بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه جامدات

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

ارتعاشات غیر خطی سیستم متشکل از دو نانو صفحه دایره ای متصل به هم توسط محیط الاستیک

استاد راهنما :

دکتر اردشیر کرمی محمدی

شهریور **۱۳۹۴**

تائید رییس دانشکده

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای رضا سلطانی

تحت عنوان:

ارتعاشات غیر خطی سیستم متشکل از دو نانو صفحه دایره ای متصل به هم توسط محیط الاستیک

در تـاریخ .... توســـط کمیتـه تخصـــصـــی زیر جهـت اخـذ مدرک کارشـــناســـی ارشـــد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
دکتر اردشیر کرمی محمدی			

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
دکتر حمیدرضا ایپک‌چی		دکتر محمدباقر نظری	
دکتر امیر جلالی			

تقدیم به

پدر و مادرم

تشکر و قدردانی:

ضمن سپاس فراوان از خانواده عزیزم لازم می‌دانم از تمامی اساتید به ویژه استاد گرانقدرم دکتر اردشیر کرمی محمدی که در تمام مراحل تحصیلی با راهنمایی‌های مدبّرانه خود مسیر تحصیلی مرا نظارت و مدیریت نموده‌اند نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

تعهد نامه

اینجانب رضا سلطانی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه ارتعاشات غیر خطی سیستم متشکل از دو نانو صفحه دایره ای متصل به هم توسط محیط الاستیک تحت راهنمائی دکتر کرمی محمدی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

.

تاریخ

امضای دانشجو   رضا سلطانی

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

ارتعاشات غیرخطّی و متقارن محوری سیستم تشکیل‌شده از دو نانوصفحه دایره‌ای شکل متصّل به‌هم توسّط محیط الاستیک غیرخطّی، مورد بررسی قرار گرفته است. پارامترهای ارتعاشی سیستم، با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی ارینگن، فرمول‌بندی شده است. با استفاده از یک روش، شکل‌مودهای غیرخطّی، فرکانس‌های طبیعی سیستم، برای شرایط مرزی گیردار، استخراج شده‌اند. ابتدا، با استفاده از روش مقیاس های چندگانه[1]، معادله‌های حرکت و شرایط مرزی حاکم بر مسئله، استخراج شده‌اند، سپس با استفاده از روش گلرکین[2]، به یافتن شکل‌مودهای نرمال غیرخطّی سیستم، پرداخته شده است. در این تحقیق، اثر مقیاس‌کوچک و غیرخطّی سیستم، بر پارامترهای ارتعاشی و شکل مود آن، بررسی شده است.

پس از بررسی مشاهده شد افزایش مقدار پارامتر غیرموضعی، مقدار فرکانس طبیعی را افزایش می‌دهد. این افزایش، با بیشترشدن مقدار این پارامتر، شدّت می‌گیرد. همچنین مشاهده شد، انحراف فرکانس طبیعی سیستم در حالت غیرخطّی، از فرکانس سیستم در حالت خطّی، رابطه‌ی مستقیمی با مقدار ضریب غیرخطّی محیط الاستیک دارد. نتایج بدست آمده برای تأثیر پارامترهای غیرخطّی و غیرمحلّی سیستم، بر روی شکل‌مود سیستم، حاکی از آن است که افزایش این پارامترها، می‌تواند شیب شکل‌مود در حوالی موقعیت ماکزیمم را، کمتر کند.

- **واژگان کلیدی:**

ارتعاشات غیرخطّی، سیستم نانومقیاس، محیط الاستیک غیرخطّی

[1] Multiple Scale

[2] Galerkin

فهرست علائم

مدول یانگ	E
دانسیته جرمی	ρ
جابجایی خمشی نانو صفحه	w
نسبت پواسن	ν
فاصله شعاعی از مرکز نانوصفحه	r
تانسور تنش غیر محلی	σ_{ij}
تانسور تنش کلاسیک	t_{ij}
ضریب ثابت کالیبراسیون ارینگن	e_0
ضریب طول داخلی ارینگن	a
ضخامت نانو صفحه	h
ضریب خطی محیط الاستیک بین نانو صفحات	k_1
ضریب غیرخطی محیط الاستیک بین نانو صفحات	k_2
شعاع نانو صفحه	R
مرتبه بی بعد و کوچک دامنه ارتعاش	ϵ

فهرست

فهرست تصاویر

عنوان **صفحه**

فصل اوّل :

مقدمه

۱-۱- مروری بر کارهای گذشته

برای انجام طرّاحی بهینه، وسیله‌ها و قطعه‌های کامپوزیت نانومقیاس[۱-۳]، باید اثرهای مقیاس‌کوچک و نیروهای بین‌اتمی، در تحلیل مؤلفه‌های نانومقیاس (نانو لوله‌های کربنی، گرافن) تاثیر داده شود تا نتایج تحلیل‌های مورد نظر، از دقّت قابل‌قبولی برخوردار شود. در مقیاس کوچک، تاثیر اندازه نانوسازه‌ها در تغییرات پارامترهای حرکت ارتعاشی آن‌ها، گاهاً برجسته است. نتایج شبیه‌سازی‌های اتمی و تجربی نشان داده است که در مقیاس کوچک، بین اثرهای اندازه سازه و خاصیت‌های مکانیکی آن، رابطه‌ای مفهومی برقرار است به‌گونه‌ای که چشم‌پوشی از این اثرها و نیروهای بین‌اتمی، باعث می‌شود نتایج حل‌ها ، و در نتیجه، طرّاحی‌های انجام گرفته، کاملا اشتباه باشد. اگرچه روش‌های اتمی مانند شبیه‌سازی مکانیک مولکولی [۴]، می‌توانند این اثرها و نیروهای بین اتمی را ثبت کنند، امّا استفاده از این روش‌ها، از نظر حجم محاسبات، به دلیل زیاد بودن تعداد اتم‌ها، مقرون‌به‌صرفه نمی‌باشد. بنابراین تحلیل‌های موردنظر، با استفاده از مکانیک کلاسیک[۵] انجام می‌گرفت. اگرچه روش مکانیک کلاسیک حل‌های منطقی ارائه می‌کند، اثرهای مقیاس‌کوچک و نیروهای بین‌اتمی را درنظر نمی‌گیرد. بنابراین، ممکن نیست که این روش، برای تحلیل سازه‌های نانومقیاس، قابل‌اطمینان باشد.

اخیراً، تئوری الاستیسیته غیرمحلی[۶]، که دربرگیرنده اثرهای مقیاس‌کوچک و نیروهای بین اتمی می‌باشد، مورداستفاده قرار می‌گیرد. این تئوری برای سازه‌های مختلفی در مقیاس نانو، به‌کار برده شده است[۷-۱۵]. در مقاله‌های ارائه شده نشان داده شده است که نتایج به‌دست آمده برای سازه‌های نانومقیاس، با استفاده از این تئوری، قابل‌اطمینان می‌باشند. با استفاده از این تئوری، تحقیق‌های بسیار زیادی پیرامون سازه‌های نانومقیاس یک‌بعدی صورت گرفته است. در مقایسه با سازه‌های نانومقیاس یک بعدی، مانند نانوتیرها و نانومیله ها، تحقیق‌های محدودی پیرامون نانوصفحه‌ها[۱۱-۱۵] ارائه شده است. این در حالی است که نانوصفحه‌ها، مانند صفحه گرافن، در مقایسه با سازه‌های غیرمحلّی نانومقیاس یک بعدی، دارای خاصیت‌های

ممتازی می‌باشند. نانوصفحه‌ها، مانند گرافن، ازجمله اجزای برجسته، در تولید وسیله‌های نانوالکترونیکی خواهند بود. گزارش‌های ارائه شده نشان می‌دهد که این اجزاء در حسگرهای کرنش، جرم، فشار، تشخیص-دهنده‌های غبارهای اتمی و غیره استفاده شده اند.[۹]

تحقیق‌های صورت‌گرفته در زمینه‌ی صفحه‌های گرافن، شامل بررسی‌رفتارهای ارتعاشی صفحه‌های گرافن یک‌لایه و چندلایه می‌باشند. سازه‌های بسیاری را می‌توان به‌صورت سازه‌های نانوکامپوزیت مدل‌سازی کرد. سیستم های پیچیده نانوصفحه، کاربرد بسیاری در سیستم‌های اوپتومکانیکی دارند[۱۰] . گزارش شده است[۱۱] که بررسی ارتعاش عرضی سیستم دونانوصفحه‌ای متّصل به‌هم توّسط محیط الاستیک غیرخطّی، به دلیل‌های تئوری و عملی بسیار مهم می‌باشد. به‌علاوه، سیستم پیچیده نانوصفحه، می‌تواند در نانوسنسورها و نانوکامپوزیت‌ها، کاربرد فراوانی داشته باشند. مشخّصه‌های ارتعاشی سیستم‌های نانومقیاس، می‌توانند بسیار مهم‌تر از عملکرد سازه‌ای آن‌ها، باشند[۱۲]. از این رو، بررسی ارتعاشی سیستم‌های ذکرشده، از اهمّیّت بالایی برخوردار است. رفتار ارتعاشی سیستم موردنظر، با تغییر فنریّت محیط الاستیک، تغییر می‌کند. در حال حاضر هیچ تحقیقی درباره‌ی رفتار ارتعاشی سیستم تشکیل‌شده از دو نانوصفحه دایره‌ای شکل متّصل به‌هم توسط محیط الاستیک غیرخطّی، انجام نشده است. بنابراین، براساس توضیح‌های بالا، بررسی این رفتارها و یافتن مدل ریاضی مناسب برای چنین پدیده هایی از اهمّیّت بالایی برخوردار است.

فصل دوم :

فرمول بندی مسأله

۲–۱– مروری بر تئوری الاستیسیته‌ی غیرمحلّی

در تئوری الاستیسیته غیرمحلی، با درنظرگرفتن تنش در یک نقطه، به‌عنوان تابعی از کرنش در تمامی نقطه محدوده موردنظر، اثرهای مقیاس‌کوچک در مدل‌سازی لحاظ می‌شوند. این تئوری، محدوده‌ی وسیعی از برهم‌کنش های بین‌اتمی را درنظر می‌گیرد و باتوجه به آن، نتیجه‌هایی وابسته به اندازه جسم، ارائه می‌کند. براساس این تئوری، معادله‌های اساسی برای یک جسم غیرمحلّی الاستیک همگن ایزوتروپیک خطّی را، با صرفنظر از نیروهای حجمی، می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد[۸]

$$\sigma_{ij,j} = 0 \qquad (۱ - ۲)$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = \int_v \phi(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|, \alpha) t_{ij} d\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}') \, , \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{V}$$

$$t_{ij} = H_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

که در این رابطه، عبارت‌های σ_{ij}، t_{ij}، ε_{ij} و H_{ijkl} به‌ترتیب، تنش غیرمحلّی، تنش کلاسیک، کرنش کلاسیک و تانسور مرتبه‌چهارم الاستیسیته می‌باشند. انتگرال موجود در رابطه‌ی(۲ – ۱)، در محدوده‌ی حجم $\boldsymbol{V}$، که توسّط جسم اشغال شده است، اعمال می‌شود. معادله‌ی (۲ – ۱) ، تنش غیرمحلّی و تنش کلاسیک را به‌هم مربوط می‌سازد. تابع کرنل $\phi(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|, \alpha)$، مدول غیرمحلّی است. مدول غیرمحلّی، به‌عنوان یک تابع انحطاط[۳] می‌باشد که اثر کرنش نقطه‌ی $\boldsymbol{x}'$، بر تنش در نقطه‌ی مرجع $\boldsymbol{x}$ را نمایش می‌دهد. عبارت $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$، فاصله‌ی اقلیدسی و α، یک ثابت مربوط به مادّه‌ی سازنده، که وابسته به ساختار داخلی مانند پارامتر شبکه‌بندی، اندازه دانه‌بندی، فاصله‌ی بین نوارهای کربن و پارامترهای خارجی مانند طول ترک و طول‌موج می‌باشد. ثابت مادّه یادشده را می‌توان به‌صورت $\alpha = \frac{e_0 a}{l}$ تعریف کرد. در این رابطه، e_0، ثابت

[3] attenuation function

کالیبراسیون نتایج بدست‌آمده با آزمایش‌ها و سایر مدل‌های معتبر می‌باشد. پارامتر کالیبراسیون یادشده، به‌صورتی تخمین زده می‌شود که رابطه‌های حاکم بر مدل الاستیسیته غیرمحلّی، تقریب خوبی از منحنی پخش[4] موج‌های صفحه‌ای که به‌وسیله‌ی دینامیک شبکه‌بندی اتمی[5] [۴] به‌دست آمده است، باشد. عبارت های a و l، پارامترهای داخلی و خارجی سازه‌ی نانومقیاس می‌باشند.

رابطه‌ی(۲ − ۱)، یک فرم انتگرالی است و حلّ تحلیلی آن بسیار دشوار است. بنابراین، معمولاً از فرم دیفرانسیلی معادله‌های الاستیسیته غیرمحلّی، استفاده می‌شود. بر اساس رابطه‌های ارینگن، عبارت مدول غیرمحلّی را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود[۸]:

$$\phi(|\boldsymbol{x}|,\alpha)=(2\pi l^2\alpha^2)^{-1}K_0\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{x}}}{l\alpha}\right) \qquad (۲-۲)$$

که در این رابطه،K_0،تابع بسل تعمیم‌یافته است.

معادله‌ی حرکت را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی بالا، به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sigma_{ij,j}=\rho\ddot{u} \qquad (۳-۲)$$

که در این رابطه، ρ و $\ddot{u}$، به‌ترتیب، مؤلفه‌های چگالی جرمی و بردار شتاب می‌باشند. زیرنویس‌های i و j، به نماد های r ،θ و z اشاره دارند.

با درنظرگرفتن تابع کرنل، به‌عنوان تابع گرین، ارینگن رابطه‌ی دیفرانسیلی زیر را پیشنهاد کرد[۸]:

$$\sigma_{ij,j}-\mathcal{L}(\rho\ddot{u}_i)=0 \qquad (۴-۲)$$

که در این رابطه:

$$\mathcal{L}=[1-(e_0a)^2\nabla^2] \qquad (۵-۲)$$

و هم‌چنین بیان‌گر عملگر لاپلاس برای مسأله‌ی متقارن‌محوری و به‌صورت زیر می‌باشد:

---

[4] Dispersion curves

[5] Atomistic lattice dynamics

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \qquad (۶-۲)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲ − ۴)، رابطه‌ی تنش-کرنش غیرمحلّی به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$[1-\alpha^2 l^2 \nabla^2]\sigma_{ij} = t_{ij} \qquad (۷-۲)$$

با به‌کاربردن رابطه‌ی تنش-کرنش غیرمحلّی، معادله‌ی حرکت آزاد متقارن‌محوری یک نانوصفحه‌ی دایره‌ای می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود[۱۵]:

$$\frac{D}{(1-(e_0 a)^2 \nabla^2)}\nabla^4 w(r,t) + \rho h \ddot{w}(r,t) = 0 \qquad (۸-۲)$$

که در این رابطه داریم:

$$\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2) = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} \qquad (۹-۲)$$

و w به تغییرشکل صفحه‌ی غیرمحلّی اشاره دارد. عبارت‌های D و ρ به‌ترتیب، سختی خمشی و چگالی صفحه‌ی غیرمحلّی می‌باشند.

فصل سوم :

فرمول بندی نهایی

۳-۱- معادله‌های حرکت آزاد سیستم تشکیل‌شده از دو نانوصفحه دایره‌ای متّصل به‌هم توسّط محیط الاستیک غیرخطّی

سیستم دونانوصفحه‌ای دایره‌ای، در شکل ۱-۱ نشان داده شده است. دو نانوصفحه‌ی این سیستم، به نام‌های نانوصفحه‌ی ۱ و نانوصفحه‌ی ۲ نامگذاری شده‌اند. این دو نانوصفحه توسّط یک محیط الاستیک غیرخطّی مرتبه‌ی سوم، به هم متّصل شده‌اند. با استفاده از تغییر متغیّر، معادله‌های حاکم بر این سیستم بدست می‌آید. برای مدل‌کردن ریاضی مسأله، می‌توان فرض کرد که دو نانوصفحه، توسّط فنرهای عمودی پیوسته‌ی غیرخطّی وینکلر-پسترناک به هم مرتبط شده‌اند. در حقیقت، این فنرها می‌توانند جایگزین محیط الاستیک غیرخطّی شوند. نیروهای بین دو نانوصفحه ناشی از اثرهای نانواوپتومکانیکی [۱۰] و یا نیروهای ون‌دروالس می‌باشند. ضریب سختی خطّی این فنرها، k_1 و ضریب غیرخطّی سختی آن‌ها، k_2 درنظر گرفته شده است. در این تحقیق، از مقادیر مختلفی برای این ضریب های سختی استفاده شده است. به‌صورت کلّی، دو نانوصفحه، شعاع، جرم و صلبیّت خمشی متفاوتی دارند. این ضریب‌ها را می‌توان به ترتیب با عبارت‌های R_i، m_i و D_i مشخص کرد به گونه‌ای که $i = 1, 2$. این پارامترها برای هر یک از نانوصفحه‌ها بصورت ثابت درنظر گرفته شده است. جابجایی خمشی متقارن محوری برای هر یک از نانوصفحه‌ها، به ترتیب با عبارت‌های $w_1(\mathrm{r,t})$ و $w_2(\mathrm{r,t})$ نمایش داده شده است.

