



دانشکده مکانیک

گروه جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد

تحلیل ارتعاشات استوانه استفاده شده به عنوان چرخ طیار در باطری الکترومکانیکی ماهواره ها

لیلا یزدان پرست

استاد راهنما: دکتر اردشیر کرمی محمدی

تیر ۸۸

شماره: ۱۲۷/۲۸۸/۵۷

تاریخ: ۶/۵/۸۷

ویرایش:

بسمه تعالی



دانشگاه شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

فرم صورتجلسه دفاع پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم لیلا یزدان پرست رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان "تحلیل ارتعاشات استوانه استفاده شده بعنوان چرخ طیار در باطری الکترومکانیکی ماهواره ها" که در تاریخ ۱۳۸۸/۴/۳۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح زیر است:

قبول (با درجه: عالی) امتیاز ۱۸/۸۸ دفاع مجدد مردود

۲- بسیار خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)

۱- عالی (۲۰ - ۱۸)

۴- قابل قبول (۱۳/۹۹ - ۱۲)

۳- خوب (۱۵/۹۹ - ۱۴)

اعضای	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران (A)
		اردشیر گرمی محمدی	۱- استاد ارجمند
			۲- استاد ارجمند
			۳- استاد مشاور
		سید هادی قادری	۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
		محمد شهنشاهی	۵- استاد ممتحن
		حمیدرضا ایبک چی	۶- استاد ممتحن

تأیید رئیس دانشکده:

تعهد نامه

اینجانب (نام و نام خانوادگی) دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته (رشته تحصیلی)
دانشگاه (نام دانشگاه) دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه (عنوان پایان نامه)
..... (موضوع پایان نامه) تحت راهنمایی (نام استادیار راهنما) متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا یافته های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۱۳۸۸،۲،۱

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

به نام

خداوند

بخشاینده

مهربان



دانشکده مکانیک

گروه جامدات

تحلیل ارتعاشات استوانه استفاده شده به عنوان چرخ طیار در باطری
الکترومکانیکی ماهواره ها

دانشجو: لیلا یزدان پرست

استاد راهنما:

دکتر اردشیر گرمی محمدی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار : تیر ۱۳۸۸

تقدیر و تشکر

به نام خداوند لوح و قلم

حقیقت نگار وجود و عدم

خدایی که داننده رازهاست

نخستین سرآغاز آغازهاست

دادار هستی بخش، یکتای بی همتا، خدای را سپاس که خواست او بالاترین خواست هاست. اینک که در پرتو

لطف و عنایت پروردگار عزیزم مراحل انجام این پروژه به پایان رسیده، بر خود واجب می دانم تا از تمام

عزیزانی که مرا در انجام این کار یاری نموده اند، تقدیر و تشکر بنمایم و بدینوسیله در آغاز از راهنمایی ها و

زحمات استاد راهنمای گرامی، جناب آقای دکتر اردشیر کرمی محمدی، صمیمانه قدردانی می نمایم.

همچنین ثمرات این پروژه را به همسر عزیزم تقدیم می کنم که در تمام مشکلات این راه نیز، با من سهیم بود.

لیلا یزدان پرست

چکیده

در این پایان نامه تحلیل ارتعاشات استوانه توخالی الاستیک چرخان، با طول محدود و سرعت زاویه ای ثابت، که چرخ طیار باطری الکترومکانیکی ماهواره ها یکی از کاربردهای مهم آن می باشد مد نظر بوده است. این هدف بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی و با ارائه یک حل تحلیلی، بررسی شده است. در ابتدا یک حل کلی برای تحلیل ارتعاشات استوانه ها و تحت هر نیروی جسمی دلخواهی ارائه می شود. بدین منظور صورت کلی معادله ناویه در دستگاه مختصات استوانه ای نوشته می شود. علت استفاده از معادله ناویه دسترسی به حل دقیق، حجم محاسبات کم و همچنین انجام یکباره آن برای هندسه ها و مواد مختلف می باشد. برای حل معادله ناویه با استفاده از روش جداسازی متغیرها امکان ارضای شرایط مرزی بیشتری فراهم شده است.

سپس با استفاده از روابطی که میان تغییر مکان و نیرو وجود دارد و همچنین روابط مربوط به تنشها، ماتریس ضرایب مربوط به ارتعاشات استوانه ها نوشته می شود، بطوری که تعدادی از شرایط مرزی به صورت تقریبی و با استفاده از خاصیت تعامد توابع مثلثاتی و بسط ارضا می شوند. سپس فرکانسهای مسئله با حل ماتریس مربوطه استخراج می شوند.

ارتعاشات ناشی از گشتاور دندان که در چرخ طیار باطریهای الکترومکانیکی بدلیل اثر تقابل میان قطبهای آهنربا و شیارهای آهنی ماشین الکتریکی مغناطیس دائم ایجاد می شود نیز تا کنون انجام نشده است که به کمک روش ارائه شده در این تحقیق بررسی می گردد.

در این پایان نامه برای بدست آوردن نتایج عددی در محیط نرم افزار *Maple* کدنویسی شده است. نتایج عددی بدست آمده با این روش با نتایج عددی بدست آمده برای استوانه های ساکن در تحقیقات گذشته مقایسه شده است.

واژه های کلیدی

استوانه، ارتعاشات، چرخ طیار، باطری الکترومکانیکی، توابع متعامد، جداسازی متغیرها، گشتاور دندانه

فصل اول - مقدمه

۱	مقدمه
---	-------	-------

فصل دوم - ماهواره های کم ارتفاع و سیستم های ذخیره انرژی آنها

۵	۱-۲- معرفی ماهواره های کم ارتفاع
۶	۲-۲- معرفی سیستم های ذخیره انرژی در ماهواره های کم ارتفاع
۷	۳-۲- باتری های الکترومکانیکی در ماهواره ها
۷	۲-۳-۱- پیشینه استفاده از باتری های الکترومکانیکی در ماهواره ها
۸	۲-۳-۲- عملکرد و ساختمان باتری های الکترومکانیکی
۱۰	۲-۳-۳- مزایای استفاده از باتریهای الکترومکانیکی به جای باتریهای شیمیایی
۱۴	۲-۴- انواع ماشینهای الکتریکی
۱۵	۲-۵- ماشینهای شیاردار و ساختار و عملکرد آنها
۱۶	۲-۶- ماشینهای شیاردار و تولید گشتاور دندانه

فصل سوم - طراحی چرخ طیار در باتری های الکترومکانیکی

۲۰	۳-۱- پیشینه طراحی ابعاد و شکل چرخ طیار
۲۱	۳-۱-۱- محاسبه ابعاد چرخ طیار
۲۳	۳-۲- پیشینه طراحی چرخ طیار بر اساس تنش
۲۴	۳-۳- پیشینه طراحی چرخ طیار بر اساس ارتعاش کمتر

فصل چهارم - تحلیل ارتعاشات استوانه مورد استفاده در باطریهای الکترومکانیکی ماهواره

- ۱-۴ - پیشینه تحلیل ارتعاشات استوانه ها ۲۷
- ۲-۴ - معادله دینامیکی حاکم بر ارتعاش استوانه ایزوتروپیک ۳۲
- ۱-۲-۴ - معادله ناویه ۳۲
- ۱-۱-۲-۴ - تجزیه هلم هولتز ۳۳
- ۳-۴ - حل معادلات حاکم بر استوانه ۴۰
- ۱-۳-۴ - استخراج حل کلی استوانه ها ۴۱
- ۴-۴ - توابع متعامد ۵۱
- ۱-۴-۴ - حداقل سازی مربع خطا با استفاده از توابع متعامد ۵۱
- ۲-۴-۴ - تعامد ۵۱
- ۵-۴ - ارتعاشات استوانه چرخان جدار ضخیم با طول محدود ۵۳
- ۶-۴ - ارتعاشات استوانه چرخان جدار ضخیم با طول محدود تحت گشتاور دندانه ۶۱
- خلاصه فصل ۶۴

فصل پنجم - بررسی و تحلیل نتایج

- ۱-۵ - تحلیل عددی ارتعاشات استوانه چرخان جدار ضخیم با طول محدود ۶۶

فصل ششم - نتایج و پیشنهادات

- ۱-۶ - نتیجه گیری ۷۲
- ۲-۶ - پیشنهادات ۷۳

پیوستها

- پیوست الف - مولفه های تنش ۷۴

۷۶	پیوست ب- حداقل سازی مربع خطا با استفاده از توابع متعامد
۷۸	پیوست پ- چگونگی ارضای شرایط مرزی با استفاده از تعامد
۸۳	پیوست ت- مولفه های ماتریس M_{st}
۸۷	مراجع

فهرست شکلها و نمودارها

۹	شکل (۱-۲): باطری های الکترومکانیکی به همراه متعلقات آن که در بخش فلای ویل مرکز تحقیقات انرژی ناسا معرفی شده است.....
۱۰	شکل (۲-۲): یک سیستم ذخیره انرژی فلای ویل به همراه مدارات جانبی آن
۱۵	شکل (۳-۲): نمای یک ماشین آهنربای دائم مورد استفاده در باطری الکترومکانیکی ماهواره ها
۲۲	شکل (۱-۳): ابعاد کلی ماشین تحت طراحی با در نظر گرفتن آهن روتور
۵۳	شکل (۱-۴): نیم استوانه جدار ضخیم در حال چرخش

فهرست جدولها

۱۲	جدول (۱-۲): چگالی باطریهای استفاده شده در انواع ماهواره ها
۱۲	جدول (۲-۲): مقایسه چگالی انرژی فلای ویلها با روتورهایی از مواد مختلف
۶۷	جدول (۱-۵): مقایسه میان نتایج ارائه شده در این تحقیق با [۹۶] برای چهار فرکانس اول طبیعی بدون بعد ω
۶۷	جدول (۲-۵): مقایسه میان نتایج ارائه شده در این تحقیق با [۹۶] برای چهار فرکانس اول طبیعی بدون بعد ω

جدول (۳-۵): مقایسه میان نتایج ارائه شده در این تحقیق با [۹۶] برای چهار فرکانس اول طبیعی بدون بعد $\bar{\omega}$ ۶۸

جدول (۴-۵): چهار فرکانس اول طبیعی بدون بعد $\bar{\omega}$ ۶۹

جدول (۵-۵): دو فرکانس اول طبیعی بدون بعد $\bar{\omega}$ برای $\Omega = 40000 \text{ rpm}$ و $n = 0$ ۷۰

فصل اول

مقدمه

سیستم های تولید و ذخیره انرژی یکی از مباحث مهم در ماهواره ها است. یکی از روشهای تولید و ذخیره انرژی در ماهواره ها استفاده از باتریهای الکترومکانیکی است. استفاده از این سیستمها در ماهواره ها، در دهه ۱۹۷۰ بنیان گذاری شد و امروزه استفاده از این سیستم ها، مخصوصا در ماهواره های کم ارتفاع، بسیار متداول شده است. در باتریهای الکترومکانیکی انرژی بصورت انرژی جنبشی دورانی در یک چرخ طیار ذخیره میشود. چرخ طیار استفاده شده عموما به شکل استوانه است. انرژی تولید شده برای گردش چرخ طیار توسط ماشین الکتریکی تامین می شود و لذا مهمترین قسمت در این سیستمها ماشین الکتریکی به کار رفته در آن است که وظیفه تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی و بالعکس را دارد و معمولا از انواع ماشین های آهنربا دائم به علت تلفات کم روتور و چگالی انرژی زیاد و تولید گشتاور بیشتر در این سیستم ها استفاده می شود و توسط NASA نیز پیشنهاد شده اند. لذا از این نوع ماشینها در باتریهای الکترو مکانیکی ماهواره ها استفاده می گردد. این نوع ماشین الکتریکی به علت دارا بودن شیار در ساختارش، می تواند در چرخ طیار ایجاد ارتعاش نماید. بررسی ارتعاشات ایجاد شده در این چرخ طیار استوانه ای شکل به دلیل وجود ماشین الکتریکی که تولید کننده این ارتعاش است، نیاز به حل تئوریهای تحلیلی و عددی در رفتار ارتعاشی استوانه ها دارد.

در بررسی رفتار ارتعاشی استوانه می توان با استفاده از تئوریهای یک بعدی و دوبعدی برای استوانه های توپر و توخالی تحلیلهای ساده ای را استخراج نمود. با توجه به اینکه با کاهش نسبت طول به شعاع و همچنین نسبت شعاع داخلی به خارجی خطای محاسبه تنش و کرنش افزایش می یابد در بعضی موارد نتایج حاصل از تئوریهای تقریبی فوق بسیار متفاوت خواهد بود. از سویی با توجه به نیاز صنعت هوافضا به مدل های دقیق تر، ارائه روشهای حل نزدیکتر به مدل های واقعی تر در اولویت قرار گرفته است. لذا یکی از راهکارهای مناسب در این زمینه استفاده از تحلیلهای دقیق تر ارتعاشی و استفاده از توصیف رفتار جسم با تئوری الاستیسیته سه بعدی می باشد. در فصل پنجم معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد سه بعدی استوانه های چرخان به همراه تنشهای دینامیکی در دستگاه مختصات استوانه ای بیان شده است. برای رسیدن به این نتیجه از حل معادلات ناویه به وسیله تجزیه

هلم هولتز به دو معادله اسکالر و برداری موج در دستگاه مختصات استوانه ای کمک گرفته شده است. سپس با در نظر گرفتن یک حل کلی برای معادله دیفرانسیل حاکم به روش جداسازی متغیرها شرایط مرزی حاکم برای استوانه چرخان و استوانه چرخان تحت گشتاور متناوب دندانها ارضا شده است. برای ارضای برخی شرایط مرزی از توابع متعامد و خواص آنها استفاده شده است. در فصل ششم این شرایط به صورت عددی نشان داده شده اند.

فصل دوم

ماهواره های کم ارتفاع

و سیستم های ذخیره انرژی

آنها

۲-۱- معرفی ماهواره های کم ارتفاع

ماهواره ها بسته به کاربردشان از نظر مکانی به انواع مختلفی تقسیم می شوند. بعضی از آنها مانند ماهواره های تلویزیونی همواره نسبت به زمین ثابت می باشند در حالیکه بعضی دیگر یک نوار خاص از زمین را با پیروی مشخص جاروب میکنند. همچنین ماهواره هایی وجود دارند که کل زمین را بصورت نوارهای پشت سر هم و در پیوندهای زمانی خاص (بصورت نواری) جاروب می کنند. بر این اساس می توان مداراتی که ماهواره ها در آنها قرار می گیرند را به سه دسته دور از زمین و یا ثابت نسبت به زمین^۱ (*GEO*)، نزدیک به زمین^۲ (*LEO*) و مابین این دو تقسیم کرد [۱،۲،۳]. لازم به ذکر است که ماهواره ها با استفاده از برابری نیروی گریز از مرکز و نیروی جاذبه زمین در یک مدار^۳ تثبیت می شوند (فاصله آنها از زمین ثابت می ماند). با توجه به اینکه جاذبه زمین با دور شدن از زمین کاهش می یابد و نیروی گریز از مرکز متناسب با توان دوم سرعت زاویه ای ماهواره است، هرچه ماهواره به زمین نزدیکتر باشد باید سرعت بیشتری داشته باشد تا در مدار خود باقی بماند.

ماهواره های کم ارتفاع در فاصله ۳۰۰ الی ۱۰۰۰ کیلومتری زمین قرار دارند. فاصله نزدیک به زمین باعث مزایای مهمی برای این ماهواره ها شده است که می توان آنها را بصورت زیر طبقه بندی نمود:

- به علت کاهش فاصله نسبت به ماهواره هایی که در مدارات *GEO* قرار دارند تضعیف سیگنالهای مخابراتی تقریباً ۰/۰۱ این ماهواره ها است و به فرستنده و گیرنده و دوربینهای ضعیفتر و آنتن های کوچکتر نیازمند می باشند [۳].
- مصرف انرژی در این ماهواره ها بسیار کمتر از ماهواره های دور از زمین است بنابراین به آرایه های خورشیدی و سیستم ذخیره انرژی کوچکتری نیاز دارند.

¹ Geostationary Orbits

² Low Earth Orbits

³ Orbit

- دارای وزن و حجم کمی هستند و با توجه به فاصله کم آنها از زمین، هزینه پرتاب آنها بسیار کمتر از ماهواره های دور از زمین است.
 - فرستنده و گیرنده های ارتباطی در زمین بسیار ساده تر می باشند بطوری که با فرستنده های کمتر از یک وات به راحتی می توان با آنها ارتباط برقرار کرد [۳].
 - تاخیر زمانی ایجاد شده در ارتباطات این ماهواره ها قابل صرف نظر است.
- مزایای فوق باعث استفاده زیادی از این ماهواره ها شده است به طوری که امروزه وجود بیش از ۸۰۰۰ ماهواره در مدارات نزدیک به زمین باعث مشکلات ترافیکی در این مدارات شده است [۲]. اینترنت و موبایلهای ماهواره ای و انواع ماهواره های هواشناسی، تجاری و نظامی از این قبیل ماهواره ها می باشند.
- با توجه به اینکه ماهواره های *LEO* به زمین نزدیک هستند، دارای توان مصرفی کمی میباشند و معمولا انرژی مورد نیاز آنها توسط نور خورشید تامین میشود. از طرف دیگر تقریبا تمامی این ماهواره ها کسری از پرپود چرخش خود را در سایه زمین قرار می گیرند از این رو استفاده از سیستم های ذخیره انرژی در این ماهواره ها امری ضروری است.

۲-۲- معرفی سیستم های ذخیره انرژی در ماهواره های کم ارتفاع

سیستم های تولید و ذخیره انرژی یکی از مباحث مهم در ماهواره ها است. بعضی از ماهواره ها آنقدر از زمین دورند که در یک نقطه از فضا ثابت می باشند یعنی سرعت زاویه ای آنها نسبت به زمین صفر بوده و تثبیت آنها توسط تعادل نیروهای گرانشی با زمین و کرات دیگر انجام می شود. در صورتی که این ماهواره ها بتوانند از نور خورشید استفاده کنند، انرژی مورد نیاز خود را با استفاده از آرایه های خورشیدی تامین می کنند و در غیر اینصورت از سوخت های دیگر مانند انرژی اتمی و انواع انرژیهای شیمیایی استفاده می کنند که این سه منبع انرژی در [۴] تشریح شده و با هم مقایسه شده اند. اکثر ماهواره ها که در بخش قبل به آنها اشاره شد، از نوع مینی و میکرو و نانو میباشند که به انرژی کمی نیاز دارند و انرژی اغلب آنها از نور

خورشید تامین می شود. این ماهواره ها با پریودهای خاصی حول زمین در چرخش هستند و اغلب آنها مقداری از پریود چرخش خود را در سایه زمین به سر می برند و در این مدت نمی توانند از نور خورشید استفاده کنند بنابراین در این ماهواره ها از سیستم های ذخیره انرژی استفاده می شود. در این صورت، در مدتی که ماهواره در معرض نور خورشید قرار دارد مقداری انرژی در این سیستم ذخیره می شود و در مواقعی که در سایه زمین قرار می گیرد از این انرژی استفاده می کند. تا سال ۲۰۰۰ میلادی سیستمهای ذخیره انرژی عمدتاً از باتریها تشکیل می شدند که انواع آنها در جدول (۲-۱) آورده شده است. روش دیگر تامین انرژی استفاده از باتریهای الکترومکانیکی است که به علت مزایایی که دارند استفاده از آنها روزافزون است.

۲-۳- باتری های الکترومکانیکی در ماهواره ها

۲-۳-۱- پیشینه استفاده از باتری های الکترومکانیکی در ماهواره ها

در سال ۱۹۷۶ دانشگاه مری لند با همکاری ناسا تحقیقاتی در مورد استفاده از چرخ طیار به عنوان سیستم های ذخیره انرژی در ماهواره ها را پایه گذاری کرد [۵]. در دهه ۱۹۹۰ میلادی ناسا این تحقیقات را به طور جدی دنبال نمود و از سال ۲۰۰۰ میلادی استفاده از چرخ های طیار بجای باتریها آغاز شد. ذخیره انرژی در چرخ های طیار بصورت انرژی جنبشی است که در موقع لزوم این انرژی ذخیره شده دوباره به انرژی الکتریکی تبدیل می شود. لذا استفاده از چرخ طیار در رسته انرژیهای تجدیدپذیر^۴ قرار می گیرد و این موضوع باعث مزایای زیادی برای چرخ های طیار نسبت به باتریها می شود.

۲-۳-۲- عملکرد و ساختمان باتری های الکترومکانیکی

باتری های الکترومکانیکی (سیستم های ذخیره انرژی بوسیله چرخ طیار) دارای کاربردهای فراوانی می باشند که از آن جمله می توان به کاربردشان در نیروگاههای بادی و فتوولتائیک، خودروها، متروها، جبرانسازهای

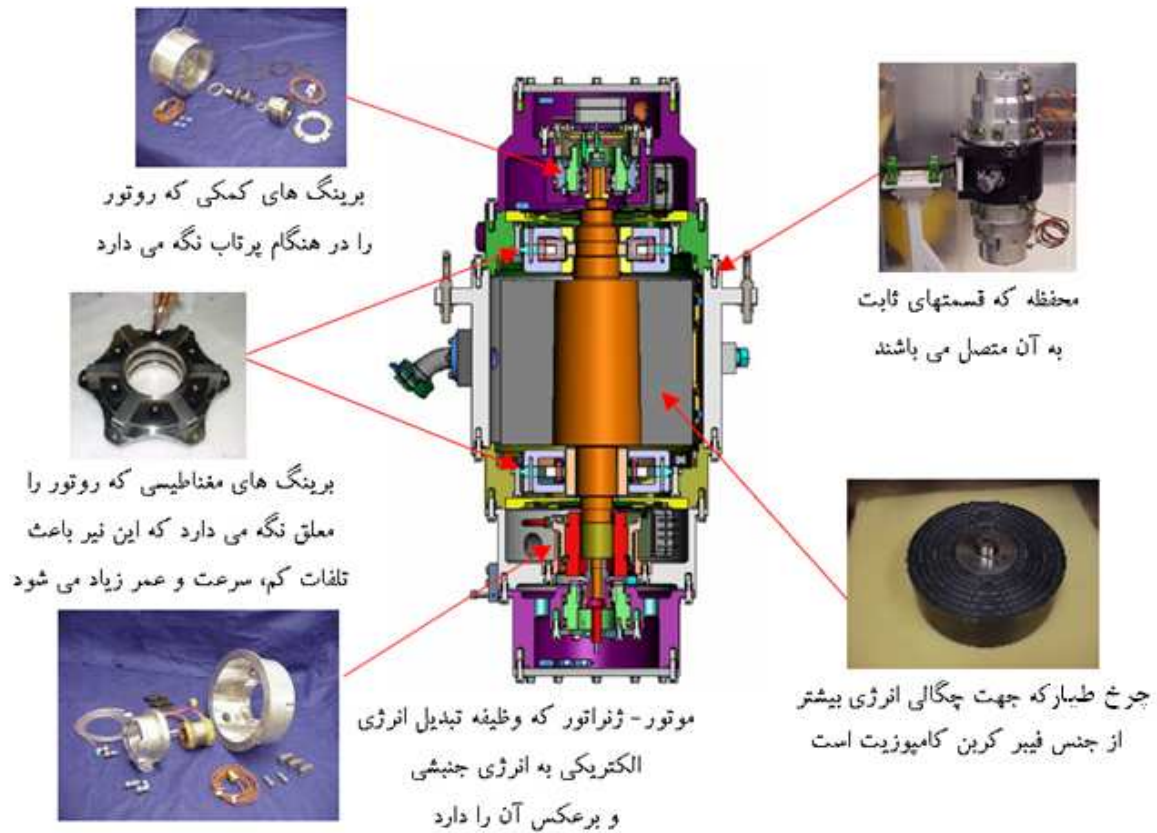
^۴ Renewable energy

خطوط انتقال و توزیع، منابع تغذیه بدون وقفه، ماهواره ها و ... اشاره کرد. ساختار اجزاء مختلف باتری های الکترومکانیکی نیز متناسب با پارامتر های مهم عملکرد آنها متفاوت می باشد بطور مثال در [۶] چرخ طیار باتری از فولاد ساخته شده است در صورتی که در کاربردهای فضایی، وزن در هنگام پرتاب از اهمیت خاصی برخوردار است و چرخ طیار از آلومینیوم یا فیبر کربن کامپوزیت ساخته می شود. همچنین در کاربردهای مختلف از ماشینهای الکتریکی متفاوتی به عنوان موتور- ژنراتور این سیستمها استفاده شده است. برینگیهای استفاده شده نیز می تواند از نوع مغناطیسی یا هیدرودینامیکی باشد.

در شکل (۱-۲) یک باتری های الکترومکانیکی نشان داده شده است و عملکرد آن به این صورت است که در هنگام ذخیره انرژی و به عبارت دیگر شارژ سیستم، انرژی الکتریکی در چرخ طیار به انرژی جنبشی چرخشی تبدیل می شود و باعث بالا رفتن دور آن می شود [۶]. انرژی ذخیره شده در این سیستم عبارت آشنای زیر را دارد:

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1-2)$$

که ω سرعت زاویه ای بر حسب رادیان بر ثانیه و I ممان اینرسی بر حسب کیلوگرم-متر به توان دو و E انرژی جنبشی ذخیره شده در چرخ طیار بر حسب ژول است.



شکل (۱-۲): باتری های الکترومکانیکی به همراه متعلقات آن که در بخش فلای ویل مرکز تحقیقات انرژی ناسا معرفی شده است [۱].

شکل (۲-۲) نیز یک سیستم ذخیره انرژی فلای ویل به همراه مدارات جانبی آن که توسط ناسا ساخته شده است را نشان می دهد که از زیر مجموعه های زیر تشکیل می شود:

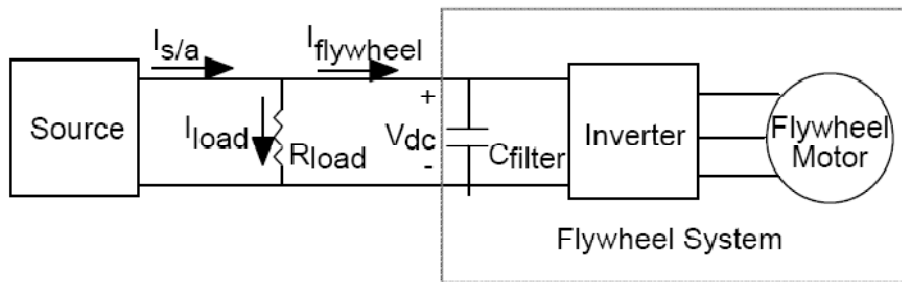
۱- چرخ طیار که از جنس فیبر کربن کامپوزیت می باشد و چگونگی انتخاب مواد و طراحی آن در [۹ و ۹] آورده شده است و در فصل چهارم به اختصار آورده می شود.

۲- موتور-ژنراتور که وظیفه تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی جنبشی و بر عکس آن را به عهده دارد و انواع متفاوتی دارد.

۳- مبدل الکترونیکی که در حقیقت یک اینورتر دو طرفه می باشد و وظیفه تبدیل ولتاژ DC به ولتاژ مناسب جهت عملکرد موتور- ژنراتور را دارد [۱۵].

۴- برینگ های مغناطیسی که وظیفه تعلیق فلای ویل در جهت های محوری و شعاعی را به عهده دارند.

۵- تجهیزات جانبی از جمله جعبه و نگهدارنده ها و ...



