

بِسْمِ اللَّهِ  
الرَّحْمَنِ  
الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

# تحلیل غیرخطی ارتعاشات کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک

وحید دیرانلو

استاد راهنما:

دکتر اردشیر کرمی محمدی

بهمین ۹۴

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای وحید دیرانلو

تحت عنوان: تحلیل غیر خطی ارتعاشات جانبی کابل الاستیک با روش ویسکوالاستیک

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد  
مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی : -		نام و نام خانوادگی : دکتر اردشیر کرمی محمدی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : دکتر مجید محمدی		نام و نام خانوادگی : دکتر حمیدرضا ایپکچی
			نام و نام خانوادگی : دکتر حبیب احمدی

أَلَيْسَ اللَّهُ بِكَافٍ عَبْدَهُ،

(قرآن کریم، س ۳۹، ی ۳۶)

تقدیم به عزیزترین‌ها

# پدر و مادرم

به جبران قطره‌ای از دریای محبتشان

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب

" من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ " :

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوام، که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یآوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

و از استاد ارجمند و شایسته؛ جناب آقای دکتر اردشیر کرمی محمدی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

## تعهد نامه

اینجانب وحید دیرانلو دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل غیرخطی ارتعاشات جانبی کابل الاستیک با روش ویسکوالاستیک تحت راهنمایی دکتر اردشیر کریمی محمدی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیر گذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

اخیراً، استفاده از مواد ویسکوالاستیک در بخش‌های مختلف مهندسی، به دلیل خصوصیات فیزیکی و مکانیکی آن‌ها، افزایش پیدا کرده است. رفتار این مواد در استهلاک انرژی و میرایی نیروهای زیاد و حدی، باعث ایجاد علاقه در مهندسين، جهت مطالعه و بررسی کاربرد این مواد، گردیده است. در این پایان‌نامه، ارتعاشات غیرخطی کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک، مورد بررسی قرار گرفته است. خصوصیات مکانیکی مواد ویسکوالاستیک، توسط مدل کلونین-ویت، توصیف شده است. معادلات حاکم، با روش مقیاس‌های چندگانه حل شده‌اند و نتایج عددی، به صورت تاریخچه‌ی جابجایی در طول کابل، نشان داده شده است و مقایسه‌ای جامع بین حالت‌های مذکور، صورت گرفته است که استفاده از روکش ویسکوالاستیک در میرایی و کاهش جابجایی و ارتعاش کابل، بسیار موثر و کارآمد می‌باشد و می‌تواند موجب کاهش ارتعاشات آن، گردد.

### کلیدواژگان

ارتعاشات جانبی، ویسکوالاستیک، ارتعاشات غیرخطی، مقیاس‌های چندگانه، کلونین-ویت.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	۱- مقدمه.....
۲	۱-۱ مقدمه.....
۴	۱-۲ اهداف پژوهش.....
۵	۱-۳ ساختار پایان نامه.....
۷	۲- مفاهیم اولیه و پیشینه تحقیق.....
۸	۱-۲ مقدمه.....
۸	۲-۲ میرایی ویسکوالاستیک.....
۹	۱-۲-۲ تعریف.....
۹	۲-۲-۲ پیشینه‌ی مواد ویسکوالاستیک.....
۱۱	۳-۲-۲ رفتار الاستیک در مقابل رفتار ویسکوالاستیک.....
۱۲	۴-۲-۲ ویسکوالاستیسیته‌ی خطی.....
۱۲	۵-۲-۲ ویسکوالاستیسیته‌ی غیرخطی.....
۱۲	۶-۲-۲ مدول‌های دینامیکی.....
۱۳	۷-۲-۲ مدل‌های تشکیل دهنده‌ی ویسکوالاستیسیته‌ی خطی.....
۱۴	۸-۲-۲ مدل ماکسول.....
۱۵	۹-۲-۲ مدل کلونین-ویت.....
۱۶	۱۰-۲-۲ مدل جامد خطی استاندارد.....
۱۷	۱۱-۲-۲ مدل ماکسول تعمیم یافته.....
۱۷	۱۲-۲-۲ اثر دما بر روی رفتار ویسکوالاستیک.....
۱۸	۱۳-۲-۲ خزش ویسکوالاستیک.....
۱۸	۱۴-۲-۲ اندازه‌گیری ویسکوالاستیک.....
۲۰	۳-۲ روش مقیاس‌های چندگانه.....
۲۱	۴-۲ پیشینه تحقیق.....
۲۸	۵-۲ جمع‌بندی.....
۲۹	۳- تحلیل خطی ارتعاشات جانبی کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک.....
۳۰	۱-۳ مقدمه.....
۳۰	۲-۳ به‌دست آوردن معادله‌ی حرکت خطی.....
۴۱	۳-۳ یافتن پاسخ معادله‌ی حرکت خطی سیستم.....
۴۱	۴-۳ نتایج عددی و رسم نمودارها.....



۴۵	.....	۳-۵- به دست آوردن پاسخ ارتعاشات اجباری سیستم دارای حرکت خطی
۵۰	.....	۳-۶- نتیجه گیری
۵۳	.....	۴- تحلیل غیرخطی ارتعاشات جانبی کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک
۵۴	.....	۴-۱- مقدمه
۵۴	.....	۴-۲- به دست آوردن معادله‌ی حرکت غیرخطی ارتعاشات آزاد سیستم
۶۴	.....	۴-۳- تحلیل غیرخطی معادله‌ی حرکت سیستم و به دست آوردن پاسخ کلی
۷۳	.....	۴-۴- به دست آوردن پاسخ اجباری ارتعاشات غیرخطی سیستم
۷۴	.....	۴-۴-۱- حالت اول: تحریک اولیه
۸۴	.....	۴-۴-۲- حالت دوم: تحریک ثانویه
۸۷	.....	۴-۴-۲-۱- حالت فوق‌هارمونیک رزونانس
۹۱	.....	۴-۴-۲-۲- حالت زیرهارمونیک رزونانس
۹۸	.....	۴-۵- نتیجه گیری
۹۹	.....	۵- پیشنهادها
۱۰۲	.....	۵-۱- پیشنهادها
۱۰۱	.....	منابع

## فهرست شکل‌ها

- ۸ شکل (۱-۲) پاسخ مختلف تنش به تغییرات مختلف در کرنش
- ۱۱ شکل (۲-۲) نمودار تنش برحسب کرنش برای مواد الاستیک ( $a$ ) و مواد ویسکوالاستیک ( $b$ )
- ۱۶ شکل (۳-۲) مدل ماکسول
- ۱۵ شکل (۴-۲) مدل کلونین-ویت
- ۱۵ شکل (۵-۲) مدل جامد خطی استاندارد
- ۱۷ شکل (۶-۲) مدل ماکسول تعمیم‌یافته
- ۱۸ شکل (۷-۲) یک دوره‌ی زمانی کوتاه برای مواد ویسکوالاستیک برای تنش وارد شده ( $a$ ) و کرنش القا شده ( $b$ )
- ۲۱ شکل (۸-۲) جداسازی یک پوسته به بخش‌های مختلف، برای دمپینگ ارتعاشات و تحلیل به روش المان محدود
- ۲۲ شکل (۹-۲) قرارگیری المان  $FEM_A$  و  $FEM_B$  بر روی هم
- ۲۳ شکل (۱۰-۲) تاریخچه‌ی جابجایی محوری میله با شرایط تکیه گاهی مختلف
- ۲۶ شکل (۱۱-۲) اثر پارامتر ویسکوالاستیک،  $\tau_d$ ، و پارامتر غیرمحلّی،  $\alpha$ ، در فرکانس سوم
- ۲۷ شکل (۱۲-۲) ساختار و مدل آزمایشگاهی تیر مسلط شده با مواد ریزدانه
- ۲۸ شکل (۱۳-۲) نمودار پاسخ سیستم نسبت به زمان
- ۳۰ شکل (۱-۳) نمایش مجموعه‌ی کابل و پوشش آن تحت کرنش طولی و جابجایی عرضی
- ۴۴ شکل (۲-۳) نمودار تغییرات میرایی برحسب افزایش نسبت ضخامت لایه‌ی ویسکوز به ضخامت کابل
- ۴۸ شکل (۳-۳) نمودار دامنه‌ی پاسخ فرکانسی سیستم خطی برحسب زمان برای پنج مود اول ارتعاشات
- ۴۹ شکل (۴-۳) نمودار تغییرات فرکانس طبیعی سیستم، در مود اول، نسبت به میزان کشش اولیه‌ی سیستم
- ۷۰ شکل (۱-۴) نمودار تغییرات دامنه برحسب مقادیر مختلف پارامتر ضریب معیار دامنه
- ۷۰ شکل (۲-۴) نمودار تغییرات دامنه برحسب زمان، برای نسبت‌های مختلف ضخامت پوشش ویسکوز به ضخامت کابل
- ۷۱ شکل (۳-۴) نمودار تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب دامنه‌ی ارتعاشات، برای نسبت‌های مختلف ضخامت پوشش ویسکوز به ضخامت کابل
- ۷۱ شکل (۴-۴) نمودار تغییرات فرکانس برحسب زمان
- ۷۱ شکل (۵-۴) نمودار پاسخ فرکانسی سیستم برای مد اول
- ۸۱ شکل (۶-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ ( $a$ ) بر حسب پارامتر تنظیم ( $\delta$ ) برای  $F_0=400$

- ۸۱ شکل (۷-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $F_0=900$
- ۸۲ شکل (۸-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $F_0=4500$
- ۸۳ شکل (۹-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای نسبت ضخامت پوشش به کابل  $h_b/h_c=0.5$
- ۸۳ شکل (۱۰-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای نسبت ضخامت پوشش به کابل  $h_b/h_c=0.25$
- ۸۴ شکل (۱۱-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای نسبت ضخامت پوشش به کابل  $h_b/h_c=0.05$
- ۹۰ شکل (۱۲-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $F_0=1100$
- ۹۱ شکل (۱۳-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $F_0=1800$
- ۹۵ شکل (۱۴-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای نسبت ضخامت پوشش به کابل  $h_b/h_c=0.65$
- ۹۵ شکل (۱۵-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای نسبت ضخامت پوشش به کابل  $h_b/h_c=0.2$
- ۹۶ شکل (۱۶-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $T=420$
- ۹۷ شکل (۱۷-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $T=470$
- ۹۸ شکل (۱۸-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $E_b=0.072 (Gpa)$
- ۹۸ شکل (۱۹-۴) منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $E_b=0.06 (Gpa)$

## فهرست جدول‌ها

۴۳	جدول (۱-۳) مشخصات مواد به کار رفته
۴۳	جدول (۲-۳) فرکانس طبیعی سیستم در مود اول

## علائم و اختصارات

$T$	انرژی جنبشی
$U$	انرژی کرنشی
$\sigma_i$	مؤلفه‌ی تنش
$\varepsilon_i$	مؤلفه‌ی کرنش
$\rho_i$	مؤلفه‌ی چگالی
$L$	طول
$h_i$	ضخامت
$b$	پهنا
$\omega$	فرکانس طبیعی
$\Omega$	فرکانس غیرخطی
$t$	مختصه زمانی (S)
$z, y, x$	مختصه‌های کارتیزین
$E$	مدول الاستیسیته
$A$	مساحت سطح مقطع
$\varepsilon$	معیار دامنه
$\eta$	ویسکوزیته‌ی ماده
$E^*$	ضریب دمپینگ ویسکوالاستیک
$w$	خیز جانبی
$a$	دامنه
$\delta$	پارامتر تنظیم
$F_0$	دامنه تحریک
$v$	ضریب پواسون
$\xi$	میرایی



فصل اوّل:

مقدمه

امروزه مواد و ساختارهای پیشرفته زیربنای توسعه‌ی حوزه‌ی وسیعی از صنعت می‌باشند. در بسیاری از صنایع مهندسی وجود این مواد، آن صنعت را وابسته به خود کرده است؛ یکی از این کاربردهای صنعتی، ارتعاشات می‌باشد. اگرچه وجود ارتعاشات در برخی از حوزه‌های مهندسی کاربرد دارد ولی در بسیاری از موارد نیز تأثیر زیان‌باری دارد و در نتیجه نیاز به کاهش و رفع آن، خواهد بود. میرایی، یک ویژگی مهم در سازه‌ها است که باعث کاهش پاسخ ارتعاشی سازه‌ها می‌شود. برای بالا بردن میرایی در سازه‌ها همیشه نمی‌توان از یک مدل مشابه استفاده نمود و با توجه به شرایط هندسی و ویژگی‌های سیستم و رفتار آن، مجبور به استفاده از مدل‌های مناسب برای افزایش میرایی آن سیستم داریم؛ یکی از این موارد کابل‌ها می‌باشند. در ارتعاشات کابل‌ها به ندرت می‌توان از مدل‌های جرم و فنر و امثال آن برای کاهش ارتعاشات، استفاده کرد؛ زیرا هندسه و شرایط قرارگیری کابل‌ها در سیستم، معمولاً به گونه‌ای است که استفاده از مدل‌های متنوع دمپینگ را محدود می‌کند و مدل‌هایی همچون جاذب فنر و دمپر و امثال آن، معمولاً نمی‌تواند خیلی موثر و قابل استفاده باشد. مدل‌سازی سیستم میرایی، بر اساس مواد ویسکوالاستیک می‌تواند نتایج بهتری را نسبت به سایر مدل‌های موجود، برای کابل‌ها، ارائه دهد. این مواد را به راحتی می‌توان در شرایط مختلف و به صورت ترکیب‌های مختلف، به کابل‌ها و سایر سیستم‌ها، اضافه نمود و میرایی آنها را افزایش داد. دمپینگ ارتعاشات بر اساس ساختار مواد ویسکوالاستیک، یکی از استراتژی‌های موثر در کاهش ارتعاشات است. در حوزه‌ی ارتعاشات، محققان توجه ویژه‌ای به ترکیب نمودن مدل‌ها، با مواد ویسکوالاستیک، نموده‌اند. رفتار این مواد در استهلاک انرژی و میرایی نیروهای زیاد و حدی، باعث ایجاد علاقه در محققان، جهت مطالعه و بررسی کاربرد این مواد، گردیده است. نمونه‌های زیادی در مورد کاربرد مواد ویسکوالاستیک و نحوه‌ی مدل‌سازی آنها انجام گرفته است و مدل‌های متنوعی در مدل‌سازی و تحلیل ارتعاشات ساختارهای دارای مواد ویسکوالاستیک ارائه شده است. پاسخ مواد ویسکوالاستیک هم شامل جنبه‌هایی از پاسخ مکانیکی مواد جامد الاستیک و هم مایعات ویسکوز، می‌باشد. رفتار الاستیک مصالح توسط فنر و رفتار ویسکوز توسط میراگر، مدل می‌شود. بنابراین می‌توان با ترکیبی مناسب از فنرها و میراگرها به مدل‌سازی رفتار مواد ویسکوالاستیک پرداخت. دو ترکیب ساده از آنها به مدل‌های کلوین-ویت و ماکسول معروف می‌باشند. در این بین مدل کلوین-ویت نیز از توجه ویژه‌ای برخوردار شده است و به خوبی می‌تواند رفتار مواد ویسکوالاستیک را مدل نماید. محققان در سال‌های اخیر مدل‌های متنوعی را برای افزایش میرایی سیستم به‌وسیله‌ی مواد ویسکوالاستیک انجام داده‌اند. "سینیوری و مستی"<sup>۱</sup> [۱] به بررسی لایه‌ی ویسکوالاستیک بر روی لوله‌های فلزی استوانه‌ای مورد استفاده در زیردریایی‌ها پرداختند و با

---

<sup>1</sup> Masti and Sainsbury



توجه به شرایط سیستم، اولویت خود را برای افزایش میرایی سیستم، استفاده از مواد ویسکوالاستیک قرار دادند؛ آنها همچنین در طی این تحقیق خود نشان دادند که اگر به جای استفاده از لایه‌ی کاملاً پوشیده‌ی ویسکوالاستیک، از تکه‌های چسبیده شده‌ی ماده ویسکوالاستیک در ناحیه‌هایی که با توجه به نمودار توزیع شدت انرژی کرنشی روی پوسته معین می‌شوند و دارای انرژی کرنشی بیشتری هستند، استفاده شود، بهینه‌تر است و دمپینگ بهتری حاصل خواهد شد. "دیتارانتو"<sup>۱</sup> [۲] به اثر کاهش ارتعاشات ناشی از لایه‌ی ویسکوالاستیک قرارگرفته‌ی بین لایه‌های فلزی یک مدل، پرداخت. "امیچی و آتالا"<sup>۲</sup> [۳] به بررسی ارتعاشات تیرهای ساندویچی متقارن و غیر متقارن با هسته‌ی ویسکوالاستیک پرداختند. "گینت و آتالا"<sup>۳</sup> [۴] روش‌هایی تحلیلی را برای مدل‌سازی تیرها و صفحه‌های دارای لایه‌ی ویسکوالاستیک خطی را معرفی نمودند. "زالوسکی و اسمیت"<sup>۴</sup> [۵] به بررسی ارتعاشات جانبی تیر اوپلر- برنولی مسلح شده با لایه‌ای از مواد ریز دانه‌ی ویسکوالاستیک پرداختند؛ آنها همچنین به صورت تجربی نیز بر روی یک مدل آزمایشگاهی، تاثیر این لایه‌ی ویسکوالاستیک بر کاهش ارتعاشات این تیر را بررسی و نشان دادند [۶]. زنگانه و احمدی [۷] به بررسی ارتعاش محوری میله با تکیه ویسکوالاستیک پرداختند. آنها ارتعاش محوری میله‌ای با مصالح ویسکوالاستیک، با وجود تکیه‌گاه مرزی و میانی ساخته‌شده از مواد ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند و خصوصیات مواد ویسکوالاستیک را توسط مدل کلونین- ویت تعمیم‌یافته توصیف کردند. آروین، صدیقی و اوحدی [۸] بررسی عددی بر روی ارتعاشات آزاد و اجباری تیر کامپوزیتی ساندویچی با هسته‌ی ویسکوالاستیک را انجام دادند. آنها در این تحقیق به بررسی اثر مدول یانگ، اینرسی دورانی، انرژی جنبشی هسته‌ی ویسکوالاستیک، نرمی و سختی هسته‌ی ویسکوالاستیک و مواردی از این قبیل، را بر کاهش ارتعاشات سیستم بررسی نموده‌اند. "لی، ادهیکاری و فریسول"<sup>۵</sup> [۹] ارتعاشات نانوتیری که دارای دمپینگ ویسکوالاستیک کلونین- ویت غیرمحلّی است را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای اولین بار به‌وسیله‌ی تئوری تیر تیموشینکو و مدل غیرمحلّی ویسکوالاستیک کلونین- ویت، معادله‌ی حرکت و شرایط مرزی تیر را استخراج نمودند و توسط روش تابع تبدیل (TFM)، فرکانس‌های طبیعی سیستم را به دست آوردند که نتیجه‌ی بهتر و دقیق‌تری را نسبت به تئوری‌های کلاسیک، ارائه داد. "یانگ و فنگ"<sup>۶</sup> [۱۰] ارتعاشات طناب ویسکوالاستیک در حال حرکت محوری را توسط مدل کلونین- ویت، مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که طناب ویسکوالاستیک، دامنه‌ی ارتعاشات کمتری، نسبت به طناب الاستیک دارد. در کارهای انجام شده‌ی پیرامون مواد ویسکوالاستیک، این مواد، در مدل‌های متنوعی به سیستم اضافه شده‌اند ولی در بسیاری از موارد ممکن است که استفاده از پوشش دمپ‌کننده تنها راهکار میرا کردن سیستم باشد. در این تحقیق برای اولین بار به تحلیل مدلی که در آن، لایه‌ی ویسکوالاستیک به

<sup>1</sup> DiTaranto

<sup>2</sup> Atall and Amichi

<sup>3</sup> Atall and Ghinet

<sup>4</sup> Szmids and Zalewski

<sup>5</sup> Lei and Adhikari and Friswell

<sup>6</sup> Tianzhi Yang and Bo Fang

صورت پوشش بر روی یک کابل الاستیک دارای حرکت غیرخطی، قرار می‌گیرد، پرداخته شده است و تا کنون مشابه آن گزارش نشده است. یک لایه‌ی ویسکوالاستیک در قالب یک پوشش تیرمانند، که ارتعاشات آن، رفتار تیرها را از خود نشان می‌دهد، در اطراف کابل قرار گرفته است و قرار است که ارتعاشات آن را کاهش بدهد؛ این دو بخش مدل به یکدیگر فیکس شده‌اند.

## ۱-۲- اهداف پژوهش

در کارهای انجام شده‌ی پیرامون مواد ویسکوالاستیک، این مواد، در مدل‌های متنوعی به سیستم اضافه شده‌اند ولی در بسیاری از موارد ممکن است که استفاده از پوشش دمپ‌کننده تنها راهکار میرا کردن سیستم باشد. در این تحقیق برای اولین بار به تحلیل مدلی که در آن، لایه‌ی ویسکوالاستیک به صورت پوشش بر روی یک کابل الاستیک دارای حرکت غیرخطی، قرار می‌گیرد، پرداخته شده است. یک لایه‌ی ویسکوالاستیک در قالب یک پوشش تیرمانند، که ارتعاشات آن، رفتار تیرها را از خود نشان می‌دهد، در اطراف کابل قرار گرفته است و قرار است که ارتعاشات آن را کاهش بدهد؛ این دو بخش مدل به یکدیگر فیکس شده‌اند. بنابراین با استفاده از کارهای انجام شده در این زمینه، ارتعاشات غیرخطی یک کابل الاستیک دارای لایه‌ی ویسکوالاستیک، به صورت پوشش تیرمانند در اطراف آن، مورد بررسی قرار داده خواهد شد که تا به حال برای کابل‌ها انجام نشده است. ابتدا روابط انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل مربوط به هریک از بخش‌های کابل و پوشش آن را جداگانه به دست آورده و سپس با استفاده از اصل هامیلتون و با در نظر گرفتن شرایط مرزی سیستم، معادله‌ی حرکت سیستم نیز به دست آورده خواهد شد و سپس معادله‌ی به دست آمده حل شده و پاسخ ارتعاشات کابل نیز به دست آورده خواهد شد. در این پایان‌نامه رفتار پوشش تیرمانند براساس مدل تیر اوپلر-برنولی بررسی خواهد شد؛ همچنین از مدل کلونین-ویت برای مدل‌سازی و استخراج روابط لایه‌ی ویسکوز تیرمانند سیستم، استفاده شده است. سرانجام پس از به دست آوردن پاسخ تحلیلی ارتعاشات خطی و غیرخطی، با اعمال شرایط اولیه بر روی سیستم، ضرایب و پارامترهای باقیمانده‌ی مجهول نیز به صورت تحلیلی به دست خواهند آمد. در نهایت با در انتخاب مواد و شرایط مناسب برای اجزا و پارامترهای مختلف سیستم و قرار دادن مقادیر عددی آنها در معادلات، به صورت عددی نیز پاسخ سیستم و نمودارهای مورد نیاز به دست خواهند آمد و در پایان مورد بحث و نتیجه‌گیری قرار خواهند گرفت. در فصل‌های بعد به روابط ساختاری و قوانین حاکم بر مواد ویسکوالاستیک و نیز نحوه‌ی مدل‌سازی ریاضی این مواد، اشاره خواهد شد.

### ۱-۳- ساختار پایان‌نامه

فصل نخست به مقدمه، ابعاد و جایگاه موضوع پرداخته و اهمیت، اهداف و ساختار پایان‌نامه را تبیین می‌کند. در فصل دوم مفاهیم پایه و اولیه‌ای چون میرایی الاستیک و ویسکوالاستیک روش حل معادله‌ی غیرخطی تعریف شده و مروری بر ادبیات موضوعی انجام می‌شود. فصل سوم چگونگی به-دست آوردن و یافتن پاسخ معادلات خطی حاکم بر رفتار ارتعاشی کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک را ارائه می‌دهد و در فصل چهارم، به چگونگی به‌دست آوردن و یافتن پاسخ معادلات غیرخطی حاکم بر رفتار ارتعاشی کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک، اختصاص دارد.



فصل دوّم:

## مفاهيم اوّليه و پيشينه‌ى تحقيق

## ۲-۱- مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم اولیه‌ای که در طول پایان‌نامه از آنها استفاده می‌شود تعریف شده و جایگاه و تاریخچه‌ی مختصری از این اصطلاحات بیان می‌شود. در انتها مروری بر ادبیات موضوعی این پایان‌نامه گزارش می‌شود تا جایگاه و اهمیت آن روشن‌تر شود.

## ۲-۲- میرایی ویسکوالاستیک

### ۲-۲-۱- تعریف

ویسکوالاستیسیته خاصیتی از مواد است که هر دو مشخصه‌ی ویسکوز و الاستیک سیستم، هنگامی که تحت تغییر شکل قرار می‌گیرد را نشان می‌دهد. مواد ویسکوز، نظیر عسل، در برابر برش مقاومت می‌کنند و هنگامی که تحت فشار قرار می‌گیرند، رفتار کرنش در آنها به صورت خطی می‌باشد. مواد الاستیک نیز اگر تحت نیروی کششی قرار گیرند، افزایش طول داده می‌شوند و در صورتی که این نیرو برطرف شود، سریعاً به حالت اول برمی‌گردند. مواد ویسکوالاستیک ویژگی هر دوی این مواد، از قبیل کرنش وابسته به زمان را دارا می‌باشند. ویسکوزیته نتیجه‌ی پخش اتم‌ها و مولکول‌ها درون مواد با ساختار نامنظم می‌باشد [۱۱].

### ۲-۲-۲- پیشینه‌ی مواد ویسکوالاستیک

در قرن ۱۹ میلادی، فیزیک‌دانانی از قبیل ماکسول<sup>۱</sup>، بولتزمن<sup>۲</sup> و کلونین<sup>۳</sup>، تحقیقات و آزمایش‌هایی پیرامون خزش و بازگشت به حالت اول در موادی همانند شیشه‌ها، فلزات و لاستیک‌ها انجام دادند [۱۲]. ویسکوالاستیسیته بعدها در قرن ۲۰ میلادی، وقتی که پلیمرهای مصنوعی به صورت مهندسی کشف شدند و در بسیاری از صنایع به کار برده شدند، مورد آزمایش قرار گرفت [۱۲]. محاسبات ویسکوالاستیسیته شدیداً به ضریب ویسکوزیته‌ی  $\eta$  بستگی دارند. عکس  $\eta$  نیز به عنوان سیالیته شناخته می‌شود و با نماد  $\rho$  نشان داده می‌شود؛ مقدار آن می‌تواند به عنوان تابعی از دما و یا مقدار عددی به دست آید [۱۱]. با توجه به نسبت میزان کشش به تنش وارده درون یک ماده ویسکوز می‌-

<sup>1</sup> Maxwell

<sup>2</sup> Boltzmann

<sup>3</sup> Kelvin

تواند در انواع خطی، غیرخطی و یا پاسخ پلاستیک دسته‌بندی شود. وقتی که یک ماده پاسخ خطی، از خود نشان دهد، آن را در دسته‌ی مواد نیوتنی قرار می‌دهند و اگر نسبت تنش به کرنش در ماده‌ای به صورت پاسخ غیرخطی باشد، آن را در دسته‌ی سیال غیرنیوتنی قرار می‌دهند. مورد دیگری نیز وجود دارد که در آن ویسکوزیته می‌تواند کاهش یابد، درحالی که نسبت تنش به کرنش ثابت باقی می‌ماند؛ موادی که این رفتار را از خود بروز می‌دهند، به‌عنوان تیگزوتروپیک<sup>۱</sup> شناخته می‌شوند [۱۱]. همچنین هنگامی که تنش از کرنش مستقل باشد، مواد، رفتار پلاستیک از خود نشان می‌دهند. بسیاری از مواد ویسکوالاستیک، رفتاری لاستیک‌مانند را از خود نشان می‌دهند که بوسیله‌ی تئوری ترمودینامیک پلیمرهای الاستیسیته بیان می‌شوند. در واقع تمام مواد از قانون هوک<sup>۲</sup> پیروی می‌کنند؛ برای مثال با نمایش دادن مشخصه‌های ویسکوز همانند مشخصه‌های مواد الاستیک. مواد ویسکوالاستیک، موادی هستند که روابط بین تنش و کرنش در آنها وابسته به زمان باشند. جامدهای الاستیک زیرمجموعه‌ای از مواد ویسکوالاستیک هستند؛ آنها آرایش ساختاری یک‌پارچه‌ای دارند و عموماً پس از اینکه بار گذرا از روی آنها برداشته شود، به‌طور کامل به حالت اول برمی‌گردند. برخی از ویژگی‌هایی که در مواد ویسکوالاستیک وجود دارند عبارتند از:

. اگر تنش ثابت نگه داشته شود، کرنش با گذشت زمان افزایش می‌یابد (خزش).

. اگر کرنش ثابت نگه داشته شود، تنش با گذشت زمان، کاهش می‌یابد (رهاش).

. سختی موثر به میزان بار وارده بستگی دارد.

. اگر یک بار چرخه‌ای اعمال شود، میرایی هیستریسیس<sup>۳</sup> رخ می‌دهد و منجر به اتلاف انرژی مکانیکی می‌شود.

. باعث کاهش اثر امواج صوتی نیز می‌شوند.

. برگشت و جهش یک جسم، در اثر برخورد ضربه‌ای بر روی این مواد، کمتر از ۱۰۰ درصد می‌باشد.

. در طول نوردکاری، مقاومت اصطکاکی رخ می‌دهد.

همه‌ی مواد برخی از رفتارهای مواد ویسکوالاستیک را دارند. در فلزات رایج، از قبیل فولاد یا آلومینیوم، همانند کوارتز، در دمای معمولی اتاق و در کشش‌های کوچک، رفتارشان فراتر از

---

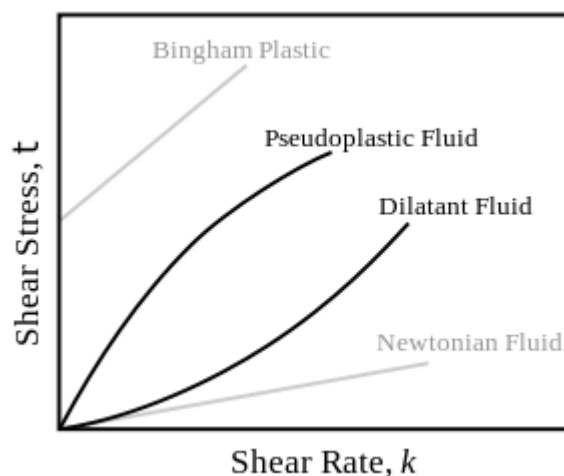
<sup>1</sup> Thixotropic

<sup>2</sup> Hooke's law

<sup>3</sup> Hysteresis

الاستیسته‌ی خطی نمی‌رود. پلیمرهای مصنوعی، چوب و برخی از فلزات در دماهای بالا رفتار ویسکوالاستیک را از خود نشان می‌دهند. در برخی از مواد حتی یک پاسخ کوچک ویسکوالاستیک هم می‌تواند قابل توجه باشد؛ بنابراین در آنالیز و طراحی این مواد لازم است که رفتار ویسکوالاستیک آنها را نیز در نظر داشت. مقدار پاسخ ویسکوالاستیک مواد نیز قابل اندازه‌گیری می‌باشد؛ برای مثال برخی از مواد ویسکوالاستیک نظیر پلیمرهای دارای ساختار نامنظم، پلیمرهای نیمه متبلور، فلزات در دماهای خیلی بالا و مواد نفتی از این دسته می‌باشند. شکست زمانی رخ می‌دهد که کرنش به صورت سریع اعمال شود و میزان آن نیز خارج از محدوده‌ی الاستیک باشد. رباطها و تاندوم‌های بدن نیز از جمله مواد ویسکوالاستیک می‌باشند، بنابراین محدوده‌ی پتانسیل و بار بحرانی آنها به هر دو عامل سرعت تغییر طول آنها و نیز نیروی وارده بستگی دارند. یک ماده‌ی ویسکوالاستیک دارای خاصیت‌های زیر می‌باشد:

- میرایی هیستریزس در منحنی تنش-کرنش دیده می‌شود.
- هنگامی که کرنش پله‌ای ثابت باعث کاهش تنش شود، رهایش رخ می‌دهد.
- هنگامی که تنش پله‌ای ثابت باعث افزایش کرنش شود، خزش رخ می‌دهد.



شکل ۱-۲- پاسخ‌های مختلف تنش به تغییرات مختلف در کرنش

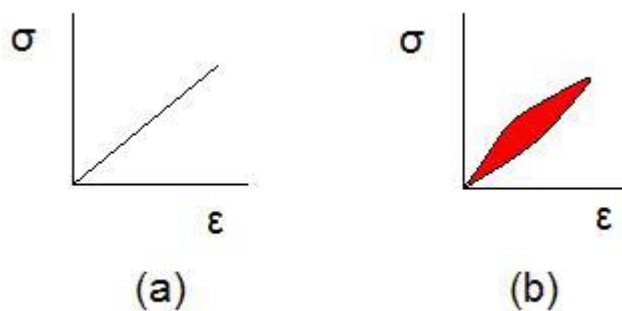


## ۲-۳- رفتار الاستیک در مقابل رفتار ویسکوالاستیک

برخلاف مواد کاملاً الاستیک، یک ماده‌ی ویسکوالاستیک، دارای هردو ساختار الاستیک و ویسکوز می‌باشد. ویسکوزیته‌ی یک ماده‌ی ویسکوالاستیک دارای ساختاری است که در آن کرنش وابسته به زمان می‌باشد.

هنگامی که بار خارجی بر روی مواد کاملاً الاستیک اعمال می‌شود و سپس رها می‌شود، این مواد انرژی (گرما) را تلف نمی‌کنند؛ هرچند یک ماده‌ی ویسکوالاستیک، هنگامی که بار خارجی بر روی آن اعمال می‌شود و برداشته می‌شود، انرژی را تلف می‌کند. هیستریزیس در منحنی تنش-کرنش در حلقه‌ای که معادل با انرژی اتلاف شده در طول یک چرخه می‌باشد، مشاهده می‌شود. یک ماده‌ی ویسکوز در طول یک سیکل بارگذاری، انرژی را از دست می‌دهد، درحالی که در مواد کاملاً الاستیک در طول یک چرخه‌ی بارگذاری، چنین رفتاری مشاهده نمی‌شود [۱۱].

می‌توان گفت که ویسکوالاستیسیته یک فرایند دوباره آرایش مجدد مولکول‌ها می‌باشد. هنگامی که تنشی به یک ماده‌ی ویسکوالاستیک از قبیل پلیمر وارد می‌شود، الیاف بلند پلیمر، تغییر مکان می‌دهند؛ این جابجایی یا آرایش مجدد را خزش می‌نامند. پلیمرها در هر صورت به صورت صلب باقی خواهند ماند، حتی هنگامی که رشته‌های الیاف آن، در اثر تنش وارد شده و عوامل مشابه آن، جابجا شوند و آرایش مجدد بگیرند و یک فرآیند دفع تنش در ماده را انجام دهند. هنگامی که دفع تنش به مقدار تنش وارد شده باشد و تمام تنش ورودی دفع شود، فرایند خزش در ماده، ایجاد خواهد شد. هنگامی که تنش انباشته شده به صورت کامل دفع شود پلیمر به حالت اصلی خود باز خواهد گشت. فلز به خاطر وجود خاصیت ویسکوز در آن دچار خزش می‌شود و نیز به دلیل وجود خاصیت الاستیک در آن به طور کامل به حالت اول خود باز می‌گردد [۱۲].



