

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

تحلیل ارتعاشی ورق مدور متقارن محوری ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد به کمک تئوری
تغییر شکل برشی مرتبه اول

نگارنده: رضا ولیزاده

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا ایپکچی

شهریور ۱۳۹۵

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام‌بخش آلام زمینی‌ام است

به استوارترین تکیه‌گاهم، دستان پر مهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم

که هرچه آموختم در مکتب عشق‌ش آموختم و هرچه بگوختم قطره‌ای از دریای بی‌کران مهربانیتان را پاس توانم بگویم.

امروز، مستی‌ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما

بوسه بر دستان پر مهرتان

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان، نشیمن به طریق علم و دانش را، نمونه‌مان شد و به هم‌نشینی رهروان علم و دانش
مستخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزی‌مان ساخت.

باتقدیر و شکر از استاد گرانمایه ام جناب آقای دکتر حمیدرضا ایک‌چی که با نکته‌های دلاویز و کفایت‌های بلند، صحیفه‌های
سخن را علم پرور نمود و همواره راه‌نما و راه‌گشای نگارنده در تمام و اکمال پایان نامه بوده است.

تعهد نامه

اینجانب **رضا ولی زاده** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **تحلیل ارتعاشی ورق مدور متقارن محوری ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول**

تحت راهنمایی **دکتر حمیدرضا ایپک چی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آن ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، به حل ریاضی معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق مدور متقارن محوری تشکیل شده از مواد ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد که تحت نیروی عرضی متقارن قرار دارند پرداخته شده است. رفتار ورق ویسکوالاستیک، به صورت مدل جامد استاندارد خطی در برش و الاستیک در بالک در نظر گرفته شده است. معادلات با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل همپلتون به دست می آیند. معادلات حاکم بر سیستم، شامل چهار معادله دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی و با ضرایب متغیر هستند که به یکدیگر کوپل می باشند. برای تحلیل ارتعاشات آزاد و به دست آوردن پاسخ از تئوری اغتشاشات استفاده شده است. حل عددی مسأله به کمک نرم افزار انسیس انجام شده است. یک آنالیز حساسیت انجام شد و اثر پارامترهای هندسی و خواص مکانیکی بر فرکانس و پاسخ مطالعه شد. همچنین مقایسه ای بین نتایج تئوری کلاسیک و تغییر شکل برشی و بحثی در زمینه تأثیرات غیرخطی بر نتایج ارائه گردید.

کلمات کلیدی:

ورق مدور ویسکوالاستیک، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تئوری اغتشاشات، خیز نسبتاً زیاد

فهرست

فصل اول: تاریخچه و مرور مقالات	۱
۱-۱- مقدمه	۲
۲-۱- مواد ویسکوالاستیک	۲
۳-۱- خصوصیات مواد ویسکوالاستیک	۳
۴-۱- رفتار ویسکوالاستیسیته‌ی خطی	۳
۵-۱- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک	۵
۶-۱- فرضیات متداول در مواد ویسکوالاستیک	۶
۷-۱- مدل‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک	۷
۱-۷-۱- مدل ماکسول	۸
۲-۷-۱- مدل کلین-ویت	۸
۳-۷-۱- جامد استاندارد خطی (مدل زنر)	۸
۸-۱- اجزای سازه‌ای	۱۰
۹-۱- غیرخطی	۱۱
۱۰-۱- مروری بر تئوری‌های بررسی رفتار ورق‌ها	۱۲
۱۱-۱- مرور مقالات	۱۵
۱۲-۱- جمع‌بندی	۲۰
فصل دوم: استخراج معادلات	۲۳
۱-۲- مقدمه	۲۴

۲۴	۲-۲-تعریف مسأله
۲۶	۳-۲-محاسبه‌ی انرژی کرنشی ورق
۲۷	۴-۲-محاسبه‌ی انرژی جنبشی ورق
۲۸	۵-۲-کار نیروی خارجی
۲۸	۶-۲-تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همپلتون
۳۰	۷-۲-تعمیم معادلات الاستیک استخراج شده به ورق ویسکوالاستیک
۳۱	۲-۷-۱-اعمال مدل ویسکوالاستیک مدل جامد استاندارد خطی نوع اول
۳۲	۲-۸-معادله‌ی ورق بر اساس تئوری کلاسیک در حالت ویسکوالاستیک
۳۳	۲-۹-جمع‌بندی
۳۵	فصل سوم: حل تحلیلی
۳۶	۳-۱-مقدمه
۳۶	۳-۲-بی‌بعد سازی معادلات
۴۰	۳-۳-تحلیل ارتعاشات آزاد
۴۴	۳-۳-۱-حلّ معادلات مرتبه یک
۴۶	۳-۳-۲-حلّ معادلات مرتبه دو
۵۰	۳-۴-تعیین پاسخ ورق به‌ازای بار عرضی تابع زمان
۵۳	۳-۵-جمع‌بندی
۵۵	فصل چهارم: حل عددی به کمک نرم‌افزار
۵۶	۴-۱-مقدمه

۵۶	۲-۴-تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک براساس سری پرونی
۵۷	۳-۴-تعیین مدول رهایش برشی و بالک
۵۷	۱-۳-۴-مدول رهایش برشی
۵۸	۲-۳-۴-مدول بالک
۵۹	۴-۴-معرفی المان ها
۵۹	۱-۴-۴-Shell 208 المان
۶۰	۲-۴-۴-Plane 182 المان
۶۰	۵-۴-تعیین مش بهینه
۶۱	۶-۴-حل مدال
۶۲	۷-۴-حل دینامیکی
۶۳	۸-۴-جمع بندی
۶۵	فصل پنجم: نتایج
۶۶	۱-۵-مقدمه
۶۶	۲-۵-فرکانس طبیعی
۸۲	۳-۵-پاسخ بار دینامیکی
۸۷	۴-۵-جمع بندی
۸۹	فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادات
۹۰	۱-۶-مقدمه
۹۰	۲-۶-نتیجه گیری

۹۲پیشنهادها ۳-۶
۹۳پیوست الف: اصول ویسکوالاستیسیته‌ی خطی
۹۴الف-۱-مقدمه
۹۴الف-۱-۱-خزش
۹۶الف-۱-۲-رهايش تنش
۹۹الف-۱-۳-پاسخ دینامیکی به بارگذاری سینوسی
۱۰۰الف-۲-اصل جمع آثار بولتزمن
۱۰۱الف-۳-معرفی مدل‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک
۱۰۱الف-۳-۱-مدل ماکسول
۱۰۳الف-۳-۲-مدل کلوین-ویت
۱۰۵الف-۳-۳-جامد استاندارد خطی (مدل زنر)
۱۰۸الف-۳-۴-مدل برگرز
۱۰۸الف-۳-۵-مدل ویچرت
۱۱۱پیوست ب: معادلات ویسکوالاستیک
۱۲۱پیوست ج: معادلات مرتبه ۳
۱۳۷منابع

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۱) منحنی تنش-کرنش برای الف- مواد الاستیک-پلاستیک ب- مواد ویسکوالاستیک خطی
۴.....
- شکل (۲-۱) مدل ماکسول
۸.....
- شکل (۳-۱) مدل کلین-ویت
۸.....
- شکل (۴-۱) اولین مدل جامد استاندارد خطی
۹.....
- شکل (۵-۱) دومین مدل جامد استاندارد خطی
۹.....
- شکل (۶-۱) هندسه‌ی اولیه و تغییر شکل یافته یک لبه ورق از دیدگاه تئوری‌های مختلف
۱۵.....
- شکل (۱-۲) هندسه و دستگاه مختصات ورق حلقوی
۲۵.....
- شکل (۱-۴) هندسه‌ی المان Shell 208
۵۹.....
- شکل (۲-۴) هندسه‌ی المان Plane 182
۶۰.....
- شکل (۳-۴) تغییرات زمانی نیروی گسترده
۶۲.....
- شکل (۱-۵) اثر r_0/h بر فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برای ورق حلقوی گیردار-گیردار
۷۸.....
- شکل (۲-۵) اثر r_0/h بر فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم برای ورق حلقوی گیردار-گیردار
۷۸.....
- شکل (۳-۵) اثر نسبت r_i/r_0 بر فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ورق حلقوی گیردار-گیردار
۷۹.....
- شکل (۴-۵) اثر r_0/h بر قدر مطلق میرایی برای ورق حلقوی گیردار-گیردار
۷۹.....
- شکل (۵-۵) اثر r_i/r_0 بر قدر مطلق میرایی برای ورق حلقوی گیردار-گیردار
۸۰.....
- شکل (۶-۵) شکل مد اول برای ورق حلقوی گیردار-گیردار
۸۰.....
- شکل (۷-۵) شکل مد دوم برای ورق حلقوی گیردار-گیردار
۸۱.....
- شکل (۸-۵) شکل مد اول برای ورق حلقوی ساده-ساده
۸۱.....
- شکل (۹-۵) شکل مد دوم برای ورق حلقوی ساده-ساده
۸۲.....
- شکل (۱۰-۵) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ به‌ازای گام‌های زمانی مختلف
۸۳.....

- شکل (۱۱-۵) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ به‌ازای بار ۲۷۰۰ پاسکال ۸۴
- شکل (۱۲-۵) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ به‌ازای بار ۲۷۰ پاسکال ۸۴
- شکل (۱۳-۵) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.14 \text{ m})$ ۸۵
- شکل (۱۴-۵) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ ، تئوری برشی مرتبه اول ۸۵
- شکل (۱۵-۵) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ ، حل عددی ۸۶
- شکل (۱۶-۵) اثر مدول E_0 بر پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ ۸۶
- شکل (۱۷-۵) اثر ضریب ویسکوزیته (μ) بر پاسخ عرضی در $(r=0.0975 \text{ m})$ ۸۷
- شکل (۱۸-۵) پاسخ عرضی ورق الاستیک بر اساس تئوری برشی مرتبه اول در $(r=0.0975 \text{ m})$ ۸۷
- شکل (الف-۱) پاسخ الف- جامد الاستیک ایده‌آل، ب- مایع ایده‌آل به تست خزش ۹۴
- شکل (الف-۲) پاسخ الف- جامد الاستیک واقعی، ب- مایع واقعی به تست خزش ۹۵
- شکل (الف-۳) تابع کامپلینس خزشی ۹۵
- شکل (الف-۴) خزش و بازگشت ۹۶
- شکل (الف-۵) رهایش تنش و بازگشت ۹۷
- شکل (الف-۶) پاسخ الف- جامد الاستیک ایده‌آل، ب- مایع ایده‌آل به تست رهایش ۹۷
- شکل (الف-۷) پاسخ الف- جامد الاستیک واقعی، ب- مایع واقعی به تست رهایش ۹۷
- شکل (الف-۸) تابع مدول رهایش تنش ۹۸
- شکل (الف-۹) بارگذاری دینامیکی ۱۰۰
- شکل (الف-۱۰) مدل ماکسول ۱۰۱
- شکل (الف-۱۱) مدل کلونین-ویت ۱۰۳
- شکل (الف-۱۲) مدل جامد استاندارد خطی نوع اول ۱۰۵
- شکل (الف-۱۳) مدل جامد استاندارد خطی نوع دوم ۱۰۵
- شکل (الف-۱۴) تابع خزش برای سه مدل ۱۰۷

شکل (الف-۱۵) تابع رهايش براى سه مدل ۱۰۷

شکل (الف-۱۶) مدل برگرز ۱۰۸

شکل (الف-۱۷) مدل ويچرت ۱۰۹

فهرست جدول‌ها

- جدول (۱-۴) مشخصات هندسی و مکانیکی ورق ۶۰
- جدول (۲-۴) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی سوم به‌ازای مش‌های مختلف در مدل‌سازی یک‌بعدی
برحسب (Hz) ۶۱
- جدول (۳-۴) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی سوم به‌ازای مش‌های مختلف در مدل‌سازی دوبعدی
برحسب (Hz) ۶۱
- جدول (۱-۵) مشخصات هندسی و مکانیکی ورق ۶۶
- جدول (۲-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o = 0.1$ ۶۹
- جدول (۳-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o = 0.3$ ۷۰
- جدول (۴-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o = 0.5$ ۷۱
- جدول (۵-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی ساده-ساده با $r_i/r_o = 0.3$ ۷۳
- جدول (۶-۵) فرکانس‌های طبیعی شعاعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o = 0.3$ ۷۴
- جدول (۷-۵) فرکانس‌های طبیعی شعاعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_o/h = 10$ ۷۵
- جدول (۸-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_o/h = 10$ ، $r_i/r_o = 0.3$ و
پارامترهای مختلف ویسکوالاستیک $\mu = 7.8843 \times 10^9$ ۷۶
- جدول (۹-۵) فرکانس‌های طبیعی ورق با شرایط مرزی مختلف برحسب هرتز با $r_o/h = 10$ و
 $r_i/r_o = 0.3$ ۷۶
- جدول (۱۰-۵) فرکانس‌های طبیعی برحسب هرتز ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_o/h = 10$ و
 $r_i/r_o = 0.3$ و پارامترهای مختلف مدول الاستیسیته‌ی $E_0 = 2.4462 \times 10^9$ ۷۷
- جدول (۱۱-۵) مشخصات هندسی و مکانیکی ورق ۸۲

علائم و اختصارات

ρ	چگالی	r, θ, z	مختصه‌های استوانه‌ای
E_0, E_1	مدول‌های ویسکوالاستیک	r_i	شعاع داخلی
μ	ضریب ویسکوزیته	r_o	شعاع خارجی
c	کمیت با دیمانسیون سرعت	h	ضخامت
α_i	مدول تناسب	u_r, u_θ, u_z	مؤلفه‌های جابجایی
τ_i	زمان رهایش	u_0, w_0	مؤلفه‌های جابجایی صفحه میانی
$\dot{\varepsilon}$	نرخ کرنش برشی	u_1, w_1	توابع مجهول با بعد چرخش
ε	پارامتر بی‌بعد کوچک	$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$	کرنش‌های نرمال
m_n	مقادیر ویژه	$\gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z}$	کرنش‌های برشی
V_n	بردار ویژه	$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	تنش‌های نرمال
ω_{tr}	فرکانس طبیعی عرضی	$\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$	تنش‌های برشی
ω_{ax}	فرکانس طبیعی شعاعی	G	مدول برشی
C_1, C_2, C_3, C_4	ثابت‌ها در حل عمومی	K	مدول بالک
E	مدول یانگ	ν	ضریب پواسون
		K_s	ضریب تصحیح برشی
		U^*	چگالی انرژی کرنشی
		U	انرژی کرنشی
		T	انرژی جنبشی
		Q	بار عرضی گسترده
		W	کار انجام شده توسط نیروی گسترده
		N_r, N_θ, N_z	منتجه‌های تنش
		M_r, M_θ, M_{rz}	
		Q_r, B_r	

فصل اول

تاریخچه و مرور مقالات

۱-۱- مقدمه

به منظور انجام هرگونه تحلیل مکانیکی برای هر ماده‌ای، شناخت کافی از آن ماده حائز اهمیت است. به همین دلیل در این فصل ابتدا به معرفی مواد ویسکوالاستیک و خواص مکانیکی آن‌ها پرداخته می‌شود. سپس معادلات بنیادین تنش- کرنش، مدل‌های رئولوژیکی مورد استفاده در مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک و فرضیات متداول در تحلیل تنش این مواد بیان شده است. در ادامه توضیح مختصری درباره‌ی اجزای سازه‌ای داده شده است. سپس به معرفی سیستم‌های غیرخطی و تئوری‌های متداول در بررسی ورق پرداخته و در نهایت مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه آورده شده است.

۱-۲- مواد ویسکوالاستیک

دمپینگ (میرایی) پارامتر دینامیکی مهمی برای بررسی ارتعاشات، کنترل صوت، پایداری دینامیکی، دقت موقعیت، خستگی و مقاومت ضربه است. بسیاری از کاربردها از قبیل سازه‌های بزرگ، پره‌های موتورها، ماشین‌آلات با سرعت‌های بالا نیازمند وزن سبک و کارایی^۱ دینامیکی بالایی هستند. این ویژگی‌ها و کاربردها در مواد ویسکوالاستیک یافت می‌شود.

ویسکوالاستیک خاصیتی از ماده است که معرف رفتار الاستیک و ویسکوز ماده هنگام تغییر شکل است. حالت جامد الاستیک و سیال ویسکوز، به عنوان دو نوع معمول از مواد ایده‌آلی می‌باشند که در حوزه‌ی مکانیک مورد بررسی قرار می‌گیرند. در جامد الاستیک با حذف تنش، مقدار کرنش به سرعت به مقدار اولیه باز می‌گردد. در سیال ویسکوز، مقاومت جریان برش و کرنش در هنگام اعمال تنش تابع زمان است. مواد ویسکوالاستیک هر دو خاصیت ذکر شده را با هم دارند. در واقع در مواد ویسکوالاستیک، ویسکوزیته یک پدیده اتلاف‌کننده را به ماده الاستیک اضافه می‌کند [1]. پلیمرهای غیرممتبلور مانند پلاستیک‌ها و رزین‌های مصنوعی می‌توانند اغلب به عنوان موادی که رفتار ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهند در نظر گرفته شوند. هم‌چنین رفتار مواد متشکل از الیاف مانند

¹ Performance

ابریشم، رایون، سلولز و هم‌چنین شیشه‌ها، سرامیک‌ها، مواد زیستی¹ مانند پوست و ماهیچه‌ها، غیر فلزات و هم‌چنین فلزات در دماهای بالا می‌توانند با مدل‌های ویسکوالاستیک خطی مدل شوند [2].

۱-۳- خصوصیات مواد ویسکوالاستیک

مواد ویسکوالاستیک دارای رفتاری بین مواد الاستیک و ویسکوز می‌باشند. با این وجود، تمایز بین جامد (ماده الاستیک) و سیال (ماده ویسکوز)، یک تمایز مطلق بین دو نوع ماده نمی‌باشد. در محیط واقعی، بسیاری از مواد، به نوعی از این رفتارهای ایده‌آل انحراف دارند. یعنی رفتار ویسکوالاستیک در اکثر مواد وجود دارد، ولی انحراف از حالت الاستیک در برخی از موارد مانند فلزات، استخوان و سنگ-ها ناچیز و در برخی دیگر مانند پلیمرها، چوب‌ها و نسوج بدن زیاد می‌باشد. در این‌گونه مواد، برخلاف مواد الاستیک، رابطه تنش-کرنش (خواص مواد) تابع زمان می‌باشد. حالت میرایی ویسکوالاستیک در بسیاری از مواد پلیمری و شیشه‌ای بروز پیدا می‌کند و ساز و کار میرایی داخلی آن، برای افزایش میرایی، به‌منظور کاهش ارتعاشات بسیار حائز اهمیت می‌باشد [3].

۱-۴- رفتار ویسکوالاستیسیته‌ی خطی

رفتار بسیاری از جامدات، در کرنش‌های کوچک، با استفاده از قانون هوک در الاستیسیته‌ی خطی بیان می‌شود. برای مواد الاستیک در یک بعد، رابطه‌ی تنش با کرنش به‌صورت زیر می‌باشد [4].

$$\sigma = E \varepsilon \quad (1-1)$$

E مدول یانگ است که عکس کامپلینس^۲ J است $(E = \frac{1}{J})$.

برخلاف مواد الاستیک که تغییر شکل آن در اثر اعمال نیروی خارجی، بعد از حذف نیرو قابل برگشت است، یک ماده ویسکوز تحت اعمال بار خارجی جریان می‌یابد و از رابطه‌ی (۱-۲) پیروی می‌کند [4].

¹ Bio-Material

² Compliance

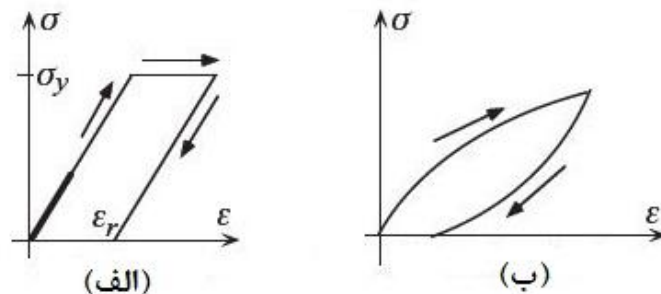
$$\tau = \mu \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2-1)$$

μ ویسکوزیته‌ی برشی^۱ سیال بوده که واحد آن $Pa.s$ می‌باشد و در حالت جریان پایا، به صورت نسبت تنش برشی τ به نرخ کرنش $\dot{\varepsilon}$ (رابطه‌ی (۳-۱)) تعریف می‌شود.

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\varepsilon}} \quad (3-1)$$

سفتی^۲ مواد، اغلب با منحنی تنش-کرنش، که از اعمال یک نرخ ثابت کرنش به میله‌ای از جنس ماده-ی مورد نظر به دست می‌آید، نشان داده می‌شود. اگر ماده‌ی الاستیک خطی باشد، منحنی به صورت یک خط مستقیم است که شیب آن مدول الاستیسیته را نشان می‌دهد، (شکل (۱-۱) الف)) و در یک مقدار خاص تنش، ماده در آستانه تسلیم قرار می‌گیرد.

در یک ماده‌ی ویسکوالاستیک خطی، تغییرات تنش-کرنش خطی نبوده و شیب آن نیز در مقایسه با مواد الاستیک کمتر است (شکل (۱-۱) ب)). علت این پدیده در طی اعمال یک نرخ کرنش ثابت، حساس بودن ماده‌ی ویسکوالاستیک نسبت به زمان است. در جامد ویسکوالاستیک، کرنش پسماند^۳ سرانجام صفر خواهد شد. مواد الاستیک-پلاستیک نسبت به زمان و تغییرات آن حساس نیستند، اما دارای یک تنش تسلیم می‌باشند که معمولاً اگر تنش از تسلیم فراتر رود، بعد از برداشته شدن بار، یک کرنش پسماند باقی می‌ماند.



شکل (۱-۱) منحنی تنش-کرنش برای الف- مواد الاستیک-پلاستیک ب- مواد ویسکوالاستیک خطی [5]

¹ Shear Viscosity

² Stiffness

³ Residual Strain

آزمایش^۱ مواد ویسکوالاستیک، با اعمال یک کرنش یا تنش پله‌ای انجام می‌شود. پاسخ به کرنش پله-ای، رهایش تنش^۲ و پاسخ به تنش پله‌ای، خزش^۳ می‌باشد [5].

برخی از پدیده‌هایی که در مواد ویسکوالاستیک اتفاق می‌افتد به شرح زیر است [6].

(۱) اگر تنش ثابت باقی بماند؛ با گذشت زمان، کرنش افزایش می‌یابد (خزش).

(۲) اگر کرنش ثابت باقی بماند؛ با گذشت زمان، تنش کاهش می‌یابد (رهایش).

۱-۵- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک

بیان معادلات بنیادین تنش-کرنش در مواد ویسکوالاستیک، به دو شکل کلی انتگرالی و دیفرانسیلی امکان‌پذیر است، که در ادامه به بیان روش دیفرانسیلی پرداخته می‌شود.

معادله‌ی ساختاری برای یک ماده ایزوتروپیک که پاسخ آن به مشتقات تنش و کرنش نیز حساس است، به صورت کلی زیر نوشته می‌شود.

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \dots) = 0 \quad (4-1)$$

که در آن تنش و کرنش وابسته به زمان می‌باشند. شکل اپراتوری معادله‌ی فوق به صورت زیر است.

$$P(D)\sigma_{ij}(t) = Q(D)\varepsilon_{ij}(t) \quad (5-1)$$

که $P(D)$ و $Q(D)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$P(D) = \sum_{r=0}^N P_r \frac{\partial^r}{\partial t^r}$$

$$Q(D) = \sum_{r=0}^N Q_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad (6-1)$$

$D = \frac{d}{dt}$ ، P_r و Q_r ثابت می‌باشند و به مدل رئولوژیکی انتخابی وابسته‌اند.

¹ Test

² Stress Relaxation

³ Creep

جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک یک سیستم تحت کشش چند محوری، قسمت برشی^۱ و اتساعی^۲ تنش را از هم جدا می‌کنند. این قاعده به دلیل پاسخ متفاوت ماده‌ی ویسکوالاستیک به برش و اتساع (بالک) می‌باشد. با توجه به این نکته، مؤلفه‌های برش و اتساع را می‌توان به صورت زیر جدا کرد.

$$P_1 \sigma_{ij}^d = Q_1 \varepsilon_{ij}^d \quad (7-1)$$

$$P_2 \sigma_{ii} = Q_2 \varepsilon_{ii}$$

بالانویس d معرف بخش انحرافی و P_1 ، P_2 ، Q_1 و Q_2 اپراتورهایی به شکل کلی زیر می‌باشند.

$$P_1 = P_0 + P_1 \frac{\partial}{\partial t} + P_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + P_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad (8-1)$$

G و K به ترتیب مدول‌های رهاش برش و بالک می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{P_1} \right) \quad (9-1)$$

$$K = \frac{1}{3} \left(\frac{Q_2}{P_2} \right)$$

رابطه‌ی مدول الاستیسیته و ضریب پواسون برحسب مدول رهاش و برش به صورت زیر می‌باشد.

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (10-1)$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۹-۱) در رابطه‌ی (۱۰-۱)، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون برای ماده‌ی ویسکوالاستیک، به شکل اپراتوری به دست می‌آید [3].

۱-۶- فرضیات متداول در مواد ویسکوالاستیک

از آنجا که جمع‌آوری اطلاعات وابسته به زمان برای خصوصیات مواد ویسکوالاستیک مشکل و زمان‌بر است، برای حل مسائل تحلیل تنش در این حوزه، اعمال فرض‌هایی بر روی خصوصیات ماده ضروری است. بنابراین اغلب برای ماده‌ی ویسکوالاستیک، یکی از خصوصیات مدول برش یا مدول یانگ تعریف

¹ Deviatoric
² Dilatational

می‌شود و مدول دیگر بر اساس یکی از فرضیات زیر تعیین می‌شود [7].

(۱) تراکم‌ناپذیری: برای تغییر شکل‌های کوچک در حوزه‌ی مسائل الاستیک خطی، در حالت

تراکم‌ناپذیری، ضریب پواسون برابر با ۰.۵ و مدول بالک بی‌نهایت می‌باشد. بنابراین با وجود

این شرط، کرنش‌های اتساعی صفر می‌باشد (تغییر حجم قابل صرف نظر باشد).

(۲) الاستیک در اتساع (بالک): در این حالت مدول بالک، مقدار ثابت K_0 را داشته و

$K(t) = K_0 H(t)$ می‌باشد، که $H(t)$ تابع پله‌ای^۱ است. این فرض بر این اساس است که

تغییرات مدول بالک نسبت به مدول برشی، با دما و زمان بسیار کم است. در این حالت

ضریب پواسون، تابعی از زمان است. بنابراین، فرض رفتار الاستیک، برای ماده‌ی

ویسکوالاستیک در اتساع، معمولاً فرض مناسبی است.

(۳) هم‌زمانی^۲ مدول بالک و برشی: در این حالت فرض می‌شود که نسبت مدول بالک به برشی

مقدار ثابتی باشد، به طوری که $K(t) = c_1 G(t)$ که c_1 مقداری ثابت است. بنابراین در این

حالت وابستگی زمانی این دو یکسان بوده و فقط مقادیر آن‌ها متفاوت می‌باشد. صحت این

فرض به شدت وابسته به دماست. در این حالت ضریب پواسون یک مقدار ثابت است.

۷-۱- مدل‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک

مدل‌سازی پاسخ به تحریک مکانیکی مواد ویسکوالاستیک، توسط مواد الاستیک و ویسکوز، از قبیل

فنر و دمپر انجام می‌شود. استفاده از این مدل‌های مکانیکی خطی، ساده‌ترین حالت جهت تفسیر رفتار

ویسکوالاستیسیته مواد می‌باشد. فنر رفتار ناگهانی (الاستیک) پاسخ و دمپر حالت تطبیقی (اتلافی)

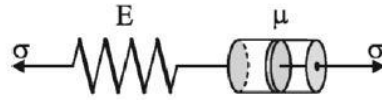
سیستم را شبیه‌سازی می‌کند [8].

¹ Heaviside Step Function

² Synchronous

۱-۷-۱-مدل ماکسول^۱ [5]

مدل ماکسول شامل فنر و دمپر سری است (شکل (۱-۲)).



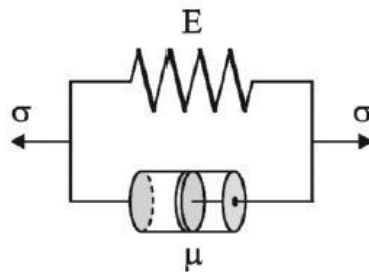
شکل (۲-۱) مدل ماکسول [7]

رابطه‌ی کلی تنش- کرنش برای این مدل، به صورت زیر می‌باشد.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (11-1)$$

۱-۷-۲-مدل کلوین-ویت^۲ [5]

این مدل شامل یک فنر موازی با دمپر است و به خوبی رفتار خزشی را توصیف می‌کند (شکل (۱-۳)).



شکل (۳-۱) مدل کلوین-ویت [7]

رابطه‌ی کلی تنش- کرنش در این مدل به صورت زیر است.

$$\sigma = E \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon} \quad (12-1)$$

۱-۷-۳-جامد استاندارد خطی (مدل زنر)^۳ [5]

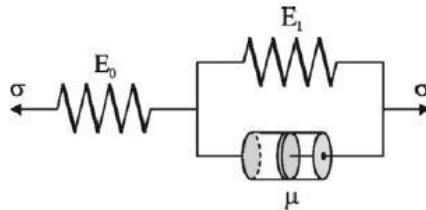
مدل ماکسول، رفتار رهایش تنش و مدل کلوین نیز فقط رفتار خزشی یک جامد ویسکوالاستیک را

¹ Maxwell Model

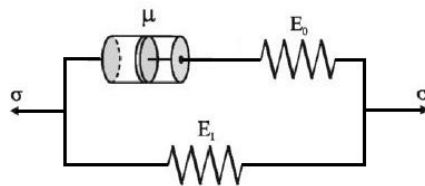
² Kelvin-Voigt Model

³ Standard Solid (Zener) Model

توصیف می‌کند، اما هیچ‌کدام برای ارائه رفتار عمومی جامد ویسکوالاستیک مناسب نیست، زیرا لازم است که مدل، هر دو رفتار رهایش تنش و خزش را با هم توصیف کند. آنچه که به طور معمول جامد استاندارد سه المانی نامیده می‌شود، ترکیبی از المان کلوین-ویت به صورت سری با فنر (شکل (۴-۱)) یا المان ماکسول موازی با فنر (شکل (۵-۱)) است.



شکل (۴-۱) اولین مدل جامد استاندارد خطی [7]



شکل (۵-۱) دومین مدل جامد استاندارد خطی [7]

معادله‌ی بنیادین برای اولین مدل، به صورت زیر است.

$$\left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1}\right)\sigma + \frac{\mu}{E_0 E_1} \dot{\sigma} = \varepsilon + \frac{\mu}{E_1} \dot{\varepsilon} \quad (۱۳-۱)$$

برای دومین مدل، معادله‌ی بنیادین به صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{E_1}\right) = \varepsilon \frac{E_0}{\mu} + \dot{\varepsilon} \left(1 + \frac{E_0}{E_1}\right) \quad (۱۴-۱)$$

توضیحات تکمیلی راجع به مواد ویسکوالاستیک و مدل‌های آن در پیوست الف آورده شده است.

۱-۸- اجزای سازه‌ای

از لحاظ هندسه و شرایط بارگذاری، سازه‌ها را می‌توان به شش گروه کابل‌ها^۱، میله‌ها^۲، تیرها^۳، غشاها^۴، ورق‌ها^۵ و پوسته‌ها^۶ تقسیم‌بندی نمود. کابل‌ها ساده‌ترین سازه‌های یک‌بعدی هستند که تنها بار کششی را تحمل می‌کنند و قادر به تحمل بار فشاری و گشتاور خمشی نیستند. رشته نوعی کابل است که در ابتدا مستقیم بوده و دارای پیش‌کشش می‌باشد. میله‌ها نیز سازه‌هایی یک‌بعدی هستند که می‌توانند بارهای محوری و پیچشی را تحمل کنند. میله‌ها و ستون‌ها نوعی سازه‌ی دو نیرویی هستند و خرپا مجموعه‌ای از میله‌ها است. تیرها سازه‌هایی هستند که یکی از ابعاد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از دو بعد دیگر است و در معرض بارهای عرضی قرار دارند که منجر به خمش آن‌ها می‌شود. در حالت کلی تیر قادر به تحمل نیروهای کششی، فشاری، خمشی، برش عرضی و پیچشی است. به عبارت دیگر کابل‌ها، رشته‌ها، میله‌ها و ستون‌ها نوع خاصی از تیرها هستند [9]. ورق‌ها سازه‌هایی مسطح هستند که دو بعد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از بعد سوم است و قادرند نیروهای کششی، فشاری، برش صفحه-ای^۷، خمشی، پیچشی و بارهای برشی عرضی را تحمل کنند ([9]، [10]). غشا سازه‌ای دوبعدی است که تنها می‌تواند نیروی کشش و برش صفحه‌ای را تحمل کند. غشا تنها می‌تواند نیروی کشش و برش صفحه‌ای را تحمل کند و قادر به تحمل خمش نمی‌باشد ([9]، [10]، [11]). پوسته‌ها سازه‌هایی خمیده هستند که دو بعد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از بعد سوم است و قادرند نیروهای خارج صفحه^۸ را با ایجاد نیروهای صفحه‌ای، تحمل کنند ([9]، [11]). پوسته‌ها عمومی‌ترین سازه‌های مهندسی هستند که ورق‌ها و غشاها نوع خاصی از آن‌ها می‌باشند.

¹ Cables

² Rods

³ Beams

⁴ Membranes

⁵ Plates

⁶ Shells

⁷ In-plane

⁸ Out-of-plane

۱-۹- غیر خطی^۱

سیستم‌های غیرخطی، سیستم‌هایی هستند که اصل جمع آثار در مورد آن‌ها صادق نیست [9]. سیستم هنگامی غیرخطی است که حاصل ضرب متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها در معادلات حرکت، شرایط مرزی یا روابط سازگاری ظاهر شود. همچنین وجود ناپیوستگی در سیستم، باعث غیرخطی شدن معادلات می‌شود [12]. بررسی مدل‌های خطی به‌تنهایی برای درک رفتار سیستم کافی نیست. زمانی که دامنه‌ی نوسانات بزرگ باشد و فرکانس‌های طبیعی وابسته به دامنه‌هایشان باشند، پاسخ‌های خطی نادرست هستند. مدل‌های خطی می‌توانند همراه کننده باشند؛ زیرا ممکن است یک حل خطی پیش‌بینی کند که سیستم پایدار است در حالی که در واقعیت ناپایدار است [13]. در نظر گرفتن رفتار غیرخطی در مدل‌سازی سازه‌های مهندسی باعث می‌شود مهارت و واقع‌نگری بیشتر در طراحی، تحلیل و کنترل این سازه‌ها اعمال شود. ایوانوفسکی^۲ [14] در سال ۱۹۷۶، نایفه و موک^۳ [15] در سال ۱۹۷۹ و مون^۴ [16] در سال ۱۹۸۷ راجع به انواع مختلف سیستم‌های غیرخطی با جزئیات و همراه با مثال، توضیح داده‌اند. عوامل متعددی سبب ایجاد رفتار غیرخطی می‌شوند که در ادامه توضیح داده خواهد شد [13].

(۱) هندسه: این مشخصه در سیستم‌هایی با تغییر شکل‌های بزرگ و یا سیستم‌هایی که در اثر کمانش^۵ خراب^۶ می‌شوند، مهم است. در تیرها و ورق‌ها، عامل غیرخطی هندسی، ناشی از معادلات غیرخطی کرنش است که در آن جابجایی عرضی با کرنش‌های محوری کوپل است. در نتیجه، کشیدگی صفحه‌ی میانی در تیر یا ورق رخ می‌دهد. برای مثال در میدان جابجایی فن کارمن^۷ (تغییر شکل‌های بزرگ)، عامل غیرخطی در مشتقات آن ظاهر می‌شود. این

¹ Nonlinearity

² Iwanowski

³ Mook

⁴ Moon

⁵ Buckling

⁶ Fail

⁷ Von-Karman

غیرخطی در انرژی پتانسیل سیستم ظاهر می‌شود.

۲) **جنس ماده:** یکی دیگر از عوامل جنس ماده است. در واقع این نوع از غیرخطی زمانی رخ می‌دهد که قانون هوک (رابطه‌ی خطی تنش- کرنش) برای ماده‌ی مورد نظر نامعتبر باشد، در این صورت جملات غیرخطی در معادلات ظاهر می‌گردد.

۳) **شرایط مرزی:** جملات غیرخطی ممکن است در شرایط مرزی مسأله ظاهر شوند. برای مثال استفاده از فنر و دمپر غیرخطی در یک سیستم، باعث ایجاد جملات غیرخطی می‌شود.

۴) **بارگذاری:** نوع بارگذاری اعمال شده بر روی سازه نیز، یکی دیگر از عوامل ظاهر شدن جملات غیرخطی در معادلات حرکت می‌باشد.

۵) **استهلاک:** استهلاک اساساً یک پدیده‌ی غیرخطی است. زیرا نیروی استهلاک تابع غیرخطی از جابجایی و سرعت است. استهلاک ویسکوز خطی نوعی ایده‌آل سازی سیستم است. اصطکاک خشک و استهلاک هیستریسیس نمونه‌هایی از استهلاک غیرخطی می‌باشند.

۶) **اینرسی:** غیرخطی اینرسی ناشی از وجود جملات غیرخطی سرعت و شتاب در معادلات حرکت است. انرژی جنبشی سیستم منشأ ایجاد غیرخطی‌های اینرسی است. جملات شتاب کریولیس و جانب مرکز نمونه‌هایی از این نوع غیرخطی می‌باشند.

۱-۱۰-۱- مروری بر تئوری‌های بررسی رفتار ورق‌ها

تئوری‌های ورق دوبعدی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

۱- تئوری ورق کلاسیک که در آن اثر تغییر شکل برشی عرضی صرف نظر شده است.

۲- تئوری‌های تغییر شکل برشی ورق

تئوری ورق کلاسیک برای حالت خمش خالص، بر مبنای میدان جابجایی (۱-۱۵) می‌باشد.

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{۱۵-۱}$$

که در آن (u, v, w) به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در راستای (x, y, z) و w_0 خیز صفحه‌ی میانی (یعنی $z = 0$) می‌باشد. میدان جابجایی مذکور دلالت بر آن دارد که خط مستقیم عمود بر صفحه‌ی xy ، پس از تغییر شکل، مستقیم و عمود باقی می‌ماند. در فرض کیرشلف هر دو اثر برش عرضی و نرمال عرضی، یعنی تغییر شکل حاصل از خمش و کشیدگی درون صفحه‌ای صرف نظر شده است.

یک تعداد از تئوری‌های تغییر شکل برشی وجود دارند که ساده‌ترین آن، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۱ است که همچنین به تئوری میندلین^۲ معروف است. این تئوری بر مبنای میدان جابه‌جایی زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= z \varphi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= z \varphi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{۱۶-۱}$$

که در آن φ_x و φ_y به ترتیب چرخش حول محورهای x و y می‌باشند. این تئوری با در نظر گرفتن تغییر شکل عرضی در فرضیات سینماتیکی‌اش (یعنی کرنش برش عرضی ثابت نسبت به ضخامت)، تئوری کلاسیک را توسعه داده است. در تئوری برشی مرتبه اول، فاکتورهای تصحیح برشی معرفی می‌شوند که اختلاف بین نیروی برشی عرضی واقعی و آنچه که با استفاده از روابط سینماتیکی FSDT به دست می‌آیند را تصحیح می‌کنند. که این پارامترها علاوه بر هندسه‌ی سازه، به بارگذاری و شرایط مرزی ورق نیز وابسته می‌باشد.

در هر دو تئوری برشی مرتبه اول و کلاسیک، حالت تنش را صفحه‌ای در نظر گرفته و از شکل تنش صفحه‌ای کاهش یافته معادله رفتاری استفاده شده است.

^۱ First-order Shear Deformation Theory (FSDT)

^۲ Mindlin theory

در تئوری‌های مرتبه دو و بالاتر، از چند جمله‌ای مرتبه بالاتر در بسط مربوط به مؤلفه‌های جابه‌جایی استفاده می‌شود. تئوری‌های مرتبه بالاتر، پارامترهای جدیدی معرفی می‌کنند که اغلب تعبیر فیزیکی آن‌ها مشکل می‌باشد. تئوری مرتبه دوم، میدان جابجایی را به صورت زیر در نظر می‌گیرد.

