
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده: مکانیک

گروه: طراحی جامدات

تحلیل دینامیکی استوانه جدار ضخیم تحت بار متحرک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

دانشجو: مهدی اسدیان

استاد راهنما :

حمیدرضا ایپک چی

پایان نامه ارشد جهت اخذدرجه کارشناسی ارشد

تیر ماه۱۳۸۸

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: مکانیک

گروه: طراحی جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مهدی اسدیان

تحلیل دینامیکی استوانه جدار ضخیم تحت بار متحرک با استفاده ازتئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

در تاریخ ۱۳۸۸/۴/۳۱ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه ....مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر حمید رضا ایپک چی		نام و نام خانوادگی:----	-----------
نام و نام خانوادگی:---------------------	-----------	نام و نام خانوادگی:----	-----------

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی:دکتر سید هادی قادری		نام و نام خانوادگی: دکتر حسن کیهانی	
نام و نام خانوادگی:دکترمحمد جواد مغربی			
نام و نام خانوادگی:----------	----------		
نام و نام خانوادگی:---------	----------		

تشکر و قدردانی:

خداوند را سپاس که نعمت زندگی و توان را به من عطا فرمود وحرکات هرچند اندک مرا برکت بخشید.اکنون که به یاری خداوند کارهای این پایان نامه به پایان رسیده است و با امید به اینکه این پایان نامه ،برای اینجانب شروعی مبارک بر تلاشی مداوم برای دستیابی به افقهای جدید در این زمینه باشد،برخود لازم می دانم که از زحمات عزیزانی که در راه انجام آن مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم،بویژه استاد ارجمند جناب آقای دکتر حمید رضا ایپک چی که از راهنمایی های خالصانه ایشان در انجام این پژوهش بهرمند شدم و از جناب آقایان دکترسید هادی قادری و دکتر محمدجواد مغربی که نظرات ارزشمندی در بهبود این تحقیق ابراز داشتند کمال تشکر را دارم،و همچنین از جناب آقای دکتر حسن کیهانی که در نشست بررسی این پایان نامه شرکت نمودند قدردانی می نمایم.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

تیرماه ۱۳۸۸

چکیده

در این تحقیق پاسخ دینامیکی یک استوانه الاستیک جدار ضخیم، تحت اثر بار متحرک مورد ارزیابی قرار گرفته است،میدان جابجایی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و معادلات حاکم بر حرکت پوسته استوانه ای جدار ضخیم با کمک اصل هامیلتون بدست آمده است.با استفاده از روش گالرکین معادلات المان محدود مساله،استخراج و به کمک تفاضلات محدود حل شده اند. با کمک نرم افزار Maple کد کامپیوتری این حل عددی نوشته و اجرا شده است. نتایج حاصل از این کد کامپیوتری با نتایج حاصل از تحلیل Abaqus مقایسه شده و تطابق خوب نتایج، نشان دهنده دقت روش انتخاب شده می باشد.

کلمات کلیدی: پاسخ دینامیکی،استوانه جدار ضخیم، بار متحرک، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، روش اجزای محدود،

فهرست

پیشگفتار

با انجام این پایان نامه سه هدف زیر تحقق می یابد:

۱-دست یابی به روشی جهت تبدیل تحلیل سه بعدی استوانه جدار ضخیم به تحلیل در یک بعد همانند تحلیل یک میله.

۲-نوشتن کد کامپیوتری مناسب جهت تحلیل،با استفاده از نرم افزار Maple

۳- مقایسه نتایج با انتخاب نرم افزار Abaqus ،جهت اعتبار بخشیدن به نتایج حاصل از Maple.

در فصل اول این پایان نامه پس از تعریف انواع تئوریهای پوسته ها ،مروری برتحقیقات مشابه انجام شده در این زمینه آورده شده است.در فصل دوم مطابق با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول میدان جابجایی تعریف شده و سپس با کمک از اصل هامیلتون معادلات حرکت پوسته استوانه ای جدار ضخیم حاصل می گردد که درانتهای این فصل در جدولی بصورت متمرکز آورده شده است.در فصل سوم روش ریاضی Mirsky-Herrmann جهت حل معادلات حرکت پوسته استوانه ای جدار ضخیم توضیح داده شده است.در فصل چهارم با استفاده از روش گالرکین معادلات اجزاء محدود پوسته بر اساس روابط Mirsky-Herrmann استخراج شده و بصورت کلی $[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{X\}=\{F(t)\}$ تبدیل شده اند.با تعریف شرایط مرزی پوسته که دو سرگیردار می باشد، نوع بار اعمالی به پوسته یعنی بار پله ای ،مقادیر ماتریسهای جرم $[M]$ و سختی $[K]$ و بردار نیرو $\{F(t)\}$ جهت این مسئله بدست آورده شده است.در فصل پنجم در ابتدا روشهای مختلف حل عددی جهت حل معادلات بیان شده ،سپس با انتخاب روش عددی تفاضلات مرکزی کد کامپیوتری جهت استفاده در نرم افزار Maple نوشته شده است سپس با انتخاب نرم افزار Abaqus ،نتایج با یکدیگر مقایسه و مورد تحلیل قرارگرفته شده است ،که تطابق خوب نتایج نشان دهنده صحت روش بکار گرفته شده می باشد.

پیشگفتار

با انجام این پایان نامه سه هدف زیر تحقق می یابد:

۱-دست یابی به روشی جهت تبدیل تحلیل سه بعدی استوانه جدار ضخیم به تحلیل در یک بعد همانند تحلیل یک میله.

۲-نوشتن کد کامپیوتری مناسب جهت تحلیل،با استفاده از نرم افزار Maple

۳- مقایسه نتایج با انتخاب نرم افزار Abaqus ،جهت اعتبار بخشیدن به نتایج حاصل از Maple.

در فصل اول این پایان نامه پس از تعریف انواع تئوریهای پوسته ها ،مروری برتحقیقات مشابه انجام شده در این زمینه آورده شده است.در ادامه در فصل دوم مطابق با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول میدان جابجایی تعریف شده و سپس با کمک از اصل هامیلتون معادلات حرکت پوسته استوانه ای جدار ضخیم حاصل می گردد که درانتهای این فصل در جدولی بصورت متمرکز آورده شده است.در فصل سوم روش ریاضی Mirsky-Herrmann جهت حل معادلات حرکت پوسته استوانه ای جدار ضخیم توضیح داده شده است.درادامه در فصل چهارم با استفاده از روش گالرکین معادلات اجزاء محدود پوسته بر اساس روابط Mirsky-Herrmann استخراج شده و بصورت کلی $[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{X\}=\{F(t)\}$ تبدیل شده اند.با تعریف شرایط مرزی پوسته که دو سرگیردار می باشد، نوع بار اعمالی به پوسته یعنی بار پله ای ،مقادیر ماتریسهای جرم $[M]$ و سختی $[K]$ و بردار نیرو $\{F(t)\}$ جهت این مسئله بدست آورده شده است.در فصل پنجم در ابتدا روشهای مختلف حل عددی جهت حل معادلات بیان شده ،سپس با انتخاب روش عددی تفاضلات مرکزی کد کامپیوتری جهت استفاده در نرم افزار Maple نوشته شده است.سپس با انتخاب نرم افزار Abaqus ،نتایج با یکدیگر مقایسه و مورد تحلیل قرارگرفته شده است ،که تطابق خوب نتایج نشان دهنده صحت روش بکار گرفته شده می باشد.

۱-۱ مقدمه :

اگرچه بررسی و مطالعه برروی رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای الاستیک بیش از چند قرن سابقه دارد،اماتحقیق برروی متن‌های مختلف این امر را آشکار می‌سازد که بیشترین کار منتشر شده، درحوزه تئوری پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک می‌باشد، واقعیت این است که پوسته یک جسم سه بعدی است. به علت نبودحل تحلیلی برای مدلهای سه بعدی در حالت کلی، از روشهای تقریبی برای حل استفاده شده و گاه محققان برای ارائه حل تحلیلی مجبور به اعمال قیود خاص یا ارائۀ حل تحلیلی در حالات خاص هستند.

محققان با انجام آزمایشات گوناگون به این مسئله پی بردند که استفاده از تئوری پوسته ی جدار نازک برای استوانه جدار ضخیم باعث بوجود آوردن خطا در تعیین فرکانس طبیعی می‌گردد، یعنی تئوری کلاسیک پوسته جدار نازک نمی‌تواند باعث دست یافتن به دقت کافی برای حل پوسته جدار ضخیم گردد.

پوسته ی جدار ضخیم بطور مشخص دارای اختلافاتی با پوسته جدار نازک می‌باشد که یکی از این اختلافات در تغییر شکل برشی عرضی[1] می‌باشد، به این معنا که در پوسته جدار ضخیم نمی‌توان اثر تغییر شکل برشی را نادیده فرض کرد.

در انواع بارهای وارده بروی پوسته جدار ضخیم، توزیع تنش شعاعی[2] در پوسته مهم و ضروری است . از طرف دیگر در آنالیز پوسته جدار ضخیم، خیز اولیه[3]نه تنها بروی نتایج ممان و تنش اثر می‌گذارد، بلکه باعث غیرخطی شدن توزیع تنش برشی عرضی در جهت ضخامت نیز می‌گردد. بنابراین با توجه به اختلافات گفته شده در بالا، طبیعی بنظر می‌رسد که تئوری پوسته‌های جدار نازک برای تحلیل پوسته جدار ضخیم دقت مناسبی ندارد.

---

[1] Transvers shear deformation.
[2] Radial stress.
[3] Initial deflection.

۱-۲ تئوریهای پوسته ها

الف -تئوری غشائی[۱]

یک غشا می‌تواند مسطح یا خمیده باشد و مشابه ورقی است که قابلیت تحمل فشار عرضی را دارد. نیروهای غشائی کاملاً مستقل از خمش درنظر گرفته می‌شود و آن را برای پوسته‌های مختلف از قبیل پوسته فلزی ـ بتن مسلح ـ فیلم صابون و ... می‌توان بکار برد.

در این تئوری فقط اثرتنش های صفحه ای در نظر گرفته می شود.

ب ـ تئوری خمشی [۱]

نظریه خمشی غالباً از حل تئوری غشائی استفاده می‌کند که در نواحی دارای تأثیرات ناپیوستگی تصحیح شده است. در واقع هدف این نظریه، آنالیز تنش‌ها و کرنش‌های ناشی از نیروهای لبه‌ای و یا بارگذاری متمرکز است که با تئوری غشایی امکان پذیر نمی‌باشد.

بطور کلی روابط تئوری غشائی از تعادل پوسته بدست می آید و تابع جنس پوسته نیست ولی روابط تئوری خمشی محدود به پوسته همگن و ایزوتروپ می باشد.

ج : تئوری تغییر شکل برشی [۱]

در ورقهای ضخیم در واقع این فرض که مقاطع مسطح عمود بر صفحه میانی پس از تغییر شکل همچنان عمود بر صفحهٔ میانی می‌مانند، در عمل صحیح نخواهد بود. با فرض اینکه خط عمود بر صفحه میانی بصورت مورب درآمده و چرخش داشته باشد ولی همچنان راست باقی بماند. می‌توان تغییر شکل رابصورت $U = u + z\psi$ تقریب زد که در آن u تغییر مکان صفحهٔ میانی و z در راستای ضخامت پوسته که مبدأ آن بروی صفحهٔ میانی قرار داردو ψ چرخش می‌باشد و U نیز جابجایی است.

۱-۳ مروری بر تحقیقات انجام شده

در سال۱۹۵۴ Mindlin [۲] تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[1] را با استفاده از فاکتور ضریب تصیح برشی بهبود بخشید. این فاکتور بخاطر جبران خطای این فرض بود که کرنش برشی ثابت، تنش برشی ثابت در ضخامت پوسته را ایجاد می کند و بنابراین ناقض صفر بودن تنش برشی در سطح آزاد می‌باشد. مقدار این ضریب تصیح برشی اغلب به خصوصیات مواد و پارامترهای فیزیکی و بارها وشرایط مرزی بستگی دارد.Reddy [۲] در ۱۹۸۴ پیشنهاد تئوری مرتبه دوم برای اصلاح وضعیت تنش برشی صفر در سطح آزاد را ارائه کرد. با تمام مطالعات و تحقیقات انجام شده، مرتبهٔ تئوریها افزایش پیدا کرده، فرمولها پیچیده شده بودند و با اندک افزایش در ارائه دقت، محاسبات آنها برای استفاده از کار عملی نامناسب می‌شدند.در سال۱۹۹۴ Siradas و همکارانش[۲] آزمایشی را انجام دادند که برمبنای آن اثر فاکتور چرخش و دمپینگ برای ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم بررسی شده بود. این کار با استفاده از روش اجزاء محدود و تئوری پوسته جدار ضخیم و با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی واینرسی چرخشی انجام شد. Sivada [۲]در سال ۱۹۹۵ روش مشابهی را برای ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه مخروطی شکل جدار ضخیم با تنش اولیه و اثر دمپینگ به کار برد. ارتعاشات سه بعدی استوانه توپر با سطح مقطع دایره در سال ۱۸۷۶ توسط Pochhammer [۲] و در سال ۱۸۸۹ توسط Chree [۲] بررسی شد که طول استوانه نامحدود فرض شده بود. درسال ۱۹۶۴ Mahan [۲]موفق به ارائه نتایج آزمایشگاهی برای فرکانسهای طبیعی استوانه الاستیک توپر با شرایط تکیه گاهی آزاد گردید و در همان سال با روش عددی تفاضلات محدود نتایج جدیدی بدست آورد و آنها را با نتایج تجربی مورد ارزیابی قرار داد.

سال۱۹۶۴ Johns,Bhuta [۳]سرعت رزونانس و پاسخ دینامیکی برای یک پوسته استوانه‌ای با طول نامحدودرا که تحت اثر یک رینگ فشاری که با سرعت ثابت در حرکت است در هر دو جهت شعاعی و محوری مورد بررسی قرار دادند. از معادلات Timoshenko -Love جهت مدل سازی استفاده شد.

---

[1] First order shear deformation theory(FSDT)

درسال ۱۹۹۰Chandrashekhara[۴] و همکاران تحلیل یک پوسته جدار ضخیم استوانه‌ای با مقطع دایره‌ای تحت اثر بار نامتقارن با تکیه‌گاههای آزاد برای هر دو انتها را انجام دادند.آنها با استفاده از تئوریهای الاستیک سه دسته معادلات جابجایی بدست آورده وبرای یک بار معین با خصوصیات و ضخامتهای مختلف نتایج را مورد بررسی قرار دادند.آنها همگرائی نتایج بدست آمده از تحلیل خود را با نتایج تئوری کلاسیک پوسته ها و تئوری تغییر شکل مقایسه نمودند.در سال ۱۹۹۴ Chou [۵] با در نظر گرفتن مدل استوانه توپر وجداسازی معادلات حرکت به دو تابع پتانسیل موج، مسئله ارتعاشات آزاد را برای شرایط مرزی در حالت نیروی برشی صفر و جابجائی محوری صفر در سطح انتهائی و تنش‌های سطحی صفر در سطح خمیده مورد ارزیابی قرار داد و فرکانسهای ارتعاشات طبیعی بدست آورد.

در سال۱۹۹۶ Shaker [۶] و همکاران پاسخ دینامیکی صفحات لایه‌ای ارتروپیک یک پوسته استوانه‌ای را مورد بررسی قرار داد. طول پوسته محدود وتکیه‌گاههای هر دو ابتدا و انتهای آن ساده فرض شده بود. او باتبدیل معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی مرتبه بالا به معادلات دیفرانسیلی معمولی، با ضرایب متغیر، بوسیله انتخاب حل بصورت سری‌های مثلثاتی در امتداد محوری و محیطی و سپس با استفاده از روش گالرکین به حل معادلات بدست آمده اقدام نمود.وی با حل عددی پوسته جدار ضخیم ارتروپیک و مقایسه نتایج حاصل با نتایج تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی نشان داد که این تئوری برای پوسته‌هایی با R/h بزرگتر از ۱۰ قابل قبول خواهد بود.

در سال۱۹۹۸ Matsunaga[۷] اثر تقریبهای مرتبه بالای، تغییر شکل برشی برروی فرکانس طبیعی یک سیلندر استوانه‌ای جدار ضخیم را مورد مطالعه قرار داد. معادله‌های دو بعدی از اصل هامیلتون مشتق شده است. او مبنای کار را براساس بسط سری‌های توانی مؤلفه‌های جابجائی قرار داد. او در این مقاله با توجه به اطمینان از دقت تئوریهای ارائه شده، همگرائی فرکانسهای طبیعی را بررسی کرده و نتایج آنرا با دیگر تئوریهای ارائه شده در این زمینه مقایسه کرد. تعیین اثر دینامیکی بار متحرک بروی سازه‌های الاستیک مخصوصاً برای پلها، یک مسئله مهم و پیچیده است و محققان زیادی جهت حل و

ارائه یک جواب قابل قبول تلاش داشته‌اند. از جمله آنها Michaltsos است [۸] که پاسخ یک تیر یک دهانه تحت بار دینامیکی با سرعتهای مختلف و دامنه ثابت را مورد بررسی قرار داد. او این آزمایش را به دو روش انجام داد.در روش اول یک بار با جرم Mg روی تیر که تحت اثر نیروی اجباری f(t) با سرعت v(t) در حرکت است ودر روش دوم یک تقریب نزدیک به ماشین که با نیروی اجباری f(t) و سرعت v(t) در حرکت است را مورد بررسی قرار داد. او سپس نتایج حاصل از هر دو آزمایش را با نتایج واقعی بدست آمده مقایسه نمود و مشاهده کرد نتایج بدست آمده از حالت دوم تنها ۰/۲ تا ۱/۵ درصد با نتایج واقعی متفاوت است.

Michaltsos در سال ۲۰۰۲[۹] تیر با پهنای ثابت تحت جرم متحرک با شتابهای مثبت و منفی را بررسی کرده است.علاوه بربار تک محوره متمرکز، بارهای دو محوره نیز مطالعه شده است.همچنین اثر میرایی نیز در تیر در نظر گرفته شده است.

در سال۲۰۰۲ Wuوهمکاران[۱۰] پاسخ ارتعاشات خمشی شعاعی تحت بار متحرک با المان تیر خمیده[1] را بررسی کردند. بجای توابع شکل پیچیده موجود، توابع شکل ساده ای که در ارتباط با جابجائی‌های چرخشی، مماسی، شعاعی المانهای تیر خمیده هستند بدست آمد. براساس روابط بین نیروهای گرهی با جابجائی‌های گرهی المان ، ماتریس سختی المان تعیین شد و براساس روابط بین انرژی سینیتک و سرعتهای گرهی، ماتریس جرم مشخص شد. پس از آن بر پاسخ دینامیکی تیر دایره ای با خم ثابت براساس حرکت باد در امتداد محیط بحث شد. علاوه بر تیر دایره ای ، تیرکمانی شکل ترکیبی، متشکل از اجزای کمان دایره‌ای و دو قطعه تیر مستیقم ساده مورد مطالعه قرار گرفت. تمامی نتایج با نتایج حل اجزاء محدود براساس المان تیر مستقیم مقایسه گردید و نتایج مشابهی بدست آمد. تأثیر سرعت حرکت، نیروهای گریز از مرکز، نیروی اصطکاک بر رفتار دینامیکی تیر دایره ای و تیرهای ترکیبی مورد بررسی قرار گرفت.

[1] Curved beam

Ganapathi وهمکاران[۱۱] در سال ۲۰۰۳ ارتعاشات آزاد یک پوسته کامپوزیتی استوانه ای غیردوار ،غیر ایزوتروپ را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا مورد مطالعه قرار دادند. با استفاده از روش اجزاء محدود، معادلات حاکم حل شده و اثرات ضخامت، طول، پارامترهای خروج از مرکز ، تعداد لایه‌ها برای یک پوسته غیردایره‌ای مورد مطالعه قرارگرفته است.با استفاده از بسط سری تیلور به عنوان تقریب حل، معادلات حاکم به فرم یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تبدیل و حل شده است.

در سال۲۰۰۴ Valsarajan وهمکاران [۱۲] آنالیز ارتعاشات آزاد صفحه‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالارا ارائه کردند. در این تحقیق از یک مدل اجزاء محدود بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم استفاده شده است و هدف، مطالعه رفتار خطی یا غیرخطی آنالیز ارتعاشات آزاد صفحات کامپوزیتی بوده است. آنها علت این تحقیق را کم بودن مقالات ارائه شده در آنالیز دینامیکی با دامنۀ بزرگ با استفاده از تئوریهای مرتبه بالا ذکر کرده‌اند و همچنین معتقد بودند اثر پارامترهای مختلف صفحه بر خطی یا غیرخطی بودن فرکانس اصلی ارتعاش تاکنون مطالعه نشده و آنها با انجام آزمایش به نتایج زیر دست یافتند.در هر دو حالت خطی یا غیرخطی با افزایش نسبت پهنا به ضخامت، فرکانسهای ارتعاشی افزایش می‌یابند؛ اثر حالت غیرخطی بودن صفحات که نسبت پهنا به ضخامت آن بزرگتر از ۴۰ باشد بخوبی قابل مشاهده است؛ همچنین وضعیت لبه‌ها نیز بر ارتعاشات فرکانسهای غیرخطی مؤثر می‌باشد. آنها از یک المان چهار گرهی جهت آنالیز ارتعاشات استفاده کردند. برای هر گره هفت درجه آزادی در نظر گرفته شده است. سپس اثر مواد ارتوتروپیک را مورد مطالعه قرار دادند و برای دو حالت متقارن و نامتقارن چیدمان لایه‌ها ، به این نتیجه رسیدند که در حالت خطی با افزایش تعداد لایه‌ها مقدار فرکانس بطور تدریجی زیاد می‌شوند اما در حالت نامتقارن مقدار فرکانس بطور ناگهانی از ۲ به ۴ لایه، افزایش می‌یابد و از آن پس با یک نرخ آرام افزایش پیدا می‌کند.

در سال۲۰۰۴ Nalchaie وهمکاران[۱۳]تحقیقی جهت بررسی فرکانسهای طبیعی یک صفحه کامپوزیتی چهارگوش با تکیه‌گاههای متفاوت در دو انتها انجام دادند. آنها از تئوری تغییر شکل برشی

مرتبه سوم استفاده کردند. با روش گفته شده، سری جدیدی از معادلات خطی حرکت برای صفحات چندلایه‌ای را استخراج کردند. در نهایت این معادلات با روش اجزاء محدود، تحلیل و فرکانسهای طبیعی آنها مشخص و نتایج حاصل، با نتایج صفحات تک لایه مقایسه شدند.

سال۲۰۰۴ Valsarajan وهمکاران[۱۴]رفتار صفحات کامپوزیتی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا تحت بار استاتیکی و با استفاده از یک المان چهارگرهی که هر گره دارای هفت درجه آزادی است بررسی واثرات پهنا ، ضخامت صفحه، جهت فیبرها ، تعداد لایه‌ها و شرایط مرزی را بر جابجائی و تنش را مطالعه کردند.

در سال۲۰۰۴ Lepikhin وهمکاران [۱۵]اثر فاکتور شدت تنش را در یک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم که دارای ترک است تحت بار دینامیکی مورد مطالعه قرار دادند. فرض آنها، تقارن محوری بوده و از معادلات مکانیک شکست مواد ترد استفاده کرده اند.

در سال۲۰۰۵Shufrin وهمکاران[۱۶]تحقیقی جهت ارتعاشات صفحات با ضخامت متغیر با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول Mindline و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا Reddy انجام دادند.

Renard وهمکاران[۱۷]در سال ۲۰۰۵ بررسی یک سیستم با طول نامحدود متشکل از ورقی در تماس با یک مایع را انجام داد.بار با سرعت ثابت مادون صوت از روی ورق عبور می کند.تحلیل به دو صورت ریاضی و عددی انجام شده است که در نهایت نتایج نشان دهنده همگرایی دو روش است.

