

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تحلیل ترموالاستیک کره‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک

به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی با توزیع توانی خواص

فواد سواری

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد کهنوی

بهمن ۱۳۹۳



مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای ..فواد سواری..... رشتهمهندسی مکانیک..... گرایش ...طراحی کاربردی..... تحت عنوان تحلیل ترموالاستیک کره‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی با توزیع توانی خواص.. که در تاریخ ...۹۳/۱۱/۲۹..... با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ مردود	☐ دفاع مجدد	☒ قبول (با درجه : <u>۱۷.۵۲</u>) امتیاز: <u>۱۷.۵۲</u>
--------------------------------	------------------------------------	---

۱- عالی (۲۰ - ۱۹) ۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹) ۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر مهدی قناد کهنوی		
۲- استاد مشاور	-		
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر حبیب احمدی		
۴- استاد ممحن	دکتر حمیدرضا ایپکچی		
۵- استاد ممحن	دکتر محمد جعفری	استاد	

رئیس دانشکده : امضاء



تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که دریای بیکران علم و رحمت است. آفریدگار بی‌نیازی که به انسان قدرت تفکر و اندیشیدن و توانایی مهر ورزیدن ارزانی داشت. در این قسمت لازم است از زحمات کلیه‌ی افرادی که در رساندن من به این مرحله تلاش نموده‌اند تشکر نمایم. بیش از همه از پدر، مادر و سایر اعضای خانواده‌ام که همواره مشوق من بوده‌اند و بستر رشد و پیشرفت مرا فراهم نموده‌اند تشکر می‌نمایم. از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر قنّاد و اساتید گرانقدر دانشکده سپاسگزارم. قطعاً اینجانب با راهنمایی‌های ایشان در این زمینه توانسته‌ام گام بردارم. در انتها از کلیه‌ی دوستان به ویژه جناب آقای مهندس پرهیزکار یعقوبی سپاسگزارم که در این مدت کمک‌های شایانی به اینجانب داشته‌اند.

فواد سواری

دانشجوی کارشناسی ارشد طراحی کاربردی

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

بهمن ۱۳۹۳

تعهدنامه

اینجانب فواد سواری دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک-گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی تحلیل ترموالاستیک کره‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی با توزیع توانی خواص، تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهتویی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پژوهش با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی به استخراج معادلات حاکم بر پوسته‌ی کروی جدارضخیم ناهمگن پیزوالکتریک که تحت بار حرارتی، الکتریکی و مکانیکی قرار دارد، پرداخته می‌شود. خواص مواد به‌صورت توانی در راستای شعاعی تغییر می‌کند همچنین توزیع دما به‌صورت تابعی از شعاع در نظر گرفته شده است. نتایج برای بارگذاری حرارتی، الکتریکی، مکانیکی و الکتروترمو مکانیکی با شرایط مرزی متفاوت استخراج می‌گردد و با نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود مورد مقایسه قرار می‌گیرد. دو روش تحلیلی و عددی در شرایط بارگذاری فشاری، الکتریکی و دمایی با یکدیگر مقایسه شده است که تطبیق مناسبی میان دو روش فوق مشاهده شده است.

بررسی نتایج حاکی از آن است که ثابت ناهمگنی، تأثیر بسزایی در توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی برای ماده‌ی مورد مطالعه دارد. همچنین با استفاده از اثر ناهمگنی مواد می‌توان رفتار حرارتی، الکتریکی و مکانیکی جسم را تغییر داد و اثرات بارگذاری را بر آن کمتر کرد.

واژگان کلیدی: کره‌ی جدارضخیم، ماده‌ی ناهمگن پیزوالکتریک (FGPM)، نظریه‌ی

الاستیسیته‌ی مستوی (PET)، روش اجزای محدود (FEM)، کره‌ی چرخان.

مطالب

فصل ۱	۱
۱-۱ مقدمه	۲
۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها	۳
۱-۲-۱ دیدگاه هندسی	۳
۲-۲-۱ دیدگاه مادی	۴
۳-۲-۱ دیدگاه رفتاری	۴
۳-۱ تئوری‌های ارائه شده برای پوسته‌ها	۵
۱-۳-۱ تئوری پوسته‌های نازک	۵
۲-۳-۱ تئوری پوسته‌های ضخیم	۸
۴-۱ مقدمه‌ای بر مواد	۱۰
۱-۴-۱ مواد پیزوالکتریک	۱۱
۲-۴-۱ مواد FG	۱۳
۵-۱ کاربرد پوسته‌های کروی	۱۷
۶-۱ نگاهی بر مطالعات گذشته	۱۹
۷-۱ معرفی پایان‌نامه‌ی حاضر	۲۳
فصل ۲	۲۵
۱-۲ مقدمه	۲۶
۲-۲ روابط اساسی در دستگاه مختصات کروی	۲۶

۲۷.....	۱-۲-۲ روابط تعادل
۲۸.....	۲-۲-۲ روابط سینماتیک
۲۹.....	۳-۲-۲ روابط ساختاری
۳۰.....	۴-۲-۲ رابطه‌ی انتقال حرارت هدایتی
۳۱.....	۳-۲ تحلیل ریاضی مسئله
۳۱.....	۱-۳-۲ فرضیات حاکم
۳۲.....	۴-۲ ساده سازی روابط
۳۲.....	۱-۴-۲ روابط سینماتیک
۳۳.....	۲-۴-۲ روابط ساختاری
۳۳.....	۳-۴-۲ روابط تعادل و بارخطی الکترواستاتیک
۳۴.....	۵-۲ ناهمگنی خواص
۳۸.....	۶-۲ استخراج روابط
۳۹.....	۱-۶-۲ حل رابطه‌ی ناویر
۴۵.....	فصل ۳
۴۶.....	۱-۳ مقدمه
۴۶.....	۲-۳ تحلیل اجزای محدود کره‌ی پیزو الکترونیک در ANSYS
۴۶.....	۱-۲-۳ مدل سازی مواد ناهمگن
۴۷.....	۲-۲-۳ انتخاب المان و شبکه بندی مسأله
۴۹.....	۳-۳ تحلیل الاستیک کره‌های FGPM

۵۲	 ۱-۳-۳ مطالعه‌ی عددی
۵۳	 ۲-۳-۳ بررسی اثر ثابت ناهمگنی
۶۰	 ۳-۳-۳ بررسی اثر بارگذاری
۶۵	 ۴-۳ تحلیل کره‌های چرخان
۶۶	 ۱-۴-۳ مطالعه‌ی عددی
۷۵	 فصل ۴
۷۶	 ۱-۴ مقدمه
۷۶	 ۲-۴ تحلیل اجزای محدود الکتروترمو مکانیکی در ANSYS
۷۷	 ۳-۴ مطالعه‌ی عددی الکترومکانیک کره‌ی FGPM
۷۸	 ۱-۳-۴ بررسی اثر ثابت ناهمگنی
۸۲	 ۲-۳-۴ بررسی اثر بارگذاری
۸۸	 ۴-۴ مطالعه‌ی عددی الکتروترمو مکانیک کره‌ی FGPM
۸۸	 ۱-۴-۴ بررسی اثر ثابت ناهمگنی
۹۴	 ۲-۴-۴ بررسی اثر بارگذاری
۱۰۱	 فصل ۵
۱۰۲	 ۱-۵ مقدمه
۱۰۲	 ۲-۵ نتیجه‌گیری
۱۰۴	 ۳-۵ پیشنهادها
۱۰۵	 مراجع

شکل‌ها

- شکل ۱-۱ دیسک پیزوالکتریک تغییر شکل یافته ۱۲
- شکل ۲-۱ نمای برش طولی استخوان ۱۵
- شکل ۳-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف ۱۶
- شکل ۴-۱ زمین به عنوان یک کره‌ی دوار ۱۸
- شکل ۵-۱ کاربرد کره در صنایع نفت و گاز و پتروشیمی ۱۸
- شکل ۱-۲ دستگاه مختصات کروی راستگرد ۲۶
- شکل ۱-۳ مدل‌سازی مقطع کره‌ی چرخان تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی ۴۸
- شکل ۲-۳ نمودار همگرایی تحلیل المان محدود ۴۸
- شکل ۳-۳ مقطع عرضی کره‌ی جدار ضخیم تحت بارگذاری مکانیکی ۴۹
- شکل ۴-۳ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۵۴
- شکل ۵-۳ توزیع تنش محیطی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۵۴
- شکل ۶-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره پیزوالکتریک ۵۵
- شکل ۷-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۵۶
- شکل ۸-۳ توزیع تنش مؤثر در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۵۷
- شکل ۹-۳ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۶۰
- شکل ۱۰-۳ توزیع تنش محیطی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۶۱
- شکل ۱۱-۳ شکل ۹-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۶۲
- شکل ۱۲-۳ شکل ۱۰-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۶۲
- شکل ۱۳-۳ مختصات کروی ۶۶
- شکل ۱۴-۳ توزیع تنش شعاعی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta = 0$ ۶۷

- شکل ۳-۱۵ توزیع تنش محیطی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=0$ ۶۷
- شکل ۳-۱۶ توزیع تنش نصف‌النهاری در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=0$ ۶۸
- شکل ۳-۱۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=0$ ۶۹
- شکل ۳-۱۸ شکل ۳-۱۶ توزیع تنش مؤثر در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=0$ ۶۹
- شکل ۳-۱۹ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=0$ ۷۰
- شکل ۳-۲۰ توزیع تنش شعاعی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=\frac{\pi}{2}$ ۷۱
- شکل ۳-۲۱ توزیع تنش محیطی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=\frac{\pi}{2}$ ۷۱
- شکل ۳-۲۲ توزیع تنش نصف‌النهاری در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=\frac{\pi}{2}$ ۷۲
- شکل ۳-۲۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=\frac{\pi}{2}$ ۷۲
- شکل ۳-۲۴ توزیع تنش مؤثر در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=\frac{\pi}{2}$ ۷۳
- شکل ۳-۲۵ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=\frac{\pi}{2}$ ۷۳
- شکل ۴-۱ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۷۸
- شکل ۴-۲ توزیع تنش محیطی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۷۹
- شکل ۴-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۷۹
- شکل ۴-۴ توزیع تنش مؤثر در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۸۰
- شکل ۴-۵ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۸۰
- شکل ۴-۶ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۸۳
- شکل ۴-۷ توزیع تنش محیطی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۸۴
- شکل ۴-۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۸۴
- شکل ۴-۹ توزیع تنش مؤثر در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۸۵
- شکل ۴-۱۰ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۸۵
- شکل ۴-۱۱ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره ۸۹

- شکل ۴-۱۲ توزیع تنش محیطی در امتداد جداری ضخامت کره ۹۰
- شکل ۴-۱۳ توزیع تنش مؤثر در امتداد جداری ضخامت کره ۹۰
- شکل ۴-۱۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد جداری ضخامت کره ۹۱
- شکل ۴-۱۵ توزیع میدان دمایی در امتداد جداری ضخامت کره ۹۱
- شکل ۴-۱۶ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداری ضخامت کره ۹۲
- شکل ۴-۱۷ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداری ضخامت کره ۹۵
- شکل ۴-۱۸ توزیع تنش محیطی در امتداد جداری ضخامت کره ۹۵
- شکل ۴-۱۹ توزیع تنش مؤثر در امتداد جداری ضخامت کره ۹۶
- شکل ۴-۲۰ توزیع میدان جابه‌جایی شعاعی در امتداد جداری ضخامت کره ۹۶
- شکل ۴-۲۱ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداری ضخامت کره ۹۷
- شکل ۴-۲۲ توزیع میدان دمایی در امتداد جداری ضخامت کره ۹۷

جداول

- جدول ۱-۳ خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی کره ۵۳
- جدول ۲-۳ نتایج میدان جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت فشار داخلی ۵۸
- جدول ۳-۳ نتایج توزیع تنش شعاعی برای کره‌ی تحت فشار داخلی ۵۹
- جدول ۴-۳ نتایج توزیع تنش محیطی برای کره‌ی تحت فشار داخلی ۵۹
- جدول ۵-۳ نتایج تنش شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری‌های مختلف در $n=0$ ۶۳
- جدول ۶-۳ نتایج تنش محیطی برای کره‌ی تحت بارگذاری‌های مختلف در $n=0$ ۶۴
- جدول ۷-۳ جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری‌های مختلف در $n=0$ ۶۴
- جدول ۸-۳ نتایج پتانسیل الکتریکی برای کره‌ی تحت بارگذاری‌های مختلف در $n=0$ ۶۵
- جدول ۱-۴ نتایج تنش محیطی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی ۸۱
- جدول ۲-۴ نتایج تنش موثر برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی ۸۱
- جدول ۳-۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی ۸۲
- جدول ۴-۴ نتایج توزیع پتانسیل الکتریکی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی ۸۲
- جدول ۵-۴ نتایج تنش شعاعی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی ۸۶
- جدول ۶-۴ نتایج توزیع تنش محیطی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی ۸۷
- جدول ۷-۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی ۸۷
- جدول ۸-۴ نتایج توزیع پتانسیل الکتریکی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی ۸۸
- جدول ۹-۴ نتایج تنش شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی ۹۳
- جدول ۱۰-۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی ۹۴
- جدول ۱۱-۴ نتایج میدان دما برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی ۹۴
- جدول ۱۲-۴ نتایج توزیع تنش شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی ۹۹

جدول ۴-۱۳ نتایج میدان جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی.....۹۹

جدول ۴-۱۴ نتایج میدان دمایی برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی.....۹۹

علائم

R	فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن
r	نسبت شعاع به شعاع داخلی در کره
R_i	شعاع داخلی کره
R_o	شعاع خارجی کره
u_i	مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی
σ_{ij}	مؤلفه‌های تانسور تنش
ε_{ij}	مؤلفه‌های تانسور کرنش
F_i	مؤلفه‌های نیروهای حجمی مکانیکی
E_i	مؤلفه‌های بردار شبه ایستای میدان الکتریکی
D_i	مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی الکتریکی
n	ثابت ناهمگنی خاصیت
ω	سرعت دورانی ثابت
ψ	پتانسیل الکتریکی
θ	مختصه‌ی نصف النهاری کره
ϕ	مختصه‌ی محیطی کره
K	ضریب هدایت حرارتی ماده
k	نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی در کره
ρ	چگالی
Θ^*	دمای ثابت مثبت مرجع
Θ	تغییرات دمایی از دمای ثابت مثبت مرجع
C_1, C_2	ثوابت معادله‌ی انتقال حرارت
S_1, S_2	ثوابت معادله‌ی توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم
c_{ij}	ثوابت الاستیک
e_{ij}	ثوابت پیزوالکتریک-تنش
ϵ_{ij}	ثوابت دی‌الکتریک

α_i	ثوابت انبساط حرارتی
M_i	خاصیت ماده در لایه‌ی داخلی کره
c_{11}^0, c_{12}^0 c_{22}^0, c_{23}^0	ثوابت الاستیک در شعاع داخلی کره
n_1, n_2 n_3, n_4	ثوابت ناهمگنی مربوط به ثوابت الاستیک
e_{11}^0, e_{12}^0	ثوابت پیزوالکتریک-تنش در شعاع داخلی کره
n_5, n_6	ثوابت ناهمگنی مربوط به ثوابت پیزوالکتریک-تنش
$\lambda_{11}^0, \lambda_{22}^0$	ثوابت تنش حرارتی-دما در شعاع داخلی کره
n_7, n_8	ثوابت ناهمگنی مربوط به ثوابت تنش حرارتی-دما
ϵ_{11}^0	ثابت دی‌الکتریک در شعاع داخلی کره
n_9	ثابت ناهمگنی مربوط به ثوابت دی‌الکتریک
K^0	ضریب هدایت حرارتی در شعاع داخلی کره
n_{10}	ثابت ناهمگنی مربوط به ضریب هدایت حرارتی
ρ^0	چگالی در شعاع داخلی کره
n_{11}	ثابت ناهمگنی مربوط به چگالی
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\phi$	تنش‌های نرمال در مختصات کروی
$\tau_{r\theta}, \tau_{r\phi}, \tau_{\theta\phi}$	تنش‌های برشی در مختصات کروی
$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_\phi$	کرنش‌های نرمال در مختصات کروی
$\gamma_{r\theta}, \gamma_{r\phi}, \gamma_{\theta\phi}$	کرنش‌های برشی در مختصات کروی
E_r, E_θ, E_ϕ	مؤلفه‌های بردار میدان الکتریکی در مختصات کروی
D_r, D_θ, D_ϕ	مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی الکتریکی در مختصات کروی
u_r	جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد
u_ϕ	جابه‌جایی محیطی
p_i	فشار داخلی
p_o	فشار خارجی

فصل ۱

مقدمه

پیش‌گفتار

آنچه در این فصل می‌خوانیم:

۱- مقدمه‌ای بر پوسته‌ها؛

۲- دسته‌بندی پوسته‌ها؛

۳- تئوری‌های ارائه شده برای پوسته‌ها؛

۴- مقدمه‌ای بر مواد؛

۵- نگاهی بر مطالعات گذشته؛

۶- معرفی پایان‌نامه‌ی حاضر.

در این فصل ابتدا شرحی مختصر بر پوسته‌ها بیان می‌گردد و سپس با دسته‌بندی پوسته‌ها مروری گذرا به تئوری‌هایی که تا کنون برای تحلیل پوسته‌ها ارائه شده است انجام می‌شود. در ادامه کاربردهای پوسته‌ها از جمله پوسته‌های کروی در زمینه‌های مختلف ارائه شده و در گام بعدی به معرفی مواد ناهمگن یا FGM و پیزوالکتریک همچنین تعریف مبانی رفتاری مواد ناهمگن و پیزوالکتریک پرداخته می‌شود. در بخش پنجم، پژوهش‌های گذشته که در راستای این مطالعه قرار داشته‌اند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در انتها با مشخص نمودن اهداف کلی این تحقیق، روش مطالعه و نوآوری‌های آن معرفی می‌شوند.

۱-۱ مقدمه

پوسته‌ها^۱ به طور کلی، سازه‌های خمیده هستند که از لحاظ رفتاری در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده از مطلوبیت ویژه‌ای برخوردار هستند. مطالعه‌ی این رفتارها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان زیادی قرار گرفته و به دلیل فراوانی کاربرد هم‌چنان ادامه دارد. نمونه‌های زیادی از این دسته سازه‌ها نظیر سقف‌های گنبدی شکل، تانکرها، مخازن نگهداری سیال، رآکتورهای

1. Shells

اتمی، پرتابه‌ها، موشک‌ها و ... در سیستم‌های مصنوعی و ساخته شده توسط بشر یافت می‌شود. همچنین از جمله پوسته‌های آشنا در سیستم‌های طبیعی عبارتند از: حباب صابون، جمجه، صدف، لاک، استخوانها و ... که این نمونه‌ها، تنها تعداد محدودی از کاربرد وسیع پوسته‌ها می‌باشند. موارد زیر را می‌توان به‌عنوان دلایل استفادهٔ پرکاربرد سازه‌های پوسته‌ای برشمرد [۱].

۱- بازده بالای رفتاری در برابر تحمل بار

۲- بالا بودن درجهٔ مقاومت ذخیره شده و یکپارچگی سازه

۳- نسبت مقاومت به وزن بالا

۴- سفتی بسیار بالا

۵- مهار فضا

از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های کروی اهمیت ویژه‌ای دارند و پژوهشگران به دنبال اعمال تغییرات بر روی جداره و ماده‌ی این دسته از پوسته‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر بارگذاری‌ها افزایش و وزن آن‌ها را کاهش دهند.

۱-۲ دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها را از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌کنیم.

۱-۲-۱ دیدگاه هندسی

پوسته‌ی حاصل از انتقال^۱ (شامل ورق‌ها و ...): از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران^۲ (شامل استوانه، کره‌ها و ...): از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

1. Shell of Translation
2. Shell of Revolution

پوسته‌ی جدار نازک^۱: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن کوچکتر از $\frac{1}{20}$ باشد.

پوسته‌ی جدار ضخیم^۲: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگتر از $\frac{1}{20}$ باشد.

۱-۲-۲ دیدگاه مادی

پوسته‌های همگن^۳: در این نوع پوسته‌ها خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

پوسته‌های ناهمگن^۴: در این نوع پوسته‌ها خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

پوسته‌های همسانگرد^۵: در این نوع پوسته‌ها خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان است.

پوسته‌های ناهمسانگرد^۶: در این نوع پوسته‌ها خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان نیست.

۱-۲-۳ دیدگاه رفتاری

پوسته با تغییر شکل‌های کوچک^۷: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و باربرداری کوچک است، (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ^۸: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و باربرداری

-
1. Thin Shell
 2. Thick Shell
 3. Homogeneous Shell
 4. Inhomogeneous Shell
 5. Isotropic Shell
 6. Anisotropic Shell
 7. Small Deflection
 8. Large Deflection

کوچک نیست، (رفتار غیر خطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان^۱ خطی: تغییر شکل‌ها بازگشت پذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون

عمومی هوک پیروی می‌کنند، (رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان^۲: تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی

هوک پیروی نمی‌کنند، (رفتار غیر خطی از نظر مادی).

۱-۳ تئوری‌های ارائه شده برای پوسته‌ها

روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته-

ها را تشکیل می‌دهند. تاکنون چندین تئوری برای تحلیل پوسته‌ها ارائه شده است. که می‌توان به-

صورت زیر تقسیم کرد:

۱-۳-۱ تئوری پوسته‌های نازک

تئوری‌های این پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی بنا شده است. به طور کلی به

دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود؛ و با

ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی تقریبی برای تحلیل این پوسته‌ها به‌دست می‌آید.

دقت نتایج تئوری‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد. اولین فرضیات

را کیرشهف^۳ (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته‌ها به‌کارگرفته شد.

ارون^۴ (۱۸۷۴) تئوری پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد. لاو^۵ (۱۸۸۸) معادلات

عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری

لاو-کیرشهف مشهور است. ریسنر^۶ (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لاو تحلیل پوسته‌های حاصل از

1. Elastic Behavior

2. Plastic Behavior

3. Kirchhoff

4. Aron

5. Love

6. Reissner

دوران متقارن محوری^۱ را ارائه نمود. فلوگه^۲ (۱۹۳۲) تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد که این معادلات به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شوند و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشند. بیرنه^۳ (۱۹۴۴) نظریات فلوگه را تکمیل کرد. با ساده‌سازی معادلات فلوگه تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی صفر و یک حاصل می‌شود. نقدی (۱۹۵۷) تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که به کارگیری آنها مشکل می‌باشد. سندرز^۴ (۱۹۵۹) به فرمول‌بندی پوسته‌ها با استفاده از اصل کار مجازی پرداخت و نووژیلوف^۵ (۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

تئوری عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به این گونه تقسیم‌بندی کرد:

- ۱- تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی): پوسته‌هایی که سختی خمشی خیلی کمی دارند و از نظر فیزیکی قادر به تحمل لنگرهای خمشی نیستند، با این تئوری تحلیل می‌شوند؛
- ۲- تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی): پوسته‌هایی که سختی خمشی قابل توجهی داشته باشند و از نظر فیزیکی قادر به تحمل لنگرهای خمشی هستند، با این تئوری تحلیل می‌شوند.

الف) تئوری غشایی

پوسته‌هایی که سختی خمشی آنها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در تئوری غشایی، جابه‌جایی پوسته

1. Axisymmetric Shell of Revolution
 2. Flugge
 3. Byrne
 4. Sanders
 5. Novozhilov

با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسائل در حالت تنش صفحه‌ای^۱ و کرنش صفحه‌ای^۲ با چشم‌پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند [۲].

ب) تئوری خمشی

ورق^۳ از دیدگاه مکانیکی، یک تیر^۴ دوبعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آنها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناویر^۵ ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لاو باهمین فرضیات، تئوری خمشی را صورت‌بندی نمود.

فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لاو-کیرشهف می‌نامند که عبارتند از [۲]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم‌پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند.

1. Plane Stress
2. Plane Strain
3. Plate
4. Beam
5. Navier

۱-۳-۲ تئوری پوسته‌های ضخیم

اولین بار لامه^۱ (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی^۲، حلّ دقیق استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت را تحت فشار یکنواخت داخلی برای ماده‌ی همگن و همسانگرد ارائه کرد [۳]. گالرکین^۳ (۱۹۳۰) روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف^۴ (۱۹۴۹) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلّی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی^۵ را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود. میرسکی^۶ و هرمان^۷ (۱۹۵۸) با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول^۸، تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند [۹]. گرینسپن^۹ (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود. بنابراین دو تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و تغییر شکل برشی برای پوسته‌های جدار ضخیم مطرح شد.

الف) نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی (تئوری کلاسیک)

در تئوری الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، ۱۵ معادله (سه معادله‌ی تعادل تنش، شش معادله‌ی سینماتیک و شش معادله‌ی رفتاری) و ۱۵ مجهول (شش مؤلفه‌ی تانسور تنش متقارن، شش مؤلفه‌ی تانسور کرنش متقارن و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی) وجود دارد که منجر به حلّ دقیق مسأله می‌شود ولی حلّ معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به‌کارگیری آنها امکان‌ناپذیر است. با فرضیات ساده‌شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد یک نمونه از این فرضیات ساده‌کننده منجر به شکل‌گیری تئوری الاستیسیته‌ی مستوی می‌شوند. در این تئوری، فرض می‌شود که مقاطع مستوی

-
1. Lamé
 2. Plane Elasticity Theory (PET)
 3. Galerkin
 4. Vlassov
 5. Shear Deformation Theory (SDT)
 6. Mirsky
 7. Hermann
 8. First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)
 9. Greenspon

عمود بر محور استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌ماند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود در این تئوری مقاطع پس از بارگذاری همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. این تئوری را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد به کار برد و توزیع تنش را در استوانه‌ها به دست آورد. تئوری لامه به تئوری کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است [۳].

(ب) نظریه‌ی تغییر شکل برشی

با استفاده از بسط تیلور و تعریف جابه‌جایی هر نقطه به صورت جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی می‌توان جابه‌جایی تئوری لامه را به صورت یک چندجمله‌ای نوشت. اگر فقط جمله‌ی اول چندجمله‌ای در نظر گرفته شود تحلیل پوسته‌های ضخیم به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی صفر نامیده می‌شود که مشابه تئوری خمشی در پوسته‌های نازک است. و اگر دو جمله از این بسط در نظر گرفته شود $(u_r = u_r^0 + z u_r^1)$ ، تحلیل پوسته‌های جدار ضخیم به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول نامیده می‌شود که مشابه تئوری فلوگه در پوسته‌های نازک می‌باشد. به همین ترتیب می‌توان تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالاتر را استخراج و فرمول‌بندی نمود. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول میرسکی-هرمان نیز شهرت دارد که تعمیم تئوری تیموشنکو^۱ در تیرها و همچنین تئوری میندلین^۲ در ورق‌هاست. در این تئوری علاوه بر اثر نیروهای محوری، برش، خمش، پیچش، اینرسی دورانی و میدان حرارتی را نیز می‌توان در نظر گرفت

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پس از تغییر شکل مستوی باقی می‌مانند ولی الزاما عمود بر سطح میانی باقی نمی‌مانند و این بدان معنی است که تنش و کرنش برشی در سطوح موازی صفحه‌ی میانی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند.

1 Timoshenko
2 Mindlin

تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای مختلف با انواع جداره، مواد، بارگذاری و شرایط مرزی، حتی نامتقارن محوری^۱، روش مناسبی می‌باشد.

۴-۱ مقدمه‌ای بر مواد

همان‌طور که می‌دانیم ماده‌ی همگن ماده‌ایست که خواص آن در تمام نقاطش یکسان است و ماده‌ی همسان‌گرد ماده‌ایست که خواص هر نقطه‌ی مادی آن در تمام جهت‌ها یکسان است. با پیشرفت سریع صنایع هوافضا، توربین‌ها، و دیگر ماشین‌ها نیاز به موادی با مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا به وجود آمده است. بنابراین دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند که از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها) در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهمسان‌بوجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، ولیکن از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آنهاست که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد بویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی‌ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص در ساختار ارگانیسم‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به‌عنوان مثال: استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این‌رو تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. مواد FG ناهمگن هستند.

۱-۴-۱ مواد پیزوالکتریک

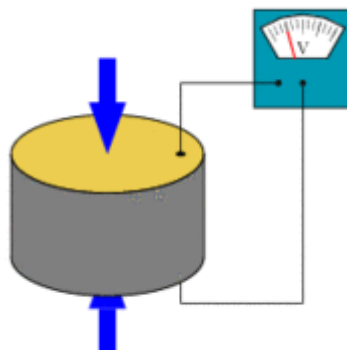
در بلورها پراکندگی و فاصله‌ی اجزا دارای نظم هندسی ویژه‌ای است که معمولاً در تمام جهتها یکسان نیست. برخلاف بلورها در جامدهای بی‌شکل یا غیربلورین پراکندگی و فاصله‌ی اجزای سازنده‌ی آنها در تمام جهتها یکسان است از این رو برخی خواص فیزیکی جامدهای غیربلورین، مانند رسانایی گرمایی، انتشار نور و رسانایی الکتریکی نیز در همه‌ی جهتها یکسان است. به این جامدها همسانگرد گفته می‌شود. چون خواص فیزیکی بیشتر جامدهای بلورین در جهتهای مختلف متفاوت است به آنها (ناهمسانگرد) می‌گویند و تنها بلورهایی که در دستگاه مکعبی متبلور می‌شوند مانند اجسام غیربلورین عمل می‌کنند.

پدیده ناهمسانگردی سبب پیدایش خواصی در بلورها می‌شود که کاربردهای مختلف و مهمی در صنعت دارند مثلاً اگر بلورهایی مانند کوارتز و تورمالین از دو طرف کشیده یا فشرده شوند، در جهت عمود بر فشار یا کشش دارای بار الکتریکی مخالف یکدیگر می‌شوند. اگر جهت این فشار یا کشش را عوض کنیم نوع بار الکتریکی تغییر می‌کند. به این پدیده پیزوالکتریک می‌گویند. اثر پیزوالکتریک خاصیتی است که در بسیاری از مواد وجود دارد. نام پیزوالکتریک از دو قسمت تشکیل شده پیزو از یک کلمه‌ی یونانی است که به معنی فشار است و الکتریک نیز که از الکتریسیته می‌آید. به عنوان یک بیان کلی می‌توان گفت معنی پیزوالکتریک اثر و تاثیر فشار - الکتریسیته می‌باشد.

اثر پیزوالکتریک عبارت است از توانایی بلوری شدن (متبلور شدن) برخی مواد برای تولید کردن بار الکتریکی متناسب با نیروی خارجی. اولین رخدادی که سبب توجه به سمت مواد پیزوالکتریک^۱ گردید به تأثیر مواد پایروالکتریک^۲ باز می‌گردد. خاصیت پایروالکتریک که تولید پتانسیل الکتریکی در اثر ایجاد تغییرات دمایی است؛ در اواسط قرن هجدهم توسط کارلوس لینائوس^۳ و فرانز آئپی‌نئوس^۴

1. Piezoelectric
2. Pyroelectric
3. Carolus Linnaeus
4. Franz Aepinus

مورد پژوهش قرار گرفت. اثر پیزوالکتریک کاربرد زیادی در طراحی (مبدل‌ها^۱، شتاب‌سنج‌ها، نیروسنج‌ها، فشارسنج‌ها و...) دارد. مطابق با خاصیت معکوس پیزوالکتریک میدان الکتریکی باعث ایجاد تغییر شکل در مواد پیزوالکتریک می‌شود. این خاصیت معکوس پیزوالکتریک در طراحی محرک‌ها^۲ کاربرد دارد. مواد پیزوالکتریک موادی هستند که تحت تأثیر کرنش مکانیکی ایجاد شده در آنها یک میدان الکتریکی با جهت‌گیری خاص در این مواد پدید می‌آید، ایجاد میدان الکتریکی در این مواد به عنوان اثر پیزوالکتریک شناخته می‌شود. کرنش مکانیکی فوق می‌تواند توسط هر عامل خارجی از قبیل: نیرو، فشار، شوک حرارتی و ... به وجود آید؛ [۵]. در صورتی که مواد پیزوالکتریک خاصیت پیزوالکتریک خود را از دست دهند، دیپلاریزه می‌گردند؛ در حین دیپلاریزه شدن دو قطبی‌های موجود در ماده از بین می‌روند. دیپلاریزه شدن می‌تواند منشأ الکتریکی، مکانیکی و یا حرارتی داشته باشد.