با توجه به شکل ۱-۱ و با استفاده از معادله‌ی غیرمحلّی برای نانوصفحه، یعنی معادله‌ی (۲ − ۸)، معادله‌های حاکم بر هر یک از نانوصفحه‌ها را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

نانوصفحه‌ی ۱:

$$\frac{D_1}{(1-(e_0a)^2\nabla^2)}\nabla^4 w_1 + \rho_1 h_1 \ddot{w}_1 + (w_1 - w_2)k_1 + (w_1 - w_2)^3 k_2 = 0 \quad (۱ - ۳)$$

نانوصفحه‌ی ۲:

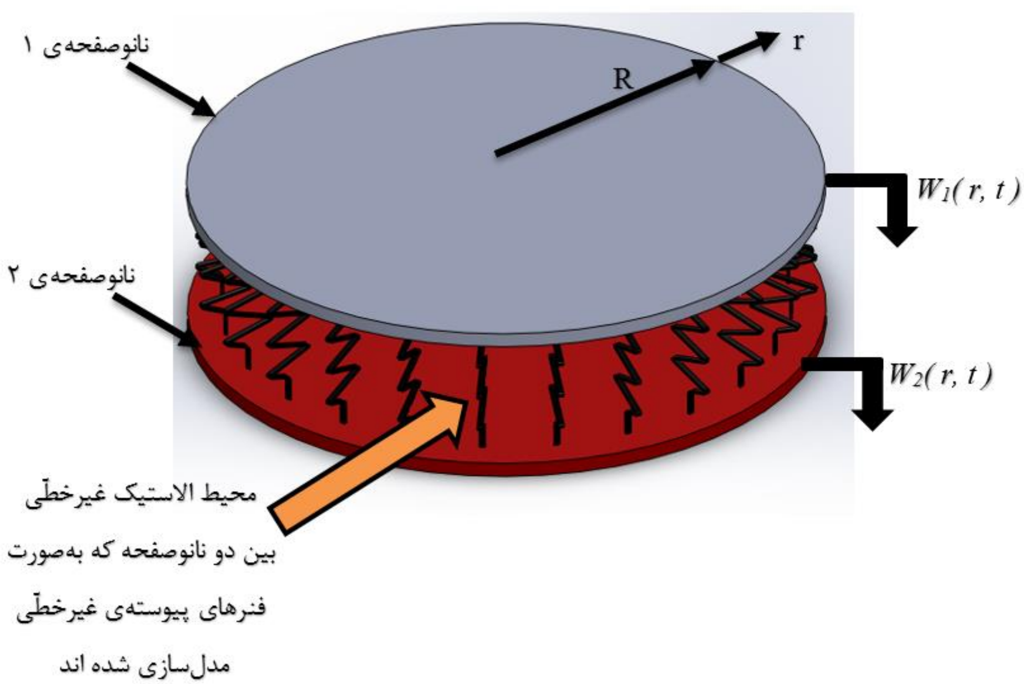
$$\frac{D_2}{(1-(e_0a)^2\nabla^2)}\nabla^4 w_2 + \rho_2 h_2 \ddot{w}_2 + (w_2 - w_1)k_1 + (w_2-w_1)^3 k_2 = 0 \qquad (۲-۳)$$

در معادله‌های بالا:

$$\ddot{w}_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \qquad (۳-۳)$$

$$D_i = \frac{E_i {h_i}^3}{12(1-{\nu_i}^2)} \qquad (۴-۳)$$

هم‌چنین عبارت‌های E_i، h_i و ν_i به‌ترتیب بیان‌گر مدول یانگ، ضخامت نانوصفحه و ضریب پواسن نانوصفحه می‌باشند.



شکل ۱-۱ مدل سیستم دو نانوصفحه‌ای دایره‌ای شکل متصّل به‌هم توسّط محیط الاستیک غیرخطّی

برای تحلیل موردنظر، فرض شده است که:

$$D_1 = D_2 = D \equiv \text{ثابت} \qquad (۵-۳)$$

$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 = \rho h \equiv$ ثابت

پس از استفاده از رابطه بالا، می‌توان معادله‌های حاکم بر نانوصفحه‌ها را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{D}{(1-(e_0 a)^2 \nabla^2)} \nabla^4 w_1 + \rho h \ddot{w}_1 + (w_1 - w_2) k_1 + (w_1 - w_2)^3 k_2 = 0 \qquad (۳-۶)$$

$$\frac{D}{(1-(e_0 a)^2 \nabla^2)} \nabla^4 w_2 + \rho h \ddot{w}_2 + (w_2 - w_1) k_1 + (w_2 - w_1)^3 k_2 = 0 \qquad (۳-۷)$$

در ادامه با معرفی پارامتر $w(r,t)$ با عنوان جابجایی نسبی نانوصفحه‌ی ۱ نسبت به نانوصفحه‌ی ۲ خواهیم داشت:

$$w(r,t) = w_1(r,t) - w_2(r,t) \qquad (۳-۸)$$

پس از کسر کردن رابطه‌ی $(۳-۶)$ از رابطه‌ی $(۳-۷)$ و استفاده از رابطه‌ی $(۳-۸)$، معادله‌های حاکم بر مسأله را به‌صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد:

$$\frac{D}{(1-(e_0 a)^2 \nabla^2)} \nabla^4 w(r,t) + \rho h \ddot{w}(r,t) + 2k_1 w(r,t) + 2k_2 w^3(r,t) = 0 \qquad (۳-۹)$$

$$\frac{D}{(1-(e_0 a)^2 \nabla^2)} \nabla^4 w_1(r,t) + \rho h \ddot{w}_1(r,t) = -k_1 w(r,t) - k_2 w^3(r,t) \qquad (۳-۱۰)$$

مشاهده می‌شود که با چشم‌پوشی از عبارت غیرمحلی، یعنی $e_0 a$، معادله‌های فوق به معادله‌های کلاسیک آزاد از مقیاس تئوری صفحه‌ی کیرشهف تبدیل می‌شوند.

در ادامه کمیت‌های بی‌بعد، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w^* = \frac{w}{R} \ , w_1{}^* = \frac{w_1}{R} \quad , \quad r^* = \frac{r}{R} \ , \quad t^* = \frac{th}{R^2}\sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad , \qquad (۱۱-۳)$$

$$\gamma = \frac{e_0 a}{R}$$

با استفاده از کمیت‌های یادشده، معادله‌های حاکم را، پس از حذف علامت ستاره، می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\nabla^4 w(r,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}[w(r,t) - \gamma^2\nabla^2 w(r,t)] + \alpha_1[w(r,t) - \gamma^2\nabla^2 w(r,t)] + \alpha_2[w^3(r,t) - \gamma^2\nabla^2 w^3(r,t)] = 0 \qquad (۱۲-۳)$$

$$\nabla^4 w_1(r,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}[w_1(r,t) - \gamma^2\nabla^2 w_1(r,t)] = -\alpha_1[w(r,t) - \gamma^2\nabla^2 w(r,t)] - \alpha_2[w^3(r,t) - \gamma^2\nabla^2 w^3(r,t)] \qquad (۱۳-۳)$$

که در رابطه‌ی بالا:

$$\alpha_1 = \frac{24R^4 k_1(1-\nu^2)}{Eh^3} \qquad (۱۴-۳)$$

$$\alpha_2 = \frac{24R^6 k_2(1-\nu^2)}{Eh^3} \qquad (۱۵-۳)$$

فصل چهارم :

حل معادله‌های حاکم بر مسأله

۴– ۱– حل دستگاه معادله‌های حاکم بر مسأله

برای حل دستگاه معادله‌های حاکم بر مسأله، از روش مقیاس‌های چندگانه [۱۶]، استفاده می‌شود. پاسخ معادله‌های(۳ – ۱۲) و (۳ – ۱۳)، به‌صورت زیر فرض می‌شود[۱۶-۱۷]:

$$w(r,T_0,T_1,T_2) = X(r,T_0,T_1,T_2)\epsilon + Y(r,T_0,T_1,T_2)\epsilon^2 + Z(r,T_0,T_1,T_2)\epsilon^3 \quad (۱-۴)$$

$$w_1(r,T_0,T_1,T_2) = G(r,T_0,T_1,T_2)\epsilon + H(r,T_0,T_1,T_2)\epsilon^2 + I(r,T_0,T_1,T_2)\epsilon^3 \quad (۲-۴)$$

در این رابطه‌ها، ϵ، یک کمیّت کوچک بی‌بعد می‌باشد. این کمیّت، همچنین، به‌عنوان ابزار ساماندهی معرفی شده است، به طوری که $T_0 = t$ ، مقیاس سریع زمانی بوده و حرکت‌های رخ‌داده در اثر فرکانس‌های طبیعی نانوصفحه را مشخّص می‌کند. همچنین، $T_1 = \epsilon t$ و $T_2 = \epsilon^2 t$، مقیاس‌های کند زمانی هستند که انتقال فرکانس‌های نانوصفحه را، که ناشی از پارامترهای غیرخطّی می‌باشد، بیان می‌کنند. مشتق‌های زمانی را می‌توان برحسب این مقیاس‌های زمانی به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \cdots \quad (۳-۴)$$

که در رابطه‌ی بالا:

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (۴-۴)$$

پس از جایگذاری رابطه‌های (۴ – ۱)، (۴ – ۲) و(۴ – ۳) در معادله‌های (۳ – ۱۲) و(۳ – ۱۳) و مساوی قرار دادن ضریب‌های هم‌توان از کمیّتϵ در دو طرف این معادله‌ها، دو دسته معادله بدست می‌آید. هریک از این دسته‌ها، دارای سه معادله می‌باشند. برای حل این معادله‌ها، ابتدا باید دسته‌ی اول معادله‌ها

حل شود و در ادامه، پس از جایگذاری پاسخ به‌دست آمده در دسته‌ی دوم، به حل آن پرداخته شود. روش به‌کار برده شده در این‌جا، به این صورت است که تنها، شکل‌مودهای غیرخطّی عمود برهم سیستم، درنظر گرفته شده است. دسته‌های معادله‌های حاکم به‌دست آمده را می‌توان به‌صورت زیر مرتّب کرد:

(دسته‌ی اول معادله‌ها)

معادله‌ی مرتبه‌ی ϵ:

$$\nabla^4 X + {D_0}^2[X - \gamma^2\nabla^2 X] + \alpha_1[X - \gamma^2\nabla^2 X] = 0 \tag{۵ − ۴}$$

معادله‌ی مرتبه‌ی ϵ^2:

$$\begin{aligned}\nabla^4 Y + {D_0}^2[Y - \gamma^2\nabla^2 Y] + \alpha_1[Y - \gamma^2\nabla^2 Y] \\ = -2D_0D_1[X - \gamma^2\nabla^2 X]\end{aligned} \tag{۶ − ۴}$$

معادله‌ی مرتبه‌ی ϵ^3:

$$\begin{aligned}\nabla^4 Z + {D_0}^2[Z - \gamma^2\nabla^2 Z] + \alpha_1[Z - \gamma^2\nabla^2 Z] \\ = -2D_0D_1[Y - \gamma^2\nabla^2 Y] \\ - \left(2D_0D_2 + {D_1}^2\right)[X - \gamma^2\nabla^2 X] \\ - \alpha_2\left[X^3 - \gamma^2\left[3X^2\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + 6X\left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)^2\right]\right. \\ \left. - \frac{3\,\gamma^2 X^2\left[\frac{\partial X}{\partial r}\right]}{r}\right]\end{aligned} \tag{۷ − ۴}$$

(دسته‌ی دوم معادله‌ها)

معادله‌ی مرتبه‌ی ϵ:

$$\nabla^4 G + D_0{}^2[G - \gamma^2 \nabla^2 G] = -\alpha_1[X - \gamma^2 \nabla^2 X] \qquad (۴-۸)$$

معادله‌ی مرتبه‌ی ϵ^2:

$$\begin{aligned}\nabla^4 H + D_0{}^2[H - \gamma^2 \nabla^2 H] \\ = -\alpha_1[Y - \gamma^2 \nabla^2 Y] - 2D_0 D_1[G - \gamma^2 \nabla^2 G]\end{aligned} \qquad (۴-۹)$$

معادله‌ی مرتبه‌ی ϵ^3:

$$\begin{aligned}\nabla^4 I + D_0{}^2[I - \gamma^2 \nabla^2 I] \\ = -\alpha_1[Z - \gamma^2 \nabla^2 Z] - 2D_0 D_1[H - \gamma^2 \nabla^2 H] \\ - \left(2D_0 D_2 + D_1{}^2\right)[G - \gamma^2 \nabla^2 G] \\ - \alpha_2 \left[X^3 - \gamma^2 \left[3X^2 \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + 6X \left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)^2\right] \right. \\ \left. - \frac{3\gamma^2 X^2 \left[\frac{\partial X}{\partial r}\right]}{r} \right]\end{aligned} \qquad (۴-۱۰)$$

۴–۲– روند حلّ دسته‌ی معادله‌های اوّل

برای استخراج nامین شکل‌مود غیرخطّی، پاسخ مسأله‌ی مرتبه اوّل ،یعنی معادله‌ی (۴ – ۵)، به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود[۱۷]:

$$X = \xi(r) A_n(T_1, T_2) e^{i\omega_n T_0} + cc \qquad (۴-۱۱)$$

در این رابطه، عبارت cc به مؤلفه‌های مختلط مزدوج عبارت‌های نوشته شده، اشاره دارد. همچنین، A_n، تابع مقیاس‌های زمانی T_1 و T_2 می‌باشد که با اعمال شرایط حل‌پذیری در مرحله‌های بعدی فرآیند حل، تعیین

می‌شود. تابع ξ تابعی از r می‌باشد. پس از جایگذاری رابطه‌ی پاسخ مرتبه‌ی اوّل ارائه شده در معادله‌ی (۴ – ۵)، نتیجه می‌شود:

$$\nabla^2(\nabla^2\xi) + \Gamma^2\nabla^2\xi - \Sigma^4\xi = 0 \qquad (۴ - ۱۲)$$

به‌گونه‌ای که:

$$\Gamma^2 = \gamma^2({\omega_n}^2 - \alpha_1) \qquad (۴ - ۱۳)$$

و

$$\Sigma^4 = ({\omega_n}^2 - \alpha_1) \qquad (۴ - ۱۴)$$

معادله‌ی (۴ – ۱۲)، معادله‌ی مشخصّه‌ی اوّل سیستم دو نانوصفحه‌ای موردنظر می‌باشد. با استفاده از این معادله، می‌توان برخی از فرکانس‌های طبیعی خطّی سیستم یادشده را محاسبه کرد.

پاسخ معادله‌ی (۴ – ۱۲)، را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\xi(r) = C_1 J_0(\Psi r) + C_2 J_0(\Phi r) + C_3 Y_0(\Psi r) + C_4 Y_0(\Phi r) \qquad (۴ - ۱۵)$$

که در این ضریب‌های C_i، عددهای ثابتی هستند و همچنین:

$$\Psi = \frac{1}{2}\sqrt{2\Gamma^2 + 2\sqrt{(\Gamma^2 - 2\Gamma\Sigma + 2\Sigma^2)(\Gamma^2 + 2\Gamma\Sigma + 2\Sigma^2)}} \qquad (۴ - ۱۶)$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\sqrt{2\Gamma^2 - 2\sqrt{(\Gamma^2 - 2\Gamma\Sigma + 2\Sigma^2)(\Gamma^2 + 2\Gamma\Sigma + 2\Sigma^2)}} \qquad (۴ - ۱۷)$$

در رابطه‌ی (۴ – ۱۵)، توابع J_0 و Y_0، تابع‌های تعمیم یافته بسل نوع اوّل و دوّم می‌باشند. با داشتن معادله‌ی (۴ – ۱۵)، می‌توان پاسخ کلّی معادله‌ی (۴ – ۵)، را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$X = [C_1 J_0(\Psi r) + C_2 J_0(\Phi r) + C_3 Y_0(\Psi r) + C_4 Y_0(\Phi r)] A_n(T_1, T_2)\, e^{i\omega_n T_0} + cc \qquad (۴ - ۱۸)$$

۴-۲-۱- اعمال شرایط مرزی گیردار برای نانوصفحه‌های دایره‌ای

سیستم تشکیل‌شده از دو نانوصفحه‌ی دایره‌ای مانند شکل ۱-۱ در نظر گرفته می‌شود. همان‌گونه که در این شکل مشاهده می‌شود، شعاع هر یک از نانوصفحه‌ها با R، نمایش داده شده است. مرکز سیستم مختصات قطبی مورد استفاده، در مرکز نانوصفحه‌ی دایره‌ای قرار داده شده است. شرایط مرزی سیستم موردنظر به‌صورتی است که محیط بیرونی هر یک از نانوصفحه‌ها، مقیّد به قید گیردار می‌باشد. در این صورت، هر دو تابع بسل $Y_0(\Psi r)$ و $Y_0(\Phi r)$، در موقعیت مرکز نانوصفحه، مقداری نامشخص دارند. بنابراین ضریب های C_3 و C_4 برابر با صفر می‌باشند.