Zhang و همکاران در سال ۲۰۰۶ [۱۸] مکانیزم پدیده تشدید و شرایط پدید آورنده آن را در سیستمهای پل وقطار بررسی کرده اند.تحقیقات به سه شیوه تئوری،عددی و آنالیز داده های تجربی انجام شده است.نتایج بیانگر این است که تشدید تحت تاثیر عرض پل، طول کل چقرمگی پل ،نحوه قرار گیری چرخهای قطار و همین طور فرکانس طبیعی وسیله نقلیه می باشد.با استفاده از نتایج این تحقیق می توان سرعت منجربه تشدید برای پل ها را محاسبه کرد.

در سال۲۰۰۶ Teng وهمکاران[۱۹]رفتار پوششهای FRP[1] را بر لوله‌های استوانه‌ای فولادی، تحت فشار محوری، مورد بررسی قرار دادند.فیبر و پوششهای FRP بطور وسیعی برای مرز بتن‌های تقویت شده استفاده می‌گردند.آنها با این تحقیق، نشان دادند که این پوششها مقاومت چشم‌گیری را به لوله در مقابل فشار محوری اضافه نموده اند. آنها همچنین این پوشش را برای یک پوسته استوانه‌ای جدار نازک که تحت اثر ترکیبی از فشارهای محوری و داخلی بودند آزمایش نمودند و به این نتیجه رسیدند که این پوششها اثر بسیار خوبی در تقویت یک پوسته ضعیف مثل پایه‌های یک پل در حال ریزش دارد و می‌تواند عمر آنها را افزایش دهند.

در سال ۲۰۰۷ کنترل ارتعاشات یک تیر با تکیه‌گاه ساده تحت اثر بار متحرک با استفاده از دمپرهای ویسکوزتوسطMuseros و همکاران [۲۰]ارائه گردید. در این مقاله روش دیگری برای کاهش ارتعاش تشدید تیر با تکیه‌گاه ساده تحت بار متحرک بصورت عددی تخمین زده شده است. روش مورد بحث بر اساس استفاده از دمپرهای ویسکوز متصل کننده تیر حامل بار (تیراصلی) به تیر کمکی که در زیر آن قرار گرفته، می‌باشد. مطالعه نشان می‌دهد که پاسخ تشدید تیر اصلی شدیداً با این نوع وسایل کاهش می‌یابد. تیرهای اصلی که به سیستم دمپینگ مجهز شده است در معرض تحریکات سینوسی قرار می‌گیرد و بصورتی تحلیل می‌شود که دمپرهایی که پاسخ تشدید را حداقل می‌کنند مشخص شوند. به همین طریق ثابت بهینه دمپرها برای حداقل کردن ارتعاشات عمودی بدست می‌آید. این پارامترها برروی پل واقعی راه‌آهن که در معرض ترافیک قرار گرفته اعمال شده و صحت آنها برای محدوده وسیعی از سرعتها مشخص شده است. در نهایت کارآیی سازه اولیه با کارآیی سازه‌ای که با این دمپرها بهینه شده است مقایسه می‌گردد.

در سال۲۰۰۶ Kandasamy وهمکاران[۲۱]به حل عددی برمبنای روش Rayleigh-Ritz برای تحلیل یک پوسته استوانه‌ای باز با یک نیروی متغیر پرداخته اند. آنها با استفاده از هندسه سطح میانی و تعریف یک زاویه که انحناء لبه‌ها، طول و ضخامت را دربر می‌گیرد، یک میدان جابجائی بدست

[1] Fibre-reinforced polymer

آوردند. برای حل از یک چند جمله‌ای مرتبه بالا استفاده نموده که در آن برای هر گره پنج درجه آزادی شامل سه مؤلفه مربوط به جابجایی در راستای مختصات قطبی و دو جابجایی دیگر مربوط به مؤلفه‌های چرخش سطح میانی بودند. معادلات حرکت به فضای حالت[1] ،معادلات حاکم با استفاده از روش Runge-kutta حل و پاسخ‌گذرای پوسته با درنظر گرفتن استهلاک[2] و بدون آن بدست آمده است.

در سال۲۰۰۷ ملک‌زاده ـ کرمی ـ زاهدی [۲۲]بر ارتعاشات آزاد سه بعدی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم که روی پایه‌های الاستیک قرار گرفته‌اند تحقیقاتی را انجام دادند. آنها پاسخ محیط الاستیک را فرمول‌بندی نموده و از تئوری لایه‌ای جهت مشخص کردن معادلات حرکت و شرایط مرزی استفاده نمودند. از روش differential quadrature برای حل استفاده وجهت اعتبار بخشیدن به فرمولها، نتایج با حل دقیق و نرم‌افزار ANSYS مقایسه گردیده اند.در نهایت روابط بدست آمده برای یک پوسته جدار ضخیم تحت شرایط مرزی گوناگون و فونداسیون الاستیک ،بکار برده شده و اثر برخی پارامترها ، مورد بررسی قرار گرفته است.

---

[1] State space.
[2] Damping.

۲-۱ مقدمه :

در این فصل معادلات حرکت پوسته استوانه ای جدار ضخیم به کمک اصل هامیلتون به دست آورده شده است.میدان جابجایی،مطابق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول فرض شده و فرضیات زیر نیزدر نظر گرفته شده است .

۱- پوسته همگن و ایزوتروپ است.

۲- بارگذاری بر پوسته بصورت متقارن محوری است.

۳- شعاع داخلی پوسته ثابت است.

۴- خطوط عمود بر صفحه میانی پس از تغییر شکل راست باقی مانده ولی عمود بر صفحه میانی باقی نمی مانند.

سپس معادلات حرکت به کمک روش گالرکین به شکلی مناسب برای استفاده در کد اجزای محدود،تبدیل شده است.

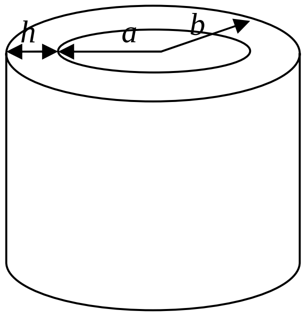
۲-۲ تئوری تغییر شکل برشی[۲۳] :

تجربه نشان می دهد تئوری Love (۱- پوسته نازک فرض می شود ۲- مقاطع عمود بر صفحه میانی پوسته بعد ازتغییر شکل بصورت عمود بر صفحه میانی باقی می ماند) خیز را کمتر از مقدار واقعی و فرکانس طبیعی را بیشتر از مقدار واقعی پیش بینی می کند زیرا مطابق این نظریه از اثر برش عرضی صرفنظر می شود. کرنشهای عرضی هرچند کوچک هستند اما صفر نیستند ، برای پوسته های ضخیم به ویژه در نواحی اعمال بار متمرکز توزیع تنشهای برشی عرضی می تواند بزرگ باشد. بااستفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول خیز هر نقطه ازورق $w(x,y,t)$است. مختصات در نظر گرفته شده برای این پوسته استوانه ای بصورت (x,θ,z) می باشد که z در جهت ضخامت پوسته ، θ در جهت محیطی و x در جهت طولی پوسته است . با توجه به این که بار گذاری وهندسه مستقل از θ می باشد مسئله متقارن محوری است ،بنابراین $\frac{\partial}{\partial\theta}=0$ است.

میدان جابجایی بصورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$U_x = u(x,t) + z\psi_x(x,t) \qquad (۱-۲)$$

$$U_z = w(x,t) + z\psi_z(x,t)$$



شکل ۲-۱ شماتیک پوسته

لازم به ذکر است که مطابق شکل ۲-۱ پوسته استوانه ای دارای شعاع داخلی a و شعاع خارجی b ،ضخامت پوسته h=b-a بوده و شعاع میانگین $R=\dfrac{a+b}{2}$ است.

رابطه بین کرنش و جابجایی در مختصات استوانه ای با توجه به روابط فوق بصورت زیر است:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u + z\psi_x) = \frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \qquad (۲-۲)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_z}{R+z} = \frac{w}{R+z} + \frac{z\psi_z}{R+z}$$

$$\gamma_{xz} = (\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}) = \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x + z\frac{\partial \psi_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{zz} = \psi_z$$

$$\gamma_{x\theta} = 0$$

انرژی کرنشی سیستم بصورت زیر تعریف می گردد:

$$W = \frac{1}{2}\int(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \gamma_{xz}\sigma_{xz})dV \qquad (۳-۲)$$

چگالی انرژی کرنشی بصورت زیر است :

$$2W^* = \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} \qquad (۴-۲)$$

با جایگذاری مقادیر از معادله (۲-۱) در معادله (۲-۴) نتیجه می شود:

$$2W^* = \sigma_{xx}(\frac{\partial u_x}{\partial x} + z\frac{\partial \psi_x}{\partial x}) + \sigma_{\theta\theta}(\frac{w}{R+z} + \frac{z}{R+z}\psi_z) + \sigma_{zz}\psi_z + \sigma_{xz}(\psi_z + \frac{\partial w}{\partial x} + z\frac{\partial \psi_z}{\partial x}) \qquad (۵-۲)$$

انرژی کرنشی پوسته با انتگرال گیری بروی سطح مقطع ودر امتداد $x=-l/2,l/2$ بصورت زیر به دست می آید :

$$\frac{W}{\pi}=\int_{-l/2}^{l/2}[RN_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+RM_{xx}\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+N_{\theta\theta}w+M_{\theta\theta}\psi_z+RN_{xx}\psi_z+RQ_x(\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}) + RM_{xz}\frac{\partial \psi_x}{\partial x}]dx \qquad (۶-۲)$$

و یا :

$$\frac{\delta W}{2\pi}=\int_{-l/2}^{l/2}[RN_{xx}\delta\frac{\partial u}{\partial x}+RM_{xx}\delta\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+N_{\theta\theta}\delta w + M_{\theta\theta}\delta\psi_z+RN_{xx}\delta\psi_z+RQ_x\delta(\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x})+RM_{xz}\delta\frac{\partial \psi_z}{\partial x}]dx \qquad (۷-۲)$$

که منتجه های تنش بشرح زیر است :

$$N_{zz}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{zz}(1+\frac{z}{R})dz$$

$$M_{\theta\theta}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\theta\theta}.z.dz$$

$$N_{xx}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xx}(1+\frac{z}{R})dz$$

$$N_{\theta\theta}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\theta\theta}dz \qquad (۸-۲)$$

$$Q_x=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xz}(1+\frac{z}{R})dz$$

$$M_{xx}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xx}(1+\frac{z}{R})zdz$$

$$M_{xz}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xz}(1+\frac{z}{R})zdz$$

چگالی انرژی جنبشی T^* بصورت زیر تعریف می شود:

$$T^*=\frac{1}{2}\rho[(\frac{\partial U_x}{\partial t})^2+(\frac{\partial U_z}{\partial t})^2] \qquad (۹-۲)$$

با جایگذاری معادله (۲-۱)در معادله (۲-۹)، انرژی جنبشی به صورت زیر تبدیل خواهد شد :

$$\frac{\overline{T}}{\pi}=\int_{-l/2}^{l/2}\rho[(\frac{\partial}{\partial t}(u+z\frac{\partial\psi_x}{\partial x})^2+(\frac{\partial}{\partial t}(w+z\frac{\partial\psi_z}{\partial z}))^2]dV \qquad (۲-۱۰)$$

با انجام عملیات ریاضی برای معادله فوق نتیجه می شود :

$$\begin{aligned}\frac{\overline{T}}{\pi}=\int_{-l/2}^{l/2}\rho[Rh(\frac{\partial u}{\partial t})^2+Rh(\frac{\partial w}{\partial t})^2+\frac{h^2}{6}(\frac{\partial u}{\partial t})(\frac{\partial\psi_x}{\partial t})+\\+\frac{h^3}{6}(\frac{\partial w}{\partial t})(\frac{\partial\psi_z}{\partial t})+\frac{Rh^3}{12}(\frac{\partial\psi_x}{\partial t})^2+\frac{Rh^3}{12}(\frac{\partial\psi_z}{\partial t})^2]dx\end{aligned} \qquad (۲-۱۱)$$

و تغییرات آن:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\overline{T}}{2\pi}=\int_{-l/2}^{l/2}\rho[Rh\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+Rh\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial t}\right)+\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\\+\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial t}\right)+\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{Rh^3}{12}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial t}\right)+\frac{Rh^3}{12}\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial t}\right)]dx\end{aligned}$$

(۲-۱۲)

چنانچه f_x و f_z نیروهای خارجی بر واحد سطح روی سطح مرزی پوسته باشد در اینصورت کار نیروهای خارجی عبارتست از :

$$\delta W_s=\iint_s(f_x\delta u_x+f_z\delta u_z)ds \qquad (۲-۱۳)$$

حال با انتگرال گیری روی سطح پوسته می توان کارخارجی را بدست آورد.حدود انتگرال گیری روی سطح در جهت z از $-h/2$ تا $h/2$ و در جهت x از $-l/2$ تا $l/2$ قابل بررسی است بنابراین:

$$\delta W_s=2\pi R\int_{-l/2}^{l/2}(F_x\delta u+m_x\delta\psi_x+q\delta w+m_z\delta\psi_z)dx+(2\pi r[N_{xx}^*\delta u+M_{xx}^*\delta\psi_x+Q_x^*\delta w+M_{xz}^*\delta\psi_z]_{x=-l/2}^{x=l/2}$$

$$F_x=f_x(1+\frac{z}{R})]_{z=-h/2}^{z=h/2} \qquad N_{xx}^*=\int_{-h/2}^{h/2}f_x(1+\frac{z}{R})dz$$

$$m_x=f_xz(1+\frac{z}{R})]_{z=-h/2}^{z=h/2} \qquad M_{xx}^*=\int_{-h/2}^{h/2}f_xz(1+\frac{z}{R})dz \qquad (۲-۱۴)$$

$$q = f_z(1+\frac{z}{R})]_{z=-h/2}^{z=h/2} \qquad Q_{xz}^* = \int_{-h/2}^{h/2} f_z(1+\frac{z}{R})dz$$

$$m_z = f_z.z(1+\frac{z}{R})]_{-h/2}^{h/2} \qquad M_{xz}^* = \int_{-h/2}^{h/2} f_z.z(1+\frac{z}{R})dz$$

که f_x تنش شعاعی و f_z تنش محوری است.

۲-۳ معادلات حرکت

اصل هامیلتون بصورت مقابل تعریف می شود :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} Ldt = 0 \qquad (۲-۱۵)$$

که :

$$\delta\overline{L} = \delta\overline{T} - \delta W + \delta W_s \qquad (۲-۱۶)$$

بعد از انتگرال گیری جزئی جملات نتیجه می شود :

$$\begin{aligned}\delta\overline{L} = \int_{-l/2}^{l/2}\int_{t_1}^{t_2} 2\pi[(-Rh\rho\ddot{u} - \frac{\rho h^3}{12}\ddot{\psi}_x + RN_{xx}' + RF_x)\delta u - (-\frac{\rho h^3}{12}\ddot{u} - \\ (R\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\psi}_x - RQ_x + RM_{xx}' + Rm_x)\delta\psi_x + (-Rh\rho\ddot{w} - \frac{\rho h^3}{12}\ddot{\psi}_x \\ - N_{\theta\theta} + RQ_x' + Rq)\delta w + (-R\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\psi}_x - \frac{\rho h^3}{12}\ddot{w} - M_{\theta\theta} - RN_{zz} + RM_{xx}' \\ + Rm_z)\delta\psi_z]dx + 2\pi R[(N_{xx}^* - N_{xx})\delta u + (M_{xx}^* - M_{xx})\delta\psi_x \\ (Q_x^* - Q_x)\delta w + (M_{xz}^* - M_{xz})\psi_z]_{x=-L/2}^{x=L/2} = 0\end{aligned} \qquad (۲-۱۷)$$

که در فرمول بالا علامت دو نقطه (..) مربوط به مشتق زمانی و علامت پریم(´) مربوط به مشتق مکانی می باشد. برای مقادیر اختیاری ، δu $\delta\psi_z$ و $\delta\psi_x$و δw باید ضرایب آنها مساوی صفر باشد بنابراین چهار معادله حرکت برحسب منتجه تنش بصورت زیر بدست می آید:

$$N_{xx}{}' + F_x = \rho h(\ddot{u} + \frac{h^2}{12R}\ddot{\psi}_x)$$

$$M_{xx}{}' - Q_x + m_x = \frac{\rho h^3}{12}(\ddot{\psi}_x + \frac{1}{R}\ddot{u})$$

$$Q_x{}' - \frac{N_{\theta\theta}}{R} + q = \rho h(\ddot{w} + \frac{h^2}{12R}\ddot{\psi}_z) \qquad (۱۸-۲)$$

$$M_{xz}{}' - N_{zz} - \frac{M_{\theta\theta}}{R} + m_z = \frac{\rho h^3}{12}(\ddot{\psi}_z + \frac{1}{R}\ddot{w})$$

جهت استفاده و کاربرد نیروی F نظریه یکتاتی نیومن جهت اختصاص دادن شرایط مـرزی و شـرایط اولیه استفاده می شود .براساس این نظریه :

الف) درهر انتهای پوسـته حاصـل هـر کـدام از $N_{xx}u$ و $M_{xz}\psi_{xz}$ و $M_{xx}\psi_x$ و $Q_x w$ بایـد معـین و مشخص باشد.

ب) جابجایی و سرعتهای اولیه باید مشخص باشد.

۲-۴ رابطه تنش- کرنش :

رابطه میان تنش و کرنش پوسته را می توان با استفاده از قانون هوک بیان کرد .

برای یک جسم ایزوتروپیک:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) \qquad (۱۹-۲)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta})$$

$$\sigma_{xz} = \mu\gamma_{xz}$$

که λ و μ ثابتهای لامه هستند.

با قرار دادن کرنشهای بدست آمده در معادلات (۲-۱۹) و جایگزینی آنها در عبارات مربوط بـه منتجـه های تنش (۲-۸) وانتگرال گیری ،نتیجه می شود:

$$N_{xx}=(\lambda+2\mu)h(u'+\frac{h^2}{12R}\psi_x{}')+\lambda h(\psi_z+\frac{w}{R})$$

$$M_{xx}=\frac{(\lambda+2\mu)h^3}{12R}(u'+R\psi_x{}')+\frac{\lambda h^3}{6R}\psi_z$$

$$N_{\theta\theta}=(\lambda+2\mu)(\alpha w+\beta\psi_z)+\lambda h(u'+\psi_z)$$

$$M_{\theta\theta}=(\lambda+2\mu)(\beta w+\eta\psi_z)+\frac{\lambda h^3}{12}\psi_x'$$

$$N_{zz}=(\lambda+2\mu)h\psi_z+\lambda h(u'+\frac{w}{R}+\frac{h^3}{12R}\psi_x{}') \qquad (۲۰-۲)$$

$$Q_x=\kappa^2\mu h(\psi_x+w'+\frac{h^3}{12R}\psi_z')$$

$$M_{xz}=\kappa^2\frac{\mu h^3}{12R}(\psi_x+w'+R\psi_z')$$

که در آن κ ضریب تصحیح برشی[1] می باشدو

$$\alpha=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{dz}{R+z}=\log\frac{1+h/2R}{1-h/2R} \qquad \beta=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{zdz}{R+z}=h-R\alpha \qquad \eta=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{z^2dz}{R+z}=\alpha R^2-Rh$$

(۲۱-۲)

وبا جایگذاری منتجه های تنش در رابطه(۲-۱۸) ،معادلات حاکم برحسب جابجایی بصورت زیر بدست می آید:

[1] Shear Coefficient

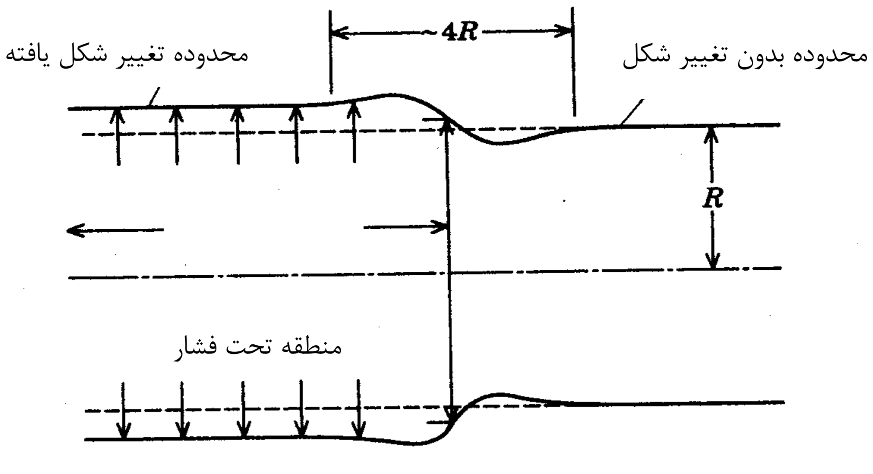
جدول (۲-۱) معادلات حرکت پوسته

$U_x(x,t)$	$\psi_x(x,t)$	$w(x,t)$	$\psi_z(x,t)$	
$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	$[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}]\frac{h^2}{12R}$	$\frac{\lambda}{R}\frac{\partial}{\partial x}$	$\lambda\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{f_x}{h}$
$\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}- \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\frac{h^2}{12R}$	$(\lambda+2\mu)\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $-\rho\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\kappa^2\mu$	$-\kappa^2\mu\frac{\partial}{\partial x}$	$(2\lambda-\kappa^2\mu)\frac{h^2}{12R}\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{m_x}{h}$
$-\frac{\lambda}{R}\frac{\partial}{\partial x}$	$\kappa^2\mu\frac{\partial}{\partial x}$	$\kappa^2\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $-\frac{(\lambda+2\mu)\alpha}{Rh}$ $-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	$\frac{\kappa^2h^2\mu}{12R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $-\frac{(\lambda+2\mu)\beta}{Rh}$ $-\frac{h^2}{12R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	$\frac{q}{h}$
$-\lambda\frac{\partial}{\partial x}$	$-\frac{(2\lambda-\kappa^2\mu)h^2}{12R}\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\kappa^2h^2\mu}{12R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $-\frac{(\lambda+2\mu)\beta}{Rh}$ $-\frac{h^2}{12R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	$\frac{\kappa^2h^2\mu}{12R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $(\lambda+2\mu)\left(1+\frac{\eta}{Rh}\right)$ $-\rho\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	$\frac{m_z}{h}$

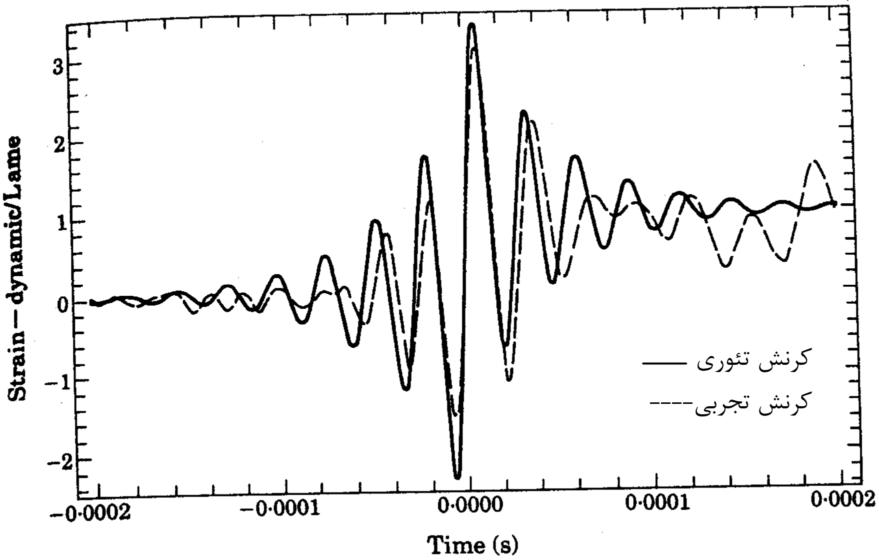
۳-۱ روش Herrmann-Mirsky [۲۴]

یکی از کاربردهای این روش،بررسی حرکت گلوله در لوله می باشد.با توجه به اینکه محدوده اثر فشار در پشت گلوله با زمان در حال افزایش است،می توان آن را یک بار متحرک گسترده دانست.

