بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک

رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

ارتعاشات نانورزناتورهای گرافنی دارای حرکت محوری به‌وسیله تئوری الاستیسیته غیرموضعی

نگارنده:

فرشاد یادگاری

استادراهنما

دکتر اردشیر کرمی‌محمّدی

شهریور ۱۳۹۵

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **فرشاد یادگاری** به شماره دانشجویی **۹۲۱۵۰۹۴** رشته **مهندسی مکانیک** گرایش **طراحی کاربردی** تحت عنوان **ارتعاشات نانورزناتورهای گرافنی دارای حرکت محوری به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی** که در تاریخ ۹۵/۰۶/۱۶ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه : عالی امتیاز ۱۹/۰۵) ☑	دفاع مجدد ☐	مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)
۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر اردشیر کرمی محمّدی	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم	-	-	—
۳- استاد مشاور	-	-	—
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی بامداد	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر حمیدرضا ایپک چی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر امیر جلالی	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر محمد محسن شاه‌مردان

شاه مردان

۱۳

تقدیم به

باشکوه‌ترین جلوه هستی

مادر

و مظهر صلابت و محبّت

پدر

پروردگارا

مبادا روزی برسد که ما...

بارمان را بسته باشیم به این قیمت که بالمان را بسته باشیم...

و از یاد ببریم که برای اوج و حرکت؛

بال می‌خواهیم نه بار...

محضر ارزشمند مادر و پدرم به جبران قطره ای از تلاش های محبت آمیزی که در طول دوران مختلف زندگی حیاتی ام انجام دادند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموختند و راه را به من نشان دادند.

و با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر اردشیر کرمی محمدی که با نکته های دلاویز و گفته های بلند، صحیفه سخن را علم پرور نموده و همواره راهنما و راه گشای نگارنده در اتمام و اکمال این نوشته بودند.

معلا مقامت ز عرش برتر باد   همیشه توسن اندیشه ات مظفر باد

تعهد نامه

اینجانب **فرشاد یادگاری** دانشجوی دوره کارشناسی‌ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه **ارتعاشات نانورزناتورهای گرافنی دارای حرکت محوری به‌وسیله تئوری الاستیسیته غیرموضعی** تحت راهنمائی دکتر اردشیر کرمی‌محمّدی متعّهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دست‌رسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلّق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

چکیده

ویژگی‌های بی‌نظیر گرافن، زمینه را برای استفاده از این ماده در موارد گوناگون از جمله سیستم‌های دارای حرکت محوری در ابعاد نانو فراهم کرده است. وجود حرکت محوری در سیستم‌ها موجب تغییر رفتار دینامیکی و ارتعاشی آن‌ها می‌گردد. در این پژوهش ارتعاشات یک نوار گرافنی دولایه دارای سرعت محوری ثابت با در نظر گرفتن اثر برش بین-لایه‌ای و از طریق تئوری الاستیسیته غیرموضعی بررسی شده است. بر مبنای این تئوری تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در تمام نقاط جسم است. با توجه به ضخامت بسیار پایین لایه‌های گرافن و طول نوار، هر لایه بر اساس تئوری تیر اویلربرنولی مدل شده است. فرض بر این بوده است که جابه‌جایی‌های عرضی و انحنای هر دو لایه با هم برابر بوده و هیچ‌گونه جدایی بین سطوح لایه‌ها هنگام حرکت و ارتعاش رخ ندهد. یک مدول برشی برای در نظر گرفتن اثر برش بین لایه‌ای ناشی از پیوندهای ضعیف واندروالس در انرژی پتانسیل سیستم وارد شده است. با استفاده از روش همیلتون معادله سیستم به دست آمده و به کمک روش گالرکین حل شده است. وجود مولفه شتاب کریولیس موجب رفتار ژیروسکوپی سیستم می‌شود، بنابراین سیستم ناپایستار بوده و دارای فرکانس‌های طبیعی مختلط می‌باشد. نتایج برای شرایط مرزی دوسرمفصل و یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد به دست آمده و با نتایج سایر مقالات موجود مقایسه شده است. مشاهده می‌شود افزایش سرعت محوری موجب ایجاد ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر در سیستم می‌شود. هم‌چنین تاثیر تغییرات مدول برشی و پارامتر غیرموضعی بر روی سرعت‌های بحرانی بررسی شده است. با پیش‌رفت سریع تکنولوژی در سال‌های اخیر، نیاز مبرم به حس‌گرهای کوچک‌سازی شده موجب توسعه روزافزون نسل جدیدی از حس‌گرهای با قابلیت موثّر در ابعاد نانو شده است. نانوحس‌گرهایی با کاربردهایی چون ردیابی فوق حساس اجرام و تشخیص زودهنگام بیماری-های سخت. به طور کلّی در مطالعات موجود، دو روش مختلف برای طراحی و تحلیل تشدیدکننده‌های با ابعاد نانو، استفاده شده است: روش‌های مبتنی بر ارتعاشات و روش‌های مبتنی بر انتشار موج. اصل کلّی ردیابی در این پژوهش‌ها، بررسی انتقال در فرکانس‌های نوسان و یا سرعت موج در نانوحس‌گرها، ناشی از وجود اتم‌ها و یا مولکول‌های خارجی قرار گرفته بر سطح نانوحس‌گر است. به همین منظور در بخشی دیگر از این پژوهش، سیستم بررسی شده در بخش قبل به همراه یک جرم متمرکز متّصل به آن در نظر گرفته شده و آثار ناشی از سرعت محوری، میزان جرم متّصل متمرکز و

محل قرارگیری آن بر ارتعاشات و پایداری سیستم مورد توجّه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد افزایش سرعت محوری و یا مقدار جرم متمرکز موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌شود و هنگامی که جرم در وسط تیر واقع شده باشد، فرکانس طبیعی اول به کمترین مقدار خود می‌رسد. هم‌چنین اثر میزان جرم متمرکز و محل قرارگیری آن بر سرعت‌های بحرانی متناظر با ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر مورد بررسی قرار گرفته است. هم‌چنین در بخش آخر این مطالعه به منظور بررسی عوامل غیرخطّی هندسی ناشی از ارتعاشات با دامنه بزرگ، معادلات غیرخطّی سیستم به دست آمده و نقاط تعادل غیرصفر مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

واژگان کلیدی:

ارتعاشات، نوار گرافن، حرکت محوری، تئوری غیرموضعی، ناپایداری، جرم متمرکز متّصل، ارتعاشات با دامنه بزرگ.

لیست مقاله‌های مستخرج از پایان‌نامه

F. Yadegari**,** A. Karami Mohammadi, Vibration of axially moving two-layer graphene nonoribbon incorporating interlayer shear effect, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16,No. 9, pp. 414-420, 2016 (in Persian).

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

علائم و اختصارات

انرژی جنبشی	T
انرژی پتانسیل	V
ضریب پواسون	ν
مدول الاستیسیته	E
سرعت محوری	$\bar{v}$
مساحت سطح مقطع	A
مدول برشی بین‌لایه‌ای	K_{sh}
مقادیر ویژه	α_i
مولفه جابه‌جایی عرضی	w
ضخامت نانوتیر	h
مختصه‌های کارتزین	z ،y ،x
مختصه زمانی	t
مختصه زمانی بی‌بعد	τ
طول نانوتیر	L
گشتاور خمشی غیرموضعی	M_x^{nl}
گشتاور خمشی موضعی	M_x^l
تنش محوری موضعی	σ_x^l
تنش محوری غیرموضعی	σ_x^{nl}
پارامتر غیرموضعی ارینگن	e_0a
عرض نانوتیر	b
انحنای نانوتیر	θ
جرم متمرکز	M
ثوابت لامّه	$\hat{\lambda}, \hat{\mu},$
پارامتر مقیاس طولی غیرموضعی	$\hat{\tau}$

۱ فصل اول

مقدّمه

۱-۱- مقدّمه

فن‌آوری نانو[1] دریچه‌ی جدیدی را در بسیاری از زمینه‌های علم از جمله علم مواد، مهندسی، پزشکی و انرژی گشوده است. فن‌آوری نانو، توانمندی تولید مواد، ابزارها و سیستم‌های جدید با در دست گرفتن کنترل در سطوح مولکولی و اتمی و استفاده از خواصّی است که در این سطوح ظاهر می‌شوند. نانوساختارها و نانوذرّات بخش مهمّی از زندگی عادّی و روزانه ما هستند. اگرچه تا این اواخر کسی از دنیای نانو صحبت نمی کرد، اما اکنون که به کمک ابزارهایی چون میکروسکوپ‌های تونل‌زنی روبشی[2] و یا میکروسکوپ نیروی اتمی[3] مشاهده اجسام نانومتری برای ما امکان‌پذیر شده است و احتمالا باید منتظر انقلاب صنعتی آینده در این حوزه باشیم. به طور کلّی به سازه‌هایی که در ابعاد میکرو و یا نانو ساخته می‌شوند، ریزساختار می‌گویند. ریزساختارها امروزه به شکل میکروتیر و میکروصفحه در بیوسنسورها، میکروسکوپ نیرو اتمی، میکروژیروسکوپ‌ها و به‌طور کلّی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی[4] و نانوالکترومکانیکی[5] به وفور دیده می‌شوند. سیستم‌های میکروالکترومکانیکی و نانوالکترومکانیکی برای اوّلین بار در دهه‌ی ۱۹۸۰ مورد استفاده قرار گرفت، زمانی که نخستین بار در آمریکا در مجموعه‌ی گسترده‌ای از تکنولوژی با هدف کوچک سازی سیستم‌ها با مجتمع سازی عملگرها در یک پکیج کوچک استفاده شد. در حال حاضر سیستم‌های نانوالکترومکانیکی توجه بسیاری را در تحقیقات دانشگاهی و صنعتی به خود معطوف کرده است. از این سیستم‌ها در توسعه نسل‌های جدید ژیروسکوپ‌ها، زمان‌سنج‌ها و شتاب‌سنج‌ها استفاده می‌شود. امروزه سیستم‌های جدید به سوی کوچک‌تر شدن، سریع‌تر شدن و حساس‌تر شدن پیش می‌روند.

[1] Nanotechnology
[2] Scanning tunneling microscope
[3] Atomic force microscope
[4] Micro Electro Mechanical System (MEMS)
[5] Nano Electro Mechanical System (NEMS)

۱-۲- نانو چیست؟

دنیای نانو، دنیای اتم‌ها و مولکول‌هاست. این اتم‌ها و مولکول‌ها هستند که خواص مـواد مختلـف را مشخص می‌کنند. کلمه "نانو" به معنای یک میلیاردم (10^{-9}) است و در اصـل از یـک واژه‌ی یونـانی بـه معنای کوتوله گرفته شده است. در ترکیب فن‌آوری نانو، این کلمه به مقیاس نانومتر(nm) اشـاره داردکـه برابر یک میلیاردم متر و یا یک میلیونم میلی‌متر است. برای درک بهتر این مقیاس می‌توان گفت که یـک مولکول شکر اندازه‌ای در حدود نانومتر دارد. نسبت میان این مولکول و یک سیب برابر است با نسبت میان سیب و کره زمین. در یک نگاه کلّی، فن‌آوری نانو، به بررسی و دست‌کاری مواد و ساختارهای آن در ابعـاد ۱ تا ۱۰۰ نانومتر می‌پردازد. مشاهدات دانشمندان نشان می‌دهد مواد در مقیاس نانو خواص بسیار متفاوتی از هم بروز می‌دهند.

۱-۳- آلوتروپ‌های کربن

کربن[1] عنصری شیمیایی در جدول تناوبی بـا نشـان C و عـدد اتمـی ۶ مـی‌باشـد. کـربن عنصـری غیرفلزی و فراوان، چهارظرفیتی و دارای چندین دگرشکل می‌باشد. کربن مادّه‌ای کم وزن، پایـدار و سـاده جهت انجام فرآیندها می‌باشد. تا سال ۱۹۸۰، سه آلوتروپ کربن به نام‌های الماس، گرافیـت و کـربن بـی-شکل شناخته شده بودند، امّا امروزه می‌دانیم که خانواده کاملی از سایر اشکال کربن نیز وجود دارد. الماس سخت‌ترین کانی شناخته شده و دارای بالاترین سرعت صوت و رسانایی گرمـایی در میـان مـواد اسـت در حالی که گرافیت یکی از نرم‌ترین مواد موجود است. فولرن[2] یکی دیگر از دگرشکل‌های کربن است کـه در سال ۱۹۸۵ کشف شد. فولرن‌ها مولکول‌های کروی کربن هستند که به سبب شکل زیبا و خـواص شـگفت انگیز توجه بسیاری از دانشمندان را به خود معطوف کرده است.

[1] carbon
[2] fullerene

۱-۳-۱- نانولوله‌های کربنی

در سال ۱۹۹۱ دانشمندی ژاپنی به نام سومیوایجمیا [1]به طور کاملا تصادفی، ساختار دیگری از کربن را کشف و تولید کرد[۱]. وی در ابتدا این ساختار را نوعی فولرن تصور کرد که در یک جهت کشیده شده است. امّا بعدها متوجّه شد که این ساختار خواصّ متفاوتی از فولرن‌ها دارد و به همین دلیل آن را نانولوله کربنی[2] نامید. در یک نانولوله کربنی، اتم‌های کربن در ساختاری استوانه‌ای آرایش یافته‌اند. یعنی یک لوله‌ی توخالی که جنس دیواره‌اش از اتم‌های کربن است. آرایش این اتم‌های کربن در دیواره‌ی این ساختار استوانه‌ای دقیقا مشابه آرایش اتم‌های کربن در صفحات گرافیت است. هنگامی که صفحات گرافیت در هم پیچیده می‌شوند، نانولوله های کربنی را تشکیل می‌دهند. در واقع نانولوله کربنی، صفحه گرافیتی است که به شکل لوله درآمده است. نانولوله‌های کربنی به دو دسته کلّی نانولوله‌های کربنی تک دیواره و نانولوله‌های کربنی چند دیواره تقسیم می‌شوند. چنان‌چه نانولوله کربنی فقط شامل یک لوله از گرافیت باشد، نانولوله تک دیواره و اگر شامل تعدادی از لوله‌های متّحدالمرکز باشد، نانولوله چنددیواره نامیده می‌شود.

۱-۳-۱-۱- خواص نانولوله‌های کربنی

نانولوله‌های کربنی از خواص بسیار منحصربه‌فردی از جمله مدول یانگ[3] و استحکام کششی بالا برخودارند. استحکام کششی آن‌ها در حدود ۱۰۰ گیگاپاسکال یعنی بیش از ۱۰۰ برابر استحکام فولاد است، در حالی که در حدود یک ششم فولاد وزن دارند. نانولوله‌های کربنی سیم‌های مولکولی بزرگی هستند که الکترون می‌تواند آزادانه در آن‌ها حرکت کند. این قطعات می‌توانند در مدارهای الکترونیکی به کار گرفته شوند و سرعت و توان بهینه‌تری را به دست دهند. هدایت گرمایی در نانولوله‌ها در جهت لوله‌ها

---

[1] Sumio Iijima
[2] Carbon nanotubes
[3] Young’s modulus

و نه در راستای عمود بر آن‌ها می‌باشد که موجب می‌شود نانولوله‌ها قابلیت بالقوّه‌ای در گودال‌های حرارتی در زمینه نانوالکترونیک از خود نشان دهند. یکی دیگر از خواص نانولوله‌ها نشر میدانی[1] آن‌هاست. قطعات نشر میدانی ساختارهایی هستند که تحت تاثیر میدان الکتریکی از خود الکترون منتشر می کنند. به همین سبب نانولوله‌ها قادرند تحت تاثیر میدان‌های الکتریکی جریان‌های بالایی را از خود عبور دهند.

۱-۳-۲- گرافن

گرافن[2] را ماده‌ی جادویی قرن بیست‌ویکم نامیده‌اند. این ماده که گفته می‌شود محکم‌ترین ماده‌ای است که تاکنون مورد مطالعه قرار گرفته، جایگزینی قابل برای سیلیکون است. گرافن ماده‌ای تخت و تک-لایه متشکل از اتم‌های کربن است که با پیوندهای هیبریدی sp^2 در یک شبکه دوبعدی مانند لانه‌ی زنبور عسل به هم متّصل شده‌اند. شکل ۱-۱ شماتیکی از یک ورق تک لایه گرافن را نشان می‌دهد. این مادّه دارای ضخامت یک اتم و با ویژگی‌های بی‌نظیر است. گرافن یکی از آلوتروپ‌های کربن است. در واقع گرافن یک قالب برای دیگر آلوتروپ‌های کربن مانند گرافیت، نانولوله‌های کربنی و فولرن‌ها می‌باشد[۲]. در گرافیت (یکی دیگر از آلوتروپ‌های کربن)، هر کدام از اتم‌های چهارظرفیتی کربن، با سه پیوند کووالانسی به سه اتم کربن دیگر متّصل شده‌اند و یک شبکه گسترده را تشکیل داده‌اند. این لایه خود بر روی لایه‌ای کاملاً مشابه قرار گرفته است و به این ترتیب، چهارمین الکترون ظرفیت نیز یک پیوند شیمیایی داده‌است، اما این پیوند این الکترون چهارم، از نوع پیوند واندروالسی است که پیوندی ضعیف است. به همین دلیل لایه‌های گرافیت به راحتی بر روی هم سر می‌خورند و می‌توانند در نوک مداد به کار بروند. گرافن ماده‌ای است که در آن تنها یکی از این لایه‌های گرافیت وجود دارد و به عبارتی چهارمین الکترون پیوندی کربن، به عنوان الکترون آزاد باقی مانده‌است.

---

[1] Field emission
[2] graphene

۱-۳-۲-۱- خواص و کاربردهای گرافن

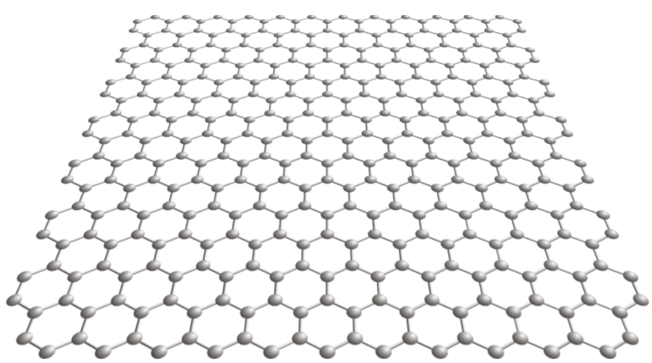
گرافن نازک‌ترین و در عین حال مستحکم‌ترین مادّه‌ای است که تا کنون شناخته شده است. به دلیل خواص منحصربه‌فرد مانند هندسه دوبعدی، نسبت بسیار بالای سطح به حجم، چگالی بالا، رسانایی نوری بالا، رسانایی الکتریکی و حرارتی بالا و قابل تنظیم، توجه کم‌سابقه‌ای را در تحقیقات بنیادی و کاربردی به خود جلب کرده است. گرافن خالص تک‌لایه از خود خواص شبه فلزی نشان می‌دهد. شکل ۱-۱ شماتیکی از یک ورق تک‌لایه گرافن رانشان می‌دهد. برای بررسی خواصّ مختلف ورق‌های گرافنی، از آزمایش‌های تجربی، شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی[۱] و تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته استفاده می‌شود. لی[۲] و همکاران[۳] در مطالعه‌ای با استفاده از یک میکروسکوپ نیرو اتمی تلاش کردند تا ویژگی‌های ورق گرافنی را اندازه‌گیری کنند. آن‌ها با در نظر گرفتن ضخامتی معادل $0.335\, nm$ برای یک ورق تک لایه گرافنی، مقدار $1 \pm 0.1\, TPa$ را برای مدول الاستیسیته اندازه‌گیری کردند. هم‌چنین در این بررسی استحکام شکست در حدود $40\frac{N}{m}$ و رسانایی گرمایی در دمای اتاق تقریبا $5000 W m^{-1} k^{-1}$ به دست آمد. علاوه بر انجام تحقیقات آزمایشگاهی، شبیه‌سازی‌های اتمی[۳] قابل ملاحظه‌ای نیز برای به دست آوردن ویژگی‌های مکانیکی گرافن انجام شده است. لیو[۴] و همکارن [۴] با استفاده از تئوری تابع چگالی، مقادیر $1.05\, TPa$ و 0.186 را به ترتیب برای مدول الاستیسیته و ضریب پواسون ورق گرافن گزارش کردند. ژو[5] و همکاران [۵] با استفاده از شبیه‌سازی‌های مولکولی آثار ناشی از اندازه و کایرالیتی[۶] را بر روی خواص الاستیک یک نوار گرافنی مورد بررسی قرار دادند. شاخص کایرالیتی در تعیین خواص گرافن‌ها و نانولوله‌های کربنی نقشی تعیین کننده دارد و در علم شیمی به عنوان یکی از مباحث فعّال مطرح می‌باشد.

---

[1] Molecular dynamic simulation
[2] Lee
[3] Atomic simulations
[4] Liu
[5] Zhao
[6] chirality

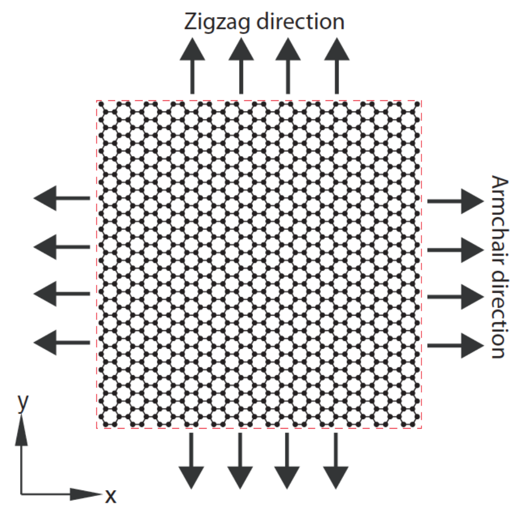
کایرال از لحاظ لغوی به معنای چیزی است که تصویر آن در آینه بر خودش منطبق نباشد. غالبا به جای کلمه‌ی کایرال، کلمه‌ی نامتقارن نیز به کار می‌رود. در ورق‌های گرافنی کایرالیتی به نوعی مرتبط با نوع چینش اتم‌های کربن در کنار یک‌دیگر است و به دو صورت آرمچیر[1] و زیگ‌زاگ[2] مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای یک نوار گرافنی، مقدار مدول یانگ در راستای زیگ‌زاگ بیشتر از مقدار آن در راستای آرمچیر به دست آمده است[۶]. شکل ۱-۲ نیز تفاوت جهت آرمچیر و زیگ‌زاگ را در یک ورق گرافنی نشان می‌دهد.

با توجّه به ویژگی‌های خاص گرافن استفاده از آن در زمینه‌های مختلفی چون تشدیدکننده‌های مکانیکی[3][۷]، حس‌گرهای گاز[۸]، حس‌گرهای جرم و آشکارسازی گرد و غبار[۹]، نیمه‌رساناها[۱۰]، صنایع هوافضا[۱۱]، فیلترهای تصفیه‌کننده آب[۱۲]، باتری‌ها و ابزارهای ذخیره انرژی[۱۳, ۱۴]، سلول‌های سوختی[۱۵, ۱۶] و موارد بسیار دیگر متداول شده است. شکل ۱-۱ شماتیکی از ورق گرافنی تک‌لایه را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱- شماتیک ورق گرافنی تک‌لایه

[1] armchair
[2] zigzag
[3] Mechanical resonators



شکل ۱-۲- تفاوت جهت آرمچیر و زیگ‌زاگ در یک ورق گرافنی

۱-۴- اهداف پژوهش

در این پژوهش ابتدا در بخش نخست، ارتعاشات و پایداری نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری و با در نظر گرفتن یک مدول برشی به منظور در نظر گرفتن اثرات برش بین‌لایه‌ای بررسی شده است. با توجّه به اهمّیّت آثار ریز مقیاس در ابعاد نانو، معادلات سیستم به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی به دست آمده و تاثیر پارامترهایی چون پارامتر غیرموضعی، ابعاد فیزیکی و مدول برشی بر رفتار ارتعاشی و پایداری سیستم مورد ملاحظه قرار گرفته است. در ادامه با توجّه به استفاده از نانولوله‌های کربنی و ورق-های گرافنی در طراحی و ساخت نانوحس‌گرهای جرم و گاز، به مدل‌سازی سیستم متشکل از گرافن دولایه دارای حرکت محوری و با در نظر گرفتن یک جرم متمرکز متّصل به لایه بالایی پرداخته شده است. تاثیر وجود جرم خارجی و محل قرارگیری آن بر رفتار ارتعاشی و پایداری سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

۲ فصل دوم

مفاهیم اوّلیه و

پیشینه تحقیق

۲-۱- مقدّمه

در این فصل ابتدا مفاهیم اوّلیه‌ای که در طول پایان‌نامه از آنها استفاده می‌شود تعریف شده و جایگاه و تاریخچه‌ی مختصری از این اصطلاحات بیان می‌شود. هم‌چنین در هر بخش متناسب با موضوع مورد اشاره، بر ادبیات موضوعی و پیشینه تحقیق مرتبط گزارش می‌شود تا جایگاه و اهمّیّت آن روشن‌تر شود.

۲-۲- تئوری کلاسیک الاستیسیته

رفتار الاستیک خطّی مواد بر پایه قانون هوک اساس یافت که در آن نیروی F، یک نیروی تک محوری در تست کشش یک میله جامد که با جابه‌جایی محوری Δu، به صورت خطی با یک ثابت فنری k_s تغییر می‌کند.

$$F = k_s \Delta u \tag{۲-۱}$$

اساس فیزیکی الاستیسیته کلاسیک را همین رفتار الاستیک خطی تشکیل می‌دهد. در الاستیسیته کلاسیک می‌توان از معیارهای اوّلیه تنش σ_{ij} و کرنش ε_{ij}، به‌ترتیب به‌جای نیرو و جابه‌جایی استفاده کرد که به صورت خطّی با مدول الاستیسیته E، رابطه دارند.

