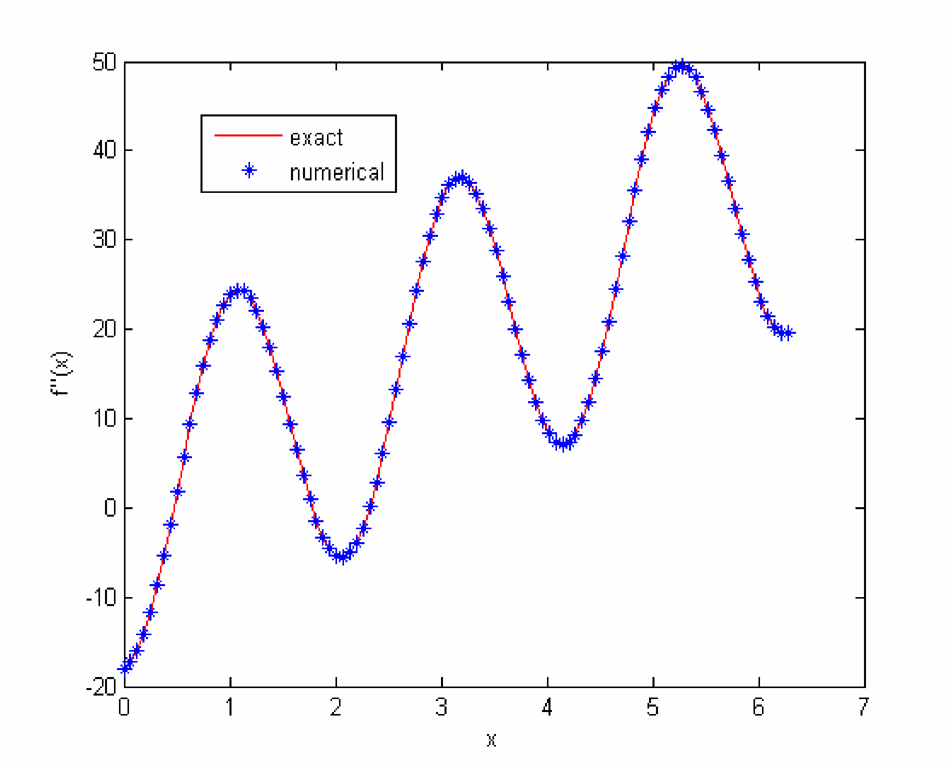
$$f_1''+2f_2''=\frac{-3}{h}(\frac{df}{dx})_{x=0}-\frac{3}{2h^2}(f_1-f_3) \quad (۱۰-۵)$$

روش مشابهی می‌توان برای گره J به کار برد.

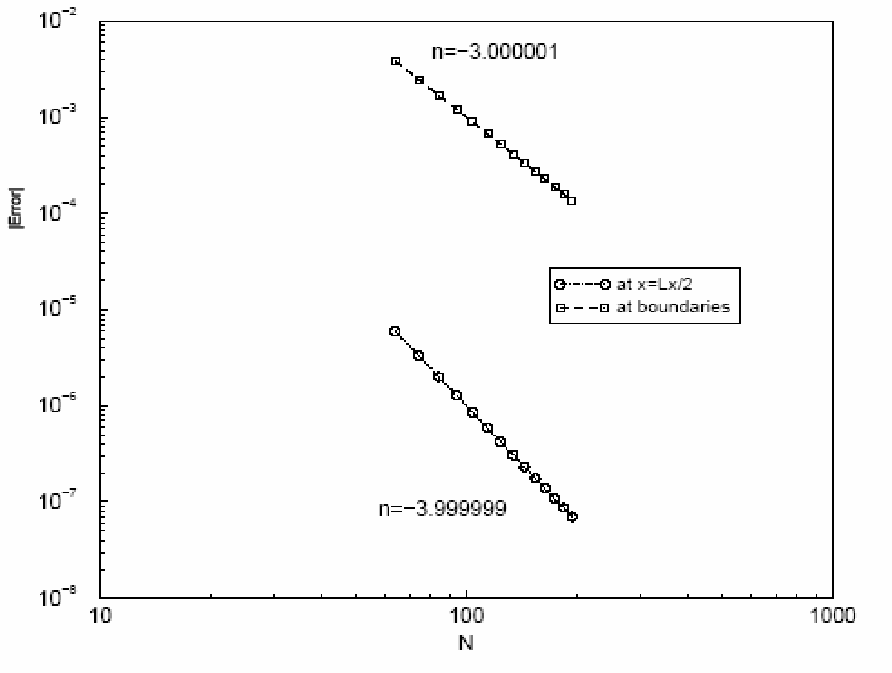
$$f_J''+2f_{J-1}''=\frac{3}{h}(\frac{df}{dx})_{x=Lx}-\frac{3}{2h^2}(f_J-f_{J-2}) \quad (۱۱-۵)$$

نزدیک مرزها یعنی جائیکه $j=2$ و $j=J-1$ است از طرح اختلاف محدوده فشرده مرتبه دوم استفاده شده است که با جایگزینی $\alpha=1/10$ در معادله (۵-۶) بدست می‌آید.

در شکل ۵-۳ مقایسه بین نتایج عددی مشتق دوم و مقدار حقیقی مشتق دوم تابع $y=2\cos(3x)+x^3$ را می‌توانید ملاحظه کنید. میزان خطا نیز در شکل ۵-۴ برای گره های مرزی و گره های داخلی ترسیم شده است [7]. برای محاسبه مشتقات چهارم هم می‌توان اپراتور مشتق دوم را دوبار اعمال‌کرد که در طرف راست معادله ناویر استوکس و در قسمت جمله های لزجتی وجود دارد.



شکل ۵-۳: تقریب مشتق دوم تابع $y = 2\cos(3x) + x^3$.



شکل ۵-۴: مرتبه دقت برای مشتق دوم با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [7].

۵-۴- نگاشت یک به یک به دامنه محاسباتی

جریان لایه اختلاطی جریانی آزاد و دور از مرزهای صلب می‌باشد و در نتیجه در جهت y نباید هیچگونه محدودیت مادی داشته باشیم، یعنی $-\infty \le y \le \infty$ می‌باشد. برای گنجاندن y در یک دامنه محاسباتی از یک تابع یک‌به‌یک مثلثاتی استفاده می‌کنیم که مختصات فیزیکی y تبدیل به مختصات محاسباتی $0 \le \zeta \le 1$ می‌شود.

فواصل گره‌ها در مجموعه محدود شده یک اندازه و یکنواخت می‌باشند ولی در مجموعه فیزیکی این فواصل متساوی نیستند و در ناحیه ای بیشتر متمرکزند. رابطه مورد استفاده بین مکان گره‌های موجود در مجموعه محاسباتی و مجموعه فیزیکی به وسیله معادله (۵-۱۲) بیان شده است.

$$y = -\beta \cot(\pi\zeta) \qquad (۱۲\text{-}۵)$$

که β پارامتر مربوط به کنترل میزان کشیدگی و انقباض است. برای مشتق گیری تابع f نسبت به y به صورت زیر عمل می کنیم

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{d\zeta} \times \frac{d\zeta}{dy} = \frac{1}{\pi\beta}\sin^2(\pi\zeta)\frac{df}{d\zeta} \qquad (۱۳\text{-}۵)$$

با برابر قرار دادن $\lambda_1 = \frac{1}{\pi\beta}\sin^2(\pi\zeta)$ داریم

$$\frac{df}{dy} = \lambda_1 \frac{df}{d\zeta} \qquad (۱۴\text{-}۵)$$

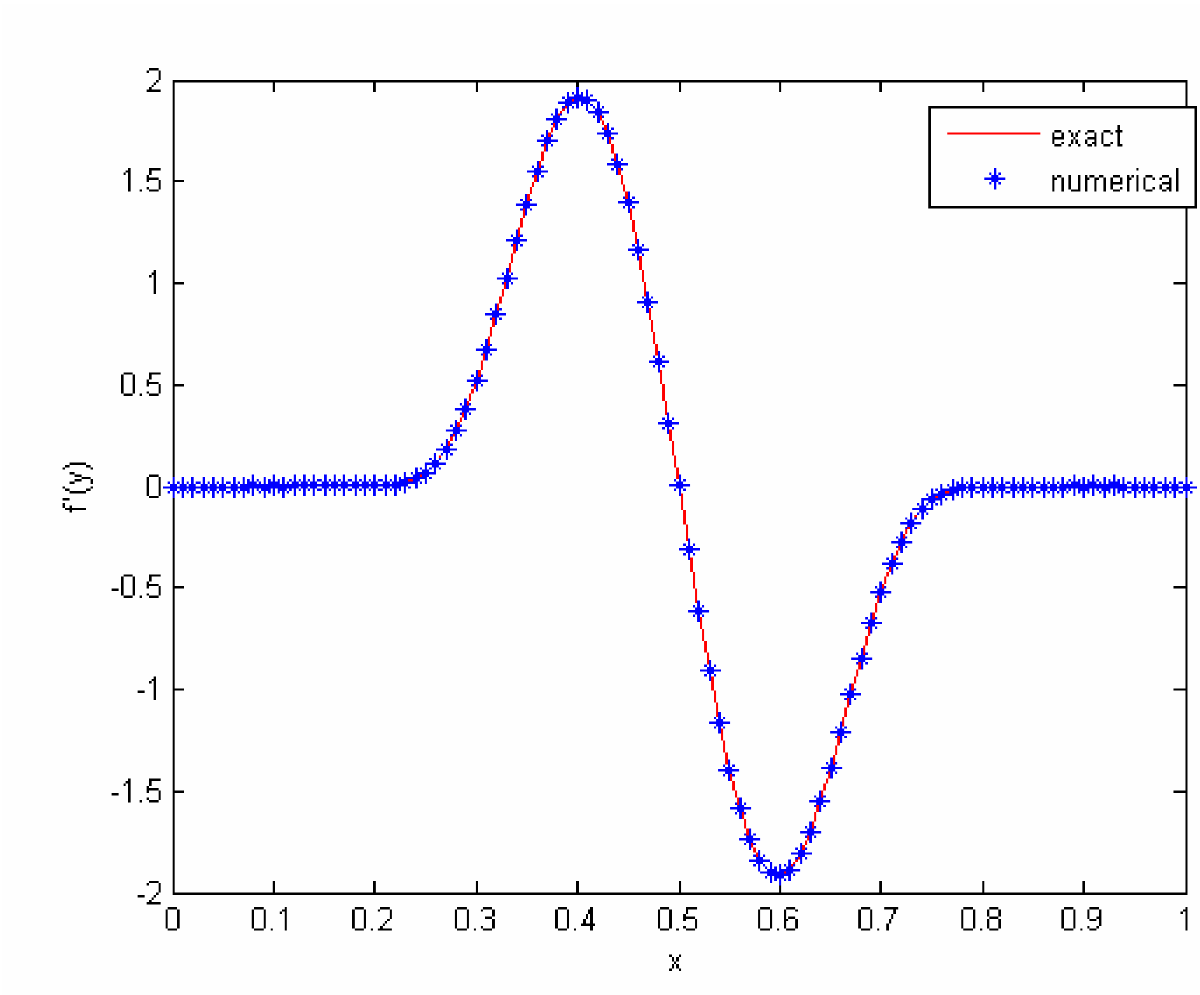
برای محاسبه مشتق دوم نیز به صورتی مشابه عمل می‌کنیم

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \lambda_2 \frac{d^2 f}{d\zeta^2} + \lambda_3 \frac{df}{d\zeta} \qquad (۱۵\text{-}۵)$$

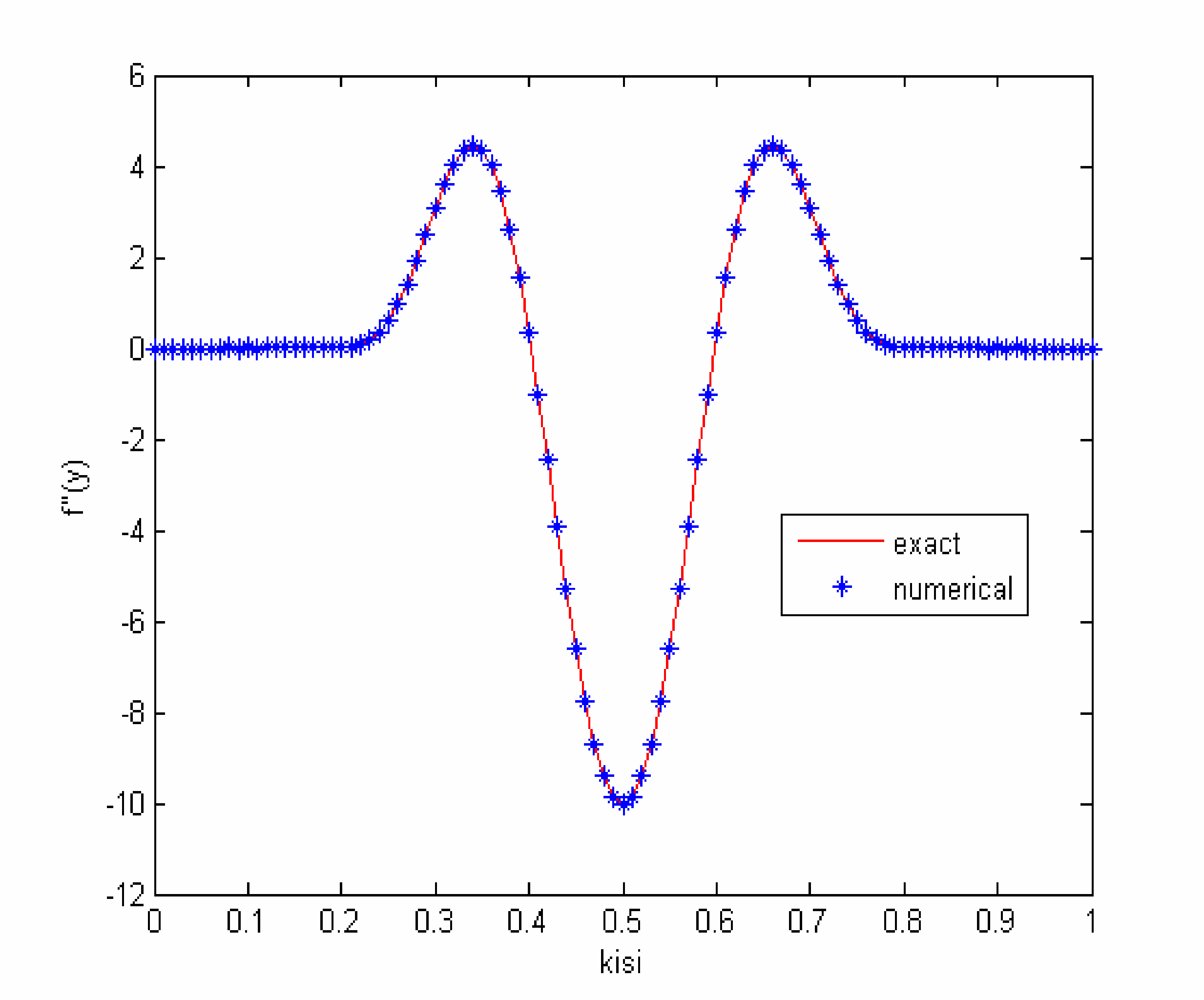
$$\lambda_2 = \lambda_1^{\,2} \qquad (۱۶\text{-}۵)$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{\pi\beta^2}\cos(\pi\zeta)\sin^3(\pi\zeta) \qquad (۱۷-۵)$$

در شکل‌های ۵-۵ و ۵-۶ می‌توان نتیجه این روش مشتق گیری را با توجه به محدود کردن موجود و $\beta = 5$ و $N_y = 100$ ملاحظه نمایید.



شکل ۵-۵: تقریب مشتق اول تابع $f(y) = e^{-\gamma y^2}$ با توجه به فشرده سازی در جهت y با $\gamma = 5, \beta = 1$.



شکل ۵-۶: تقریب مشتق دوم تابع $f(y)=e^{-\gamma y^2}$ با توجه به فشرده سازی در جهت y با $\gamma=5,\beta=1$.

۵-۵- انتگرال گیری

با حل معادله (۴-۴) می‌توان $u(x,y,t)$ را بدست آورد. برای محاسبه سرعت در جهت عرضی v از معادله پیوستگی بهره می‌گیریم. طبق معادله پیوستگی داریم:

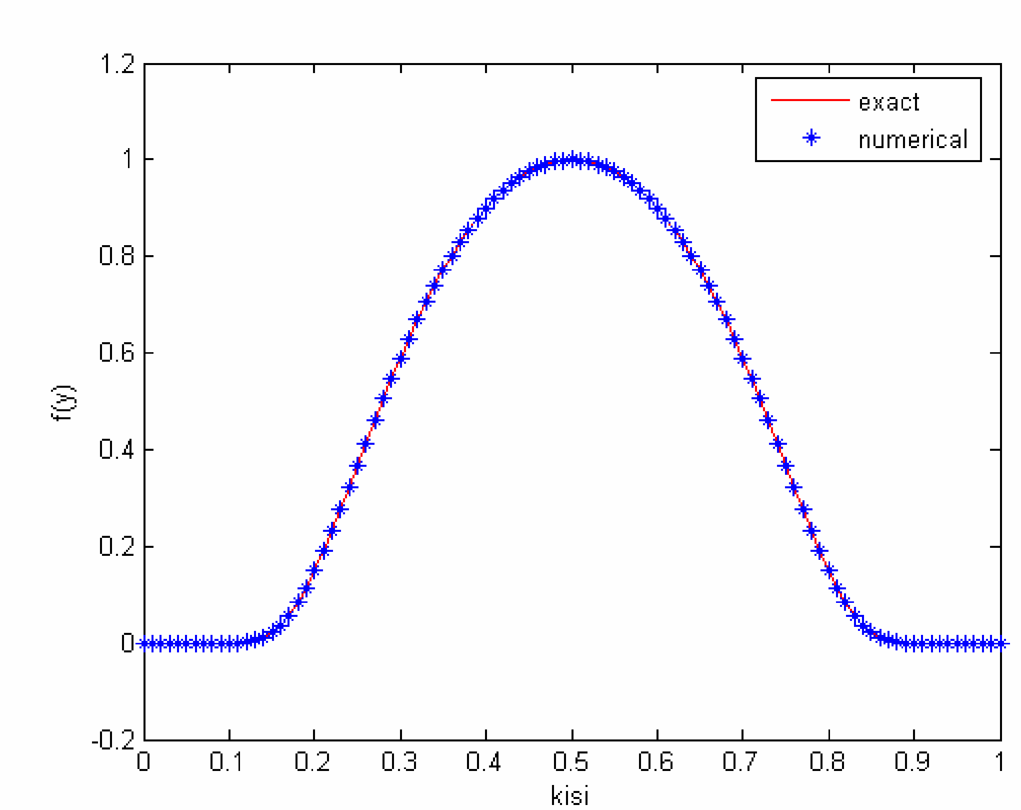
$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (۱۸-۵)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \tag{۵-۱۹}$$

چنانچه از طرح اختلاف محدود فشرده استفاده کنیم که ماتریس سمت راست معادله (۵-۲) دارای عناصر صفر بر روی قطر اصلی است و با این وضع نمی‌توان به انتگرال‌گیری پرداخت. جهت غلبه بر این مشکل با مشتق‌گیری از دو طرف معادله برحسب y، معادله (۵-۱۸) بدست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \tag{۵-۲۰}$$

ضمناً مزیت فرم معادله فوق این است که امکان اعمال دو شرط مرزی را برای v به صورت $y = \pm\infty \rightarrow v = 0$ فراهم می نماید. نتایج مربوط به انتگرال‌گیری در شکل ۵-۷ آمده است.



شکل ۵-۷: تقریب انتگرال تابع $f'(y) = -2ye^{-y^2}$ با شرایط مرزی $f(y(0)) = f(y(1)) = 0$ که به صورت $f(y) = e^{-y^2}$ می‌باشد.

۵-۶- پیشروی در زمان

طرح اختلاف زمانی رانج کوتای فشرده مرتبه سوم به وسیله رای[1][۲۴] بیان شده است که برای پیشرفت زمانی به کار برده می‌شود. برای پیشروی زمانی معادله‌ای به‌صورت معادله (۵-۲۱)، مطابق با جدول ۵-۱ می‌توان فرآیند زیر را انجام داد.

جدول۵-۱: طرح پیشروی زمانی رانج کوتای فشرده مرتبه سوم.

دومین موقعیت	اولین موقعیت	زمان
$R(u^n)$	u^n	t^n
$R' = R(u')$	$u' = u^n + c_1\Delta t R$	$t' = t^n + c_1\Delta t$
$R'' = R(u'')$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R)\Delta t$	$t'' = t' + (c_2 + d_2)\Delta t$
	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R')\Delta t$	$t^{n+1} = t^n + \Delta t$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u) \qquad (۵-۲۱)$$

برای پیشروی زمانی معادله مدل فوق به اندازه Δt، طرف راست معادله باید در سه مرحله زمانی محاسبه گردد. در هر یک از این مراحل زمانی، زمان به اندازه $(c_i + d_i)\Delta t$ جلو می رود و u به وسیله یک ترکیب خطی از R در مرحله زمانی حال و R در مرحله زمانی گذشته محاسبه می‌گردد. بعد از گذشت

1- A.Wray

مرحله سوم، زمان به اندازه Δt و مقدار u محاسبه شده برابر مقدار u بعد از گذر از یک Δt زمانی است.

برای محاسبه ضرایب با معادل قرار دادن ضرایب حاصل از سری تیلور با طرح می‌توان اقدام نمود.