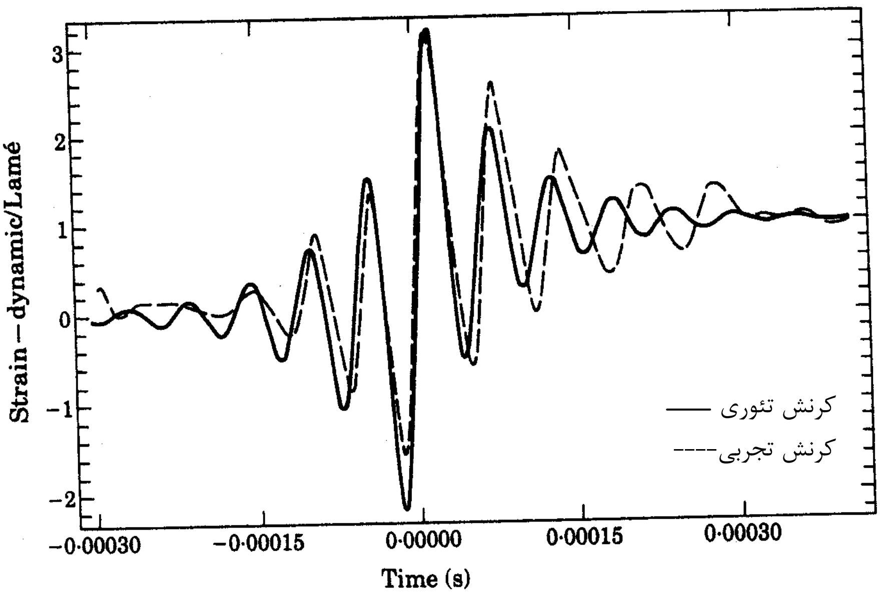
تجربه نشان می دهد که کرنشهای ایجاد شده در مخازن تحت بار متحرک با سرعت بالا تقریباً سه برابر بیشتر از آن چیزی است که در حالت استاتیکی وجود دارد.برای درک بهتر مسئله در شکل(۱-۳) کرنشها در یک مخزن به طول ۶۰ میلیمتر نشان داده شده است.در شکل ،کرنش به شکل یک نوسان شدید در نزدیکی لحظه صفر(جایی که فشار در حال عبور از آن نقطه است)مشخص است.در شکلهای (۳-۲) و (۳-۳) مقادیر کرنشها نسبت به مقدار استاتیکی و در محدوده زمان کوچک نشان داده شده است.میزان تغییر شکل در جداره مخزن در منطقه فشار، به مقدار ماکزیمم میرسد بصورت مشابه در قسمتی که هنوز فشار به آن وارد نمی شود،پس از یک فاصله کوتاه،مقدار تغییر شکل صفر است.کلیه این فرایند در محدوده ای تقریباً چهار برابر شعاع متوسط مخزن اتفاق می افتد که در شکل(۱-۳)مشخص شده است.



شکل (۱-۳)تغییر شکل پوسته تحت فشار متحرک[۲۴]



شکل (۳-۲)مقایسه بین کرنش تئوری وکرنش تجربی در یک لوله توپ ۶۰ میلیمتری[۲۴]



شکل(۳-۳)مقایسه بین کرنش تئوری و کرنش تجربی در یک لوله توپ ۱۲۰ میلیمتری[۲۴]

۳-۲ حل معادلات[۲۴]:

برای حل معادلات از روش حل موج با تغییر متغیر زیر استفاده می شود.

$$\begin{bmatrix} u \\ \psi_x \\ w \\ \psi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} e^{-i\alpha(x-vt)} \text{ و } \xi = x - vt \tag{۱-۳}$$

با حل اولین معادله از دستگاه هرمن-میرسکی و مساوی صفر قرار دادن آن:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{12R}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 \psi_x}{\delta t^2}\right] + \frac{\lambda}{R}\frac{\partial w}{\partial x} + +\lambda\frac{\partial \psi_z}{\partial x} = 0$$

(۲-۳)

با اعمال تغییر متغیر و تبدیل متغیر ها به ξ:

$$\left[(\lambda+2\mu) - \rho V^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{h^2}{12R}\left[(\lambda+2\mu) - \rho\right]\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} + \frac{\lambda}{R}\frac{\partial w}{\partial \xi} + +\lambda\frac{\partial \psi_z}{\partial \xi} = 0$$

(۳-۳)

با انتگرال گیری نسبت به ξ

$$\left[(\lambda+2\mu)h - \rho h V^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{h^2}{12R}\frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}\right) + \lambda h\left(\psi_z + \frac{w}{R}\right) = C$$

(۴-۳)

که C ثابت انتگرال است.

با در نظر گرفتن:

$$N_{xx} = \left[(\lambda+2\mu)h\right]\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{h^2}{12R}\frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}\right) + \lambda h\left(\psi_z + \frac{w}{R}\right) \tag{۵-۳}$$

اگر مقدار سرعت از سرعت موج های طولی خیلی کوچکتر باشد:

$$V << \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} \tag{۶-۳}$$

در این صورت $N_{xx} = C$ با توجه به اینکه درراستای تنش صفر است $C = 0$

با استخراج مقادیر زیر از معادله اول:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{-\lambda h\left(\psi_z + \dfrac{w}{R}\right)}{\left[(\lambda + 2\mu)h - \rho h V^2\right]} - \left(\frac{h^2}{12R}\frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}\right) \tag{۷-۳}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{-\lambda h\left(\dfrac{\partial \psi_x}{\partial \xi} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial w}{\partial \xi}\right)}{\left[(\lambda + 2\mu)h - \rho h V^2\right]} - \left(\frac{h^2}{12R}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2}\right) \tag{۸-۳}$$

با درنظر گرفتن تبدیلات زیر :

$$(\ )_{tt} = V^2(\ )_{\xi\xi}, (\ )_x = (\ )_\xi, (\ )_{xx} = (\ )_{\xi\xi} \tag{۹-۳}$$

و با جایگذاری در سه معادله دیگر:

$$\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}\right]\frac{h^2}{12} - \kappa^2\mu\psi_x - \kappa^2\mu\frac{\partial w}{\partial x} + (2\lambda - \kappa^2\mu)\frac{h^2}{12R}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} = 0$$

(۱۰-۳)

$$\kappa^2\mu\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \kappa^2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (\lambda + 2\mu)\frac{\sigma}{Rh}w - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2}$$
$$-(\lambda + 2\mu)\frac{h^2}{12R}\frac{\beta}{Rh}\psi_z - \frac{\lambda}{R}\psi_z - \frac{\rho h^2}{12R}\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} = 0$$

(۱۱-۳)

$$-(\kappa^2\mu - 2\lambda)\frac{h^2}{12R}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\kappa^2\mu h}{12R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (\lambda + 2\mu)\frac{\beta}{Rh}w - \frac{\lambda}{R}w - \frac{\rho h^2}{12R}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
$$\frac{\kappa^2\mu h}{12}\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} - (\lambda + 2\mu)\left(1 + \frac{\eta}{Rh}\right)\psi_z - \frac{\rho h^2}{12}\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} = 0 \tag{۱۲-۳}$$

با تبدیل مشتقات نسبت به x,t به مشتقات نسبت به ξ و جایگذاری در معادلات:

$$\left[\left(\lambda+2\mu-\rho V^{2}\right)\frac{h^{2}}{12}\frac{\partial^{2}\psi_{x}}{\partial\xi^{2}}\right]-\kappa^{2}\mu\psi_{x}-\kappa^{2}\mu\frac{\partial w}{\partial\xi}+(2\lambda-\kappa^{2}\mu)\frac{h^{2}}{12R}\frac{\partial\psi_{x}}{\partial\xi}=0$$

(۱۳-۳)

$$-(\kappa^{2}\mu-2\lambda)\frac{h^{2}}{12R}\frac{\partial\psi_{x}}{\partial\xi}+\frac{\kappa^{2}\mu h}{12R}\frac{\partial^{2}w}{\partial\xi^{2}}-(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}w-\frac{\lambda}{R}w-\frac{\rho h^{2}}{12R}\frac{\partial^{2}w}{\partial\xi^{2}}$$

$$\frac{\kappa^{2}\mu h}{12}\frac{\partial^{2}\psi_{z}}{\partial\xi^{2}}-(\lambda+2\mu)\left(1+\frac{\eta}{Rh}\right)\psi_{z}-\frac{\rho h^{2}}{12}\frac{\partial^{2}\psi_{z}}{\partial\xi^{2}}=0$$ (۱۴-۳)

$$\kappa^{2}\mu\frac{\partial\psi_{x}}{\partial\xi}+\left(\kappa^{2}\mu-\rho V^{2}\right)\frac{\partial^{2}w}{\partial\xi^{2}}-\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\sigma}{Rh}w-\left(\frac{\kappa^{2}\mu h^{2}}{12R}-\frac{\rho V^{2}h^{2}}{12R}\right)\frac{\partial^{2}\psi_{z}}{\partial\xi^{2}}$$

$$-\left[(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}+\frac{\lambda}{R}\right]\psi_{z}=0$$ (۱۵-۳)

با در نظر گرفتن حل موج:

$$\begin{bmatrix}\psi_{x}\\ w\\ \psi_{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\ B\\ C\end{bmatrix}e^{-i\alpha\xi}$$ (۱۶-۳)

و با جایگزین کردن در معادلات:

$$\left[\left(-\lambda-2\mu+\rho V^{2}\right)\frac{h^{2}}{12}\alpha^{2}Ae^{-i\alpha\xi}\right]-\kappa^{2}\mu Ae^{-i\alpha\xi}+\kappa^{2}\mu i\alpha\beta e^{-i\alpha\xi}+(2\lambda-\kappa^{2}\mu)\frac{h^{2}}{12R}Ci\alpha e^{-i\alpha\xi}=0$$

(۱۷-۳)

$$\left(2\lambda-\kappa^{2}\mu\right)\frac{h^{2}}{12R}i\alpha Ae^{-i\alpha\xi}+\frac{\kappa^{2}\mu h^{2}}{12R}\alpha^{2}Be^{-i\alpha\xi}-(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}Be^{-i\alpha\xi}$$

$$+\frac{\rho h^{2}V^{2}}{12R}\alpha^{2}Be^{-i\alpha\xi}-\frac{\kappa^{2}\mu h^{2}}{12}\alpha^{2}Ce^{-i\alpha\xi}-(\lambda+2\mu)(1+\frac{\eta}{Rh})Ce^{-i\alpha\xi}$$ (۱۸-۳)

$$+\frac{\rho h^{2}V^{2}}{12}\alpha^{2}Ce^{-i\alpha\xi}=0$$

$$\kappa^2\mu A\alpha e^{-i\alpha\xi}+\left(-\kappa^2\mu+\rho V^2\right)\alpha A e^{-i\alpha\xi}-\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\sigma}{Rh}Be^{-i\alpha\xi}-\left(\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}-\frac{\rho V^2h^2}{12R}\right)(-\alpha^2Ce^{-i\alpha\xi}$$
$$-\left[(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}+\frac{\lambda}{R}\right]Ce^{-i\alpha\xi}=0$$

(۱۹-۳)

با فاکتور گیری از ضرایب A,B,C :

$$\left\{\left[\left(\rho V^2-\lambda-2\mu\right)\frac{h^2}{12}\alpha^2-\kappa^2\mu\right]A+\kappa^2\mu i\alpha\beta+(2\lambda-\kappa^2\mu)\frac{h^2}{12R}Ci\alpha\right\}e^{-i\alpha\xi}=0$$

(۲۰-۳)

$$\left\{\begin{aligned}&\left[\left(2\lambda-\kappa^2\mu\right)\frac{h^2}{12R}i\alpha\right]A+\left[-\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\alpha^2-(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}+\frac{\rho h^2V^2}{12R}\alpha^2-\frac{\lambda}{R}\right]B\\&+\left[\frac{\rho h^2V^2}{12}\alpha^2-(\lambda+2\mu)(1+\frac{\eta}{Rh})-\frac{\kappa^2\mu h^2}{12}\alpha^2\right]C\end{aligned}\right\}e^{-i\alpha\xi}=0$$

(۲۱-۳)

$$\left\{\begin{aligned}&\left[\kappa^2\mu A\alpha+\left(\rho V^2-\kappa^2\mu\right)\alpha^2\right]A-\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\sigma}{Rh}B+\\&\left[\left(\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}-\frac{\rho V^2h^2}{12R}\right)\alpha^2-(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}-\frac{\lambda}{R}\right]C\end{aligned}\right\}e^{-i\alpha\xi} \qquad (۲۲-۳)$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix}G_{11}&G_{12}&G_{13}\\G_{12}&G_{22}&G_{23}\\G_{13}&G_{23}&G_{33}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\psi_x(x,t)\\w(x,t)\\\psi_z(x,t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-q/h\\-m_z/h\end{pmatrix} \qquad (۲۳-۳)$$

که:

$$G_{11}=\left[h^2\left(\left(\frac{h}{12R}\right)^2-\frac{1}{12}\right)\left(\lambda+2\mu-\rho V^2\right)^2\alpha^4+\kappa^2\mu\left(\lambda+2\mu-\rho V^2\right)\left(-\alpha^2\right)\right]e^{-i\alpha\xi}$$

$$G_{12}=\left[\left(\lambda+2\mu-\rho V^2\right)^2i\alpha^3\left[\frac{h^2}{12R^2}+\mu\kappa^2\right]\right]e^{-i\alpha\xi}$$

$$G_{13}=\left[\left(\lambda+2\mu-\rho V^{2}\left(\frac{h^{2}}{12R}\right)i\alpha^{3}+\kappa^{2}\mu-\lambda\right]e^{-i\alpha\xi}$$

$$G_{22}=-\alpha^{2}\left[\left(\frac{h}{R}\right)^{2}+\left(\lambda+2\mu-\rho V^{2}\right)\left(\left(\rho V^{2}-\kappa^{2}\mu\right)\alpha^{2}-\left(\lambda+2\mu\right)\right)\left(\frac{\sigma}{Rh}\right)\right]e^{-i\alpha\xi}$$

$$G_{23}=-\alpha^{2}\left[\frac{h^{2}}{R}+\left(\left(\frac{h^{2}}{12R}\alpha^{3}\left(\rho V^{2}-\kappa^{2}\mu\right)\right)-\frac{\lambda}{R}-\left(\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\beta}{Rh}\right)\right)\left(\lambda+2\mu-\rho V^{2}\right)\right]e^{-i\alpha\xi}$$

$$G_{33}=-\alpha^{2}\left[\lambda^{2}+\left(\left(\frac{h^{2}}{12}\alpha^{2}\left(\rho V^{2}-\kappa^{2}\mu\right)\right)-\left(\left(\lambda+2\mu\right)\left(1+\frac{\eta}{Rh}\right)\right)\right)\left(\lambda+2\mu-\rho V^{2}\right)\right]e^{-i\alpha\xi}$$

(۲۴-۳)

حال با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب، مقادیر α بدست خواهد آمد.جواب کلی معادله بصورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}\psi_x\\ w\\ \psi_x\end{bmatrix}^{(1)}=\sum_{j=1}^{3}a_j\begin{bmatrix}e_{j1}\\ e_{j2}\\ 1\end{bmatrix}e^{-i\alpha_j\xi}+\begin{bmatrix}\psi_x\\ w\\ \psi_x\end{bmatrix}_p^{(1)}$$

(۲۵-۳)

که e_j ، j امین بردار نرمالایزه شده ماتریس ضرایب با توجه به مقدار α است.

برای جواب خصوصی معادله از روش کرامر استفاده می شود:

$$\begin{bmatrix}G_{11}&G_{12}&G_{13}\\ G_{12}&G_{22}&G_{23}\\ G_{13}&G_{23}&G_{33}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\psi_x(x,t)\\ w(x,t)\\ \psi_z(x,t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -q/h\\ -m_z/h\end{pmatrix}\qquad \xi<0$$

(۲۶-۳)

مثلاً در منطقه ۱ جایی که فشار وجود دارد:

$$w_p^{(1)}=\lim_{\alpha\to 0}\left|\frac{\overline{G}(\alpha)}{G(\alpha)}\right| \qquad (۲۷-۳)$$

۳-۳ شرایط مرزی و پیوستگی[۲۴]:

برای بدست آوردن مقدار α_j در جواب عمومی به طریق زیر عمل می شود:

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} & -e_{41} & -e_{51} & -e_{61} \\ -\alpha_1 e_{11} & -\alpha_1 e_{11} & -\alpha_3 e_{31} & \alpha_4 e_{41} & \alpha_5 e_{51} & \alpha_6 e_{61} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} & -e_{42} & -e_{52} & -e_{62} \\ -\alpha_1 e_{12} & -\alpha_2 e_{22} & -\alpha_3 e_{32} & \alpha_4 e_{42} & \alpha_5 e_{52} & \alpha_6 e_{62} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} & -e_{43} & -e_{53} & -e_{63} \\ -\alpha_1 e_{13} & -\alpha_2 e_{23} & -\alpha_3 e_{33} & -\alpha_4 e_{43} & -\alpha_5 e_{53} & -\alpha_6 e_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -w_p^{(1)} \\ 0 \\ -\psi_{zp}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(۳-۲۸)

بررسی نتایج نشان می دهد که روش هرمن-میرسکی در مورداین مسئله و به طور کلی حالتهایی که سرعت زیر سرعت بحرانی است دقت خوبی دارد.بنابراین، این روش در مورد لوله سلاح ها دقیق و قابل قبول است.بنابراین به توصیه محقق در مواردی که مخازن جدار ضخیم تحت بار با سرعت نزدیک به سرعت بحرانی و کمتر از آن است بجای روش تبدیل فوریه بهتر است از این روش استفاده گردد.با این وجود ناهماهنگی هایی در فرکانس امواج ناشی از پاسخ های تجربی در قیاس با جوابهای تحلیلی دیده می شود که البته در مناطقی دور از منطقه حساس $(\xi = 0)$ هستند واز اعتبار روش کم نمی کند[۲۴].

۳-۴ ضریب تصحیح برشی[۲۵]:

معادلات حاکم بر یک پوسته در مختصات استوانه ای و در شرایط متقارن محوری به شکل زیر است:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \qquad (۳\text{-}۲۹)$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{2\mu}{z}\frac{\partial (z\omega_\theta)}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \qquad (۳\text{-}۳۰)$$

که u_z جابجایی در جهت شعاعی و u_x در جهت محوری است.همچنین Δ انبساط و ω_θ چرخش است و بصورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta = \frac{1}{z}\frac{\partial(zu_z)}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad (۳۱\text{-}۳)$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \qquad (۳۲\text{-}۳)$$

برای سطوح عاری از تنش های سطحی در $z = b$ و $z = a$ می توان نوشت:

$$\lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \qquad (۳۳\text{-}۳)$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = 0 \qquad (۳۴\text{-}۳)$$

تلفیق معادلات حرکت و شرایط مرزی به معادله مشخصه زیر می انجامد:

$$f(K) = K_{10}(\beta)K_{01}(\gamma) + K_{01}(\beta)K_{10}(\gamma) + \frac{8}{\pi^2\beta\gamma ab} + FK_{11}(\gamma)K_{00}(\beta) + \frac{1}{F}K_{11}(\beta)K_{00}(\gamma)$$

$$+\frac{(1+\overline{B})^2}{F\gamma^2 ab}K_{11}(\beta)K_{11}(\gamma) - \frac{1+\overline{B}}{\gamma ab}\left[aK_{11}(\gamma)K_{10}(\beta) + bK_{11}(\gamma)K_{01}(\beta)\right]$$

$$-\frac{1+\overline{B}}{F\gamma ab}\left[aK_{11}(\beta)K_{10}(\gamma) + bK_{11}(\beta)K_{01}(\gamma)\right] = 0$$

(۳۵-۳)

که در آن:

$$K_{mn} = J_m(zb)Y_n(za) - J_n(za)Y_m(zb) \quad \beta^2 = \alpha^2\left(\frac{c^2}{c_c^2} - 1\right)$$

$$\beta^2 = \alpha^2\left(\frac{c^2}{c_c^2} - 1\right) \quad \beta = \frac{c}{2c_s^2} - 1$$

$$c_c^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \quad F = \frac{\alpha^2\overline{B}}{\beta\gamma} \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

که در آنها α شماره موج ،J وY توابع بسل c سرعت فاز ، L طول موج، h ضخامت پوسته و c_s سرعت موج برشی و c_c سرعت موج طولی هستندبا فرض اینکه:

$$\delta = h/L, s = c/c_s \qquad (۳۶-۳)$$

برای طول موجهای خیلی کوچک $\delta \to \infty$ ،ریشه معادله زیر برابر سرعت حد است:

$$\left(n^2 - s^2\right)\left(1 - s^2\right) = n\left(\frac{s^2}{2} - 1\right)^2 \qquad 0 < s < 1 \qquad (۳۷-۳)$$

که در آن :

$$n^2 = 2(1-\nu)(1-2\nu) \qquad (۳۸-۳)$$

در نهایت با در نظر گرفتن معادلات حرکت و بدست آوردن معادله مشخصه و بررسی ریشه های $s^2 = \kappa^2$:

$$\left[\left(n^2 - \kappa^2\right)\left(1 - \kappa^2\right)\right] = n\left(\frac{1}{2}\kappa^2 - 1\right)^2 \quad 0 < \kappa < 1 \qquad (۳۹-۳)$$

بنابراین κ وابسته به مقادیر ν بوده و چون ۰ تا ۰/۵ تغییر می کند بنابراین:

$$0.86 < \kappa^2 < 0.91 \qquad (۴۰-۳)$$

۴-۱ مقدمه:

برای مطالعه حرکت، باید حرکت را مدل کرد، این مدل معمولاً یک رابطه ریاضی است که موقعیت را برحسب مکان و زمان توصیف می‌کندوبه شکل این رابطه یک معادله دیفرانسیل یا معادله انتگرال می باشد.

برای حل معادلات حرکت دو روش وجود دارد :

۱ـ روش تحلیلی[1] که یک فرمول ریاضی برای حل مسئله و معادله دیفرانسیل بدست می دهد. مانند استفاده از سری‌های توانی و ... این روش در صورتی قابل استفاده است که شکل معادله و شرایط مرزی آن ساده باشد.

۲ـ روش عددی [2] که مبتنی بر روشهای محاسبات عددی است و برای مدلهای پیچیده با شرایط مرزی پیچیده قابل استفاده است که نتیجه ،یک جدول از اعداد است. اعتبارنتیجه حل عددی به کمک روشهای دیگر کنترل می‌شوند مانند روشهای ریاضی یا سایر روشهای عددی.

اجزاء محدودFE[3] یک‌روش عددی است که برای‌حل‌معادلات‌دیفرانسیل استفاده می‌شود. دراین‌روش:

۱) ناحیه مسئله به شکلهای هندسی منظم (مانند مستطیل و ...) تقسیم می‌شود که به هر کدام از این شکلها یا اجزاء، المان گفته و به این عمل Discritization گویند. هر المان با رأسهای آن مشخص می‌شود که به این نقاط رأس (Node) یا گره می‌گویند.

۲) فرض می‌شود معادله حاکم دیفرانسیل که بر کل محیط حاکم است بر هر المان نیز صادق است.

۳) با در نظر گرفتن بارگذاری سازه‌ای، شرایط مرزی، پیوستگی بین المانها و یک ضابطه بهینه سازی، ضرایب مجهول در هر المان بدست آمده و به این ترتیب مقادیر تابع مجهول در کل ناحیه قابل تعیین است.

[1] Analytical method.
[2] Numerical method.
[3] Finite Elements

معمولاً از دو روش بهینه سازی استفاده شود.

