



دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

گروه جامدات

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

کاهش ارتعاش تیرهای در معرض بارهای در حال حرکت، به کمک جاذب سه‌المانه‌ی

خطی و غیر خطی

اساتید راهنما:

دکتر اردشیر کرمی محمدی

دکتر امیر جلالی

شهریور ۹۴



دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

فرم صورت جلسه‌ی دفاع پایان‌نامه‌ی تحصیلی، دوره‌ی کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج)، جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه‌ی

کارشناسی ارشد آقای رشته‌ی گرایش

..... تحت عنوان

که در تاریخ با حضور هیأت محترم داوران، در دانشگاه صنعتی شاهرود

برگزار گردید به شرح زیر است:

| | | | | | |
|---------------------------------------|--------------------------|-----------|--------------------------|-------|--------------------------|
| قبول (با درجه : امتیاز) | <input type="checkbox"/> | دفاع مجدد | <input type="checkbox"/> | مردود | <input type="checkbox"/> |
|---------------------------------------|--------------------------|-----------|--------------------------|-------|--------------------------|

۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹)

۱- عالی (۱۹ - ۲۰)

۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

| امضاء | مرتبه‌ی علمی | نام و نام خانوادگی | اعضای هیأت داوران |
|-------|--------------|--------------------|-----------------------------------|
| | | | ۱- استاد راهنمای اول |
| | | | ۲- استاد راهنمای دوم |
| | | | ۳- استاد مشاور |
| | | | ۴- نماینده‌ی شورای تحصیلات تکمیلی |
| | | | ۵- استاد ممتحن |
| | | | ۶- استاد ممتحن |

تأیید رئیس دانشکده

گروه: طراحی کاربردی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد آقای حسین لکزیان

تحت عنوان:

کاهش ارتعاش تیرهای در معرض بارهای در حال حرکت، به کمک جاذب سه‌المانه‌ی خطی و غیر خطی

در تاریخ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

مورد ارزیابی و با درجه‌ی مورد پذیرش قرار گرفت.

| امضاء | اساتید مشاور | امضاء | اساتید راهنما |
|-------|---------------------|-------|---------------------|
| | نام و نام خانوادگی: | | نام و نام خانوادگی: |
| | نام و نام خانوادگی: | | نام و نام خانوادگی: |

| امضاء | نمایندگی تحصیلات تکمیلی | امضاء | اساتید داور |
|-------|-------------------------|-------|---------------------|
| | نام و نام خانوادگی: | | نام و نام خانوادگی: |
| | | | نام و نام خانوادگی: |
| | | | نام و نام خانوادگی: |
| | | | نام و نام خانوادگی: |

تقدیم

تقدیم بمہمانت مقلدین حضرت

ولی عصر (عج)، تقدیم بمہمان

گراںقدر کم ہرچہ کارم ان لوہت و

تقدیم بمیلن عزیزم کم کن تمام

مشکل ہا پخت و پناہ من بوجہ.

تشکر و قدردانی

از تمام کسانی که در انجام این پایان نامه به
بندگی یاری رساندند، علی الخصوص از استادان
گرامقدر، خانوادگی عزیزم و دوستان همراهِ،
کمال تشکر و سپاس را دارم. در صورتی که
خوانندگان محترم در رابطه با مطالب این پایان-
نامه سوال داشتند، می‌توانند با آدرس
الکترونیکی

HOSSEIN3418990@HOTMAIL.COM

مکاتبه نمایند.

تعهدنامه

اینجانب حسین نکرزبان، دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک، گرایش طراحی کاربردی، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی کاهش ارتعاش تیرهای در معرض بارهای در حال حرکت، به کمک جاذب سه المانه‌ی خطی و غیرخطی، تحت راهنمایی دکتر اردشیر کرمی محمدی و دکتر امیر جلالی، متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه، تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (با بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

• تاریخ

• امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصول‌های آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه، بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

• چکیده

کار حاضر به بررسی اثربخشی جاذب‌های دینامیکی به کار رفته برای تیر اولر-برنولی، با تکیه‌گاه-های ساده، که تحت تأثیر بار نقطه‌ای متناوب و یا بار درحال حرکت است می‌پردازد. در این کار از جاذب‌های دینامیکی مختلفی استفاده شده است:

الف) جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل: جرم، یک فنر خطی و یک فنر غیرخطی؛ ب) جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل: جرم، یک فنر غیرخطی و یک دمپر ویسکوز؛ ج) جاذب دینامیکی سه-المانه، شامل: جرم، یک فنر خطی، یک فنر غیرخطی و دمپر ویسکوز.

برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر آنها، از تکنیک ساده‌ای استفاده شده است. در ابتدا معادلات حاکم بر سیستم استخراج شده، بی‌بعد گردیده و با تغییر متغیر مناسب و استفاده از روش گلرکین، معادلات به فرم کلی یک معادله‌ی ماتریسی درآمده‌اند. در نهایت با استفاده از روش تحلیلی مقیاس‌های چندگانه، به حل مسئله پرداخته شده است. تشدیدهای اصلی و سوپرهارمونیک مورد مطالعه قرار گرفته و نمودارهای پاسخ فرکانسی ترسیم گشته‌اند و برای جاذب سه-المانه، در حالت تشدید سوپرهارمونیک، اثر پارامترهای مختلف، بر روی منحنی پاسخ فرکانسی بررسی شده و همچنین تأثیر مقدار و محل نیروی تحریک، بر روی مکان بهینه‌ی جاذب بررسی شده است.

• واژگان کلیدی:

جاذب‌های دینامیکی، تشدید سوپرهارمونیک، روش مقیاس‌های چندگانه، بارهای درحال حرکت، کاهش ارتعاشات تیر، روش گلرکین، ارتعاشات غیرخطی.

مقالات

➤ نشریه روش‌های عددی در مهندسی: بررسی عملکرد جاذب‌های دینامیکی خطی و

غیرخطی برای تیرهای در معرض بارهای در حال حرکت

➤ اولین کنفرانس ملی مکانیک - مواد و فناوری‌های پیشرفته: کاهش ارتعاشات تیر در

معرض بار گسترده‌ی متناوب با استفاده از جاذب دینامیکی غیرخطی

مطالب

- فصل ۱ مقدمه ۱
- ۱-۱ پیش‌گفتار ۲
- ۲-۱ روش‌های کنترل ارتعاشات ۲
- ۳-۱ نگاهی به تاریخچه‌ی استفاده از جاذب‌ها در پل‌ها ۴
- ۴-۱ اهداف پایان‌نامه و نگاهی کلی به فصول آینده ۷
- فصل ۲ معرفی جاذب‌ها ۹
- ۱-۲ انواع جاذب‌ها ۱۰
- ۲-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی افقی ۱۰
- ۳-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی عمودی ۱۰
- ۴-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی پاندولی ۱۲
- ۵-۲ کاربرد جاذب‌ها ۱۳
- ۶-۲ کاربرد جاذب‌ها در پل‌ها ۱۳
- ۷-۲ کاربرد جاذب‌ها در ساختمان‌ها و برج‌ها ۱۴
- فصل ۳ مروری بر اطلاعات پایه‌ی به‌کار رفته در پایان‌نامه ۲۱
- ۱-۳ بدست آوردن معادله‌ی حرکت تیر، با استفاده از روش نیوتن ۲۲
- ۲-۳ بررسی انواع شرایط مرزی در تیرها ۲۵
- ۳-۳ مسائل مقدار ویژه ۲۷
- ۴-۳ روابط تعامد ۲۸

- ۳-۵ شیوه‌ی گلرکین ۲۹
- ۳-۶ روش مقیاس‌های چندگانه ۳۰
- فصل ۴ بررسی جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل دو-فتر (یکی خطی و دیگری غیرخطی)، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده ۳۵
- ۴-۱ جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل دو فتر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تأثیر بار کوچک گسترده‌ی متناوب ۳۶
- ۴-۱-۱ مدل مسئله و استخراج معادلات ۳۶
- ۴-۱-۲ بی‌بعدسازی مسئله ۳۷
- ۴-۱-۳ ساده‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، به فرم ماتریسی، با استفاده از روش گلرکین ۳۸
- ۴-۱-۴ حل مسئله برای تشدید اصلی، به کمک مقیاس‌های چندگانه ۴۰
- ۴-۱-۵ حل مسئله برای تشدید اصلی، به کمک حل ترکیبی هارمونیک بالانس و مقیاس-های چندگانه ۴۳
- ۴-۱-۶ نتایج عددی ۵۰
- ۴-۲ جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل دو فتر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تأثیر بار متمرکز متناوب ۵۵
- ۴-۲-۱ مدل مسئله ۵۵
- ۴-۲-۲ بی‌بعدسازی مسئله ۵۶
- ۴-۲-۳ ساده‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، به فرم ماتریسی، با استفاده از روش گلرکین ۵۶

| | |
|--|----|
| ۴-۲-۴ محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی (خطی و غیرخطی)..... | ۵۸ |
| ۴-۲-۵ حل مسئله برای تشدید اصلی، به کمک مقیاس‌های چندگانه..... | ۶۱ |
| ۴-۲-۶ حل مسئله برای تشدید سوپرهارمونیک، به کمک مقیاس‌های چندگانه..... | ۶۵ |
| ۴-۲-۷ نتایج عددی..... | ۶۷ |
| ۴-۲-۷-۱ رسم منحنی پاسخ فرکانسی..... | ۶۷ |
| ۴-۲-۷-۲ بررسی پارامترهای تأثیرگذار، بر روی فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی | |
| | ۷۰ |
| فصل ۵ بررسی جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل فنر و دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده | |
| | ۷۵ |
| جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل فنر و دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تأثیر | |
| بار نقطه‌ای متناوب..... | ۷۶ |
| ۵-۱ مدل مسئله..... | ۷۶ |
| ۵-۲ بی‌بعدسازی مسئله..... | ۷۷ |
| ۵-۳ ساده‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، به فرم ماتریسی، با استفاده از روش گلرکین..... | ۷۷ |
| ۵-۴ حل مسئله برای تشدید اصلی، به کمک مقیاس‌های چندگانه..... | ۸۰ |
| ۵-۵ حل مسئله برای تشدید سوپرهارمونیک، به کمک مقیاس‌های چندگانه..... | ۸۴ |
| ۵-۶ نتایج عددی..... | ۸۵ |
| فصل ۶ بررسی جاذب دینامیکی سه-المانه، شامل دو فنر و یک دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه- | |
| های ساده | |
| | ۸۹ |

- ۱-۶ جاذب دینامیکی سه-المانه، شامل دو فنر و یک دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده،
 تحت تأثیر بار متمرکز متناوب ۹۰
- ۱-۱-۶ مدل مسئله ۹۰
- ۲-۱-۶ بی‌بعدسازی مسئله ۹۱
- ۳-۱-۶ ساده‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، به فرم ماتریسی، با استفاده از روش گلرکین
 ۹۲
- ۴-۱-۶ حل مسئله برای تشدید اصلی، به کمک مقیاس‌های چندگانه ۹۴
- ۵-۱-۶ حل مسئله برای تشدید سوپرهارمونیک، به کمک مقیاس‌های چندگانه ۹۹
- ۶-۱-۶ نتایج عددی ۱۰۰
- ۲-۶ جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل دو فنر و یک دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده،
 در معرض بار در حال حرکت ۱۲۰
- ۱-۲-۶ مدل مسئله و استخراج معادلات ۱۲۰
- ۲-۲-۶ بی‌بعدسازی مسئله ۱۲۱
- ۳-۲-۶ ساده‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، به فرم ماتریسی، با استفاده از روش گلرکین
 ۱۲۲
- ۴-۲-۶ حل مسئله برای سرعت بحرانی، به کمک مقیاس‌های چندگانه ۱۲۴
- ۵-۲-۶ حل مسئله برای تشدید سوپرهارمونیک، به کمک مقیاس‌های چندگانه ۱۲۷
- ۶-۲-۶ نتایج عددی ۱۲۹
- فصل ۷ بررسی اثرهای جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی و غیرخطی، در کاهش ارتعاشات تیر
 در معرض بار در حال حرکت ۱۳۵

- ۱-۷ بدست آوردن معادله‌های حاکم بر سیستم‌های دینامیکی ۱۳۶
- ۱-۱-۷ مدل سه-المانه (شامل دو فنر و یک دمپر): ۱۳۶
- ۲-۱-۷ مدل دو-المانه (شامل فنر و دمپر): ۱۳۶
- ۲-۷ اعتبارسنجی ۱۴۲
- ۳-۷ بررسی عملکرد جاذب دینامیکی سه-المانه، در مواجهه با بارهای در حال حرکت ۱۴۴
- ۱-۳-۷ جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی (دارای فنرهای خطی) ۱۴۴
- ۲-۳-۷ جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی (دارای دو فنر غیرخطی) ۱۴۵
- ۳-۳-۷ جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی-غیرخطی ۱۴۶
- ۴-۳-۷ جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی-خطی ۱۴۷
- ۴-۷ بهینه کردن انواع جاذب‌های دینامیکی، در مواجهه با بارهای در حال حرکت ۱۴۸
- ۱-۴-۷ بهینه کردن جاذب‌های دینامیکی، با توجه به ماکزیمم خیز تیر ۱۴۸
- ۱-۱-۴-۷ بهینه کردن جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی ۱۴۸
- ۲-۱-۴-۷ بهینه کردن جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی (دارای هر دو فنر غیرخطی) ۱۵۱
- ۳-۱-۴-۷ بهینه کردن جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی-غیرخطی ۱۵۳
- ۴-۱-۴-۷ بهینه کردن جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی-خطی ۱۵۶
- ۲-۴-۷ بهینه کردن جاذب‌های دینامیکی، با روش بازده ۱۶۲
- ۱-۲-۴-۷ بهینه کردن بازده‌ی جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی ۱۶۳
- ۲-۲-۴-۷ بهینه کردن بازده‌ی جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی (دارای دو فنر

غیر خطی) ۱۶۵

۳-۲-۴-۷ بهینه کردن بازدهی جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی-غیر خطی ۱۶۸

۴-۲-۴-۷ بهینه کردن بازدهی جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیر خطی-خطی ۱۷۰

فصل ۸ جمع‌بندی نتایج ۱۷۷

بحث و نتیجه‌گیری ۱۷۸

مراجع ۱۸۱

شکل‌ها

- شکل ۱-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی افقی و طرح کلی آن ۱۱
- شکل ۲-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی عمودی و طرح کلی آن ۱۱
- شکل ۳-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی صاف ۱۲
- شکل ۴-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی بلند ۱۲
- شکل ۵-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی پاندولی و طرح کلی آن ۱۳
- شکل ۶-۲ نمایی از پل هزاره‌ی لندن ۱۵
- شکل ۷-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی عمودی به‌کار رفته در پل هزاره‌ی لندن ۱۵
- شکل ۸-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی افقی به‌کار رفته در پل هزاره‌ی لندن ۱۶
- شکل ۹-۲ (الف) میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی افقی در پل المپیک؛ (ب) پل المپیک واقع در تورین ایتالیا ۱۶
- شکل ۱۰-۲ برج مشعل واقع در دوحه‌ی قطر ۱۷
- شکل ۱۱-۲ میراگر جرمی پاندولی به‌کار رفته در برج مشعل ۱۷
- شکل ۱۲-۲ نمایی از طرح جاذب به‌کار رفته در برج مشعل ۱۸
- شکل ۱۳-۲ (الف) میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی عمودی به‌کار رفته در برج ادینبرگ؛ (ب) برج کنترل ترافیک هوایی در ادینبرگ ۱۸
- شکل ۱-۳ طرحی از تیر، تحت انحراف سطحی ۲۳
- شکل ۲-۳ المان بی‌نهایت کوچک تیر تغییر شکل داده شده ۲۳
- شکل ۳-۳ انواع شرایط مرزی ۲۶
- شکل ۴-۳ تیر یکسر گیردار، با میرایی گسسته و سفتی در انتهای آزاد ۲۶
- شکل ۱-۴ تیر متصل به جاذب دو-المانه، شامل دو فنر ۳۶
- شکل ۲-۴ منحنی‌های دامنه‌ی پاسخ بر حسب پارامتر تنظیم، زمانی که

۵۳ $\omega = 5.2539, e^* = -1.0751, v^* = -0.1005, u_n = 0.9963$

۵۴ شکل ۳-۴ منحنی‌های دامنه‌ی پاسخ بر حسب پارامتر تنظیم

۵۵ شکل ۴-۴ تیر متصل به جاذب دو-المانه، شامل دو فنر، در معرض بار متمرکز متناوب

شکل ۵-۴ منحنی پاسخ فرکانسی، برای پاسخ تشدید سوپرهارمونیک نوسانگر اولیه به همراه

جاذب، وقتی که، $\omega = 5.2539, u_n = 0.9963, v^* = -0.1005, e^* = -1.0751$ ۶۹

شکل ۶-۴ نمودارهای فرکانس طبیعی غیرخطی بر حسب دامنه، برای مقادیر مختلف C_1 ؛ الف)

$C_1 = 38 \text{ N/m}$ (ه؛ $C_1 = 1 \text{ N/m}$ (د؛ $C_1 = 9 \text{ N/m}$ (ج؛ $C_1 = 6 \text{ N/m}$ (ب؛ $C_1 = 3 \text{ N/m}$

۷۲

شکل ۷-۴ نمودار فرکانس طبیعی غیرخطی بر حسب دامنه، برای مقادیر مختلف C_2 ۷۳

شکل ۸-۴ نمودار فرکانس طبیعی غیرخطی بر حسب دامنه، برای مکان‌های مختلف جاذب ($\frac{d}{L}$)

۷۴ الف) $\frac{d}{L} = 0.5$ ؛ ب) $\frac{d}{L} = 0.3$ ؛ ج) $\frac{d}{L} = 0.8$

شکل ۱-۵ تیر به همراه جاذب دو-المانه‌ی فنر و دمپری..... ۷۶

شکل ۲-۵ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای ضرایب دمپر مختلف..... ۸۶

شکل ۳-۵ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای سفتی‌های مختلف؛ الف) نمایش چهار

نمودار به ازای چهار مقدار مختلف سفتی؛ ب) نمایش نمودار به ازای دو مقدار مختلف سفتی..... ۸۷

شکل ۱-۶ تیر شامل جاذب دینامیکی سه-المانه..... ۹۰

شکل ۲-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم زمانی که

$\omega = 9.8696, e^* = 0.1667, v^* = 0.1039, c^* = 0.3534, u_n = -0.5774$ (الف؛ $F_0 = 1$ ؛ ب)

۱۰۴..... $F_0 = 2000$ (ج؛ $F_0 = 800$

شکل ۳-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای الف) $\omega = 9.8696$ ؛ ب)

..... $\omega = 88.8264$ ۱۰۵

شکل ۴-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف d_E و $F_0 = 1$ ؛ الف)

نمایش کل بازه ؛ ب) نمایش بزرگ‌نمایی شده‌ی نمودار الف، در اطراف ماکزیمم پاسخ ۱۰۶

شکل ۵-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف d_E و $F_0 = 1400$ ؛

رنگ آبی برای $d_E = 0.1 Ns/m$ ، رنگ قرمز برای $d_E = 0.01 Ns/m$ ، رنگ سبز برای

$d_E = 0.03 Ns/m$ و رنگ سیاه برای $d_E = 0.05 Ns/m$ ؛ الف) نمایش کل بازه ؛ ب) بزرگ‌نمایی

قسمتی از نمودار الف ۱۰۷

شکل ۶-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای ضرایب دمپر مختلف و $F_0 = 1$ ۱۰۸

شکل ۷-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای ضرایب دمپر مختلف و $F_0 = 1400$ ؛

الف) نمایش برای چهار داده‌ی مختلف λ ؛ ب) نمایش برای دو داده‌ی مختلف λ ۱۰۹

شکل ۸-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_2 و $F_0 = 1$ ؛ رنگ

آبی برای $C_2 = 1 N/m$ ، رنگ قرمز برای $C_2 = 100 N/m$ ، رنگ سبز برای $C_2 = 0.01 N/m$ و

رنگ سیاه برای $C_2 = 1000 N/m$ ۱۱۰

شکل ۹-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_2 و $F_0 = 1400$ ؛

الف) نمایش ۴ داده‌ی مختلف $C_2 = 1 N/m$ ، $C_2 = 100 N/m$ ، $C_2 = 0.01 N/m$ و

$C_2 = 1000 N/m$ کنار هم؛ ب) نمایش به ازای $C_2 = 0.01 N/m$ ؛ ج) نمایش به ازای

$C_2 = 1 N/m$ ؛ د) نمایش به ازای $C_2 = 100 N/m$ ؛ ه) نمایش به ازای $C_2 = 1000 N/m$ ۱۱۱

شکل ۱۰-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_1 ، $\lambda = 0.01 Ns/m$ ،

و $F_0 = 1$ ۱۱۲

شکل ۱۱-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_1 ، $\lambda = 0.01 Ns/m$

و $F_0 = 1400$ ۱۱۳

شکل ۱۲-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_1 ، $\lambda = 0.9 Ns/m$

و $F_0 = 1400$ ۱۱۴

شکل ۱۳-۶ نمودار مکان نیرو بر روی تیر، بر حسب بهترین موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر،

برای کاهش حداکثری ماکزیمم جابه‌جایی میانه‌ی تیر ۱۱۵

شکل ۱۴-۶ نمودار مکان اعمال نیرو بر روی تیر، بر حسب مینی‌ماکس میانه‌ی تیر و به ازای

بهترین موقعیت قرارگیری جاذب، به ازای اعمال نیرو در مکان مورد نظر ۱۱۶

شکل ۱۵-۶ نمودار مکان اعمال نیرو بر حسب بهترین مکان جاذب بر روی تیر ۱۱۷

شکل ۱۶-۶ نمودار تغییر مکان اعمال نیرو بر حسب مکان ماکزیمم مینی‌ماکس کل تیر، به ازای

بهترین مکان جاذب بر روی تیر ۱۱۸

شکل ۱۷-۶ نمودار تغییر مکان اعمال نیرو بر روی تیر بر حسب مقدار ماکزیمم مینی‌ماکس تیر،

به ازای بهترین مکان جاذب مربوط به هر موقعیت قرارگیری نیرو بر روی تیر ۱۱۸

شکل ۱۸-۶ نمودار مکان نیرو بر حسب مکان بهینه‌ی جاذب، به ازای نیروهای مختلف ۱۱۹

شکل ۱۹-۶ تیر شامل جاذب دینامیکی سه-المانه ۱۲۰

شکل ۲۰-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای ضرایب دمپر مختلف ۱۳۰

شکل ۲۱-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_1 ؛ الف) نمایش

برای مقادیر مختلف C_1 ؛ ب) نمایش برای دو مقدر مختلف C_1 ۱۳۱

شکل ۲۲-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_2 ؛ الف)

..... $C_2 = 1000 \text{ N/m}$ (ج)؛ $C_2 = 100 \text{ N/m}$ (ب)؛ $C_2 = 1 \text{ N/m}$ (الف) ۱۳۲

شکل ۲۳-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف F_0 ؛ الف) $F_0 = 1 \text{ N}$ ؛

(ب) $F_0 = 100 \text{ N}$ ؛ ج) $F_0 = 1000 \text{ N}$ ۱۳۳

- شکل ۶-۲۴ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف $\frac{d}{L}$ ۱۳۳
- شکل ۷-۱ تیر به همراه جاذب سه-المانه ۱۳۸
- شکل ۷-۲ تیر به همراه جاذب دو-المانه ۱۳۸
- شکل ۷-۳ مقایسه‌ی پاسخ تیر در مکان ۰/۸ متر؛ خطوط پیوسته‌ی آبی، مربوط به مدل حاضر و نقاط قرمز مربوط به مقاله‌ی [۲۲] ۱۴۳
- شکل ۷-۴ مقایسه‌ی ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت؛ خطوط پیوسته‌ی آبی مربوط به مدل حاضر و نقاط قرمز مربوط به مقاله‌ی [۲۲] ۱۴۳
- شکل ۷-۵ نمودار ماکزیمم خیز تیر در مکان ۲ متر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی خطی سه-المانه ۱۴۴
- شکل ۷-۶ نمودار ماکزیمم خیز تیر در مکان ۲ متر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی سه-المانه ۱۴۵
- شکل ۷-۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر در مکان ۲ متر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی خطی-غیرخطی سه-المانه ۱۴۶
- شکل ۷-۸ نمودار ماکزیمم جابه‌جایی تیر در مکان ۲ متر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه ۱۴۷
- شکل ۷-۹ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر، مربوط به جاذب دینامیکی خطی سه-المانه ۱۴۸
- شکل ۷-۱۰ نمودار سه‌بعدی بهینه کردن ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سفتی‌های جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی خطی سه-المانه ۱۴۹
- شکل ۷-۱۱ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی خطی سه-المانه ۱۴۹

- شکل ۷-۱۲ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب
دینامیکی خطی سه-المانه ۱۵۰
- شکل ۷-۱۳ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر، مربوط به
جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی ۱۵۱
- شکل ۷-۱۴ نمودار سه‌بعدی بهینه کردن ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سفتی‌های جاذب، مربوط
به جاذب دینامیکی سه-المانه غیرخطی ۱۵۲
- شکل ۷-۱۵ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی
غیرخطی سه-المانه ۱۵۲
- شکل ۷-۱۶ نمودار ماکزیمم جابه‌جایی تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب
دینامیکی غیرخطی سه-المانه ۱۵۳
- شکل ۷-۱۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر، مربوط به
جاذب دینامیکی خطی-غیرخطی سه-المانه ۱۵۴
- شکل ۷-۱۸ نمودار سه‌بعدی بهینه کردن ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سفتی‌های جاذب، مربوط
به جاذب دینامیکی خطی-غیرخطی سه-المانه ۱۵۵
- شکل ۷-۱۹ نمودار ماکزیمم جابه‌جایی تیر، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی
خطی-غیرخطی سه-المانه ۱۵۵
- شکل ۷-۲۰ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب
دینامیکی خطی-غیرخطی سه-المانه ۱۵۶
- شکل ۷-۲۱ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر، مربوط به
جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه ۱۵۶
- شکل ۷-۲۲ نمودار سه‌بعدی بهینه کردن ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سفتی‌های جاذب، مربوط
به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه ۱۵۷

- شکل ۲۳-۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه ۱۵۷
- شکل ۲۴-۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه ۱۵۸
- شکل ۲۵-۷ نمودارهای ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت؛ رنگ قرمز معرف جاذب سه-المانه‌ی هر دو فنر غیرخطی و رنگ آبی مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی دو-المانه ۱۶۱
- شکل ۲۶-۷ نمودارهای ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار؛ رنگ قرمز مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر غیرخطی سه-المانه و رنگ آبی مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی دو-المانه ۱۶۲
- شکل ۲۷-۷ کانتور بهینه کردن بازده، بر حسب ضریب دمپر و k_2 (سفتی)، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر خطی سه-المانه؛ الف) نمایش کل بازه‌ی بهینه‌سازی؛ ب) نمایش بهینه‌سازی بازده، در اطراف بازده‌ی بهینه ۱۶۴
- شکل ۲۸-۷ نمودار بازده بر حسب k_1 (سفتی)، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر خطی سه-المانه ۱۶۵
- شکل ۲۹-۷ نمودار بازده، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر خطی سه-المانه ۱۶۵
- شکل ۳۰-۷ کانتور بهینه کردن بازده، بر حسب ضریب دمپر و C_2 (سفتی)، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر غیرخطی سه-المانه؛ الف) نمایش کل بازه‌ی بهینه‌سازی؛ ب) نمایش بهینه‌سازی بازده در اطراف بازده‌ی بهینه ۱۶۷
- شکل ۳۱-۷ نمودار بازده بر حسب C_1 (سفتی)، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر غیرخطی سه-المانه ۱۶۸
- شکل ۳۲-۷ نمودار بازده بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر غیرخطی

- سه-المانه ۱۶۸
- شکل ۳۳-۷ کانتور بهینه کردن بازده، بر حسب ضریب دمپر و C_2 ، مربوط به جاذب دینامیکی
- خطی-غیرخطی سه-المانه ۱۶۹
- شکل ۳۴-۷ نمودار بازده بر حسب k_1 ، مربوط به جاذب دینامیکی خطی-غیرخطی سه-المانه ۱۷۰
- شکل ۳۵-۷ نمودار بازده، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی خطی-غیرخطی سه-
- المانه ۱۷۰
- شکل ۳۶-۷ کانتور بهینه کردن بازده، بر حسب ضریب دمپر k_2 (سفتی)، مربوط به جاذب
- دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه؛ الف) نمایش کل بازه‌ی بهینه‌سازی؛ ب) نمایش بهینه‌سازی
- بازده در اطراف بازه‌ی بهینه ۱۷۲
- شکل ۳۷-۷ نمودار بازده بر حسب C_1 (سفتی)، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-
- المانه ۱۷۳
- شکل ۳۸-۷ نمودار بازده، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-
- المانه ۱۷۳
- شکل ۳۹-۷ نمودار بازده بر حسب سرعت بار در حال حرکت؛ رنگ قرمز معرف جاذب دینامیکی
- هر دو فنر خطی سه-المانه و رنگ آبی معرف جاذب دینامیکی خطی دو-المانه ۱۷۴
- شکل ۴۰-۷ نمودار بازده، بر حسب سرعت بار در حال حرکت؛ رنگ قرمز معرف جاذب
- دینامیکی هر دو فنر خطی سه-المانه، رنگ آبی معرف جاذب دینامیکی خطی دو-المانه و رنگ سبز
- مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر غیرخطی سه-المانه ۱۷۵

جداول

جدول ۴-۱ فرکانس‌های طبیعی خطی، برای مقادیر مختلف C_1 ۷۱

جدول ۴-۲ فرکانس‌های طبیعی خطی برای مکان‌های مختلف جاذب $(\frac{d}{L})$ ۷۳

جدول ۷-۱ نتایج بهینه‌سازی با استفاده از روش ماکزیمم خیز، مربوط به جاذب دینامیکی دو-

المانه (اعداد جدول مربوط به مقاله‌ی [۲۲] و اعداد داخل پرانتز مربوط به محاسبه‌های این پایان‌نامه)

..... ۱۵۹

جدول ۷-۲ ارائه‌ی نتایج بهینه‌سازی، با استفاده از روش ماکزیمم خیز تیر، مربوط به جاذب‌های

دینامیکی سه-المانه ۱۶۰

علائم

| | |
|------------------------------|------------------------|
| موقعیت مطلق جرم جاذب | $v(t)$ |
| جابه‌جایی عرضی تیر | $y(x, t)$ |
| جرم در واحد طول تیر | $m = \rho A$ |
| چگالی ماده | ρ |
| سطح مقطع | A |
| محل جاذب بر روی تیر | d |
| جرم جاذب دینامیکی | m_0 |
| ممان اینرسی سطح مقطع | I |
| بردار | V |
| ماتریس جرم | M |
| بردار دامنه | q |
| ماتریس سفتی | K_0 |
| ماتریس میرایی | C |
| فرکانس طبیعی | ω |
| فرکانس تحریک | Ω |
| ضریب دمپر | λ |
| دامنه‌ی تحریک | F_0 |
| ضریب میرایی | d_E |
| پارامتر کوچک آشوب | ε |
| نیروهای فنر | $f(u_2), f(u_1), f(u)$ |
| سفتی‌های فنر | C_2, C_1, C |
| طول تیر | L |
| پارامتر تنظیم | σ |
| تابع‌های زمان | $a_r(t)$ |
| تابع‌های ویژه‌ی نرمالایز شده | $\phi_r(x)$ |
| دلتای کرانیکه | δ_{ij} |
| تابع هویساید | $H(t)$ |

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ پیش‌گفتار

ارتعاش، یکی از عوامل همراه با صدا در محیط‌های صنعتی و فضاهاى عمومی است؛ که گاهی تشدیدکننده‌ی صدا و حتی عامل تولید صدا می‌باشد. انتقال امواج ارتعاشی (انرژی مکانیکی) از یک منبع مرتعش به بدن انسان، می‌تواند سبب اختلال در راحتی و آسایش فرد، کاهش بازدهی در اثر خستگی و نیز اختلال در اعمال فیزیولوژیک کارکنان و در مواردی حتی می‌تواند سبب ضایعات اسکلتی و برخی بیماری‌های دیگر شود. اثر این امواج ارتعاشی و تشدید آنها بر روی سازه‌ها، سبب پدیده‌ی خستگی و درنهایت فروپاشی آنها می‌گردد. کنترل ارتعاش، علاوه بر اینکه حفاظت افراد در برابر صدمه-های ناشی از ارتعاشات را به دنبال دارد، سبب حفاظت دستگاه‌ها و بناها از تخریب، استهلاک ناشی از ارتعاش و همچنین کنترل صدای ناشی از ارتعاش، خواهد شد. به همین منظور جلوگیری از ارتعاشات ناخواسته‌ی سازه‌هایی چون پل‌ها، ساختمان‌های بلند، دودکش‌ها، ماشین‌ها و اجزای به‌کار رفته در صنعت، از جمله مهمترین دغدغه‌های مهندسان است؛ به خاطر همین، پژوهش‌ها و تحقیق‌های گسترده‌ای در زمینه‌ی کنترل و کاهش این دسته از ارتعاش‌ها، چه در غالب مطالعه‌های دانشگاهی و چه به صورت صنعتی انجام گرفته است [۱].

۱-۲ روش‌های کنترل ارتعاشات

به طور کلی روش‌های کنترل ارتعاشات به سه دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند [۱]:

میرا کردن ارتعاشات^۱: در این روش با افزودن میرایی به سیستم و سازه‌ی اصلی، ارتعاشات را کم می‌کنند.

ایزوله کردن ارتعاشات^۲: این روش بر مبنای قطع مسیر انتشار ارتعاشات، بین منبع و دریافت-کننده استوار است.

1- Vibration Damping
2- Vibration Isolation

جاذب‌های پویای ارتعاشی^۱: روش معمول دیگر خنثی کردن ارتعاشات سیستم، انتقال انرژی سیستم به یک سیستم ثانویه می‌باشد؛ که این سیستم شامل جرم، فنر و در صورت لزوم، میراکننده است. این روش کنترل را می‌توان به سه دسته کلی: فعال، غیرفعال و نیمه‌فعال تقسیم‌بندی کرد؛ که نوع غیرفعال آن با توجه به سادگی، اثربخشی و عدم نیاز به منبع اضافه و نیز ویژگی‌های پایداری ذاتی، به طور گسترده‌ای در کنترل ارتعاشات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تصویر کلی از یک جاذب ارتعاشی دینامیکی غیرفعال، در سال ۱۸۸۳، زمانی که به وسیله‌ای جهت جلوگیری از حرکت‌های گردشی کشتی‌ها نیاز بود، توسط واتس^۲ بیان شد؛ اما طرح عملی این جاذب، در سال ۱۹۱۱، توسط فرام^۳ مطرح شد. او یک مخزن سیال جهت جلوگیری از حرکت گردشی کشتی طراحی کرد؛ سپس توسط دن هارتوخ [۲]، بهینه‌سازی شد. از مزایای این جاذب، می‌توان به نصب آسان و طراحی ساده‌اش اشاره نمود. یک جاذب پویای ارتعاشی بدون میراکننده، که از آن تحت عنوان جاذب ارتعاشی تنظیم‌شده^۴ نام‌برده می‌شود، بهترین اثر خنثی‌کنندگی را برای یک فرکانس طراحی خاص و مشخص دارد؛ به عبارتی اگر فرکانس تحریک ثابت بماند، بسیار مؤثر است. از جمله معایب این جاذب، این است که دامنه‌ی مؤثر بسیار کمی دارد و در صورت انتقال فرکانس تحریک، دامنه‌ی ارتعاش سیستم از حالت بدون جاذب نیز بیشتر می‌شود. برای غلبه بر این مشکل، میرایی را نیز به جاذب اضافه کردند؛ که این نوع جاذب تحت عنوان میراگر جرمی تنظیم‌شده^۵ نیز شناخته می‌شود [۳]. از جمله عوامل مهم و تأثیرگذار در تعیین کارایی این روش، کنترل ارتعاشات، فرکانس و میرایی جاذب است. تحقیق‌های گسترده‌ای به منظور یافتن پارامترهای بهینه‌ی جاذب‌ها، که در نهایت منجر به افزایش دامنه‌ی مؤثر آنها می‌شود، انجام شده است. مطالعات چونگ^۶ [۴]، از جمله تحقیق‌های شاخص در این زمینه است؛ از جمله دیگر پژوهش‌های مطرح در این زمینه می‌توان به پژوهش زیلتی و

1- Dynamic Vibration Absorber (DVA)

2- Watts

3- Frahm

4- Tuned Vibration Absorber (TVA)

5- Tuned Mass Damper (TMD)

6- Cheung

همکاران^۱ [۵]، اشاره کرد. آنها بر این مبنا که انرژی جنبشی سیستم کمینه شود، یا میزان اتلاف توان توسط جاذب بیشینه گردد، پارامترهای بهینه‌ی جاذب را بدست آوردند؛ با توجه به محدوده‌ی فرکانسی که باید خنثی شود، این جاذب‌ها در ابعاد گوناگون ساخته می‌شوند. برای کنترل ارتعاشات سازه‌هایی چون پل‌ها، ساختمان‌ها و دودکش‌ها، از انواع بزرگ‌تر آنها و برای کاهش ارتعاشات ماشین‌ها، اجزای مختلف به کار رفته در هواپیماها و صنایع هوافضا، از نوع کوچک‌تر آنها استفاده می‌شود. به طور کلی جاذب‌های به کار رفته در صنایع ساختمان‌سازی و پل‌سازی، را می‌توان به سه دسته‌ی عمده تقسیم کرد: (۱) میراگرهای جرمی افقی؛ (۲) میراگرهای جرمی عمودی؛ (۳) میراگرهای پاندولی [۱]؛

۱-۳ نگاهی به تاریخچه‌ی استفاده از جاذب‌ها در پل‌ها

مطالعه‌ی نوسان‌های پل‌های تحت بارهای در حال حرکت، به نیمه‌ی قرن نوزدهم میلادی برمی‌گردد؛ که راه‌آهن‌های اولیه در حال توسعه بودند. این چنین کاربردهایی، از پراهمیت‌ترین مثال‌های بارهای در حال حرکت است؛ که خوانندگان ارجمند برای اطلاع بیشتر در رابطه با کاربرد آنها، می‌توانند به مقاله‌ی [۶]، مراجعه نمایند. اولین مطالعه‌های مدرن برای بارهای در حال حرکت، به کارهای تیموشنکو و همکارانش^۲ برمی‌گردد [۷]؛ که برای مسئله‌ی مورد نظر، حل تحلیلی ارائه نمودند؛ و رابطه‌ای برای سرعت بحرانی بیان کردند. در نظر گرفتن جرم‌های در حال حرکت، به جای بارهای در حال حرکت، به نظر بیشتر با واقعیت در انطباق است؛ اگرچه که با توجه به مقاله‌ی [۸]، نشان داده شده است که رفتار تیرها تحت بارها یا جرم‌های در حال حرکت، خیلی مشابه است؛ زمانی که جرم در حال حرکت در نظر گرفته شده، در مقایسه با جرم تیر کوچک باشد. در ادامه، نگاهی گذرا به کارهای انجام گرفته، انداخته می‌شود.

وو^۳، پیشنهاد استفاده از جاذب دینامیکی خطی، برای تیر در معرض بارهای در حال حرکت را

1- Zilletti et.al

2- Timoshenko et. Al

3- Wu

پیشنهاد نمود [۹]؛ که دمپری در میانه‌ی محوطه‌ی تیر تعبیه شده بود. شیوه‌ی المان محدود^۱ به کار گرفته شد، تا تیر را مدل کند و دینامیک حاکم بر تیر، بعد از اینکه معادله‌ها به اولین مختصات مودال کاهش پیدا کرد، تحلیل شد؛ یعنی مسئله‌ی N درجه آزادی به یک درجه آزادی کاهش پیدا کرد. مدل ساده شده‌ای به کار گرفته شد، تا با استفاده از شیوه‌ی دن هارتوخ [۱۰]، مقادیر بهینه‌ای برای ضریب میرایی و سفتی جاذب بدست آید. گریکو و سانتینی^۲ [۱۱]، تیری را تحت بارهای در حال حرکت تحلیل کردند؛ که دو دمپر ویسکوز چرخشی در دو انتهای تیر متصل شدند. آنها به طور عددی نشان دادند که، اثربخشی دمپر به طور مؤثری بر روی سرعت بار در حال حرکت وابسته است. لی و همکارانش^۳ [۱۲]، دینامیک یک سیستم دو درجه آزادی، را که شامل یک نوسانگر خطی پایه‌ای که توسط فنر غیرخطی به جرم سبک وصل شده بود را تحلیل نمودند. آنها دریافتند که مدارهای پرپودیک سیستم غیرمیرا، به طور قوی‌ای تحت تأثیر دینامیک میرا هستند.

ون و همکارانش^۴ [۱۳] ثابت کردند، زمانی که قطار سرعت بالا از یک پل عبور می‌کند، ماکزیمم جابه‌جایی عمودی ایجاد شده توسط ترن، تا حدود ۲۱ درصد کاهش می‌یابد و ارتعاشات آزاد سریع‌تر از بین می‌رود؛ اگر دمپر جرمی تنظیم شده، در میانه‌ی پل قرار گیرد. در مقاله‌ی [۱۴]، شیوه‌ای جدید برای کاهش ارتعاش رزونانسی تیرهای تکیه‌گاه ساده، تحت بارهای در حال حرکت ارائه شده است. در این روش، دمپرهای ویسکوز به کار گرفته شده است تا تیر اصلی (تیری که بارها از آن می‌گذرد) را به تیر معینی که در زیر تیر اصلی قرار گرفته است، متصل نمایند. نتایج نشان داد، پاسخ رزونانسی تیر اصلی، می‌تواند به طور مؤثری توسط این وسیله کاهش یابد. به کارگیری دمپر جرمی تنظیم شده برای کاهش ارتعاش پل، که در مقاله‌ی [۱۵] ارائه شده است؛ نشان داد، اگر ماکزیمم پاسخ دینامیکی تیر و ترن به وسیله‌ی پاسخ فرکانسی در حدود رنج طراحی سرعت ترن محدود شوند، عملکرد دمپر جرمی

1- The Finite Element Method (FEM)

2- Greco and Santini

3- Lee et al.

4- Kwon et al.

تنظیم‌شده، در کنترل ارتعاشات مؤثر واقع می‌شود. یائو و یانگ^۱ [۱۶]، کاهش ارتعاشات را برای پل-های کابلی در معرض عبور ترن سرعت بالا، مورد مطالعه قرار دادند. ترن، به عنوان یک سری اجرام فنی مدل شد؛ دکل پل و برج‌ها، به عنوان المان‌های غیرخطی ستون-تیر غیرخطی، در نظر گرفته شد و کابل‌ها به عنوان المان‌های خرپا، با مدول‌های معادل ارنست^۲، در نظر گرفته شدند. مثال‌های عددی، ثابت کرد که سیستم دمپر-جرمی تنظیم‌شده‌ی هیبریدی که پیشنهاد شده بود، شامل چندین دمپر دینامیکی تنظیم‌شده، برای کاهش پیک‌های ارتعاشی رزونانسی چندگانه است؛ که در پل‌های کابلی، برای ترن‌های سرعت بالا استفاده می‌شود. در مقاله‌ی [۱۷]، ثابت شد که دمپر جرمی تنظیم‌شده، که برای مود ویژه‌ای تنظیم می‌شود، اثر ناچیزی روی مودهای دیگر دارد. اثربخشی دمپر جرمی تنظیم‌شده، در کاهش ارتعاش ساختار اولیه‌ای، که در معرض بارهای رندومی است، وابستگی زیادی روی توزیع فرکانس‌های ویژه دارد. در مقاله‌ی [۱۸]، لین و همکارانش^۳ تیر الاستیکی که در معرض وسیله-ی در حال حرکت بود، را مطالعه نمودند. آنها از یک دمپر جرمی تنظیم‌شده‌ی خطی، به عنوان یک سیستم جذب انرژی استفاده کردند و نتایج‌هایی را در ارتباط با پارامترهای چندین جاذب ارائه نمودند. در مقاله‌های [۱۹]، [۲۰] و [۲۱]، تحت شرایط مشخص، دمپ‌های دینامیکی غیرخطی، می‌تواند به طور انفعالی انرژی را از یک ساختار میرای غیرکنسرواتیو خطی جذب نمایند؛ که به عنوان سینک انرژی غیرخطی عمل می‌کنند. گئورجیادیس و واکادیس [۱۹]، نتایج عددی را ارائه نمودند؛ که تأکید می‌کند پهنای باند انفعالی، انرژی مقصد را از یک تیر انعطاف‌پذیر خطی تحت تحریک ضربه، به سینک انرژی غیرخطی منتقل می‌کند. آنها به صورت عددی نشان دادند، یک طراحی مناسب و قراردادن سینک انرژی غیرخطی، می‌تواند به طور انفعالی سهم عمده‌ای از انرژی ضربه‌ی تیر (تا حدود ۸۷ درصد) را جذب و دفع نماید. سمانی و پلیکانو [۲۲]، تیر در معرض بار در حال حرکت، که به دمپر دینامیکی خطی و غیرخطی متصل شده بود، را مورد مطالعه قرار دادند و پارامترهای بهینه‌ی جاذب

1- Yau and Yang

2- Ernst's Equivalent Modulus

3- Lin et al.

(مکان، سفتی و ضریب دمپر) را بدست آوردند. همچنین سمانی و همکاران [۲۳]، در کار دیگری عملکرد تیر اولر-برنولی، که در معرض وسیله‌ی در حال حرکت بود، را مورد بررسی قرار دادند. وسیله‌ی در حال حرکت، توسط جرم، فنر و دمپر مدل گردید؛ که علاوه بر حرکت جرم به سمت جلو، به سمت بالا و پایین هم نوسان می‌کرد. برای جاذبی که شامل فنر و دمپر بود، از فنرهای مرتبه‌ی ۳، ۵ و ... استفاده گردید؛ و در نهایت استفاده از فنرهای قطعه به قطعه پیوسته را پیشنهاد نمودند، که در کاهش ارتعاشات تیر مؤثرتر واقع گردید. کار ابوالشیخ و همکاران [۲۴]، از جمله کارهای دیگر در این زمینه است؛ که پاسخ دینامیکی تیر اولر-برنولی، را توسط چند جاذب که در روی تیر کار گذاشته شده بودند، بررسی نمودند. آنها برای حل، از شیوه‌ی لاپلاس استفاده کردند و اثرگذاری قرار دادن یک جاذب یا دو جاذب و ... بر روی تیر را بررسی نمودند؛ و در نهایت نتایج آنها را با هم مقایسه کردند.

۱-۴ اهداف پایان‌نامه و نگاهی کلی به فصول آینده

هدف از کار انجام‌شده، بررسی اثربخشی جاذب‌های سه-المانه (شامل جرم، فنر و دمپر)، در کاهش ارتعاشات تیرهای در معرض بار در حال حرکت و دمپ سریع‌تر آنهاست؛ که برای انجام این کار، بهینه‌سازی‌های مختلفی انجام شده، تا با تعیین پارامترهای بهینه، اثربخشی آنها مورد ارزیابی قرار گیرد. بررسی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، در معرض بار نقطه‌ای متناوب و استفاده از جاذب‌های دینامیکی مختلف، تکنیک حل معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر آنها، از دیگر کارهای انجام‌شده است. بررسی دقیق‌تر جاذب سه-المانه برای تیر در معرض بار نقطه‌ای متناوب و در حال حرکت، بررسی اثر بخشی پارامترهای مختلف، بر روی پاسخ فرکانسی تشدید سوپرهارمونیک، و همچنین تأثیر مقدار و محل نیرو در تعیین محل بهینه‌ی جاذب، از دیگر اهداف این کار است.

این پایان‌نامه در ۸ فصل تنظیم گشته است. فصل ۲، به معرفی کلی انواع جاذب‌های به کار رفته در وسایل مختلف می‌پردازد. فصل ۳، به معرفی تئوری‌های حل، ارائه‌شده در این پایان‌نامه پرداخته است. فصل ۴، به بررسی جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل یک فنر خطی و یک فنر غیرخطی، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تأثیر بار نقطه‌ای متناوب پرداخته، که پس از حل آن، با روش مقیاس‌های

چندگانه، به بررسی تشدید اصلی و تشدید سوپرهارمونیک پرداخته است؛ همچنین با محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی، به بررسی پارامترهای مؤثر بر آنها پرداخته است. فصل ۵، جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل فنر و دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تأثیر بار نقطه-ای متناوب را بررسی نموده است. در فصل ۶، جاذب دینامیکی سه-المانه، شامل دو فنر و یک دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تأثیر بار متمرکز متناوب و بار درحال حرکت، را بررسی نموده و با بررسی تشدیدهای اصلی و سوپرهارمونیک، به بررسی عوامل مؤثر بر منحنی پاسخ فرکانسی پرداخته است. فصل ۷، جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی و غیرخطی، را در کاهش ارتعاشات تیر در معرض بار درحال حرکت، مورد مطالعه قرار داده و با ارائه‌ی بهینه‌سازی‌های مختلف، پارامترهای بهینه برای جاذب تعیین شده است؛ تا عملکرد این نوع جاذب را در کاهش ارتعاشات تیر افزایش دهد. در نهایت فصل ۸، به جمع‌بندی نتایج پرداخته است.

فصل ۲

معرفی جاذب‌ها

۲-۱ انواع جاذب‌ها

به طور کلی جاذب‌های به کار رفته در صنایع ساختمان‌سازی و پل‌سازی، را می‌توان به سه دسته-
ی عمده تقسیم کرد: (۱) میراگرهای جرمی افقی؛ (۲) میراگرهای جرمی عمودی؛ (۳) میراگرهای
پاندولی؛

هر کدام از این میراگرها، دارای ویژگی‌های خاصی می‌باشند و به منظور کنترل ارتعاشات خاص،
می‌توانند به تنهایی یا در کنار سایر جاذب‌ها استفاده شوند.

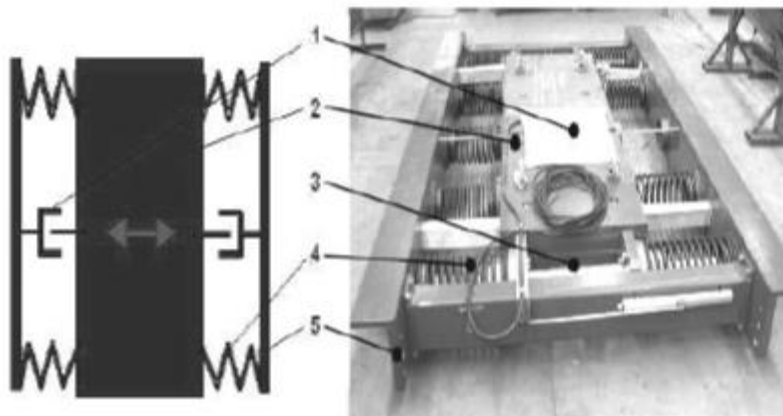
۲-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی افقی

این میراگرها عمدتاً به منظور کنترل ارتعاشات عرضی سازه‌ها استفاده می‌شوند و عموماً در
قسمتی از سازه، که دارای بیشترین دامنه‌ی حرکت است، نصب می‌شوند. نحوه‌ی اتصال آنها به سازه‌ها
و اجسام گوناگون، عمدتاً توسط پیچ و مهره است. شکل ۱-۲، نوعی متداول از این جاذب‌ها را نمایش
می‌دهد. این میراگرها، با توجه به نحوه‌ی استفاده در سازه‌های گوناگون، می‌توانند بین ۲۵۰ تا
۳۰۰۰۰ کیلوگرم جرم داشته باشند. ابعاد آنها نیز کاملاً قابل انطباق با سازه‌ی مورد استفاده است.
اجزای اصلی این سازه‌ها عبارتند از: (۱) میراگر قابل تنظیم؛ (۲) جرم فولادی قابل تنظیم؛ (۳) سیستم
هدایت‌کننده‌ی جرم در جهت افقی؛ (۴) فنر فولادی عمل‌کننده به صورت افقی؛ (۵) پایه‌ی صفحه‌ی
قابل تنظیم، جهت اتصال به سازه‌ی اصلی؛

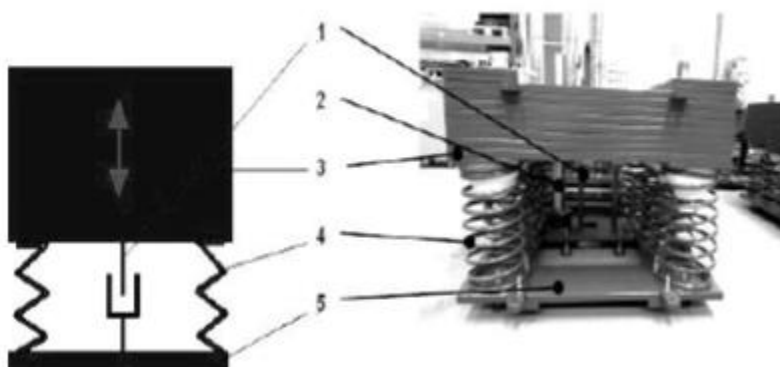
۲-۳ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی عمودی

این نوع میراگرها نیز عموماً جهت کنترل ارتعاشات عمودی سازه‌ها به کار می‌رود و در قسمتی از
سازه که دارای بیشترین دامنه‌ی حرکت است، نصب می‌شوند. نحوه‌ی اتصال آنها به سازه‌ها و اجسام
گوناگون، عمدتاً توسط پیچ و مهره است. چون محل قرارگیری این نوع جاذب‌ها همواره با محدودیت-
های متعدد طراحی روبرو می‌شود، می‌توانند به گونه‌ای نصب شوند که اجزا در حالت کشش یا فشار
قرار گیرند. اجزای اصلی این سازه، مشابه جاذب افقی است؛ با این تفاوت که تمامی حرکت‌های اجزا

عمودی است. شکل ۲-۲، این نوع جاذب را همراه با اجزای آن نمایش می‌دهد. علاوه بر این، میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی عمودی، به دو صورت طراحی می‌شود: (۱) میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی صاف^۱ [۲۵]، که نماهای گوناگون آن در شکل ۳-۲ مشاهده می‌شود؛ (۲) میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی بلند [۲۵]؛

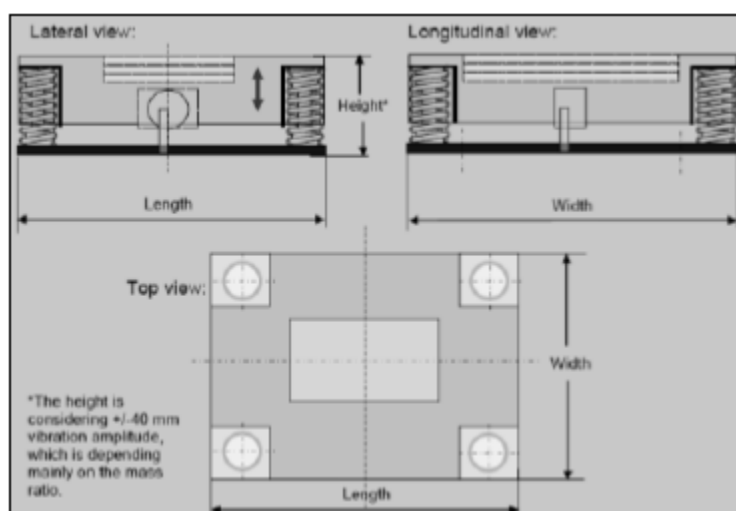


شکل ۱-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی افقی و طرح کلی آن

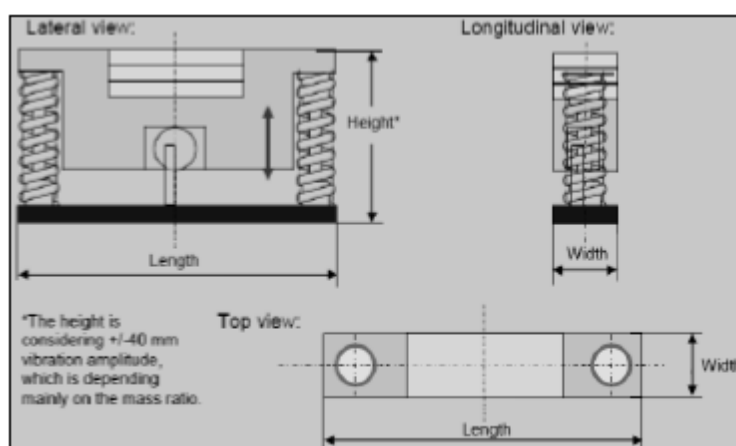


شکل ۲-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی عمودی و طرح کلی آن

در شکل ۲-۴، درک خوبی از این نوع جاذب و تفاوت‌های موجود نمایش داده شده است.



شکل ۳-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی صاف



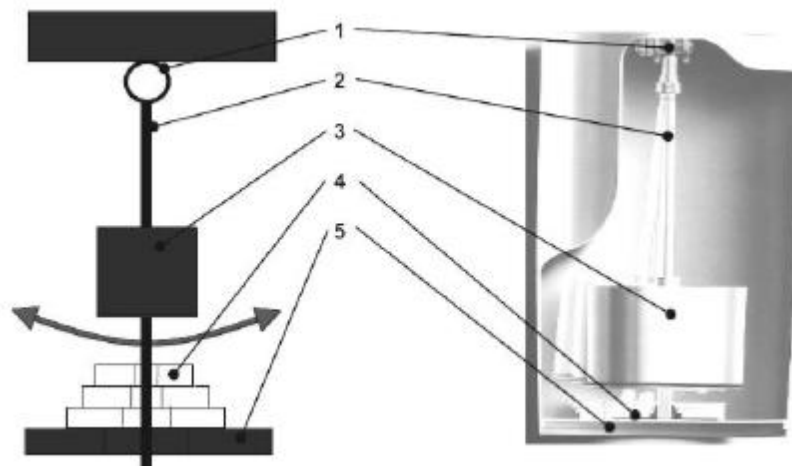
شکل ۴-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی بلند

۴-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی پاندولی

این نوع میراگر، عمدتاً در قسمت‌هایی از سازه، که دارای بیشترین جابه‌جایی ارتعاشی ناشی از فرکانس طبیعی شعاعی و افقی می‌باشند، نصب می‌شود. این نوع جاذب‌ها نیز معمولاً توسط پیچ و مهره به سازه‌ی اصلی متصل می‌شوند. میراگر این جاذب، به صورت صفحه‌های اصطکاکی^۱ و یا وسایل میراگر ویسکوز تأمین می‌شود. در شکل ۵-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی پاندولی و طرح کلی آن [۲۵]، نمایش داده شده است. اجزای اصلی این سازه عبارتند از: (۱) حلقه‌ای دایروی، که قابلیت حرکت

1- Friction Plates

شعاعی در تمام جهتها را به پاندول می‌دهد؛ ۲) میله‌ی پاندول؛ ۳) جرم جاذب، تشکیل شده از صفحه‌های فولادی؛ ۴) میرایی جاذب، صفحه‌های اصطکاکی و یا وسایل میراگر ویسکوز؛ ۵) پایه‌ی صفحه‌ی قابل تنظیم جهت اتصال به سازه‌ی اصلی؛



شکل ۲-۵ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی پاندولی و طرح کلی آن

۲-۵ کاربرد جاذب‌ها

سازه‌هایی چون پل‌ها، برج‌ها و دودکش‌ها، عمدتاً دارای میرایی کم و فرکانس‌های طبیعی پایین‌اند و در نتیجه به راحتی توسط باد، زلزله و عبور و مرور تحریک می‌شوند. بنابراین استفاده از جاذب‌های ارتعاشی در این سازه‌ها بسیار متداول است. در ادامه به برخی از کاربردهای این جاذب‌ها اشاره می‌شود.

۲-۶ کاربرد جاذب‌ها در پل‌ها

از جمله بهترین مثال‌ها از کاربرد جاذب‌ها، کاربرد این قطعات روی پل هزاره‌ی لندن (Millennium Bridge)، یک پل معلق در پایتخت بریتانیا (لندن) است. این پل بر روی رود تیمز قرار دارد. در طرف شمالی این پل، کلیسای جامع سنت پل و در طرف جنوبی آن، موزه‌ی تیت‌مدن قرار دارند. در سال ۲۰۰۰، تنها سه روز پس از افتتاح پل، با مشاهده‌ی سطوح بالای ارتعاشی ایجاد شده در اثر عبور و مرور عابرین پیاده، پل بسته شد. در واقع عابران پیاده که قصد عبور از پل را داشتند، با هر گام نوسان‌ها را افزایش می‌دادند؛ دامنه‌ی این نوسان‌ها به ۱۰۰ میلی‌متر نیز رسید. پس از محاسبات

انجام شده، مسؤولان بر آن شدند تا برای کنترل ارتعاشات افقی و عمودی این پل، ۸ جاذب افقی و ۲۴ جفت جاذب عمودی روی آن به کار برند؛ تا بدین ترتیب مودهای خمشی و پیچشی تحریک شده را کنترل کنند. هرکدام از جاذب‌های افقی در حدود ۲/۵ تن وزن دارند. همچنین دارای فرکانس طبیعی ۰/۸ می‌باشند. وزن جاذب‌های عمودی نیز بین ۱ تا ۲ تن و فرکانس طبیعی مورد نیاز، بین ۱/۲ تا ۲/۲ متغیر است.

در نهایت با صرف هزینه‌ای بالغ بر ۵ میلیون پوند و ۱۸ ماه کار اجرایی و علمی، این پل در سال ۲۰۰۲ مجدداً راه‌اندازی شد. شکل ۲-۷ جاذب‌های عمودی و شکل ۲-۸ جاذب‌های افقی به کار رفته در این پل را نشان می‌دهند. جالب است بدانید، مدت‌ها پس از افتتاح مجدد پل، محققان همچنان در پی یافتن علت حادثه بودند. نتایج مطالعه‌های آنها نشان داد که، همگام شدن تعداد محدودی از عابران پیاده با یکی از فرکانس‌های طبیعی پل، که حدود ۱ هرتز بوده، سبب ایجاد پدیده‌ی تشدید شده - است. در شکل ۲-۹، پل المپیک^۱ در تورین ایتالیا و کاربرد جاذب‌های افقی در آن نمایش داده شده است. در این پل از دو جاذب افقی استفاده شده است؛ که هرکدام ۴ تن وزن دارند و میرایی معادل آنها ۳۸۷۶ نیوتن‌ثانیه بر متر است. فرکانس طبیعی یکی از آنها ۰/۵۵ هرتز و دیگری ۰/۹۵ هرتز است.

۲-۷ کاربرد جاذب‌ها در ساختمان‌ها و برج‌ها

برج مشعل^۲ [۲۶]، واقع در دوحه‌ی قطر، از جمله نمونه‌های مثال‌زدنی از کاربرد جاذب‌های ارتعاشی برای کنترل ارتعاشات است. این برج که به شکل مشعل است، در سال ۲۰۰۶ با هزینه‌ای بالغ بر ۱۴۰ میلیون دلار، برای بازی‌های آسیایی ساخته شد.

