





دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مکانیک

گروه : تبدیل انرژی

بررسی شرایط مرزی خروجی در جریان اختلاطی آزاد

غیر قابل تراکم

دانشجو : حمیدرضا سنندجی

استاد:

(دکتر محمد جواد مغربی)

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار :

آذر ماه ۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مکانیک

گروه : تبدیل انرژی

پایان نامه کارشناسی ارشد (رساله دکتری) آقای / خانم
تحت عنوان:

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
(رساله دکتری) مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که همواره حامی من بودند

و تقدیم به تمام

مردان و زنانی

که در راه سربلندی ایران کوشیدند.

تقدیر و تشکر

سپاس خدای بی‌همتا ، که توفیق تشکر از زحمات استادی دلسوز را به من داد . بی‌شک بدون وجود کمک و راهنمایی‌های استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مغربی ، اتمام پروژه از محالات بود. در این قسمت لازم می‌دانم از راهنمایی‌های دوست عزیزم جناب آقای احد ضرغامی ، قدردانی نمایم. در طول انجام پروژه مشکلاتی بوجود می‌آید که توسط مجموعه‌ای از انسانها برطرف می‌شود، لذا از خداوند متعال برای کلیه کسانی که مرا در انجام این پروژه یاری نمودند ، موفقیت و پیروزی خواستارم.

حمید رضا سنندجی

hr_sanandaji@yahoo.com

آذر ماه ۱۳۸۷

این جانب حمید رضا سنندجی تأیید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودم می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

آذر ماه ۱۳۸۷

چکیده:

در این رساله سعی بر آن شده است که شرایط مرزی خروجی مناسبی برای جریان اختلاطی ارائه گردد. برای این منظور دامنه محاسباتی به طول محدود و عرض نامحدود در نظر گرفته شد. نامحدود در نظر گرفتن عرض دامنه محاسباتی به این جهت است که مرز مادی بر روی جریان تاثیری نگذارد. معادلات حاکم بر دامنه محاسباتی به صورت معادلات ناویر استوکس در نظر گرفته شد. و فرم چرخشی این معادلات به صورت مستقیم حل گردید. برای بررسی شرایط مرزی دو شرط مرزی در خروجی جریان قرار داده شد. نتایج حاصله از این رساله تاثیر مستقیم در افزایش سرعت و دقت تحلیلهای عددی از این قبیل دارد.

فهرست مطالب

صفحه	موضوع
و	تقدیر و تشکر
ح	چکیده
۱	مقدمه
۴	فصل اول _ مروری بر کارهای انجام شده
۴	۱-۱ تحقیقات انجام شده
۱۰	فصل دوم _ معادلات ریاضی حاکم بر جریان
۱۰	۱-۲ مقدمه
۱۱	۲-۲ معادله حاکم بر جریان
۱۳	۳-۲ شرایط مرزی
۱۵	۴-۲ شرایط اولیه
۱۷	فصل سوم _ روشهای عددی
۱۷	۱-۳ مقدمه
۱۸	۲-۳ روش تفاضل محدود فشرده برای محاسبه مشتقات
۲۰	۲-۳-۲ بررسی روابط مشتقی ارائه شده در جهت جریان
۲۲	۳-۳-۱ نگاشت
۲۳	۳-۳-۲ بررسی فرمولهای ارائه شده برای مشتق در جهت لایها
۲۵	۴-۳ پیشروی در زمان
۲۸	فصل چهارم _ الگوریتم حل و بررسی صحت جواب
۲۸	۱-۴ مقدمه
۲۸	۲-۴ روش حل
۳۱	۳-۴-۱ ارزیابی کد و شبیه سازی عددی
۳۱	۳-۴-۲ گردابه استوارت
۳۴	۳-۴-۳ لایه اختلاطی دو بعدی آرام
۳۷	فصل ششم _ بررسی نتایج بدست آمده برای تحلیل جریان اختلاطی
۳۷	۱-۵ مقدمه
۳۸	۲-۵ جریان اختلاطی دو بعدی آرام
۴۳	۳-۵ جریان اغتشاشی دو بعدی مغشوش
۵۵	۴-۵ بررسی شرایط مرزی خروجی
۶۸	نتیجه گیری
۷۱	پیشنهادات