۱) روش تغییراتی ریتز[1]

۲) روش باقی مانده وزنی[2]

۴-۲ روش باقی مانده وزنی :

این روش هنگامی استفاده می‌شود که معادله حاکم، معادله دیفرانسیل باشد

$$E.q : Du = f_1$$

$$B.C : Bu = f_2 \qquad (۱-۴)$$

باقی مانده مسئله و شرایط مرزی بصورت زیر می‌باشد :

$$R_D = Du - f_1 \qquad R_B = Bu - f_2 \qquad (۲-۴)$$

که DوB اپراتورهای دیفرانسیلی هستند.

اگر u حل دقیق باشد باقی مانده صفر است ولی اگر $u = \tilde{u}$ (حل تقریبی) باشد، باقی مانده صفر نخواهد بود و نتیجه می شود :

$$R_D\left(\tilde{u}\right) = D\tilde{u} - f_1$$

$$R_B\left(\tilde{u}\right) = B\tilde{u} - f_2 \qquad (۳-۴)$$

در روش باقی مانده وزنی فرض می‌شود حل آزمایشی بصورت $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(x)$ است. مقادیر $\tilde{u}$ در عبارت باقی مانده جایگزین شده و ثابتهای α_i بصورتی بدست می‌آید که باقی مانده نسبت به یک میانگین وزنی صفر یا حداقل باشد یعنی :

$$\int R\left(\tilde{u}, \alpha_i\right) w_i(x) dx = 0 \qquad (۴-۴)$$

[1] Ritz Variational method
[2] Weighted Residual method

برای تعیین تابع وزنی(w_i) روشهای زیر مطرح است :

۱) تابع وزنی، تابع دلتا δ است که این روش به روش نقطه یابی[1] مشهور است.

$$w_i(x) = \delta(x - x_i)$$

$$\int R\left(\tilde{u}, \alpha_i, x\right)\delta(x - x_i)dx = 0 \qquad (۵-۴)$$

$$\Rightarrow R(u, \alpha_i\, x_i) = 0 \qquad i = 1, ..., n$$

به این ترتیب تعیین α_i ، به حل n معادله در نقاط $x_n ...., x_2, x_1$ برای باقی مانده برمی‌گردد.

۲) تابع وزنی، Rیا همان باقی مانده است که این روش به حداقل حداقل مربعات [2] مشهور است.

$$w_i(x) = R(x) \qquad (۶-۴)$$

در اینصورت ثابتها بصورتی بدست می‌آیند که انتگرال زیر اکسترمم شود :

$$\int R\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}\, d\ x = 0 \qquad i = 1, 2, ... n \qquad (۷-۴)$$

۳) روش گالرکین

در این روش تابع وزن، ϕ_i است.

$$\int R(\tilde{u}, \alpha_i)\phi_i(x)dx = 0 \qquad i = 1, 2, ... n \qquad (۸-۴)$$

که از حل n معادله حاصل، α_i بدست می‌آید. توابع ϕ_i شرایط مرزی هندسی[3] را ارضا می‌کند.

بعد از مشخص شدن معادلات حاکم، از روش گالرکین جهت حل استفاده می شود. المان بصورت دو گرهی و هر گره، شامل چهار درجه آزادی است. با اعمال روش گالرکین و با درنظر گرفتن جابجائی بصورت زیر، معادلات حاکم در مدل FE می‌آید.

---

[1] Collocation.
[2] Least squared.
[3] Essential.

۴-۳ تعیین معادلات اجزای محدود به کمک روش گالرکین

اگر چه روشهای ریاضی همواره مهمترین مراجع در حل مسائل هستنداما روشهای عددی امروزه همپای روشهای ریاضی گسترش یافته و اهمیتی ویژه دارند.اهمیت این روشها بویژه در مواردی که حل ریاضی بدلایل خاص امکان پذیر نیست بیشتر است.

پوسته ای جدار ضخیم تحت فشارداخلی متحرک مفروض است. دوسر پوسته گیردار فرض می شود. برای تعیین پاسخ دینامیکی سیستم ، معادلات اجزای محدود سیستم به کمک روش گالرکین تعیین می شود:

معادله ۱ :

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{h^2}{12R}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2\psi_x}{\delta t^2}\right]+\frac{\lambda}{R}\frac{\partial w}{\partial x}++\lambda\frac{\partial\psi_z}{\partial x}+\frac{f_x}{h}=0 \qquad (۹\text{-}۴)$$

طبق روش گالرکین

$$\int_{-1/2}^{1/2} R\left(\tilde{u}\right)\phi_i\, dx=0 \qquad (۱۰\text{-}۴)$$

$$\Rightarrow \int_{-1/2}^{1/2}(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\phi_i dx-\int_{-1/2}^{1/2}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\phi_i dx+\int_{-1/2}^{1/2}\frac{h^2(\lambda+2\mu)}{12R}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}\phi_i dx-\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\rho h^2}{12R}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}\phi_i dx$$
$$+\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\lambda}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\phi_i dx+\int_{-1/2}^{1/2}\lambda\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\phi_i dx+\int_{-1/2}^{1/2}\frac{h^2(\lambda+2\mu)}{12R}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\phi_i dx-\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\rho h^2}{12R}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}\phi_i dx$$
$$+\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\lambda}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\phi_i dx-\int_{-1/2}^{1/2}\lambda\frac{\partial\psi_z}{\partial x}\phi_i dx+\int_{-1/2}^{1/2}\frac{f_x}{h}\phi_i dx=0 \qquad (۱۱\text{-}۴)$$

به کمک انتگرال جزء به جزء نتیجه می‌شود :

$$\int_{-1/2}^{1/2}(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\phi_i dx$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\phi_i\, dx=\frac{\partial u}{\partial x}(\phi_i)-\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial\phi_i}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_i\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\right)-u\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x}\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-l/2}^{l/2} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \phi_i dx = \int_{-l/2}^{l/2} \left[\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\phi_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) - u \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \right] \right] dx$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \phi_i - u \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right]_{-l/2}^{l/2} + \int_{-l/2}^{l/2} u \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} dx \tag{۱۲-۴}$$

$$\int_{-l/2}^{l/2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \phi_i dx = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-l/2}^{l/2} u \phi_i dx \tag{۱۳-۴}$$

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{h^2 (\lambda + 2\mu)}{12R} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \phi_i dx = \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \phi_i \Big|_{-l/2}^{l/2} - \psi_x \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Big|_{-l/2}^{l/2} \right] + \int_{-l/2}^{l/2} \psi_x \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} dx \tag{۱۴-۴}$$

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \phi_i dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-l/2}^{l/2} \psi_x \phi_i dx \tag{۱۵-۴}$$

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial w}{\partial x} \phi_i dx = [w \phi_i]_{-l/2}^{l/2} - \int_{-l/2}^{l/2} w \frac{d\phi_i}{dx} dx \tag{۱۶-۴}$$

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \phi_i dx = [\psi_z \phi_i]_{-l/2}^{l/2} - \int_{-l/2}^{l/2} \psi_z \frac{d\phi_i}{dx} dx \tag{۱۷-۴}$$

نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \phi_i \Big|_{-l/2}^{l/2} - u \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Big|_{-l/2}^{l/2} \right] + (\lambda + 2\mu) \int u \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} dx - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int u \phi_i dx \\
&+ \left(\frac{\lambda + 2\mu}{12R} \right) h^2 \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \phi_i \Big|_{-l/2}^{l/2} - \psi_x \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Big|_{-l/2}^{l/2} \right] + \frac{(\lambda + 2\mu) h^2}{12R} \int \psi_x \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} dx - \\
&\frac{\rho h^2}{12R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \psi_x \phi_i dx + \frac{\lambda}{R} \left[w \phi_i \Big|_{-l/2}^{l/2} \right] - \frac{\lambda}{R} \int w \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx + \lambda \left[\psi_z \phi_i \Big|_{-l/2}^{l/2} \right] \\
&- \lambda \int \psi_z \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx + \int \frac{fx}{h} \phi_i dx + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0
\end{aligned} \tag{۱۸-۴}$$

اگر :

$$A_1 = (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \phi_i \Big|_{-l/2}^{l/2} - u \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Big|_{-l/2}^{l/2} \right]$$

$$A_2 = \frac{(\lambda + 2\mu) h^2}{12R} \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \phi_i \Big|_{-l/2}^{l/2} - \psi_x \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{-l/2}^{l/2} \right]$$

$$A_3=\frac{\lambda}{R}\left[w\phi_i\Big|_{-1/2}^{1/2}\right]$$

$$A_4=\lambda\left[\psi_z\phi_i\Big|_{-1/2}^{1/2}\right]$$

(۱۹-۴)

با انتخاب میدان حل به صورت:

$$u=\sum_{j=1}^{2}a_j(t)\phi_j(x)\ ,\ w=\sum_{j=1}^{2}b_j(t)\phi_j(x)\ \ ,\ \ \psi_x=\sum_{j=1}^{2}c_j(t)\phi_j(x),\ \ \psi_z=\sum_{j=1}^{2}d_j(t)\phi_j(x)$$

(۲۰-۴)

نتیجه می‌شود :

$$A_1+(\lambda+2\mu)\int\sum_{j=1}^{2}a_j\phi_j\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}\,dx-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\sum_{j=1}^{2}a_j\phi_j\phi_i dx+\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12R}\int\sum_{j=1}^{2}c_j\phi_j\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}$$

$$-\frac{\rho h^2}{12R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\sum_{j=1}^{2}c_j\phi_j\phi_i dx+A3-\frac{\lambda}{R}\int\sum_{j=1}^{2}b_j\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial x}dx+A_4-\lambda\int\sum_{j=1}^{2}d_j\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial x}dx+\int\frac{fx}{h}\phi_j dx=0$$

(۲۱-۴)

$$\sum_{j=1}^{2}\left\{\left[(\lambda+2\mu)\int\sum_{j=1}^{2}\phi_j\frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx\right]a_j-\left[\rho\int\phi_i\phi_j dx\right]\ddot{a}_j+\left[\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12R}\int\phi_j\frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx\right]c_j\right.$$

$$-\left[\frac{\rho h^2}{12R}\int\phi_i\phi_j dx\right]\ddot{c}_j-\left[\frac{\lambda}{R}\int\phi_j\frac{d\phi_i}{dx}dx\right]b_j-\left[\lambda\int\phi_j\frac{d\phi_i}{dx}dx\right]d_j+\int\frac{f_x}{h}\phi_j dx$$

$$\left.+A_1+A_2+A_3+A_4\right\}=0$$

(۲۲-۴)

به همین طریق می‌توان برای معادلات دیگر نیز بدست آورد.

$$\sum_{j=1}^{2}\left\{\left[\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12R}\int\phi_j\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}dx\right]a_j-\left[\frac{\rho h^2}{12R}\int\phi_j\phi_i dx\right]\ddot{a}_j+\left[\kappa^2\mu\int\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial x}dx\right]b_j\right.$$

$$+\left[\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12}\int\phi_j\frac{d^2\phi_i}{dx^2}-\kappa^2\mu\int\phi_j\phi_i dx\right]c_j-\left[\frac{\rho h^2}{12}\int\phi_j\phi_i dx\right]\ddot{c}_j$$

$$\left.-\left[(2\lambda-\kappa^2\mu)\frac{h^2}{12R}\int\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial x}dx\right]d_j+\int\frac{m_x}{h}\phi_i dx+B_1+B_2+B_3+B_4\right\}=0$$

$$B_1 = \frac{(\lambda + 2\mu)h^2}{12R}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2} - u\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right] \qquad (۲۳-۴)$$

$$B_2 = \frac{(\lambda + 2\mu)h^2}{12}\left[\frac{\partial \psi_z}{\partial x}\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2} - \psi_x\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right]$$

$$B_3 = -\kappa^2\mu\left[w\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right]$$

$$B_4 = (2\lambda - \kappa^2\mu)\frac{h^2}{12R}\left[\psi_z\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right]$$

معادله سوم :

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\lambda}{R}\int \phi_j\frac{d\phi_i}{dx}dx\right]a_j - \left[k^2\mu\int \phi_j\frac{d\phi_i}{dx}dx\right]c_j + \left[\kappa^2\mu\int \phi_j\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx - \frac{(\lambda+2\mu)}{Rh}\alpha\right.$$

$$\left.\int \phi_j\phi_i dx\right]b_j - \rho\left[\int \phi_j\phi_i dx\right]\ddot{b}_j + \left[\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\int \phi_j\frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx - \frac{(\lambda+2\mu)\beta}{Rh}\int \phi_j\phi_i dx\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{R}\int \phi_j\phi_i dx\right]d_j - \left[\frac{\rho h^2}{12R}\int \phi_j\phi_i dx\right]\ddot{d}_j + \int \frac{q}{h}\phi_i dx + D_1 + D_2 + D_3 + D_4\Bigg\} = 0$$

$$D_1 = -\frac{\lambda}{R}\left(u\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right)$$

$$D_2 = \kappa^2\mu\left(\psi_x\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right) \qquad (۲۴-۴)$$

$$D_3 = \kappa^2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2} - w\frac{d\phi_i}{dx}\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right)$$

$$D_4 = \frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\left[\frac{\partial \psi_z}{\partial x}\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2} - \psi_z\frac{d\phi_i}{dx}\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right]$$

معادله چهارم :

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\lambda\int \frac{d\phi_i}{dx}\phi_j dx\right]a_j + \left[(2\lambda - \kappa^2\mu)\frac{h^2}{12R}\int \phi_j\frac{d\phi_i}{dx}dx\right]c_j - \left[\frac{\rho h^2}{12R}\int \phi_j\phi_i dx\right]\ddot{b}_j$$

$$+\left[\frac{k^2\mu h^2}{12R}\int \phi_j\frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx - \frac{(\lambda+2\mu)\beta}{Rh}\int \phi_j\phi_i dx - \frac{\lambda}{R}\int \phi_j\phi_i dx\right]b_j - \left[\frac{\rho h^2}{12}\int \phi_j\phi_i dx\right]\ddot{d}_j$$

$$\left[\frac{k^2\mu h^2}{12}\int \phi_j\phi_i dx-(\lambda+2\mu)\left(1+\frac{2}{Rh}\right)\int \phi_j\phi_i dx\right]d_j+\int \frac{m_z}{h}\phi_i dx+E_1+E_2+E_3+E_4\Bigg\}=0$$

$$E_1=-\lambda\left(u\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right) \tag{۲۵-۴}$$

$$E_2=-(2\lambda-\kappa^2\mu)\frac{h^2}{12R}\left(\psi_x\,\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right)$$

$$E_3=\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2}-w\frac{d\phi_i}{dx}\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right)$$

$$E_4=\frac{\kappa^2\mu h^2}{12}\left(\frac{\partial \psi_z}{\partial x}\phi_i\Big|_{-1/2}^{-1/2}-\psi_z\frac{d\phi_i}{dx}\Big|_{-1/2}^{-1/2}\right)$$

بنابراین چهار معادله زیر نتیجه می‌شود :

$$1)\ \sum_{j=1}^{2}\Bigg\{\left[(\lambda+2\mu)\int\sum_{j=1}^{2}\phi_j\frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx\right]a_j-\left[\rho\int\phi_i\,\phi_j dx\right]\ddot{a}_j+\left[\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12R}\int\phi_j\frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx\right]c_j$$
$$-\left[\frac{\rho h^2}{12R}\int\phi_i\,\phi_j dx\right]\ddot{c}_j-\left[\frac{\lambda}{R}\int\phi_j\frac{d\phi_i}{dx}dx\right]b_j-\left[\lambda\int\phi_j\frac{d\phi_i}{dx}dx\right]d_j+\int\frac{f_x}{h}\phi_j dx+$$
$$A_1+A_2+A_3+A_4\Bigg\}=0$$

(۲۶-۴)

$$2)\ \sum_{j=1}^{2}\Bigg\{\left[\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12R}\int\phi_j\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}dx\right]a_j-\left[\frac{\rho h^2}{12R}\int\phi_j\phi_i dx\right]\ddot{a}_j+\left[\kappa^2\mu\int\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial x}dx\right]b_j$$
$$+\left[\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12}\int\phi_j\frac{d^2\phi_i}{dx^2}-\kappa^2\mu\int\phi_j\phi_i dx\right]c_j-\left[\frac{\rho h^2}{12}\int\phi_j\phi_i dx\right]\ddot{c}_j$$
$$-\left[(2\lambda-\kappa^2\mu)\frac{h^2}{12R}\int\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial x}dx\right]d_j+\int\frac{m_x}{h}\phi_i dx+B_1+B_2+B_3+B_4\Bigg\}=0 \tag{۲۷-۴}$$

$$3)\ \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\lambda}{R}\int\phi_j\frac{d\phi_i}{dx}dx\right]a_j-\left[k^2\mu\int\phi_j\frac{d\phi_i}{dx}dx\right]c_j+\left[\kappa^2\mu\int\phi_j\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx-\frac{(\lambda+2\mu)}{Rh}\alpha\right.$$
$$\left.\int\phi_j\phi_i dx\right]b_j-\rho\left[\int\phi_j\phi_i dx\right]\ddot{b}_j+\left[\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\int\phi_j\frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx-\frac{(\lambda+2\mu)\beta}{Rh}\int\phi_j\phi_i dx\right.$$

$$-\frac{\lambda}{R}\int \phi_j\phi_i dx\Bigg]d_j-\left[\frac{\rho h^2}{12R}\int \phi_j\phi_i dx\right]\ddot{d}_j+\int \frac{q}{h}\phi_i dx+D_1+D_2+D_3+D_4\Bigg\}=0$$

(۲۸-۴)

$$4)\ \sum_{j=1}^{2}\Bigg\{\left[\lambda\int \frac{d\phi_i}{dx}\phi_j dx\right]a_j+\left[\left(2\lambda-\kappa^2\mu\right)\frac{h^2}{12R}\int \phi_j\frac{d\phi_i}{dx}dx\right]c_j-\left[\frac{\rho h^2}{12R}\int \phi_j\phi_i dx\right]\ddot{b}_j+$$

$$\left[\frac{k^2\mu h^2}{12R}\int \phi_j\frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx-\frac{(\lambda+2\mu)\beta}{Rh}\int \phi_j\phi_i dx-\frac{\lambda}{R}\int \phi_j\phi_i dx\right]b_j-\left[\frac{\rho h^2}{12}\int \phi_j\phi_i dx\right]\ddot{d}_j$$

$$\left[\frac{k^2\mu h^2}{12}\int \phi_j\phi_i dx-(\lambda+2\mu)\left(1+\frac{2}{Rh}\right)\int \phi_j\phi_i dx\right]d_j+\int \frac{m_z}{h}\phi_i dx+E_1+E_2+E_3+E_4\Bigg\}=0$$

(۲۹-۴)

پس از این مرحله معادله را می‌توان بشکل ماتریسی زیر تبدیل کرد.

$$[M]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}=\{F\} \qquad (۳۰-۴)$$

مقادیر ماتریس $[M]$, $[K]$, $\{F\}$ و $\{X\}$ بصورت زیر تبدیل خواهند شد.

$$[M]=\begin{bmatrix} -\rho\int \phi_j\phi_i dx & -\frac{\rho h^2}{12R}\int \phi_j\phi_i dx & 0 & 0 \\ -\frac{\rho h^2}{12R}\int \phi_j\phi_i dx & -\frac{\rho h^2}{12}\int \phi_j\phi_i dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\int \phi_j\phi_i dx & -\frac{\rho h^2}{12R}\int \phi_j\phi_i dx \\ 0 & 0 & -\frac{\rho h^2}{12R}\int \phi_j\phi_i dx & -\frac{\rho h^2}{12}\int \phi_j\phi_i dx \end{bmatrix} \qquad (۳۱-۴)$$

$$K=\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} & K_{2,4} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} & K_{3,4} \\ K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} & K_{4,4} \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$K_{1,1}=(\lambda+2\mu)\int \phi_j \frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx \qquad K_{1,2}=\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12R}\int \phi_j \frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx$$

$$K_{1,3}=-\frac{\lambda}{R}\int \phi_j \frac{d\phi_i}{dx}dx \qquad K_{1,4}-\lambda\int \phi_j \frac{d\phi_i}{dx}dx$$

$$K_{2,1}=\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12R}\int \phi_j \frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx \qquad K_{2,2}=\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12}\int \phi_j \frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx-\kappa^2\mu\int \phi_j\phi_i dx$$

$$K_{2,3}=-\kappa^2\mu\int \phi_j \frac{d\phi_i}{dx}dx \qquad K_{2,4}=\frac{-(2\lambda-\kappa^2\mu)h^2}{12R}\int \phi_j \frac{d\phi_i}{dx}dx$$

$$K_{3,1}=\frac{\lambda}{R}\int \phi_j \frac{d\phi_i}{dx}dx \qquad K_{3,2}=-\kappa^2\mu\int \phi_j \frac{d\phi_i}{dx}dx$$

$$K_{3,3}=\kappa^2\mu\int \phi_j \frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx-\frac{(\lambda+2\mu)\alpha}{Rh}\int \phi_j\phi_i dx$$

$$K_{3,4}=\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\int \phi_j \frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx-\frac{(\lambda+2\mu)\beta}{Rh}\int \phi_j\phi_i dx-\frac{\lambda}{R}\int \phi_j\phi_i dx$$

$$K_{4,1}=\lambda\int \phi_j \frac{d\phi_i}{dx}dx \qquad K_{4,2}=\frac{(2\lambda-\kappa^2\mu)h^2}{12R}\int \phi_j \frac{d\phi_i}{dx}dx$$

$$K_{4,3}=\frac{\kappa^2\mu h^2}{Rh}\int \phi_j \frac{d^2\phi_i}{dx^2}dx-\frac{(\lambda+2\mu)\beta}{Rh}\int \phi_j\phi_i dx-\frac{\lambda}{R}\int \phi_j\phi_i dx$$

$$K_{4,4}=\frac{\kappa^2\mu h^2}{12}\int \phi_j\phi_i dx-(\lambda+2\mu)(1+\eta/Rh)\int \phi_j\phi_i dx$$

$$\{F\}=\begin{bmatrix}\int \frac{F_x}{h}\phi_i dx+A_1+A_2+A_3+A_4\\ \int \frac{m_x}{h}\phi_i dx+B_1+B_2+B_3+B_4\\ \int \frac{q}{h}\phi_i dx+D_1+D_2+D_3+D_4\\ \int \frac{m_z}{h}\phi_i dx+E_1+E_2+E_3+E_4\end{bmatrix} \qquad \{x\}=\begin{Bmatrix}a_i\\ c_i\\ b_i\\ d_i\end{Bmatrix}$$

که f_x و f_z و q و m_zدر رابطه (۲-۱۴) تعریف شده اند.

۴-۴ بارگذاری:

مقدمه[۲۶]:

بارهای متحرک بارهایی هستند که مختصات مکان اثرشان با زمان متغیر است.این بارها به دو دسته گسترده ومتمرکز تقسیم می شوند.بارهای متمرکز با استفاده از تابع دلتای دیراک شبیه سازی می شود:

$$\delta(t)=\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon} & -\frac{\varepsilon}{2}<t<\frac{\varepsilon}{2}\\ 0 & else\end{cases} \tag{۴-۳۲}$$

تابع دلتای دیراک برای شبیه سازی بارهای ناگهانی و ضربه ها وبارهای متمرکز استفاده می شود می توان نشان داد :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \tag{۴-۳۳}$$

برای بارهای گسترده از تابع پله ای یا هویساید[1] استفاده میشود.دراین مسئله ،بارگذاری،یک فشار داخلی متحرک است که با تابع پله ای تعریف می شود:

$$f_z = P_0\left(1 - H\left(x - Vt\right)\right)$$

$$H(x-vt)=\begin{cases}0 & x<Vt\\ 1 & x>Vt\end{cases} \tag{۴-۳۴}$$

[1] Heaviside

که V سرعت بار و H تابع هویساید می باشد.

بنابراین مقادیر q و m_z عبارتست از:

$$q=P_0\left(1-H(x-Vt)\right)\left(1-\frac{h}{2R}\right)$$

$$m_z=-\left(\frac{P_0(1-H(x-Vt)h}{2}\right)\left(1-\frac{h}{2R}\right) \qquad (۳۵-۴)$$

۴-۵ شرایط مرزی :

پوسته استوانه‌ای دو سر گیردار فرض شده است بنابراین خیز و شیب در دو انتهای پوسته مساوی با صفر خواهد شد.