شکل (۲-۲): یک سیستم ذخیره انرژی فلای ویل به همراه مدارات جانبی آن

۲-۳-۳- مزایای استفاده از باتریهای الکترومکانیکی به جای باتریهای شیمیایی

عمر باتریها به تعداد شارژ و دشارژ آنها وابسته است. در ماهواره هایی که در مدار های دور از زمین قرار دارند پیروید گردش ۲۴ ساعت است و بنابراین شارژ و دشارژ باتریها روزی یکبار انجام می شود و مشکل خاصی برای باتریها ایجاد نمی کند. اما ماهواره های نزدیک به زمین که دارای ارتفاع ۳۰۰ الی ۱۰۰۰ کیلومتر می باشند و پیروید آنها مابین نیم الی ۱/۷۴ ساعت است، شارژ و دشارژ باتریها خیلی سریع انجام می شود و این باعث کاهش عمر باتریها و ماهواره به حدود ۳ الی ۵ سال می شود.

در [۷ الی ۱۵] باتریهای شیمیایی و باتریهای الکترومکانیکی از دیدگاههای مختلف مورد مقایسه قرار گرفته اند که می توان آنها را بصورت زیر دسته بندی کرد:

۱- عمر: در ماهواره ها عمر سیستمهای ذخیره کننده انرژی کمتر از بقیه زیر مجموعه های آن است و از

این رو تعیین کننده عمر ماهواره می باشد. باتریهای نیکل هیدروژن و لیتیم یون با قابلیت ۱۶۰۰۰ بار

شارژ و دشارژ در بین باتریها بیشترین عمر را دارند و در اکثر ماهواره ها مورد استفاده قرار می گیرند [۷]. در صورتیکه پریود چرخش ماهواره ۲ ساعت باشد عمر این باتریها ۳/۵ سال خواهد بود در صورتیکه عمر باتریهای الکترومکانیکی وابسته به آهنرباهای بکار رفته در آن، از ۱۰ الی ۱۵ سال برآورد می شود. بنابراین با استفاده از باتریهای الکترومکانیکی می توان عمر ماهواره ها را حداقل ۳ برابر افزایش داد.

۲- شرایط محیطی: نرخ شارژ باتریهای شیمیایی وابسته به دما است و در دماهای مختلف داری راندمان متفاوت می باشند در صورتیکه راندمان و نرخ شارژ باتریهای الکترومکانیکی مستقل از دما است.

۳- راندمان: راندمان متوسط باتریهای شیمیایی در زمان شارژ و دشارژ ۸۲٪ برآورد می شود در صورتیکه راندمان باتریهای الکترومکانیکی شامل موتور- ژنراتور و مبدل الکترونیک قدرت آن بیشتر از ۹۲٪ است. با توجه به اینکه ماهواره ها در خلاء کار می کنند راندمان بیشتر، علاوه بر صرفه جویی انرژی باعث کاهش تلفات و نیز کاهش مشکلات حرارتی می شود.

۴- چگالی انرژی: چگالی انرژی باتریهای مختلفی که در ماهواره های مختلف استفاده می شوند در [۸] ارائه شده و در جدول (۱-۲) آورده شده است بیشترین چگالی انرژی مربوط به باتریهای نیکل پلیمر جامد است که با فرض عمق دشارژ ۱۰۰٪، ۱۷۵ وات ساعت بر کیلوگرم می باشد و در مدارهای نزدیک به زمین که تا ۵۰٪ دشارژ مجاز است این مقدار به ۸۷/۵ وات ساعت بر کیلوگرم کاهش می یابد. در [۹] نیز چگالی انرژی برای باتریهای الکترومکانیکی با چرخ طیار از مواد مختلف آورده شده است و در جدول (۲-۲) دیده می شود. بر اساس این جدول بیشترین چگالی انرژی متعلق به چرخ های طیار ساخته شده از گرافیت نوع $T-1000$ بوده و معادل با $241/5 W-hr/lb$ و یا $531 W-hr/kg$ می باشد که به طور قابل توجهی بیشتر از دیگر باتریهای الکترومکانیکی است و با در نظر گرفتن هزینه پرتاب ماهواره کاهش وزن و حجم از اهمیت خاصی برخوردار است.

- ۵- هزینه: با توجه به عمر و راندمان بیشتر و حجم و وزن کمتر در باتریهای الکترومکانیکی و هزینه پرتاب ماهواره ها می توان گفت با استفاده از باتری الکترومکانیکی بجای باتری شیمیایی، صرفه جویی قابل توجهی در هزینه ماهواره ها خواهد شد.
- ۶- کنترل حالت: از چرخ طیار علاوه بر ذخیره انرژی به عنوان کنترل حالت ماهواره ها نیز استفاده می شود که یکی از مسائل اصلی عملکرد ماهواره ها است.

جدول (۱-۲): چگالی باتریهای استفاده شده در انواع ماهواره ها [۸]

تکنولوژی	چگالی انرژی بر اساس عمق دشارژ در مدارات GEO (%)	عمق دشارژ در مدارات LEO (%)	عمق دشارژ ۱۰۰٪
<i>NiCd</i>	۶۰	۲۵	۲۵
<i>Cpv NiH2</i>	۷۰	۳۵	۳۵
<i>Bipolar NiMH</i>	۶۰	۴۰	۸۰
<i>Li-ion</i> (مایع)	۶۰	۴۰	۸۵
<i>Polymer</i> (جامد)	۸۰	۵۰	۱۷۵

(Whr/kg)

جدول (۲-۲): مقایسه چگالی انرژی فلای ویلها با روتورهای از مواد مختلف [۹]

چگالی انرژی (W-hrs/lb)	چگالی ماده (kg/m ³)	حداکثر استحکام تنش (psi)	مواد تشکیل دهنده رتور
۲۴۱/۵	۱۸۰۰	۱/۰۰۰/۰۰۰	Graphite T-1000
۱۶۹/۱	۱۸۰۰	۷۰۰/۰۰۰	Graphite T-700
۱۹۵	۹۷۰	۴۳۵/۰۰۰	Spectra 1000
۱۸۸	۱۳۹۰	۵۹۸/۰۰۰	Technora T220
۱۵۹	۱۴۴۰	۵۲۵/۰۰۰	Kevlar 49
۱۰۲/۴	۲۵۵۰	۶۰۰/۰۰۰	S2 – Glass
۷۶/۸	۲۵۵۰	۴۵۰/۰۰۰	E - Glass
۱۴/۴	۷۸۰۰	۲۶۰/۰۰۰	Steel 4340

بنابراین با توجه به مزایای فوق امروزه استفاده از باتریهای الکترومکانیکی بجای باتریهای شیمیایی، به عنوان یکی از مباحث جدی در طراحی و ساخت ماهواره ها دنبال می شود.

۲-۴ - انواع ماشینهای الکتریکی

در کاربردهای مختلف از ماشینهای الکتریکی متفاوتی به عنوان موتور- ژنراتور در باتریهای الکترومکانیکی استفاده شده است. یکی از منابع برتر تولید انرژی برای حرکت چرخ طیار ماشینهای الکتریکی با برینگ مغناطیسی است که در این نوع ماشینها با وجود برینگ مغناطیسی اصطکاک حذف می گردد.

به طور کلی می توان این ماشینها را به دو دسته ماشینهای با آهنربا دائم و بدون آهنربا دائم تقسیم بندی کرد که در [۱۵ الی ۲۹] ارائه شده اند. بزرگترین مزیت ماشینهای با آهنربای دائم کم بودن وزن آهنربا و در نتیجه وزن ماشین است که موجب افزایش چگالی گشتاور ماشین می شود. این موضوع به دلیل بالا بودن هزینه پرتاب در ماهواره ها از اهمیت خاصی برخوردار است. اما بزرگترین عیب این ماشینها پیر شدن یا مغناطیس زدا شدن آهنرباها است که باعث محدود شدن عمر فلای ویل و در نتیجه عمر کل ماهواره می شود. از سوی دیگر قسمت موتور- ژنراتور در این سیستم بخش کوچکی از وزن را تشکیل می دهد و قسمت اعظم وزن سیستم مربوط به چرخ طیار آن می شود. نوع دیگر ماشینهای بدون آهنربا هستند. این ماشینها دارای وزن بیشتری می باشند، اما مشکلات مربوط به آهنرباها یعنی مغناطیس زدا شدن را ندارند. در این ماشینها افزایش وزن باعث افزایش هزینه میشود اما در عوض افزایش عمر باعث کاهش هزینه می شود. در نهایت با توجه به اهمیت وزن و حجم در ماهواره ها در سیستم برای باتریهای الکترومکانیکی ماهواره ها از ماشین های آهنربا دایم استفاده می شود که بهترین گزینه است.

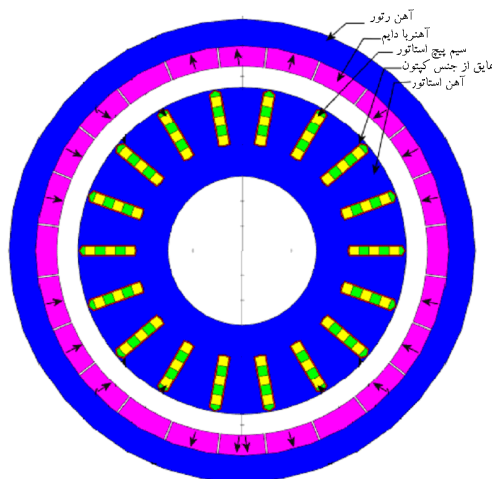
در ماشینهای با آهنربا دائم برای تولید میدان در روتور، از آهنرباها استفاده می شود. همواره میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط یک آهنربا مایل است مسیر میدان خود را از اجسام با پرمابیلیته (خاصیت گذردهی الکتریکی) بیشتر از خودش (مانند آهن) ببندد و به همین دلیل است که آهنربا، می تواند آهن را جذب کند. در ماشینهای با آهنربا دائم، میدان مغناطیسی تولید شده توسط آهنربا با میدان دوار مغناطیسی دیگری که در استاتور تولید شده است، کوپل می شود و گشتاور لازم بوجود می آید. ماشینهای با آهنربا دائم نیز خود انواع مختلفی

دارند [۱۵ الی ۲۵]. یکی از انواع ماشینهای با آهنربای دائم ماشینهای شیاردار است. در فصل بعد به اختصار به شرح این نوع از ماشین الکتریکی پرداخته می شود.

۲-۵- ماشینهای شیاردار و ساختار و عملکرد آنها

به طور کلی ماشینهای شیاردار ساختار ساده ای دارند. طبق آنچه که گفته شد در ماشینهای شیاردار آهنربا دائم از آهنربا برای تولید میدان مغناطیسی در روتور استفاده می شود. وابسته به اینکه آهنرباها چگونه در روی چرخ طیار (روتور) نصب شوند، می توان ساختار روتور را به سه نوع آهنربا سطحی، آهنربا داخلی و آهنربا دفن شده، تقسیم کرد. روتورهای آهنربا سطحی میتوانند بیشترین توان را تولید و ساختار آهنربا سطحی بهترین کاندید می باشد [۱۶].

لذا این آهنرباها بر سطح روتور (در اینجا سطح داخلی چرخ طیار) چسبانیده می شوند و برای میدان استاتور از سیم پیچهایی از جنس مس که در استاتور تعبیه شده اند استفاده می گردد. شکل ۲-۳ نشان دهنده یک نمونه از این نوع ماشین است.



شکل (۲-۳): نمای یک ماشین آهنربای دائم مورد استفاده در باطری الکترومکانیکی ماهواره ها (استاتور در وسط روتور قرار دارد و چرخ طیار به

آهن رتور چسبانیده می شود) [۱۸]

۲-۶- ماشینهای شیاردار و تولید گشتاور دندانه

سیم پیچهای مسی در استاتور دارای شیارهای آهنی جهت قرار گرفتن سیم در آنها هستند. پرمابیلیته مس که مانند هوا بوده و با پرمابیلیته آهن متفاوت است، در محل شیارها، میدان مغناطیسی تولید شده توسط آهنربا را منحرف می کند. بنابراین هنگام گردش روتور در استاتور گشتاور متغیر و متناوبی بدلیل قرار گرفتن در معرض این رلوکتانسهای مختلف نیز تولید می شود. یعنی زمانی که آهنربا به شیار آهنی استاتور نزدیک و یا دور می شود، نیروی جاذبه ایجاد می شود که برای گشتاور کل به منزله ایجاد گشتاوری متناوب علاوه بر گشتاور نامی است که در هنگام نزدیک شدن و دور شدن آهنرباها به شیارها ایجاد می شود. این گشتاور متناوب گشتاور دندانه^۵ نامیده می شود. لذا این گشتاور متناوب در سیستم ذخیره انرژی ایجاد ارتعاش در جهت زاویه ای می کند. فرکانس این ارتعاش برابر تعداد شیارها در سرعت زاویه ای چرخ طیار است.

در زیر معادله گشتاور دندانه تولید شده در یک نمونه از ماشین الکتریکی آهنربا دائم که در [۳۰] آمده آورده شده است:

$$T_{cog}(\theta) = \frac{\pi z L_{Fe}}{4\mu_0} (r_2^2 - r_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} n G_n B_r \left(\frac{nz}{2p}\right) \sin nz\theta \quad (2-2)$$

که در این رابطه L_{Fe} طول محوری ماشین، r_1 شعاع داخلی، r_2 شعاع خارجی یوغ استاتور، θ زاویه میان روتور و استاتور، z تعداد شیارها، p تعداد جفت قطبهای آهنربا و $B_r \left(\frac{nz}{2p}\right)$ پسماند میدان مغناطیسی آهنربا، μ_0 ، G_n است که چگونگی بدست آوردن آن در زیر آمده است.

⁵ Cogging torque

$$G_n = \left\{ k_0 - k_1 - \frac{k_2}{2(\alpha_1 - \alpha_0)} + k_3 \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\alpha_1}{2\pi n} \right)^2 - \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \right)^2 \right) \right] \right\} \sin \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)n\pi}{\alpha_1} +$$

$$k_2 \left(\frac{\alpha_1}{2\pi n} \right)^2 \left(\cos n\pi - \cos \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)n\pi}{\theta_1} \right) + k_3 \left(\frac{\alpha_1}{2\pi n} \right)^2 (\alpha_1 \cos n\pi -$$

$$(\alpha_1 - \alpha_0) \cos \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)n\pi}{\alpha_1}) \quad (۳-۲)$$

$$k_0 = \left(\frac{h_m}{h_m + g} \right)^2 \quad (۴-۲)$$

$$k_1 = 1 - \frac{1.646}{h_m} \left[g - \frac{\pi b_0}{4\alpha_0} (\alpha_1 - \alpha_0) \right] + \frac{1}{h_m^2} \left[g - \frac{\pi b_0}{4\alpha_0} (\alpha_1 - \alpha_0) \right]^2 \quad (۵-۲)$$

$$k_2 = \frac{\pi b_0 \left(g - \frac{\pi b_0}{4\alpha_0} (\alpha_1 - \alpha_0) \right)}{h_m^2 \alpha_0} - \frac{1.646 \pi b_0}{2 h_m \alpha_0} \quad (۶-۲)$$

$$k_3 = \left(\frac{\pi b_0}{2 h_m \alpha_0} \right)^2 \quad (۷-۲)$$

که b_0 عرض شیار و α_1 و α_0 زاویه گام و شیار به رادیان است.

روشهای متعددی نیز برای کاهش گشتاور دندانه ارائه شده اند. [۳۰ الی ۳۷] که از میان این روشها می توان به اریب ساختن شیارهای استاتور، افزایش تعداد شیارها، کاهش طول دندانه های استاتور، بهینه سازی شکل روتور و بهینه سازی ضخامت آهنرباهای استفاده شده در روتور به روش المان محدود و کاهش اثرات گشتاور دندانه توسط کنترل لحظه ای جریان استاتور اشاره کرد. آنچه از این مقالات معلوم می شود، حداکثر گشتاور دندانه ۳۰٪ از کل گشتاور و حداقل گشتاور دندانه ۸/۴٪ از کل گشتاور بیان شده است. بنابراین با وجود روشهای ارائه شده برای کاهش گشتاور دندانه این گشتاور متناوب همچنان وجود دارد و در سیستم ذخیره انرژی ایجاد ارتعاش و نویز می کند.

آنچه در این تحقیق انجام می شود بررسی و تحلیل ارتعاشات ناشی از گشتاور دندانه در چرخ طیار باطری الکترومکانیکی ماهواره است.

فصل سوم

طراحی چرخ طیار در باطری

های الکترومکانیکی

۳-۱- پیشینه طراحی ابعاد و شکل چرخ طیار

در پژوهشهای انجام شده در زمینه ماهواره ها سرعت چرخ طیار بین ۲۰/۰۰۰ الی ۶۰/۰۰۰ دور در دقیقه در نظر گرفته می شود [۸ الی ۱۱]. لذا طراحی چرخ طیار بایستی به گونه ای باشد که بتواند در این سرعت کار کند. شکل ظاهری و ابعاد چرخ طیار همواره به گونه ای طراحی می شوند که سیستم بتواند بیشترین میزان ذخیره انرژی جنبشی را داشته باشد و بیشترین مقاومت تنشی را تحمل نماید. به عبارت دیگر بایستی بیشترین میزان قابلیت اطمینان را داشته باشد.

برای تعیین میزان انرژی ذخیره شده در یک چرخ طیار فاکتوری بنام چگالی انرژی مخصوص^۶ به صورت زیر تعریف شده است: [۳۸]

$$SED = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{mass} \quad (۱-۳)$$

I ممان اینرسی به صورت کلی زیر در نظر گرفته می شود:

$$I = \int_V \rho \cdot r^2 dV \quad (۲-۳)$$

لذا چگالی انرژی مخصوص به سرعت زاویه ای و شعاع چرخ طیار بستگی پیدا می کند. از سوی دیگر همانطوریکه قبلا هم گفته شد، در سیستمهای فضایی جرم در زمان پرتاب اهمیت پیدا می کند و لذا ترجیح داده می شود که سیستم چرخ طیار با اینرسی کم و دور بالا ساخته شود، و با توجه به اینکه اینرسی به طور مستقیم با وزن و با توان دوم شعاع متناسب است ترجیح داده می شود که روتور دارای وزن کمتر و شعاع بیشتر

^۶ Specific Energy Density (SED)

باشد. به همین دلیل موتور-ژنراتور در وسط چرخ طیار قرار داده می شود و این کار حتی موجب کوچکتر شدن ابعاد ماهواره نیز می شود.

۳-۱-۱- محاسبه ابعاد چرخ طیار

بر اساس آنچه درباره انرژی گفته شد روش محاسبه اندازه چرخ طیار شرح داده می شود. انرژی تعریف شده برای سیستم ذخیره انرژی برابر است با:

$$E = Pt \quad (3-3)$$

همانطوریکه قبلا هم گفته شد، انرژی ذخیره شده در یک چرخ طیار برابر است با:

$$E = \frac{1}{2} I \Omega^2 \quad (4-3)$$

که Ω سرعت زاویه ای، I ممان اینرسی، m جرم و r شعاع چرخ طیار می باشند.

همچنین برای سیستم مورد بحث در این پروژه که چرخ طیار یک استوانه تو خالی است اینرسی برابر خواهد شد با:

$$I = \frac{1}{2} m(r_2^2 - r_1^2) \quad (5-3)$$

که r_2 شعاع خارجی و r_1 شعاع داخلی چرخ طیار می باشد. جرم یک چرخ طیار استوانه ای تو خالی برابر است با:

$$m = \rho V = \rho \pi (r_2^2 - r_1^2) l \quad (6-3)$$

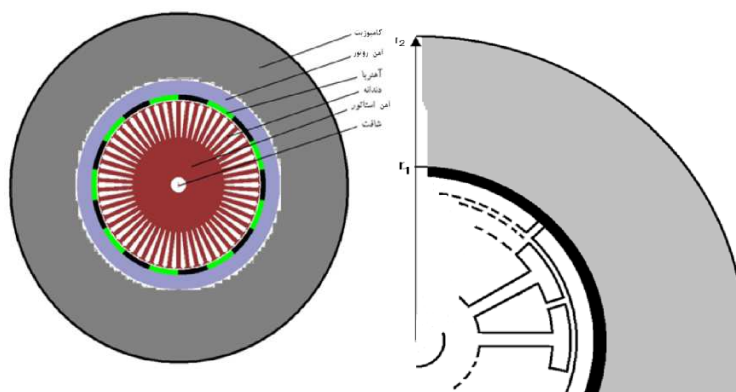
که ρ چگالی و l طول محوری چرخ طیار می باشد. با تلفیق روابط (۵-۳) و (۶-۳) خواهیم داشت:

$$I = \frac{1}{2} \rho \pi (r_2^2 - r_1^2) l (r_2^2 - r_1^2) = \frac{1}{2} l \rho \pi (r_2^2 - r_1^2)^2 \quad (7-3)$$

در سیستم نشان داده شده در شکل ۱-۳ آهن روتور (یوغ) (در صورت وجود) و قسمت کامپوزیت، چرخ طیار را تشکیل می دهند. با توجه به اینکه چگالی وزنی سه ماده فوق با هم متفاوت است، جهت بدست آوردن اینرسی چرخ طیار باید اینرسی مربوط به هر قسمت را بدست آورده و با هم جمع کنیم. اما در این تحقیق فرض می شود که چرخ طیار فاقد آهن روتور است و در ضمن جرم آهنربا نیز وارد نشده است. بنابراین انرژی جنبشی به شکل زیر است:

$$E = \frac{1}{4} l \pi (\rho (r_2^2 - r_1^2)^2) \Omega^2 \quad (8-3)$$

در اینصورت با قرار دادن رابطه (۸-۳) در رابطه (۵-۳) شعاع خارجی چرخ طیار بدست می آید.



شکل (۱-۳): ابعاد کلی ماشین تحت طراحی با در نظر گرفتن آهن روتور

حال با داشتن ابعاد چرخ طیار این مسئله به نظر می رسد که بایستی مقاومت چرخ طیار طراحی شده در برابر تنشهای احتمالی نیز بررسی شود.

۳-۲- پیشینه طراحی چرخ طیار بر اساس تنش

میزان مقاومت در برابر تنشهای وارده در چرخ طیار به علت بالا بودن سرعت دورانی آن بسیار مهم می باشد. در [۸-۱۱] و [۳۹-۴۳] چگونگی جنس، شکل، اندازه و میزان سرعت چهار پارامتر موثر در ایجاد تنش آمده است. در جدول ۱-۲ نیز میزان استحکام تنشی چند ماده مختلف آورده شده است. نیروی حجمی وارده بر چرخ طیار استوانه ای شکل توخالی که با سرعت زاویه ای ثابت Ω می چرخد در جهت شعاعی و همان نیروی گریز از مرکز می باشد. که به صورت زیر نوشته می شود:

$$F_r = \rho r \Omega^2 \quad r_1 < r < r_2 \quad (9-3)$$

که ρ چگالی جرمی چرخ طیار و r_1 و r_2 شعاع خارجی و داخلی چرخ طیار است. معادلات تعادل دینامیکی در دستگاه مختصات استوانه ای برای چرخ طیار مورد نظر که با سرعت زاویه ای ثابت Ω می چرخد در حالت کلی و با در نظر گرفتن کشش در هر سه جهت به شکل زیر نوشته می شود: [۴۴]

$$\begin{aligned} \sigma_{r,r} + \frac{1}{r} \tau_{r\theta,\theta} + \tau_{rz,z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) \\ = -\rho r \Omega^2 + \rho(\ddot{u} - 2\omega\dot{v}) + \rho r \Omega^2 (u_r + \frac{1}{r} v_\theta + w_z) \end{aligned}$$

$$\tau_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta} + \tau_{\theta z,z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = -\rho(\ddot{v} + 2\Omega\dot{u}) \quad (10-3)$$

$$\tau_{rz,r} + \frac{1}{r} \tau_{\theta z,\theta} + \sigma_{z,z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} = -\rho\ddot{w}$$

بنابراین تنش ایجاد شده در جهت‌های زاویه ای و شعاعی به کمک معادلات تعادل دینامیکی در الاستیسیته برای یک چرخ طیار به شکل استوانه جدار ضخیم و با صرفنظر از نیروهای ناشی از جابجایی در جهت محوری (W) و تنها با در نظر گرفتن نیروی گریز از مرکز به صورت زیر است: [۴۱]

$$\sigma_{rr} = \rho\Omega^2 \left(\frac{3+\nu}{8} \right) (r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2) \quad (۳-۱۱-الف)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \rho\Omega^2 \left(\frac{3+\nu}{8} \right) (r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2) \quad (۳-۱۱-ب)$$

که σ_r و σ_θ بترتیب تنش در جهت زاویه ای و شعاعی است. از تنش در جهات دیگر صرفنظر شده است. با روشهای المان محدود و استفاده از نرم افزار می توان میزان تنش و انرژی ذخیره شده برای اشکال و اندازه های متفاوت بررسی نمود.

۳-۳- پیشینه طراحی چرخ طیار بر اساس ارتعاش کمتر

در سیستم باطری الکترومکانیکی برای کاربرد در ماهواره های نزدیک به زمین که با سرعت زاویه ای ۲۰۰۰۰ الی ۶۰۰۰۰ دور در دقیقه می چرخد، مثل هر سیستم دینامیکی دیگری اطلاع از فرکانسهای طبیعی و تشدید، شکل مودها و پاسخ چرخ طیار به ارتعاشات طبیعی و اجباری لازمه طراحی و ساخت آن است. در پژوهشهای ناسا [۳۹] به کمک نرم افزار المان محدود *NASTRAN* رسم شکل مودها و بررسی ارتعاشات آزاد یک چرخ طیار به شکل استوانه جدار نازک انجام شده است. اما تنها بررسی ارتعاشات آزاد در این سیستم کافی نمی باشد چرا که در سرعتهای بالا نامیزان بودن چرخ طیار می تواند سیستم را دچار اختلال کند. در اینصورت رفتار سیستم تحت نامیزانی را می توان با یک سیستم جرم - فنر - دمپر مدل کرد. بسته به نوع برینگ استفاده شده می

توان آن را با فنری خطی، الاستیک، ایزوتروپیک و با دمپینگ مربوطه مدل کرد. در سیستمهایی که با برینگ هیدرودینامیکی کار می کنند برای کاهش ارتعاشات ناشی از نامیزانی از لایه فشرده روغن به عنوان دمپر استفاده می شود [۴۵]. در سیستمهایی که با برینگ مغناطیسی کار می کنند کاراکترهای دمپر ساختاری یا هیستریزس و یا کولومب است [۴۶ الی ۴۹]. با حل این سیستم معادله ارتعاشی ناشی از نامیزانی حل شده است. سپس با مقایسه نتایج حاصله با نتایج تجربی مشاهده می شود که این روش صحیح است.

