

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده‌ی مهندسی مکانیک
رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی
پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

تحلیل تنش در ورق مربعی بلند ساخته شده از مواد FG با گشودگی دایروی تحت

بارگذاری مکانیکی و حرارتی

نگارنده : پوریا پورمنصور

استاد راهنما :

دکتر مهدی قنّاد کهنوی

تیر ۱۳۹۵



فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای پوریا پورمنصور به شماره دانشجویی ۹۲۰۳۷۵۴، رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل تنش در ورق مربعی بلند ساخته شده از مواد FG با گشودگی دایروی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی که در تاریخ ۱۳۹۵/۰۴/۲۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> مردود	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input checked="" type="checkbox"/> قبول (با درجه: <u>۷</u> - امتیاز: <u>۱۷/۲۵</u>)
--------------------------------	------------------------------------	--

۲- بسیار خوب (۱۸-۱۸/۹۹)

۱- عالی (۲۰-۱۹)

۴- قابل قبول (۱۴-۱۵/۹۹)

۳- خوب (۱۶-۱۷/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر مهدی قناد	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم	_____	_____	_____
۳- استاد مشاور	_____	_____	_____
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر حبیب احمدی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر محمد جعفری	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر محمدباقر نظری	استادیار	

رئیس دانشکده:



تقدیم

تقدیم به

پدرم و مادرم

به خاطر محبت و دلگرمی بی‌نهایتشان

در مسیر زندگی.....

تعهدنامه

اینجانب پوریا پورمنصور دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک-گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی تحلیل تنش در ورق مربعی بلند ساخته‌شده از مواد FG با گشودگی دایروی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی، تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهن‌تویی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

روش متغیرهای مختلط، یک ابزار قدرتمند و مفید برای حل مسائل الاستیسیته‌ی دوبعدی می‌باشد؛ به همین دلیل در تحقیق حاضر، به کمک روش توابع پتانسیل مختلط، حلی تحلیلی برای محاسبه توزیع تنش دوبعدی اطراف گشودگی دایروی در ورق نامحدود ناهمگن ارائه می‌شود. بارگذاری به صورت ترکیبی از بار حرارتی و مکانیکی است؛ بار مکانیکی درون صفحه‌ای به صورت کشش ثابت و یکنواخت تک‌محوری و دومحوری، بارگذاری فشار داخلی یکنواخت به دور گشودگی و یک بارگذاری حرارتی پایا به ورق اعمال می‌شود. جهت ناهمگنی و تغییرات مدول الاستیسیته، در جهت شعاعی و هم‌مرکز با گشودگی در نظر گرفته شده است. برای توصیف تغییر خواص مکانیکی ورق مورد نظر از یک تابع نمایی که دارای شعاع همگرایی مشخصی است، استفاده می‌شود. از روش اجزای محدود برای راستی‌سنجی نتایج حل تحلیلی، در تمام حالات بارگذاری برای ورق همگن و ناهمگن استفاده شده است. در این تحقیق مشاهده شد که رفتار ورق با روند صعودی مدول الاستیسیته بهتر از ورق با روند نزولی الاستیسیته است.

کلیدواژگان: ورق FG، بارگذاری حرارتی و مکانیکی، گشودگی دایروی، روش متغیر مختلط، تمرکز تنش

مقالات

- 1- Pourmansour P., Ghannad M., (2016), "**Stress Concentration Analysis of Functionally Graded Plate Subjected to Thermal and Mechanical Loading**", 11th International Congress on Thermal Stress.

۲- پورمنصور پ.، قناد م.، (۱۳۹۴)، " بررسی تمرکز تنش در ورق مربعی همگن با گشودگی دایره‌ای تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی"، سومین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین‌المللی مهندسی برق، مکانیک و مکاترونیک، تهران.

فهرست مطالب

۱	فصل ۱ مقدمه و تاریخچه
۱-۱	پیشگفتار
۱-۲	دسته‌بندی ورق‌ها
۱-۲-۱	دیدگاه هندسی
۱-۲-۲	دیدگاه مادی
۱-۳	تئوریهای تحلیل ورق‌ها
۱-۳-۱	تئوری کلاسیک خیز کوچک ورق نازک
۱-۴	مقدمه‌ای بر مواد ناهمگن
۱-۴-۱	تاریخچه‌ی مواد ناهمگن
۱-۴-۲	مدل‌سازی ریاضی مواد ناهمگن
۱-۵	پیشینه‌ی تحقیق
۱-۶	جمع‌بندی
۱۹	فصل ۲ ورق همگن با گشودگی دایروی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی
۲-۱	پیش‌گفتار
۲-۲	استخراج معادلات تحت بار مکانیکی
۲-۳	استخراج معادلات تحت بار حرارتی
۲-۴	حلّ تحلیلی موجود در مراجع
۲-۵	تحلیل اجزای محدود
۲-۶	معرفی نرم‌افزار اجزای محدود انسیس
۲-۷	روند تحلیل عددی

۴۳ _____ هندسه ورق ۲-۷-۱

۴۴ _____ تعریف خواص مواد ۲-۷-۲

۴۵ _____ مش بندی و اعمال شرایط حل ۲-۷-۳

۴۷ _____ اعمال شرایط مرزی و بارگذاری ۲-۷-۴

۴۸ _____ بررسی نتایج ۲-۸

۵۱ _____ بارگذاری تک محوره ۲-۸-۱

۵۳ _____ بارگذاری دومحوره ۲-۸-۲

۵۵ _____ جمع بندی ۲-۹

فصل ۳ ورق ناهمگن با گشودگی دایروی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی _____ ۵۷

۵۸ _____ پیش گفتار ۳-۱

۵۸ _____ مدل ریاضی ورق ناهمگن ۳-۲

۵۸ _____ استخراج معادلات مکانیکی ۳-۳

۵۹ _____ استخراج معادلات حرارتی ۳-۴

۶۲ _____ بررسی نتایج ۳-۵

۶۴ _____ بارگذاری تک محوره ۳-۵-۱

۶۵ _____ بارگذاری دومحوره ۳-۵-۲

۷۰ _____ تأثیر شعاع همگرایی ورق ۳-۶

۷۰ _____ ورق تحت بارگذاری تک محوره ۳-۶-۱

۷۳ _____ ورق تحت بارگذاری دومحوره $n=2$ ۳-۶-۲

۷۵ _____ مسأله‌ی نمونه برای شار حرارتی ۳-۶-۳

۸۱ _____ تاثیر تغییر طول ضلع ورق ۳-۶-۴

۳-۷ جمع‌بندی ۸۱

فصل ۴ ورق همگن و ناهمگن تحت بار فشاری در داخل گشودگی ۸۳

۴-۱ پیش‌گفتار ۸۴

۴-۲ معادلات حاکم ۸۴

۴-۳ بررسی نتایج ۸۷

۴-۳-۱ کشش تک‌محوری ۸۷

۴-۳-۲ بارگذاری دو محوری $n=2$ ۹۴

۴-۴ جمع‌بندی ۱۰۱

فصل ۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها ۱۰۳

۵-۱ نتیجه‌گیری ۱۰۴

۵-۱-۱ ورق همگن تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی ۱۰۴

۵-۱-۲ ورق ناهمگن تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای ۱۰۴

۵-۱-۳ ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری مکانیکی-حرارتی و بارگذاری فشار یکنواخت درون گشودگی ۱۰۵

۵-۲ پیشنهادها ۱۰۶

پیوست ۱۰۸

مراجع ۱۱۰

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ شماتیک یک ورق نازک مستطیلی در مختصات کارتیزین [۲۳] ۶
- شکل ۲-۱ فرض‌های لایه میانی تئوری رایسنر [۲۳] ۹
- شکل ۳-۱ نیروهای داخلی و خارجی در المانی از لایه میانی [۲۳] ۱۱
- شکل ۴-۱ نمای مقطع استخوان ۱۳
- شکل ۵-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف ۱۵
- شکل ۱-۲ شماتیک کانتور L [۲۳] ۲۴
- شکل ۲-۲ شماتیک ورق مورد مطالعه تحت بار دوماحوره [۲۳] ۲۷
- شکل ۳-۲ بارگذاری و شرایط مرزی حرارتی در ورق ۳۵
- شکل ۴-۲ هندسه ورق با نسبت ابعادی $\frac{D}{2a} = \frac{1}{30}$ در نرم‌افزار انسیس ۴۵
- شکل ۵-۲ مقایسه‌ی نحوه‌ی قرارگیری مش مثلثی و مربعی روی مرز گشودگی ورق ۴۶
- شکل ۶-۲ مش‌بندی کل ورق در نرم‌افزار انسیس ۴۷
- شکل ۷-۲ بیشینه مقدار تنش محیطی حاصل از تحلیل عددی نسبت به بارگذاری مرزی ۴۸
- شکل ۸-۲ اعمال شرایط مرزی متقارن به مرزهای ورق در نرم‌افزار انسیس ۴۹
- شکل ۹-۲ توزیع دمای ورق در مسیرهایی با زوایای مختلف از مرز داخلی به مرز خارجی ۵۱
- شکل ۱۰-۲ توزیع دمای ورق در نرم‌افزار انسیس ۵۱
- شکل ۱۱-۲ توزیع تمرکز تنش در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوره ۵۳
- شکل ۱۲-۲ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوره ۵۳
- شکل ۱۳-۲ توزیع تمرکز تنش در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوره ۵۵
- شکل ۱۴-۲ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوره ۵۵
- شکل ۱-۳ مقایسه‌ی توزیع دمای ورق FG با ضریب هدایت حرارتی ثابت و متغیر ۶۱
- شکل ۲-۳ تنش محیطی بیشینه به‌ازای تعداد مش‌های مختلف در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره با $n=-2$ ۶۴
- شکل ۳-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک‌محوره ۶۶
- شکل ۴-۳ مقدار جابه‌جایی شعاعی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک‌محوره ۶۷

- شکل ۳-۵ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره۶۸
- شکل ۳-۶ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوره۶۸
- شکل ۳-۷ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره۷۰
- شکل ۳-۸ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوره۷۰
- شکل ۳-۹ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف m ۷۲
- شکل ۳-۱۰ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف m ۷۳
- شکل ۳-۱۱ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف m ۷۴
- شکل ۳-۱۲ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف m ۷۴
- شکل ۳-۱۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف m ۷۵
- شکل ۳-۱۴ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف m ۷۶
- شکل ۳-۱۵ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف m ۷۶
- شکل ۳-۱۶ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف m ۷۷
- شکل ۳-۱۷ جریان حرارت اطراف گشودگی دایره‌ای در ورق [۲]۷۸
- شکل ۳-۱۸ توزیع تنش اطراف گشودگی در ورق همگن تحت شار حرارتی۸۰
- شکل ۳-۱۹ جابه‌جایی شعاعی اطراف گشودگی در ورق همگن تحت شار حرارتی۸۰
- شکل ۳-۲۰ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن، ناهمگن نوع اول و نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری
..... $n=1$ ۸۱
- شکل ۳-۲۱ جابه‌جایی شعاعی گشودگی ورق همگن، ناهمگن نوع اول و نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$ ۸۲
- شکل ۳-۲۲ تغییرات تنش محیطی نسبت به طول ضلع ورق۸۳
- شکل ۴-۱ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت کشش تک‌محوره۹۰
- شکل ۴-۲ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت کشش تک‌محوره۹۱
- شکل ۴-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک‌محوره۹۱
- شکل ۴-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوره۹۲
- شکل ۴-۵ توزیع تنش معادل فن‌میزس در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوره۹۳
- شکل ۴-۶ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوره۹۴
- شکل ۴-۷ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوره۹۵

- شکل ۸-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک محوره ۹۵
- شکل ۹-۴ جابه جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک محوره ۹۶
- شکل ۱۰-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دومحوره $n=2$ ۹۷
- شکل ۱۱-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دومحوره $n=2$ ۹۷
- شکل ۱۲-۴ جابه جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دومحوره $n=2$ ۹۸
- شکل ۱۳-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوره $n=2$ ۹۹
- شکل ۱۴-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوره $n=2$ ۱۰۰
- شکل ۱۵-۴ جابه جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوره $n=2$ ۱۰۰
- شکل ۱۶-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره $n=2$... ۱۰۱
- شکل ۱۷-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره $n=2$ ۱۰۲
- شکل ۱۸-۴ جابه جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره $n=2$ ۱۰۲

فهرست جدول ها

جدول ۱-۲	ضرایب تابع توزیع دمای ورق همگن	۴۹.....
جدول ۱-۳	ضرایب تابع توزیع دمای ورق ناهمگن	۶۱.....
جدول ۲-۳	خواص مکانیکی و حرارتی مواد در ورق FG	۶۴.....
جدول ۳-۳	بیشینه تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری دو محوره	۶۹..
جدول ۴-۳	بیشینه جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن	۷۱.....
جدول ۱-۴	درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری	۹۲.....
جدول ۲-۴	درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری	۹۴....
جدول ۳-۴	درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری	۹۸.....
جدول ۴-۴	درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری	۱۰۳..
جدول پ-۱	ضرایب توابع پتانسیل مختلط $\varphi(z)$ و $\psi(z)$ برای ورق همگن	۱۰۸.....
جدول پ-۲	ضرایب توابع پتانسیل مختلط $\varphi(z)$ و $\psi(z)$ برای ورق ناهمگن	۱۰۹.....

فهرست علائم

تنش نرمال در جهت محور X	σ_x
تنش نرمال در جهت محور Y	σ_y
تنش برشی در صفحه‌ی XY	τ_{xy}
ناحیه‌ی احاطه شده از جسم توسط کانتور L	S
نیروی وارد شده بر مرز جسم در جهت محور X	X_n
نیروی وارد شده بر مرز جسم در جهت محور Y	Y_n
جابه‌جایی نقاط روی کانتور L در جهت محور X	$g_1(s)$
جابه‌جایی نقاط روی کانتور L در جهت محور Y	$g_2(s)$
متغییر مختلط مکان	z
تابع تنش ایری	$U(x, y)$
تابع پتانسیل مختلط	$\phi_1(x, y)$
تابع پتانسیل مختلط	$\psi_1(x, y)$
نسبت پواسون	ν
ضریبی ثابت وابسته به جنس ماده	K
مدول الاستیسیته	E
مدول برشی	G
قسمت حقیقی یک جمله‌ی مختلط	$\text{Re}(\)$
قسمت حقیقی یک جمله‌ی مختلط	$\text{Im}(\)$
شعاع گشودگی	R
ضریب kام جملات تابع پتانسیل ϕ_1 در لایه‌ی ام	a_k^j
ضریب kام جملات تابع پتانسیل ψ_1 در لایه‌ی ام	b_k^j
تعداد لایه‌های ورق	N
تعداد جملات مثبت و منفی توابع پتانسیل	M
نیروی وارد بر مرز لایه‌ی ژام در جهت محور X	X_n^j
نیروی وارد بر مرز لایه‌ی ژام در جهت محور Y	Y_n^j
مدول برشی در لایه‌ی ژام	G_j
زاویه‌ی نقاط نسبت به محور l	θ
فاصله‌ی نقاط از مبدأ	r
تنش نرمال وارد شده بر سطح مرز در نقطه‌ی ام	σ_n
تنش برشی وارد شده بر سطح مرز در نقطه‌ی ام	τ_n
مربع خطای مقادیر حقیقی و محاسباتی تنش در مرز ورق در نقطه‌ی ام	r_n^2

مجموع مربعات خطای تنش برای نقاط مختلفی در مرز ورق	Δ
قطر گشودگی	D
طول ورق	L
ضریب همگرایی	m
مدول الاستیسیته‌ی لایه‌ی داخلی	E_i
مدول الاستیسیته‌ی لایه‌ی خارجی	E_o
شعاع گشودگی	R_o
خاصیت مکانیکی ماده در لایه‌ی داخلی	P_i
ضریب ناهمگنی	n_p
تنش فن میزس	σ_{von}
تنش نرمال وارد بر مرز خارجی در جهت محور ۱	σ_1
تنش نرمال وارد بر مرز خارجی در جهت محور ۲	σ_2
نسبت σ_1 به σ_2	n
تابع دمای مختلط انتگرال‌گیری شده	$t^*(z)$
ضریب انبساط حرارتی لایه‌ی داخلی	$i\alpha$
ضریب رسانش حرارتی لایه‌ی داخلی	k_i
ضریب انبساط حرارتی لایه‌ی خارجی	α_o
ضریب رسانش حرارتی لایه‌ی خارجی	k_o
تابع تنش حرارتی	F_p
جابه‌جایی شعاعی	u_r
شار حرارتی	q

فصل ۱ مقدمه و تاریخچه

۱-۱ پیش‌گفتار

در ابتدای این فصل تعریف و مقدمه‌ای بر ورق‌ها به همراه دسته‌بندی و مروری بر تئوری‌های مربوط به آنها، بیان می‌شود. سپس تعریف مواد ناهمگن و مختصری درباره‌ی تاریخچه‌ی این نوع از مواد بررسی می‌شود و همچنین مروری بر تحقیقات انجام شده، در زمینه‌ی تحلیل تنش در ورق‌های نازک همگن و ناهمگن، انجام خواهد شد. در نهایت موضوع مورد مطالعه در این پایان‌نامه و موضوعات هر فصل به صورت خلاصه بیان می‌شوند.

۱-۲ دسته‌بندی ورق‌ها

۱-۲-۱ دیدگاه هندسی

ورق‌ها را از نظر هندسی می‌توان به سه دیدگاه دسته‌بندی کرد [۱]

۱. ورق‌های نازک با خیز کم: به ورق‌هایی گفته می‌شود، که نسبت ضخامت به کوچک‌ترین ضلع

کمتر از $\frac{1}{20}$ باشد و لایه میانی بدون کرنش باقی بماند. همچنین خیز ورق در برابر ضخامت ورق

قابل صرف‌نظر کردن، باشد.

۲. ورق نازک با خیز زیاد: به ورق‌هایی گفته می‌شود، که نسبت ضخامت به کوچک‌ترین ضلع آن کمتر

از $\frac{1}{20}$ باشد و از کرنش لایه میانی و همچنین نسبت خیز لایه میانی به ضخامت ورق در مقایسه

با یک، صرف‌نظر نمی‌شود.

۳. ورق ضخیم: به ورق‌هایی گفته می‌شود، که نسبت ضخامت به کوچک‌ترین ضلع بیشتر از $\frac{1}{20}$ باشد.

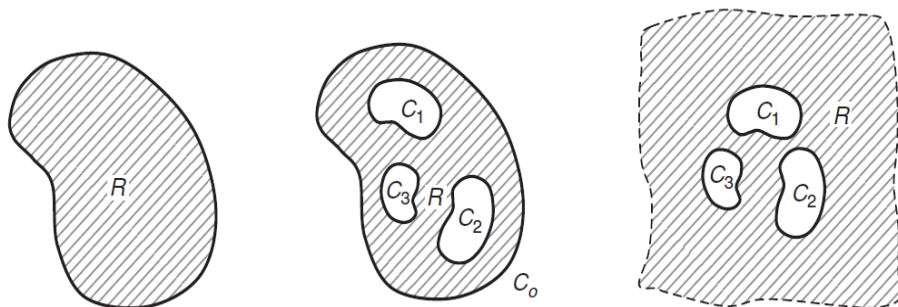
نوع دیگر دسته‌بندی ورق به صورت زیر است: [۲]

۱. ورق محدود یک‌پارچه: مطابق شکل ۱-۱(أ)، ورق یک‌پارچه و بدون هیچ مرز داخلی ولی دارای

مرزهای خارجی و تنش در نقاط دور از مرزها غیر یکنواخت است.

۲. ورق محدود چندپارچه: مطابق شکل ۱-۱ (ب)، ورق علاوه بر مرز خارجی دارای k مرز داخلی است. و تنش در تمام نقاط ناحیه‌ی خارج از دایره‌ای که همه‌ی k مرز داخلی ورق را احاطه می‌کند غیر یکنواخت می‌باشد.

۳. ورق نامحدود چندپارچه: مطابق شکل ۱-۱ (ج)، ورق دارای مرز خارجی در بی‌نهایت و k مرز داخلی است و تنش در بی‌نهایت مقداری محدود و یکنواخت باقی می‌ماند.



(آ) ورق محدود (ب) ورق محدود با چند گشودگی (ج) ورق بی‌نهایت با چند گشودگی

شکل ۱-۱ دسته‌بندی ورق به صورت ناحیه‌ی محدود و نامحدود [۲]

۲-۲-۱ دیدگاه مادی

۱. ورق همگن و همسانگرد: خواص مکانیکی ماده‌ی ورق، در تمام نقاط و در تمام جهتها یکسان می‌باشد.

۲. ورق همگن و ناهمسانگرد: خواص مکانیکی ماده‌ی ورق، در نقاط مختلف یکسان است؛ ولی در هر نقطه از ماده در جهتهای مختلف یکسان نیست.

۳. ورق ناهمگن و همسانگرد: خواص مکانیکی ماده‌ی ورق، در نقاط مختلف یکسان نیست؛ ولی در هر نقطه، در جهتهای مختلف یکسان است.

۴. ورق ناهمگن و ناهمسانگرد: خواص مکانیکی ماده‌ی ورق، در نقاط مختلف و در جهتهای مختلف یکسان نیست [۳].

۱-۳ تئوری‌های تحلیل ورق‌ها

۱-۳-۱ تئوری کلاسیک خیز کوچک ورق نازک^۱

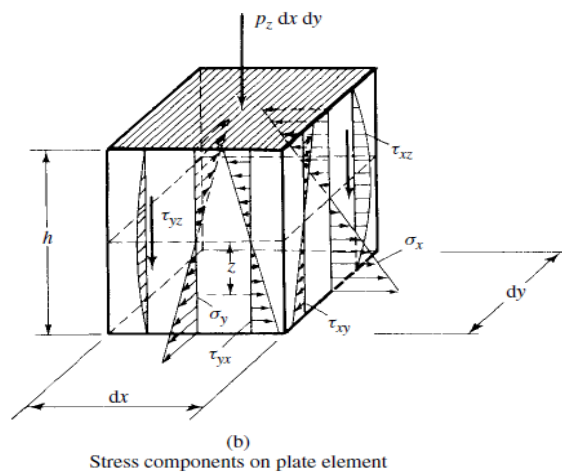
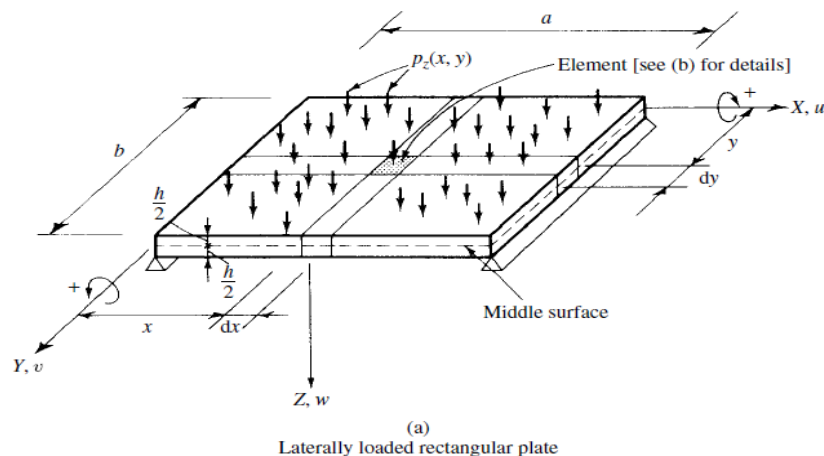
در این تئوری برای ساده‌سازی، از فرض‌های پایه‌ای زیر جهت به‌دست آوردن معادلات حاکم بر ورق استفاده می‌شود.

- ۱- جنس ورق همگن و همسانگرد است و مدول الاستیسیته آن از قانون هوک پیروی می‌کند.
- ۲- ورق در حالت اولیه صاف است.
- ۳- صفحه‌ی میانی ورق در هنگام خمش بدون کرنش باقی می‌ماند.
- ۴- ضخامت در کل ورق ثابت و نسبت به دو بعد دیگر کوچک است؛ بدین معنا که بزرگی ابعاد ورق بیش از 20 برابر ضخامت آن است.
- ۵- تغییر شکل ورق در جهت ضخامت (خیز ورق) در برابر ضخامت آن کوچک است. به‌طوری‌که بزرگ‌ترین مقدار خیز برابر $\frac{1}{20}$ ضخامت است. در این صورت در محدوده‌ی تئوری تغییر شکل کوچک شمرده می‌شود.
- ۶- شیب خیز در صفحه‌ی میانی، در مقایسه با یک کوچک است.
- ۷- صفحه‌ی عمود بر صفحه‌ی میانی، قبل و بعد از تغییر شکل صفحه‌ی میانی، همچنان صاف و عمود بر صفحه‌ی میانی باقی می‌ماند. این شرط بدین معناست که مؤلفه‌های کرنشی γ_{yz} و γ_{xz} قابل صرف‌نظر کردن هستند. در نتیجه خیز ورق به‌طور عمده با کرنش‌های خمشی همراه است. کرنش عمودی ϵ_z نیز قابل صرف‌نظر کردن است.
- ۸- از تنش نرمال در جهت ضخامت می‌توان صرف‌نظر کرد.

¹ Classical Theory of Thin Plates with Small-Deflection

اگر ورقى تحت بار عمود بر سطح قرار گیرد، اگرچه در عمل با یک مسأله‌ی سه‌بعدى روبه‌رو هستیم؛ ولی با استفاده از فرض‌های بالا، این مسأله به یک مسأله‌ی دوبعدى تبدیل می‌شود. بسیاری از آزمایش‌های انجام شده توسط محققین در گذشته بر روی نمونه‌های کوچک و بزرگ از ورق نازک، درستی فرض‌های فوق را اثبات می‌کند. در شکل ۲-۱ یک المان مستطیلی از ورق نازک در دستگاه مختصات کارتزین نشان داده شده است.

برای یک ورق مربعی استفاده از دستگاه مختصات کارتزین مناسب است (شکل ۲-۱).



شکل ۲-۱ شماتیک یک ورق نازک مستطیلی در مختصات کارتزین [۳]

نیروهای داخلی و خارجی، تنش‌ها و جابه‌جایی‌های u ، v و w در حالتی که هم جهت با محورهای اصلی دستگاه مختصات باشند، به صورت مثبت فرض می‌شوند. در این تئوری اثبات می‌شود، که معادله‌ی حاکم بر خیز ورق با رابطه‌ی (۱-۱) بیان می‌شود [۳].

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P_z(x,y)}{D} \quad (1-1)$$

که در آن P_z بارگسترده بر واحد سطح ورق در جهت محور z است (شکل ۱-۲). w خیز ورق و D صلبیت خمشی است که در تیرها برابر EI می‌باشد.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2-1)$$

در اینجا E مدول الاستیسیته^۱، ν نسبت پواسون^۲ و h ضخامت ورق است.

همچنین با استفاده از عملگر دوبعدی لاپلاسین

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} \quad (3-1)$$

می‌توان معادله‌ی (۱-۱) را به صورت زیر نوشت.

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = P_z(x,y) \quad (4-1)$$

۱-۴ مقدمه‌ای بر مواد ناهمگن

۱-۴-۱ تاریخچه‌ی مواد ناهمگن

مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوافضا،

¹ Elasticity Modulus

² Poisson's Ratio

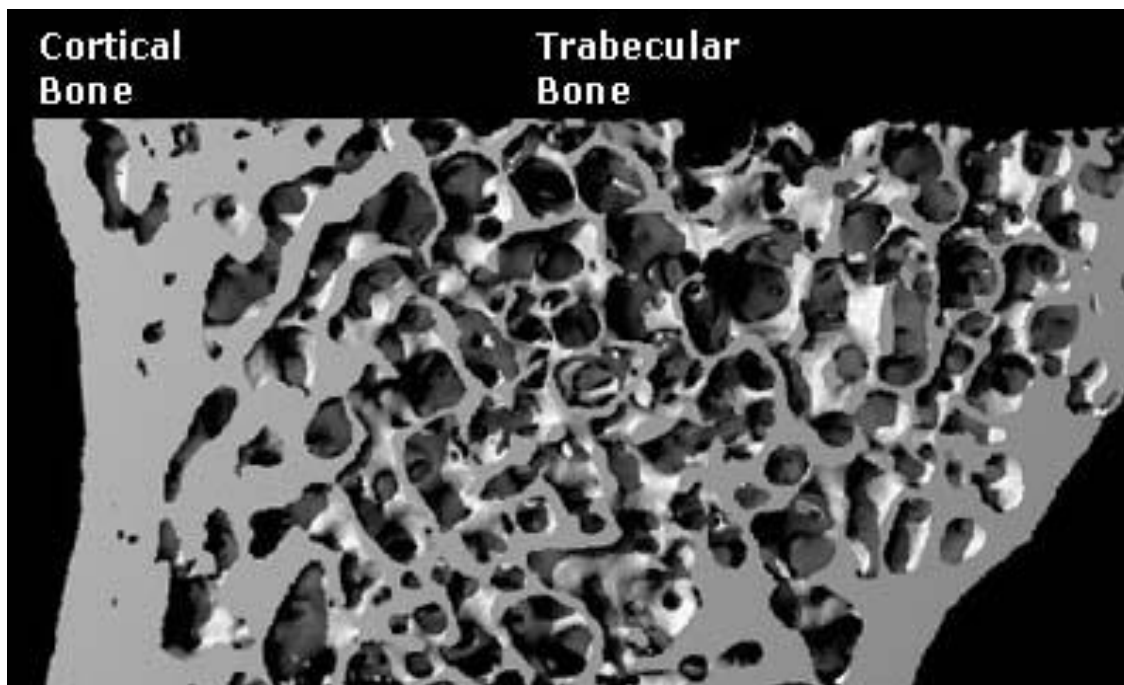
نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند. بنابراین دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند؛ که از موادی جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها) در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهم‌ساز در دیدگاه ماکروسکوپی به وجود می‌آیند، که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری توأم مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهم‌سانگرد هستند، اما از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهم‌سانگرد محسوب می‌شوند.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آن‌هاست، که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به‌ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی‌ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص^۱ در ساختار ارگانسیم‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به‌عنوان مثال، استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد؛ از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد؛ تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این‌رو تغییرات خواص به‌صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. این گونه مواد که خصوصیات آن تحت یک تابع ریاضی به‌صورت تدریجی تغییر می‌کند، مواد FG یا مواد ناهمگن، نامیده می‌شوند [۴].

مفهوم اولیه‌ی مواد ناهمگن توسط نینو^۲ و همکارانش در سال ۱۹۸۴ در سازمان هوافضای ژاپن مطرح گردید و از سال ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید آن، در این کشور شروع شد. مرحله‌ی اول پروژه ملی (فناوری گسترش مواد متغیر تابع) طی سال‌های ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد [۴].

^۱ Functionally Graded Materials (FGM)

^۲ Niino



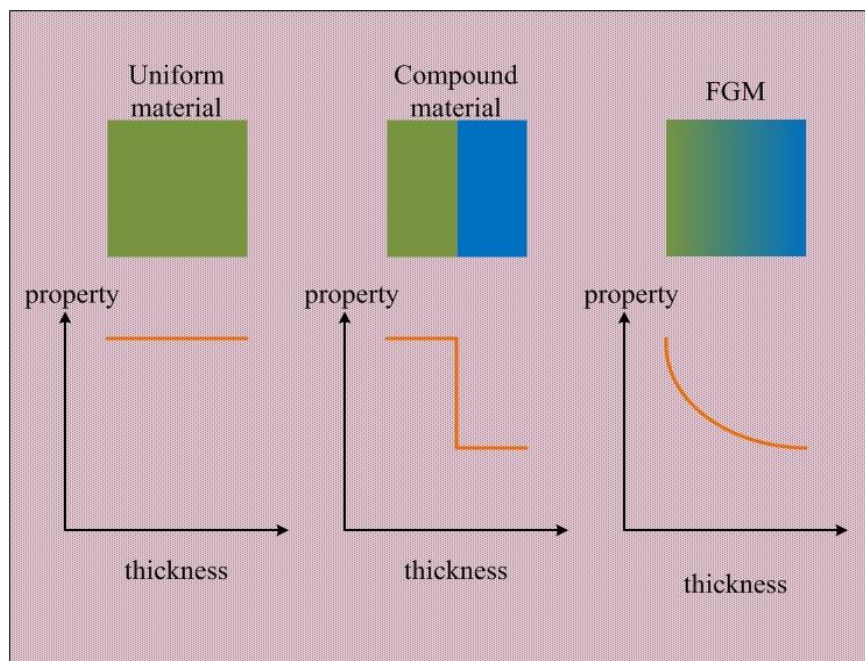
شکل ۳-۱ نمای مقطع استخوان

در این پروژه، سه گروه: ساخت، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء شود. پس از دست‌یابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلی‌متر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در سال ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند.

مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در سال ۱۹۹۰-۹۱ انجام شد، که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلی‌متر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلی‌متر

برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد. دومین سمپوزیوم جهانی مواد متغیر تابعی در سال ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به‌ویژه تحلیل سازه‌هایی از این جنس، فراگیر شد. مواد ناهمگن تابعی در مقایسه با مواد همگن و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها) دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر می‌باشند:

- ۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا.
- ۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا.
- ۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های این مواد، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود، که به کمک مواد ناهمگن می‌توان آثار نامطلوب تمرکز تنش را به‌صورت چشم‌گیری کاهش داد.
- ۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد ناهمگن است.
- ۵- اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به‌صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد ناهمگن، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.
- ۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد ناهمگن، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به‌عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد ناهمگن، به‌دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند؛ که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل ۱-۴ مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد همسانگرد، کامپوزیت و ناهمگن را نشان می‌دهد [۴].



شکل ۴-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف

۲-۴-۱ مدل سازی ریاضی مواد ناهمگن

مطابق توضیحات داده شده، خواص مکانیکی در مواد ناهمگن به صورت تدریجی و پیوسته تغییر می کند.

این توابع به صورت عمده از این قرارند [۴].

الف) توزیع توانی

$$P(r) = P_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{n_p} = P_i \bar{r}^{n_p} \quad (5-1)$$

ب) توزیع نمایی

$$P(r) = P_i e^{n_p \left(\frac{r}{r_i} - 1 \right)} = P_i e^{n_p (\bar{r} - 1)} \quad (6-1)$$

ج) توزیع کسر حجمی^۱

$$P(r) = (P_o - P_i) \left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^{n_p} + P_i = (P_o - P_i) \left(\frac{\bar{r} - 1}{k - 1} \right)^{n_p} + P_i \quad (7-1)$$

در روابط فوق r_o ، r_i به ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و P_r_o ، P_r_i خاصیت ماده به ترتیب در لایه‌ی داخلی و خارجی جسم می‌باشد، که می‌توانند خاصیت مکانیکی، حرارتی و الکتریکی از قبیل: نسبت پواسون، مدول الاستیسیته، چگالی^۲، ضریب هدایت حرارتی^۳، ضریب انبساط خطی حرارتی^۴ باشند. n_p در روابط فوق ثابت ناهمگنی خاصیت است؛ جز رابطه‌ی (۱-۱۱) که ثابت ناهمگنی فقط می‌تواند مقادیر حقیقی مثبت را اختیار کند؛ در سایر روابط (۱-۱۲) و (۱-۱۳) مقادیر حقیقی منفی را نیز می‌تواند اختیار کند. $n_p = 0$ در کلیه‌ی توابع، نشان‌دهنده‌ی مواد همگن است، همچنین \bar{r} نسبت شعاع به شعاع داخلی و k نسبت شعاع خارجی به داخلی می‌باشد.

۱-۵ پیشینه‌ی تحقیق

ورق‌ها به دلیل کاربرد وسیع در صنایع مختلف از اهمیت بسیاری برخوردار هستند. تنوع کاربرد، بسته به نیاز، وجود انواع شیارها و گشودگی‌ها با ابعاد و اشکال مختلف را در ورق‌ها می‌طلبد. از جمله این موارد، می‌توان به گشودگی درها و پنجره‌ها در بدنه‌ی هواپیماها و زیردریایی‌ها، محل اتصال فشارسنج‌ها و دماسنج‌ها در بدنه‌ی کوره‌ها، محل اتصال دو ورق به همدیگر توسط پیچ‌ها و پرچ‌ها، وجود سوراخ‌هایی در پره‌های توربین‌ها جهت جریان یافتن سیال خنک‌کننده در آنها و... را اشاره کرد. وجود گشودگی‌ها در جسم، باعث به وجود آمدن تمرکز تنش در اطراف گشودگی می‌شود. با کمک طراحی صحیح جنس و هندسه قطعه می‌توان مقدار تمرکز تنش را کاهش داد، که دستیابی به طرحی بهینه و توانایی مقابله با شکست‌های

¹ Volume Fraction

² Density

³ Heat Conduction Coefficient

⁴ Thermal Linear Expansion Coefficient

مکانیکی نیازمند دانستن اطلاعات دقیق در مورد نحوه‌ی توزیع تنش در اطراف گشودگی است. از این رو بررسی و محاسبه‌ی مقدار و نحوه‌ی توزیع تنش در اطراف گشودگی‌ها، برای طراحی و بهینه‌سازی ورق بسیار مهم است.