حل مسئله به تعریف توابع شکل[۱] نیازمند است.برای این مسئله از توابع شکل بفرم ذیل استفاده شده است.

$$\phi_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$$

$$\phi_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (۳۶-۴)$$

توابع شکل ϕ_i دارای خاصیت $\phi_i(x_j)=\delta_{ij}$ می‌باشند که : $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$$\phi_1=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\rightarrow\frac{d\phi_1}{dx}=\frac{-1}{L} \qquad \phi_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\rightarrow\frac{d\phi_1}{dx}=\frac{1}{L} \qquad (۳۷-۴)$$

بنابراین :

$$\phi_1(x_1)=1 \qquad \phi_1(x_2)=0$$

$$\phi_2(x_1)=0 \qquad \phi_2(x_2)=1 \qquad (۳۸-۴)$$

[1] Shape function.

با توجه به روابط فوق و استفاده از شرایط مرزی مقادیر $A_1\cdots A_4, B_1\cdots B_4, C_1\cdots C_4, D_1\cdots D_4$ را می‌توان تعیین کرد.

در این صورت نتیجه می‌شود :

$$A_1 = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\phi_i(x)\Big|_1^2 - u(x,t)\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}\Big|_1^2$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\phi_i(x)\Big|_1^2 = \frac{\partial u(2,t)}{\partial x}\phi_i(2) - \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}\phi_i(1) \qquad (۴-۳۹)$$

$$i=1 \Rightarrow \frac{\partial u(2,t)}{\partial x}\phi_1(2) - \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}\phi_1(1) = -\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}$$

$$i=2 \Rightarrow \frac{\partial u(2,t)}{\partial x}\phi_2(2) - \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}\phi_2(1) = -\frac{\partial u(2,t)}{\partial x}$$

$$u(x,t)\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}\Big|_1^2 = u(2,t)\frac{\partial \phi_i(2)}{\partial x} - u(1,t)\frac{\partial \phi_i(1)}{\partial x}$$

$$i=1 \Rightarrow u(2,t)\frac{\partial \phi_1(2)}{\partial x} - u(1,t)\frac{\partial \phi_1(1)}{\partial x} = +\frac{u(1,t)}{l}$$

$$i=2 \Rightarrow u(2,t)\frac{\partial \phi_2(2)}{\partial x} - u(1,t)\frac{\partial \phi_2(1)}{\partial x} = +\frac{u(2,t)}{L} \qquad (۴-۴۰)$$

بنابراین با استفاده از (۴-۵-۴)و(۴-۵-۵) برای یک المان :

$$A_1 = \left(-\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(2,t)}{\partial x}\right) - \left(\frac{u(1,t)}{L} - \frac{u(2,t)}{L}\right) \qquad (۴-۴۱)$$

با توجه به شرط مرزی ،جابجائی و شیب صفر، $\frac{u(2,t)}{L}$, $\frac{du(1,t)}{dx} = 0$:

$$A_1 = -\frac{\partial u(2,t)}{\partial x} + \frac{u(2,t)}{L} \qquad (۴-۴۲)$$

و همین طور برای A_2 :

$$A_2 = -\frac{\partial \psi_z(2,t)}{\partial x} + \frac{\psi_z(2,t)}{L} \qquad (۴-۴۳)$$

$$A_3 = \frac{\lambda}{R}\left[w\phi_i\right]_{-1/2}^{1/2}$$ (۴۴-۴)

$$w\phi_i(x)\Big|_1^2 = w\phi_i(2) - w\phi_i(1)$$

$$i=1 \rightarrow w\phi_1(2) - w\phi_1(1) = -w_1$$

$$i=2 \rightarrow w\phi_2(2) - w\phi_2(1) = -w_2$$

$$A_3 = -w_1 - (w_2)$$

$$A_3 = -w_2$$

$$A_4 = \lambda\left[\psi_z\phi_i\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$\psi_z\phi_i(x)\Big|_1^2 = \psi_z\phi_i(1)$$ (۴۵-۴)

$$i=1 \rightarrow \psi_z\phi_1(2) - \psi_z\phi_1(1) = -\psi_{z1}$$

$$i=2 \rightarrow \psi_z\phi_2(2) - \psi_z\phi_2(1) = -\psi_{z2}$$

$$A_4 = -\psi_{z1} - \psi_{z2}$$

$$A_4 = -\psi_{z2}$$

همین طور برای سایر مقادیر ثابت E , C , D مقادیر محاسبه می‌شود.

با در نظر گرفتن چندین المان برای پوسته ،باید در هر المان و المان بعد شرط پیوستگی رعایت گردد.یعنی باید مقادیر شیب و جابجایی برای هر دو المان مجاور یکسان باشدکه با توجه به روابط فوق،مجموع مقادیر شار در المانهای میانی پس از مونتاژ ماتریسهای المان صفر خواهد شد. یعنی مثلاً اگر پوسته دارای چهار المان باشد در اینصورت :

$$A_1 = -\frac{\partial u(2,t)}{\partial x} - \frac{u(2,t)}{L}$$

$$A_2 = \frac{\partial u(2,t)}{\partial x} + \frac{u(2,t)}{L} - \frac{\partial u(3,t)}{\partial x} - \frac{u(3,t)}{L}$$

$$A_3 = \frac{\partial u(3,t)}{\partial x} - \frac{u(3,t)}{L} - \frac{\partial u(4,t)}{\partial x} - \frac{u(4,t)}{L}$$

کل $A_1 = A_{i1} + A_{i2} + A_{i3}$ (۴۶-۴)

$$A_1 = -\frac{\partial u(2,t)}{\partial x} - \frac{u(2,t)}{L} + \frac{\partial u(2,t)}{\partial x} + \frac{u(2,t)}{L} - \frac{\partial u(3,t)}{\partial x} - \frac{u(3,t)}{L} + \frac{\partial u(3,t)}{\partial x} - \frac{u(3,t)}{L}$$

$$-\frac{\partial u(4,t)}{\partial x} - \frac{u(4,t)}{L} \Rightarrow A_1 - \frac{\partial u(4,t)}{\partial x} - \frac{u(4,}{L} \xrightarrow[\text{انتهایی}]{\text{با توجه به شرط مرزی}} A_1 = 0 \qquad (۴۷-۴)$$

با توجه به فرمول (۴-۵-۱۲) برای سایر مقادیر ثابت D , C , B , A نیـز بـه همـین طریـق اثبـات می‌شود که مقدار همگی آنها مساوی صفر خواهند بود بنابراین:

$$\{F\} = \begin{bmatrix} \int \frac{F_x}{h}\phi_i dx \\ \int \frac{m_x}{h}\phi_i dx \\ \int \frac{q}{h}\phi_i dx \\ \int \frac{m_z}{h}\phi_i dx \end{bmatrix} \qquad (۴۸-۴)$$

جهت محاسبه، ماتریس [M] , [K] مطابق زیرعمل می‌شود :

$$a_{ij} = -\rho\int \phi_j \phi_i dx$$

$$1)\ \ i = j = 1 \Rightarrow M_{1,1} = a_{1,1} = \int_{-1/2}^{1/2} \phi_1(x)\phi_1(x) dx = \int \phi_1(x)^2 dx$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{L-2x}{2L}\right)^2 dx = \left.\frac{(L-2x)^3}{24L^2}\right|_{-l/2}^{l/2}$$

$$M_{11} = \frac{-1}{3}\rho L$$

(۴۹-۴)

$$2)\ \ i = 1\ ,\ \ j = 1 \Rightarrow M_{1,6} = a_{1,2} = \rho\int_{-1/2}^{1/2} \phi_2(x)\phi_1(x) dx = \rho\int \left(\frac{2x+L}{2L}\right)\left(\frac{L-2x}{2L}\right) dx$$

$$\rho\int_{-1/2}^{1/2} \frac{(2x+L)(L-2x)}{4L^2} dx = \rho\left.\frac{-\frac{4}{3}x^3 + L^2 x}{24L^2}\right|_{-l/2}^{l/2}$$

$$M_{1,6} = -\frac{1}{6}\rho L \qquad (۵۰-۴)$$

به همین طریق برای مابقی عناصر ماتریس به عناصر موجود در آن

$$\frac{d\phi_1}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{L-2x}{2L}\right)=-\frac{1}{L} \qquad \frac{d^2\phi_1}{dx^2}=0$$

$$\frac{d\phi_2}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+L}{2L}\right)=\frac{1}{L} \qquad \frac{d^2\phi_2}{dx^2}=0$$

(۵۱-۴)

بنابراین :

$$\int \phi_j \frac{d^2\phi_i}{dx^2}=0$$

$$K_{ij}=w_{12}\int_{-1/2}^{1/2}\phi_j\frac{d\phi_i}{dx}\Rightarrow K_{12}=b_{1,2}=w_{12}\int_{-1/2}^{1/2}\phi_2(x)\frac{d\phi_1(x)}{dx}dx$$

(۵۲-۴)

$$=w_{12}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{2x+L}{2L}\right)\left(\frac{L}{2}\right)dx$$

$$=-w_{12}\frac{x^2+Lx}{2L^2}\Bigg|_{-l/2}^{l/2}=-\frac{1}{2}w_{12}$$

$$K_{23}=b_{2,1}=w_{12}\int_{-1/2}^{1/2}\phi_1(x)\frac{d\phi_2(x)}{dx}dx$$

$$=w_{12}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{L-2x}{2L}\right)\left(\frac{-L}{2}\right)dx=\frac{Lx-x^2}{2L^2}\int_{-1/2}^{1/2}=\frac{1}{2}w_{12}$$

(۵۳-۴)

بنابراین پس از محاسبه مقادیر ماتریس M , K بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$[M]=\begin{bmatrix}
-\frac{1}{3}\rho l & -\frac{1}{3}wl & 0 & 0 & -\frac{1}{6}\rho l & -\frac{1}{6}wl & 0 & 0\\
-\frac{1}{6}\rho l & -\frac{1}{6}wl & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\rho l & -\frac{1}{3}wl & 0 & 0\\
-\frac{1}{3}wl & -\frac{1}{3}w_1 l & 0 & 0 & -\frac{1}{6}wl & -\frac{1}{6}w_1 l & 0 & 0\\
-\frac{1}{6}wl & -\frac{1}{6}w_1 l & 0 & 0 & -\frac{1}{3}wl & -\frac{1}{3}w_1 l & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{1}{3}\rho l & -\frac{1}{3}wl & 0 & 0 & -\frac{1}{6}\rho l & -\frac{1}{6}wl\\
0 & 0 & -\frac{1}{6}\rho l & -\frac{1}{6}wl & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\rho l & -\frac{1}{3}wl\\
0 & 0 & -\frac{1}{3}wl & -\frac{1}{3}w_1 l & 0 & 0 & -\frac{1}{6}wl & -\frac{1}{6}w_1 l\\
0 & 0 & -\frac{1}{6}wl & -\frac{1}{6}w_1 l & 0 & 0 & -\frac{1}{3}wl & -\frac{1}{3}w_1 l
\end{bmatrix}$$

(۵۴-۴)

$$[K]=\begin{bmatrix}
0 & 0 & -\frac{1}{2}w_{12} & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}w_{12} & -\frac{\lambda}{2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{2}w_{12} & -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}w_{12} & -\frac{\lambda}{2} \\
0 & -\frac{1}{6}w_{11}L & \frac{1}{2}w_{11} & -\frac{1}{2}w_{6} & 0 & -\frac{1}{6}w_{11}L & \frac{1}{2}w_{11} & -\frac{1}{2}w_{6} \\
0 & -\frac{1}{6}w_{11} & \frac{1}{2}w_{11} & -\frac{1}{2}w_{6} & 0 & -\frac{1}{6}w_{11} & \frac{1}{2}w_{11} & -\frac{1}{2}w_{6} \\
-\frac{1}{2}w_{12} & \frac{1}{2}w_{11} & -\frac{1}{3}w_{10}L & -\frac{1}{6}(w_7+w_{12})L & -\frac{1}{2}w_{12} & \frac{1}{2}w_{11} & -\frac{1}{3}w_{10}L & -\frac{1}{6}(w_7+w_{12})L \\
-\frac{1}{2}w_{12} & \frac{1}{2}w_{11} & -\frac{1}{3}w_{10}L & -\frac{1}{6}(w_7+w_{12})L & -\frac{1}{2}w_{12} & \frac{1}{2}w_{11} & -\frac{1}{3}w_{10}L & -\frac{1}{6}(w_7+w_{12})L \\
-\frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{2}w_{6} & -\frac{1}{6}(w_7+w_{12})L & \frac{1}{3}(w_8-w_{12})L & -\frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{2}w_{6} & -\frac{1}{6}(w_7+w_{12})L & \frac{1}{3}(w_8-w_{12})L \\
-\frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{2}w_{6} & -\frac{1}{6}(w_7+w_{12})L & \frac{1}{3}(w_8-w_{12})L & -\frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{2}w_{6} & -\frac{1}{6}(w_7+w_{12})L & \frac{1}{3}(w_8-w_{12})L
\end{bmatrix}$$

که :

$$w=\frac{\rho h}{12R} \qquad w_4=\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12R}$$

$$w_1=\frac{\rho h^2}{12} \qquad w_3=(\lambda+2\mu)$$

$$w_5=\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12} \qquad w_6=\frac{(2\lambda+\kappa^2\mu)h^2}{12R}$$

$$w_7=\frac{(\lambda+2\mu)\beta}{Rh} \qquad w_8=\frac{\kappa^2\mu h^2}{12}$$

$$w_9=(\lambda+2\mu)\left(1+{}^{1}\!/_{Rh}\right) \qquad w_{10}=\frac{(\lambda+2\mu)\alpha}{Rh}$$

$$w_{11}=-\kappa^2\mu \qquad w_{12}=-\frac{\lambda}{R}$$

(۵۵-۴)

۵-۱ مقدمه :

روشهای انتگرال گیری عددی بسیاری،جهت حل معادلات به فرم کلی :

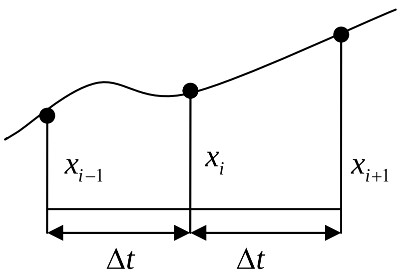
$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{F(t)\} \tag{۵-۱}$$

ارائه شده است که درآن $[M],[C],[K]$ به ترتیب مقادیر ماتریسهای سختی،دمپینگ و جرم بوده ،بردارهای $\{\ddot{x}\},\{\dot{x}\}\{x\}$ به ترتیب بردارهای جابجایی،سرعت و شتاب است و $\{F(t)\}$ کار نیروهای خارجی می باشدکه می توان آنها را به دو دسته مستقیم[۱] و ضمنی[۲] تقسیم کرد.در این فصل برخی از این روشها تشریح و مسئله موردنظر به کمک آن حل می شود.

۵-۲ روش های مستقیم:

۵-۲-۱ روش تفاضلات مرکزی[۳] [۲۷]

فرض می شود منحنی مکان-زمان همانند شکل(۵-۱) باشد



شکل ۵- ۱ منحنی زمان-مکان در تفاضلات مرکزی

معادله سرعت در زمان Δt بصورت:

$$\dot{x}_{i+1/2}=\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t} \tag{۵-۲}$$

وشتاب بصورت:

$$\ddot{x}_i=\frac{\dot{x}_{i+1/2}-\dot{x}_{i-1/2}}{\Delta t} \tag{۵-۳}$$

با استفاده از تعریف سرعت در معادله(۵-۲) وجایگذاری در معادله (۵-۳):

$$\ddot{x}_i=\frac{1}{\Delta t^2}\left(x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}\right) \tag{۵-۴}$$

---

[1] Explicit Method
[2] Implicit Method
[3] Centeral Difference Method

بنابراین فرمول تفاضل برای تفاضلات مرکزی بصورت:

$$\{\dot{x}_t\} = \frac{1}{2\Delta t}\left[\{x_{t+\Delta t}\} - \{x_{t-\Delta t}\}\right] \tag{۵-۵}$$

$$\{\ddot{x}_t\} = \frac{1}{2\Delta t}\left[\{x_{t+\Delta t}\} - 2\{x_t\} + \{x_{t-\Delta t}\}\right] \tag{۶-۵}$$

با جایگذاری معادلات (۵-۵) و (۵-۶) در معادله(۵-۱):

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}[m] + \frac{1}{2\Delta t}[c]\right)\{x_{t+\Delta t}\}$$
$$= \{Q_t\} - \left([k] - \frac{2}{\Delta t^2}[m]\right)\{x_i\} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}[m] - \frac{1}{\Delta t^2}[c]\right)\{x_{t-\Delta t}\} \tag{۷-۵}$$

معادله فوق را می توان بصورت زیر نوشت:

$$[\overline{m}]\{x_{t+\Delta t}\} = \{\overline{Q_t}\} \tag{۸-۵}$$

$$[\overline{m}] = \frac{1}{\Delta t^2}[m] + \frac{1}{2\Delta t}[c]$$
$$\{\overline{Q_t}\} = \{Q_t\} - \left([k] - \frac{2}{\Delta t^2}[m]\right)\{x_t\} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}[m] - \frac{1}{2\Delta t}[c]\right)\{x_{t-\Delta t}\} \tag{۹-۵}$$

نکته مهم در تفاضل مرکزی انتخاب Δt است که با رابطه زیر محدود می شود:

$$\Delta t \le \frac{2}{\omega_{\max}} \tag{۱۰-۵}$$

۵-۲-۲سیکل تکرار دوگانه با قاعده ذوزنقه ای[1][۲۷]

فرم معادلات بصورت زیر است:

$$[m]\{\Delta\ddot{x}_t\} = \{\Delta Q_t\} - [k]\{\Delta x_t\} - [c]\{\Delta\dot{x}_t\} \tag{۱۱-۵}$$

برای سیکل اول:

[1] Two-cycle iteration with trapezoidal rule

برای زمان اول:

$$\{\Delta\dot{x}_t\} = \Delta t\{\ddot{x}_{t-\Delta t}\}$$

زمانهای بعدی:

$$\{\Delta\dot{x}_t\} = 2\Delta t\{\ddot{x}_{t-\Delta t}\} - \{\Delta\dot{x}_{t-\Delta t}\}$$

$$\{\dot{x}_t\} = \{\dot{x}_{t-\Delta t}\} - \{\Delta\dot{x}_t\}$$

$$\{\Delta x_t\} = \frac{\Delta t}{2}\{\dot{x}_{t-\Delta t}\} + \{\dot{x}_t\} \qquad (۱۲\text{-}۵)$$

بنابراین برای سیکل اول شتاب بصورت زیر است:

$$\{\Delta\ddot{x}_t\} = [m]^{-1}(\{Q_t\} - [k]\{\Delta x_t\} - [c]\{\Delta\dot{x}_t\})$$

$$\{\ddot{x}_t\} = \{\ddot{x}_{t+\Delta t}\} + \{\Delta\ddot{x}_t\} \qquad (۱۳\text{-}۵)$$

در سیکل دوم زمانی :

سرعت و شتاب بصورت زیر است:

$$\{\Delta\dot{x}_t\} = \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{x}_{t-\Delta t}\} + \{\ddot{x}_t\}$$

$$\{\dot{x}_t\} = \{\dot{x}_{t-\Delta t}\} + \{\Delta\dot{x}_t\}$$

$$\{\Delta x_t\} = \frac{\Delta t}{2}(\{\dot{x}_{t-\Delta t}\} + \{\dot{x}_t\}) \qquad (۱۴\text{-}۵)$$

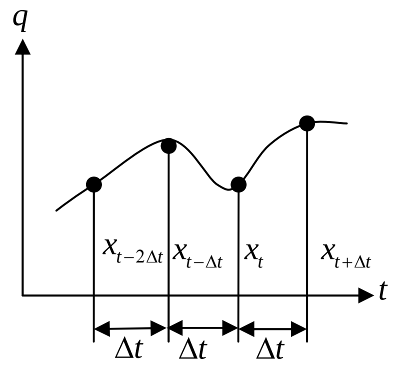
در نهایت مقادیر $\{\Delta\dot{x}_t\}$و $\{\Delta x_t\}$ از معادله (۵-۱۴) محاسبه شده ودر معادله اول (۵-۴) جایگزین و سپس از قسمت دوم معادله(۵-۱۳) شتاب جدید حاصل می شود.

۵-۳ روش های ضمنی

۵-۳-۱ روش Houbolt[۲۷]

این روش بر پایه میانیابی درجه سوم از جابجایی ها است.در روش هوبولت از عناصر جابجایی با استفاده از روش دیفرانسیلی پس رونده [1] جهت استخراج فرمولهای ضمنی سرعت و شتاب ،که در شکل (۵-۲-۱) آمده است استفاده می گردد.

[1] Backward differences



شکل(۵-۲)**منحنی زمان-مکان در** روش هوبولت

$$
\begin{aligned}
x_t &= x_{t+\Delta t} - \Delta t \dot{x}_{t+\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{x}_{t+\Delta t} - \frac{\Delta t^3}{6}\dddot{x}_{t+\Delta t} \\
x_{t-\Delta t} &= x_{t+\Delta t} - (2\Delta t)\dot{x}_{t+\Delta t} + \left(2\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \ddot{x}_{t+\Delta t} - \left(\frac{2\Delta t}{6}\right)^3 \dddot{x}_{t+\Delta t} \\
x_{t-2\Delta t} &= x_{t+\Delta t} - (3\Delta t)\dot{x}_{t+\Delta t} + \left(3\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \ddot{x}_{t+\Delta t} - \left(\frac{3\Delta t}{6}\right)^3 \dddot{x}_{t+\Delta t}
\end{aligned} \quad (۱۵-۵)
$$

برای حل معادلات (۵-۱۵) باید مقادیر $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ و $\dot{x}_{t+\Delta t}$ مشخص باشند بنابراین :

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t^2}\left(2x_{t+\Delta t} - 5x_t + 4x_{t-\Delta t} - x_{t-2\Delta t}\right) \\
\dot{x}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{6\Delta t}\left(11x_{t+\Delta t} - 18x_t + 9x_{t-\Delta t} - 2x_{t-2\Delta t}\right)
\end{aligned} \quad (۱۶-۵)
$$

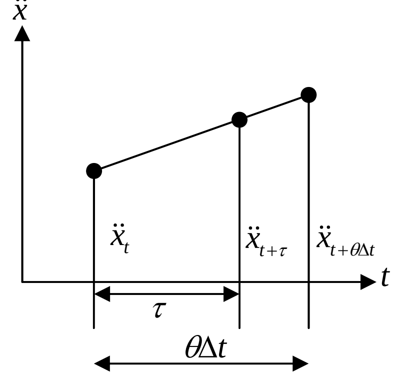
بنابراین :

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{\Delta t^2}[m] + \frac{11}{6\Delta t}[c] + [k]\right)\{x_{t+\Delta t}\} = \{Q_{t+\Delta t}\} + \left(\frac{5}{\Delta t^2}[m] + \frac{3}{\Delta t}[c]\right)\{x_t\} \\
&+\left(\frac{4}{\Delta t^2}[m] + \frac{3}{2\Delta t}[c]\right)\{x_{t-\Delta t}\} + \left(\frac{1}{\Delta t^2}[m] + \frac{1}{3\Delta t}[c]\right)\{x_{t-2\Delta t}\}
\end{aligned} \quad (۱۷-۵)
$$

از معادله(۵-۲-۱-۳) مقدار جابجایی $x_{t+\Delta t}$ در زمان $t+\Delta t$ تعیین شده و با جایگذاری در معادلات (۵-۲-۱-۲) مقادیر سرعت وشتاب در زمان $t+\Delta t$ تعیین می گردد.