با توجه به توضیح‌های بالا، شرایط مرزی گیردار را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\xi(r)_{r=1} = 0 \qquad (۴-۱۹)$$

$$\frac{\partial \xi(r)}{\partial r}_{r=1} = 0 \qquad (۴-۲۰)$$

پس از قرار دادن رابطه‌ی (۴ − ۱۸)، در رابطه‌های (۴ − ۱۹) و (۴ − ۲۰) خواهیم داشت:

$$C_1 J_0(\Psi) + C_2 J_0(\Phi) = 0 \qquad (۴-۲۱)$$

$$C_1 \Psi J_1(\Psi) + C_2 \Phi J_1(\Phi) = 0 \qquad (۴-۲۲)$$

معادله‌های بالا را می‌توان به‌صورت زیر به فرم ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} J_0(\Psi) & J_0(\Phi) \\ \Psi J_1(\Psi) & \Phi J_1(\Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۴-۲۳)$$

برای داشتن جواب غیربدیهی، باید دترمینان ماتریس ضریب‌های معادله‌ی بالا صفر باشد. بنابراین:

$$\begin{vmatrix} J_0(\Psi) & J_0(\Phi) \\ \Psi J_1(\Psi) & \Phi J_1(\Phi) \end{vmatrix} = 0 \qquad (۴-۲۴)$$

رابطه‌ی (۴۸)، معادله‌ی فرکانسی اوّل سیستم یادشده را، به‌صورت زیر، فراهم میکند:

$$\Phi\, J_0(\Psi)\, J_1(\Phi) - \Psi\, J_1(\Psi) J_0(\Phi) = 0 \tag{۲۵ − ۴}$$

برخی از فرکانس‌های خطّی سیستم از معادله‌ی بالا بدست می‌آید.

برای به‌دست آوردن شکل‌مودها، با استفاده از رابطه‌ی ماتریسی (۴ − ۲۳)، می‌توان نوشت:

$$\frac{C_2}{C_1} = -\frac{J_0(\Psi)}{J_0(\Phi)} \tag{۲۶ − ۴}$$

بنابراین:

$$X = \left[J_0(\Psi r) - \frac{J_0(\Psi)}{J_0(\Phi)}\, J_0(\Phi r) \right] A_n(T_1, T_2) e^{i\omega_n T_0} + cc \tag{۲۷ − ۴}$$

۴–۲–۲– اعمال شرایط مرزی گیردار برای نانوصفحه‌های حلقه‌ای

در این حالت، دو المان تشکیل‌دهنده‌ی سیستم نانومقیاس موردنظر ، به‌صورت حلقه‌ای در نظر گرفته می‌شود.

شعاع داخلی هر یک از نانوصفحه‌ها را R' و شعاع خارجی آن‌ها را R در نظر می‌گیریم. مرکز سیستم مختصات قطبی مورد استفاده، در مرکز نانوصفحه‌ی حلقه‌ای، قرار داده شده است. شرایط مرزی سیستم موردنظر به‌صورتی است که محیط داخلی و بیرونی هر یک از نانوصفحه‌ها، مقیّد به قید گیردار می‌باشد. در این صورت با توجه به توضیح‌های بالا، شرایط مرزی گیردار را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\xi(r)_{r=1} = \xi(r)_{r=\frac{R'}{R}} = 0 \tag{۲۸ − ۴}$$

$$\frac{\partial \xi(r)}{\partial r}_{r=1} = \frac{\partial \xi(r)}{\partial r}_{r=\frac{R'}{R}} = 0 \tag{۲۹ − ۴}$$

پس از قرار دادن رابطه‌ی (۴ − ۱۸)، در رابطه‌های (۴ − ۲۸) و (۴ − ۲۹) خواهیم داشت:

$$C_1\,J_0(\Psi)+C_2\,J_0(\Phi)+C_3\,Y_0(\Psi)+C_4\,Y_0(\Phi)=0 \qquad (۳۰-۴)$$

$$C_1\,J_0\left(\frac{R'}{R}\Psi\right)+C_2\,J_0\left(\frac{R'}{R}\Phi\right)+C_3\,Y_0\left(\frac{R'}{R}\Psi\right)+C_4\,Y_0\left(\frac{R'}{R}\Phi\right)=0 \qquad (۳۱-۴)$$

$$C_1\,\Psi J_1(\Psi)+C_2\,\Phi J_1(\Phi)+C_3\,\Psi Y_1(\Psi)+C_4\,\Phi Y_1(\Phi)=0 \qquad (۳۲-۴)$$

$$C_1\,\Psi J_1\left(\frac{R'}{R}\Psi\right)+C_2\,\Phi J_1\left(\frac{R'}{R}\Phi\right)+C_3\,\Psi Y_1\left(\frac{R'}{R}\Psi\right)+C_4\,\Phi Y_1\left(\frac{R'}{R}\Phi\right)=0 \qquad (۳۳-۴)$$

معادله‌های بالا را می‌توان به‌صورت زیر به فرم ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} J_0(\Psi) & J_0(\Phi) & Y_0(\Psi) & Y_0(\Phi) \\ J_0\left(\frac{R'}{R}\Psi\right) & J_0\left(\frac{R'}{R}\Phi\right) & Y_0\left(\frac{R'}{R}\Psi\right) & Y_0\left(\frac{R'}{R}\Phi\right) \\ \Psi J_1(\Psi) & \Phi J_1(\Phi) & \Psi Y_1(\Psi) & \Phi Y_1(\Phi) \\ \Psi J_1\left(\frac{R'}{R}\Psi\right) & \Phi J_1\left(\frac{R'}{R}\Phi\right) & \Psi Y_1\left(\frac{R'}{R}\Psi\right) & \Phi Y_1\left(\frac{R'}{R}\Phi\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۳۴-۴)$$

برای داشتن جواب غیربدیهی، باید دترمینان ماتریس ضریب‌های معادله‌ی بالا صفر باشد. بنابراین دترمینان فرکانسی را به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{vmatrix} J_0(\Psi) & J_0(\Phi) & Y_0(\Psi) & Y_0(\Phi) \\ J_0\left(\frac{R'}{R}\Psi\right) & J_0\left(\frac{R'}{R}\Phi\right) & Y_0\left(\frac{R'}{R}\Psi\right) & Y_0\left(\frac{R'}{R}\Phi\right) \\ \Psi J_1(\Psi) & \Phi J_1(\Phi) & \Psi Y_1(\Psi) & \Phi Y_1(\Phi) \\ \Psi J_1\left(\frac{R'}{R}\Psi\right) & \Phi J_1\left(\frac{R'}{R}\Phi\right) & \Psi Y_1\left(\frac{R'}{R}\Psi\right) & \Phi Y_1\left(\frac{R'}{R}\Phi\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (۳۵-۴)$$

برخی از فرکانس‌های خطّی سیستم تشکیل شده از دو نانوصفحه‌ی حلقه‌ای متّصل به‌هم توسّط محیط الاستیک غیرخطّی، از رابطه‌ی بالا بدست می‌آید.

برای به‌دست آوردن شکل‌مودهای این سیستم، با استفاده از رابطه‌ی ماتریسی (۴ − ۳۴)، می‌توان نوشت:

$$\frac{C_2}{C_1} = -\frac{J_0(\Psi)}{J_0(\Phi)} - \frac{Y_0(\Psi)}{J_0(\Phi)}\frac{\varpi_3}{\varpi_1} + \left[\frac{\varpi_6 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_3}{\varpi_5 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_2}\right]\left(\frac{Y_0(\Psi)}{J_0(\Phi)}\frac{\varpi_2}{\varpi_1} - \frac{Y_0(\Phi)}{J_0(\Phi)}\right) \tag{۴ − ۳۶}$$

$$\frac{C_3}{C_1} = \frac{\varpi_3}{\varpi_1} - \frac{\varpi_2}{\varpi_1}\frac{\left(\varpi_6 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_3\right)}{\left(\varpi_5 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_2\right)} \tag{۴ − ۳۷}$$

$$\frac{C_4}{C_1} = \frac{\varpi_6 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_3}{\varpi_5 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_2} \tag{۴ − ۳۸}$$

که در رابطه‌های بالا:

$$\varpi_1 = Y_0\left(\frac{R'}{R}\Psi\right) - \frac{J_0\left(\frac{R'}{R}\Phi\right)}{J_0(\Phi)}Y_0(\Psi) \tag{۴ − ۳۹}$$

$$\varpi_2 = Y_0\left(\frac{R'}{R}\Phi\right) - \frac{J_0\left(\frac{R'}{R}\Phi\right)}{J_0(\Phi)}Y_0(\Phi) \tag{۴ − ۴۰}$$

$$\varpi_3 = \frac{J_0\left(\frac{R'}{R}\Phi\right)}{J_0(\Phi)}J_0(\Psi) - J_0\left(\frac{R'}{R}\Psi\right) \tag{۴ − ۴۱}$$

$$\varpi_4 = \Psi Y_1(\Psi) - \frac{\Phi J_1(\Phi)}{J_0(\Phi)}Y_0(\Psi) \tag{۴ − ۴۲}$$

$$\varpi_5 = \Phi Y_1(\Phi) - \frac{\Phi J_1(\Phi)}{J_0(\Phi)}Y_0(\Phi) \tag{۴ − ۴۳}$$

$$\varpi_6 = \frac{\Phi J_1(\Phi)}{J_0(\Phi)} J_0(\Psi) - \Psi J_1(\Psi) \qquad (۴۴-۴)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$X = \left[J_0(\Psi r) + \frac{C_2}{C_1} J_0(\Phi r) + \frac{C_3}{C_1} Y_0(\Psi r) + \frac{C_4}{C_1} Y_0(\Phi r)\right] A_n(T_1, T_2) e^{i\omega_n T_0} + cc \qquad (۴۵-۴)$$

پس از جایگذاری رابطه‌ی(۴ − ۱۱) در معادله‌ی(۴ − ۶) خواهیم داشت:

$$\nabla^4 Y + {D_0}^2[Y - \gamma^2 \nabla^2 Y] + \alpha_1[Y - \gamma^2 \nabla^2 Y] = -2i\omega_n e^{i\omega_n T_0} D_1 A_n [1 - \gamma^2 \nabla^2]\xi(r) + cc \qquad (۴۶-۴)$$

پس از حذف عبارت‌های سکولار[6] می‌توان نوشت:

$$D_1 A_n = 0 \qquad (۴۷-۴)$$

معادله‌ی بالا بیان می‌کند که تابع A_n، مستقل از مقیاس زمانی T_1 است.

پاسخ خصوصی معادله‌ی(۴ − ۴۶) را به‌صورت زیر خواهیم داشت[۱۶]:

$$Y = 0 \qquad (۴۸-۴)$$

پس از جایگذاری رابطه‌های(۴ − ۱۱) و(۴ − ۴۸) در معادله‌ی(۴ − ۷) خواهیم داشت:

[6] Secular terms

$$\nabla^4 Z + {D_0}^2[Z - \gamma^2\nabla^2 Z] + \alpha_1[Z - \gamma^2\nabla^2 Z] \tag{۴۹ – ۴}$$

$$= \Bigg\{ -2i\omega_n \acute{A}_n[\xi(r) - \gamma^2\nabla^2\xi(r)]$$

$$+ 3\alpha_2 {A_n}^2\,\overline{A_n}\left(-\xi(r)^3 + \gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}\right)\right.$$

$$+ 6\,\gamma^2\xi(r)\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)^2$$

$$\left. + \frac{3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)}{r}\right)\Bigg\} e^{i\omega_n T_0}$$

$$+ \alpha_2 {A_n}^3\Bigg\{ -\xi(r)^3 + 3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}\right)$$

$$+ 6\,\gamma^2\xi(r)\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)^2$$

$$+ \frac{3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)}{r}\Bigg\} e^{3i\omega_n T_0} + cc$$

در رابطه‌ی بالا، تابع $\overline{A_n}$، مختلط مزدوج A_n می‌باشد و همچنین:

$$\acute{A}_n = \frac{dA_n}{dT_2} \tag{۵۰ – ۴}$$

بخش غیرهمگن معادله‌ی (۴ − ۴۹) درصورتی دارای پاسخ است که شرایط حل‌پذیری صادق باشد. این شرایط بیان می‌کند که عبارت سمت راست معادله‌ی (۴ − ۴۹) باید عمود بر پاسخ معادله‌ی اوّل، یعنی X، باشد. پس از اعمال این شرایط برای معادله‌ی(۴ − ۴۹)، می‌توان نوشت:

$$-2i\omega_n \acute{A}_n \chi_2 + 3\alpha_2 {A_n}^2\, \overline{A_n}\, \chi_1 = 0 \qquad (۵۱ - ۴)$$

که در رابطه‌ی بالا:

$$\chi_1 = \int_0^1 \left(-\xi(r)^4 + 3\,\gamma^2 \xi(r)^3 \left(\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}\right) + 6\,\gamma^2 \xi(r)^2 \left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)^2 + \frac{3\,\gamma^2 \xi(r)^3 \left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)}{r} \right) dr \qquad (۵۲ - ۴)$$

$$\chi_2 = \int_0^1 \xi(r)^2\, dr \qquad (۵۳ - ۴)$$

پاسخ انتگرال‌های(۴ − ۵۲) و(۴ − ۵۳) به‌صورت عددی و در بخش پیوست آ.جدول ۶-۱ تعیین شده‌اند.

برای حل کردن معادله‌ی(۴ − ۵۱)، عبارت A_n را می‌توان به‌صورت زیر فرض کرد[۱۷]:

$$A_n = a exp(ib) \qquad (۵۴ - ۴)$$

دررابطه‌ی (۴ − ۵۴)، عبارت‌های a و b تابع‌هایی از مقیاس زمانی T_2 می‌باشند. پس از جایگذاری رابطه-ی(۴ − ۵۴) در معادله‌ی(۴ − ۵۱) و جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی این معادله، می‌توان نوشت:

$$\acute{a} = 0 \qquad (۵۵ - ۴)$$

$$2\omega_n \chi_2 \acute{b} + 3\alpha_2 \chi_1 a^2 = 0 \qquad (۵۶ - ۴)$$

که در این رابطه‌ها:

$$\acute{a} = \frac{da}{dT_2} \qquad (۵۷-۴)$$

$$\acute{b} = \frac{db}{dT_2} \qquad (۵۸-۴)$$

رابطه‌ی(۴ − ۵۷) بیان می‌دارد که a، عددی ثابت است. از رابطه‌ی(۴ − ۵۸) می‌توان نتیجه گرفت:

$$b = -\frac{3\alpha_2\chi_1 a^2}{2\omega_n\chi_2}T_2 + b_0 \qquad (۵۹-۴)$$

در رابطه‌ی(۴ − ۵۵)، عبارت b_0 یک عدد ثابت است. با استفاده از رابطه‌ی (۴ − ۵۹)، می‌توان رابطه-ی(۴ − ۵۶) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$A_n = a\,exp\left(-i\left[\frac{3\alpha_2\chi_1 a^2}{2\omega_n\chi_2}\right]T_2 + ib_0\right) \qquad (۶۰-۴)$$

در نتیجه:

$$X = 2a\xi(r)\cos(\Omega_n t + b_0) \qquad (۶۱-۴)$$

که در رابطه بالا:

$$\Omega_n = -\left[\frac{3\alpha_2\chi_1 a^2}{2\omega_n\chi_2}\right]\epsilon^2 + \omega_n \qquad (۶۲-۴)$$

پس از جایگذاری رابطه‌های(۴ − ۵۶) و(۴ − ۶۲) در رابطه‌ی(۴ − ۷) می‌توان نوشت:

$$\nabla^4 Z + D_0{}^2[Z - \gamma^2\nabla^2 Z] + \alpha_1[Z - \gamma^2\nabla^2 Z]$$
$$= 3\alpha_2 A_n{}^2\,\overline{A_n}\left\{-\xi(r)^3 + \gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}\right)\right.$$
$$+ 6\,\gamma^2\xi(r)\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)^2 + \frac{3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)}{r}$$
$$\left. - \frac{\chi_1}{\chi_2}[\xi(r) - \gamma^2\nabla^2\xi(r)]\right\}e^{i\omega_n T_0}$$
$$+ \alpha_2 A_n{}^3\left\{-\xi(r)^3 + 3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}\right)\right.$$
$$+ 6\,\gamma^2\xi(r)\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)^2$$
$$\left. + \frac{3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)}{r}\right\}e^{3i\omega_n T_0} + cc \qquad (۶۳-۴)$$

پاسخ معادله‌ی بالا را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد[۱۷]:

$$Z = \alpha_2 A^3 U(r)\,e^{3i\omega T_0} + 3\alpha_2 A_n{}^2\overline{A_n}\,S(r)e^{i\omega_n T_0} + cc \qquad (۶۴-۴)$$

در رابطه‌ی بالا، تابع‌های $U(r)$ و $S(r)$ توابعی از متغیّر r می‌باشند. پس از جایگذاری رابطه بالا در معادله-ی (۴ – ۶۳) می‌توان نوشت:

$$\nabla^4 U(r) + (\alpha_1 - 9{\omega_n}^2)[U(r) - \gamma^2\nabla^2 U(r)] \\ = -\xi(r)^3 + 3\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}\right) \\ + 6\gamma^2\xi(r)\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)^2 + \frac{3\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)}{r} \tag{۶۵ − ۴}$$

$$\nabla^4 S(r) + (\alpha_1 - {\omega_n}^2)[S(r) - \gamma^2\nabla^2 S(r)] \\ = -\xi(r)^3 + \gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}\right) \\ + 6\gamma^2\xi(r)\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)^2 + \frac{3\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)}{r} \\ - \frac{\chi_1}{\chi_2}[\xi(r) - \gamma^2\nabla^2\xi(r)] \tag{۶۶ − ۴}$$

پاسخ معادله‌های (۴ − ۶۵) و(۴ − ۶۶) ، به‌صورت عددی و در بخش پیوست آ.جدول‌های ۶-۲ و ۶-۳ تعیین شده‌اند.