این برج ۳۰۰ متری، به شدت تحت تأثیر بادهایی که از طرف خلیج فارس می‌وزد، قرار دارد؛ که در این صورت، بالاترین قسمت می‌تواند تا ۴۵ سانتی‌متر منحرف شود؛ که این امر، مطمئناً

1- Olympic Bridge

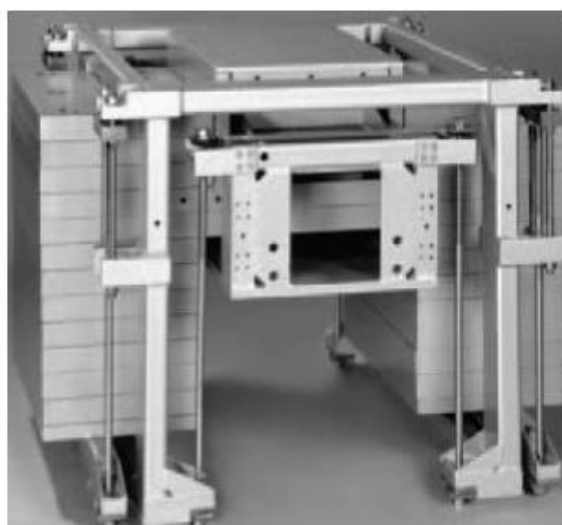
2- Aspire Tower, also known as Torch Tower



شکل ۶-۲ نمایی از پل هزاره‌ی لندن



شکل ۷-۲ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی عمودی به‌کار رفته در پل هزاره‌ی لندن

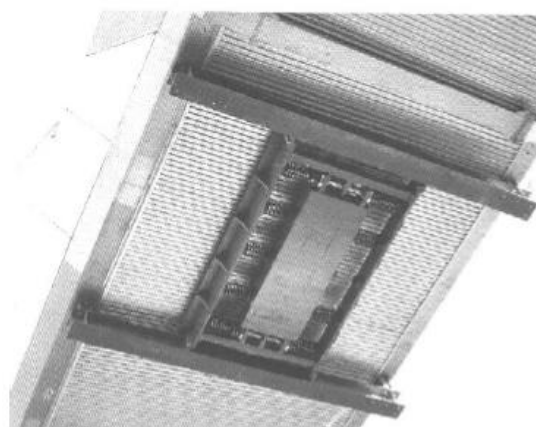


شکل ۲-۸ میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی افقی به‌کار رفته در پل هزاره‌ی لندن



(ب)

شکل ۲-۹: الف) میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی افقی در پل المپیک؛ ب) پل المپیک واقع در تورین ایتالیا



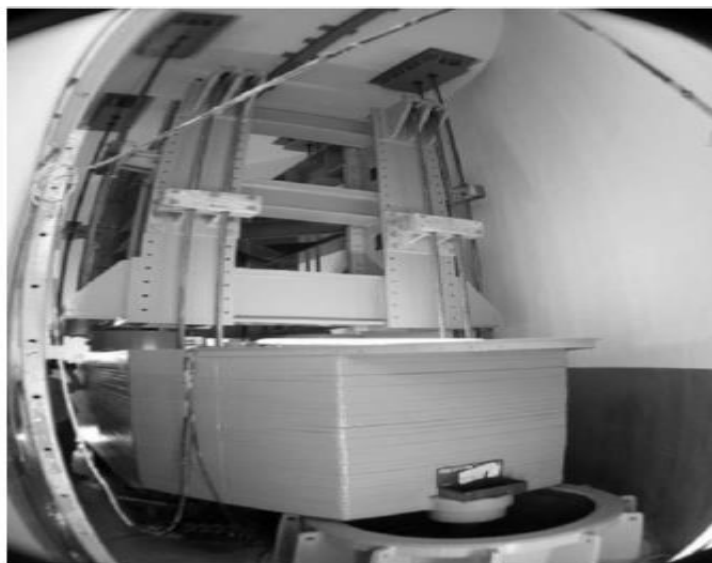
(الف)

علاوه بر خطرهای احتمالی، آرامش ساکنان این برج را نیز مختل می‌کند؛ لذا نیاز به جاذب ارتعاشی به‌شدت احساس می‌شود.

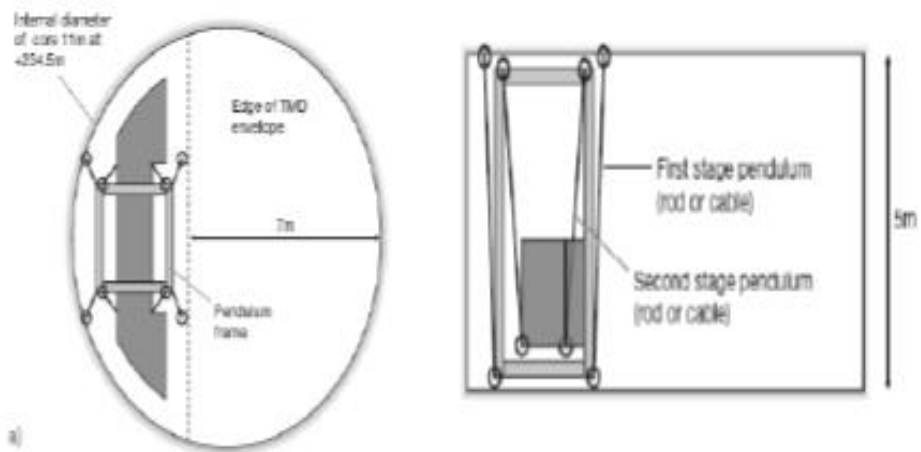
بهترین شکل جاذب ارتعاشی، که می‌تواند ارتعاشات این ساختمان را کنترل کند، میراگر جرمی پاندولی است. با توجه به محاسبه‌های انجام شده توسط شرکت سازنده، مناسب‌ترین مکان برای این جاذب، طبقه‌ی ۴۷ در ارتفاع ۲۳۵ متری است؛ این درحالی است که، ضخامت هسته‌ی مرکزی برج، که محل قرارگیری این جاذب است، در آن ارتفاع تنها ۱۱ متر است. ازطرفی طراحی ظریف و باریک



شکل ۱۰-۲ برج مشعل واقع در دوحه‌ی قطر



شکل ۱۱-۲ میراگر جرمی پاندولی به کار رفته در برج مشعل



شکل ۱۲-۲ نمایی از طرح جاذب به کار رفته در برج مشعل



(ب)



(الف)

شکل ۱۳-۲: الف) میراگر جرمی تنظیم‌شده‌ی عمودی به کار رفته در برج ادینبرگ؛ ب) برج کنترل ترافیک هوایی در ادینبرگ

این برج، نیز کار را برای طراحان دشوار کرده بود؛ تا نهایتاً جهت رفع این مشکل، جرم این جاذب پاندولی را به شکل یک قایق ساختند. شکل ۱۲-۲، نیز طرحی کلی از این جاذب را در دو نمای

گوناگون نمایش می‌دهد. محاسبه‌ها نشان می‌داد، جهت کارایی بالای این جاذب، باید وزنی در حدود ۱۴۰ تن داشته باشد؛ درحالی‌که چرثقیل حمل بار، تنها توانایی بالابردن ۵ تن بار را داشت. لذا جرم جاذب به ۳۷ قطعه‌ی ۵ تنی تقسیم شد و در طبقه‌ی ۴۷، نصب و راه‌اندازی شد. فرکانس طبیعی این جاذب نیز ۰/۲۳ هرتز است.

از دیگر کاربردهای جاذب‌ها، می‌توان به استفاده در برج کنترل ترافیک هوایی در ادینبرگ^۱، پایتخت اسکاتلند، اشاره کرد. به منظور میرا کردن اغلب موده‌های جاذب، باید در بالاترین نقطه‌ی این برج ۸۰ متری قرار می‌گرفت. جرم ۱۶ تنی این جاذب روی فنرهای حلزونی قرار گرفته است. چون این سازه در معرض وزش بادهایی است، که در فصول مختلف سال می‌توانند فرکانس‌های متفاوتی از سازه را تحریک کنند، فرکانس جاذب می‌تواند با اضافه یا کم کردن صفحه‌های فلزی، کم یا زیاد شود و محدوده‌ای بین ۱/۵ تا ۲ هرتز را پوشش دهد.

فصل ۳

مروری بر اطلاعات پایه‌ی به‌کار رفته در پایان‌نامه

۳-۱ بدست آوردن معادله‌ی حرکت تیر، با استفاده از روش نیوتن

طناب^۱ به عنوان یک محیط الاستیک یک بعدی مدل می‌شود؛ که نه تنها در برابر گشتاور خمشی مقاومت نمی‌کند، بلکه آن را هم انتقال نمی‌دهد؛ اگرچه که این فرض، به ندرت توسط هر محیط الاستیک ارضا می‌شود. اما تیرها به عنوان محیط الاستیک یک بعدی در نظر گرفته می‌شوند، که نه تنها در برابر گشتاور خمشی مقاومت می‌کنند و آن را انتقال می‌دهند، بلکه در برابر برش هم مقاومت می‌کنند. در ادامه معادله‌های تیر در دو حالت (یکی صرف نظر از تغییر شکل‌های برشی و دیگری در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی) بررسی می‌شوند.

تیر مستقیمی را در نظر بگیرید؛ که تحت خمش طبق شکل ۳-۱، قرار گرفته است. فرض می‌شود که سطح مقطع تیر، بعد از تغییر شکل تغییر نمی‌کند؛ فرض دیگر این است که، صفحه‌ها عمود بر تار خنثی^۲ (چه قبل از خم شدن و چه بعد از آن)، مستقیم باقی می‌مانند و تغییر فرم نمی‌دهند. این دو فرض، به عنوان فرضیه‌ی اولر-برنولی^۳ شناخته می‌شوند. فرضیه‌ی اولر-برنولی برای زمانی مناسب است که، نسبت ارتفاع تیر h ، به شعاع انحنای تار خنثی $\rho(x, t)$ ، بعد از تغییر شکل خیلی کوچک‌تر از واحد باشد.

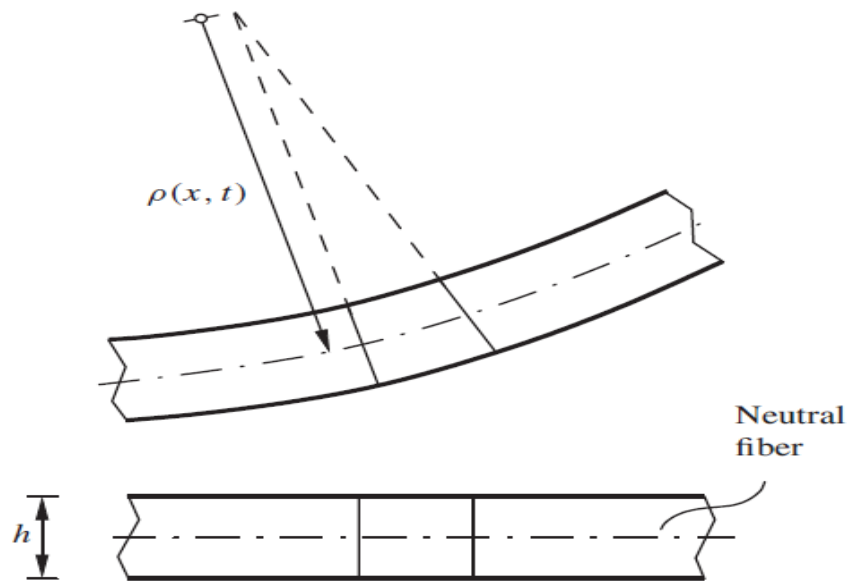
ارتباط کرنش-جاب‌جایی در هر ارتفاع z ، از سطح تار خنثی اندازه‌گیری می‌شود. با استفاده از تئوری الاستیسیته می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_{,x}(x, z, t) = \frac{(\rho(x, t) - z) d\psi - \rho(x, t) d\psi}{\rho(x, t) d\psi} = -\frac{z}{\rho(x, t)} = -\frac{z \omega_{,xx}(x, t)}{[1 + \omega_{,x}^2(x, t)]^{\frac{3}{2}}} \quad (1-3)$$

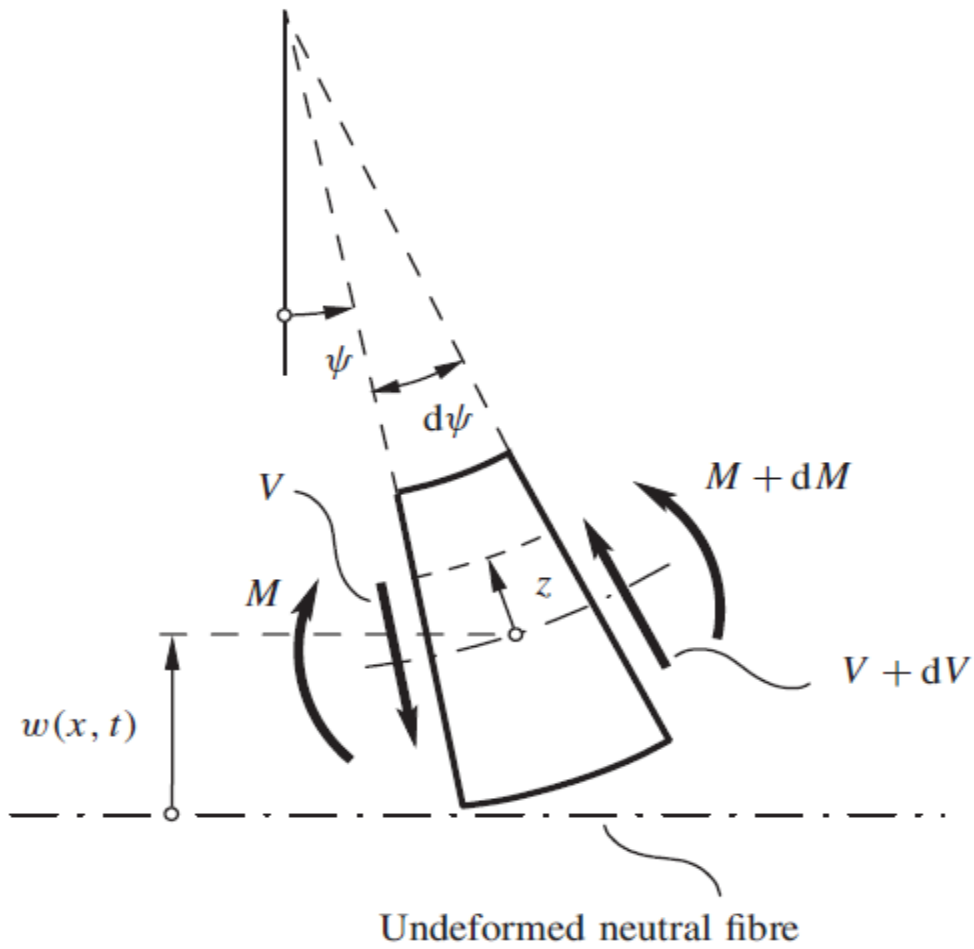
$$\approx -z \omega_{,xx}(x, t)$$

که فرض می‌شود $\omega_{,x} \ll 1$ و $\omega(x, t)$ انحراف عرضی است. از قانون هوک، که بر اساس تئوری

1- String
2- Neutral Fiber
3- Euler-Bernoulli Hypotheses



شکل ۱-۳ طرحی از تیر، تحت انحراف سطحی



شکل ۲-۳ المان بی‌نهایت کوچک تیر تغییر شکل داده شده

مقدماتی الاستیسیته است، رابطه‌ی ذیل بیان می‌شود:

$$\sigma_x(x, z, t) = E \varepsilon_x(x, z, t) = -Ez \omega_{,xx}(x, t) \quad (۲-۳)$$

که E مدول یانگ است. گشتاور خمشی در هر قسمت می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$M(x, t) = -\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x(x, z, t) dA = \int_{-h/2}^{h/2} E \omega_{,xx}(x, t) z^2 dA = EI(x) \omega_{,xx}(x, t) \quad (۳-۳)$$

که I(x) ممان دوم سطح مقطع تیر، حول تار خنثی است. معادله‌ی دینامیک عرضی المان بی-

نهایت کوچک، می‌تواند نوشته شود:

$$(\rho A(x) dx) \omega_{,tt} = p(x, t) dx + (V + dV) \cos(\psi + d\psi) - V \cos \psi \quad (۴-۳)$$

یا

$$\rho A \omega_{,tt} = p(x, t) + V_{,x} \quad (۵-۳)$$

که p(x, t) چگالی نیروی عرضی خارجی و V نیروی برشی در هر سطح مقطع است و فرض می-

شود که $\cos \psi \approx 1$ است.

دینامیک چرخشی المان بی‌نهایت کوچک، با استفاده از رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$(\rho I(x) dx) \psi_{,tt} = (M + dM) - M + (V + dV) \frac{dx}{2} + V \frac{dx}{2} \quad (۶-۳)$$

یا

$$\rho I(x) \psi_{,tt} = M_{,x} + V \quad (۷-۳)$$

با استفاده از رابطه‌ی $\tan \psi = \omega_{,x}$ ، می‌توان نوشت:

$$\psi_{,t} = \frac{\omega_{,xt}}{(1 + \omega_{,x}^2)} \approx \omega_{,xt} \quad (۸-۳)$$

و

$$\psi_{,tt} = \frac{\omega_{,xtt}}{(1 + \omega_{,x}^2)} - \frac{2\omega_{,x} \omega_{,xt}^2}{(1 + \omega_{,x}^2)^2} \approx \omega_{,xtt} \quad (۹-۳)$$

که همه‌ی عبارت‌های غیرخطی حذف شده است. با استفاده از (۳-۳) و (۹-۳) و قرار دادن آنها در

(۷-۳) و حذف V بین (۷-۳) و (۵-۳)، درنهایت بعد از ساده‌سازی بدست می‌آید:

$$\rho A \omega_{,tt} + [EI \omega_{,xx}]_{,xx} - [\rho I \omega_{,xt}]_{,x} = p(x, t) \quad (10-3)$$

این معادله‌ی حرکت، به مدل تیر رایلی معروف است. عبارت $(\rho I \omega_{,xt})_{,x}$ ، به عنوان اینرسی چرخشی معروف است. وقتی از اینرسی چرخشی صرف‌نظر شود، مدل تیر اولر-برنولی بدست می‌آید:

$$\rho A \omega_{,tt} + [EI \omega_{,xx}]_{,xx} = p(x, t) \quad (11-3)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، معادله‌های حرکت (10-3) و (11-3)، معادله‌های دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی ۴ مکان و مرتبه‌ی ۲ زمان هستند؛ بنابراین برای حل، نیازمند ۴ شرط مرزی و ۲ شرط اولیه هستند.

۳-۲ بررسی انواع شرایط مرزی در تیرها

تعدادی از شرایط مرزی، که روی تکیه‌گاه‌ها وابسته‌اند، در شکل ۳-۳ نمایش داده شده‌اند. ساده-ترین شرایط مرزی، می‌تواند ترکیبی از تکیه‌گاه‌های ساده، گیردار، آزاد و لغزنده باشد، که در شکل ۳-۳، نمایش داده شده است.

در تکیه‌گاه ساده، انتهای پین بدون اصطکاک است؛ که جابه‌جایی عرضی و گشتاور صفر دارد. بنابراین با توجه به شکل ۳-۳ الف، می‌توان نوشت:

$$\omega(0, t) \equiv 0, \quad \omega(l, t) \equiv 0, \quad EI \omega_{,xx}(0, t) \equiv 0, \quad EI \omega_{,xx}(l, t) \equiv 0 \quad (12-3)$$

در تکیه‌گاه‌های گیردار، که در شکل ۳-۳ ب، مشخص است، شیب و جابه‌جایی صفر هستند؛ در نتیجه:

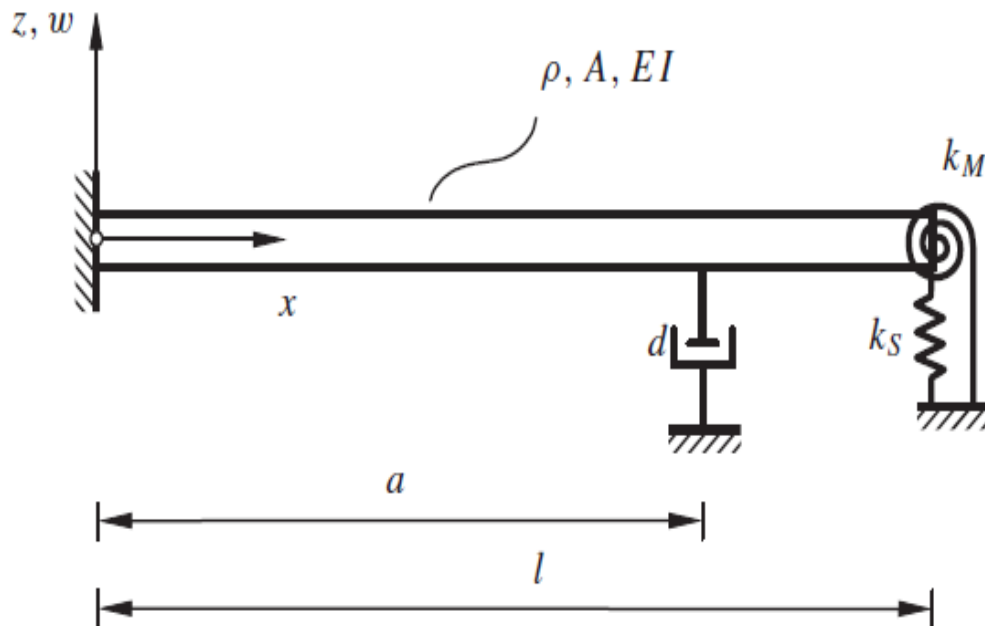
$$\omega(0, t) \equiv 0, \quad \omega_{,x}(0, t) \equiv 0 \quad (13-3)$$

در شرط مرزی آزاد، همچنان که واضح است، گشتاور و نیروی برشی محو می‌شوند؛ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$EI \omega_{,xx}(l, t) \equiv 0, \quad \rho I \omega_{,xt}(l, t) - [EI \omega_{,xx}]_{,x}(l, t) \equiv 0 \quad (14-3)$$

شرط مرزی لغزنده، دارای شیب و برش صفر است؛ در نتیجه بیان شرایط به صورت ریاضی، برای شرط مرزی سمت راست شکل ۳-۳ ج، به صورت زیر است:

$$\omega_{,x}(l,t) \equiv 0, \quad EI \omega_{,xxx}(l,t) \equiv 0 \quad (15-3)$$



شکل ۴-۳ تیر یکسر گیردار، با میرایی گسسته و سفتی در انتهای آزاد

باید توجه داشت، زمانی که نیروهای خارجی در سرتاسر تیر یا در مرزها وجود دارند، عبارت

مربوط به نیرو می‌تواند به معادله‌ها اضافه گردد.

برای مثال، تیر یکسر گیردار، که میرایی گسسته دارد و سفتی در انتهای لبه‌ی آزاد آن وجود دارد، که در شکل ۳-۴ مشخص است، را در نظر بگیرید؛ معادله‌ی حرکت و شرایط مرزی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\rho A \omega_{,tt} + [EI \omega_{,xx}]_{,xx} - [\rho I \omega_{,xtt}]_{,x} + d \delta(x-a) \omega_{,t} = 0, \omega(0,t) \equiv 0,$$

$$\omega_{,x}(0,t) \equiv 0, EI \omega_{,xx}(l,t) = -k_M \omega_{,x}(l,t) \quad (۱۶-۳)$$

و

$$EI \omega_{,xxx}(l,t) - \rho I \omega_{,xtt}(l,t) = -k_S \omega(l,t) \quad (۱۷-۳)$$

۳-۳ مسائل مقدار ویژه

تیر رایلی، که معادله‌ی حرکت آن به صورت زیر است، را در نظر بگیرید:

$$\rho A \omega_{,tt} + (EI \omega_{,xx})_{,xx} - (\rho I \omega_{,xtt})_{,x} = 0 \quad (۱۸-۳)$$

راه حل مودال (۱۸-۳)، را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\omega(x,t) = W(x) e^{i\omega t} \quad (۱۹-۳)$$

که فرکانس ویژه‌ی دورانی^۱ و $W(x)$ تابع ویژه^۲ است. جایگذاری حل مودال در معادله‌ی

(۱۸-۳)، در نهایت پس از مرتب کردن، به معادله‌ی ذیل می‌رسد:

$$-\omega^2 [\rho A W - (\rho I W')'] + (EI W'')'' = 0 \quad (۲۰-۳)$$

این معادله به همراه شرایط مرزی، مسئله‌ی مقدار ویژه^۳ برای تیر رایلی هستند. ممکن است

(۲۰-۳) را به عنوان یک مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی عمومی، به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$-\omega^2 M[W] + K[W] = 0 \quad (۲۱-۳)$$

که

1- Circular Eigen Frequency
2- Eigen Function
3- Eigenvalue Problem

$$M[\cdot] = \left[\rho A - \frac{d}{dx} \left(\rho I \frac{d}{dx} \right) \right] [\cdot] \quad \text{و} \quad k[\cdot] = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2}{dx^2} \right) [\cdot] \quad (22-3)$$

در مورد تیر اولر-برنولی، که به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$\rho A \omega_{,tt} + (EI \omega_{,xx})_{,xx} = 0 \quad (23-3)$$

با جایگزینی (۱۹-۳) در (۲۳-۳)؛ درنهایت بدست می‌آید:

$$-\omega^2 \rho A W + (EI W'')'' = 0 \quad (24-3)$$

واضح است که (۲۴-۳)، موردی خاص از (۲۱-۳) است که:

$$M[\cdot] = \rho A[\cdot] \quad \text{و} \quad k[\cdot] = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2}{dx^2} \right) [\cdot] \quad (25-3)$$

۳-۴ روابط تعامد

مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی تیر رایلی، که به وسیله‌ی (۲۱-۳) شرح داده شد، را به همراه شرایط مرزی

در نظر بگیرید. می‌توان برای دو مود مختلف j و k ، (۲۱-۳) را به صورت زیر نوشت:

$$-\omega_j^2 M[W_j] + k[W_j] = 0 \quad (26-3)$$

و

$$-\omega_k^2 M[W_k] + k[W_k] = 0 \quad (27-3)$$

که $M[\cdot]$ و $k[\cdot]$ به وسیله‌ی (۲۲-۳) تعریف می‌شود. ضرب معادله‌ی (۲۶-۳) در W_k و معادله‌ی

(۲۷-۳) در W_j و سپس تفریق یک معادله از دیگری و انتگرال‌گیری در طول تیر، رابطه‌ی ذیل بدست

می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left[((EIW_j'')' - \omega_j^2 \rho IW_j') W_k - ((EIW_k'')' - \omega_k^2 \rho IW_k') W_j \right] \Big|_0^l \\ & + [EIW_k'' W_j' - EIW_j'' W_k'] \Big|_0^l + (\omega_j^2 - \omega_k^2) \int_0^l [\rho A W_k - (\rho IW_k')'] W_j dx = 0 \end{aligned} \quad (28-3)$$

با استفاده از شرایط مرزی، می‌توان به آسانی بررسی نمود که، عبارت‌های مرزی در (۲۸-۳) ناپدید

می‌شوند؛ از این رو به سرعت رابطه‌ی تعامد را می‌توان از معادله‌ی (۲۸-۳) بدست آورد:

$$\int_0^l [\rho A W_k - (\rho IW_k')'] W_j dx = 0, \quad j \neq k \quad (29-3)$$

یا

$$\int_0^l M [W_k] W_j dx = 0, \quad j \neq k \quad (30-3)$$

در مورد تیر اولر-برنولی، (۲۹-۳) را می‌توان بیشتر ساده نمود:

$$\int_0^l \rho A W_k W_j dx = 0, \quad j \neq k \quad (31-3)$$

تابع‌های ویژه را به کمک ضرب داخلی، می‌توان به صورت زیر نرمالایز کرد:

$$\int_0^l M [W_k] W_j dx = \delta_{jk} \quad (32-3)$$

که δ_{jk} تابع دلتای کرانیکر^۱ است. به عنوان نتیجه‌ای از تعامد یک‌ه از (۲۱-۳) و (۳۰-۳)، به آسانی

می‌توان نوشت:

$$\int_0^l k [W_k] W_j dx = \omega_k^2 \delta_{jk} \quad (33-3)$$

۳-۵ شیوه‌ی گلرکین

دینامیک سیستم پیوسته‌ای را در نظر بگیرید، که معادله‌ی حرکت آن به صورت ذیل است:

$$\mu(x) u_{,tt} + k[u] = 0 \quad (34-3)$$

حل تقریبی $u(x, t)$ را به صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N p_k(t) P_k(x) = P^T p \quad (35-3)$$

که $P = [P_1(x), \dots, P_N(x)]^T$ و $p = [p_1(t), \dots, p_N(t)]^T$ بوده و توابع $P_k(x)$ همه‌ی شرایط

مرزی طبیعی و هندسی^۲ مسئله را ارضا کرده و تا حداقل بالاترین مرتبه‌ی مشتق مکانی معادله‌ی

دیفرانسیل حرکت، مشتق‌پذیرند؛ این چنین توابعی را توابع مقایسه‌ای^۳ گویند. واضح است که حل

تقریبی (۳۵-۳)، همه‌ی شرایط مرزی را ارضا خواهد کرد؛ اما به طور دقیق (۳۴-۳) را ارضا نمی‌کند.

در نتیجه درصدی خطا ظاهر شده، که توسط رابطه‌ی ذیل بیان می‌شود:

1- Kronecker Delta Function

2- Geometric and Natural Boundary Conditions

3- Comparison Functions

$$e(x,t) := \mu(x)P^T \ddot{p} + k[P^T]p \quad (36-3)$$

که $k[P^T] = (k[P_1(x)], \dots, k[P_N(x)])$ است. از آنجایی که حل تقریبی در فضای N بعدی محدود مدنظر است، می‌توان کاری کرد تا با انتخاب توابع $P_j(x)$ ، $j = 1, 2, \dots, N$ و سپس ضرب داخلی آنها در $e(x,t)$ ، باقی مانده‌ی خطا مقدار صفر شود:

$$\langle e(x,t), P_j(x) \rangle := \int_0^L e(x,t)P_j(x)dx = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (37-3)$$

با جایگذاری (36-3) درون (37-3) و نوشتن در فرم فشرده‌شده، بدست می‌آید:

$$M \ddot{p} + kp = 0 \quad (38-3)$$

که عناصر ماتریس M و k از رابطه‌های ذیل بدست می‌آیند:

$$k = \int_0^L Pk[P^T]dx \quad \text{و} \quad M = \int_0^L \mu(x)PP^T dx \quad (39-3)$$

واضح است که ماتریس M متقارن است. اگر $k[0]$ خودالحاق^۱ باشد، ماتریس k نیز متقارن خواهد بود؛ که به آسانی قابل بررسی است. برای آشنایی بیشتر با مباحث این قسمت، می‌توانید به کتاب ارتعاشات و امواج در سیستم‌های مکانیکی پیوسته^۲ اثر پیتر هگدرن^۳ و انیروان دس‌گوپتا^۴ مراجعه نمایید.

۳-۶ روش مقیاس‌های چندگانه^۵

شیوه‌ی حل مقیاس‌های چندگانه، یک نوع حلی است که برای معادلات غیرخطی به کار می‌رود و نسبت به روش‌های دیگر آشوب^۶، دارای مزیت‌هایی می‌باشد؛ از جمله آنکه برای سیستم‌های میرا، به راحتی قابل استفاده می‌باشد.

برای آشنایی مقدماتی با روش مقیاس‌های چندگانه، در ادامه معادله‌ی غیرخطی، با این روش حل

1- Self-adjoint
 2- Vibration and Waves in Continuous Mechanical Systems
 3- Peter Hagedorn
 4- Anirvan DasGupta
 5- Multiple Time Scale Perturbation Technique
 6- Perturbation

خواهد شد. معادله‌ی غیرخطی ذیل را در نظر بگیرید:

$$\ddot{x} + \sum_{n=1}^N \alpha_n x^n = 0, \quad \alpha_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(u_0) \quad (40-3)$$

برای حل با روش مقیاس‌های چندگانه، در ابتدا متغیرهای مستقل جدید تعریف می‌شوند:

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (41-3)$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان، می‌توان آنها را در عبارات‌های مشتق جزئی (با در نظر گرفتن T_n)

بسط داد:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (42-3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (43-3)$$

فرض می‌شود که حل معادله‌ی (40-3)، را بتوان به صورت زیر بسط داد:

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^3 x_3(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (44-3)$$

توجه دارید که تعداد مقیاس‌های زمانی مستقل، به مرتبه‌ی بسطی که داده می‌شود، وابسته است؛

اگر بسط مدنظر مرتبه‌ی ۲ ($O(\varepsilon^2)$) باشد، آنگاه تنها به T_0 و T_1 نیاز خواهد بود. در این قسمت، بسط

مرتبه‌ی ۳ ($O(\varepsilon^3)$) در نظر گرفته می‌شود؛ که در نتیجه به T_0 ، T_1 و T_2 نیاز خواهد بود.

با جایگزینی (43-3) و (44-3) درون (40-3) و سپس قرار دادن ضرایب ε ، ε^2 و ε^3 برابر صفر،

بدست خواهد آمد:

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (45-3)$$

$$D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - \alpha_2 x_1^2 \quad (46-3)$$

$$D_0^2 x_3 + \omega_0^2 x_3 = -2D_0 D_1 x_2 - D_1^2 x_1 - 2D_0 D_2 x_1 - 2\alpha_2 x_1 x_2 - \alpha_3 x_1^3 \quad (47-3)$$

با استفاده از این شیوه، کار راحت می‌شود و می‌توان حل (45-3) را در فرم زیر نوشت:

$$x_1 = A(T_1, T_2) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A} \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (48-3)$$

که A تابع مختلط نامشخص است و نیز \bar{A} مزدوج مختلط A است؛ که بعداً تعیین خواهند شد.

با جایگزین کردن (۴۸-۳) درون (۴۶-۳)، بدست خواهد آمد:

$$D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -2i \omega_0 D_1 A \exp(i \omega_0 T_0) - \alpha_2 [A^2 \exp(2i \omega_0 T_0) + A\bar{A}] + cc \quad (۴۹-۳)$$

که cc برای قسمت مزدوج مختلط عبارتهای ذکر شده، به کار رفته است. هر حل خصوصی

(۴۹-۳) شامل عبارت $T_0 \exp(i \omega_0 T_0)$ خواهد بود، که به جمله‌های سکولار^۱ معروف است؛ مگر اینکه

شرایط ذیل برقرار باشد:

$$D_1 A = 0 \quad (۵۰-۳)$$

در نتیجه A باید مستقل از T_1 باشد. حل (۴۹-۳) به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$x_2 = \frac{\alpha_2 A^2}{3\omega_0^2} \exp(2i \omega_0 T_0) - \frac{\alpha_2 A\bar{A}}{\omega_0^2} + cc \quad (۵۱-۳)$$

جایگزینی (۵۱-۳) و (۴۸-۳) درون (۴۷-۳) و با توجه به (۵۰-۳)، نتیجه می‌شود:

$$D_0^2 x_3 + \omega_0^2 x_3 = - \left[2i \omega_0 D_2 A - \frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3 \omega_0^2}{3\omega_0^2} A^2 \bar{A} \right] \exp(i \omega_0 T_0) - \frac{3\alpha_3 \omega_0^2 + 2\alpha_2^2}{3\omega_0^2} A^3 \exp(3i \omega_0 T_0) + cc \quad (۵۲-۳)$$

برای حذف جمله‌های سکولار از x_3 ، باید رابطه‌ی ذیل برقرار باشد:

$$2i \omega_0 D_2 A + \frac{9\alpha_3 \omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{3\omega_0^2} A^2 \bar{A} = 0 \quad (۵۳-۳)$$

برای بررسی، راحت‌تر است تا A را به فرم قطبی ذیل در نظر گرفت:

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i \beta) \quad (۵۴-۳)$$

که a و β توابع حقیقی، تابع T_2 هستند. جایگزینی (۵۴-۳) درون (۵۳-۳) و سپس جدا کردن

قسمت‌های حقیقی و موهومی، نتیجه می‌شود:

$$\omega a' = 0 \quad , \quad \omega_0 a \beta' + \frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3\omega_0^2}{24\omega_0^2} a^3 = 0 \quad (55-3)$$

از رابطه‌ی (55-3) مشخص می‌شود که a ثابت است و β به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$\beta = \frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{24\omega_0^3} a^2 T_2 + \beta_0 \quad (56-3)$$

که β_0 عدد ثابت است و در نتیجه A به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$A = \frac{1}{2} a \exp\left[i \frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{24\omega_0^3} \varepsilon^2 a^2 t + i \beta_0\right] \quad (57-3)$$

جایگزینی از (51-3) و (48-3) درون (44-3) و استفاده از (57-3)، حل پیرو بدست می‌آید:

$$x = \varepsilon a \cos(\omega t + \beta_0) - \frac{\varepsilon^2 a^2 \alpha_2}{2\alpha_1} \left[1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega t + 2\beta_0)\right] + O(\varepsilon^3) \quad (58-3)$$

که ω به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\omega = \sqrt{\alpha_1} \left[1 + \frac{9\alpha_3\alpha_1 - 10\alpha_2^2}{24\alpha_1^2} \varepsilon^2 a^2\right] + O(\varepsilon^3) \quad (59-3)$$

برای آشنایی بیشتر با مباحث غیرخطی آشوب، می‌توانید به کتاب نوسانات غیرخطی^۱ اثر نایفه و

موک^۲ مراجعه نمایید.

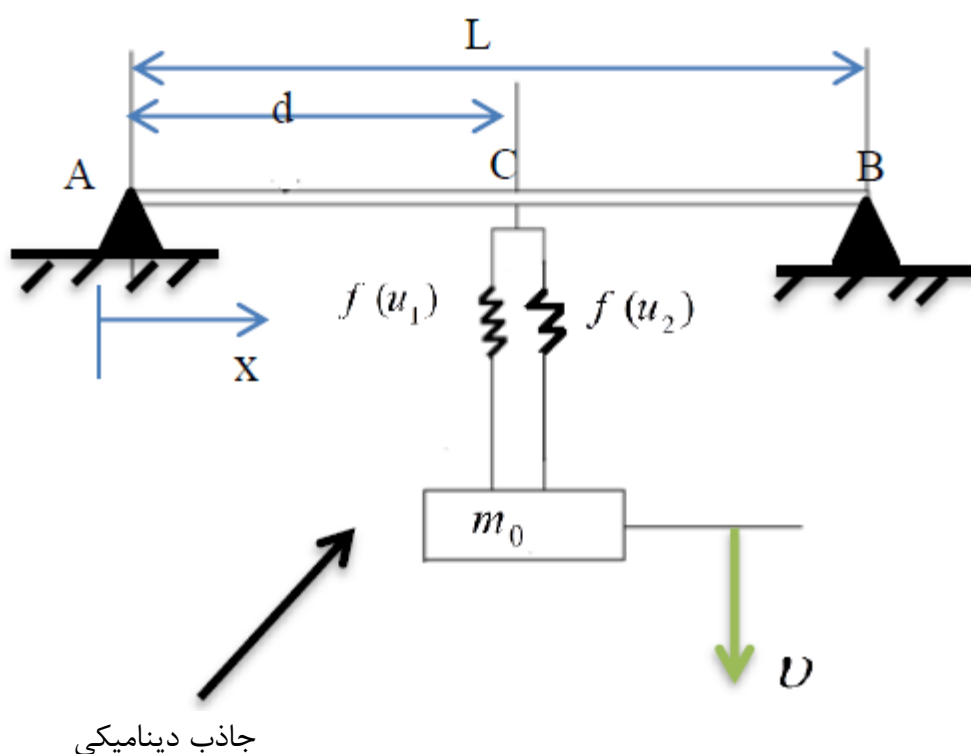
فصل ۴

بررسی جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل دو فنر (یکی
خطی و دیگری غیرخطی)، متصل به تیر با تکیه‌گاه-
های ساده

۱-۴ جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل دو فنر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تأثیر بار کوچک گسترده‌ی متناوب

۱-۱-۴ مدل مسئله و استخراج معادلات

سیستم ارائه‌شده در شکل ۱-۴ را در نظر بگیرید. تیر با تکیه‌گاه‌های ساده که از طریق یک فنر خطی و یک فنر غیرخطی، به جرم کوچکی متصل شده است و تیر تحت تأثیر بار گسترده‌ی متناوب خارجی، در سرتاسر طول خود قرار دارد.



شکل ۱-۴ تیر متصل به جاذب دو-المانه، شامل دو فنر

$$EIy_{,xxxx}(x,t) + \rho Ay_{,tt}(x,t) + [C_1(y(d,t) - v(t)) + C_2(y(d,t) - v(t))^3] \delta(x-d) = F_0 \cos \Omega t, \quad x \in (0, L), t > 0 \quad (1-4)$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(L,t) = 0, \quad y_{,xx}(0,t) = 0, \quad y_{,xx}(L,t) = 0 \quad (2-4)$$

$$y_{,t}(x,0) = 0, \quad y(x,0) = 0 \quad (3-4)$$

$$m_0 v_{,tt}(t) - C_1(y(d,t) - v(t)) - C_2(y(d,t) - v(t))^3 = 0, \quad v(0) = 0, t > 0 \quad (4-4)$$

دینامیک حاکم بر سیستم، به کمک معادلات دیفرانسیل (۱-۴) و (۴-۴) بیان می‌شوند. رابطه‌ی (۲-۴) شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و رابطه‌ی (۳-۴) شرایط اولیه را بیان می‌کنند.

$U(t)$ موقعیت مطلق جرم جاذب و $y(x, t)$ جابه‌جایی عرضی تیر را مشخص می‌کنند (طرف پایین مثبت در نظر گرفته شده است). $f(u_1)$ نیروی فنر خطی و $f(u_2)$ نیروی فنر غیرخطی است. E مدول یانگ، I ممان اینرسی سطح مقطع، $m = \rho A$ جرم در واحد طول تیر، ρ چگالی ماده، A سطح مقطع، $x = d$ محل جاذب بر روی تیر و m_0 جرم جاذب دینامیکی را مشخص می‌کنند. جرم جاذب در نظر گرفته شده در مقایسه با جرم تیر سبک‌وزن است؛ هرچند استفاده از جاذب دینامیکی سنگین در کاهش ارتعاش تیر مؤثرتر است، ولی انحراف استاتیکی تیر را به همان نسبت افزایش می‌دهد.

۲-۱-۴ بی‌بعدسازی مسئله

برای بیان مسئله در شکل بی‌بعد، متغیرهای بی‌بعد طبق رابطه‌ی (۵-۴) تعریف می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \bar{v} = \frac{v}{L}, \bar{t} = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \bar{C}_1 = \frac{C_1 L^4}{EI}, \bar{C}_2 = \frac{C_2 L^6}{EI}, \quad (5-4)$$

$$\bar{F}_0 = F_0 \frac{L^3}{EI}, \bar{\Omega} = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \Omega, \bar{k}_1 = \frac{\rho A}{EI} \frac{L^4}{m_0} C_1, \bar{k}_2 = \frac{\rho A}{EI} \frac{L^6}{m_0} C_2$$

با قرار دادن متغیرهای بی‌بعد در معادلات (۱-۴) و (۴-۴)، آنها به صورت بی‌بعد درمی‌آیند؛ با حذف

خط تیره‌ی بالای متغیرها، معادلات (۶-۴) و (۷-۴) بدست می‌آیند:

$$y_{,xxxx}(x, t) + y_{,tt}(x, t) + \left[C_1 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right) + C_2 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right)^3 \right] \delta \left(x - \frac{d}{L} \right) = F_0 \cos \Omega t \quad (6-4)$$

$$v_{,tt}(t) - k_1 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right) - k_2 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right)^3 = 0 \quad (7-4)$$

۳-۱-۴ ساده‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، به فرم ماتریسی، با استفاده از روش گلرکین

رابطه‌ی جدیدی به صورت (۸-۴) تعریف نموده و در معادلات (۶-۴) و (۷-۴) جایگزین می‌شود.

$$y\left(\frac{d}{L}, t\right) - v(t) = x \quad (۸-۴)$$

و همچنین عبارت $\pm y\left(\frac{d}{L}, t\right)$ در معادله‌ی (۷-۴) اضافه شده، سپس از روش گلرکین استفاده می‌شود:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(x) = N^T(x) q(t) \quad (۹-۴)$$

که در آن $N = [N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)]^T$ و $q = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$ بوده و

$N(x)$ همه‌ی شرایط مرزی هندسی و طبیعی مسئله را ارضا کرده و تا حداقل بالاترین مرتبه‌ی مشتق مکانی معالیه‌ی دیفرانسیل حرکت، مشتق پذیرند. واضح است که حل تقریبی، همه‌ی شرایط مرزی را ارضا خواهد کرد. $q_j(t)$ توابع نامشخص هستند که باید بدست آیند. سرانجام پس از ساده‌سازی، معادلات (۶-۴) و (۷-۴) به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$M \ddot{q} + K_0 q + V x^3 = f \cos \Omega t \quad (۱۰-۴)$$

K_0 ماتریس سفتی، q بردار دامنه‌ی نامشخص، f بزرگی نیرو و V یک بردار است. به طور خاص، M ، K_0 و f به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$M = \int_0^1 N(x) N(x)^T dx, \quad K_0 = \int_0^1 N(x) N(x)^T_{,xxxx} dx \quad (۱۱-۴)$$

$$f = \int_0^1 N(x) F_0 dx$$

فرم باز شده‌ی ماتریسی و برداری M ، K_0 ، V ، q و f به صورت (۱۲-۴) بیان می‌شوند.

باید توجه داشت، با توجه به موده‌های در نظر گرفته شده برای پاسخ تیر (یعنی

$(y(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(x))$ ، q_1 ، q_2 و ... برای آن تعریف می‌شود (مثلاً اگر دو مود برای پاسخ تیر

در نظر گرفته شود، q_1 و q_2 مخصوص پاسخ تیر و q_3 (یعنی آخرین سطر بردار q) مقدار x را

مشخص می‌کند). برای حل معادله‌ی (۴-۱۰) با استفاده از روش آشوب مقیاس‌های چندگانه^۱، معادله به

فرم کلی (۴-۱۳) بیان می‌شود.

$$M = \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1^2 dx & \int_0^1 N_1 N_2 dx & \int_0^1 N_1 N_3 dx & \dots & 0 \\ \int_0^1 N_2 N_1 dx & \int_0^1 N_2^2 dx & \int_0^1 N_2 N_3 dx & \dots & 0 \\ \int_0^1 N_3 N_1 dx & \int_0^1 N_3 N_2 dx & \int_0^1 N_3^2 dx & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ N_1 \left(\frac{d}{L}\right) & N_2 \left(\frac{d}{L}\right) & N_3 \left(\frac{d}{L}\right) & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

(۴-۱۲)

$$K_0 = \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_1 N_{2,xxxx} dx & \int_0^1 N_1 N_{3,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 C_1 N_1 \delta(x - \frac{d}{L}) dx \\ \int_0^1 N_2 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_2 N_{2,xxxx} dx & \int_0^1 N_2 N_{3,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 C_1 N_2 \delta(x - \frac{d}{L}) dx \\ \int_0^1 N_3 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_3 N_{2,xxxx} dx & \int_0^1 N_3 N_{3,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 C_1 N_3 \delta(x - \frac{d}{L}) dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{Bmatrix} C_2 N_1 \left(\frac{d}{L}\right) \\ C_2 N_2 \left(\frac{d}{L}\right) \\ \vdots \\ -k_2 \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} \int_0^1 F_0 N_1 dx \\ \int_0^1 F_0 N_2 dx \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}$$

$$M \ddot{q} + K_0 q + \varepsilon V x^3 = \varepsilon f \cos \Omega t \quad (۴-۱۳)$$

که ε یک پارامتر کوچک است.

۴-۱-۴ حل مسئله برای تشدید اصلی، به کمک مقیاس‌های چندگانه

حال معادله‌ی (۱۳-۴) را می‌توان به شیوه‌ی تحلیلی، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل

کرد. برای این کار روابط ذیل تعریف می‌شوند:

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 \quad \text{و} \quad x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 \quad (14-4)$$

و مشتق‌های زمانی به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad \text{و} \quad (15-4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (16-4)$$

که ε پارامتر کوچک آشوب و $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ و T_0 مقیاس زمانی سریع^۱، T_1 و

T_2 مقیاس‌های زمانی کند^۲ هستند.

با جایگذاری معادلات (۱۴-۴) و (۱۶-۴) در معادله‌ی (۱۳-۴)، نتیجه می‌شود:

$$M (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2 + \dots))(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + K_0 (q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \varepsilon V (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^3 = \varepsilon f \cos \Omega T_0 \quad (17-4)$$

با مساوی هم قرار دادن ضرایب توان‌های هم‌سان ε در دو طرف تساوی، می‌توان به معادلات

دیفرانسیل معمولی ذیل رسید:

مرتبه‌ی ε^0 :

$$M D_0^2 q_0 + K_0 q_0 = 0 \quad (18-4)$$

مرتبه‌ی ε^1 :

$$M D_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2M D_0 D_1 q_0 - V x_0^3 + f \cos \Omega t \quad (19-4)$$

مرتبه‌ی ε^2 :

1- Fast Time Scale
2- Slow Time Scales

$$MD_0^2 q_2 + K_0 q_2 = -2MD_0 D_1 q_1 - MD_1^2 q_0 - 2MD_0 D_2 q_0 - 3Vx_0^2 x_1 \quad (20-4)$$

حل معادله‌ی (۱۸-۴) را به صورت ذیل می‌توان در نظر گرفت:

$$q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = A(T_1, T_2, \dots) u e^{i\omega T_0} + cc \quad (21-4)$$

که $A(T_1, T_2, \dots)$ دامنه‌ی مختلط مودال است^۱ که باید ارزیابی شود. i عدد موهومی^۲ است. ω و u به ترتیب مقادیر ویژه‌ی تشدید^۳ (حقیقی) و بردارهای ویژه‌ی^۴ رابطه‌ی (۲۲-۴) هستند. cc مزدوج مختلط^۵ عبارت‌های نوشته شده است.

$$(K_0 - \omega^2 M) u = 0 \quad (22-4)$$

همانطور که می‌دانید:

$$q_0 = \begin{Bmatrix} q_{01} \\ q_{02} \\ \vdots \\ x_0 \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (23-4)$$

و در نتیجه با توجه به (۲۱-۴)، x_0 به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$x_0 = A(T_1, T_2, \dots) u_n e^{i\omega T_0} + cc \quad (24-4)$$

با جایگزینی معادلات (۲۱-۴) و (۲۴-۴) در (۱۹-۴) و بعد از ساده‌سازی، معادله‌ی (۲۵-۴) بدست می‌-

آید:

$$MD_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2Mu(i\omega) e^{i\omega T_0} D_1 A - Vu_n^3 A^3 e^{3i\omega T_0} - \quad (25-4)$$

-
- 1- Complex Modal Amplitude
 - 2- Imaginary Unit
 - 3- Resonant Eigenvalue
 - 4- Eigenvector
 - 5- Complex Conjugate

$$3Vu_n^3 A^2 \bar{A} e^{i\omega T_0} + f \cos \Omega t + cc$$

که \bar{A} مزدوج مختلط A است. با حذف جمله‌های سکولار^۱ از معادله‌ی (۲۵-۴) (برای تشدید اصلی^۲، $\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$ و در نتیجه $\cos \Omega t = \cos(\omega T_0 + \sigma T_1)$ است؛ که σ ، پارامتر تنظیم^۳ است و برای بیان میزان نزدیکی Ω به ω به کار می‌رود)، می‌توان حل معادله‌ی (۲۵-۴) را برای یافتن q_1 ، به صورت رابطه‌ی (۲۶-۴) ارائه نمود:

$$q_1(T_0, T_1, T_2, \dots) = Z A^3 e^{3i\omega T_0} + cc \quad (26-4)$$

که Z یک بردار نامشخص است؛ که می‌تواند از معادله‌ی جبری (۲۷-۴) بدست آید:

$$(K_0 - 9\omega^2 M) Z = -Vu_n^3 \quad (27-4)$$

با توجه به اینکه عبارت اجباری تشدید^۴ طرف راست معادله‌ی (۲۵-۴)، با مقدار ویژه‌ی u متعامد^۵ است (که تحت عنوان شرط حل‌پذیری^۶ تعریف می‌شود)، جمله‌های سکولار معادله‌ی (۲۵-۴) به صورت رابطه‌ی ذیل بیان می‌شوند (هنوز شرط حل‌پذیری اعمال نشده است):

$$-2Mu(i\omega)D_1 A - 3Vu_n^3 A^2 \bar{A} + \frac{f}{2} e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (28-4)$$

تحلیل پایداری به اولین مرتبه‌ی تقریب محدود می‌شود؛ پس همه‌ی ضرایب حل، تنها تابع T_1 خواهند بود. در رابطه‌ی (۲۸-۴)، A را می‌توان به صورت قطبی $A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\alpha(T_1)}$ در نظر گرفت. با قرار دادن فرم قطبی A درون معادله‌ی (۲۸-۴)، نتیجه می‌شود:

$$-2Mui\omega \left(\frac{1}{2} a' e^{i\alpha} + \frac{1}{2} ai \alpha' e^{i\alpha} \right) - \frac{3}{8} Vu_n^3 a^3 e^{i\alpha} + \frac{f}{2} e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (29-4)$$

حال شرط حل‌پذیری را در رابطه‌ی (۲۹-۴) اعمال کرده و با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و

1- Secular Terms
2- Primary Resonance
3- Detuning Parameter
4- Resonant Forcing Term
5- Orthogonal
6- Solvability Condition

موهومی، رابطه‌ی (۳۰-۴) و (۳۱-۴) بدست می‌آید:

$$a\alpha' = \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 - \frac{f^*}{2\omega e^*} \cos(\sigma T_1 - \alpha) \quad (30-4)$$

$$a' = \frac{f^*}{2\omega e^*} \sin(\sigma T_1 - \alpha) \quad (31-4)$$

که $u^T f = f^*$ ، $u^T V = v^*$ و $u^T M u = e^*$ است.

با تعریف $\gamma = \sigma T_1 - \alpha$ و سپس قرار دادن آن در روابط (۳۰-۴) و (۳۱-۴) نتیجه می‌شود:

$$a(\sigma - \gamma') - \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 = \frac{f^*}{2\omega e^*} \cos \gamma \quad (32-4)$$

$$a' = \frac{f^*}{2\omega e^*} \sin \gamma \quad (33-4)$$

برای حل‌های حالت پایدار معادلات (۳۲-۴) و (۳۳-۴)، باید $a' = \gamma' = 0$ قرار داد. در نهایت با به

توان ۲ رساندن طرفین روابط و آنگاه جمع کردن آنها نتیجه می‌شود:

$$a^2 \left(\sigma - \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^2 \right)^2 = \left(\frac{f^*}{2\omega e^*} \right)^2 \quad (34-4)$$

معادله‌ی (۳۴-۴)، یک معادله برای بیان رابطه‌ی دامنه‌ی پاسخ (a)، بر حسب پارامتر تنظیم (σ)

و دامنه‌ی تحریک f^* است؛ که به معادله‌ی پاسخ فرکانسی^۲ معروف است.

۴-۱-۵ حل مسئله برای تشدید اصلی، به کمک حل ترکیبی هارمونیک بالانس و

مقیاس‌های چندگانه

در این قسمت برای مسئله‌ی ارائه‌شده، راه‌حل دیگری بیان شده است. حل ترکیبی هارمونیک

بالانس و مقیاس‌های چندگانه^۳ [۲۷]، اسم راه‌حل ارائه شده برای این قسمت است. باید توجه داشت

که روند حل تا معادله‌ی (۷-۴)، همانند قسمت قبل است؛ در نتیجه حل برای قسمت بعد معادله‌ی

1- Steady-state Solutions

2 - Frequency-response Equation

3- Mixed Multiple Scale/Harmonic Balance Method (MSHBM)

(۷-۴)، پی گرفته می‌شود. با استفاده از روش گلرکین:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \varphi_j(x) = \varphi^T(x) q(t) \quad (۳۵-۴)$$

که در آن $\varphi = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)]^T$ و $q = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$ بوده و $\varphi(x)$ همه‌ی شرایط مرزی هندسی و طبیعی مسئله را ارضا کرده و تا حداقل بالاترین مرتبه‌ی مشتق مکانی معالیه‌ی دیفرانسیل حرکت، مشتق پذیرند. واضح است که حل تقریبی، همه‌ی شرایط مرزی را ارضا خواهد کرد. $q_j(t)$ توابع نامشخص هستند که باید تعیین شوند. در نتیجه بدست می‌آید:

$$M \ddot{q} + Kq + [C_1(r^T q - v)r + C_2(r^T q - v)^3 r] = f \cos \Omega t \quad (۳۶-۴)$$

$$v_{,tt}(t) - k_1(r^T q - v) - k_2(r^T q - v)^3 = 0 \quad (۳۷-۴)$$

K ماتریس سفتی، q بردار دامنه‌ی نامشخص، f بزرگی نیرو و r یک بردار است. به طور خاص می-

توان نوشت:

$$M = \int_0^1 \varphi \varphi^T dx, \quad K = \int_0^1 \varphi \varphi^T_{,xxxx} dx,$$

$$f = \int_0^1 \varphi F_0 dx, \quad r = \begin{Bmatrix} \varphi_1(-) \\ \vdots \\ \varphi_n(-) \end{Bmatrix}_L, \quad f = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (۳۸-۴)$$

شیوه‌ی ترکیبی مقیاس‌های چندگانه و هارمونیک بالانس به کار گرفته شده، دارای مزیت‌هایی می‌باشد، که مهمترین آن، جلوگیری از روند حل پیچیده و بررسی مستقیم متغیرهایی که مفهوم فیزیکی صریحی دارند.

برای راحتی کار، رابطه‌ی ذیل تعریف می‌شود:

$$z = r^T q - v \quad (39-4)$$

که این رابطه بین ساختار اصلی و جاذب انرژی غیرخطی، رابطه برقرار می‌کند. بنابراین معادله-های (36-4) و (37-4) به صورت زیر درخواهند آمد:

$$M \ddot{q} + Kq + C_1 z \dot{r} + C_2 z^3 r = f \cos \Omega t \quad (40-4)$$

$$r^T \ddot{q} - \ddot{z} - k_1 z - k_2 z^3 = 0 \quad (41-4)$$

متغیرهای وابسته، با استفاده از پارامتر کوچک بی‌بعدی ($\varepsilon > 0$)، دومرتبه بازسازی می‌شوند و فرض می‌شود جرم جاذب و سفتی‌ها کوچک باشند:

$$M \ddot{q} + (K_0 + \varepsilon K'_0)q + \varepsilon C_1 z \dot{r} + \varepsilon C_2 z^3 r = \varepsilon f \cos \Omega t \quad (42-4)$$

$$\varepsilon (r^T \ddot{q} - \ddot{z}) - \varepsilon k_1 z - \varepsilon k_2 z^3 = 0 \quad (43-4)$$

باید توجه داشت که K ماتریس سفتی است، که به طور خطی روی پارامترهای ساختار وابسته است؛ که می‌توان آن را به صورت $K(\sigma) = (K_0 + \varepsilon \sigma K'_0)$ در نظر گرفت. σ ، به عنوان پارامتر تنظیم عمل کرده و همچنین $K_0 = K(0)$ و $K'_0 = \frac{\partial K(0)}{\partial \sigma}$ ؛ که در اینجا K'_0 مساوی صفر است.

بر اساس شیوه‌ی مقیاس‌های چندگانه، مقیاس‌های زمانی مستقل را به صورت

$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t$$

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad \text{و} \quad (44-4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (45-4)$$

متغیرهای وابسته به صورت ذیل بسط داده می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} q \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} q_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} q_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \dots \quad (46-4)$$

با جایگزین کردن (46-4) و عبارتهای ذکر شده، در معادلات (42-4) و (43-4)، بدست می آید:

$$\begin{aligned} M (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2 + \dots))(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \\ (K_0 + \varepsilon K'_0)(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \varepsilon C_1(z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots)r + \end{aligned} \quad (47-4)$$

$$\varepsilon C_2(z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots)^3 = \varepsilon f \cos \Omega t$$

$$\begin{aligned} \varepsilon [r^T (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2 + \dots))(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) - \\ (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2 + \dots))(z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots)] - \end{aligned} \quad (48-4)$$

$$-\varepsilon k_1(z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots) - \varepsilon k_2(z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots)^3 = 0$$

با مساوی هم قرار دادن ضرایب توانهای همسان ε در دو طرف تساوی، می توان به معادلات

دیفرانسیل معمولی ذیل رسید:

مرتبه ε^0 :

$$M D_0^2 q_0 + K_0 q_0 = 0 \quad (49-4)$$

مرتبه ε^1 :

$$M D_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2M D_0 D_1 q_0 - K'_0 q_0 - C_1 z_0 r - C_2 z_0^3 r + f \cos \Omega t \quad (50-4)$$

$$r^T D_0^2 q_0 - D_0^2 z_0 - k_1 z_0 - k_2 z_0^3 = 0 \quad (51-4)$$

مرتبه ε^2 :

$$\begin{aligned} M D_0^2 q_2 + K_0 q_2 = -2M D_0 D_1 q_1 - M D_1^2 q_0 - 2M D_0 D_2 q_0 - K'_0 q_1 - \\ C_1 z_1 r - 3 C_2 z_1 z_0^2 r \end{aligned} \quad (52-4)$$

$$r^T D_0^2 q_1 - D_0^2 z_1 - k_1 z_1 - 3k_2 z_0^2 z_1 = 2D_0 D_1 z_0 - 2r^T D_0 D_1 q_0 \quad (53-4)$$

حل معادله ی (49-4) به صورت (54-4) ارائه می شود:

$$q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = A(T_1, T_2, \dots) u e^{i\omega T_0} + cc \quad (54-4)$$

که $A(T_1, T_2, \dots)$ دامنه‌ی مختلط مودال است که باید ارزیابی شود و i عدد موهومی است. ω و u به ترتیب مقادیر ویژه‌ی تشدید (حقیقی) و بردارهای ویژه‌ی (ω, u) هستند. در نهایت cc مزدوج مختلط عبارتهای نوشته شده است.

$$(K_0 - \omega^2 M) u = 0 \quad (55-4)$$

حال معادلات آشوب مرتبه‌ی \mathcal{E} (معادلات $(50-4)$ و $(51-4)$) در نظر گرفته می‌شوند و در ابتدا معادله‌ی جاذب (یعنی $(51-4)$)، مدنظر قرار می‌گیرد. از آنجایی که حل پایدار نمی‌تواند توسط توابع مقدماتی بیان شود، شیوه‌ی هارمونیک بالانس مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$z_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = B_1(T_1, T_2, \dots) e^{i\omega T_0} + cc \quad (56-4)$$

که $B_1(T_1, T_2, \dots)$ دامنه‌ی مختلط مرتبه اول است که باید مشخص شود. مؤلفه‌های فرکانسی دیگر (مانند $3\omega, 5\omega, \dots$) در اینجا در نظر گرفته نشده‌اند. معادلات $(54-4)$ و $(56-4)$ در معادله‌ی $(51-4)$ جایگزین می‌شوند و با در نظر گرفتن عبارتهای فرکانسی ω بدست می‌آید:

$$-\omega^2(B_1 - RA) + k_1 B_1 + 3k_2 B_1^2 \bar{B}_1 = 0 \quad (57-4)$$

که $R = r^T u$ است. معادله‌ی $(57-4)$ ، مرتبه‌ی اول آشوب را فراهم می‌کند. برای بدست آوردن

مرتبه‌ی اول فرم حقیقی، عبارت $A(t) = \frac{1}{2} a(t) e^{i\alpha(t)}$ و $B(t) = \frac{1}{2} b(t) e^{i\beta(t)}$ در $(57-4)$

جایگزین می‌شود:

$$-\omega^2 \left(\frac{1}{2} b e^{i\beta} - R \frac{1}{2} a e^{i\alpha} \right) + k_1 \frac{1}{2} b e^{i\beta} + \frac{3}{8} k_2 b^3 e^{i\beta} = 0 \quad (58-4)$$

با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی $(58-4)$ ، بدست می‌آید:

$$\omega^2 R a \cos(\alpha - \beta) = \omega^2 b - k_1 b - \frac{3}{4} k_2 b^3 \quad (59-4)$$

$$\omega^2 R a \sin(\alpha - \beta) = 0 \quad (60-4)$$

در نهایت با به توان دو رساندن و جمع کردن روابط $(59-4)$ و $(60-4)$ ، رابطه‌ی $(61-4)$ بدست می‌آید:

$$\omega^4 R^2 a^2 = (\omega^2 b - k_1 b - \frac{3}{4} k_2 b^3)^2 \quad (61-4)$$

که رابطه‌ای بین دو دامنه‌ی حقیقی را بیان می‌کند. با توجه به اینکه، معادلات قادر به شرح حرکت‌هایی که رخ می‌دهند نیستند، در نتیجه معادله‌ی آشوب دیگری باید در نظر گرفته شود؛ که برای این منظور معادله‌ی (۵۰-۴) در نظر گرفته می‌شود؛ که z_0 به صورت (۵۶-۴) در نظر گرفته می‌شود. با توجه به شرط حل‌پذیری، شرط پیرو با در نظر گرفتن تشدید اصلی بدست می‌آید:

$$D_1 A = -\frac{A}{2i\omega} u^T K'_0 u - \frac{B_1 C_1}{2i\omega} u^T r - \frac{3 C_2 B_1^2 \bar{B}_1}{2i\omega} u^T r + \frac{u^T f}{4i\omega} e^{i\sigma T_1} \quad (62-4)$$

و یا می‌توان (۶۲-۴) را به صورت ذیل بیان کرد:

$$D_1 A = ih_1 A + ih_2 B_1 C_1 + ih_3 B_1^2 \bar{B}_1 - ih_4 e^{i\sigma T_1} \quad (63-4)$$

که فرض می‌شود u نرمالایز است تا جرم مودال یکه‌ای ($u^T M u = 1$) بدست آید. ضرایب

رابطه‌ی (۶۳-۴) به صورت ذیل هستند:

$$h_1 = \frac{1}{2\omega} u^T K'_0 u, \quad h_2 = \frac{1}{2\omega} u^T r, \quad h_3 = \frac{3}{2\omega} u^T r C_2 \quad \text{و} \quad h_4 = \frac{1}{4\omega} u^T f \quad (64-4)$$

با جایگزین کردن معادله‌ی (۶۳-۴) در معادله‌ی (۵۰-۴) و حل کردن برای q_1 ، بدست می‌آید:

$$q_1 = A w_1 e^{i\omega T_0} + B_1 w_2 e^{i\omega T_0} + B_1^2 \bar{B}_1 w_3 e^{i\omega T_0} + w_4 e^{i\omega T_0} e^{i\sigma T_1} + B_1^3 w_5 e^{3i\omega T_0} + cc \quad (65-4)$$

در معادله‌ی (۶۵-۴)، ماتریس‌های ستونی $w_j, j=1,2,3,4$ به صورت (۶۶-۴) بدست می‌آیند:

$$w_1: \quad (K_0 - \omega^2 M) w_1 = - (K'_0 u - u^T K'_0 u (Mu))$$

$$w_2: \quad (K_0 - \omega^2 M) w_2 = - (C_1 r - C_1 u^T r (Mu)) \quad (66-4)$$

$$w_3: (K_0 - \omega^2 M) w_3 = -3 C_2 (r - u^T r (Mu))$$

$$w_4: (K_0 - \omega^2 M) w_4 = \frac{1}{2} (f - u^T f (Mu))$$

که حل، با توجه به شرایط نرمالایز $w_j^T u = 0$ یکه است و w_5 :

$$w_5: (K_0 - 9\omega^2 M) w_5 = -C_2 r \quad (67-4)$$

در نهایت معادله‌ی (۵۳-۴) در نظر گرفته می‌شود. برای حل، حل هارمونیک بالانس دیگری باید در

نظر گرفت:

$$z_1(T_0, T_1, T_2, \dots) = B_2(T_1, T_2, \dots) e^{i\omega T_0 + cc} \quad (68-4)$$

جایگزینی معادلات (۵۴-۴)، (۵۶-۴)، (۶۵-۴) و (۶۸-۴) در معادله‌ی (۵۳-۴) و در نظر گرفتن عبارت‌های

فرکانسی ω ، معادله‌ی پیرو بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \omega^2 A S_1 + \omega^2 B_1 S_2 + \omega^2 B_1^2 \bar{B}_1 S_3 + \omega^2 S_4 - \omega^2 B_2 + k_1 B_2 + 6k_2 B_1 \bar{B}_1 B_2 + \\ 3k_2 B_1^2 \bar{B}_2 + 2i\omega D_1 B_1 - 2i\omega r^T u D_1 A = 0 \end{aligned} \quad (69-4)$$

که $S_j = r^T w_j, j = 1, 2, 3, 4$ است. معادلات (۵۷-۴) و (۶۹-۴)، می‌توانند دوباره بازنویسی شوند. با

استفاده از تعریف $B = B_1 + \varepsilon B_2$ و استفاده از زمان حقیقی (که تنها تابع t باشد)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} 2i\omega \dot{B} - (2i\omega r^T u) \dot{A} = -(\omega^2 S_2 - \omega^2 + k_1) B - (\omega^2 S_1 + \omega^2 R) A - \\ (\omega^2 S_3 + 3k_2) B^2 \bar{B} - \omega^2 S_4 \end{aligned} \quad (70-4)$$

واضح است که این معادله، دینامیک دامنه‌ی B را شرح می‌دهد و با معادله‌ی (۵۷-۴) متفاوت

است. اگر روند آشوب برای مرتبه‌ی ε و برای معادله‌ی سیستم اصلی در نظر گرفته شود، شرط حل-

پذیری (۶۲-۴) یا (۶۳-۴) می‌تواند در عبارت‌های زمان حقیقی (که تنها تابع t باشد) نوشته شود:

$$\dot{A} = h_1 A + ih_2 B C_1 + ih_3 B^2 \bar{B} - ih_4 \quad (71-4)$$

برای بدست آوردن فرم قطبی معادلات (۷۰-۴) و (۷۱-۴)، قرار داده می‌شود:

$$A(t) = \frac{1}{2} a(t) e^{i\alpha(t)} \quad \text{و} \quad B(t) = \frac{1}{2} b(t) e^{i\beta(t)}$$

و با جدا کردن قسمت حقیقی و موهومی آنها،

روابط ذیل بدست می‌آیند (ابتدا این کار برای معادله‌ی (۷۰-۴) انجام می‌پذیرد):

$$\begin{aligned} & -2\omega b \dot{\beta} + 2\omega r^T u \dot{a} \sin(\alpha - \beta) + 2\omega r^T u a \dot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) = \\ & -\omega^2 S_2 b + \omega^2 b - k_1 b - (\omega^2 S_1 + \omega^2 R) a \cos(\alpha - \beta) - (\omega^2 S_3 + 3k_2) \frac{1}{4} b^3 - \end{aligned} \quad (۷۲-۴)$$

$$2\omega^2 S_4 \cos \beta$$

$$\begin{aligned} & 2\omega \dot{b} - 2\omega r^T u \dot{a} \cos(\alpha - \beta) - 2\omega r^T u a \dot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) = \\ & - (\omega^2 S_1 + \omega^2 R) a \sin(\alpha - \beta) + 2\omega^2 S_4 \sin \beta \end{aligned} \quad (۷۳-۴)$$

و درنهایت برای معادله‌ی (۷۱-۴) انجام می‌گیرد:

$$\dot{a} = h_2 C_1 b \cos(\beta - \alpha) - \frac{h_3 b^3}{4} \sin(\beta - \alpha) - h_4 \sin \alpha + \frac{h_1}{2} a \quad (۷۴-۴)$$

$$a \dot{\alpha} = h_2 C_1 b \sin(\beta - \alpha) + \frac{h_3 b^3}{4} \cos(\beta - \alpha) - h_4 \cos \alpha \quad (۷۵-۴)$$

معادله‌ی (۷۲-۴) تا (۷۵-۴)، مسئله‌ی آشوب غیرخطی دینامیک سیستم اصلی، که جاذب به آن

وصل شده، را با عبارت‌های متغیرهای وابسته‌ی حقیقی a ، b ، α و β شرح می‌دهند. نقاط تعادل، از

قرار دادن $\dot{a} = \dot{b} = \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$ بدست می‌آیند؛ که نوسان‌های متناوب را درجابه‌جایی‌های q و z بیان می‌-

کنند.