۵-۳-۲ روش Wilson theta[۲۷]

در این روش فرض می شود که برای یک افزایش زمانی $\theta\Delta t$ $(\theta \ge 1.0)$ مقدار شتاب بصورت خطی افزایش پیدا می کند یا در طی این فاصله زمانی خصوصیات دینامیکی سیستم ثابت باقی می ماند.



شکل ۵-۳ تغییرات شتاب نسبت به زمان در روش**Wilson thet**

اگر τافزایش زمان از t تا $t+\Delta t$ باشد،

$$\ddot{x}_{t+\Delta t}=\ddot{x}_t+\frac{\tau}{\theta\Delta t}\left(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t}-\ddot{x}_t\right) \qquad (۱۸\text{-}۵)$$

که در نهایت :

$$[\overline{m}]\{x_{t+\theta\Delta t}\}=\{\overline{Q}_{t+\theta\Delta t}\}$$

$$[\overline{m}]=\frac{6}{\theta^2\Delta t^2}[m]+\frac{3}{\theta\Delta t}[c]+[k] \qquad (۱۹\text{-}۵)$$

$$\{\overline{Q}_{t+\theta\Delta t}\}=\{Q_{t+\theta\Delta t}\}+\left(\frac{6}{\theta^2\Delta t^2}[m]+\frac{3}{\theta\Delta t}[c]\right)\{x_t\}+\left(\frac{6}{\theta\Delta t}[m]+2[c]\right)\{\dot{x}_t\}+$$
$$\left(2[m]+\frac{\theta\Delta t}{2}[c]\right)\{\ddot{x}\}$$

با حل معادله (۵-۱۹) مقدار $x_{t+\theta\Delta t}$ حاصل می شود و برای محاسبه شتاب و سرعت و جابجایی از معادلات زیر استفاده می گردد.

$$\{\ddot{x}_{t+\Delta t}\}=\frac{6}{\theta^3\Delta t^2}\left(\{x_{t+\theta\Delta t}\}-\{x_t\}\right)-\frac{6}{\theta^2\Delta t}\left(\{\dot{x}_t\}\right)+\left(1+\frac{3}{\theta}\right)\{\ddot{x}_t\} \qquad (۲۰\text{-}۵)$$

$$\{\dot{x}_{t+\Delta t}\}=\{\dot{x}_t\}+\frac{\Delta t}{2}\left(\{\ddot{x}_{t+\Delta t}\}+\{\ddot{x}_t\}\right)$$

$$\{x_{t+\Delta t}\}=\{x_t\}+\Delta t\{\dot{x}_t\}+\frac{\Delta t^2}{6}\left(\{\ddot{x}_{t+\Delta t}\}+2\{\ddot{x}_t\}\right)$$

مقدار $\theta \geq 1.37$ برای یک سیستم خطی باعث ناپایداری می شود.البته از مقدار ۱/۵ برای سیستمهای غیر خطی استفاده می گردد.

۵-۳-۳ روش Park[۲۷]

در این روش فرمولهای شتاب و سرعت به صورت زیر بیان می گردد:

$$\{\ddot{x}_{t+\Delta t}\}=\frac{1}{6\Delta t}\left[10\{\dot{x}_{t+\Delta t}\}-15\{\dot{x}_t\}+6\{\dot{x}_{t-\Delta t}\}-\{\dot{x}_{t-2\Delta t}\}\right] \qquad (۲۱\text{-}۵)$$

$$\{\dot{x}_{t+\Delta t}\}=\frac{1}{6\Delta t}\left[10\{x_{t+\Delta t}\}-15\{x_t\}+6\{x_{t-\Delta t}\}-\{x_{t-2\Delta t}\}\right]$$

با جایگذاری معادلات (۵-۲۱) در معادله (۵-۱) مقدار جابجایی بصورت زیر حاصل می شود:

$$\left(\frac{100}{36\Delta t^2}[m]+\frac{10}{6\Delta t}[c]+[k]\right)\{x_{t+\Delta t}\}=\{Q_{t+\Delta t}\}+\frac{15}{6\Delta t}[m]\{\dot{x}_t\}-\frac{1}{\Delta t}[m]\{\dot{x}_{t-\Delta t}\}+\frac{1}{6\Delta t}[m]\{\dot{x}_{t-2\Delta t}\}$$

$$\left(\frac{150}{36\Delta t^2}[m]+\frac{15}{6\Delta t}[c]\right)\{x_t\}-\left(\frac{10}{6\Delta t}[m]+\frac{1}{\Delta t}[c]\right)\{x_{t-\Delta t}\}+\left(\frac{1}{36\Delta t^2}[m]+\frac{1}{6\Delta t}[c]\right)\{x_{t-2\Delta t}\} \quad (۲۲-۵)$$

با استفاده از معادله (۵-۲۲) مقدار جابجایی بدست آمده، در معادلات (۵-۲۱) جهت محاسبه سرعت و سپس شتاب جایگزین می گردد.در استفاده از این روش حدس اولیه جهت شروع می باشد.

۵-۴ کد نویسی برای نرم افزار Maple

برای حل معادله (۴-۳۰) ،یک کد در محیط Maple آماده شده است.

ورودیهای برنامه عبارتند از:

الف:مشخصات هندسی: شعاع-طول-ضخامت

ب:مشخصات جنس پوسته:چگالی-ضریب پواسون-مدول یانگ

ج: مشخصات بارگذاری : دامنه بار

جدول ۵-۳ مشخصات هندسی ، جنس و باروارده بر پوسته

مشخصات پوسته وبار	واحد	مقدار
طول	m	۰/۵
شعاع میانی	m	۰/۰۸
ضخامت	m	۰/۰۱
مدول الاستیسیته	GPa	۲۰۹
ضریب پواسون		۰/۳
چگالی	Kg/m^3	۷۹۴۰
سرعت	m/s	۱۲۴۲
فشار	Pa	۵۰۰۰۰

تعداد المان : ne است.هرچه ne بیشتر باشد دقت بیشتر و محاسباترطولانی تراست.معمولاً یک مقدار بهینه برای آن انتخاب می شود.

درجه آزادی کل :تعداد گرهها $nn = ne + 1$ است . هر گره چهار درجه آزادی دارد بنابراین درجه آزاد کل عبارتست از حاصلضرب تعداد گرهها در درجه آزادی هر گره $\dim = nn * nd$

ماتریس ارتباطی:[1] مشخص کننده رابطه بین شماره هر گره در المان با شماره عمومی گره است.

بردار زمان:پس از تعریف زمان عبور فشار از کل پوسته و هر المان ،این مقادیر در بردار زمان ذخیره می گردد.

توابع شکل:با توجه به فصل چهارم توابع شکل تعریف می گردد.

ماتریسهای جرم و سختی برای یک المان : از توابع شکل و ماتریس ارتباطی ماتریسهای M , K حاصل میشود ، مقادیر برای یک المان می‌باشد.

مونتاژ ماتریسهای جرم و سختی برای المانها: با مونتاژ ماتریس المان،با روشهای متداول در FE انجام می شود.

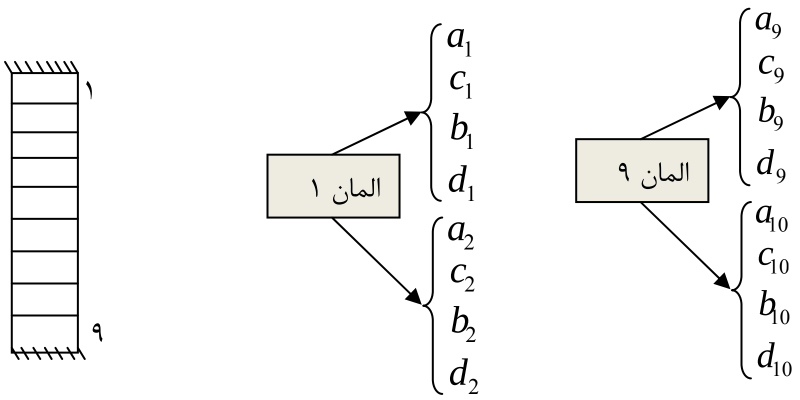
گام زمانی:جهت محاسبه Δt یا گام زمانی که در واقع تقسیماتی است که برروی دورهٔ زمانی مسئله صورت می‌گیرد تا پاسخهای صحیح و پایدار بدست آید، برای هر مسئله یک Δt_{cr} (گام زمانی بحرانی)وجود دارد که تحت هر شرایطی باید گام زمانی Δt از Δt_{cr} کوچکتر باشد.

برای تعیین گام زمانی محققین ، پیشنهادهای متفاوتی دارند. برای مثال صدرنژاد**[۲۹]**مقدار $\frac{T}{\pi}$ را پیشنهاد می‌کنند که T زمان یک ارتعاش یا همان دورهٔ تناوب نوسان است اما بهتر است که حتی‌الامکان گام زمانی کوچکتر درنظر گرفته شود.در صورتیکه مقدار گام زمانی بزرگتر از Δt_{cr} باشد، پاسخها پایدار نبوده و با تغییرات در تعداد المانها و مش‌بندی مسئله، پاسخ‌ها متفاوت خواهند بود و به یک مقدار همگرا نخواهد بود.

[1] Connectivity.

محاسبه نیرو: با توجه به نوع بار (فشاری) و شکل مسئله مقدار نیروی f_x صفر بوده بنابراین مقـادیر نیروهای m_x و F_x صفر می باشد .

شرایط مرزی:با توجه به دوسر گیردار بودن پوسته :



شکل (۵-۱) شماتیک جابجایی ها در نقاط مرزی

برای المان بندی فرضی همانند شکل(۵-۱) مقا دیر جابجایی $a_{10}, c_{10}, b_{10}, d_{10}, a_1, c_1, b_1, d_1$ همگی برابر صفر می باشند، بنابراین چهار ستون ابتدا و انتهای ماتریسهای جرم و سختی و بردار نیـرو حذف می گردد.

محاســـبه جابجـــایی المانهـــا : پـــس از محاســـبه مقـــادیر a_j, c_j, b_j, d_j در المانهـــا بـــا استفاده از معادله $\begin{cases} u_x = u + z\psi_x \\ u_z = w + z\psi_z \end{cases}$ مقادیر جابجایی های شعاعی و محوری بدست می آید.

۵-۵ تحلیل با Abaqus[۲۸]

۵-۵-۱ مقدمه:

بدون شک استفاده از روشهای المان محدود امروزه بسیار گسترده تر از قبل است که مهمترین دلیل آن ظهور کامپیوترها است که توانایی انجام محاسبات طولانی و با حجم زیاد را در اختیار محققان قرار می دهند.در حال حاضر علاوه بر نرم افزارهای ریاضی مانند Maple که امکان نوشتن کد برای انجام محاسبات تکراری با مقادیر ورودی های مختلف را فراهم می آورند نرم افزارهایی مختص روشهای المان محدود نیز موجود است.

از انواع این نرم افزارها می توان به Algor,Adina و Ansys وAbaqus وNastran اشاره کرد که این امکان را فراهم می آورند تا مهندسان براحتی از نتایج المان محدود بهرمند شوند.

۵-۵-۲ معرفی کلی نرم افزار

Abaqus یک نرم افزار تجاری در حل مسائل المان محدود است که توسط شرکت Simulia که زیر نظر مجموعه شرکت Dassault system است طراحی شده است.Abaqus دارای سه هسته اصلی است.

Abaqus/Standard یک تحلیلگر چند منظوره وبرای مسائل استاتیکی و سایر مسائل مشابه بکار می رود.

Abaqus/Explicit برای حل مسائل المان محدود دینامیکی گذرا و بویژه غیر خطی و همچنین مسائل شبه استاتیکی بکار می رود.

Abaqus/cae شامل محیط های طراحی (processing) و نمایش خروجی ها(post processing) می باشد.

Abaqus قابلیت تحلیل مسائل در سازه های آکوستیک[1] پیزو الکتریک ، مسائل دمایی و.... را داراست.اما مهمترین برتری این نرم افزار در محیط های غیر خطی و مواد الاستومریک[2] (لاستیکی شکل) است.همچنین توان محاسباتی بالای نرم افزار اجازه می دهد تا بتوان از المانهای مختلف و با تعداد نسبتاً زیاد استفاده نمود.

۵-۵-۳ مدل نمودن در Abaqus

برای انجام مدل در Abaqus مراحل زیر باید انجام پذیرد:

Part
Property
Assemply
Step

[1] Acoustic
[2] Elastomeric

Interaction

Load

Mesh

Job

Visualization

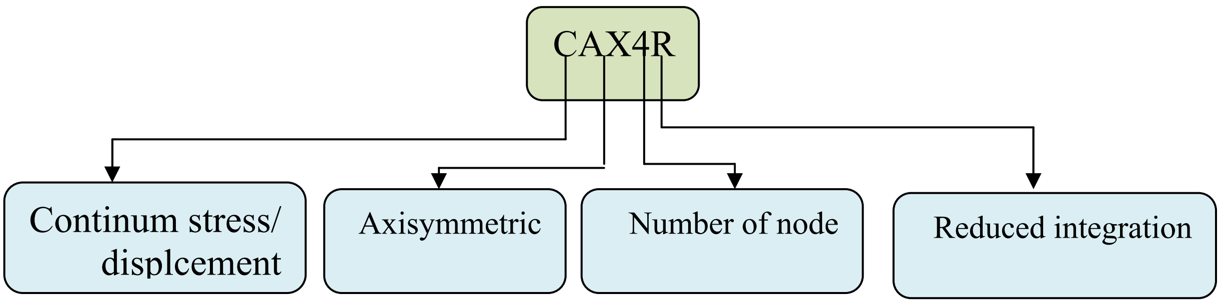
Sketch

جزئیات روش تحلیل با Abaqus در پیوست آورده شده است

پوسته جدار ضخیم الاستیک و ایزوتروپ با خصوصیات ذکر شده در جدول (۵-۱) ذکر شده است.

انتخاب المان:

برای مدل نمودن مسئله از تقارن محوری استفاده می شود که بدلیل تقارن هندسه و بارگذاری مسئله است.یکی از متداولترین نوع المان در تقارن محوری المانهای CAX4R میباشد که:

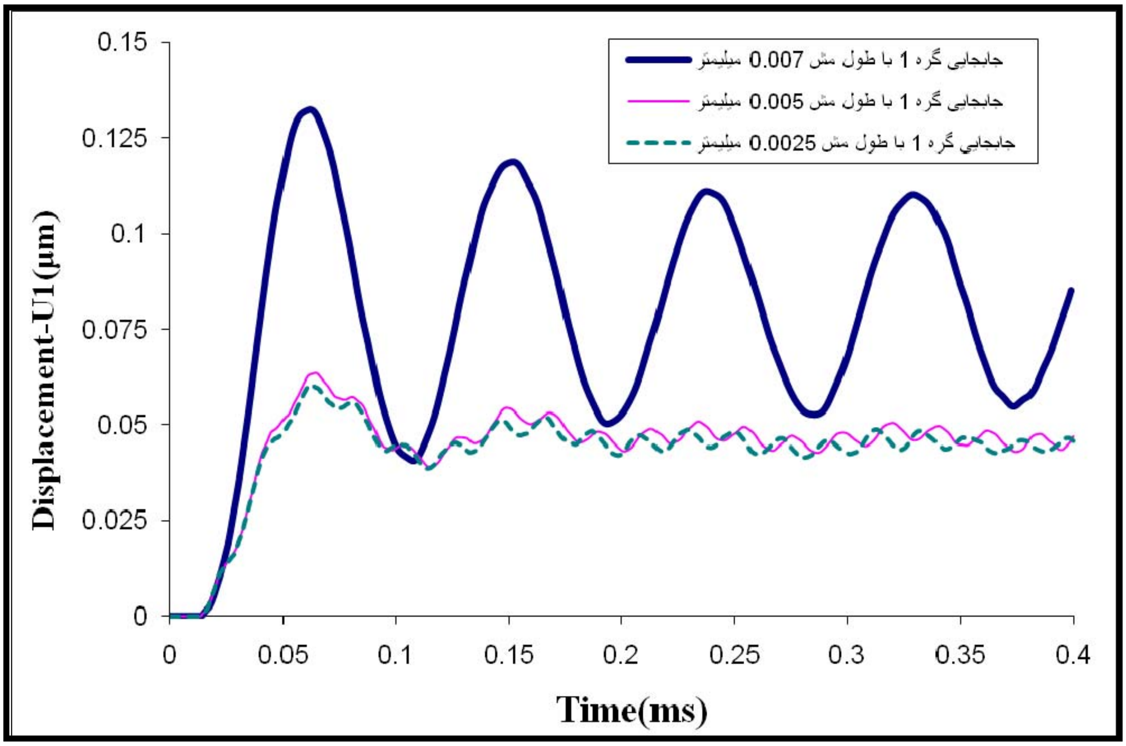


شکل ۵-۲ المان CAX4R

در این المان هر گره دارای دو درجه آزادی است و انواع بارهای متمرکز وگسترده و فشاری یا کششی را میتوان به این المان اعمال نمود.همچنین مش حاصل از این المان دارای هندسه بهتر و منظم تری است.

مش بندی:

در مش بندی علاوه بر توجه به تعداد المان توجه به هندسه مش نیز اهمیت دارد.برای انتخاب المان بهینه ،باید از تعداد المانهای کم استفاده کرد و به تدریج آن را افزایش داد و این کار تا جایی ادامه پیدا کند که پاسخ ها به یک ثبات رسیده و تغییرات آن با تغییر المان ناچیز باشد. با توجه به اینکه مش ها مربع شکل می باشد مقدار جابجایی برای گره یک مطابق با شکل (۵-۱۰) برای مش با طول های ۰/۰۰۷ و ۰/۰۰۵ و ۰/۰۰۲۵ میلیمتر در شکل (۵-۳) رسم شده است. که مطابق آن المان با طول مش ۰/۰۰۲۵ میلیمتر به عنوان المان بهینه انتخاب شده است.



شکل ۵-۳ مقایسه اثر تغییرات تعداد المان در جابجایی ها برای گره ۱

تعریف بار:

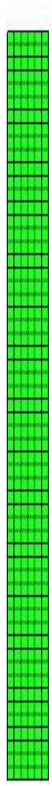
در مسئله مورد بررسی ،بار بصورت متحرک است. اما در نرم افزار چنین باری تعریف نشده است.اگر چه عدم تعریف بار متحرک باعث ایجاد خطا خواهد شداما با تقسیم بندی بار به فاصله های مختلف

طول مخزن در زمانهای متوالی ، رفتار بار دینامیکی شبیه سازی می گردد.زمان اعمال بار به تعدادی زیر بازه تقسیم شده و با افزایش زمان سطح وسیعتری از مخرن تحت بار قرار گرفته و در نهایت این کار تا آنجا ادامه میابد که بار کل مخزن را فرا گیرد.

شرایط مرزی:

با توجه به اینکه شرایط مرزی دو سر گیر دار[1] است ،کلیه درجات آزادی بـرای دوسـر المـان مسـاوی صفر است.

در شکل(۵-۴) المان بندی سازه نشان داده شده است.

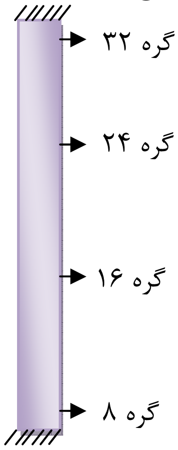


شکل (۵-۴) المان بندی سازه در Abaqus

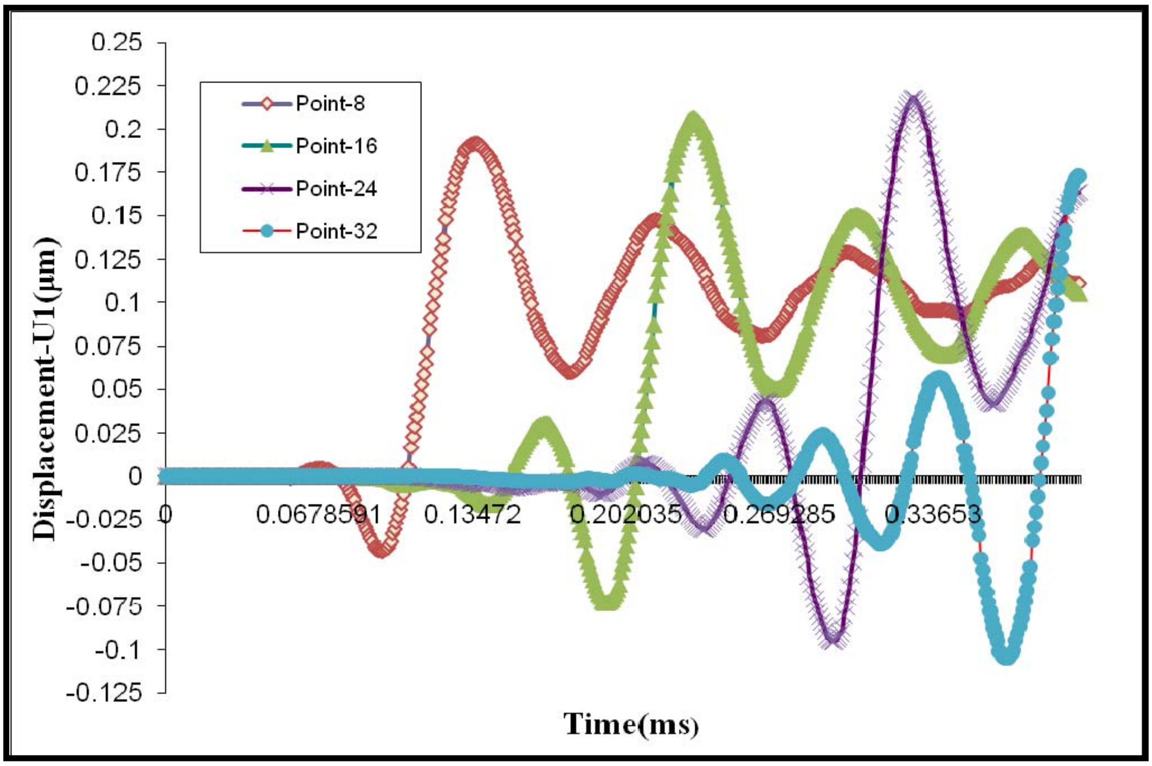
[1] Clamped

۵-۶ بررسی نتایج:

در این بخش پاسخهای بدست آمده از نرم افزار های Abaqus وMaple مقایسه خواهند شد.در این نرم افزارها مقادیر جابجایی برای گره هایی واقع بر جدار داخلی پوسته،نمایش داده می شود.موقعیت شماتیک گره ها در شکل(۵-۵) نشان داده شده است.این گره ها به ترتیب در فاصله ۵و۲۰و۳۵و۴۵وسانتیمتر از ابتدای پوسته واقع هستند

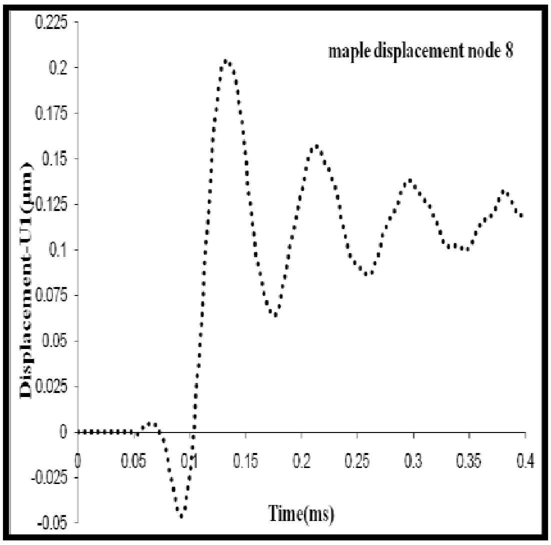


شکل ۵-۵ شماتیک گره ها

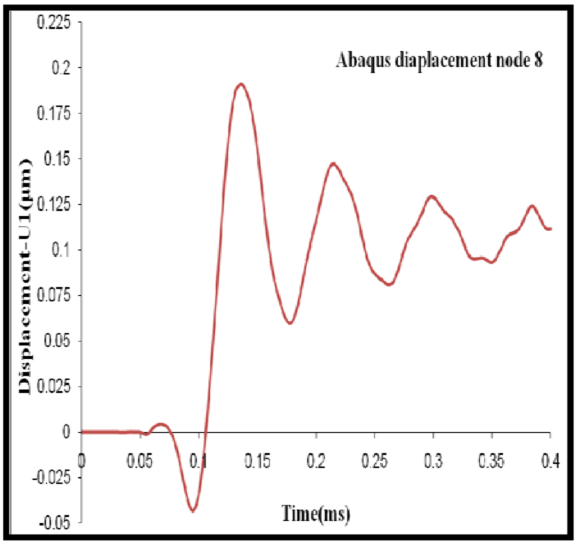


شکل(۵-۶) مقایسه جابجایی های شعاعی برای گره های ۸و۱۶و۲۴و۳۲ در Abaqus

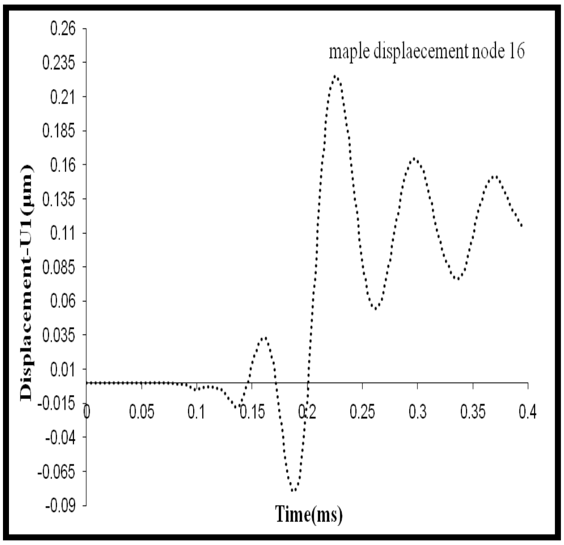
در شکل های (۵-۷) الی (۵-۱۳)جابجایی های شعاعی بر حسب زمان در نرم افزار Abaqus وMaple آورده شده است.



