دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

حل تحلیلی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در لوله خمیده

امین احمدی جنیدی

استاد راهنما:
دکتر محمد حسن کیهانی

مهر ۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده :مکانیک

گروه : تبدیل انرژی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای امین احمدی جنیدی

تحت عنوان: حل تحلیلی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکو الاستیک در یک لوله خمیده

در تاریخ ۱۳۸۸/۷/۲۵ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد (رساله دکتری) مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : محمد حسن کیهانی		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : محمد جواد مغربی		نام و نام خانوادگی : مجتبی قطعی	
نام و نام خانوادگی : علی جباری مقدم			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تعهد نامه

اینجانب امین احمدی جنیدی .... دانشجوی دوره کارشناسی ارشد / دکتری رشته مکانیک - تبدیل انرژی ....
دانشکده مهندسی مکانیک .... دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه / رساله حل تحلیلی جریان سیال و انتقال حرارت بین سیال و سیلو الاستیکی دو بعدی ارائه شده .... تحت راهنمایی دکتر [illegible] .... متعهد می شوم :

- تحقیقات در این پایان نامه / رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصلت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه/رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آمدن نتایج اصلی پایان نامه / رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه/رساله رعایت می‌گردد .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه/رساله ،در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه/رساله ،در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ : ۲۵/ ۷/ ۸۸

امضاء دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه‌های رایانه‌ای ، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و این مطلب باشد به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه / رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد .

چکیده

سیالات غیرنیوتنی دارای کاربرد وسیعی در فعالیتهای نظامی، پزشکی و صنعتی می‌باشند که از دیرباز تا کنون توجه ویژه‌ای به آن معطوف شده است. دانش بررسی جریان سیالات غیر نیوتنی، امروزه به رئولوژی معروف گردیده است و به دلیل ویژگی‌های خاص موجود در این‌گونه از سیالات، رفتارهای متفاوت و غیرقابل انتظاری از این‌گونه از سیالات بروز می‌یابد.

هدف از این پژوهش، بررسی *جریان سیال ویسکوالاستیک و انتقال حرارت* آن در لوله خمیده، مدل‌سازی ریاضی، حل آن و سپس تحلیل و ارزیابی حل موجود می‌باشد.

در این پژوهش، با استفاده از سریهای حساب اختلالات، حل تقریبی مناسبی برای جریان سیال ویسکوالاستیک مدل مرتبه دو ارائه شده و در نهایت با بهره‌گیری از همین حل، بررسی انتقال حرارت این مدل از سیال نیز مورد تحلیل و ارزیابی قرار گرفت. در ادامه نیز حل انتقال حرارت سیال مدل اولدروید-بی در یک لوله خمیده نیز با استفاده از همین روش مورد محاسبه قرار گرفت.

نتایج حاصل از این پژوهش در بخش بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک مدل سیال مرتبه دو در لوله خمیده نشان می‌دهد که افزایش عدد وایزنبرگ در سیال مرتبه دو ضمن تقویت شدت جریان‌های ثانویه، باعث متمایل شدن گردابه‌های تیلور و موقعیت بیشینه سرعت محوری به سمت ناحیه بیرونی لوله خمیده شده است. همچنین افزایش زمان رهایی از تغییر شکل در سیال مرتبه دو همراه با کاهش درگ جریان در لوله خمیده خواهد شد.

تحلیل‌های انجام گرفته روی انتقال حرارت جریان‌ها سیالات مدل اولدروید-بی و مرتبه دو، نتایج مشابهی را نشان می‌دهد. افزایش عدد وایزنبرگ، تاثیر بسزایی روی انتقال موقعیت بیشینه دمای بی‌بعد سیال دارد. همچنین، با افزایش عدد رینولدز در حالت جریان خزشی، مقدار ناسلت کاهیده، که معیاری برای مقایسه عدد ناسلت بین لوله خمیده و صاف می‌باشد، کاهش می‌یابد. اما این روند در قبال افزایش عدد رینولدز در حالت جریان دارای اینرسی با افزایش مقدار ناسلت کاهیده مواجه می‌شود.

کلمات کلیدی: *انتقال حرارت؛ سیال ویسکوالاستیک؛ سیال مرتبه دو؛ سیال اولدروید-بی؛ حساب اختلالات*

فصل اول

مروری بر سیالات ویسکوالاستیک

در این فصل، ابتدا گونه‌ها و ساختار مولکولی تشکیل‌دهنده مختلف سیالات غیرنیوتنی معرفی می‌گردد. در ادامه معرفی انواع مختلف این سیالات، نمونه‌ی خاصی از این سیالات به نام سیالات ویسکوالاستیک، ارائه می‌گردد. با توجه به ساختار ویژه‌ای که این سیالات دارند، در قبال پدیده‌هایی که رخ می‌دهد، از خود رفتارهای متمایز و ناآشنایی را به نمایش می‌گذارند که در این بخش، به برخی از این پدیده‌ها اشاره خواهد شد. در پایان نیز انواع روابط ریاضی موجود در این زمینه، مدل‌های ریاضی خطی و غیر خطی ارائه‌شده برای این دسته از سیالات معرفی خواهند شد.

۱-۱) مطالعات اولیه در مورد سیالات غیرنیوتنی

طبق مدلی که نیوتن برای قانون پایه حاکم بر سیالات ارائه نمود، تنش، تابعی خطی از نرخ برش می‌باشد. بدین ترتیب با رسم نمودار تنش نسبت به نرخ برش به یک نمودار خطی دست خواهیم یافت و سیالاتی که از این قانون تبعیت می‌کنند را سیالات نیوتنی نامیده و شیب نمودار حاصل را ویسکوزیته می‌نامند.

با گذشت زمان و پیشرفت دانش مکانیک و به ویژه مکانیک سیالات، گونه‌هایی از سیالات یافت شد که از قانون ارائه‌شده نیوتن تبعیت نمی‌کردند. بدین ترتیب دسته دیگری از سیالات تحت عنوان سیالات غیرنیوتنی طبقه‌بندی و معرفی گردیدند. بسیاری از محلول‌های پلیمری از این دسته از سیالات به حساب می‌آیند. همچنین موادی مانند سس‌ها، رنگ، خون و شامپو نیز از این جمله مواد در نظر گرفته می‌شوند. نمودار تنش برشی این‌گونه از مواد بر حسب نرخ برش آنها، بر خلاف سیالات نیوتنی، به صورت خطی نمی‌باشد. به همین دلیل ارائه یک مقدار ثابت برای ویسکوزیته این مواد ممکن نخواهد بود. دانش بررسی جریان این‌گونه مواد را رئولوژی گویند که اولین بار توسط بینگهام[1] در ۱۹۲۸ و به پیشنهاد همکارش مارکوس راینر[2] ارائه شد.

در قرن نوزدهم، فیزیکدانانی مانند ماکسول، بولتزمن و کلوین بر روی خزش و بازیافت شیشه‌ها، فلزات و لاستیک تحقیقاتی را به انجام رساندند. در اواخر قرن بیستم، به دلیل ظهور پلیمرهای مصنوعی، ویسکوالاستیسیته، بیش از پیش مورد بررسی و تحقیق قرار گرفت.

به طور کلی سیالات غیر نیوتنی به سه دسته سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان، سیالات غیر نیوتنی تابع زمان و سیالات ویسکوالاستیک تقسیم بندی می‌شوند.

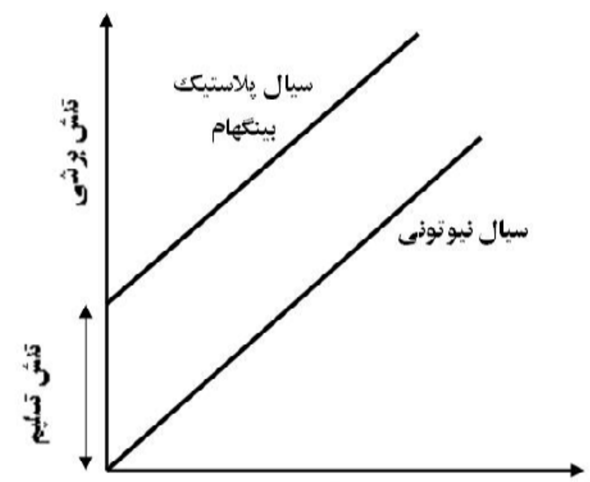
---

[1] Eugene C. Bingham
[2] Markus Reiner

۱-۱-۱) سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان

در اینگونه از سیالات، ویسکوزیته تابعی غیر خطی از نرخ برش می‌باشد و به تبع تنش برشی نیز تنها تابعی غیـر خطی از نرخ برش است. البته خود این سیالات به دو دسته کلی سیالاتی دارا و فاقد تنش تسلیم تقسیم می شـوند. در موادی که دارای تنش تسلیم هستند، تنش باید به حدی افزایش یابد که از مرز تنش تسلیم بگذرد و ماده شروع به سیلان کند. برای مثال خمیر دندان مثال بسیار مناسبی برای این مواد است به نحوی کـه تـا زمـانی کـه میـزان فشردگی پوسته آن به حد مشخصی نرسد، خمیر دندان از آن خارج نمی شود. علـت ایـن امـر هـم ایـن اسـت کـه ساختمان این مواد می‌تواند تنش برشی کمتر از حد تسلیم را بدون ایجـاد جریـان، تحمـل نمایـد. ولـی پـس از آن ساختار مولکولی آن شکسته و ماده اجازه حرکت برشی را پیدا می‌کند.

معروف ترین این دسته از مواد، پلاستیک بینگهام است. در واقع پلاستیک بینگهام یک سیال نیوتنی دارای تنش تسلیم است (شکل ۱-۱ را مشاهده کنید). نمونه هایی از سیالات دارای تنش تسلیم عبارتند از: برخی پلاسـتیکهای مذاب، گل حفاری چاه نفت، دوغ آبهای گچ و ماسه، شکلات مایع، کرم های طبی، خمیر دندان، مارگارین و گریسها.



شکل ۱-۱. منحنی تنش برشی نسبت به نرخ برش یک سیال نیوتنی و یک سیال بینگهام

۱-۱-۲) سیالات غیر نیوتنی وابسته به زمان

در این‌گونه از سیالات، ویسکوزیته نه تنها تابعی از شدت برش است، بلکه تابعی از زمان نیز می باشد. به عبارت دیگر در این سیالات، در حین یک نرخ برش ثابت، ساختمان مولکولی ماده بطور مداوم در حال تغییر است و لذا مقدار ویسکوزیته و تنش برشی نیز تابعی از زمان خواهد بود. به‌طور کلی این مواد به دو دسته سیالات تیکسوتروپیک [1] و سیالات رئوپکتیک [2] (آنتی تیکسوتروپیک [3]) تقسیم می‌شوند.

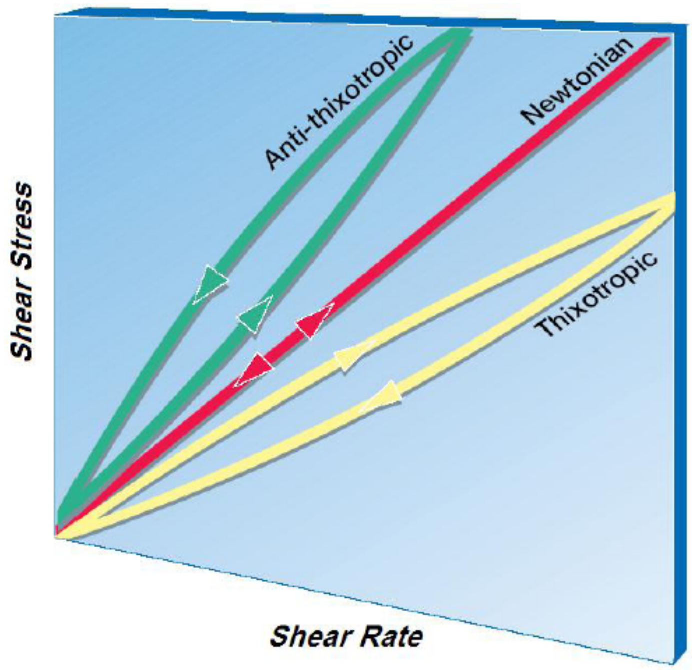
تیکوستروپی، ویژگی است که برای برخی از سیالات غیر نیوتنی برای نمایش وابستگی ویسکوزیته به زمان بیان می‌گردد. در سیالات تیکسوتروپیک چنانچه ماده در معرض یک شدت برش ثابت و دمای معین قرار داده شود، تنش برشی یک کاهش برگشت پذیر نسبت به زمان پیدا می‌کند. البته در نهایت ویسکوزیته به سمت یک مقدار حدی میل خواهد کرد. از دیدگاه مولکولی چنانچه یک سیال تیکسوتروپیک تحت یک برش ثابت قرار گیرد، به‌تدریج ساختمان مولکولهای آن شروع به شکستن می‌کند و لذا با افزایش زمان ویسکوزیته سیال کاهش می‌یابد. مولکولهای شکسته شده در صورت برخورد در جهت مناسب امکان بازگشت به ساختار اولیه خود را دارند و از آنجا که با گذشت زمان بر تعداد مولکول‌های شکسته شده افزوده می‌شود، بنابراین امکان برخورد مولکولها و فعالتر شدن مکانیزم ترمیم افزایش می‌یابد. به همین دلیل پس از گذشت مدت زمانی مشخص، تعادلی بین فرآیندهای شکست و ترمیم به وجود می‌آید و ویسکوزیته به سمت مقدار ثابتی میل می‌کند. به عنوان نمونه برخی پلیمرهای درشت مولکول و محلولهای مواد غذایی دارای این رفتار هستند. گونه‌ای از خاک رس و گل حفاری خاصیت تیکوستروپیک از خود نشان می‌دهند. عسلی که از زنبور عسل بدست می‌آید نیز در شرایطی خاص، همین خاصیت را از خود به نمایش می‌گذارد.

سیالات رئوپکتیک مواد بسیار نادری هستند که رفتار آنها کاملاً بر عکس مواد تیکسوتروپیک است. از دیدگاه مولکولی، این مواد ساختار مولکولی اولیه‌ای ندارند ولی با ایجاد برش و برخورد مولکولها به یکدیگر شانس تشکیل یک ساختار را پیدا می‌کنند. بنابراین تحت برش ثابت و در شرایط ایزوترمال، یک افزایش برگشت پذیر در تنش

[1] Thixotropic
[2] Rheopectic
[3] Antithixotropic

برشی و ویسکوزیته آنها مشاهده می‌شود. به عنوان مثال‌هایی از این دست می‌توان بـه گـچ سـاختمان سـازی و یـا جوهرهای چاپگر اشاره کرد. در سال‌های اخیر، از خاصیت رئوپیکتیکی برای ساخت زره بدن و ماشین‌های جنگـی و همچنین ساخت دیگر تجهیزات محافظت کننده برای کاهش ضربه ناشی از تنش در حوادثی که بـرای ورزشـکاران، موتورسواران و چتربازان رخ می‌دهد، استفاده شده است.

در شکل ۱-۲ منحنی تنش در برابر نرخ برش برای مواد رئوپکتیک و تیکسوتروپیک نشان داده شده است.



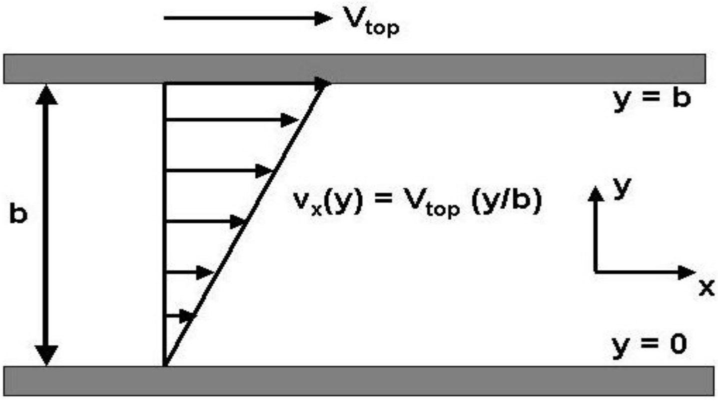
شکل ۱-۲. منحنی های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات غیر نیوتنی تابع از زمان

۱-۱-۳) سیالات ویسکوالاستیک

سیالات ویسکوالاستیک موادی هستند که به طور توامان خواص ویسکوز و الاستیک را دارا می‌باشند. از آنجا کـه در سیالات، تنش، تابعی از نرخ برش و در جامدات، تابعی از خود برش است، لذا ایـن مـواد دارای خـواص همزمـان جامد و سیال هستند. در ادامه مباحث، اطلاعات جامع‌تری از این دسته از سیالات ارائه خواهد گردید.

۱-۲) آزمایش کوئت

آزمایش جریان برشی ساده که به آزمایش جریان کوئت بین دو صفحه تخت معروف است، می‌تواند به بررسی رفتار جریان مواد ویسکوالاستیک بپردازد. مطابق شکل ۱-۳، چنانچه یک سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه تخت موازی قرار گیرد و صفحه بالایی با سرعت ثابت V_{top} حرکت نماید، یک جریان برشی ساده ایجاد می شود. اگر عمل برش دهی قطع و حرکت صفحه بالایی بطور ناگهانی متوقف شود، رفتار سیالات نیوتنی و ویسکوالاستیک کاملا با هم متفاوت است. برخلاف سیالات نیوتنی که در آنها تنش به‌طور آنی صفر می‌شود، در مواد ویسکوالاستیک کاهش تنش برشی دارای بازه زمانی است که آن را زمان آسودگی از تنش[1] می‌نامند.



شکل ۱-۳. جریان برشی ساده (جریان کوئت)

همچنین برای سیال ویسکوالاستیک، چنانچه در حین حرکت صفحه بالایی، تنش برشی به‌طور آنی قطع شود (نیروی روی صفحه قطع و صفحه به حال خود رها گردد)، صفحه بالایی تا حدی به عقب بر می‌گردد، در حالیکه در سیالات نیوتنی توقف صفحه بالایی نیز آنی است. در واقع بازگشت صفحه بالایی ناشی از خاصیت الاستیک ماده است، اما این بازگشت نسبت به مواد الاستیک (با خواص الاستیک یکسان) کندتر است که این موضوع ناشی از

[1] Relaxation time

وجود مکانیزم ویسکوز در این مواد است. بر این اساس ادعا می شود که این مواد دارای یـک حافظـه[1] جهـت دار از تغییر شکلهای خود بوده و از حالت قبلی خود آگاه هستند.

۱-۳) پدیده‌های جریان در سیالات پلیمریک

هدف از ارائه این بخش بیان برخی از تفاوتهای کیفیتی میان سیالات نیوتنی و غیر نیوتنی می‌باشد.

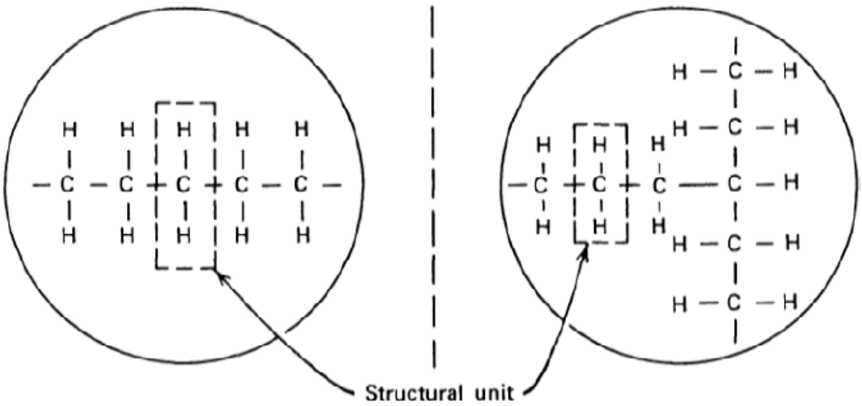
۱-۳-۱) ماهیت شیمیایی سیالات پلیمری

یک درشت مولکول[2] یا پلیمر، مولکول بزرگی است که از بسیاری از واحدهای شیمیایی مشابه تشکیل یافته است که به صورت عمومی به آنها واحدهای ساختاری[3] گویند. در برخی از پلیمرها، هر کدام از واحدهای سـاختاری تنهـا به دو واحد ساختاری دیگر متصل می‌گردند و زنجیره‌ای را تشکیل مـی‌دهنـد. از ایـن رو بـه آنهـا ماکرومولکوهـای خطی[4] گویند. در گونه‌های دیگر از پلیمرها، بخش عمده‌ای از واحدهای ساختاری تنها به دو واحد سـاختاری دیگـر متصل می‌شوند. اما تعداد بسیار کمی از واحدها نیز با سه و یا حتی تعـداد واحـد سـاختاری بیـشتر تـشکیل پیونـد می‌دهد و از همین رو به این دسته از پلیمرها، ماکرومولکولهای منـشعب یـا شـاخه‌ای[5] مـی‌گوینـد. در شـکل ۱-۴ گونه‌هایی نمادین از ساختارهای پلیمری خطی و دارای انشعاب را می‌توان مشاهده نمود. همچنین تنها برای اطـلاع بیان می‌گردد که گونه‌ی دیگری از پلیمرها نیز وجود دارند که در آنها، تمام واحدهای ساختاری به هم متصل بوده و به آنها ساختارهای شبکه‌ای[6] می‌گویند. البته این مواد را نمی‌توان به صورت عمومی در گونه سیالات گردآوری کرد و به همین دلیل هم در بحث موجود مجالی برای مانور بیشتر روی این موضوع وجود ندارد.

در اینجا مناسب است تا به تمایز میان پلیمرهای مصنوعی و طبیعی (بیولوژیکی) نیز اشاره کوچکی داشته باشیم. بسیاری از پلیمرهای مصنوعی، تنها از یک واحد ساختاری تشکیل می‌گردند و بـه همـین دلیـل آن را هومـوپلیمر[7]

[1] Memory
[2] Macromolecule
[3] Structural units
[4] Linear Macromolecule
[5] Branched Macromolecule
[6] Network Structures
[7] Homopolymer

می‌نامند. از جمله این پلیمرها می‌توان به پلی اتیلن و پلی استیرن اشاره نمود. در مقابل، چند پلیمریها[1] از دو واحد ساختاری یا تعداد بیشتری از این واحدها ساخته می‌شوند. اکثر پلیمرهای بیولوژیکی چند پلیمری هستند که از آن جمله می‌توان به زنجیره‌های پلی‌پپتید[2] اشاره نمود که پروتئین‌ساز می‌باشند. برای بیان مثال‌های دیگری از این دست می‌توان به رشته‌های DNA و یا ویروسها اشاره کرد که کلیدهای انتقال خواص در رشته‌های آنها یافت می‌گردد.



(ب) (الف)

شکل ۱-۴. ارائه نمادین ماکرومولکول‌های *(الف)* شاخه‌دار *(ب)* خطی [۱۵]

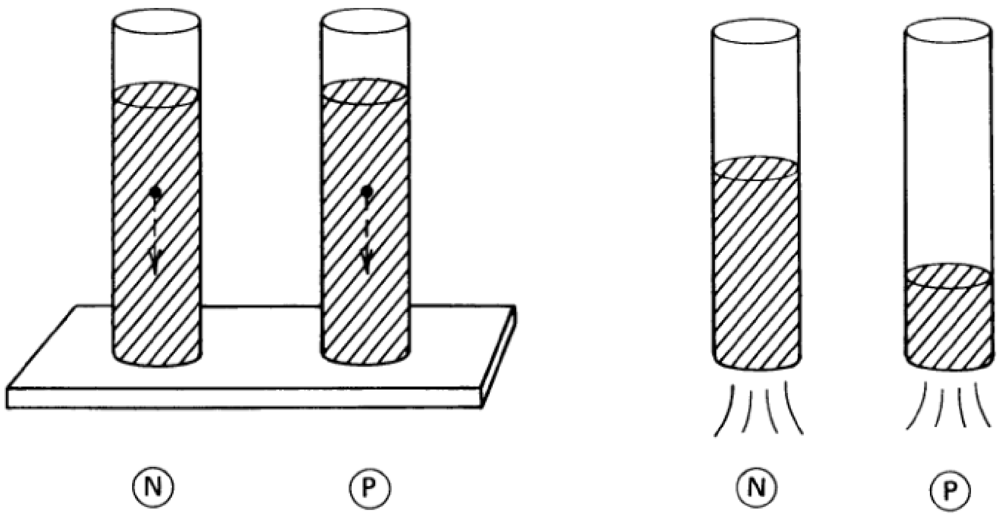
در انتها باید اشاره گردد که مواد پلیمری تنها سیالاتی نیستند که از رفتار نیوتنی انحراف نشان می‌دهند. به عنوان مثال برخی از شوینده‌ها یا ذرات خاک رس نیز می‌توانند ساختارهای بزرگی را تحت تاثیر درون واکنشهای دو قطبی و یا دیگر نیروهای درون مولکولی تولید کنند که از این رو این سیالات نیز به عنوان سیالات غیر نیوتنی به حساب می‌آیند.

۱-۳-۲) ویسکوزیته غیر نیوتنی

شاید تنها ویژگی بسیار مهم سیالات پلیمری این است که ویسکوزیته آنها وابسته به نرخ برش است و یا به عبارتی غیر نیوتنی می‌باشد. به منظور درکی اولیه از این عبارت، به تشریح آزمایشی بسیار ساده پرداخته می‌شود.

Copolymer [1]
Polypeptide [2]

در آزمایش اول، دو لوله یکسان را در نظر می گیریم که به صورت عمودی قرار گرفته‌اند و انتهای هر دو لوله نیز توسط صفحه‌ای تخت پوشانیده شده است. همانگونه که در شکل ۱-۵ نشان داده شده است، یکی از لوله‌ها مملو از یک سیال نیوتنی و دیگری مملو از یک سیال پلیمریک (گلیسیرین محلول در آب) می‌باشد. در حالت اول دو کره یکسان و چگالی برابر که البته مقدار این چگالی از چگالی سیالات درون لوله‌ها بیشتر است، در درون لوله‌ها رها می‌گردد. آن چیزی که مشاهده می‌شود، این است که هر دو کره با نرخ برابر سقوط می‌کنند. این آزمایش نشان می‌دهد که در شرایطی با نرخ برش پایین، ویسکوزیته ها تقریبا برابر می‌باشند (شکل ۱-۵ را مشاهده کنید).



شکل ۱-۵. در نرخ برش پایین، کره کوچک درون هر دو لوله آزمایش با سرعتی برابر به سمت پایین حرکت می‌کنند.

(N) سیال نیوتنی (P) سیال پلیمریک [۱۵]

همچنین در حالتی که صفحه تخت را از زیر این دو لوله برداریم و اجازه دهیم تا سیال با نیروی وزن خود از لوله خارج گردد، مشاهده خواهیم کرد که سیال پلیمریک سریع‌تر از سیال نیوتنی از لوله خارج می‌شود.

با توجه به این آزمایش، می‌توان نتیجه گرفت که در نرخهای برش بالا، سیالات پلیمریک دارای ویسکوزیته کمتری نسبت به سیالات نیوتنی هستند. کاهش ویسکوزیته با افزایش نرخ برش را پدیده کاهش برش[1] می‌نامند و

[1] Shear Thinning

موادی که این خاصیت را از خود به نمایش می‌گذارند را مواد شبه پلاستیک[1] می‌نامند. از جمله این مواد می‌توان به پلی اتیلن و پلی پروپیلن مایع شده و یا محلولهای کربوکسی متیل سلولوز در آب اشاره کرد. در حقیقت تقریبا همه پلیمرهای محلول و یا مایع‌شده‌ای که ویسکوزیته آنها به نرخ برش وابسته می‌باشد، از نوع شبه پلاستیک هستند.

تعداد بسیار کمی از سیالات پلیمریک نیز رفتاری برعکس آنچه که در بالا به آن اشاره شد را دارند. در این سیالات، ویسکوزیته با افزایش نرخ برش افزایش می‌یابد و بر طبق این اصل، در آزمایش بالا این سیالات دیرتر از سیال نیوتنی از لوله خارج می‌گردند. به اینگونه از سیالات، سیالات دیلاتانت[2] گویند [۱ و ۲]. دو نمونه از این سیالات، محلول دی اکسید تیتانیم در ساکاروز و محلول ذرات نشاسته در مخلوط اتیلن-گلیکول-آب می‌باشند. همانطور که می‌دانیم تعداد بسیار کمی از سیالات پلیمری خاصیت دیلاتانت را از خود نشان می‌دهد.

گونه‌ای دیگر از سیالات نیز وجود دارند که رفتار دیگری از خود به نمایش می‌گذارند. این سیالات تا زمانی‌که به یک تنش برشی بحرانی، که به آن تنش تسلیم می‌گویند نرسند، جریان پیدا نمی‌کنند. اینگونه از سیالات را سیالات ویسکوپلاستیک می‌نامند [۳]. گونه‌های خاصی از رنگ‌ها، گریس و چسب‌ها از جمله سیالات ویسکوپلاستیک می‌باشند.

۱-۳-۳) تنش‌های نرمال

بسیاری از ویژگی‌های مهم در جریان سیالات پلیمریک به اختلافات تنش نرمال در این سیالات نسبت داده می‌شود. در ابتدا برای درک اختلافات تنش نرمال برخی قراردادها را پایه‌گذاری می‌نماییم. اگر جریان سیال، تنها در یک جهت مختصات جاری باشد و سرعت آن نیز تنها در یک جهت دیگر تغییر نماید، جهت سرعت سیال را جهت ۱ و جهت تغییرات سرعت را جهت ۲ در نظر گرفته می‌شود. جهت خنثی باقیمانده، نیز ۳ نامگذاری می‌گردد. به این ترتیب $\tau_{11}-\tau_{22}$ را اختلاف تنش نرمال اول و $\tau_{22}-\tau_{33}$ را اختلاف تنش نرمال دوم گوییم.

---

[1] Pseudoplastic
[2] Dilatant

در سیالات پلیمری، اختلاف تنش نرمال اول در حالت عملی و از نظر مقدار بزرگتر از اختلاف تنش نرمال دوم می‌باشد. این بدین معنی است که سیالات پلیمریک کشش بیشتری را در طول خطوط جریان از خود نشان می‌دهند که همان جهت ۱ می‌باشد. مقدار تنش نرمال دوم از اول کمتر است و این نشان می‌دهد که اغلب جریان برشی سیال، تمایل کمتری به کشش بیشتر در جهت ۳ دارد. در شکل ۱-۳ جهات ۱،۲ و ۳ با جهات x y و z مطابقت دارد. بنابراین اختلاف تنش نرمال اول $\tau_{xx}-\tau_{yy}$ و اختلاف تنش نرمال دوم $\tau_{yy}-\tau_{zz}$ می‌باشد. در سیالات نیوتنی مقادیر اختلاف تنش نرمال اول و دوم دقیقا صفر خواهد شد.

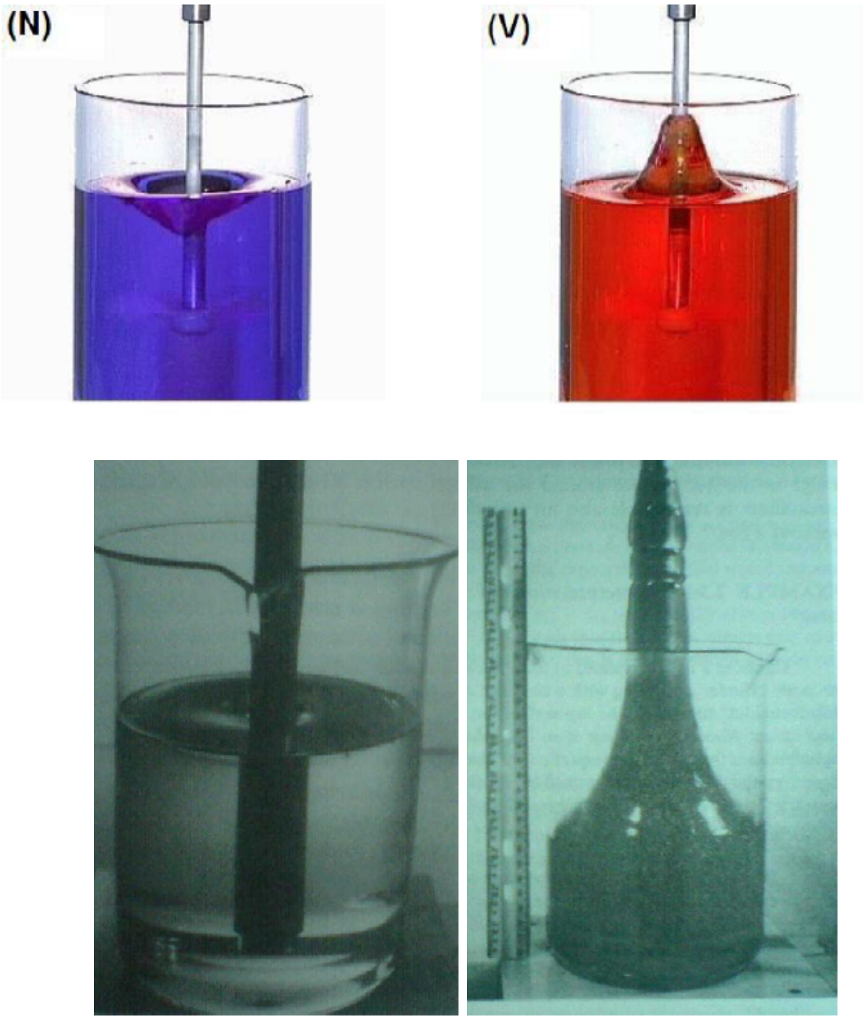
حال به بررسی چندین فرآیند آزمایشگاهی پرداخته شده تا اثرات تنش نرمالها را مورد بررسی قرار گیرد.

۱-۳-۴) بالا رفتن از میله چرخان

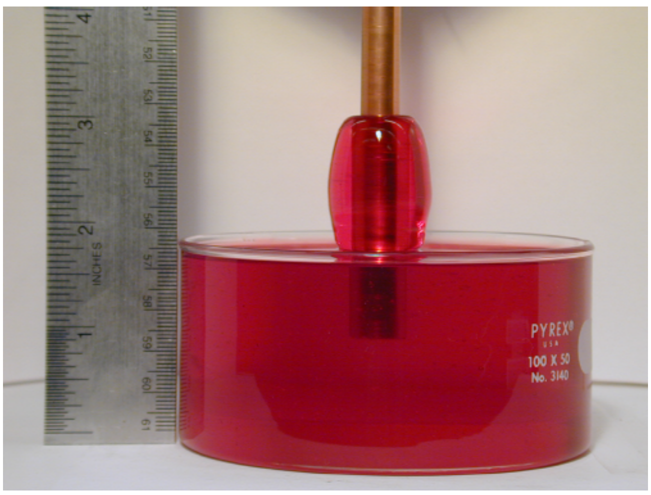
در این آزمایش، میله دواری، درون دو ظرف آزمایشگاهی حاوی سیال قرار داده می‌شود. ظرف اول از سیال نیوتنی و ظرف دوم از سیال ویسکوالاستیک پر شده است. سیال نیوتنی بر اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از دوران میله در اطرف منطقه تماس میله و سیال به اطراف هل داده می‌شود و در دل آن حفره‌ای ایجاد می‌گردد. اما در مقابل، رفتار بسیار عجیبی از سیال ویسکوالاستیک مشاهده می‌گردد. سیال ویسکوالاستیک در جهت مخالف حرکت می‌کند و بر خلاف سیال نیوتنی، از میله بالا می‌رود. این پدیده اولین بار توسط گارنر و نایسن[1] مورد بررسی قرار گرفت [۴]. اما قبل از این تحلیل علمی، راسل[2] آن را در صنعت رنگ‌سازی مشاهده و گزارش نموده بود (شکل ۱-۶ را مشاهده کنید) [۵].

علت این پدیده به این تفکر برمی‌گردد که در طول خطوط جریان، کشش بیشتری وجود دارد. در این آزمایش، خطوط جریان، دوایری بسته می‌باشند که به دلیل کشش بیشتر در طول این خطوط، سیال را تحت فشار قرار داده و سیال را در جهت مخالف نیروی گریز از مرکز هل داده و همچنین آن را خلاف نیروی جاذبه به حرکت در می‌آورد تا سیال از میله بالا رود.

[1] Garner and Nissan
[2] Russel



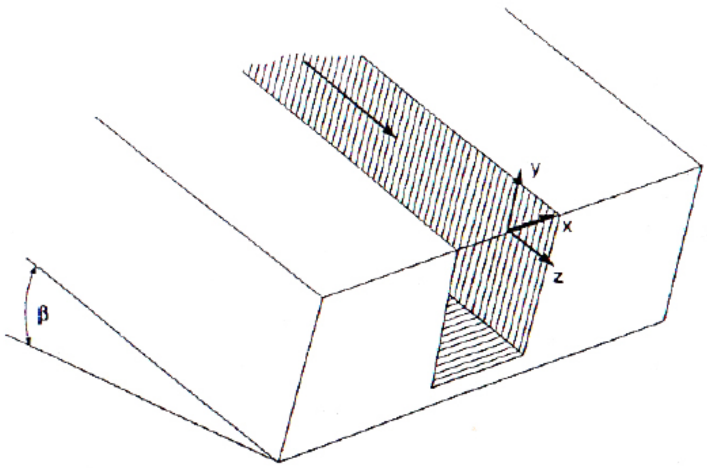
شکل ۱-۶. میله دوار درون ظرف حاوی سیال (N) نیوتنی (V) ویسکوالاستیک [۱۵]



شکل ۱-۷. مشاهدات آزمایشگاهی از بالا آمدن سیال ویسکوالاستیک به دور میله دوار

۱-۳-۵) سطح محدب در یک کانال کج

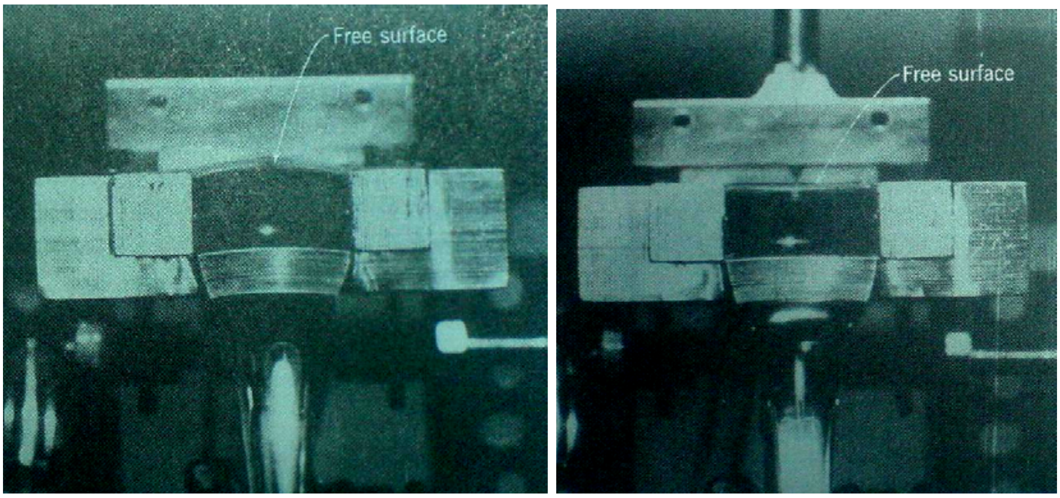
در این آزمایش جریانی با عدد رینولدز بسیار پایین، در یک کانال شیب‌دار در نظر گرفته شده است (هندسه مساله در شکل زیر نمایش داده شده است).



شکل ۱-۸. طرح شماتیک جریان روی یک کانال باز شیب‌دار [۱۵]

کانال به گونه‌ای طراحی شده است که سیال درون آن با استفاده از نیروی جاذبه جریان یابد. در بررسی این جریان مشاهده شد که سطح آزاد سیال نیوتنی یک سطح صاف می‌باشد، ولی در مورد سطح آزاد سیال غیر نیوتنی شکل خمیده بدست آمد. با وجود اینکه این خمیدگی بسیار کوچک است، اما قابل مشاهده می‌باشد. وینمن و پیپکین[1] برای اولین بار این موضوع را مطرح کردند [۶] و کار آزمایشگاهی آن نیز برای اولین بار توسط تنر[2] به اجرا درآمد (شکل ۱-۹ را مشاهده کنید) [۷].