داریم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1$$

$$c_1^2 c_2 + c_3 (c_1 + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2}))^2 + c_1^2 d_3 = 1/3$$

$$c_1 c_2 + c_3 (\frac{d_2}{c_2}(1 + \frac{d_3}{c_3}) + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2})) = 1/2$$

$$c_1 c_2 c_3 = 1/6$$

برای حل $d_1 = 0$ قرار می‌دهیم. نتیجه به صورت زیر است:

$$c_1 = 8/15 \qquad d_1 = 0$$

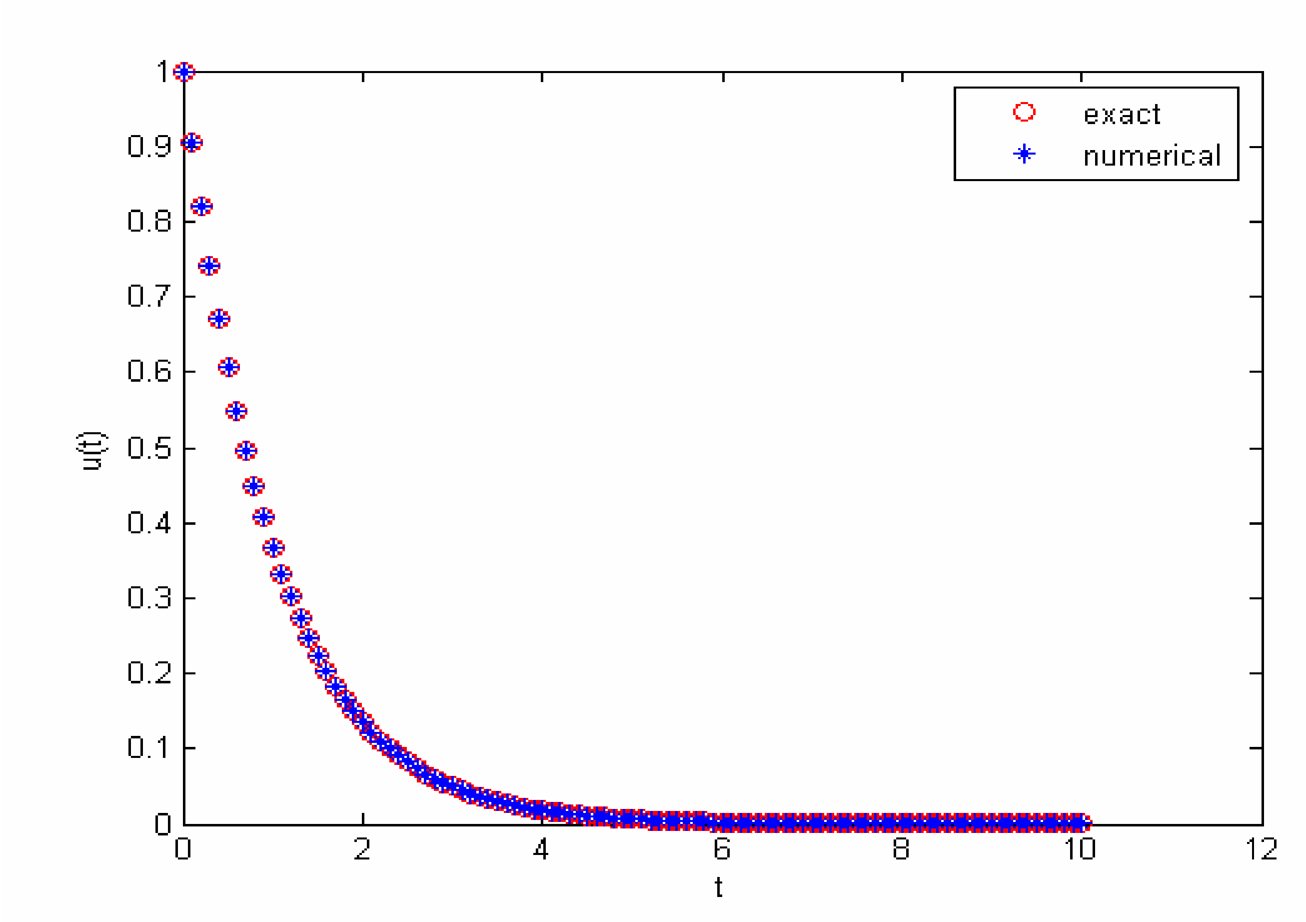
$$c_2 = 5/12 \qquad d_2 = -17/60$$

$$c_3 = 3/4 \qquad d_3 = -5/12$$

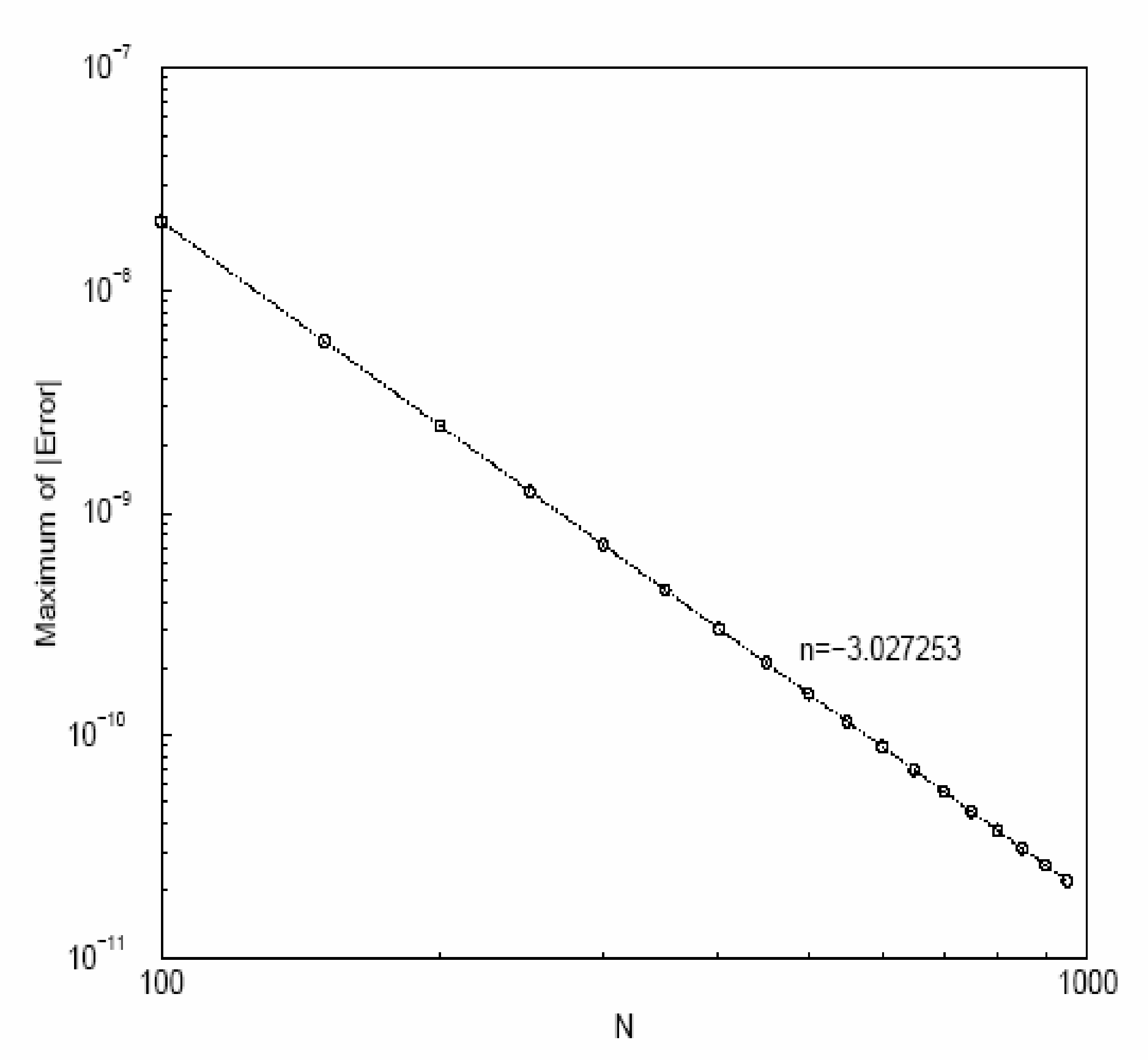
تست زیر برای تعیین دقت طرح مذکور انجام شده است. $u(t) = e^{-t}$ همراه با شرط اولیه $u(0) = 1$ یک حل تحلیلی برای معادله (۵-۲۲) است.

$$\frac{du}{dt} = -u(t) \tag{۲۲-۵}$$

حل عددی و حل واقعی معادله فوق در شکل ۵-۸ نشان داده شده است و همچنین ماکزیمم خطا بین نتایج عددی و حل واقعی در شکل ۵-۹ رسم شده است که به روشنی نشان دهنده صحیح بودن دقت مرتبه سوم این طرح می‌باشد [7].



شکل ۵-۸- حل عددی معادله $\frac{du}{dt} = -u(t)$ با $u(0) = 1$



شکل ۵-۹: مرتبه دقت طرح پیشروی در زمان برای $\frac{du}{dt}=-u(t)$ با $u(0)=1$ [7].

۵-۷- حل معادله پواسون

بعد از محاسبه طرف راست معادله ناویر استوکس و پیشروی در زمان، مقدار $\nabla^2 \Delta u$ بدست می آید. پس داریم:

$$\nabla^2 \Delta u = C \qquad (۵-۲۳)$$

که C معلوم می باشد و مقدار Δu مجهول است. با بسط معادله داریم:

$$\nabla^2 \Delta u = \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial y^2} = C \qquad (۲۴-۵)$$

با جایگزین کردن اپراتور های مشتقات دوم در جهات x و y معادله زیر بدست می آید:

$$(D2X . \Delta u^T)^T + D2Y . \Delta u = C \qquad (۲۵-۵)$$

توجه کنید که برای اعمال اپراتور مشتق دوم در جهت x باید ترانهاده ماتریس Δu را در ماتریس اپراتور $D2X$ ضرب کرده و در نهایت از نتیجه ضرب دو ماتریس، ترانهاده گرفت.

با توجه به اینکه:

$$(ST)^T = T^T S^T \qquad (۲۶-۵)$$

پس معادله (۵-۲۵) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\Delta u . D2X^T + D2Y . \Delta u = C \qquad (۲۷-۵)$$

بارتلز[1] چگونگی روش حل معادله ماتریسی $AX + XB = C$ را ارائه کرده است [1] که در اینجا $A = D2Y$ و $B = D2X^T$ و $X = \Delta u$ است و در نهایت Δu بدست می‌آید که از روی آن می توان u جدید را به دست آورد.

$$u^{n+1} = u^n + \Delta u \qquad (۲۸-۵)$$

1- Bartlez.R.H.

۵-۸- ارزیابی کد و شبیه سازی عددی

از بعضی از حالت های خاص معادله ناویر استوکس که جواب تحلیلی برای آنها وجود دارد، مانند معادله نفوذ وابسته به زمان و گردابه های استوارت، برای ارزیابی و صحت کد استفاده شده است که نتایج آنها را در این قسمت ملاحظه می فرمایید.

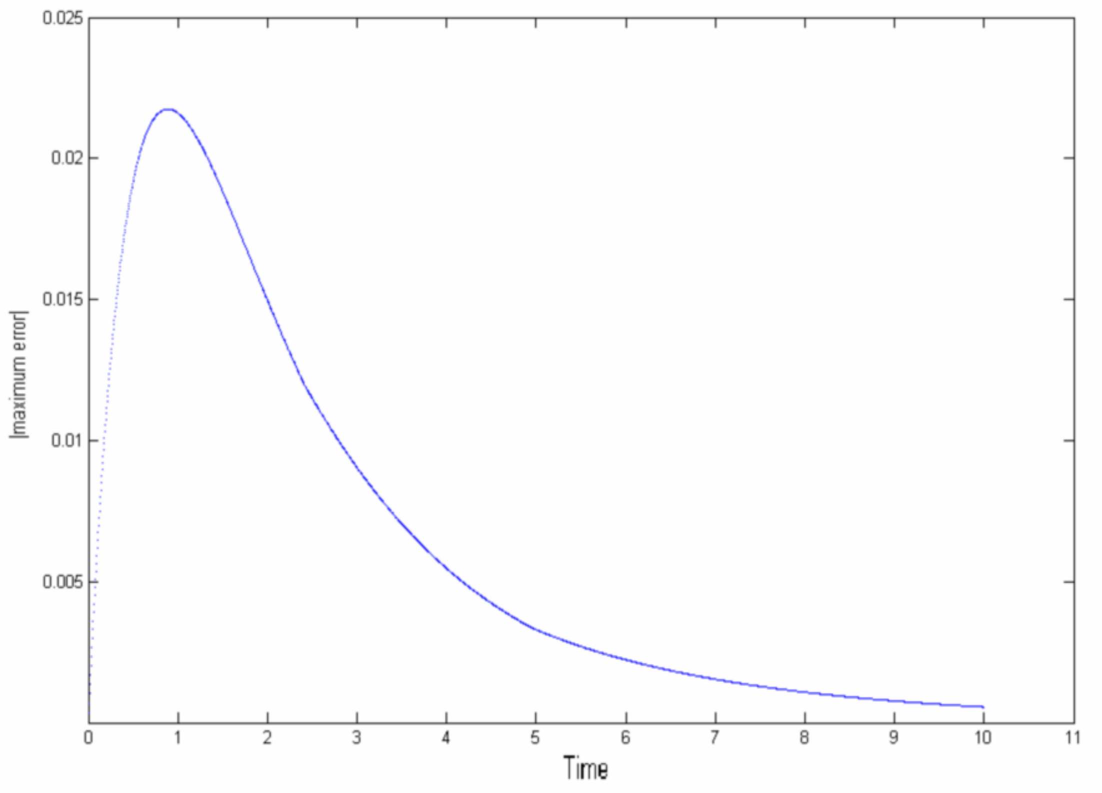
۵-۸-۱- معادله نفوذ وابسته به زمان

حل معادله ناویر استوکس (۴-۱) با توجه به پیشرفت در زمانی در برنامه عددی با حل واقعی معادله نفوذ تست شده است. معادله نفوذ مربوط به حالتی است که $H = 0$ است. یک حل خاص برای معادله نفوذ به صورت زیر است [7].

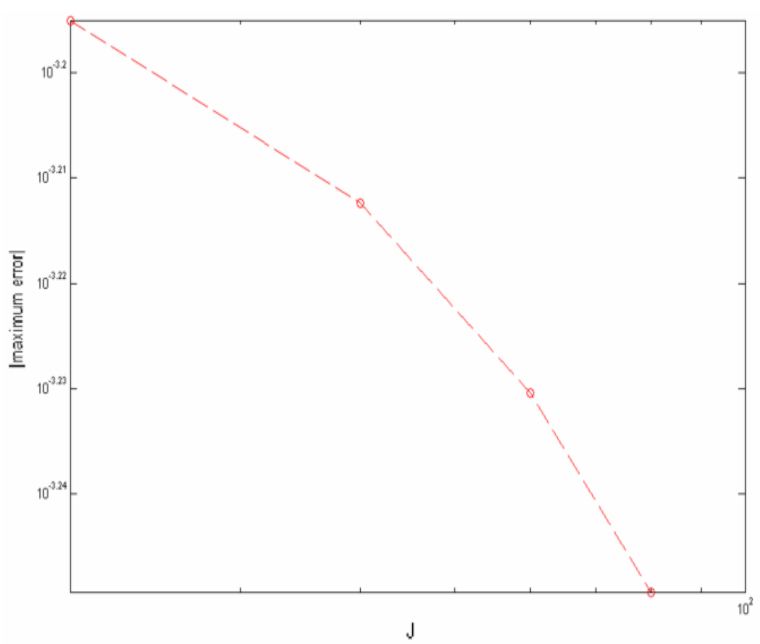
$$u(x,y,t) = \cos(x) \times \frac{y-1}{(1+\frac{4t}{\mathrm{Re}})^{1.5}} \times \exp(-2t/\mathrm{Re}) \times \exp(-\frac{(y-1)^2}{(1+\frac{4t}{\mathrm{Re}})}) \qquad (۲۹-۵)$$

برای انجام این تست، شرایط اولیه با استفاده از معادله (۵-۲۹) در لحظه $t = 0$ به دست می آید.

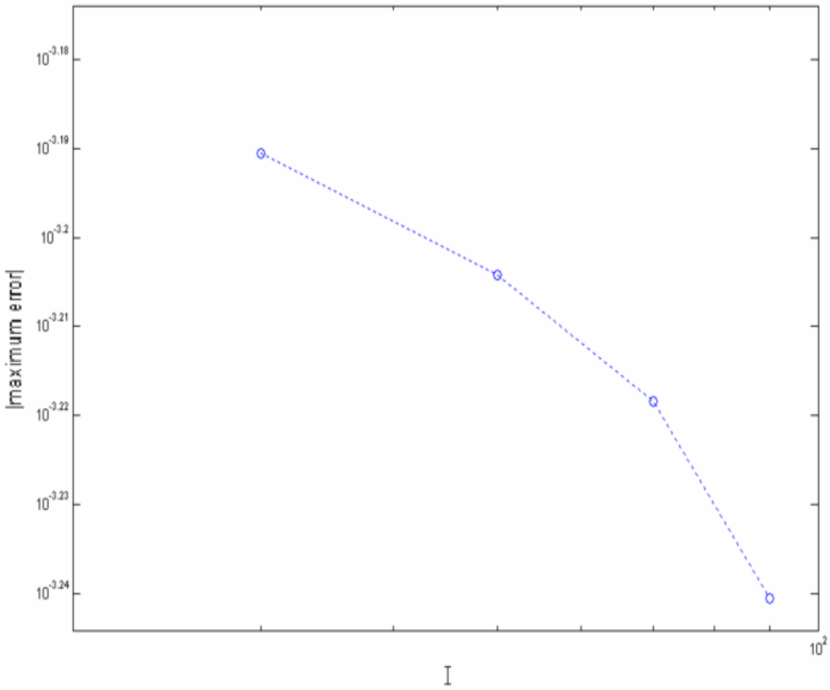
شرایط مرزی مورد نیاز نیز از معادله فوق در ایستگاه $x = 0$ تامین می شود. در ضمن شرط مرزی خروجی جابجایی و تشکیل جمله‌های غیر خطی در این تست نمی‌توانند ارزیابی شوند. ولی حل معادله پواسون و کیفیت پیشرفت در زمان ارزیابی می‌شوند. توجه کنید که u شرط پایداری را ارضاء می‌کند و حل می‌تواند برای شبیه سازی جریان لایه اختلاطی کاملاً لزج مورد استفاده قرار گیرد. پارامترها در این تست به صورت $L_x = 2\pi/3$، $\beta = 4$، $\mathrm{Re} = 10$، $t = 20$، $Nx = 100$ و $Ny = 100$ می‌باشند. با در نظر گرفتن این پارامترها جواب عددی در داخل دامنه به دست آمده است. این جواب را می توان با مقدار دقیق آن که از معادله (۵-۲۹) به دست می آید، مقایسه نمود که در شکل های ۵-۱۰، ۵-۱۱ و ۵-۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۵-۱۰: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از زمان.



شکل ۵-۱۱: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت x.



شکل ۵-۱۲: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت y.

۵-۸-۲- گردابه های استوارت

استوارت[1]درسال ۱۹۶۷ یک حل دقیق برای معادله ناویر استوکس غیر لزج[2] برای لایه‌های اختلاطی دوبعدی معرفی کرد. جریان در جهت اصلی جریان پریودیک بوده که با سرعت متوسط لایه c، به سمت پایین دست جریان حرکت می‌کند. حل به صورت تابع جریان ψ است که مولفه‌های سرعت $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ و $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ است [7].

$$\psi(x, y, t) = cy + \ln(a\cosh(y - y_0) + b\cos(x - ct)) \qquad (۳۰-۵)$$

در اینجا $b = \sqrt{a^2 - 1}$. در این تست تشکیل جمله لزج تست نمی‌شود ولی برای ارزیابی تشکیل جمله‌های غیرخطی و پیشروی محاسبات در زمان مناسب است.

1- Stewart
2- inviscid

مؤلفه‌های سرعت v,u و همچنین مؤلفه ورتیسیته ω_y، با مشتق‌گیری از رابطه فوق بدست می‌آیند.