شکل ۲-۲- نمودار تنش بر حسب کرنش برای مواد الاستیک (a) و مواد ویسکوالاستیک (b)

## ۲-۲-۴ - ویسکوالاستیسیته‌ی خطی<sup>۱</sup>

ویسکوالاستیک خطی زمانی وجود دارد که تابع کرنش در دو بخش پاسخ خزش و بار مجزا باشد. همه‌ی مدل‌های خطی ویسکوالاستیک می‌توانند توسط رابطه‌ی تنش-کرنش ولترا<sup>۲</sup> نشان داده شوند:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_{inst, creep}} + \int_0^t K(t-t') \dot{\sigma}(t') dt' \quad (1-2)$$

یا

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) E_{inst, creep} + \int_0^t F(t-t') \dot{\varepsilon}(t') dt' \quad (2-2)$$

که در آن پارمترهای  $t$  زمان،  $\sigma(t)$  تنش،  $\varepsilon(t)$  کرنش،  $E_{inst, creep}$  و  $E_{inst, relax}$  مدول یانگ الاستیک برای خزش و رهایش،  $K(t)$  تابع خزش و  $F(t)$  تابع رهایش می‌باشند. ویسکوالاستیک خطی معمولاً برای کرنش‌های کوچک به کار گرفته می‌شوند.

## ۲-۲-۵ - ویسکوالاستیک غیر خطی<sup>۳</sup>

در ویسکوالاستیک غیرخطی تابع کرنش دارای دو بخش جداگانه نمی‌باشد. معمولاً زمانی رخ می‌دهد که کرنش‌ها، بزرگ بوده یا خواص ماده، تحت تغییر شکل، تغییر نماید. یک ماده‌ی غیرالاستیک، نمونه‌ای خاص از مواد ویسکوالاستیک می‌باشد، زیرا پس از اعمال بار خارجی ورودی بر آن، به حالت اول خود باز می‌گردد.

## ۲-۲-۶ - مدول‌های دینامیکی<sup>۴</sup>

ویسکوالاستیسیته با اعمال یک تنش کوچک بر ماده و اندازه‌گیری کرنش ایجاد شده. مواد کاملاً الاستیک تنش و کرنش هم‌فاز دارند، بنابراین پاسخ هرکدام، به‌سرعت بر روی دیگری اثر می‌گذارد و در مواد کاملاً ویسکوز، کرنش نسبت به تنش ۹۰ درجه اختلاف فاز دارد؛ مواد ویسکوالاستیک رفتارشان بین این دو گروه یاد شده می‌باشد و مقداری اختلاف فاز بین تنش و کرنش در آنها

<sup>1</sup> Linear viscoelasticity

<sup>2</sup> Volterra equation

<sup>3</sup> NonLinear viscoelasticity

<sup>4</sup> Dynamic modulus

مشاهده می‌شود. از مدول دینامیکی مختلط  $G$  می‌توان برای نشان دادن رابطه‌ی بین تنش و کرنش نوسانی استفاده نمود.

$$G = G' + iG'' \quad (۳-۲)$$

که در آن  $G'$  مدول ذخیره و  $G''$  مدول اتلاف می‌باشد و در نتیجه:

$$G' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \delta$$

$$G'' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \delta \quad (۴-۲)$$

که در آن  $\sigma_0$  و  $\varepsilon_0$  دامنه‌های تنش و کرنش و  $\delta$  اختلاف فاز است.

## ۲-۷-۲- مدل‌های تشکیل دهنده‌ی ویسکوالاستیسیته‌ی خطی

مواد ویسکوالاستیک، از قبیل پلیمرهای بی‌نظم، پلیمرهای نیمه‌متبلور و حتی بافت‌های زنده وسلول‌ها را می‌توان از نظر رابطه‌ی بین تنش و کرنش در آن‌ها و یا اثر نیرو و عکس‌العمل جابجایی در آن‌ها، همچون روابط دمایی آن‌ها، مدل‌سازی نمود. این مدل‌ها که شامل مدل ماکسول<sup>۱</sup>، مدل کلوین-ویت<sup>۲</sup> و مدل جامد خطی استاندارد<sup>۳</sup> می‌باشند، برای پیش‌بینی رفتار و پاسخ مواد، تحت شرایط مختلف بارگذاری می‌باشند. رفتار مواد ویسکوالاستیک، هر دو بخش مدل‌های الاستیک و ویسکوالاستیک، همچون ساختار فنرهای خطی و دمپرهای را دارا می‌باشند. هر مدل در آرایش و چینش این اجزا متفاوت می‌باشد و همه‌ی این مدل‌های ویسکوالاستیک، می‌توانند در مدل‌های معادل الکتریکی نیز شبیه‌سازی شوند. در یک مدار الکتریکی معادل تنش را با ولتاژ نشان می‌دهند و نسبت کرنش نیز با جریان نمایش داده می‌شود. مدول الاستیک فنر، مشابه خازن و ویسکوزیته‌ی دمپرهای نیز مشابه مقاومت الکتریکی در مدار، می‌باشند [۱۳]. اجزای الاستیک، همان‌گونه که قبلاً بیان شد، می‌توانند همانند فنری با ضریب الاستیک  $E$  مدل‌سازی شوند و رابطه‌ی آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma = E \varepsilon$$

<sup>1</sup> Maxwell model

<sup>2</sup> Kelvin-Voigt model

<sup>3</sup> Standard Linear Solid Model

که در آن  $\sigma$  تنش و  $E$  مدول الاستیک ماده و  $\epsilon$  نیز کرنشی ناشی از تنش، مطابق با قانون هوک، می-باشد. اجزای ویسکوز نیز می‌توانند همانند دمپرها مدل‌سازی شوند که رابطه‌ی تنش-کرنش آن‌ها نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma = \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad (۴-۲)$$

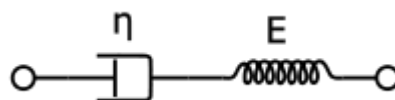
که در آن  $\sigma$  تنش،  $\eta$  ویسکوزیته‌ی ماده و  $\epsilon$  نیز کرنش می‌باشد که نسبت به زمان در معادله‌ی فوق گنجانده شده است.

رابطه‌ی بین تنش و کرنش می‌تواند برای نسبت‌های معینی از تنش، ساده‌سازی شود. مقاومت دمپر در طول آن تغییر می‌کند و در نسبت‌های تنش بالا، همانند یک جسم صلب عمل می‌کند. از آنجایی که یک جسم صلب نمی‌تواند دچار کشیدگی شود، بنابراین در همان طول قبلی خود باقی مانده و هیچ کرنشی به سیستم اعمال نمی‌شود. برای تنش‌های پایین نیز، اثر دمپر قابل چشم‌پوشی می‌باشد و می‌توان آن را از سیستم حذف نمود و در واقع سیستم مدار باز خواهد بود. بنابراین تنها فنی که موازی با دمپر باشد می‌تواند مطابق و هماهنگ با کرنش در سیستم باشد [۱۳].

## ۲-۲-۸- مدل ماکسول

مدل ماکسول را می‌توان با یک دمپر کاملاً ویسکوز و یک فنر کاملاً الاستیک که به صورت سری به یک‌دیگر متصل هستند، نمایش داده شود. رابطه‌ی مربوط به این مدل نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_D}{dt} + \frac{d\epsilon_S}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (۵-۲)$$



شکل ۲-۳- مدل ماکسول

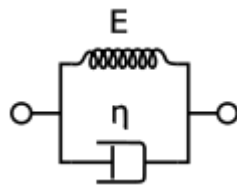
در این مدل، اگر مواد تحت کرنش ثابت قرار گیرند، تنش، به تدریج آزاد و کم می‌شود. وقتی که یک ماده تحت تنش ثابت قرار گیرد، کرنش دو بخش خواهد داشت؛ ابتدا یک بخش الاستیک همچون فنر عمل می‌کند و همزمان با آزاد شدن تنش، آن نیز آزاد می‌شود. دومین بخش، مولفه‌ی ویسکوز می-

باشد که تحت تنش که اعمال شده است، با گذشت زمان، مقدار آن افزایش می‌یابد. مدل ماکسول، بیانگر آن است که تنش، با گذشت زمان، به صورت نمایی کاهش می‌یابد که در مورد بیشتر پلیمرها، صادق می‌باشد. یکی از محدودیت‌های این مدل آن است که پدیده‌ی خزش را به درستی پیش بینی نمی‌کند. در مدل ماکسول، فرض شده است که برای شرایط خزش یا تنش ثابت، کرنش با گذشت زمان افزایش می‌یابد؛ هرچند که در بعضی از قسمت‌های پلیمرها، نسبت کرنش، با گذشت زمان بایستی کاهش یابد. از جمله کاربردهای این مدل، می‌توان به مواردی همچون پلیمرهای ترموپلاستیک در نزدیکی دمای ذوب و فلزات تازه ساخته شده در دمای نزدیک به دمای ذوب اشاره نمود [۱۲].

## ۹-۲-۲- مدل کلونین-ویت

مدل کلونین-ویت که به عنوان مدل ویت نیز شناخته می‌شود، شامل دمپر نیوتنی و فنر الاستیک هوکی که به صورت موازی با هم قرار دارند، می‌باشد. از آن برای بیان رفتار خزش در پلیمرها، استفاده می‌شود. رابطه‌ی ساختاری آن نیز در قالب یک معادله‌ی دیفرانسیلی خطی مرتبه‌ی اول بیان می‌شود و به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (۶-۲)$$



شکل ۲-۴- مدل کلونین-ویت

این مدل بیانگر کرنش برگشت‌پذیر در یک ماده‌ی ویسکوالاستیک می‌باشد. در هنگام اعمال یک تنش ثابت، ماده در یک روند کاهشی کرنش تغییر شکل می‌دهد تا به نقطه‌ی تعادل برسد. وقتی که تنش آزاد شود، ماده، کم‌کم به حالت اولیه و تغییر شکل نیافته‌اش باز می‌گردد. این مدل کاملاً پیش‌بینی می‌کند که در فرایند تنش ثابت (خزش)، با گذشت زمان به سمت بی‌نهایت کرنش به  $\sigma$  میل خواهد کرد.

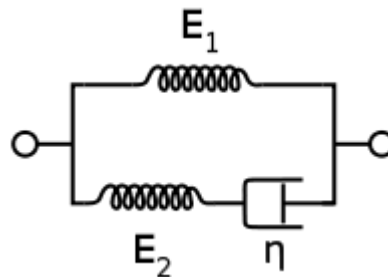
همانند مدل ماکسول، مدل کلونین-ویت نیز محدودیت‌هایی دارد؛ این مدل برای مدل‌سازی خزش در مواد بسیار مناسب می‌باشد، ولی در مورد رهایش، این مدل دقت کمتری دارد.

برخی از کاربردهای این مدل عبارتند از: پلیمرهای ارگانیک، لاستیک‌ها و چوب هنگامی که بار خارجی خیلی زیاد نباشد [۱۴].

## ۲-۲-۱۰- مدل جامد خطی استاندارد

مدل جامد خطی استاندارد، ترکیبی از مدل ماکسول و فنر هوک که به صورت موازی با آن قرار گرفته است، می‌باشد؛ یک ماده‌ی ویسکوز، همانند یک فنر و دمپر که به صورت سری به یکدیگر متصل شده- اند که هر دو موازی با یک فنر تنه‌ای دیگر می‌باشند، ساختار این مدل را تشکیل می‌دهد. رابطه‌ی ساختاری این مدل به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{E_2 \left( \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma - E_1 \varepsilon \right)}{E_1 + E_2} \quad (7-2)$$

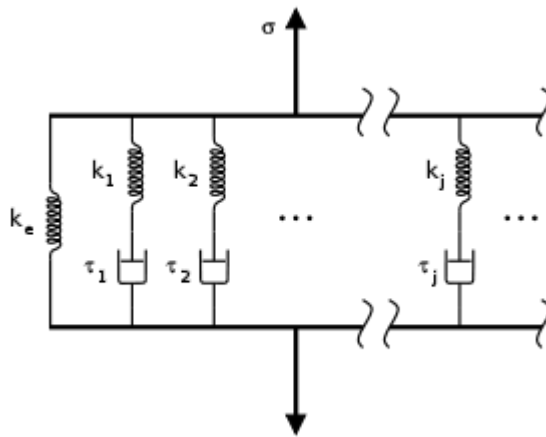


شکل ۲-۵- مدل جامد خطی استاندارد

تحت یک تنش ثابت، ماده‌ی مدل‌سازی شده، خود دارای مقداری کرنش می‌باشد که بخش الاستیک کرنش می‌باشد و بعد از آن شروع به تغییر شکل می‌کند تا به نقطه‌ی تعادل کرنش، نزدیک شود؛ این بخش آخر، قسمت ویسکوز کرنش می‌باشد. اگرچه مدل جامد خطی استاندارد، برای پیش‌بینی رفتار و پاسخ مواد، بسیار دقیق‌تر از مدل‌های ماکسول و کلوین-ویت می‌باشد، ولی از لحاظ ریاضی و محاسباتی، نتایج نادرستی را برای کرنش تحت بار مشخص، ارائه می‌دهد و محاسبات آن نیز پیچیده خواهد شد.

## ۲-۲-۱۱- مدل ماکسول تعمیم یافته<sup>۱</sup>

مدل ماکسول تعمیم یافته که به عنوان مدل ماکسول-ویکرت<sup>۲</sup> نیز شناخته می شود، کلی ترین شکل مدل خطی برای مواد ویسکوالاستیک می باشد. باید توجه داشت که رهایش، تنها در یک لحظه اتفاق نمی افتد و در یک گستره ی زمانی رخ می دهد و این بازه ی زمانی، در اجزای مولکولی طول های مختلف، برای پراکندگی مولکولی نزدیک به هم، کمتر از پراکندگی های دور از هم می باشد؛ مدل ویکرت، این امر را با دربر داشتن تعداد زیادی فنر و دمپر، نشان می دهد تا بازه ی زمانی را به درستی نشان می دهد [۱۵، ۱۶، ۱۷].



شکل ۲-۶- مدل ماکسول تعمیم یافته

از کاربردهای این مدل، می توان به مواردی همچون فلزات و آلیاژها در دمایی کمتر از یک چهارم دمای ذوب آنها اشاره نمود.

## ۲-۲-۱۲- اثر دما بر روی رفتار ویسکوالاستیک

ساختار یک پلیمر، توسط یک حرکت گرمایی، دچار تغییر و یا گسستگی می شود. چون حرکت گرمایی، عاملی است که در ساختار تغییر شکل پلیمرها نقش دارد، بنابراین خواص ویسکوالاستیک با افزایش و یا کاهش دما، تغییر می کنند. به طور کلی می توان گفت که یک افزایش در دما باعث می شود تا یک کاهش لگاریتمی در زمان نیز وجود داشته باشد تا کرنش یکسانی نسبت به حالت معمولی دما،

<sup>۱</sup> Generalized Maxwell model

<sup>۲</sup> Maxwell-Wiechert model

تحت یک تنش ثابت ایجاد شود. به عبارت دیگر، در دمای بالاتر، نسبت به دمای پایین‌تر، کار کمتری نیاز است تا یک ماده‌ی ویسکوالاستیک دچار کشیدگی شود [۱۸].

## ۲-۲-۱۳- خزش ویسکوالاستیک<sup>۱</sup>

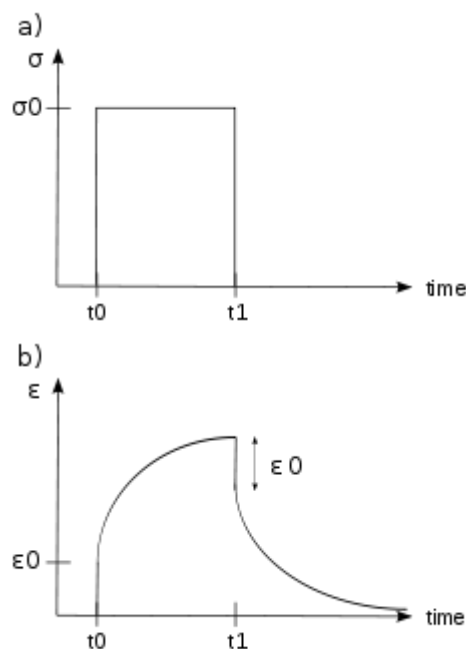
هنگامی که یک تنش ثابت پله‌ای اعمال می‌شود، ماده‌ی ویسکوالاستیک یک افزایش کرنش وابسته به زمان را تجربه می‌کند؛ به این پدیده خزش ویسکوالاستیک می‌گویند. در لحظه‌ی  $t_0$ ، ماده‌ی ویسکوالاستیک، تحت یک تنش ثابت قرار گرفته است که تا یک پریود زمانی طولانی، حفظ می‌شود. یک ماده‌ی ویسکوالاستیک مایع که تحت تنش ثابت قرار گرفته است، با یک افزایش کرنش پاسخ نشان می‌دهد، تا زمانی که در نهایت به نقطه‌ی تسلیم برسد. اگر ماده‌ی ویسکوالاستیک، جامد باشد، ممکن است که نقطه‌ی شکست و تسلیم آن، به تنش اعمال‌شده بستگی داشته باشد و یا خیر. هنگامی که تنش در یک پریود زمانی کوتاه‌تر اعمال شود، ماده دچار یک کرنش اولیه تا لحظه‌ی  $t_1$  می‌شود و پس از آنکه کرنش ناگهان کم شود، سپس در زمان‌های بعد از  $t_1$ ، کرنش به صورت تدریجی کاهش خواهد یافت [۱۵].

خزش ویسکوالاستیک می‌تواند با رسم نمودار مدول خزش (ثابت حاصل از تقسیم تنش بر کرنش کلی، در یک لحظه‌ی خاص) بر حسب زمان، بررسی و اندازه‌گیری شود. در تنش کمتر از تنش بحرانی، مدول خزش ویسکوالاستیک، مستقل از تنش اعمال شده می‌باشد. منحنی‌های زیادی وجود دارند که کرنش بر حسب زمان را برای تنش‌های مختلف، توصیف می‌کنند که ممکن است تنها با یک نمودار مدول خزش ویسکوالاستیک، بر حسب زمان که در آن تنش وارد شده کمتر از تنش بحرانی ماده باشد، بیان شود.

---

<sup>1</sup> Viscoelastic creep





شکل ۲-۷- یک دوره‌ی زمانی کوتاه برای مواد ویسکو الاستیک برای تنش وارد شده (a) و کرنش القا شده (b)

خزش ویسکو الاستیک زمانی مهم است که طراحی سازه‌هایی با اجزای بلند مورد نظر باشد تا با در نظر گرفتن شرایط دمایی و بار خاص، طراحان بتوانند بهترین مواد، با بیشترین طول عمر، را انتخاب نمایند.

## ۲-۲-۱۴- اندازه‌گیری ویسکو الاستیک

اگرچه ابزارهای زیادی وجود دارند تا به کمک آن‌ها، پاسخ ویسکو الاستیک و پاسخ مکانیکی مواد را مورد ارزیابی قرار داد، ولی  $BVS^1$  و  $RUS^2$ ، بیشتر از سایر ابزارها مورد استفاده قرار می‌گیرند، زیرا در شرایط دمایی مختلفی، قادر به سنجش ویسکو الاستیسیته می‌باشند. این دو ابزار دارای مکانیزمی دمپ‌کننده در فرکانس‌ها و بازه‌های زمانی مختلف هستند که مستقل از افزایش یا کاهش دما در طول زمان، می‌باشند.

استفاده از  $BVS$  و  $RUS$  در مطالعه‌ی خصوصیات مکانیکی مواد مختلف، اهمیت ویژه‌ای دارد تا مشخص شود که رفتار ویسکو الاستیک یک ماده چگونه است [۱۹].

<sup>1</sup> Broadband viscoelastic spectroscopy

<sup>2</sup> Resonant ultrasound spectroscopy

## ۲-۳- روش مقیاس‌های چندگانه<sup>۱</sup>

در ریاضیات و فیزیک، روش مقیاس‌های چندگانه، شامل تکنیک‌هایی می‌باشد که برای حل تقریبی و صحیح برخی از مسایل، به‌زای مقادیر کوچک یا بزرگ متغیر مستقل آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این‌گونه مسایل، بایستی به‌دنبال بسطی بود که برای دامنه‌ی ارتعاشات، کوچک ولی مشخص باشد و معتبر باشد. در طول روند حل مساله، ممکن است متغیرهای مستقلی که به‌عنوان جملات سکولار<sup>۲</sup> شناخته می‌شوند، ظاهر شوند و بایستی که از پاسخ معادله حذف شوند؛ زیرا وجود این جمله‌ها، باعث می‌شود تا دامنه‌ی ارتعاشات سیستم به‌سمت بی‌نهایت میل کند.

در روش مقیاس‌های چندگانه، یک پارامتر کوچک و بدون بعد  $\varepsilon$  تعریف می‌شود که به آن معیار دامنه<sup>۳</sup> گفته می‌شود.

براساس این روش، مقیاس زمانی، به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۸-۲)$$

در روش مقیاس‌های چندگانه، مشتق زمانی، به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (۹-۲)$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (۱۰-۲)$$

که در آن،  $D_i$  عملگر مشتق زمانی سیستم می‌باشد. همچنین پاسخ سیستم به‌صورت بسط زیر فرض می‌شود:

$$y(x, t, \varepsilon) = \varepsilon y_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 y_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + O(\varepsilon^3) \quad (۱۱-۲)$$

با جای‌گذاری این رابطه، در معادله‌ی اصلی و از آنجا که  $y_i$  مستقل از  $\varepsilon$  می‌باشد، ضرایب هر کدام از توان‌های  $\varepsilon$  در معادله، می‌بایست برابر صفر قرار داده شوند؛ سپس پاسخ معادله‌ی مراتب اول

<sup>۱</sup> Multiple Scale Method

<sup>۲</sup> Secular term

<sup>۳</sup> Order of amplitude

را در معادله‌های مراتب بالاتر جای‌گزین کرده و آن‌ها را نیز حل نموده و این روند را تا جایی ادامه داده که مجهول‌های مساله به‌دست آیند.

همان‌گونه که قبلاً توضیح داده شد، اگر بسط تا مراتب بالاتر  $\varepsilon$  ادامه پیدا کند، جملات سکولار در پاسخ ظاهر می‌شوند که بایستی آن‌ها را مساوی صفر قرار داد. وجود جملات سکولار در معادله باعث می‌شود تا پاسخ غیرپریودیک شده و مقادیر ضرایب جملات سکولار به‌صورت نامعتبر افزایش می‌یابد که بسط را نامعتبر می‌سازد.

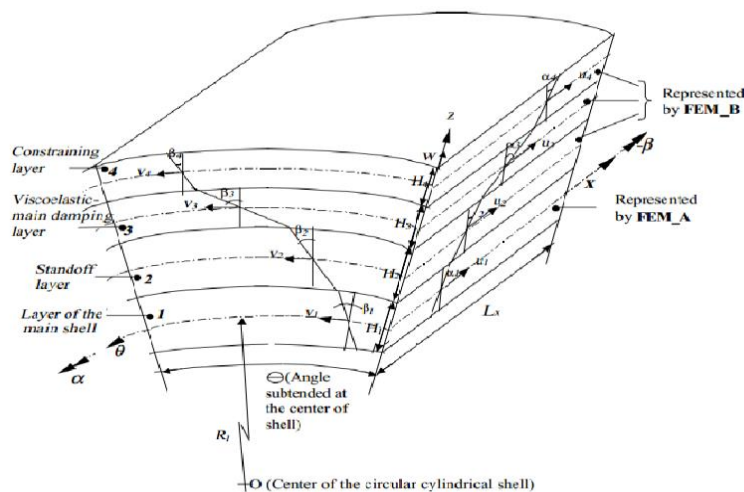
به‌عبارت دیگر اگر جملات سکولار حذف نشود، بسط تا  $O(\varepsilon^1)$  معتبر می‌باشد.

باید توجه کرد که تعداد مقیاس‌های که برای حل مساله مورد استفاده قرار می‌گیرد، بستگی به مرتبه‌ی بسط در نظر گرفته شده برای حل دارد؛ به‌عبارت دیگر، اگر بسط تا مرتبه‌ی  $\varepsilon^2$  نوشته می‌شود، مقیاس‌های  $T_0$  و  $T_1$  کفایت می‌کند، اما اگر بسطی تا مرتبه‌ی  $\varepsilon^3$  نوشته شود، می‌بایست مقیاس‌های  $T_0$ ،  $T_1$  و  $T_2$  در نظر گرفته شود [۲۰].

## ۴-۲- پیشینه تحقیق

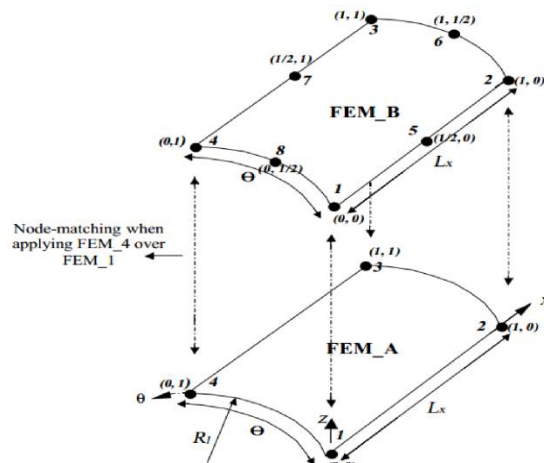
تا کنون کارهای متنوعی در زمینه‌ی مواد ویسکوالاستیک صورت گرفته است. در این بخش به برخی از مهم‌ترین کارهای انجام گرفته پیرامون این مواد، اشاره می‌شود.

مستی و سینسبوری، کاهش ارتعاشات پوسته‌ی استوانه‌ای را با یک پوشش قرارگرفته بر روی آن که رفتار ماده‌ی ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهد، مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها با استفاده از روش المان محدود به آنالیز مدلی پرداخته‌اند که برای کاهش ارتعاشات پوسته، پیشنهاد داده‌اند. شکل ۲-۸، مدل ارائه‌شده‌ی این دو نفر را نشان می‌دهد [۱].



شکل ۲-۸- جداسازی یک پوسته به بخش‌های مختلف، برای دمپینگ ارتعاشات و تحلیل به روش المان محدود

همانگونه که در شکل ۲-۸ مشاهده می‌شود، در این مدل، پوسته‌ی استوانه‌ای از چهار لایه‌ی به هم چسبیده شده، تشکیل شده است. لایه شماره ۱، لایه‌ی اصلی پوسته می‌باشد و بر روی آن، لایه‌ی شماره ۲ قرار گرفته شده است؛ این لایه، نسبت به لایه‌ی ویسکوالاستیک، مدول برشی بیشتر و خاصیت الاستیکی و دمپینگ کمتری دارد. بر روی لایه‌ی ۲، لایه‌ی اصلی ویسکوالاستیک قرار گرفته شده است و در نهایت، لایه‌ی شماره ۴ نیز بر روی لایه‌ی ویسکوالاستیک مقید شده است. در واقع مدل دمپینگ ارتعاش پوسته را به صورت ترکیبی از چهار لایه‌ی به هم چسبیده شده بر روی هم، ارائه کرده‌اند. آنها همچنین در طی این تحقیق خود نشان دادند که اگر به جای استفاده از لایه‌ی کاملاً پوشیده‌ی ویسکوالاستیک، از تکه‌های چسبیده شده‌ی ماده ویسکوالاستیک در ناحیه‌هایی که با توجه به نمودار توزیع شدت انرژی کرنشی روی پوسته معین می‌شوند و دارای انرژی کرنشی بیشتری هستند، استفاده شود، بهینه‌تر است و دمپینگ بهتری حاصل خواهد شد. مدل ارائه شده‌ی فوق برای ارتعاشات دارای تشدید، بسیار پرکاربرد و قابل استفاده می‌باشد. در این مدل، لایه‌ی ویسکوالاستیک شماره ۳، به کمک لایه‌ی شماره ۴ مقید شده‌ی روی آن، عمل دمپینگ را بر عهده دارند. از طرفی نیز قبلاً، این دو نفر نشان داده‌اند که اضافه شدن لایه‌ی جداکننده‌ی شماره ۲ بین پوسته و لایه‌ی ویسکوالاستیک، باعث بهبود عملکرد دمپینگ سیستم می‌شود [۲]. آنها برای تحلیل به روش المان محدود، از یک المان چهارگره‌ای استفاده نموده‌اند و برای مدل‌سازی، مطابق شکل ۲-۸، المان‌های FEM\_A و FEM\_B را جداگانه انتخاب کرده و به یکدیگر چسبانده‌اند؛ FEM\_B بیانگر لایه‌ی دمپینگ است که بر روی پوسته قرار گرفته است و بین آنها نیز، لایه‌ی ۲ قرار دارد. المان FEM\_B یک المان پوسته‌ی خمیده‌ی چهارگره‌ای است که در گره‌ها به خوبی بر روی المان FEM\_A قرار می‌گیرد (شکل ۲-۹).

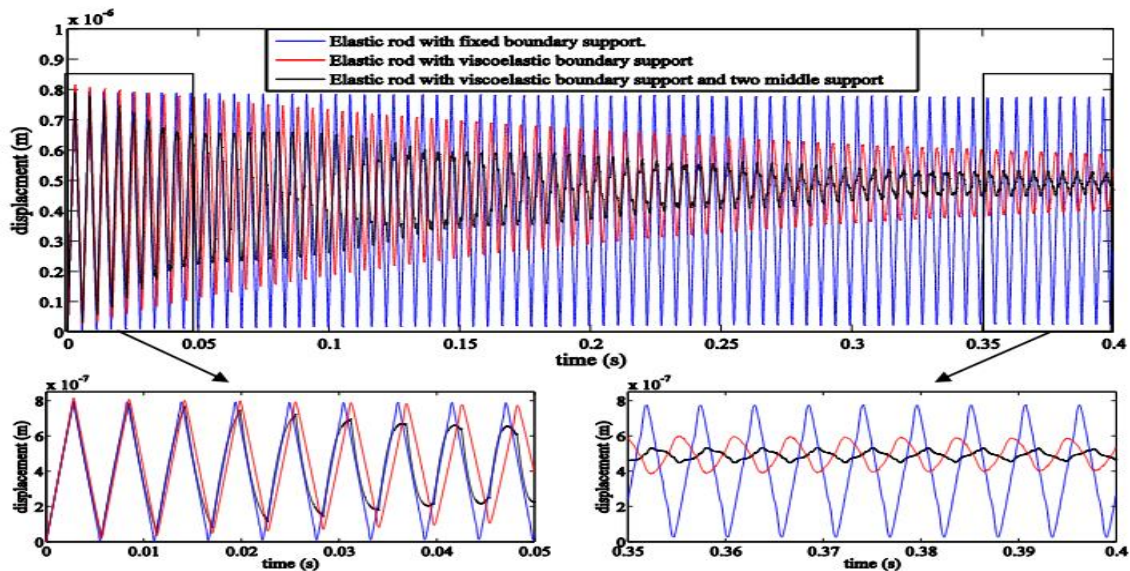


شکل ۲-۹. قرارگیری المان FEM\_A و FEM\_B بر روی هم

با نوشتن میدان جابجایی، روابط بین کرنش-جابجایی در جهات مختلف و روابط تنش-کرنش در جهات مختلف، آنها را در رابطه‌ی انرژی قرار داده و انرژی پتانسیل به‌دست آمده است. همچنین به این نکته باید توجه کرد که روابط انرژی برای هر لایه، با توجه به هندسه و ساختارشان متفاوت از لایه‌ی دیگری می‌باشد و انرژی کل، مجموع انرژی‌های لایه‌ها می‌باشد. در نهایت با استفاده از معادله‌ی لاگرانژ، معادله‌ی حرکت به‌دست آورده شده است. در ادامه برای اینکه درستی و صحت مدل تایید شود، سه تست مختلف بر روی مدل انجام شده است؛ در تست اول، با انتخاب جنس ماده‌ی آلومینیوم برای مدل، فرکانس‌های طبیعی پوسته را به‌ازای مش‌بندی‌هایی در اندازه‌های مختلف اندازه گرفته شده است که همگی تقریباً برابرند و همگرایی و تقارب المان FEM\_A با FEM\_B در نقاط اتصالشان ثابت شد. در تست دوم، برای شرایط مرزی کاملاً مقید شده، در یک مش  $8 \times 8$  فرکانس‌های طبیعی پوسته به دست آمده است و نتایج حاصل از المان محدود با نتایج روش‌های دیگر، مثل ریلی-ریتز یکسان به‌دست آمد. در تست سوم با مقایسه‌ی بین مدل تجربی و مدل تحلیلی به عمل آمد که با مقایسه‌ی فرکانس‌های مدل تجربی و مدل تحلیلی، تحت ارتعاش اجباری، هر دو مدل پاسخ فرکانسی مشابهی را ارائه دادند. در ادامه نیز با روش‌های عددی و المان محدود و در شرایط مرزی مختلف، تاثیر لایه‌ی شماره ۲ مورد ارزیابی قرار گرفته است و اثر مثبت این لایه را بر دمپینگ و کاهش ارتعاشات اثبات می‌شود. در پایان نیز این نتیجه اثبات می‌شود که اگرچه استفاده از تکه‌های ویسکوالاستیک بر روی پوسته، در نواحی دارای بیشترین ارتعاش، بسیار موثر در کاهش ارتعاشات می‌باشد، ولی این روش، سختی و دقت بالایی را نیازمند است و در نتیجه استفاده از لایه‌ی شماره‌ی ۲ بهتر می‌باشد و در کنار لایه‌ی ویسکوالاستیک، کمک بسیاری را به دفع ارتعاشات می‌کند.

زنگانه و احمدی [۷]، به بررسی ارتعاش محوری میله با تکیه ویسکوالاستیک پرداختند. آنها ارتعاش محوری میله‌ای با مصالح ویسکوالاستیک، با وجود تکیه‌گاه مرزی و میانی ساخته‌شده از مواد ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند و خصوصیات مواد ویسکوالاستیک را توسط مدل کلونین-ویت تعمیم یافته توصیف کرده‌اند. در این مقاله ابتدا در مورد ساختار مواد ویسکوالاستیک و نحوه‌ی مدل‌سازی آنها بحث شده است و با بحث در مورد انواع مدل‌سازی‌های مواد ویسکوالاستیک، به این نتیجه رسیده شده است که برای این تحقیق، مدل‌سازی ماده‌ی ویسکوالاستیک با استفاده از مدل تعمیم‌یافته کلونین-ویت، نتیجه‌ی بهتری را نسبت به مدل مکسول خواهد داشت. سپس با معرفی رابطه‌ی ساختاری خطی تنش-کرنش مدل کلونین-ویت و نیز تابع خزش تطابقی و تابع رهاسازی تنش، رابطه‌ی بین تنش-کرنش را برحسب تابع رهایش (تابعی از زمان) به‌دست آورده شده است؛ سپس با نوشتن شرایط مرزی در تکیه‌گاه‌های ویسکوالاستیک، به حل معادله‌ی حرکت با استفاده از انتگرال کانالوشن و روش گالرکین، پرداخته شده است. نتایج حل معادله سیستم، برای سه نوع شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار، تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک و حالتی که علاوه بر تکیه‌گاه ویسکوالاستیک دو تکیه‌گاه ویسکوالاستیک در طول میله وجود دارد، بررسی شده است. مطابق شکل ۲-۱۰، با استفاده از تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک، ارتعاشات با گذشت زمان میرا شده حداکثر جابجایی‌ها رو به کاهش

می‌باشد. باید توجه داشت که استفاده از مواد ویسکوالاستیک مختلف، تأثیر متفاوتی بر نمودار خواهد داشت و شیب نمودار را ممکن است کاهش و یا افزایش دهد.