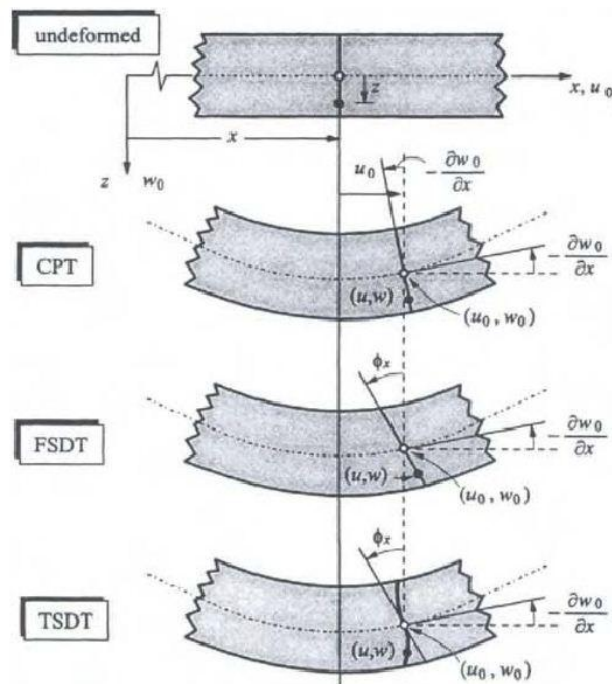
$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z \varphi_x(x, y) + z^2 \psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z \varphi_y(x, y) + z^2 \psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (17-1)$$

در تئوری برشی مرتبه سوم^۱ ردی میدان جابجایی به صورت زیر فرض می‌شود.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z \varphi_x(x, y) - \alpha z^3 \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z) &= z \varphi_y(x, y) - \alpha z^3 \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (18-1)$$

$\alpha = 4/(3h^2)$ می‌باشد و با صفر قرار دادن آن، به تئوری مرتبه اول حاصل می‌شود. میدان جابجایی با تغییرات مرتبه دوم کرنش برشی عرضی در راستای ضخامت و مقدار صفر تنش‌های برشی در سطوح بالا و پایین ورق، منطبق می‌باشد. برخلاف تئوری مرتبه اول، تئوری مرتبه سوم نیاز به فاکتور تصحیح برشی ندارد. در شکل (۱-۶)، هندسه‌ی اولیه و تغییر شکل یافته یک لبه ورق از دیدگاه تئوری‌های مختلف نشان داده شده است.

¹ TSDT



شکل (۶-۱) هندسه‌ی اولیه و تغییر شکل یافته یک لبه ورق از دیدگاه تئوری‌های مختلف [17]

علاوه بر سادگی ذاتی و هزینه‌ی محاسباتی پایین، تئوری ورق مرتبه اول اغلب یک توصیف با دقت کافی از پاسخ‌های عمومی (مانند خیز، بار کمانش و فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات) برای ورق‌های نازک یا ضخیم متوسط، فراهم می‌آورد. از این رو از این روش برای تعیین پاسخ‌های عمومی استفاده می‌شود. تئوری مرتبه سوم، نسبت به مرتبه اول، علی‌رغم افزایش زیاد هزینه محاسباتی، دقت نسبی را به میزان کمی افزایش می‌دهد [17].

۱-۱-۱- مرور مقالات

چو و هرمان^۱ [18] ارتعاشات آزاد غیرخطی با دامنه‌ی زیاد ورق‌های مستطیل شکل الاستیک، با تئوری ون-کارمن را با استفاده از تئوری اغتشاشات حل کردند. یاماکی^۲ [19] با فرض اینکه می‌توان از نیروهای اینرسی طولی و دورانی صرف نظر کرد و با استفاده از حل تقریبی گالرکین، تأثیر دامنه‌ی بزرگ بر ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های مستطیلی و دایروی متقارن محوری، در حالت الاستیک و با

¹ Chu and Herrmann

² Yamaki

شرایط مرزی مختلف را بررسی کرد. لیساً¹ [20] ارتعاشات خطی ورق‌های دایروی و حلقوی را به طور جامع مورد بررسی و مطالعه قرار داد. وی از تئوری کلاسیک برای به دست آوردن معادلات و از بسط فوریه و توابع بسل برای حل معادلات استفاده کرده است. رابرتسون² [21] ارتعاش اجباری ورق مدور متقارن محوری ویسکوالاستیک با به کارگیری روش ویلیامز (الگوریتم فاکتورگیری عددی) و با در نظر گرفتن چرخش‌ها و اثر برش را بررسی کرد. کونگ و پاو³ [22] ارتعاشات خمشی غیرخطی ورق دایروی الاستیک، با شرط مرزی گیردار را با استفاده از روش گالرکین و با در نظر گرفتن یک جمله از بسط، مورد مطالعه قرار دادند و سپس نتایج تحلیلی خود را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند. آن‌ها از تئوری سه بعدی غیرخطی الاستیسیته برای به دست آوردن معادلات حاکم، استفاده کردند. رفیلد⁴ [23] با استفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم بر ورق دایروی الاستیک را به دست آورد و ارتعاشات اجباری با دامنه زیاد را با استفاده از روش گالرکین بررسی کرد و پاسخ ورق دایروی را به دست آورد. سریده‌ها⁵ و همکاران [24] ارتعاشات غیرخطی اجباری ورق دایروی الاستیک در حالت متقارن محوری را با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها و به کمک روش اغتشاشات بررسی کردند. آوار⁶ و ناس [25] پاسخ دینامیکی غیرخطی ورق‌های دایروی تحت بارهای گذرا را با استفاده از تئوری کلاسیک بررسی نمودند. چند جمله‌ای‌های چپیشف برای حرکت‌های با دامنه‌ی زیاد تحت بارهای گذرا با در نظر گرفتن میرایی و نامیرایی به کار گرفته شد. همچنین معادلات غیرخطی به وسیله‌ی بسط تیلور خطی شد. سریده‌ها و همکاران [26] ارتعاشات غیرخطی اجباری ورق دایروی الاستیک در حالت نامتقارن را با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها و به کمک روش اغتشاشات بررسی کردند. ناگایا⁷ [27] ارتعاشات خطی ورق مدور ویسکوالاستیک با مرزهای داخلی دایره‌ای خارج از مرکز، با استفاده از تئوری

¹ Leissa

² Robertson

³ Kung and Pao

⁴ Rehfield

⁵ Sridhar

⁶ Alwar and Nath

⁷ Nagaya

کلاسیک برای شرایط مرزی مختلف را به کمک روش عددی مطالعه کرد. بیلی و چن^۱ [28] مدهای طبیعی ورق مدور ویسکوالاستیک خطی با لبه‌های آزاد با گسترش تئوری خمش کلاسیک ورق‌های نازک و در نظر گرفتن اثر اتلاف مکانیکی و چرخش بدون در نظر گرفتن اثر برش را به دست آوردند. وانگ و تی سای^۲ [29] تحلیل دینامیکی و نیمه استاتیکی ورق‌های ویسکوالاستیک میندلین، با در نظر گرفتن مدل ماکسول و استاندارد جامد خطی مسائل مختلفی را بررسی کردند. روش حل آن‌ها ترکیبی از روش‌های المان محدود و نیومارک بود. وینسل^۳ [30] با مرور کلی، کارهای انجام شده برای ورق توپر و حلقوی الاستیک را بر اساس تئوری برشی و کلاسیک ارائه کرد، وی اثر شرایط مرزی، خواص مکانیکی و ابعاد هندسی ورق بر فرکانس طبیعی را بررسی نمود. سدرباوم و ابودی^۴ [31] پاسخ دینامیکی ورق‌های چند لایه تحت بار ضربه‌ای را بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از مدل ویسکوالاستیک بولتزمن و با استفاده از روش تحلیلی تبدیل فوریه در محدوده‌ی فرکانسی تحلیل را انجام دادند؛ تئوری ورق مورد استفاده‌ی آن‌ها تئوری برشی مرتبه اول بود. ابودی و همکاران [32] به بررسی پایداری دینامیکی یک صفحه‌ی نازک ویسکوالاستیک تحت بار هارمونیک درون صفحه‌ای با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های کوچک، با استفاده از اصل لیاپانوف پرداختند. هادیان و نایفه^۵ [33] با استفاده از معادلات فن-کارمن در مختصات قطبی و در نظر گرفتن تئوری کلاسیک، به کمک روش مقیاس‌های چندگانه پاسخ مدهای متقارن ورق‌های مدور الاستیک را با در نظر گرفتن اثر میرایی با معرفی جمله‌ی اتلاف، بررسی کردند. سدرباوم و دراوشی^۶ [34] پایداری ورق‌های مدور ویسکوالاستیک با هندسه‌ی غیرخطی که در معرض بار شعاعی و ممان خمشی در لبه‌ها هستند را بررسی کردند. آن‌ها از روش عددی رانج کوتای مرتبه چهار برای حل معادلات استفاده کردند. لیو^۷ و همکاران [35] مرور جامعی بر مطالعات انجام شده در زمینه‌ی ارتعاشات آزاد ورق مدور ضخیم در حالت الاستیک و با

¹ Bailey and Chen

² Wang and Tsai

³ Weisensel

⁴ Cederbaum and Aboudi

⁵ Hadian and Nayfeh

⁶ Drawshi

⁷ Liew

شکل‌های مختلف که از تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده کرده‌اند، داشتند. رومانلی^۱ و همکاران [36] ارتعاشات خطی ورق حلقوی الاستیک را بررسی نمودند. آن‌ها با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها و استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی^۲ فرکانس‌های ورق را به دست آوردند. اسماعیل‌زاده و جلالی [37] ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مستطیلی ویسکوالاستیک با شرط مرزی ساده و با در نظر گرفتن مدل کلون-ویت و تئوری کلاسیک را مطالعه کردند، آن‌ها معادله‌ی به دست آمده از اصل همیلتون را به کمک روش بوبنوف-گالرکین^۳ حل نمودند. توز^۴ و همکاران [38] به کمک روش اغتشاشات، ارتعاشات اجباری غیرخطی نامتقارن ورق‌های دایروی با شرایط مرزی آزاد را مطالعه کردند و در سال بعد نتایج خود را با نتایج به دست آمده از روش آزمایشگاهی [39] مقایسه کردند. لی و یو^۵ [40] ارتعاشات غیرخطی نامتقارن یک ورق دایروی با شرط مرزی گیردار و روی بستر الاستیک را به کمک روش اغتشاشات حل و پدیده رزونانس داخلی را مطالعه کردند. صالحی و آقایی [41] رهایش دینامیکی با تغییر شکل‌های بزرگ ورق‌های مدور ویسکوالاستیک نامتقارن، با در نظر گرفتن برش عرضی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و با فرض مدل جامد استاندارد خطی را ارائه کردند، معادلات غیرخطی به دست آمده با ترکیب روش رهایش پویا^۶ و تفاضل محدود حل شدند. الله‌وردی‌زاده و همکاران [42] اولین محققینی بودند که روابط حاکم بر ارتعاشات غیرخطی متقارن محوری ورق‌های نازک دایروی هدفمند^۷ را بر اساس معادلات دینامیکی فن کارمن، فرمول‌بندی کردند و اثرات دامنه ارتعاش و کسر حجمی را بر تنش اعمالی در ورق بررسی کردند. آن‌ها از تئوری کیرشهف ورق‌ها و آنالیز عددی برای به دست آوردن معادلات و حل آن‌ها استفاده کردند. شوشتری و خادم [43] ارتعاشات غیرخطی ورق مستطیل شکل ویسکوالاستیک (مدل کلون-ویت) را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از روش گالرکین

¹ Romanelli

² DQM

³ Bubnov-Galerkin method

⁴ Touzé

⁵ Lee and Yeo

⁶ Dynamic relaxation

⁷ FGM

و نیز روش مقیاس‌های چندگانه یک حلّ عمومی به‌دست آوردند. گوپتا^۱ [44] تحلیل ارتعاشی ورق مستطیلی ویسکوالاستیک با ضخامت متغیر خطی در یک جهت و تغییر شکل پارابولیک در جهت دیگر را با در نظر گرفتن مدل کلونین ارائه کرد. تئوری کلاسیک و روش ریلی ریتز برای به‌دست آوردن معادله و فرکانس‌ها مورد استفاده قرار گرفتند. گوپتا و کومار^۲ [45] ارتعاشات آزاد خطی، ورق دایروی ناهمگن ویسکوالاستیک (مدل کلونین-ویت)، که ضخامت آن در جهت شعاع به‌صورت خطی تغییر می‌کند و در معرض یک توزیع دمای خطی در این جهت می‌باشد را با استفاده از تئوری کلاسیک و به‌کمک روش تقریبی ریلی ریتز بررسی کردند. آسیه و الطاهر^۳ [46] رفتار ورق‌های مستطیلی ویسکوالاستیک کامپوزیتی و ویسکوالاستیک ایزوتروپ را تحت بار گذرا بررسی نمودند. آن‌ها پاسخ را با استفاده از مدل ویچرت و تئوری میندلین، با روش المان محدود بررسی کردند. جلالی و اسماعیل-زاده خادم [47] ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی یک میکروورق مربعی ویسکوالاستیک (مدل کلونین-ویت) کامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب کربن، تحت بار الکترواستاتیکی را مورد بررسی قرار دادند. معادلات حرکت غیرخطی میکروورق با استفاده از روش نیوتن و تئوری فن-کارمن استخراج شده و با به‌کارگیری ترکیبی از روش گالرکین و تئوری مقیاس‌های چندگانه معادله‌ها حل شده‌اند. خلفی و روس^۴ [48] برای به‌دست آوردن پاسخ گذرای ورق مستطیلی لایه‌ای ویسکوالاستیک، هسته‌ی ویسکوالاستیک را به‌صورت سری پرونی مدل کردند. آن‌ها معادله‌ی حرکت را از معادلات لاگرانژ-به‌دست آوردند؛ همچنین معادله‌ی حرکت را با استفاده از تبدیل فوریه حل کردند. آن‌ها تنها برش عرضی را مد نظر قرار دادند و از تنش‌های نرمال نیز صرف نظر کردند. شریعت و همکاران [49] ارتعاشات آزاد ورق مدور ویسکوالاستیک ضخامت متغیر از ماده‌ی ناهمگن با بستر الاستیک در لبه‌ی ورق را بررسی کردند. در این تحقیق فرض شد خواص ویسکوالاستیک ورق در جهت ضخامت و شعاع متغیر است، معادلات به‌دست آمده به وسیله‌ی سری‌های توانی حل شده است. آن‌ها از تئوری

¹ Gupta

² Kumar

³ Assie and Eltaher

⁴ Khalfi and Ross

کلاسیک استفاده کردند. چن و لی^۱ [50] به بررسی پاسخ زیاد ورق‌های پیزوالکتریک با استفاده از تعاریف فن کارمن با روش عددی پرداختند. نشیر و قاهری [51] ارتعاشات اجباری غیرخطی نامتقارن ورق‌های نازک دایروی از جنس مواد هدفمند را با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها و روش اغتشاشات مورد بررسی قرار دادند. یونسین و نوروزی [52] آنالیز فرکانسی غیرخطی، بر روی ورق‌های مستطیلی ویسکوالاستیک (مدل میرایی سازه کلون) در معرض جریان مافوق صوت و نیروهای خارجی، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه انجام دادند. آن‌ها از تئوری الاستیسیته برای این آنالیز استفاده کردند. سوامیناتان^۲ و همکاران [53] مرور جامعی بر روی انواع روش‌های (تحلیلی و عددی) به کار گرفته شده برای آنالیز تنش، ارتعاشات و کماتش ورق‌های هدفمند انجام دادند. امابیلی^۳ [54] ارتعاشات غیرخطی ورق مستطیلی ویسکوالاستیک (مدل کلون-ویت) را با استفاده از روش عددی حل کرد. وی با فرض نازک بودن ورق از تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی صرف نظر کرده است.

۱-۱۲- جمع‌بندی

در این فصل، ابتدا به معرفی مواد ویسکوالاستیک، رفتار و ویژگی‌های این مواد، معادلات بنیادین تنش-کرنش در شکل دیفرانسیلی و معرفی مدل‌های رئولوژیکی این مواد پرداخته شد. سپس انواع اجزای سازه‌ای و غیرخطی‌ها معرفی شد. سپس به معرفی تئوری‌های متداول در بررسی ورق و در نهایت به مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه پرداخته شد. مرور مقالات نشان می‌دهد تحقیق‌های زیادی در زمینه ارتعاشات خطی و غیرخطی ورق‌های مستطیلی و دایروی در حالت متقارن و نامتقارن، برای مواد در حالت الاستیک، ویسکوالاستیک و FGM انجام شده است. برای ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مستطیلی و دایروی در حالت متقارن و نامتقارن برای مواد الاستیک و FGM با استفاده از تئوری‌های مختلف و روش‌های تحلیلی و عددی، مطالعات زیادی انجام شده است. همچنین ارتعاشات خطی

¹ Chen and Li

² Swaminathan

³ Amabili

ورق‌های دایروی از جنس ویسکوالاستیک را با استفاده از تئوری‌ها و روش‌های مختلف بررسی کرده‌اند. از مطالعات انجام شده می‌توان نتیجه گرفت، در بیشتر مواردی که از تئوری کلاسیک استفاده کرده‌اند از روش تحلیلی برای حل بهره برده‌اند ولی در تحقیقاتی که با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی انجام شده از روش عددی برای حل استفاده کرده‌اند. در این پایان‌نامه، به‌صورت تحلیلی به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری ورق مدور ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد و استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداخته می‌شود.

فصل دوم

استخراج معادلات

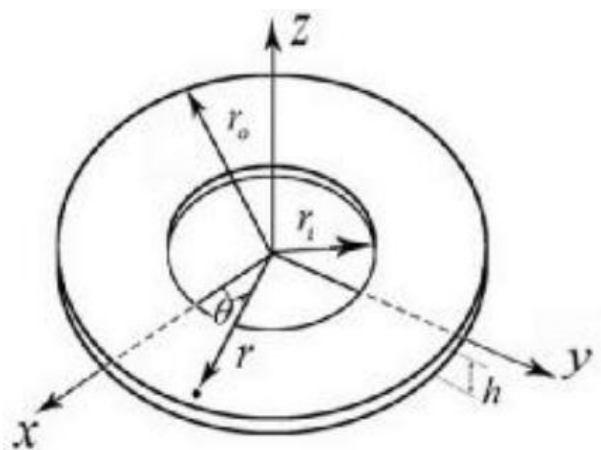
۲-۱- مقدمه

در این فصل، ابتدا به استخراج معادلات حرکت ورق الاستیک با در نظر گرفتن خیز نسبتاً زیاد، با استفاده از اصل همیلتون پرداخته خواهد شد. سپس با در نظر گرفتن رفتار ماده به صورت ویسکوالاستیک در برش و الاستیک در اتساع، معادلات به دست آمده برای ماده‌ی ویسکوالاستیک، تعمیم داده می‌شود. معادلات به دست آمده بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول خواهد بود و دارای فرضیات زیر است.

- ورق همگن و همسانگرد است؛
- خیز نسبتاً زیاد و از روابط فن کارمن برای تعیین کرنش-جابجایی استفاده می‌شود؛
- سازه متقارن محوری است؛
- رابطه تنش-کرنش، خطی فرض می‌شود.

۲-۲- تعریف مسأله

مطابق شکل (۱-۲) ورق حلقوی با شعاع داخلی r_i ، شعاع خارجی r_o ، ضخامت h و چگالی ρ مفروض است. ورق تحت بار عرضی دینامیکی بر واحد سطح $Q(r,t)$ قرار دارد. فرمول‌بندی مسأله بر اساس دستگاه مختصات قطبی (r, θ, z) بوده که در آن r جهت شعاع، θ زاویه‌ی چرخش حول محور z ، و جهت z نیز در راستای عمود بر سطح ورق و از سطح میانی می‌باشد.



شکل (۱-۲) هندسه و دستگاه مختصات ورق حلقوی

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} u_r(r, z, t) &= u_0(r, t) + z u_1(r, t) \\ u_\theta(r, z, t) &= 0 \\ u_z(r, z, t) &= w_0(r, t) + z w_1(r, t) \end{aligned} \quad (1-2)$$

که در آن u_r ، u_θ و u_z سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی به ترتیب در راستای r ، θ و z می‌باشند. u_0 و w_0 دارای بعد طول بوده و بیانگر جابه‌جایی صفحه‌ی میانی بوده که مجهول هستند و باید تعیین شوند. u_1 تابعی بی‌بعد بوده و معرف چرخش حول محور x می‌باشد (بیانگر تابع φ_x در شکل (۶-۱) است) و w_1 نیز تابعی بی‌بعد بوده که معادل با کرنش عرضی (ε_z) در حالت خیز کوتاه است؛ همچنین این توابع، همانند u_0 و w_0 مجهول می‌باشند. با در نظر گرفتن حرکت به صورت متقارن محوری، مؤلفه‌ی جابه‌جایی در جهت θ صفر خواهد بود. با استفاده از فرض فن-کارمن برای روابط کرنش-جابجایی، کرنش‌ها در حالت متقارن محوری به صورت زیر می‌باشند [55].

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2; \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}; \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \gamma_{r\theta} = 0; \gamma_{\theta z} = 0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

بر اساس قانون هوک، رابطه‌ی تنش-کرنش یک جسم جامد سه‌بعدی ایزوتروپیک الاستیک، به صورت

رابطه‌ی (۳-۲) می‌باشد [7].

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (K - \frac{2G}{3})(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G \varepsilon_r; \quad \sigma_\theta = (K - \frac{2G}{3})(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G \varepsilon_\theta \\ \sigma_z &= (K - \frac{2G}{3})(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G \varepsilon_z; \quad \tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} &= G \gamma_{\theta z}; \quad \tau_{rz} = G \gamma_{rz}\end{aligned}\tag{۳-۲}$$

که در آن K مدول بالک و G مدول برشی می‌باشد.

بر اساس میدان جابه‌جایی، میدان کرنش به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_0}{\partial r} + z \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} + z \frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_0 + z u_1}{r} \\ \varepsilon_z &= w_1 + \frac{1}{2} (w_1)^2; \quad \gamma_{rz} = u_1 + (1 + w_1) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} + z \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \\ \gamma_{r\theta} &= \gamma_{\theta z} = 0\end{aligned}\tag{۴-۲}$$

۲-۳- محاسبه‌ی انرژی کرنشی ورق

چگالی انرژی کرنشی به صورت زیر تعریف می‌شود [56].

$$U^* = \sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{rz} \gamma_{rz} + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z}\tag{۵-۲}$$

تغییرات^۱ چگالی انرژی کرنشی با جایگذاری مقادیر صفر برخی از مؤلفه‌های تنش، عبارت است از:

$$\delta U^* = \sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{rz} \delta \gamma_{rz}\tag{۶-۲}$$

با جایگذاری مؤلفه‌های میدان کرنش (۴-۲) در (۶-۲) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}\delta U^* &= \sigma_r \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + z \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} + z \frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 \right) + \sigma_\theta \delta \left(\frac{u_0 + z u_1}{r} \right) + \\ &\sigma_z \delta \left(w_1 + \frac{1}{2} (w_1)^2 \right) + \tau_{rz} \delta \left(u_1 + (1 + w_1) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} + z \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \right)\end{aligned}\tag{۷-۲}$$

انرژی کرنشی ورق با انتگرال‌گیری چگالی انرژی کرنشی بر روی حجم، مطابق رابطه‌ی (۲-۸) به دست می‌آید.

¹ Variation

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \left[N_r \frac{\partial(\delta u_0)}{\partial r} + M_r \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial r} + \left(N_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + M_r \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \frac{\partial(\delta w_0)}{\partial r} \right. \\ & + \left. \left(M_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + B_r \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \frac{\partial(\delta w_1)}{\partial r} \right] + [N_\theta \delta u_0 + M_\theta \delta u_1] + N_z [1+w_1] \delta w_1 \\ & + \left[Q_r \delta u_1 + \left(Q_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + M_{rz} \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \delta w_1 + (1+w_1) \left(Q_r \frac{\partial(\delta w_0)}{\partial t} + M_{rz} \frac{\partial(\delta w_1)}{\partial t} \right) \right] r dr d\theta \end{aligned} \quad (8-2)$$

در محاسبه‌ی انرژی کرنشی، از منته‌های تنش که به صورت زیر تعریف می‌شوند، استفاده می‌شود.

$$(N_r, N_\theta, N_z) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z) dz ; (M_r, M_\theta) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z (\sigma_r, \sigma_\theta) dz \quad (9-2)$$

$$(B_r) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \sigma_r dz ; (Q_r, M_{rz}) = Ks \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z) \tau_{rz} dz$$

Ks ضریب تصحیح برشی می‌باشد و در این تحقیق برابر $\frac{5}{6}$ در نظر گرفته می‌شود [57].

۲-۴- محاسبه‌ی انرژی جنبشی ورق

انرژی جنبشی ورق، از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود [58].

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] r dz dr d\theta \quad (10-2)$$

با جایگذاری میدان جابه‌جایی (۱-۲) در رابطه‌ی (۱۰-۲) و انتگرال‌گیری از آن، انرژی جنبشی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$T = \frac{1}{2} \rho \int \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 h + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 h + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 \frac{h^3}{12} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 \frac{h^3}{12} \right] 2\pi r dr \quad (11-2)$$

۲-۵- کار نیروی خارجی

کار ناشی از تحریک عرضی Q که بر روی سطح ورق یعنی $z = \frac{h}{2}$ اعمال می‌شود به صورت زیر است [58].

$$W = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} rQ(r,t)u_z drd\theta \quad (۱۲-۲)$$

۲-۶- تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون

با استفاده از اصل همیلتون در بازه‌ی زمانی (t_1, t_2) نتیجه می‌شود [58].

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 ; \quad L = T - U + W \quad (۱۳-۲)$$

با به کارگیری روابط (۲-۸) تا (۲-۱۳) معادلات حرکت، برحسب منته‌های تنش ورق الاستیک به صورت روابط زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & -\rho r h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{d(rN_r)}{dr} - N_\theta = 0 \\ \delta u_1 : & -\rho r \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{d(rM_r)}{dr} - M_\theta - rQ_r = 0 \\ \delta w_0 : & -\rho r h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{d \left[r \left((1+w_1)Q_r + N_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + M_r \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \right]}{dr} - rQ(r,t) = 0 \quad (۱۴-۲) \\ \delta w_1 : & -\rho r \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - r \left(Q_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + M_{rz} \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) - rN_z (1+w_1) + \\ & \frac{d \left[r \left((1+w_1)M_{rz} + M_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + B_r \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \right]}{dr} - \frac{h}{2} rQ(r,t) = 0 \end{aligned}$$

با جایگذاری منته‌های تنش (۲-۹) در (۲-۱۴)، معادلات حرکت برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
& \left(r \left(\frac{K}{12} + \frac{G}{9} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \right) + \frac{G}{12} \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 \right) h^3 + \left(r \left(K + \frac{4G}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \right) \right. \\
& - \rho r \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) + r \left(K + \frac{4G}{3} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) + \left(K + \frac{4G}{3} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + G \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \\
& \left. + r \left(K - \frac{2G}{3} \right) (1+w_1) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) - \left(K - \frac{2G}{3} \right) \frac{u_0}{r} - \frac{2Gu_0}{r} \right) h = 0
\end{aligned} \tag{الف-١٥-٢}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{12} r \left(K + \frac{4G}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \right) - \frac{1}{12} \rho r \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{12} r \left(K + \frac{4G}{3} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) \right. \\
& + \frac{1}{12} r \left(K + \frac{4G}{3} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{K}{12} + \frac{G}{9} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right) - \frac{1}{6} \frac{Gu_1}{r} \\
& + \frac{G}{6} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) - \frac{1}{12} \left(K - \frac{2G}{3} \right) \frac{u_1}{r} \left. \right) h^3 \\
& + \left(-rKsG (1+w_1) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) - rKsGu_1 \right) h = 0
\end{aligned} \tag{ب-١٥-٢}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{r}{12} \left(K + \frac{4}{3}G \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \right) + r \left(\frac{K}{8} + \frac{G}{6} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) + \right. \\
& \left(r \left(\frac{K}{12} + \frac{G}{9} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + r \left(\frac{K}{4} + \frac{G}{3} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{12} \left(K - \frac{2}{3}G \right) u_1 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{K}{6} + \frac{G}{18} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + \left(\frac{K}{8} + \frac{G}{6} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right) h^3 + \\
& \left(r \left(K + \frac{4}{3}G \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \right) + \left(r \left(K + \frac{4}{3}G \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + r \left(\frac{3K}{2} + 2G \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 + r \left((1+w_1)^2 KsG + \right. \right. \\
& \left. \left(K - \frac{2}{3}G \right) \left(\frac{w_1^2}{2} + \frac{u_0}{r} + w_1 \right) \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) - \rho r \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) + \left(2K + \frac{2}{3}G \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + rKsG(1+w_1) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{K}{2} + \frac{2G}{3} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^3 + \left(r \left(2(1+w_1)KsG + \left(K - \frac{2}{3}G \right) (1+w_1) \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) + (1+w_1)^2 KsG + \right. \right. \\
& \left. \left(K - \frac{2}{3}G \right) \left(\frac{w_1^2}{2} + w_1 \right) \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + (1+w_1)KsGu_1 + rKsGu_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \left. \right) h - rQ = 0
\end{aligned} \tag{ج-١٥-٢}$$

$$\begin{aligned}
& \left(r \left(\frac{3K}{160} + \frac{G}{40} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{K}{160} + \frac{G}{120} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^3 \right) h^5 + \\
& \left(r \left(\frac{K}{12} + \frac{G}{9} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \right) + \frac{r}{12} \left(K + \frac{4G}{3} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \right) + \right. \\
& \left. \left(r \left(\frac{K}{12} + \frac{G}{9} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + r \left(\frac{K}{4} + \frac{G}{3} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{12} \left(K - \frac{2G}{3} \right) u_1 \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) \right. \\
& \left. + \left(r \left(\frac{K}{12} + \frac{G}{9} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + r \left(\frac{K}{8} + \frac{G}{6} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + r \left(\frac{(1+w_1)^2 KsG}{12} + \frac{\left(K - \frac{2G}{3} \right) \left(\frac{w_1^2 u_0}{2r} + w_1 \right)}{12} \right) \right) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{K}{8} + \frac{G}{6} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \right. \\
& \left. - \frac{1}{12} \rho r \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) + \left(\frac{K}{6} + \frac{G}{18} \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + \left(\frac{K}{6} + \frac{G}{18} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} (rt) \right) \right. \\
& \left. + r(1+w_1) \left(\frac{KsG}{6} + \frac{1}{12} \left(K - \frac{2G}{3} \right) - \frac{KsG}{12} - \frac{1}{24} \left(K - \frac{2G}{3} \right) \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{12} \left(K - \frac{2G}{3} \right) \left(\frac{1}{2} w_1^2 + w_1 \right) + \frac{(1+w_1)^2}{12} KsG \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \right) h^3 \\
& - \left(r(1+w_1) \left(\left(K - \frac{2G}{3} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + \left(KsG + \left(\frac{K}{2} - \frac{G}{3} \right) \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 \right) + rKsGu_1 \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right. \\
& \left. + \frac{rQ}{2} + r(1+w_1) \left(\left(K - \frac{2G}{3} \right) \left(\frac{w_1^2}{2} + \frac{u_0}{r} + w_1 \right) + 2G \left(w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \right) \right) \right) h = 0
\end{aligned} \tag{۲-۱۵-۵}$$

۲-۷- تعمیم معادلات الاستیک استخراج شده به ورق ویسکوالاستیک

همان گونه که در فصل اول بیان شد، مرسوم است جهت توصیف رفتار ماده‌ی ویسکوالاستیک یک سیستم، اثر مؤلفه‌ی برشی را از مؤلفه‌ی تغییر حجم خالص جدا کنند. زیرا بخش‌های برشی و حجمی تنش، رفتارهای رهایش متفاوتی را دنبال می‌کنند. در این پایان‌نامه رفتار ماده در بالک (اتساع)، الاستیک و در برش، ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود.

۲-۷-۱- اعمال مدل ویسکوالاستیک مدل جامد استاندارد خطی نوع اول

برای مدل سازی ویسکوالاستیک از مدل جامد استاندارد خطی نوع اول استفاده شده است. شکل (۴-۱) و رابطه‌ی تنش و کرنش آن مطابق رابطه‌ی (۱-۱۳) است. در این حالت اپراتورهای P_1 و Q_1 در رابطه‌ی (۷-۱) (رابطه‌ی بین P_1, Q_1, P_2, Q_2, G و K) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$P_1 = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1}\right) + \frac{\tau}{E_0} D; Q_1 = 2(1 + \tau D) \quad (۱۶-۲)$$

که $\tau = \frac{\mu}{E_1}$ زمان رهایش و D اپراتور مشتق زمانی ($D = \frac{\partial}{\partial t}$) می‌باشند. اپراتورهای P_2 و Q_2 نیز به-

صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} P_2 &= 1 \\ Q_2 &= 3K_0 \end{aligned} \quad (۱۷-۲)$$

K_0 مدول بالک می‌باشد. بنابراین رابطه‌ی K و G و اپراتورها به صورت زیر است.

$$G = \frac{1}{2} \frac{Q_1}{P_1} = \frac{(1 + \tau D)}{\left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1}\right) + \frac{\tau}{E_0} D} \quad (۱۸-۲)$$

$$K = \frac{1}{3} \frac{Q_2}{P_2} = K_0$$

متغیرهای G_0^* و G_1^* را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$G_0^* = K \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1}\right); G_1^* = \frac{K}{E_0} \quad (۱۹-۲)$$

با اعمال اپراتورهای (۱۶-۲) و (۱۷-۲) و استفاده از رابطه‌ی (۱۸-۲) در معادلات (۲-۱۵)، معادلات حرکت ورق ویسکوالاستیک به دست می‌آید. به دلیل حجم زیاد معادلات، در اینجا شکل اپراتوری آنها نوشته شده است. اصل معادلات در پیوست ب آورده شده است.

$$\begin{aligned}
L_1(u_0, w_0, w_1, r, t, \partial/\partial t, \partial^2/\partial t^2, \partial^3/\partial t^3, \partial/\partial r, \partial^2/\partial r^2, \partial^2/\partial r \partial t, \partial^3/\partial r^2 \partial t) &= 0 \\
L_2(u_1, w_0, w_1, r, t, \partial/\partial t, \partial^2/\partial t^2, \partial^3/\partial t^3, \partial/\partial r, \partial^2/\partial r^2, \partial^2/\partial r \partial t, \partial^3/\partial r^2 \partial t) &= 0 \\
L_3(u_0, u_1, w_0, w_1, r, t, Q, \partial/\partial t, \partial^2/\partial t^2, \partial^3/\partial t^3, \partial/\partial r, \partial^2/\partial r^2, \partial^2/\partial r \partial t, \partial^3/\partial r^2 \partial t) &= 0 \\
L_4(u_0, u_1, w_0, w_1, r, t, Q, \partial/\partial t, \partial^2/\partial t^2, \partial^3/\partial t^3, \partial/\partial r, \partial^2/\partial r^2, \partial^2/\partial r \partial t, \partial^3/\partial r^2 \partial t) &= 0
\end{aligned} \tag{۲۰-۲}$$

معادلات حاضر، شامل چهار معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و ضرایب متغیر هستند، که با یکدیگر کوپل می‌باشند. شرایط مرزی به دست آمده با استفاده از اصل همیلتون بر حسب نتیجه‌های تنش برای ورق به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
[rN_r \delta u_0]_{r_i}^{r_o} = 0, \left[r \left(N_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + M_r \frac{\partial w_1}{\partial r} + (1+w_1) Q_r \right) \delta w_0 \right]_{r_i}^{r_o} &= 0 \\
[rM_r \delta u_1]_{r_i}^{r_o} = 0, \left[r \left(M_r \frac{\partial w_0}{\partial r} + B_r \frac{\partial w_1}{\partial r} + (1+w_1) M_{rz} \right) \delta w_1 \right]_{r_i}^{r_o} &= 0
\end{aligned} \tag{۲۱-۲}$$

از رابطه‌ی (۲۱-۲) شرایط مرزی مختلف را می‌توان استخراج نمود.

شرط مرزی لبه‌ی گیردار:

$$at \ r = r_i \text{ and } r = r_o; \ u_0 = 0, \ u_1 = 0, \ w_0 = 0, \ w_1 = 0 \tag{۲۲-۲}$$

شرط مرزی لبه‌ی ساده:

$$at \ r = r_i \text{ and } r = r_o; \ u_0 = 0, \ rM_r = 0, \ w_0 = 0, \ \frac{\partial w_1}{\partial r} = 0 \tag{۲۳-۲}$$

۲-۸- معادله‌ی ورق بر اساس تئوری کلاسیک در حالت ویسکوالاستیک

معادله‌ی ورق مدور الاستیک بر اساس تئوری کلاسیک به صورت رابطه‌ی (۲۴-۲) می‌باشد [10].

$$\rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + D \nabla^4 w_0 = 0 \tag{۲۴-۲}$$

در رابطه‌ی (۲-۲۴)، D سفتی خمشی^۱ و ∇ اپراتور لاپلاسین می‌باشد که در مختصات قطبی برای حالت متقارن محوری به صورت زیر است.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (۲-۲۵)$$

$$\nabla^4(\bullet) = \nabla^2 \nabla^2(\bullet); \nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial r^2} + \frac{\partial(\bullet)}{r \partial r}$$

با جایگذاری روابط (۱-۱۰) در معادله‌ی (۲-۲۴) و به کارگیری روابط (۲-۱۶) تا (۲-۱۹) معادله‌ی ویسکوالاستیک برای تئوری کلاسیک به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \rho \tau^2 \left(\frac{4}{3} G_1^* + G_1^{*2} \right) \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4} + \rho \tau \left(2G_0^* \left(G_1^* + \frac{2}{3} \right) + \frac{4}{3} G_1^* \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^3} \\ & + \rho G_0^* \left(\frac{4}{3} + G_0^* \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{K_0 h^2}{3} \left(\frac{1}{3} + G_0^* \right) \nabla^4 w_0 + \\ & \frac{K_0 h^2 \tau}{3} \left(\tau \left(\frac{1}{3} + G_1^* \right) \frac{\partial^2 (\nabla^4 w_0)}{\partial t^2} + \left(G_1^* + G_0^* + \frac{2}{3} \right) \frac{\partial (\nabla^4 w_0)}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned} \quad (۲-۲۶)$$

۲-۹- جمع بندی

در این فصل، ابتدا معادلات ورق مدور الاستیک براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با در نظر گرفتن خیز نسبتاً زیاد استخراج شد. سپس با اعمال اپراتورهای ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن مدل جامد استاندارد خطی نوع اول، معادلات ورق ویسکوالاستیک به دست می‌آید. در معادلات حرکت، جملات غیرخطی هندسی مربوط به روابط کرنش-جابجایی فن کارمن ظاهر می‌شوند. معادلات به دست آمده، شامل چهار معادله دیفرانسیل ضریب متغیر با مشتقات جزئی نسبت به زمان و مکان هستند، که هر چهار معادله به هم کوپل می‌باشند.

^۱ Flexural rigidity

فصل سوم
حل تالیفی

۳-۱- مقدمه

در فصل قبل، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی ورق مدور ویسکوالاستیک، براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، استخراج شد. معادلات به صورت یک دستگاه معادله دیفرانسیل، شامل چهار معادله دیفرانسیل ضریب متغیر غیرخطی با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان بوده که به یکدیگر کوپل هستند. برای حل این معادلات، از تئوری اغتشاشات استفاده می شود. برای این منظور ابتدا معادلات بی بعد می شود. پس از بی بعد سازی، فرکانس های طبیعی سیستم تعیین شده و سپس پاسخ دینامیکی ورق به دست می آید.

۳-۲- بی بعد سازی معادلات

پارامترهای بی بعد به صورت زیر تعریف می شوند.

$$r^* = \frac{r}{r_0}, \quad h^* = \frac{h}{h_0}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}, \quad u_0^* = \frac{u_0}{h_0}, \quad u_1^* = u_1, \quad w_0^* = \frac{w_0}{h_0}, \quad w_1^* = w_1 \quad (1-3)$$

r^* ، t^* و h^* به ترتیب شعاع، زمان و ضخامت بی بعد هستند. u_0^* ، u_1^* و w_0^* و w_1^* به ترتیب مؤلفه های بی بعد u_0 ، u_1 ، w_0 و w_1 می باشند. h_0 و t_0 شاخص های ضخامت و زمان هستند که مقادیر آنها به صورت $h_0 = h$ و $t_0 = r_0/c$ در نظر گرفته شده است. c معرف سرعت موج بوده و به صورت $c = \sqrt{K_0/\rho}$ تعریف شده است. r_0 شعاع خارجی می باشد.