۴-۱-۶ نتایج عددی

نتایج مطالعه‌ی عددی برای سیستم مورد نظر، با پارامترهای ذیل بررسی می‌شود (لازم به ذکر

است، تا زمانی که مقادیر دیگری برای این پارامترها ذکر نشده است، مقادیر آنها همان مقادیرهای ذکر

شده در (۷۶-۴) می‌باشند):

$$\rho A = 1 \text{ kg/m}, EI = 1 \text{ N m}^2, L = 1 \text{ m}, m_0 = 0.1 \text{ kg}, C_1 = 3 \text{ N/m},$$

$$C_2 = 0.01 \text{ N/m}^3, \frac{d}{L} = 0.5 \quad (76-4)$$

توابع مقایسه‌ای^۱ به صورت ذیل در نظر گرفته می‌شوند:

$$\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) = \sin(r\pi \bar{x}) \quad , r = 1, 2, \dots \quad (77-4)$$

تعداد مودهای در نظر گرفته شده برای پاسخ تیر، ۵ مود می‌باشد. حال ماتریس‌های سفتی و جرم و بردارهای نیرو و V طبق (۷۹-۴) محاسبه می‌شوند. با استفاده از رابطه‌ی (۲۲-۴) (و با کمک نرم‌افزار متلب)، مقادیر ویژه‌ی تشدید و بردارهای ویژه‌ی مسئله‌ی مورد نظر، محاسبه می‌شوند. مقادیر ویژه و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی اول تا ششم (به ترتیب)، به صورت ذیل بدست می‌آیند:

$$\omega = 5.2539, 10.2847, 39.4784, 88.8604, 157.9137, 246.7523$$

بردارهای ویژه‌ی متناظر فرکانس‌های طبیعی هم به صورت (۷۸-۴) محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -0.0856 \\ 0 \\ 0.0008 \\ 0 \\ -0.0001 \\ 0.9963 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0.5828 \\ 0 \\ 0.0006 \\ 0 \\ -0.0001 \\ 0.8126 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -0.0005 \\ 0 \\ 0.7055 \\ 0 \\ 0.0001 \\ -0.7087 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_6 = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0 \\ 0.0001 \\ 0 \\ -0.7069 \\ -0.7074 \end{bmatrix}, \quad (78-4)$$

برای محاسبه‌ی عددی، تشدید اول (یعنی $\omega = 5.2539$) در نظر گرفته می‌شود و بردار ویژه‌ی

$$u_1 \text{ است.} = \begin{bmatrix} -0.0856 \\ 0 \\ 0.0008 \\ 0 \\ -0.0001 \\ 0.9963 \end{bmatrix} \quad \text{متناظر با آن به صورت}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi^4}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8\pi^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{81\pi^4}{2} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 128\pi^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{625\pi^4}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}, V = \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0 \\ -0.01 \\ 0 \\ 0.01 \\ -0.1 \end{Bmatrix}$$

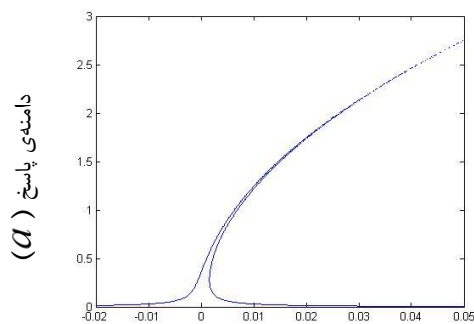
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 2 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 2 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, f = \begin{Bmatrix} \frac{2F_0}{\pi} \\ 0 \\ \frac{2F_0}{3\pi} \\ 0 \\ \frac{2F_0}{5\pi} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (79-4)$$

در نهایت $u_n = 0.9963$ ، $v^* = -0.1005$ و $e^* = -1.0751$ محاسبه می‌شوند. حال با استفاده

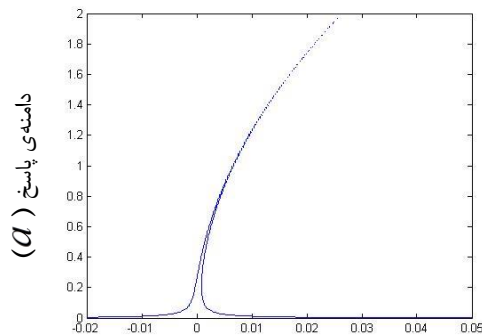
از مقادیر محاسبه شده، نمودارهایی ترسیم می‌شود. شکل ۴-۲ الف و شکل ۴-۳ الف، برای $F_0 = 0.02$

و در نتیجه $f^* = -0.0014$ ترسیم شده است. شکل ۴-۲ ب و شکل ۴-۳ ب، برای $F_0 = 0.05$ و

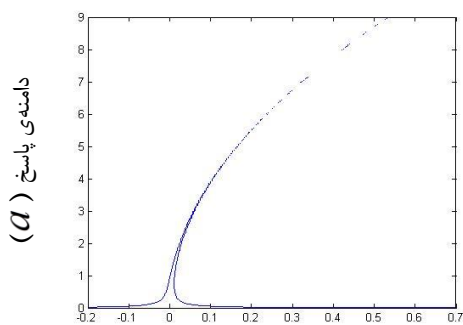
در نتیجه $f^* = -0.0034$ ؛ شکل ۴-۲ ج و شکل ۴-۳ ج، برای $F_0 = 0.3$ و در نتیجه $f^* = -0.0207$



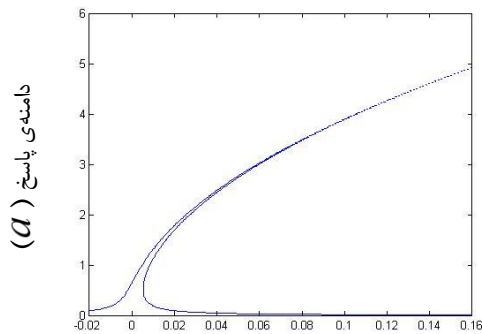
(ب) پارامتر تنظیم (σ)



(الف) پارامتر تنظیم (σ)



(د) پارامتر تنظیم (σ)



(ج) پارامتر تنظیم (σ)

شکل ۲-۴ منحنی‌های دامنه‌ی پاسخ بر حسب پارامتر تنظیم، زمانی که

$$\omega = 5.2539, e^* = -1.0751, v^* = -0.1005, u_n = 0.9963$$

$$f^* = -0.0014 \text{ (الف)}; f^* = -0.0034 \text{ (ب)}; f^* = -0.0207 \text{ (ج)}; f^* = -0.062 \text{ (د)}$$

و شکل ۲-۴ د. و شکل ۳-۴ د. برای $F_0 = 0.9$ و در نتیجه $f^* = -0.062$ ترسیم گشته‌اند.

نمودارها با استفاده از نرم‌افزار متلب رسم گردیده‌اند. شکل ۲-۴ و شکل ۳-۴، مقایسه‌ای را بین

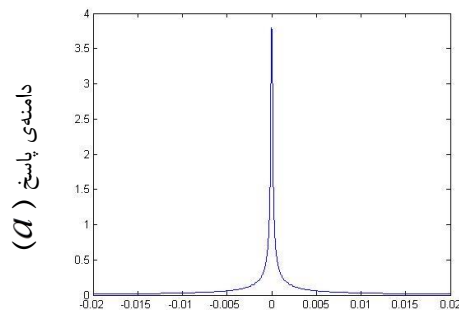
منحنی پاسخ خطی ($u_n = 0$) و غیرخطی ($u_n \neq 0$) به تصویر می‌کشند. نتایج منحنی پاسخ خطی،

دارای اشکال متقارن می‌باشند. اثر عبارت غیرخطی بدین گونه می‌باشد که، منحنی دامنه بر حسب

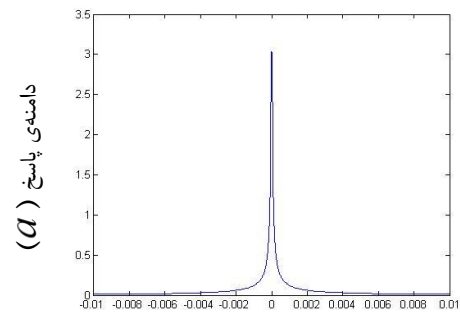
پارامتر تنظیم را کج می‌کند. در مورد منحنی پاسخ غیرخطی، به خوبی می‌توان پدیده‌ی پرش^۱ را

مشاهده نمود. با افزایش f^* ، مقدار دامنه‌ی پاسخ افزایش پیدا می‌کند؛ که می‌تواند تأییدی بر صحت

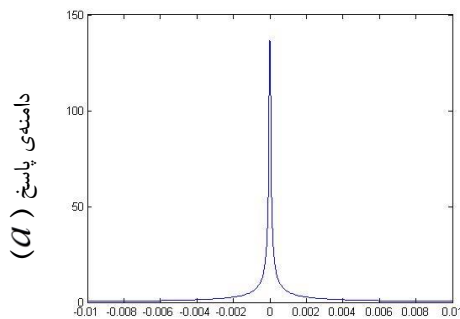
محاسبات انجام شده باشد.



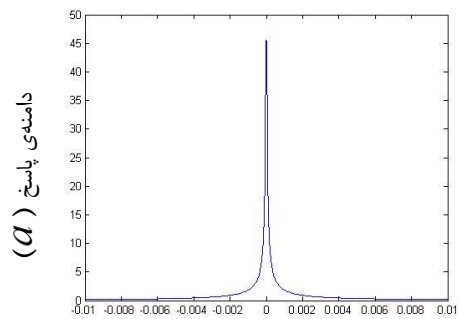
(ب) پارامتر تنظیم (σ)



(الف) پارامتر تنظیم (σ)



(د) پارامتر تنظیم (σ)



(ج) پارامتر تنظیم (σ)

شکل ۳-۴ منحنی‌های دامنه‌ی پاسخ بر حسب پارامتر تنظیم، زمانی که

$$\omega = 5.2539, e^* = -1.0751, v^* = -0.1005, u_n = 0$$

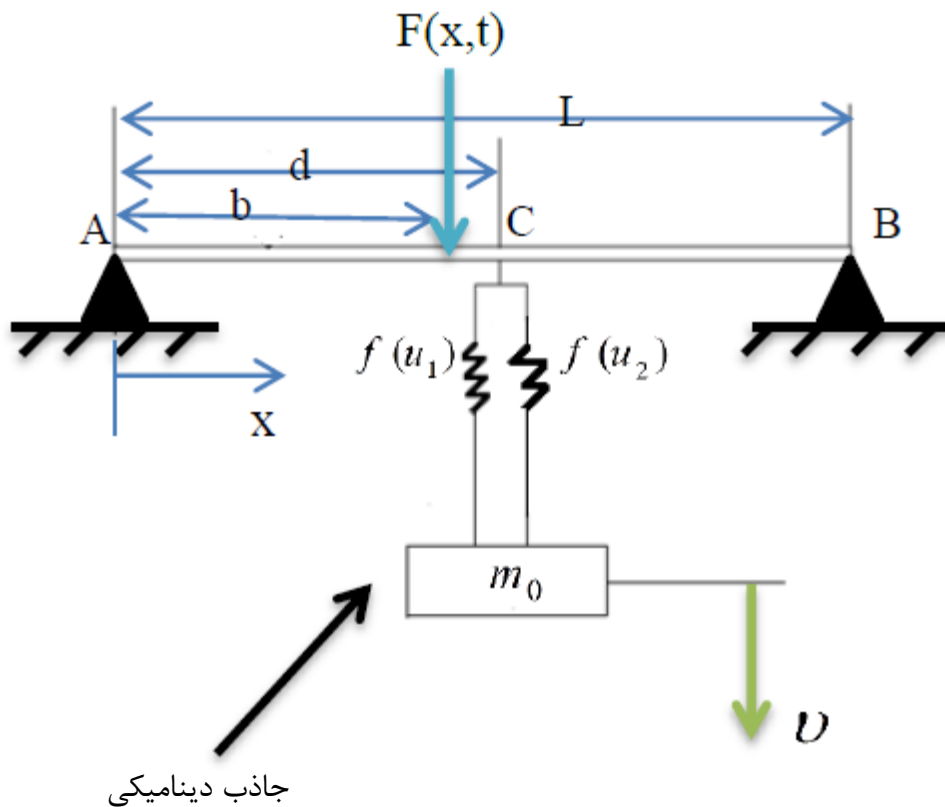
$$f^* = -0.0014 \text{ (الف)}; f^* = -0.0034 \text{ (ب)}; f^* = -0.0207 \text{ (ج)}; f^* = -0.062 \text{ (د)}$$

۲-۴ جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل دو فنر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تأثیر بار متمرکز متناوب

۱-۲-۴ مدل مسئله

شکل ۴-۴ را در نظر بگیرید؛ تیر با تکیه‌گاه‌های ساده که از طریق یک فنر خطی و یک فنر غیر-

خطی به جرم کوچکی متصل شده است و تیر تحت تأثیر بار متمرکز متناوب قرار دارد.



شکل ۴-۴ تیر متصل به جاذب دو-المانه، شامل دو فنر، در معرض بار متمرکز متناوب

$$EIy_{,xxxx}(x,t) + \rho Ay_{,tt}(x,t) + [C_1(y(d,t) - v(t)) + C_2(y(d,t) - v(t))^3] \delta(x-d) = F_0 \delta(x-b) \cos \Omega t, \quad x \in (0,L), t > 0 \quad (۸۰-۴)$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(L,t) = 0, \quad y_{,xx}(0,t) = 0, \quad y_{,xx}(L,t) = 0 \quad (۸۱-۴)$$

$$y_{,t}(x,0) = 0, \quad y(x,0) = 0 \quad (۸۲-۴)$$

$$m_0 v_{,tt}(t) - C_1(y(d,t) - v(t)) - C_2(y(d,t) - v(t))^3 = 0, \quad (۸۳-۴)$$

$$v(0) = 0, v_t = 0, t > 0$$

دینامیک حاکم بر سیستم، به کمک معادلات دیفرانسیل (۴-۸۰) و (۴-۸۳) ارائه شده است. رابطه‌ی

(۴-۸۱) شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و رابطه‌ی (۴-۸۲) شرایط اولیه را بیان می‌کنند.

$v(t)$ موقعیت مطلق جرم جاذب و $y(x, t)$ جابه‌جایی عرضی تیر را مشخص می‌کنند (طرف

پایین مثبت در نظر گرفته می‌شود). $f(u_1)$ نیروی فنر خطی و $f(u_2)$ نیز نیروی فنر غیرخطی است.

E مدول یانگ، I ممان اینرسی سطح مقطع، $m = \rho A$ جرم در واحد طول تیر، ρ چگالی ماده، A

سطح مقطع و m_0 جرم جاذب دینامیکی را مشخص می‌کنند.

۴-۲-۲ بی‌بعدسازی مسئله

برای بیان مسئله در شکل بی‌بعد، متغیرهای بی‌بعد همانند ذیل تعریف می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \bar{v} = \frac{v}{L}, \bar{t} = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \bar{C}_1 = \frac{C_1 L^4}{EI}, \bar{C}_2 = \frac{C_2 L^6}{EI}, \quad (۴-۸۴)$$

$$\bar{F}_0 = F_0 \frac{L^3}{EI}, \bar{\Omega} = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \Omega, \bar{k}_1 = \frac{\rho A}{EI} \frac{L^4}{m_0} C_1, \bar{k}_2 = \frac{\rho A}{EI} \frac{L^6}{m_0} C_2$$

با قرار دادن متغیرهای بی‌بعد در معادلات (۴-۸۰) و (۴-۸۳)، آنها به صورت بی‌بعد درمی‌آیند؛ با

حذف خط تیره‌ی بالای متغیرها، معادلات (۴-۸۵) و (۴-۸۶) بدست می‌آیند:

$$y_{,xxxx}(x, t) + y_{,tt}(x, t) + \left[C_1 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right) + C_2 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right)^3 \right] \delta \left(x - \frac{d}{L} \right) = F_0 \delta \left(x - \frac{b}{L} \right) \cos \Omega t \quad (۴-۸۵)$$

$$v_{,tt}(t) - k_1 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right) - k_2 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right)^3 = 0 \quad (۴-۸۶)$$

۴-۲-۳ ساده‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، به فرم ماتریسی، با استفاده از روش

گلرکین

رابطه‌ی جدیدی به صورت (۴-۸۷) تعریف شده و در معادلات (۴-۸۵) و (۴-۸۶) جایگزین می‌شود.

$$y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) = \chi \quad (۴-۸۷)$$

همچنین عبارت $\pm \ddot{y} \left(\frac{d}{L}, t \right)$ در معادله (۸۶-۴) اضافه شده، سپس از روش گلرکین استفاده می-شود:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(x) = N^T(x) q(t) \quad (۸۸-۴)$$

که در آن $N = [N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)]^T$ و $q = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$ بوده و $N(x)$

همه‌ی شرایط مرزی هندسی و طبیعی مسئله را ارضا کرده و تا حداقل بالاترین مرتبه‌ی مشتق مکانی معالهی دیفرانسیل حرکت، مشتق‌پذیرند. واضح است که حل تقریبی، همه‌ی شرایط مرزی را ارضا خواهد کرد. $q_j(t)$ توابع نامشخص هستند که باید بدست آیند. سرانجام پس از ساده‌سازی، معادلات (۸۵-۴) و (۸۶-۴)، به صورت ماتریسی ذیل بدست می‌آید:

$$M \ddot{q} + K_0 q + V x^3 = f \cos \Omega t \quad (۸۹-۴)$$

K_0 ماتریس سفتی، q بردار دامنه‌ی نامشخص، f بزرگی نیرو و V یک بردار است. M ، K_0 و f به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$M = \int_0^1 N(x) N(x)^T dx, \quad K_0 = \int_0^1 N(x) N(x)^T_{,xxxx} dx \quad (۹۰-۴)$$

$$f = \int_0^1 N(x) \delta(x - \frac{b}{L}) F_0 dx$$

فرم بازشده‌ی ماتریسی و برداری M ، K_0 ، V ، q و f به صورت (۹۱-۴) بیان می‌شوند.

باید در نظر داشت، با توجه به موده‌های در نظر گرفته شده برای پاسخ تیر (یعنی

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(x), \quad q_1, q_2, \dots \text{ و } \dots \text{ برای آن تعریف می‌شود (مثلاً اگر دو مود برای پاسخ تیر}$$

در نظر گرفته شود، q_1 و q_2 مخصوص پاسخ تیر و q_3 (یعنی آخرین سطر بردار q) مقدار x را

مشخص می‌کند). برای حل معادله‌ی (۸۹-۴) با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، معادله به فرم

کلی (۹۲-۴) بیان می‌شود.

$$M = \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1^2 dx & \int_0^1 N_1 N_2 dx & \int_0^1 N_1 N_3 dx & \dots & 0 \\ \int_0^1 N_2 N_1 dx & \int_0^1 N_2^2 dx & \int_0^1 N_2 N_3 dx & \dots & 0 \\ \int_0^1 N_3 N_1 dx & \int_0^1 N_3 N_2 dx & \int_0^1 N_3^2 dx & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ N_1 \left(\frac{d}{L}\right) & N_2 \left(\frac{d}{L}\right) & N_3 \left(\frac{d}{L}\right) & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

(۹۱-۴)

$$K_0 = \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_1 N_{2,xxxx} dx & \int_0^1 N_1 N_{3,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 C_1 N_1 \delta(x - \frac{d}{L}) dx \\ \int_0^1 N_2 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_2 N_{2,xxxx} dx & \int_0^1 N_2 N_{3,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 C_1 N_2 \delta(x - \frac{d}{L}) dx \\ \int_0^1 N_3 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_3 N_{2,xxxx} dx & \int_0^1 N_3 N_{3,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 C_1 N_3 \delta(x - \frac{d}{L}) dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{Bmatrix} C_2 N_1 \left(\frac{d}{L}\right) \\ C_2 N_2 \left(\frac{d}{L}\right) \\ \vdots \\ -k_2 \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} \int_0^1 F_0 \delta(x - \frac{b}{L}) N_1 dx = F_0 N_1 \left(\frac{b}{L}\right) \\ \int_0^1 F_0 \delta(x - \frac{b}{L}) N_2 dx = F_0 N_2 \left(\frac{b}{L}\right) \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}$$

$$M \ddot{q} + K_0 q + \varepsilon V x^3 = f \cos \Omega t \quad (۹۲-۴)$$

که ε یک پارامتر کوچک است.

۴-۲-۴ محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی (خطی و غیر خطی)

در این قسمت محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی (خطی و غیر خطی) مسئله‌ی مورد نظر، مورد توجه

قرار می‌گیرد. برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی، باید توجه داشت که روابط قسمت قبل تا (۹۲-۴) صادق است؛ البته در رابطه‌ی (۹۲-۴) باید نیروی خارجی حذف شود. پس حل از رابطه‌ی ذیل آغاز می‌شود:

$$M \ddot{q} + K_0 q + \varepsilon V x^3 = 0 \quad (۹۳-۴)$$

حل رابطه‌ی (۹۳-۴) با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، صورت می‌گیرد. برای این کار می‌توان همانند بخش قبل روابط (۱۴-۴)، (۱۵-۴) و (۱۶-۴) را تعریف نمود. در ادامه با جایگذاری معادلات (۱۴-۴) و (۱۶-۴) در معادله‌ی (۹۳-۴)، نتیجه می‌شود:

$$M (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2 + \dots))(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + K_0 (q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \varepsilon V (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^3 = 0 \quad (۹۴-۴)$$

با مساوی هم قرار دادن ضرایب ε^0 ، ε و ε^2 در دو طرف تساوی، می‌توان به معادلات دیفرانسیل

معمولی ذیل رسید:

مرتبه‌ی ε^0 :

$$M D_0^2 q_0 + K_0 q_0 = 0 \quad (۹۵-۴)$$

مرتبه‌ی ε^1 :

$$M D_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2M D_0 D_1 q_0 - V x_0^3 \quad (۹۶-۴)$$

مرتبه‌ی ε^2 :

$$M D_0^2 q_2 + K_0 q_2 = -2M D_0 D_1 q_1 - M D_1^2 q_0 - 2M D_0 D_2 q_0 - 3V x_0^2 x_1 \quad (۹۷-۴)$$

حل معادله‌ی (۹۵-۴):

$$q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = A(T_1, T_2, \dots) u e^{i\omega T_0} \quad (۹۸-۴)$$

که ω و u از رابطه‌ی (۹۹-۴) بدست می‌آیند:

$$(K_0 - \omega^2 M) u = 0 \quad (۹۹-۴)$$

فرم برداری q_0 و u توسط رابطه‌ی (۱۰۰-۴) تعریف می‌شوند. با توجه به (۹۸-۴)، x_0 به صورت

(۱۰۱-۴) تعریف می‌شود.

با جایگزینی معادلات (۹۸-۴) و (۱۰۱-۴) در (۹۶-۴) و بعد از ساده‌سازی، معادله‌ی (۱۰۲-۴) بدست

می‌آید.

$$q_0 = \begin{Bmatrix} q_{01} \\ q_{02} \\ \vdots \\ x_0 \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (100-4)$$

$$x_0 = A(T_1, T_2, \dots) u_n e^{i\omega T_0} \quad (101-4)$$

$$MD_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2Mu(i\omega) e^{i\omega T_0} D_1 A - V u_n^3 A^3 e^{3i\omega T_0} - \quad (102-4)$$

$$3Vu_n^3 A^2 \bar{A} e^{i\omega T_0} + cc$$

حل به اولین مرتبه‌ی تقریب محدود می‌شود؛ سپس همه‌ی ضرایب، تنها تابع T_1 خواهند بود. با

اعمال شرط حل‌پذیری و حذف جمله‌های سکولار معادله‌ی (۱۰۲-۴) و همچنین تعریف A به صورت

رابطه‌ی قطبی (۱۰۳-۴)، رابطه‌ی (۱۰۴-۴) بدست می‌آید:

$$A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)} \quad (103-4)$$

$$-2e^* i\omega \left(\frac{1}{2} a' e^{i\beta} + \frac{1}{2} a i \beta' e^{i\beta} \right) - \frac{3}{8} v^* u_n^3 a^3 e^{i\beta} = 0 \quad (104-4)$$

که $u^T M u = e^*$ و $u^T V = v^*$ است.

با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی، رابطه‌های (۱۰۵-۴) و (۱۰۶-۴) بدست می‌آیند:

$$-e^* \omega a' = 0 \quad (105-4)$$

$$e^* \omega a \beta' - \frac{3}{8} v^* u_n^3 a^3 = 0 \quad (106-4)$$

از رابطه‌ی (۱۰۵-۴) نتیجه می‌شود که a ثابت است. از رابطه‌ی (۱۰۶-۴)، β محاسبه می‌شود:

$$\beta = \frac{3}{8 e^* \omega} v^* u_n^3 a^2 T_1 + \beta_0 \quad (107-4)$$

که β_0 ثابت است.

در نهایت حل (۹۳-۴) به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$q = a u \cos(\Omega^* t + \beta_0) \quad (108-4)$$

که Ω^* فرکانس طبیعی غیرخطی است و به صورت (۱۰۹-۴) است:

$$\Omega^* = \frac{3}{8 e^* \omega} v^* u_n^3 a^2 \varepsilon + \omega \quad (109-4)$$

۵-۲-۴ حل مسئله برای تشدید اصلی، به کمک مقیاس‌های چندگانه

برای حل مسئله (برای تشدید اصلی)، بار دیگر به معادله‌ی (۹۲-۴) برگشته و حل آن به شیوه‌ی

تحلیلی، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، انجام می‌گیرد. برای این کار روابط ذیل تعریف می‌-

شوند:

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 \quad \text{و} \quad x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 \quad (110-4)$$

و مشتق‌های زمانی به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad \text{و} \quad (111-4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (112-4)$$

که ε پارامتر کوچک آشوب و $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ است.

با جایگذاری معادلات (۱۱۲-۴) و (۱۱۰-۴) در معادله‌ی (۹۲-۴)، نتیجه می‌شود:

$$M (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2 + \dots))(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + K_0 (q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \varepsilon V (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^3 = f \cos \Omega t \quad (113-4)$$

با مساوی هم قرار دادن ضرایب ε^0 ، ε و ε^2 در دو طرف تساوی، می‌توان به معادلات دیفرانسیل

معمولی ذیل رسید:

مرتبه‌ی ε^0 :

$$MD_0^2 q_0 + K_0 q_0 = f \cos \Omega T_0 \quad (114-4)$$

مرتبه‌ی ε^1 :

$$MD_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2MD_0 D_1 q_0 - Vx_0^3 \quad (115-4)$$

مرتبه‌ی ε^2 :

$$MD_0^2 q_2 + K_0 q_2 = -2MD_0 D_1 q_1 - MD_1^2 q_0 - 2MD_0 D_2 q_0 - 3Vx_0^2 x_1 \quad (116-4)$$

حل معادله‌ی (۱۱۴-۴):

$$q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = A(T_1, T_2, \dots) u e^{i\omega T_0} + (K_0 - M\Omega^2)^{-1} f \frac{e^{i\Omega T_0}}{2} + cc \quad (117-4)$$

که $A(T_1, T_2, \dots)$ دامنه‌ی مختلط مودال است که باید تعیین شود و i عدد موهومی است. ω و

u به ترتیب مقادیر ویژه‌ی تشدید (حقیقی) و بردارهای ویژه‌ی رابطه‌ی (۱۱۸-۴) هستند. cc مزدوج

مختلط عبارت‌های نوشته شده است.

$$(K_0 - \omega^2 M) u = 0 \quad (118-4)$$

و h به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$h = (K_0 - M\Omega^2)^{-1} f \quad (119-4)$$

فرم برداری q_0 ، u و h توسط روابط (۱۲۰-۴) تعریف شده‌اند. در نتیجه با توجه به (۱۱۷-۴)، x_0 به

صورت (۱۲۱-۴) تعریف می‌شود.

با جایگزینی معادلات (۱۱۷-۴) و (۱۲۱-۴) در (۱۱۵-۴) و بعد از ساده‌سازی، معادله‌ی (۱۲۲-۴) بدست

می‌آید.

$$q_0 = \begin{Bmatrix} q_{01} \\ q_{02} \\ \vdots \\ x_0 \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}, \quad h = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix} \quad (120-4)$$

$$x_0 = A(T_1, T_2, \dots) u_n e^{i\omega T_0} + h_n \frac{e^{i\Omega T_0}}{2} + cc \quad (121-4)$$

$$\begin{aligned} MD_0^2 q_1 + K_0 q_1 = & -2Mu(i\omega) e^{i\omega T_0} D_1 A - V u_n^3 A^3 e^{3i\omega T_0} - \\ & V \frac{h_n^3}{8} e^{3i\Omega T_0} - 3Vu_n^2 A^2 \frac{h_n}{2} e^{i\Omega T_0} e^{2i\omega T_0} - \frac{3}{4} V u_n A h_n^2 e^{2i\Omega T_0} e^{i\omega T_0} - \\ & 3Vu_n^3 A^2 \bar{A} e^{i\omega T_0} - \frac{3}{2} V u_n^2 A^2 h_n e^{-i\Omega T_0} e^{2i\omega T_0} - \\ & \frac{3}{4} V u_n \bar{A} h_n^2 e^{2i\Omega T_0} e^{-i\omega T_0} - \frac{3}{8} V h_n^3 e^{i\Omega T_0} - \\ & 3Vu_n^2 h_n A \bar{A} e^{i\Omega T_0} - \frac{3}{2} V u_n h_n^2 A e^{i\omega T_0} + cc \end{aligned} \quad (122-4)$$

که \bar{A} مزدوج مختلط A است. با حذف جمله‌های سکولار از معادله‌ی (۱۲۲-۴) (برای تشدید اصلی، $\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$ و در نتیجه $\cos \Omega t = \cos(\omega T_0 + \sigma T_1)$ است؛ که σ ، پارامتر تنظیم است و برای بیان میزان نزدیکی Ω به ω به کار می‌رود)؛ می‌توان حل معادله‌ی (۱۲۲-۴) را برای یافتن q_1 ، به صورت رابطه‌ی (۱۲۳-۴) ارائه نمود:

$$\begin{aligned} q_1(T_0, T_1, T_2, \dots) = & S_1 A^3 e^{3i\omega T_0} + S_2 e^{3i\Omega T_0} + \\ & S_3 A^2 e^{i(\Omega+2\omega)T_0} + S_4 A e^{i(\omega+2\Omega)T_0} + cc \end{aligned} \quad (123-4)$$

که S_i ، $i = 1, 2, 3, 4$ توسط روابط ذیل بدست می‌آیند:

$$(K_0 - 9\omega^2 M) S_1 = V u_n^3, \quad (K_0 - 9\Omega^2 M) S_2 = -\frac{1}{8} V h_n^3, \quad (124-4)$$

$$(K_0 - (\Omega + 2\omega)^2 M) S_3 = -\frac{3}{2} V u_n^2 h_n,$$

$$(K_0 - (2\Omega + \omega)^2 M) S_4 = -\frac{3}{4} V u_n h_n^2$$

با توجه به اینکه عبارت اجباری تشدید طرف راست معادله‌ی (۱۲۲-۴)، با مقدار ویژه‌ی u متعامد

است (که تحت عنوان شرط حل‌پذیری تعریف می‌شود)، جمله‌های سکولار معادله‌ی (۱۲۲-۴) به صورت

رابطه‌ی ذیل بیان می‌شوند (هنوز شرط حل‌پذیری اعمال نشده است):

$$-2Mu(i\omega)D_1A - 3Vu_n^3A^2\bar{A} - \frac{3}{2}Vu_n^2A^2h_n e^{-i\sigma T_1} -$$

$$\frac{3}{4}Vu_n \bar{A} h_n^2 e^{2i\sigma T_1} - \frac{3}{8}Vh_n^3 e^{i\sigma T_1} - \quad (125-4)$$

$$3Vu_n^2h_nA\bar{A}e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{2}Vu_n h_n^2 A = 0$$

تحلیل پایداری به اولین مرتبه‌ی تقریب محدود می‌شود؛ سپس همه‌ی ضرایب، تنها تابع T_1

خواهند بود. در رابطه‌ی (۱۲۵-۴)، A را می‌توان به صورت قطبی $A = \frac{1}{2}a(T_1) e^{i\alpha(T_1)}$ در نظر گرفت.

با قرار دادن فرم قطبی A در معادله‌ی (۱۲۵-۴)، نتیجه می‌شود:

$$-2 e^* i \omega \left(\frac{1}{2} a' e^{i\alpha} + \frac{1}{2} a i \alpha' e^{i\alpha} \right) - \frac{3}{8} v^* u_n^3 a^3 e^{i\alpha} - \frac{3}{8} v^* u_n^2 h_n a^2 e^{2i\alpha} e^{-i\sigma T_1} -$$

$$\frac{3}{8} v^* u_n h_n^2 a e^{-i\alpha} e^{2i\sigma T_1} - \frac{3}{8} v^* h_n^3 e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{4} v^* u_n^2 h_n a^2 e^{i\sigma T_1} - \quad (126-4)$$

$$\frac{3}{4} v^* u_n h_n^2 a e^{i\alpha} = 0$$

حال شرط حل‌پذیری در رابطه‌ی (۱۲۶-۴) اعمال شده و با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و

موهومی، روابط (۱۲۷-۴) و (۱۲۸-۴) بدست می‌آیند:

$$a\alpha' = \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \cos(\sigma T_1 - \alpha) +$$

(۱۲۷-۴)

$$\frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \cos 2(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \cos(\sigma T_1 - \alpha) +$$

$$\frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \cos(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a$$

$$a' = \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \sin(\sigma T_1 - \alpha) - \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \sin 2(\sigma T_1 - \alpha) - \quad (128-4)$$

$$\frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \sin(\sigma T_1 - \alpha) - \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \sin(\sigma T_1 - \alpha)$$

که $u^T M u = e^*$ و $u^T V = v^*$ است.

با تعریف $\gamma = \sigma T_1 - \alpha$ و سپس قرار دادن آن در روابط (127-4) و (128-4)، بدست می آید:

$$a(\sigma - \gamma') = \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 + \frac{9}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \cos \gamma + \quad (129-4)$$

$$\frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \cos 2\gamma + \frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \cos \gamma + \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a$$

$$a' = -\frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \sin \gamma - \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \sin 2\gamma - \frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \sin \gamma \quad (130-4)$$

برای حل های حالت پایدار، می توان در معادلات (129-4) و (130-4) قرار داد:

$$a' = \gamma' = 0$$

۴-۲-۶ حل مسئله برای تشدید سوپرهارمونیک، به کمک مقیاس های چندگانه

در این قسمت تشدید سوپرهارمونیک^۱ برای جاذب دو-المانه، شامل دو فنر، متصل به تیر با تکیه-تکیه گاه های ساده، که تحت تأثیر بار نقطه ای هارمونیک قرار دارد، هم بررسی می شود. باید توجه داشت که شرایط تشدید مختلفی می تواند در مسئله حادث گردد، که بستگی به فرکانس تحریک دارد و در این قسمت، یکی دیگر از تشدیدهای شایع مورد مطالعه قرار می گیرد؛ که تشدید سوپرهارمونیک نام دارد؛ این تشدید زمانی اتفاق می افتد، که فرکانس طبیعی ۳ برابر فرکانس تحریک باشد و یا به بیان ریاضی: $3\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$ ؛ که σ ، پارامتر تنظیم نام دارد و برای بیان میزان نزدیکی 3Ω به ω به کار می رود.

برای بررسی تشدید سوپرهارمونیک، روابط قسمت قبل تا معادله ی (122-4) صادق است و اما بعد

1- Super-harmonic Resonance

از آن دچار تغییرهایی می‌شود، که حل برای قسمت بعد از معادله‌ی (۱۲۲-۴) بیان می‌شود.

با توجه به اینکه ضرایب جمله‌های سکولار در طرف راست معادله‌ی (۱۲۲-۴)، با هر حل همگن

مسئله متعامد است (که تحت عنوان شرط حل‌پذیری تعریف می‌شود)، جملات سکولار معادله‌ی

(۱۲۲-۴) (تحت تشدید سوپرهارمونیک) به صورت رابطه‌ی ذیل بیان می‌شوند (هنوز شرط حل‌پذیری

اعمال نشده است):

$$-2Mu(i\omega)D_1A - \frac{1}{8}Vh_n^3 e^{i\sigma T_1} - 3Vu_n^3 A^2 \bar{A} - \frac{3}{2}Vu_n A h_n^2 = 0 \quad (131-4)$$

تحلیل پایداری به اولین مرتبه‌ی تقریب محدود می‌شود؛ سپس همه‌ی ضرایب، تنها تابع T_1

خواهند بود. در رابطه‌ی (۱۳۱-۴)، A را می‌توان به فرم قطبی $A = \frac{1}{2}a(T_1) e^{i\alpha(T_1)}$ در نظر گرفت. با

قرار دادن فرم قطبی A در معادله‌ی (۱۳۱-۴)، نتیجه می‌شود:

$$-2 e^* i\omega \left(\frac{1}{2} a' e^{i\alpha} + \frac{1}{2} a i\alpha' e^{i\alpha} \right) - \frac{1}{8} v^* h_n^3 e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{8} v^* u_n^3 a^3 e^{i\alpha} - \quad (132-4)$$

$$\frac{3}{4} v^* u_n h_n^2 a e^{i\alpha} = 0$$

حال شرط حل‌پذیری در رابطه‌ی (۱۳۲-۴) اعمال شده و با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و

موهومی، رابطه‌های ذیل بدست می‌آیند:

$$a\alpha' = \frac{3}{8\omega} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{4\omega} v^* u_n h_n^2 a + \frac{1}{8\omega} v^* h_n^3 \cos(\sigma T_1 - \alpha) \quad (133-4)$$

$$a' = -\frac{1}{8\omega} v^* h_n^3 \sin(\sigma T_1 - \alpha) \quad (134-4)$$

که $u^T M u = e^*$ و $u^T V = v^*$ است.

با تعریف $\gamma = \sigma T_1 - \alpha$ و سپس قرار دادن آن در روابط (۱۳۳-۴) و (۱۳۴-۴)، بدست می‌آید:

$$a(\sigma - \gamma') = \frac{3}{8\omega} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{4\omega} v^* u_n h_n^2 a + \frac{1}{8\omega} v^* h_n^3 \cos \gamma \quad (135-4)$$

$$a' = -\frac{1}{8\omega} v^* h_n^3 \sin \gamma \quad (136-4)$$

برای حل‌های حالت پایدار معادلات (۴-۱۳۵) و (۴-۱۳۶)، باید $a' = \gamma' = 0$ قرار داده و درنهایت با به توان دو رساندن طرفین روابط و آنگاه جمع کردن آنها نتیجه می‌شود:

$$\left(a\sigma - \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 - \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a\right)^2 = \left(\frac{1}{8\omega e^*} v^* h_n^3\right)^2 \quad (۴-۱۳۷)$$

درنهایت معادله‌ی پاسخ فرکانسی (یعنی معادله‌ی (۴-۱۳۷)) بدست می‌آید.

حل معادله‌ی اول (یعنی (۴-۹۲))، با درنظر گرفتن تقریب مرتبه‌ی اول، برای پاسخ تشدید سوپرهارمونیک، به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$q = a u \cos(3\Omega t - \gamma) + h \cos(\Omega t) + O(\varepsilon) \quad (۴-۱۳۸)$$

۷-۲-۴ نتایج عددی

۱-۷-۲-۴ رسم منحنی پاسخ فرکانسی

نتایج مطالعه‌ی عددی برای سیستم مورد نظر (یعنی جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل دو فنر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تأثیر بار نقطه‌ای هارمونیک و برای تشدید سوپرهارمونیک) با پارامترهای ذیل بررسی می‌شود و تا زمانی که مقادیر دیگری برای این پارامترها تعریف نشده، همان مقادیر (۴-۱۳۹) هستند.

$$\rho A = 1 \text{ kg/m}, EI = 1 \text{ N m}^2, L = 1 \text{ m}, m_0 = 0.1 \text{ kg}, C_1 = 3 \text{ N/m}, \quad (۴-۱۳۹)$$

$$C_2 = 0.01 \text{ N/m}^3, \frac{d}{L} = 0.5, \frac{b}{L} = 0.3$$

توابع مقایسه‌ای به صورت ذیل درنظر گرفته می‌شوند:

$$\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) = \sin(r\pi \bar{x}) \quad , r = 1, 2, \dots \quad (۴-۱۴۰)$$

تعداد مودهای درنظر گرفته شده برای پاسخ تیر، ۵ مود می‌باشد. حال ماتریس‌های سفتی و جرم و بردارهای نیرو و V را می‌توان همانند (۴-۱۴۱) محاسبه کرد. با استفاده از (۴-۱۱۸)، مقادیر ویژه‌ی تشدید و بردارهای ویژه‌ی مسئله‌ی مورد نظر، محاسبه می‌شوند. مقادیر ویژه و درنتیجه فرکانس‌های

طبیعی خطی اول تا ششم (به ترتیب) به صورت ذیل بدست می آیند:

$$\omega = 5.2539, 10.2847, 39.4784, 88.8604, 157.9137, 246.7523$$

بردارهای ویژه متناظر فرکانسهای طبیعی خطی هم به صورت ذیل محاسبه می شوند:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -0.0856 \\ 0 \\ 0.0008 \\ 0 \\ -0.0001 \\ 0.9963 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0.5828 \\ 0 \\ 0.0006 \\ 0 \\ -0.0001 \\ 0.8126 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} -0.0005 \\ 0 \\ 0.7055 \\ 0 \\ 0.0001 \\ -0.7087 \end{bmatrix},$$

$$u_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_6 = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0 \\ 0.0001 \\ 0 \\ -0.7069 \\ -0.7074 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه‌ی عددی، رزونانس اول (یعنی $\omega = 5.2539$) در نظر گرفته می شود و بردار ویژه‌ی

$$u_1 = \begin{bmatrix} -0.0856 \\ 0 \\ 0.0008 \\ 0 \\ -0.0001 \\ 0.9963 \end{bmatrix} \text{ متناظر با آن به صورت}$$

$v^* = -0.1005$ ، $u_n = 0.9963$ در نهایت است.

$e^* = -1.0751$ محاسبه می شوند.

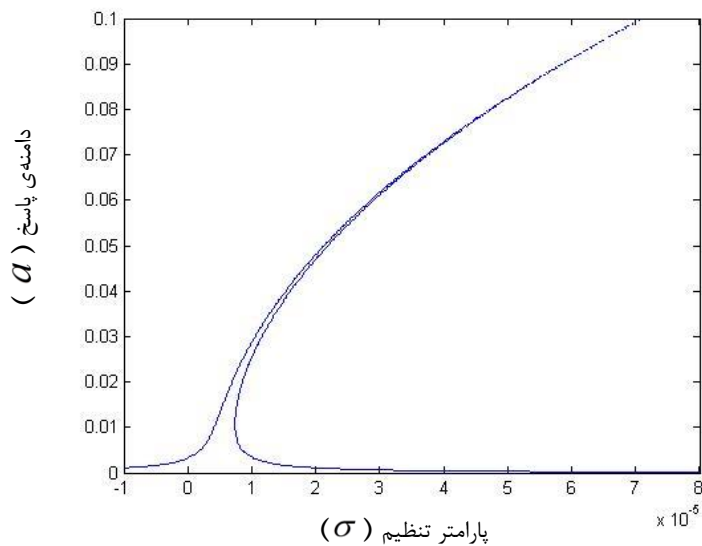
شکل ۴-۵ منحنی پاسخ فرکانسی نوسانگر اولیه را به همراه جاذب، برای مقدار تحریک $F_0 = 10$

نشان می دهد.

$$K_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi^4}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8\pi^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{81\pi^4}{2} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 128\pi^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{625\pi^4}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}, f = \begin{Bmatrix} 0.809F_0 \\ 0.951F_0 \\ 0.309F_0 \\ -0.588F_0 \\ -F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, V = \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0 \\ -0.01 \\ 0 \\ 0.01 \\ -0.1 \end{Bmatrix}$$

(۱۴۱-۴)



شکل ۴-۵ منحنی پاسخ فرکانسی، برای پاسخ تشدید سوپرهارمونیک نوسانگر اولیه به همراه جاذب، وقتی که،

$$e^* = -1.0751, v^* = -0.1005, u_n = 0.9963, \omega = 5.2539$$

۴-۲-۷-۲ بررسی پارامترهای تأثیرگذار، بر روی فرکانس‌های طبیعی خطی و

غیرخطی

در این قسمت پارامترهای تأثیرگذار بر روی فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل دو فنر، در معرض بار متمرکز متناوب، براساس رابطه‌ی (۴-۱۰۹)، به صورت عددی بررسی می‌شوند. پارامترها همانند (۴-۱۴۲) در نظر گرفته می‌شوند؛ مگر در مواردی که خلاف آن ذکر شود.

$$\rho A = 1 \text{ kg/m}, EI = 1 \text{ N m}^2, L = 1 \text{ m}, m_0 = 0.1 \text{ kg}, C_1 = 3 \text{ N/m},$$
$$C_2 = 0.01 \text{ N/m}^3, \frac{d}{L} = 0.5 \quad (۴-۱۴۲)$$

در ابتدا تأثیر سفتی فنر C_1 در معادلات (۴-۸۰) و (۴-۸۳)، بر روی فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی بررسی می‌شوند. شکل ۴-۶، نمودارهای فرکانس طبیعی غیرخطی، را بر حسب دامنه نشان می‌دهد (نمودارها براساس فرکانس طبیعی خطی اول رسم شده‌اند). هر چقدر C_1 افزایش یابد، فرکانس‌های طبیعی خطی (مخصوصاً ۲ فرکانس طبیعی خطی اول) افزایش می‌یابند؛ در نتیجه فرکانس طبیعی غیرخطی هم افزایش می‌یابد. جدول ۴-۱، فرکانس‌های طبیعی خطی را برای مقادیر مختلف C_1 نشان می‌دهد (داده‌ها همانند (۴-۱۴۲) هستند).

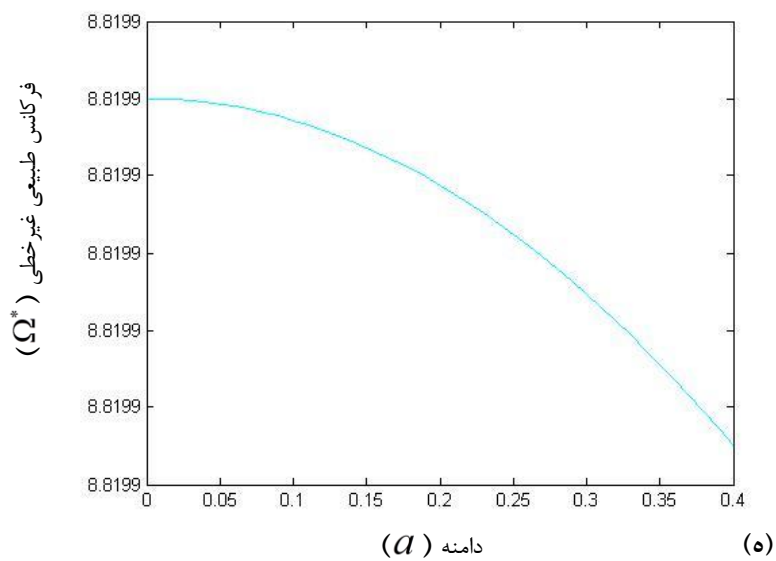
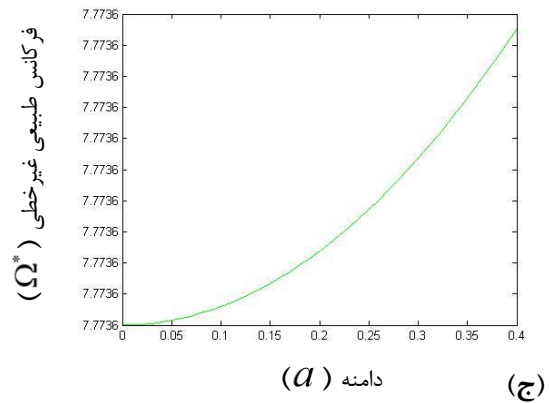
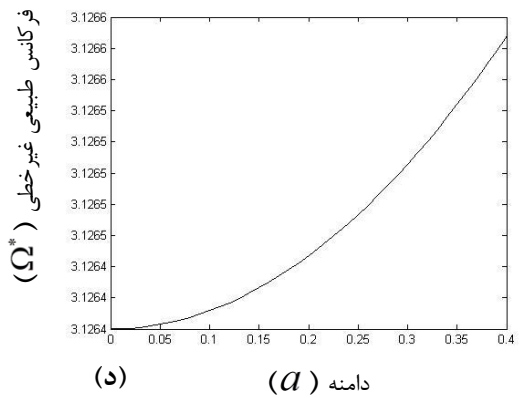
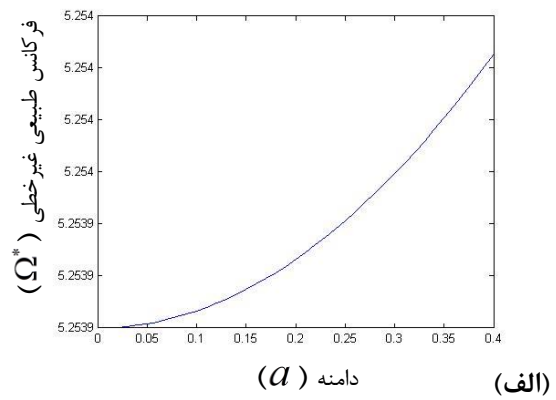
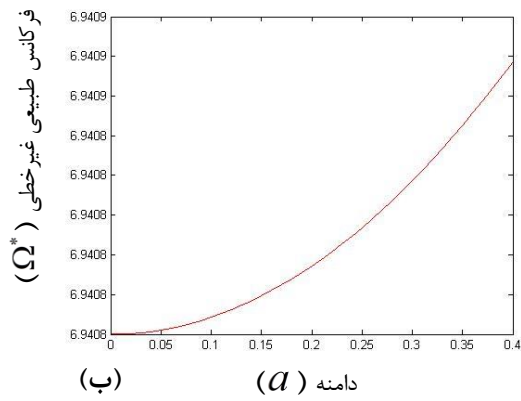
حال تأثیر سفتی فنر C_2 در معادلات (۴-۸۰) و (۴-۸۳)، بر روی فرکانس‌های طبیعی غیرخطی و خطی بررسی می‌شود. داده‌ها همانند (۴-۱۴۲) در نظر گرفته شده‌اند؛ به غیر از C_2 که متغیر است و فرکانس طبیعی خطی اول در نظر گرفته شده است. براساس شکل ۴-۷، هرچقدر C_2 افزایش یابد، فرکانس‌های طبیعی غیرخطی افزایش می‌یابند؛ اما افزایش C_2 ، تأثیری بر روی فرکانس‌های طبیعی خطی ندارد و ثابت باقی می‌ماند. در ادامه تأثیر مکان جاذب ($\frac{d}{L}$) بر فرکانس‌های طبیعی غیرخطی و خطی بررسی می‌شود. شکل ۴-۸، نمودارهای فرکانس طبیعی غیرخطی را بر حسب دامنه (برای فرکانس طبیعی خطی اول) نشان می‌دهند؛ با توجه به شکل، با قرار گیری جاذب در وسط تیر،

فرکانس طبیعی غیرخطی دارای کمترین مقدار می‌باشد و با دور شدن جاذب از وسط تیر، فرکانس طبیعی غیرخطی افزایش می‌یابد. تغییر مکان جاذب بر روی تیر، بر روی فرکانس‌های طبیعی خطی هم تأثیر کمی دارد؛ که جدول ۴-۲، فرکانس‌های طبیعی خطی را برای مکان‌های مختلف جاذب،

طبق داده‌های (۴-۱۴۲) (به جز $\frac{d}{L}$) نشان می‌دهد.

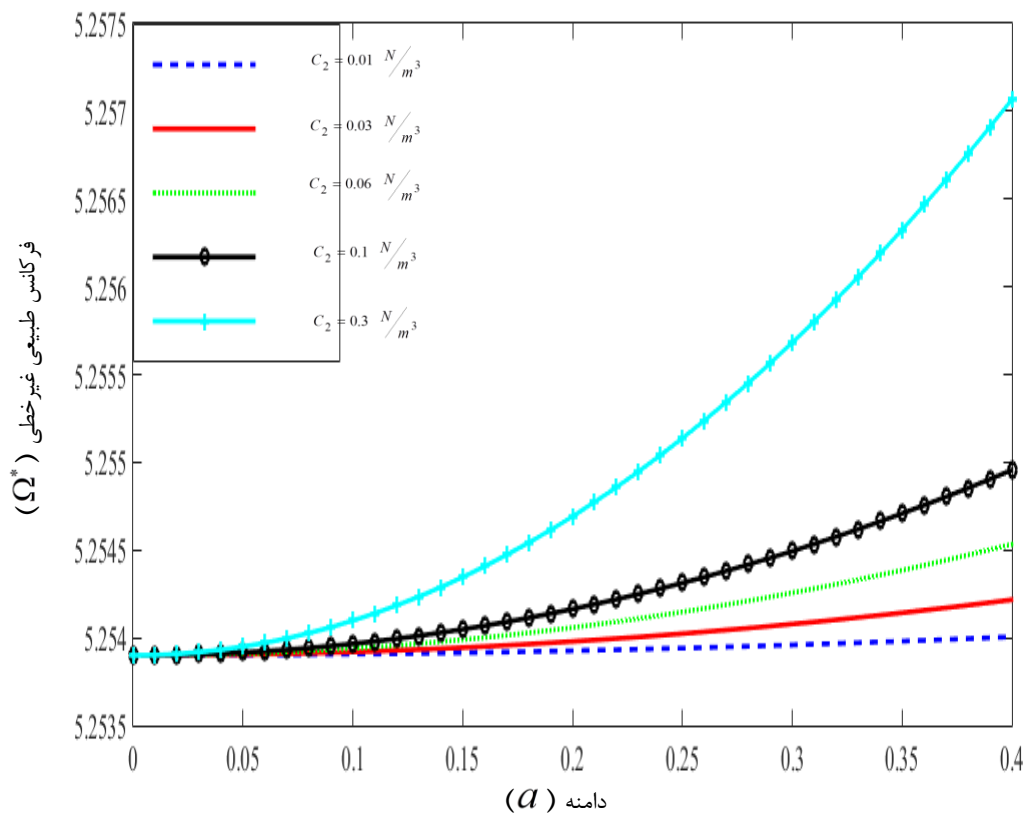
جدول ۴-۱ فرکانس‌های طبیعی خطی، برای مقادیر مختلف C_1

| سفتی فنر $C_1 (N/m)$ | فرکانس‌های طبیعی خطی |
|---------------------------|---|
| $C_1 = 1 \text{ } N/m$ | $\omega = 3.1264, 9.9816, 39.4784, 88.8377, 157.9137, 246.7442$ |
| $C_1 = 3 \text{ } N/m$ | $\omega = 5.2539, 10.2847, 39.4784, 88.8604, 157.9137, 246.7523$ |
| $C_1 = 6 \text{ } N/m$ | $\omega = 6.9408, 11.005, 39.4784, 88.8946, 157.9137, 246.7645$ |
| $C_1 = 9 \text{ } N/m$ | $\omega = 7.7736, 12.0291, 39.4784, 88.9291, 157.9137, 246.7767$ |
| $C_1 = 38 \text{ } N/m$ | $\omega = 8.8199, 21.6895, 39.4784, 89.2784, 157.9137, 246.8955$ |
| $C_1 = 1000 \text{ } N/m$ | $\omega = 9.0018, 39.4784, 76.7981, 124.2074, 157.9137, 251.9162$ |



شکل ۴-۶ نمودارهای فرکانس طبیعی غیرخطی بر حسب دامنه، برای مقادیر مختلف C_1 : (الف) $C_1 = 3 \frac{N}{m}$ ؛

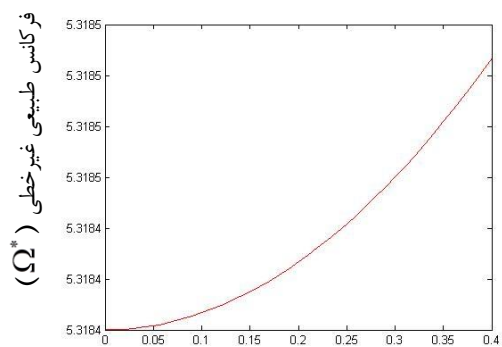
(ب) $C_1 = 6 \frac{N}{m}$ ؛ (ج) $C_1 = 9 \frac{N}{m}$ ؛ (د) $C_1 = 1 \frac{N}{m}$ ؛ (ه) $C_1 = 38 \frac{N}{m}$



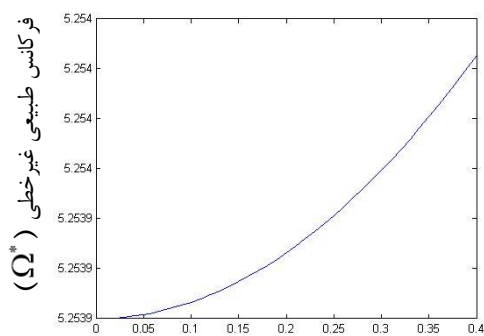
شکل ۴-۷ نمودار فرکانس طبیعی غیرخطی بر حسب دامنه، برای مقادیر مختلف C_2

جدول ۴-۲ فرکانس‌های طبیعی خطی برای مکان‌های مختلف جاذب ($\frac{d}{L}$)

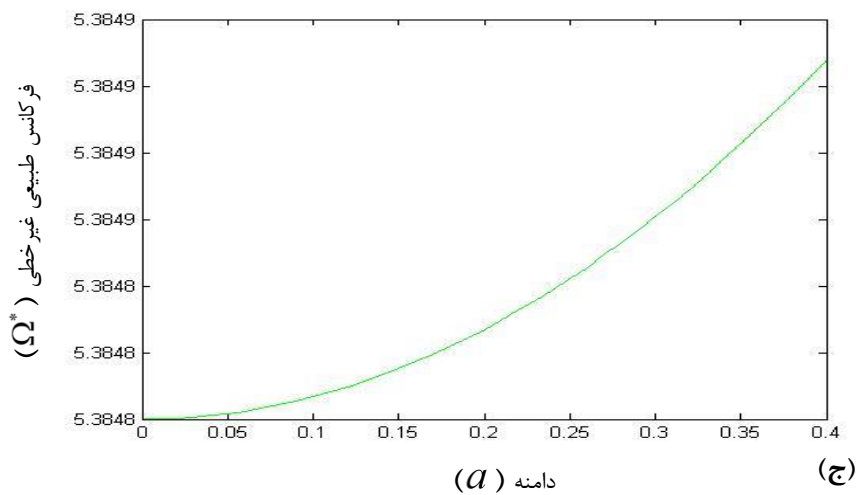
| مکان جاذب بر روی تیر $\frac{d}{L}$ | فرکانس‌های طبیعی خطی |
|---------------------------------------|--|
| $\frac{d}{L} = 0.3$ | $\omega = 5.3184, 10.1450, 39.5486, 88.8297, 157.9202, 246.7523$ |
| $\frac{d}{L} = 0.5$ | $\omega = 5.2539, 10.2847, 39.4784, 88.8604, 157.9137, 246.7523$ |
| $\frac{d}{L} = 0.8$ | $\omega = 5.3848, 10.0173, 39.5485, 88.8571, 157.9202, 246.7401$ |



(ب) دامنه (a)



(الف) دامنه (a)



(ج) دامنه (a)

شکل ۴-۸ نمودار فرکانس طبیعی غیرخطی بر حسب دامنه، برای مکان‌های مختلف جاذب ($\frac{d}{L}$)؛ الف) $\frac{d}{L} = 0.5$ ؛

$$\text{ب) } \frac{d}{L} = 0.3 \text{؛ ج) } \frac{d}{L} = 0.8$$

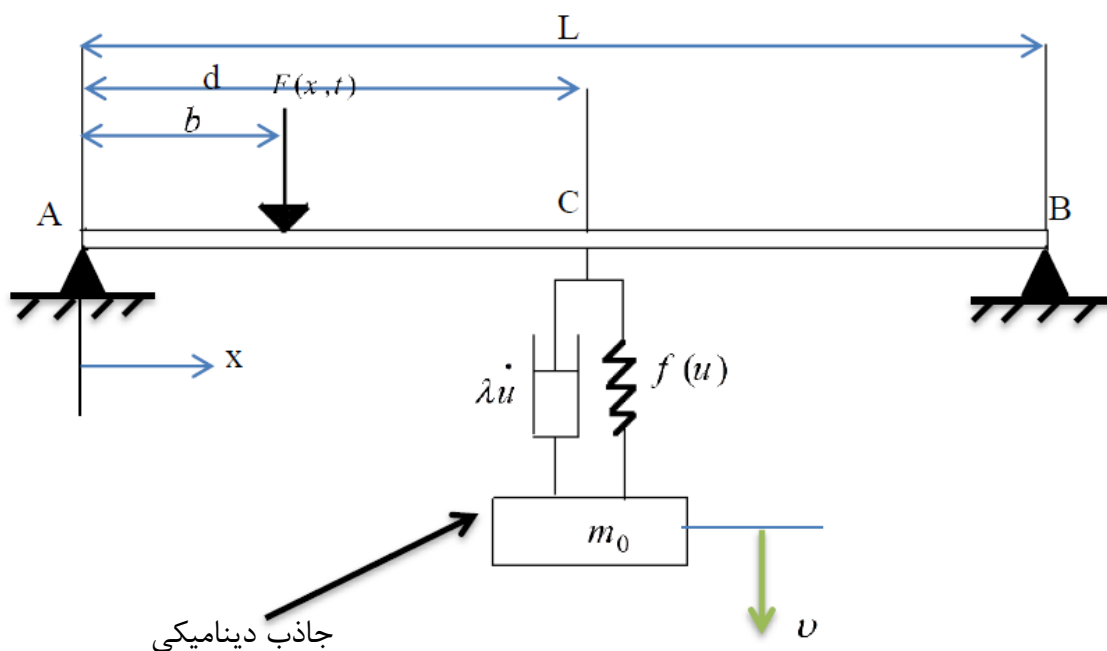
فصل ۵

بررسی جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل فنر و دمپر،
متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده

جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل فنر و دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده،
تحت تأثیر بار نقطه‌ای متناوب

۱-۵ مدل مسئله

سیستم نمایش داده شده در شکل ۱-۵ را در نظر بگیرید. تیر با تکیه‌گاه‌های ساده که از طریق فنر غیرخطی و دمپر ویسکوز خطی به جرم کوچکی متصل شده است و تیر تحت تأثیر بار متمرکز متناوب می‌باشد.