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=c+\frac{a\sinh(y-y_0)}{a\cosh(y-y_0)+b\cos(x-ct)} \qquad (۳۱-۵)$$

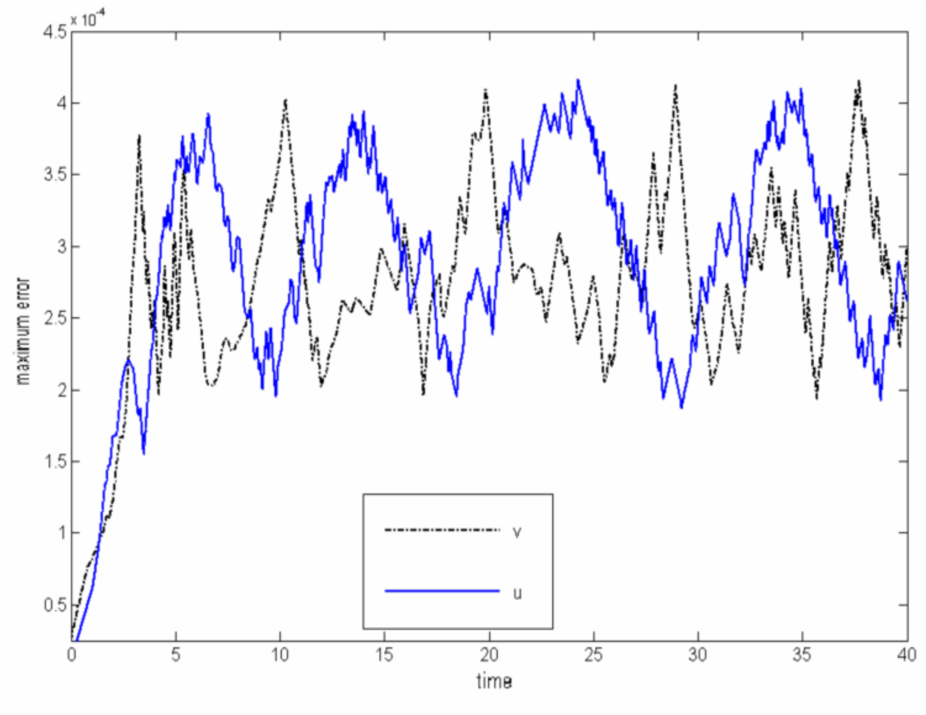
$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{b\sin(x-ct)}{a\cosh(y-y_0)+b\cos(x-ct)} \qquad (۳۲-۵)$$

$$\omega_y=\frac{1}{[a\cosh(y-y_0)+b\cos(x-ct)]^2} \qquad (۳۳-۵)$$

به این نکته بایستی توجه شودکه مولفه سرعت در جهت جریان نمی تواند حل پایداری داشته باشد. برای رفع این مشکل $\tanh(y-y_0)$ را به آن اضافه و کسر می‌کنیم. قسمت پایدار آن یعنی $a\sinh(y-y_0)/(a\cosh(y-y_0)+b\cos(x-ct))-\tanh(y-y_0)$ را به صورت شرط اولیه و شرط مرزی ورودی در نظر می‌گیریم و باقیمانده عبارت به عنوان جریان اولیه محسوب می‌شود.

پارامترها به صورت $L_x=2\pi$ و $\beta=3$ و $\mathrm{Re}=10^9$ و $c=1$ و $b=0.5$ در نظر گرفته می‌شود تا جریان بصورت موثر ایده‌آل باقی بماند. به عبارت دیگر با در نظر گرفتن $\mathrm{Re}=10^9$ جمله غیر خطی در مقایسه با جمله لزجتی کاملاً غالب خواهد بود.

شکل ۵-۱۳ دقت حل وابسته به زمان را برای u و v نشان می‌دهد.



شکل ۵-۱۳: ماکزیمم خطا در u و v برای تست گردابه های استوارت به صورت تابعی از زمان.

فصل ششم

جریان لایه اختلاطی آرام

۶-۱- مقدمه

لایه بدون برش توسط دیوار محصور نمی شوند و در یک سیال باز ایجاد شده و گسترش می یابد. آنها گرادیان های سرعتی دارند که توسط مکانیزم هایی از بالا دست ایجاد می شوند، و توسط انتشار لزجت از بین می روند. سه مثال از این جریان ها عبارتند از:

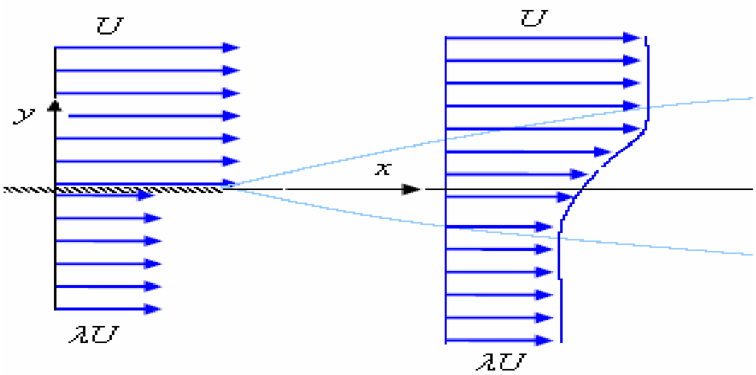
(۱) لایه بدون برش بین جریان های موازی در حال حرکت (جریان لایه اختلاطی)

(۲) جریان جت

(۳) دنباله ای که پشت یک جسم غوطه ور در یک جریان ایجاد می شود.

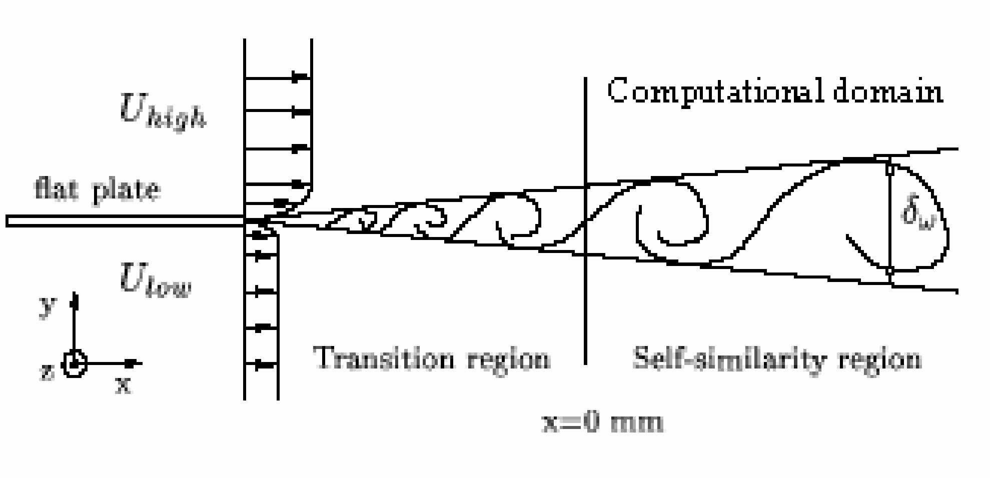
درست در پایین دست، اختلالی که باعث ایجاد گرادیان سرعت شده است (نقطه برخورد دو جریان، خروجی جت، پشت جسم غوطه ور) جریان در حال گسترش و غیر متشابه می باشد. اما کمی دورتر در پایین دست، جریان متشابه خواهد بود و پروفیل های سرعت همگی در صورت انتخاب مقیاس مناسب، شبیه به هم خواهند بود [۲۲]. حالت اول که همان جریان لایه اختلاطی می باشد، در این فصل و فصل بعدی مورد مطالعه قرار گرفته است.

شلیختینگ حل معادله لایه مرزی را برای لایه اختلاطی دو بعدی بین دو جریان با سرعتهای مختلف را به صورت تحلیلی انجام داد [2]. وی فرض کرد که ابتدا دو جریان بصورت موازی و با سرعتهای مختلف U_1 و U_2 در $x = 0$ با یکدیگر مخلوط می‌شوند. جریانها بدون اغتشاش در نظر گرفته شده‌اند. برای مقادیر کم لزجت ν، انتقال مومنتوم بین سرعتها، در یک ناحیه اختلاطی باریک رخ می‌دهد، بطوریکه در این لایه مولفه سرعت در جهت عمود بر جریان v، در مقایسه با مولفه سرعت در جهت اصلی جریان u، کوچک می‌باشد (شکل ۶-۱). بنابراین معادله لایه مرزی بدون مولفه فشار، معتبر خواهد بود. بنابراین با بی بعد سازی متغیرها، یک حل تشابهی برای این مساله وجود دارد (شکل۶-۲).



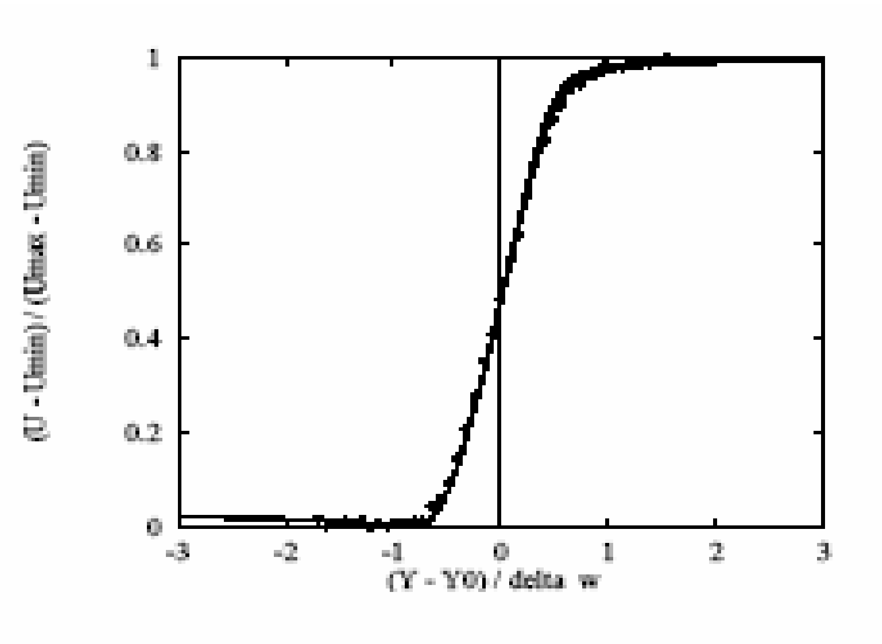
شکل۶-۱: پروفیل سرعت در لایه اختلاطی.

پروفیل سرعت ورودی جریان لایه اختلاطی در وضعیتی که از ابتدای تکامل لایه فاصله دارد، بر روی دامنه محاسباتی اعمال می‌شود. در این ناحیه با توسعه یافته شدن جریان، رفتار خودتشابهی برای جریان قابل بررسی می باشد.



شکل۶-۲: هندسه لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی [2].

شکل ۶-۳ توزیع سرعت جریان لایه اختلاطی را در دستگاه مختصات خودتشابه نشان می‌دهد. در اینجا از δ_ω و $\Delta U = U_{high} - U_{low}$ به ترتیب برای بی بعدسازی طول و سرعت استفاده شده است.



شکل ۶-۳: توزیع سرعت در جریان اختلاطی در دستگاه مختصات خود تشابه برای ایستگاههای مختلف جریان [2].

۶-۲- شبیه سازی جریان لایه اختلاطی آرام

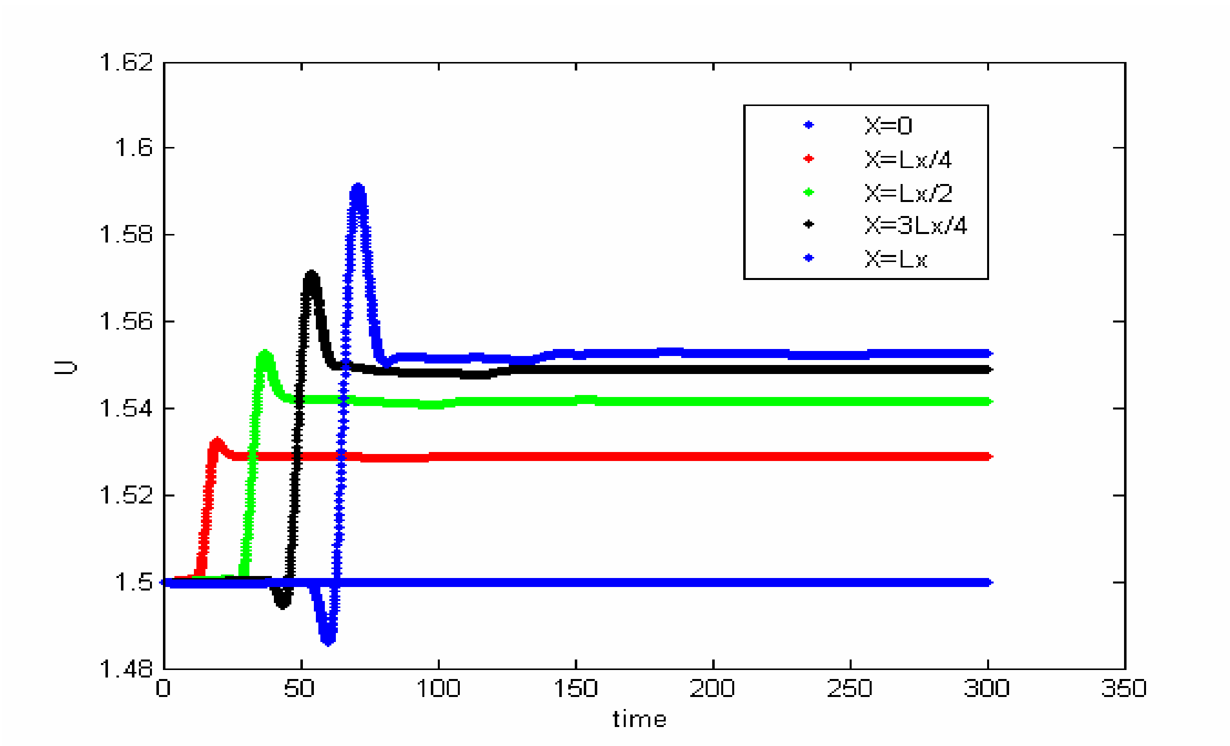
برای شبیه سازی جریان لایه اختلاطی بدون اغتشاشات ورودی، دامنه محاسباتی بصورت $0 \le x \le 100$ و $-\infty < y < +\infty$ در نظر گرفته شده‌است. نسبت سرعت برای اینحالت، $\left(r \equiv U_2/U_1\right)$، برابر با 0.5 فرض شده‌است. این مقدار بیانگر یک شدت برش مابین حالت لایه اختلاطی یک جریانه[1] و حالت جریان دنباله صفحه‌جداکننده[2] می‌باشد. مقدار سرعت متوسط برابر با $\overline{U} = \frac{U_1 + U_2}{2} = 1.5$ می باشد. پارامترهای دیگرمورد استفاده در این شبیه سازی عبارتند از: $\mathrm{Re} = 100$، $\beta = 8$، $N_x = 240$، $N_y = 100$ و $\Delta t = 0.25\Delta x$.

طبق نتایج تئوری، سرعت لحظه‌ای در هر نقطه‌ای از دامنه باید به یک حالت پایدار برسد. این موضوع کاملأ و به وضوح در شکل های ۶-۴ و ۶-۵ نشان داده شده است که تاریخچه ای از سرعت های U و V در مکان های معادل و متساوی در جهت جریان نمایش داده شده‌است.

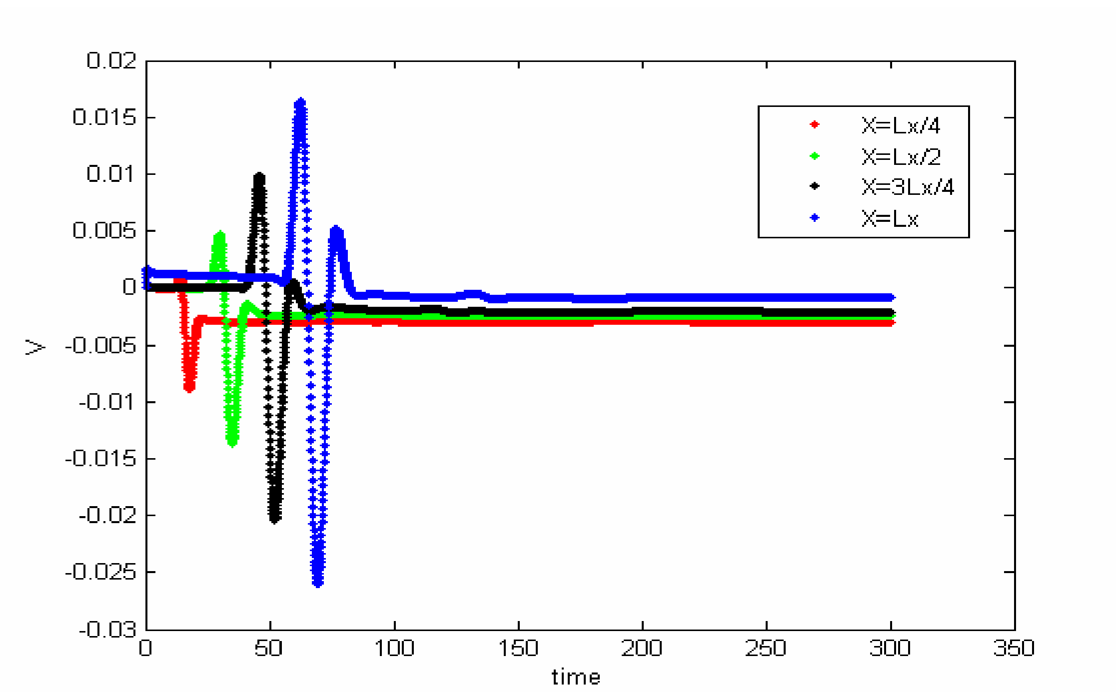
همچنین مطابق نتایج تئوری می دانیم که برای جریان لایه اختلاطی با پروفیل سرعت تانژانت هایپربولیک، وقتی‌که سرعت ها به‌وسیله اختلاف سرعت دو جریان، ΔU، و y به وسیله ضخامت ورتیسیته، δ_ω ، بی بعد می‌شوند، پروفیل‌های سرعت دارای تشابه هندسی با هم می‌شوند. لازم به یادآوری است که رشد ضخامت ورتیسیته بصورت زیر تعریف می‌شود[3]:

$$\delta_\omega = \frac{\Delta U}{\left(\partial \bar{u} / \partial y\right)_{\max}} \qquad (۱-۶)$$

[1]- single stream
[2]- splitter plate wake

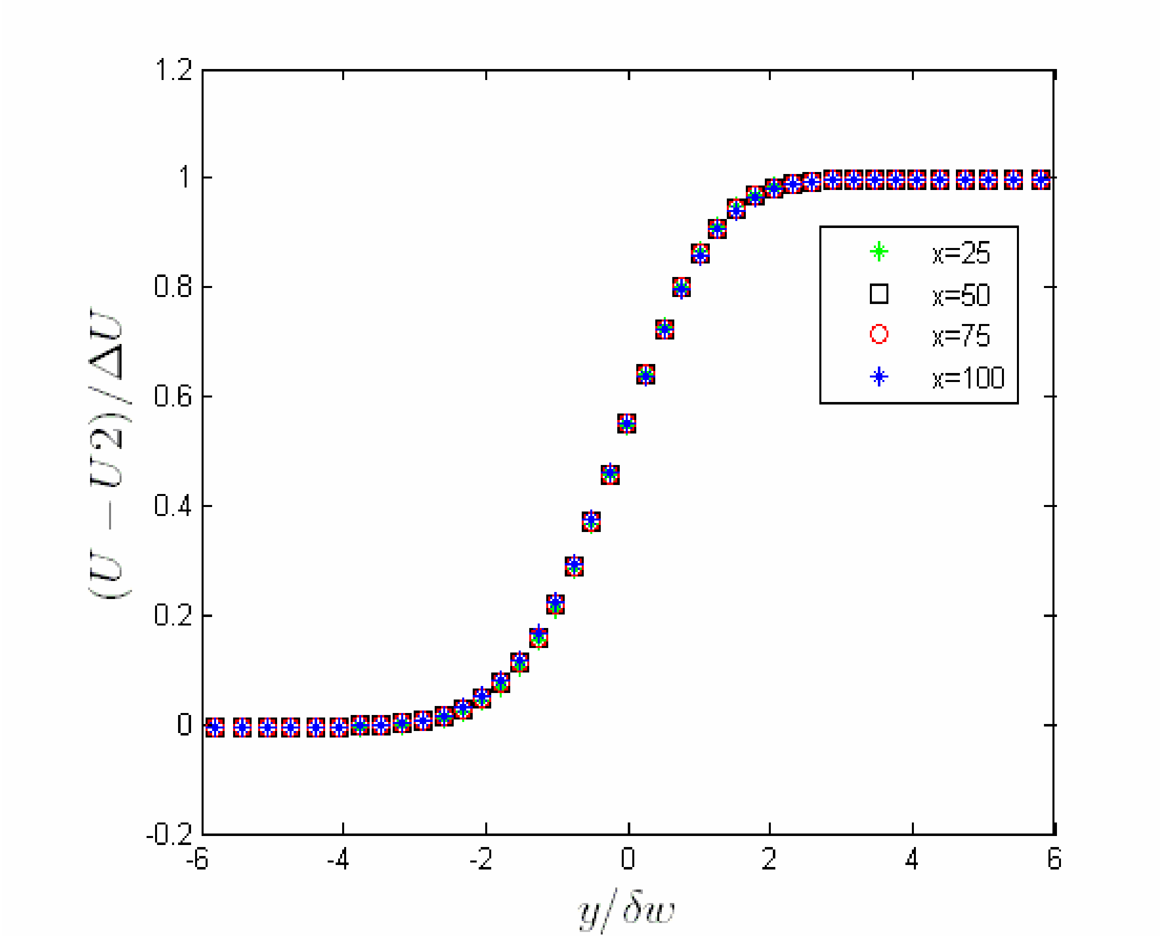


شکل ۶-۴: گذر زمانی U در ۵ فاصله مساوی در طول L_X برای شبیه سازی لایه اختلاطی بدون اغتشاش ورودی.