Wineman and Pipkin [1]
Tanner [2]



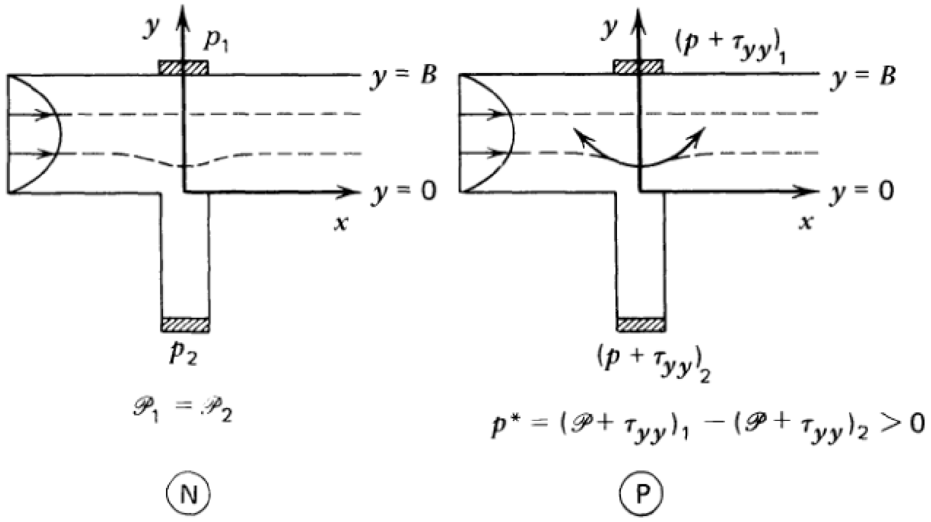
(V) (N)

شکل ۱-۹. سطح آزاد جریان سیال در یک کانال شیب‌دار (N) سیال نیوتنی (V) سیال ویسکوالاستیک [۱۵]

۱-۳-۶) اثر فشار حفره‌ای[1]

کانال شکل ۱-۱۰ را در نظر بگیرید. این کانال در مسیر خود دارای حفره‌ای متقاطع می‌باشد. جریان سیال با استفاده از گرادیان فشار در جهت x و از چپ به راست حرکت می‌کند. دو عدد فشار سنج در دیواره روبرویی شکاف و دیواره انتهایی شکاف متصل شده است. فشار قرائت شده در دو طرف به ترتیب $\left(p+\tau_{yy}\right)_1$ و $\left(p+\tau_{yy}\right)_2$ می‌باشد. در صورتی که جریان به حد کافی آرام باشد تا از فرض اینرسی‌دار بودن جریان بتوان صرف نظر کرد، از طریق معادلات حرکت برای سیال نیوتنی می‌توان دریافت که خط مرکزی $x=0$ خط تقارن برای محدوده سرعت است. این بدین معنی است که فشار روی خط تقارن، مستقل از y است. پس در صورت صرف نظر کردن اثرات اینرسی در جریان، می‌توان گفت که τ_{yy} برای سیال نیوتنی مقداری معادل صفر دارد و فشارهای $(p)_1$ و $(p)_2$ نیز با هم برابرند. اما از سویی دیگر می‌توان دریافت که به صورت کلی، $\left(p+\tau_{yy}\right)_1>\left(p+\tau_{yy}\right)_2$ می‌باشد. اختلاف این دو مقدار، یعنی $p^*=\left(p+\tau_{yy}\right)_1-\left(p+\tau_{yy}\right)_2$ را فشار حفره‌ای می‌نامند که مرتبط با تنشهای نرمال در جریان برشی می‌باشند.

[1] Hole pressure effect



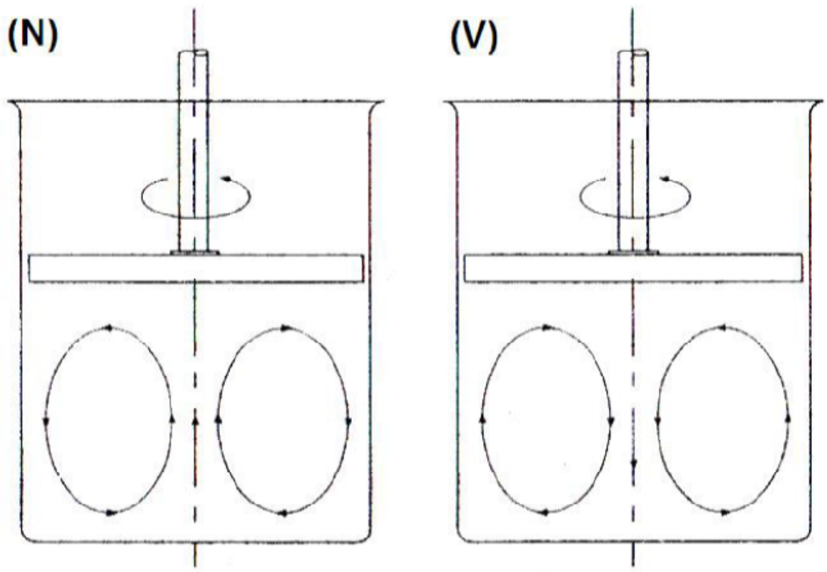
شکل ۱-۱۰. بررسی فشار حفره ای (N) سیال نیوتنی (P) سیال پلیمریک (ویسکوالاستیک) [۱۵]

سه آزمایشی که در بالا مطرح شده بودند، مثال‌هایی از اثرات تنش نرمال در سیال می‌باشند. جریان سیال در اینها به دو دسته جریان اولیه قوی و جریان ثانویه ضعیف، تقسیم می‌گردد. بحث در مورد جریانهای اولیه بیشتر مرتبط با خواص لزجی یا ویسکوز سیال می‌باشد. اما بحث در مورد جریان‌های ثانویه بیشتر در ارتباط با اثرات اینرسی و اثرات الاستیک است. در هر سه مثال قبل مشاهده کردیم که جریانهای ثانویه‌ای که به دلیل اثرات اینرسی به وجود می‌آیند، متفاوت با جریانهای ثانویه‌ای هستند که به دلیل وجود اثرات الاستیک تولید می‌گردند. اگرچه هیچ اصل کلی که بیانگر این موضوع باشد که اثرات اینرسی و اثرات الاستیک، جریانهای ثانویه‌ای در خلاف جهت هم ایجاد می‌نمایند، وجود ندارد، اما این امر موضوعی قابل لمس است.

۱-۳-۷) تانک استوانه‌ای با درپوش دوار

در این آزمایش، جریان به وجود آمده بر اثر قرار دادن یک دیسک دوار روی ظرف آزمایشگاهی پر از سیال مورد بررسی قرار می‌گیرد. جریان‌های ثانویه این نوع جریان در شکل ۱-۱۱ آمده است. به دلیل دوران دیسک، جریان‌های اولیه سیال، در جهت مماسی می‌باشند. همچنین، سیال در بالای ظرف، دوران شدیدتری نسبت به

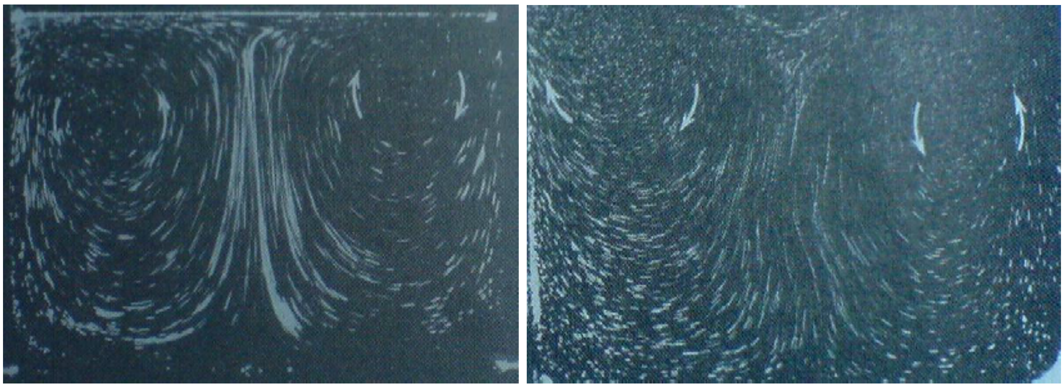
پایین ظرف دارد. متعاقبا، سیال اطراف دیسک و بالای ظرف، نیروی گریز از مرکز بیـشتری را تحمـل مـی‌کنـد. در سیالات نیوتنی، هیچ نیروی مخالفی وجود ندارد و به همین دلیل هم جریان ثانویه ضعیفی تولید خواهد شد که این جریان‌ها به شکل دوایری خواهد بود که در نزدیکی دیسک، به سمت دیواره و به سـمت پـایین حرکـت مـی‌کنـد و نهایتا هم در منطقه مرکزی همانگونه که در شکل پیداست به هم می‌رسند. مقدار سرعت در جریانهای ثانویه حدود ۱۰ درصد سرعت در جریان اولیه می باشد.



شکل ۱-۱۱. جریان‌های ثانویه در یک سیستم سیلندر – دیسک با دیسک چرخان

(N) سیال نیوتنی (V) سیال ویسکوالاستیک [۱۵]

اما برای یک سیال ویسکوالاستیک جریان‌های ثانویه در جهتی مخالف به وجود می‌آیند که در شکل ۱-۱۲ نیز به وضوح قابل مشاهده می‌باشد [۸].



(N) (V)

شکل ۱-۱۲. طرح شماتیک جریان‌های ثانویه در یک سیستم سیلندر – دیسک با دیسک چرخان

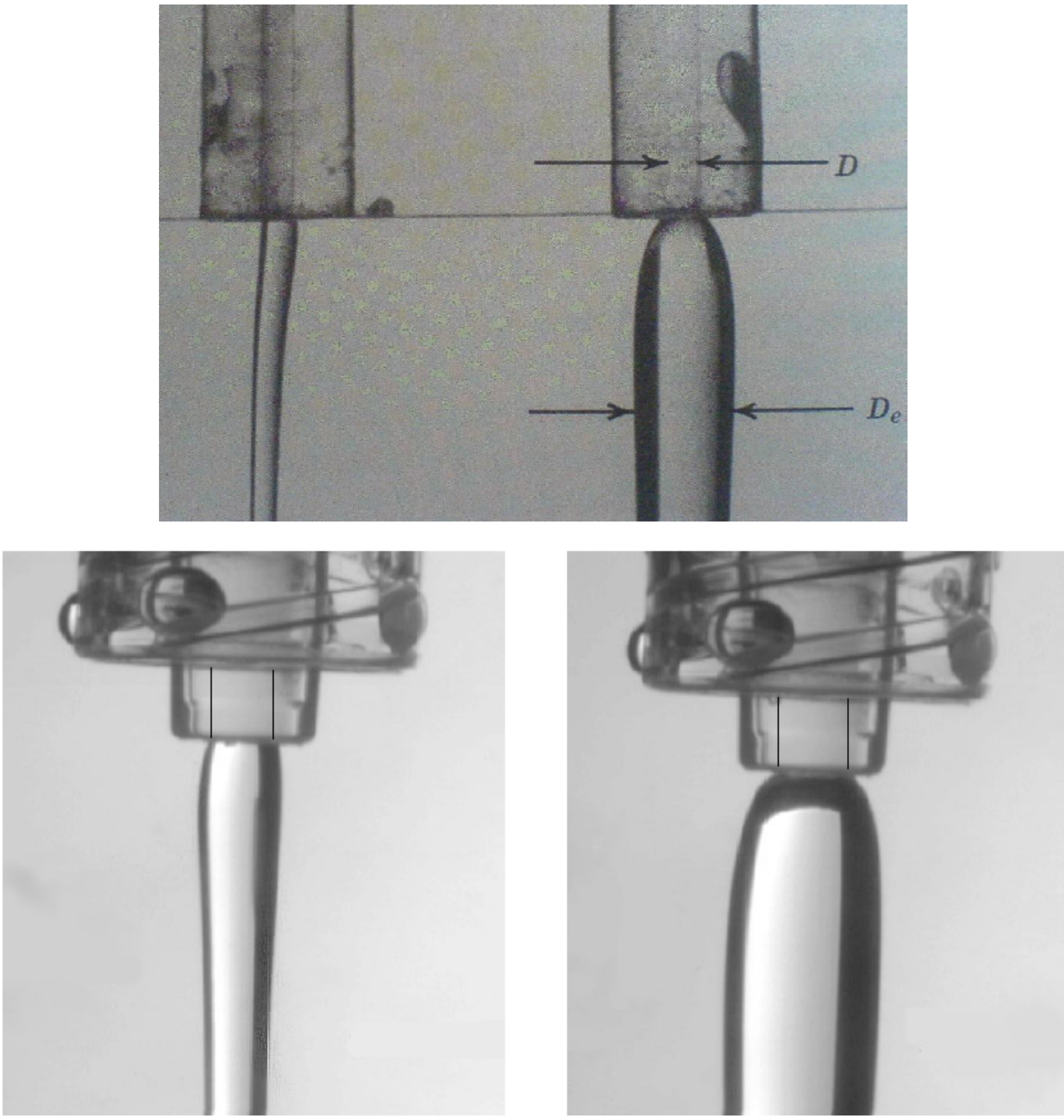
(N) سیال نیوتنی (V) سیال ویسکوالاستیک [۱۵]

۱-۳-۸) آماسیدگی جت

شکل ۱-۱۳. تورم جت یک سیال ویسکوالاستیک در نزدیکی سر نازل

در این آزمایش، سیالی که در یک لوله موئین به قطر D قرار دارد و با قطر D_e به بیرون جت می‌شود، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در جریان آرام با رینولدز پایین، در سیالات نیوتنی، D_e تقریبا ۱۳ درصد بزرگتر از D می‌باشد و در همان جریان آرام اما با اعداد رینولدز بالاتر، D_e تقریبا ۱۳ درصدکوچکتر از D می‌باشد. همانگونه که در شکل ۱-۱۴ واضح است، سیال نیوتنی در هنگام خروج از دهانه لوله موئین، دچار هیچ‌گونه آماسیدگی و یا تورم شدید نمی‌شود. اما در مورد سیالات ویسکوالاستیک، این قضیه کاملا متفاوت است. در اینگونه از سیالات، به عنوان

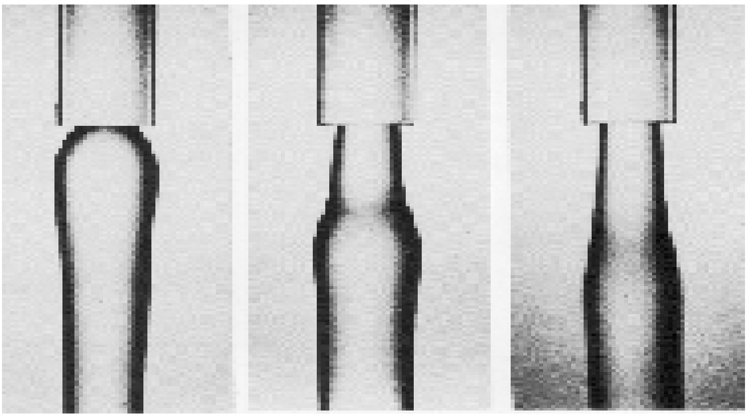
مثال پلی متیل متا کرایلیت[1] افزایش D_e نسبت به D حدود ۳۰۰ درصد می‌باشد. این افزایش دو، سه و یا حتی چهار برابری قطر سیال خروجی را *آماسیدگی جت* گویند [۹].



شکل ۱-۱۴. مشاهدات آزمایشگاهی آماسیدگی جریان جت دو سیال ویسکوالاستیک و نیوتنی [۱۵]

1 Polymethylmethacrylate

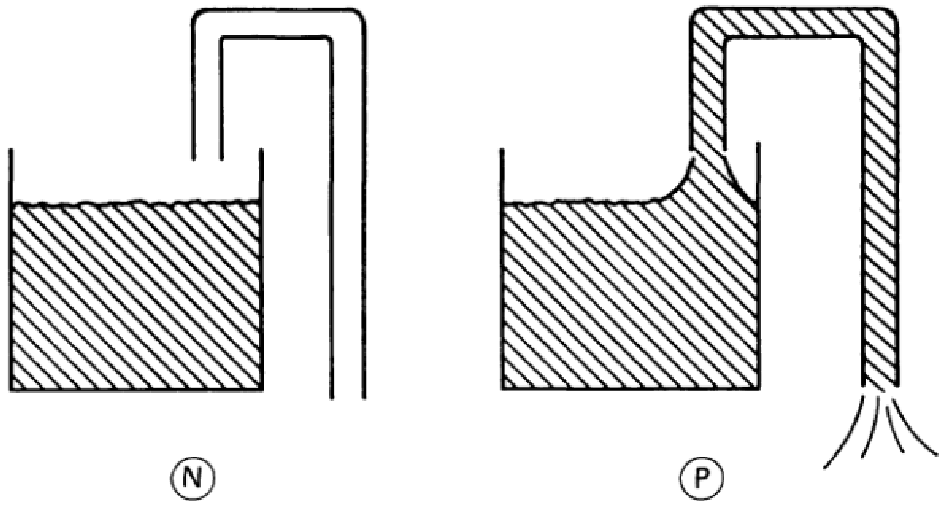
همچنین افزایش اینرسی جریان سبب ایجاد تاخیر در وقوع این پدیده می شود.

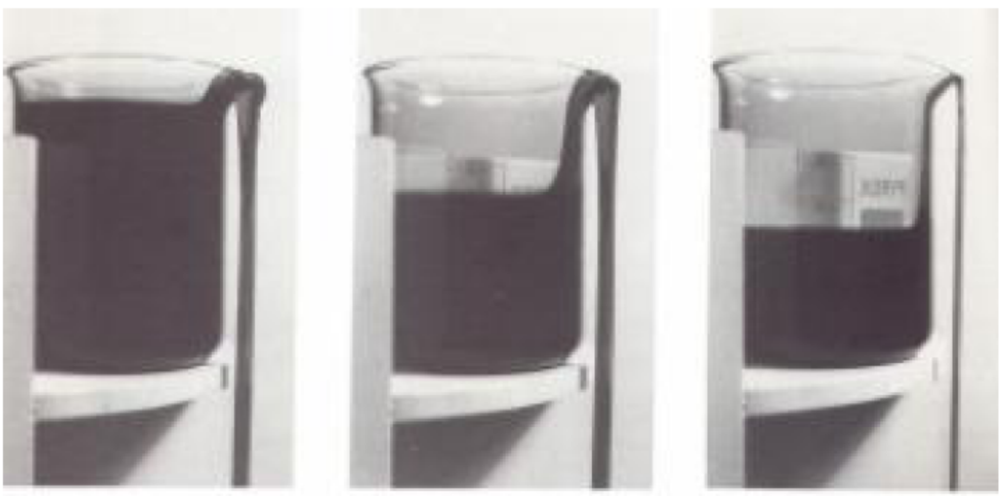


شکل ۱-۱۵. دور شدن موقعیت تورم با افزایش عدد رینولدز

۱-۳-۹) سیفون بدون لوله

در اینجا مقایسه تخلیه سیفونی یک سیال نیوتنی و یک سیال پلیمری شرح داده می‌شود. دو آزمایش مشابه را در نظر می‌گیریم. که در هر دوی آنها سیال درون لوله را می‌خواهیم با استفاده از سیفون تخلیه نماییم. حال فرض می‌شود که سیال در حال بالا کشیده شدن از درون ظرف حاوی سیال است. اگر این مکش را قطع کنیم، زمانی‌که سیال نیوتنی را تخلیه کردیم، ناگهان صدای مکش بلندی را می‌شنویم و مشاهده می‌شود که عملیات تخلیه دیگر انجام نمی‌گیرد. اما اگر سیال غیر نیوتنی را در ظرف داشته باشیم، این مکش همچنان ادامه پیدا می‌کند (شکل ۱-۱۶ را مشاهده کنید). باور مقبول بر این است که کشیدگی مولکولهای طویل پلیمر در امتداد خط جریان سبب ادامه یافتن جریان سیفون می‌شود [۱۰].





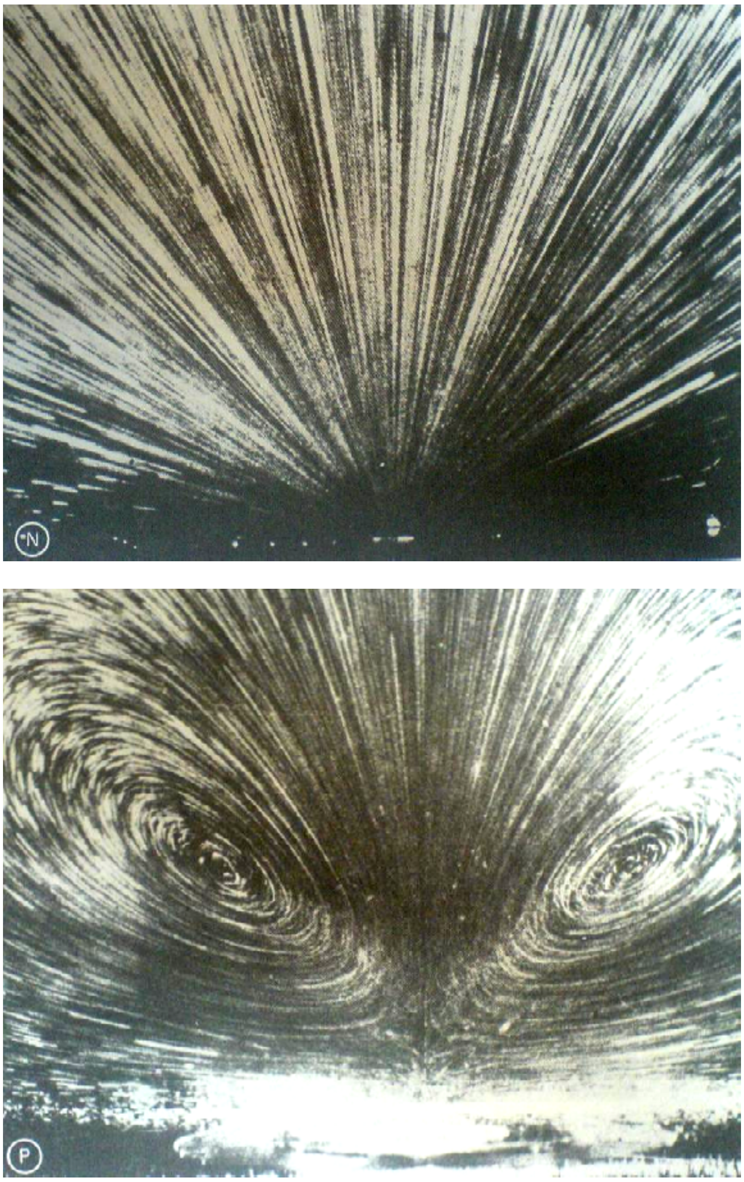
شکل ۱-۱۶. سیفون بدون لوله سیالات ویسکوالاستیک [۱۵]

۱-۳-۱۰) جریان انقباضی

در شکل ۱-۱۷ دو تصویر را مشاهده می‌شود که توسط گیسکاس[1] گرفته شده است. عدد رینولـدز بـرای هـر دو آزمایش بسیار پایین است. در این آزمایشات می‌خواهیم سیالی را که درون یک ظرف بـزرگ قـرار دارد را وارد یـک لوله کوچک نماییم. در آزمایش اول، سیال نیوتنی وارد لوله با دهانه کوچکتر می‌شود. همانگونه که در شکل، واضـح

[1] Giesekus

است، خطوط جریان سیال نیوتنی مستقیم و به سمت دهانه لوله می‌باشند. اما در مورد سیال غیر نیوتنی شرایط به گونه‌ای دیگر است. تنها بخشی از سیال که در راستای خط مرکزی قرار دارد، وارد لوله شده و پروفیل مستقیم دارد. اما بخش وسیعی از سیال، در یک مسیر دوران[1] قرار می‌گیرد و وارد لوله نمی‌شود.



شکل ۱-۱۷. جریان‌های ثانویه در پدیده انقباض (N) سیال نیوتنی (P) سیال پلیمریک [۱۵]

[1] Circulation

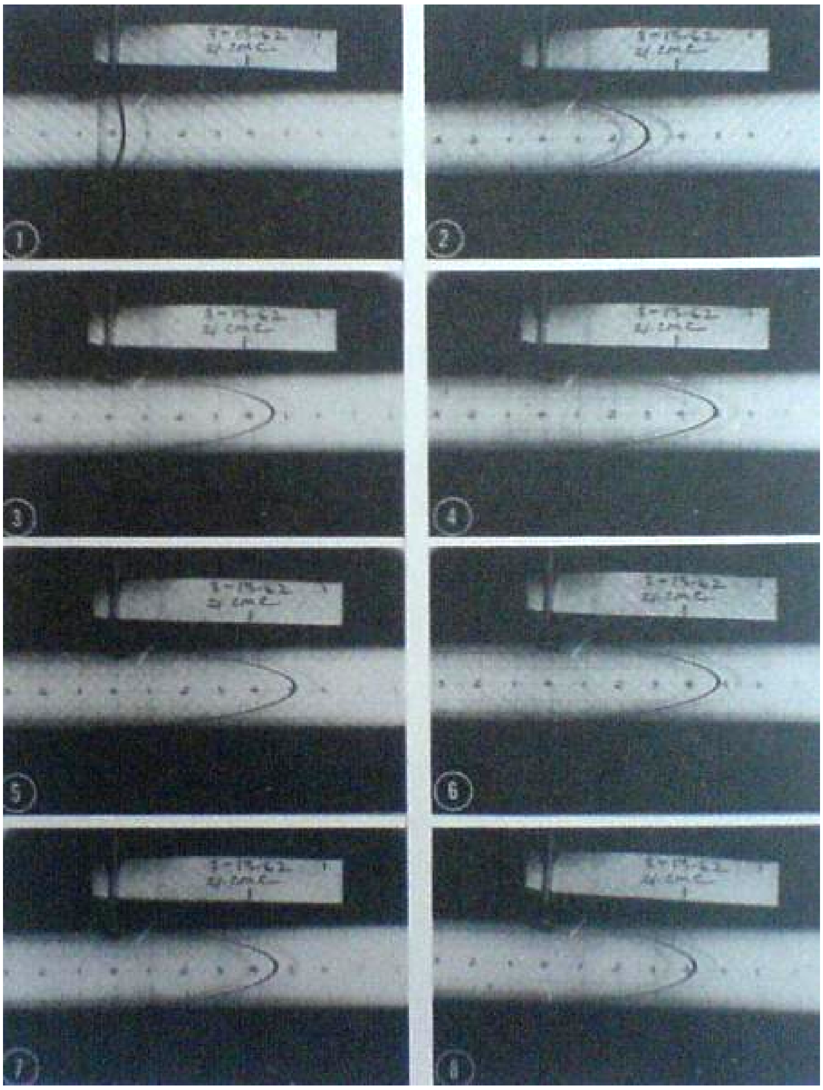
۱-۳-۱۱) بازگشت فنری

خاصیت جالب دیگری که در سیالات ویسکوالاستیک وجود دارد، قابلیت بازگشت‌پذیری و یا فنریت آن است. در این بخش، دو آزمایش بیان می‌گردد.

در آزمایش اول که توسط کاپور[1] انجام گرفته است [۱۱]، سیال ویسکوالاستیکی در نظر گرفته شده و به آن گرادیان فشاری اعمال می‌شود. تغییر شکل خطوط جریان در سکانس‌های مختلف بررسی شده است. همانگونه که در شکل ۱-۱۸ مشخص است، تا فریم ۵ گرادیان فشار به سیال ویسکوالاستیک اعمال می‌گردد. می‌توان بازگشت فنری سیال ویسکوالاستیک را در فریم‌های بعدی مشاهده کرد. در سیالات نیوتنی این بازگشت فنری مشاهده نمی‌شود.

---

[1] Kapoor

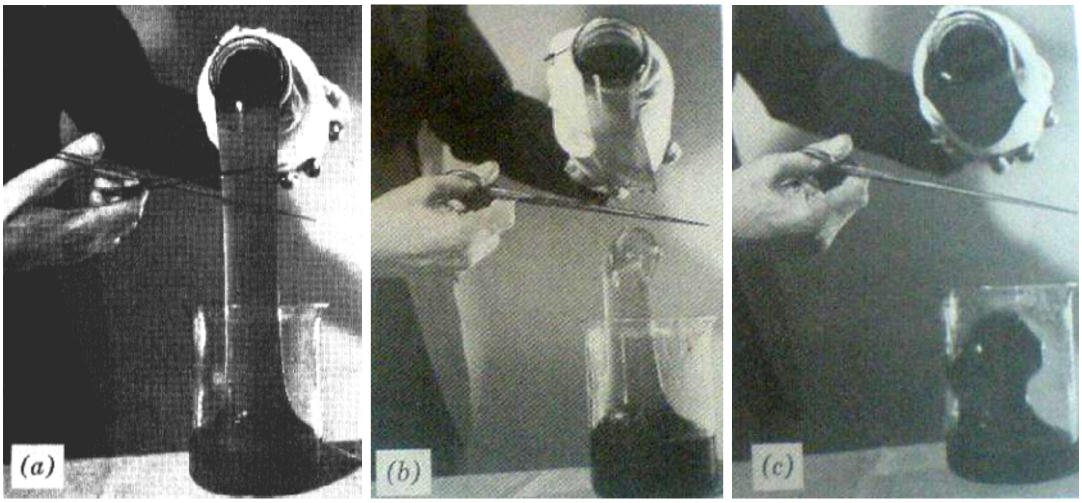


شکل ۱-۱۸. بررسی پدیده بازگشت فنری

۴ فریم اول مربوط به اعمال گرادیان فشار و ۴ فریم بعدی مربوط به بازگشت فنری [۱۵]

در آزمایش دوم، محلولی موسوم به محلول صابون آلومنیم را در نظر می‌گیریم که از درون ظرفی، به داخل یک ظرف آزمایشگاهی، خالی می‌شود. این آزمایش برای اولین بار توسط لوج[1] در سال ۱۹۶۴ انجام گرفت. همانگونه که در شکل ۱-۱۹ مشخص است، در ابتدا محلول ویسکوالاستیک با نیروی وزن خود در حال سرازیر شدن به درون یک ظرف آزمایشگاهی (بشر) می‌باشد. اما پس از برش این جریان، لحظاتی بعد، سیال ویسکوالاستیک بر اثر خاصیت فنری خود به درون ظرف برمی‌گردد.

[1] Lodge

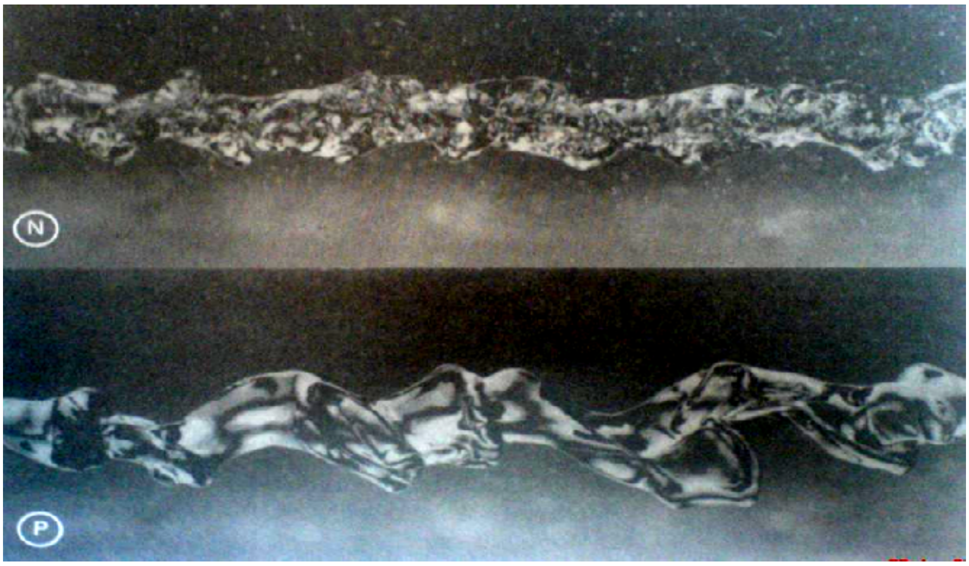


شکل ۱-۱۹. بازگشت فنری یک سیال ویسکوالاستیک [۱۵]

۱-۳-۱۲) جریان خروجی جت

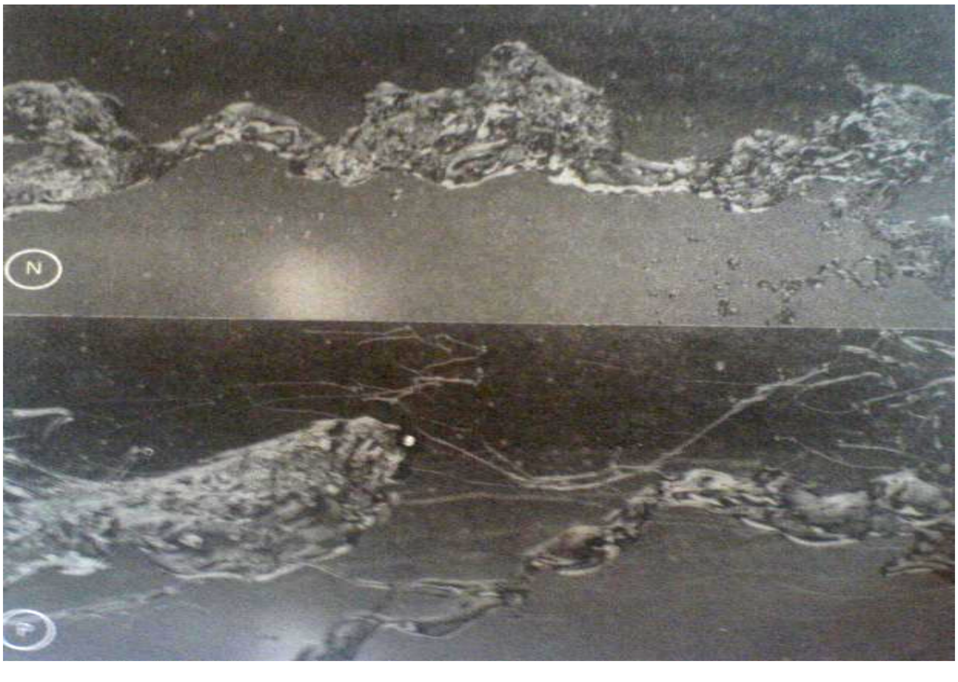
در این بحث، می‌خواهیم مثالی از پراکندگی و تجزیه جت را بیان کنیم. در شکل ۱-۲۰ دو سیال خارج شده به صورت جت در نظر گرفته شده‌اند [۱۲]. در این تصویر که فاصله ۱ متر از خروجی جت را به نمایش می‌گذارد، دو سیال مورد بحث قرار گرفته است؛ سیال نیوتنی و غیر نیوتنی. سیال نیوتنی به کار رفته، آب خالص است و سیال غیر نیوتنی به کار رفته، از اضافه کردن مقداری پلی اتیلن اکساید[1] به آب خالص بدست آمده است. همانگونه که در این شکل مشخص است، در اطراف سیال نیوتنی که در حقیقت همان آب خالص است، مقدار زیادی قطرات ریز وجود دارد. سیال ویسکوالاستیک، پیوستگی خود را حفظ کرده است و هیچ قطره‌ای در اطراف آن مشاهده نمی‌گردد.

[1] Polyethylene Oxide



شکل ۱-۲۰. یک متر جریان جت خارج شده از اوریفیس (N) سیال نیوتنی (P) سیال پلیمریک [۱۵]

در تصویر زیر همان آزمایش قبلی را در محدوده وسیعتری مانند ۲ متری جت بررسی شده است. همانطوری که مشخص است هر دو جریان دچار تجزیه و فروپاشی می‌گردند. در اطراف جدایش آب، قطرات بسیار ریز زیادی مشاهده می‌گردد. اما در اطراف سیال ویسکوالاستیک این قطرات حالت رشته‌ای به خود می‌گیرند.



شکل ۱-۲۱. دو متر جریان جت خارج شده از اوریفیس (N) سیال نیوتنی (P) سیال پلیمریک [۱۵]

۱-۴) گروه‌های بی‌بعد در مکانیک سیالات غیر نیوتنی

در مکانیک نیوتنی، عدد رینولدز، بیانگر گروه بی‌بعدی است که از تقسیم نیروی اینرسی بـر نیـروی ویـسکوزیته بدست می‌آید. در هر نوعی از جریان، اعداد بی‌بعدی (مانند نسبت‌های هندسی) می‌توانند به وجود آینـد، امـا عـدد رینولدز مهم ترین گروه بی‌بعد در میان این اعداد است.

در سیالات ویسکوالاستیک، گروه بی بعد کلیدی، عدد دبراو[1] می‌باشد که توسط راینر[2] ارائه شده است [۱۳]. این عدد می‌تواند به صورت نسبتی از نیروهای الاستیک به نیروهای ویسکوز تفـسیر گـردد و بـه صـورت نـسبت زمـان مشخصه (یا مقیاس زمانی) سیال، λ ، روی زمان مشخصه (یا مقیاس زمانی) جریان تعریف شود.

$$De = \frac{\lambda}{t_{flow}} \tag{۱-۱}$$

زمان مشخصه سیال، زمان لازم برای جنبش مولکولی یا برخی ثابت‌های زمانی متوسط که بـا ویسکوالاستیـسیته خطی تعیین می‌گردد، می‌باشد و به عبارتی ساده‌تر زمان مشخصه سیال، همان زمان آسودگی از تنش می‌باشد. امـا زمان مشخصه جریان می‌تواند زمان سپری شده در یک رویداد سینماتیکی باشد که بعضی اوقات، این زمـان همـان زمان آزمایش یا زمان مشاهده آزمایشگاهی است.

گروه بی‌بعد دوم، عدد وایزنبرگ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$We = \lambda\kappa \tag{۲-۱}$$

به طوریکه κ نرخ مشخصه برش در جریان می‌باشد. عدد وایزنبرگ بر اسـاس نـسبت نیـروی ناشـی از خاصـیت الاستیک به نیروی حاصل از ویسکوزیته تعریف می شود. بنابراین در یک سیال خاص، بالا بودن عدد وایزنبـرگ بـه معنای غیر نیوتنی بودن این سیال است.

در مکانیـک کلاسـیک، دو محـدوده از عـدد دبـراو تعریـف مـی‌گـردد. اگـر عـدد دبـراو کوچـک باشـد، سـیال ویسکوالاستیک، رفتاری بسیار مشابه سیال نیوتنی از خود به نمایش می‌گذارد به طوریکه گفته می‌شود در صـورتی که $De \to 0$ رفتار سیال، نیوتنی خواهد بود.

---

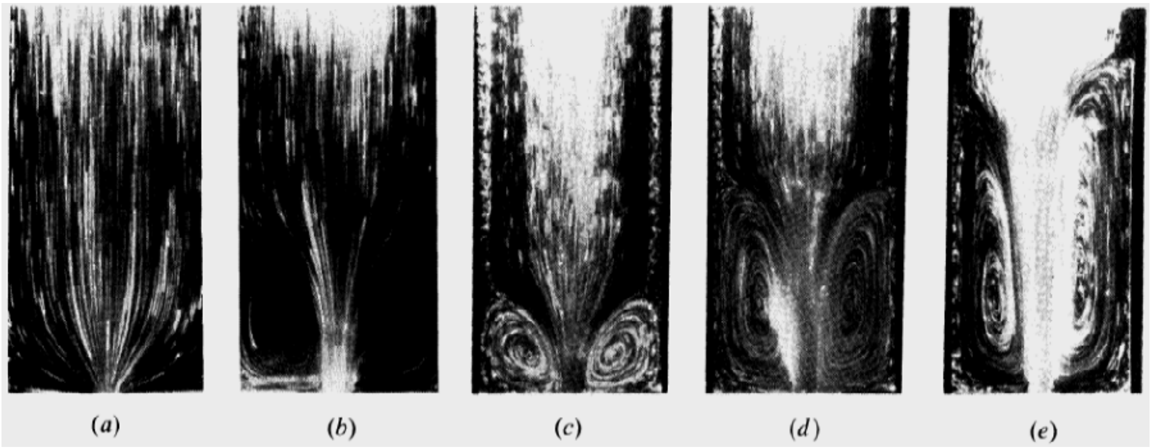
[1] Deborah
[2] Reiner

برعکس، اگر عدد دبراو بزرگ باشد، مولکولهای پلیمری که با استفاده از جریان منحرف شده‌اند، زمان لازم بـرای آسودگی از تنش در طول زمان آزمایش را ندارند. در محدوده $De \rightarrow \infty$، آزمایش به قدری سریع رخ می‌دهـد کـه مولکولهای پلیمری، زمان مناسب برای تغییر ساختار نخواهند داشت و سـیال، کـم و بـیش رفتـار جامـد الاسـتیک هوکی را از خود به نمایش می‌گذارد. در بسیاری از سیالات نیوتنی، مقدار λ بین $۱۰^{-۳}$ برای دیلاتانت‌ها و $۱۰^{۳}$ برای محلول‌های متمرکز و مواد مذاب می‌باشد.

برای درک بهتر اثر عدد دبراو، آزمایش نشان داده شده در شکل ۱-۲۲ مورد بررسی و تحلیل قـرار خواهـدگرفت. عکس‌های نمایش‌داده شـده در ایـن شـکل توسـط بـوگر و نـاین[1] [۱۴] و بـرای جریـان محلـول ۰/۰۵۷ درصـدی پلی‌اکری‌لامید گلوکوز در گذر از یک انقباض ناگهانی و برای اعداد مختلف دبراو بدست آمده است. بـه دلیـل اینکـه سیال مورد استفاده در این آزمایش ثابت مانده است، مقدار زمان مشخصه سیال و یا همان λ ثابت است.

در این آزمایش برای عدد دبراو صفر، محلول گلوکز در نظر گرفته شده که یک سیال نیوتنی محسوب می‌گردد و برای شکلهای b تا e از سیال ۰/۰۵۷ درصد پلی‌اکری‌لامید برای اعداد دبراو به ترتیب ۰/۲، ۱، ۳ و ۸ استفاده شـده است. همانطور که در این آزمایش نشان داده شده اسـت، از اعـداد دبـراو ۱ تـا ۳ گردابـه‌هـای غیرنیـوتنی تـشکیل می‌گردد اما همچنان جریان دوبعدی و متقارن باقی می‌ماند. اما بـرای اعـداد دبـراو بزرگتـر از ۳، گردابـه‌هـا حالـت نامتقارن به خود می‌گیرند. در اعداد دبراو بزرگتر از ۸، این جریان بسیار بی‌نظم و غیر قابل پیش‌بینی می‌گردد.

[1] Boger and Nguyen

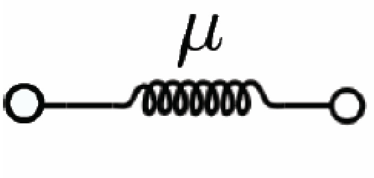


شکل ۱-۲۲. خطوط جریان برای جریان سیال با اعداد دبراو مختلف در حال گذر از یک انقباض ناگهانی [۱۵]

(a) $De = 0$، (b) $De = 0.2$، (c) $De = 1$، (d) $De = 3$ و (e) $De = 8$

۱-۵) مدل‌سازی سیالات ویسکوالاستیک

اولین قانون پایه توسط هوک[1] برای رفتار الاستیک خطی جامدات ارائه گردید.