فصل چهارم

تحلیل ارتعاشات استوانه

مورد استفاده در باطریهای

الکترومکانیکی ماهواره

۴-۱- پیشینه تحلیل ارتعاشات استوانه ها

در این فصل استوانه مورد استفاده به عنوان چرخ طیار در باطری الکترومکانیکی ماهواره به طور جداگانه مورد بررسی ارتعاشی قرار داده می شود. حل تحلیلی ارتعاشات استوانه ها به طور کلی با توجه به وجود شرایط مرزی مختلف و لزوم ارضای آنها مشکل می باشد. لذا در ابتدا اینگونه حلها توسط رایلی (۱۸۸۹) و سپس لامب (۱۹۱۷) برای یک دنباله بینهایت از امواج منتشر شده در طول یک ورق بینهایت انجام شد. با مطالعه مراجع موجود در زمینه ارتعاشات سازه های استوانه ای مشاهده می شود که بیشتر تحلیلهای بر پایه تئوری یک بعدی برای استوانه های توپر نظیر روش رایلی و تیموشنکو و تئوری دوبعدی پوسته ها برای استوانه های توخالی مانند روش لائو، فلوگه، دانل، رایسنر، سندرز و رایلی ایجاد شده اند. تحلیلهای انجام شده در زمینه مسائل ارتعاشات استوانه ها اولین حل توسط پوچهامر (۱۸۷۶) و چری (۱۸۸۹) ارائه شده است. در این مطالعات روش تحلیلی در بررسی ارتعاشات استوانه های طویل مورد استفاده قرار گرفته و به منظور حل معادله ناویه از روش جداسازی متغیرها استفاده شده است. پیداک (۱۹۱۹) در ادامه روش پوچهامر ارتعاشات و پایداری یک استوانه طویل را که با سرعت زاویه ای ثابت می چرخد با استفاده از قوانین سوت ول در الاستیسیته بررسی نمود. اسندن (۱۹۵۱)، بورگوئیس (۱۹۷۳) و ناگایا (۱۹۸۳) از روشی مشابه یکدیگر با استفاده از تلفیق بسط فوریه فرکانسهای طبیعی را محاسبه کردند و بورگوئیس پاسخ یک استوانه توخالی به یک فشار داخلی با توزیع تابع پله ای را بررسی کرد. این تحلیل بر اساس تبدیل لاپلاس است. در تحلیل انجام شده توسط ناگایا نیز فرض کرنش صفحه ای در نظر گرفته شده است که با توجه به این فرض تحلیل فوق یک تحلیل دوبعدی است. هرمن و میرسکی (۱۹۵۶) یک تحلیل سه بعدی بر مبنای تئوری پوسته ها را برای حرکت متقارن محوری استوانه ها ارائه کردند. گازیس (۱۹۵۸) یک تحلیل سه بعدی برای انتشار موج در استوانه توخالی جدار ضخیم ارائه کرد که در این حل یک تحلیل دقیق برای استوانه ها صورت گرفته است و در این تحقیق نیز فرض کرنش صفحه ای یکی از مفروضات مسئله می باشد. برد و همکارانش (۱۹۶۰) ارتعاشات استوانه توخالی را با استفاده از آنالیز عددی و روش

جداسازی متغیرها مورد بررسی قرار دادند. در این تحلیل فرکانسهای طبیعی یک استوانه طویل با شرایط کرنش صفحه ای محاسبه شده و از مولفه های تنش در جهت محوری صرفنظر شده است و همچنین شرایط مرزی روی سطح خارجی استوانه به صورت آزاد، ساده و گیردار در نظر گرفته شده است. از جمله کارهای تجربی انجام شده برای ارزیابی نتایج روشهای تئوری توسط مک ماهون (۱۹۶۴) بر روی ارتعاشات آزاد استوانه با شرط مرزی آزاد انجام شده است که استوانه در نظر گرفته شده به صورت توپر و از جنس آلومینیوم است. سینلی (۱۹۶۵) و (۱۹۶۶) ارتعاشات پوسته ای استوانه و کره جدار ضخیم را با استفاده از تبدیل هنکل بررسی نمود و یک حل بسته ارائه کرد. البته حل انجام شده توسط سینلی در مورد استوانه ها با فرض طویل بودن آنها صورت گرفت. هاتکینسون (۱۹۶۶) ارتعاشات آزاد با تقارن محوری یک استوانه توپر لحاظ شده در یک پوشش صلب را با استفاده از تعامد مودها حل کرد. در این مطالعه جابجایی شعاعی با استفاده از یک سری توابع با ضرایب نامعلوم در نظر گرفته شد که این ضرایب با استفاده از روش تعامد مودها جهت ارضای شرایط مرزی در دو انتها قابل محاسبه می باشند. دقت نهایی این روش به میزان موفقیت در ارضای شرایط مرزی بستگی دارد. آرمناکاس، گاسیز و هرمن (۱۹۶۹) روش حل شده توسط پوچهامر و چری را برای استوانه جدار ضخیم استفاده نمودند. در این تحلیل با استفاده از روش جداسازی متغیرها و تجزیه هلمهولتز در معادله ناویه ارتعاشات آزاد استوانه طویل مورد بررسی قرار گرفت و جداول فرکانسهای طبیعی برای نسبتهای مختلف ضخامت دیواره به شعاع متوسط ارائه شد. مطالعه دیگری توسط چونگ و وو (۱۹۷۲) بر روی استوانه جدار ضخیم چند لایه با طول محدود و با شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش انرژی ریتر انجام شد. از فرضیات انجام شده در این مطالعه تئوری الاستیسیته خطی با فرض جابجاییهای کوچک است. گلا دول و تهیلدار (۱۹۷۲) برای اولین بار روش اجزاء محدود را به منظور بررسی ارتعاشات با تقارن محوری استوانه بکار بردند. نتایج حاصل از این روش نسبت به روشهای حاصل از روشهای تحلیلی در مواردی تا ۱۰٪ دارای خطا می باشد. هاتکینسون (۱۹۷۲) از روش حل سری به عنوان یک تقریب با دقت بالا برای تحلیل ارتعاشات میله با طول محدود استفاده کرد. لذا از مولفه های تنشهای محیطی صرفنظر شده است. همچنین تنشهای شعاعی و برشی بر روی سطح خارجی میله به طور دقیق

و مقادیر تنشهای شعاعی و محوری در دو انتهای میله با استفاده از روش تعامد به طور تقریبی صفر گردیده است. گلا دول و ویجی (۱۹۷۵) در مطالعه ای نتایج حاصل از روش حل آرمناکاس را به منظور محاسبه فرکانسهای طبیعی استوانه با طول محدود استفاده کردند، همچنین آنها نتایج بدست آمده را با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود مقایسه نمودند. لازم به ذکر است که در این تحقیق روش اجزاء محدود به عنوان یک روش با خطای قابل قبول بکار برده شده است. مجدداً هاتکینسون (۱۹۸۰) با استفاده از روش حل سری و تعامد، ارتعاشات آزاد استوانه توپر با طول محدود را مورد مطالعه قرار داد. در این بررسی شرایط مرزی مربوط به تنشهای برشی بر روی سطح خارجی و در دو سر استوانه به طور دقیق و شرایط مرزی مربوط به تنشهای محوری و شعاعی با استفاده از شرط تعامد به طور تقریبی ارضا شده است. در تحقیق دیگری هاتکینسون (۱۹۸۱) نتایج حاصل از تحلیلهای تقریبی و دقیق ارتعاشات تیر را به منظور تعیین میزان موفقیت روشهای تقریبی مقایسه کرد. هاتکینسون و ازهری با استفاده از روش جداسازی و تعامد سریها ارتعاشات استوانه توخالی را مورد بررسی قرار دادند و نتایج بدست آمده را با مطالعات انجام شده توسط روش اجزاء محدود که در گذشته انجام شده بود مقایسه کردند. باید توجه داشت که هاتکینسون در مقالات فوق با استفاده از حل سریها برای هر تنش تعداد مشخصی جمله در نظر گرفته و برای مدلسازی سطوح آزاد استوانه در مورد تنشهای نرمال از خاصیت تعامد سریها استفاده کرده است.

سینگال و ویلیامز (۱۹۸۸) با استفاده از چند جمله ایهای جبری و از طریق روش ریتز در ارتعاشات آزاد سه بعدی استوانه ها نتایجی با دقت بالا بدست آورده اند. کوبایاشی و همراهانش (۱۹۹۴) ارتعاشات آزاد یا استوانه توخالی چند لایه را بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی و با استفاده از پتانسیل جابجایی بررسی کرده و فرکانسهای طبیعی و شکل مودها را برای سیلندر یک لایه، دو لایه و سه لایه بدست آورده اند. گش (۱۹۹۵) تحلیل ارتعاشات متقارن محوری آزاد و اجباری یک استوانه را تحت شرایط کرنش صفحه ای ارائه کرد. هرچند در تحلیل فوق ارتعاشات اجباری استوانه مورد بررسی قرار گرفته است اما یکی از فرضیات انجام شده در آن

شرط کرنش صفحه ای بوده که مسئله را از حالت الاستیسیته سه بعدی خارج می کند. روش حل نیز به این صورت می باشد که تبدیل لاپلاس فشار اعمال شده به استوانه در معادله تبدیل یافته حرکت با تقارن محوری تحت شرایط کرنش صفحه ای جایگزین شده است. لیو و هانگ (۱۹۹۵) ارتعاشات آزاد استوانه توپر و توخالی را با شرایط مرزی مختلف و با استفاده از روش انرژی سه بعدی بررسی نموده اند. همگرایی این روش نیز برای این شرایط مرزی مختلف و برشهای دلخواه مختلف از استوانه بررسی شده است. وانگ و ویلیامز (۱۹۹۶) فرکانسها و شکل مودهای استوانه های جدار ضخیم را بررسی کرده اند. آنها از آنالیز المان محدود استفاده نموده اند و داده های المان محدود را با نتایج تجربی مقایسه کرده اند. حسینی هاشمی (۱۹۹۸) در یک طرح تحقیقاتی ارتعاشات اجسام سه بعدی را با فرض الاستیسیته سه بعدی و با استفاده از روش جداسازی متغیرها مورد بررسی قرار داد. در این مطالعه معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد استوانه با مقطع دایروی، بیضوی و سهموی، کره، کره فشرده و چنبره ارائه شد و در هر مورد امکان حل معادلات دیفرانسیل حاکم بررسی گردید. مکتیو و همراهش (۲۰۰۱) ارتعاشات اجباری یک سیلندر توخالی تحت نیروی متقارن که بر دو انتهای سیلندر وارد می شود را بررسی کرده اند. روش استفاده شده توسط آنها نیز بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی است. یی و بوچانان (۲۰۰۱) اثر ضریب پواسون بر ارتعاشات استوانه های محدود توخالی را با استفاده از روش اجزاء محدود مورد بررسی قرار دادند. شرایط مرزی انتهایی به صورت آزاد و گیردار در نظر گرفته شده است. سینگ و سوبرامانیام (۲۰۰۳) ارتعاشات آزاد یک استوانه جدار ضخیم را با استفاده از روشهای عددی و به کار بردن تئوری الاستیسیته سه بعدی بررسی کردند، الگوریتم مورد استفاده بر اساس روش ریتز طراحی شد که در آن میدان جابجایی از حاصلضرب دو تابع چندجمله ای غیر وابسته تشکیل شده است. ژو و همکارانش (۲۰۰۳) بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی ارتعاشات آزاد سه بعدی استوانه توپر و توخالی را به کمک توابع قابل قبول تشکیل شده از چندجمله ایهای چبی شف بررسی کردند. برای بدست آوردن معادله متعامد از روش ریتز استفاده شده است. در مقایسه ای میان روش ارائه شده توسط ژو و همکارانش و روش استفاده شده توسط هاتکینسون به وسیله چندجمله ایهای ساده برای استوانه توپر آزاد معلوم می شود که هر دو روش با هم مطابقت دارند، اما برای

استوانه توخالی در بیشتر موارد روش ارائه شده صحیح تر از نتایج ارائه شده توسط هاتکینسون است. ابنزر و همکارانش (۲۰۰۵ و ۲۰۰۸) پاسخ استوانه توپر و با طول محدود تحت تحریکات خارجی در جهات شعاعی و محوری را بررسی کردند. در این روش با استفاده از دو سری مجموعه ای کامل از توابع در جهات شعاعی و محوری تشکیل شده اند. حل‌های عددی برای توضیح پاسخ ارتعاشات آزاد و اجباری ارائه شده اند. معلوم می‌شود که تنها تعداد کمی از سریها لازم هستند تا تعداد زیادی از پاسخهای فرکانسی محاسبه شوند. تعداد جملات لازم اولاً به توزیع سه بعدی و نه به فرکانس تحریک بستگی دارند و حتی با خطایی کمتر از ۱٪ و تنها با استفاده از ۱۰ جمله در هر سری را بدست میدهد. لین (۲۰۰۷) ارتعاشات شعاعی و طولی استوانه توخالی را به صورت تقریبی بدست آورده است. او یک بار ارتعاشات را تحت تاثیر فرکانس شعاعی و یک بار تحت تاثیر فرکانس طولی بدست آورده است و فرکانسهای رزونانس را با روش تحلیلی و عددی بدست آورده و با هم مقایسه نموده است. نیوس و همراهانش (۲۰۰۸) روش ریتز را برای محاسبه فرکانس ارتعاشات متقارن آزاد سیلندر بهینه کرده اند. آنها با استفاده از برنامه ای که نوشته اند مقدار بهینه را پیدا کرده اند. مفخمی، تودشکی و هاشمی (۲۰۰۶ و ۲۰۰۸) با در نظر گرفتن تئوری الاستیسیته سه بعدی و با استفاده از حل تحلیلی ارتعاشات استوانه های نامحدود و محدود را در حالت ارتعاشات آزاد و همچنین تحت امواج صوتی بررسی کردند. آنها با استفاده از روش جداسازی متغیرها به حل معادله ناویه پرداخته اند. سپس با استفاده از توابع متعامد به حل شرایط مرزی غیر دقیق پرداخته اند. از مزایای این روش حجم محاسبات کم و استفاده یکباره از آن برای هندسه ها و مواد متفاوت است.

بنابراین با توجه به بررسی مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاشات استوانه ها مشاهده می‌گردد که اکثر مطالعات مربوط به استوانه های محدود با استفاده از روشهای عددی صورت گرفت است که از جمله می‌توان به روشهای ریتز، حل سریها و روش اجزاء محدود اشاره کرد و واضح است که روشهای عددی دارای دقتهای مختلفی می‌باشند.

در این پایان نامه ارتعاشات استوانه ها تحت نیروهای جسمی (حجمی) مختلف و به طور خاص ارتعاشات استوانه چرخان (چرخ طیار باطری الکترومکانیکی) با سرعت زاویه ای ثابت تحت دو شرط مرزی آزاد و تحت گشتاور متناوب (گشتاور دندانه) با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی و با استفاده از حل تحلیلی، بررسی شده است. برای تحلیل ارتعاشات استوانه ابتدا معادلات حرکت در دستگاه مختصات استوانه ای نوشته می شوند، که برای نوشتن این معادلات بایستی شتاب هر ذره در هر سه جهت شعاعی، زاویه ای و طولی معلوم باشند. بسته به نیروی وارده بر استوانه و شرایط مرزی حاکم معادلات حرکت متفاوت می شوند. به جای معادلات حرکت در دستگاه مختصات استوانه ای می توان از معادلات ناویه نیز به دلیل دسترسی به حل دقیق، حجم محاسبات کم و همچنین انجام یکباره آن برای هندسه ها و مواد مختلف استفاده کرد که در این تحقیق از معادله ناویه استفاده شده است. سپس فرکانسهای طبیعی در این حالتها بدست آمده است.

۴-۲- معادله دینامیکی حاکم بر ارتعاش استوانه ایزوتروپیک

جهت بررسی معادلات دینامیکی اجسام سه بعدی چگونگی استخراج معادلات ناویه با استفاده از اصل بقای اندازه حرکت خطی ارائه شده است و سپس نحوه حل آن ارائه می گردد.

۴-۲-۱- معادله ناویه^۷

معادله دینامیکی حرکت با اعمال نیروهای جسمی خارجی، برای اجسام الاستیک خطی بر حسب مولفه های تنش به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (۱-۴)$$

⁷ Navier equation

که F_i مولفه های نیروی جسمی خارجی، u_i مولفه های بردار جابجایی و $i = 1, 2, 3$ است. از طرفی روابط تنش - کرنش در اجسام ایزوتروپیک به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2-4)$$

در رابطه فوق δ_{ij} دلتای کرونکر و ε_{ij} تانسور کرنش میباشد و $\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ است. با فرض جابجاییهای کوچک رابطه میان کرنش و جابجایی به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3-4)$$

حال با جایگذاری رابطه (2-4) در (1-4) و استفاده از رابطه (3-4) نتیجه می شود:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (4-4)$$

معادله (4-4) معادله ناویه نامیده می شود و شکل برداری آن به صورت زیر است:

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathcal{U}) + \mu \nabla^2 \mathcal{U} + \mathcal{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2} \quad (5-4)$$

۴-۲-۱-۱- تجزیه هلم هولتز^۸

روشهای ارائه شده برای حل فرمولهای جابجایی شامل شکلهای اسکالر و برداری از تجزیه هلم هولتز، بردار گالرکین و توابع پاپکویچ - نیومن است [۵۰ و ۵۱]. به منظور تسهیل در حل معادله ناویه می توان از تجزیه هلم هولتز استفاده نمود. به عبارت دیگر عمومی ترین روش برای حل معادله ناویه استفاده از تجزیه هلم هولتز است [۴۴ و ۷۳]. در این روش بردار جابجایی \mathcal{U} به صورت ترکیب گرادیان یک تابع اسکالر φ ، با میدان برداری \mathcal{H} در نظر گرفته می شود و سپس در معادله ناویه جایگذاری و حل می شود:

^۸ Helmholtz

$$\mathcal{U} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathcal{H} \quad (۴-۶)$$

در این تحقیق با استفاده از قانون دوم نیوتن و رابطه میان شتاب و جابجایی، نیروی جسمی وارد شده به صورت ترکیبی از حاصلضرب چگالی در مشتق دوم جابجایی بواسطه نیرو نسبت به زمان ارائه می شود:

$$\mathcal{F} = \rho a = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} \quad (۷-۴)$$

که \mathcal{V} بردار جابجایی ایجاد شده بواسطه نیروی جسمی خارجی و ρ چگالی تغییر یافته بدلیل اعمال نیرو است که در ادامه برای مثال ارائه شده محاسبه می شود. حال می توان این جابجایی ایجاد شده توسط نیروی اعمال شده را نیز به صورت ترکیب یک تابع اسکالر ξ با میدان برداری \mathcal{B} با استفاده از تجزیه هلم هولتز پیشنهاد کرد:

$$\mathcal{V} = \nabla\xi + \nabla \times \mathcal{B} \quad (۸-۴)$$

از طرفی با توجه به اینکه رابطه های (۴-۶) و (۴-۸) هر کدام شامل سه معادله در جهات اصلی محورهای مختصات می باشد و با توجه به اینکه در هر کدام از این دو رابطه به طور جداگانه چهار مجهول که عبارتند از سه مولفه میدان برداری \mathcal{H} و \mathcal{B} و یک تابع اسکالر φ و ξ ، وجود دارد؛ لذا به یک معادله دیگر نیز جهت حل هر کدام از این دستگاه های معادلات نیاز است. دیورژانس \mathcal{H} و \mathcal{B} مقدار دلخواهی را می تواند داشته باشد [۷۳]، که این معادلات به صورت $\nabla \cdot \mathcal{H} = 0$ و $\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$ پیشنهاد می شود. حال با جایگذاری تجزیه هلم هولتز در معادله ناویه معادله زیر بدست می آید:

$$\nabla\{(\lambda + 2\mu)\nabla^2\varphi + \rho \ddot{\xi} - \rho\ddot{\varphi}\} + \nabla \times (\mu\nabla^2\mathcal{H} + \rho\ddot{\mathcal{B}} - \rho\dot{\mathcal{H}}) = 0 \quad (۹-۴)$$

این معادله در صورتی ارضا می شود که هر کدام از عبارتها برابر صفر باشند به عبارت دیگر:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\varphi = -\rho \ddot{\xi} + \rho\ddot{\varphi} \quad (۱۰-۴)$$

$$\mu \nabla^2 \mathcal{H} = -\rho \ddot{B} + \rho \dot{\mathcal{H}} \quad (۱۱-۴)$$

با اعمال رابطه تجزیه هلم هولتز به معادله ناویه، معادلات اسکالر و برداری موج به شکل زیر نوشته می شود:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 (\varphi - \xi)}{\partial t^2} \quad (۱۲-۴ \text{ الف})$$

$$\nabla^2 \mathcal{H} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 (\mathcal{H} - B)}{\partial t^2} \quad (۱۲-۴ \text{ ب})$$

که در این دو معادله

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (۱۳-۴ \text{ الف})$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (۱۳-۴ \text{ ب})$$

در واقع c_1 و c_2 سرعت انتشار امواج انبساطی و برشی در جامدات است و با کمک تجزیه هلم هولتز، معادله ناویه به دو معادله اسکالر و برداری موج تبدیل می شود. لذا در ارتعاشات سه بعدی اجسام معادلات حاکم عبارتند از دو معادله اسکالر و برداری موج که با حل این معادلات می توان به وسیله روابط (۴-۶) و (۴-۸) مولفه های تغییر مکان و تنشها را در جسم محاسبه نمود. در بررسی ارتعاشات سه بعدی یک استوانه معادلات فوق از دستگاه کارتزین به دستگاه مختصات استوانه ای تبدیل می گردند. که:

$$x_1 = r \cos(\theta) \quad (۱۴-۴ \text{ الف})$$

$$x_2 = r \sin(\theta) \quad (۱۴-۴ \text{ ب})$$

$$x_3 = z \quad (۱۴-۴ \text{ پ})$$

لذا معادله ناویه در دستگاه مختصات استوانه ای در جهات r ، θ و z به شکل زیر بیان می گردد:

$$\mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + F_r = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (۱۵-۴ \text{ الف})$$

$$\mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + F_\theta = \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (۱۵-۴ \text{ ب})$$

$$\mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + F_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (۱۵-۴ \text{ پ})$$

همچنین $\nabla^2 \varphi$ و $\nabla^2 \xi$ در دستگاه مختصات استوانه ای به شکل زیر بیان می شوند [۶۲]:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (۱۶-۴ \text{ الف})$$

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad (۱۶-۴ \text{ ب})$$

با توجه به روابط (۱۶-۴) معادله اسکالر موج به شکل زیر تبدیل می گردد:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 (\varphi - \xi)}{\partial t^2} \quad (۱۷-۴)$$

رابطه لاپلاسین میدان برداری \mathcal{H} و \mathcal{B} نیز به صورت زیر نوشته می شود:

$$\nabla^2 \mathcal{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathcal{H}) - \nabla \times (\nabla \times \mathcal{H}) \quad (۱۸-۴ \text{ الف})$$

$$\nabla^2 \mathcal{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathcal{B}) - \nabla \times (\nabla \times \mathcal{B}) \quad (۱۸-۴ \text{ ب})$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱۴-۴)، $\nabla^2 \mathcal{H}$ و $\nabla^2 \mathcal{B}$ در دستگاه مختصات استوانه ای به شکل زیر بیان می شوند:

$$\nabla^2 \mathcal{H} = \left[\nabla^2 H_r - \frac{1}{r^2} \left(H_r + 2 \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} \right) \right] e_r + \left[\nabla^2 H_\theta - \frac{1}{r^2} \left(H_\theta - 2 \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \right] e_\theta + \nabla^2 H_z e_z \quad (۱۹-۴ \text{ الف})$$

$$\nabla^2 \mathcal{B} = \left[\nabla^2 B_r - \frac{1}{r^2} \left(B_r + 2 \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right) \right] e_r + \left[\nabla^2 B_\theta - \frac{1}{r^2} \left(B_\theta - 2 \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \right] e_\theta + \nabla^2 B_z e_z \quad (۱۹-۴ \text{ ب})$$

پس با استفاده از معادلات (۴-۱۹) می توان معادله برداری موج را به صورت سه معادله اسکالر نوشت:

$$\nabla^2 H_r - \frac{1}{r^2} \left(H_r + 2 \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 (H_r - B_r)}{\partial t^2} \quad (\text{الف-۲۰-۴})$$

$$\nabla^2 H_\theta - \frac{1}{r^2} \left(H_\theta - 2 \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 (H_\theta - B_\theta)}{\partial t^2} \quad (\text{ب-۲۰-۴})$$

$$\nabla^2 H_z = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 (H_z - B_z)}{\partial t^2} \quad (\text{پ-۲۰-۴})$$

هدف از حل معادلات (۴-۲۰) محاسبه مولفه های میدان برداری \mathcal{H} و \mathcal{B} و سپس محاسبه مولفه های بردار جابجایی به کمک این مولفه های میدان برداری است. لذا با توجه به رابطه های (۴-۶) و (۴-۸) محاسبه مولفه های بردار جابجایی برحسب توابع اسکالر φ و ξ و میدان برداری \mathcal{H} و \mathcal{B} به شکل زیر است:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (\text{الف-۲۱-۴})$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (\text{ب-۲۱-۴})$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} + \frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} H_\theta \quad (\text{پ-۲۱-۴})$$

و

$$v_r = \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} \quad (\text{الف-۲۲-۴})$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \quad (\text{ب-۲۲-۴})$$

$$v_z = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} B_\theta \quad (\text{پ-۲۲-۴})$$

رابطه کرنش - تغییر مکان در دستگاه مختصات استوانه ای و با توجه به اصل جمع پذیری به صورت زیر بیان می گردد:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} + v_{r,r} \quad (ف-۲۳-۴)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} v_{r,\theta} + v_{\theta,r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (ب-۲۳-۴)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} (u_{r,z} + u_{z,r}) + \frac{1}{2} (v_{r,z} + v_{z,r}) \quad (پ-۲۳-۴)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} (u_r + u_{\theta,\theta}) + \frac{1}{r} (v_r + v_{\theta,\theta}) \quad (ت-۲۳-۴)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(u_{\theta,z} + \frac{u_{z,\theta}}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(v_{\theta,z} + \frac{v_{z,\theta}}{r} \right) \quad (ث-۲۳-۴)$$

$$\varepsilon_{zz} = u_{z,z} + v_{z,z} \quad (ج-۲۳-۴)$$

همچنین روابط تنش - کرنش در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت زیر است:

$$\sigma_{rr} = \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{rr} \quad (ف-۲۴-۴)$$

$$\tau_{r\theta} = 2\mu \varepsilon_{r\theta} \quad (ب-۲۴-۴)$$

$$\tau_{rz} = 2\mu \varepsilon_{rz} \quad (پ-۲۴-۴)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda \Delta \quad (ت-۲۴-۴)$$

$$\tau_{\theta z} = 2\mu \varepsilon_{\theta z} \quad (ث-۲۴-۴)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{zz} \quad (ج-۲۴-۴)$$

که λ و μ ثابتهای لامه و Δ مجموع کرنشهای ϵ_{rr} ، $\epsilon_{\theta\theta}$ و ϵ_{zz} است. با استفاده از روابط کرنش - تغییر مکان و تنش - کرنش که در دسته معادلات (۲۳-۴) و (۲۴-۴) آورده شده است، روابط تنش - تغییر مکان به صورت زیر آورده می شود:

$$\sigma_{rr} = \lambda\Delta + 2\mu(u_{r,r} + v_{r,r}) \quad (الف-۲۵-۴)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}v_{r,\theta} + v_{\theta,r} - \frac{v_\theta}{r}\right) \quad (ب-۲۵-۴)$$

$$\tau_{rz} = \mu(u_{r,z} + u_{z,r} + v_{r,z} + v_{z,r}) \quad (پ-۲۵-۴)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\Delta + \frac{2\mu}{r}(u_r + u_{\theta,\theta} + v_r + v_{\theta,\theta}) \quad (ت-۲۵-۴)$$

$$\tau_{\theta z} = \mu\left(u_{\theta,z} + \frac{u_{z,\theta}}{r} + v_{\theta,z} + \frac{v_{z,\theta}}{r}\right) \quad (ث-۲۵-۴)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu(u_{z,z} + v_{z,z}) \quad (ج-۲۵-۴)$$

حال با کمک معادلات (۲۱-۴)، (۲۲-۴) و (۲۵-۴) می توان مولفه های تانسور تنش را بر حسب تابع اسکالر φ و ξ و میدان برداری \mathcal{H} و B محاسبه نمود:

$$\sigma_{rr} = \lambda(\nabla^2\varphi + \nabla^2\xi) + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial z\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial H_z}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\theta\partial r} + \frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial B_z}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 B_z}{\partial\theta\partial r}\right) \quad (الف-۲۶-۴)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 H_\theta}{\partial\theta\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2\xi}{\partial\theta\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial z\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial\theta\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\right) \quad (ب-۲۶-۴)$$

$$\sigma_{rz} = \mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial H_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 H_r}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}H_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial H_\theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\theta\partial z}\right) + \mu\left(2\frac{\partial^2\xi}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 B_r}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}B_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 B_z}{\partial\theta\partial z}\right) \quad (پ-۲۶-۴)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda(\nabla^2\varphi + \nabla^2\xi) + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial H_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 H_z}{\partial\theta\partial r}\right) + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial\theta\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 B_z}{\partial\theta\partial r}\right) \quad (۴-۲۶-ت)$$

$$\sigma_{\theta z} = \mu\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial H_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 H_\theta}{\partial\theta\partial r} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial r\partial z}\right) + \mu\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\xi}{\partial z\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial\theta\partial r} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial r\partial z}\right) \quad (۴-۲۶-ث)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(\nabla^2\varphi + \nabla^2\xi) + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 H_r}{\partial\theta\partial z} + \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_\theta}{\partial z}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 B_r}{\partial\theta\partial z} + \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right) \quad (۴-۲۶-ج)$$

در این بخش معادلات حاکم بر ارتعاش اجسام ایزوتروپیک در مسائل الاستودینامیکی که با نام معادلات ناویه شناخته شده اند به وسیله معادلات دینامیکی حرکت استخراج شد. این معادلات با استفاده از تجزیه هلم هولتز به دو معادله اسکالر و برداری موج در دستگاه مختصات استوانه ای تبدیل شد و روابط تغییر مکان و تنش تحت نیروی جسمی بر حسب توابع اسکالر Φ و ξ و مولفه های برداری \mathcal{H} و B بدست آمد. در ادامه به کمک روش جداسازی متغیرها این معادلات موج بدست آمده از تجزیه هلم هولتز حل می شوند.