شکل ۲-۱۰. تاریخچه جابجایی محوری میله با شرایط تکیه گاهی مختلف

آنها نتیجه گرفتند که استفاده از تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک، به‌جای تکیه‌گاه گیردار در سمت چپ، می‌تواند باعث میرایی نوسانات و کاهش جابجایی‌ها، با گذشت زمان شود و اگر چنانچه در طول میله علاوه بر مرز سمت چپ، از تکیه‌گاه ویسکوالاستیک با مشخصات مناسب استفاده شود، می‌توان میرایی ارتعاشات را به میزان قابل توجهی افزایش و جابجایی‌ها را در طول، به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش داد. زمانی که در ارتعاش میله‌ی ویسکوالاستیک از تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک استفاده می‌شود، تأثیر چندانی در مقایسته با خواص پلیمری خود میله بر میرایی نوسانات ندارد، اما به‌کارگیری تکیه‌گاه ویسکوالاستیک با مشخصات مناسب در طول میله می‌تواند کمک شایانی به کاهش حداکثر جابجایی‌ها و جلوگیری از افزایش صعودی جابجایی با گذشت زمان در میله، که ناشی از رفتار خزشی مواد ویسکوالاستیک میله تحت نیروی ثابت اعمال شده می‌باشد، نماید. همچنین به‌کارگیری تکیه‌گاه‌های ویسکوالاستیک باعث کاهش مقدار و تغییرات تنش در میله و تکیه‌گاه‌ها با گذشت زمان شده و می‌تواند عملکرد مواد را در برابر پدیده‌ی خستگی، بهبود بخشد.

سیسمور و دارونس [۹]، ارتعاشات جانبی تیر ساندویچی سه لایه‌ی الاستیک-ویسکوالاستیک-الاستیک را به صورت تحلیلی و تجربی مورد بررسی قرار دادند. بیشتر مدل‌های تحلیلی نشان می‌دهند که کرنش برشی<sup>۱</sup> در مواد ویسکوالاستیک، بیشترین اثر دمپینگ را دارد و اثر کرنش فشاری<sup>۱</sup> قابل

<sup>۱</sup> Shear Deformation

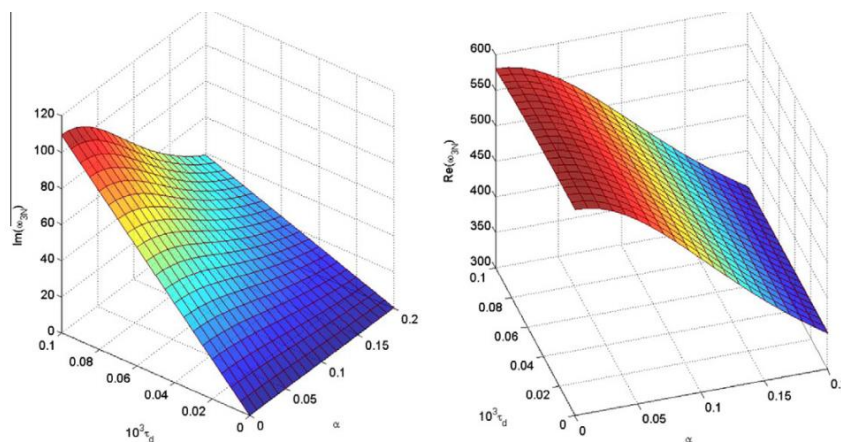
چشم‌پوشی است. اثر لایه‌ی بیرونی تیر، باعث ایجاد کرنش برشی بیشتر در لایه‌ی ویسکوالاستیک می‌شود و در نتیجه، باعث اتلاف انرژی بیشتری از سوی مواد ویسکوالاستیک می‌شود. دو روش شاخص برای اتلاف انرژی در لایه‌ی ویسکوالاستیک وجود دارد؛ یکی رفتار لایه‌ی ویسکوالاستیک براساس کرنش برشی و دیگری بر اساس کرنش فشاری می‌باشد. کرنش برشی در لایه‌ی ویسکوالاستیک زمانی رخ می‌دهد که دو لایه‌ی اصلی سازه و لایه‌ی بالای ویسکوالاستیک موازی باهم حرکت کنند. پیش از این تحقیقات دانشمندان نشان داده بود که تنها دمپینگ برشی ناشی از کرنش برشی باعث کاهش ارتعاشات سیستم می‌شود و دمپینگ فشاری در لایه‌ی ویسکوالاستیک اثر چندانی ندارد. در این مقاله این دو نفر سعی داشتند که نشان دهند عامل دمپینگ فشاری نیز به‌طور موثر در لایه‌ی ویسکوالاستیک وجود دارد و باعث کاهش ارتعاشات می‌شود. آنها با ارائه‌ی یک مدل تجربی، و اعمال شرایط مرزی مناسب و با کمک دستگاه‌های کامپیوتری اندازه‌گیری ارتعاشات، به این نتیجه رسیدند که در بعضی از فرکانس‌های تحریک اعمال شده، دمپینگ فشاری بر لایه‌ی ویسکوالاستیک وارد می‌شود و در این حوزه‌های فرکانسی، باعث کاهش بیشتر ارتعاشات می‌شود. همچنین در روش تحلیلی و با به‌دست آوردن پاسخ سیستم، باز هم به این نتیجه رسیدند که اثر همزمان هر دو کرنش برشی و فشاری بر لایه‌ی ویسکوالاستیک که باعث ایجاد دمپینگ برشی و فشاری می‌شود، باعث اتلاف انرژی و کاهش ارتعاشات بیشتری در سیستم می‌شود.

آروین، صدیقی و اوحدی [۸]، بررسی عددی بر روی ارتعاشات آزاد و اجباری تیر کامپوزیتی ساندویچی با هسته‌ی ویسکوالاستیک را انجام داده‌اند. آنها در این تحقیق به بررسی اثر مدول یانگ، اینرسی دورانی، انرژی جنبشی هسته‌ی ویسکوالاستیک، نرمی و سختی هسته‌ی ویسکوالاستیک و مواردی از این قبیل، را بر کاهش ارتعاشات سیستم بررسی نموده‌اند. آنها پس از نوشتن استخراج معادله‌ی حرکت و به‌دست آوردن معادله‌ی حرکت المان محدود، پاسخ سیستم را برای شرایط مرزی و فرضیات مختلف، تست کردند و فرکانس‌های طبیعی سیستم را برای این حالات به‌دست آورده‌اند. سرانجام به این نتایج دست یافتند که چه در ارتعاش آزاد و چه در ارتعاش اجباری این سیستم، با افزایش ضخامت لایه‌ی ویسکوالاستیک، ضریب اتلاف زیاد شده و فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. همچنین با بررسی نمودارهای رسم شده برای دو حالتی که ماده‌ی ویسکوالاستیک نرم باشد (سختی کمتری داشته باشد) و یا سخت باشد (سختی بیشتری داشته باشد)، مشخص شد که اگر لایه‌ی ویسکوالاستیک نرم باشد، فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش می‌یابد و اگر لایه‌ی ویسکوالاستیک سخت باشد، فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش پیدا می‌کند که مطلوب نیست و بهتر است که ضرایب مدول یانگ لایه‌ی ویسکوالاستیک به‌گونه‌ای انتخاب شود که نرمی بیشتر داشته باشد و باعث کاهش ارتعاشات شود.

---

<sup>1</sup> Compressional Deformation

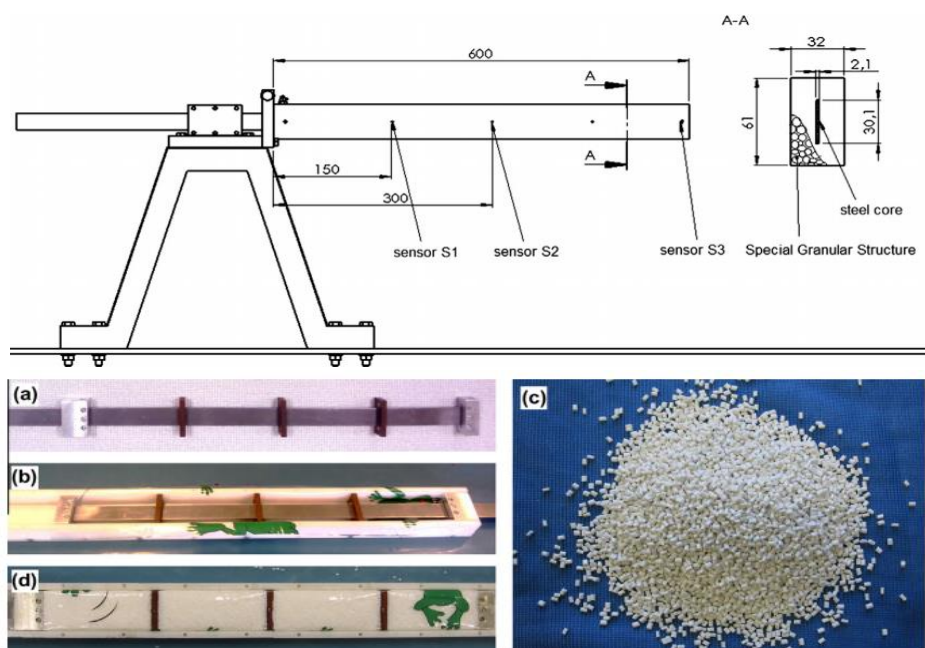
لی، ادهیکاری و فریسول [۹]، ارتعاشات نانوتیری که دارای دمپینگ ویسکوالاستیک کلونین- ویت غیرمحلّی است را مورد بررسی قرار دادند. آنها برای اولین بار به وسیله تئوری تیر تیموشینکو و مدل غیرمحلّی ویسکوالاستیک کلونین- ویت، معادله‌ی حرکت و شرایط مرزی تیر را استخراج نمودند و توسط روش تابع تبدیل (TFM)، فرکانس‌های طبیعی سیستم را به دست آوردند که نتیجه‌ی بهتر و دقیق‌تری را نسبت به تئوری‌های کلاسیک، ارائه داد. آنها در این مقاله به بررسی اثر پارامترهای غیرمحلّی، همچون ثابت ماده‌ی ویسکوالاستیک و نسبت طول به قطر تیر و سایر موارد، بر ارتعاشات تیر و فرکانس‌های طبیعی آن، پرداختند. ابتدا با به دست آوردن رابطه‌ی تنش- کرنش و رابطه‌ی کلونین- ویت و معادله‌های غیرمحلّی ویسکوالاستیک برای نانوتیر و معادله‌ی حرکت نانوتیر استخراج شده است. در معادله‌ی حرکت به دست آمده، روش تحلیلی نمی‌تواند مفید باشد و یافتن پاسخ را بسیار پیچیده می‌کند؛ بنابراین، آنها سراغ روش‌های عددی رفته و برای شرایط مرزی مختلف جواب‌ها را به دست آوردند. با ارائه‌ی یک مثال عددی و محاسبه‌ی فرکانس‌های آن، اثر پارامترهای غیرمحلّی و پارامترهای ویسکوالاستیک و ضریب دمپینگ را بر فرکانس‌های به دست آمده را نشان دادند. این فرکانس‌ها مختلط بوده و دارای دو بخش حقیقی و موهومی بودند. بخش‌های حقیقی و موهومی فرکانس‌ها به صورت توابعی از پارامترهای غیرمحلّی و پارامترهای ویسکوالاستیک در نمودارهایی رسم شده‌اند. برای فرکانس اول افزایش ضریب ویسکوالاستیک، باعث افزایش بخش موهومی فرکانس‌ها می‌شود و پارامترهای غیر محلّی بی اثر بود. در فرکانس‌های بالاتر نیز افزایش ضریب پارامترهای غیرمحلّی، باعث افزایش قسمت حقیقی فرکانس‌ها می‌شود و پارامتر ویسکوالاستیک اثری بر بخش حقیقی فرکانس‌ها نگذاشته است. با افزایش ضریب پارامترهای غیرمحلّی، قسمت حقیقی فرکانس‌های طبیعی کاهش پیدا می‌کند (شکل ۲-۱۱). بنابراین در این تحقیق با ارائه‌ی یک تئوری جدید برای نانوتیر تیموشینکو، مشخص شد که پارامترهای مختلف این مدل، چه اثری را بر روی فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌گذارند و برای کاهش ارتعاش سیستم به چه اندازه می‌توانند موثر باشند.



شکل ۲-۱۱- اثر پارامتر ویسکوالاستیک،  $\tau_d$ ، و پارامتر غیرمحلّی،  $\alpha$ ، در فرکانس سوم

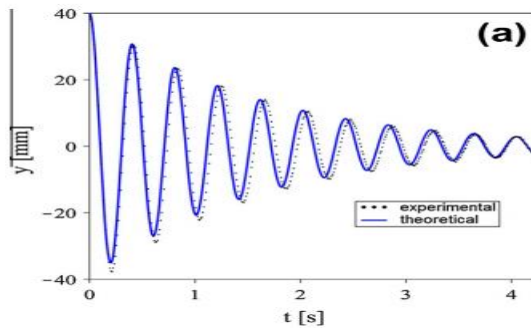


زالوسکی و اسمیت [۵]، کاربرد ساختار مواد ریزدانه را بر کاهش ارتعاشات جانبی تیر، را به صورت تجربی و تحلیلی بررسی نموده‌اند. مدل ارائه شده‌ی آنها، شامل سه بخش است؛ بخش اول، یک هسته‌ی فولادی با مقطع مستطیلی می‌باشد. توده‌ای از مواد ریزدانه، که شامل کپسول‌هایی کوچک استوانه‌ای شکل با طول ۳ میلی‌متر و عرض ۱ میلی‌متر، اطراف هسته‌ی فولادی را احاطه کرده‌اند. این توده‌ی مواد ریزدانه توسط پوششی نازک در سرتاسر تیر، به دور آن نگه داشته شده است (شکل ۲-۱۲).



شکل ۲-۱۲- ساختار و مدل آزمایشگاهی تیر مسلط شده با مواد ریز دانه

ساختار این مدل به گونه‌ای است که در اثر ارتعاش و حرکت تیر، بین کپسول‌های ریزدانه اصطکاک ایجاد می‌شود و این اصطکاک، همچون میرایی داخلی در تیر، عمل می‌کند. در واقع، این رفتار سیستم، رفتاری مشابه به ماده‌ی ویسکوپلاستیک را دارد. از همین رو می‌توان با استناد به مدل‌سازی‌هایی که قبلاً در مورد مواد ویسکوالاستیک، انجام شده است، با استفاده از مدل کلوین-ویت، این سیستم را مدل‌سازی کرد. پس از انتخاب مدل کلوین-ویت، معادله‌ی حرکت سیستم به دست آورده شده است. با نوشتن شرایط مرزی سیستم، پاسخ تحلیلی آن به دست آورده شده است. در شکل ۲-۱۳ این پاسخ برحسب زمان رسم شده است و همان‌طور که انتظار داشتیم، با افزایش زمان، دامنه‌ی نوسان‌های سیستم کاهش می‌یابد.



شکل ۲-۱۳- نمودار پاسخ سیستم، نسبت به زمان

در تمامی مقاله‌هایی که در اینجا به آنها اشاره شد، کاربردهای مختلفی از مواد ویسکوالاستیک مشاهده می‌شود. البته تحقیقات و مقالات بسیاری در این زمینه ارائه شده است که در این فصل، سعی شده است تا با معرفی چند مقاله از کارهای انجام شده‌ی مرتبط با موضوع این پایان‌نامه، نمونه‌هایی از این کاربردها، نشان داده شوند.

## ۲-۵- جمع‌بندی

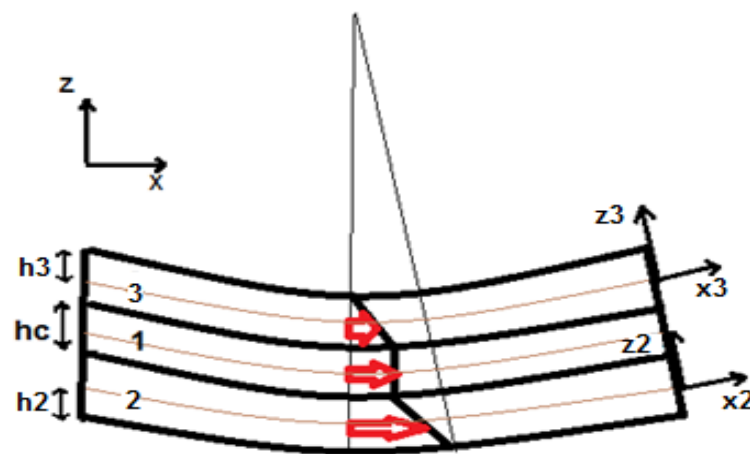
در این فصل، در ابتدا به معرفی مفاهیم اولیه‌ای چون میرایی ویسکوالاستیک، نحوه‌ی مدل‌سازی آن‌ها و روش حل مقیاس‌های چندگانه برای حل معادله‌ی غیرخطی پرداخته شد. همچنین تاریخچه مختصری از کارهای انجام شده مرتبط با موضوع پایان‌نامه بیان گردید. مرور مقالات و پیشینه تحقیق نشان داد که کمتر به تحلیل رفتار کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک پرداخته شده است. علاوه بر آن مدل کلونین-ویت نیز برای این نوع سیستم کمتر به کار برده شده است. در این پایان‌نامه ارتعاشات آزاد کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک که رفتار تیرمانند دارد، مورد مطالعه قرار گرفته است.

فصل سوم:

تحليل خطى ارتعاشات جانبى كابل الاستيك با  
روكش ويسكوالاستيك

### ۱-۳- مقدمه

در این فصل حرکت سیستم کابل و پوشش تیر مانند آن، خطی در نظر گرفته می‌شود و معادله‌ی حرکت آن به‌دست آورده خواهد شد. مدل تیر به‌صورت اویلر-برنولی<sup>۱</sup> انتخاب شده است و شرایط مرزی سیستم نیز از نوع دو سر مفصل خواهد بود. در ابتدا با استفاده از اصل هامیلتون، لازم است که معادله‌ی حرکت سیستم، به‌دست آورده شود. سپس با توجه به شرایط مرزی سیستم، پاسخ خطی سیستم به‌دست آورده خواهد شد. سیستم این مجموعه، به صورت شکل (۱-۳) می‌باشد که مطابق شکل، لایه‌ی میانی و شماره‌ی ۱، کابل الاستیک می‌باشد و دو لایه‌ی بالا و زیر آن نیز مربوط به پوشش ویسکوالاستیک می‌باشند.



شکل ۱-۳- نمایش مجموعه‌ی کابل و پوشش آن تحت کرنش طولی و جابجایی عرضی

### ۱-۳-۲- به‌دست آوردن معادله‌ی حرکت خطی

برای به‌دست آوردن معادله‌ی حرکت سیستم لازم است که از معادله‌ی لاگرانژ و اصل هامیلتون استفاده شود. معادله‌ی لاگرانژ به‌صورت زیر [۲۰] می‌باشد:

$$L = T - U \quad (1-3)$$

که در آن  $U$  انرژی پتانسیل کل سیستم می‌باشد و  $T$  نیز انرژی جنبشی کل سیستم می‌باشد که در ادامه هر یک از آنها، به‌دست آورده خواهند شد.

با توجه به رابطه‌ی (۱-۳) اصل هامیلتون را به‌صورت زیر می‌توان نشان داد [۲۱].

<sup>1</sup> Euler bernouli

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = 0 \quad (2-3)$$

اکنون می‌توان هر یک از بخش‌های رابطه‌ی (۲-۳) را جداگانه حساب کرد. رابطه‌ی (۳-۳) معادله‌ی انرژی جنبشی کل سیستم می‌باشد [۲۱].

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) w_t^2 dx \quad (3-3)$$

که در رابطه‌ی فوق،  $\rho_c$  چگالی جرمی کابل،  $\rho_{bi}$  چگالی جرمی پوش بالایی و پایینی ویسکوالاستیک،  $A_c$  سطح مقطع کابل،  $A_{bi}$  سطح مقطع پوش ویسکوالاستیک و  $w$  خیز جانبی کل سیستم کابل و پوشش آن، می‌باشد.

از آنجایی که مدل سیستم، از دو قسمت کابل الاستیک و روکش ویسکوالاستیک، تشکیل شده است، بنابراین انرژی پتانسیل کل سیستم، برابر با مجموع انرژی پتانسیل‌های هر یک از دو بخش سیستم می‌باشند. بنابراین رابطه‌ی انرژی پتانسیل کل سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$U = U_c + U_{b2} + U_{b3} \quad (4-3)$$

که  $U_c$  بیانگر انرژی پتانسیل کابل الاستیک و  $U_{b1}$  و  $U_{b2}$  انرژی پتانسیل پوش ویسکوالاستیک تیرمانند، می‌باشند.

کشش محوری مجموعه‌ی کابل و سیستم، مقدار  $T$  فرض می‌شود؛ حال با توجه به موازی بودن کابل و پوشش آن و نیز با توجه به یکسان بودن کرنش در تمامی سطح مقطع کابل و نیز با توجه به اینکه کابل و پوشش آن کاملاً به یکدیگر فیکس شده‌اند و در نقطه‌ی تماس کابل و پوشش آن دارای کرنش یکسان می‌باشند، بنابراین کرنش ایجاد شده در کابل و پوشش آن برای سطح بالایی، به صورت زیر می‌باشد [۲۱]:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \Rightarrow \frac{T_1}{E_1 A_1} = \frac{T_2}{E_2 A_2} \quad (5-3)$$

که در آن اندیس ۱ مربوط به کابل و اندیس ۲ مربوط به پوشش پایینی ویسکوالاستیک می‌باشد و جمله‌های  $\varepsilon$ ، کرنش،  $\sigma$ ، تنش،  $E$ ، مدول یانگ،  $A$ ، سطح مقطع و  $T$ ، نیروی کششی محوری می‌باشند.

همچنین برای پوشش بالایی کابل نیز در نقطه‌ی اتصال آن با پوشش، روابط به صورت زیر خواهند بود:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_3}{E_3} \Rightarrow \frac{T_1}{E_1 A_1} = \frac{T_3}{E_3 A_3} \quad (6-3)$$

که در آن اندیس ۱ مربوط به کابل و اندیس ۳ مربوط به پوشش بالایی ویسکوالاستیک می‌باشد.

اکنون با توجه به اینکه کشش کل ایجاد شده برابر با مجموع کشش‌های کابل و تیر می‌باشد، داریم:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (7-3)$$

با توجه به رابطه‌های (5-3) و (6-3) و (7-3) برای پوشش بالایی کابل، روابط به صورت زیر خواهند شد:

$$T_2 + \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} T_2 + \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} \cdot \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} T_2 = T \Rightarrow T_2 = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + E_3 A_3} T \quad (8-3)$$

و به طور مشابه برای سایر قسمت‌ها نیز روابط به صورت زیر خواهند بود:

$$T_1 = \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + E_3 A_3} T \quad (9-3)$$

$$T_3 = \frac{E_3 A_3}{E_1 A_1 + E_2 A_2 + E_3 A_3} T \quad (10-3)$$

اکنون هر یک از جمله‌های انرژی پتانسیل و جنبشی تیر و کابل را به دست می‌آوریم.

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^L T_1 w_{,x}^2 dx \quad (11-3)$$

که  $T_1$  نیروی کششی ایجاد شده در کابل می‌باشد [21].

رابطه‌ی (11-3) معادله‌ی انرژی پتانسیل پوشش کابل می‌باشد؛ همچنین معادله‌ی انرژی پتانسیل پوشش ویسکوالاستیک به صورت زیر می‌باشد [20]:

$$U_{bi} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_{xi} \epsilon_{xi} dA dx + \frac{1}{2} \int_0^L T_{bi} w_{,x}^2 dx, \quad i = 1, 2 \quad (12-3)$$

که  $\sigma_{xi}$  بیانگر تنش محوری (افقی) و  $\epsilon_{xi}$  کرنش محوری پوشش کابل می‌باشند. در این مدل، فرض می‌شود که کابل به پوشش آن، کاملاً فیکس شده باشد و در این حالت کرنش پوشش ویسکوالاستیک برابر با مجموع کرنش‌های کابل و کرنش خود پوشش می‌باشد. بنابراین رابطه‌ی بین کرنش افقی و خیز جانبی تیر پایینی در محور تاری را با نوشتن روابط کرنش در نقاط اتصال کابل و پوشش آن، می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\varepsilon_c \approx \varepsilon_{Nb2}(x, z, t) - h_2 w_{,xx}(x, t) \Rightarrow \quad (13-3)$$

$$\varepsilon_{Nb2}(x, z, t) \approx \varepsilon_c + h_2 w_{,xx}(x, t) = w_{,x} + h_2 w_{,xx}(x, t)$$

که  $Z_i$  فاصله‌ی هر نقطه از تیر تا تار خنثی مربوط به همان تیر می‌باشد و  $\varepsilon_{Nbi}$  نیز کرنش در محل تار خنثی تیر شماره‌ی  $i$  می‌باشد. همچنین با توجه به شکل (۱-۳)، برای پوشش بالایی کابل نیز به‌صورت زیر، رابطه‌ی کرنش محور تار خنثی به‌دست خواهد آمد:

$$\varepsilon_c \approx \varepsilon_{Nb3}(x, z, t) + h_3 w_{,xx}(x, t) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_{Nb3}(x, z, t) \approx \varepsilon_c - h_3 w_{,xx}(x, t) = w_{,x} - h_3 w_{,xx}(x, t) \quad (14-3)$$

رابطه‌های (۱۳-۳) و (۱۴-۳)، تنها کرنش در محل تار خنثی را نمایان می‌کند و رابطه‌ی کلی کرنش، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_{Zb2}(x, z, t) \approx w_{,x} + h_2 w_{,xx}(x, t) - z_2 w_{,xx}(x, t) \quad (15-3)$$

$$\varepsilon_{Zb3}(x, z, t) \approx w_{,x} - h_3 w_{,xx}(x, t) - z_3 w_{,xx}(x, t) \quad (16-3)$$

پارامتر  $\varepsilon_{Zbi}$ ، کرنش محوری در نقطه‌ی  $Z$  تیر شماره‌ی  $i$  می‌باشد. با توجه به جنس ویسکوالاستیک پوشش تیرمانند، رابطه‌ی کلونین-ویت برای این قسمت، به‌صورت زیر خواهد بود [۹]:

$$\sigma_{xi} = E_{bi} \varepsilon_{bi} + E_{bi}^* \frac{d\varepsilon_{bi}}{dt} \quad (17-3)$$

که  $E_{bi}$  مدول یانگ و  $E_{bi}^*$  ضریب دمپینگ پوشش ویسکوالاستیک کابل می‌باشند. با جای‌گذاری رابطه‌ی (۱۳-۳) در (۱۷-۳) برای پوشش بالایی کابل رابطه‌ی زیر حاصل خواهد شد:

$$\sigma_{b2} = E_{b2} h_2 w_{,xx} - E_{b2} z_2 w_{,xx} + E_{b2}^* h_2 w_{,xxt} - E_{b2}^* z_2 w_{,xxt} + E_{b2} w_{,x} + E_{b2}^* w_{,xt} \quad (18-3)$$

و برای پوشش پایینی کابل نیز رابطه‌ی تنش به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_{b3} = -E_{b3} h_3 w_{,xx} - E_{b3}^* h_3 w_{,xxt} - E_{b3} z_3 w_{,xx} - E_{b3}^* z_3 w_{,xxt} + E_{b3} w_{,x} + E_{b3}^* w_{,xt} \quad (19-3)$$

اکنون با داشتن انرژی جنبشی و پتانسیل، وریشن‌های هر کدام از بخش‌های معادله‌ی (۱-۳) را می‌توان جداگانه به‌دست آورد.

باید توجه داشت که با توجه به سطح مقطع مستطیلی تیر، المان سطح آن نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$dA_i = b dz_i \quad (20-3)$$

که در آن،  $A_i$ ، سطح مقطع تیر و  $b$ ، عرض تیر و حدود المان  $z_i$  نیز از  $-h_i$  تا  $+h_i$  می باشد. با توجه به رابطه‌ی (۳-۳) روابط زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) w_{,t}^2 dx dt = \\ & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) w_{,t} \delta w_{,t} dx dt \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= \int_0^L (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) w_{,t} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \\ & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) w_{,t}]_t \delta w dx dt \end{aligned}$$

از طرفی میدانیم که:

$$\begin{aligned} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} &= 0 \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) w_{,t}]_t \delta w dx dt \quad (21-3) \end{aligned}$$

از طرفی، برای خطی در نظر گرفتن کرنش و رابطه‌ی تنش - کرنش، در کابل خواهد شد:

$$\sigma_c = E_c \epsilon_c = E_c w_{,x} \quad (22-3)$$

که  $E_c$  مدول یانگ و  $\epsilon_c$  کرنش محوری کابل الاستیک می باشند.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta U_c dt &= \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_1 w_{,x}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_1 w_{,x} \delta w_{,x} dx dt = \\ & \int_{t_1}^{t_2} T_1 w_{,x} \delta w \Big|_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_1 \frac{\partial}{\partial x} (w_{,x}) \delta w dx dt = \\ & \int_{t_1}^{t_2} T_1 w_{,x} \delta w \Big|_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_1 (w_{,xx}) \delta w dx dt \quad (23-3) \end{aligned}$$

حال وریشن انرژی پتانسیل پوشش بالایی کابل را با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۲) می توان حساب کرد [۷]:



$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \delta U_{b_2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A \sigma_{b_2} \delta \varepsilon_{z b_2} dA dx dt + \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_2 w_{,x}^2 = \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A (E_{b_2} h_2^2 w_{,xx} - E_{b_2} h_2 z_2 w_{,xx} + E_{b_2}^* h_2^2 w_{,xxt} - E_{b_2}^* h_2 z_2 w_{,xxt} + E_{b_2} h_2 w_{,x} + E_{b_2}^* h_2 w_{,xt}) \delta w_{,xx} dA dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A (E_{b_2} z_2 h_2 w_{,xx} - E_{b_2} z_2^2 w_{,xx} + E_{b_2}^* z_2 h_2 w_{,xxt} - E_{b_2}^* z_2^2 w_{,xxt} + E_{b_2} z_2 w_{,x} + E_{b_2}^* z_2 w_{,xt}) \delta w_{,xx} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A (E_{b_2} h_2 w_{,xx} - E_{b_2} z_2 w_{,xx} + E_{b_2}^* h_2 w_{,xxt} - E_{b_2}^* z_2 w_{,xxt} + E_{b_2} w_{,x} + E_{b_2}^* w_{,xt}) \delta w_{,x} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_2 w_{,x} \delta w_{,x} dx dt = \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A ((h_2^2 + z_2^2)(E_{b_2} w_{,xx} + E_{b_2}^* w_{,xxt}) + (h_2 - z_2)(E_{b_2} w_{,x} + E_{b_2}^* w_{,xt}) - 2E_{b_2} h_2 z_2 w_{,xx} - 2E_{b_2}^* h_2 z_2 w_{,xxt}) \delta w_{,xx} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A (E_{b_2} h_2 w_{,xx} - E_{b_2} z_2 w_{,xx} + E_{b_2}^* h_2 w_{,xxt} - E_{b_2}^* z_2 w_{,xxt} + E_{b_2} w_{,x} + E_{b_2}^* w_{,xt}) \delta w_{,x} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_2 w_{,x} \delta w_{,x} dx dt = \\
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_2^3 + I_{b_2})(E_{b_2} w_{,xx} + E_{b_2}^* w_{,xxt}) + (2bh_2^2)(E_{b_2} w_{,x} + E_{b_2}^* w_{,xt})) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L ((2bh_2^3 + I_{b_2})(E_{b_2} w_{,xxx} + E_{b_2}^* w_{,xxxt}) + (2bh_2^2)(E_{b_2} w_{,xx} + E_{b_2}^* w_{,xxt})) \delta w_{,x} dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (2bh_2^2 E_{b_2} w_{,xx} + 2bh_2^2 E_{b_2}^* w_{,xxt} + 2bh_2 E_{b_2} w_{,x} + 2bh_2 E_{b_2}^* w_{,xt}) \delta w_{,x} dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_2 w_{,x} \delta w \Big|_0^L - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_2 w_{,xx} \delta w dx dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2}w_{,xx} + E_{b2}^*w_{,xxt}) + (2bh_2^2)(E_{b2}w_{,x} + E_{b2}^*w_{,xt}))\delta w_{,x} \Big|_0^L dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} [-(2bh_2)(E_{b2}w_{,x} + E_{b2}^*w_{,xt}) + (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2}w_{,xxx} + E_{b2}^*w_{,xxxt})]\delta w \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [-(2bh_2)(E_{b2}w_{,xx} + E_{b2}^*w_{,xxt}) + (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2}w_{,xxx} + E_{b2}^*w_{,xxxt})]\delta w dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_2 w_{,x} \delta w \Big|_0^L - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_2 w_{,xx} \delta w dx dt \quad (24-3)
\end{aligned}$$

پس از به دست آوردن انرژی پتانسیل پوشش بالایی کابل، اکنون برای پوشش پایینی آن نیز رابطه‌ی انرژی پتانسیل را با توجه به رابطه‌های (۳-۱۲) و (۳-۲۰)، می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta U_{b3} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A \sigma_{b3} \delta \varepsilon_{zb3} dA dx dt + \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3 w_{,x}^2 = \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A (-E_{b3} h_3^2 w_{,xx} - E_{b3} h_3 z_3 w_{,xx} - E_{b3}^* h_3^2 w_{,xxt} - E_{b3}^* h_3 z_3 w_{,xxt} + E_{b3} h_3 w_{,x} + E_{b3}^* h_3 w_{,xt}) \delta w_{,xx} dA dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A (-E_{b3} z_3 h_3 w_{,xx} - E_{b3} z_3^2 w_{,xx} - E_{b3}^* z_3 h_3 w_{,xxt} - E_{b3}^* z_3^2 w_{,xxt} + E_{b3} z_3 w_{,x} + E_{b3}^* z_3 w_{,xt}) \delta w_{,xx} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A (-E_{b3} h_3 w_{,xx} - E_{b3} z_3 w_{,xx} - E_{b3}^* h_3 w_{,xxt} - E_{b3}^* z_3 w_{,xxt} + E_{b3} w_{,x} + E_{b3}^* w_{,xt}) \delta w_{,x} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3 w_{,x} \delta w_{,x} dx dt = \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A ((h_3^2 + z_3^2)(E_{b3} w_{,xx} + E_{b3}^* w_{,xxt}) - (h_3 + z_3)(E_{b3} w_{,x} + E_{b3}^* w_{,xt}) + 2E_{b3} h_3 z_3 w_{,xx} + 2E_{b3}^* h_3 z_3 w_{,xxt}) \delta w_{,xx} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A (E_{b3} h_3 w_{,xx} - E_{b3} z_3 w_{,xx} + E_{b3}^* h_3 w_{,xxt} - E_{b3}^* z_3 w_{,xxt} + E_{b3} w_{,x} + E_{b3}^* w_{,xt}) \delta w_{,x} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3 w_{,x} \delta w_{,x} dx dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xx} + E_{b3}^*w_{,xxt}) - (2bh_3^2)(E_{b3}w_{,x} + E_{b3}^*w_{,xt}))\delta w_{,x} \Big|_0^L dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L ((2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xxx} + E_{b3}^*w_{,xxxt}) - (2bh_3^2)(E_{b3}w_{,xx} + E_{b3}^*w_{,xxt}))\delta w_{,x} dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (2bh_3^2 E_{b2}w_{,xx} + 2bh_3^2 E_{b3}^*w_{,xxt} + 2bh_3 E_{b3}w_{,x} + 2bh_3 E_{b3}^*w_{,xt})\delta w_{,x} dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_3 w_{,x} \delta w \Big|_0^L - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3 w_{,xx} \delta w dx dt = \\
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xx} + E_{b3}^*w_{,xxt}) - (2bh_3^2)(E_{b3}w_{,x} + E_{b3}^*w_{,xt}))\delta w_{,x} \Big|_0^L dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} [(2bh_3)(E_{b3}w_{,x} + E_{b3}^*w_{,xt}) - (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xxx} + E_{b3}^*w_{,xxxt})]\delta w \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(2bh_3)(E_{b3}w_{,xx} + E_{b3}^*w_{,xxt}) - (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xxx} + E_{b3}^*w_{,xxxt})]\delta w dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_3 w_{,x} \delta w \Big|_0^L - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3 w_{,xx} \delta w dx dt \tag{۲۵-۳}
\end{aligned}$$

با جایگذاری رابطه‌های (۲۱-۳)، (۲۳-۳) و (۲۴-۳) و (۲۵-۳) در معادله هامیلتون داریم:

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) w_{,t} ]_t \delta w dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_1 w_{,x} \delta w \Big|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_1 w_{,xx} \delta w dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xx} + E_{b2}^* w_{,xxt}) + (2bh_2^2)(E_{b2} w_{,x} + E_{b2}^* w_{,xt})) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} [(2bh_2)(E_{b2} w_{,x} + E_{b2}^* w_{,xt}) - (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xxx} + E_{b2}^* w_{,xxxt})] \delta w \Big|_0^L dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(2bh_2)(E_{b2} w_{,xx} + E_{b2}^* w_{,xxt}) - (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xxxx} + E_{b2}^* w_{,xxxxt})] \delta w dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_2 w_{,x} \delta w \Big|_0^L + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_2 w_{,xx} \delta w dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3} w_{,xx} + E_{b3}^* w_{,xxt}) - (2bh_3^2)(E_{b3} w_{,x} + E_{b3}^* w_{,xt})) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} [(2bh_3)(E_{b3} w_{,x} + E_{b3}^* w_{,xt}) - (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3} w_{,xxx} + E_{b3}^* w_{,xxxt})] \delta w \Big|_0^L dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(2bh_3)(E_{b3} w_{,xx} + E_{b3}^* w_{,xxt}) - (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3} w_{,xxxx} + E_{b3}^* w_{,xxxxt})] \delta w dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_3 w_{,x} \delta w \Big|_0^L + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3 w_{,xx} \delta w dx dt = 0
\end{aligned}$$

(۲۶-۳)

با توجه به اینکه خواص تیر و کابل در طول و عرض مقطع هایشان ثابت است، بنابراین  $E, E^*, I, A$  و  $\rho$  ثابت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، حاصل معادله‌ی فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [-(\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3})w_{,tt} - (-(T_1 + T_2 + T_3) + (2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3}))w_{,xx} + \\
& (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*)w_{,xxt} + ((2bh_2^3 + I_{b2})E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3})E_{b3})w_{,xxxx} + \\
& ((2bh_2^3 + I_{b2})E_{b2}^* + (2bh_3^3 + I_{b3})E_{b3}^*)w_{,xxxxt}] \delta w dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_2^3 + I_{b2})E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3})E_{b3})w_{,xx} + ((2bh_2^3 + I_{b2})E_{b2}^* + (2bh_3^3 + I_{b3})E_{b3}^*)w_{,xxt} + \\
& (2bh_2 E_{b2} - 2bh_3 E_{b3})w_{,x} + (2bh_2 E_{b2}^* - 2bh_3 E_{b3}^*)w_{,xt} \delta w \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} [(-(T_1 + T_2 + T_3) + (2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3}))w_{,x} + (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*)w_{,xt}] - \\
& ((2bh_2^3 + I_{b2})E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3})E_{b3})w_{,xxx} + (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*)w_{,xxxt}] \delta w \Big|_0^L dt = 0
\end{aligned}$$

(۲۷-۳)

از رابطه‌ی فوق معادله‌ی حرکت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
& (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3})w_{,tt} - ((2bh_2^3 + I_{b2})E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3})E_{b3})w_{,xxxx} - \\
& ((2bh_2^3 + I_{b2})E_{b2}^* - (2bh_3^3 + I_{b3})E_{b3}^*)w_{,xxxxt} + ((2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3} - T)w_{,xx} + \\
& (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*)w_{,xxt}) = 0
\end{aligned}$$

(۲۸-۳)

همچنین از عبارت دوم معادله‌ی (۲۷-۳) شرایط مرزی نیز به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} [(-(T_1 + T_2 + T_3) + (2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3}))w_{,x} + (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*)w_{,xt}] - \\
& ((2bh_2^3 + I_{b2})E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3})E_{b3})w_{,xxx} + (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*)w_{,xxxt}] \delta w \Big|_0^L dt = 0 \Rightarrow \\
& [(-(T_1 + T_2 + T_3) + (2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3}))w_{,x} + (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*)w_{,xt}] - \\
& ((2bh_2^3 + I_{b2})E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3})E_{b3})w_{,xxx} + (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*)w_{,xxxt}]_{(0,t)} = 0
\end{aligned}$$

$$or \quad w(0,t) = 0$$

(۲۹-۳)

$$\begin{aligned}
& [(-T_1 + T_2 + T_3) + (2bh_2E_{b_2} + 2bh_3E_{b_3})w_{,x} + (2bh_2E_{b_2}^* + 2bh_3E_{b_3}^*)w_{,xt}] - \\
& ((2bh_2^3 + I_{b_2})E_{b_2} + (2bh_3^3 + I_{b_3})E_{b_3})w_{,xxx} + (2bh_2E_{b_2}^* + 2bh_3E_{b_3}^*)w_{,xxxt} \Big|_{(L,t)} = 0 \\
& \text{or } w(L,t) = 0 \tag{۳۰-۳}
\end{aligned}$$

و از عبارت اول معادله‌ی (۳-۲۴) شرایط مرزی نیز به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{aligned}
& [((2bh_2^3 + I_{b_2})E_{b_2} + (2bh_3^3 + I_{b_3})E_{b_3})w_{,xx} + ((2bh_2^3 + I_{b_2})E_{b_2}^* + (2bh_3^3 + I_{b_3})E_{b_3}^*)w_{,xxt}] + \\
& (2bh_2E_{b_2} - 2bh_3E_{b_3})w_{,x} + (2bh_2E_{b_2}^* - 2bh_3E_{b_3}^*)w_{,xt} \Big|_{(0,t)} = 0 \\
& \text{or } w_{,x}(0,t) = 0 \tag{۳۱-۳}
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
& [((2bh_2^3 + I_{b_2})E_{b_2} + (2bh_3^3 + I_{b_3})E_{b_3})w_{,xx} + ((2bh_2^3 + I_{b_2})E_{b_2}^* + (2bh_3^3 + I_{b_3})E_{b_3}^*)w_{,xxt}] + \\
& (2bh_2E_{b_2} - 2bh_3E_{b_3})w_{,x} + (2bh_2E_{b_2}^* - 2bh_3E_{b_3}^*)w_{,xt} \Big|_{(L,t)} = 0 \\
& \text{or } w_{,x}(L,t) = 0 \tag{۳۲-۳}
\end{aligned}$$

که باتوجه به هندسه‌ی شکل مساله و شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل سیستم و یکسان بودن خواص و پارامترهای پوشش بالایی و پوشش پایینی کابل، در نهایت، شرایط مرزی به صورت زیر انتخاب خواهد شد:

$$\begin{aligned}
& w(0,t) = 0 , w(L,t) = 0 , w_{,xx}(0,t) = 0 , \\
& w_{,xx}(L,t) = 0 \tag{۳۳-۳}
\end{aligned}$$

### ۳-۳- یافتن پاسخ معادله‌ی ارتعاشات آزاد سیستم دارای حرکت خطی

پس از به دست آوردن معادله حرکت خطی سیستم اکنون می‌توان پاسخ آن را با استفاده از روش‌های متداول حل این نوع معادلات، به دست آورد. معادله‌ی مورد نظر به گونه‌ای است که با استفاده از روش جداسازی متغیرها می‌توان آن را حل نمود؛ بنابراین با در نظر گرفتن پاسخ کلی به صورت زیر داریم:

[۲۱]:

$$w(x,t) = W(x)e^{st} \tag{۳۴-۳}$$

باید توجه داشت که به دلیل وجود لایه ی ویسکوالاستیک، فرکانس طبیعی سیستم به صورت مختلط خواهد بود و ثابت  $s$  نیز مقداری مختلط، فرض می شود. با جای گذاری پاسخ کلی در رابطه ی معادله-ی حرکت، رابطه ی زیر حاصل خواهد شد:

$$s^2 (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) W - [(2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3} + s((2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2}^* - (2bh_3^3 + I_{b3})) E_{b3}^*] W^{(4)} + [(2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3} - T) + s(2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*)] W'' = 0 \quad (35-3)$$

همچنین از آنجایی که سیستم به صورت دو سر مفصل می باشد، بنابراین می توان فرم کلی شکل مود  $W$  را به صورت زیر در نظر گرفت [۲۱]:

$$W_n(x) = B \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (36-3)$$

که در آن  $B$  یک ثابت اختیاری است.

با جای گذاری  $W$  در معادله ی بی بعد شده، رابطه ی زیر حاصل خواهد شد:

$$Bs^2 (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) \sin \frac{n\pi}{L} x - B \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 [(2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3} + s((2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2}^* - (2bh_3^3 + I_{b3})) E_{b3}^*] \sin \frac{n\pi}{L} x - B \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 [(2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3} - T) + s(2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*)] \sin \frac{n\pi}{L} x = 0 \quad (37-3)$$

با ساده سازی رابطه ی بالا، نتیجه می شود:

$$\Rightarrow (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) s^2 - \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 ((2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2}^* - (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3}^*) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*) s - \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 ((2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3}) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3} - T)\right] s\right] = 0 \quad (38-3)$$

معادله ی بالا یک معادله ی خطی درجه ی دوم می باشد که پاسخ آن نیز به صورت زیر می باشد:

$$\Rightarrow s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2a}$$

(۳-۳۹)

که در آن

$$a = (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3})$$

$$b = -\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 ((2bh_2^3 + I_{b2})E_{b2}^* - (2bh_3^3 + I_{b3})E_{b3}^*) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (2bh_2E_{b2}^* + 2bh_3E_{b3}^*)\right]$$

$$c = -\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 ((2bh_2^3 + I_{b2})E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3})E_{b3}) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (2bh_2E_{b2} + 2bh_3E_{b3} - T)\right] \quad (۳-۴۰)$$

همان گونه که پیش تر بیان شد، پارامتر  $s$ ، بیانگر فرکانس طبیعی سیستم می باشد که مقدار آن به صورت رابطی بالا به دست آمده است.

با توجه به وجود مواد ویسکوالاستیک در این سیستم، در نتیجه فرکانس آن نیز مختلط به دست خواهد آمد.

### ۳-۴ - نتایج عددی و رسم نمودارها

در جدول زیر مشخصات انتخابی برای مواد به کار رفته در کابل و لایه ویسکوالاستیک، با مقطع مستطیلی، آورده شده است.

جدول ۳-۱ - مشخصات مواد به کار رفته

چگالی ( $\text{kg/m}^3$ )	مدول یانگ (pa)	ضخامت (m)	پهنا (m)	طول (m)	
۱۳۰۰	$7.2 \times 10^7$	متغیر	۰.۵	۱	لایه های ویسکو(رزین) <sup>۱</sup>
۲۷۰۰	-	۰.۳	۰.۵	۱	کابل (آلومینیوم) <sup>۲</sup>

<sup>1</sup> Rubber

<sup>2</sup> Aluminium



همچنین ضریب ویسکوزیته‌ی  $E^*$  نیز مقدار ۱. انتخاب می‌شود و باتوجه به مقدارهای عددی داده شده در جدول ۳-۱ و برای کشش اولیه‌ی  $T=1KN$ ، نتایج به‌دست آمده‌ی عددی در جدول ۳-۲ و نمودار زیر مشاهده می‌شود.

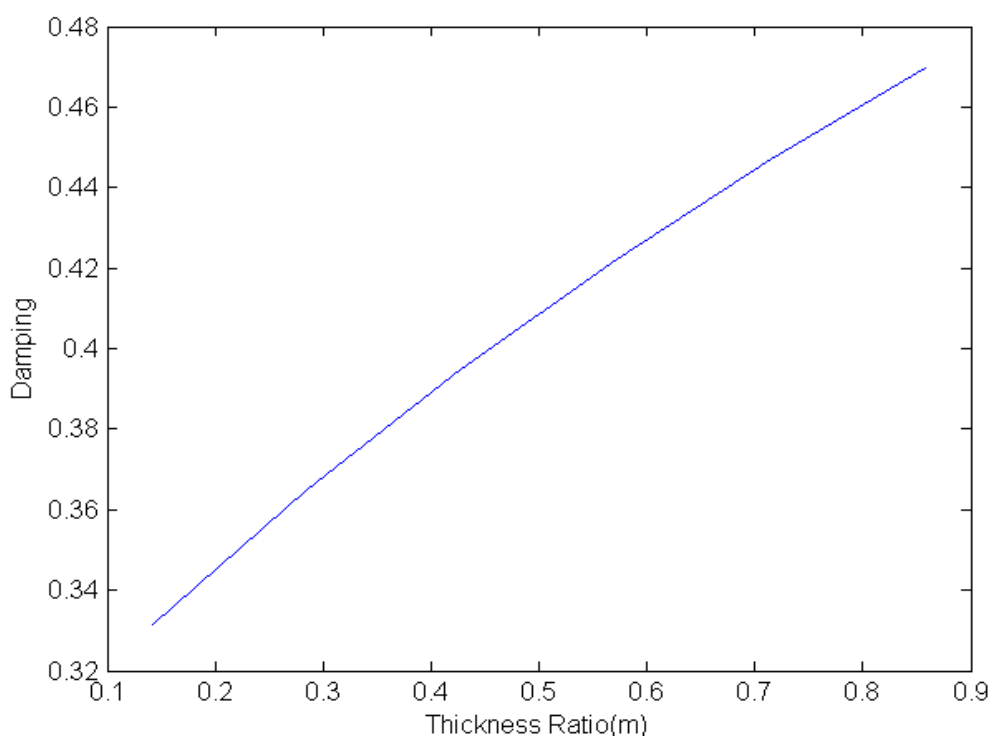
جدول ۳-۲- فرکانس طبیعی سیستم در مود اول

ضخامت لایه‌های ویسکو (m)	مقدار ویژه‌ی به‌دست آمده- S ی	میرایی	فرکانس طبیعی (Hz)
۰.۱	$-6.827 \times 10^2 + 3.947 \times 10^1 i$	۰.۳۳۱۳۱۸۷	$6.82713 \times 10^3$
۰.۲	$-1.240 \times 10^4 + 7.895 \times 10^1 i$	۰.۳۶۴۷۷۸۳	$1.24016 \times 10^4$
۰.۳	$-1.718 \times 10^4 + 1.184 \times 10^2 i$	۰.۳۹۴۸۵۶۴	$1.71857 \times 10^4$
۰.۴	$-2.143 \times 10^4 + 1.579 \times 10^2 i$	۰.۴۲۲۱۲۶۱	$2.14340 \times 10^4$
۰.۵	$-2.530 \times 10^4 + 1.973 \times 10^2 i$	۰.۴۴۶۹۷۰۴	$2.53033 \times 10^4$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت لایه‌ی ویسکوز، فرکانس طبیعی سیستم نیز افزایش می‌یابد.

باید توجه شود که در منحنی مکان هندسی مقادیر مختلط به‌دست آمده، در صفحه‌ی مختلط، فاصله-ی هر نقطه تا مبدا مختصات، مقدار فرکانس طبیعی سیستم خواهد بود و فاصله‌ی تصویر این نقطه بر روی محور حقیقی تا مبدا مختصات، مقدار  $\omega_n$  می‌باشد و فاصله‌ی تصویر این نقطه بر روی محور موهومی، تا مبدا مختصات نیز مقدار  $\omega_d$  می‌باشد؛ همچنین کسینوس معکوس زاویه‌ی محور حقیقی با خط‌واصل بین مبدا مختصات تا نقطه‌ی قرار گرفته بر روی صفحه‌ی مختلط نیز مقدار میرایی را نتیجه خواهد داد.

نمودار تغییرات میرایی سیستم بر حسب ضخامت، برای مد اول به‌صورت زیر می‌باشد:



شکل ۳-۲- نمودار تغییرات میرایی برحسب افزایش نسبت ضخامت لایه‌ی ویسکوز به ضخامت کابل

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت لایه‌ی ویسکوز نسبت به ضخامت کابل، میرایی سیستم نیز افزایش می‌یابد و اصطلاحاً سیستم، میراتر می‌شود.

### ۳-۵- به‌دست آوردن پاسخ ارتعاشات اجباری سیستم دارای حرکت خطی

در این بخش ارتعاشات اجباری سیستم دارای حرکت خطی، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بار خارجی، به صورت یک نیروی هارمونیک گسترده فرض شده است که به صورت رابطه‌ی (۳-۴۱) نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) w_{,tt} - ((2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3}) w_{,xxxx} - \\
 & ((2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2}^* - (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3}^*) w_{,xxx} + (2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3} - T) w_{,xx} + \\
 & (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*) w_{,xt} = F_0 e^{i\Omega t}
 \end{aligned} \tag{۳-۴۱}$$

برای یافتن پاسخ خصوصی معادله‌ی فوق، ابتدا با استفاده از روش گلرکین پاسخ خصوصی به صورت

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^n p_k(t)W_k(x) = W^T(x)p(t) \quad \text{رابطه‌ی زیر فرض می‌شود [۲۰]:} \quad (۴۲-۳)$$

که در آن  $W = [W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)]^T$  و  $p = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)]^T$  بوده و  $W(x)$  تمام شرایط مرزی هندسی و طبیعی مساله را ارضا کرده و تا حداقل بالاترین مرتبه‌ی مشتق مکانی معادله‌ی دیفرانسیل حرکت، مشتق‌پذیرند و با توجه به شرایط مساله، به صورت

$$W_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad \text{در نظر می‌گیریم. } p_k(t) \text{ توابع نامشخص هستند که باید به دست آیند.}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۴۲-۳) در رابطه‌ی (۴۱-۳) رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n [(\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) \ddot{p}_k(t) W_k(x) - ((2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3}) p_k W_{k,xxxx} - \\ & ((2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2}^* - (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3}^*) \dot{p}_k W_{k,xxx} + (2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3} - T) p_k W_{k,xx} + \\ & (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*) \dot{p}_k W_{k,xx} - F_0 e^{i\Omega t}] = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{k=1}^n [(\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) \ddot{p}_k(t) W_k(x) + [-(2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3}] W_{k,xxxx} + \\ & (2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3} - T) W_{k,xx}] p_k + [-(2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2}^* - (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3}^*] W_{k,xxx} + \\ & (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*) W_{k,xx}] \dot{p}_k - F_0 W_k(x) e^{i\Omega t}] = 0 \end{aligned} \quad (۴۳-۳)$$

رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت زیر نیز باز نویسی و ساده نمود:

$$M\ddot{p} + C_0\dot{p} + K_0p = fe^{i\Omega t} \quad (۴۴-۳)$$

که در آن پارامترهای  $f$  بزرگی نیرو،  $M$  ماتریس جرم،  $C_0$  ماتریس دمپینگ و  $K_0$  ماتریس سختی می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۱]:

$$f = \int_0^l W(x) F_0 dx \quad (۴۵-۳)$$

$$M = \int_0^l (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) W(x) W^T(x) dx \quad (46-3)$$

$$C_0 = -\int_0^l ((2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2}^* - (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3}^*) W(x) W(x)_{,xxxx}^T dx + \int_0^l (2bh_2 E_{b2}^* + 2bh_3 E_{b3}^*) W(x) W(x)_{,xx}^T dx \quad (47-3)$$

$$K_0 = -\int_0^l ((2bh_2^3 + I_{b2}) E_{b2} + (2bh_3^3 + I_{b3}) E_{b3}) W(x) W(x)_{,xxxx}^T dx + \int_0^l (2bh_2 E_{b2} + 2bh_3 E_{b3} - T) W(x) W(x)_{,xx}^T dx \quad (48-3)$$

پاسخ کلی رابطه‌ی (۴۴-۳) به صورت زیر حدس زده می‌شود [۲۱]:

$$p(t) = Aue^{i\omega t} + \frac{f}{(K_0 - M\omega^2) - (Ci\omega)} e^{i\Omega t} + cc \quad (49-3)$$

که در آن  $A$  ثابت اختیاری،  $i$  عدد موهومی،  $cc$  مزدوج مختلط،  $u$  بردار ویژه و  $\omega$  مقادیر ویژه‌ی رابطه‌ی زیر می‌باشند [۲۰]:

$$(K_0 - M\omega^2 + C_0 i \omega) u = 0 \quad (50-3)$$

فرم بازشده‌ی ماتریسی و برداری  $M$ ،  $K_0$ ،  $C$ ،  $P$  و  $f$  به صورت زیر بیان می‌شود:

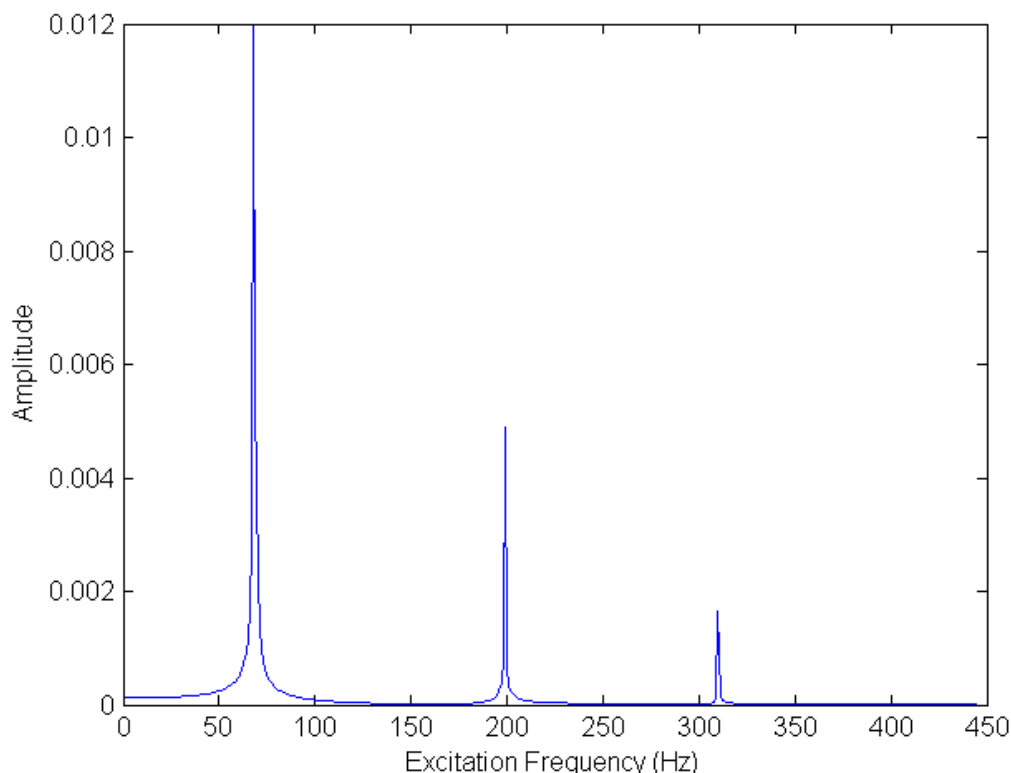
$$M = (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) \begin{bmatrix} \int_0^l W_1^2 dx & \int_0^l W_1 W_2 dx & \dots & \int_0^l W_1 W_n dx \\ \int_0^l W_2 W_1 dx & \int_0^l W_2 W_2 dx & \dots & \int_0^l W_2 W_n dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^l W_n W_1 dx & \int_0^l W_n W_2 dx & \dots & \int_0^l W_n^2 dx \end{bmatrix} \quad (51-3)$$

$$\begin{aligned}
C = & -((2bh_2^3 + I_{b_2})E_{b_2}^* - (2bh_3^3 + I_{b_3})E_{b_3}^*) \left[ \begin{array}{ccc} \int_0^l W_1 W_{1,xxxx} dx & \int_0^l W_1 W_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^l W_1 W_{n,xxxx} dx \\ \int_0^l W_2 W_{1,xxxx} dx & \int_0^l W_2 W_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^l W_2 W_{n,xxxx} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^l W_n W_{1,xxxx} dx & \int_0^l W_n W_{1,xxxx} dx & \dots & \int_0^l W_n W_{n,xxxx} dx \end{array} \right] + \\
& (2bh_2 E_{b_2}^* + 2bh_3 E_{b_3}^*) \left[ \begin{array}{ccc} \int_0^l W_1 W_{1,xx} dx & \int_0^l W_1 W_{2,xx} dx & \dots & \int_0^l W_1 W_{n,xx} dx \\ \int_0^l W_2 W_{1,xx} dx & \int_0^l W_2 W_{2,xx} dx & \dots & \int_0^l W_2 W_{n,xx} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^l W_n W_{1,xx} dx & \int_0^l W_n W_{1,xx} dx & \dots & \int_0^l W_n W_{n,xx} dx \end{array} \right] \quad (\Delta 3-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_0 = & -((2bh_2^3 + I_{b_2})E_{b_2} + (2bh_3^3 + I_{b_3})E_{b_3}) \left[ \begin{array}{ccc} \int_0^l W_1 W_{1,xxxx} dx & \int_0^l W_1 W_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^l W_1 W_{n,xxxx} dx \\ \int_0^l W_2 W_{1,xxxx} dx & \int_0^l W_2 W_{2,xxxx} dx & \dots & \int_0^l W_2 W_{n,xxxx} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^l W_n W_{1,xxxx} dx & \int_0^l W_n W_{1,xxxx} dx & \dots & \int_0^l W_n W_{n,xxxx} dx \end{array} \right] + \\
& (2bh_2 E_{b_2} + 2bh_3 E_{b_3} - T) \left[ \begin{array}{ccc} \int_0^l W_1 W_{1,xx} dx & \int_0^l W_1 W_{2,xx} dx & \dots & \int_0^l W_1 W_{n,xx} dx \\ \int_0^l W_2 W_{1,xx} dx & \int_0^l W_2 W_{2,xx} dx & \dots & \int_0^l W_2 W_{n,xx} dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^l W_n W_{1,xx} dx & \int_0^l W_n W_{1,xx} dx & \dots & \int_0^l W_n W_{n,xx} dx \end{array} \right] \quad (\Delta 4-3)
\end{aligned}$$

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \int_0^l F_0 N_1 dx \\ \int_0^l F_0 N_2 dx \\ \vdots \\ \int_0^l F_0 N_n dx \end{bmatrix} \quad (\Delta 5-3)$$

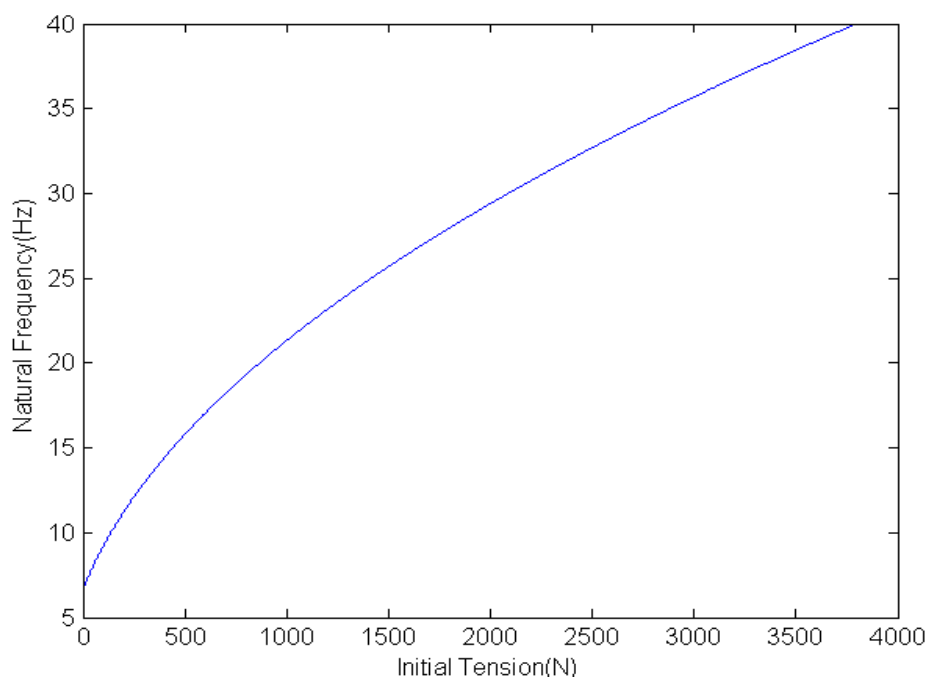
با توجه به جنس مواد انتخاب شده در بخش قبل، نمودار پاسخ فرکانسی (بخش خصوصی پاسخ معادله-ی ارتعاشات اجباری سیستم) برای روش گلرکین در ۵ مود اول و به‌ازای فرکانس‌های تحریک مختلف، به‌صورت زیر حاصل شده است:



شکل ۳-۳- نمودار دامنه‌ی پاسخ فرکانسی سیستم خطی برحسب زمان برای پنج مود اول ارتعاشات

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش عدد مود، دامنه‌ی ارتعاشات پاسخ فرکانسی، کاهش می‌یابد؛ همچنین در فرکانس‌های تحریک برابر با هر یک از فرکانس طبیعی سیستم در مودهای مختلف، پدیده‌ی تشدید رخ داده و دامنه‌ی پاسخ ارتعاشات سیستم به مقدار چشم‌گیری افزایش می‌یابد. در مود اول مقدار تشدید رخ داده شده، به مقدار قابل توجهی بیشتر از سایر مدها می‌باشد. در مدهای سوم و پنجم نیز تحریک، مشاهده می‌شود ولی دامنه‌ی آن رفته رفته با افزایش عدد مدها، کاهش می‌یابد.

به‌ازای مواد انتخابی بخش قبل، اثر کشش کابل بر روی مقدار فرکانس طبیعی، بررسی شده است و تغییرات آن به‌صورت شکل زیر می‌باشد.



شکل ۳-۴- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی سیستم، در مود اول، نسبت به میزان کشش اولیه‌ی سیستم

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار کشش اولیه‌ی سیستم، میزان فرکانس طبیعی سیستم نیز افزایش می‌یابد.

### ۳-۶- نتیجه‌گیری

در این فصل، معادله‌ی حرکت خطی ارتعاشات سیستم، توسط اصل هامیلتون به‌دست آورده شد. معادله‌ی حاصل، یک معادله دیفرانسیل خطی حاصل شد و به کمک روش جداسازی متغیرها و روش گلرکین، پاسخ‌های ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم، به‌دست آورده شدند. البته باید در نظر داشت که پاسخ سیستم به شرایط مرزی وابسته است و از آنجائیکه سیستم مورد نظر، یک کابل دو سر مفصل انتخاب شده بود، لذا شکل مودها و پاسخ سیستم نیز بر اساس همین شرایط مرزی حاصل گشت. بدیهی است که با تغییر شرایط مرزی، پاسخ سیستم و شکل مودها و فرکانس‌های آن نیز تغییر خواهند نمود. تاثیر پارامترهایی نظیر نسبت ضخامت لایه‌ی ویسکوز به ضخامت کابل و یا تاثیر کشش اولیه‌ی کابل بر فرکانس طبیعی خطی، مورد ارزیابی واقع شدند. در بخش ارتعاشات آزاد سیستم، مشاهده شد که با افزایش نسبت ضخامت پوشش به ضخامت کابل، سیستم مورد نظر، میرا تر می‌شود؛

همچنین این افزایش ضخامت پوشش نیز باعث افزایش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود. در بخش ارتعاشات اجباری سیستم خطی نیز اثر کشش اولیه ی کابل، بر بر روی فرکانس طبیعی در مود اول ارتعاشات، مورد ارزیابی قرار گرفت و نتیجه شد که افزایش کشش اولیه ی کابل نیز موجب افزایش فرکانس طبیعی سیستم خواهد شد. نمودار پاسخ فرکانسی سیستم نیز بر حسب دامنه ی تحریک رسم شد و مطابق آن، در نقاطی که فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم برابر می‌شود، افزایش ناگهانی دامنه و تشدید، روی می‌دهد و دامنه ی آن نیز در مود اول ارتعاشات، نسبت به سایر مدها بیشتر می‌باشد. در فصل بعد معادله ی حرکت ارتعاشات سیستم دارای حرکت غیرخطی را به دست آورده و پاسخ آن را از روش‌های مربوطه نیز به دست آورده خواهد شد.



## فصل چهارم:

تحليل غير خطي ارتعاشات جانبی کابل الاستیک  
با روش ویسکوالاستیک

#### ۴-۱- مقدمه

در این فصل حرکت سیستم کابل و پوشش تیر مانند آن، غیرخطی در نظر گرفته می‌شود و معادله‌ی حرکت آن به‌دست آورده خواهد شد. هنگامی که دامنه‌ی ارتعاشات سیستم بزرگ باشد، نوسانات رفتار غیرخطی خواهند داشت و باید طبق معادلات غیر خطی برای آن عمل نمود؛ بنابراین لازم است که کرنش‌ها به‌صورت غیرخطی در نظر گرفته شوند و وارد معادلات شوند. رفتار تیر به‌صورت اویلر-برنولی<sup>۱</sup> انتخاب شده است و شرایط مرزی سیستم نیز از نوع دو سر مفصل خواهد بود. همانند سیستم خطی، در ابتدا با استفاده از اصل هامیلتون، لازم است که معادله‌ی حرکت سیستم، به‌دست آورده شود. سپس با توجه به شرایط مرزی سیستم، پاسخ غیرخطی سیستم به‌دست آورده خواهد شد.

#### ۴-۲- به‌دست آوردن معادله‌ی حرکت غیرخطی ارتعاشات آزاد سیستم

برای به‌دست آوردن معادله‌ی حرکت سیستم لازم است که همانند سیستم خطی، از معادله‌ی لاگرانژ (۱-۳) و اصل هامیلتون استفاده شود.

برای سیستم غیرخطی، کرنش محوری کابل به‌صورت غیرخطی در نظر گرفته می‌شود و کرنش پوشش نیز خطی فرض می‌شود؛ بنابراین رابطه‌ی بین کرنش افقی و خیز جانبی تیر پایینی در محور تار خنثی را با نوشتن روابط کرنش در نقاط اتصال کابل و پوشش آن، می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد [۲۱ و ۲۴]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c &\approx \epsilon_{Nb2}(x, z, t) - h_2 w_{,xx}(x, t) \Rightarrow \\ \epsilon_{Nb2}(x, z, t) &\approx \mathcal{E}_c + h_2 w_{,xx}(x, t) = \frac{1}{2} w_{,x}^2 + h_2 w_{,xx}(x, t) \end{aligned} \quad (1-4)$$

که  $Z_i$  فاصله‌ی هر نقطه از تیر تا تار خنثی مربوط به همان تیر می‌باشد و  $\epsilon_{Nbi}$  نیز کرنش در محل تار خنثی تیر شماره‌ی  $i$  می‌باشد. همچنین با توجه به شکل (۱-۳)، برای پوشش بالایی کابل نیز به‌صورت زیر، رابطه‌ی کرنش محور تار خنثی به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c &\approx \epsilon_{Nb3}(x, z, t) + h_3 w_{,xx}(x, t) \Rightarrow \\ \epsilon_{Nb3}(x, z, t) &\approx \mathcal{E}_c - h_3 w_{,xx}(x, t) = \frac{1}{2} w_{,x}^2 - h_3 w_{,xx}(x, t) \end{aligned} \quad (2-4)$$

<sup>1</sup> Euler Bernouli

رابطه‌های (۱-۴) و (۲-۴)، تنها کرنش در محل تار خنثی را نمایان می‌کند و رابطه‌ی کلی کرنش، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\epsilon_{Zb2}(x, z, t) \approx \frac{1}{2} w_{,x}^2 + h_2 w_{,xx}(x, t) - z_2 w_{,xx}(x, t) \quad (۳-۴)$$

$$\epsilon_{Zb3}(x, z, t) \approx \frac{1}{2} w_{,x}^2 - h_3 w_{,xx}(x, t) - z_3 w_{,xx}(x, t) \quad (۴-۴)$$

پارامتر  $\epsilon_{Zbi}$ ، کرنش محوری در نقطه‌ی  $Z$  تیر شماره‌ی  $i$  می‌باشد. با جای‌گذاری رابطه‌های (۳-۴) و (۴-۴) در (۱۷-۳) برای پوشش پایینی کابل رابطه‌ی زیر حاصل خواهد شد:

$$\sigma_{b2} = E_{b2} h_2 w_{,xx} - E_{b2} z_2 w_{,xx} + E_{b2}^* h_2 w_{,xxt} - E_{b2}^* z_2 w_{,xxt} + \frac{1}{2} E_{b2} w_{,x}^2 + E_{b2}^* w_{,x} w_{,xt} \quad (۵-۴)$$

و برای پوشش بالایی کابل نیز رابطه‌ی تنش به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_{b3} = -E_{b3} h_3 w_{,xx} - E_{b3}^* h_3 w_{,xxt} - E_{b3} z_3 w_{,xx} - E_{b3}^* z_3 w_{,xxt} + \frac{1}{2} E_{b3} w_{,x}^2 + E_{b3}^* w_{,x} w_{,xt} \quad (۶-۴)$$

اکنون با داشتن انرژی جنبشی و پتانسیل، وریشن‌های هر کدام از بخش‌های معادله‌ی (۱-۳) را می‌توان جداگانه به دست آورد.