جاذب دینامیکی

شکل ۱-۵ تیر به همراه جاذب دو-المانه‌ی فنر و دمپری

$$d_E y_{,t} + EI y_{,xxxx}(x,t) + \rho A y_{,tt}(x,t) + [C(y(d,t) - v(t))^3 + \lambda(y_{,t}(d,t) - \dot{v}(t))] \delta(x-d) = F_0 \delta(x-b) \cos \Omega t, \quad x \in (0, L), t > 0 \quad (1-5)$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(L,t) = 0, \quad y_{,xx}(0,t) = 0, \quad y_{,xx}(L,t) = 0 \quad (2-5)$$

$$y_{,t}(x,0) = 0, \quad y(x,0) = 0 \quad (3-5)$$

$$m_0 v_{,tt}(t) - C(y(d,t) - v(t))^3 - \lambda(y_{,t}(d,t) - \dot{v}(t)) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v_{,t} = 0, \quad t > 0 \quad (4-5)$$

دینامیک حاکم بر سیستم به کمک معادلات دیفرانسیل (۱-۵) و (۴-۵) بیان شده است. رابطه‌ی

(۲-۵) شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و رابطه‌ی (۳-۵) شرایط اولیه را بیان می‌کنند.

$U(t)$ موقعیت مطلق جرم جاذب و $y(x, t)$ جابه‌جایی عرضی تیر را مشخص می‌کنند (طرف پایین مثبت در نظر گرفته شده است). $f(u)$ نیروی فنر، E مدول یانگ، I ممان اینرسی سطح مقطع، $m = \rho A$ جرم در واحد طول تیر، ρ چگالی ماده، A سطح مقطع، $x = d$ محل جاذب بر روی تیر و m_0 جرم جاذب دینامیکی را مشخص می‌کنند.

۲-۵ بی‌بعدسازی مسئله

برای بیان مسئله در شکل بی‌بعد، متغیرهای بی‌بعد طبق رابطه‌ی (۵-۵) تعریف می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \bar{v} = \frac{v}{L}, \bar{t} = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \bar{d}_E = \frac{L^2}{\sqrt{\rho A EI}} d_E, \bar{C} = \frac{CL^6}{EI},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{L^2}{\sqrt{\rho A EI}} \lambda, \bar{F}_0 = \frac{F_0 L^3}{EI}, \bar{C}_1 = \frac{\rho A L^6}{m_0 EI} C, \bar{\lambda}_1 = \frac{L^2}{m_0} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \lambda \quad (۵-۵)$$

$$\bar{\Omega} = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \Omega$$

با قرار دادن متغیرهای بی‌بعد در معادله‌های (۱-۵) و (۴-۵)، آنها به صورت بی‌بعد درمی‌آیند؛ با

حذف خط تیره‌ی بالای متغیرها، معادلات (۶-۵) و (۷-۵) بدست می‌آیند:

$$y_{,xxxx}(x, t) + y_{,tt}(x, t) + d_E y_{,t} + \left[C \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right)^3 + \lambda \left(y_{,t} \left(\frac{d}{L}, t \right) - \dot{v}(t) \right) \right] \quad (۶-۵)$$

$$\delta \left(x - \frac{d}{L} \right) = F_0 \delta \left(x - \frac{b}{L} \right) \cos \Omega t$$

$$v_{,tt}(t) - C_1 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right)^3 - \lambda_1 \left(y_{,t} \left(\frac{d}{L}, t \right) - \dot{v}(t) \right) = 0 \quad (۷-۵)$$

۳-۵ ساده‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، به فرم ماتریسی، با استفاده از روش

گلرکین

رابطه‌ی جدیدی به صورت (۸-۵) تعریف نموده و در معادله‌های (۶-۵) و (۷-۵) جایگزین می‌شود.

$$y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) = x \quad (۸-۵)$$

و همچنین عبارت $\pm \ddot{y}(\frac{d}{L}, t)$ در معادله‌ی (۷-۵) اضافه شده، سپس از روش گلرکین استفاده می‌شود:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(x) = N^T(x) q(t) \quad (۹-۵)$$

که در آن $N = [N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)]^T$ و $q = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$ بوده و $N(x)$

همه‌ی شرایط مرزی هندسی و طبیعی مسئله را ارضا کرده و تا حداقل بالاترین مرتبه‌ی مشتق مکانی معادله‌ی دیفرانسیل حرکت، مشتق پذیرند. واضح است که حل تقریبی، همه‌ی شرایط مرزی را ارضا خواهد کرد. $q_j(t)$ توابع نامشخص هستند که باید بدست آیند. سرانجام پس از ساده‌سازی، معادلات (۶-۵) و (۷-۵)، به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K_0 q + V x^3 = f \cos \Omega t \quad (۱۰-۵)$$

K_0 ماتریس سفتی، C ماتریس میرایی، q بردار دامنه‌ی نامشخص، f بزرگی نیرو و V یک بردار است. فرم باز شده‌ی ماتریسی و برداری M, C, K_0, V, q و f در روابط (۱۱-۵) مشاهده می‌شوند. برای حل معادله‌ی (۱۰-۵) با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، معادله به فرم کلی (۱۲-۵) بیان می‌شود.

$$M = \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1^2 dx & \int_0^1 N_1^2 dx & \dots & \int_0^1 N_1 N_n dx & 0 \\ \int_0^1 N_2 N_1 dx & \int_0^1 N_2^2 dx & \dots & \int_0^1 N_2 N_n dx & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 N_n N_1 dx & \int_0^1 N_n N_2 dx & \dots & \int_0^1 N_n^2 dx & 0 \\ N_1(\frac{d}{L}) & N_2(\frac{d}{L}) & \dots & N_n(\frac{d}{L}) & -1 \end{bmatrix}$$

(۱۱-۵)

$$K_0 = \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_1 N_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 N_1 N_{n,xxxx} dx & 0 \\ \int_0^1 N_2 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_2 N_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 N_2 N_{n,xxxx} dx & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 N_n N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_n N_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 N_n N_{n,xxxx} dx & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \int_0^1 d_E N_1^2 dx & \int_0^1 d_E N_1 N_2 dx & \dots & \int_0^1 d_E N_1 N_n dx & \lambda N_1 \left(\frac{d}{L}\right) \\ \int_0^1 d_E N_2 N_1 dx & \int_0^1 d_E N_2^2 dx & \dots & \int_0^1 d_E N_2 N_n dx & \lambda N_2 \left(\frac{d}{L}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 d_E N_n N_1 dx & \int_0^1 d_E N_n N_2 dx & \dots & \int_0^1 d_E N_n^2 dx & \lambda N_n \left(\frac{d}{L}\right) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} CN_1 \left(\frac{d}{L}\right) \\ CN_2 \left(\frac{d}{L}\right) \\ \vdots \\ CN_n \left(\frac{d}{L}\right) \\ -C_1 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \int_0^1 F_0 \delta\left(x - \frac{b}{L}\right) N_1 dx = F_0 N_1 \left(\frac{b}{L}\right) \\ \int_0^1 F_0 \delta\left(x - \frac{b}{L}\right) N_2 dx = F_0 N_2 \left(\frac{b}{L}\right) \\ \vdots \\ \int_0^1 F_0 \delta\left(x - \frac{b}{L}\right) N_n dx = F_0 N_n \left(\frac{b}{L}\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \\ x \end{bmatrix}$$

$$M \ddot{q} + \varepsilon C \dot{q} + K_0 q + \varepsilon V x^3 = f \cos \Omega t \quad (12-5)$$

که ε یک پارامتر کوچک است.

۴-۵ حل مسئله برای تشدید اصلی، به کمک مقیاس‌های چندگانه

حال معادله‌ی (۱۲-۵) را می‌توان به شیوه‌ی تحلیلی، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل

کرد. برای این کار روابط ذیل تعریف می‌شوند:

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 \quad \text{و} \quad x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 \quad (۱۳-۵)$$

و مشتق‌های زمانی به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad \text{و} \quad (۱۴-۵)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (۱۵-۵)$$

که ε پارامتر کوچک آشوب و $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ است.

با جایگذاری معادلات (۱۳-۵)، (۱۴-۵) و (۱۵-۵) در معادله‌ی (۱۲-۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & M (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2 + \dots))(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \\ & \varepsilon C (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \\ & K_0 (q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \varepsilon V (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^3 = f \cos \Omega t \end{aligned} \quad (۱۶-۵)$$

با مساوی هم قرار دادن ضرایب ε^0 ، ε و ε^2 در دو طرف تساوی، می‌توان به معادله‌های دیفرانسیل

معمولی ذیل رسید:

مرتبه‌ی ε^0 :

$$M D_0^2 q_0 + K_0 q_0 = f \cos \Omega T_0 \quad (۱۷-۵)$$

مرتبه‌ی ε^1 :

$$M D_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2M D_0 D_1 q_0 - C D_0 q_0 - V x_0^3 \quad (۱۸-۵)$$

مرتبه‌ی ε^2 :

$$\begin{aligned} M D_0^2 q_2 + K_0 q_2 = & -2M D_0 D_1 q_1 - M D_1^2 q_0 - 2M D_0 D_2 q_0 - \\ & C D_0 q_1 - C D_1 q_0 - 3V x_0^2 x_1 \end{aligned} \quad (۱۹-۵)$$

حل معادله‌ی (۱۷-۵):

$$q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = A(T_1, T_2, \dots) u e^{i\omega T_0} + (K_0 - M \Omega^2)^{-1} f \frac{e^{i\Omega T_0}}{2} + cc \quad (20-5)$$

که $A(T_1, T_2, \dots)$ دامنه‌ی مختلط مودال است که باید ارزیابی شود. i واحد موهومی است. u و ω به ترتیب مقادیر ویژه‌ی تشدید (حقیقی) و بردارهای ویژه‌ی (۲۱-۵) هستند. cc مزدوج مختلط عبارت-های نوشته شده است.

$$(K_0 - \omega^2 M) u = 0 \quad (21-5)$$

h هم به صورت رابطه‌ی ذیل تعریف می‌شود:

$$h = (K_0 - M \Omega^2)^{-1} f \quad (22-5)$$

فرم برداری q_0 ، u و h توسط رابطه‌ی (۲۳-۵) تعریف شده‌اند. در نتیجه با توجه به (۲۰-۵)، x_0 به

صورت (۲۴-۵) تعریف می‌شود.

با جایگزینی معادلات (۲۰-۵) و (۲۴-۵) در (۱۸-۵) و بعد از ساده‌سازی، معادله‌ی (۲۵-۵) بدست می‌-

آید.

$$q_0 = \begin{bmatrix} q_{01} \\ q_{02} \\ \vdots \\ q_{0n} \\ x_0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} \quad (23-5)$$

$$x_0 = A(T_1, T_2, \dots) u_n e^{i\omega T_0} + h_n \frac{e^{i\Omega T_0}}{2} + cc \quad (24-5)$$

$$MD_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2Mu(i\omega) e^{i\omega T_0} D_1 A - Cu A(i\omega) e^{i\omega T_0} - \quad (25-5)$$

$$\begin{aligned}
& C \frac{h}{2} (i\Omega) e^{i\Omega T_0} - V u_n^3 A^3 e^{3i\omega T_0} - V \frac{h_n^3}{8} e^{3i\Omega T_0} - \\
& 3 V u_n^2 A^2 \frac{h_n}{2} e^{i\Omega T_0} e^{2i\omega T_0} - \frac{3}{4} V u_n A h_n^2 e^{2i\Omega T_0} e^{i\omega T_0} - \\
& 3 V u_n^3 A^2 \bar{A} e^{i\omega T_0} - \frac{3}{2} V u_n^2 A^2 h_n e^{-i\Omega T_0} e^{2i\omega T_0} - \\
& \frac{3}{4} V u_n \bar{A} h_n^2 e^{2i\Omega T_0} e^{-i\omega T_0} - \frac{3}{8} V h_n^3 e^{i\Omega T_0} - \\
& 3 V u_n^2 h_n A \bar{A} e^{i\Omega T_0} - \frac{3}{2} V u_n h_n^2 A e^{i\omega T_0} + cc
\end{aligned}$$

که \bar{A} مزدوج مختلط A است. با حذف جمله‌های سکولار از معادله‌ی (۲۵-۵) (برای تشدید اصلی، $\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$ و در نتیجه $\cos \Omega t = \cos(\omega T_0 + \sigma T_1)$ است؛ که σ ، پارامتر تنظیم است و برای بیان میزان نزدیکی Ω به ω به کار می‌رود)، با توجه به شرط حل‌پذیری، جمله‌های سکولار معادله‌ی (۲۵-۵)، به صورت رابطه‌ی ذیل بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
& -2 u^T M u (i\omega) D_1 A - u^T C u A (i\omega) - u^T C \frac{h}{2} (i\Omega) e^{i\sigma T_1} - \\
& 3 u^T V u_n^3 A^2 \bar{A} - \frac{3}{2} u^T V u_n^2 A^2 h_n e^{-i\sigma T_1} - \frac{3}{4} u^T V u_n \bar{A} h_n^2 e^{2i\sigma T_1} - \quad (۲۶-۵) \\
& \frac{3}{8} u^T V h_n^3 e^{i\sigma T_1} - 3 u^T V u_n^2 h_n A \bar{A} e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{2} u^T V u_n h_n^2 A = 0
\end{aligned}$$

تحلیل پایداری به اولین مرتبه‌ی تقریب محدود می‌شود؛ سپس همه‌ی ضرایب، تنها تابع T_1 خواهند بود. در رابطه‌ی (۲۶-۵)، A را می‌توان به صورت قطبی $A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\alpha(T_1)}$ در نظر گرفت. با قرار دادن فرم قطبی A در معادله‌ی (۲۶-۵)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
& -2 e^{*i\omega} \left(\frac{1}{2} a' e^{i\alpha} + \frac{1}{2} a i \alpha' e^{i\alpha} \right) - c^* (i\omega) \left(\frac{1}{2} a e^{i\alpha} \right) - k^* \frac{1}{2} (i\Omega) e^{i\sigma T_1} - \\
& \frac{3}{8} v^* u_n^3 a^3 e^{i\alpha} - \frac{3}{8} v^* u_n^2 h_n a^2 e^{2i\alpha} e^{-i\sigma T_1} - \frac{3}{8} v^* u_n h_n^2 a e^{-i\alpha} e^{2i\sigma T_1} - \quad (۲۷-۵)
\end{aligned}$$

$$\frac{3}{8}v^* h_n^3 e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{4}v^* u_n^2 h_n a^2 e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{4}v^* u_n h_n^2 a e^{i\alpha} = 0$$

که $u^T C u = c^*$ و $u^T V = v^*$ ، $u^T M u = e^*$ ، $u^T C h = k^*$ است.

با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی، روابط ذیل بدست می‌آیند:

$$a\alpha' = -\frac{k^*}{2\omega e^*} \Omega \sin(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \cos(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \cos 2(\sigma T_1 - \alpha) + \quad (28-5)$$

$$\frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \cos(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \cos(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a$$

$$a' = -\frac{c^*}{2e^*} a - \frac{k^*}{2\omega e^*} \Omega \cos(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \sin(\sigma T_1 - \alpha) - \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \sin 2(\sigma T_1 - \alpha) - \frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \sin(\sigma T_1 - \alpha) - \quad (29-5)$$

$$\frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \sin(\sigma T_1 - \alpha)$$

با تعریف $\gamma = \sigma T_1 - \alpha$ و سپس قرار دادن آن در روابط (28-5) و (29-5) نتیجه می‌شود:

$$a(\sigma - \gamma') = -\frac{k^*}{2\omega e^*} \Omega \sin \gamma + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \cos \gamma + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \cos 2\gamma + \frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \cos \gamma + \quad (30-5)$$

$$\frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \cos \gamma + \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a$$

$$a' = -\frac{c^*}{2e^*} a - \frac{k^*}{2\omega e^*} \Omega \cos \gamma + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \sin \gamma - \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \sin 2\gamma - \frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \sin \gamma - \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \sin \gamma \quad (31-5)$$

برای حل‌های حالت پایدار، می‌توان در معادلات (30-5) و (31-5) قرار داد:

$$a' = \gamma' = 0$$

۵-۵ حل مسئله برای تشدید سوپرهارمونیک، به کمک مقیاس‌های چندگانه

در این قسمت تشدید سوپرهارمونیک برای جاذب دو-المانه، شامل فنر و دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، که تحت تأثیر بار نقطه‌ای هارمونیک قرار دارد، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این تشدید زمانی اتفاق می‌افتد که فرکانس طبیعی، ۳ برابر فرکانس تحریک باشد و یا به بیان ریاضی:

$$3\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$$

که σ ، پارامتر تنظیم نام دارد و برای بیان میزان نزدیکی 3Ω به ω به کار می‌رود.

برای بررسی تشدید سوپرهارمونیک، روابط قسمت قبل تا معادله‌ی (۲۵-۵) صادق است و اما بعد از آن کار پی گرفته می‌شود. با توجه به اینکه ضرایب جمله‌های سکولار در طرف راست معادله‌ی (۲۵-۵)، با هر حل همگن مسئله متعامد است (که تحت عنوان شرط حل‌پذیری تعریف می‌شود)، جمله‌های سکولار معادله‌ی (۲۵-۵) (تحت تشدید سوپرهارمونیک) به صورت رابطه‌ی ذیل بیان می‌شوند:

$$-2 u^T M u (i\omega) D_1 A - u^T C u A (i\omega) - u^T V \frac{h_n^3}{8} e^{i\sigma T_1} - \quad (32-5)$$

$$3 u^T V u_n^3 A^2 \bar{A} - \frac{3}{2} u^T V u_n h_n^2 A = 0$$

تحلیل پایداری به اولین مرتبه‌ی تقریب محدود می‌شود؛ سپس همه‌ی ضرایب حل، تنها تابع T_1 خواهند بود. در رابطه‌ی (۳۲-۵)، A را به فرم قطبی $A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\alpha(T_1)}$ در نظر گرفته، با قرار دادن فرم قطبی A در معادله‌ی (۳۲-۵)، نتیجه می‌شود:

$$-2 e^* i\omega \left(\frac{1}{2} a' e^{i\alpha} + \frac{1}{2} a i\alpha' e^{i\alpha} \right) - c^* (i\omega) \left(\frac{1}{2} a e^{i\alpha} \right) - v^* \frac{h_n^3}{8} e^{i\sigma T_1} - \quad (33-5)$$

$$-\frac{3}{8} v^* u_n^3 (a^3 e^{i\alpha}) - \frac{3}{4} v^* u_n h_n^2 a e^{i\alpha} = 0$$

که $u^T M u = e^*$ ، $u^T V = v^*$ و $u^T C u = c^*$ است. با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی، روابط ذیل بدست می‌آیند:

$$a\alpha' = \frac{1}{8\omega} v^* h_n^3 \cos(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{8\omega} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{4\omega} v^* u_n h_n^2 a \quad (34-5)$$

$$a' = -\frac{c^*}{2 e^*} a - \frac{1}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \sin(\sigma T_1 - \alpha) \quad (35-5)$$

با تعریف $\gamma = \sigma T_1 - \alpha$ و سپس قرار دادن آن در روابط (34-5) و (35-5)، نتیجه می‌شود:

$$a(\sigma - \gamma') = \frac{1}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \cos \gamma + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \quad (36-5)$$

$$a' = -\frac{c^*}{2 e^*} a - \frac{1}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \sin \gamma \quad (37-5)$$

برای حل‌های حالت پایدار، با قرار دادن $a' = \gamma' = 0$ در معادله‌های (36-5) و (37-5)، و درنهایت

با به توان دو رساندن طرفین روابط و آنگاه جمع کردن آنها، معادله‌ی پاسخ فرکانسی ذیل بدست می‌-

آید:

$$\left(a\sigma - \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 - \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a\right)^2 + \left(\frac{c^*}{2 e^*} a\right)^2 = \left(\frac{1}{8\omega e^*} v^* h_n^3\right)^2 \quad (38-5)$$

۵-۶ نتایج عددی

نتایج مطالعه‌ی عددی برای سیستم موردنظر برای تشدید سوپرهارمونیک، با پارامترهای ذیل

بررسی می‌شود و تا زمانی که مقادیری دیگری برای این پارامترها ذکر نشده، مقادیر همانند (39-5)

هستند.

$$\rho A = 1 \text{ kg/m}, EI = 1 \text{ N m}^2, L = 1 \text{ m}, m_0 = 0.1 \text{ kg}, C = 0.02 \text{ N/m}^3, \frac{d}{L} = 0.5 \quad (39-5)$$

$$F_0 = 1 \text{ N}, d_E = 0, \lambda = 0.01 \text{ N s/m}, \frac{b}{L} = 0.3$$

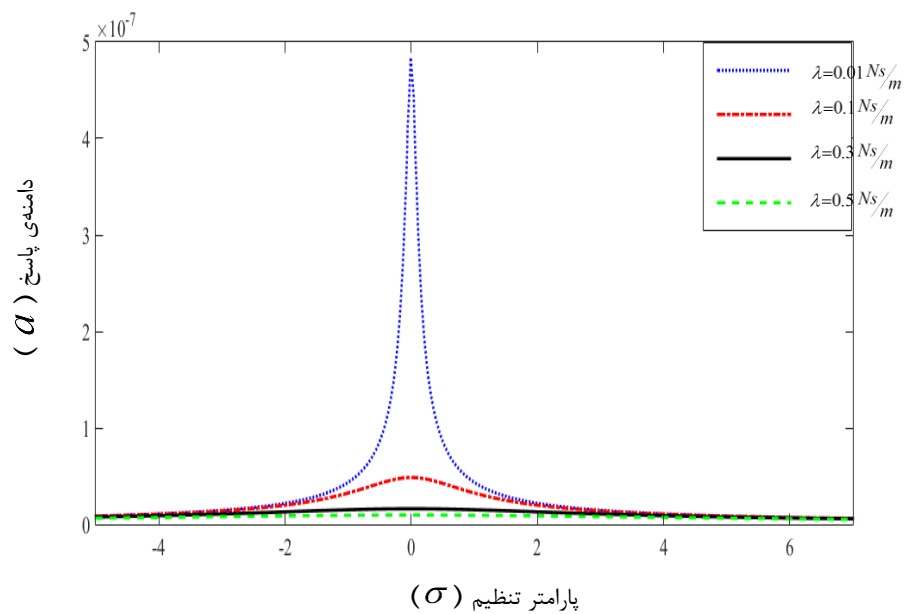
توابع مقایسه‌ای به صورت ذیل درنظر گرفته می‌شوند:

$$\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) = \sin(r\pi \bar{x}) \quad , r = 1, 2, \dots \quad (40-5)$$

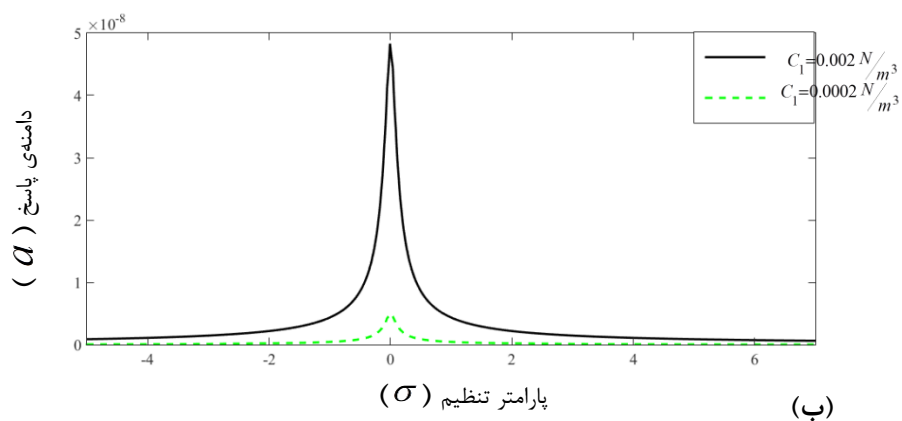
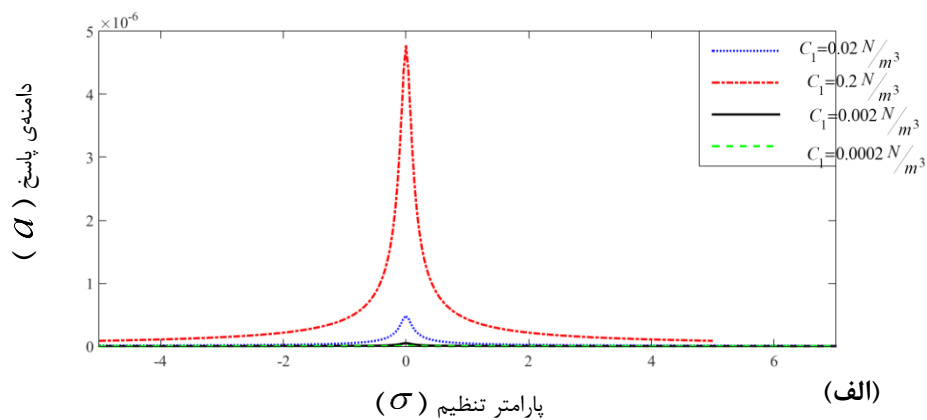
تعداد مودهای درنظر گرفته شده برای پاسخ تیر، ۵ مود می‌باشد. حال ماتریس‌های سفتی،

میرایی و جرم و بردارهای نیرو را می‌توان محاسبه کرد.

در اینجا تأثیر ضریب دمپر λ ، بر روی منحنی پاسخ فرکانسی بررسی می‌شود. شکل ۲-۵، بر اساس داده‌های (۳۹-۵) رسم شده است. اثر ضریب دمپر در کاهش دامنه‌ی فرکانسی در شکل مشهود است؛ که ضریب دمپر، در کاهش ماکزیمم دامنه‌ی فرکانسی تأثیر مستقیمی دارد. تأثیر سفتی فنر، بر روی منحنی پاسخ فرکانسی در شکل ۳-۵ بررسی شده است؛ همانطور که ملاحظه می‌فرمایید، کاهش سفتی تأثیر مستقیم بر کاهش دامنه‌ی پاسخ دارد.



شکل ۲-۵ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای ضرایب دمپر مختلف



شکل ۳-۵ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای سفتی‌های مختلف؛ الف) نمایش چهار نمودار به ازای چهار مقدار مختلف سفتی؛ ب) نمایش نمودار به ازای دو مقدار مختلف سفتی

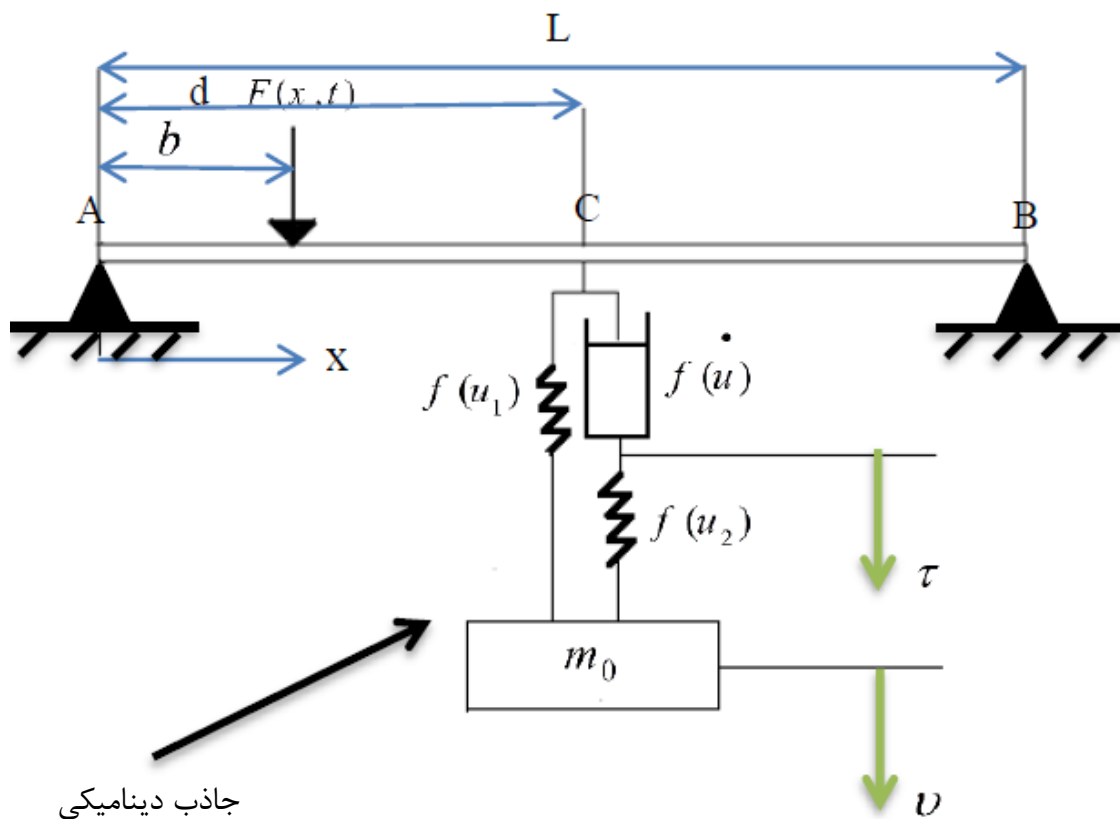
فصل ۶

بررسی جاذب دینامیکی سه-المانه، شامل دو فنر و
یک دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده

۱-۶ جاذب دینامیکی سه-المانه، شامل دو فنر و یک دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تأثیر بار متمرکز متناوب

۱-۱-۶ مدل مسئله

سیستم نشان داده شده در شکل ۱-۶ را در نظر بگیرید. تیر با تکیه‌گاه‌های ساده که از طریق فنر-های خطی و غیرخطی و یک دمپر ویسکوز خطی به جرم کوچکی متصل شده است و تیر تحت تأثیر بار متمرکز متناوب قرار دارد.



شکل ۱-۶ تیر شامل جاذب دینامیکی سه-المانه

$$d_E y_{,t} + EI y_{,xxxx}(x,t) + \rho A y_{,tt}(x,t) + [C_1 (y(d,t) - v(t))^3 + \lambda (y_{,t}(d,t) - \dot{v}(t))] \delta(x-d) = F_0 \delta(x-b) \cos \Omega t, \quad x \in (0, L), t > 0 \quad (1-6)$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(L,t) = 0, \quad y_{,xx}(0,t) = 0, \quad y_{,xx}(L,t) = 0 \quad (2-6)$$

$$y_{,t}(x,0) = 0, \quad y(x,0) = 0 \quad (3-6)$$

$$m_0 v_{,tt}(t) - C_2(\tau(t) - v(t)) - C_1(y(d,t) - v(t))^3 = 0 \quad (4-6)$$

$$v(0) = 0, v_{,t}(0) = 0, \tau(0) = 0, \tau_{,t}(0) = 0 \quad t > 0$$

$$\lambda(y_{,t}(d,t) - \dot{\tau}(t)) = C_2(\tau(t) - v(t)) \quad (5-6)$$

دینامیک حاکم بر سیستم، به کمک معادلات دیفرانسیل (1-6)، (4-6) و (5-6) بیان می‌شود. رابطه-

ی (2-6) شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و رابطه‌ی (3-6) شرایط اولیه را نشان می‌دهند.

$v(t)$ موقعیت مطلق جرم جاذب و $y(x,t)$ جابه‌جایی عرضی تیر را مشخص می‌کنند (طرف

پایین مثبت در نظر گرفته شده است). $f(u_1)$ نیروی فنر غیرخطی و $f(u_2)$ نیز نیروی فنر خطی

است؛ E مدول یانگ، I ممان اینرسی سطح مقطع، $m = \rho A$ جرم در واحد طول تیر، ρ چگالی ماده،

A سطح مقطع، m_0 جرم جاذب دینامیکی و λ ضریب میرایی دمپر ویسکوز را مشخص می‌کنند.

۲-۱-۶ بی‌بعدسازی مسئله

برای بیان مسئله در شکل بی‌بعد، متغیرهای بی‌بعد همانند (6-6) تعریف می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \bar{v} = \frac{v}{L}, \bar{\tau} = \frac{\tau}{L}, \bar{t} = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \bar{d}_E = \frac{L^2}{\sqrt{\rho A EI}} d_E, \bar{C}_1 = \frac{C_1 L^6}{EI},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{L^2}{\sqrt{\rho A EI}} \lambda, \bar{F}_0 = \frac{F_0 L^3}{EI}, \bar{C}_2 = \frac{\rho A L^4}{m_0 EI} C_2, \bar{C}_3 = \frac{\rho A L^6}{m_0 EI} C_3, \quad (6-6)$$

$$\bar{\Omega} = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \Omega, \bar{G} = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \frac{C_2}{\lambda}$$

با جایگذاری متغیرهای بی‌بعد در معادله‌های (1-6)، (4-6) و (5-6)، آنها به صورت بی‌بعد درمی‌آیند؛

با حذف خط تیره‌ی بالای متغیرها، معادلات (7-6)، (8-6) و (9-6) بدست می‌آیند:

$$y_{,xxxx}(x,t) + y_{,tt}(x,t) + d_E y_{,t} + \left[C_1 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right)^3 + \lambda \left(y_{,t} \left(\frac{d}{L}, t \right) - \dot{\tau}(t) \right) \right] \delta \left(x - \frac{d}{L} \right) = F_0 \delta \left(x - \frac{b}{L} \right) \cos \Omega t \quad (7-6)$$

$$v_{,tt}(t) - C_2(\tau(t) - v(t)) - C_3 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right)^3 = 0 \quad (8-6)$$

$$y_{,t} \left(\frac{d}{L}, t \right) - \dot{\tau}(t) = G(\tau(t) - v(t)) \quad (9-6)$$

۳-۱-۶ ساده‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، به فرم ماتریسی، با استفاده از روش گلرکین

رابطه‌های جدیدی به صورت (۱۰-۶) و (۱۱-۶) تعریف نموده و در معادلات (۷-۶)، (۸-۶) و (۹-۶)

جایگزین می‌شوند.

$$y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) = X \quad (10-6)$$

$$y \left(\frac{d}{L}, t \right) - \tau(t) = Z \quad (11-6)$$

و همچنین عبارت $\pm \ddot{y} \left(\frac{d}{L}, t \right)$ در معادله‌ی (۸-۶) اضافه شده، سپس از روش گلرکین استفاده می‌-

شود:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(x) = N^T(x) q(t) \quad (12-6)$$

که در آن $N = [N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)]^T$ و $q = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$ بوده و $N(x)$

همه‌ی شرایط مرزی هندسی و طبیعی مسئله را ارضا کرده و تا حداقل بالاترین مرتبه‌ی مشتق مکانی

معادله‌ی دیفرانسیل حرکت، مشتق‌پذیرند. واضح است که حل تقریبی، همه‌ی شرایط مرزی را ارضا

خواهد کرد. $q_j(t)$ توابع نامشخص هستند که باید بدست آیند. سرانجام پس از ساده‌سازی، معادلات

(۷-۶)، (۸-۶) و (۹-۶)، به صورت معادله‌ی (۱۳-۶) درمی‌آیند:

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K_0 q + V x^3 = f \cos \Omega t \quad (13-6)$$

K_0 ماتریس سفتی، C ماتریس میرایی، q بردار دامنه‌ی نامشخص، f بزرگی نیرو و V یک بردار

است.

فرم بازشده‌ی ماتریسی و برداری M, C, K_0, V, q و f به صورت ذیل بیان می‌شوند:

$$C = \begin{bmatrix} \int_0^1 d_E N_1^2 dx & \int_0^1 d_E N_1 N_2 dx & \dots & \int_0^1 d_E N_1 N_n dx & 0 & \lambda N_1 \left(\frac{d}{L}\right) \\ \int_0^1 d_E N_2 N_1 dx & \int_0^1 d_E N_2^2 dx & \dots & \int_0^1 d_E N_2 N_n dx & 0 & \lambda N_2 \left(\frac{d}{L}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 d_E N_n N_1 dx & \int_0^1 d_E N_n N_2 dx & \dots & \int_0^1 d_E N_n^2 dx & 0 & \lambda N_n \left(\frac{d}{L}\right) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_1 N_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 N_1 N_{n,xxxx} dx & 0 & 0 \\ \int_0^1 N_2 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_2 N_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 N_2 N_{n,xxxx} dx & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 N_n N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_n N_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 N_n N_{n,xxxx} dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -C_2 & C_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -G & G \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} C_1 N_1 \left(\frac{d}{L}\right) \\ C_1 N_2 \left(\frac{d}{L}\right) \\ \vdots \\ C_1 N_n \left(\frac{d}{L}\right) \\ -C_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \\ x \\ z \end{bmatrix} \quad (14-6)$$

$$f = \begin{bmatrix} \int_0^1 F_0 \delta(x - \frac{b}{L}) N_1 dx = F_0 N_1(\frac{b}{L}) \\ \int_0^1 F_0 \delta(x - \frac{b}{L}) N_2 dx = F_0 N_2(\frac{b}{L}) \\ \vdots \\ \int_0^1 F_0 \delta(x - \frac{b}{L}) N_n dx = F_0 N_n(\frac{b}{L}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1^2 dx & \int_0^1 N_1 N_2 dx & \dots & \int_0^1 N_1 N_n dx & 0 & 0 \\ \int_0^1 N_2 N_1 dx & \int_0^1 N_2^2 dx & \dots & \int_0^1 N_2 N_n dx & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 N_n N_1 dx & \int_0^1 N_n N_2 dx & \dots & \int_0^1 N_n^2 dx & 0 & 0 \\ N_1(\frac{d}{L}) & N_2(\frac{d}{L}) & \dots & N_n(\frac{d}{L}) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴-۱-۶ حل مسئله برای تشدید اصلی، به کمک مقیاس‌های چندگانه

برای حل معادله‌ی (۱۳-۶) با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، معادله به فرم کلی (۱۵-۶) بیان

می‌شود:

$$M \ddot{q} + \varepsilon C \dot{q} + K_0 q + \varepsilon V x^3 = f \cos \Omega t \quad (15-6)$$

که ε یک پارامتر کوچک است.

حال معادله‌ی (۱۵-۶) را می‌توان به شیوه‌ی تحلیلی، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل کرد. برای این کار روابط ذیل تعریف می‌شوند:

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 \quad \text{و} \quad x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 \quad (۱۶-۶)$$

و مشتق‌های زمانی به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (۱۷-۶)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (۱۸-۶)$$

که ε پارامتر کوچک آشوب و $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ است.

با جایگذاری معادلات (۱۶-۶)، (۱۷-۶) و (۱۸-۶) در معادله‌ی (۱۵-۶)، بدست می‌آید:

$$M (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2 + \dots))(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \varepsilon C (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + K_0 (q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \varepsilon V (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^3 = f \cos \Omega t \quad (۱۹-۶)$$

با مساوی هم قرار دادن ضرایب ε^0 ، ε و ε^2 در دو طرف تساوی، می‌توان به معادلات دیفرانسیل

معمولی ذیل رسید:

مرتبه‌ی ε^0 :

$$M D_0^2 q_0 + K_0 q_0 = f \cos \Omega T_0 \quad (۲۰-۶)$$

مرتبه‌ی ε^1 :

$$M D_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2M D_0 D_1 q_0 - C D_0 q_0 - V x_0^3 \quad (۲۱-۶)$$

مرتبه‌ی ε^2 :

$$M D_0^2 q_2 + K_0 q_2 = -2M D_0 D_1 q_1 - M D_1^2 q_0 - 2M D_0 D_2 q_0 - C D_0 q_1 - C D_1 q_0 - 3V x_0^2 x_1 \quad (۲۲-۶)$$

حل معادله‌ی (۲۰-۶) را به صورت ذیل می‌توان در نظر گرفت:

$$q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = A(T_1, T_2, \dots) u e^{i\omega T_0} + (K_0 - M \Omega^2)^{-1} f \frac{e^{i\Omega T_0}}{2} + cc \quad (23-6)$$

که $A(T_1, T_2, \dots)$ دامنه‌ی مختلط مودال است که باید مشخص شود. i واحد موهومی است. ω و

u به ترتیب مقادیر ویژه‌ی تشدید (حقیقی) و بردارهای ویژه‌ی (۲۴-۶) هستند. cc مزدوج مختلط

عبارت‌های نوشته شده است.

$$(K_0 - \omega^2 M) u = 0 \quad (24-6)$$

h هم به صورت رابطه‌ی (۲۵-۶) تعریف می‌شود:

$$h = (K_0 - M \Omega^2)^{-1} f \quad (25-6)$$

فرم برداری q_0 ، u و h توسط رابطه‌ی (۲۶-۶) تعریف می‌شود. در نتیجه با توجه به (۲۳-۶)، x_0 به

صورت (۲۷-۶) تعریف می‌شود.

با جایگزینی معادلات (۲۳-۶) و (۲۷-۶) در (۲۱-۶) و بعد از ساده‌سازی، معادله‌ی (۲۸-۶) بدست می‌-

آید.

$$q_0 = \begin{bmatrix} q_{01} \\ q_{02} \\ \vdots \\ q_{0n} \\ x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad h = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \\ h_{n+1} \end{bmatrix} \quad (26-6)$$

$$x_0 = A(T_1, T_2, \dots) u_n e^{i\omega T_0} + h_n \frac{e^{i\Omega T_0}}{2} + cc \quad (27-6)$$

$$MD_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2Mu(i\omega) e^{i\omega T_0} D_1 A - Cu A(i\omega) e^{i\omega T_0} - \quad (28-6)$$

$$\begin{aligned}
 & C \frac{h}{2} (i\Omega) e^{i\Omega T_0} - Vu_n^3 A^3 e^{3i\omega T_0} - V \frac{h_n^3}{8} e^{3i\Omega T_0} - \\
 & 3Vu_n^2 A^2 \frac{h_n}{2} e^{i\Omega T_0} e^{2i\omega T_0} - \frac{3}{4} Vu_n A h_n^2 e^{2i\Omega T_0} e^{i\omega T_0} - \\
 & 3Vu_n^3 A^2 \bar{A} e^{i\omega T_0} - \frac{3}{2} Vu_n^2 A^2 h_n e^{-i\Omega T_0} e^{2i\omega T_0} - \\
 & - \frac{3}{4} Vu_n \bar{A} h_n^2 e^{2i\Omega T_0} e^{-i\omega T_0} - \frac{3}{8} V h_n^3 e^{i\Omega T_0} - \\
 & 3Vu_n^2 h_n A \bar{A} e^{i\Omega T_0} - \frac{3}{2} Vu_n h_n^2 A e^{i\omega T_0} + cc
 \end{aligned}$$

که \bar{A} مزدوج مختلط A است. با حذف جمله‌های سکولار از معادله‌ی (۲۸-۶) (برای تشدید اصلی، $\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$ و در نتیجه $\cos \Omega t = \cos(\omega T_0 + \sigma T_1)$ است؛ که σ ، پارامتر تنظیم است و برای بیان میزان نزدیکی Ω به ω به کار می‌رود)، با توجه به شرط حل‌پذیری، جمله‌های سکولار معادله‌ی (۲۸-۶) به صورت رابطه‌ی ذیل بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 & -2 u^T M u (i\omega) D_1 A - u^T C u A (i\omega) - u^T C \frac{h}{2} (i\Omega) e^{i\sigma T_1} - \\
 & 3 u^T V u_n^3 A^2 \bar{A} - \frac{3}{2} u^T V u_n^2 A^2 h_n e^{-i\sigma T_1} - \\
 & \frac{3}{4} u^T V u_n \bar{A} h_n^2 e^{2i\sigma T_1} - \frac{3}{8} u^T V h_n^3 e^{i\sigma T_1} - \\
 & 3 u^T V u_n^2 h_n A \bar{A} e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{2} u^T V u_n h_n^2 A = 0
 \end{aligned} \tag{۲۹-۶}$$

تحلیل پایداری به اولین مرتبه‌ی تقریب محدود می‌شود؛ سپس همه‌ی ضرایب، تنها تابع T_1 خواهند بود. در رابطه‌ی (۲۹-۶)، A را می‌توان به صورت قطبی $A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\alpha(T_1)}$ در نظر گرفت. با قرار دادن فرم قطبی A در معادله‌ی (۲۹-۶)، نتیجه می‌شود:

$$-2 e^{*i\omega} \left(\frac{1}{2} a' e^{i\alpha} + \frac{1}{2} a i \alpha' e^{i\alpha} \right) - c^* (i\omega) \left(\frac{1}{2} a e^{i\alpha} \right) - k^* \frac{1}{2} (i\Omega) e^{i\sigma T_1} - \tag{۳۰-۶}$$

$$\frac{3}{8}v^* u_n^3 a^3 e^{i\alpha} - \frac{3}{8}v^* u_n^2 h_n a^2 e^{2i\alpha} e^{-i\sigma T_1} - \frac{3}{8}v^* u_n h_n^2 a e^{-i\alpha} e^{2i\sigma T_1} -$$

$$\frac{3}{8}v^* h_n^3 e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{4}v^* u_n^2 h_n a^2 e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{4}v^* u_n h_n^2 a e^{i\alpha} = 0$$

که $u^T C u = c^*$ و $u^T V = v^*$ ، $u^T M u = e^*$ ، $u^T C h = k^*$ است.

با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی، نتایج ذیل بدست می‌آیند:

$$a\alpha' = -\frac{k^*}{2\omega e^*} \Omega \sin(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \cos(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \cos 2(\sigma T_1 - \alpha) + \quad (31-6)$$

$$\frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \cos(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \cos(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a$$

$$a' = -\frac{c^*}{2e^*} a - \frac{k^*}{2\omega e^*} \Omega \cos(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \sin(\sigma T_1 - \alpha) - \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \sin 2(\sigma T_1 - \alpha) - \frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \sin(\sigma T_1 - \alpha) - \quad (32-6)$$

$$\frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \sin(\sigma T_1 - \alpha)$$

با تعریف $\gamma = \sigma T_1 - \alpha$ و سپس قرار دادن آن در روابط (31-6) و (32-6)، بدست می‌آیند:

$$a(\sigma - \gamma') = -\frac{k^*}{2\omega e^*} \Omega \sin \gamma + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \cos \gamma + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \cos 2\gamma + \frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \cos \gamma + \quad (33-6)$$

$$\frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \cos \gamma + \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a$$

$$a' = -\frac{c^*}{2e^*} a - \frac{k^*}{2\omega e^*} \Omega \cos \gamma + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \sin \gamma - \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \sin 2\gamma - \frac{3}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \sin \gamma - \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n^2 h_n a^2 \sin \gamma \quad (34-6)$$

برای حل‌های حالت پایدار، می‌توان در معادله‌های (33-6) و (34-6) قرار داد:

$$a' = \gamma' = 0$$

۵-۱-۶ حل مسئله برای تشدید سوپرهارمونیک، به کمک مقیاس‌های چندگانه

در این قسمت تشدید سوپرهارمونیک برای جاذب سه-المانه، شامل دو فنر و یک دمپر، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، که تحت تأثیر بار نقطه‌ای هارمونیک قرار دارد، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این تشدید زمانی اتفاق می‌افتد که فرکانس طبیعی، ۳ برابر فرکانس تحریک باشد و یا به بیان ریاضی: $3\Omega = \omega + \varepsilon\sigma$ ؛ که σ ، پارامتر تنظیم نام دارد و برای بیان میزان نزدیکی 3Ω به ω به کار می‌رود.

برای بررسی تشدید سوپرهارمونیک، روابط قسمت قبل، تا معادله‌ی (۲۸-۶) صادق است و اما بعد از آن، کار ادامه می‌یابد. با توجه به اینکه ضرایب جمله‌های سکولار در طرف راست معادله‌ی (۲۸-۶)، با هر حل همگن مسئله متعامد است (که تحت عنوان شرط حل‌پذیری تعریف می‌شود)، جمله‌های سکولار معادله‌ی (۲۸-۶) (تحت تشدید سوپرهارمونیک) به صورت رابطه‌ی ذیل بیان می‌شوند:

$$-2 u^T M u (i\omega) D_1 A - u^T C u A (i\omega) - u^T V \frac{h_n^3}{8} e^{i\sigma T_1} - 3 u^T V u_n^3 A^2 \bar{A} - \frac{3}{2} u^T V u_n h_n^2 A = 0 \quad (35-6)$$

تحلیل پایداری به اولین مرتبه‌ی تقریب محدود می‌شود؛ سپس همه‌ی ضرایب، تنها تابع T_1 خواهند بود. در رابطه‌ی (۳۵-۶)، A به فرم قطبی $A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\alpha(T_1)}$ در نظر گرفته می‌شود. با قرار دادن فرم قطبی A در معادله‌ی (۳۵-۶)، نتیجه می‌شود:

$$-2 e^* i \omega \left(\frac{1}{2} a' e^{i\alpha} + \frac{1}{2} a i \alpha' e^{i\alpha} \right) - c^* (i\omega) \left(\frac{1}{2} a e^{i\alpha} \right) - v^* \frac{h_n^3}{8} e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{8} v^* u_n^3 (a^3 e^{i\alpha}) - \frac{3}{4} v^* u_n h_n^2 a e^{i\alpha} = 0 \quad (36-6)$$

که $u^T M u = e^*$ ، $u^T V = v^*$ و $u^T C u = c^*$ است. با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و

موهومی:

$$a\alpha' = \frac{1}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \cos(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \quad (37-6)$$

$$a' = -\frac{c^*}{2e^*} a - \frac{1}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \sin(\sigma T_1 - \alpha) \quad (38-6)$$

با تعریف $\gamma = \sigma T_1 - \alpha$ و سپس قرار دادن آن در روابط (37-6) و (38-6)، نتیجه می‌شود:

$$a(\sigma - \gamma') = \frac{1}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \cos \gamma + \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \quad (39-6)$$

$$a' = -\frac{c^*}{2e^*} a - \frac{1}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \sin \gamma \quad (40-6)$$

برای حل‌های حالت پایدار، با قرار دادن $a' = \gamma' = 0$ در معادله‌های (39-6) و (40-6) و درنهایت با

به توان دو رساندن طرفین روابط و آنگاه جمع کردن آنها، معادله‌ی پاسخ فرکانسی (41-6) بدست می‌آید:

$$\left(a\sigma - \frac{3}{8\omega e^*} v^* u_n^3 a^3 - \frac{3}{4\omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \right)^2 + \left(\frac{c^*}{2e^*} a \right)^2 = \left(\frac{1}{8\omega e^*} v^* h_n^3 \right)^2 \quad (41-6)$$

۶-۱-۶ نتایج عددی

نتایج مطالعه‌ی عددی برای سیستم بخش ۶-۱ (یعنی جاذب دینامیکی سه-المانه، شامل یک فنر

خطی، یک فنر غیرخطی و یک دمپر دینامیکی، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، که تحت تأثیر بار

نقطه‌ای هارمونیک قرار دارد و برای تشدید سوپرهارمونیک)، با پارامترهای ذیل بررسی می‌شود و تا

زمانی که مقادیری دیگری برای این پارامترها ذکر نشده، مقادیر همانند (42-6) هستند.

$$\rho A = 1 \text{ kg/m}, EI = 1 \text{ N m}^2, L = 1 \text{ m}, m_0 = 0.1 \text{ kg}, C_1 = 0.02 \text{ N/m}^3, \quad (42-6)$$

$$C_2 = 1 \text{ N/m}, \frac{d}{L} = 0.5, \frac{b}{L} = 0.3, \lambda = 0.01 \text{ N s/m}, d_E = 0.1 \text{ N s/m}$$

توابع مقایسه‌ای به صورت ذیل در نظر گرفته می‌شوند:

$$\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) = \sin(r\pi \bar{x}) \quad , r = 1, 2, \dots \quad (43-6)$$

تعداد مودهای در نظر گرفته شده برای پاسخ تیر، ۵ مود می‌باشد. حال ماتریس‌های سفتی،

میرایی و جرم و بردارهای نیرو و V را می‌توان محاسبه کرد؛ که (۴۵-۶)، آنها را نشان می‌دهد. با استفاده از (۲۴-۶)، مقادیر ویژه‌ی تشدید و بردارهای ویژه‌ی مسئله‌ی مورد نظر، محاسبه می‌شوند. مقادیر ویژه و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی خطی اول تا هفتم (به ترتیب) به صورت ذیل بدست می‌آیند:

$$\omega = 0, 9.8696, 39.4784, 88.8264, 157.9137, 246.7401, \text{Inf}$$

باید ذکر کرد که فرکانس طبیعی صفر مطلق نیست و عدد کوچک است که نرم‌افزار با دقت مثلاً چهار رقم اعشار عدد صفر را نشان می‌دهد. بردارهای ویژه‌ی متناظر فرکانس‌های طبیعی هم به صورت (۴۴-۶) محاسبه می‌شوند. برای محاسبه‌ی عددی، فرکانس طبیعی خطی دوم (یعنی $\omega = 9.8696$)

$$u_2 = \begin{bmatrix} -0.5774 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5774 \\ -0.5774 \end{bmatrix} \quad \text{در نظر گرفته می‌شود و بردار ویژه‌ی متناظر با آن به صورت}$$

است. در نهایت $u_n = -0.5774$ ، $v^* = 0.1039$ ، $c^* = 0.3534$ و $e^* = 0.1667$ محاسبه می‌شوند.

شوند.

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -0.5774 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5774 \\ -0.5774 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5774 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{bmatrix}, u_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(۴۴-۶)

$$\mathbf{u}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5774 \\ -0.5774 \\ -0.5774 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 2 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 2 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & \\ & & & & 2 & & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}, \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi^4}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8\pi^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{81\pi^4}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 128\pi^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{625\pi^4}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

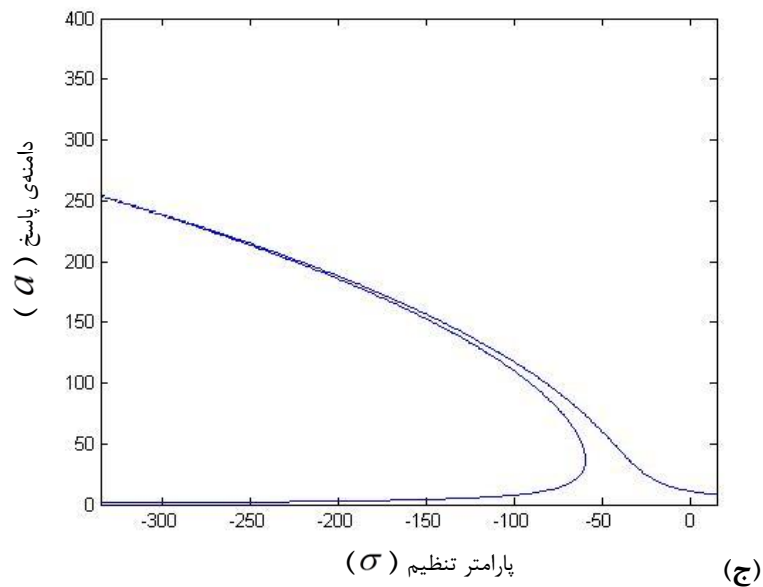
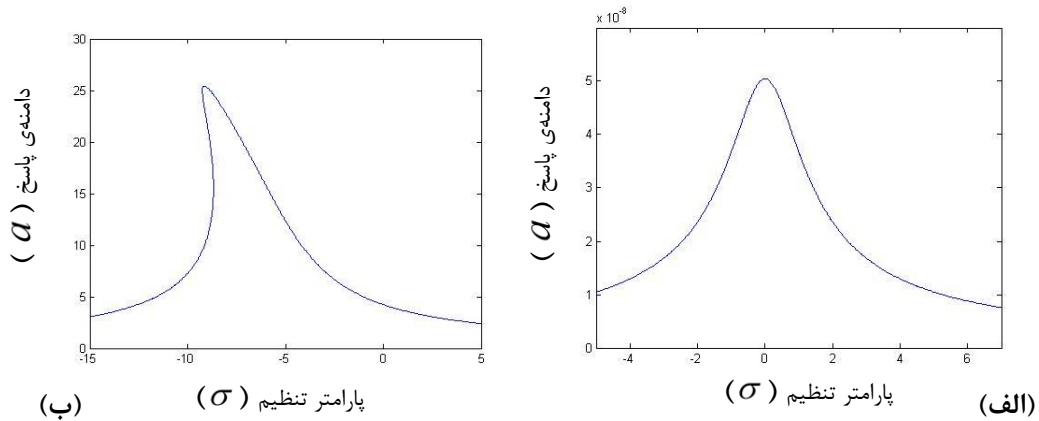
(45-6)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 0.1 \times \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \times 1 \\ 0 & 0.1 \times \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \times \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -(0.01 \times 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \times \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \times \frac{1}{2} & 0 & 0.01 \times 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} \sin(3\pi/10) \\ \sin(6\pi/10) \\ \sin(9\pi/10) \\ \sin(12\pi/10) \\ \sin(15\pi/10) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0 \\ -0.02 \\ 0 \\ 0.02 \\ -0.2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

شکل ۶-۲، برای مقادیر مختلف F_0 رسم گشته است. نمودارها با استفاده از نرم‌افزار متلب رسم شده-اند. شکل ۶-۲الف، برای $F_0 = 1$ ، شکل ۶-۲ب، برای $F_0 = 800$ و شکل ۶-۲ج، برای $F_0 = 2000$ ترسیم شده‌اند.

اثر عبارت غیرخطی (یعنی ضریب a^3 در رابطه‌ی (۴۱-۶)) بدین گونه می‌باشد، که منحنی دامنه برحسب پارامتر تنظیم را کج می‌نماید. در مورد منحنی پاسخ غیرخطی، به خوبی می‌توان پدیده‌ی پرش را مشاهده نمود. با افزایش دامنه‌ی تحریک (F_0)، مقدار دامنه‌ی پاسخ افزایش پیدا می‌کند. باید توجه داشت، عامل غیرخطی منحنی را کج می‌نماید؛ اگر ضریب a^3 در رابطه‌ی (۴۱-۶)، بزرگ‌تر از صفر باشد، کج‌شدگی منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست (که سخت‌شوندگی^۱ می‌نامند) است و اگر ضریب a^3 در رابطه‌ی (۴۱-۶) کوچک‌تر از صفر باشد، منحنی به سمت چپ کج می‌شود (که نرم-شوندگی^۲ نامند). با توجه به اینکه ضریب a^3 در رابطه‌ی (۴۱-۶)، کوچک‌تر از صفر است، اثر نرم-شوندگی به خوبی مشهود است.

1- Hard Springs
2- Soft Springs



شکل ۲-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم زمانی که

$$F_0 = 1 \text{ (الف)؛ } \omega = 9.8696, e^* = 0.1667, v^* = 0.1039, c^* = 0.3534, u_n = -0.5774$$

$$F_0 = 800 \text{ (ج)؛ } F_0 = 2000$$

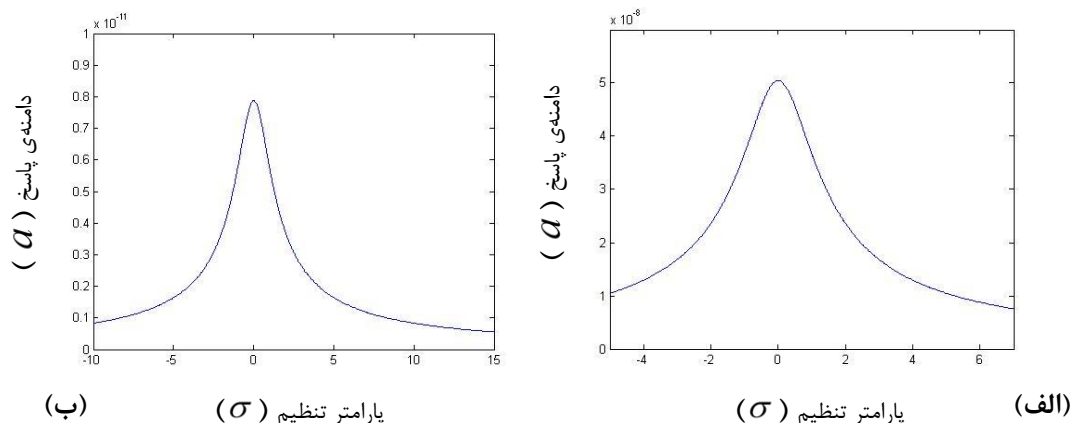
شکل ۳-۶ منحنی پاسخ فرکانسی را برای دو فرکانس طبیعی خطی (ω) مختلف نمایش می‌دهد.

داده‌ها بر اساس (۴۲-۶) و $F_0 = 1$ رسم گردیده‌اند. شکل ۳-۶ الف، برای $\omega = 9.8696$ و شکل ۳-۶ ب،

برای $\omega = 88.8264$ ترسیم گشته است.

همانطور که از شکل ۳-۶ مشخص است، تأثیر فرکانس طبیعی خطی روی دامنه‌ی پاسخ

فرکانسی به طور کامل مشهود است.