شکل ۱-۲۳. مدل جامد الاستیک (رابرت هوک)

قانون هوک برای یک جامد الاستیک ناهمسانگرد، در حالت کلی به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{۱-۳}$$

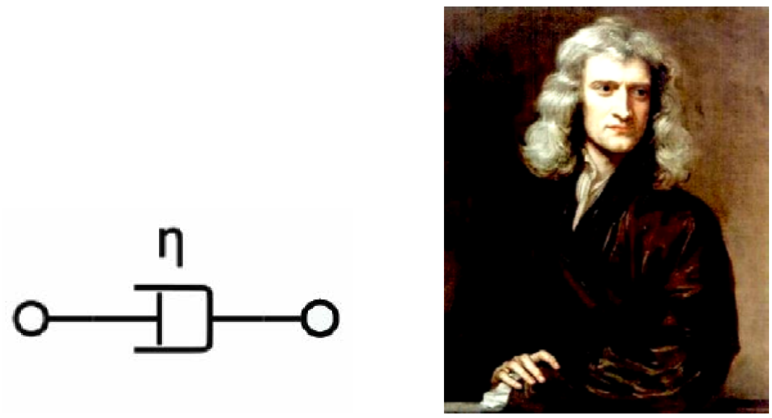
[1] Robert Hook

که در رابطه فـوق τ_{ij} و ε_{kl}، مولفـه هـای تانـسور هـای مرتبـه دوم تـنش و کـرنش بـوده و C_{ijkl} نیـز تانـسور الاستیسیته است. برای جامد الاستیک خطی همسانگرد این رابطه به شکل زیر ساده می شود:

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \qquad (۴-۱)$$

در رابطه فوق، λ و μ، ثابتهای لامه[۱] می‌باشند.

تقریبا همزمان با هوک، اسحاق نیوتن[۲] ، قانون پایه‌ای بر ای سیالات ارائه داد. بر اساس مدل پیشنهادی او، تنش برشی در سیالات با نرخ برش رابطه خطی دارد. با توجه به این رابطه، کلیه سیالاتی که از این قـانون پایـه تبعیـت می‌کنند، به سیالات نیوتنی معروفند.



شکل ۱-۲۴. مدل سیال نیوتنی (اسحاق نیوتن)

قانون پایه یک سیال نیوتنی به شکل زیر است:

$$\tau_{ij} = \left(-P + \lambda \dot{\varepsilon}_{kk}\right)\delta_{ij} + 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (۵-۱)$$

به طوریکه در رابطه فوق P فشار استاتیکی، $\dot{\varepsilon}$ نرخ برش و λ و η ثابت‌های ویسکوز هستند. هـوک و نیـوتن، روابط ارائه شده خود را به صورت تجربی بدست آورده بودند.

---

[1] Lame's constants
[2] Isaac Newton

۱-۵-۱) مدل‌های ویسکوالاستیک خطی

سیالات ویسکوالاستیک موادی هستند که توامان، خواص الاستیک و ویسکوز را دارا هستند. به دلیل رفتارهای ویژه‌ای که این مواد از خود نشان می‌دهند، تاکنون قوانین پایه متعددی برای آنها ارائه شده است. به‌طور کلی، این قوانین به دو دسته مدل‌های خطی و مدل‌های غیر خطی تقسیم‌بندی می‌شوند.

با تلفیق خواص جامدات خطی و سیالات نیوتنی می‌توان مدل های ویسکوالاستیک خطی را ارائه داد. به عبارتی دیگر، این مدل ها از ترکیب های مختلف مجموعه‌ای از فنرها و دمپرهای خطی حاصل می‌شوند. بنابراین، قانون پایه هر مدل ویسکوالاستیک خطی به شکل زیر قابل ارائه است:

$$\left(1+\lambda_1\frac{\partial}{\partial t}+\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\ldots+\lambda_n\frac{\partial^n}{\partial t^n}\right)\tau_{ij}=2\eta_0\left(1+\xi_1\frac{\partial}{\partial t}+\xi_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\ldots+\xi_m\frac{\partial^m}{\partial t^m}\right)d_{ij} \tag{۶-۱}$$

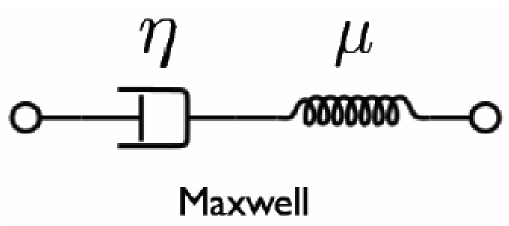
در رابطه (۱-۶)، مقدار λ_i و ξ_i به‌ترتیب زمان آسودگی از تنش و زمان رهایی از تغییر شکل مرتبه i بوده و ξ_m ویسکوزیته در نرخ برش صفر، τ_{ij} تنش برشی و d_{ij} نرخ برش است. همچنین، مقدار m و n به صورت $n=m$ و یا $n=m+1$ با هم رابطه دارند. بنابراین با انتخاب اختیاری مقادیر m و n می‌توان مدل ویسکوالاستیک جدیدی را برای یک ماده تشکیل داد. همچنین به ازای $\lambda_i=\xi_i=0$ مدل مشابه سیالات نیوتنی خواهد بود. مقدار نرخ برش (d_{ij}) نیز به شکل زیر تعریف می شود:

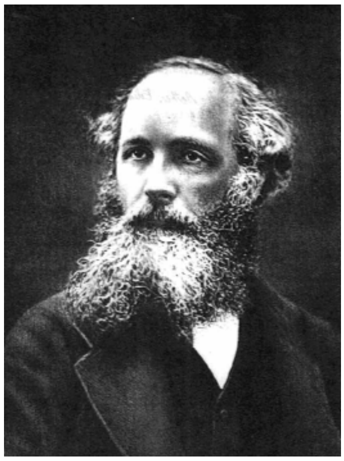
$$d_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{۷-۱}$$

که در این رابطه، u سرعت و x جهت مختصات است.

۱-۵-۱-۱) مدل ماکسول

اولین مدل ارائه شده برای بیان معادلات متشکله سیال ویسکوالاستیک، مدل خطی ماکسول است. او این مدل را به این دلیل که گمان می‌کرد گازها هم ممکن است ویسکوالاستیک باشند، ارائه نمود. در این مدل قانون پایه بر اساس یک فنر و یک دمپر خطی سری تعریف می‌شود.





شکل ۱-۲۵. مدل ماکسول (جیمز کلرک ماکسول)

مدل ماکسول به شکل زیر قابل بیان است:

$$\tau_{ij} + \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = 2\eta d_{ij} \qquad (۱-۸)$$

در رابطه بالا، η ویسکوزیته و μ مدول صلبیت و یا مدول برشی ماده است.

نمایش این مدل با استفاده از نمادهای بیان شده در رابطه (۱-۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = 2\eta d_{ij} \qquad (۱-۹)$$

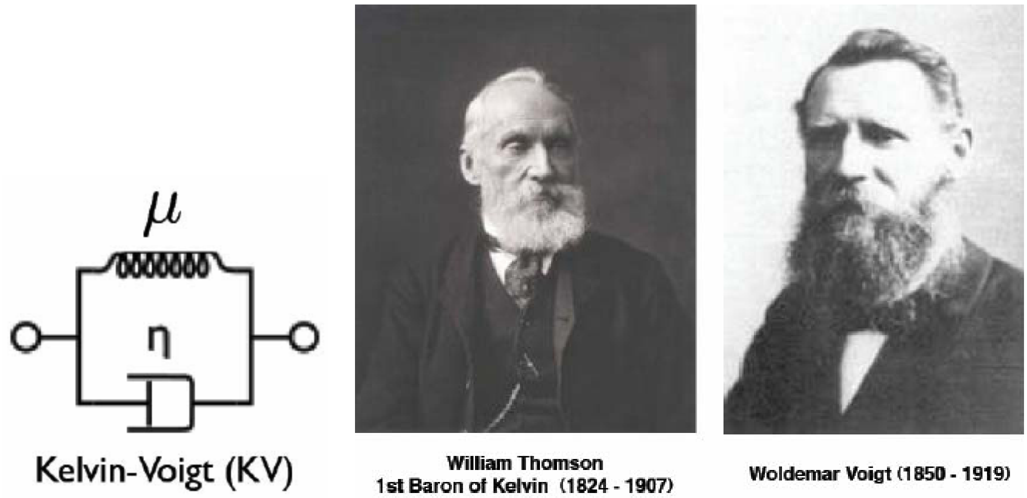
که در رابطه بالا، λ_1 زمان آسودگی از تنش می‌باشد. مطابق مدل ماکسول، ماده دارای زمان آسودگی از تنش و فاقد زمان رهایی از تغییر شکل است. به عبارت دیگر در این مدل با قطع برش، نرخ تغییر شکل در سرتاسر ماده به‌طور آنی صفر خواهد شد. در حالت یکنواخت[1]، رابطه بالا، به معادله متشکله یک سیال نیوتنی با ضریب

[1] Steady State

ویسکوزیته 2η تبدیل خواهد شد. همچنین، ماکسول این رابطه را بـه صـورت تجربـی بدسـت آورده اسـت. مـدل ماکسول برای محلولهای پلیمری که دارای زمان رهایی از تغییر شکل کوچک هستند، مناسب است.

۱-۵-۱-۲) مدل کلوین- ویت

مدل ارئه شده توسط کلوین - ویت، با فرض موازی بودن فنر و دمپر به عنوان یک سـیال ویـسکوالاستیک ارائـه شده است.



شکل ۱-۲۶. مدل کلوین- ویت (ویلیام تامسون و و ولدمر ویت)

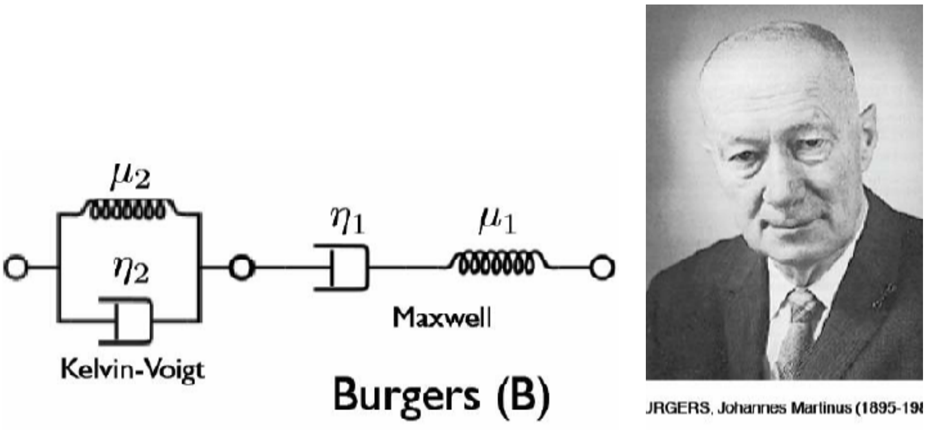
رابطه بین تنش و نرخ برش در این مدل به شکل زیر قابل بیان است:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = 2\mu\left(d_{ij} + \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial d_{ij}}{\partial t}\right) \qquad (۱۰\text{-}۱)$$

رفتار این مدل دقیقا بر عکس مدل ماکسول می‌باشد، چرا که در این مدل یکی از زمانهای رهایی از تغییر شـکل لحاظ شده اما مدل، دارای زمان آسودگی از تنش نیست. از مدل کلوین- ویت عموما برای مدل سازی پدیده خزش در مکانیک جامدات استفاده می‌شود.

۱-۵-۱-۳) مدل برگرز

برگرز، با سری کردن المانی از مدل ماکسول و المانی دیگر از مدل کلـوین-ویـت، مـدل پیـشنهادی خـود بـرای سیالات ویسکوالاستیک را ارائه کرد.



شکل ۱-۲۷. مدل برگرز

مدل برگرز به شکل زیر قابل بیان است:

$$\tau_{ij} + \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial t^2} = 2\left(\eta_1 + \eta_2\right)d_{ij} + 2\left(\lambda_1\eta_2 + \lambda_2\eta_1\right)\frac{\partial d_{ij}}{\partial t} \qquad (۱۱-۱)$$

این مدل رفتار کاملتری را از یک ماده ویسکوالاستیک ارائه می‌کند. در حالت خاصی از مدل برگرز، چنانچه یکی از فنرها یا دمپرهای المان ماکسول حذف شود، مدل جدیدی به نام مدل جفریز[۱] حاصل می‌شود.

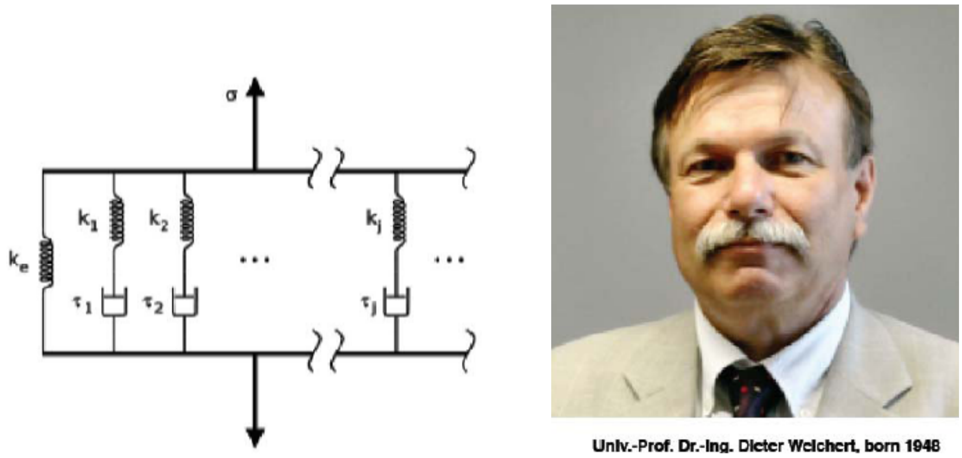
$$\tau_{ij} + \lambda_1\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = 2\eta\left(d_{ij} + \lambda_2\frac{\partial d_{ij}}{\partial t}\right) \qquad (۱۲-۱)$$

جفریز این مدل را برای مطالعه روی انتشار موج روی پوسته زمین ارائه نمود. این مـدل، سـاده و نـسبتا مناسـب برای بررسی رفتار یک ماده ویسکوالاستیک است زیرا در آن یک زمان آسودگی از تنش و یک زمان رهایی از تغییر شکل لحاظ شده است. همین ویژگی سبب شده تا از آن به عنوان رابطه پایه در برخی مدلهای غیر خطـی اسـتفاده شود.

[1] Jeffreys

۱-۵-۱-۴) مدل ماکسول توسعه یافته

این مدل، از طریق موازی کردن تعداد متناهی از المانهای ماکسول بدست می‌آید. اصولاً یک ماده پلیمری از تعداد زیادی از مولکولهای رشته‌ای با طولهای مختلف تشکیل شده که سبب ایجاد زمانهای مختلف آسودگی از تنش در این مواد می‌شود. به همین دلیل این مدل برای ایجاد زمان‌های متعدد آسودگی از تنش ایجاد شده است (یک زمان آسودگی از تنش، به ازای هر المان ماکسول).



شکل ۱-۲۸. مدل ماکسول توسعه یافته (دلتر ولچرت)

در این مدل، ضریب الاستیک و ویسکوزیته معادل به صورت تابعی نمایی و وابسته به زمان می‌باشد که به شکل زیر قابل تعریف است:

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \qquad \text{(۱-۱۳ الف)}$$

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i}}\right) \qquad \text{(۱-۱۳ ب)}$$

۱-۵-۲) مدل های ویسکوالاستیک غیر خطی

با وجود ارائه روابط دیفرانسیلی ساده بین تنش و نرخ برش در مدل‌های ویسکوالاستیک خطی، این مدل‌ها دارای مشکلات زیادی نیز می‌باشند. به عنوان مثال، این گونه معادلات را می‌توان برای تفسیر رفتار محلول های پلیمری رقیق، مناسب دانست و در مواردی که محلول‌های پلیمری غلیظ وجود دارد، این مدل‌ها دارای مشکلاتی خواهند بود. همچنین، بسیاری از رفتارهای متفاوت سیالات ویسکوالاستیک نسبت به سایر سیالات، از وجود اختلاف تنش های نرمال در این مواد ناشی می‌شود که البته مدل های خطی قادر به ارائه آنها نیستند.

۱-۵-۲-۱) خانواده مدل‌های اولدروید[1]

معروفترین روش بیان رفتار سیالات ویسکوالاستیک، خانواده مدل های اولدروید هستند. اولدروید با استفاده از تبدیلات تانسوری توانسته دستگاه مختصاتی را ارائه دهد که دستگاه مختصات همرفتی[2] نامیده می‌شود. او همچنین تلاش کرده که در این دستگاه، دو اصل دیگر مکانیک محیط‌های پیوسته مانند اصل قطعیت تنش و اصل عدم تغییر حرکت صلب الحاقی را ارضا نماید. او نشان داد که در بدست آوردن معادلات متشکله، نیازی به وارد کردن متغیرهایی که نشانگر موقعیت، حرکت دورانی و انتقالی یک جزء مادی است و نیز پارامترهای مشخص کننده اجزاء مجاور یا وضعیت آنها در آینده، نیست. بنابراین زمانی که مختصات مرجع جزء مادی مطرح نباشد، ساده ترین روش تعیین ذرات مادی استفاده از دستگاه مختصات منحنی الخطی است که بر ماده سوار بوده و همراه با آن در جریان حرکت کرده و تغییر شکل یابد. در این رساله تنها به بیان معادلات متشکله مدل اولدروید پرداخته خواهد شد. مدل اولدروید به مدل جفریز همرفتی[3] نیز معروف است چرا که اولدروید این مدل را با الهام از مدل خطی جفریز بدست آورد.

---
[1] Oldroyd
[2] Convected Coordinate System
[3] Convected Jeffreys

مدل های اولدروید نیاز به محاسبه مشتق زمانی همرفتی همبسته[1] و نیز مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته تانسور تنش[2]دارند که این مشتقات به‌ترتیب در روابط (۱-۱۴) و (۱-۱۵) آمده‌اند.

$$\tau^{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} + \left(\left(\nabla V \right) . \tau + \tau . \left(\nabla V \right)^T \right) \qquad \text{(۱-۱۴ الف)}$$

$$\vdots$$

$$\tau^{(n)} = \frac{D\tau_{(n-1)}}{Dt} + \left(\left(\nabla V \right) . \tau^{(n-1)} + \tau^{(n-1)} . \left(\nabla V \right)^T \right) \qquad \text{(۱-۱۴ ب)}$$

$$\tau_{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} - \left(\left(\nabla V \right)^T . \tau + \tau . \left(\nabla V \right) \right) \qquad \text{(۱-۱۵ الف)}$$

$$\vdots$$

$$\tau_{(n)} = \frac{D\tau_{(n-1)}}{Dt} - \left(\left(\nabla V \right)^T . \tau_{(n-1)} + \tau_{(n-1)} . \left(\nabla V \right) \right) \qquad \text{(۱-۱۵ ب)}$$

در روابط بالا، τ تانسور تنش، V بردار سرعت و T نیز نماد ترانهاده تانسور است. همچنین مشتقات زمانی همرفتی همبسته[3] و مشتقات زمانی همرفتی پاد همبسته نرخ برش[4] نیز به ترتیب به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\gamma^{(1)} = \nabla V + \left(\nabla V \right)^T \qquad \text{(۱-۱۶ الف)}$$

$$\gamma^{(2)} = \frac{D\gamma^{(1)}}{Dt} + \left(\left(\nabla V \right) . \gamma^{(1)} + \gamma^{(1)} . \left(\nabla V \right)^T \right) \qquad \text{(۱-۱۶ ب)}$$

$$\vdots$$

$$\gamma^{(n)} = \frac{D\gamma^{(n-1)}}{Dt} + \left(\left(\nabla V \right) . \gamma^{(n-1)} + \gamma^{(n-1)} . \left(\nabla V \right)^T \right) \qquad \text{(۱-۱۶ ج)}$$

$$\gamma_{(1)} = \nabla V + \left(\nabla V \right)^T \qquad \text{(۱-۱۷ الف)}$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} + \left(\left(\nabla V \right)^T . \gamma_{(1)} + \gamma_{(1)} . \left(\nabla V \right) \right) \qquad \text{(۱-۱۷ ب)}$$

$$\vdots$$

[1] Covariant Convected Time Derivative of the Stress Tensor
[2] Contravariant Convected Time Derivative of the Stress Tensor
[3] Covariant Convected Derivative of the Shear Rate Tensor
[4] Contravariant Convected Derivative of the Shear Rate Tensor

$$\gamma_{(n)} = \frac{D\gamma_{(n-1)}}{Dt} - \left(\left(\nabla V\right)^T . \gamma_{(n-1)} + \gamma_{(n-1)} . \left(\nabla V\right) \right) \quad \text{(۱-۱۷ ج)}$$

در میان مدل‌های اولدروید، دو مدل اولدروید A و اولدروید B از همه معروف‌تر هستندکه معادله متشکله این دو مدل به ترتیب در روابط (۱-۱۸) آمده است:

$$\tau + \lambda_1 \tau^{(1)} = -\eta_0 \left(\gamma^{(1)} + \lambda_2 \gamma^{(2)} \right) \quad \text{(۱-۱۸ الف)}$$

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} = -\eta_0 \left(\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)} \right) \quad \text{(۱-۱۸ ب)}$$

دو مدل بالا، اصول مکانیک محیط‌های پیوسته را به خوبی ارضا می‌کنند، اما در زمینه تعیین تنش های نرمال دوم دارای ضعف هایی هستند. رابطه (۱-۱۸ الف)، معادله متشکله مدل اولدروید A و رابطه (۱-۱۸ب)، معادله متشکله مدل اولدروید B می‌باشد. در مدل اولدروید A، ثابت تنش نرمال دوم قرینه ثابت تنش نرمال اول است ($\Psi_2 = -\Psi_1$) درحالی‌که در مدل اولدروید B ثابت تنش نرمال اول وجود داشته اما ثابت تنش نرمال دوم برابر صفر است ($\Psi_2 = 0, \ \ \Psi_1 > 0$).

با توجه به تعاریف بالا باید دانست که کدام مدل برای بررسی جریان یک سیال ویسکوالاستیک مناسب‌تر است. با توجه به اطلاعات آزمایشگاهی، نتایج تجربی و ساختمان مولکولی این گونه از سیالات، این نتیجه بدست می‌آید که در اکثر سیالات ویسکوالاستیک اختلاف تنش نرمال دوم حداکثر ۱۰ ٪ اختلاف تنش نرمال اول است. با توجه به این موضوع و این نکته که در مدل اولدروید A مقدار اختلاف تنش نرمال دوم برابر اختلاف تنش نرمال اول (از نظر بزرگی) پیش بینی می‌شود، این مدل، مدل مناسبی برای بیان رفتار سیالات ویسکوالاستیک نمی‌باشد. در برخی از سیالات ویسکوالاستیک که مقدار Ψ_2 بسیار کوچکی دارند، پاسخ مدل اولدروید B دارای دقت کافی است. همچنین با توجه به کوچک بودن مقدار Ψ_2 (نسبت به Ψ_1) در اکثر مواد ویسکوالاستیک پاسخهای مدل اولدروید B نسبت به مدل اولدروید A دقیق تر بوده و به همین دلیل کارآیی مدل اولدروید B بسیار بیشتر است.

مدل اولدروید B در حالت های خاصی به مدل های دیگری ساده می شود:

اگر $\lambda_2 = 0$ باشد، دراینصورت مدل فوق همرفتی ماکسول[1] (UCM) به‌دست می‌آید.

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} = -\eta_0 \gamma_{(1)} \tag{۱-۱۹}$$

اگر $\lambda_1 = 0$، در این صورت، مدل سیال مرتبه دو[2] به‌دست می‌آید.

$$\tau = -\eta_0 \left(\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)} \right) \tag{۱-۲۰}$$

اگر $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ باشد، این مدل به سیال نیوتنی با ویسکوزیته η_0 ساده می‌شود.

برای افزایش کارایی مدل اولدروید-بی این مدل به مدل هشت ثابته اولدروید[3] توسعه یافته است:

$$\begin{aligned} \tau + \lambda_1 \tau^{(1)} + \frac{\lambda_3}{2}\left(\tau \gamma_1 + \gamma_1 \tau\right) + \frac{\lambda_5}{2}\left(tr\left(\tau\right)\gamma_1\right) + \frac{\lambda_6}{2}\left[tr\left(\tau \gamma_1\right)\right] I &= \\ -\eta_0 \left(\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)} + \lambda_4 \gamma_{(1)}{}^2 + \frac{\lambda_7}{2}\left[tr\left(\gamma_{(1)}{}^2\right)\right] I \right) \end{aligned} \tag{۱-۲۱}$$

این مدل قادر به ارائه رفتار بسیار کاملی از یک سیال ویسکوالاستیک است ولی بسیار پیچیده بـوده و ناپایـداری عددی آن بالا می باشد. حالتهای خاص این مدل عبارتند از:

اگر مقادیر λ_6 و λ_7 صفر باشند، این مدل به مدل شش ثابته اولدروید[4] تبدیل می‌شود.

اگر مقادیر λ_3، λ_4، λ_6 و λ_7 صفر باشند، این مدل به مدل چهار ثابته اولدروید[5] تبدیل می‌شود.

اگر مقادیر λ_3، λ_4، λ_5، λ_6 و λ_7 صفر باشند، این مدل به مدل اولدروید B تبدیل می‌گردد.

اگر مقادیر λ_5، λ_6 و λ_7صفر باشند، این مدل به مدل اولدروید A تبدیل می‌گردد.

اگر مقادیر λ_1، λ_3، λ_5، λ_6 و λ_7 صفر باشند، این مدل به مدل سیال مرتبه دو تبدیل می‌گردد.

اگر مقادیر λ_2، λ_3، λ_4، λ_5، λ_6 و λ_7 صفر باشند، این مدل به مدل فوق همرفتی ماکسول تبدیل می‌گردد.

اگر مقادیر λ_1، λ_2، λ_3، λ_4، λ_5، λ_6 و λ_7 صفر باشند، این مدل به مدل سیال نیوتنی تبدیل می‌گردد [۱۵].

---

[1] Upper Convected Maxwell
[2] Second Order Fluid
[3] Oldroyd 8-Constant Model
[4] Oldroyd 6-Constant Model
[5] Oldroyd 4-Constant Model

فصل دوم

بررسی جریان سیال

ویسکوالاستیک در لوله خمیده

در این بخش، به حل معادلات جریان سیالات ویسکوالاستیک در لوله خمیده پرداخته خواهد شد. در ابتدا تحقیقات و پژوهش‌های گذشتگان، معرفی شده و لزوم تحقیق موجود در این رساله بیان می‌گردد. از آنجاییکه سیال مورد بحث در این تحقیق، سیال ویسکوالاستیک مدل مرتبه دو می‌باشد، در ابتدا شرح مختصری از این سیال ارائه شده و مدل‌بندی ریاضی آن یادآوری می‌گردد. در ادامه، با نمایش هندسه مساله، معادلات جریان و طریقه بی‌بعد سازی آنها بیان می‌گردد تا در نهایت معادلات اصلی و بی‌بعد مومنتم ارائه شوند.

۲-۱) مروری بر تحقیقات گذشته روی جریان سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده

جریان در مجاری خمیده یکی از جریانهای پایه و مهم در مکانیک سیالات محسوب می شود که از دیرباز تاکنون مورد توجه محققین بوده است. با وجود این، بسیاری از پژوهشهای گذشته به سیالات نیوتنی محدود بوده و تنها تعداد کمی از آنها به تحقیق در ارتباط با سیالات غیرنیوتنی و به خصوص سیالات ویسکوالاستیک پرداخته‌اند. از جمله کاربردهای جریان سیالات ویسکوالاستیک در مجاری خمیده می‌توان به کاربرد آن در علوم پزشکی، کاربردهای صنعتی و بیولوژیکی، صنایع هسته‌ای و پتروشیمی، صنایع غذایی، تزریق مواد پلیمری و ... اشاره کرد.

دین[۱] [۱۷-۱۶] از اولین پژوهشگرانی بود که جریان سیال در یک لوله خمیده را مورد بررسی قرار داد. او با استفاده از روش تحلیلی حساب اختلالات[۲] جریان سیال نیوتنی در یک لوله خمیده با سطح مقطع دایروی را تحلیل کرد. وی توانست در تحلیلهای خود جریانهای ثانویه تیلور-گورتلر[۳] را مشاهده نماید. این جریانهای ثانویه بر اساس نیروهای گریز از مرکز به وجود می‌آیند و با نسبت انحنا مرتبط می‌باشند. توپک اوقلو[۴] [۱۸] حل تحلیلی مشابه تحلیل دین برای جریان سیال نیوتنی در لوله های خمیده ارائه نمود و با محاسبه جملات مرتبه بالای سری های حساب اختلالات توانست که رابطه تحلیلی را برای افت فشار این جریان ارائه دهد.

برخی از محققین، جریان سیالات غیر نیوتونی در مجاری خمیده را به شکل عددی بررسی نموده اند. ژانگ[۵] و همکارانش [۱۹] از روش گالرکین[۶] برای مطالعه بر روی جریان سیال اولدروید-بی[۷] در یک لوله خمیده استفاده کردند و نتایج خود را برای اعداد دین و وایزنبرگ[۸] بزرگ ارائه دادند. فن تین و ژنگ[۹] [۲۰] نیز معادلات خود تشابهی را برای جریان سیال اولدروید-بی بین دو صفحه خمیده در نسبتهای انحنای کوچک ارائه دادند و با استفاده از روشهای عددی و تحلیلی تقریبی اقدام به حل این معادلات کردند. نتایج تحلیلی و عددی بدست آمده توسط فن

---

[1] Dean
[2] Perturbation Method
[3] Taylor-Gortler
[4] Topakoglu
[5] Zhang
[6] Galerkin Method
[7] Oldroyd-B
[8] Weissenberg number
[9] Phan-Thien and Zheng

تین و ژنگ در اعداد رینولدز پایین‌تر از ۱۰۰۰ هم‌خوانی مناسبی با هم داشتند. فن[۱] و همکـارانش [۲۱] تحقیقـات خود را بر روی جریان توسعه یافته خزشی و اینرسی سیال اولدروید-بی و UCMN2 در یک لوله خمیده به انجـام رسانده‌اند. آنها برای این منظور از روش حجم محدود استفاده نمودنـد و اثـرات اخـتلاف تـنش نرمـال اول را مـورد بررسی قرار دادند و دریافتند که با افزایش این پارامتر شاهد افزایش شدت جریانهای ثانویه و افـت فـشار بیـشتر در لوله خواهند بود. آنها همچنین علت این پدیده را به بروز تنشهای نرمال محوری نسبت دادند. با استفاده از تکنیـک مرتبه بزرگی[۲]، آنها نشان دادند که نیروی گریز از مرکز در تعادل با گرادیان فشار شعاعی و تنش نرمال محـوری در ناحیه هسته جریان (ناحیه دور از دیواره و نزدیک مرکز مقطع مجرا) است. آنها سپس اثرات اخـتلاف تـنش نرمـال دوم را مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه دست یافتند که اختلاف تنش نرمالهای دوم منفـی اثـرات معکوسـی نسبت به اثرات اختلاف تنش نرمال اول داشته و افزایش این پارامتر باعث کاهش میزان جریانهای ثانویه مـی‌گـردد. این نتایج به خوبی با نتایج آزمایشگاهی [۲۲-۲۴] توافق داشـت. چـن[۳] وهمکـارانش [۲۵] بـا اسـتفاده از روشـهای عددی و تحلیلی جریان توسعه یافته سیال اولدروید-بی در یک لوله خمیده چرخان را مـورد بررسـی قـرار دادنـد و دریافتند که توزیع فشار دینامیکی در سطح مقطع لوله در تعادل با نیروی کوریولیس است. در این تحقیق مشخص گردید که گردابه‌های تیلور-گورتلر با چرخش لوله در جهت انحنای آن تقویت می‌گردند ولی این گردابه‌ها با گردش لوله در جهت خلاف انحنای لوله تضعیف می‌شوند. همچنین در این نوع گردش لوله، مقدار جریانهای ثانویه در یـک مقدار چرخش بحرانی به کمترین مقدار خود می‌رسند که این عدد دوران بحرانی چهار برابر مقدار عدد وایزنبرگ در نسبت انحنا می‌باشد.

در کنار مطالعات عددی، دانشمندان و محققانی نیز به مطالعه تحلیلـی اینگونـه جریانهـا در لولـه هـای خمیـده پرداخته‌اند. از جمله این پژوهشها می‌توان به مطالعه بر روی جریان توسعه یافته سیال اولدرویـد-بـی در یـک لولـه خمیده با استفاده از روش حساب اختلالات اشاره کرد که توسط توماس و والترز[۴] [۲۶] انجام گرفـت. آنهـا در ایـن

[1] Fan
[2] Order of magnitude
[3] Chen
[4] Thomas and Walters

بررسی دریافتند که جریانهای ثانویه رابطه مستقیمی با خواص الاستیک سیال اولدروید-بی دارند. سارین[1] [۲۸-۲۷] تحقیقی مشابه را انجام داد و دریافت که شدت جریانهای ثانویه با توان چهارم عدد دبراو[2] رابطه داشته و همچنین رابطه میان بیشینه مقدار سرعت محوری و موقعیت مرکز گردابه‌ها روی عدد دبراو را تشریح کردند. رابرتسون و مولر[3] [۲۹] بر روی جریان خزشی و اینرسی سیال اولدروید-بی در یک لوله خمیده و با استفاده از روش تحلیلی، تحقیقاتی را انجام داده‌اند و دریافتند که در جریان خزشی برای سیالات با عدد وایزنبرگ پایین، مقدار دبی جریان در لوله خمیده اندکی بیشتر از دبی جریان در یک لوله مستقیم می‌باشد. با افزایش عدد وایزنبرگ و همچنین کاهش ویسکوزیته حلال نیوتنی در جریان اینرسی، نسبت مقاومت، به شدت کاهش می‌یابد. ایمتو[4] و همکارانش [۳۱-۳۰] بر روی سیالات پاورلو[5] و وایت-متزنر[6] در لوله‌های دارای انحنای سینوسی، سهموی و هذلولوی مطالعاتی را انجام داده‌اند و دریافتند که با افزایش پارامتر الاستیسیته در سیالات، جریان سیال خود را سریعتر با انحنای لوله وفق می‌دهد. داس[7] [۳۲] نیز مطالعات ایمتو را برای سیالات بینگهام ادامه داد.

شرما و پراکاش[8] [۳۳] در تحقیقات خود بر روی سیالات مرتبه دو، تنها به اختلاف تنش نرمال اول توجه کردند و با صفر در نظر گرفتن اختلاف تنش نرمال دوم، نتایج خود را بر اساس اختلاف تنش نرمال اول ارائه نمودند. آنها دریافتند که افزایش این پارامتر، باعث افزایش شدت جریانهای ثانویه در لوله خواهد شد. بوِن[9] و همکارانش [۳۴] جریان خزشی سیال فوق همرفتی ماکسول[10] و سیال مرتبه دو را در یک لوله خمیده با استفاده از حل تحلیلی مورد مطالعه قرار داده و به این نتیجه رسیده‌اند که در جریان خزشی و در گرادیان فشار برابر، مقدار نرخ دبی در یک لوله خمیده برای سیالات ویسکوالاستیک بیشتر از مقدار آن در یک لوله مستقیم است. اما جیتچوت و رابرتسون[11] [۳۵] حل تحلیلی خود را با غیر صفر و منفی در نظر گرفتن مقدار اختلاف تنش نرمال دوم ارائه دادند. آنها در این تحقیق

---

[1] Sarin
[2] Deborah number
[3] Robertson and Muller
[4] Iemoto
[5] Power law
[6] White-Metzner
[7] Das
[8] Sharma and Prakash
[9] Bowen
[10] Upper Convected Maxwell (UCM)
[11] Jitchote and Robertson

نشان دادند که با صفر لحاظ کردن اثر اختلاف تنش نرمال دوم، پاسخ های حساب اختلالات یکتا است اما در غیر اینصورت به جز در برخی حالات خاص، معادلات حاکم در وضعیت منفرد قرار می گیرند و در این شرایط، ارائه پاسخ یکتا برای میدان جریان میسر نیست. جیتچوت و رابرتسون تقریب حساب اختلالات خود را تنها تا مرتبه اول به کار برده‌اند و به همین دلیل از این تحلیل، هیچ رابطه‌ای برای تغییرات دبی/ افت فشار بدست نمی‌آید.

در این تحقیق جریان توسعه یافته سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده به طور تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. مشابه تحقیق بون و همکاران [۳۴] و جیتچوت و رابرتسون [۳۵] تحلیل جریان با استفاده از روش حساب اختلالات صورت گرفته و از نسبت انحنا به عنوان پارامتر اختلال استفاده شده است. محاسبه تغییرات مقاومت مجرای خمیده در برابر جریان در لوله های خمیده نیازمند محاسبه ترمهای مرتبه بالای سری‌های حساب اختلالات است که عملیات محاسباتی مربوط به محاسبه این ترمها بسیار دشوارتر از ترمهای دارای مرتبه پایین است.

در این تحقیق بر خلاف تحقیقات پیشین، ترمهای مرتبه بالاتر جریان سیال مرتبه دو در لوله های خمیده محاسبه شده است و رابطه تحلیلی برای تغییرات دبی جریان اینرسی این سیال ارائه شده است. همچنین با محاسبه این ترم‌های با مرتبه بالا، سرعت محوری، جریانهای ثانویه و میدان تنش به شکل دقیق تری محاسبه شده و بر روی مکانیزم اثر خواص الاستیک بر میدان جریان نیز بحث شده است. از آنجا که ثابت زمانی سیال فوق همرفتی ماکسول (UCM)، زمان رهایی از تنش[1] و ثابت زمانی سیال مرتبه دو زمان رهایی از تغییر شکل[2] است، بنابراین می توان در یک هندسه، ویسکوزیته و تحت گرادیان فشار یکسان ادعا نمود که عدد وایزنبرگ در سیال UCM معرف اثر زمان رهایی از تنش و در سیال مرتبه دو معرف زمان رهایی از تغییر شکل ماده ویسکوالاستیک است. در این تحقیق بر اساس نتایج بدست آمده برای سیال مرتبه دو (SOF) از تحقیق اخیر و نیز سیال فوق همرفتی ماکسول (UCM) از تحقیق رابرتسون و مولر [۲۹]، بر روی اثر خواص زمان رهایی از تغییر شکل و زمان رهایی از تنش سیال ویسکوالاستیک بر میدان جریان و به‌خصوص بر تغییرات دبی و رفتار کاهش/ افزایش مقاومت[3] بحث شده است.

---

[1] Relaxation time
[2] Retardation time
[3] Drag reduction/enhancement

۲-۲) هندسه مساله

در شکل ۱-۲ هندسه جریان این تحقیق نشان داده شده است. در اینجا مقطع مجـرا بـه صـورت مـدور و شـعاع انحنای مسیر، ثابت فرض شده است. در این پژوهش جهت بررسی تحلیلی جریـان از دسـتگاه مختـصات ترویـدال[1] استفاده شده است. پارامترهای دستگاه مختصات ترویدال ($\tilde{r},\phi,\tilde{s}$) نسبت به دستگاه مختصات کارتزین بـه صـورت زیر می‌باشد.

$$\tilde{r}=\sqrt{{y_3}^2+\left(\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2}-R\right)^2},\qquad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{y_3}{\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2}-R}\right),\qquad \tilde{s}=R\tan^{-1}\left(\frac{y_2}{y_1}\right),\qquad (۱\text{-}۲)$$

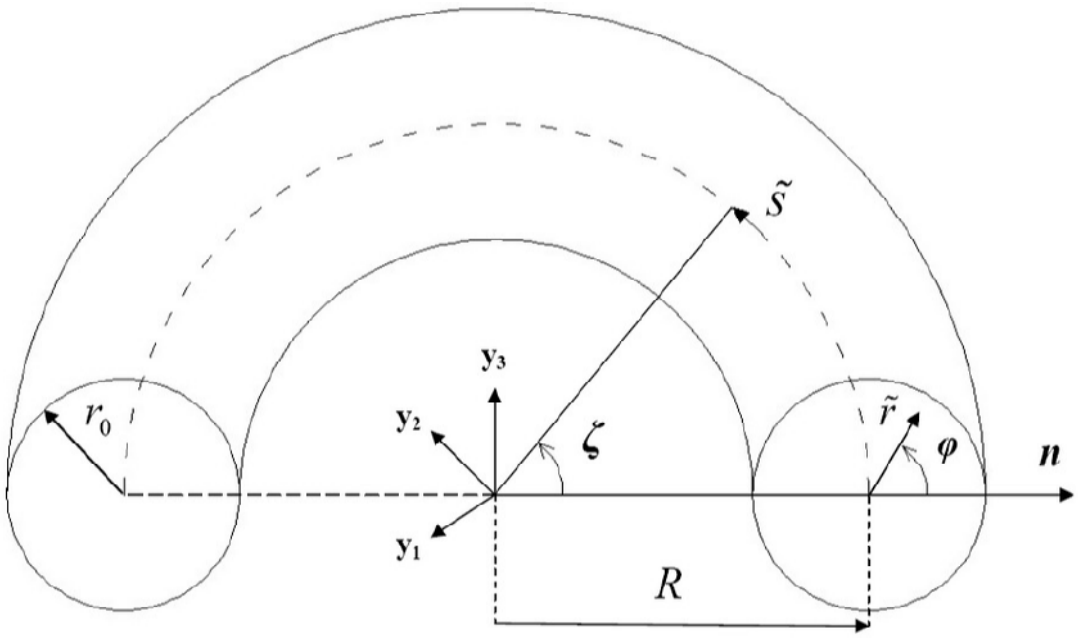
با معکوس کردن روابط بالا می‌توان روابط زیر را بدست آورد:

$$y_1=\left(R+\tilde{r}\cos(\phi)\right)\cos\left(\frac{\tilde{s}}{R}\right),\qquad y_2=\left(R+\tilde{r}\cos(\phi)\right)\sin\left(\frac{\tilde{s}}{R}\right),\qquad y_3=\tilde{r}\sin(\phi).\qquad (۲\text{-}۲)$$

روابط مربوط به بردارهای یکه مختصات ترویدال ($\underline{e}_r,\underline{e}_\phi,\underline{e}_s$) در قیاس بـا بردارهـای یکـه مختـصات کـارتزین ($\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$) به شرح زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
\underline{e}_r&=\cos\phi\left(\cos\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_1+\sin\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_2\right)+\sin\phi\,\underline{e}_3,\\
\underline{e}_\phi&=-\sin\phi\left(\cos\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_1+\sin\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_2\right)+\cos\phi\,\underline{e}_3,\\
\underline{e}_s&=\sin\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_1-\cos\frac{\tilde{s}}{R}\underline{e}_2.
\end{aligned}\qquad (۳\text{-}۲)$$

[1] Toroidal coordinate system



شکل ۲-۱. هندسه مساله مورد بحث

۲-۳) بی‌بعد سازی

پارامترهای بی‌بعد جریان در تحقیق اخیر به صورت زیر می‌باشند.

$$s=\frac{\tilde{s}}{r_0},\quad r=\frac{\tilde{r}}{r_0},\quad u=\frac{\underline{\tilde{v}}.\underline{e}_r}{W_0},\quad v=\frac{\underline{\tilde{v}}.\underline{e}_\phi}{W_0},\quad w=\frac{\underline{\tilde{v}}.\underline{e}_s}{W_0},\quad p=\frac{r_0}{\eta W_0}\tilde{p}$$
$$\gamma=\tilde{\gamma}\frac{r_0}{W_0},\quad \frac{\Im\gamma}{\Im t}=\frac{\Im\tilde{\gamma}}{\Im t}\left(\frac{r_0}{W_0}\right)^2,\quad We=\frac{\tilde{\Psi}_1 W_0}{2\eta r_0},\quad \mathrm{Re}=\frac{\rho W_0 r_0}{\eta},\quad \delta=\frac{r_0}{R} \qquad (۲-۴)$$

در رابطه فوق وجود علامت ~ در بالانویس هر کمیت نشانگر بعد دار بودن آن کمیت است. همچنین r و s جهات دستگاه مختصات ترویدال، r_0 شعاع مقطع لوله، W_0 سرعت مرجع، $\underline{\tilde{v}}$ بردار سرعت، $\tilde{p}$ ترم فشار، $\tilde{\Psi}_1$ ثابت اختلاف تنش نرمال اول، η ویسکوزیته سیال، $\tilde{\gamma}$ و $\frac{\Im\tilde{\gamma}}{\Im t}$ مشتقات همرفتی پاد همبسته نرخ برش مرتبه اول و دوم، We عدد وایزنبرگ، Re عدد رینولدز، δ نسبت انحنا و R شعاع انحنای گام لوله خمیده می‌باشد.