در مورد بررسی تنش صفحات همسانگرد و ناهمسانگرد دارای گشودگی از روش‌های گوناگون اعم از تجربی، عددی و تحلیلی استفاده شده است. به‌کارگیری روش متغیر مختلط در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته دوبعدی، اولین بار توسط موشخلی‌شوایی [۵] برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه شد. کاربردهایی از روش ارائه شده توسط وی در مطالعات ساوین [۶] بر روی ورق‌های همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف و تحت کشش دیده می‌شود. همچنین ساوین برای ورق‌های ناهمسانگرد با گشودگی بیضوی و دایروی، مطالعاتی را انجام داد. توسعه‌ی کامل روش موشخلی‌شوایی به مسائل الاستیسیته دوبعدی مواد ناهمسانگرد توسط اشلبای [۷]، اشترو [۸] و لخنیتسکی [۹] انجام شد. موارد ذکر شده در بالا از کارهای اولیه‌ی انجام شده در زمینه‌ی بارگذاری مکانیکی هستند. اما فلورنس و گودیر [۱۰] اولین تحلیل حرارتی در ورق‌های حاوی گشودگی را با کمک روش متغیر مختلط انجام دادند. آنها تنش حرارتی به‌وجودآمده در ورق نامحدود حاوی گشودگی بیضی‌گون و دایروی را به کمک پتانسیل‌های مختلط بررسی کردند. سپس رائو و آریمان [۱۱] با استفاده از روش الاستیسیته‌ی دوبعدی توزیع دما و تنش غشائی را در ورق محدود همگن حاوی گشودگی دایروی عایق، تحت جریان حرارتی یکنواخت بررسی نمودند. آنها در تحقیق خود شرایط مرزی لبه‌های بیرونی ورق را با استفاده از روش حداقل تطابق نقاط مرزی به‌دست آوردند. مک فال و همکاران [۱۲] آنالیز حرارتی ورق حاوی گشودگی تقویت‌شده را انجام دادند. آنها با استفاده از روش الاستیسیته‌ی صفحه‌ای یک جواب دقیق را برای مسأله‌ی خود ارائه کردند. چن [۱۳] با استفاده از نتایج فلورنس و گودیر، مسأله‌ی مورد مطالعه‌ی آنها را برای ورق ارتوتروپیک حل و بررسی کرد. بعدها پژوهشگران

متعددی با استفاده از روابط ارائه شده توسط مراجع [۷-۱۰] به مطالعه‌ی صفحات محدود و نامحدود ناهمسانگرد دارای گشودگی پرداختند [۱۴-۱۸].

از سال ۱۹۹۲ به بعد، حضور تحقیقات مختلف و سمینارها و کنفرانس‌هایی با محوریت این مواد ناهمگن هر ساله بیشتر می‌شد. تحقیق بر روی این نوع از ورق‌ها در زمینه‌های مختلف صورت گرفته است. ژانگ و همکارانش [۱۹] به حلّی دقیق برای محاسبه‌ی تنش حرارتی در یک ورق نامحدود ناهمگن دارای گشودگی دایروی پرداختند. در تحقیق آنها، خواص مواد و دمای اعمالی در جهت شعاعی تغییر می‌کرد. در مقاله‌ای یانگ و همکارانش [۲۰] به تحلیل تنش دینامیکی یک ورق از جنس مواد ناهمگن با گشودگی دایروی پرداختند. آنها از روش متغیرهای مختلط، توزیع تنش دینامیکی ورق ناهمگن را که خواص ماده در جهت شعاعی تغییر می‌کرد؛ به دست آوردند. آنها دریافتند، که توزیع تنش دینامیکی اطراف گشودگی دایروی به‌طور چشمگیری به انتخاب تابع مناسب برای تغییر خواص مواد وابسته است. یانگ^۱ و همکارانش [۲۱] برای اولین بار حل نیمه‌تحلیلی را برای ورق‌ها با مواد تابعی تحت بار جانبی و در ورق محدود FG ارائه کردند. پن^۲ و همکاران [۲۲]، آنالیز تنش ورق محدود مستطیلی دارای گشودگی مستطیلی را بررسی کردند. آنها با استفاده از روش اصلاح‌شده‌ی متغیر مختلط، توابع تنش را حدس زدند. عامری و همکاران [۲۳] با استفاده از روش متغیر مختلط تمرکز تنش به‌وجود آمده در ورق FG با گشودگی دایروی را تحت بارگذاری‌های مختلف درون صفحه‌ای بررسی کردند.

در سال‌های اخیر نیز تحقیقات متعددی در زمینه‌ی آنالیز حرارتی ورق‌های FG صورت گرفته است. ماتسونگا [۲۴] جابه‌جایی و تنش بوجود آمده در ورق ساخته شده از مواد FG، تحت بارگذاری‌های هم‌زمان

¹ Yang

² Pan

مکانیکی و حرارتی را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالای دوبعدی مورد بررسی قرار داده است. اوتاوا^۱ و تانیگاوا [۲۵] تنش حرارتی ناشی از بارگذاری حرارتی متغیر با زمان را در یک ورق مستطیلی FG مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش‌های لاپلاس و تغییرات محدود کسینوسی برای تحلیل تنش استفاده کردند. کورسون و همکاران [۲۶] تنش الاستیک ایجادشده در دیسک‌های توخالی FG را تحت فشار یکنواخت داخلی و بارگذاری حرارتی پایا، مورد مطالعه قرار دادند. شریعت و اسلامی [۲۷] کمانش حرارتی صفحات مستطیلی ساخته‌شده از مواد FG را با نقص هندسی مورد مطالعه قرار دادند. ژائو و همکاران [۲۸] تحلیل کمانش حرارتی و مکانیکی ورق‌های ساخته‌شده از مواد FG با سوراخ مربعی و دایروی را انجام داده‌اند. چارنساک^۲ و همکاران [۲۹] از یک روش اجزای محدود مرتبه بالا برای آنالیز تنش حرارتی ایجاد شده در مواد FG تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی پایا در اشکال هندسی دلخواه مانند صفحه، مخازن تحت فشار و... استفاده کردند. آن‌ها این تحلیل را با کمک تئوری الاستیسیته‌ی صفحه‌ای انجام دادند. ژانگ و همکاران [۳۰] پس‌کمانش حرارتی صفحه‌های مستطیلی ساخته‌شده از مواد FG را که روی بستر الاستیک قرار گرفته‌اند، بررسی کردند. حسینی و همکاران [۳۱] با استفاده از یک روش محاسباتی برگرفته شده از روش اجزای محدود گسترش‌یافته، آنالیز شکست مواد FG و ارتوتروپیک را تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی انجام دادند. لانه [۳۲] کمانش ورق مستطیلی ضخیم از جنس مواد FG را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند. در مورد تمرکز تنش ورق‌های ناهمگن حاوی گشودگی، تحقیقات بسیار کمی صورت گرفته است. کوبایر و همکارانش [۳۳] با استفاده از شکل‌بندی اجزای محدود ایزوپارامتریک، تأثیر ناهمگنی خواص مواد را بر روی ضریب تمرکز تنش در ورق‌های ناهمگن حاوی گشودگی دایروی بررسی کردند. ورق مورد بحث آنها تحت کشش تک‌محوره بود. نتایج تحقیقات آنها نشان داد؛

¹ ootao

² Chareonsuk

وقتی که مدول یانگ با دور شدن از مرکز گشودگی افزایش می‌یابد؛ تمرکز تنش کاهش می‌یابد. در تحقیق مذکور تابع مورد استفاده برای نشان دادن تغییر خواص، تابعی توانی بود. کاو و همکارانش [۳۴] از روش اجزای محدود، ورق تابعی با هندسه‌های مختلف از قبیل ورق بیضوی، دایروی و چندضلعی دارای گشودگی-هایی به شکل‌های گوناگون را مورد بررسی قرار دادند. با توجه به کاربرد مواد ناهمگن به‌عنوان موادی مقاوم در برابر تغییرات زیاد دما، تحلیل تنش حرارتی ورق‌های حاوی گشودگی مورد توجه محققان بوده است.

محمدی [۳۵] ضریب تمرکز تنش در اطراف گشودگی دایروی در ورق نامحدود ناهمگن را مورد مطالعه قرار داد. تغییر خواص مکانیکی ورق از قبیل مدول الاستیسیته و نسبت پواسون، در جهت شعاعی در نظر گرفته شد. وی حلی تحلیلی را برای محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش در ورقی تحت کشش یکنواخت دومحوره و بارگذاری برشی خالص ارائه کرد. همچنین تأثیر تغییر خواص مکانیکی بر تمرکز تنش در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت. یانگ و همکارانش [۳۶ و ۳۷] به بررسی تنش دوبعدی یک ورق ناهمگن محدود حاوی گشودگی دایروی و تحت بارگذاری یکنواخت، پرداختند. آنها از روش متغیر مختلط و استفاده از تابع تنش ایری برای حل خود کمک گرفتند. نتایج برای شرایط مختلف بارگذاری، خواص مواد و اندازه‌های مختلف ورق ارائه شد. آنها نشان دادند، که تمرکز تنش در ورق محدود در مقایسه با ورق نامحدود در شرایط یکسان افزایش می‌یابد و با انتخاب صحیح تابع خواص ماده، از قبیل مدول الاستیک در مواد ناهمگن، می‌توان کاهش چشم‌گیری را در تمرکز تنش شاهد بود. اشرفی و همکاران [۳۸]، پاسخ ورق ناهمگن با گشودگی دایروی را به بارگذاری دومحوره، در حالت سه‌بعدی از روش المان مرزی مدرج^۱ مورد مطالعه قرار دادند.

خواص مکانیکی در جهت طولی و در امتداد ضخامت به‌صورت تابعی توانی تغییر می‌کرد. از نقاط قوت این مقاله بررسی اثر کوپلینگ خمش-کشش در نتیجه‌ی توزیع نامتقارن خواص مواد، تحت بارگذاری دومحوره بود. در این تحقیق، تأثیر فاصله گشودگی از مرز و نسبت بار، بر توزیع تنش مورد بررسی قرار گرفت. در

¹ Graded Boundary Element

زمینه‌ی تحلیل ترک در ورق ناهمگن نیز تحقیقات مختصری انجام شده است. برای مواد ناهمگن ضرایب شدت تنش به گرادیان ماده وابسته است. در این گونه مواد، عموماً هر دو مود برشی و عمودی در جلوی نوک ترک به خاطر نامتقارن بودن خواص ماده وجود خواهد داشت. برای مشخص کردن پاسخ این مواد، نیاز به اطلاعات لازم در مورد چقرمگی شکست است؛ که برای دستیابی به این هدف، نیاز به محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش برای نمونه‌ها، تحت بارگذاری‌های متغیر است. دلاله^۱ و همکارانش [۳۹] و نودا^۲ و همکارانش [۴۰] ترک محدود در ورق ناهمگن تحت بارهای مکانیکی و حرارتی را تحلیل کردند. پی^۳ [۴۱] در تحقیقی طبیعت میدان نوک ترک را مورد بررسی قرار داد. او نتیجه گرفت، که ضریب شدت تنش مود دو نقش مهمی در شکست ورق‌های ناهمگن دارد. ژانگ^۴ و همکارانش [۴۲] به تحلیل مسأله ترک در ورق ناهمگن با توزیع دلخواه خواص مواد پرداختند. آیهان^۵ [۴۳] ضرایب شدت تنش در موده‌های ترکیبی را در حالت سه‌بعدی در مواد ناهمگن، با استفاده از روش اجزای محدود، مورد بررسی قرار داد. با توجه به کاربرد مواد ناهمگن به‌عنوان موادی مقاوم، در برابر تغییرات زیاد دما، تحلیل تنش حرارتی این نوع ورق‌ها حاوی گشودگی، مورد توجه محققان بوده است. کاردناس‌گارسیا^۶ و همکارانش [۴۴] به محاسبه‌ی کرنش‌ها و تنش‌های محیطی و شعاعی و جابجایی شعاعی اطراف گشودگی دایروی برای ورق از جنس مواد ناهمگن و تحت بارگذاری حرارتی پرداختند.

1 Delale

2 Noda

3 Pei

4 Zhong

5 Ayhanhdkni

6 Cardenas-Garcia

۱-۶ جمع‌بندی

در این فصل به صورت مختصر تئوری‌های مختلف در زمینه‌ی ورق‌ها مرور شد. با بیان تعریف و خصوصیات مواد ناهمگن و بررسی پیشینه‌ی تحقیقات علمی بر روی ورق‌های ناهمگن این نتیجه حاصل شد، که در زمینه‌ی تمرکز تنش ورق‌های ناهمگن حاوی گشودگی که در آن گشودگی فاقد بار است؛ تحقیقات بسیار کمی انجام شده است. در اتصالات ورق‌های مختلف از طریق پیچ و پرچ معمولاً گشودگی تحت فشار خارجی قرار می‌گیرد. تأثیر بار خارجی در مرز گشودگی بر تحلیل تنش ورق‌های ناهمگن تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. همچنین تحلیل حرارتی توزیع تنش در ورق FG با بارگذاری به صورت اختلاف دمای ثابت تا کنون انجام نشده است. در این تحقیق سعی می‌شود نحوه‌ی توزیع تنش و جابه‌جایی در نقاط اطراف گشودگی دایروی در یک ورق نازک و بلند همسانگرد و ناهمگن با گشودگی دایروی، تحت بارگذاری مکانیکی درون-صفحه‌ای در مرزهای بیرونی و فشار یکنواخت در اطراف گشودگی و یک اختلاف دمای ثابت بین مرز داخلی و بیرونی ورق، تحلیل شود. از توابع پتانسیل مختلط و روش حداقل مربعات خطا در نقاطی با تقسیم‌بندی منظم در مرز برای تحلیل استفاده می‌شود.

در فصل دوم، روابط و معادلات حاکم بر ورق استخراج می‌شوند. همچنین توزیع تنش در اطراف گشودگی در ورق همگن با استفاده از حل پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل سوم تحلیل ورق ناهمگن تحت بار مکانیکی و حرارتی مطالعه خواهد شد. در این فصل دو نوع ورق با جنس ماده‌ی متفاوت مورد بررسی قرار خواهند گرفت. در فصل چهارم برای ورق همگن و ناهمگن علاوه بر بارگذاری درون‌صفحه‌ای، تأثیر فشار در داخل گشودگی بر تمرکز تنش ایجاد شده و جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی بررسی شده و نتایج مورد مطالعه قرار می‌گیرد و در نهایت در فصل پنجم به نتیجه‌گیری و ارائه‌ی پیشنهادها برای تحقیقات آینده پرداخته می‌شود.

فصل ۲ ورق همگن با گشودگی دایروی تحت بارگذاری

مکانیکی و حرارتی

۲-۱ پیش‌گفتار

در ابتدا لازم است فرض‌هایی که برای استخراج معادلات در این فصل استفاده شده‌اند را بیان کنیم:

۱- صفحه‌ی مورد مطالعه نامحدود و نازک در نظر گرفته شده‌است.

۲- جابه‌جایی‌ها کوچک و در محدوده‌ی الاستیک بررسی شده و به‌هیچ‌عنوان اثرات ناحیه‌ی پلاستیک در نظر گرفته نشده‌است.

۳- از اصل جمع آثار^۱، به منظور تحلیل مکانیکی و حرارتی به‌صورت مجزا، استفاده شده‌است. لازم به‌ذکر است که اصل مذکور در مسأله‌ی موردنظر صادق می‌باشد.

۴- از آنجایی که تقریباً در بیشتر مواد مهندسی ضریب پواسون مقداری نزدیک به هم دارد، در این جا نیز ضریب پواسون برخلاف باقی خواص ماده، ثابت در نظر گرفته شده‌است.

در بخش اول این فصل، معادلات حاکم بر ورق بلند همگن با استفاده از روش متغیرهای مختلط در تئوری الاستیسیته استخراج می‌گردند. سپس با توجه به شرایط مرزی ورق و با کمک روش حداقل مربعات خطا در مرز منظم، معادلات مربوط به شرایط مرزی ورق مشخص و تعیین می‌شوند. معادلات برای بخش‌های حرارتی و مکانیکی به‌صورت جداگانه استخراج و نتایج به‌دست‌آمده با توجه به صادق بودن اصل جمع آثار با یکدیگر جمع می‌شوند. تنش صفحه‌ای

در بخش بعد، روند تحلیل عددی با کمک نرم‌افزار اجزای محدود انسیس^۲ بیان و با تعریف یک مسأله، نتایج حاصل از حل تحلیلی انجام شده و تحلیل عددی مربوط به مسأله مقایسه و بررسی خواهند شد.

¹ Super position

² ANSYS

۲-۲ استخراج معادلات تحت بار مکانیکی [۲۳]

مسأله بر پایه‌ی تئوری الاستیسیته یک ورق همسانگرد تحلیل و بررسی خواهد شد. تانسور تنش در هر نقطه از ماده‌ی الاستیک در مسأله‌های دوبعدی همانند ورق نازک، تحت بار درون‌صفحه‌ای، دارای سه مؤلفه‌ی تنش σ_x ، σ_y و τ_{xy} می‌باشد. معادلات تعادل در غیاب نیروهای حجمی برای مسأله‌ی دوبعدی با دو معادله بیان می‌شود، که سه تنش بیان شده باید این دو معادله را ارضا کنند.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1-2)$$

همچنین معادلات سازگاری بر حسب تنش به صورت زیر ساده می‌شوند.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2-2)$$

ساده‌سازی مسأله، با یک‌پارچه کردن این معادلات، با کمک روابط حاکم بین آنها امکان‌پذیر است.

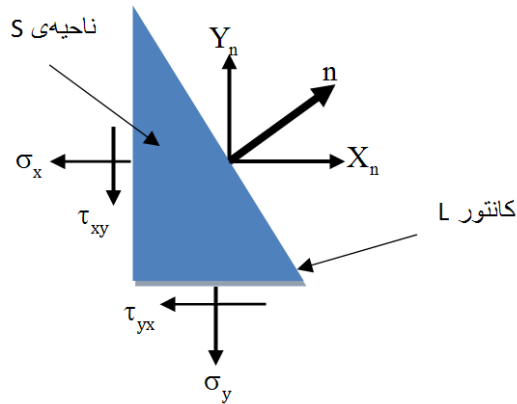
ناحیه S که توسط کانتور L از جسم محدود شده است (شکل ۲-۱)، به صورت دو مسأله‌ی اساسی و تفکیک شده از هم تجزیه می‌شوند. این دو مسأله به ترتیب ارضای شرط مرزی نیرویی و جابه‌جایی در مرز هستند.

برای اولین مسأله اساسی نام برده شده، زمانی که نیروهای خارجی X_n و Y_n به مرزهای خارجی

ناحیه‌ی S از جسم وارد می‌شوند. می‌توان روابط تعادل را به صورت زیر نوشت (شکل ۲-۱).

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(n,x) + \tau_{xy} \cos(n,y) &= X_n \\ \tau_{yx} \cos(n,x) + \sigma_y \cos(n,y) &= Y_n \end{aligned} \quad (3-2)$$

که در اینجا n بردار یکه‌ی عمود بر سطح کانتور L است.



شکل ۱-۲ شماتیک کانتور L [۲۳]

برای مسأله‌ی اساسی دوم، در حالتی که جابه‌جایی برای کانتور L از ناحیه S در نظر گرفته شده باشد. شرایط مرزی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$u = g_1(s), \quad v = g_2(s) \quad (۴-۲)$$

که در اینجا $g_1(s)$ و $g_2(s)$ توابعی هستند، که جابه‌جایی مربوط به نقاط واقع در کانتور L از ناحیه S از جسم را بیان می‌کنند.

با تعریف تابع تنش $U(x,y)$ به صورت زیر:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (۵-۲)$$

و با ترکیب معادلات (۲-۱)، (۲-۲) و (۲-۵) به معادله‌ی بای‌هارمونیک یکتای زیر برخورد می‌کنیم.

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (۶-۲)$$

می‌توان نشان داد که تابع $U(x,y)$ در مرز کانتور برای مسأله‌ی اساسی نوع اول از رابطه‌ی (۲-۷) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_0^s X_n ds + c_1, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\int_0^s Y_n ds + c_2 \quad (۷-۲)$$

در اینجا c_1 و c_2 دو ثابت حقیقی دلخواه هستند؛ که برای یک جسم یک پارچه می‌توانند صفر فرض شوند.

بنابراین مسائل صفحه‌ای تئوری الاستیسیته، به تعریف و تعیین تابع بای‌هارمونیک $U(x,y)$ که شرایط مرزی

کانتور را ارضا می کند (روابط (۲-۴) و (۲-۷))، خلاصه می شود. موشخلی شیولی [۵] نشان داد، که معادله ی (۲-۶) را می توان به صورت زیر حل کرد:

$$U(x,y) = \text{Re}[\bar{z} \varphi_1(z) + \chi_1(z)] \quad (۸-۲)$$

در اینجا Re نشان دهنده ی قسمت حقیقی یک عبارت مختلط است. $\varphi_1(z)$ و $\chi_1(z)$ توابعی تحلیلی از متغیر مختلط $z = x + iy$ است. بنابراین حل مسائل تنش صفحه ای به تعیین دو تابع بای هارمونیک $\varphi_1(z)$ و $\psi_1(z) = \frac{d\chi_1}{dz}$ که بر روی کانتور L شرایط مرزی تعیین شده را ارضا می کنند، محدود می شود. با ارائه ی حل معادله ی (۲-۶) به شکل رابطه ی (۲-۸)، بسط شرایط مرزی به صورت دو تابع $\varphi_1(z)$ و $\psi_1(z)$ امکان پذیر است. برای مسأله ی اساسی نوع اول یا همان رابطه ی (۲-۷)، شکل زیر حاصل می شود:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi_1(z) + z \bar{\varphi}'_1(z) + \bar{\psi}_1(z) = \quad (۹-۲)$$

$$i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + c = f_1 + if_2 + \text{const}$$

اگر مقادیر جابه جایی معلوم باشد؛ می توان به همین روش شرایط مرزی جابه جایی را تعیین نمود [۵]:

$$2G(u+iv) = K\varphi_1(z) - z \bar{\varphi}'_1(z) - \bar{\psi}_1(z) = 2(g_1 + ig_2) \quad \text{on } L. \quad (۱۰-۲)$$

که در اینجا K تابعی از نسبت پواسون می باشد، که در شرایط تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای مقادیرش متفاوت است.

$$K = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{تنش صفحه ای} \\ \frac{3-4\nu}{3-4\nu} & \text{کرنش صفحه ای} \end{cases} \quad (۱۱-۲)$$

که در آن ν نسبت پواسون است. همچنین G مدول برشی و E مدول الاستیسیته می باشد.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۱۲-۲)$$

با ترکیب روابط (۲-۹) و (۲-۱۰) شکل جدیدی برای شرایط مرزی به دست می‌آید [۵].

$$x_1 \varphi_1(z) + z \bar{\varphi}'_1(z) + \bar{\psi}_1(z) = F(z) \quad \text{on } L \quad (۱۳-۲)$$

که در آن برای مسأله‌ی اساسی نوع اول

$$x_1 = 1, \quad F = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \text{const}$$

و برای مسأله‌ی اساسی نوع دوم

$$x_1 = -K \quad F = -2G(g_1 + ig_2)$$

در نظر گرفته می‌شود.

در صورتی که توابع $\varphi_1(z)$ و $\psi_1(z)$ معلوم باشند، با کمک دستگاه معادلات (۲-۱۴) که توسط موشخلی-

شیولی ارائه شد، امکان محاسبه تنش‌های نرمال σ_x و σ_y و تنش برشی τ_{xy} وجود دارد [۶].

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'_1(z) + \bar{\varphi}'_1(z)] = 4\text{Re}(\varphi'_1(z))$$

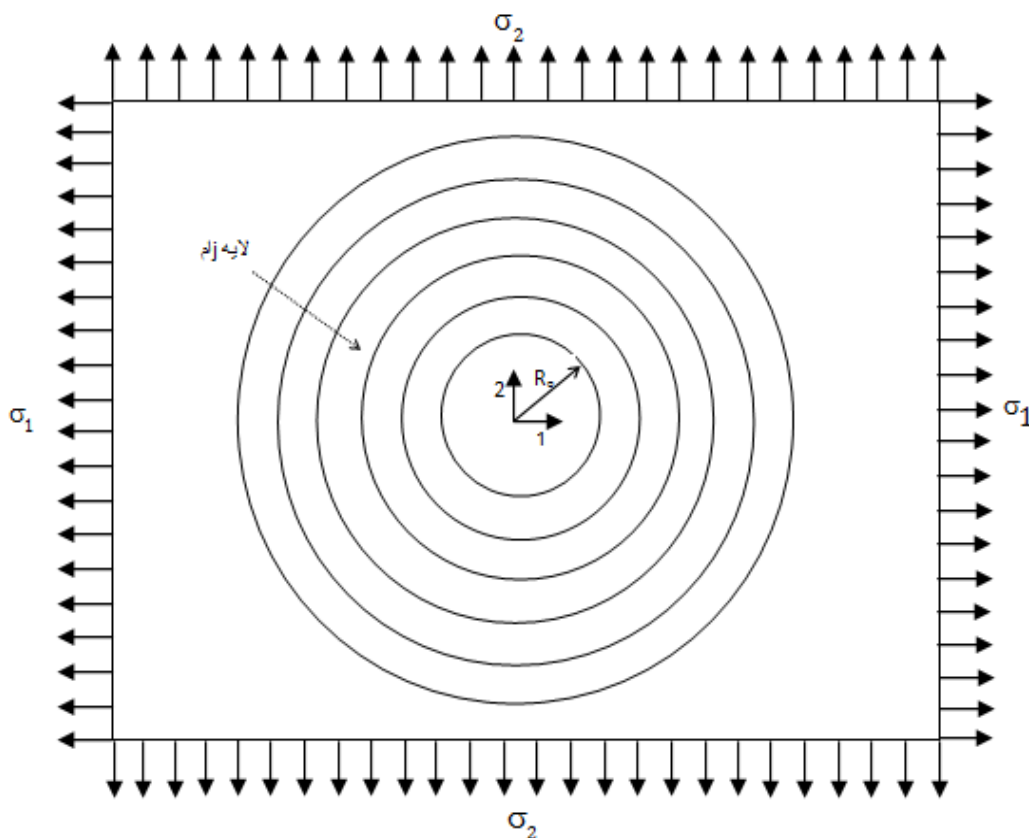
(۱۴-۲)

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''_1(z) + \psi'_1(z)]$$

در این پایان‌نامه مسأله‌ی مورد مطالعه یک ورق بلند با گشودگی دایروی در مرکز آن می‌باشد. تغییرات

خواص مکانیکی (مدول الاستیسیته) در اینجا به صورت شعاعی در نظر گرفته شده است. برای حل این مسأله

همانند شکل ۲-۲، ورق به دیسک‌هایی دایروی با ضخامت یکسان و هم‌مرکز با یکدیگر تقسیم می‌شود.



شکل ۲-۲ شماتیک ورق مورد مطالعه تحت بار دوماحوره [۲۳]

با در نظر گرفتن این نوع تقسیم‌بندی ورق، امکان همگن گرفتن هر یک از دیسک‌ها وجود دارد. پس برای هر دیسک می‌توان روابط حاکم بر ورق را بر طبق فرم رابطه‌ی (۲-۸) نوشت. روند حل به تعیین تابع تنش ایری طبق تعریف موشخلی‌شویلی [۵] به صورت یک سری مختلط با تعداد جملات نامحدود می‌انجامد.

$$\varphi_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^j \left(\frac{z}{R}\right)^k \quad j=1,2,\dots,N \quad (15-2)$$

$$\psi_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^j \left(\frac{z}{R}\right)^k \quad j=1,2,\dots,N \quad (16-2)$$

در اینجا a_k^j و b_k^j ضرایب مجهول جملات توابع پتانسیل در لایه زام می‌باشد. همچنین R یک طول مرجع (که در این‌جا همان شعاع گشودگی است) و z متغیر مکان است. به‌طور کلی برای حل این مسأله،

باید ضرایب مجهول a_k^j و b_k^j به دست آورده شوند. برای انجام حل تحلیلی جملات سری را باید محدود فرض کرد؛ تا تعداد معادلات و مجهولات عددی محدود و معلوم شوند. برای این منظور از M تعداد جمله مثبت و منفی در سری برای حل استفاده خواهد شد.

$$\varphi_j(z) = \sum_{k=-M}^M a_k^j \left(\frac{z}{R}\right)^k \quad j=1,2,\dots,N \quad (17-2)$$

$$\psi_j(z) = \sum_{k=-M}^M b_k^j \left(\frac{z}{R}\right)^k \quad j=1,2,\dots,N \quad (18-2)$$

هدف نهایی به دست آوردن مؤلفه‌های تنش با کمک توابع پتانسیل می‌باشد. برای رسیدن به این هدف نیاز به مشتق مرتبه اول و دوم این دو تابع پتانسیل می‌باشد و خود تابع کاربردی ندارد. به همین دلیل، چون جمله‌ی اول هر سری عددی ثابت است، نیاز به محاسبه‌ی آن نمی‌باشد. از این رو در هر تابع $2M$ جمله و مجهول وجود دارد. در هر لایه دو تابع مستقل وجود دارد $(\varphi(z), \psi(z))$ پس در هر لایه $4M$ مجهول مستقل وجود دارد. همان‌طور که پیشتر بیان شد ورق به N لایه مجزا و دیسکی شکل تقسیم شده است؛ پس در کل ورق، $4MN$ مجهول مستقل وجود دارد؛ که برای تشکیل دستگاه معادلات خطی جهت محاسبه‌ی مجهولات، باید به همین تعداد، معادله‌ی مستقل تشکیل داد.

معادلات لازم از دو روش کلی به دست آورده خواهند شد. روش اول بر پایه‌ی ارضای شرایط مرزی ورق است. چون در مرکز ورق گشودگی دایروی وجود دارد پس مرز ورق به دو دسته تقسیم می‌شود.

۱- مرزهای خارجی که تحت بارگذاری درون صفحه‌ای قرار دارد.

۲- مرز داخلی یا مرز گشودگی دایروی ورق که آزاد از بار است؛ یا تحت بارگذاری فشار یکنواخت قرار دارد.

روش دوم ارضای شرایط تعادل نیرویی و پیوستگی جابه‌جایی در فصل مشترک هر دو لایه مجاور به یکدیگر است. با توجه به این که هر لایه به صورت مستقل از دیگری فرض شده است؛ ارضای این شرطها

برای یک پارچه بودن ورق بسیار مهم هستند. شرط پیوستگی جابه‌جایی و تعادل نیرویی به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$X_n^j = X_n^{j+1}, \quad Y_n^j = Y_n^{j+1} \quad (۱۹-۲)$$

$$u_j = u_{j+1}, \quad v_j = v_{j+1} \quad (۲۰-۲)$$

با قرار دادن روابط (۲-۹) و (۲-۱۰) در روابط (۲-۱۹) و (۲-۲۰) روابط بر حسب توابع پتانسیل نوشته

می‌شوند.

$$\varphi_j(z) + z\bar{\varphi}'_j(z) + \bar{\psi}_j(z) = \varphi_{j+1}(z) + z\bar{\varphi}'_{j+1}(z) + \bar{\psi}_{j+1}(z) \quad (۲۱-۲)$$

$$\frac{1}{G_j} (K\varphi_j(z) - z\bar{\varphi}'_j(z) - \bar{\psi}_j(z)) = \frac{1}{G_{j+1}} (K\varphi_{j+1}(z) - z\bar{\varphi}'_{j+1}(z) - \bar{\psi}_{j+1}(z)) \quad (۲۲-۲)$$

هر طرف از روابط (۲-۲۱) و (۲-۲۲) را با کمک فرض (۲-۱۷) و (۲-۱۸) بر حسب ضرایب مجهول

سری‌ها نوشته می‌شوند.

$$\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(z) + \bar{\psi}(z) = \sum_{k=1}^M \left(a_{-k} \left(\frac{R}{z} \right)^k + a_k \left(\frac{z}{R} \right)^k - \frac{z.k.\bar{a}_{-k}}{z} \left(\frac{R}{z} \right)^k + z.k.\bar{a}_k \left(\frac{z}{R^k} \right)^{k-1} + \bar{b}_{-k} \left(\frac{R}{z} \right)^k + \bar{b}_k \left(\frac{z}{R} \right)^k \right) \quad (۲۳-۲)$$

با توجه به تعداد زیاد جملات حاضر در رابطه بالا نیاز به ساده‌سازی و مرتب‌سازی آن وجود دارد. به این

دلیل با در نظر گرفتن $z = re^{i\theta}$ و جایگزینی آن در رابطه‌ی (۲-۲۳) به دنبال ساده‌سازی این رابطه و تجزیه

آن به معادلاتی ساده و مستقل از θ هستیم.

$$\begin{aligned} \varphi(z) + z\bar{\varphi}'(z) + \bar{\psi}(z) &= \sum_{k=1}^M \left(a_{-k} \left(\frac{R}{re^{i\theta}} \right)^k + a_k \left(\frac{re^{i\theta}}{R} \right)^k - \frac{re^{i\theta}.k.\bar{a}_{-k}}{re^{-i\theta}} \left(\frac{R}{re^{-i\theta}} \right)^k \right. \\ &\quad \left. + re^{i\theta}.k.\bar{a}_k \left(\frac{(re^{-i\theta})^{k-1}}{R^k} \right) + \bar{b}_{-k} \left(\frac{R}{re^{-i\theta}} \right)^k + \bar{b}_k \left(\frac{re^{-i\theta}}{R} \right)^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^M \left(a_{-k} r^{-k} R^k e^{-i\theta} + a_k r^k R^{-k} e^{i\theta} - k\bar{a}_{-k} r^{-k} R^k e^{(k+2)i\theta} \right. \\ &\quad \left. + k\bar{a}_k r^k R^{-k} e^{(-k+2)i\theta} + \bar{b}_{-k} r^{-k} R^k e^{+ki\theta} + \bar{b}_k r^k R^k e^{-ki\theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^M \left(a_{-k} r^{-k} R^k e^{-i\theta} + a_k r^k R^{-k} e^{i\theta} - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)} r^{-(k-2)} R^{(k-2)} e^{ki\theta} \right. \\
&\quad \left. + (k+2) \bar{a}_{k+2} r^{k+2} R^{-(k+2)} e^{-ki\theta} + \bar{b}_{-k} r^{-k} R^k e^{+ki\theta} + \bar{b}_k r^k R^k e^{-ki\theta} \right) \\
\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(z) + \bar{\psi}(z) &= \sum_{k=1}^M \left(\left(a_{-k} r^{-k} R^k + (k+2) \bar{a}_{k+2} r^{k+2} R^{-(k+2)} + \bar{b}_k r^k R^k \right) e^{-ik\theta} \right. \\
&\quad \left. + \left(a_k r^k R^{-k} - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)} r^{-(k-2)} R^{(k-2)} + \bar{b}_{-k} r^{-k} R^k \right) e^{ik\theta} \right) \tag{۲۴-۲}
\end{aligned}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۲۴) در (۲-۲۱)، امکان تشکیل معادلاتی مستقل به وجود می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^M \left(\left(a_{-k}^j r^{-k} R^k + (k+2) \bar{a}_{k+2}^j r^{k+2} R^{-(k+2)} + \bar{b}_k^j r^k R^k \right) e^{-ik\theta} \right. \\
&\quad \left. + \left(a_k^j r^k R^{-k} - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)}^j r^{-(k-2)} R^{(k-2)} + \bar{b}_{-k}^j r^{-k} R^k \right) e^{ik\theta} \right) = \tag{۲۵-۲} \\
&\sum_{k=1}^M \left(\left(a_{-k}^{j+1} r^{-k} R^k + (k+2) \bar{a}_{k+2}^{j+1} r^{k+2} R^{-(k+2)} + \bar{b}_k^{j+1} r^k R^k \right) e^{-ik\theta} \right. \\
&\quad \left. + \left(a_k^{j+1} r^k R^{-k} - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)}^{j+1} r^{-(k-2)} R^{(k-2)} + \bar{b}_{-k}^{j+1} r^{-k} R^k \right) e^{ik\theta} \right)
\end{aligned}$$

با برابر قرار دادن ضرایب جملات نمایی از دو طرف معادله‌ی (۲۵،۲) تعداد ۲M معادله‌ی مستقل نسبت

به یکدیگر و بر حسب ضرایب مجهول $a_k^j, b_k^j, a_k^{j+1}, b_k^{j+1}$ به دست خواهند آمد.

$$a_{-k}^j \left(\frac{R}{r} \right)^k + (k+2) \bar{a}_{k+2}^j \left(\frac{r}{R} \right)^{k+2} + \bar{b}_k^j \left(\frac{r}{R} \right)^k = \tag{۲۶-۲}$$

$$\begin{aligned}
&a_{-k}^{j+1} \left(\frac{R}{r} \right)^k + (k+2) \bar{a}_{k+2}^{j+1} \left(\frac{r}{R} \right)^{k+2} + \bar{b}_k^{j+1} \left(\frac{r}{R} \right)^k \\
&a_k^j \left(\frac{r}{R} \right)^k - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)}^j \left(\frac{R}{r} \right)^{(k-2)} + \bar{b}_{-k}^j \left(\frac{R}{r} \right)^k = \tag{۲۷-۲}
\end{aligned}$$

$$a_k^{j+1} \left(\frac{r}{R} \right)^k - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)}^{j+1} \left(\frac{R}{r} \right)^{(k-2)} + \bar{b}_{-k}^{j+1} \left(\frac{R}{r} \right)^k$$

که در معادلات بالا $k=1,2,\dots,M$ است.