پس از جایگذاری رابطه‌های (۴ − ۴۸)، (۴ − ۶۱)و(۴ − ۶۴) در رابطه‌ی(۴ − ۱) می‌توان نوشت:

$$w = 2a\{\xi(r)\,cos(\Omega_n t + b_0)\}\epsilon \\ + 2\alpha_2 a^3\{U(r)\,cos(3\Omega_n t + 3b_0) \\ + 3S(r)\,cos(\Omega_n t + b_0)\}\epsilon^3 \tag{۶۷ − ۴}$$

۴–۳– روند حلّ دسته‌ی معادله‌های دوم

پاسخ معادله‌ی(۴ − ۸)، را می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت[۱۷]:

$$G = P(r)Q_n(T_1, T_2)e^{i\delta_n T_0} + \alpha_1 A_n h(r)e^{i\omega_n T_0} + cc \tag{۶۸ − ۴}$$

در این رابطه، تابع‌های $P(r)$ و$h(r)$ ،توابعی از متغیر r هستند. $Q_n(T_1, T_2)$ تابعی از مقیاس‌های زمانی T_1 و T_2 می‌باشد که با اعمال شرایط حل‌پذیری در مرحله‌های بعدی فرآیند حل، تعیین می‌شود. پس از

جایگذاری رابطه‌ی (۴ – ۶۸)در معادله‌ی(۴ – ۸)، مسأله‌های مقدار مرزی زیر را برای عبارت‌های P و h می‌توان نوشت:

$$\nabla^4 P(r) - {\delta_n}^2[P(r) - \gamma^2\nabla^2 P(r)] = 0 \tag{۶۹ – ۴}$$

$$\nabla^4 h(r) - {\omega_n}^2[h(r) - \gamma^2\nabla^2 h(r)] = [\xi(r) - \gamma^2\nabla^2\xi(r)] \tag{۷۰ – ۴}$$

پاسخ معادله‌ی(۴ – ۶۹)، را می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$P(r) = C_5 J_0(\varphi r) + C_6 J_0(\tau r) + C_7 Y_0(\varphi r) + C_8 Y_0(\tau r) \tag{۷۱ – ۴}$$

که عبارت‌های C_i، عددهای ثابتی هستند و همچنین:

$$\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2{\delta_n}^2\gamma^2 + 2\Pi} \tag{۷۲ – ۴}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{2{\delta_n}^2\gamma^2 - 2\Pi} \tag{۷۳ – ۴}$$

که در رابطه‌های بالا:

$$\Pi = \sqrt{\left({\delta_n}^2\gamma^2 - 2\gamma\delta_n\sqrt{\delta_n} + 2\delta_n\right)\left({\delta_n}^2\gamma^2 + 2\gamma\delta_n\sqrt{\delta_n} + 2\delta_n\right)} \tag{۷۴ – ۴}$$

پاسخ معادله‌ی (۴ – ۷۰) به‌صورت عددی و در بخش پیوست آ.جدول ۶-۶ تعیین شده‌اند.

۴–۳–۱– اعمال شرایط مرزی گیردار برای نانوصفحه‌های دایره‌ای

عبارت‌های $Y_0(\varphi r)$ و $Y_0(\tau r)$ در موقعیت مرکز نانوصفحه‌های دایره‌ای، مقداری نامشخص دارند. بنابراین ضریب‌های C_7 و C_8 برابر با صفر می‌باشند.

شرایط مرزی گیردار را می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$P(r)_{r=1} = 0 \tag{۷۵ – ۴}$$

$$\frac{\partial P(r)}{\partial r}_{r=1} = 0 \tag{۷۶ – ۴}$$

پس از قرار دادن رابطه‌ی (۴ − ۷۱)، در رابطه‌های (۴ − ۷۵)و (۴ − ۷۶) می‌توان نوشت:

$$C_5\,J_0(\varphi r)+C_6\,J_0(\tau r)=0 \tag{۷۷ − ۴}$$

$$C_5\,\varphi\,J_1(\varphi r)+C_6\,\tau\,J_1(\tau r)=0 \tag{۷۸ − ۴}$$

معادله‌های بالا را می‌توان به‌صورت زیر به فرم ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} J_0(\varphi) & J_0(\tau) \\ \varphi\,J_1(\varphi) & \tau\,J_1(\tau) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۷۹ − ۴}$$

برای داشتن جواب غیربدیهی، باید دترمینان ماتریس ضریب‌های معادله‌ی بالا صفر باشد. بنابراین:

$$\begin{vmatrix} J_0(\varphi) & J_0(\tau) \\ \varphi\,J_1(\varphi) & \tau\,J_1(\tau) \end{vmatrix}=0 \tag{۸۰ − ۴}$$

در نتیجه:

$$\tau J_0(\varphi)\,J_1(\tau\,)-\varphi\,J_1(\varphi)J_0(\tau\,)=0 \tag{۸۱ − ۴}$$

از معادله‌های فرکانسی(۴ − ۲۵) و(۴ − ۸۱) تمامی فرکانس‌های خطّی سیستم متشکّل از دو نانوصفحه‌ای دایره‌ای شکل متصّل به هم توسّط محیط الاستیک، بدست می‌آیند.

برای به‌دست آوردن شکل‌مودها، با استفاده از رابطه‌ی ماتریسی (۴ − ۷۹)، می‌توان نوشت:

$$\frac{C_6}{C_5}=-\frac{J_0(\varphi)}{J_0(\tau)} \tag{۸۲ − ۴}$$

بنابراین:

$$G=\left[J_0(\varphi r)-\frac{J_0(\varphi)}{J_0(\tau)}J_0(\tau r)\right]Q_n(T_1,T_2)e^{i\delta_n T_0} + \alpha_1 A h(r)e^{i\omega_n T_0}+cc \tag{۸۳ − ۴}$$

۴–۳–۲– اعمال شرایط مرزی گیردار برای نانوصفحه‌های حلقه‌ای

شرایط مرزی گیردار برای نانوصفحه‌های حلقه‌ای را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$P(r)_{r=1} = P(r)_{r=\frac{R'}{R}} = 0 \qquad (۸۴ - ۴)$$

$$\frac{\partial P(r)}{\partial r}_{r=1} = \frac{\partial P(r)}{\partial r}_{r=\frac{R'}{R}} = 0 \qquad (۸۵ - ۴)$$

پس از قرار دادن رابطه‌ی (۴ — ۷۱)، در رابطه‌های (۴ — ۸۴) و (۴ — ۸۵) می‌توان نوشت :

$$C_5 J_0(\varphi) + C_6 J_0(\tau) + C_7 Y_0(\varphi) + C_8 Y_0(\tau) = 0 \qquad (۸۶ - ۴)$$

$$C_5 J_0\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) + C_6 J_0\left(\frac{R'}{R}\tau\right) + C_7 Y_0\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) + C_8 Y_0\left(\frac{R'}{R}\tau\right) = 0 \qquad (۸۷ - ۴)$$

$$C_5 \varphi J_1(\varphi) + C_6 \tau J_1(\tau) + C_7 \varphi Y_1(\varphi) + C_8 \tau Y_1(\tau) = 0 \qquad (۸۸ - ۴)$$

$$C_5 \varphi J_1\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) + C_6 \tau J_1\left(\frac{R'}{R}\tau\right) + C_7 \varphi Y_1\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) + C_8 \tau Y_1\left(\frac{R'}{R}\tau\right) = 0 \qquad (۸۹ - ۴)$$

معادله‌های بالا را می‌توان به‌صورت زیر به فرم ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} J_0(\varphi) & J_0(\tau) & Y_0(\varphi) & Y_0(\tau) \\ J_0\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) & J_0\left(\frac{R'}{R}\tau\right) & Y_0\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) & Y_0\left(\frac{R'}{R}\tau\right) \\ \varphi J_1(\varphi) & \tau J_1(\tau) & \varphi Y_1(\varphi) & \tau Y_1(\tau) \\ \varphi J_1\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) & \tau J_1\left(\frac{R'}{R}\tau\right) & \varphi Y_1\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) & \tau Y_1\left(\frac{R'}{R}\tau\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۹۰ - ۴)$$

برای داشتن جواب غیربدیهی، باید دترمینان ماتریس ضریب‌های معادله‌ی بالا صفر باشد. بنابراین دترمینان فرکانسی را به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{vmatrix} J_0(\varphi) & J_0(\tau) & Y_0(\varphi) & Y_0(\tau) \\ J_0\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) & J_0\left(\frac{R'}{R}\tau\right) & Y_0\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) & Y_0\left(\frac{R'}{R}\tau\right) \\ \varphi J_1(\varphi) & \tau J_1(\tau) & \varphi Y_1(\varphi) & \tau Y_1(\tau) \\ \varphi J_1\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) & \tau J_1\left(\frac{R'}{R}\tau\right) & \varphi Y_1\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) & \tau Y_1\left(\frac{R'}{R}\tau\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{۹۱ – ۴}$$

از معادله‌های فرکانسی(۴ – ۳۵) و(۴ – ۹۱) تمامی فرکانس‌های خطّی سیستم دو نانوصفحه‌ای حلقه‌ای شکل متصّل به هم توسّط محیط الاستیک ، بدست می‌آیند.

برای به‌دست آوردن مودشیپ‌های این سیستم نیز، با استفاده از رابطه‌ی ماتریسی (۴ – ۹۰)، می‌توان نوشت:

$$\frac{C_6}{C_5} = -\frac{J_0(\varphi)}{J_0(\tau)} - \frac{Y_0(\varphi)}{J_0(\tau)}\frac{\varpi_3}{\varpi_1} + \left[\frac{\varpi_6 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_3}{\varpi_5 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_2}\right]\left(\frac{Y_0(\varphi)}{J_0(\tau)}\frac{\varpi_2}{\varpi_1} - \frac{Y_0(\tau)}{J_0(\tau)}\right) \tag{۹۲ – ۴}$$

$$\frac{C_7}{C_5} = \frac{\varpi_3}{\varpi_1} - \frac{\varpi_2}{\varpi_1}\frac{\left(\varpi_6 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_3\right)}{\left(\varpi_5 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_2\right)} \tag{۹۳ – ۴}$$

$$\frac{C_8}{C_5} = \frac{\varpi_6 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_3}{\varpi_5 - \frac{\varpi_4}{\varpi_1}\varpi_2} \tag{۹۴ – ۴}$$

که در رابطه‌های بالا:

$$\varpi_1 = Y_0\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) - \frac{J_0\left(\frac{R'}{R}\tau\right)}{J_0(\tau)}Y_0(\varphi) \tag{۹۵ – ۴}$$

$$\varpi_2 = Y_0\left(\frac{R'}{R}\tau\right) - \frac{J_0\left(\frac{R'}{R}\tau\right)}{J_0(\tau)} Y_0(\tau) \qquad (۹۶-۴)$$

$$\varpi_3 = \frac{J_0\left(\frac{R'}{R}\tau\right)}{J_0(\tau)} J_0(\varphi) - J_0\left(\frac{R'}{R}\varphi\right) \qquad (۹۷-۴)$$

$$\varpi_4 = \varphi Y_1(\varphi) - \frac{\Phi J_1(\tau)}{J_0(\tau)} Y_0(\varphi) \qquad (۹۸-۴)$$

$$\varpi_5 = \tau Y_1(\tau) - \frac{\Phi J_1(\tau)}{J_0(\tau)} Y_0(\tau) \qquad (۹۹-۴)$$

$$\varpi_6 = \frac{\tau J_1(\tau)}{J_0(\tau)} J_0(\varphi) - \Psi J_1(\varphi) \qquad (۱۰۰-۴)$$

بنابراین:

$$G = \left[J_0(\varphi r) + \frac{C_6}{C_5} J_0(\tau r) + \frac{C_7}{C_5} Y_0(\varphi r) + \frac{C_8}{C_5} Y_0(\tau r)\right] Q_n(T_1, T_2) e^{i\delta_n T_0} + \alpha_1 A h(r) e^{i\omega_n T_0} + cc \qquad (۱۰۱-۴)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۴ – ۶۸) ، معادله‌ی(۴ – ۹) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\nabla^4 H + {D_0}^2[H - \gamma^2 \nabla^2 H] = -2i\delta_n D_1 Q_n e^{i\delta_n T_0}[1 - \gamma^2 \nabla^2] G(r) + cc \qquad (۱۰۲-۴)$$

پس از حذف عبارت‌های سکولار می‌توان نوشت:

$$D_1 Q_n = 0 \qquad (۱۰۳-۴)$$

معادله‌ی بالا بیان می‌کند که عبارت Q_n، تابع مقیاس زمانی T_1 نمی‌باشد.در نتیجه:

$$H = 0 \qquad (۱۰۴-۴)$$

پس از جایگذاری رابطه‌های(۴ – ۶۸) و(۴ – ۱۰۴) در معادله‌ی(۴ – ۱۰) می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\nabla^4 I + D_0{}^2[I - \gamma^2\nabla^2 I] \\
&\quad= -2i\delta_n D_2 Q_n(T_2)[P(r) - \gamma^2\nabla^2 P(r)]e^{i\delta_n T_0} \\
&\quad - \left[\frac{3A_n^2\,\overline{A_n}\alpha_1\alpha_2\,\chi_1}{\chi_2}\right][h(r) - \gamma^2\nabla^2 h(r)]e^{i\omega_n T_0} \\
&\quad + 3\alpha_2 A_n{}^2\,\overline{A_n}\left\{-\xi(r)^3 + \gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}\right)\right. \\
&\quad + 6\,\gamma^2\xi(r)\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)^2 + \frac{3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)}{r} \\
&\quad \left. - \alpha_1[\,S(r) - \gamma^2\nabla^2 S(r)]\right\}e^{i\omega_n T_0} \\
&\quad + \alpha_2 A_n{}^3\left[-\xi(r)^3 + 3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}\right)\right. \\
&\quad + 6\,\gamma^2\xi(r)\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)^2 + \frac{3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)}{r} \\
&\quad \left. - \alpha_1[U(r) - \gamma^2\nabla^2 U(r)]\right]e^{3i\omega_n T_0} + cc
\end{aligned}
\qquad (۱۰۵-۴)
$$

بخش غیرهمگن معادله‌ی (۴ − ۱۰۵) در صورتی دارای پاسخ است که شرایط حل‌پذیری صادق باشد. این شرایط بیان می‌کند که عبارت سمت راست معادله‌ی یادشده باید عمود بر پاسخ معادله‌ی اوّل، یعنی G، باشد. پس از اعمال این شرایط برای معادله‌ی(۴ − ۱۰۵)، می‌توان نوشت:

$$D_2 Q_n(T_2) = 0 \qquad (۱۰۶ - ۴)$$

پاسخ معادله‌ی (۴ — ۱۰۵) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد[۱۷]:

$$I = -\left[\frac{3A_n^2\,\overline{A_n}\alpha_1\alpha_2\,\chi_1}{\chi_2}\right]M(r)e^{i\omega_n T_0} + 3\alpha_2 {A_n}^2\,\overline{A_n}K(r)e^{i\omega_n T_0} + \alpha_2 {A_n}^3\,L(r)e^{3i\omega_n T_0} + cc \qquad (۱۰۷ - ۴)$$

در رابطه‌ی بالا، تابع‌های $M(r)$، $K(r)$ و $L(r)$ توابعی از متغیّر r می‌باشند. پس از جایگذاری رابطه بالا در معادله‌ی(۴ — ۱۰۶) می‌توان نوشت:

$$\nabla^4 M(r) - {\omega_n}^2[M(r) - \gamma^2\nabla^2 M(r)] = [h(r) - \gamma^2\nabla^2 h(r)] \qquad (۱۰۸ - ۴)$$

$$\nabla^4 K(r) - {\omega_n}^2[K(r) - \gamma^2\nabla^2 K(r)] = -\xi(r)^3 + \gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}\right) + 6\,\gamma^2\xi(r)\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)^2 + \frac{3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)}{r} - \alpha_1[\,S(r) - \gamma^2\nabla^2 S(r)] \qquad (۱۰۹ - ۴)$$

$$\nabla^4 L(r) - 9{\omega_n}^2[L(r) - \gamma^2\nabla^2 L(r)] = -\xi(r)^3 + 3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d^2\xi(r)}{dr^2}\right) + 6\,\gamma^2\xi(r)\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)^2 + \frac{3\,\gamma^2\xi(r)^2\left(\frac{d\xi(r)}{dr}\right)}{r} - \alpha_1[U(r) - \gamma^2\nabla^2 U(r)] \qquad (۱۱۰ - ۴)$$

پاسخ معادله‌های (۴ – ۱۰۸) تا (۴ – ۱۱۰) ، به‌صورت عددی و در بخش پیوست آ.جدول‌های ۶-۴، ۶-۵ و ۶-۷ تعیین شده‌اند.