فهرست اشکال

صفحه	موضوع
۵	شکل ۱-۱: نمودار خطوط جریان برای جریان اختلاطی
۲۱	شکل ۱-۳: مقایسه حل عددی و تحلیلی مشتق مرتبه اول
۲۱	شکل ۲-۳: مقایسه حل عددی و تحلیلی مشتق مرتبه دوم
۲۴	شکل ۳-۳: مقایسه حل عددی و تحلیلی مشتق مرتبه اول همراه با نگاشت کتانژانتی
۲۴	شکل ۴-۳: مقایسه حل عددی و تحلیلی مشتق مرتبه دوم همراه با نگاشت کتانژانتی
۲۶	شکل ۵-۳: بررسی خطای رانج کوتای مرتبه سه
۳۳	شکل ۱-۴: ماکزیمم خطا بر حسب زمان برای گردابه استوارت
۳۳	شکل ۲-۴: گراف گردابه استوارت
۳۵	شکل ۳-۴: برازش کردن تابعی به صورت $a \times x^{1/2} + c$ بر δ_{ω} در جریان آرام اختلاط
۳۸	شکل ۱-۵: تاثیر عدد رینولدز در رشد لایه اختلاطی برای جریان آرام
۳۹	شکل ۲-۵: سرعت در راستای جریان در پنج نقطه متفاوت از دامنه محاسباتی بر روی محور $y=0$
۴۰	شکل ۳-۵: سرعت در راستای عمود بر جریان در پنج نقطه متفاوت از دامنه محاسباتی بر روی محور $y=0$
۴۱	شکل ۴-۵: پروفیل بدست آمده سرعت متوسط در مختصات خود تشابعی برای جریان آرام
۴۲	شکل ۵-۵: رشد ضخامت ورتیسیتیه و برازش کردن منحنی بر آن برای جریان آرام
۴۲	شکل ۶-۵: پروفیل سرعت بر روی محور y ها برای لایه اختلاطی آرام
۴۵	شکل ۷-۵: نمودار $U - U_{average}$ در نقطه $X=50$ بر روی محور y ها بر حسب زمان
۴۵	شکل ۸-۵: نمودار $U - U_{average}$ در نقطه $X=100$ بر روی محور y ها بر حسب زمان
۴۶	شکل ۹-۵: نمودار $U - U_{average}$ در نقطه $X=150$ بر روی محور y ها بر حسب زمان
۴۶	شکل ۱۰-۵: نمودار $U - U_{average}$ در نقطه $X=200$ بر روی محور y ها بر حسب زمان
۴۷	شکل ۱۱-۵: نمودار سرعت لحظه ای U در دو نقطه جریان اختلاطی
۴۷	شکل ۱۲-۵: نمودار سرعت لحظه ای V در دو نقطه جریان اختلاطی
۴۸	شکل ۱۳-۵: نمودار سرعت متوسط در جریان مغشوش در مختصات خود تشابهی به ازای مقادیر

موضوع

صفحه

مختلف X

- شکل ۵-۱۴: نمودار سرعت متوسط در جریان مغشوش بر روی محور y ها
- شکل ۵-۱۵: نمودار اغتشاشات u'_{rms}/\bar{U} بر حسب k در چهار ایستگاه مختلف
- شکل ۵-۱۶: پروفیل اغتشاشات u'_{rms}/\bar{U} در مختصات خود تشابهی در چهار ایستگاه مختلف
- شکل ۵-۱۷: پروفیل اغتشاشات $u'v'_{rms}/\bar{U}$ در مختصات خود تشابهی در چهار ایستگاه مختلف
- شکل ۵-۱۸: پروفیل اغتشاشات v'_{rms}/\bar{U} در مختصات خود تشابهی در چهار ایستگاه مختلف
- شکل ۵-۱۹: نمودار اغتشاشات بی بعد u'_{rms} ، v'_{rms} و $u'v'_{rms}$ در نقطه $x=50$
- شکل ۵-۲۰: نمودار اغتشاشات بی بعد u'_{rms} ، v'_{rms} و $u'v'_{rms}$ در نقطه $x=150$
- شکل ۵-۲۱: ساختار جریان اختلاطی به ازای سه رینولدز مختلف
- شکل ۵-۲۲: مقایسه کردن δ بر حسب X برای دو شرط مرزی انتقالی خطی و غیر خطی در جریان آرام
- شکل ۵-۲۳: مقایسه کردن مقادیر \bar{U} بر حسب y ها مختلف در خروجی دامنه محاسباتی در جریان اختلاطی آرام به ازای دو شرط مرزی خروجی انتقالی خطی و انتقالی غیر خطی
- شکل ۵-۲۴: نمودار δ بر حسب X برای رینولدز $Re=3$ برای شرط مرزی انتقالی_ویسکوز غیر خطی با دو طول مختلف بازه محاسباتی $LX=100$ و $LX=150$
- شکل ۵-۲۵: نمودار δ بر حسب X برای رینولدز $Re=3$ برای شرط مرزی انتقالی_ویسکوز غیر خطی و شرط مرزی انتقالی غیر خطی
- شکل ۵-۲۶: پروفیل سرعت متوسط در روی محور y ها در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای دو شرط مرزی خروجی متفاوت انتقالی_ویسکوز خطی و غیر خطی، $LX=100$
- شکل ۵-۲۷: پروفیل سرعت متوسط در $x=100$ در یک جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای دو شرط مرزی خروجی متفاوت انتقالی_ویسکوز خطی و غیر خطی، $LX=100$
- شکل ۵-۲۸: پروفیل سرعت متوسط در روی محور y ها در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای دو شرط مرزی خروجی متفاوت انتقالی_ویسکوز خطی و غیر خطی طول محاسباتی برابر $LX=200$
- شکل ۵-۲۹: پروفیل سرعت متوسط در $X=200$ در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای دو شرط مرزی خروجی متفاوت انتقالی_ویسکوز خطی و غیر خطی طول محاسباتی برابر $LX=200$