با اعمال پارامترهای بی بعد فوق در معادلات، شکل بی بعد معادلات به دست می آید. در معادلات به دست آمده پارامترهای بی بعد جدید به صورت زیر تعریف می شوند.

$$e = \frac{\rho h_0^2}{K_0 t_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{r_0}, \quad \beta = \frac{\tau}{t_0}, \quad Q^* = \frac{Q}{\varepsilon K_0}, \quad \omega^* = \omega t_0 \quad (2-3)$$

ε پارامتری کوچک بوده و به عنوان پارامتر اغتشاش در نظر گرفته می شود. از تغییر متغیر $r^* = 1 + \varepsilon X$ ، به منظور ثابت شدن ضرایب متغیر استفاده می کنیم. در نهایت معادلات بی بعد شده،

شامل چهار معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی کوپل به هم با ضرایب ثابت و به شکل زیر است. در این پایان نامه برای ساده نویسی، به جای ω^* از ω استفاده می شود.

$$\begin{aligned}
 eq1: & (f_1 X^2 + f_2 X - f_3) \varepsilon^2 + (2f_1 X + f_2) \varepsilon + f_1 = 0 \\
 f_1 = & -72e \frac{\partial^2 g_1 [u_0^*]}{\partial t^{*2}} + 12 \frac{\partial^2 g_2 [w_0^*]}{\partial X^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + \left(h^{*2} \frac{\partial^2 g_2 [w_1^*]}{\partial X^2} + 12 g_3 [w_1^*] \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \\
 & + 12 g_5 [w_0^*] + h^{*2} g_5 [w_1^*] + 12 \frac{\partial^2 g_2 [u_0^*]}{\partial X^2} + 12 \frac{\partial g_3 [w_1^*]}{\partial X} + 12 \beta b_1 w_1^* \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X \partial t^*} \\
 f_2 = & 12 \frac{\partial g_2 [u_0^*]}{\partial X} + 72 g_6 [w_0^*] + 6 h^{*2} g_6 [w_1^*] \\
 f_3 = & 12 g_2 [u_0^*]
 \end{aligned} \tag{۳-۳}$$

$$\begin{aligned}
 eq2: & (f_4 X^2 + f_5 X - f_6) \varepsilon^2 + (2f_4 X + f_5) \varepsilon + f_4 = 0 \\
 f_4 = & -3 h^{*2} e \frac{\partial^2 g_1 [u_1^*]}{\partial t^{*2}} + \frac{h^{*2}}{2} \left(\frac{\partial^2 g_2 [w_0^*]}{\partial X^2} \frac{\partial w_1^*}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2 [w_1^*]}{\partial X^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + g_{21} [w_0^*, w_1^*] \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 g_2 [u_1^*]}{\partial X^2} \right) - 36 K s \left(g_4 [u_1^*] + g_4 [w_1^*] \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + \frac{\partial g_4 [w_0^*]}{\partial X} + \beta w_1^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X \partial t^*} \right) \\
 f_5 = & h^{*2} \left(6 \frac{\partial g_4 [w_1^*]}{\partial X} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_2 [u_1^*]}{\partial X} + 6 \beta \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^* \partial X} \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right) \\
 f_6 = & \frac{h^{*2}}{2} g_2 [u_1^*]
 \end{aligned} \tag{۴-۳}$$

$$eq3: (f_7 X + f_8) \varepsilon + f_7 = 0$$

$$\begin{aligned}
f_7 = & -72h^* e \frac{\partial^2 g_1 [w_0^*]}{\partial t^{*2}} - 72g_1 [Q^* (X, t^*)] + 12g_{21} [w_0^*, u_0^*] + h^{*2} g_{21} [w_1^*, u_1^*] \\
& + \left(h^{*3} \frac{\partial^2 g_2 [w_1^*]}{\partial X^2} + 72h^* Ks g_4 [w_1^*] \right) \frac{\partial u_1^*}{\partial X} + 72h^* Ks \left(\frac{\partial g_4 [u_1^*]}{\partial X} + u_1^* \frac{\partial g_4 [w_1^*]}{\partial X} \right) \\
& + \left(18h^* \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right)^2 + \frac{3}{2} h^{*3} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right)^2 + 12h^* \frac{\partial u_0^*}{\partial X} \right) \frac{\partial^2 g_2 [w_0^*]}{\partial X^2} + 12h^* g_{15} [w_1^*] \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_1^*}{\partial t^*} \\
& + \left(3h^{*3} g_5 [w_1^*] + 36h^* g_5 [w_0^*] + 12h^* \frac{\partial^2 g_2 [u_0^*]}{\partial X^2} + 12h^* g_{15} [w_1^*] \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X \partial t^*} \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \\
& + \left(3h^{*3} \frac{\partial^2 g_2 [w_1^*]}{\partial X^2} + 12h^* \left(12Ks (g_4 [w_1^*] - 1) + g_3 [w_1^*] + b_0 \right) \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \\
& + \left(h^{*3} \frac{\partial^2 g_2 [u_1^*]}{\partial X^2} + 3h^{*2} g_{21} [w_0^*, w_1^*] + 12h^* g_{15} [w_1^*] \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X \partial t^*} \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \\
& + 72h^* Ks \left(\beta w_1^* \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial X \partial t^*} + (1+w_1^*)^2 \frac{\partial^2 g_4 [w_0^*]}{\partial X^2} \right) + 6h^* w_1^* (2+w_1^*) \frac{\partial^2 g_3 [w_0^*]}{\partial X^2} \tag{\Delta-3} \\
f_8 = & 48h^* \left(\frac{\partial g_2 [w_0^*]}{\partial X} + 3 \frac{\partial g_1 [w_0^*]}{\partial X} \right) \frac{\partial u_0^*}{\partial X} + 6h^* w_1^* (2+w_1^*) \frac{\partial g_3 [w_0^*]}{\partial X} \\
& + 4h^{*3} \left(\frac{\partial g_2 [w_1^*]}{\partial X} + 3 \frac{\partial g_1 [w_1^*]}{\partial X} \right) \frac{\partial u_1^*}{\partial X} + 72h^* Ks (1+w_1^*)^2 \frac{\partial g_4 [w_0^*]}{\partial X} \\
& + \frac{3}{2} h^{*3} \frac{\partial^2 g_2 [w_0^*]}{\partial X^2} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right)^2 + 72h^* Ks (u_1^* g_4 [w_1^*] + g_4 [u_1^*]) \\
& + 12h^* u_0^* \frac{\partial^2 g_3 [w_0^*]}{\partial X^2} + h^{*3} u_1^* \frac{\partial^2 g_3 [w_1^*]}{\partial X^2} + 6h^* \frac{\partial g_2 [w_0^*]}{\partial X} \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right)^2 \\
& + 12h^* g_{15} [w_1^*] \frac{\partial w_1^*}{\partial t^*} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + 4\beta h^* (1+3G_1^*) \left(h^{*2} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial X \partial t^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial X} + 12 \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X \partial t^*} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right) \\
& + 3\beta h^{*3} a_1 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X \partial t^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + 12\beta h^* \left(h^{*2} b_1 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} + 6Ks w_1^* \right) \frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} \\
& + 12\beta h^* \left(b_1 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial u_0^*}{\partial t^*} + a_1 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X \partial t^*} \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$eq4: (f_9 X + f_{10}) \varepsilon + f_9 = 0$$

$$\begin{aligned}
f_9 = & -120h^{*2} e \frac{\partial^2 g_1 [w_1^*]}{\partial t^{*2}} - 720g_1 [Q^*(X, t^*)] + 20h^* g_{21} [w_0^*, u_1^*] \\
& + 10h^{*2} \left(w_1^* (2+w_1^*) \frac{\partial^2 g_3 [w_1^*]}{\partial X^2} + 12Ks(1+w_1^*)^2 \frac{\partial^2 g_4 [w_1^*]}{\partial X^2} \right) - 1440g_4 [u_1^*] \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \\
& + 20h^* g_{21} [w_1^*, u_0^*] + 20h^{*2} \frac{\partial^2 g_2 [w_0^*]}{\partial X^2} \frac{\partial u_1^*}{\partial X} + 20 \left(h^{*2} \frac{\partial^2 g_2 [w_1^*]}{\partial X^2} - 12g_3 [w_1^*] \right) \frac{\partial u_0^*}{\partial X} \\
& + \left(30h^{*2} \frac{\partial^2 g_2 [w_1^*]}{\partial X^2} - 120g_3 [w_1^*] - 1440Ks g_4 [w_1^*] - 120(b_0 + 12Ks) \right) \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right)^2 \\
& + h^{*2} \left(20 \frac{\partial^2 g_2 [u_0^*]}{\partial X^2} + 9h^{*2} g_5 [w_1^*] + 60g_5 [w_0^*] \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial X} - 240 \frac{\partial g_3 [u_0^*]}{\partial X} \\
& + 20h^* \left(h^* \left(3 \frac{\partial^2 g_2 [w_0^*]}{\partial X^2} \frac{\partial w_1^*}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2 [u_1^*]}{\partial X^2} \right) + 3g_{21} [w_1^*, w_0^*] \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \\
& + h^{*2} \left(\frac{9}{2} h^{*2} \frac{\partial^2 g_2 [w_1^*]}{\partial X^2} + 10g_3 [w_1^*] + 120Ks g_4 [w_1^*] + 10(b_0 + 12Ks) \right) \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right)^2 \\
& + \left(20h^{*2} \left(\frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X \partial t^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial X} + \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_1^*}{\partial t^*} \right) - 240 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X \partial t^*} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right) g_{15} [w_1^*] \\
& - 120(w_1^{*2} + 3w_1^* + 2)g_2 [w_1^*] - 120\beta a_1 w_1^* (2w_1^* + 3) \frac{\partial w_1^*}{\partial t^*} \\
& - 240\beta \left(b_1 w_1^* \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X \partial t^*} + 6Ks u_1^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X \partial t^*} \right) \\
f_{10} = & 10h^{*2} \left(3 \frac{\partial g_2 [w_1^*]}{\partial X} \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(u_0^* \frac{\partial^2 g_3 [w_1^*]}{\partial X^2} + u_1^* \frac{\partial^2 g_3 [w_0^*]}{\partial X^2} \right) \right) \\
& - 240(u_0^* g_3 [w_1^*] + g_3 [u_0^*]) + \frac{3}{2} h^{*4} \frac{\partial g_2 [w_1^*]}{\partial X} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right)^2 \\
& + 80h^{*2} \left(\left(\frac{\partial g_4 [w_1^*]}{\partial X} + 3g_1 [w_1^*] \right) \frac{\partial u_0^*}{\partial X} + \left(\frac{\partial g_4 [w_0^*]}{\partial X} + 3g_1 [w_0^*] \right) \frac{\partial u_1^*}{\partial X} \right) \\
& + 10h^{*2} \left(12Ks(1+w_1^*)^2 \frac{\partial g_4 [w_1^*]}{\partial X} + w_1^* (2+w_1^*) \frac{\partial g_3 [w_1^*]}{\partial X} \right) \\
& + 20h^{*2} g_{15} [w_1^*] \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \frac{\partial w_1^*}{\partial t^*} + 80\beta h^{*2} (1+3G_1^*) \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial X \partial t^*} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X \partial t^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right) \\
& + 20\beta b_1 \left(h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + \left(h^{*2} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} - 12w_1^* \right) \frac{\partial u_0^*}{\partial t^*} \right) \\
& + 3\beta h^{*2} a_1 \left(20 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X \partial t^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X \partial t^*} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{6-3}$$

که در این روابط:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 8 + 6G_0^*; a_1 = 8 + 6G_1^*; b_0 = -4 + 6G_0^*; b_1 = -4 + 6G_1^* \\
 g_1[\bullet] &= G_0^*(\bullet) + \beta G_1^* \frac{\partial(\bullet)}{\partial t^*}; g_2[\bullet] = a_0(\bullet) + \beta a_1 \frac{\partial(\bullet)}{\partial t^*} \\
 g_3[\bullet] &= b_0(\bullet) + \beta b_1 \frac{\partial(\bullet)}{\partial t^*}; g_4[\bullet] = \beta \frac{\partial(\bullet)}{\partial t^*} + (\bullet); g_5[\bullet] = \beta a_1 \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial t^*} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X^2} \\
 g_6[\bullet] &= \left(\frac{\partial(\bullet)}{\partial X} + 2\beta \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial t^*} \right) \frac{\partial(\bullet)}{\partial X}; g_{15}[\bullet] = \beta (b_1 + 12K_s)(1 + \bullet) \\
 g_{21}[\bullet, \blacktriangle] &= \beta h^* a_1 \left(\frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial t^*} \frac{\partial^2(\blacktriangle)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2(\blacktriangle)}{\partial X \partial t^*} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X^2} \right)
 \end{aligned} \tag{۷-۳}$$

در معادلات حاضر G_0^* و G_1^* در فصل قبل تعریف شده‌اند. بار فشاری Q^* ، بر روی سطح ورق اعمال می‌شود. با روش مشابه، معادله‌ی بی‌بعد شده برای ورق بر اساس تئوری کلاسیک به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 (f_1 X^3 + f_2 X^2 + f_3 X + f_4) \varepsilon^3 + (3f_1 X^2 + 2f_2 X + f_3) \varepsilon^2 + (3f_1 X + f_2) \varepsilon + f_1 &= 0 \\
 f_1 &= e \left(9 \left(\frac{4}{3} G_0^* + G_0^{*2} \right) \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^{*2}} + 12\beta \left(\frac{3}{2} G_0^* G_1^* + G_1^* + G_0^* \right) \frac{\partial^3 w_0^*}{\partial t^{*3}} + 9\beta^2 \left(\frac{4}{3} G_1^* + G_1^{*2} \right) \frac{\partial^4 w_0^*}{\partial t^{*4}} \right) + \frac{\partial^3 f_4}{\partial X^3} \\
 f_2 &= 2 \frac{\partial^2 f_4}{\partial X^2}; f_3 = -\frac{\partial f_4}{\partial X} \\
 f_4 &= h^{*2} (3G_0^* + 1) \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + \beta h^{*2} (3(G_1^* + G_0^*) + 2) \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^* \partial X} + \beta^2 h^{*2} (3G_0^* + 1) \frac{\partial^3 w_0^*}{\partial t^{*2} \partial X}
 \end{aligned} \tag{۸-۳}$$

۳-۳- تحلیل ارتعاشات آزاد

در تحلیل فرکانسی بار عرضی تأثیری بر فرکانس طبیعی نخواهد داشت. برای حل معادلات از روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات استفاده می‌گردد [59]. در ابتدا مؤلفه‌های دامنه‌ی ارتعاشات به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
 u_0^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon (u_{00}(X, T_0, T_1) + \varepsilon u_{01}(X, T_0, T_1)) \\
 u_1^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon (u_{10}(X, T_0, T_1) + \varepsilon u_{11}(X, T_0, T_1)) \\
 w_0^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon (w_{00}(X, T_0, T_1) + \varepsilon w_{01}(X, T_0, T_1)) \\
 w_1^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon (w_{10}(X, T_0, T_1) + \varepsilon w_{11}(X, T_0, T_1))
 \end{aligned} \tag{۹-۳}$$

که $T_0 = t^*$ و $T_1 = \varepsilon t^*$ است. با توجه به این تعریف‌ها، اپراتورهای مشتق زمانی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t^*} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^3}{\partial t^{*3}} &= \frac{\partial^3}{\partial T_0^3} + 3\varepsilon \frac{\partial^3}{\partial T_0^2 \partial T_1}\end{aligned}\quad (10-3)$$

با جایگذاری روابط (۹-۳) و (۱۰-۳) در معادلات (۳-۳) تا (۶-۳) و جداسازی معادلات براساس مرتبه‌های ε^1 و ε^2 ، معادلات زیر حاصل می‌شود.

معادلات مرتبه یک:

$$eq1: -72e \frac{\partial^2 g_1[u_{00}]}{\partial T_0^2} + 12 \frac{\partial g_3[w_{10}]}{\partial X} + 12 \frac{\partial^2 g_2[u_{00}]}{\partial X^2} = 0 \quad (11-3)$$

$$eq2: -3eh^* \frac{\partial^2 g_1[u_{10}]}{\partial T_0^2} + \frac{h^*}{2} \frac{\partial^2 g_2[u_{10}]}{\partial X^2} - 36Ks \left(g_4[u_{10}] + \frac{\partial g_4[w_{00}]}{\partial X} \right) = 0 \quad (12-3)$$

$$eq3: -72eh^* \frac{\partial^2 g_1[w_{00}]}{\partial T_0^2} - 72g_1[Q^*] + 72h^* Ks \left(\frac{\partial g_4[u_{10}]}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_4[w_{00}]}{\partial X^2} \right) = 0 \quad (13-3)$$

$$eq4: -120eh^* \frac{\partial^2 g_1[w_{10}]}{\partial T_0^2} - 720g_1[Q^*] - 240 \left(\frac{\partial g_3[u_{00}]}{\partial X} + g_2[w_{10}] \right) \quad (14-3)$$

$$+ 120h^* Ks \frac{\partial^2 g_4[w_{10}]}{\partial X^2} = 0$$

معادلات مرتبه دو:

$$\begin{aligned}
eq_1 : & -72e \frac{\partial^2 g_1 [u_{01}]}{\partial T_0^2} + 12 \left(\frac{\partial g_3 [w_{11}]}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2 [u_{01}]}{\partial X^2} \right) - 144e g_{10} [u_{00}] \\
& + \left(-144e \frac{\partial^2 g_1 [u_{00}]}{\partial T_0^2} + 24 \left(\frac{\partial^2 g_2 [u_{00}]}{\partial X^2} + \frac{\partial g_3 [w_{10}]}{\partial X} \right) \right) X + 12 \frac{\partial g_2 [u_{00}]}{\partial X} \\
& + 12 \frac{\partial^2 g_2 [w_{00}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{00}}{\partial X} + 12\beta \left(b_1 g_{11} [w_{10}] + a_1 \frac{\partial g_{11} [u_{00}]}{\partial X} \right) + 12 g_5 [w_{00}] \\
& + \left(12\beta g_3 [w_{10}] + h^{*2} \frac{\partial^2 g_2 [w_{10}]}{\partial X^2} \right) \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + h^{*2} g_5 [w_{10}] + 12\beta b_1 w_{10} \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial X \partial T_0} = 0
\end{aligned} \tag{15-3}$$

$$\begin{aligned}
eq_2 : & -3eh^{*2} \frac{\partial^2 g_1 [u_{11}]}{\partial T_0^2} + \frac{h^{*2}}{2} \frac{\partial^2 g_2 [u_{11}]}{\partial X^2} - 36Ks \left(g_4 [u_{11}] + \frac{\partial g_4 [w_{01}]}{\partial X} \right) - 6eh^{*2} g_{10} [u_{10}] \\
& + \left(\frac{h^{*2}}{2} \frac{\partial^2 g_2 [w_{10}]}{\partial X^2} - 36Ks g_4 [w_{10}] \right) \frac{\partial w_{00}}{\partial X} - 36Ks \left(\beta \left(w_{10} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X \partial T_0} + \frac{\partial u_{10}}{\partial T_1} \right) + g_{11} [w_{00}] \right) \\
& + \left(-6eh^{*2} \frac{\partial^2 g_1 [u_{10}]}{\partial T_0^2} + h^{*2} \frac{\partial^2 g_2 [u_{10}]}{\partial X^2} - 72Ks \left(\frac{\partial g_4 [w_{00}]}{\partial X} + g_4 [u_{10}] \right) \right) X \\
& + \frac{h^{*2}}{2} \frac{\partial^2 g_2 [w_{00}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + \frac{h^{*2}}{2} \left(\frac{\partial g_2 [u_{10}]}{\partial X} + \beta a_1 \frac{\partial g_{11} [u_{10}]}{\partial X} \right) + \frac{h^{*2}}{2} g_{21} [w_{10}, w_{00}] = 0
\end{aligned} \tag{16-3}$$

$$\begin{aligned}
eq_3 : & -72eh^{*} \frac{\partial^2 g_1 [w_{01}]}{\partial T_0^2} + 72h^{*} Ks \left(\frac{\partial g_4 [u_{11}]}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_4 [w_{01}]}{\partial X^2} \right) - 144eh^{*} g_{10} [w_{00}] \\
& + \left(-72eh^{*} \frac{\partial^2 g_1 [w_{00}]}{\partial T_0^2} - 72g_1 [Q^{*}] + 72h^{*} Ks \left(\frac{\partial g_4 [u_{10}]}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_4 [w_{00}]}{\partial X^2} \right) \right) X \\
& + 12h^{*} \frac{\partial^2 g_2 [w_{00}]}{\partial X^2} \frac{\partial u_{00}}{\partial X} + h^{*3} \left(\frac{\partial^2 g_2 [u_{10}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2 [w_{10}]}{\partial X^2} \frac{\partial u_{10}}{\partial X} \right) \\
& + 72h^{*} Ks \left(u_{10} \frac{\partial g_4 [w_{10}]}{\partial X} + \frac{\partial g_4 [w_{00}]}{\partial X} + g_4 [u_{10}] \right) + h^{*2} g_{21} [w_{10}, u_{10}] \\
& + 12h^{*} \left(\frac{\partial^2 g_2 [u_{00}]}{\partial X^2} + \frac{\partial g_3 [w_{10}]}{\partial X} + 12Ks \frac{\partial g_4 [w_{10}]}{\partial X} \right) \frac{\partial w_{00}}{\partial X} + 72Ks g_{22} [w_{10}, u_{10}] \\
& + 12\beta h^{*} (b_1 + 12Ks) \left(\frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial T_0} \right) + 12g_{21} [w_{00}, u_{00}] \\
& + 12h^{*} w_{10} \left(\frac{\partial^2 g_3 [w_{00}]}{\partial X^2} + 6Ks \left(2 \frac{\partial^2 g_4 [w_{00}]}{\partial X^2} + \frac{\partial g_4 [u_{10}]}{\partial X} \right) \right) \\
& + 72\beta h^{*} Ks \left(\frac{\partial g_{11} [w_{00}]}{\partial X} + g_{11} [u_{10}] \right) = 0
\end{aligned} \tag{17-3}$$

$$\begin{aligned}
eq4: & -120eh^{*2} \frac{\partial^2 g_1[w_{11}]}{\partial T_0^2} - 240 \left(\frac{\partial g_3[u_{01}]}{\partial X} + g_2[w_{11}] \right) + 120h^{*2} Ks \frac{\partial^2 g_4[w_{11}]}{\partial X^2} \\
& + \left(-120eh^{*2} \frac{\partial^2 g_1[w_{10}]}{\partial T_0^2} - 720g_1[Q^*] - 240 \left(\frac{\partial g_3[u_{00}]}{\partial X} + g_2[w_{10}] \right) + \right. \\
& \left. 120h^{*2} Ks \frac{\partial^2 g_4[w_{10}]}{\partial X^2} \right) X - 240eh^{*2} g_{10}[w_{10}] - 240\beta b_1 g_{11}[u_{00}] + \\
& 20h^{*2} \left(\frac{\partial^2 g_2[w_{00}]}{\partial X^2} \frac{\partial u_{10}}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2[u_{10}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{00}}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2[u_{00}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2[w_{10}]}{\partial X^2} \frac{\partial u_{00}}{\partial X} \right) \\
& + 120\beta h^{*2} Ks \frac{\partial g_{11}[w_{10}]}{\partial X} - 240\beta a_1 \frac{\partial w_{10}}{\partial T_1} - 240g_3[w_{10}] \frac{\partial u_{00}}{\partial X} - 240g_3[u_{00}] \\
& + 20h^* (g_{21}[u_{00}, w_{10}] + g_{21}[w_{00}, u_{10}]) - 1440Ks \frac{\partial g_4[w_{00}]}{\partial X} u_{10} - 360g_{16}[w_{10}] w_{10} \\
& + 20h^{*2} \left(\frac{\partial^2 g_3[w_{10}]}{\partial X^2} + 12Ks \frac{\partial^2 g_4[w_{10}]}{\partial X^2} \right) w_{10} + 120h^{*2} Ks \frac{\partial g_4[w_{10}]}{\partial X} \\
& - 120g_{15}[w_{00}] + 10h^{*2} g_{15}[w_{10}] + 20\beta h^{*2} (b_1 + 12Ks) \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial T_0} \\
& - 240\beta \left(w_{10} b_1 \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial X \partial T_0} + 6Ks \frac{\partial u_{10}}{\partial T_0} \frac{\partial w_{00}}{\partial X} \right) = 0
\end{aligned} \tag{۱۸-۳}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 8 + 6G_0^*; a_1 = 8 + 6G_1^*; b_0 = -4 + 6G_0^*; b_1 = -4 + 6G_1^* \\
g_1[\bullet] &= G_0^*(\bullet) + \beta G_1^* \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0}; g_2[\bullet] = a_0(\bullet) + \beta a_1 \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0}; g_3[\bullet] = b_0(\bullet) + \beta b_1 \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0} \\
g_4[\bullet] &= (\bullet) + \beta \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0}; g_5[\bullet] = \beta a_1 \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X^2}; \\
g_{10}[\bullet] &= G_0^* \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{3}{2} \beta G_1^* \frac{\partial^3(\bullet)}{\partial T_0^2 \partial T_1}; g_{11}[\bullet] = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_1} \\
g_{15}[\bullet] &= \left[(b_0 + 12Ks) \frac{\partial(\bullet)}{\partial X} + 2\beta(b_1 + 12Ks) \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_0} \right] \frac{\partial(\bullet)}{\partial X} \\
g_{16}[\bullet] &= a_0(\bullet) + 2\beta a_1 \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0}; g_{21}[\bullet, \blacktriangle] = \beta h^* a_1 \left(\frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial^2(\blacktriangle)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2(\blacktriangle)}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X^2} \right) \\
g_{22}[\bullet, \blacktriangle] &= \beta h^* \left(\frac{\partial(\bullet)}{\partial X} \frac{\partial(\blacktriangle)}{\partial T_0} + \frac{\partial(\blacktriangle)}{\partial X} \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0} \right)
\end{aligned} \tag{۱۹-۳}$$

معادلات (۱۱-۳) تا (۱۴-۳)، شامل دو دستگاه معادله دیفرانسیل همگن با ضرایب ثابت دو به دو کوپل شده به یکدیگر می‌باشند. به این ترتیب، تغییر متغیر تعریف شده، توانسته است معادلات را به معادلاتی با ضرایب ثابت تبدیل کند. از حل معادلات (۱۱-۳) و (۱۴-۳) فرکانس‌های شعاعی خطی و از حل معادلات (۱۲-۳) و (۱۳-۳) فرکانس‌های عرضی خطی به دست می‌آیند.

۳-۳-۱ - حل معادلات مرتبه یک

حل معادلات (۱۲-۳) و (۱۳-۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{cases} u_{10}(X, T_0, T_1) \\ w_{00}(X, T_0, T_1) \end{cases} = \sum_{n=1}^4 C_n(T_1) \{V_n\} \exp(m_n X + i\omega_r T_0); \quad \{V_n\} = \begin{cases} A_2 \\ A_3 \end{cases} \quad (20-3)$$

که ω_r فرکانس طبیعی بی‌بعد عرضی، m_n مقادیر ویژه و $\{V_n\}$ بردارهای ویژه می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌ی (۲۰-۳) در (۱۲-۳) و (۱۳-۳) یک دستگاه معادله‌ی جبری به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} A_2(T_1) \\ A_3(T_1) \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 3h^* (m^2 + e \omega_r^2) [G_0^* + I \omega_r \beta G_1^*] + (1 + I \omega_r \beta) [4h^* m^2 - 36Ks] \\ a_{12} &= -36mKs (1 + I \omega_r \beta) \\ a_{21} &= 72h^* mKs (1 + I \omega_r \beta) \\ a_{22} &= 72h^* m^2 Ks (1 + I \omega_r \beta) + 72h^* e \omega_r^2 [G_0^* + I \omega_r \beta G_1^*] \end{aligned} \quad (21-3)$$

برای وجود جواب غیر صفر، دترمینان ماتریس ضرایب رابطه‌ی (۲۱-۳) باید صفر شود. معادله‌ی به دست آمده، معادله‌ی تفرق است و از حل آن چهار مقدار ویژه‌ی m_n ($n=1..4$) بر حسب ω_r به دست می‌آید. بردارهای ویژه نیز از رابطه‌ی (۲۱-۳) به دست می‌آیند. بردارهای $\{V_n\}$ ، بردارهای ویژه‌ی متناظر با m_n ها هستند. پس از یافتن بردارهای ویژه و مقادیر ویژه، حل کلی به صورت رابطه‌ی (۲۰-۳) است.

با اعمال شرایط مرزی، یک دستگاه معادله‌ی جبری همگن به صورت $[a]\{C(T1)\} = \{0\}$ نتیجه

می‌شود که بردار $\{C(T1)\}$ شامل ثابت‌های C_1, C_2, C_3 و C_4 بوده و ماتریس $[a]$ شامل ضرایب معادله‌ها است. برای به دست آوردن جواب غیر صفر دترمینان ماتریس ضرایب، ماتریس $[a]$ باید مساوی صفر شود که در نهایت یک معادله‌ی جبری پیچیده برحسب ω_r به دست می‌آید. ریشه‌های این معادله فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد عرضی را می‌دهند که این معادله به وسیله‌ی روش عددی تنصیف فاصله^۱ حل شده است. در این صورت، از چهار معادله فوق، فقط سه معادله مستقل بوده و می‌توان C_1 تا C_3 را برحسب C_4 به دست آورد.

$$\begin{Bmatrix} u_{10}(X, T_0, T_1) \\ w_{00}(X, T_0, T_1) \end{Bmatrix} = C_4(T_1) \begin{Bmatrix} y_2(X) \\ y_3(X) \end{Bmatrix} e^{(i\omega_r T_0)} + C.C. \quad (22-3)$$

که در این رابطه، $C.C.$ بیانگر قسمت مزدوج مختلط می‌باشد. با اعمال روش ارائه شده برای ورق بر اساس تئوری کلاسیک، فرکانس‌های طبیعی تئوری کلاسیک نیز به دست می‌آیند.

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۲-۳) در معادلات (۱۶-۳) و (۱۷-۳)، قسمت ناهمگن معادلات مرتبه دو به صورت زیر خواهد بود.

$$eq2: \left(K_{21} C_4(T_1) + K_{22} \frac{dC_4(T_1)}{dT_1} \right) e^{(i\omega_r T_0)} + NST + C.C.$$

$$K_{21} = h^{*2} \left(4(1 + I\beta\omega_r) + 3(G_0^* + I\beta G_1^* \omega_r) \right) \left(\left(\frac{dy_2}{dX} \right) + 2X \left(\frac{d^2 y_2}{dX^2} \right) \right) \quad (23-3)$$

$$-72K_s X (1 + I\beta\omega_r) \left(\frac{dy_3}{dX} \right) + \left(-72K_s (1 + I\beta\omega_r) + 6h^{*2} e \omega_r^2 (G_0^* + I\beta G_1^* \omega_r) \right) X y_2$$

$$K_{22} = -36K_s \beta \left(\frac{dy_3}{dX} \right) + h^{*2} \beta (3G_1^* + 4) \left(\frac{d^2 y_2}{dX^2} \right) + h^{*2} e \omega_r y_2 (9\beta G_1^* \omega_r - 6IG_0^*) - 36K_s \beta y_2$$

¹ Bisection

$$eq3: \left(K_{31} C_4(T_1) + K_{32} \frac{dC_4(T_1)}{dT_1} \right) e^{(i\omega_r T_0)} + NST + C.C.$$

$$K_{31} = 72h^* K_s (1 + I \beta \omega_r) \left(X \left(\left(\frac{dy_2}{dX} \right) + \left(\frac{d^2 y_3}{dX^2} \right) \right) + \left(\frac{dy_3}{dX} \right) \right) \quad (24-3)$$

$$+ 72h^* \left(K_s (1 + I \beta \omega_r) y_2 + e \omega_r^2 X (G_0^* + I \omega_r \beta G_1^*) y_3 \right)$$

$$K_{32} = 72h^* K_s \beta \left(\left(\frac{dy_2}{dX} \right) + \left(\frac{d^2 y_3}{dX^2} \right) \right) + 2h^* e y_3 (108 \beta G_1^* \omega_r^2 - 72 I G_0^* \omega_r)$$

در روابط (۲۳-۳) و (۲۴-۳)، NST معرف جمله‌های غیر سکولار می‌باشد.

۳-۳-۲- حل معادلات مرتبه دو

برای حل معادلات مرتبه دو، ابتدا باید با استفاده از شرط حل‌پذیری، سکولاریتی معادلات را حذف و سپس معادلات ناهمگن را حل کرد. با تعیین تابع $C_4(T_1)$ ، که در حل معادلات مرتبه یک مجهول بود، سکولاریتی معادلات حذف خواهد شد.

۳-۳-۲-۱- تعیین $C_4(T_1)$

در این قسمت با استفاده از شرایط حل‌پذیری تابع $C_4(T_1)$ تعیین می‌شود. به صورتی که دو تابع الحاقی ϕ_2 و ϕ_3 در معادلات مرتبه یک (۳-۱۲) و (۳-۱۳) ضرب نموده و دو معادله با هم جمع شده و انتگرال گرفته می‌شود. در این حالت چون سیستم خود الحاق نیست لذا با دستگاه معادلات سروکار داشته و نمی‌توان به جای توابع الحاقی از شکل مدها استفاده نمود. معادلات (۳-۱۲) و (۳-۱۳) با توجه به رابطه‌ی (۳-۲۲) به صورت زیر درمی‌آید [59].

$$Eq2: \quad b_1 \frac{d^2 y_2(X)}{dX^2} + b_2 \frac{dy_3(X)}{dX} + b_3 y_2(X) = 0 \quad (25-3)$$

$$Eq3: \quad d_1 \frac{d^2 y_3(X)}{dX^2} + d_2 \frac{dy_2(X)}{dX} + d_3 y_3(X) = 0 \quad (26-3)$$

که

$$b_1 = h^{*2} \left[(4 + 3G_0^*) + I \beta \omega_r (4 + 3G_1^*) \right]$$

$$b_2 = -36Ks (1 + I \beta \omega_r) \quad (27-3)$$

$$b_3 = -36Ks (1 + I \beta \omega_r) + 3h^{*2} e \omega_r^2 (G_0^* + I \beta \omega_r G_1^*)$$

$$d_1 = 72h^{*2} Ks (1 + I \beta \omega_r)$$

$$d_2 = 72h^{*2} Ks (1 + I \beta \omega_r) \quad (28-3)$$

$$d_3 = 72h^* e \omega_r^2 (G_0^* + I \beta \omega_r G_1^*)$$

خواهیم داشت.

$$\int_{X_i}^{X_o} (\phi_2 \times Eq2 + \phi_3 \times Eq3) dX = \int_{X_i}^{X_o} \left(b_1 \frac{d^2 \phi_2}{dX^2} - d_2 \frac{d\phi_3}{dX} + b_3 \phi_2 \right) y_2 dX$$

$$+ \int_{X_i}^{X_o} \left(d_1 \frac{d^2 \phi_3}{dX^2} - b_2 \frac{d\phi_2}{dX} + d_3 \phi_3 \right) y_3 dX + b_1 \left[\phi_2 \frac{dy_2}{dX} - y_2 \frac{d\phi_2}{dX} \right]_{X_i}^{X_o} + [b_2 \phi_2 y_3]_{X_i}^{X_o} \quad (29-3)$$

$$+ d_1 \left[\phi_3 \frac{dy_3}{dX} - y_3 \frac{d\phi_3}{dX} \right]_{X_i}^{X_o} + [d_2 \phi_3 y_2]_{X_i}^{X_o} = 0$$

با توجه به معادله‌ی بالا توابع ϕ_2 و ϕ_3 باید به ازای تمام مقادیر y_2 و y_3 برقرار باشند، لذا ضرایب آن‌ها در انتگرال برابر صفر انتخاب می‌شود.

$$\left(b_1 \frac{d^2 \phi_2}{dX^2} - d_2 \frac{d\phi_3}{dX} + b_3 \phi_2 \right) y_2 = 0 \quad (30-3)$$

$$\left(d_1 \frac{d^2 \phi_3}{dX^2} - b_2 \frac{d\phi_2}{dX} + d_3 \phi_3 \right) y_3 = 0 \quad (31-3)$$

با توجه به شرایط مرزی ورق حلقوی دو سر گیردار و دو سر ساده، شرایط مرزی لازم برای حل دو معادله‌ی کوپل به هم (30-3) و (31-3) را می‌توان از معادله‌ی (29-3) به صورت رابطه‌ی (32-3) برای شرط مرزی دو سر گیردار و رابطه‌ی (33-3) برای شرط مرزی دو سر ساده در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} \text{at } X = X_i, X_o \quad \phi_2 &= 0 \\ \text{at } X = X_i, X_o \quad \phi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (32-3)$$

$$\begin{aligned} \text{at } X = X_i, X_o \quad \frac{d\phi_2}{dX} &= 0 \\ \text{at } X = X_i, X_o \quad \phi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (33-3)$$

حلّ دو معادله‌ی کوپل به هم را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^4 C_n \{V_n\} \exp(m_n X); \quad \{V_n\} = \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \quad (34-3)$$

که m_n مقادیر ویژه و $\{V_n\}$ بردارهای ویژه می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌ی (34-3) در (30-3) و (31-3) یک دستگاه معادله‌ی جبری به صورت رابطه‌ی (35-3) به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} b_3 + b_1 m^2 & -d_2 m \\ -b_2 m & d_3 + d_1 m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35-3)$$

برای وجود جواب غیر صفر دترمینان ماتریس ضرایب رابطه‌ی (35-3) باید صفر شود. معادله‌ی به دست آمده، معادله‌ی تفرق است و از حلّ آن چهار مقدار ویژه‌ی m_n ($n=1..4$) برحسب ω_{rr} به دست می‌آید که همان فرکانس طبیعی است که در مرحله‌ی قبلی به دست آورده‌ایم. بردارهای ویژه نیز از رابطه‌ی (35-3) به دست می‌آیند. بردارهای $\{V_n\}$ ، بردارهای ویژه‌ی متناظر با m_n ها هستند. پس از یافتن بردارهای ویژه و مقادیر ویژه، حلّ کلی به صورت رابطه‌ی (34-3) است. با اعمال شرایط مرزی توابع الحاقی، می‌توان ثابت‌های دیگر را برحسب یک ثابت دیگر به دست آورد.

پس از تعیین توابع الحاقی، ابتدا تابع ϕ_2 را در معادله‌ی (23-3) و تابع ϕ_3 را در معادله‌ی (24-3) ضرب و سپس با هم جمع کرده و در پایان انتگرال گرفته می‌شود.

$$\int_{X_i}^{X_o} (\phi_2 \times eq2 + \phi_3 \times eq3) dX = \int_{X_i}^{X_o} (\phi_2 \times f_2 + \phi_3 \times f_3) dX \quad (36-3)$$

f_2 و f_3 در رابطه‌ی (36-3) شامل جملات سکولار موجود در قسمت ناهمگن معادلات مرتبه دو است. زیرا $C_4(T_1)$ از صفر کردن جملات سکولار به دست می‌آید. قسمت همگن معادلات مرتبه دو به دلیل این که مشابه قسمت همگن معادلات مرتبه یک می‌باشد، در این رابطه برابر صفر می‌شود، همچنین

به جز سکولاریتی، بقیه‌ی قسمت ناهمگن نیز صفر می‌شود.

لذا با انتگرال‌گیری از سمت راست رابطه‌ی (۳۶-۳)، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\left[\frac{dC_4(T_1)}{dT_1} - k C_4(T_1) \right] e^{i\omega_r T_0} = 0 \quad (37-3)$$

$$k = \frac{Q}{W} \quad (38-3)$$

$$Q = \int_{X_i}^{X_o} (\phi_2 \times K_{21} + \phi_3 \times K_{31}) dX, \quad W = \int_{X_i}^{X_o} (K_{22} \times \phi_2 + K_{32} \times \phi_3) dX \quad (39-3)$$

معادله‌ی (۳۷-۳) یک معادله‌ی خطی مرتبه اول می‌باشد، که حل آن به صورت زیر می‌باشد.

$$C_4(T_1) = C_0 e^{kT_1} \quad (40-3)$$

در رابطه‌ی (۴۰-۳)، k دارای مقداری ثابت و در حالت کلی به صورت عددی مختلط می‌باشد. با

استفاده از رابطه‌ی (۴۰-۳)، رابطه‌ی (۲۲-۳) به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{Bmatrix} u_{10}(X, T_0, T) \\ w_{00}(X, T_0, T) \end{Bmatrix} = C_0 \begin{Bmatrix} y_2(X) \\ y_3(X) \end{Bmatrix} e^{(kT_1 + i\omega_r T_0)} + C.C. = C_0 \begin{Bmatrix} y_2(X) \\ y_3(X) \end{Bmatrix} e^{(\alpha + i\omega_{NL})T_0} + C.C. \quad (41-3)$$

در رابطه‌ی (۴۱-۳)، α معرف کاهش نرخ دامنه‌ی نوسانات است که در این متن آن را میرایی می‌-

نامیم. حل معادلات مرتبه یک (۱۱-۳) و (۱۴-۳) و همچنین روند حذف سکولاریتی معادلات مرتبه

دو (۱۵-۳) و (۱۸-۳) همانند روش ذکر شده می‌باشد.

با تعیین $C_4(T_1)$ ، سکولاریتی معادلات مرتبه دو حذف می‌شود. اکنون حل معادلات (۲۳-۳) و (۲۴-۳)

را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{Bmatrix} u_{11}(X, T_0, T_1) \\ w_{01}(X, T_0, T_1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} au_1(X) \\ aw_1(X) \end{Bmatrix} e^{i(\omega_{ax} + \omega_r)T_0} + \begin{Bmatrix} au_2(X) \\ aw_2(X) \end{Bmatrix} e^{i(\omega_{ax} - \omega_r)T_0} \quad (42-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۴۲-۳) در معادلات (۲۳-۳) و (۲۴-۳)، چهار معادله‌ی مرتبه دو به دست می‌آید

که دارای جواب عمومی و خصوصی می‌باشد. جواب عمومی همانند مرتبه یک تعیین می‌شود و جواب خصوصی نیز به شکل نمایی در نظر گرفته می‌شود. با اعمال شرایط مرزی، ثابت‌های مسأله نیز به دست می‌آید. حل کلی معادلات (۳-۳) تا (۶-۳)، به صورت روابط (۹-۳) می‌باشد.