پس از جایگذاری رابطه‌های به‌دست آمده در رابطه‌ی(۴ – ۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} w_1 = {} & 2\{QP(r)\cos(\delta_n t) + \alpha_1 a h(r)\cos(\Omega_n t + b_0)\}\epsilon \\ & - 2a^3\alpha_2\left\{\left[\frac{3\alpha_1\,\chi_1}{\chi_2}\right]M(r)\cos(\Omega_n t + b_0)\right. \\ & - 3K(r)\cos(\Omega_n t + b_0) \\ & \left. - L(r)\cos(3\Omega_n t + 3b_0)\right\}\epsilon^3 \end{aligned} \qquad (۱۱۱ - ۴)$$

در نهایت با استفاده از رابطه‌های به‌دست آمده برای عبارت‌های w و w_1 می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} w_2 = {} & 2\{a\xi(r)\cos(\Omega_n t + b_0) - Q\xi(r)\cos(\delta_n t) \\ & - \alpha_1 a h(r)\cos(\Omega_n t + b_0)\}\epsilon \\ & + 2\alpha_2 a^3\left\{U(r)\cos(3\Omega_n t + 3b_0)\right. \\ & + 3S(r)\cos(\Omega_n t + b_0) \\ & + \left[\frac{3\alpha_1\,\chi_1}{\chi_2}\right]M(r)\cos(\Omega_n t + b_0) \\ & - 3K(r)\cos(\Omega_n t + b_0) \\ & \left. - L(r)\cos(3\Omega_n t + 3b_0)\right\}\epsilon^3 \end{aligned} \qquad (۱۱۳ - ۴)$$

فصل پنجم :

نتیجه‌ها

برای بدست آوردن نتایج تحلیل، باید به پارامترهای موجود در مسأله، مقادیر عددی مناسبی نسبت داد. برای این منظور، می‌توان نوشت:

$$R = 30\, nm \qquad E = 1060\, Gpa$$
$$R' = 15\, nm \qquad \nu = 0.3 \qquad (۱۱۳-۴)$$
$$h = 0.34\, nm \qquad e_0 a = 0 - 70\, nm$$
$$\epsilon = 0.01 - 1$$

۵-۱- راستی‌آزمایی نتیجه‌ها

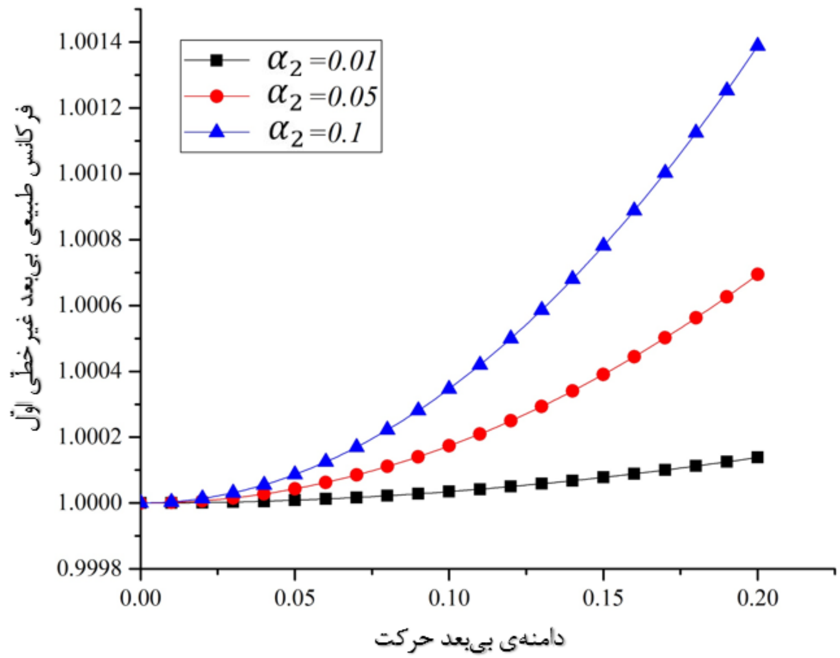
برای ارزیابی نتیجه‌های به‌دست آمده و رابطه‌های استخراج شده، در جدول شماره‌ی ۱، چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد خطّی اوّل، برای یک نانوصفحه‌ی دایره‌ای در شرایط مرزی گیردار، با نتیجه‌های به‌دست آمده در تحقیق‌های گذشته، مقایسه شده است.

جدول ۵-۱. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد خطّی اوّل یک صفحه دایره‌ای و حلقه‌ای، برای شکل‌مودهای متقارن محوری، با تحقیق‌های گذشته.

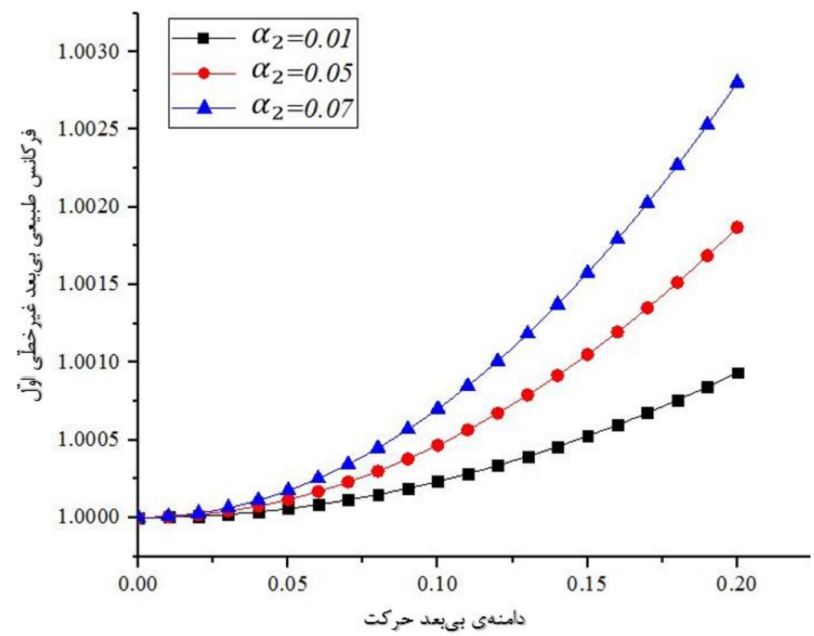
نتیجه‌های به‌دست آمده	**شماره مود**			
	۱	**۲**	**۳**	**۴**
صفحه‌ی دایره‌ای با شرایط مرزی گیردار				
هاتربوخ [۱۳]	۱۰/۲۱۵۸	۳۹/۷۷۱۰	۸۹/۱۰۴۰	۱۵۸/۱۸۳۰
تحقیق کنونی	**۱۰/۲۱۵۹**	**۳۹/۷۷۱۱**	**۸۹/۱۰۴۱**	**۱۵۸/۱۸۳۰**
صفحه‌ی حلقه‌ای، با شرایط مرزی گیردار در شعاع داخلی و خارجی				
بوتاهر [۱۸]	۲۷/۲۸۰۰	۷۵/۳۶۰۰	۱۴۸/۲۱۰۰	۲۴۵/۴۸۰۰
تحقیق کنونی	**۲۷/۲۸۰۵**	**۷۵/۳۶۶۳**	**۱۴۸/۲۱۳۷**	**۲۴۵/۴۸۴۹**

در جدول بالا، حداکثر خطای نتیجه‌های به‌دست آمده، کمتر از ۰/۰۰۰۱ درصد می‌باشد. دلیل خطای به‌دست آمده، تفاوت روش‌های عددی استفاده شده و تفاوت دقّت انجام محاسبه‌های عددی می‌باشد.

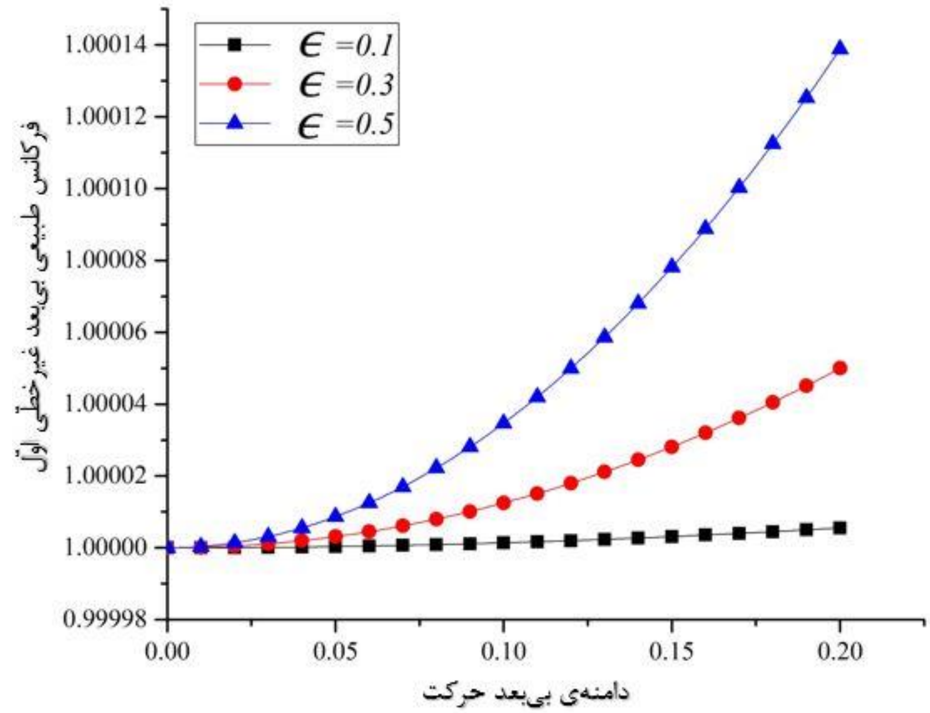
۵-۲- نتایج بدست‌آمده برای فرکانس غیرخطّی سیستم



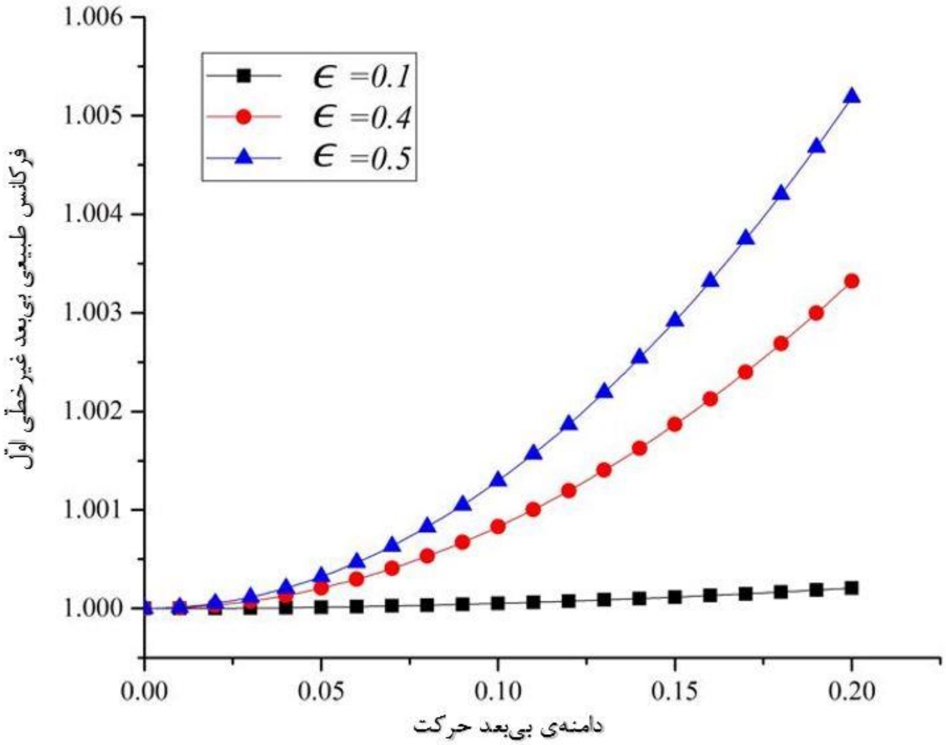
شکل ۵-۱. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای فرکانس طبیعی بی‌بعد غیرخطّی اوّل برای مقدارهای مختلفی از ضریب فنریّت غیرخطّی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های دایره‌ای.



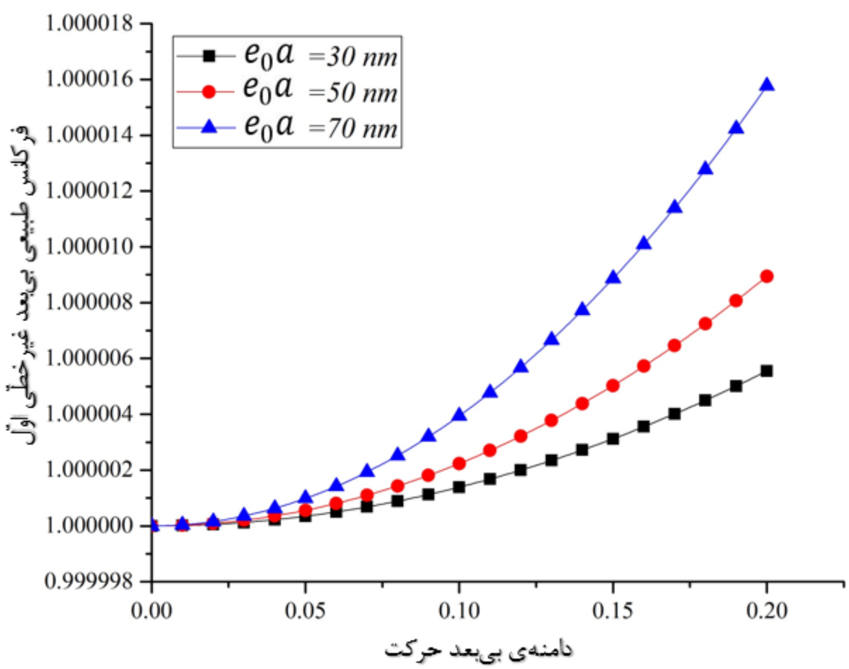
شکل ۵-۲. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای فرکانس طبیعی بی‌بعد غیرخطّی اوّل برای مقدارهای مختلفی از ضریب فنریّت غیرخطّی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های حلقه‌ای.



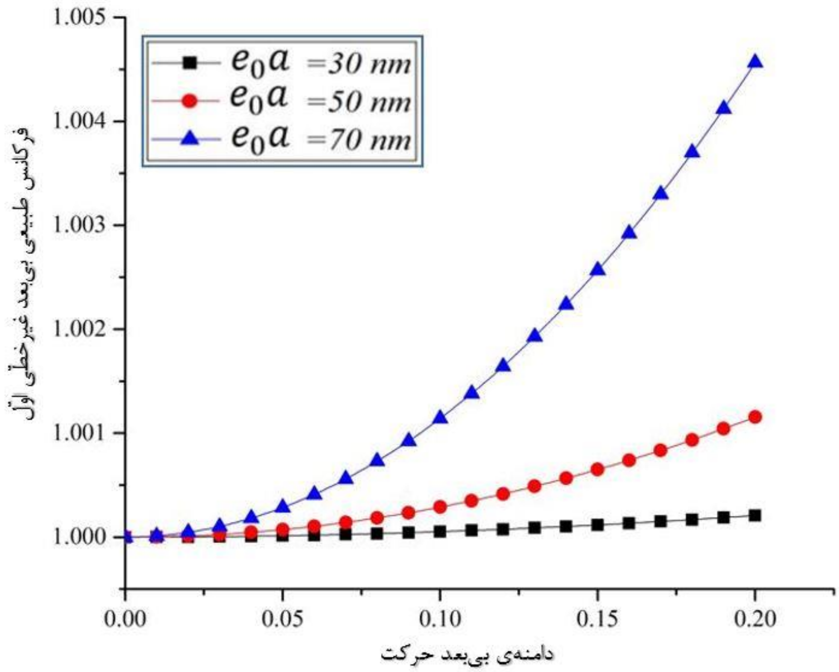
شکل ۵-۳. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای فرکانس طبیعی بی‌بعد غیرخطّی اوّل برای مقدارهای مختلفی از مرتبه‌ی جابجایی عرضی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های دایره‌ای.



شکل ۵-۴. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای فرکانس طبیعی بی‌بعد غیرخطّی اوّل برای مقدارهای مختلفی از مرتبه‌ی جابجایی عرضی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های حلقه‌ای.