با تکرار روند استخراج معادلات (۲-۲۶) و (۲-۲۷) از رابطه‌ی (۲-۲۱)، برای رابطه‌ی (۲-۲۲) معادلاتی

مشابه برای ارضای شرط پیوستگی جابه‌جایی در فصل مشترک هر دو لایه قابل استخراج است.

$$\frac{1}{G_j} \left(K_j \left(\frac{R}{r} \right)^k a_{-k}^j - (k+2) \left(\frac{r}{R} \right)^{k+2} \bar{a}_{k+2}^j - \left(\frac{r}{R} \right)^k \bar{b}_k^j \right) = \quad (28-2)$$

$$\frac{1}{G_{j+1}} \left(K_{j+1} \left(\frac{R}{r} \right)^k a_{-k}^{j+1} - (k+2) \left(\frac{r}{R} \right)^{k+2} \bar{a}_{k+2}^{j+1} - \left(\frac{r}{R} \right)^k \bar{b}_k^{j+1} \right) \\ \frac{1}{G_j} \left[K_j \left(\frac{r}{R} \right)^k a_k^j + (k-2) \left(\frac{R}{r} \right)^{(k-2)} \bar{a}_{-(k-2)}^j - \bar{b}_{-k}^j \left(\frac{R}{r} \right)^k \right] = \quad (29-2)$$

$$\frac{1}{G_{j+1}} \left[K_{j+1} \left(\frac{r}{R} \right)^k a_k^{j+1} + (k-2) \left(\frac{R}{r} \right)^{(k-2)} \bar{a}_{-(k-2)}^{j+1} - \bar{b}_{-k}^{j+1} \left(\frac{R}{r} \right)^k \right]$$

که در اینجا $k=1,2,..,M$ است. همان طور که گفته شد، روابط (2-21) و (2-22) برای فصل مشترک هر دو لایه از ورق تعریف شده است. بنابراین معادلات (2-26)، (2-27)، (2-28)، و (2-29) نیز برای فصل مشترک دو لایه‌ی i ام و $(i+1)$ ام تعریف شده است. پس برای N لایه $(N-1)$ فصل مشترک وجود دارد و در مجموع $4M(N-1)$ معادله‌ی مستقل از این روش حاصل می‌شود. با توجه با تعداد کل مجهول‌ها که از قبل به تعداد $4MN$ محاسبه شد؛ به $4M$ معادله‌ی دیگر جهت تشکیل دستگاه معادلات خطی نیاز هست. این تعداد از معادلات از روش اول، که استفاده از شرایط مرزی ورق است، استخراج خواهند شد. با توجه به مرزهای ورق که در قبل بررسی شد، لایه‌ی اول و لایه‌ی آخر می‌بایست شرایط مرزی را ارضا کنند. روش مورد استفاده در این مرحله روش حداقل مربعات خطا در نقاطی با تقسیم‌بندی منظم در مرز است. در این روش ابتدا تعدادی نقطه در فواصل مساوی در کل مرزهای ورق فرض می‌شوند. برای بهبود در دقت جواب بهتر است، تعداد نقاط از تعداد مجهولات کمتر نباشد. سپس با توجه به نوع بارگذاری، مقادیر تنش در مرزها بررسی می‌شوند. با استفاده از رابطه‌های (2-14) تنش‌های نرمال و برشی بر حسب توابع پتانسیل و ضرایب مجهول آن محاسبه می‌شوند.

$$\sigma_x = \text{Re} [2\phi'(z) - \bar{z}\phi''(z) - \psi'(z)] \\ \sigma_y = \text{Re} [2\phi'(z) + \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \\ \tau_{xy} = \text{Im} [\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \quad (30-2)$$

$$\sigma_x = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^M \left[a_{-k} \left(-2R^k k z^{-(k+1)} - R^k \bar{z} k (k+1) z^{-(k+2)} \right) + a_k \left(2R^{-k} k z^{(k-1)} - R^{-k} \bar{z} k (k-1) z^{(k-2)} \right) + b_{-k} R^k k z^{-(k+1)} - b_k R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right] \quad (31-2)$$

$$\sigma_y = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^M \left[a_{-k} \left(-2R^k k z^{-(k+1)} + R^k \bar{z} k (k+1) z^{-(k+2)} \right) + a_k \left(2R^{-k} k z^{(k-1)} + R^{-k} \bar{z} k (k-1) z^{(k-2)} \right) - b_{-k} R^k k z^{-(k+1)} + b_k R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right] \quad (32-2)$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Im} \left[\sum_{k=1}^M \left[a_{-k} R^k \bar{z} k (k+1) z^{-(k+2)} + a_k R^{-k} \bar{z} k (k-1) z^{(k-2)} - b_{-k} R^k k z^{-(k+1)} + b_k R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right] \quad (33-2)$$

برای مرز گشودگی، تنش‌ها باید به صورت قطبی بررسی شوند. با کمک صورت قطبی رابطه‌ی (۲-۱۴) از

کتاب ساوین [۶] داریم

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)] \quad (34-2)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta} [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]$$

که در آن $z = re^{i\alpha}$ است. با تکرار روند صورت گرفته از رابطه‌ی (۲-۱۴) برای استخراج تنش‌ها در

مختصات دکارتی، از رابطه‌ی (۲-۳۴) تنش‌های شعاعی، محیطی و برشی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\sigma_r = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^M \left[a_{-k} \left(-2R^k k z^{-(k+1)} - e^{2i\theta} R^k \bar{z} k (k+1) z^{-(k+2)} \right) + a_k \left(2R^{-k} k z^{(k-1)} - e^{2i\theta} R^{-k} \bar{z} k (k-1) z^{(k-2)} \right) + b_{-k} e^{2i\theta} R^k k z^{-(k+1)} - b_k e^{2i\theta} R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right] \quad (35-2)$$

$$\sigma_\theta = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^M \left[a_{-k} \left(-2R^k k z^{-(k+1)} + e^{2i\theta} R^k \bar{z} k (k+1) z^{-(k+2)} \right) + a_k \left(2R^{-k} k z^{(k-1)} + e^{2i\theta} R^{-k} \bar{z} k (k-1) z^{(k-2)} \right) - b_{-k} e^{2i\theta} R^k k z^{-(k+1)} + b_k e^{2i\theta} R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right] \quad (36-2)$$

$$\tau_{r\theta} = \operatorname{Im} \left[e^{2i\theta} \sum_{k=1}^M \left[a_{-k} R^k \bar{z} k (k+1) z^{-(k+2)} + a_k R^{-k} \bar{z} k (k-1) z^{(k-2)} - b_{-k} R^k k z^{-(k+1)} + b_k R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right] \quad (37-2)$$

اگر فرض شود تنش نرمال وارد شده در مرز $x = \pm \frac{L}{2}$ برابر σ_n و تنش برشی در آن مرز برابر τ_n باشد.

به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$r_n^2 = (\sigma_x - \sigma_n)^2 + (\tau_{xy} - \tau_n)^2 \quad (38-2)$$

به طور مشابه برای مرزهای $y = \pm \frac{L}{2}$ و $r = a$ عباراتی همانند عبارت (۲-۳۸) تشکیل داده می‌شود.

$$r_n^2 = (\sigma_y - \sigma_n)^2 + (\tau_{xy} - \tau_n)^2 \quad (39-2)$$

$$r_n^2 = (\sigma_r - \sigma_n)^2 + (\tau_{r\theta} - \tau_n)^2 \quad (40-2)$$

و در نهایت:

$$r_n^2 = (\sigma_r - \sigma_n)^2 + (\tau_{r\theta} - \tau_n)^2 + (\sigma_y - \sigma_n)^2 + (\tau_{xy} - \tau_n)^2 + (\sigma_x - \sigma_n)^2 + (\tau_{xy} - \tau_n)^2 \quad (2-41)$$

در هر مرز نقاطی با فواصل یکسان در نظر گرفته شده است، که با قرار دادن مختصات این نقاط در روابط (۲-۳۵) تا (۲-۳۷) و تکمیل رابطه‌ی (۲-۴۱) عبارت Δ تشکیل داده خواهد شد.

$$\Delta = \sum_{n=1}^P r_n^2 \quad n=1,2,\dots,P \quad (42-2)$$

n شماره‌ی نقطه‌ی مورد بررسی از مرز و P تعداد کل نقاط مورد بررسی در این روش است.

نقاط واقع در مرزهای خارجی ورق با توابع پتانسیل لایه‌ی آخر و نقاط واقع در مرز داخلی ورق یا همان گشودگی دایروی با توابع پتانسیل لایه اول ورق در ارتباط هستند. از این رو با تشکیل عبارت Δ از رابطه‌ی (۲-۳۸) این عبارت تابعی ضمنی از ضرایب مجهول توابع پتانسیل لایه اول و آخر ورق خواهد شد. با گرفتن مشتق ضمنی از Δ بر حسب هر یک از ضرایب مجهول، معادلات لازم برای به دست آوردن این ضرایب حاصل خواهند شد.

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_k^j} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial b_k^j} = 0 \quad j=1,2 \quad \& \quad k=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm M \quad (43-2)$$

همان طور که در قبل بیان شد، تعداد $4M$ معادله از شرایط مرزی ورق لازم است، که از معادلات (۲-۴۱)، استخراج می‌شوند. با انتخاب دسته متغیرهای a_k^j و b_k^j مختلف برای تشکیل معادلات متفاوت این

نتیجه حاصل شد که، پاسخ حاصل از حل این معادلات مستقل از انتخاب متغیرها است.

در نهایت با داشتن این تعداد معادله امکان محاسبه‌ی ضرایب مجهول توابع پتانسیل امکان پذیر می‌شوند.

این نکته را باید متذکر شد که اعداد مختلفی که برای تعداد جملات سری از ۱ تا ۱۵ در نظر گرفته شد و با

بررسی دقت نتایج، در نهایت $m=3$ انتخاب شد.

۳-۲ استخراج معادلات تحت بار حرارتی

در این بخش معادلات تنش و جابه‌جایی ورق بلند حاوی گشودگی تحت بار حرارتی استخراج می‌شوند. همان‌طور که می‌دانیم در حالت پایا، توزیع دما در یک جسم الاستیک همگن در غیاب نیروهای حجمی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (۲-۴۴)$$

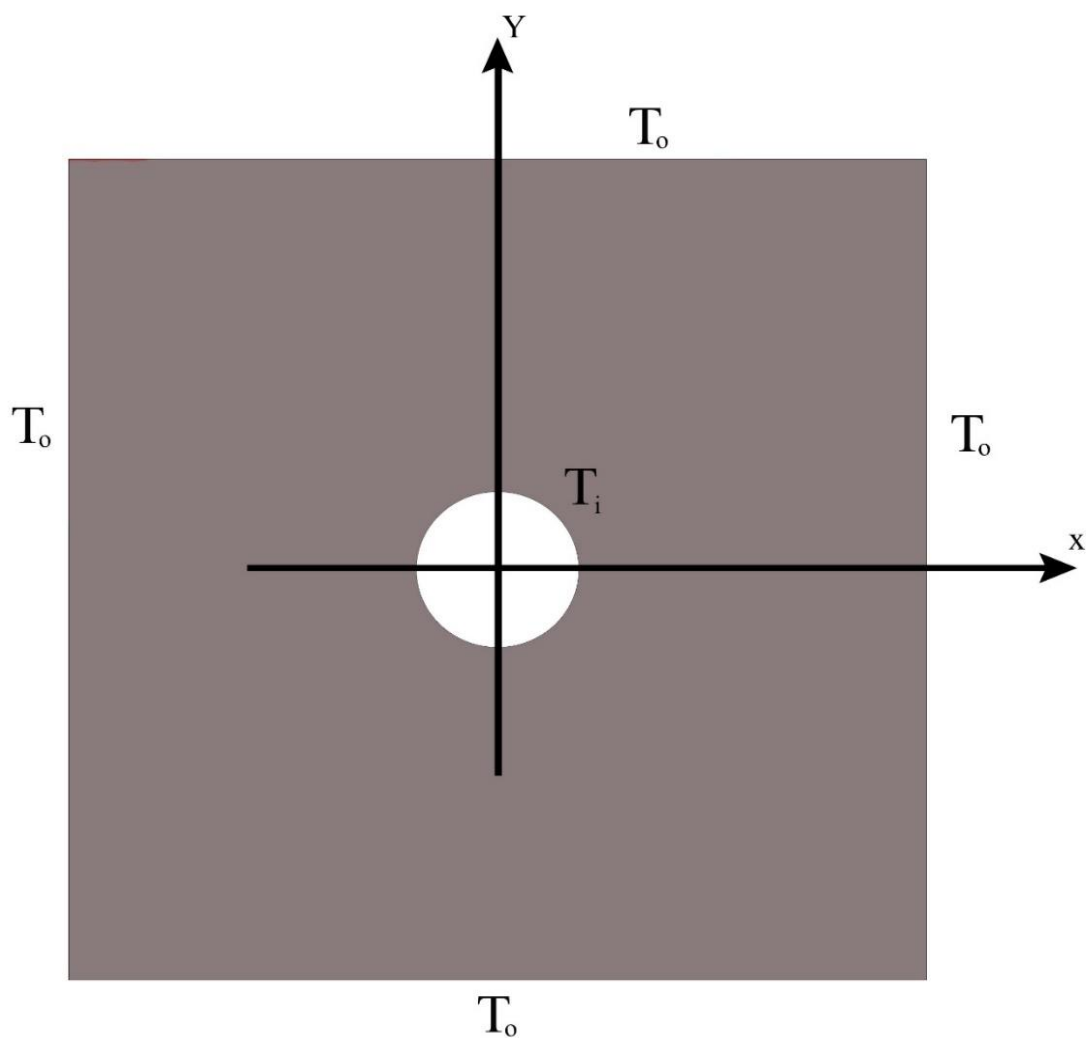
از آن‌جایی که گشودگی ورق دایره‌ای است، بنابراین بهتر است این معادله در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل شود. شکل معادله‌ی بالا در این دستگاه به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (۲-۴۵)$$

حل عمومی معادله‌ی فوق به صورت زیر می‌باشد [۱۱ و ۱۲]:

$$T(r, \theta) = \frac{1}{2} (a_0 + b_0 \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{-n}) \cos n\theta + (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n}) \sin n\theta \quad (۲-۴۶)$$

همان‌طور که در شکل صفحه‌ی بعد مشاهده می‌شود ورق مورد مطالعه از نظر هندسه و بارگذاری دارای تقارن نسبت به محور X می‌باشد. بنابراین ترم سینوسی رابطه‌ی توزیع دما حذف شده و تنها ترم کسینوسی باقی می‌ماند. ورق نسبت به محور Y نیز دارای تقارن است اما از آنجایی که مرزهای بیرونی ورق مربعی بوده و شعاع نقاط مختلف آن با هم متفاوت است، لذا از حذف جمله‌ی کسینوسی پرهیز می‌شود تا بتوان تاثیر نقاط مختلف مرزهای بیرونی را نیز داخل تابع توزیع دما آورده و دقت جواب را افزایش داد.



شکل ۳-۲ بارگذاری و شرایط مرزی حرارتی در ورق

بنابراین معادله‌ی (۲-۴۶) به رابطه‌ی زیر کاهش می‌یابد [۱۱، ۱۲ و ۱۴]:

$$T(r, \theta) = T_i + C_0 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{-n}) \cos n\theta \quad (۲-۴۷)$$

که T_i دمای مرز گشودگی و R شعاع آن می‌باشد. می‌توان نشان داد از آنجایی که در مرز گشودگی

تغییرات دما نسبت به جهت θ صفر می‌باشد [۱۱ و ۱۲]:

$$\left. \frac{dT}{d\theta} \right|_{r=R} = 0 \Rightarrow d_n = -c_n R^{2n} \quad (2-48)$$

ضرایب c_0, c_n با استفاده از روش تطابق نقاط^۱، در نقاطی با فواصل مساوی در مرزهای بیرونی به دست می‌آیند. البته لازم به ذکر است که باید تعداد جملات سری در رابطه‌ی توزیع دما را محدود و به تعداد m جمله در نظر گرفت که در بخش مطالعه‌ی موردی به تعداد این جملات اشاره خواهد شد.

اکنون از روش متغیر مختلط برای حل مسأله استفاده می‌کنیم. برای حالت پایا، ابتدا یک دمای مختلط تعریف می‌شود [۲]:

$$T^*(z) = T + iT_I \quad (2-49)$$

که در آن دمای واقعی T بخش حقیقی T^* بوده و T_I مزدوج T است. روابط تنش و جابه‌جایی به شکل زیر ارائه می‌شوند:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4\text{Re}[\varphi'(z)] \quad (2-50)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{xy} = 2e^{i\theta} [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (2-51)$$

$$2G(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left([k\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] + 2G\alpha^*(z) \right) \quad (2-52)$$

دمای مختلط برای مسأله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^*(z) = T_I + C_0 \ln\left(\frac{z}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (z^n + R^{2n}z^{-n})c_n \quad (2-53)$$

علاوه بر این تابع دمای انتگرال‌گیری شده به صورت زیر تعریف می‌شود:

^۱ Point-matching technique

$$t^*(z) = \int T^*(z) dz = C_0 z \ln\left(\frac{z}{R}\right) + (T_i - C_0)z + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} z^{n+1} - \frac{R^{2n}}{n-1} z^{-n+1}\right) C_n \quad (2-54)$$

اگر گشودگی در ورق وجود نداشته باشد، توزیع دما یک میدان جابه‌جایی پیوسته را در ورق ایجاد می‌کند، اما وجود گشودگی باعث ایجاد یک ناپیوستگی در میدان جابه‌جایی به شکل زیر می‌شود:

$$(u + iv)_2 - (u + iv)_1 = \alpha^* t^*(z) \quad (2-55)$$

که نقاط ۱ و ۲ در واقع نقاط ابتدا و انتهای مرز گشودگی دایروی $\{R, 0\}$ ، $\{R, 2\pi\}$ ، u و v به ترتیب جابه‌جایی در جهت X و Y بوده و:

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha & \text{plane stress} \\ (1 + \nu)\alpha & \text{plane strain} \end{cases}$$

با محاسبه انتگرال رابطه‌ی (۲-۵۵) حول یک مرز بسته‌ی C که مرز گشودگی را دربر می‌گیرد نشان داده می‌شود:

$$(u + iv)_2 - (u + iv)_1 = 2\pi i \alpha C_0 R \quad (2-56)$$

با استفاده از روش متغیر مختلط، جابه‌جایی‌ها در یک جامد الاستیک تحت بار حرارتی از رابطه‌ی (۲-۵۲) به دست می‌آیند. بدون حضور بارگذاری مرزی، تنش‌ها و جابه‌جایی‌های هم‌دما با انتخاب توابع پتانسیل به شکل زیر به دست می‌آیند [۱۴]:

$$\varphi(z) = Az \ln(z) + \varphi^*(z) \quad (2-57)$$

$$\psi(z) = \frac{k}{z} + \psi^*(z) \quad (2-58)$$

با جای‌گذاری روابط (۲-۵۷) و (۲-۵۸) در رابطه‌ی (۲-۱۰):

$$\frac{1}{2G} (k\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)})_1^2 = \frac{8\pi iRA}{E} \quad (2-59)$$

برای از بین رفتن ناپیوستگی به وجود آمده در میدان جابه‌جایی، مجموع روابط (2-56) و (2-59) باید برابر

$$A = -\frac{E\alpha c_0}{4} \quad \text{صفر باشد؛ بنابراین:}$$

از آن جایی که در مرزهای بیرونی و درونی ورق نیرو وارد نمی‌شود، شرایط مرزی نیرویی عبارت است از:

$$i(X+iY) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = 0 \quad (2-60)$$

با استفاده از رابطه‌ی بالا و طبق اصل بازتاب شوارتز^۱، پیوستگی تحلیلی بین S و S^* را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\varphi(z) = -z\overline{\varphi'\left(\frac{R^2}{z}\right)} - \overline{\psi\left(\frac{R^2}{z}\right)} \quad z \in S^* \quad (2-61)$$

سپس با انعکاس از S^* به S

$$\psi(z) = -\frac{R^2}{z}\overline{\varphi'(z)} - \overline{\varphi\left(\frac{R^2}{z}\right)} \quad z \in S \quad (2-62)$$

این شکل از تابع پتانسیل $\psi(z)$ را در معادله‌ی (2-60) استفاده می‌کنیم. بنابراین شرط مرزی (2-60) را به شکل زیر می‌توان بیان نمود:

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} = \frac{R^2}{z}\overline{\varphi'(z)} + \overline{\varphi\left(\frac{R^2}{z}\right)} \quad (2-63)$$

S ناحیه‌ی بین مرزهای بیرونی و داخلی ورق و S^* مرز روی گشودگی می‌باشد. تابع $\varphi(z)$ را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

^۱ Schwarz reflection principle

$$\varphi(z) = Az \ln(z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n+1} \left(\frac{z}{R}\right)^{2n+1} \quad (2-64)$$

رابطه‌ی (۲-۶۴) را در (۲-۶۳) قرار داده و در نهایت به معادله‌ی پیوستگی زیر می‌رسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n+1} R^{-(2n+1)} \left\{ (2n+1)(r^2 - R^2)z^{-2n-1} + \frac{r^{4n+2} - R^{4n+2}}{z^{-2n+1}} \right\} = \quad (2-65)$$

$$A \left(\frac{r^2(\ln(z) + \ln(\bar{z}) + 1) - R^2(1 + 2\ln R)}{\bar{z}} \right)$$

با استفاده از روش تطابق نقاط ، با جایگزینی $\sum_{n=1}^n$ به جای $\sum_{n=1}^{\infty}$ ، تعداد محدودی نقطه در مرز بیرونی

ورق به فواصل منظم انتخاب کرده و مختصات این نقاط را در معادله‌ی (۲-۶۵) قرار می‌دهیم. دستگاه

معادلات به‌وجودآمده را حل کرده و در نهایت ضرایب C_{2n+1} را به‌دست آورده و تابع $\varphi(z)$ مشخص

می‌شود.

می‌دانیم که مرزهای بیرونی ورق بدون تنش بوده و تنش شعاعی صفر می‌باشد. تابع $\psi(z)$ را همانند

$\varphi(z)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi(z) = \frac{B}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n+1} \left(\frac{z}{R}\right)^{2n+1} \quad (2-66)$$

با استفاده از روابط (۲-۵۰) و (۲-۵۱) تنش شعاعی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_r = \operatorname{Re} \left[2\varphi'(z) - e^{2i\theta} (\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)) \right] =$$

$$\operatorname{Re} \left[\begin{aligned} & 2A(1 + \ln(z)) - \frac{A\bar{z}e^{2i\theta}}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n+1} (2n+1)(2-2n)R^{-2n-1}z^{2n} \\ & - e^{2i\theta} \left(-\frac{B}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{R} \right) D_{2n+1} \left(\frac{z}{R} \right)^{2n} \right) \end{aligned} \right] \quad (2-67)$$

با صفر قرار دادن طرف اول معادله‌ی بالا به معادله‌ی پیوستگی (۲-۶۸) می‌رسیم:

$$\frac{B}{r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)D_{2n+1} R^{-(2n+1)} r^{2n} \cos(2n+2)\theta = \quad (2-68)$$

$$-A(1 + 2 \ln r) - \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n+1} R^{-(2n+1)} (2-2n)(2n+1) r^{2n} \cos 2n\theta$$

تابع $\psi(Z)$ را در رابطه‌ی (۲-۶۸) جای‌گذاری می‌کنیم. سپس به‌طور مجدد با استفاده از روش تطابق نقاط، در تعداد محدودی نقاط منظم انتخاب شده روی مرزهای بیرونی ورق، ثابت‌های D_{2n+1} نیز به‌دست می‌آیند که در نهایت تابع $\psi(Z)$ نیز مشخص می‌شود. ثابت‌های C_{2n+1} و D_{2n+1} در انتهای تحقیق در یک جدول پیوست شده‌اند. با مشخص شدن توابع پتانسیل در نهایت تنش شعاعی، تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی روی مرز گشودگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\sigma_r = \operatorname{Re} \left[2\varphi'(z) - e^{2i\theta} (\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)) \right] =$$

$$A(1+2\ln r) + \frac{B}{r^2} + \sum_1^n C_{2n+1} (2-2n)(2n+1) R^{-2n-1} r^{2n} \cos 2n\theta \quad (2-69)$$

$$- \sum_1^n D_{2n+1} (2n+1) R^{-2n-1} r^{2n} \cos(2n+2)\theta$$

$$\sigma_\theta = \operatorname{Re} \left[2\varphi'(z) + e^{2i\theta} (\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)) \right] =$$

$$A(3+2\ln r) - \frac{B}{r^2} + \sum_1^n C_{2n+1} (2n+2)(2n+1) R^{-2n-1} r^{2n} \cos 2n\theta \quad (2-70)$$

$$+ \sum_1^n D_{2n+1} (2n+1) R^{-2n-1} r^{2n} \cos(2n+2)\theta$$

$$u_r = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\theta}}{2G} \left(K\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \right) + \alpha^*(z) \right) =$$

$$\frac{1}{2G} \left(KArlnr - rA(1+\ln r) - \frac{B}{r} \right) + \quad (2-71)$$

$$\alpha \left(C_0 r \ln \left(\frac{r}{R} \right) + (T_1 - C_0) r \right) + \frac{1}{2G} \sum_1^n r^{2n} \cos 2n\theta \left((1 - (2n+1)r) C_{2n+1} - D_{2n+1} \cos \theta \right)$$

۲-۴ حل تحلیلی موجود در مراجع

توزیع تنش محیطی و شعاعی پیش از این با استفاده از روش الاستیسیته‌ی کلاسیک به دست آمده که

افرادی هم‌چون والتر دی. پیلکی [۴۶] و مارتین اچ. ساد [۲] در کتاب‌های خود به آن اشاره کرده‌اند.

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2}\right) \cos(2\theta) + \quad (72-2)$$

$$\frac{E\alpha}{r^2} \left\{ \frac{r^2 - r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_o} T(\rho) \rho d\rho - \int_{r_i}^r T(\rho) \rho d\rho \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1) \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos(2\theta) + \quad (73-2)$$

$$\frac{E\alpha}{r^2} \left\{ \frac{r^2 + r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_o} T(\rho) \rho d\rho + \int_{r_i}^r T(\rho) \rho d\rho - Tr^2 \right\}$$

در این جا a شعاع گشودگی و σ_1 و σ_2 به ترتیب تنش در مرزهای $x = \pm \frac{L}{2}$ و $y = \pm \frac{L}{2}$ و E و α

به ترتیب مدول یانگ و ضریب انبساط حرارتی و T توزیع دما در ورق می باشد. می باشد.

۵-۲ تحلیل اجزای محدود

در طول تاریخ مهندسی، گاهی اوقات به دست آوردن یک جواب دقیق برای مسأله بسیار سخت و مشکل بوده تا حدی که در برخی موارد باعث توقف انجام تحقیق خاصی می شده است. واقعیت این است که رسیدن به حل دقیق بسیار وابسته به شرایط مرزی مسأله از جمله هندسه، بارگذاری، قیدها و ... بوده است. برخی از مسائل با شرایط مرزی و هندسه‌ی خاص دارای حل دقیق می باشند. ولی واقعیت این است که بسیاری از مسائل فاقد راه حل تحلیلی و دقیق می باشند؛ که با معرفی روش‌های جدید حل عددی، در این شرایط راه مناسبی برای به دست آوردن یک حل ریاضی برای این دسته مسائل به وجود آمد. روش اجزای محدود نیز یکی از این روش‌های حل عددی است. ویژگی آن نسبت به دیگر روش‌ها در دسته بندی محدوده‌ی جسم به محدوده‌های ساده تر به نام المان‌های محدود، است. این عمل باعث می شود، که هندسه‌های سخت و پیچیده به یک مجموعه هندسه‌های ساده تر که حل آن آسان می باشد، تبدیل شود. هر المان از نقاطی که

متعلق به کلّ جسم است، تشکیل می‌شود. المان‌های مختلفی برای شرایط هندسی و بارگذاری متفاوت در تحلیل‌ها استفاده می‌شوند، که برای مثال می‌توان به دو دسته زیر که در این تحلیل کاربرد دارند، اشاره کرد.

۱. المان تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای: برای حالتی که مسأله مورد نظر دارای هندسه دوبعدی بوده

که بارگذاری درون صفحه‌ای داشته باشد. این المان جابه‌جایی درون صفحه‌ای جسم را بررسی می‌کند.

۲. المان خمش صفحه‌ای: این المان برای حالتی که ورق تحت بارگذاری خارج صفحه است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این المان برای پوسته‌ها و ورق‌های فضایی مناسب است، که علاوه بر خیز، شیب در دو جهت محورهای اصلی ورق را محاسبه می‌کند.

پس همان‌طور که گفته شد، روش اجزای محدود یک روش حلّ عددی می‌باشد. این روش برای مسائل پیچیده، که امکان به‌دست آوردن حلّ دقیق یا حلّ تحلیلی در آن امکان‌پذیر نیست، گزینه مناسبی است. در این تحقیق از روش اجزای محدود برای راستی سنجی حلّ تحلیلی استفاده شده است؛ ولی در شرایطی که حلّ دقیق یا حلّ تحلیلی مورد تأیید در مراجع برای مسأله وجود دارد؛ مانند کشش ساده‌ی ورق بلند همگن با گشودگی دایروی، مقایسه‌ی حلّ تحلیلی و اجزای محدود می‌تواند معیاری برای درستی تحلیل عددی باشد. این مقایسه، در این تحقیق انجام شده که با دقت قابل قبولی روند حلّ اجزای محدود مورد تأیید قرار گرفت.

۲-۶ معرفی نرم‌افزار اجزای محدود انسیس

هنگامی که هندسه‌ی مسأله پیچیده و بزرگ باشد، استفاده از روش اجزای محدود به صورت دستی بسیار سخت و طاقت‌فرسا بوده و به‌طور قطع منشأ ایجاد خطا خواهد بود. به همین دلیل در سال‌های اخیر با پیشرفت روزافزون تکنولوژی، استفاده از رایانه برای انجام محاسبات زیاد مورد استقبال قرار گرفت و نرم‌افزارهای مختلفی بر پایه‌ی زبان‌های برنامه‌نویسی وارد بازار شدند. نرم‌افزار انسیس، یکی از نرم‌افزارهای قدرتمند مهندسی در زمینه‌ی تحلیل اجسام با استفاده از روش المان محدود می‌باشد. این نرم‌افزار اولین بار

در سال ۱۹۷۰ توسط جان سوانسون^۱ ساخته شد. هدف اصلی او از ساخت این نرم افزار، توسعه‌ی روش المان محدود و استفاده از آن در مسائل دارای قابلیت شبیه‌سازی مانند تحلیل‌های استاتیکی، دینامیکی و حرارتی بود. این نرم افزار به مرور زمان و با پیشرفت تکنولوژی روزبه‌روز قدرت بیشتری در تحلیل‌های متفاوت پیدا کرده که از جمله‌ی آن می‌توان به تحلیل الکترونیکی و مسائل مربوط به مهندسی برق، تحلیل مسائل دینامیک گذرا و لحظه‌ای مانند ضربه و انفجار، تحلیل جریان‌های سیالاتی و حرارتی و بسیاری موارد دیگر اشاره کرد. این شرکت در سال ۲۰۰۳ نرم افزارهای قدرتمندی هم‌چون ICEM، AutoDyna، CFX، Fluent را به منظور افزایش توان تحلیل خود خریداری کرده و زیرمجموعه‌ی خود قرارداد داده‌است. اخیراً نیز با اضافه شدن نرم افزار آباکوس به زیرمجموعه‌ی انسیس قدرت تحلیل این نرم افزار المان محدود بیشتر از پیش شده است.

۲-۷ روند تحلیل عددی

۲-۷-۱ هندسه ورق

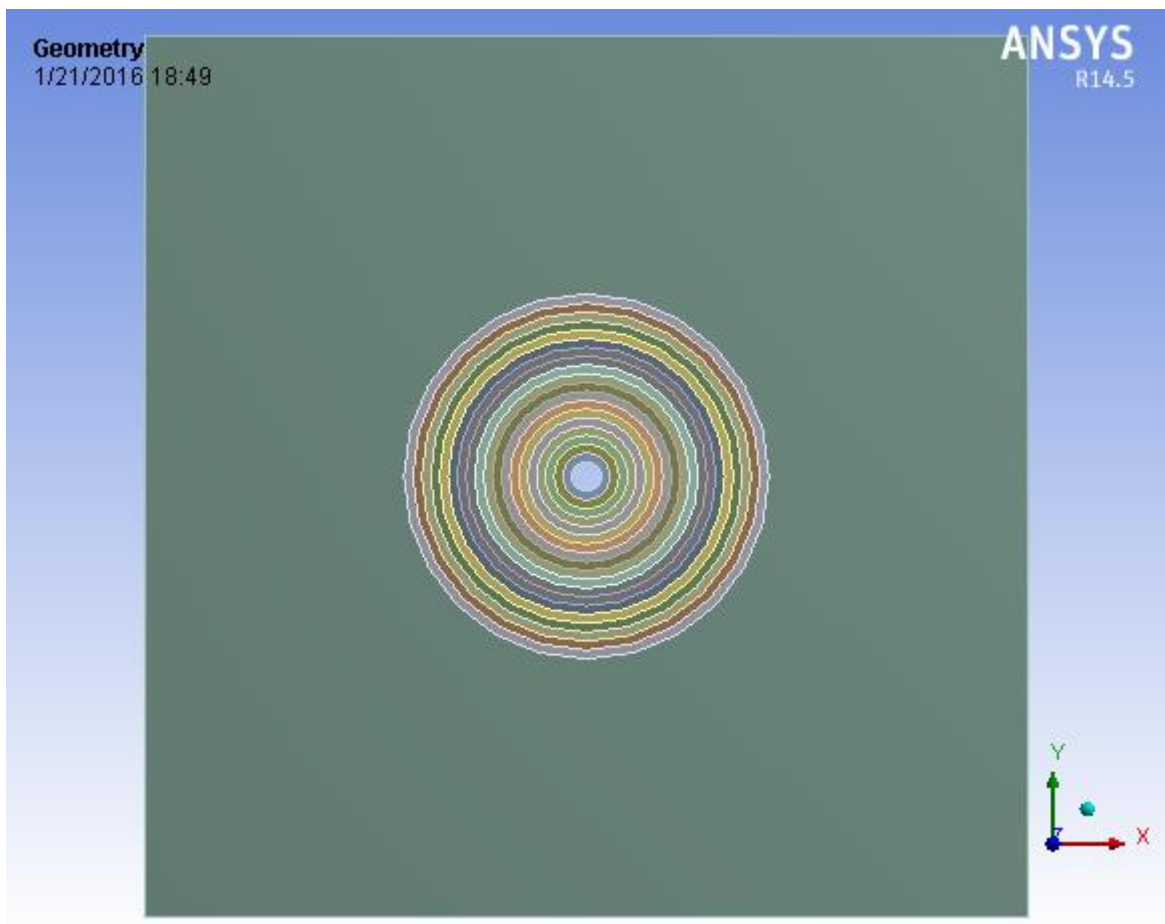
در این تحلیل، ورق بلند مربعی با نسبت ابعادی $\frac{D}{2a} = \frac{1}{30}$ انتخاب و مدل شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود:

$$\frac{2a}{D} = 30 > 20$$

بنابراین می‌توان با دقت خوبی ورق را بلند در نظر گرفت. ورق مورد نظر در محیط Static Structural و به صورت دوبعدی مدل شده‌است. انتخاب صحیح محیط تحلیل نقش زیادی در درستی نتایج حاصل از آن دارد. در نرم افزار انسیس، به دلیل قابلیت‌های ذکر شده، تحلیل مسأله در محیط استاتیکی بسیار روان و سریع تر از تحلیل دینامیکی انجام می‌شود.

¹ John A. Swanson

همان‌طور که بیان شد، ورق همگن به‌صورت رینگ‌هایی هم‌مرکز با گشودگی، در نظر گرفته شده‌است. در این تحلیل بارگذاری حرارتی نیز وجود دارد و قاعداً نحوه‌ی مدل‌سازی کمی با حالت بارگذاری صرفاً مکانیکی تفاوت دارد. زمانی که تنها بار مکانیکی بر ورق اعمال می‌شود با مدل کردن ورق به تعداد ۱۰ لایه، جواب‌ها دقت مطلوبی را دارا می‌شوند [۲۳]؛ اما چون در این مسأله بار مکانیکی-حرارتی به ورق اعمال می‌شود، همان‌طور که در شکل صفحه‌ی بعد نیز قابل مشاهده است، ورق با تعداد ۲۰ رینگ هم‌مرکز با گشودگی مدل می‌شود که قطر هر لایه ۶ mm انتخاب شده‌است. در تحلیل ورق همگن، بدون لایه‌لایه کردن ورق، مشاهده می‌شود که تنش‌های محیطی و شعاعی در فاصله‌ی $r=10R_0$ (شعاع گشودگی) مقداری برابر با ۹۷٪ تنش اعمال‌شده در مرزها دارند [۴۶]؛ بنابراین تنها ناحیه‌ی ناهمگنی به‌صورت حلقه‌های هم‌مرکز مدل شده‌اند.



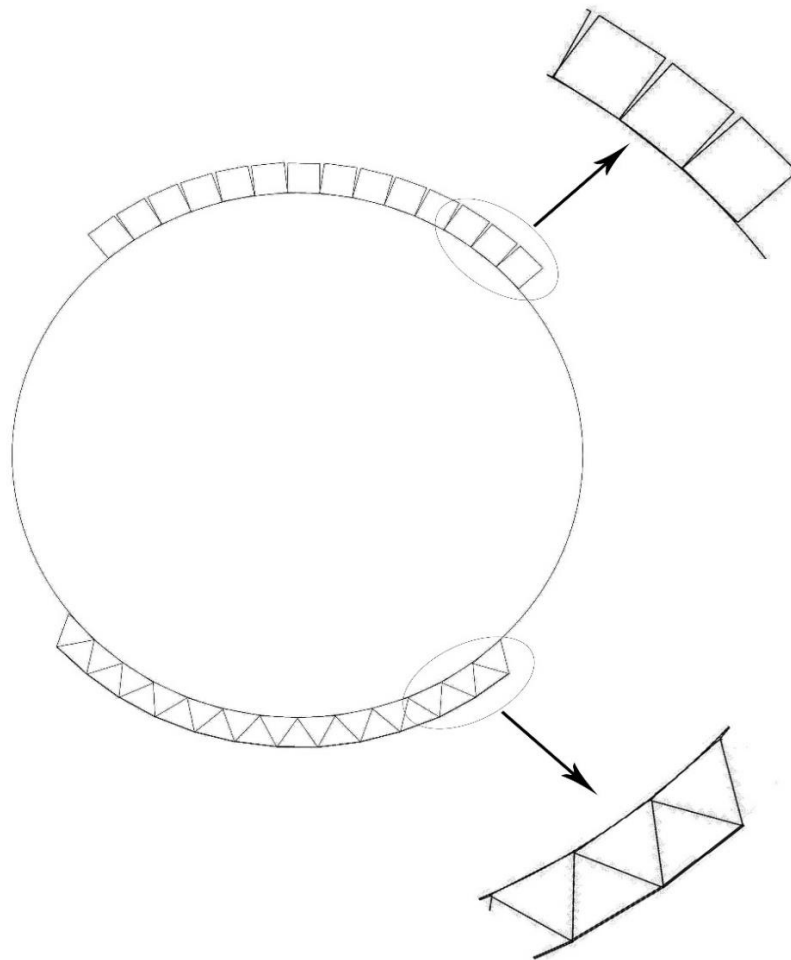
شکل ۲-۴ هندسه ورق با نسبت ابعادی $\frac{D}{2a} = \frac{1}{30}$ در نرم افزار انسیس

۲-۷-۲ تعریف خواص مواد

در این مرحله خواص مکانیکی ماده تعریف می شود. در نرم افزار انسیس برای هر لایه می توان ماده‌ی دلخواهی را نسبت داد و از آن جایی که در این فصل هدف مدل کردن ورق همگن می باشد، به همه‌ی لایه‌ها خواص یکسانی نسبت داده می شود. واضح است که تحلیل نرم افزاری جهت راستی سنجی حل پیشنهادی برای ورق می باشد؛ از این رو از نظر هندسی و خواص مکانیکی در هر نقطه می بایست بیشترین انطباق را با حل پیشنهادی داشته باشد. بنابراین خواص لایه‌ها وابسته به شرایط جنس ورق مورد تحلیل، از حل تحلیلی گرفته شد.