انرژی جنبشی سیستم غیر خطی، همانند سیستم خطی خواهد بود و با توجه به غیر خطی بودن کرنش سیستم غیر خطی، برای به دست آوردن انرژی پتانسیل هر یک از بخش‌های مختلف سیستم به صورت زیر عمل خواهد شد:

$$\sigma_c = E_c \epsilon_c = \frac{1}{2} E_c w_{,x}^2 \quad (۷-۴)$$

که  $E_c$  مدول یانگ و  $\epsilon_c$  کرنش محوری کابل الاستیک می‌باشند.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta U_c dt &= \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_1 w_{,x}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_1 w_{,x} \delta w_{,x} dx dt = \\
&\int_{t_1}^{t_2} T_1 w_{,x} \delta w \Big|_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_1 \frac{\partial}{\partial x} (w_{,x}) \delta w dx dt = \\
&\int_{t_1}^{t_2} T_1 w_{,x} \delta w \Big|_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_1 (w_{,xx}) \delta w dx dt \tag{۸-۴}
\end{aligned}$$

حال وریشن انرژی پتانسیل پوشش پایینی کابل را با توجه به رابطه‌های (۴-۵) و (۳-۱۲) می‌توان حساب کرد:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta U_{b2} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A \sigma_{b2} \delta \varepsilon_{b2} dA dx dt + \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_2 w_{,x}^2 = \\
&\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A (E_{b2} h_2^2 w_{,xx} - E_{b2} h_2 z_2 w_{,xx} + E_{b2}^* h_2^2 w_{,xxt} - E_{b2}^* h_2 z_2 w_{,xxt} + \frac{1}{2} E_{b2} h_2 w_{,x}^2 + E_{b2}^* h_2 w_{,x} w_{,xt}) \delta w_{,xx} dA dx dt - \\
&\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A (E_{b2} z_2 h_2 w_{,xx} - E_{b2} z_2^2 w_{,xx} + E_{b2}^* z_2 h_2 w_{,xxt} - E_{b2}^* z_2^2 w_{,xxt} + \frac{1}{2} E_{b2} z_2 w_{,x}^2 + E_{b2}^* h_2 w_{,x} w_{,xt}) \delta w_{,xx} dA dx dt + \\
&\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A (E_{b2} h_2 w_{,x} w_{,xx} - E_{b2} z_2 w_{,x} w_{,xx} + E_{b2}^* h_2 w_{,x} w_{,xxt} - E_{b2}^* z_2 w_{,x} w_{,xxt} + \frac{1}{2} E_{b2} w_{,x}^3 + E_{b2}^* w_{,x}^2 w_{,xt}) \delta w_{,x} dA dx dt + \\
&\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_2 w_{,x} \delta w_{,x} dx dt = \\
&\int_{t_1}^{t_2} ((2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xx} + E_{b2}^* w_{,xxt}) + (2bh_2^2)(\frac{1}{2} E_{b2} w_{,x}^2 + E_{b2}^* w_{,x} w_{,xt})) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt - \\
&\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L ((2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xxx} + E_{b2}^* w_{,xxxt}) + (2bh_2^2)(E_{b2} w_{,x} w_{,xx} + E_{b2}^* (w_{,x} w_{,xxt} + w_{,xx} w_{,xt}))) \delta w_{,x} dx dt + \\
&\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (2bh_2^2 E_{b2} w_{,x} w_{,xx} + 2bh_2^2 E_{b2}^* w_{,x} w_{,xxt} + bh_2 E_{b2} w_{,x}^3 + 2bh_2 E_{b2}^* w_{,x}^2 w_{,xt}) \delta w_{,x} dx dt + \\
&\int_{t_1}^{t_2} T_2 w_{,x} \delta w \Big|_0^L - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_2 w_{,xx} \delta w dx dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left( (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2}w_{,xx} + E_{b2}^*w_{,xxt}) + (2bh_2^2)\left(\frac{1}{2}E_{b2}w_{,x}^2 + 2E_{b2}^*w_{,x}w_{,xt}\right) \right) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \left[ (bh_2)(E_{b2}w_{,x}^3 + 2E_{b2}^*(w_{,x}^2w_{,xt} - w_{,xx}w_{,xt})) - (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2}w_{,xxx} + E_{b2}^*w_{,xxxt}) \right] \delta w \Big|_0^L dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ (bh_2)(3E_{b2}w_{,x}^2w_{,xx} + 2E_{b2}^*(2w_{,x}w_{,xx}w_{,xt} + w_{,x}^2w_{,xxt} - w_{,xxx}w_{,xt} - w_{,xx}w_{,xxt})) - (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2}w_{,xxxx} + E_{b2}^*w_{,xxxxt}) \right] \delta w dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_2 w_{,x} \delta w \Big|_0^L - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_2 w_{,xx} \delta w dx dt \tag{۹-۴}
\end{aligned}$$

پس از به دست آوردن انرژی پتانسیل پوشش پایینی کابل، اکنون برای پوشش بالایی آن نیز رابطه‌ی انرژی پتانسیل را با توجه به رابطه‌های (۴-۶) و (۳-۱۲)، می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta U_{b3} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A \sigma_{b3} \delta \varepsilon_{b3} dA dx dt + \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3 w_{,x}^2 = \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A \left( -E_{b3} h_3^2 w_{,xx} - E_{b3}^* h_3^2 w_{,xxt} - E_{b3} z_3 h_3 w_{,xx} - E_{b3}^* z_3 h_3 w_{,xxt} + \frac{1}{2} E_{b3} h_3 w_{,x}^2 + E_{b3}^* h_3 w_{,x} w_{,xt} \right) \delta w_{,xx} dA dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A \left( -E_{b3} z_3 h_3 w_{,xx} - E_{b3}^* z_3 h_3 w_{,xxt} - E_{b3} z_3^2 w_{,xx} - E_{b3}^* z_3^2 w_{,xxt} + \frac{1}{2} E_{b3} z_3 w_{,x}^2 + E_{b3}^* z_3 w_{,x} w_{,xt} \right) \delta w_{,xx} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A \left( -E_{b3} h_3 w_{,x} w_{,xx} - E_{b3}^* h_3 w_{,x} w_{,xxt} - E_{b3} z_3 w_{,x} w_{,xx} - E_{b3}^* z_3 w_{,x} w_{,xxt} + \frac{1}{2} E_{b3} w_{,x}^3 + E_{b3}^* w_{,x}^2 w_{,xt} \right) \delta w_{,x} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3 w_{,x} \delta w_{,x} dx dt = \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A \left( (h_3^2 + z_3^2)(E_{b3} w_{,xx} + E_{b3}^* w_{,xxt}) - (h_3 + z_3) \left( \frac{1}{2} E_{b3} w_{,x}^2 + E_{b3}^* w_{,x} w_{,xt} \right) + 2E_{b3} h_3 z_3 w_{,xx} + 2E_{b3}^* h_3 z_3 w_{,xxt} \right) \delta w_{,xx} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A \left( -E_{b3} h_3 w_{,x} w_{,xx} - E_{b3} z_3 w_{,x} w_{,xx} - E_{b3}^* h_3 w_{,x} w_{,xxt} - E_{b3}^* z_3 w_{,x} w_{,xxt} + \frac{1}{2} E_{b3} w_{,x}^3 + E_{b3}^* w_{,x}^2 w_{,xt} \right) \delta w_{,x} dA dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3 w_{,x} \delta w_{,x} dx dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xx} + E_{b3}^*w_{,xxt}) - (2bh_3^2)(\frac{1}{2}E_{b3}w_{,x}^2 + E_{b3}^*w_{,x}w_{,xt}))\delta w_{,x} \Big|_0^L dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L ((2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xxx} + E_{b3}^*w_{,xxxt}) - (2bh_3^2)(E_{b3}w_{,x}w_{,xx} + E_{b3}^*w_{,x}w_{,xxt} + E_{b3}^*w_{,xx}w_{,xt}))\delta w_{,x} dxdt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (2bh_3^2E_{b3}w_{,x}w_{,xx} + 2bh_3^2E_{b3}^*w_{,x}w_{,xxt} - bh_3E_{b3}w_{,x}^3 - 2bh_3E_{b3}^*w_{,x}^2w_{,xt})\delta w_{,x} dxdt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_3w_{,x} \delta w \Big|_0^L - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3w_{,xx} \delta w dxdt = \\
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xx} + E_{b3}^*w_{,xxt}) - (2bh_3^2)(\frac{1}{2}E_{b3}w_{,x}^2 + E_{b3}^*w_{,x}w_{,xt}))\delta w_{,x} \Big|_0^L dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} [(2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xxx} + E_{b3}^*w_{,xxxt}) - 2bh_3^2E_{b3}^*w_{,xx}w_{,xt} - bh_3E_{b3}w_{,x}^3 - 2bh_3E_{b3}^*w_{,x}^2w_{,xt}] \delta w \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xxx} + E_{b3}^*w_{,xxxt}) - 2bh_3^2E_{b3}^*w_{,xx}w_{,xt} - 2bh_3^2E_{b3}^*w_{,xx}w_{,xxt} - 3bh_3E_{b3}w_{,x}^2w_{,xx} - \\
& 4bh_3E_{b3}^*w_{,x}w_{,xx}w_{,xt} - 2bh_3E_{b3}^*w_{,x}^2w_{,xxt}] \delta w dx + \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_3w_{,x} \delta w \Big|_0^L - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3w_{,xx} \delta w dxdt \tag{۱۰-۴}
\end{aligned}$$

با جایگذاری رابطه‌های (۳-۲۱)، (۴-۸) و (۴-۹) و (۴-۱۰) در معادله هامیلتون نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) w_{,t}]_f \delta w dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_1 w_{,x} \delta w \Big|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_1 w_{,xx} \delta w dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xx} + E_{b2}^* w_{,xxt}) + (2bh_2^2)(\frac{1}{2} E_{b2} w_{,x}^2 + 2E_{b2}^* w_{,x} w_{,xt})) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} [(bh_2)(E_{b2} w_{,x}^3 + 2E_{b2}^* (w_{,x}^2 w_{,xt} - w_{,xx} w_{,xt})) - (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xxx} + E_{b2}^* w_{,xxxt})] \delta w \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(bh_2)(3E_{b2} w_{,x}^2 w_{,xx} + 2E_{b2}^* (2w_{,x} w_{,xx} w_{,xt} + w_{,x}^2 w_{,xxt} - w_{,xxx} w_{,xt} - w_{,xx} w_{,xxt})) - (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xxxx} + E_{b2}^* w_{,xxxxt})] \delta w dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_2 w_{,x} \delta w \Big|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_2 w_{,xx} \delta w dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3} w_{,xx} + E_{b3}^* w_{,xxt}) - (2bh_3^2)(\frac{1}{2} E_{b3} w_{,x}^2 + E_{b3}^* w_{,x} w_{,xt})) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} [(2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3} w_{,xxx} + E_{b3}^* w_{,xxxt}) - 2bh_3^2 E_{b3}^* w_{,xx} w_{,xt} - bh_3 E_{b3} w_{,x}^3 - 2bh_3 E_{b3}^* w_{,x}^2 w_{,xt}] \delta w \Big|_0^L dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3} w_{,xxxx} + E_{b3}^* w_{,xxxxt}) - 2bh_3^2 E_{b3}^* w_{,xxx} w_{,xt} - 2bh_3^2 E_{b3}^* w_{,xx} w_{,xxt} - 3bh_3 E_{b3} w_{,x}^2 w_{,xx} - \\
& 4bh_3 E_{b3}^* w_{,x} w_{,xx} w_{,xt} - 2bh_3 E_{b3}^* w_{,x}^2 w_{,xxt}] \delta w dx - \\
& \int_{t_1}^{t_2} T_3 w_{,x} \delta w \Big|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L T_3 w_{,xx} \delta w dx dt = 0
\end{aligned}$$

(۱۱-۴)

با توجه به اینکه خواص تیر و کابل در طول و عرض مقطع هایشان ثابت است، بنابراین  $A, I, E^*, E$  و  $\rho$  ثابت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، حاصل معادله‌ی فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [-(\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) w_{,tt} - (-(T_1 + T_2 + T_3) w_{,xx} + \\
& (bh_2)(3E_{b2} w_{,x}^2 w_{,xx} + E_{b2}^* (4w_{,x} w_{,xx} w_{,xt} + 2w_{,x}^2 w_{,xxt} - 2w_{,xxx} w_{,xt} - 2w_{,xx} w_{,xxt})) - \\
& (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xxxx} + E_{b2}^* w_{,xxxxt}) - (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3} w_{,xxxx} + E_{b3}^* w_{,xxxxt}) + \\
& 3bh_3^2 E_{b3} w_{,xxx} w_{,xt} + 4bh_3^2 E_{b3} w_{,xx} w_{,xxt} + 2bh_3 E_{b3} w_{,x}^2 w_{,xx} + 2bh_3 E_{b3}^* w_{,x} w_{,xx} w_{,xt} + \\
& 2bh_3 E_{b3}^* w_{,x}^2 w_{,xxt}] \delta w dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} ((2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xx} + E_{b2}^* w_{,xxt}) + (2bh_2^2)(\frac{1}{2} E_{b2} w_{,x}^2 + E_{b2}^* w_{,x} w_{,xt})) + \\
& (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3} w_{,xx} + E_{b3}^* w_{,xxt}) - (2bh_3^2)(\frac{1}{2} E_{b3} w_{,x}^2 + E_{b3}^* w_{,x} w_{,xt})) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} [-(T_1 + T_2 + T_3) + (bh_2)(E_{b2} w_{,x}^3 + 2E_{b2}^* (w_{,x}^2 w_{,xt} - w_{,xx} w_{,xt})) - (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xxx} + E_{b2}^* w_{,xxx}) + \\
& (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3} w_{,xxx} + E_{b3}^* w_{,xxx}) - 2bh_3^2 E_{b3}^* w_{,xx} w_{,xt} - bh_3 E_{b3} w_{,x}^3 - 2bh_3 E_{b3}^* w_{,x}^2 w_{,xt}] \delta w \Big|_0^L dt = 0
\end{aligned}$$

(۱۲-۴)

از رابطه‌ی فوق معادله‌ی حرکت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
& (\rho_c A_c + \rho_{b2} A_{b2} + \rho_{b3} A_{b3}) w_{,tt} - T w_{,xx} - \\
& (bh_2)(3E_{b2} w_{,x}^2 w_{,xx} + E_{b2}^* (4w_{,x} w_{,xx} w_{,xt} + 2w_{,x}^2 w_{,xxt} - 2w_{,xxx} w_{,xt} - 2w_{,xx} w_{,xxt})) + \\
& (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2} w_{,xxxx} + E_{b2}^* w_{,xxxxt}) + (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3} w_{,xxxx} + E_{b3}^* w_{,xxxxt}) - \\
& 2bh_3^2 E_{b3}^* w_{,xxx} w_{,xt} - 2bh_3^2 E_{b3}^* w_{,xx} w_{,xxt} - 3bh_3 E_{b3} w_{,x}^2 w_{,xx} - 4bh_3 E_{b3}^* w_{,x} w_{,xx} w_{,xt} - \\
& 2bh_3 E_{b3}^* w_{,x}^2 w_{,xxt} = 0
\end{aligned}$$

(۱۳-۴)

همچنین از عبارت سوم معادله‌ی (۱۲-۴) شرایط مرزی نیز به صورت زیر استخراج می‌شوند:



$$\int_0^L [(-T_1 + T_2 + T_3) + (bh_2)(E_{b2}w_{,x}^3 + 2E_{b2}^*(w_{,x}^2w_{,xt} - w_{,xx}w_{,xt})) - (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2}w_{,xxx} + E_{b2}^*w_{,xxx}) + (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xxx} + E_{b3}^*w_{,xxx}) - 2bh_3^2E_{b3}^*w_{,xx}w_{,xt} - bh_3E_{b3}w_{,x}^3 - 2bh_3E_{b3}^*w_{,x}^2w_{,xt}] \delta w \Big|_0^L dt = 0$$

$$[(-T_1 + T_2 + T_3) + (bh_2)(E_{b2}w_{,x}^3 + 2E_{b2}^*(w_{,x}^2w_{,xt} - w_{,xx}w_{,xt})) - (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2}w_{,xxx} + E_{b2}^*w_{,xxx}) + (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xxx} + E_{b3}^*w_{,xxx}) - 2bh_3^2E_{b3}^*w_{,xx}w_{,xt} - bh_3E_{b3}w_{,x}^3 - 2bh_3E_{b3}^*w_{,x}^2w_{,xt}]_{(0,t)} = 0$$

*or*  $w(0,t) = 0$  (۱۴-۴)

9

$$[(-T_1 + T_2 + T_3) + (bh_2)(E_{b2}w_{,x}^3 + 2E_{b2}^*(w_{,x}^2w_{,xt} - w_{,xx}w_{,xt})) - (2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2}w_{,xxx} + E_{b2}^*w_{,xxx}) + (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xxx} + E_{b3}^*w_{,xxx}) - 2bh_3^2E_{b3}^*w_{,xx}w_{,xt} - bh_3E_{b3}w_{,x}^3 - 2bh_3E_{b3}^*w_{,x}^2w_{,xt}]_{(L,t)} = 0$$

*or*

$$w(L,t) = 0$$

(۱۵-۴)

و از عبارت دوم معادله‌ی (۱۲-۴) شرایط مرزی نیز به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$[((2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2}w_{,xx} + E_{b2}^*w_{,xxt}) + (bh_2^2)(E_{b2}w_{,x}^2 + 2E_{b2}^*w_{,x}w_{,xt})) + (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xx} + E_{b3}^*w_{,xxt}) - (bh_3^2)(E_{b3}w_{,x}^2 + 2E_{b3}^*w_{,x}w_{,xt})]_{(0,t)} = 0$$

*or* (۱۶-۴)

$$w_{,x}(0,t) = 0$$

9

$$[((2bh_2^3 + I_{b2})(E_{b2}w_{,xx} + E_{b2}^*w_{,xxt}) + (bh_2^2)(E_{b2}w_{,x}^2 + 2E_{b2}^*w_{,x}w_{,xt})) + (2bh_3^3 + I_{b3})(E_{b3}w_{,xx} + E_{b3}^*w_{,xxt}) - (bh_3^2)(E_{b3}w_{,x}^2 + 2E_{b3}^*w_{,x}w_{,xt})]_{(L,t)} = 0$$

*or* (۱۷-۴)

$$w_{,x}(L,t) = 0$$

که باتوجه به هندسه‌ی شکل مساله و شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل سیستم و یکسان بودن خواص و پارامترهای پوشش بالایی و پوشش پایینی کابل، در نهایت، شرایط مرزی به صورت زیر انتخاب خواهد شد:

$$w(0,t) = 0, w(L,t) = 0, w_{,xx}(0,t) = 0, w_{,xx}(L,t) = 0$$

(۱۸-۴)

#### ۳-۴- تحلیل غیرخطی معادله‌ی حرکت ارتعاشات آزاد سیستم و به‌دست آوردن پاسخ کلی

معادله‌ی حرکت سیستم که در بخش قبل به‌دست آورده شد، یک معادله‌ی غیرخطی می‌باشد، بنابراین برای حل آن و یافتن پاسخ سیستم، نیاز به استفاده از روش‌های معمول برای حل معادله‌های غیرخطی داریم. روش‌های گوناگونی برای حل معادله‌های غیرخطی وجود دارد. در این بخش با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه که در فصل‌های قبل توضیح داده شد، پاسخ معادله‌ی حرکت سیستم به‌دست آورده خواهد شد:

براساس این روش، مقیاس زمانی را به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰]:

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19-4)$$

در روش مقیاس‌های چندگانه، مشتق زمانی به فرم زیر تبدیل می‌شود [۲۰]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (20-4)$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (21-4)$$

که در آن  $\varepsilon$  پارامتر کوچک مخالف صفر و بدون بعد می‌باشد که از آن به‌عنوان معیاری برای دامنه ارتعاش<sup>۱</sup> نام برده می‌شود و  $D_i$  عملگر مشتق زمانی سیستم می‌باشد. برای سادگی روند حل و پرهیز از روابط و پارامترهای طولانی، می‌توان تمام خواص و ویژگی‌های دو پوشش بالایی و پایینی کابل را، یکسان در نظر گرفت؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} h_2 = h_3 = h_b, \quad b_2 = b_3 = b, \quad I_2 = I_3 = I, \\ E_{b2} = E_{b3} = E, \quad E_{b2}^* = E_{b3}^* = E^*, \quad \rho_{b2} = \rho_{b3} = \rho_b \end{aligned} \quad (22-4)$$

بنابراین معادله‌ی حرکت غیرخطی، به‌صورت زیر ساده خواهد شد:

---

<sup>1</sup> Order of amplitude

$$(\rho_c A_c + 2\rho_b A_b)w_{,tt} - Tw_{,xx} + 2(2bh_b^3 + I_b)(Ew_{,xxxx} + E^*w_{,xxxxt}) - 6bh_b E w_{,x}^2 w_{,xx} - 8bh_b E^* w_{,x} w_{,xx} w_{,xt} - 4bh_b E^* w_{,x}^2 w_{,xxt} = 0 \quad (23-4)$$

برای حل معادله‌ی حرکت سیستم غیرخطی و استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، نیاز است که روابط معادله‌ی حرکت سیستم غیرخطی، بی‌بعد شوند؛ بنابراین در ادامه کمیت‌های بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x^* = \frac{x}{L}, w^* = \frac{w}{L}, t^* = \frac{th_b}{L^2} \sqrt{\frac{E}{2\rho_c(1-\nu^2)}} \quad (24-4)$$

بنابراین معادله‌ی حرکت سیستم غیرخطی پس از حذف علامت ستاره از روابط بی‌بعدشده، به صورت زیر خواهد شد:

$$w_{,tt} - \alpha_1 w_{,xx} - \alpha_2 w_{,x}^2 w_{,xx} - \alpha_3 w_{,x} w_{,xx} w_{,xt} - \alpha_4 w_{,x}^2 w_{,xxt} + \alpha_5 w_{,xxxx} + \alpha_6 w_{,xxxxt} = 0 \quad (25-4)$$

که در رابطه‌ی بالا:

$$\alpha_1 = \frac{12TL^2\rho_c(1-\nu^2)}{h_c E(\rho_c A_c + 2\rho_b A_b)} \quad (26-4)$$

$$\alpha_2 = \frac{72bh_b L^2\rho_c(1-\nu^2)}{h_c(\rho_c A_c + 2\rho_b A_b)} \quad (27-4)$$

$$\alpha_3 = \frac{8h_b b E^*}{(\rho_c A_c + 2\rho_b A_b)h_c} \sqrt{\frac{12\rho_c(1-\nu^2)}{E}} \quad (28-4)$$

$$\alpha_4 = \frac{4bh_b E^*}{(\rho_c A_c + 2\rho_b A_b)h_c} \sqrt{\frac{12\rho_c(1-\nu^2)}{E}} \quad (29-4)$$

(30-4)

$$\alpha_5 = \frac{24(2bh_b^3 + I_b)\rho_c(1-\nu^2)}{(\rho_c A_c + 2\rho_b A_b)h_c^2}$$

$$\alpha_6 = \frac{2(2bh_b^3 + I_b)E^*}{(\rho_c A_c + 2\rho_b A_b)h_c L^2} \sqrt{\frac{12\rho_c(1-\nu^2)}{E}} \quad (31-4)$$

پاسخ کلی معادله‌ی حرکت (25-4) نیز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [20]:

$$w(x, t, \varepsilon) = \varepsilon w_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_2(x, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3) \quad (32-4)$$

که  $O(\varepsilon^3)$  خطای مرتبه‌ی سوم و  $W$  نیز پاسخ سیستم غیرخطی می‌باشد که به صورت فوق، بسط داده می‌شود؛ همچنین باید توجه داشت که نوع بسط فوق و ظاهر نمودن ضریب  $\varepsilon$  در اولین جمله‌ی بسط، به دلیل جلوگیری از ظاهر شدن ترم‌های غیرخطی در اولین مرتبه‌ی بسط روش مقیاس‌های چندگانه، می‌باشد، زیرا مرتبه‌ی اول می‌بایست خطی و قابل حل از روش‌های معمول معادلات دیفرانسیل خطی باشد [۲۰].

اکنون، با توجه به روش مقیاس‌های چندگانه، معادله (۴-۲۵) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots)(\varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^3 w_3 + \dots) - \\ & \alpha_2 (\varepsilon w_{1,xx} + \varepsilon^2 w_{2,xx} + \varepsilon^3 w_{3,xx} + \dots)(\varepsilon w_{1,x} + \varepsilon^2 w_{2,x} + \varepsilon^3 w_{3,x} + \dots)^2 - \\ & \alpha_3 (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)(\varepsilon w_{1,x} + \varepsilon^2 w_{2,x} + \varepsilon^3 w_{3,x} + \dots) \times \\ & (\varepsilon w_{1,xx} + \varepsilon^2 w_{2,xx} + \varepsilon^3 w_{3,xx} + \dots)(\varepsilon w_{1,x} + \varepsilon^2 w_{2,x} + \varepsilon^3 w_{3,x} + \dots) - \\ & \alpha_4 (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)(\varepsilon w_{1,xxx} + \varepsilon^2 w_{2,xxx} + \varepsilon^3 w_{3,xxx} + \dots)(\varepsilon w_{1,x} + \varepsilon^2 w_{2,x} + \varepsilon^3 w_{3,x} + \dots)^2 + \quad (۳۳-۴) \\ & \alpha_5 (\varepsilon w_{1,xxxx} + \varepsilon^2 w_{2,xxxx} + \varepsilon^3 w_{3,xxxx} + \dots) + \\ & \alpha_6 (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)(\varepsilon w_{1,xxxx} + \varepsilon^2 w_{2,xxxx} + \varepsilon^3 w_{3,xxxx} + \dots) + \\ & -\alpha_1 (\varepsilon w_{1,xx} + \varepsilon^2 w_{2,xx} + \varepsilon^3 w_{3,xx} + \dots) = 0 \end{aligned}$$

ترم‌های هر مرتبه‌ی  $\varepsilon$  را جداگانه نوشته و از جدا کردن ترم‌های مرتبه‌ی اول رابطه‌ی (۴-۳۶) نتیجه می‌شود [۲۰]:

$$O(\varepsilon^1): D_0^2 w_1 + \alpha_5 w_{1,xxxx} + \alpha_6 D_0 w_{1,xxxx} - \alpha_1 w_{1,xx} = 0 \quad (۳۴-۴)$$

از جدا کردن ترم‌های مرتبه‌ی دوم رابطه‌ی (۴-۳۶) نتیجه می‌شود:

$$O(\varepsilon^2): (D_0^2 w_2 + 2D_0 D_1 w_1) + \alpha_5 w_{2,xxxx} + \alpha_6 D_0 w_{2,xxxx} + \alpha_6 D_1 w_{1,xxxx} - \alpha_1 w_{2,xx} = 0 \quad (۳۵-۴)$$

و از جدا کردن ترم‌های مرتبه‌ی سوم رابطه‌ی (۴-۳۶) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^3): & (D_0^2 w_3 + 2D_0 D_1 w_2 + (D_1^2 + 2D_0 D_2) w_1) - \alpha_2 w_{1,x}^2 w_{1,xx} - \alpha_3 w_{1,x} w_{1,xx} D_0 w_{1,x} - \\ & \alpha_4 w_{1,x}^2 D_0 w_{1,xx} + \alpha_5 w_{3,xxxx} + \alpha_6 D_0 w_{3,xxxx} + \alpha_6 D_1 w_{2,xxxx} - \alpha_1 w_{3,xx} = 0 \end{aligned} \quad (۳۶-۴)$$

پاسخ کلی رابطه‌ی (۴-۳۶) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰]:

$$w_1(x, t) = A_{1n}(T_1, T_2) W(x) e^{ia_0 T_0} + c.c \quad (۳۷-۴)$$

که در آن  $A$  دامنه‌ی مختلط مودال است که باید ارزیابی شود.  $i$  عددی موهومی است.  $\omega_0$  نیز مقداری مختلط می‌باشد.

همچنین از آنجایی که سیستم به صورت دو سر مفصل می‌باشد، بنابراین می‌توان فرم کلی شکل مود  $W$  را با توجه به شرایط مرزی سیستم به صورت زیر در نظر گرفت [۲۱]:

$$W_n(x) = B \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (38-4)$$

که در آن  $B$  یک ثابت اختیاری است.

با جای گذاری پاسخ کلی در رابطه‌ی مرتبه اول معادله‌ی حرکت، رابطه‌ی فرکانس ویژه به صورت زیر حاصل خواهد شد [۲۳]:

$$-\omega_0^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \alpha_6 i \omega_0 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \alpha_5 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha_1 = 0 \quad (39-4)$$

معادله‌ی بالا یک معادله‌ی خطی درجه‌ی دوم می‌باشد که پاسخ آن نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2a} \quad (40-4)$$

که در آن:

$$a = -1$$

$$b = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \alpha_6 i$$

$$c = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \alpha_5 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha_1 \quad (41-3)$$

همان‌گونه که پیش‌تر بیان شد، پارامتر  $\omega_0$ ، پارامتری مختلط می‌باشد که فرکانس طبیعی سیستم را می‌توان از آن استخراج نمود.

اکنون پاسخ جمله‌ی مرتبه‌ی اول را در جمله‌ی مرتبه‌ی دوم قرار داده و نتیجه می‌شود:

$$\Rightarrow (D_0^2 w_2 + 2i\omega_0 D_1 A_{1n} W e^{i\omega_0 t}) + \alpha_5 w_{2,xxx} + \alpha_6 D_0 w_{2,xxx} + \alpha_6 D_1 A_{1n} W''' e^{i\omega_0 t} - \alpha_1 w_{2,xx} + c.c = 0 \quad (42-4)$$

از آنجائیکه  $\exp(i\omega_n T_0)$  جمله‌ی سکولار می‌باشد و باید آن را از بین برد، بنابراین لازم است که [۲۰]:

$$D_1 A_{1n}(T_1, T_2) = 0 \quad (۴۳-۴)$$

عبارت فوق، در صورتی برقرار است که:

$$A_{1n} = A_{1n}(T_2) \quad (۴۴-۴)$$

یعنی اینکه  $A_{1n}$ ، تنها تابعی از  $T_2$  می‌باشد. بنابراین، مرتبه‌ی دوم معادله‌ی حرکت، به صورت زیر خواهد شد:

$$\Rightarrow D_0^2 w_2 + \alpha_5 w_{2,xxxx} + \alpha_6 D_0 w_{2,xxxx} - \alpha_1 w_{2,xx} + c.c = 0 \quad (۴۵-۴)$$

پاسخ جمله‌ی مرتبه‌ی دوم را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت [۲۱]:

$$w_2(x, t) = A_{2n}(T_1, T_2) W(x) e^{i\omega_0 T_0} + c.c \quad (۴۶-۴)$$

اکنون پاسخ‌های جمله‌های مرتبه‌ی اول و دوم، را در جمله‌ی مرتبه‌ی سوم قرار داده و با قرار دادن (۴۴-۴) و (۴۶-۴) در (۳۶-۴) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & (D_0^2 w_3 + 2i\omega_0 D_1 A_2 e^{i\omega_0 t} W + D_1^2 A_1 e^{i\omega_0 t} W + 2i\omega_0 D_2 A_1 e^{i\omega_0 t} W) - \\ & \alpha_2 (A_1 W' e^{i\omega_0 t} + \bar{A}_1 \bar{W}' e^{-i\omega_0 t})^2 (A_1 W'' e^{i\omega_0 t} + \bar{A}_1 \bar{W}'' e^{-i\omega_0 t}) - \\ & \alpha_3 (A_1 W' e^{i\omega_0 t} + \bar{A}_1 \bar{W}' e^{-i\omega_0 t}) (A_1 W'' e^{i\omega_0 t} + \bar{A}_1 \bar{W}'' e^{-i\omega_0 t}) (i\omega_0 A_1 W' e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 \bar{A}_1 \bar{W}' e^{-i\omega_0 t}) - \\ & \alpha_4 (A_1 W' e^{i\omega_0 t} + \bar{A}_1 \bar{W}' e^{-i\omega_0 t})^2 (i\omega_0 A_1 e^{i\omega_0 t} W'' - i\omega_0 \bar{A}_1 \bar{W}'' e^{-i\omega_0 t}) + \alpha_5 w_{3,xxxx} + \\ & \alpha_6 D_0 w_{3,xxxx} + \alpha_6 D_1 A_2 e^{i\omega_0 t} W''' - \alpha_1 w_{3,xx} + c.c = 0 \\ \Rightarrow & (D_0^2 w_3) - \alpha_1 w_{3,xx} + \alpha_5 w_{3,xxxx} + \\ & \alpha_6 D_0 w_{3,xxxx} = -[(2i\omega_0 D_1 A_2 W + 2i\omega_0 D_2 A_1 W) - \\ & \alpha_2 (A_1^2 \bar{A}_1 W'^2 \bar{W}'' + 2A_1^2 \bar{A}_1 W' \bar{W} \bar{W}'') - \\ & (\alpha_3 i\omega_0) (A_1^2 \bar{A}_1) ((W'^2 \bar{W}'' + W' \bar{W}' W'') - W' W'' \bar{W}') - \\ & (\alpha_4) (-i\omega_0 A_1^2 \bar{A}_1 W'^2 \bar{W}'' + 2i\omega_0 A_1^2 \bar{A}_1 W' \bar{W} \bar{W}'') + \alpha_6 D_1 A_2 W'''] e^{i\omega_0 t} \quad (۴۷-۴) \\ & + c.c + N.S.T = 0 \end{aligned}$$

در رابطه‌ی فوق CC بیانگر مزدوج مختلط و NST بیانگر جمله‌های غیر سکولار، می‌باشد [۲۰].  
 بخش غیرهمگن معادله‌ی (۴-۴۷) در صورتی دارای پاسخ است که شرایط حل‌پذیری صادق باشد. این  
 شرایط بیان می‌کند که عبارت سمت راست معادله‌ی (۴-۴۷) باید عمود بر پاسخ معادله‌ی مرتبه‌ی  
 اول، یعنی  $w_1$  باشد. پس از اعمال این شرایط برای معادله‌ی (۴-۴۷) و با در نظر گرفتن اینکه ضرایب  
 $exp(i\omega_0 T_0)$  جمله‌های سکولار می‌باشند که باید از بین بروند [۲۰ و ۲۵]؛ بنابراین با توجه به رابطه-  
 ی (۴-۴۵) و رابطه‌ی فوق، نتیجه می‌شود:

$$r_1(2i\omega_0 D_1 A_2 + 2i\omega_0 D_2 A_1) - \alpha_2(r_2 + 2r_3)A_1^2 \bar{A}_1 - (r_4 \alpha_3 i \omega_0)(A_1^2 \bar{A}_1) - \alpha_4(-i\omega_0 r_2 + 2i\omega_0 r_3)A_1^2 \bar{A}_1 + \alpha_6 D_1 A_2 r_5 = 0 \quad (4-48)$$

که در آن:

$$r_1 = \int_0^L W^2 dx \quad (4-49)$$

$$r_2 = \int_0^L W'^2 \bar{W}'' W dx \quad (4-50)$$

$$r_3 = \int_0^L W' \bar{W}' \bar{W}'' W dx \quad (4-51)$$

$$r_4 = \int_0^L W'^2 \bar{W}'' W dx \quad (4-52)$$

$$r_5 = \int_0^L W''' W dx \quad (4-53)$$

در نتیجه لازم است که:

$$D_1 A_{2n}(T_1, T_2) = 0 \quad (4-54)$$

$$A_{2n} = A_{2n}(T_2) \quad (4-55)$$

عبارت فوق، در صورتی برقرار است که:  
 یعنی اینکه  $A_{2n}$ ، تنها تابعی از  $T_2$  می‌باشد.

بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$i\omega_0[r_1(2D_2A_1) - \alpha_4(-r_2 + 2r_3)(A_1^2\bar{A}_1) - r_4\alpha_3(A_1^2\bar{A}_1)] - \alpha_2(r_2 + 2r_3)A_1^2\bar{A} = 0 \quad (56-4)$$

اکنون پارامتر  $A_{1n}$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰]:

$$A_{1n} = \frac{1}{2} a_n (T_2) e^{i\beta_n(T_2)} \quad (57-4)$$

در نتیجه:

$$i\omega_0[2r_1(a' + ia\beta')e^{i\beta} - \alpha_4(-r_2 + 2r_3)(a^3e^{i\beta}) - r_4\alpha_3(a^3e^{i\beta})] - \alpha_2(r_2 + 2r_3)(a^3e^{i\beta}) = 0 \quad (58-4)$$

اکنون از جدا نمودن هر یک از ترم‌های حقیقی و موهومی رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود [۲۰]:

از صفر قرار دادن قسمت حقیقی رابطه‌ی فوق نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{part : IM} = 0 &\Rightarrow -2r_1a' = (\alpha_4(-r_2 + 2r_3) + r_4\alpha_3)(a^3) \\ \Rightarrow a &= \sqrt{\frac{1}{(K_1T_2 + a_0)}}, K_1 = \frac{(\alpha_4(-r_2 + 2r_3) + r_4\alpha_3)}{r_1} \end{aligned} \quad (59-4)$$

همچنین از صفر قرار دادن قسمت موهومی رابطه‌ی (۵۵-۴) نتیجه می‌شود [۱۰]:

$$\begin{aligned} \text{part : RE} = 0 &\Rightarrow \beta' = K_2a^2 \\ \Rightarrow \beta &= K_2a^2T_2 + \beta_0 = K_2\varepsilon^2a^2t + \beta_0 \\ K_2 &= -\frac{\alpha_2(r_2 + 2r_3)}{2r_1\omega_0} \end{aligned} \quad (60-4)$$

همچنین با توجه به معادله‌ی (۶۰-۴) معادله‌ی کلی فرکانس طبیعی غیرخطی سیستم نیز از رابطه‌ی زیر که مقداری موهومی می‌باشد، استخراج خواهد شد [۲۰]:

$$S = \omega_0 + K_2\varepsilon^2a^2 + O(\varepsilon^3) \quad (61-4)$$



همچنین با توجه به معادله‌های (۳۷-۴) و (۳۲-۴)، پاسخ نهایی سیستم، به صورت زیر نتیجه می‌شود:

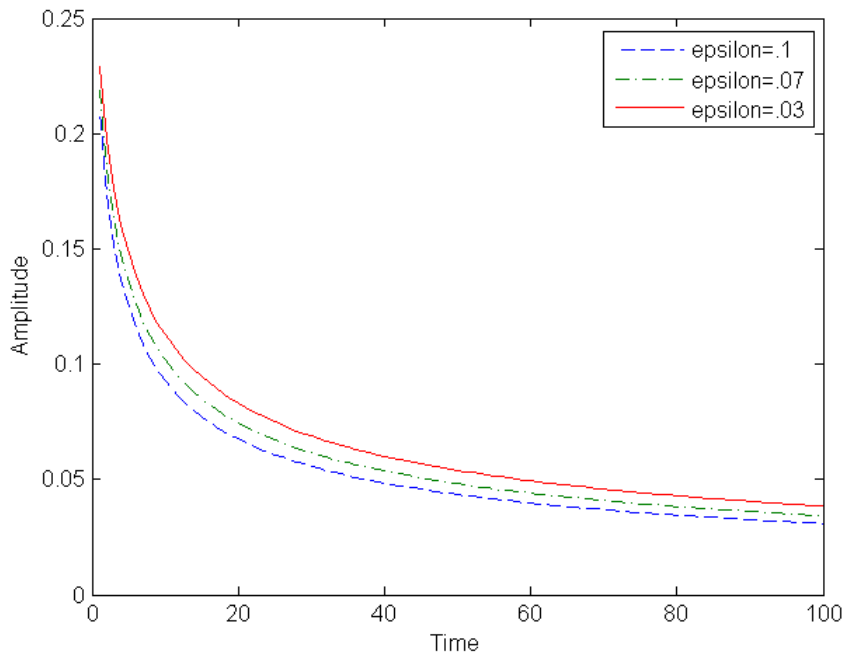
$$w_n(x,t) = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{2}{(K_1 \varepsilon^2 T_0 + a_0)}} \left( e^{i(a_0 T_0 + \beta)} + e^{-i(a_0 T_0 + \beta)} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} + O(\varepsilon^2) \quad (۶۲-۴)$$

باید توجه داشت که پارامترهای  $a_0$  و  $\beta_0$  مقدارهایشان مجهول است و بانوجه به رابطه‌ی پاسخ کلی سیستم، بایستی توسط شرایط اولیه به دست آیند [۲۲].  
شرایط اولیه به صورت جابجایی اولیه‌ی کوچک و مخالف صفر و سرعت اولیه‌ی صفر، در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} w_n(x, 0) = w_0 \\ w_{,t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (۶۳-۴)$$

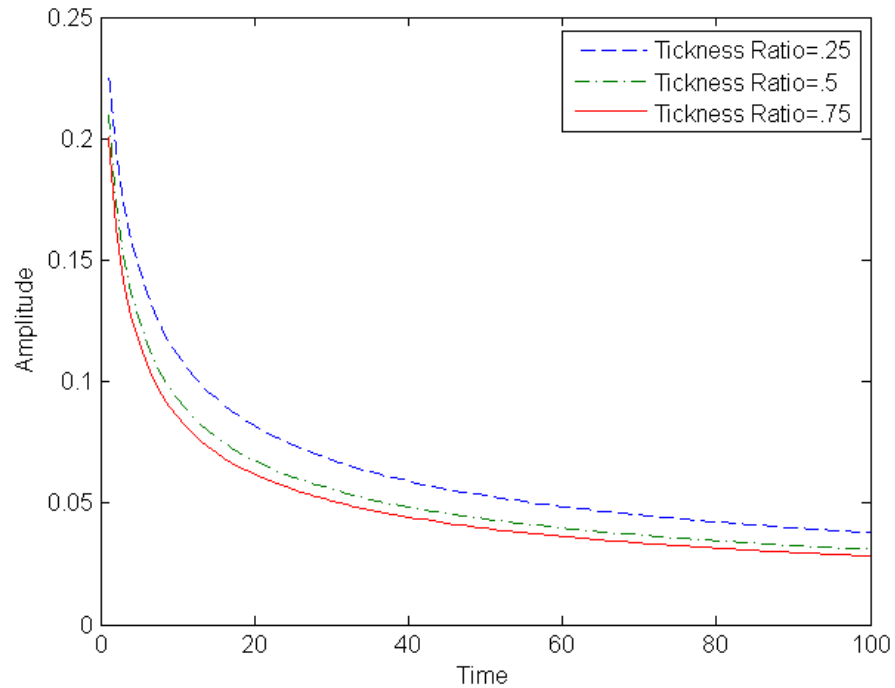
با اعمال شرایط اولیه‌ی فوق، بر معادله‌ی (۶۲-۴)، مقادیر  $a_0$  و  $\beta_0$  به دست می‌آیند و سپس با قرار دادن مقادیر عددی پارامترهای سیستم، نمودارهای مربوطه را رسم نمود.

با در نظر گرفتن شرایط و مقادیر جدول ۳-۱ بخش قبل، برای این سیستم در حالت غیرخطی، نمودار دامنه بر حسب زمان، در مود اول و برای حالت‌های مختلف، به صورت زیر خواهد شد:



شکل ۴-۱- نمودار تغییرات دامنه بر حسب مقادیر مختلف پارامتر ضریب معیار دامنه ( $\varepsilon$ )

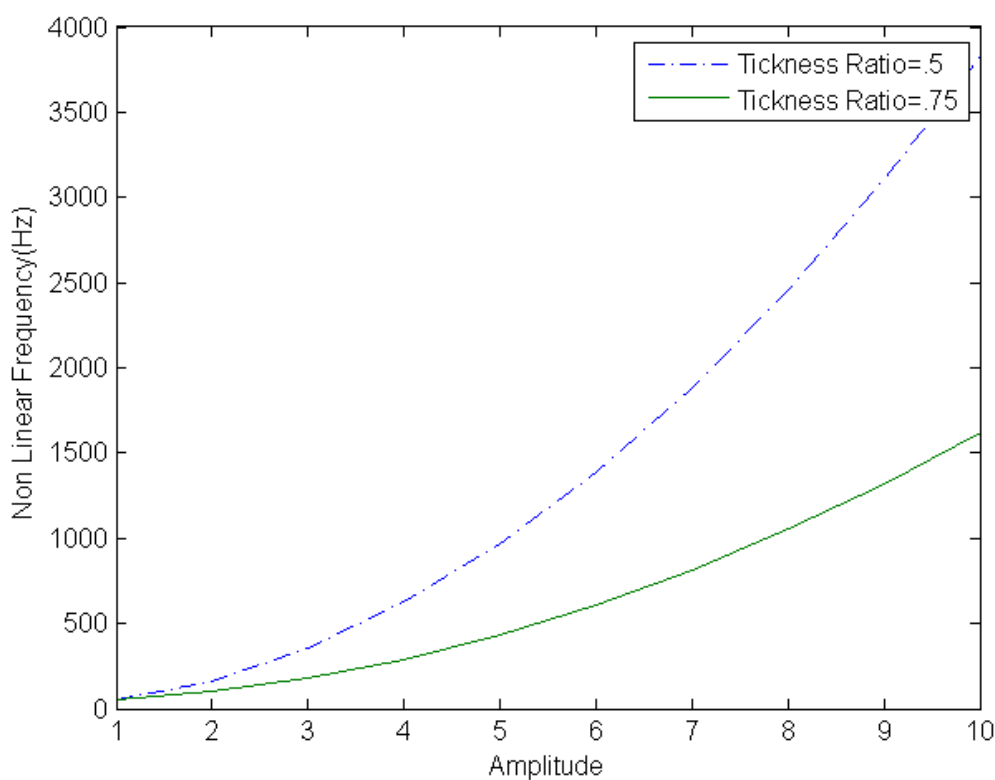
ملاحظه می‌شود که با افزایش مقدار پارامتر  $\varepsilon$ ، کاهش دامنه سریع‌تر و بیشتر روی خواهد داد.



شکل ۴-۲- نمودار تغییرات دامنه برحسب زمان، برای نسبت‌های مختلف ضخامت پوشش ویسکوز به ضخامت کابل

نمودار فوق مشخص می‌کند که با افزایش ضخامت لایه‌ی ویسکوز، میزان کاهش دامنه بیشتر می‌شود و سیستم سریعتر به حالت تعادل خواهد رسید.

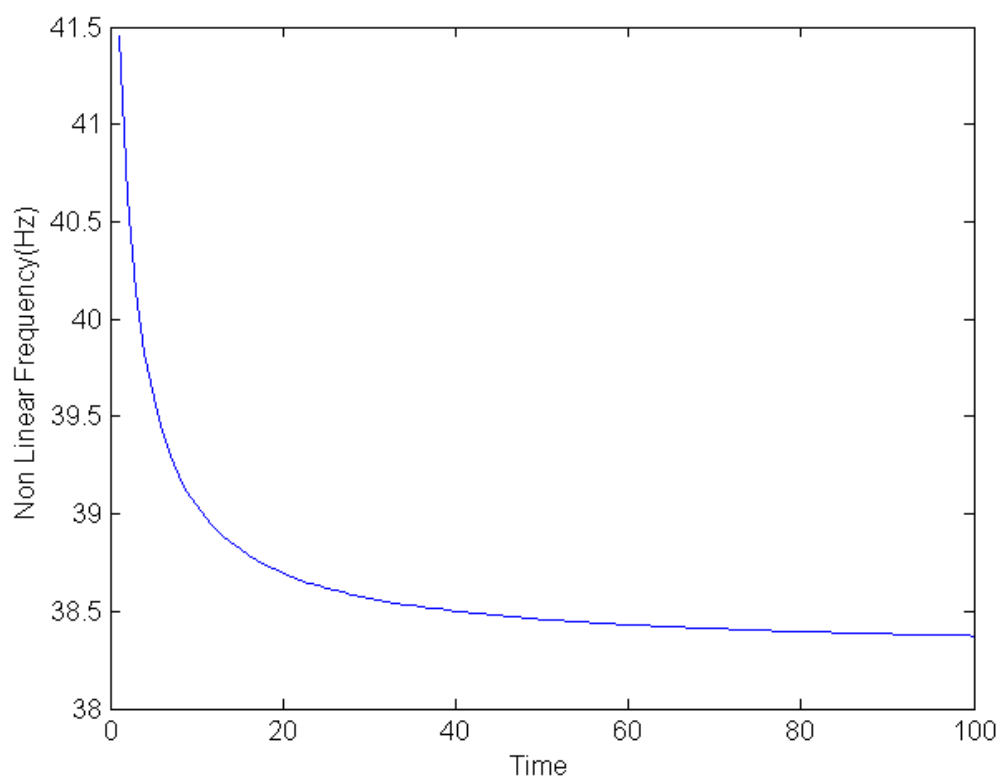
نمودار تغییرات فرکانس برحسب دامنه، با توجه به رابطه‌ی (۴-۵۸)، به صورت زیر خواهد شد:



شکل ۳-۴- نمودار تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب دامنه‌ی ارتعاشات، برای نسبت‌های مختلف ضخامت پوشش ویسکوز به ضخامت کابل

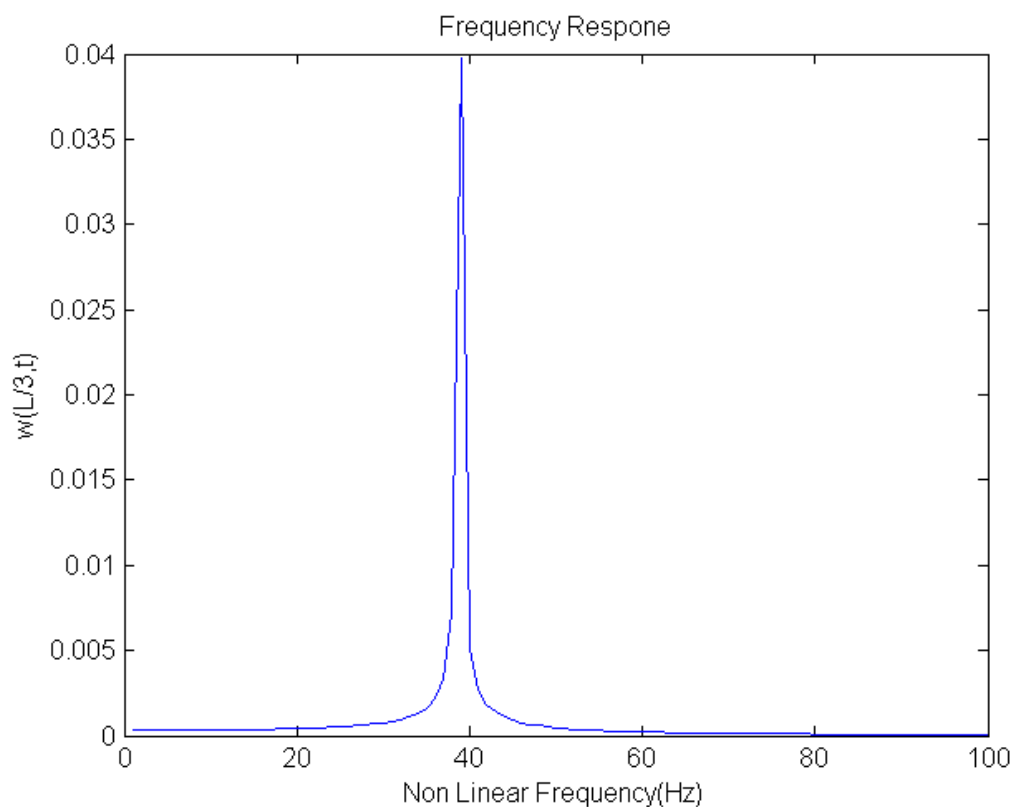
همانند شکل (۳-۴)، مشخص می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت پوشش ویسکوز به ضخامت کابل و در نتیجه با افزایش میرایی سیستم، تغییرات فرکانس برحسب دامنه کمتر می‌شود.

همان‌گونه که از رابطه‌ی (۴-۵۸) به دست آمد، فرکانس غیرخطی سیستم، تابعی از دامنه و در نتیجه تابعی از زمان می‌باشد؛ بنابراین می‌توان تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب زمان را در مد اول ارتعاشات، به صورت زیر رسم نمود:



شکل ۴-۴- نمودار تغییرات فرکانس بر حسب زمان

همانند شکل (۴-۴)، در نهایت فرکانس غیرخطی در مد اول، به سمت مقداری محدود و نزدیک به ۴۰ HZ میل خواهد کرد. اکنون با توجه به مقدار نهایی فرکانس غیرخطی، نمودار پاسخ فرکانسی سیستم نسبت به فرکانس غیرخطی را می توان رسم نمود:



شکل ۴-۵- نمودار پاسخ فرکانسی سیستم برای مد اول

مشاهده می‌شود که تشدید پاسخ سیستم در حوالی فرکانس‌های غیرخطی روی خواهد داد.

#### ۴-۴- به دست آوردن پاسخ اجباری ارتعاشات غیرخطی سیستم

برای بررسی حالتی که در آن نیروی تحریک خارجی به صورت بار گسترده‌ی هارمونیک بر روی سیستم اعمال می‌شود، با توجه به فرکانس تحریک، حالت‌های مختلفی مد نظر قرار می‌گیرد که در ادامه، هر یک از این حالت‌ها مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

#### ۴-۴-۱- حالت اول: تحریک اولیه<sup>۱</sup>

در تحریک اجباری سیستم، مهمترین مساله رزونانس یا تشدید سیستم می‌باشد؛ زمانی که رزونانس در حوالی فرکانس طبیعی سیستم اتفاق بیافتد و به آن تحریک اولیه می‌گویند و در این حالت:

$$\Omega \approx \omega_0 \quad (۴-۶۴)$$

در تحریک غیرخطی، به جای بحث بر روی فرکانس تحریک، پارامتر تنظیم<sup>۲</sup> را در معادلات ایجاد می‌نمایند و عموماً به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega \approx \omega_0 + \varepsilon^2 \delta \quad (۴-۶۵)$$

که در این رابطه،  $\delta$  پارامتر تنظیم می‌باشد.

با توجه به اینکه فرکانس خطی سیستم،  $\omega_0$  می‌باشد و برای اینکه بتوان یک حل تقریبی یکنواخت معتبر برای این مساله پیدا نمود، می‌بایست مرتبه‌ی نیروی تحریک را به گونه‌ای انتخاب نمود که همراه با میرایی و جمله‌های غیرخطی در مساله ظاهر شود، در نتیجه فرض می‌شود که  $F_0 \approx \varepsilon^3 F_0$  باشد [۲۱].

معادله‌ی حرکت اجباری ارتعاشات غیرخطی، به صورت زیر خواهد بود:

$$w_{,tt} - \alpha_1 w_{,xx} - \alpha_2 w_{,x}^2 w_{,xx} - \alpha_3 w_{,x} w_{,xx} w_{,xt} - \alpha_4 w_{,x}^2 w_{,xxt} + \alpha_5 w_{,xxxx} + \alpha_6 w_{,xxxxt} = F_0 e^{i\Omega t} \quad (۴-۶۶)$$

برای تحلیل غیرخطی رابطه‌ی (۴-۶۶)، ابتدا با استفاده از روش جداسازی متغیرها، پاسخ کلی آن، به صورت رابطه‌ی زیر فرض می‌شود [۲۰]:

(۴-۶۷)

$$w(x, t) = W_k(x) p_k(t)$$

که در آن  $W_k(x)$  تمام شرایط مرزی هندسی و طبیعی مساله را ارضا کرده و تا حداقل بالاترین مرتبه‌ی مشتق مکانی معادله‌ی دیفرانسیل حرکت، مشتق‌پذیر است و با توجه به شرایط مساله، به-

صورت  $W_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$  در نظر گرفته می‌شود. توابع نامشخص هستند که باید به دست آیند.

<sup>1</sup> Primary resonance

<sup>2</sup> Detuning Parameter

با جای گذاری رابطه‌ی (۴-۶۷) در رابطه‌ی (۴-۶۶) رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$-\ddot{p}_k(t)W_k(x) + (\alpha_1 W_{k,xx} - \alpha_5 W_{k,xxx})p_k + \alpha_6 \dot{p}_k W_{k,xxx} + F_0 e^{i\Omega t} + \alpha_2 W_{k,x}^2 W_{k,xx} p_k^3 + (\alpha_3 + \alpha_4) W_{k,x}^2 W_{k,xx} p_k^2 \dot{p}_k = 0 \quad (۴-۶۸)$$

رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت زیر نیز باز نویسی و ساده نمود:

$$M\ddot{p} + C_0 \dot{p} + C p^2 \dot{p} + K p + K p^3 = f e^{i\Omega t} \quad (۴-۶۹)$$

که در آن پارامترهای  $f$ ،  $M$ ،  $C_0$ ،  $C_1$ ،  $K_0$  و  $K_1$  به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۱]:

$$(۴-۷۰)$$

$$f = -F_0$$

$$M = -W(x) \quad (۴-۷۱)$$

$$C_0 = \alpha_6 W_{k,xxx} \quad (۴-۷۲)$$

$$C_1 = (\alpha_3 + \alpha_4) W_{k,x}^2 W_{k,xx} \quad (۴-۷۳)$$

$$K_0 = (\alpha_1 W_{k,xx} - \alpha_5 W_{k,xxx}) \quad (۴-۷۴)$$

$$K_1 = \alpha_2 W_{k,x}^2 W_{k,xx} \quad (۴-۷۵)$$

پاسخ کلی معادله‌ی (۴-۶۶) نیز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰]:

$$p(t, \varepsilon) = \varepsilon p_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 p_2(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3) \quad (۴-۷۶)$$

که  $O(\varepsilon^3)$  خطای مرتبه‌ی سوم و  $p$  نیز پاسخ سیستم غیرخطی می‌باشد که به صورت فوق، بسط داده می‌شود [۲۰]:

اکنون، با توجه به روش مقیاس‌های چندگانه، معادله (۴-۶۸) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
& M(D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2(D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots)(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots) + \\
& C_0(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots) + \\
& C_1(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots)(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots)^2 + \\
& K_0(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots) + K_1(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots)^3 = \varepsilon^3 f e^{i\Omega T_0}
\end{aligned} \tag{۷۷-۴}$$

ترم های هر مرتبه ی  $\varepsilon$  را جداگانه نوشته و از جدا کردن ترم های مرتبه ی اول رابطه ی (۷۷-۴) نتیجه می شود [۲۰]:

$$O(\varepsilon^1) : MD_0^2 p_1 + C_0 D_0 p_1 + K_0 p_1 = 0 \tag{۷۸-۴}$$

از جدا کردن ترم های مرتبه ی دوم رابطه ی (۷۷-۴) نتیجه می شود:

$$O(\varepsilon^2) : M(D_0^2 p_2 + 2D_0 D_1 p_1) + C_0 D_0 p_2 + C_0 D_1 p_1 + K_0 p_2 = 0 \tag{۷۹-۴}$$

و از جدا کردن ترم های مرتبه ی سوم رابطه ی (۷۷-۴) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned}
O(\varepsilon^3) : M(D_0^2 p_3 + 2D_0 D_1 p_2 + (D_1^2 + 2D_0 D_2) p_1) + C_0 D_0 p_3 + \\
C_0 D_1 p_2 + C_0 D_2 p_1 + C_1 D_0 p_1^3 + K_0 p_3 + K_1 p_1^3 = f e^{i\Omega T_0}
\end{aligned} \tag{۸۰-۴}$$

پاسخ کلی رابطه ی (۷۸-۴) به صورت زیر در نظر گرفته می شود [۲۰]:

$$p_1(x, t) = A_{1n}(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + c.c \tag{۸۱-۴}$$

که در آن  $A$  دامنه ی مختلط مودال است که باید ارزیابی شود.  $i$  عددی موهومی است؛  $\omega_0$  نیز مقداری مختلط می باشد [۲۰].

با جای گذاری پاسخ کلی (۸۱-۴) در رابطه ی مرتبه اول معادله ی حرکت، رابطه ی فرکانس ویژه به صورت زیر حاصل خواهد شد [۲۳]:

$$-M\omega_0^2 + C_0 i \omega_0 + K_0 = 0 \tag{۸۲-۴}$$

معادله ی بالا یک معادله ی خطی درجه ی دوم می باشد که پاسخ آن نیز به صورت زیر می باشد:

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{-C_0 i \pm \sqrt{-C_0^2 + 4K_0 M}}{-2M} \tag{۸۳-۴}$$

همان گونه که پیش تر بیان شد، پارامتر  $\omega_0$ ، بیانگر فرکانس طبیعی سیستم می باشد که مقدار آن به صورت رابطه ی بالا به دست آمده است.



با توجه به وجود مواد ویسکوالاستیک در این سیستم، فرکانس نیز مختلط به دست خواهد آمد. اکنون پاسخ جمله‌ی مرتبه‌ی اول را در جمله‌ی مرتبه‌ی دوم قرار داده و نتیجه می‌شود:

$$M(D_0^2 p_2 + 2D_0 D_1(A_1 e^{ia_0 T_0})) + C_0 D_0 p_2 + C_0 D_1(A_1 e^{ia_0 T_0}) + K_0 p_2 + c.c = 0 \quad (۸۴-۴)$$

از آنجائیکه  $e^{ia_0 T_0}$  جمله‌ی سکولار می‌باشد و باید آن را از بین برد، بنابراین لازم است که [۲۰]:

$$D_1 A_{1n}(T_1, T_2) = 0 \quad (۸۵-۴)$$

عبارت فوق، در صورتی برقرار است که:

$$A_{1n} = A_{1n}(T_2) \quad (۸۶-۴)$$

یعنی اینکه  $A_{1n}$  تنها تابعی از  $T_2$  می‌باشد. بنابراین، مرتبه‌ی دوم معادله‌ی حرکت، به صورت زیر خواهد شد:

$$MD_0^2 p_2 + C_0 D_0 p_2 + K_0 p_2 = 0 \quad (۸۷-۴)$$

پاسخ جمله‌ی مرتبه‌ی دوم را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت [۲۱]:

$$w_2(x, t) = A_{2n}(T_1, T_2) e^{ia_0 T_0} + c.c \quad (۸۸-۴)$$

اکنون پاسخ‌های جمله‌های مرتبه‌ی اول و دوم، را در جمله‌ی مرتبه‌ی سوم قرار داده و با قرار دادن (۸۸-۴) و (۸۱-۴) در (۸۰-۴) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & M(D_0^2 p_3 + 2D_0 D_1(A_2(T_1, T_2) e^{ia_0 T_0}) + (D_1^2 + 2D_0 D_2)(A_1(T_2) e^{ia_0 T_0})) + C_0 D_0 p_3 + \\ & C_0 D_1(A_2(T_1, T_2) e^{ia_0 T_0}) + C_0 D_2(A_1(T_2) e^{ia_0 T_0}) + C_1 D_0(3A_1^2(T_2) \bar{A}_1(T_2) e^{ia_0 T_0}) + \\ & K_0 p_3 + K_1(3A_1^2(T_2) \bar{A}_1(T_2) e^{ia_0 T_0}) + c.c + NST = f e^{i(a_0 T_0 + \delta T_2)} \end{aligned} \quad (۸۹-۴)$$

در رابطه‌ی فوق  $cc$  بیانگر مزدوج مختلط و  $NST$  بیانگر جمله‌های غیر سکولار، می‌باشد [۲۰].

ضرایب  $exp(i\omega_0 T_0)$  جمله‌های سکولار می‌باشند که باید از بین بروند [۲۰]؛ بنابراین با توجه به

رابطه‌ی (۸۶-۴) و (۸۹-۴) رابطه‌ی فوق، نتیجه می‌شود:

$$M(2i\omega_0 D_1(A_2(T_1, T_2)) + (D_1^2 + 2i\omega_0 D_2)(A_1(T_2))) + C_0 D_1(A_2(T_1, T_2)) + C_0 D_2(A_1(T_2)) + (C_1 i\omega_0 + K_1)(3A_1^2(T_2)\bar{A}_1(T_2)) - fe^{i\delta T_2} = 0 \quad (90-4)$$

در نتیجه لازم است که:

$$D_1 A_{2n}(T_1, T_2) = 0 \quad (91-4)$$

$$A_{2n} = A_{2n}(T_2)$$

عبارت فوق، در صورتی برقرار است که:

$$(92-4)$$

یعنی اینکه  $A_{2n}$ ، تنها تابعی از  $T_2$  می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$M(2i\omega_0 D_2)(A_1(T_2)) + C_0 D_2(A_1(T_2)) + (C_1 i\omega_0 + K_1)(3A_1^2(T_2)\bar{A}_1(T_2)) - fe^{i\delta T_2} = 0 \quad (93-4)$$

اکنون پارامتر  $A_{1n}$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰]:

$$A_{1n} = \frac{1}{2} a_n(T_2) e^{i\beta_n(T_2)} \quad (94-4)$$

در نتیجه:

$$M(2i\omega_0 D_2)\left(\frac{1}{2}(a(T_2)e^{i\beta(T_2)})\right) + C_0 D_2\left(\frac{1}{2}a(T_2)e^{i\beta(T_2)}\right) + (C_1 i\omega_0 + K_1)\left(\frac{3}{8}a^3(T_2)e^{i\beta(T_2)}\right) - fe^{i\delta T_2 + (i\beta(T_2) - i\beta(T_2))} = 0$$

$$\Rightarrow (Mi\omega_0 + C_0)(a' + ia\beta') + \frac{3}{8}(C_1 i\omega_0 + K_1)a^3 - fe^{i(\delta T_2 - \beta)} = 0 \quad (95-4)$$

اکنون از جدا نمودن هر یک از ترم‌های حقیقی و موهومی رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود [۲۰]:

از صفر قرار دادن قسمت حقیقی رابطه‌ی فوق نتیجه می‌شود:

$$\text{part : IM} = 0 \Rightarrow M \omega_0 a' + C_0 a \beta' + \frac{3}{8} C_1 \omega_0 a^3 - f \sin(\delta T_2 - \beta) = 0 \quad (96-4)$$

همچنین از صفر قرار دادن قسمت موهومی رابطه‌ی (۹۵-۴) نتیجه می‌شود:

$$\text{part : RE} = 0 \Rightarrow -M \omega_0 a \beta' + C_0 a' + \frac{3}{8} K_1 a^3 - f \cos(\delta T_2 - \beta) = 0 \quad (97-4)$$

رابطه‌های (۹۶-۴) و (۹۷-۴) با تبدیل زیر، می‌توان به فرمی مستقل از پارامتر زمان<sup>۱</sup> تبدیل می‌شوند [۲۰]:

$$\delta T_2 - \beta = \gamma \quad (98-4)$$

$$\Rightarrow M \omega_0 a' + C_0 a (\delta - \gamma') + \frac{3}{8} C_1 \omega_0 a^3 - f \sin \gamma = 0$$

$$-M \omega_0 a (\delta - \gamma') + C_0 a' + \frac{3}{8} K_1 a^3 - f \cos \gamma = 0 \quad (99-4)$$

سیستم معادلات فوق به شکل کلی معادلات حالت یک سیستم میرا می‌باشد و برای تعیین مشخصات پاسخ، در ابتدا می‌بایست نقاط سینگولار<sup>۲</sup> مساله را استخراج کرده و سپس پاسخ را در نزدیکی این نقاط، به دست آورد. از آنجائیکه دامنه و فاز در نقطه‌ی سینگولار تغییر نمی‌کنند، پاسخ سینگولار را حرکت حالت پایدار<sup>۳</sup> گویند؛ همچنین طبیعت مسیرها در حوالی نقاط سینگولار نشان می‌دهد که یک اغتشاش کوچک در حرکت حالت پایدار، منجر به کاهش یا افزایش حرکت می‌شود یا خیر و به عبارتی، مشخص‌کننده‌ی پایداری سیستم می‌باشند؛ با در نظر گرفتن این موضوع و برای به دست آوردن حرکت حالت پایدار، باید توجه داشت که این حرکت، زمانی رخ می‌دهد که:

$$a' = \gamma' = 0 \quad (100-4)$$

که رابطه‌ی فوق دقیقاً معادل نقاط سینگولار رابطه‌ی (۹۶-۴) می‌باشد؛ بنابراین نتیجه می‌شود که:

<sup>1</sup> Autonomous

<sup>2</sup> Singular points

<sup>3</sup> Steady state motion

$$\begin{cases} C_0 a \delta + \frac{3}{8} C_1 \omega_0 a^3 - f \sin \gamma = 0 \\ \frac{3}{8} K_1 a^3 - M \omega_0 a \delta - f \cos \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 a \delta + \frac{3}{8} C_1 \omega_0 a^3 = f \sin \gamma \\ \frac{3}{8} K_1 a^3 - M \omega_0 a \delta = f \cos \gamma \end{cases}$$

$$[(C_0 \delta + \frac{3}{8} C_1 \omega_0 a^2)^2 + (\frac{3}{8} K_1 a^2 - M \omega_0 \delta)^2] a^2 = f^2 \quad (101-4)$$

معادله‌ی فوق، به معادله‌ی پاسخ فرکانسی معروف است و بیانگر تغییرات دامنه‌ی حرکت، برحسب پارامتر تنظیم، می‌باشد.

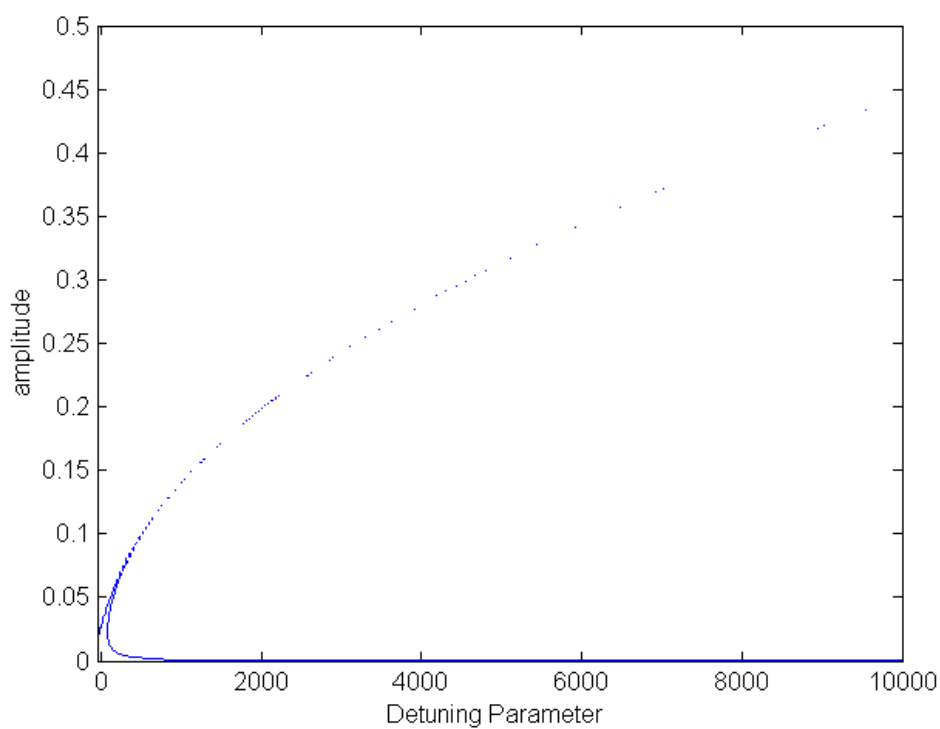
اکنون با توجه به رابطه‌ی (101-4) و با در نظر گرفتن شرایط و مقادیر جدول (3-1) بخش قبل، در نقطه‌ی  $x=L/8$  برای این سیستم، در حالت غیرخطی، نمودار دامنه برحسب پارامتر تنظیم، رسم شده است.