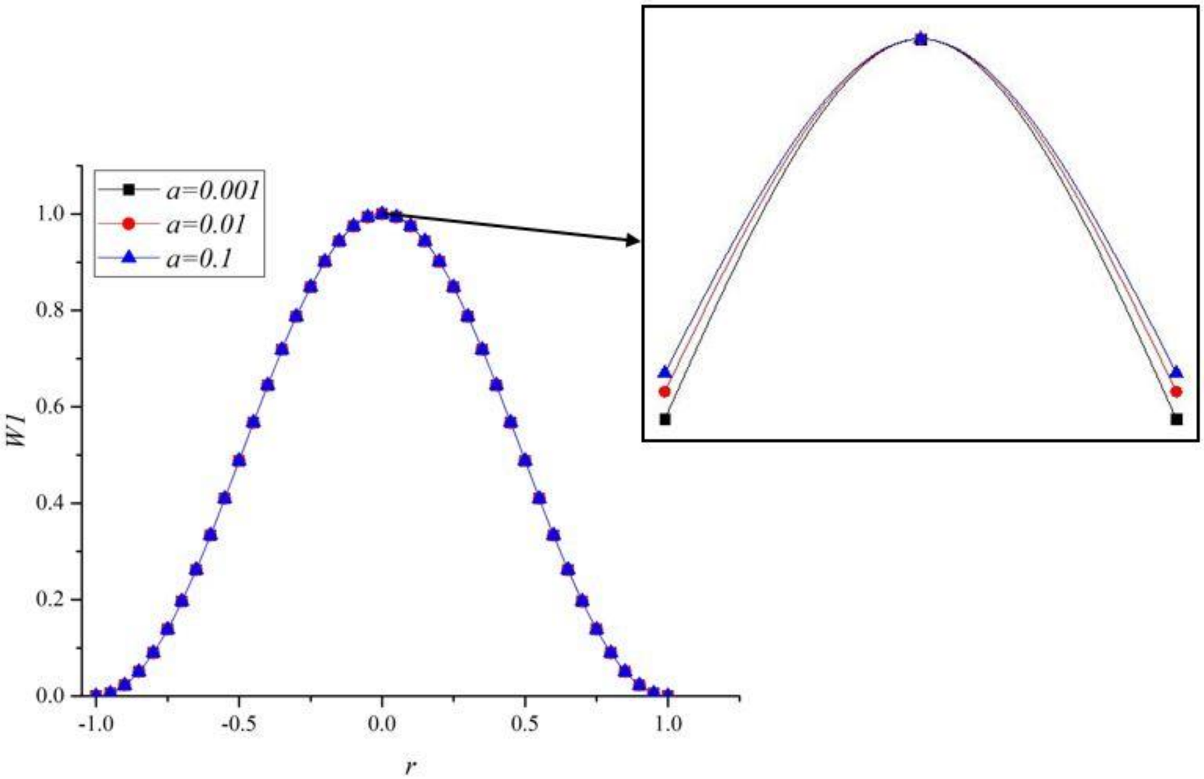


شکل ۵-۵. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای فرکانس طبیعی بی‌بعد غیرخطّی اوّل برای مقدارهای مختلفی از پارامتر غیرمحلّی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های دایره‌ای.

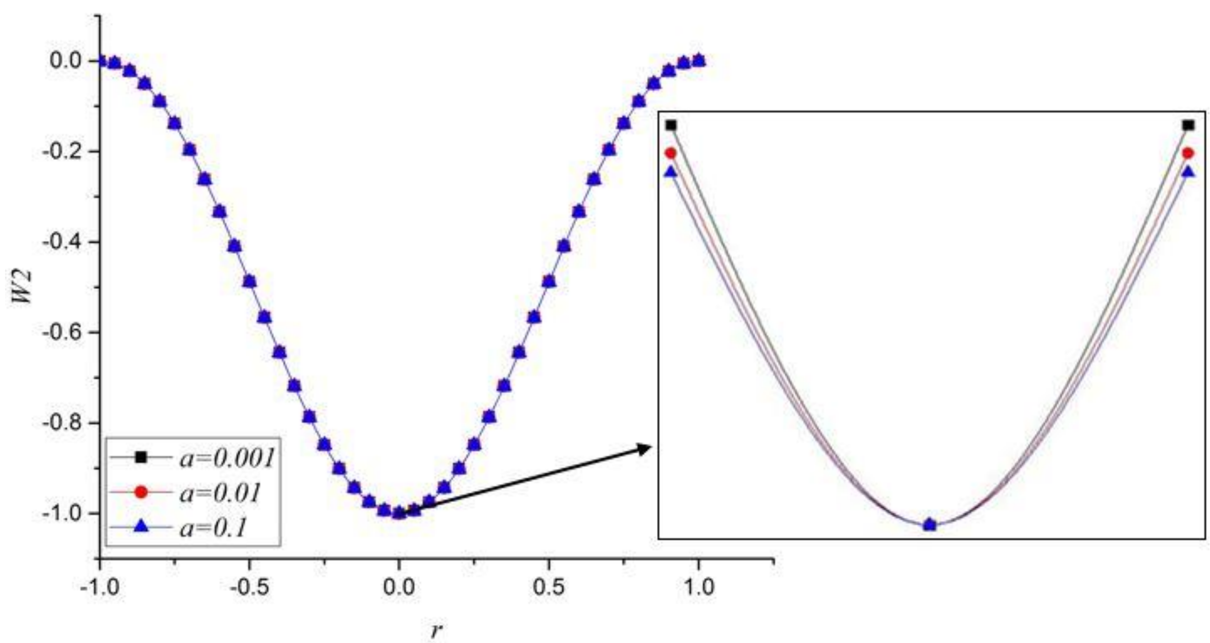


شکل ۵-۶. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای فرکانس طبیعی بی‌بعد غیرخطّی اوّل، برای مقدارهای مختلفی از پارامتر غیرمحلّی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های حلقه‌ای.

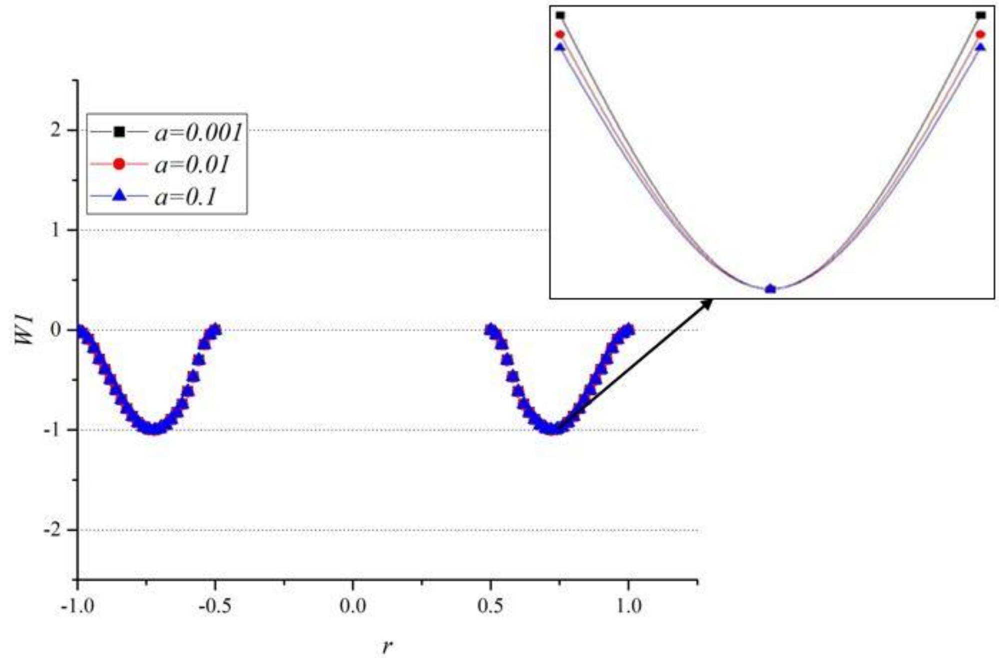
۵-۳- نتایج بدست‌آمده برای شکل‌مودهای سیستم



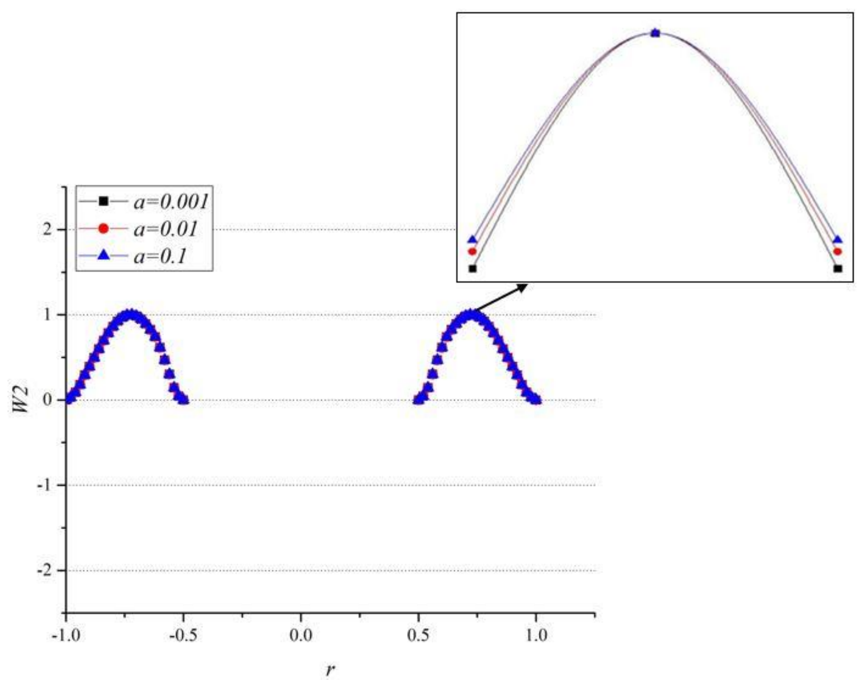
شکل ۵-۷. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی اوّل، برای مقدارهای مختلفی از دامنه‌ی حرکت، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های دایره‌ای.



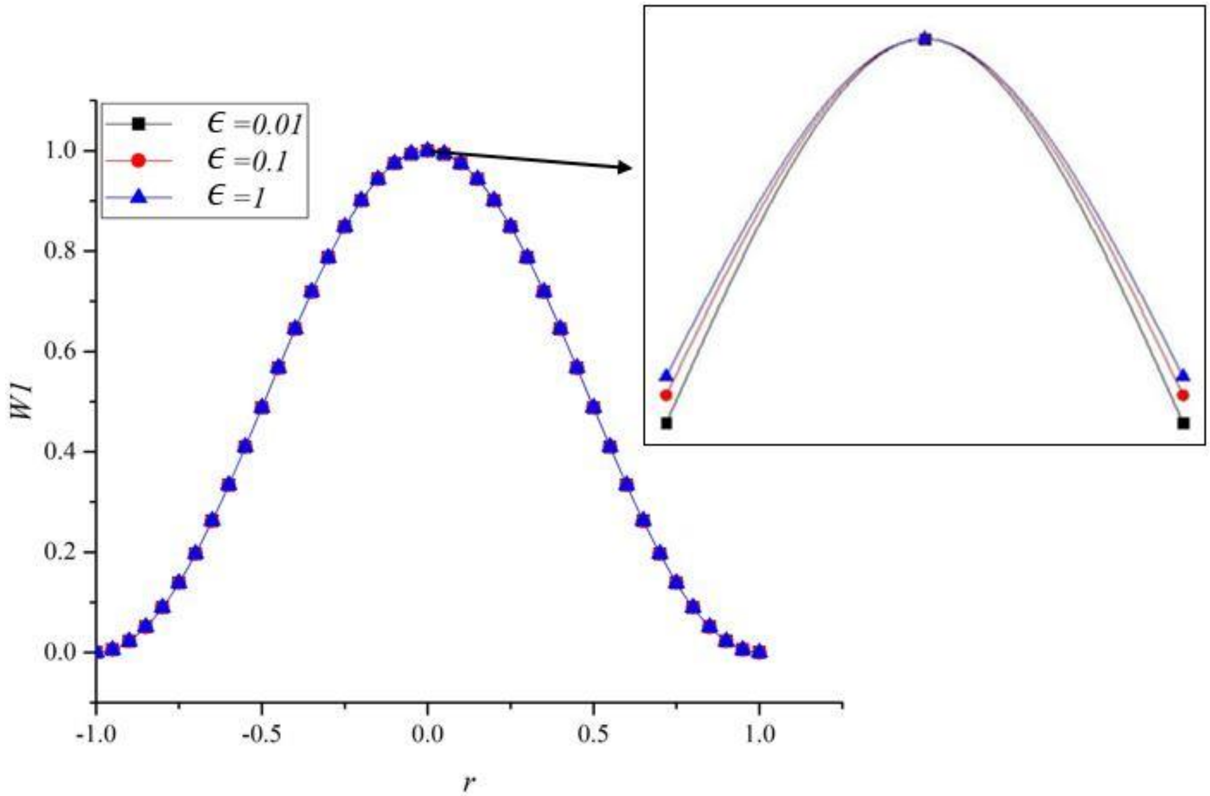
شکل ۵-۸. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی دوم، برای مقدارهای مختلفی از دامنه‌ی حرکت، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های دایره‌ای.



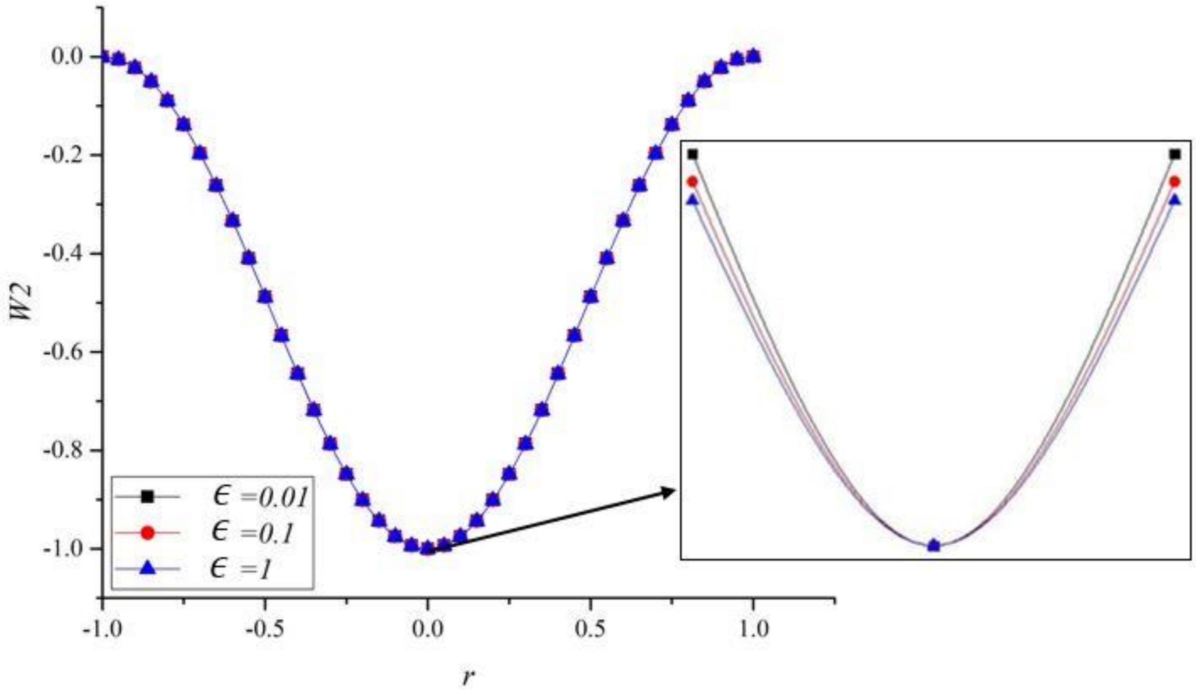
شکل ۵-۹. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی اوّل، برای مقدارهای مختلفی از دامنه‌ی حرکت، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های حلقه‌ای.



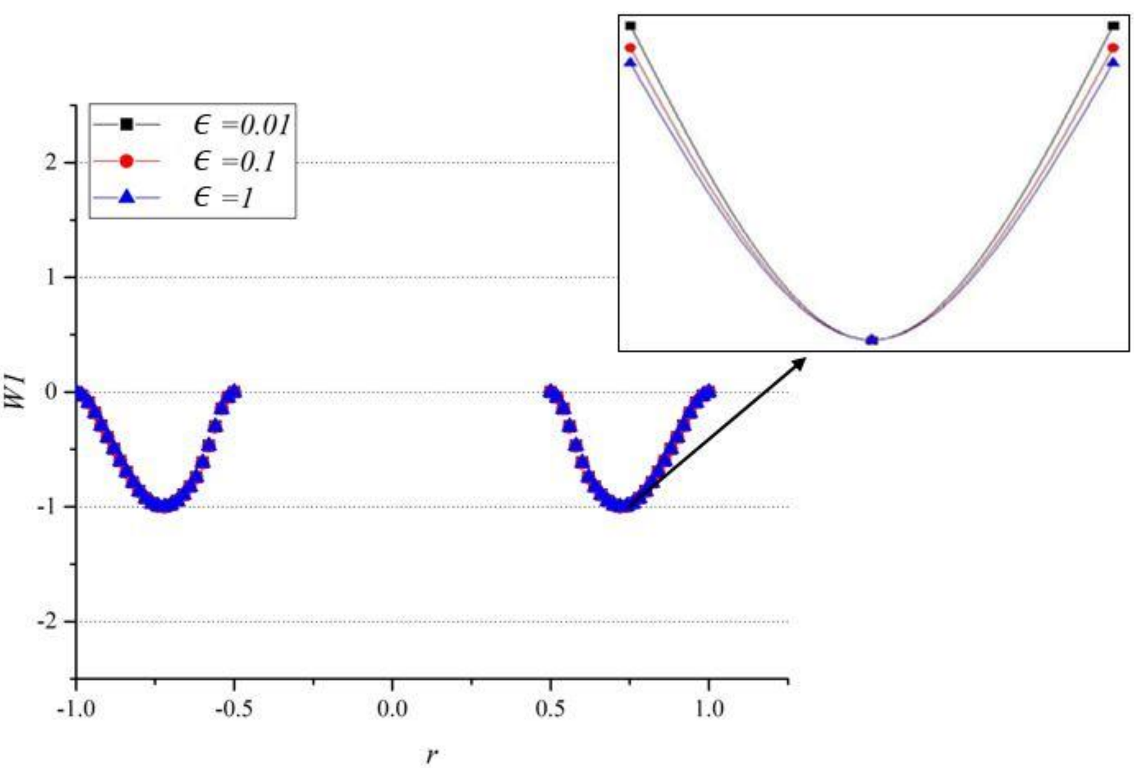
شکل ۵-۱۰. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی دوم، برای مقدارهای مختلفی از دامنه‌ی حرکت، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های حلقه‌ای.