مش‌بندی و اعمال شرایط حل ۲-۷-۳

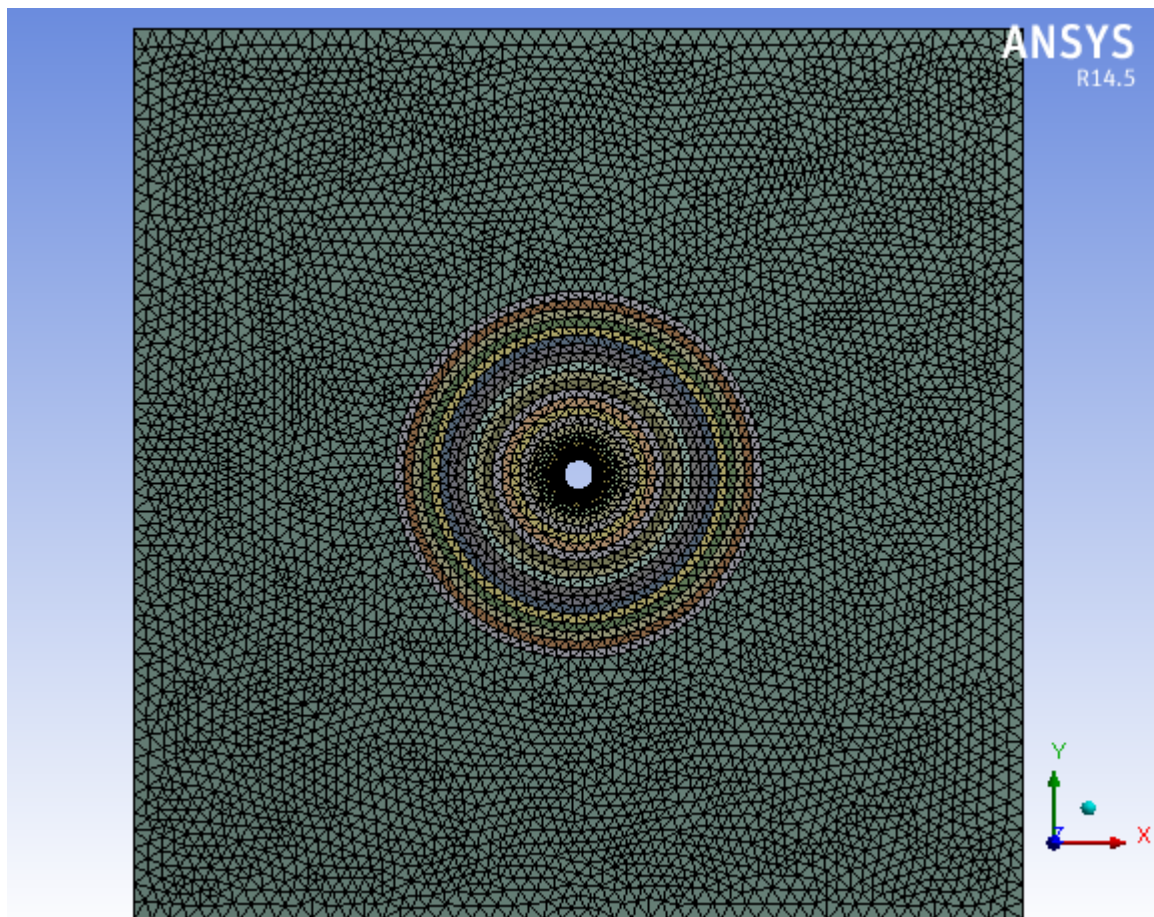
برای تحلیل ورق در نرم‌افزار انسیس از مش مثلثی استفاده شده است؛ زیرا همان‌گونه که در شکل زیر مشاهده می‌شود، مدل‌سازی یک مرز دایره‌ای با المان مثلثی بسیار دقیق‌تر و منطقی‌تر از المان چهارضلعی می‌باشد و به دلیل وجود گشودگی دایره‌ای در ورق و همچنین اهمیت بالای این ناحیه در تحلیل تنش و جابه‌جایی، در این تحقیق نیز از المان مثلثی برای مرز گشودگی استفاده شده است:



شکل ۲-۵ مقایسه‌ی نحوه‌ی قرارگیری مش مثلثی و مربعی روی مرز گشودگی ورق

المان مورد استفاده در این تحقیق المان PLANE183 است. این المان، یک المان مرتبه‌بالای دوبعدی است که دارای ۸ یا ۶ نود بوده و هر نود دارای دو درجه آزادی در جهت‌های x و y می‌باشد. این المان دارای رفتار

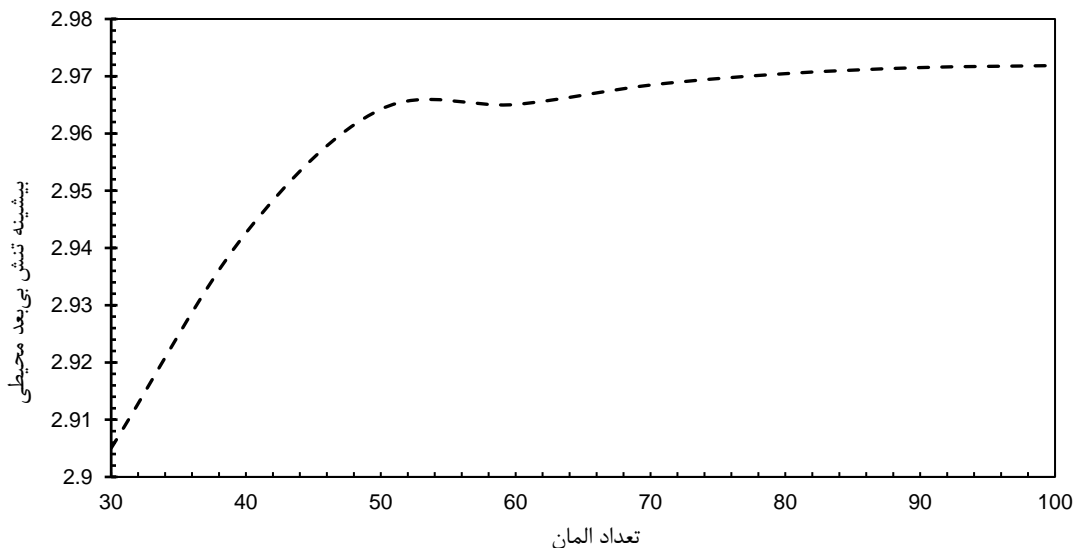
جابه‌جایی مرتبه دوم بوده و برای مسائل صفحه‌ای مانند تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای بسیار مناسب می‌باشد.



شکل ۶-۲ مش‌بندی کل ورق در نرم‌افزار انسیس

همان‌طور که در شکل ۶-۲ مشخص است، ابعاد مش در اطراف گشودگی بسیار کوچکتر از مش‌ها در مرزهای خارجی است. با این حالت علاوه بر دقت حل در اطراف گشودگی، که برای تحلیل مهم است، از تولید و حل معادلات بی‌هوده در نقاط دور از گشودگی و اطراف مرزهای خارجی جلوگیری می‌شود. با این روند، سرعت حل در نرم‌افزار بالا می‌رود. برای یافتن بهینه‌ترین اندازه‌ی مش در ناحیه‌ی اطراف گشودگی یک ورق همگن با گشودگی دایروی، تحت بارگذاری تک‌محوره، مورد بررسی قرار گرفت. در نرم‌افزار انسیس، این ورق با اندازه‌های مختلف مش در ناحیه‌ی اطراف گشودگی مورد تحلیل قرار گرفت و نتایج حاصل شده

از تحلیل برای تنش محیطی با حلّ تحلیلی (۲-۷۳)، مقایسه و در شکل ۲-۷ بیشینه مقدار تنش محیطی در تحلیل عددی برای ورق همگن تحت کشش تک‌محوره و بار حرارتی ذکر شده آورده شد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، بیشترین مقدار تنش برای تعداد ۷۰ مش در اطراف گشودگی است. که با توجه به این نتیجه، در تمام تحلیل‌ها از این تعداد مش استفاده خواهد شد.

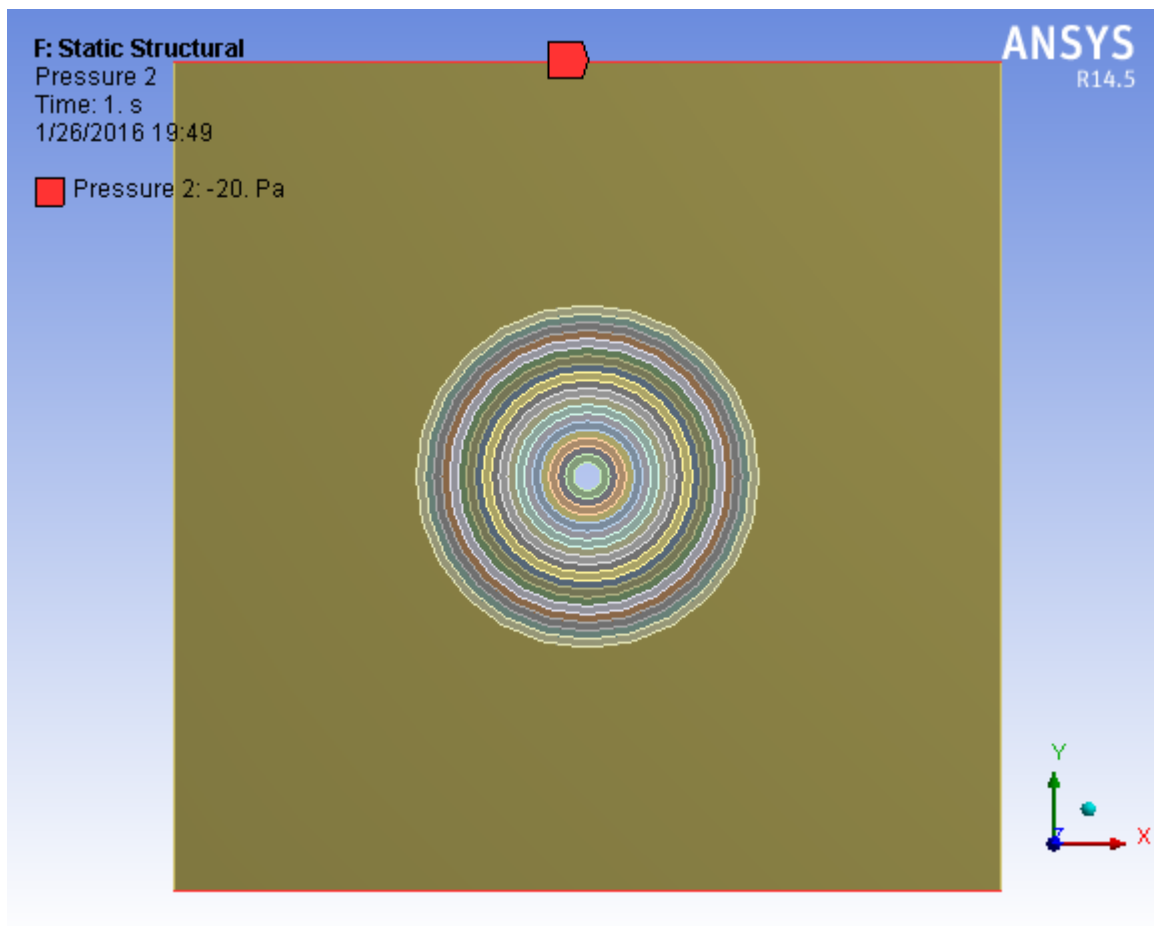


شکل ۲-۷ بیشینه مقدار تنش محیطی حاصل از تحلیل عددی نسبت به بارگذاری مرزی

۲-۷-۴ اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

در این مرحله شرایط مرزی و بارگذاری ورق تعریف می‌شود. شکل ۲-۹ ورق را تحت شرایط مرزی اعمال شده نشان می‌دهد.

با توجه به محیط طراحی و مش انتخابی، بارگذاری مکانیکی اعمالی بر روی مرزهای خارجی به صورت فشار یکنواخت، انتخاب شد. این بارگذاری اثر یکنواختی تنش در مرزهای ورق، بر طبق فرض مسأله را ارضا می‌کند.



شکل ۸-۲ اعمال شرایط مرزی متقارن به مرزهای ورق در نرم افزار انسیس

۸-۲ بررسی نتایج

ورق مورد بررسی به عنوان مطالعه‌ی موردی، ورق با نسبت ابعادی $\frac{2a}{D} = 30$ می باشد. مشخصات هندسی برای نسبت ابعادی ۳۰، یک ورق مربعی نازک ۲۰ لایه با طول ۳۰۰ میلی متر و قطر گشودگی دایروی ۱۰ میلی متر و ضخامت یکنواخت ۱ میلی متر می باشد. در این فصل هیچ بارگذاری در داخل گشودگی وجود ندارد؛ از این رو در اطراف گشودگی تنش شعاعی و تنش برشی نیز، حضور ندارند.

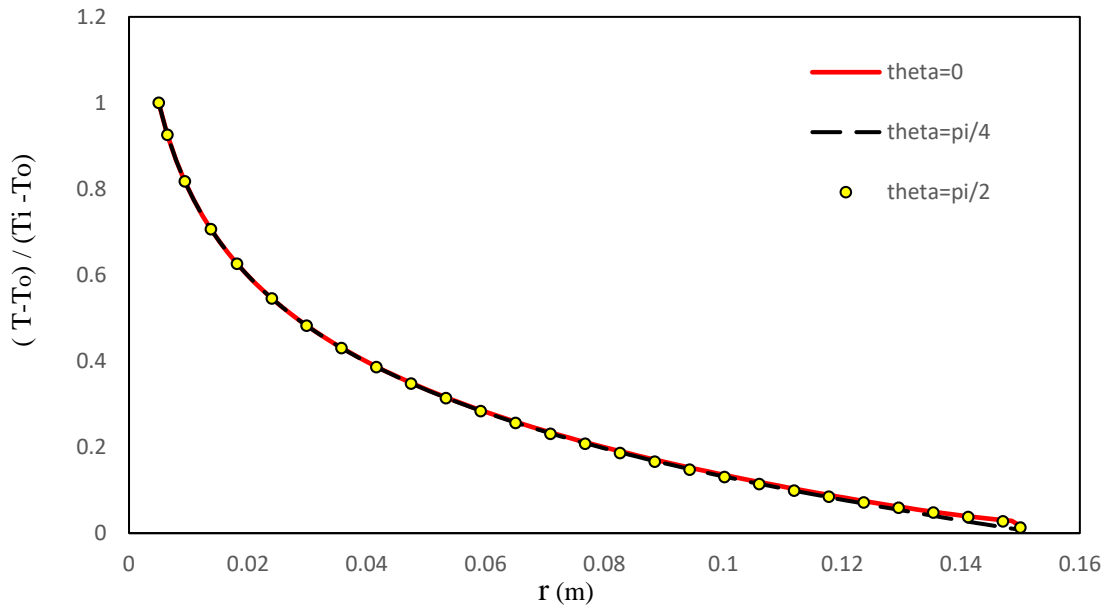
$$\sigma_r = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (۷۴-۲)$$

بار مکانیکی اعمالی به ورق، در مرزهای خارجی به صورت تک‌محوری و دوماحوری و در مرز داخل گشودگی بدون حضور فشار است. جهت بی‌بعد سازی محور قائم در شکل‌ها، از نسبت تنش $\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_1}$ است، استفاده شده‌است. در این جا σ_1 تنش اعمالی در مرز ورق در جهت محور ۱ (شکل ۲-۲) و σ_{θ} تنش محیطی است. هم‌چنین بار حرارتی اعمالی به ورق، در مرز داخلی به صورت دمای ثابت ۴۵ درجه‌ی سانتی-گراد و در مرزهای بیرونی دمای ثابت ۲۵ درجه‌ی سانتی‌گراد می‌باشد. تعداد جملات در نظر گرفته شده نیز برای تعیین توزیع دما $m=11$ می‌باشد. در جدول زیر مقادیر C_0 و C_n را برای این مقدار m آورده شده است:

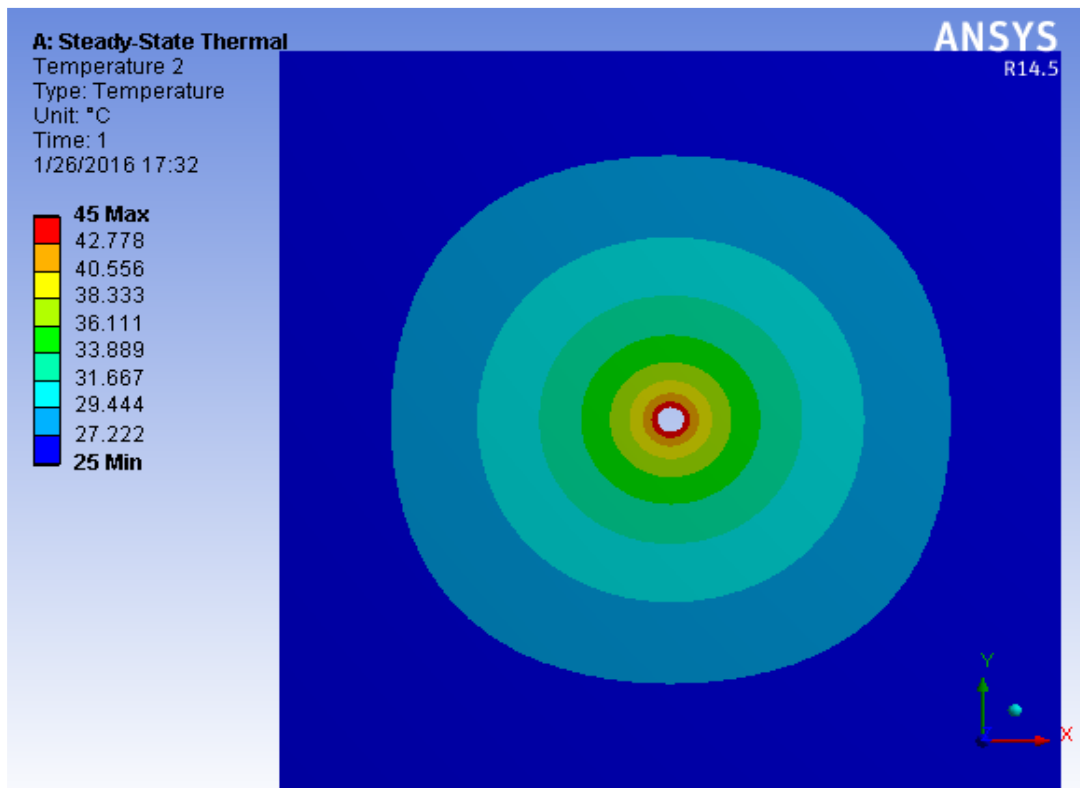
جدول ۱-۲ ضرایب تابع توزیع دما در ورق همگن

C_{10}	C_8	C_6	C_4	C_2	C_0
5.54 E-30	3.65 E-32	6 E-24	-4.46 E-17	-4.6 E-9	-5.8
C_{22}	C_{20}	C_{18}	C_{16}	C_{14}	C_{12}
3.2 E-86	2.03 E-77	2.16 E-70	-2.63 E-62	-2.7 E-54	-8.5 E-47

همان‌طور که در جدول بالا نیز مشاهده می‌شود، ضرایب سری کسینوسی تابع توزیع دما نزدیک به صفر می‌باشد. شکل (۲-۹) توزیع دما روی ۳ مسیر دلخواه از مرز داخلی به مرز خارجی را نشان می‌دهد. تطابق کامل نمودارها بدان معنی است که تغییرات توزیع دما در ورق نسبت به جهت محیطی θ تقریباً صفر بوده و دما دارای توزیع متقارن نسبت به جهت شعاعی است؛ موضوعی که توسط نرم‌افزار انسیس نیز تایید می‌شود:



شکل ۹-۲ توزیع دمای ورق در مسیرهای با زوایای مختلف از مرز داخلی به مرز خارجی



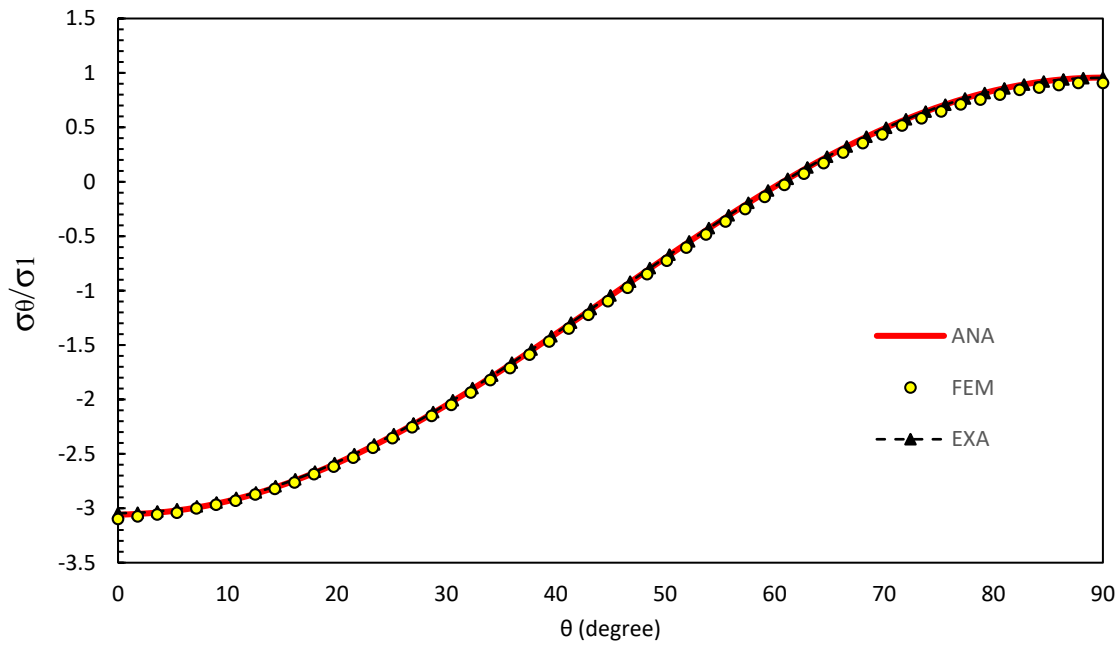
شکل ۱۰-۲ توزیع دمای ورق در نرم افزار انسیس

انتظار می‌رود که توزیع تنش و جابه‌جایی در ورق مانند توزیع دما تنها وابسته به جهت شعاعی بوده و تاثیر تغییرات در جهت محیطی بسیار ناچیز باشد. بارگذاری مکانیکی در حالت تک‌محوری به صورت کششی به اندازه‌ی $\sigma_1 = \sigma = 20 \text{ Mpa}$ و در حالت دو محوری، بارگذاری در جهت محور ۱ به حالت کششی و مقدار $\sigma_1 = \sigma = 20 \text{ Mpa}$ و در جهت محور ۲ به مقدار $n\sigma$ وارد می‌شود.

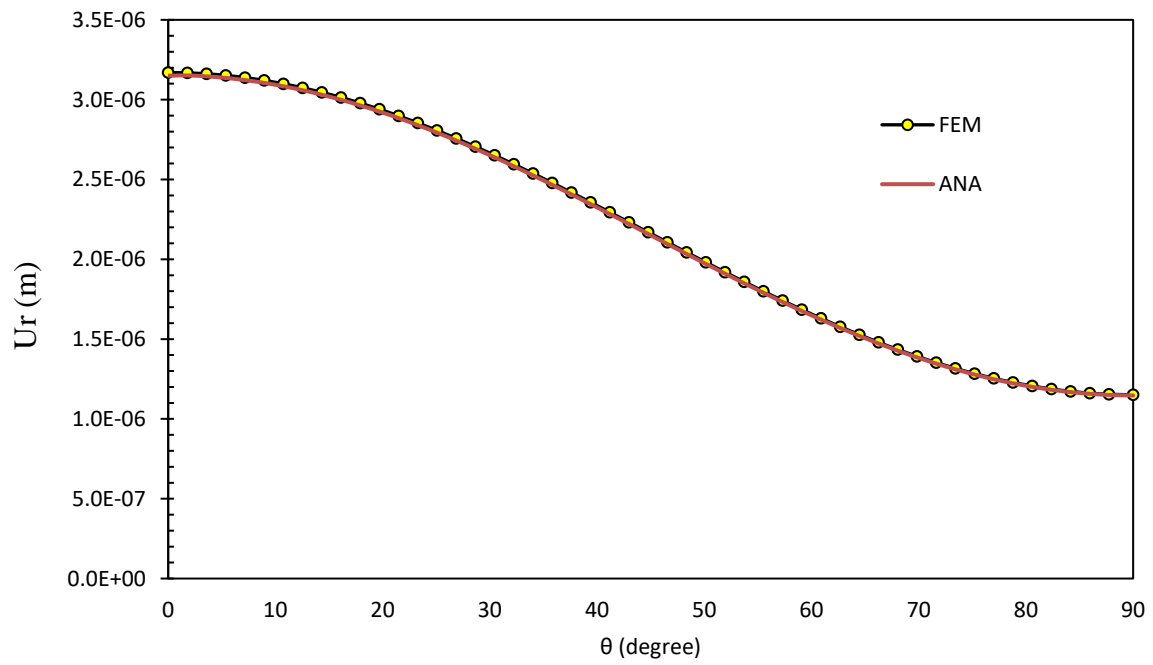
$$n = \{2, 0, 1, -2, -1\}$$

۲-۸-۱ بارگذاری تک‌محوری

شکل‌های ۲-۱۰ و ۲-۱۱ به ترتیب تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را، در نقاط اطراف گشودگی دایروی، تحت بارگذاری حرارتی به صورت اختلاف دمای ثابت و مکانیکی به صورت کشش تک‌محوری در ورق همگن نشان می‌دهند. علاوه بر مقایسه‌ی حلّ تحلیلی مورد بررسی و روش FEM نتایج حاصل از حلّ تحلیلی موجود در مراجع (رابطه‌ی (۲-۷۳)) نیز در نمودارهای مربوط به تنش محیطی در ورق همگن آورده شده است (نمودار Exa). همان‌طور که در شکل (۲-۱۱) مشاهده می‌شود، تنش حاصل از حلّ تحلیلی پیشنهادی با کمک توابع پتانسیل برای ورق همگن تحت بارگذاری اشاره شده، نسبت به حلّ تحلیلی موجود در مراجع دارای دقت قابل قبولی است. هم‌چنین مقادیر به دست آمده برای جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی، از هر دو روش تحلیل عددی و حلّ تحلیلی مورد بررسی به یک‌دیگر بسیار نزدیک می‌باشند. پس می‌توان گفت که حلّ تحلیلی دارای دقت قابل قبولی است.



شکل ۱۱-۲ توزیع تمرکز تنش در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوره

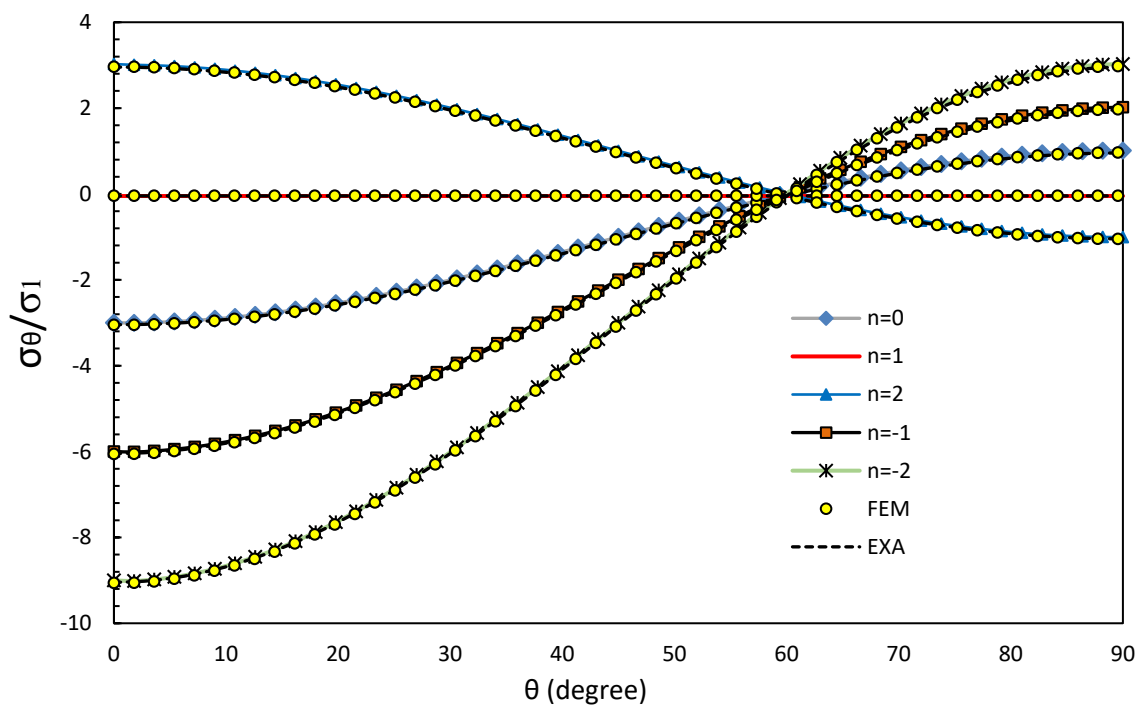


شکل ۱۲-۲ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوره

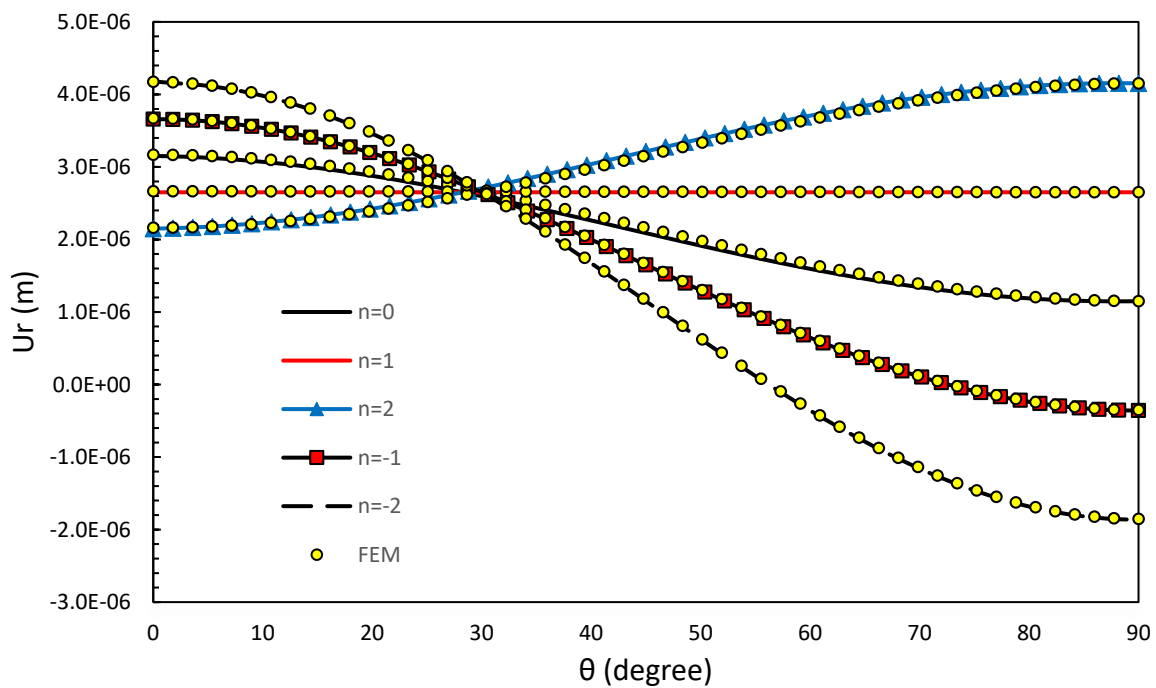
بارگذاری دومحوری ۲-۸-۲

شکل‌های ۱۳-۲ و ۱۴-۲ به ترتیب تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را در نقاط اطراف گشودگی دایروی، تحت بارگذاری دومحوری نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۱۳-۲ مشاهده می‌شود، همانند کشش تک‌محوری، تنش حاصل از حلّ پیشنهادی با کمک توابع پتانسیل برای ورق همگن تحت بارگذاری اشاره شده، دارای دقت قابل قبولی است. در این شکل، با افزایش مقدار n از ۲- تا ۲، اختلاف میان مقدار تنش محیطی بی‌بعد بیشینه و کمینه در اطراف گشودگی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد، به طوری که در $n=$ در تمام نقاط اطراف گشودگی، این تنش دارای مقداری ثابت می‌باشد. علت این امر رابطه‌ی مستقیم تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به بارگذاری درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی می‌باشد.

در شکل ۱۴-۲ جابه‌جایی شعاعی در اطراف گشودگی نشان داده می‌شود. با کاهش بار فشاری درون-صفحه‌ای در مرزهای خارجی در جهت محور دوم ابتدا تغییر شکل گشودگی دایروی ورق به سمت دایروی شکل شدن میل می‌کند. در $n=1$ با توجه به یکنواختی مقدار تنش محیطی در اطراف گشودگی دایروی بعد از تغییر شکل، همچنان دایروی باقی می‌ماند. برای مقادیر بیشتر از $n=1$ با افزایش مقدار n ، گشودگی بعد از بارگذاری، به سمت بیضوی شکل شدن می‌رود هرچند به هیچ وجه بیضی شکل نمی‌شود. البته این نکته را نیز باید متذکر شد که دلیل این که بارگذاری حرارتی تغییر نمی‌کند این است که در تحقیق حاضر این بارگذاری به صورت متقارن شعاعی است و به هیچ عنوان وابستگی به جهت محیطی θ ندارد، به همین دلیل افزایش یا کاهش مقدار اختلاف دما، در مرز گشودگی تنها یک مقدار ثابت را به تنش ایجادشده در اثر بارگذاری مکانیکی درون‌صفحه‌ای اضافه و یا کم می‌کند که کمک چندانی به تحلیل رفتار ورق مخصوصاً در اطراف گشودگی، در برابر این بارگذاری ترکیبی حرارتی-مکانیکی نخواهد کرد.



شکل ۲-۱۳ توزیع تمرکز تنش در اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دومحوری



شکل ۲-۱۴ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دومحوری

۹-۲ جمع‌بندی

در این فصل با کمک روابط الاستیسیته، توابع تنش ایری، توابع پتانسیل و روش حداقل مربعات خطا در نقاطی با تقسیم‌بندی منظم در مرز، معادلات حاکم بر ورق بلند استخراج شد. بارگذاری به‌صورت درون-صفحه‌ای در مرزهای خارجی، اختلاف دمای ثابت بین مرزهای داخلی و خارجی و بدون فشار در داخل گشودگی اعمال گردید. هم‌چنین شبیه‌سازی ورق در نرم‌افزار اجزای محدود انسیس همانند روش تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از حلّ تحلیل ورق بلند و تحلیل نرم‌افزاری دارای هم‌خوانی بسیار خوب و قابل قبولی بوده که صحتّ حلّ تحلیلی را تایید می‌کند.

فصل ۳ ورق ناهمگن با گشودگی دایروی تحت

بارگذاری مکانیکی و حرارتی

۳-۱ پیش‌گفتار

در این فصل، تابع ناهمگنی مورد استفاده در ورق ناهمگن معرفی می‌شود. همچنین توزیع تنش و مقدار جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن با روند صعودی و نزولی مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج آن‌ها با ورق همگن مقایسه خواهند شد. همچنین تأثیر ضریب همگرایی بر شدت مقدار تنش و جابه‌جایی مطالعه می‌شود.

۳-۲ مدل ریاضی ورق ناهمگن

همان‌طور که در فصل دوم بیان شد، ورق به صورت حلقه‌هایی هم‌مرکز و با ضخامت و اندازه‌ی یکسان فرض و تقسیم‌بندی شد. این کار به درست بودن و نزدیک شدن ورق به ورق FG کمک می‌کند. در این صورت می‌توان با کمک روابط استخراج شده در فصل دوم ورق ناهمگن را تحلیل کرد. در این تحقیق ورق مورد بررسی یک ورق بلند است و می‌بایست مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و سایر خواص در نقاط دور معین و معلوم باشند؛ از این‌رو برای تابع ناهمگنی در این مسأله، تابع نمایی انتخاب شد که دارای شعاع همگرایی مشخص و قابل تنظیمی است [۲۳]:

$$E(r) = E_0 \left[1 + \left(\frac{E_i}{E_0} - 1 \right) \exp\left(m \left(1 - \frac{r}{R_0} \right) \right) \right] \quad (1-3)$$

که در آن m ضریب همگرایی برای کنترل دامنه‌ی ناحیه‌ی ناهمگن در ورق و R_0 شعاع گشودگی می‌باشد. با توجه به تغییرات کم نسبت پواسون به مدول الاستیسیته این ضریب ثابت فرض می‌شود.

۳-۳ استخراج معادلات مکانیکی

معادلات مکانیکی استخراج شده در فصل دوم به صورتی به دست آمد، که هم برای ورق همگن و هم ورق ناهمگن قابل استفاده باشند. از این‌رو تغییری در معادلات و کد نوشته شده از آن داده نخواهد شد؛ به جز معادلات مربوط به شرط‌های پیوستگی که جنس ماده‌ی هر لایه در آن‌ها وارد می‌شود. در ورق همگن به

دلیل یکسان بودن خواص مکانیکی در تمام نقاط ورق، ضریب G_j در معادلات (۲-۲۲)، (۲-۲۸) و (۲-۲۹) در تمام لایه‌ها مقداری یکسان داشت. در ورق ناهمگن، لایه‌های آن دارای خواص مکانیکی متفاوتی نسبت به یکدیگر هستند؛ برای به‌دست‌آوردن G_j هر لایه شعاع میانی آن را در رابطه‌ی (۳-۱) قرار می‌دهیم.