۲-۴) معادلات متشکله

در این تحقیق، جریان سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده مورد بررسی قرار گرفته است. مدل سیال مرتبه دو، مشابه مدل کریمینال-اریکسون-فیلبی[۱] بوده با این تفاوت که توابع رئولوژیکی در سیال مرتبه دو مستقل از نرخ برش هستند. این معادلات متشکله، برای مدل سازی جریانهای برشی دائمی سیالات ویسکوالاستیک بسیار مناسب بوده و استفاده از آن جهت محاسبات صنعتی متداول است. تانسور تنش $\tilde{\tau}$ برای سیال مرتبه دو تراکم ناپذیر به صورت زیر است:

$$\tilde{\tau} = \eta\tilde{\gamma} - \frac{1}{2}\tilde{\Psi}_1 \frac{\Im\tilde{\gamma}}{\Im t} + \tilde{\Psi}_2\left(\tilde{\gamma}.\tilde{\gamma}\right), \qquad (۲-۵)$$

در عبارت بالا، η ویسکوزیته، $\tilde{\Psi}_1$ ثابت اختلاف تنش نرمال اول و $\tilde{\Psi}_2$ ثابت اختلاف تنش نرمال دوم است. همچنین در جریان دائمی، مشتقات همرفتی پاد همبسته نرخ برش مرتبه اول و دوم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{\gamma} = \nabla\tilde{V} + \nabla\tilde{V}^{\mathrm{T}}, \qquad (۲-۶\ \text{الف})$$

$$\frac{\Im\tilde{\gamma}}{\Im t} = \tilde{V}.\nabla\tilde{\gamma} - \left[\left(\nabla\tilde{V}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}\cdot\left(\nabla\tilde{V}\right)\right]. \qquad (۲-۶\ \text{ب})$$

چنانچه در رابطه (۲-۵)، مقدار $\tilde{\Psi}_1 = 0$ باشد، مدل راینر-ریولین[۲] بدست خواهد آمد. اگر هر دو مقدار $\tilde{\Psi}_1$ و $\tilde{\Psi}_2$ برابر صفر باشند، معادله متشکله سیال نیوتنی حاصل می شود. در معادله متشکله سیال مرتبه دو، زمان رهایی از تغییر شکل (λ_2) رابطه‌ای مستقیم با ثابت اختلاف تنش نرمال اول دارد.

$$\lambda_2 = -\frac{\tilde{\Psi}_1}{2\tilde{\eta}} \qquad (۲-۷)$$

[1] Criminale-Eriksen-Filbey (CEF)
[2] Reiner-Rivlin

همانگونه که جیتچوت و همکارانش [۳۵] نشان داده‌اند، با در نظر گرفتن ترم اختلاف تنش نرمال دوم، بـه جـز تعداد بسیار محدودی از شرایط، در بقیه شرایط نمی‌توان جوابی یکتا برای ترمهای سرعت محوری یافت. بـه همـین دلیل در حل موجود برای جلوگیری از قرار گرفتن معادلات در وضعیت منفرد، از مقدار $\tilde{\Psi}_2$ یا همان اختلاف تـنش نرمال دوم، صرف نظر شده است. با این فرض و با استفاده از روابط (۱-۴) و (۱-۵)، صورت بی‌بعد معادلـه متـشکله سیال مرتبه دو به شکل زیر خواهد بود:

$$\tau = \gamma - We\,\frac{\Im\gamma}{\Im t}\,. \qquad (۲-۸)$$

۲-۵) معادلات حاکم

برای جریان توسعه یافته هر نوع سیال در یک لوله خمیده، مـشتق کلیـه پارامترهـای جریـان بـه غیـر از فـشار استاتیکی نسبت به زاویه مسیر پیشروی مسیر (ζ)، صفر است. در جریان توسعه یافته در یک لوله خمیـده، رابطـه زیر برای گرادیان فشار وجود دارد:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \zeta} = cte < 0\,. \qquad (۲-۹)$$

گرادیان فشار در یک لوله خمیده بر اساس گرادیان فشار در راستای خط محور کانال (جهت s) تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن مقدار G به عنوان قدر مطلق افت فشار محوری داریم:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{s}} = \frac{1}{\tilde{R}}\frac{\partial P}{\partial \zeta} = -\,G\,. \qquad (۲-۱۰)$$

مقدار G در رابطه بالا یک مقدار ثابت است. در اینجا از مـاکزیمم سـرعت جریـان سـیال نیـوتنی در یـک لولـه مستقیم که دارای قطر هیدرولیکی، گرادیان فشار و ویسکوزیته یکسانی نسبت به جریـان سـیال مرتبـه دو در لولـه خمیده است، به عنوان سرعت مرجع (W_0) استفاده شده است.

$$W_0 = \frac{G\,r_0^{\,2}}{4\eta}\,. \qquad (۲-۱۱)$$

در جریان سیال نیوتنی توسعه یافته در یک لوله مستقیم، گرادیان فشار با تنش برشی به صورت زیر بالانس می شود:

$$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{s}}+\eta\frac{1}{\tilde{r}'}\frac{\partial}{\partial}\left(\tilde{r}'\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}'}\right)=0\,. \qquad (۲-۱۲)$$

در رابطه بالا، $\tilde{s}$ جهت پیشروی، $\tilde{u}$ سرعت در این جهت و $\tilde{r}'$ جهت شعاعی مقطع لوله است. پروفیل سرعت محوری نیز به گونه زیر می‌باشد:

$$\tilde{u}'=W_0\left(1-\left(\frac{\tilde{r}'}{r_0}\right)^2\right). \qquad (۲-۱۳)$$

با استفاده از روابط (۲-۴)، (۲-۱۲) و (۲-۱۳) می‌توان رابطه مربوط به گرادیان فشار بی‌بعد را به صورت زیر بدست آورد:

$$\frac{\partial P}{\partial s}=-4\,. \qquad (۲-۱۴)$$

معادلات حاکم برای جریان دائمی و توسعه یافته هر نوع سیال در یک لوله خمیده در مختصات ترویدال و با استفاده از روابط (۲-۱) تا (۲-۴) و (۲-۱۴) به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial(u\,r\,B)}{\partial r}+\frac{\partial(v\,B)}{\partial\phi}=0 \qquad (\text{۲-۱۵ الف})$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left[u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\phi}-\frac{v^2}{r}-\delta\frac{w^2\cos\phi}{B}\right]=&-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\left(\tau_{rr}-\tau_{\phi\phi}\right)\\&+\frac{\delta}{B}\left(\tau_{rr}\cos\phi-\tau_{r\phi}\sin\phi-\tau_{ss}\cos\phi\right)\end{aligned} \qquad (\text{۲-۱۵ ب})$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left[u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\phi}+\frac{u\,v}{r}+\delta\frac{w^2\sin\phi}{B}\right]=&-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\frac{\partial\tau_{\phi r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\phi\phi}}{\partial\phi}+\frac{2}{r}\tau_{r\phi}\\&+\frac{\delta}{B}\left(\tau_{r\phi}\cos\phi-\tau_{\phi\phi}\sin\phi-\tau_{ss}\sin\phi\right)\end{aligned} \qquad (\text{۲-۱۵ ج})$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left[u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\phi}+\delta\frac{w}{B}\left(u\cos\phi-v\sin\phi\right)\right]=&-\frac{1}{B}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial\tau_{sr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\phi s}}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\tau_{sr}\\&+\frac{2\delta}{B}\left(\tau_{rs}\cos\phi-\tau_{\phi s}\sin\phi\right)\end{aligned} \qquad (\text{۲-۱۵ د})$$

که در روابط فوق B معرف شعاع انحنای هر نقطه از مقطع کانال بوده و از رابطه زیر بدست می آید:

$$B = 1 + \delta\, r \cos(\phi). \qquad (۲-۱۶)$$

تابع جریان برای جریانهای ثانویه در دستگاه مختصات ترویدال از روابط زیر حاصل می شوند:

$$u = -\frac{1}{r\,B}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \qquad v = -\frac{1}{B}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad (۲-۱۷)$$

در عبارات بالا، ψ معرف تابع جریان برای جریانهای ثانویه است. شایان ذکر است که تابع جریـان فـوق، معادلـه پیوستگی را ارضا می نماید. با قرار دادن رابطـه (۲-۱۷) در رابطـه (۲-۱۵ د)، معادلـه مومنتـوم در جهـت محـوری جریان به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left[\frac{1}{r\,B}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\phi}-\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\delta\frac{w}{B^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\cos\phi+\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\phi\right)\right]\\&=\frac{4}{B}+\frac{\partial\tau_{rs}}{\partial r}+\frac{1}{r}+\frac{\partial\tau_{\phi s}}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\tau_{rs}+\frac{2\delta}{B}\left(\tau_{rs}\cos\phi-\tau_{\phi s}\sin\phi\right),\end{aligned} \qquad (۲-۱۸)$$

همچنین به منظور بدست آوردن معادله تابع جریان و حـذف تـرم فـشار از معـادلات حـاکم در جهـات عرضـی، بایستی از رابطه (۲-۱۵ ب) نسبت به ϕ و از رابطه (۲-۱۵ ج) نسبت به r مـشتقگیری نمـوده و حاصـل ایـن دو از یکدیگر کسر شود. به این ترتیب رابطه زیر برای معادله تابع جریانهای ثانویه حاصل می شود:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{r\,B^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\phi}\nabla^2\psi-\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\psi\right)+\frac{\delta}{B}\left[2w\left(\frac{\partial w}{\partial r}\sin\phi+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\phi}\cos\phi\right)\right.\right.\\&+\frac{1}{B^2}\left(\sin\phi\left(\frac{3}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\phi}+\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2+2\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\right.\\&\left.\left.+\cos\phi\left(\frac{3}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\phi}+\frac{3}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right)\right)\right]\\&\left.+\delta^2\frac{3}{B^4}\left[\frac{\sin 2\phi}{2}\left(\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2\right)-\cos 2\phi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)\right]\right\}=\\&\qquad\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\tau_{rr}}{\partial r\partial\phi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\tau_{\phi\phi}}{\partial r\partial\phi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\tau_{\phi\phi}}{\partial\phi}+\frac{\partial^2\tau_{r\phi}}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tau_{r\phi}}{\partial\phi^2}\right]\\&\qquad+\frac{\delta}{B}\left[\begin{aligned}&\sin\phi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\left(\tau_{\phi\phi}-\tau_{rr}\right)+\frac{\partial\tau_{ss}}{\partial r}-\frac{\partial\tau_{\phi\phi}}{\partial r}\right)\\&+\cos\phi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{ss}}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial\phi}+\frac{2}{r}\tau_{r\phi}-\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial r}\right)\end{aligned}\right]\end{aligned} \qquad (۲-۱۹)$$

در عبارت بالا، ∇^2 نمایشگر عملگر لاپلاسین بی بعد بوده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \qquad (۲۰\text{-}۲)$$

همچنین برای حل معادلات حاکم، شرط مرزی عدم لغزش بر روی جداره لوله صادق است:

$$w = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{در} \quad r = 1 \qquad (۲۱\text{-}۲)$$

فصل سوم

حل جریان سیال ویسکوالاستیک

مدل مرتبه دو در یک لوله خمیده

در این بخش، ابتدا سری حساب اختلالات مربوط به ترم‌های تنش، تابع جریان و سرعت بیشینه بـه عنـوان حـل تقریبی مساله معرفی شده‌اند. سپس با قرار دادن این سری‌ها در معادلات اصلی بی‌بعد مـومنتم کـه در فـصل قبـل بدست آمده بودند، به مرتب‌سازی آنها بر حسب پارامتر حساب اختلالات (کـه در ایـن مـساله همـان نـسبت انحنـا می‌باشد) و سپس حل آنها پرداخته شد. با توجه به معادلات بدست آمـده و شـرایط مـرزی موجـود، بـسط حـساب اختلالات را تا مرتبه دوم سری پیش می‌بریم. حل ارائه شده در حالاتی خاص، بـا حـل‌هـای بدسـت آمـده گذشـته مقایسه و صحه‌گذاری شده است. در نهایت، پاسخی بدست خواهد آمد که برای اولین بار، در این رساله منتشر شده است. مهم ترین دست‌آوردی که در حل این مساله حاصل شد، حل مرتبه دوم سری حساب اختلالات بوده که منجر به یافتن یک عبارت تحلیلی برای دبی ورودی سیال از لوله خمیده شد.

۳-۱) حل مساله به روش حساب اختلالات

در این بخش با استفاده از حساب اختلالات پاسخ تحلیلی برای میدان جریان سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده ارائه شده است. به‌طور کلی می توان پارامترهای میدان جریان را بصورت یک سری از نسبت های انحنا (δ) معرفی نمود:

$$w = \sum_{n=0}^{2} \delta^n w^{(n)}(r,\phi), \qquad \psi = \sum_{n=1}^{2} \delta^n \psi^{(n)}(r,\phi), \qquad \tau = \sum_{n=0}^{2} \delta^n \tau^{(n)}(r,\phi), \tag{۱-۳}$$

به عبارت دیگر، در رابطه (۳-۱)، δ معرف پارامتر اختلال است. با توجه به اینکه میدان جریان در لوله مستقیم فاقد جریان ثانویه است و با عنایت به این مساله که در لوله مستقیم اثر انحنای مسیر (δ) وجود ندارد، لذا نتیجه می شود که بر خلاف سرعت محوری و میدان تنش، ترم مرتبه صفر تابع جریان مربوط به جریانهای ثانویه برابر صفر است ($\psi^{(0)} = 0$).

۳-۱-۱) حل مرتبه δ^0

برای یافتن جمله مرتبه صفر سرعت محوری بایستی سریهای مربوط به سرعت محوری و میدان تنش سیال مرتبه دو را از رابطه (۳-۱) در رابطه (۱۸-۲) قرار داد و معادله حاصله را بر حسب δ^0 مرتب نمود. به این ترتیب معادله زیر برای ترمهای مرتبه صفر حاصل می شود:

$$\frac{\partial \tau_{rs}{}^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\phi s}{}^{(0)}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{rs}{}^{(0)}}{r} = -4\,, \tag{۲-۳}$$

مولفه های تنش τ_{rs} و $\tau_{\phi s}$ سیال مرتبه دو از روابط بخش ضمیمه الف بدست می آیند. به این ترتیب با محاسبه جمله مرتبه صفر این دو مولفه تنش بر حسب سرعت محوری و قرار دادن نتیجه آن در رابطه (۳-۲)، معادله مربوط به جمله مرتبه صفر سرعت محوری حاصل می شود:

$$\nabla^2 w^{(0)} = -4 \tag{۳-۳}$$

با اعمال شرط عدم لغزش بر روی جداره لوله، رابطه زیر برای سرعت محوری مرتبه صفر بدست می آید:

$$w^{(0)} = 1 - r^2 \tag{۴-۳}$$

توزیع سرعت بدست آمده در رابطه (۳-۴) همان توزیع سرعت سیال نیوتنی در لوله مستقیم است. به عبارت دیگر از آنجا که جملات مرتبه صفر مستقل از انحنا هستند پاسخ میدان جریان به سمت رابطه جریان در لوله مستقیم همگرا شده است. شایان ذکر است که پاسخ سرعت محوری برای جریان سیالات مرتبه دو و فوق همرفتی ماکسول در لوله مستقیم مشابه سیال نیوتنی است [۲۱].

۳-۱-۲) حل مرتبه δ^1

با قرار دادن رابطه (۳-۱) در معادله تابع جریان (معادله (۲-۱۹)) و مرتب نمودن این معادله تا مرتبه δ^1 ، معادله زیر را می‌توان بدست آورد.

$$\begin{aligned}&\left(-4\frac{We}{r^3}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\phi^2}-4\frac{We}{r}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial\phi}+\frac{2\,\mathrm{Re}}{r}w^{(0)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}\right)\cos(\phi)\\&+\left(-4\frac{We}{r^2}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial\phi}+4\frac{We}{r^3}\left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}\right)^2-4We\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}+2\,\mathrm{Re}w^{(0)}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\right)\sin(\phi)\\&-\frac{\partial^4\psi^{(1)}}{\partial r^4}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}-\frac{4}{r^4}\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial\phi^2}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^4\psi^{(1)}}{\partial r^2\,\partial\phi^2}-\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4\psi^{(1)}}{\partial\phi^4}\\&-\frac{2}{r}\frac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r^3}=0\end{aligned} \qquad (۵\text{-}۳)$$

با قرار دادن رابطه مربوط به $w^{(0)}$ در معادله بالا، حالت عمومی مربوط به $\psi^{(1)}$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\psi^{(1)}=g_1(r)\sin(\phi) \qquad (۶\text{-}۳)$$

در نهایت پس از اعمال شرط مرزی عدم لغزش (رابطه (۲-۲۱))، رابطه زیر برای $g_1(r)$ حاصل می شود:

$$g_1(r)=\frac{1}{288}rw^{(0)^2}\left(\mathrm{Re}(r^2-4)-24We\right), \qquad (۷\text{-}۳)$$

به همین ترتیب معادله (۲-۱۸) را نیز بر حسب δ^1 مرتب کرده و به معادله زیر دست خواهیم یافت:

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{4}{r}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \phi^2}-12r-4\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-4r\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}-\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\right)\cos(\phi)+\frac{1}{r}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}\sin(\phi)\\
&-\frac{1}{r}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \phi^2}+\frac{2We}{r^3}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial \phi}\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial \phi^2}+\frac{2We}{r}\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r\,\partial \phi}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial r^2}\\
&-\frac{2We}{r}\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\partial \phi}+\frac{We}{r}\frac{\partial^3 \psi^{(1)}}{\partial r^2\partial \phi}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}+\frac{4We}{r^4}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \phi^2}+\frac{3We}{r^2}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\partial \phi}\\
&-\frac{We}{r^2}\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r\partial \phi}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}+\frac{We}{r^2}\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}+\frac{We}{r}\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial r^2\partial \phi}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}+\frac{We}{r^3}\frac{\partial^3 \psi^{(1)}}{\partial \phi^3}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \qquad , \qquad (۸\text{-}۳)\\
&-\frac{3We}{r^2}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}-\frac{2We}{r^3}\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r\partial \phi}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \phi^2}+\frac{We}{r^3}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial \phi^3}-\frac{We}{r^3}\frac{\partial^3 \psi^{(1)}}{\partial r\partial \phi^2}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}\\
&-\frac{We}{r^3}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial r\partial \phi^2}-\frac{We}{r}\frac{\partial^3 \psi^{(1)}}{\partial r^3}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}-\frac{We}{r}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial r^3}-\frac{Re}{r}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\\
&+\frac{3We}{r^3}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-\frac{We}{r^3}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}+\frac{\mathrm{Re}}{r}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}=0,
\end{aligned}$$

با قرار دادن روابط معادل $w^{(0)}$ و $\psi^{(1)}$ رابطه عمومی مربوط به $w^{(1)}$ را به صورت زیر داریم:

$$w^{(1)}=f_1(r)\cos(\phi)\,, \qquad (۹\text{-}۳)$$

پس از حل معادله و اعمال شرایط مرزی، تابع $f_1(r)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$f_1(r)=-\frac{1}{11520}r\,w^{(0)}\begin{pmatrix}8640+\mathrm{Re}^2(r^6-9r^4+21r^2-19)+1920(r^2-1)We^2\\ +\mathrm{Re}(-120r^4+520r^2-440)We\end{pmatrix}, \qquad (۱۰\text{-}۳)$$

شایان ذکر است که روابط مربوط به جملات مرتبه اول میدان سرعت جریان سیال مرتبه دو در لوله خمیده (روابط (۳-۶) تا (۳-۷) و (۳-۹) تا (۳-۱۰)) نخستین بار توسط جیتچوت و رابرتسون [۳۵] ارائه شده است. محاسبه ترمهای مرتبه اول تنها برای آشکار نمودن جریانهای ثانویه در مجاری خمیده مناسب است و این حل منجر به محاسبه دقیق میدان سرعت نمی شود. واضح است که انتگرال رابطه (۳-۹) در سطح مقطع لوله برابر صفر است و بنابراین محاسبه میزان تغییرات دبی جریان در لوله خمیده نسبت به لوله مستقیم از محاسبه جمله مرتبه یک برای سرعت محوری امکانپذیر نبوده و نیازمند محاسبه ترمهای مرتبه بالاتر است. همچنین با محاسبه جملات مرتبه بالا پاسخ های دقیق تری برای جریانهای ثانویه و سرعت محوری و همچنین پدیده متمایل شدن توزیع سرعت محوری به سمت دیواره سمت انحنای خارجی مجرا حاصل می شود که با فیزیک جریان در مجاری خمیده سازگار است. از این رو برخلاف تحقیق جیتچوت و رابرتسون، تحقیق اخیر در مرتبه اول تحلیل متوقف نشده و

ترمهای مرتبه دوم نیز محاسبه شده است. البته شایان ذکر است که محاسبه این ترمها دشوارتر بوده و به پاسخ های پیچیده تری منجر می شود.

۳-۱-۳) حل مرتبه δ^2

روند تعیین معادلات و محاسبه جملات مرتبه دو کاملا مشابه محاسبه جملات مرتبه اول است با این تفاوت که جهت بدست آوردن معادلات مربوطه لازم است که روابط (۳-۱) در معادلات حاکم قرار داده شوند و جملات آنها بر حسب δ^2 مرتب سازی شوند (معادلات مربوط به این مرتب‌سازی در ضمیمه ارائه شده است). به این ترتیب با حل معادلات مربوطه و اعمال شرایط مرزی نتایج زیر برای سرعت محوری و جریانهای ثانویه بدست می آید:

$$\psi^{(2)} = g_2(r)\sin(2\phi)\,, \qquad \text{(۳-۱۱ الف)}$$

$$w^{(2)} = f_{20}(r) + f_{22}(r)\cos(2\phi)\,, \qquad \text{(۳-۱۱ ب)}$$

به دلیل صورت پیچیده و طولانی توابع $g_2(r)$، $f_{20}(r)$ و $f_{22}(r)$، از ذکر آنها در اینجا صرفنظر شده و نتایج مربوطه در بخش ضمیمه ب آمده است. شایان ذکر است که روابط (۳-۱۱) و همچنین روابط بخش ضمیمه ب برای نخستین بار، در تحقیق اخیر گزارش شده است. با توجه به رابطه (۳-۱۱ ب) می توان دریافت که انتگرال رابطه (۳-۱۱ ب) در سطح مقطع جریان صفر نبوده و بر خلاف جمله مرتبه اول (رابطه (۳-۹)) به محاسبه تغییرات دبی جریان در لوله خمیده منجر می شود.

۳-۲) تعیین دبی جریان

دبی جریان را می توان به سادگی از انتگرال گیری از توزیع سرعت محوری تا مرتبه دو بدست آورد:

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^1 w\, r\,dr\,d\phi\,. \qquad \text{(۳-۱۲)}$$

با استفاده از پاسخ بدست آمده در بخش ۳-۱ برای ترمهای سرعت محوری، مـی‌تـوان مقـدار مناسـبی از w را از طریق رابطه زیر تا مرتبه δ^2 بدست آورد:

$$w = w^{(0)}(r) + \delta f_1(r)\cos\phi + \delta^2\left(f_{20}(r) + f_{22}(r)\cos 2\phi\right). \tag{۱۳-۳}$$

با قرار دادن توزیع سرعت محوری بدست آمده از رابطه (۳-۱۳) در رابطه (۳-۱۲) می‌توان رابطـه بـی بعـد دبـی جریان را برای سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده بدست آورد:

$$Q_c = Q_s\left(1+\delta^2\left(\begin{array}{l}\frac{1}{48}-\frac{11}{17280}\mathrm{Re}^2-\frac{1541}{4180377600}\mathrm{Re}^4+\left(\frac{1}{1290240}\mathrm{Re}^3+\frac{1}{240}\mathrm{Re}\right)We\\ +\left(\frac{1}{18}+\frac{691}{2903040}\mathrm{Re}^2\right)We^2+\left(\frac{11}{4320}\mathrm{Re}\right)We^3+\left(\frac{1}{135}\right)We^4\end{array}\right)\right) \tag{۱۴-۳}$$

شایان ذکر است که در انتگرالگیری از رابطه (۳-۱۳) در سطح مقطع کانال، تنها اثر انتگرال ترمهـای $w^{(0)}(r)$ و $f_{20}(r)$ غیر صفر است و میزان تغییرات دبی نسبت به جریان در لوله مستقیم نیز از انتگرال جملـه $f_{20}(r)$ حاصـل می شود. در رابطه بالا، Q_s دبی بی‌بعد جریان سیال نیوتنی در لوله مستقیم در گرادیان فشاری مشابه می‌باشـد کـه برابر $\pi/2$ است. همچنین مقدار بعد دار آن به شکل زیر است:

$$\tilde{Q}_s = \frac{\pi r_o^{\,2}}{8\eta}G. \tag{۱۵-۳}$$

حل بالا برای مقادیر کوچک نسبت انحنا معتبر می‌باشد و در صورت افزایش عدد دین، ایـن حـل از حـل واقعـی انحراف می‌یابد.

با حذف ترم الاستیک جریان و صفر قرار دادن عدد وایزنبرگ، رابطه دبی جریان اینرسی سـیال نیـوتنی در لولـه خمیده حاصل می شود که نخستین بار توسط توپک‌اوقلو [۱۸] ارائه شده است:

$$Q_c = Q_s\left(1+\delta^2\left(\frac{1}{48}-\frac{11}{17280}\mathrm{Re}^2-\frac{1541}{4180377600}\mathrm{Re}^4\right)\right) \tag{۱۶-۳}$$

همچنین اگر در رابطه (۳-۱۴) مقدار عدد رینولدز به سمت صفر میل کند، میزان تغییرات دبـی جریـان خزشـی سیال مرتبه دو که توسط بون [۳۴] و همکاران ارائه شده بدست خواهد آمد:

$$Q_c = Q_s\left(1+\delta^2\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{288}We^2+\frac{1}{34560}We^4\right)\right) \tag{۱۷-۳}$$

بنابراین مشاهده می شود که پاسخ بدست آمده برای جریان اینرسی سیال مرتبه دو در تحقیق اخیر (رابطه (۳-۱۴))، پاسـخ هـای مربـوط بـه جریـان خزشـی سـیال مرتبـه دو و جریـان اینرسـی نیـوتنی را پوشـش می‌دهد. در بخش بعدی نتایج بدست آمده از این تحلیل ارائه خواهد شد.

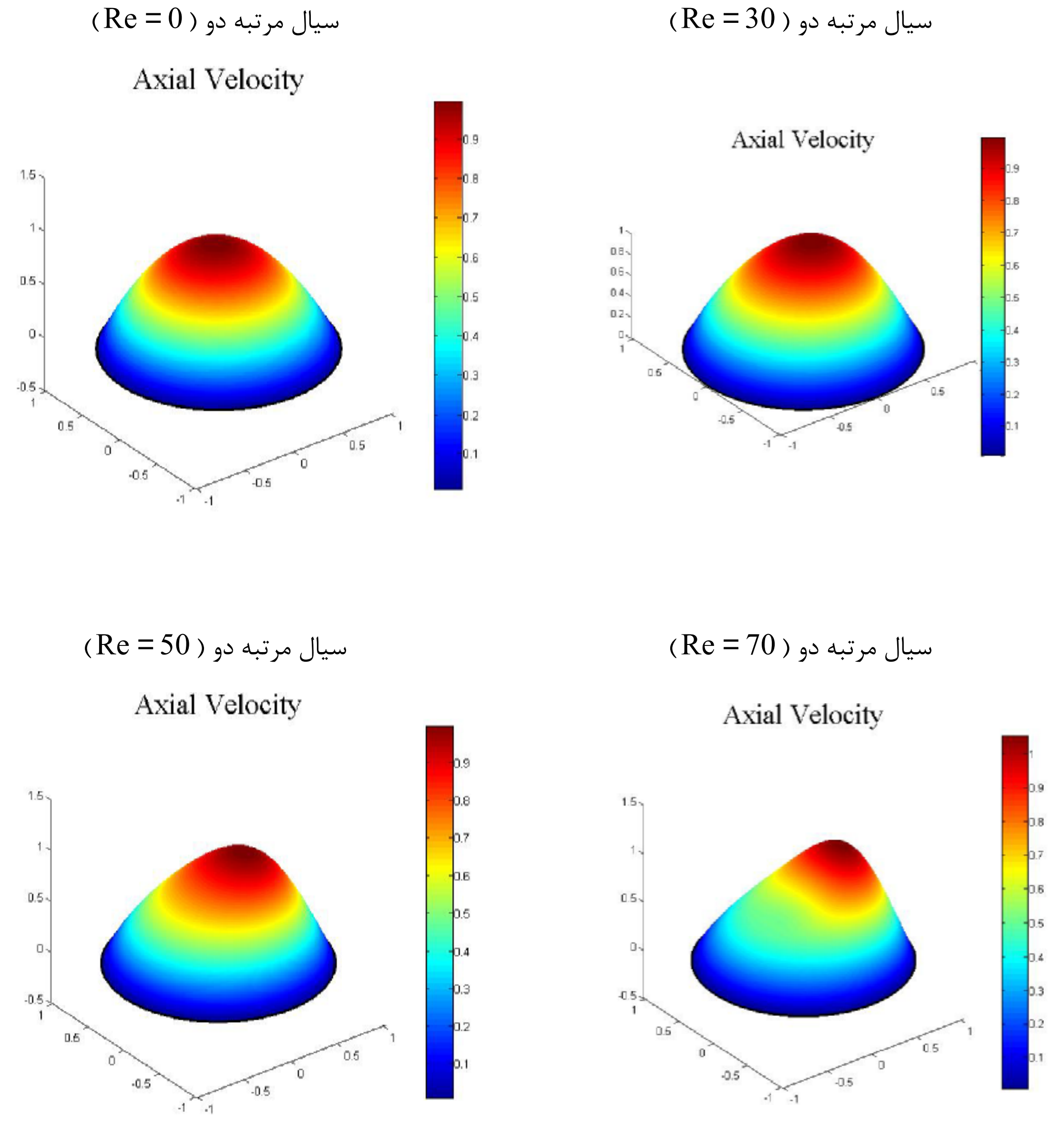
فصل چهارم

نتایج بدست آمده از تحلیل جریان سیال

ویسکوالاستیک مدل مرتبه دو در یک لوله خمیده

در این بخش، با توجه به حلی که از طریق سری حساب اختلالات بدست آمده است، سیال مرتبه دو، مورد بحث و ارزیابی قرار می‌گیرد. در سیال ماکسول فوق همرفتی و مرتبه دو که تحت گرادیان فشاری برابر قرار مـی‌گیرنـد و دارای قطر هیدرولیکی و ویسکوزیته برابری می‌باشند، عدد وایزنبرگ در آنها به ترتیب وابسته به زمـان آسـودگی از تنش و زمان رهایی از تغییر شکل می‌باشد. به این ترتیب، اثر پارامترهای مهم، بر روی پروفیل‌های سرعت و جریان سیال مرتبه دو مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

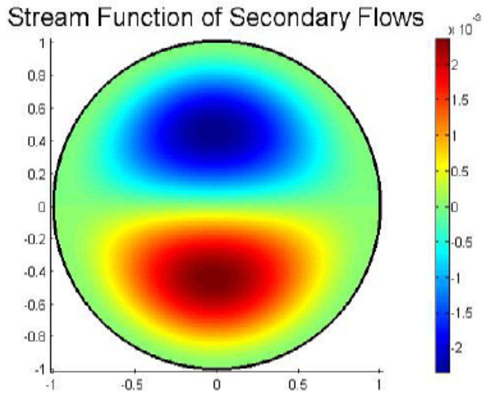
شکل ۴-۱، پروفیل برجسته سرعت محوری را همگام با تغییرات افزایشی عدد رینولدز نشان می‌دهد. با توجه بـه این شکل به راحتی می‌توان تمایل قله پروفیل (بیشینه سرعت محوری) به سمت دیواره بیرونی را مشاهده نمود.



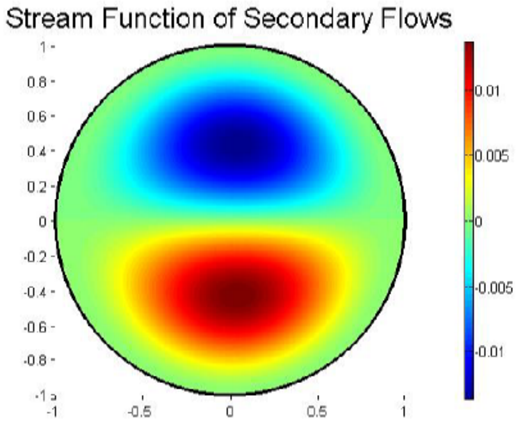
شکل ۴-۱. اثرات افزایش عدد رینولدز روی سرعت محوری سیال در حالت $We = 1$ و $\delta = 0.1$

در شکل ۴-۲، می‌توان اثر افزایش عدد رینولدز در اعداد وایزنبرگ ثابت را این بار روی تابع جریان مورد بررسی و ارزیابی قرار داد. همان‌طور که از این پروفیل‌ها مشخص است، شدت جریان های ثانویه با افزایش عدد رینولدز رو به فزونی می‌گذارند.

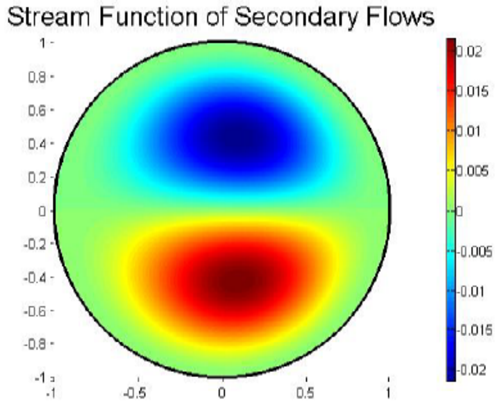
سیال مرتبه دو ($\mathrm{Re}=0$)



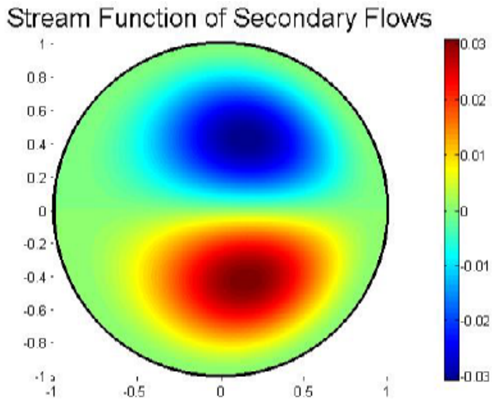
سیال مرتبه دو ($\mathrm{Re}=30$)



سیال مرتبه دو ($\mathrm{Re}=50$)

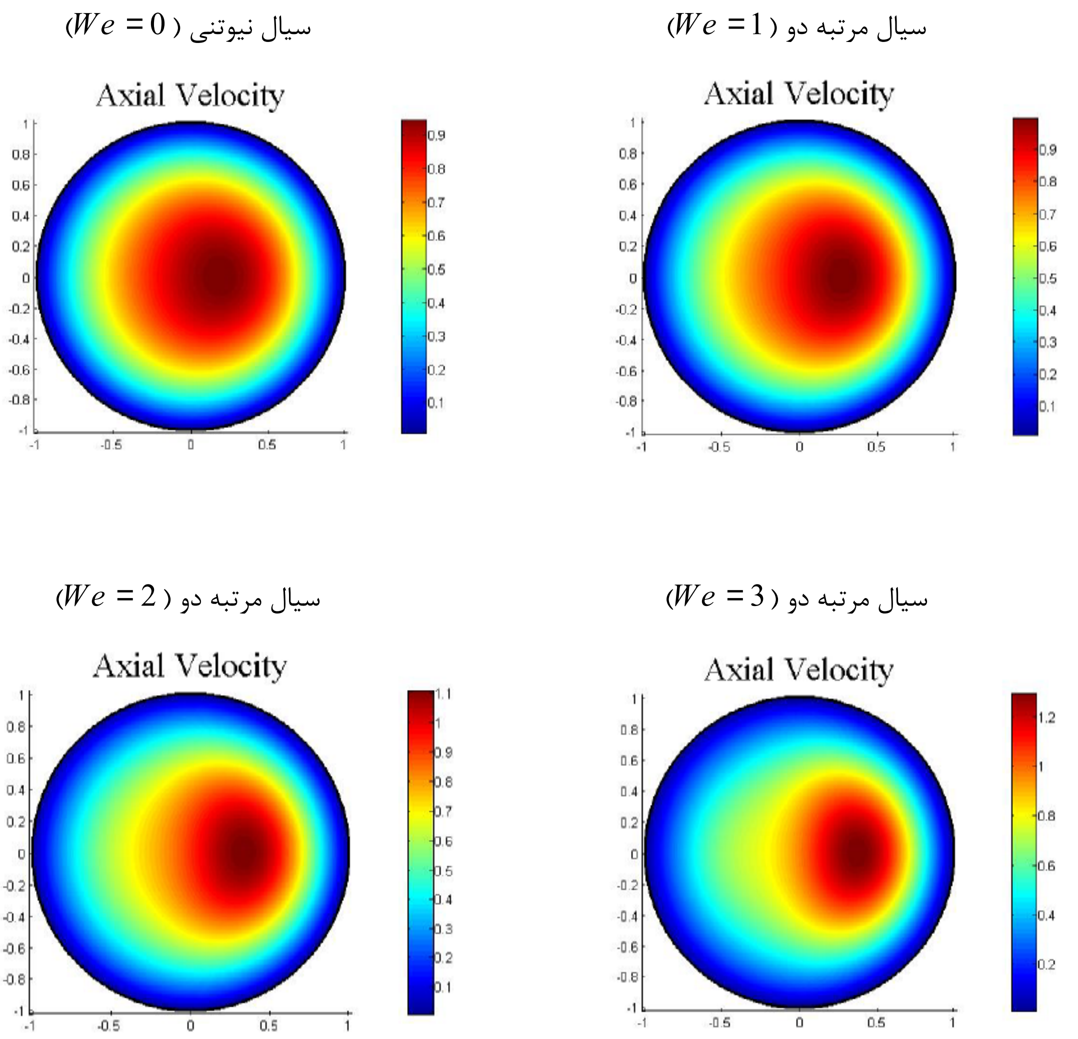


سیال مرتبه دو ($\mathrm{Re}=70$)



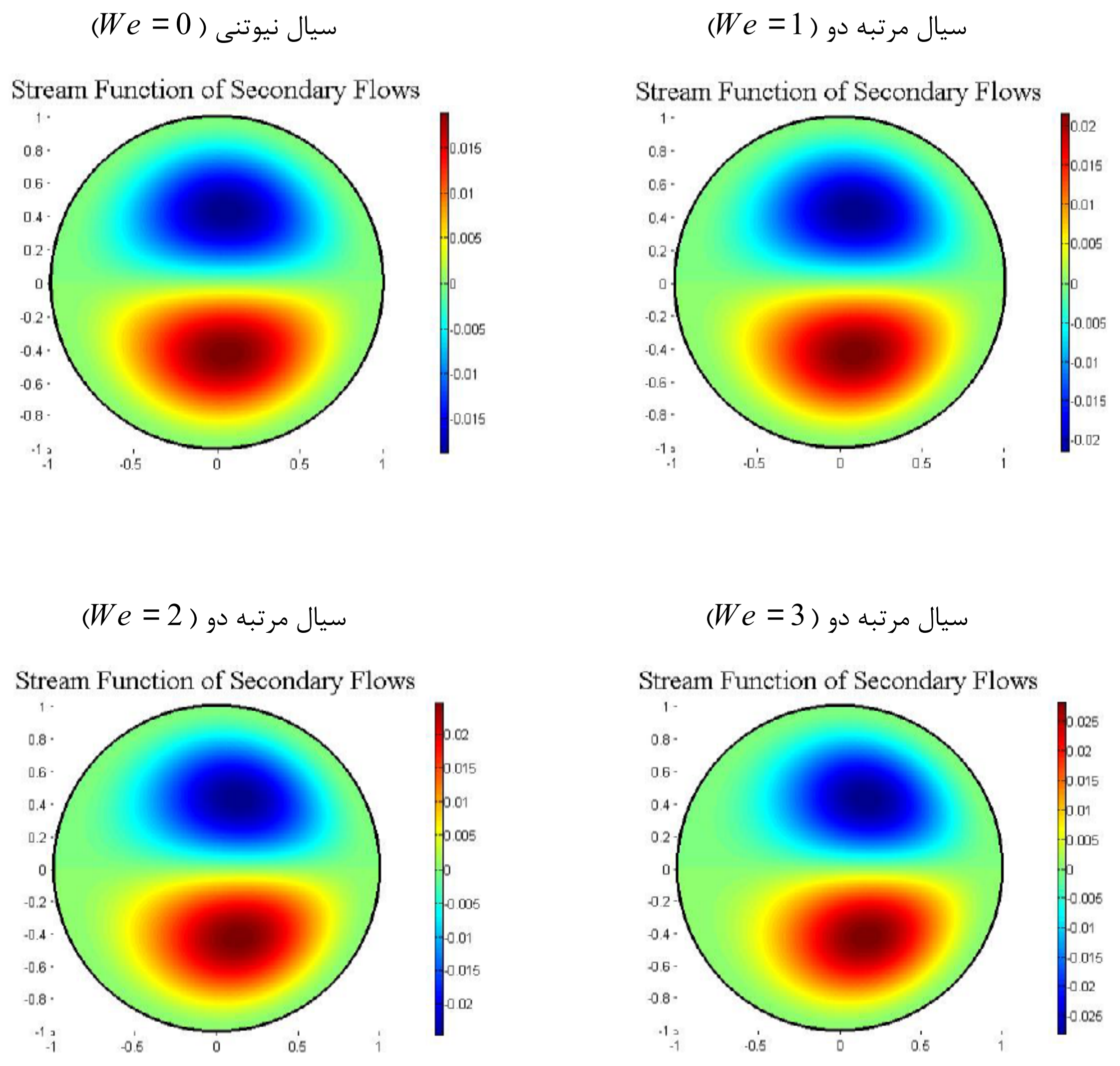
شکل ۴-۲. اثرات افزایش عدد رینولدز روی تابع جریان سیال در حالت $We=1$ و $\delta=0.1$

شکل ۴-۳، پروفیل سرعت محوری را همگام با تغییرات افزایشی عدد وایزنبرگ در حالی می‌توان مـشاهده نمـود که عدد رینولدز در عدد ۵۰ ثابت شده است. در این شکل نیز می‌توان تمایل بیشینه سرعت محوری به سمت دیواره بیرونی را مشاهده نمود.