۴-۳- حل معادلات حاکم بر استوانه

در این بخش معادلات موج با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل می شود. همچنین نوآوری انجام شده در این پایان نامه برای حل معادلات موج در استوانه ای که تحت نیروی جسمی خارجی است آورده شده است. به عبارت دیگر با تعمیم حل بدست آمده از روش جداسازی متغیرها برای استوانه ای که عاری از نیروی خارجی جسمی است، روش جداسازی متغیرها برای استوانه تحت نیروی جسمی خارجی نیز حل می شود.

۴-۳-۱- استخراج حل کلی استوانه ها

یکی از روشهای حل معادلات روش جداسازی متغیرها می باشد. در این روش، پاسخ به صورت حاصلضرب توابع مستقل از هم فرض می شود. لذا توابع اسکالر φ و میدان برداری \mathcal{H} با فرض هارمونیک بودن حرکت به شکل زیر فرض می شوند [۹۷]:

$$\varphi(r, \theta, z, t) = [R_1(\alpha_1 r) T_1(\delta_1 z) + \bar{R}_1(\bar{\alpha}_1 r) \bar{T}_1(\bar{\delta}_1 z)] E_1(\nu \theta) e^{i\omega t} \quad (\text{الف-۲۷-۴})$$

$$H_r(r, \theta, z, t) = [R_2(\alpha_{23} r) T_2(\delta_{23} z) + \bar{R}_2(\bar{\alpha}_{23} r) \bar{T}_2(\bar{\delta}_{23} z)] E_2(\nu \theta) e^{i\omega t} \quad (\text{ب-۲۷-۴})$$

$$H_\theta(r, \theta, z, t) = [R_3(\alpha_{23} r) T_3(\delta_{23} z) + \bar{R}_3(\bar{\alpha}_{23} r) \bar{T}_3(\bar{\delta}_{23} z)] E_3(\nu \theta) e^{i\omega t} \quad (\text{پ-۲۷-۴})$$

$$H_z(r, \theta, z, t) = [R_4(\alpha_4 r) T_4(\delta_4 z) + \bar{R}_4(\bar{\alpha}_4 r) \bar{T}_4(\bar{\delta}_4 z)] E_4(\nu \theta) e^{i\omega t} \quad (\text{ت-۲۷-۴})$$

در این دسته از معادلات R ، T ، E ، \bar{R} و \bar{T} توابع استفاده شده در روش جداسازی متغیرها می باشند. در تحقیقات انجام شده در [۶۸ و ۸۷] تنها یک دسته از جملات موجود در روابط بالا در نظر گرفته شده است، که با جایگذاری آنها در معادلات (۴-۱۷) و (۴-۲۰) و بدون در نظر گرفتن نیروی جسمی خارجی، نتیجه زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 E_1} \left(\frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{T_1} \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega^2}{c_1^2} = 0 \quad (\text{الف-۲۸-۴})$$

$$\frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial^2 R_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{E_2} \left(\frac{\partial^2 E_2}{\partial \theta^2} \right) - 2q_1 \frac{R_3}{R_2} - 1 \right) + \frac{1}{T_2} \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega^2}{c_2^2} = 0 \quad (\text{ب-۲۸-۴})$$

$$\frac{1}{R_3} \left(\frac{\partial^2 R_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{E_3} \left(\frac{\partial^2 E_3}{\partial \theta^2} \right) + 2q_2 \frac{R_2}{R_3} - 1 \right) + \frac{1}{T_3} \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega^2}{c_3^2} = 0 \quad (\text{پ-۲۸-۴})$$

$$\frac{1}{R_4} \left(\frac{\partial^2 R_4}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_4}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 E_4} \left(\frac{\partial^2 E_4}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{T_4} \left(\frac{\partial^2 T_4}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega^2}{c_4^2} = 0 \quad (\text{ت-۲۸-۴})$$

و در معادلات فوق ω فرکانس زاویه ای بوده و q_1 و q_2 مقادیر ثابت شرط جداسازی متغیرها است که به صورت زیر بیان می گردد:

$$q_1 = \frac{T_3}{E_2 T_2} \left(\frac{\partial E_3}{\partial \theta} \right) \quad , \quad q_2 = \frac{T_2}{E_3 T_3} \left(\frac{\partial E_2}{\partial \theta} \right) \quad (\text{۲۹-۴})$$

حل معادلات (۲۸-۴) با انجام عملیات ریاضی جمع و تفریق بر روی معادلات دوم و سوم و در نظر گرفتن فرضیات ارائه شده در معادلات (۳۰-۴) که در زیر آمده بدست می آید.

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \delta_1^2 T_1 = \frac{1}{T_2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \delta_{23}^2 T_2 = \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} + \delta_{23}^2 T_3 = \frac{\partial^2 T_4}{\partial z^2} + \delta_4^2 T_4 = 0 \quad (\text{الف-۳۰-۴})$$

$$\frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{E_2} \left(\frac{\partial^2 E_2}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{E_3} \left(\frac{\partial^2 E_3}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{E_4} \left(\frac{\partial^2 E_4}{\partial \theta^2} \right) = -\nu^2 \quad (\text{ب-۳۰-۴})$$

$$\delta_1^2 + \alpha_1^2 = \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} \right) \quad (\text{پ-۳۰-۴})$$

$$\delta_{23}^2 + \alpha_{23}^2 = \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} \right) \quad (\text{ت-۳۰-۴})$$

$$\delta_4^2 + \alpha_4^2 = \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} \right) \quad (\text{ث-۳۰-۴})$$

محاسبه های مربوط به جملات دوم در معادلات (۲۷-۴) نیز به روش مشابه انجام می شود، با این تفاوت که در روابط (۲۸-۴) تا (۳۰-۴) علامت بار به همه پارامترها اضافه می شود [۹۷].

در این تحقیق به علت اینکه نیروی جسمی وارد شده نیز در نظر گرفته شده است و حل کلی تری نسبت به قبل ارائه می شود، توابع اسکالر ξ و میدان برداری B مربوط به نیروی وارده نیز با فرض هارمونیک بودن حرکت با روش جداسازی متغیرها، به شکل زیر و به صورت ضریبی از روابط (۲۷-۴) ارائه می شود:

$$\xi(r, \theta, z, t) = M_1 [R_1(\alpha_1 r) T_1(\delta_1 z) + \bar{R}_1(\bar{\alpha}_1 r) \bar{T}_1(\bar{\delta}_1 z)] E_1(\nu \theta) e^{i\omega t} \quad (\text{الف-۳۱-۴})$$

$$B_r(r, \theta, z, t) = M_2 [R_2(\alpha_{23} r) T_2(\delta_{23} z) + \bar{R}_2(\bar{\alpha}_{23} r) \bar{T}_2(\bar{\delta}_{23} z)] E_2(\nu \theta) e^{i\omega t} \quad (\text{ب-۳۱-۴})$$

$$B_\theta(r, \theta, z, t) = M_3 [R_3(\alpha_{23} r) T_3(\delta_{23} z) + \bar{R}_3(\bar{\alpha}_{23} r) \bar{T}_3(\bar{\delta}_{23} z)] E_3(\nu \theta) e^{i\omega t} \quad (\text{پ-۳۱-۴})$$

$$B_z(r, \theta, z, t) = M_4 [R_4(\alpha_4 r) T_4(\delta_4 z) + \bar{R}_4(\bar{\alpha}_4 r) \bar{T}_4(\bar{\delta}_4 z)] E_4(\nu \theta) e^{i\omega t} \quad (\text{ت-۳۱-۴})$$

چگونگی استخراج این ضرایب در ادامه آورده می شود. در اینصورت اگر مانند [۶۸ و ۸۷] تنها یک دسته از جملات موجود در روابط (۴-۲۸) و (۴-۳۱) در نظر گرفته شود، با جایگذاری آنها در معادلات (۴-۱۷) و (۴-۴) نتیجه زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 E_1} \left(\frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{T_1} \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega^2(1-M_1)}{c_1^2} = 0 \quad (۴-۳۲-الف)$$

$$\frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial^2 R_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{E_2} \left(\frac{\partial^2 E_2}{\partial \theta^2} \right) - 2q_1 \frac{R_3}{R_2} - 1 \right) + \frac{1}{T_2} \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega^2(1-M_2)}{c_2^2} = 0 \quad (۴-۳۲-ب)$$

$$\frac{1}{R_3} \left(\frac{\partial^2 R_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{E_3} \left(\frac{\partial^2 E_3}{\partial \theta^2} \right) + 2q_2 \frac{R_2}{R_3} - 1 \right) + \frac{1}{T_3} \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega^2(1-M_3)}{c_2^2} = 0 \quad (۴-۳۲-پ)$$

$$\frac{1}{R_4} \left(\frac{\partial^2 R_4}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_4}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 E_4} \left(\frac{\partial^2 E_4}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{T_4} \left(\frac{\partial^2 T_4}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega^2(1-M_4)}{c_2^2} = 0 \quad (۴-۳۲-ت)$$

مقادیر ثابت شرط جداسازی متغیرها است که به صورت معادله (۴-۲۹) بیان می گردد. q_1 و q_2 که مانند قبل

به طریق مشابه حل معادلات (۴-۳۲) نیز با انجام عملیات ریاضی جمع و تفریق بر روی معادلات دوم و سوم و در نظر گرفتن فرضیات ارائه شده در معادلات (۴-۳۳) که در زیر آمده بدست می آید.

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \delta_1^2 T_1 = \frac{1}{T_2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \delta_{23}^2 T_2 = \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} + \delta_{23}^2 T_3 = \frac{\partial^2 T_4}{\partial z^2} + \delta_4^2 T_4 = 0 \quad (۴-۳۳-الف)$$

$$\frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{E_2} \left(\frac{\partial^2 E_2}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{E_3} \left(\frac{\partial^2 E_3}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{E_4} \left(\frac{\partial^2 E_4}{\partial \theta^2} \right) = -\nu^2 \quad (۴-۳۳-ب)$$

$$\delta_1^2 + \alpha_1^2 = \left(\frac{\omega^2(1-M_1)}{c_1^2} \right) \quad (۴-۳۳-پ)$$

$$\delta_{23}^2 + \alpha_{23}^2 = \left(\frac{\omega^2(2-M_3-M_2)}{c_2^2} \right) \quad (۴-۳۳-ت)$$

$$\delta_4^2 + \alpha_4^2 = \frac{\omega^2(1-M_4)}{c_2^2} \quad (۴-۳۳-ث)$$

در این حالت که نیروی جسمی خارجی هم محسوب شده است، نیز محاسبات مربوط به جملات دوم در معادلات (۴-۲۷) و (۴-۳۱) به روش مشابه انجام می شود، با این تفاوت که در روابط (۴-۲۸) و (۴-۳۱) تا (۴-۴) علامت بار به همه پارامترها اضافه می شود.

حال با توجه به مطالبی که بیان شد حل کلی مربوط به معادلات اسکالر و برداری موج در دستگاه مختصات استوانه ای و با استفاده از معادلات بازگشتی برای توابع بسل بر حسب توابع بسل مرتبه ν و $\nu + 1$ بدست می آید [۹۷]. این معادلات برای حالت تعمیم یافته در این تحقیق، به صورت زیر بدست می آید:

$$R_1(\alpha_1 r) = F_1 J_\nu(\alpha_1 r) + G_1 Y_\nu(\alpha_1 r) \quad (\text{الف-۳۴-۴})$$

$$R_2(\alpha_{23} r) = F_2 J_{\nu+1}(\alpha_{23} r) + G_2 Y_{\nu+1}(\alpha_{23} r) + \frac{\nu}{\alpha_{23} r} [(F_3 - F_2) J_\nu(\alpha_{23} r) + (G_3 - G_2) Y_\nu(\alpha_{23} r)] \quad (\text{ب-۳۴-۴})$$

$$R_3(\alpha_{23} r) = F_3 J_{\nu+1}(\alpha_{23} r) + G_3 Y_{\nu+1}(\alpha_{23} r) + \frac{\nu}{\alpha_{23} r} [(F_2 - F_3) J_\nu(\alpha_{23} r) + (G_2 - G_3) Y_\nu(\alpha_{23} r)] \quad (\text{پ-۳۴-۴})$$

$$R_4(\alpha_4 r) = F_4 J_\nu(\alpha_4 r) + G_4 Y_\nu(\alpha_4 r) \quad (\text{ت-۳۴-۴})$$

و

$$T_1(\delta_1 z) = \begin{Bmatrix} \cos(\delta_1 z) \\ \sin(\delta_1 z) \end{Bmatrix} \quad (\text{الف-۳۵-۴})$$

$$T_2(\delta_{23} z) = \begin{Bmatrix} \sin(\delta_{23} z) \\ \cos(\delta_{23} z) \end{Bmatrix} \quad (\text{ب-۳۵-۴})$$

$$T_3(\delta_{23} z) = \begin{Bmatrix} -\sin(\delta_{23} z) \\ \cos(\delta_{23} z) \end{Bmatrix} \quad (\text{پ-۳۵-۴})$$

$$T_4(\delta_4 z) = \begin{Bmatrix} \cos(\delta_4 z) \\ \sin(\delta_4 z) \end{Bmatrix} \quad (\text{ت-۳۵-۴})$$

$$E_1(\nu\theta) = E_3(\nu\theta) = \begin{Bmatrix} \cos(\nu\theta) \\ \sin(\nu\theta) \end{Bmatrix} \quad (\text{ث-۳۵-۴})$$

$$E_2(\nu\theta) = E_4(\nu\theta) = \begin{Bmatrix} \sin(\nu\theta) \\ \cos(\nu\theta) \end{Bmatrix} \quad (\text{ج-۳۵-۴})$$

$$\delta_1^2 + \alpha_1^2 = \bar{\delta}_1^2 + \bar{\alpha}_1^2 = \left(\frac{\omega^2(1-M_1)}{c_1^2} \right) \quad (\text{ج-۳۵-۴})$$

$$\delta_{23}^2 + \alpha_{23}^2 = \bar{\delta}_{23}^2 + \bar{\alpha}_{23}^2 = \left(\frac{\omega^2(2-M_3-M_2)}{c_2^2} \right) \quad (\text{ح-۳۵-۴})$$

$$\delta_4^2 + \alpha_4^2 = \bar{\delta}_4^2 + \bar{\alpha}_4^2 = \left(\frac{\omega^2(1-M_4)}{c_2^2} \right) \quad (\text{خ-۳۵-۴})$$

J و Y توابع بسط از مرتبه U می باشند و U عدد حقیقی است. برای استخراج همه جوابها بایستی توابع موهومی I و K نیز در نظر گرفته شوند. F_k و G_k $k = 1, 2, 3, 4$ ثابتهای مربوط به معادلات است. ترمهای ثانویه در معادلات (۴-۲۷) و (۴-۳۱) برای فراهم شدن امکان ارضای شرایط مرزی آورده شده است و توابع $\bar{R}_k(\bar{\alpha}r)$ و $\bar{T}_k(\bar{\delta}z)$ نیز با قرار دادن علامت بار بر روی آرگومانهای α و δ و ثوابت موجود در معادلات (۴-۳۵) به دست می آید. این حل کلی است و می تواند در تحلیل ارتعاشی استوانه های محدود و یا نامحدود تحت نیروهای جسمی متفاوت مورد استفاده قرار بگیرد. با جایگذاری روابط بدست آمده برای φ ، و \mathcal{H} در (۴-۲۱) تغییر مکانها بدست می آیند:

$$u_r = \left(\frac{\partial R_1}{\partial r} E_1 T_1 - \frac{\partial T_3}{\partial z} R_3 E_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} T_4 R_4 + \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} E_1 \bar{T}_1 - \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} \bar{R}_3 E_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} \bar{R}_4 \bar{T}_4 \right) e^{i\omega t} \quad (\text{الف-۳۶-۴})$$

$$u_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} R_1 T_1 - \frac{\partial T_2}{\partial z} R_2 E_2 - \frac{\partial R_4}{\partial r} E_4 T_4 + \frac{1}{r} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} \bar{R}_1 \bar{T}_1 - \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial z} \bar{R}_2 E_2 - \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial r} E_4 \bar{T}_4 \right) e^{i\omega t} \quad (\text{ب-۳۶-۴})$$

$$u_z = \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} R_1 E_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} R_2 T_2 + \frac{\partial R_3}{\partial r} E_3 T_3 + \frac{1}{r} R_3 E_3 T_3 + \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z} \bar{R}_1 E_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \bar{R}_2 \bar{T}_2 + \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial r} E_3 \bar{T}_3 + \frac{1}{r} \bar{R}_3 E_3 \bar{T}_3 \right) e^{i\omega t} \quad (\text{پ-۳۶-۴})$$

و همچنین با جایگذاری روابط بدست آمده برای ξ و \mathcal{B} در (۴-۲۲) نیز تغییر مکان توسط نیروی جسمی خارجی محاسبه می شود:

$$v_r = \left(\frac{\partial R_1}{\partial r} T_1 E_1 M_1 - \frac{\partial T_3}{\partial z} R_3 E_3 M_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} T_4 R_4 M_4 + \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} E_1 \bar{T}_1 M_1 - \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} \bar{R}_3 E_3 M_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} \bar{R}_4 \bar{T}_4 M_4 \right) e^{i\omega t} \quad (\text{الف-۳۷-۴})$$

$$v_\theta = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} R_1 T_1 M_1 - \frac{\partial T_2}{\partial z} R_2 E_2 M_2 - \frac{\partial R_4}{\partial r} E_4 T_4 M_4 + \frac{1}{r} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} \bar{R}_1 \bar{T}_1 M_1 - \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial z} \bar{R}_2 E_2 M_2 - \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial r} E_4 \bar{T}_4 M_4 \right) e^{i\omega t} \quad (۳۷-۴)$$

$$v_z = \left(\frac{\partial T_1}{\partial z} R_1 E_1 M_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} R_2 T_2 M_2 + \frac{\partial R_3}{\partial r} E_3 T_3 M_3 + \frac{1}{r} R_3 E_3 T_3 M_3 + \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z} \bar{R}_1 E_1 M_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \bar{R}_2 \bar{T}_2 M_2 + \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial r} E_3 \bar{T}_3 M_3 + \frac{1}{r} \bar{R}_3 E_3 \bar{T}_3 M_3 \right) e^{i\omega t} \quad (۳۷-۴)$$

روابط مربوط به تنشها نیز با کمک معادلات (۲۶-۴) و (۲۷-۴) و (۳۱-۴) بر حسب توابع جداسازی مورد استفاده در φ و \mathcal{H} و \mathcal{B} محاسبه می گردد که در پیوست الف ارائه شده است.

برای استفاده از حل کلی بدست آمده به روش جداسازی متغیرها در بررسی ارتعاشات یک استوانه الاستیک بایستی با تمهیداتی معادلات بدست آمده را ساده تر نمود. این فرضیات به شکل زیر ارائه می شود که موجب می شود تا دوازده ضریب مستقل در معادلات (۲۷-۴) و (۳۱-۴) باقی بمانند.

$$M_4 = M_2 + M_3 - 1$$

$$v = n$$

$$\delta_2 = \delta_{23} = \delta_4$$

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_{23} = \alpha_4 \quad (۳۸-۴)$$

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_{23} = \bar{\delta}_4$$

$$\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}_{23} = \bar{\alpha}_4$$

در واقع با در نظر گرفتن مقادیر صحیح برای v حل کلی ارائه شده به حل استوانه ها تبدیل می گردد که در آن شماره موج محیطی است. با جایگذاری رابطه (۳۸-۴) در (۲۷-۴) و (۳۱-۴) و اعمال نتیجه بدست آمده در معادلات (۳۴-۴) و (۳۵-۴) در (۳۶-۴) و (۳۷-۴) معادلات مربوط به تغییر مکان کلی که برابر مجموع تغییر مکانها طبق اصل جمع پذیری است، به صورت معادلات (۳۹-۴) بدست می آید.

$$\begin{aligned}
 u_r + v_r = & \left\{ \left[\left(\frac{n}{r} J_n(\alpha r) - \alpha J_{n+1}(\alpha r) \right) A_1 + \left(\frac{n}{r} Y_n(\alpha r) - \alpha Y_{n+1}(\alpha r) \right) B_1 \right] \begin{Bmatrix} \cos(\delta_1 z) \\ \sin(\delta_1 z) \end{Bmatrix} + \left[\delta_2 \frac{n}{r} J_{n+1}(\alpha r) A_2 + \right. \right. \\
 & \left. \delta_2 Y_{n+1}(\alpha r) B_2 + \left\{ \frac{n}{r} J_n(\alpha r) A_3 + \frac{n}{r} Y_n(\alpha r) B_3 \right\} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \cos(\delta_2 z) \\ \sin(\delta_2 z) \end{Bmatrix} + \left[\left(\frac{n}{r} J_n(\bar{\alpha}_1 r) - \bar{\alpha}_1 J_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) \right) A_4 + \right. \\
 & \left. \left(\frac{n}{r} Y_n(\bar{\alpha}_1 r) - \bar{\alpha}_1 Y_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) \right) B_4 + \bar{\delta} J_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) A_5 + \bar{\delta} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) B_5 + \right. \\
 & \left. \left. \left\{ \frac{n}{r} J_n(\bar{\alpha}_2 r) A_6 + \frac{n}{r} \bar{Y}_n(\bar{\alpha}_2 r) B_6 \right\} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \cos(\bar{\delta} z) \\ \sin(\bar{\delta} z) \end{Bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (\text{الف-۳۹-۴})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_\theta + v_\theta = & \left\{ \left[\left(-\frac{n}{r} J_n(\alpha r) A_1 - \frac{n}{r} Y_n(\alpha r) B_1 \right) \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\delta_1 z) \\ \sin(\delta_1 z) \end{Bmatrix} \right. \\
 & + \left[\delta_2 (J_{n+1}(\alpha r) A_2 + \delta_2 Y_{n+1}(\alpha r) B_2) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} - \left(\frac{n}{r} J_n(\alpha r) - \alpha J_{n+1}(\alpha r) \right) A_3 - \left(\frac{n}{r} Y_n(\alpha r) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \alpha Y_{n+1}(\alpha r) \right) B_3 \right] \begin{Bmatrix} \cos(\delta_2 z) \\ \sin(\delta_2 z) \end{Bmatrix} \\
 & + \left[\left\{ -\frac{n}{r} J_n(\bar{\alpha}_1 r) A_4 - \frac{n}{r} Y_n(\bar{\alpha}_1 r) B_4 + \bar{\delta} J_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) A_5 + \bar{\delta} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) B_5 \right\} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \right. \\
 & \left. - \left(\frac{n}{r} J_n(\bar{\alpha}_2 r) - \bar{\alpha}_2 J_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) A_6 \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{n}{r} Y_n(\bar{\alpha}_2 r) - \bar{\alpha}_2 Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) B_6 \right] \begin{Bmatrix} \cos(\bar{\delta} z) \\ \sin(\bar{\delta} z) \end{Bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (\text{ب-۳۹-۴})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_z + v_z = & - \left\{ [\delta_1 J_n(\alpha r) A_1 - \delta_1 Y_n(\alpha r) B_1] \begin{Bmatrix} \sin(\delta_1 z) \\ \cos(\delta_1 z) \end{Bmatrix} + [\alpha J_n(\alpha r) A_2 + \alpha Y_n(\alpha r) B_2] \begin{Bmatrix} \sin(\delta_2 z) \\ \cos(\delta_2 z) \end{Bmatrix} \right\} + \\
 & [\bar{\delta} J_n(\bar{\alpha}_1 r) A_4 + \bar{\delta} Y_n(\bar{\alpha}_1 r) B_4 + \bar{\alpha}_2 J_n(\bar{\alpha}_2 r) A_5 + \bar{\alpha}_2 Y_n(\bar{\alpha}_2 r) B_5] \begin{Bmatrix} \sin(\bar{\delta} z) \\ \cos(\bar{\delta} z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (\text{پ-۳۹-۴})
 \end{aligned}$$

روابط مربوط به تنشها نیز با کمک معادلات (۳۵-۴) و (۳۶-۴) و با جایگذاری معادلات (۳۸-۴) در (۲۷-۴) و