۳-۴ استخراج معادلات حرارتی

در معادله‌ی (۲-۴۵) از فصل دوم، شکل اصلی معادله در واقع به‌صورت زیر است:

$$\nabla^2(kT)=0 \quad (3-2)$$

ضریب هدایت حرارتی (k)، به دلیل ثابت بودن در ورق همگن از معادله حذف می‌شد ولی در ورق ناهمگن چون ثابت نیست و با تغییر شعاع تغییر می‌کند، نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد. فرض می‌کنیم $F=kT$:

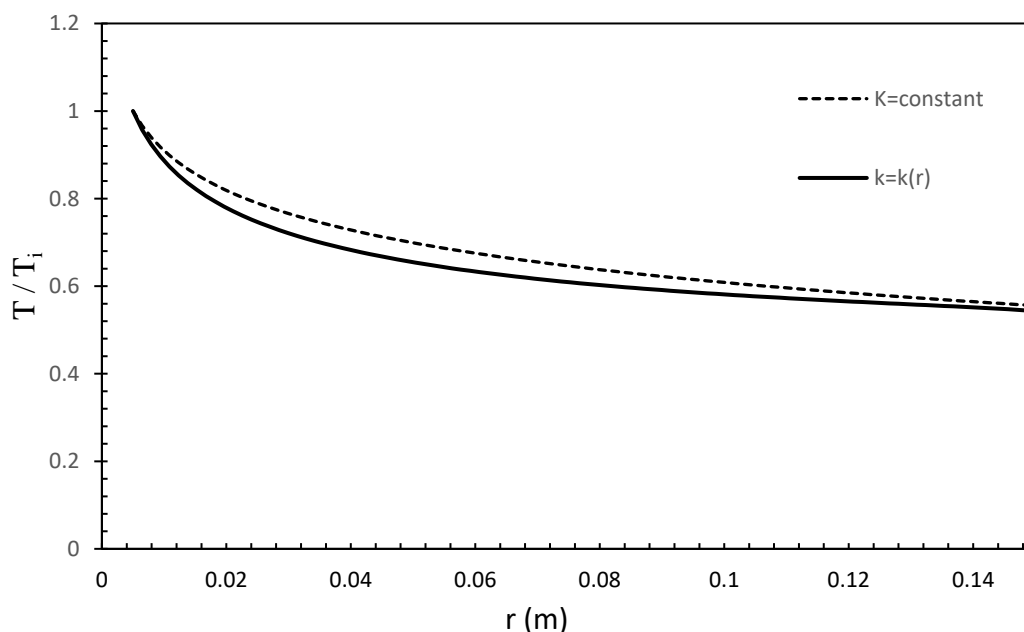
$$\nabla^2(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3-3)$$

$$\Rightarrow F = a_0 + C_0 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (r^n - R^{2n} r^{-n}) \cos n \theta$$

در $T=T_i$ ، $r=R$ ؛ در نتیجه توزیع دما برابر است با:

$$T = \frac{1}{k(r)} \left(T_i k_i + C'_0 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C'_n (r^n - R^{2n} r^{-n}) \cos n \theta \right) \quad (3-4)$$

همانند فصل دوم با استفاده از جای‌گذاری رابطه‌ی (۳-۴) در نقاطی با فواصل معین در مرزهای بیرونی و قرار دادن $m=11$ ضرایب C'_0 و C'_n به‌دست می‌آیند که در جدول (۳-۱) قابل مشاهده است. نمودار توزیع دما را در دو حالت k ثابت و k متغیر (ماده از فولاد ساختمانی به سرامیک آلومینا می‌رسد) در شکل زیر مشاهده می‌کنید:



شکل ۱-۳ مقایسه‌ی توزیع دمای ورق FG با ضریب هدایت حرارتی ثابت و متغیر

جدول ۱-۳ ضرایب تابع توزیع دمای ورق ناهمگن

C'_{10}	C'_8	C'_6	C'_4	C'_2	C'_0
-6.58 E-38	1.83 E-31	2.12 E-22	1.37 E-14	-2.28 E-8	-490.1031
C'_{22}	C'_{20}	C'_{18}	C'_{16}	C'_{14}	C'_{12}
-4.84 E-83	4.48 E-76	-6.33 E69	-2.15 E-60	-3.16 E-53	4.75 E-46

همان‌طور که در شکل بالا نیز مشخص است می‌توان گفت که ثابت بودن یا نبودن k تاثیر زیادی در توزیع دما و در پی آن توزیع تنش حرارتی ندارد. همچنین ضریب هم‌گرایی تابع نمایی ورق نیز در بارگذاری حرارتی و مکانیکی باهم تفاوت دارند اما در مطالعه‌ی موردی یکسان در نظر گرفته می‌شوند. مانند فصل ۲ با جای‌گذاری توابع پتانسیل $\varphi(z)$ و $\psi(z)$ در رابطه‌ی (۱۰-۲) داریم:

$$\frac{1}{2G} (k\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)})_1^2 = \frac{8\pi iRA}{E} \quad (۳-۵)$$

از طرفی با محاسبه‌ی انتگرال رابطه‌ی (۲-۵۵) روی مرز گشودگی:

$$(u+iv)_2 - (u+iv)_1 = 2\pi i \alpha(r) C'_0 \left(\frac{k_o m}{m + \ln\left(\frac{k_i}{k_o} - 1\right)} + \frac{R}{k_i} \right) \quad (۳-۶)$$

مجموع طرف دوم روابط (۳-۵) و (۳-۶) باید برابر صفر شود. بنابراین:

$$A = -\frac{E(r)\alpha(r)C'_0}{4R} \left(\frac{k_o m}{m + \ln\left(\frac{k_i}{k_o} - 1\right)} + \frac{R}{k_i} \right) \quad (۳-۷)$$

توابع پتانسیل با همان روندی که در فصل دوم بیان شد به دست می‌آیند. از آن جایی که ضریب A نسبت به I متغیر است، هنگام مشتق‌گیری از ضرایب توابع پتانسیل به منظور به دست آوردن تنش‌ها به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \cdot \frac{dr}{dz} + \frac{d\phi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dz} \right), \quad \frac{dr}{dz} = e^{-i\theta}$$

و چون تغییرات نسبت به θ صفر است بنابراین:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \cdot e^{-i\theta} \right)$$

پس از طی مراحل، در نهایت تنش‌های شعاعی و محیطی به ترتیب زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_r = \sigma_r^h - \left(rA'(r) + \frac{1}{2} A'(r) r \ln r + \frac{1}{4} \overline{A'(r)} r \ln r \right) \quad (۳-۸)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^h + \left(rA'(r) + \frac{1}{2} A'(r) r \ln r + \frac{1}{4} \overline{A'(r)} r \ln r \right) \quad (۳-۹)$$

σ_{θ}^h و σ_r^h همان روابط تنش در فصل دوم هستند. $A'(r)$ مشتق ضریب A نسبت به r و:

$$\overline{A'}(r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{dA}{dr} r \right)$$

ضرایب C'_{2n+1} و D'_{2n+1} مربوط به توابع پتانسیل ورق ناهمگن همانند ورق همگن در پیوست آورده شده است.

۵-۳ بررسی نتایج

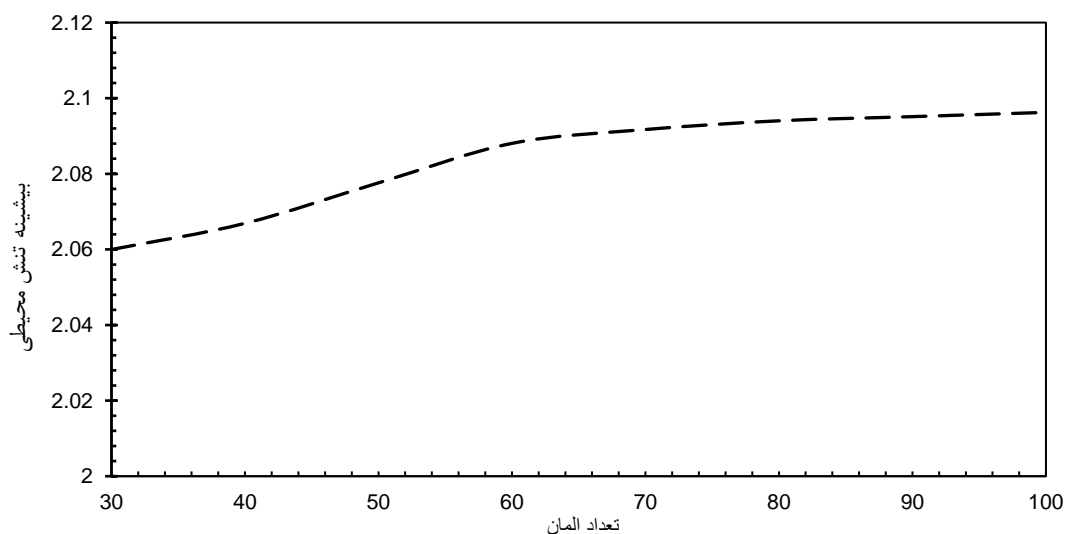
همانند فصل دوم، ورق مورد بررسی با نسبت ابعادی $\frac{D}{2a} = \frac{1}{30}$ ، تحت بارگذاری درون صفحه‌ای به صورت بار خارجی تک‌محوره و دومحوره و بار حرارتی اختلاف دمای ثابت مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به رابطه‌ی (۲-۴۳) و (۲-۴۴) از کتاب آقای پیلکی [۴۶] برای ورق همگن تحت کشش تک‌محوره در جهت محور ۱، در $r=10 \cdot R_0$ مقدار تنش شعاعی در راستای محور ۱ و تنش محیطی در راستای محور ۲، در حدود ۹۷٪ بار اعمالی در مرز ورق می‌باشد؛ که در اینجا R_0 شعاع گشودگی دایروی است. از این رو برای بررسی اثرات بار خارجی بر روی ورق، ناحیه‌ی ناهمگنی هم اندازه با ناحیه‌ای که توزیع تنش به صورت غیر یکنواخت می‌باشد، در نظر گرفته و از ضریب همگرایی $m=0.25$ استفاده شد. می‌توان تأثیر مقدار ضریب همگرایی m بر مقدار تنش و جابه‌جایی در نقاط اطراف گشودگی را مورد مطالعه قرار داد. ماده در اطراف گشودگی در هر دو حالتی که ورق همگن و ناهمگن در نظر گرفته می‌شود، دارای خواص مکانیکی فولاد ساختمانی است.

برای ورق ناهمگن با مدول کاهشی از آلیاژ آلومینیوم و قلع (موجود در کتابخانه‌ی مواد نرم‌افزار انسیس) و برای ورق ناهمگن با روند افزایشی مدول الاستیسیته از سرامیک آلومینا 96% به‌عنوان ماده در مرزهای بیرونی استفاده می‌شود. جدول ۲-۳ خصوصیات مکانیکی و ضریب انبساط حرارتی این سه ماده را نشان می‌دهد.

جدول ۲-۳ خواص مکانیکی و حرارتی مواد ورق FG

نسبت پواسون	مدول الاستیسیته (GPa)	ضریب انبساط حرارتی ($10^{-6} \times ^\circ \text{C}^{-1}$)	ضریب رسانش حرارتی ($\text{w.m}^{-1}.\text{k}^{-1}$)	
۰/۳	۲۰۰	۱۲	۶۰/۵	فولاد
۰/۳۳	۱۰۰	۹/۴	۵۰	آلیاژ آلومینیوم-قلع
۰/۲۴	۳۷۰	۸/۲	۲۵	آلومینا 96%

برای سهولت در کار، ورق با روند صعودی مدول الاستیسیته، ورق ناهمگن نوع اول و ورق با روند نزولی مدول الاستیسیته، ورق ناهمگن نوع دوم نام گذاری می شود. مانند فصل دوم، شکل ۲-۳ مقادیر بیشینه تنش محیطی را در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره با $n=-2$ نشان می دهد. این نتایج از تحلیل عددی استخراج شده است. همان طور که مشاهده می شود با افزایش تعداد مش در اطراف گشودگی مقدار تنش محیطی بیشینه افزایش می یابد ولی مقدار این افزایش برای تعداد مش بالای عدد ۷۰ قابل صرف نظر کردن است. به همین دلیل برای کاهش حجم محاسبات همراه با حفظ دقت تحلیل عددی، از تعداد ۷۰ مش در اطراف ورق ناهمگن در این فصل استفاده خواهد شد.

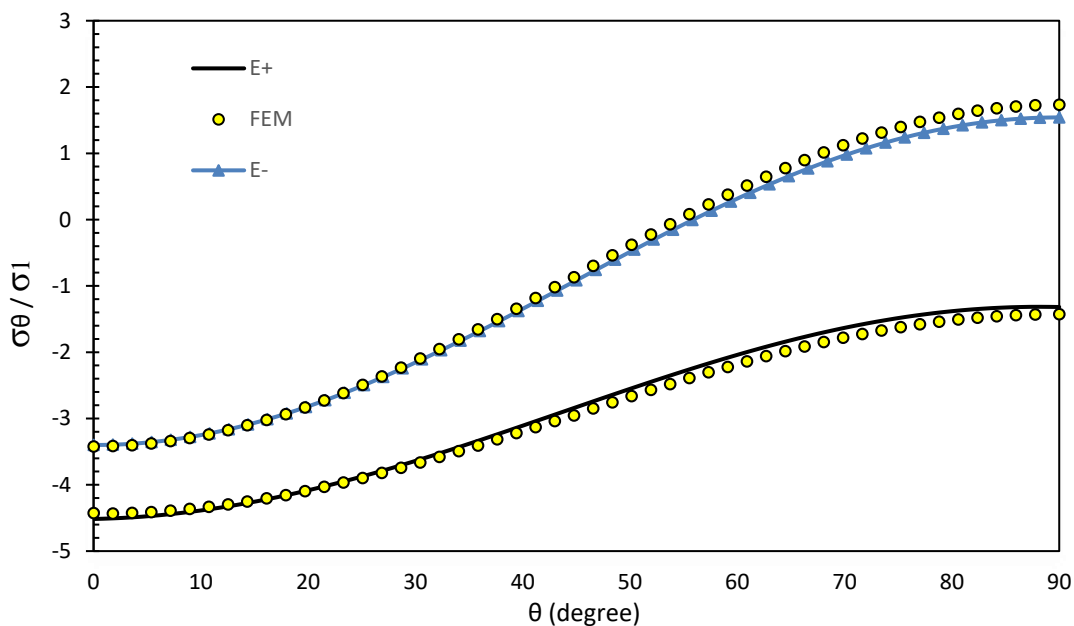


شکل ۲-۳ تنش محیطی بیشینه به ازای تعداد مشها مختلف در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری با $n=-2$

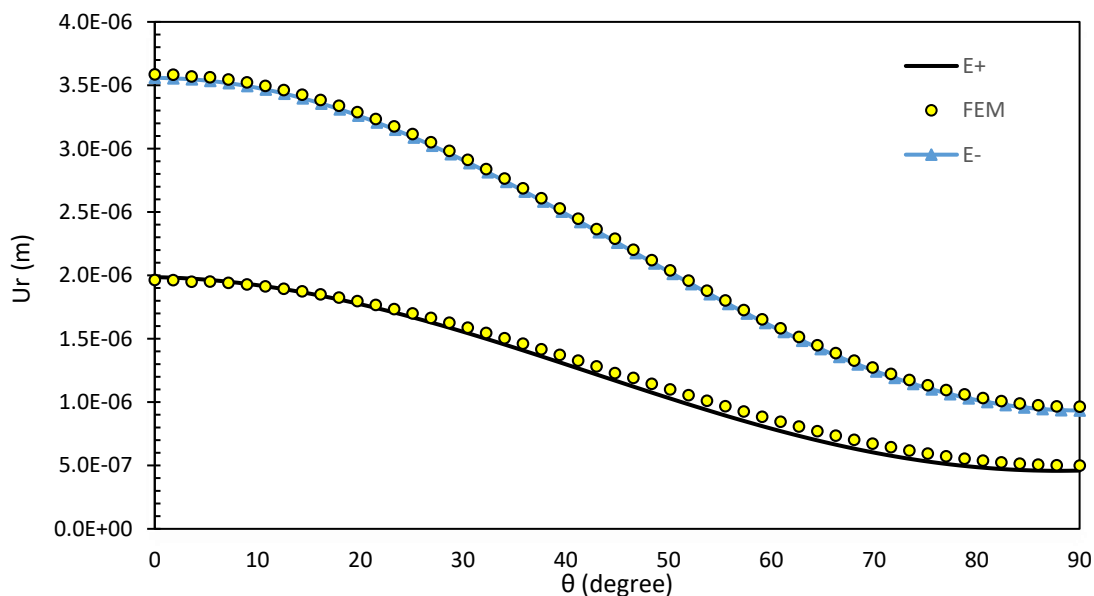
۳-۵-۱ بارگذاری تک محوری

با توجه به شکل ۳-۳ مقدار تنش در اطراف گشودگی دایروی در ورق ناهمگن نوع دوم (E-) از ورق ناهمگن نوع اول (E+) کمتر می‌باشد. با مقایسه این شکل با شکل ۲-۹ می‌توان دریافت، که مقدار تنش محیطی در ورق همگن، نسبت به ورق ناهمگن نوع اول کمتر و نسبت به ورق ناهمگن نوع دوم بیشتر می‌باشد. در ورق ناهمگن نوع اول لایه‌های میانی مقاومت مکانیکی بیشتری نسبت به لایه‌های میانی ورق همگن دارند؛ همچنین حرکت حرارت از ناحیه‌ی داغ ورق یعنی اطراف گشودگی به ناحیه‌ی سرد ورق یعنی لبه‌های بیرونی در ورق ناهمگن نوع اول نسبت به ورق همگن کمتر اتفاق می‌افتد زیرا لایه‌های میانی مقاومت بیشتری در برابر حرارت داشته و به اصطلاح رسانای خوبی برای گرما نیستند به همین دلیل نواحی میانی ورق نسبت به ورق همگن دمای بالاتری دارند به همین دلیل تنش بیشتری در ورق نوع اول ایجاد می‌شود. در ورق همگن نوع دوم، چون تمامی خواص حرارتی مانند ورق نوع اول از ورق همگن کمتر می‌باشد رفتار حرارتی آن نیز مانند ورق نوع اول بوده و دمای لایه‌های میانی نسبت به ورق همگن بالاتر است؛ اما به دلیل این که مدول الاستیسیته‌ی آن کمتر از ورق نوع اول است تنش حرارتی کمتری نیز در آن ایجاد می‌شود.

از طرفی به دلیل کمتر بودن ضریب انبساط حرارتی لایه‌های میانی ورق نوع اول نسبت به ورق همگن و ورق نوع دوم، در شکل ۳-۴ مشاهده می‌شود که جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق ناهمگن نوع اول کمتر از ورق ناهمگن نوع دوم می‌باشد و گشودگی دایروی پس از تغییر شکل، کمتر از شکل دایروی خارج می‌شود. این نتیجه را می‌توان در منبع [۲۳] نیز مشاهده کرد لذا در بارگذاری تک-محوری، بارحرارتی تأثیری بر نوع ورق ناهمگن ندارد و رفتارها مشابه رفتار در برابر بارگذاری مکانیکی صرف است.



شکل ۳-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک‌محوره

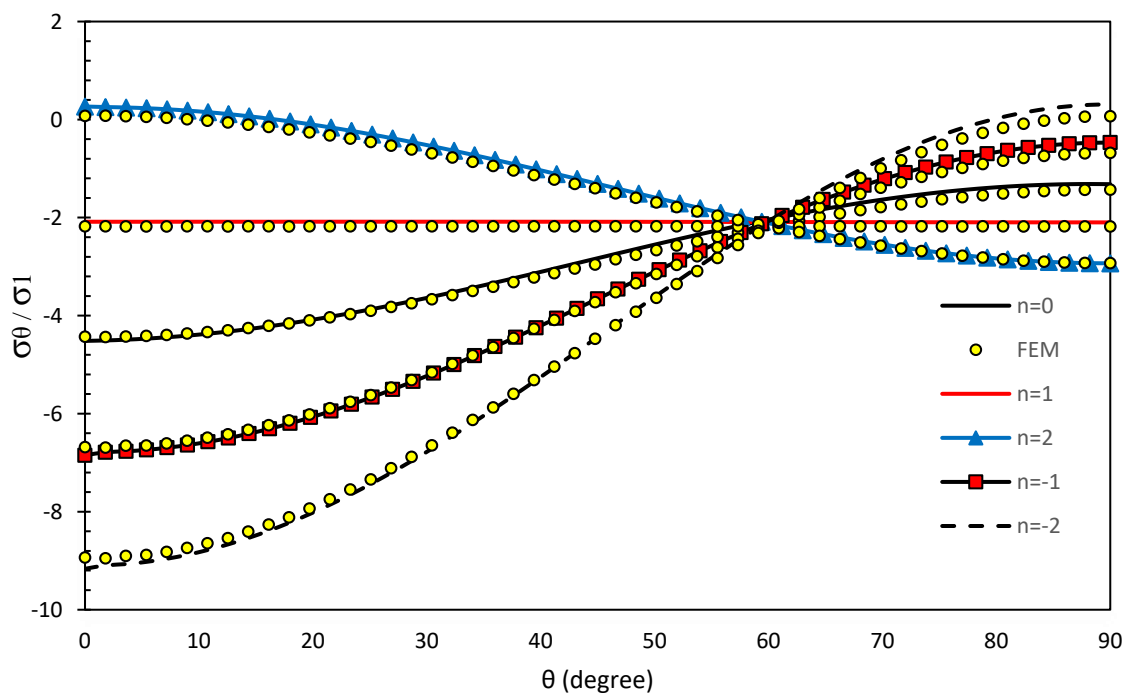


شکل ۳-۴ مقدار جابه‌جایی شعاعی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک‌محوره

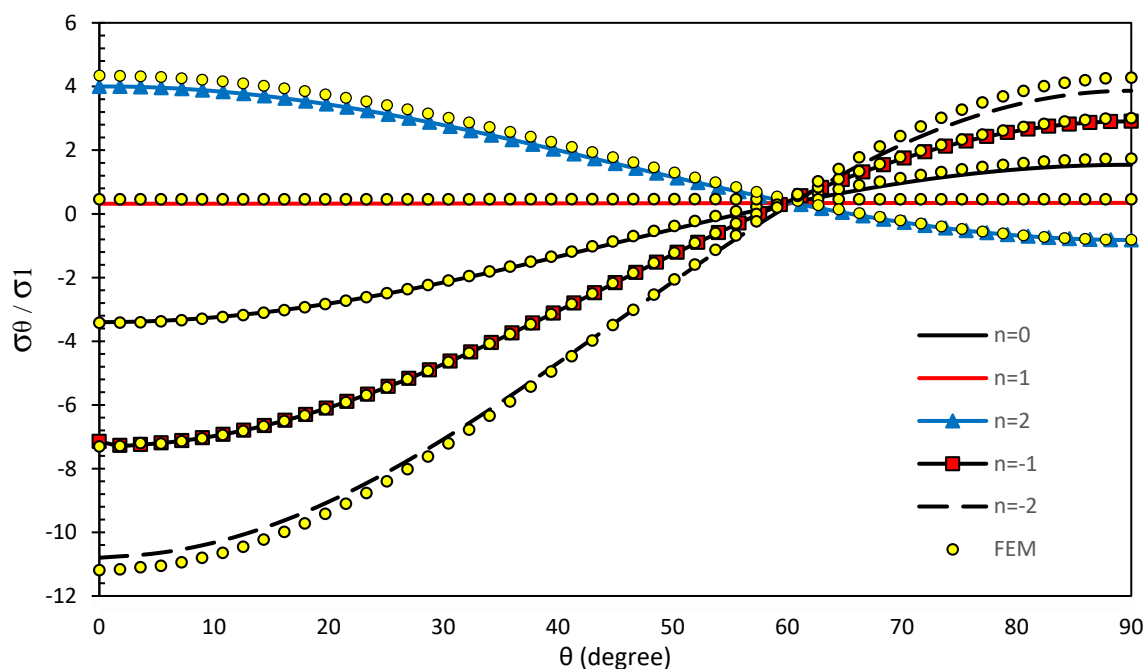
بارگذاری دومحوری ۳-۵-۲

همان‌طور که در شکل‌های ۳-۵ و ۳-۶ مشاهده می‌شود، در ورق ناهمگن نوع اول و دوم، با افزایش مقدار n از ۲ تا ۲ اختلاف میان مقدار تنش محیطی بیشینه و کمینه در اطراف گشودگی، مشاهده می‌شود که

رفتار ورق ناهمگن همانند ورق همگن (شکل ۲-۱۰) است. در نمودارهای زیر شاهد افزایش تنش به وجود آمده اطراف ورق نسبت به ورق همگن هستیم. ورق ناهمگن نوع اول با افزایش تنش کمتری نسبت به ورق نوع دوم روبه روست. این امر به دلیل رفتار لایه‌های میانی ورق نوع اول نسبت به نوع دوم است که در بارگذاری تک‌محوری نیز به آن اشاره شد اما افزایش تنش نسبت به حالت همگن ناشی از وجود تنش حرارتی در اطراف گشودگی است. بارگذاری حرارتی مورد مطالعه در این تحقیق همان‌طور که پیش‌تر نیز به صورت مکرر اشاره شد، اختلاف دمای ثابت اطراف گشودگی است که به صورت متقارن و در جهت شعاعی به ورق اعمال می‌شود لذا تنش حرارتی ناشی از این بارگذاری در اطراف گشودگی یک مقدار ثابت دارد که این عدد به توزیع تنش مکانیکی در گشودگی اضافه می‌شود. به همان دلیلی که در بارگذاری تک‌محوری اشاره شد، تنش حرارتی در ورق همگن مقدار کمتری نسبت به ورق ناهمگن نوع اول و دوم دارد. بنابراین تاثیر بارگذاری حرارتی را می‌توان در بارگذاری دومحوری در شکل‌های (۳-۵) و (۳-۶) مشاهده نمود.



شکل ۳-۵ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوری



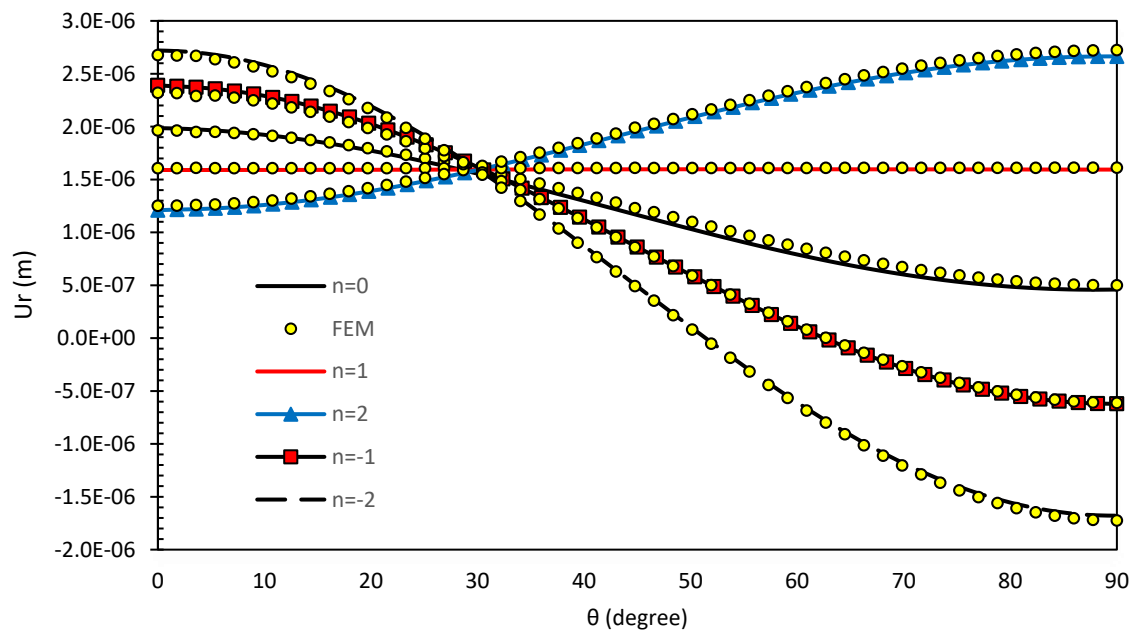
شکل ۳-۶ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری

جدول ۳-۳ بیشینه تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری دوماحوره

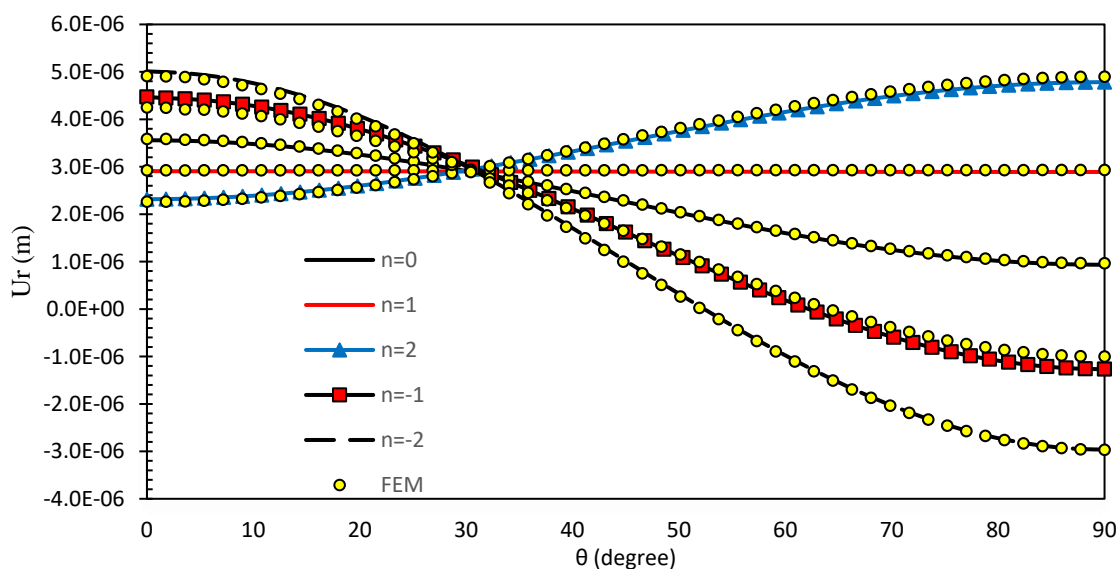
n	همگن	ناهمگن نوع اول	ناهمگن نوع دوم	درصد افزایش در ورق نوع اول	درصد افزایش در ورق نوع دوم
۲	۳	-۳/۲	۴	۲۶/۴	۳۸/۶
۱	-۰/۰۵	-۰/۲۸	۰/۳۵	۲۶/۹	۳۸/۳
۰	-۳	-۴/۵۲	-۳/۴	۵۰	۱۳
-۱	-۶	-۶/۸۵	-۷/۱۵	۲۷/۲	۳۸/۸
-۲	-۹	-۹/۱۷	-۱۰/۸۲	۲۶/۹	۳۸/۹

شکل‌های ۳-۷ و ۳-۸ به ترتیب مربوط به جابه‌جایی شعاعی ورق ناهمگن نوع اول و دوم می‌باشند. در ورق ناهمگن نوع اول، کاهش مقدار جابه‌جایی نقاط در اطراف گشودگی نسبت به ورق همگن از شدت تغییر شکل گشودگی دایروی تحت بارگذاری‌های مختلف درون صفحه‌ای می‌کاهد. مشاهده می‌شود که ورق ناهمگن نوع اول رفتار بهتری در مقابل تغییر شکل و جابه‌جایی اطراف گشودگی نسبت به ورق همگن دارد.

در ورق ناهمگن نوع دوم این روند معکوس می‌باشد و تغییر شکل گشودگی شدت بیشتری می‌یابد. گذشته از جنس ورق‌ها و تأثیر آن بر شدت تغییر شکل، همانند ورق همگن، در ورق ناهمگن نوع اول و دوم با افزایش مقدار ضریب n از -2 به 2 بعد از تغییر شکل، گشودگی ابتدا به سمت دایروی شکل و سپس به سمت بیضوی شکل پیش می‌رود.



شکل ۳-۷ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری



شکل ۳-۸ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری

جدول ۳-۴ تغییرات بیشینه جابه‌جایی شعاعی را برای سه ورق همگن و ناهمگن مقایسه می‌کند. همانند تنش محیطی، کاهش و افزایش درصد جابه‌جایی شعاعی ورق‌های ناهمگن نسبت به ورق همگن مستقل از نوع بارگذاری درون‌صفحه‌ای می‌باشد. تفاوت خواص حرارتی مواد ورق‌ها باعث تفاوت رفتار آن‌ها در برابر تغییر شکل و جابه‌جایی اطراف گشودگی می‌شود؛ به عبارت دیگر تأثیر بارگذاری حرارتی و رفتار حرارتی را با استفاده از جابه‌جایی شعاعی بهتر می‌توان توصیف نمود.

جدول ۳-۴ بیشینه جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن (واحد 10^{-1}mm)

n	همگن	ناهمگن نوع اول	ناهمگن نوع دوم	درصد کاهش در ورق نوع اول	درصد افزایش در ورق نوع دوم
۲	۴/۱۵	۲/۶۶	۴/۷۸	۲۶/۷	۳۴/۷
۱	۲/۶۵	۱/۶۰	۲/۹۲	۲۶/۷	۳۵
۰	۳/۱۵	۲	۳/۵۶	۲۶/۶	۳۴/۶
-۱	۳/۶۶	۲/۴	۴/۴۷	۲۶/۷	۳۳/۲
-۲	۴/۱۸	۲/۷۲	۴/۸۶	۲۷/۱	۳۳/۳

با توجه به شکل‌های ۳-۵ تا ۳-۸ و مقایسه نتایج حاصل از حل پیشنهادی و حل نرم‌افزاری اجزای محدود می‌توان نتیجه گرفت، که همانند کشش تک‌محوره حل مورد بررسی برای بارگذاری دومحوره دقت قابل قبولی دارد.

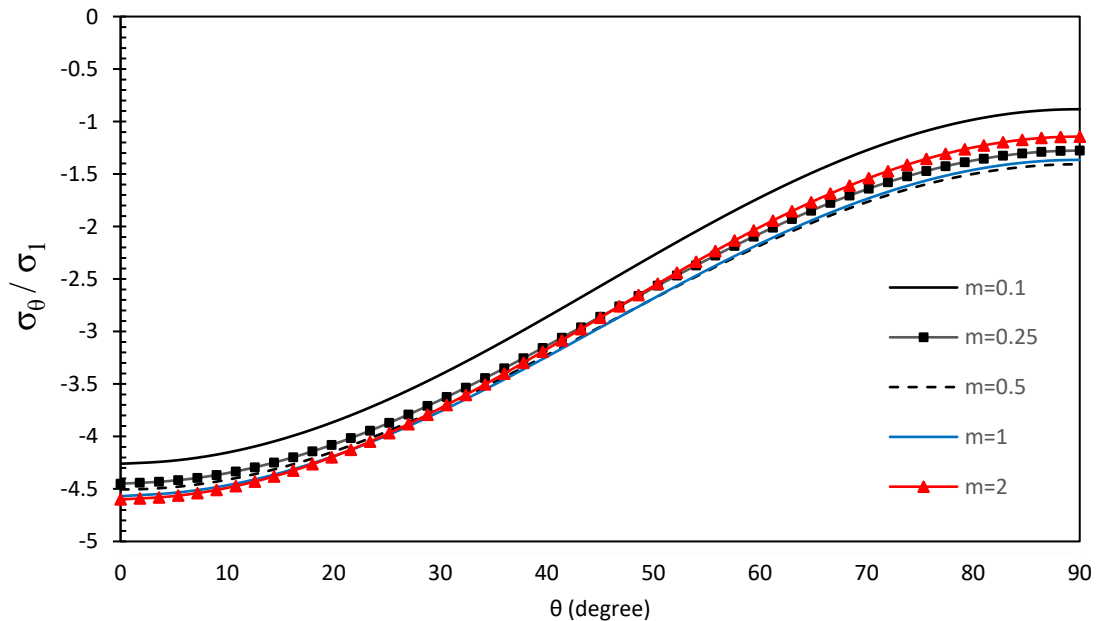
۳-۶ تأثیر شعاع همگرایی

همان‌طور که در بخش ۳-۲ بیان شد، تغییر ضریب m در رابطه‌ی (۳-۱)، مربوط به تابع ناهمگنی، باعث تغییر شعاع همگرایی تابع و ناحیه‌ی ناهمگنی ورق می‌شود. در این بخش، تأثیر این ضریب بر مقدار تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی، بررسی می‌شود.

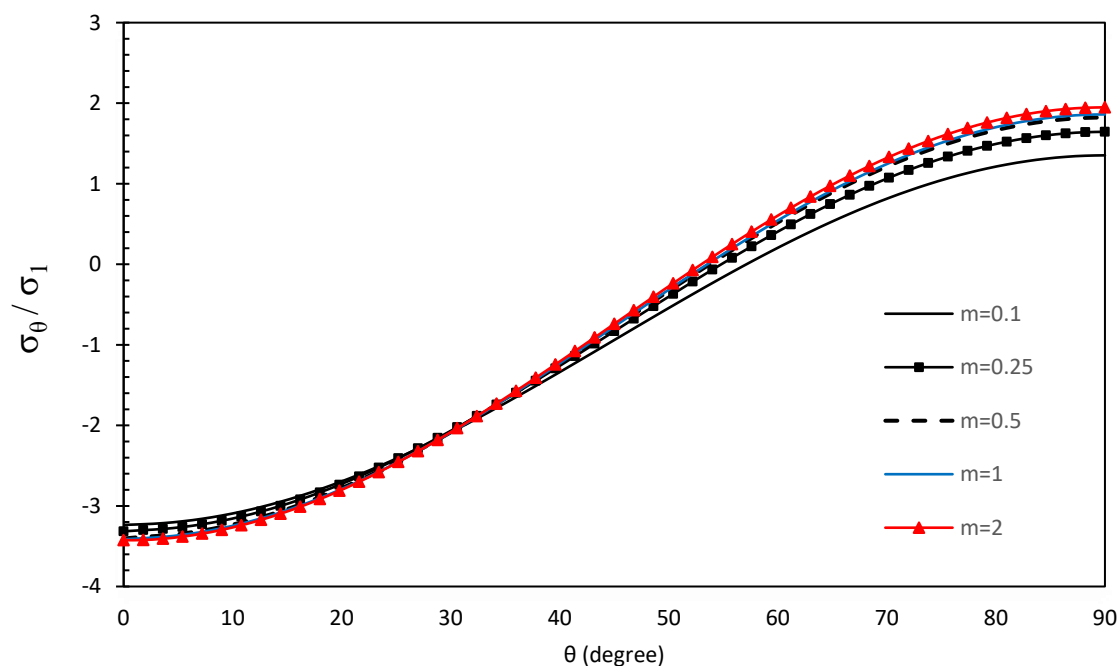
۳-۶-۱ ورق تحت بارگذاری تک محوری

شکل‌های ۳-۹ و ۳-۱۰ به ترتیب تأثیر مقدار m را بر توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی، برای ورق ناهمگن نوع اول و دوم، نشان می‌دهند. همان‌گونه که در شکل ۳-۹ مشاهده می‌شود، این افزایش مقدار m باعث کاهش مقدار تنش محیطی در اطراف گشودگی، در ورق ناهمگن نوع اول می‌شود؛ زیرا در حالتی که $m=2$ است، لایه‌های بیشتری از ورق دارای خواص مکانیکی قوی‌تری بوده و در نتیجه جذب انرژی بیشتری در لایه‌های میانی ورق صورت می‌پذیرد. این پدیده در ورق ناهمگن نوع دوم، به صورت معکوس رخ می‌دهد. در شکل ۳-۱۰، در حالتی که $m=2$ است، به دلیل ضعیف‌تر بودن خواص مکانیکی در لایه‌های بیشتری از ورق ناهمگن و در نتیجه جذب کمتری از انرژی کرنش توسط لایه‌های میانی، تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی دایروی مقدار بیشتری می‌یابد.