۳-۴- تعیین پاسخ ورق به‌ازای بار عرضی تابع زمان

برای تعیین پاسخ، همانند تعیین فرکانس، از روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات استفاده شده است. در این پایان‌نامه، پاسخ برای ورق حلقوی با تکیه‌گاه ساده-ساده محاسبه شده است.

حل معادلات مرتبه اول به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u_{10}(X, T_0, T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m}(T_0, T_1) \cos\left(\frac{m\pi X}{L}\right) \\ w_{00}(X, T_0, T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{3m}(T_0, T_1) \sin\left(\frac{m\pi X}{L}\right) \end{aligned} \quad (۴۳-۳)$$

که

$$\begin{aligned} L &= X_o - X_i \\ X_i &= \frac{r_i^* - 1}{\varepsilon}; \quad X_o = \frac{r_o^* - 1}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (۴۴-۳)$$

با جایگذاری حل به صورت روابط (۴۳-۳) در معادلات (۱۲-۳) و (۱۳-۳) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} P_{2m} \cos\left(\frac{m\pi X}{L}\right) &= F_2 \\ \sum_{m=1}^{\infty} P_{3m} \sin\left(\frac{m\pi X}{L}\right) &= F_3 \end{aligned} \quad (۴۵-۳)$$

که در آن P_{2m} و P_{3m} عباراتی برحسب $A_{2m}(T_0, T_1)$ و $A_{3m}(T_0, T_1)$ و مشتقات آن‌ها و $F_2 = 0$ و $F_3 = Q^*$ می‌باشند. با استفاده از بسط فوریه از روابط (۴۵-۳) می‌توان مقادیر P_{2m} و P_{3m} را به صورت زیر به دست آورد.

$$P_{2m} = \frac{2}{L} \int_{X_i}^{X_o} F_2 \cos\left(\frac{m\pi X}{L}\right) dX$$

$$P_{3m} = \frac{2}{L} \int_{X_i}^{X_o} F_3 \sin\left(\frac{m\pi X}{L}\right) dX$$
(۴۶-۳)

رابطه‌ی (۴۶-۳) شامل دو معادله دیفرانسیل می‌باشد، که دو به دو کوپل به هم هستند و حل عمومی آن‌ها به صورت رابطه‌ی (۴۷-۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$A_{2m}(T_0, T_1) = \sum_{j=1}^6 c_j(T_1) e^{i\alpha_j T_0}$$

$$A_{3m}(T_0, T_1) = \sum_{j=1}^6 b_j(T_1) e^{i\alpha_j T_0}$$
(۴۷-۳)

که α_j فرکانس‌های طبیعی عرضی و $b_j(T_1)$ و $c_j(T_1)$ ضرایب مجهولی هستند که بعداً از حذف جملات سکولار محاسبه می‌شوند. روند حل برای معادلات (۳-۱۱) و (۳-۱۴) نیز به همین ترتیب می‌باشد.

حل بخش همگن معادلات مرتبه دو به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u_{11}(X, T_0, T_1) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{22m}(T_0, T_1) \cos\left(\frac{m\pi X}{L}\right)$$

$$w_{01}(X, T_0, T_1) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{33m}(T_0, T_1) \sin\left(\frac{m\pi X}{L}\right)$$
(۴۸-۳)

با جایگذاری رابطه‌ی (۴۸-۳) به عنوان حل بخش همگن و استفاده از روابط (۴۳-۳) و (۴۷-۳) در معادلات مرتبه دو، معادلات مرتبه دو به شکل زیر تبدیل خواهند شد.

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_{22m} \cos\left(\frac{m\pi X}{L}\right) = F_{22}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_{33m} \sin\left(\frac{m\pi X}{L}\right) = F_{33}$$
(۴۹-۳)

که در آن P_{22m} و P_{33m} عباراتی برحسب $A_{22m}(T_0, T_1)$ ، $A_{33m}(T_0, T_1)$ و مشتقات آن‌ها هستند. F_{22} و F_{33} عبارت‌هایی شامل $e^{i\alpha_j T_0}$ که $j = 1..6$ و $\sin\left(\frac{m\pi X}{L}\right)$ و $\cos\left(\frac{m\pi X}{L}\right)$ هستند. P_{22m} و P_{33m} از

روابط سری فوریه، به صورت زیر به دست می آیند.

$$P_{22m} = \frac{2}{L} \int_{X_i}^{X_o} F_{22} \cos\left(\frac{m\pi X}{L}\right) dX$$

$$P_{33m} = \frac{2}{L} \int_{X_i}^{X_o} F_{33} \sin\left(\frac{m\pi X}{L}\right) dX$$
(۵۰-۳)

جملات $e^{i\alpha_j T_0}$ برای معادلات دوم و سوم، جملاتی سکولار محسوب می شوند. قبل از تعیین حل خصوصی، سکولاریتی مسأله باید از بین برود. بدین منظور از شرط حل پذیری استفاده می شود [59]. حل خصوصی معادلات به صورت رابطه ی (۵۱-۳) در نظر گرفته می شود.

$$A_{22m}(T_0, T_1) = \sum_{j=1}^6 P_{2j}(T_1) e^{i\alpha_j T_0}$$

$$A_{33m}(T_0, T_1) = \sum_{j=1}^6 Q_{2j}(T_1) e^{i\alpha_j T_0}$$
(۵۱-۳)

با جایگذاری رابطه ی (۵۱-۳) در (۵۰-۳) نتیجه می شود.

$$\sum_{j=1}^6 P_{2j}(T_1) e^{i\alpha_j T_0} = K_2$$

$$\sum_{j=1}^6 Q_{2j}(T_1) e^{i\alpha_j T_0} = K_3$$
(۵۲-۳)

K_2 و K_3 عبارت هایی شامل جمله ی $e^{i\alpha_j T_0}$ ($j=1..6$) و جمله های نمایی دیگری هستند. با برابر صفر قرار دادن دترمینان ضرایب جمله ی $e^{i\alpha_j T_0}$ ($j=1..6$) (جمله ی سکولار)، به تعداد جملات مجهول، معادله دیفرانسیل مرتبه یک به دست می آید، که با حل این معادلات و استفاده از شرایط اولیه، ضرایب مجهول $b_j(T_1)$ و $c_j(T_1)$ در معادلات (۴۷-۳) به دست می آیند. با جایگذاری ضرایب به دست آمده در معادلات مرتبه دوم و حذف جمله های سکولار، می توان معادلات مرتبه دو را نیز حل کرد.

۳-۵- جمع‌بندی

در این فصل، نخست به بی‌بعد سازی معادلات پرداخته شد. سپس، روش تعیین فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد و روند حذف سکولاریتی بیان شد و در نهایت پاسخ ورق به‌ازای بار عرضی تابع زمان تعیین شد. با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، حل تحلیلی به‌دست آمد. در فصل پنجم نتایج حاصل از این فصل ارائه خواهد شد.

فصل چهارم

حل عددی به کمک نرم افزار

۴-۱- مقدمه

در این فصل حل عددی مسأله، شامل حل مدال و حل دینامیکی یا گذرا با استفاده از المان‌های یک و دوبعدی ارائه خواهد شد. برای حل اجزای محدود مسأله، از نرم‌افزار انسیس^۱ استفاده شده است. در ابتدای فصل به تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک با استفاده از سری پرونی پرداخته شده است. سپس المان‌های مورد استفاده در تحلیل معرفی شده‌اند. در بخش بعد آنالیز حساسیت مش انجام شده و اندازه‌ی مش بهینه در مدل‌سازی یک و دوبعدی تعیین شده است و در نهایت به بیان مراحل حل مدال و تعیین پاسخ به کمک حل دینامیکی پرداخته شده است.

۴-۲- تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک براساس سری پرونی [60]

برای تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک ماده، از مدول رهایش بالک و برشی استفاده می‌شود. در نرم-افزار انسیس این توابع را می‌توان برحسب جملاتی از سری توانی پرونی به صورت زیر بیان کرد.

$$G = G_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^G}\right)} \quad (1-4)$$

$$K = K_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^K}\right)}$$

G_{∞} ، G_i مدول الاستیک برشی، K_{∞} و K_i مدول الاستیک بالک، τ_i^G و τ_i^K زمان رهایش برای هر کدام از اجزای سری پرونی است. مدول‌های تناسبی^۲ به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$\alpha_i^G = \frac{G_i}{G_0}, \alpha_i^K = \frac{K_i}{K_0} \quad (2-4)$$

که در آن:

$$G_0 = G_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_G} G_i; K_0 = K_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \quad (3-4)$$

¹ Ansys

² Relative moduli

توابع رهایش و بالک را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$G = G_0 \left(\alpha_\infty^G + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i^G e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^G}\right)} \right)$$

$$K = K_0 \left(\alpha_\infty^K + \sum_{i=1}^{n_K} \alpha_i^K e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^K}\right)} \right) \quad (4-4)$$

در اینجا G_0 و K_0 به ترتیب مدول برشی و مدول بالک در بارگذاری سریع یا مدول آنی و G_∞ و K_∞ مدول مربوط به بارگذاری های کند یا مدول نهایی می باشد. تعداد جملات سری پرونی برای برش n_G و برای رفتار بالک n_K است که لازم نیست این دو مشابه باشند. این مطلب در مورد زمان های رهایش τ_i^K و τ_i^G نیز صادق است.

۴-۳- تعیین مدول رهایش برشی و بالک

بر اساس فرضیات فصل دوم، رفتار ماده در برش ویسکوالاستیک بوده و برای مدل سازی این رفتار از اولین مدل جامد استاندارد خطی استفاده می شود و مدول رهایش G به صورت تابعی از زمان تعیین می شود. همچنین رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته شده و بدین ترتیب مدول بالک K عددی ثابت و بدون وابستگی به زمان است.

۴-۳-۱- مدول رهایش برشی

یکی از بهترین روش های تعیین خصوصیات مواد ویسکوالاستیک در انسیس استفاده از سری پرونی است. روش های مختلفی برای تعیین این سری در انسیس وجود دارد. اولین روش این است که داده های مدول رهایش برشی نسبت به زمان، که از آزمایش رهایش به دست آمده است، را به طور مستقیم وارد انسیس کرد. در این صورت نرم افزار سری پرونی را بر این داده ها منطبق می کند. انسیس در هنگام انطباق تابع نمایی داده ها، G_0 و G_∞ را به ترتیب اولین و آخرین داده در نظر می گیرد و مقدار α_i و τ_i را محاسبه می کند ولی بعد از آن، G_0 و G_∞ را در حافظه نگه نمی دارد. از این رو انسیس مدول آنی

G_0 را با استفاده از مدول الاستیک E و ضریب پواسون ν و براساس فرمول زیر محاسبه می‌کند.

$$G_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5-4)$$

نکته دیگر این است که در داده‌های آزمایشگاهی، در صورتی که آخرین داده صفر باشد، مدول رهایش المان ماکسول به دست می‌آید.

با توجه به این که در حل تحلیلی مسأله از مدل جامد استاندارد برای شبیه‌سازی رفتار برشی ماده استفاده شده است، ضرایب سری پرونی به صورت زیر تعیین گردیده است.

$$G = G_\infty + G_i e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^G}\right)} \quad (6-4)$$

که در آن:

$$G_i = \frac{E_0^2}{E_0 + E_1}, \tau_i^G = \frac{\mu}{E_0 + E_1}, G_\infty = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \quad (7-4)$$

مقدار مدول برشی آنی G_0 نیز با قرار دادن $t = 0$ در رابطه‌ی (۴-۴) به صورت زیر تعیین شده است.

$$G_0 = E_0 \quad (8-4)$$

در نتیجه ضرایب سری پرونی رابطه‌ی (۴-۴) از روابط (۷-۴)، (۸-۴) و (۲-۴) تعیین می‌شود.

بنابراین ضرایب سری پرونی مورد نظر α_i و τ_i به طور مستقیم وارد انسیس می‌شود ولی G_0 را نمی‌-

توان وارد انسیس کرد و همان‌طور که قبلاً اشاره شد، انسیس این مقدار را بر حسب مدول الاستیک E

و ضریب پواسون ν محاسبه می‌کند.

۴-۳-۲- مدول بالک

با توجه به این که رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته می‌شود، برای حالت بالک سری پرونی

تعریف نمی‌شود و با وارد کردن مدول الاستیک و ضریب پواسون، انسیس مقدار مدول بالک را بر

اساس رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کند.

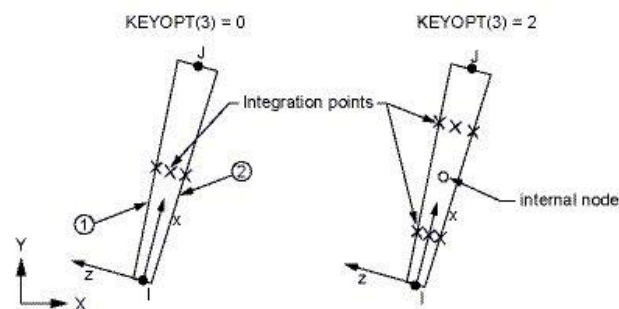
$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (9-4)$$

۴-۴-معرفی المان‌ها

در این پایان‌نامه در تحلیل یک‌بعدی از المان Shell 208 و در تحلیل دوبعدی از المان Plane 182 استفاده شده است که در ادامه توضیح مختصری در مورد این المان‌ها داده شده است [60].

۴-۴-۱- المان Shell 208

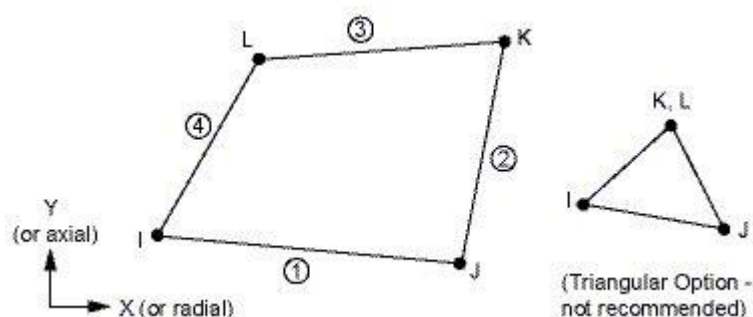
این المان برای تحلیل پوسته‌های متقارن محوری نازک تا نسبتاً ضخیم مناسب است، مانند مخازن نفت، لوله‌ها و برج‌های خنک‌کننده. این المان دارای دو گره با سه درجه آزادی در هر گره می‌باشد، جابجایی در جهت‌های x و y و چرخش حول محور z . این المان امکان در نظر گرفتن اثرات کرنش بزرگ، تغییر شکل برشی عرضی، هایپروالاستیک و لایه‌ها را در مدل فراهم می‌کند. در مسائل کرنش کوچک با جابجایی متقارن محوری خالص، از کرنش‌های برشی عرضی صرف نظر می‌شود. همچنین این المان قابلیت تحلیل مواد ویسکوالاستیک سری پرونی را نیز دارد. شکل (۴-۱) هندسه‌ی این المان را نمایش می‌دهد.



شکل (۴-۱) هندسه‌ی المان Shell 208 [60]

Plane 182 المان ۲-۴-۴

المان Plane 182 برای مدل سازی سازه های دوبعدی استفاده می شود. این المان می تواند به عنوان المان صفحه ای (تنش صفحه ای، کرنش صفحه ای) یا المان متقارن محوری استفاده شود. این المان با چهار گره دارای دو درجه ی آزادی در هر گره تعریف می شود، همچنین دارای قابلیت تحلیل پلاستیک، ویسکوالاستیک، هایپروالاستیک، تغییر شکل های بزرگ و کرنش های بزرگ می باشد. شکل (۲-۴) هندسه ی این المان را نمایش می دهد.



شکل (۲-۴) هندسه ی المان Plane 182 [60]

۴-۵- تعیین مش بهینه

در این پایان نامه ورقه با ابعاد و خواص مکانیکی مطابق جدول (۴-۱)، ارائه شده است.

برای مدل سازی، ورق حلقوی شکل با شرایط مرزی دو سر گیردار مد نظر قرار گرفته است. پس از تعریف خواص مکانیکی و ابعاد ورق، مش بندی صورت می گیرد.

جدول (۴-۱) مشخصات هندسی و مکانیکی ورق [61]

$r_o = 0.2$	شعاع خارجی (m)
$r_i = 0.06$	شعاع داخلی (m)
$h = 0.004$	ضخامت (m)
$E_0 = 2.4462e9, E_1 = 2.9078e9$	مدول های ویسکوالاستیک (Pa)

$\mu = 7.8843e9$	ضریب ویسکوالاستیک (Pa.s)
$\nu = 0.3$	ضریب پواسون
$\rho = 0.22$	چگالی (Kg/m^2)

باید به این نکته توجه شود که چگالی ذکر شده در جدول، چگالی سطحی است و برای مدل سازی باید به ضخامت تقسیم شود.

در تحلیل یک بعدی از المان متقارن محوری Shell 208 استفاده شده است. آنالیز مدال به ازای تعداد المان های مختلف انجام و فرکانس های طبیعی عرضی سوم در جدول (۲-۴) گزارش شده است. بر اساس این جدول مش بهینه به ازای ۹۰۰ المان حاصل می شود.

جدول (۲-۴) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی سوم به ازای مش های مختلف در مدل سازی یک بعدی بر حسب (Hz)

تعداد المان	۵۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰	۱۶۰۰
فرکانس	۱۲۵۱۴	۱۲۴۵۶	۱۲۴۴۲	۱۲۴۳۹	۱۲۴۳۸	۱۲۴۳۸	۱۲۴۳۷	۱۲۴۳۷	۱۲۴۳۷

در تحلیل دوبعدی با المان Plane 182، فرکانس های طبیعی عرضی سوم برای تعداد المان های مختلف در جدول (۳-۴) گزارش شده است. بر اساس این جدول مش بهینه به ازای تقریباً ۷۰۰۰ المان حاصل می شود.

جدول (۳-۴) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی سوم به ازای مش های مختلف در مدل سازی دوبعدی بر حسب (Hz)

تعداد المان	۳۰۰۰	۴۰۰۰	۵۰۰۰	۵۵۰۰	۶۰۰۰	۶۵۰۰	۷۰۰۰	۷۵۰۰	۸۰۰۰
فرکانس	۱۲۴۶۵	۱۲۴۵۱	۱۲۴۴۴	۱۲۴۴۲	۱۲۴۴۰	۱۲۴۳۹	۱۲۴۳۸	۱۲۴۳۸	۱۲۴۳۷

۴-۶- حل مدال

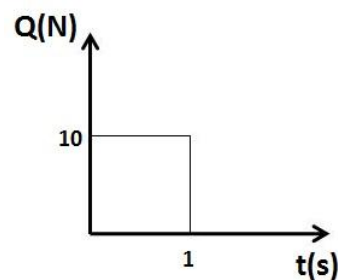
از آنالیز مدال^۱ جهت تعیین فرکانس های طبیعی و شکل مد آن، در فرکانس مورد نظر استفاده می-

^۱ Modal

شود. مقدار فرکانس طبیعی هر سازه بستگی به شکل، جنس و تکیه‌گاه‌های آن سازه دارد. در عین حال، مقدار بارگذاری‌ها و نوع آن نیز می‌تواند در مقدار فرکانس طبیعی مؤثر باشد. به‌همین دلیل نرم-افزار دو نوع آنالیز مدال (بدون تنش و پیش تنش) را ارائه کرده است. با توجه به این‌که بارگذاری عرضی تأثیری در فرکانس طبیعی ندارد، در این پایان‌نامه از روش بدون تنش استفاده شده است.

۴-۷- حل دینامیکی

به کمک این تحلیل می‌توان به محاسبه‌ی پاسخ دینامیکی یک سازه تحت تأثیر بارگذاری‌های وابسته به زمان پرداخت. برای تحلیل یک مدل وابسته به زمان، باید تحلیل المان محدود از نوع گذرا^۱ انتخاب شود. در این تحلیل از روش کامل^۲ برای انجام محاسبات ماتریسی استفاده شده است. در این روش، ماتریس کامل سیستم تشکیل شده و پاسخ آن محاسبه می‌شود. این روش قدرتمندترین روش بین روش‌های موجود است زیرا قادر است خواص غیرخطی نظیر پلاستیسیته و تغییر شکل بزرگ را منظور کند. نمودار نیرو برحسب زمان مطابق شکل زیر می‌باشد.



شکل (۴-۳) تغییرات زمانی نیروی گسترده

تغییرات نیرو برحسب زمان را می‌توان به دو قسمت مجزا تقسیم نمود. هر یک از این قسمت‌ها یک مرحله‌ی بارگذاری^۳ نامیده می‌شود. هنگام تحلیل المان محدود، هر یک از مراحل بارگذاری، به بخش-های کوچک‌تر تقسیم می‌شوند تا دقت حاصل از تحلیل افزایش یابد. به این بخش‌های کوچک‌تر، گام-

¹ Transient

² Full Method

³ Load Step

های بارگذاری^۱ گفته می‌شود. در تحلیل دینامیکی شیوه‌های تغییر نیرو به دو صورت خطی^۲ و پله‌ای^۳ است.

هر یک از مراحل بارگذاری باید جداگانه تعریف و در فایل‌های مستقل ذخیره شوند. از نخستین مرحله بارگذاری شروع کرده و مقادیر کلیه نیروها، قیدها و ... مشابه حالت استاتیکی تعریف می‌شوند. پس از اتمام تعریف بارگذاری، باید لحظه‌ی پایان این مرحله از بارگذاری مشخص شود.

طول بازه‌ی زمانی، گام زمانی^۴ نامیده می‌شود. افزایش گام زمانی علاوه بر افزایش زمان، حجم محاسبات را بالا برده و می‌تواند خطاهای عددی را نیز افزایش دهد لذا افزایش تعداد گام‌ها به هر مقدار دلخواه منطقی نیست. در واقع با توجه به دقت قابل قبول، برای تعداد گام‌های تحلیل، عدد بهینه‌ای وجود دارد. در یک تحریک ایده‌آل که همه مدهای سازه تحریک می‌شوند؛ پاسخ ورق شامل همه فرکانس‌ها می‌باشد. هرچند تولید تحریک ایده‌آل به صورت عددی ممکن نیست. اندازه‌ی گام‌های زمانی به صورت زیر تعیین می‌گردد [60].

$$Time Step = \frac{1}{20f} \quad (10-4)$$

که در آن f ، بزرگ‌ترین فرکانس طبیعی سازه است. گام‌های زمانی باید به گونه‌ای انتخاب شوند که ۲۰ نقطه‌ی مجزا در هر دوره‌ی بزرگ‌ترین فرکانس طبیعی ایجاد شود. لازم به ذکر است که پیش از تحلیل دینامیکی، باید تحلیل مدال به منظور شناخت رفتار دینامیکی سازه و تعیین فرکانس‌های آن صورت گیرد. در این پایان‌نامه، با استفاده از سعی و خطا گام زمانی بهینه به دست می‌آید.

۴-۸- جمع‌بندی

در این فصل روند حل عددی یک‌بعدی و دوبعدی مسأله ارائه شد. در ابتدای فصل به چگونگی تعیین

¹ Loading Substeps

² Ramped

³ Stepped

⁴ Time Step

خصوصیات مواد ویسکوالاستیک (مدول رهایش برشی و بالک) براساس سری پرونی پرداخته شد. سپس المان‌های به‌کار رفته در تحلیل معرفی شد. در بخش بعد به بررسی حساسیت مش پرداخته شد و اندازه‌ی مش بهینه در دو مدل‌سازی یک و دوبعدی تعیین گردید. در نهایت به بیان مراحل حل مدال مسأله و تعیین پاسخ به‌کمک حل دینامیکی پرداخته شد. در فصل پنجم نتایج حاصل از این فصل ارائه خواهد شد.

فصل پنجم

نتیج

۵-۱- مقدمه

در این فصل به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل‌های سوم و چهارم پرداخته خواهد شد. محاسبات ریاضی در محیط Maple 16 انجام شده است. ابتدا نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد در حالت خطی و غیرخطی و همچنین میرایی ارائه شده و تأثیر پارامترهای مختلف هندسی و شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد و میرایی بررسی شده است، سپس نتایج با حل ارائه شده‌ی تئوری کلاسیک برای ورق ویسکوالاستیک و حل دقیق تئوری کلاسیک برای ورق الاستیک و حل عددی توسط دیگر مراجع مقایسه می‌شود. در نهایت به بیان نتایج پاسخ پرداخته می‌شود.

۵-۲- فرکانس طبیعی

برای تحلیل فرکانسی، از ورق‌ی با مشخصات هندسی و خواص مکانیکی زیر استفاده شده است.

جدول (۱-۵) مشخصات هندسی و مکانیکی ورق

$r_o = 0.2$	شعاع خارجی ورق حلقوی (m)
$r_i = 0.2$	شعاع داخلی ورق توپر (m)
$E_0 = 2.4462e9, E_1 = 2.9078e9$	مدول‌های ویسکوالاستیک (Pa)
$\mu = 7.8843e9$	ضریب ویسکوالاستیک (Pa.s)
$\nu = 0.3$	ضریب پواسون
$\rho = 0.22$	چگالی (Kg/m^3)

نتایج به دست آمده برای ورق ویسکوالاستیک می‌تواند برای ورق الاستیک نیز با قرار دادن $\tau \rightarrow 0$ به دست آید. در این حالت، باید از رابطه‌ی زیر استفاده شود.

$$K_0 = \frac{2}{3} G_s \frac{1+\nu}{1-2\nu}; \left\{ \begin{array}{l} \mu \neq 0 \rightarrow G_s = E_0 \\ \mu = 0 \rightarrow G_s = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \end{array} \right\}; E = 2G_s(1+\nu) \quad (1-5)$$

نتایج به دست آمده بر اساس تئوری برشی با روش‌های عددی، نتایجی که توسط مرجع [62] با استفاده از تئوری کلاسیک و روش المان محدود برای ورق الاستیک ارائه شده و همچنین حل دقیق ورق مدور بر اساس تئوری کلاسیک که بر حسب تابع بسط تعریف می‌شود [20] مقایسه شده است.

ω فرکانس بی‌بعد مرتبه یک است و ω_{NL} فرکانس بی‌بعد غیرخطی است که در حل معادلات مرتبه دو اصلاح می‌شود و نسبت آن به فرکانس خطی در جدول درج شده است. α بیانگر میرایی می‌باشد. CPT نتایج به دست آمده‌ی تئوری کلاسیک برای ورق ویسکوالاستیک است. حل FE فقط مربوط به خیز کوچک¹ می‌باشد. درصد اختلاف به صورت قدر مطلق $100 \cdot ((A_{FE} - A_I) / A_{FE})$ می‌باشد که A_{FE} نتایج المان محدود و A_I نتایج حل ارائه شده را بیان می‌دارند.

فرکانس‌ها در مرتبه دو وابسته به ε هستند. برای مشاهده وابستگی فرکانس به دامنه باید بسط را تا مرتبه ۳ نوشت. معادلات مرتبه‌ی سه در پیوست ج نوشته شده است.

در جدول (۲-۵) تا (۴-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد خطی، نسبت فرکانس غیرخطی به خطی و میرایی، برای ورق حلقوی دو سر گیردار ویسکوالاستیک و الاستیک با $r_i/r_o = 0.1, 0.3, 0.5$ و نسبت‌های مختلف r_o/h که از روش‌های مختلف به دست آمده و همچنین درصد اختلاف آن‌ها با حل FE و مرجع [20] و [62] ارائه شده است.

با توجه به این جدول‌ها می‌توان دریافت که:

- برای مقادیر زیاد r_o/h درصد اختلاف تئوری کلاسیک کوچک‌تر از تئوری برشی است (در مقایسه با حل المان محدود).
- برای مقادیر کوچک r_o/h نتایج تئوری برشی از نتایج تئوری کلاسیک آن به خصوص در مد دوم دقیق‌تر هستند.

¹ Small deflection

- با افزایش نسبت r_o/h قدر مطلق میرایی افزایش می‌یابد. قدر مطلق میرایی در مد دوم بیشتر از مد اول است.
- افزایش نسبت r_i/r_o موجب افزایش فرکانس می‌شود. نتایج تئوری کلاسیک در حالت الاستیک نسبت به مرجع [62] دقیق‌تر است.
- فرکانس‌های بی‌بعد تئوری کلاسیک در حالت الاستیک کوچک‌تر از حالت ویسکوالاستیک هستند. درصد اختلاف تئوری کلاسیک با حل عددی در حالت الاستیک کمتر از حالت ویسکوالاستیک است.
- با افزایش نسبت r_i/r_o برای نسبت‌های کوچک r_o/h ، دقت تئوری برشی افزایش و دقت تئوری کلاسیک کاهش می‌یابد.
- فرکانس بی‌بعد ویسکوالاستیک در تئوری برشی برابر با فرکانس بی‌بعد الاستیک می‌باشد.
- نسبت فرکانس بی‌بعد غیرخطی به خطی در بیشتر موارد ثابت و تقریباً برابر با یک است.
- با افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی قدر مطلق میرایی کاهش می‌یابد.

جدول (۲-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o = 0.1$

		مد اول				مد دوم					
		r_o/h	۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰	
		ویسکوالاستیک	FE	ω	۱.۳۴۰	۰.۸۲۳	۰.۴۴۱	۰.۱۷۹	۳.۰۴۵	۲.۰۸۴	۱.۱۸۶
FSDT	ω		۱.۴۷۴	۰.۹۱۶	۰.۴۹۳	۰.۲۰۲	۳.۲۲۳	۲.۲۷۳	۱.۳۱۵	۰.۵۵۳	
	α			-۲.۱۴۸	-۲.۳۸۳	-۲.۸۹۲	-۴.۳۰۶	-۲.۷۱۲	-۳.۰۹۳	-۳.۴۶۹	-۴.۸۶۴
			$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷
	$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$		۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	
CPT	ω		۱.۸۳۱	۰.۹۱۶	۰.۴۵۸	۰.۱۸۳	۵.۰۴۸	۲.۵۲۴	۱.۲۶۲	۰.۵۰۵	
diff (FSDT-FE)				۱۰.۰۰	۱۱.۳۰	۱۱.۷۹	۱۲.۸۵	۵.۸۴	۹.۰۷	۱۰.۸۸	۱۲.۱۷
diff (CPT - FE)				۳۶.۶۴	۱۱.۳۰	۳.۸۵	۲.۲۴	۶۵.۷۸	۲۱.۱۱	۶.۴۱	۲.۴۳
FE	ω		۱.۳۴۰	۰.۸۲۳	۰.۴۴۱	۰.۱۷۹	۳.۰۴۵	۲.۰۸۴	۱.۱۸۶	۰.۴۹۳	
[62]	ω		۱.۴۱۵	۰.۸۷۴	۰.۴۴۷	۰.۱۸۲	۳.۲۱۴	۲.۱۶۲	۱.۲۰۶	۰.۴۹۸	
FSDT	ω	۱.۴۷۴	۰.۹۱۶	۰.۴۹۳	۰.۲۰۲	۳.۲۲۳	۲.۲۷۳	۱.۳۱۵	۰.۵۵۳		
	$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰		
[20]	ω	۱.۸۰۹	۰.۹۰۴	۰.۴۵۲	۰.۱۸۱	۴.۹۹۶	۲.۴۹۸	۱.۲۴۹	۰.۴۹۹		
diff (FSDT-FE)			۱۰.۰۰	۱۱.۳۰	۱۱.۷۹	۱۲.۸۵	۵.۸۴	۹.۰۷	۱۰.۸۸	۱۲.۱۷	
diff (FSDT-[62])			۴.۱۷	۴.۸۱	۱۰.۲۹	۱۰.۹۹	۰.۲۸	۵.۱۳	۹.۰۴	۱۱.۰۴	
diff ([20] - FE)			۳۵.۰۰	۹.۸۴	۲.۴۹	۱.۱۲	۶۴.۰۷	۱۹.۸۷	۵.۳۱	۱.۲۲	
diff ([20] - [62])			۲۷.۸۴	۳.۴۳	۱.۱۲	۰.۵۵	۵۵.۴۵	۱۵.۵۴	۳.۵۷	۰.۲۰	

الاستیک

جدول (۳-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o = 0.3$

		مد اول				مد دوم					
r_o/h		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰		
ویسکوالاستیک	FE	ω	۲.۰۳۵	۱.۳۲۱	۰.۷۲۶	۰.۲۹۸	۴.۳۷۴	۳.۲۱۷	۱.۹۲۳	۰.۸۱۷	
	FSDT	ω	۲.۱۳۳	۱.۴۳۱	۰.۸۰۱	۰.۳۳۳	۴.۴۵۹	۳.۴۰۶	۲.۰۹۷	۰.۹۰۸	
		α		-۱.۷۸۴	-۲.۰۲۱	-۲.۳۴۳	-۳.۳۷۷	-۲.۱۲۰	-۲.۶۴۹	-۲.۸۹۵	-۳.۸۴۹
			$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷
	CPT	ω	۳.۰۲۷	۱.۵۱۴	۰.۷۵۷	۰.۳۰۳	۸.۳۴۴	۴.۱۷۲	۲.۰۸۶	۰.۸۳۴	
	diff (FSDT-FE)		۴.۸۲	۸.۳۳	۱۰.۳۳	۱۱.۷۵	۱.۹۴	۵.۸۸	۹.۰۵	۱۱.۱۴	
	diff (CPT - FE)		۴۸.۷۵	۱۴.۶۱	۴.۲۷	۱.۶۸	۹۰.۷۶	۲۹.۶۹	۸.۴۸	۲.۰۸	
	FE	ω	۲.۰۳۵	۱.۳۲۱	۰.۷۲۶	۰.۲۹۸	۴.۳۷۴	۳.۲۱۷	۱.۹۲۳	۰.۸۱۷	
	[62]	ω	-	۱.۳۷۳	۰.۷۳۸	۰.۳۰۱	-	۳.۳۶۶	۱.۹۶۵	۰.۸۲۶	
	الاستیک	FSDT	ω	۲.۱۳۳	۱.۴۳۱	۰.۸۰۱	۰.۳۳۳	۴.۴۵۹	۳.۴۰۶	۲.۰۹۷	۰.۹۰۸
$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$			۱.۰۰۰	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۱.۰۰۰	
[20]		ω	۳.۰۰۷	۱.۵۰۴	۰.۷۵۱	۰.۳۰۱	۸.۳۱۱	۴.۱۵۶	۲.۰۷۸	۰.۸۳۱	
diff (FSDT-FE)		۴.۸۲	۸.۳۳	۱۰.۳۳	۱۱.۷۵	۱.۹۴	۵.۸۸	۹.۰۵	۱۱.۱۴		
diff (FSDT-[62])		-	۴.۲۲	۸.۵۴	۱۰.۶۳	-	۱.۱۹	۶.۷۲	۹.۹۳		
diff ([20] - FE)		۴۷.۷۶	۱۳.۸۵	۳.۴۴	۱.۰۱	۹۰.۰۱	۲۹.۱۹	۸.۰۶	۱.۷۱		
diff ([20] - [62])		-	۹.۵۴	۱.۷۶	۰	-	۲۳.۴۷	۵.۷۵	۰.۶۱		

جدول (۴-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o = 0.5$

		مد اول				مد دوم				
		r_o/h				r_o/h				
		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰	
ویسکوالاستیک	FE	ω	۳.۲۹۲	۲.۳۶۶	۱.۳۸۶	۰.۵۸۳	۶.۶۷۶	۵.۴۰۸	۳.۵۵۱	۱.۵۸۸
	FSDT	ω	۳.۳۴۱	۲.۵۰۱	۱.۵۱۰	۰.۶۴۷	۶.۶۶۵	۵.۵۸۳	۳.۸۰۶	۱.۷۵۳
		α	-۱.۳۲۰	-۱.۶۳۰	-۱.۸۱۴	-۲.۴۵۸	-۱.۲۶۴	-۲.۰۹۲	-۲.۳۳۲	-۲.۸۶۰
		$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷
		$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۰.۹۹۹	۱.۰۰۰	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹
	CPT	ω	۵.۹۳۳	۲.۹۶۷	۱.۴۸۳	۰.۵۹۳	۱۶.۳۵۶	۸.۱۷۸	۴.۰۸۹	۱.۶۳۶
	diff (FSDT-FE)		۱.۴۹	۵.۷۱	۸.۹۵	۱۰.۹۸	۰.۱۶	۳.۲۴	۷.۱۸	۱۰.۳۹
	diff (CPT - FE)		۸۰.۲۳	۲۵.۴۰	۷.۰۰	۱.۷۲	۱۴۵.۰۰	۵۱.۲۲	۱۵.۱۵	۳.۰۲
	FE	ω	۳.۲۹۲	۲.۳۶۶	۱.۳۸۶	۰.۵۸۳	۶.۶۷۶	۵.۴۰۸	۳.۵۵۱	۱.۵۸۸
	[62]	ω	-	۲.۴۹۵	۱.۴۲۲	۰.۵۹۱	-	۵.۷۳۳	۳.۶۶۲	۱.۶۱۰
الاستیک	FSDT	ω	۳.۳۴۱	۲.۵۰۱	۱.۵۱۰	۰.۶۴۷	۶.۶۶۵	۵.۵۸۳	۳.۸۰۶	۱.۷۵۳
		$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۰.۹۹۹	۱.۰۰۰	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹
	[20]	ω	۵.۹۱۶	۲.۹۵۹	۱.۴۷۹	۰.۵۹۲	۱۶.۳۳۱	۸.۱۶۵	۴.۰۸۲	۱.۶۳۳
diff (FSDT-FE)		۱.۴۹	۵.۷۱	۸.۹۵	۱۰.۹۸	۰.۱۶	۳.۲۴	۷.۱۸	۱۰.۳۹	
diff (FSDT-[62])		-	۰.۲۴	۶.۱۹	۹.۴۸	-	۲.۶۲	۳.۹۳	۸.۸۸	
diff ([20] - FE)		۷۹.۷۱	۲۵.۰۶	۶.۷۱	۱.۵۴	۱۴۴.۶۲	۵۰.۹۸	۱۴.۹۵	۲.۸۳	
diff ([20] - [62])		-	۱۸.۶۰	۴.۰۱	۰.۱۷	-	۴۲.۴۲	۱۱.۴۷	۱.۴۳	

در جدول (۵-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد خطی، نسبت فرکانس غیرخطی به خطی و میرایی، برای ورق حلقوی دو سر ساده ویسکوالاستیک و الاستیک برای نسبت‌های مختلف r_o/h که از روش‌های مختلف به دست آمده و همچنین درصد اختلاف آن‌ها با حل FE و مرجع [20] و [62] ارائه شده است. با توجه به این جدول می‌توان دریافت که:

- فرکانس بی‌بعد ویسکوالاستیک در تئوری برشی برابر با فرکانس بی‌بعد الاستیک می‌باشد.
- مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ورق دو سر ساده کوچک‌تر از ورق دو سر گیردار می‌باشد که می‌تواند به دلیل کاهش سفتی ورق باشد.
- در ورق دو سر ساده نتایج با حل المان محدود مطابقت بیشتری نسبت به ورق دو سر گیردار دارد.
- برای مقادیر زیاد r_o/h ، درصد اختلاف تئوری کلاسیک کوچک‌تر از تئوری برشی است.
- برای مقادیر کوچک r_o/h ، نتایج تئوری برشی از نتایج تئوری کلاسیک آن به خصوص در مد دوم دقیق‌تر هستند.
- با افزایش نسبت r_o/h ، قدر مطلق میرایی افزایش می‌یابد. قدر مطلق میرایی در مد دوم بیشتر از مد اول است.
- قدر مطلق میرایی در ورق دو سر ساده کوچک‌تر از ورق دو سر گیردار می‌باشد.
- نسبت فرکانس بی‌بعد غیرخطی به خطی در بیشتر موارد ثابت و تقریباً برابر با یک است.