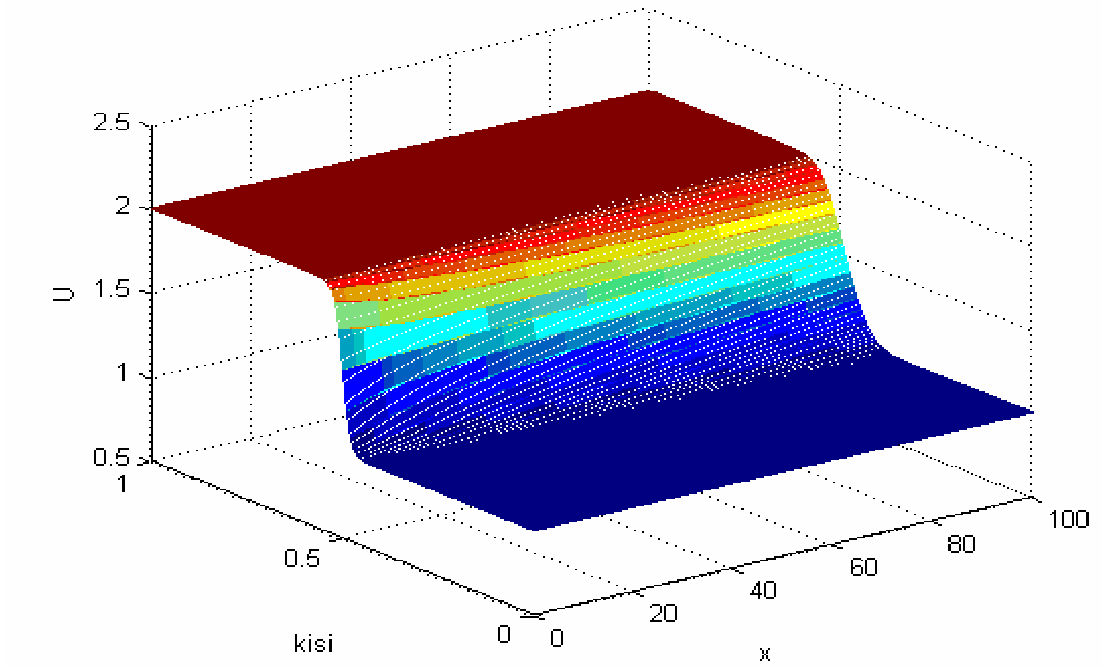


شکل ۶-۵: گذر زمانی V در ۴ فاصله مساوی در طول L_X برای شبیه سازی لایه اختلاطی بدون اغتشاش ورودی.

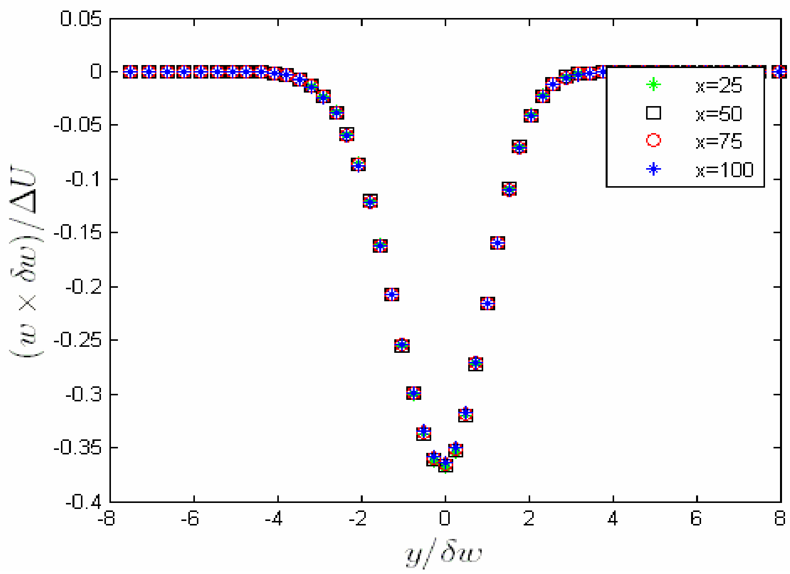
رفتار خودتشابهی سرعت جریان لایه اختلاطی آرام در شکل۶-۶ و شکل ۶-۷ برای نقاط مختلف نشان داده شده است. در شکل ۶-۸ هم می توان خاصیت خود تشابهی گردابه‌های لایه اختلاطی را دید که ω با $\delta_\omega / \Delta U$ نرمالیزه شده است.



شکل۶-۶: پروفیل سرعت U در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی لایه اختلاطی دوبعدی بدون اغتشاش ورودی.

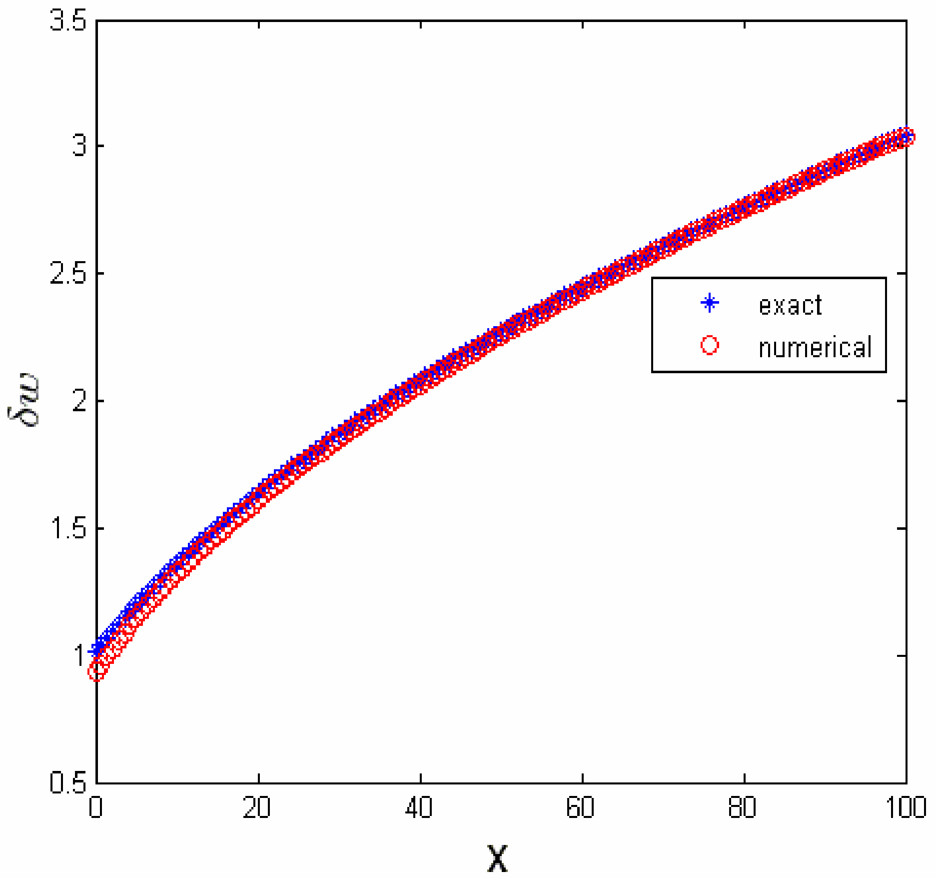


شکل ۶-۷: پروفیل سرعت U برای نگاشت $y=-\beta\cot(\pi\xi)$.



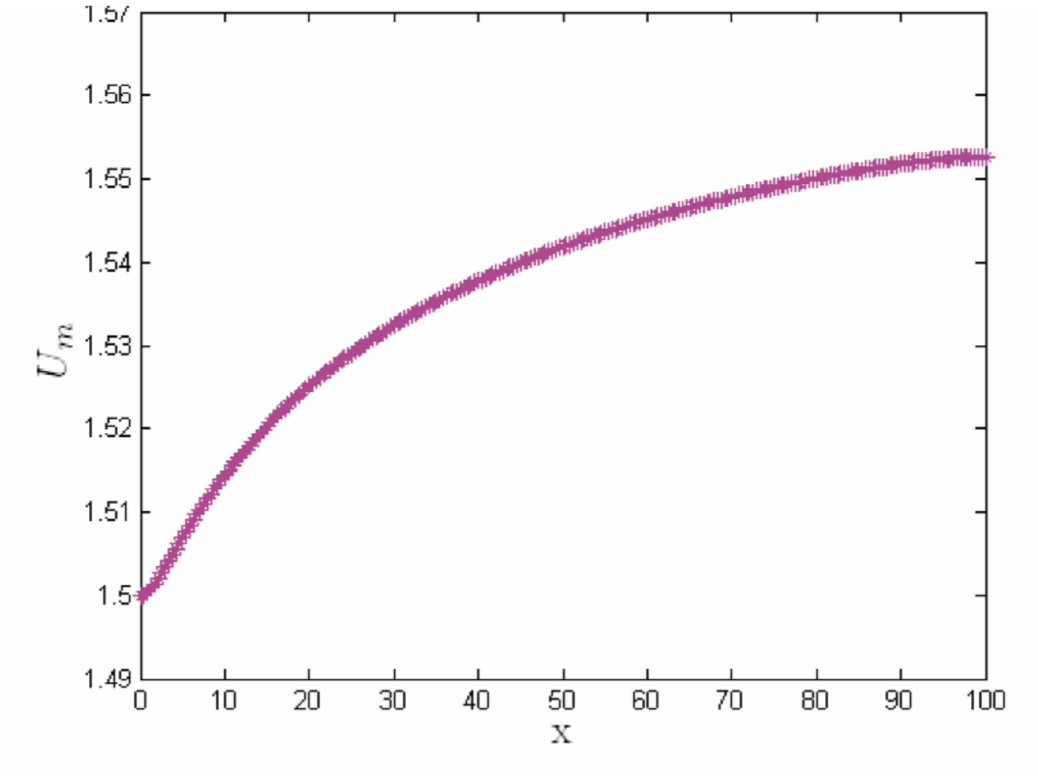
شکل ۶-۸: پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی لایه اختلاطی بدون اغتشاش ورودی.

ضخامت ورتیسیته در جریان لایه اختلاطی بدون اغتشاش ورودی متناسب با $x^{0.5}$ می‌باشد. در شکل ۹-۶ رشد ضخامت لایه اختلاطی بدست آمده از شبیه سازی با منحنی $a\sqrt{x-x_0}$ که در آن $a = 0.2875$ و $x_0 = -12.371$ می‌باشد [۲۴]، مقایسه شده‌اند. شکل بیانگر تطبیق خوب نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی با نتایج تئوری می‌باشد.



شکل۶-۹: رشد ضخامت ورتیسیته در جهت x برای جریان لایه اختلاطی بدون اغتشاش.

در شکل ۶-۱۰ نیز، سرعت خط مرکزی جریان لایه اختلاطی نشان داده شده است. این شکل نشان می دهد که سرعت مرکزی جریان اختلاطی آرام، در ابتدای بازه محاسباتی رابطه مستقیمی با x داشته اما در فواصل دورتر به سمت مقدار ثابتی میل می کند.



شکل۶-۱۰: نمایش تغییرات سرعت خط مرکزی U_m در جهت x در $y = 0$.

فصل هفتم

جریان لایه اختلاطی مغشوش

۷-۱- مقدمه

جریان های لایه ای یک نقطه ضعف بزرگ دارند و آن هم این است که مقاومت این جریان ها در مقابل عددهای رینولدز بالا، اندک است. برای تمامی جریان های لایه ای، یک مقدار محدود عدد رینولدز وجود دارد که به ازای آن، این رژیم جریان از بین خواهد رفت. این عدد که عدد رینولدز بحرانی نامیده می شود، مقدار بسیار بزرگی هم نیست، به گونه ای که لایه ای بودن جریان در بیشتر مسایل مهندسی یک نوع استثنا به شمار می آید.

در عددهای رینولدز بالا جریان همیشه مغشوش است، یعنی بی نظم، تصادفی و ناپایدار بوده و به دست آوردن پاسخ های تحلیلی دقیق برای آنها تقریبا امکان پذیر نیست. پس جریان لایه ای پس از مدتی ناپایدار می شود و عدد رینولدز آن هم از مرتبه ای است که جریان های سیال با لزجت پایین (آب، جیوه، آمونیاک، گازها و ...) معمولا مغشوش می باشند [20].

در این قسمت با افزایش عدد رینولدز و قرار دادن یک اغتشاش در ورودی، جریان لایه ای منظم را به جریان مغشوش تبدیل می کنیم. این اغتشاش بر روی سرعت v اعمال می گردد (زیرا برای مولفه v به عنوان شرط مرزی ورودی، قیدی به عنوان شرایط حل پذیری وجود ندارد.) که به صورت زیر می باشد:

$$v = -A \times e^{\left(-y^2\right)} \times \sin\left(\omega t\right) \qquad (۱-۷)$$

در فرمول فوق ω فرکانس نوسانات و A دامنه نوسانات است. با توجه به این معادله، شرایط مرزی برای u با قرار دادن $x = 0$ در معادلات (۴-۱۹) به دست می آید که در آن $A = 10^{-4}$ و $\omega = c = 0.5$ در نظر گرفته شده است.

چنانچه اختلال را بر روی مولفه u بخواهیم انجام دهیم، در آن صورت شرط زیر در تمام ایستگاه های دامنه محاسباتی بایستی لحاظ گردد که به شرط حل پذیری[1] معروف است [7].

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\right)dy \qquad (۲-۷)$$

با حل انتگرال فوق خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dy + v\left(+\infty\right) - v\left(-\infty\right) = 0 \qquad (۳-۷)$$

با توجه به اینکه سرعت در مثبت بینهایت و منفی بینهایت برابر صفر می باشد، داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dy = 0 \qquad (۴-۷)$$

یک راه ساده برای اعمال شرایط مرزی فوق در نظر گرفتن تابع پاد متقارن برای u می باشد.

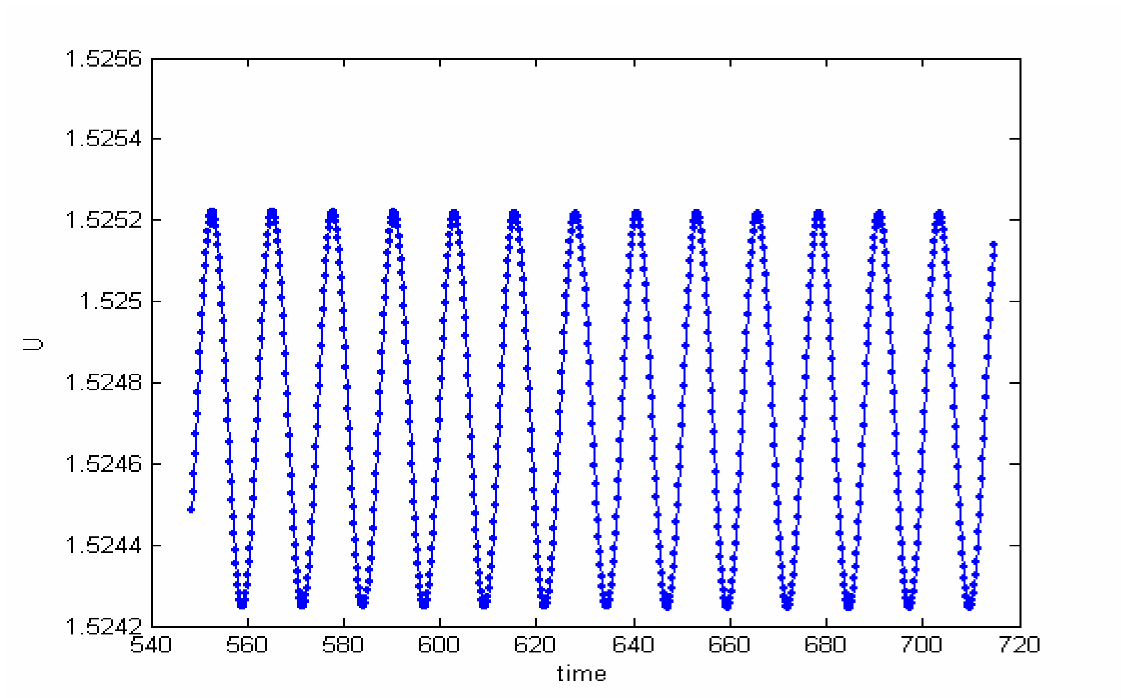
[1]- solvability condition

۷-۲- نتایج شبیه سازی

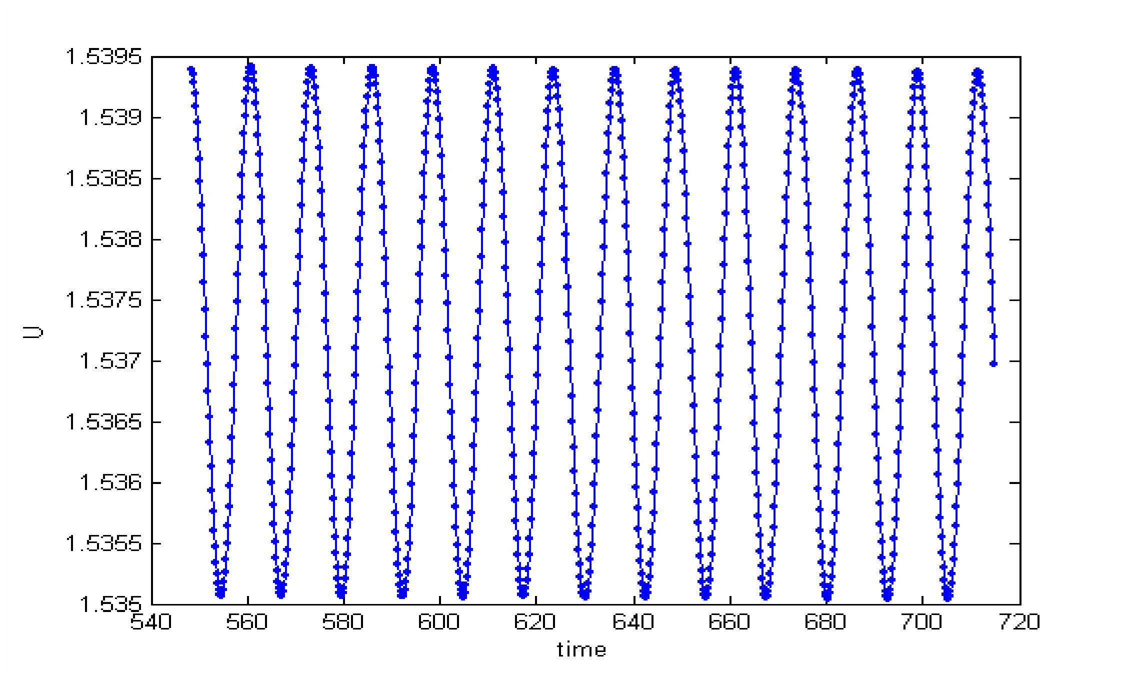
در این قسمت نتایج شبیه سازی مستقیم عددی برای لایه اختلاطی همراه با اغتشاشات ورودی شرح داده می‌شود. به دلیل اینکه فرکانس اغتشاشات قرار داده شده در ورودی جریان ثابت است و با گذشت زمان $\overline{U}$ و $\overline{V}$ به مقدار ثابتی می رسد، می توان نتیجه گرفت که سرعت لحظه ای در شبیه سازی همراه با اغتشاشات به صورت آماری ساکن است[1]. گذر زمانی U و V در ۴ فاصله مساوی در جهت طول L_x و مرکز لایه در شکل‌های ۷-۱ تا ۷-۸ نشان داده‌اند. همچنین گذر زمانی U و V در $(x_1, y_1) = (200, 7.8802)$ و $(x_1, y_1) = (20, 7.8802)$ در شکلهای ۷-۹ و۷ -۱۰ نشان داده شده است.

با توجه این شکل ها می‌توان ملاحظه کرد که مولفه های سرعت U و V به یک حالت پایدار آماری رسیده‌اند و مقادیر متوسط آنها به لحاظ آماری نسبت به زمان تغییراتی ندارد. همچنین می‌توان مشاهده نمود که تغییرات زمانی لایه کاملاً پریودیک می‌باشد که این بخاطر نیروی خارجی اعمالی در ابتدای لایه می‌باشد.

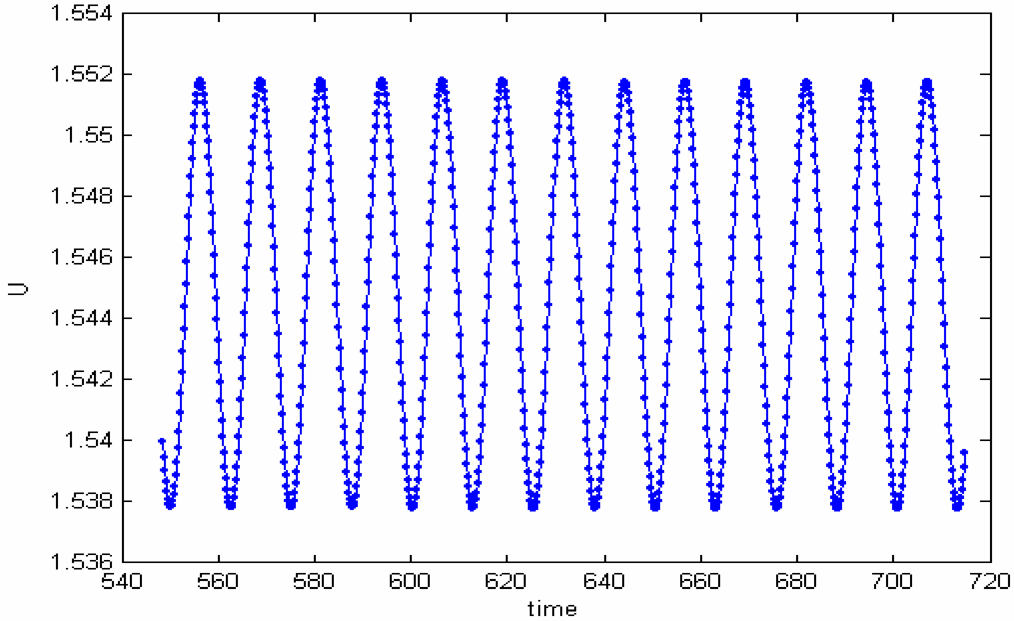
[1]- stationary steady



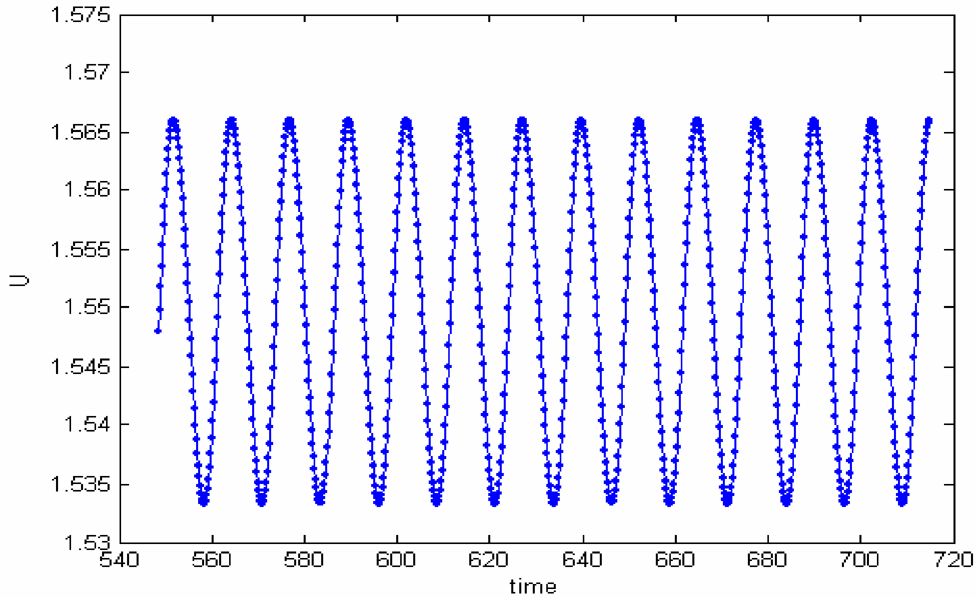
شکل ۷-۱: گذر زمانی U در $x = 50$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی.