شکل ۴-۳. اثرات افزایش عدد وایزنبرگ روی سرعت محوری در حالت $\mathrm{Re} = 50$ و $\delta = 0.1$

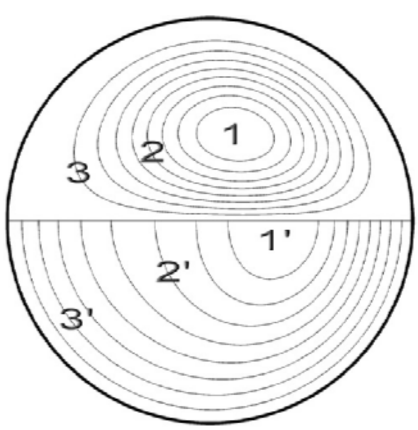
همچنین اثرات افزایش عدد وایزنبرگ روی تابع جریان را در $\mathrm{Re} = 50$ را می‌توان در شکل ۴-۴ مشاهده نمود. در این شکل نیز می‌توان مشاهده کرد که افزایش عدد وایزنبرگ باعث کشیده شدن جریان‌های ثانویه به سمت دیواره بیرونی و البته افزایش شدت آنها نیز می‌گردد.



شکل ۴-۴. اثرات افزایش عدد وایزنبرگ روی تابع جریان در حالت $\mathrm{Re} = 50$ و $\delta = 0.1$

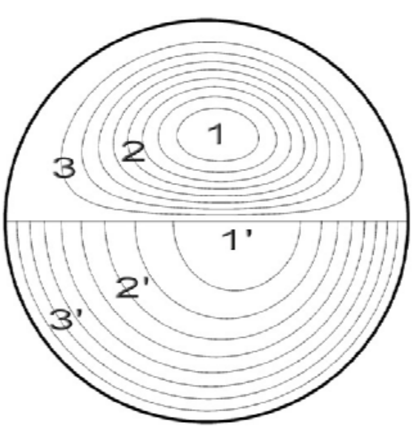
شکل ۴-۵ را می‌توان به عنوان خلاصه ای از تمامی نتایج حاصل از دو شکل بالا در نظر گرفت. در نیمه بالایی، تابع جریان و در نیمه پایینی، سرعت محوری را می‌توان دید. در عدد وایزنبرگ صفر که معادل سیال نیوتنی می‌باشد، نیروهای گریز از مرکز، گردابه‌هایی را تولید می‌کنند که به گردابه‌های تیلور-گرتلر معروف می‌باشند. با توجه به شکل، افزایش عدد وایزنبرگ، سرعت محوری بیشینه و شدت جریان ثانویه را افزایش می‌دهد و موقعیت سرعت محوری را به سمت دیواره بیرونی لوله خمیده جابه‌جا می‌کند.

سیال مرتبه دو ($We = 2$)



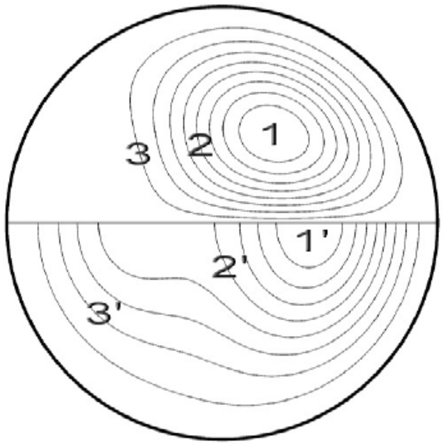
$$\psi_1 = -0.025,\ w_{1'} = 1.10$$
$$\psi_2 = -0.014,\ w_{2'} = 0.74$$
$$\psi_3 = -0.003,\ w_{3'} = 0.25$$

سیال نیوتونی ($We = 0$)



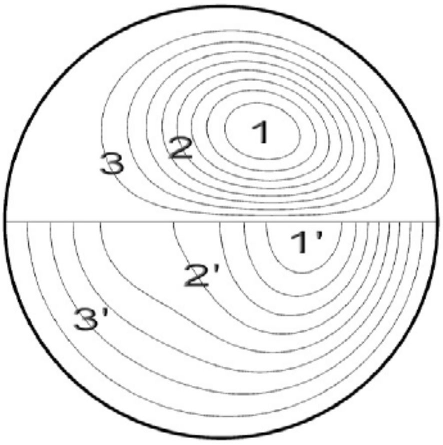
$$\psi_1 = -0.019,\ w_{1'} = 0.94$$
$$\psi_2 = -0.012,\ w_{2'} = 0.63$$
$$\psi_3 = -0.002,\ w_{3'} = 0.21$$

سیال مرتبه دو ($We = 6$)



$$\psi_1 = -0.043,\ w_{1'} = 2.45$$
$$\psi_2 = -0.023,\ w_{2'} = 1.37$$
$$\psi_3 = -0.004,\ w_{3'} = 0.54$$

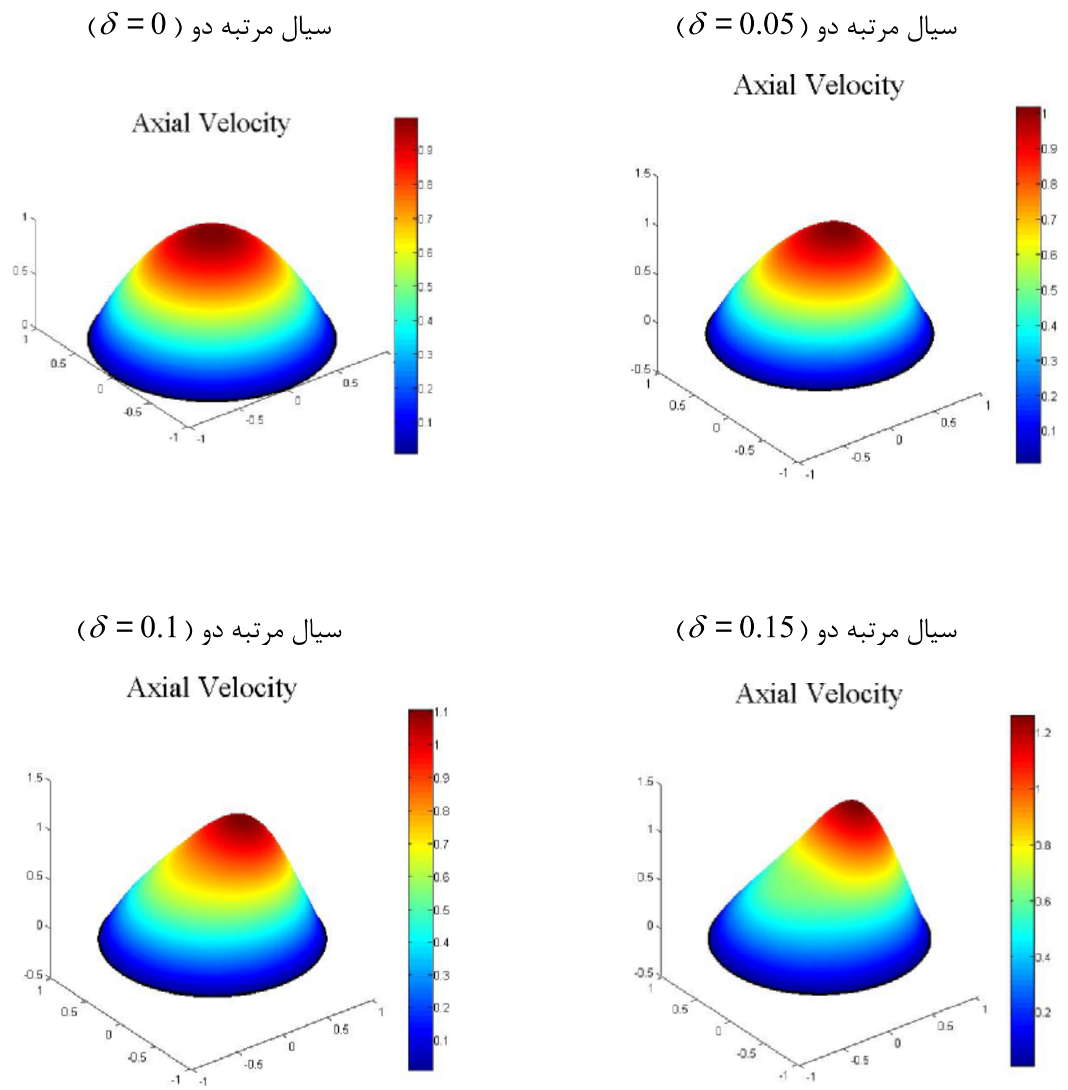
سیال مرتبه دو ($We = 4$)



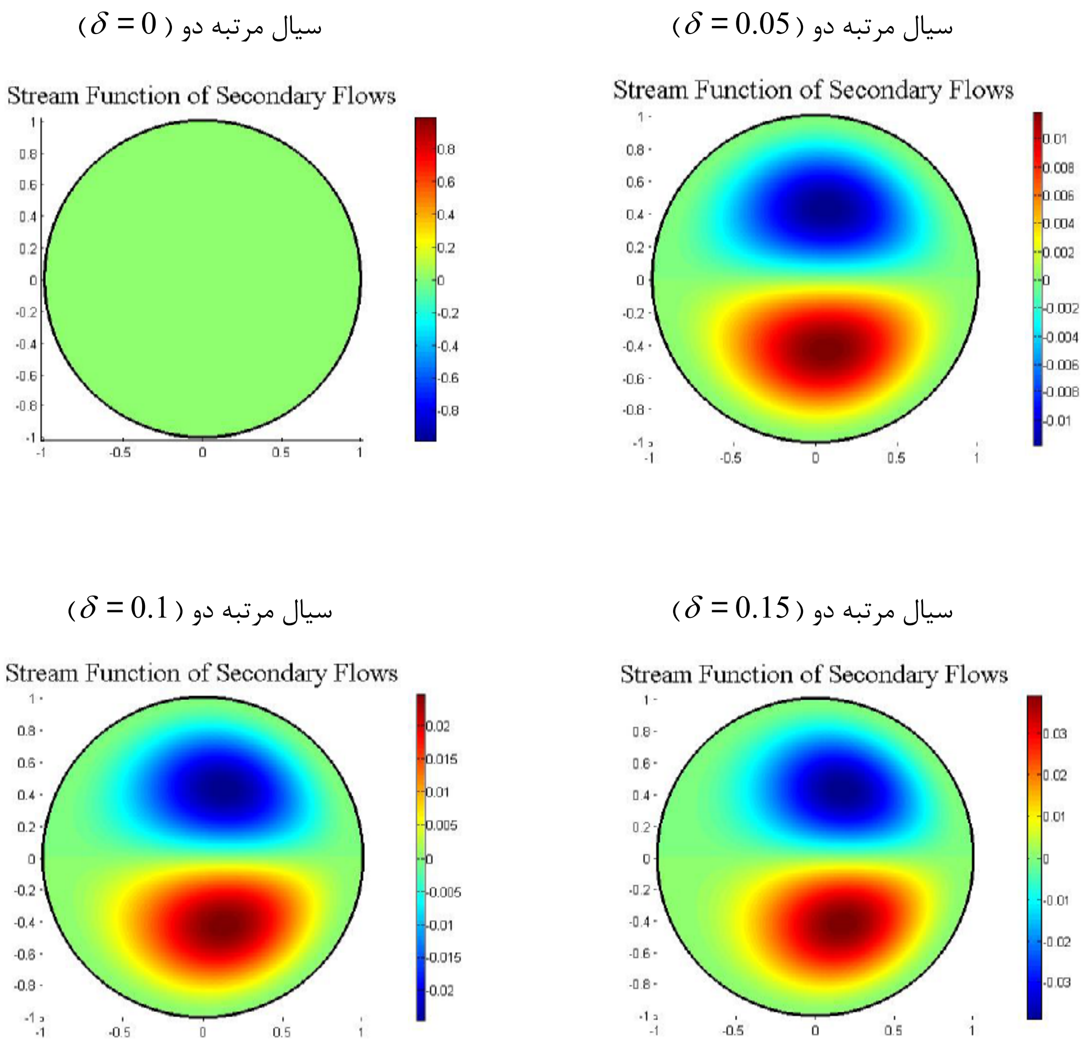
$$\psi_1 = -0.033,\ w_{1'} = 1.55$$
$$\psi_2 = -0.018,\ w_{2'} = 0.87$$
$$\psi_3 = -0.004,\ w_{3'} = 0.34$$

شکل ۴-۵. تابع جریان (نیمه بالایی) و سرعت محوری (نیمه پایانی) سیال مرتبه دو
در مقادیر مختلف عدد وایزنبرگ در $\mathrm{Re} = 50$ و $\delta = 0.1$

در شکل‌های ۴-۶ و ۴-۷، اثر افزایش نسبت انحنای لوله روی سرعت محوری و تابع جریان را می‌توان مشاهده نمود. با توجه به پروفیل برجسته‌ای که برای سرعت محوری نمایش داده شده است، بیشینه سرعت محوری با افزایش مقدار نسبت انحنای لوله، به سمت دیواره بیرونی متمایل می‌شود. اما همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد، در صورت در اختیار داشتن لوله صاف، شاهد پدید آمدن جریان‌های ثانویه در لوله نخواهیم بود. با توجه به اینکه در این مساله، $\delta = 0$ به معنی صاف بودن لوله می‌باشد، به وضوح می‌توان عدم تشکیل جریان‌های ثانویه در لوله صاف را از شکل ۴-۷ دریافت.



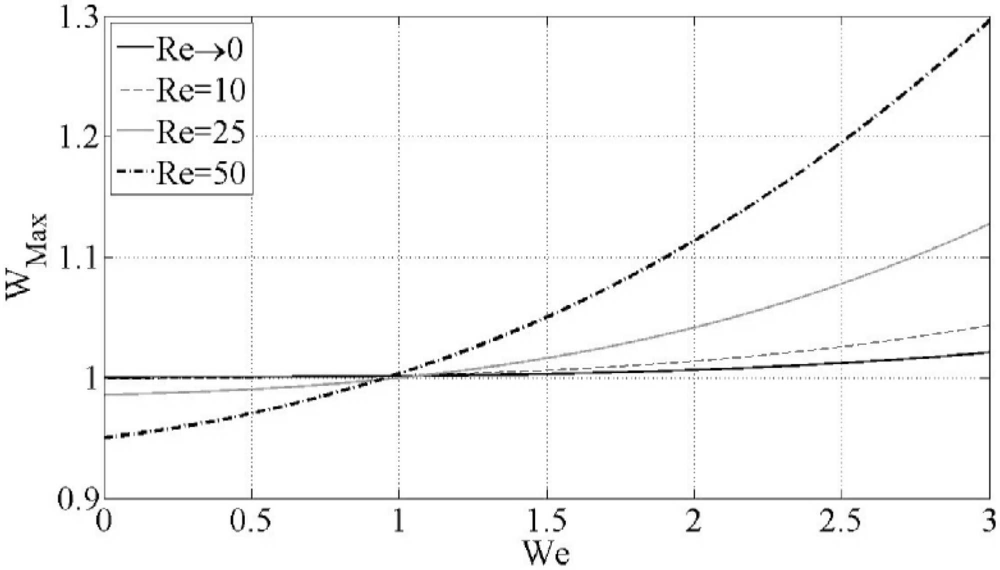
شکل ۴-۶. اثرات افزایش نسبت انحنای لوله روی سرعت محوری در حالت $\mathrm{Re} = 50$ و $We = 2$



شکل ۴-۷. اثرات افزایش نسبت انحنای لوله روی تابع جریان در حالت $\mathrm{Re} = 50$ و $We = 2$

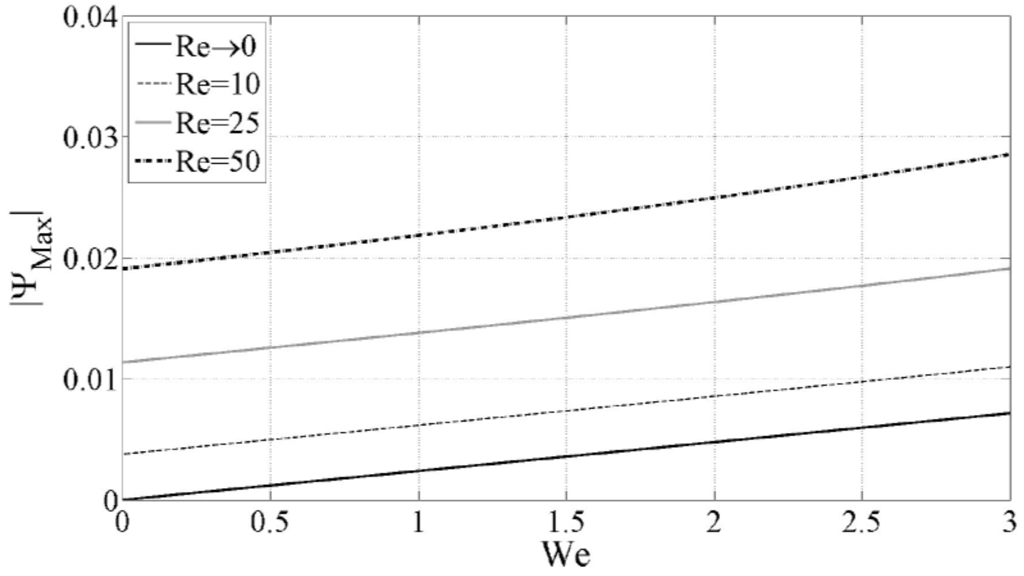
با توجه به پروفیل‌هایی که در بالا برای سرعت محوری و تابع جریان، ارائه شد، نتایج کلی مشهود بود. اما برای درک بهتر اثرات پارامترهای مختلف، از شکل‌های زیر بهره می‌بریم.

در شکل‌های ۴-۸ و ۴-۹ می‌توان اثرات افزایش عدد رینولدز و عدد وایزنبرگ را به صورت توامان مشاهده نمود و مورد بررسی و ارزیابی قرار داد. همان‌طور که از شکل ۴-۸ برمی‌آید، افزایش عدد وایزنبرگ و رینولدز باعث تقویت سرعت بیشینه سیال مرتبه دو در لوله خمیده می‌گردد.



شکل ۴-۸. اثر عدد وایزنبرگ روی مقدار بیشینه سرعت سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده

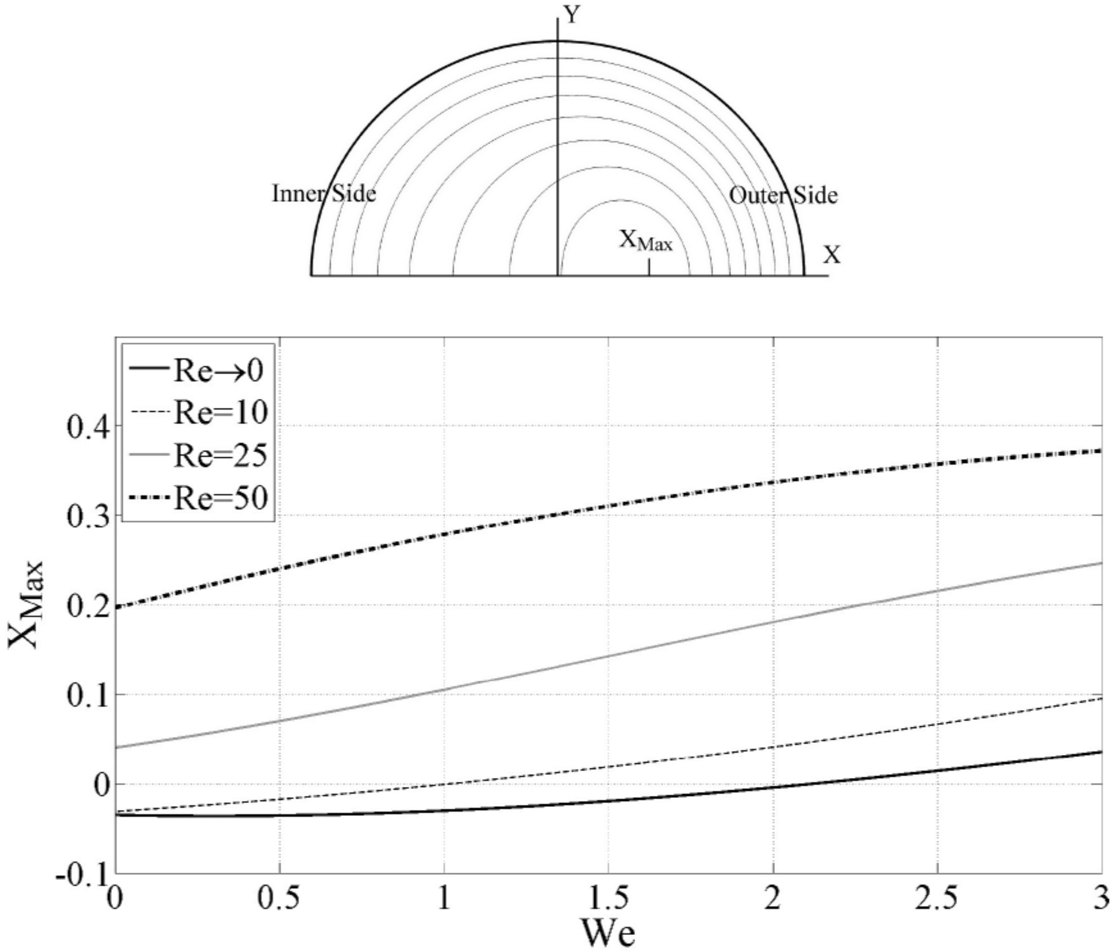
با توجه به شکل ۴-۹ می‌توان در نقطه ($\mathrm{Re} \simeq 0$ و $We = 0$) مقدار بیشینه تابع جریان معادل صفر می‌باشد که نشان‌دهنده عدم حضور جریان‌های ثانویه در جریان خزشی نیوتنی است. اما اثرات افزایش عدد وایزنبرگ هم در جریان خزشی و هم در جریان دارای اینرسی مشابه هم می‌باشد.



شکل ۴-۹. اثر عدد وایزنبرگ روی مقدار بیشینه تابع جریان سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده

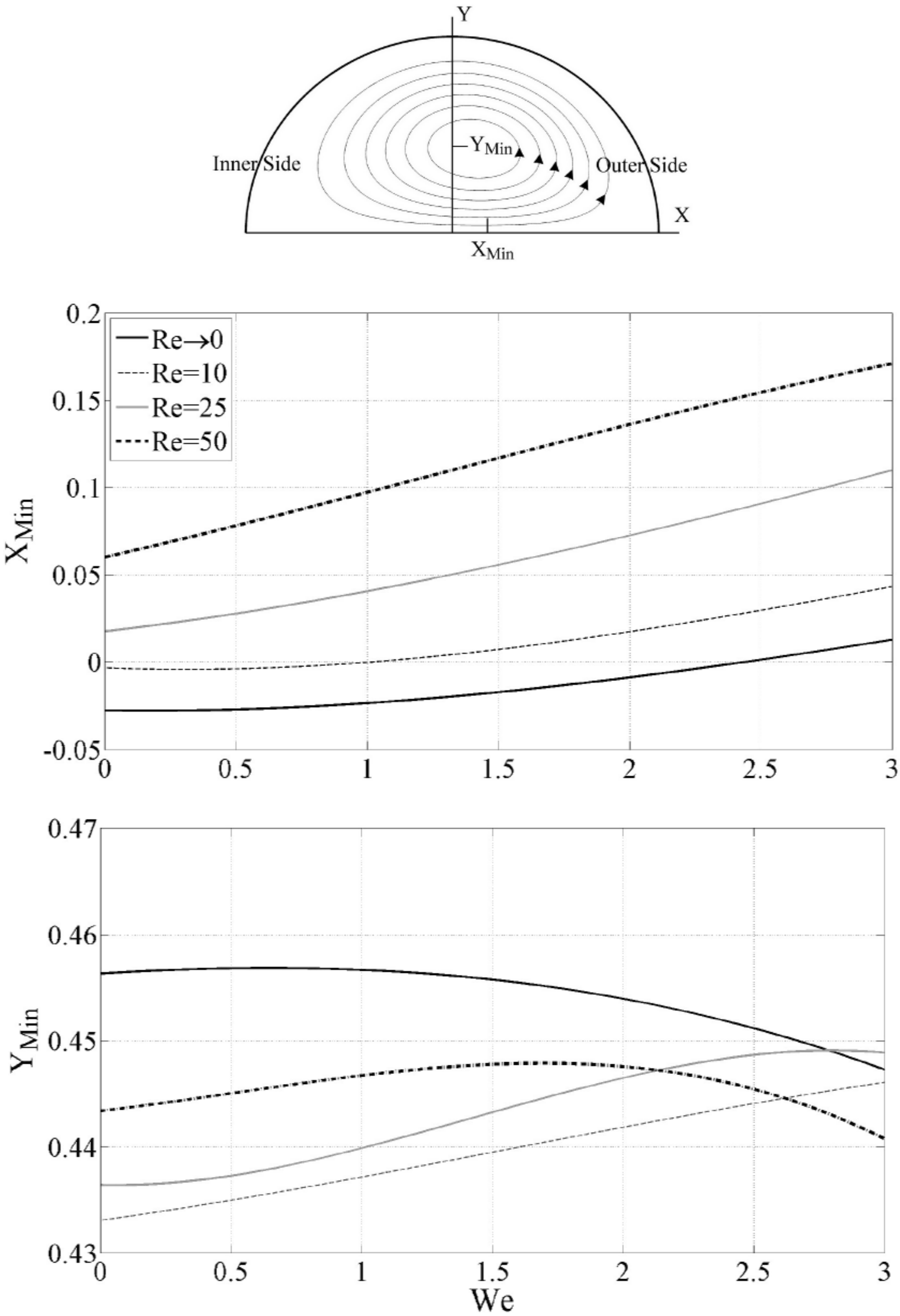
بررسی اثرات عدد وایزنبرگ و رینولدز بر روی موقعیت محوری سرعت و تابع جریان بیشینه، در شکل‌های ۴-۱۰ و ۴-۱۱ مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

با توجه به شکل ۴-۱۰ می‌توان دریافت که در اعداد رینولدز پایین‌تر از ۱۰، سرعت محوری بیشینه به سمت دیواره داخلی متمایل است (X_{Max} منفی است). با توجه به اینکه در این محدوده عدد رینولدز، مقدار نیروهای گریز از مرکز و نیروهای الاستیک بسیار ضعیف می‌باشند و جریان‌های ثانویه تولید شده بسیار کوچک و ضعیف هستند، به دلیل گرادیان فشار بیشتر در نزدیکی دیواره داخلی در مقایسه با دیواره خارجی، توزیع سرعت محوری به سمت دیواره داخلی متمایل می‌گردد. اما با افزایش عدد رینولدز و وایزنبرگ و در نتیجه افزایش شدت جریان‌های ثانویه، موقعیت سرعت محوری به سمت دیواره خارجی حرکت می‌کند.



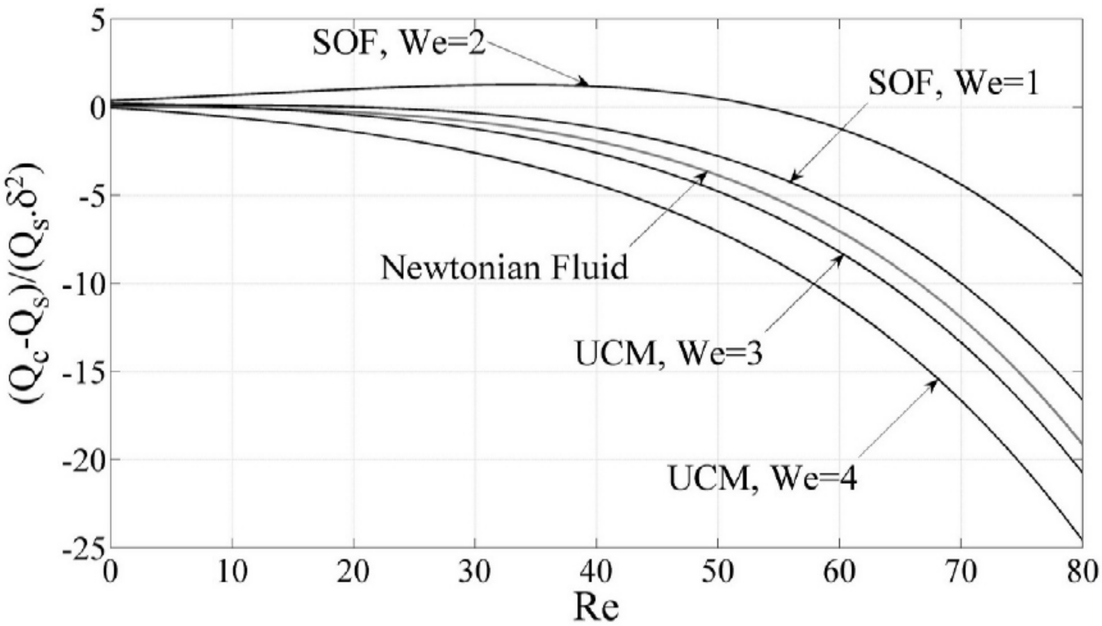
شکل ۴-۱۰. اثر افزایش عدد وایزنبرگ روی موقعیت بیشینه سرعت محوری

شکل ۴-۱۱، جایگاه موقعیت افقی (X_{Min}) و عمودی (Y_{Min}) مرکز جریان‌های ثانویه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل، افزایش عدد وایزنبرگ، افزایش X_{Min} را ناشی می‌شود اما این افزایش، اثر چندانی روی Y_{Min} ندارد.



شکل ۴-۱۱. اثر عدد وایزنبرگ روی موقعیت مرکز جریان ثانویه

شکل ۴-۱۲ نسبت اختلاف نرخ جریان را برای سیالات نیوتنی، ماکسول فوق همرفتی (UCM) و مرتبه دو نسبت به عدد رینولدز در اعداد وایزنبرگ مختلف نشان می‌دهد. باید توجه داشت که اعتبار حل بدست آمده برای دبی از طریق روش حساب اختلالات، فقط برای اعداد دین کوچک برقرار است و به دلیل محدودیت‌هایی که حل حساب اختلالات دارد، قابل تعمیم به اعداد دین بالا نمی‌باشد. با توجه به شکل، افزایش عدد رینولدز، منجر به کاهش نسبت اختلاف نرخ جریان سیال نیوتنی می‌شود. برای سیال UCM در عدد وایزنبرگ بزرگ (زمان آسودگی از تنش بزرگ) نرخ جریان از سیال نیوتنی بیشتر است. برخلاف سیال UCM، نرخ جریان در سیال مرتبه دو در اعداد وایزنبرگ بزرگ (زمان رهایی از تغییر شکل) بزرگتر از مقدار مشابه آن در سیال نیوتنی می‌باشد.



شکل ۴-۱۲. تغییرات نرخ ورودی جریان سیالات نیوتنی، ماکسول فوق همرفتی و مرتبه دو نسبت به عدد رینولدز

فصل پنجم

بررسی انتقال حرارت

سیال ویسکوالاستیک در لوله خمیده

با توجه به در دسترس نبودن حل مناسب و دقیقی از انتقال حرارت جریان سیالات ویسکوالاستیک در لوله های خمیده (حتی برای مدل‌های معروف و کارآمدی چون اولدروید-بی)، در این بخش تلاش شده است تا با ارائه معادلات انتقال حرارت بی‌بعد مناسب و با به کارگیری بی‌بعدسازی های درست، راهکار مناسبی برای حل انتقال حرارت گونه های مختلف سیالات ویسکوالاستیک در لوله های خمیده ارائه شود. به این ترتیب، در این بخش پس از بررسی و معرفی پژوهش های گذشتگان، معادلات انتقال حرارت مرتبط با این جریان مورد تحلیل قرار خواهد گرفت. بزرگترین دست‌آورد ارائه شده در این بخش، معرفی معادله انتگرالی می‌باشد که ضعف عدم داشتن شرط مرزی مناسب روی سطح را جبران می نماید.

در ادامه اقدام به حل این معادله خواهد شد. با توجه به عدم وجود حل مناسبی از انتقال حرارت مدل معروف سیال اولدروید-بی در یک لوله خمیده، مجددا انتقال حرارت مربوط به این سیال حل شده است. در ادامه نیز، دیگر سیال مورد بحث، یعنی مدل سیال ویسکوالاستیک مرتبه دو، از دیدگاه انتقال حرارتی مورد بحث قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که معادلات سرعت و تابع جریان مربوط به سیال اولدروید-بی، عینا از مقاله رابرتسون و مولر [۲۹] استفاده شده و برای سیال مدل مرتبه دو، از حل‌های ارائه شده در همین رساله که در فصل‌های قبل معرفی شدند، بهره برداری شده است. در پایان نیز عدد ناسلت کاهیده به عنوان معیاری از افزایش عدد ناسلت در لوله خمیده نسبت به عدد ناسلت در لوله صاف ارائه و تحلیل گردید.

۵-۱) بررسی مطالعات گذشته بر روی انتقال حرارت جریان سیالات ویسکوالاستیک در مجاری خمیده

در کنار تحقیقات گسترده‌ای که در زمینه‌ی بررسی سیالات ویسکوالاستیک و جریان آن در لوله‌های خمیده مطرح گردیده است، برخی از محققان توجه خود را معطوف به بررسی انتقال حرارت، معادلات و پروفیل‌های مرتبط با آن نموده‌اند. فراس و اوزیسیک[1] [۳۶] اولین کسانی بودند که اهمیت انحنای لوله‌ها را در انتقال حرارت مورد بررسی قرار دادند. این بررسی به منظور طراحی بهینه مبدل‌های حرارتی انجام گرفت. متزنر[2] [۳۷] و اسکلاند[3] [۳۸] نیز مرور مناسبی را بر جریان سیال و انتقال حرارت سیالات غیر نیوتنی درلوله‌های خمیده انجام داده‌اند. سپس، اوزیسیک و توپک‌اقلو [۳۹] توزیع دما برای جریان سیالات نیوتنی در لوله‌های خمیده را بدست آوردند و آن را با نتایج آزمایشگاهی موجود مقایسه کردند. این نتایج در توافق مناسبی با هم بودند. پس از این تحقیقات اولیه، اسریواستاوا و سرین[4] [۴۰] از اولین کسانی هستند که با استفاده از سری‌های بسط داده شده، انتقال حرارت یک جریان آرام و توسعه یافته دمایی ویسکوالاستیک در یک لوله خمیده را حل نمودند. آنها تقریب اولیه دما را برای این سیال بدست آوردند و با مقایسه بخش نیوتنی آن با نتایج آزمایشگاهی توافق مناسبی بین آنها مشاهده نمودند. آکیاما و چنگ[5] [۴۱] نیز جریان توسعه یافته دمایی را که تحت همرفت اجباری قرار دارد را با شرط مرزی شار حرارتی ثابت روی دیواره مورد بررسی و تحلیل قرار داده و نتایج را با نتایج آزمایشگاهی موجود مقایسه نمودند. همچنین گاریملا و چراردس[6] [۴۲] اثرات انتقال حرارت بر اثر همرفتی اجباری را به صورت آزمایشگاهی مورد تحلیل قرار دادند. همچنین تحقیقات دیگری نیز بر روی جریان سیال و انتقال حرارت آن در کانال‌های غیر دوار به صورت عددی انجام گرفته است [۴۸-۴۳]. یانگ و وانگ[7] [۴۹]، ترکیبی از همرفتی آزاد و اجباری را روی یک کانال خمیده دوار با سطح مقطع مربعی انجام دادند. مقادیر عدد ناسلت برای دو پلی اکریلامید مختلف در حالت مغشوش

---

[1] Frass and Ozisik
[2] Metzner
[3] Skelland
[4] Srivastava and Sarin
[5] Akiyama and Cheng
[6] Garimella and Chdrards
[7] Yang and Wang

توسط تاه و قاجار[1] [۵۰] به صورت آزمایشگاهی انجام گرفت. پینو و الویرا[2] [۵۱] نیز بر روی همرفتی اجباری سیال از نوع فن-تین-تنر در لوله‌های خمیده تحقیقاتی را انجام داده‌اند. این تحقیقات به صورت تحلیلی انجام گرفت. هو و پاتانکار[3] [۵۲] نیز جریان سیال پاور لو را در یک لوله خمیده به صورت عددی حل نموده و نتایج بدست آمده را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند. اما در این اواخر، ژانگ[4] و همکارانش [۵۳] انتقال حرارت همرفتی سیال اولدروید بی در یک لوله خمیده را به صورت تحلیل حل نمودند و نمودارهای مرتبط با اعداد ناسلت و کانتورهای دمایی را رسم کردند. در ادامه این تحقیق، شن[5] و همکارانش انتقال حرارت سیال اولدروید بی در یک لوله خمیده دوار را نیز بررسی و حل نمودند [۵۴].

شرط مرزی شار ثابت روی دیواره باعث پدید آمدن شرط نیومن در حل می‌گردد و بدین ترتیب بدست آوردن عرض از مبدا و همچنین یکتا بودن جواب نیاز به شرط مرزی دریکله خواهد داشت. اولین بار شاه و لندن[6] [۵۵] از شرط مرزی دمای ثابت روی دیواره برای یافتن عرض از مبدا جواب استفاده کردند. بدین ترتیب ژانگ و همکارانش [۵۳] نیز برای حل تحلیلی که در مساله سیال اولدروید بی در لوله خمیده ارائه دادند، از همین شرط برای یافتن عرض از مبدا بهره گرفته‌اند. اما آن طور که به نظر می‌آید استفاده توامان دو شرط مرزی شار ثابت و دمای ثابت روی دیواره تنها در حالاتی می‌تواند فرض درستی باشد که جریان سیال در اعداد رینولدز پایین، انحنای لوله کم و ثابت ویسکوزیته پایین مورد بررسی قرار دارد. همچنین شاه و لندن این فرض را برای کانال‌هایی با سطح مقطع غیر دوار در نظر گرفتند. بدین ترتیب و با توجه به توضیحات داده شده، اعمال آن روی کانال‌های دوار و همچنین در مواقع سرعت‌های بالا، اعداد رینولدز بالاتر، الاستسیته بیشتر و انحنای بیشتر لوله که در همگی آنها سرعت بیشینه، هر چه بیشتر به سمت دیواره خارجی متمایل می‌گردد، از درجه اعتبار ساقط می‌باشد.

در تحقیق فعلی تلاش شده تا با اصلاح شرط مرزی دما ثابت روی دیواره، بتوان این مساله را مجددا حل نموده و انتقال حرارت را در لوله حاوی جریان سیال اولدروید بی مورد بررسی و تحلیل قرار داد.