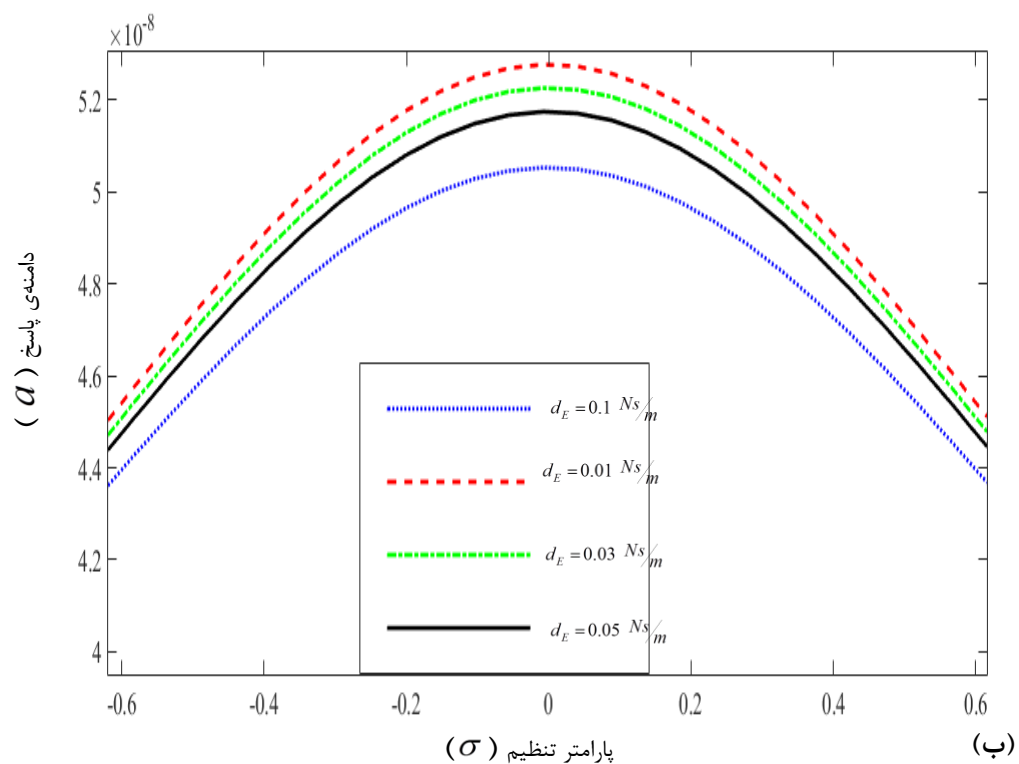
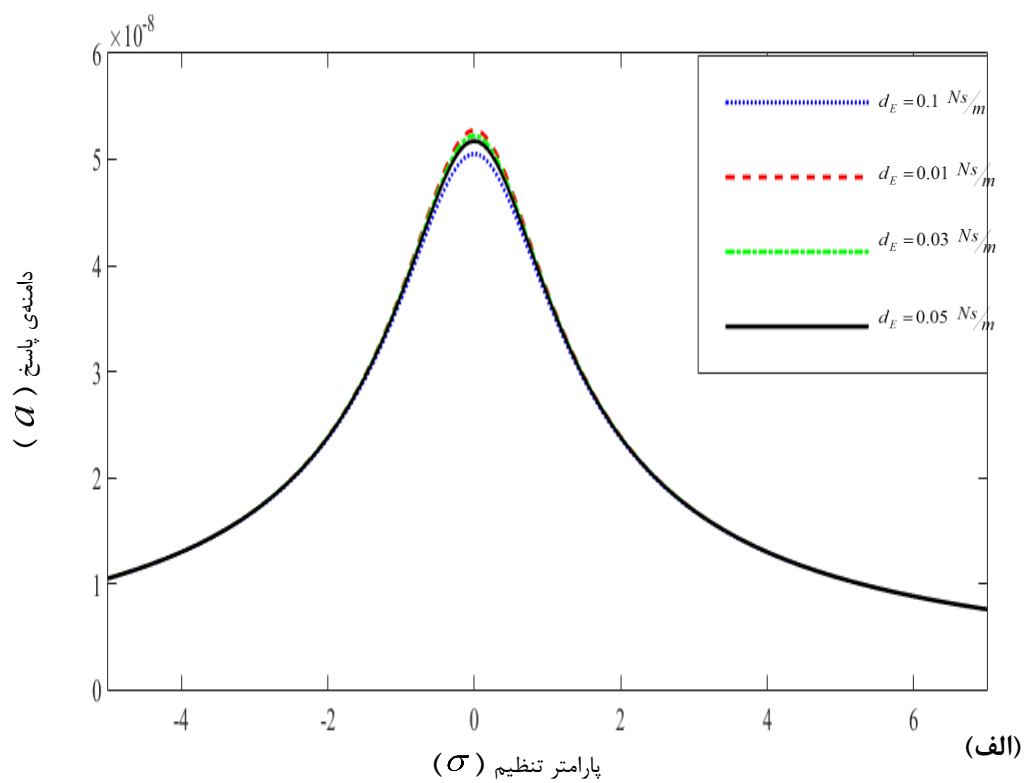


شکل ۳-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای الف) $\omega = 9.8696$ ؛ ب) $\omega = 88.8264$

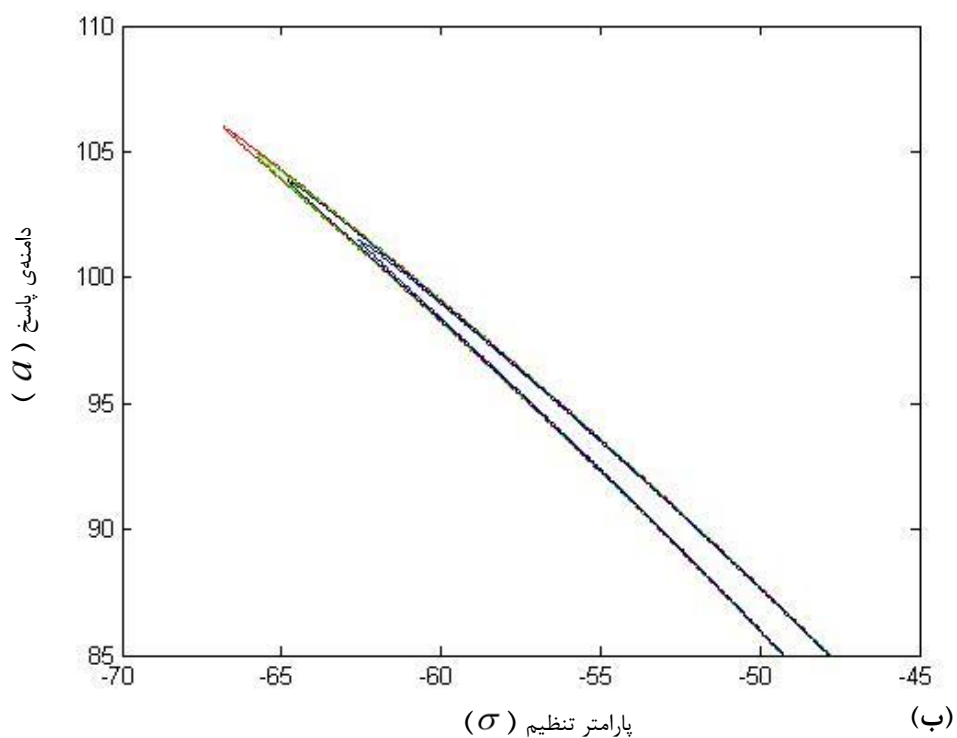
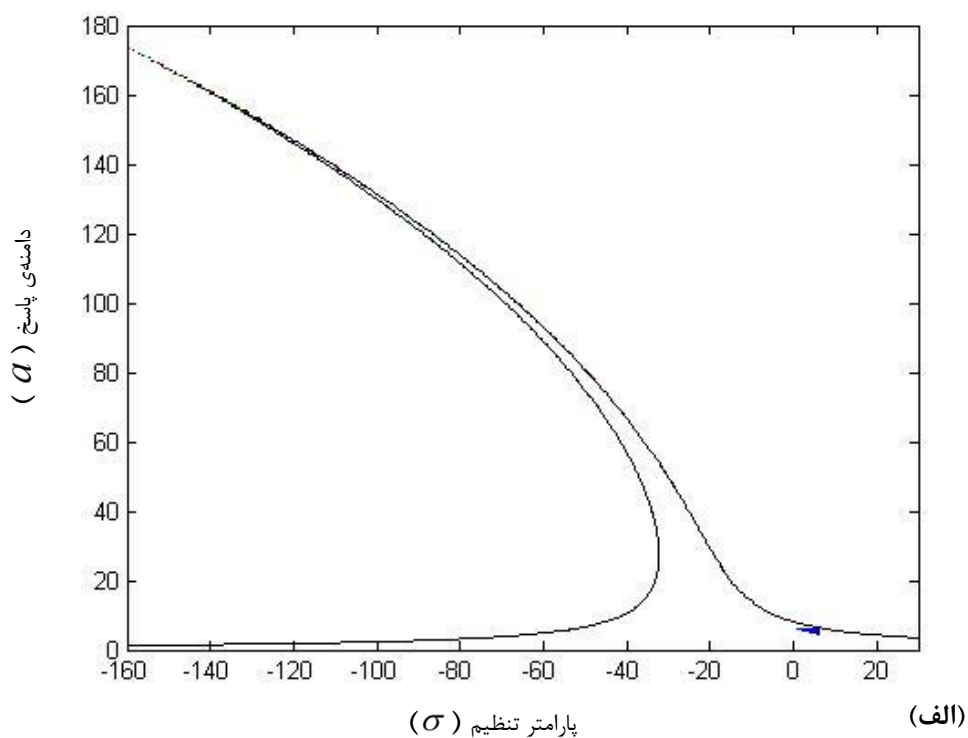
شکل ۴-۶ و شکل ۵-۶، تأثیرهای ضریب میرایی d_E ، را بر روی منحنی پاسخ فرکانسی نشان می‌دهند. شکل ۴-۶ بر اساس داده‌های (۴۲-۶) (به جز d_E) و $F_0 = 1$ رسم شده است. همانطور که از شکل ۴-۶ مشخص است، هر چقدر ضریب میرایی (d_E) افزایش یابد، دامنه‌ی پاسخ فرکانسی کاهش پیدا می‌کند. لازم به ذکر است که شکل ۴-۶، بزرگ‌نمایی قسمتی از منحنی شکل ۴-۶ الف است که برای دید بهتر ترسیم گشته است. شکل ۵-۶ هم بر اساس داده‌های (۴۲-۶) (به جز d_E) و $F_0 = 1400$ ترسیم گشته است. همانند شکل ۴-۶، با افزایش ضریب میرایی (d_E)، دامنه‌ی پاسخ فرکانسی کاهش پیدا می‌کند. شکل ۴-۶ و شکل ۵-۶، تأثیر مستقیم دامنه‌ی تحریک F_0 ، را در کج کردن نمودار و در نتیجه ناپایداری سیستم به طور کامل مشخص می‌کنند.

در اینجا تأثیر ضریب دمپر λ ، بر روی منحنی پاسخ فرکانسی بررسی می‌شود. شکل ۶-۶ و شکل ۷-۶، بر اساس داده‌های (۴۲-۶) (به جز λ) رسم شده‌اند؛ که در شکل ۶-۶ و در شکل ۷-۶، $F_0 = 1400$ در نظر گرفته شده است. شکل ۶-۶ و شکل ۷-۶، اثر ضریب دمپر را در کاهش دامنه‌ی فرکانسی نمایش می‌دهند؛ که ضریب دمپر، در کاهش ماکزیمم دامنه‌ی فرکانسی تأثیر مستقیمی دارد.

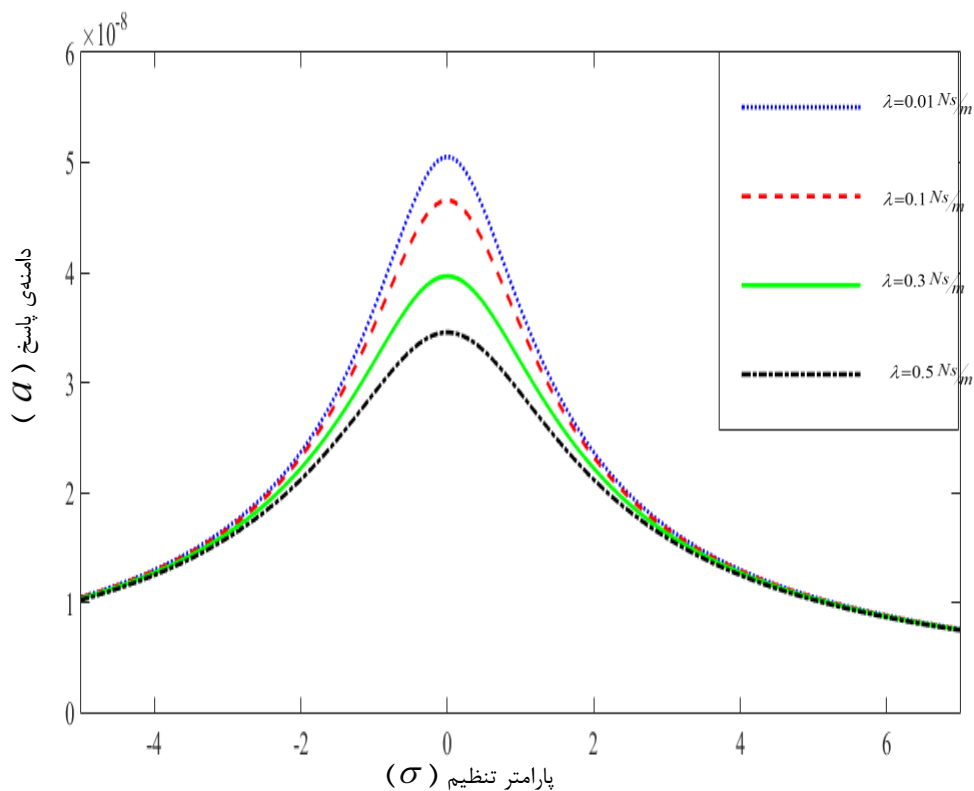
در ادامه تأثیر سفتی فنر (C_2) در رابطه‌ی (۴-۶)، بر روی منحنی پاسخ فرکانسی بررسی می‌شود.



شکل ۴-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف d_E و $F_0 = 1$ ؛ الف) نمایش کل بازه؛ ب) نمایش بزرگ‌نمایی شده‌ی نمودار الف، در اطراف ماکزیمم پاسخ

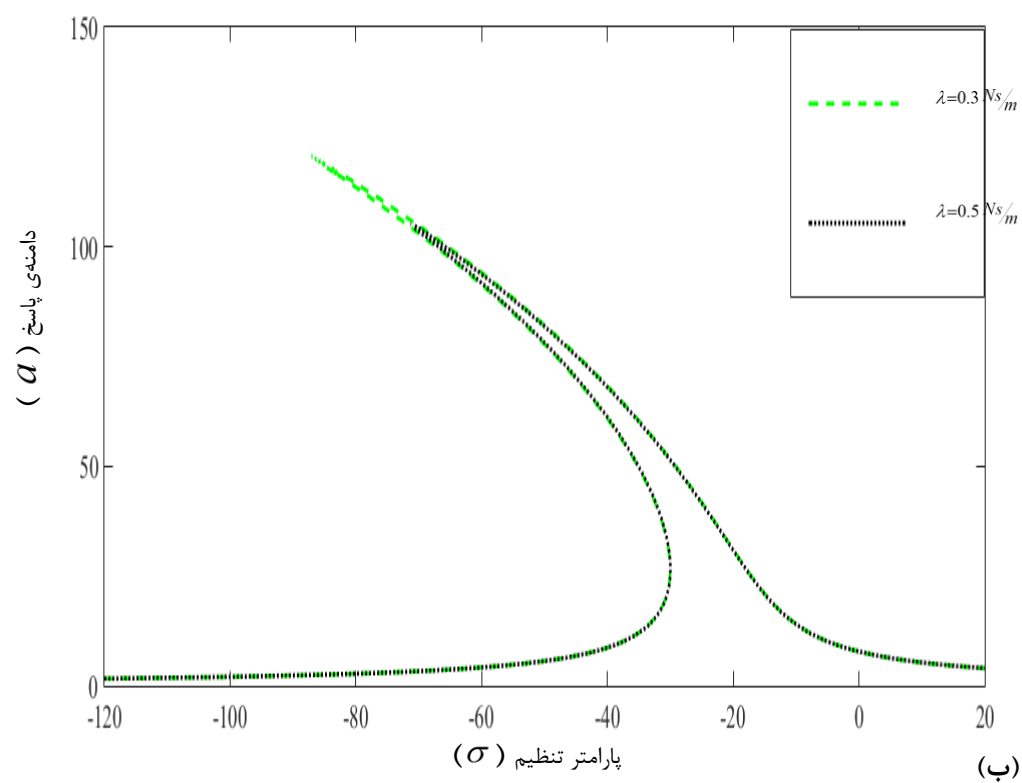
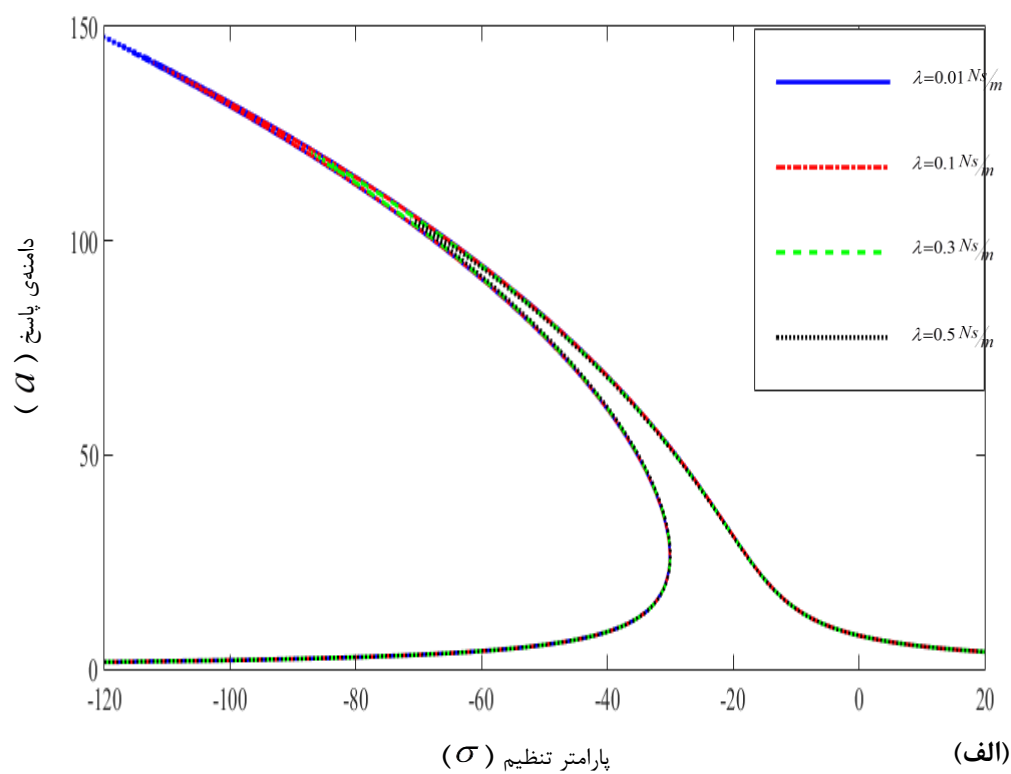


شکل ۵-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف d_E و $F_0 = 1400$ ؛ رنگ آبی برای $d_E = 0.03 \text{Ns/m}$ و رنگ سیاه برای $d_E = 0.01 \text{Ns/m}$ ، رنگ قرمز برای $d_E = 0.1 \text{Ns/m}$ ، رنگ سبز برای $d_E = 0.05 \text{Ns/m}$ و رنگ آبی برای $d_E = 0.05 \text{Ns/m}$ ؛ الف) نمایش کل بازه؛ ب) بزرگ‌نمایی قسمتی از نمودار الف

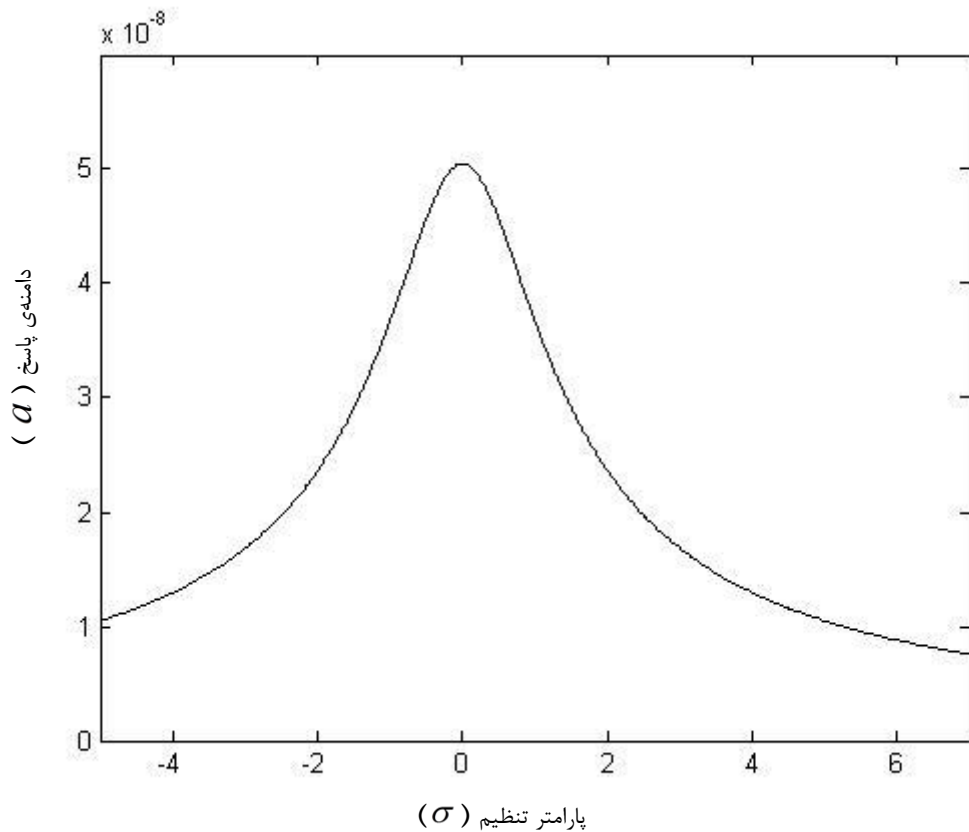


شکل ۶-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای ضرایب دمپر مختلف و $F_0 = 1$

شکل ۸-۶ و شکل ۹-۶ براساس داده‌های (۴۲-۶) (به جز C_2) رسم شده‌اند؛ که در شکل ۸-۶، $F_0 = 1$ و در شکل ۹-۶، $F_0 = 1400$ در نظر گرفته شده است؛ که بر اساس این اشکال، همانطور که مشاهده می‌شود، تأثیر C_2 بر روی نمودارهای پاسخ فرکانسی بسیار ناچیز است. در شکل ۸-۶، ۴ نمودار بر هم منطبق شده‌اند؛ که ناشی از اختلاف ناچیزی است که با هم دارند. در شکل ۹-۶، نمودارهای (ب) تا (ه)، منحنی (الف) را به طور مجزا برای مقادیر مختلف C_2 نشان می‌دهد. حال تأثیر سفتی فنر (C_1) در رابطه‌ی (۱-۶) یا (۴-۶)، بر روی منحنی پاسخ فرکانسی بررسی می‌شود. شکل ۱۰-۶ و شکل ۱۱-۶ بر اساس داده‌های (۴۲-۶) رسم شده‌اند؛ که در شکل ۱۰-۶، $F_0 = 1$ و در شکل ۱۱-۶، $F_0 = 1400$ در نظر گرفته شده است. با توجه به آنکه ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ، برای مقادیر مختلف C_1 ، اختلاف زیادی با هم دارند و امکان نمایش همه‌ی آنها در یک نمودار فراهم نیست،



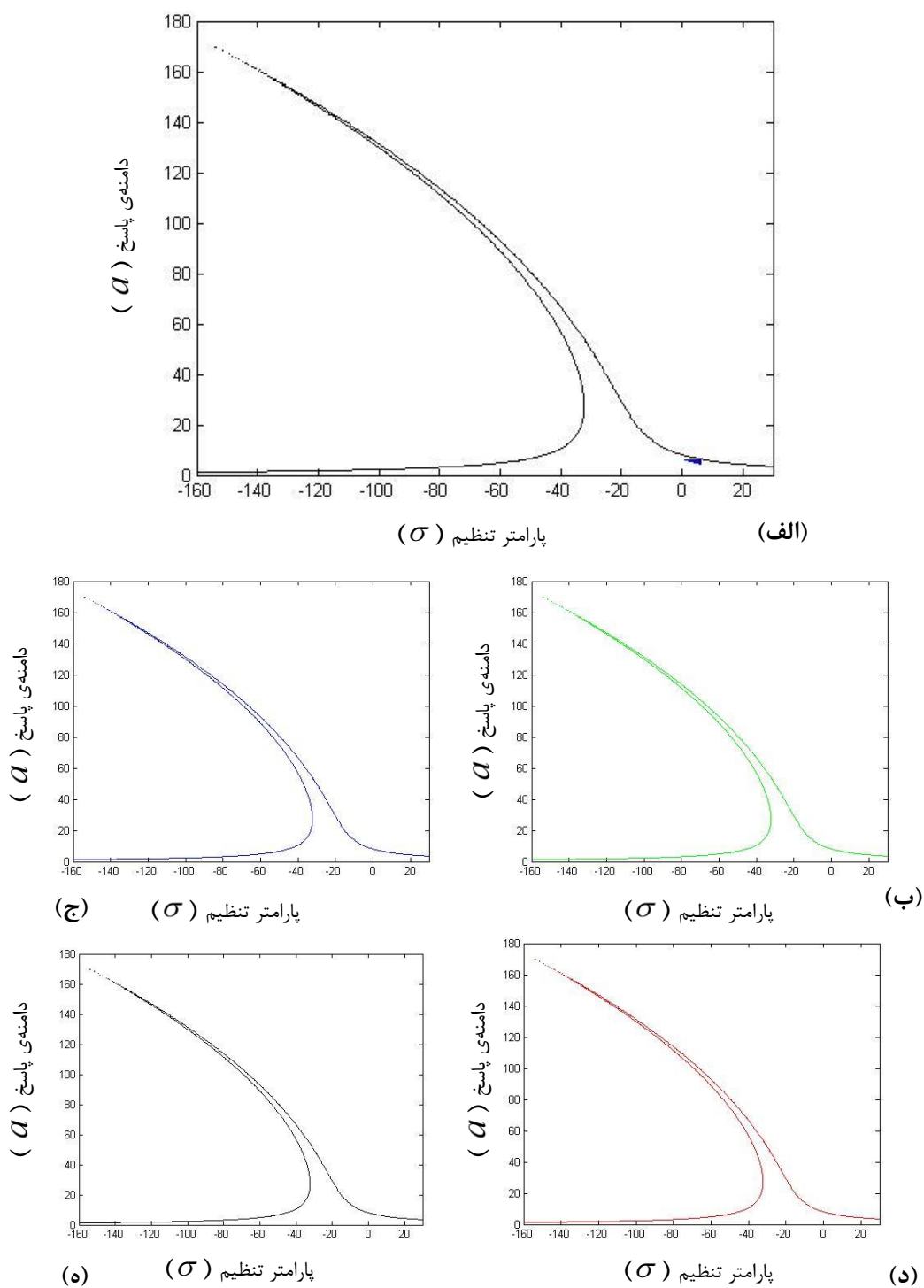
شکل ۶-۷ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای ضرایب دمپر مختلف و $F_0 = 1400$ ؛ الف) نمایش برای چهار داده‌ی مختلف λ ؛ ب) نمایش برای دو داده‌ی مختلف λ



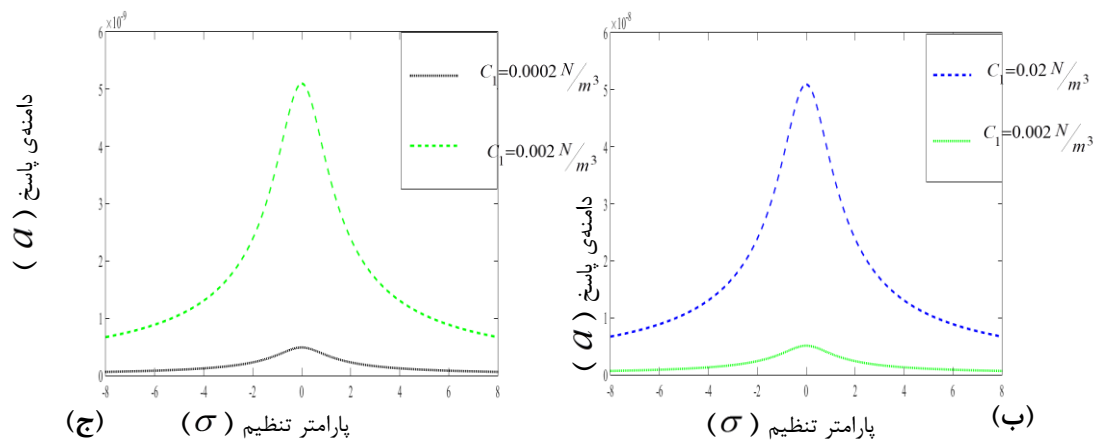
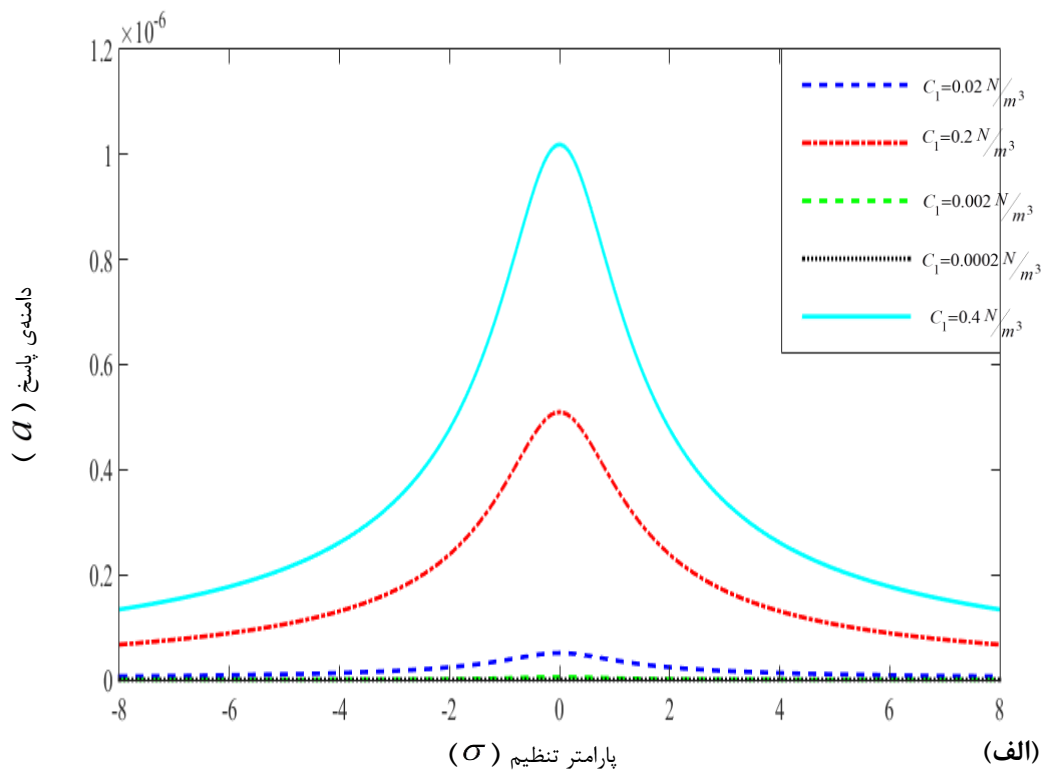
شکل ۸-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_2 و $F_0 = 1$ ؛ رنگ آبی برای $C_2 = 1 \text{ N/m}$ ، رنگ قرمز برای $C_2 = 100 \text{ N/m}$ ، رنگ سبز برای $C_2 = 0.01 \text{ N/m}$ و رنگ سیاه برای $C_2 = 1000 \text{ N/m}$

بنابراین برای نمایش بهتر، نمودارهای شکل ۱۰-۶.ب و شکل ۱۰-۶.ج ارائه شده‌اند. با در نظر گرفتن شکل ۱۰-۶ و شکل ۱۱-۶، می‌توان دریافت، C_1 اثر مستقیم بر روی دامنه‌ی پاسخ فرکانسی دارد و برای مقادیر کوچک C_1 ، ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ فرکانسی، مقدار کمتری را خواهد داشت؛ هرچند که اثر C_1 بر روی دامنه‌ی پاسخ فرکانسی به پارامترهای دیگر، از جمله F_0 وابسته است. همانطور که از شکل ۱۰-۶ و شکل ۱۱-۶ مشخص است، برای مقادیر کوچک‌تر C_1 (کمتر از ۰/۱)، ماکزیمم دامنه‌ی فرکانسی، رابطه‌ی مستقیم با C_1 دارد.

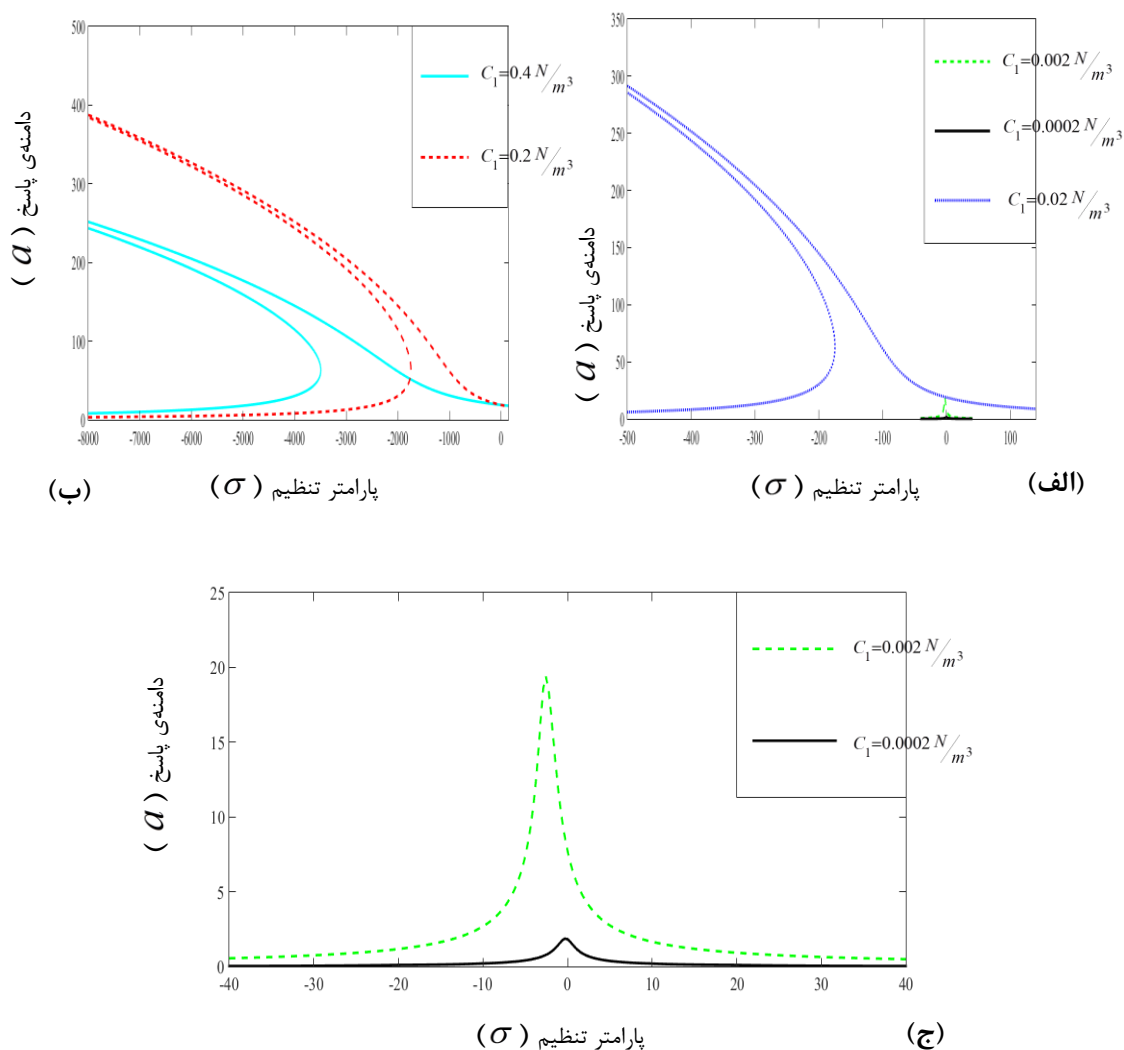
بار دیگر اثر C_1 بر روی منحنی پاسخ فرکانسی، با ضریب دمپر دیگری بررسی می‌شود. شکل ۱۲-۶، بر اساس داده‌های (۴۲-۶) (به جز C_1 و λ)، $\lambda = 0.9 \text{ Ns/m}$ و $F_0 = 1400$ رسم می‌شود.



شکل ۶-۹ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_2 و $F_0 = 1400$ ؛ الف) نمایش ۴ داده‌ی مختلف $C_2 = 1000 \text{ N/m}$ ، $C_2 = 1 \text{ N/m}$ ، $C_2 = 100 \text{ N/m}$ ، $C_2 = 0.01 \text{ N/m}$ و $C_2 = 1000 \text{ N/m}$ کنار هم؛ ب) نمایش به ازای $C_2 = 0.01 \text{ N/m}$ ؛ ج) نمایش به ازای $C_2 = 1 \text{ N/m}$ ؛ د) نمایش به ازای $C_2 = 100 \text{ N/m}$ ؛ ه) نمایش به ازای $C_2 = 1000 \text{ N/m}$



شکل ۶-۱۰ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_1 ، $\lambda = 0.01 \text{Ns/m}$ و $F_0 = 1$ ؛
 الف) نمایش برای داده‌های مختلف C_1 ؛ ب) نمایش برای دو داده‌ی مختلف C_1 ؛ ج) نمایش برای دو داده‌ی متفاوت
 C_1



شکل ۶-۱۱ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_1 ، $\lambda = 0.01 \text{Ns/m}$ و

$$F_0 = 1400$$

همانطور که در شکل ۶-۱۲ مشاهده می‌شود، بار دیگر می‌توان رابطه‌ی مستقیم ماکزیمم دامنه‌ی

پاسخ فرکانسی، را با مقادیر کوچک C_1 مشاهده نمود.

در ادامه با تغییر مکان نیروی اعمالی، بهترین مکان را که می‌توان جاذب را قرار داد، تا کمترین

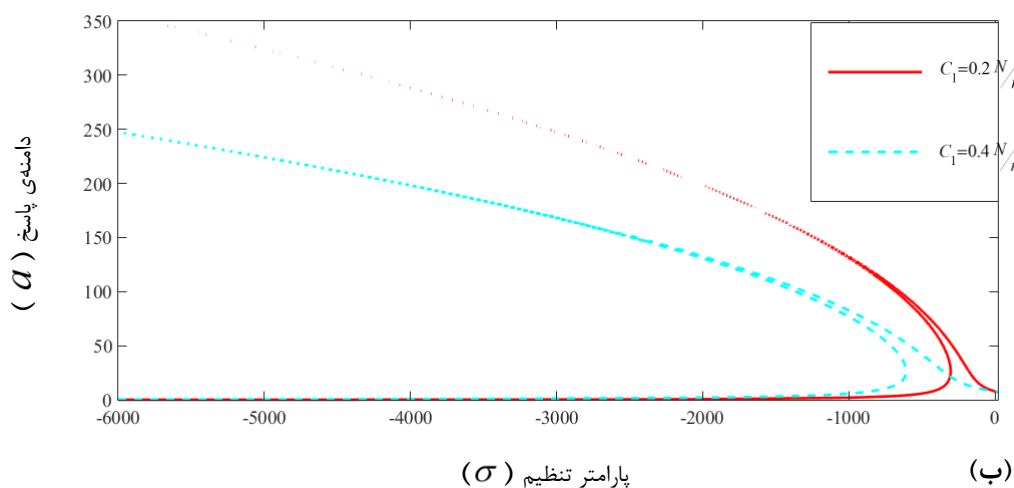
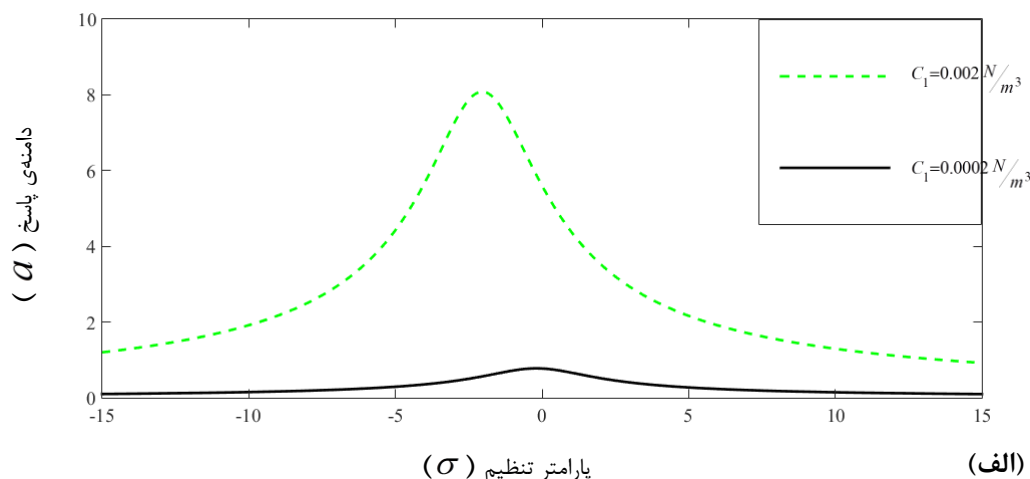
ماکزیمم جابه‌جایی تیر را شاهد بود، مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور داده‌های ذیل در نظر

گرفته می‌شود:

$$\rho A = 1 \text{ kg/m}, EI = 1 \text{ N m}^2, L = 1 \text{ m}, m_0 = 0.1 \text{ kg},$$

$$C_1 = 0.02 \text{ N/m}^3, C_2 = 1 \text{ N/m}, \lambda = 0.01 \text{ Ns/m}, d_E = 0.1 \text{ Ns/m} \quad (46-6)$$

با تغییر مکان اعمال نیرو بر روی تیر، بهترین محل جذب به گونه‌ای تعیین می‌شود، تا کمترین

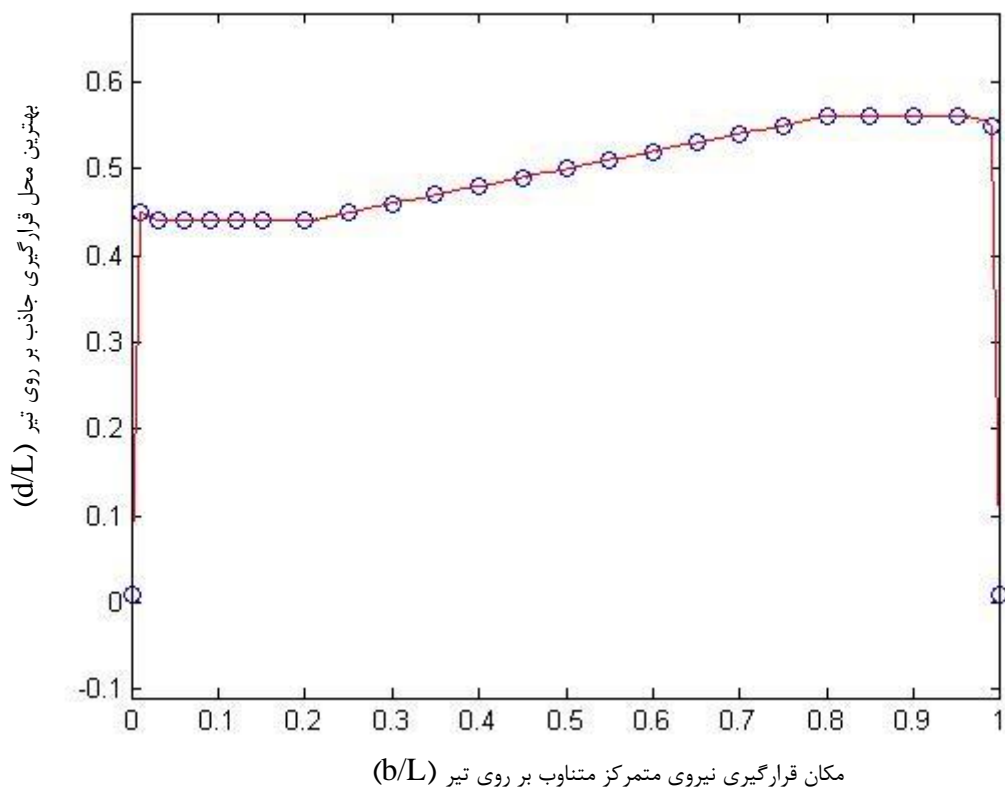


شکل ۶-۱۲ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_1 ، $\lambda = 0.9 \text{ Ns/m}$ و

$$F_0 = 1400$$

ماکزیمم جابه‌جایی تیر در مکان ۰/۵ اتفاق بیفتد. نمودار تغییر مکان نیرو، بر حسب بهترین مکان جذب بر روی تیر، برای کاهش حداکثری ماکزیمم جابه‌جایی تیر در مکان ۰/۵ و به ازای نیروی $F_0 = 100$ ، در شکل ۶-۱۳ به تصویر کشیده شده است. با توجه به شکل، می‌توان به ازای موقعیت‌های مختلف قرار گرفتن بار متمرکز متناوب بر روی تیر، بهترین مکان برای قرار دادن جذب بر روی تیر، را

به ازای داده‌های مسئله، مشاهده نمود. برنامه‌ی این نمودار با نرم‌افزار متلب نوشته شده است.

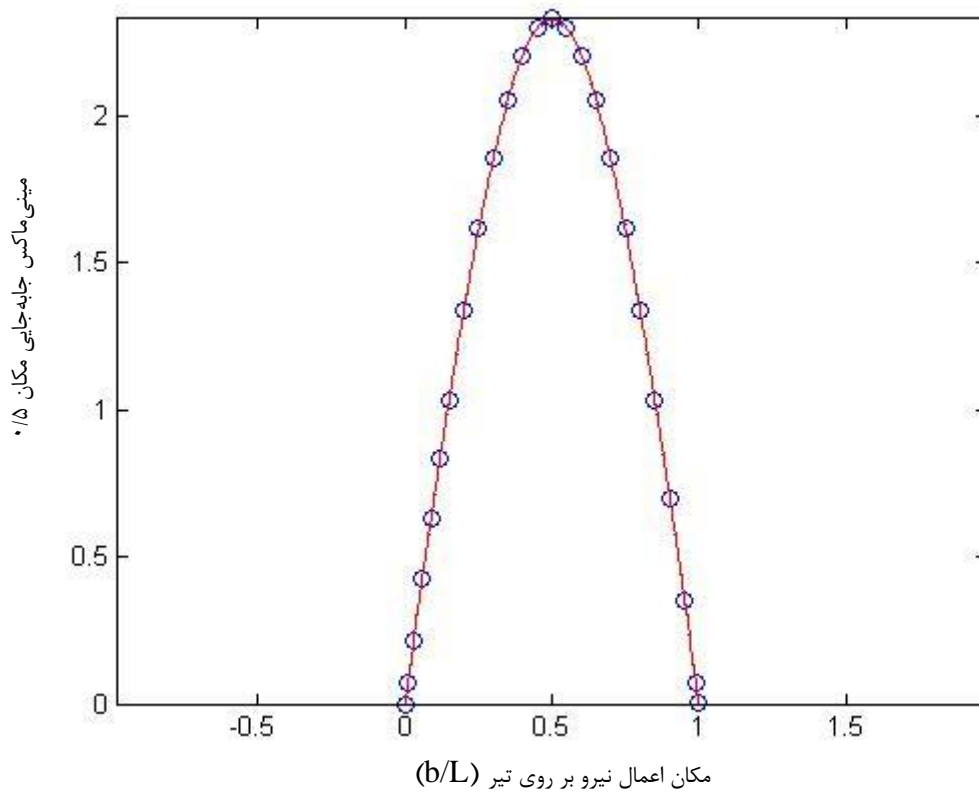


شکل ۶-۱۳ نمودار مکان نیرو بر روی تیر، بر حسب بهترین موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر، برای کاهش حداکثری ماکزیمم جابه‌جایی میانه‌ی تیر

در ادامه نمودار تغییر مکان اعمال نیرو بر روی تیر، بر حسب مینی‌ماکس^۱ میانه‌ی تیر، که به ازای بهترین مکان جاذب مربوط به هر مکان نیرو است، رسم می‌گردد (به‌عبارتی با قرار دادن نیرو در مکان مشخصی بر روی تیر و به ازای موقعیت‌های مختلف قرارگیری جاذب بر روی تیر، در مکان ۰/۵ تیر ماکزیمم جابه‌جایی‌های مختلفی اتفاق می‌افتد؛ که به ازای یکی از محل‌های قرارگیری جاذب بر روی تیر، کمترین مقدار ماکزیمم جابه‌جایی در میانه‌ی تیر اتفاق می‌افتد؛ که نمودار برای مکان‌های مختلف اعمال بار بر روی تیر بر حسب مینی‌ماکزیمم‌های جابه‌جایی مکان ۰/۵ رسم گردیده است). شکل ۶-۱۴ نمودار مربوطه را به ازای نیروی $F_0 = 100$ نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۶-۱۴، به ازای مکان

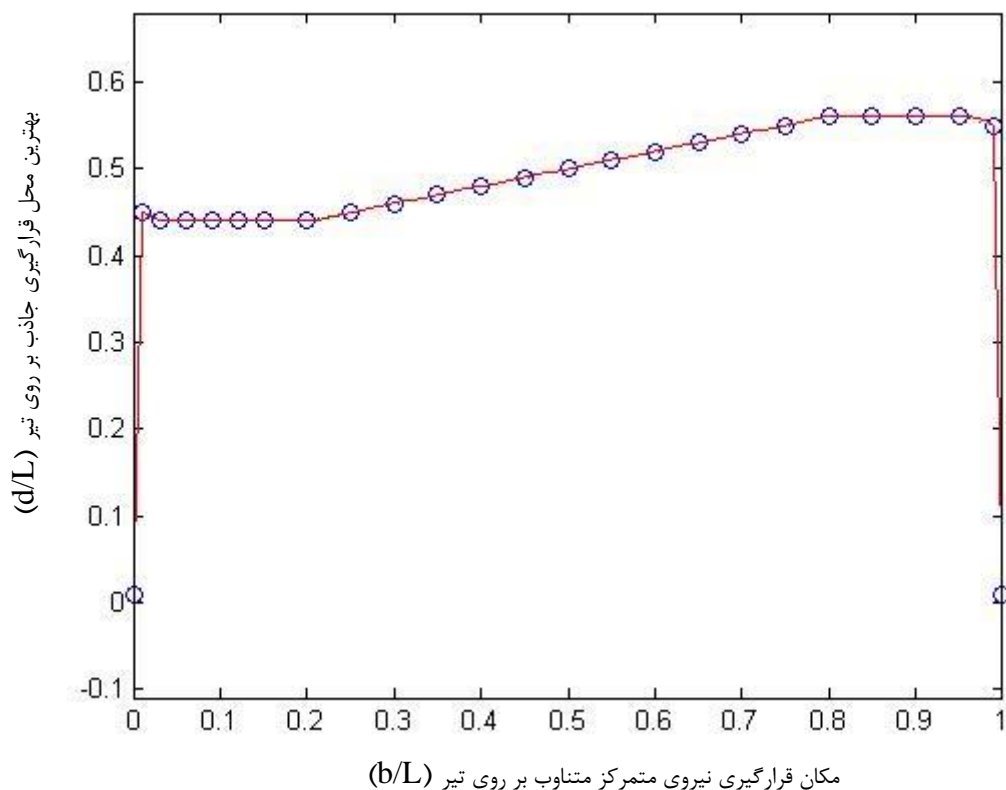
۱- منظور از مینی‌ماکس، مینی‌ماکزیمم‌های مورد نظر است.

۰/۵ نیرو بر روی تیر و با قرار دادن جاذب در محل بهینه‌ی خود (که با توجه به شکل ۶-۱۳ می‌توان بهترین مکان جاذب، را به ازای مکان نیروی ۰/۵ مشاهده نمود)، ماکزیمم جابه‌جایی در میانه‌ی تیر اتفاق می‌افتد.



شکل ۶-۱۴ نمودار مکان اعمال نیرو بر روی تیر، بر حسب مینی ماکس میانه‌ی تیر و به ازای بهترین موقعیت قرارگیری جاذب، به ازای اعمال نیرو در مکان مورد نظر

حال در این قسمت بحث بازتر شده و نمودارهای تغییر مکان اعمال نیرو بر روی تیر، به ازای تمام مکان‌های تیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. نمودار تغییر مکان نیرو، بر حسب بهترین مکان جاذب بر روی تیر، برای کاهش حداکثری ماکزیمم جابه‌جایی تیر، در شکل ۶-۱۵، به ازای نیروی $F_0 = 100$ به نمایش گذاشته شده است. همانطور که مشاهده می‌فرمایید، بین شکل ۶-۱۵، که ماکزیمم جابه‌جایی تمام نقاط تیر را مورد بررسی قرار داده و شکل ۶-۱۳، که ماکزیمم جابه‌جایی میانه‌ی تیر را بررسی کرده است، شباهت‌های زیادی را می‌توان مشاهده نمود.

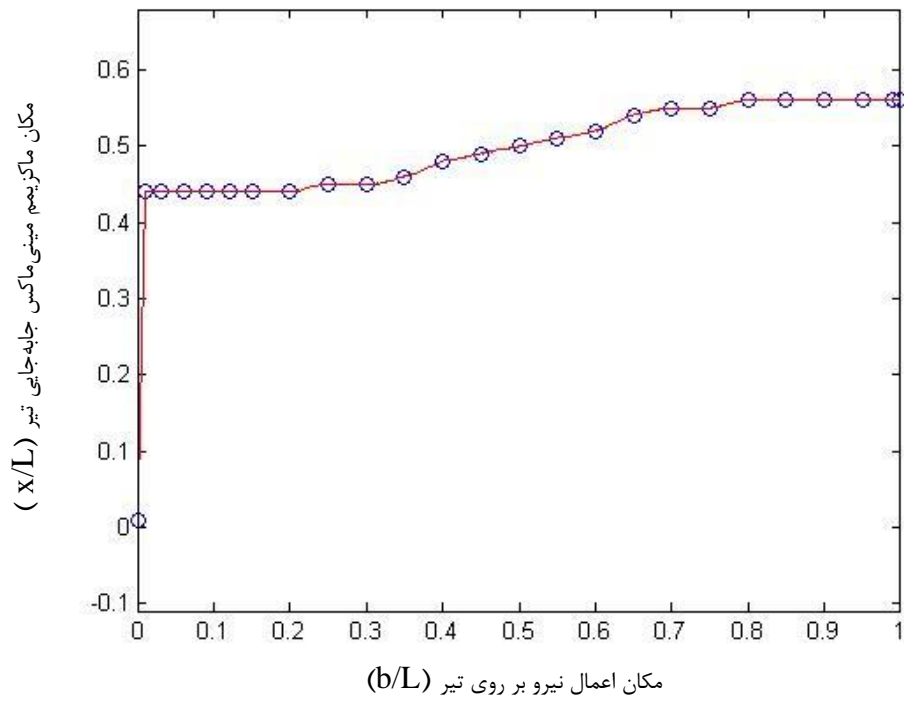


شکل ۱۵-۶ نمودار مکان اعمال نیرو بر حسب بهترین مکان جاذب بر روی تیر

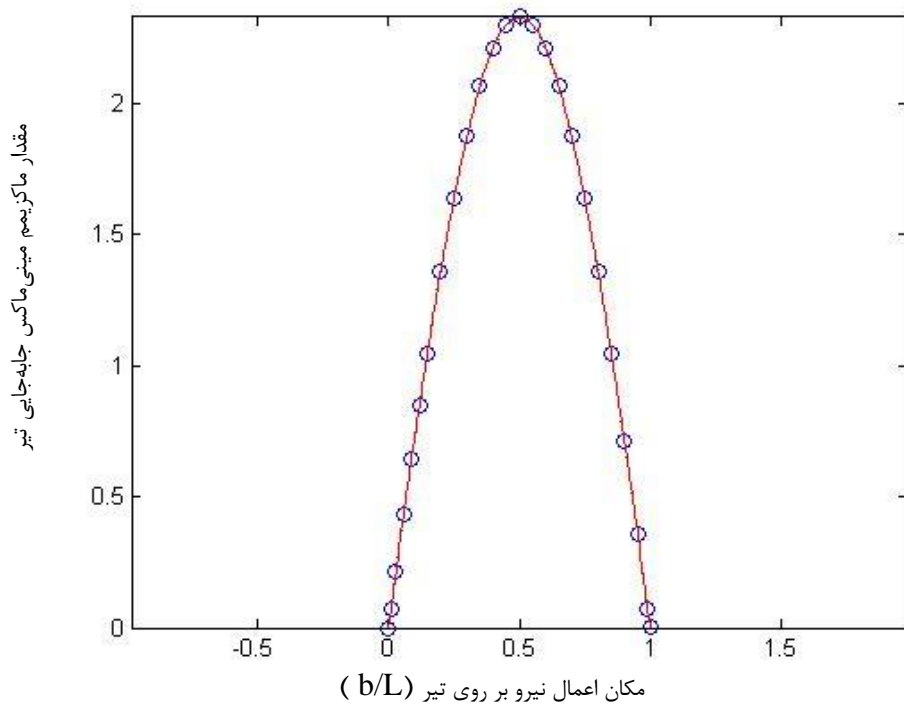
شکل ۱۶-۶ نمودار تغییر مکان اعمال نیرو را بر حسب ماکزیمم مینی‌ماکس کل تیر، به ازای بهترین مکان جاذب بر روی تیر، که منتج به کمترین ماکزیمم جابه‌جایی کل تیر می‌شود، به‌نمایش می‌گذارد. لازم به ذکر است که شکل به ازای مقدار نیروی $F_0 = 100$ رسم گردیده است.

شکل ۱۷-۶، نمودار تغییر مکان اعمال نیرو بر روی تیر، را بر حسب مقدار ماکزیمم مینی‌ماکس تیر، که به ازای بهترین مکان جاذب، مربوط به هر موقعیت قرارگیری نیرو بر روی تیر رسم شده است، را نشان می‌دهد (به‌عبارتی به ازای هر مکان نیرو بر روی تیر، مقدار ماکزیمم جابه‌جایی بهینه‌شده‌ی کل تیر نشان داده شده است). درنهایت در این قسمت، تأثیر تغییر مقدار نیرو، در تعیین بهترین محل جاذب بر روی تیر، که منجر به بهترین عملکرد جاذب در کاهش ارتعاش‌های تیر می‌شود، بررسی می‌شود؛ شکل ۱۸-۶ این مقایسه را به‌تصویر می‌کشد و همانطور که مشاهده می‌نمایید، با تغییر مقدار نیرو، بهترین محل قرارگیری جاذب بر روی تیر تغییر می‌نماید؛ به بیان دیگر، بهترین محل جاذب، تحت

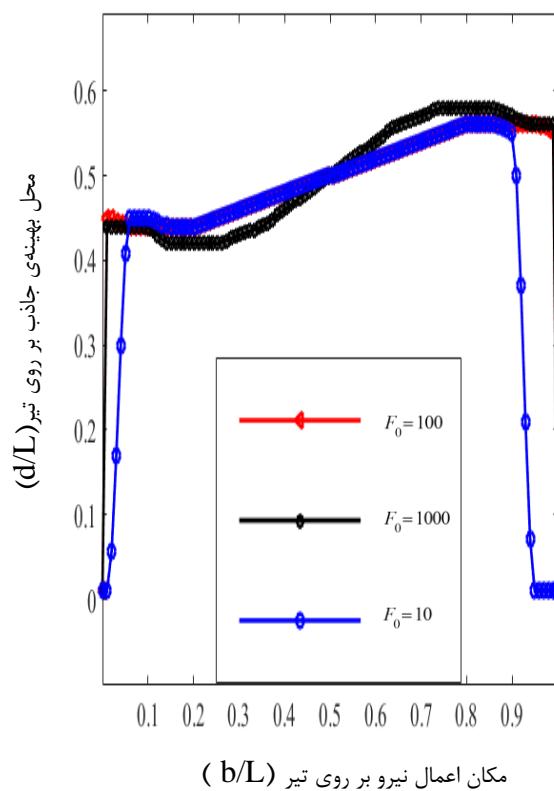
تأثیر مقدار نیرو می باشد؛ همانطور که مکان اعمال نیرو هم در محل بهینه‌ی جاذب مؤثر بود.



شکل ۶-۱۶ نمودار تغییر مکان اعمال نیرو بر حسب مکان ماکزیمم مینی ماکس کل تیر، به ازای بهترین مکان جاذب بر روی تیر



شکل ۶-۱۷ نمودار تغییر مکان اعمال نیرو بر روی تیر بر حسب مقدار ماکزیمم مینی ماکس تیر، به ازای بهترین مکان جاذب مربوط به هر موقعیت قرارگیری نیرو بر روی تیر

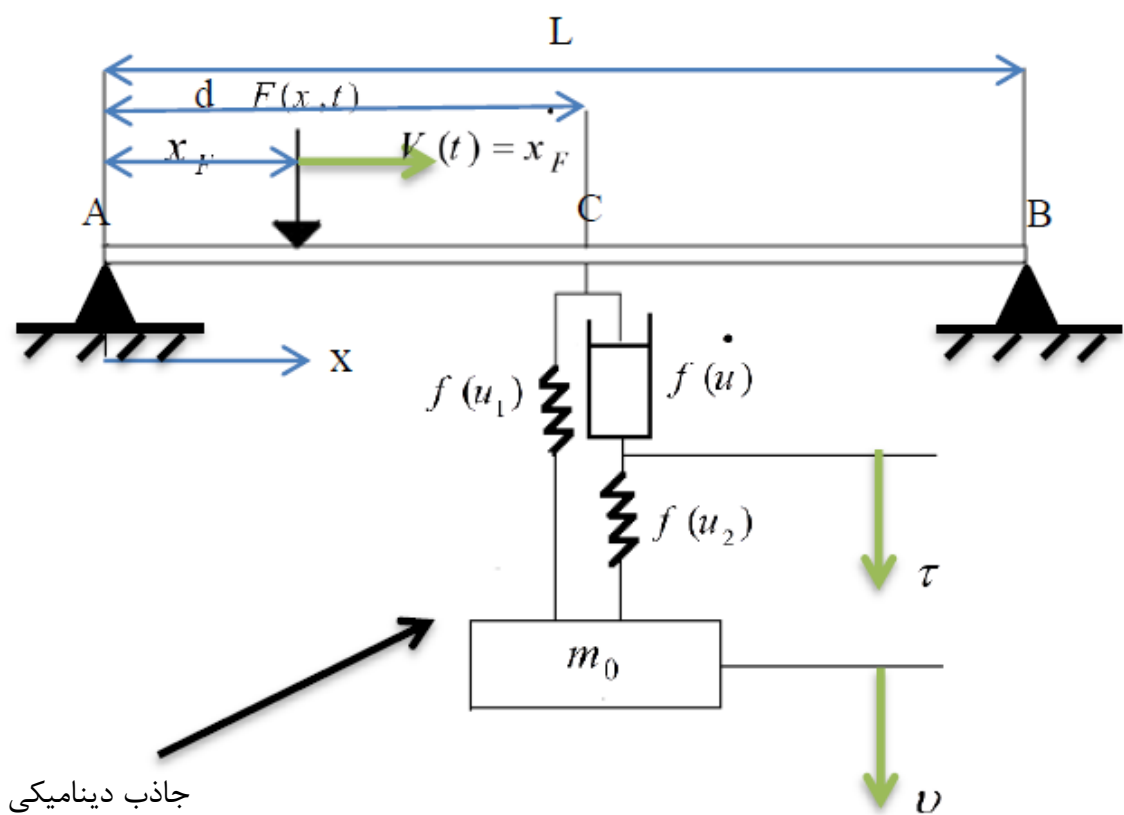


شکل ۶-۱۸ نمودار مکان نیرو بر حسب مکان بهینه‌ی جاذب، به ازای نیروهای مختلف

۲-۶ جاذب دینامیکی دو-المانه، شامل دو فنر و یک دمپر، متصل به تیر با تکیه-گاه‌های ساده، در معرض بار در حال حرکت

۱-۲-۶ مدل مسئله و استخراج معادلات

سیستم نشان داده شده در شکل ۱۹-۶ را در نظر بگیرید. تیر با تکیه‌گاه‌های ساده که از طریق فنرهای خطی و غیرخطی و یک دمپر ویسکوز خطی به جرم کوچکی متصل شده است و تیر تحت تأثیر بار در حال حرکت می‌باشد.



جاذب دینامیکی

شکل ۱۹-۶ تیر شامل جاذب دینامیکی سه-المانه

$$d_E y_{,t} + EI y_{,xxxx}(x,t) + \rho A y_{,tt}(x,t) + [C_1 (y(d,t) - v(t))^3 + \lambda (y_{,t}(d,t) - \dot{v}(t))] \delta(x-d) = F_0 \delta(x-Vt), \quad x \in (0,L), \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{V} \quad (۴۷-۶)$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(L,t) = 0, \quad y_{,xx}(0,t) = 0, \quad y_{,xx}(L,t) = 0 \quad (۴۸-۶)$$

$$y_{,t}(x,0) = 0, \quad y(x,0) = 0 \quad (۴۹-۶)$$

$$m_0 v_{,tt}(t) - C_2(\tau(t) - v(t)) - C_1(y(d,t) - v(t))^3 = 0 \quad (50-6)$$

$$v(0) = 0, v_t = 0, \tau(0) = 0, \tau_t(0) = 0 \quad t > 0$$

$$\lambda(y_{,t}(d,t) - \dot{\tau}(t)) = C_2(\tau(t) - v(t)) \quad (51-6)$$

دینامیک حاکم بر سیستم، به کمک معادلات دیفرانسیل (۴۷-۶)، (۵۰-۶) و (۵۱-۶) بیان می‌شود.