شکل ۱-۱ دیسک پیزوالکتریک تغییر شکل یافته

در شکل (۱-۱) دیسک پیزوالکتریک تغییر شکل یافته، ولتاژ الکتریکی ایجاد می‌کند که بیانگر اثر مستقیم پیزوالکتریک می‌باشد. مواد پیزوالکتریک از گستردگی زیادی برخوردار است؛ پوست و استخوان انسان نیز خاصیت پیزوالکتریک دارند [۶].

1. Transducer
2. Actuators

۱-۴-۱ کاربردهای مواد پیزوالکتریک

کاربردهای بسیاری را، می‌توان برای مواد پیزوالکتریک متصور شد، در این قسمت به بخشی از این کاربردها که در [۷] آمده است، اشاره‌ای می‌شود.

یکی از کاربردهای اساسی سرامیک‌های پیزوالکتریک استفاده به‌منظوره آتش‌زنه^۱ گاز^۱ می‌باشد. ولتاژ بسیار بالای تولید شده در سرامیک پیزوالکتریک به وسیله تنش مکانیکی، سبب جرقه^۲ و مشتعل شدن گاز می‌گردد؛ به دو طریق افزایش ناگهانی و تدریجی می‌توان این نیروی مکانیکی را اعمال کرد. سرامیک‌های پیزوالکتریک، به علت وجود اثر مستقیم پیزوالکتریک، می‌توانند به عنوان شتاب‌سنج‌ها و تنش‌سنج‌ها مورد استفاده قرار گیرند. ارتعاشگرهای پیزوالکتریک در تجهیزات ارتعاشاتی مکانیکی می‌توانند به‌عنوان صافی^۳ و محرک یا نوسانگر^۴ استفاده شوند.

شوینده‌های فراصوتی، میکروفن‌های^۵ فراصوتی و دستگاه‌های اندازه‌گیری به کار رفته در سیستم‌های فرمان کوتاه برد، آشکارساز زیرآبی و ردیاب ماهی، سنجش‌گرهای غیرمخرب و ... نمونه‌ای از کاربردها می‌باشند. بررسی فراصوتی آشکارسازها در زمینه‌های پزشکی الکترونیکی، به منظور کاربردهای کلینیکی^۶ در گستره تشخیص تا درمان و جراحی مفید می‌باشند.

آنچه که گفته شد؛ تنها بخش کوچکی از کاربرد وسیع بیان شده مواد پیزوالکتریک در [۷] می‌باشد.

۱-۴-۲ مواد FG

مفهوم اولیه مواد متغیر تابعی توسط نینو^۷ و همکارانش در سال ۱۹۸۴ در سازمان هوافضای ژاپن مطرح شد [۸]. سازه‌هایی که از مواد تابعی ساخته می‌شوند، عموماً دارای بدنه‌ای ناهمگن از

-
1. Gas Igniter
 2. Spark
 3. Filter
 4. Oscillator
 5. Microphones
 6. Clinic
 7. Niino

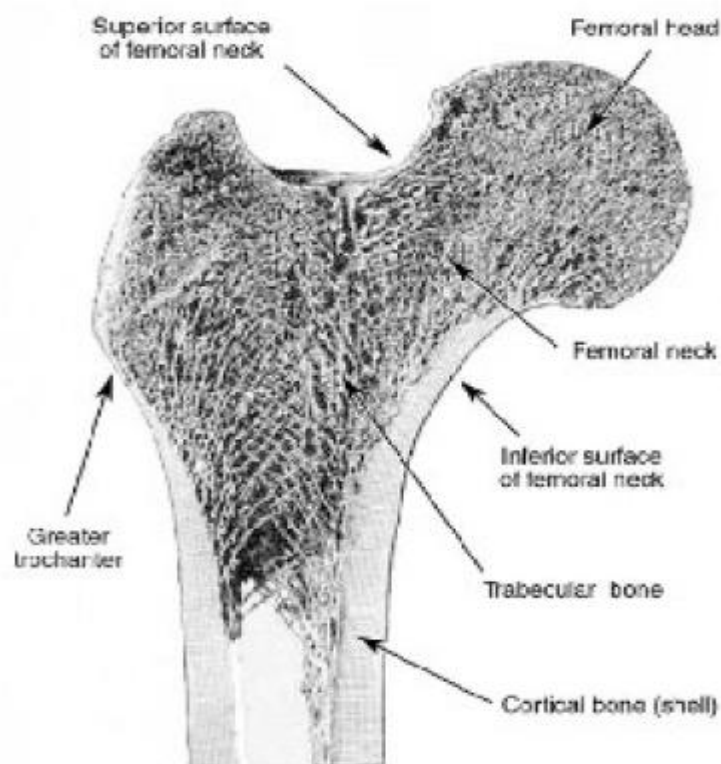
دو جنس متفاوت می‌باشند که به صورت کاملاً پیوسته با یکدیگر ترکیب شده‌اند، به طوری که درصد تغییرات حجمی این دو نسبت به هم در سازه می‌تواند به‌طور کاملاً یکنواخت تغییر کند. در حرارت‌های زیاد فلزات و آلیاژهای فلزی به شدت در معرض اکسیداسیون، خوردگی، خزش و... قرار می‌گیرند و این در حالی است که استفاده‌ی تنها از مواد با خواص ترمودینامیکی مطلوب همچون سرامیک‌ها بسیاری از خواص مورد نظر در طراحی مانند چقرمگی و استحکام بالارا برآورده نمی‌کنند. از این رو ایده‌ی مواد مرکب مطرح شد. این مواد از ترکیب دو یا چند ماده به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوتی دارند. به عنوان مثال فلزات با پوشش عایق حرارتی^۱ پوشانده می‌شوند. این مواد از دید میکروسکوپی ناهمگن و ناهمسانگرد هستند ولی از دید ماکروسکوپی موادی همگن ولی ناهمسانگرد هستند. تغییر ناگهانی مواد و در نتیجه خواص در مواد مرکب که موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود از اشکالات عمده‌ی آن‌هاست و باعث تمرکز تنش و ایجاد ترک و گسیختگی در مرز لایه‌ها می‌شود. با توجه به این مشکلات ساخت ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا داشته و هم مشکلات ناشی از تغییرات ناگهانی خواص را نداشته باشد، ضرورت پیدا کرد و این بدان معنی است که نیاز به ماده‌ای با تغییرات تدریجی خواص در مقیاس میکروسکوپی به وجود آمد. به این مواد اصطلاحاً FGM^۲ گفته می‌شود. در سال ۱۹۸۶ مطالعات بر روی امکان ساخت این مواد در ژاپن آغاز شد و مرحله‌ی اول پروژه‌ای با نام «فناوری گسترش FGM» طی سال‌های ۱۹۸۷ تا ۱۹۸۹ اجرا و پس از دستیابی به هدف که ساخت قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر با خواص ذکرشده بود، در سال ۱۹۹۰ در سمپوزیومی در سندای به جهانیان ارائه شد. مرحله‌ی دوم این پروژه در سال‌های ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۱ اجرا شد که نتیجه‌ی آن ساخت ورق‌های مربعی به ضلع ۳۰۰ میلی‌متر و نیم‌کره-هایی به قطر ۵۰ میلی‌متر با خواص ذکر شده برای استفاده در ساخت دماغه‌ی فضاپیما بود که پس از آن دومین سمپوزیوم جهانی FGM در سال ۱۹۹۲ در سان‌فرانسیسکو برگزار شد. در

1 thermal barrier coating

2. Functionally Graded Materials (FGM)

سال‌های اخیر توجه بر روی FGM ها در اروپا به ویژه آلمان به شدت گسترش یافته است.

از مزایای FGM نسبت به مواد مرکب لایه‌ای، عدم گسستگی در محل اتصال لایه‌ها می‌باشد، زیرا همانطور که گفته شد در FGM ترکیب مواد پیوسته است. از این مواد می‌توان در صنایع هوایی، فضایی، نظامی، هسته‌ای، نیروگاهی، الکترونیکی، پزشکی و ... به عنوان پوشش بخش‌های مختلف هواپیماها و فضاپیماها، ساخت لوله‌ی توپ، راکتورها، مخازن، پوشش پردازنده‌ها، مواد دندان‌پزشکی و ارتوپدی استفاده کرد و صدها کاربرد متنوع دیگر برای آن‌ها متصور شد. استخوان ماده‌ای طبیعی است که سطح خارجی محکمی دارد و در مرکز آن بافتی نرم وجود دارد که این موجب تغییر تدریجی خواص از داخل به خارج استخوان می‌شود بنابراین استخوان ماده‌ای ناهمگن است. خواص مکانیکی استخوان در جهت طولی با سایر جهات متفاوت است بنابراین استخوان ماده‌ای ناهمسان‌گرد نیز هست. در صورت صرف‌نظر از ناهمسان‌گردی استخوان می‌توان آن را FGM در نظر گرفت.



شکل ۱-۲ نمای برش طولی استخوان

مواد FG دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر می‌باشند [۹]:

۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا.

۲- مقاومت بالا در برابر بارهای مکانیکی.

۳- کاهش اثر تمرکز تنش در نواحی با شکل هندسی خاص.

۴- جلوگیری از ایجاد و رشد ترک.

۵- اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی

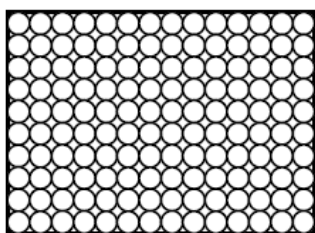
ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد FG، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد FG، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن

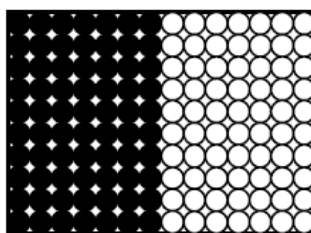
می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی

ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. شکل ۱-۳ مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد

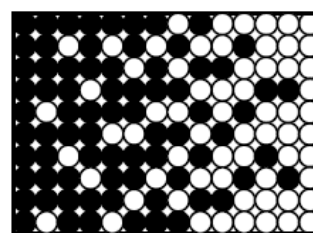
همسانگرد، کامپوزیت و FG را نشان می‌دهد.



ماده‌ی همگن



ماده‌ی مرکب لایه‌ای



FGM

شکل ۱-۳ تغییرات خواص در مواد مختلف

۱-۴-۲-۱ توزیع خواص

قبل از ساخت FGM باید مشخص شود که اجزای تشکیل‌دهنده به چه صورتی توزیع شده است،

در بعضی مقاله‌ها هدف یافتن یک پروفیل با توجه به بهینه کردن یک کمیت است. در مواقع دیگر

پروفیل توزیع مواد انتخاب می‌شود و یک پارامتر برای اهداف بهینه در آن در نظر گرفته می‌شود.

از آن جا که هدف در ساخت این مواد ایجاد یک تابع پیوسته از خواص در طول ماده است می توان توابع مختلفی را برای توزیع خواص در نظر گرفت. توابع رایج برای خواص مکانیکی و حرارتی، توانی و نمایی می باشند.

معمولا تابع توزیع خواص برای مدول الاستیسیته، استحکام تسلیم، ضریب هدایت حرارتی ضریب انبساط حرارتی در نظر گرفته می شود ولی نسبت پواسون در تمام نقاط ماده ثابت فرض می شود. علت این فرض تغییرات بسیار کوچک نسبت پواسون در مقابل مدول الاستیسیته است. در این تحقیق توزیع خواص به صورت توانی در جهت شعاع کره به صورت رابطه ی (۱-۱) در نظر گرفته می شود:

$$M(r) = M_i \left(\frac{R}{R_i} \right)^n \quad (1-1)$$

در رابطه ی فوق M خاصیت مورد نظر در هر نقطه از کره، M_i خاصیت مورد نظر در سطح داخلی کره، R_i شعاع داخلی کره و n ثابت ناهمگنی است.

۵-۱ کاربرد پوسته های کروی

کاربرد پوسته های کروی در صنعت و حتی در طبیعت کاملا محسوس می باشد. به عنوان چند نمونه طبیعی می توان به هندسه ی کروی جمجمه ی انسان، هندسه ی سیارات و ستاره ها در شکل (۱-۴) و حتی پوسته ی سخت لاک پشت ها و ... اشاره کرد. در کاربردهای صنعتی، مخازن کروی از جمله تجهیزات ذخیره سازی سیالات بوده که در صنایع مختلف کاربرد فراوانی پیدا نموده است.



شکل ۱-۴ زمین به عنوان یک کره ی دوار

شکل هندسی مناسب آن در تحمل فشارهای بالا از یک سو و نحوه ی ساخت آن از سوی دیگر کاربری این تجهیزات را تحت الشعاع قرار می دهد. در صنایع نفت و گاز و پتروشیمی مخازن کروی از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند.



شکل ۱-۵ کاربرد کره در صنایع نفت و گاز و پتروشیمی

ذخیره سازی گاز در دمای محیط تنها به روش متراکم سازی و مایع نمودن در فشار بالا امکان پذیر می باشد و مخازن کروی به دلیل هندسه ی مناسب قادر به تحمل این فشارهای بالا می باشند. در صنایع ساختمانی نیز از شکل هندسی کره در توزیع مناسب نیروهای حجمی حاصل از وزن سازه در گنبدها، طاق ها و... بسیار استفاده می شود. کره های چرخان نیز در کاربردهای مختلف از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند. اخیراً مهندسان از

مخازن کروی ساخته شده از مواد کامپوزیتی با سرعت‌های دورانی بالا در ماشین‌های پرنده استفاده کرده‌اند که وزن آن‌ها از بسیاری از ماشین‌های پرنده کمتر و قابلیت عمود پرواز کردن را دارند.

۶-۱ نگاهی بر مطالعات گذشته

تاکنون پژوهش‌های بسیاری بر روی پوسته‌های جدارضخیم استوانه‌ای و کروی به دلیل اهمیت آن‌ها صورت گرفته است. از سوی دیگر مواد پیزوالکتریک به دلیل خاصیتی که دارند، در زمینه‌ی ساخت پوسته‌های جدارضخیم مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند. این مواد هنگام تغییر شکل تولید میدان الکتریکی می‌کنند و برعکس. از این خاصیت مواد پیزوالکتریک در ساخت وسایل الکتریکی یا الکترومکانیکی مانند عمل‌کننده‌ها، حس‌کننده‌ها و تبدیل‌کننده‌ها استفاده می‌شود [۱۰]. آنچه که در ادامه مطلب ذکر می‌گردد بخشی از پژوهش‌های موجود می‌باشد که با توجه به ارتباط و نزدیکی آن‌ها به پژوهش حاضر ارائه می‌گردد.

اولین بار لامه در سال ۱۸۵۲ [۳] استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی^۱، حل دقیق استوانه‌های کلفت متقارن محوری با جدار ثابت از ماده‌ی همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت را ارائه کرد. در سال ۲۰۰۵ قناد و همکاران [۱۱] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، حل کلی استوانه‌های جدارضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن را ارائه نموده و روابط مربوط به توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی شعاعی را استخراج نمودند. در همین سال، اسلامی [۱۲] حل تحلیلی و عددی کره‌های ساخته شده از مواد ناهمگن را تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی به‌طور همزمان مورد مطالعه قرار داد و روابط حاکم بر تنش‌های شعاعی و محیطی و جابه‌جایی شعاعی را به‌دست آورد.

توتونچو^۲ [۱۳] در سال ۲۰۰۷، با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به‌کارگیری سری فروبینوس، استوانه‌های جدارضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی قرار داشت و مدول الاستیسیته‌ی آن به‌صورت نمایی تغییر می‌کرد را در حالت کرنش صفحه‌ای حل کرد. در این پژوهش اثر تغییر ثابت

1: Plane Elasticity Theory

2: Tutuncu

ناهمگنی بر روی توزیع تنش شعاعی، تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی مورد مطالعه قرار گرفت.

تحلیل تئوری و عددی کره‌های جدار ضخیم ناهمگن ساخته شده از مواد ناهمگن تحت بارگذاری مکانیکی در سال ۲۰۱۱ توسط بیات [۱۴] انجام گرفت. در این مطالعه، روابط حاکم بر تنش‌ها و جابه‌جایی به صورت کلی استخراج شده است. همچنین بیات و قناد [۱۵] در سال ۲۰۱۲ حل عددی و تئوری کره‌های جدار ضخیم همگن چرخان با در نظر گرفتن بارگذاری مکانیکی و حرارتی را مورد مطالعه قرار داد. در این پژوهش کره‌ی مورد نظر با سرعت زاویه‌ای ثابت در حال چرخش بوده و تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی قرار داشت. برای حل تحلیلی این مسأله از روش تابع پتانسیل استفاده شده است. اندکی بعد، قناد و زمانی‌نژاد [۱۶] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و تعریف روابط ساختاری، حل کامل کره‌های جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را به دست آوردند. ایشان ناهمگنی خواص برای مدول الاستیسیته به صورت توانی در نظر گرفتند و فرض کردند ضریب پوآسون ثابت می‌باشد. بیات و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۱۲ نیز با استفاده از نظریه‌ی کلاسیک حل تحلیلی کره‌ی ساخته‌شده از مواد ناهمگن را تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی ارائه نموده و نتایج حاصل از حل تحلیلی را با داده‌های به‌دست آمده از حل عددی توسط نرم‌افزار ABAQUS مقایسه نمودند.

حل تحلیلی مواد پیزوالکتریک همگن در سال ۱۹۹۸ توسط چن^۱ [۱۸] انجام گرفت که در این پژوهش مواد در راستای شعاع خود پلاریزه شده بودند. ژونگ^۲ و وانگ^۳ [۱۹] در سال ۲۰۰۳ با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول حل عمومی کره‌های جدار ضخیم همگن پیزوالکتریک را ارائه دادند. در این مطالعه حل سه‌بعدی مگنتوالکتروالاستیک^۴ پوسته‌های کروی همگن که دارای شرایط مرزی مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی در سطح داخلی و خارجی خود بودند ارائه گردید و در پایان روابط توزیع تنش، جابه‌جایی‌ها، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی استخراج گردید. وانگ و

1.Chen

2.Zhong

3.Wang

4. Magneto-Electro-Elastic

دای^۱ [۲۰] در سال ۲۰۰۵ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به‌کارگیری روش‌های تبدیل هنکل^۲، تبدیل لاپلاس و معکوس این تبدیلات، حل دقیق استوانه و کره‌های ناهمگن پیزوالکتریک را تحت بارگذاری مکانیکی، الکتریکی و حرارتی به‌صورت همزمان و وابسته به زمان ارائه نموده همچنین پاسخ گذرای این سازه‌ها را در زمان‌های مختلف بررسی نمودند و نتایج را به صورت نمودار گزارش دادند. در سال ۲۰۰۷ دای و همکاران [۲۱] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی حل تحلیل سازه‌های توخالی از جنس مواد پیزوالکتریک را به‌دست آوردند. در این پژوهش استوانه و کره‌ی توخالی که تحت بارهای الکتریکی، مکانیکی و مغناطیسی قرار داشت و خواص آن به‌صورت توانی تغییر می‌کرد، مورد بررسی قرار گرفت. کار^۳ و کانوریا^۴ [۲۲] در سال ۲۰۰۹ حل عمومی ترموالاستیک کره‌ی جدارضخیم ناهمگن را تحت شوک حرارتی، با استفاده از اثر سه فاز تاخیری ارائه نمودند. در این پژوهش، اثرمتقابل بارگذاری حرارتی و مکانیکی در مرحله‌ی اعمال اثر دما بر روی مرزهای سازه مورد مطالعه قرار گرفت.

در سال ۲۰۱۰ قربان‌پور و همکاران [۲۳] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی حل تحلیلی مگنتوالکتروالاستیک پوسته‌های کروی ناهمگن را با در نظر گرفتن بارگذاری حرارتی ارائه دادند. در این پژوهش پوسته‌ی کروی موردنظر که دارای شرایط مرزی مکانیکی، الکتریکی و حرارتی در لایه‌های داخلی و خارجی بوده و تحت تاثیر میدان یکنواخت مغناطیسی قرار داشته همچنین در راستای شعاعی پلاریزه شده بود مورد بررسی قرار گرفت.

حل دقیق استوانه‌ی چرخان ناهمگن ساخته شده از مواد پیزوالکتریک توسط رحیمی و همکاران [۲۴] در سال ۲۰۱۱ انجام شد. طبق این پژوهش استوانه‌ی توخالی چرخان که تحت بارهای مکانیکی، حرارتی و الکتریکی قرار داشت و خواص آن به‌صورت توانی تغییر می‌کرد مورد بررسی قرار گرفت.

1. Dai
2. Hankel
3. Kar
4. Kanoria

نتایج تحقیق نشان می‌داد، ثابت ناهمگنی تاثیر زیادی بر روی تنش و پتانسیل الکتریکی دارد. ژیفای^۱ و یینگ^۲ [۲۵] در سال ۲۰۰۵ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، حل دقیق استوانه‌ی جدارضخیم ناهمگن ساخته شده از مواد پیزوالکتریک را مورد مطالعه قرار دادند. در این تحقیق اثر بارگذاری یکنواخت حرارتی و الکتریکی به‌طور همزمان بررسی شده و پوسته‌ی مورد نظر دارای شرایط مرزی الکتریکی و حرارتی در مرزهای داخلی و خارجی خود در نظر گرفته شده است. در نهایت حل عددی مسأله برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای با دو ساختار متفاوت FG که خواص پیزوالکتریک آن به صورت خطی متغیر بوده و ساختار دوم به صورت دو لایه با تغییر پارامترهای پیزوالکتریک به صورت دفعی استخراج شده و توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی برای دو ساختار با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در همین سال قربان‌پور و همکاران [۲۶]، تحلیل الکتروترموالاستیک^۳ استوانه‌ی جدارضخیم ناهمگن ساخته شده از مواد پیزوالکتریک که در راستای شعاع خود پلاریزه شده بود را با در نظر گرفتن پدیده خزش ارائه دادند. در سال ۲۰۱۲ نیز ایشان [۲۷] با استفاده از روش تحلیلی، حل الکتروترموالاستیک کره‌های جدارضخیم ناهمگن ساخته شده از مواد پیزوالکتریک را ارائه داده و نتایج حل تحلیلی را با نتایج حاصل از حل عددی مسئله مقایسه کردند.

دای و همکاران [۲۸] در سال ۲۰۱۲ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، حل تحلیلی و عددی کره‌ی جدارضخیم ناهمگن ساخته شده از مواد پیزوالکتریک را با در نظر گرفتن خزش ارائه دادند. در این تحقیق سازه‌ی مورد نظر تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی، الکتریکی و مغناطیسی قرار داشته و خواص آن به صورت توانی در راستای شعاع تغییر می‌کرد. پرهیزکار یعقوبی [۲۹] در سال ۲۰۱۳ با بهره‌گیری از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول^۴، حل تحلیلی استوانه‌ی چرخان جدارضخیم ساخته شده از مواد پیزوالکتریک که در راستای شعاع خود پلاریزه شده بود را مورد مطالعه قرار داد. در این تحقیق اثر بارگذاری یکنواخت حرارتی و الکتریکی به‌طور همزمان بررسی شده

1. Zhifei

2. Ying

3. Electro-Thermo-Elastic

4. First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)

و پوسته‌ی مورد نظر دارای شرایط مرزی الکتریکی و حرارتی در مرزهای داخلی و خارجی خود در نظر گرفته شده است در این پژوهش روابط حاکم بر تنش‌ها، جابه‌جایی شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی در سازه‌ی مورد نظر استخراج گردیده و در نهایت، نتایج حل تحلیلی با نتایج حاصل از روش اجزای محدود مقایسه شده است.

۷-۱ معرفی پایان‌نامه‌ی حاضر

با توجه به مطالبی که درباره‌ی مطالعات انجام‌شده در گذشته بیان شد، می‌توان نتیجه گرفت که انجام تحقیقی نسبتاً جامع بر روی کره‌های جدار ضخیم ناهمگن پیزوالکتریک می‌تواند بسیار سودمند و راهگشای مسیر پژوهشگران، طراحان و مهندسين در این امر باشد

در این پایان‌نامه یک مخزن چرخان کروی جدار ضخیم ناهمگن پیزوالکتریک، که تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در حالت ایستا قرار دارد مورد مطالعه قرار گرفته است. همه خواص ماده به صورت تابع توانی در راستای شعاع متغیر می‌باشند. در این تحقیق، اثر بارگذاری مکانیکی، حرارتی و چرخشی به‌طور مجزا و همزمان بررسی شده است. به منظور اطمینان از استخراج معادلات و فرآیند حل تحلیلی، نتایج با روش اجزای محدود نیز استخراج شده‌اند.

فصل ۲

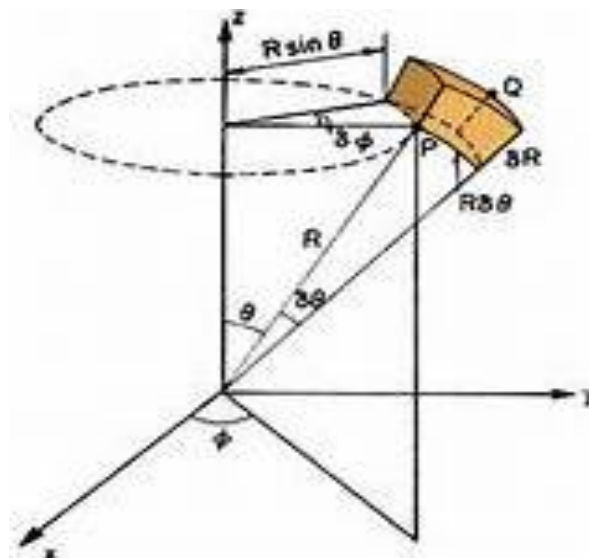
استخراج روابط تحلیلی پوسته‌های کروی FGPM
تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی

۱-۲ پیش‌گفتار

در این فصل ابتدا روابط کلی الکتروترموالاستیک حاکم بر پوسته‌های کروی ارائه شده است. در گام بعدی، استخراج روابط برای یک کره‌ی FGM پیزوالکتریک در حالت کلی که تحت بارهای مکانیکی، الکتریکی و دمایی قرار دارد انجام گرفته؛ سپس به ساده‌سازی معادلات حاکم برای مسأله مورد مطالعه، با توجه به فرضیات حاکم بر آن پرداخته می‌شود، در نهایت با به دست آوردن معادلات ناویر برای پوسته‌های جدارضخیم کروی و در نظر گرفتن اثر مواد FG در این معادلات، حل مسأله ارائه می‌گردد.

۲-۲ روابط اساسی در دستگاه مختصات کروی

با در نظر گرفتن دستگاه مختصات راستگرد، یک المان دلخواه از یک جسم در مختصات کروی به صورت شکل زیر نمایش داده می‌شود. در این بخش با استفاده از مراجع [۱۹]، [۳۳] و [۳۴] به استخراج معادلات اساسی و تحلیل پیزوترموالاستیک مسأله پرداخته شده است.



شکل ۱-۲ دستگاه مختصات کروی راستگرد

که در این المان تانسور^۱ تنش به صورت زیر می باشد.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{R\theta} & \tau_{R\phi} \\ \tau_{R\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\phi\theta} \\ \tau_{R\phi} & \tau_{\theta\phi} & \sigma_\phi \end{bmatrix} \quad (۱-۲)$$

به همین ترتیب تانسور کرنش و بردار میدان جابه جایی را می توان به صورت زیر نشان داد.

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{\gamma_{R\theta}}{2} & \frac{\gamma_{R\phi}}{2} \\ \frac{\gamma_{R\theta}}{2} & \varepsilon_\theta & \frac{\gamma_{\phi\theta}}{2} \\ \frac{\gamma_{R\phi}}{2} & \frac{\gamma_{\phi\theta}}{2} & \varepsilon_\phi \end{bmatrix} \quad (۲-۲)$$

$$\{u\} = \begin{cases} u_R = u_R(R, \theta, \phi) \\ u_\theta = u_\theta(R, \theta, \phi) \\ u_\phi = u_\phi(R, \theta, \phi) \end{cases} \quad (۳-۲)$$

۲-۲-۱ روابط تعادل و بار خطی الکترواستاتیک

روابط زیر، روابط تعادل تنش خطی حرکت و بار خطی الکترواستاتیک^۲ را بیان می کند. [۲۹]

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (۴-۲)$$

$$D_{i,i} = 0 \quad (۵-۲)$$

که σ_{ij} ، D_i و F_i به ترتیب بیانگر مؤلفه های تانسور تنش متقارن کوشی^۳، بردار جابه جایی

الکتریکی و نیروهای حجمی مکانیکی می باشند

با بسط روابط فوق در سیستم مختصات کروی، روابط تعادل تنش و رابطه ی بار خطی

الکترواستاتیک به فرم زیر نوشته می شود.

1.Tensor
2.Electrostatic
3. Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{R\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R} (2\sigma_R - \sigma_\phi - \sigma_\theta + \tau_{R\theta} \cot \theta) + F_R = 0 \\ \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{1}{R} [(\sigma_\theta - \sigma_\phi) \cot \theta + 3\tau_{R\theta}] + F_\theta = 0 \\ \frac{\partial \tau_{R\phi}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{R} (2\tau_{\phi\theta} \cot \theta + 3\tau_{R\phi}) + F_\phi = 0 \end{cases} \quad (۶-۲)$$

رابطه‌ی بار خطی الکترواستاتیک نیز به این صورت خواهد بود.

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 D_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (۷-۲)$$

۲-۲-۲ روابط سینماتیک

در این قسمت، روابط سینماتیک^۱ درمختصات کروی در دو بخش میدان کرنش و میدان پتانسیل الکتریکی ارائه می‌شوند. ابتدا روابط کرنش‌های نرمال شعاعی ε_R ، محیطی ε_ϕ و نصف‌النهاری ε_θ با میدان جابه‌جایی، سپس روابط کرنش‌های برشی شعاعی-محیطی $\gamma_{R\phi}$ ، کرنش‌های برشی شعاعی-نصف‌النهاری $\gamma_{R\theta}$ و محیطی-نصف‌النهاری $\gamma_{\phi\theta}$ با میدان جابه‌جایی در مختصات کروی بیان می‌گردد و در نهایت به بیان روابط مؤلفه‌های شعاعی E_R ، محیطی E_ϕ و نصف‌النهاری E_θ میدان الکتریکی با تابع توزیع پتانسیل الکتریکی در مختصات کروی پرداخته می‌شود [۱۹] و [۳۴].

$$\varepsilon_R = \frac{\partial u_R}{\partial R} \quad (۸-۲)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R}{R} \quad (۹-۲)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_R}{R} + \frac{u_\theta}{R \sin \theta} \cot \theta \quad (۱۰-۲)$$

$$\gamma_{R\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R} \quad (۱۱-۲)$$

1.kinematic

$$\gamma_{R\phi} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_R}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial R} - \frac{u_\phi}{R} \quad (۱۲-۲)$$

$$\gamma_{\phi\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) \quad (۱۳-۲)$$

$$E_R = -\frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (۱۴-۲)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (۱۵-۲)$$

$$E_\phi = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (۱۶-۲)$$

۳-۲-۲ روابط ساختاری

همچنین روابط ساختاری برای کره‌ی ناهمگن پیزوالکتریک به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\phi \\ \tau_{\theta\phi} \\ \tau_{R\phi} \\ \tau_{R\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_\phi \\ \gamma_{\theta\phi} \\ \gamma_{R\phi} \\ \gamma_{R\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{35} \\ 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R \\ E_\theta \\ E_\phi \end{bmatrix} - \quad (۱۷-۲)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta$$

$$\begin{bmatrix} D_R \\ D_\theta \\ D_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} \\ e_{12} & e_{23} & e_{22} & 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_\phi \\ \gamma_{\theta\phi} \\ \gamma_{R\phi} \\ \gamma_{R\theta} \end{bmatrix} + \quad (۱۸-۲)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R \\ E_\theta \\ E_\phi \end{bmatrix}$$

در روابط ساختاری فوق $c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{23}, c_{44}$ و c_{55} ثوابت الاستیک، e_{11}, e_{12} و e_{35} ثوابت

پیزوالکتریک-تنش، λ_{11} و λ_{22} ثوابت تنش حرارتی-دما و ϵ_{11} و ϵ_{22} ثوابت دی‌الکتریک می‌باشند.