---

1 Toh and Ghajar
2 Pinho and Oliveira
3 Hsu and Patankar
4 Zhang
5 Shen
6 Shah and London

همچنین در ادامه تحلیل های انتقال حرارت برای سیال اولدروید، انتقال حرارت در یک لوله حاوی سیال مرتبه دو نیز مورد حل و بررسی قرار گرفت. در حل این جریان، از نتایج تحلیل ارائه شده در همین رساله بهره گرفته شد.

۵-۲) تعریف مساله انتقال حرارت

با صرفنظر نمودن از کار میدان تنش بر انتقال حرارت جریان می‌توان رابطه زیر را برای انتقال حرارت جریان سیال تراکم‌ناپذیر ارائه نمود.

$$\rho C_p \tilde{V} . \nabla \tilde{T} = k \nabla^2 \tilde{T} \qquad (۵-۱)$$

اگر حجم کنترل مناسبی را در نظر بگیریم، می‌توانیم از موازنه انرژی حرارتی برای این حجم کنترل به صورت زیر داشته باشیم:

$$\left(\int_p q'' dp \right) d\tilde{s} = \dot{m} c_p d\tilde{T}_m \qquad (۵-۲)$$

در رابطه بالا، p بیانگر محیط لوله و $\tilde{T}_m$ نیز دمای متوسط لوله می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{T}_m = \frac{1}{UA} \int_A w \tilde{T} dA \qquad (۵-۳)$$

اگر محیط لوله ثابت فرض گردد، رابطه (۵-۲) به شکل زیر تغییر خواهد یافت:

$$q'' p \, d\tilde{s} = \dot{m} c_p d\tilde{T}_m \qquad (۵-۴)$$

با در نظر گرفتن حالت شار ثابت، رابطه (۵-۴) به فرم زیر در خواهد آمد.

$$\frac{d\tilde{T}_m}{d\zeta} = \frac{2Rq''}{\rho U r_o c_p} \qquad (۵-۵)$$

با توجه به تعریف $\delta = \frac{r_0}{R}$، رابطه (۵-۵) را به فرم زیر داریم:

$$\frac{d\tilde{T}_m}{d\zeta} = \frac{2q''}{\rho U \delta c_p} \qquad (۵-۶)$$

با توجه به فرض توسعه یافته بودن دما در لوله خمیده داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\tilde{T}-\tilde{T}_w}{\tilde{T}_m-\tilde{T}_w}\right)=0 \qquad (۷-۵)$$

با اعمال مشتق در رابطه بالا داریم:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta}=\frac{d\tilde{T}_w}{d\zeta}+\left(\frac{\tilde{T}-\tilde{T}_w}{\tilde{T}_m-\tilde{T}_w}\right)\frac{d}{d\zeta}\left(\tilde{T}_m-\tilde{T}_w\right) \qquad (۸-۵)$$

همچنین، از رابطه $q''=h\left(\tilde{T}_w-\tilde{T}_m\right)$ به راحتی می‌توان رابطه زیر را بدست آورد:

$$\frac{d\tilde{T}_w}{d\zeta}=\frac{d\tilde{T}_m}{d\zeta} \qquad (۹-۵)$$

بنابراین، با جایگذاری رابطه (۵-۹) در رابطه (۵-۸) و با استفاده از رابطه (۵-۶) داریم:

$$\frac{d\tilde{T}}{ds}=\frac{d\tilde{T}_w}{ds}=\frac{d\tilde{T}_m}{ds}=\frac{2Rq''}{\rho U\,\delta c_p} \qquad (۱۰-۵)$$

که در آن $\zeta=\frac{\tilde{s}}{\tilde{R}}$ می‌باشد. رابطه بی‌بعدسازی دما به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T=\frac{\tilde{T}-\tilde{T}_m}{q''r_0/k} \qquad (۱۱-۵)$$

لازم به ذکر است که با ضرب طرفین رابطه (۵-۱۱) در سرعت محوری و انتگرال‌گیری از آن در سطح مقطع کانال، رابطه زیر برای متوسط دمای بی‌بعد حاصل می‌گردد.

$$\int_A \left(wT\right)\,dA=0 \qquad (۱۲-۵)$$

رابطه اساسی انرژی در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است:

$$u\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}+\frac{w}{R}\frac{\partial T}{\partial \phi}=\alpha\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{\cos(\phi)}{R}\right)\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}-\frac{\sin(\phi)}{R}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right] \qquad (۱۳-۵)$$

در عبارت بالا، R شعاع انحنا در هر نقطه از لوله بوده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$R=\tilde{R}+r\cos(\phi) \qquad (۱۴-۵)$$

با قرار دادن روابط معادل در معادله اصلی (۵-۱۳)، معادله بی‌بعد شده انرژی در مختصات ترویدال را بـه صـورت زیر خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{rB}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{rB}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial\phi}+\frac{2w}{\Pr\mathrm{Re}_b B}= \frac{1}{\Pr\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{\delta\cos(\phi)}{B}\right)\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\delta\sin(\phi)}{B}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\phi}\right) \qquad (۱۵\text{-}۵)$$

Re_b نمایانگر عدد رینولدز بالک می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathrm{Re}_b=\frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1+\delta^2\Gamma\right) \qquad (۱۶\text{-}۵)$$

مقدار Γ برای سیال‌های مختلف، متفاوت می‌باشد که در ادامه به آن اشاره خواهد شد.

با توجه به بی‌بعد سازی مساله به صورت ارائه شده در رابطه (۵-۱۱)، می‌توان یکی از شرایط مرزی را به صورت زیر استخراج کرد:

$$\frac{\partial T}{\partial r}=1 \qquad (۱۷\text{-}۵)$$

با توجه به اینکه تنها شرط مرزی مساله، از نوع نیومن می‌باشد، این شرط به تنهایی قادر به یافتن جواب یکتا برای معادله اصلی نخواهد بود و تنها با اتکا به این شرط مرزی نمی‌توان عرض از مبدا را به درستی تعیین نمود. به این ترتیب باید به دنبال شرط مرزی مناسب دیگری باشیم که هم بتواند پاسخگوی نیاز ما بوده و هم از نظر علمی دارای ارزش باشد.

در حل ارائه شده توسط ژانگ و همکارانش [۵۳]، شرط مرزی دوم به صورت دمای ثابت روی دیواره در نظر گرفته شده است که با توجه به فیزیک مساله، به نظر می‌رسد که این فرض دارای اشکالات اساسی می‌باشد. در حالی که شرط مرزی شار ثابت روی دیواره اعمال می‌گردد، در نظر گرفتن دمای ثابت روی دیواره به نظر ناممکن می‌آید. به همین منظور و برای یافتن جواب مناسب، باید به سراغ معادله دیگری رفت که بتوان عرض از مبدا جواب را از طریق آن محاسبه نمود. به همین دلیل، مناسب‌ترن گزینه، رابطه (۵-۱۲) می‌باشد. با اعمال این رابطه بر روی هر یک از اجزای سری حساب اختلالات می‌توان عرض از مبدا مناسب را نیز یافت.

در این بخش، اقدام به حل معادله (۵-۱۵) و محاسبه ترم‌های دمایی آن خواهیم پرداخت. برای این منظور دو سیال اولدروید بی و مرتبه دو مد نظر قرار گرفته شده‌اند که مراحل به دست آوردن آنها به شرح زیر می‌باشد.

۵-۳) حل به روش حساب اختلالات

ترم‌های سرعت این سیال به تفصیل در مقاله رابرتسون و مولر ارائه شده است. اما در این تحقیق به یافتن ترم‌های دما برای جریان سیال اولدروید بی در لوله خمیده خواهیم پرداخت. به همین منظور، در ابتدا دما را برای یک جریان توسعه یافته دمایی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$T=\sum_{n=0}^{2}\delta^{n}T^{(n)}(r,\phi), \qquad (۱۸-۵)$$

از آنجاییکه معادله بدست آمده برای ترم های دما، باید رابطه (۵-۱۲) را ارضا نمایند، می‌توان برای بدست آوردن عرض از مبدا جواب، از همین رابطه بهره برد. اما با توجه به اینکه معادله اصلی انتقال حرارت، همگن و شرط مرزی آن در رابطه (۵-۱۷)، غیر همگن می‌باشد، با استفاده از تغییر متغیر مناسب، این شرط مرزی را به گونه‌ای همگن تبدیل می‌نماییم که این تغییر متغیر به صورت زیر می‌باشد:

$$T=T^{*}+r, \qquad (۱۹-۵)$$

با استفاده از روابط (۵-۱۸) و (۵-۱۹) اجزای دمایی در سری حساب اختلالات به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} T^{(0)}&=T^{*(0)}+r,\\ T^{(1)}&=T^{*(1)},\\ T^{(2)}&=T^{*(2)}. \end{aligned} \qquad (۲۰-۵)$$

با توجه به روابط بالا، شرط مرزی جدید به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\frac{\partial T^{*(n)}}{\partial r}=0, \qquad (۲۱-۵)$$

با قرار دادن رابطه (۵-۱۹) در رابطه (۵-۱۲)، روابط دیگری بدست خواهند آمد که هر کدام از اجزای سری دمای حساب اختلالات باید آنها را ارضا نمایند.

$$\int_A w^{(0)}\left(T^{*(0)}+r\right)dA=0\,,$$ (۵-۲۲ الف)

$$\int_A\left(w^{(0)}T^{*(1)}+w^{(1)}\left(T^{*(0)}+r\right)\right)dA=0\,,$$ (۵-۲۲ ب)

$$\int_A\left(w^{(0)}T^{*(2)}+w^{(1)}T^{*(1)}+w^{(2)}\left(T^{*(0)}+r\right)\right)dA=0\,.$$ (۵-۲۲ ج)

۵-۳-۱) محاسبات دما برای سیال اولدروید بی

قبل از حل باید توجه داشت که مقدار رینولدز بالک و رابطه معادل آن طبق محاسبات زیر به دست خواهد آمد. همانطور که در حل رابرتسون و مولر [۲۹] اشاره شده، داریم:

$$Q_c=Q_s\left(1+\delta^2\Gamma_{Oldroyd}\right)$$ (۵-۲۳)

که $\Gamma_{Oldroyd}$ مقدار ثابتی بوده و برابر است با:

$$\Gamma_{Oldroyd}=\frac{1}{48}\left(\begin{aligned}&1-\mathrm{Re}^2\left(\frac{11}{360}+\frac{1541}{87091200}\mathrm{Re}^2\right)+\frac{8}{3}We^2\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^2\left(1-\frac{1}{15}We^2\frac{\eta_p}{\eta}\left(3-2\frac{\eta_p}{\eta}\right)\right)\\&+\frac{1}{26880}We\,\mathrm{Re}\frac{\eta_p}{\eta}\left(\mathrm{Re}^2+5376\right)-\frac{1}{60480}We^2\,\mathrm{Re}^2\frac{\eta_p}{\eta}\left(792-691\frac{\eta_p}{\eta}\right)\end{aligned}\right)$$ (۵-۲۴)

با تقسیم رابطه (۵-۲۳) بر سطح مقطع لوله داریم:

$$U_c=U_s\left(1+\delta^2\Gamma_{Oldroyd}\right)$$ (۵-۲۵)

با ضرب عبارت بالا در قطر لوله و تقسیم آن بر ویسکوزیته سینماتیکی داریم:

$$\mathrm{Re}_{bc}=\mathrm{Re}_{bs}\left(1+\delta^2\Gamma_{Oldroyd}\right)$$ (۵-۲۶)

همچنین میان اعداد رینولدز بالک لوله‌های خمیده و مستقیم، رابطه زیر برقرار است:

$$\mathrm{Re}_{bc}=2\,\mathrm{Re}_{bs}$$ (۵-۲۷)

با قرار دادن رابطه (۵-۲۷) در رابطه (۵-۲۶)، رینولدز بالک را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\mathrm{Re}_{bc} = \frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1+\delta^2\Gamma_{Oldroyd}\right) \qquad (۵\text{-}۲۸)$$

۵-۳-۱-۱) حل مرتبه δ^0

پس از قرار دادن رابطه (۵-۱۸) در معادله اصلی بی‌بعد شده انرژی و با مرتب کردن ضرایب δ^0 خواهیم داشت:

$$\nabla^2 T^{(0)} = 4w^{(0)} \qquad (۵\text{-}۲۹)$$

با توجه به مقدار $w^{(0)} = 1-r^2$ و حل معادله (۵-۲۹) با توجه به شرایط مرزی ارائه شده داریم:

$$T^{(0)} = -\frac{1}{4}r^4 + r^2 - \frac{7}{24} \qquad (۵\text{-}۳۰)$$

برای اطمینان از صحت حل ارائه شده به محاسبه مقدار عدد ناسلت خواهیم پرداخت. با توجه به اینکه برای یک لوله صاف (نه خمیده) مقدار δ برابر صفر می‌باشد، می توان برای تخمین مقدار دما از همین ترم $T^{(0)}$ استفاده کرد. به این ترتیب، به محاسبه مقدار عدد ناسلت موضعی خواهیم پرداخت. عبارت مناسب برای محاسبه عدد ناسلت موضعی به صورت زیر خواهد بود.

از رابطه دمای بی‌بعد شده در (۵-۱۱) داریم:

$$T_w = \frac{\tilde{T}_w - \tilde{T}_m}{q'' r_0 / k} \qquad (۵\text{-}۳۱)$$

که T_w دمای بی‌بعد شده بر روی سطح لوله می‌باشد. با توجه به رابطه $q'' = h\left(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m\right)$ می‌توان معادله زیر را استخراج کرد:

$$T_w = \frac{k}{r_0 h} \qquad (۵\text{-}۳۲)$$

با قرار دادن قطر به جای شعاع لوله در رابطه فوق می‌توان رابطه مناسبی برای ناسلت موضعی بدست آورد که به صورت زیر می‌باشد:

$$Nu_0 = \frac{2}{T_w} \tag{۳۳-۵}$$

با محاسبه عبارت بالا، برای حل ارائه شده، مقدار عدد ناسلت موضعی برابر خواهد بود با:

$$Nu_0 = \frac{48}{11} \simeq 4.3636 \tag{۳۴-۵}$$

که این عبارت با مقدار ناسلت ارائه شده توسط کیز و کرافورد[1] [۵۶] برای لوله صاف کاملا مطابقت دارد.

با کسب اطمینان از درستی حل ارائه شده، به محاسبه ترم های مرتبه بالاتر دمایی پرداخته خواهد شد.

۵-۳-۱-۲) حل مرتبه δ^1

با مرتب کردن ضرایب δ^1 در معادله اصلی بی‌بعد شده انرژی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\left(-r\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial\phi^2}-2r^2\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}-r^3\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial r^2}-2r^2\right)\cos(\phi)-r\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}-r\Pr\mathrm{Re}\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}-r^2\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial r^2}\\&+r\sin(\phi)\frac{\partial T^{(0)}}{\partial\phi}-\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial\phi^2}+4r^2w^{(1)}+r\Pr\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial\phi}-\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}\right)=0,\end{aligned} \tag{۳۵-۵}$$

با قرار دادن مقادیر معادل $T^{(0)}$، $\psi^{(1)}$ و $w^{(1)}$ در عبارت بالا و همچنین فرض $T^{(1)}=f_1(r)\cos(\phi)$ و اعمال شرایط مرزی، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}f_1(r)=&We^2\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^2\left(\frac{1}{72}r^7-\frac{1}{18}r^5+\frac{1}{12}r^3-\frac{5}{72}r\right)\\&+We\frac{\eta_p}{\eta}\left(\begin{aligned}&-\left(\frac{1}{1920}\mathrm{Re}\frac{1}{960}\mathrm{Re}\Pr\right)r^9+\left(\frac{1}{144}\mathrm{Re}\Pr+\frac{1}{216}\mathrm{Re}\right)r^7-\left(\frac{1}{72}\mathrm{Re}+\frac{5}{288}\mathrm{Re}\Pr\right)r^5\\&+\left(\frac{11}{576}\mathrm{Re}+\frac{1}{48}\mathrm{Re}\Pr\right)r^3-\left(\frac{269}{17280}\mathrm{Re}+\frac{43}{2880}\mathrm{Re}\Pr\right)r\end{aligned}\right)\\&+\mathrm{Re}^2\left(\begin{aligned}&\frac{1}{345600}r^{11}-\frac{1}{2880}r^9\Pr-\frac{161}{69120}r\Pr+\frac{1}{34560}r^{11}\Pr+\frac{7}{4608}r^7\Pr+\frac{1}{288}r^3\Pr\\&-\frac{11}{3456}r^5\Pr+\frac{1}{4608}r^7-\frac{1}{1728}r^5+\frac{19}{23040}r^3-\frac{1}{23040}r^9-\frac{1}{1350}r\end{aligned}\right)\\&+\frac{1}{3}r^5-\frac{9}{8}r^3+\frac{41}{24}r\end{aligned} \tag{۳۶-۵}$$

---

[1] Kays and Crawford

۵-۳-۱-۳) حل مرتبه δ^2

به طریقی مشابه، حل مساله برای مراتب بالاتر دما، ادامه پیدا خواهد کرد. با مرتب کردن ضرایب δ^2 در معادله اصلی بی‌بعد شده انرژی، معادله زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&\left(-r\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial\phi^2}-2r^2\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}-r^3\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial r^2}\right)\cos(\phi)-r^2\frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial r^2}-r^2\Gamma_{Oldroyd}\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial r^2}\\&+r\Pr\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial\phi}-\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}+\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial r}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial\phi}-\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}-\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\phi}\right)\\&+r\sin(\phi)\frac{\partial T^{(1)}}{\partial\phi}+4r^2w^{(2)}-r\Gamma_{Oldroyd}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}-r\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r}-\frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial\phi^2}-\Gamma_{Oldroyd}\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial\phi^2}=0,\end{aligned} \tag{۳۷-۵}$$

که مقدار $\Gamma_{Oldroyd}$ در رابطه (۵-۲۴) بیان گردیده است. رابطه مناسب برای ترم دمای مرتبه دوم به صورت زیر می‌باشد:

$$T^{(2)}=f_{20}(r)+f_{22}(r)\cos(2\phi) \tag{۳۸-۵}$$

عبارات معادل $f_{20}(r)$ و $f_{22}(r)$ در ضمیمه به صورت کامل ارائه شده‌اند.

۵-۳-۲) محاسبه ناسلت متوسط

با استفاده از روابط، می‌توان رابطه مناسبی برای یافتن مقدار ناسلت متوسط یافت که به صورت زیر می‌باشد:

$$\overline{Nu}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{T_w}\right)d\phi \tag{۳۹-۵}$$

که در آن T_w دمای جداره لوله می‌باشد. معیاری از افزایش مقدار عدد ناسلت در لوله خمیده در مقایسه با مقدار عدد ناسلت در لوله صاف، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$Nu_r=\frac{\overline{Nu}-\overline{Nu}_0}{\overline{Nu}_0} \tag{۴۰-۵}$$

که $\overline{Nu}_0$، ناسلت متوسط موضعی در لوله صاف بوده و مقدار آن در رابطه (۵-۳۴) قید گردیده است. Nu_r نیز ناسلت کاهیده نام دارد.

۵-۳-۳) محاسبات دما برای سیال مرتبه دو

فرآیند یافتن دمای جریان یک سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده مشابه حل ارائه شده برای سیال اولدروید است.

قبل از حل باید توجه داشت که مقدار رینولدز بالک، در سیال مرتبه دو نیز به مانند سیال اولدروید بی بدست می‌آید. با توجه به رابطه بدست آمده برای دبی جریان سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده که در همین رساله ارائه شده است، داریم:

$$Q_c = Q_s \left(1+\delta^2 \Gamma_{SOF}\right) \tag{۵-۴۱}$$

که Γ_{SOF} مقدار ثابتی بوده و برابر است با:

$$\Gamma_{SOF} = \frac{1}{48}\left(\begin{array}{l} 1-\frac{11}{360}\mathrm{Re}^2-\frac{1541}{87091200}\mathrm{Re}^4+\left(\frac{1}{26880}\mathrm{Re}^3+\frac{1}{5}\mathrm{Re}\right)We \\ +\left(\frac{8}{3}+\frac{691}{60480}\mathrm{Re}^2\right)We^2+\left(\frac{11}{90}\mathrm{Re}\right)We^3+\left(\frac{48}{135}\right)We^4 \end{array}\right) \tag{۵-۴۲}$$

به این ترتیب و مطابق مراحل ارائه شده در سیال اولدروید، برای سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده، رابطه رینولدز بالک را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\mathrm{Re}_{bc} = \frac{\mathrm{Re}}{2}\left(1+\delta^2\Gamma_{SOF}\right) \tag{۵-۴۳}$$

ترم‌های سرعت این سیال در بخش مربوط به بررسی جریان سیال به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است. اما در ادامه این تحقیق به یافتن ترم‌های دما برای جریان سیال مرتبه دو در لوله خمیده خواهیم پرداخت. به همین منظور، در ابتدا دما را برای یک جریان توسعه یافته دمایی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$T = \sum_{n=0}^{2} \delta^n T^{(n)}(r,\phi), \tag{۴۴-۵}$$

۵-۳-۳-۱) حل مرتبه δ^0

با توجه به تشابه معادلات متشکله برای این دو سیال و تشابه ضرایب δ^0 در هر دو معادله، مقدار $T^{(0)}$ در سیال مرتبه دو، کاملا مشابه مقدار معادل آن برای سیال ماکسول فوق همرفتی می‌باشد که به صورت زیر است

$$T^{(0)} = -\frac{1}{4}r^4 + r^2 - \frac{7}{24} \tag{۴۵-۵}$$

۵-۳-۳-۲) حل مرتبه δ^1

حال به محاسبه ترم های با مرتبه بالاتر دمایی پرداخته می‌شود. با مرتب کردن ضرایب δ^1 در معادله اصلی بی‌بعد شده انرژی، باز هم رابطه‌ای مشابه رابطه ارائه شده در حل سیال اولدروید-بی بدست خواهد آمد. با قرار دادن مقادیر معادل $T^{(0)}$، $\psi^{(1)}$ و $w^{(1)}$ در عبارت بالا و همچنین فرض $T^{(1)} = f_1(r)\cos(\phi)$ و اعمال شرایط مرزی، $f_1(r)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
f_1(r) =& \left(\frac{1}{345600}\mathrm{Re}^2 + \frac{1}{34560}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}\right)r^{11} \\
&-\left(\frac{1}{960}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,We + \frac{1}{23040}\mathrm{Re}^2 + \frac{1}{2880}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} + \frac{1}{1920}\mathrm{Pr}\,We\right)r^9 \\
&+\left(\frac{1}{72}We^2 + \frac{7}{4608}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} + \frac{1}{216}\mathrm{Re}\,We + \frac{1}{4608}\mathrm{Re}^2 + \frac{1}{144}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,We\right)r^7 \\
&-\left(\frac{1}{1728}\mathrm{Re}^2 + \frac{1}{72}\mathrm{Re}\,We + \frac{5}{288}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,We - \frac{1}{3} + \frac{1}{18}We^2 + \frac{11}{3456}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}\right)r^5 \\
&+\left(\frac{1}{48}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,We + \frac{11}{576}\mathrm{Re}\,We + \frac{1}{288}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} - \frac{9}{8} + \frac{19}{23040}\mathrm{Re}^2 + \frac{1}{12}We^2\right)r^3 \\
&-\left(\frac{43}{2880}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\,We - \frac{41}{24} + \frac{269}{17280}\mathrm{Re}\,We + \frac{161}{69120}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr} + \frac{1}{1350}\mathrm{Re}^2 + \frac{5}{72}We^2\right)r
\end{aligned} \tag{۴۶-۵}$$

۵-۳-۳-۳) حل مرتبه δ^2

به طریقی مشابه حل مساله، برای مراتب بالاتر دما ادامه داده خواهد شد. با مرتب کردن ضرایب δ^2 در معادله اصلی بی‌بعد شده انرژی رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&\left(-r\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial\phi^2}-2r^2\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}-r^3\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial r^2}\right)\cos(\phi)-r^2\frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial r^2}-r^2\Gamma_{SOF}\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial r^2}\\&+r\Pr\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial\phi}-\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}+\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial r}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial\phi}-\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}-\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\phi}\right)\\&+r\sin(\phi)\frac{\partial T^{(1)}}{\partial\phi}+4r^2w^{(2)}-r\Gamma_{SOF}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r}-r\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r}-\frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial\phi^2}-\Gamma_{SOF}\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial\phi^2}=0,\end{aligned} \tag{۴۷-۵}$$

که مقدار Γ_{SOF} در رابطه (۵-۴۲) بیان گردیده است. رابطه مناسب برای ترم دمای مرتبه دوم به صورت زیر می‌باشد:

$$T^{(2)}=f_{20}(r)+f_{22}(r)\cos(2\phi) \tag{۴۸-۵}$$

عبارات معادل $f_{20}(r)$ و $f_{22}(r)$ در ضمیمه به صورت کامل ارائه شده‌اند.

رابطه مناسب برای عدد ناسلت سیال مرتبه دو همانند رابطه ارائه شده در (۵-۳۹) می‌باشد.

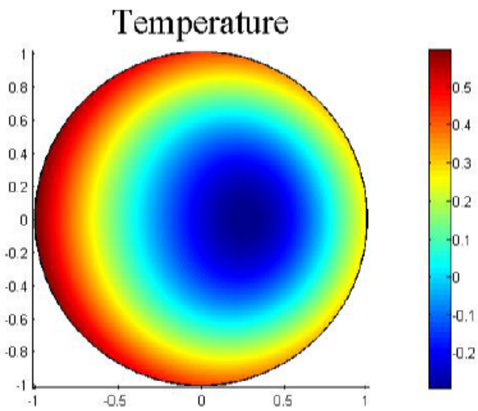
فصل ششم

نتایج بدست آمده از تحلیل انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک مدل اولدروید–بی در یک لوله خمیده

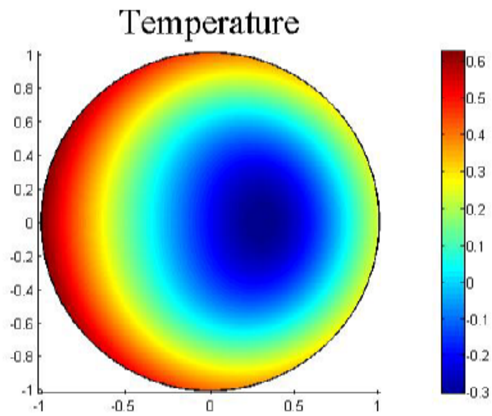
در این بخش، به ارائه و بررسی نتایج بدست آمده از حل انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک پرداخته می‌شود. مهم‌ترین پارامترهای مدنظر در این مرحله، اعداد بی‌بعد رینولدز و پرانتل می‌باشند که نقش عمده‌ای در انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در لوله خمیده دارند. همچنین با کاهش مقدار رینولدز، می‌توان حالت جریان خزشی را شبیه‌سازی کرد که در ادامه بحث ارائه شده است. همچنین با رسم دیاگرام‌های مربوط به عدد ناسلت، می‌توان اثرات مربوط به اعداد رینولدز و وایزنبرگ را روی تغییرات ناسلت مشاهده کرد.

شکل ۶-۱ نمایانگر تغییرات پروفیل دمای یک سیال مدل اولدروید-بی با تغییرات عدد پرانتل می‌باشد. طبق شکل، مقدار دمای بیشینه به سمت دیواره خارجی متمایل می‌گردد.

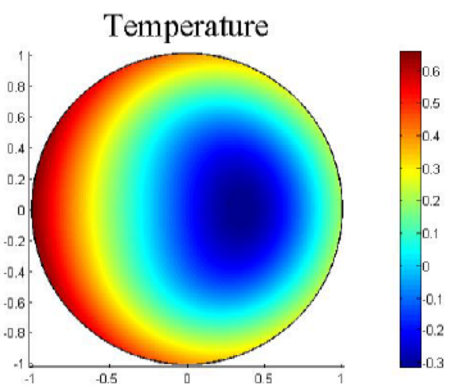
سیال اولدروید- بی ($\Pr = 0.7$)



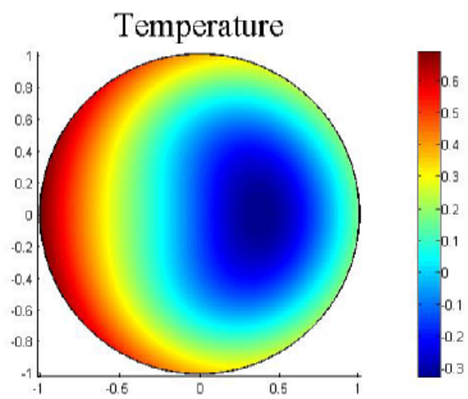
سیال اولدروید- بی ($\Pr = 0.85$)



سیال اولدروید- بی ($\Pr = 1$)

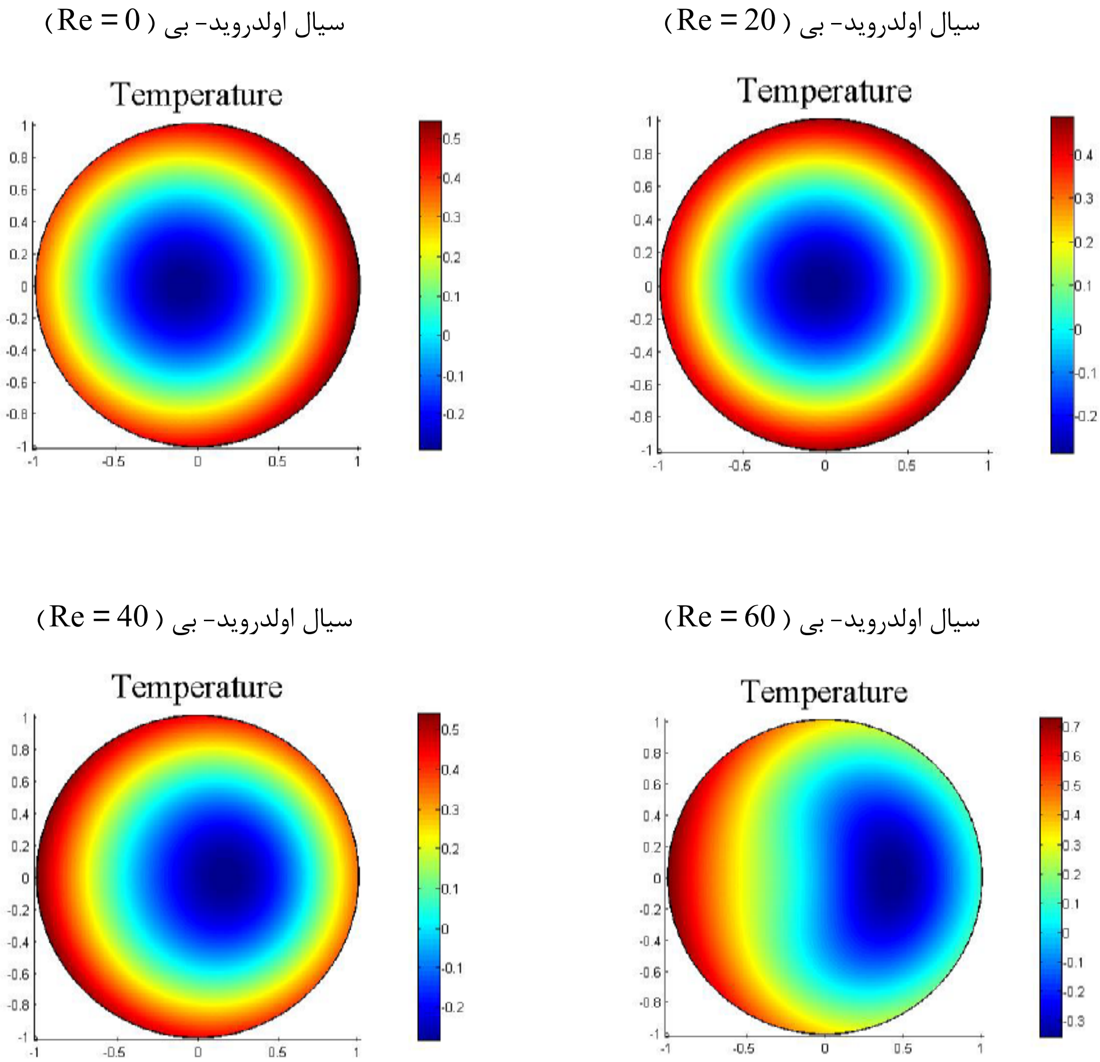


سیال اولدروید- بی ($\Pr = 1.15$)



شکل ۶-۱. اثر افزایش پرانتل روی انتقال حرارت در حالت $\mathrm{Re} = 50$، $We = 3$، $\delta = 0.1$ و $\frac{\eta_p}{\eta} = 0.2$

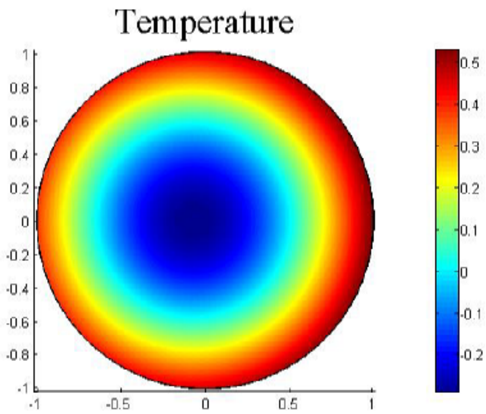
شکل ۶-۲ نیز تغییرات پروفیل دمای سیال اولدروید-بی را بر حسب عدد رینولدز نمایش می‌دهد. با توجه به شکل، می‌توان دریافت که در اعداد رینولدز پایین که جریان به حالت جریان خزشی شبیه است، مقدار بیشینه دما، متمایل به دیواره داخلی می‌باشد و یا به عبارتی دیگر $X_{\max}$ مقداری منفی به خود می‌گیرد. اما با افزایش عدد رینولدز و تبدیل جریان به حالت اینرسی و کشش پروفیل سرعت به سمت دیواره خارجی، بیشینه دمایی نیز به سمت دیواره خارجی متمایل می‌گردد.



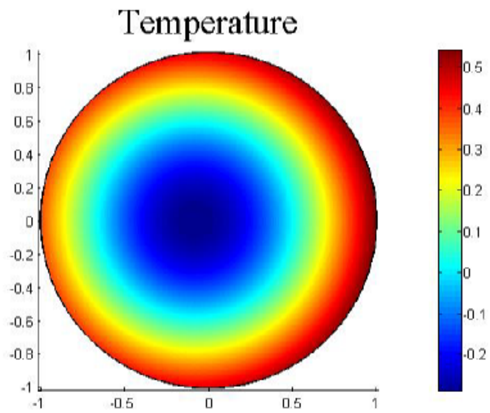
شکل ۶-۲. اثر افزایش عدد رینولدز روی انتقال حرارت در حالت $\Pr = 0.85$، $We = 3$، $\delta = 0.1$ و $\frac{\eta_p}{\eta} = 0.2$

در شکل ۶-۳، می‌توان اثر افزایش عدد وایزنبرگ در دو عدد رینولدز متفاوت را مشاهده نمود. در قسمت اول عدد رینولدز روی عدد ۵ ثابت شده است و عدد وایزنبرگ از $We = 0$ که معادل سیال نیوتنی است تا $We = 3$ افزایش یافت. نتیجه بدست آمده از این پروفیل این است که افزایش عدد وایزنبرگ در زمانی که جریان حالت خزشی دارد، تغییر چندانی در انتقال بیشینه دمای سیال ایجاد نمی‌کند. اما از قسمت دوم این شکل در $\mathrm{Re} = 50$ می‌توان نتیجه گرفت در حالت جریان دارای اینرسی، جابجایی بیشینه مقدار دمای سیال اولدروید-بی در یک لوله خمیده به سمت دیواره بیرونی، قابل توجه است. با بررسی کلی این شکل‌ها نیز می‌توان به این نتیجه رسید که در اعداد رینولدز پایین، مقدار سرعت بیشینه، متمایل به دیواره بیرونی است و یا به عبارتی دیگر، $X_{\max}$ منفی است.

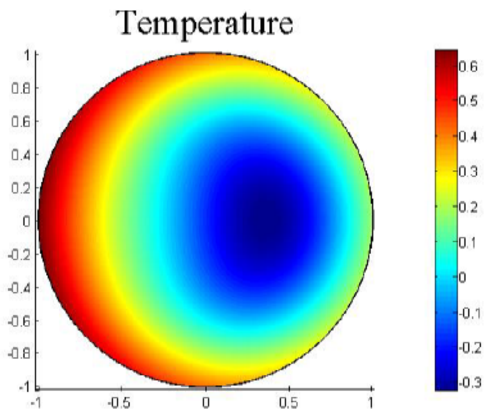
سیال اولدروید- بی ($\mathrm{Re}=5$ و $We=3$)



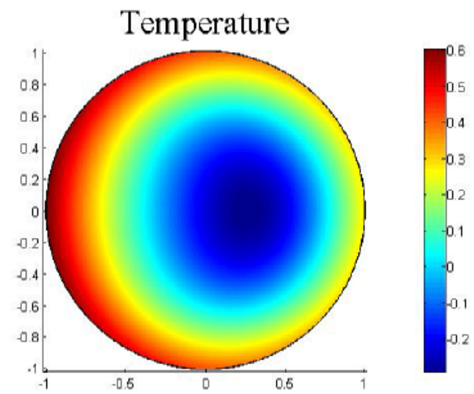
سیال نیوتونی ($\mathrm{Re}=5$ و $We=0$)



سیال اولدروید- بی ($\mathrm{Re}=50$ و $We=3$)



سیال نیوتونی ($\mathrm{Re}=50$ و $We=0$)

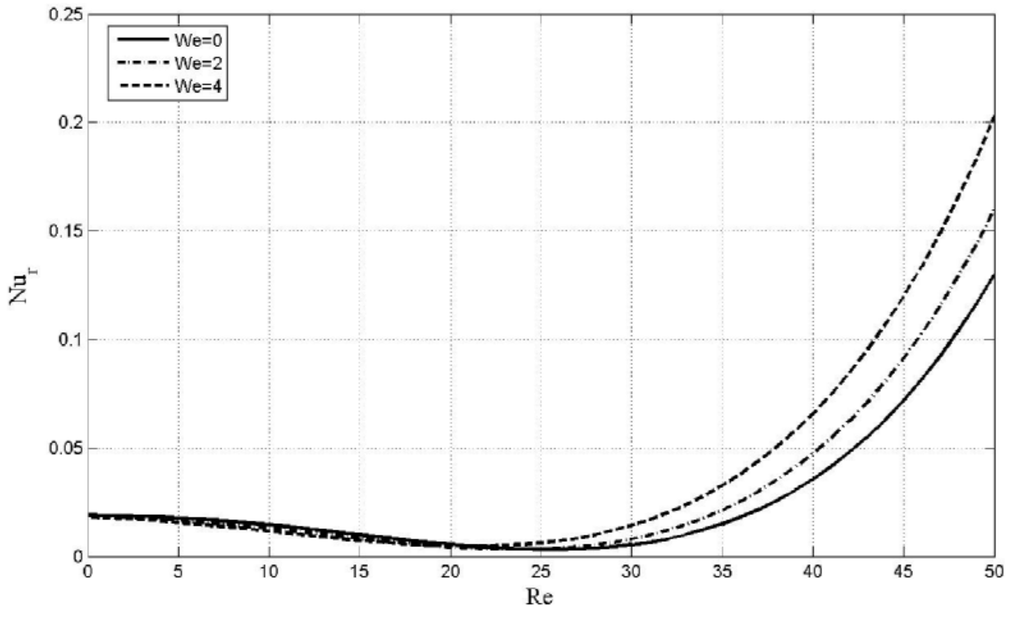


شکل ۶-۳. اثر افزایش عدد وایزنبرگ روی انتقال حرارت در حالت $\mathrm{Pr}=0.85$، $We=3$، $\delta=0.1$ و $\frac{\eta_p}{\eta}=0.2$

به این ترتیب و با توجه به شکل‌های ۶-۲ و ۶-۳ می توان دریافت که اثرات اعداد وایزنبرگ و رینولدز مشابه هم می‌باشد و هر دو در انتقال نقطه بیشینه دمایی سیال به سمت دیواره بیرونی، یکسان عمل می‌کنند.

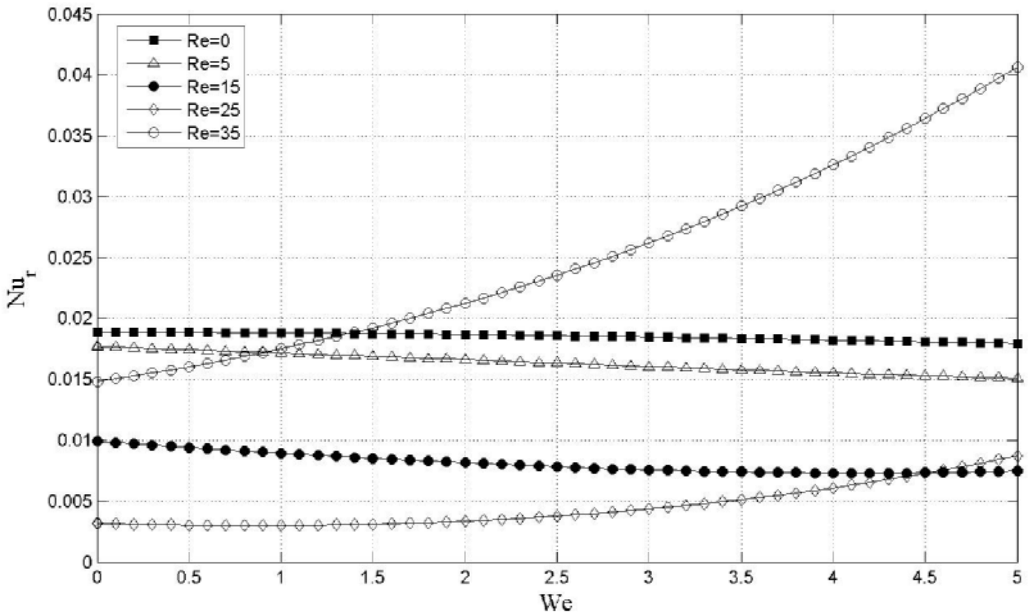
در ادامه دیاگرام‌های مرتبط با عدد ناسلت، برای نمایش هرچه بهتر اثرات اعداد بی‌بعد وایزنبرگ و رینولدز روی مقدار ناسلت کاهیده رسم گردیده است.