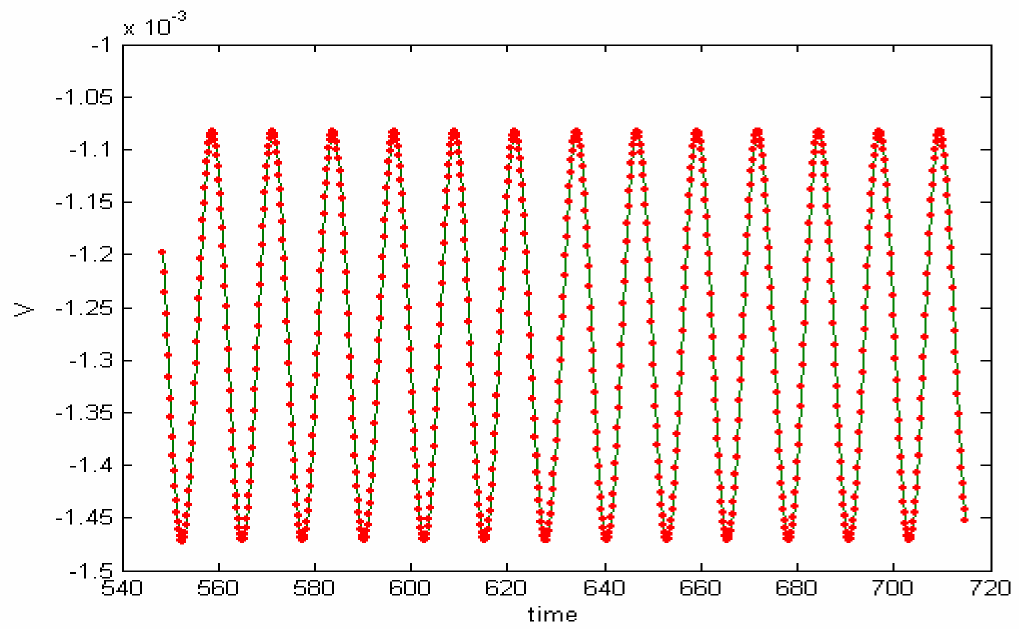
شکل ۷-۲: گذر زمانی U در $x = 100$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی.



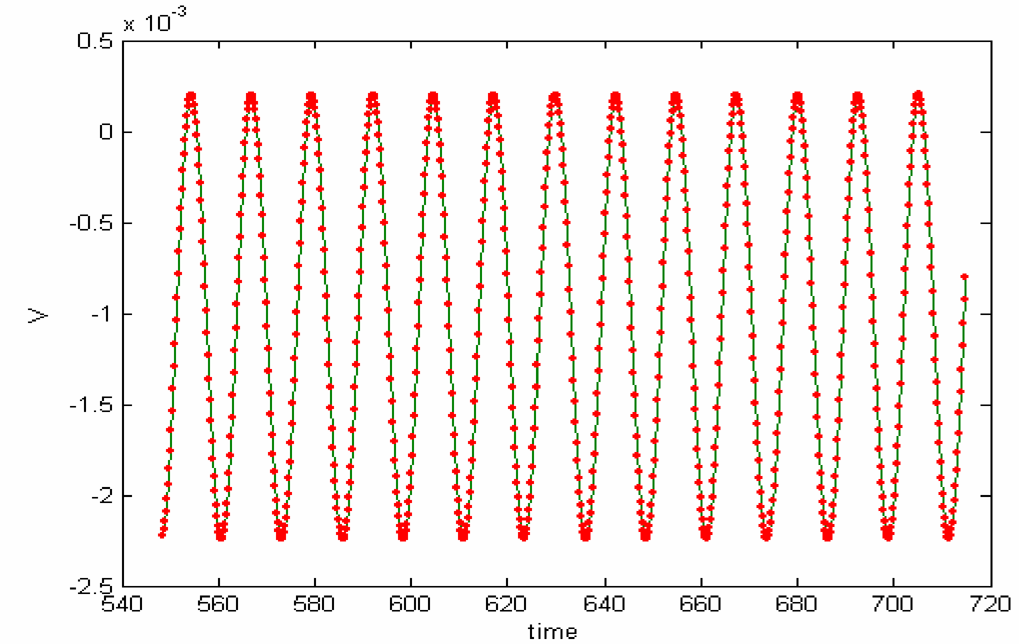
شکل ۷-۳: گذر زمانی U در $x = 150$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی.



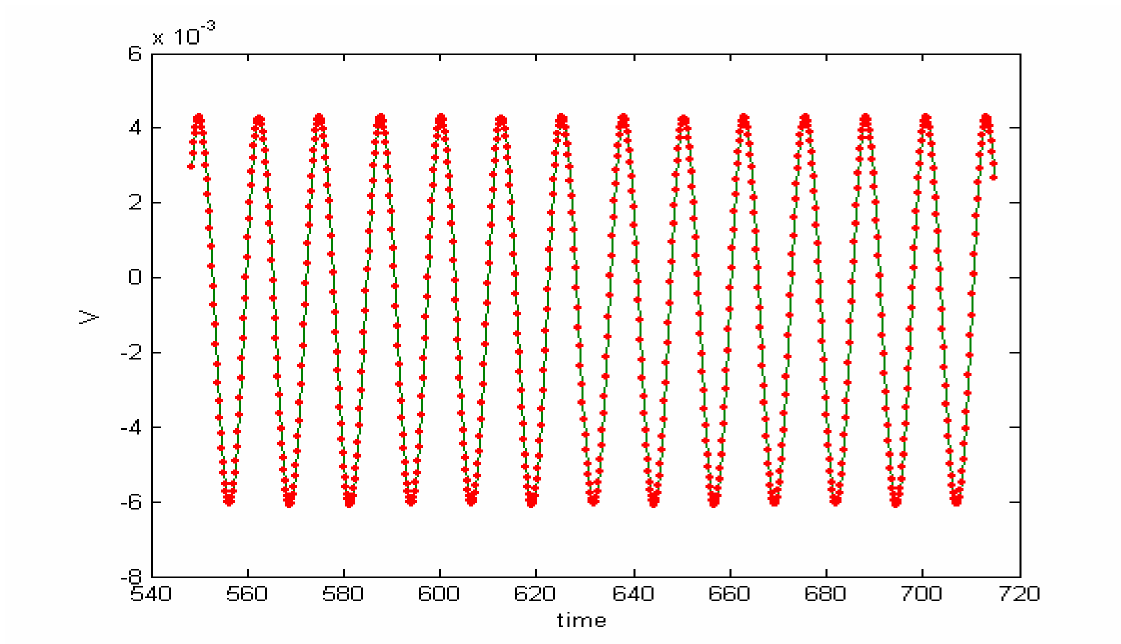
شکل ۷-۴: گذر زمانی U در $x = 200$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی.



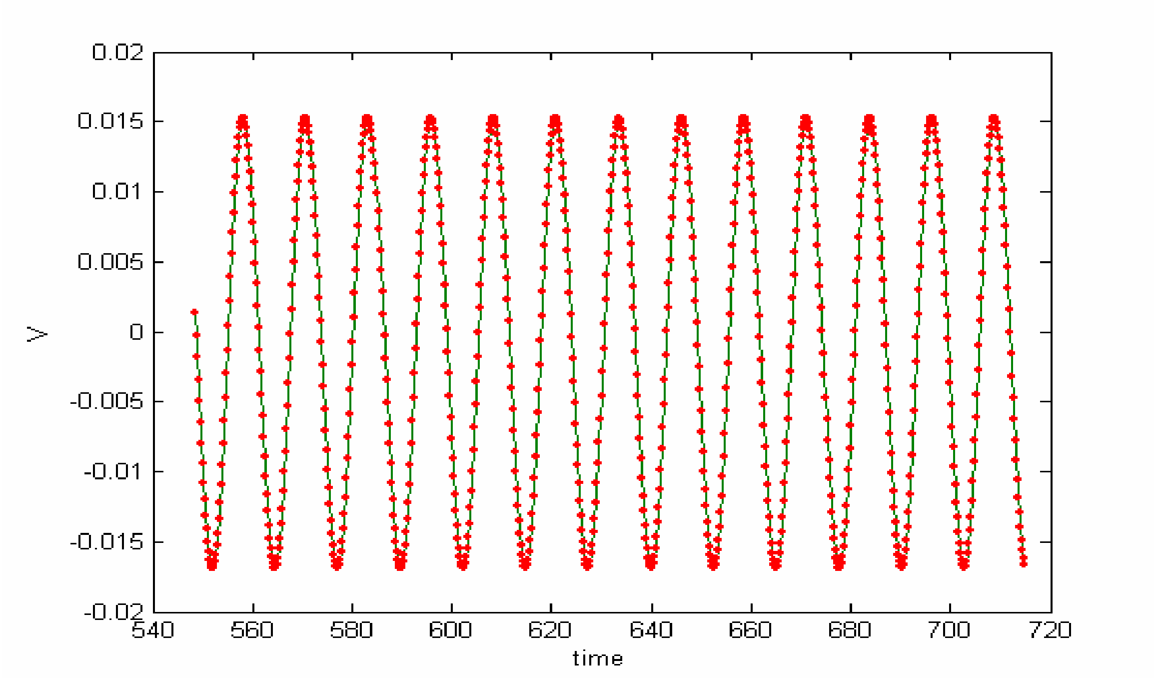
شکل ۷-۵: گذر زمانی V در $x = 50$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی.



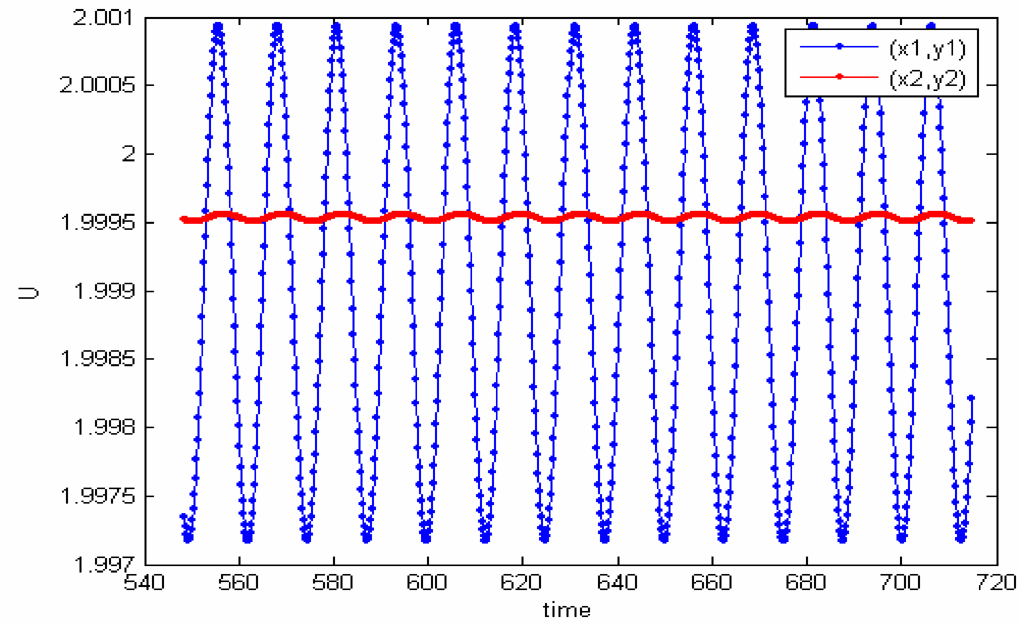
شکل ۷-۶: گذر زمانی V در $x = 100$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی.



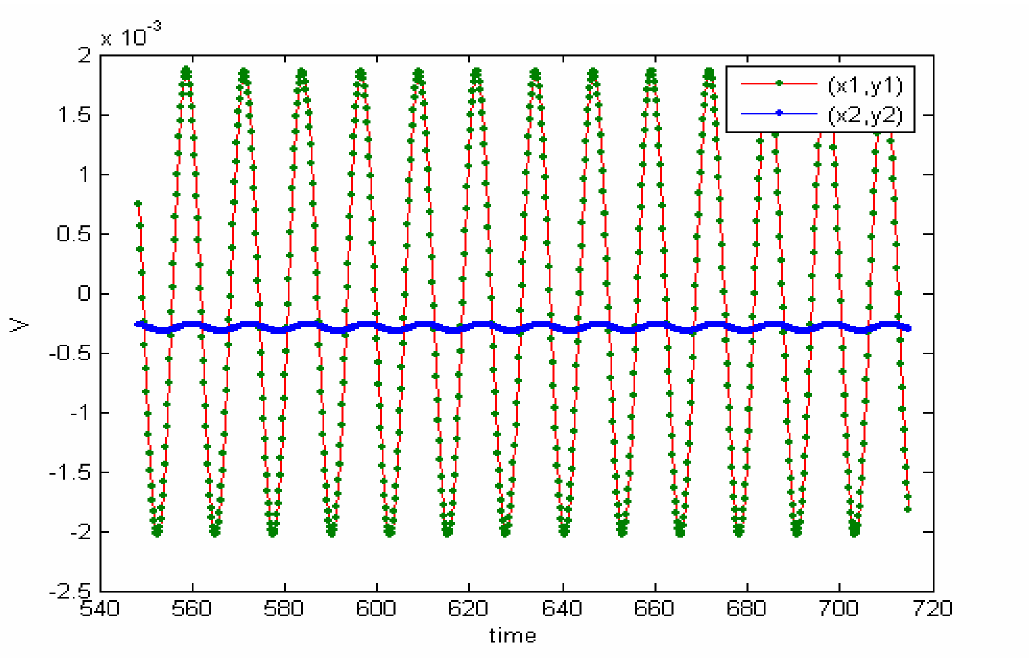
شکل ۷-۷: گذر زمانی V در $x = 150$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی.



شکل ۷-۸: گذر زمانی V در $x = 200$ و $y = 0$ برای شبیه سازی لایه اختلاطی همراه با اغتشاش ورودی.



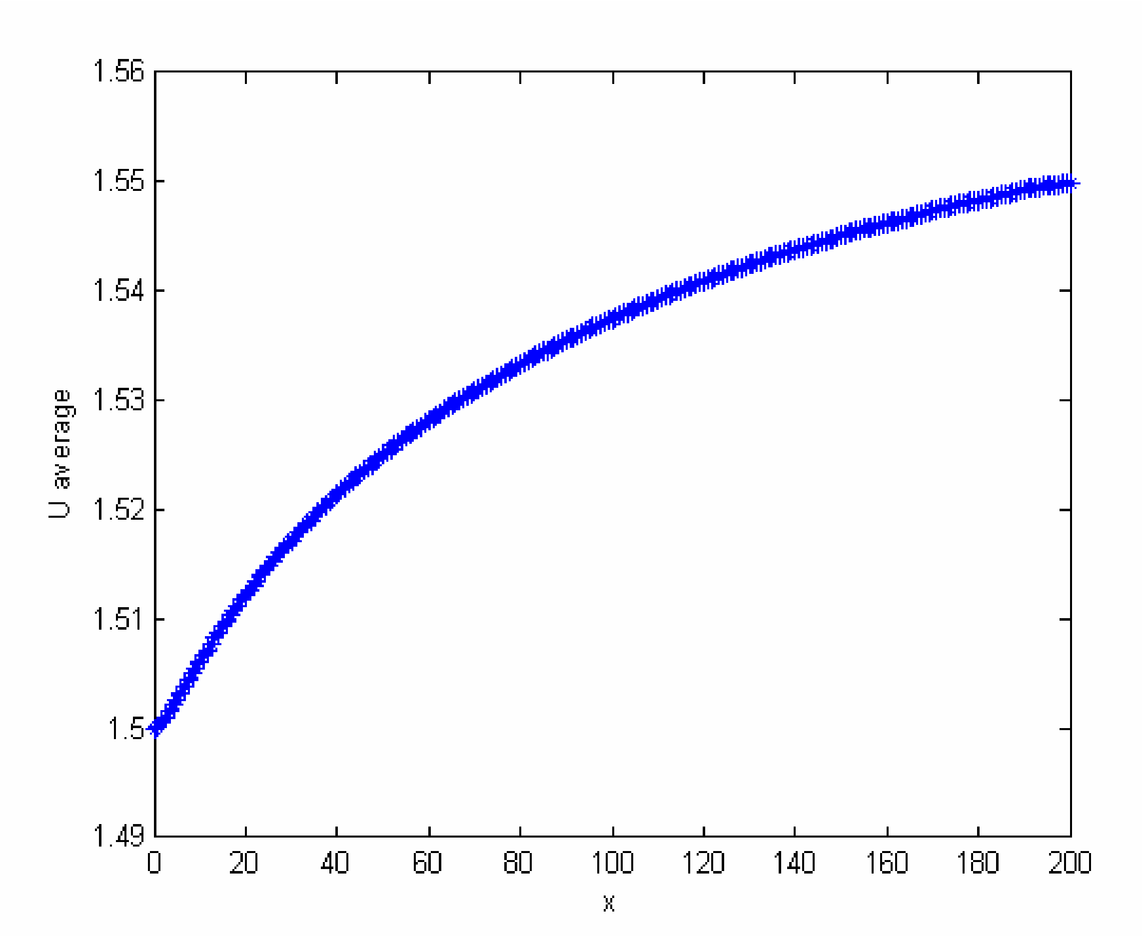
شکل ۷-۹: گذر زمانی U در $(x_1,y_1)=(200,7.8802)$ و $(x_2,y_2)=(20,7.8802)$ برای جریان مغشوش.



شکل ۷-۱۰: گذر زمانی V در $(x_1,y_1)=(200,7.8802)$ و $(x_2,y_2)=(20,7.8802)$ برای جریان مغشوش.

از تمامی شکل های ۵-۱ تا ۵-۱۰ می توان نتیجه گرفت که مولفه های سرعت u و v به یک مقدار ثابت رسیده اند و حول این مقدار نوسان می کنند.

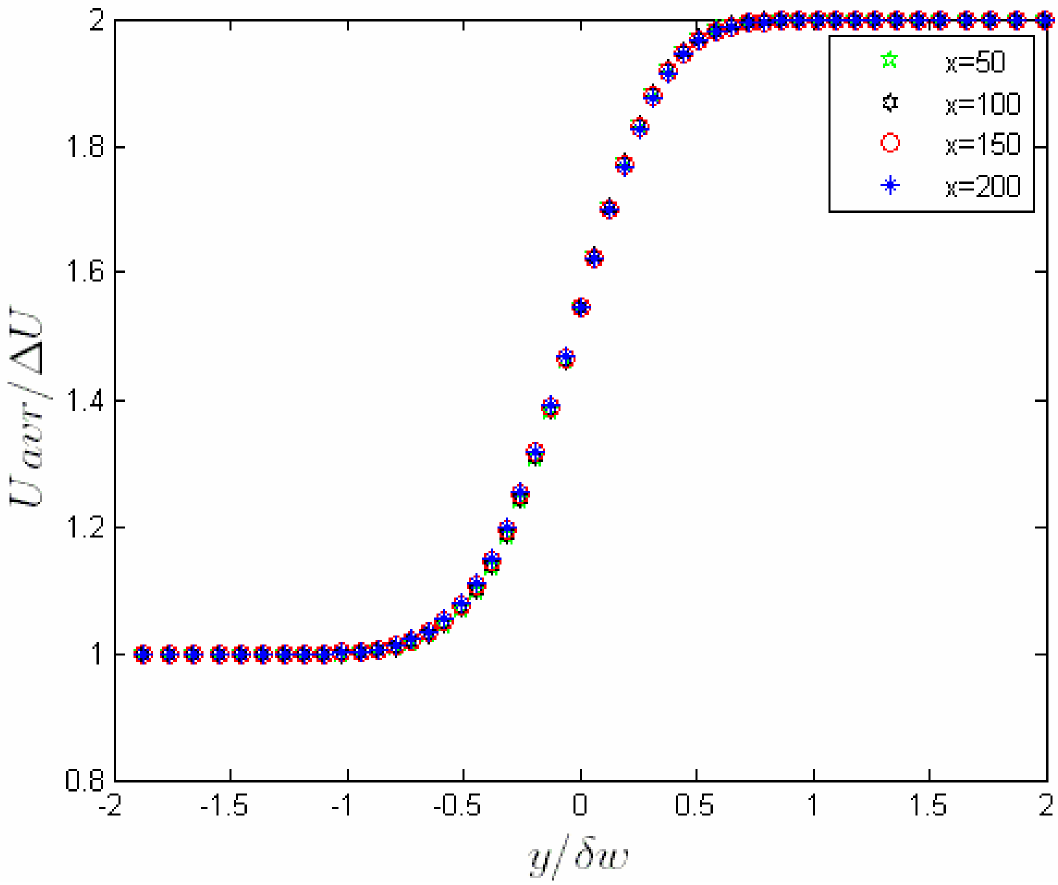
در شکل ۷-۱۱ سرعت متوسط در مرکز محور y بر حسب x ترسیم شده است. بر اساس این شکل می توان نتیجه گرفت که سرعت متوسط در خط مرکزی در ابتدا رابطه مستقِم با x داشته و بعد از مدتی به مقدار ثابتی می رسد که شبیه نمودار سرعت در جریان لایه ای می باشد.