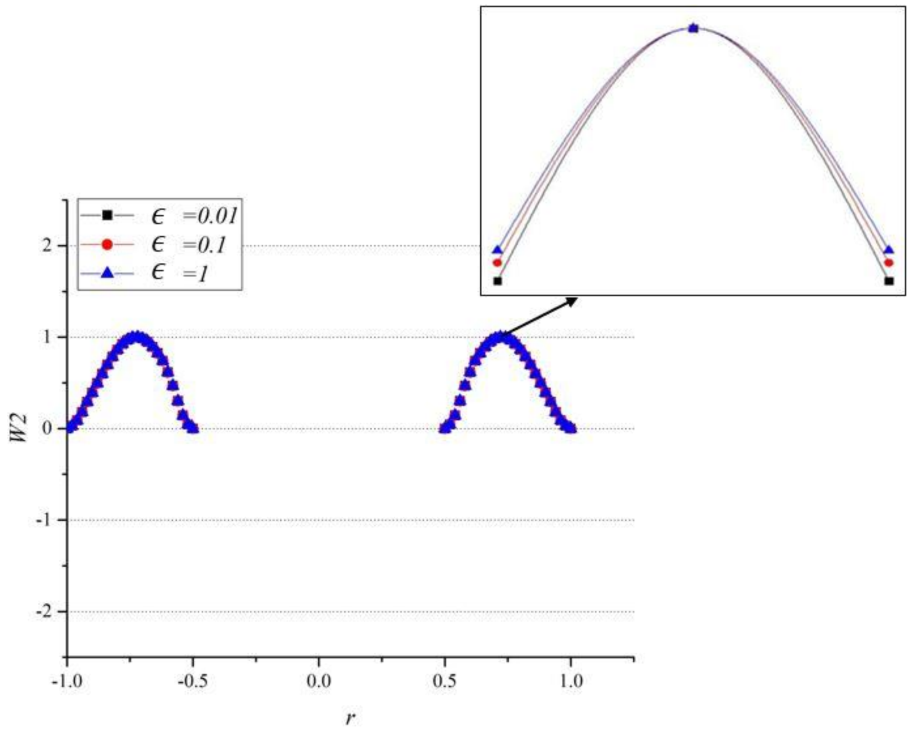
شکل ۵-۱۱. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی اوّل، برای مقدارهای مختلفی از مرتبه‌ی جابجایی عرضی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های دایره‌ای.



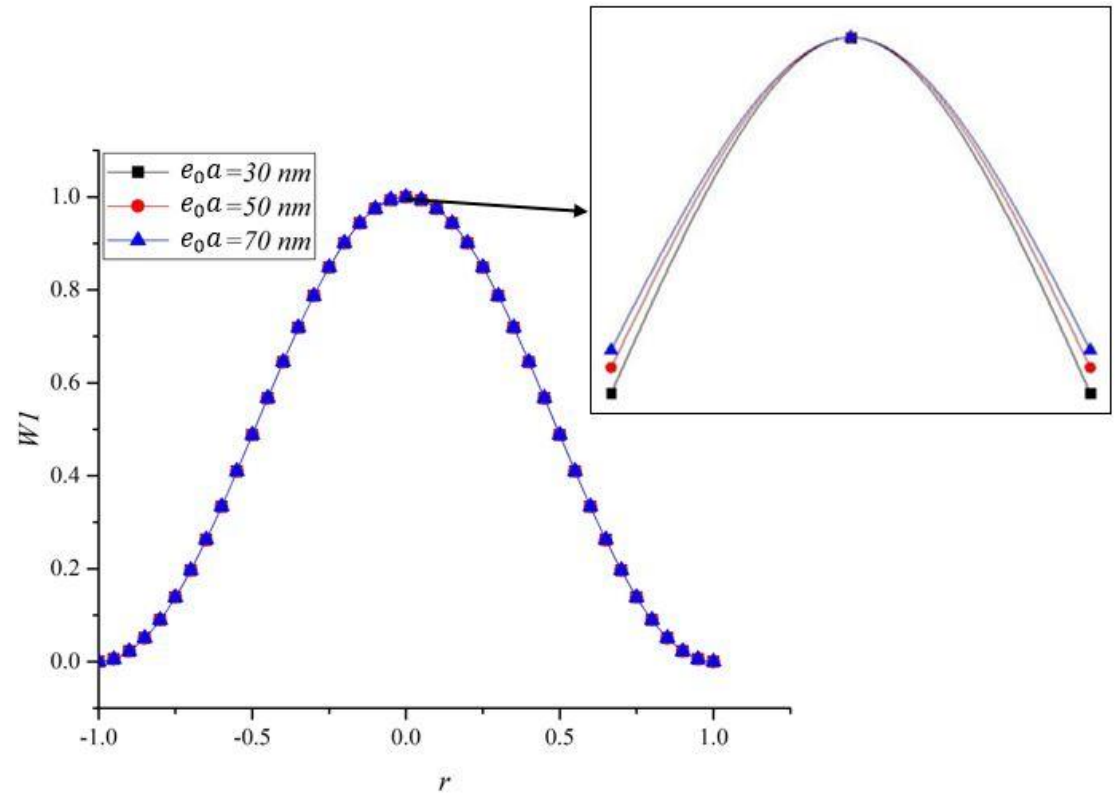
شکل ۵-۱۲. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی دوم، برای مقدارهای مختلفی از مرتبه‌ی جابجایی عرضی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های دایره‌ای.



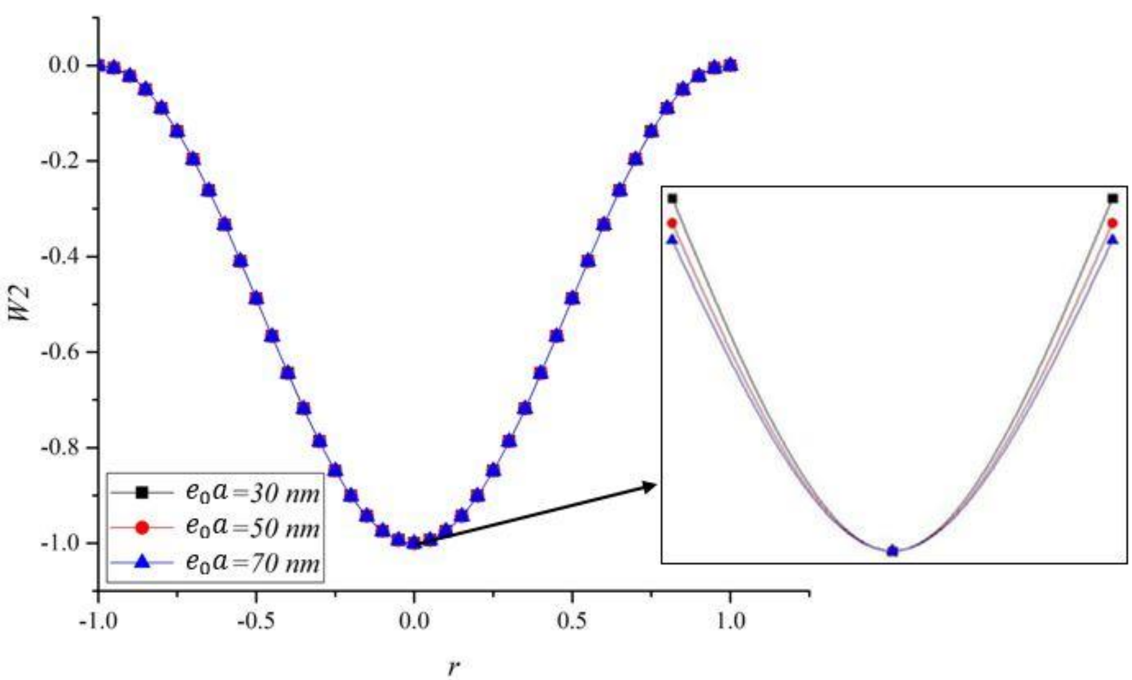
شکل ۵-۱۳. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی اوّل، برای مقدارهای مختلفی از مرتبه‌ی جابجایی عرضی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های حلقه‌ای.



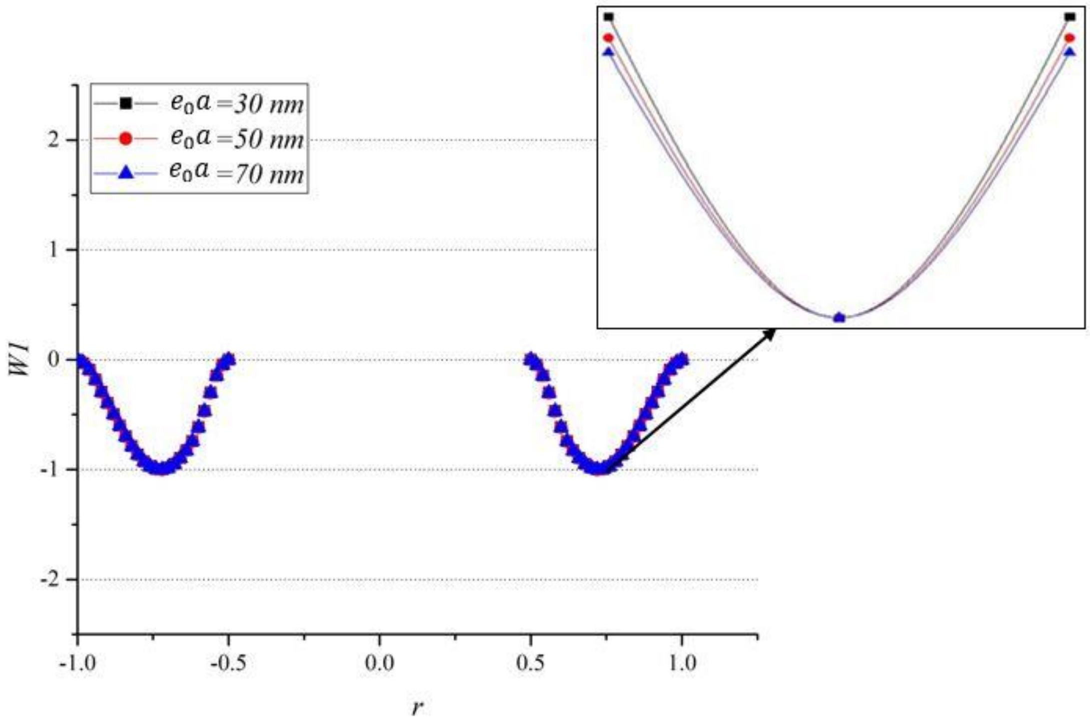
شکل ۵-۱۴. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی دوم، برای مقدارهای مختلفی از مرتبه‌ی جابجایی عرضی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های حلقه‌ای.



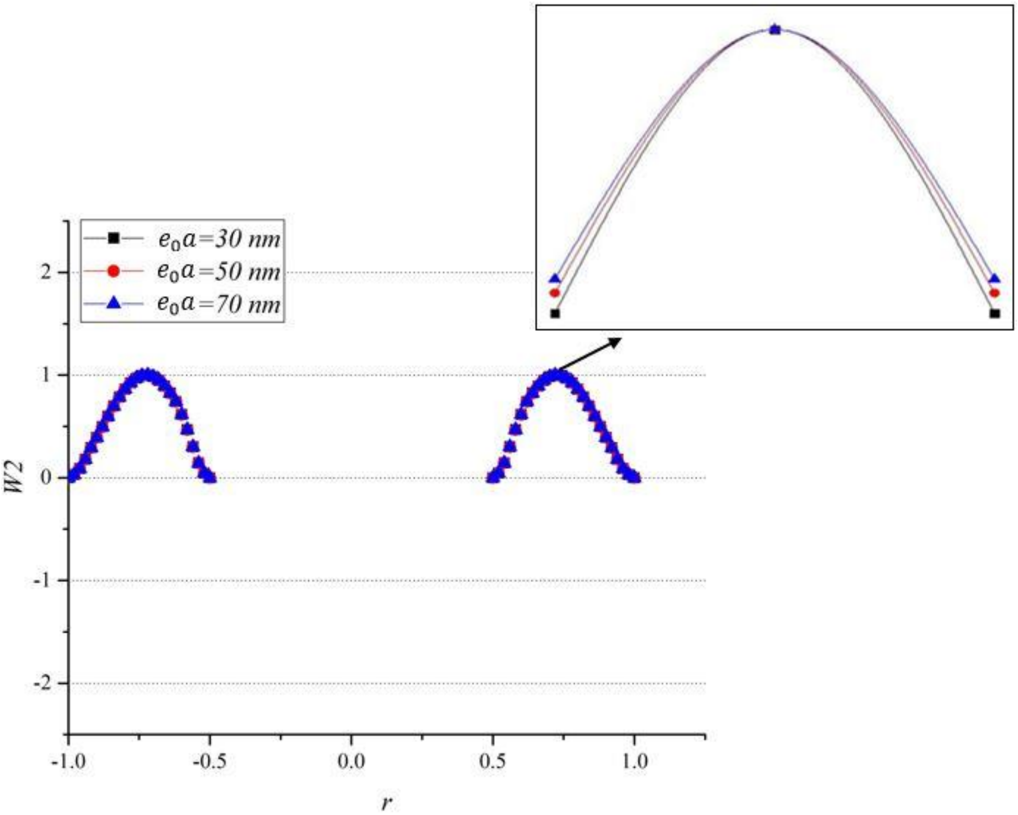
شکل ۵-۱۵. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی اوّل، برای مقدارهای مختلف از پارامتر غیرمحلّی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های دایره‌ای.



شکل ۵-۱۶. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی دوم، برای مقدارهای مختلفی از پارامتر غیرمحلّی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های دایره‌ای.



شکل ۵-۱۷. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی اوّل، برای مقدارهای مختلفی از پارامتر غیرمحلّی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های حلقه‌ای.



شکل ۵-۱۸. مقایسه‌ی نتیجه‌های به‌دست آمده برای شکل‌مود نانوصفحه‌ی دوم، برای مقدارهای مختلفی از پارامتر غیرمحلّی، برای سیستم تشکیل شده از نانوصفحه‌های حلقه‌ای.

فصل ششم :

نتیجه‌گیری

۶-۱- اثر پارامتر مقیاس کوچک بر ارتعاشات سیستم

براساس نتایج بدست آمده، مشخّص شد که فرکانس غیرخطّی سیستم به مقدار بسیار زیادی، به پارامتر مقیاس کوچک بستگی دارد. شکل‌های ۵-۵ و ۵-۶، به‌خوبی نشان دهنده‌ی این امر هستند. این نتایج نشان می‌دهند که با افزایش مقدار این پارامتر، شدّت تغییرات فرکانس طبیعی غیرخطّی سیستم، بیشتر می‌شود. مشاهده می‌شود که در صورت چشم پوشی از این پارامتر، نتایج تحلیل اشتباه می‌باشد. این موضوع، اهمیّت بالای پارامتر مقیاس‌کوچک و تئوری الاستیسیته‌ی غیرمحلّی ارینگن را، در تحلیل مسأله‌های مقیاس‌کوچک، نشان می‌دهد. در نتیجه تئوری کلاسیک به‌دلیل چشم پوشی از این پارامتر، قادر به تحلیل صحیح مسأله‌های مقیاس‌کوچک نیست.

شکل‌های ۵-۱۵ تا ۵-۱۸، نشان‌دهنده‌ی تغییرات شکل‌مود سیستم، با تغییر پارامتر مقیاس‌کوچک، است. برای مشاهده‌ی بهتر تاثیر این پارامتر، شکل‌مود نرمال شده، برای مقدارهای مختلفی از پارامتر مقیاس‌کوچک، رسم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش این پارامتر، تغییرات شکل‌مود در محل اکسترمم مطلق، ملایم‌تر می‌شود. افزایش مقدار این پارامتر، به‌معنی افزایش تأثیر نیروهای جاذبه‌ی بین اتمی و طول داخلی است. در نتیجه، می‌توان گفت که هرچه تأثیر این عوامل بیشتر شود، درمحل اکسترمم، شدّت تغییرات شکل‌مود کم‌تر می‌شود.