جدول (۵-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی ساده-ساده با $r_i/r_o = 0.3$

		مد اول				مد دوم					
		r_o/h	۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰	
ویسکوالاستیک	FE	ω	۱.۲۱۵	۰.۶۷۲	۰.۳۴۶	۰.۱۴۱	۳.۷۷۲	۲.۳۹۱	۱.۳۰۷	۰.۵۴۳	
	FSDT	ω	۱.۲۷۹	۰.۷۰۹	۰.۳۶۶	۰.۱۴۸	۳.۹۳۰	۲.۵۵۸	۱.۴۱۸	۰.۵۸۷	
		α		-۱.۳۹۰	-۵.۵۶۷	-۸.۱۱۸	-۱.۲۸۸	-۳.۱۸۰	-۱.۵۸۶	-۱.۹۷۰	-۲.۹۲۰
			$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$	۱e-۸	۱e-۸	۱e-۸	۱e-۷	۱e-۸	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷
		$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$	۱.۰۰۰	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	
	CPT	ω	۱.۳۳۵	۰.۶۶۸	۰.۳۳۴	۰.۱۳۴	۵.۳۴۲	۲.۶۷۱	۱.۳۳۶	۰.۵۳۴	
	diff (FSDT-FE)			۵.۲۷	۵.۵۱	۵.۷۸	۴.۹۶	۴.۱۹	۶.۹۸	۸.۴۹	۸.۱۰
	diff (CPT - FE)			۹.۸۸	۰.۶۰	۳.۴۷	۴.۹۶	۴۱.۶۲	۱۱.۷۱	۲.۲۲	۱.۶۶
	FE	ω	۱.۲۱۵	۰.۶۷۲	۰.۳۴۶	۰.۱۴۱	۳.۷۷۲	۲.۳۹۱	۱.۳۰۷	۰.۵۴۳	
	[62]	ω	-	۰.۶۷۴	۰.۳۴۶	۰.۱۴۰	-	۲.۴۲۰	۱.۳۱۳	۰.۵۳۹	
الاستیک	FSDT	ω	۱.۲۷۹	۰.۷۰۹	۰.۳۶۶	۰.۱۴۸	۳.۹۳۰	۲.۵۵۸	۱.۴۱۸	۰.۵۸۷	
		$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$	۱.۰۰۰	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	۱.۰۰۰	
	[20]	ω	۱.۴۱۶	۰.۷۰۸	۰.۳۵۳	۰.۱۴۱	۵.۴۵۹	۲.۷۲۹	۱.۳۶۵	۰.۵۴۵	
	diff (FSDT-FE)			۵.۲۷	۵.۵۱	۵.۷۸	۴.۹۶	۴.۱۹	۶.۹۸	۸.۴۹	۸.۱۰
	diff (FSDT-[62])			-	۵.۱۹	۵.۷۸	۵.۷۱	-	۵.۷۰	۸.۰۰	۸.۹۱
diff ([20] - FE)			۱۶.۵۴	۵.۳۶	۲.۰۲	۰	۴۴.۷۲	۱۴.۱۳	۴.۴۴	۰.۳۷	
diff ([20] - [62])			-	۵.۰۴	۲.۰۲	۰.۷۱	-	۱۲.۷۷	۳.۹۶	۱.۱۱	

در تئوری کلاسیک امکان محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی شعاعی ورق وجود ندارد؛ در حالی که با استفاده از معادلات استخراج شده بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، امکان محاسبه‌ی فرکانس‌های شعاعی نیز وجود دارد. در جدول (۵-۶)، میرایی و فرکانس‌های شعاعی بی‌بعد اول و دوم برای نسبت‌های مختلف r_o/h و درصد اختلاف آن‌ها با حل المان محدود ارائه شده است. این نتایج برای نسبت‌های مختلف r_i/r_o در جدول (۷-۵) ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش نسبت r_o/h برای نسبت ثابت r_i/r_o تأثیر زیادی بر روی فرکانس شعاعی بی‌بعد ندارد ولی قدر مطلق میرایی افزایش می‌یابد. با کاهش نسبت r_o/h ، دقت نتایج به‌خصوص در مد دوم بیشتر می‌باشد. افزایش نسبت r_i/r_o برای نسبت ثابت r_o/h ، باعث افزایش فرکانس شعاعی بی‌بعد می‌شود، همچنین قدر مطلق میرایی کاهش می‌یابد. با افزایش r_i/r_o ، دقت نتایج، به‌خصوص در مد دوم بیشتر می‌شود، مد دوم تقریباً دو برابر مد اول می‌باشد. قدر مطلق میرایی مد اول و دوم تقریباً یکسان است.

جدول (۵-۶) فرکانس‌های طبیعی شعاعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o = 0.3$

		مد اول				مد دوم				
		r_o/h	۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰
ویسکوالاستیک	FE	ω	۵.۴۴۱	۵.۴۳۰	۵.۴۱۹	۵.۴۱۱	۱۰.۳۰۹	۱۰.۴۶۳	۱۰.۴۷۶	۱۰.۴۷۰
	FSDT	ω	۵.۲۲۰	۵.۱۹۱	۵.۱۷۳	۵.۱۶۲	۱۰.۳۰۸	۱۰.۳۵۱	۱۰.۳۳۹	۱۰.۳۲۳
		α	-۲.۲۸۷	-۳.۶۵۶	-۵.۱۵۶	-۸.۲۵۲	-۲.۵۲۱	-۳.۷۱۵	-۵.۱۷۵	-۸.۲۵۹
		$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷
diff (FSDT-FE)			۴.۰۶	۴.۴۰	۴.۵۴	۴.۶۰	۰.۰۱	۱.۰۷	۱.۳۱	۱.۴۰

جدول (۷-۵) فرکانس‌های طبیعی شعاعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_o/h = 10$

		مد اول				مد دوم					
		r_i/r_o	۰.۰۵	۰.۱	۰.۳	۰.۵	۰.۰۵	۰.۱	۰.۳	۰.۵	
ویسکوالاستیک	FE	ω	۴.۴۴۳	۴.۵۳۹	۵.۴۳۰	۷.۳۹۲	۸.۱۵۹	۸.۴۲۴	۱۰.۴۶۳	۱۴.۴۶۷	
	FSDT	ω	۳.۸۱۹	۴.۰۳۲	۵.۱۹۱	۷.۲۸۵	۷.۶۲۴	۸.۰۴۸	۱۰.۳۵۱	۱۴.۴۸۱	
		α		-۴.۹۸۱	-۴.۷۱۵	-۳.۶۵۶	-۲.۴۷۷	-۵.۰۲۲	-۴.۷۶۰	-۳.۷۱۵	-۲.۵۴۷
				۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷	۱e-۷
		$\frac{\omega_{NL}}{\omega}$	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۱.۰۰۰	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹	۰.۹۹۹
diff (FSDT-FE)			۱۴.۰۵	۱۱.۱۷	۴.۴۰	۱.۴۵	۶.۵۶	۴.۴۶	۱.۰۷	۰.۱۰	

در جدول (۸-۵)، فرکانس‌های بی‌بعد و میرایی سیستم برای مقادیر مختلف پارامتر ویسکوالاستیک ($7.8843 < \mu < 7.8843 * 10^{10}$) ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در بازه‌ی $(0 < n < 4)$ ، با افزایش پارامتر ویسکوالاستیک، قدر مطلق میرایی سیستم افزایش می‌یابد یا پارامتر ویسکوالاستیک می‌تواند با سرعت بیشتری دامنه‌ی ارتعاش را کاهش دهد. اما با بیشتر افزایش یافتن مقدار n ، قدر مطلق میرایی سیستم نیز کاهش می‌یابد. برای مقادیر بزرگ n ، فرکانس بی‌بعد ویسکوالاستیک با فرکانس بی‌بعد الاستیک یکسان می‌باشد. برای مقادیر کوچک n ، انتظار می‌رود که فرکانس بی‌بعد الاستیک با فرکانس بی‌بعد ویسکوالاستیک نیز یکسان باشد، این تفاوت می‌تواند به دلیل عدم استفاده از رابطه‌ی (۱-۵) باشد.

جدول (۸-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o = 0.3$ ، $r_o/h = 10$ و پارامترهای مختلف ویسکوالاستیک $\mu = 7.8843 \times 10^9$

		n	۱۰	۸	۶	۵	۴	۲	۰
مد اول	α		-۲.۰۲۱	-۲.۰۲۱	-۲.۰۲۱	-۱.۲۵۴	-۶.۸۴۸	-۱.۳۴۷	-۱.۳۴۸
	ω		۱e-۸	۱e-۶	۱e-۴	۱e-۲	۱e-۲	۱e-۳	۱e-۵
مد دوم	α		-۲.۶۴۹	-۲.۶۴۹	-۲.۶۴۹	-۲.۶۴۹	-۹.۶۶۶	-۲.۹۸۸	-۹.۸۸۹
	ω		۱e-۸	۱e-۶	۱e-۴	۱e-۳	۱e-۲	۱e-۲	۱e-۵
			۳.۴۰۶	۳.۴۰۶	۳.۴۰۶	۳.۴۰۵	۳.۳۹۰	۲.۸۰۷	۲.۸۰۳

در جدول (۹-۵)، فرکانس‌های طبیعی ورق برحسب هرتز، برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، فرکانس مواد ویسکوالاستیک بیشتر از مواد الاستیک است. همچنین فرکانس ورق دو سر ساده کوچک‌تر از فرکانس ورق دو سر گیردار می‌باشد.

جدول (۹-۵) فرکانس‌های طبیعی ورق با شرایط مرزی مختلف برحسب هرتز با $r_o/h = 10$ و $r_i/r_o = 0.3$

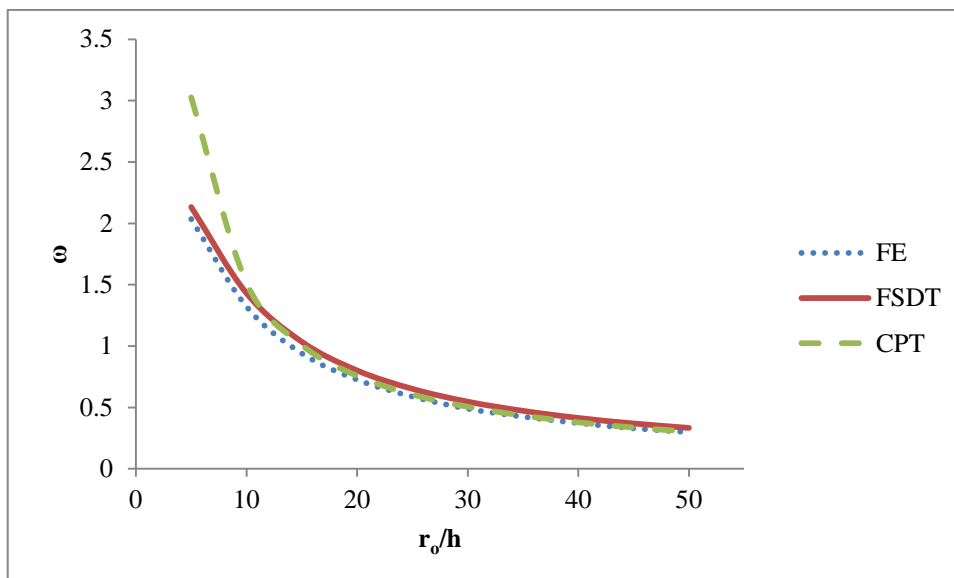
		مد اول		مد دوم		
		C-C	S-S	C-C	S-S	
ویسکوالاستیک	FE	ω	۲۳۰۶۲.۰۰	۱۱۷۲۹.۰۰	۵۶۱۸۸.۰۰	۴۱۷۷۰.۰۰
	FSDT	ω	۲۴۹۹۲.۵۵	۱۲۳۸۵.۴۰	۵۹۴۹۵.۱۰	۴۴۶۸۸.۴۹
	CPT	ω	۲۶۴۳۹.۷۳	۱۱۶۶۳.۶۲	۷۲۸۷۹.۹۰	۴۶۶۵۰.۲۰
الاستیک	FE	ω	۱۶۹۹۵.۰۰	۸۶۴۴.۰۰	۴۱۴۰۸.۰۰	۳۰۷۸۲.۰۰
	FSDT	ω	۱۸۴۱۸.۴۷	۹۱۲۷.۵۲	۴۳۸۴۵.۴۳	۳۲۹۳۳.۵۷
	CPT	ω	۱۹۳۵۰.۳۹	۹۱۱۳.۶۸	۵۳۴۹۴.۱۷	۳۵۱۳۴.۱۹

در جدول (۵-۱۰)، تغییرات فرکانس طبیعی با مدول الاستیسیتهی E_0 ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای مقادیر بزرگ E_0 ، یک افزایش ناگهانی در فرکانس طبیعی رخ می‌دهد؛ در حالی که در مقادیر کوچک، تغییرات فرکانس قابل توجه نیست. همچنین مدول الاستیسیتهی E_0 بر فرکانس بی‌بعد تأثیر ندارد.

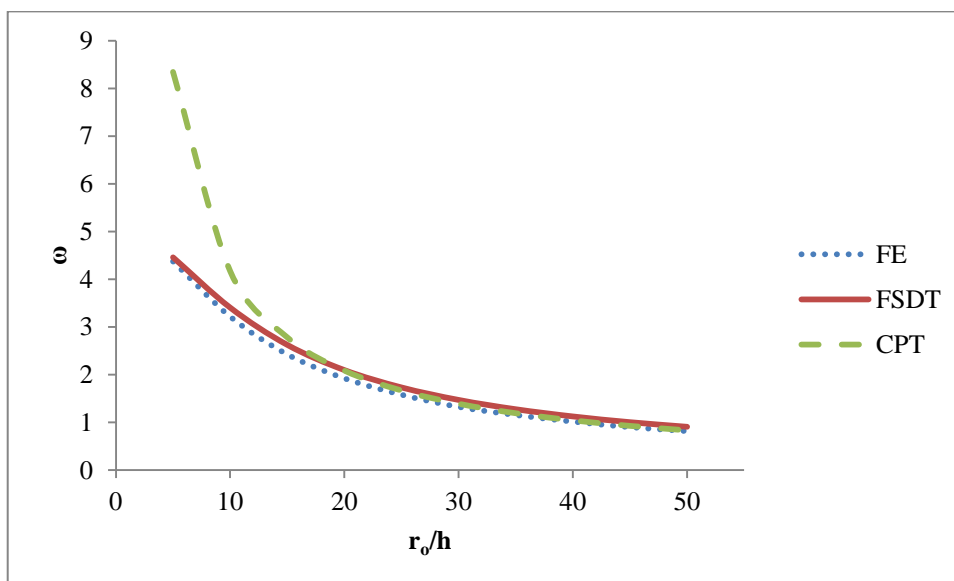
جدول (۵-۱۰) فرکانس‌های طبیعی بر حسب هرتز ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_o/h = 10$ و $r_i/r_o = 0.3$ و پارامترهای مختلف مدول الاستیسیتهی E_0 ، $E_0 = 2.4462 \times 10^9$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
مدول ω	۲.۴۹	۷.۹۰	۲۴.۹۹	۷۹.۰۳	۲۴۹.۹۱	۷۹۰.۳۰	۲۴۹۹.۱۴	۷۹۰۲.۹۷	۲۴۹۹۱.۳۸	۷۹۰۳۰.۶۷

شکل (۵-۱) و (۵-۲) به ترتیب، اثر نسبت شعاع خارجی به ضخامت بر فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم ورق حلقوی گیردار-گیردار را بیان می‌کنند. با توجه به این نمودارها، با افزایش نسبت r_o/h ، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق کاهش می‌یابند و شیب این تغییر در مد دوم بیشتر می‌شود. در نسبت‌های زیاد، مقادیر فرکانس‌های تئوری برشی، کلاسیک و المان محدود در هر دو مد تقریباً یکسان است، اما در نسبت‌های کم، تئوری کلاسیک فرکانس‌ها را بیشتر پیش‌بینی می‌کند. همچنین شیب نمودار برای مد دوم تئوری کلاسیک در مقایسه با تئوری برشی مقدار بیشتری است. این اختلاف در نسبت‌های کم می‌تواند به دلیل در نظر نگرفتن اثر برش در تئوری کلاسیک باشد. همچنین نتایج تئوری برشی با المان محدود، دارای دقت مناسبی می‌باشد.

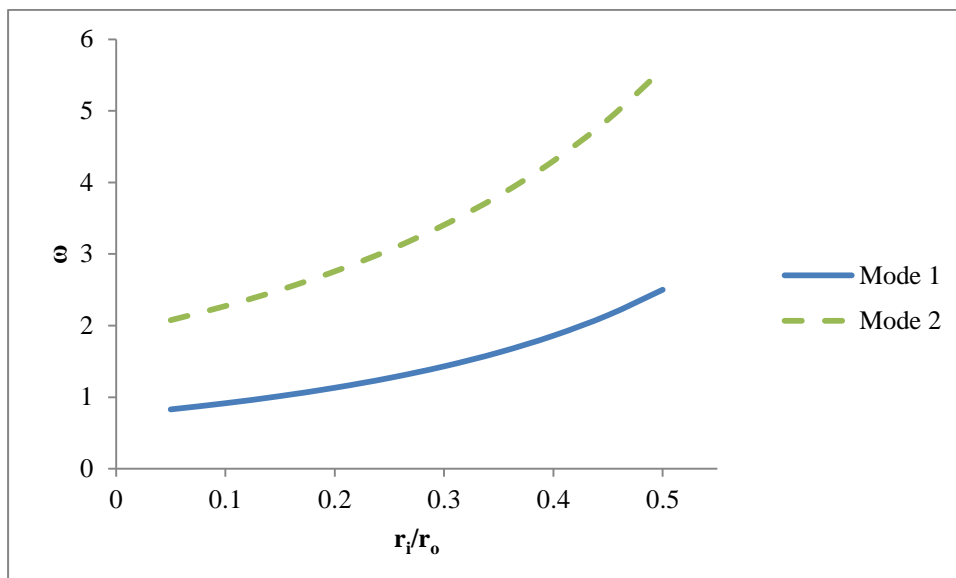


شکل (۱-۵) اثر r_0/h بر فرکانس طبیعی بی‌بعد اول برای ورق حلقوی گیردار-گیردار



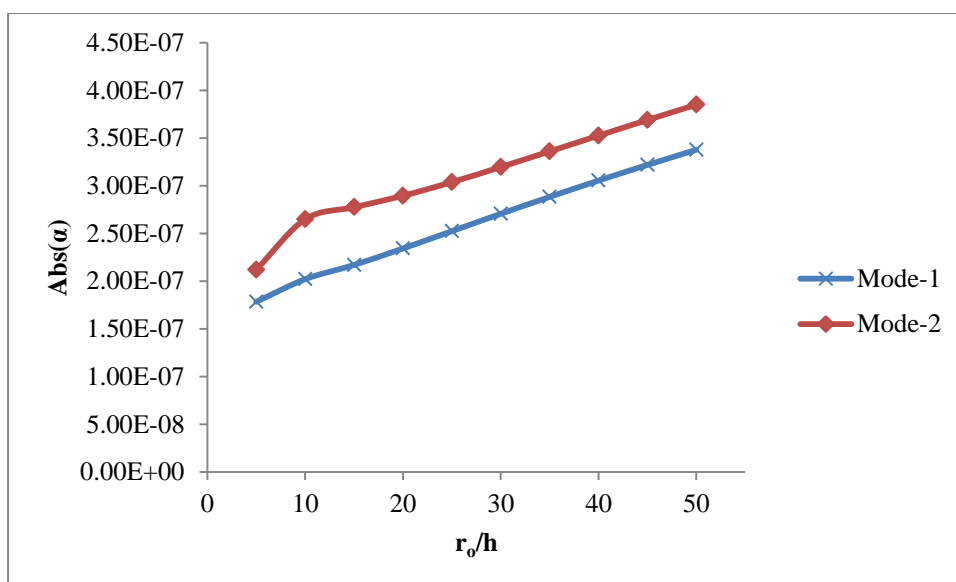
شکل (۲-۵) اثر r_0/h بر فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم برای ورق حلقوی گیردار-گیردار

شکل (۳-۵) اثر نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق حلقوی گیردار-گیردار را نشان می‌دهد. با افزایش شعاع داخلی، فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق افزایش یافته و شیب این تغییر در مد دوم بیشتر است.



شکل (۳-۵) اثر نسبت r_i/r_o بر فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ورق حلقوی گیردار-گیردار

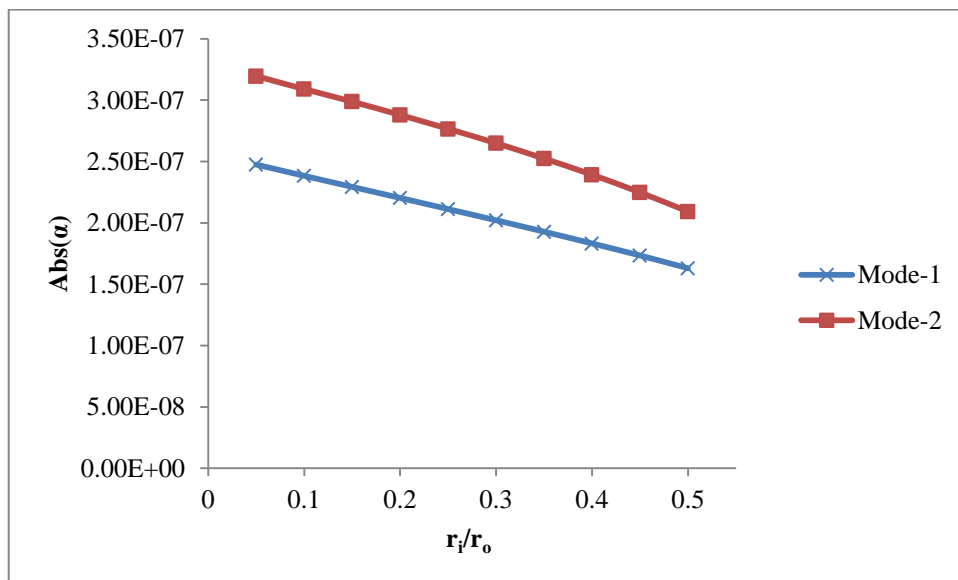
در شکل (۴-۵) اثر نسبت شعاع خارجی به ضخامت بر قدر مطلق میرایی ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت r_o/h قدر مطلق میرایی افزایش می‌یابد. قدر مطلق میرایی در مد دوم بیشتر از مد اول می‌باشد. افزایش قدر مطلق میرایی برای مد اول و دوم تقریباً یکسان است.



شکل (۴-۵) اثر r_o/h بر قدر مطلق میرایی برای ورق حلقوی گیردار-گیردار

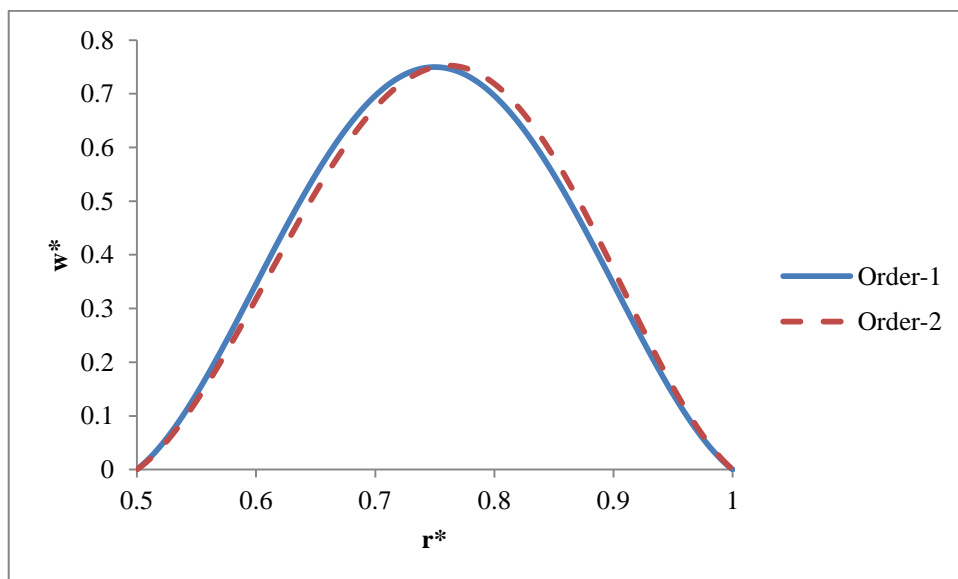
شکل (۵-۵) اثر نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی بر قدر مطلق میرایی ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت r_i/r_o قدر مطلق میرایی کاهش می‌یابد. شیب این تغییر در مد

دوم کمی بیشتر از مد اول می‌باشد.

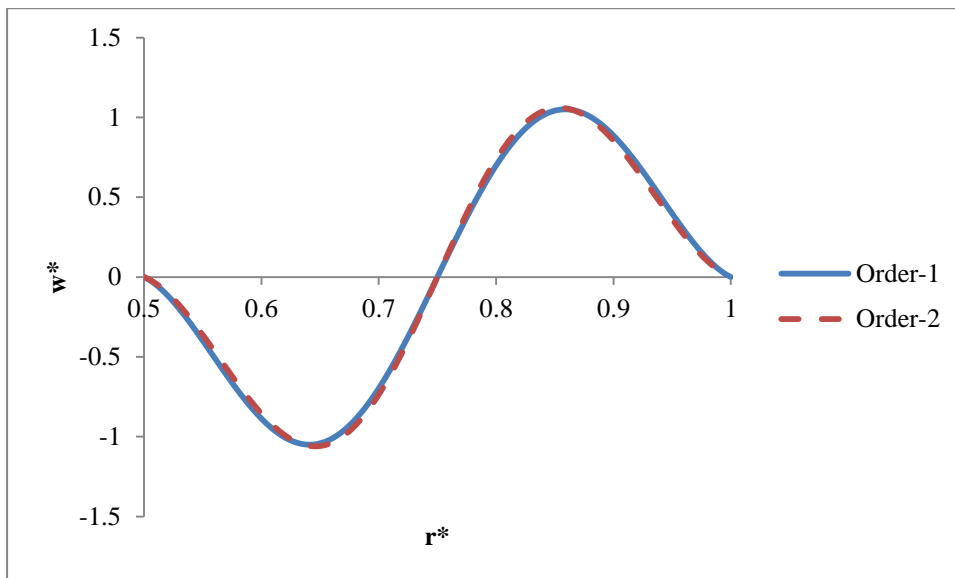


شکل (۵-۵) اثر r_i/r_o بر قدر مطلق میرایی برای ورق حلقوی گیردار-گیردار

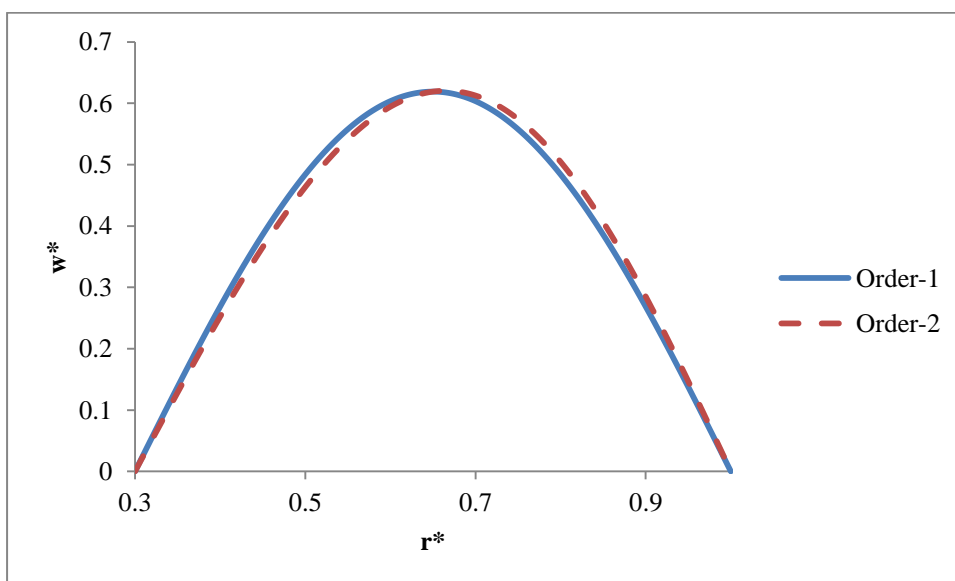
در شکل (۶-۵) و (۷-۵) به ترتیب، شکل مدهای اول و دوم برای ورق حلقوی گیردار-گیردار و در شکل (۸-۵) و (۹-۵) به ترتیب، شکل مدهای اول و دوم برای ورق حلقوی ساده-ساده با در نظر گرفتن حل معادلات مرتبه‌ی اول و دوم ε ارائه شده است.



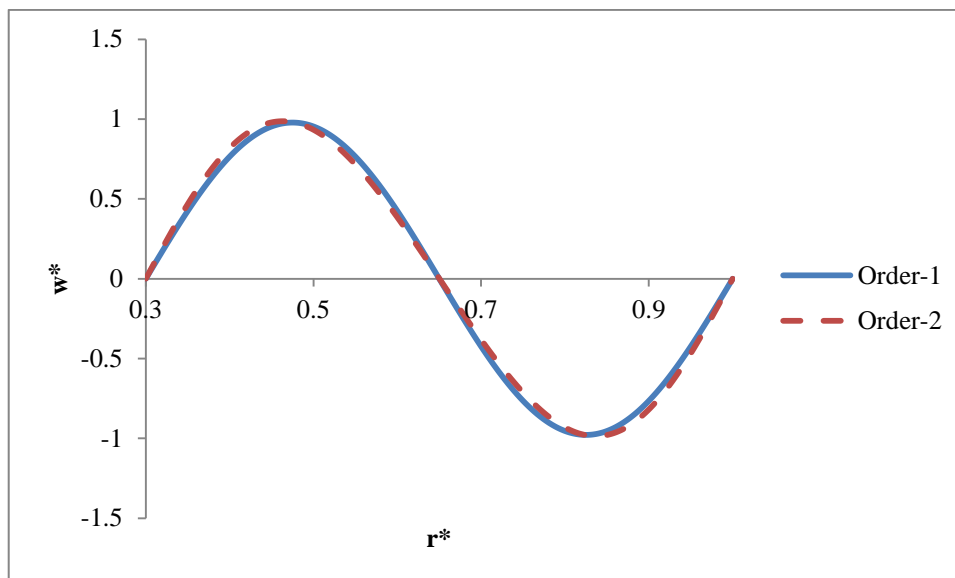
شکل (۶-۵) شکل مد اول برای ورق حلقوی گیردار-گیردار



شکل (۷-۵) شکل مد دوم برای ورق حلقوی گیردار-گیردار



شکل (۸-۵) شکل مد اول برای ورق حلقوی ساده-ساده



شکل (۹-۵) شکل مد دوم برای ورق حلقوی ساده-ساده

۵-۳- پاسخ بار دینامیکی

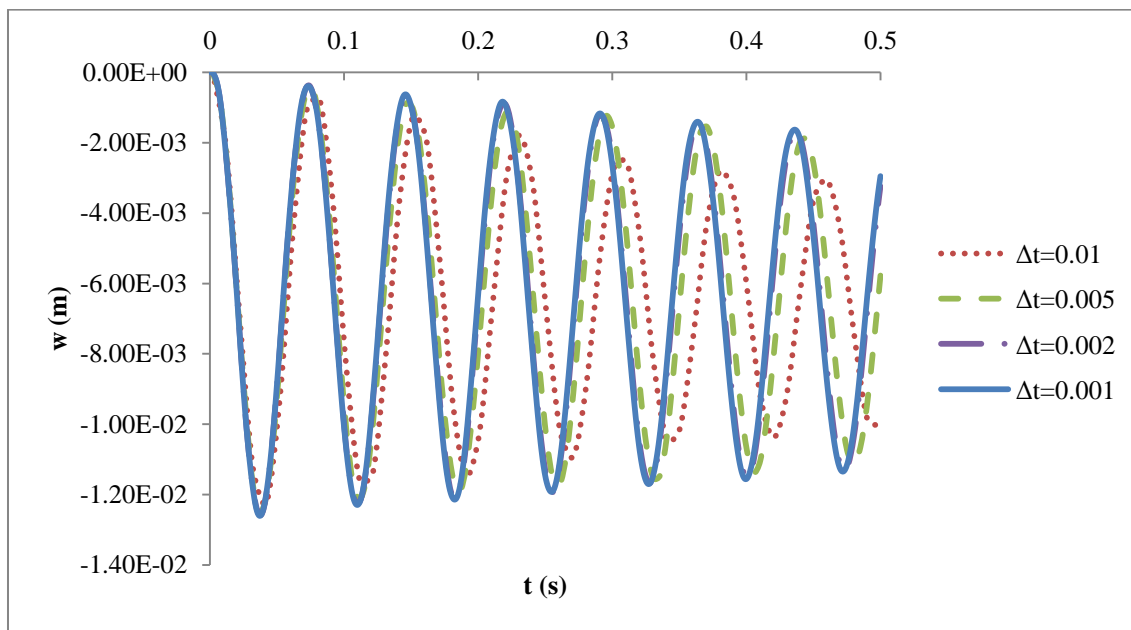
در این بخش به بررسی پاسخ ورق به بار عرضی تابع زمان پرداخته می‌شود. بار عرضی تعریف شده، یک بار فشاری گسترده به مقدار ۴۰۰۰ پاسکال است که به مدت یک ثانیه به ورق وارد می‌شود. در تحلیل پاسخ مشخصات هندسی و خواص مکانیکی ورق به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

جدول (۱۱-۵) مشخصات هندسی و مکانیکی ورق

$r_o = 0.15$	شعاع خارجی (m)
$r_i = 0.045$	شعاع داخلی (m)
$h = 0.015$	ضخامت (m)
$E_0 = 9.8e5, E_1 = 2.45e7$	مدول‌های ویسکوالاستیک (Pa)
$\mu = 2.744e5$	ضریب ویسکوالاستیک (Pa.s)
$\nu = 0.3$	ضریب پواسون
$\rho = 7800$	چگالی (Kg/m^3)

شکل (۱۰-۵)، پاسخ عرضی ورق به روش عددی به‌ازای گام‌های زمانی مختلف را نشان می‌دهد. در

این تحلیل از المان Plane182 استفاده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، به‌ازای گام زمانی ۰.۰۰۲ ثانیه تغییر قابل ملاحظه‌ای در نتایج ایجاد نمی‌شود، از این‌رو گام زمانی ۰.۰۰۲ به‌عنوان گام زمانی بهینه استفاده شده است.



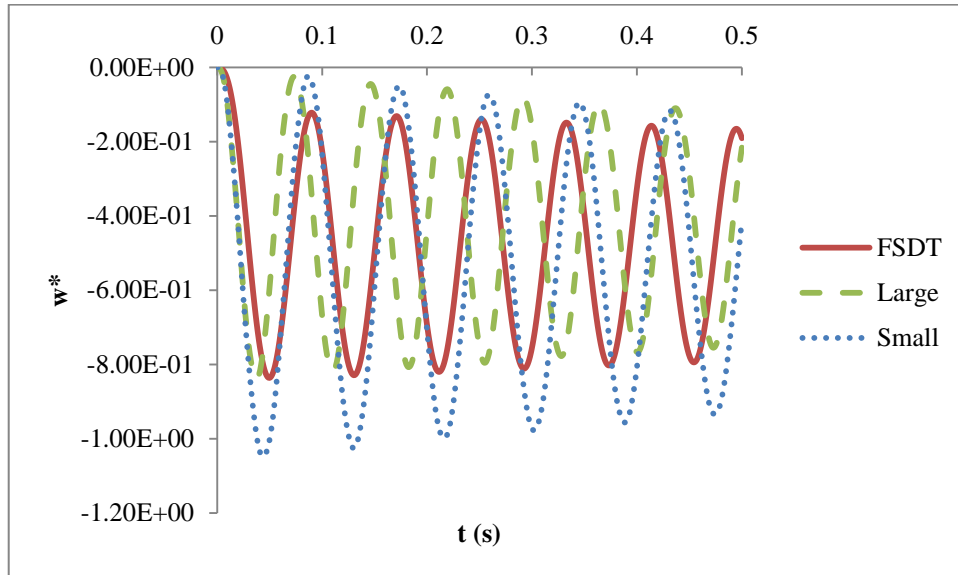
شکل (۱۰-۵) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ به‌ازای گام‌های زمانی مختلف

شکل (۱۱-۵)، پاسخ عرضی در وسط شعاع داخلی و شعاع خارجی $(r=0.0975 \text{ m})$ با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و حل عددی در دو حالت خیز کوتاه^۱ و خیز زیاد^۲ را نشان می‌دهد. به‌منظور مقایسه‌ی بهتر نتایج، ۰.۵ ثانیه از زمان بارگذاری نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، مقدار دامنه‌ی نوسانات در حل تئوری برشی نسبت به حل خیز کوتاه به حل خیز زیاد انسیس نزدیک‌تر است. هم‌چنین فرکانس غیرخطی انسیس تابع دامنه نیرو است، به‌دلیل اینکه، نیروی فشاری در حالت خیز زیاد عمود بر المان باقی می‌ماند [60]. این مسأله در حل تحلیلی صرف نظر شده است. حل عددی، خیز را بیشتر از حل برشی نشان می‌دهد. شکل (۱۲-۵)، پاسخ عرضی در مرکز شعاع داخلی و خارجی با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و حل عددی در دو حالت خیز کوتاه و

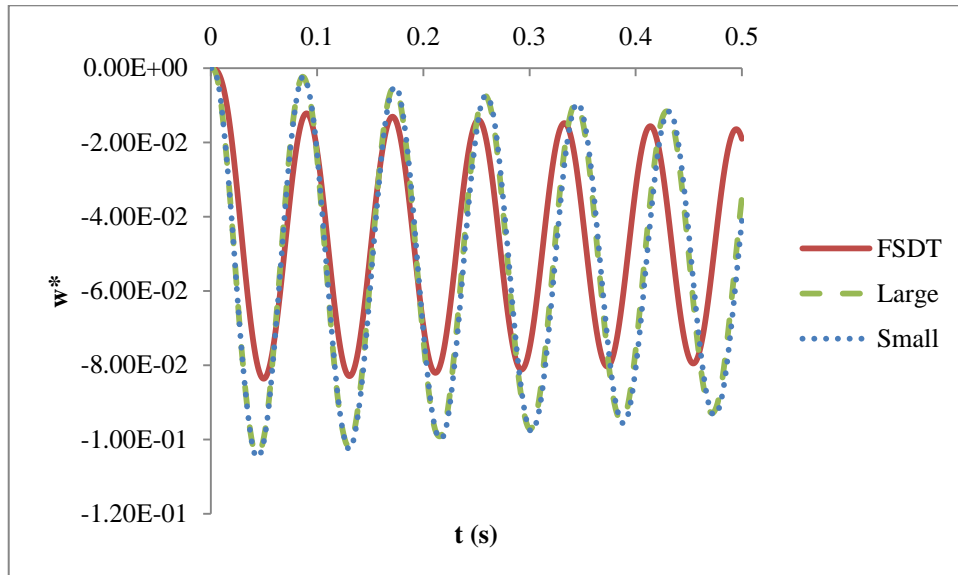
¹ Small deflection

² Large deflection

خیز زیاد با بار فشاری ۴۰۰ پاسکال را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این حالت، حل خیز کوتاه با خیز زیاد یکسان می‌باشد.

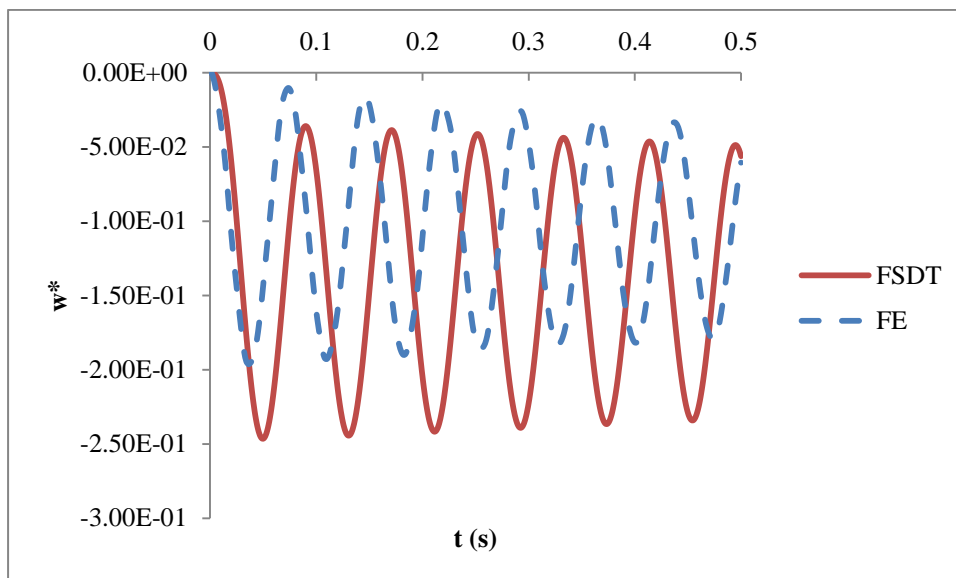


شکل (۱۱-۵) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ به‌ازای بار ۴۰۰ پاسکال



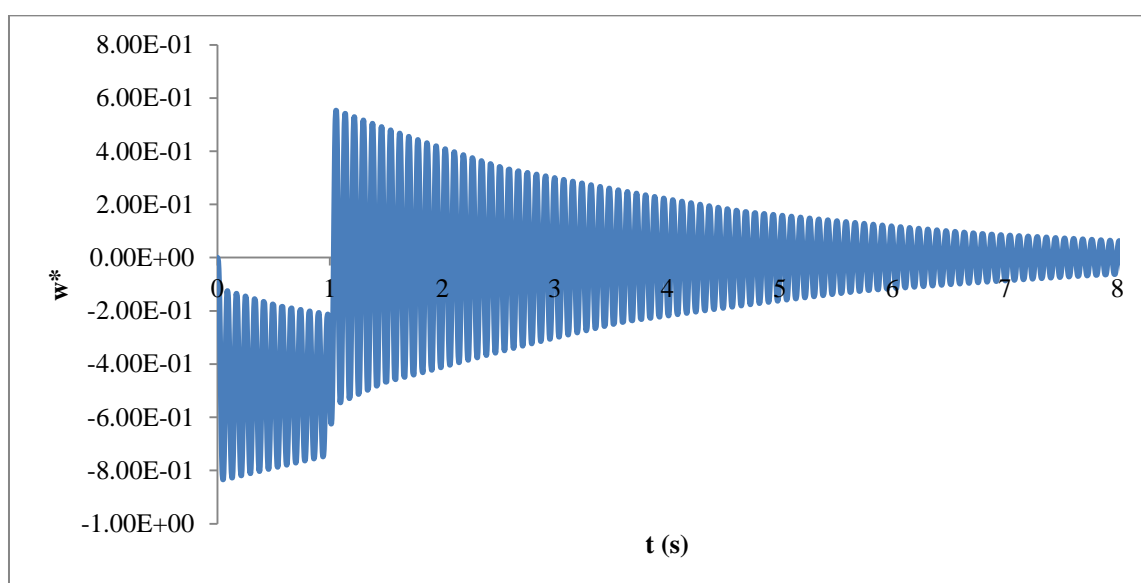
شکل (۱۲-۵) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ به‌ازای بار ۴۰ پاسکال

شکل (۱۳-۵) پاسخ عرضی در نزدیک لبه‌ی خارجی $(r=0.14 \text{ m})$ با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول و حل عددی را نشان می‌دهد.