شکل ۶-۴، تغییرات ناسلت کاهیده را در مقایسه با عدد رینولدز و برای اعداد وایزنبرگ مختلف نمایش می‌دهد. همانگونه که از شکل برمی‌آید، افزایش عدد رینولدز برای هر سه مقدار $We = 0$ (سیال نیوتونی)، $We = 2$ و $We = 4$ روند مشابهی را خواهد داشت. در اعداد رینولدز پایین، که جریان، بیشتر حالت خزش دارد، افزایش عدد رینولدز با کاهش مقدار ناسلت کاهیده مواجه خواهد شد. اما این روند در جریان‌های دارای اینرسی معکوس می‌گردد. به نظر می‌آید که این مقدار کمینه در بازه‌ی بین اعداد رینولدز ۲۰ و ۲۵ رخ می‌دهد.



شکل ۶-۴. تغییرات ناسلت کاهیده سیال اولدروید-بی نسبت به عدد رینولدز در اعداد وایزنبرگ مختلف

شکل ۶-۵، تغییرات ناسلت کاهیده را در مقایسه با عدد وایزنبرگ و برای اعداد رینولدز مختلف نمایش می‌دهد. روند موجود در نمودار یک روند نامنظم به نظر می‌آید. در اعداد رینولدز پایین، رابطه معکوسی بین عدد وایزنبرگ و مقدار ناسلت کاهیده وجود دارد. یعنی با افزایش مقدار عدد وایزنبرگ، روند ناسلت کاهیده، کاهشی است. اما با افزایش مقدار عدد رینولدز، این روند افزایشی خواهد شد.



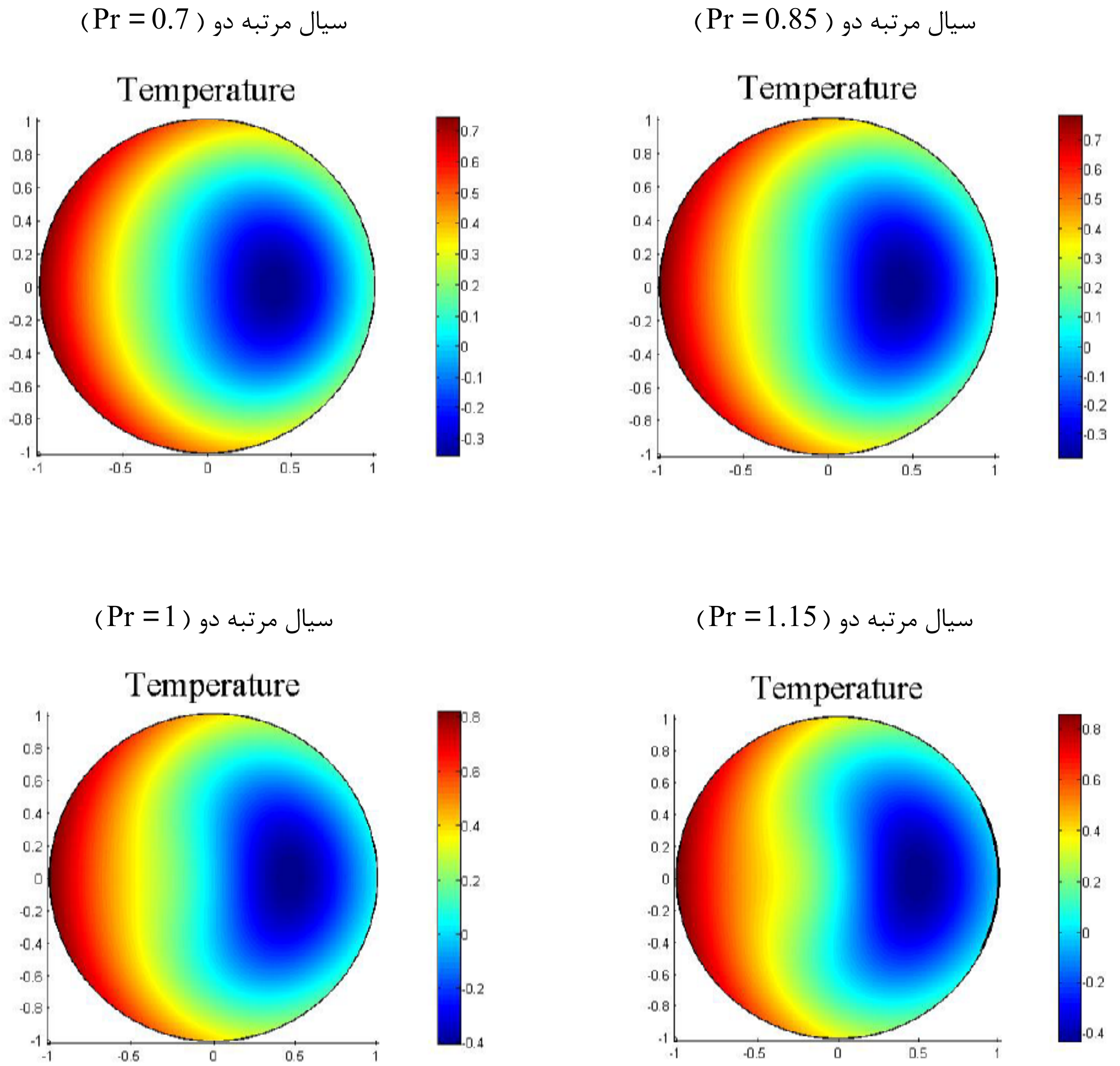
شکل ۶-۵. تغییرات ناسلت کاهیده سیال اولدروید-بی نسبت به عدد وایزنبرگ در اعداد رینولدز مختلف

فصل هفتم

نتایج بدست آمده از تحلیل انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک مدل مرتبه دو در یک لوله خمیده

در این بخش، نتایج بدست آمده از حل انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک مدل مرتبه دو مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همانند بخش قبل، مهم‌ترین پارامترهای مدنظر در این مرحله، اعداد بی‌بعد رینولدز و پرانتل می‌باشند که در این قسمت به بررسی اثرات آنها روی پروفیل انتقال حرارت خواهیم پرداخت. البته نتایجی که برای سیال مرتبه دو بدست می‌آید نیز به طور عمومی مشابه سیال اولدروید-بی می‌باشد. اما به دلیل اینکه عدد وایزنبرگ در سیال مدل مرتبه دو از جنس زمان رهایی از تغییر شکل می‌باشد، تنها اثرات این زمان در پروفیل‌های انتقال حرارتی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

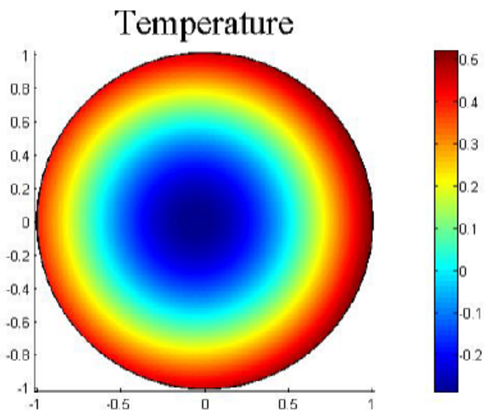
شکل ۷-۱ نمایانگر تغییرات پروفیل دمای یک سیال مدل مرتبه دو با تغییرات عدد پرانتل می‌باشد. همانگونه که از شکل برمی‌آید، با افزایش عدد پرانتل، مقدار بیشینه دمایی به سمت دیواره خارجی کشیده می‌شود. افزایش مقدار بیشینه دما نیز از دیگر پدیده‌هایی است که از افزایش عدد پرانتل ناشی می‌شود، هر چند که این افزایش بسیار ناچیز است.



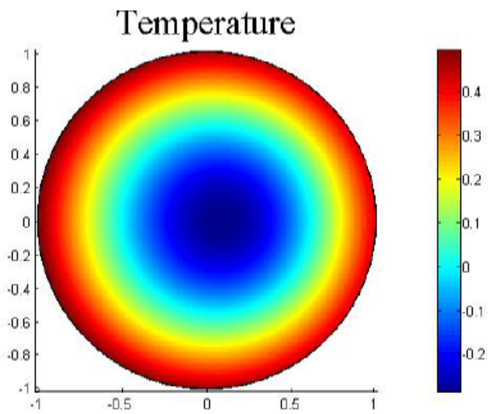
شکل ۷-۱. اثر افزایش پرانتل روی انتقال حرارت در حالت $\mathrm{Re} = 50$، $We = 3$، و $\delta = 0.1$

شکل ۷-۲ تغییرات پروفیل دمای سیال مدل مرتبه دو را بر حسب عدد رینولدز نمایش می‌دهد. مقدار بیشینه دما بیشتر متمایل به دیواره داخلی می‌باشد. به عبارتی دیگر، X_{max} مقداری منفی به خود می‌گیرد. اما همانطور که در شکل واضح است، افزایش عدد رینولدز مکان X_{max} را به شدت به سمت دیوار بیرونی متمایل می‌کند.

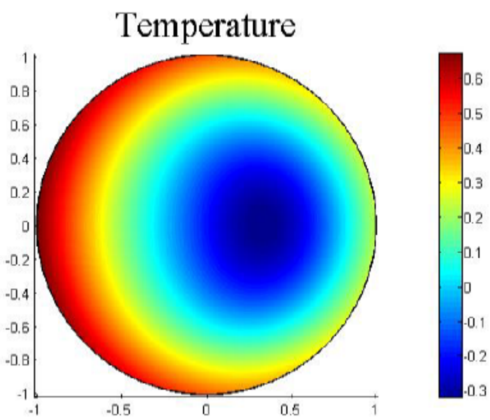
سیال مرتبه دو $(Re = 0)$



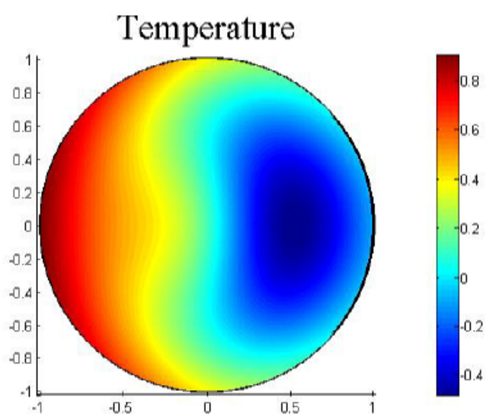
سیال مرتبه دو $(Re = 20)$



سیال مرتبه دو $(Re = 40)$



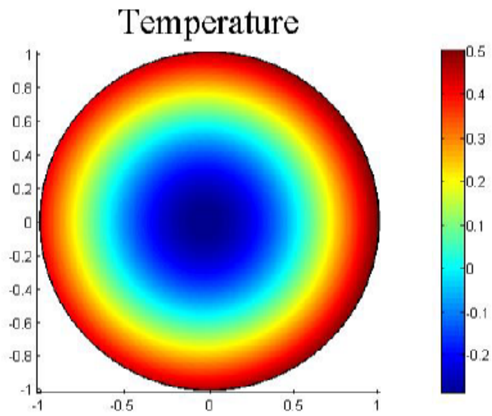
سیال مرتبه دو $(Re = 60)$



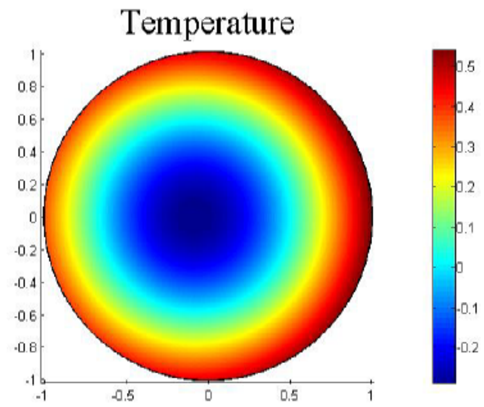
شکل ۷-۲. اثر افزایش عدد رینولدز روی انتقال حرارت در حالت $Pr = 0.85$، $We = 3$ و $\delta = 0.1$

در شکل ۷-۳، می‌توان اثر افزایش عدد وایزنبرگ را در دو عدد رینولدز متفاوت مشاهده نمود. در قسمت اول عدد رینولدز روی عدد ۵ ثابت شده است و عدد وایزنبرگ از $We = 0$ که معادل سیال نیوتنی است تا $We = 3$ افزایش یافت. نتیجه بدست آمده از این پروفیل این است که افزایش عدد وایزنبرگ در زمانی که جریان حالت خزشی دارد، تغییر چندانی در انتقال بیشینه دمای سیال ایجاد نمی‌کند. از قسمت دوم این شکل در $\mathrm{Re} = 50$ اما می‌توان نتیجه گرفت در حالت جریان دارای اینرسی، جابجایی بیشینه مقدار دمای سیال مرتبه دو در یک لوله خمیده به سمت دیواره بیرونی، قابل توجه است. با بررسی کلی این شکل‌ها نیز می‌توان به این نتیجه رسید که در اعداد رینولدز پایین، مقدار سرعت بیشینه، متمایل به دیواره بیرونی است و یا به عبارتی دیگر، $X_{\max}$ منفی است.

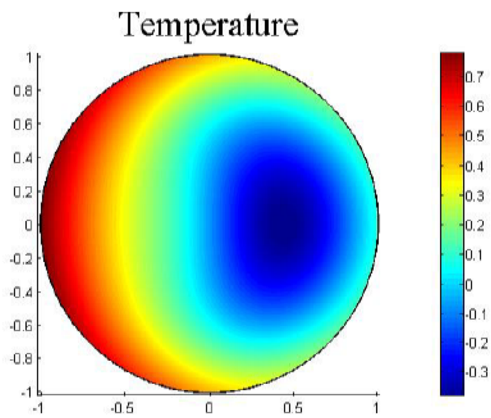
سیال مرتبه دو ($\mathrm{Re} = 5$ و $We = 3$)



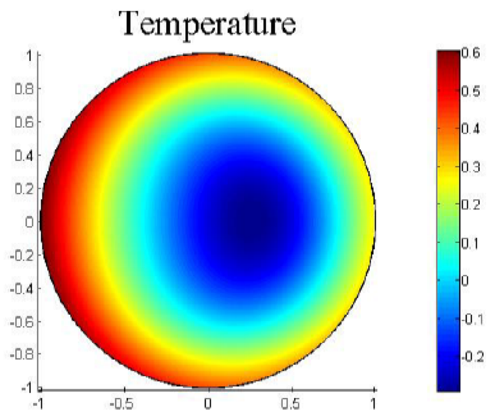
سیال نیوتونی ($\mathrm{Re} = 5$ و $We = 0$)



سیال مرتبه دو ($\mathrm{Re} = 50$ و $We = 3$)

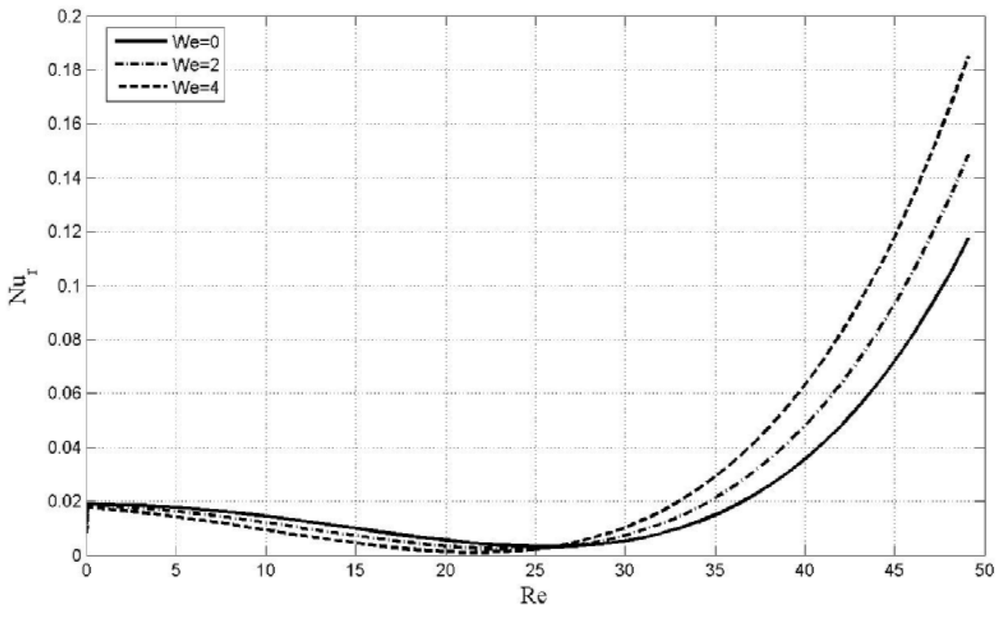


سیال نیوتونی ($\mathrm{Re} = 50$ و $We = 0$)



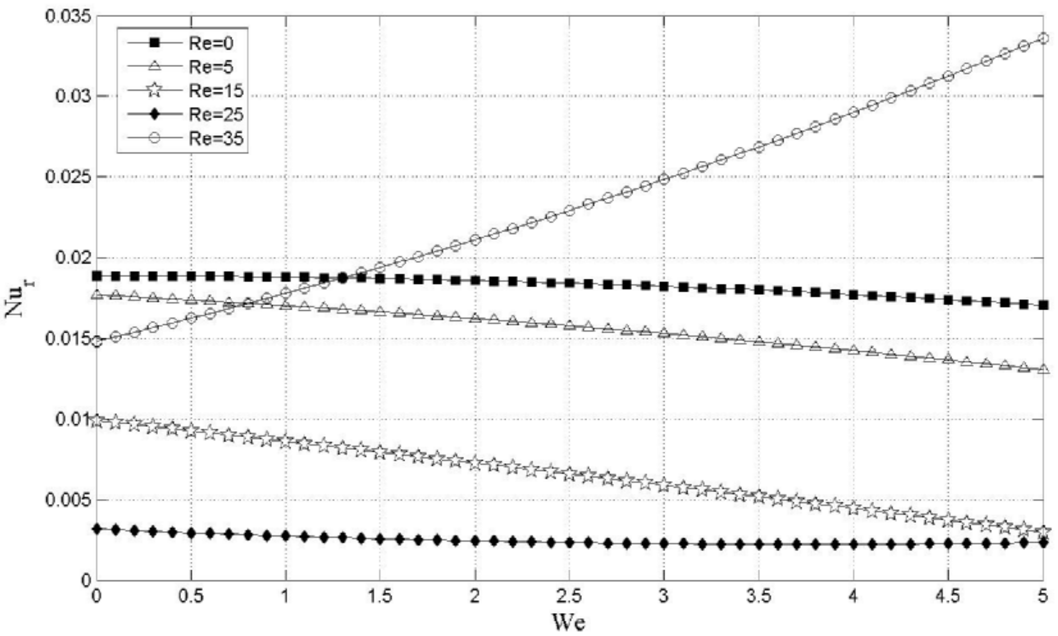
شکل ۷-۳. اثر افزایش عدد وایزنبرگ روی انتقال حرارت در حالت $\mathrm{Pr} = 0.85$، $We = 3$، و $\delta = 0.1$

شکل ۷-۴، تغییرات ناسلت کاهیده را در مقایسه با عدد رینولدز و برای اعداد وایزنبرگ مختلف نمایش می‌دهد. همانگونه که از شکل برمی‌آید، افزایش عدد رینولدز برای هر سه مقدار $We = 0$ (سیال نیوتونی)، $We = 2$ و $We = 4$ روند مشابهی را خواهد داشت. در اعداد رینولدز پایین، که جریان، بیشتر حالت خزش دارد، افزایش عدد رینولدز با کاهش مقدار ناسلت کاهیده مواجه خواهد شد. اما این روند در جریان‌های دارای اینرسی معکوس می‌گردد. به نظر می‌آید که این مقدرا کمینه در بازه‌ی بین اعداد رینولدز ۲۰ و ۳۰ رخ می‌دهد. این روند، کاملا با روند تغییر ناسلت موضعی در سیال اولدروید-بی مطابقت دارد. تفاوت عمده و آشکار بین نتیجه بدست آمده در شکل ۷-۴ و نتیجه مشابه آن برای سیال اولدروید-بی در شکل ۶-۴ به نقطه کمینه‌ای برمی‌گردد که رفتار ناسلت کاهیده در آن نقطه برعکس می‌شود. مقدار عدد رینولدز کمینه در سیال مرتبه دو بزرگتر از مقدار مشابه آن در سیال اولدروید-بی می‌باشد.



شکل ۷-۴. تغییرات ناسلت کاهیده سیال مرتبه دو نسبت به عدد رینولدز در اعداد وایزنبرگ مختلف

شکل ۷-۵، تغییرات ناسلت کاهیده را در مقایسه با عدد وایزنبرگ و برای اعداد رینولدز مختلف نمایش می‌دهـد. روند موجود در نمودار مانند روند موجود در نمودار مربوط به سیال اولدروید- بی می‌باشد.



شکل ۷-۵. تغییرات ناسلت کاهیده سیال مرتبه دو نسبت به عدد وایزنبرگ در اعداد رینولدز مختلف

فصل هشتم

نتیجه گیری

در تحقیق حاضر، مطالعه جریان دارای اینرسی یک سیال مدل مرتبه دو، با استفاده از روش حساب اختلالات، مورد بررسی قرار گرفت تا یک حل تحلیلی مناسب برای آن ارائه شود. تحت گرادیان فشار ثابت عدد وایزنبرگ در سیال ماکسول فوق همرفتی (UCM) معرف زمان آسودگی از تنش و در سیال مرتبه دو معیاری از زمان رهایی از تغییر شکل می‌باشد. همچنین با توجه به حل ارائه شده و حل قبلی UCM می‌توان مقایسه مناسبی از اثرات این دو پارامتر بسیار مهم در جریان سیالات ویسکوالاستیک را ارائه داد.

مهم‌ترین نتایجی که بدست آمده به شرح زیر می‌باشد:

- افزایش عدد وایزنبرگ در سیال مرتبه دو شدت جریان‌های ثانویه را تقویت می‌نماید. همچنین افزایش زمان رهایی از تغییر شکل، باعث متمایل شدن گردابه‌های تیلور به سمت ناحیه بیرونی لوله خمیده شده و البته تغییر مرکز این جریان‌ها در راستای عمودی ناچیز می‌باشد.
- افزایش زمان آسودگی از تنش و رهایی از تغییر شکل، موقعیت بیشینه سرعت محوری را به سمت دیواره بیرونی یا ناحیه خارجی لوله خمیده متمایل می‌کند.
- افزایش زمان رهایی از تغییر شکل در سیال مرتبه دو همراه با کاهش درگ جریان در لوله خمیده خواهد شد. در سیال UCM، کاهش درگ را می توان در مقادیر کوچک زمان آسودگی از تنش مشاهده نمود. اما در زمان‌های آسودگی از تنش بزرگتر ($We = 2.1$)، شاهد افزایش ضریب درگ در جریان خواهیم بود.
- افزایش زمان رهایی از تغییر شکل سیال مرتبه دو مقدار $\tau_{\phi s}$ را تقویت می‌کند و باعث می‌گردد تا نرخ جریان ورودی در لوله خمیده افزایش یابد.

همچنین انتقال حرارت جریان سیال ویسکوالاستیک در یک لوله خمیده نیز مورد تحلیل قرار گرفت و در آن، تاثیر پارامترهای مختلف موثر بر انتقال حرارت نیز بررسی گردید. در این پژوهش، انتقال حرارت مربوط به سیالات

ویسکوالاستیک در لوله خمیده برای دو مدل اولدروید-بی و سیال مرتبه دو انجام گرفته است. مهم‌ترین نتایجی که از این تحلیل دریافت شد، به شرح زیر می‌باشد:

- افزایش عدد پرانتل رفتار مشابهی را در دو مدل اولدروید-بی و مرتبه دو به نمایش می‌گذارد و آن هم تمایل هر چه بیشتر بیشینه دمایی به سمت دیواره بیرونی است.
- در جریان رینولدز پایین که جریان حالت جریان خزشی به خود می‌گیرد، بیشینه دمایی در ناحیه درونی لوله قرار دارد و به عبارتی دیگر، $X_{\max}$ مقداری منفی دارد. در این هنگام، افزایش عدد وایزنبرگ تاثیر چندانی روی موقعیت بیشینه دمایی سیال ندارد. این نتیجه در مورد هر دو مدل سیال مورد بحث یکسان می‌باشد.
- در رینولدزهای بالاتر و جریان دارای اینرسی، بیشینه دمایی، حتی در اعداد وایزنبرگ بسیار پایین نیز در بخش خارجی لوله قرار دارد و $X_{\max}$ مثبت می‌باشد. در این‌حالت افزایش عدد وایزنبرگ، تاثیر بسزایی روی انتقال موقعیت بیشینه دمای سیال دارد که البته این تاثیر، در سیال مرتبه دو شدیدتر از مدل سیال اولدروید-بی است.
- افزایش عدد رینولدز در حالتی که عدد وایزنبرگ را ثابت در نظر بگیریم، رفتار مشابهی با رفتار سیال در حالت افزایش عدد وایزنبرگ و رینولدز ثابت دارد و آن هم تمایل بیشینه دمایی به سمت دیواره بیرونی و همچنین افزایش مقدار بیشینه دما می‌باشد.
- روند افزایش عدد ناسلت چه برای سیال اولدروید-بی و چه برای سیال مرتبه دو یکسان است. با افزایش عدد رینولدز در حالت جریان خزشی، عدد ناسلت کاهش می‌یابد. اما این روند در قبال افزایش عدد رینولدز در حالت جریان دارای اینرسی با افزایش مقدار ناسلت مواجه می‌شود.

ضمائم

ضمیمه (الف)

معادلات مربوط به اجزای تنش سیال مرتبه دو که به صورت $\tau = \gamma - We\,\dfrac{\Im\gamma}{\Im t}$ ارائه می‌شوند:

$$\gamma_{rr} = 2\frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \gamma_{r\phi} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi} - v\right),$$

$$\gamma_{rs} = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\delta}{B} w\cos\phi, \qquad \gamma_{\phi\phi} = \frac{2}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \phi}\right), \tag{A1}$$

$$\gamma_{\phi s} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{\delta}{B} w\sin\phi, \qquad \gamma_{ss} = \frac{2\delta}{B}\left(u\cos\phi - v\sin\phi\right).$$

و

$$\frac{\Im\gamma_{rr}}{\Im t} = u\frac{\partial \gamma_{rr}}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial \gamma_{rr}}{\partial \phi} - 2\frac{\partial u}{\partial r}\gamma_{rr} - \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}\gamma_{r\phi},$$

$$\frac{\Im\gamma_{r\phi}}{\Im t} = u\frac{\partial \gamma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{v}{r}\left(\frac{\partial \gamma_{r\phi}}{\partial \phi} + \gamma_{rr}\right) - \frac{\partial u}{\partial r}\gamma_{r\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}\gamma_{\phi\phi} - \frac{\partial v}{\partial r}\gamma_{rr} - \frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \phi}\right)\gamma_{r\phi},$$

$$\begin{aligned}\frac{\Im\gamma_{rs}}{\Im t} = {} & u\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial \phi} - \frac{\partial u}{\partial r}\gamma_{rs} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}\gamma_{\phi s} - \frac{\partial w}{\partial r}\gamma_{rr} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi}\gamma_{r\phi} \\ & + \frac{\delta}{B}\left(-u\cos\phi + v\sin\phi\right)\gamma_{rs} + w\,\gamma_{rr}\cos\phi - w\,\gamma_{r\phi}\sin\phi,\end{aligned}$$

$$\frac{\Im\gamma_{\phi\phi}}{\Im t} = u\frac{\partial \gamma_{\phi\phi}}{\partial r} + \frac{v}{r}\left(\frac{\partial \gamma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + 2\gamma_{r\phi}\right) - 2\frac{\partial v}{\partial r}\gamma_{r\phi} - \frac{2}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \phi}\right)\gamma_{\phi\phi}, \tag{A2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Im\gamma_{\phi s}}{\Im t} = {} & u\frac{\partial \gamma_{\phi s}}{\partial r} + \frac{v}{r}\left(\gamma_{rs} + \frac{\partial \gamma_{\phi s}}{\partial \phi}\right) - \frac{\partial v}{\partial r}\gamma_{rs} - \frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \phi}\right)\gamma_{\phi s} - \frac{\partial w}{\partial r}\gamma_{r\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi}\gamma_{\phi\phi} \\ & + \frac{\delta}{B}\left(-u\cos\phi + v\sin\phi\right)\gamma_{\phi s} + w\,\gamma_{r\phi}\cos\phi - w\,\gamma_{\phi\phi}\sin\phi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Im\gamma_{ss}}{\Im t} = {} & u\frac{\partial \gamma_{ss}}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial \gamma_{ss}}{\partial \phi} - 2\frac{\partial w}{\partial \phi}\gamma_{\phi s} + 2\frac{\delta}{B}\left(-u\cos\phi + v\sin\phi\right)\gamma_{ss} \\ & + w\,\gamma_{rs}\cos\phi - w\,\gamma_{\phi s}\sin\phi,\end{aligned}$$

ضمیمه (ب)

معادلات مربوط به مرتب‌سازی ضرایب δ^2 به صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{l}
2r^6 We\left(\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\right)^2+8r^4 We\left(\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}\right)^2-2r^5 We\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}w^{(0)}-10r^7 We\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}\\
-2r^4 We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \phi^2}w^{(0)}-10r^5 We\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial \phi}+2r^6 We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}w^{(0)}+10r^7 We\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}w^{(0)}
\end{array}\right)\sin(2\phi)\\
&+\left(\begin{array}{l}
2\,\mathrm{Re}\,r^6\dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial r}w^{(0)}+8r^3 We\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}\dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial \phi}-2r^3\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial \phi^3}-2r^5\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r^2\partial \phi}-2r^4\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial \phi}\\
-4r^4 We\dfrac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial r\,\partial \phi}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}-4r^4 We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial \phi}\dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial \phi}-4r^6 We\dfrac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial r^2}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}+2r^6 Re\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}w^{(1)}\\
-4r^6 We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}\dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial r}
\end{array}\right)\sin(\phi)\\
&+\left(\begin{array}{l}
10r^6 Re\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}w^{(0)}-8r^4 We\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}w^{(0)}+8r^5 We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial \phi}w^{(0)}-20r^4 We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \phi^2}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}\\
-20r^6 We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial \phi}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-8r^5 We\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}
\end{array}\right)\cos^2(\phi)\\
&+\left(\begin{array}{l}
2r^5 Re\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}w^{(1)}+2r^5 Re\dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial \phi}w^{(0)}-8r^6\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r^3}-10r^5\dfrac{\partial^4\psi^{(1)}}{\partial r^2\,\partial \phi^2}-5r^7\dfrac{\partial^4\psi^{(1)}}{\partial r^4}-24r^3\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial \phi^2}\\
-5r^3\dfrac{\partial^4\psi^{(1)}}{\partial \phi^4}-4r^3 We\dfrac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \phi^2}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}-7r^4\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}-4r^5 We\dfrac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial r\,\partial \phi}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-4r^5 We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial \phi}\dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial r}\\
-4r^3 We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \phi^2}\dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial \phi}+7r^5\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2}+12r^4\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial \phi^2}
\end{array}\right)\cos(\phi)\\
&+4r^4 We\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}w^{(0)}+\mathrm{Re}\,r^3\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}-4r^5 We\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial \phi}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}+3rWe\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}-r^6\dfrac{\partial^4\psi^{(2)}}{\partial r^4}\\
&-r^3 We\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r^2\,\partial \phi}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}+4rWe\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial \phi^3}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}+6r^2 We\dfrac{\partial^4\psi^{(1)}}{\partial r^2\,\partial \phi^2}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}+\mathrm{Re}\,r^3\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial \phi^3}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}\\
&+\mathrm{Re}\,r^4\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial \phi}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}+\mathrm{Re}\,r^5\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r^2\,\partial \phi}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}-We\,r^5\dfrac{\partial^5\psi^{(1)}}{\partial r^5}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}+We\,r\dfrac{\partial^5\psi^{(1)}}{\partial \phi^5}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}-\mathrm{Re}\,r^5\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r^3}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}\\
&-We\,r\dfrac{\partial^5\psi^{(1)}}{\partial \phi^4\partial r}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}-2We\,r^4\dfrac{\partial^4\psi^{(1)}}{\partial r^4}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}+2\,\mathrm{Re}\,r^2\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial \phi^2}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}-\mathrm{Re}\,r^4\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}+r^4\dfrac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial r^2}\\
&+4We\dfrac{\partial^4\psi^{(1)}}{\partial \phi^4}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}-\mathrm{Re}\,r^3\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial \phi^2}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}-2We\,r^3\dfrac{\partial^5\psi^{(1)}}{\partial r^3\,\partial \phi^2}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}-10rWe\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial \phi^2}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}-2r^5\dfrac{\partial^3\psi^{(2)}}{\partial r^2}\\
&-3r^2 We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}+3r^3 We\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r^3}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}+r^2 We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial \phi}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}-2r^4\dfrac{\partial^4\psi^{(2)}}{\partial r^2\,\partial \phi^2}-r^3\dfrac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r}-4r^2\dfrac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \phi^2}\\
&+16We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial \phi^2}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}-r^2\dfrac{\partial^4\psi^{(2)}}{\partial \phi^4}+2We\,r^4\dfrac{\partial^4\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial \phi^3}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \phi}+2We\,r^3\dfrac{\partial^5\psi^{(1)}}{\partial r^2\,\partial \phi^3}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}+We\,r^5\dfrac{\partial^5\psi^{(1)}}{\partial r^4\,\partial \phi}\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}\\
&-4r^5 We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial \phi}w^{(0)}-2r^2 We\dfrac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}\dfrac{\partial^4\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial \phi^3}+2r^3\dfrac{\partial^3\psi^{(2)}}{\partial r\,\partial \phi^2}=0.
\end{aligned}
\tag{B1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{l}
2rWe\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial\phi^2}w^{(0)}+3r^2We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial\phi}\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}-r^2We\dfrac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial r\,\partial\phi^2}w^{(0)}+r^4We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\\
-r^3We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2}w^{(0)}+r^2We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial\phi^2}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}+3r^4\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}\cos(\phi)+r^3\dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial\phi}+r^2We\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}w^{(0)}\\
-r^3We\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-4rWe\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}-\mathrm{Re}\,r^4\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}w^{(0)}+r^2We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}\\
+r^4We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-2r^2We\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\phi^2}-r^4We\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r^3}w^{(0)}
\end{array}\right)\sin(\phi)\\
&+\left(\begin{array}{l}
-3r^4We\dfrac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial r^3}\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}+3r^4We\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r^2\partial\phi}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-6r^4We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2}\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial\phi}-3r^2We\dfrac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial\phi^2\partial r}\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\\
+3r^4We\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial\phi^3}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}+4r^3We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}-9r^5We\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\cos(\phi)-5r^4\dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial r}-4r^5\dfrac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial r^2}\\
-4r^2We\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}-3\mathrm{Re}\,r^4\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}+3\mathrm{Re}\,r^4\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}-\mathrm{Re}\,r^3\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}w^{(0)}\\
+9r^2We\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-6r^6\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}\cos(\phi)-4r^3\dfrac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial\phi^2}-11r^3\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\phi^2}-6r^4\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\phi^2}\cos(\phi)\\
-3r^2We\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi^2}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}-6r^2We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi^2}\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\phi^2}-2r^3We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-rWe\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial\phi^3}w^{(0)}\\
+13rWe\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\phi^2}+3r^4We\dfrac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial\phi\,\partial r^2}\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}+2rWe\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial\phi^2}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}-r^2We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi}w^{(0)}\\
-r^3We\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial\phi\,\partial r^2}w^{(0)}-3r^4We\dfrac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r^3}\dfrac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}+6r^2We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial\phi^2}\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial\phi}+3r^2We\dfrac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial\phi^3}\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\\
+12r^3We\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial\phi}\dfrac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}+6r^4We\dfrac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi}\dfrac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}-12r^6
\end{array}\right)\cos(\phi)\\
&-r^4\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial r^2}-r^2\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial\phi^2}-\mathrm{Re}\,r^3\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-\mathrm{Re}\,r^3\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial r}+rWe\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial^3 w^{(1)}}{\partial\phi^3}+r^2We\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\phi}\\
&-rWe\frac{\partial^3\psi^{(2)}}{\partial r\,\partial\phi^2}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}+2r^3We\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi}\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial r^2}+r^3We\frac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial\phi\,\partial r^2}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial r}-2r^3We\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2}\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi}-r^3\frac{\partial w^{(2)}}{\partial r}\\
&+r^3We\frac{\partial^3\psi^{(2)}}{\partial\phi\,\partial r^2}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-2r^3We\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial r^2}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial\phi}-2rWe\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial r\,\partial\phi}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\phi^2}-r^3We\frac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r^3}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\phi}\\
&+2rWe\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial\phi^2}\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi}+3rWe\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial r}+3rWe\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}-rWe\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial r}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}-rWe\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\phi}\\
&+\mathrm{Re}\,r^3\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\phi}+\mathrm{Re}\,r^3\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial r}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}+4We\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\phi^2}+4We\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial\phi^2}+2rWe\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial\phi^2}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial\phi}\\
&+rWe\frac{\partial^3\psi^{(2)}}{\partial\phi^3}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}+r^2We\frac{\partial^3\psi^{(2)}}{\partial r^3}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}-rWe\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial r\,\partial\phi^2}\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\phi}-r^3We\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial r^3}\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}-r^2We\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial r\,\partial\phi}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}\\
&-2rWe\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi}\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial\phi^2}+r^3We\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial\phi\,\partial r^2}\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial r}-rWe\frac{\partial^3 w^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi^2}\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}+rWe\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial\phi^3}\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial r}-3r^2We\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial r^2}\\
&-r^3We\frac{\partial^3 w^{(0)}}{\partial r^3}\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\phi}+r^3We\frac{\partial^3 w^{(1)}}{\partial\phi\,\partial r^2}\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}-3r^2We\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\phi}+rWe\frac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial\phi^3}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial r}-r^2We\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial r}\\
&+2r^3We\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial r\,\partial\phi}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r^2}-rWe\frac{\partial^3\psi^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi^2}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\phi}+3r^2We\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial r\,\partial\phi}\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial r}-r^3We\frac{\partial^3\psi^{(2)}}{\partial r^3}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\phi}+r^4w^{(0)}\\
&-3r^2We\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial r\,\partial\phi}=0.
\end{aligned}
\tag{B2}
$$

ضمیمه (ج)