۶-۲- اثر پارامتر غیرخطّی بر ارتعاشات سیستم

اثر پارامتر غیرخطّی، بر فرکانس طبیعی غیرخطّی و شکل مود سیستم، بررسی شد. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که با بیشتر شدن کمیت‌های غیرخطّی سیستم، انحراف پارامترهای ارتعاشی سیستم از حالت خطّی، بیشتر شده است. شکل‌های ۵-۱ تا ۵-۴ ، انحراف فرکانس غیرخطّی از فرکانس خطّی سیستم را، نشان می‌دهند. در این تحقیق، دو کمیت ϵ و α_2 نشان‌دهنده‌ی بخش غیرخطّی سیستم می‌باشند. ϵ و α_2 به ترتیب ناشی از بزرگ درنظر گرفتن دامنه‌ی ارتعاش و غیرخطّی بودن محیط الاستیک می‌باشند. افزایش این کمیّت‌ها، مقدار فرکانس طبیعی غیرخطّی را می‌تواند به‌شدّت تحت تاثیر قرار دهد به گونه‌ای که فرکانس‌های غیرخطّی بالاتر، در مقدارهای بیشتری از این کمیّت‌ها، بوجود می‌آیند.

شکل‌های ۵-۷ تا ۵-۱۴ نشان‌دهنده‌ی تغییرات شکل‌مود سیستم، با تغییر کمیّت‌های غیرخطّی می‌باشند. در این نتایج مشاهده می‌شود که اثر افزایش این کمیّت‌ها، مشابه اثر افزایش پارامتر مقیاس‌کوچک، تغییرات شکل‌مود را در محل اکسترمم ، ملایم‌تر می‌کنند. این شکل‌ها به‌خوبی انحراف شکل‌مود خطّی از شکل‌مود غیرخطّی را نشان می‌دهند.

مراجع

[1] Jun SC, Son H, Baik CW, Kim JM, Moon SW, Kim HJ, et al. Electrothermal noise analysis in frequency tuning of nanoresonators. Solid-State Electr 2008; 52:1388–93.

[2] Gibson RF, Ayorinde OE, Wen Yuan-Feng. Vibration of carbon nanotubes and there composites: a review. Compos Sci Technol 2007; 67:1–28.

[3] Tsai JL, Lu TC. Investigating the load transfer efficiency in carbon nanotubes reinforced nanocomposites. Compos Struct 2009; 90:172–9.

[4] Chowdhury R, Adhikari S, Wang CW, Scarpa F. A molecular mechanics approach for the vibration of single walled carbon nanotubes. Comput Mater Sci 2010;48:730–5.

[5] Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering. New York: Wiley; 1974.

[6] Eringen, A. C., Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves, Int. J. Engng Sci, 10, 425-435, 1972.

[7] E. Jomehzadeh, A.R. Saidi, N.M. Pugno. Large amplitude vibration of a bilayer graphene embedded in a nonlinear polymer matrix. Physica E 44 (2012) 1973–1982.

[8] Eringen AC. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. J Appl Phys 1983;54:4703–10.

[9] Simsek M. Vibration analysis of a single-walled carbon nanotube under action of a moving harmonic load based on nonlocal elasticity theory. Phys E: Lowdimens Syst Nanostruct 2010;43:182–91.

[10] Frank IW, Deotare PB, McCutcheon MW, Loncar M. Programmable photonic crystal nanobeam cavities. Opt Express 2010;18(8):8705–12.

[11] Oniszczuk Z. Free transverse vibrations of an elastically connected rectangular simply supported double-plate complex system. J Sound Vib 2000;236(4):595–608.

[12] Behfar K, Naghdabadi R. Nanoscale vibrational analysis of a multi-layered graphene sheet embedded in an elastic medium. Compos Sci Technol 2005;65:1159–64.

[13] M. Haterboucha, R. Benamar. 2003, The effects of large vibration amplitudes on the axisymmetric mode shapes and natural frequencies of clamped thin isotropic circular plates. Part I: iterative and explicit analytical solution for non-linear transverse vibrations. Wiley, New York. The international Journal of sounds and Vibration.

[14] M. Mohammadi, M. Ghayour, A. Farajpour. 2013, Free transverse vibration analysis of circular and annular graphene sheets with various boundary conditions using the nonlocal continuum plate model. Composites: Part B 45 (2013) 32–42.

[15] T.Murmu, S.Adhikari. 2011, Nonlocal vibration of bonded double-nanoplate-systems. Composites: Part B 45 (2013) 32–42.

[16] A.H.Nayfeh, D.T.Mook. 1979, Nonlinear Oscillations. Wiley, New York.

[17] A.H.Nayfeh, S.A.Nayfeh. 1995, Nonlinear Normal Modes of a Continuous System With Quadratic Nonlinearities. International Journal of Vibration and Acoustics.

[18] Boutahar Lhoucine, El Bikri Khalid, Benamar Rhali. Geometrically Non-Linear Axisymmetric Free Vibrations of Thin Isotropic Annular Plates. International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering Vol:7, No:9, 2013.

پیوست آ

جدول ۷-۱.

مقادیر عددی بدست آمده برای پارامترهای X_1 و X_2.

Nano-Plate Radius(Nm)	**Nonlocal Parameter(Nm)**	K_1	K_2	ω_n	X_1	X_2
30	*0*	*100*	*100*	*10.2158*	*-0.3517*	*0.4313*
30	*1*	*100*	*100*	*10.0052*	*-0.34*	*0.4262*
30	*2*	*100*	*100*	*9.7307*	*-0.3231*	*0.4207*
10	*1*	*100*	*100*	*9.4054*	*-0.3007*	*0.4145*
15	*1*	*100*	*100*	*9.7307*	*-0.3231*	*0.4207*
20	*1*	*100*	*100*	*9.8752*	*-0.3322*	*0.4235*
30	*1*	*1.00E+02*	*100*	*10.0052*	*-0.34*	*0.4262*
30	*1*	*1.00E+13*	*100*	*10.2152*	*-0.34*	*0.4262*
30	*1*	*1.00E+14*	*100*	*11.9401*	*-0.34*	*0.4262*
30	*1*	*100*	*100*	*10.0052*	*-0.34*	*0.4262*
30	*1*	*100*	*200*	*10.0052*	*-0.34*	*0.4262*
30	*1*	*100*	*300*	*10.0052*	*-0.34*	*0.4262*

تابع $S(r)$

$$S(r) = S_5 r^5 + S_4 r^4 + S_3 r^3 + S_2 r^2 + S_1 r + S_0$$

جدول ۷-۲. ثوابت استفاده شده در تعیین عددی تابع S(r).

	K_1	K_2	a(Nm)	Q_n(Nm)	ϵ	R(nm)	$e_0 a$(nm)
1	100	100	100	100	1.00E-07	30	30
2	100	100	100	100	1.00E-07	30	50
3	100	100	100	100	1.00E-07	30	70
4	100	100	100	100	1.00E-07	30	100
5	100	100	100	100	1.00E-07	30	150
6	100	100	100	100	1.00E-07	30	200
7	100	100	100	100	1.00E-07	10	100
8	100	100	100	100	1.00E-07	50	100

جدول ۷-۳. ضرایب ثابت تابع S(r) به ازای مقادیر مختلف داده شده در جدول ۷-۲.

	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1	S_0
1	0.02308	0.3684	-2.111	4.385	-4.026	1.36
2	0.5397	-1.243	-0.4662	4.014	-4.351	1.507
3	1.647	-4.944	3.955	2.006	-4.326	1.662
4	4.253	-13.76	43.61	-17.43	-2.838	2.711
5	11.14	-37.19	3.955	2.006	-4.326	1.662
6	21.35	-71.99	86.65	-38.8	-1.015	3.8
7	52.07	-176.9	216.8	-103.6	4.588	7.086
8	1.037	-2.893	1.483	3.155	-4.362	1.581

تابع $U(r)$

$$U(r) = U_5 r^5 + U_4 r^4 + U_3 r^3 + U_2 r^2 + U_1 r + U_0$$

جدول ۷-۴. ثوابت استفاده شده در تعیین عددی تابع U(r).

	K_1	K_2	a(Nm)	Q_n(Nm)	EPSILON	Nano-Plate Radius(Nm)	Nonlocal Parameter(Nm)
1	100	100	100	100	1.00E-07	30	30
2	100	100	100	100	1.00E-07	30	50
3	100	100	100	100	1.00E-07	30	70
4	100	100	100	100	1.00E-07	30	100
5	100	100	100	100	1.00E-07	30	150
6	100	100	100	100	1.00E-07	30	200
7	100	100	100	100	1.00E-07	10	100
8	100	100	100	100	1.00E-07	50	100

جدول ۷-۵. ضرایب ثابت تابع U(r) به ازای مقادیر مختلف داده شده در جدول ۷-۴.

	U_5	U_4	U_3	U_2	U_1	U_0
1	-324.9	1102	-1470	971.8	-323.6	44.56
2	-535.5	1803	-2381	1551	-505.4	67.48
3	-727.8	2443	-3212	2078	-670.9	88.35
4	-1060	3551	-4651	2994	-958.9	124.8
5	-1848	6175	-8060	5164	-1642	211.4
6	-3018	1.01E+04	-1.31E+04	8376	-2652	339.2
7	-6700	2.23E+04	-2.90E+04	1.84E+04	-5815	738.3
8	-630.7	2120	-2792	1812	-587.2	77.79

تابع $L(r)$

$$L(r) = L_5 r^5 + L_4 r^4 + L_3 r^3 + L_2 r^2 + L_1 r + L_0$$

جدول ۷-۶. ثوابت استفاده شده در تعیین عددی تابع L(r).

	K_1	K_2	a(Nm)	Q_n(Nm)	EPSILON	Nano-Plate Radius(Nm)	Nonlocal Parameter(Nm)
1	100	100	100	100	1.00E-07	30	30
2	100	100	100	100	1.00E-07	30	50
3	100	100	100	100	1.00E-07	30	70
4	100	100	100	100	1.00E-07	30	100
5	100	100	100	100	1.00E-07	30	150
6	100	100	100	100	1.00E-07	30	200
7	100	100	100	100	1.00E-07	10	100
8	100	100	100	100	1.00E-07	50	100

جدول ۷-۷. ضرایب ثابت تابع L(r) به ازای مقادیر مختلف داده شده در جدول ۷-۶.

	L_5	L_4	L_3	L_2	L_1	L_0
1	-324.9	1102	-1470	971.8	-323.6	44.56
2	-535.5	1803	-2381	1551	-505.4	67.48
3	-727.8	2443	-3212	2078	-670.9	88.35
4	-1060	3551	-4651	2994	-958.9	124.8
5	-1848	6175	-8060	5164	-1642	211.4
6	-3018	1.01E+04	-1.31E+04	8376	-2652	339.2
7	-6700	2.23E+04	-2.90E+04	1.84E+04	-5815	738.3
8	-630.7	2120	-2792	1812	-587.2	77.79

تابع $K(r)$

$$K(r) = K_5 r^5 + K_4 r^4 + K_3 r^3 + K_2 r^2 + K_1 r + K_0$$

جدول ۷-۸. ثوابت استفاده شده در تعیین عددی تابع K(r).

	K_1	K_2	a(Nm)	Q_n(Nm)	EPSILON	Nano-Plate Radius(Nm)	Nonlocal Parameter(Nm)
1	100	100	100	100	1.00E-07	30	30
2	100	100	100	100	1.00E-07	30	50
3	100	100	100	100	1.00E-07	30	70
4	100	100	100	100	1.00E-07	30	100
5	100	100	100	100	1.00E-07	30	150
6	100	100	100	100	1.00E-07	30	200
7	100	100	100	100	1.00E-07	10	100
8	100	100	100	100	1.00E-07	50	100

جدول ۷-۹. ضرایب ثابت تابع K(r) به ازای مقادیر مختلف داده شده در جدول ۷-۸.

	K_5	K_4	K_3	K_2	K_1	K_0
1	-0.6551	3.091	-6.455	7.807	-323.6	1.554
2	-0.8192	4.421	-10.03	12.2	-505.4	2.132
3	-1.646	11	-27.65	33.89	-670.9	5.003
4	-3.308	23.54	-60.59	74.09	-958.9	10.3
5	-5.994	42.95	-110.7	134.8	-1642	18.24
6	-14.8	104.5	-266.7	321.9	-2652	42.56
7	-0.941	5.356	-12.5	15.22	-5815	2.53

تابع $h(r)$

$$h(r) = h_5 r^5 + h_4 r^4 + h_3 r^3 + h_2 r^2 + h_1 r + h_0$$

جدول ۷-۱۰. ثوابت استفاده شده در تعیین عددی تابع h(r).

	K_1	K_2	a(Nm)	Q_n(Nm)	EPSILON	Nano-Plate Radius(Nm)	Nonlocal Parameter(Nm)
1	100	100	100	100	1.00E-07	30	30
2	100	100	100	100	1.00E-07	30	50
3	100	100	100	100	1.00E-07	30	70
4	100	100	100	100	1.00E-07	30	100
5	100	100	100	100	1.00E-07	30	150
6	100	100	100	100	1.00E-07	30	200
7	100	100	100	100	1.00E-07	10	100
8	100	100	100	100	1.00E-07	50	100

جدول ۷-۱۱. ضرایب ثابت تابع h(r) به ازای مقادیر مختلف داده شده در جدول ۷-۱۰.

	h_5	h_4	h_3	h_2	h_1	h_0
1	-0.5667	2.439	-4.797	5.856	-4.245	1.315
2	-0.4974	2.159	-4.361	5.53	-4.133	1.302
3	0.2179	-0.875	0.8749	0.9265	-2.069	0.924
4	1.665	-6.97	11.36	-8.307	2.096	0.156
5	3.844	-16.11	27.05	-22.1	8.314	-0.993
6	10.3	-43.31	73.84	-63.33	26.93	-4.437
7	-0.409	1.791	-3.738	4.994	-3.899	1.26
8	-0.5667	2.439	-4.797	5.856	-4.245	1.315

تابع $M(r)$

$$M(r) = M_5 r^5 + M_4 r^4 + M_3 r^3 + M_2 r^2 + M_1 r + M_0$$

جدول ۷-۱۲. ثوابت استفاده شده در تعیین عددی تابع M(r).

	K_1	K_2	*a(Nm)*	Q_n*(Nm)*	*EPSILON*	*Nano-Plate Radius(Nm)*	*Nonlocal Parameter(Nm)*
1	*100*	*100*	*100*	*100*	*1.00E-07*	*30*	*30*
2	*100*	*100*	*100*	*100*	*1.00E-07*	*30*	*50*
3	*100*	*100*	*100*	*100*	*1.00E-07*	*30*	*70*
4	*100*	*100*	*100*	*100*	*1.00E-07*	*30*	*100*
5	*100*	*100*	*100*	*100*	*1.00E-07*	*30*	*150*
6	*100*	*100*	*100*	*100*	*1.00E-07*	*30*	*200*
7	*100*	*100*	*100*	*100*	*1.00E-07*	*10*	*100*
8	*100*	*100*	*100*	*100*	*1.00E-07*	*50*	*100*

جدول ۷-۱۳. ضرایب ثابت تابع M(r) به ازای مقادیر مختلف داده شده در جدول ۷-۱۲.

	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0
1	*-0.6821*	*2.885*	*-5.579*	*6.665*	*-4.727*	*1.438*
2	*-0.9038*	*3.726*	*-7.063*	*8.245*	*-5.692*	*1.688*
3	*-1.556*	*6.238*	*-11.81*	*13.75*	*-9.254*	*2.635*
4	*1.665*	*-6.97*	*11.36*	*-8.307*	*2.096*	*0.156*
5	*-2.126*	*9.379*	*-19.75*	*24.07*	*-15.81*	*4.244*
6	*4.082*	*12.36*	*-79.88*	*120.7*	*-72.16*	*14.85*
7	*-1.023*	*4.164*	*-7.835*	*9.095*	*-6.234*	*1.834*
8	*-0.6821*	*2.885*	*-5.579*	*6.665*	*-4.727*	*1.438*

Abstract

Nonlocal nonlinear axisymmetric vibration of a double-circular-nanoplate-system is considered. The two nanoplates are assumed to be bonded by an enclosing nonlinear elastic medium. Situation of this type would arise in multiple graphene sheets dispersed in nanocomposites. We use one approache to determine the nonlinear modes and natural frequencies of a clamped nanoplates are assumed to be bonded by an enclosing nonlinear elastic medium with distributed cubic nonlinearity. In this approach, we use the method of multiple scales to treat the governing partial-differential equation and boundary conditions directly. The study highlights that the smallscale effects considerably influence the transverse vibration of nonlocal double-circular-nanoplate-system(NDCNPS). The small-scale effects in NDCNPS are higher with the increasing values of nonlocal parameter for the case of synchronous modes of vibration than in the asynchronous modes. The increase of the stiffness of the coupling springs in NDCNPS reduces the small-scale effects during the asynchronous modes of vibration.

Keywords: Nonlinear Vibration, Multiple Scale, Double Nano-Plate System

Shahrood University of Technology

School of Mechanical Engineering

Nonlinear vibration of double circular nanoplate system bonded by an enclosing elastic medium

Reza Soltani

Supervisor:

Dr A.K.Mohammadi

September 2015