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right] \tag{۲-۲}$$

در رابطه فوق، ν ضریب پواسون که برای موادّ همسانگرد مانند E ثابت و مستقل از هندسه و اندازه مواد است. این رابطه را همچنین می‌توان بر حسب ثوابت لامه λ و μ، به صورت زیر نوشت.

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{۲-۳}$$

رابطه (۲-۲)، رابطه ساختاری موادّ همسانگرد خطی در تئوری کلاسیک بوده و برای سازه‌هایی در ابعاد ماکرو دقیق است، امّا مشاهدات تجربی و آزمایشگاهی نشان می‌دهند با کوچکتر شدن ابعاد مادّه از

اعتبار این رابطه کاسته می‌شود[۱۷].

۲-۳- آثار ریزمقیاس در ابعاد نانو

آزمایش‌های تجربی نشان داده‌اند خواص و ویژگی‌های مکانیکی مواد در مقیاس‌های بسیار کوچک مانند نانو به اندازه آن‌ها به شدّت وابسته است و با کاهش اندازه و نزدیک شدن حداقل یکی از ابعاد جسم به محدوده‌ی نانو، خواص ماده به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌کند. این رفتار مواد را به اصطلاح رفتار وابسته به اندازه[1] می‌نامند به همین دلیل به منظور بررسی و مدل‌سازی نانوساختارها با استفاده از تئوری‌-های مکانیک محیط پیوسته، وجود پارامتری به منظور در نظر گرفتن آثار اندازه در معادلات ساختاری ضروری به نظر می‌رسد. در تئوری‌های کلاسیک الاستیسیته چنین قابلیتی وجود ندارد، به همین دلیل در سال‌های گذشته تلاش‌هایی به منظور توسعه تئوری‌های کلاسیک صورت گرفته است. در این مطالعه، پارامتر و یا پارامترهایی که این رفتار وابسته به اندازه را در موارد نشان می‌دهند، پارامتر مقیاس طولی ماده نامیده می‌شوند. در تحلیل هر مسئله و توسعه معادلات حاکم، علاوه بر معادلات بنیادی، به معادلات ساختاری نیز نیاز است. تئوری کلاسیک الاستیسیته و یا همان مدل الاستیک خطّی هوک قدیمی‌ترین تئوری برای این منظور است. این تئوری تنش در هر نقطه را به مولفه‌های کرنش در همان نقطه مرتبط می‌کند. با این همه این تئوری نمی‌تواند رفتار محیط‌های در ابعاد نانو و میکرو را با دقّت بالایی پیش‌بینی کند، به همین دلیل تئوری‌های مرتبه بالاتر الاستیسیته، یعنی تئوری‌هایی که در آن‌ها جملاتی متناظر با گرادیان کرنش وجود دارد، توسعه یافته‌اند. به طور کلّی می‌توان هر معادله ساختاری را به متغیّرهایی از جمله مشتقات مراتب مختلف تنش و کرنش ارتباط داد که می‌تواند به فرم عمومی زیر نماش داده شود:

$$F\left(\varepsilon_{ij},\sigma_{ij},\nabla\varepsilon_{ij},\nabla\sigma_{ij},\nabla^2\varepsilon_{ij},\nabla^2\sigma_{ij},\dots\right)=0 \qquad (۲-۴)$$

در رابطه بالا σ_{ij} و ε_{ij} به ترتیب نشان‌دهنده تانسورهای تنش و کرنش هستند. اپراتورهای ∇ و ∇^2

[1] Size dependent

نیز به ترتیب بیانگرگرادیان و لاپلاسین یا به بیانی دیگر به ترتیب تابعیت مشتقات مرتبه اوّل و مشتقات مرتبه دوم هستند. بر اساس چگونگی انتخاب ضرایب هر کدام از ترم‌های موجود در رابطه (۲-۴)، یک معادله ساختاری حاصل می‌شود. مثلا در تئوری کلاسیک الاستیسیته و یا همان قانون هوک فقط ضرایب دو ترم اوّل در رابطه صفر نیستند.

۲-۴- تئوری غیرموضعی الاستیسته

در میان تئوری‌های مرتبه بالاتر توسعه یافته که شامل پارامتر مقیاس طولی مادّه هستند، تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن[1] [۱۸] به دلیل تطابق مناسب با نتایج آزمایشگاهی و تجربی مورد توجه بیشتری قرار گرفته است. بر خلاف تئوری کلاسیک الاستیسیته، بر مبنای این تئوری تنش در یک نقطه مرجع مانند X ، نه تنها تابعی از کرنش در همان نقطه، بلکه تابعی از میدان کرنش در تمام نقاط دیگر جسم مانند X' است. در حالت حدّی اگر از آثار کرنش نقاط دیگر بر نقطه X، صرف‌نظر شود، تئوری کلاسیک الاستیسیته حاصل می‌شود. برای یک جامد الاستیک همگن و ایزوتروپیک، تئوری خطّی غیرموضعی شامل معادلات زیر است:

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0 \tag{۲-۵}$$

$$t_{kl}(X) = \int_V \hat{\alpha}(|X' - X|, \hat{\tau})\sigma_{kl}(X')\, dv(X') \tag{۲-۶}$$

$$\sigma_{kl}(X') = \hat{\lambda} e_{rr}(X')\delta_{kl} + 2\hat{\mu} e_{kl}(X') \tag{۲-۷}$$

$$\sigma_{kl}(X') = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k(X')}{\partial x_l'} + \frac{\partial u_l(X')}{\partial x_k'}\right) \tag{۲-۸}$$

در روابط بالا، t_{kl} تانسور تنش غیرموضعی، ρ چگالی جرم، f_l چگالی نیروی حجمی و u_l بردار جابه‌جایی نقطه مرجع X در زمان t می‌باشند. $\sigma_{kl}(X')$ تانسور تنش کلاسیک (ماکروسکوپیک) در نقطه

[1] Eringen's nonlocal elasticity theory

X' است که به‌وسیله ثوابت لامه $\hat{\lambda}$ و $\hat{\mu}$ به تانسور کرنش $e_{kl}(X')$ مرتبط می‌شوند. تنها تفاوت بین روابط فوق با معادلات متناظر در تئوری کلاسیک الاستیسیته در معادله پیوستگی، رابطه (۲-۶) ، است. در رابطه (۲-۶)، V نشان‌دهنده حجم اشغال شده توسط جسم است. با جایگذاری رابطـه (۲-۶) در رابطـه (۲-۵) و استفاده از رابطه (۲-۹)، معادلات غیرموضعی میدان به صورت رابطه (۲-۱۰)حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial x_k}\sigma_{kl}(X') = \frac{\partial\hat{\alpha}}{\partial x'_k}\sigma_{kl}(X') = \frac{\partial}{\partial x'_k}[\hat{\alpha}\sigma_{kl}(X')] + \hat{\alpha}\frac{\partial\sigma_{kl}(X')}{\partial x'_k} \quad (۹-۲)$$

$$-\int_{\partial V}\hat{\alpha}(|X'-X|)\,\sigma_{kl}(X')n_k{}'d\hat{\alpha}(X') \quad (۱۰-۲)$$
$$+\int_V \hat{\alpha}(|X'-X|)\;\times\;\sigma_{kl,k}dv(X') + \rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0$$

در رابطه (۲-۱۰)، انتگرال روی سطح اوّل، نشان‌دهنده تنش‌های سطحی(به عنـوان مثـال کشـش سطحی) است. بنابراین در تئوری الاستیسیته غیرموضعی فیزیک سطحی جسم نیز مورد توجّه قـرار مـی-گیرد، مشخّصه مهمّی که در تئوری کلاسیک الاستیسیته نادیده گرفته می‌شود. با جایگذاری روابط (۲-۷) و (۲-۸) در رابطه (۲-۱۰)، معادله میدان غیرموضعی به صورت رابطه (۲-۱۱) حاصل می‌شـود کـه در آن علامت $'$ نشان‌دهنده تابعیت نسبت به X' است. به عنوان مثال $u' = u(X')$.

$$-\int_{\partial V}\hat{\alpha}(|X'-X|)\left[\hat{\lambda}u'_{r,r}\delta_{kl} + \hat{\mu}\left(u'_{k,l} + u'_{l,k}\right)n_k{}'d\hat{\alpha}(X')\right]$$
$$+\int_V \hat{\alpha}(|X'-X|)\left[\left(\hat{\lambda}+\hat{\mu}\right)u'_{k,lk} + \hat{\mu}u'_{l,kk}\right]dv' \quad (۱۱-۲)$$
$$+\rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0$$

به منظور یافتن میدان جابه‌جایی $u = u(X,t)$، معادله انتگرالی (۲-۱۱) بایـد بـا در نظـر گـرفتن شرایط مرزی و اوّلیه مناسب حل شود.

۲-۴-۱- تعیین مدول غیرموضعی

در رابطه (۲-۶)، $\widehat{\alpha}(|X'-\mathrm{X}|,\tau)$ مدول غیرموضعی[۱] است که دربرگیرنده آثار غیرموضعی ناشی از میدان کرنش در نقاط X' بر نقطه X است. مشخص است که دیمانسیون[۲] مدول غیرموضعی $^{-3}$(طول) می‌باشد. $|X'-\mathrm{X}|$ فاصله اقلیدسی[۳] است و $\hat{\tau}$ پارامتر مقیاس طولی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\tau}=\frac{e_0 a}{l} \qquad (۱۲-۲)$$

در رابطه بالا، e_0 یک ثابت وابسته به مادّه است و به منظور کالیبره کردن نتایج حاصل از تئوری غیرموضعی با نتایج حاصل از آزمایش‌های تجربی و شبیه‌سازی‌های مولکولی تنظیم می‌شود. a یک مشخصه طولی درونی[۴] مانند پارامتر شبکه[۵]، طول پیوند کربن[۶]، اندازه ریزدانه‌ای[۷] و ... می‌باشد. l نیز مشخصه طولی خارجی[۸] مانند طول موج[۹] است. با انطباق منحنی‌های پراکندگی[۱۰] امواج درون صفحه‌ای با منحنی‌های متناظر حاصل از آزمایش‌های تجربی و یا شبیه‌سازی‌های مولکولی، مقدار α برای یک ماده مشخّص به دست می‌آید. هنگامی که مقدار τ برابر صفر قرار داده شود، نقش تابع α با تابع دلتای دیراک یکسان می‌شود و تئوری کلاسیک الاستیسیته و یا همان قانون هوک به دست می‌آید.

با توجّه به این که حل معادله انتگرالی (۲-۱۱) پیچیده است، ارینگن [۱۸] نشان داد که می‌توان به جای حل معادله انتگرالی غیرموضعی، از یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم معادل در یک ناحیه

---

[1] Nonlocal modulus
[2] dimension
[3] Euclidian distance
[4] Internal characteristic length
[5] Lattice parameter
[6] C-C bond distance
[7] Granular distance
[8] External characteristic length
[9] Wave length
[10] Dispersion curves

دوبعدی استفاده کرد که البته این موضوع مستلزم در نظر گرفتن بعضی تقریب‌ها و بعضی خطاها بود. برای یک تیر، ابعاد ضخامت و پهنای تیر در مقایسه با طول سازه کوچک‌تر می‌باشد. بنابراین معادله انتگرالی پیوستگی می‌تواند به فرم معادل دیفرانسیلی به صورت زیر نمایش داده شود[۱۹].

$$(1-\hat{\tau}^2 l^2 \nabla^2)\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\sigma} \quad (۱۳-۲)$$

در رابطه (۲-۱۳)، $\boldsymbol{\sigma}$ تانسور تنش موضعی، $\boldsymbol{t}$ تانسور تنش غیرموضعی و $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ پارامتر مقیاس طولی می‌باشد.

۲-۴-۲- استفاده از تئوری غیرموضعی در بررسی گرافن‌ها

در سال‌های اخیر مطالعات بسیار زیادی بر روی ورق‌های گرافنی صورت گرفته است. در موارد بسیاری به منظور افزایش سرعت و سادگی بیش‌تر از تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته استفاده شده و نتایج به دست آمده از این تئوری‌ها با نتایج حاصل از آزمایش‌های تجربی و یا شبیه‌سازی‌های مولکولی مقایسه شده است. در میان تئوری‌هایی که به منظور در نظر گرفتن آثار ریزمقیاس در ابعاد نانو تا کنون ارائه شده‌اند، تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن به دلیل تطابق مناسب با نتایج تجربی مورد توجّه بیشتری قرار گرفته است. در مطالعه‌ای پرادهان[۱] و فادیکار[۲] [۲۰]، ارتعاشات یک ورق گرافنی چندلایه قرار گرفته در یک ماتریس پلیمری را با استفاده از فرم دیفرانسیلی تئوری غیرموضعی ارینگن مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها به منظور بررسی آثار ریزمقیاس، با تعریف یک نسبت فرکانسی، آثار پارامترهای مختلفی چون طول و تعداد لایه‌ها، ضخامت و موارد دیگر بر روی این نسبت را مورد توجّه قرار دادند. یکی از نتایج به دست‌آمده در این تحقیق این بود که با کاهش مقدار پارامتر غیرموضعی، این نسبت فرکانسی کاهش می‌یابد. انصاری[۳] و همکاران [۲۱]، رفتار ارتعاشی یک ورق گرافنی تک‌لایه را با استفاده از مدل صفحه

---

[1] Pradhan
[2] Phadikar
[3] Ansari

غیرموضعی پیوسته مورد مطالعه قرار دادند. برای این منظور آن‌ها با وارد کردن معادلات دیفرانیسلی غیرموضعی ارینگن در تئوری صفحه میندلین[1]، روابط حاکم بر نانوورق مربعی را به دست آورده و به حلّ عددی آن برای شرایط مرزی مختلف پرداختند. هم‌چنین آن‌ها به منظور اعتبارسنجی نتایج، با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، فرکانس‌های نوسان را به دست آورده و نشان دادند تطابق خوبی بین این دو روش وجود دارد. یکی از نتایج مهم این مطالعه این بود که مقدار پارامتر غیرموضعی مستقل از هندسه حاکم بر سیستم است. شن[2] و همکاران [۲۲] ارتعاشات غیرخطّی یک ورق مستطیلی گرافنی تک‌لایه قرار گرفته در یک محیط گرمایی را بررسی کردند. آن‌ها به کمک تئوری غیرموضعی ارینگن و ترم غیرخطّی هندسی ون-کارمن معادلات سیستم را به دست آورده و به حل آن پرداختند. آن‌ها به منظور بررسی آثار ریزمقیاس از دو روش استفاده کردند. یکی به کمک پارامتر غیرموضعی در روابط ارینگن و دیگری به وسیله بررسی ویژگی‌های وابسته به اندازه و دمای مادّه به کمک شبیه‌سازی دینامیک مولکولی. در تحقیقی دیگر پرادهان و مورمو[3] [۲۳] به کمک تئوری غیرموضعی الاستیسیته، کمانش یک ورق گرافنی تک‌لایه قرار گرفته بر یک بستر الاستیک را بررسی کردند. به منظور شبیه‌سازی اندرکنش ورق گرافنی با محیط الاستیک، آن‌ها از دو مدل وینکلر[4] و پاسترناک[5] استفاده کرده و به کمک روش کار مجازی معادلات حاکم بر سیستم را به دست آوردند و به حلّ عددی آن پرداختند. آن‌ها نشان دادند نیروی کمانش بحرانی به طور قابل توجّهی به ضرایب ریزمقیاس و سختی بستر الاستیک وابسته است. ارتعاشات با دامنه بزرگ ورق گرافنی چندلایه توسط جمعه‌زاده[6] و سعیدی[7] [۲۴] مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها به کمک روش همیلتون و با استفاده از تئوری ارینگن و مدل هندسی ون-کارمن معادلات سیستم را به

[1] Mindlin’s plate theory
[2] Shen
[3] Murmu
[4] winckler
[5] pasternak
[6] Jomezadeh
[7] Saidi

دست آورده و به کمک روش بـالانس هارمونیـک[1] بـرای سـه شـرط مـرزی مختلـف حـل کردنـد. تـاثیر پارامترهایی چون تعدادلایه‌ها، ویژگی‌های هندسی و پارامتر غیرموضعی بر روی رفتـار غیرخطّـی سیسـتم مورد بررسی قرار گرفت. محمّدی[2] و همکاران [۲۵] ارتعاشات آزاد ورق‌های تک‌لایه دایـروی و حلقـوی را بررسی کردند. آن‌ها معادلات را برای شرایط مختلف مرزی به دست آورده و تـاثیر عـواملی چـون پـارامتر غیرموضعی، شعاع ورق و نسبت شعاعی را بر فرکانس‌های نوسـان سیسـتم مطالعـه کردنـد. جمعـه‌زاده و همکاران در مطالعه‌ای دیگر [۲۶] سیستمی متشکل از یک ورق گرافنی دولایه قرار گرفته در یک ماتریس پلیمری غیرخطّی را در نظر گرفته و ارتعاشات غیرخطّی آزاد و اجباری را مورد بررسی قـرار دادنـد. آن‌هـا نیروی واندروالس بین لایه‌های گرافن و بستر پلیمـری را بـه کمـک یـک نیـروی فشـاری مـدل نمـوده و فرکانس‌های طبیعی خطّی و غیرخطّی را برای دو هندسه مختلف زیگ‌زاگ و آرمچیر بـه دسـت آوردنـد. انصاری و همکاران [۲۷] در تحقیقی دیگر، ویژگی‌های ارتعاشی یک ورق گرافنی چندلایه قـرار گرفتـه در یک محیط الاستیک را بررسی نمودند. آن‌ها در این مطالعه به کمک فرم دیفرانسیلی تئـوری غیرموضـعی ارینگن، فرکانس‌های طبیعی سیستم را برای شرایط مختلف مرزی به دست آوردند. آن‌ها نشان دادند تاثیر پارامتر غیرموضعی بر پاسخ‌ها وابسته به شرایط مرزی سیستم است، به گونه‌ای که مثلا برای شرط مـرزی گیردار این تاثیر نسبت به حالت آزاد بیش‌تر است. یکی دیگـر از نتـایج ایـن مطالعـه، وابسـتگی بـیش‌تـر فرکانس‌های نوسان به پارامتر غیرموضعی در مودهای بـالاتر اسـت. تـاثیر بسـتر الاسـتیک بـر روی رفتـار ارتعاشی سیستم نیز در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفت. وجود یک بستر الاستیک به طور قابل توجّهی فرکانس‌های طبیعی سیستم را افزایش می‌دهد و هر چقدر سختی محـیط الاسـتیک کمتـر باشـد، نقـش پارامترهای ریزمقیاس پررنگ‌تر می‌گردد. ارتعاشات آزاد ورق گرافنی چندلایه چهـاروجهی قـرار گرفتـه در

[1] Harmonic balance
[2] Mohammadi

یک ماتریس پلیمری توسط بابایی[1] و شهیدی[2] [۲۸] مورد مطالعه قـرار گرفـت. آن‌هـا بـه کمـک تئـوری غیرموضعی الاستیسیته و روش کار مجازی معادلات سیستم را یافته و به‌وسیله روش گالرکین آن را حـل کردند. آن‌ها مشاهده کردند برای مودهای پایین تعداد لایه‌ها اثر قابل توجّهی بر فرکانس نوسانات سیستم ندارد امّا با افزایش تعداد لایه‌ها این تاثیر بیش‌تر می‌شود. آرش[3] و همکار [۲۹] ارتعاشات ورق‌های گرافنی تک لایه و دولایه را به کمک تئوری‌های محیط پیوسته و شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که نتایج ناشی از این بررسی‌ها با نتایج حاصل از تئوری‌های کلاسیک الاستیسیته در حدود ۶۲ ٪ اختلاف دارند. آن‌ها هم‌چنین مقدار پارامتر غیرموضعی را بـا توجّـه بـه شـرایط مـرزی و شماره مودها کالیبره کردند. در پژوهشی دیگر هی[4] و همکاران [۳۰] ارتعاشات غیر خطّی و اجباری ورق‌-های گرافنی چندلایه را مورد توجّه قرار دادند. موضوع اصلی این تحقیق بررسی ارتعاشات با دامنـه بـزرگ به دلیل وجود پتانسیل غلبه بر نیروی واندروالس بین لایه‌ها است. روابط فرکانس- دامنه و هم‌چنـین اثـر مقدار نیروی خارجی بر رفتار ارتعاشی سیستم نیز مورد بحث قرار گرفته اسـت. بـا رویکـردی کـاربردی، قربان‌پورآرانی[5] و همکاران [۳۱] در تحقیقی رفتار کمانشی یـک ورق تـک‌لایـه سـاخته شـده از گـرافن و کنترل هوشمند آن به وسیله یک نانوصفحه پی وی دی اف[6] را بررسی کردند. در این پژوهش فرض شـده است ورق گرافنی و نانوصفحه توسط یک بستر الاستیک پاسترناک به هم متّصل شده‌اند و به‌وسیله اعمال یک ولتاژ الکتریکی به نانوصفحه، نیروی کمانش ورق گرافنی قابل کنترل اسـت. لـین[7] [۳۲] بـه بررسـی ویژگی‌های ارتعاشی ورق‌های چندلایه گرافنی پرداخت. وی مودهای ارتعاشی ورق گرافنی چندلایـه را بـه سه گروه تقسیم‌بندی نمود، مودهای پایین که مستقل از نیروهای واندروالس هستند، مودهای میـانی کـه

---

[1] Babaei
[2] Shahidi
[3] Arash
[4] He
[5] GhorbanpoorArani
[6] PVDF(polyvinylidene fluoride)
[7] Lin

نیروهای بین‌لایه‌ای واندروالس در تعیین آن‌ها نقش مهمّی دارند و مودهای ترکیبی که شامل هر دو دسته می‌باشند. دو نوع مود ارتعاشی هم‌فاز[1] و غیرهم‌فاز[2] در یک ورق گرافنی دولایه قـرار گرفتـه بـر روی یـک بستر الاستیک موضوع مطالعه شی[3] و همکاران [۳۳] قرار گرفت. آن‌ها در این تحقیق، نیروهای بین دولایه را به صورت فنرهای وینکلر در نظر گرفته و با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسـیته بـه مـدل‌سـازی مسئله پرداختند. سختی بستر الاستیک و پارامتر غیرموضعی تاثیر مهمّی بر فرکانس‌های طبیعی به دست آمده داشتند. مورمو[4] و همکاران [۳۴] در تحقیقی متفاوت، ارتعاشات یک ورق گرافن تک‌لایه قرار گرفتـه بر یک بستر الاستیک و تحت یک میدان مغناطیسی درون صفحه‌ای را با اسـتفاده از تئـوری غیرموضـعی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند. نتایج بررسی آن‌ها نشان می‌دهد وجود یک میـدان مغناطیسـی درون صفحه‌ای موجب افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌گردد در حالی که در نظر گرفتن آثار غیرموضعی رفتاری عکس دارد. ارتعاشات غیرموضعی یک تشدیدکننده نانومکانیکی متشکّل از ورق دایـروی و دولایـه گرافن مورد مطالعه شی و همکاران [۳۵] قرار گرفت. آن‌ها مودهای ارتعاشی هم‌فاز و غیرهم‌فاز را بررسـی کرده و به این نتیجه رسیدند که محدوده فرکانس‌های نوسان در مود هم‌فاز نسبت به مود غیـرهم‌فـاز بـه دلیل وجود نیروهای واندروالس بیش‌تر است. شن و همکاران [۳۶] ارتعاشات عرضی غیرخطّـی یـک ورق گرافن دولایه قرار گرفته در یک محیط گرمایی را با استفاده از شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی و هـم-چنین تئوری غیرموضعی ارینگن مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در این تحقیق خواصّ مـادّه را بـه صـورت وابسته به اندازه و وابسته به دما در نظر گرفتند و آثار مختلف ناشی از این موارد را مورد توجّه قرار دادنـد. نتیجه دیگری که از این تحقیق به دست آمد، حسّاسیت بالای فرکانس‌های غیرخطّـی بـه مقـدار پـارامتر غیرموضعی بود. به منظور بررسی ارتعاشات آزاد نانونوارهای گرافنی دو و چندلایه، ناظم‌نـژاد[5] و حسـینی-

[1] In phase
[2] Out of phase
[3] Shi
[4] Murmu
[5] Nazemnejad

هاشمی[1] [۳۷] با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسته و هم‌چنین شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی، نانونوار گرافنی دولایه را به صورت یک تیر ساندویچی سه‌لایه مدل کردند. لایه میانی به منظور در نظر گرفتن اثر برش بین‌لایه‌ای و به صورت یک تیر که فقط نیروی برشی تحمّل می‌کند در نظر گرفته شد. آن‌ها با به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی سیستم، مقدار پارامتر غیرموضعی را کالیبره نمودند. در این پژوهش تطابق خوبی میان نتایج حاصل از تئوری غیرموضعی با نتایج شبیه‌سازی‌های دیامیک مولکولی به دست آمد. در یک آنالیز عددی، ارتعاشات و کمانش غیرخطّی و غیرموضعی یک ورق گرافن دولایه متّصل به لایه‌های پیزوالکتریک، توسط روندی[2] و همکاران [۳۸] مورد مطالعه قرار گرفت. در این پژوهش لایه‌های گرافن تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی و نیروهای محوری و لایه‌های پیزوالکتریک نیز متاثّر از یک میدان الکتریکی فرض شده‌اند. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد وجود یک میدان مغناطیسی موجب پایدارتر شدن سیستم می‌شود. هم‌چنین وجود نیروهای واندروالس بین لایه‌های گرافن نقش مثبتی در پایداری سیستم دارد. در تصحیحی بر تحقیق انجام شده توسط مورمو[۳۴]، کیانی[3] [۳۹] ارتعاشات عرضی یک صفحه گرافنی تک‌لایه قرار گرفته در یک میدان مغناطیسی را بررسی نمود. وی در این مطالعه با بررسی خطاهای موجود در مورد نیروهای لورنتز[4]، مجددا معادلات سیستم را به دست آورده و به بررسی تاثیر عواملی چون میدان مغناطیسی و پارامتر غیرموضعی و مقایسه با نتایج موجود پرداخت.