رابطه‌ی (۴۸-۶) شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و رابطه‌ی (۴۹-۶) شرایط اولیه را نشان می‌دهند.

$v(t)$ موقعیت مطلق جرم جاذب و $y(x,t)$ جابه‌جایی عرضی تیر را مشخص می‌کنند (طرف

پایین مثبت در نظر گرفته شده است). $f(u_1)$ نیروی فنر غیرخطی و $f(u_2)$ نیز نیروی فنر خطی

است؛ E مدول یانگ، I ممان اینرسی سطح مقطع، $m = \rho A$ جرم در واحد طول تیر، ρ چگالی ماده،

A سطح مقطع، m_0 جرم جاذب دینامیکی، λ ضریب میرایی دمپر ویسکوز و V سرعت بار را مشخص

می‌کنند.

۲-۲-۶ بی‌بعدسازی مسئله

برای بیان مسئله در شکل بی‌بعد، متغیرهای بی‌بعد همانند (۵۲-۶) در نظر گرفته می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \bar{v} = \frac{v}{L}, \bar{\tau} = \frac{\tau}{L}, \bar{t} = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \bar{d}_E = \frac{L^2}{\sqrt{\rho A EI}} d_E, \bar{C}_1 = \frac{C_1 L^6}{EI},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{L^2}{\sqrt{\rho A EI}} \lambda, \bar{F}_0 = \frac{F_0 L^3}{EI}, \bar{C}_2 = \frac{\rho A L^4}{m_0 EI} C_2, \bar{C}_3 = \frac{\rho A L^6}{m_0 EI} C_3, \quad (52-6)$$

$$\bar{V} = VL \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \bar{G} = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \frac{C_2}{\lambda}$$

با جایگذاری متغیرهای بی‌بعد در معادله‌های (۴۷-۶)، (۵۰-۶) و (۵۱-۶)، آنها به صورت بی‌بعد درمی-

آیند؛ با حذف خط تیره‌ی بالای متغیرها، معادلات (۵۳-۶)، (۵۴-۶) و (۵۵-۶) بدست می‌آیند:

$$y_{,xxxx}(x,t) + y_{,tt}(x,t) + d_E y_{,t} + \left[C_1 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right)^3 + \lambda \left(y_{,t} \left(\frac{d}{L}, t \right) - \dot{\tau}(t) \right) \right] \delta \left(x - \frac{d}{L} \right) = F_0 \delta(x - Vt) \quad (53-6)$$

$$v_{,tt}(t) - C_2(\tau(t) - v(t)) - C_3 \left(y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) \right)^3 = 0 \quad (54-6)$$

$$y_{,t} \left(\frac{d}{L}, t \right) - \dot{\tau}(t) = G(\tau(t) - v(t)) \quad (55-6)$$

۳-۲-۶ ساده‌سازی معادلات حاکم بر مسئله، به فرم ماتریسی، با استفاده از روش گلرکین

رابطه‌های جدیدی به صورت (۵۶-۶) و (۵۷-۶) تعریف نموده و در معادله‌های (۵۳-۶)، (۵۴-۶) و (۵۵-۶)

جایگزین می‌شوند.

$$y \left(\frac{d}{L}, t \right) - v(t) = x \quad (56-6)$$

$$y \left(\frac{d}{L}, t \right) - \tau(t) = z \quad (57-6)$$

و همچنین عبارت $\pm \ddot{y} \left(\frac{d}{L}, t \right)$ در معادله‌ی (۵۴-۶) اضافه شده، سپس از روش گلرکین استفاده

می‌شود:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) N_j(x) = N^T(x) q(t) \quad (58-6)$$

که در آن $N = [N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)]^T$ و $q = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$ بوده و $q_j(t)$

توابع نامشخص هستند که باید محاسبه شوند. سرانجام پس از ساده‌سازی، معادله‌ی ماتریسی (۵۹-۶)

بدست می‌آید:

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K_0 q + V x^3 = f \quad (59-6)$$

K_0 ماتریس سفتی، C ماتریس میرایی، q بردار دامنه‌ی نامشخص، f بزرگی نیرو و V یک بردار

است.

فرم بازدهی ماتریسی و برداری M, C, K_0, V, q و f به صورت ذیل بیان می‌شوند:

$$C = \begin{bmatrix} \int_0^1 d_E N_1^2 dx & \int_0^1 d_E N_1 N_2 dx & \dots & \int_0^1 d_E N_1 N_n dx & 0 & \lambda N_1 \left(\frac{d}{L}\right) \\ \int_0^1 d_E N_2 N_1 dx & \int_0^1 d_E N_2^2 dx & \dots & \int_0^1 d_E N_2 N_n dx & 0 & \lambda N_2 \left(\frac{d}{L}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 d_E N_n N_1 dx & \int_0^1 d_E N_n N_2 dx & \dots & \int_0^1 d_E N_n^2 dx & 0 & \lambda N_n \left(\frac{d}{L}\right) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_1 N_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 N_1 N_{n,xxxx} dx & 0 & 0 \\ \int_0^1 N_2 N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_2 N_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 N_2 N_{n,xxxx} dx & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 N_n N_{1,xxxx} dx & \int_0^1 N_n N_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^1 N_n N_{n,xxxx} dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -C_2 & C_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -G & G \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} C_1 N_1 \left(\frac{d}{L}\right) \\ C_1 N_2 \left(\frac{d}{L}\right) \\ \vdots \\ C_1 N_n \left(\frac{d}{L}\right) \\ -C_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \\ x \\ z \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \int_0^1 F_0 \delta(x-Vt) N_1 dx = F_0 N_1(Vt) \\ \int_0^1 F_0 \delta(x-Vt) N_2 dx = F_0 N_2(Vt) \\ \vdots \\ \int_0^1 F_0 \delta(x-Vt) N_n dx = F_0 N_n(Vt) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

$$M = \begin{bmatrix} \int_0^1 N_1^2 dx & \int_0^1 N_1 N_2 dx & \dots & \int_0^1 N_1 N_n dx & 0 & 0 \\ \int_0^1 N_2 N_1 dx & \int_0^1 N_2^2 dx & \dots & \int_0^1 N_2 N_n dx & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 N_n N_1 dx & \int_0^1 N_n N_2 dx & \dots & \int_0^1 N_n^2 dx & 0 & 0 \\ N_1 \left(\frac{d}{L}\right) & N_2 \left(\frac{d}{L}\right) & \dots & N_n \left(\frac{d}{L}\right) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۶-۲-۴ حل مسئله برای سرعت بحرانی، به کمک مقیاس‌های چندگانه

برای حل معادله‌ی (۶-۵۹) با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، معادله به فرم کلی (۶-۶۱) بیان

می‌شود:

$$M \ddot{q} + \varepsilon C \dot{q} + K_0 q + \varepsilon V x^3 = f \quad (۶-۶۱)$$

که ε یک پارامتر کوچک است.

حال معادله‌ی (۶-۶۱) برای مود اول، به شیوه‌ی تحلیلی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه

حل می‌شود. برای این کار روابط ذیل تعریف می‌شوند:

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 \quad \text{و} \quad x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 \quad (۶-۶۲)$$

و مشتق‌های زمانی به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (۶-۶۳)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (۶-۶۴)$$

که ε پارامتر کوچک آشوب و $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ است.

با جایگذاری روابط (۶-۶۲)، (۶-۶۳) و (۶-۶۴) در معادله‌ی (۶-۶۱)، بدست می‌آید:

$$M(D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2(D_1^2 + 2D_0 D_2 + \dots))(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \varepsilon C(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + K_0(q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots) + \varepsilon V(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^3 = f \quad (65-6)$$

با مساوی هم قرار دادن ضرایب ε^0 ، ε و ε^2 در دو طرف تساوی، می‌توان به معادلات دیفرانسیل

معمولی ذیل رسید:

مرتبه‌ی ε^0 :

$$M D_0^2 q_0 + K_0 q_0 = f \quad (66-6)$$

مرتبه‌ی ε^1 :

$$M D_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2M D_0 D_1 q_0 - C D_0 q_0 - V x_0^3 \quad (67-6)$$

مرتبه‌ی ε^2 :

$$M D_0^2 q_2 + K_0 q_2 = -2M D_0 D_1 q_1 - M D_1^2 q_0 - 2M D_0 D_2 q_0 - C D_0 q_1 - C D_1 q_0 - 3V x_0^2 x_1 \quad (68-6)$$

حل معادله‌ی (66-6):

$$q_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = A(T_1, T_2, \dots) u e^{i\omega T_0} + (K_0 - MS^2)^{-1} f^* \frac{e^{is T_0}}{2i} + cc \quad (69-6)$$

که $S = \pi \bar{V}$ و f^* به صورت بردار (70-6) است؛ همچنین ω و u از رابطه‌ی (71-6) بدست می‌آیند.

$$f^* = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70-6)$$

$$(K_0 - \omega^2 M) u = 0 \quad (71-6)$$

h و x_0 به ترتیب، توسط روابط (72-6) و (73-6) تعریف می‌شوند:

$$h = (K_0 - MS^2)^{-1} f^* \quad (۷۲-۶)$$

با جایگزینی معادلات (۶۹-۶) و (۷۳-۶) در (۶۷-۶) و بعد از ساده‌سازی، معادله‌ی (۷۴-۶) بدست می‌آید.

$$x_0 = A(T_1, T_2, \dots) u_n e^{i\omega T_0} + h_n \frac{e^{is T_0}}{2i} + cc \quad (۷۳-۶)$$

$$MD_0^2 q_1 + K_0 q_1 = -2Mu(i\omega) e^{i\omega T_0} D_1 A - Cu A(i\omega) e^{i\omega T_0} -$$

$$C \frac{h}{2} S e^{is T_0} - Vu_n^3 A^3 e^{3i\omega T_0} - V \frac{h_n^3}{8} i e^{3is T_0} +$$

$$3Vu_n^2 A^2 \frac{h_n}{2} i e^{is T_0} e^{2i\omega T_0} + \frac{3}{4} Vu_n A h_n^2 e^{2is T_0} e^{i\omega T_0} -$$

(۷۴-۶)

$$3VA^2 u_n^3 \bar{A} e^{i\omega T_0} + \frac{3}{4} Vu_n \bar{A} h_n^2 e^{2is T_0} e^{-i\omega T_0} +$$

$$3Vu_n^2 h_n A \bar{A} i e^{is T_0} - \frac{3}{2} Vu_n^2 A^2 h_n i e^{-is T_0} e^{2i\omega T_0} +$$

$$\frac{3}{8} V h_n^3 i e^{is T_0} - \frac{3}{2} Vu_n h_n^2 A e^{i\omega T_0} + cc$$

که \bar{A} مزدوج مختلط A است. با حذف جمله‌های سکولار از معادله‌ی (۷۴-۶) (برای تشدید اصلی،

$S = \omega + \varepsilon\sigma$ و در نتیجه $\cos St = \cos(\omega T_0 + \sigma T_1)$ است؛ که σ ، پارامتر تنظیم است و برای بیان

میزان نزدیکی S به ω به کار می‌رود)، با توجه به شرط حل‌پذیری، جمله‌های سکولار معادله‌ی (۷۴-۶)

به صورت رابطه‌ی ذیل بیان می‌شوند:

$$-2 u^T Mu(i\omega) D_1 A - u^T Cu A(i\omega) - u^T C \frac{h}{2} S e^{i\sigma T_1} -$$

$$3 u^T Vu_n^3 A^2 \bar{A} - \frac{3}{2} u^T Vu_n^2 A^2 h_n i e^{-i\sigma T_1} + \quad (۷۵-۶)$$

$$\frac{3}{4} u^T V u_n \bar{A} h_n^2 e^{2i\sigma T_1} + \frac{3}{8} u^T V h_n^3 i e^{i\sigma T_1} +$$

$$3 u^T V u_n^2 h_n i A \bar{A} e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{2} u^T V u_n h_n^2 A = 0$$

تحلیل پایداری به اولین مرتبه‌ی تقریب محدود می‌شود؛ سپس همه‌ی ضرایب، تنها تابع T_1

خواهند بود. در رابطه‌ی (۶-۷۵)، A را می‌توان به صورت قطبی $A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\alpha(T_1)}$ در نظر گرفت.

با قرار دادن فرم قطبی A در معادله‌ی (۶-۷۵)، نتیجه می‌شود:

$$-2 e^{*i\omega} \left(\frac{1}{2} a' e^{i\alpha} + \frac{1}{2} a i \alpha' e^{i\alpha} \right) - c^{*i\omega} \left(\frac{1}{2} a e^{i\alpha} \right) - k^{*} \frac{1}{2} S e^{i\sigma T_1} -$$

$$\frac{3}{8} v^{*} u_n^3 a^3 e^{i\alpha} - \frac{3}{8} v^{*} u_n^2 h_n i a^2 e^{2i\alpha} e^{-i\sigma T_1} +$$

(۶-۷۶)

$$\frac{3}{8} v^{*} u_n h_n^2 a e^{-i\alpha} e^{2i\sigma T_1} + \frac{3}{8} v^{*} h_n^3 i e^{i\sigma T_1} +$$

$$\frac{3}{4} v^{*} u_n^2 h_n i a^2 e^{i\sigma T_1} - \frac{3}{4} v^{*} u_n h_n^2 a e^{i\alpha} = 0$$

که $u^T C u = c^{*}$ و $u^T V = v^{*}$ ، $u^T M u = e^{*}$ ، $u^T C h = k^{*}$ است.

با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی در (۶-۷۶)، می‌توان ۲ رابطه برای یافتن α و

بدست آورد.

۶-۲-۵ حل مسئله برای تشدید سوپرهارمونیک، به کمک مقیاس‌های چندگانه

در این قسمت تشدید سوپرهارمونیک برای جاذب سه-المانه، شامل دو فنر و یک دمپر، متصل به

تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، که تحت تأثیر بار در حال حرکت قرار دارد، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این

تشدید زمانی اتفاق می‌افتد که: $3S = \omega + \varepsilon\sigma$ ؛ که σ ، پارامتر تنظیم نام دارد و برای بیان میزان

نزدیکی $3S$ به ω به کار می‌رود.

برای بررسی تشدید سوپرهارمونیک، روابط قسمت قبل، تا معادله‌ی (۶-۷۴) صادق است و اما بعد

از آن، کار ادامه می‌یابد. با توجه به اینکه ضرایب جمله‌های سکولار در طرف راست معادله‌ی (۶-۷۴)، با

هر حل همگن مسئله متعامد است (که تحت عنوان شرط حل‌پذیری تعریف می‌شود)، جمله‌های

سکولار معادله‌ی (۷۴-۶) (تحت تشدید سوپره‌ارمونیکی) به صورت رابطه‌ی ذیل بیان می‌شوند:

$$-2 u^T M u (i \omega) D_1 A - u^T C u A (i \omega) - u^T V \frac{h_n^3}{8} i e^{i \sigma T_1} -$$

$$3 u^T V u_n^3 A^2 \bar{A} - \frac{3}{2} u^T V u_n h_n^2 A = 0 \quad (77-6)$$

تحلیل پایداری به اولین مرتبه‌ی تقریب محدود می‌شود؛ سپس همه‌ی ضرایب، تنها تابع T_1

خواهند بود. در رابطه‌ی (۷۷-۶)، A به فرم قطبی $A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i \alpha(T_1)}$ در نظر گرفته می‌شود. با قرار

دادن فرم قطبی A در معادله‌ی (۷۷-۶)، نتیجه می‌شود:

$$-2 e^* i \omega \left(\frac{1}{2} a' e^{i \alpha} + \frac{1}{2} a i \alpha' e^{i \alpha} \right) - c^* (i \omega) \left(\frac{1}{2} a e^{i \alpha} \right) - v^* \frac{h_n^3}{8} i e^{i \sigma T_1} -$$

$$-\frac{3}{8} v^* u_n^3 (a^3 e^{i \alpha}) - \frac{3}{4} v^* u_n h_n^2 a e^{i \alpha} = 0 \quad (78-6)$$

که $u^T M u = e^*$ ، $u^T V = v^*$ و $u^T C u = c^*$ است. با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و

موهومی معادله‌ی (۷۸-۶):

$$a \alpha' = -\frac{1}{8 \omega e^*} v^* h_n^3 \sin(\sigma T_1 - \alpha) + \frac{3}{8 \omega e^*} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{4 \omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \quad (79-6)$$

$$a' = -\frac{c^*}{2 e^*} a - \frac{1}{8 \omega e^*} v^* h_n^3 \cos(\sigma T_1 - \alpha) \quad (80-6)$$

با تعریف $\gamma = \sigma T_1 - \alpha$ و سپس قرار دادن آن در روابط (۷۹-۶) و (۸۰-۶)، نتیجه می‌شود:

$$a(\sigma - \gamma') = -\frac{1}{8 \omega e^*} v^* h_n^3 \sin \gamma + \frac{3}{8 \omega e^*} v^* u_n^3 a^3 + \frac{3}{4 \omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \quad (81-6)$$

$$a' = -\frac{c^*}{2 e^*} a - \frac{1}{8 \omega e^*} v^* h_n^3 \cos \gamma \quad (82-6)$$

برای حل‌های حالت پایدار، با قرار دادن $a' = \gamma' = 0$ در معادله‌های (۸۱-۶) و (۸۲-۶) و در نهایت با

به توان ۲ رساندن طرفین روابط و آنگاه جمع کردن آنها، معادله‌ی پاسخ فرکانسی (۸۳-۶) بدست می‌آید:

$$\left(a \sigma - \frac{3}{8 \omega e^*} v^* u_n^3 a^3 - \frac{3}{4 \omega e^*} v^* u_n h_n^2 a \right)^2 + \left(\frac{c^*}{2 e^*} a \right)^2 = \left(\frac{1}{8 \omega e^*} v^* h_n^3 \right)^2 \quad (83-6)$$

در نهایت حل معادله‌ی اول (یعنی (۶-۶۱))، با در نظر گرفتن تقریب مرتبه‌ی اول و برای مود اول (برای پاسخ تشدید سوپرهارمونیک)، به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$q = a u \cos(3St - \gamma) + h \sin(St) + O(\varepsilon) \quad (۸۴-۶)$$

۶-۲-۶ نتایج عددی

نتایج مطالعه‌ی عددی برای سیستم بخش ۶-۲ (یعنی جاذب دینامیکی سه-المانه، شامل یک فنر خطی، یک فنر غیرخطی و یک دمپر دینامیکی، متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، که تحت تأثیر بار در حال حرکت قرار دارد و برای تشدید سوپرهارمونیک)، با پارامترهای ذیل مورد بررسی قرار می‌گیرد و تا زمانی که مقادیری دیگری برای این پارامترها ذکر نشده، مقادیر همانند (۸۵-۶) هستند.

$$\rho A = 1 \text{ kg/m}, EI = 1 \text{ N m}^2, L = 1 \text{ m}, m_0 = 0.1 \text{ kg}, C_1 = 0.02 \text{ N/m}^3, \quad (۸۵-۶)$$

$$C_2 = 1 \text{ N/m}, \frac{d}{L} = 0.5, \lambda = 0.01 \text{ Ns/m}, d_E = 0.1 \text{ Ns/m}, F_0 = 1 \text{ N}$$

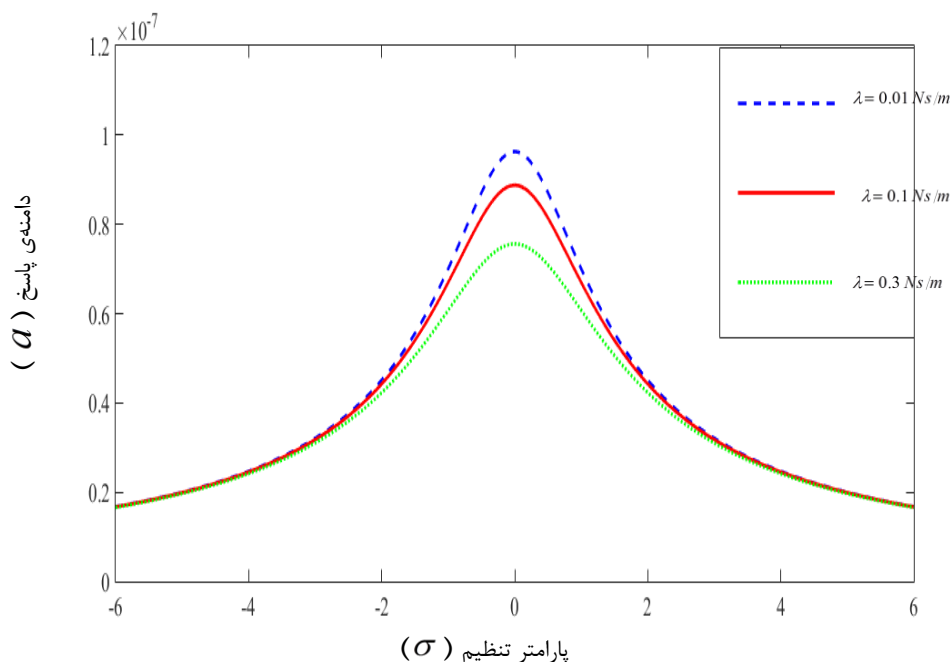
توابع مقایسه‌ای به صورت ذیل در نظر گرفته می‌شوند:

$$\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) = \sin(r\pi \bar{x}) \quad , r = 1, 2, \dots \quad (۸۶-۶)$$

تعداد مودهای در نظر گرفته شده برای پاسخ تیر، یک مود می‌باشد. با داده‌های ذکر شده فرکانس‌های طبیعی خطی (اول تا سوم به ترتیب) به صورت ذیل بدست می‌آیند:

$$\omega = 0, 9.8696, \text{ Inf}$$

در ابتدا تأثیر ضریب دمپر λ ، بر روی منحنی پاسخ فرکانسی بررسی می‌شود. شکل ۶-۲۰، بر اساس داده‌های (۸۵-۶) (به جز λ) و برای فرکانس دوم طبیعی خطی (یعنی $\omega = 9.8696$) رسم شده است؛ شکل ۶-۲۰، اثر ضریب دمپر را در کاهش ماکزیمم دامنه‌ی فرکانسی نشان می‌دهد؛ که با افزایش ضریب دمپر، ماکزیمم دامنه‌ی فرکانسی کاهش می‌یابد.

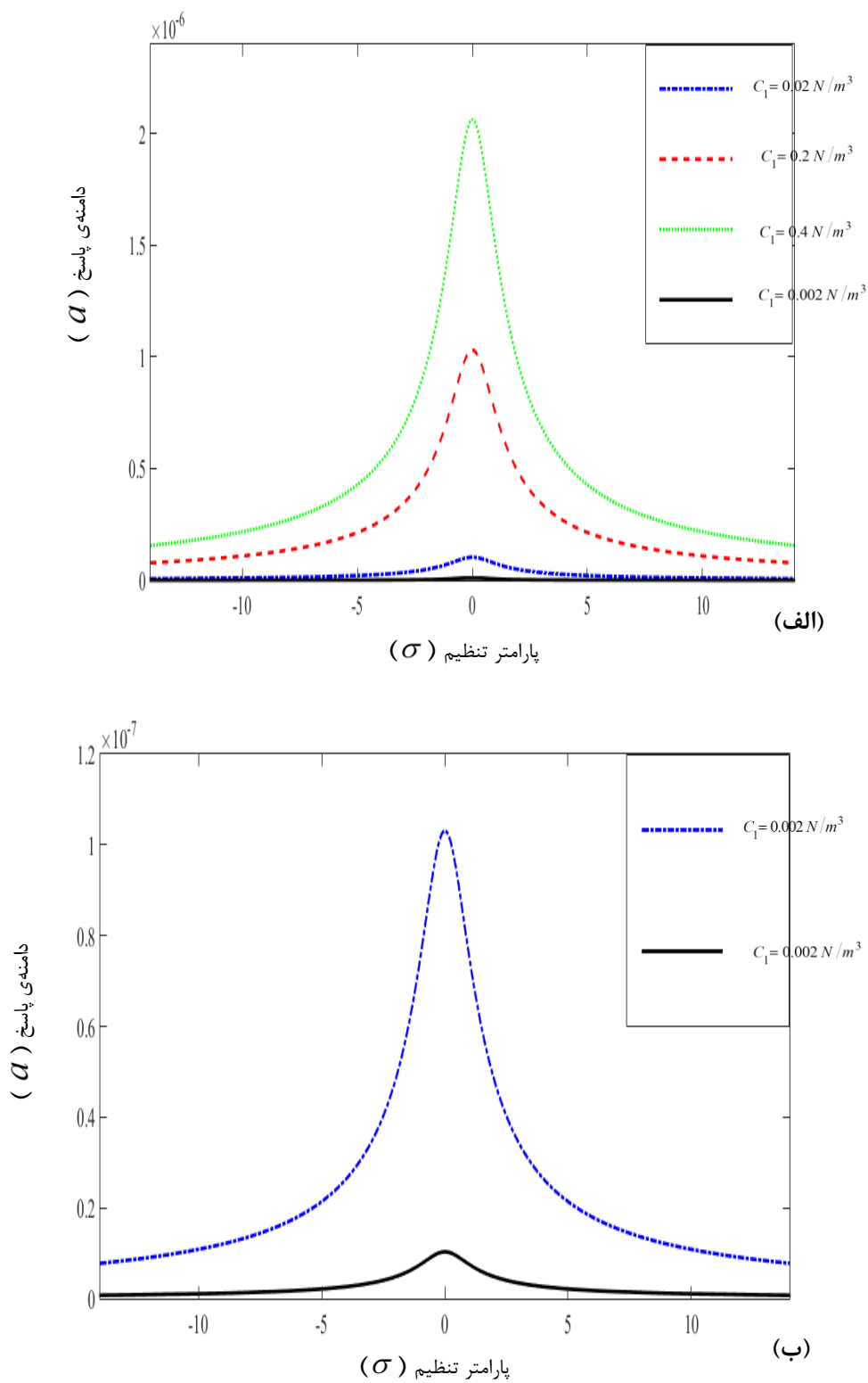


شکل ۶-۲۰ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای ضرایب دمپر مختلف

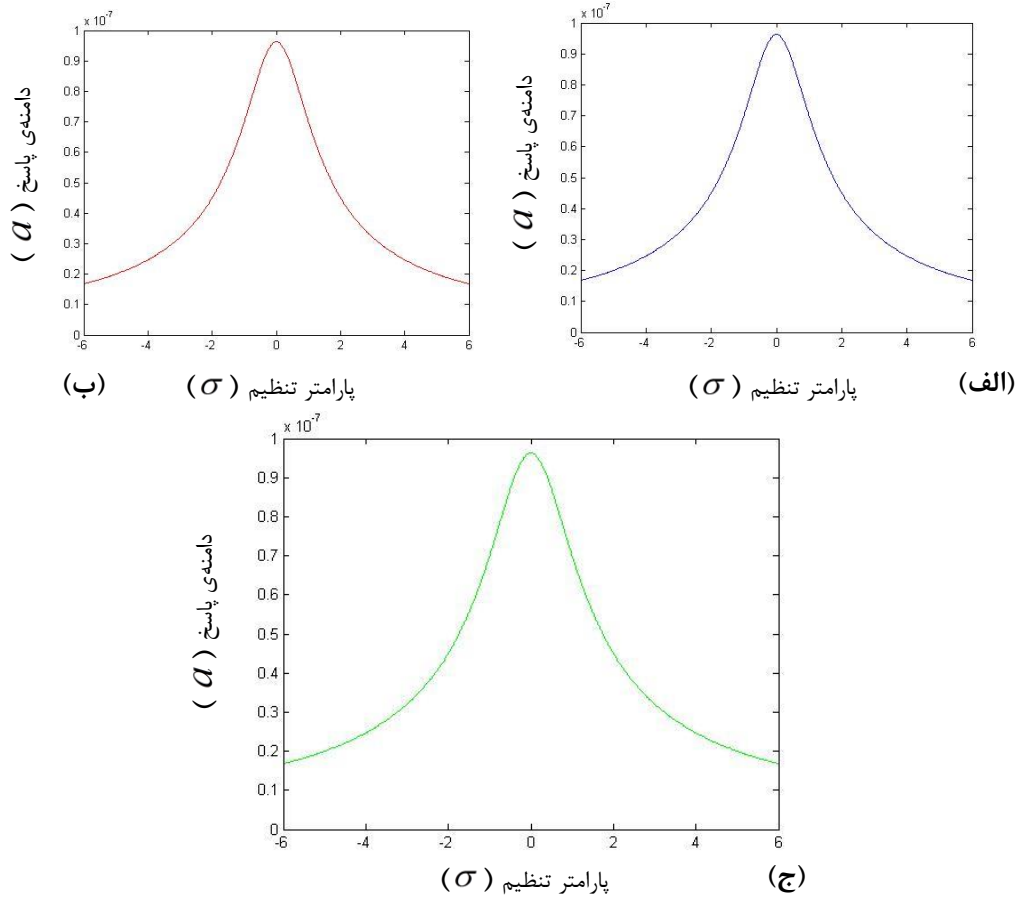
حال تأثیر سفتی فنر (C_1) در رابطه‌های (۶-۴۷) و (۶-۵۰)، بر روی منحنی پاسخ فرکانسی بررسی می‌شود. شکل ۶-۲۱ بر اساس داده‌های (۶-۸۵) (به جز C_1) و برای فرکانس دوم طبیعی خطی (یعنی $\omega = 9.8696$) رسم شده است. با در نظر گرفتن شکل ۶-۲۱ می‌توان دریافت، اثر مستقیم بر روی ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ فرکانسی دارد و برای مقادیر کوچک C_1 ، ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ فرکانسی، مقدار کمتری را خواهد داشت.

شکل ۶-۲۲ بر اساس داده‌های (۶-۸۵) برای فرکانس دوم طبیعی خطی (یعنی $\omega = 9.8696$) رسم شده است؛ که بر اساس این شکل، همانطور که مشاهده می‌شود، تأثیر C_2 بر روی نمودارهای پاسخ فرکانسی بسیار ناچیز است.

شکل ۶-۲۳ بر اساس داده‌های (۶-۸۵) و برای فرکانس دوم طبیعی خطی (یعنی $\omega = 9.8696$) رسم شده است؛ همانطور که شکل نشان می‌دهد، تأثیر افزایش نیرو (F_0) بر افزایش ماکزیمم پاسخ دامنه و کج کردن نمودار کاملاً مشهود است.



شکل ۶-۲۱ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_1 ؛ الف) نمایش برای مقادیر مختلف C_1 ؛ ب) نمایش برای دو مقدر مختلف C_1 ؛



شکل ۶-۲۲ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف C_2 (الف؛ $C_2 = 1 \text{ N/m}$ ؛ ب)

$$C_2 = 1000 \text{ N/m} \text{ (ج؛ } C_2 = 100 \text{ N/m}$$

شکل ۶-۲۴ بر اساس داده‌های (۶-۸۵)، $L = 20 \text{ m}$ ، $m_0 = 0.1 \times 20 \text{ kg}$ و برای فرکانس دوم

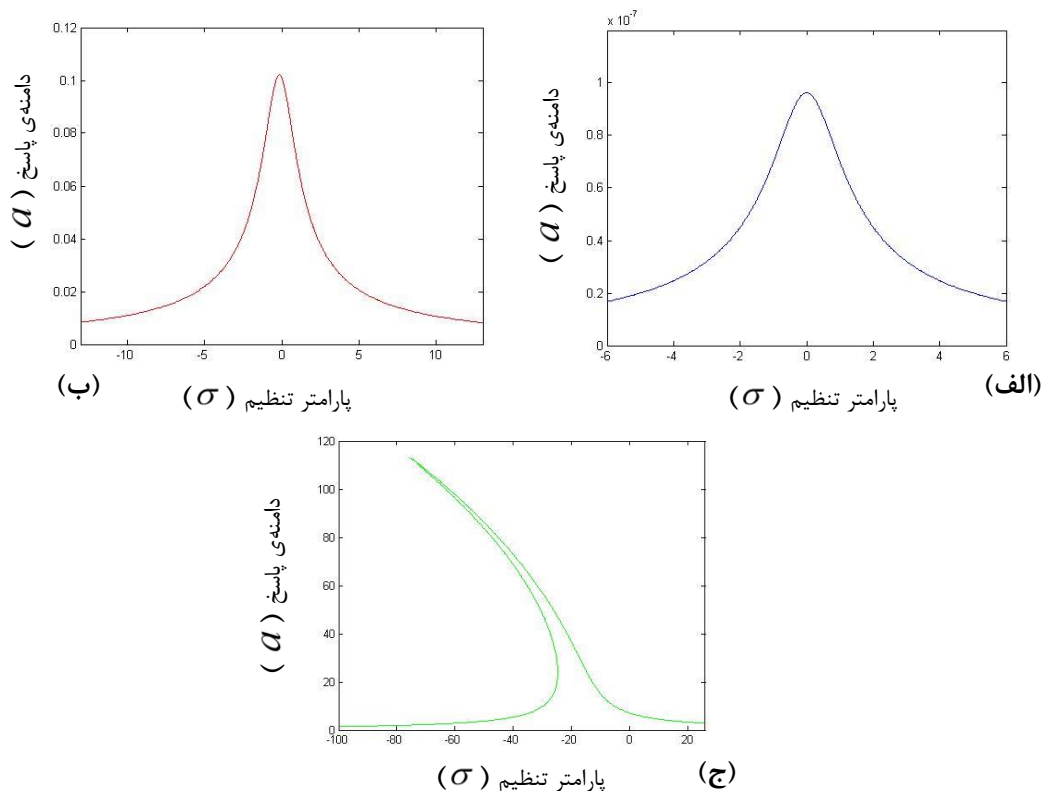
طبیعی خطی (یعنی $\omega = 9.8696$) رسم شده است؛ که تأثیر مکان جاذب را بر روی دامنه‌ی پاسخ

می‌توان مشاهده نمود. با توجه به شکل با افزایش پارامتر تنظیم، فرکانس تحریک افزایش یافته و با

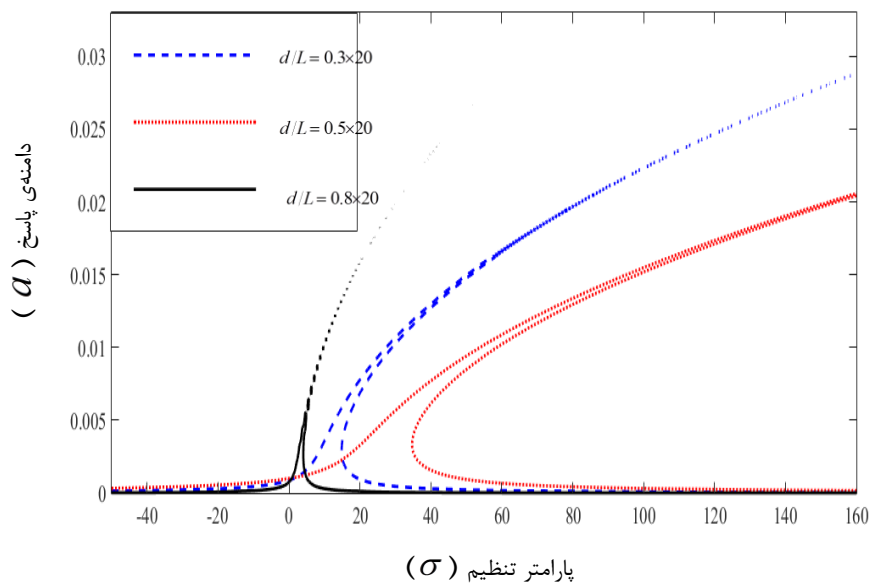
افزایش فرکانس تحریک، سرعت افزایش می‌یابد و در واقع در نمودار تأثیر افزایش سرعت را بر حسب

مکان جاذب می‌توان مشاهده نمود. هرچه جاذب به میانه‌ی تیر نزدیک‌تر باشد، ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ

بیشتر کاهش می‌یابد.



شکل ۲۳-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف F_0 (الف؛ $F_0 = 1 N$ ؛ ب؛ $F_0 = 1000 N$ ؛ ج؛ $F_0 = 100 N$)



شکل ۲۴-۶ منحنی‌های دامنه بر حسب پارامتر تنظیم، برای مقادیر مختلف $\frac{d}{L}$

فصل ۲

بررسی اثرهای جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی و غیرخطی، در کاهش ارتعاشات تیر در معرض بار در حال حرکت

۷-۱ بدست آوردن معادله‌های حاکم بر سیستم‌های دینامیکی

سیستم‌های ارائه‌شده در شکل ۷-۱ و شکل ۷-۲ را در نظر بگیرید. با استفاده از تئوری اولر-برنولی خطی، برای مدل کردن تیر، معادلات حرکت سیستم‌ها بدست می‌آید.

۷-۱-۱ مدل سه-المانه (شامل دو فنر و یک دمپر):

$$d_E y_{,t} + EI y_{,xxxx} (x, t) + \rho A y_{,tt} (x, t) + [f(u_1) + f(\dot{u})] \delta(x-d) = F(x, t), \quad x \in (0, L), t > 0 \quad (1-7)$$

$$m_0 v_{,tt} (t) - f(u_2) - f(u_1) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v_{,t} = 0, \quad \tau(0) = 0, \quad \tau_{,t}(0) = 0, \quad t > 0 \quad (2-7)$$

$$f(\dot{u}) = f(u_2) \quad (3-7)$$

$$u_1(t) = y(d, t) - v(t), \quad u_2(t) = \tau(t) - v(t), \quad u(t) = y(d, t) - \tau(t) \quad (4-7)$$

$$f(u_1) = k_1 u_1 \quad \text{یا} \quad f(u_1) = C_1 u_1^3 \quad (5-7)$$

$$f(u_2) = k_2 u_2 \quad \text{یا} \quad f(u_2) = C_2 u_2^3 \quad (6-7)$$

$$f(\dot{u}) = \lambda u_{,t} \quad (7-7)$$

$v(t)$ موقعیت مطلق جرم جاذب و $y(x, t)$ جابه‌جایی عرضی تیر را بیان می‌کنند (در مختصات

کارتزین، سمت پایین مثبت در نظر گرفته شده است). عبارت $[f(u_1) + f(\dot{u})] \delta(x-d)$ ، بیانگر نیروی

اعمال شده توسط جاذب دینامیکی است؛ $f(u_1)$ نیروی فنر، $f(\dot{u})$ نیروی میرایی ویسکوز و $F(x, t)$

نیروی خارجی هستند. معادله‌ی (۲-۷)، دینامیک جاذب را بیان می‌کند. E مدول یانگ، I ممان

اینرسی سطح مقطع، $m = \rho A$ جرم در واحد طول تیر، ρ چگالی ماده، A سطح مقطع و λ ضریب

میرایی دمپر ویسکوز را نشان می‌دهند.

۷-۱-۲ مدل دو-المانه (شامل فنر و دمپر):

$$d_E y_{,t} + EI y_{,xxxx} (x, t) + \rho A y_{,tt} (x, t) + [f(u) + \lambda u_{,t}(t)] \delta(x-d) = F(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \quad (8-7)$$

$$m_0 v_{,tt}(t) - f(u) - \lambda u_{,t}(t) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v_{,t} = 0, \quad t > 0 \quad (9-7)$$

$$f(u) = ku \quad \text{یا} \quad f(u) = Cu^3 \quad (10-7)$$

$v(t)$ موقعیت مطلق جرم جاذب و $y(x, t)$ جابه‌جایی عرضی تیر را بیان می‌کنند (در مختصات کارتزین، سمت پایین مثبت در نظر گرفته می‌شود). عبارت $[f(u) + \lambda u_{,t}(t)]\delta(x-d)$ بیانگر نیروی اعمال شده توسط جاذب دینامیکی است. $f(u)$ نیروی سفتی، $\lambda u_{,t}(t)$ نیروی میرایی ویسکوز و $F(x, t)$ نیروی خارجی هستند. معادله‌ی (9-7)، دینامیک جاذب را بیان می‌کند. E مدول یانگ، I ممان اینرسی سطح مقطع، $m = \rho A$ جرم در واحد طول تیر، ρ چگالی ماده، A سطح مقطع و λ ضریب میرایی دمپر ویسکوز را نشان می‌دهند.

جرم متصل‌شده به تیر، در مقایسه با جرم تیر سبک‌وزن است. استفاده از جاذب دینامیکی سنگین، اگرچه که در کاهش ارتعاش تیر بیشتر مؤثر است؛ ولی انحراف استاتیکی تیر را به همان نسبت افزایش می‌دهد؛ بنابراین جرم جاذب نمی‌تواند خیلی زیاد باشد. در این کار جرم جاذب ۵ درصد جرم کل تیر در نظر گرفته می‌شود [۲۸]. تابع‌های ویژه‌ی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، بدون هیچ اتصالی را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

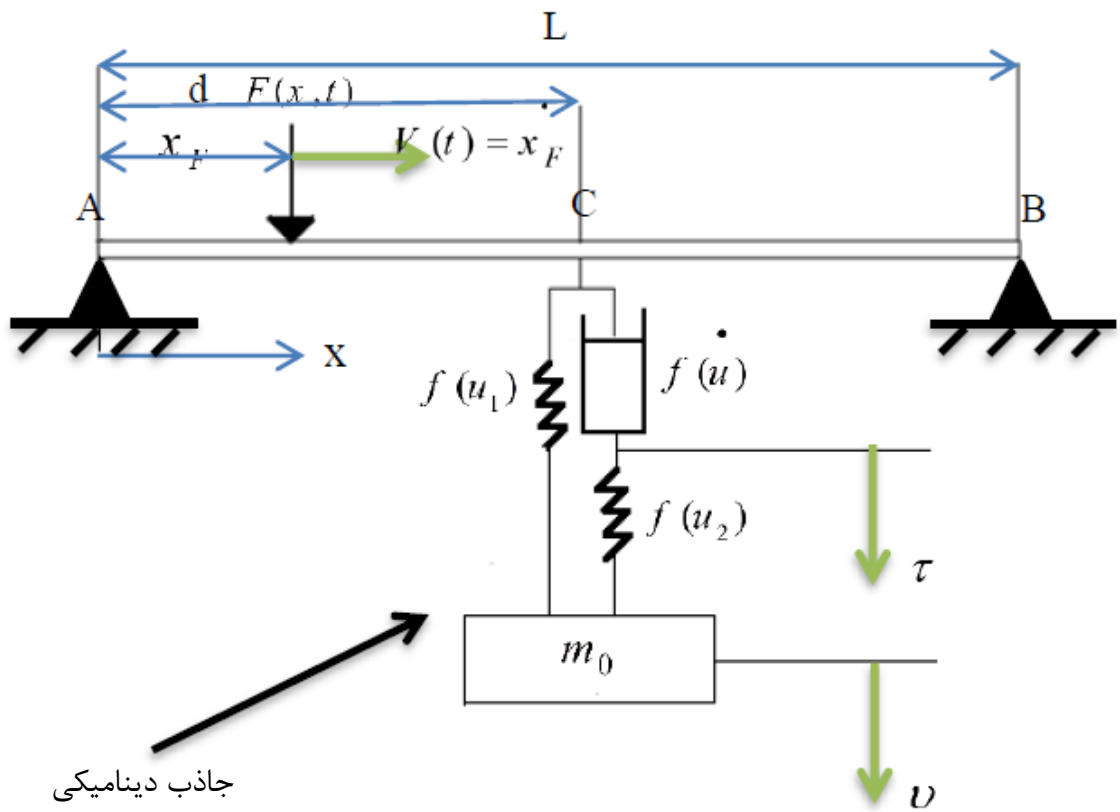
$$\phi_r(x) = \left(\frac{2}{mL}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right), \quad \omega_r = (r\pi)^2 \left(\frac{EI}{4mL}\right)^{1/2}, \quad r=1,2,3,\dots \quad (11-7)$$

که ω_r فرکانس طبیعی r امین مود است. توابع ویژه شرایط ارتونرمالیتی ذیل را ارضا می‌کنند:

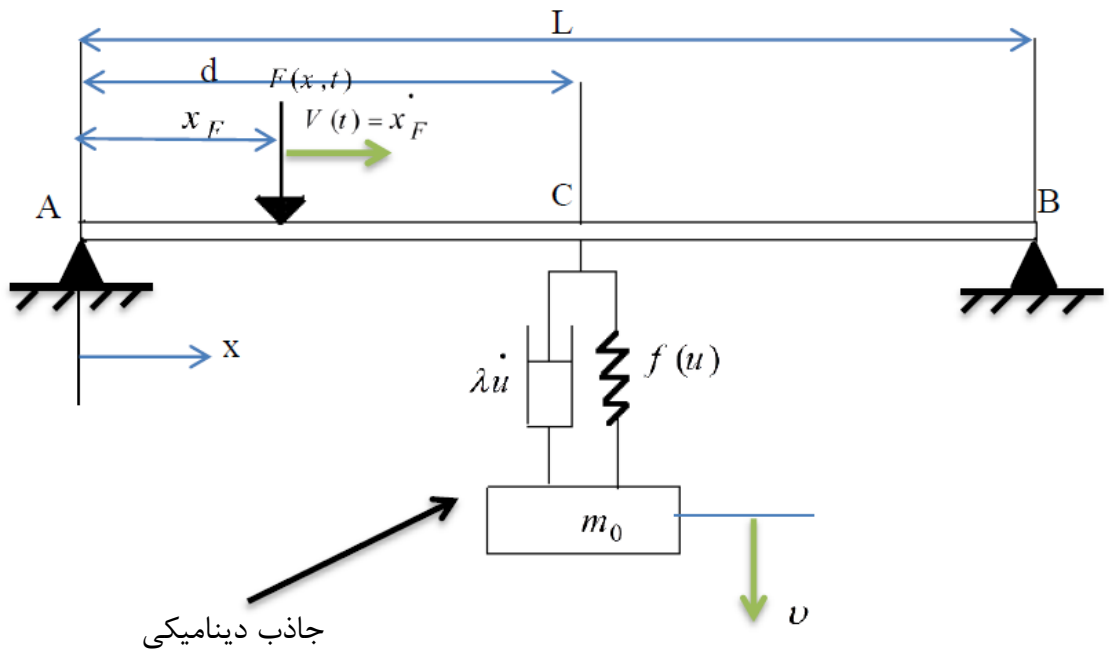
$$\int_0^L m \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad \int_0^L \phi_i(x) (EI \phi_j''(x))'' dx = \omega_j^2 \delta_{ij}, \quad (12-7)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots$$

که δ_{ij} دلتای کرانیکر است.



شکل ۱-۷ تیر به همراه جاذب سه-المانه



شکل ۲-۷ تیر به همراه جاذب دو-المانه

می‌توان فرض کرد، که ارتعاش عرضی تیر به صورت زیر است:

$$y(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r(t) \phi_r(x) \quad (13-7)$$

که $a_r(t)$ تابع‌های نامشخص زمان و $\phi_r(x)$ تابع‌های ویژه‌ی نورمالایز شده^۱ هستند.

مدل سه-المانه (شامل دو فنر و یک دمپر):

معادله‌ی (۱۳-۷)، در معادله‌های (۱-۷)، (۲-۷) و (۳-۷) جایگزین می‌شود؛ سپس با ضرب داخلی

طرفین در p امین تابع ویژه و استفاده از شرایط ارتونرمالیتی، معادله‌های ذیل بدست می‌آیند:

$$\ddot{a}_p(t) + 2\zeta_p \omega_p \dot{a}_p(t) + \omega_p^2 a_p(t) + \{D_1(t) + D(t)\} \phi_p(d) = \tilde{F}(t) \quad (14-7)$$

$$m_0 \ddot{v}(t) - D_1(t) - D_2(t) = 0 \quad (15-7)$$

$$\lambda \left(\sum_{r=1}^{\infty} \dot{a}_r(t) \phi_r(d) - \dot{\tau}(t) \right) = k_2 (\tau(t) - v(t)) \quad (16-7)$$

$$D_1(t) = k_1 \left(\sum_{r=1}^{\infty} a_r(t) \phi_r(d) - v(t) \right) \quad (17-7)$$

$$D(t) = \lambda \left(\sum_{r=1}^{\infty} \dot{a}_r(t) \phi_r(d) - \dot{\tau}(t) \right) \quad (18-7)$$

$$D_2(t) = k_2 (\tau(t) - v(t)) \quad (19-7)$$

$$\tilde{F}(t) = F_0 \phi_p(Vt) [H(L/V - t)] \quad \text{برای بار در حال حرکت} \quad (20-7)$$

$$\tilde{F}(t) = F_1(t) \phi_p(x_F) \quad \text{برای بار ثابت گذرا}$$

مدل سه-المانه (شامل فنر و دمپر):

معادله‌ی (۱۳-۷)، در معادله‌های (۸-۷) و (۹-۷) جایگزین می‌شود؛ سپس با ضرب داخلی طرفین در p

امین تابع ویژه و استفاده از شرایط ارتونرمالیتی، معادله‌های ذیل بدست می‌آیند:

$$\ddot{a}_p(t) + 2\zeta_p \omega_p \dot{a}_p(t) + \omega_p^2 a_p(t) + \{D(t) + \lambda [\sum_{r=1}^{\infty} \dot{a}_r(t) \phi_r(d) - \dot{v}(t)]\} \quad (21-7)$$

$$\phi_p(d) = \tilde{F}(t)$$

$$m_0 \ddot{v}(t) - D(t) + \lambda \left[\dot{v}(t) - \sum_{r=1}^{\infty} \dot{a}_r(t) \phi_r(d) \right] = 0 \quad (22-7)$$

$$\begin{cases} D(t) = k \left[\sum_{r=1}^{\infty} a_r(t) \phi_r(d) - v(t) \right] & \text{برای جاذب دینامیکی خطی} \\ D(t) = C \left[\sum_{r=1}^{\infty} a_r(t) \phi_r(d) - v(t) \right]^3 & \text{برای جاذب دینامیکی غیرخطی} \end{cases} \quad (23-7)$$

$$\begin{cases} \tilde{F}(t) = F_0 \phi_p(Vt) [H(L/V - t)] & \text{برای بار در حال حرکت} \\ \tilde{F}(t) = F_1(t) \phi_p(x_F) & \text{برای بار ثابت گذرا} \end{cases} \quad (24-7)$$

نیروی خارجی به صورت ذیل در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} F(x, t) = F_0 \delta(x - Vt) [H(L/V - t)] & \text{برای بار در حال حرکت} \\ F(x, t) = F_1(t) \delta(x - x_F) & \text{برای بار ثابت گذرا} \end{cases} \quad (25-7)$$

δ ، تابع دلتای دیراک^۱ و $H(t)$ تابع هویساید^۲ هستند:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (26-7)$$

توجه: عبارت $2\zeta_p \omega_p \dot{a}_p(t)$ ، بیانگر میرایی ویسکوز^۳ است. دینامیک گذرا به صورت عددی

مطالعه می‌شود؛ که برای این کار باید تعداد محدودی از بسط سری (۱۳-۷) را در نظر گرفت. مشخص

کردن تعداد مشخصی از بسط سری (۱۳-۷)، منوط به همگرایی بسط است.

باید توجه داشت که در این مدل، نسبت میرایی برای تیر ثابت نیست؛ برای مثال $\zeta_1 = 0.00253$

و $\zeta_2 = 0.000633$ است [۲۲].

سهم انرژی ورودی اتلافی، توسط دمپر ویسکوز جاذب دینامیکی (دمپر دینامیکی همچنین

1- Dirac Delta Function
2- Heaviside Function
3- Viscous Damping Term

سینک انرژی^۱ نیز نامیده می‌شود) در زمان t_1 ، برای جاذب دینامیکی دو-المانه (شامل فنر و دمپر) به وسیله‌ی بسط ذیل محاسبه می‌شود [۲۲]:

$$\eta = \frac{E_{NES}}{E_{in}} = \frac{\int_0^{t_1} \lambda \left[\dot{v}(t) - \sum_{r=1}^n \dot{a}_r(t) \phi_r(d) \right]^2 dt}{\int_0^{t_0} F_i \left[\sum_{r=1}^n \dot{a}_r(t) \phi_r(x_F) \right] dt} \quad (27-7)$$

در مورد بار در حال حرکت، $F_i = F_0$ (رابطه‌ی (۲۵-۷) را ببینید) و $x_F = Vt$ است؛ اما در مورد نیروی ضربه‌ای، $F_i = F_1$ (رابطه‌ی (۲۵-۷) را ببینید) و x_F ثابت است. باید توجه داشت که به η بازده هم می‌گویند.

E_{NES} ، انرژی جذب شده و هدر داده‌شده توسط جاذب دینامیکی است. t_1 فرض می‌شود که به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، تا دینامیک گذرا تقریباً دمپ شود؛ E_{in} ، انرژی کل ورودی به تیر، توسط نیرو و $t_0 = T/2$ مدت زمان اعمال ضربه است.

برای انجام شبیه‌سازی عددی، لازم است تا از سری (۷-۱۳)، به تعداد محدودی مود استفاده شود. تحلیل همگرایی به صورت عددی انجام گرفته است و دریافت شده است که ۵ مود برای محاسبه‌ی دقت دینامیک گذرا کافی است [۱۹]. همچنین t_1 را در رابطه‌ی (۲۷-۷)، مساوی با ۱۵۰ ثانیه قرار می‌دهند؛ چراکه در مدت این زمان، دینامیک گذرا تقریباً دمپ می‌شود [۲۲].

سهم انرژی ورودی اتلافی توسط دمپر ویسکوز در زمان t_1 ، مربوط به جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی مربوطه، توسط رابطه‌ی ذیل محاسبه می‌شود:

$$\eta = \frac{E_{NES}}{E_{in}} = \frac{\int_0^{t_1} \lambda \left(\dot{\tau}(t) - \sum_{r=1}^{\infty} \dot{a}_r(t) \phi_r(d) \right)^{\alpha} dt}{\int_0^{t_0} F_i \left[\sum_{r=1}^n \dot{a}_r(t) \phi_r(x_F) \right] dt} \quad (28-7)$$

در مورد دمپر خطی، α مساوی با ۲ قرار می‌گیرد [۲۹].

۲-۷ اعتبارسنجی

برای بررسی دقت مدل حاضر، تیر دو-المانه‌ی شامل فنر و دمپر، متصل به جاذب دینامیکی غیرخطی، که تحت تأثیر نیروی گذرا^۱ در مکان ثابت روی تیر قرار دارد، را در نظر بگیرید و با مورد [۲۲] (که آن هم با مدل دیگر، که با روش المان محدود بررسی شده، مقایسه گردیده و همگرایی مناسبی داشته است)، مقایسه می‌شود. شکل ۲-۷ را با $V = 0$ ، x_F ، ثابت و $f(u) = Cu^3$ در نظر بگیرید. نیروی ضربه‌ای که تیر را تحریک می‌کند، به صورت (۲۹-۷) در نظر گرفته می‌شود:

$$F_1(t) = \begin{cases} F_a \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & , \quad 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0 & , \quad t < 0 \text{ \& } t \geq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (29-7)$$

برای مقایسه، پارامترهای ذیل در نظر گرفته می‌شوند:

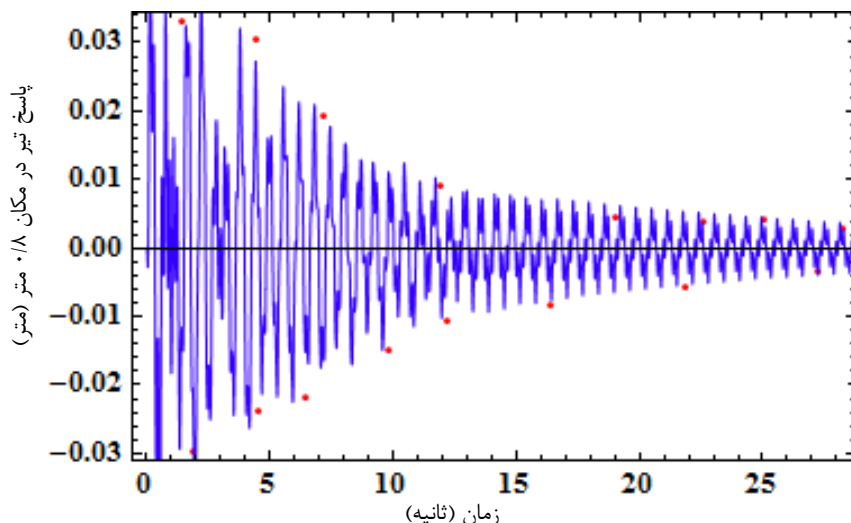
$$F_a = 10N, EI = 1 Pa m^4, \rho A = 1 kg/m, 2\xi_p \omega_p = 0.05 s^{-1}, L = 1 m$$

$$, m_0 = 0.1 kg, x_F = 0.3 m, d = 0.65 m, C = 1.322 \times 10^3 N/m^3, \quad (30-7)$$

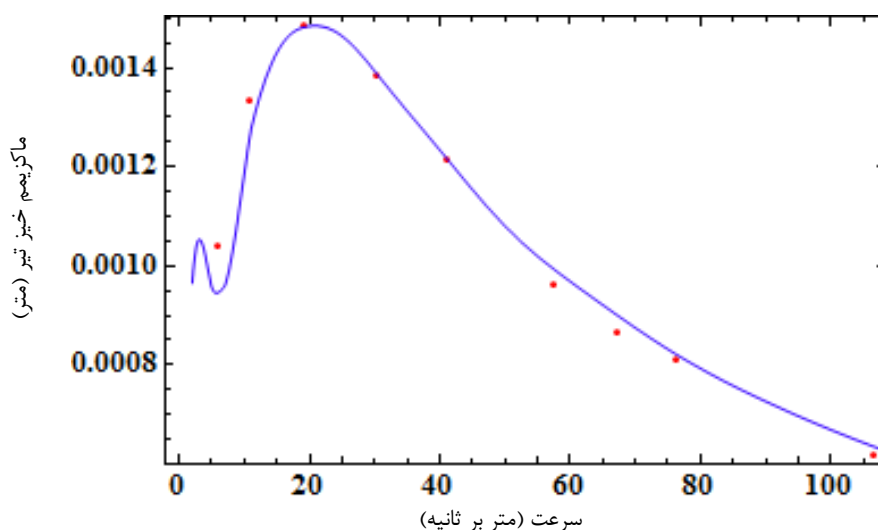
$$T = \left(\frac{0.4}{\pi}\right) s, \lambda = 0.05 Ns/m$$

شکل ۳-۷، مقایسه‌ی بین مدل حاضر و نتایج مقاله‌ی [۲۲] را نشان می‌دهد. از سری (۱۳-۷)، ۵ مود در نظر گرفته شده است. شکل ۳-۷ پاسخ تیر را در مکان ۰/۸ متر $(y(0.8, t))$ نشان می‌دهد. خطوط پیوسته‌ی آبی، مربوط به مدل حاضر و نقطه‌های قرمز، مربوط به مقاله‌ی [۲۲] است. همانطور که مشاهده می‌نمایید، همگرایی مناسبی بین نتایج [۲۲] با مدل حاضر وجود دارد.

برای مقایسه‌ای دیگر، مورد بهینه شده‌ی دو-المانه‌ی غیرخطی (شکل ۲-۷)، که با روش ماکزیمم انحراف بهینه شده و در معرض بار در حال حرکت است، را در نظر بگیرید؛ پارامترهای آن $C = 6.7 \times 10^9 N/m^3$ ، $d = 2.12 m$ و $\lambda = 0.1 Ns/m$ هستند. نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت رسم و با مقاله‌ی [۲۲] مقایسه می‌شود؛ شکل ۴-۷، این مقایسه را نشان



شکل ۳-۷ مقایسه‌ی پاسخ تیر در مکان ۰/۸ متر؛ خطوط پیوسته‌ی آبی، مربوط به مدل حاضر و نقاط قرمز مربوط به مقاله‌ی [۲۲]



شکل ۴-۷ مقایسه‌ی ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت؛ خطوط پیوسته‌ی آبی مربوط به مدل حاضر و نقاط قرمز مربوط به مقاله‌ی [۲۲]

می‌دهد. خطوط پیوسته‌ی آبی، مربوط به کار حاضر و نقاط قرمز مربوط به مقاله‌ی [۲۲] است؛ که نتایج، همگرایی مناسبی با هم دارند. لازم به ذکر است، نتایج مقاله‌ی [۲۲] با متمتیکا ۷ انجام پذیرفته و کار حاضر با متمتیکای ۹ انجام شده است. اختلاف اندکی که وجود دارد، به دلیل نسخه‌ی نرم‌افزار و دقت محاسبه‌ها توسط افراد مختلف است.

۳-۷ بررسی عملکرد جاذب دینامیکی سه-المانه، در مواجهه با بارهای در حال حرکت

۱-۳-۷ جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی (دارای فنرهای خطی)

سیستم شکل ۱-۷ را با $V(t) = \text{constant} \neq 0$ در نظر بگیرید. قسمت خطی معادلات (۵-۷) و

(۶-۷) را در نظر بگیرید (یعنی $f(u_1) = k_1 u_1$ و $f(u_2) = k_2 u_2$). نیروی خارجی، بزرگی ثابتی دارد؛ اما

در طول تیر حرکت می‌کند و جاذب دینامیکی سه-المانه، خطی است. نیروی خارجی، به وسیله‌ی

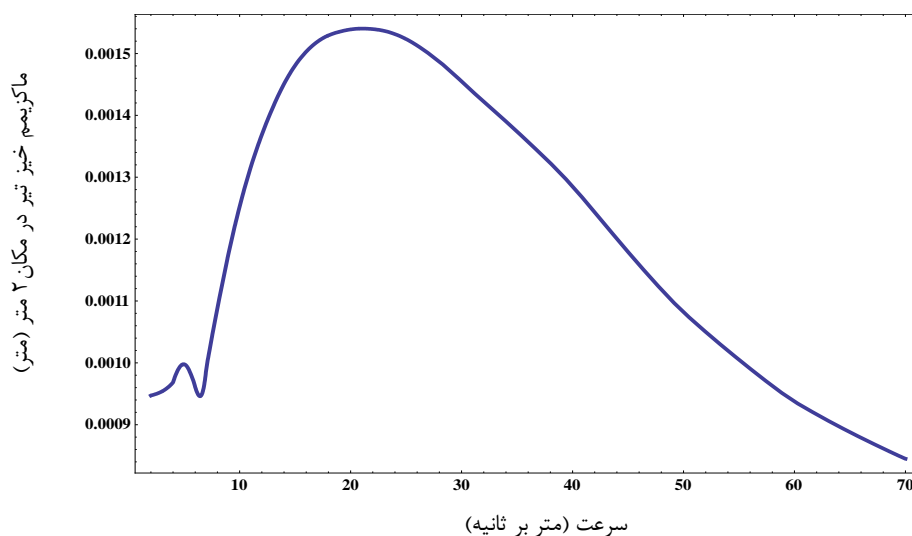
معادله‌ی (۲۵-۷) داده می‌شود.

برای شبیه‌سازی، پارامترهای سیستم را طبق (۳۱-۷) در نظر بگیرید:

$$E = 206800 \text{ MPa}, \rho = 7820 \text{ kg/m}^3, A = 0.03\text{m} \times 0.03\text{m}, \xi_p = 0$$

$$(p = 1, 2, \dots), F_0 = 9.8 \text{ N}, m_0 = 1.4076 \text{ kg}, L = 4 \text{ m}, k_1 = 877.767 \quad (31-7)$$

$$\text{N/m}, k_2 = 1000 \text{ N/m}, \lambda = 12.98 \text{ N s/m}$$



شکل ۵-۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر در مکان ۲ متر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی - خطی سه-المانه

با قرار دادن جاذب در میانه‌ی تیر، شکل ۵-۷ ماکزیمم خیز میانه‌ی تیر، را در برابر سرعت بار در

حال حرکت، برای ۵ مود نشان می‌دهد. ماکزیمم خیز میانه‌ی تیر، در سرعت $21/0625$ متر بر ثانیه

اتفاق می‌افتد.

۲-۳-۷ جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی (دارای دو فنر غیرخطی)

سیستم شکل ۱-۷ را با $V(t) = \text{constant} \neq 0$ در نظر بگیرید. قسمت غیرخطی معادلات (۵-۷) و (۶-۷) در نظر گرفته می‌شود (یعنی $f(u_1) = C_1 u_1^3$ و $f(u_2) = C_2 u_2^3$). نیروی خارجی، بزرگی ثابت دارد اما در طول تیر حرکت می‌کند. نیروی خارجی به وسیله‌ی معادله‌ی (۷-۲۵) داده می‌شود.