شکل ۷-۱۱: نمودار سرعت متوسط برای جریان اختلاطی با اغتشاش ورودی در $y = 0$.

۷-۳- بررسی خود تشابهی و توزیعات تنش رینولدز

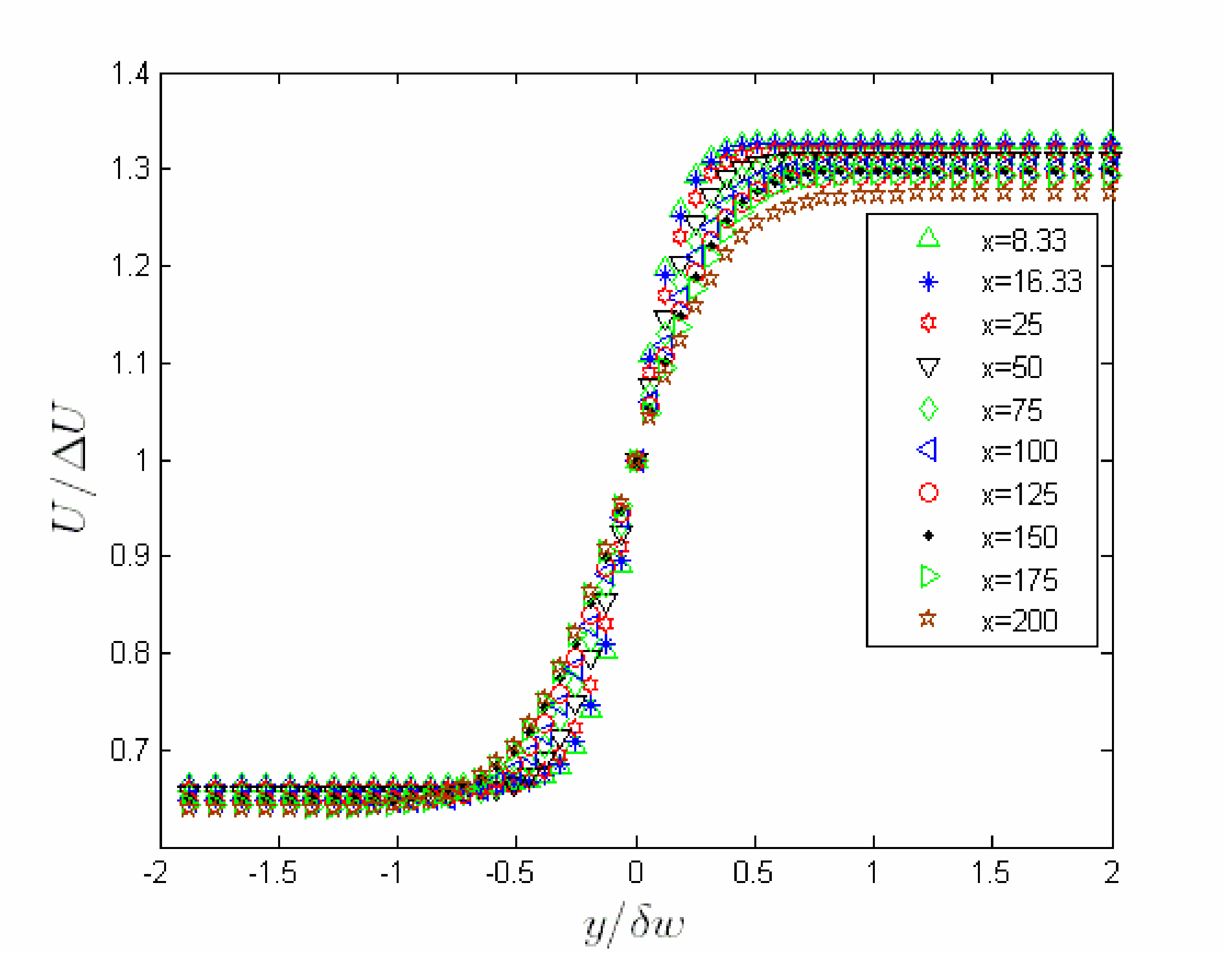
در شکل ۷-۱۲ سرعت متوسط در جهت جریان در مختصات خود تشابهی در ایستگاه های مختلف نشان داده است. این شکل نشان دهنده خاصیت خود تشابهی در سرعت متوسط می باشد.



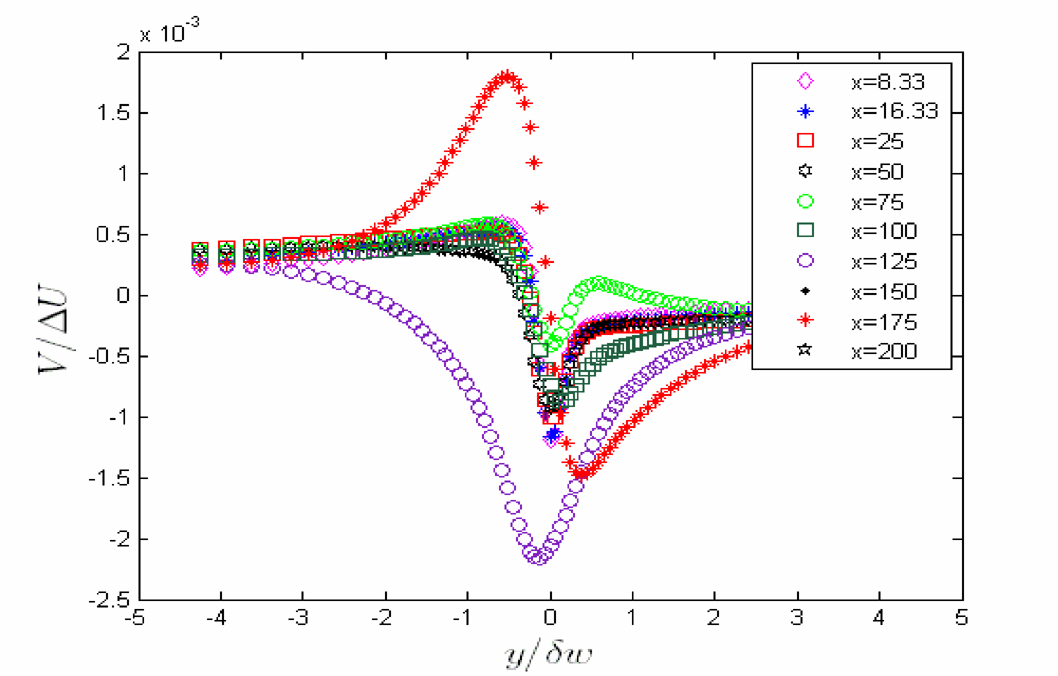
شکل۷-۱۲: پروفیل سرعت U در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی لایه اختلاطی دو بعدی با اغتشاش ورودی.

اشکال ۷-۱۳ و ۷-۱۴ و ۷-۱۵ نیز نتایج شبیه سازی را به ترتیب برای سرعت لحظه ای در جهت x و y و ورتیسیته در جهت جریان اصلی در مختصات خود تشابهی در ایستگاههای مختلف نشان می‌دهد.

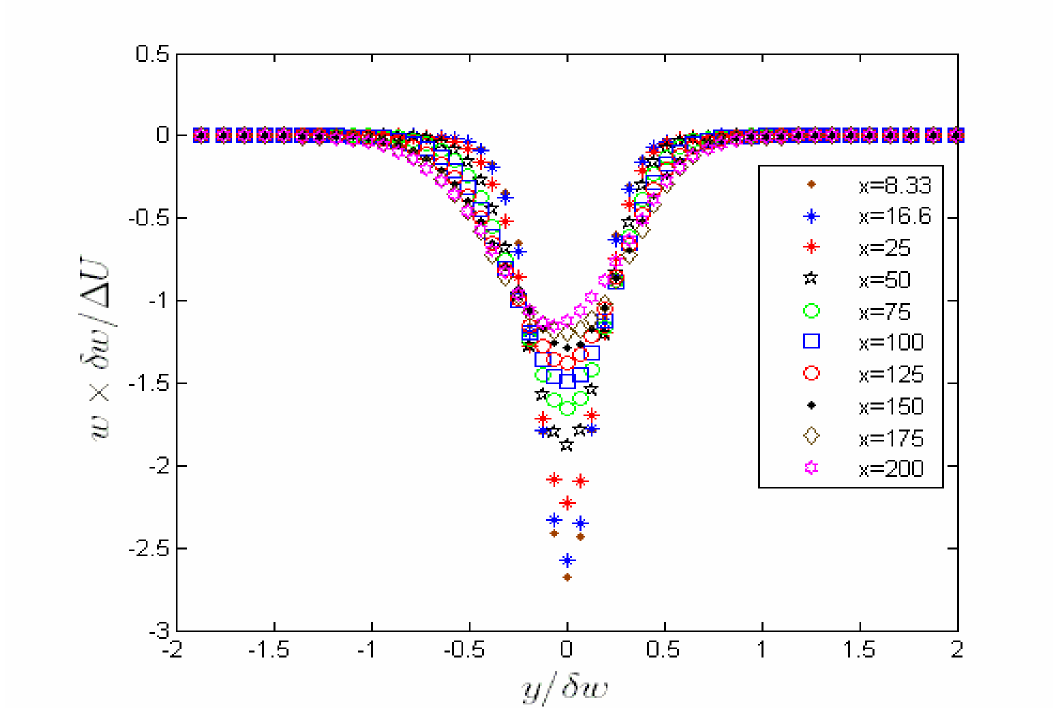
همانطور که از این اشکال مشاهده می‌شود، برخلاف سرعت متوسط، سرعت لحظه ای u و v و ورتیسیته لایه اختلاطی بطور کامل خود متشابه نمی‌باشد، که این بدلیل نیروی خارجی اعمالی در ورودی جریان می‌باشد.



شکل۷-۱۳: پروفیل سرعت U در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه اختلاطی دو بعدی با اغتشاش ورودی.

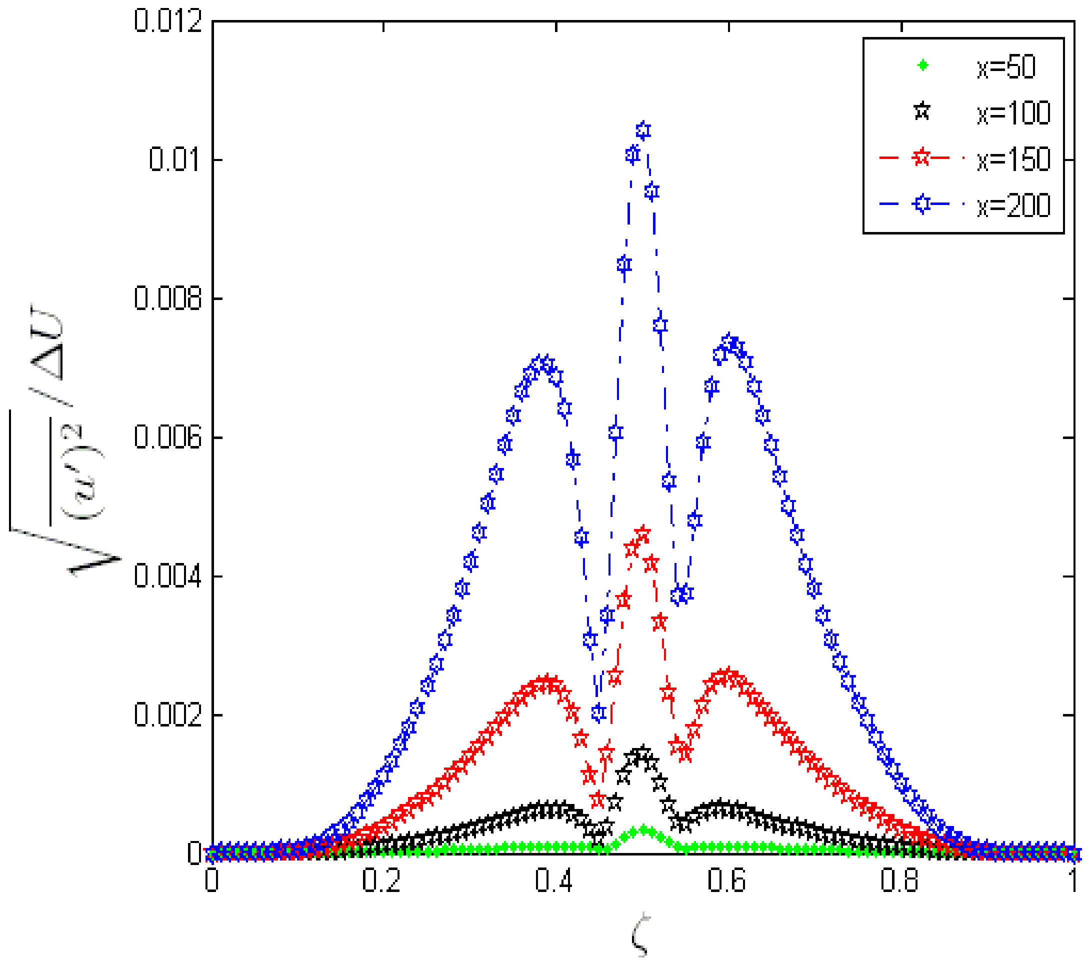


شکل۷-۱۴: پروفیل سرعت V در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی لایه اختلاطی با اغتشاش ورودی.



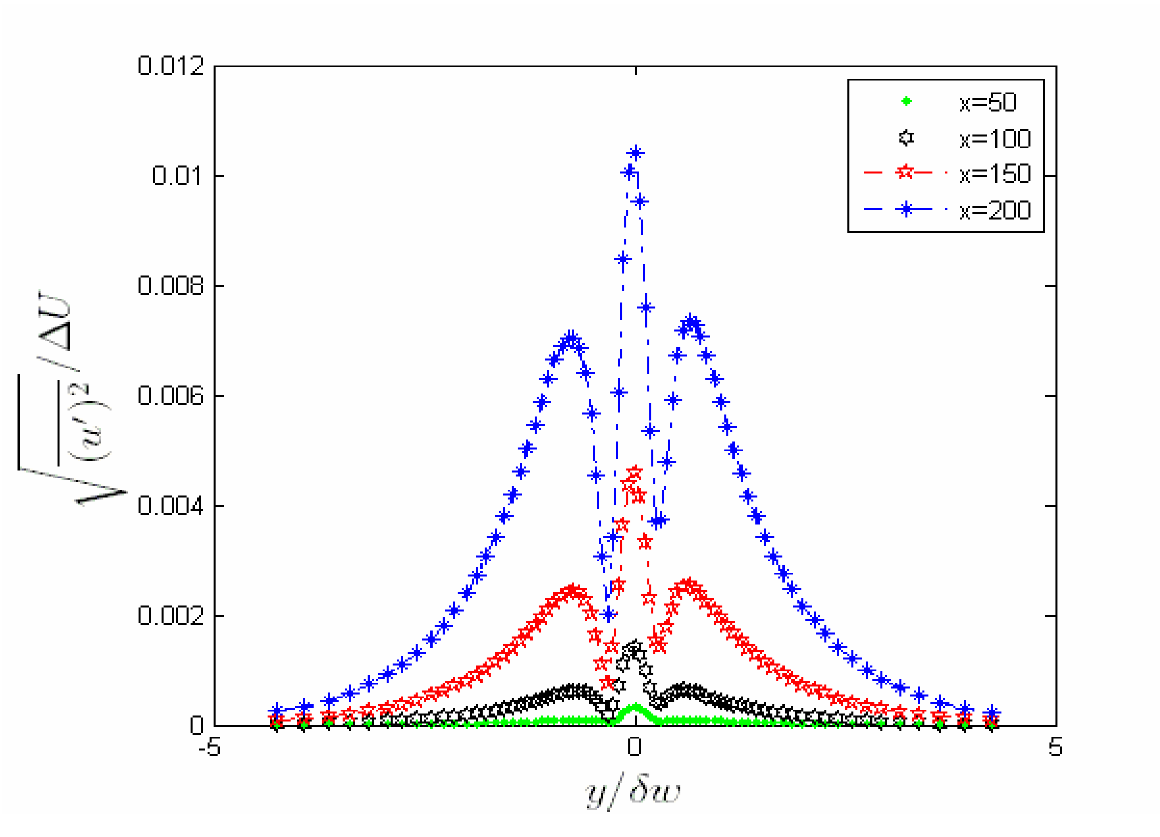
شکل ۷-۱۵: پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی لایه اختلاطی با اغتشاش ورودی.

در شکل ۷-۱۶ تنش رینولدز u'_{rms} در دامنه y ها نشان داده شده است. همان طور که از این نمودار مشاهده می شود در ایستگاه های دور دست تطابق توزیع پروفیل ها بدتر می شود بنا بر این خود تشابهی پروفیل ها در ایستگاه های دور دست ضعیف تر می گردد.

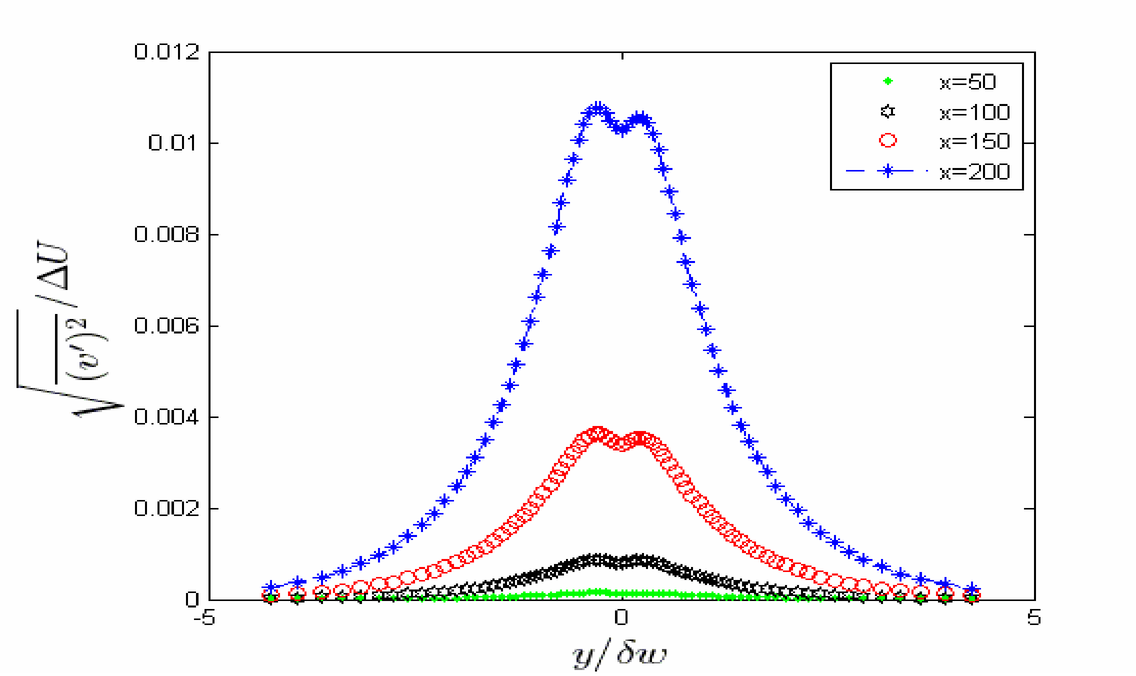


شکل ۷-۱۶: پروفیل $\sqrt{u'^2}/\Delta U$ بر حسب ζ در دستگاه مختصات خود تشابه.