۲-۲-۴ رابطه‌ی انتقال حرارت هدایتی

رابطه‌ی کلی انتقال حرارت هدایتی در حالت سه بعدی و در شرایطی که محیط دارای یک

وضعیت پایدار است، با استفاده از مرجع [۳۴]، به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left(K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \right) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (19-2)$$

که در رابطه‌ی فوق، ضرایب K_{ij} ، یک تانسور متقارن تشکیل داده و ضرایب هدایت حرارتی در

جهات مختلف می‌باشند. در این رابطه θ ، تابع اسکالر توزیع دما بوده و X_i مؤلفه‌های دستگاه

مختصات کروی را تشکیل می‌دهند.

در یک محیط همسان داریم.

$$K_{ij} = K \delta_{ij} \quad (20-2)$$

واضح است که در نوشتار استاندارد تانسوری (نمادگذاری شاخصی)، زیرنویس لاتین استفاده شده،

از ۱ تا ۳ متغیر است. بنابراین در یک محیط همسان، ضرایب هدایت حرارتی در تمام جهات یکسان است.

در یک محیط همسان و همسان‌گرد، رابطه‌ی (۱۹-۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$K \nabla^2 \theta = 0 \quad (21-2)$$

رابطه‌ی کلی انتقال حرارت هدایتی، در مختصات کروی و با در نظر گرفتن شرایط فوق به

صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(K R^2 \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) = 0 \quad (22-2)$$

که در این رابطه K ، ضریب انتقال حرارت هدایتی می‌باشد.

۲-۳ تحلیل ریاضی مسأله

پوسته‌ی کروی مورد مطالعه دارای جداری ثابت می‌باشد و از جنس مواد ناهمگن و همسانگرد عرضی^۱ است که خاصیت ماده‌ی آن در راستای شعاعی متفاوت از دو راستای دیگر می‌باشد ناهمگنی خواص در این پژوهش به صورت توانی در نظر گرفته می‌شود در این قسمت، یک کره‌ی جدار ضخیم به شعاع داخلی a ، شعاع خارجی b و شعاع بی بعد r که به صورت $r = \frac{R}{R_i}$ نرمالیز شده و در آن R مقداری میان a و b دارد را در نظر گرفته می‌شود. برای تحلیل، دستگاه مختصات کروی که مبدأ آن در مرکز کره است را در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از فرضیات حاکم بر مسأله، به استخراج معادلات پرداخته می‌شود.

۲-۳-۱ فرضیات حاکم

در این قسمت به دلیل تقارن در هندسه، بارگذاری و ماده‌ی کره، تحلیل ریاضی مورد نظر را می‌توان با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی (PET) انجام داد. لذا در این شرایط کره در دو جهت دارای شرایط متقارن محوری می‌باشد.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \quad (23-2)$$

بنابراین توابع بیان‌کننده‌ی رفتار مکانیکی، الکتریکی و حرارتی تنها تابعی از شعاع R کره می‌باشند.

با توجه به آنچه بیان شد؛ می‌توان گفت:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\phi}, \quad \varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\phi} \quad (24-2)$$

همچنین میدان جابه‌جایی به صورت زیر خواهد بود.

1. Transversely Isotropic

$$\begin{cases} u_R = u_R(R) = R_i u_r(r) \\ u_\theta = 0 \\ u_\phi = 0 \end{cases} \quad (25-2)$$

در رابطه‌ی فوق، u_R ، u_θ و u_ϕ به ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای شعاعی، نصف‌النهاری و محیطی هستند که u_R تابعی از شعاع کره $u_R(R)$ می‌باشد.

۲-۴ ساده سازی روابط

با توجه به فرضیات حاکم و قابلیت استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی جهت تحلیل مسأله؛ همانطور که در رابطه‌ی (۲۳-۲) نشان داده شد رفتار مکانیکی، الکتریکی و حرارتی کره به دلیل تقارن محوری مستقل از مختصات θ و ϕ بوده و فقط تابعی از شعاع کره می‌باشد. بنابراین روابط تعادل، سینماتیک^۱ و ساختاری استخراج شده در بخش‌های قبل، قابل ساده‌سازی می‌باشند.

۲-۴-۱ روابط سینماتیک

برای روابط سینماتیک با توجه به ارتباط میان کرنش - جابه‌جایی مکانیکی و میدان الکتریکی - پتانسیل الکتریکی با در نظر گرفتن فرضیات حاکم بر مسأله خواهیم داشت.

$$\varepsilon_R = \frac{du_r}{dr} \quad (26-2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (27-2)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} \quad (28-2)$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{r\phi} = \gamma_{\phi\theta} = 0 \quad (29-2)$$

$$E_R = -\frac{d\psi}{dR} \quad (30-2)$$

1. Kinematic

$$E_\theta = E_\phi = 0 \quad (31-2)$$

بنابراین تانسور میدان کرنش $\tilde{\epsilon}$ ، به صورت زیر خواهد بود.

$$\tilde{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{du_r}{dr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r}{r} \end{bmatrix} \quad (32-2)$$

همچنین برای بردار میدان الکتریکی $\vec{E}$ ، داریم.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -\frac{d\psi}{dr} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33-2)$$

۲-۴-۲ روابط ساختاری

با استفاده از معادلات ساختاری (۱۷-۲) و (۱۸-۲) و نظر به آنچه که در بخش فرضیات حاکم بر مسأله گفته شد، با توجه به این که برخی از مؤلفه‌های میدان کرنش و الکتریکی صفر می‌باشند؛ می‌توان معادلات ساختاری را به شکل کاهش‌یافته‌ی زیر بیان نمود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_\phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{12} \end{bmatrix} E_R - \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{22} \end{bmatrix} \Theta(r) \quad (34-2)$$

$$D_R = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_\phi \end{bmatrix} + [\epsilon_{11}] [E_R] \quad (35-2)$$

۳-۴-۲ روابط تعادل و بارخطی الکترواستاتیک

با توجه به فرضیات حاکم بر مسأله و در غیاب نیروهای حجمی، روابط تعادل تنش و بار خطی الکترواستاتیک به این صورت ساده می‌شوند.

$$\frac{d\sigma_R}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_R - \sigma_\theta) = 0 \quad (36-2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 D_R) = 0 \quad (37-2)$$

با یک بار انتگرال گیری از رابطه ی (۳۷-۲) می توان نوشت.

$$D_R = \frac{S_1}{r^2} \quad (38-2)$$

با استفاده از رابطه ی فوق می توان رابطه ی (۳۵-۲) را به صورت زیر نوشت.

$$E_R = \frac{S_1}{\epsilon_{11}} \left(\frac{1}{r^2} \right) - \left(\frac{e_{11}}{\epsilon_{11}} \right) \epsilon_r - 2 \left(\frac{e_{12}}{\epsilon_{11}} \right) \epsilon_\theta \quad (39-2)$$

از جایگذاری رابطه ی به دست آمده در رابطه ی (۳۴-۲)، خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\phi \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1^2 & \mu_1 \mu_2 & \mu_1 \mu_2 \\ \mu_1 \mu_2 & \mu_2^2 & \mu_2^2 \\ \mu_1 \mu_2 & \mu_2^2 & \mu_2^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \epsilon_R \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_\phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \frac{S_1}{r^2} - \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{22} \end{bmatrix} \Theta(r) \quad (40-2)$$

که در آن q و μ به صورت زیر تعریف می شوند.

$$q_1 = \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}} \quad ; \quad \mu_1 = \frac{e_{11}}{\sqrt{\epsilon_{11}}} \quad (41-2)$$

$$q_2 = \frac{e_{12}}{\epsilon_{11}} \quad ; \quad \mu_2 = \frac{e_{12}}{\sqrt{\epsilon_{11}}} \quad (42-2)$$

۲-۵ ناهمگنی خواص

همانطور که در فصل قبل اشاره شد در مواد FG خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی ماده به-طور پیوسته تغییر می کند. در این تحلیل همه خواص به جز نسبت پواسون در راستای ضخامت کره به صورت تابع توانی برحسب شعاع کره تغییر می کنند. لذا تغییرات خواص برای مواد FG به صورت زیر خواهد بود.

ثوابت الاستیک

ثوابت الاستیک به شکل تابعی از شعاع بیان می شوند که $c_{11}^0, c_{12}^0, c_{22}^0$ و c_{23}^0 ثوابت الاستیک

در شعاع داخلی کره و n_1, n_2, n_3 و n_4 ثوابت ناهمگنی هستند که به ترتیب مربوط به خواص $c_{11},$

c_{12} ، c_{22} و c_{23} می‌باشند.

$$\begin{aligned} c_{11} &= c^0_{11} \left(\frac{R}{R_i} \right)^{n_1} \\ c_{12} &= c^0_{12} \left(\frac{R}{R_i} \right)^{n_2} \\ c_{22} &= c^0_{22} \left(\frac{R}{R_i} \right)^{n_3} \\ c_{23} &= c^0_{23} \left(\frac{R}{R_i} \right)^{n_4} \end{aligned} \quad (۴۳-۲)$$

ثوابت پیزوالکتریک-تنش

به کمک رابطه‌ی (۷-۱) برای ثوابت پیزوالکتریک-تنش می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} e_{11} &= e^0_{11} \left(\frac{R}{R_i} \right)^{n_5} \\ e_{12} &= e^0_{12} \left(\frac{R}{R_i} \right)^{n_6} \end{aligned} \quad (۴۴-۲)$$

در رابطه‌ی فوق e^0_{11} و e^0_{12} ثوابت پیزوالکتریک-تنش در شعاع داخلی کره و n_5 و n_6 ثوابت

ناهمگنی هستند که به ترتیب مربوط به خواص e_{11} و e_{12} می‌باشند.

ناهمگنی ثوابت تنش حرارتی-دما

همچنین ثوابت تنش حرارتی-دما را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \lambda^0_{11} \left(\frac{R}{R_i} \right)^{n_7} \\ \lambda_{12} &= \lambda^0_{12} \left(\frac{R}{R_i} \right)^{n_8} \end{aligned} \quad (۴۵-۲)$$

که در رابطه‌ی فوق λ^0_{11} و λ^0_{12} ثوابت تنش حرارتی-دما در شعاع داخلی کره و n_7 و n_8 ثوابت

ناهمگنی هستند که به ترتیب مربوط به خواص λ_{11} و λ_{12} می‌باشند.

ناهمگنی ثابت دی‌الکتریک

برای ثوابت دی‌الکتریک با توجه به رابطه‌ی (۷-۱) می‌توان نوشت.

$$\epsilon_{11} = \epsilon^0_{11} \left(\frac{R}{R_i} \right)^{n_9} \quad (۴۶-۲)$$

ϵ^0_{11} ثابت دی‌الکتریک در شعاع داخلی کره و n_9 ثابت ناهمگنی است که مربوط به ϵ_{11} در

رابطه‌ی فوق می‌باشند.

ناهمگنی ضرایب هدایت حرارتی

ضریب هدایت حرارتی را نیز می‌توان به شکل تابعی از شعاع بیان کرد که k^0 ضریب هدایت حرارتی در شعاع داخلی کره و n_{10} ثابت ناهمگنی می‌باشد.

$$K = K^0 \left(\frac{R}{R_i} \right)^{n_{10}} \quad (47-2)$$

ناهمگنی چگالی

همچنین برای چگالی با توجه به رابطه‌ی (۷-۱) داریم.

$$\rho = \rho^0 \left(\frac{R}{R_i} \right)^{n_{11}} \quad (48-2)$$

که ρ^0 مقدار چگالی در شعاع داخلی کره و n_{11} ثابت ناهمگنی مربوط به آن می‌باشد.

رابطه‌ی انتقال حرارت هدایتی

از آنجائیکه رفتار حرارتی کره به دلیل تقارن محوری، مستقل از مختصه‌ی θ و ϕ بوده و فقط تابعی از شعاع کره می‌باشد برای مشخص کردن رابطه‌ی $\Theta(r)$ در رابطه‌ی (۲۲-۲) فرض می‌شود که انتقال حرارت به صورت یکنواخت و در راستای شعاعی است. بنابراین معادله‌ی انتقال حرارت در شرایط دما-حالت پایدار به این صورت ساده می‌شود

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 K(r) \frac{d\Theta(r)}{dr} \right) = 0 \quad (49-2)$$

که در این رابطه $k(r)$ ضریب انتقال حرارت هدایتی می‌باشد و برای مواد تابعی مطابق رابطه‌ی

(۴۷-۲) خواهد بود.

بنابراین حل معادله به این صورت خواهد بود.

$$n_{10} \neq -1 \quad (\text{الف})$$

در حالتی که $n_{10} \neq -1$ با حل معادله‌ی انتقال حرارت می‌توان نوشت.

$$\Theta(r) = c_1 r^{-(n_{10}+1)} + c_2 \quad (50-2)$$

که در آن c_1 و c_2 دو ثابت دلخواه می‌باشند. شرایط مرزی دمایی برای کره‌ی توخالی FGM به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \Theta|_{r=1} = \Theta_i & r = 1 \\ \Theta|_{r=k} = \Theta_o & r = k \end{cases} \quad (51-2)$$

پس از اعمال شرایط مرزی در معادله‌ی انتقال حرارت ثابت‌های c_1 و c_2 به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{(\Theta_i - \Theta_o)}{\frac{1}{(k^{n_{10}+1} - 1)}} \\ c_2 = \frac{(\frac{\Theta_i}{k^{n_{10}+1}} - \Theta_o)}{\frac{1}{(k^{n_{10}+1} - 1)}} \end{cases} \quad (52-2)$$

که در آن $k = \frac{b}{a}$ بوده و Θ_i و Θ_o به ترتیب دمای مورد نظر در جدار داخلی و خارجی کره هستند. با قرار دادن ثابت‌های به‌دست آمده در رابطه‌ی $\Theta(r)$ ، معادله‌ی توزیع دما در طول جداره به-دست خواهد آمد.

$$n_{10} = -1 \quad (\text{ب})$$

در این حالت معادله‌ی انتقال حرارت به صورت زیر می‌باشد.

$$\Theta(r) = c_1 \ln r + c_2 \quad (53-2)$$

شرایط مرزی دمایی برای این حالت به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \Theta|_{r=1} = \Theta_i & r = 1 \\ \Theta|_{r=k} = \Theta_o & r = k \end{cases} \quad (54-2)$$

ثابت‌های c_1 و c_2 نیز به صورت زیر به دست خواهند آمد.

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{(\theta_i - \theta_o)}{\ln k} \\ c_2 = \theta_i \end{cases} \quad (55-2)$$

با قرار دادن ثابت‌های به‌دست آمده در رابطه‌ی $\theta(r)$ ، معادله‌ی توزیع دما در طول جداره برای

$$n_{10} = -1 \text{ به‌دست خواهد آمد.}$$

۲-۶ استخراج روابط

با توجه به رابطه‌ی (۳۴-۲) و همچنین استفاده از معادلات سینماتیک حاکم بر مسئله، می‌توان

روابط تنش را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{cases} \sigma_R = A_1 r^n \frac{du}{dr} + 2A_2 r^{n-1} u - A_3 r^{2n} \theta(r) - A_4 \frac{S_1}{r^2} \\ \sigma_\theta = A_2 r^n \frac{du}{dr} + A_5 r^{n-1} u - A_6 r^{2n} \theta(r) - A_4 A_7 \frac{S_1}{r^2} \end{cases} \quad (56-2)$$

که در این رابطه ثوابت A_1 تا A_7 به این صورت تعریف می‌شوند.

$$A_1 = c_{11}^0 + \frac{e_{11}^0{}^2}{\epsilon_{11}^0} \quad (57-2)$$

$$A_2 = c_{12}^0 + \frac{e_{11}^0 e_{12}^0}{\epsilon_{11}^0} \quad (58-2)$$

$$A_3 = \lambda_{11}^0 \quad (59-2)$$

$$A_4 = \frac{e_{11}^0}{\epsilon_{11}^0} \quad (60-2)$$

$$A_5 = c_{22}^0 + c_{23}^0 + \frac{2e_{12}^0{}^2}{\epsilon_{11}^0} \quad (61-2)$$

$$A_6 = \lambda_{22}^0 \quad (62-2)$$

$$A_7 = \frac{e_{12}^0}{e_{11}^0} \quad (63-2)$$

در صورتی که رابطه‌ی (۵۶-۲) را در معادله‌ی تعادل تنش قرار دهیم به معادله‌ی دیفرانسیل

خطی و ناهمگن زیر خواهیم رسید.

$$r^2 u'' + (n+2)ru' + 2w_1 u = 2[w_2(n+1) - w_4]r^{n+1}\theta(r) + w_2 r^{n+2} \frac{\partial \theta(r)}{\partial r} - 2w_3 \frac{S_1}{r^{n+1}} \quad (64-2)$$

این رابطه در واقع همان رابطه‌ی ناویر برای کره‌ی ناهمگن پیزوالکتریک تحت گرادیان دمایی می-باشد.

که در آن:

$$w_1 = \frac{A_2(n+1) - A_5}{A_1} \quad (65-2)$$

$$w_2 = \frac{A_3}{A_1} \quad (66-2)$$

$$w_3 = \frac{A_4 A_7}{A_1} \quad (67-2)$$

$$w_4 = \frac{A_6}{A_1} \quad (68-2)$$

۲-۶-۱ حل رابطه‌ی ناویر

حل عمومی

با توجه به آنکه معادله‌ی استخراج شده‌ی ناویر، یک معادله‌ی خطی ناهمگن است بنابراین دارای دو پاسخ عمومی و خصوصی می‌باشد.

برای حل عمومی معادله‌ی ناویر، با در نظر گرفتن حل کلی $u_r(r) = cr^m$ و قراردادن آن در قسمت همگن معادله‌ی دیفرانسیل، به معادله‌ی مشخصه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$m^2 + (n+1)m + 2w_1 = 0 \quad (69-2)$$

همچنین ریشه‌های معادله‌ی مشخصه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$m_1 = \frac{-(n+1) + \sqrt{((n+1)^2 + 8w_1)}}{2} ; \quad m_2 = \frac{-(n+1) - \sqrt{((n+1)^2 + 8w_1)}}{2} \quad (70-2)$$

در این حالت، حل رابطه‌ی اولر کوشی^۱ (۶۹-۲) به صورت زیر خواهد بود.

$$u_g = c_3 r^{m_1} + c_4 r^{m_2} \quad (71-2)$$

که در آن c_3 و c_4 ثوابتی هستند که باید محاسبه شوند. برای اینکه این دو ثابت مشخص شوند

باید از شرایط مرزی استفاده کرد. از آنجائیکه کره‌ی مورد نظر تحت فشار داخلی یکنواخت p_i و فشار

یکنواخت خارجی p_o قرار دارد بنابراین می‌توان شرایط مرزی را به صورت زیر بیان کرد

$$\sigma_R|_{r=1} = -p_i \quad , \quad \sigma_R|_{r=k} = -p_o \quad (72-2)$$

بنابراین با بهره‌گیری از شرایط مرزی تنش شعاعی و حل دو معادله‌ی مورد نظر به‌طور همزمان،

می‌توان ثوابت مورد نظر را به دست آورد که در ادامه خواهیم آورد.

حل خصوصی

برای یافتن پاسخ خصوصی رابطه‌ی ناویر از روش ماتریس رونسکین استفاده می‌کنیم. بنابراین

خواهیم داشت.

$$u_p = r^{m_1} \int \frac{-r^{m_2} R(r)}{f(r^{m_1}, r^{m_2})} dr + r^{m_2} \int \frac{r^{m_1} R(r)}{f(r^{m_1}, r^{m_2})} dr \quad (73-2)$$

که در آن:

$$R(r) = 2[w_2(n+1) - w_4]r^{n+1}\theta(r) + w_2 r^{n+2} \frac{\partial \theta(r)}{\partial r} - 2w_3 \frac{S_1}{r^{n+1}} \quad (74-2)$$

$$f(r^{m_1}, r^{m_2}) = \begin{vmatrix} r^{m_1} & r^{m_2} \\ m_1 r^{m_1-1} & m_2 r^{m_2-1} \end{vmatrix} = (m_2 - m_1) r^{m_2+m_1-1} \quad (75-2)$$

رابطه‌ی (۷۳-۲) را می‌توان به صورت خلاصه تر بازنویسی کرد.

$$u_p = L_1(r) r^{m_1} + L_2(r) r^{m_2} \quad (76-2)$$

که در آن:

1. Cauchy

$$\begin{cases} L_1(r) = \int \frac{-r^{m_2}\{2[w_2(n+1) - w_4]r^{n+1}\Theta(r) + w_2r^{n+2}\frac{\partial\Theta(r)}{\partial r} - 2w_3\frac{S_1}{r^{n+1}}\}}{(m_2 - m_1)r^{m_2+m_1-1}} dr \\ L_2(r) = \int \frac{r^{m_1}\{2[w_2(n+1) - w_4]r^{n+1}\Theta(r) + w_2r^{n+2}\frac{\partial\Theta(r)}{\partial r} - 2w_3\frac{S_1}{r^{n+1}}\}}{(m_2 - m_1)r^{m_2+m_1-1}} dr \end{cases} \quad (۷۷-۲)$$

برای حل انتگرال‌های فوق باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم.

(الف) $n \neq -1$

با جایگذاری رابطه‌ی $\Theta(r)$ معادله‌ی (۵۰-۲) در روابط (۷۷-۲) و محاسبه‌ی انتگرال‌ها خواهیم

داشت.

$$L_1(r) = \frac{1}{(m_2 - m_1)} \left\{ \frac{[2(n+1)w_2 - 2w_4]c_2}{3 - m_1 + n} r^{3-m_1+n} + \frac{[(n+1)w_2 - 2w_4]c_1}{2 - m_1} r^{2-m_1} - \frac{2w_3S_1}{1 - (m_1 + n)} r^{1-(m_1+n)} \right\} \quad (۷۸-۲)$$

$$L_2(r) = \frac{1}{(m_2 - m_1)} \left\{ \frac{[2(n+1)w_2 - 2w_4]c_2}{3 - m_2 + n} r^{3-m_2+n} + \frac{[(n+1)w_2 - 2w_4]c_1}{2 - m_2} r^{2-m_2} - \frac{2w_3S_1}{1 - (m_2 + n)} r^{1-(m_2+n)} \right\} \quad (۷۹-۲)$$

(ب) $n = -1$

در این حالت نیز با جایگذاری رابطه‌ی $\Theta(r)$ معادله‌ی (۵۳-۲) در روابط (۷۷-۲) خواهیم داشت.

$$L_1(r) = \frac{1}{(m_2 - m_1)} \left\{ \frac{2[(n+1)w_2 - w_4](c_1 \ln r + c_2) + w_2c_1}{3 - m_1 + n} r^{3-m_1+n} - \frac{2w_3S_1}{1 - (m_1 + n)} r^{1-(m_1+n)} \right\} \quad (۸۰-۲)$$

$$L_2(r) = \frac{1}{(m_2 - m_1)} \left\{ \frac{2[(n+1)w_2 - w_4](c_1 \ln r + c_2) + w_2c_1}{3 - m_2 + n} r^{3-m_2+n} - \frac{2w_3S_1}{1 - (m_2 + n)} r^{1-(m_2+n)} \right\} \quad (۸۱-۲)$$

لذا حل کلی رابطه‌ی جابه‌جایی به صورت مجموع حل عمومی و خصوصی، به صورت زیر خواهد

بود.

$$u(r) = u_g(r) + u_p(r) = [c_3 + L_1(r)]r^{m_1} + [c_4 + L_2(r)]r^{m_2} \quad (۸۲-۲)$$

اکنون با قرار دادن رابطه‌ی جابه‌جایی شعاعی در معادله‌ی (۵۶-۲) می‌توان روابط تنش را به-

صورت زیر استخراج کرد.

$$\sigma_R = Q_1 r^{n+m_1-1} + Q_2 r^{n+m_2-1} + A_1 \left(\frac{dL_1(r)}{dr} r^{n+m_1} + \frac{dL_2(r)}{dr} r^{n+m_2} \right) - A_3 r^{2n} \Theta(r) - A_4 \frac{S_1}{r^2} \quad (۸۳-۲)$$

$$\sigma_\theta = Q_3 r^{n+m_1-1} + Q_4 r^{n+m_2-1} + A_2 \left(\frac{dL_1(r)}{dr} r^{n+m_1} + \frac{dL_2(r)}{dr} r^{n+m_2} \right) - A_3 r^{2n} \Theta(r) - A_4 A_7 \frac{S_1}{r^2} \quad (۸۴-۲)$$

که در آن:

$$\begin{cases} Q_1 = (c_3 + L_1(r))(A_1 m_1 + 2A_2) & ; & Q_2 = (c_4 + L_2(r))(A_1 m_2 + 2A_2) \\ Q_3 = (c_3 + L_1(r))(A_2 m_1 + A_5) & ; & Q_4 = (c_4 + L_2(r))(A_2 m_2 + A_5) \end{cases} \quad (۸۵-۲)$$

همانطور که اشاره شد با استفاده از شرایط مرزی (۷۲-۲) می‌توان ضرایب c_3 و c_4 را به دست آورد.

استخراج رابطه‌ی پتانسیل الکتریکی

به منظور استخراج رابطه‌ی توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم از رابطه‌ی (۳۰-۲) استفاده می-

کنیم.

از آنجائیکه:

$$E_r = -\frac{d\psi}{dr} \quad (۸۶-۲)$$

بنابراین با یک بار انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۳۹-۲) می‌توان رابطه‌ی توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم

را به دست آورد.

$$\frac{d\psi}{dr} = \left(\frac{e_{11}}{\epsilon_{11}}\right) \frac{du(r)}{dr} + \left(\frac{e_{12}}{\epsilon_{11}}\right) \frac{u(r)}{r} - \frac{S_1}{\epsilon_{11}} \left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (۸۷-۲)$$

بنابراین با یک بار انتگرال گیری از رابطه‌ی فوق خواهیم داشت.

$$\psi(r) = \left(\frac{e_{11}^0}{\epsilon_{11}^0}\right) u(r) + 2 \int \left(\frac{e_{12}^0}{\epsilon_{11}^0}\right) \frac{u(r)}{r} - \frac{S_1}{(n+1)\epsilon_{11}^0} \left(\frac{1}{r^{n+1}}\right) + S_2 \quad (۸۸-۲)$$

برای محاسبه‌ی ثوابت S_1 و S_2 باید از شرایط مرزی الکتریکی مسأله بهره برد. همانطور که

اشاره شد، سازه‌ی مورد نظر تحت جریان یکنواخت پتانسیل الکتریکی قرار داشته و در سطح داخلی و

خارجی خود دارای پتانسیل الکتریکی می‌باشد. بنابراین طبق آنچه گفته شد داریم.

$$\psi(r)|_{r=1} = \psi_i, \quad \psi(r)|_{r=k} = \psi_0 \quad (۸۹-۲)$$

شایان ذکر است عملیات ریاضی به منظور اعمال شرایط مرزی و استخراج ثابت‌های رابطه‌ی

پتانسیل الکتریکی و جابه‌جایی شعاعی توسط برنامه‌ی نوشته شده در نرم‌افزار Maple 14 انجام شده

است .

فصل ۳

تحلیل الکتروالاستیک کره‌های چرخان FGPM

تحت بارگذاری مکانیکی

۳-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا نحوه‌ی تحلیل اجزای محدود مسأله توضیح داده می‌شود. درگام بعد به حل تحلیلی کره‌ی پیزوالکتریک تحت بارگذاری مکانیکی بدون در نظر گرفتن چرخش پرداخته می‌شود، سپس مطالعه‌ی موردی انجام گرفته و اثر مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی و شرایط مختلف بارگذاری بر روی نتایج بررسی می‌شود و در مرحله‌ی بعد نتایج حاصل از حل تحلیلی و اجزای محدود مسأله با یکدیگر مقایسه می‌شوند. درگام آخر نیز حل عددی کره‌ی پیزوالکتریک چرخان تحت فشار داخلی در دو موقعیت مختلف که در ادامه می‌آید ارائه می‌گردد. شایان ذکر است فرضیات به کار رفته در حل تحلیلی فصل گذشته در این پژوهش هنگامیکه کره در حال چرخش می‌باشد برقرار نبوده و دیگر نمیتوان از روش تحلیلی بیان شده در فصل گذشته برای بدست آوردن نتایج کره در حال چرخش استفاده کرد از این رو نتایج برای کره در حال چرخش تنها با استفاده روش اجزای محدود گزارش شده است..

۳-۲ تحلیل اجزای محدود کره‌ی پیزوالکتریک در ANSYS

به منظور تحلیل اجزای محدود مواد با خاصیت پیزوالکتریک از نرم‌افزار ANSYS 12.0 در این پژوهش، استفاده می‌گردد.

۳-۲-۱ مدل سازی مواد ناهمگن

همان طور که بیان شد در مواد ناهمگن خواص به صورت تدریجی تغییر می‌کند. در نرم‌افزار ANSYS 12.0 المانی جهت تعریف و مدل سازی مواد ناهمگن وجود ندارد؛ بنابراین برای تحلیل، کره به لایه‌های زیادی با ضخامت یکسان d تقسیم می‌شود؛ به طوری که تغییرات خواص در هر لایه اندک باشد و بتوان خواص ثابتی را به هر لایه نسبت داد.

$$M^n = M|_R = R_m^n ; R_m^n = (R_i^n + \frac{d}{2}) \quad (1-3)$$

در رابطه‌ی فوق M^n خاصیت در لایه‌ی n ام است که با توجه به شعاع متوسط آن R_m^n تعیین می‌گردد، R_i^n نیز شعاع داخلی لایه‌ی n ام است. با استفاده از روابط (۱-۳) و (۲-۴۳) تا (۲-۴۸) خواص برای هر لایه محاسبه می‌شود و به آن اختصاص می‌یابد، سپس این لایه‌ها به هم متصل می‌شوند و کره‌ی پیزوالکتریک ناهمگن را به وجود می‌آورند.

برای بررسی اثر ثابت ناهمگنی کلیه‌ی ثوابت ناهمگنی برابر ثابت ناهمگنی کل n فرض می‌شود و مقادیر $n = -2, -1, 0, 1, 2$ مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در این حالت داریم.