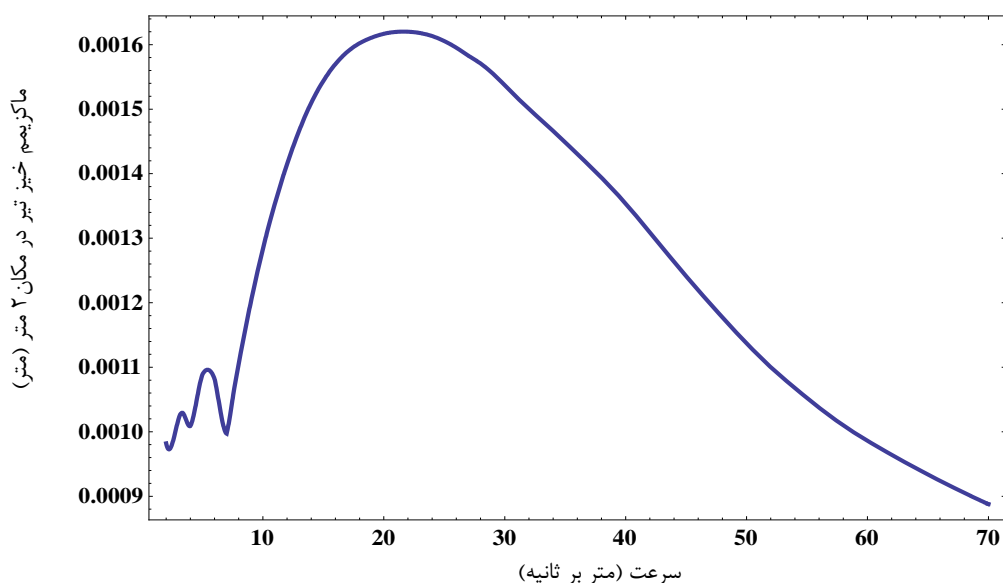
برای شبیه‌سازی، پارامترهای سیستم به صورت (۷-۳۲) در نظر گرفته می‌شوند:

$$E = 206800 \text{ MPa}, \rho = 7820 \text{ kg/m}^3, A = 0.03\text{m} \times 0.03\text{m}, \xi_p = 0$$

$$(p = 1, 2, \dots), F_0 = 9.8 \text{ N}, m_0 = 1.4076 \text{ kg}, L = 4 \text{ m}, C_1 = 2 \times 10^6 \quad (۷-۳۲)$$

$$N/m^3, C_2 = 1 \times 10^5 \text{ N/m}^3, \lambda = 12.98 \text{ Ns/m}$$

با قرار دادن جاذب در میانه‌ی تیر، شکل ۶-۷ ماکزیمم خیز میانه‌ی تیر را در برابر سرعت بار در حال حرکت، برای ۵ مود نشان می‌دهد. ماکزیمم جابه‌جایی میانه‌ی تیر، در سرعت $21/6302$ متر بر ثانیه اتفاق می‌افتد.



شکل ۶-۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر در مکان ۲ متر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی سه-المانه

۳-۳-۷ جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی-غیر خطی

سیستم شکل ۱-۷ را با $V(t) = \text{constant} \neq 0$ در نظر بگیرید. قسمت خطی معادله‌ی (۵-۷) و

غیرخطی معادله‌ی (۶-۷) را در نظر بگیرید (یعنی $f(u_1) = k_1 u_1$ و $f(u_2) = C_2 u_2^3$). مانند قبل، نیروی

خارجی، بزرگی ثابت دارد اما در طول تیر حرکت می‌کند. نیروی خارجی، به وسیله‌ی معادله‌ی (۷-۲۵)

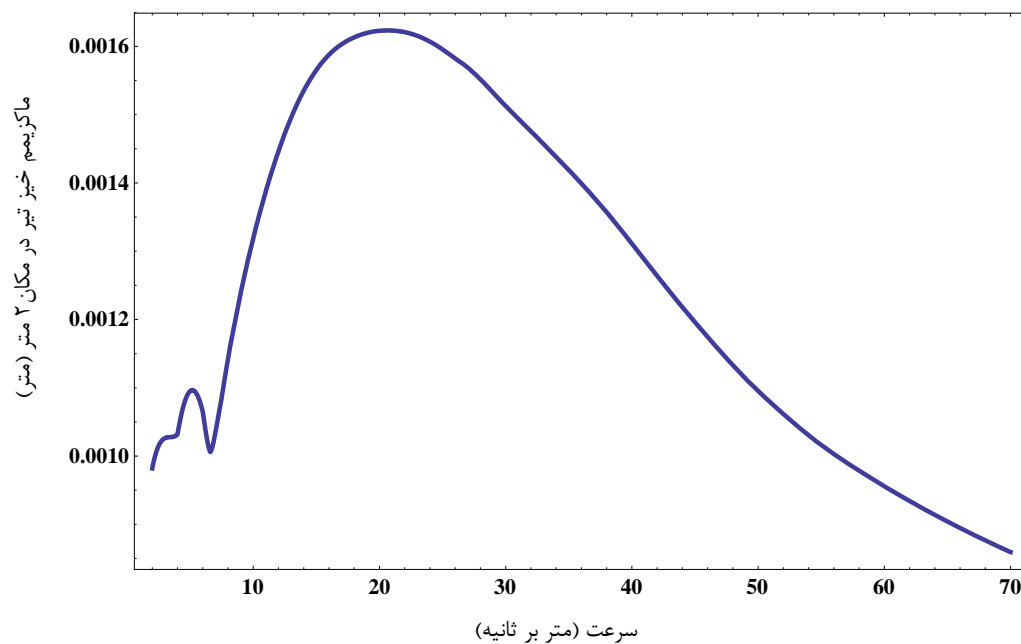
داده می‌شود.

پارامترها به صورت ذیل در نظر گرفته می‌شوند:

$$E = 206800 \text{ MPa}, \rho = 7820 \text{ kg/m}^3, A = 0.03\text{m} \times 0.03\text{m}, \xi_p = 0$$

$$(p = 1, 2, \dots), F_0 = 9.8 \text{ N}, m_0 = 1.4076 \text{ kg}, L = 4 \text{ m}, k_1 = 2 \times 10^6 \text{ N/m}, \quad (۳۳-۷)$$

$$C_2 = 1 \times 10^5 \text{ N/m}^3, \lambda = 12.98 \text{ Ns/m}$$



شکل ۷-۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر در مکان ۲ متر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی - خطی-غیر خطی سه-المانه

شکل ۷-۷ با قرار دادن جاذب در میانه‌ی تیر رسم شده است که نمودار ماکزیمم خیز میانه‌ی تیر

را بر حسب سرعت بار در حال حرکت، برای ۵ مود نشان می‌دهد. ماکزیمم خیز در سرعت ۲۰/۶۳۳۹

متر بر ثانیه اتفاق می‌افتد.

۴-۳-۷ جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی-خطی

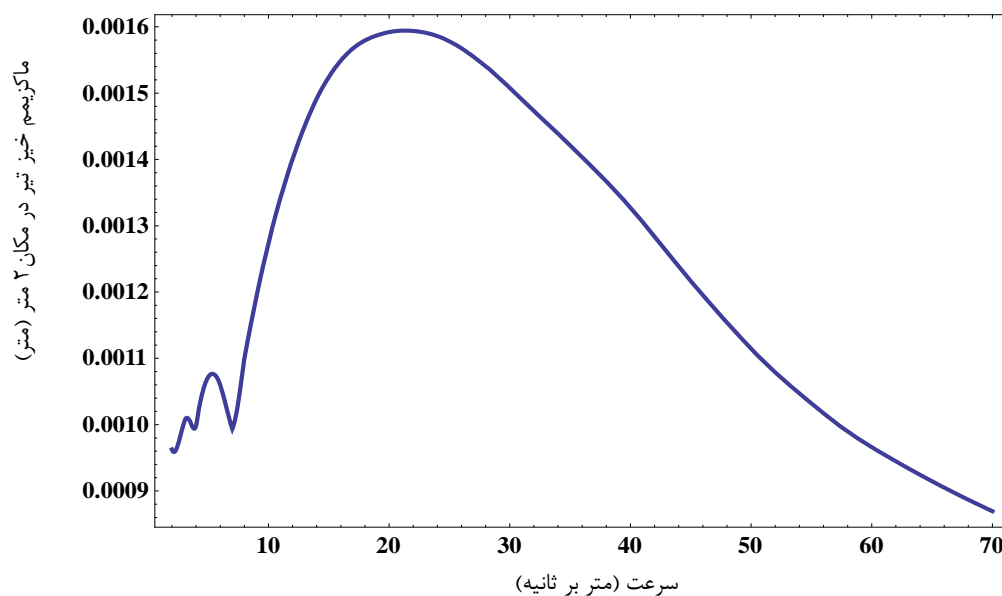
سیستم شکل ۱-۷ را با $V(t) = \text{constant} \neq 0$ در نظر بگیرید. قسمت غیرخطی معادله‌ی (۵-۷) و خطی معادله‌ی (۶-۷) را در نظر بگیرید (یعنی $f(u_1) = C_1 u_1^3$ و $f(u_2) = k_2 u_2$). نیروی خارجی، بزرگی ثابت دارد؛ اما در طول تیر حرکت می‌کند. نیروی خارجی به وسیله‌ی معادله‌ی (۲۵-۷) داده می‌شود.

برای شبیه‌سازی، پارامترهای سیستم به صورت (۳۴-۷) در نظر گرفته می‌شوند:

$$E = 206800 \text{ MPa}, \rho = 7820 \text{ kg/m}^3, A = 0.03\text{m} \times 0.03\text{m}, \xi_p = 0$$

$$(p = 1, 2, \dots), F_0 = 9.8 \text{ N}, m_0 = 1.4076 \text{ kg}, L = 4 \text{ m}, C_1 = 2 \times 10^6 \quad (34-7)$$

$$N/m^3, k_2 = 1 \times 10^5 \text{ N/m}, \lambda = 12.98 \text{ Ns/m}$$



شکل ۸-۷ نمودار ماکزیمم جابه‌جایی تیر در مکان ۲ متر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه

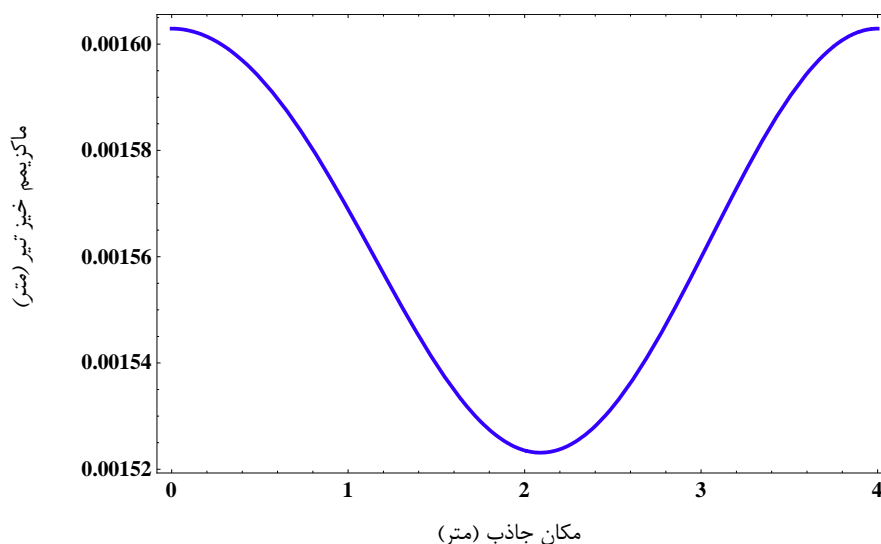
با قرار دادن جاذب در میانه‌ی تیر، شکل ۸-۷ ماکزیمم خیز میانه‌ی تیر، را در برابر سرعت بار در حال حرکت، برای ۵ مود نشان می‌دهد. ماکزیمم خیز در سرعت $21/2985$ متر بر ثانیه اتفاق می‌افتد.

۴-۷ بهینه کردن انواع جاذب‌های دینامیکی، در مواجهه با بارهای در حال حرکت در بخش حاضر، انواع جاذب دینامیکی عمل‌کننده بر روی تیر در معرض بار در حال حرکت، مورد بررسی قرار داده و از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود، تا پارامترهای جاذب بهینه شوند. برای این منظور، از دو شیوه استفاده می‌شود: الف) ماکزیمم دامنه‌ی ارتعاشی؛ ب) بازده.

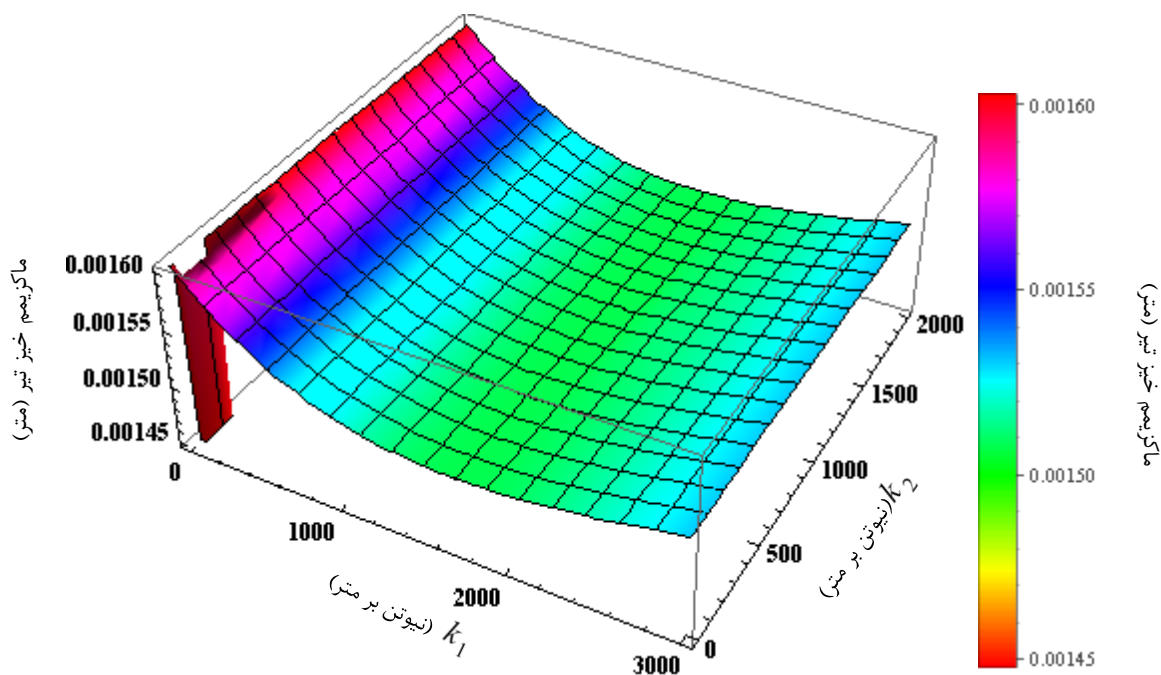
۱-۴-۷ بهینه کردن جاذب‌های دینامیکی، با توجه به ماکزیمم خیز تیر

۱-۱-۴-۷ بهینه کردن جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی

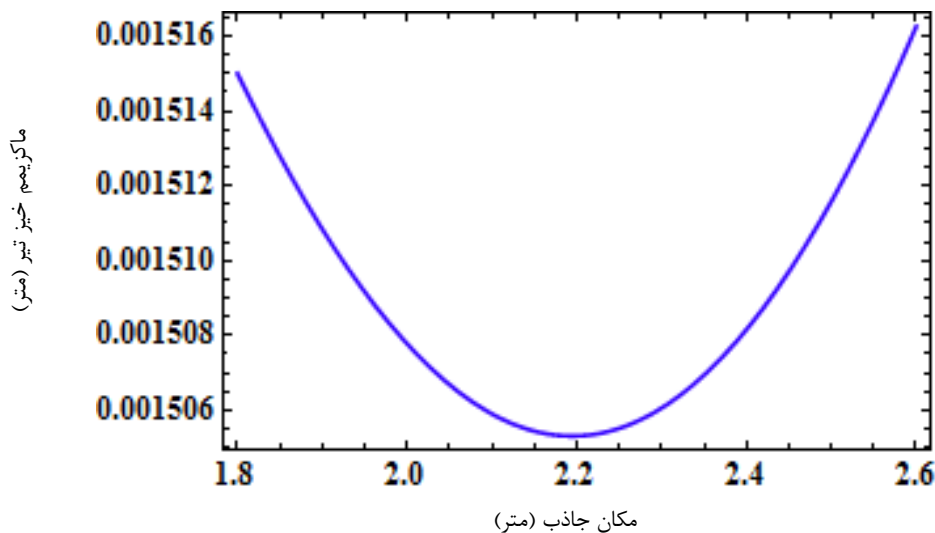
سیستم شکل ۱-۷، را با $\xi_p = 0.01$ ($p = 1, 2, \dots$)، $V = 21.0625 \text{ m/s}$ ، $f(u_1) = k_1 u_1$ و $f(u_2) = k_2 u_2$ و داده‌های (۳۱-۷) (به جز λ ، k_1 ، k_2 و ξ_p) در نظر بگیرید. در این قسمت، شیوه‌ی ماکزیمم خیز تیر، بر روی جاذب دینامیکی خطی سه-المانه به کار می‌رود. بهینه کردن جاذب دینامیکی، بر روی مینیمم کردن ماکزیمم خیز تیر متمرکز است. سفتی، میرایی ویسکوز (ضریب دمپر) و محل جاذب دینامیکی می‌توانند تغییر داده شوند تا مقادیر بهینه بدست آیند.



شکل ۹-۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر، مربوط به جاذب دینامیکی خطی سه-المانه



شکل ۷-۱۰ نمودار سه‌بعدی بهینه‌سازی کردن ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سفتی‌های جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی خطی سه-المانه

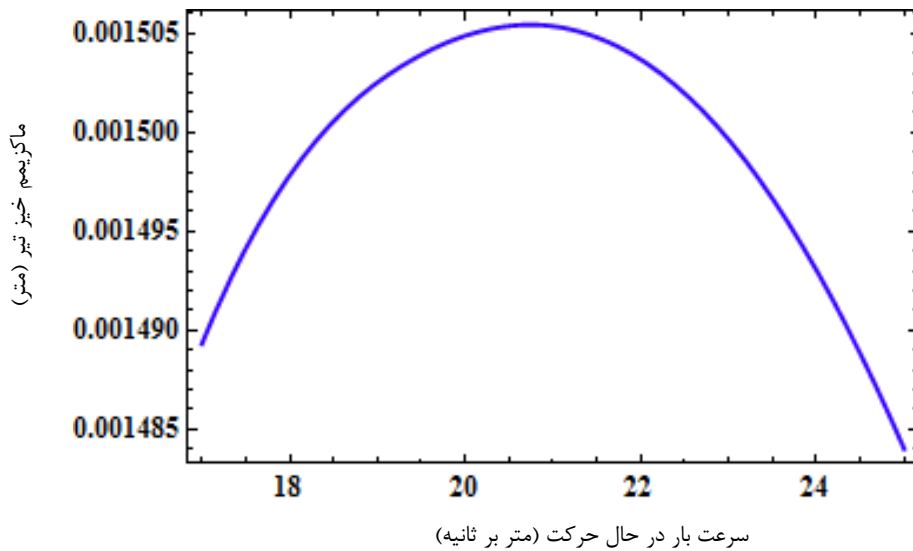


شکل ۷-۱۱ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی خطی سه-المانه

بر اساس داده‌های ذکر شده، بهینه‌سازی انجام می‌پذیرد. شکل ۷-۹ با مقادیر

$$k_1 = 877.767 \text{ N/m}, k_2 = 1000 \text{ N/m} \text{ و } \lambda = 0.1 \text{ N s/m}$$

خیز تیر، را بر حسب موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر نشان می‌دهد.



شکل ۷-۱۲ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی خطی سه-

المانه

همانطور که از شکل مشخص است، به ازای مکان جاذب $۲/۰۸۹۶$ متر، کمترین ماکزیمم خیز تیر

بدست می‌آید. شکل ۷-۱۰ به ازای $\lambda = 0.1 \text{Ns/m}$ و $d = 2.0896 \text{ m}$ بدست آمده است؛ این شکل،

مقادیر بهینه‌ی سفتی‌های جاذب را نشان می‌دهد؛ به طوری که ماکزیمم خیز تیر، کمترین مقدار را

دارا باشد.

در نهایت با داده‌های $k_1 = 1680 \text{ N/m}$ و $k_2 = 0.01 \text{ N/m}$ ، کمترین جابه‌جایی تیر اتفاق می‌-

افتد؛ که این مقدار برابر با $۰/۰۰۱۵۰۶۰۴۳۸$ متر خواهد بود. با توجه به اینکه، به ازای مقادیر جدید

سفتی‌ها، محل بهینه‌ی جاذب کمی تغییر می‌کند؛ بار دیگر به ازای مقادیر بهینه‌ی سفتی (یعنی

$k_1 = 1680 \text{ N/m}$ و $k_2 = 0.01 \text{ N/m}$)، بهینه‌سازی دیگری برای محل بهینه‌ی جاذب و سرعتی که

ماکزیمم خیز رخ می‌دهد، انجام می‌پذیرد. با توجه به شکل ۷-۱۱، با داده‌های $k_1 = 1680 \text{ N/m}$ ،

با $V = 21.0625 \text{ m/s}$ و $k_2 = 0.01 \text{ N/m}$ ، محل جاذب بهینه $۲/۱۹۵$ متر و با توجه به شکل ۷-۱۲، با

داده‌های $k_1 = 1680 \text{ N/m}$ ، $k_2 = 0.01 \text{ N/m}$ و $d = 2.194 \text{ m}$ ، سرعتی که باعث بروز ماکزیمم خیز

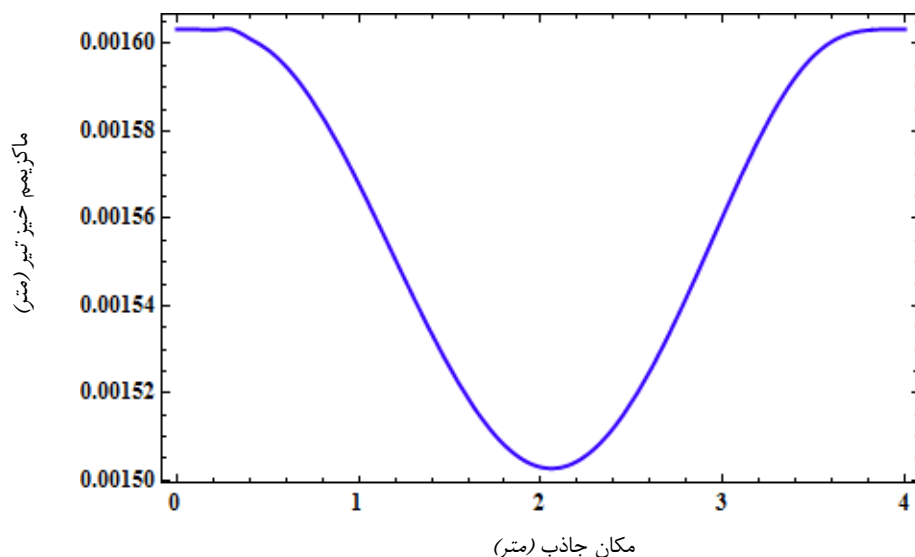
تیر می‌شود، $V = 20.774 \text{ m/s}$ خواهد بود؛ که به ازای آن، ماکزیمم خیز 0.00150543 متر اتفاق می‌افتد.

۲-۱-۴-۷- بهینه کردن جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی (دارای هر دو فنر غیرخطی)

سیستم شکل ۱-۷ را با $\xi_p = 0.01$ ($p = 1, 2, \dots$)، $V = 21.6302 \text{ m/s}$ ، $f(u_1) = C_1 u_1^3$ ، $f(u_2) = C_2 u_2^3$ و داده‌های (۳۲-۷) (به جز λ ، C_1 ، C_2 و ξ_p) در نظر بگیرید. بر اساس داده‌های ذکر شده، بهینه‌سازی انجام می‌پذیرد.

شکل ۱۳-۷ با مقادیر $C_1 = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^3$ ، $C_2 = 1 \times 10^5 \text{ N/m}^3$ و $\lambda = 0.1 \text{ N s/m}$ رسم شده

است؛ این نمودار ماکزیمم خیز تیر را بر حسب موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر نشان می‌دهد.



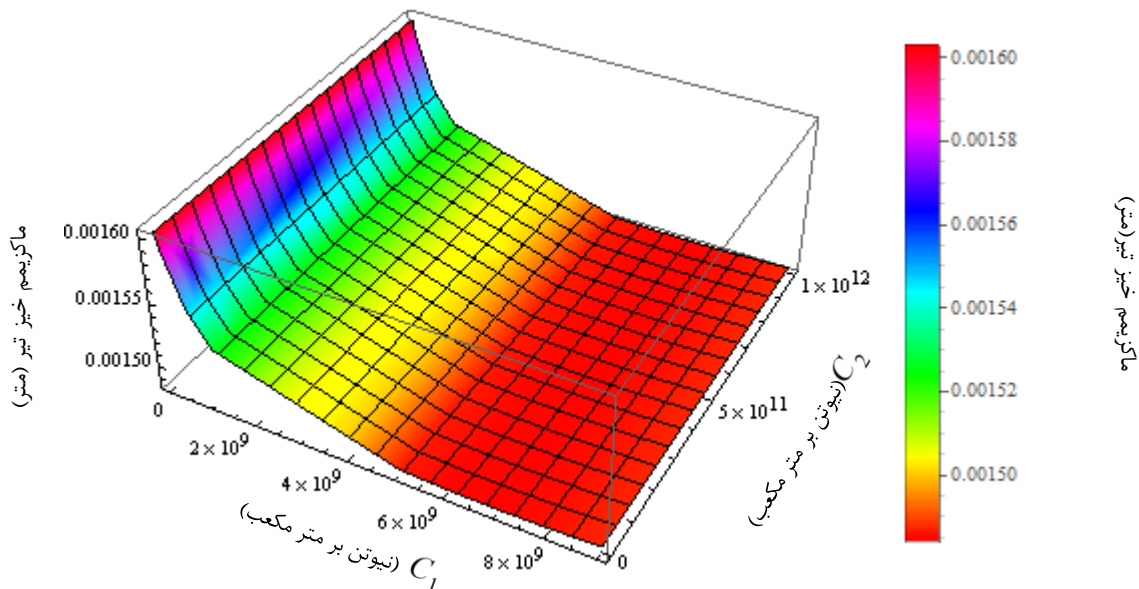
شکل ۱۳-۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر، مربوط به جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی

همانطور که از شکل ۱۳-۷ مشخص است، به ازای مکان جاذب 2.05858 متر، کمترین ماکزیمم

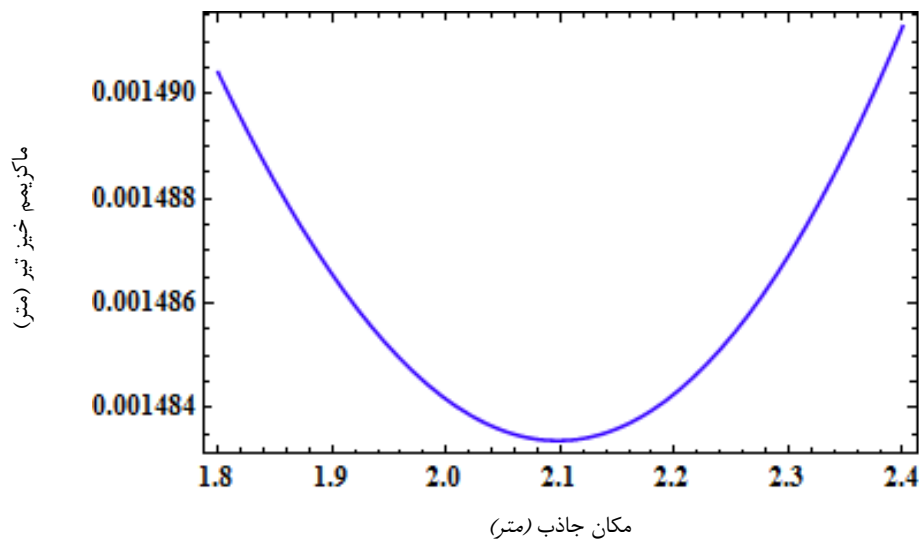
خیز تیر اتفاق می‌افتد. شکل ۱۴-۷ به ازای $\lambda = 0.1 \text{ N s/m}$ و $d = 2.05858 \text{ m}$ بدست آمده است. این

شکل، مقادیر بهینه‌ی سفتی‌های جاذب را نشان می‌دهد؛ به طوری که ماکزیمم خیز تیر، کمترین

مقدار را دارا باشد. در نهایت با داده‌های $C_1 = 66 \times 10^8 N/m^3$ و $C_2 = 0.01 N/m^3$ کمترین خیز تیر حادث می‌شود؛ که این مقدار برابر با 0.148370669 متر خواهد بود.



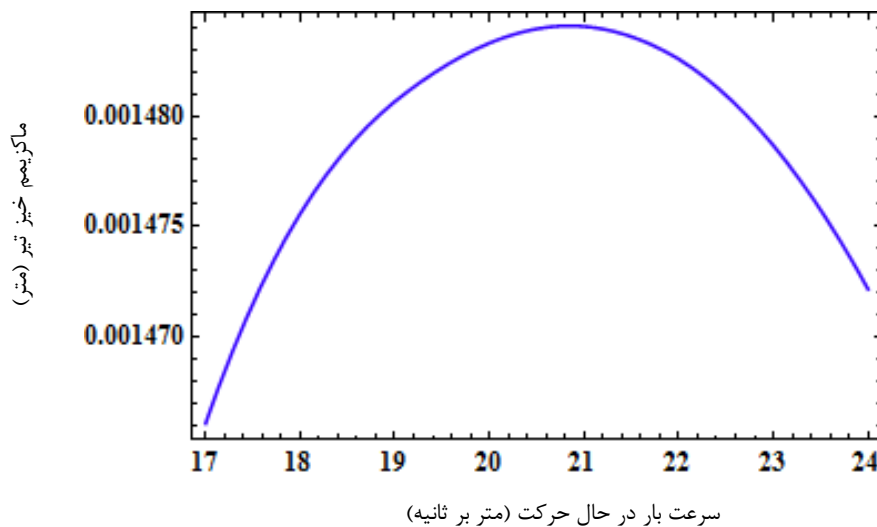
شکل ۷-۱۴ نمودار سه‌بعدی بهینه کردن ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سفتی‌های جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی سه-المانه غیرخطی



شکل ۷-۱۵ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی سه-المانه

با توجه به اینکه، به ازای مقادیر جدید سفتی‌ها، محل بهینه‌ی جاذب کمی تغییر می‌کند؛ بار دیگر به ازای مقادیر بهینه‌ی سفتی (یعنی $C_1 = 66 \times 10^8 N/m^3$ و $C_2 = 0.01 N/m^3$) بهینه‌سازی

دیگری برای تعیین محل بهینه‌ی جاذب و سرعتی که ماکزیمم خیز رخ می‌دهد، انجام می‌پذیرد؛ که شکل ۷-۱۵ آن را نمایش می‌دهد. با توجه به شکل، با داده‌های $C_1 = 66 \times 10^8 N/m^3$ ، $C_2 = 0.01 N/m^3$ و $V = 21.6302 m/s$ ، محل جاذب بهینه، $2/1$ متر و با توجه به شکل ۷-۱۶، با داده-های $C_1 = 66 \times 10^8 N/m^3$ ، $C_2 = 0.01 N/m^3$ و $d = 2.1 m$ ، سرعتی که باعث بروز ماکزیمم خیز می‌شود، $V = 20.8463 m/s$ خواهد بود؛ که به ازای آن ماکزیمم خیز 0.00148405 متر خواهد بود.



شکل ۷-۱۶ نمودار ماکزیمم جابه‌جایی تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی غیر-

خطی سه-المانه

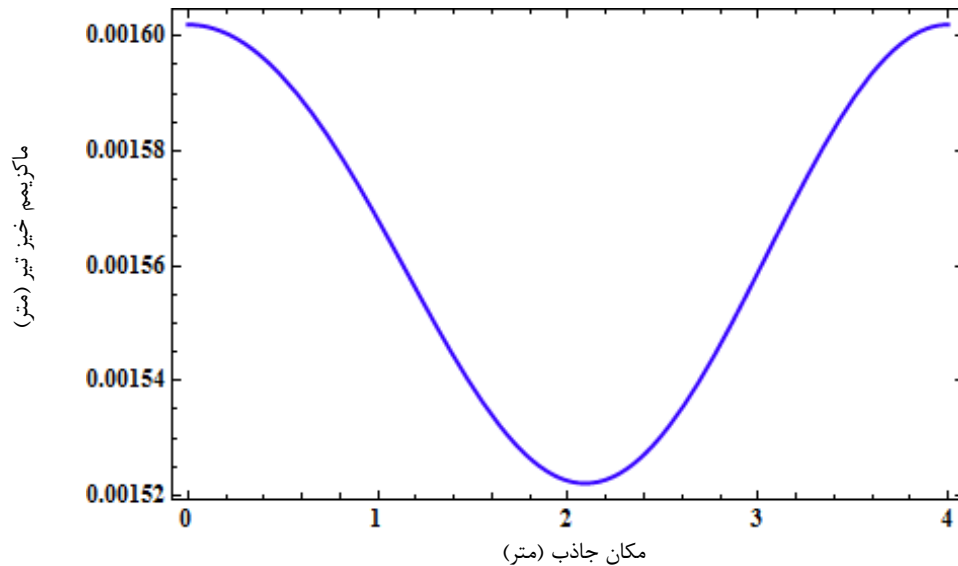
۷-۴-۱-۳ بهینه کردن جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی-غیرخطی

سیستم شکل ۷-۱ را با $f(u_1) = k_1 u_1$ ، $V = 20.6339 m/s$ ، $\xi_p = 0.01$ ($p = 1, 2, \dots$)، $f(u_2) = C_2 u_2^3$ و داده‌های (۷-۳۳) (به جز λ ، k_1 ، C_2 و ξ_p) در نظر بگیرید. بر اساس داده‌های ذکر شده، بهینه‌سازی انجام می‌پذیرد.

شکل ۷-۱۷ با مقادیر $k_1 = 877.767 N/m$ ، $C_2 = 2 \times 10^9 N/m^3$ و $\lambda = 0.1 Ns/m$ رسم شده

است؛ این نمودار ماکزیمم خیز تیر، را بر حسب مکان قرار گرفتن جاذب بر روی تیر نشان می‌دهد. با توجه به شکل، در مکان $2/0.9012$ متر، کمترین ماکزیمم خیز تیر اتفاق می‌افتد. شکل ۷-۱۸ به‌ازای

نشان می‌دهد؛ به طوری که ماکزیمم خیز تیر، کمترین مقدار را دارا باشد.



شکل ۷-۱۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر، مربوط به جاذب دینامیکی خطی-غیرخطی سه-المانه

در نهایت با داده‌های $k_1 = 1640 \text{ N/m}$ و $C_2 = 27 \times 10^5 \text{ N/m}^3$ ، کمترین خیز تیر اتفاق می‌افتد؛

که این مقدار برابر با 0.001506136155 متر خواهد بود.

با توجه به اینکه، به ازای مقادیر جدید سفتی‌ها، محل بهینه‌ی جاذب کمی تغییر می‌کند، بار

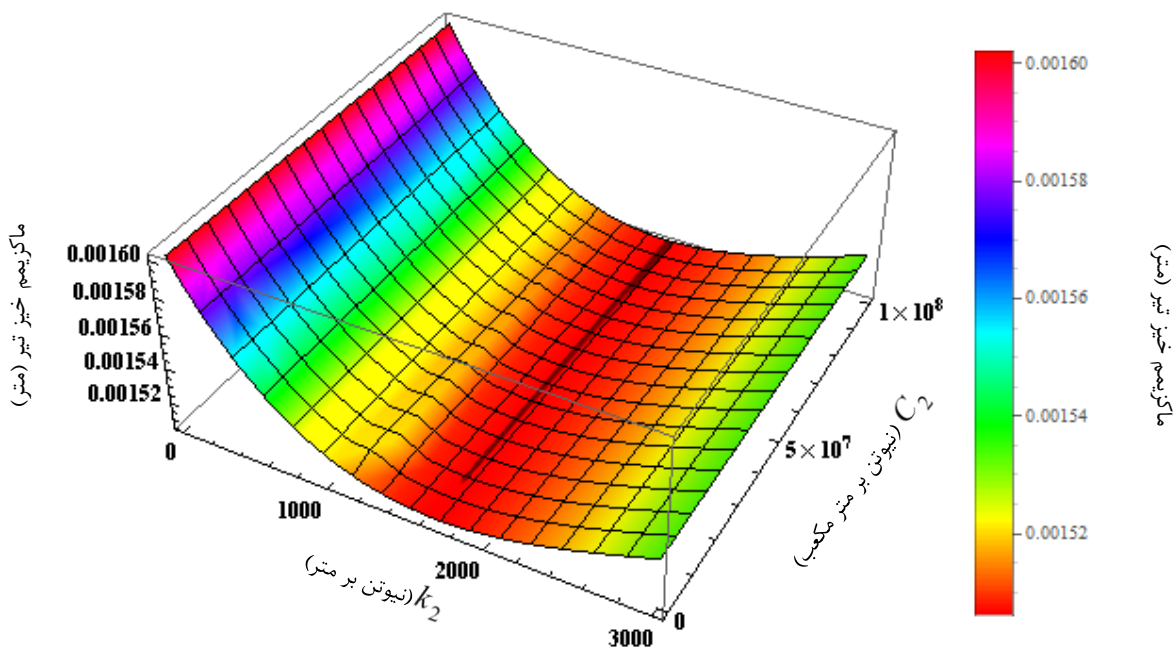
دیگر به ازای مقادیر بهینه‌ی سفتی (یعنی $k_1 = 1640 \text{ N/m}$ و $C_2 = 27 \times 10^5 \text{ N/m}^3$)، بهینه‌سازی

دیگری برای محل بهینه‌ی جاذب و سرعتی که ماکزیمم خیز رخ می‌دهد انجام می‌پذیرد. با توجه به

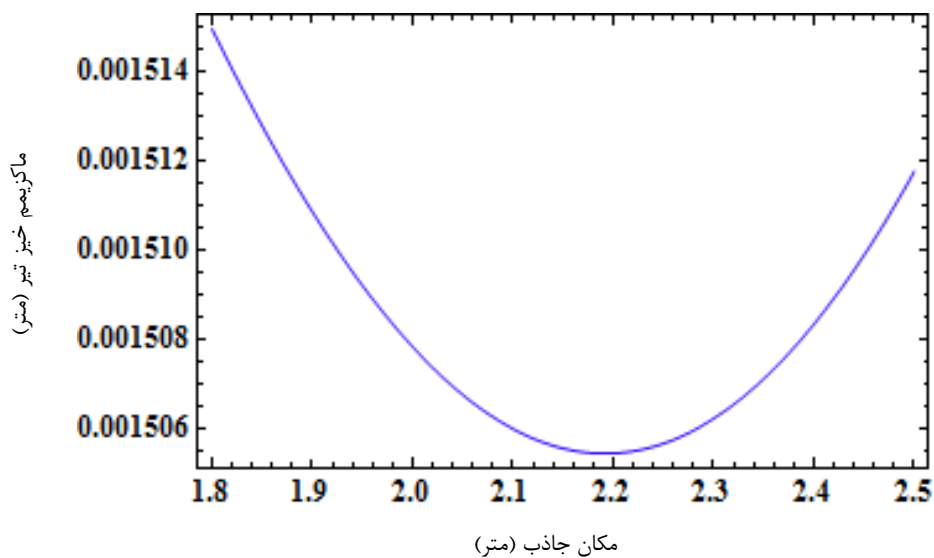
شکل ۷-۱۹، با داده‌های $k_1 = 1640 \text{ N/m}$ ، $C_2 = 27 \times 10^5 \text{ N/m}^3$ و $V = 20.6339 \text{ m/s}$ ، محل جاذب

بهینه $2/19$ متر و با توجه به شکل ۷-۲۰، با داده‌های $k_1 = 1640 \text{ N/m}$ ، $C_2 = 27 \times 10^5 \text{ N/m}^3$ و

$d = 2.19 \text{ m}$ ، سرعتی که باعث بروز ماکزیمم خیز می‌شود، $V = 20.813 \text{ m/s}$ خواهد بود؛ که به

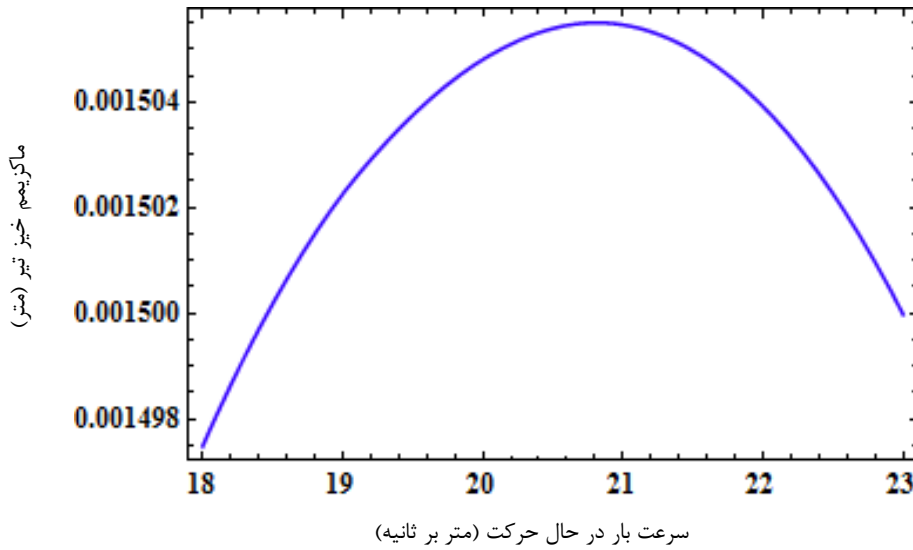


شکل ۷-۱۸ نمودار سه‌بعدی بهینه کردن ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سفتی‌های جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی خطی-غیرخطی سه-المانه



شکل ۷-۱۹ نمودار ماکزیمم جابه‌جایی تیر، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی خطی-غیرخطی سه-المانه

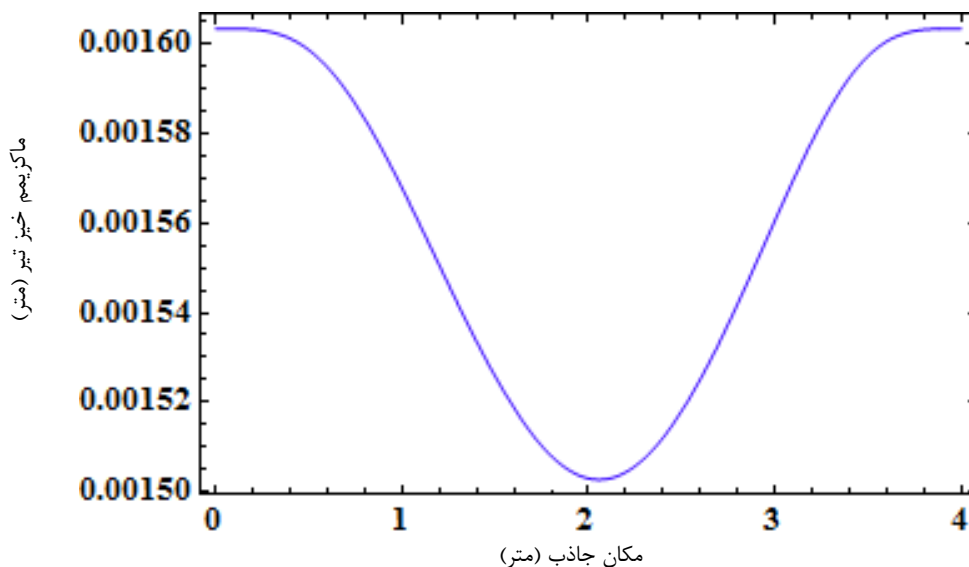
ازای آن ماکزیمم خیز تیر 0.0015055 متر بدست می‌آید.



شکل ۲۰-۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی خطی-غیرخطی سه-المانه

۴-۱-۴-۷ بهینه کردن جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی-خطی

سیستم شکل ۱-۷ را با $\xi_p = 0.01$ ($p = 1, 2, \dots$)، $V = 21.2985 \text{ m/s}$ ، $f(u_1) = C_1 u_1^3$ ، و داده‌های (۳۴-۷) (به جز λ ، C_1 ، k_2 و ξ_p) در نظر بگیرید. بر اساس داده‌های ذکر شده، بهینه‌سازی انجام می‌پذیرد.



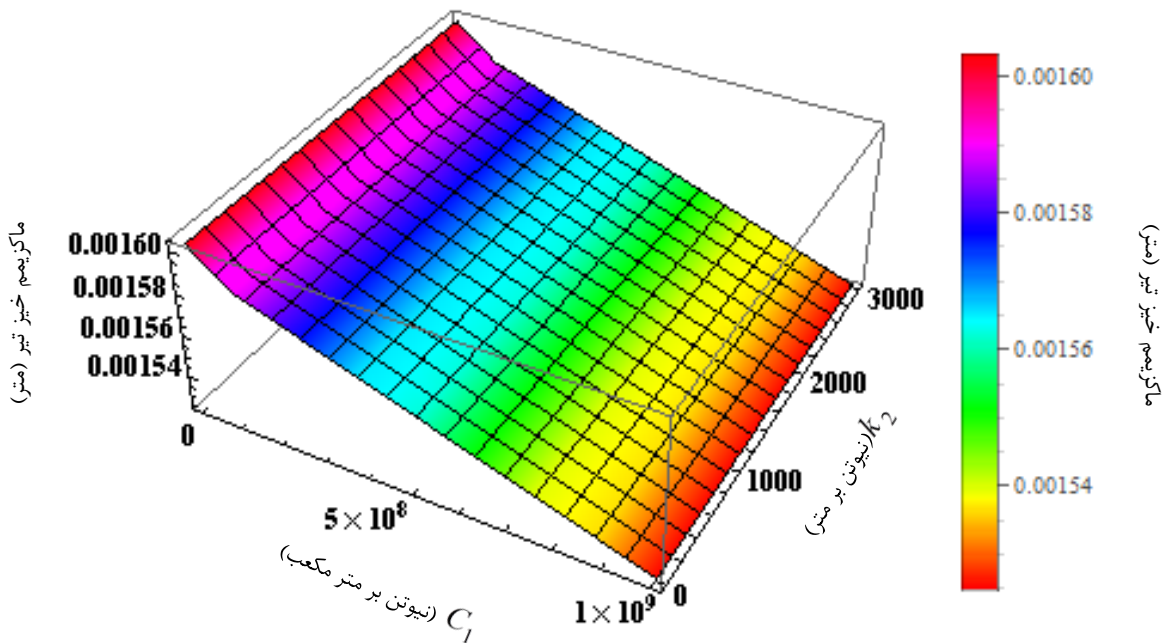
شکل ۲۱-۷ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب موقعیت قرارگیری جاذب بر روی تیر، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه

شکل ۷-۲۱ با مقادیر $C_1 = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^3$ ، $k_2 = 877.767 \text{ N/m}$ و $\lambda = 0.1 \text{ Ns/m}$ رسم

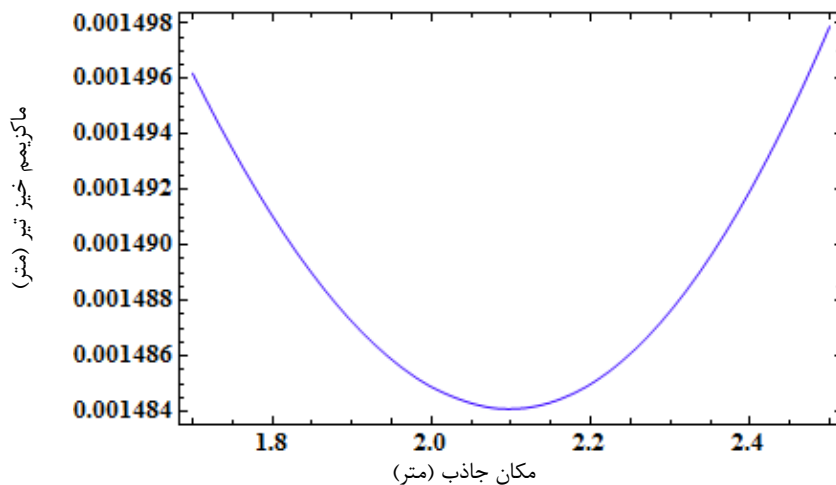
شده است؛ این نمودار ماکزیمم خیز تیر، را بر حسب مکان قرار گرفتن جاذب بر روی تیر نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۷-۲۱، در مکان ۲/۰۶ متر، کمترین ماکزیمم خیز تیر بدست می‌آید.

شکل ۷-۲۲ به ازای $\lambda = 0.1 \text{ Ns/m}$ و $d = 2.06 \text{ m}$ بدست آمده است؛ این شکل، مقادیر بهینه-

ی سفتی‌های جاذب را نشان می‌دهد؛ به طوری که ماکزیمم خیز تیر، کمترین مقدار را دارا باشد.



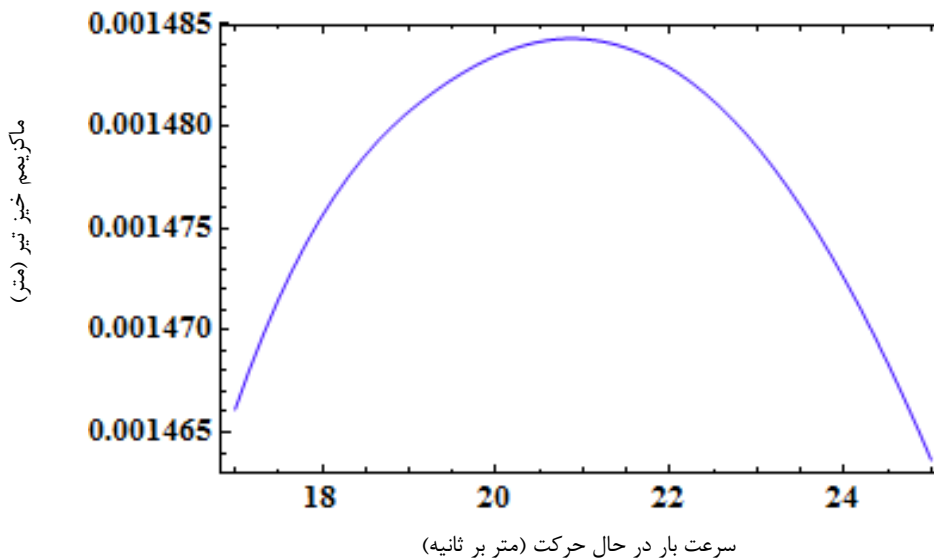
شکل ۷-۲۲ نمودار سه‌بعدی بهینه کردن ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سفتی‌های جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه



شکل ۷-۲۳ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه

در نهایت با داده‌های $C_1 = 65 \times 10^8 N/m^3$ ، $k_2 = 498 N/m$ ، کمترین خیز تیر بدست می‌آید؛ که این مقدار برابر با 0.0014842127 متر خواهد بود.

با توجه به اینکه، به ازای مقادیر جدید سفتی‌ها، محل بهینه‌ی جاذب کمی تغییر می‌کند؛ بار دیگر به ازای مقادیر بهینه‌ی سفتی (یعنی $C_1 = 65 \times 10^8 N/m^3$ و $k_2 = 498 N/m$)، بهینه‌سازی دیگری برای محل بهینه‌ی جاذب و سرعتی که ماکزیمم خیز رخ می‌دهد، انجام می‌پذیرد. با توجه به شکل ۷-۲۳، با داده‌های $C_1 = 65 \times 10^8 N/m^3$ ، $k_2 = 498 N/m$ و $V = 21.2985 m/s$ ، محل جاذب بهینه $2/1$ متر و با توجه به شکل ۷-۲۴، با داده‌های $C_1 = 65 \times 10^8 N/m^3$ ، $k_2 = 498 N/m$ و $d = 2.1 m$ ، سرعتی که باعث بروز ماکزیمم خیز تیر می‌شود، $V = 20.8679 m/s$ خواهد بود؛ که به ازای آن ماکزیمم خیز 0.00148431 متر بدست می‌آید.



شکل ۷-۲۴ نمودار ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه

حال به طور خلاصه نتایج را می‌توان به این صورت شرح داد: در این قسمت بهینه‌سازی ماکزیمم خیز تیر صورت پذیرفت، تا پارامترهایی که باعث می‌شود تیر کمترین ماکزیمم خیز را داشته باشد، مشخص شوند.

در نهایت با بهینه‌سازی‌هایی که برای مشخص کردن پارامترهای بهینه مانند: سفتی‌ها، ضریب

دمپر و مکان جاذب صورت پذیرفت، مشخص گردید که ماکزیمم خیز تیر، به ازای چه سرعتی حادث می‌شود و در آن سرعت ماکزیمم خیز چه مقدار خواهد بود.

جدول ۷-۱ نتایج بهینه‌سازی با استفاده از روش ماکزیمم خیز، مربوط به جاذب دینامیکی دو-المانه (اعداد جدول مربوط به مقاله‌ی [۲۲] و اعداد داخل پرانتز مربوط به محاسبه‌های این پایان‌نامه)

| مورد | شرایط تیر و جاذب دینامیکی | سفتی | سرعتی که ماکزیمم خیز رخ می‌دهد (متر بر ثانیه) | میرایی ویسکوز (نیوتن ثانیه بر متر) | محل جاذب دینامیکی (متر) | ماکزیمم خیز (میلی‌متر) |
|------|---|--|---|------------------------------------|-------------------------|------------------------|
| ۱ | تیر غیرمیرا و بدون جاذب دینامیکی | 0 | 21.5 | 0 | - | 1.6279 |
| ۲ | تیر میرا و بدون جاذب دینامیکی | 0 | 21.5 | 0 | - | 1.6042 |
| ۳ | تیر میرا با جاذب دینامیکی خطی (بهینه شده با روش ماکزیمم خیز) | 1795 (N / m) | 21.5 (20.485) | 0.1 | 2.2 (2.21) | 1.5054 (1.50581) |
| ۴ | تیر میرا با جاذب دینامیکی غیرخطی (بهینه شده با روش ماکزیمم خیز) | 6.7×10^9 (N / m ³) | 21.5 (20.83) | 0.1 | 2.12 (2.1) | 1.4852 (1.48436) |

در نهایت مشخص شد، کمترین ماکزیمم خیز برای جاذب سه-المانه‌ی بهینه‌شده‌ی هر دو فنر غیرخطی اتفاق می‌افتد؛ که این نتایج از جاذب دو-المانه‌ی بهینه‌شده‌ی غیرخطی (که بهترین نوع دو-المانه‌ی آن، برای کاهش ماکزیمم خیز، نوع غیرخطی می‌باشد)، بهتر است. نتایج برای جاذب دو-المانه، که داده‌های آن از مقاله‌ی [۲۲] است، در جدول ۷-۱ ارائه شده است. باید ذکر نمود، داده‌هایی که در داخل پرانتز، در جدول ۷-۱ ارائه شده است، مربوط به بهینه‌سازی است، که توسط این

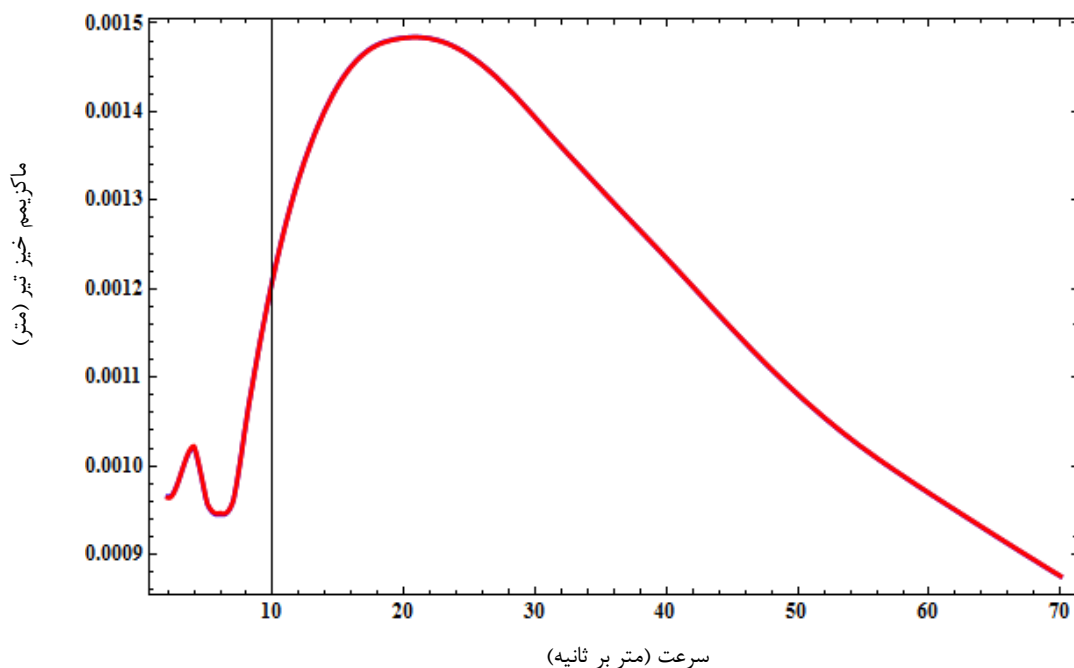
جدول ۷-۲ ارائه‌ی نتایج بهینه‌سازی، با استفاده از روش ماکزیمم خیز تیر، مربوط به جاذب‌های دینامیکی سه-المانه

| مورد | شرایط تیر و جاذب دینامیکی | C_1 یا k_1 | C_2 یا k_2 | سرعتی که ماکزیمم خیز تیر رخ می‌دهد (متر بر ثانیه) | میرایی ویسکوز (نیوتن ثانیه بر متر) | محل جاذب دینامیکی (متر) | ماکزیمم خیز (میلی- متر) |
|------|--|------------------------------------|------------------------------------|--|---|----------------------------------|-------------------------------|
| ۱ | تیر میرا با جاذب دینامیکی خطی سه-المانه (فنرها خطی هستند) (بهینه شده با روش ماکزیمم خیز) | 1680 (N / m) | 0.01 (N / m) | 20.744 | 0.1 | 2.19 | 1.50543 |
| ۲ | تیر میرا با جاذب دینامیکی سه- المانه‌ی غیرخطی) هر دو فنر غیرخطی هستند) (بهینه شده با روش ماکزیمم خیز) | 6.6×10^9 (N / m^3) | 0.01 (N / m^3) | 20.846 | 0.1 | 2.1 | 1.48405 |
| ۳ | تیر میرا با جاذب دینامیکی سه- المانه‌ی خطی- غیر- خطی (بهینه شده با روش ماکزیمم خیز) | 1640 (N / m) | 2.7×10^6 (N / m^3) | 20.81 | 0.1 | 2.19 | 1.5055 |
| ۴ | تیر میرا با جاذب دینامیکی سه- المانه‌ی غیرخطی- خطی (بهینه شده با روش ماکزیمم خیز) | 6.5×10^9 (N / m^3) | 498 (N / m) | 20.867 | 0.1 | 2.1 | 1.48431 |

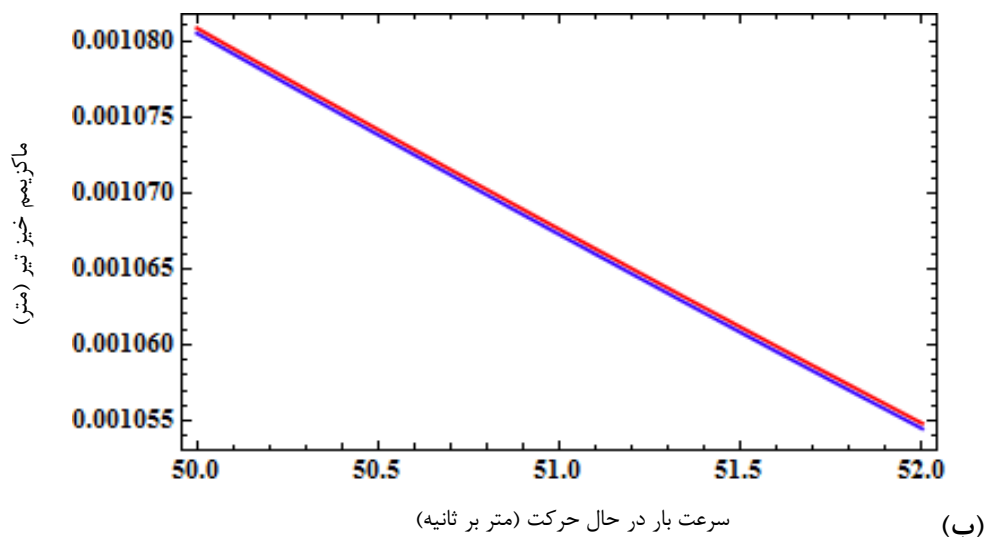
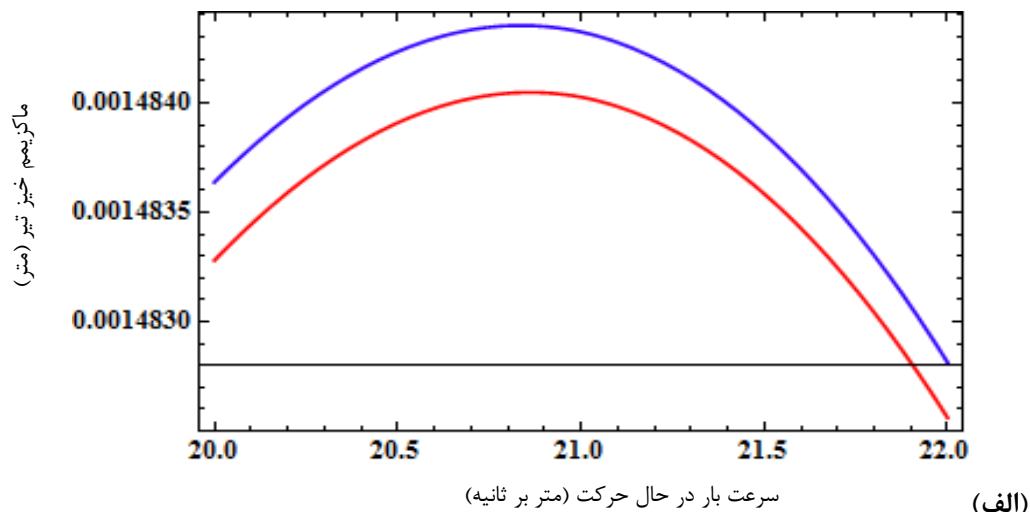
پایان نامه صورت گرفته است؛ که کمی با داده‌های مقاله‌ی مذکور متفاوت است؛ که آن هم به

دلیل تحلیل عددی و دقت نرم‌افزاری است که در هر دو کار صورت گرفته است.

برای جاذب سه-المانه، هم داده‌ها در جدول ۲-۷ ارائه شده است. در نهایت مقایسه‌ای بین جاذب دو-المانه‌ی بهینه‌ی غیرخطی و جاذب سه-المانه‌ی بهینه‌ی هر دو فنر غیرخطی صورت گرفته است (که داده‌های این دو جاذب، بر حسب جدول ۱-۷ و جدول ۲-۷ است)؛ که شکل ۲۵-۷ آن را به تصویر می‌کشد. چون اعداد بسیار کوچک هستند، همانطور که دیده می‌شود، دو نمودار بر هم منطبق هستند؛ که برای تشخیص بهتر عملکرد آنها، شکل ۲۶-۷، در بازه‌ای کوچکتری، دو بازه از شکل ۲۵-۷ را نمایش می‌دهد.