متماایل شدن نمودار پاسخ فرکانسی به سمت راست و یا چپ صفحه مختصات، را به اصطلاح، سخت-شوندگی<sup>1</sup> و نرم‌شوندگی<sup>2</sup> سیستم می‌نامند که ناشی از علامت مثبت یا منفی جمله‌های غیرخطی رابطه‌ی پاسخ فرکانسی بر حسب پارامتر تنظیم، می‌باشد.

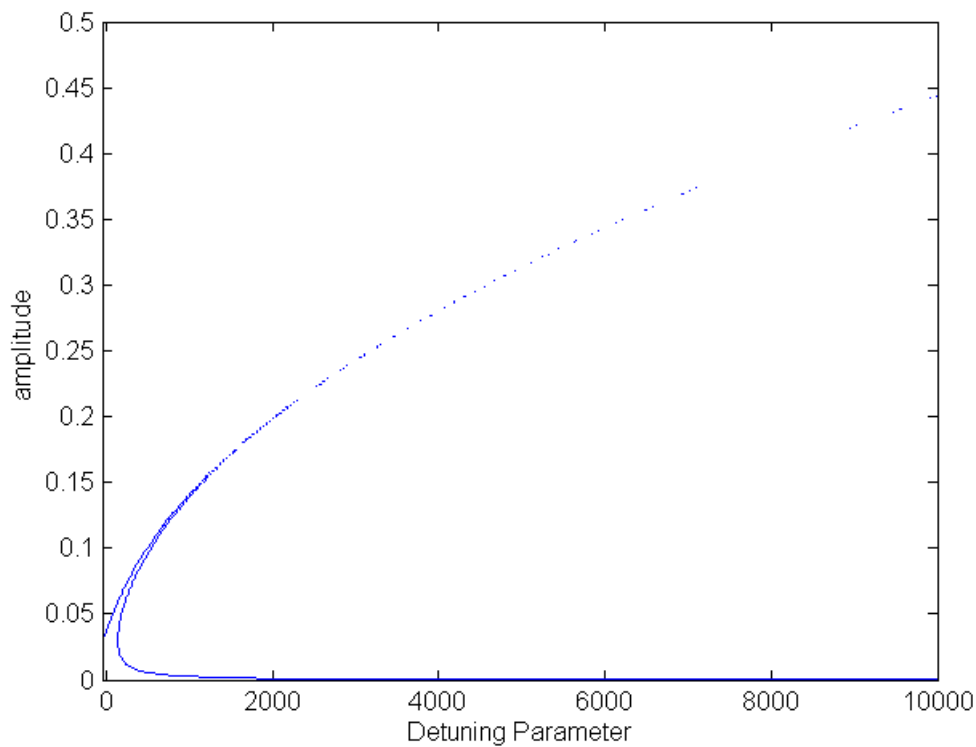
---

<sup>1</sup> Hardening

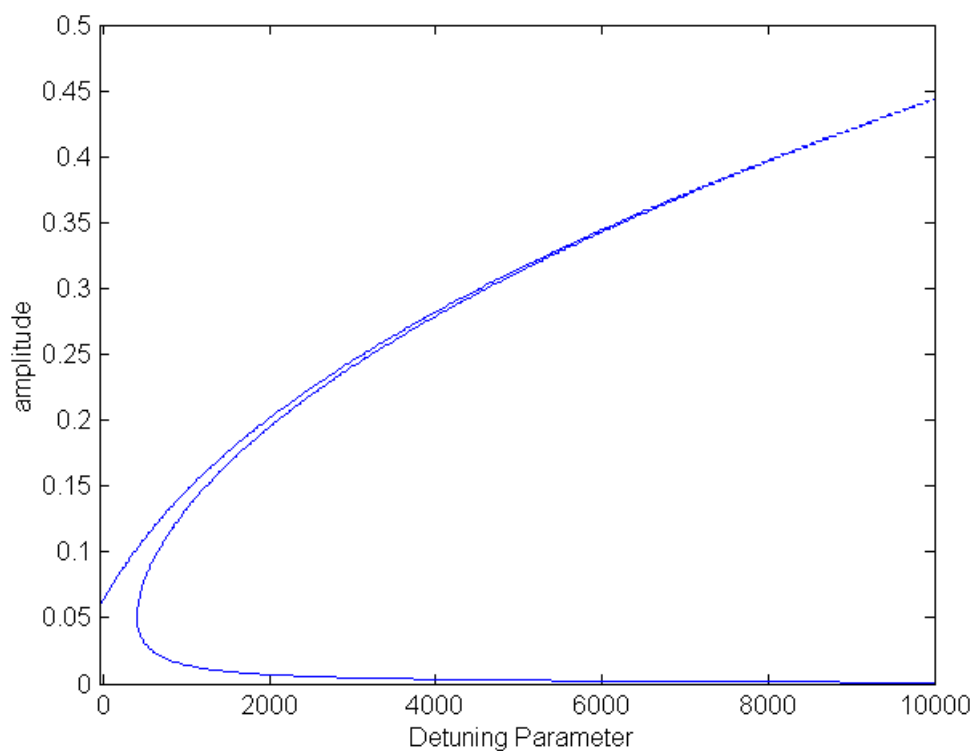
<sup>2</sup> Softening



شکل ۴-۶- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $F_0=400$



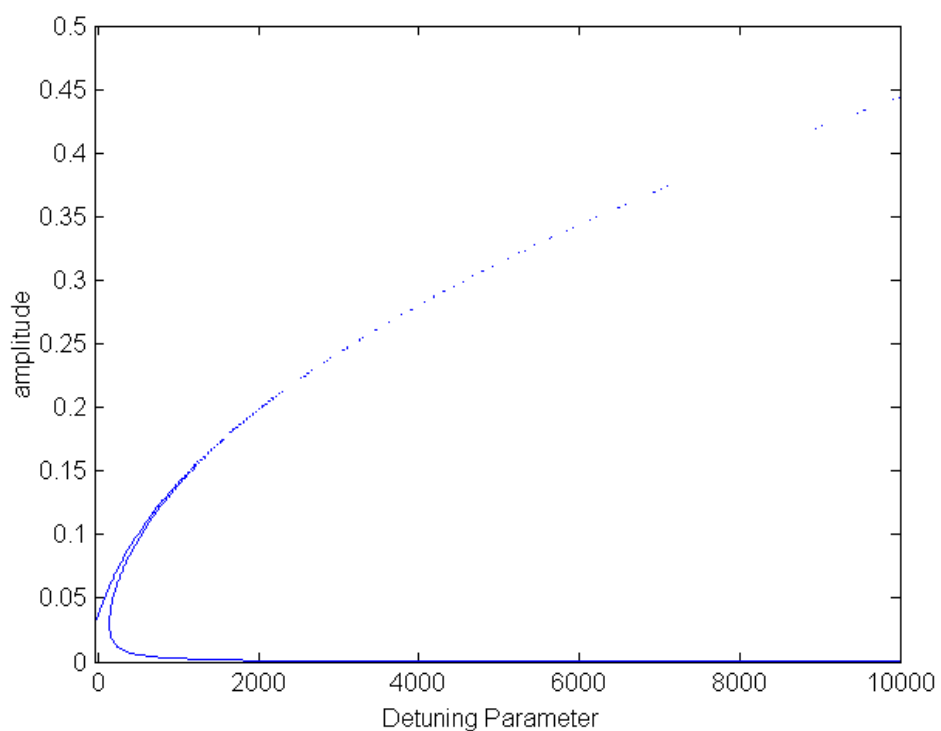
شکل ۴-۷- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $F_0=900$



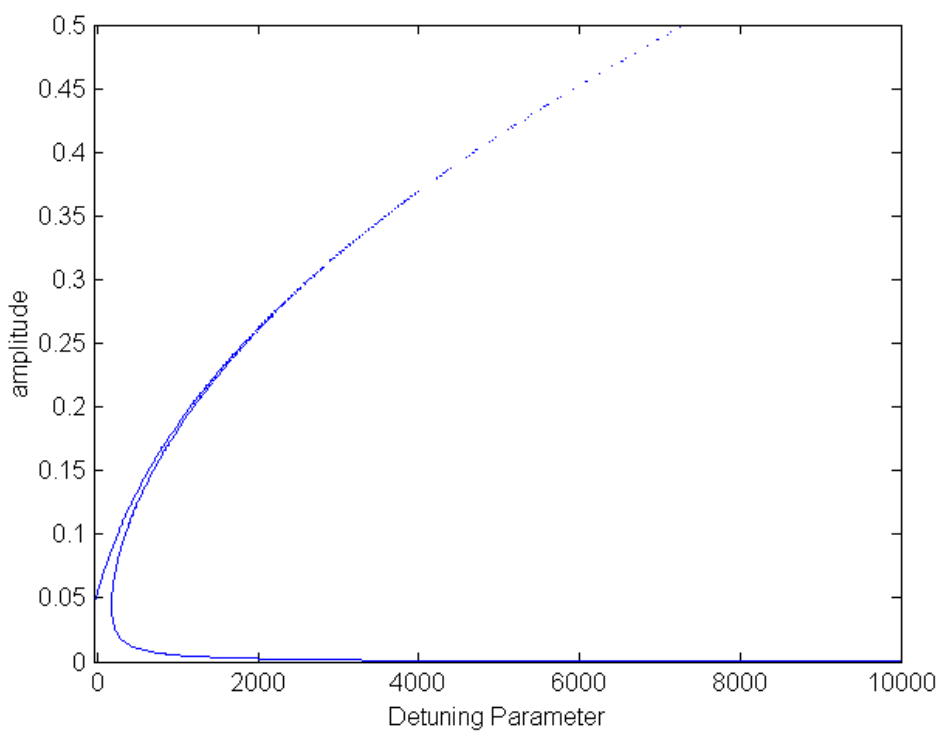
شکل ۴-۸- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $F_0=4500$

از روند نمودارها مشخص می‌شود که با افزایش دامنه‌ی تحریک، میزان دامنه‌ی ارتعاشات نیز بیشتر خواهد شد.

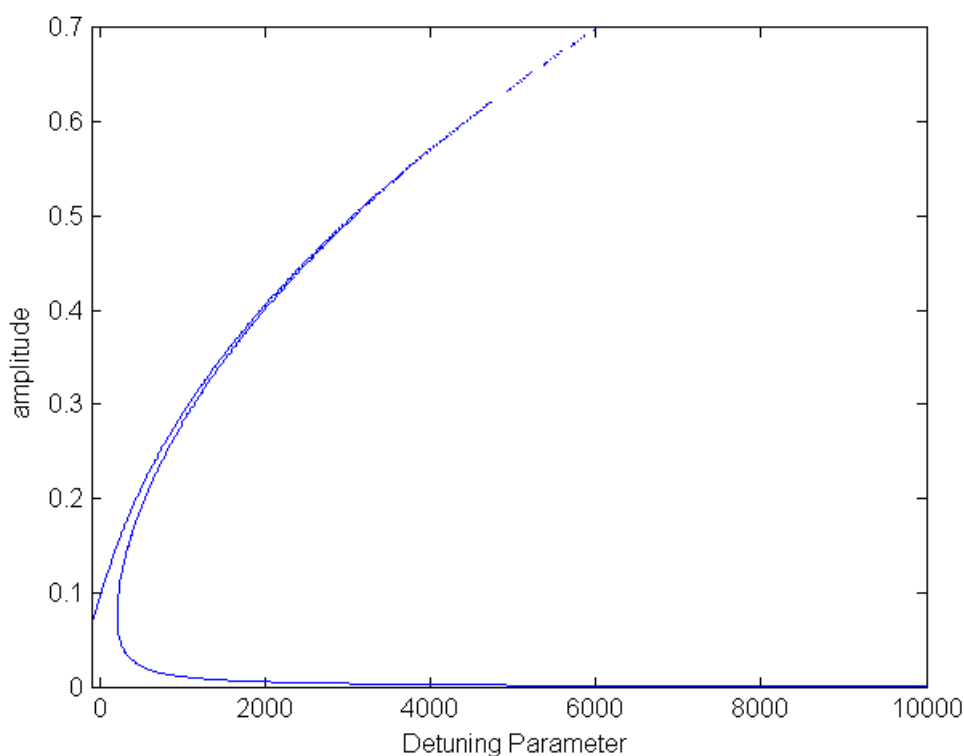
اکنون اثر تغییر ضخامت لایه‌ی ویسکوز را بر میزان دامنه‌ی ارتعاشات، می‌توان مورد بررسی قرار داد. نمودارهای مربوطه به ازای  $F_0=900$  رسم خواهند شد.



شکل ۴-۹- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای نسبت ضخامت پوشش به کابل  $h_b/h_c=0.5$



شکل ۴-۱۰- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای نسبت ضخامت پوشش به کابل  $h_b/h_c=0.25$



شکل ۴-۱۱- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای نسبت ضخامت پوشش به کابل  $h_p/h_c=0.05$

از مقایسه‌ی شکل‌های فوق نتیجه می‌شود که با کاهش نسبت ضخامت لایه‌ی ویسکوز به ضخامت کابل، دامنه‌ی ارتعاشات نیز افزایش خواهد یافت.

#### ۴-۴-۲- حالت دوم: تحریک ثانویه<sup>۱</sup>

برای حالتی که مقدار  $\Omega$  دور از  $\omega_0$  باشد ( $\Omega \ll \omega_0$  یا  $\Omega \gg \omega_0$ )، تاثیرات تحریک می‌تواند کوچک باشد، مگر زمانی که دامنه‌ی آن بزرگ و تاثیرگذار باشد و یا به عبارتی  $F_0 = O(\varepsilon^1)$  باشد؛ بنابراین ابتدا فرض می‌شود که  $F_0 \approx \varepsilon F_1$  باشد تا نیروی تحریک در مرتبه‌ی اول بسط، ظاهر شود و بسط معادله‌ی (۴-۶۸) به صورت زیر خواهد بود:

<sup>1</sup> Secondary resonance



$$\begin{aligned}
& M(D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2(D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots)(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots) + \\
& C_0(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots) + \\
& C_1(D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots)(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots)^2 + \\
& K_0(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots) + K_1(\varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \varepsilon^3 p_3 + \dots)^3 = \varepsilon f e^{i\Omega t}
\end{aligned} \tag{۱۰۲-۴}$$

ترم های هر مرتبه‌ی  $\varepsilon$  را جداگانه نوشته و از جدا کردن ترم‌های مرتبه‌ی اول رابطه‌ی (۱۰۲-۴) نتیجه می‌شود [۲۰]:

$$O(\varepsilon^1): MD_0^2 p_1 + C_0 D_0 p_1 + K_0 p_1 = f e^{i\Omega T_0} \tag{۱۰۳-۴}$$

از جدا کردن ترم‌های مرتبه‌ی دوم رابطه‌ی (۱۰۲-۴) نتیجه می‌شود:

$$O(\varepsilon^2): M(D_0^2 p_2 + 2D_0 D_1 p_1) + C_0 D_0 p_2 + C_0 D_1 p_1 + K_0 p_2 = 0 \tag{۱۰۴-۴}$$

و از جدا کردن ترم‌های مرتبه‌ی سوم رابطه‌ی (۱۰۲-۴) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
O(\varepsilon^3): M(D_0^2 p_3 + 2D_0 D_1 p_2 + (D_1^2 + 2D_0 D_2) p_1) + C_0 D_0 p_3 + \\
C_0 D_1 p_2 + C_0 D_2 p_1 + C_1 D_0 p_1^3 + K_0 p_3 + K_1 p_1^3 = 0
\end{aligned} \tag{۱۰۵-۴}$$

پاسخ کلی رابطه‌ی (۱۰۳-۴) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰]:

$$\begin{aligned}
p(t) = A(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} + \frac{f}{(K_0 - M\Omega^2) - (C_0 i\Omega)} e^{i\Omega T_0} + cc = A(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} + B e^{i\Omega T_0} + cc \\
B = \frac{f}{(K_0 - M\Omega^2) - (C_0 i\Omega)}
\end{aligned} \tag{۱۰۶-۴}$$

که در آن  $A$  ثابت اختیاری،  $i$  عدد موهومی،  $cc$  مزدوج مختلط، و  $\omega_0$  مقادیر مختلط می‌باشد [۲۰]. باید توجه داشت که به دلیل وجود لایه‌ی ویسکوالاستیک، فرکانس طبیعی سیستم به صورت مختلط خواهد بود و  $\omega_0$  نیز مقداری مختلط، فرض می‌شود. اکنون پاسخ جمله‌ی مرتبه‌ی اول را در جمله‌ی مرتبه‌ی دوم قرار داده و نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
M(D_0^2 p_2 + 2D_0 D_1 (A_1 u e^{i\omega_0 T_0} + B e^{i\Omega T_0})) + C_0 D_0 p_2 + \\
C_0 D_1 (A_1 u e^{i\omega_0 T_0} + B e^{i\Omega T_0}) + K_0 p_2 + c.c = 0
\end{aligned} \tag{۱۰۷-۴}$$

از آنجائیکه  $exp(i\omega_n T_0)$  جمله‌ی سکولار می‌باشد و باید آن را از بین برد، بنابراین لازم است که [۲۰]:

$$D_1 A_{1n}(T_1, T_2) = 0 \quad (108-4)$$

عبارت فوق، در صورتی برقرار است که:

$$A_{1n} = A_{1n}(T_2) \quad (109-4)$$

یعنی اینکه  $A_{1n}$ ، تنها تابعی از  $T_2$  می‌باشد. بنابراین، مرتبه‌ی دوم معادله‌ی حرکت، به صورت زیر خواهد شد:

$$MD_0^2 p_2 + C_0 D_0 p_2 + K_0 p_2 = 0 \quad (110-4)$$

پاسخ جمله‌ی مرتبه‌ی دوم را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت [۲۱]:

$$w_2(x, t) = A_{2n}(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + c.c \quad (111-4)$$

اکنون پاسخ‌های جمله‌های مرتبه‌ی اول و دوم، را در جمله‌ی مرتبه‌ی سوم قرار داده، بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & M(D_0^2 p_3 + 2D_0 D_1(A_2(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0}) + (D_1^2 + 2D_0 D_2)(A_1(T_2) e^{i\omega_0 T_0} + B e^{i\Omega T_0})) + \\ & C_0 D_0 p_3 + C_0 D_1(A_2(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0}) + C_0 D_2(A_1(T_2) e^{i\omega_0 T_0} + B e^{i\Omega T_0}) + \\ & C_1 D_0 [A_1^3(T_2) e^{3i\omega_0 T_0} + B^3 e^{3i\Omega T_0} + 3A_1^2(T_2) B e^{i(2\omega_0 + \Omega) T_0} + 3\bar{A}_1^2(T_2) B e^{i(\Omega - 2\omega_0) T_0} + \\ & 3A_1(T_2) B^2 e^{i(\omega_0 + 2\Omega) T_0} + 3A_1(T_2) B^2 e^{i(\omega_0 - 2\Omega) T_0} + 6B^2 A_1(T_2) e^{i\omega_0 T_0} + 3A_1^2(T_2) \bar{A}_1(T_2) e^{i\omega_0 T_0}] + \\ & K_0 p_3 + 3K_1 A_1^2(T_2) \bar{A}_1(T_2) e^{i\omega_0 T_0} + c.c = 0 \end{aligned} \quad (112-4)$$

در رابطه‌ی فوق cc بیانگر مزدوج می‌باشد [۲۰].

ضرایب  $exp(i\omega_0 T_0)$  جمله‌های سکولار می‌باشند که باید از بین بروند [۲۰]؛ برای بررسی حالت رزونانس ثانویه و برای حالت خاص بوجودآمده‌ی این مساله، می‌توان حالت‌های فوق‌هارمونیک<sup>۱</sup> و زیر-هارمونیک<sup>۲</sup> را به صورت زیر مورد بررسی قرار داد:

<sup>1</sup> Super harmonic

<sup>2</sup> Sub harmonic

$$\Omega = \frac{1}{3}\omega_0$$

$$\Omega = 3\omega_0$$

(۱۱۳-۴)

#### ۴-۲-۱- حالت فوق‌هارمونیک رزونانس

در این حالت نیز به منظور بیان نزدیکی  $\Omega$  به  $\omega_0$  از یک پارامتر تنظیم  $\delta$  به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$3\Omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \delta$$

(۱۱۴-۴)

بنابراین برای حذف جمله‌های سکولار، علاوه بر ضرایب  $exp(i\omega_0 T_0)$  در این حالت  $exp(\pm 3i\Omega T_0)$  نیز تولید جملات سکولار می‌کنند و برای حذف جمله‌های سکولار، می‌بایست  $3\Omega T_0$  بر حسب  $\omega_0 T_0$  را به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$3\Omega T_0 = (\omega_0 + \varepsilon^2 \delta) T_0 = \omega_0 T_0 + \delta T_2$$

(۱۱۵-۴)

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۱۱۲-۴) و (۱۱۵-۴) برای حذف جملات سکولار و شرط حل‌پذیری مساله، نتیجه می‌شود:

$$M(2D_0 D_1(A_2(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0}) + 2D_0 D_2(A_1(T_2) e^{i\omega_0 T_0})) +$$

$$C_0 D_1(A_2(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0}) + C_0 D_2(A_1(T_2) e^{i\omega_0 T_0}) + 3K_1 A_1^2(T_2) \bar{A}_1(T_2) e^{i\omega_0 T_0}$$

$$C_1 D_0 [B^3 e^{i(\omega_0 T_0 + \delta T_2)} + 6B^2 A_1(T_2) e^{i\omega_0 T_0} + 3A_1^2(T_2) \bar{A}_1(T_2) e^{i\omega_0 T_0}] = 0 \quad (۱۱۶-۴)$$

در نتیجه لازم است که:

$$D_1 A_{2n}(T_1, T_2) = 0$$

(۱۱۷-۴)

$$A_{2n} = A_{2n}(T_2)$$

عبارت فوق، در صورتی برقرار است که:

(۱۱۸-۴)

یعنی اینکه  $A_{2n}$ ، تنها تابعی از  $T_2$  می‌باشد.

بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$M(2D_0D_2(A_1(T_2)e^{i\omega_0T_0})) + C_0D_2(A_1(T_2)e^{i\omega_0T_0}) + 3K_1A_1^2(T_2)\bar{A}_1(T_2)e^{i\omega_0T_0} \\ C_1D_0[B^3e^{i(\omega_0T_0+\delta T_2)} + 6B^2A_1(T_2)e^{i\omega_0T_0} + 3A_1^2(T_2)\bar{A}_1(T_2)e^{i\omega_0T_0}] = 0 \quad (119-4)$$

اکنون پارامتر  $A_{1n}$  به صورت زیر در نظر گرفته می شود [۲۰]:

$$A_{1n} = \frac{1}{2}a_n(T_2)e^{i\beta_n(T_2)} \quad (120-4)$$

در نتیجه:

$$M(2D_2(\frac{1}{2}a(T_2)i\omega_0e^{i\beta(T_2)})) + C_0D_2(\frac{1}{2}a(T_2)e^{i\beta(T_2)}) + \frac{3}{8}K_1a^3(T_2)e^{i\beta(T_2)} + \\ C_1i[B^3(\omega_0 + \varepsilon^2\delta)e^{i\delta T_2+i\beta(T_2)-i\beta(T_2)} + 3\omega_0B^2a(T_2)e^{i\beta(T_2)} + \frac{3}{8}\omega_0a^3(T_2)e^{i\beta(T_2)}] = 0 \\ \Rightarrow Mi\omega_0(a' + ia\beta') + \frac{1}{2}C_0(a' + ia\beta') + C_1iB^3(\omega_0 + \varepsilon^2\delta)e^{i(\delta T_2-\beta(T_2))} + \\ 3C_1i\omega_0B^2a + \frac{3}{8}(C_1i\omega_0 + K_1)a^3 = 0 \quad (121-4)$$

اکنون از جدا نمودن هر یک از ترم‌های حقیقی و موهومی رابطه‌ی بالا نتیجه می شود [۲۰]:

از صفر قرار دادن قسمت حقیقی رابطه‌ی فوق نتیجه می شود:

$$\text{part : IM} = 0 \Rightarrow M\omega_0a' + \frac{1}{2}C_0a\beta' + C_1B^3(\omega_0 + \varepsilon^2\delta)\cos(\delta T_2 - \beta) + \\ 3C_1\omega_0B^2a + \frac{3}{8}C_1\omega_0a^3 = 0 \quad (122-4)$$

همچنین از صفر قرار دادن قسمت موهومی رابطه‌ی (۱۲۱-۴) نتیجه می شود:

$$\text{part : RE} = 0 \Rightarrow -M\omega_0a\beta' + \frac{1}{2}C_0a' + \frac{3}{8}K_1a^3 - C_1B^3(\omega_0 + \varepsilon^2\delta)\sin(\delta T_2 - \beta) = 0 \quad (123-4)$$

رابطه‌های (۱۲۲-۴) و (۱۲۳-۴) با تبدیل زیر، می توان به فرمی مستقل از پارامتر زمان تبدیل می - شوند [۲۰]:

$$\delta T_2 - \beta = \gamma \quad (124-4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\omega_0 a' + \frac{1}{2}C_0 a(\delta - \gamma') + 3C_1\omega_0 B^2 a + \frac{3}{8}C_1\omega_0 a^3 + C_1 B^3(\omega_0 + \varepsilon^2 \delta)\cos\gamma = 0 \\ -M\omega_0 a(\delta - \gamma') + \frac{1}{2}C_0 a' + \frac{3}{8}K_1 a^3 - C_1 B^3(\omega_0 + \varepsilon^2 \delta)\sin\gamma = 0 \end{cases} \quad (125-4)$$

سیستم معادلات فوق به شکل کلی معادلات حالت یک سیستم میرا می‌باشد و برای تعیین مشخصات پاسخ، در ابتدا می‌بایست نقاط سینگولار<sup>۱</sup> مساله را استخراج کرده و سپس پاسخ را در نزدیکی این نقاط، به دست آورد. از آنجائیکه دامنه و فاز در نقطه‌ی سینگولار تغییر نمی‌کنند، پاسخ سینگولار را حرکت حالت پایدار<sup>۲</sup> گویند؛ هم‌چنین طبیعت مسیرها در حوالی نقاط سینگولار نشان می‌دهد که یک اغتشاش کوچک در حرکت حالت پایدار، منجر به کاهش یا افزایش حرکت می‌شود یا خیر و به عبارتی، مشخص‌کننده‌ی پایداری سیستم می‌باشند؛ با در نظر گرفتن این موضوع و برای به دست آوردن حرکت حالت پایدار، باید توجه داشت که این حرکت، زمانی رخ می‌دهد که:

$$a' = \gamma' = 0 \quad (126-4)$$

که رابطه‌ی فوق دقیقاً معادل نقاط سینگولار رابطه‌ی (۱۲۵-۴) می‌باشد، در نتیجه:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}C_0 a\delta + 3C_1\omega_0 B^2 a + \frac{3}{8}C_1\omega_0 a^3 = -C_1 B^3(\omega_0 + \varepsilon^2 \delta)\cos\gamma \\ \frac{3}{8}K_1 a^3 - M\omega_0 a\delta = C_1 B^3(\omega_0 + \varepsilon^2 \delta)\sin\gamma \end{cases} \quad (127-4)$$

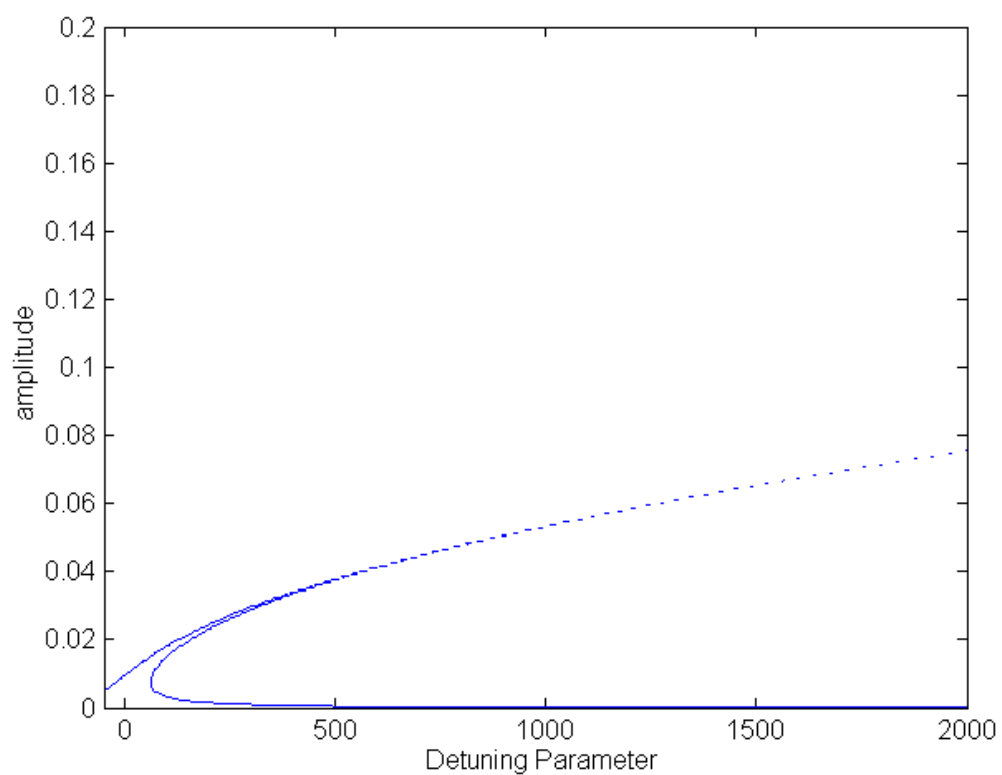
در نتیجه:

$$\Rightarrow \left[ \left( \frac{1}{2}C_0\delta + \frac{3}{8}C_1\omega_0 a^2 + 3C_1\omega_0 B^2 \right)^2 + \left( \frac{3}{8}K_1 a^2 - M\omega_0\delta \right)^2 \right] a^2 = (C_1 B^3(\omega_0 + \varepsilon^2 \delta))^2 \quad (128-4)$$

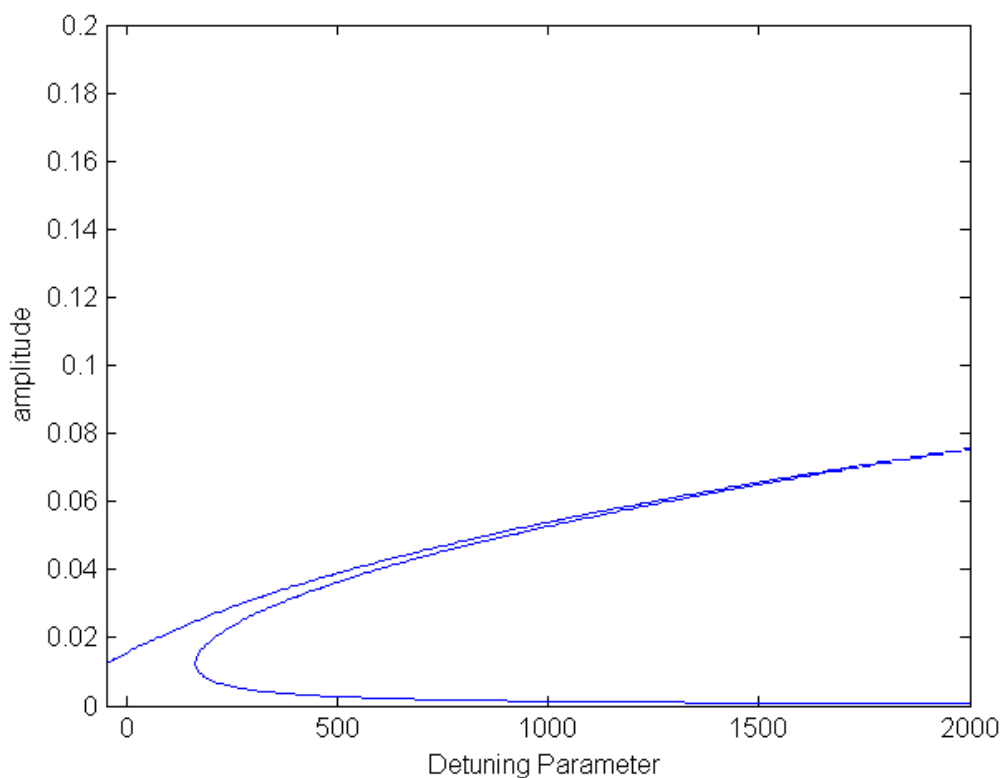
با توجه به رابطه‌ی پاسخ فرکانسی (۱۲۸-۴) و با در نظر گرفتن شرایط و مقادیر جدول (۳-۱) بخش قبل، در نقطه‌ی  $x=L/16$  و  $\varepsilon=0.1$  برای این سیستم، در حالت غیرخطی، نمودار دامنه برحسب پارامتر تنظیم را می‌توان ترسیم نمود:

<sup>1</sup> Singular points

<sup>2</sup> Steady state motion



شکل ۴-۱۲- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $F_0=1100$



شکل ۴-۱۳- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $F_0=1800$

از روند نمودارها مشخص می‌شود که با افزایش دامنه‌ی تحریک، میزان دامنه‌ی ارتعاشات نیز بیشتر خواهد شد.