۲-۵- سیستم‌های دارای حرکت محوری

سیستم‌های دارای حرکت محوری[5] یک موضوع تحقیقاتی مهم در مهندسی می‌باشد. مسئله مکانیک سیستم‌های دارای حرکت محوری نه تنها از لحاظ کاربردی دارای اهمّیّت هستند، بلکه از لحاظ

[1] Hosseini-Hashemi
[2] Ravandi
[3] Kiani
[4] Lorentz force
[5] Axially moving systems

تئوری نیز از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. در مسائل مرتبط با سیستم‌های دارای حرکت محوری، دامنه مورد توجّه یک حجم کنترل ثابت است که مادّه دارای حرکت محوری از آن عبور می‌کند. این ماده می‌تواند به صورت حالت پایدار و یا کاملا دینامیک باشد. وجود حرکت محوری تاثیر مهمّی در رفتار ارتعاشی و پایداری سیستم‌ها دارد. به طور کلّی وجود حرکت محوری باعث کاهش سختی[1] سیستم می‌شود و به همین دلیل در سرعت‌های بالاتر احتمال ناپایدار شدن و یا شکست سیستم بیشتر می‌شود. تاثیر حرکت محوری بر روی رفتارهای دینامیکی و ارتعاشی کابل‌ها، تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها در سال‌های گذشته توسط محقّقان مختلفی به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است، امّا در ابعاد میکرو و نانو این مطالعات محدود است. لیم[2] و همکاران [۴۰] به بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشی یک نانوتیر دارای حرکت و نیروی کشش محوری پرداختند. آن‌ها به کمک تئوری غیرموضعی الاستیسیته، نشان دادند پارامتر غیرموضعی، مقدار سرعت محوری و میزان نیروی کشش محوری تاثیر مهمّی در رفتار دینامیکی سیستم دارد. آن‌ها هم‌چنین نشان دادند آثار غیرموضعی موجب افزایش فرکانس سیستم در مقایسه با تئوری‌های کلاسیک می‌شود. کیانی [۴۱] با استفاده از تئوری خطّی غیرموضعی الاستیسیته، ارتعاشات طولی، عرضی و پیچشی و هم‌چنین ناپایداری را برای یک نانولوله کربنی تک جداره دارای حرکت محوری بررسی کرد. او نانولوله کربنی را به صورت یک تیر ریلی مدل نموده و تاثیر میزان سرعت محوری و پارامتر غیرموضعی را بر روی ناپایداری‌های سیستم مورد بررسی قرار داد. کیانی[۴۲] در مطالعه دیگری ارتعاشات طولی، عرضی و پایداری را برای یک نانوتیر دارای حرکت محوری ساخته شده از مواد تابعی محوری از طریق تئوری غیرموضعی الاستیسیته بررسی کرد. او نشان داد در نظر گرفتن پارامتر غیرموضعی موجب کاهش سرعت‌های متناظر با ناپایداری دیورژانس و فلاتر می‌شود. در تحقیقی دیگر، رضایی[3] و لطفان[4]

[1] stiffness
[2] Lim
[3] Rezaee
[4] Lotfan

[۴۳] ارتعاشات غیرخطّی یک نانوتیر ویسکوالاستیک دارای سرعت محوری متغیر با زمان را از طریق تئوری غیرموضعی الاستیسیته و به کمک روش مقیاس‌های چندگانه[1] مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند در نظر گرفتن آثار ریز مقیاس سرعت‌های متناظر با ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر را کاهش می‌دهد امّا این موضوع شیب منحنی‌های پاسخ فرکانسی ناشی از نوسانات سرعت را به طور قابل ملاحظه‌ای دچار تغییر می‌کند. رفتار دینامیکی و ارتعاشی یک میکروتیر دارای سرعت محوری ثابت با استفاده از روش ماتریس سختی دینامیکی مورد مطالعه موحدیان[2] [۴۴] قرار گرفت. وی در این تحقیق سرعت‌های بحرانی را برای شرایط مرزی دوسرمفصل و دوسرگیردار به دست آورده و اثر میزان سرعت محوری را بررسی کرد. در مطالعه‌ای دیگر دهرویه[3] و همکاران [۴۵] رفتار ارتعاشی و پایداری را برای یک میکروتیر تیموشنکو با در نظر گرفتن اثرات وابسته به اندازه و با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند در نظر گرفتن رفتار وابسته به اندازه به طور قابل ملاحظه‌ای موجب افزایش فرکانس‌های نوسانات سیستم می‌شود.

۲-۵-۱- ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر

در یک سیستم پایستار[4]، تنها ناپایداری دیورژانس[5] اتفاق می‌افتد، در حالی که در سیستم‌های ناپایستار[6]، بسته به میزان ناپایستاری سیستم ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر[7] می‌توانند رخ دهند. برای یک سیستم پایستار فرکانس‌ها به صورت حقیقی و یا موهومی محض ظاهر می‌شوند. هنگامی که پایین ترین فرکانس از صفر عبور کند، سیستم ناپایدار می‌شود. در سیستم‌های ناپایستار فرکانس‌های سیستم می‌توانند به صورت حقیقی و یا مختلط ظاهر شوند. همانند سیستم های پایستار هنگامی که پایین‌ترین

[1] Multiple scale method
[2] Movahedian
[3] Dehrouyeh
[4] Conservative system
[5] Divergence instability
[6] nonconservative
[7] Flatter instability

فرکانس از مبدا عبور کند و یا دو فرکانس مختلف بر هم منطبق شوند، ناپایداری رخ می‌دهد[۴۶].

مطابق با روش آنالیز مودال، جابه‌جایی دینامیکی[۱] در یک سیستم ارتعاشی به صورت رابطه (۲-۱۴) قابل بیان می‌باشد:

$$\overline{w}(\tau) = W_0 e^{i\widehat{\omega}\tau} \qquad (۱۴\text{-}۲)$$

که در آن داریم:

$$e^{i\widehat{\omega}\tau} = e^{iRe(\widehat{\omega})\tau} e^{-Im(\widehat{\omega})\tau} \qquad (۱۵\text{-}۲)$$

به طور کلّی، قسمت حقیقی فرکانس ویژه بی‌بعد($\widehat{\omega}$)، بیانگر فرکانس طبیعی سیستم و قسمت موهومی بیانگر میرایی سیستم است.

- اگر $Re(\widehat{\omega}) \neq 0$, $Im(\widehat{\omega}) > 0$ باشد سیستم پایدار و دارای نوسانات میرا می‌باشد.
- اگر $Re(\widehat{\omega}) \neq 0$, $Im(\widehat{\omega}) < 0$ باشد سیستم نوسانی و ناپایدار است. در حقیقت در این حالت سیستم دارای ناپایداری فلاتر می‌باشد.
- اگر $Re(\widehat{\omega}) = 0$, $Im(\widehat{\omega}) < 0$ باشد سیستم از لحاظ استاتیکی ناپایدار است. در این حالت سیستم دارای ناپایداری دیورژانس خواهد بود.

در صورت مثبت بودن میرایی، سیستم پایدار بوده و ارتعاشات سیستم پس از مدتی میرا شده و از بین می‌رود. از طرف دیگر اگر میرایی منفی باشد، به سیستم انرژی تزریق می‌شود و با تقویت شدن نوسانات، دامنه نوسانات سیستم به طور نمایی افزایش می‌یابد. (با توجه به وجود ترم $e^{-Im(\widehat{\omega})\tau}$).

هنگامی که یک سیستم دارای حرکت محوری وارد ناپایداری دیورژانس می‌گردد، سیستم از لحاظ استاتیکی ناپایدار می‌شود و در هنگام ناپایداری فلاتر دامنه نوسانات به طور نمایی با زمان افزایش می‌یابد.

---
[1] Dynamic displacement

بدیهی است در صورت ادامه این حالت، سیستم دچار شکست می‌شود.

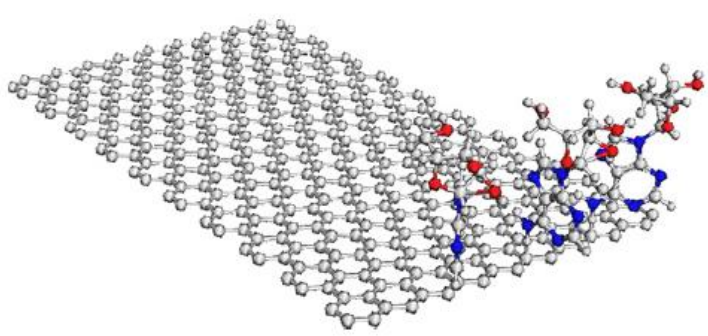
۲-۶- حس‌گرها

حس‌گرها[1] نقش مهمّی در بسیاری از زمینه‌های علمی، صنعتی و مهندسی دارند. از حس‌گرها در کاربردهای گوناگونی هم‌چون پایش محیط‌ها، کنترل فرآیندهای شیمیایی، مطالعات پزشکی و زمینه‌های امنیتی استفاده می‌شود. مطالعات بسیار زیادی در خصوص توسعه فن‌آوری و مواد به کار رفته در حس-گرها در راستای افزایش قابلیت‌هایی مانند حساسیت بالا، پاسخ سریع و کاهش هزینه‌های ساخت صورت گرفته است. به همین منظور تلاش‌هایی برای کوچک سازی[2] حس‌گرها در حال انجام است، زیرا کاهش ابعاد حس‌گر باعث بالا رفتن کارایی و حساسیت می‌شود و امکان تجمیع تعداد بیشتری از حس‌گرها را در یک مجموعه واحد کوچک فراهم می‌آورد. نیاز مبرم به کوچک‌سازی حس‌گرها، موجب توسعه حس‌گرهای با قابلیت بالا در ابعاد بسیار پایین مانند نانو شده است. یک حس‌گر در ابعاد نانو که از این پس در این مطالعه به آن "نانوحس‌گر[3]" گفته می‌شود، باید حداقل دارای یکی از ویژگی‌های زیر باشد: ۱- ابعاد حس-گر در مقیاس نانومتر باشد. ۲- حساسیت[4] حس‌گر در مقیاس نانومتر باشد. ۳- فاصله برهم کنش حس‌گر و جسم مورد ردیابی در مقیاس نانو باشد. وظیفه اصلی یک نانوحس‌گر، جمع آوری اطلاعات از محیط‌های با مقیاس نانو و انتقال آن به دنیای ماکروسکوپیک به منظور تحلیل آن است. مکانیزم اصلی ردیابی در نانوحس‌گرها به صورت اندازه‌گیری تغییرات ناشی از وجود اتم‌ها و یا مولکول‌های خارجی در مواردی مانند حجم، جابه‌جایی، فرکانس، سرعت، رسانایی، نیروی مغناطیسی و یا موارد دیگر می‌باشد بر اساس متغیر اندازه‌گیری شده توسط حس‌گرها، آن‌ها را در شش دسته طبقه‌بندی می‌شوند. ۱- نانوحس‌گرهای

[1] Sensors
[2] miniaturization
[3] nanosensor
[4] sensivity

مکانیکی ۲- نانوحس‌گرهای الکتریکی ۳- نانوحس‌گرهای نوری ۴- نانوحس‌گرهای مغناطیسی ۵- نانوحس‌گرهای شیمیایی ۶- نانوحس‌گرهای حرارتی. به دلیل ویژگی‌های منحصربه‌فرد نانوحس‌گرها، استفاده از آن‌ها در زمینه‌های مختلفی همانند تشخیص زودهنگام بیماری‌های سخت، ردیابی جهش‌های ژنتیکی، ردیابی گازها در محیط‌های گوناگون، بررسی و مطالعه مولکول‌های دی ان ای [1] و پایش دقیق حالت‌های مختلف ماده در حال گسترش است. مرجع [۴۷] راهنمای بسیار خوبی برای استفاده از نانوموادهای مختلف در طراحی و مطالعه حس‌گرها می‌باشد.

در میان نانوموادهای مختلفی که از آن‌ها در طراحی و ساخت نانوحس‌گرها استفاده می‌شود، نانولوله‌های کربنی و ورق‌های گرافنی به دلیل خواص کم‌نظیر مکانیکی و الکتریکی و قابلیت رسیدن به حساسیت‌های فوق‌العاده بالا (در حدود یک گیگاهرتز و یا یک تراهرتز) از اهمّیّت ویژه‌ای برخوردار هستند. هم‌چنین با توجه به این که نانولوله‌های کربنی و ورق‌های گرافنی وزن بسیار پایینی دارند، حتّی وجود تعداد کمی از اتم‌ها و یا مولکول‌های خارجی می‌تواند منجر به تغییرات قابل ردیابی در حس‌گر گردد. شکل ۱-۲ شماتیکی از قرارگیری مولکول‌های خارجی بر روی یک صفحه گرافنی را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱- شماتیک مولکول‌های خارجی قرار گرفته بر روی یک صفحه گرافن

[1] DNA

به طور کلّی دو روش مختلف برای طراحی نانوحس‌گرها وجود دارد: ۱- روش‌های مبتنی بر تحلیل-های ارتعاشی ۲- روش‌های مبتنی بر انتشار موج[1]. اصول ردیابی به صورت بررسی تغییرات قابل شناسایی در فرکانس نوسانات و یا انتشار موج در سیستم به دلیل وجود اتم‌ها و یا مولکول‌های خارجی قرار گرفته بر روی سطح حس‌گر است.

در سال‌های اخیر مطالعات گوناگونی در مورد استفاده از نانولوله‌های کربنی و ورق‌های گرافنی در طراحی و ساخت نانوحس‌گرها صورت گرفته است. در پژوهشی گانگ[2] و همکاران [۴۸] یک نانوحس‌گر جرم گرافنی را مورد مطالعه قرار دادند. به همین منظور آن‌ها یک ورق گرافنی دایره‌ای را به صورت یک صفحه دوبعدی الاستیک خطّی و با در نظر گرفتن یک جرم متمرکز قرار گرفته در وسط آن مدل کرده و فرکانس‌های طبیعی به دست آمده را با نتایج حاصل از روش انرژی ریلی مورد مقایسه قرار دادند. آن‌ها در این مطالعه به منظور در نظر گرفتن آثار ناشی از فرایند ساخت و هم‌چنین گرما، با در نظر گرفتن یک نیروی کشش اوّلیه، نشان دادند این نیروی کشش بر فرکانس‌ها تاثیر کمی دارد. آن‌ها هم‌چنین نشان دادند با کوچک‌تر شدن ابعاد حس‌گر، حساسیت بالاتری به دست می‌آید. نتیجه دیگر به دست آمده از مطالعه مذکور، افزایش حساسیت حس‌گر با افزایش تعداد لایه‌های گرافن و هم‌چنین کاهش حساسیت با افزایش دمای محیط بود. حساسیت حس‌گر جرم مورد بررسی در این مطالعه حداقل یک زپتوگرم[3]، معادل با 10^{-21} گرم به دست آمد. در پژوهشی دیگر ژو[4] وهمکاران [۴۹] یک ورق گرافنی را به عنوان یک حس‌گر جرم مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با قرار دادن یک نانوذرّه بر روی مکان دلخواه از ورق گرافن تک‌لایه دایره‌ای با شرط مرزی ساده و گیردار، با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی و تئوری صفحه کیرشهف فرکانس‌های طبیعی سیستم را با استفاده از روش گالرکین مورد بررسی قرار داده و آثار ناشی از

---

[1] Wave propagation
[2] Gong
[3] Zeptogram(zg)
[4] Zhou

وجود جرم متمرکز و محل قرارگیری آن را مطالعه نمودند. نتایج این تحقیق نشان داد هنگامی که میـزان جرم افزایش می‌یابد و یا موقعیت قرارگیری آن به مرکز دایره نزدیک‌تـر شـود، فرکـانس نوسـان سیسـتم کاهش یافته امّا جابه‌جایی فرکانس[1] کاهش می‌یابد. هم‌چنین این نتیجه به دست آمد که در نظـر گـرفتن آثار ریز مقیاس تاثیر قابل توجّهی بر فرکانس نوسانات سیستم می‌گذارد امّا بر میزان جابه‌جـایی فرکـانس سیستم تاثیر کمتری دارد. آن‌ها دریافتند هنگامی که شعاع نانوصفحه کاهش می‌یابد، جابه‌جایی فرکـانس افزایش می‌یابد. مورمو[2] و ادهیکاری[3] [۵۰] یک ورق تک‌لایه مستطیلی گرافن را بـا اجـرام متمرکـز قـرار گرفته بر روی آن به عنوان یک حس‌گر جرم در نظر گرفته و با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی، رفتار ارتعاشی سیستم و آثار ناشی از محل و جهت قرارگیری اجرام بر نوسانات را برای شرط مـرزی یـک-سرگیردار – یک‌سر آزاد بررسی نموده و با نتایج حاصـل از شـبیه‌سـازی‌هـای مولکـولی مقایسـه نمودنـد. ادهیکاری[4] و چدهاری[5] [۵۱] روابط ریاضی را به منظور استفاده از ورق گرافنی به عنوان یک نـانوحس‌گـر جرم مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها یک ورق گرافنی تک‌لایه با شرط مرزی یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد را در نظر گرفته و رفتار ارتعاشی و جابه‌جایی فرکانس را برای سیستم برای چهار حالت مختلف قرارگیری اجرام بر روی صفحه گرافنی بررسی کردند. نتایج عددی حاصل از این پژوهش نشان داد حساسیت حـس‌گـر در مرتبه گیگاهرتز/ زپتوگرم است و هنگامی که جرم‌های خارجی در انتهای آزاد تیر باشند، حساسیت حس-گر به بیشترین مقدار خود می‌رسد. در تحقیقی مشابه، شن[6] و همکاران [۵۲] ارتعاشات یـک نـانوحس‌گـر مکانیکی متشکّل از یک ورق گرافنی یک‌لایه را با استفاده از تئوری صـفحه غیرموضـعی کیرشـهف مـورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها ورق گرافنی با شرط مرزی ساده را به همراه یک نانوذرّه قرار گرفته بر روی آن در محل دلخواه را در نظر گرفته و فرکانس‌های طبیعی سیسـتم را بـا اسـتفاده از روش گـالرکین بـه دسـت

[1] Frequency shift
[2] Murmu
[3] Adhikari
[4] Adhikari
[5] Chowdhury
[6] Shen

آوردند و آثار ناشی از وجود جرم خارجی و محل قرارگیری آن بر روی فرکانس نوسانات و جابه‌جایی فرکانس را بررسی نمودند. نتایج حاصل نشان داد هر چقدر میزان جرم خارجی بیشتر بوده و یا محل قرارگیری آن به مرکز صفحه نزدیک‌تر باشد، فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد امّا جابه‌جایی فرکانس افزایش می‌یابد.

نتایج حاصل از مقاله‌ها و مطالعه‌های بالا، می‌تواند در طراحی و ساخت نانوحس‌گرهای ساخته شده از نانولوله‌ها و ورق‌های گرافنی مورد استفاده محقّقان قرار گیرد.

۲-۷- جمع‌بندی

با توجّه به پیشرفت روزافزون فن‌آوری‌های نوین استفاده از مواد جدید در ساخت ابزارهای در ابعاد فوق‌العاده پایین به شدّت در حال توسعه است. به همین دلیل مطالعات مختلفی در راستای طراحی، تحلیل و ساخت سیستم‌های در ابعاد نانو و میکرو انجام شده است. با توجّه به هزینه و پیچیدگی آزمایش-های تجربی، استفاده از راه‌کارهای جایگزین مانند به کارگیری شبیه‌سازی‌های اتمی و مولکولی و یا استفاده از تئوری‌های الاستیسیته غیرکلاسیک موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه خواهد بود. در میان تئوری‌های غیرکلاسیک، تئوری غیرموضعی ارینگن مورد به دلیل کارایی بالا مورد توجّه بسیاری از محقّقان قرار گرفته است. با توجّه به این که در بعضی از موارد سیستم‌های مورد مطالعه دارای حرکت محوری بوده و وجود سرعت محوری موجب تغییر در رفتار دینامیکی و ارتعاشی سیستم است، بررسی یک سیستم با ابعاد نانو و دارای حرکت محوری در این مطالعه مورد توجّه قرار گرفته است.

۳ فصل سوم

ارتعاشات نوار گرافنی دولایه

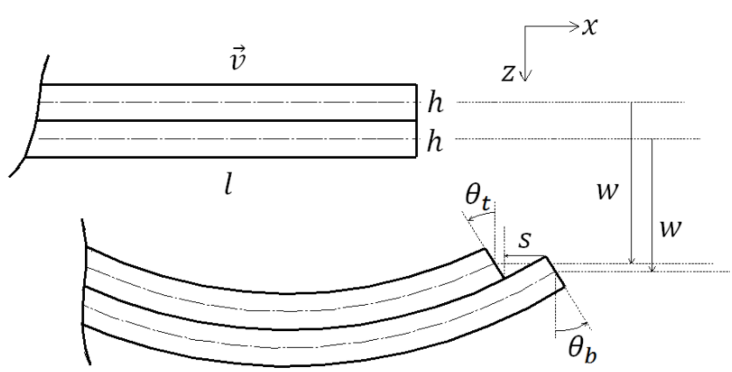
دارای حرکت محوری

۳-۱- مقدّمه

در این فصل ارتعاشات یک نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته بررسی شده است. ابتدا معادلات غیرموضعی سیستم به کمک روش همیلتون[1] به دست آمده و سپس با استفاده از روش گالرکین نتایج عددی به دست آمده است. ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر بـرای شرایط مرزی دوسرمفصل و یک‌سرگیردار- یک‌سر آزاد و تاثیر عواملی چون پـارامتر غیرموضـعی و مـدول برشی بین‌لایه‌ای بر رفتار سیستم ومورد بحث قرار گرفته است.

۳-۲- استخراج معادلات سیستم

برای مدل‌سازی نوار گرافنی دولایه، نوار را به صورت دو تیر اویلر برنولی در نظر می‌گیـریم کـه بـر روی هم قرارگرفته‌اند و مدول برشی بین آن‌ها وجود دارد که مبین پیوندهای واندروالس می‌باشد . شـکل ۳-۱ ، شماتیک نوار گرافنی دولایه به طول l است که با سرعت ثابت محوری $\bar{v}$ در حال حرکت می‌باشد.



شکل ۳-۱- شماتیک نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری

[1] Hamilton

ازجابه‌جایی طولی تیرها صرف‌نظر شده و جابه‌جایی عرضی تیر بالایی را با w_t و جابه‌جایی عرضی تیر پایینی را با w_b نمایش می‌دهیم. فرض می‌شود که جابه‌جایی‌های عرضی در هر دو تیر بالایی و پایینی با هم برابر باشند و هیچ‌گونه جدایی بین سطوح دو تیر هنگام حرکت و ارتعاش اتفاق نیفتد. هم‌چنین با توجه به یکسان بودن لایه‌های بالایی و پایینی، میزان چرخش لایه‌ها با هم برابر در نظر گرفته می‌شود. در رابطه (۳-۲)، θ_t و θ_b به ترتیب نشان‌دهنده چرخش لایه‌های بالایی و پایینی می‌باشند.

$$w_t(x,t) = w_b(x,t) = w(x,t) \qquad (۳-۱)$$

$$\theta_t = \theta_b = \theta \qquad (۳-۲)$$

با توجه به تئوری تیر اویلربرنولی، میزان طول قوس s یا همان لغزش بین لایه‌ها به صورت مجموع تغییر طول سطوح بالایی و پایینی لایه‌ها، به صورت روابط(۳-۳) تا (۳-۵) تعریف می‌شود.

$$s = -\frac{h}{2}\theta_t - \frac{h}{2}\theta_b = -h\theta \qquad (۳-۳)$$

$$\theta = -\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (۳-۴)$$

$$s = -h\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (۳-۵)$$

در رابطه (۳-۳)، h ضخامت هر لایه گرافن می‌باشد.

تمامی جابه‌جایی‌ها و کرنش‌ها کوچک فرض می‌شوند، بنابراین مسئله به صورت خطّی در نظر گرفته می‌شود. برای به دست آوردن معادلات سیستم از اصل هامیلتون استفاده می‌شود. بر اساس اصل هامیلتون با کمینه کردن لاگرانژین[1] یک سیستم تغییر شکل‌پذیر، معادله حرکت و عبارتی برای به‌دست آوردن شرایط مرزی استخراج می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta V - \delta T)dt = 0 \qquad (۳-۶)$$

در رابطه (۳-۶)، V انرژی پتانسیل سیستم، T انرژی جنبشی و t نشانگر زمان است. انرژی جنبشی

[1] Lagrangian

سیستم به صورت رابطه (۳-۷) بیان می‌شود.

$$T = \int_0^l \rho A(\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx \tag{۳-۷}$$

که در آن، A مساحت سطح مقطع تیر، l طول تیر، ρ چگالی تیـر و v سـرعت محـوری ثابـت تیـر است.

انرژی پتانسیل سیستم نیز به صورت رابطه (۳-۸) به دست می‌آید :

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l M_t^{nl}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_b^{nl}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_{sh}s^2]dx \tag{۳-۸}$$

که در آن K_{sh} مدول برش بین‌لایه‌ای و M_t^{nl} و M_b^{nl} به ترتیب گشتاور خمشی غیرموضـعی لایـه-های بالایی و پایینی است.