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = n_9 = n_{10} = n_{11} = n \quad (۲-۳)$$

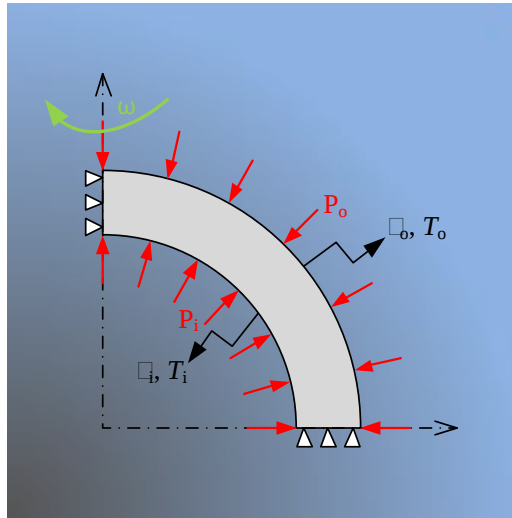
۲-۲-۳ انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله

نظر به آنچه که در بخش فرضیات حاکم بر مسأله، در فصل دوم بیان شد؛ مسأله حالت متقارن محوری دارد. در این حالت نیازی به مدل‌سازی سه بعدی نیست و می‌توان از المان‌های دو بعدی نرم‌افزار که قابلیت تقارن محوری دارند، استفاده کرد و حتی نتایج را به صورت سه بعدی استخراج کرد [۳۰].

در نرم‌افزار ANSYS با استفاده از المان PLANE223 می‌توان کره‌ی پیزوالکتریک را تحلیل کرد. این المان دو بعدی از هشت گره تشکیل شده که تا چهار درجه آزادی (دو درجه برای جابه‌جایی، یک درجه برای پتانسیل الکتریکی و یک درجه برای دما) را برای هر گره تأمین می‌کند. این المان دارای دقت بالا برای تحلیل مسائل متقارن محوری می‌باشد.

بنابراین مدل‌سازی مسأله به صورت دو بعدی انجام می‌شود. برای این منظور مطابق شکل (۳-۱)، یک هشتم کره به صورت دو بعدی به شکل ربع قطاع دایره مدل‌سازی می‌گردد.

شبکه‌بندی باید به صورتی انجام گیرد که تحلیل المان محدود مستقل از شبکه‌بندی باشد و نتایج به دست آمده قابل اطمینان باشند. برای این منظور المان PLANE223 باید به نحوی بر روی ربع قطاع دایره قرار گیرند که تقریباً به شکل مربع باشند.

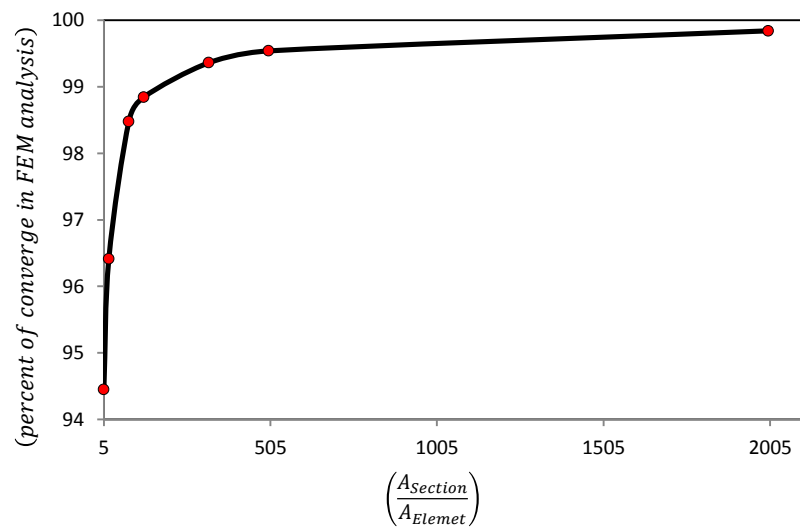


شکل ۱-۳ مدل سازی مقطع کره‌ی چرخان تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی

شکل (۲-۳) شبکه‌بندی مناسب جهت تحلیل را نشان می‌دهد، زمانی که مساحت مقطع (

$A_{Section}$) حدود ۱۵۰ برابر مساحت المان شبه مربعی شکل ($A_{Element}$) باشد؛ نتایج حاصل از تحلیل

المان محدود به همگرایی در حدود ۹۹٪ می‌رسد و تحلیل پذیرفتنی خواهد بود.



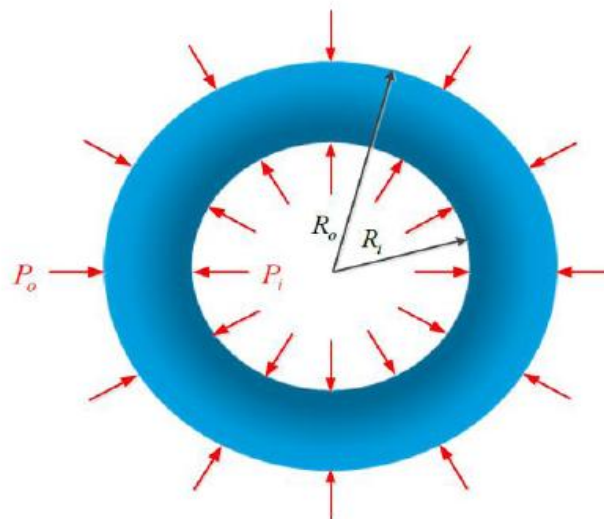
شکل ۲-۳ نمودار همگرایی تحلیل المان محدود

شکل (۲-۳) شبکه‌بندی مناسب جهت تحلیل را نشان می‌دهد، زمانی که مساحت مقطع ($A_{Section}$)

حدود ۱۵۰ برابر مساحت المان شبه مربعی شکل ($A_{Element}$) باشد؛ نتایج حاصل از تحلیل المان محدود به همگرایی در حدود ۹۹٪ می‌رسد و تحلیل پذیرفتنی خواهد بود.

۳-۳ تحلیل الاستیک کره‌های FGPM

شکل (۳-۳) مقطعی از یک کره‌ی جدارضخیم را نشان می‌دهد که تحت بارگذاری مکانیکی قرار دارد. کره‌ی مورد نظر در لایه‌ی درونی خود تحت فشار یکنواخت وارده‌ی P_i و در لایه‌ی بیرونی خود تحت فشار یکنواخت P_o قرار دارد.



شکل ۳-۳ مقطع عرضی کره‌ی جدارضخیم تحت بارگذاری مکانیکی

در این حالت روابط ساختاری ارائه شده در فصل قبل به صورت زیر خلاصه می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_\phi \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

همچنین روابط تنش-جابجایی نیز به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} \sigma_R = A_1 r^n \frac{\partial u}{\partial r} + 2A_2 r^{n-1} u \\ \sigma_\theta = A_2 r^n \frac{\partial u}{\partial r} + A_5 r^{n-1} u \end{cases} \quad (۴-۳)$$

که در این رابطه داریم.

$$A_1 = c^0_{11} \quad (۵-۳)$$

$$A_2 = c^0_{12} \quad (۶-۳)$$

$$A_5 = c^0_{22} + c^0_{23} \quad (۷-۳)$$

ثوابت c^0_{11} ، c^0_{12} ، c^0_{22} و c^0_{23} نیز طبق رابطه‌ی (۴۵-۲) در فصل قبل تعریف شده‌اند.

همانگونه که در فصل گذشته بیان شد، با قرار دادن روابط تنش در معادله‌ی تعادل (۳۸-۰) به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید.

$$r^2 u'' + (n+2)ru' + 2w_1 u = 0 \quad (۸-۳)$$

معادله‌ی دیفرانسیل (۷-۰) یک معادله‌ی اولرکوشی همگن می‌باشد و همانگونه که در فصل

قبل توضیح داده شد حل این معادله به صورت زیر می‌باشد.

$$u_r(r) = c_3 r^{m_1} + c_4 r^{m_2} \quad (۹-۳)$$

که در آن c_3 و c_4 همانگونه که قبلاً توضیح داده شد ثوابتی هستند که برای یافتن آن‌ها

باید از شرایط مرزی تنش استفاده کرد. از آنجاییکه کره‌ی مورد نظر تحت فشار داخلی یکنواخت p_i و

فشار یکنواخت خارجی p_o قرار دارد بنابراین:

$$\sigma_R|_{r=1} = -p_i, \quad \sigma_R|_{r=k} = -p_o \quad (۱۰-۳)$$

با حل دو معادله‌ی فوق به‌طور همزمان، می‌توان ثوابت مورد نظر را به‌دست آورد.

$$\begin{cases} c_3 = \frac{k^{m_2} p_i - k^{1-n} p_o}{G_1(k^{m_1} - k^{m_2})} \\ c_4 = -\frac{k^{m_1} p_i - k^{1-n} p_o}{G_2(k^{m_1} - k^{m_2})} \end{cases} \quad (۱۱-۳)$$

پس از جایگزینی c_3 و c_4 در معادلات (۳-۳) و (۸-۳) می توان نوشت.

$$\begin{cases} \sigma_R = \frac{r^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} [r^{m_1}(k^{m_2} p_i - k^{1-n} p_o) - r^{m_2}(k^{m_1} p_i - k^{1-n} p_o)] \\ \sigma_\phi = \frac{r^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[\frac{F_1}{G_1} r^{m_1}(k^{m_2} p_i - k^{1-n} p_o) - \frac{F_2}{G_2} r^{m_2}(k^{m_1} p_i - k^{1-n} p_o) \right] \\ u_r(r) = \frac{1}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[\frac{r^{m_1}}{G_1} (k^{m_2} p_i - k^{1-n} p_o) - \frac{r^{m_2}}{G_2} (k^{m_1} p_i - k^{1-n} p_o) \right] \end{cases} \quad (۱۲-۳)$$

که در آن:

$$\begin{cases} G_1 = A_1 m_1 + 2A_2 \\ G_2 = A_1 m_2 + 2A_2 \\ F_1 = 1 + A_2 m_1 \\ F_2 = 1 + A_2 m_2 \end{cases} \quad (۱۳-۳)$$

حالت های خاص

در این بخش با در نظر گرفتن روابط تنش و جابه جایی، چند حالت خاص که کاربرد بیشتری

دارند ارائه شده است

(الف) کره ی تحت فشار داخلی ($p_i = p$ و $p_o = 0$):

در حالتی که کره فقط تحت فشار داخلی $p_i = p$ باشد روابط (۱۲-۰) به صورت زیر ساده می-

شوند.

$$\begin{cases} \sigma_R = \frac{pr^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} [k^{m_2} r^{m_1} - k^{m_1} r^{m_2}] \\ \sigma_\phi = \frac{pr^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[\frac{F_1}{G_1} k^{m_2} r^{m_1} - \frac{F_2}{G_2} k^{m_1} r^{m_2} \right] \\ u_r(r) = \frac{p}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[\frac{k^{m_2} r^{m_1}}{G_1} - \frac{k^{m_1} r^{m_2}}{G_2} \right] \end{cases} \quad (۱۴-۳)$$

(ب) کره ی تحت فشار خارجی ($p_i = 0$ و $p_o = p$):

در حالتی که مخزن کره ی مورد نظر فقط تحت فشار خارجی $p_o = p$ باشد روابط (۱۲-۰) به-

صورت زیر ساده می شوند.

$$\begin{cases} \sigma_R = \frac{pk^{1-n}r^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} [-r^{m_1} + r^{m_2}] \\ \sigma_\phi = \frac{pk^{1-n}r^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[-\frac{F_1}{G_1} r^{m_1} + \frac{F_2}{G_2} r^{m_2} \right] \\ u_r(r) = \frac{p}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[-\frac{r^{m_1}}{G_1} + \frac{r^{m_2}}{G_2} \right] \end{cases} \quad (۱۵-۳)$$

پ) کره‌ی تحت فشار داخلی و خارجی به‌طور همزمان $(p_o = p_i = p)$:

در حالتی که مخزن به‌طور همزمان تحت فشار داخلی و خارجی p باشد. روابط (۱۲-۰) به‌صورت

زیر ساده می‌شوند.

$$\begin{cases} \sigma_R = \frac{pr^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} [r^{m_1}(k^{m_2} - k^{1-n}) - r^{m_2}(k^{m_1} - k^{1-n})] \\ \sigma_\phi = \frac{pr^{n-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[\frac{F_1}{G_1} r^{m_1}(k^{m_2} - k^{1-n}) - \frac{F_2}{G_2} r^{m_2}(k^{m_1} - k^{1-n}) \right] \\ u_r(r) = \frac{p}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[\frac{r^{m_1}}{G_1} (k^{m_2} - k^{1-n}) - \frac{r^{m_2}}{G_2} (k^{m_1} - k^{1-n}) \right] \end{cases} \quad (۱۶-۳)$$

۳-۳-۱ مطالعه‌ی عددی

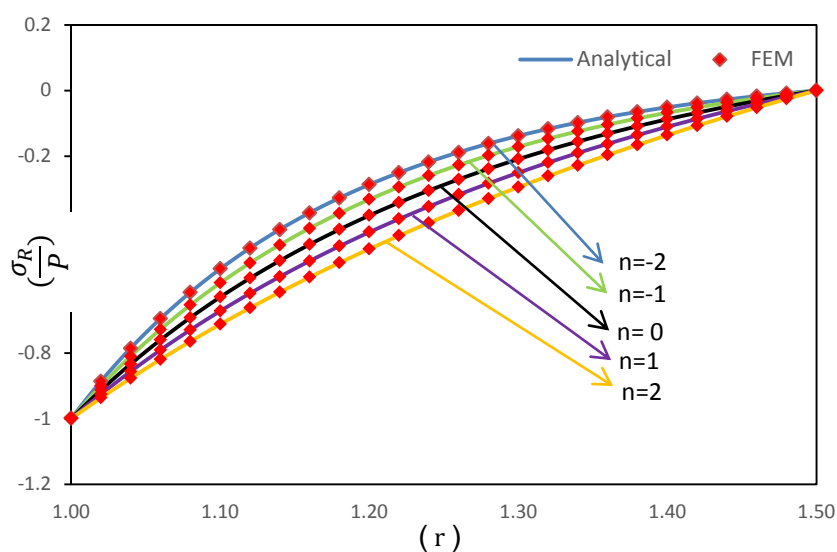
برای مطالعه‌ی عددی مسأله، یک کره‌ی جدارضخیم چرخان با مشخصات هندسی $R_i = 40 \text{ mm}$ و $R_o = 60 \text{ mm}$ در نظر گرفته می‌شود، کره‌ی مذکور از جنس PZT-4 می‌باشد که در راستای شعاعی خود پلاریزه گشته است. فشار داخلی یا خارجی به‌صورت یکنواخت فرض شده و سرعت زاویه‌ای ثابت و برابر $\omega = 2500 \text{ rad/s}$ در نظر گرفته می‌شود. مسأله در حالت $(p_i = p)$ و $(p_o = 0)$ با استفاده از روابط تحلیلی که در این فصل استخراج شده است، بررسی می‌شود. سپس به مقایسه‌ی نتایج تحلیلی با نتایج به‌دست آمده از حل اجزای محدود توسط نرم‌افزار ANSYS پرداخته می‌شود، در گام نهایی نیز نتایج حل اجزای محدود کره‌ی چرخان تحت فشار داخلی ارائه می‌شود. خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی کره در جدول ۳-۱ بیان شده است [۳۱].

جدول ۱-۳ خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی کره

ثوابت الاستیک (GPa)				
C_{23}	C_{22}	C_{12}	C_{11}	
78	139	74	115	
ثوابت پیزوالکتریک-تنش (C/m^2)				
e_{12}		e_{11}		
-5.2		15.1		
ضرایب انبساط حرارتی ($10^{-6} \frac{1}{K}$)		ضریب هدایت حرارتی ($W/m K$)		ثابت دی الکتریک ($10^{-8} \frac{C}{V m}$)
α_{22}	α_{11}	K_{22}	k_{11}	ϵ_{11}
1.97	2.62	2.1	5.1	0.562
چگالی (kg/m^3)				
$\rho = 7500$				

۲-۳-۳ بررسی تأثیر ثابت ناهمگنی :

برای بررسی تأثیر ثابت ناهمگنی، کلیه‌ی ثوابت ناهمگنی برابر ثابت ناهمگنی کل n فرض می‌شود و مقادیر $n = -2, -1, 0, 1, 2$ ، مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در این قسمت تأثیر ثابت ناهمگنی بر روی میدان جابه‌جایی، تنش شعاعی، تنش محیطی، تنش مؤثر و توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت جداره‌ی کره در حالتی که مخزن مورد نظر فقط تحت فشار ($p_i = 80 MPa$ و $p_o = 0$) می‌باشد مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. نتایج حل اجزای محدود و حل تحلیلی مسأله نیز در شکل‌های (۳-۴) تا (۳-۸) آورده شده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در ادامه نیز نتایج ارائه شده برای مقایسه‌ی عددی بهتر به صورت خلاصه در جدول‌ها ذکر می‌شوند



شکل ۳-۴ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره

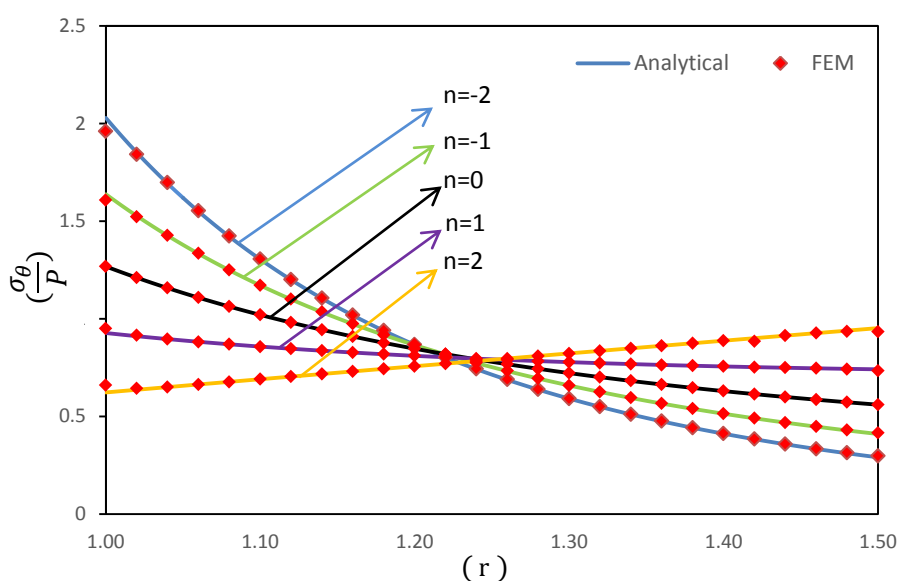
شکل (۳-۴) توزیع تنش شعاعی را در امتداد ضخامت جداره‌ی کره با استفاده از روش تحلیلی و

اجزای محدود نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش ثابت ناهمگنی n باعث افزایش

تنش شعاعی در جسم می‌شود. از سوی دیگر با افزایش ثابت ناهمگنی میزان تغییرات تنش شعاعی

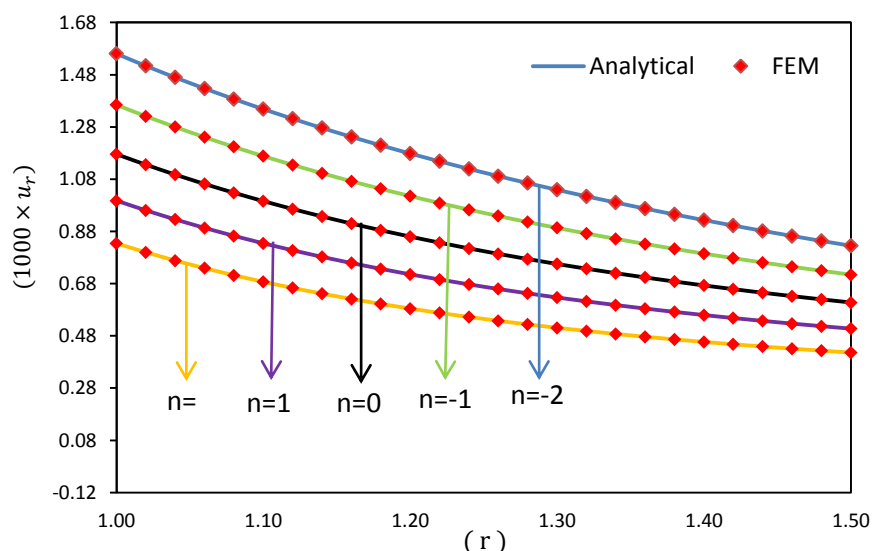
ایجاد شده از ناحیه‌ی جدار داخلی به جدار خارجی کمتر می‌شود. همچنین می‌توان دید شرایط مرزی

در سطح داخلی و خارجی به‌طور کامل ارضا می‌شود.



شکل ۳-۵ توزیع تنش محیطی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره

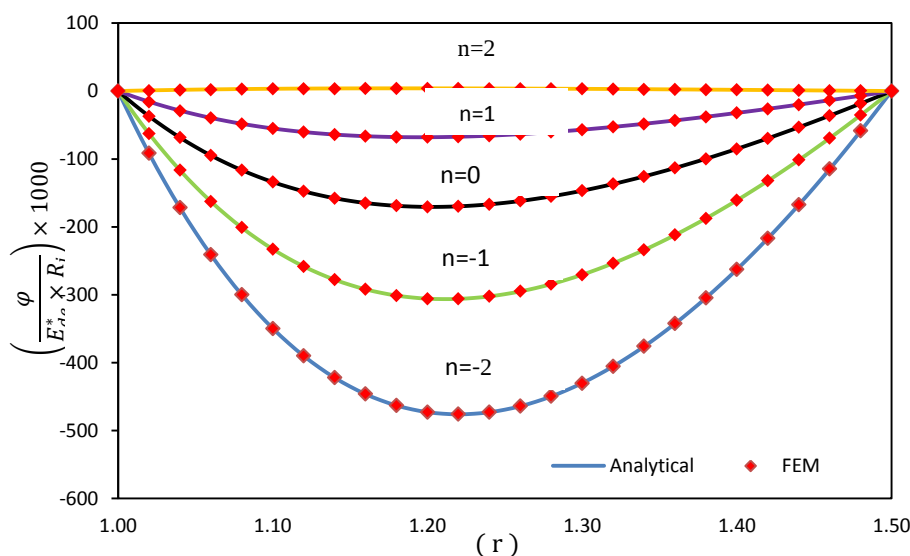
در شکل (۳-۵) تغییرات تنش محیطی در راستای ضخامت آورده شده است. در این شکل برای $n=2$ تنش محیطی در راستای ضخامت افزایش یافته در حالی که برای سایر مقادیر n تنش در راستای ضخامت کاهش می‌یابد. تنش محیطی که همان تنش بیشینه می‌باشد در بازه $1 < n < 2$ دارای کمترین تغییرات در راستای ضخامت است، و تقریباً ثابت بوده که از نظر کنترل تنش در این نوع سازه‌ها یک رفتار مطلوب است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در طراحی مواد FG، در حالت $n=2$ میزان ایمنی سازه در مقابل گسیختگی نسبت به حالت‌های دیگر بیشتر است. همچنین با توجه به نمودار می‌توان مشاهده کرد که تنش محیطی به ازای $n < 0$ در نیمه داخلی جداره در حالت FG از میزان تنش در حالت همگن بیشتر بوده و در نیمه خارجی جداره، از حالت همگن کمتر است.



شکل ۳-۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره

شکل (۳-۶) توزیع جابه‌جایی شعاعی را در امتداد ضخامت جداره‌ی کره نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ثابت ناهمگنی n ، جابه‌جایی شعاعی ایجاد شده در سازه کاهش می‌یابد به‌طوری‌که به ازای $n < 0$ جابه‌جایی کره‌ی ناهمگن نسبت به کره‌ی همگن بیشتر بوده و در حالت $n > 0$ کمتر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت، از آنجایی‌که در این نوع مواد با افزایش ثابت ناهمگنی n مقدار تغییر شکل ایجاد شده در سازه کمتر می‌شود بنابراین استحکام ماده نیز در برابر باگذاری بیشتر خواهد بود. از سوی دیگر همانگونه که مشاهده می‌شود تغییرات میزان جابه‌جایی در

راستای شعاعی برای همه‌ی مقادیر n نزولی می‌باشد، که این مهم به نوبه‌ی خود ناشی از نوع بارگذاری انجام شده بر روی کره می‌باشد. همچنین شایان ذکر است با توجه به نتایج حاصل شده از نمودار، در طراحی مواد FG با تغییرات توانی خواص، هرچه ثابت ناهمگنی بیشتر باشد، رفتار مکانیکی سازه نیز بهینه‌تر خواهد بود.



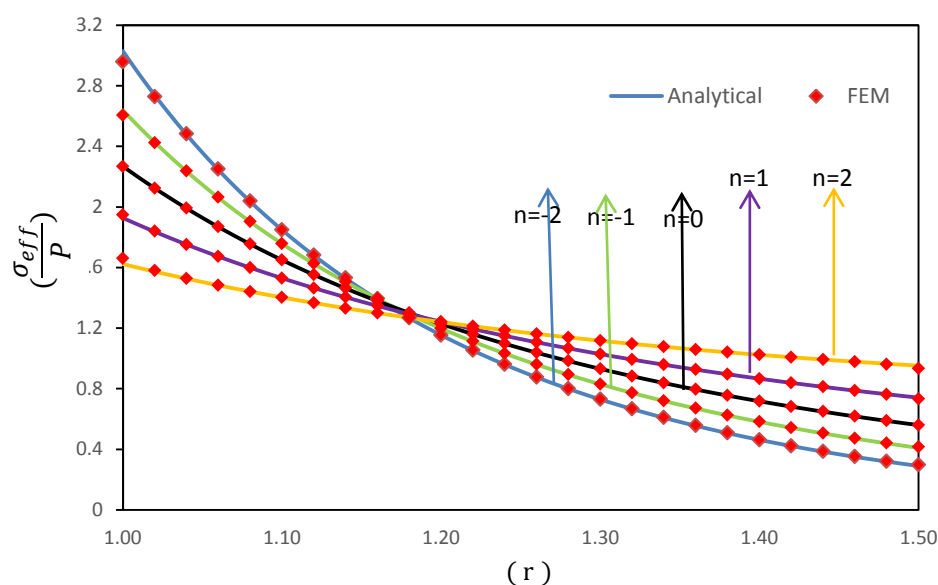
شکل ۷-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره

شکل (۷-۳) توزیع نرمال شده‌ی پتانسیل الکتریکی را به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره نشان می‌دهد. میدان الکتریکی استاتیکی که سبب دی‌پلاریزه شدن می‌گردد (E_{de}) معمولاً در بازه‌ی 2 kV/cm تا 5 kV/cm می‌باشد، با در نظر گرفتن میدان الکتریکی فرضی دی‌پلاریزه کننده $E_{de}^* = 5 \text{ kV/cm}$ ، به بررسی نتایج به دست آمده برای میدان الکتریکی می‌پردازیم.

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود هرچه ثابت ناهمگنی n بزرگتر شود پتانسیل الکتریکی ایجاد شده در جسم یکنواخت‌تر خواهد بود. همچنین می‌توان نتیجه گرفت پتانسیل الکتریکی ایجاد شده در امتداد جداره‌ی ضخامت سازه در هیچ‌کدام از لایه‌های جسم دارای مقدار یکسانی نمی‌باشد. از سوی دیگر به علت اینکه بارگذاری اعمال شده بر روی جسم سبب ایجاد کرنش کششی در سازه

شده است.

بنابراین ولتاژ پدید آمده در جسم در خلاف جهت پلاریزه‌ی جسم بوده و مقادیر پتانسیل الکتریکی استخراج شده منفی می‌باشند. نتیجه‌ی دیگری که از بررسی نمودار حاصل می‌شود این است که هرچه ثابت ناهمگنی n کوچکتر شود از آنجایی که میزان ولتاژ پدید آمده در جسم بیشتر بوده بنابراین با توجه به نمودار (۷-۳) میزان تغییر شکل ایجاد شده در جسم نیز بیشتر خواهد بود.



شکل ۸-۳ توزیع تنش مؤثر در امتداد جداری ضخامت کره

در شکل (۸-۳) تغییرات تنش فن مایز در راستای ضخامت کره ارائه شده است. همان‌طور که می‌دانیم توزیع تنش فن مایز در جسم معیار مناسبی برای تصمیم‌گیری در مورد طراحی مواد FG و کنترل تنش در این مواد است. همانگونه که مشاهده می‌شود نواحی نزدیک به جدار داخلی کره از ضریب ایمنی کمتری جهت طراحی برخوردار هستند. تنش فن مایز به ازای $n < 0$ در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از حالت همگن بوده و در نیمه‌ی خارجی جداره کمتر از ماده‌ی همگن است و به ازای $n > 0$ نتایج برعکس حالت دیگر است. در فاصله‌ی $1.15 < r < 1.20$ تنش فن مایز به ازای تمامی مقادیر n به سمت مقدار تنش فن مایز در حالت همگن میل می‌کند. همچنین از این شکل می‌توان مشاهده نمود که تنش فن مایز در راستای ضخامت با افزایش n ، هموارتر شده و تغییرات تنش کمتری در امتداد جداره رخ می‌دهد. به عبارت دیگر مواد ناهمگن با ثوابت ناهمگنی کمتر از لحاظ طراحی دارای

ضریب ایمنی کمتری می‌باشند.

جمع بندی

همان‌طور که در نتایج و شکل‌ها مشاهده شد، تطبیق بسیار خوبی میان نتایج دو روش وجود دارد. در اینجا به عنوان نمونه برای چند مقدار دلخواه از شعاع کره نتایج به دست آمده در قسمت‌های قبل برای مقایسه‌ی عددی بهتر به صورت خلاصه در جداول ذکر می‌شوند. در این جدول‌ها %Diff نشان دهنده‌ی درصد اختلاف میان نتایج تحلیلی و المان محدود می‌باشد که طبق رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\%Diff = \left| \frac{Anal - FEM}{Anal} \right| \times 100 \quad (۱۷-۳)$$

جدول ۳-۲ جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت فشار داخلی

	$u_r \times 1000$	$n = -2$		$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r = 1$	Anal	1.56		1.364		1.175		0.9975		0.834	
	FEM	1.56	0	1.36	0.29	1.18	0.29	0.9975	0	0.833	0.1
$r = 1.25$	Anal	1.105		0.9508		0.804		0.668		0.544	
	FEM	1.11	0.4	0.9510	0.021	0.804	0	0.668	0	0.544	0
$r = 1.5$	Anal	0.825		0.714		0.607		0.508		0.415	
	FEM	0.825	0	0.714	0	0.608	0.16	0.508	0	0.415	0

جدول ۳-۳ تنش شعاعی برای کره‌ی تحت فشار داخلی

	$\frac{\sigma_R}{P}$	$n = -2$		$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r = 1$	Anal	-0.999		-1		-1		-1		-0.999	
	FEM	-0.999	0	-0.99	1	-0.999	0.1	-0.999	0.1	-0.999	0
$r = 1.25$	Anal	-0.202		-0.242		-0.287		-0.335		-0.384	
	FEM	-0.202	0	-0.241	0.4	-0.287	0	-0.334	0.2	-0.384	0
$r = 1.5$	Anal	0		0		0		0		0	
	FEM	0	---	0.0001	---	0.0001	---	0.0001	---	0.0002	---

جدول ۳-۴ تنش محیطی برای کره‌ی تحت فشار داخلی

	$\frac{\sigma_\phi}{P}$	$n = -2$		$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r = 1$	Anal	2.02		1.63		1.267		0.927		0.622	
	FEM	1.96	2.9	1.61	1.2	1.27	0.23	0.949	2.3	0.660	6
$r = 1.25$	Anal	0.713		0.752		0.779		0.792		0.789	
	FEM	0.714	0.14	0.752	0	0.779	0	0.792	0	0.789	0
$r = 1.5$	Anal	0.290		0.409		0.559		0.741		0.952	
	FEM	0.298	2.7	0.415	1.4	0.560	0.17	0.733	1.07	0.932	2.1

جدول‌های (۳-۱)، (۳-۲) و (۳-۳) نتایج حاصل از پیش‌بینی میدان جابه‌جایی شعاعی، تنش‌های

شعاعی و محیطی را با دو روش تحلیلی و اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. همان

طور که مشاهده می‌گردد در محاسبه‌ی میدان‌های جابه‌جایی و تنش دو روش دارای انطباق قابل

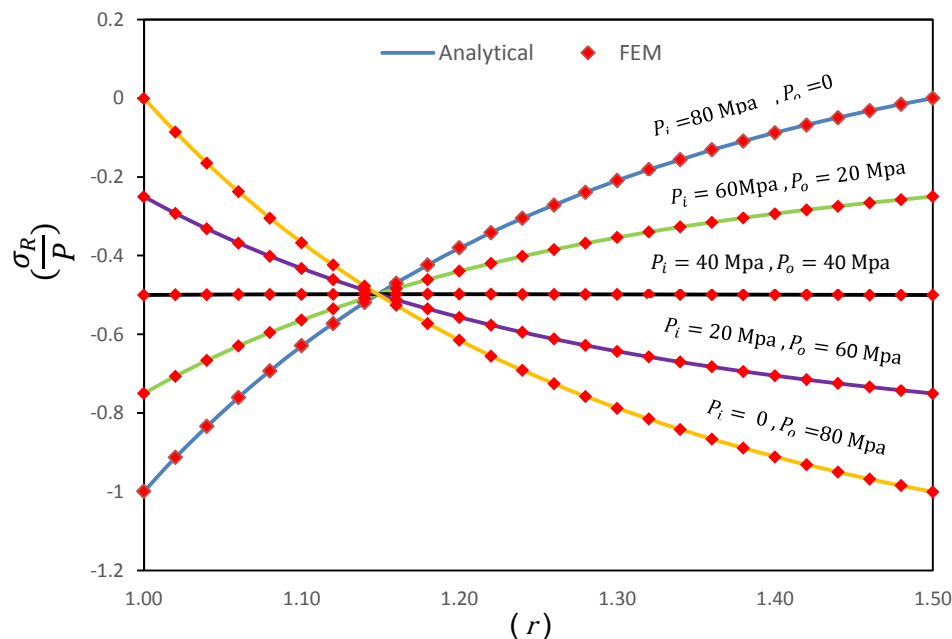
قبولی می‌باشند.