با توجه به دو شکل ۳-۹ و ۳-۱۰ می‌توان دریافت که شدت تغییرات تنش محیطی نسبت به افزایش مقدار m کاسته می‌شود؛ به طوری که تغییرات تنش محیطی برای $m=1$ و $m=2$ بسیار کم و قابل صرف نظر کردن است. این پدیده به علت کاهش شدت تغییرات خواص مکانیکی و شعاع همگرایی با تغییر m است.

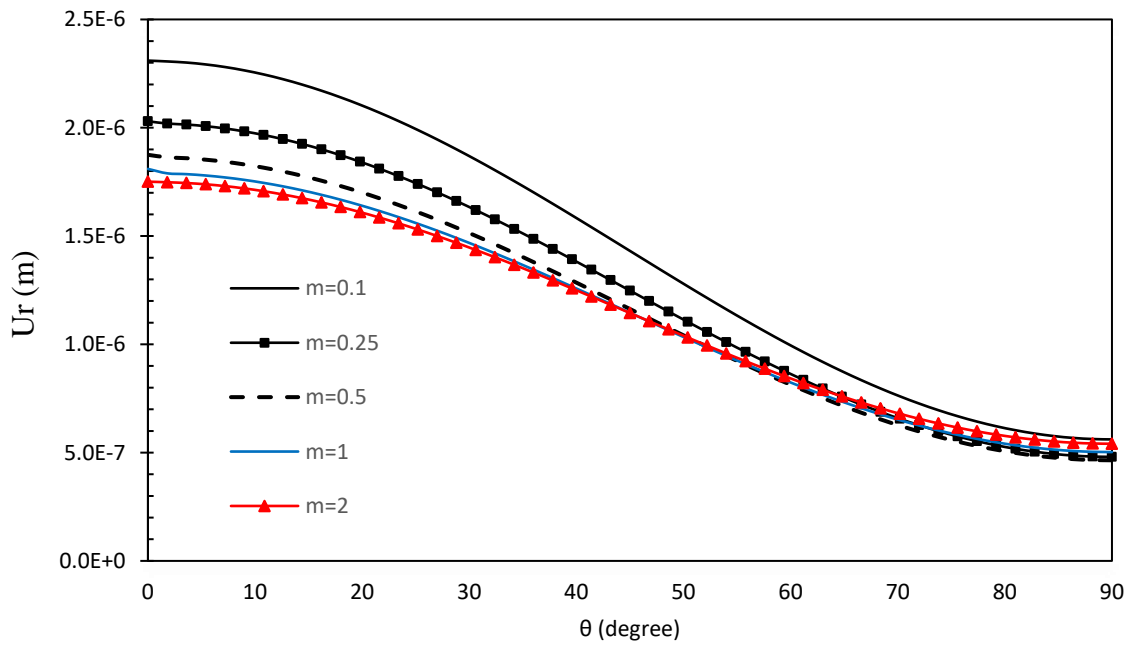


شکل ۳-۹ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف m

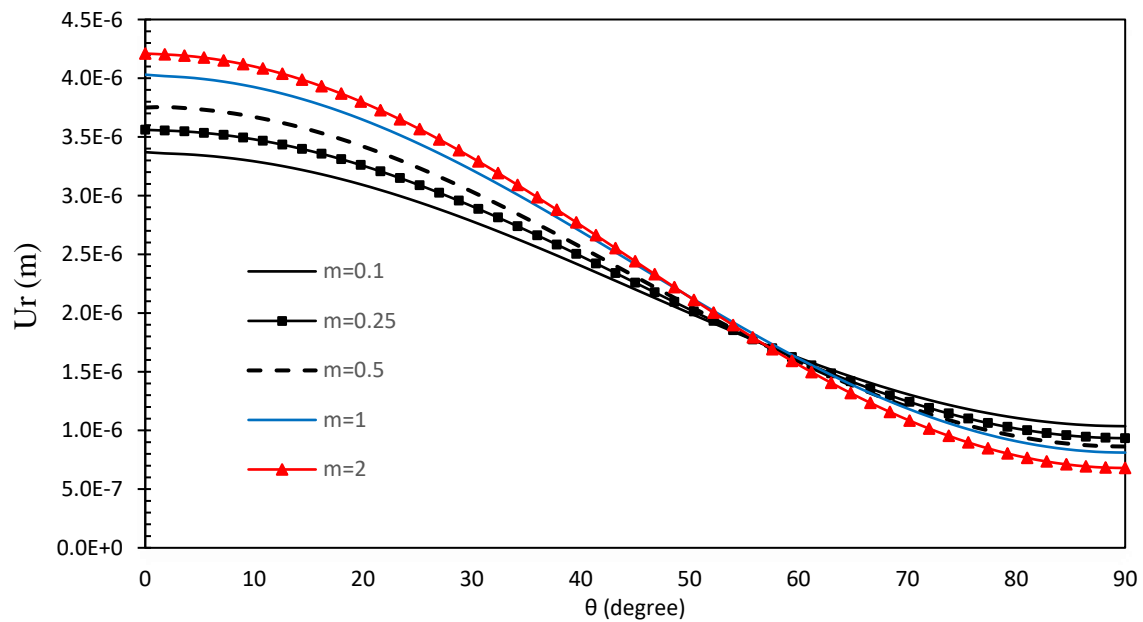


شکل ۳-۱۰ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف m

در شکل ۳-۱۱ و ۳-۱۲ مشاهده می‌شود که همانند نمودارهای تنش محیطی، شدت تغییرات جابه‌جایی شعاعی نیز با افزایش m کاهش می‌یابد به طوری که برای ورق ناهمگن نوع اول و دوم، می‌توان از تغییرات جابه‌جایی شعاعی برای $m=1$ و $m=2$ صرف‌نظر کرد. نرخ تغییرات جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق ناهمگن نوع اول نسبت به ورق ناهمگن نوع دوم بیشتر می‌باشد. اختلاف مقدار جابه‌جایی شعاعی برای مقادیر m در ورق ناهمگن نوع اول، زیاد می‌باشد. علت این امر وجود لایه‌هایی با خواص مکانیکی و حرارتی قوی‌تر در ورق ناهمگن نوع اول نسبت به ورق ناهمگن نوع دوم است.



شکل ۱۱-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف m

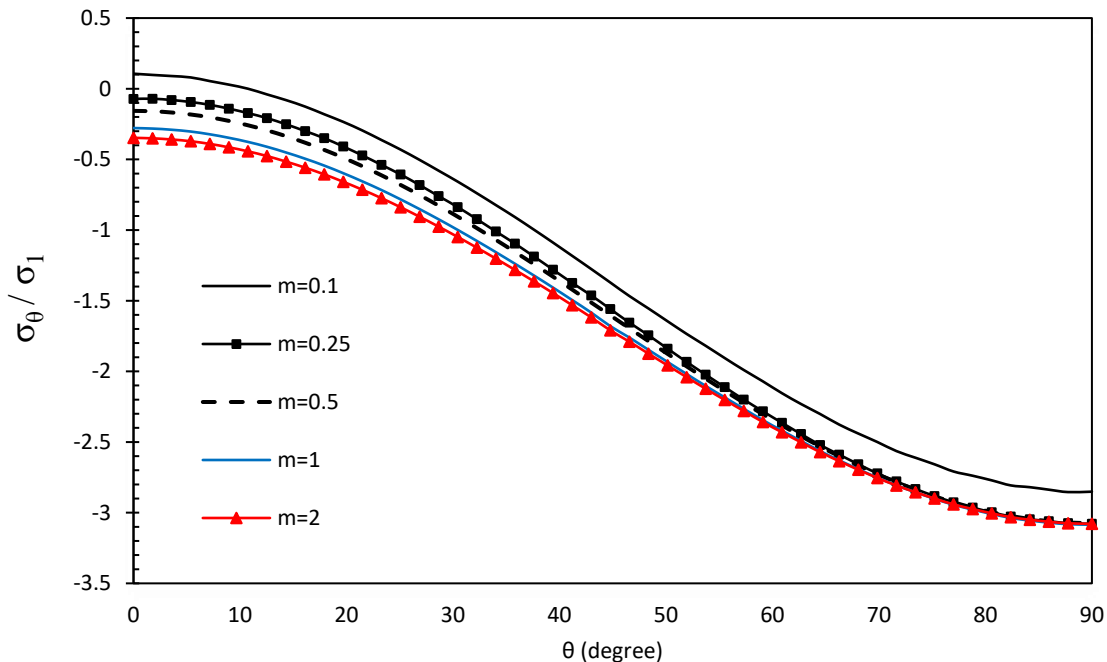


شکل ۱۲-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف m

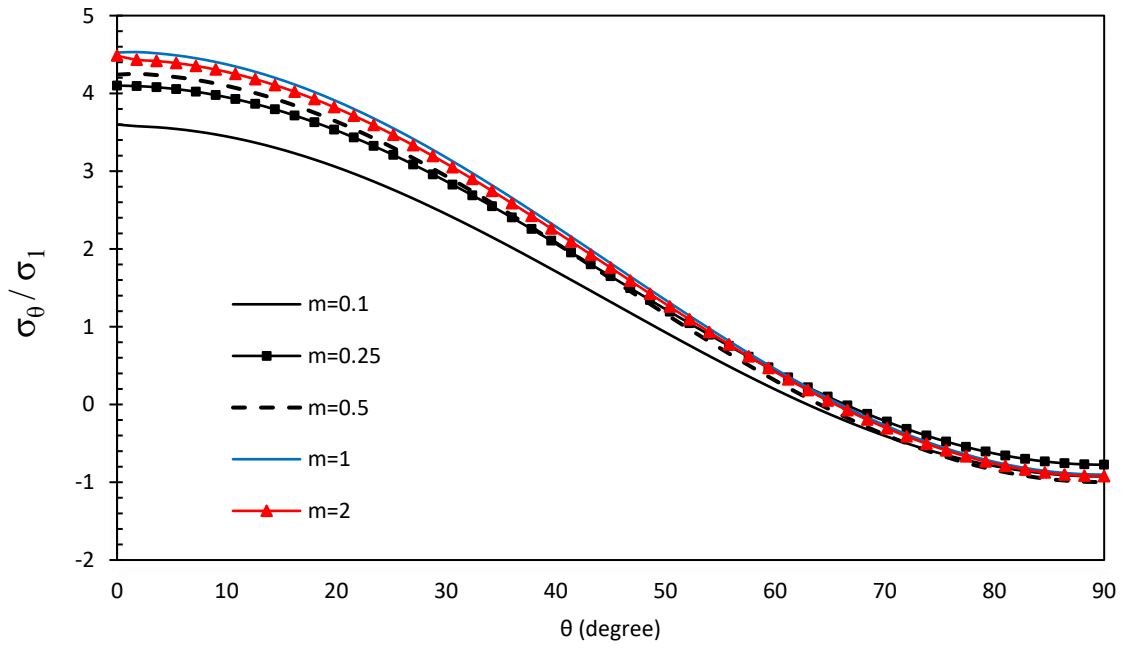
۳-۶-۲ ورق تحت بارگذاری دومحوری $n=2$

در بارگذاری دومحوره با توجه به تنوع در ترکیب بارهای فشاری و کششی در مرزهای خارجی ورق برای جلوگیری از زیاده‌نویسی و شلوغ شدن شکل خروجی‌ها تنها یک حالت بارگذاری دومحوری بررسی خواهد شد.

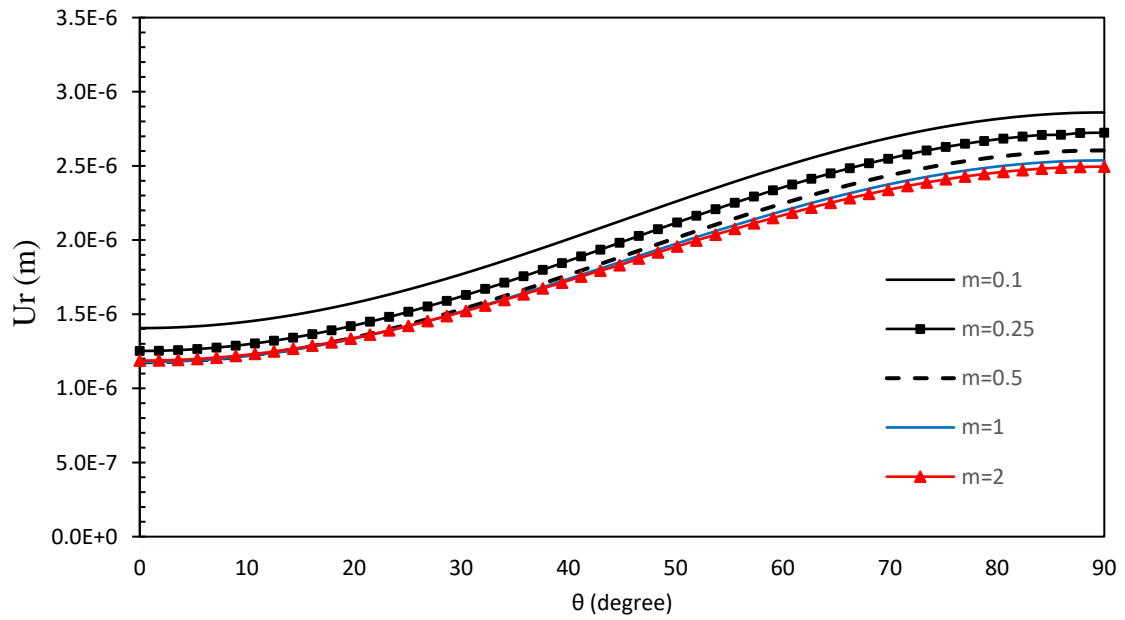
همانند بارگذاری تک‌محوره، در بارگذاری دومحوره با $n=2$ نیز با افزایش مقدار m می‌توان از تغییرات تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی صرف‌نظر کرد. همچنین مقایسه‌ی نمودارهای $3-13$ و $3-14$ و همچنین $3-15$ و $3-16$ نشان می‌دهد که همانند بارگذاری تک‌محوره، تغییرات تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی برای ورق ناهمگن نوع اول بیشتر از ورق ناهمگن نوع دوم است.



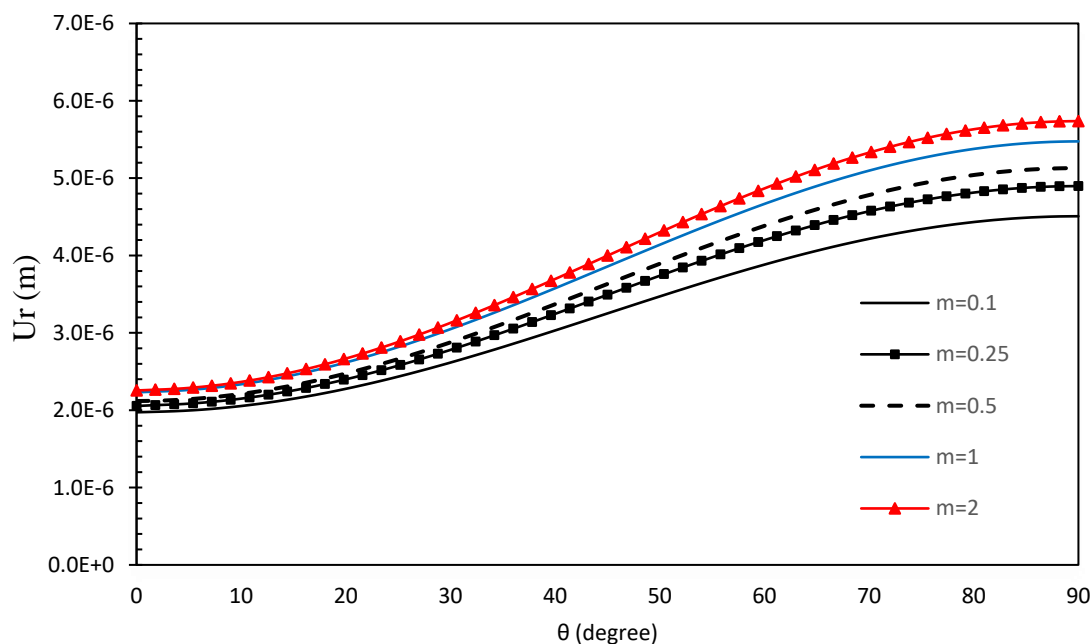
شکل ۳-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف m



شکل ۳-۱۴ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف m



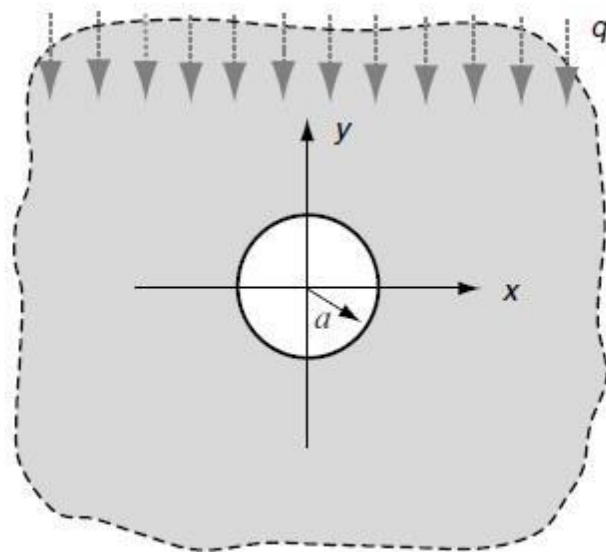
شکل ۳-۱۵ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف m



شکل ۳-۱۶ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف m

۳-۶-۳ مسأله‌ی نمونه برای شار حرارتی [۴۹]

در این مسأله ورق به‌عنوان مطالعه‌ی موردی تحت یک شار حرارتی ثابت در بی‌نهایت در جهت محور Y قرار می‌گیرد. بار مکانیکی به ورق اعمال نشده و گشودگی عایق فرض می‌شود. روابط اساسی برای به‌دست آوردن تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها همانند روند ذکر شده در قسمت‌های قبلی می‌باشد، اما توزیع دما و توابع پتانسیل با حالت اختلاف دما کمی متفاوت است. شکل زیر نحوه‌ی بارگذاری ورق تحت شار حرارتی را نشان می‌دهد:



شکل ۳-۱۷ جریان حرارت اطراف گشودگی دایره‌ای در ورق [۲]

توزیع دمای ورق در این حالت به شکل زیر است [۲]:

$$\frac{q}{k} \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta \quad (3-10)$$

که q شار حرارتی، k ضریب هدایت حرارتی و R شعاع گشودگی است. دمای مختلط برای این مسأله

به صورت زیر است:

$$T^*(z) = -\frac{iq}{k} \left(z - \frac{R^2}{z} \right) \quad (3-11)$$

توابع پتانسیل $\varphi(z)$ و $\psi(z)$ در این حالت بارگذاری عبارتند از:

$$\varphi(z) = A \ln(z) + \varphi^*(z) \quad (3-12)$$

$$\psi(z) = \bar{A} \ln(z) + \psi^*(z) \quad (3-13)$$

انتگرال رابطه‌ی (۲-۵۶) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$(u+iv)_1^2 = -\frac{2q\alpha\pi R^2}{k} \quad (3-14)$$

در نتیجه ضریب A طبق روند قبلی به صورت زیر به دست می آید:

$$A = -\frac{i q E \alpha R^2}{k}$$

توابع $\psi(z)$ و $\phi(z)$ به شکل زیر بیان می شوند [۱۰]:

$$\phi(z) = A \ln(z) \quad (3-15)$$

$$\psi(z) = -A \left(\frac{R^2}{z^2} + \ln(z) \right) \quad (3-16)$$

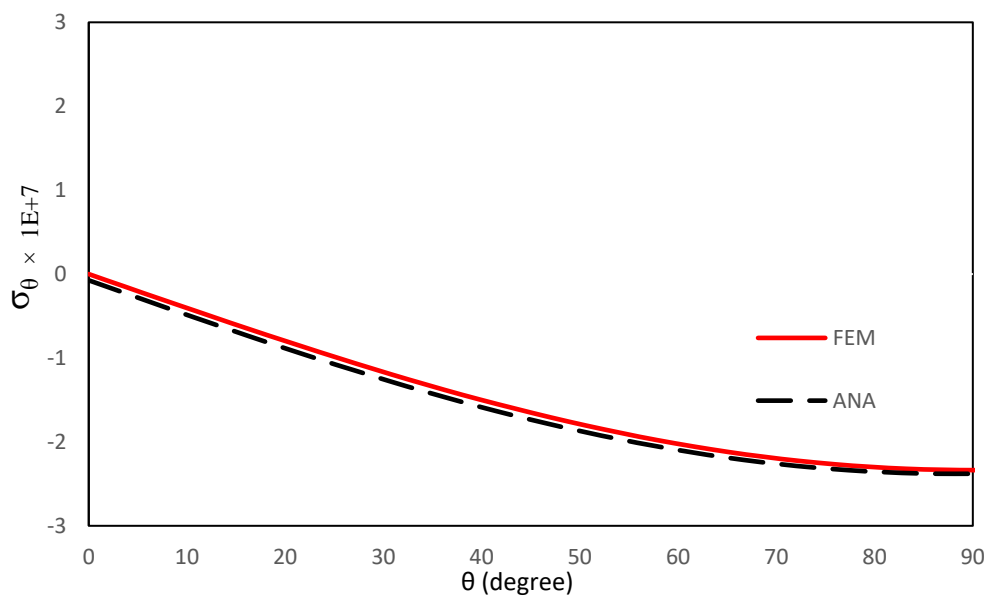
در نهایت تنش های محیطی و شعاعی با استفاده از روابط (۲-۵۱) و (۲-۵۲) به دست می آیند:

$$\sigma_r = -\frac{1}{2} \frac{E \alpha q R}{k} \left(\frac{R}{r} - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (3-17)$$

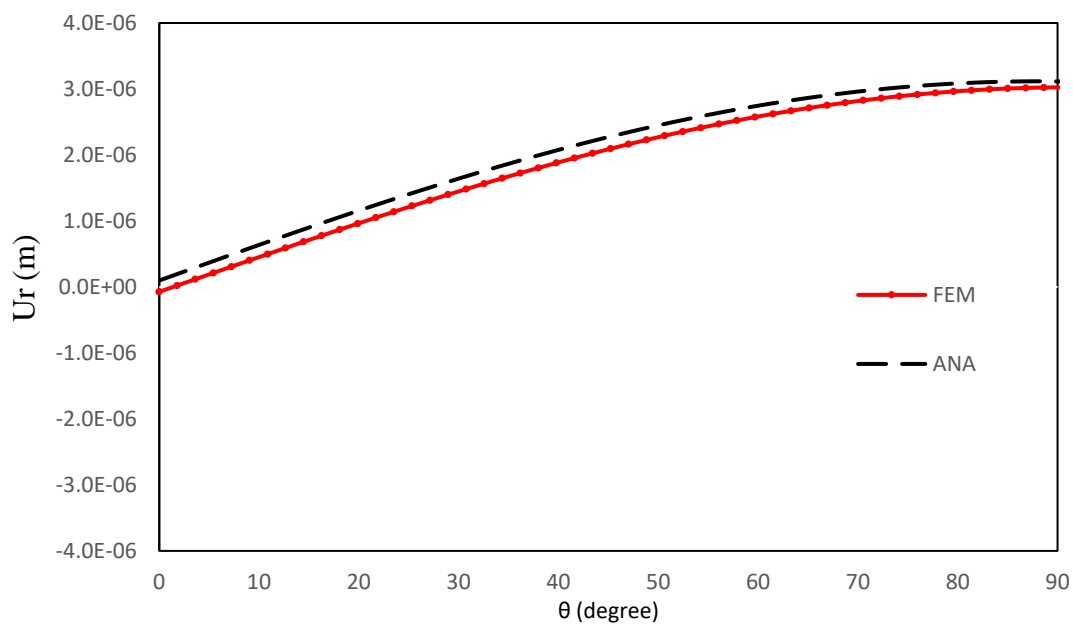
$$\sigma_\theta = -\frac{1}{2} \frac{E \alpha q R}{k} \left(\frac{R}{r} + \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (3-18)$$

۳-۶-۳-۱ بررسی نتایج بدون بار محوری

در این بخش نتایج حاصل از تحقیق را برای مقدار شار $q = 120000 \text{ w/m}^2$ در مرز گشودگی بررسی می کنیم. شکل (۳-۱۸) و (۳-۱۹) به ترتیب توزیع تنش محیطی و جابه جایی شعاعی در اطراف گشودگی ورق همگن را نشان می دهد. بر اساس این نمودار، بیشترین مقدار تنش در نقاطی از گشودگی به وجود می آید که زاویه ی وارد شدن شار عمود بر خط مماس بر آن نقاط می باشد. با استفاده از حل عددی نیز توزیع تنش در اطراف گشودگی به دست آمد که با توجه به تطابق آن با حل تحلیلی، درستی حل پیشنهادی را اثبات می کند.

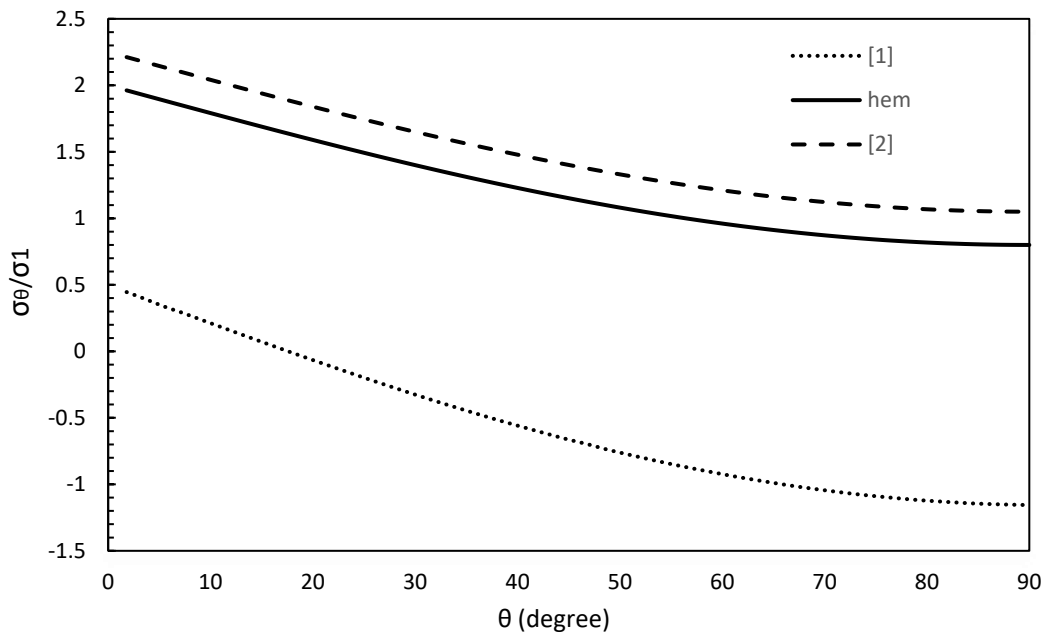


شکل ۱۸-۳ توزیع تنش اطراف گشودگی در ورق همگن تحت شار حرارتی

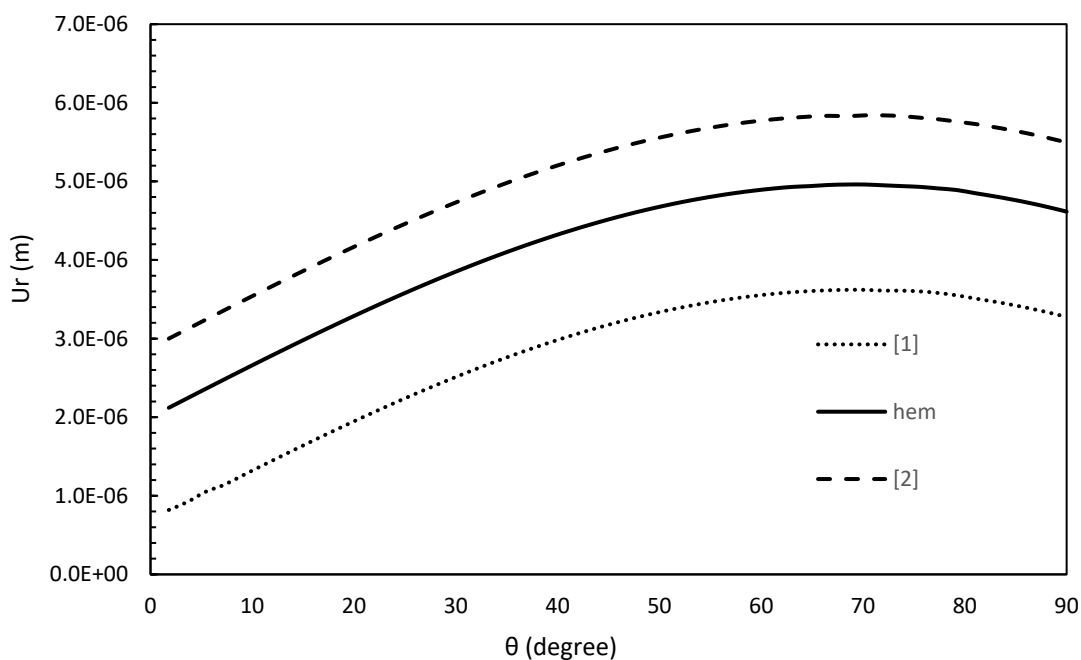


شکل ۱۹-۳ جابه‌جایی شعاعی اطراف گشودگی در ورق همگن تحت شار حرارتی

در این قسمت ورق همگن، ناهمگن نوع اول و نوع دوم تحت بار حرارتی ذکر شده و بار کششی دوماحوری $n=1$ قرار می‌گیرند. شکل‌های (۳-۲۰) و (۳-۲۱) به خوبی این نکته را نشان می‌دهند که ورق ناهمگن نوع اول رفتار بهتری را در برابر جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی نسبت به ورق همگن و ورق ناهمگن نوع دوم از خود نشان می‌دهد. در حالی که این موضوع برای ورق ناهمگن نوع دوم نسبت به ورق همگن کاملاً معکوس می‌باشد. این نکته بیان‌گر این موضوع است که در مورد بارگذاری شار حرارتی، انتخاب ماده‌ی ناهمگن فلز-سرامیک باعث بهبود رفتار سازه در برابر بارگذاری ترکیبی حرارتی-مکانیکی نسبت به ورق ناهمگن فلز-فلز می‌شود.



شکل ۳-۲۰ توزیع تنش در اطراف گشودگی ورق همگن، ناهمگن نوع اول و نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$

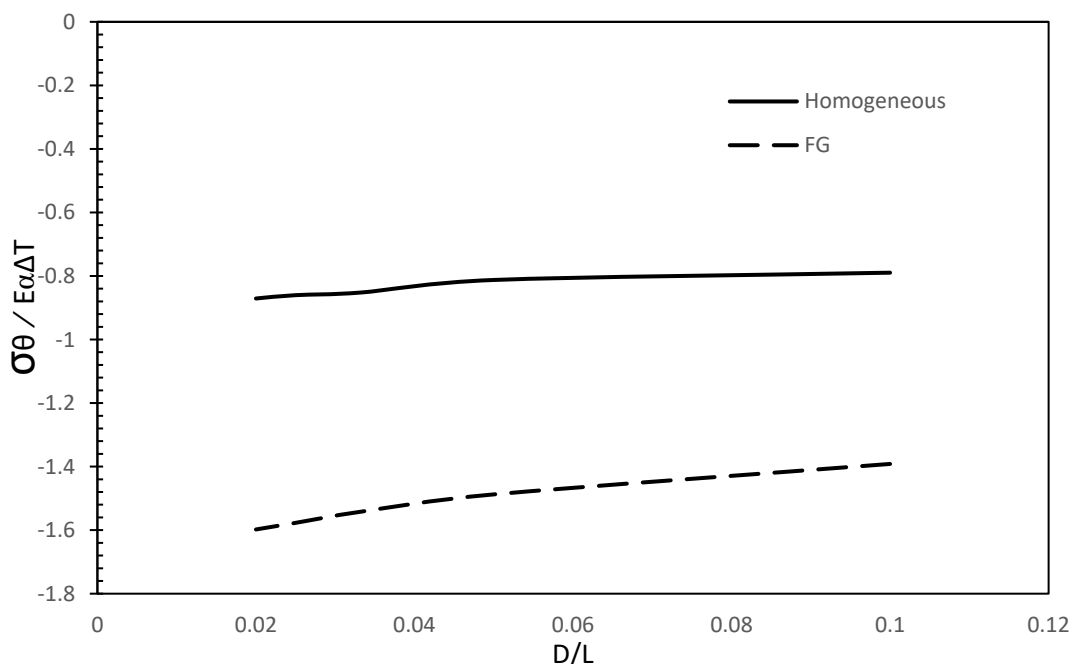


شکل ۳-۲۱ جابه‌جایی شعاعی گشودگی در ورق همگن، ناهمگن نوع اول و نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری $n=1$

۳-۶-۴ تاثیر تغییر طول ضلع ورق

در انتها نیز بررسی بر روی تاثیر تغییر طول ضلع ورق بر تنش محیطی اطراف گشودگی برای ورق همگن و ورق ناهمگن نوع اول انجام شده‌است. نتایج حاکی از آن است که با افزایش نسبت قطر به طول ضلع مربع

$\frac{D}{L}$ ، مقدار تنش محیطی در اطراف گشودگی افزایش می‌یابد. نتایج حاصل دارای تطابق قابل قبولی با منبع [۱۴] است.



شکل ۳-۲۲ تغییرات تنش محیطی نسبت به طول ضلع ورق

۳-۷ جمع بندی

در این فصل، تابع ناهمگنی مورد استفاده در این تحقیق معرفی و مزایا و خصوصیات آن بررسی شد که برای اطلاعات بیشتر می‌توان به منبع [۲۳] مراجعه کرد. همچنین با بررسی ورق بلند ناهمگن و همگن مشخص شد، ورق ناهمگن نوع اول با خصوصیات مکانیکی تعریف شده در جدول ۳-۱، باعث افزایش مقدار تنش در حدود ۱۳-۵۰ درصد با توجه به نوع بارگذاری می‌شود. این امر برای ورق ناهمگن نوع دوم نیز به همان صورت می‌باشد با این تفاوت که درصد افزایش تنش حرارتی کمتر از ورق نوع اول است. اما نتیجه‌ی مهم در این فصل در رابطه با جابه‌جایی شعاعی بود؛ که در ورق ناهمگن نوع اول شاهد کاهش مطلوب مقدار جابه‌جایی شعاعی اطراف گشودگی نسبت به ورق همگن بودیم. این روند برای ورق ناهمگن نوع دوم معکوس می‌باشد. هم‌چنین مسأله‌ی مورد مطالعه تحت بارگذاری شار حرارتی نیز قرار گرفته و نتایج مورد بررسی قرار گرفت.

فصل ۴ ورق همگن و ناهمگن تحت بار فشاری در

داخل گشودگی

۴-۱ پیش‌گفتار

در این فصل علاوه بر بارگذاری درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی، فشار یکنواخت درون گشودگی دایروی ورق همگن و ناهمگن وارد می‌شود. هدف این فصل، بررسی تأثیر بارگذاری مورد نظر بر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی است. در ابتدا تعمیم حل تحلیلی (۲-۴۴) موجود مراجع در هنگام حضور بارگذاری درون گشودگی بررسی می‌شود [۲۳]. سپس نتایج حاصل از ورق همگن و ناهمگن تحت کشش تک‌محوره و دوماحوره به همراه بارگذاری فشاری یکنواخت استخراج و مطالعه می‌شوند.

۴-۲ معادلات حاکم

در این فصل علاوه بر بارگذاری در مرزهای خارجی، برای ورق همگن و ناهمگن، فشار در داخل گشودگی نیز وارد محاسبات خواهد شد. بار فشاری به صورت یکنواخت به تمام نقاط اطراف گشودگی دایروی وارد می‌شود. معادلات حرارتی کماکان مانند معادلات قبلی در فصل دوم برای ورق همگن و معادلات فصل سوم برای ورق ناهمگن بوده و تغییری نمی‌کنند. معادلات مکانیکی نیز تغییر زیادی نخواهند کرد؛ تنها کافی است که در رابطه‌ی (۲-۴۱) مربوط به مرز داخل گشودگی مقدار عددی تنش شعاعی با مقدار فشار وارد بر گشودگی برابر شود.

همانند فصل‌های گذشته، در این فصل نیز برای اطمینان از درستی حلّ تحلیلی پیشنهادی، از حلّ موجود در مراجع استفاده می‌شود. در فصل دوم رابطه‌ی (۲-۴۳) و (۲-۴۴)، که توسط دانشمندانی همچون ردی و پیلکی برای ورق همگن تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای بیان شده بود؛ مطرح گردید.