(۳۱-۴) و اعمال نتیجه بدست آمده در معادلات تنشها در پیوست الف به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} = & 2\mu \left\{ \left[A_1 \left(\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \delta_1^2 - \frac{(\alpha^2 + \delta_2^2)}{2} \right) J_n(ar) + \frac{\alpha}{r} J_{n+1}(ar) \right) + B_1 \left(\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \delta_1^2 - \frac{(\alpha^2 + \delta_2^2)}{2} \right) Y_n(ar) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\alpha}{r} Y_{n+1}(ar) \right) \right] \left\{ \frac{\cos(\delta_1 z)}{\sin(\delta_1 z)} \right\} + \left[A_2 \delta_2 \left(\alpha J_n(ar) - \frac{(n+1)}{r} J_{n+1}(ar) \right) + B_2 \delta_2 \left(\alpha Y_n(ar) - \frac{(n+1)}{r} Y_{n+1}(ar) \right) \right] + \\
& \left\{ A_3 \frac{n}{r} \left(\frac{n-1}{r} J_n(ar) - \alpha J_{n+1}(ar) \right) + B_3 \frac{n}{r} \left(\frac{n-1}{r} Y_n(ar) - \alpha Y_{n+1}(ar) \right) \right\} \left\{ \frac{1}{-1} \right\} \left\{ \frac{\cos(\delta_2 z)}{\sin(\delta_2 z)} \right\} + \\
& \left[A_4 \left(\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \frac{(\delta^2 - \bar{\alpha}_2^2)}{2} \right) J_n(\bar{\alpha}_1 r) + \frac{\bar{\alpha}_1}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) \right) + B_4 \left(\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \frac{(\delta^2 - \bar{\alpha}_2^2)}{2} \right) Y_n(\bar{\alpha}_1 r) + \frac{\bar{\alpha}_1}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) \right) + \right. \\
& A_5 \bar{\delta} \left(\bar{\alpha}_2 J_n(\bar{\alpha}_2 r) - \frac{(n+1)}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) + B_5 \bar{\delta} \left(\bar{\alpha}_2 Y_n(\bar{\alpha}_2 r) - \frac{(n+1)}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) + \left\{ A_6 \frac{n}{r} \left(\frac{n-1}{r} J_n(\bar{\alpha}_2 r) - \right. \right. \\
& \left. \left. \bar{\alpha}_2 J_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) + B_6 \frac{n}{r} \left(\frac{n-1}{r} Y_n(\bar{\alpha}_2 r) - \bar{\alpha}_2 Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) \right\} \left\{ \frac{1}{-1} \right\} \left\{ \frac{\cos(\bar{\delta} z)}{\sin(\bar{\delta} z)} \right\} \left\{ \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \right\} e^{i\omega t} \quad (\text{ف-۴۰-۴})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta} = & \mu \left\{ \left[A_1 \frac{2n}{r} \left(\frac{(1-n)}{r} J_n(ar) + \alpha J_{n+1}(ar) \right) + B_1 \frac{2n}{r} \left(\frac{(1-n)}{r} Y_n(ar) + \alpha Y_{n+1}(ar) \right) \right] \left\{ \frac{1}{-1} \right\} \left\{ \frac{\cos(\delta_1 z)}{\sin(\delta_1 z)} \right\} + \right. \\
& \left[\left\{ A_2 \delta_2 \left(\alpha J_n(ar) - \frac{2(n+1)}{r} J_{n+1}(ar) \right) + B_2 \delta_2 \left(\alpha Y_n(ar) - \frac{2(n+1)}{r} Y_{n+1}(ar) \right) \right\} \left\{ \frac{1}{-1} \right\} + A_3 \left(\left(\alpha^2 - \frac{2n(n-1)}{r^2} \right) J_n(ar) - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{2\alpha}{r} J_{n+1}(ar) \right) + B_3 \left(\left(\alpha^2 - \frac{2n(n-1)}{r^2} \right) Y_n(ar) - \frac{2\alpha}{r} Y_{n+1}(ar) \right) \right] \left\{ \frac{\cos(\delta_2 z)}{\sin(\delta_2 z)} \right\} + \\
& \left[\left\{ A_4 \frac{2n}{r} \left(\frac{(1-n)}{r} J_n(\bar{\alpha}_1 r) + \bar{\alpha}_1 J_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) \right) + B_4 \frac{2n}{r} \left(\frac{(1-n)}{r} Y_n(\bar{\alpha}_1 r) + \bar{\alpha}_1 Y_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) \right) + \right. \right. \\
& A_5 \bar{\delta} \left(\bar{\alpha}_2 J_n(\bar{\alpha}_2 r) - \frac{2(n+1)}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) + B_5 \bar{\delta} \left(\bar{\alpha}_2 Y_n(\bar{\alpha}_2 r) - \frac{2(n+1)}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) \left. \right\} \left\{ \frac{1}{-1} \right\} + \\
& A_6 \left(\left(\alpha^2 - \frac{2n(n-1)}{r^2} \right) Y_n(\bar{\alpha}_2 r) - \frac{2\bar{\alpha}_2}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) \left. \right\} \left\{ \frac{\cos(\bar{\delta} z)}{\sin(\bar{\delta} z)} \right\} \left\{ \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \right\} e^{i\omega t} \quad (\text{ب-۴۰-۴})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rz} = & \mu \left\{ \left[\left\{ 2A_1 \delta_1 \left(-\frac{n}{r} J_n(ar) + \alpha J_{n+1}(ar) \right) + 2B_1 \delta_1 \left(-\frac{n}{r} Y_n(ar) + \delta Y_{n+1}(ar) \right) \right\} \left\{ \frac{1}{-1} \right\} \left\{ \frac{\sin(\delta_1 z)}{\cos(\delta_1 z)} \right\} + \right. \right. \\
& \left[\left\{ A_2 \left(-\frac{n\alpha}{r} J_n(ar) + (\alpha^2 - \delta_2^2) J_{n+1}(ar) \right) + B_2 \left(-\frac{n\alpha}{r} Y_n(ar) + (\alpha^2 - \delta_2^2) Y_{n+1}(ar) \right) \right\} \left\{ \frac{1}{-1} \right\} - A_3 \frac{n\delta_2}{r} J_n(ar) - \right. \\
& B_3 \frac{n\delta_2}{r} Y_n(ar) \left. \right\} \left\{ \frac{\sin(\delta_2 z)}{\cos(\delta_2 z)} \right\} + \left[\left\{ 2A_4 \bar{\delta} \left(-\frac{n}{r} J_n(\bar{\alpha}_1 r) + \bar{\alpha}_1 J_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) \right) + 2B_4 \bar{\delta} \left(\frac{n}{r} Y_n(\bar{\alpha}_1 r) + \bar{\alpha}_1 Y_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) \right) + \right. \right. \\
& A_5 \left(\frac{n\bar{\alpha}_2}{r} J_n(\bar{\alpha}_2 r) + (\bar{\alpha}^2 - \bar{\delta}^2) J_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) + B_5 \left(-\frac{n\bar{\alpha}_2}{r} Y_n(\bar{\alpha}_2 r) + (\bar{\alpha}^2 - \bar{\delta}^2) Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) \left. \right\} \left\{ \frac{1}{-1} \right\} - A_6 \frac{n\bar{\delta}}{r} J_n(\bar{\alpha}_2 r) - \\
& B_6 \frac{n\bar{\delta}}{r} Y_n(\bar{\alpha}_2 r) \left. \right\} \left\{ \frac{\sin(\bar{\delta} z)}{\cos(\bar{\delta} z)} \right\} \left\{ \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \right\} e^{i\omega t} \quad (\text{پ-۴۰-۴})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z} = & \mu \left\{ \frac{2n\delta_1}{r} (A_1 J_n(\alpha r) + B_1 Y_n(\alpha r)) \right\} \left\{ \frac{\sin(\delta_1 z)}{\cos(\delta_1 z)} \right\} + \left[A_2 \left(\frac{n\alpha}{r} J_n(\alpha r) - \delta_2^2 J_{n+1}(\alpha r) \right) + B_2 \left(\frac{n\alpha}{r} Y_n(\alpha r) - \right. \right. \\ & \left. \left. \delta_2^2 Y_{n+1}(\alpha r) \right) + \left\{ A_3 \delta_2 \left(\frac{n}{r} J_n(\alpha r) - \alpha J_{n+1}(\alpha r) \right) + B_3 \delta_2 \left(\frac{n}{r} Y_n(\alpha r) - \alpha Y_{n+1}(\alpha r) \right) \right\} \left\{ \frac{1}{-1} \right\} \right\} \left\{ \frac{\sin(\delta_2 z)}{\cos(\delta_2 z)} \right\} + \\ & \left[\frac{2n\bar{\delta}}{r} (A_4 J_n(\bar{\alpha}_1 r) + B_4 Y_n(\bar{\alpha}_1 r)) + A_5 \left(\frac{n\bar{\alpha}_2}{r} J_n(\bar{\alpha}_2 r) - \bar{\delta}^2 J_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) + B_5 \left(\frac{n\bar{\alpha}_2}{r} Y_n(\bar{\alpha}_2 r) - \bar{\delta}^2 Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) \right] + \\ & \left\{ A_6 \bar{\delta} \left(\frac{n}{r} J_n(\bar{\alpha}_2 r) - \bar{\alpha}_1 J_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) \right) + B_6 \bar{\delta} \left(\frac{n}{r} Y_n(\bar{\alpha}_2 r) - \bar{\alpha}_2 Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) \right\} \left\{ \frac{1}{-1} \right\} \left\{ \frac{\sin(\bar{\delta} z)}{\cos(\bar{\delta} z)} \right\} \left\{ \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \right\} e^{i\omega t} \quad (\text{ت-۴۰-۴}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & 2\mu \left\{ \frac{(\alpha^2 - \delta_2^2)}{2} (A_1 J_n(\alpha r) + B_1 Y_n(\alpha r)) \right\} \left\{ \frac{\cos(\delta_1 z)}{\sin(\delta_1 z)} \right\} - \alpha \delta_2 (A_2 J_n(\alpha r) + B_2 Y_n(\alpha r)) \left\{ \frac{\cos(\delta_2 z)}{\sin(\delta_2 z)} \right\} + \left[(\bar{\alpha}_1^2 - \right. \\ & \left. \frac{(\bar{\delta}^2 + \bar{\alpha}_2^2)}{2}) (A_4 J_n(\bar{\alpha}_1 r) + B_4 Y_n(\bar{\alpha}_1 r)) - \bar{\alpha}_2 \bar{\delta} (A_5 J_n(\bar{\alpha}_2 r) + B_5 Y_n(\bar{\alpha}_2 r)) \right] \left\{ \frac{\cos(\bar{\delta} z)}{\sin(\bar{\delta} z)} \right\} + \left[\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \frac{(\delta^2 + \bar{\alpha}_2^2)}{2} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\bar{\alpha}_1}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) \right] + \left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \right) + \frac{\bar{\alpha}_1}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) + \bar{\delta} \left(-\frac{(n+1)}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) + \left\{ A_6 \frac{n}{r} \left(\frac{n-1}{r} - \bar{\alpha}_2 J_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) + \right. \\ & \left. B_6 \frac{n}{r} \left(\frac{n-1}{r} Y_n(\bar{\alpha}_2 r) - \bar{\alpha}_2 Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) \right\} \left\{ \frac{1}{-1} \right\} \left\{ \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \right\} e^{i\omega t} \quad (\text{ث-۴۰-۴}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & 2\mu \left\{ \frac{(\alpha^2 - \delta_2^2)}{2} (A_1 J_n(\alpha r) + B_1 Y_n(\alpha r)) \right\} \left\{ \frac{\cos(\delta_1 z)}{\sin(\delta_1 z)} \right\} - \alpha \delta_2 (A_2 J_n(\alpha r) + B_2 Y_n(\alpha r)) \left\{ \frac{\cos(\delta_2 z)}{\sin(\delta_2 z)} \right\} + \left[(\bar{\alpha}_1^2 - \right. \\ & \left. \frac{(\bar{\delta}^2 + \bar{\alpha}_2^2)}{2}) (A_4 J_n(\bar{\alpha}_1 r) + B_4 Y_n(\bar{\alpha}_1 r)) - \bar{\alpha}_2 \bar{\delta} (A_5 J_n(\bar{\alpha}_2 r) + B_5 Y_n(\bar{\alpha}_2 r)) \right] \left\{ \frac{\cos(\bar{\delta} z)}{\sin(\bar{\delta} z)} \right\} + \left[\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \frac{(\delta^2 + \bar{\alpha}_2^2)}{2} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\bar{\alpha}_1}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) \right] + \left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \right) + \frac{\bar{\alpha}_1}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_1 r) + \bar{\delta} \left(-\frac{(n+1)}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) + \left\{ A_6 \frac{n}{r} \left(\frac{n-1}{r} - \bar{\alpha}_2 J_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) + \right. \\ & \left. B_6 \frac{n}{r} \left(\frac{n-1}{r} Y_n(\bar{\alpha}_2 r) - \bar{\alpha}_2 Y_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) \right\} \left\{ \frac{1}{-1} \right\} \left\{ \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \right\} e^{i\omega t} \quad (\text{ج-۴۰-۴}) \end{aligned}$$

که در (۳۹-۴) و (۴۰-۴) روابط زیر در نظر گرفته شده است:

$$A_1 = F_1(1 + M_1), A_2 = F_3(1 + M_3),$$

$$A_3 = F_4(1 + M_4) + \frac{\delta_2}{\alpha} (F_2(1 + M_2) - F_3(1 + M_3)) \left\{ \frac{1}{-1} \right\} \quad (\text{الف-۴۱-۴})$$

$$B_1 = G_1(1 + M_1), B_2 = G_3(1 + M_3),$$

$$B_3 = G_4(1 + M_4) + \frac{\delta_2}{\alpha} (G_2(1 + M_2) - G_3(1 + M_3)) \left\{ \frac{1}{-1} \right\} \quad (\text{ب-۴۱-۴})$$

$$A_4 = \bar{F}_1(1 + M_1), A_5 = \bar{F}_3(1 + M_3),$$

$$A_6 = \bar{F}_4(1 + M_4) + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\alpha}_2} (\bar{F}_2(1 + M_2) - \bar{F}_3(1 + M_3)) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (۴-۴۱-پ)$$

$$B_4 = \bar{G}_1(1 + M_1), B_5 = \bar{G}_3(1 + M_3),$$

$$B_6 = \bar{G}_4(1 + M_4) + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\alpha}_2} (\bar{G}_2(1 + M_2) - \bar{G}_3(1 + M_3)) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (۴-۴۱-ت)$$

آنچه که از معادلات (۴-۴۱) معلوم می شود این است که مقادیر M_i با توجه به رابطه ای که با نیروی جسمی اعمال شده دارند را می توان آنها را به صورت ترکیبی وابسته به ضرایب مجهول و مقادیر معلوم دیگر نوشت. لذا با توجه به معادلات (۴-۳۹) و (۴-۴۰) ملاحظه می شود که دوازده ضریب مجهول در این روابط وجود دارد. با توجه به روابط ارائه شده در (۴-۴۱) ملاحظه می شود که بین ضرایب F_2 ، F_3 و F_4 یک رابطه برقرار است که این سه ضریب را در قالب دو ضریب مستقل A_2 و A_3 بیان می کند. بین ضرایب \bar{F}_2 ، \bar{F}_3 و \bar{F}_4 نیز به روش مشابه انجام شده است.

برقراری روابط میان ضرایب مجهول فوق موجب ارائه حل کلی بدون حذف ضرایب و تسهیل در انجام محاسبات تنشها می گردد. مشاهده می گردد که در معادلات (۴-۳۹) و (۴-۴۰) و (۴-۴۱) دو دسته جواب بدست آمده است که دسته جواب اول متقارن و دسته جواب دوم پادمتقارن است. همچنین روابط تغییر مکان و تنش علاوه بر مقادیر حقیقی گاهی دارای مقادیر موهومی هم می شوند، لذا برای اینکه همه جوابها استخراج شوند بایستی توابع بسل موهومی I و K نیز در محاسبات در نظر گرفته شوند [۹۸]. برای اطمینان از صحت محاسبات انجام شده در روابط بدست آمده برای تغییر مکان و تنش که در معادلات (۴-۳۹) و (۴-۴۰) آورده شده است، معادلات تعادل مورد استفاده قرار می گیرد. در برقراری معادلات تعادل بین تغییر مکانها و تنشها از روابط امواج انبساطی و چرخشی با ثابتهای لامه که در (۴-۱۲) و (۴-۱۳) آورده شده استفاده می شود. لذا با جایگذاری این روابط در معادلات تعادل (۴-۴۲) و با جایگذاری روابط M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 نیز می توان از صحت محاسبه ها اطمینان حاصل نمود.

$$\sigma_{r,r} + \frac{1}{r}\tau_{r\theta,\theta} + \tau_{rz,z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + F_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (۴-۴۲-الف)$$

$$\tau_{r\theta,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\theta,\theta} + \tau_{\theta z,z} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} + F_\theta = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (۴-۴۲-ب)$$

$$\tau_{rz,r} + \frac{1}{r}\tau_{\theta z,\theta} + \sigma_{z,z} + \frac{1}{r}\tau_{rz} + F_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (۴-۴۲-پ)$$

پس از استخراج حل کلی معادلات اسکالر و برداری موج با استفاده از روش جداسازی متغیرها و محاسبه روابط تغییر مکانها و تنشها به بررسی ارتعاشات استوانه مورد نظر با استفاده از حل فوق پرداخته می شود.

۴-۴-۴ توابع متعامد

۴-۴-۴-۱ حداقل سازی مربع خطا با استفاده از توابع متعامد

با استفاده از توابع متعامد می توان انتگرال مربع خطای یک تابع قابل انتگرال گیری را حداقل نمود. این مطلب در [۹۹] توسط کانتی و داتا و مک ماهون (۱۹۹۵) نشان داده شده است. بنابراین در حل مسائل مختلف استوانه برخی شرایط مرزی که به طور دقیق ارضا نمی شوند را می توان با یافتن تابع متعامد مناسب ارضا نمود. چگونگی این مطلب در پیوست ب آورده شده است.

۴-۴-۴-۲ تعامد

یکی از توابع متعامدی که از آن برای ارضای شرایط مرزی استفاده می گردد توابع بسل است. برای نمایش تعامد توابع بسل از مرتبه n دو جواب برای معادله اشتورم لیوویل^۹ (حالت خاصی از معادله بسل) به صورت U و V در نظر گرفته می شود.

$$U'' + \frac{U'}{x} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{x^2}\right)U = 0 \quad (۴۳-۴)$$

$$V'' + \frac{V'}{x} + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{x^2}\right)V = 0 \quad (۴۴-۴)$$

^۹ Sturm-Liouville

با ضرب کردن (۴۱-۴) در V و (۴۲-۴) در U و انتگرالگیری از حاصل تفریق این دو معادله رابطه (۴۳-۴) بدست می آید.

$$\int_{r_1}^{r_2} [x(U''V - UV'')] + (U'V - UV') dx + (\alpha^2 - \beta^2) \int_{r_1}^{r_2} xUV dx = 0 \quad (۴۵-۴)$$

پس از اعمال انتگرال جزء به جزء

$$\int_{r_1}^{r_2} xUV dx = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} [x(U'V - UV')]_{r_1}^{r_2} \quad (۴۶-۴)$$

تعامد U و V وقتی برقرار است که طرف دوم معادله (۴۶-۴) صفر گردد. اگر U و V به صورت زیر تعریف شود:

$$U = J_n(\alpha r)Y_n'(ar_2) - Y_n(\alpha r)J_n'(ar_2) \quad (۴۷-۴ الف)$$

$$V = J_n(\beta r)Y_n'(\beta r_2) - Y_n(\beta r)J_n'(\beta r_2) \quad (۴۷-۴ ب)$$

که J_n و Y_n توابع بسل نوع اول و دوم از مرتبه n هستند. حال با جایگذاری روابط (۴۷-۴) در (۴۶-۴) تعامد دو تابع نشان داده می شود.

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} xUV dx = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} & \left[\alpha r_2 (J_n'(ar_2)Y_n'(ar_2) - Y_n'(ar_2)J_n'(ar_2)) (J_n(\beta r_2)Y_n'(\beta r_2) - \right. \\ & Y_n(\beta r_2)J_n'(\beta r_2)) - \beta r_2 (J_n'(\beta r_2)Y_n'(\beta r_2) - Y_n'(\beta r_2)J_n'(\beta r_2)) (J_n(\alpha r_2)Y_n'(ar_2) - \\ & Y_n(\alpha r_2)J_n'(ar_2)) - \alpha r_1 (J_n'(ar_1)Y_n'(ar_1) - Y_n'(ar_1)J_n'(ar_1)) (J_n(\beta r_1)Y_n'(\beta r_2) - \\ & Y_n(\beta r_1)J_n'(\beta r_2)) + \beta r_1 (J_n'(\beta r_1)Y_n'(\beta r_2) - Y_n'(\beta r_1)J_n'(\beta r_2)) - \\ & \left. Y_n(\alpha r_1)J_n'(ar_2) \right] = 0 \quad (۴۸-۴) \end{aligned}$$

لذا با تعریف تابع $p_n(\alpha_k r)$ به صورت زیر

$$p_n(\alpha_k r) = J_n(\alpha_k r) Y_n'(\alpha_k r_2) - Y_n(\alpha_k r) J_n'(\alpha_k r_2) \quad (۴۹-۴)$$

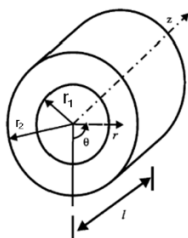
معلوم می شود که زمانیکه α_i و α_j ریشه های متفاوت از $p_n'(\alpha_k r)$ باشند تعامد برقرار است و این خاصیت تعامد به شکل زیر نمایش داده می شود:

$$\int_{r_1}^{r_2} p_n(\alpha_i r) p_n(\alpha_j r) r dr = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{1}{2} \left[(r_2^2 - r_1^2) + \frac{n^2 (p_n^2(\alpha_i r_1) - p_n^2(\alpha_i r_2))}{\alpha_i^2} \right] & i = j \end{cases} \quad (۵۰-۴)$$

از خاصیت تعامد این توابع جهت ارضای تقریبی برخی از شرایط مرزی استوانه های با طول محدود استفاده می شود. [۹۶] برای این منظور باید در جملاتی از روابط مربوط به تغییر مکانها و تنشها ضرایب را به صورتی تعیین کرد که در آنها جملات متعامد ظاهر شوند. تعامد توابع مثلثاتی نیز با توجه به روابط ارائه شده کاملاً محرز است که از آنها نیز برای ارضای شرایط مرزی استوانه استفاده می شود.

۴-۵- ارتعاشات استوانه چرخان جدار ضخیم با طول محدود

در این قسمت صحت معادلات ارائه شده برای یک استوانه چرخان بررسی می گردد. یک استوانه الاستیک، توخالی با طول محدود در دستگاه مختصات استوانه ای فرض می شود. شعاع داخلی این استوانه r_1 ، شعاع خارجی آن r_2 و طول آن $2l$ است. (شکل ۴-۱) این استوانه با سرعت زاویه ای Ω ثابت، حول محور Z در حال چرخش است.



شکل (۴-۱): نیم استوانه جدار ضخیم در حال چرخش

چون استوانه مورد نظر دارای چرخش است، حول محور Z در جهت شعاعی نیروی گریز از مرکز ایجاد می شود که به ذرات جسم الاستیک نیرو وارد می کند. همچنین به علت کرنش ایجاد شده در استوانه در هر سه جهت شعاعی، زاویه ای و محوری نیرو و در نتیجه شتاب ایجاد می شود. با جابجایی به اندازه u_r ، u_θ و u_z نقاطی که در نقاط r ، θ و Z قرار دارند در نقاط \bar{r} ، $\bar{\theta}$ و \bar{Z} قرار می گیرند که به صورت زیر با یکدیگر ارتباط دارند:

$$\bar{r} = r + u_r$$

$$\bar{\theta} = \theta + \frac{1}{r}u_\theta \quad (۵۱-۴)$$

$$\bar{Z} = Z + u_z$$

بنابراین شتاب کلی وارد بر ذره در هر سه جهت در نقاط جابجا شده \bar{r} ، $\bar{\theta}$ و \bar{Z} به صورت معادله (۵۲-۴) می باشد. [۶۲]

$$\bar{a}_r = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial u_\theta}{\partial t} - \Omega^2 (r + u_r)$$

$$\bar{a}_\theta = \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u_r}{\partial t} \quad (۵۲-۴)$$

$$\bar{a}_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

چگالی جسم در اثر این جابجایی نیز به شکل زیر در می آید:

$$\bar{\rho} = \rho \left(1 - u_{r,r} - \frac{1}{r}u_r - \frac{1}{r}u_{\theta,\theta} - u_{z,z} \right) \quad (۵۳-۴)$$

اما از این تغییر چگالی که مقدار بسیار کمی است، صرفنظر می شود. بنابراین در نهایت نیروی وارد بر هر ذره در سه جهت شعاعی، زاویه ای و محوری تحت تاثیر چرخش به ترتیب به شکل زیر است:

$$F_r = \rho \bar{a}_r = \rho \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} = \rho r \Omega^2 + \rho \left(-2\Omega \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right) + \rho r \Omega^2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

$$F_\theta = \rho \bar{a}_\theta = \rho \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial t^2} = \rho (2\Omega \frac{\partial u_r}{\partial t}) \quad (۵۴-۴)$$

$$F_z = \rho \bar{a}_z = \rho \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = 0$$

لذا با جایگذاری این نیروها در معادله ناویه ارائه شده در (۴-۱۵) این معادله به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho r \Omega^2 + \rho \left(-2\Omega \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right) + \rho r \Omega^2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (۴-۵۵-الف)$$

$$\mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \rho (2\Omega \frac{\partial u_r}{\partial t}) = \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (۴-۵۵-ب)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (۴-۵۵-پ)$$

همچنین با جایگذاری این نیروها در معادلات تعادل ارائه شده در روابط (۴-۴۲) این رابطه نیز به شکل زیر نوشته می شود:

$$\sigma_{r,r} + \frac{1}{r} \tau_{r\theta,\theta} + \tau_{rz,z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) - \rho r \Omega^2 + \rho \left(-2 \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \Omega \right) + \rho r \Omega^2 \left(u_{r,r} + \frac{1}{r} u_{\theta,\theta} + u_{z,z} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (۴-۵۶-الف)$$

$$\tau_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta} + \tau_{\theta z,z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + -\rho \left(2\Omega \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (۴-۵۶-ب)$$

$$\tau_{rz,r} + \frac{1}{r} \tau_{\theta z,\theta} + \sigma_{z,z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (۴-۵۶-پ)$$

در بررسی ارتعاشات این استوانه می توان از روابط (۴-۳۹) و (۴-۴۰) استفاده نمود. بر استوانه مورد نظر که با سرعت زاویه ای ثابت در حال چرخش است، تنها شتاب ناشی از چرخش است که نیرو وارد می کند و نیروی جسمی خارجی وارد بر استوانه را بیان می دارد، که این نیرو برای کاهش تعداد ضرایب و راحت تر شدن محاسبات به صورت ضریبی از (۴-۲۷) در (۴-۳۱)، ارائه و در معادلات تنش وارد شد. لذا شرایط مرزی بر روی سطوح داخلی و خارجی و در دو انتهای این استوانه چرخان عاری از نیرو است و بایستی تنش بر روی تمامی سطوح صاف و خمیده صفر در نظر گرفته شود:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0 \quad \text{at } r = r_1, r_2 \quad (۴-۵۷\text{-الف})$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad \text{at } z = -l, l \quad (۴-۵۷\text{-ب})$$

ارضای دقیق شرایط مرزی انتهایی برای $r_1 \leq r \leq r_2$ اعمال بیش از یک رابطه را بین ضرایب مستقل ارائه شده در (۴-۳۹) و (۴-۴۰) ایجاد می کند. لذا برخی شرایط مرزی را نمی توان به طور دقیق ارضا نمود و بایستی از روش تعامد که در بخش قبل به آن اشاره شد به طور تقریبی ارضا گردند. اینکه کدام شرط مرزی ارضا شود به دلخواه است. در اینجا فرض می شود که شرایط مرزی زیر به طور دقیق ارضا گردند:

$$\sigma_{rz} = 0 \quad \text{at } r = r_1, r_2 \quad (۴-۵۸\text{-الف})$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad \text{at } z = -l, l \quad (۴-۵۸\text{-ب})$$

شرایط مرزی دیگر به روش تعامد می توانند ارضا شوند:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{at } r = r_1, r_2 \quad (۴-۵۹\text{-الف})$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad \text{at } z = -l, l \quad (۴-۵۹\text{-ب})$$