۳-۳-۳ بررسی تأثیر بارگذاری:

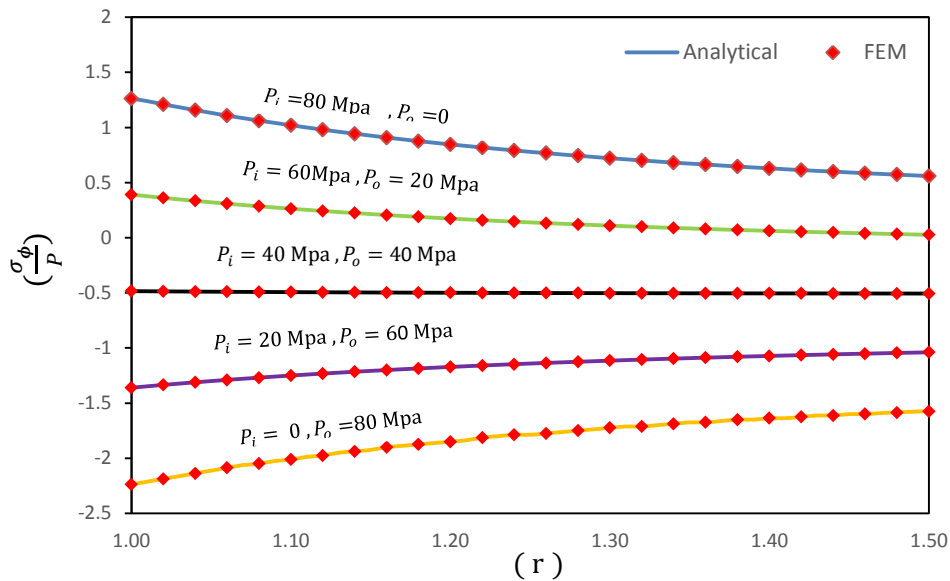
در این قسمت تأثیر انواع بارگذاری مکانیکی بر روی میدان جابه‌جایی، تنش شعاعی، تنش محیطی، تنش مؤثر و توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت جداره‌ی کره مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته و نتایج با یکدیگر مقایسه می‌شوند. برای بررسی تأثیر بارگذاری، ثابت ناهمگنی n برابر صفر در نظر گرفته شده و مسأله در شرایط مختلف بارگذاری فشاری که در ذیل خواهد آمد حل می‌شود.

$$\begin{aligned} (P_i = 0 \text{ و } P_o = 80 \text{ MPa}) \quad (P_i = 40 \text{ MPa و } P_o = 40 \text{ MPa}) \quad (P_i = 80 \text{ MPa و } P_o = 0) \\ (P_i = 20 \text{ MPa و } P_o = 60 \text{ MPa}) \quad (P_o = 20 \text{ MPa و } P_i = 60 \text{ MPa}) \end{aligned} \quad (۱۸-۳)$$

نتایج حل اجزای محدود و حل تحلیلی مسأله نیز در شکل‌های (۷-۳) تا (۱۰-۳) آورده شده‌اند. در ادامه نیز نتایج ارائه شده برای مقایسه‌ی عددی بهتر به صورت خلاصه در جداول ذکر می‌شوند. نتایج تنش‌های ایجاد شده در جسم به صورت تنش نرمالیزه شده (نسبت تنش به $P = 80 \text{ MPa}$) ارائه شده است.

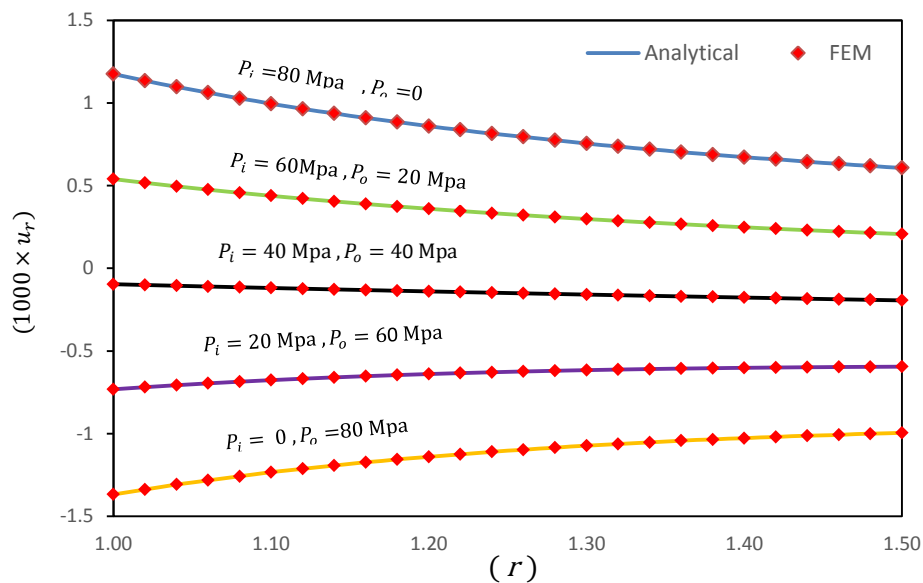


شکل ۹-۳ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۳-۱۰ توزیع تنش محیطی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره

در شکل (۳-۹) تغییرات تنش شعاعی در راستای ضخامت کره برای شرایط مختلف بارگذاری آورده شده است. همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌شود در شرایطی که $(P_i = 40 \text{ MPa}, P_o = 40 \text{ MPa})$ می‌باشد، توزیع فشار در تمام لایه‌های جداره برابر بوده و در بقیه‌ی شرایط بارگذاری توزیع فشار به صورت غیرخطی تغییر می‌کند و در تمامی حالت‌ها طبق نمودار، شرایط مرزی بارگذاری در جداره‌ی داخلی و خارجی به طور کامل ارضا می‌شود. همچنین می‌توان دید برای همه‌ی شرایط بارگذاری در فاصله‌ی تقریبی $r=1.15$ تنش شعاعی ایجاد شده در کره برابر 40MPa می‌باشد. شکل (۳-۱۰) تغییرات تنش محیطی را در راستای ضخامت کره برای شرایط مختلف بارگذاری نشان می‌دهد. همان‌طور که در نمودار مشخص است هرچه توزیع فشار در جسم یکنواخت‌تر باشد، توزیع تنش محیطی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره مطلوب‌تر خواهد بود بنابراین این‌گونه بارگذاری‌ها برای طراحی سازه‌ها بهینه‌تر می‌باشند.

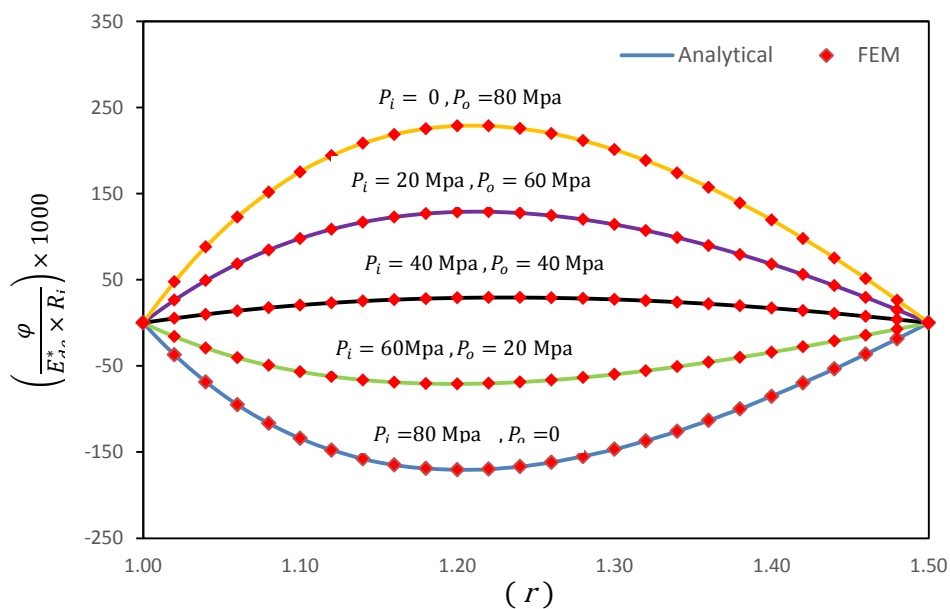


شکل ۱۱-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره

شکل (۱۱-۳) میدان جابه‌جایی شعاعی را در راستای ضخامت کره برای شرایط مختلف بارگذاری

نشان می‌دهد که تقریباً مشابه نمودار تغییرات تنش محیطی می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود

نتایج حل تحلیلی و حل اجزای محدود با یکدیگر مطابقت دارند.



شکل ۱۲-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره

مشاهده می‌شود زمانی که بارگذاری اعمال شده سبب ایجاد کرنش کششی در جسم گردد،
 $(P_i = 60 \text{ MPa}, P_o = 20 \text{ MPa})$ و $(P_i = 80 \text{ MPa}, P_o = 0)$ ولتاژ پدید آمده در خلاف جهت پلاریزه‌ی
 جسم بوده و مقادیر پتانسیل الکتریکی ایجاد شده همان گونه که در نمودار دیده می‌شود منفی خواهند
 بود. و در صورتی که بارگذاری اعمال شده سبب ایجاد کرنش فشاری در جسم گردد، ولتاژ پدید آمده
 در همان جهت پلاریزه‌ی جسم بوده و مقادیر پتانسیل الکتریکی ایجاد شده مثبت خواهند بود.
 همچنین نتیجه‌ی دیگری که با بررسی بیشتر نمودار حاصل می‌شود این است که هرچه اختلاف فشار
 اعمال شده میان جداره‌ی داخلی و خارجی بیشتر باشد مقدار پتانسیل الکتریکی بیشتری در جسم
 ایجاد می‌شود. همچنین شایان ذکر است زمانی که کره تحت فشار داخلی و خارجی یکسانی قرار گیرد
 ولتاژ بسیار کمی در جسم پدید می‌آید.

جمع‌بندی

نتایج به دست آمده که در قسمت قبل ارائه شد؛ برای مقایسه‌ی عددی بهتر به صورت خلاصه در
 جدول‌ها ذکر می‌شوند.

جدول ۳-۵ تنش شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری‌های مختلف در $n=0$

	$\frac{\sigma_R}{P}$	$P_i = 80 \text{ Mpa}$ $P_o = 0$		$P_i = 60 \text{ Mpa}$ $P_o = 20 \text{ Mpa}$		$P_i = 40 \text{ Mpa}$ $P_o = 40 \text{ Mpa}$		$P_i = 20 \text{ Mpa}$ $P_o = 60 \text{ Mpa}$		$P_i = 0$ $P_o = 80 \text{ Mpa}$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r=1$	Anal	-1		-0.75		-0.5		-		0	
	FEM	-0.99	1	-	0.13	-0.5	0	0.250	0.4	-	0
$r=1.25$	Anal	-0.287		-		-		-		-	
	FEM	-0.288	0.34	0.392	0.25	0.498	0	0.603	0.16	0.708	0
$r=1.5$	Anal	0		-0.25		-0.5		-0.75		-1	
	FEM	0.0001	---	-0.25	0	-0.5	0	-0.75	0	-1	0

جدول ۳-۶ تنش محیطی برای کره‌ی تحت بارگذاری‌های مختلف در $n=0$

	$\frac{\sigma_{\phi}}{P}$	$P_i = 80 \text{ Mpa}$		$P_i = 60 \text{ Mpa}$		$P_i = 40 \text{ Mpa}$		$P_i = 20 \text{ Mpa}$		$P_i = 0$	
		$P_o = 0$		$P_o = 20 \text{ Mpa}$		$P_o = 40 \text{ Mpa}$		$P_o = 60 \text{ Mpa}$		$P_o = 80 \text{ Mpa}$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r=1$	Anal	1.262	0.15	0.391	0	-	0.2	-	0	-	0
	FEM	1.260		0.391		0.484		1.36		2.237	
$r=1.25$	Anal	0.778	0.1	0.139	0	-	0	-	0	-	0
	FEM	0.779		0.139		0.501		1.14		1.787	
$r=1.5$	Anal	0.559	0.17	0.026	0	-	0	-	0	-	0.19
	FEM	0.56		0.026		0.506		1.04		1.572	
						0.506		1.04		1.575	

جدول‌های (۳-۵) و (۳-۶) نتایج حاصل از پیش‌بینی تنش را با دو روش تحلیلی و اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد در محاسبه‌ی میدان تنش دو روش نتایج یکسانی را ارائه داده و مقادیر خطای به‌دست آمده قابل قبول می‌باشند.

جدول ۳-۷ جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری‌های مختلف در $n=0$

	$u_r \times 1000$	$P_i = 80 \text{ Mpa}$		$P_i = 60 \text{ Mpa}$		$P_i = 40 \text{ Mpa}$		$P_i = 20 \text{ Mpa}$		$P_i = 0$	
		$P_o = 0$		$P_o = 20 \text{ Mpa}$		$P_o = 40 \text{ Mpa}$		$P_o = 60 \text{ Mpa}$		$P_o = 80 \text{ Mpa}$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r=1$	Anal	1.175	0.425	0.539	0.18	-	0	-	0	-	0
	FEM	1.180		0.540		0.0959		0.732		1.367	
$r=1.25$	Anal	0.805	0	0.327	0.3	-	0	-	0	-	0
	FEM	0.805		0.328		0.0959		0.626		1.102	
$r=1.5$	Anal	0.6075	0.08	0.2069	0.04	-	0.5	-	0	-	0
	FEM	0.608		0.2070		-0.149		0.626		1.102	
						-0.193		0.595		0.995	
						-0.194		0.595		0.995	

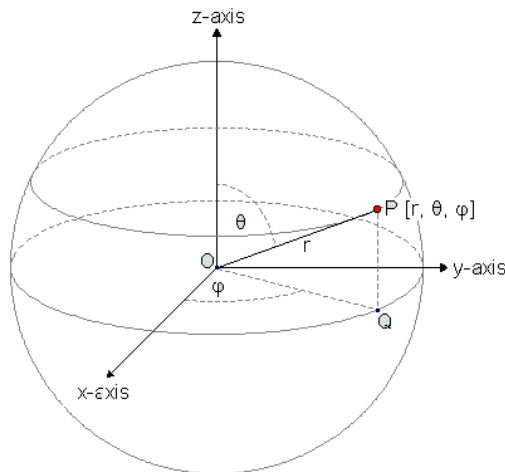
جدول ۳-۸ پتانسیل الکتریکی برای کره‌ی تحت بارگذاری‌های مختلف در $n=0$

	$\left(\frac{\varphi}{E_{de}^* \times R_i}\right) \times 1000$	$P_i = 80 \text{ Mpa}$		$P_i = 60 \text{ Mpa}$		$P_i = 40 \text{ Mpa}$		$P_i = 20 \text{ Mpa}$		$P_i = 0$	
		$P_o = 0$		$P_o = 20 \text{ Mpa}$		$P_o = 40 \text{ Mpa}$		$P_o = 60 \text{ Mpa}$		$P_o = 80 \text{ Mpa}$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r=1$	Anal	-134		-		20.6		98		175	
	FEM	-134	0	56.6	0.17	20.6	0	98	0	175	0
$r=1.25$	Anal	-170		-		28.9		129		228	
	FEM	-171	0.5	70.8	0	29	0.34	129	0	228	0
$r=1.5$	Anal	-147		-		27.2		114		201	
	FEM	-147	0	59.8	0	27.2	0	114	0	201	0

همان‌طور که در جدول‌های (۷-۳) و (۸-۳) مشاهده می‌شود نتایج حاصل از پیش‌بینی میدان جابه‌جایی شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی برای سه مقدار دلخواه از شعاع کره با دو روش تحلیلی و اجزای محدود ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد در محاسبه‌ی میدان جابه‌جایی شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی دو روش نتایج یکسانی را پیش‌بینی کرده و اختلاف میان نتایج دو روش بسیار اندک و قابل اغماض است.

۳-۴ تحلیل کره‌های چرخان:

در این قسمت نوع بارگذاری به بارگذاری حجمی تغییر داده شده است و حل اجزای محدود کره‌ی چرخان تحت فشار داخلی ارائه می‌شود. همچنین بررسی اثر ثابت ناهمگنی و همچنین اثر دوران کره‌ی جدار ضخیم در توزیع تنش، جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی مورد مطالعه قرار گرفته شده است. برای تحلیل فوق دستگاه مختصات کروی (R, ϕ, θ) که مبدأ آن مرکز کره می‌باشد در نظر گرفته شده است دوران حول محور Z و با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌باشد. هندسه‌ی کره نسبت به محورهای مختصات در شکل (۳-۱۳) آورده شده است.



شکل ۳-۱۳ مختصات کروی

همان‌طور که در فصل قبل نیز گفته شد، به دلیل تقارن در هندسه‌ی کره و بارگذاری متقارن

$u_\theta = 0$ می‌توان نوشت.

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \quad (۱۹-۳)$$

اما با توجه به اینکه بارگذاری دورانی نیز بر کره اعمال می‌شود، کره به بیضی‌گون تبدیل شده

و لذا در راستای نصف النهاری تقارن ندارد. بنابراین می‌توان نوشت.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \neq 0, u_\theta \neq 0 \quad (۲۰-۳)$$

$$\sigma_\theta \neq \sigma_\phi \quad (۲۱-۳)$$

۳-۴-۱ حل عددی:

همانگونه که در قسمت قبل بیان شد اعمال بارگذاری دورانی بر روی کره منجر به پیچیدگی حل

تحلیلی مسئله شده که با استفاده از معادلات در مختصات کروی میسر نمی‌باشد. بنابراین با توجه به

تطابق مناسب نتایج حل عددی با حل دقیق تحلیلی، از نرم‌افزار مبتنی بر روش المان محدود در

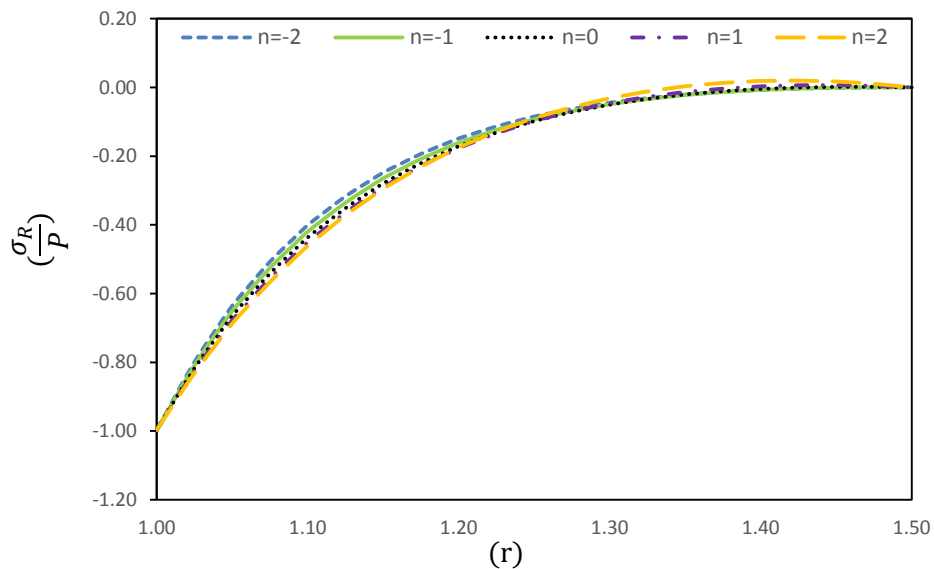
مطالعه‌ی اثر بارگذاری چرخشی استفاده شده است. در این بخش، مشخصات هندسی و جنس کره

همچون مطالعه‌های عددی گذشته در نظر گرفته می‌شود. کره با سرعت دورانی ثابت $\omega = 2500 \text{ rad/s}$

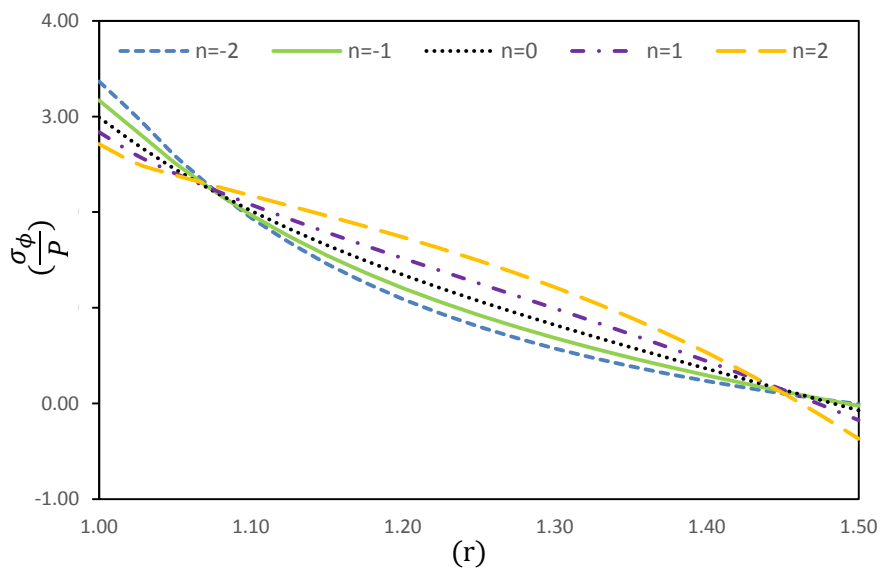
حول محور خود می‌چرخد و تحت فشار داخلی $p_i = 80 \text{ MPa}$ قرار دارد.

الف) کره‌ی چرخان تحت فشار داخلی در $\theta = 0$:

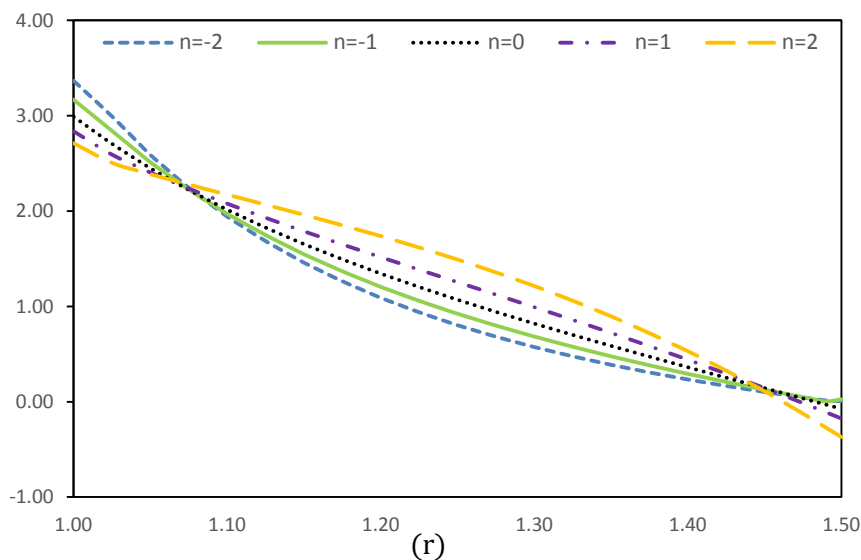
نتایج حل اجزای محدود مسأله برای $\theta = 0$ نیز در شکل‌های (۳-۱۲) تا (۳-۱۸) آورده شده‌اند.



شکل ۳-۱۴ توزیع تنش شعاعی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta = 0$

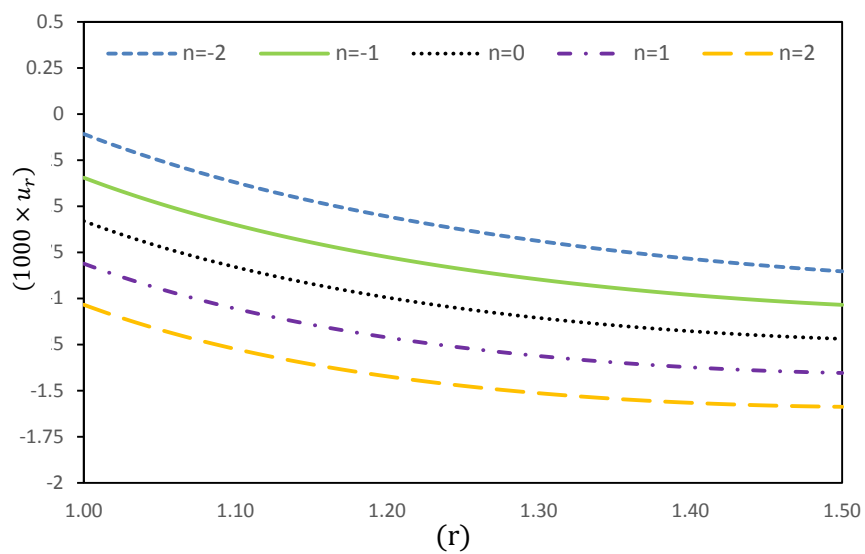


شکل ۳-۱۵ توزیع تنش محیطی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta = 0$

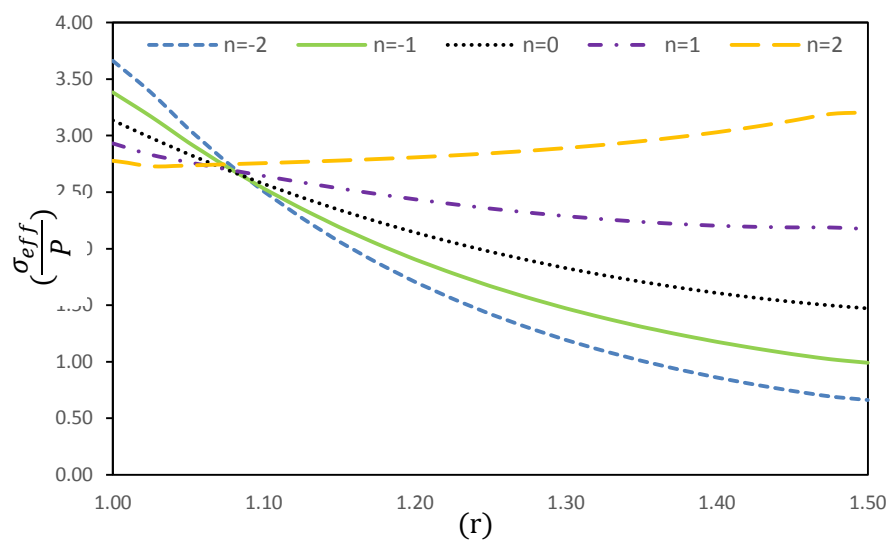


شکل ۳-۱۶ توزیع تنش نصف‌النهاری در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=0$ شکل‌های (۳-۱۴)، (۳-۱۵) و (۳-۱۶) به ترتیب توزیع تنش‌های شعاعی، محیطی و نصف‌النهاری را در راستای ضخامت جداره‌ی کره‌ی چرخان نشان می‌دهند. همانطور که پیداست توزیع تنش شعاعی وابستگی چندانی به ثابت ناهمگنی ندارد. همچنین مطابق شکل (۳-۱۴) شرایط مرزی در بارگذاری فشاری به‌طور کامل ارضا شده است. اما همانطور که مشاهده می‌شود بارگذاری دورانی اثر کمتری در این تنش دارد.

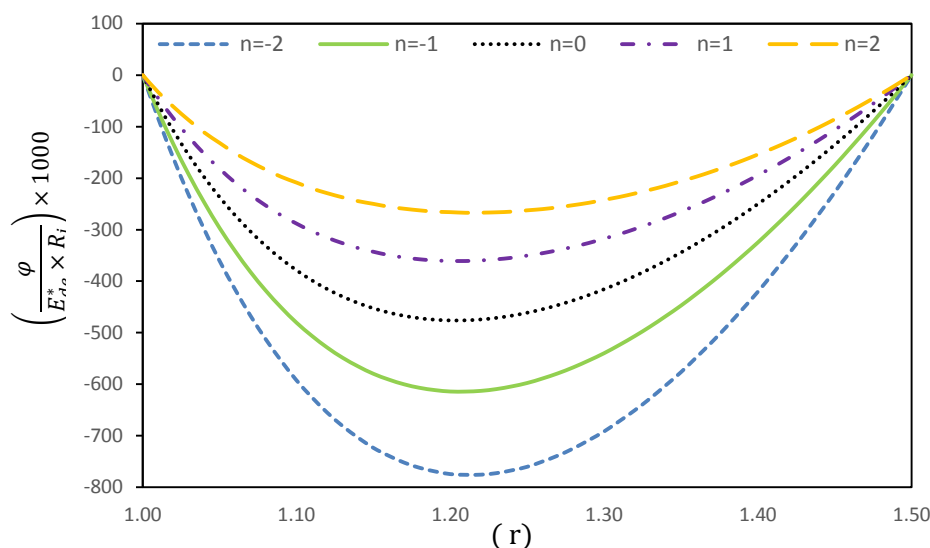
همانگونه که از نتایج نمودارهای توزیع تنش محیطی و نصف‌النهاری مشخص است مقادیر این تنش‌ها در $\theta = 0$ یکسان می‌باشد و بزرگترین مقدار این تنش‌ها در جداره‌ی داخلی رخ می‌دهد. نتیجه‌ی دیگری که با بررسی بیشتر نمودار حاصل می‌شود این است که با افزایش ثابت ناهمگنی، مقادیر تنش محیطی و نصف‌النهاری در جداره‌ی داخلی جسم بزرگتر شده در حالی که این تغییر در جداره‌ی خارجی برعکس می‌باشد.