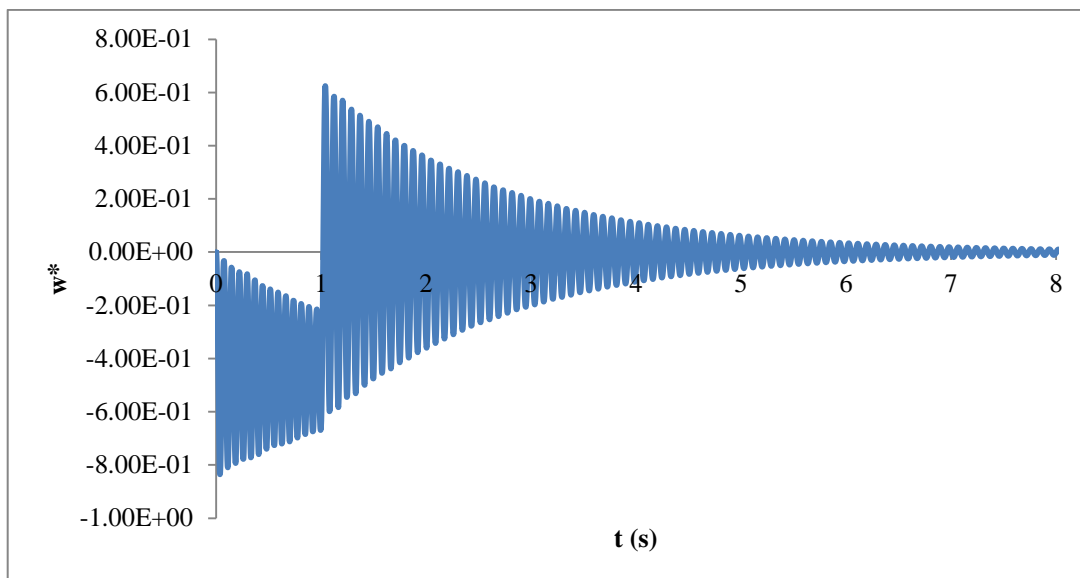


شکل (۱۳-۵) پاسخ عرضی ورق در ($r=0.14 \text{ m}$)

شکل (۱۴-۵) و (۱۵-۵) پاسخ عرضی ورق در ($r=0.0975 \text{ m}$) به ترتیب با حل تحلیلی تئوری برشی مرتبه اول و حل عددی به مدت ۸ ثانیه را نشان می‌دهند. به دلیل محدودیت سخت‌افزاری برای انجام محاسبات عددی، در اینجا مقدار گام زمانی 0.005 ثانیه در نظر گرفته شده است. در زمان اعمال بار، ورق حول خیز استاتیکی خود نوسان کرده و پس از حذف بار، خیز نوسانی ورق حول صفر ادامه می‌یابد.

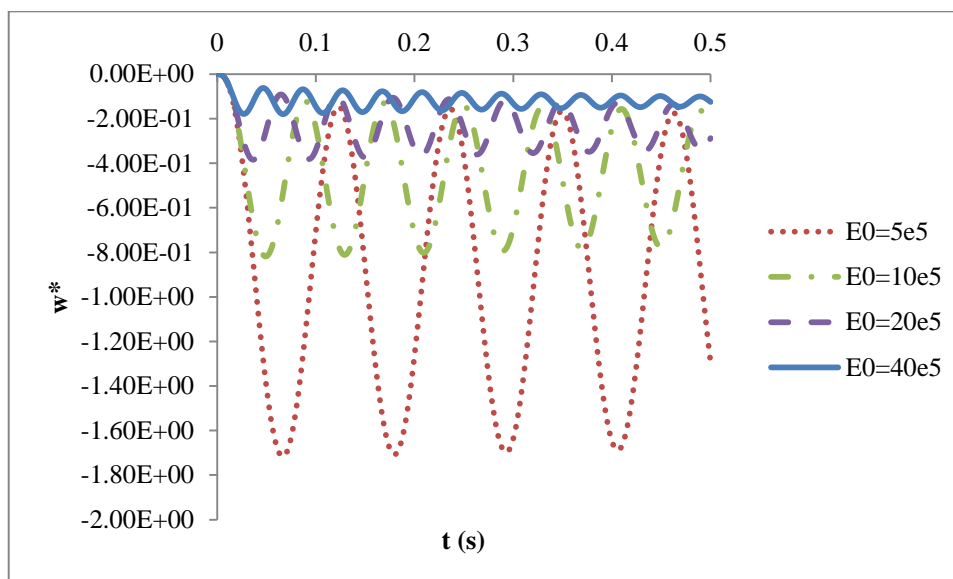


شکل (۱۴-۵) پاسخ عرضی ورق در ($r=0.0975 \text{ m}$)، تئوری برشی مرتبه اول



شکل (۱۵-۵) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ ، حل عددی

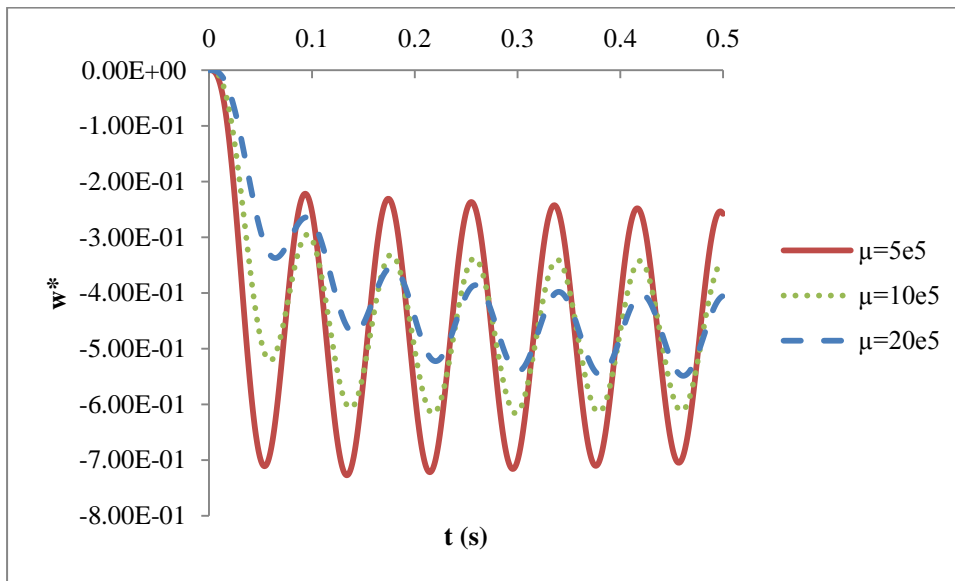
شکل (۱۶-۵) اثر مدول E_0 را بر پاسخ عرضی ورق نشان می‌دهد. با افزایش E_0 خیز عرضی ورق و همچنین مقدار متوسط، یعنی خیز استاتیکی به شدت کاهش یافته و فرکانس پاسخ افزایش می‌یابد.



شکل (۱۶-۵) اثر مدول E_0 بر پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$

شکل (۱۷-۵) اثر ضریب ویسکوزیته را بر پاسخ عرضی ورق نشان می‌دهد. با افزایش مقدار ضریب ویسکوزیته، خیز نوسانات کاهش یافته، اما مقدار متوسط ثابت باقی می‌ماند. همچنین فرکانس

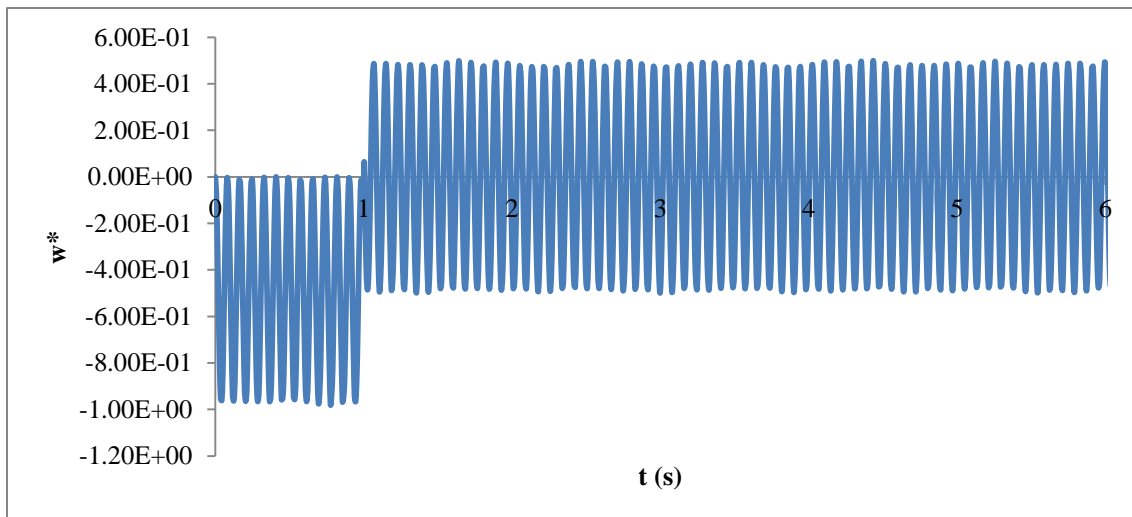
نوسانات ثابت باقی می ماند.



شکل (۱۷-۵) اثر ضریب ویسکوزیته (μ) بر پاسخ عرضی در ($r=0.0975 \text{ m}$)

پاسخ عرضی ورق الاستیک با قرار دادن $\tau \rightarrow 0$ برای تئوری برشی به دست می آید. این نتیجه در

شکل (۱۸-۵) ارائه شده است.



شکل (۱۸-۵) پاسخ عرضی ورق الاستیک بر اساس تئوری برشی مرتبه اول در ($r=0.0975 \text{ m}$)

۴-۵- جمع بندی

در این فصل به بررسی نتایج حاصل از روش های ارائه شده در فصل های سوم و چهارم پرداخته شد.

نتایج فرکانس بی‌بعد، میرایی، نسبت فرکانس غیرخطی به خطی و همچنین تأثیر پارامترهای مختلف بر روی آن‌ها بررسی شد. در نهایت پاسخ دینامیکی سازه تعیین شد. در نتایج مربوط به تحلیل فرکانسی، حل تحلیلی تئوری برشی مرتبه اول با حل تحلیلی تئوری کلاسیک و حل عددی مقایسه شد.

فصل هشتم نتیجہ گیری و پیشہ ادا

۶-۱- مقدمه

در این پایان نامه، ارتعاشات آزاد ورق مدور متقارن محوری ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد ارائه شد. در ابتدا، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی ورق استخراج شد. معادلات حاکم، معادلاتی با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان با ضرایب متغیر بوده که به کمک اصل همیلتون تعیین شده‌اند. همچنین معادله حاکم بر ورق مدور ویسکوالاستیک در حالت خطی و بر اساس تئوری کلاسیک نیز به دست آمد. در تعیین حل این معادلات، از تئوری اغتشاشات استفاده شد. در نهایت میرایی و فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق با شرایط مرزی مختلف تعیین شد. در قسمت دیگر به حل ریاضی ورق حلقوی دو سر ساده تحت بار دینامیکی عرضی پرداخته شد. پاسخ سیستم از روش مدهای نرمال و تئوری اغتشاشات به دست آمد. نتایج برای ورق الاستیک نیز ارائه شد. حل عددی مسأله به کمک نرم افزار انسیس ارائه شد.

۶-۲- نتیجه گیری

- با استفاده از تغییر متغیر مناسب، معادلات حرکت که دارای ضرایب متغیر بودند به معادلاتی با ضرایب ثابت (در مرتبه یک) تبدیل شدند.
- فرکانس‌ها در مرتبه دو وابسته به ε هستند. برای مشاهده وابستگی فرکانس به دامنه باید بسط را تا مرتبه سه نوشت.
- با استفاده از معادلات استخراج شده بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، امکان محاسبه‌ی فرکانس‌های شعاعی علاوه بر فرکانس‌های عرضی وجود دارد.
- فرکانس بی‌بعد الاستیک و ویسکوالاستیک در تئوری برشی یکسان می‌باشد.
- فرکانس بی‌بعد الاستیک و ویسکوالاستیک در تئوری کلاسیک تقریباً یکسان است، این تفاوت ناشی از روش حل انتخابی می‌باشد.
- مشخصات مکانیکی به جز ویسکوزیته و ضریب پواسون، تأثیری در فرکانس بی‌بعد ندارند.

- افزایش یا کاهش ویسکوزیته در بازه‌ای خاص، منجر به تغییر در فرکانس بی‌بعد می‌شود. در مقادیر زیاد ویسکوزیته و در مقادیر کم (با احتساب G معادل)، فرکانس بی‌بعد ویسکوالاستیک و الاستیک یکسان است.
- با افزایش نسبت شعاع خارجی به ضخامت، درصد اختلاف تئوری برشی با حل عددی به‌خصوص در مد دوم افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت شعاع خارجی به ضخامت، درصد اختلاف تئوری کلاسیک با حل عددی کاهش می‌یابد.
- در مقادیر کوچک نسبت شعاع خارجی به ضخامت، با افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی، در مقایسه با حل عددی، دقت تئوری برشی افزایش و دقت تئوری کلاسیک کاهش می‌یابد.
- در ورق حلقوی دو سر گیردار، تئوری تغییر شکل برشی در مد دوم به حل عددی نزدیک‌تر از مد اول است.
- با افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی، فرکانس بی‌بعد افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت شعاع خارجی به ضخامت، فرکانس بی‌بعد کاهش می‌یابد.
- با افزایش نسبت شعاع خارجی به ضخامت، قدر مطلق میرایی افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی قدر مطلق میرایی کاهش می‌یابد.
- نسبت فرکانس بی‌بعد غیرخطی به خطی تا مرتبه دوم، وابسته به ε است. با توجه به کوچک بودن ε ، این نسبت در بیشتر موارد ثابت است.
- مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ورق دو سر ساده کوچک‌تر از ورق دو سر گیردار می‌باشد که می‌تواند به دلیل کاهش سفتی ورق باشد.
- در ورق دو سر ساده نتایج با حل المان محدود مطابقت بیشتری نسبت به ورق دو سر گیردار دارد.
- قدر مطلق میرایی در ورق دو سر ساده کوچک‌تر از ورق دو سر گیردار می‌باشد.

- افزایش نسبت شعاع خارجی به ضخامت برای نسبت ثابت شعاع داخلی به خارجی، تأثیر زیادی بر روی فرکانس شعاعی بی‌بعد ندارد ولی قدر مطلق میرایی افزایش می‌یابد.
- افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی برای نسبت ثابت شعاع خارجی به ضخامت، باعث افزایش فرکانس شعاعی بی‌بعد می‌شود، همچنین قدر مطلق میرایی کاهش می‌یابد.
- در بازه‌ای محدود، با افزایش ویسکوزیته، قدر مطلق میرایی سیستم افزایش می‌یابد، اما با بیشتر افزایش یافتن مقدار آن، قدر مطلق میرایی سیستم کاهش می‌یابد.
- برای مقادیر بزرگ E_0 ، یک افزایش ناگهانی در فرکانس طبیعی رخ می‌دهد؛ در حالی که در مقادیر کوچک، تغییرات فرکانس قابل توجه نیست.
- حل عددی، مقدار پاسخ عرضی را بیش‌تر از تئوری برشی پیش‌بینی می‌کند.
- افزایش مدول E_0 ، مقدار دامنه‌ی نوسانات و مقدار متوسط را کاهش می‌دهد.
- افزایش ضریب ویسکوزیته، مقدار خیز نوسانات را کاهش، اما مقدار متوسط را تغییر نمی‌دهد.

۳-۶- پیشنهادها

جهت انجام مطالعه‌ی جامع‌تر در موضوع، موارد زیر قابل بررسی هستند.

- استفاده از تئوری کلاسیک برای ورق ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد؛
- استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه بالاتر؛
- در نظر گرفتن ماده به صورت FG؛
- بررسی ورق ضخامت متغیر؛
- بررسی وابستگی فرکانس به دامنه؛
- بررسی پدیده‌ی پرش و رزونانس داخلی؛
- تحلیل ورق مدور ویسکوالاستیک به صورت چرخان؛
- تحلیل ورق مدور با هسته‌ی ویسکوالاستیک.

پوست الف

اصول ویسکوالا استیسیہ می خطمی

الف-۱- مقدمه

به طور معمول با انجام تست‌های ساده‌ی آزمایشگاهی می‌توان ویژگی‌های مواد را که مرتبط با شرایط واقعی کار آن‌ها می‌باشد، مشخص کرد. تعیین خصوصیات مکانیکی مواد ویسکوالاستیک مشابه مواد الاستیک، اغلب شامل تست کشش محوری می‌باشد. با این تفاوت که باید جهت قابلیت مشاهده وابستگی زمانی پاسخ مواد، اصلاحاتی صورت گیرد. اگرچه تست‌های کشش ویسکوالاستیک زیادی وجود دارد، اما معمولاً فقط سه حالت خزش، رهایش تنش و پاسخ دینامیکی به بارگذاری سینوسی مورد استفاده قرار می‌گیرند [6].

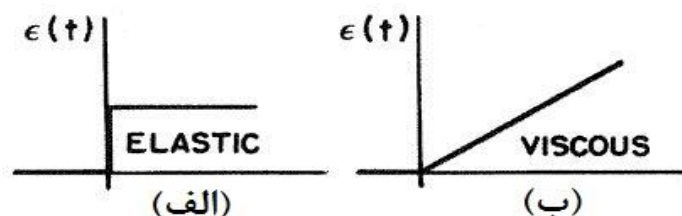
الف-۱-۱- خزش

تست خزش شامل اندازه‌گیری کرنش وابسته به زمان $\epsilon(t) = \delta(t)/L_0$ ، ناشی از تنش محوری ثابت $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ می‌باشد. به عبارت دیگر، تنش σ را به صورت یک تابع پله با مقدار اولیه σ_0 فرض کنید که به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) \quad (\text{الف-۱})$$

$H(t)$ ، تابع پله‌ی واحد هویساید^۱ است. در این حالت، اگر رابطه‌ی تنش-کرنش خطی باشد، با a برابر شدن تنش، کرنش نیز a برابر می‌شود [6].

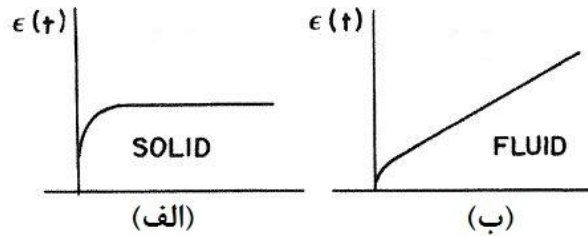
شکل (الف-۱) پاسخ مواد الاستیک ایده‌آل (الف) و مایع ایده‌آل (ب) را به تست خزش نشان می‌دهد.



شکل (الف-۱) پاسخ الف- جامد الاستیک ایده‌آل، ب- مایع ایده‌آل به تست خزش [3]

¹ Heaviside

اما در واقعیت، کرنش در جامدات در مدت طولانی به یک مقدار حدی می‌رسد. کرنش در مایعات نیز تابعی از زمان می‌باشد (شکل (الف-۲)).



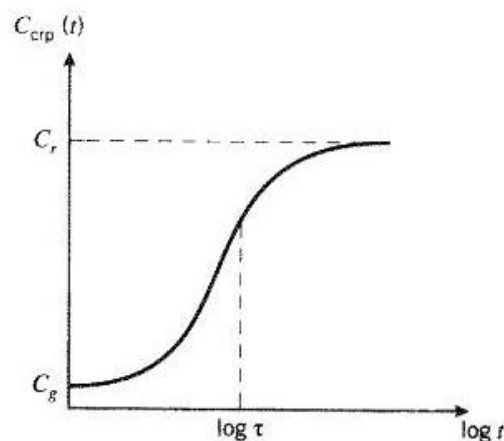
شکل (الف-۲) پاسخ الف- جامد الاستیک واقعی، ب- مایع واقعی به تست خزش [3]

نسبت کرنش به تنش کامپلینس^۱ C نامیده می‌شود. برای کرنش تابع زمان، که از تنش ثابت ناشی می‌شود، این نسبت را کامپلینس خزش می‌نامند و به صورت زیر نمایش می‌دهند [6].

$$C_{cp}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (\text{الف-۲})$$

در مواد ویسکوالاستیک خطی، کامپلینس خزش مستقل از سطح تنش می‌باشد [5].

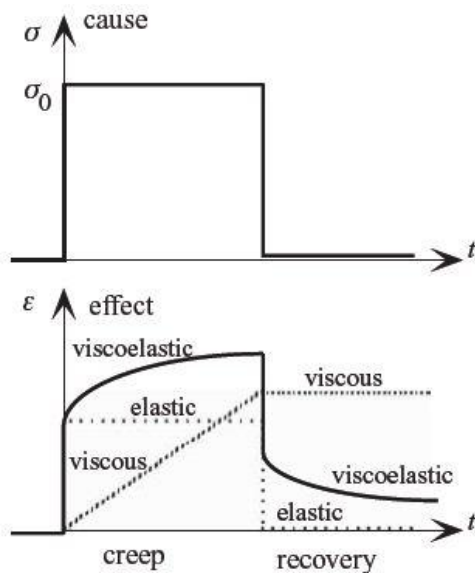
در شکل (الف-۳)، تابع کامپلینس خزش در مقابل لگاریتم زمان رسم شده است. نمودار از C_g (کامپلینس شیشه) شروع شده و در حالت تعادل به C_r (کامپلینس لاستیک) می‌رسد [6].



شکل (الف-۳) تابع کامپلینس خزشی [6]

^۱ Compliance

در نمودار فوق نقطه‌ای که با $\log(\tau)$ نشان داده شده است، نقطه‌ی عطف نمودار می‌باشد. τ زمان رهایش در فرآیند خزش است.



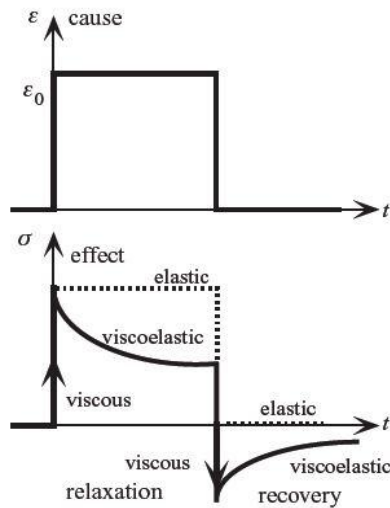
شکل (الف-۴) خزش و بازگشت [5]

همان‌طور که در شکل (الف-۴) نمایش داده شده است، با برداشتن بار، کرنش به تدریج کاهش می‌یابد و به یک مقدار حدی می‌رسد که به آن پدیده‌ی بازگشت^۱ گفته می‌شود.

الف-۱-۲- رهایش تنش

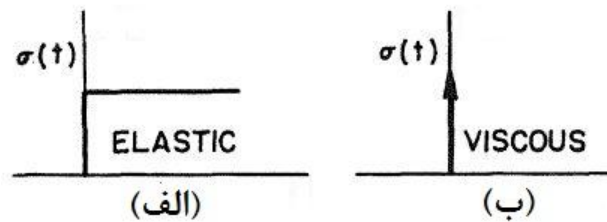
رهایش تنش، به معنای کاهش تدریجی تنش برای ماده‌ای تحت کرنش ثابت می‌باشد، اگر کرنش را به صورت یک تابع پله‌ای واحد به صورت $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ فرض کنیم، تنش در $\sigma(t)$ در مواد ویسکوالاستیک به صورت نشان داده شده در شکل (الف-۵) کاهش می‌یابد.

¹ Recovery



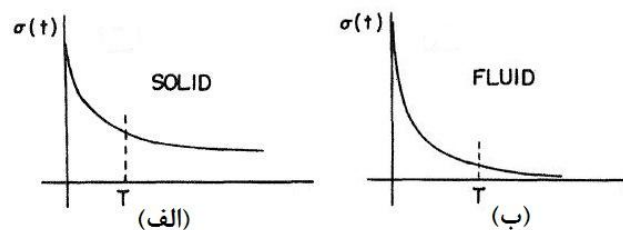
شکل (۷الف-۵) رهایش تنش و بازگشت [5]

شکل (الف-۶) پاسخ مواد جامد الاستیک ایده‌آل (الف) و مایع ایده‌آل (ب) را به تست رهایش نشان می‌دهد [3].



شکل (الف-۶) پاسخ جامد الاستیک ایده‌آل، ب- مایع ایده‌آل به تست رهایش [3]

اما در واقعیت برای جامدات و مایعات چنین رفتاری مشاهده نمی‌شود. تنش در جامدات پس از مدت نسبتاً کوتاهی کاهش یافته و به یک مقدار حدی می‌رسد. تنش در مایعات نیز پس از مدت کوتاهی به صفر می‌رسد. (شکل الف-۷) این رفتارها را نشان می‌دهد.



شکل (الف-۷) پاسخ جامد الاستیک واقعی، ب- مایع واقعی به تست رهایش [3]

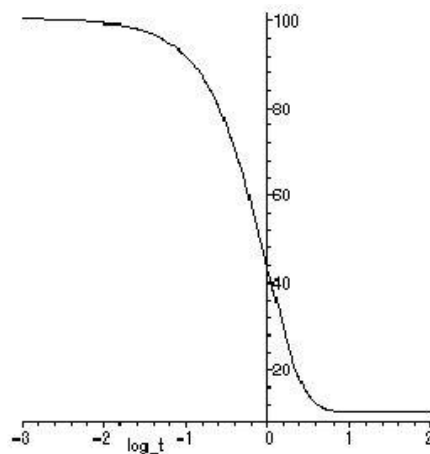
بنابراین همان طور که قبلاً نیز گفته شده است، تعیین جامد یا مایع بودن ماده، با توجه به زمان رهايش (زمان لازم برای اتمام یا ثبات تنش) انجام می شود [3].

نسبت تنش به کرنش ε_0 ، مدول رهايش نامیده شده و به صورت زیر نمایش داده می شود [6].

$$E_{rel}(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad \text{(الف-۳)}$$

در مواد خطی مدول رهايش مستقل از سطح کرنش بوده و $E_{rel}(t)$ تنها تابعی از زمان می باشد. خزش و رهايش می توانند در تغییر شکل های برشی و یا بالک رخ دهند. تابع رهايش برای تنش برشی با $G(t)$ نشان داده می شود. برای تغییر شکل بالک، مدول الاستیک بالک B (یا K) نامیده می شود. تابع رهايش متناظر در بالک همانند مدول الاستیک بالک، $B(t)$ نامیده می شود. اما در اینجا تنش لزوماً از نوع تنش هیدرواستاتیکی می باشد. فرق مشابهی نیز در کامپلینس های خزش وجود دارد. $C_g(t)$ برای خزش در برش، $C_E(t)$ برای خزش در کشش و $C_B(t)$ برای خزش در تغییر شکل بالک تعریف می شود [5].

شکل (الف-۸) مدول رهايش را در مقابل لگاریتم زمان نشان می دهد. در این شکل $E_g = 100$ ، $E_r = 10$ و $\tau = 1$ می باشند [6].

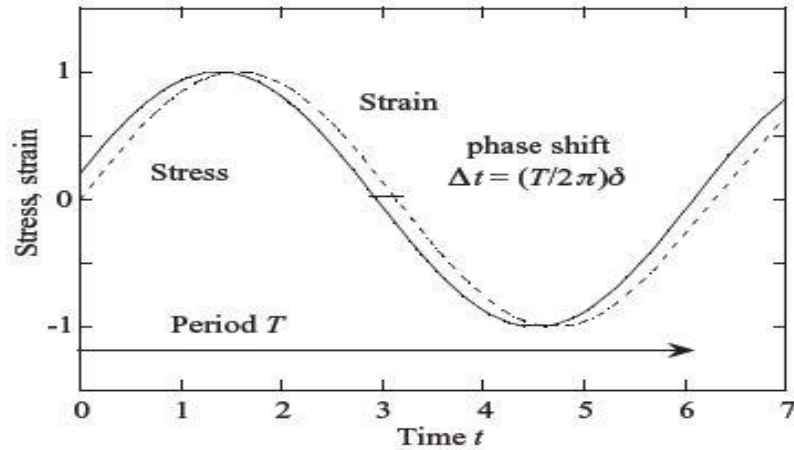


شکل (الف-۸) تابع مدول رهايش تنش [6]

خزش و رهایش هر دو مظهر یک مکانیسم مولکولی اند و انتظار می‌رود $E_{rel}(t)$ و $C_{cp}(t)$ به هم مرتبط باشند. اگرچه در حالت کلی $E_r = \frac{1}{C_r}$ و $E_g = \frac{1}{C_g}$ ، اما نمی‌توان از آن رابطه‌ی $E_{rel}(t) = \frac{1}{C_{cp}(t)}$ را نتیجه گرفت. به‌ویژه حرکت به‌سوی حالت تعادل در پاسخ رهایش سریع‌تر از خزش می‌باشد [6].

الف-۱-۳- پاسخ دینامیکی به بارگذاری سینوسی

تست‌های خزش و رهایش تنش برای مطالعه‌ی پاسخ مواد در زمان‌های طولانی (از چند دقیقه تا چند روز) مناسب می‌باشند، اما برای زمان‌های کوتاه‌تر (ثانیه یا کمتر)، پاسخ دقیقی ارائه نمی‌دهند. تست دینامیکی که در آن تنش (یا کرنش) حاصله از کرنش (یا تنش) سینوسی اندازه‌گیری می‌شود، اغلب برای یافتن پاسخ پلیمرها در بازه‌های کوتاه مدت مناسب می‌باشد. هنگامی که یک ماده‌ی ویسکوالاستیک تحت تنش متغیر سینوسی قرار می‌گیرد، سرانجام به یک حالت پایا می‌رسد که در آن کرنش حاصله نیز تابعی سینوسی، با همان فرکانس زاویه‌ای، اما با تأخیر فاز به اندازه‌ی زاویه α ، می‌باشد. این تأخیر فاز مشابه تأخیر کرنش مشاهده شده در آزمایش خزش می‌باشد. همواره کرنش با فاز α از تنش عقب می‌ماند، حتی اگر کرنش نسبت به تنش متغیر کنترل شده باشد (شکل (الف-۹)). در بارگذاری سیکلی پدیده‌ی هیسترسیس رخ می‌دهد که منجر به اتلاف انرژی می‌شود. تفاوت رفتار ماده در حالت استاتیک و دینامیک نیز با این تست مشخص می‌شود [6].



شکل (الف-۹) بارگذاری دینامیکی [5]

الف-۲- اصل جمع آثار بولتزمن

در یک سیستم ویسکوالاستیک که تحت بار قرار گرفته است، به علت تغییرات آنتروپی، پس از توقف اعمال بار، پاسخ سیستم متوقف نمی‌شود. یعنی تغییر شکل چنین ماده‌ای فقط به تنش اعمالی واقعی وابسته نمی‌باشد، بلکه به سابقه‌ی تنش تحمل شده توسط آن نیز مرتبط می‌باشد [3].

در حالت تنش ثابت، افزایش کرنش و در حالت کرنش ثابت، کاهش تنش مشاهده می‌شود. حال اگر تنش یا کرنش دارای سابقه‌ی زمانی عمومی باشند و یا تنش و کرنش با هم تغییر کنند، پاسخ‌های مربوط به اغتشاشات خطی مختلف را می‌توان با هم جمع کرد. این روش به اصل جمع آثار بولتزمن معروف است. بولتزمن این اصل را به صورت زیر بیان می‌کند.

تنشی که در فاصله‌ی زمانی t در جسم ایجاد می‌شود، کاملاً به سابقه‌ی کرنش در فاصله‌ی $[0, t]$ بستگی دارد. همین مطلب برای کرنش نیز صادق است. بنابراین، پس از تقسیم سابقه‌ی بارگذاری به مجموعه‌ای از بارگذاری‌های پله‌ای و تعیین پاسخ برای هر بخش، برای به دست آوردن پاسخ کلی، تک تک پاسخ‌ها با هم جمع می‌شوند.

برای آزمایش رهایش، نمو تنش در زمان τ که $0 < \tau < t$ ، از نمو کرنش به صورت زیر به دست می‌آید.

$$d\sigma(\tau) = E(t - \tau)d\varepsilon(\tau) \quad (\text{الف-۴})$$

تنش در زمان t با جمع کردن نمونه‌های تنش زمان‌های قبلی، به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau)d\varepsilon(\tau) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{الف-۵})$$

در رابطه‌ی فوق E همان مدول رهایش است.

مشابه این مطلب برای کرنش نیز برقرار است. برای آزمایش خزش، نمو کرنش در زمان τ برابر است با:

$$d\varepsilon(\tau) = D(t - \tau)d\sigma(\tau) \quad (\text{الف-۶})$$

و کرنش در زمان t برابر است با:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t D(t - \tau)d\sigma(\tau) = \int_0^t D(t - \tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{الف-۷})$$

در رابطه‌ی فوق D کامپلینس خزش می‌باشد. بنابراین به کمک اصل فوق، اگر پاسخ سیستم به ورودی پله مشخص باشد، می‌توان پاسخ به هر ورودی دلخواه را نیز به دست آورد [5].

الف-۳- معرفی مدل‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک

الف-۳-۱- مدل ماکسول [3]

مدل ماکسول، شامل یک فنر و دمپر است که به صورت سری به یکدیگر متصل هستند.



شکل (الف-۱۰) مدل ماکسول [۷]

در این مدل، تنش در هر المان مشابه و برابر با تنش اعمالی می‌باشد، در حالی که کرنش کلی برابر با مجموع کرنش هر المان می‌باشد. رابطه‌ی کلی تنش و کرنش برای این مدل را می‌توان به صورت زیر

نوشت.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (\text{الف} - ۸)$$

که نرخ کرنش از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول، نرخ کرنش فنر، متناسب با مقدار تنش، هم-فاز و وابسته به نرخ تنش می‌باشد و بخش دوم، نرخ کرنش دمپر که فقط به مقدار لحظه‌ای تنش پاسخ می‌دهد. حال با استفاده از معادله‌ی (الف-۸) می‌توان پاسخ ماده را به تنش و کرنش پله‌ای ارزیابی کرد. به منظور حل این معادله، می‌توان آن را به صورت زیر به فضای لاپلاس منتقل نمود.

$$s\bar{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0) = \frac{1}{E}[s\bar{\sigma}(s) - \sigma(0)] + \frac{1}{\mu}\bar{\sigma}(s) \quad (\text{الف} - ۹)$$

حال با استفاده از این رابطه و بر اساس تست‌های خزش و رهایش، کامپلینس خزش و مدول رهایش برشی به صورت زیر تعیین می‌شوند.

برای محاسبه‌ی تابع کامپلینس خزش، پاسخ این مدل به تابع ورودی پله‌ای $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ با شرایط اولیه‌ی $\sigma(0) = \sigma_0$ و $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ به دست می‌آید.

$$\bar{\varepsilon}(s) = \frac{\varepsilon_0}{s} + \frac{\sigma_0}{\mu s^2} \quad (\text{الف} - ۱۰)$$

لاپلاس معکوس معادله‌ی فوق را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\mu} \right), \quad E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad (\text{الف} - ۱۱)$$

چون در لحظه‌ی صفر فقط فنر عکس‌العمل دارد و دمپر تأثیری ندارد، در نتیجه تابع کامپلینس خزش به صورت زیر به دست می‌آید.

$$C(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\mu} \right) \quad (\text{الف} - ۱۲)$$

پاسخ این مدل به کرنش ورودی پله‌ای $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ در فضای لاپلاس به صورت زیر است.

$$\bar{\sigma}(s) = \frac{\mu}{E + \mu s} \sigma(0) \quad \text{inverse} \rightarrow \sigma(t) = \sigma(0) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right), \quad \tau = \frac{\mu}{E} \quad (\text{الف-۱۳})$$

این معادله نشان می‌دهد که تنش به صورت نمایی و با مشخصه‌ی زمانی ثابت $\tau = \frac{\mu}{E}$ کاهش می‌یابد،

که τ ثابت و از خواص ماده می‌باشد و زمان رهاش است. بنابراین مدول رهاش به صورت زیر است.

$$E_{rel} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma(0)}{\varepsilon_0} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad (\text{الف-۱۴})$$

در مدل ماکسول دو کمبود مشاهده می‌شود:

(۱) تحت شرایط ثابت، $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ ، جریان نیوتنی مشهود است $(\sigma = E \frac{d\varepsilon}{dt})$. این موضوع با توجه

به رفتار پیچیده‌ی خزش برای ماده‌ی ویسکوالاستیک صحیح نمی‌باشد.

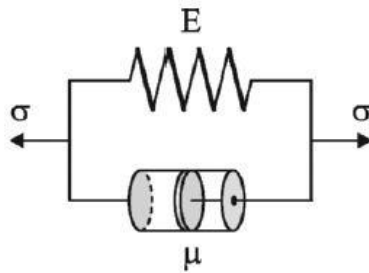
(۲) رفتار رهاش را نمی‌توان به طور معمول با یک ترم نمایی کاهش‌ی بیان کرد. زیرا لزوماً تنش در

زمان بی‌نهایت به صفر میل نمی‌کند.

الف-۳-۲-مدل کلویین-ویت [3]

مدلی دیگر با درجه پیچیدگی مشابه با مدل ماکسول، مدل کلویین-ویت می‌باشد، این مدل شامل

فتری الاستیک موازی با دمپری ویسکوز است.



شکل (الف-۱۱) مدل کلویین-ویت [7]

در این مدل برخلاف مدل ماکسول، تنش‌های فنر و دمپر با هم جمع می‌شوند و اما کرنش‌ها برای فنر و دمپر با هم برابرند. برخلاف مدل ماکسول، در مدل کلویین بر اثر اعمال تنش ناگهانی، به دلیل موازی بودن فنر با دمپر، کرنش ناگهانی در همان لحظه مشاهده نمی‌شود. در حالی که در مدل ماکسول به-دلیل آزاد بودن، به صورت لحظه‌ای می‌توانست کرنشی متناسب با تنش اعمال شده‌ی ناگهانی از خود بروز دهد. رابطه‌ی کلی تنش-کرنش در این مدل به صورت زیر است.

$$\sigma = E \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon} \quad (\text{الف- ۱۵})$$

که بخش اول تنش مربوط به فنر و بخش دوم تنشی متناسب با نرخ کرنش و مربوط به المان دمپر می‌باشد.

در آزمایش خزش برای بررسی پاسخ مدل به تنش ورودی پله‌ای، با انتقال معادله‌ی (الف-۱۵) به فضای لاپلاس با شرط اولیه‌ی $\varepsilon(0) = 0$ خواهیم داشت.

$$\frac{\sigma_0}{s} = E \bar{\varepsilon}(s) + \mu [s \bar{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0)] \rightarrow \bar{\varepsilon}(s) = \frac{\sigma_0}{s(E + \mu s)} \xrightarrow{\text{inverse}} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (\text{الف- ۱۶})$$

که $\tau = \frac{\mu}{E}$ زمان تأخیر^۱ است و بیان کننده‌ی شدت تغییرات در جایی است که تغییر شکل رخ می‌دهد. در آزمایش خزش، جایگزین کردن E با $\frac{1}{J}$ که J کامپلینس فنر است، مناسب‌تر است.

$$\varepsilon(t) = J \sigma_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (\text{الف- ۱۷})$$

بر اساس رابطه‌ی فوق، تابع کامپلینس خزش به صورت زیر به دست می‌آید.

$$J(t) = J \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (\text{الف- ۱۸})$$

با توجه به این که در کرنش ثابت دمپر عمل نمی‌کند، مدل کلویین نمی‌تواند رهایش تنش را تشریح

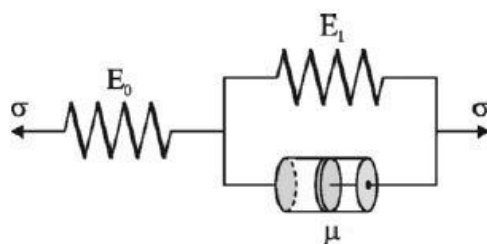
^۱ Retardation time

کند.