چگونگی ارضای دقیق شرایط مرزی در دو انتهای استوانه با توجه به وجود دو دسته جواب در روابط تنش ها است. هرکدام از دسته جوابها به طور مستقل بررسی می شود. در مورد دسته جواب اول (مود متقارن) برای صفر کردن تنشهای σ_{rz} و $\sigma_{\theta z}$ بر روی مرزها طبق معادلات (۴-۴۰) روابط زیر بین ضرایب برقرار می گردد:

$$A_{2j} = -A_{1j} \frac{2\delta_{1j}\alpha_j \sin(\delta_{1j}l)}{\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2 \sin(\delta_{2j}l)} \quad (۴-۶۰-الف)$$

$$B_{2j} = -B_{1j} \frac{2\delta_{1j}\alpha_j \sin(\delta_{1j}l)}{\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2 \sin(\delta_{2j}l)} \quad (۴-۶۰-ب)$$

$$A_{3j} = -A_{1j} \frac{2\delta_{1j}\delta_{2j} \sin(\delta_{1j}l)}{\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2 \sin(\delta_{2j}l)} \quad (۴-۶۰-پ)$$

$$B_{3j} = -B_{1j} \frac{2\delta_{1j}\delta_{2j} \sin(\delta_{1j}l)}{\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2 \sin(\delta_{2j}l)} \quad (۴-۶۰-ت)$$

$$A_{5i} = K_{1i}A_{4i} + K_{2i}B_{4i} + K_{3i}A_{6i} + K_{4i}B_{6i} \quad (۴-۶۰-ث)$$

$$B_{5i} = \Lambda_{1i}A_{4i} + \Lambda_{2i}B_{4i} + \Lambda_{3i}A_{6i} + \Lambda_{4i}B_{6i} \quad (۴-۶۰-ج)$$

$$\bar{\delta}_i = \frac{(i-1)\pi}{l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (۴-۶۰-چ)$$

که در معادلات فوق ضرایب K_{ki} و Λ_{ki} و $k = 1, 2, 3, 4$ توابعی از $\bar{\alpha}_{2i}$ ، $\bar{\alpha}_{1i}$ و $\bar{\delta}_i$ می باشند و به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$K_{1i} = (\Gamma_{1i}(r_1)\psi_{2i}(r_2) - \Gamma_{1i}(r_2)\psi_{2i}(r_1))/(\Gamma_{2i}(r_2)\psi_{2i}(r_1) - \Gamma_{2i}(r_1)\psi_{2i}(r_2))$$

$$K_{2i} = (\Psi_{1i}(r_1)\psi_{2i}(r_2) - \Psi_{1i}(r_2)\psi_{2i}(r_1))/(\Gamma_{2i}(r_2)\psi_{2i}(r_1) - \Gamma_{2i}(r_1)\psi_{2i}(r_2))$$

$$K_{3i} = (\Gamma_{3i}(r_1)\psi_{2i}(r_2) - \Gamma_{3i}(r_2)\psi_{2i}(r_1))/(\Gamma_{2i}(r_2)\psi_{2i}(r_1) - \Gamma_{2i}(r_1)\psi_{2i}(r_2))$$

$$K_{4i} = (\Psi_{3i}(r_1)\psi_{2i}(r_2) - \Psi_{3i}(r_2)\psi_{2i}(r_1))/(\Gamma_{2i}(r_2)\psi_{2i}(r_1) - \Gamma_{2i}(r_1)\psi_{2i}(r_2))$$

$$\Lambda_{1i} = (\Gamma_{1i}(r_1)\Gamma_{2i}(r_2) + \Gamma_{1i}(r_2)\Gamma_{2i}(r_1))/(\Gamma_{2i}(r_2)\psi_{2i}(r_1) - \Gamma_{2i}(r_1)\psi_{2i}(r_2))$$

$$\Lambda_{2i} = (\Psi_{1i}(r_1)\Gamma_{2i}(r_2) + \Psi_{1i}(r_2)\Gamma_{2i}(r_1))/(\Gamma_{2i}(r_2)\psi_{2i}(r_1) - \Gamma_{2i}(r_1)\psi_{2i}(r_2))$$

$$\Lambda_{3i} = (\Gamma_{3i}(r_1)\Gamma_{2i}(r_2) + \Gamma_{3i}(r_2)\Gamma_{2i}(r_1))/(\Gamma_{2i}(r_2)\psi_{2i}(r_1) - \Gamma_{2i}(r_1)\psi_{2i}(r_2))$$

$$\Lambda_{4i} = (\Psi_{3i}(r_1)\Gamma_{2i}(r_2) + \Psi_{3i}(r_2)\Gamma_{2i}(r_1))/(\Gamma_{2i}(r_2)\psi_{2i}(r_1) - \Gamma_{2i}(r_1)\psi_{2i}(r_2)) \quad (۴-۶۱-الف)$$

9

$$\Gamma_{1i}(r) = 2\bar{\delta}_i \left(-\frac{n}{r} J_n(\bar{\alpha}_{1i}r) + \bar{\alpha}_{1i} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i}r)\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\Psi_{1i}(r) = 2\bar{\delta}_i \left(-\frac{n}{r} Y_n(\bar{\alpha}_{1i}r) + \bar{\alpha}_{1i} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i}r)\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\Gamma_{2i}(r) = -\left(\frac{n\bar{\alpha}_{2i}}{r} J_n(\bar{\alpha}_{2i}r) + (\bar{\delta}_i^2 - \bar{\alpha}_{2i}^2) J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r)\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\Psi_{2i}(r) = -\left(\frac{n\bar{\alpha}_{2i}}{r} Y_n(\bar{\alpha}_{2i}r) + (\bar{\delta}_i^2 - \bar{\alpha}_{2i}^2) Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r)\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\Gamma_{3i}(r) = -\frac{n\bar{\delta}_i}{r} J_n(\bar{\alpha}_{2i}r), \Psi_{3i}(r) = -\frac{n\bar{\delta}_i}{r} Y_n(\bar{\alpha}_{2i}r)$$

$$\delta_{1j}^2 + \alpha_j^2 = \left(\frac{\omega_j^2(1-M_1)}{c_1^2}\right), \delta_{2j}^2 + \alpha_j^2 = \left(\frac{\omega_j^2(2-M_3-M_2)}{c_2^2}\right) = \left(\frac{\omega_j^2(1-M_4)}{c_2^2}\right) \quad (۴-۶۱-ب)$$

$$\bar{\delta}_i^2 + \bar{\alpha}_{1i}^2 = \left(\frac{\omega_i^2(1-M_1)}{c_1^2}\right), \bar{\delta}_i^2 + \bar{\alpha}_{2i}^2 = \left(\frac{\omega_i^2(2-M_3-M_2)}{c_2^2}\right) = \left(\frac{\omega_i^2(1-M_4)}{c_2^2}\right) \quad (۴-۶۱-ب)$$

در مورد دسته جواب دوم (مود پادمقارن) به منظور صفر کردن تنشهای σ_{rz} و $\sigma_{\theta z}$ بر روی مرزها روابط زیر بین ضرایب برقرار می شود:

$$A_{2j} = A_{1j} \frac{2\delta_{1j}\alpha_j \cos(\delta_{1j}l)}{\delta_{2j}^2 - \alpha_j^2 \cos(\delta_{2j}l)} \quad (۴-۶۲-الف)$$

$$B_{2j} = B_{1j} \frac{2\delta_{1j}\alpha_j \cos(\delta_{1j}l)}{\delta_{2j}^2 - \alpha_j^2 \cos(\delta_{2j}l)} \quad (۴-۶۲-ب)$$

$$A_{3j} = A_{1j} \frac{2\delta_{1j}\delta_{2j} \cos(\delta_{1j}l)}{\delta_{2j}^2 - \alpha_j^2 \cos(\delta_{2j}l)} \quad (۴-۶۲-پ)$$

$$B_{3j} = B_{1j} \frac{2\delta_{1j}\delta_{2j} \cos(\delta_{1j}l)}{\delta_{2j}^2 - \alpha_j^2 \cos(\delta_{2j}l)} \quad (۴-۶۲-ت)$$

$$\bar{\delta}_i = \frac{(2i-1)\pi}{2l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (۴-۶۲-ث)$$

در این حالت روابط میان A_{5i} ، B_{5i} ، A_{4i} ، B_{4i} ، A_{6i} و B_{6i} مشابه روابط ارائه شده در (۴-۶۰) است با این تفاوت که ضرایب K_{ki} و Λ_{ki} برای $k = 1, 2, 3, 4$ از روابط مربوط به دسته جواب دوم (۴-۶۱) محاسبه می شوند. لذا تا این مرحله با استفاده از روابط (۴-۶۰) و (۴-۶۲) شرایط مرزی (۴-۵۸) به طور دقیق ارضا شد. در مورد شرایط مرزی (۴-۵۹) از روش تعامد استفاده می شود. به اینصورت که برای شرایط مرزی مربوط به $\sigma_{r\theta}$ و σ_{rr} در شعاع داخلی و خارجی از توابع متعامد مثلثاتی به صورت زیر استفاده شده است:

$$\int_0^1 \sigma_{rr}(r, \theta, z) \begin{Bmatrix} \cos(\bar{\delta}_i z) \\ \sin(\bar{\delta}_i z) \end{Bmatrix} dz = 0 \quad r = r_1, r_2 \quad (۴-۶۳-الف)$$

$$\int_0^1 \sigma_{r\theta}(r, \theta, z) \begin{Bmatrix} \cos(\bar{\delta}_i z) \\ \sin(\bar{\delta}_i z) \end{Bmatrix} dz = 0 \quad r = r_1, r_2 \quad (۴-۶۳-ب)$$

و در مورد شرط مرزی σ_{zz} در دو انتهای استوانه از خاصیت تعامد توابع بسل استفاده می شود. برای استفاده از تعامد توابع بسل با توجه به مطالب ارائه شده در قبل بایستی ابتدا جملات متعامد در روابط مربوط به تنش σ_{zz} در جهت شعاعی ایجاد شود. لذا رابطه زیر بین ضرایب A_1 و B_1 در نظر گرفته شده است:

$$J'_n(\alpha_j r_1) A_{1j} = -Y'_n(\alpha_j r_1) B_{1j} \quad (۴-۶۴)$$

که پریم بیانگر مشتق است و α_j ؛ $j = 1, 2, 3, \dots$ ؛ نیز ریشه های $p'_n(\alpha_j r_2)$ می باشد و $p_n(\alpha_j r)$ تابع متعامد است. لذا شرط مرزی دوم (۴-۵۹) با استفاده از رابطه (۴-۴۰) برای هر دو دسته جواب بوسیله تعامد به شکل زیر ارضا می شود:

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_{zz}(r, \theta, l) p_n(\alpha_j r) r dr = 0 \quad \text{at } z = -l \quad (۴-۶۵)$$

چگونگی محاسبه (۴-۶۳) و (۴-۶۵) در پیوست پ ارائه شده است. لذا تعداد ضرایب مجهول به پنج ضریب مجهول رسیده که برای آنها نیاز به پنج معادله است که با توجه به روابط ارائه شده در پیوست پ یک دستگاه معادلات جبری خطی با ابعاد $(N_1 + 4N_2) \times (N_1 + 4N_2)$ وابسته به تعداد جملات سری های استفاده شده، حاصل می شود.

$$[M_{st}]_{5 \times 5} [\Delta_t]_{5 \times 1} = [0]_{5 \times 1} \quad (۴-۶۶)$$

درایه های ماتریس \mathcal{M} و بردار Δ در رابطه (۴-۶۶) به صورت زیر است:

$$M_{st} = [M_{st,ij}]_{\tau \times \eta}, \tau = \begin{cases} N_1 & s = 1 \\ N_2 & s \neq 1 \end{cases}, \eta = \begin{cases} N_1 & t = 1 \\ N_2 & t \neq 1 \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \{A_{1j}\}_{N_1 \times 1}, \Delta_2 = \{A_{4j}\}_{N_2 \times 1}, \Delta_3 = \{B_{4j}\}_{N_2 \times 1}, \Delta_4 = \{A_{6j}\}_{N_2 \times 1}$$

$$\Delta_5 = \{B_{6j}\}_{N_2 \times 1} \quad (۴-۶۷)$$

که N_1 و N_2 بترتیب تعداد جملات سریهای استفاده شده در جهت محورهای Z و r می باشد. با استفاده از روابط (۴-۶۰) و (۴-۶۲) در محاسبات ارائه شده در پیوست ت درایه های ماتریس M_{st} محاسبه می شوند. این محاسبات در پیوست ت آورده شده است. با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس $[M_{st}]_{5 \times 5}$ فرکانسهای

مسئله استخراج می شوند. همچنین به کمک این ماتریس میزان ارضای تقریبی شرایط مرزی نیز محاسبه می شوند و چگونگی انجام آن در فصل بعد آورده می شود.

۴-۶- ارتعاشات استوانه چرخان جدار ضخیم با طول محدود تحت گشتاور دندان

در این حالت فرض می شود استوانه مورد نظر با سرعت زاویه ای ثابت در حال چرخش است و بر سطح داخلی استوانه نیرویی متناوب در جهت زاویه ای اعمال می شود که همان نیروی ناشی از گشتاور دندان است و آن را نیروی دندان نامیده می شود.

لذا شرایط مرزی تنش در $\Gamma = \Gamma_1$ عبارت از اعمال نیروی حاصل از گشتاور دندان بر سطح (تنش حاصل از گشتاور دندان) در محل قطبهای آهنربا است.

نیروی حاصل از گشتاور دندان عبارت از حاصل تقسیم گشتاور دندان که در رابطه (۲-۱) بدست آمد، بر فاصله شعاعی می باشد. (شکل ۲-۱). برای سادگی رابطه (۲-۱) گشتاور دندان با توجه به مقادیر ثابت به شکل زیر نوشته می شود:

$$T_{cog}(\theta) = D \sum_{n=1}^{\infty} E \sin nz\theta \quad (۴-۶۸)$$

از n های بیشتر از یک نیز صرف نظر شده و گشتاور دندان به فرم یک معادله سینوس نوشته شده است.

در اینصورت نیروی حاصل از گشتاور دندان بر کل سطح داخلی چرخ طیار (نیروی دندان) بصورت رابطه (۴-۶۹) نشان داده می شود.

$$F_{cog}(\theta) = \frac{T_{cog}(\theta)}{R} = \frac{D \sum_{n=1}^{\infty} E \sin nz\theta}{R} \quad (۴-۶۹)$$

بنابراین تنش وارده از سوی نیروی دندان بر سطح داخلی چرخ طیار در شعاع $\Gamma = \Gamma_1$ عبارت از حاصل تقسیم نیروی دندان بر سطح داخلی چرخ طیار است. لذا شرایط مرزی در $r = \Gamma_1$ به شکل معادله (۴-۷۰-الف)

برقرار است. که در این رابطه $S = 4\pi r_1 l$ سطح داخلی چرخ طیار است. دیگر شرایط مرزی که میبایستی ارضا شوند به صورت معادله (۴-۷۰-ب) و (۴-۷۰-پ) ارائه شده است.

$$\sigma_{r\theta} + \frac{F_{cog}}{S} = \sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0 \quad \text{at } r = r_1 \quad (\text{الف-۷۰-۴})$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0 \quad \text{at } r = r_2 \quad (\text{ب-۷۰-۴})$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad \text{at } z = -l \quad (\text{پ-۷۰-۴})$$

در اینجا نیز فرض می شود که شرایط مرزی زیر به طور دقیق ارضا گردند:

$$\sigma_{rz} = 0 \quad \text{at } r = r_1, r_2 \quad (\text{الف-۷۱-۴})$$

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad \text{at } z = -l \quad (\text{ب-۷۱-۴})$$

شرایط مرزی دیگر به روش تعامد می توانند ارضا شوند:

$$\sigma_{r\theta} + \frac{F_{cog}}{S} = \sigma_{rr} = 0 \quad \text{at } r = r_1 \quad (\text{الف-۷۲-۴})$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{at } r = r_2 \quad (\text{ب-۷۲-۴})$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad \text{at } z = -l \quad (\text{پ-۷۲-۴})$$

مانند حالت قبل در این حالت نیز ارضای دقیق شرایط مرزی در دو انتهای استوانه با توجه به وجود دو دسته جواب در روابط تنش ها مانند معادلات ارائه شده در (۴-۶۰) و (۴-۶۲) است.

در مورد شرایط مرزی (۴-۷۱) نیز از روش تعامد استفاده می شود. مانند حالت قبل برای شرایط مرزی مربوط به σ_{rr} در شعاع داخلی و خارجی و برای $\sigma_{r\theta}$ در شعاع خارجی از توابع متعامد مثلثاتی به صورت زیر استفاده شده است:

$$\int_0^l \sigma_{rr}(r, \theta, z) \begin{cases} \cos(\bar{\delta}_i z) \\ \sin(\bar{\delta}_i z) \end{cases} dz = 0 \quad r = r_1, r_2 \quad (\text{الف-۷۳-۴})$$

$$\int_0^1 \sigma_{r\theta}(r,\theta,z) \begin{Bmatrix} \cos(\bar{\delta}_i z) \\ \sin(\bar{\delta}_i z) \end{Bmatrix} dz = 0 \quad r = r_2 \quad (۷۳-۴)$$

$$\int_0^1 (\sigma_{r\theta}(r,\theta,z) + \frac{F_{cog}}{s}) \begin{Bmatrix} \cos(\bar{\delta}_i z) \\ \sin(\bar{\delta}_i z) \end{Bmatrix} dz = 0 \quad r = r_1 \quad (۷۳-۴)$$

و در مورد شرط مرزی σ_{zz} در دو انتهای استوانه از خاصیت تعامد توابع بسط که در (۶۵-۴) نیز بیان شده به شکل زیر استفاده می شود.

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_{zz}(r,\theta,l) p_n(\alpha_j r) r dr = 0 \quad (۷۴-۴)$$

چگونگی محاسبه (۶۳-۴) و (۶۵-۴) در پیوست ب ارائه شده است. با توجه به این روابط یک دستگاه معادلات جبری خطی با ابعاد $(N_1 + 4N_2) \times (N_1 + 4N_2)$ حاصل می شود.

$$[M_{st}]_{5 \times 5} [\Delta_t]_{5 \times 1} = [F_s]_{5 \times 1} \quad (۷۵-۴)$$

درایه های ماتریس \mathcal{M} و بردار Δ در رابطه (۶۶-۴) به صورت زیر است:

$$M_{st} = [M_{st,ij}]_{\tau \times \eta}, \tau = \begin{Bmatrix} N_1 & s = 1 \\ N_2 & s \neq 1 \end{Bmatrix}, \eta = \begin{Bmatrix} N_1 & t = 1 \\ N_2 & t \neq 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \{A_{1j}\}_{N_1 \times 1}, \Delta_2 = \{A_{4j}\}_{N_2 \times 1}, \Delta_3 = \{B_{4j}\}_{N_2 \times 1}, \Delta_4 = \{A_{6j}\}_{N_2 \times 1}$$

$$A_5 = \{B_{6j}\}_{N_2 \times 1} \quad (۷۶-۴)$$

$$F_1 = \{0\}_{N_1 \times 1}, F_2 = \{0\}_{N_2 \times 1}, F_3 = \{0\}_{N_2 \times 1}, F_4 = \{f_s\}_{N_2 \times 1}, F_5 = \{0\}_{N_2 \times 1}$$

$$f_s = -\frac{F_{cog}}{s} \quad (۷۷-۴)$$

خلاصه فصل

در این فصل با استفاده از حل کلی ارائه شده برای معادلات ناویه در دستگاه مختصات استوانه ای و با استفاده از روش جداسازی متغیرها امکان ارضای شرایط مرزی بیشتری فراهم شد. سپس با استفاده از روابط بدست آمده برای تغییر مکانها و تنشها ماتریس ضرایب مربوط به ارتعاشات استوانه توخالی محدود و چرخان و همچنین تحت نیروی ناشی از گشتاور دندانها بر سطح داخلی استوانه چرخان در باتری الکترومکانیکی محاسبه شد، بطوری که تعدادی از شرایط مرزی به صورت تقریبی و با استفاده از خاصیت تعامد توابع مثلثاتی و بسط ارضا می شوند.

فصل پنجم

بررسی و تحلیل نتایج

۵-۱- تحلیل عددی ارتعاشات استوانه چرخان جدار ضخیم با طول محدود

در این بخش با توجه به تئوری ارائه شده مثالهای عددی مختلفی به منظور ارزیابی روش ارائه شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ابتدا ارتعاشات استوانه چرخان جهت تعیین فرکانس طبیعی ارائه می‌شود.

روش ارائه شده برای چهار فرکانس اول مودهای متقارن و پادمقارن و با شماره موج محیطی ۰ و ۱ انجام می‌گیرد. فرض می‌شود که چگالی استوانه که از جنس فیبر کربن استفاده شده 1750 kg/m^3 است که مدول الاستیسیته آن 230 GPa می‌باشد. μ و λ ثابتهای لامه برای این استوانه به ترتیب برابر $8.84 \times 10^4 \text{ GPa}$ و $1.326 \times 10^5 \text{ GPa}$ بدست می‌آیند. شعاع داخلی و شعاع خارجی به ترتیب برابر 0.028 m و 0.074 m در نظر گرفته می‌شوند. طول استوانه مورد نظر برابر 0.07 m است. پس از ارضای شرایط مرزی تنش و یافتن ضرایب مجهول در معادلات تنش به بررسی ارتعاشات استوانه پرداخته می‌شود.

اگر فرکانس بی بعد به شکل زیر تعریف شود:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega r_2}{c_2} \quad (1-5)$$

در این صورت با در نظر گرفتن $\Omega = 0$ (که نشان دهنده عدم وجود سرعت زاویه ای است)، لذا نیروی جسمی بوجود آمده بدلیل سرعت زاویه ای حذف می‌شود در اینصورت بایستی با نتایج تحقیقات گذشته برای استوانه آزاد مطابقت داشته باشد. در زیر این مقادیر با مقادیر ارائه شده در [۹۶] مقایسه شده است. نرخ همگرایی این مقادیر در [۹۶] آورده شده است و نشان داده شده که با انتخاب چند جمله اول سری به نتایج مطلوبی رسیده می‌شود این نتایج با نتایج ارائه شده در [۹۰] مقایسه شده اند. در این صورت برای مقایسه با در نظر گرفتن مقادیر برای یک استوانه از جنس فولاد با نسبت ضخامت به شعاع متوسط H برابر I و $I.4$ و نسبت طول به شعاع متوسط L برابر I وقتی که $n = 0$ است نتایج را با هم مقایسه می‌کنیم. این نتایج در جدول ۵-۱ و ۵-۲ آورده شده است.

جدول ۱-۵: مقایسه میان نتایج ارائه شده در این تحقیق با [۹۶] برای چهار فرکانس اول طبیعی بدون بعد (ω)

مود متقارن	مود پادمتقارن	مود متقارن	مود پادمتقارن
روش ارائه شده	روش ارائه شده	[۹۶]	[۹۶]
2.6090	1.8191	2.6092	1.8191
6.6425	5.1878	6.6422	6.1879
7.0575	7.0132	7.0580	7.0129
8.2698	9.8301	8.2698	9.8304

مقادیر ارائه شده برای نسبت ضخامت به شعاع متوسط H برابر I و نسبت طول به شعاع متوسط L برابر I و $n = 0$ محاسبه شده است.

جدول ۲-۵: مقایسه میان نتایج ارائه شده در این تحقیق با [۹۶] برای چهار فرکانس اول طبیعی بدون بعد (ω)

مود متقارن	مود پادمتقارن	مود متقارن	مود پادمتقارن
روش ارائه شده	روش ارائه شده	[۹۶]	[۹۶]
3.0857	1.7885	3.0858	1.7887
7.2375	5.3170	7.2376	5.3172
7.8102	6.7195	7.7658	6.7195
8.9147	9.6719	8.9148	9.6716

مقادیر ارائه شده برای نسبت ضخامت به شعاع متوسط H برابر 1.4 و نسبت طول به شعاع متوسط L برابر 1 و $n = 0$ محاسبه شده است.

همچنین با در نظر گرفتن نسبت ضخامت به شعاع متوسط H برابر I و نسبت طول به شعاع متوسط L برابر I وقتی که $n = 1$ است نتایج را با هم مقایسه می کنیم. این نتایج در جدول ۳-۵ آورده شده است.

جدول ۳-۵: مقایسه میان نتایج ارائه شده در این تحقیق با [۹۶] برای چهار فرکانس اول طبیعی بدون بعد (ω)

مود متقارن	مود پادمتقارن	مود متقارن	مود پادمتقارن
روش ارائه شده	[۹۶]	روش ارائه شده	[۹۶]
2.8245	2.8248	2.4417	2.4417
6.2328	6.2329	5.2108	5.2107
6.7939	6.7939	5.9905	5.9904
7.3249	7.3249	6.9858	6.9857

مقادیر ارائه شده برای نسبت ضخامت به شعاع متوسط H برابر I و نسبت طول به شعاع متوسط L برابر I و $n = 1$ محاسبه شده است.

در حالتی که در این تحقیق بررسی شده است با در نظر گرفتن چرخش استوانه، در معادلات هلم هولتز ضرایب M_i مربوط به نیروهای وارده بدلیل چرخش مجهول هستند که این ضرایب با حل دستگاه معادلات زیر بدست آمده اند:

$$\rho \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} = \rho r \Omega^2 + \rho \left(-2\Omega \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right) + \rho r \Omega^2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (۵-۲-الف)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial t^2} = \rho \left(2\Omega \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) \quad (۵-۲-ب)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = 0 \quad (۵-۲-پ)$$

در ادامه با حذف ۷ ضریب مجهول توسط روابط برقرار شده در فصل قبل در نهایت ماتریس M نوشته می شود. بنابراین در این روابط بدلیل متناسب بودن نیروی عمومی با تغییر مکان توانستیم رابطه نیروی عمومی را به سمت چپ معادله برده و با ماتریس جرم و سختی ارتعاشات آزاد ترکیب نماییم. در جدول ۴-۵ با انتخاب چهار جمله اول سری مقادیر فرکانس طبیعی بدون بعد برای $\Omega = 20000, 40000, 60000$ rpm بدست آمده اند.

جدول ۴-۵: چهار فرکانس اول طبیعی بدون بعد (ω)

مود پادمتقارن	مود متقارن
425.4693	734.0625
5508.4120	1061.1959
5758.6115	1151.0012
11102.966	1215.2154
538.2293	812.1187
6911.2000	1521.6325
6281.8022	1817.962
18902.12	1925.425
673.3215	936.0127
7543.132	1752.981
8287.2112	20581.117
22185.531	2150.1316

مقادیر ارائه شده برای نسبت ضخامت به شعاع متوسط H برابر 1.4 و نسبت طول به شعاع متوسط L برابر I و $n = 0$ محاسبه شده است.

با افزایش تعداد جملات سری میزان همگرایی بدست آمده برای $\Omega = 40000$ rpm که میانگین تعداد دور برای چرخ طیار در باتری الکترومکانیکی است، و $n = 0$ نیز افزایش می یابد که در جدول ۵-۵ آورده شده است.

بنابراین در این فصل با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها و با کمک شرط تعامد مقدار فرکانس طبیعی یک استوانه چرخان بدست آمد. این مقادیر در برنامه ای تحت نرم افزار *maple* انجام شده است .