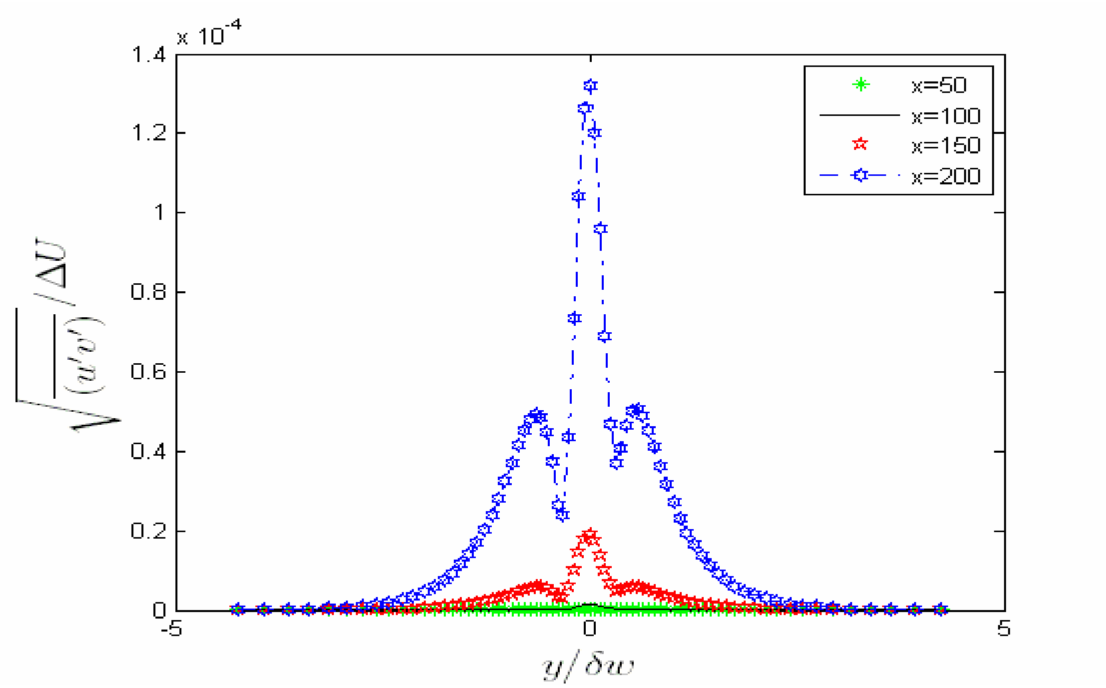
در شکل های ۷-۱۷، ۷-۱۸ و ۷-۱۹ توزیع شدت تنش های رینولدز در مختصات خود تشابه نمایش داده شده است. بر خلاف سرعت متوسط که درآن خاصیت خود تشابهی دیده می شود، در تنش های رینولدز این خاصیت دیده نمی شود. البته می توان با افزایش طول دامنه محاسباتی، توزیع تنش های رینولدز در ایستگاه های مختلف بخصوص نزدیک انتهای دامنه محاسباتی را بررسی نمود و خاصیت خودتشابهی در آنها را تحقیق کرد. تمامی این پروفیل ها در قسمت مرکزی جریان لایه اختلاطی (core)، توزیع های یکسانی را در دستگاه مختصات خودتشابه ارایه نمی کنند بلکه هر چه از قسمت مرکزی فاصله می گیریم، خودتشابهی با وضوح بیشتری ملاحظه می گردد.



شکل ۷-۱۷: پروفیل $\sqrt{\overline{u'^2}}/\Delta U$ به y/δ_ω در دستگاه مختصات خود تشابه.

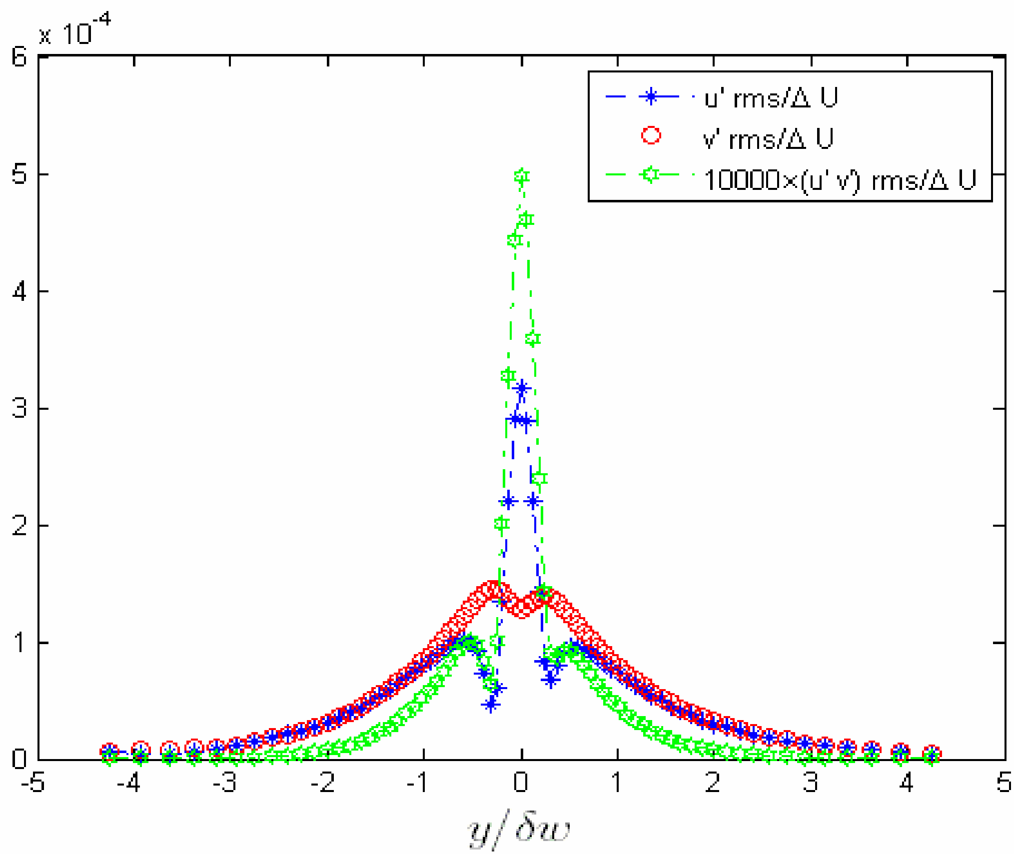


شکل ۷-۱۸: پروفیل $\sqrt{v'^2}/\Delta U$ به y/δ_ω در دستگاه مختصات خود تشابه.

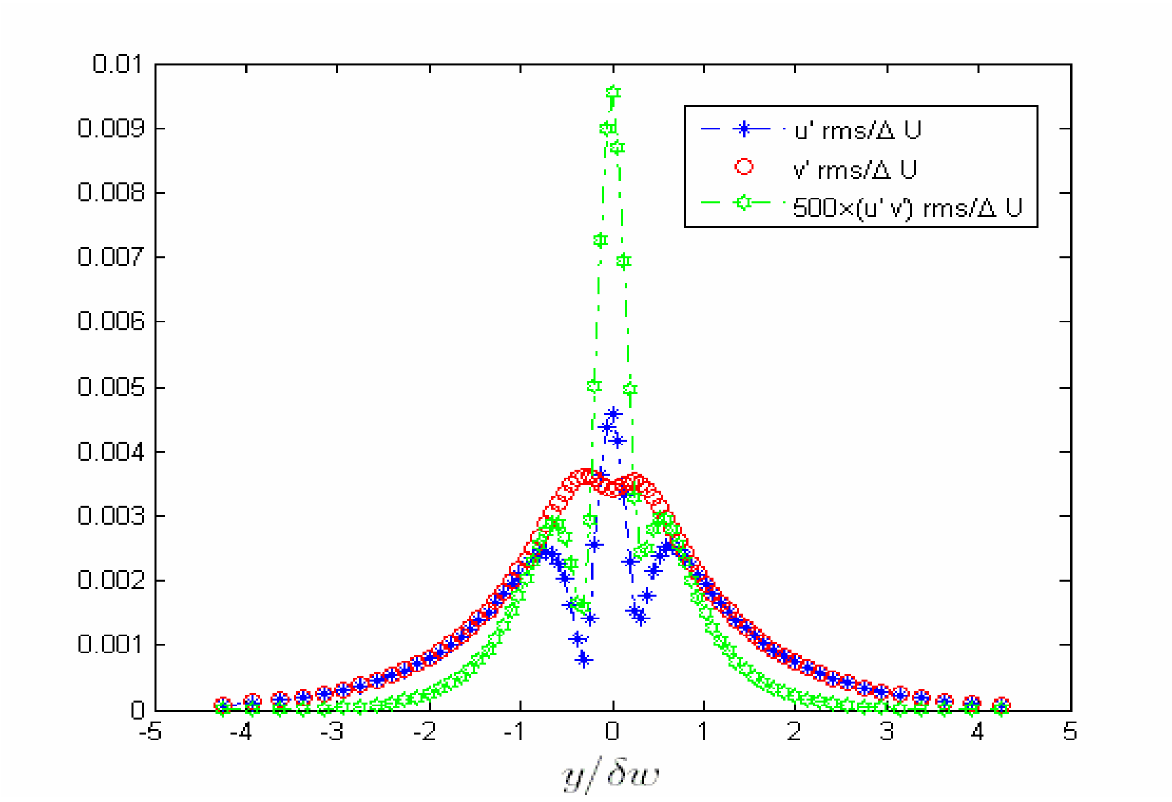


شکل ۷-۱۹: پروفیل $\sqrt{u'v'}/\Delta U$ به y/δ_ω در دستگاه مختصات خود تشابه.

در شکل های ۷-۲۰ و ۷-۲۱ هر سه تنش رینولدز در ایستگاه های $x = 50$ و $x = 150$ رسم و با هم مقایسه شده اند. همان طور که در این شکل ها دیده می شود در ابتدا تنش $(u'v')_{rms}$ نسبت به تنش های u'_{rms} و v'_{rms} بسیار کوچک بوده اما در ایستگاه های دور دست، مقدار این تنش ها زیاد شده به طوری که با شروع ایجاد گردابه ها در جریان مقدار تنش $(u'v')_{rms}$ به حدود ۱۰٪ تنش های u'_{rms} و v'_{rms} می رسد. ضمناً همان طور که انتظار می رفت به وضوح می توان مشاهده نمود که در ایستگاه های دور دست، خود تشابهی محقق شده است.



شکل ۷-۲۰: مقایسه تنش $(u'v')_{rms}$ با تنش های u'_{rms} و v'_{rms} در $x = 50$



شکل ۷-۲۱: مقایسه تنش $(u'v')_{rms}$ با تنش های u'_{rms} و v'_{rms} در $x=150$.

نتیجه گیری

در این تحقیق جریان لایه اختلاطی دوبعدی، تراکم ناپذیر و در حال توسعه برای دو حالت آرام و مغشوش شبیه سازی شده است. از روش عددی برای بدست آوردن نتایج شبیه سازی استفاده شده است. برای شبیه سازی جریان لایه اختلاطی در حال توسعه، از روش تفاضل محدود فشرده در جهت اصلی جریان و از روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی در جهت عرضی جریان برای محاسبه مشتقات مکانی استفاده شده است.

برای هر دو حالت آرام و مغشوش، در مرز خروجی از شرط مرزی آزاد استفاده شده است و در مرز ورودی برای حالت آرام همه شرایط مرزی، صفر در نظر گرفته شده است و در حالت مغشوش، یک اغتشاش بر مولفه سرعت v به عنوان شرایط مرزی اعمال شده است. برای شرایط اولیه نیز از پروفیل سرعت تانژانت هایپربولیک استفاده شده است.

در جریان اختلاطی آرام، می بینیم که سرعت لحظه ای در هر گره ای، بعد از مدت زمان مشخصی به مقدار خاصی رسیده و در آن مقدار ثابت می ماند. همچنین می توان خاصیت خود تشابهی را در نمودار هایی که از نرمال کردن پروفیل های سرعت لحظه ای و ورتیسیته به دست آمده اند، مشاهده کرد. این نمودار ها منطبق بر نمودار های متوسط زمانی است.

در جریان اختلاطی مغشوش، با توجه به گذر زمانی مولفه های سرعت u و v، ملاحظه می‌شود که این مولفه ها به یک حالت پایدار آماری رسیده‌اند و مقادیر متوسط آنها به لحاظ آماری نسبت به زمان تغییراتی ندارد. همچنین می‌توان مشاهده نمود که لایه کاملاً پریودیک است که این به خاطر نیروی خارجی اعمالی در ابتدای لایه می‌باشد.

نتایج خودتشابهی مولفه‌های سرعت وگردابه و همچنین تنشهای رینولدز نیز بدست آمده اند. با توجه به این نتایج می‌توان دریافت که رفتارهای مولفه های سرعت و گردابه در لایه اختلاطی اجباری بطور کامل خود مشابه نمی باشند.

پیشنهادات برای تحقیقات آینده

با توجه به تحلیل صورت گرفته، به منظور ادامه و تکمیل و بهبود آن پیشنهادات زیر توصیه می‌گردد:

الف: می توان از این شرط مرزی، شرط مرزی آزاد، برای شبیه سازی جریان های برشی دیگر مانند جریان جت یا جریان دنباله دار استفاده کرد.

ب: همانطور که اشاره شد، نیروی خارجی اعمالی در ورودی دامنه محاسباتی، در رشد ضخامت لایه اختلاطی نقش اساسی دارد. پیشنهاد می‌شود که معادله اور-سامرفیلد را برای این جریان حل کرده و از اغتشاشات بدست آمده از مودهای ناپایدار اصلی و زیر هارمونیک جهت مغشوش نمودن لایه اختلاطی استفاده کرد.

ج: می‌توان از گسترش روش عددی فوق برای تحلیل مسایل پیچیده تر مانند شبیه سازی لایه اختلاطی بین دو جریان واکنش دهنده یا جریان لایه اختلاطی همراه با ذرات استفاده کرد.

د: روش عددی استفاده شده در این تحقیق، تفاضل محدود فشرده می‌باشد. در این زمینه می‌توان از روشهای عددی دیگر مانند تفاضل محدود فوق فشرده[1] که دارای دقتی به مراتب بالاتر می‌باشد، استفاده کرد.

1- super compact finite difference

ضمیمه

کد پایان نامه

در این قسمت کد نوشته شده برای جریان لایه اختلاطی آورده شده است که از نرم افزار مطلب برای نوشتن آن استفاده شده است.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 %%%%%%%%%%%% DNS of 2D Plane Laminar Mixing Layer %%%%%%%
 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Clc;
clear all;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
LX=input('Enter LX');
LY=input('Enter LY');
eps=1e-50;
GAMA=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
NX=input('Enter NX')  % Number of nodes in x direction
NY=input('Enter NY') % Number of nodes in y  direction

 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
BETA=input('Enter BETA')  %  Streching factor
RE=input('Enter Reynolds number')  %  Reynolds number
time=input('Enter number of time step')  %  Final time of simulation
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 %%%%%%%%%%%% Function
amir_lam_func_similarity(LX, LY, NX, NY, BETA, RE, time);
DX=LX/NX;
DY=LY/NY;
I=NY+1;
J=NX+1;
DT=0.1*DX;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t0=0;     %  Start time of simulation
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DIRECTX=0:DX:LX;
DIRECTY=0:DY:LY;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if  time<500
   break
end
 %%%%%%%%%% Rung-Kutta coefficients
c=[8/15,5/12,3/4];
d=[0,-17/60,-5/12];
 %%%%%%%%%% Weight value
W1=5/12;
W2=43/54;
W3=28/27;


 %%%%%%%%%%%%% Pade finite difference scheme %%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%% A1X=matrix A for 1st derivative in X direction %%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%% A*F=B*F' %%%%%%%%%%%%%%%%%
A1X=zeros(J);
A1X(1,1)=-W1*5/2; A1X(1,2)=W1*2;
A1X(1,3)=W1*0.5; A1X(1,4)=0;
A1X(J,J)=W1*5/2; A1X(J,J-1)=-W1*2;
A1X(J,J-2)=-W1*0.5; A1X(J,J-3)=0;
A1X(2,1)=-W2*3; A1X(2,2)=0; A1X(2,3)=W2*3;
A1X(J-1,J)=W2*3; A1X(J-1,J-1)=0; A1X(J-1,J-2)=-W2*3;
A1X(3,1)=-W3*3/37; A1X(3,2)=-W3*87/37; A1X(3,3)=0;
A1X(3,4)=W3*87/37; A1X(3,5)=W3*3/37;
A1X(J-2,J)=W3*3/37; A1X(J-2,J-1)=W3*87/37; A1X(J-2,J-2)=0;
A1X(J-2,J-3)=-W3*87/37; A1X(J-2,J-4)=-W3*3/37;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for  j=4:J-3
   A1X(j,j)=0; A1X(j,j-1)=-7/3; A1X(j,j+1)=7/3;
  A1X(j,j-2)=-1/12; A1X(j,j+2)=1/12;
end;
A1X=(1/(DX)).*A1X;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% %%%% B1X=matrix B for 1st derivative in X directio %%%%%%%%%
B1X=zeros(J);
B1X(1,1)=W1*1; B1X(1,2)=W1*2;
B1X(J,J)=W1*1; B1X(J,J-1)=W1*2;
B1X(2,1)=W2*1; B1X(2,2)=W2*4;
B1X(2,3)=W2*1;B1X(J-1,J)=W2*1;
B1X(J-1,J-1)=W2*4; B1X(J-1,J-2)=W2*1;
B1X(3,2)=W3*1; B1X(3,3)=W3*112/37;
B1X(3,4)=W3*1; B1X(J-2,J-1)=W3*1;
```

```
B1X(J-2,J-2)=W3*112/37; B1X(J-2,J-3)=W3*1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for  j=4:J-3
   B1X(j,j)=3; B1X(j,j-1)=1; B1X(j,j+1)=1;
end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% A1Y=matrix A for 1st derivative in Y directio %%%%%
A1Y=zeros(I);
A1Y(1,1)=-W1*5/2; A1Y(1,2)=W1*2;
A1Y(1,3)=W1*0.5; A1Y(1,4)=0;
A1Y(I,I)=W1*5/2; A1Y(I,I-1)=-W1*2;
A1Y(I,I-2)=-W1*0.5; A1Y(I,I-3)=0;
A1Y(2,1)=-W2*3; A1Y(2,2)=0; A1Y(2,3)=W2*3;
A1Y(I-1,I)=W2*3; A1Y(I-1,I-1)=0;
A1Y(I-1,I-2)=-W2*3;A1Y(3,1)=-W3*3/37;
A1Y(3,2)=-W3*87/37; A1Y(3,3)=0;
A1Y(3,4)=W3*87/37; A1Y(3,5)=W3*3/37;
A1Y(I-2,I)=W3*3/37; A1Y(I-2,I-1)=W3*87/37;
A1Y(I-2,I-2)=0; A1Y(I-2,I-3)=-W3*87/37;
A1Y(I-2,I-4)=-W3*3/37;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for  i=4:I-3
   A1Y(i,i)=0; A1Y(i,i-1)=-7/3; A1Y(i,i+1)=7/3;
  A1Y(i,i-2)=-1/12; A1Y(i,i+2)=1/12;
end;
A1Y=(1/(DY)).*A1Y;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%% B1Y=matrix B for 1st derivative in Y direction %%%%%%%%%
```

```
B1Y=zeros(I);
B1Y(1,1)=W1*1; B1Y(1,2)=W1*2;
B1Y(I,I)=W1*1; B1Y(I,I-1)=W1*2;
B1Y(2,1)=W2*1; B1Y(2,2)=W2*4;
B1Y(2,3)=W2*1;B1Y(I-1,I)=W2*1;
B1Y(I-1,I-1)=W2*4; B1Y(I-1,I-2)=W2*1;
B1Y(3,2)=W3*1; B1Y(3,3)=W3*112/37;
B1Y(3,4)=W3*1;B 1Y(I-2,I-1)=W3*1;
B1Y(I-2,I-2)=W3*112/37; B1Y(I-2,I-3)=W3*1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for  i=4:I-3
   B1Y(i,i)=3; B1Y(i,i-1)=1; B1Y(i,i+1)=1;
end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%% A2X=matrix A for 2nd derivative in X direction %%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%% A*F=B*F" %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A2X=zeros(J);
A2X(1,1)=13; A2X(1,2)=-27;
A2X(1,3)=15; A2X(1,4)=-1;
A2X(J,J)=(36.1)/12; A2X(J,J-1)=-(26.5)/3;
A2X(J,J-2)=(19.1)/2; A2X(J,J-3)=-(13.9)/3;
A(J,J-4)=(10.9)/12; A2X(2,1)=12;
A2X(2,2)=-24;A2X(2,3)=12;
A2X(J-1,J)=12; A2X(J-1,J-1)=-24; A2X(J-1,J-2)=12;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for  j=3:J-2
   A2X(j,j)=-9; A2X(j,j-1)=4; A2X(j,j+1)=4;
  A2X(j,j-2)=1/2; A2X(j,j+2)=1/2;
end;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A2Xu=A2X;
A2Xu(1,1)=-3/2;
A2Xu(1,2)=0;
A2Xu(1,3)=3/2;
A2Xu(1,4)=0;
A2Xu=((1/DX)^2).*A2Xu;
%%%%%%%%%%%%%%%
A2X=((1/DX)^2).*A2X;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% B2X=matrix B for 2nd derivative in X direction %%%%%%%
B2X=zeros(J);
B2X(1,1)=1; B2X(1,2)=11;
B2X(J,J)=1; B2X(J,J-1)=0.1;
B2X(2,1)=1;B2X(2,2)=10;
B2X(2,3)=1; B2X(J-1,J)=1;
B2X(J-1,J-1)=10; B2X(J-1,J-2)=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for  j=3:J-2
   B2X(j,j)=4; B2X(j,j-1)=1; B2X(j,j+1)=1;
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% %
B2Xu=B2X;
B2Xu(1,2)=2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% A2Y=matrix A for 2nd derivative in Y direction %%%%
A2Y=zeros(I);
A2Y(1,1)=13; A2Y(1,2)=-27;
```