در این دو رابطه، تأثیر بارگذاری فشار یکنواخت در داخل گشودگی دایروی دیده نشده است. برای تعمیم این حلّ تحلیلی برای بارگذاری مورد نظر در این فصل، از رابطه‌ی تابع تنش ایری، به دست آمده از معادله‌ی دوهمسازه استفاده می‌شود.

$$\nabla^4 U = 0$$

(۱-۴)

حلّ پیشنهادی برای تابع تنش ایری [۴۶] به صورت زیر می باشد:

$$U = [c_1 \ln(r) + c_2]r^2 + [c_3 \ln(r) + c_4] + \left[(c_5 r^2 + c_6)r^2 + \left(\frac{c_7}{r^2}\right) + c_8 \right] \cos(2\theta) \quad (۲-۴)$$

رابطه‌ی تابع تنش ایری با تنش‌های نرمال و برشی در مختصات قطبی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (۳-۴)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۲-۴) در (۳-۴) مقادیر تنش بر حسب ضرایب مجهول حلّ پیشنهادی به دست

می آیند.

$$\begin{cases} \sigma_r = c_1 (1 + 2\ln(r)) + 2c_2 + \frac{c_3}{r^2} - \left(2c_6 + \frac{6c_7}{r^4} + \frac{4c_8}{r^2} \right) \cos(2\theta) \\ \sigma_\theta = c_1 (3 + 2\ln(r)) + 2c_2 - \frac{c_3}{r^2} + \left(2c_6 + 2c_5 r^2 + \frac{6c_7}{r^4} \right) \cos(2\theta) \\ \tau_{r\theta} = \left(6c_5 r^2 + 2c_6 - \frac{6c_7}{r^4} - \frac{2c_6}{r^2} \right) \sin(2\theta) \end{cases} \quad (۴-۴)$$

شرایط مرزی ورق در بی نهایت برابر σ_1 ، σ_2 و τ_{12} می باشند. با استفاده از روابط تبدیل تنش، این

مقادیر در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\sigma_r^\infty = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) + \tau_{12} \sin(2\theta) \quad (۵-۴)$$

$$\sigma_\theta^\infty = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) - \tau_{12} \sin(2\theta) \quad (۶-۴)$$

$$\tau_{r\theta}^\infty = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\theta) + \tau_{12} \cos(2\theta) \quad (۷-۴)$$

با قرار دادن $r = \pm\infty$ در رابطه‌ی (۴-۴) داریم:

$$r = \infty \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = 2c_2 - 2c_6 \cos(2\theta) \\ \sigma_\theta = +2c_2 + (2c_6 + 2c_5 r^2) \cos(2\theta) \\ \tau_{r\theta} = (6c_5 r^2 + 2c_6) \sin(2\theta) \end{cases} \quad (۸-۴)$$

باتوجه به معین بودن مقدار تنش محیطی و برشی در نقاط دور از گشودگی در بی‌نهایت، مقدار ضرایب

c_1 و c_5 برابر صفر هستند. با برابر قرار دادن روابط (۴-۵) تا (۴-۷) با رابطه‌ی (۴-۸) داریم:

$$c_6 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4}, \quad c_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{4}, \quad c_5 = 0, \quad c_1 = 0$$

با قرار دادن شرایط مرزی در اطراف گشودگی در رابطه‌ی (۴-۳) روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$r = a \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = -P \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -P = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{c_3}{a^2} - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + 6\frac{c_7}{a^4} + \frac{4c_8}{a^2} \right) \cos(2\theta) \\ 0 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} - 6\frac{c_7}{a^4} - \frac{2c_8}{a^2} \right) \sin(2\theta) \end{cases} \quad (۹-۴)$$

با مرتب سازی و تجزیه‌ی روابط (۴-۸) ضرایب مجهول به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$c_3 = \left(-P - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) a^2, \quad c_8 = a^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right), \quad c_7 = a^4 \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right)$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای ضرایب، روابط (۴-۳) به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - P \frac{a^2}{r^2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left(1 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^4 - 4\left(\frac{a}{r}\right)^2 \right) \cos(2\theta) \quad (۱۰-۴)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + P \frac{a^2}{r^2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left(1 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^4 \right) \cos(2\theta) \quad (۱۱-۴)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin(2\theta) \quad (۱۲-۴)$$

با به دست آمدن این روابط، امکان مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل تحلیلی پیشنهادی و روابط بالا وجود

دارد.

۴-۳ بررسی نتایج

درحالتی که ورق تحت بارگذاری درون صفحه‌ای در مرزهای خارجی بوده و فشار در داخل گشودگی صفر باشد (گشودگی عاری از بار است)؛ تنش‌های شعاعی و برشی در مرز گشودگی صفر هستند؛ ولی در صورت اعمال بار فشاری در مرز گشودگی دایروی، مقدار عددی تنش شعاعی در اطراف گشودگی، برابر مقدار بار فشاری وارد شده بر آن است. به همین دلیل علاوه بر بررسی مجزای تنش محیطی در اطراف گشودگی دایروی، از معیار تسلیم فن میزس^۱ در حالت تنش دوبعدی یا Plane stress، که در رابطه‌ی (۴-۱۳) نمایش داده شده است، برای محاسبه‌ی تنش معادل در این نقاط استفاده می‌شود؛ تا علاوه بر تنش محیطی در صورت حضور تنش شعاعی در اطراف گشودگی بتوان به صورت کلی تنش را در نقاط مختلف، مورد بررسی قرار داد.

$$\sigma_{\text{Von}} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - (\sigma_r \sigma_\theta)} \quad (۴-۱۳)$$

در این بخش نتایج حاصل از بارگذاری درون صفحه‌ای در مرزهای خارجی و فشار یکنواخت در مرز گشودگی برای ورق بلند با همان نسبت ابعادی ۳۰ مانند فصل‌های قبل، بررسی می‌شود.

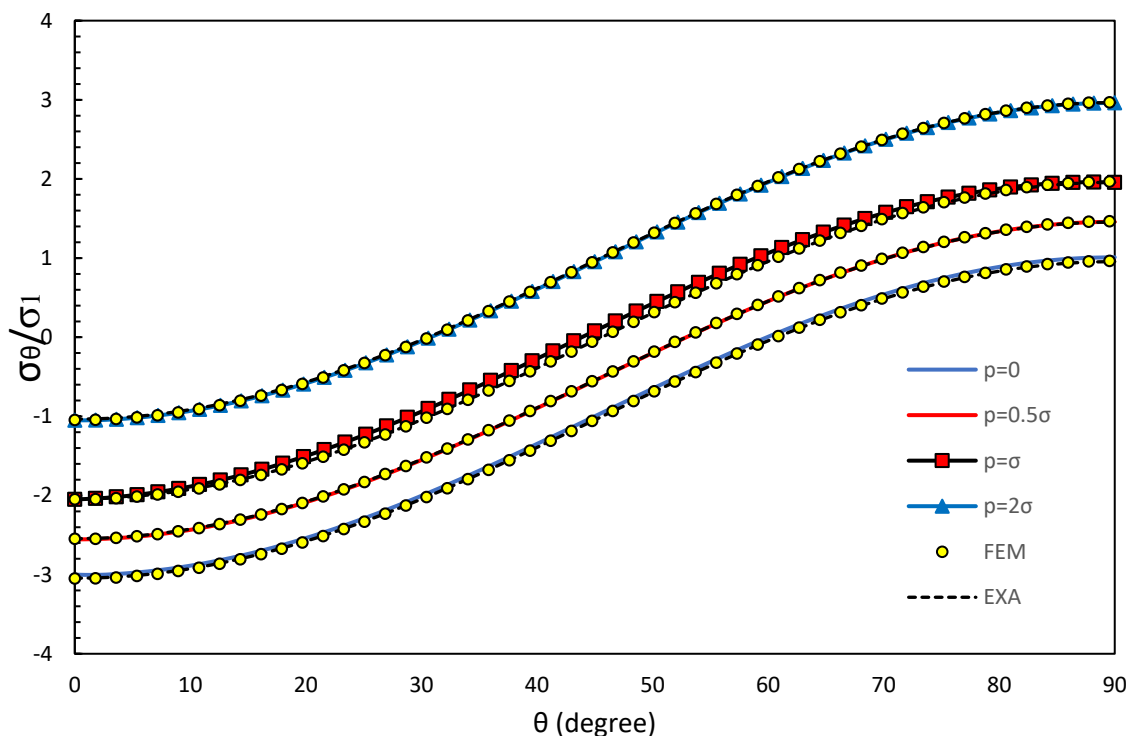
۴-۳-۱ کشش تک‌محوری

۴-۳-۱-۱ ورق همگن

با توجه به شکل (۴-۱) می‌توان دریافت، که حضور فشار یکنواخت در داخل گشودگی دایروی ورق، باعث افزایش یکنواخت تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی می‌شود؛ مانند تاثیری که اختلاف دمای ثابت در ایجاد تنش دارد. این مقدار افزایش برابر مقدار فشار یکنواخت وارد شده به داخل گشودگی است. با مقایسه‌ی

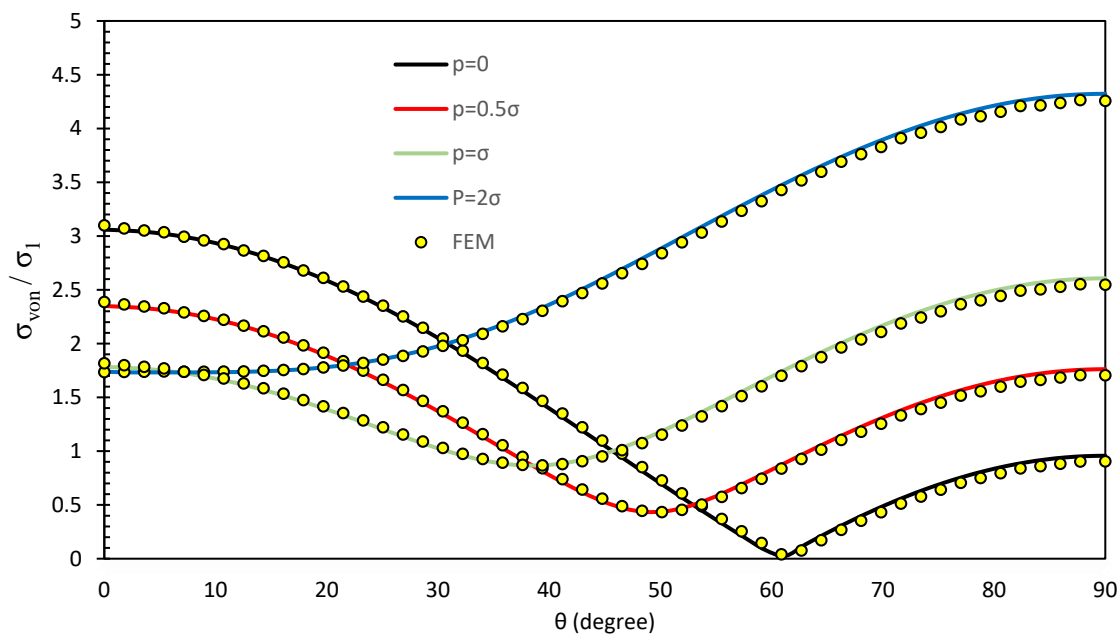
^۱ Von Mises Yielding Criterion

حلّ پیشنهادی و حلّ تحلیلی استخراج شده از مراجع، برای هر کدام از بارگذاری‌ها، می‌توان دقت بالای حلّ تحلیلی پیشنهادی و تحلیل نرم‌افزاری انجام شده را تأیید نمود.



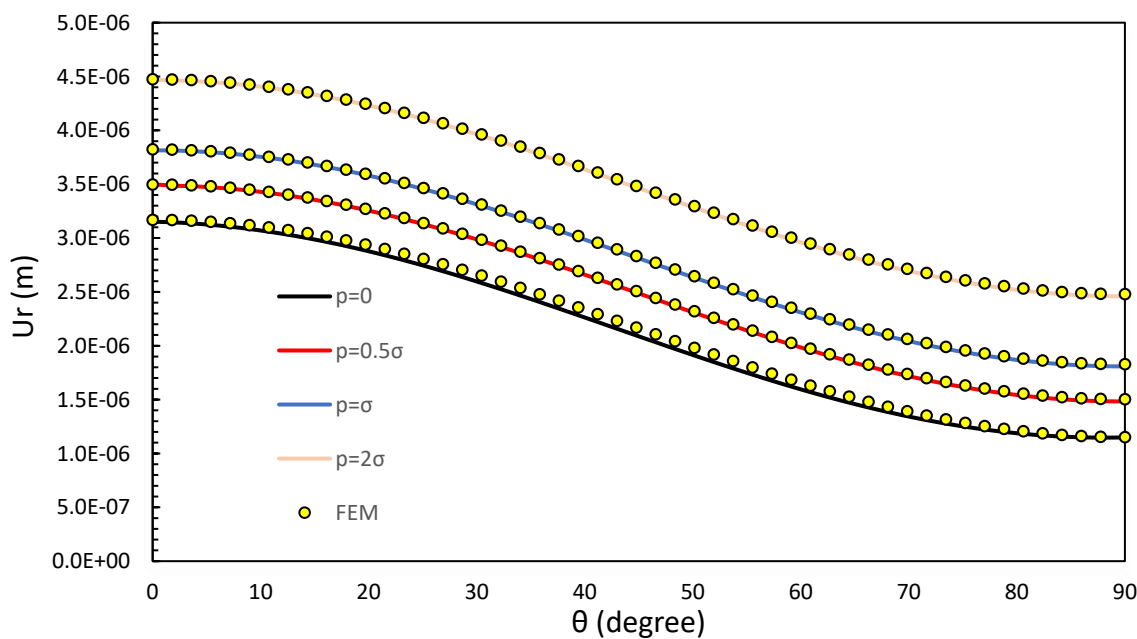
شکل ۴-۱ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک‌محوری

با توجه به حضور تنش شعاعی در اطراف گشودگی همان‌طور که گفته شد، از معیار فن میزس برای به‌دست آوردن مقدار تنشی واحد در نقاط اطراف گشودگی استفاده می‌شود. با توجه به شکل (۲-۴) افزایش مقدار تنش فن میزس نسبت به تنش محیطی به‌طور کامل مشهود می‌باشد. حفظ شکل کلی نمودار تنش معادل نسبت به تنش محیطی نشان‌دهنده‌ی ثابت بودن مقدار تنش شعاعی در تمام زوایای گشودگی است. نزدیکی جواب تحلیل عددی و حلّ پیشنهادی، دقت خوب حلّ مورد بررسی را نشان می‌دهد. در نمودار $P=0$ و $P=0.5\sigma$ تفاوتی در رفتار تنش مشاهده می‌شود. در حالت $P=0$ ، $P=0.5\sigma$ و $P=\sigma$ به علت ذات تنش معادل فن میزس، که نمی‌تواند مقدار منفی بپذیرد، در نقاطی که تنش محیطی مقادیر منفی می‌پذیرد، تنش معادل فن میزس به‌صورت قدر مطلق، خود را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک‌محوری

در مورد شکل (۳-۴) با مقایسه‌ی نمودارهای مربوط به بارگذاری‌های فشاری $P=0$ می‌توان نتیجه گرفت، که همانند نمودارهای تنش محیطی مقدار افزایش جابه‌جایی در تمام نقاط به صورت یکسان رخ داده است. این رفتار به علت حضور تنش شعاعی یکنواخت در اطراف گشودگی است.

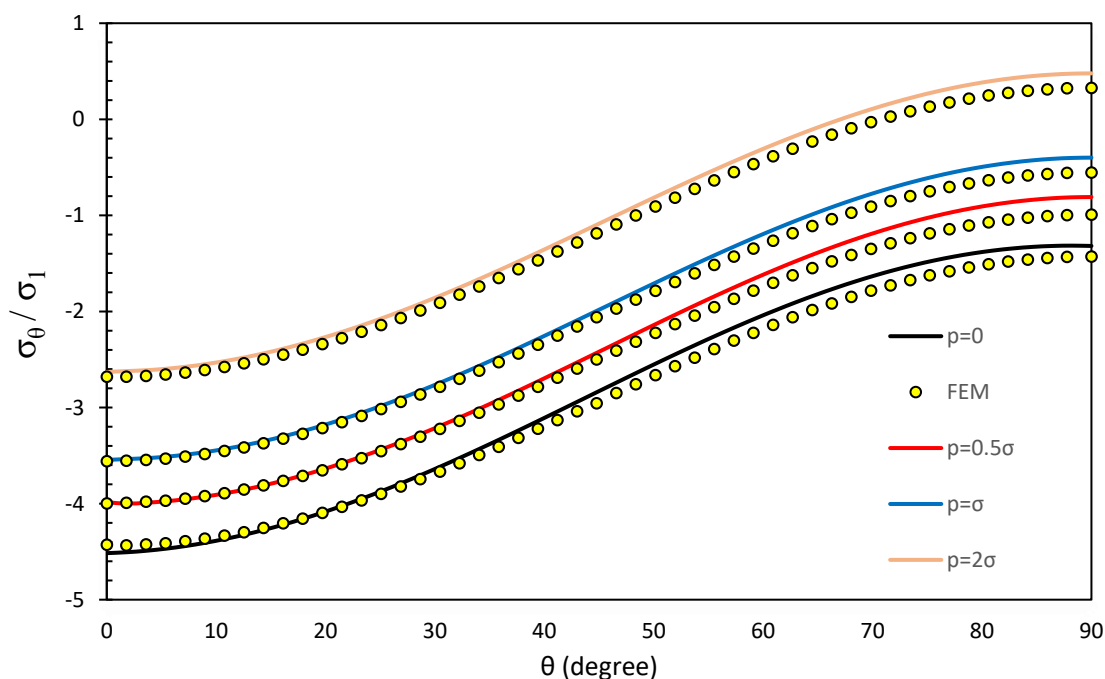


شکل ۳-۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک‌محوری

در شکل (۴-۴) توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی دایروی در ورق ناهمگن نوع دوم، همانند ورق همگن با افزایش مقدار فشار درون گشودگی افزایش می‌یابد؛ ولی این مقدار افزایش برابر با مقدار بار فشاری نیست. با توجه به جدول ۴-۱ در تمامی مقادیر بار فشاری در داخل گشودگی، تنش محیطی حدود ۸۷-۸۸ درصد مقدار بار فشاری افزایش می‌یابد. به علت آنکه فشار وارد شده در گشودگی به‌طور مستقیم به نقاط اطراف گشودگی وارد می‌شود، افزایش سفتی لایه‌های میانی در ورق ناهمگن نوع اول، تأثیر چندانی بر مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر بارگذاری فشاری ندارد.

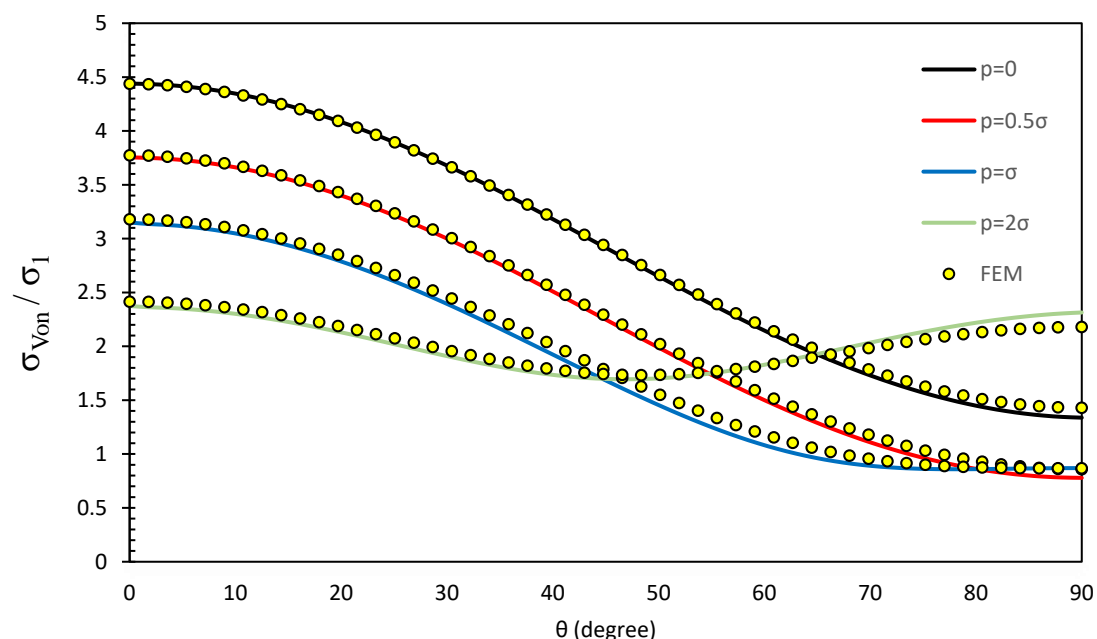
جدول ۴-۱ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری

درصد افزایش	$\sigma_{\theta_{p=0}} - \sigma_{\theta}$	$\sigma_{\theta_{p=0}} / \sigma_1$	$\sigma_{\theta} / \sigma_1$	P
۸۸	۰/۴۳	-۴/۴۳	-۴	۰/۵
۸۷	۰/۸۷	-۴/۴۳	-۳/۵۶	۱
۸۷	۱/۷۵	-۴/۴۳	-۲/۶۸	۲



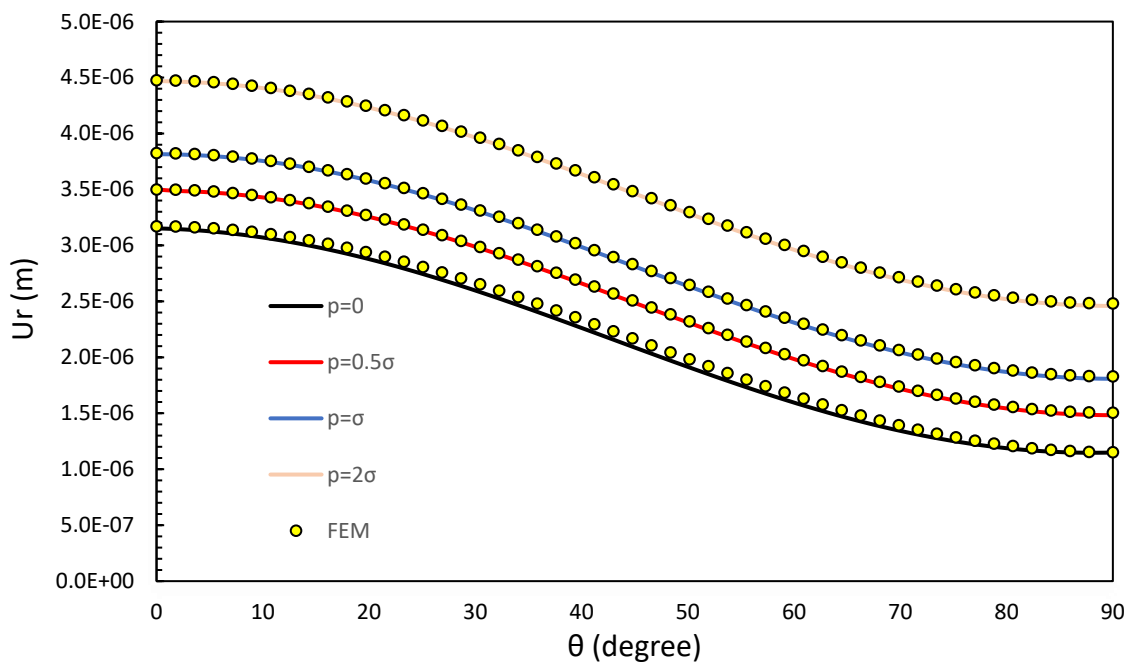
شکل ۴-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوری

رفتار تنش معادل فن میزس برای ورق ناهمگن نوع اول در شکل (۴-۵)، همانند ورق همگن می‌باشد. هرچند تفاوت‌های بیان شده در توزیع تنش محیطی برای هر دو نوع از ورق ناهمگن، در تنش معادل فن میزس نیز مشاهده می‌شود. مقدار تنش شعاعی در اطراف گشودگی ورق مستقل از جنس ورق و وابسته به بارگذاری فشاری می‌باشد. علت این رفتار، ارضای معادله‌ی تعادل در نقاط اطراف گشودگی می‌باشد.



شکل ۴-۵ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوری

شکل (۴-۶) نشان می‌دهد، که جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی این ورق نسبت به افزایش بارگذاری فشار یکنواخت، همانند ورق همگن با نرخ افزایشی همراه است. ولی مقدار این افزایش همانند تنش محیطی کمتر از ورق همگن می‌باشد.



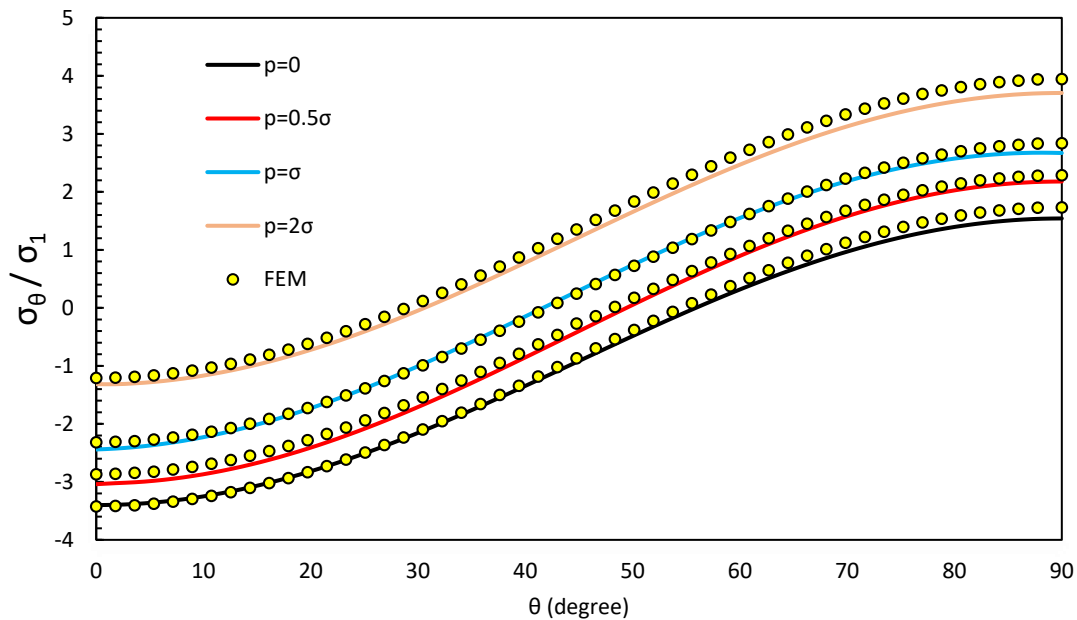
شکل ۴-۶ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوری

۴-۳-۱-۳ ورق ناهمگن نوع دوم

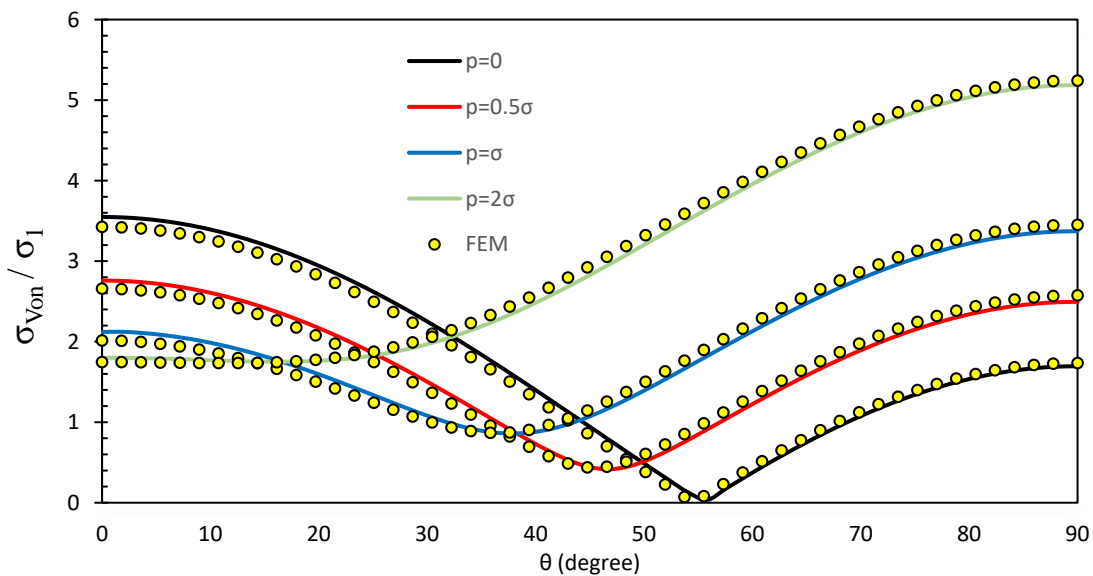
در شکل (۴-۷) و (۴-۸) مربوط به ورق ناهمگن نوع دوم، مانند ورق همگن، با افزایش مقدار فشار داخلی مقدار تنش محیطی و تنش معادل فن میزس افزایش می‌یابد. برخلاف ورق ناهمگن نوع اول، در این نوع ورق مقدار افزایش تنش محیطی و به سبب آن تنش معادل فن میزس، بر اثر بارگذاری فشاری در درون گشودگی، بیشتر از مقدار بار فشاری می‌باشد. در جدول ۴-۲ مشاهده می‌شود، که این مقدار افزایش تنش محیطی نسبت به مقدار بار فشاری، برابر ۶ تا ۹ درصد می‌باشد.

جدول ۴-۲ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری

درصد افزایش	$\sigma_{\theta_{P=0}} - \sigma_{\theta}$	$\sigma_{\theta_{P=0}} / \sigma_1$	$\sigma_{\theta} / \sigma_1$	P
۱۰۶	۰/۵۳	-۳/۴	-۲/۸۷	۰/۵
۱۰۸	۱/۰۸	-۳/۴	-۲/۳۲	۱
۱۰۹	۲/۱۸	-۳/۴	-۱/۳۲	۲



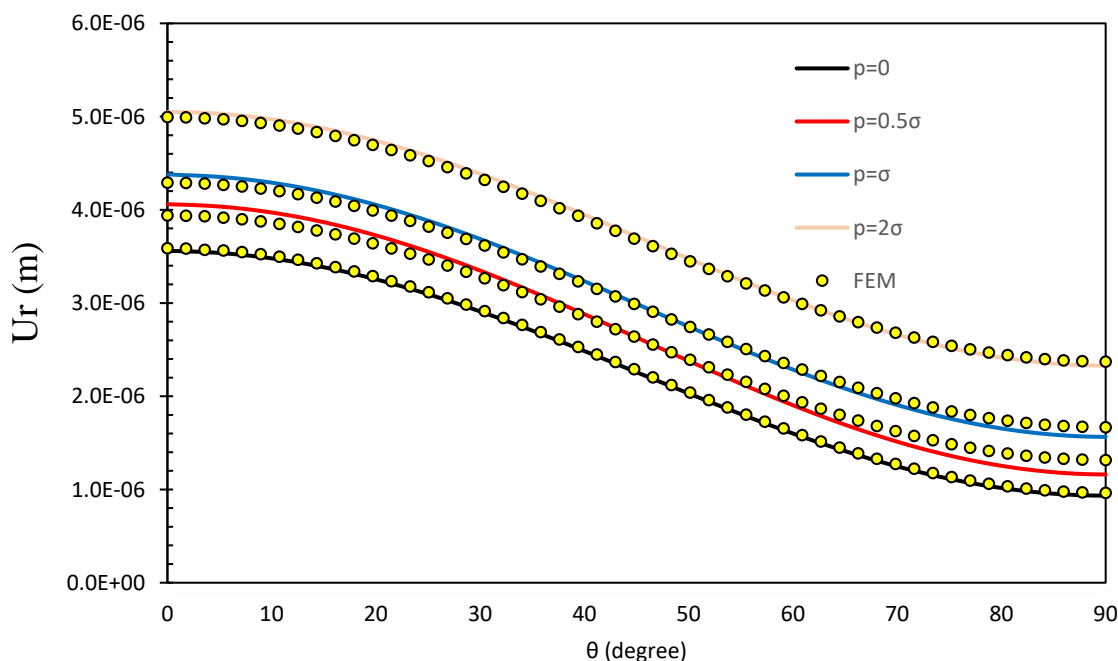
شکل ۴-۷ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوری



شکل ۴-۸ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوری

شکل (۹-۴) جابه‌جایی شعاعی در ورق ناهمگن نوع دوم را نشان می‌دهد؛ که در مقایسه با ورق ناهمگن نوع اول می‌توان دریافت، که مقدار میل کردن شکل گشودگی به شمت بیضوی شکل شدن در ورق ناهمگن نوع دوم بیشتر از ورق نوع اول است؛ ولی حضور بار فشاری تغییری در اختلاف جابه‌جایی نقاط نسبت به هم

در هر دو نوع ورق ایجاد نمی‌کند. علت این امر حضور مؤلفه‌ی تنش شعاعی و مستقل بودن آن نسبت به زاویه (θ) است. اما قاعده‌ای که پیش‌تر در مورد افزایش جابه‌جایی شعاعی ورق ناهمگن نوع دوم نسبت به ورق همگن و ناهمگن نوع اول به آن اشاره شد هم‌چنان پابرجاست.

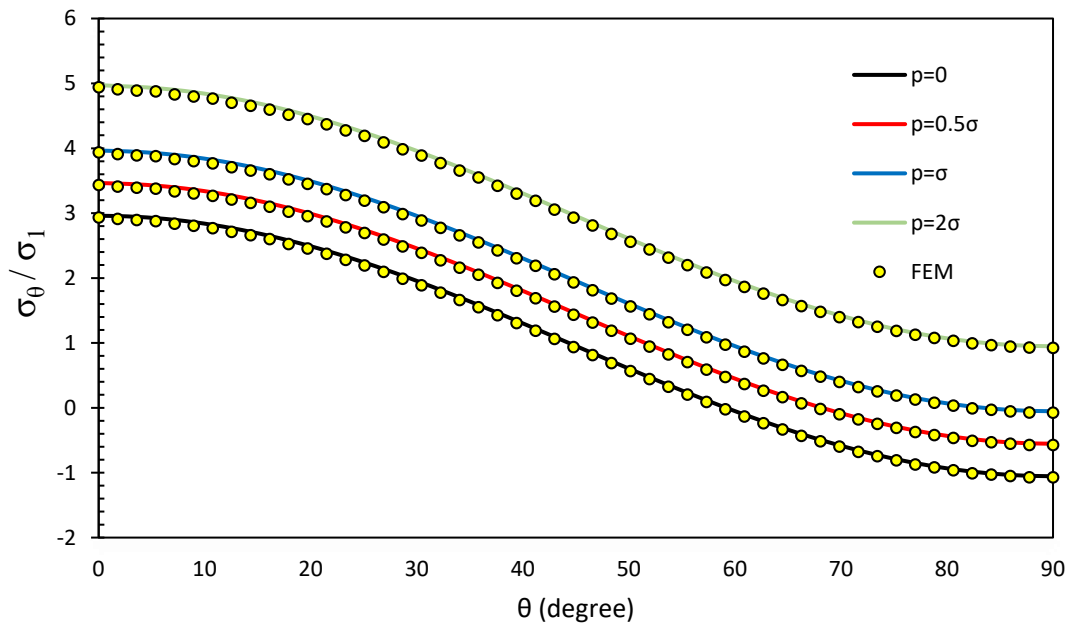


شکل ۴-۹ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوری

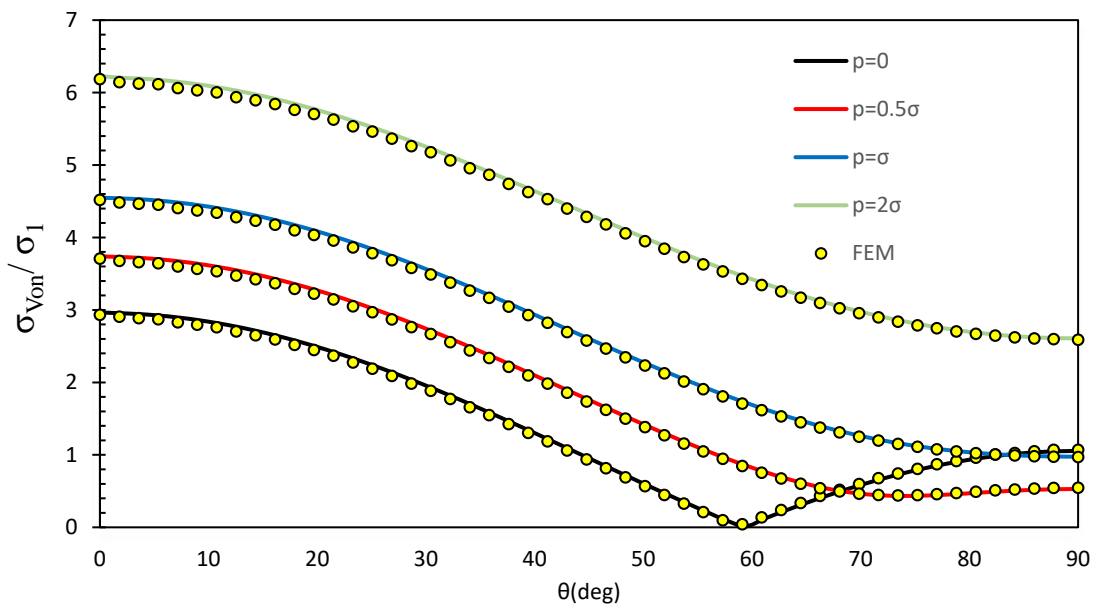
۴-۳-۲ بارگذاری دومحوری $n=2$

۴-۳-۲-۱ ورق همگن

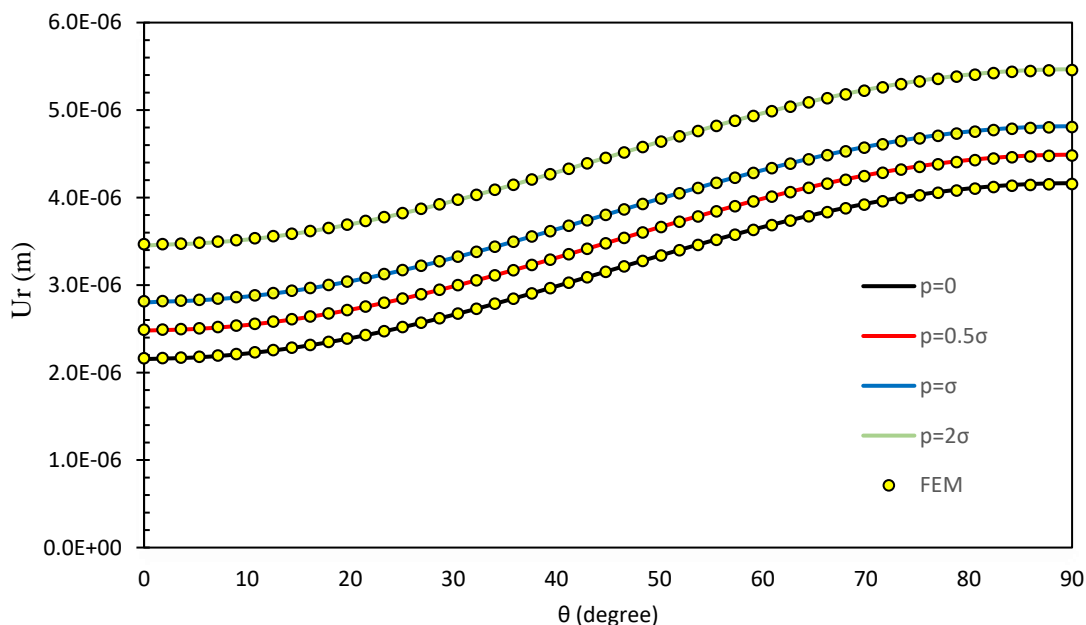
در شکل (۴-۱۰) دقت بالای حل تحلیلی پیشنهادی برای ورق همگن تحت بارگذاری دومحوره با $n=2$ و بار فشاری داخل گشودگی، به نسبت حل تحلیلی استخراج شده از مراجع، مشاهده می‌شود. شکل‌های (۴-۱۱) و (۴-۱۲) مربوط به تنش معادل فن میزس و جابه‌جایی شعاعی دارای روند و نتایج مشابهی هستند؛ به‌غیراز شکل مربوط به $P=\sigma$ و $P=\sigma\Delta/0$ که به دلیل مثبت بودن تنش محیطی در اطراف گشودگی روند صعودی مانند $P=2\sigma$ دارند. اما روند شکل ۴-۱۲ با جابه‌جایی‌های شعاعی در بارگذاری‌های قبلی متفاوت است که به دلیل تغییر توزیع تنش و مثبت شدن آن در اطراف گشودگی می‌باشد.