ترم‌های اوّل و دوم رابطه (۳-۶) به صورت روابط (۳-۹) و (۳-۱۰) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta V dt &= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l (M_t^{nl} + M_b^{nl})\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta w + \ h^2 K_{sh}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\delta w\, dx\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}(M_t^{nl} + M_b^{nl})\ \ \frac{\partial}{\partial x}\delta w\, |_0^L\, dx \\
&- \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial x}(M_t^{nl} + M_b^{nl})\ \ \delta w\, |_0^L\, dx \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}(M_t^{nl} + M_b^{nl})\ \delta w\, dx\, dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} h^2 K_{sh}\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\, |_0^L\, dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l h^2 K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta w\, dx\, dt
\end{aligned} \tag{۳-۹}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt = \int_0^l 2\rho A\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\,\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l 2\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\,dx\,dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} 2\rho A\,v\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\,\Big|_0^l - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l 2\rho A v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\delta w\,dx\,dt \\ + \int_0^l 2\rho A\,v\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\,\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l 2\rho A v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\delta w\,dx\,dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} 2\rho A\,v^2\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\,\Big|_0^l - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l 2\rho A v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta w\,dx\,dt\end{aligned} \tag{۳-۱۰}$$

با جایگذاری روابط بالا در رابطه همیلتون معادله حرکت سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$2\rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + 2\frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} - h^2 K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{۳-۱۱}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} = \frac{h^2}{2}K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{۳-۱۲}$$

همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد، بر مبنای تئوری غیرموضعی ارینگن رابطه تنش محوری غیر موضعی با تنش محوری موضعی به صورت رابطه (۳-۱۳) به دست می‌آید:

$$\sigma_x^{nl} - (e_0 a)^2\frac{\partial^2 \sigma_x^{nl}}{\partial x^2} = \sigma_x^l = -Ez\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{۳-۱۳}$$

با ضرب رابطه (۳-۱۳) در z و انتگرال‌گیری روی سطح مقطع تیر، رابطه بین گشتاور خمشی موضعی و غیرموضعی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M_x^{nl} - (e_0 a)^2\frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} = M_x^l = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{۳-۱۴}$$

در رابطه (۳-۱۴)، I ممان اینرسی سطح و E مدول الاستیسیته است که مقدار آن برای گرافن در حدود یک تراپاسکال است.

با جایگذاری رابطه (۳-۱۲) در معادله (۳-۱۴) و جایگذاری رابطه حاصل شده در رابطه (۳-۱۱)، معادله حرکت سیستم به صورت رابطه (۳-۱۵) حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-h^2K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -(e_0a)^2\left[\rho A\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+2v\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial t}+v^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) -\frac{h^2}{2}K_{sh}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right]=0 \tag{۳-۱۵}$$

شرایط مرزی برای حالت‌های دوسرمفصل و یک‌سرگیردار و یک‌سر آزاد به ترتیب توسط رابطه‌های (۳-۱۶) و (۳-۱۷) نشان داده می‌شوند:

$$w(0,t)=0\ ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)=0\ \ ;\ \ w(l,t)=0\ ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t)=0 \tag{۳-۱۶}$$

$$w(0,t)=0\ ;\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0\ \ ;\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t)=0\ ;\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l,t)=0 \tag{۳-۱۷}$$

به منظور بررسی عمومی‌تر مسئله، با در نظر گرفتن پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (۳-۱۸) فرم بی‌بعد معادله (۳-۱۵) به صورت رابطه (۳-۱۹)به دست می‌آید که در آن علامت ستاره به منظور سادگی بیشتر حذف شده است.

$$w^*=\frac{w}{l}\ ;\ \ \xi=\frac{x}{l}\ ;\ \ \tau=\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}t\ ;\ \ \mu=\frac{e_0a}{l}\ ;\ \ \lambda=\frac{l}{r}\ ;\ r=\sqrt{\frac{I}{A}}\ ;\ \eta=\frac{v}{C_L} \\ C_L=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\ ;\ \ \Upsilon=\frac{h^2K_{sh}l^2}{EI} \tag{۳-۱۸}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}+2\eta\lambda\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\tau}+(\lambda\eta)^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right)+\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}-\Upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} -\mu^2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\tau^2}+2\eta\lambda\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^3\partial\tau}+(\lambda\eta)^2\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}-\frac{\Upsilon}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}\right)=0 \tag{۳-۱۹}$$

که در آن C_L سرعت انتشار موج در تیر و r شعاع ژیراسیون سطح مقطع تیر است.

همچنین شرایط مرزی برحسب پارامترهای بی‌بعد بـرای حالـت دو سـر مفصـل بـه صـورت رابطـه (۳-۲۰)

$$w(0,\tau)=0\ ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(0,\tau)=0\ ;\ \ w(1,\tau)=0\ ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(1,\tau)=0 \qquad (۳-۲۰)$$

و برای حالت یک‌سرگیردار- یک‌سرآزاد مطابق رابطه (۳-۲۱) ارائه می‌شوند:

$$w(0,\tau)=0\ ;\frac{\partial w}{\partial \xi}(0,\tau)=0;\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(1,\tau)=0;\ ;\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3}(1,\tau)=0 \qquad (۳-۲۱)$$

۳-۳- گسسته‌سازی معادله حرکت

به طور کلّی حلّ تحلیلی معادله (۳-۱۹) پیچیده است. در میـان روش‌هـای عـددی موجـود، روش گالرکین به طور گسترده‌ای برای حل معادلات مشابه و جداسازی فضای زمانی و مکانی مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش نیاز است توابع شکل مود مناسبی متناظر با جابه‌جایی‌های عرضی در نظر گرفته شود. از آن جا که با توجه به شرایط مرزی سیستم شکل مودها باید وابسته به سرعت نیـز باشـند، یـافتن توابع ویژه‌ای که دقیقا شرایط مرزی طبیعی سیستم را ارضا نماید پیچیده است به همـین دلیـل از توابـع شکل مود متناظر استاتیکی استفاده می‌شود. برای حالت مرزی دوسر مفصل این توابع بـه صـورت رابطـه (۳-۲۲) بیان می‌شوند:

$$\phi_i(\xi)=\sqrt{2}\,sin(i\pi\xi) \qquad (۳-۲۲)$$

برای حالت یک‌سرگیردار- یک‌سر آزاد نیز توابع فوق به صورت رابطه (۳-۲۳) نشان داده می‌شوند:

$$\phi_i(\xi)=sinh(\beta_n\xi)-sin(\beta_n\xi)-\pounds(cosh(\beta_n\xi)-cos(\beta_n\xi)) \qquad (۳-۲۳)$$

که در آن:

$$£ = \frac{sinh(\beta_n l) + sin(\beta_n l)}{cosh(\beta_n l) + cos(\beta_n l)} \qquad (۲۴-۳)$$

جابه‌جایی عرضی سیستم را به صورت گسسته رابطه (۳-۲۵) در نظر می‌گیریم:

$$w(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(\xi)\overline{w}_i(\tau) \qquad (۲۵-۳)$$

که در آن N تعداد مودهای در نظر گرفته شده و $\overline{w}_i(\tau)$ توابع زمانی نامعلوم هستند.

با جایگذاری رابطه (۳-۲۵) در معادله (۳-۱۹) و ضرب کردن عبارت حاصل در $\phi_j(\xi)$ و انتگرال‌گیری در فاصله ۰ تا ۱، فرم ماتریسی معادله به صورت رابطه (۳-۲۶) به دست می‌آید.

$$\boldsymbol{M}\ddot{\overline{w}} + \boldsymbol{G}\dot{\overline{w}} + \boldsymbol{K}\overline{w} = 0 \qquad (۲۶-۳)$$

که در آن $\mathbf{M}$ ، $\mathbf{G}$ و $\mathbf{K}$ به ترتیب نشان‌دهنده ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی می‌باشند و به صورت روابط (۳-۲۷) تا (۳-۲۹) به دست می‌آیند.

$$[\boldsymbol{M}]_{ij} = \int_0^1 \left(\phi_i\phi_j + \mu^2 {\phi'}_i {\phi'}_j\right) d\xi \qquad (۲۷-۳)$$

$$[\boldsymbol{G}]_{ij} = 2\lambda\eta \int_0^1 \left(-\phi_i {\phi'}_j + \mu^2 {\phi''}_i {\phi'}_j\right) d\xi \qquad (۲۸-۳)$$

$$[\boldsymbol{K}]_{ij} = \int_0^1 \left((\Upsilon - (\lambda\eta)^2)\, {\phi'}_i {\phi'}_j + (1 - \mu^2(\lambda\eta)^2 + \frac{\Upsilon\mu^2}{2}) {\phi''}_i {\phi''}_j \right) d\xi \qquad (۲۹-۳)$$

در روابط فوق علامت $'$ نشان‌دهنده مشتق نسبت به متغیّر مکان می‌باشد.

در ادامه، جابه‌جایی دینامیکی در رابطه (۳-۲۶) را به صورت رابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\overline{w}(\tau) = W_0 e^{\alpha\tau} \qquad (۳۰-۳)$$

که در آن W_0، بردار دامنه بی‌بعد امواج انتشار یافته در نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری و پارامتر α، مقادیر ویژه معادله (۳-۲۶) می‌باشد. پارامتر α، هم‌چنین می‌تواند بر حسب فرکانس ویژه بی‌بعد متناظر به صورت رابطه زیر بیان شود.

$$\alpha = i\widehat{\omega} \qquad (۳۱-۳)$$

که در آن داریم: $i = \sqrt{-1}$.

از آن جا که معادله سیستم دارای عبارت ژیروسکوپی می‌باشد، یعنی معادله دارای مشتقات مرتبه فرد مکانی می‌باشد، مقادیر و بردارهای ویژه به صورت اعداد مختلط ظاهر می‌شوند.

$$\alpha = Re[\alpha] + iIm[\alpha] \tag{۳-۳۲}$$

به منظور به دست آوردن این مقادیر ویژه، مرتبه مجموعه معادلات دیفرانسیل معمولی رابطه (۳-۲۶) با در نظر گرفتن متغیر کمکی کاهش می‌یابد.

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{w}\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} \;\; ; \;\; [\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} [0] & [\boldsymbol{M}] \\ [\boldsymbol{M}] & [\boldsymbol{G}] \end{bmatrix} \;\; ; \;\; [\boldsymbol{E}] = \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{M}] & [0] \\ [0] & [\boldsymbol{K}] \end{bmatrix} \tag{۳-۳۳}$$

بنابراین فرم کاهش یافته رابطه (۳-۲۶) به صورت رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[\boldsymbol{B}]\{\dot{z}\} + [\boldsymbol{E}]\{z\} = \{0\} \tag{۳-۳۴}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۳۰) در رابطه (۳-۳۴)، مساله مقدار ویژه زیر حاصل می‌شود:

$$(\alpha[\boldsymbol{I}] - [\boldsymbol{Y}])\{W_0\} = \{0\} \tag{۳-۳۵}$$

که در آن

$$[\boldsymbol{Y}] = -[\boldsymbol{B}]^{-1}[\boldsymbol{E}] \tag{۳-۳۶}$$

و I ماتریس همانی می‌باشد. با حلّ مساله مقدار ویژه (۳-۳۵)، مقادیر ویژه مختلط و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی مختلط سیستم به دست می‌آیند.

۳-۴- حل مساله نمونه و نتایج آن

در این بخش با در نظر گرفتن مقادیر عددی برای پارامترهای هندسی و مکانیکی سیستم گرافنی دولایه، فرکانس‌های طبیعی مختلط سیستم به دست آمده و با نتایج سایر مقالات مشابه مورد مقایسه قرار گرفته است. جدول (۳-۱) مشخّصات فیزیکی و مکانیکی نانوتیرهای مدل شده در این تحلیل را نشان

جدول (۳-۱) مشخصات هندسی و مکانیکی نانوتیرها

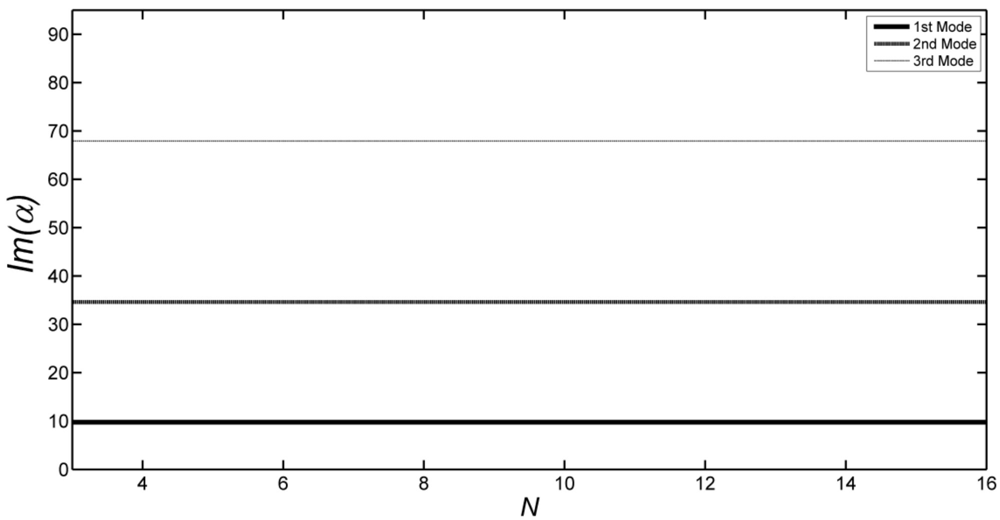
پارامترها	مقادیر عددی
مدول الاستیسیته E (TPa)	1
چگالی ρ (kg/m3)	2260
طول L (nm)	16
ضخامت نانوتیر h (nm)	0.335
عرض نانوتیر b (nm)	2
پارامتر غیرموضعی ارینگن e_0a (nm)	1.44
مدول برشی بین‌لایه‌ای K_{sh} (GPa)	0.25 – 3.01 – 4.6

می‌دهد.

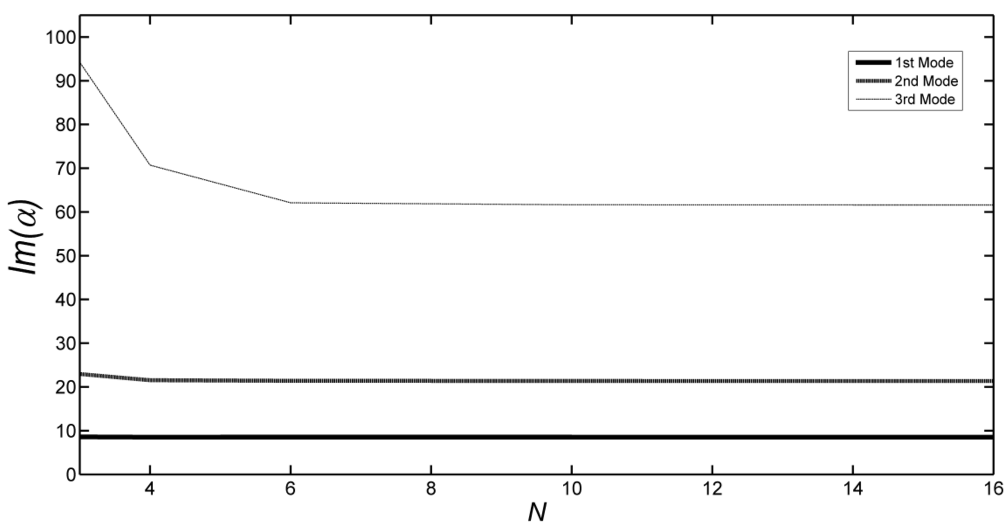
۳-۴-۱- همگرایی روش گالرکین

از آن‌جا که در این مطالعه سرعت‌های محوری بالا ممکن است وجود داشته باشد، نیاز است همگرایی روش گالرکین مورد بررسی قرار گیرد. به طور کلی هر مقدار ویژه به دست آمده از حلّ رابطه (۳-۳۵)، هنگامی که N (تعداد ترم‌های در نظر گرفته شده روش گالرکین) به اندازه کافی بزرگ باشد، به یک مقدار معیّن همگرا می‌شود. هم‌چنین با افزایش N، زمان مورد نیاز برای انجام محاسبات به طور قابل توجّهی افزایش می‌یابد، بنابراین نیاز است مقدار مناسبی برای N، در نظر گرفته شود.

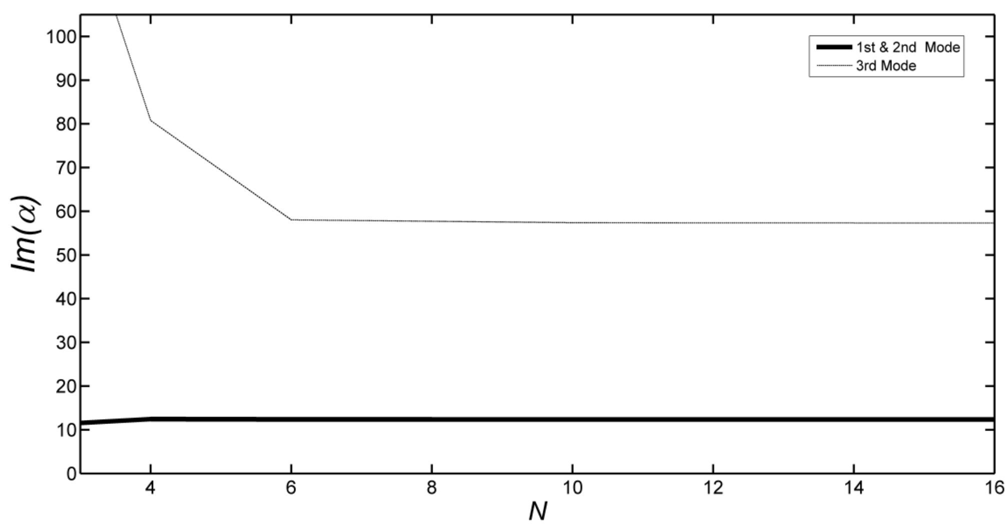
در شکل‌های زیر، مقدار فرکانس طبیعی سیستم برای سه مود اوّل به ازای مقادیر مختلفN و برای سه سرعت مختلف رسم شده است.مشاهده می‌شود در سرعت‌های بالا، تعداد جمله‌های در نظر گرفته شده برای همگرا شدن جواب‌ها افزایش می‌یابد. با توجّه به نمودارهای به دست آمده به منظور انجام محاسبات، N=12 در نظر گرفته شده است.



شکل ۳-۲- فرکانس طبیعی بدون‌بعد بر حسب N به ازای η=0



شکل ۳-۳- فرکانس طبیعی بدون‌بعد بر حسب N به ازای η=0.04



شکل ۳-۴- فرکانس طبیعی بدون‌بعد بر حسب N به ازای $\eta=0.07$.

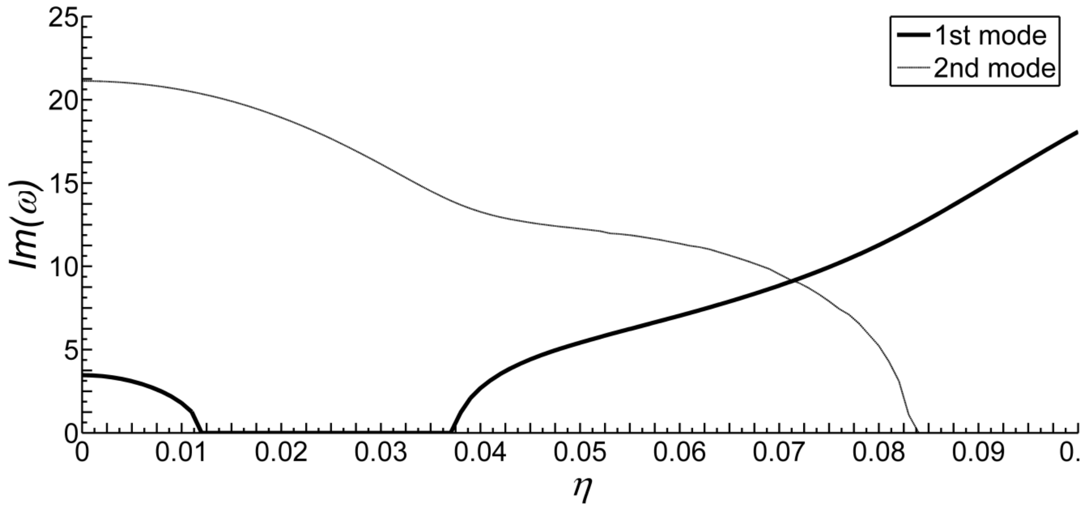
۳-۴-۲- نتایج

در جدول (۳-۲)، به منظور اعتبارسنجی پاسخ‌ها با سایر مقالات موجود، نتـایج بـرای نـوار گرافنـی دولایه بدون حرکت محوری و تحت شرط مرزی یک‌سردرگیر- یک‌سر آزاد ارائه شده است. همان‌طور کـه انتظار می‌رود با افزایش طول نوار، سختی سیستم کاهش یافته و در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. همان‌طور که انتظار می‌رود برای سیستم با سرعت محوری، مقـادیر ویـژه بدسـت آمـده تـابعی از سرعت خواهند بود. در شکل ۳-۵ و شکل ۳-۶ نمودار تغییرات قسمت موهـومی و حقیقـی مقـادیر ویـژه برای مودهای اول و دوم با شرط مرزی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد بر حسب پارامتر بی‌بعـد سـرعت رسـم شده است.

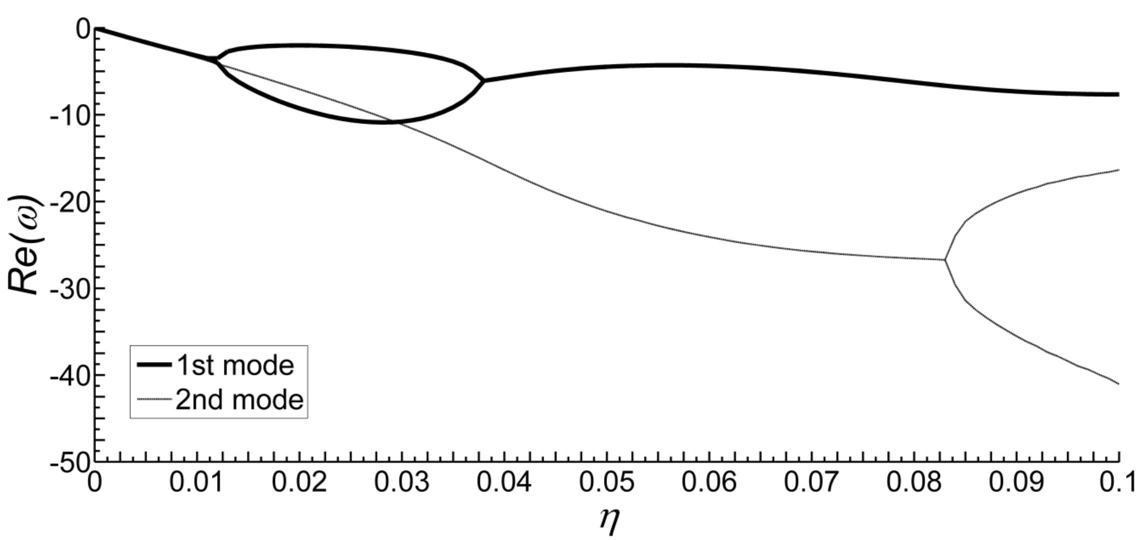
جدول ۳-۲ - فرکانس‌های طبیعی اول و دوم برای شرط مرزی یک‌سرگیردار-یک‌سر آزاد برای مقادیر مختلف مدول برشی

	مطالعه حاضر (نوار دولایه یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد)						تیر ساندویچی سه لایه یک سر گیردار-یک‌سر آزاد[37]	
	$K_{sh}=4.6$ GPa		$K_{sh}=3.01$ GPa		$K_{sh}=0.25$ GPa			
طول (nm)	فرکانس اول (GHz)	فرکانس دوم (GHz)	فرکانس اول (GHz)	فرکانس دوم (GHz)	فرکانس اول (GHz)	فرکانس دوم (GHz)	فرکانس اول (GHz)	فرکانس دوم (GHz)
12	6.92	52.08	7.20	48.87	7.88	45.56	11.23	45.53
13	5.68	44.19	6.00	42.50	6.69	39.34	9.81	40.84
14	4.74	38.93	5.06	37.32	5.75	34.30	8.66	36.94
15	3.98	34.61	4.30	33.06	5.00	30.16	7.71	33.63
16	3.37	31.00	3.68	29.52	4.38	26.71	6.92	30.81

مشاهده می‌شود که مقادیر قسمت حقیقی همواره منفی بوده و سیستم با این مشخّصات، در این سرعت‌ها ناپایدار نمی‌شود. تا قبل از سرعت $\eta=0.012$ هر دو مود سیستم ارتعاشی و میراست. در $\eta=0.012$ قسمت موهومی برای مود اوّل به صفر رسیده و نمودار قسمت حقیقی دو شاخه می‌شود. از سرعت $\eta=0.012$ تا $\eta=0.037$ مود اول فوق میرا و غیر ارتعاشی شده اما مود دوم هم‌چنان ارتعاشی و میراست. از سرعت $\eta=0.037$ تا $\eta=0.084$ نیز هر دو مود سیستم، ارتعاشی و میرا هستند. از سرعت $\eta=0.084$ تا انتهای محدوده رسم شده، مود اول همچنان ارتعاشی و میراست اما مود دوم فوق میرا و غیر ارتعاشی می‌باشد.