شکل ۲۵-۷ نمودارهای ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار در حال حرکت؛ رنگ قرمز معرف جاذب سه-المانه‌ی هر دو فنر غیرخطی و رنگ آبی مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی دو-المانه



شکل ۷-۲۶ نمودارهای ماکزیمم خیز تیر، بر حسب سرعت بار؛ رنگ قرمز مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر غیر-خطی سه-المانه و رنگ آبی مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی دو-المانه

۷-۴-۲ بهینه کردن جاذب‌های دینامیکی، با روش بازده

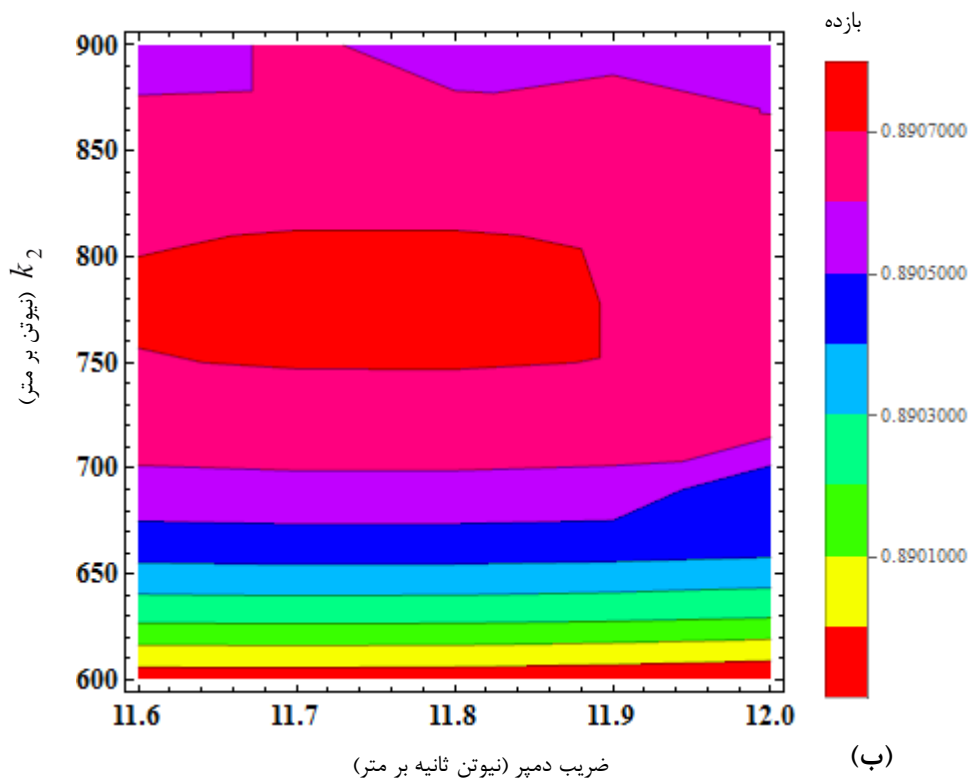
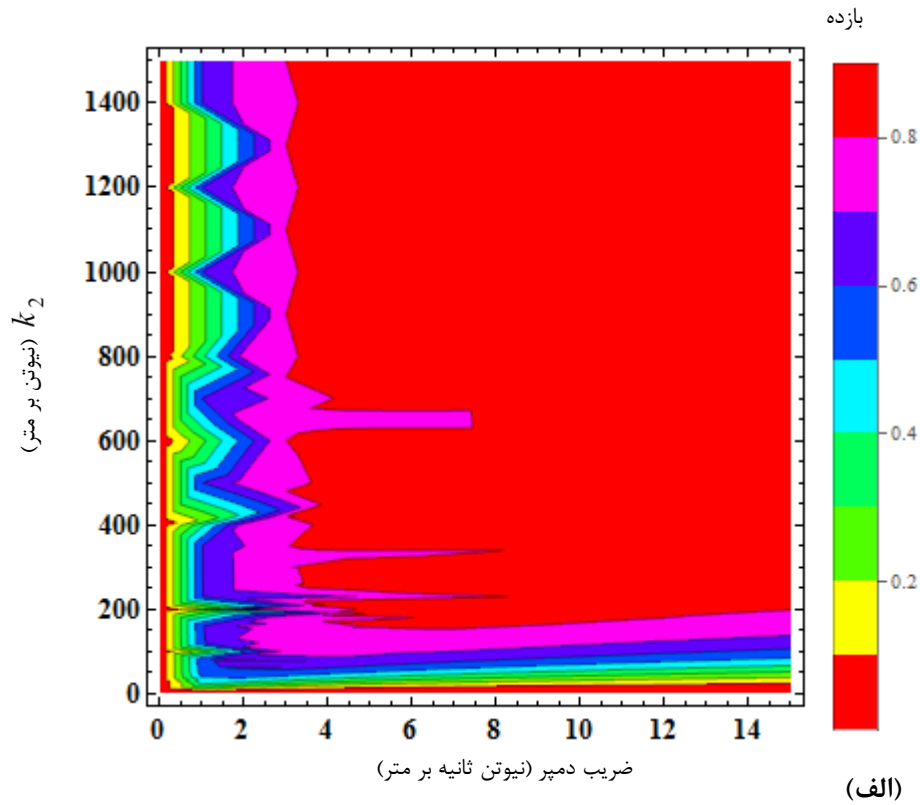
در قسمت قبل، هدف از بهینه کردن، کم کردن ماکزیمم خیز تیر بود؛ اما در این قسمت، بهینه-سازی ارائه می‌شود تا سیستم را زودتر دمپ نماید. اهمیت این نوع بهینه‌سازی بسیار بالاست؛ چراکه حتی اگر سیستم ماکزیمم خیز کمی داشته باشد، ولی تکان‌های آن بسیار زیاد باشد و به اصطلاح سیستم دیر دمپ شود، می‌تواند سبب کاهش عمر خستگی و در نتیجه خرابی تیر گردد. در واقع این شیوه‌ی بهینه‌سازی، که بهینه‌سازی بازده نامیده می‌شود؛ بر روی ماکزیمم کردن اتلاف انرژی، به

وسیله‌ی جاذب دینامیکی، متمرکز است. برای این منظور، برای جاذب سه-المانه‌ی بررسی شده در این کار، از رابطه‌ی (۲۸-۷) استفاده می‌شود.

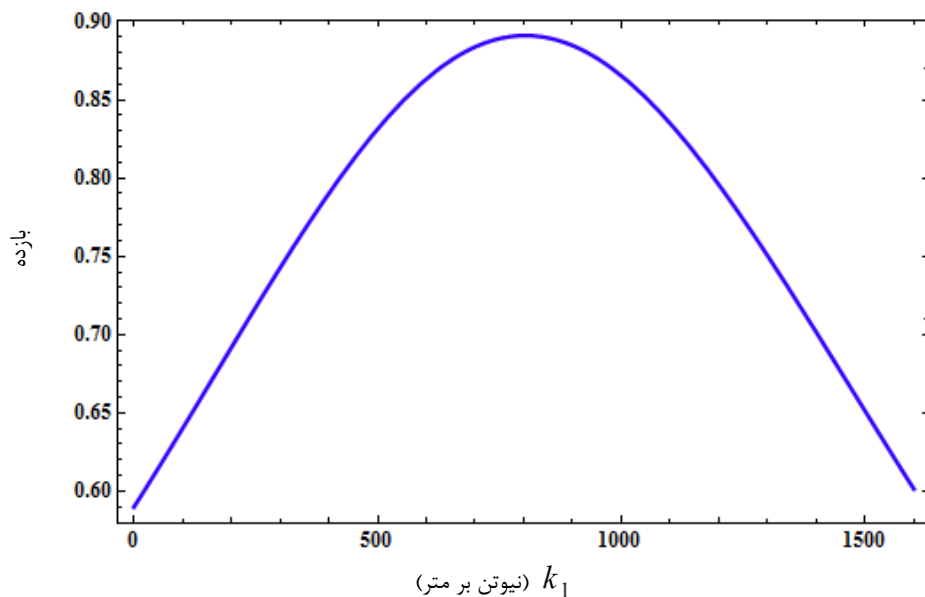
۱-۲-۴-۷ بهینه کردن بازدهی جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی

بار دیگر سیستم شکل ۱-۷ را با $\xi_p = 0.01$ ($p = 1, 2, \dots$)، $V = 21.0625 \text{ m/s}$ ، $f(u_1) = k_1 u_1$ ، $f(u_2) = k_2 u_2$ و داده‌های (۳۱-۷) (به جز λ ، k_1 ، k_2 و ξ_p) در نظر بگیرید. بهینه‌سازی بازده، بر روی جاذب دینامیکی خطی سه-المانه به کار می‌رود. در واقع با تغییر سفتی‌ها، مکان دمپر، و میرایی ویسکوز می‌توان بازده را افزایش و در نتیجه ارتعاش‌ها را سریع‌تر دمپ کرد. در اینجا باید ذکر نمود برای این بهینه‌سازی، بهینه‌سازی رندومی دیگری انجام می‌پذیرد؛ تا حدود بهینه‌ی پارامترها مشخص شوند.

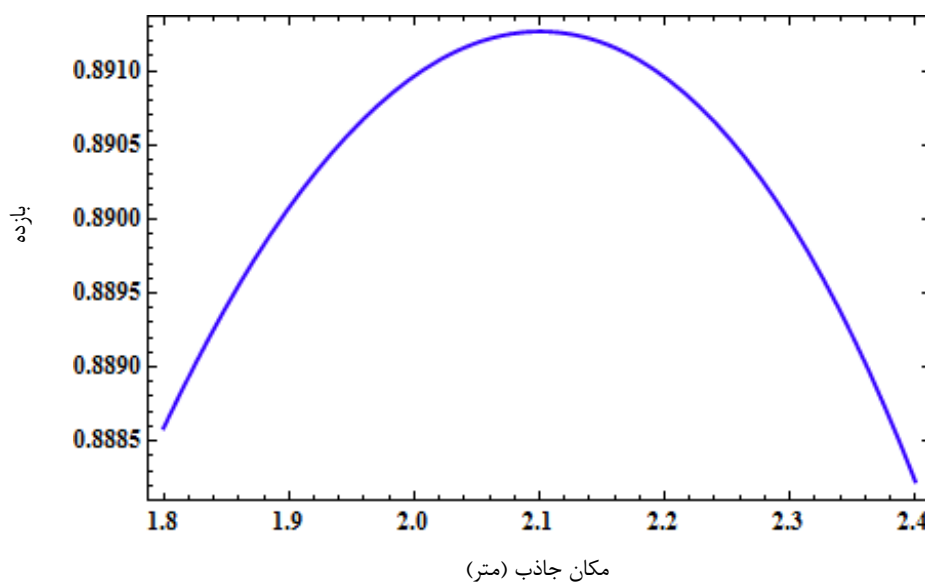
بر اساس داده‌های ذکر شده، بهینه‌سازی انجام می‌پذیرد؛ شکل ۲۷-۷ با مقادیر $k_1 = 822 \text{ N/m}$ و $d = 2.2 \text{ m}$ رسم شده است. شکل ۲۷-۷، کانتور بازده را بر حسب k_2 و λ نشان می‌دهد. با توجه به این کانتور، ماکزیمم بازده برابر با $89/0.7168$ درصد است؛ که به ازای $k_2 = 778 \text{ N/m}$ و $\lambda = 11.8 \text{ Ns/m}$ اتفاق می‌افتد. بار دیگر با مقادیر $k_2 = 778 \text{ N/m}$ ، $\lambda = 11.8 \text{ Ns/m}$ و $d = 2.2 \text{ m}$ ، بهینه‌سازی بازده صورت می‌گیرد؛ که هدف بهینه کردن k_1 است. به ازای $k_1 = 803 \text{ N/m}$ ، بازدهی حداکثری $89/0.959$ درصد بدست می‌آید؛ که شکل ۲۸-۷ آن را نمایش می‌دهد. در نهایت مکان بهینه‌ی دمپر، برای این نوع بهینه‌سازی مشخص می‌شود؛ که شکل ۲۹-۷ آن را نمایش می‌دهد؛ که به ازای $d = 2.1 \text{ m}$ بازدهی ماکزیمم $89/1.267$ درصدی بدست می‌آید. در اینجا باید ذکر نمود، به ازای سرعت $V = 21.0625 \text{ m/s}$ بهینه‌سازی بازده صورت پذیرفت. زمانی می‌توان قضاوتی درست از عملکرد این نوع جاذب داشت، که بتوان مقایسه‌ای بین این نوع جاذب‌ها با جاذب‌های دیگر انجام داد؛ که این کار در اواخر این قسمت صورت پذیرفته است.



شکل ۲۷-۷ کانتور بهینه کردن بازده، بر حسب ضریب دمپر و k_2 (سفتی)، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر خطی سه-المانه؛ (الف) نمایش کل بازدهی بهینه‌سازی؛ (ب) نمایش بهینه‌سازی بازده، در اطراف بازدهی بهینه



شکل ۲۸-۷ نمودار بازده بر حسب k_1 (سفتی)، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر خطی سه-المانه



شکل ۲۹-۷ نمودار بازده، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر خطی سه-المانه

۲-۲-۴-۷ بهینه کردن بازدهی جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیرخطی (دارای دو فنر

غیرخطی)

سیستم شکل ۱-۷ را با $f(u_1) = C_1 u_1^3$ ، $V = 21.5 \text{ m/s}$ ، $\xi_p = 0.01$ ($p = 1, 2, \dots$)

و داده‌های (۳۲-۷) (به جز λ ، C_1 ، C_2 و ξ_p) در نظر بگیرید. بهینه‌سازی بازده بر روی

جاذب دینامیکی غیرخطی سه-المانه به کار برده می‌شود.

براساس داده‌های مذکور، بهینه‌سازی انجام می‌پذیرد؛ شکل ۷-۳۰ با مقادیر $C_1 = 2 \times 10^8 N/m^3$

و $d = 2.12 m$ رسم شده است. شکل ۷-۳۰ کانتور بازده را بر حسب C_2 و λ نشان می‌دهد. با توجه

به این کانتور، ماکزیمم بازده برابر با $88/66743$ درصد است؛ که به ازای $C_2 = 4.5 \times 10^8 N/m^3$ و

$\lambda = 21.6 Ns/m$ اتفاق می‌افتد. بار دیگر با مقادیر $C_2 = 4.5 \times 10^8 N/m^3$ ، $\lambda = 21.6 Ns/m$ و

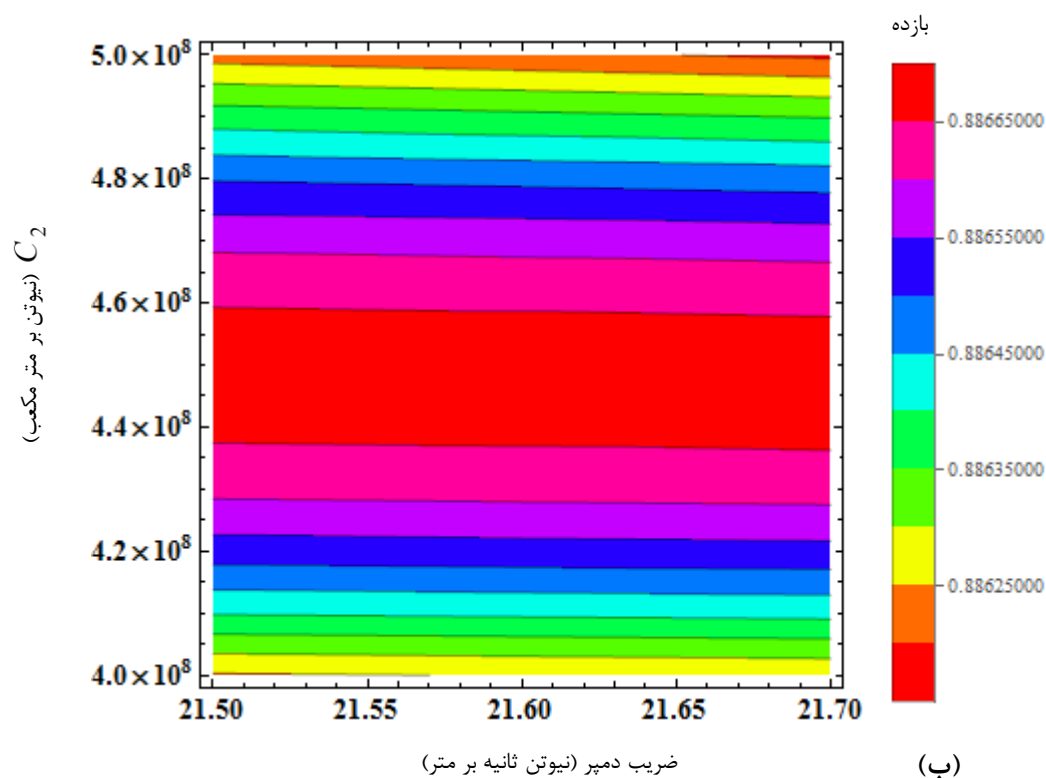
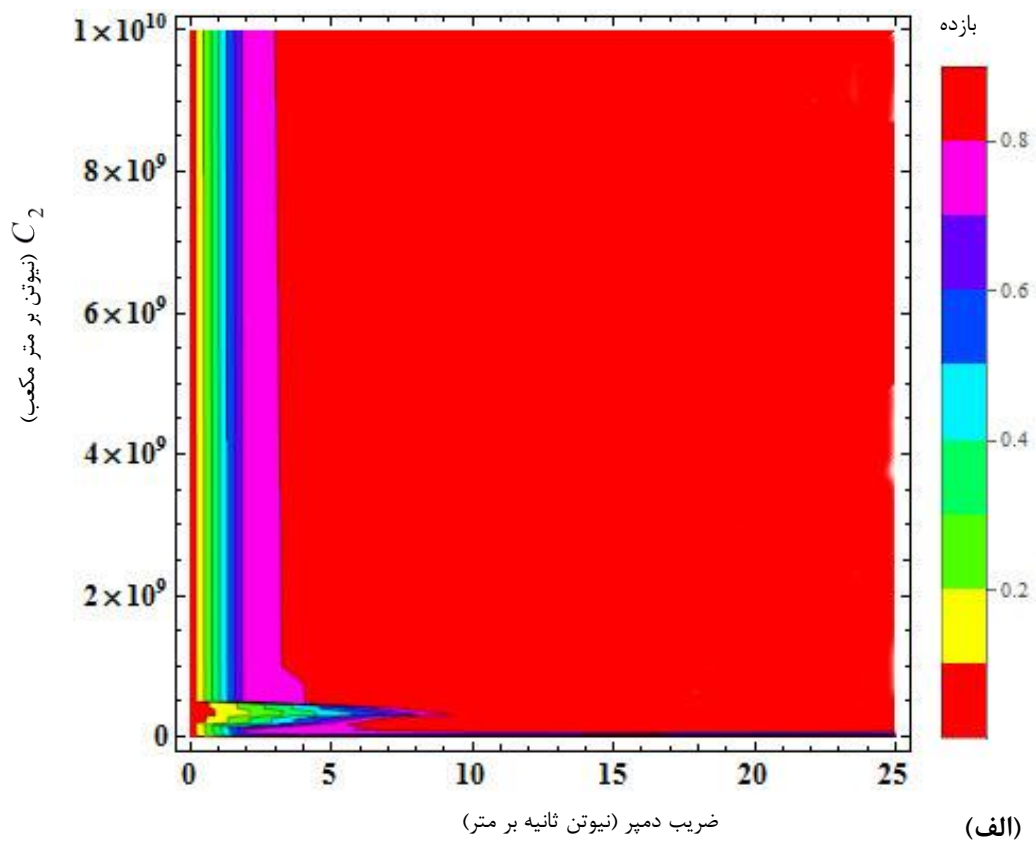
$d = 2.12 m$ ، بهینه‌سازی بازده صورت می‌گیرد که در اینجا، هدف بهینه کردن C_1 است؛ که به ازای

$C_1 = 19.9 \times 10^7 N/m^3$ ، بازدهی حداکثری $88/6679$ درصد اتفاق می‌افتد؛ که شکل ۷-۳۱ آن را

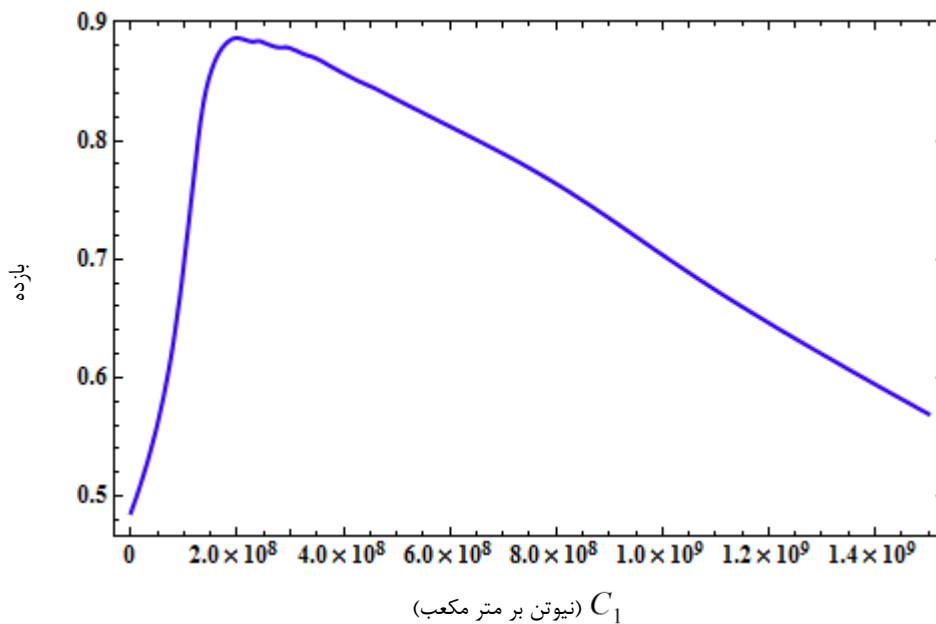
نمایش می‌دهد.

در نهایت مکان بهینه‌ی دمپر، برای این نوع بهینه‌سازی، بدست می‌آید؛ که شکل ۷-۳۲ آن را

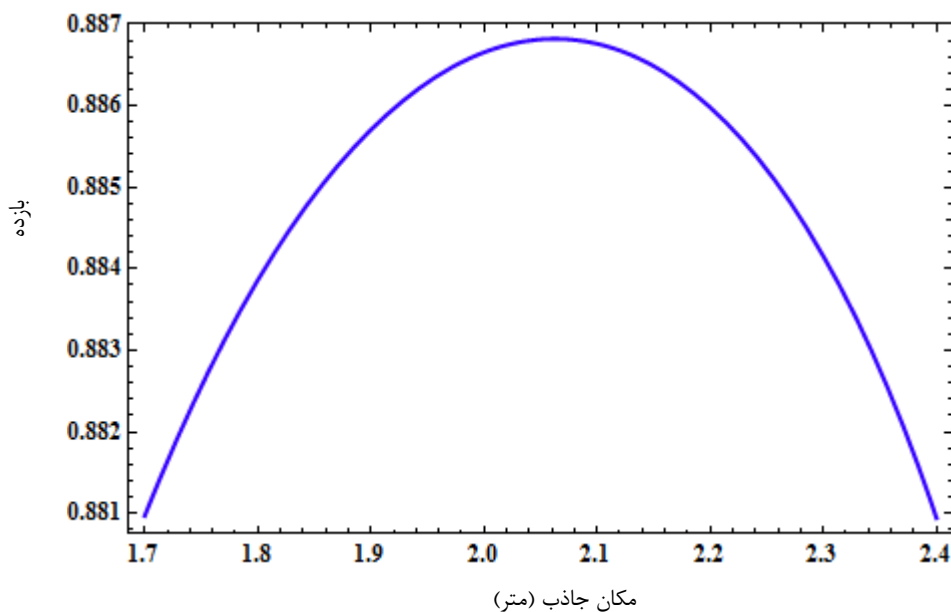
نمایش می‌دهد؛ که به ازای $d = 2.06 m$ بازدهی ماکزیمم $88/6821$ درصدی بدست می‌آید.



شکل ۷-۳۰ کانتور بهینه کردن بازده، بر حسب ضریب دمپیر و C_2 (سفتی)، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر غیرخطی سه-المانه؛ (الف) نمایش کل بازه‌ی بهینه‌سازی؛ (ب) نمایش بهینه‌سازی بازده در اطراف بازه‌ی بهینه



شکل ۳۱-۷ نمودار بازده بر حسب C_1 (سفتی)، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر غیرخطی سه-المانه



شکل ۳۲-۷ نمودار بازده بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر غیرخطی سه-المانه

۳-۲-۴-۷ بهینه کردن بازدهی جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی-غیرخطی

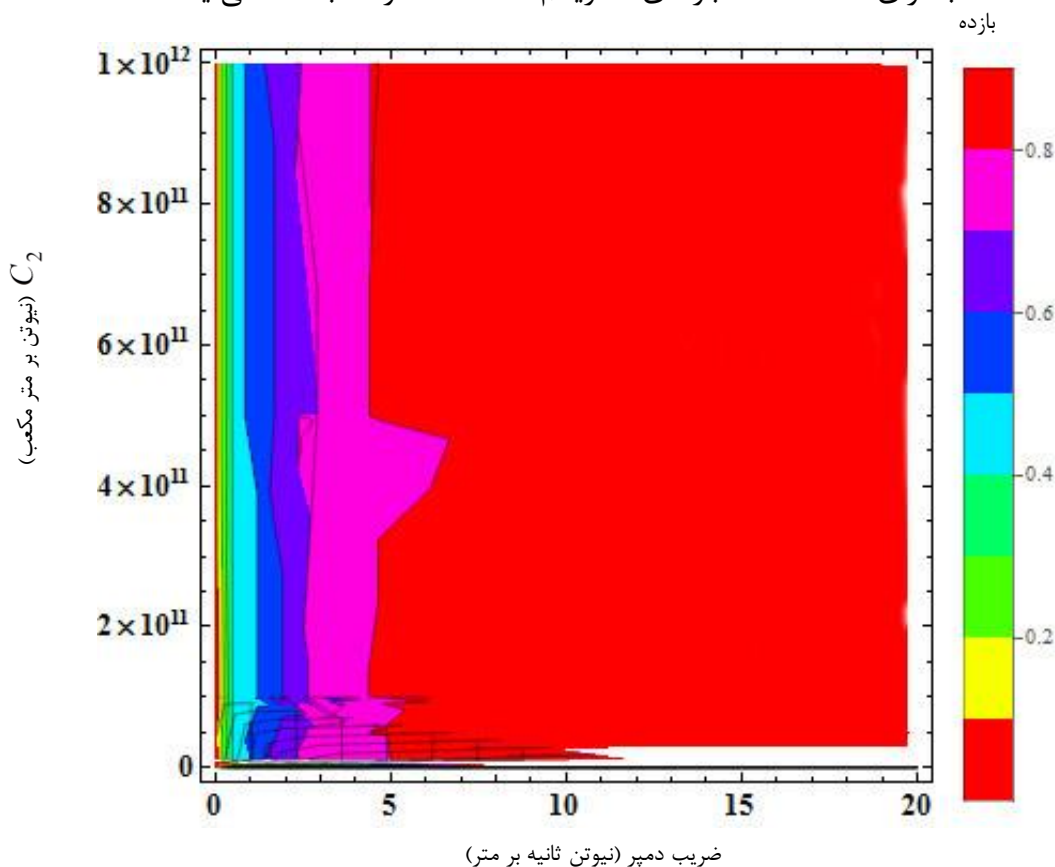
سیستم شکل ۱-۷ را با $\xi_p = 0.01$ ($p = 1, 2, \dots$), $V = 20.6339 \text{ m/s}$, $f(u_1) = k_1 u_1$,

$f(u_2) = C_2 u_2^3$ و داده‌های (۳۳-۷) (به جز λ , k_1 , C_2 و ξ_p) در نظر بگیرید. این بار بهینه‌سازی بازده بر

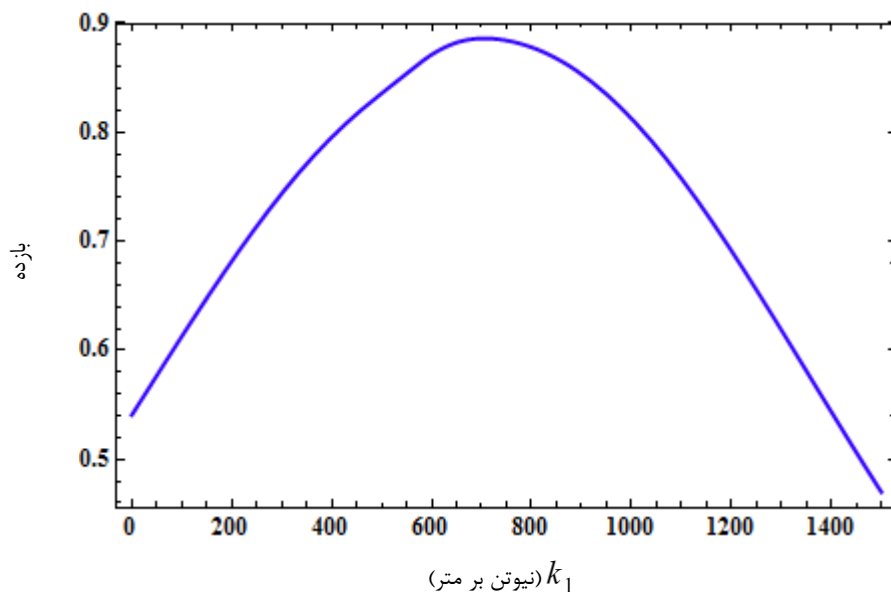
روی جاذب دینامیکی خطی-غیرخطی سه-المانه اعمال می‌شود.

بر اساس داده‌های مذکور، بهینه‌سازی انجام می‌پذیرد. شکل ۳۳-۷ با مقادیر $k_1 = 700 N/m$ و $d = 2.2 m$ رسم شده است. شکل ۳۳-۷ کانتور بازده را برحسب C_2 و λ نشان می‌دهد. با توجه به این کانتور، ماکزیمم بازده برابر با $88/60923$ درصد است؛ که به ازای $C_2 = 8.8 \times 10^8 N/m^3$ و $\lambda = 18.3 Ns/m$ اتفاق می‌افتد. بار دیگر با مقادیر $C_2 = 8.8 \times 10^8 N/m^3$ ، $\lambda = 18.3 Ns/m$ و $d = 2.2 m$ ، بهینه‌سازی بازده صورت می‌گیرد؛ که هدف بهینه کردن k_1 است و به ازای $k_1 = 706 N/m$ ، بازدهی حداکثری $88/61315$ درصد بدست می‌آید و شکل ۳۴-۷ آن را نمایش می‌دهد.

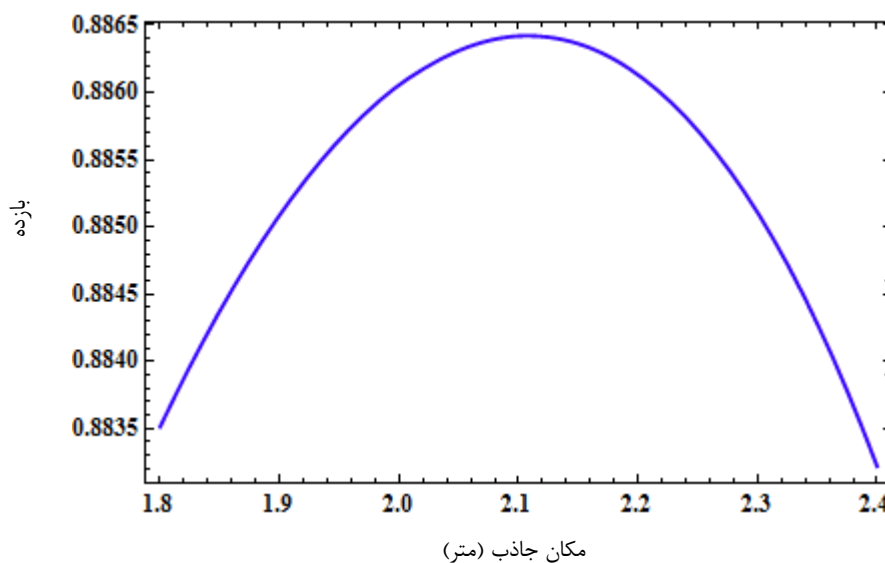
در نهایت مکان بهینه‌ی دمپر، برای این نوع بهینه‌سازی بدست می‌آید؛ که شکل ۳۵-۷ آن را نمایش می‌دهد؛ که به ازای $d = 2.1 m$ ، بازدهی ماکزیمم $88/6421$ درصد بدست می‌آید.



شکل ۳۳-۷ کانتور بهینه کردن بازده، بر حسب ضریب دمپر و C_2 ، مربوط به جاذب دینامیکی خطی-غیرخطی سه-المانه



شکل ۳۴-۷ نمودار بازده بر حسب k_1 ، مربوط به جاذب دینامیکی خطی-غیر خطی سه-المانه



شکل ۳۵-۷ نمودار بازده، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی خطی-غیر خطی سه-المانه

۴-۲-۴-۷ بهینه کردن بازدهی جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی غیر خطی-خطی

سیستم شکل ۱-۷ را با $\xi_p = 0.01$ ($p = 1, 2, \dots$), $V = 20.8679 \text{ m/s}$, $f(u_1) = C_1 u_1^3$,

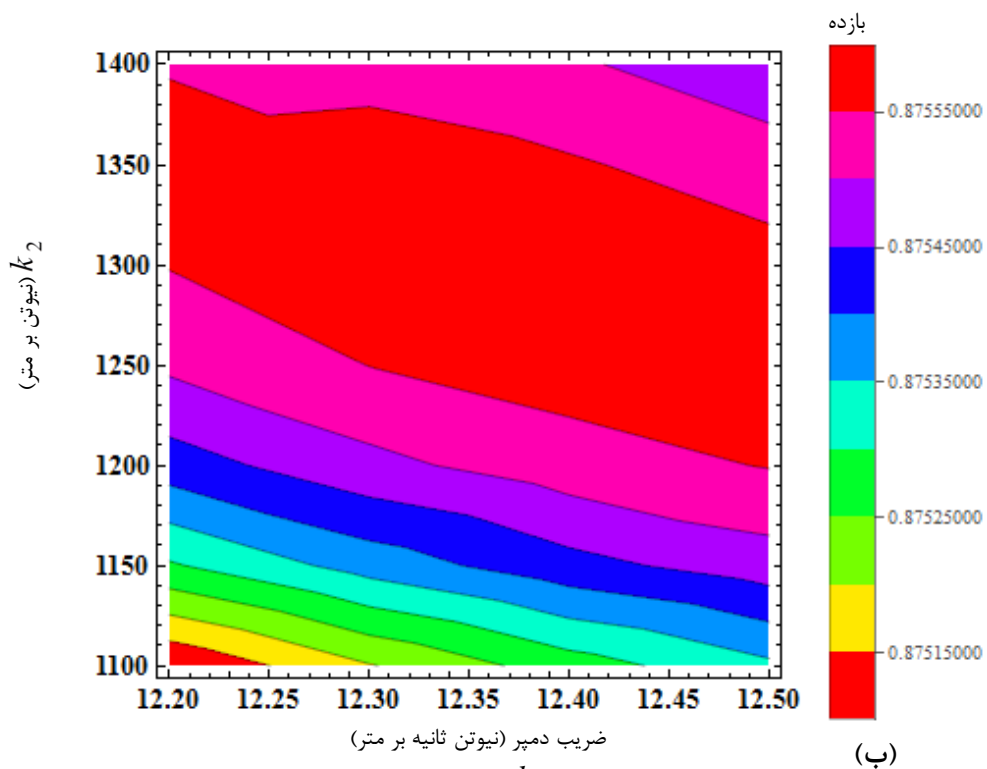
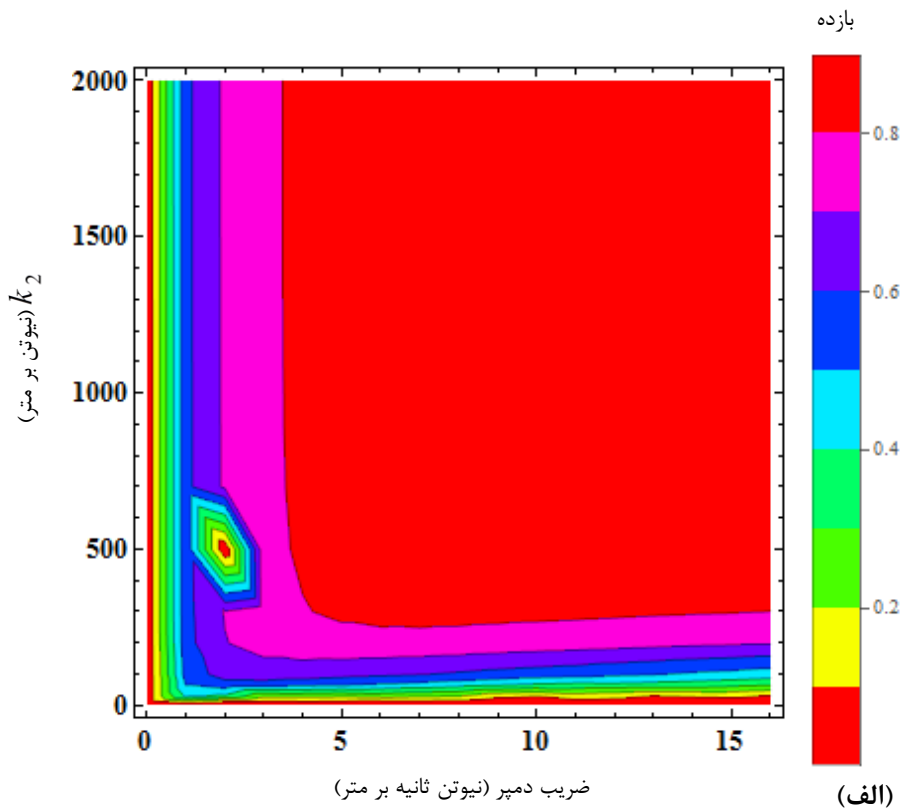
$f(u_2) = k_2 u_2$ و داده‌های (۳۴-۷) (به جز λ, C_1, k_2 و ξ_p) در نظر بگیرید. بهینه‌سازی بازده بر روی

جاذب دینامیکی غیر خطی-خطی سه-المانه به کار برده می‌شود.

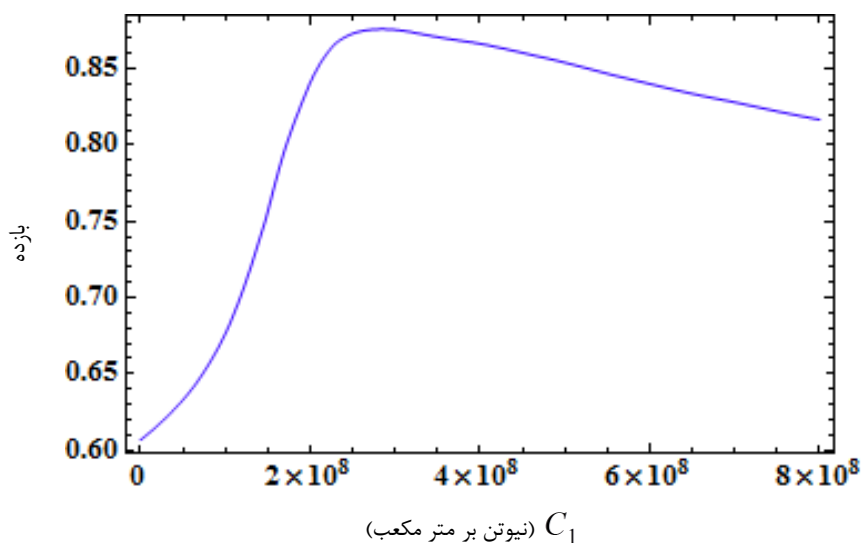
بر اساس داده‌های مذکور، بهینه‌سازی انجام می‌پذیرد. شکل ۳۶-۷ با مقادیر $C_1 = 3 \times 10^8 \text{ N/m}^3$

و $d = 2.1 \text{ m}$ رسم شده است. شکل ۷-۳۶، کانتور بازده را برحسب k_2 و λ نشان می‌دهد. با توجه به این کانتور ماکزیمم بازده برابر با $87/5581$ درصد است؛ که به ازای $k_2 = 1283 \text{ N/m}$ و $\lambda = 12.4 \text{ Ns/m}$ اتفاق می‌افتد. بار دیگر با مقادیر $k_2 = 1283 \text{ N/m}$ ، $\lambda = 12.4 \text{ Ns/m}$ و $d = 2.1 \text{ m}$ ، بهینه‌سازی بازده صورت می‌گیرد؛ که هدف بهینه کردن C_1 است و به ازای $C_1 = 285 \times 10^6 \text{ N/m}^3$ بازده‌ی حداکثری $87/5966$ درصد بدست می‌آید؛ که شکل ۷-۳۷ آن را نمایش می‌دهد.

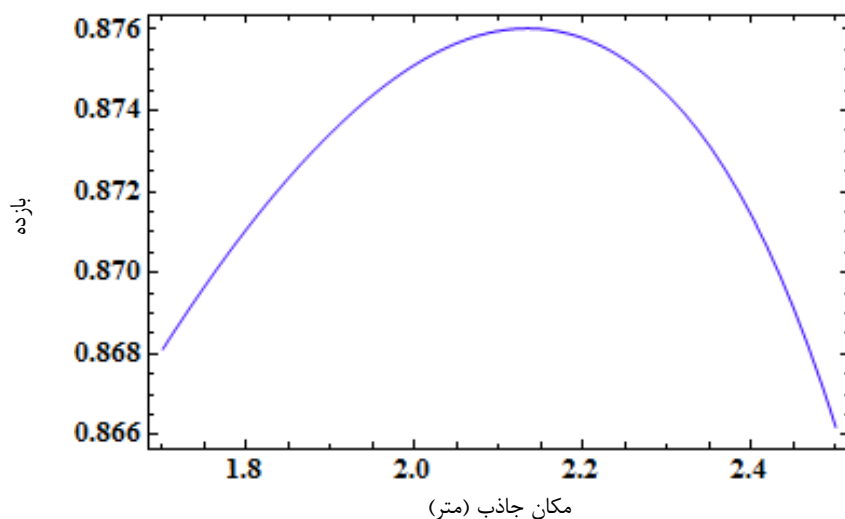
در نهایت مکان بهینه‌ی دمپر، برای این نوع بهینه‌سازی بدست می‌آید؛ که شکل ۷-۳۸ آن را نمایش می‌دهد؛ که به ازای $d = 2.13 \text{ m}$ بازده‌ی ماکزیمم $87/6026$ درصد بدست می‌آید. در اینجا لازم است، تا جمع‌بندی از نتایج این قسمت صورت پذیرد. درکل برای جاذب‌های سه-المانه، بهینه‌سازی بازده انجام پذیرفت؛ که مشاهده شد جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی هر دو فنر خطی در مقایسه با جاذب‌های دیگر، در دمپ سریع‌تر ارتعاش‌ها مؤثرتر خواهد بود. همانطور که قبلاً در مقاله‌ی [۲۲]، بهینه‌سازی بازده بر روی جاذب دینامیکی دو-المانه‌ی خطی و غیرخطی انجام پذیرفته بود؛ در آن مقاله بیان شده بود، جاذب دینامیکی خطی دو-المانه، نسبت به دو-المانه‌ی غیرخطی، در بهینه‌سازی با روش بازده، عملکرد بهتری را دارا می‌باشد. حال برای اینکه بتوان مقایسه‌ای بین جاذب-های دینامیکی سه-المانه با دو-المانه انجام داد، با توجه به اینکه جاذب‌های دینامیکی دو-المانه و سه-المانه، به ازای سرعت‌های مختلف، شاهد جابه‌جایی‌هایی مختلفی هستند؛ به عبارتی دیگر سرعتی که ماکزیمم خیز تیر رخ می‌دهد، در جاذب دو-المانه با سه-المانه متفاوت است و با تغییر پارامترها کمی این سرعت ماکزیمم، جابه‌جا می‌شود؛ لذا برای مقایسه‌ی اصولی‌تر، لازم است تا جاذب‌های دینامیکی را با پارامترهای بهینه‌ی سفتی، مکان جاذب و ضریب دمپر در سرعت‌های مختلف مقایسه نمود؛ تا بتوان عملکرد آنها را به صورت بهتری مشاهده نمود. لذا در اینجا مطلوب‌ترین جاذب دینامیکی دو-المانه، که جاذب دینامیکی دو-المانه‌ی خطی است و دارای بالاترین بازده است، را با



شکل ۳۶-۷ بهینه کردن بازده، بر حسب ضریب دمپر k_2 (سفتی)، مربوط به جاذب دینامیکی غیر خطی-خطی سه-المانه؛ الف) نمایش کل بازدهی بهینه‌سازی؛ ب) نمایش بهینه‌سازی بازده در اطراف بازدهی بهینه

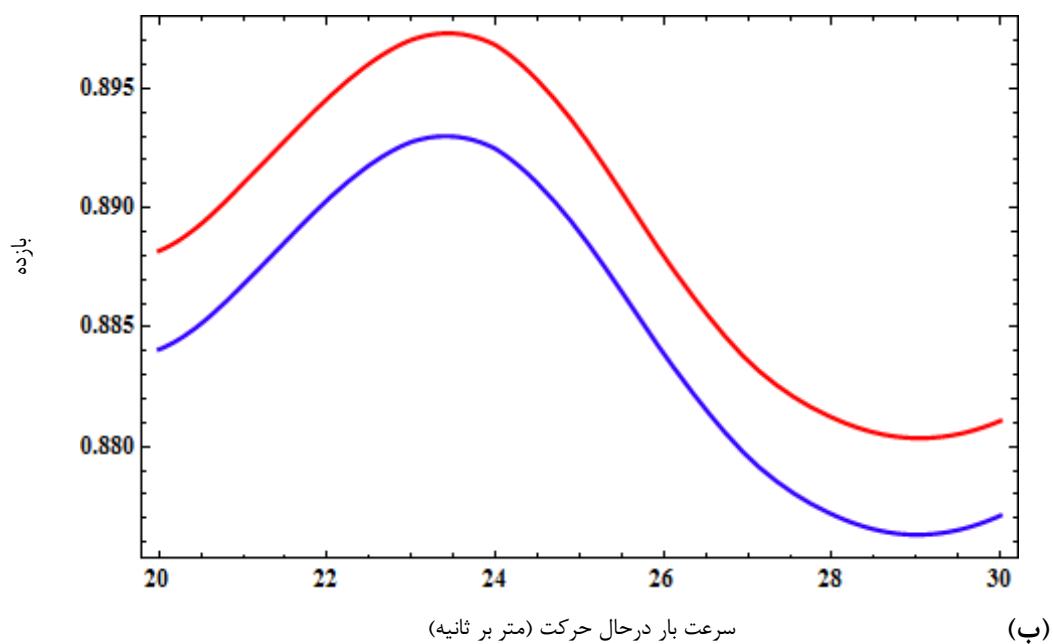
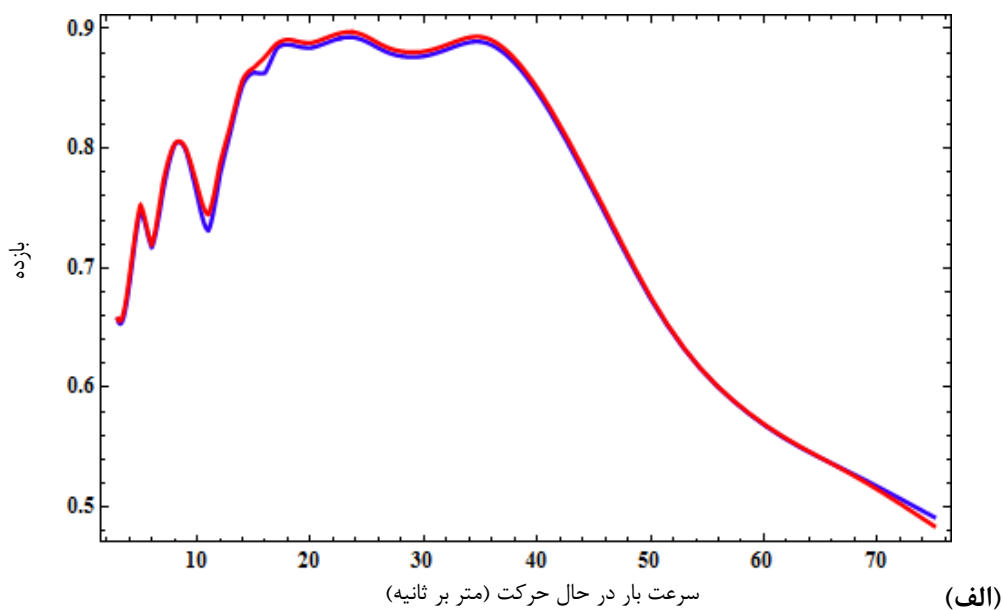


شکل ۳۷-۷ نمودار بازده بر حسب C_1 (سفتی)، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه



شکل ۳۸-۷ نمودار بازده، بر حسب مکان جاذب، مربوط به جاذب دینامیکی غیرخطی-خطی سه-المانه

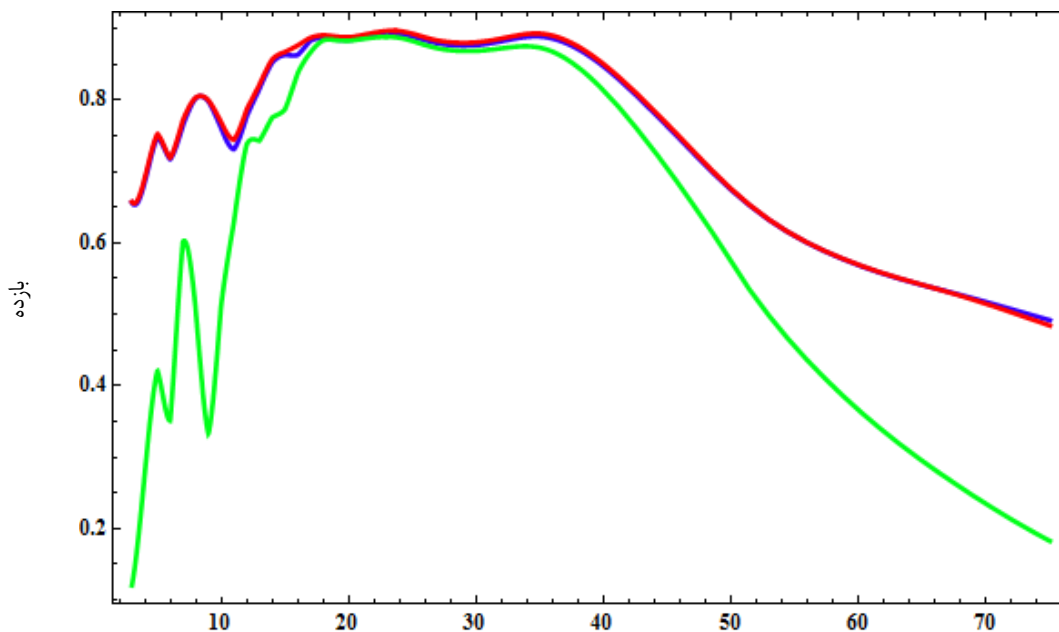
جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی هر دو فنرخطی (که آن هم در بین جاذب‌های دینامیکی این نوع، دارای بیشترین بازده است)، مقایسه می‌شود؛ که شکل ۳۹-۷ مقایسه‌ی آنها را نشان می‌دهد. به دلیل بهتر دیدن عملکرد آنها، مخصوصاً در اطراف سرعت بحرانی، در شکل ۳۹-۷، بازه‌ی محدودتر سرعت (در سرعت ۲۰ تا ۳۰ متر بر ثانیه) عملکرد این دو را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است، جاذب دینامیکی ۲ المانه‌ی خطی (بهینه‌شده با روش بازده) به ازای سرعت $V = 23.4086 \text{ m/s}$ ، بالاترین بازده یعنی ۸۹/۲۹۹۷ درصد را تجربه می‌کند و جاذب دینامیکی هر دو فنرخطی سه-المانه (بهینه



شکل ۷-۳۹ نمودار بازده بر حسب سرعت بار در حال حرکت؛ رنگ قرمز معرف جاذب دینامیکی هر دو فنر خطی سه-المانه و رنگ آبی معرف جاذب دینامیکی خطی دو-المانه

شده با روش بازده)، به ازای سرعت $V = 23.4304 \text{ m/s}$ ، بالاترین بازده، یعنی $89/7309$ درصد را تجربه می‌کند.

در ادامه در شکل ۷-۴۰، عملکرد جاذب دینامیکی خطی دو-المانه‌ی بهینه‌شده، را به همراه جاذب دینامیکی هر دو فنر خطی سه-المانه‌ی بهینه‌شده و جاذب دینامیکی هر دو فنر غیرخطی سه-



سرعت بار در حال حرکت (متر بر ثانیه)

شکل ۷-۴۰ نمودار بازده، بر حسب سرعت بار در حال حرکت؛؛ رنگ قرمز معرف جاذب دینامیکی هر دو فنر خطی سه-المانه، رنگ آبی معرف جاذب دینامیکی خطی دو-المانه و رنگ سبز مربوط به جاذب دینامیکی هر دو فنر غیر-خطی سه-المانه

المانه‌ی بهینه‌شده، را مشاهده می‌نمایید.

فصل ۱

جمع‌بندی نتایج

بحث و نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه برای تیرهای با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تحریک بار نقطه‌ای متناوب، جاذب‌های دینامیکی مختلفی استفاده شده است: الف) جاذب دینامیکی دو-المانه (شامل: جرم، یک فنر خطی و یک فنر غیرخطی)؛ ب) جاذب دینامیکی دو-المانه (شامل: جرم، فنر و دمپر)؛ ج) جاذب دینامیکی سه-المانه (شامل: جرم، یک فنر خطی و یک فنر غیرخطی) که فنر غیرخطی به تیر و جرم جاذب متصل شده و فنر خطی به جرم جاذب و دمپر متصل شده) و یک دمپر ویسکوز (متصل شده به تیر و فنر خطی).

معادلات حاکم بر آنها، در ابتدا بی‌بعد و با تغییر متغیرهای مناسب و استفاده از روش گلرکین به معادله‌ی ماتریسی واحدی تبدیل گردیده و درنهایت با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، حل و تشدیدهای اصلی و سوپرهارمونیک بررسی گردیده است. جاذب دینامیکی سه-المانه، به طور خاص‌تر بررسی شده و پارامترهای مؤثر بر منحنی پاسخ فرکانسی، به صورت عددی، برای تشدید سوپرهارمونیک مورد مطالعه قرار گرفت؛ که درنهایت نتایج ذیل حاصل گردید:

- 1) دامنه‌ی تحریک، بر روی منحنی پاسخ فرکانسی تأثیر زیادی دارد و باعث کج‌شدگی نمودار و در نتیجه ناپایداری سیستم می‌گردد؛ و نسبت به پارامترهای دیگر سیستم، بیشترین تأثیر را بر کج‌شدگی نمودار و دو شاخه شدن آن دارد.
- 2) ضریب میرایی (d_E) و ضریب دمپر (λ)، در کاهش ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ فرکانسی، مؤثر هستند و با افزایش آنها ماکزیمم دامنه کاهش می‌یابد.
- 3) تأثیر سفتی فنر خطی (C_2 در رابطه‌ی (4-6))، بر روی منحنی پاسخ فرکانسی بسیار کم است.
- 4) برای مقادیر کوچک‌تر از 0/1، سفتی فنر غیرخطی (C_1 در رابطه‌های (1-6) یا (4-6))، بر روی ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ فرکانسی، تأثیر مستقیم دارد و با کاهش آن، دامنه کاهش می‌یابد.
- 5) مقدار دامنه‌ی تحریک، همانند محل اعمال نیرو، بر محل بهینه‌ی جاذب، مؤثر است.

برای جاذب دو-المانه (شامل یک فنر خطی و یک فنر غیرخطی)، فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی محاسبه شده و اثر پارامترهای مختلف بر روی آنها مورد بررسی قرار گرفت و نتایج ذیل حاصل گردید:

- ۱) سفتی فنر خطی بر روی فرکانس طبیعی غیرخطی و خطی مؤثر بوده و با افزایش سفتی خطی، مقدار فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند.
 - ۲) افزایش و کاهش سفتی فنر غیرخطی، بر روی فرکانس طبیعی خطی بی‌اثر بوده و اما افزایش سفتی فنر غیرخطی، باعث افزایش فرکانس طبیعی غیرخطی می‌شود.
 - ۳) مکان جاذب، بر فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی، به مقدار کمی مؤثر بوده و هرچه جاذب به وسط تیر نزدیک‌تر باشد، فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی مقدار کمتری را خواهند داشت.
- در این پایان‌نامه برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، در معرض بار در حال حرکت، از جاذب دینامیکی سه-المانه شامل: جرم، یک فنر خطی و یک فنر غیرخطی (که فنر غیرخطی به تیر و جرم جاذب متصل شده و فنر خطی به جرم جاذب و دمپر متصل شده) و یک دمپر ویسکوز (متصل شده به تیر و فنر خطی) استفاده شده است. برای حل، با در نظر گرفتن تک مود، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شده و تشدیدهای اصلی و سوپرهارمونیک بررسی شده و عوامل مؤثر بر منحنی پاسخ فرکانسی تیر و جاذب، در حالت تشدید سوپرهارمونیک، بررسی گردیده و نتایج ذیل حاصل شده است:
- ۱) تأثیر دامنه‌ی تحریک، بر افزایش ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ فرکانسی زیاد بوده و باعث کج-شدگی نمودار و در نتیجه ناپایداری سیستم می‌گردد؛ و نسبت به پارامترهای دیگر سیستم، بیشترین تأثیر را بر کج‌شدگی نمودار و دو شاخه شدن آن دارد.
 - ۲) ضریب دمپر (λ)، در کاهش ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ فرکانسی، مؤثر بوده و با افزایش آن ماکزیمم دامنه کاهش می‌یابد.
 - ۳) تأثیر سفتی فنر خطی، بر روی منحنی پاسخ فرکانسی کم است.
 - ۴) سفتی فنر غیرخطی، بر روی ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ فرکانسی، تأثیر مستقیم دارد و با کاهش آن، ماکزیمم دامنه کاهش می‌یابد.
 - ۵) محل بهینه‌ی جاذب بر روی تیر، به طول تیر و سرعت بار در حال حرکت وابسته است.
- همچنین در این کار، برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، در معرض بار در حال حرکت، از جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی خطی و غیرخطی (شامل: جرم، دو فنر و یک دمپر) استفاده گردید و با بهینه‌سازی‌هایی

که صورت پذیرفت، بهترین عملکرد این جاذب‌ها در کاهش ارتعاش‌های تیر مشخص و در نهایت نتایج ذیل حاصل گردید:

- (۱) جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی بهینه‌شده‌ی هر دو فنر خطی، نسبت به جاذب دو-المانه‌ی بهینه‌شده‌ی خطی (شامل فنر و دمپر)، بازدهی بالاتری را دارد.
- (۲) جاذب دینامیکی سه-المانه‌ی بهینه‌شده‌ی هر دو فنر غیرخطی، نسبت به جاذب دو-المانه‌ی بهینه‌شده‌ی غیرخطی (شامل فنر و دمپر)، در کاهش ماکزیمم خیز تیر مؤثرتر است.

مراجع

[۱] نوری ب. و فرشیدیان فر ا.، (۱۳۹۱)، "کاربردها، مزایا و معایب جاذب‌های پویای ارتعاشات"،

مجله مهندسی مکانیک، شماره‌ی ۸۷، سال بیست و یکم، صص ۶۴-۵۴.

[2] Den Hartog, J., *Mechanical Vibration*, Mac Grew-Hill, 1965.

[3] Huang, Y.M., and Chen, c.c., " Optimal design of dynamic absorbers on the vibration and noise control of a fuselage", *Journal of Computer and Structures*, 2000, pp. 691- 702.

[4] Cheung. Y.L., " H- infinity and H_2 optimizations of dynamic vibration absorber for suppreessing vibration in plates", *Journal of Sound and Vibration*, 2009, pp. 29-42.

[5] Zilletti, M., Elliott, S.J., Rustighi, E., " Optimization of dynamic vibration absorber to minimize kinetic energy and maximize internal power dissipation", *Journal of Sound and Vibration*, 2012, pp. 4093- 4100.

[6] L. Fry' ba, *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Telford, London, 1999.

[7] Timoshenko S., Young D.H., Weaver W., *Vibration Problems in Engineering*, fourth ed., Wiley, New York, 1974.

[8] Esmailzadeh E., Ghorashi M., *Vibration analysis of beams traversed by uniform partially distributed moving mass*, *Journal of Sound and Vibration*, 184 (1), 1995, pp. 9-17.

[9] Wu J.J., *Study on the inertia effect of helical spring of the absorber on suppressing the dynamic responses of a beam subjected to a moving load*, *Journal of Sound and Vibration*, 297, 2006, pp. 981-999.

[10] Den Hartog J.P., *Mechanical Vibrations*, Mc Graw-Hill, New York, 1985.

-
- [11] Greco A., Santini A., Dynamic response of a flexural non-classically damped continuous beam under moving loadings, *Computers and Structures*, 80, 2002, pp. 1945-1953.
- [12] Lee Y.S., Kerschen G., Vakakis A.F., Panagopoulos P.N., Bergman L.A., Farland D.M.Mc, Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, *essentially nonlinear attachment*, *Physica Physica D* 204, 2005, pp. 41–69.
- [13] Kwon H.-C., Kim M.-C., Lee I.-W., Vibration control of bridges under moving loads, *Computers and Structures*, 66, 1998, pp. 473–480.
- [14] Muserosa P., Martinez- Rodrigo M.D., Vibration control of simply supported beams under moving loads using fluid viscous dampers, *Journal of Sound and Vibration*, 300, 2007, pp. 292-315.
- [15] Wang J.F., Lin C.C., Chen B.L., Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass dampers, *International Journal of Solids and Structures*, 40, 2003, pp. 465-491.
- [16] Yau J.D., Yang Y.B., Vibration reduction for cable-stayed bridges travelled by high-speed trains, *Finite Elements in Analysis and Design*, 40, 2004, pp. 341-359.
- [17] Das A.K., Dey S.S., Effects of tuned mass dampers on random response of bridges, *Computers and Structures*, 43, 1992, pp. 745-750.
- [18] Lin J., Lewis F.L., Huang T., Passive control of the flexible structures subjected to moving vibratory systems, *ASME Special Publication on Active and Passive Control of Mechanical Vibrations*, PVP 289, 1994, pp. 11-18.
- [19] Georgiades F., Vakakis A.F., Dynamics of a linear beam with an attached local nonlinear energy sink, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 12, 2005, pp. 643-651.
- [20] Vakakis A.F., Manevitch L.I., Gendelman O., Bergman L., Dynamics of linear discrete systems connected to local essentially nonlinear attachments, *Journal of Sound and Vibration*, 264, 2003, pp. 559-577.
- [21] Gendelman O.V., Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity, *Journal of Sound and Vibration*, 315, 2008, pp. 732-745.
- [22] Samani F.S., Pellicano F., Vibration reduction on beams subjected to moving loads using linear and nonlinear dynamic absorbers, *Journal of Sound and Vibration*, 325, 2009, pp. 742-754.

-
- [23] Samani F.S., Pellicano F., Masoumi .A, Performances of dynamic vibration absorbers for beams subjected to moving loads, *Nonlinear Dyn*, 73, 2013, pp. 1065–1079.
- [24] Abu-Alshaikha I.M, Al-Rabadib A.N, Alkhaldi H.S, Dynamic Response of Beam with Multi-Attached Oscillators and Moving Mass: Fractional Calculus Approach, *Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering*, 2014, pp. 275 – 288 .
- [25] Maurer Sohne Group, " Tuned Mass and Viscous Damper", *Structural Protection Systems*, 2011, pp. 1-32.
- [26] Chikaher, G., Hirst, J., " Aspire Tower, Doha, Qatar", *the Arup Journal* , 2007, pp. 3-13.
- [27] Luongo, A., Zulli, D., Dynamic analysis of externally excited NES-controlled systems via a mixed Multiple Scale/Harmonic Balance algorithm, *Nonlinear Dyn*, 2012, pp. 2049–2061.
- [28] Wu J.J., Study on the inertia effect of helical spring of the absorber on suppressing the dynamic responses of a beam subjected to a moving load, *Journal of Sound and Vibration*, 297, 2006, pp. 981–999.
- [29] Ahmadabadi Z.N., Khadem S.E., Nonlinear vibration control of a cantilever beam by a nonlinear energy sink, *Mechanism and Machine Theory*, 50, 2012, pp. 134–149.

Abstract

The present work is focused on the analysis of the effectiveness of dynamic vibration absorbers applied to Euler-Bernoulli beam with simply supported excited by moving load or periodic point load. In this work, is used of different dynamics absorbers:

- a) 2-elements dynamic absorber, consist of mass, a linear spring and a nonlinear spring;
- b) 2-elements dynamic absorber, consist of mass, a nonlinear spring and a viscous damper;
- c) 3-elements dynamic absorber, consist of mass, a linear spring, a nonlinear spring and a viscous damper.

For solving differential equations governing the problem dynamics, is used of self initiated way. Initially, the governing equations of the beam and absorber dynamics is became dimensionless, and introducing appropriate variable and is used of Galerkin method, the equations is converted to matrix form. Finally, according to the multiple scale method, the problem is solved. Primary resonances and super-harmonic resonances is studied and the frequency- response diagrams is drawn. For 3-elements absorber, different parameters effect on frequency- response diagram is investigated and amplitude and place of force for finding optimal location is investigated.

Keywords: Dynamics vibration absorber, Moving load, Super-harmonic resonances, Galerkin method, Nonlinear vibration, Multiple scale method.



Shahrood University of Technology

Faculty Industrial Mechanical Engineering

*Vibration reduction of beams subjected to moving
load using linear and nonlinear three-elements
dynamic vibration absorber*

Hossein Lakzian

Supervisors:

Doctor Ardeshir Karami mohammadi

Doctor Amir Jalali

September 2015