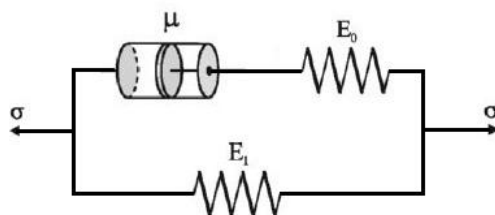
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \rightarrow \sigma = E \varepsilon_0 \quad (\text{الف-۱۹})$$

الف-۳-۳- جامد استاندارد خطی (مدل زنر) [3]

آنچه که به طور معمول جامد استاندارد سه المانی نامیده می‌شود، ترکیبی از المان کلویین-ویت به صورت سری با فنر (شکل الف-۱۲) و یا المان ماکسول موازی با فنر (شکل الف-۱۳) می‌باشد.



شکل (الف-۱۲) مدل جامد استاندارد خطی نوع اول [7]



شکل (الف-۱۳) مدل جامد استاندارد خطی نوع دوم [7]

یکی از ویژگی‌های بارز مدل جامد استاندارد خطی نوع اول، تقسیم‌بندی مشخص انواع کرنش در آن است. به طوری که کرنش الاستیک با المان الاستیک و کرنش ویسکوالاستیک با المان کلویین-ویت نشان داده می‌شود. در این مدل کرنش کل برابر با مجموع کرنش دو قسمت فنر و کلویین-ویت است.

معادله‌ی کلی تنش-کرنش برای این مدل به صورت زیر می‌باشد.

$$\left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \right) \sigma + \frac{\mu}{E_0 E_1} \dot{\sigma} = \varepsilon + \frac{\mu}{E_1} \dot{\varepsilon} \quad (\text{الف-۲۰})$$

پاسخ مدل جامد استاندارد خطی نوع اول به تنش ورودی پله‌ای $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ در فضای لاپلاس

به صورت رابطه‌ی (الف-۲۱) است.

$$\bar{\varepsilon}(s) = \frac{\varepsilon(0)}{s + \tau^{-1}} + \frac{\sigma_0}{\mu} \left(1 + \frac{E_1}{E_0} \right) \left(\frac{1}{s(s + \tau^{-1})} \right) \xrightarrow{\text{inverse}} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (\text{الف-۲۱})$$

که $\tau = \frac{\mu}{E_1}$ می‌باشد. بنابراین تابع کامپلینس خزش به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = J_g + J_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad J_g = \frac{1}{E_0}, \quad J_1 = \frac{1}{E_1} \quad (\text{الف-۲۲})$$

پاسخ مدل جامد استاندارد خطی نوع اول به کرنش ورودی پله‌ای با شرط اولیه‌ی $\sigma(0) = \sigma_0$ را به فضای لاپلاس منتقل کرده و در نهایت مدول رهائش را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{E_1}{1 + E_0 E_1} + \frac{E_0}{1 + E_0 E_1} \exp \left[-\frac{E_0}{\mu} \left(1 + \frac{E_1}{E_0} \right) t \right] \\ = \frac{E_0 E_1}{1 + E_0 E_1} + \frac{E_0^2}{E_0 + E_1} \exp \left[-\left(\frac{E_0 + E_1}{\mu} \right) t \right] \quad (\text{الف-۲۳})$$

برای دومین مدل جامد استاندارد خطی رابطه‌ی کلی تنش-کرنش به صورت زیر است.

$$\sigma + \frac{\mu}{E_0} \dot{\sigma} = E_1 \varepsilon + \frac{\mu}{E_0} (E_0 + E_1) \dot{\varepsilon} \quad (\text{الف-۲۴})$$

بررسی پاسخ این مدل به تنش ورودی پله‌ای (آزمایش خزش):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0 + E_1} \left[1 + \frac{E_0}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] \quad (\text{الف-۲۵})$$

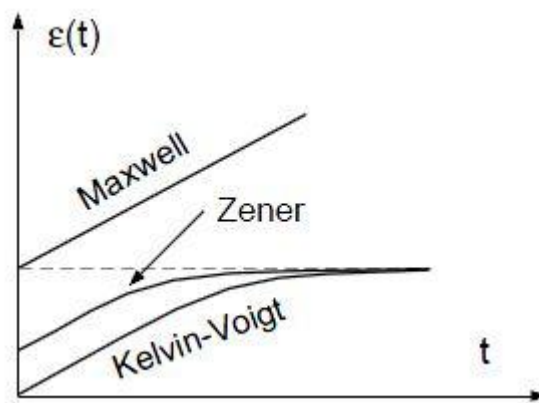
بررسی پاسخ این مدل به کرنش ورودی پله‌ای (آزمایش رهائش):

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left[E_1 + E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (\text{الف-۲۶})$$

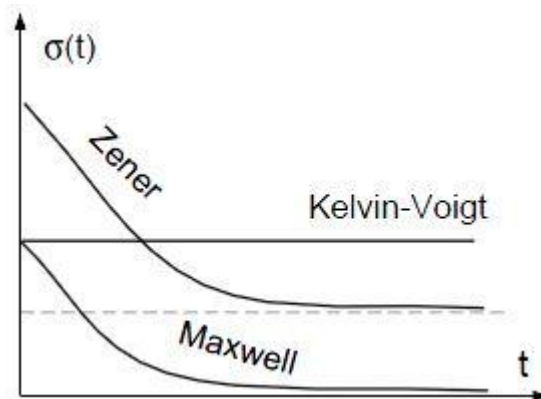
که در آن $\tau = \frac{\mu}{E_0}$ زمان رهائش می‌باشد.

همان طور که می‌دانیم، مواد ویسکوالاستیک دو ویژگی منحصر به فرد دارند: خزش و رهایش. طبیعت ماده‌ی ویسکوالاستیک حکم می‌کند که تابع خزش در حالت پایا افزایش یابد و به یک مقدار نهایی برسد، همچنین تابع رهایش نیز با کاهش در حالت پایا به یک مقدار نهایی برسد.

شکل (الف-۱۴) کرنش بر حسب زمان و شکل (الف-۱۵) تنش بر حسب زمان برای مدل‌های ماکسول، کلوین-ویت و زینر می‌باشند.



شکل (الف-۱۴) تابع خزش برای سه مدل [63]



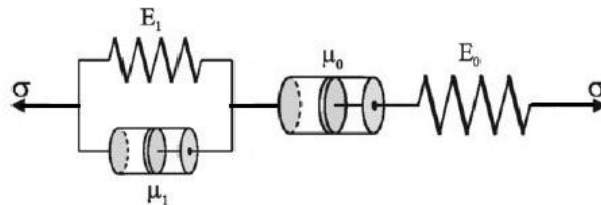
شکل (الف-۱۵) تابع رهایش برای سه مدل [63]

همان طور که قبلاً ذکر شد، تابع خزش پیش‌بینی شده توسط مدل ماکسول و تابع رهایش پیش‌بینی شده توسط مدل کلوین برای مواد ویسکوالاستیک نامناسب هستند. تابع خزش پیش‌بینی شده توسط مدل ماکسول با زمان افزایش می‌یابد (شکل (الف-۱۴)) و تابع رهایش پیش‌بینی شده توسط مدل

کلوین با زمان ثابت می ماند (شکل (الف-۱۵)). بنابراین هر دو مدل ماکسول و کلوین-ویت در رسیدن به خصوصیات مواد ویسکوالاستیک در محدوده‌ی زمان شکست خورده‌اند. از سوی دیگر مدل زهر توانست هر دو تابع خزش و رهایش را در حوزه‌ی زمان به‌خوبی پیش‌بینی کند [63].

الف-۳-۴-مدل برگرز^۱ [3]

این مدل از ترکیب مدل ماکسول با کلوین-ویت (شکل (الف-۱۶)) به‌دست می‌آید. در این مدل، برای تنش ورودی، کرنش کل به‌صورت مجموع کرنش‌های هر قسمت می‌باشد.



شکل (الف-۱۶) مدل برگرز [7]

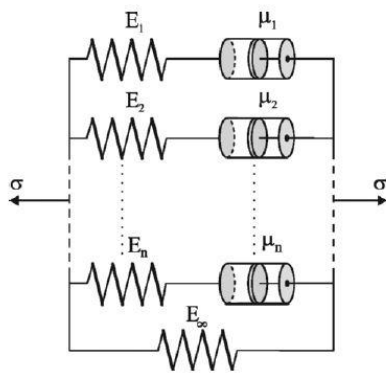
معادله‌ی بنیادین این مدل به‌صورت زیر است.

$$\sigma + \left[\frac{\mu_1}{E_1} + \mu_0 \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \right) \right] \dot{\sigma} + \frac{\mu_0 \mu_1}{E_0 E_1} \ddot{\sigma} = \mu_0 \dot{\epsilon} + \frac{\mu_0 \mu_1}{E_1} \ddot{\epsilon} \quad (\text{الف-۲۷})$$

الف-۳-۵-مدل ویچرت^۲ [3]

¹ Burgers model

² Wiechert Model



شکل (الف-۱۷) مدل ویچرت [7]

معمولاً پلیمرهای واقعی در زمان رهایش، با یک زمان رهایش که توسط مدل‌های بیان شده پیش‌بینی شده رها نمی‌شوند؛ بلکه طول‌های مختلفی از بخش‌های مولکولی در رهایش شرکت می‌کنند و بخش‌های ساده‌تر و کوتاه‌تر خیلی سریع‌تر از بخش‌های با طول بیشتر رها می‌شوند که این منجر به توزیعی در زمان رهایش می‌شود. برای رفع این مشکل، مهندسان مدل ویچرت را که مطابق شکل (الف-۱۷) دارای تعداد زیادی مدل ماکسول موازی با یک فنر می‌باشد، پیشنهاد کرده‌اند.

در این مدل، تنش کل برابر با مجموع تنش تک تک قسمت‌های موازی است. با استفاده از رابطه‌ی تنش- کرنش مربوط به مدل ماکسول، رابطه‌ی تنش-کرنش این مدل در فضای لاپلاس به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\bar{\sigma}(s) = \bar{\sigma}_e + \sum_j \bar{\sigma}_j = E_e + \sum_j \frac{E_j s}{(s + \frac{E_j}{\mu_j})} \quad (\text{الف} - ۲۸)$$

$$\begin{aligned}
eq1 := & (72 h r^2 \beta t0 Gs1 + 96 h r^2 \beta t0) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} u_0(r, t) \right) \\
& - \frac{72 h \rho r^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} u_0(r, t) \right) \beta t0 Gs1}{K0} \\
& + (72 h r^2 \beta t0 Gs1 + 96 h r^2 \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} w_0(r, t) \right) \\
& + (8 h^3 r^2 \beta t0 + 6 h^3 r^2 \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} w_1(r, t) \right) \\
& + (72 h r^2 Gs0 + 96 h r^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u_0(r, t) \right) \\
& + (96 h r \beta t0 + 72 h r \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} u_0(r, t) \right) - \frac{72 h \rho r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_0(r, t) \right) Gs0}{K0} + \left(\right. \\
& (72 h r^2 \beta t0 Gs1 + 96 h r^2 \beta t0) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_0(r, t) \right) \\
& + (72 h r^2 Gs0 + 96 h r^2) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_0(r, t) \right) \\
& + 144 h r \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \beta t0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_0(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (8 h^3 r^2 \beta t0 + 6 h^3 r^2 \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) \\
& + (8 h^3 r^2 + 6 h^3 r^2 Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1(r, t) \right) + \left(-48 h r^2 \beta t0 \right. \\
& + 12 \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) h^3 r \beta t0 + 72 h w_1(r, t) r^2 \beta t0 Gs1 - 48 h w_1(r, t) r^2 \beta t0 \\
& + 72 h r^2 \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) + (72 h r Gs0 + 96 r h) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_0(r, t) \right) \\
& + (-72 h \beta t0 Gs1 - 96 h \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial t} u_0(r, t) \right) + 72 h r \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right)^2 \\
& + 6 \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right)^2 h^3 r + \left((-48 h r^2 \beta t0 + 72 h r^2 \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) \right. \\
& + 72 h w_1(r, t) r^2 Gs0 - 48 h r^2 - 48 h w_1(r, t) r^2 + 72 h r^2 Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \\
& \left. - 96 h u_0(r, t) - 72 h u_0(r, t) Gs0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
eq2 := & (4 h^3 r^2 \beta t0 + 3 h^3 r^2 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} u_1(r, t) \right) - \frac{3 \rho r^2 h^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} u_1(r, t) \right) \beta t0 GsI}{K0} \\
& + (4 h^3 r^2 \beta t0 + 3 h^3 r^2 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} w_0(r, t) \right) \\
& + (4 h^3 r^2 \beta t0 + 3 h^3 r^2 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} w_1(r, t) \right) \\
& + (3 h^3 r^2 Gs0 + 4 h^3 r^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u_1(r, t) \right) \\
& + (3 h^3 r \beta t0 GsI + 4 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} u_1(r, t) \right) - \frac{3 \rho r^2 h^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1(r, t) \right) Gs0}{K0} + \left(\right. \\
& (4 h^3 r^2 \beta t0 + 3 h^3 r^2 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) \\
& + (3 h^3 r^2 Gs0 + 4 h^3 r^2) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_0(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (4 h^3 r^2 \beta t0 + 3 h^3 r^2 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1(r, t) \right) + 6 \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) h^3 r \beta t0 \\
& \left. - 36 h r^2 KS \beta t0 - 36 h r^2 KS w_1(r, t) \beta t0 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_0(r, t) \right) \\
& + (3 h^3 r^2 Gs0 + 4 h^3 r^2) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1(r, t) \right) \\
& + 6 h^3 \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) r \beta t0 + (4 h^3 r + 3 h^3 r Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_1(r, t) \right) \\
& + (-36 h r^2 KS \beta t0 - 4 h^3 \beta t0 - 3 h^3 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial t} u_1(r, t) \right) + \left(\right. \\
& 6 h^3 \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) r - 36 h r^2 KS \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) \beta t0 - 36 h r^2 KS - 36 h r^2 KS w_1(r, t) \\
& \left. \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) - 3 h^3 u_1(r, t) Gs0 - 36 h r^2 KS u_1(r, t) - 4 h^3 u_1(r, t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
eq3 := & 72 KS h w_1(r, t) u_1(r, t) + 72 KS h u_1(r, t) - \frac{72 r FF(r, t) Gs0}{K0} \\
& + 72 h \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) KS r u_1(r, t) - \frac{72 r \left(\frac{\partial}{\partial t} FF(r, t) \right) \beta t0 GsI}{K0} \\
& + 72 KS h \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) u_1(r, t) \beta t0 + \left((4 h^3 + 12 h^3 Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \right. \\
& \left. + 72 h r KS \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) \beta t0 + 72 h r KS w_1(r, t) + 72 h r KS \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_1(r, t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(72 KS h w_1(r, t) \beta t0 + 72 h \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) KS r \beta t0 + 72 KS h \beta t0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} u_1(r, t) \right) \\
& + (48 h + 36 h Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right)^3 + \left((12 h^3 + 9 h^3 Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right)^2 + \left(\right. \right. \\
& (144 h r KS \beta t0 - 48 h r \beta t0 + 72 h r \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) - 48 r h \\
& + 72 h w_1(r, t) r Gs0 + 144 h r KS + 144 h r KS w_1(r, t) - 48 h w_1(r, t) r \\
& + 72 h r Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) + (144 KS h w_1(r, t) \beta t0 + 72 h \beta t0 Gs1 \\
& + 72 h w_1(r, t) \beta t0 Gs1 - 48 h \beta t0 + 144 KS h \beta t0 - 48 h w_1(r, t) \beta t0) \\
& \left. \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) + 72 h w_1(r, t) Gs0 - 48 h w_1(r, t) - 24 h w_1(r, t)^2 + 72 KS h \right. \\
& + 72 KS h w_1(r, t)^2 + 36 h w_1(r, t)^2 Gs0 + 144 KS h w_1(r, t) \left. \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \\
& + (144 h Gs0 + 48 h) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_0(r, t) \right) \\
& + (96 h r \beta t0 + 72 h r \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} u_0(r, t) \right) \\
& + (6 h^3 r \beta t0 Gs1 + 8 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} u_1(r, t) \right) \\
& - \frac{72 \rho r h \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} w_0(r, t) \right) Gs0}{K0} + \left((96 h r \beta t0 + 72 h r \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_0(r, t) \right) \right. \\
& + (144 h r \beta t0 + 108 h r \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right)^2 \\
& + (12 h^3 r \beta t0 + 9 h^3 r \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right)^2 - 24 h w_1(r, t)^2 r \beta t0 \\
& + 144 h r KS w_1(r, t) \beta t0 - 48 h w_1(r, t) r \beta t0 + 72 h r KS \beta t0 - 48 h u_0(r, t) \beta t0 \\
& + 72 h u_0(r, t) \beta t0 Gs1 + 36 h w_1(r, t)^2 r \beta t0 Gs1 + 72 h w_1(r, t) r \beta t0 Gs1 \\
& + 72 h r KS w_1(r, t)^2 \beta t0 \left. \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} w_0(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (6 h^3 r \beta t0 Gs1 + 8 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_1(r, t) \right) \\
& + (24 h^3 r \beta t0 + 18 h^3 r \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) + 6 h^3 u_1(r, t) \beta t0 Gs1 \\
& - 4 h^3 u_1(r, t) \beta t0 \left. \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} w_1(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (96 h r \beta t0 + 72 h r \beta t0 Gs1) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_0(r, t) \right) + (72 h r Gs0 + 96 r h) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u_0(r, t) \right) + \left((96 h r \beta t0 + 72 h r \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_0(r, t) \right) \right. \\
& + (144 h \beta t0 GsI + 48 h \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left. \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} u_0(r, t) \right) + \\
& \left((6 h^3 r \beta t0 GsI + 8 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) + (8 h^3 r + 6 h^3 r Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \right) \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u_1(r, t) \right) + \left((6 h^3 r \beta t0 GsI + 8 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1(r, t) \right) \right. \\
& + (12 h^3 \beta t0 GsI + 4 h^3 \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) + 72 h r KS w_1(r, t) \beta t0 + 72 h r KS \beta t0 \\
& \left. \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} u_1(r, t) \right) + \left((216 h r \beta t0 GsI + 288 h r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_0(r, t) \right) \right. \\
& + (24 h^3 r \beta t0 + 18 h^3 r \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) \\
& + (72 h r Gs0 + 96 r h) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_0(r, t) \right) + (-48 h \beta t0 + 72 h \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial t} u_0(r, t) \right) \\
& + (108 h r Gs0 + 144 r h) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right)^2 + (9 h^3 r Gs0 + 12 h^3 r) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right)^2 + (\\
& 144 h r KS \beta t0 + 72 h r \beta t0 GsI - 48 h w_1(r, t) r \beta t0 + 144 h r KS w_1(r, t) \beta t0 \\
& + 72 h w_1(r, t) r \beta t0 GsI - 48 h r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) + 72 h r KS w_1(r, t)^2 \\
& + 72 h w_1(r, t) r Gs0 + 72 h u_0(r, t) Gs0 + 36 h w_1(r, t)^2 r Gs0 - 48 h u_0(r, t) \\
& + 72 h r KS + 144 h r KS w_1(r, t) - 24 h w_1(r, t)^2 r - 48 h w_1(r, t) r) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_0(r, t) \right) \\
& + \left((24 h^3 r \beta t0 + 18 h^3 r \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1(r, t) \right) \right. \\
& + (144 h \beta t0 GsI + 48 h \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_0(r, t) \right) \\
& + (144 h \beta t0 + 108 h \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right)^2 \\
& + (9 h^3 \beta t0 GsI + 12 h^3 \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right)^2 + (144 h r KS \beta t0 + 72 h r \beta t0 GsI \\
& - 48 h w_1(r, t) r \beta t0 + 144 h r KS w_1(r, t) \beta t0 + 72 h w_1(r, t) r \beta t0 GsI \\
& - 48 h r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) + 144 KS h w_1(r, t) \beta t0 + 72 h w_1(r, t) \beta t0 GsI \\
& + 36 h w_1(r, t)^2 \beta t0 GsI + 72 KS h w_1(r, t)^2 \beta t0 + 72 KS h \beta t0 - 24 h w_1(r, t)^2 \beta t0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 48 h w_1(r, t) \beta t0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_0(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (24 h^3 r \beta t0 + 18 h^3 r \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) \\
& + (8 h^3 r + 6 h^3 r Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_1(r, t) \right) + (-4 h^3 \beta t0 + 6 h^3 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial t} u_1(r, t) \right) \\
& + (24 h^3 r + 18 h^3 r Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) + 6 h^3 u_1(r, t) Gs0 \\
& - 4 h^3 u_1(r, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1(r, t) \right) + \left((12 h^3 \beta t0 GsI + 4 h^3 \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_1(r, t) \right) + \left(\right. \right. \\
& (18 h^3 \beta t0 GsI + 24 h^3 \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) + 144 h r KS \beta t0 + 72 h r \beta t0 GsI \\
& - 48 h w_1(r, t) r \beta t0 + 144 h r KS w_1(r, t) \beta t0 + 72 h w_1(r, t) r \beta t0 GsI \\
& - 48 h r \beta t0 \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) + 72 h KS r u_1(r, t) \beta t0 \left. \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) \\
& \left. - \frac{72 \rho r h \left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} w_0(r, t) \right) \beta t0 GsI}{K0} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
eq4 := & 960 h u_0(r, t) + (120 h^3 r \beta t0 GsI + 160 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} u_0(r, t) \right) \\
& - 1440 h u_0(r, t) Gs0 + 960 h u_0(r, t) w_1(r, t) - 960 h w_1(r, t)^3 r - 2880 h w_1(r, t)^2 r \\
& - 1920 h w_1(r, t) r - \frac{720 h r FF(r, t) Gs0}{K0} - 1440 h r KS \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) u_1(r, t) \\
& - 1440 h w_1(r, t) r Gs0 - 2160 h w_1(r, t)^2 r Gs0 - 1440 h u_0(r, t) w_1(r, t) Gs0 \\
& - 720 h w_1(r, t)^3 r Gs0 - 1440 h r KS \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} u_1(r, t) \right) \beta t0 \\
& - \frac{720 h r \left(\frac{\partial}{\partial t} FF(r, t) \right) \beta t0 GsI}{K0} + \left((240 h^3 Gs0 + 80 h^3) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \right. \\
& + (-1440 h r \beta t0 GsI + 960 h r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) + 960 r h - 1440 h w_1(r, t) r Gs0 \\
& - 1440 h r Gs0 + 960 h w_1(r, t) r \left. \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_0(r, t) \right) + \\
& (960 h w_1(r, t) \beta t0 - 1440 h w_1(r, t) \beta t0 GsI + 960 h \beta t0 - 1440 h \beta t0 GsI) \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t} u_0(r, t) \right) + \left((180 h^3 Gs0 + 240 h^3) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \right. \\
& + (-720 h r \beta t0 GsI + 480 h r \beta t0 - 1440 h r KS \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) \\
& \left. - 720 h w_1(r, t) r Gs0 - 1440 h r KS w_1(r, t) - 1440 h r KS - 720 h r Gs0 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 480 h w_1(r, t) r + 480 r h \left) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right)^2 + (9 h^5 G s 0 + 12 h^5) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right)^3 + \left(\right. \\
& (120 h^3 K S r \beta t 0 + 60 h^3 r \beta t 0 G s I - 40 h^3 r \beta t 0) \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) - 40 h^3 r w_1(r, t) \\
& + 60 h^3 r G s 0 + 120 h^3 K S r w_1(r, t) + 60 h^3 r w_1(r, t) G s 0 - 40 h^3 r + 120 h^3 K S r \left. \right) \\
& \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right)^2 + \left((240 K S h^3 \beta t 0 + 120 h^3 w_1(r, t) \beta t 0 G s I + 240 K S h^3 w_1(r, t) \beta t 0 \right. \\
& - 80 h^3 \beta t 0 - 80 h^3 w_1(r, t) \beta t 0 + 120 h^3 \beta t 0 G s I) \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) \\
& + 60 h^3 w_1(r, t)^2 G s 0 - 80 h^3 w_1(r, t) + 120 K S h^3 - 40 h^3 w_1(r, t)^2 \\
& + 120 h^3 w_1(r, t) G s 0 + 240 K S h^3 w_1(r, t) + 120 K S h^3 w_1(r, t)^2 \left. \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) + \left(\right. \\
& - 4320 h w_1(r, t) r \beta t 0 G s I - 1440 h r \beta t 0 G s I - 2160 h w_1(r, t)^2 r \beta t 0 G s I \\
& - 1920 h r \beta t 0 - 5760 h w_1(r, t) r \beta t 0 - 2880 h w_1(r, t)^2 r \beta t 0 + 960 h u_0(r, t) \beta t 0 \\
& - 1440 h u_0(r, t) \beta t 0 G s I) \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (120 h^3 r \beta t 0 G s I + 160 h^3 r \beta t 0) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_1(r, t) \right) \\
& + (360 h^3 r \beta t 0 G s I + 480 h^3 r \beta t 0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \\
& + 120 h^3 u_1(r, t) \beta t 0 G s I - 80 h^3 u_1(r, t) \beta t 0 \left. \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} w_0(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (120 h^3 r \beta t 0 G s I + 160 h^3 r \beta t 0) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_0(r, t) \right) \\
& + (180 h^3 r \beta t 0 G s I + 240 h^3 r \beta t 0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right)^2 \\
& + (27 h^5 r \beta t 0 G s I + 36 h^5 r \beta t 0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right)^2 + 60 h^3 r w_1(r, t)^2 \beta t 0 G s I \\
& - 40 h^3 r w_1(r, t)^2 \beta t 0 + 120 h^3 u_0(r, t) \beta t 0 G s I + 120 h^3 K S r w_1(r, t)^2 \beta t 0 \\
& - 80 h^3 u_0(r, t) \beta t 0 + 240 h^3 K S r w_1(r, t) \beta t 0 + 120 h^3 r w_1(r, t) \beta t 0 G s I \\
& - 80 h^3 r w_1(r, t) \beta t 0 + 120 h^3 K S r \beta t 0 \left. \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} w_1(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (120 h^3 r \beta t 0 G s I + 160 h^3 r \beta t 0) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) \\
& + (120 h^3 r G s 0 + 160 h^3 r) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u_0(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (120 h^3 r \beta t 0 G s I + 160 h^3 r \beta t 0) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1(r, t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (80 h^3 \beta t0 + 240 h^3 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) + 960 h r \beta t0 + 960 h w_1(r, t) r \beta t0 \\
& - 1440 h w_1(r, t) r \beta t0 GsI - 1440 h r \beta t0 GsI \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} u_0(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (54 h^5 r \beta t0 GsI + 72 h^5 r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) \\
& + (120 h^3 r Gs0 + 160 h^3 r) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_0(r, t) \right) \\
& + (-80 h^3 \beta t0 + 120 h^3 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial t} u_0(r, t) \right) \\
& + (240 h^3 r + 180 h^3 r Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right)^2 + (36 h^5 r + 27 h^5 r Gs0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right)^2 \\
& + (240 h^3 KS r \beta t0 + 240 h^3 KS r w_1(r, t) \beta t0 - 80 h^3 r \beta t0 + 120 h^3 r \beta t0 GsI \\
& - 80 h^3 r w_1(r, t) \beta t0 + 120 h^3 r w_1(r, t) \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial t} w_1(r, t) \right) - 80 h^3 u_0(r, t) \\
& + 240 h^3 KS r w_1(r, t) + 120 h^3 KS r w_1(r, t)^2 + 60 h^3 r w_1(r, t)^2 Gs0 \\
& + 120 h^3 u_0(r, t) Gs0 + 120 h^3 r w_1(r, t) Gs0 - 40 h^3 r w_1(r, t)^2 + 120 h^3 KS r \\
& - 80 h^3 r w_1(r, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (120 h^3 r \beta t0 GsI + 160 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_0(r, t) \right) \\
& + (120 h^3 r Gs0 + 160 h^3 r) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u_1(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (120 h^3 r \beta t0 GsI + 160 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_0(r, t) \right) \\
& + (80 h^3 \beta t0 + 240 h^3 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} u_1(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (360 h^3 r \beta t0 GsI + 480 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_0(r, t) \right) \\
& + (360 h^3 r \beta t0 GsI + 480 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) \\
& + (120 h^3 r Gs0 + 160 h^3 r) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_1(r, t) \right) \\
& + (-80 h^3 \beta t0 + 120 h^3 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial t} u_1(r, t) \right) \\
& + (360 h^3 r Gs0 + 480 h^3 r) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) - 80 h^3 u_1(r, t) \\
& + 120 h^3 u_1(r, t) Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_0(r, t) \right) + \left(\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (360 h^3 r \beta t0 GsI + 480 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w_1(r, t) \right) \\
& + (80 h^3 \beta t0 + 240 h^3 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_1(r, t) \right) + \left(\right. \\
& (360 h^3 \beta t0 GsI + 480 h^3 \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) - 1440 h r \beta t0 GsI \\
& + 960 h w_1(r, t) r \beta t0 - 2880 h r KS \beta t0 - 1440 h w_1(r, t) r \beta t0 GsI \\
& \left. - 2880 h r KS w_1(r, t) \beta t0 + 960 h r \beta t0 \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) - 1440 h KS r u_1(r, t) \beta t0 \left. \right) \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_0(r, t) \right) + \left((80 h^3 \beta t0 + 240 h^3 \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_0(r, t) \right) \right. \\
& + (180 h^3 \beta t0 GsI + 240 h^3 \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right)^2 \\
& + (27 h^5 \beta t0 GsI + 36 h^5 \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right)^2 + (240 h^3 KS r \beta t0 \\
& + 240 h^3 KS r w_1(r, t) \beta t0 - 80 h^3 r \beta t0 + 120 h^3 r \beta t0 GsI - 80 h^3 r w_1(r, t) \beta t0 \\
& + 120 h^3 r w_1(r, t) \beta t0 GsI) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_1(r, t) \right) + 120 h^3 w_1(r, t) \beta t0 GsI \\
& + 120 KS h^3 w_1(r, t)^2 \beta t0 - 40 h^3 w_1(r, t)^2 \beta t0 + 120 KS h^3 \beta t0 \\
& \left. + 240 KS h^3 w_1(r, t) \beta t0 - 80 h^3 w_1(r, t) \beta t0 + 60 h^3 w_1(r, t)^2 \beta t0 GsI \right) \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} w_1(r, t) \right) + (240 h^3 Gs0 + 80 h^3) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_1(r, t) \right) \\
& + (120 h^3 r \beta t0 GsI + 160 h^3 r \beta t0) \left(\frac{\partial}{\partial r} w_0(r, t) \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} u_1(r, t) \right) \\
& - \frac{120 \rho r h^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} w_1(r, t) \right) Gs0}{KO} - \frac{120 \rho r h^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} w_1(r, t) \right) \beta t0 GsI}{KO}
\end{aligned}$$

پوست ج

معادلات مرتبه ۲

برای به دست آوردن معادلات مرتبه سه، مؤلفه‌های دامنه‌ی ارتعاشات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u_0^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(u_{00}(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{01}(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_{02}(X, T_0, T_1, T_2)) \\ u_1^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(u_{10}(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{11}(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_{12}(X, T_0, T_1, T_2)) \\ w_0^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(w_{00}(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon w_{01}(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_{02}(X, T_0, T_1, T_2)) \\ w_1^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(w_{10}(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon w_{11}(X, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_{12}(X, T_0, T_1, T_2)) \end{aligned} \quad (1-ج)$$

که $T_0 = t^*$ ، $T_1 = \varepsilon t^*$ و $T_2 = \varepsilon^2 t^*$ است. با توجه به این تعریف‌ها، اپراتورهای مشتق زمانی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) \\ \frac{\partial^3}{\partial t^{*3}} &= \frac{\partial^3}{\partial T_0^3} + 3\varepsilon \frac{\partial^3}{\partial T_0^2 \partial T_1} + 3\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial T_0^2 \partial T_2} + \frac{\partial^3}{\partial T_0 \partial T_1^2} \right) \end{aligned} \quad (2-ج)$$

با جایگذاری روابط (1-ج) و (2-ج) در معادلات (3-3) تا (6-3) و جداسازی معادلات براساس مرتبه‌های ε^1 ، ε^2 و ε^3 معادلات زیر حاصل می‌شود.

معادلات مرتبه یک:

$$\begin{aligned} eq_1 : L_1[u_{00}, w_{10}] &= 0 \\ L_1[u_{00}, w_{10}] &= -72e \frac{\partial^2 g_1[u_{00}]}{\partial T_0^2} + 12 \frac{\partial g_3[w_{10}]}{\partial X} + 12 \frac{\partial^2 g_2[u_{00}]}{\partial X^2} \end{aligned} \quad (3-ج)$$

$$\begin{aligned} eq_2 : L_2[u_{10}, w_{00}] &= 0 \\ L_2[u_{10}, w_{00}] &= -3eh^* \frac{\partial^2 g_1[u_{10}]}{\partial T_0^2} + \frac{h^*}{2} \frac{\partial^2 g_2[u_{10}]}{\partial X^2} - 36Ks \left(g_4[u_{10}] + \frac{\partial g_4[w_{00}]}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (4-ج)$$

$$eq_3 : L_3[u_{10}, w_{00}] - 72g_1[Q^*] = 0$$

$$L_3[u_{10}, w_{00}] = -72eh^* \frac{\partial^2 g_1[w_{00}]}{\partial T_0^2} + 72h^* Ks \left(\frac{\partial g_4[u_{10}]}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_4[w_{00}]}{\partial X^2} \right) \quad (5-ج)$$

$$eq_4 : L_4[u_{00}, w_{10}] - 720g_1[Q^*] = 0$$

$$L_4[u_{00}, w_{10}] = -120eh^{*2} \frac{\partial^2 g_1[w_{10}]}{\partial T_0^2} - 240 \left(\frac{\partial g_3[u_{00}]}{\partial X} + g_2[w_{10}] \right) + 120h^{*2} Ks \frac{\partial^2 g_4[w_{10}]}{\partial X^2} \quad (6-ج)$$

معادلات مرتبه دو:

$$eq_1 : L_1[u_{01}, w_{11}] + 2X (L_1[u_{00}, w_{10}]) + f_1 = 0$$

$$f_1 = -144e g_{10}[u_{00}] + 12 \frac{\partial g_2[u_{00}]}{\partial X} + 12 \frac{\partial^2 g_2[w_{00}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{00}}{\partial X} + 12\beta \left(b_1 g_{11}[w_{10}] + a_1 \frac{\partial g_{11}[u_{00}]}{\partial X} \right) \quad (7-ج)$$

$$+ 12g_5[w_{00}] + \left(12\beta g_3[w_{10}] + h^{*2} \frac{\partial^2 g_2[w_{10}]}{\partial X^2} \right) \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + h^{*2} g_5[w_{10}] + 12\beta b_1 w_{10} \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial X \partial T_0}$$

$$eq_2 : L_2[u_{11}, w_{01}] + 2X (L_2[u_{11}, w_{01}]) + f_2 = 0$$

$$f_2 = -6eh^{*2} g_{10}[u_{10}] + \left(\frac{h^{*2} \partial^2 g_2[w_{10}]}{2 \partial X^2} - 36Ks g_4[w_{10}] \right) \frac{\partial w_{00}}{\partial X} + \frac{h^{*2} \partial^2 g_2[w_{00}]}{2 \partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} \quad (8-ج)$$

$$- 36Ks \left(\beta \left(w_{10} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X \partial T_0} + \frac{\partial u_{10}}{\partial T_1} \right) + g_{11}[w_{00}] \right) + \frac{h^{*2}}{2} g_{21}[w_{10}, w_{00}] + \frac{h^{*2}}{2} \left(\frac{\partial g_2[u_{10}]}{\partial X} + \beta a_1 \frac{\partial g_{11}[u_{10}]}{\partial X} \right)$$

$$\begin{aligned}
eq_3 : & L_3[u_{11}, w_{01}] + X \left(L_3[u_{10}, w_{00}] - 72g_1[Q^*] \right) + f_3 = 0 \\
f_3 = & -144eh^*g_{10}[w_{00}] + 12h^* \frac{\partial^2 g_2[w_{00}]}{\partial X^2} \frac{\partial u_{00}}{\partial X} + h^{*3} \left(\frac{\partial^2 g_2[u_{10}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2[w_{10}]}{\partial X^2} \frac{\partial u_{10}}{\partial X} \right) \\
& + 72h^*Ks \left(u_{10} \frac{\partial g_4[w_{10}]}{\partial X} + \frac{\partial g_4[w_{00}]}{\partial X} + g_4[u_{10}] \right) + h^{*2}g_{21}[w_{10}, u_{10}] + 72\beta h^*Ksg_{11}[u_{10}] \\
& + 12h^* \left(\frac{\partial^2 g_2[u_{00}]}{\partial X^2} + \frac{\partial g_3[w_{10}]}{\partial X} + 12Ks \frac{\partial g_4[w_{10}]}{\partial X} \right) \frac{\partial w_{00}}{\partial X} + 72Ksg_{22}[w_{10}, u_{10}] \\
& + 12\beta h^* (b_1 + 12Ks) \left(\frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial T_0} \right) + 12g_{21}[w_{00}, u_{00}] \\
& + 12h^*w_{10} \left(\frac{\partial^2 g_3[w_{00}]}{\partial X^2} + 6Ks \left(2 \frac{\partial^2 g_4[w_{00}]}{\partial X^2} + \frac{\partial g_4[u_{10}]}{\partial X} \right) \right) + 72\beta h^*Ks \frac{\partial g_{11}[w_{00}]}{\partial X}
\end{aligned} \tag{9-ع}$$

$$\begin{aligned}
eq_4 : & L_4[u_{01}, w_{11}] + X \left(L_4[u_{00}, w_{10}] - 720g_1[Q^*] \right) + f_4 = 0 \\
f_4 = & -240eh^{*2}g_{10}[w_{10}] - 240\beta b_1g_{11}[u_{00}] + 120\beta h^{*2}Ks \frac{\partial g_{11}[w_{10}]}{\partial X} - 240\beta a_1 \frac{\partial w_{10}}{\partial T_1} + \\
& 20h^{*2} \left(\frac{\partial^2 g_2[w_{00}]}{\partial X^2} \frac{\partial u_{10}}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2[u_{10}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{00}}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2[u_{00}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2[w_{10}]}{\partial X^2} \frac{\partial u_{00}}{\partial X} \right) \\
& - 240g_3[w_{10}] \frac{\partial u_{00}}{\partial X} + 20h^* (g_{21}[u_{00}, w_{10}] + g_{21}[w_{00}, u_{10}]) + 120h^{*2}Ks \frac{\partial g_4[w_{10}]}{\partial X} \\
& - 360g_{16}[w_{10}]w_{10} + 20h^{*2} \left(\frac{\partial^2 g_3[w_{10}]}{\partial X^2} + 12Ks \frac{\partial^2 g_4[w_{10}]}{\partial X^2} \right) w_{10} \\
& - 120g_{15}[w_{00}] + 10h^{*2}g_{15}[w_{10}] + 20\beta h^{*2} (b_1 + 12Ks) \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial T_0} - 240g_3[u_{00}] \\
& - 240\beta \left(w_{10}b_1 \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial X \partial T_0} + 6Ks \frac{\partial u_{10}}{\partial T_0} \frac{\partial w_{00}}{\partial X} \right) - 1440Ks \frac{\partial g_4[w_{00}]}{\partial X} u_{10}
\end{aligned} \tag{10-ع}$$