شکل ۳-۱۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=0$



شکل ۳-۱۸ توزیع تنش مؤثر در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta=0$

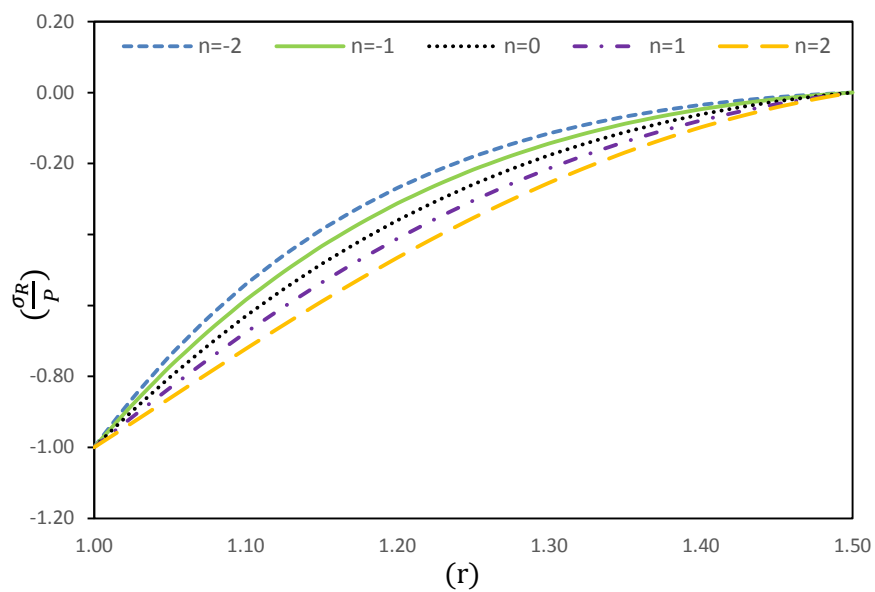


شکل ۳-۱۹ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta = 0$

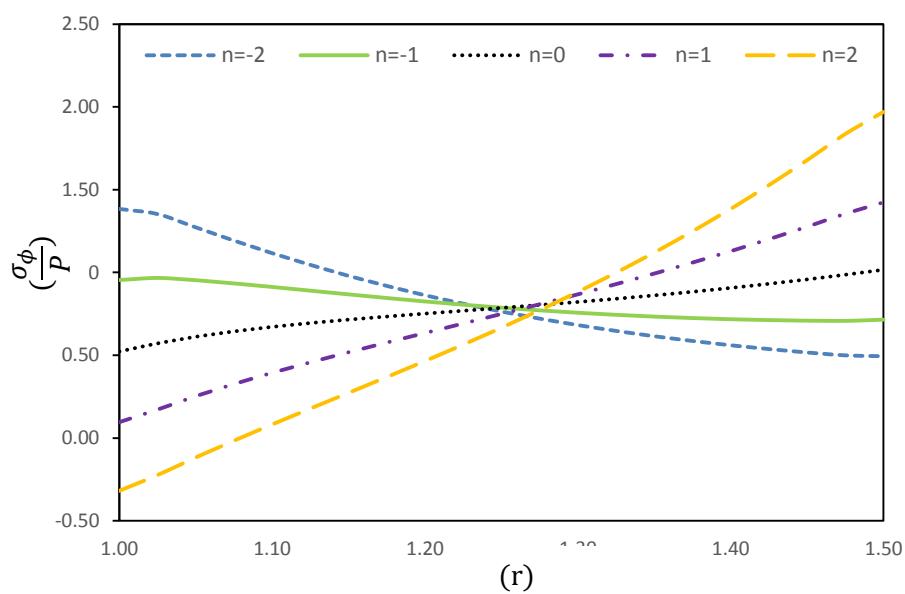
همان‌طور که مشاهده می‌شود میدان جابه‌جایی شعاعی، توزیع تنش فن مایز و توزیع پتانسیل الکتریکی در نمودارهای (۳-۱۷)، (۳-۱۸) و (۳-۱۹) آورده شده است. همانگونه که مشخص است ثابت ناهمگنی n در توزیع جابه‌جایی، تنش فن‌مایز و پتانسیل الکتریکی تأثیر زیادی دارد. با افزایش n ، مقدار پتانسیل الکتریکی تولید شده در لایه‌های میانی جسم از لحاظ اندازه کاهش یافته، همچنین میزان تنش فن مایز و مقدار جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد که از منظر طراحی بهینه امری مطلوب نیست. نکته‌ی دیگر این که باتوجه به اینکه پتانسیل الکتریکی تولید شده در خلاف جهت پلاریزه‌ی جسم بوده، مقادیر جابه‌جایی ایجاد شده در جسم منفی می‌باشند و جسم دچار کرنش فشاری شده است. این مهم بیانگر اثر غالب بارگذاری چرخشی بر روی جابه‌جایی ایجاد شده در این سرعت خاص است.

(ب) کره‌ی چرخان تحت فشار داخلی در $\theta = \frac{\pi}{2}$:

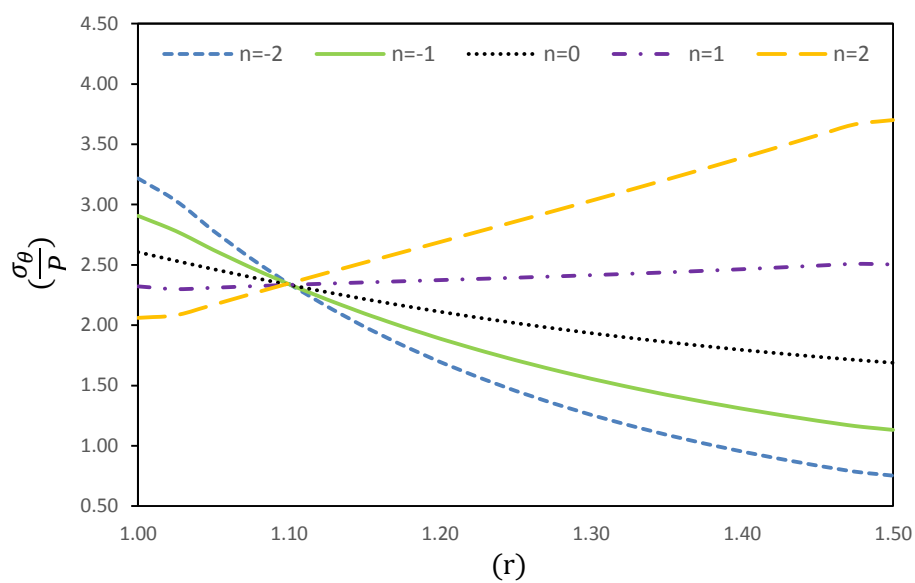
تغییرات تنش، جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی برای $\theta = \frac{\pi}{2}$ در شکل‌های (۳-۲۰) تا (۳-۲۵) آورده شده است.



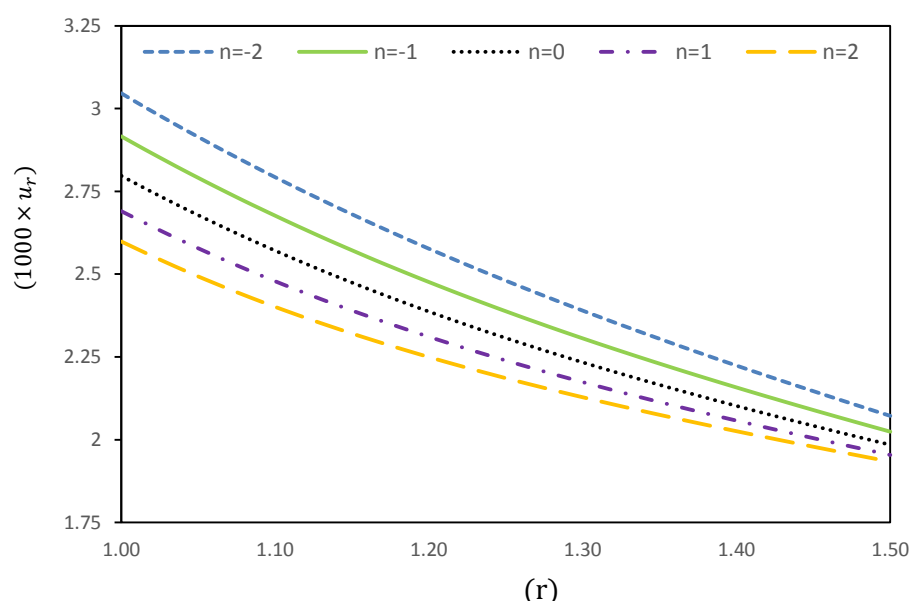
شکل ۳-۲۰ توزیع تنش شعاعی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta = \frac{\pi}{2}$



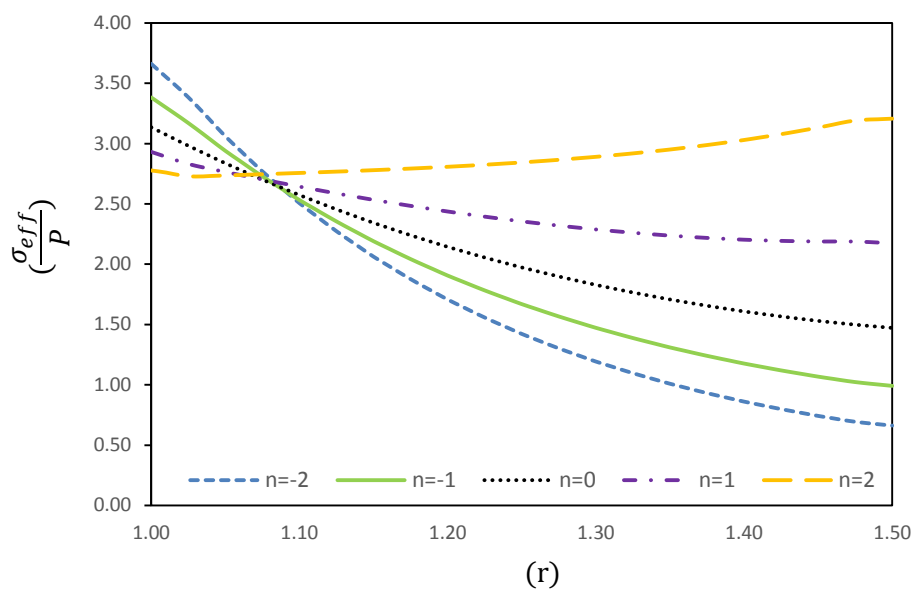
شکل ۳-۲۱ توزیع تنش محیطی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta = \frac{\pi}{2}$



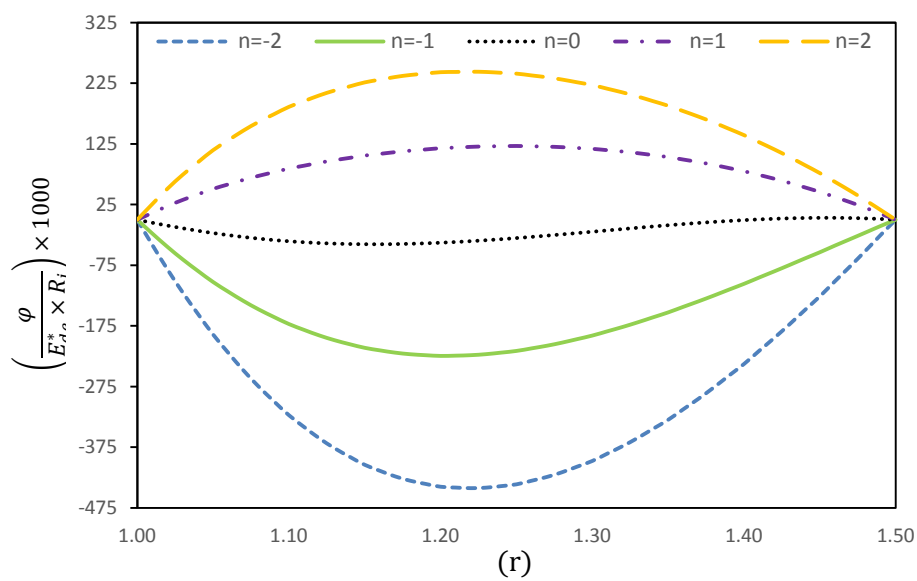
شکل ۲۲-۳ توزیع تنش نصف‌النهاری در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta = \frac{\pi}{2}$



شکل ۲۳-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta = \frac{\pi}{2}$



شکل ۲۴-۳ توزیع تنش مؤثر در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta = \frac{\pi}{2}$



شکل ۲۵-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد ضخامت جداره‌ی کره برای $\theta = \frac{\pi}{2}$

همان‌طور که در این نمودارها نیز مشاهده می‌شود ثابت ناهمگنی n در توزیع تنش، جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی تأثیر زیادی دارد. با دقت در نمودار (۳-۲۰) این نتیجه حاصل می‌شود که توزیع تنش شعاعی بیش از هر نوع بارگذاری، به بارگذاری فشاری وابستگی زیادی دارد. همچنین مشاهده می‌شود که مقدار تنش‌های نصف النهاری ایجاد شده در جسم بزرگتر از تنش محیطی بوده و میزان تغییرات آن در راستای ضخامت جسم بیشتر است. نکته‌ی دیگری که از بررسی نمودارهای توزیع تنش محیطی و نصف النهاری به دست می‌آید این است که در ثابت‌های ناهمگنی (n) بزرگتر مقدار تنش در جداره‌ی خارجی نسبت به جداره‌ی داخلی بیشتر است در حالی که این نسبت تنش در ثابت‌های ناهمگنی (n) کوچکتر برعکس است. شایان ذکر است که این نتیجه‌ی به دست آمده در تعیین و بررسی نقاط بحرانی جسم اهمیت دارد. با دقت در نمودار (۳-۲۴) این نتیجه حاصل می‌شود که تنش فن مایز در جداره‌ی داخلی جسم بیشتر از جداره‌ی خارجی است. از سوی دیگر جابه‌جایی ایجاد شده در جداره‌ی داخلی جسم نیز بیشتر از جداره‌ی خارجی می‌باشد که این دو مهم با یکدیگر بی‌ارتباط نمی‌باشند.

فصل ۴

تحلیل الکترو ترمو الاستیک کره های FGPM تحت بار گذاری الکترو ترمو مکانیکی

۴-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا نحوه‌ی تحلیل اجزای محدود الکتروترمو مکانیک کره‌ی پیزوالکتریک بیان می‌گردد، سپس به مطالعه‌ی عددی مسأله در حالت الکترومکانیکی و الکتروترمو مکانیکی پرداخته شده و نتایج مربوط به حل تحلیلی و اجزای محدود مسأله بیان شده و با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

۴-۲ تحلیل اجزای محدود الکتروترمو مکانیکی در ANSYS

برای تحلیل اجزای محدود الکتروترمو مکانیکی مواد پیزوالکتریک در این پژوهش از نرم‌افزار ANSYS 12.0 استفاده می‌شود. تحلیل میدان-جفت‌شده^۱، ترکیبی از تحلیل رشته‌های مهندسی (میدان‌های فیزیکی) متفاوت با اثر متقابل می‌باشد که برای حل مسأله‌ی کلی مهندسی استفاده می‌شوند، بنابراین اغلب از تحلیل میدان-جفت‌شده به عنوان تحلیل چند فیزیکی^۲ یاد می‌گردد. زمانی که ورودی تحلیل یک میدان وابسته به نتایج تحلیل میدان دیگری باشد، تحلیل جفت‌شده می‌باشد. برخی تحلیل‌ها می‌توانند جفت‌شدگی یک سو^۳ داشته باشند. برای مثال در مسائل تنش حرارتی، میدان دمایی کرنش حرارتی را در میدان سازه‌ای ایجاد می‌کند اما به طور کلی کرنش سازه‌ای تأثیری بر توزیع دما ندارد، بنابراین نیازی به انجام تکرار متوالی حل‌های دو میدان نیست. نمونه‌های پیچیده‌تر شامل جفت‌شدگی دو سو^۴ می‌باشند. برای مثال تحلیل پیزوالکتریک که تأثیر متقابل میدان الکتریکی و سازه‌ای را به کار می‌برد برای حل توزیع ولتاژ بر اثر جابه‌جایی اعمالی و یا برعکس، استفاده می‌شود. این دسته مسائل نیاز به انجام تکرار متوالی حل بین دو میدان فیزیکی تا همگرا شدن دارند [۳۲].

فرآیند تحلیل میدان-جفت‌شده بستگی به این امر دارد که چه میدان‌هایی باهم جفت شده‌اند، اما دو روش مجزای مستقیم و انتقال بار، برای این منظور در ANSYS به کار گرفته شده است

1. Coupled-field
2. Multiphysics
3. One-way
4. Two-way

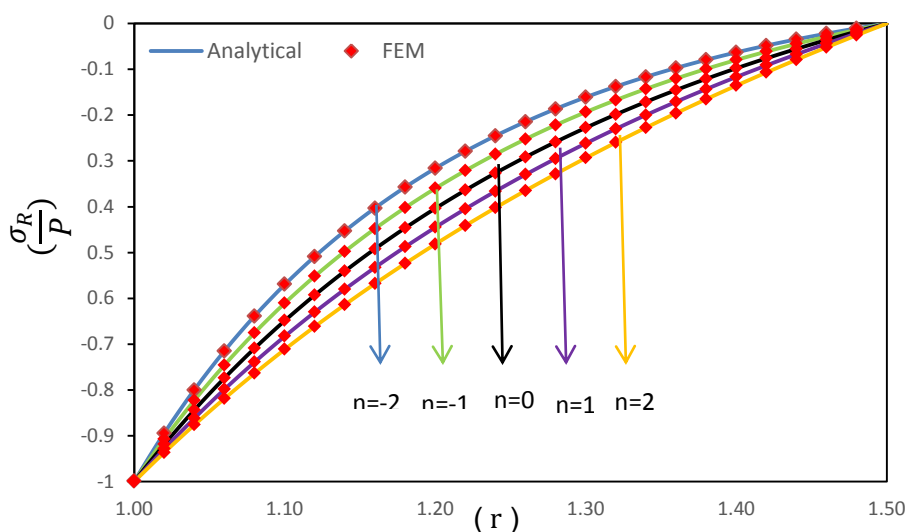
۳-۴ مطالعه‌ی عددی الکترومکانیک کره‌ی FGPM

برای مطالعه‌ی عددی الکترومکانیک مسأله، همان‌طور که در فصل گذشته بیان گردید یک کره‌ی جدار ضخیم با مشخصات هندسی $R_i = 40 \text{ mm}$ و $R_o = 60 \text{ mm}$ در نظر گرفته می‌شود. فشار داخلی یا خارجی اعمال شده به مخزن به‌صورت یکنواخت $p = 2 \text{ MPa}$ در نظر گرفته شده است. نمونه‌ی عددی مورد مطالعه در سطح داخلی خود تحت پتانسیل الکتریکی ψ_i و در سطح خارجی نیز تحت پتانسیل الکتریکی ψ_o قرار دارد. در این بخش، مسأله‌ی مورد نظر با استفاده از روابط تحلیلی که در فصل دوم استخراج گردیده است بررسی شده، سپس نتایج عددی که با استفاده از روش اجزای محدود توسط نرم‌افزار ANSYS حاصل شده است با نتایج حل عددی مقایسه می‌شود. خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی کره در این قسمت نیز مطابق جدول (۳-۱) می‌باشد.

۴-۳-۱ بررسی تأثیر ثابت ناهمگنی :

همانگونه که در فصل قبل بیان شد برای بررسی تأثیر ثابت ناهمگنی، کلیه‌ی ثوابت ناهمگنی برابر ثابت ناهمگنی کل n فرض می‌شود و مقادیر $n = -2, -1, 0, 1, 2$ ، مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در این قسمت نیز تأثیر ثابت ناهمگنی بر روی میدان جابه‌جایی، تنش شعاعی، تنش محیطی، تنش مؤثر و توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت جداره‌ی کره مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. در این حالت مخزن مورد نظر در سطح داخلی خود تحت پتانسیل الکتریکی $\psi_i = 1000 \text{ V}$ و در سطح خارجی نیز تحت پتانسیل الکتریکی $\psi_o = 0$ قرار داشته، همچنین تحت فشار داخلی $p_i = 2 \text{ MPa}$ می‌باشد.

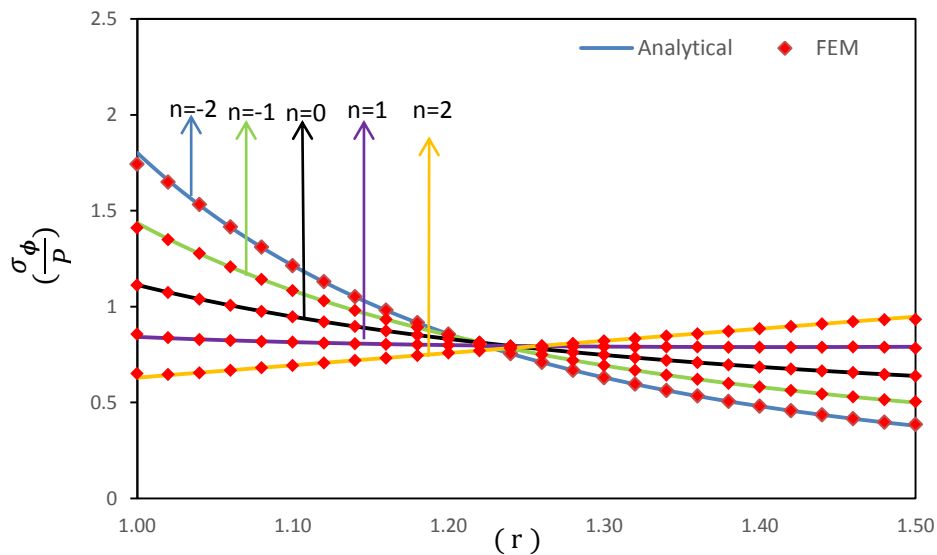
نتایج حل اجزای محدود و حل تحلیلی مسأله نیز در شکل‌های (۴-۱) تا (۴-۵) که در ادامه خواهند آمد آورده شده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند.



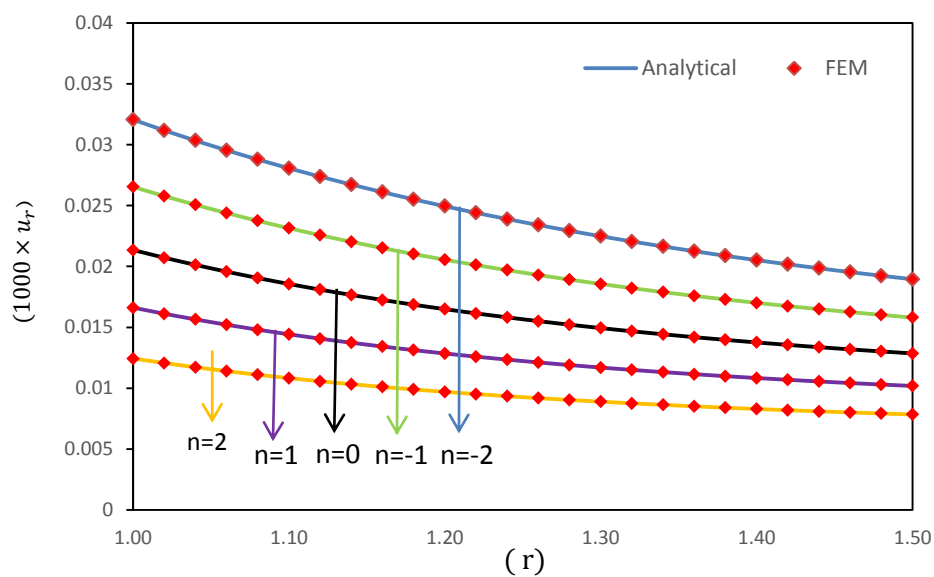
شکل ۴-۱ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره

نمودار (۴-۱) تغییرات تنش شعاعی در راستای جداره‌ی کره را در حالت الکتروالاستیک نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است با افزایش ثابت ناهمگنی میزان تغییرات تنش شعاعی ایجاد شده از ناحیه‌ی جدار داخلی به جدار خارجی کمتر می‌شود. همچنین با توجه به اینکه نحوه‌ی توزیع تنش شعاعی در شرایط مختلف بارگذاری تقریباً یکسان بوده و شرایط مرزی در سطح داخلی و خارجی به-

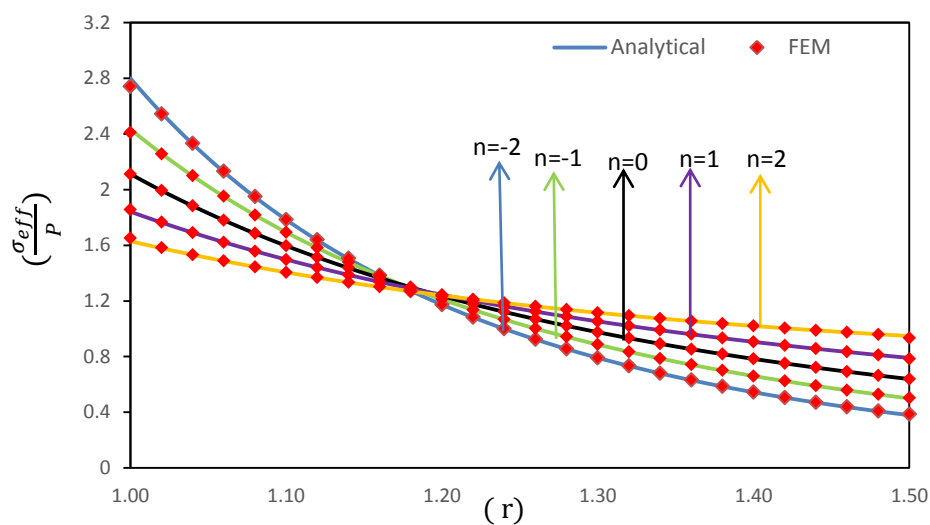
طور کامل ارضا می‌شود می‌توان نتیجه گرفت که تنش شعاعی ایجاد شده در جسم بیشترین وابستگی را به بارگذاری فشاری دارد.



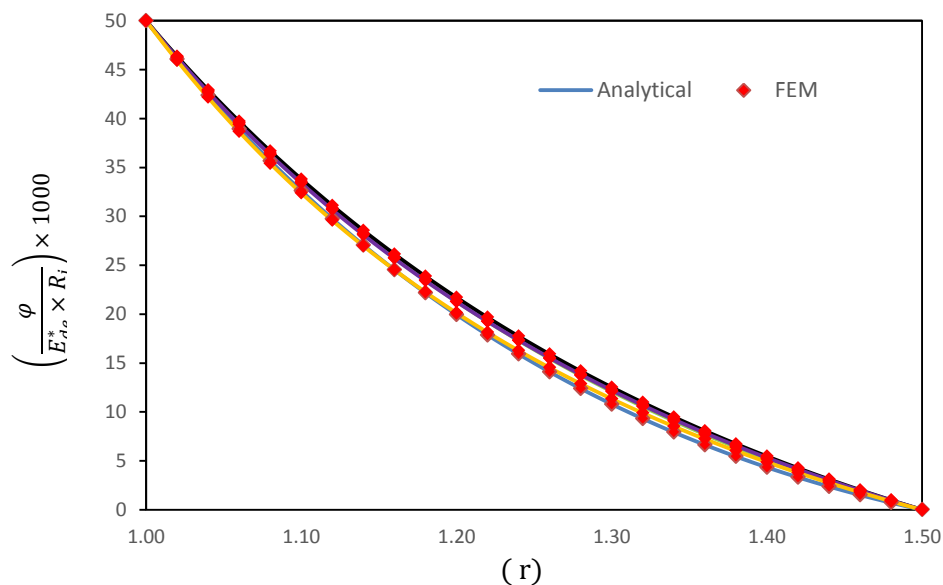
شکل ۴-۲ توزیع تنش محیطی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۴-۳ میدان جابه‌جایی شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۴-۴ توزیع تنش مؤثر در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۴-۵ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره

در نمودارهای (۲-۴) تا (۵-۴) به ترتیب تغییرات تنش محیطی، جابه‌جایی شعاعی، تنش مؤثر و پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت جداره برای حالتی که جسم در جداره‌ی داخلی خود به‌طور همزمان تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی یکنواخت قرار گرفته است آورده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود تطابق خوبی میان نتایج حل تحلیلی و اجزای محدود وجود دارد. همچنین ثابت ناهمگنی Π در توزیع تنش و جابه‌جایی تاثیر زیادی دارد.

اما توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم تقریباً مستقل از ثابت ناهمگنی بوده و بیشتر تابع شرایط مرزی است. با توجه به نمودار، مقدار تنش فن مایرز و تنش محیطی ایجاد شده در جسم با افزایش ثابت ناهمگنی در جداره‌ی داخلی کاهش یافته و در جداره‌ی خارجی افزایش می‌یابد. و برای جابه‌جایی شعاعی باعث کاهش آن می‌شود.

جمع‌بندی

نتایج به دست آمده در نمودارها، برای مقایسه‌ی عددی بهتر به صورت خلاصه در جداول ذکر می‌شوند.

جدول ۴-۱ تنش محیطی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی

	$\frac{\sigma_{\phi}}{P}$	$n = -2$		$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r = 1$	Anal	1.74		1.43		1.112		0.842		0.629	
	FEM	1.8	3	1.41	1.3	1.110	0.17	0.857	1.7	0.652	3
$r = 1.25$	Anal	0.732		0.764		0.786		0.795		0.789	
	FEM	0.731	0.13	0.765	0.1	0.786	0	0.794	0.12	0.789	0
$r = 1.5$	Anal	0.378		0.499		0.638		0.790		0.947	
	FEM	0.386	2	0.504	1	0.639	0.1	0.784	0.7	0.933	1.4

جدول ۴-۲ تنش موثر برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی

	$\frac{\sigma_{eff}}{P}$	$n = -2$		$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r = 1$	Anal	2.8		2.43		2.11		1.84		1.629	
	FEM	2.74	2.1	2.41	0.8	2.11	0	1.86	1.07	1.651	1.3
$r = 1.25$	Anal	0.960		1.03		1.095		1.14		1.173	
	FEM	0.961	0.1	1.03	0	1.090	0.45	1.14	0	1.172	0.08
$r = 1.5$	Anal	0.378		0.499		0.638		0.790		0.947	
	FEM	0.386	2.1	0.504	1	0.638	0	0.784	0.75	0.933	1.4

جدول ۴-۳ جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی

	$u_r \times 1000$	$n = -2$		$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r = 1$	Anal	0.032	0.3	0.0265	0	0.0213	0.46	0.0166	0	0.0124	0
	FEM	0.0321		0.0265		0.0214		0.0166		0.0124	
$r = 1.25$	Anal	0.0236	0.42	0.0194	0.5	0.0156	0.64	0.0122	0	0.0092	0
	FEM	0.0237		0.0195		0.0157		0.0122		0.0092	
$r = 1.5$	Anal	0.0189	0.52	0.0158	0	0.0129	0	0.0102	0	0.0078	0
	FEM	0.0190		0.0158		0.0129		0.0102		0.0078	

جدول ۴-۴ توزیع پتانسیل الکتریکی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی

	$\left(\frac{\varphi}{E_{de}^* \times R_i} \right) \times 1000$	$n = -2$		$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r = 1$	Anal	50	0	50	0	50	0	50	0	50	0
	FEM	50		50		50		50		50	
$r = 1.25$	Anal	149	0.6	16.37	0.18	16.8	0	16.4	0	15.38	0.06
	FEM	150		16.40		16.8		16.4		15.39	
$r = 1.5$	Anal	0	---	0	---	0	---	0	---	0	---
	FEM	0		0		0		0		0	

جداول (۴-۱) تا (۴-۴) نتایج حاصل از پیش‌بینی میدان تنش محیطی، تنش موثر، جابه‌جایی شعاعی و پتانسیل الکتریکی را با دو روش تحلیلی و اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌گردد در محاسبه‌ی میدان‌های ذکر شده دو روش دارای انطباق قابل قبولی می‌باشند.