#### ۴-۲-۲-۴-۲- حالت زیرهارمونیک رزونانس

در این حالت نیز به منظور بیان نزدیکی  $\Omega$  به  $\omega_0$  از یک پارامتر تنظیم  $\delta$  به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon^2 \delta \quad (۴-۱۲۹)$$

بنابراین برای حذف جمله‌های سکولار، علاوه بر ضرایب  $\exp(i\omega_0 T_0)$  در این حالت ضرایب پارامتر  $\exp(\pm i(\Omega - 2\omega_0)T_0)$  نیز تولید جملات سکولار می‌کنند و برای حذف جملات سکولار، می‌بایست  $\Omega$  بر حسب  $\omega_0 T_0$  را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(\Omega - 2\omega_0)T_0 = (\omega_0 + \varepsilon^2 \delta)T_0 = \omega_0 T_0 + \delta T_2 \quad (130-4)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۱۱۲-۴) و (۱۳۰-۴) برای حذف جملات سکولار و شرط حل‌پذیری مساله، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & M(2D_0 D_1(A_2(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0}) + 2D_0 D_2(A_1(T_2)e^{i\omega_0 T_0})) + \\ & C_0 D_1(A_2(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0}) + C_0 D_2(A_1(T_2)e^{i\omega_0 T_0}) + 3K_1 A_1^2(T_2)\bar{A}_1(T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \\ & C_1 D_0[3B\bar{A}_1^2(T_2)e^{i(\omega_0 T_0 + \delta T_2)} + 6B^2 A_1(T_2)e^{i\omega_0 T_0} + 3A_1^2(T_2)\bar{A}_1(T_2)e^{i\omega_0 T_0}] = 0 \end{aligned} \quad (131-4)$$

در نتیجه لازم است که:

$$D_1 A_{2n}(T_1, T_2) = 0 \quad (132-4)$$

$$A_{2n} = A_{2n}(T_2)$$

عبارت فوق، در صورتی برقرار است که:

یعنی اینکه  $A_{2n}$ ، تنها تابعی از  $T_2$  می‌باشد.  
بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} & M(2D_0 D_2(A_1(T_2)e^{i\omega_0 T_0})) + C_0 D_2(A_1(T_2)e^{i\omega_0 T_0}) + 3K_1 A_1^2(T_2)\bar{A}_1(T_2)e^{i\omega_0 T_0} + \\ & C_1 D_0[3B\bar{A}_1^2(T_2)e^{i(\omega_0 T_0 + \delta T_2)} + 6B^2 A_1(T_2)e^{i\omega_0 T_0} + 3A_1^2(T_2)\bar{A}_1(T_2)e^{i\omega_0 T_0}] = 0 \end{aligned} \quad (134-4)$$

اکنون پارامتر  $A_{1n}$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰]:

$$A_{1n} = \frac{1}{2} a_n(T_2) e^{i\beta_n(T_2)} \quad (135-4)$$

در نتیجه:



$$\begin{aligned}
& M(2D_2(\frac{1}{2}a(T_2)i\omega_0 e^{i\beta(T_2)})) + C_0 D_2(\frac{1}{2}a(T_2)e^{i\beta(T_2)}) + \frac{3}{8}K_1 a^3 e^{i\beta(T_2)} + \\
& C_1 i[\frac{3}{4}B(\omega_0 + \varepsilon^2 \delta)a^2(T_2) e^{i(\omega_0 T_0 + \delta T_2 - 2\beta(T_2) + \beta(T_2) - \beta(T_2))} + 3B^2 \omega_0 a(T_2) e^{i\beta(T_2)} + \frac{3}{8}\omega_0 a^3(T_2) e^{i\beta(T_2)}] = 0 \\
& \Rightarrow M i \omega_0 (a' + i a \beta') + \frac{1}{2} C_0 (a' + i a \beta') + \frac{3}{4} C_1 i B(\omega_0 + \varepsilon^2 \delta) a^2 e^{i\delta T_2 - 3\beta(T_2)} + \\
& + \frac{3}{8} K_1 a^3 + 3 C_1 i \omega_0 B^2 a + \frac{3}{8} C_1 i \omega_0 a^3 = 0
\end{aligned}$$

(۱۳۶-۴)

اکنون از جدا نمودن هر یک از ترم‌های حقیقی و موهومی رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود [۲۰]:

از صفر قرار دادن قسمت حقیقی رابطه‌ی فوق نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\text{part : IM} = 0 & \Rightarrow M \omega_0 a' + \frac{1}{2} C_0 a \beta' + 3 C_1 \omega_0 B^2 a + \\
& \frac{3}{8} C_1 \omega_0 a^3 + \frac{3}{4} C_1 B(\omega_0 + \varepsilon^2 \delta) a^2 \cos(\delta T_2 - 3\beta) = 0
\end{aligned}$$

(۱۳۷-۴)

همچنین از صفر قرار دادن قسمت موهومی رابطه‌ی (۱۳۶-۴) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\text{part : RE} = 0 & \Rightarrow -M \omega_0 a \beta' + \frac{1}{2} C_0 a' + \frac{3}{8} K_1 a^3 - \\
& \frac{3}{4} C_1 B(\omega_0 + \varepsilon^2 \delta) a^2 \sin(\delta T_2 - 3\beta) = 0
\end{aligned}$$

(۱۳۸-۴)

رابطه‌های (۱۳۷-۴) و (۱۳۸-۴) با تبدیل زیر، می‌توان به فرمی مستقل از پارامتر زمان تبدیل می‌شوند [۲۰]:

$$\delta T_2 - 3\beta = \gamma$$

(۱۳۹-۴)

$$\Rightarrow \begin{cases} M \omega_0 a' + \frac{1}{6} C_0 a (\delta - \gamma') + 3 C_1 \omega_0 B a^2 + \frac{3}{8} C_1 \omega_0 a^3 + \frac{3}{4} C_1 B(\omega_0 + \varepsilon^2 \delta) a^2 \cos \gamma = 0 \\ -\frac{1}{3} M \omega_0 a (\delta - \gamma') + \frac{1}{2} C_0 a' + \frac{3}{8} K_1 a^3 - \frac{3}{4} C_1 B(\omega_0 + \varepsilon^2 \delta) a^2 \sin \gamma = 0 \end{cases}$$

(۱۴۰-۴)

سیستم معادلات فوق به شکل کلی معادلات حالت یک سیستم میرا می‌باشد و برای تعیین مشخصات پاسخ، در ابتدا می‌بایست نقاط سینگولار<sup>۱</sup> مساله را استخراج کرده و سپس پاسخ را در نزدیکی این نقاط، به دست آورد. از آنجائیکه دامنه و فاز در نقطه‌ی سینگولار تغییر نمی‌کنند، پاسخ سینگولار را حرکت حالت پایدار<sup>۲</sup> گویند؛ همچنین طبیعت تراژکتوری‌ها در حوالی نقاط سینگولار نشان خواهد داد که یک اغتشاش کوچک در حرکت حالت پایدار، منجر به کاهش یا افزایش حرکت می‌شود یا خیر و به عبارتی، مشخص‌کننده‌ی پایداری سیستم می‌باشند؛ با در نظر گرفتن این موضوع و برای به دست آوردن حرکت حالت پایدار، باید توجه داشت که این حرکت، زمانی رخ می‌دهد که:

$$a' = \gamma' = 0 \quad (141-4)$$

که رابطه‌ی فوق دقیقاً معادل نقاط سینگولار رابطه‌ی (۱۴۰-۴) می‌باشد، در نتیجه:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} C_0 a \delta + 3 C_1 \omega_0 B a^2 + \frac{3}{8} C_1 \omega_0 a^3 + \frac{3}{4} C_1 B (\omega_0 + \varepsilon^2 \delta) a^2 \cos \gamma = 0 \\ -\frac{1}{3} M \omega_0 a \delta + \frac{3}{8} K_1 a^3 - \frac{3}{4} C_1 B (\omega_0 + \varepsilon^2 \delta) a^2 \sin \gamma = 0 \end{cases} \quad (142-4)$$

بنابراین معادله‌ی پاسخ فرکانسی، پارامتر تنظیم بر حسب دامنه، به صورت زیر خواهد شد:

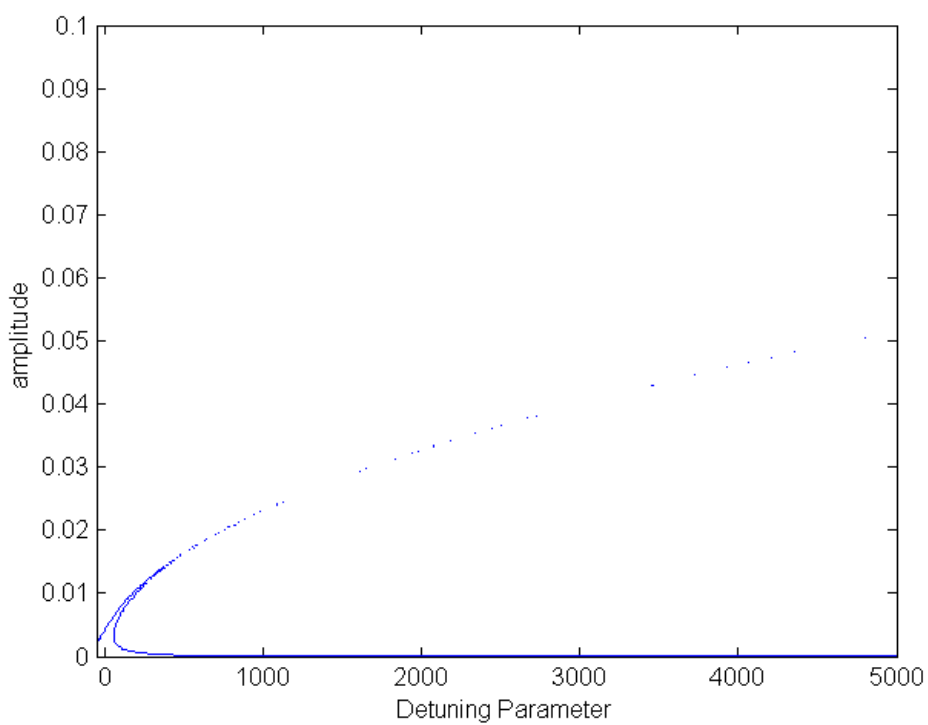
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} C_0 a \delta + 3 C_1 \omega_0 B a^2 + \frac{3}{8} C_1 \omega_0 a^3 = -\frac{3}{4} C_1 B (\omega_0 + \varepsilon^2 \delta) a^2 \cos \gamma \\ \frac{3}{8} K_1 a^3 - \frac{1}{3} M \omega_0 a \delta = \frac{3}{4} C_1 B (\omega_0 + \varepsilon^2 \delta) a^2 \sin \gamma \end{cases}$$

$$\left[ \left( \frac{1}{6} C_0 \delta + 3 C_1 \omega_0 B a + \frac{3}{8} C_1 \omega_0 a^2 \right)^2 + \left( \frac{3}{8} K_1 a^2 - \frac{1}{3} M \omega_0 \delta \right)^2 \right] = \left( \frac{3}{4} C_1 B (\omega_0 + \varepsilon^2 \delta) \right)^2 \quad (143-4)$$

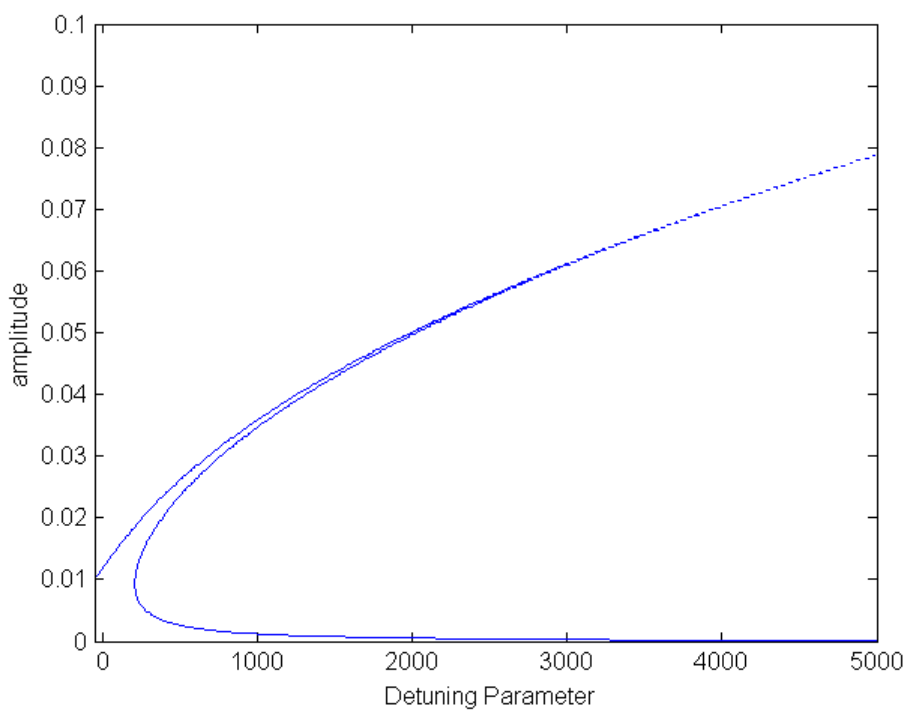
با توجه به رابطه‌ی پاسخ فرکانسی (۱۴۳-۴) و با در نظر گرفتن شرایط و مقادیر جدول (۱-۳) بخش قبل، در نقطه‌ی  $x=L/16$  و  $\varepsilon=0.1$  برای این سیستم، در حالت غیرخطی، نمودار دامنه بر حسب پارامتر تنظیم را می‌توان ترسیم نمود:

<sup>1</sup> Singular points

<sup>2</sup> Steady state motion



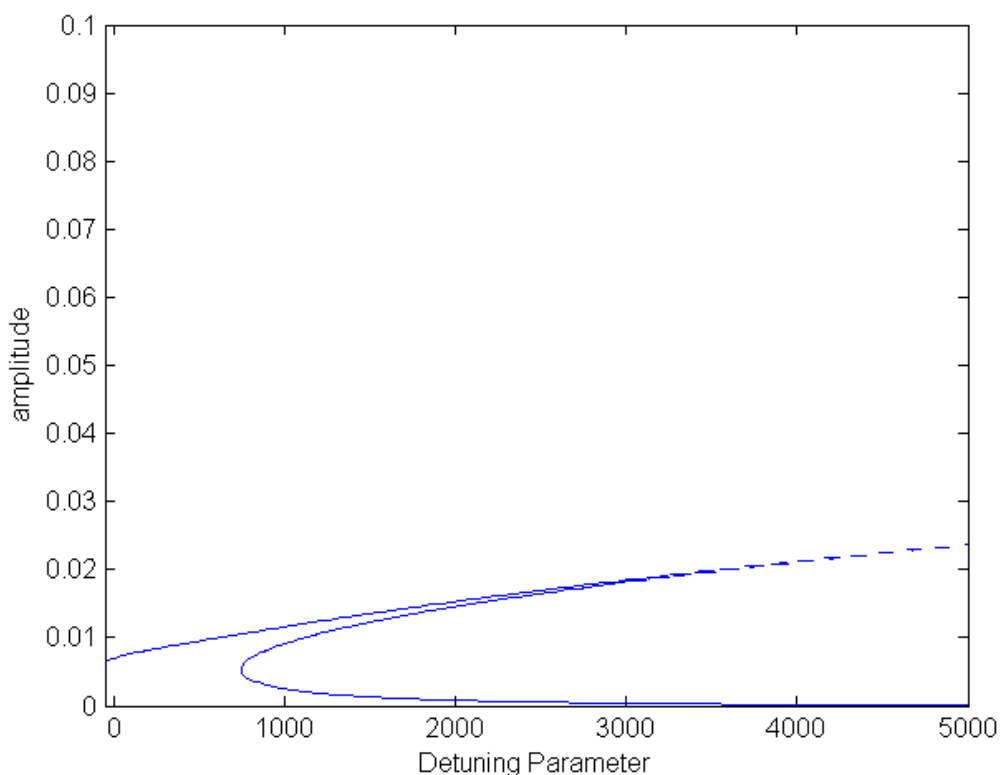
شکل ۴-۱۴- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای نسبت ضخامت پوشش به کابل  $h_b/h_c=0.65$



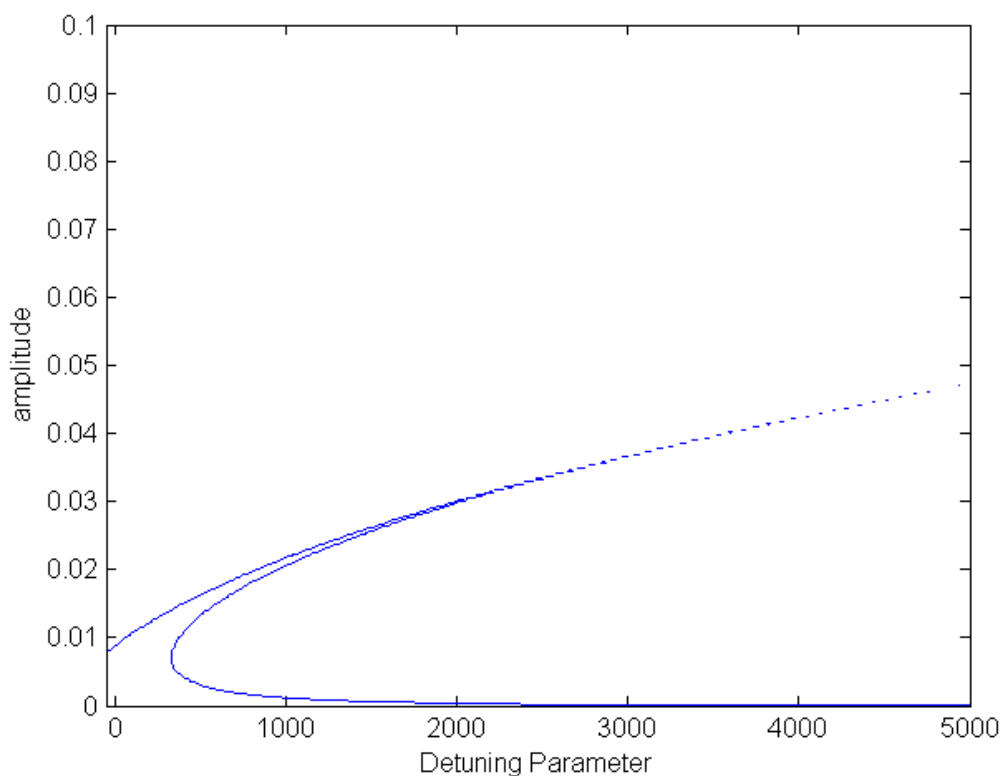
شکل ۴-۱۵- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای نسبت ضخامت پوشش به کابل  $h_b/h_c=0.2$

از شکل‌های بالا مشخص می‌شود که با کاهش نسبت ضخامت ویسکوز به ضخامت کابل و در نتیجه کاهش میرایی، مقدار دامنه افزایش می‌یابد؛ همچنین میزان سخت‌شوندگی سیستم نیز، تا حدودی کم‌تر خواهد شد.

اثر کشش اولیه‌ی کابل نیز در شکل‌های زیر به‌خوبی نمایان می‌باشد.

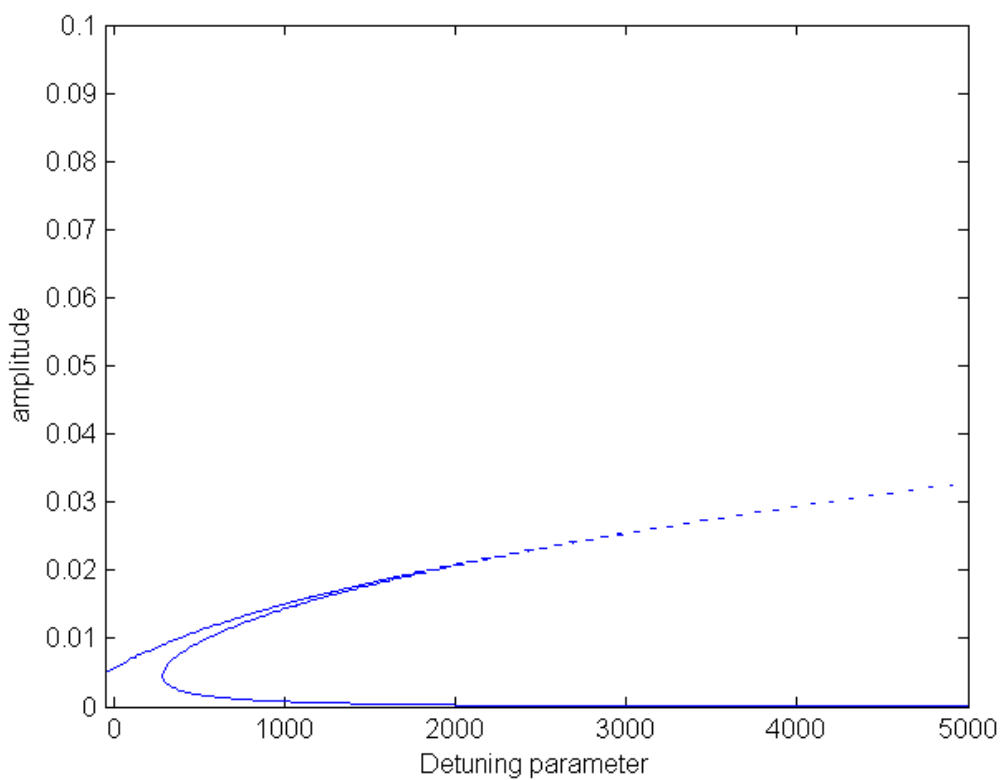


شکل ۴-۱۶- منحنی دامنه‌ی پاسخ ( $a$ ) بر حسب پارامتر تنظیم ( $\delta$ ) برای  $T=470$

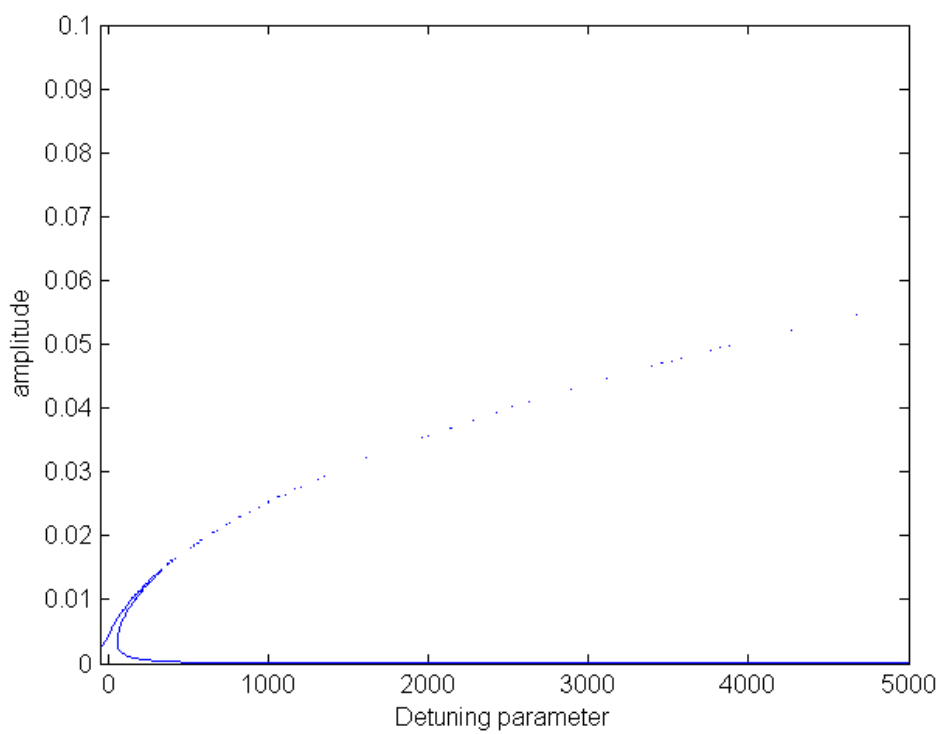


شکل ۴-۱۷- منحنی دامنه‌ی پاسخ ( $a$ ) بر حسب پارامتر تنظیم ( $\delta$ ) برای  $T=420$

از شکل‌های بالا مشخص می‌شود که با کاهش مقدار کشش اولیه‌ی کابل، سخت‌شوندگی سیستم کمتر شده و مقدار دامنه ارتعاشات نیز افزایش می‌یابد. اثر جنس لایه‌ی ویسکوز بر روی ارتعاشات را نیز می‌توان با بررسی پارامترهای مختلفی از جمله تغییر مدول یانگ ماده بررسی نمود. در شکل‌های زیر با تغییر مدول یانگ، تغییرات رفتار سیستم، مشاهده می‌شود:



شکل ۴-۱۸- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $E_b=0.072$  (Gpa)



شکل ۴-۱۹- منحنی دامنه‌ی پاسخ (a) بر حسب پارامتر تنظیم (δ) برای  $E_b=0.06$  (Gpa)

از شکل‌های بالا مشاهده می‌شود که با کاهش مقدار مدول یانگ و انتخاب موادی که مدول یانگ و سختی کمتری دارند، مقدار سخت‌شوندگی سیستم، کاهش می‌یابد و دامنه‌ی ارتعاشات سیستم نیز افزایش می‌یابد.

#### ۴-۵- نتیجه‌گیری

در این فصل، معادله‌ی حرکت غیرخطی ارتعاشات سیستم، توسط اصل هامیلتون به‌دست آورده شد. معادله‌ی حاصل، یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است که به کمک روش مقیاس‌های چندگانه، حل شد. همانند سیستم خطی، پاسخ سیستم به شرایط مرزی وابسته است و از آنجائیکه سیستم مورد نظر، یک کابل دو سر مفصل است، لذا شکل مودها و پاسخ سیستم نیز بر اساس همین شرایط مرزی حاصل گشت. بدیهی است که با تغییر شرایط مرزی، پاسخ سیستم و شکل مودها و فرکانس‌های آن تغییر خواهند نمود. معادلات مورد نیاز در روش مقیاس‌های چندگانه، برای مساله‌ی مورد نظر، شامل سه مرتبه‌ی اول و دوم و سوم از ضرایب  $\varepsilon$  است. معادله‌ی مرتبه‌ی اول با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل شد و پاسخ آن در مرتبه‌ی بعدی قرار داده شد پاسخ معادله‌ی مرتبه‌ی دوم نیز در معادله‌ی مرتبه‌ی سوم قرار داده شد و از حذف جملات سکولار آن، مجهولات مساله و فرکانس و دامنه‌ی حرکت و پاسخ ارتعاشات آزاد و نیز معادله‌ی پاسخ فرکانسی ارتعاشات اجباری، برای حالت‌های مختلف فرکانس تحریک، شامل تحریک اولیه و تحریک ثانویه‌ی فوق‌هارمونیک و زیرهارمونیک، به دست آمد و مورد ارزیابی قرار گرفتند و جهت تحلیل عددی، تاثیر پارامترهای مختلف سیستم بر دامنه و سخت‌شوندگی و نرم‌شوندگی سیستم، نیز بررسی شدند. در بخش ارتعاشات آزاد سیستم غیرخطی، نمودارهای ماکزیمم دامنه‌ی ارتعاشات، بر حسب حساب زمان، رسم شدند و از آنجائیکه این نمودار در نهایت به سمت صفر میل می‌کند، اثر پارامترهایی نظیر  $\varepsilon$  و افزایش ضخامت نسبی پوشش ویسکوالاستیک به ضخامت کابل، مورد بررسی قرار گرفت و مشخص شد که با افزایش ضریب  $\varepsilon$ ، کاهش دامنه سریع‌تر روی می‌دهد؛ همچنین افزایش نسبی ضخامت پوشش به کابل، نیز موجب کاهش دامنه‌ی سریع‌تر خواهد شد و سیستم نیز سریع‌تر به حالت تعادل خواهد رسید. نمودار فرکانس بر حسب دامنه‌ی ارتعاشات نیز برای ضخامت‌های مختلف لایه‌ی ویسکوز رسم گردید و مشخص شد که با افزایش نسبت ضخامت پوشش به ضخامت کابل، شیب تغییرات فرکانس بر حسب دامنه نیز کمتر خواهد شد. فرکانس غیر خطی سیستم به صورت تابعی از زمان به دست آمد و نمودار فرکانس بر حسب زمان، مقدار نهایی فرکانس سیستم را نمایش داد و با توجه به همین نمودار و مقدار نهایی فرکانس، نمودار پاسخ فرکانسی سیستم نیز رسم گردید و مشخص شد که دامنه‌ی ارتعاشات در نزدیکی فرکانس غیرخطی، افزایشی ناگهانی خواهد داشت. در بخش ارتعاشات اجباری نیز در حالت تحریک اولیه، اثر افزایش دامنه‌ی تحریک بر دامنه‌ی نوسانات بررسی شد و در نتیجه‌ی آن با افزایش دامنه‌ی

تحریک، دامنه‌ی نوسانات نیز زیاد خواهد شد؛ همچنین مشخص شد که کاهش نسبت ضخامت پوشش به کابل نیز باعث افزایش دامنه‌ی ارتعاشات خواهد شد. در حالت فوق‌هارمونیک اثر افزایش دامنه‌ی تحریک بر دامنه‌ی نوسانات بررسی شد و در نتیجه‌ی آن با افزایش دامنه‌ی تحریک، دامنه‌ی نوسانات نیز زیاد خواهد شد. در حالت زیرهارمونیک نیز اثر افزایش نسبت ضخامت پوشش به ضخامت کابل، بر دامنه‌ی نوسانات بررسی شد و در نتیجه، با افزایش این نسبت، دامنه‌ی نوسانات نیز کم‌تر خواهد شد؛ همچنین در این حالت، اثر افزایش کشش اولیه‌ی کابل بر دامنه‌ی نوسانات بررسی ماهده شد که با افزایش کشش، سخت‌شوندگی سیستم زیاد شده و دامنه‌ی نوسانات نیز کم‌تر خواهد شد. اثر جنس لایه‌ی ویسکوز بر روی ارتعاشات را نیز می‌توان با بررسی پارامترهای مختلفی از جمله تغییر مدول یانگ ماده بررسی نمود. در این پایان‌نامه اثر مدول یانگ ماده بررسی شد و در نتیجه‌ی آن مشاهده شد که با کاهش مقدار مدول یانگ و انتخاب موادی که مدول یانگ و سختی کمتری دارند، مقدار سخت‌شوندگی سیستم، کاهش می‌یابد و دامنه‌ی ارتعاشات سیستم نیز افزایش می‌یابد. بنابراین در مجموع، اثر برخی از پارامترهای مهم نظیر ضخامت‌های کابل و تیر و دامنه‌ی تحریک و کشش اولیه‌ی سیستم و جنس مواد لایه‌ی ویسکوز، بر رفتار ارتعاشات سیستم، در حالت‌های مختلف، مورد بررسی قرار گرفت و نتایج مورد نیاز این بخش نیز حاصل گشت.



فصل پنجم:

پیشنهادها

## ۷-۱- پیشنهادها

با توجه به مطالعات انجام شده در این زمینه پیشنهادهای مختلفی را می‌توان ارائه نمود که برخی از این پیشنهادها به قرار زیر است.

- ۱) تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک با استفاده از روش-های عددی مانند روش تبدیل دیفرانسیلی معمولی، دیفرانسیل مربعی و ...؛
- ۲) تحلیل ارتعاشات آزاد کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک با دیگر مدل‌ها، مانند مدل جامد خطی استاندارد و ...؛
- ۳) تحلیل آزاد غیرخطی کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک با فرض تغییرات ماده در راستای ضخامت؛
- ۴) تحلیل ارتعاشات کابل الاستیک با روکش ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما؛

پیشنهادهای ارائه شده تنها بخش کوچکی از مواردی است که می‌تواند به نزدیک شدن مطالعه حاضر به واقعیت فیزیکی مسائل موجود کمک کند.

# منابع

- [1] Sainsbury M.G. Masti R.S.; Vibration Damping of Cylindrical Shells Using Strain-Energy Based Distribution of an Add-on Viscoelastic Treatment, *J. Finite Elem. Anal*, Vol. 43, pp. 175–192, 2007.
- [2] DiTaranto R.A.; Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams, *J. Appl. Mech*, Vol. 32, pp. 881–886, 1995. [3] Sun Y., Fang D., Soh A.K.; Thermoelastic Damping in Micro-Beam Resonators, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 43, No 10, PP. 3213–3229, 2006.
- [3] Amichi K., Atalla N.; A New 3D Finite Element for Sandwich Beams With a Viscoelastic Core, *J. Vib*, Vol. 131, pp. 101-110, 2009.
- [4] Ghinet S., Atalla N.; Modeling Thick Composite Laminate and Sandwich Structures With Linear Viscoelastic Damping, *Comput. Struct.* 89, Vol. 48, pp. 1547–1561, 2011.
- [5] Zalewski R., Pyrz M.; Experimental Study and Modeling of Polymer Granular Structures Submitted to Internal Underpressure, *Mech Mater*, Vol. 57, pp. 75–85, 2013.
- [6] Zalewski R., Szmidt T.; Application of Special Granular Structures For Semi-Active Damping of Lateral Beam Vibrations, *J. Engineering Structures*, Vol. 65, pp. 13-20, 2014.
- [7] زنگانه ر.ا، احمدی ا؛ بررسی ارتعاش محوری میله با تکیه‌گاه ویسکوالاستیک، نشریه‌ی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، دانشگاه شاهرود، ج ۳، ش ۱، صص ۶۷-۷۹، ۱۳۹۲.
- [8] Arvin H., Sadighi M., Ohadi A.R.; A Numerical Study of Free and Forced Vibration of Composite Sandwich Beam With Viscoelastic Core, *J. Composite Structures* 92, Amirkabir University of Technology, Vol. 65, pp. 13-20, 2010.
- [9] Lei Y., Adhikari S., Friswell M.I.; Vibration of Nonlocal Kelvin–Voigt Viscoelastic Damped Timoshenko Beams, *J. Engineering Science*, Amirkabir University of Technology, Vol. 37, pp. 66-67, 2013.
- [10] Yang T., Fang B.; Asymptotic Analysis of An Axially Viscoelastic String Constituted by a Fractional Differentiation Law, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 49, pp. 170-174, 2013.
- [11] Meyers K., Chawla C.; *Mechanical Behavior of Materials*, Vol. 32, pp. 33-98, 1999.
- [12] McCrum F., Buckley Z., Bucknell P.; *Principles of Polymer Engineering*. Vol. 52, No 3, PP. 230–235, 2003.
- [13] Zener C.; Multiscale Layered Biomechanical Model of the Pacinian Corpuscle, *Phys. Rev.* Vol. 53, No 1, PP. 90–99, 1938.
- [14] Wiechert E.; Otis W., Nuckolls R.; *Mechanical Behavior of Materials*, *Phys. Rev.* 2006.
- [15] Wiechert E.; Ueber elastische Nachwirkung, *J. Appl. Phys.* 1955.
- [16] Barbero E. J.; Time-temperature-age Superposition Principle for Predicting Long-term Response of Linear Viscoelastic Materials; Hilton Head Island, SC, USA; 2011; pp. 13–16.
- [17] Simulia K., Stowe T., Kenny T., Rugar D.; Time domain viscoelasticity, *Bull. Am. Phys. Society*. Vol. 44, No 1, PP. 540, 2010.
- [18] Barbero. E. J., Lifshitz E.; *Finite Element Analysis of Composite Materials*, 2007, Florida. n.d.
- [19] Rosato S., Olkhovets A., Sekaric L., Parpia J.M., Craighead H.G., Carr D.W.; *Plastics Design Handbook*, *Appl. Phys. Lett.* Vol. 77, No 15, PP. 2397, 2000.
- [20] Nayfeh A.H., Mook D.T.; *Nonlinear oscillations*, *Vacuum*. 1979.

- [21] Hagedorn.p., DasGuptaD.A.; Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems, *Vacuum*. 2007.
- [22] Mahmoodi.S.N., Khadem.S.E., Kokabi.M.; Non-linear Free Vibrations of Kelvin–Voigt Visco-elastic Beams. *Anal*, Vol. 49, pp. 722–732, 2007.
- [23] Lv H., Li Y., Li L, Liu Q.; Transverse Vibration of Viscoelastic Sandwich Beam with Time-Dependent Axial Tension and Axially Varying Moving Velocity; Department of Mathematics, Southwest Jiaotong University; pp. 2558–2585; 2014.
- [24] Larsen J.W., Nielsen S.R.K.; Non-linear Stochastic Response of a Shallow Cable; *International Journal of Non-Linear Mechanics*; Vol. 41 pp. 327 – 344; 2006.
- [25] A.H.Nayfeh, S.A.Nayfeh.; Nonlinear Normal Modes of a Continuous System With Quadratic Nonlinearities; *International Journal of Vibration and Acoustics*; 1995.





## **Abstract**

The use of viscoelastic materials have recently been increased in several areas of engineering due to their advantageous physical and mechanical properties. Regarding the latter, the energy dissipation behavior and dampening of extreme forces are of great interest for structural engineers. In this article, nonlinear lateral vibration analysis of elastic cable with viscoelastic cover was investigated. The viscoelastic property was described using the Kelvin -Voigt mechanical model. The governing equations were solved using the Multiple Scale method. The numerical results were provided in terms of the displacement-time history along cable length and a detailed comparison was made between aforementioned cases. The responses revealed that the use of viscoelastic materials as cover is very effective and efficient at damping and decreasing the displacement and vibration of the cable.

**Key words:** Lateral Vibration, Elastic, Viscoelastic, Nonlinear Vibration, Multiple Scale, Kelvin –Voigt.





Shahrood University of Technology  
Faculty of Mechanical Engineering

# **Nonlinear Lateral Vibration Analysis of Elastic Cable With Viscoelastic Cover**

Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of  
Master of Science (M.Sc)  
In Mechanical Engineering, Applied mechanics

**Vahid Deiranloo**

**Supervisor:**  
**Dr. Ardeshir Karami mohammadi**

**February 2016**