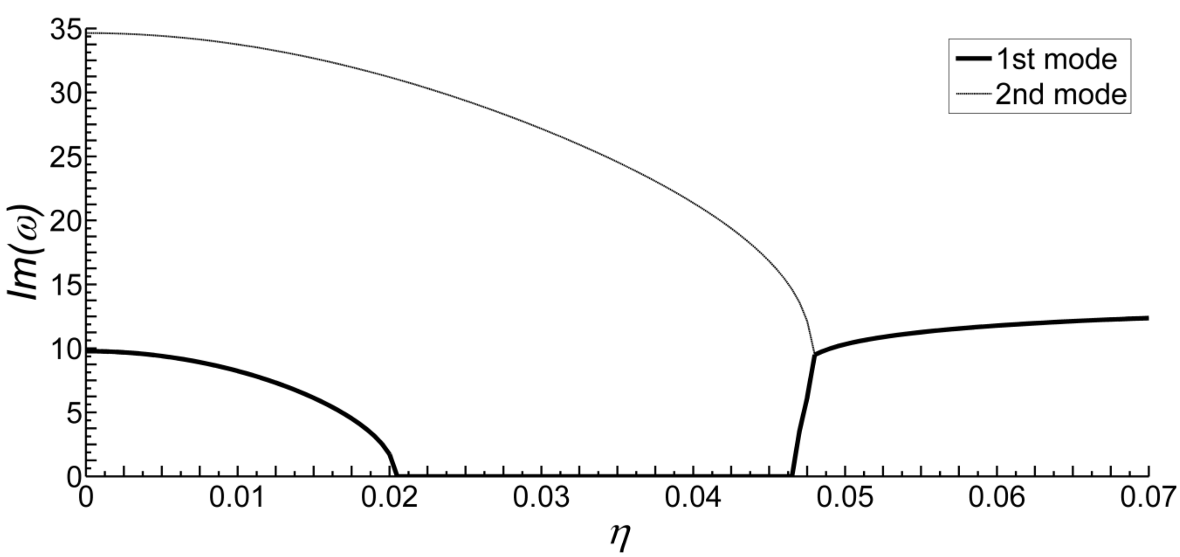
شکل ۳-۵- تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد



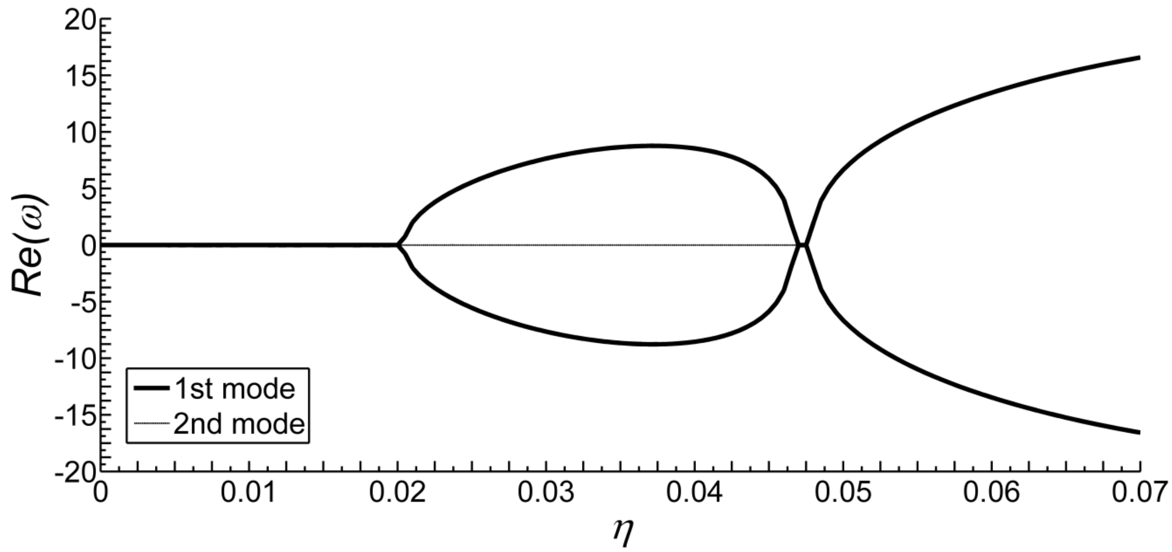
شکل ۳-۶- تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد

در شکل ۳-۷ و شکل ۳-۸ نمودار قسمت موهومی و حقیقی مقادیر ویژه برای مودهـای اول و دوم

برای شرط مرزی دوسرمفصل رسم شده است. مشاهده می‌شود که تا قبل از سرعت η=0.024 هر دو مود سیستم ارتعاشی و میرا هستند. در سرعت‌های بین η=0.024 تا η=0.041 قسمت موهومی برای مود اول صفر است و نمودار قسمت حقیقی دو شاخه و دارای مقادیر ویژه حقیقی با علامت‌های مخالف است. وجود یک مقدار ویژه مثبت نشان‌دهنده وجود ناپایداری دیورژانس در سیستم است. مود اول ناپایدار استاتیکی (غیر ارتعاشی) شده و تیر دچار کمانش می‌شود. البته مود دوم ارتعاشی و میراست اما ارتعاش روی حالت کمانش یافته رخ می‌دهد نه حول نقطه تعادل. از سرعت η=0.041 تا η=0.0415 نیز هر دو مود سیستم ارتعاشی و میرا هستند. امّا از سرعت η=0.0415 تا انتهای محدوده رسم شده نمودار قسمت-های موهومی و حقیقی برای مودهای اول و دوم بر هم منطبق می‌شوند. در واقع سیستم در این ناحیه دارای دو جفت مقدار ویژه مختلط مزدوج یکسان با قسمتهای حقیقی مختلف العلامت است. این مبین ناپایداری فلاتر برای سیستم است که هر دو مود ناپایدار بوده و دست‌خوش ارتعاش واگرا حول حالت تعادل ناپایدار هستند.



شکل ۳-۷ - تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسرمفصل



شکل ۳-۸ - تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسرمفصل

۳-۴-۲-۱- بررسی تاثیر مدول برشی بین‌لایه‌ای

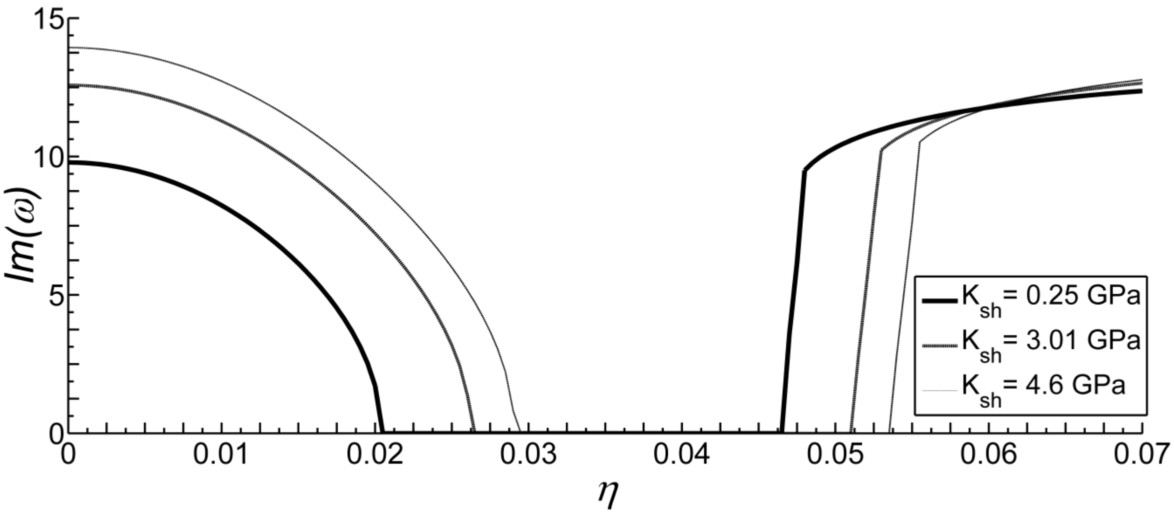
در گرافن‌های چندلایه، لایه‌های گرافن به‌وسیله پیوندهای ضعیف واندروالس به هم متّصل شده‌اند. بنابراین اگر نیروی برشی وارد شده به لایه‌های گرافن بر این نیروی پیوندی غلبه کند، لایه‌ها بر روی هم می‌لغزند و انرژی کرنشی بین آن‌ها آزاد می‌گردد. این موضوع می‌تواند موجب تغییر در رفتار حرکتی سیستم گردد. به همین دلیل در نظر گرفتن اثر برش بین‌لایه‌ای برای بررسی رفتار گرافن‌های چندلایه اهمّیّت بالایی دارد. مدول برش بین لایه‌ای، K_{sh} ، در واقع معیاری برای اندازه‌گیری میزان مقاومت لایه-های گرافن در برابر لغزش بین سطوح می‌باشد. آزمایش‌های تجربی و شبیه‌سازی‌های مولکولی بسیاری برای بررسی رفتار برشی بین لایه‌ها انجام شده است. در مطالعات موجود مقادیر مختلف و متنوعی برای مدول برش بین لایه‌های گرافن گزارش شده است. اختلاف وپراکندگی موجود بین این مقادیر می‌تواند ناشی از این موضوع باشد که مقدار مدول برشی به عوامل مختلفی مانند نوع چینش اتم‌ها[53] ، دما

[۵۴]، تعداد لایه‌های گرافن [۵۵] ، حفره‌های اتمی و یا سایر موارد وابسته باشد. در جدول (۳-۳) تعدادی از مقادیر گزارش شده برای مدول برشی بین‌لایه‌ای برای گرافن دولایه ارائه شده است. باید توجّه داشت که مدول برشی بین‌لایه‌ای از لحاظ فیزیکی با مدول برشی خود گرافن متفاوت است و مقدار بسیار کمتری نسبت به آن دارد[۵۶].

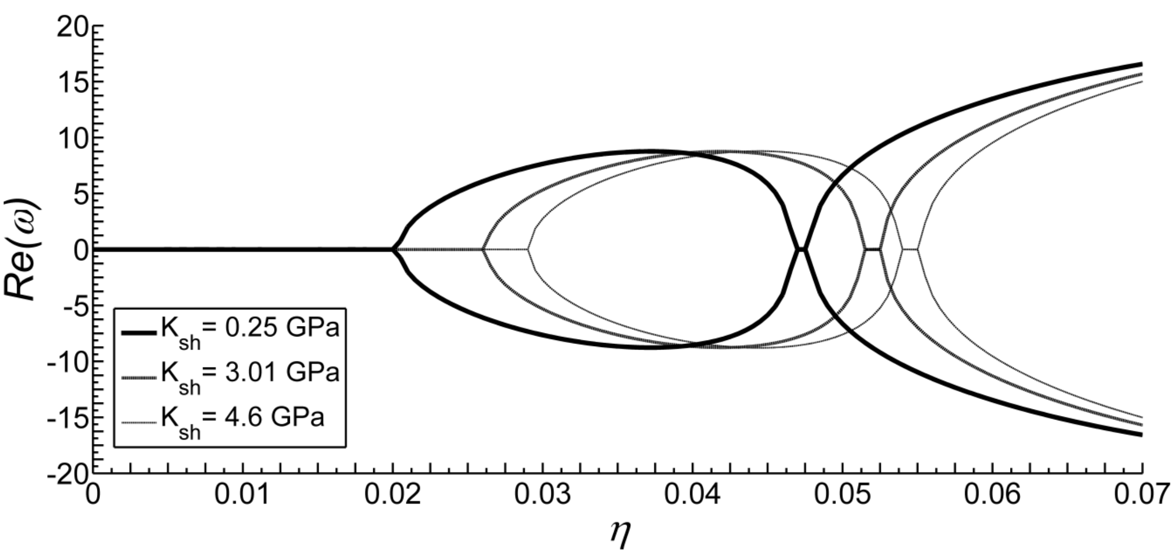
جدول ۳-۳- مقادیر گزارش شده برای مدول برشی گرافن‌های چندلایه

نوع ماده گرافیتی	روش اندازه‌گیری	مدول برش بین‌لایه‌ای (GPa)
گرافن دولایه	شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی	۴/۶ [۵۷]
گرافن دولایه	شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی	۳/۰۱ [۶]
گرافن دولایه	شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی	۰/۲۵ [۵۸]
گرافن دولایه	آزمایش‌های تجربی	۱/۲۱ [۵۴]
گرافن سه‌لایه	آزمایش‌های تجربی	۰/۷۴ [۵۴]

در شکل ۳-۹ و شکل ۳-۱۰ نمودار قسمت موهومی و حقیقی مقادیر ویژه مود اول برای مقادیر مختلف مدول برشی رسم شده است. همان‌طور که مشخّص است با افزایش مدول برشی ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر مود اول در سرعت‌های بالاتری رخ می‌دهد. هم‌چنین افزایش مدول برشی موجب افزایش فرکانس طبیعی سیستم شده است. باید توجّه داشت که شرایط مرزی تاثیر زیادی بر ارتعاشات و پایداری سیستم‌های پیوسته دارند. طبیعی است که با در نظر گرفتن شرایط مرزی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد لایه‌ها امکان لغزش بیشتری بر روی هم نسبت به حالت دو سر مفصل دارند.



شکل ۳-۹ – تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سـرعت محـوری بـی‌بعـد بـرای شرط مرزی دوسر مفصل و مقادیر مختلف مدول برشی



شکل ۳-۱۰ – تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سرعت محـوری بـی‌بعـد بـرای شرط مرزی دوسر مفصل و مقادیر مختلف مدول برشی

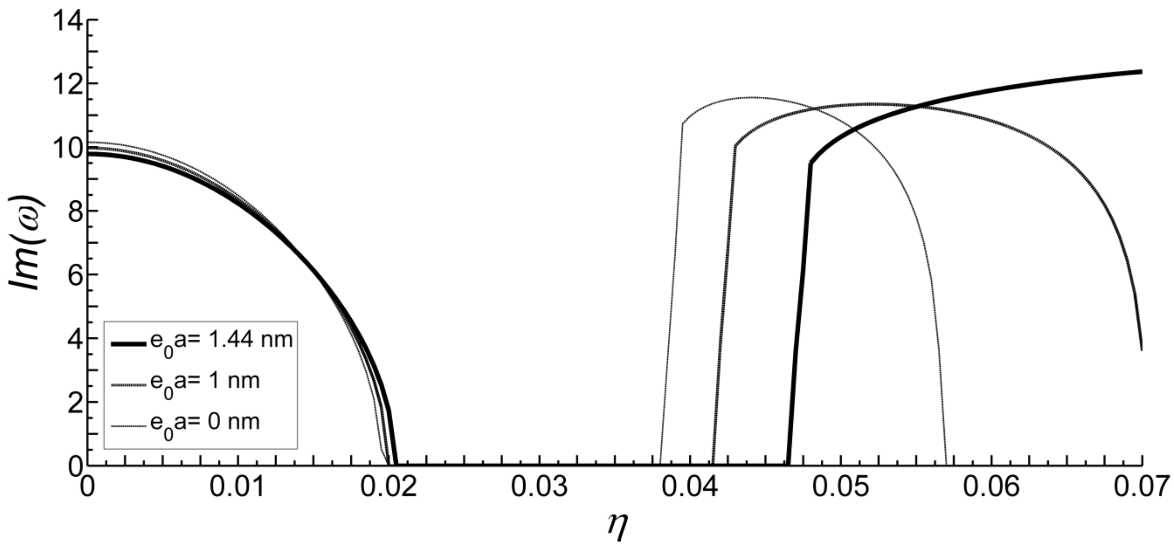
.

۳-۴-۲-۲- بررسی تاثیر پارامتر غیرموضعی

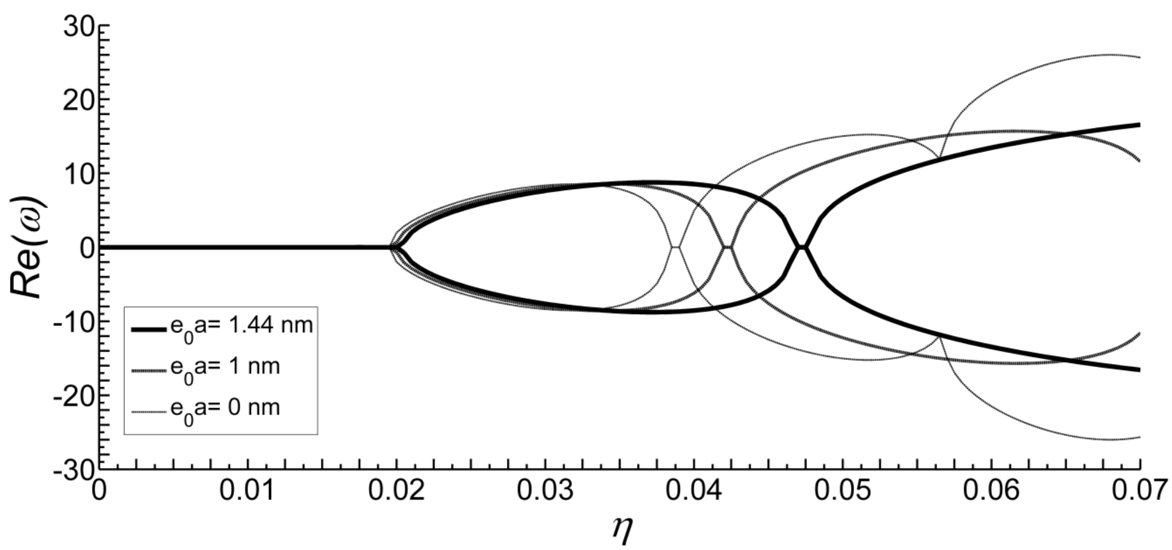
همان‌طور که در فصل دوم اشاره شد، تئوری غیرموضعی الاستیسیته به منظور در نظر گرفتن آثار ریز مقیاس ارائه شد. این تئوری پیوند مناسبی بین مدل اتمی دینامیک شبکه و آزمایش‌های تجربی برقرار می‌کند. در بررسی یک نقطه هنگامی که از اثر کرنش سایر نقاط چشم‌پوشی شود، همان مدل کلاسیک الاستیسیته به دست می‌آید. مقدار عددی پارامتر غیرموضعی توسط آزمایش‌های تجربی، شبیه‌سازی‌های مولکولی و یا به وسیله انطباق منحنی‌های انتشار موج با مدل اتمی دینامیک شبکه به دست می‌آید[۵۹] .

در گرافن‌های چندلایه برای پارامتر غیرموضعی با توجه به تعداد لایه‌ها مقادیر متفاوتی ارائه شده است[۳۷]. در شکل‌های شکل ۳-۱۱و شکل ۳-۱۲ نمودار قسمت‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه مود اول به ازای سه مقدار مختلف برای پارامتر غیرموضعی رسم شده است. مشخّص است با کاهش پارامتر غیرموضعی از 1.44 به 1 و سپس به 0 مود اول سیستم در سرعت‌های پایین‌تری ناپایدار می‌شود. همچنین هنگامی که سیستم ساکن است، در نظر گرفتن پارامتر غیرموضعی موجب کاهش فرکانس بی‌بعد اول شده، در حالی که در سرعت‌های بالاتر تئوری کلاسیک الاستیسیته فرکانس کمتری را پیش‌بینی می‌کند.

همان‌طور که در شکل ۳-۱۲مشخّص است کاهش پارامتر غیرموضعی، موجب کاهش سرعت بحرانی ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر می‌گردد، امّا تاثیر این موضوع بر روی سرعت بحرانی مربوط به ناپایداری فلاتر بسیار بیشتر است. به عنوان مثال به ازای سرعت $\eta = 0.04$ با در نظر گرفتن مقدار 1.44 برای پارامتر غیرموضعی سیستم دارای ناپایداری دیورژانس است، اما به ازای مقدار صفر ناپایداری سیستم از نوع فلاتر خواهد بود.



شکل ۳-۱۱ – تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسرمفصل و مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی



شکل ۳-۱۲ – تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مود اول به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسرمفصل و مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

۳-۵- نتیجه‌گیری

در این فصل، به بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشی یک نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری پرداخته شده است. لایه گرافن به صورت دو تیر اویلربرنولی در نظر گرفته شده که بر روی هم قرار گرفته‌اند و جابه‌جایی عرضی نسبی آن‌ها صفر است. مدول برشی بین‌لایه‌ای برای مدل‌سازی پیوندهای واندروالس بین لایه‌ها در معادلات در نظر گرفته شده است. معادلات به کمک تئوری غیرموضعی الاستیسیته به دست آمده و از طریق روش گالرکین حل شده‌اند. برای شرط مرزی یک‌سرگیردار- یک‌سر آزاد نتایج با مقالات موجود مقایسه شده است. بررسی حالت یک‌سرگیردار- یک‌سر آزاد تنها به منظور اعتبارسنجی و مقایسه نتایج با مرجع [۳۷] بوده و هدف اصلی این مطالعه بررسی رفتار سیستم برای شرط مرزی دوسر مفصل است. مشاهده می‌شود در حالتی که مدول برشی در حدود 0.25 گیگاپاسکال باشد نتایج نزدیکتری به دست می‌آید و با افزایش مدول برشی این اختلاف بیشتر می‌شود. هم‌چنین برای حالت دو سر مفصل نمودارهای تغییرات فرکانس‌های بی‌بعد به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد رسم شده و تاثیر تغییرات پارامتر غیرموضعی و مدول برشی بررسی شده است. این نتیجه حاصل می‌شود که با افزایش طول سختی سیستم و در نتیجه مقدار فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. برای شرط مرزی دو سر مفصل افزایش مدول برشی موجب افزایش فرکانس بی‌بعد سیستم و ناپایدار شدن سیستم در سرعت‌های بالاتر می‌شود. مشاهده می‌شود در حالتی که سیستم ساکن است، کاهش پارامتر غیرموضعی موجب افزایش فرکانس بی‌بعد سیستم می‌گردد. همچنین کاهش پارامتر غیرموضعی موجب می‌شود سیستم در سرعت‌های پایین‌تری وارد ناپایداری گردد.

۴ فصل چهارم

ارتعاشات نوار گرافنی دولایه

دارای حرکت محوری

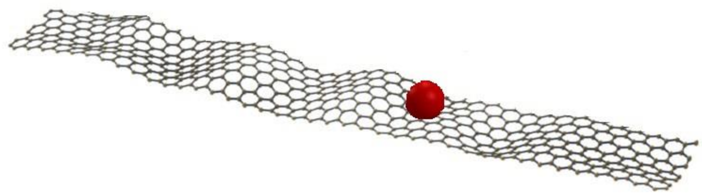
به همراه جرم متمرکز متّصل

۴-۱- مقدّمه

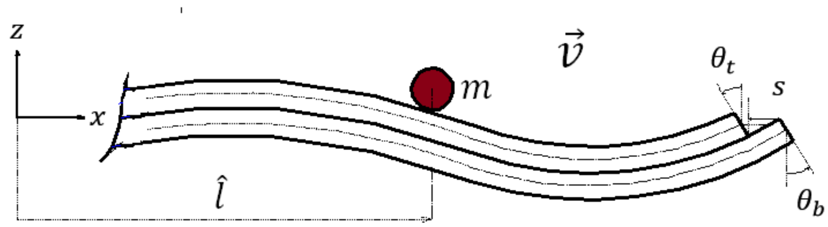
همان‌طور که در فصل دوم اشاره شد، در سال‌های اخیر مطالعات فراوانی بر روی استفاده از نانولوله‌های کربنی و ورق‌های گرافنی در طراحی و ساخت نانوحس‌گرها صورت گرفته است. در شماری از این پژوهش‌ها، محقّقان با مدل‌سازی سیستم‌های متشکل از نانولوله‌ها و گرافن‌ها و با در نظر گرفتن جرم‌های متمرکز قرار گرفته بر روی آن‌ها، اثر وجود جرم بر رفتار ارتعاشی سیستم به عنوان یک نانوحس‌گر جرم را بررسی کرده‌اند. به همین منظور در این فصل ارتعاشات نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری با سرعت ثابت و با در نظر گرفتن اثر برش بین‌لایه‌ای و هم‌چنین یک جرم متمرکز متّصل به آن بررسی شده و اثر وجود جرم متمرکز، وزن و محل قرارگیری آن بر فرکانس نوسانات و پایداری سیستم مورد بحث قرار گرفته است.

۴-۲- استخراج معادلات سیستم

همانند آن‌چه در فصل قبل ارائه شد، به منظور یافتن معادلات سیستم، نوارگرافنی دولایه را به صورت دو تیر اویلر برنولی در نظر می‌گیریم که بر روی هم قرارگرفته‌اند و مدول برشی بین آن‌ها وجود دارد که نشان‌دهنده پیوندهای ضعیف واندروالس بین لایه‌های گرافن می‌باشد . هم‌چنین جرم متمرکز M بر روی سطح تیر بالایی و به فاصله مشخّص از ابتدای تیر واقع شده است. شکل ۴-۱ و شکل ۴-۲ شماتیک نوار گرافنی دولایه به طول l به همراه جرم متمرکز است که با سرعت ثابت محوری v در حال حرکت می‌باشد.



شکل ۴-۱- شماتیک نوار گرافنی و جرم متمرکز قرار گرفته بر روی آن



شکل ۴-۲- شماتیک نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری و جرم متمرکز قرار گرفته بر روی آن

مشابه فصل قبل، فرض می‌شود جابه‌جایی‌های عرضی و انحنای تیرهای بالایی و پایینی با هم برابر بوده و جدایی بین سطوح تیرهای بالایی و پایینی در هنگام حرکت و ارتعاش رخ ندهد.

$$w_t(x,t) = w_b(x,t) = w(x,t) \tag{۱-۴}$$

$$\theta_t = \theta_b = \theta \tag{۲-۴}$$

مقدار لغزش بین لایه‌ها نیز از رابطه (۴-۳) به دست می‌آید:

$$s = -h\frac{\partial w}{\partial x} \tag{۳-۴}$$

برای استخراج معادلات سیستم از اصل هامیلتون استفاده می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta V-\delta T)dt=0 \qquad (۴\text{-}۴)$$

که در آن V انرژی پتانسیل سیستم، T انرژی جنبشی و t نشانگر زمان است. انرژی جنبشی سیستم به صورت رابطه (۴-۵) بیان می‌شود.