جدول ۵-۵: دو فرکانس اول طبیعی بدون بعد ($\bar{\omega}$) برای $\Omega = 40000$ rpm و $n = 0$

تعداد جملات سری

	مود پادمتقارن		مود متقارن	
2	538.22701	6911.2000	812.1185	1521.6220
3	538.22505	6911.2000	812.1183	1521.6223
4	538.22180	6911.1989	812.1184	1521.6220
5	538.22172	6911.1987	812.1183	1521.6215
6	538.22165	6911.1979	812.1182	1521.6212
7	538.22160	6911.1976	812.1180	1521.6211
8	538.22139	6911.1973	812.1179	1521.62096
9	538.22132	6911.1973	812.1179	1521.6208
10	538.22122	6911.1972	812.1179	1521.6208

مقادیر ارائه شده برای نسبت ضخامت به شعاع متوسط H برابر $I.4$ و نسبت طول به شعاع متوسط L برابر I محاسبه شده است.

فصل ششم

نتایج و پیشنهادها

۶-۱- نتیجه گیری

- با استفاده از یک حل عمومی که از تکنیک جداسازی متغیرها استفاده می کند یک حل عددی برای تحلیل ارتعاشات استوانه تحت نیروهای جسمی پیشنهاد شد.
- مدل ارائه شده بر اساس تئوری سه بعدی الاستیسیته خطی بیان شده است.
- در حل ارائه شده به کمترین تعداد ضرایب برای تحلیل ارتعاشات استوانه های با طول محدود تحت نیروهای جسمی نیاز است.
- ارتعاشات استوانه ای که در حال چرخش با سرعت زاویه ای ثابت است با استفاده از این روش بررسی عددی شد.
- همه شرایط مرزی به صورت دقیق ارضا نمی شوند بطوری که تعدادی از شرایط مرزی به صورت تقریبی و با استفاده از خاصیت تعامد توابع مثلثاتی و بسل ارضا می شوند.
- با در نظر گرفتن نیروهای جسمی به صورت تابعی از تغییر مکان این امکان انجام شد که با ماتریس سفتی ترکیب و ارتعاشات آن را بررسی گردد.
- به طور خاص تر، حتی برای حالتی که شرایط مرزی استوانه در حال چرخش توسط نیروهای خارجی دیگری چون گشتاور دندانه در باتری الکترومکانیکی تغییر می کند نیز روش ارائه شده قابل اجرا می باشد که در فصل پنجم نشان داده شد.

۶-۲- پیشنهادها

در پایان پیشنهاد می شود که:

- تطابق روش ارائه شده در این تحقیق با نتایج ارائه شده با نرم افزارهای المان محدود برای استوانه چرخان نیز قابل ارزیابی است.
- روش ارائه شده در این پایان نامه قابل اجرا برای وجود هر نوع نیروی جسمی که بر استوانه های پر یا توخالی وارد می شوند قابل بررسی است.

بیوست الف - مولفه های تنش

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} = & \lambda \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} E_1 T_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} E_1 T_1 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} R_1 T_1 + \frac{\partial^2 T_1}{\partial Z^2} R_1 E_1 + \frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial r^2} E_1 \bar{T}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} E_1 \bar{T}_1 \right. \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} \bar{R}_1 \bar{T}_1 + \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial Z^2} \bar{R}_1 E_1 + M_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} E_1 T_1 + M_1 \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} E_1 T_1 + M_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} R_1 T_1 \\
& + M_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial Z^2} R_1 E_1 + M_1 \frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial r^2} E_1 \bar{T}_1 + M_1 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} E_1 \bar{T}_1 + M_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} \bar{R}_1 \bar{T}_1 \\
& \left. + M_1 \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial Z^2} \bar{R}_1 E_1 \right) e^{i\omega t} \\
& + 2\mu \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} E_1 T_1 - \frac{\partial R_3}{\partial r} \frac{\partial T_3}{\partial z} E_3 - \frac{1}{r^2} R_4 T_4 \frac{\partial E_4}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_4}{\partial r} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} T_4 + \frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial r^2} E_1 \bar{T}_1 \right. \\
& - \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} E_3 - \frac{1}{r^2} \bar{R}_4 \bar{T}_4 \frac{\partial E_4}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial r} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} \bar{T}_4 + M_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} E_1 T_1 - M_3 \frac{\partial R_3}{\partial r} \frac{\partial T_3}{\partial z} E_3 \\
& - M_4 \frac{1}{r^2} R_4 T_4 \frac{\partial E_4}{\partial \theta} + M_4 \frac{1}{r} \frac{\partial R_4}{\partial r} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} T_4 + M_1 \frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial r^2} E_1 \bar{T}_1 - M_3 \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} E_3 \\
& \left. - M_4 \frac{1}{r^2} \bar{R}_4 \bar{T}_4 \frac{\partial E_4}{\partial \theta} + M_4 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial r} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} \bar{T}_4 \right) e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta} = & \mu \left(\frac{2}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} T_1 - \frac{2}{r^2} R_1 T_1 \frac{\partial E_1}{\partial \theta} + \frac{\partial R_2}{\partial r} \frac{\partial T_2}{\partial z} E_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial z} R_2 E_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial E_3}{\partial \theta} \frac{\partial T_3}{\partial z} R_3 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_4}{\partial \theta^2} R_4 T_4 \right. \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial R_4}{\partial r} E_4 T_4 - \frac{\partial^2 R_4}{\partial r^2} E_4 T_4 + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} \bar{T}_1 - \frac{2}{r^2} \bar{R}_1 \bar{T}_1 \frac{\partial E_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial z} E_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial z} \bar{R}_2 E_2 \\
& - \frac{1}{r} \frac{\partial E_3}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} \bar{R}_3 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_4}{\partial \theta^2} \bar{R}_4 \bar{T}_4 + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial r} E_4 \bar{T}_4 - \frac{\partial^2 \bar{R}_4}{\partial r^2} E_4 \bar{T}_4 + M_1 \frac{2}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} T_1 \\
& - M_1 \frac{2}{r^2} R_1 T_1 \frac{\partial E_1}{\partial \theta} + M_2 \frac{\partial R_2}{\partial r} \frac{\partial T_2}{\partial z} E_2 - M_2 \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial z} R_2 E_2 - M_3 \frac{1}{r} \frac{\partial E_3}{\partial \theta} \frac{\partial T_3}{\partial z} R_3 \\
& + M_4 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_4}{\partial \theta^2} R_4 T_4 + M_4 \frac{1}{r} \frac{\partial R_4}{\partial r} E_4 T_4 - M_4 \frac{\partial^2 R_4}{\partial r^2} E_4 T_4 + M_1 \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} \bar{T}_1 \\
& - M_1 \frac{2}{r^2} \bar{R}_1 \bar{T}_1 \frac{\partial E_1}{\partial \theta} + M_2 \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial z} E_2 - M_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial z} \bar{R}_2 E_2 - M_3 \frac{1}{r} \frac{\partial E_3}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} \bar{R}_3 \\
& \left. + M_4 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_4}{\partial \theta^2} \bar{R}_4 \bar{T}_4 + M_4 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial r} E_4 \bar{T}_4 - M_4 \frac{\partial^2 \bar{R}_4}{\partial r^2} E_4 \bar{T}_4 \right) e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} = & \lambda \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} E_1 T_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} E_1 T_1 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} R_1 T_1 + \frac{\partial^2 T_1}{\partial Z^2} R_1 E_1 + \frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial r^2} E_1 \bar{T}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} E_1 \bar{T}_1 \right. \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} \bar{R}_1 \bar{T}_1 + \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial Z^2} \bar{R}_1 E_1 + M_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} E_1 T_1 + M_1 \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} E_1 T_1 + M_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} R_1 T_1 \\
& + M_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial Z^2} R_1 E_1 + M_1 \frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial r^2} E_1 \bar{T}_1 + M_1 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} E_1 \bar{T}_1 + M_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} \bar{R}_1 \bar{T}_1 \\
& \left. + M_1 \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial Z^2} \bar{R}_1 E_1 \right) e^{i\omega t} \\
& + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} E_1 T_1 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T_1}{\partial z} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} R_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial T_3}{\partial z} E_3 T_3 - \frac{1}{r} \frac{\partial R_4}{\partial z} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} T_4 + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} E_1 \bar{T}_1 \right. \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} \bar{R}_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} E_3 \bar{T}_3 - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial z} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} \bar{T}_4 + M_1 \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} E_1 T_1 + M_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial T_1}{\partial z} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} R_1 \\
& - M_3 \frac{1}{r} \frac{\partial T_3}{\partial z} E_3 T_3 - M_4 \frac{1}{r} \frac{\partial R_4}{\partial z} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} T_4 + M_1 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} E_1 \bar{T}_1 + M_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} \bar{R}_1 \\
& \left. - M_3 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} E_3 \bar{T}_3 - M_4 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial z} \frac{\partial E_4}{\partial \theta} \bar{T}_4 \right) e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta z} = & \mu \left(\frac{2}{r} \frac{\partial T_1}{\partial z} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} R_1 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial \theta^2} R_2 T_2 + \frac{\partial^2 T_2}{\partial Z^2} R_2 E_2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_3}{\partial \theta} R_3 T_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial R_2}{\partial r} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} T_2 \right. \\
& + \frac{\partial R_4}{\partial r} \frac{\partial T_4}{\partial z} E_4 + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} \bar{R}_1 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial \theta^2} \bar{R}_2 \bar{T}_2 + \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial Z^2} \bar{R}_2 E_2 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_3}{\partial \theta} \bar{R}_3 \bar{T}_3 \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial r} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \bar{T}_2 + \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}_4}{\partial z} E_4 + M_1 \frac{2}{r} \frac{\partial T_1}{\partial z} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} R_1 - M_2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial \theta^2} R_2 T_2 \\
& + M_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial Z^2} R_2 E_2 + M_3 \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_3}{\partial \theta} R_3 T_3 + M_2 \frac{1}{r} \frac{\partial R_2}{\partial r} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} T_2 + M_4 \frac{\partial R_4}{\partial r} \frac{\partial T_4}{\partial z} E_4 \\
& + M_1 \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial z} \frac{\partial E_1}{\partial \theta} \bar{R}_1 - M_2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial \theta^2} \bar{R}_2 \bar{T}_2 + M_2 \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial Z^2} \bar{R}_2 E_2 + M_3 \frac{1}{r^2} \frac{\partial E_3}{\partial \theta} \bar{R}_3 \bar{T}_3 \\
& \left. + M_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial r} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \bar{T}_2 + M_4 \frac{\partial \bar{R}_4}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}_4}{\partial z} E_4 \right) e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \lambda \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} E_1 T_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} E_1 T_1 + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} R_1 T_1 + \frac{\partial^2 T_1}{\partial Z^2} R_1 E_1 + \frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial r^2} E_1 \bar{T}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} E_1 \bar{T}_1 \right. \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} \bar{R}_1 \bar{T}_1 + \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial Z^2} \bar{R}_1 E_1 + M_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} E_1 T_1 + M_1 \frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} E_1 T_1 \\ & + M_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} R_1 T_1 + M_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial Z^2} R_1 E_1 + M_1 \frac{\partial^2 \bar{R}_1}{\partial r^2} E_1 \bar{T}_1 + M_1 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial r} E_1 \bar{T}_1 \\ & \left. + M_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \theta^2} \bar{R}_1 \bar{T}_1 + M_1 \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial Z^2} \bar{R}_1 E_1 \right) e^{i\omega t} \\ & + 2\mu \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial Z^2} R_1 E_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial z} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} R_2 + \frac{\partial R_3}{\partial r} \frac{\partial T_3}{\partial z} E_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial T_3}{\partial z} R_3 E_3 + \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial Z^2} \bar{R}_1 E_1 \right. \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial z} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \bar{R}_2 + \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} E_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} \bar{R}_3 E_3 + M_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial Z^2} R_1 E_1 - M_2 \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial z} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} R_2 \\ & + M_3 \frac{\partial R_3}{\partial r} \frac{\partial T_3}{\partial z} E_3 + M_3 \frac{1}{r} \frac{\partial T_3}{\partial z} R_3 E_3 + M_1 \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial Z^2} \bar{R}_1 E_1 - M_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial z} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \bar{R}_2 \\ & \left. + M_3 \frac{\partial \bar{R}_3}{\partial r} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} E_3 + M_3 \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial z} \bar{R}_3 E_3 \right) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

بیوست ب- حداقل سازی مربع خطا با استفاده از توابع متعامد

به عنوان مثال سیستم متعامد کامل $\{\Phi_m\}$ (complete orthogonal system) در نظر گرفته می شود. میتوان

تابع $f(t)$ را به صورت سری و بر حسب توابع متعامد Φ_m روی بازه $[t_0, t_f]$ نوشت:

$$S_n(t) \approx \sum_{m=0}^n f_m \Phi_m(t) \tag{۱.ب}$$

که $S_n(t)$ یک تقریب از مرتبه n تابع $f(t)$ است. با توجه به رابطه (۱.ب) مربع خطا نسبت به تابع وزنی

$w(t)$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$e_n^2 = \int_{t_0}^{t_f} w(t) E^2(t) dt \tag{۲.ب}$$

$$E(t) = f(t) - S_n(t) \tag{۳.ب}$$

برای محاسبه مقدار حداقل مربع خطا، e_n^2 ، برابر صفر قرار داده می شود. لذا نتیجه زیر بدست می آید:

$$\int_{t_0}^{t_f} w(t) \sum_{m=0}^n f_m \Phi_m(t) \Phi_r(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} w(t) f(t) \Phi_r(t) dt \quad (4.ب)$$

با توجه به رابطه (4.ب) و خاصیت تعامد می توان نوشت:

$$f_r = \frac{\int_{t_0}^{t_f} w(t) f(t) \Phi_r(t) dt}{\int_{t_0}^{t_f} w(t) \Phi_r^2(t) dt} \quad (5.ب)$$

حال با جایگذاری رابطه (5.ب) در (1.ب) مقدار حداقل مربع خطا محاسبه می شود:

$$\min[e_n^2] = \int_{t_0}^{t_f} w(t) [f^2(t) - \sum_{m=0}^n f_m^2 \Phi_m^2(t)] dt \quad (6.ب)$$

مقدار حداقل خطا وقتی که ضرایب f_m از رابطه (5.ب) به دست آید به سمت صفر میل می کند. لذا رابطه (1.ب) بهترین تقریب برای تابع $f(t)$ از دیدگاه حداقل مربعات سری است. پس می توان در حل استوانه ها برخی شرایط مرزی را که ارضای آنها به طور دقیق امکان پذیر نباشد با یافتن تابع متعامد مناسب ارضا کرد.

پیوست پ- چگونگی ارضای شرایط مرزی با استفاده از تعامد

اعمال تعامد بر روی دسته جواب متقارن

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{N_1} A_{1j} \left[(\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2) \left(\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \delta_{1j}^2 - \frac{\alpha_j^2 + \delta_{2j}^2}{2} \right) (J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2)) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\alpha_j}{r} (Y_n'(\alpha_j r_2) J_{n+1}(\alpha_j r) - J_n'(\alpha_j r_2) Y_{n+1}(\alpha_j r)) \right) \int_0^l \cos(\bar{\delta}_i z) \cos(\delta_{1j} z) dz \right. \\
 & \quad \left. + 2\delta_{1j} \delta_{2j} \frac{\sin(\delta_{1j} l)}{\sin(\delta_{2j} l)} \left(J_n(\bar{\alpha}_{1i} r) + \frac{\bar{\alpha}_{1i}}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i} r) \right) \right. \\
 & \quad \left. + B_{4i} \left(\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \frac{\bar{\delta}_j^2 - \bar{\alpha}_{2j}^2}{2} \right) Y_n(\bar{\alpha}_j r) + \frac{\bar{\alpha}_{1i}}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i} r) \right) \right. \\
 & \quad \left. + A_{5i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} J_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{(n+1)}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \right. \\
 & \quad \left. + B_{5i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_2 Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{(n+1)}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) + A_{6i} \frac{n}{r} \left(\frac{(n-1)}{r} J_n(\bar{\alpha}_2 r) - \bar{\alpha}_2 J_{n+1}(\bar{\alpha}_2 r) \right) \right. \\
 & \quad \left. + B_{6i} \frac{n}{r} \left(\frac{(n-1)}{r} Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \bar{\alpha}_2 Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \right] \int_0^l \cos^2(\bar{\delta}_i z) dz = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_1} A_{1j} \left[\frac{2n}{r} \left(\frac{(1-n)}{r} (J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \alpha_j (Y_n'(\alpha_j r_2) J_{n+1}(\alpha_j r) - J_n'(\alpha_j r_2) Y_{n+1}(\alpha_j r)) \right) \left((\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2) \int_0^l \cos(\bar{\delta}_i z) \cos(\delta_{1j} z) dz \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\delta_{1j} \delta_{2j} \frac{\sin(\delta_{1j} l)}{\sin(\delta_{2j} l)} \int_0^l \cos(\bar{\delta}_i z) \cos(\delta_{2j} z) dz \right) \right] \\
& \quad + \left[A_{4i} \frac{2n}{r} \left(\frac{(1-n)}{r} J_n(\bar{\alpha}_{1i} r) + \bar{\alpha}_{1i} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i} r) \right) \right. \\
& \quad + B_{4i} \frac{2n}{r} \left(\frac{(1-n)}{r} Y_n(\bar{\alpha}_{1i} r) - \bar{\alpha}_{1i} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i} r) \right) \\
& \quad + A_{5i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} J_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{2(n+1)}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \\
& \quad + B_{5i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{2(n+1)}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \\
& \quad + A_{6i} \left(\left(\bar{\alpha}_{2i}^2 - \frac{2n(n-1)}{r^2} \right) J_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{2\bar{\alpha}_{2i}}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \\
& \quad \left. + B_{6i} \left(\left(\bar{\alpha}_{2i}^2 - \frac{2n(n-1)}{r^2} \right) Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{2\bar{\alpha}_{2i}}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \right] \int_0^l \cos^2(\bar{\delta}_i z) dz = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{1j} \left[\frac{(\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2)^2}{2} \cos(\delta_{1j}l) + 2\delta_{1j}\delta_{2j}\alpha_j^2 \sin(\delta_{1j}l) \cot(\delta_{2j}l) \right] \\
& \times \int_{r_1}^{r_2} \left(J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2) \right)^2 r dr \\
& + \sum_{i=1}^{N_2} (-1)^{i+1} \left[\left(\bar{\alpha}_{1i}^2 - \frac{(\bar{\delta}_i^2 - \delta_{2j}^2)}{2} \right) \right. \\
& \times \left(A_{4i} \int_{r_1}^{r_2} J_n(\alpha_{1i} r) \left(J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2) \right) r dr \right) \\
& + B_{4i} \int_{r_1}^{r_2} Y_n(\bar{\alpha}_{1i} r) \left(J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2) \right) r dr \\
& - \bar{\alpha}_2 \bar{\delta} \left(A_{5i} \int_{r_1}^{r_2} J_n(\bar{\alpha}_{2i} r) \left(J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2) \right) r dr \right) \\
& \left. + B_{5i} \int_{r_1}^{r_2} Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r) \left(J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2) \right) r dr \right] = 0
\end{aligned}$$

که در روابط فوق $i = 1, 2, 3 \dots N_2$, $j = 1, 2, 3 \dots N_1$ است.

اعمال تعامد بر روی دسته جواب پادمتقارن:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_1} \bar{A}_{1j} \left[(\alpha_j^2 - \alpha_{2j}^2) \left(\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \alpha_{1j}^2 - \frac{\alpha_j^2 + \delta_{2j}^2}{2} \right) (J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\alpha_j}{r} (Y_n'(\alpha_j r_2) J_{n+1}(\alpha_j r) - J_n'(\alpha_j r_2) Y_{n+1}(\alpha_j r)) \right) \int_0^l \sin(\bar{\delta}_i z) \sin(\delta_{1j} z) dz \right. \\
& \quad \left. + 2\delta_{1j} \delta_{2j} \frac{\cos(\delta_{1j} l)}{\cos(\delta_{2j} l)} \left(\left(\frac{n(n-1)}{r^2} - \alpha_j^2 \right) (J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\alpha_j}{r} (Y_n'(\alpha_j r_2) J_{n+1}(\alpha_j r) - J_n'(\alpha_j r_2) Y_{n+1}(\alpha_j r)) \right) \int_0^l \sin(\bar{\delta}_i z) \sin(\delta_{2j} z) dz \right] \\
& \quad + \left[A_{4i} \left(\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \frac{\bar{\delta}_i^2 + \bar{\alpha}_{2j}^2}{2} \right) J_n(\bar{\alpha}_{1i} r) + \frac{\bar{\alpha}_{1i}}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i} r) \right) \right. \\
& \quad \left. + B_{4i} \left(\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \frac{\bar{\delta}_i^2 + \bar{\alpha}_{2j}^2}{2} \right) Y_n(\bar{\alpha}_{1i} r) - \frac{\bar{\alpha}_{1i}}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i} r) \right) \right. \\
& \quad \left. + A_{5i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} J_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{(n+1)}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \right. \\
& \quad \left. + B_{5i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_2 Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{(n+1)}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \right. \\
& \quad \left. + A_{6i} \frac{n}{r} \left(\frac{(n-1)}{r} J_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \bar{\alpha}_{2i} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \right. \\
& \quad \left. + B_{6i} \frac{n}{r} \left(\frac{(n-1)}{r} Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \bar{\alpha}_{2i} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \right] \int_0^l \sin^2(\bar{\delta}_i z) dz = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_1} \bar{A}_{1j} \left[\frac{2n}{r} \left(\frac{(1-n)}{r} (J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \alpha_j (Y_n'(\alpha_j r_2) J_{n+1}(\alpha_j r) - J_n'(\alpha_j r_2) Y_{n+1}(\alpha_j r)) \right) \left((\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2) \int_0^l \sin(\bar{\delta}_i z) \sin(\delta_{1j} z) dz \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\delta_{1j} \delta_{2j} \frac{\cos(\delta_{1j} l)}{\cos(\delta_{2j} l)} \int_0^l \sin(\bar{\delta}_i z) \sin(\delta_{2j} z) dz \right) \right] \\
& \quad + \left[A_{4i} \frac{2n}{r} \left(\frac{(1-n)}{r} J_n(\bar{\alpha}_{1i} r) + \bar{\alpha}_{1i} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i} r) \right) \right. \\
& \quad + B_{4i} \frac{2n}{r} \left(\frac{(1-n)}{r} Y_n(\bar{\alpha}_{1i} r) - \bar{\alpha}_{1i} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i} r) \right) \\
& \quad + A_{5i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} J_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{2(n+1)}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \\
& \quad + B_{5i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{2(n+1)}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \\
& \quad + A_{6i} \left(\left(\bar{\alpha}_{2i}^2 - \frac{2n(n-1)}{r^2} \right) J_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{2\bar{\alpha}_{2i}}{r} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \\
& \quad \left. + B_{6i} \left(\left(\bar{\alpha}_{2i}^2 - \frac{2n(n-1)}{r^2} \right) Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r) - \frac{2\bar{\alpha}_{2i}}{r} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r) \right) \right] \int_0^l \sin^2(\bar{\delta}_i z) dz = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{A}_{1j} \left[\frac{(\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2)^2}{2} \sin(\delta_{1j} l) + 2\delta_{1j} \alpha_j^2 \cos(\delta_{1j} l) \tan(\delta_{2j} l) \right] \\
& \quad \times \int_{r_1}^{r_2} (J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2))^2 r dr \\
& \quad + B_{4i} \int_{r_1}^{r_2} Y_n(\bar{\alpha}_{1i} r) (J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2)) r dr \\
& \quad - \bar{\alpha}_{2i} \bar{\delta}_i \left(A_{5i} \int_{r_1}^{r_2} J_n(\bar{\alpha}_{2i} r) (J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2)) r dr \right) \\
& \quad + B_{5i} \int_{r_1}^{r_2} Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r) (J_n(\alpha_j r) Y_n'(\alpha_j r_2) - Y_n(\alpha_j r) J_n'(\alpha_j r_2)) r dr = 0
\end{aligned}$$