مولفه $T^{(2)}$ در سیال اولدروید بی به صورت $T^{(2)}=f_{20}(r)+f_{22}(r)\cos(2\phi)$ ارائه شده است که داریم:

$$
\begin{aligned}
f_{20}(r)={}&We^{4}\left(\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{4}\left(\frac{1}{216}r^{8}-\frac{1}{900}r^{10}+\frac{1}{540}r^{4}-\frac{1}{162}r^{6}+\frac{1}{540}r^{2}+\frac{503}{907200}\right)+\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{3}\left(-\frac{1}{216}r^{6}+\frac{1}{90}r^{4}+\frac{1}{1400}-\frac{7}{720}r^{2}+\frac{1}{3600}r^{10}\right)\right)\\
&+We^{3}\left(\begin{array}{l}
\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{3}\left(\begin{array}{l}
\frac{1}{432}r^{4}\Pr\mathrm{Re}+\frac{5}{4608}r^{8}\Pr\mathrm{Re}+\frac{77}{207360}\Pr\mathrm{Re}-\frac{13}{14400}r^{10}\mathrm{Re}+\frac{37}{13824}r^{8}\mathrm{Re}+\frac{13}{8640}r^{4}\mathrm{Re}-\frac{35}{10368}r^{6}\mathrm{Re}+\frac{1}{3456}r^{2}\mathrm{Re}\\
+\frac{11}{103680}r^{12}\mathrm{Re}-\frac{7}{3456}r^{6}\Pr\mathrm{Re}+\frac{12367}{43545600}\mathrm{Re}-\frac{5}{3456}r^{2}\Pr\mathrm{Re}-\frac{1}{2880}r^{10}\Pr\mathrm{Re}+\frac{1}{20736}r^{12}\Pr\mathrm{Re}
\end{array}\right)\\
+\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{2}\left(-\frac{1}{51840}r^{12}\mathrm{Re}-\frac{29}{8640}r^{2}\mathrm{Re}-\frac{5}{2592}r^{6}\mathrm{Re}+\frac{1}{6912}r^{8}\mathrm{Re}+\frac{13}{51840}\mathrm{Re}+\frac{1}{8640}r^{10}\mathrm{Re}+\frac{7}{1728}r^{4}\mathrm{Re}\right)
\end{array}\right)\\
&+We^{2}\left(\begin{array}{l}
\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{2}\left(\begin{array}{l}
\Pr^{2}\mathrm{Re}^{2}\left(\frac{13}{414720}r^{12}+\frac{73}{138240}r^{4}+\frac{23}{453600}-\frac{1}{322560}r^{14}-\frac{31}{230400}r^{10}-\frac{1}{3072}r^{8}-\frac{43}{138240}r^{2}-\frac{71}{138240}r^{6}\right)\\
\frac{779}{829440}r^{4}\Pr\mathrm{Re}^{2}-\frac{469}{829440}r^{2}\Pr\mathrm{Re}^{2}+\frac{31}{288}r^{2}-\frac{11}{72}r^{4}-\frac{799}{4147200}r^{10}\Pr\mathrm{Re}^{2}-\frac{97}{460800}r^{10}\mathrm{Re}^{2}+\frac{11}{276480}r^{12}\Pr\mathrm{Re}^{2}\\
-\frac{191}{5760}+\frac{41}{432}r^{6}-\frac{241}{276480}r^{6}\Pr\mathrm{Re}^{2}\,\frac{457}{3225600}\Pr\mathrm{Re}^{2}-\frac{563}{5806080}r^{2}\mathrm{Re}^{2}-\frac{19}{5806080}r^{14}\Pr\mathrm{Re}^{2}-\frac{136613}{2438553600}\mathrm{Re}^{2}\\
+\frac{85}{165888}r^{8}\Pr\mathrm{Re}^{2}+\frac{1}{23040}r^{12}\mathrm{Re}^{2}+\frac{341}{663552}r^{8}\mathrm{Re}^{2}+\frac{4807}{11612160}r^{4}\mathrm{Re}^{2}-\frac{817}{1244160}r^{6}\mathrm{Re}^{2}-\frac{25}{1152}r^{8}+\frac{59}{161280}r^{4}\mathrm{Re}^{2}
\end{array}\right)\\
+\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)\left(\begin{array}{l}
\frac{1}{41472}r^{8}\mathrm{Re}^{2}-\frac{1}{207360}r^{12}\mathrm{Re}^{2}+\frac{10009}{457228800}\mathrm{Re}^{2}+\frac{1}{2032128}r^{14}\mathrm{Re}^{2}-\frac{1}{5184}r^{6}\mathrm{Re}^{2}+\frac{1}{76800}r^{10}\mathrm{Re}^{2}+\frac{59}{161280}r^{4}\mathrm{Re}^{2}\\
-\frac{839}{2903040}r^{2}\mathrm{Re}^{2}
\end{array}\right)
\end{array}\right)\\
&+We\frac{\eta_p}{\eta}\left(\begin{array}{l}
\left(\frac{17}{265420800}\Pr\mathrm{Re}^{3}+\frac{13}{371589120}\mathrm{Re}^{3}+\frac{1}{5308416}\Pr^{2}\mathrm{Re}^{3}\right)r^{16}-\left(\frac{151}{243855360}\mathrm{Re}^{3}+\frac{193}{174182400}\Pr\mathrm{Re}^{3}+\frac{11}{3870720}\Pr^{2}\mathrm{Re}^{3}\right)r^{14}\\
+\left(\frac{1547}{199065600}\Pr\mathrm{Re}^{3}+\frac{11}{622080}\Pr^{2}\mathrm{Re}^{3}+\frac{431}{99532800}\mathrm{Re}^{3}\right)r^{12}\\
+\left(\frac{107}{57600}\Pr\mathrm{Re}-\frac{247}{8294400}\Pr\mathrm{Re}^{3}+\frac{11}{11520}\mathrm{Re}-\frac{541}{33177600}\mathrm{Re}^{3}-\frac{503}{8294400}\Pr^{2}\mathrm{Re}^{3}\right)r^{10}\\
+\left(\frac{2951}{79626240}\mathrm{Re}^{3}-\frac{19}{1536}\Pr\mathrm{Re}-\frac{215}{27648}\mathrm{Re}+\frac{859}{6635520}\Pr^{2}\mathrm{Re}^{3}+\frac{5641}{79626240}\Pr\mathrm{Re}^{3}\right)r^{8}\\
+\left(-\frac{941}{8294400}\Pr\mathrm{Re}^{3}-\frac{517}{9953280}\mathrm{Re}^{3}+\frac{79}{3456}\mathrm{Re}-\frac{1859}{9953280}\Pr^{2}\mathrm{Re}^{3}+\frac{1}{27}\Pr\mathrm{Re}\right)r^{6}\\
+\left(\frac{7829}{66355200}\Pr\mathrm{Re}^{3}+\frac{5}{114688}\mathrm{Re}^{3}-\frac{127}{2304}\Pr\mathrm{Re}+\frac{1189}{6635520}\Pr^{2}\mathrm{Re}^{3}-\frac{179}{5760}\mathrm{Re}\right)r^{4}\\
+\left(-\frac{1729}{24883200}\Pr\mathrm{Re}^{3}-\frac{37}{368640}\Pr^{2}\mathrm{Re}^{3}-\frac{1991}{99532800}\mathrm{Re}^{3}+\frac{151}{3840}\Pr\mathrm{Re}+\frac{43}{2160}\mathrm{Re}\right)r^{2}\\
+\frac{133519}{8360755200}\Pr^{2}\mathrm{Re}^{3}-\frac{4139}{580608}\mathrm{Re}-\frac{2747}{345600}\Pr\mathrm{Re}+\frac{8458151}{1755758592000}\mathrm{Re}^{3}+\frac{95629}{5573836800}\Pr\mathrm{Re}^{3}
\end{array}\right)\\
&+\mathrm{Re}^{4}\left(\begin{array}{l}
\frac{287477}{2106910310400}+\frac{1}{371589120}r^{16}-\frac{11}{433520640}r^{14}+\frac{24743}{275904921600}r^{2}-\frac{22399}{16721510400}r^{4}+\frac{11}{11796480}r^{8}+\frac{331}{238878720}r^{6}\\
-\frac{157}{1194393600}r^{12}-\frac{1}{8599633920}r^{18}+\frac{287}{66355200}r^{4}\Pr-\frac{29}{464486400}r^{14}\Pr-\frac{1}{3583180800}r^{18}\Pr-\frac{1}{388800}r^{2}\Pr\\
+\frac{1}{17694720}r^{16}\Pr^{2}-\frac{289}{44236800}r^{10}\Pr^{2}+\frac{7}{1061683200}r^{16}\Pr-\frac{37}{33177600}r^{10}\Pr-\frac{161}{19906560}r^{2}\Pr^{2}-\frac{2003}{119439360}r^{6}\Pr^{2}\\
+\frac{263}{796262400}r^{12}\Pr-\frac{4901}{1194393600}r^{6}\Pr+\frac{4001}{318504960}r^{8}\Pr^{2}-\frac{89}{185794560}r^{14}\Pr^{2}+\frac{2033}{796262400}r^{8}\Pr-\frac{1}{358318080}r^{18}\Pr^{2}\\
+\frac{179}{79626240}r^{12}\Pr^{2}+\frac{803}{53084160}r^{4}\Pr^{2}+\frac{128021}{200658124800}\Pr-\frac{569}{1327104000}r^{10}
\end{array}\right),\\
&+\mathrm{Re}^{4}\left(\begin{array}{l}
\frac{161}{230400}r^{10}\Pr-\frac{17}{276480}r^{12}\Pr+\frac{1}{3072}r^{6}+\frac{631}{82944}r^{6}\Pr-\frac{20897}{16588800}\Pr-\frac{61}{6144}r^{4}\Pr+\frac{31}{172800}r^{2}-\frac{1}{460800}r^{12}\\
-\frac{11}{73728}r^{8}-\frac{49}{138240}r^{4}+\frac{1}{30720}r^{10}-\frac{227}{774144}+\frac{1801}{276480}r^{2}\Pr-\frac{697}{221184}r^{8}\Pr
\end{array}\right)\\
&+\frac{359}{1440}-\frac{17}{96}r^{6}+\frac{103}{192}r^{4}-\frac{13}{24}r^{4}
\end{aligned}
\tag{C1}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{22}(r) ={}& We^{4}\Bigg(\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{4}\left(-\frac{19}{3240}r^{2}+\frac{5}{324}r^{4}-\frac{19}{108}r^{6}+\frac{1}{108}r^{8}-\frac{1}{540}r^{10}\right)+\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{3}\left(-\frac{1}{270}r^{2}-\frac{1}{180}r^{8}+\frac{1}{576}r^{10}+\frac{13}{2880}r^{6}+\frac{1}{540}r^{4}\right)\Bigg)\\
&+We^{3}\Bigg(\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{3}\Bigg(\frac{307}{86400}r^{8}\operatorname{Re}+\frac{271}{51840}r^{4}\operatorname{Re}-\frac{47}{7680}r^{6}\operatorname{Re}+\frac{29}{302400}r^{12}\operatorname{Re}-\frac{101}{103680}r^{10}\operatorname{Re}-\frac{769}{259200}r^{8}\operatorname{Re}\Pr\\
&\quad+\frac{11}{86400}r^{12}\operatorname{Re}\Pr-\frac{307}{69120}r^{6}\operatorname{Re}\Pr-\frac{4871}{2419200}r^{2}\operatorname{Re}+\frac{43}{12960}r^{4}\operatorname{Re}\Pr-\frac{101}{103680}r^{10}\operatorname{Re}\Pr-\frac{1111}{1036800}r^{2}\operatorname{Re}\Pr\Bigg)+\\
&\quad\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{2}\Bigg(-\frac{23}{403200}r^{12}\operatorname{Re}+\frac{1}{1728}r^{10}\operatorname{Re}-\frac{29}{50400}r^{2}\operatorname{Re}\Pr+\frac{1}{1440}r^{4}\operatorname{Re}\Pr-\frac{11}{14400}r^{8}\operatorname{Re}\Pr-\frac{2749}{2419200}r^{2}\operatorname{Re}+\frac{19}{23040}r^{6}\operatorname{Re}\\
&\quad-\frac{1}{11200}r^{12}\operatorname{Re}\Pr-\frac{9}{6400}r^{8}\operatorname{Re}+\frac{1}{1152}r^{4}\operatorname{Re}+\frac{1}{7680}r^{6}\operatorname{Re}\Pr+\frac{11}{23040}r^{10}\operatorname{Re}\Pr\Bigg)\Bigg)\\
&+We^{2}\Bigg(\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{2}\Bigg(\operatorname{Re}^{2}\Bigg(\frac{1}{20736}r^{8}\Pr^{2}-\frac{13}{207360}r^{4}\Pr^{2}-\frac{23}{829440}r^{10}\Pr^{2}-\frac{1}{1105920}r^{14}\Pr^{2}+\frac{1273}{1244160}r^{4}\Pr+\frac{7933}{116121600}r^{2}\Pr^{2}\\
&\quad-\frac{1}{165888}r^{14}\Pr+\frac{121}{4838400}r^{12}+\frac{19}{2419200}r^{12}\Pr^{2}-\frac{13}{92160}r^{10}+\frac{587}{1382400}r^{2}\Pr-\frac{1181}{829440}r^{6}\Pr\\
&\quad+\frac{10853}{17418240}r^{4}-\frac{90803}{348364800}r^{2}-\frac{7}{552960}r^{6}\Pr^{2}+\frac{11}{10800}r^{8}\Pr+\frac{233}{2903040}r^{12}\Pr-\frac{97}{248832}r^{10}\Pr\\
&\quad-\frac{2}{2835}r^{6}-\frac{41}{23224320}r^{14}\Bigg)\\
&\quad\frac{287}{4320}r^{2}-\frac{41}{1440}r^{8}+\frac{29}{288}r^{6}-\frac{55}{432}r^{4}\Bigg)+\\
&\quad\left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)\operatorname{Re}^{2}\Bigg(-\frac{13}{1612800}r^{12}-\frac{23}{172800}r^{8}\Pr+\frac{7}{184320}r^{10}+\frac{1}{1548288}r^{14}+\frac{1}{5760}r^{4}\Pr+\frac{113}{1935360}r^{4}-\frac{2641}{38707200}r^{2}\\
&\quad+\frac{1}{30720}r^{6}-\frac{1}{46080}r^{6}\Pr-\frac{101}{1382400}r^{8}-\frac{9551}{77414400}r^{2}\Pr+\frac{1}{442368}r^{14}+\frac{13}{122880}r^{10}\Pr-\frac{23}{806400}r^{12}\Pr\Bigg)\Bigg)\\
&+We\frac{\eta_p}{\eta}\Bigg(\operatorname{Re}^{3}\Bigg(-\frac{67}{6635520}r^{10}\Pr^{2}+\frac{11881}{696729600}r^{8}-\frac{229}{9953280}r^{4}\Pr^{2}-\frac{397463}{29262643200}r^{2}+\frac{5683}{199065600}r^{4}+\frac{481}{46448640}r^{12}\Pr\\
&\quad+\frac{13}{9289728}r^{12}-\frac{1}{163840}r^{10}+\frac{1}{23224320}r^{16}\Pr^{2}+\frac{283}{29262643200}r^{16}-\frac{4673}{33177600}r^{6}\Pr-\frac{841}{19906560}r^{10}\Pr\\
&\quad-\frac{5}{7962624}r^{14}\Pr^{2}+\frac{179}{12441600}r^{8}\Pr^{2}+\frac{15359}{696729600}r^{2}\Pr^{2}-\frac{1}{5443200}r^{14}+\frac{401}{4877107200}r^{16}\Pr-\frac{1993}{1393459200}r^{14}\Pr\\
&\quad+\frac{23483}{232243200}r^{4}\Pr-\frac{1}{13271040}r^{6}\Pr^{2}+\frac{23819}{232243200}r^{8}\Pr-\frac{2281}{77414400}r^{6}-\frac{306947}{9754214400}r^{2}\Pr+\frac{41}{11612160}r^{12}\Pr^{2}\Bigg)+\\
&\quad\operatorname{Re}\left(-\frac{613}{34560}r^{4}+\frac{169}{9216}r^{6}\Pr-\frac{5}{864}r^{8}+\frac{127}{13824}r^{2}-\frac{35}{3456}r^{8}\Pr-\frac{41}{3456}r^{4}\Pr+\frac{1}{1152}r^{2}\Pr+\frac{353}{23040}r^{6}+\frac{1}{1440}r^{10}+\frac{77}{46080}r^{10}\Pr\right)\Bigg)\\
&+\operatorname{Re}^{4}\Bigg(-\frac{1}{58525286400}r^{18}+\frac{1207}{464486400}r^{4}\Pr-\frac{307}{7431782400}r^{14}\Pr-\frac{169231}{222953472000}r^{2}\Pr-\frac{81133}{22295347200}r^{6}\Pr+\frac{8987}{3483648000}r^{8}\Pr\\
&\quad+\frac{233}{928972800}r^{12}\Pr-\frac{1}{983040}r^{10}\Pr+\frac{439}{1857945600}r^{8}-\frac{2297}{5573836800}r^{6}-\frac{293927}{1404606873600}r^{2}-\frac{163}{79626240}r^{4}\Pr^{2}\\
&\quad-\frac{29}{222953472000}r^{18}\Pr-\frac{1}{1592524800}r^{18}\Pr^{2}+\frac{14569}{35115171840}r^{4}-\frac{139}{1592524800}r^{10}+\frac{1}{83607552}r^{16}\Pr^{2}+\frac{61}{2786918400}r^{12}\\
&\quad+\frac{47}{117050572800}r^{16}+\frac{61}{154828800}r^{12}\Pr^{2}+\frac{439}{398131200}r^{8}\Pr^{2}-\frac{299}{318504960}r^{10}\Pr^{2}+\frac{11}{2786918400}r^{16}\Pr-\frac{29}{7431782400}r^{14}\\
&\quad+\frac{14821}{8360755200}r^{2}\Pr^{2}+\frac{43}{159252480}r^{6}\Pr^{2}-\frac{1}{10616832}r^{14}\Pr^{2}\Bigg),\\
&+\operatorname{Re}^{4}\Bigg(\frac{13}{184320}r^{10}-\frac{187}{207360}r^{4}-\frac{20477}{19353600}r^{2}\Pr-\frac{73}{230400}r^{8}-\frac{53}{9676800}r^{12}+\frac{409}{552960}r^{6}+\frac{107}{138240}r^{4}\Pr+\frac{15451}{29030400}r^{2}\\
&\quad+\frac{11}{23040}r^{6}\Pr-\frac{109}{4838400}r^{12}\Pr-\frac{1027}{1382400}r^{8}\Pr+\frac{131}{552960}r^{10}\Pr\Bigg)\\
&+\frac{55}{96}r^{4}-\frac{71}{384}r^{6}-\frac{227}{384}r^{2}
\end{aligned}
\tag{C2}
$$

ضمیمه (د)

مولفه $T^{(2)}$ در سیال مرتبه دو به صورت $T^{(2)}=f_{20}(r)+f_{22}(r)\cos(2\phi)$ ارائه شده است که داریم:

$$
\begin{aligned}
f_{20}(r) =& -\left(\frac{1}{3583180800}\mathrm{Re}^4\Pr+\frac{1}{8599633920}\mathrm{Re}^4+\frac{1}{358318080}\mathrm{Re}^4\Pr^2\right)r^{18}\\
&+\left(\begin{aligned}&\frac{13}{185794560}\mathrm{Re}^3 We+\frac{7}{1061683200}\mathrm{Re}^4\Pr+\frac{17}{132710400}\mathrm{Re}^3\Pr We+\frac{1}{2654208}\mathrm{Re}^3\Pr^2 We+\frac{1}{17694720}\mathrm{Re}^4\Pr^2\\&+\frac{1}{371589120}\mathrm{Re}^4\end{aligned}\right)r^{16}\\
&-\left(\begin{aligned}&\frac{193}{174182400}\mathrm{Re}^3\Pr We+\frac{19}{5806080}\mathrm{Re}^2\Pr We^2+\frac{151}{243855360}\mathrm{Re}^3 We+\frac{89}{185794560}\mathrm{Re}^4\Pr^2+\frac{29}{464486400}\mathrm{Re}^4\Pr\\&+\frac{71}{20321280}\mathrm{Re}^2 We^2+\frac{1}{322560}\mathrm{Re}^2\Pr^2 We^2+\frac{11}{433520640}\mathrm{Re}^4+\frac{11}{3870720}\mathrm{Re}^3\Pr^2 We\end{aligned}\right)r^{14}\\
&+\left(\begin{aligned}&\frac{1}{23040}\mathrm{Re}^2 We^2+\frac{431}{99532800}\mathrm{Re}^3 We+\frac{157}{1194393600}\mathrm{Re}^4+\frac{13}{414720}\mathrm{Re}^2\Pr^2 We^2+\frac{263}{796262400}\mathrm{Re}^4-\frac{1}{460800}\mathrm{Re}^2\\&+\frac{11}{276480}\mathrm{Re}^2\Pr We^2-\frac{17}{276480}\mathrm{Re}^2\Pr+\frac{11}{103680}\mathrm{Re} We^3+\frac{1547}{199065600}\mathrm{Re}^3\Pr We+\frac{1}{20736}\mathrm{Re}\Pr We^3\\&+\frac{11}{622080}\mathrm{Re}^3\Pr^2 We+\frac{179}{79626240}\mathrm{Re}^4\Pr^2\end{aligned}\right)r^{12}\\
&+\left(\begin{aligned}&\frac{161}{230400}\mathrm{Re}^2\Pr+\frac{11}{11520}\mathrm{Re} We-\frac{97}{460800}\mathrm{Re}^2 We^2-\frac{569}{1327104000}\mathrm{Re}^4-\frac{31}{230400}\mathrm{Re}^2\Pr^2 We^2-\frac{13}{14400}\mathrm{Re} We^3\\&-\frac{799}{4147200}\mathrm{Re}^2\Pr We^2-\frac{1}{2880}\mathrm{Re}\Pr We^3-\frac{289}{44236800}\mathrm{Re}^4\Pr^2-\frac{541}{33177600}\mathrm{Re}^3 We-\frac{37}{33177600}\mathrm{Re}^4\Pr\\&-\frac{503}{8294400}\mathrm{Re}^3\Pr^2 We-\frac{1}{900}We^4-\frac{247}{8294400}\mathrm{Re}^3\Pr We+\frac{107}{57600}\mathrm{Re}\Pr We+\frac{1}{30720}\mathrm{Re}^2\end{aligned}\right)r^{10}\\
&+\left(\begin{aligned}&-\frac{697}{221184}\mathrm{Re}^2\Pr+\frac{4001}{318504960}\mathrm{Re}^4\Pr^2+\frac{2951}{79626240}\mathrm{Re}^3 We+\frac{5641}{79626240}\mathrm{Re}^3\Pr We-\frac{25}{1152}\Psi^2+\frac{5}{4608}\mathrm{Re}\Pr We^3\\&-\frac{19}{1536}\mathrm{Re}\Pr We-\frac{215}{27648}\mathrm{Re} We+\frac{1}{3072}\mathrm{Re}^2\Pr^2 We^2+\frac{11}{11796480}\mathrm{Re}^4+\frac{85}{165888}\mathrm{Re}^2\Pr We^2+\frac{859}{6635520}\mathrm{Re}^3\Pr^2 We\\&+\frac{341}{663552}\mathrm{Re}^2 We^2-\frac{11}{73728}\mathrm{Re}^2+\frac{2033}{796262400}\mathrm{Re}^4\Pr+\frac{37}{13824}\mathrm{Re} We^3+\frac{1}{576}We^4\end{aligned}\right)r^{8}\\
&+\left(\begin{aligned}&\frac{1}{27}\mathrm{Re}\Pr We-\frac{2003}{119439360}\mathrm{Re}^4\Pr^2-\frac{241}{276480}\mathrm{Re}^2\Pr We^2+\frac{631}{82944}\mathrm{Re}^2\Pr-\frac{17}{96}-\frac{517}{9953280}\mathrm{Re}^3 We\\&-\frac{817}{1244160}\mathrm{Re}^2 We^2+\frac{1}{3072}\mathrm{Re}^2-\frac{35}{10368}\mathrm{Re} We^3-\frac{7}{3456}\mathrm{Re}\Pr We^3-\frac{4901}{1194393600}\mathrm{Re}^4\Pr-\frac{1}{162}We^4\\&-\frac{71}{138240}\mathrm{Re}^2\Pr^2 We^2-\frac{941}{8294400}\mathrm{Re}^3\Pr We-\frac{1859}{9953280}\mathrm{Re}^3\Pr^2 We+\frac{41}{432}We^2-\frac{331}{238878720}\mathrm{Re}^4+\frac{79}{3456}\mathrm{Re} We\end{aligned}\right)r^{6}\\
&+\left(\begin{aligned}&-\frac{179}{5760}\mathrm{Re} We+\frac{287}{66355200}\mathrm{Re}^4\Pr+\frac{803}{53084160}\mathrm{Re}^4\Pr^2-\frac{61}{6144}\mathrm{Re}^2\Pr-\frac{11}{72}We^2+\frac{22399}{16721510400}\mathrm{Re}^4\\&+\frac{1}{540}We^4-\frac{49}{138240}\mathrm{Re}^2+\frac{5}{114688}\mathrm{Re}^3 We+\frac{1189}{6635520}\mathrm{Re}^3\Pr^2 We-\frac{127}{2304}\mathrm{Re}\Pr We+\frac{779}{829440}\mathrm{Re}^2\Pr We^2\\&+\frac{13}{8640}\mathrm{Re} We^3+\frac{1}{432}\mathrm{Re}\Pr We^3+\frac{73}{138240}\mathrm{Re}^2\Pr^2 We^2+\frac{7829}{66355200}\mathrm{Re}^3\Pr We+\frac{103}{192}+\frac{4807}{11612160}\mathrm{Re}^2 We^2\end{aligned}\right)r^{4}\\
&+\left(\begin{aligned}&\frac{8}{27648}\mathrm{Re} We^3-\frac{1991}{99532800}\mathrm{Re}^3 We-\frac{13}{24}+\frac{31}{288}We^2-\frac{469}{829440}\mathrm{Re}^2\Pr We^2+\frac{31}{172800}\mathrm{Re}^2-\frac{37}{368640}\mathrm{Re}^3\Pr^2 We\\&+\frac{43}{2160}\mathrm{Re} We-\frac{43}{138240}\mathrm{Re}^2\Pr^2 We^2+\frac{1801}{276480}\mathrm{Re}^2\Pr-\frac{24743}{33443020800}\mathrm{Re}^4-\frac{1}{388800}\mathrm{Re}^4\Pr-\frac{161}{19906560}\mathrm{Re}^4\Pr^2\\&+\frac{1}{540}We^4+\frac{151}{3840}\mathrm{Re}\Pr We-\frac{1729}{24883200}\mathrm{Re}^3\Pr We-\frac{563}{5806080}\mathrm{Re}^2 We^2-\frac{5}{3456}\mathrm{Re}\Pr We^3\end{aligned}\right)r^{2}\\
&-\frac{227}{774144}\mathrm{Re}^2-\frac{191}{5760}We^2-\frac{20897}{16588800}\mathrm{Re}^2\Pr-\frac{4139}{580608}\mathrm{Re} We+\frac{8458151}{1755758592000}\mathrm{Re}^3 We+\frac{128021}{200658124800}\mathrm{Re}^4\Pr\\
&-\frac{2747}{345600}\mathrm{Re}\Pr We+\frac{77}{207360}\mathrm{Re}\Pr We^3+\frac{136613}{2438553600}\mathrm{Re}^2 We^2+\frac{12367}{43545600}\mathrm{Re} We^3+\frac{133519}{8360755200}\mathrm{Re}^3\Pr^2 We\\
&+\frac{457}{3225600}\mathrm{Re}^2\Pr We^2+\frac{287477}{2106910310400}\mathrm{Re}^4+\frac{33}{453600}\mathrm{Re}^2\Pr^2 We^2+\frac{503}{907200}We^4+\frac{359}{1440}\\
&+\frac{95629}{5573836800}\mathrm{Re}^3\Pr We+\frac{346877}{275904921600}\mathrm{Re}^4\Pr^2
\end{aligned}
\tag{D1}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{22}(r) = &-\left(\frac{1}{1592524800}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{1}{58525286400}\mathrm{Re}^4+\frac{29}{222953472000}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}\right)r^{18} \\
&+\Bigg(\frac{401}{4877107200}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We+\frac{1}{83607552}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{1}{23224320}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We \\
&\quad+\frac{283}{29262643200}\mathrm{Re}^3We+\frac{11}{2786918400}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{47}{117050572800}\mathrm{Re}^4\Bigg)r^{16} \\
&-\Bigg(\frac{1}{165888}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2+\frac{5}{7962624}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We+\frac{1993}{1393459200}\mathrm{Re}^3We+\frac{1}{10616832}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{1}{5443200}\mathrm{Re}^3We \\
&\quad+\frac{41}{23224320}\mathrm{Re}^2We^2+\frac{1}{1105920}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2+\frac{29}{7431782400}\mathrm{Re}^4+\frac{307}{7431782400}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}\Bigg)r^{14} \\
&+\Bigg(\frac{41}{11612160}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We+\frac{121}{4838400}\mathrm{Re}^2We^2+\frac{29}{302400}\mathrm{Re}We^3-\frac{109}{4838400}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}+\frac{223}{2903040}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2 \\
&\quad+\frac{481}{46448640}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We+\frac{61}{154828800}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{19}{2419200}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2+\frac{11}{86400}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3+\frac{61}{2786918400}\mathrm{Re}^4 \\
&\quad+\frac{233}{928972800}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{13}{9289728}\mathrm{Re}^3We-\frac{53}{9676800}\mathrm{Re}^2\Bigg)r^{12} \\
&+\Bigg(-\frac{1}{540}\Psi^4-\frac{101}{103680}\mathrm{Re}We^3-\frac{1}{983040}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{77}{4630}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We-\frac{299}{318504960}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2-\frac{23}{829440}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2 \\
&\quad+\frac{13}{184320}\mathrm{Re}^2+\frac{1}{1440}\mathrm{Re}We-\frac{101}{103680}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3-\frac{139}{1592524800}\mathrm{Re}^4-\frac{97}{248832}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2-\frac{67}{6635520}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We \\
&\quad-\frac{841}{19906560}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We-\frac{1}{163840}\mathrm{Re}^3We-\frac{13}{92160}\mathrm{Re}^2We^2+\frac{131}{552960}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}\Bigg)r^{10} \\
&+\Bigg(\frac{179}{12441600}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We+\frac{8987}{3483648000}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}+\frac{1}{20736}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2+\frac{11}{10800}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2-\frac{5}{864}\mathrm{Re}We-\frac{73}{230400}\mathrm{Re}^2 \\
&\quad-\frac{35}{3456}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We+\frac{307}{86400}\mathrm{Re}We^3+\frac{439}{398131200}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{439}{1857945600}\mathrm{Re}^4-\frac{1027}{1382400}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}+\frac{769}{259200}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3 \\
&\quad+\frac{23819}{232243200}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We+\frac{1}{108}We^4+\frac{11881}{696729600}\mathrm{Re}^3We-\frac{41}{1440}We^2+\frac{587}{1382400}\mathrm{Re}^2We^2\Bigg)r^{8} \\
&+\Bigg(-\frac{2}{2835}\mathrm{Re}^2We^2-\frac{71}{384}+\frac{409}{552960}\mathrm{Re}^2+\frac{169}{9216}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We+\frac{11}{23040}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}-\frac{1181}{829440}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2+\frac{29}{288}We^2 \\
&\quad+\frac{43}{159252480}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2-\frac{47}{7680}\mathrm{Re}We^3-\frac{4673}{33177600}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We-\frac{19}{1080}We^4+\frac{353}{23040}\mathrm{Re}We-\frac{307}{69120}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3 \\
&\quad-\frac{7}{552960}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2-\frac{2297}{5573836800}\mathrm{Re}^4-\frac{2281}{154828800}\mathrm{Re}^3We-\frac{81133}{22295347200}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}-\frac{1}{26542080}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We\Bigg)r^{6} \\
&+\Bigg(-\frac{187}{207360}\mathrm{Re}^2+\frac{1207}{464486400}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}-\frac{163}{79626240}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2-\frac{613}{34560}\mathrm{Re}We-\frac{55}{432}We^2+\frac{10853}{17418240}\mathrm{Re}^2We^2+\frac{55}{96} \\
&\quad+\frac{43}{12960}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3-\frac{229}{9953280}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We+\frac{107}{138240}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}+\frac{23483}{232243200}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We-\frac{41}{3456}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We \\
&\quad+\frac{14569}{35115171840}\mathrm{Re}^4+\frac{5683}{199065600}\mathrm{Re}^3We+\frac{1273}{1244160}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2+\frac{5}{324}We^4-\frac{13}{207360}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2+\frac{271}{51840}\mathrm{Re}We^3\Bigg)r^{4} \\
&+\Bigg(\frac{14821}{8360755200}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}^2+\frac{1}{1152}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We-\frac{3467}{10886400}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}We^2-\frac{90803}{348364800}\mathrm{Re}^2We^2-\frac{293927}{1404606873600}\mathrm{Re}^4 \\
&\quad+\frac{7933}{116121600}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}^2We^2-\frac{397463}{29262643200}\mathrm{Re}^3We-\frac{227}{384}-\frac{169231}{222953472000}\mathrm{Re}^4\,\mathrm{Pr}-\frac{19}{3240}We^4+\frac{287}{4320}We^2 \\
&\quad-\frac{306947}{9754214400}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}We-\frac{4871}{2419200}\mathrm{Re}We^3-\frac{1111}{1036800}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}We^3+\frac{15451}{29030400}\mathrm{Re}^2+\frac{15359}{696729600}\mathrm{Re}^3\,\mathrm{Pr}^2We \\
&\quad-\frac{20477}{19353600}\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}+\frac{127}{13824}\mathrm{Re}We\Bigg)r^{2}
\end{aligned}
\tag{D2}
$$

مراجع:

[1] A review of dilatant behavior is given by W. H. Bauer and E. A. Collins in F. R. Erich, Rheology, Vol. 4, Academic Press, New York, Chapt. 8, (1976) pp. 423-459.

[2] M. Reiner, (1960) Deformation, Strain and Flow, Interscience, New York, pp. 306-309.

[3] A. G. Fredrickson, (1964) Principles and Applications of Rheology, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, P. 178.

[4] F. H. Garner, A. H. Nissan, Nature, 158, 634-635 (1946).

[5] R. J. Russel, Ph.D. Thesis, Imperial College, University of London (1946) P. 58.

[6] A. S. Wineman, A. C. Pipkin, Acta Mech., 2, 104-115 (1966).

[7] R. I. Tanner, Trans. Soc. Rheology., 14 483-507 (1970).

[8] C. T. Hill, Trans. Soc. Rheo., 16 213-245 (1972).

[9] R. I. Tanner in J. R. A. Pearson and S. M. Richardson, eds., Computational Analysis of Polymer Processing, Applied Science, London (1983), P. 66.

[10] D. F. James, Nature, 212, 754-756 (1966).

[11] N. N. Kapoor, M.S. Thesis, University of Minnesota, Minneapolis (1964).

[12] J. W. Hoyt and J. J. Taylor, Phys. Fluids, 20, S253-S257 (1977).

[13] M. Reiner, Phys. Today, 17, 62 (Jan. 1964). Similar ideas (supported by experimental data on specific flow system) are independently proposed by R. B. Bird, Can. J. Chem. Eng. 43 (1965) 161-167

[14] D. V. Boger and H. Nguyen, Polym. Eng. Sci. 18 (1978) 1038-1043.

[15] R. Byron Bird, (1987) Dynamics of Polymeric Liquids, John Wiley & Sons, Vol. 1.

[16] W. R. Dean, Note on the motion of fluid in a curved pipe. Phil. Mag., 4 (1927) 208-223.

[17] W. R. Dean, The stream-line motion of fluid in a curved pipe. Phil. Mag., 5 (1928) 673-695.

[18] H. C. Topakoglu, Steady laminar flow of an incompressible viscous fluid in a curved pipe, J. Math. Mech. 16 (1967) 1231-1237.

[19] M. K. Zhang, X. R. Shen, J. F. Ma, B. Z. Zhang, Galerkin method study on flow of Oldroyd-B fluids in curved circular cross-section pipes, Journal of Zhejiang University Science. 7 (2007) 263-270.

[20] N. Phan-Thien, R. Zheng, Viscoelastic flow in curved duct: a similarity solution for the Oldroyd-B fluid, Journal of Applied Mathematics and Physics, 41 (1990) 766-781.

[21] Y. Fan, R. I. Tanner, N. Phan-Thien, Fully developed viscous and viscoelastic flows in curved pipes, J. Fluid Mech., 440 (2001) 327-357.

[22] H. Y. Tsang, D. F. James, Reduction of secondary motion in curved tubes by polymer additives, J. Rheol., 24 (1980) 589-601.

[23] S. Yanase, N. Goto, K. Yamamoto, Dual solutions of the flow through a curved tube, Fluid Dyn. Res. 5 (1989) 191-201.

[24] W. M. Jones, O. H. Davies, The flow of dilute aqueous solutions of macromolecules in various geometries: III. Curved pipes and porous materials, J. Phys. D: Appl. Phys. 9 (1976) 753-770.

[25] Y. Chen, H. Chen, J. Zhang, B. Zhang, Viscoelastic flow in rotating curved pipes, Phys. Fluids 18 (2006) 1-17.

[26] R. H. Thomas, K. Walters, On the flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe under a pressure gradient, J. Fluid Mech., 16 (1936) 228-242.

[27] V. B. Sarin, Flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe of slowly varying curvature, Int. J. Biomed. Comput. 32 (1993) 135-149.

[28] V. B. Sarin, The steady laminar flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe of varying elliptic cross section, Math. Comput. Modelling., 26 (1997) 109-121.

[29] A. M. Robertson, S. J. Muller, Flow of Oldroyd-B fluids in curved pipes of circular and annular cross-section, Int. J. Nonlinear Mech. 31 (1996) 3-20.

[30] Y. Iemoto, M. Nagata, F. Yamamoto, Steady laminar flow of a power-law fluid in a curved pipe of circular cross-section with varying curvature, J. Non-Newton. Fluid 19 (1985) 161-183.

[31] Y. Iemoto, M. Nagata, F. Yamamoto, Steady laminar flow of viscoelastic fluid in a curved pipe of circular cross-section with varying curvature, J. Non-Newton. Fluid 22 (1986) 101-114.

[32] B. Das, Flow of Bingham fluid in a slightly curved tube, Int. J. Engng. Sci., 30 (1992) 1193-1207. M. Zhang, X. Shen, J. Ma, B. Zhang, Theoretical analysis of convective heat transfer of Oldroyd-B fluids in a curved pipe, Int. J. Heat Mass Trans., 40 (2007) 661-671.

[33] H. G. Sharma, A. Prakash, Flow of a second order fluid in a curved pipe, Indian J. Pure Ap. Mat., 8 (1997) 546-557.

[34] P. J. Bowen, A. R. Davies, K. Walters, On viscoelastic effects in swirling flows, J. Non-Newton. Fluid 38 (1991) 113-126.

[35] W. Jitchote, A. M. Robertson, Flow of second order fluids in curved pipes, J. Non-Newton. Fluid, 90 (2000) 91-116.

[36] Frass A. P., Ozisik M. N., Heat Exchanger Design, John Wiley and Sons, Inc. New York, (1965).

[37] Metzner A. B., (1965) Advanced in Heat Transfer, 2nd Ed. J. P. Hartnett and T. F. Irvine (Jr.) Academic Press, Inc., New York,.

[38] Skelland A. H. P., (1967) Non-Newtonian flow and heat transfer. John Wiley and Sons, Inc. New York.

[39] Ozisik M. N., Topakoglu H. C., Heat transfer for laminar flow in a curved pipe, J. Heat transfer, 90 (1968) 313.

[40] R. S. Srivastava, V. B. Sarin, Heat transfer effects for an elastico-viscous fluid in curved pipe 4 (4) (19972).

[41] M. Akiyama, K.C. Cheng, Boundary vorticity method for laminar forced convected heat transfer in curved pipe, Int. J. Heat Mass Transfer 14 (1971) 1659–1675.

[42] S. Garimella, D.E. Chdrards, Experimental investigation of heat transfer in coiled annular ducts, J. Heat Transfer 110 (1988) 329–336.

[43] G. Yang, M.A. Ebadian, Convective heat transfer in a curved annular-sector duct, J. Thermophys. Heat Transfer 7 (3) (1993) 441–446.

[44] G. Yang, M.A. Ebadian, Convective heat transfer in a curved annular-sector duct, J. Thermophys. Heat Transfer 7 (3) (1993) 441–446.

[45] G. Yang, M.A. Ebadian, Effect of torsion on heat transfer in the curved annular sector duct, J. Thermophys. Heat Transfer 8 (3) (1994) 580–586.

[46] Y.D. Choi, S.O. Park, Mixed convection flow in curved annular ducts, Int. J. Heat Mass Transfer 37 (17) (1994) 2761–2769.

[47] H.J. Chen, B.Z. Zhang, J.F. Ma, Theoretical and numerical analysis of convective heat transfer in rotation helical pipes, Int. J. Heat Mass Transfer 46 (2003) 4899–4909.

[48] H.J. Chen, B.Z. Zhang, Fluid flow and mixed convection heat transfer in a rotating curved pipe, Int. J. Therm. Sci. 42 (2003) 1047–1059.

[49] Tianliang Yang, Liqiu Wang, Bifurcation and stability of combined free and forced convection in rotating curved ducts of square cross-section, International Journal of Heat and Mass Transfer, 46 (4) (2003) 613-629.

[50] K.H. Toh, A.J. Ghajar, Heat transfer in thermal entrance region for viscoelastic fluids in turbulent pipe flows, Int. J. Heat Mass Transfer 31 (1988) 1261–1268.

[51] F.T. Pinho, P.J. Oliveira, Analysis of forced convection in pipes and channels with the simplified Phan-Thien–Tanner fluid, Int. J. Heat Mass Transfer 43 (2000) 2273–2287.

[52] Chia-Fu Hsu, S. V. Patankar, Analysis of laminar non-Newtonian flow and heat transfer in curved tubes, American Institute of Chemical Engineers 28 (4) (2004) 610-616.

[53] Mingkan Zhang, Xinrong Shen, Jianfeng Ma, Benzhao Zhang, Theoretical analysis of convective heat transfer of Oldroyd-B fluids in a curved pipe, International Journal of Heat and Mass Transfer 51 (2008) 661–671.

[54] SHEN Xin-rong, ZHANG Ming-kan, MA Jian-feng, ZHANG Ben-zhao, flow and heat transfer of Oldroyd-B fluids in a rotating curved pipe, journal of Hydrodynamics 20 (1) (2008) 39-46.

[55] R.K. Shah, AL London, (1978) Laminar flow forced convection in ducts, Academic Press, New York.

[56] WM Kays, ME Crawford, (1993) Convective Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, New York.

Abstract

Non-newtonian fluids have a huge application in many fields such as military, medical and industrial activities which has attracted great attentions from many years ago. Science of non-newtonian fluids flow is termed Rheology and due to special properties of these kinds of fluids, different behaviors are observed by these fluids.

The purpose of this research is to investigation the viscoelastic fluid flow and heat transfer in a curved pipe, analytically.

In this research, appropriate approximate solution for viscoelastic fluid flow is suggested using a second order fluid and perturbation solution. The heat transfer analysis of this fluid flow has been achieved. This has been performed using Oldroyd-B model of viscoelastic fluid.

The results of second order fluid investigation, indicates that the increment of Weissenberg number enhances the intensity of secondary flows. In addition, this leads to further tendency of Taylor vortices and maximum axial velocity position toward outer wall. Also drag reduction in curved pipe will occur by increasing of retardation time.

Heat transfer analysis of Oldroyd-B and SOF flows, indicates the similar results. Increasing of Weissenberg number has a major effect on non-dimensional temperature position of fluid. Also reduced Nusselt is proposed as a measure for the Nusselt number between curved and straight pipe. In creep flow, increasing of Reynolds number leads to decreasing of reduced Nusselt number. But in inertial flow, inverse results will be obtained.

Keywords: *Heat transfer; Viscoelastic Fluids; Second Order Fluid; Oldroyd-B Fluid; Perturbation*

Shahrood University
of Technology

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Analytical investigation of flow and heat transfer of viscoelastic fluid in a curved pipe

Amin Ahmadi Joneidi

Supervisor:
Dr. Mohammad Hassan Kayhani

Date: Oct 2009