۴-۳-۲ بررسی تأثیر بارگذاری:

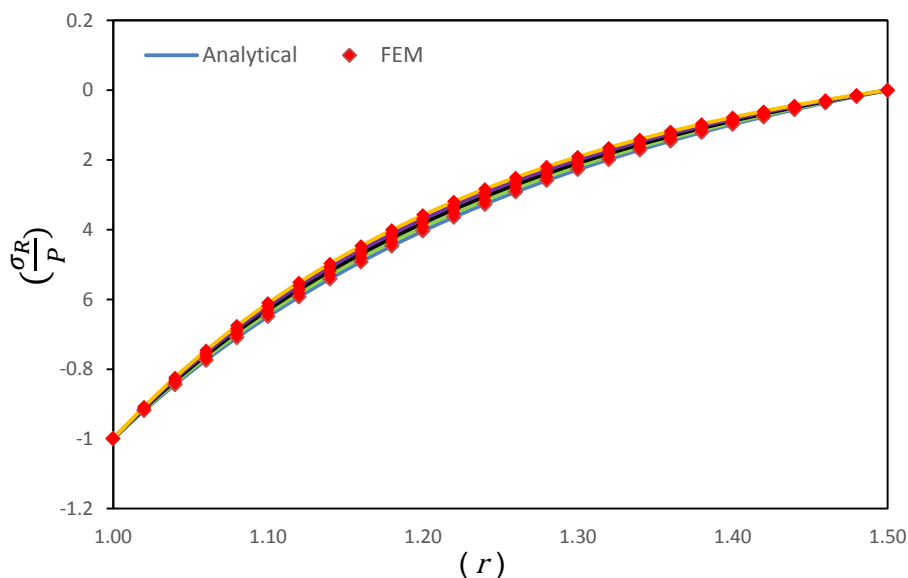
در این قسمت تأثیر انواع بارگذاری الکتریکی در مرزهای کره بر روی میدان جابه‌جایی، تنش

شعاعی، تنش محیطی، تنش مؤثر و توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت جداره‌ی کره مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته و نتایج با یکدیگر مقایسه می‌شوند. برای بررسی تأثیر بارگذاری، ثابت ناهمگنی n برابر صفر در نظر گرفته شده و مسأله در حالات مختلف توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم که در ذیل خواهد آمد حل می‌شود.

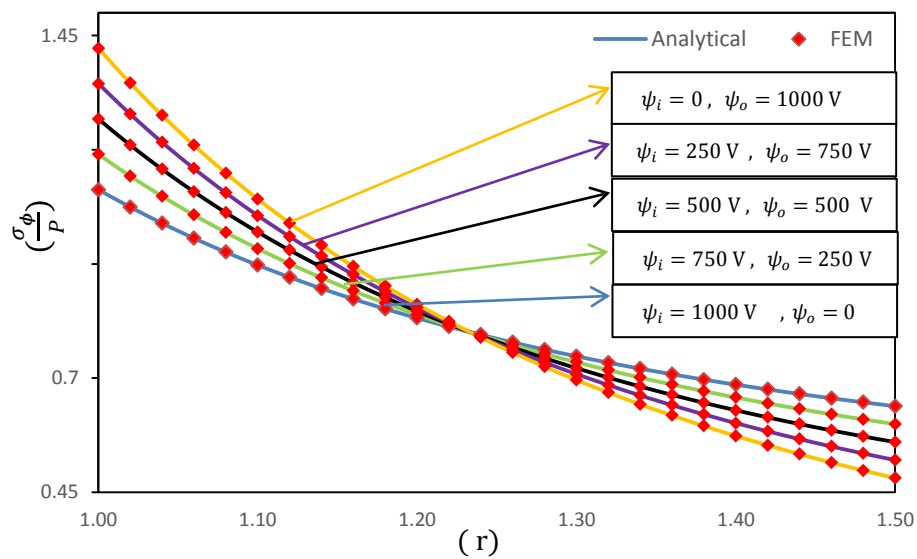
$$\begin{aligned} (\psi_i = 1000 \text{ V} \text{ و } \psi_o = 0) \quad (\psi_i = 750 \text{ V} \text{ و } \psi_o = 250 \text{ V}) \quad (\psi_i = 500 \text{ V} \text{ و } \psi_o = 500 \text{ V}) \\ (\psi_i = 250 \text{ V} \text{ و } \psi_o = 750 \text{ V}) \quad (\psi_i = 0 \text{ و } \psi_o = 1000 \text{ V}) \end{aligned} \quad (1-4)$$

نتایج حل اجزای محدود و حل تحلیلی مسأله نیز در شکل‌های (۴-۶) تا (۴-۱۰) ارائه خواهند

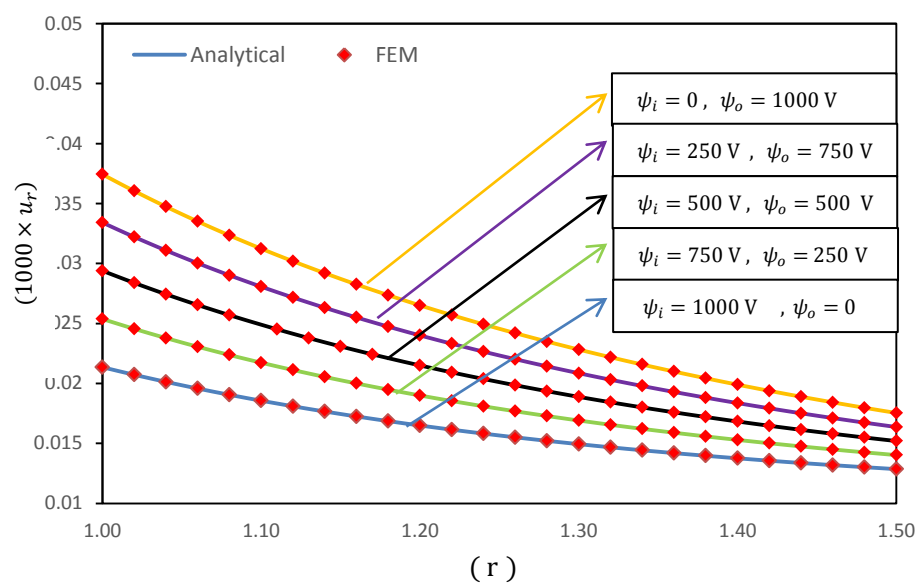
شد.



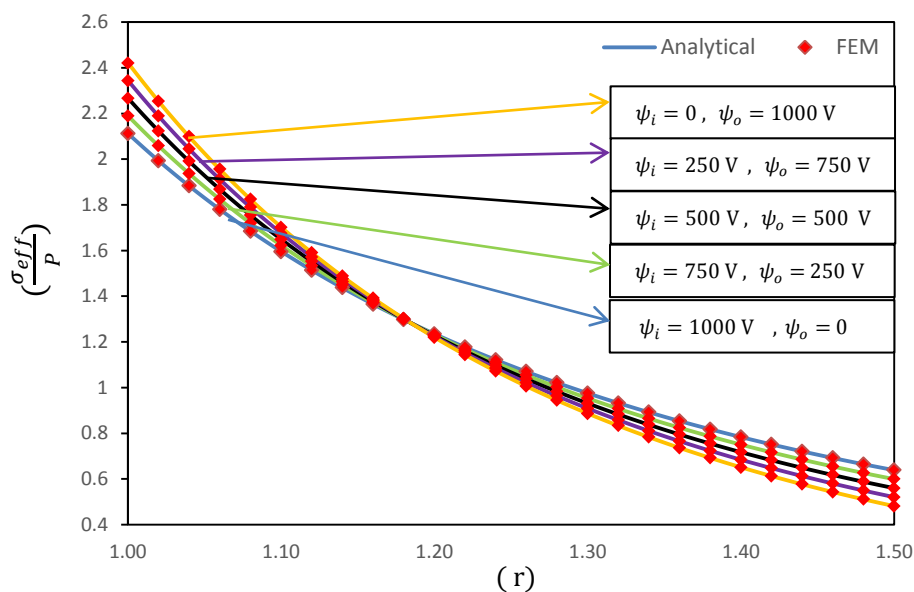
شکل ۴-۶ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



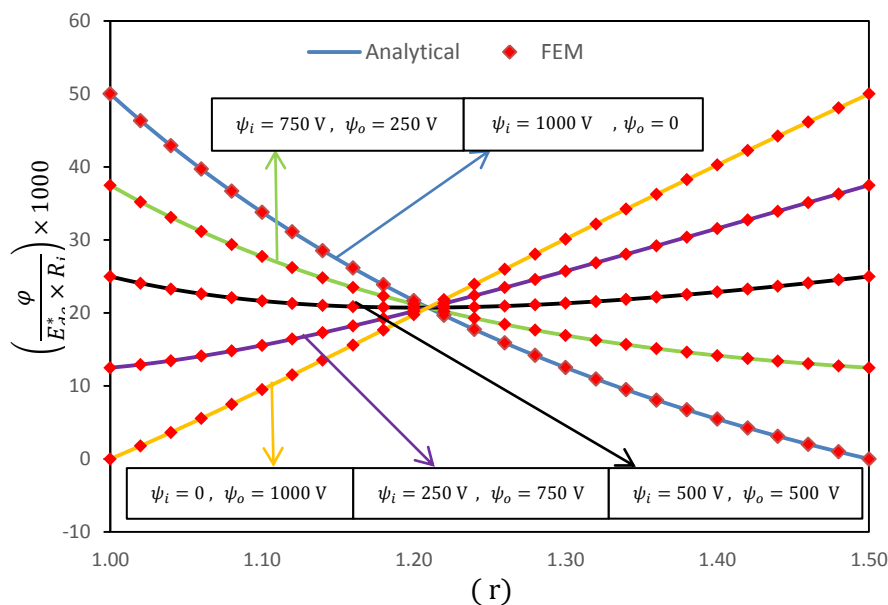
شکل ۴-۷ توزیع تنش محیطی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۴-۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۴-۹ توزیع تنش موثر در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۴-۱۰ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره

شکل‌های (۴-۶) تا (۴-۱۰) نتایج به‌دست آمده برای توزیع تنش، جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی را با استفاده از دو روش تحلیلی و اجزای محدود در حالت‌های مختلف بارگذاری الکتریکی (توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم) نشان می‌دهند. شکل (۴-۶) تأثیر بارگذاری الکتریکی را بر روی توزیع تنش شعاعی در جسم نشان می‌دهد ثابت ناهمگنی بر روی توزیع تنش شعاعی اثری مشهود ندارد. با دقت در نمودارهای توزیع تنش محیطی و تنش موثر این نتیجه به‌دست می‌آید که توزیع این تنش‌ها در جسم با دور شدن از جداره‌ی داخلی و خارجی به مقداری ثابت میل می‌کند. همچنین هر دو روش

در شرایط مختلف بارگذاری بیشترین مقدار تنش را در جداری داخلی و کمترین مقدار آن را در جداری خارجی پیش‌بینی می‌کنند. در شکل (۴-۸) تأثیر بارگذاری بر روی جابه‌جایی شعاعی در کره نشان داده شده است. اگرچه بارگذاری الکتریکی اثری مشهود بر جابه‌جایی شعاعی در جسم دارد اما تغییر چگونگی بارگذاری الکتریکی در مرزها سبب رفتاری همانند اما با مقدار بیشتری یا کمتر می‌گردد و شکل رفتار را به طور کامل دست‌خوش تغییر نمی‌کند.

شکل (۴-۱۰) نیز تأثیر بارگذاری الکتریکی را بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی در کره نشان می‌دهد که از دو روش اجزای محدود و تحلیلی محاسبه شده است. همان‌طور که از مشاهده نمودار پیداست توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم رفتار تقریباً خطی داشته و شرایط مرزی بارگذاری در جداری داخلی و خارجی به‌طور کامل ارضا شده است. در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که جداری داخلی سازه در مقایسه‌ی با جداری خارجی در شرایط بحرانی‌تری قرار داشته که این مهم باید در امر طراحی بهینه لحاظ گردد.

جمع‌بندی

نتایج به دست آمده برای کره‌ی تحت بارگذاری الکتریکی، جهت مقایسه و بررسی بهتر به صورت جدول با دو روش تحلیلی و اجزای محدود ارائه می‌گردد.

جدول ۴-۵ تنش شعاعی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی

	$\frac{\sigma_R}{P}$	$\psi_i = 1000 \text{ V}$		$\psi_i = 750 \text{ V}$		$\psi_i = 500 \text{ V}$		$\psi_i = 250 \text{ V}$		$\psi_i = 0$	
		$\psi_o = 0$		$\psi_o = 250 \text{ V}$		$\psi_o = 500 \text{ V}$		$\psi_o = 750 \text{ V}$		$\psi_o = 1000 \text{ V}$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r = 1$	Anal	-1		-1		-1		-1		-1	
	FEM	-0.99	1	-0.99	1	-0.99	1	-0.99	1	-0.99	1
$r = 1.25$	Anal	-		-		-		-		-	
	FEM	0.308	0	0.298	0	0.287	0	0.277	0.36	0.266	0.37
$r = 1.5$	Anal	0		0		0		0		0	
	FEM	0	---	0	---	0	---	0	---	0	---

جدول ۴-۶ توزیع تنش محیطی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی

	$\frac{\sigma_{\phi}}{P}$	$\psi_i = 1000 \text{ V}$ $\psi_o = 0$		$\psi_i = 750 \text{ V}$ $\psi_o = 250 \text{ V}$		$\psi_i = 500 \text{ V}$ $\psi_o = 500 \text{ V}$		$\psi_i = 250 \text{ V}$ $\psi_o = 750 \text{ V}$		$\psi_i = 0$ $\psi_o = 1000 \text{ V}$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r=1$	Anal	1.112		1.19		1.267		1.35		1.422	
	FEM	1.110	0.17	1.19	0	1.270	0.23	1.34	0.74	1.421	0.07
$r=1.25$	Anal	0.786		0.782		0.779		0.776		0.772	
	FEM	0.786	0	0.783	0.12	0.779	0	0.776	0	0.771	0.12
$r=1.5$	Anal	0.638		0.599		0.559		0.520		0.481	
	FEM	0.639	0.15	0.599	0	0.560	0.17	0.520	0	0.481	0

جداول (۴-۵) و (۴-۶) نتایج تنش شعاعی و تنش محیطی را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود مورد مقایسه قرار می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود میزان اختلاف نتایج دو روش بسیار اندک بوده و مقادیر به‌دست آمده قابل قبول می‌باشند.

جدول ۴-۷ جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی

	$u_r \times 1000$	$\psi_i = 1000 \text{ V}$ $\psi_o = 0$		$\psi_i = 750 \text{ V}$ $\psi_o = 250 \text{ V}$		$\psi_i = 500 \text{ V}$ $\psi_o = 500 \text{ V}$		$\psi_i = 250 \text{ V}$ $\psi_o = 750 \text{ V}$		$\psi_i = 0$ $\psi_o = 1000 \text{ V}$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r=1$	Anal	0.0213		0.0253		0.0293		0.0334		0.0374	
	FEM	0.0214	0.46	0.0254	0.39	0.0294	0.34	0.0334	0	0.0374	0
$r=1.25$	Anal	0.0157		0.0178		0.0208		0.0223		0.0245	
	FEM	0.0156	0.63	0.0179	0.56	0.021	5	0.0223	0	0.0245	0
$r=1.5$	Anal	0.0128		0.014		0.0151		0.0164		0.0175	
	FEM	0.0129	0.78	0.014	0	0.0152	0.66	0.0164	0	0.0175	0

جدول ۴-۸ توزیع پتانسیل الکتریکی برای کره‌ی تحت فشار داخلی و پتانسیل الکتریکی

$\left(\frac{\varphi}{E_{de}^* \times R_i}\right) \times 1000$		$\psi_i = 1000 \text{ V}$		$\psi_i = 750 \text{ V}$		$\psi_i = 500 \text{ V}$		$\psi_i = 250 \text{ V}$		$\psi_i = 0$	
		$\psi_o = 0$		$\psi_o = 250 \text{ V}$		$\psi_o = 500 \text{ V}$		$\psi_o = 750 \text{ V}$		$\psi_o = 1000 \text{ V}$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r=1$	Anal	50		37.5		25		12.5		0	
	FEM	50	0	37.5	0	25	0	12.5	0	0	---
$r=1.25$	Anal	16.81		18.84		20.88		22.9		24.95	
	FEM	16.8	0.05	18.80	0.21	20.9	0.09	22.9	0	24.95	0
$r=1.5$	Anal	0		125		25		37.5		50	
	FEM	0	0	125	0	25	0	37.5	0	50	0

در این قسمت نیز نتایج مربوط به میدان جابه‌جایی شعاعی و توزیع پتانسیل الکتریکی با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود جهت مقایسه در جداول آورده شده است.

۴-۴ مطالعه‌ی عددی الکتروترمو مکانیک کره‌ی FGPM

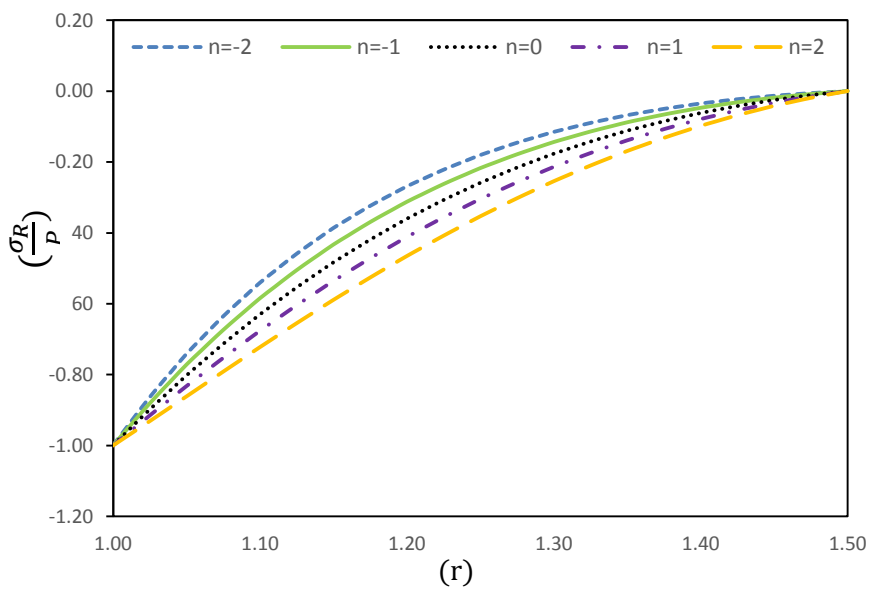
برای مقایسه‌ی بهتر، در این بخش نیز، مشخصات هندسی و جنس کره همچون مطالعه‌ی عددی تحلیل گذشته در نظر گرفته می‌شود. نمونه‌ی عددی مورد مطالعه در سطح داخلی خود تحت پتانسیل الکتریکی θ_i و در سطح خارجی نیز تحت پتانسیل الکتریکی θ_o قرار دارد. دمای ثابت مثبت مرجع نیز $\theta^* = 25^\circ\text{C}$ در نظر گرفته شده است.

۴-۴-۱ بررسی تأثیر ثابت ناهمگنی :

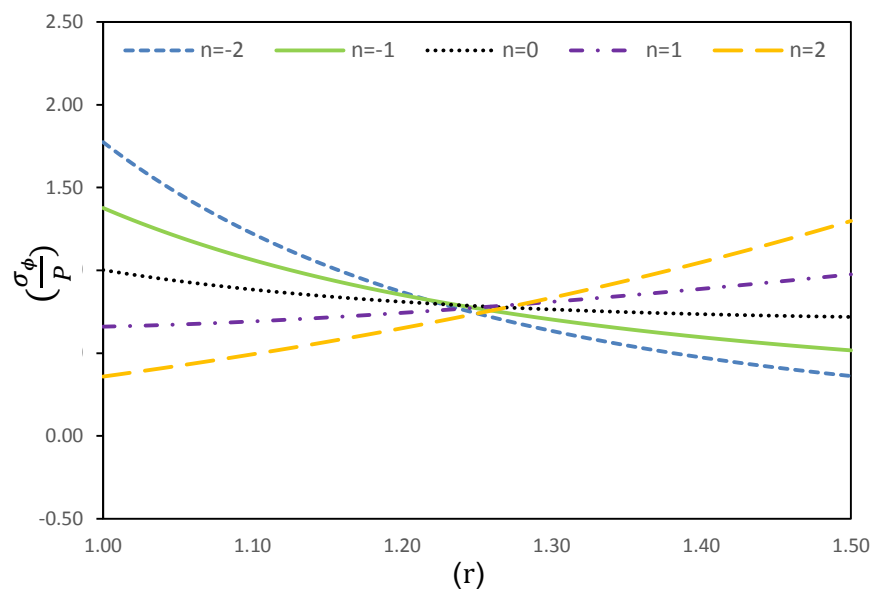
برای بررسی تأثیر ثابت ناهمگنی، مانند گذشته کلیه‌ی ثوابت ناهمگنی برابر ثابت ناهمگنی کل n فرض شده و مقادیر $n = -2, -1, 0, 1, 2$ ، مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در این قسمت نیز تأثیر ثابت ناهمگنی بر روی میدان دما، میدان جابه‌جایی، تنش شعاعی، تنش محیطی، تنش مؤثر و توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت جداره‌ی کره مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد و در نهایت نتایج به‌دست آمده تحلیل می‌شوند. در این حالت مخزن مورد نظر در جداره‌ی داخلی خود تحت

دمای یکنواخت $\theta_i = 125^\circ\text{C}$ و پتانسیل الکتریکی $\psi_i = 1000\text{ V}$ قرار داشته، همچنین در جداره‌ی خارجی نیز تحت دمای یکنواخت $\theta_i = 25^\circ\text{C}$ و پتانسیل الکتریکی $\psi_i = 0$ قرار دارد. بارگذاری مکانیکی اعمال شده بر جسم نیز به صورت فشار داخلی $p_i = 80\text{ MPa}$ می باشد.

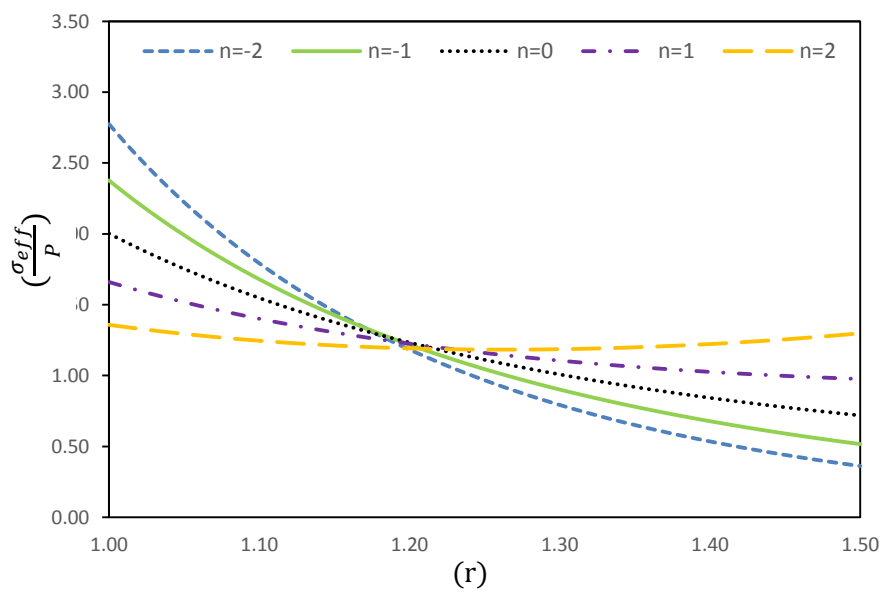
نتایج تحلیل بیان شده در این قسمت در شکل های (۱۱-۴) تا (۱۶-۴) آورده شده است.



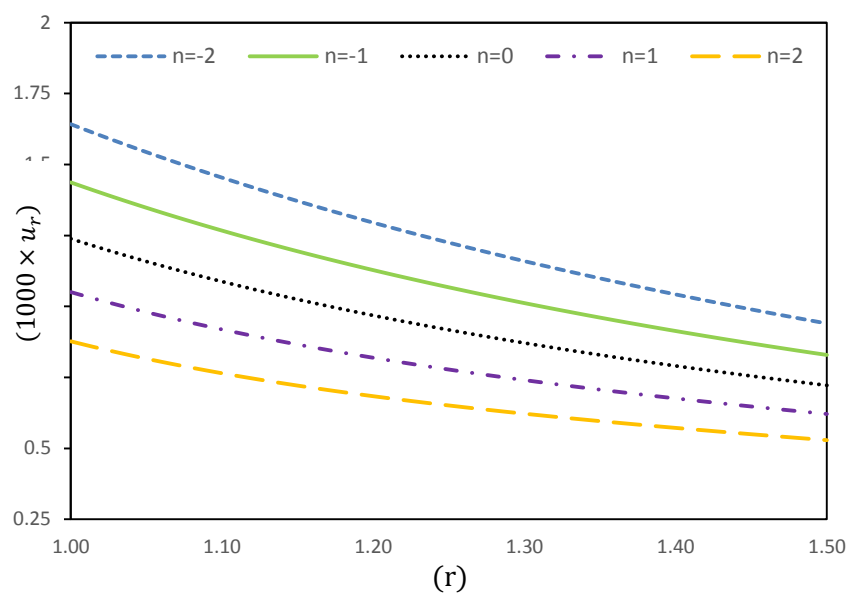
شکل ۱۱-۴ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



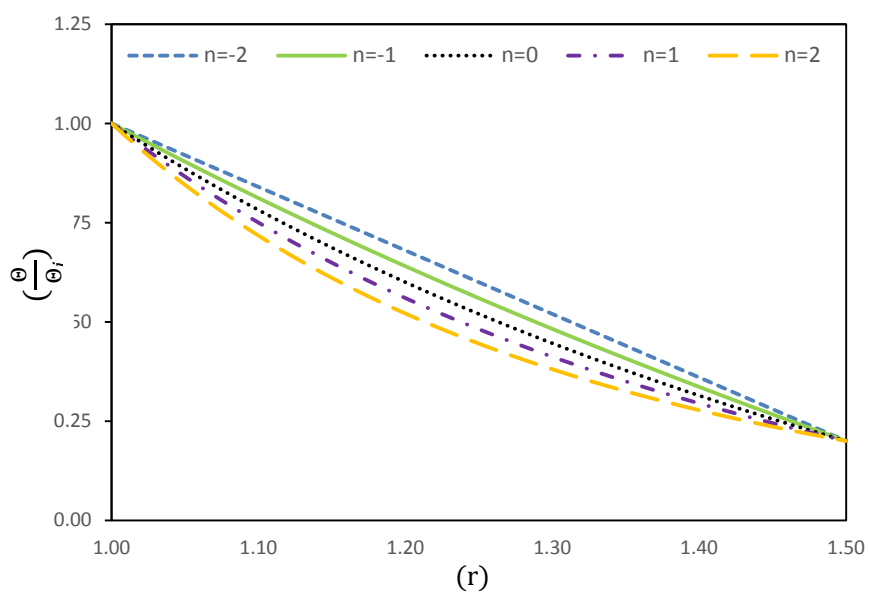
شکل ۴-۱۲ توزیع تنش محیطی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



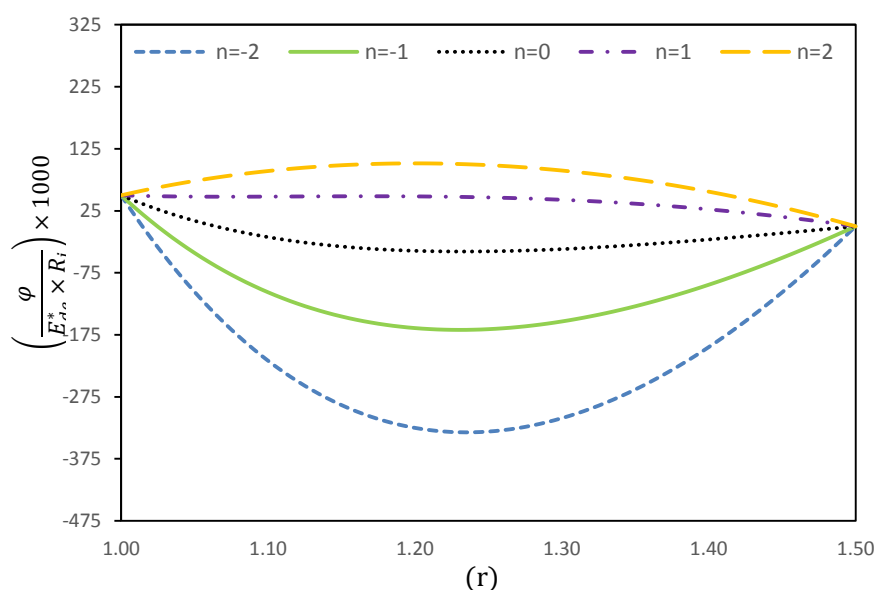
شکل ۴-۱۳ توزیع تنش مؤثر در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۴-۱۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۴-۱۵ توزیع میدان دمایی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۴-۱۶ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداری ضخامت کره

همان‌طور که مشاهده می‌شود شکل‌های (۴-۱۱) تا (۴-۱۶) تأثیر ثابت ناهمگنی را بر روی تنش‌ها، جابه‌جایی، توزیع پتانسیل الکتریکی و میدان دما نشان می‌دهد. اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در شکل (۴-۱۱) نشان داده شده است. با افزایش ثابت ناهمگنی مقدار تنش شعاعی در جسم افزایش می‌یابد و شرایط مرزی نیز به‌طور کامل ارضا شده است.

شکل‌های (۴-۱۲) و (۴-۱۳) به ترتیب اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع تنش محیطی و تنش مؤثر نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود با افزایش ثابت ناهمگنی n ، مقدار این تنش‌ها در جداری داخلی کره افزایش یافته و برعکس در جداری خارجی جسم کاهش می‌یابد. در این حالت نیز مشابه مطالعه‌ی عددی تحلیل گذشته، مقادیر تنش محیطی و مؤثر رفتاری مستقل از ثابت ناهمگنی را از خود نشان می‌دهد. نتیجه‌ای که با دقت در شکل (۴-۱۴) حاصل می‌شود بیانگر این مطلب است که جابه‌جایی شعاعی ایجاد شده در جسم با افزایش ثابت ناهمگنی، کوچکتر شده و هرچه از موقعیت جداری داخلی به سمت جداری خارجی جسم پیش برویم مقدار جابه‌جایی ایجاد شده کمتر می‌شود تا آنجاییکه در جداری خارجی جسم به کمترین مقدار خود می‌رسد. در شکل (۴-۱۵) اثر ثابت ناهمگنی بر روی تغییرات میدان دما در جسم آورده شده است. همان‌طور که مشخص است

تغییرات دما در امتداد جداره‌ی ضخامت کره تقریباً دارای رفتار خطی بوده و با توجه به دمای اعمال شده در مرزهای جسم، دارای روند کاهشی می‌باشد. همچنین مقدار حرارت ایجاد شده در جسم با افزایش ثابت ناهمگنی کاهش می‌یابد. شکل (۴-۱۶) اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره نشان می‌دهد. در این حالت نیز ثابت ناهمگنی بر توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم کاملاً مشهود است و مقدار پتانسیل الکتریکی با افزایش ثابت ناهمگنی در جسم کاهش می‌یابد. همچنین اثر شرایط مرزی در جسم نیز کاملاً واضح است.

جمع‌بندی

نتایج به دست آمده در نمودارها، برای مقایسه‌ی عددی بهتر به صورت خلاصه در جداول ذکر می‌شوند.