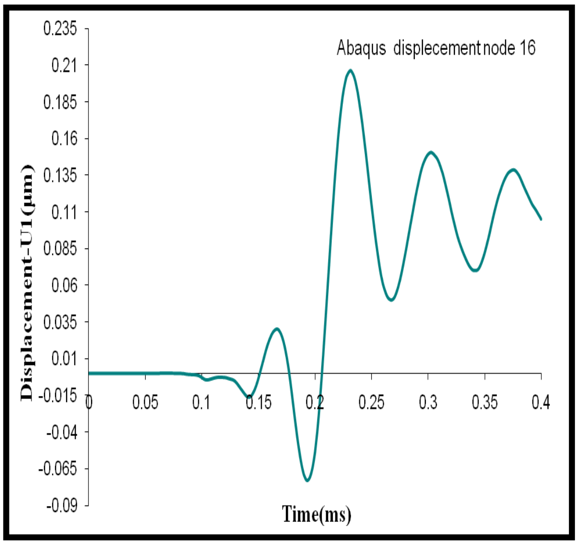
شکل(۵-۷) جابجایی شعاعی برای گره ۸ در نرم افزار Maple



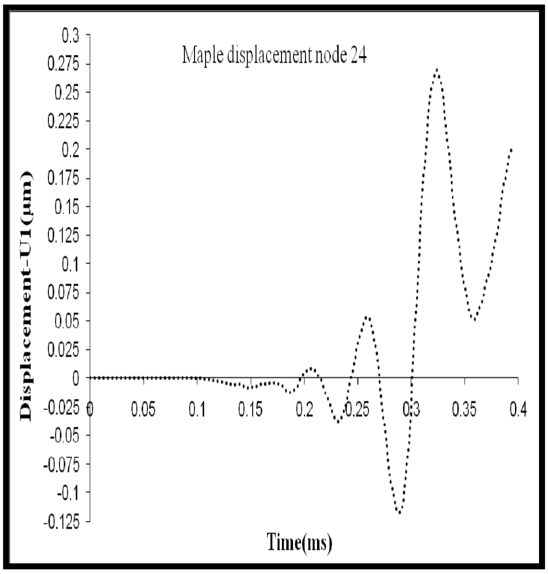
شکل(۵-۸) جابجایی شعاعی برای گره ۸ در نرم افزار Abaqus

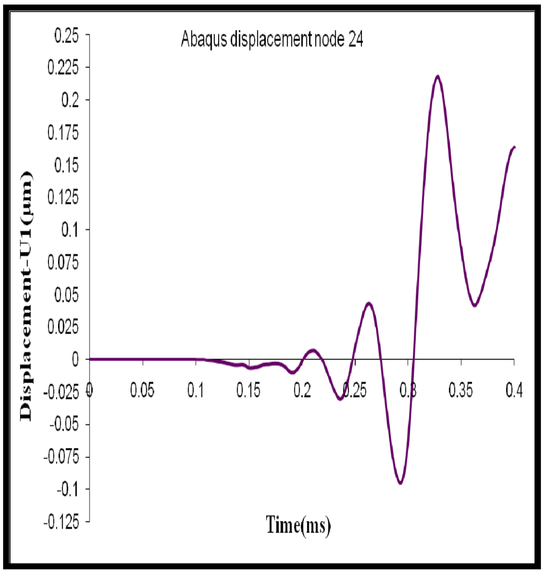


شکل(۵-۹) جابجایی شعاعی برای گره ۱۶در نرم افزار Maple



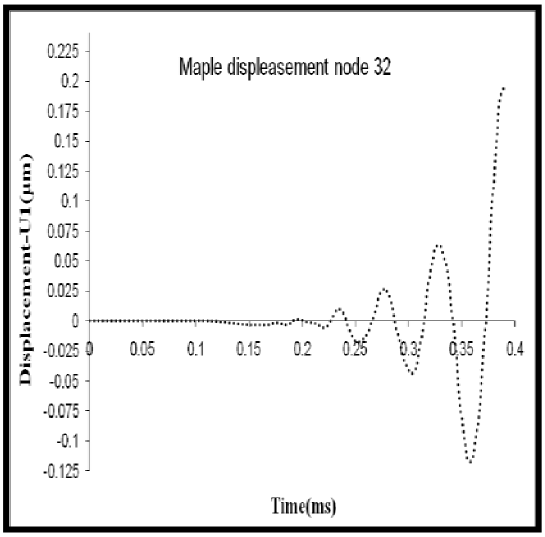
شکل(۵-۱۰) جابجایی شعاعی برای گره ۳۲ نرم افزار Abaqus

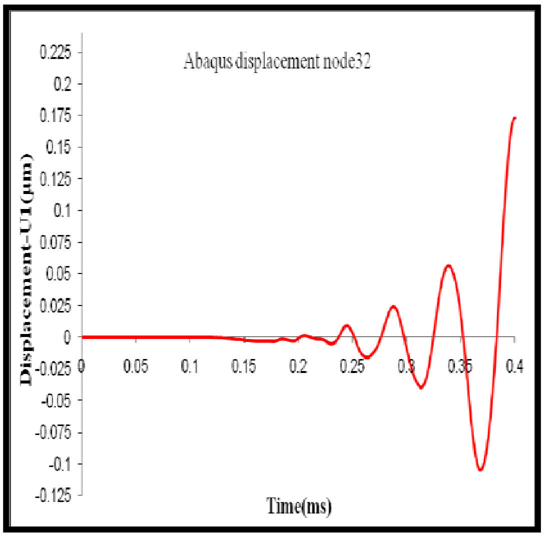




شکل(۵-۱۱) جابجایی شعاعی برای گره ۲۴ در نرم افزار Maple

شکل (۵-۱۲) جابجایی شعاعی برای گره ۲۴در نرم افزار Abaqus

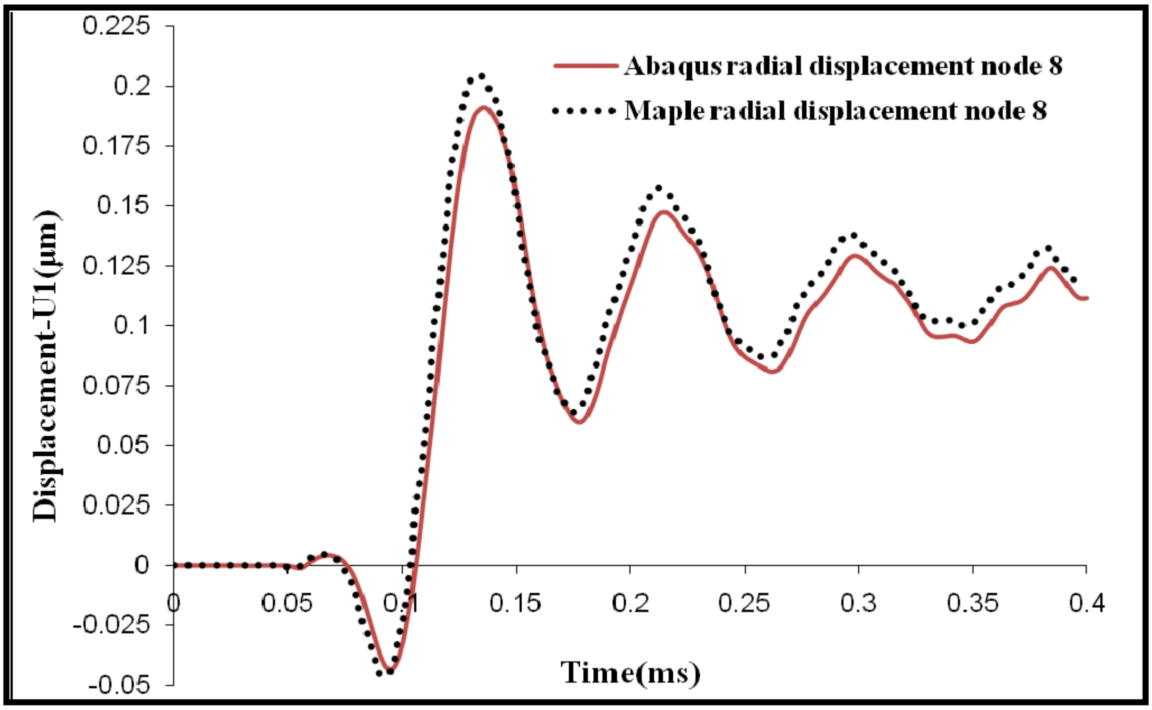




شکل(۵-۱۲) جابجایی شعاعی برای گره ۳۲در نرم افزار Maple

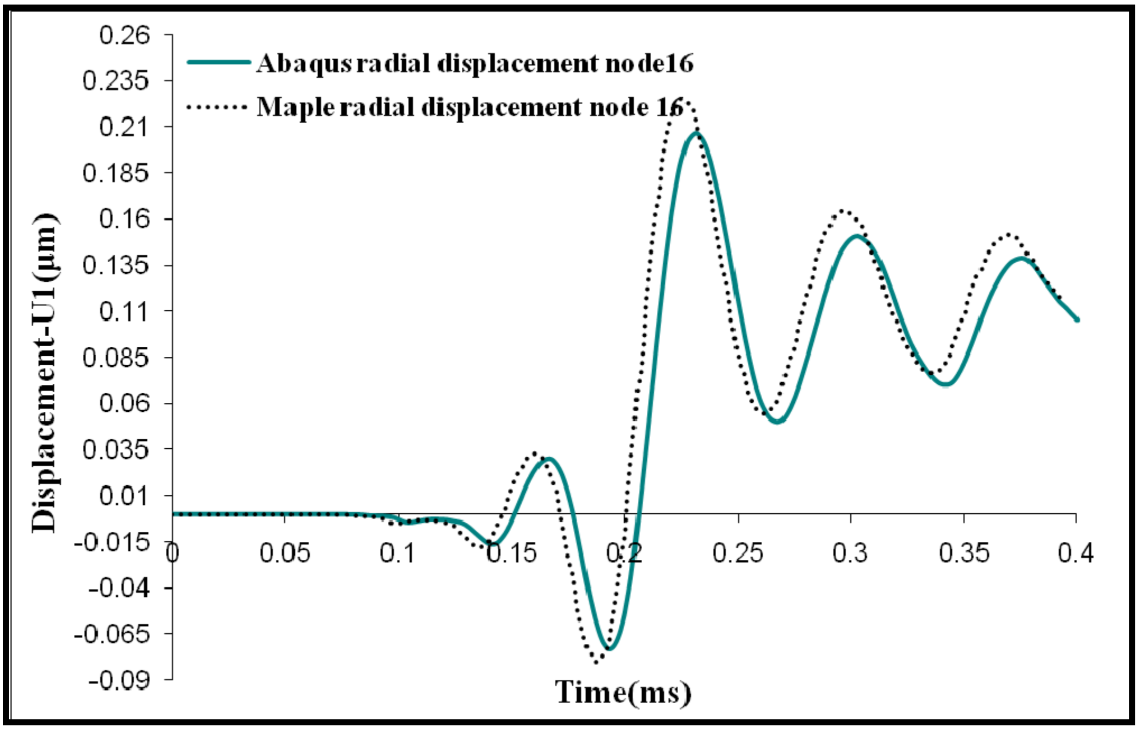
شکل(۵-۱۳) جابجایی شعاعی برای گره ۳۲در نرم افزار Abaqus

در شکل (۵-۱۴)، نمودار مقایسه ای جابجایی های شعاعی برای دو نرم افزار Abaqus و Maple برای گره ۸ آورده شده است . همانگونه که مشاهده می شود تا قبل ازاینکه بار به گره مورد نظر برسد،مقدار جابجایی برای دو نرم افزار صفر و یا خیلی ناچیز می باشد با نزدیک شدن بار به گره مورد بررسی جابجایی تا ماکزیمم مقدار خود می رسد و سپس نقطه مورد نظر با دامنه تقریباً ثابت، حول نقطه تعادل استاتیک،نوسان می کند.درسیستم،میرایی تعریف شده است وعلت کاهش دامنه نوسانات ،اثر پذیری و اختلاف فاز جابجایی نقطه مورد نظر از نقطه مجاور خود می باشد.



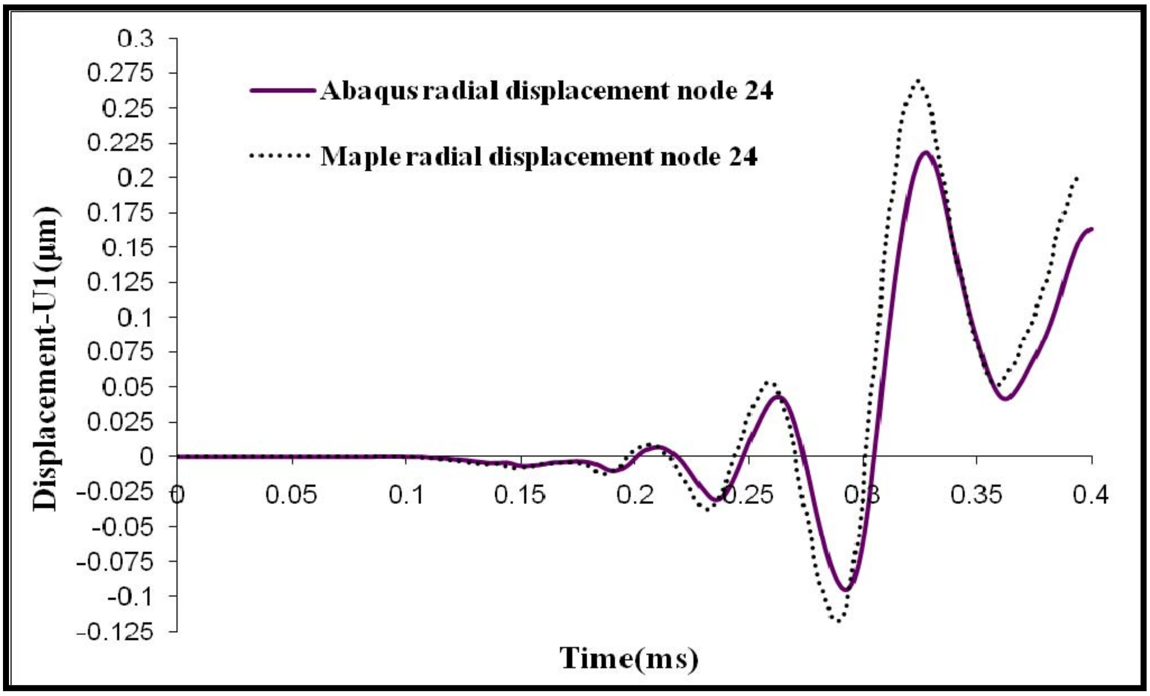
شکل (۵-۱۴) مقایسه جابجایی های شعاعی برای گره ۸ در Abaqus وMaple

همانطور که در شکل(۵-۱۵) مشاهده می شود در گره ۱۶جابجایی های شعاعی در مقایسه با شکل (۵-۱۴) دیرتر آغاز می گردد علت آن دیرتر رسیدن بار به نقطه مورد نظر می باشد.



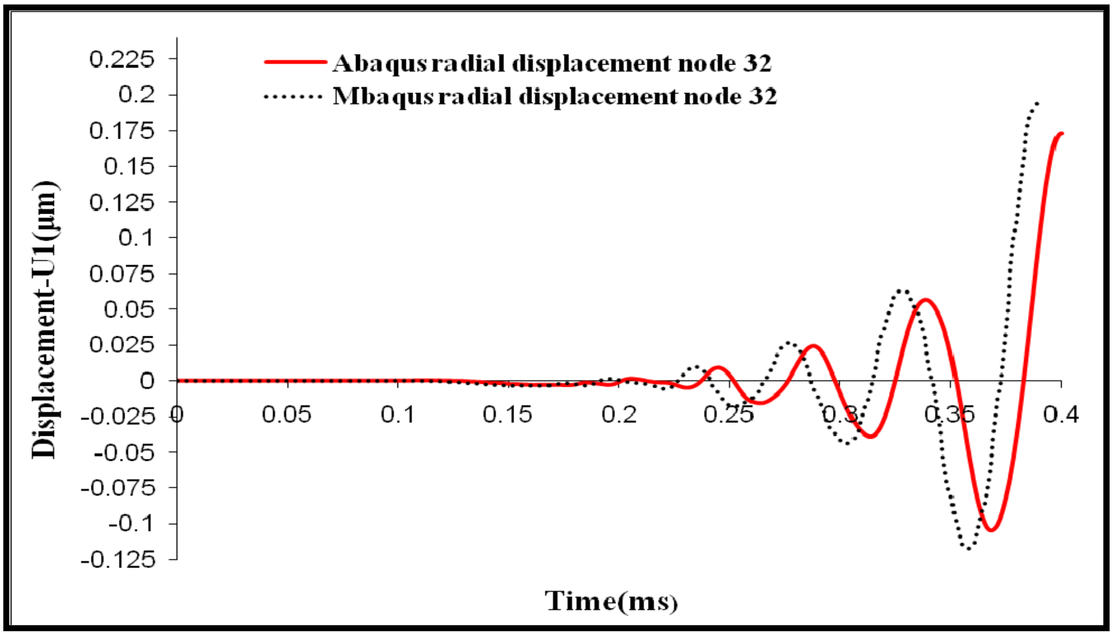
شکل (۵-۱۵) مقایسه جابجایی های شعاعی برای گره ۱۶ در Abaqus وMaple

همانطور که در شکل(۵-۱۶) مشاهده می شود میزان جابجایی در گره ۲۴ بیشترین مقدار خود را در بین تمام جابجایی ها داراست که علت این امر را به خاطر دور بودن این نقطه از اثرات مرزی باید دانست.روند جابجایی ها در شکلهای (۵-۱۴)تا(۵-۱۶) نشان دهنده این نکته می باشد.



شکل (۵-۱۶) مقایسه جابجایی های شعاعی برای گره ۲۴ در Abaqus وMaple

در نهایت در شکل (۵-۱۷) که در نزدیکی مرز می باشد دوباره کاهش مقدار جابجایی را نشان می دهد،از طرف دیگر میزان انحراف دو نرم افزار بیشتر می شود که علت آن در دلایل خطا ذکر می گردد.



شکل (۵-۱۶) مقایسه جابجایی های شعاعی برای گره ۳۲ در Abaqus وMaple

۵-۷ دلایل خطا:

هما نگونه که در شکل های (۵-۷) الی (۵-۱۳) دیده می شود جابجایی حاصل از کد Maple و نرم افزار Abaqus حدود ۱۰٪ اختلاف دارند.برخی از دلایل به شرح زیر است:

۱-درتحلیل با نرم افزارAbaqus ،تعریف بار متحرک ممکن نیست و ناچار بار باید شبیه سازی گردد،در حالی که در Maple می توان بار را به صورت پیوسته تعریف کرد.

۲-Abaqus بر اساس تئوری سه بعدی الاستیسیته عمل می کند در حالی که Maple مبتنی بر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است.در واقع Maple فرض می کند تغییرات جابجایی با Z ،خطی است.

۳- خطای محاسبات عددی در هر روش به ویژه Maple موجود است در حالی که در Abaqus از الگوریتم های بهینه در انجام محاسبات استفاده می کند.

در این پایان نامه،تحلیل دینامیکی استوانه جدار ضخیم تحت بار متحرک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول انجام شد.واقعیت این که تحلیل استوانه،یک مسئله سه بعدی است.وقتی مسئله متقارن محوری باشد حل آن به دو بعد منجر می شود و وقتی از تئوری شکل برشی استفاده می شود حل آن به یک مسئله یک بعدی تبدیل می شود.در این پایان نامه به کمک المانهای یک بعدی (مشابه میله یا خرپا)،پاسخ دینامیکی استوانه جدار ضخیم با دقت مناسب ارائه شده ونتایج به دست آمده با حل سه بعدی به کمک نرم افزار تجاری Abaqus هم خوانی خوبی دارد.اختلاف ۱۰٪ در استفاده از تئوری مرتبه اول ،در بسیاری از مقالات گزارش شده است واین خطا،موید این است که با یک کد نسبتاً کوتاه و در زمان کم می توان پاسخ دینامیکی پوسته جدار ضخیم را با روش پیشنهاد شده به دست آورد.این روش برای تحلیل پوسته های جدار متغییر نیز قابل تعمیم است.

در این راستا ،موارد زیر برای ادامه کار پیشنهاد می شود:

۱-تحلیل پوسته های کروی تحت بار دینامیکی به کمک تئوری تغییر شکل برشی.

۲- تحلیل پوسته های استوانه ای کامپوزیتی تحت بار متحرک به کمک تئوری تغییر شکل برشی و روش گالرکین.

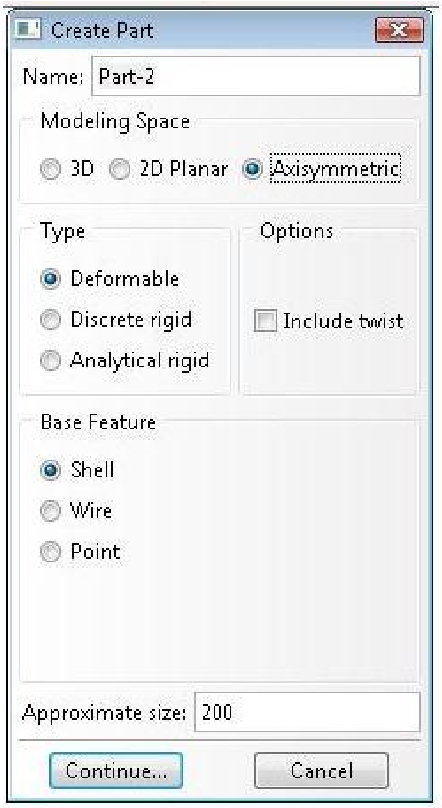
۳-استفاده از تئوریهای مرتبه بالاتر.

۴-تحلیل پوسته های جدار متغییر.