بیوست ت - مولفه های ماتریس M_{st}

$$M_{11.ij} =$$

$$\left[\frac{(\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2)^2}{2} \cos(\delta_{1j}l) + 2\delta_{1j}\delta_{2j}\alpha_j^2 \sin(\delta_{1j}l) \cot(\delta_{2j}l) \right] \cdot \frac{1}{2} \left[(r_2^2 - r_1^2) + \frac{n^2(p_n^2(\alpha_j r_2) - p_n^2(\alpha_j r_1))}{\alpha_j^2} \right], i =$$

$$1.2.3 \dots N_2, j = 1.2.3 \dots N_1.$$

$$M_{12.ij} = \sum_{i=1}^{N_2} (-1)^{i-1} \left[\left(\bar{\alpha}_{1i}^2 - \frac{\bar{\delta}_i^2 + \bar{\alpha}_{2i}^2}{2} \right) \Pi_J(\alpha_j, \bar{\alpha}_{1i}) - K_{1i} \bar{\alpha}_{2i} \bar{\delta}_i \Pi_J(\alpha_j, \bar{\alpha}_{2i}) - \Lambda_{1i} \bar{\alpha}_{2i} \bar{\delta}_i \Pi_Y(\alpha_j, \bar{\alpha}_{2i}) \right]$$

$$M_{13.ij} = \sum_{i=1}^{N_2} (-1)^{i-1} \left[\left(\bar{\alpha}_{1i}^2 - \frac{\bar{\delta}_i^2 + \bar{\alpha}_{2i}^2}{2} \right) \Pi_Y(\alpha_j, \bar{\alpha}_{1i}) - K_{2i} \bar{\alpha}_{2i} \bar{\delta}_i \Pi_J(\alpha_j, \bar{\alpha}_{2i}) - \Lambda_{2i} \bar{\alpha}_{2i} \bar{\delta}_i \Pi_Y(\alpha_j, \bar{\alpha}_{2i}) \right]$$

$$M_{14.ij} = \sum_{i=1}^{N_2} (-1)^{i-1} \left[K_{3i} \bar{\alpha}_{2i} \bar{\delta}_i \Pi_J(\alpha_j, \bar{\alpha}_{2i}) - \Lambda_{3i} \bar{\alpha}_{2i} \bar{\delta}_i \Pi_Y(\alpha_j, \bar{\alpha}_{2i}) \right]$$

$$M_{15.ij} = \sum_{i=1}^{N_2} (-1)^{i-1} \left[K_{4i} \bar{\alpha}_{2i} \bar{\delta}_i \Pi_J(\alpha_j, \bar{\alpha}_{2i}) - \Lambda_{4i} \bar{\alpha}_{2i} \bar{\delta}_i \Pi_Y(\alpha_j, \bar{\alpha}_{2i}) \right]$$

$$M_{21.ij} = \sum_{i=1}^{N_1} \left[(\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2) \left(\left(\frac{n(n-1)}{r_1^2} + \delta_{1j}^2 - \frac{\alpha_j^2 + \delta_{2j}^2}{2} \right) p_n(\alpha_j r_1) + \frac{\alpha_j}{r_1} Q_n(\alpha_j r_1) \right) \right. \\ \times \left(\frac{\sin((\bar{\delta}_i - \delta_{1j})l)}{2(\bar{\delta}_i - \delta_{1j})} + \frac{\sin((\bar{\delta}_i + \delta_{1j})l)}{2(\bar{\delta}_i + \delta_{1j})} \right) \\ + 2\delta_{1j}\delta_{2j} \frac{\sin(\delta_{1j}l)}{\sin(\delta_{2j}l)} \left(\left(\frac{n(n-1)}{r_1^2} - \alpha_j^2 \right) p_n(\alpha_j r_1) + \frac{\alpha_j}{r_1} Q_n(\alpha_j r_1) \right) \\ \left. \times \left(\frac{\sin((\bar{\delta}_i - \delta_{2j})l)}{2(\bar{\delta}_i - \delta_{2j})} + \frac{\sin((\bar{\delta}_i + \delta_{2j})l)}{2(\bar{\delta}_i + \delta_{2j})} \right) \right]$$

$$M_{22,ij} = \left[\left(\frac{n(n-1)}{r_1^2} + \frac{(\bar{\delta}_i^2 - \bar{\alpha}_{2i}^2)^2}{2} \right) J_n(\bar{\alpha}_{1i}r_1) + \frac{\bar{\alpha}_{1i}}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i}r_1) \right. \\ \left. + K_{1i}\bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i}J_n(\bar{\alpha}_{2i}r_1) - \frac{(n+1)}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r_1) \right) \right. \\ \left. + \Lambda_{1i}\bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i}Y_n(\bar{\alpha}_{2i}r_1) - \frac{(n+1)}{r_1} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r_1) \right) \right] \left(\frac{el}{2} \right) \cdot \begin{cases} e = 1 & \text{for } \alpha_j \neq 0 \\ e = 2 & \text{for } \alpha_j = 0 \end{cases}$$

$$M_{23,ij} = \left[\left(\frac{n(n-1)}{r_1^2} + \frac{(\bar{\delta}_i^2 - \bar{\alpha}_{2i}^2)^2}{2} \right) Y_n(\bar{\alpha}_{1i}r_1) + \frac{\bar{\alpha}_{1i}}{r_1} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i}r_1) \right. \\ \left. + K_{2i}\bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i}J_n(\bar{\alpha}_{2i}r_1) - \frac{(n+1)}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r_1) \right) \right. \\ \left. + \Lambda_{2i}\bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i}Y_n(\bar{\alpha}_{2i}r_1) - \frac{(n+1)}{r_1} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r_1) \right) \right] \left(\frac{el}{2} \right)$$

$$M_{24,ij} = \left[\frac{n(n-1)}{r_1^2} J_n(\bar{\alpha}_{2i}r_1) + \frac{n\bar{\alpha}_{2i}}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r_1) + K_{3i}\bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i}J_n(\bar{\alpha}_{2i}r_1) - \frac{(n+1)}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r_1) \right) \right. \\ \left. + \Lambda_{3i}\bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i}J_n(\bar{\alpha}_{2i}r_1) - \frac{(n+1)}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r_1) \right) \right] \left(\frac{el}{2} \right)$$

$$M_{25,ij} = \left[\frac{n(n-1)}{r_1^2} Y_n(\bar{\alpha}_{1i}r_1) + \frac{n\bar{\alpha}_{2i}}{r_1} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r_1) + K_{4i}\bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i}J_n(\bar{\alpha}_{2i}r_1) - \frac{(n+1)}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r_1) \right) \right. \\ \left. + \Lambda_{4i}\bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i}Y_n(\bar{\alpha}_{2i}r_1) - \frac{(n+1)}{r_1} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i}r_1) \right) \right] \left(\frac{el}{2} \right)$$

$$M_{31,ij} = \sum_{i=1}^{N_1} \left[\frac{-2n}{r_1} \left(\frac{(n-1)}{r_1} p_n(\alpha_j r_1) \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_j Q_n(\alpha_j r_1) \right) \left((\alpha_j^2 - \delta_{2j}^2) \left(\frac{\sin((\bar{\delta}_i - \delta_{1j})l)}{2(\bar{\delta}_i - \delta_{1j})} + \frac{\sin((\bar{\delta}_i + \delta_{1j})l)}{2(\bar{\delta}_i + \delta_{1j})} \right) \right) \right. \\ \left. \left. + 2\delta_{1j}\delta_{2j} \frac{\sin(\delta_{1j}l)}{\sin(\delta_{2j}l)} \left(\frac{\sin((\bar{\delta}_i - \delta_{1j})l)}{2(\bar{\delta}_i - \delta_{1j})} + \frac{\sin((\bar{\delta}_i + \delta_{1j})l)}{2(\bar{\delta}_i + \delta_{1j})} \right) \right) \right]$$

$$M_{32,ij} = \left[\frac{-2n}{r_1} \left(\frac{(n-1)}{r_1} J_n(\bar{\alpha}_{1i} r_1) - \delta_i J_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i} r_1) \right) + K_{1i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} J_n(\bar{\alpha}_{2i} r_1) - \frac{2(n+1)}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r_1) \right) \right. \\ \left. + \Lambda_{1i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r_1) - \frac{2(n+1)}{r_1} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r_1) \right) \right] \left(\frac{el}{2} \right)$$

$$M_{33,ij} = \left[\frac{-2n}{r_1} \left(\frac{(n-1)}{r_1} Y_n(\bar{\alpha}_{1i} r_1) - \bar{\alpha}_{1i} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{1i} r_1) \right) + K_{2i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} J_n(\bar{\alpha}_{2i} r_1) - \frac{2(n+1)}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r_1) \right) \right. \\ \left. + \Lambda_{2i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r_1) - \frac{2(n+1)}{r_1} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r_1) \right) \right] \left(\frac{el}{2} \right)$$

$$M_{34,ij} = \left[\left(\bar{\alpha}_{2i}^2 - \frac{2n(n-1)}{r_1} \right) J_n(\bar{\alpha}_{2i} r_1) - \frac{2\bar{\alpha}_{2i}}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r_1) \right. \\ \left. + K_{3i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} J_n(\bar{\alpha}_{2i} r_1) - \frac{2(n+1)}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r_1) \right) \right. \\ \left. + \Lambda_{3i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r_1) - \frac{2(n+1)}{r_1} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r_1) \right) \right] \left(\frac{el}{2} \right)$$

$$M_{35,ij} = \left[\left(\bar{\alpha}_{2i}^2 - \frac{2n(n-1)}{r_1} \right) Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r_1) - \frac{2\bar{\alpha}_{2i}}{r_1} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r_1) \right. \\ \left. + K_{4i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} J_n(\bar{\alpha}_{2i} r_1) - \frac{2(n+1)}{r_1} J_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r_1) \right) \right. \\ \left. + \Lambda_{4i} \bar{\delta}_i \left(\bar{\alpha}_{2i} Y_n(\bar{\alpha}_{2i} r_1) - \frac{2(n+1)}{r_1} Y_{n+1}(\bar{\alpha}_{2i} r_1) \right) \right] \left(\frac{el}{2} \right)$$

$$\Pi_J(\alpha, \beta) = \beta \left(\frac{r_2 J'_n(\beta r_2) p_n(\alpha r_2) - r_1 J'_n(\beta r_1) p_n(\alpha r_2)}{\alpha^2 - \beta^2} \right)$$

$$\Pi_Y(\alpha, \beta) = \beta \left(\frac{r_2 Y'_n(\beta r_2) p_n(\alpha r_2) - r_1 Y'_n(\beta r_1) p_n(\alpha r_2)}{\alpha^2 - \beta^2} \right)$$

$$P_n(\alpha_j r) = Y'_n(\alpha_j r_2) J_n(\alpha_j r) - J'_n(\alpha_j r_2) Y_n(\alpha_j r)$$

$$Q_n(\alpha_j r) = Y'_n(\alpha_j r_2) J_{n+1}(\alpha_j r) - J'_n(\alpha_j r_2) Y_{n+1}(\alpha_j r)$$

مقادیر $M_{4k,ij}$ و $M_{5k,ij}$ با جایگذاری r_2 به جای r_1 به ترتیب در $M_{2k,ij}$ و $M_{3k,ij}$ حاصل

می گردد.

- [1] www.asd-www.larc.nasa.gov
- [2] www.Shetech.org
- [3] www.gare.co.uk
- [4] M. F. Rose. (1996), "Space Power Technology." *Aerospace and Electronic Systems Magazine. IEEE Publication.*
- [5] J.A. Kirk. P.A. Studer. (1976), "Mechanical Capacitor." NASA TND-8185.
- [6] S. C. Thielman. (1997), "Design and optimization of a material property distribution in a composite flywheel." *Ph.D Thesis. University of Washington.*
- [7] V. Babuska. S. M. Beaty. B. J. deBlonk. J. L. Fausz. (March 2004), "A review of technology developments in flywheel attitude control and energy transmission systems." *Aerospace Conference. 2004 IEEE Volume 4. Issue . 6-13 Page(s): 2784 - 2800 Vol.4.*
- L. S. Mason. S. R. Oleson. (2000), "Spacecraft impacts with advanced power and electric propulsion." *Aerospace Conference Proceedings. 2000 IEEE. Volume 4. Issue. 2000 Page(s):29 - 38 vol.4.*
- [8] J. G. Batterly. (1997), "Flywheel technology- past, present, and 21st century projections." *Energy Conversion Engineering Conference. 1997. IECEC-97. Proceedings of the 32nd Intersociety. Publication Date: 27 Jul-1 Aug 1997 Vol. 4.*
- [9] T. J. Pieronk. D. k. Decker. V. A. Spector. (1997), "Spacecraft flywheel systems-benefits, and issues." *Aerospace and Electronics Conference, . Proceedings of the IEEE 1997 National Publication Date: 14-18 Jul 1997 Volume: 2. On page(s): 589-593 vol.2*

- [10] D. D. Havenhill. (May 1998), "Spacecraft energy storage systems." *Aerospace and Electronic Systems Magazine. IEEE Publication. Vol.13.*
- [11] D. A. Christopher. L. C. Done. (Mar 1998), "Flywheel technology and potential benefits for aerospace applications." *Aerospace Conference. 1998. Proceedings. IEEE Volume 1. Issue. 21-28 Page(s):159 - 166 vol.1.*
- [12] J. Edward. J. W. Aldrich. (1997), "Flight test demonstration of a flywheel energy storage system on the International Space Station." *Aerospace and Electronics Conference. 1997. NAECON 1997. Proceedings of the IEEE National Volume 2. Issue. 14-18 Jul 1997 Page(s):617 - 621 vol.2.*
- [13] J. Leslie. P. Rinke. (Sep 1993), "Tutorial overview of flywheel energy storage in a photovoltaic power generation system." *Electrical and Computer Engineering. Canadian Conference on Volume. Issue. 14-17 Sep 1993 Page(s):1161 - 1164 vol.2.*
- [14] B. H. Kenny. P. E. Kascak. R. Jansen. T. Dever. W. Santiago. (JULY/AUGUST 2005), "Control of a high-speed flywheel system for energy storage in space applications." *IEEE Transactions on Industry Applications. VOL. 41. NO. 4. JULY/AUGUST 2005.*
- [15] A. S. Nagorny. N. V. Dravid. R. H. Jansen. (May 2005), "Design aspects of a high speed permanent magnet synchronous motor-generator for flywheel applications." *Electric Machines and Drives. 2005 IEEE International Conference on Volume . Issue . 15-18 Page(s): 635 - 641.*
- [16] S.R. Holm. H. Polinder. J. A. Ferreira. (MAY 2007), "Analytical Modeling of a Permanent-Magnet Synchronous Machine in a Flywheel." *IEEE Transactions on Magnetics. VOL. 43. NO. 5.*
- [17] W. Wang. H. Hafman. C. E. Bakis. (2005), "Ultrahigh Speed Permanent Magnet Motor-Generator for Aerospace Flywheel Energy Storage Applications." *Electric Machines and*

- Drives. IEEE International Conference on Volume . Issue . 15-18 May 2005 Page(s): 1494 - 1500.*
- [18] T. Siostrzonek, S. Pirog, (2006), "The Flywheel Energy Storage with Brushless DC Motor with the Practical Results." *EPE-PEMC IEEE Conference.*
- [19] Z. Yan, D. Patterson, (1998), "Design of power electronics for a satellite flywheel energy storage system." *NASA SBIR contract # NAS8-40550.*
- [20] D. Christopher, R. F. Beach, J. R. Barton, (1996), "A flywheel energy storage system test on the International Space Station." *NASA Lewis Research Center.*
- [21] N. Bernard, H. B. Ahmed, B. Multon, (May/June 2004), "Design and modeling of a slotless and homopolar axial-field synchronous machine for a flywheel accumulator." *IEEE Transactions on Industry Applications, VOL. 40, NO. 3.*
- [22] C. Zhang, K. J. Tseng, (2007), "A Novel Flywheel Energy Storage System With Partially-Self-Bearing Flywheel-Rotor." *IEEE Transactions on Energy Conversion, VOL. 22, NO. 2.*
- [23] F. Sahin, A. M. Tuckey, A.J.A. Vandenput, (Oct 2001) . "Design, development and testing of a high-speed axial-flux permanent-magnet machine." *Thirty-Sixth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2001 IEEE Volume 3, Issue . 30 Sep-4 Page(s):1640 - 1647 vol.3*
- [24] K. Sitapati and R. Krishnan, (Oct. 2001), "Performance comparisons of radial and axial field, permanent-magnet, brushless machine." *IEEE Trans. Ind. Appl., vol. 37, pp. 1219-1226.*
- [25] Z.O. Zhu, D. Howe, (July 2001), "Halbach permanent magnet machines and applications." *IEE Proc.-Electr. Power Appl., Vol 148, No. 4.*
- [26] 24K. Atallah, D. How, P. H. Mellor, (Sep 1997), "Design and analysis of multi-pole Halbach (self-shielding) cylinder brushless permanent magnet machines." *Electrical*

- Machines and Drives. 1997 Eighth International Conference on (Conf. Publ. No. 444)*
Volume . Issue . 1-3 Page(s):376 - 380.
- [27] J.R. Hull, L.R. Turner, (**July 2000**). “Magnetomechanics of internal-dipole, Halbach-array motor-generators.” *IEEE Transactions on Magnetics*, VOL. 36, NO. 4.
- [28] T.M. Mulcahy, J.R. Hull, K.L. Uherka, (**March 2001**). “Test results of 2-kWh flywheel using passive PM and HTS bearings.” *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, VOL. 11, NO. 1.
- [29] Xiuhe Wang, Yubo Yang, Dajin Fu, (**2003**), “Study of cogging torque in surface-mounted permanent magnet motors with energy method”. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 267 , 80–85
- [30] Leila Parsa, Lei Hao, Hamid A. Toliyat, (**2000**), “Optimization of Average and Cogging Torque in 3-phase IPM Motor Drives”. 0-7803-7420-7/02/\$17.0.
- [31] Jang-Sung Chun and Hyun-Kyo Jung, (**March 1997**), “Shape Optimization of Closed Slot Type Permanent Magnet Motors for Cogging Torque Reduction using Evolution strategy”. *IEEE Transactions on magnetics*, VOL33, NO2.
- [32] Dong-Hun Kim, Il-Han Park, Joon-Ho Lee, and Chang-Eob Kim, (**MAY 2003**), “Optimal Shape Design of Iron Core to Reduce Cogging Torque of IPM Motor”. *IEEE Transactions on magnetics*, VOL. 39, NO. 3
- [33] Liang-Yi Hsu, Mi-Ching Tsai, (**2004**) , “Tooth shape optimization of brushless permanent magnet motors for reducing torque ripples”. *Elsevier, Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 282 (2004) 193–197
- [34] Sung-Il Kim, Ji-Young Lee, Young-Kyoun Kim, Jung-Pyo Hong, Yoon Hur, Yeon-Hwan Jung, . (**MAY 2005**), “Optimization for Reduction of Torque Ripple in Interior Permanent Magnet Motor by Using the Taguchi Method”. *IEEE Transactions on magnetics*, VOL. 41, NO. 5.

- [35] Bojan tumberger. Gorazd tumberger. Miralem Hadz . Ivan Zagradis nik. "Torque ripple reduction in exterior-rotor permanent magnet synchronous.
- [36] C. Hwang. M.H. Wu. S.P. Cheng. (2006), "In.uence of pole and slot combinations on cogging torque in fractional slot PM motors ". Elsevier Science Ltd.
- [37] David Eby. R. C. Averill." An injection Island GA for flywheel design optimization ". Michigan state university
- [38] Christos C. Chamis. Louis J. Kiraly. (1976), "Rim-Spke Composite Flywheels- Stress And Vibration Analysis". NASA Technical note.
- [39] Wensen Wang. Danhong Zhong. Heath Hofmann. (2003), "Design of High-Speed Permanent Magnet Machine for Small Flywheels". 1st International Energy Conversion Engineering Conference. AIAA 6071
- [40] Mehmet Ali Arslan. (2007), "Flywheel geometry design for improved energy storage using finite element analysis" Materials and Design.
- [41] John A. Akpobi. Imafidon A. Lawani, (2006), Computer-aided-design of flywheels". Advances in Engineering Software. Elsevier Science Ltd.
- [42] D. Johnson. P. Pillay . M Malengret. (2001), " High speed PM motor with hybrid magnetic bearing for kinetic energy storage". IEEE.
- [43] Martin H. Sadd, (2005) ."Elasticity .Theory. Applications. and numerics". TLF ebook. Elsevier . ISBN 0-12-605811-3
- [44] Xingjian Dai. Zupei Shen. Haigang Wei. (2001), "on the vibration of rotor-bearing system with squeeze film damper in an energy storage flywheel". Elsevier Science Ltd.
- [45] a.tonoli. (1998) , " Analysis of Losses Due to Rotor Vibrations in a High-TC Superconducting Flywheel System". Journal of Sound and Vibration 212(4).649-662

- [46] Takashi Hikihara. V, (1999), " Dynamical Behavior of Flywheel Rotor Suspended By Hysteretic Force of HTSC Magnetic Bearing". *Journal of Sound and Vibration* 228(4), 871-887
- [47] X. Dai, X. Zhang, X. Jin. (200), "The partial and full rubbing of a flywheel rotor-bearing-stop system". Elsevier Science Ltd.
- [48] Rainer Leuschke, Brian C. Fabien. (2007), " Disturbance Attenuation Using a dc Motor for Radial Force Actuation in a Rotordynamic System" *Transactions of the ASME*.
- [49] J.R. Barber, (2004), "Elasticity", Kluwer Academic Publishers: New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.
- [50] S. Timoshenko, (1937), "Vibration Problems in Engineering", second edition, D. Van Nostrand Company, INC.
- [51] Lord Rayleigh, (1889), " on the free vibration of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter", *proc. London math*
- [52] H. Lamb, (1917), "on waves in an elastic plate", *Proc. Roy. Soc. A*93, 114-128
- [53] S.P. Timoshenko, (1921) , "on the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars", *Philos. Mag. Ser. 641* ,744-746.
- [54] Love , (1944) , "A treatise on the mathematical theory of electricity"
- [55] Flügge, Wilhelm, (1973), "Stresses in Shells", second Edition Berlin: Springer-Verlag, 1973. 525
- [56] Donnell, (1933), "Stability of orthotropic thin-walled cylindrical shells under torsion", NASA.
- [57] Reissner, (1941), "On Transverse Vibrations of Thin, Shallow Elastic Shells",
- [58] J.L. Sanders Jr., (1959), "an improved first-approximation theory for thin shells, NASA Technical Report R-24.
- [59] Lord Rayleigh, (1887), "On the Uniform, Deformation in Two Dimensions of a Cylindrical Shell of Finite Thickness, with application to the General Theory of Deformation of Thin Shells", *proc. London math*.
- [60] L. Pochhammer, (1876), "Uber die fortp flanzungsgesch windigkeiten kleiner schwingungen in einem unbegrenzten isotropen kreiscylinder", *Zeitschrift fur Reine und Angewandte Mathematik* 81 (1876) 324–336.

- [61] C. Chree, (1889), "The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 14 (1889) 250–309.
- [62] F. B. PIDDUCK, (1919), "The Vibrations and stability of a rotating cylinder", *Proc. London Math. Soc.* 1920 s2-18: 393-402.
- [63] Naismith Sneddon, "Fourier Transforms" , published by courier dover publication
- [64] G.W. McMahan, (1964), "Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders", *Journal of the Acoustical Society of America* 36 (1) (1964) 85–92.
- [65] Nagaya, (1985), "Vibrations of a thick-walled pipe or a ring of arbitrary shape in its plane", 757-764 (1983). *Ocean Engineering*, 111 (2), 337-353
- [66] Hermann, G. and Mirsky, I., (1956), "Three-Dimensional and Shell-Theory Analysis ", pp. 255-262. 3
- [67] D.C. Gazis, (1958), "Exact analysis of the plane-strain vibrations of thick-walled hollow cylinders", *Journal of the Acoustical Society of America*.
- [68] BIRD, J. F. ; Hart, R. W. ; McClure, F. T., (1960), "Vibrations of Thick-walled Hollow Cylinders Exact Numerical Solutions", dtic, AD0626737.
- [69] Cinelli, G., (1965), "an extension of the finite Hankel transform and applications", *International Journal of. Engineering Science*, 3, pp. 539–559.
- [70] Cinelli, G., (March 1966), "Dynamic vibrations and stresses in elastic cylinders and spheres", *Journal of Applied Mechanics* 33.
- [71] J.R. Hutchinson, (1971), "Axisymmetric vibrations of a free finite length rod", *Journal of the Acoustical Society of America* 51, 233–240.
- [72] A.E. Armenakas, (1967) , "Propagation of harmonic waves in composite circular cylindrical shells", *Theoretical investigations, AIAA Journal* 5 (1967) 740–744
- [73] Y.K. Cheung and C.I. Wu, (1972), "Free vibrations of thick, layered cylinders having finite length with various boundary conditions", *Jornal of Sound and Vibrations* 24 .
- [74] G.M. Gladwell, U.C. Tahbaldar, (1972) , "Finite element analysis of axisymmetric vibrations of cylinders", *Journal of Sound and Vibration* 22 (1972) 143–157.
- [75] J.R. Hutchinson, (1972), "Axisymmetric vibrations of a free finite length rod", *Journal of Acoust. Soc. Am.* 51 (1972), pp. 233–240.

- [76] G.M. Gladwell, D.K. Vijay, (1975), "Natural frequencies of free finite length circular cylinders", *Journal of Sound and Vibration* 42 (1975) 387–397.
- [77] J.R. Hutchinson, (1980), "Vibrations of solid cylinders", *Journal of Applied Mechanics* 47 (1980) 901–907.
- [78] J.R. Hutchinson, S.A. El-Azhari, (1986), "Vibrations of free hollow circular cylinders", *Journal of Applied mechanics* 53 (1986) 641–646.
- [79] R.K. Singal, K. Williams, (1988), "A theoretical and experimental study of vibrations of thick circular cylindrical shell and rings", *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design* 110 (1988) 533–537.
- [80] Harutoshi Kobayashi, K. Ishimaru, H. Matsumura, K. Sonoda, (1994), "Free Vibration Analysis of Multi-Layered, Thick-Walled Hollow Cylinders", *Mem. Fac. Eng., Osaka City Univ.*, Vol.35, pp.111-130.
- [81] A.W. Leissa, J. So, (1995), "Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis", *Journal of the Acoustical Society of America* 98 (1995) 2136–2141.
- [82] J. So, A.W. Leissa, (1997), "Free vibration of thick hollow circular cylinders from three-dimensional analysis", *Journal of Vibration and Acoustics* 119 (1997) 89–95.
- [83] Ghosh, A, (1995), "Axisymmetric vibration of a long cylinder", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 186, issue 5, pp. 711-721.
- [84] H. Wang, K. Williams, (1996), "Vibrational modes of thick cylinders of finite length", *Journal of Sound and Vibration* 191 (1996) 955–971.
- [85] Hosseini Hashemi Sh., and Javid H., (1998), "Analysis of torsional vibration of hollow cylinder with elliptical cross section", *Proceedings of 6th Annual International Conference on Mechanical Engineering, Tehran, Iran*.
- [86] M. F. Mekhtiev, R. M. Bergman, (2001), "Asymptotic Analysis Of The Dynamic Problem Of The Theory Of Elasticity For a Transverse Isotropic Hollow Cylinder", *Journal of Sound and vibration* (2001) 244(2), 177,194.
- [87] Yü, C. B. Y.; Buchanan, G. R., (2001), "The Effect of the Poisson Ratio on the Vibration of Hollow Circular Finite-Length Cylinders", *Journal of Sound and Vibration*, Volume 248, pp. 187-194 (2001).

- [88] AV Singh, L Subramaniam, (2003), "Vibration of thick circular disks of shells and revolution", *journal of applied mechanics* 70:22, 292-298, American Society of Mechanical Engineers.
- [89] D. Zhou, Y.K. Cheung, S.H. Lo, F.T.K. Au, (2003), "3D vibration analysis of solid and hollow circular cylinders via Chebyshev–Ritz method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* ", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192, 1575–1589.
- [90] D.D. Ebenezer, K.Ravichandran, Chandramouli Padmanabhan, (2005), "Forced vibrations of solid elastic cylinders", *Journal of Sound and Vibration* 282 991–1007.
- [91] D.D. Ebenezer, K. Nirnimesh, Rahul Barman, Rajnish Kumar, Shashi Bhushan Singh, (2008), "Analysis of solid elastic cylinders with internal losses using complete sets of functions", *Journal of Sound and Vibration* 310 , 197–216.
- [92] Shuyu Lin, (2007), "Coupled vibration of isotropic metal hollow cylinders with large geometrical dimensions", *Journal of Sound and Vibration* 305, 308–316.
- [93] Francisco J. Nievesa, Ana Bayon, Francisco Gascon, (2008), "Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinders", *Journal of Sound and Vibration* 311, 588–596.
- [94] D. J. Mead and A. J. Pretlove, (1956), "Free vibrations of a stiffened cylindrical shell", P. R. Miller, ARC/R&M-3363.
- [95] M.R. Mofakhami, H.H. Toudeshky, Sh.H. Hashemi, (2006), "Finite cylinder vibrations with different end boundary conditions", *Journal of Sound and Vibration* 297 (2006) 293–314.
- [96] M.R. Mofakhami, H.H. Toudeshky, Sh.H. Hashemi, (2008), "Sound transmission into a thick hollow cylinder with the fixed-end boundary condition", *Applied Mathematical Modelling*, 2008 doi:10.1016/j.apm.2008.03.002.
- [97] Kanti B. Datta and B.M Mohan, (1995), "orthogonal functions in systems and control", world scientific pub. Co.

Abstract

The aim of this work is studying the vibration of an elastic, thick, finite and hollow cylinder when subjected to the constant angular velocity that the Flywheel of the satellite electromechanical battery is one of its applications. This goal is investigated on the basis of the linear 3D theory of elasticity and an analytical solution is presented. At first a general solution for the vibration of the cylinders affected by the general body force is offered. For this purpose the Navier equation in cylindrical coordinates expressed. The reason of using Navier equation is getting accurate solution, less calculations and executable for different geometries and different materials. With using the orthogonalization technique more boundary conditions are satisfied.

Then with using the relations between displacement and force and also the equation of tensions the matrix of the equations can write. Some of boundary conditions are approximately satisfied using orthogonal property of the Trigonometric and Bessel functions. Then the frequencies are extracted.

The vibration of the cogging torque does produces in Flywheel of the electromechanical battery because of the interactive between magnet poles and machine slot that doesn't do that studied with presented method.

In this dissertation for deriving the numerical results using Maple code. The numerical results are compared with the last researches for static cylinders.

Keywords

Cylinder, Vibration, Flywheel, Electromechanical Battery, Orthogonal Functions, Variable Separation, Cogging Torque



Shahrood University of Technology
Mechanical Engineering Department

M.Sc. Dissertation-Mechanical engineering

***An analytical study of the vibrations of the cylinder in the
electromechanical battery energy storage system***

Leila Yazdanparast

Supervisor: Dr. Ardeshir Karami Mohamadi

Summer 2009