جدول ۴-۹ تنش شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی

	$\frac{\sigma_R}{P}$	$n = -2$		$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r = 1$	Anal	-1		-1		-1		-1		-1	
	FEM	-0.998	0.12	-0.998	0.12	-0.998	0.12	-0.998	0.12	-0.998	0.12
$r = 1.25$	Anal	-0.227		-0.275		-0.327		-0.383		-0.443	
	FEM	-0.22	3.02	-0.265	3.6	-0.315	3.6	-0.370	3.4	-0.427	3
$r = 1.5$	Anal	0		0		0		0		0	
	FEM	0	---	0	---	0	---	0	---	0	---

جدول ۴-۱۰ جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی

$u_r \times 1000$		$n = -2$		$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r = 1$	Anal	1.642		1.437		1.237		1.05		0.877	
	FEM	1.662	1.2	1.465	1.9	1.272	2.8	1.09	3	0.92	4
$r = 1.25$	Anal	1.225		1.067		0.917		0.777		0.65	
	FEM	1.212	1.06	1.057	0.9	0.910	0.76	0.772	0.64	0.647	0.46
$r = 1.5$	Anal	0.94		0.83		0.722		0.62		0.527	
	FEM	0.92	2.1	0.81	2	0.702	2.7	0.60	3.2	0.512	2.8

جدول ۴-۱۱ میدان دما برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی

$\frac{\theta}{\theta_i}$		$n = -2$		$n = -1$		$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r = 1$	Anal	1		1		1		1		1	
	FEM	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$r = 1.25$	Anal	0.6		0.56		0.52		0.48		0.44	
	FEM	0.599	0.16	0.56	0	0.52	0	0.48	0	0.44	0
$r = 1.5$	Anal	0.2		0.2		0.2		0.2		0.2	
	FEM	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0

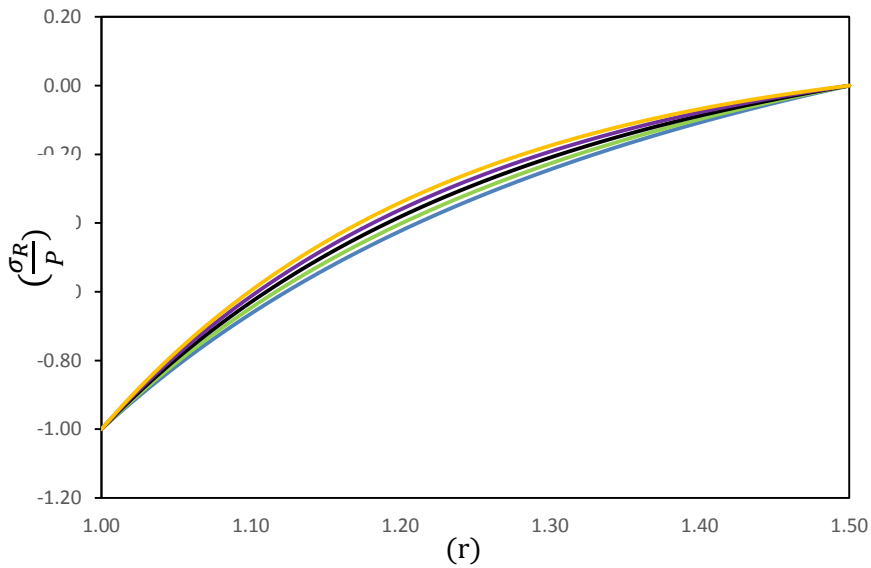
۴-۴-۲ بررسی تأثیر بارگذاری:

در این قسمت تأثیر انواع بارگذاری حرارتی در مرزهای کره بر روی میدان جابه‌جایی، تنش شعاعی، تنش محیطی، تنش مؤثر، توزیع پتانسیل الکتریکی و میدان دما در راستای ضخامت جداری کره مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته و نتایج با یکدیگر مقایسه می‌شوند. برای بررسی تأثیر بارگذاری، ثابت ناهمگنی n برابر صفر در نظر گرفته شده و مسأله در شرایط مختلف بارگذاری حرارتی در جسم

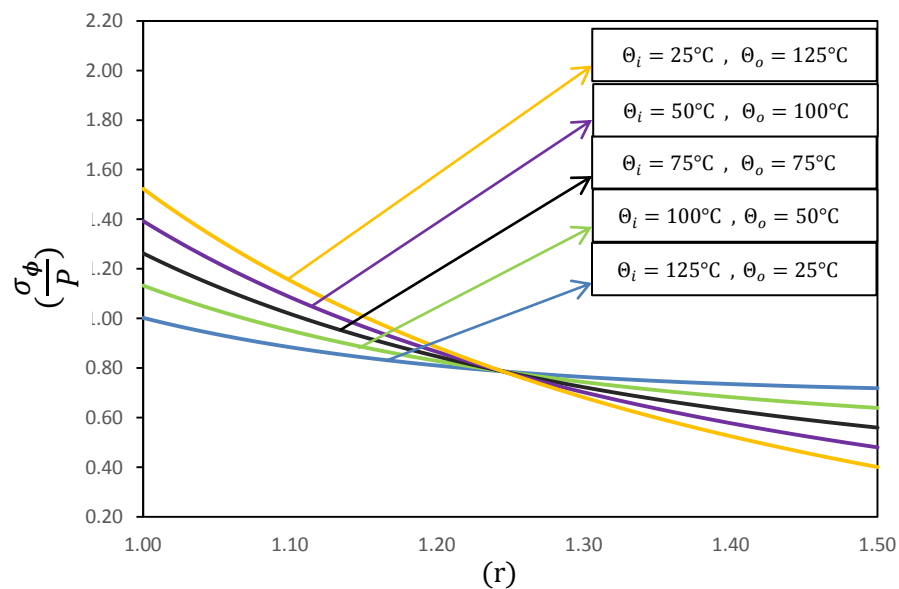
که در ذیل خواهد آمد مورد مطالعه قرار می گیرد.

$$(2-4) \quad \begin{aligned} & (\theta_i = 125^\circ\text{C} \text{ و } \theta_o = 25^\circ\text{C}) \quad (\theta_i = 100^\circ\text{C} \text{ و } \theta_o = 50^\circ\text{C}) \quad (\theta_i = 75^\circ\text{C} \text{ و } \theta_o = 75^\circ\text{C}) \\ & (\theta_i = 50^\circ\text{C} \text{ و } \theta_o = 100^\circ\text{C}) \quad (\theta_i = 25^\circ\text{C} \text{ و } \theta_o = 125^\circ\text{C}) \end{aligned}$$

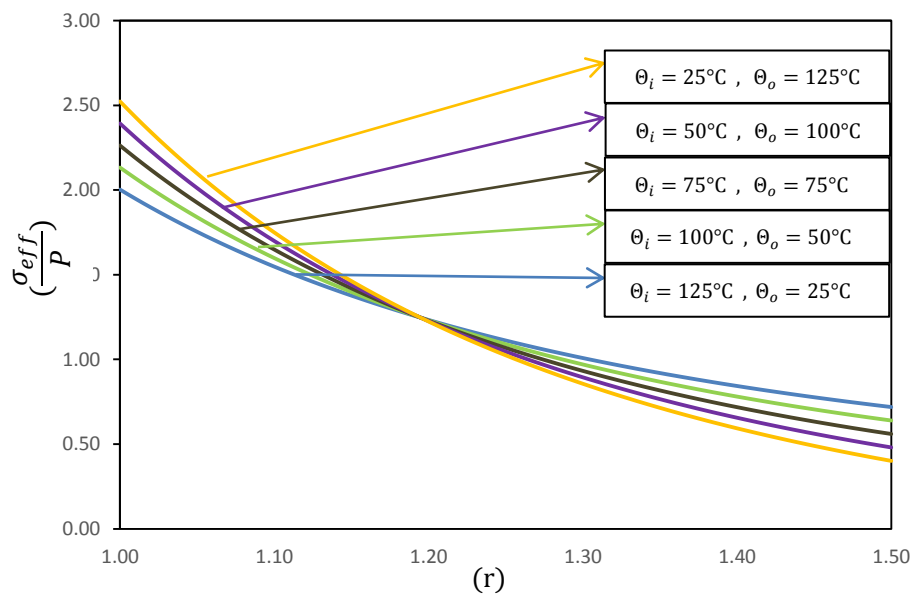
نتایج به دست آمده از تحلیل فوق در شکل های (۴-۱۷) تا (۴-۲۲) آورده شده است.



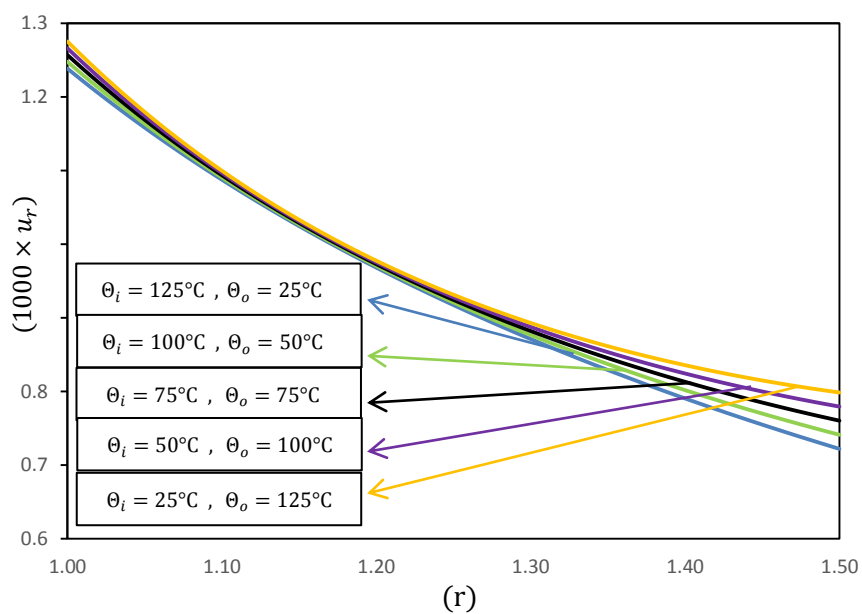
شکل ۴-۱۷ توزیع تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



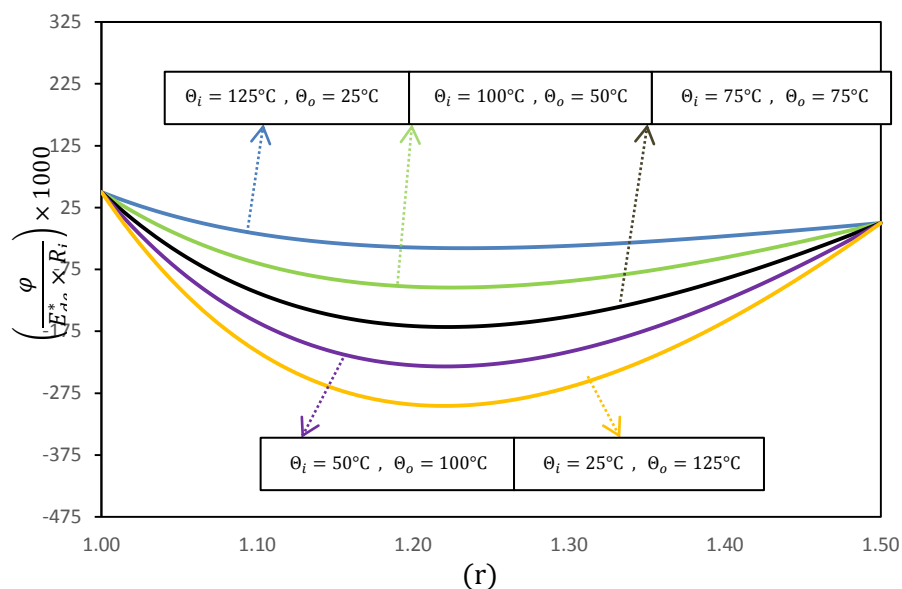
شکل ۴-۱۸ توزیع تنش محیطی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



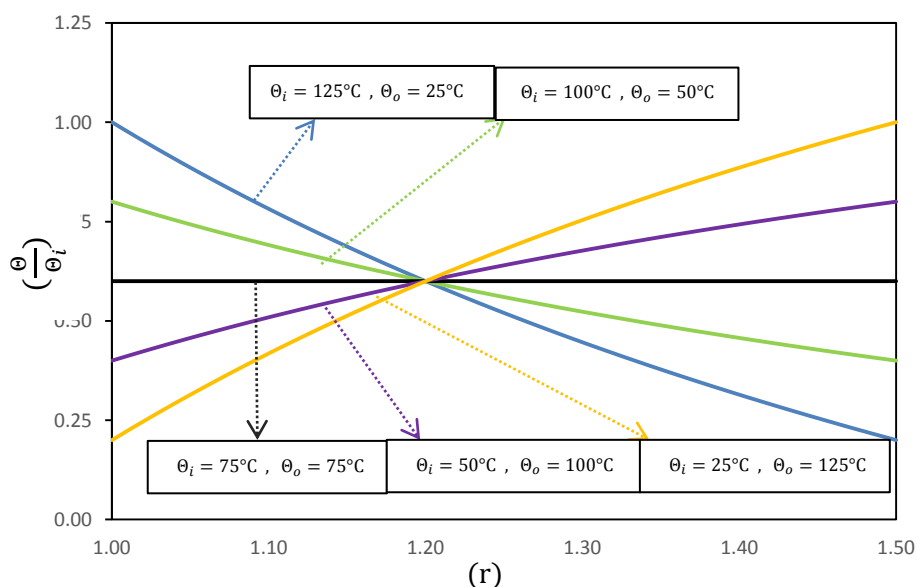
شکل ۴-۱۹ توزیع تنش مؤثر در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۴-۲۰ توزیع میدان جابه‌جایی شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۲۱-۴ توزیع پتانسیل الکتریکی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره



شکل ۲۲-۴ توزیع میدان دمایی در امتداد جداره‌ی ضخامت کره

شکل‌های (۴-۱۷) تا (۴-۲۲) تأثیر شرایط مختلف بارگذاری حرارتی را روی تنش‌ها، جابه‌جایی، توزیع پتانسیل الکتریکی و میدان دمایی در جسم نشان می‌دهند. تأثیر بارگذاری حرارتی در مرزهای جسم بر روی تغییرات تنش شعاعی در امتداد جداره‌ی ضخامت جسم در شکل (۴-۱۷) قابل مشاهده است. نظر به اینکه بارگذاری فشاری در مقایسه با بارگذاری‌های الکتریکی و حرارتی اثر شدیدتری بر روی تنش شعاعی دارد، بنابراین همان‌طور که دیده می‌شود شرایط مختلف بارگذاری حرارتی اثری

اندک بر روی توزیع تنش شعاعی داشته و چندان مشهود نیست.

شکل‌های (۴-۱۸) و (۴-۱۹) به ترتیب تغییرات تنش محیطی و مؤثر را در امتداد جداری ضخامت جسم نشان می‌دهند. همانگونه که مشخص است توزیع این تنش‌ها در جسم رفتار تقریباً مشابهی داشته و در لایه‌ای از ضخامت جسم، مقادیر تنش مستقل از شرایط بارگذاری به سمت مقدار ثابتی همگرا می‌شوند. همچنین در حالات مختلف بارگذاری حرارتی، مقدار تنش‌های مؤثر و محیطی ایجاد شده در جداری داخلی جسم بیشترین مقدار را دارد. نتیجه‌ی قابل توجهی که از مشاهده‌ی شکل (۴-۲۰) حاصل می‌شود این است که جابه‌جایی شعاعی ایجاد شده در جسم جز در نواحی نزدیک جداری داخلی و خارجی کره رفتاری تقریباً مستقل از بارگذاری حرارتی دارد. همچنین میدان جابه‌جایی شعاعی ایجاد شده در امتداد جداری ضخامت جسم دارای حالت نزولی می‌باشد.

همان‌طور که در شکل (۴-۲۱) نشان داده شده است تأثیر بارگذاری حرارتی بر توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم کاملاً مشهود می‌باشد. همچنین شرایط مرزی بارگذاری الکتریکی در جداری داخلی و خارجی به‌طور کامل ارضا شده و بارگذاری حرارتی اثری بر مقدار پتانسیل الکتریکی در مرزهای کره ندارد. شکل (۴-۲۲) تأثیر انواع بارگذاری حرارتی در مرزهای جسم را بر توزیع میدان دمایی نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد رفتار میدان دمایی به بارگذاری حرارتی اعمال شده بر جسم وابستگی داشته و با تغییر آن توزیعی صعودی یا نزولی از جداری داخلی کره پیدا می‌کند.

جمع بندی

نتایج برای مقایسه‌ی بهتر و کمی به صورت جداول ارائه می گردند.

جدول ۴-۱۲ توزیع تنش شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی

	$\frac{\sigma_R}{P}$	$\Theta_i = 125^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 25^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 100^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 50^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 75^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 75^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 50^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 100^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 25^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 125^\circ\text{C}$	
		%Dif				%Dif		%D			
		value	f	value	%Diff	value	f	value	iff	value	%Diff
$r=1$	Anal	-1	0.1	-1	0.1	-1	0.1	-1	0.1	-1	0.1
	FEM	-0.999		-0.999		-0.999		-0.999		-0.999	
$r=1.25$	Anal	-0.327	3.6	-0.307	3.2	-0.287	2	0.267	1.1	0.248	0.8
	FEM	-0.315		-0.297		-0.281		0.264		0.246	
$r=1.5$	Anal	0	---	0	---	0	---	0	---	0	---
	FEM	0		0		0		0		0	

جدول ۴-۱۳ میدان جابه‌جایی شعاعی برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی

	$u_r \times 1000$	$\Theta_i = 125^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 25^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 100^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 50^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 75^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 75^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 50^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 100^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 25^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 125^\circ\text{C}$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r=1$	Anal	1.237	2.8	1.25	2.4	1.26	2.3	1.265	2.5	1.275	2.3
	FEM	1.272		1.28		1.29		1.297		1.305	
$r=1.25$	Anal	0.917	0.7	0.92	0.54	0.925	0.5	0.927	0.2	0.932	0.2
	FEM	0.910		0.915		0.92		0.925		0.930	
$r=1.5$	Anal	0.722	2.7	0.74	2.7	0.76	3	0.78	4	0.797	4
	FEM	0.702		0.72		0.73		0.742		0.76	

جدول ۴-۱۴ میدان دمایی برای کره‌ی تحت بارگذاری حرارتی

	$\frac{\theta}{\theta_i}$	$\Theta_i = 125^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 25^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 100^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 50^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 75^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 75^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 50^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 100^\circ\text{C}$		$\Theta_i = 25^\circ\text{C}$ $\Theta_o = 125^\circ\text{C}$	
		value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff	value	%Diff
$r=1$	Anal	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	FEM	1		1		1		1		1	
$r=1.25$	Anal	0.52	0	0.7	0	1	0	1.6	0	3.4	0
	FEM	0.52		0.7		1		1.6		3.4	
$r=1.5$	Anal	0.2	0	0.5	0	1	0	2	0	5	0
	FEM	0.2		0.5		1		2		5	

جدول‌های (۴-۱۲) تا (۴-۱۴) به ترتیب نتایج به دست آمده برای توزیع تنش شعاعی، میدان جابه‌جایی شعاعی و میدان دمایی را از دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد؛ همان‌گونه که مشاهده می‌گردد در محاسبه‌ی میدان جابه‌جایی دو روش دارای اختلاف اندک، لکن مشهودتری می‌باشند. علت اصلی این اختلاف را می‌توان در فرض خطی بودن میدان جابه‌جایی دانست و این فرض منشأ ایجاد اختلاف بین دو روش حل است. جدول (۴-۱۴) نیز نتایج به دست آمده برای میدان دمایی را از دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد؛ همان‌طور که پیداست هر دو روش نتایج یکسانی را برای میدان دما پیش‌بینی می‌کنند.

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۵-۱ مقدمه

مخازن کروی به دلیل تقارن در هندسه، قابلیت توزیع مناسب تنش‌های ایجاد شده در اثر انواع بارگذاری‌های متقارن، از مقاومت بالایی برخوردار هستند. دستیابی به روش‌های مختلف تحلیل این گروه از پوسته‌ها، ماده و بارگذاری‌های متنوع، همچنان مورد علاقه‌ی پژوهشگران می‌باشد. در فصل-های قبل، نتایج مربوط به تحلیل الکتروالاستیک و الکتروترموالاستیک پوسته‌های کروی جدارکلفت ساخته شده از مواد پیزوالکتریک با توزیع توانی خواص در راستای شعاع کره به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و روش اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار ANSYS استخراج و ارائه شدند. نتایج حل عددی نیز برای ثابت‌های ناهمگنی ۱-، ۰، ۱ و ۲ استخراج و با نتایج حاصل از مدل-سازی مسأله با نرم‌افزار ANSYS مقایسه شدند.

در این فصل با نگاهی گذرا به فصل‌های قبل به جمع‌بندی نتایج به دست آمده در فصل‌های گذشته پرداخته می‌شود و درصد اختلاف در نتایج، با مبنا قرار دادن نتایج روش تحلیلی بیان می‌گردد. در آخر با پیشنهادهایی به منظور پژوهش در همین راستا این فصل به پایان می‌رسد.

۵-۲ نتیجه‌گیری

با توجه به برقرار بودن اصل جمع آثار، نتایج به دست آمده برای تحلیل الکتروترمو مکانیکی برابر مجموع نتایج تحلیل حرارتی، الکتریکی و مکانیکی می‌باشد. در ضمن با بررسی جداگانه نتایج حاصل از هریک از بارگذاری‌ها می‌توان میزان تأثیر هرکدام از بارگذاری‌ها را در جابه‌جایی و تنش‌های ایجاد شده در جسم مشاهده کرد.

همان طور که در پژوهش حاضر مشاهده گردید؛ اثر پیزوالکتریک سبب ایجاد رفتار غیرخطی برای پتانسیل الکتریکی می‌گردد. اگر بارگذاری مکانیکی یا حرارتی در مجموعه غالب باشد نتایج بیشتر تحت تأثیر آن‌ها مشاهده می‌شود. نتیجه‌گیری کلی که از مطالعه و پژوهش در زمینه‌ی مواد پیزوالکتریک حاصل می‌شود حاکی از آن است که مواد پیزوالکتریک با قرار گرفتن تحت میدان‌های

بالای دمای یا الکتریکی و یا نیروی مکانیکی زیاد خاصیت پیزوالکتریک خود را از دست می دهند و در اصطلاح دی پلاریزه می شوند.

به طور خلاصه نتایجی که از این تحقیق به دست می آید به شرح زیر می باشد.

۱. در پوسته های کروی تحت فشار خالص، تنش شعاعی مستقل از خواص مکانیکی ماده می -

باشند. در صورتی که تنش محیطی و جابه جایی شعاعی وابسته به خواص مکانیکی هستند؛

۲. علی رغم اینکه در بارگذاری حرارتی به جسم مورد نظر حرارت داده می شود، ولی همان طور

که مشاهده می شود تنش های شعاعی ایجاد شده در جسم فشاری می باشند؛

۳. بررسی جداگانه هریک از بارگذاری های مکانیکی، حرارتی و الکتریکی حاکی از آن است که

تنش محیطی عموماً اثر غالب را دارد؛

۴. بارگذاری الکتریکی بدون در نظر گرفتن اثر پیزو در ماده، تأثیری در میدان جابه جایی ندارد؛

۵. نتایج به دست آمده از تحلیل کره ی پیزوالکتریک در هریک از بارگذاری های فشاری، حرارتی،

الکتریکی و دورانی نشان می دهد که سهم بارگذاری فشاری در تنش ها و جابه جایی شعاعی

ایجاد شده در جسم نسبت به بقیه ی بارگذاری های اعمال شده بر روی سازه بیشتر است؛

۶. در این مطالعه مشاهده شد که ثابت ناهمگنی n در مواد FGP پارامتر بسیار تأثیرگذار از

دیدگاه طراحی است که می توان با استفاده از آن، توزیع تنش با جابه جایی را در راستای

جداره، بهینه کرد به طوری که تغییرات تنش یا جابه جایی به کمترین مقدار ممکن برسد؛

۷. طبق پژوهش انجام شده بر روی کره ی پیزوالکتریک این نتیجه حاصل می شود که با اعمال

مناسب بارهای مکانیکی، حرارتی و الکتریکی می توان توزیع تنش، جابه جایی شعاعی را در

محدوده ی مورد نظر کنترل و ارزیابی کرد؛

۸. در بارگذاری دورانی میزان تغییرات جابه جایی نصف النهاری از تغییرات جابه جایی شعاعی

بیشتر است؛

۳-۵ پیشنهادها

با توجه به مطالعات انجام شده در این زمینه پیشنهادهای مختلفی را می‌توان ارائه نمود که برخی از این پیشنهادها به این شرح است.

۱. مطالعه و بررسی سازه‌های با اشکال هندسی مختلف مانند استوانه با ضخامت متغیر،

مخروط، ورق و تیر تحت بارگذاری‌های مختلف؛

۲. تحلیل الکتروترمو مکانیکی کره‌های FGPM با تغییر خواص ماده به صورت تابع نمایی و

مقایسه‌ی نتایج آن با پژوهش حاضر؛

۳. تحلیل کره‌های FGM تحت فشار غیر یکنواخت متغیر با زمان $p=p(r,t)$ ؛

۴. تحلیل الکتروترمو مکانیکی کره‌های ناهمگن با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی

مرتبه‌ی اول؛

۵. تحلیل کره‌های FGM تحت انتقال حرارت گذرا $\Theta = \Theta(r,t)$ ؛

مراجع

- [1] Ventsel E., Krauthammer T.; *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [2] Ugural A.C.; *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- [3] Ugural A.C., Fenster S.K.; *Advanced Strength and Applied Elasticity*, 4th ed., Prentice Hall, New Jersey, 2003.
- [4] Mirsky I., Hermann G.; *Axially motions of thick cylindrical shells*, J. Appl. Mech., Vol. 25, pp. 97-102, 1958.
- [5] Gautschi G.; *Piezoelectric Sensorics: Force, Strain, Pressure, Acceleration and Acoustic Emission Sensors, Materials and Amplifiers*, Springer, Berlin, 2002.
- [6] Holler F.J., Skoog D.A., Crouch S.R.; *Principles of Instrumental Analysis*, 6th ed., Cengage Learning, 2007.
- [7] Uchino K.; *Advanced piezoelectric materials: Science and technology*, Woodhead Publishing Limited, Cambridge, 2010.
- [8] Brown C.B., Goodman L.E.; *Gravitational stresses in accreted bodies, Proceedings of the Royal Society of London*, series A 276.
- [9] قارونی ح.; تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی مدول الاستیسیته به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، زمستان ۱۳۹۰.
- [10] Ghorbanpour Arani A., Kolahchi R., Mosallaie Barzoki A.A., Loghman A.; *Electro-thermo-mechanical behaviors of FGPM spheres using analytical method and ANSYS software*, Applied Mathematical Modeling, Vol. 36, pp. 139-157, 2012.
- [۱۱] قناد مهدی، رحیمی غلامحسین، اسماعیل‌زاده خادم سیامک؛ *حل عمومی استوانه‌های جدار کلفت متقارن محوری از مواد ناهمگن FG بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی*، مجله‌ی فنی و مهندسی مدرس، -مکانیک، ش. ۳، صص. ۳۱-۴۳، پاییز ۱۳۸۹.
- [12] Eslami M.R., Babaei M.H., Poutangari R.; *Thermal and mechanical stresses in a FG thick sphere*, Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 82, pp. 522-527, 2005.

[13] Tutuncu N.; **Stresses in Thick-Walled FGM Cylinders with Exponentially-Varying Properties**, Engineering Structures, 29, pp. 2032-2035, 2007.

[۱۴] ی. بیات، م. قنّاد، م. بوژمهرانی؛ **تحلیل تئوری و عددی کره‌های جدار ضخیم تحت فشار از**

مواد ناهمگن، نوزدهمین همایش سالانه مهندسی مکانیک ایران، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ۲۰-۲۲ اردیبهشت، ۱۳۹۰.

[15] Bayat Y., Ghannad M.; **General Solution of Rotating Thick walled spheres under Thermal and Pressure loading**, The 11th Iranian Aerospace Society Conference, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, 2012.

[16] Ghannad M., Zamani-Nejad M.; **Complete closed-form Solution for Pressurized Heterogeneous thick spherical Shells**, Mechanika, 18(5), pp. 508-516, 2012.

[17] Bayat Y., Ghannad M., Torabi H.; **Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading**, Arch Appl Mech, 82, pp.229-242, 2012.

[18] Chen W.Q.; **Problems of radially polarized piezoelectric bodies**, International Journal. Solids structure, 33, pp. 4317-4332, 1998.

[19] Wang X., Zhong Z.; **the General Solution of Spherically Isotropic Magneto-electro-elastic Media and Its Applications**, European Journal of Mechanics A/Solids, 22, pp. 953-969, 2003.

[20] Dai H.L., Wang X.; **Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures**, International Journal of Solids and Structures, 42, pp. 1151-1171, 2005.

[21] Dai H.L., Xiao X., Fu Y.M.; **Analytical Solutions of Stresses in Functionally Graded Piezoelectric Hollow Structures**, Solid State Communications, 150, pp. 763-767, 2010.

[22] Kar A., Kanoria M.; **Generalized thermoelastic functionally graded orthotropic hollow sphere under thermal shock with three-phase-lag effect**, European Journal of Mechanics A/Solids, 29, pp. 757-767, 2009.

[23] Ghorbanpour Arani A., Mosallae Barzoki A.A., Kolahchi R., Mozdianfard M.R., Loghman A.; **Semi-analytical solution of time-dependent electro-thermo-mechanical creep for radially polarized piezoelectric cylinder**, Computers and Structures, 89, pp. 1494-1502, 2011.

[24] Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J.; **Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads**, Applied Mathematics and Mechanics, 32(8), pp. 997-1008, 2011.

[25] Ying CH., Zhi-fei SH.; **Analysis of functionally graded piezothermoelastic hollow cylinder**, Journal of Zhejiang University Science, 6(A)9, pp. 956-961, 2005.

[26] Ghorbanpour Arani A., Jafari Fesharaki J., Mohammadimehr M., Golabi. S.; **Electro- magnet -thermo-mechanical Behaviors of a Radially Polarized FGPM Thick Hollow Sphere**, Journal of Solid Mechanics, 4, pp. 305-315, 2010.

[27] Ghorbanpour Arani A., Kolahchi R., Mosallaie Barzoki A.A., Loghman A.; **Electro- thermo-mechanical behaviors of FGPM Spheres using analytical method and ANSYS software**, Applied Mathematical Modeling, 36, pp. 139-157, 2012.

[28] Dai H.L., Jiang H.J., Yang L.; **Time-dependent behaviors of a FGPM hollow sphere under the coupling of multi-fields**, Solid State Sciences, 14, pp. 587-597, 2012.

[۲۹] پرهیزکار یعقوبی م.; **تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با توزیع توانی خواص**، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، شهریور ۱۳۹۲.

[۳۰] م. پرهیزکار، م. قنّاد؛ **تحلیل عددی استوانه‌ی FGM دارای گشودگی از نوع دایروی و مربعی**، یازدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ۱-۳ اسفند، ۱۳۹۰.

[31] Yang J.; **the Mechanics of Piezoelectric Structures**, World Scientific Publishing, Singapore, 2006.

[32] Ansys Co.; **Coupled-Field Analysis Guide**, ANSYS Inc., USA, 2009.

[33] Reddy J.N.; **an Introduction to Continuum Mechanics: With Applications**, Cambridge University Press, New York, 2008.

[۳۴] رحیمیان م. اسکندری قادی م.; **مکانیک محیط‌های پیوسته**، دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۸۷.

Abstract

In this research, the governing equation of heterogeneous axisymmetric thick-walled piezoelectric sphere subjected to electrical, thermal and mechanical loading based on the plane elasticity theory is presented. The material properties are assumed to vary nonlinearly in the radial direction. The temperature distribution is assumed to be a function of radius. Using FEM simulations, the analytical findings for FGPM spheres under the influence of internal pressure, electric gradient and electro-thermo-mechanical loads were compared to finite element results. It was observed that the two methods results are in good agreement. It is concluded that by changing the value of n_i , the stresses and displacement distribution of FGM can be so modified that the lowest stress levels are reached.

Key words: Hollow sphere, FGPM, Plane elasticity theory, FEM, Rotational sphere.



University of Shahrood

Mechanical Engineering Faculty

**Thermoelastic analysis of heterogeneous rotating
thick-walled sphere using plane elasticity theory
with power-varying properties**

Foad Savari

Supervioser:

Dr. Mehdi Ghannad

February 2015