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l(2\rho A+M\delta(x-\hat{l}))(\frac{\partial w}{\partial t}+v\frac{\partial w}{\partial x})^2dx \qquad (۴\text{-}۵)$$

در رابطه (۴-۵) ، A مساحت سطح مقطع تیر، l طول تیر، $\hat{l}$ فاصله جرم متمرکز از ابتدای تیر، ρ چگالی تیر و v سرعت محوری ثابت تیر و δ نشان‌دهنده تابع دلتای دیراک است.

جمله مربوط به انرژی جنبشی در رابطه (۴-۴) به صورت رابطه (۴-۶) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt=&\int_0^l(2\rho A+M\delta(x-\hat{l}))\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\,|_{t_1}^{t_2}\\&-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l(2\rho A+M\delta(x-\hat{l}))\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\,dx\,dt\\&+\int_{t_1}^{t_2}(2\rho A+M\delta(x-\hat{l}))\,v\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\,|_0^l\\&-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l(2\rho A+M\delta(x-\hat{l}))v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\delta w\,dx\,dt\\&+\int_0^l(2\rho A+M\delta(x-\hat{l}))\,v\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\,|_{t_1}^{t_2}\\&-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l(2\rho A+M\delta(x-\hat{l}))v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\delta w\,dx\,dt\\&+\int_{t_1}^{t_2}(2\rho A+M\delta(x-\hat{l}))\,v^2\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\,|_0^l\\&-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l(2\rho A+M\delta(x-\hat{l}))v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta w\,dx\,dt\end{aligned} \qquad (۴\text{-}۶)$$

انرژی پتانسیل سیستم نیز از رابطه (۴-۷) قابل حاصل می‌شود:

$$V=\frac{1}{2}\int_0^l M_t^{nl}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+M_b^{nl}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+K_{sh}s^2]dx \qquad (۴\text{-}۷)$$

که در آن K_{sh} مدول برش بین‌لایه‌ای و M_t^{nl} و M_b^{nl} به ترتیب گشتاور خمشی غیرموضعی لایه‌های بالایی و پایینی است.

ترم اول رابطه (۴-۴) نیز به صورت رابطه (۴-۸) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta V dt &= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l (M_t^{nl}+M_b^{nl})\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta w + h^2 K_{sh}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\delta w\, dx\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}(M_t^{nl}+M_b^{nl})\ \frac{\partial}{\partial x}\delta w\,\Big|_0^L dx \\ &- \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial x}(M_t^{nl}+M_b^{nl})\ \delta w\,\Big|_0^L dx \\ &+ \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}(M_t^{nl}+M_b^{nl})\ \delta w\, dx\, dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} h^2 K_{sh}\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\,\Big|_0^L dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l h^2 K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta w\, dx\, dt\end{aligned} \tag{۴-۸}$$

با جایگذاری روابط (۴-۶) و (۴-۸) در رابطه (۴-۴) معادله حرکت سیستم به صورت رابطه (۴-۹) حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}2\rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+2\frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} - h^2 K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ = -M\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).\delta(x-\hat{l})\end{aligned} \tag{۴-۹}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} = \frac{1}{2}h^2 K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ -\frac{1}{2}M\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).\delta(x-\hat{l})\end{aligned} \tag{۴-۱۰}$$

همان‌طور که در فصل قبل دیدیم، رابطه بین گشتاور خمشی موضعی و غیرموضعی به صورت رابطه (۴-۱۱) به دست می‌آید:

$$M_x^{nl} = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} \tag{۴-۱۱}$$

که در آن M_x^{nl} گشتاور خمشی غیرموضعی بوده و به صورت رابطه (۴-۱۲) به دست می‌آید:

$$M_x^{nl} = -\int_A z\,\sigma_x^{nl} dA \tag{۴-۱۲}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۱۰) در رابطه (۴-۱۱) داریم:

$$\begin{aligned} M_x^{nl} = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 [\frac{1}{2}h^2 K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ - \frac{1}{2}M\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).\delta(x-\hat{l})] \end{aligned} \tag{۴-۱۳}$$

با قرار دادن رابطه بالا در رابطه (۴-۹) و با استفاده از فرم دیفرانسیلی تئوری غیرموضعی اریـنگن، معادله غیرموضعی سیستم به صورت رابطه (۴-۱۴) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{2}h^2 K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad - (e_0 a)^2\left[\rho A\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + 2v\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} + v^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) - \frac{h^2}{2}K_{sh}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right. \\ &\quad \left. + \frac{M}{2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + 2v\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} + v^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right).\delta(x-\hat{l})\right] \\ &\quad = -\frac{M}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).\delta(x-\hat{l}) \end{aligned} \tag{۴-۱۴}$$

شرایط مرزی برای حالت دوسرمفصل به صورت رابطه (۴-۱۵) به دست می‌آید.

$$w(0,t) = 0\ ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = 0\ \ ;\ \ w(l,t) = 0\,;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0 \tag{۴-۱۵}$$

به منظور بررسی عمومی‌تر مسئله، با در نظر گرفتن پارامترهای بی‌بعد بـه صـورت رابطـه (۴-۱۶) ، فرم بی‌بعد معادله به صورت رابطه (۴-۱۷) به دست می‌آید:

$$w^* = \frac{w}{l}\ ;\ \ \xi = \frac{x}{l}\ ;\ \ \tau = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}t\ ;\ \ \mu = \frac{e_0 a}{l}\ ;\ \ \lambda = \frac{l}{r}\ ;\ r = \sqrt{\frac{I}{A}}\ ;\ \eta = \frac{v}{C_L}$$ (۱۶-۴)

$$C_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\ ;\ \ \Upsilon = \frac{h^2 K_{sh} l^2}{EI}\ ;\ \ Қ = \frac{M}{\rho A l}\ \ ;\ \ \chi = \frac{\hat{l}}{l}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\eta\lambda\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\tau} + (\lambda\eta)^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right) + \frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} - \frac{\Upsilon}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}&\\ -\mu^2\Bigg(\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\tau^2} + 2\eta\lambda\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^3\partial\tau} + (\lambda\eta)^2\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} - \frac{\Upsilon}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}&\\ + \frac{Қ}{2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\tau^2} + 2\eta\lambda\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^3\partial\tau} + (\lambda\eta)^2\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}\right).\delta(\xi - \chi)\Bigg)&\\ = -\frac{Қ}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2} + 2\eta\lambda\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\tau} + (\lambda\eta)^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right).\delta(\xi - \chi)&\end{aligned}$$ (۱۷-۴)

شرط مرزی دوسرمفصل نیز بر حسب پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (۴-۱۸) به دست می‌آید:

$$w(0,\tau) = 0\ ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}(0,\tau) = 0\ ;\ \ w(1,\tau) = 0\ ;\ \frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}(1,\tau) = 0$$ (۱۸-۴)

۴-۳- گسسته‌سازی معادله حرکت

مشابه بخش ۳-۳ فصل قبل، برای حل عددی معادله (۴-۱۷) و جداسازی فضای زمانی و مکـانی از روش گالرکین استفاده می‌شود. به همین منظور میدان جابه‌جایی $w = w(\xi,\tau)$ به صورت یک سری بـه صورت رابطه (۴-۱۹) بسط داده می‌شود:

$$w(\xi,\tau) = \sum_{i=1}^{N}\phi_i(\xi)\overline{w}_i(\tau)$$ (۱۹-۴)

در رابطه بالا، توابع شکل مود، $\phi_i(\xi)$، باید مستقل خطّـی بـوده و شـرایط مـرزی را ارضـا نماینـد. مطابق آن‌چه که در فصل قبل بیان شد، برای سیستم دارای حرکت محوری، از توابع شـکل مـود متنـاظر

استاتیکی استفاده می‌شود. برای سیستم با شرط مرزی دوسرمفصل این توابع به صورت رابطه (۴-۲۰) بیان می‌شود.$\overline{w}_i(\tau)$ نیز توابع مختصات تعمیم‌یافته می‌باشد.

$$\phi_i(\xi) = \sqrt{2}\, sin(i\pi\xi) \tag{۴-۲۰}$$

رابطه (۴-۲۰) را می‌توان به فرم برداری به صورت رابطه (۴-۲۱) نمایش داد:

$$w(\xi,\tau) = \phi^T(\xi).\, \overline{w}_i(\tau) \tag{۴-۲۱}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۲۱) در معادله بی‌بعد شده سیستم و ضرب در تابع شکل مود $\phi(\xi)$ و انتگرال گیری از ۰ تا ۱، مجموعه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوّم به صورت رابطه (۴-۲۲) به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\overline{w}} + \boldsymbol{G}\dot{\overline{w}} + \boldsymbol{K}\overline{w} = 0 \tag{۴-۲۲}$$

که در آن علامت (.) نشان‌دهنده مشتق نسبت به زمان و $\boldsymbol{M}$، $\boldsymbol{K}$ و $\boldsymbol{G}$ به ترتیب بیان‌گر ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی می‌باشند و به صورت روابط (۴-۲۳) تا (۴-۲۵) به دست می‌آیند:

$$[M] = \int_0^1 \left(\phi\phi^T - \mu^2\phi\phi^{T''}\right)d\xi - \frac{1}{2}\mu^2 \mathrm{K}\phi(\chi)\phi^{T''}(\chi) + \frac{1}{2}\mathrm{K}\phi(\chi)\phi^T(\chi) \tag{۴-۲۳}$$

$$[G] = 2\lambda\eta\int_0^1 \left(\phi\phi^{T'} - \mu^2\phi\phi^{T'''}\right)d\xi - \mu^2\lambda\eta\, \mathrm{K}\phi(\chi)\phi^{T'''}(\chi) + \mathrm{K}\lambda\eta\phi(\chi)\phi^{T'}(\chi) \tag{۴-۲۴}$$

$$[K] = \int_0^1 \left(\left((\lambda\eta)^2 - \frac{\Upsilon}{2}\right)\phi\phi^{T''} + (1 - \mu^2(\lambda\eta)^2 + \frac{\Upsilon\mu^2}{2})\phi\phi^{T''''}\right)d\xi - \frac{1}{2}\mu^2\mathrm{K}\,(\lambda\eta)^2\mathrm{K}\phi(\chi)\phi^{T''''}(\chi) + \frac{1}{2}\mathrm{K}(\lambda\eta)^2\phi(\chi)\phi^{T''}(\chi) \tag{۴-۲۵}$$

۴-۴- آنالیز مود مختلط

همان‌طور که قبلا اشاره شد در یک سیستم دارای حرکت محوری، توابع ویژه به صورت مختلط می‌باشند و به دلیل وجود ترم ژیروسکوپیک در معادله گسسته (۴-۲۲)، توابع ویژه تابعی از سرعت محوری جسم می‌باشند. بنابراین برای یافتن فرکانس‌های طبیعی سیستم از تئوری مود مختلط استفاده می‌شود. با معرفی بردار فضای حالت به صورت رابطه (۴-۲۶)، معادله ماتریسی سیستم به فرم فضای حالت به صورت رابطه (۴-۲۷) به دست می‌آید.

$$q = \begin{pmatrix} \dot{\bar{w}} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \tag{۴-۲۶}$$

$$\widetilde{M}\dot{q} + \widetilde{K}q = 0 \tag{۴-۲۷}$$

که در آن:

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & G \end{pmatrix} \quad , \qquad \widetilde{K} = \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{۴-۲۸}$$

به منظور یافتن مقادیر ویژه عمومی، معادله همگن فرم فضای حالت به صورت رابطه(۴-۲۷) باید حل شود.

به همین منظور، حلّی به فرم رابطه (۴-۲۹) در نظر گرفته می‌شود که در آن Ψ بردار ویژه و α مقدار ویژه متناظر است.

$$q = \Psi e^{\alpha t} \tag{۴-۲۹}$$

با جایگذاری حلّ مذکور در معادله (۴-۲۷) ، مسئله مقدار ویژه به صورت رابطه (۴-۳۰)حاصل می-شود:

$$(\alpha\widetilde{M} + \widetilde{K})\Psi = 0 \tag{۴-۳۰}$$

به منظور حل غیر بدیهی رابطه (۴-۳۰) نیاز است که دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر قرار داده شود:

$$det(\alpha\widetilde{M}+\widetilde{K})=0 \tag{۳۱-۴}$$

با حلّ عددی این معادله، مقادیر ویژه مختلط λ به دست می‌آیند که بـه صـورت زوج‌هـای مـزدوج مختلط ظاهر می‌شوند. قسمت موهومی مثبت نشان دهنده فرکانس طبیعـی و قسـمت حقیقـی بیـان‌گـر میرایی و در واقع پایداری سیستم است.

۴-۵- نتایج عددی و نتیجه‌گیری

در این قسمت با در نظر گرفتن مقادیر عددی برای سیستم به صورت جدول ۳-۱ فصل قبل وبا در نظر گرفتن مقدار 0.25 GPa برای مدول برش بین‌لایه‌ای، تاثیر عوامل مختلفی چون سرعت محوری، جرم متمرکز و محل قرارگیری آن مورد بحث قرار می‌گیرد. با توجّه به ابعـاد فیزیکـی سیستم،گسـتره در نظـر گرفته شده برای جرم متمرکز در حدود ۲ تا ۶ یوکتوگرم[1] در نظر گرفته شده است. هر یوکتوگرم معـادل 10^{-24} گرم می‌باشد. هم‌چنین با توجّه به همگرا شدن پاسخ‌ها با در نظر گرفتن N=12 محاسبه شده‌اند.

۴-۵-۱- بررسی وجود جرم متمرکز در وسط تیر دوسرمفصل

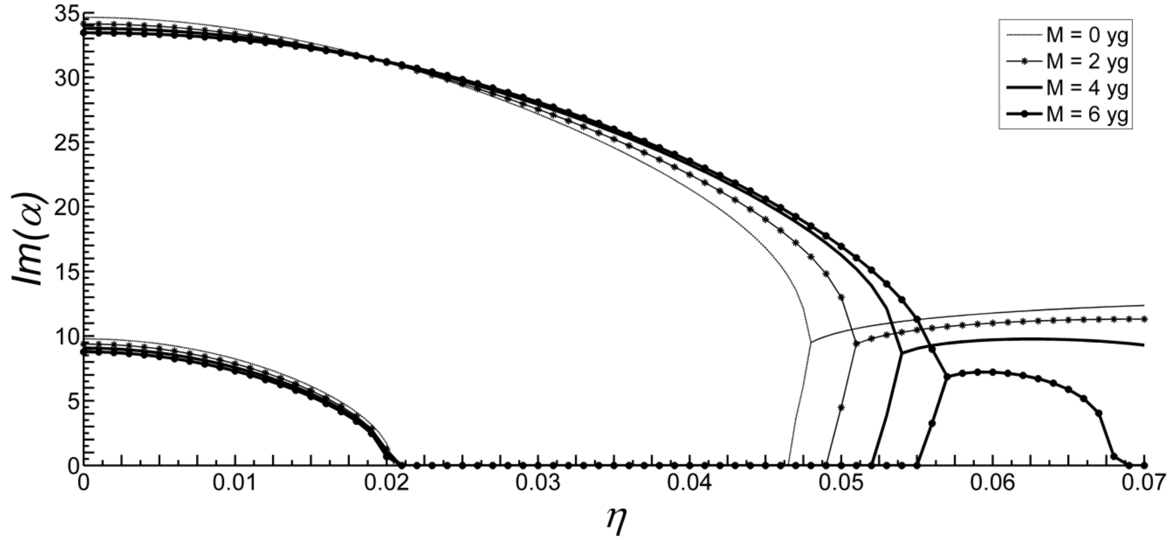
در شکل ۴-۳ و شکل ۴-۴ نمودار قسمت حقیقی و موهومی مقادیر ویژه مودهای اول و دوم بـرای سیستم با شرط مرزی دوسرمفصل و با در نظر گرفتن جرم متمرکز در وسط تیـر (χ=0.5) بـرای مقـادیر مختلف برای جرم متمرکز بررسی شده است. همان‌طور که در فصل‌های قبل اشاره شد هنگامی که قسمت موهومی مقدار ویژه به صفر رسیده و همزمان نمودار قسمت حقیقی متناظر دوشـاخه مـی‌شـود (یکـی از

[1] yoctogram

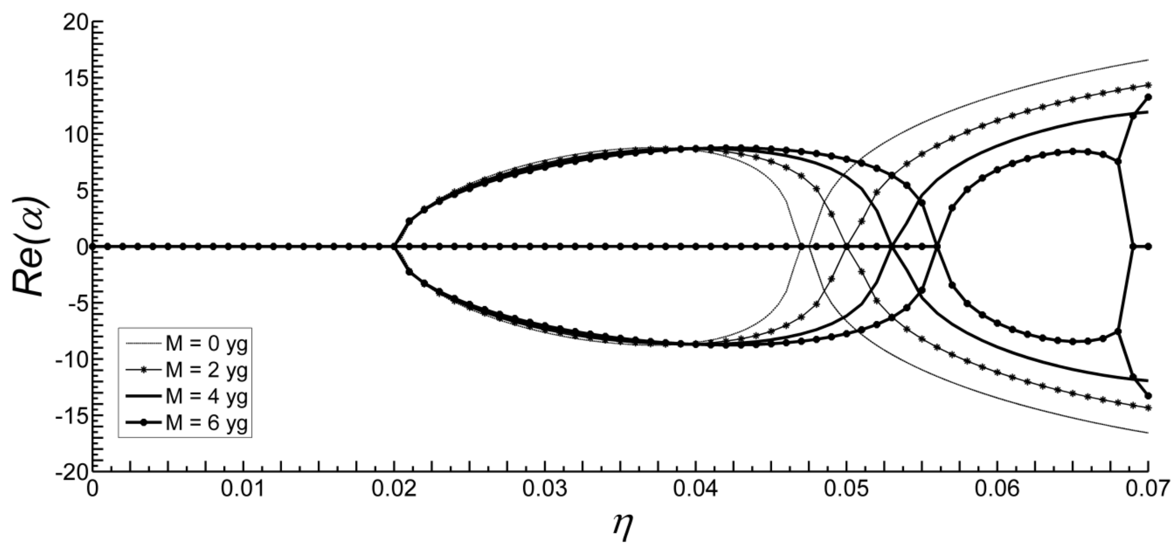
مقادیر حقیقی مثبت می‌شود). در این نقطه سیستم از لحاظ استاتیکی ناپایدار شده و ناپایداری دیورژانس در سیستم رخ می‌دهد. در حقیقت در این نقطه المان K_{11} در ماتریس سختی منفی شده و فرکانس اول ناپایدار می‌شود. مشخّص است افزایش جرم خارجی تاثیری زیادی بر روی سرعت بحرانی (سرعتی که در آن ناپایداری دیورژانس رخ می‌دهد) ندارد، اما موجب می‌شود سیستم در محدوده بیشتری از لحاظ استاتیکی ناپایدار بماند. یعنی با افزایش جرم سیستم در سرعت‌های بالاتری از ناپایداری دیورژانس خارج می‌شود. هم‌چنین با افزایش جرم سیستم در سرعت‌های بالاتری وارد محدوده ناپایداری فلاتر می‌شود. در جدول ۴-۱ سرعت بحرانی دیورژانس η_D و سرعت متناظر با شروع ناپایداری فلاتر η_F برای جرم‌های مختلف نشان داده شده است. هم‌چنین با توجه به شکل ۴-۳ مشاهده می‌شود هنگامی که سرعت محوری سیستم صفر است (سیستم ساکن باشد)، با افزایش میزان جرم ذرّه خارجی قسمت موهومی مقدار ویژه اول(فرکانس طبیعی اول سیستم) کاهش می‌یابد. این کاهش فرکانس، هنگامی که سیستم دارای سرعت محوری باشد کمتر می‌شود و هر چقدر که سرعت بیشتر می‌شود این اختلاف کمتر می‌شود. در مورد مقدار ویژه دوم نیز این موضوع صادق است، اما هنگامی که سرعت محوری سیستم به سرعت بحرانی η =0.0210 برای مود اول برسد، وضعیت برعکس شده و با افزایش جرم در یک سرعت مشخّص فرکانس طبیعی دوم افزایش می‌یابد. در این ناحیه مود اول ناپایدار اما مود دوم پایدار است. نتیجه دیگری که می‌توان مشاهده کرد این است که با افزایش جرم خارجی، فرکانس فلاتر (فرکانس سیستم در زمان شروع ناپایداری فلاتر) سیستم کاهش می‌یابد.

جدول 4-1 – سرعت‌های متناظر با ناپایداری‌های دیورژانس و فلاتر فرکانس طبیعی اول برای جرم‌های مختلف

جرم متمرکز M (yg)							
6		4		2		0	
η_F	η_D	η_F	η_D	η_F	η_D	η_F	η_D
0.0570	0.0210	0.0540	0.0210	0.0510	0.0210	0.0480	0.0205



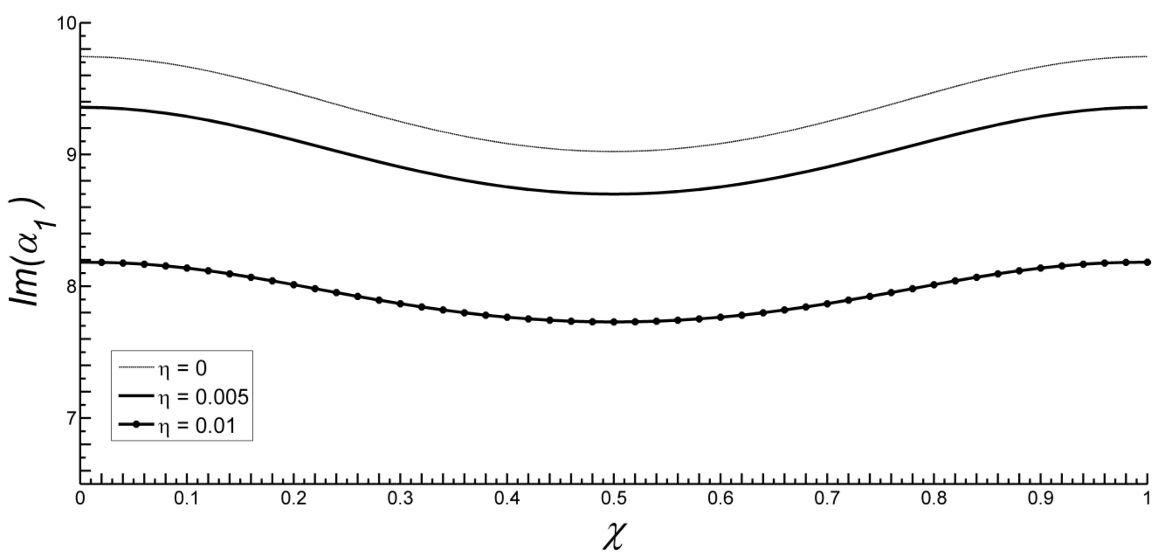
شکل ۴-۳- تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مودهای اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسر مفصل و مقادیر مختلف جرم خارجی



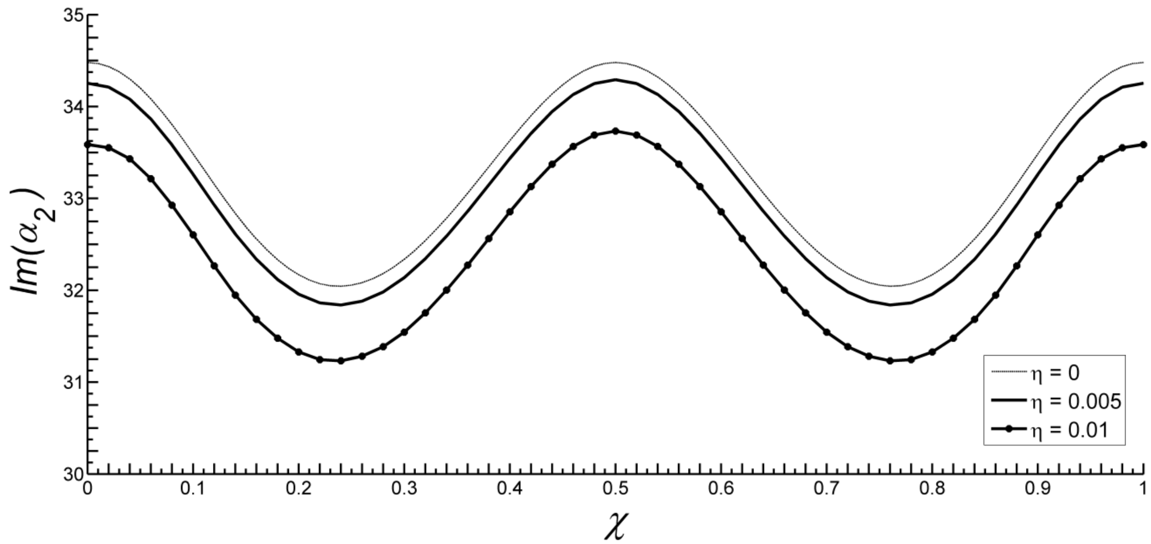
شکل ۴-۴- تغییرات قسمت حقیقی مقادیر ویژه برای مودهای اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسر مفصل و مقادیر مختلف جرم خارجی

۴-۵-۲- بررسی تاثیر محل قرارگیری جرم متمرکز بر رفتار سیستم

مقادیر ویژه سیستم دارای حرکت محوری به همراه جرم متمرکز، به محل قرارگیری جرم بین دو تکیه‌گاه وابسته است. در حقیقت یک تیر دارای حرکت محوری و جرم متّصل متمرکز یک سیستم متغیّر با زمان است و رفتاری متفاوت با سیستم بدون جرم متمرکز از خود نشان می‌دهد. در شکل ۴-۵ و شکل ۴-۶ نمودار قسمت‌های موهومی مقادیر ویژه اول و دوم (فرکانس‌های طبیعی اول و دوم) بر حسب محل قرارگیری جرم متمرکز M=4 yg برای مقادیر مختلف سرعت محوری بی‌بعد رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد فرکانس طبیعی اول ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. هنگامی که جرم در وسط تیر قرار داشته باشد (χ=0.5)، فرکانس طبیعی اول به کمترین مقدار خود می‌رسد. هم‌چنین مشاهده می‌شود افزایش سرعت در محدوده پایداری سیستم موجب کاهش فرکانس طبیعی اول می‌شود.