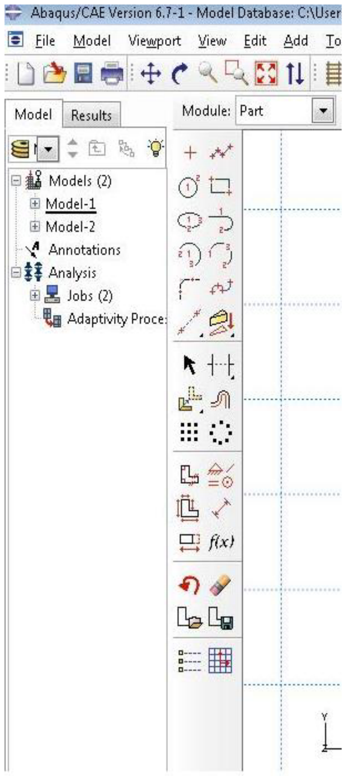
پیوست الف

مراحل تحلیل با نرم افزار Abaqus:

۱: در قسمت creat part شکل شماره(الف ۱) خصوصیات کلی جسم با توجه به مسئله تعریف می گردد.پس از انتخاب در ادامه جسم ترسیم می گردد شکل شماره(الف ۲).

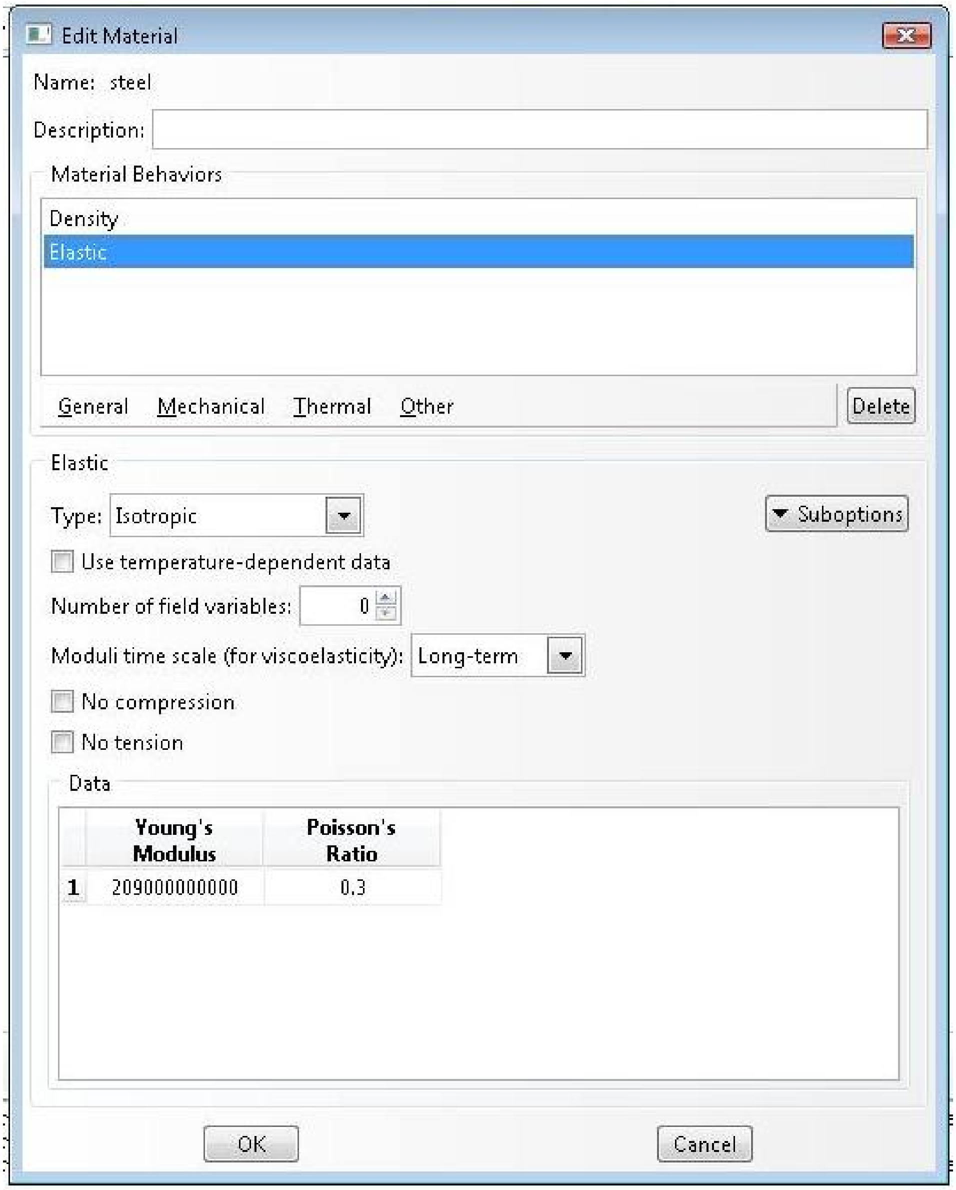


شکل(الف ۱)



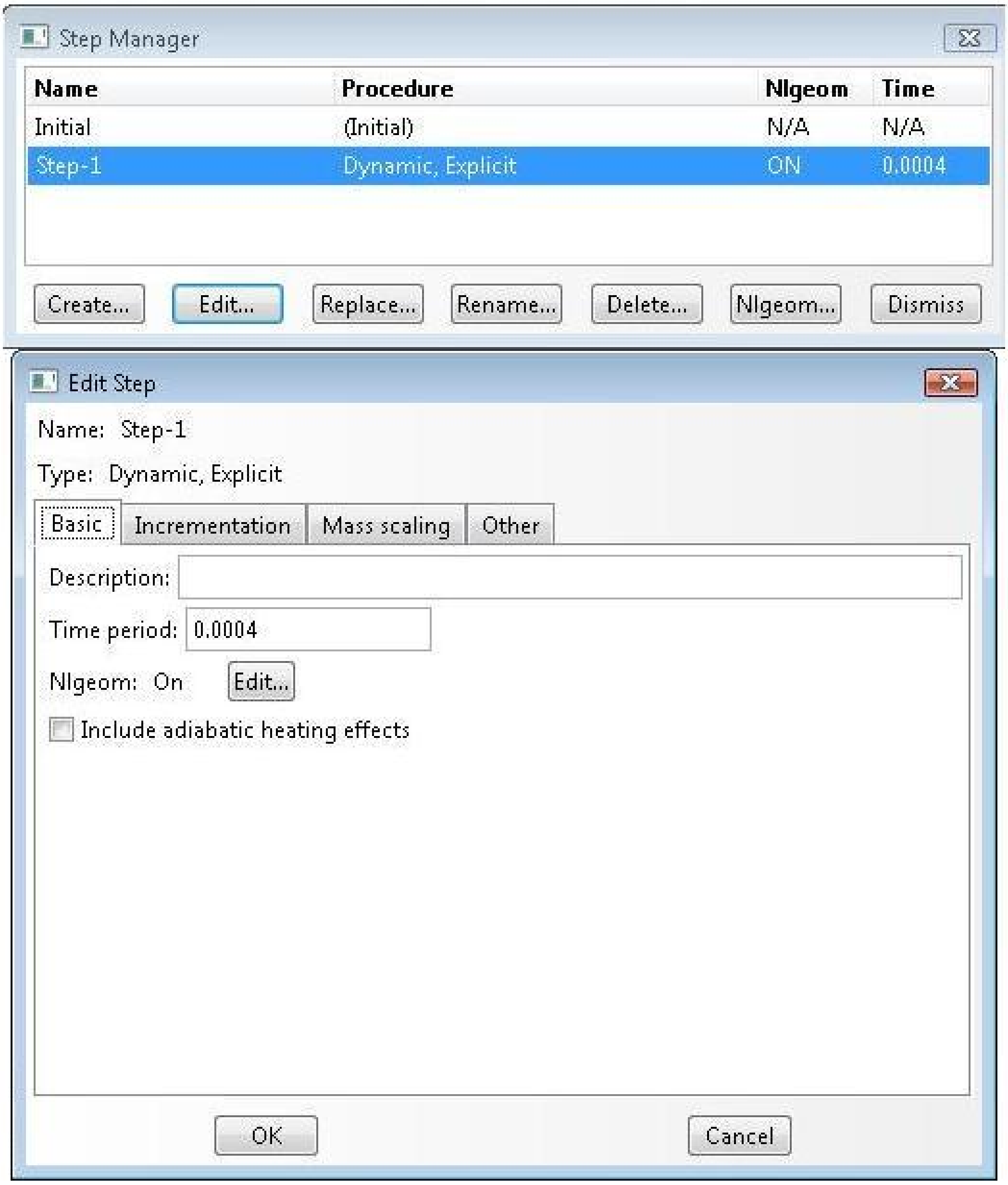
شکل(الف ۲)

۲) درقسمت property بخش Edit material خصوصیات مکانیکی جسم از قبیل مدول یانگ ، ضریب پواسون ، چگالی و.....تعریف می گردد،شکل (الف ۳).



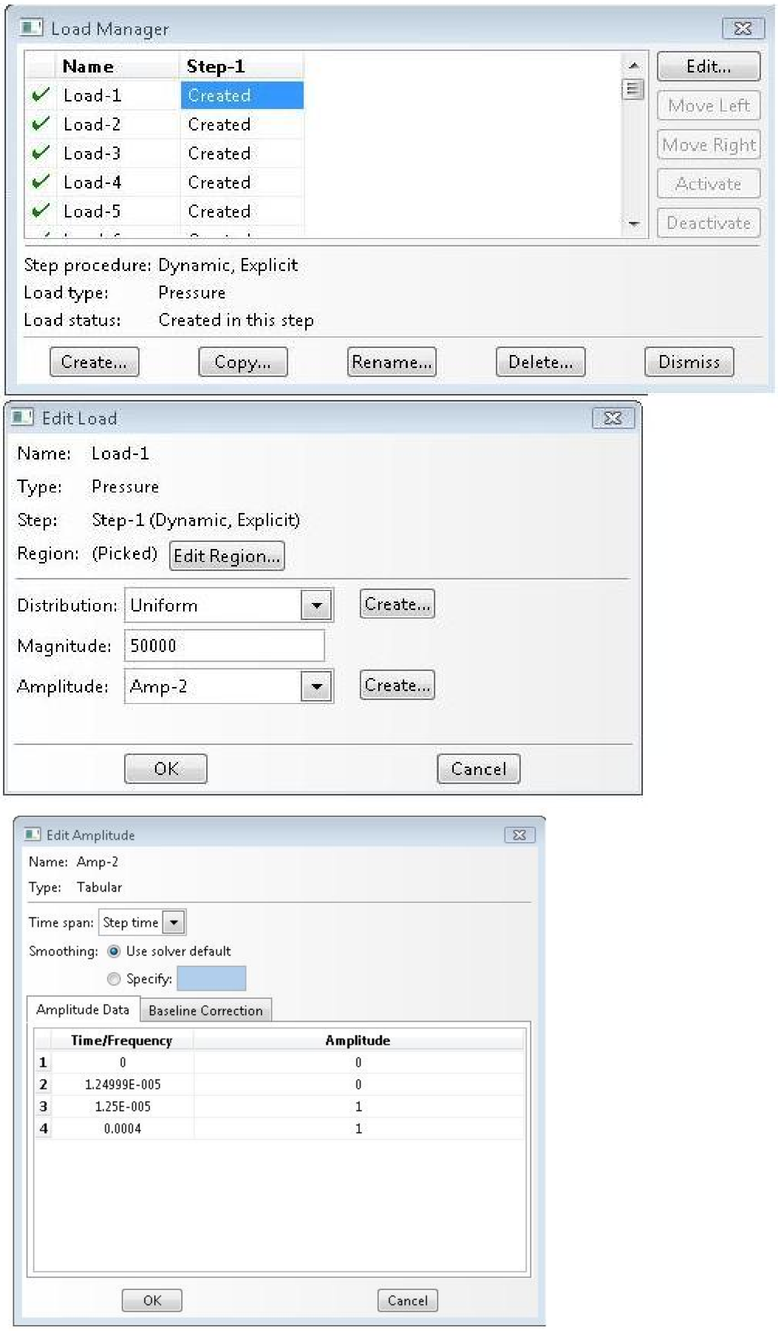
شکل(الف ۳)

۳) بخش step فرآیند حل مسئله را تعریف می کند.step manager جایی است که زمان پریود کل ،نوع رفتار(دینامیکی) و ... تعیین می گردد،(شکل الف ۴).



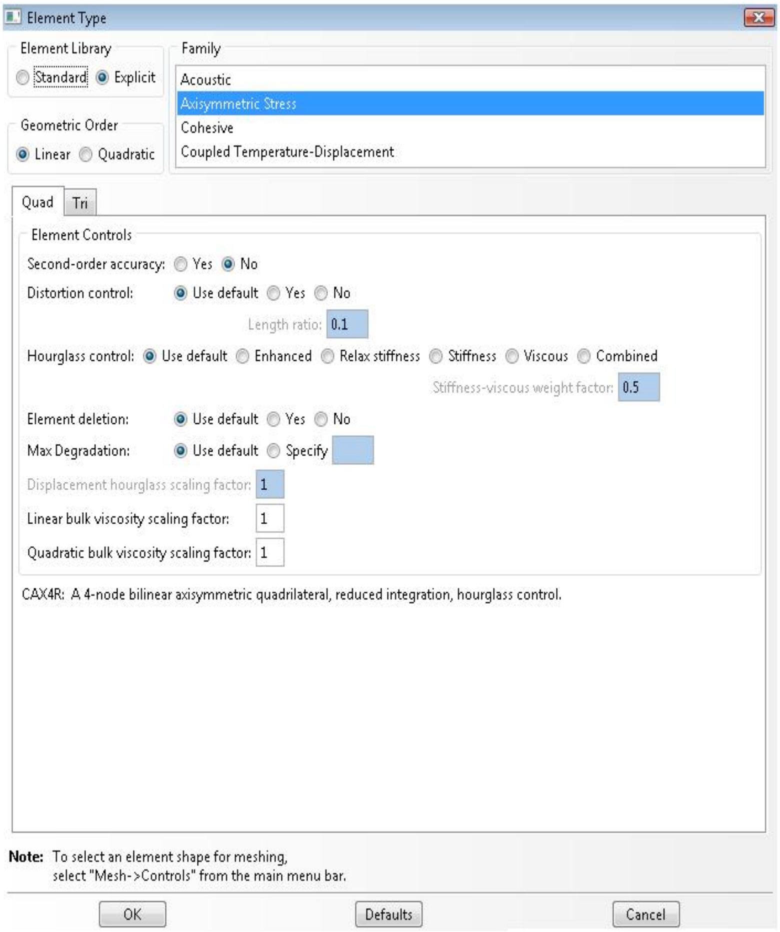
(شکل الف ۴)

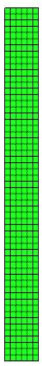
۴) load : قسمت Edit load جایی است که مقدار فشار را برای هر دامنه بار تعریف میگردد.و برای تعریف یک بار پله ای از قسمت Amplitude manager و Edit amplitude استفاده می گردد.



(شکل الف ۵)

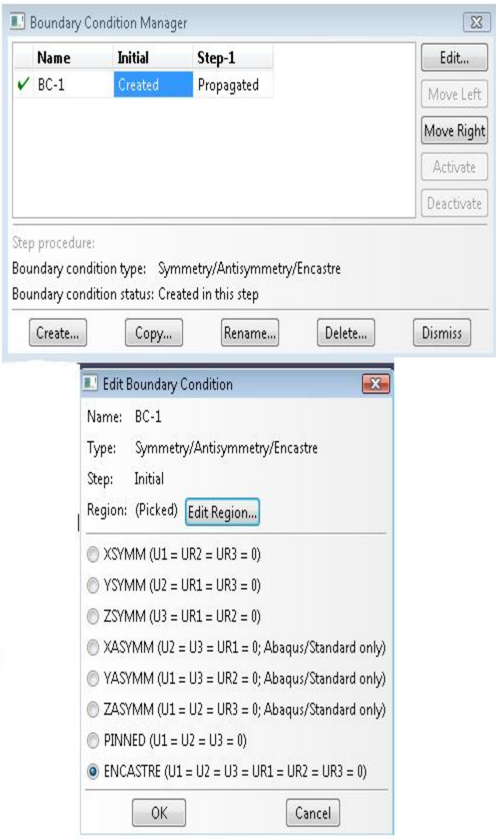
۴)مش بندی: قسمت seed part instance و global seed مشخصات مش بندی تعریف می گردد.قسمت Element type تنظیمات نوع مش بندی است که باید Linear چهار گرهی انتخاب گردد.





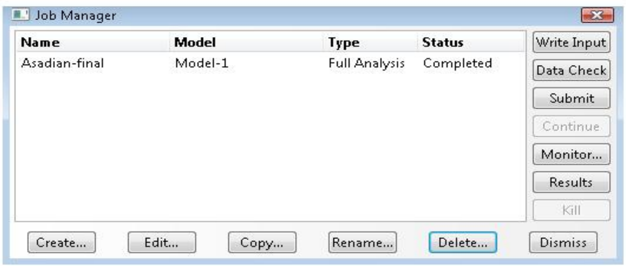
(شکل الف ۶)

۵) جهت اعمال شرایط مرزی مسئله از قسمت Boundary condition manager استـفاده مـی



(شکل الف ۷)

۶) با اجرای قسمتJob manager مسئله حل می گردد که پس از مشاهده پیغامcompleted می توان از قسمت results نتایج را مشاهده نمود.



(شکل الف ۸)

فهرست مراجع:

1-A.C. Ugural,1981,Stresses in plates and shells, Mc Graw Hill

2-Huali,Khin,Yonglam,Teng,Yong Ng,2005,Rotating shell dynamics ,Studies in Applied Mechanics,50,Elsevier Book AID

3-J.P. Jones,P.G. Bhuta,1964,Response of cylindrical shell to moving load,J.Applied Mechanics, 86,105-111

4-K. Chadrashekhara,B.S. Kumar,1990,Analysis of a thick transversely isotropic circular shell subjected to asymmetric load,Acat Mechanica ,84,63-75

5-J.N. Reddy,W.C. chao1994,Acomparison of closed form and finite element solution of thick shell,Nucl-Engng Desing, 64,153,159

6-M. Shaker,Yas. MH ,1996,Dynamic Analysis of thick laminated circular cylindrical shell –Mechanics Acam, 96,383-387

7-H. Matsunaga,1998,Free vibration of thick circular cylindrical shell subjected to axial stresses,Journal of Sound and Vibration, 211,1-17

8-G.T. Michaltsos, 2001,Dynamic behaviour of a single-span beam subjected to load moving with variable speed, Journal of Sound and Vibration,258(2),359-372

9-G.T. Michaltsos, 2002 ,Vibration of beam under moving mass load,theory and experimental validation, Journal of Sound and Vibration,274,567-582

10-Jong-shyong wu,lieh-kwang chiang,2003,Dynamic analysis of an arch due to moving load, Journal of Sound and Vibration,259,511-534

11-M. Ganapathi,M. Haboussi,2003,Free vibration of thick laminated anisotropic non-circular cylindrical shell,composite structures, Journal of Sound and Vibration, 60,125-133

12-K.V. Valsarajan,K.S. Rao,2004,Free vibration analysis of laminatedplates using higher-order shear deformation theory,IE(I)Journal-As,81,120-132

13-G. Nakhaie,M. Rastgaar,2004,Natural frequencies of laminated composite plates using third order shear deformation theory,Composite Structures, 72,273-279

14-K.V. Valsarajan,K.S. Rao,2004,Behaviour of laminated composite plates using higher-order shear deformation theory,IE(I)Journal,As,81,324-330

15-P.P. Lepikhin,V.A. Romashchenko,O.S. Beiner,2004, Numerical investigation of the dynamic strength of thick-walled cylindrical shells with cracklike technological defects,Journal Article , 37,55-63

16-I. Shufrin,M. Eisenberger,2005,Vibration of shear deformable plates with variable Thickness-first-order and highe order analyses,Journal of Sound and Vibration,290,465-489

17-J. Renard,A. Langlet,G. Airault,2005,Response of an infinite free plate-liquid system to moving load, Journal of Sound and Vibration,292,124-127

18-H. Xia,N. Zhang,W.W. Guo,2006,Analysis of resonance mechanism and conditions of train-bridge systems, Journal of Sound and Vibration,297,810-822

19-J.G. Teng,Y.M. Hu ,2006 ,Behaviour of FRP-jacketed circular steel tubes and cylindrical shell under axial compression, Construction and Building Material,21,827-838

20-P. Museros,M.D. Martinez,2007, Vibration control of simply supported beams under moving loads using fluid,viscous dampers, Journal of Sound and Vibration ,300,292-315

21-S. Kandasamy,Anand,V. Singh ,2006 , Transient vibration analysis of open circular cylindrical shell,J.Vib.Acoust ,128,366-375

22-P. Malekzadeh,M. Farid,P. Zahedinejad,G. Karami, 2007, Three-dimensional free vibration analysis of thick cylindrical shell resting on two –parameter elastic supports, Journal of Sound and Sibration, 313,655-675

23-I. Mirsky,G. Herrmann, 1958,Axially symmetric motion of thick cylindrical shell, J.Applied Mechanics , 25, 97-102

24-T.E. Simkins, 1992,Amplification of flexural waves in gun tube, Journal of Sound and Vibration, 172,145-154

25- G. Herrmann, I. Mirsky ,1956, Three dimensional and shell theory analysis of axially symmetric motion of cylinders, Journal of Sound and Vibration , 78, 563-568

۲۶-کلارنس ری وایلی-لوئیس سی برت ۱۹۸۵"ریاضیات مهندسی پیشرفته "مترجم:سیا مک کاظمی-موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

27- Dsouza ,A. Frank,K. Garg,1984,Advance dynamics modeling and analysis,Prentice-Hall

27-www.wikipedia.org,www.simulia.com,hellp Abaquse

۲۹-سید امیر الدین صدر نژاد۱۳۸۰ "مقدمه ای بر روش اجزای محدود"انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی

واژگان

Acoustic	صوتی
Amplitude	دامنه
Amplification factor	ضریب تقویت دینامیکی
Analytical method	روش تحلیلی
Axisymmetric	متقارن محوری
Backward difference	تفاضل پسرو
Bending theory	تئوری خمشی
Collocation method	روش نقطه یابی
Connectivity matrix	ماتریس ارتباطی
Clamped-Clamped	دوسرگیردار
Central difference predictor	تفاضل مرکزی
Concentrated force	بارمتمرکز
Curved beam	تیر خمیده
Damping	استهلاک
Deflection	تغییر شکل
Dynamic response	پاسخ دینامیکی
Explicit method	روش ضمنی
First order shear deformation theory	تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول
Initial deflection	خیزاولیه
Implicit method	روش مستقیم
Least squared	حداقل مربعات

Membrane theory	تئوری غشایی
Mesh	شبکه،مش
Midplane	صفحه میانی
Moving load	بار متحرک
Node	گره
Numerical methods	روشهای عددی
Radial stress	تنش شعاعی
Ritz variational method	روش تغییراتی ریتز
Shell	پوسته
Shape functions	توابع شکل
Strain energy	انرژی کرنشی
Stress resultants	منتجه های تنش
Transvers shear deformation	تغییر شکل برشی عرضی
Thick walled cylinder	استوانه جدار ضخیم
Transient response	پاسخ گذرا
Two-Cycle interation with trapezoidal rule	سیکل تکرار دوگانه با روش ذوزنقه ای
Vibration	نوسان
Weighed residual method	روش باقی مانده وزنی

Abstract

In this research,**Dynamic response of an elastic thick cylindrical shell under moving load** has been evaluated. The displacement field has been considered based on the **First order shear deformation theory** and the motion equations have been derived using the Hamilton principle.These equations have been discritized with Galerkin weighted residual method. In addition by using the numerical centeral difference predictor ,the displacement has been calculated.A numerical code through the maple software has been prepared to calculate the displacements.The results of this code have been compared with the results obtained from Abaquse software .The conformity of the results show the validity of the used procedure.

Keywords: moving load, first order shear deformation theory, thick cylinder shell , dynamic response,finite element method.