شکل ۴-۱۰ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دومحوری $n=2$



شکل ۴-۱۱ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دومحوری $n=2$



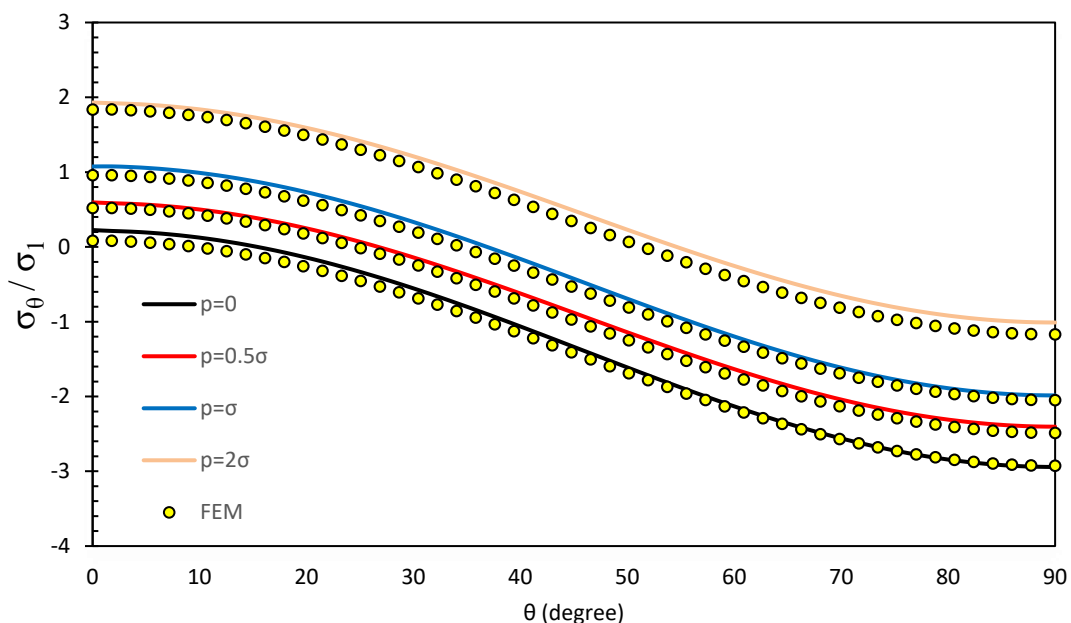
شکل ۴-۱۲ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری $n=2$

۴-۳-۲-۲ ورق ناهمگن نوع اول

ورق ناهمگن نوع اول، همانند بار کشش تک‌محوره، در بارگذاری دوماحوره $n=2$ نیز رفتاری مشابه نسبت به بارگذاری فشاری نشان می‌دهد. در شکل (۴-۱۳) این رفتار مشهود است. با توجه به جدول ۳-۴ مقدار افزایش تنش محیطی در ورق ناهمگن نوع اول تحت این بارگذاری، حدود $0/75-0/85$ مقدار بار فشاری وارد شده بر گشودگی افزایش می‌یابد.

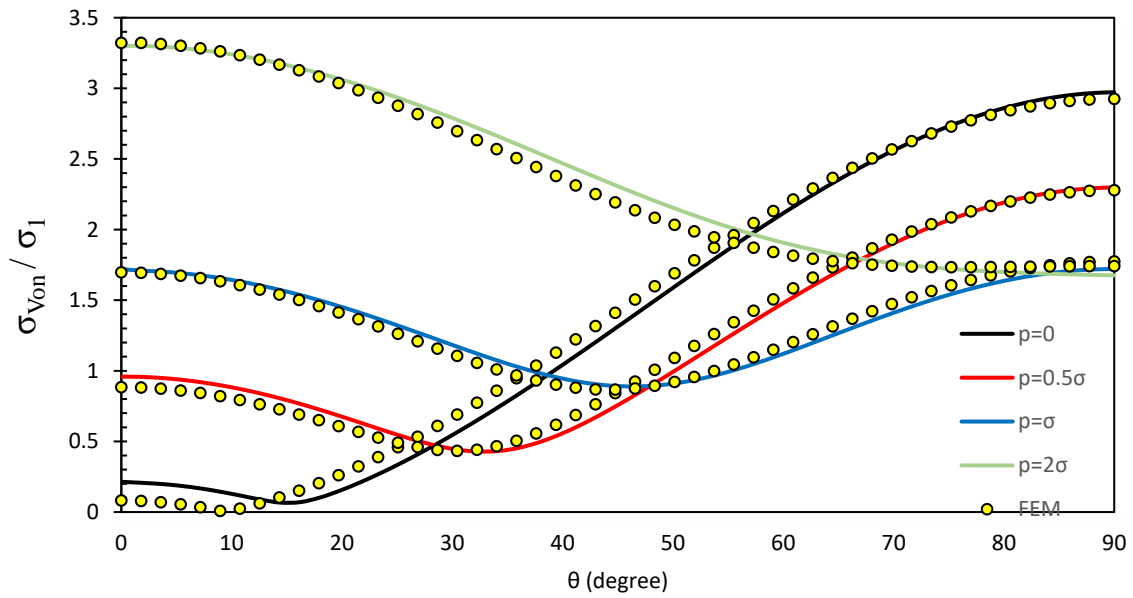
جدول ۳-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری

درصد افزایش σ_θ	$\sigma_\theta - \sigma_{\theta_{p=0}}$	$\sigma_{\theta_{p=0}} / \sigma_1$	σ_θ / σ_1	P
۷۵/۵	۰/۳۷۵	۰/۲۲۵	۰/۶	۰/۵
۸۵/۵	۰/۸۵۵	۰/۲۲۵	۱/۰۸	۱
۸۵/۲	۱/۷۰۵	۰/۲۲۵	۱/۹۳	۲

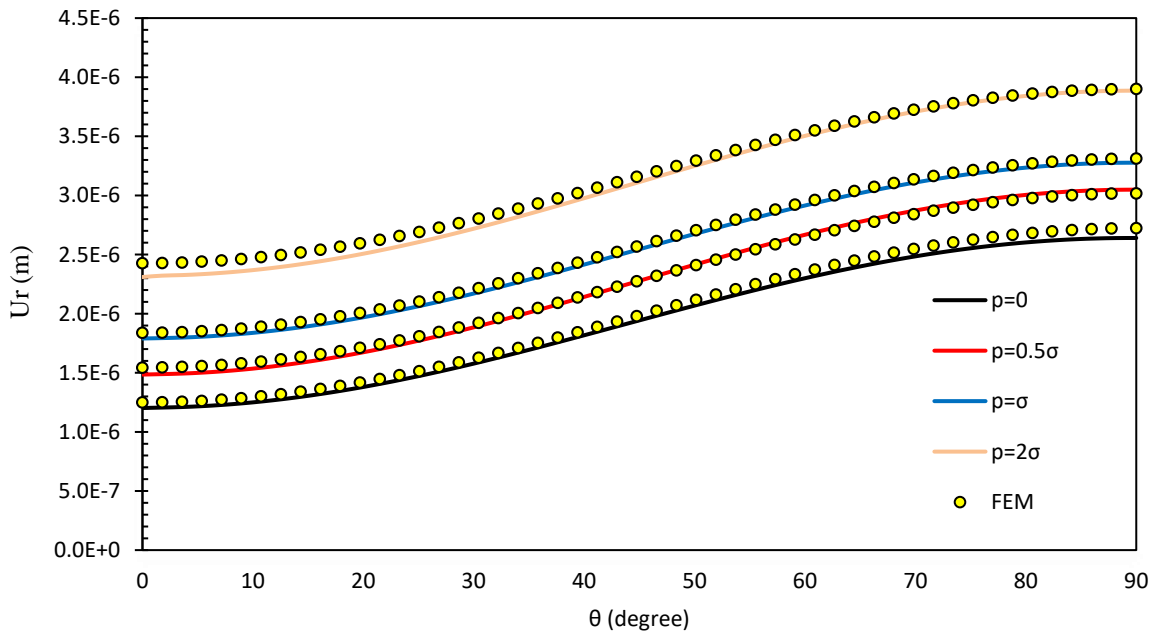


شکل ۴-۱۳ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوری $n=2$

شکل (۴-۱۴) و (۴-۱۵) به ترتیب توزیع تنش معادل فن میزس و جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی ورق تحت بارگذاری مورد بررسی هستند. در این نوع بارگذاری در ورق ناهمگن نوع اول، تنش معادل فن میزس رفتاری مشابه به ورق همگن را از خود نشان می‌دهد. افزایش یکنواخت تنش‌ها و جابه‌جایی شعاعی، نشان‌دهنده‌ی مستقل بودن تنش محیطی و شعاعی حاصل از بار فشاری است.

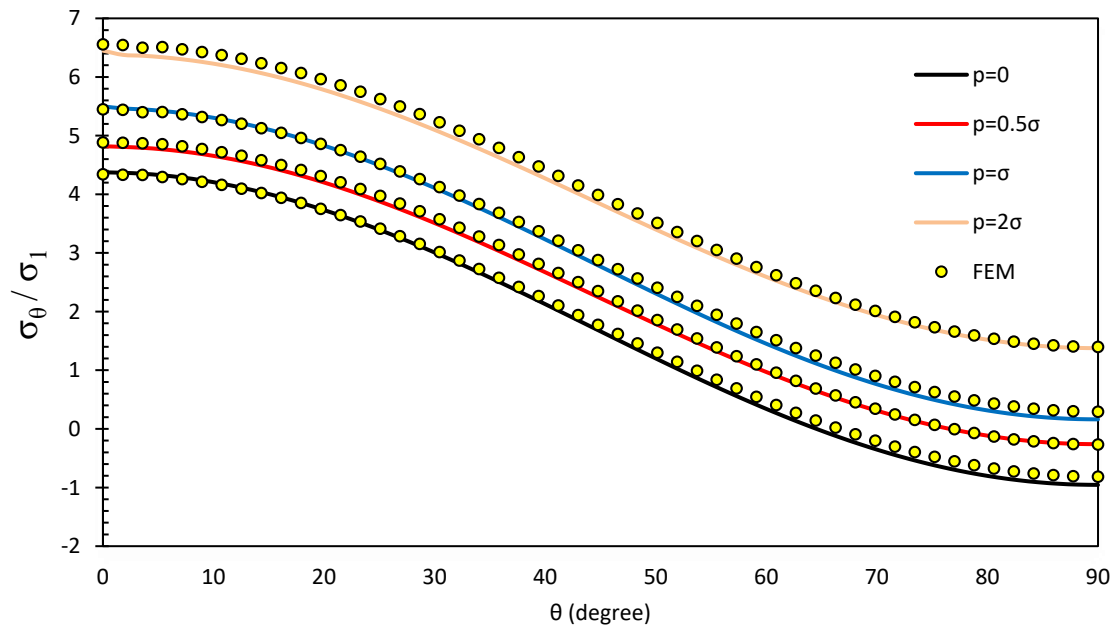


شکل ۴-۱۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری $n=2$

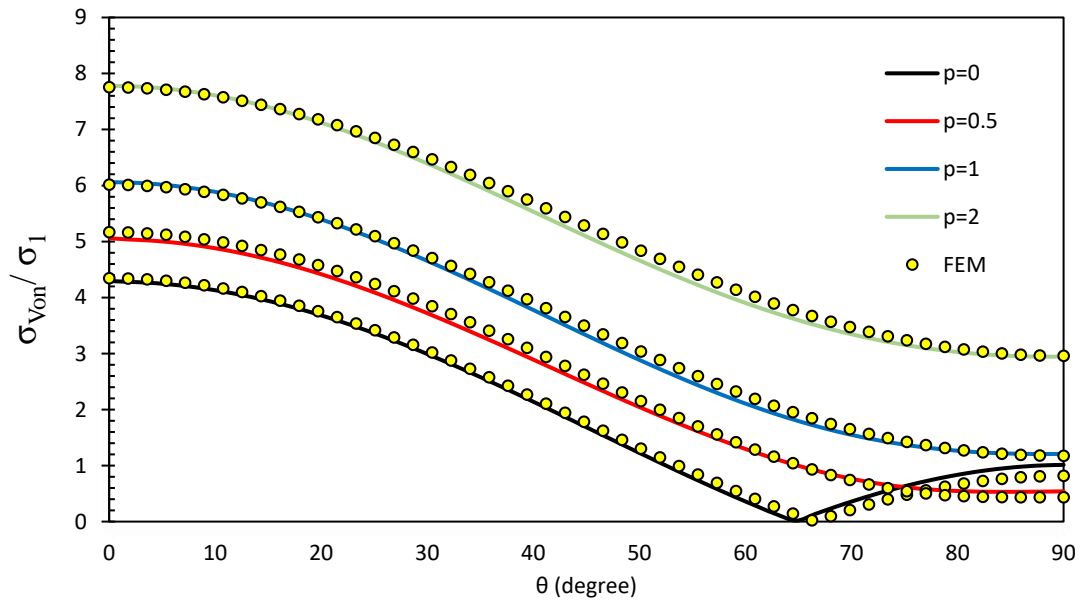


شکل ۴-۱۵ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوری $n=2$

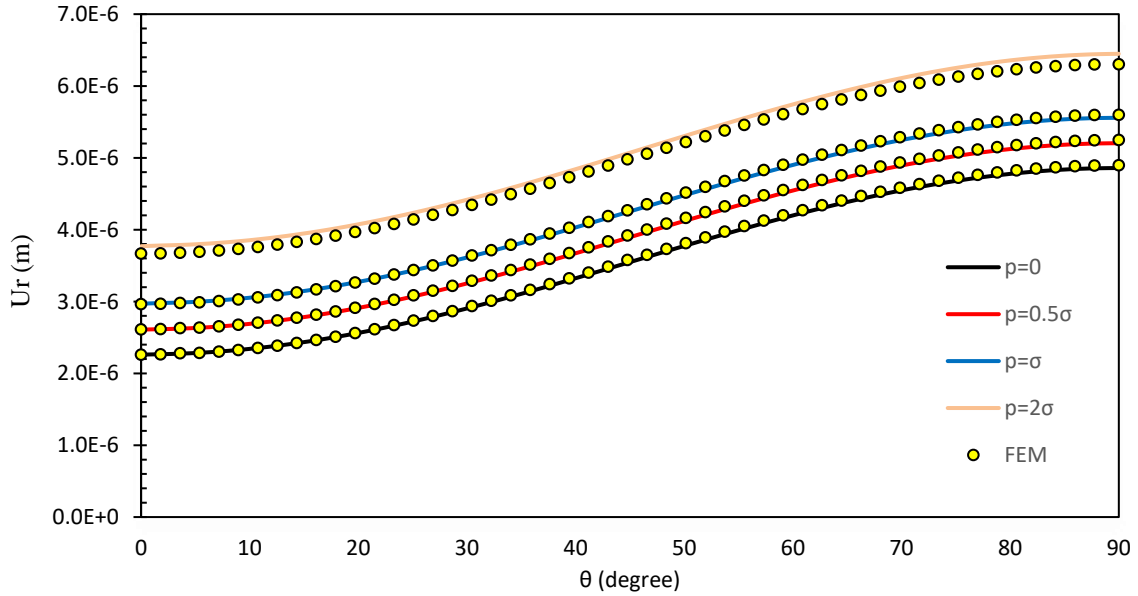
با توجه به شکل‌های (۴-۱۶)، (۴-۱۷) و (۴-۱۸) مشاهده می‌شود، که روند افزایش مقادیر تنش و جابه‌جایی، مشابه ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوره و بار فشاری درون گشودگی، است. رفتار تنش معادل فن‌میزس نیز مانند ورق همگن می‌باشد. با این تفاوت که در بارگذاری دوم‌محوره $n=2$ ، مقدار افزایش تنش محیطی کمتر از ۱۰ درصد بیشتر از مقدار فشار یکنواخت وارد شده به گشودگی می‌باشد (جدول ۴-۴).



شکل ۴-۱۶ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوم‌محوری $n=2$



شکل ۴-۱۷ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری $n=2$



شکل ۴-۱۸ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوری $n=2$

جدول ۴-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری

درصد افزایش σ_{θ}	$\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta_{P=0}}$	$\sigma_{\theta_{P=0}} / \sigma_1$	$\sigma_{\theta} / \sigma_1$	P
۱۰۲	۰/۵۱	۴/۳۸	۴/۸۹	۰/۵
۱۰۷	۱/۰۷	۴/۳۸	۵/۴۵	۱
۱۰۹	۲/۱۸	۴/۳۸	۶/۵۶	۲

۴-۴ جمع بندی

در این فصل، مقدار تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی در ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی در مرزهای خارجی و فشار یکنواخت داخل گشودگی، بررسی شد. با توجه به نتایج تنش محیطی در ورق همگن دقت بالای حلّ تحلیلی پیشنهادی نسبت به حلّ استخراج شده از منابع مورد تأیید قرار گرفت. به‌علت حضور تنش شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در بارگذاری مورد مطالعه در این فصل، پیشنهاد شد که به‌جای بررسی تنش محیطی تنش معادل حاصل از معیار فن میزس مورد بررسی قرار گیرد. با مقایسه‌ی نتایج این دو تنش در بارگذاری‌های متفاوت مشخص شد، که تنش شعاعی کاملاً مستقل از جنس ماده و بارگذاری در مرزهای خارجی ورق است؛ درحالی‌که تنش محیطی در برابر بارگذاری فشار یکنواخت در داخل گشودگی به جنس ماده ورق وابسته می‌باشد. در ورق ناهمگن نوع اول، مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر بارگذاری فشار یکنواخت داخل گشودگی حدود ۰/۷۵-۰/۸۵ و برای ورق ناهمگن نوع دوم این مقدار برابر ۱/۰۲-۱/۰۹ مقدار فشار وارد شده می‌باشد.

فصل ۵ نتیجه گیری و پیشنهادها

۵-۱ نتیجه‌گیری

اولین نتیجه‌ای که می‌توان در این تحقیق گرفت، جامع نبودن روش متغیر مختلط برای تمامی مسائل تنش حرارتی است که با توجه به پیش‌درآمد منبع [۲] نیز می‌توان این نتیجه را تأیید نمود.

دومین نتیجه را نیز می‌توان به صورت عدم سازگاری اهداف بهینه‌سازی تمرکز تنش و جابه‌جایی اطراف گشودگی ورق ناهمگن نامحدود نسبت به ورق همگن عنوان نمود. بدین معنا که بهبود در یکی از این فاکتورها با عدم بهبود در فاکتور دیگر همراه است.

۵-۱-۱ ورق همگن تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی

در اولین قدم حلّ تحلیل پیشنهادی و تحلیل عددی صورت گرفته با نرم‌افزار اجزای محدود انسیس، برای ورق همگن تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی و بار حرارتی در داخل گشودگی به صورت اختلاف دمای ثابت، با حلّ تحلیلی موجود در مراجع مقایسه شد. دقت بالای حلّ پیشنهادی و تحلیل عددی نشان دهنده‌ی درستی روند حل برای ورق همگن می‌باشد.

۵-۱-۲ ورق ناهمگن تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی

حلّ تحلیلی پیشنهادی طوری به دست آمد، که هم برای ورق همگن و هم ناهمگن قابل استفاده می‌باشد. نتایج حاصل از حلّ تحلیلی پیشنهادی و تحلیل عددی انجام شده با نرم‌افزار انسیس، دارای خطای بسیار کمی از یکدیگر بودند؛ که نشان دهنده‌ی درستی روند حلّ پیشنهادی برای ورق ناهمگن است. جنس ورق ناهمگن نوع اول در مقایسه با ورق همگن باعث افزایش مقدار تنش محیطی و کاهش جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی شد. برای ورق بلند با نسبت ابعادی ۳۰ کاهش مستقل از نوع و مقدار بارگذاری دومی، در حدود ۲۶ درصد و افزایش نیز در حدود ۳۰ درصد می‌باشد. در ورق ناهمگن نوع دوم، به علت سفتی کم لایه‌های میانی نسبت به ورق همگن، مقدار تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی افزایش یافت. این

درصد افزایش همانند ورق ناهمگن نوع اول، مستقل از نوع و مقدار بارگذاری در مرزها، در حدود ۳۴ درصد است. به علت آنکه جابه‌جایی شعاعی در این نوع بارگذاری نه‌تنها وابسته به تنش محیطی بلکه وابسته به خواص حرارتی ماده‌ی به‌کاررفته در ورق می‌باشد؛ درصد افزایش و کاهش این دو کمیت به هم نزدیک می‌باشند.

۵-۱-۳ ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری مکانیکی-حرارتی و بارگذاری

فشار یکنواخت درون گشودگی

با وجود بار فشاری یکنواخت درون گشودگی، تنش شعاعی مقدار قابل توجهی در نقاط اطراف گشودگی پیدا می‌کند. به همین دلیل، پیشنهاد می‌شود، که برای مطالعه‌ی تنش در نقاط اطراف گشودگی از تنش معادل فن میزس به‌جای تنش محیطی استفاده شود. با مقایسه‌ی تنش محیطی و تنش معادل فن میزس دریافته شد، که تنش شعاعی کاملاً مستقل از جنس ماده و بارگذاری در مرزهای خارجی ورق است؛ درحالی‌که تنش محیطی در برابر بار فشاری یکنواخت در داخل گشودگی به جنس ماده ورق وابسته می‌باشد. در ورق ناهمگن نوع اول، مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر بارگذاری فشار یکنواخت داخل گشودگی حدود ۸۵/۷۵-۰/۰ و برای ورق ناهمگن نوع دوم این مقدار برابر ۱/۰۲-۱/۰۹ مقدار فشار وارد شده می‌باشد. همان‌طور که از مقادیر افزایش تنش محیطی مشخص می‌شود؛ تأثیر جنس ورق بر شدت مقدار افزایش تنش محیطی کم می‌باشد. به دلیل آنکه، فشار یکنواخت به‌صورت مستقیم به مرز داخلی گشودگی وارد می‌شود، لایه‌های داخلی ورق تأثیر چندانی بر مقدار تنش محیطی ندارند.

۲-۵ پیشنهادها

با توجه به روند حل برای ادامه‌ی این تحقیق پیشنهادهایی در زیر مطرح می‌گردد.

۱. بررسی تنش و جابه‌جایی ورق نازک و نامحدود ناهمگن با گشودگی دایروی، تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای، فشار در داخل گشودگی و یک شار حرارتی ثابت، به‌دست آوردن نتایج و مقایسه با حالت بارگذاری اختلاف دما.
۲. بررسی تنش و جابه‌جایی ورق نازک و نامحدود ناهمگن با گشودگی چندضلعی، تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای و حرارتی. همچنین بررسی تأثیر چرخش گشودگی بر مقادیر تنش و مکان بیشینه تنش.
۳. بررسی تنش و جابه‌جایی ورق نازک و نامحدود ناهمگن با گشودگی دایروی، تحت بارگذاری حرارتی گذرا با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی کلاسیک.
۴. بررسی تنش و جابه‌جایی ورق نازک و نامحدود ناهمگن با گشودگی چندضلعی، تحت بارگذاری حرارتی گذرا با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی کلاسیک. بررسی تاثیر زاویه‌ی گشودگی و یافتن حالت بهینه برای مسأله.
۵. بررسی ورق ناهمگن ضخیم و نامحدود تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای و حرارتی.
۶. بررسی کمانش حرارتی ورق نازک و نامحدود FG تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی

پیوست

1.06E+09	B	3.29E+00	C ₃
282219.5	D ₃	-1.15E-02	C ₅
-284.789	D ₅	-1.89E-06	C ₇
0.238541	D ₇	4.61E-09	C ₉
-0.00018	D ₉	8.60E-13	C ₁₁
1.19E-07	D ₁₁	-1.92E-15	C ₁₃
-7.11E-11	D ₁₃	-3.81E-19	C ₁₅
3.85E-14	D ₁₅	6.07E-22	C ₁₇
-1.88E-17	D ₁₇	-2.10E-25	C ₁₉
8.24E-21	D ₁₉	-7.41E-28	C ₂₁
-3.19E-24	D ₂₁	-5.10E-31	C ₂₃
1.08E-27	D ₂₃	-4.26E-34	C ₂₅
-3.09E-31	D ₂₅	-2.65E-37	C ₂₇
7.85E-35	D ₂₇	-2.72E-40	C ₂₉
-1.45E-38	D ₂₉		

جدول پ-۱ ضرایب تابع پتانسیل مختلط $\varphi(z)$ و $\psi(z)$ ورق همگن

4.52E+10	B'	485.6681	C' ₃
18617916	D' ₃	3.289044	C' ₅
3597.131	D' ₅	-6.5E-05	C' ₇
-14.4389	D' ₇	-1.7E-06	C' ₉
-0.01042	D' ₉	-2.5E-10	C' ₁₁
1.48E-05	D' ₁₁	7.92E-13	C' ₁₃
4E-09	D' ₁₃	3.33E-16	C' ₁₅
-2.9E-12	D' ₁₅	-2.9E-19	C' ₁₇
-7.1E-15	D' ₁₇	-2.1E-22	C' ₁₉
2.36E-18	D' ₁₉	1.64E-26	C' ₂₁
3.36E-21	D' ₂₁	1.2E-28	C' ₂₃
2.79E-24	D' ₂₃	6.42E-32	C' ₂₅
-1.5E-28	D' ₂₅		

جدول پ-۲ ضرایب تابع پتانسیل مختلط $\phi(z)$ و $\psi(z)$ ورق ناهمگن

مراجع

- [1] Ugral A.C. (1981), "**Stresses in Plates and Shells**", McGraw-Hill Book Company, New York.
- [۲] ساد ام. اچ.، (۱۳۸۹)، "الاستیسیته: نظری، کاربردی و محاسباتی"، علی اصغر عطائی، ویراست دوم، انتشارات علمی و فنی، تهران.
- [3] Szilard R., (2003), "**Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Method**", John Wiley & Sons, New Jersey.
- [۴] پرهیزکار یعقوبی م.، (۱۳۹۲)، پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد، "تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با توزیع توانی خواص"، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [5] Muskhelishvili N. I., (1962), "**Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity**", 2nd English ed., P. Noordhoff Ltd., the Netherlands.
- [6] Savin G. N., (1961), "**Stress Concentration around Holes**", Pergamon Press, New York.
- [7] Eshelby J.D., Read W.T., Shockley W., (1953), "Anisotropic Elasticity with Applications to Dislocation Theory", **Acta Metallurgica**, 1, pp. 251–259.
- [8] Stroh, A.N., (1958) "Dislocations and Cracks in Anisotropic Elasticity". **Philosophical Magazine**, 7, pp. 625–646.
- [9] Lekhnitskii S. G., (1986), "**Anisotropic Plates**", Second ed., Gordon and Breach Science Publishers, New York.
- [10] Florence, A.L., Goodier, J.N., (1960), "Thermal Stresses Due to Disturbance of Uniform Heat Flow by an Insulated Ovaloid Hole", **J. App. Mech.**, 27, pp. 635–639.
- [11] K.S. Rao, M.N. Rao, T. Ariman, (1974), "Thermal Stresses in Elastic Plates with Elliptic Holes", **Nuclear Engineering and Design**, 15, pp. 97–112.
- [12] McFall L.A., Ariman T., Lee L.H.N., (1974), "Thermal Analysis of Plates with Circular Inclusion", **Nuclear Engineering and Design**, 30, pp. 339-348.

- [13] Chen W.T., (1967), "Plane Thermal Stress at an Insulated Hole under Uniform Heat Flow in an Orthotropic Medium", **J. Appl. Mech.**, 34, pp. 133-136.
- [14] Takeuti Y., Sumi N., (1976), "Thermal Stresses in Rectangular Plate with A Circular Hole Based on an Improved Complex Variable Approach", **J. Mechanical Researches Communication**, 3, pp. 133-138.
- [15] Rezaeepazhand J. and Jafari M., (2005), "Stress Analysis of Perforated Composite Plates", **Composit Structures**, 71, pp. 463-468.
- [16] Rezaeepazhand J. and Jafari M., (2010), "Stress Analysis of Composite Plates with Quasi-Square Cutout Subjected to Uniaxial Tension", **J. of Reinforced Plastics and Composit**, 29, pp. 2015-2026.
- [17] Rangavittal H. K., Naidu A. C. B., Dattagurub B., Ramamurthy T. S., (1995), "Analytical Solutions for Load Transfer Through Smooth Elastic Pin in an Infinite Orthotropic Plate", **Compos. Structures**, 30, pp. 329-339.
- [18] Madenci E. and Ileri L., (1995), "Analysis of Pin-Loaded Holes in Composite Laminates Under Combined Bearing- Bypass and Shear", **Int. J. Solids Structures**, 32, pp. 2053-2062.
- [19] Zhang X. Z., Kitipornchai S., Liew KM., (2003), "Thermal Stresses around a Circular Hole in a Functionally Graded Plate" **J. Therm Stresses**, 26, pp. 379-390.
- [20] Yang Q., Gao C. F., (2013), "Dynamic Stress Analysis of a Functionally Graded Material Plate with a Circular Hole", **Meccanica**, 48, pp. 91-101.
- [21] Yang J., Shen H. S., (2003), "Non-linear Analysis of Functionally Graded Plates under Transverse and in-Plane Loads", **Int. J. Non-linear Mech**, pp. 467-82.
- [22] Pan X., Cheng Y., Liu J., (2013), "Stress Analysis of a Finite Plate with a Rectangular Hole Subjected to Uniaxial Tension Using Modified Stress Functions", **Int. J. Mechanical sciences**, 75, pp. 265-277.
- [۲۳] عامری ا.، (۱۳۹۳)، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، "تحلیل تنش در ورق مربعی ساخته‌شده از مواد FG با گشودگی دایروی تحت بارهای درون‌صفحه‌ای"، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [24] Matsunaga H., (2009), "Stress Analysis of Functionally Graded Plates Subjected to Thermal and Mechanical Loadings", **Composit Structures**, 87, pp. 344-357.

- [25] Ootao .Y, Tanigawa .Y, (2006), "Three-dimensional Solution for Transient Thermal Stresses of an Orthotropic Functionally Graded Rectangular Plate", **Composit Structures**, 80, pp. 10–20.
- [26] Kursuna .A, Tupco M., Tetic T., (2010), "Stress Analysis of Functionally Graded Discs under Thermal and Mechanical Loads", **Physics Engineering**, 10, pp. 2949-2954.
- [27] Samsam Shariati B. A., Eslami M. R., (2006) "Thermal Buckling of Imperfect Functionally Graded Plates", **Sol. Structures**, 43, pp. 4082–4096.
- [28] Zhao X., Lee Y. Y., Liew K. M., (2009), "Mechanical and Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Plates", **Composit Structures**, 90, pp. 161–171.
- [29] Chareonsuk J., Passakorn V., (2011), "Numerical Solutions for Functionally Graded Solids under Thermal and Mechanical Loads Using a High-Order Control Volume Finite Element Method", **Appl. Thermal Engineering**, 31, pp. 213-227.
- [30] Zhang D. G., H. M. Zhou H. M., (2015), "Mechanical and Thermal Post-buckling Analysis of FGM Rectangular Plates with Various Supported Boundaries Resting on Nonlinear Elastic Foundations", **Thin-Walled structures**, 89, pp. 142-151.
- [31] Hosseini S. S., Bayesteh H., Mohammadi S., (2013), "Thermo-mechanical XFEM Crack Propagation Analysis of Functionally Graded Materials", **Materials & Science Engineering A** , 561, pp. 285-302.
- [32] W. Lanhe, (2004), "Thermal Buckling of a Simply Supported Moderately Thick Rectangular FGM Plate", **Compos. Structures**, 64, pp. 211–218.
- [33] Kubair D.V., Bhanu–Chandar B., (2008), "Stress Concentration Factor Due to a Circular Hole in Functionally Graded Panels under Uniaxial Tension" **Int. J. of Mech. Sciences**, 50, pp. 732–742.
- [34] Cao Z. Y., Tang S. G. and Cheng G. H., (2009), "3D Analysis of Functionally Graded Material Plates with Complex Shapes and Various Holes" **Appl. Mathematics and Mech. (English Edition)**, 30, pp. 13-18.
- [35] Mohammadi M., Dryden J.R., Jiang L.Y., (2011), "Stress Concentration around a Hole in a Radially Inhomogeneous Plate", **Int. J. Solids Structures**, 48, pp. 483-491.
- [36] Yang Q., Gao C. F., Chen W. T., (2012), "Stress Concentration in a Finite Functionally Graded Material Plate", **Science China Physics, Mechanics and Astronomy**, 55, pp. 1263–1271.

- [37] Yang Q., Gao C. F., Chen W., (2010), "Stress Analysis of a Functionally Graded Material Plate with a Circular Hole", **Archive of Applied Mechanics**, 80, pp. 895–907.
- [38] Ashrafi H., Asemi K., Shariyat M., (2013), "A Three-dimensional Boundary Element Stress and Bending Analysis of Transversely/Longitudinally Graded Plates with Circular Cutouts Under Biaxial Loading", **European J. of Mechanics/A Solids**, 42, pp. 344-357.
- [39] Delale F. and Erdogan F., (1993), "The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane", **J. Appl. Mech.**, 50, pp. 609-614.
- [40] Noda N., Jin Z., (1993), "Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in a Strip of a Functionally Gradient Material", **Int. J. Solids Structures**, 30, pp. 1039-1056.
- [41] Pei G. and Asaro R. J., (1997), "Cracks in Functionally Graded Materials", **Int. J. Solids Structures**, 34, pp. 1-17.
- [42] Zhong Z., Cheng Z. Q., (2008), "Fracture Analysis of a Functionally Graded Strip with Arbitrary Distributed Material Properties", **Int J Solids Struct**, 45, pp. 3711–3725.
- [43] Ayhan A. O., (2009), "Three-Dimensional Mixed-Mode Stress Intensity Factors for Cracks in Functionally Graded Materials Using Enriched Finite Elements", **Int. J. Solids Struct**, 46, pp. 796–810.
- [44] Cardenas-Garcia J.F., Shabana Y. M. and Medina R. A., "Thermal Loading and Material Property Characterization of a Functionally Graded Plate with a Hole Using an Inverse Problem Methodology", **J. Therm Stresses**, 29, pp. 1-20.
- [45] Kubair, D.V., (2014), "Stress Concentration Factor in Functionally Graded Plates With Circular Holes Subjected to Anti-plane Shear Loading", **Journal of Elasticity**, pp. 179-196.
- [46] Pilkey W.D., (1977), "**Peterson's Stress Concentration Factors**", Second ed., Wiley-Interscience Publication, New York.
- [47] Eslami M. R., Hetnarski R. B., Noda N., (2013), "**Theory of Elasticity and Thermal Stress**", Solid Mechanics and Its Applications, New York.

[۴۸] جعفری م.، قنّاد م.، عامری ا.، (۱۳۹۴)، "بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای در ورق ناهمگن تحت بارگذاری

درون‌صفحه‌ای"، مجله‌ی مهندسی مکانیک مدرس، ۶، صص. ۲۴۹-۲۵۶.

[۴۹] پورمنصور پ.، قنّاد م.، (۱۳۹۴)، " بررسی تمرکز تنش در ورق مربعی همگن با گشودگی دایره‌ای تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی"، سومین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین‌المللی مهندسی برق، مکانیک و مکاترونیک، تهران.

Abstract

The continuous changes of the mechanical and thermal properties of functionally graded materials lead to elimination of the residual stress and effect of the stress concentration, which make increase the strength of this material. In this paper, is tried to present the analytical solution to calculate the stress distribution around the circular hole in infinite FG plate, by using the complex potential functions method. The plate is subjected to thermal and mechanical loads; which is in-plane stress at boundary edges, a uniform pressure loading at boundary of hole and a steady thermal loading. The variation of Material properties, especially Young's modulus and thermal expansion coefficient, is in a radial direction and concentric to the hole. One special exponential function with specific convergence radius, is used to describe the variation of mechanical properties. The finite element method has been used to check the accuracy of analytical results for homogeneous and inhomogeneous plates, also for all loading cases. In the presence of applied load at the boundary of circular hole, amount of radial stress in addition to hoop stress is considerable. Therefore, the Von mises stress is used to study the stress around the hole. It is observed that FG plate with increasing young modulus has better behavior at radial displacement than FG plate with decreasing young modulus.

Keywords: FG Plate, Thermal and Mechanical Loading, Circular Hole, Complex Variable Method, Stress Concentration.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Msc Thesis in Mechanical Engineering Applications Design

Stress analysis of functionally graded square long plate with circular hole
subjected to mechanical and thermal loading

By: Pouriya Pourmansour

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

June 2016