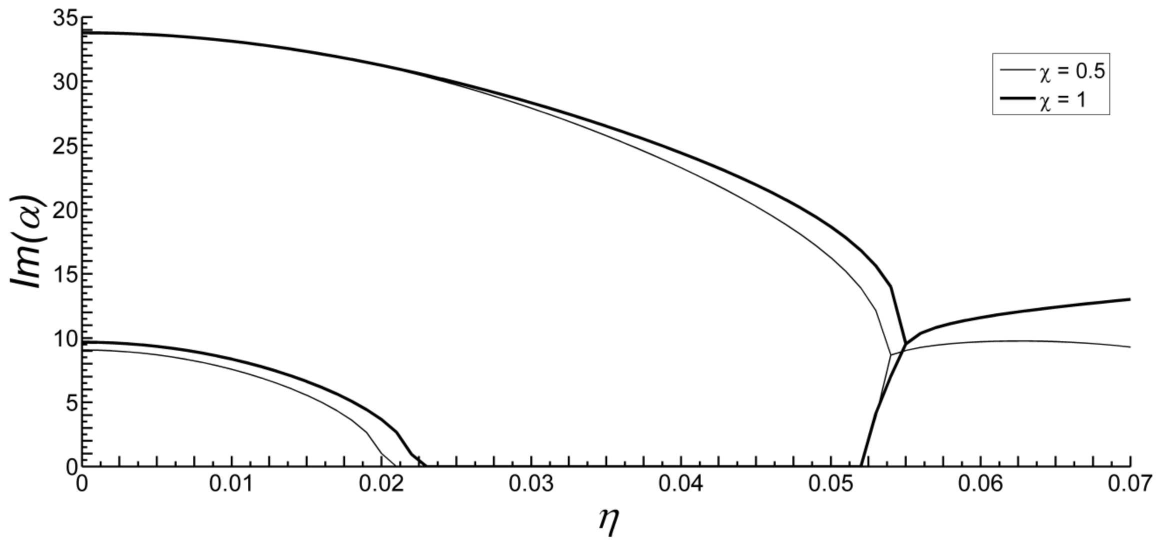
شکل ۴-۵- تغییرات فرکانس طبیع ی بی‌بعد اول به صورت تابعی از مکان قرارگیری جرم متمرکز برای شرط مرزی دوسر مفصل و مقادیر مختلف سرعت محوری



شکل ۴-۶- - تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم به صورت تابعی از مکان قرارگیری جرم متمرکز برای شرط مرزی دوسر مفصل و مقادیر مختلف سرعت محوری

تغییرات فرکانس طبیعی دوم با تغییر مکان جرم، رفتاری متفاوت از خود نشان می‌دهد و نمودار به شکل W، به دست می‌دهد. مشاهده می‌شود فرکانس طبیعی دوم با تغییر مکان جرم ابتدا کاهش یافته، سپس افزایش می‌یابد و هنگامی که جرم در وسط تیر واقع شود، به بیشترین مقدار خود می‌رسد. با جابه-جایی بیشتر جرم مجددا فرکانس طبیعی دوم کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد. همانند فرکانس اول، افزایش سرعت موجب کاهش سختی سیستم و فرکانس‌های طبیعی می‌شود. برای سیستم ساکن (η=0)، هنگامی که جرم در وسط تیر قرار می‌گیرد، وجود جرم تاثیری بر فرکانس طبیعی دوم ندارد و مشابه حالتی که جرم در ابتدا و یا انتهای تیر قرار گرفته باشد، مقدار فرکانس بی‌بعد 34.639 به دست می‌آید. امّا با در نظر گرفتن η=0.01، هنگامی که جرم در ابتدا و یا انتهای تیر واقع شده باشد، فرکانس بی‌بعد دوم برابر 32.958 می‌باشد و اگر جرم در وسط تیر باشد، مقدار آن به 33.107 می‌رسد. یعنی در این حالت وجود جرم بر مقدار فرکانس دوم موثّر است، هر چند این تاثیر بسیار کم است. هم‌چنین در شکل ۴-۷ نمودار قسمت موهومی مقادیر ویژه مودهای اول و دوم برای دوحالتی که در آن جرم در وسط و انتهای تیر

قرار گرفته باشد، رسم شده است. مشاهده می‌شود با حرکت جرم به سمت راست، سیستم در سرعت بالاتری وارد ناپایداری دیورژانس و فلاتر می‌گردد. هم‌چنین فرکانس فلاتر سیستم افزایش می‌یابد.

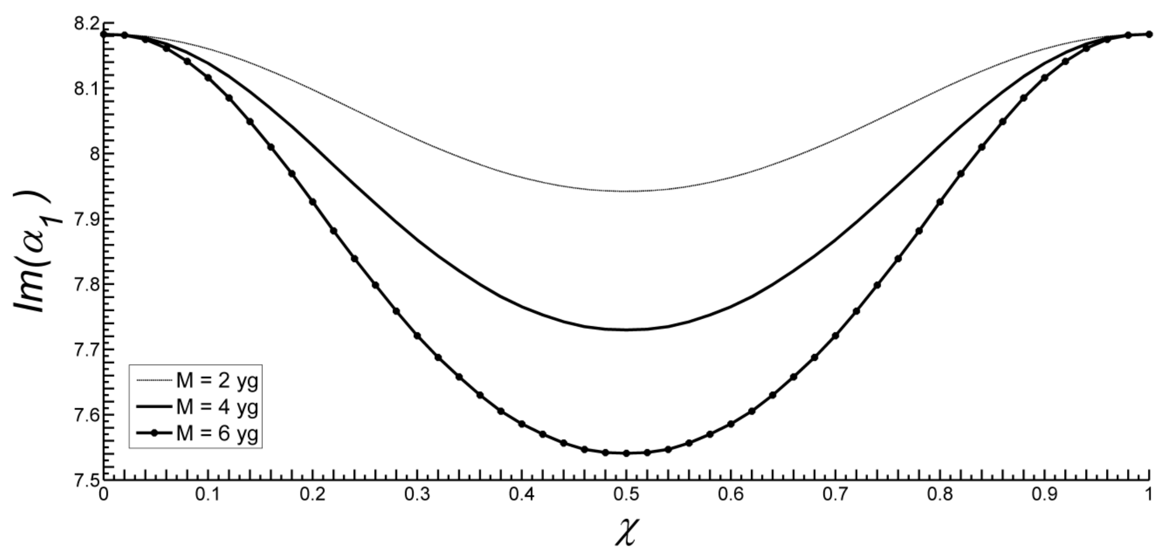


شکل ۴-۷- تغییرات قسمت موهومی مقادیر ویژه برای مودهای اول و دوم به صورت تابعی از سرعت محوری بی‌بعد برای شرط مرزی دوسر مفصل و مکان‌های مختلف قرارگیری جرم

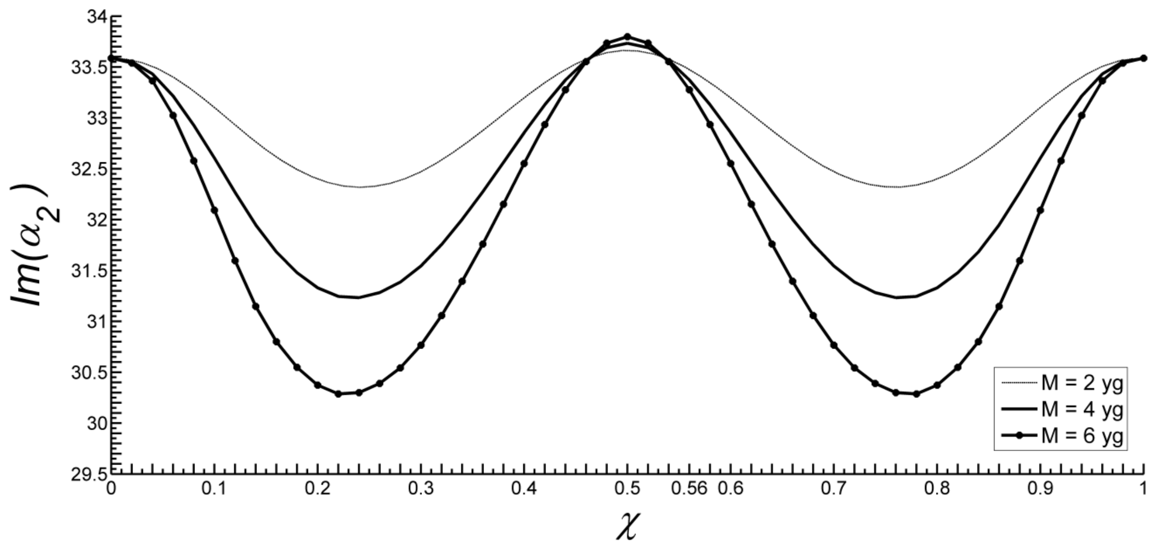
۴-۵-۳- بررسی تاثیر میزان جرم متمرکز بر رفتار سیستم

در شکل ۴-۸ و شکل ۴-۹ ، نمودار قسمت موهومی مقادیر ویژه اول و دوم (فرکانس‌های طبیعی اول و دوم) بر حسب مکان قرارگیری جرم متمرکز برای مقادیر مختلف جرم رسم شده است. مشاهده می‌شود با افزایش جرم مقدار فرکانس طبیعی اول کاهش می‌یابد و هنگامی که جرم در وسط تیر قرار گرفته است، مقدار فرکانس طبیعی اول مینیمم می‌شود. بدیهی است هنگامی که جرم در ابتدا و یا انتهای تیر قرار گرفته باشد، میزان جرم تاثیری بر فرکانس اول سیستم ندارد. در مورد فرکانس طبیعی دوم، همانند فرکانس اول، افزایش جرم موجب کاهش فرکانس می‌شود، امّا هنگامی که جرم در وسط تیر قرار گرفته

است، این رفتار برعکس می‌شود، یعنی افزایش جرم موجب افزایش فرکانس دوم می‌شود. هنگامی که جرم در وسط تیر قرار گیرد، وجود جرم تاثیر کمی بر جابه‌جایی فرکانس دارد و هر چقدر جرم کمتر باشد، این تاثیر کمتر است. به عنوان مثال برای $M=2$ yg هنگامی که جرم در ابتدا و یا انتهای تیر باشد، مقدار فرکانس دوم بی‌بعد 32.958 و در صورت قرارگیری جرم در مرکز تیر، مقدار فرکانس برابر 33.036 خواهد بود. با افزایش جرم، مثلا برای $M=6$ yg، این مقادیر به ترتیب برابر 32.958 و 33.173 به دست می‌آید.



شکل ۴-۸- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول به صورت تابعی از مکان قرارگیری جرم متمرکز برای شرط مرزی دوسر مفصل و مقادیر مختلف جرم



شکل ۴-۹- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم به صورت تابعی از مکان قرارگیری جرم متمرکز برای شرط مرزی دوسر مفصل و مقادیر مختلف جرم

۴-۵-۴- بررسی وجود خطا در محل قرارگیری جرم خارجی

از لحاظ تئوری، گرافن به دلیل ساختار دوبعدی خود، پتانسیل خوبی برای استفاده در طراحی و ساخت نانوحس‌گرهای جرم و گاز دارد. اگر چه همانند نانولوله‌های کربنی به دلیل عدم وجود پیوند آزاد بر روی سطح گرافن، امکان جذب مستقیم اتم‌ها و مولکول‌های خارجی (مثلا مولکول‌های یک گاز خاص) بر روی آن وجود ندارد. به همین دلیل در ساخت نانوحس‌گرهای گرافنی، سطح ورق گرافن را با لایه نازکی از مواد پلیمری مخصوص می‌پوشانند تا امکان برقراری پیوند بین اتم‌ها و مولکول‌های خارجی با سطح گرافن فراهم شود. از این رو هنگام طراحی و ساخت نانوحس‌گر می‌توان محل قرارگیری جرم خارجی را تعیین نمود[۶۰].

به منظور بررسی یک حالت خاص برای سیستم موجود، وضعیتی را درنظر می‌گیریم که در طراحی حس‌گر محل قرارگیری جرم در وسط تیر تعیین شده است، امّا به دلیل خطاهای موجود در فرایند ساخت

محل قرارگیری جرم دقیقا در وسط تیر نیست و کمی اختلاف دارد. در جدول ۴-۲ مقادیر فرکانس طبیعی اول سیستم را با در نظر گرفتن خطای قرارگیری جرم M=4yg برای سرعت‌های مختلف ارائه شده است. درصد خطا برابر میزان خطای حاصل در فرکانس طبیعی اول سیستم به دلیل خطای ناشی از قرارگیری جسم تعریف می‌شود.

جدول ۴-۲ اختلاف در فرکانس طبیعی اول ناشی از خطا در محل قرارگیری جرم خارجی برای سرعت‌های مختلف

	η=0		η=0.01	
خطای قرارگیری جرم (nm)	فرکانس طبیعی بی‌بعد اول	درصد خطا	فرکانس طبیعی بی‌بعد اول	درصد خطا
0.0	9.06363	0	7.55337	0
0.1	9.06387	0.002	7.55347	0.001
0.5	9.06960	0.065	7.55613	0.036
1.0	9.08747	0.263	7.56658	0.174
1.5	9.11679	0.586	7.58343	0.397

مشاهده می‌شود هنگامی که سیستم دارای حرکت محوری می‌باشد خطا در محل قرارگیری جرم تاثیر کمتری بر خطای فرکانس دارد، در حالی که این خطا برای سیستم ساکن بیشتر است.

۴-۶- نتیجه‌گیری

در این فصل ارتعاشات نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری با در نظر گرفتن یک جرم متمرکز متّصل به لایه بالایی مورد بررسی قرار گرفت. همانند فصل قبل نوار گرافنی دولایه به صورت دو تیر اویلر برنولی با جابه‌جایی‌های عرضی و انحنای برابر که بر روی هم قرار گرفته و مدول برشی بین آن‌ها وجود دارد، مدل‌سازی شد. هم‌چنین از جابه‌جایی‌های طولی صرف‌نظر شده است. معادلات سیستم به کمک اصل هامیلتون به دست آمده و از طریق روش گالرکین به صورت عددی حل شده‌اند. نتایج به دست آمده

نشان می دهند وجود جرم خارجی در مرکز تیر، تاثیر زیادی بر سرعت بحرانی متناظر با ناپایداری دیورژانس ندارد امّا موجب می‌شود سیستم در محدوده وسیع‌تری از سرعت از لحاظ استاتیکی ناپایدار بماند. هم‌چنین افزایش جرم موجب می‌شود سیستم در سرعت‌های بالاتری دچار ناپایداری فلاتر گردد، امّا فرکانس فلاتر کاهش می‌یابد. این نتیجه حاصل می‌شود که با تغییر محل قرارگیری جرم، رفتار ارتعاشی و پایداری سیستم تغییر می‌کند. هنگامی که جرم در مرکز تیر واقع باشد، فرکانس طبیعی اول به کمترین مقدار خود می‌رسد امّا این موضوع تاثیر زیادی بر فرکانس طبیعی دوم ندارد. هم‌چنین مشاهده می‌شود افزایش جرم به طور کلّی موجب کاهش فرکانس‌ها می‌شود امّا در حالتی که جرم در وسط تیر واقع شده باشد، فرکانس دوم رفتاری عکس از خود نشان می‌دهد. هم‌چنین هنگامی که سیستم دارای سرعت محوری باشد، خطای محل قرارگیری جسم تاثیر کمتری بر خطای فرکانس نسبت به سیستم ساکن دارد.

۵ فصل پنجم

بررسی رفتار غیرخطّی

نوار گرافنی دولایه

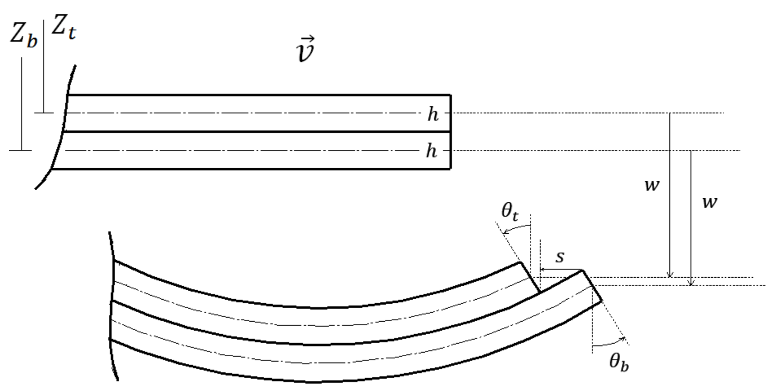
دارای حرکت محوری

۵-۱- مقدّمه

در این بخش، به منظور مطالعه عوامل غیرخطّی هندسی بر روی رفتار سیستم، با در نظر گرفتن دامنه بزرگ ارتعاشات، معادلات غیرخطّی سیستم به دست آمده و نقاط تعادل سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

۵-۲- استخراج معادلات سیستم

مشابه فصول گذشته، به منظور به دست آوردن معادلات غیرخطّی سیستم، نوار گرافنی دولایه را به صورت دو تیر اویلربرنولی در نظر می‌گیریم که بر روی هم قرار گرفته و دارای حرکت محوری می‌باشند. از جابه‌جایی‌های طولی صرف‌نظر شده و فرض می‌شود جابه‌جایی‌های عرضی با هم برابر باشند، یعنی اتّصال بین سطوح تیر هنگام حرکت و ارتعاش همواره برقرار باشد.



شکل ۵-۱- شماتیک نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری با دامنه بزرگ نوسان

انرژی جنبشی سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T = \int_0^l \rho A(\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx \quad (۱-۵)$$

به منظور در نظر گرفتن آثار غیرخطّی هندسی ناشی از ارتعاشات با دامنه بزرگ، رابطه کـرنش ون کارمن[1] برای لایه بالایی و پایینی به صورت روابط (۵-۲) و (۵-۳) در نظر گرفته می‌شود:

$$\varepsilon_x^t = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 - z_t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۲-۵)$$

$$\varepsilon_x^b = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 - z_b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۳-۵)$$

مطابق آن‌چه قبلا بیان شد و با توجّه به فرم دیفرانسیلی تئوری غیرموضعی ارینگن، رابطـه ضـمنی گشتاور خمشی و نیروی محوری لایه‌های بالایی و پایینی به فرم روابط (۵-۴) و (۵-۵) به دست می‌آیند:

$$M_x^{nl} - (e_0a)^2\frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} = M_x^l = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۴-۵)$$

$$N_x^{nl} - (e_0a)^2\frac{\partial^2 N_x^{nl}}{\partial x^2} = N_x^l = \frac{1}{2}EA(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \quad (۵-۵)$$

که در آن M_x^{nl} و N_x^{nl} به ترتیب گشتاور خمشی غیرموضعی و نیروی محوری غیرموضـعی بـوده و برای لایه های بالایی وپایینی به ترتیب توسط روابط (۵-۶) تا (۵-۸) به دست می‌آیند:

$$M_t^{nl} = -\int_A z_t\sigma_x^{nl}dA \quad (۶-۵)$$

$$M_b^{nl} = -\int_A z_b\sigma_x^{nl}dA \quad (۷-۵)$$

$$N_x^{nl} = \int_A \sigma_x^{nl}dA \quad (۸-۵)$$

انرژی پتانسیل سیستم نیز به صورت رابطه (۵-۹) به دست می‌آید:

[1] Von-Karman

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l [(M_t^{nl} + M_b^{nl})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_{sh}s^2]dx + \frac{1}{4}\int_0^l [(N_t^{nl} + N_b^{nl})\,(\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx \qquad (۹\text{-}۵)$$

که در آن M_t^{nl} و M_b^{nl} و N_t^{nl} و N_b^{nl} به ترتیب نشان دهنده گشتاور خمشی غیرموضعی لایـه بـالا، گشتاور خمشـی غیرموضـعی لایـه پـایین، نیـروی محـوری غیرموضـعی لایـه بـالا و نیـروی غیرمحـوری غیرموضعی لایه پایین می‌باشد. هم‌چنین K_{sh} مدول برشی بین لایه‌ای و s میزان لغزش بین سطوح لایه‌ها است و مطابق رابطه (۳-۵) فصل سوم به دست می‌آید. لازم به ذکر است با توجّه به یکسان بودن لایه‌های بالایی و پایینی می‌توان رابطه (۵-۱۰) را در نظر گرفت:

$$M_x{}^{nl} = M_t^{nl} = M_b^{nl} \qquad ; \quad N_x{}^{nl} = N_t^{nl} = N_b^{nl} \qquad (۱۰\text{-}۵)$$

همانند فصول قبل، با جایگذاری رابطه (۵-۱۰) در معادلـه همیلتـون، معادلـه حرکـت سیسـتم بـه صورت رابطه (۵-۱۱) به دست می‌آید:

$$\rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(N_x{}^{nl}\frac{\partial w}{\partial x}) - \frac{1}{2}h^2 K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (۱۱\text{-}۵)$$

لازم به ذکر است در به دست آوردن این روابط از ارتعاشات طولی صرف‌نظر شـده اسـت و بنـابراین داریم:

$$\frac{\partial^2 N_x{}^{nl}}{\partial x^2} = 0 \qquad (۱۲\text{-}۵)$$

بنابراین معادله حرکت سیستم به صورت رابطه (۵-۱۳) ساده می‌شود:

$$\rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}EA(\frac{\partial w}{\partial x})^3)\ -\frac{1}{2}h^2K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{۵-۱۳}$$

از رابطه (۵-۱۳) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 M_x^{nl}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\right)+\frac{1}{2}h^2K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{۵-۱۴}$$

با جایگذاری رابطه (۵-۱۴) در رابطه (۵-۴) داریم:

$$M_x^{nl}=EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(e_0a)^2[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\right)+\frac{1}{2}h^2K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)] \tag{۵-۱۵}$$

با قرار دادن رابطه (۵-۱۵) در رابطه (۵-۱۳) معادله غیرموضعی و غیرخطّی سیستم به صورت رابطه (۵-۱۶) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\rho A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)&+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{1}{2}h^2K_{sh}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ &-\frac{3}{2}EA\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\\ &-\ (e_0a)^2\Bigg[\rho A\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+2v\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial t}+v^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)\\ &-\frac{h^2}{2}K_{sh}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{3}{2}EA\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-9EA\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\\ &-3EA(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^3\Bigg]=0\end{aligned} \tag{۵-۱۶}$$

به منظور بی‌بعد سازی معادله فوق، با در نظر گرفتن پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (۵-۱۷) :

$$w^* = \frac{w}{l}\ ;\quad \xi = \frac{x}{l}\ ;\quad \tau = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}t\ ;\quad \mu = \frac{e_0 a}{l}\ ;\quad \lambda = \frac{l}{r}\ ;\ r = \sqrt{\frac{I}{A}}\ ;\ \eta = \frac{v}{C_L}$$
$$C_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\ ;\quad \Upsilon = \frac{h^2 K_{sh} l^2}{EI} \qquad (۱۷\text{-}۵)$$

معادله بی‌بعد غیرخطّی غیرموضعی سیستم به صورت رابطه (۵-۱۸) به دست می‌آید:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\eta\lambda\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\tau} + (\lambda\eta)^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right) + \frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} - \frac{\Upsilon}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} - \frac{3}{2}\lambda^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2$$
$$-\mu^2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\tau^2} + 2\eta\lambda\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^3\partial\tau} + (\lambda\eta)^2\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} - \frac{\Upsilon}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}\right.$$
$$\left. - \frac{3}{2}\lambda^2\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2 - 9\lambda^2\frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^3} - 3\lambda^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right)^3\right)$$
$$= 0 \qquad (۱۸\text{-}۵)$$

با حذف ترم‌های غیرخطّی، همان معادله خطّی به دست آمده در فصل سوم به دست می‌آید. شرایط مرزی برای حالت دوسرمفصل مطابق روابط (۳-۱۶) و (۳-۲۰) فصل سوم در نظر گرفته می‌شود.