```
A2Y(1,3)=15; A2Y(1,4)=-1;
A2Y(I,I)=13;A2Y(I,I-1)=-27;
A2Y(I,I-2)=15; A2Y(I,I-3)=-1;
A2Y(2,1)=12; A2Y(2,2)=-24;
A2Y(2,3)=12; A2Y(I-1,I)=12;
A2Y(I-1,I-1)=-24; A2Y(I-1,I-2)=12;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for  i=3:I-2
   A2Y(i,i)=-9; A2Y(i,i-1)=4; A2Y(i,i+1)=4;
   A2Y(i,i-2)=1/2; A2Y(i,i+2)=1/2;
end;
A2Y=((1/DY)^2).*A2Y;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%% B2Y=matrix B for 2nd derivative in Y direction %%%%%%%%
B2Y=zeros(I);
B2Y(1,1)=1; B2Y(1,2)=11;
B2Y(I,I)=1; B2Y(I,I-1)=11;
B2Y(2,1)=1;B2Y(2,2)=10;
B2Y(2,3)=1; B2Y(I-1,I)=1;
B2Y(I-1,I-1)=10; B2Y(I-1,I-2)=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for  i=3:I-2
    B2Y(i,i)=4; B2Y(i,i-1)=1; B2Y(i,i+1)=1;
end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 %%%%% LAN=Diagonal matrices for the 1st and 2nd derivatives %%%%%%
 %%%%%%% aproximations in the cross stream direction %%%%%%%%%%
  %%%%%%%%%%%%% LAN1
```

```
LAN1=zeros(I);
for  i=1:I
%  %  for mapping y=-BETA.Cot(pi.kisi);
   LAN1(i,i)=(1/(pi*BETA))*((sin(pi*(i-1)*DY))^2);
%  for mapping y=BETA.Tan(pi.kisi/2);
%  LAN1(i,i)=(2/(pi*BETA))*((cos(pi*(i-1)*DY/2))^2);
end;
 %%%%%%%%%%%%%% LAN2
LAN2=LAN1.^2;
 %%%%%%%%%%%%%% LAN3
LAN3=zeros(I);
for  i=1:I
%   for mapping y=-BETA.Cot(pi.kisi);
   LAN3(i,i)=(2/(pi*(BETA^2)))*((sin(pi*(i-1)*DY))^3)*cos(pi*(i-1)*DY);
%   for mapping y=BETA.Tan(pi.kisi/2);
%    LAN3(i,i)=(-4/(pi*BETA))*(sin(pi*(i-1)*DY/2))*(cos(pi*(i-1)*DY/2)^3);
end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% D1Y=1st derivative operator in the cross-stream (y) direction %%%%
D1Y=LAN1*(B1Y^-1)*A1Y;
%%%%%% D2Y=2nd derivative operator in the cross-stream (y) direction %%
D2Y=(LAN2*(B2Y^-1)*A2Y)+(LAN3*(B1Y^-1)*A1Y);
%%%%%% D1X=1st derivative operator in the cross-stream (x) direction %%
D1X=(B1X^-1)*A1X;
%%%%%% D2X=2nd derivative operator in the cross-stream (x) direction %%
D2X=(B2X^-1)*A2X;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D2Xu=(B2Xu^-1)*A2Xu;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%% introduce mean velocity profile in the streamwise direction %%%
```

```
%%%% NOTE: U=U0+u where U0=base flow, U=instantaneous velocity %%%
 %%%%%%%%%%%% u=computational velocity %%%%%%%%%%%%%%
U0=zeros(I,J);
for  i=1:I
   for  j=1:J
% for mixing layer:
         % U0=1/2{(1/landa)+tanh(2z)}=(Reynolds profile);
         % landa=[(U1-U2)/(U1+U2)]=3-->U1=2, U2=1.
   U0(i,j)=0.5*(3+tanh(2.*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))));
  %U0(i,j)=0.5*(1+tanh(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))); (Michalke profile);
% for jet flow:
  % U0(i,j)=GAMA*(1-(tanh(GAMA2*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))))^2);
% for wake flow:
  % U0(i,j)=1-(0.692*exp(-ln2*((-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps)^2))));
   end;
end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 %%%%%%%%%%%mean velocity (base flow) derivatives %%%%%%%%
U01Y=D1Y*U0;
%%%%%%%%%
U01X=zeros(I,J);
%%%%%%%%%
U02X=zeros(I,J);
%%%%%%%%%
U04X=zeros(I,J);
%%%%%%%%%
U02Y=D2Y*U0;
%%%%%%%%%
U04Y=D2Y*U02Y;
U042X2Y=zeros(I,J);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%% introduce instantaneous velocity in the streamwise direction % %%%
for  i=1:I
  for  j=1:J
     %U(i,j)=0.5*(1+tanh(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps)));
      U(i,j)=0.5*(3+tanh(2.*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))));
  end;
end;
%%%%%%%%%%%% computational velocity %%%%%%%%%%%%%%%%
u=U-U0;
%%%%%%%%%%%% initial boundary values of  u %%%%%%%%%%%%%%
inflowu(:,1,1)=u(:,1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%% NOTE: V=v where V=V_bc=instantaneous velocity % %%%%
%%%%%%%%%%%%% v=v_bc=computational velocity %%%%%%%%%%%%
%%%% introduce instantaneous velocity  in the cross-stram direction %%%%
for  i=1:I
 for  j=1:J
     V_bc(i,j)=0;
 end;
end;
v_bc=V_bc;
%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%% initial boundary values of  v %%%%%%%%%%%%%%%
inflowv(:,1,1)=v_bc(:,1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%% other bc for V  %%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%% initial boundary values of du/dx %%%%%%%%%%%%
inflowv1Y=D1Y*inflowv(:,1,1);
inflowdu(:,1,1)=-inflowv1Y;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%% third boundary condition %%%%%
inflowd2u(:,1,1)=zeros(I,1);
%%%%%%% forth boundary condition %%%%%
inflowd3u(:,1,1)=zeros(I,1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 %%%%%%%%%%%%% grad2U=Laplace equation %%%%%%%%%%%%%
u2X=(D2X*u')';
u2Y=D2Y*u;
gradu(:,:,1)=u2X+u2Y;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 %%%%%%%%%%%%%%%% Time Advancement %%%%%%%%%%%%%%%
 %%%%%%%%%%%%%%%% using 3rd order Runge-Kutta method %%%%%
t(1)=t0;
NT=0;
A=D2Y;
B=D2Xu';
while  t(1)<time
   for  sub=1:3
t(sub+1)=t(sub)+(c(sub)+d(sub)).*DT;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% du/dx
u1X=(D1X*u')';
u1X(:, 1)=inflowdu(:,1,sub);

 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% v
Q2=-D1Y*(u1X);
Q2(1,:)=[];
Q2(I-1,:)=[];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DD2Y=D2Y;
```

```
DD2Y(:,1)=[];
DD2Y(:,I-1)=[];
DD2Y(1,:)=[];
DD2Y(I-1,:)=[];
v_int=DD2Y^-1*Q2;
v=[zeros(J,1), v_int', zeros(J,1)]';
v(:,1)=inflowv(:,1,sub);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% U & V:
U=u+U0;
V=v;

 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% w:
V1X=(D1X*V')';
U1Y=D1Y*U;
 % U1Y=u1Y+U01Y;
w=(V1X-U1Y);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
H1=V.*w;
H2=(-U).*w;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% H calculating
H11Y=D1Y*H1;
H12Y=D2Y*H1;
H21X=(D1X*H2')',
H22XY=D1Y*((D1X*H2')');

%%%%%%%%%%%%%% viscous term %%%%%%%%%%%%%%%%%
u2X=zeros(I,J);
u2X=u2X';
%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
AA2Xu=zeros(I,J);
ZER=zeros(I,J-1);
AA2Xu=[(-3/DX).*inflowdu(:,1,sub), ZER]';
R2=AA2Xu+A2Xu*u';
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
R2(1,:)=[];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%
B2Xu2=B2Xu;
B2Xu2(1;)=[];
B2Xu2(:,1)=[];
u2X=(B2Xu2^-1)*R2;
u2X=u2X':
u2X=[inflowd2u(:,1,sub), u2X];
%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%
R4=A2Xu*u2X'+[(-3/DX).*inflowd3u(:,1,sub), ZER]';

%%%%%%%%%%%%%%%%%
u4X=(B2Xu^-1)*R4;
u4X=u4X';
%%%%%%%%%%%%%%%%%
U4X=U04X+u4X;
%
U2Y=D2Y*U;
%
U4Y=D2Y*U2Y;
%
U4X2Y2=(D2X*U2Y')';

 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% RHS
RHS=H12Y-H22XY+(1/RE).*(U4Y+U4X+(2.*U4X2Y2));
%
```

```
RHSu(:,:,sub)=RHS;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%% set bc,s
 %%%%% boundary condition of  u
for  i=1:I
   for  j=1:J
      U_bc(i,j)=0.5*(3+tanh(2.*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))));
   end;
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%
u_bc=U_bc-U0;
%
inflowu(:,1,sub+1)=u_bc(:,1);
 %%%%%%%%%%%%%%%% boundary condition of  v
for  i=1:I
  for  j=1:J
     V_bc(i,j)=0;
  end;
end;
v_bc=V_bc;
inflowv(:,1,sub+1)=v_bc(:,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
  %%%%%%%%%%%%%% boundary condition of  du/dx
inflowv1Y=zeros(I,J);
inflowv1Y=D1Y*inflowv(:,1,sub+1);
inflowdu(:,1,sub+1)=-inflowv1Y;
%%%%%%%%%%%%%%
inflowd2u(:,1,sub+1)=zeros(I,1);
%%%%%%%%%%%%%%
inflowd3u(:,1,sub+1)=zeros(I,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% gradU (new)
```

```
if  sub==1
    gradu(:,:,sub+1)=gradu(:,:,sub)+(c(1)*RHSu(:,:,sub)).*DT;
else
    gradu(:,:,sub+1)=gradu(:,:,sub)+(c(sub)*RHSu(:,:,sub) +
   d(sub)*RHSu(:,:,sub-1)).*DT;
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% AA2Xu
AA2Xu=[(-3/DX).*inflowdu(:,1,sub+1), ZER]';
%%%%
C=gradu(:,:,sub+1)-(B2Xu^-1*AA2Xu)';
A=D2Y;
B=D2Xu';
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for  i=1:I
    for j=2:J
        s1=inflowu(i,1,sub+1)*B(1,j);
        C(i,j)=C(i,j)-s1;
    end;
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
B(:,1)=[];
B(1,,:)=[];
C(:,1)=[];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u_int=lyap(A,B,-C);
%
u=[inflowu(:,1,sub+1), u_int];
%
u(1,:)=0;
u(I,:)=0;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
end; % (end of for continue while)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
TIME=t(sub+1)
 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% updating
t(1)=t(sub+1);
gradu(:,:,1)=gradu(:,:,sub+1);
inflowu(:,1,1)=inflowu(:,1,sub+1);
inflowv(:,1,1)=inflowv(:,1,sub+1);
inflowdu(:,1,1)=inflowdu(:,1,sub+1);
inflowd2u(:,1,1)=inflowd2u(:,1,sub+1);
inflowd3u(:,1,1)=inflowd3u(:,1,sub+1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
NT=NT+1;
T(NT,1)=t(1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
UX0(NT,1)=U((I-1)/2+1, 1);
UX60(NT,1)=U((I-1)/2+1, NX/4);
UX120(NT,1)=U((I-1)/2+1, NX/2);
UX180(NT,1)=U((I-1)/2+1, 3*NX/4);
UX241(NT,1)=U((I-1)/2+1, NX);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
VX0(NT,1)=V((I-1)/2, 1);
VX60(NT,1)=V((I-1)/2, NX/4);
VX120(NT,1)=V((I-1)/2, NX/2);
VX180(NT,1)=V((I-1)/2, 3*NX/4);
VX241(NT,1)=V((I-1)/2, NX);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
uX0(NT,1)=u((I-1)/2+1, 1);
uX60(NT,1)=u((I-1)/2+1, NX/4);
uX120(NT,1)=u((I-1)/2+1, NX/2);
uX180(NT,1)=u((I-1)/2+1, 3*NX/4);
```

```
uX241(NT,1)=u((I-1)/2+1, NX);
*******************************************
subplot(2,3,1),  plot(DIRECTX, U((I-1)/2+1))
subplot(2,3,2),…
plot(T, UX0, '*b', T, UX60, '.R', T, UX120, '.G', T, UX180, '.K', T, UX241, '.B')
subplot(2,3,3),…
plot(T, VX0, '*b', T, VX60, '.R', T, VX120, '.G', T, VX180, '.K', T, VX241, '.B')
pause(.0001)
subplot(2,3,4), imagesc(DIRECTX,DIRECTY,U)
subplot(2,3,5), plot(T, uX60, '.R', T, uX120, '.G', T, uX180, '.K', T, uX241, '.B')
subplot(2,3,6),  mesh(DIRECTX, DIRECTY, U)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
end; % (end of while)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure
plot(T, UX0, '.b', T, UX60, '.R', T, UX120, '.G', T, UX180, '.K', T, UX241, '.b')
figure
plot(T, VX60, '.R', T, VX120, '.G', T, VX180, '.K', T, VX241, '.b')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for  j=1:J
   Um(j)=U((((I-1)/2)+1, j);
   m=15;
%    reynolds(delta_w0)=rdw0=100; vis=0.01; (U2-U1)=2-1=1;
 %   (delta_w0)=del12=vis*reynolds(delta_w0)/(U2-U1);
   vis=0.01; % viscosity
   rdw0=100;
   delu=1;
   del12=vis*rdw0/delu;
   for  i=m:I-(m-1)
      y_norm(i-(m-1), j)=(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY))/(del12);
      U_norm(i-(m-1), j)=U(i, j)/Um(j);
      w_norm(i-(m-1),j)=w(i, j)*del12/Um(j);
```

```
   end;
end;
% %%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%
figure
plot(DIRECTY,Unorm1(:,round(NX/2)+30),'*g',DIRECTY,…
Unorm1(:,round(NX/2)+35),'skDIRECTY,Unorm1(:,round(3*NX/4)),
'ro',DIRECTY,Unorm1(:,round(3*NX/4)+5),title('(8")Unorm1 versus kisi')
%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure
plot(DIRECTY,wnorm1(:,round(NX/2)+30),'*g',DIRECTY…
wnorm1(:,round(NX/2)+35),'skDIRECTY,wnorm1(:,round(3*NX/4)),…
'ro',DIRECTY,wnorm1(:,round(3*NX/4)+5),title('(9")wnorm1 versus kisi')
%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure
plot(T,uX0,'.b',T,uX60,'.R',T,uX120,'.G',T,uX180,'.K',T,uX241,'.b');
title('(13)u in X=0,LX/4,LX/2,3LX/4,XL')
%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure
mesh(DIRECTX,DIRECTY,U)
%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure
plot(x,deltaw_n,'ro',x,deltaw_e,'b*')
title('deltaw')(deltaw_e-deltaw_n)'
%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure
plot(DIRECTX, Um, '.r')
%%%%%%%%%%%%%%%%
figure
for  j=1:1:J
   plot(y_norm(:, j), U_norm(:, j), '.b')
   hold on
```

```
end;
hold off
figure
for  j=1:1:J
   plot(y_norm(:, j), w_norm(:, j), '.b')
   hold on
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

مراجع

1- **R.H. Bartlez**, **G.W. Stewar**, 'Solution of the Matrix Equation AX+XB=C' Communications of the ACM, 1972, Vol. 15.

2- **H. Schlichting**, 'Boundary Layer Theory', Mc Graw Hill, 1979.

3- **C.M. Ho**, **P. Huerre**, 'Perturbed free shear layer', Annual,Rew. Fluid mechanics, 1984, Vol. 16, 365-424.

4- **P.S. Lowery**, **W. Reynolds**, 'Numerical Simulation of Spatially Developing, Forced, Plane Mixing Layer', NASA NCC2-015, 1986.

5- **S.K. Lele**, 'Compact Finite Difference Scheme with Spectral-Like Resolution', Journal of Computational Physics, 1992, Vol. 103, 16-12.

6- **T.C. Papanastasiou**, **N. Malamataris**, 'A new outflow boundary condition', International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1992, Vol. 14, 587-608.

7- **M.J. Maghrebi**, 'A Study of Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three-Dimensional Planer Wake', PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia, 1999.

8- **N.T. Malamataris**, **T.C. Papanastasiou**, 'Unsteady free surface flows on truncated Domains', Ind, Eng, Res, 1999, Vol. 30, 2211-2219.

9- **A. Modi**, 'Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow', Journal of Computer & Fluids, 1999, Vol. 24, 775-793.

10- **K.A. Huffman**, **S.T. Chiang**, 'Computational Fluid Dynamics', Publication of Engineering Education System, 2000, Vol. 1, Fourth Edition, Wichita, Kansas.

11- **S. Pellerin**, **A. Dulieu**, 'Evaluation of time and space scales in developing 3D turbulence incompressible mixing layer by using LES', European Journal Mechanics B/Fluids, 2000, Vol. 15, 44-62.

12- **Nicolas Reau**, **Anatoli Tomin**, 'On harmonic perturbations in a turbulent mixing layer', European Journal Mechanics B/Fluids, 2002, Vol. 21, 143-155.

13- **J.Z. Zin**, **X.M. Shao**, 'Numerical research on the coherent structures in a mixing layer with cross-shear', Journal of Fluids and Structures. 2002, Vol. 16, 487-495.

14- **B. Knaepen**, **O. Debliquy**, 'DNS and LES of ashear-free mixing layer', Center of Turbulent Annual Research Briefs, 2003, University of Libre & Bruxells

15- **Djamel Lakehal**, **Chidambaram Narayanan**, 'Numerical analysis of the continuum formulation for the initial evolution of mixing layer with particles', International Journal of Multiphase Flow, 2003, Vol. 29, 927-941.

16- **Qibing Li**, **Song Fu**, 'Numerical simulation of high speed mixing layer', Journal of Computer & Fluids, 2003, Vol. 32, 1357-1377.

17- **M. Darbandi**, **Sh. Vakilipour**, 'Implementation of free boundary condition at arbitrary sections using implicit conservative statements', European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, 24-28 Joly 2004.

18- **Qibing Li**, **Song Fu**, 'Numerical simulation of compressible mixing layer', International Journal of Heat and Fluid Flow, 2006, Vol. 27, 895-901.

19- **Yoshitsugu Naka**, **Takeshi Omori**, 'Simultaneous measurements of fluctuating velocity and pressure in a turbulent mixing layer', Internatinal Journal of Heat and Fluid Flow, 2006, Vol. 27, 737-746.

20- **J.P. Bonnet**, **W.L. Siauw**, 'Influence of a synthetic jet excitation on the development of a turbulent mixing layer', International Journal of Heat and Fluid Flow, 2008, Vol. 29, 957-966.

۲۲- **وایت**، مکانیک سیالات پیشرفته، ترجمه دکتر فیروز آبادی، چاپ اول، ۱۳۸۴.

۲۳- **م.ح. دیبایی بناب**، تدوین نرم افزار جهت تحلیل جریان برشی، دو بعدی، گذرا و غیر قابل قبول، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱۳۸۵.

۲۴- **ا. ضرغامی**، حل مستقیم عددی جریان اختلاطی آزاد دو بعدی به روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی، پایان نامه کارشناسی ارشد، ۱۳۸۵.

۲۵- **ح.ر. سنندجی**، بررسی شرایط مرزی خروجی در جریان اختلاطی آزاد غیر قابل تراکم، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱۳۸۷.

۲۶- **مهندس علی فکور یکتا**، خود آموز نرم افزار Matlab 7، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد.

۲۷- **دکتر انوشیروان فرشیدیان فر**، راهنما و کاربرد Matlab 6.5 & Simulink، انتشارات ناقوس.

Abstract

Governing equations for the unsteady two dimensional plane mixing layer flow are Navier-Stokes and continuity equations. These equations in rotational form are solved using direct numerical simulation. The length scale and the velocity scale of the base flow at the inlet boundary of computational domain are used as two characteristics to define the flow Reynolds number. These two characteristics are the mixing layer half width and velocity difference of two streams. The governing equations are discretized in the streamwise direction (x) and cross stream direction (y), using sixth order compact finite difference scheme and mapped compact finite difference scheme, respectively. A cotangent mapped of $y = -\beta \cot(\pi\zeta)$ is used to relate the physical domain in the double infinity of $-\infty < y < +\infty$ to the computational domain of ζ $(0 \le \zeta \le 1)$. The compact third order of Runge-Kutta method is used for the time-advancement of the computations.

The numerical solution of the governing equations requires correct boundary condition implementations at suitable locations to produce well-posed problem. Most of numerical strategies exhibit weak performance and obtain inaccurate solutions since the outlet boundary conditions are not known accurately. To avoid this difficulty in this research, we have applied free boundary condition at the outlet boundary. This free boundary condition is equivalent to extend the validity of governing equations at the outflow instead of replacing them with unknown or natural boundary conditions.

An invicid flow (Stuart flow) and a completely viscous solutions of the Navier-Stokes equations are used for verification of the numerical simulations. The numerical results show a good accuracy and agreement with exact solution of the Navier-Stokes equations. In this work, the velocity profiles in x and y direction and vorticity thickness are obtained and self-similarity characteristic for laminar and turbulent mixing layer flow is investigated.

Keywords: Mixing layer flow, Direct numerical simulation, Navier-Stokes equations, free boundary condition, Compact finite difference scheme

Shahrood University of Technology
Department of Mechanical Engineering
M.Sc. Thesis

Title:

Direct Numerical Simulation of Plane Mixing Layer with Free Boundary Condition at Outflow, Using Compact Finite Difference Scheme

By:

Amir Mohammadi Visroodi

Supervisor:

Dr. M.J. Maghrebi

2010