معادلات دوم و سوم مرتبه سه:

$$\begin{aligned}
 eq_2 : L_2[u_{12}, w_{02}] + X^2 L_2[u_{10}, w_{00}] + 2X \left(L_2[u_{11}, w_{01}] + f_2 - h^{*2} \left(3 \frac{\partial g_1 [u_{10}]}{\partial X} + 4 \frac{\partial g_4 [u_{10}]}{\partial X} \right) \right) + f_{22} = 0 \\
 f_{22} = -3eh^{*2} \left(2(g_{10}[u_{11}] + g_{12}[u_{10}]) + g_{18}[u_{10}] \right) + \frac{h^{*2}}{2} \left(\frac{\partial^2 g_2 [w_{00}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{11}}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2 [w_{01}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} \right) \\
 + \left(\frac{h^{*2}}{2} \frac{\partial^2 g_2 [w_{10}]}{\partial X^2} - 36Ks g_4 [w_{10}] \right) \frac{\partial w_{01}}{\partial X} + \left(\frac{h^{*2}}{2} \frac{\partial^2 g_2 [w_{11}]}{\partial X^2} - 36Ks g_4 [w_{11}] + 6h^{*2} \frac{\partial g_4 [w_{10}]}{\partial X} \right) \frac{\partial w_{00}}{\partial X} \\
 + \frac{h^{*2}}{2} \left(\frac{\partial g_2 [u_{11}]}{\partial X} - g_2 [u_{10}] + g_{21} [w_{00}, w_{11}] \right) + \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial^2 w_{01}}{\partial X^2} + 6\beta h^{*2} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} \\
 + \frac{h^{*2}}{2} \beta a_1 \left(g_{11} [u_{10}] + \frac{\partial g_3 [u_{10}]}{\partial X} + \frac{\partial g_{11} [u_{11}]}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X \partial T_1} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial X \partial T_1} \frac{\partial w_{00}}{\partial X} \right) \right) \\
 - 36\beta Ks \left(g_{11} [w_{01}] + g_{13} [w_{00}] + w_{10} g_{11} [w_{00}] + \frac{\partial u_{10}}{\partial T_2} + \frac{\partial u_{11}}{\partial T_1} + \frac{\partial w_{10}}{\partial T_1} \frac{\partial w_{00}}{\partial X} + w_{11} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X \partial T_0} \right)
 \end{aligned} \tag{۱۱-ج}$$

$$\begin{aligned}
eq_3 : L_3[u_{12}, w_{02}] + X \left(L_3[u_{11}, w_{01}] + f_3 - 72h^* Ks \left(g_4[u_{10}] + \frac{\partial g_4[w_{00}]}{\partial X} \right) \right) + f_{33} = 0 \\
f_{33} = -72eh^* \left(2(g_{10}[w_{01}] + g_{12}[w_{00}]) + g_{18}[w_{00}] \right) + \\
12h^* \left(\left(4 \left(\frac{\partial g_4[w_{00}]}{\partial X} + 3 \frac{\partial g_2[w_{00}]}{\partial X} \right) + \frac{\partial^2 g_2[w_{01}]}{\partial X^2} \right) \frac{\partial u_{00}}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2[w_{00}]}{\partial X^2} \frac{\partial u_{01}}{\partial X} \right) \\
+h^* \left(3g_{21}[w_{00}, w_{10}] + h^* \frac{\partial^2 g_2[u_{11}]}{\partial X^2} \right) \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + h^* \left(18 \frac{\partial^2 g_2[w_{00}]}{\partial X^2} + \left(h^* \frac{\partial^2 g_2[w_{10}]}{\partial X^2} + 72Ks g_4[w_{10}] \right) \frac{\partial u_{11}}{\partial X} \right) \\
+4h^* \left(\frac{\partial g_4[u_{10}]}{\partial X} + 3 \frac{\partial g_2[u_{10}]}{\partial X} \right) \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + \left(72h^* Ks g_4[w_{11}] + h^* \frac{\partial^2 g_2[w_{11}]}{\partial X^2} \right) \frac{\partial u_{10}}{\partial X} + \frac{3h^* \partial^2 g_2[w_{00}]}{2 \partial X^2} \\
+h^* \left(\frac{\partial^2 g_2[u_{10}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{11}}{\partial X} + 3 \frac{\partial^2 g_2[w_{10}]}{\partial X^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial X} \right) + 12(g_{21}[w_{00}, u_{01}] + g_{21}[w_{01}, u_{00}]) + w_{10} g_{20}[w_{00}, w_{10}] \\
+12h^* \left(\frac{\partial g_3[w_{10}]}{\partial X} + 12Ks \frac{\partial g_4[w_{10}]}{\partial X} + \frac{\partial^2 g_2[u_{00}]}{\partial X^2} \right) \frac{\partial w_{01}}{\partial X} + 72h^* Ks \frac{\partial g_4[w_{01}]}{\partial X} + h^* u_{10} \frac{\partial^2 g_3[w_{10}]}{\partial X^2} \\
+12h^* \left(\frac{\partial^2 g_2[u_{01}]}{\partial X^2} + g_3[w_{10}] + 12Ks \left(g_4[w_{10}] + \frac{\partial g_4[w_{11}]}{\partial X} \right) + \frac{\partial g_3[w_{11}]}{\partial X} \right) \frac{\partial w_{00}}{\partial X} + 3h^* g_5[w_{10}] \\
+72h^* Ks (g_4[u_{11}] + g_4[w_{10}]u_{10}) + 12h^* w_{10} \left(\frac{\partial^2 g_3[w_{01}]}{\partial X^2} + 12Ks \frac{\partial^2 g_4[w_{01}]}{\partial X^2} \right) + 36h^* g_5[w_{00}] \\
+6h^* (w_{10}^2 + 2(u_{00} + w_{11})) \frac{\partial^2 g_3[w_{00}]}{\partial X^2} + 72h^* Ks \left((w_{10}^2 + 2w_{11}) \frac{\partial^2 g_4[w_{00}]}{\partial X^2} + \frac{\partial g_4[w_{10}]}{\partial X} u_{11} + g_4[u_{10}] \frac{\partial w_{11}}{\partial X} \right) \\
+h^* (g_{21}[w_{10}, u_{11}] + g_{21}[w_{11}, u_{10}]) + 12h^* (g_3[w_{10}] + 12Ks g_4[w_{10}]) \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + g_{20}[w_{01}, w_{10}] + g_{20}[w_{00}, w_{11}] \\
+72\beta h^* Ks \left(\frac{\partial}{\partial X} \left(w_{10} \frac{\partial u_{11}}{\partial T_0} \right) + \frac{\partial^2}{\partial X \partial T_0} (u_{10} w_{11}) + w_{10} \frac{\partial u_{10}}{\partial T_0} \right) + 12\beta h^* (b_1 + 12Ks) \left(w_{10} \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial X \partial T_0} + \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X \partial T_0} \right) \\
+\beta h^* \left(4(1 + 3G_1^*) \left(\frac{\partial^2 w_{10}}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial u_{10}}{\partial X} + 12 \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial X \partial T_0} \right) + b_1 \left(12 \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X^2} \frac{\partial u_{00}}{\partial T_0} + h^* \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial X^2} \frac{\partial u_{10}}{\partial T_0} \right) \right) \\
+12\beta h^* (b_1 + 12Ks) \left(\frac{\partial}{\partial T_1} \left(w_{10} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X^2} \right) + g_{11}[w_{00}] \frac{\partial w_{10}}{\partial X} + g_{11}[w_{10}] \right) + 12\beta h^* a_1 \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial}{\partial T_1} \left(\frac{\partial w_{00}}{\partial X} \frac{\partial u_{00}}{\partial X} \right) \right) \\
+\beta h^* a_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial X \partial T_1} \left(\frac{\partial w_{10}}{\partial X} \frac{\partial u_{10}}{\partial X} \right) + g_{11}[w_{10}] \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial X^2} \right) + 72\beta h^* Ks \left(\frac{\partial}{\partial X} \left(u_{10} \frac{\partial w_{10}}{\partial T_1} \right) + \frac{\partial w_{10}}{\partial X} \frac{\partial u_{10}}{\partial T_1} \right) \\
+72\beta h^* Ks \left(g_{13}[u_{10}] + g_{11}[w_{00}] + g_{11}[u_{11}] + \frac{\partial u_{10}}{\partial T_1} + \frac{\partial}{\partial X} (g_{13}[w_{00}] + g_{11}[w_{01}]) \right)
\end{aligned}
\tag{۱۲ - ج}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 8 + 6G_0^*; a_1 = 8 + 6G_1^*; b_0 = -4 + 6G_0^*; b_1 = -4 + 6G_1^* \\
 g_1[\bullet] &= G_0^*(\bullet) + \beta G_1^* \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0}; g_2[\bullet] = a_0(\bullet) + \beta a_1 \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0}; g_3[\bullet] = b_0(\bullet) + \beta b_1 \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0} \\
 g_4[\bullet] &= (\bullet) + \beta \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0}; g_5[\bullet] = \beta a_1 \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X^2}; \\
 g_{10}[\bullet] &= G_0^* \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{3}{2} \beta G_1^* \frac{\partial^3(\bullet)}{\partial T_0^2 \partial T_1}; g_{11}[\bullet] = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_1} \\
 g_{12}[\bullet] &= G_0^* \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{3}{2} \beta G_1^* \frac{\partial^3(\bullet)}{\partial T_0^2 \partial T_2}; g_{13}[\bullet] = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_2} \\
 g_{15}[\bullet] &= \left[(b_0 + 12Ks) \frac{\partial(\bullet)}{\partial X} + 2\beta(b_1 + 12Ks) \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_0} \right] \frac{\partial(\bullet)}{\partial X} \\
 g_{16}[\bullet] &= a_0(\bullet) + 2\beta a_1 \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0}; g_{17}[\bullet] = \left[\frac{\partial(\bullet)}{\partial X} + 2\beta \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_0} \right] \frac{\partial(\bullet)}{\partial X} \\
 g_{18}[\bullet] &= G_0^* \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial T_1^2} + 3\beta G_1^* \frac{\partial^3(\bullet)}{\partial T_1^2 \partial T_0} \\
 g_{20}[\bullet, \blacktriangle] &= 12\beta h^* (b_1 + 12Ks) \left(\frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial(\blacktriangle)}{\partial X} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X^2} \frac{\partial(\blacktriangle)}{\partial T_0} \right) \\
 g_{21}[\bullet, \blacktriangle] &= \beta h^* a_1 \left(\frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial^2(\blacktriangle)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2(\blacktriangle)}{\partial X \partial T_0} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X^2} \right) \\
 g_{22}[\bullet, \blacktriangle] &= \beta h^* \left(\frac{\partial(\bullet)}{\partial X} \frac{\partial(\blacktriangle)}{\partial T_0} + \frac{\partial(\blacktriangle)}{\partial X} \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0} \right)
 \end{aligned}
 \tag{ج-۱۳}$$

حل معادلات مرتبه یک و دو به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} u_{10}(X, T_0, T_1, T_2) \\ w_{00}(X, T_0, T_1, T_2) \end{array} \right\} &= C_4(T_1, T_2) \left\{ \begin{array}{l} y_2(X) \\ y_3(X) \end{array} \right\} e^{(i\omega_n T_0)} + C.C. \\
 \left\{ \begin{array}{l} u_{00}(X, T_0, T_1, T_2) \\ w_{10}(X, T_0, T_1, T_2) \end{array} \right\} &= C_8(T_1, T_2) \left\{ \begin{array}{l} y_1(X) \\ y_4(X) \end{array} \right\} e^{(i\omega_n T_0)} + C.C.
 \end{aligned}
 \tag{ج-۱۴}$$

$$\begin{cases} u_{11}(X, T_0, T_1) \\ w_{01}(X, T_0, T_1) \end{cases} = \begin{cases} au_{21}(X) \\ aw_{31}(X) \end{cases} e^{i(\omega_{ax} + \omega_r)T_0} + \begin{cases} au_{22}(X) \\ aw_{32}(X) \end{cases} e^{i(\omega_{ax} - \omega_r)T_0} + C.C.$$

$$\begin{cases} u_{01}(X, T_0, T_1) \\ w_{11}(X, T_0, T_1) \end{cases} = \begin{cases} au_{11}(X) \\ aw_{41}(X) \end{cases} e^{i(\omega_{ax} + \omega_r)T_0} + \begin{cases} au_{12}(X) \\ aw_{42}(X) \end{cases} e^{i(\omega_{ax} - \omega_r)T_0} + \begin{cases} au_{13}(X) \\ aw_{43}(X) \end{cases} + C.C. \quad (15-ج)$$

با جایگذاری روابط (ج-۱۵) و (ج-۱۶) در معادلات (ج-۱۱) و (ج-۱۲) جملات سکولار معادلات دوم و

سوم مرتبه ۳ به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} & -72. Ks \beta X \left(\frac{\partial}{\partial T1} C4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) + 3. Ihs^2 \beta Gs1 B8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y44 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw31 \right) \omega_r \\ & + 3. Ihs^2 \beta Gs1 B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw31 \right) \omega_r - 9. Ihs^2 e \beta Gs1 \left(\frac{\partial^2}{\partial T1^2} C4 \right) \omega_r y2 \\ & + 3. Ihs^2 \beta Gs1 X^2 C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y2 \right) + 3. Ihs^2 \beta Gs1 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw42 \right) B4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) \\ & + 3. Ihs^2 \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) B4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) \\ & + 3. Ihs^2 \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \\ & + 3. Ihs^2 \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw46 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \\ & + 3. Ihs^2 \beta Gs1 C8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw34 \right) \omega_r \\ & + 3. Ihs^2 \beta Gs1 C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw34 \right) \omega_r \\ & + 3. Ihs^2 \beta Gs1 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw46 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) + 9. hs^2 e \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial T2} C4 \right) \omega_r^2 y2 \\ & + 4. Ihs^2 \beta X C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) - 4. hs^2 C4 y2 - 36. I Ks \beta B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) aw42 \omega_r \\ & - 36. Ks \beta \left(\frac{\partial}{\partial T2} C4 \right) y2 - 3. hs^2 Gs0 C4 y2 - 36. Ks X^2 C4 y2 \\ & - 36. Ks X^2 C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) + 6. hs^2 \beta Gs1 X \left(\frac{\partial}{\partial T1} C4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y2 \right) \\ & + 4. Ihs^2 \beta B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) \omega_r + 4. Ihs^2 \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw42 \right) B4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) \\ & + 4. Ihs^2 \beta C8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw34 \right) \omega_r + 4. Ihs^2 \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw46 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \end{aligned} \quad (16-ج)$$

$$\begin{aligned}
& + 4. I h s^2 \beta C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 3 4 \right) \omega_r + 4. I h s^2 \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 4 6 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) \\
& + 4. I h s^2 \beta B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 3 1 \right) \omega_r + 4. I h s^2 \beta B 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 3 1 \right) \omega_r \\
& + 4. I h s^2 \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 4 3 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) + 4. I h s^2 \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 4 3 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) \\
& + 4. I h s^2 \beta X^2 C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 2 \right) + 3. h s^2 G s 0 X C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 2 \right) - 72. K s \beta X \left(\frac{\partial}{\partial T 1} C 4 \right) y 2 \\
& + 3. I h s^2 \beta G s 1 X C 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 2 \right) + 3. I h s^2 e \beta G s 1 X^2 C 4 \omega_r^3 y 2 \\
& - 12. I h s^2 e G s 0 X \left(\frac{\partial}{\partial T 1} C 4 \right) \omega_r y 2 + 18. h s^2 e \beta G s 1 X \left(\frac{\partial}{\partial T 1} C 4 \right) \omega_r^2 y 2 \\
& - 36. K s \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 3 1 \right) B 8 y 4 4 - 36. K s B 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 3 \right) a w 4 2 \\
& - 6. I h s^2 e G s 0 \left(\frac{\partial}{\partial T 2} C 4 \right) \omega_r y 2 + 3. h s^2 e G s 0 X^2 C 4 \omega_r^2 y 2 \\
& - 36. I K s \beta X^2 C 4 \omega_r y 2 - 3. I h s^2 \beta G s 1 C 4 \omega_r y 2 - 36. K s C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) a w 4 6 \\
& - 36. I K s \beta C 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) a w 4 6 - 36. K s \beta \left(\frac{\partial}{\partial T 2} C 4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) \\
& + 4. h s^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 3 1 \right) B 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 4 \right) + 4. h s^2 B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 3 1 \right) \\
& + 4. h s^2 \beta \left(\frac{\partial}{\partial T 2} C 4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 2 \right) + 4. h s^2 X^2 C 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 2 \right) \\
& + 4. h s^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 4 2 \right) B 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 3 \right) + 4. h s^2 B 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 3 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 4 2 \right) \\
& + 4. h s^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 4 6 \right) C 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) + 4. h s^2 C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 4 6 \right) \\
& + 4. h s^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 4 3 \right) C 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) + 4. h s^2 C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 3 4 \right) \\
& + 4. h s^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 3 4 \right) C 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 \right) + 4. h s^2 C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 4 3 \right) \\
& - 36. I K s \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 3 4 \right) \omega_r C 8 y 4 - 36. K s \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 3 4 \right) C 8 y 4 \\
& - 36. K s C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) a w 4 3 + 3. h s^2 G s 0 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 4 6 \right) C 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) \\
& + 3. h s^2 G s 0 C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 4 6 \right) + 3. h s^2 G s 0 C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 3 4 \right) \\
& + 3. h s^2 G s 0 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 3 4 \right) C 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 \right) + 3. h s^2 G s 0 B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 3 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3. hs^2 Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw31 \right) B8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y44 \right) + 3. hs^2 Gs0 X^2 C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y2 \right) \\
& + 3. hs^2 \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial T2} C4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y2 \right) + 8. hs^2 \beta X \left(\frac{\partial}{\partial T1} C4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y2 \right) \\
& + 3. hs^2 Gs0 B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw42 \right) + 3. hs^2 Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) \\
& + 3. hs^2 Gs0 C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw43 \right) + 3. hs^2 Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \\
& - 3. hs^2 e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T1^2} C4 \right) y2 + 4. hs^2 X C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) + 4. hs^2 \beta \left(\frac{\partial}{\partial T1} C4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) \\
& - 4. I hs^2 \beta C4 \omega_r y2 - 36. I Ks \beta X^2 C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \\
& + 3. I hs^2 \beta Gs1 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw43 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) - 36. I Ks \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} aw31 \right) \omega_r B8 y44 \\
& - 36. I Ks \beta C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) aw43 + 3. hs^2 \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial T1} C4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -72. I \beta Gs1 B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) \omega_r - 144. I Ks \beta B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) \omega_r \\
& - 72. I Ks \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) \omega_r B4 y22 - 72. I Ks \beta B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y22 \right) aw42 \omega_r \\
& - 72. I Ks \beta C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) aw43 - 72. I Ks \beta C4 \omega_r y2 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) \\
& - 72. I \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) - 144. I Ks \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \\
& - 72. Gs0 B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw31 \right) - 144. Ks B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw31 \right) \\
& - 144. Ks C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw34 \right) - 72. Gs0 C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw34 \right) \\
& + 48. B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) aw42 + 48. C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) aw43 - 96. C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw34 \right) \\
& - 96. C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au16 \right) + 48. \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw34 \right) C8 y4 + 48. C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) aw46 \\
& - 96. \left(\frac{\partial}{\partial X} au12 \right) B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) - 96. \left(\frac{\partial}{\partial X} au16 \right) C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \\
& - 96. \left(\frac{\partial}{\partial X} aw34 \right) C8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y1 \right) - 72. Ks \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) B4 y22
\end{aligned}$$

(17-ج)

$$\begin{aligned}
& - 72. Ks B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y22 \right) aw42 - 144. Ks \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) \\
& - 72. Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) - 72. I Ks \beta au21 \omega_r B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \\
& - 72. I Ks \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} au21 \right) \omega_r B8 y44 - 72. I \beta Gs1 C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw34 \right) \omega_r \\
& - 144. I Ks \beta C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw34 \right) \omega_r + 48. I \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} aw46 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \\
& + 48. I \beta C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw34 \right) \omega_r + 48. I \beta C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) aw46 \\
& - 96. I \beta C8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw34 \right) \omega_r - 96. I \beta C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw34 \right) \omega_r \\
& + 48. I \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw34 \right) \omega_r C8 y4 - 96. I \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} au16 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \\
& - 96. I \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au16 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \\
& - 216. Gs0 C4^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \\
& - 96. I \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} au12 \right) B4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) - 96. I \beta B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au12 \right) \omega_r \\
& - 96. I \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} au13 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) - 96. I \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au13 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \\
& + 48. I \beta aw42 \omega_r B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) + 48. I \beta C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) aw43 \\
& + 48. C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) C8 y4 B8 y44 - 96. I \beta B8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y11 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw31 \right) \omega_r \\
& - 96. I \beta B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y11 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw31 \right) \omega_r + 48. I \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw31 \right) \omega_r B8 y44 \\
& - 72. Ks \left(\frac{\partial}{\partial X} au21 \right) B8 y44 - 72. Ks B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) au21 - 72. Ks \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 y2 \\
& - 72. Ks C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) aw43 - 72. Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \\
& - 144. Ks \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) - 72. Ks \left(\frac{\partial}{\partial X} aw46 \right) C4 y2 \\
& - 72. Ks C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) aw46 - 72. Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw46 \right) C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \\
& - 144. Ks \left(\frac{\partial}{\partial X} aw46 \right) C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) - 6. I hs^2 \beta Gs1 B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au21 \right) \omega_r \\
& - 6. I hs^2 \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial X} au21 \right) \omega_r B8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y44 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 6. I h s^2 \beta G s 1 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 4 6 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 2 \right) \\
& - 6. I h s^2 \beta G s 1 C 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 4 6 \right) \\
& - 6. I h s^2 \beta G s 1 B 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 2 2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 4 2 \right) \omega_r \\
& - 6. I h s^2 \beta G s 1 B 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 2 2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 4 2 \right) \\
& - 6. I h s^2 \beta G s 1 C 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 4 3 \right) \\
& - 6. I h s^2 \beta G s 1 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 4 3 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 2 \right) \\
& - 18. h s^2 G s 0 C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) B 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 4 \right) \\
& - 24. I h s^2 \beta B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 4 \right) C 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) \\
& - 18. I h s^2 \beta G s 1 C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) B 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 4 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) \\
& - 144. I K s \beta C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) C 8 y 4 B 8 y 4 4 \\
& - 18. I h s^2 \beta G s 1 B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 4 \right) C 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) \\
& - 24. I h s^2 \beta C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) B 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 4 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) \\
& - 6. I h s^2 \beta G s 1 C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a u 2 4 \right) \omega_r \\
& - 6. I h s^2 \beta G s 1 \left(\frac{\partial}{\partial X} a u 2 4 \right) \omega_r C 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 \right) \\
& - 18. I h s^2 \beta G s 1 C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 4 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) \\
& + 48. I \beta C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) C 8 y 4 B 8 y 4 4 - 72. I \beta G s 1 C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) C 8 y 4 B 8 y 4 4 \\
& - 24. I h s^2 \beta C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 4 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) \\
& - 18. h s^2 G s 0 B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 4 \right) C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) C 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 \right) \\
& - 18. h s^2 G s 0 C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 4 \right) C 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) \\
& - 144. K s C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) B 8 y 4 4 - 144. K s B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 4 \right) C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) C 8 y 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 72. Gs0 B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) C8 y4 \\
& - 72. Gs0 C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) B8 y44 - 216. e \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial T2} C4 \right) \omega_r^2 y3 \\
& + 144. I e Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial T2} C4 \right) \omega_r y3 + 48. C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw34 \right) \\
& + 48. \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) + 48. \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \\
& - 216. I \beta Gs1 B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) C4^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \\
& - 108. I \beta Gs1 C4^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right)^2 B4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) \\
& - 288. I \beta B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) C4^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \\
& - 6. hs^2 Gs0 B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au21 \right) - 6. hs^2 Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} au21 \right) B8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y44 \right) \\
& - 6. hs^2 Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} au24 \right) C8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y4 \right) - 6. hs^2 Gs0 C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au24 \right) \\
& - 6. hs^2 Gs0 C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw46 \right) - 6. hs^2 Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw46 \right) C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y2 \right) \\
& - 288. C4^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) - 108. Gs0 C4^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right)^2 B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) \\
& - 6. hs^2 Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y22 \right) - 6. hs^2 Gs0 B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y22 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw42 \right) \\
& - 6. hs^2 Gs0 C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw43 \right) - 6. hs^2 Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y2 \right) \\
& - 72. Ks \beta X \left(\frac{\partial}{\partial T1} C4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) - 72. I Ks \beta C4 \omega_r y2 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw46 \right) \\
& - 72. I Ks \beta C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) aw46 - 144. I Ks \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} aw46 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \\
& - 72. I \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw46 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) + 48. I \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) B4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) \\
& + 48. I \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) - 96. B4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y33 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au12 \right) \\
& - 96. \left(\frac{\partial}{\partial X} au13 \right) C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) - 96. C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au13 \right) \\
& - 96. B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y11 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw31 \right) - 96. \left(\frac{\partial}{\partial X} aw31 \right) B8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y11 \right) \\
& + 48. \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw31 \right) B8 y44 + 48. B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) C8 y4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 48. C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) B8 y44 + 48. I \beta B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw31 \right) \omega_r \\
& + 48. I \beta C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) B8 y44 \\
& - 144. I Ks \beta C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) B8 y44 \\
& - 72. I \beta Gs1 C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) B8 y44 \\
& - 72. I \beta Gs1 B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) C8 y4 \\
& - 144. I Ks \beta B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) C8 y4 - 72. I Ks \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} au24 \right) \omega_r C8 y4 \\
& - 72. I Ks \beta au24 \omega_r C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) - 72. I \beta Gs1 aw42 \omega_r B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) \\
& - 144. I Ks \beta aw42 \omega_r B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) - 8. I hs^2 \beta B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y22 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw42 \right) \omega_r \\
& - 8. I hs^2 \beta B4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y22 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw42 \right) - 8. I hs^2 \beta C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw43 \right) \\
& - 8. I hs^2 \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y2 \right) - 144. I Ks \beta C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) aw43 \\
& - 72. I \beta Gs1 C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) aw43 - 72. I \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial X} au16 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \\
& - 72. I \beta Gs1 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au16 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) - 8. I hs^2 \beta B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au21 \right) \omega_r \\
& - 8. I hs^2 \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} au21 \right) \omega_r B8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y44 \right) - 144. I Ks \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw34 \right) \omega_r C8 y4 \\
& - 72. I \beta Gs1 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw34 \right) \omega_r C8 y4 - 144. I \beta C4^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right)^2 B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) \omega_r \\
& - 24. hs^2 C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \\
& - 144. Ks C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) C8 y4 B8 y44 \\
& - 24. hs^2 C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) B8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y44 \right) \\
& - 24. hs^2 B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) C8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y4 \right) \\
& - 72. Gs0 C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) C8 y4 B8 y44 - 72. I \beta Gs1 \left(\frac{\partial}{\partial X} au13 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \\
& - 72. I \beta Gs1 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au13 \right) C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) - 8. I hs^2 \beta C4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw46 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 8. I h s^2 \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 46 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 2 \right) - 72. I \beta G s 1 C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) a w 46 \\
& - 144. I K s \beta C 4 \omega_r \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right) a w 46 - 72. I \beta G s 1 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a u 12 \right) B 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 33 \right) \\
& - 72. I \beta G s 1 B 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 33 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} a u 12 \right) \omega_r - 8. I h s^2 \beta \left(\frac{\partial}{\partial X} a u 24 \right) \omega_r C 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 4 \right) \\
& - 8. I h s^2 \beta C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a u 24 \right) \omega_r + 216. I e \beta G s 1 \left(\frac{\partial^2}{\partial T 1^2} C 4 \right) \omega_r y 3 \\
& - 72. I \beta G s 1 C 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 34 \right) \omega_r - 72. I \beta G s 1 C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 34 \right) \omega_r \\
& - 144. I K s \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 31 \right) \omega_r B 8 y 44 - 72. I \beta G s 1 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 31 \right) \omega_r B 8 y 44 \\
& - 72. I \beta G s 1 B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 11 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 31 \right) \omega_r \\
& - 72. I \beta G s 1 B 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 11 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 31 \right) \omega_r - 72. K s C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 4 \right) a u 24 \\
& - 72. K s \left(\frac{\partial}{\partial X} a u 24 \right) C 8 y 4 + 48. \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 46 \right) C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) - 72. K s \beta \left(\frac{\partial}{\partial T 1} C 4 \right) y 2 \\
& - 72. K s \beta \left(\frac{\partial}{\partial T 2} C 4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} y 2 \right) - 72. K s \beta \left(\frac{\partial}{\partial T 1} C 4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) \\
& + 144. I e G s 0 X \left(\frac{\partial}{\partial T 1} C 4 \right) \omega_r y 3 - 216. e \beta G s 1 X \left(\frac{\partial}{\partial T 1} C 4 \right) \omega_r^2 y 3 \\
& + 48. I \beta B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 44 \right) C 4 \omega_r \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) C 8 y 4 - 72. K s \beta X \left(\frac{\partial}{\partial T 1} C 4 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} y 2 \right) \\
& - 72. G s 0 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 31 \right) B 8 y 44 - 144. K s \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 31 \right) B 8 y 44 \\
& - 72. G s 0 B 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 11 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 31 \right) - 72. G s 0 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 31 \right) B 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 11 \right) \\
& - 72. G s 0 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 34 \right) C 8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 1 \right) - 72. G s 0 C 8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 34 \right) \\
& - 72. G s 0 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 34 \right) C 8 y 4 - 144. K s \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 34 \right) C 8 y 4 \\
& - 8. h s^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} a w 42 \right) B 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 22 \right) - 8. h s^2 B 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 22 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a w 42 \right) \\
& - 144. K s B 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 33 \right) a w 42 - 72. G s 0 B 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 33 \right) a w 42 \\
& - 72. G s 0 \left(\frac{\partial}{\partial X} a u 12 \right) B 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 33 \right) - 72. G s 0 B 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 33 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a u 12 \right) \\
& - 72. G s 0 C 4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y 3 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} a u 13 \right) - 72. G s 0 \left(\frac{\partial}{\partial X} a u 13 \right) C 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y 3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 72. Gs0 C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au16 \right) - 72. Gs0 \left(\frac{\partial}{\partial X} au16 \right) C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \\
& - 8. hs^2 C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw43 \right) - 8. hs^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw43 \right) C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y2 \right) \\
& - 72. Gs0 C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) aw43 - 144. Ks C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) aw43 \\
& - 8. hs^2 C4 \left(\frac{\partial}{\partial X} y2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} aw46 \right) - 8. hs^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} aw46 \right) C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y2 \right) \\
& - 72. Gs0 C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) aw46 - 144. Ks C4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) aw46 \\
& - 8. hs^2 B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au21 \right) - 8. hs^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} au21 \right) B8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y44 \right) \\
& - 8. hs^2 C8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} au24 \right) - 8. hs^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} au24 \right) C8 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y4 \right) \\
& + 72. e Gs0 \left(\frac{\partial^2}{\partial T1^2} C4 \right) y3 - 72. Ks \beta \left(\frac{\partial}{\partial T2} C4 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y3 \right) \\
& - 144. C4^2 \left(\frac{\partial}{\partial X} y3 \right)^2 B4 \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} y33 \right) - 144. I Ks \beta B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw31 \right) \omega_r \\
& - 72. I \beta Gs1 B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw31 \right) \omega_r + 48. B8 \left(\frac{\partial}{\partial X} y44 \right) \left(\frac{\partial}{\partial X} aw31 \right)
\end{aligned}$$

منابع

- [1] Wang G., Veeramani S. and Wereley N.M. (2000) “Analysis of Sandwich Plates with Isotropic Face Plates and a Viscoelastic Core” **J. of Vibration and Acoustics**, 122, 3, pp. 305-312.
- [2] Montgomery T.Sh., William J.M. (2005), “**Introduction to polymer viscoelasticity**”, John Wiley & Sons, New York.
- [3] Riande E., Diaz-Calleja R., Prolongo M.G., Masegosa R.M. and Salom C. (2000), “**Polymer Viscoelasticity; Stress and Strain in practice**”, Marcel Dekker INC., New York.
- [4] Nhan P.T. (1956), “**Understanding viscoelasticity; Basic of rheology**”, Springer, Berlin.
- [5] Lakes R. (2009), “**Viscoelastic materials**”, Cambridge University Press, New York.
- [6] Roylance D. (2001), “**Engineering Viscoelasticity**”, Cambridge, MA 02139.
- [7] Brinson H.F., Brinson L.C. (2008), “**Polymer engineering science and viscoelasticity**”, Springer, New York.
- [8] Christensen R. M. (1982), “**Theory of Viscoelasticity: An Introduction**”, Academic Press, New York.
- [9] Nayfeh A.H., Pai P.F. (2004), “**Linear and nonlinear structural mechanics**”, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- [10] Hagedorn P., DasGupta A. (2007), “**Vibrations and waves in continuous mechanical systems**”, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- [11] Ventsel E., Krauthammer T. (2001), “**Thin plates and shells: theory, analysis, and applications**”, New York.
- [12] Nishawala V.V., (2011), Master Thesis, “A study of large deflection of beams and plates”, Mech. Depart., Rutgers , The State University of New Jersey.
- [13] Malatkar P., (2003), PhD. Thesis, “Nonlinear vibrations of cantilever beams and plates”, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.
- [14] Evan-Iwanowski R.M. (1976), “**Resonance oscillations in mechanical systems**”,

Elsevier Science, London.

[15] Nayfeh A.H., Mook D.T. (1979), “**Nonlinear oscillations**”, John Wiley & Sons, New York.

[16] Moon F.C. (1987), “**Chaotic Vibrations: An introduction for applied scientists and engineers**”, John Wiley & Sons, New York.

[17] Wang C. M., Reddy J. N. and Lee K. H. (2000), “**Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions**”, Elsevier, Amsterdam - Lausanne - New York – oxford – Shannon – Singapore - Tokyo.

[18] Chu H-H, Herrmann G. (1956) “Influence of large amplitude on free flexural vibrations of rectangular elastic plates” **J. Appl Mech.**, 23, pp. 532-540.

[19] Yamaki N. (1961) “Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates” **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, 41, 12, pp. 501-510.

[20] Leissa A. W. (1969), “**Vibration of plates**”, NASA SP-160, Office of Technology Utilization, Washington, DC.

[21] Robertson S. R. (1971) “Forced axisymmetric motion of circular, viscoelastic plates” **Journal of Sound and vibration**, 17, 3, pp. 363-381.

[22] Kung G., Pao Y.-H. (1972) “Nonlinear flexural vibrations of a clamped circular plate” **Journal of Applied Mechanics**, 39, 4, pp. 1050-1054.

[23] Rehfield L. (1974) “Large amplitude forced vibrations of elastic structures” **AIAA Journal**, 12, 3, pp. 388-390.

[24] Sridhar S., Mook D., Nayfeh A. (1975) “Non-linear resonances in the forced responses of plates, part 1: Symmetric responses of circular plates” **Journal of Sound and Vibration**, 41, 3, pp. 359-373.

[25] Alwar R. S. and Nath Y. (1977) “Non-Linear dynamic response of circular plates subjected to transient loads” **Journal of the Franklin Institute**, 303, 6, pp.527-542.

[26] Sridhar S., Mook D., Nayfeh A. (1978) “Non-linear resonances in the forced

responses of plates, part II: asymmetric responses of circular plates” **Journal of Sound and Vibration**, 59, 2, pp. 159-170.

[27] Nagaya K. (1979) “Vibration of a viscoelastic plate having a circular outer boundary and an eccentric circular inner boundary for various edge conditions” **Journal of Sound and vibration**, 63, 1, pp.73-85.

[28] Bailey P. B. and chen P. J. (1987) “Natural modes of vibration of linear viscoelastic circular plates with free edges” **International Journal of Solids and Structures**, 23, 6, pp. 785-795.

[29] Wang Y. Z. and Tsai T. J. (1988) “Static and dynamic analysis of a viscoelastic plate by the finite element method” **Journal of Applied Acoustics**, 25, 2, pp. 77-94.

[30] Weisensel G. N. (1989) “Natural frequency information for circular and annular plates” **Journal of Sound and Vibration**, 133, 1, pp. 129-137.

[31] Cederbaum G. and Aboudi J. (1989) “Dynamic response of viscoelastic laminated plates” **Journal of Sound and Vibration**, 133, 2, pp. 55-64.

[32] Aboudi J., Cederbaum G., Elishakoff I. (1990) “Dynamic stability analysis of viscoelastic plates by Lyapunov exponents” **Journal of Sound and Vibration**, 139, 3, pp. 459-467.

[33] Hadian J. and Nayfeh A. H. (1990) "Modal interaction in circular plates" **Journal of Sound and Vibration**, 142, 2, pp. 279-292.

[34] Cederbaum G. and Drawshi M. (1994) “Multiple equilibrium states in the analysis of viscoelastic nonlinear circular plates” **International Journal of Mechanical Sciences**, 36, 2, pp. 149-155.

[35] Liew K. M., Xiang Y., Kitipornchai S. (1995) “Research on thick plate vibration: a literature survey” **Journal of Sound and Vibration**, 180, 1, pp. 163-176.

[36] Romanelli E., Rossi R. E., Laura P. A. A. and Gutierrez R. H. (1998) "Transverse vibrations of a circular annular plate with an intermediate circular support and a free inner edge" **Journal of Sound and Vibration**, 212, 3, pp. 564-571.

[37] Esmailzadeh E., Jalali M. A. (1999) “Nonlinear oscillation of viscoelastic

rectangular plates” **Journal of Nonlinear Dynamics**, 18, 4, pp. 311-319.

[38] Touzé C., Thomas O., Chaigne A. (2002) “Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part 1: Theory” **Journal of Sound and Vibration**, 258, 4, pp. 649-676.

[39] Thomas O., Touzé C., Chaigne A. (2003) “Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part II: experiments” **Journal of Sound and Vibration**, 265, 5, pp. 1075-1101.

[40] Lee W., Yeo M. (2003) “Non-linear interactions in asymmetric vibrations of a circular plate” **Journal of sound and vibration**, 263, 5, pp. 1017-1030.

[41] Salehi M. and Aghaei H. (2005) “Dynamic relaxation large deflection analysis of non-axisymmetric circular viscoelastic plates” **Journal of Computers & Structures**, 83, 23, pp. 1878-1890.

[42] Allahverdizadeh A., Naei M. H., Rastgo A. (2006) “The effects of large vibration amplitudes on the stresses of thin circular functionally graded plates” **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, 3, 2, pp. 161-174.

[43] شوشتری ع. و اسماعیلزاده خادم س.، (۱۳۸۵) "ارتعاشات غیرخطی یک صفحه مستطیل شکل ویسکوالاستیک براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول" **مجله مکانیک و هوافضا**، شماره ۲، دوره ۱، ص.ص. ۷۷-۹۴.

[44] Gupta A. K. (2010) “Vibration analysis of visco-elastic rectangular plate with thickness varies linearly in one and parabolically in other direction” **Advanced Studies in Theoretical Physics**, 4, 15, pp. 743-758.

[45] Gupta A. K., Kumar L. (2010) “Vibration of non-homogeneous visco-elastic circular plate of linearly varying thickness in steady state temperature field” **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, 48, 1, pp. 255-266.

[46] Assie A. E., Eltahir M. A. and Mahmoud F. F. (2011) “Behavior of a viscoelastic composite plates under transient load” **J. Mech. Sci. Technol.**, 25, 5, pp. 1129-1140.

[47] جلالی ا. و اسماعیل زاده خادم س.، (۱۳۹۱) "تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی میکروورق ویسکوالاستیک نانو کامپوزیتی تحت میدان الکترواستاتیک" **مجله مکانیک هوافضا**، شماره ۸، دوره ۳، ص.ص. ۵۱-۶۸

[48] Khalfi B. and Ross A. (2013) "Transient response of a plate with partial constrained viscoelastic layer damping" **International Journal of Mechanical Sciences**, 68, pp. 304-312.

[49] Shariyat M., Jafari A. A. and Alipour M. M. (2013) "Investigation of the thickness variability and material heterogeneity effects on free vibration of the viscoelastic circular plates" **Journal of Acta Mechanica Sinica**, 26, 1, pp. 83-98.

[50] Chen C.-F., Li I.-W. (2014) "Linear Analytical Solutions of Mechanical Sensitivity in Large Deflection of Unsymmetrically Layered Piezoelectric Plate under Pretension" **Journal of Advances in Mechanical Engineering**, 6, pp. 403827.

[51] Ghaheri A., Nosier A. (2015) "Nonlinear forced vibrations of thin circular functionally graded plates" **Journal of Science and Technology of Composite**, 1, 2, pp. 1-10.

[52] Younesian D. and Norouzi H. (2015) "Frequency analysis of the nonlinear viscoelastic plates subjected to subsonic flow and external loads" **Journal of Thin-Walled Structures**, 92, pp. 65-75.

[53] Swaminathan K., Naveenkumar D., Zenkour A., Carrera E. (2015) "Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates—A state-of-the-art review" **Journal of Composite Structures**, 120, pp. 10-31,.

[54] Amabili M. (2016) "Nonlinear vibrations of viscoelastic rectangular plates" **Journal of Sound and Vibration**, 362, pp. 142-156.

[55] Amabili M., (2008), "**Nonlinear vibrations and stability of shells and plates**", Cambridge University Press, New York.

[56] Boresi A. P., Chong K.P., (2000) "**Elasticity in engineering mechanics**" Second Edition, John Wiley & Sons, New York.

- [57] Hosseini-Hashemi S., Bedroud M., Nazemnezhad R. (2013) “An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity” **Journal of Composite Structures**, 103, pp. 108-118.
- [58] Rao S. S., (2007), “**Vibration of continuous systems**”, John Wiley & Sons, New Jersey.
- [59] Nayfeh A.H. (1993), “**Introduction to perturbation techniques**”, John Wiley & Sons, New York.
- [60] Ansys user manual
- [61] Marynowski K., (2005) “**Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web**” first ed., Springer, 38, Berlin.
- [62] Liu C.-F. and G.-T. Chen (1995) "A simple finite element analysis of axisymmetric vibration of annular and circular plates" **International journal of mechanical sciences**, **37**, 8, pp. 861-871.
- [63] Wang G., (2001), PhD. thesis, “Analyses of Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores”, Mech. depart. University of Maryland.

Abstract

In this research, the mathematical solution for axisymmetric vibration of annular viscoelastic plates with moderately large deformation under transverse load has been taken. The viscoelastic behavior has been assumed the standard linear solid in shear and elastic in bulk. The governing equations which are four coupled nonlinear partial differential equations with variable coefficients have been extracted using the Hamilton's principle by considering the first order shear deformation theory. The perturbation technique has been used for determining frequencies and transient response. The numerical analysis has been done by using ANSYS software. The sensitivity analysis has been performed and the effects of the geometrical and materials parameters on the frequency and response have been studied. Also a comparison between the classical and shear deformation theory and a discussion about the nonlinearity effect on the results has been presented.

Key words: annular viscoelastic plate, First order shear deformation theory, Perturbation theory, Moderately large deformation



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical & Mechatronics Engineering

M Sc Thesis Mechanical Engineering Applied Mechanics

**Vibrations analysis of an axisymmetric circular viscoelastic
plate with moderately large deformation using first order
shear deformation theory**

By: Reza Valizadeh

Supervisor:

Dr. Hamid Reza Eipakchi

September 2016