۵-۳- گسسته‌سازی معادلات و بررسی نقاط تعادل

به منظور بررسی نقاط تعادل سیستم، مشابه فصول قبل به کمک روش گالرکین و با در نظر گرفتن رابطه (۵-۱۹) و جایگذاری آن در معادله(۵-۱۸)، فرم ماتریسی مجموعه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم به صورت رابطه (۵-۲۰) حاصل می‌شود:

$$w(\xi,\tau) = \sum_{i=1}^{N}\phi_i(\xi)\overline{w}_i(\tau) \qquad (۱۹\text{-}۵)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\overline{w}} + \mathbf{G}\dot{\overline{w}} + \mathbf{K}\overline{w} + \mathbf{N}\overline{w}^3 = 0 \qquad (۲۰\text{-}۵)$$

که در آن **M** ، **G** ، **K** ، **N** به ترتیب نشان‌دهنده ماتریس‌های جرم، میرایی، سختی و ماتریس

مرتبط با ترم‌های غیرخطّی می‌باشند و به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$[\mathbf{M}]_{ij}=\int_0^1(\phi\phi+\mu^2\phi\phi'')d\xi \quad (۲۱\text{-}۵)$$

$$[\mathbf{G}]_{ij}=2\lambda\beta\int_0^1(\phi\phi'-\mu^2\phi\phi''')d\xi \quad (۲۲\text{-}۵)$$

$$[\mathbf{K}]_{ij}=\int_0^1\left(\left(\frac{\Upsilon}{2}+(\lambda\beta)^2\right)\phi\phi''+(1-\mu^2(\lambda\beta)^2+\frac{\Upsilon\mu^2}{2})\phi\phi''''\right)d\xi \quad (۲۳\text{-}۵)$$

$$[\mathbf{N}]_{ij}=\int_0^1\left(-\frac{3}{2}\lambda^2\phi\phi'^2\phi''+\frac{3}{2}\lambda^2\mu^2\phi\phi'^2\phi''''+\frac{9}{2}\lambda^2\mu^2\phi\phi'\phi''\phi'''+\frac{3}{2}\lambda^2\mu^2\phi\phi''^3\right)d\xi \quad (۲۴\text{-}۵)$$

به منظور یافتن نقاط تعادل در رابطه (۵-۲۰) ضرایب جملات شتاب و سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{K}\overline{w}+\mathbf{N}\overline{w}^3=0 \quad (۲۵\text{-}۵)$$

با حل رابطه (۵-۲۵) نقاط تعادل سیستم به دست می‌آیند.

۵-۴- نتایج

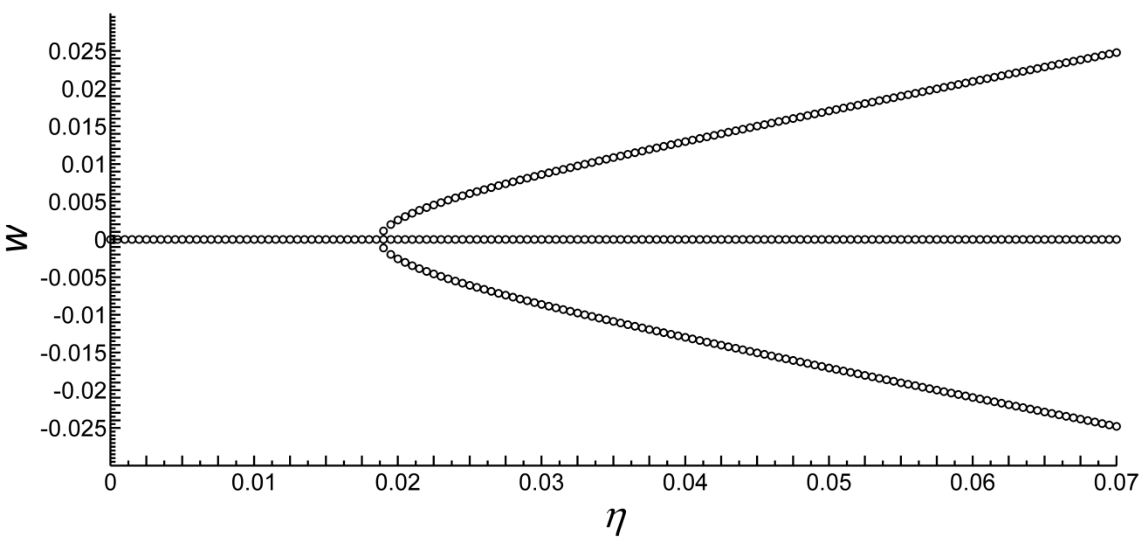
در جدول (۵-۱)، ریشه‌های معادله (۵-۲۵) (نقاط تعادل سیستم) با در نظر گرفتن مقادیر عددی برای پارامترهای مکانیکی و هندسی مطابق جدول (۳-۱) فصل سوم، برای سرعت‌های مختلف بی‌بعد و با در نظر گرفتن N=1، ارائه شده است. هم‌چنین نتایج برای شرط مرزی دوسرمفصل بررسی شده و توابع آزمون مطابق فصول قبل در نظر گرفته شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود در سرعت‌هایی پایین که سیستم هنوز ناپایدار نشده است، سه ریشه داریم که یکی صفر بوده و نقطه تعادل بدیهی $w=0$ را نتیجه می دهد و دو ریشه موهومی غیر قابل قبول

نیز داریم. با افزایش سرعت سیستم ابتدا وارد ناپایداری دیورژانس شده (از لحاظ استاتیکی ناپایدار شده و کمانش رخ می دهد) و سیستم دارای نقاط تعادلی غیر صفر نیز می‌باشد. هم‌چنین در ازای سرعت‌های مربوط به ناپایداری فلاتر نیز نقاط تعادل غیر صفر وجود دارد. این نقاط تعادل غیرصفر می‌توانند پایدار و یا ناپایدار باشند. در شکل شکل ۵-۲، نمودار نقاط تعادل سیستم به ازای سرعت‌های مختلف رسم شده است.

جدول ۵-۱ - نقاط تعادل سیستم به ازای مقادیر مختلف سرعت محوری بی‌بعد

سرعت محوری بی‌بعد (η)	0.07	0.05	0.03	0.02	0.015	0.01	0.005	0
نقاط تعادل	0 0.0247 -0.0247	0 0.0170 -0.0170	0 0.0085 -0.0085	0 0.0024 -0.0024	0 0.0041i -0.0041i	0 0.0058i -0.0058i	0 0.0066i -0.0066i	0 0.0069i -0.0069i



شکل ۵-۲- نمودار نقاط تعادل بر حسب پارمتر بی‌بعد سرعت

۵-۵- نتیجه‌گیری

همان‌طور که می‌دانیم هر سیستم ارتعاشی دارای مودهای مختلف ارتعاشی است که ارتعاشات کلّی سیستم ترکیبی از این مودها می‌باشد. در فصل‌های قبل، با بررسی رفتار خطّی سیستم مشاهده شد در سرعت‌های پایین نوار گرافنی حول نقطه تعادل خود یعنی $w = 0$ پایدار است و رفتار ارتعاشی دارد، امّا با افزایش سرعت ابتدا سیستم از لحاظ استاتیکی ناپایدار شده و دچار کمانش و نقطه تعادل ناپایدار می‌شود. با افزایش بیشتر سرعت ناپایداری فلاتر در سیستم رخ می‌دهد. با در نظر گرفتن عوامل غیرخطّی هنگامی که سیستم در محدوده‌های ناپایداری قرار دارد، سیستم دارای نقاط تعادل دیگری علاوه بر نقطه تعادل صفر نیز می‌باشد که ممکن است حول این نقاط پایدار و یا ناپایدار باشد.

۶ فصل ششم

پیشنهادها

۶-۱- مقدّمه

در این مطالعه، رفتار ارتعاشی و ناپایداری نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری با در نظر گرفتن اثر برش بین‌لایه‌ای ناشی از نیروهای ضعیف واندروالس به کمک تئوری غیرموضعی الاستیسته بررسی و تاثیر پارامترهایی چون طول نوارها، مقدار مدول برش‌بین‌لایه‌ای و پارامتر غیرموضعی بر فرکانس نوسانات و پایداری سیستم مورد مطالعه قرار گرفت. نشان داده شد با افزایش سرعت محوری، سیستم ابتدا وارد ناپایداری دیورژانس شده و سپس ناپایداری فلاتر خواهد داشت. در بخشی دیگر، با توجّه به استفاده از ورق‌های گرافنی در طراحی و ساخت نانوحس‌گرهای جرم و گاز، با در نظر گرفتن یک نانوذرّه متّصل به نوار گرافنی دولایه دارای حرکت محوری، اثر وجود جرم، محل و مقدار آن بر رفتار ارتعاشی و پایداری سیستم بررسی شد. اگر چه سعی شده است با فرض غیرکلاسیک بودن تئوری غیرموضعی الاستیسیته و در نظر گرفتن آثار ریزمقیاس در ابعاد نانو، مدل ارائه شده در این مطالعه به مدل فیزیکی واقعی نزدیک شود، اما می‌توان با در نظر گرفتن مواردی دیگر، به کامل‌تر شدن مدل و بهبود مطالعه و هم‌چنین بررسی عوامل مختلف در این زمینه و زمینه‌های نزدیک به آن کمک نمود. به همین منظور در بخش بعدی پیشنهادهایی در این خصوص ارائه شده است که می‌تواند زمینه تحقیقات آینده باشد.

۶-۲- پیشنهادها

با توجّه به تحقیق‌های انجام شده در زمینه‌های مشابه، پیشنهادهای مختلفی را می‌توان ارائه نمود. برخی از این پیشنهادها به شرح زیر است:

۱- تحلیل ارتعاشات و پایداری برای نوارهای گرافنی با تعدادلایه‌های بیشتر از دو.

۲- در نظر گرفتن جابه‌جایی‌های طولی و عرضی با فرض کوپل بودن معادلات طولی و عرضی.

۳- استفاده از مدل‌های دیگر به منظور شبیه‌سازی نیروهای برشی ناشی از پیوندهای ضعیف

واندروالس بین لایه‌های ورق‌های گرافنی.

۴- در نظر گرفتن جابه‌جایی‌های عرضی نسبی برای لایه‌ها به دلیل به وجود آمدن فازهای ارتعاشی مختلف ناشی از نیروهای واندروالس بین لایه‌ها.

۵- در نظر گرفتن چند جرم متمرکز متّصل مختلف قرار گرفته در مکان‌های مختلف نوار.

۶- در نظر گرفتن مدل‌های مختلف تیر و صفحه با استفاده از تئوری‌های موجود.

۷- در نظر گرفتن عوامل میراکننده ارتعاشات مانند میرایی ناشی از هوا و یا میرایی ترموالاستیک.

پیشنهادهای ارائه شده تنها بخش کوچکی از مواردی است که می‌تواند به نزدیک شدن مطالعه حاضر به واقعیت فیزیکی مسائل موجود کمک کند.

مراجع

[١] S. Iijima, Helical microtubules of graphitic carbon, *nature,* Vol. 354, No. 6348, pp. 56-58, 1991 .

[٢] J. C. Meyer, A. K. Geim, M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, T. J. Booth, S. Roth, The structure of suspended graphene sheets, *Nature*, Vol. 446, No ,٧١٣١ .pp. 60-63, 2007 .

[٣] C. Lee, X. Wei, J. W. Kysar, J. Hone, Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene, *science,* Vol. 321, No. 5887, pp. 385-388, 2008 .

[٤] F. Liu, P. Ming, J. Li, Ab initio calculation of ideal strength and phonon instability of graphene under tension, *Physical Review B,* Vol. 76, No. 6, pp. 064120, 2007 .

[٥] H. Zhao, K. Min, N. Aluru, Size and chirality dependent elastic properties of graphene nanoribbons under uniaxial tension, *Nano letters* ,Vol. 9, No. 8, pp. 3012-3015, 2009 .

[٦] Y. Zhang, C. Wang, Y. Cheng, Y. Xiang, Mechanical properties of bilayer graphene sheets coupled by sp3 bonding, *Carbon,* Vol. 49, No. 13, pp. 4511-4517, 2011 .

[٧] J. S. Bunch, A. M. Van Der Zande, S. S. Verbridge ,I. W. Frank, D. M. Tanenbaum, J. M. Parpia, H. G. Craighead, P. L. McEuen, Electromechanical resonators from graphene sheets, *Science,* Vol. 315, No. 5811, pp. 490-493, 2007 .

[٨] H. J. Yoon, J. H. Yang, Z. Zhou, S. S. Yang, M. M.-C. Cheng, Carbon dioxide gas sensor using a graphene sheet, *Sensors and Actuators B: Chemical,* Vol. 157, No. 1, pp. 310-313, 2011 .

[٩] A. Sakhaee-Pour, M. Ahmadian, A. Vafai, Applications of single-layered graphene sheets as mass sensors and atomistic dust detectors, *Solid State Communications,* Vol. 145, No. 4, pp. 168-172, 2008 .

[١٠] K. Kim, J.-Y. Choi, T. Kim, S.-H. Cho, H.-J. Chung, A role for graphene in silicon-based semiconductor devices, *Nature,* Vol. 479, No. 7373, pp. 338-344, 2011 .

[١١] E. J. Siochi, Graphene in the sky and beyond, *Nature nanotechnology,* Vol. 9, No. 10, pp. 745-747, 2014 .

[١٢] Y. Liu, J. H. D. Lee, Q. Xia, Y. Ma, Y. Yu, L. Y. L. Yung, J. Xie, C. N. Ong, C. D. Vecitis, Z. Zhou, A graphene-based electrochemical filter for water purification, *Journal of Materials Chemistry A,* Vol. 2, No. 39, pp. 16554-16562, 2014 .

[١٣] D. Wang, D. Choi, J. Li, Z. Yang, Z. Nie, R. Kou, D. Hu, C. Wang, L. V. Saraf, J. Zhang, Self-assembled TiO2–graphene hybrid nanostructures for enhanced Li-ion insertion, *ACS nano,* Vol ,٣ .No. 4, pp. 907-914, 2009 .

[١٤] E. Yoo, J. Kim, E. Hosono, H.-s. Zhou, T. Kudo, I. Honma, Large reversible Li storage of graphene nanosheet families for use in rechargeable lithium ion batteries, *Nano letters,* Vol. 8, No. 8, pp. 2277-2282, 2008 .

[١٥] B. Seger, P. V. Kamat, Electrocatalytically active graphene-platinum nanocomposites. Role of 2-D carbon support in PEM fuel cells, *The Journal of Physical Chemistry C,* Vol. 113, No. 19, pp. 7990-7995, 2009 .

[١٦] E. Yoo, T. Okata, T. Akita, M. Kohyama ,J. Nakamura, I. Honma, Enhanced electrocatalytic activity of Pt subnanoclusters on graphene nanosheet surface, *Nano letters,* Vol. 9, No. 6, pp. 2255-2259, 2009 .

[١٧] R. S. Lakes, Size effects and micromechanics of a porous solid, *Journal of materials science,* Vol. 18, No. 9, pp. 2572-2580, 1983 .

[١٨] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of applied physics,* Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983 .

[١٩] M. Eltaher, A. E .Alshorbagy, F. Mahmoud, Vibration analysis of Euler–Bernoulli nanobeams by using finite element method, *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 37, No. 7, pp. 4787-4797, 2013 .

[٢٠] S. Pradhan, J. Phadikar, Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models, *Physics letters A,* Vol. 373, No. 11, pp. 1062-1069, 2009 .

[٢١] R. Ansari, S. Sahmani, B. Arash, Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets, *Physics Letters A,* Vol ,٣٧٥ .No. 1, pp. 53-62, 2010 .

[٢٢] L. Shen, H.-S. Shen, C.-L. Zhang, Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments, *Computational Materials Science,* Vol. 48, No. 3, pp. 680-685, 2010 .

[٢٣] S. Pradhan, T. Murmu, Small scale effect on the buckling analysis of single-layered graphene sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal plate theory, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 42, No. 5, pp. 1293-1301, 2010 .

[٢٤] E. Jomehzadeh, A. Saidi, A study on large amplitude vibration of multilayered graphene sheets, *Computational materials science,* Vol. 50, No. 3, pp. 1043-1051, 2011 .

[٢٥] M. Mohammadi, M. Ghayour, A. Farajpour, Free transverse vibration analysis of circular and annular graphene sheets with various boundary conditions using the nonlocal continuum plate model, *Composites Part B: Engineering,* Vol. 45, No. 1, pp. 32-42, 2013 .

[٢٦] E. Jomehzadeh, A. Saidi, N. Pugno, Large amplitude vibration of a bilayer graphene embedded in a nonlinear polymer matrix, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 44, No. 10, pp. 1973-1982, 2012 .

[٢٧] R. Ansari, B. Arash, H. Rouhi, Vibration characteristics of embedded multi-layered graphene sheets with different boundary conditions via nonlocal elasticity, *Composite Structures,* Vol. 93, No. 9, pp. 2419-2429, 2011 .

[٢٨] H. Babaei, A. Shahidi, Vibration of quadrilateral embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models using the Galerkin method, *Acta Mechanica Sinica,* Vol. 27, No. 6, pp. 967-976, 2011 .

[٢٩] B. Arash, Q. Wang, Vibration of single-and double-layered graphene sheets, *Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine,* Vol. 2, No. 1, pp.

011012, 2011 .
[٣٠] X. He, J. Wang, B .Liu, K. M. Liew, Analysis of nonlinear forced vibration of multi-layered graphene sheets, *Computational Materials Science,* Vol. 61, pp. 194-199, 2012 .
[٣١] A. G. Arani, R. Kolahchi, H. Vossough, Buckling analysis and smart control of SLGS using elastically coupled PVDF nanoplate based on the nonlocal Mindlin plate theory, *Physica B: Condensed Matter,* Vol. 407, No. 22, pp. 4458-4465, 2012 .
[٣٢] R. Lin, Nanoscale vibration characteristics of multi-layered graphene sheets, *Mechanical Systems and Signal Processing,* Vol. 29, pp. 251-261, 2012 .
[٣٣] J.-X. Shi, Q.-Q. Ni, X.-W. Lei, T. Natsuki, Nonlocal vibration of embedded double-layer graphene nanoribbons in in-phase and anti-phase modes, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 44, No. 7 ,pp. 1136-1141, 2012 .
[٣٤] T. Murmu, M. McCarthy, S. Adhikari, In-plane magnetic field affected transverse vibration of embedded single-layer graphene sheets using equivalent nonlocal elasticity approach, *Composite Structures,* Vol. 96, pp. 57-63, 2013 .
[٣٥] J.-X. Shi, Q.-Q. Ni, X.-W. Lei, T. Natsuki, Nonlocal vibration analysis of nanomechanical systems resonators using circular double-layer graphene sheets, *Applied Physics A,* Vol. 115, No. 1, pp. 213-219, 2014 .
[٣٦] H.-S. Shen, Y.-M. Xu, C.-L. Zhang ,Prediction of nonlinear vibration of bilayer graphene sheets in thermal environments via molecular dynamics simulations and nonlocal elasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 267, pp. 458-470, 2013 .
[٣٧] R. Nazemnezhad, S .Hosseini-Hashemi, Free vibration analysis of multi-layer graphene nanoribbons incorporating interlayer shear effect via molecular dynamics simulations and nonlocal elasticity, *Physics Letters A,* Vol. 378, No. 44, pp. 3225-3232, 2014 .
[٣٨] A. K. Ravandi ,A. Karimi, M. Navidbakhsh, RETRACTED: Numerical analysis for nonlocal nonlinear vibration of a double layer graphene sheet integrated with ZnO piezoelectric layers, *Journal of Vibration and Control*, pp. 1077546314561036, 2014 .
[٣٩] K. Kiani, Revisiting the free transverse vibration of embedded single-layer graphene sheets acted upon by an in-plane magnetic field, *Journal of Mechanical Science and Technology,* Vol. 28, No. 9, pp. 3511-3516, 2014 .
[٤٠] C. W. Lim, C. Li, J.-L. Yu, Dynamic behaviour of axially moving nanobeams based on nonlocal elasticity approach, *Acta Mechanica Sinica,* Vol. 26, No. 5, pp. 755-765, 2010 .
[٤١] K. Kiani, Longitudinal, transverse, and torsional vibrations and stabilities of axially moving single-walled carbon nanotubes, *Current Applied Physics,* Vol. 13, No. 8, pp. 1651-1660, 2013 .
[٤٢] K. Kiani, Longitudinal and transverse instabilities of moving nanoscale beam-like structures made of functionally graded materials, *Composite Structures,* Vol. 107,

pp. 610-619, 2014 .

[٤٣] M .Rezaee, S. Lotfan, Non-linear nonlocal vibration and stability analysis of axially moving nanoscale beams with time-dependent velocity, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 96, pp. 36-46, 2015 .

[٤٤] B. Movahedian, Dynamic stiffness matrix method for axially moving micro-beam, *Interaction and multiscale mechanics,* Vol. 5, No. 4, pp. 385-397, 2012 .

[٤٥] A. M. Dehrouyeh-Semnani, M. Dehrouyeh, H. Zafari-Koloukhi, M. Ghamami, Size-dependent frequency and stability characteristics of axially moving microbeams based on modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 97, pp. 98-112, 2015 .

[٤٦] Q. Zuo, H. Schreyer, Flutter and divergence instability of nonconservative beams and plates, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 33, No. 9, pp. 1355-1367, 1996 .

[٤٧] Q. Wang, B. Arash, A review on applications of carbon nanotubes and graphenes as nano-resonator sensors, *Computational Materials Science,* Vol. 82, pp. 350-360, 2014 .

[٤٨] X. Gong, S. Jiang, X .Wang, S. Liu, S. Wang, Vibration analysis of nanomechanical mass sensor based on circular graphene sheets, in *Proceeding of,* IEEE, pp. 511-515 .

[٤٩] S.-M. Zhou, L.-P. Sheng, Z.-B. Shen, Transverse vibration of circular graphene sheet-based mass sensor via nonlocal Kirchhoff plate theory, *Computational Materials Science,* Vol. 86, pp. 73-78, 2014 .

[٥٠] T. Murmu, S. Adhikari, Nonlocal mass nanosensors based on vibrating monolayer graphene sheets, *Sensors and Actuators B: Chemical,* Vol. 188, pp. 1319-1327 , ٢٠١٣.

[٥١] S. Adhikari, R. Chowdhury, Zeptogram sensing from gigahertz vibration: Graphene based nanosensor, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 44, No. 7, pp. 1528-1534, 2012 .

[٥٢] Z.-B. Shen, H.-L. Tang, D.-K. Li, G.-J. Tang ,Vibration of single-layered graphene sheet-based nanomechanical sensor via nonlocal Kirchhoff plate theory, *Computational Materials Science,* Vol. 61, pp. 200-205, 2012 .

[٥٣] G. Savini, Y. Dappe, S. Öberg, J.-C. Charlier, M. Katsnelson, A. Fasolino, Bending modes, elastic constants and mechanical stability of graphitic systems, *Carbon,* Vol. 49, No. 1, pp. 62-69, 2011 .

[٥٤] H. Conley, N. V. Lavrik, D. Prasai, K. I. Bolotin, Graphene bimetallic-like cantilevers: probing graphene/substrate interactions, *Nano letters,* Vol. 11, No. 11, pp. 4748-4752, 2011 .

[٥٥] J. B. Ma, L. Jiang, S. F. Asokanthan, Influence of surface effects on the pull-in instability of NEMS electrostatic switches, *Nanotechnology,* Vol. 21, No. 50, pp. 505708, 2010 .

[٥٦] H. Rokni, W. Lu ,A continuum model for the static pull-in behavior of graphene nanoribbon electrostatic actuators with interlayer shear and surface energy effects, *Journal of Applied Physics,* Vol. 113, No. 15, pp. 153512, 2013 .

[٥٧] Y. Shen, H. Wu, Interlayer shear effect on multilayer graphene subjected to bending, *Applied Physics Letters,* Vol. 100, No. 10, pp. 101909, 2012 .

[٥٨] Y. Liu, Z. Xu, Q. Zheng, The interlayer shear effect on graphene multilayer resonators, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* Vol ,٥٩ .No. 8, pp. 1613-1622, 2011 .

[٥٩] Q. Wang, Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics, *Journal of Applied Physics,* Vol. 98, No. 12, pp. 124301, 2005 .

[٦٠] F. Schedin, A. Geim, S. Morozov, E. Hill, P. Blake, M. Katsnelson ,K. Novoselov, Detection of individual gas molecules adsorbed on graphene, *Nature materials,* Vol. 6, No. 9, pp. 652-655, 2007 .

Abstract

Inimitable properties of graphene sheets enable a variety of applications such as axially moving nanodevices. Axially velocity affects dynamical response of systems. In this study linear vibration of an axially moving two-layer graphene nonoribbon with interlayer shear effect is proposed using nonlocal elasticity theory. Based on this theory stress at a point is a function of strain at all other points of the body. Euler-Bernoulli theory is used to model the system due to nanoribbon thickness and length. It is assumed that the layers have the same transverse displacement and curvature and there is no transverse separation between layers surfaces. A shear modulus is imported in the potential energy expression in order to consider the interlayer shear effect due to weak Van der Waals forces. Governing equations are obtained using Hamilton's principle and are solved by Galerkin approach. As the system experience a coriolis acceleration component which renders the system gyroscopic, it is nonconservative and we have complex natural frequencies. Results for pinned-pinned and clamped-free boundary conditions are presented and compared to other available studies. It is observed that increasing axial velocity causes divergence and flutter instabilities in the system. Effects of different shear modulus and nonlocal parameter on critical speeds are also proposed. With the rapid technology developments in recent years, the serious request for miniaturized sensors has motivated developments of new classes of sensors with higher efficiencies in nanoscale size. These nano scale sensors are used in many applications such as ultra-sensitive mass detections and early diagnosis of dangerous diseases. Generally, different methods are used in literature to design and analyze nano-resonators, vibration based methods and wave propagations based methods. The detection principle based on vibration or wave propagations analysis is to detect the recognizable shift in resonant frequencies or wave velocities in the nano-sensors induced by attachment of foreign atoms or molecules on surface of the sensors. The effect of moving speed, lumped mass weight and its position on vibration and instability of system are proposed. The results show that the natural frequencies of the system decrease with the increasing of the axially moving speed and mass weight, and the first natural frequency gets the minimum value when the mass is located at the midpoint of the beam. Effects of mass

weight and it location on the divergence and flutter critical speeds are also investigated. In the last section of the paper, in order to take into account the geometric non-linearity due to large amplitude, the Lagrangian strain is used to obtain nonlinear equation of motion and non-zero equilibrium points are studied.

Keywords:

Vibration, Graphene nonoribbon, Axially moving, Nonlocal theory, Instability, Attached lumped mass, large amplitude vibration.

Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering

MSc thesis in Mechanical Engineering Applied Mechanics

Axially moving graphene as nano-resonator using nonlocal elasticity approach

By:
Farshad Yadegari

Supervisor:
Dr Ardeshir Karami mohammadi

September 2016