موضوع

صفحه

- شکل ۳۰-۵: پروفیل سرعت متوسط بر روی محور y ها در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای شرایط مرزی خروجی انتقالی_ویسکوز غیر خطی با طول محاسباتی $Lx=100$ و $Lx=200$
- شکل ۳۱-۵: پروفیل سرعت متوسط در $x=100$ در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای شرایط مرزی خروجی انتقالی_ویسکوز غیر خطی با طول محاسباتی $Lx=100$ و $Lx=200$
- شکل ۳۲-۵: پروفیل سرعت متوسط بر روی محور y ها در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای شرایط مرزی خروجی انتقالی_ویسکوز خطی با طول محاسباتی $Lx=100$ و $Lx=200$
- شکل ۳۳-۵: پروفیل سرعت متوسط در $x=100$ در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای شرایط مرزی خروجی انتقالی_ویسکوز خطی با طول محاسباتی $Lx=100$ و $Lx=200$
- شکل ۳۴-۵: مقایسه اختلاف روش انتقالی_ویسکوز با طول ۱۵۰ و روش انتقالی با طول ۱۰۰
- شکل ۳۵-۵: مقایسه اختلاف روش انتقالی با طول ۱۵۰ و روش انتقالی با طول ۱۰۰
- شکل ۳۶-۵: سرعت بر روی خط مرکزی برای دو شرط مرزی مختلف
- شکل ۳۷-۵: اختلاف بین دو نتیجه بدست آمده در شکل ۳۷-۵

مقدمه:

جریان اختلاطی صفحه ای^۱ در نتیجه یکی شدن دو جریان موازی سیال که دارای سرعت‌های مختلفی می باشد به وجود می آید. این دو سیال در انتهای یک صفحه جدا کننده^۲، که فرض می شود دارای ضخامت ناچیز است با هم مخلوط می شوند. در پایین دست این تلاقی انتقال مومنوم بین دو جریان سیال صورت می گیرد. ناحیه اختلاطی در واقع به ناحیه ای گفته می شود که در آن فرآیند یکی شدن دوسیال صورت می گیرد.

ساختار ساده تشکیل لایه اختلاطی دلیل بر متعارف بودن این پدیده در طبیعت است. به موجب این امر، جریان اختلاطی کاربردهای علمی و صنعتی فراوانی دارد. تمامی جریانها از جمله جریان اختلاطی از لحاظ نوع مرز به دو دسته محدود و نامحدود^۳ طبقه بندی می شوند. به جریانی که سیال هیچ تماسی با مرز مادی ندارد جریان برشی آزاد گویند. جریان اختلاطی مورد مطالعه در این تحقیق یکی از انواع جریانهای برشی آزاد است.

جهت تحقیق و مطالعه موضوعات علمی سه روش اساسی وجود دارد.

- کار آزمایشگاهی
- کار تئوری
- حل و شبیه سازی عددی

^۱ Plane mixing layer

^۲ Splitter plate

^۳ Unbounded

در شبیه سازی عددی جریان یک سیال، شرط مرزی حاکم بر دامنه محاسباتی تاثیر مستقیم در دقت جوابهای بدست آمده دارد. در این تحقیق سعی بر آن است، به بررسی انواعی از شرایط مرزی خروجی برای جریان اختلاطی آزاد بپردازیم.

فصل اول

مروری بر تحقیقات انجام شده

فصل اول _ مروری بر تحقیقات انجام شده

۱-۱ تحقیقات انجام شده

شلختینگ [۲۵] حل معادله لایه مرزی برای لایه اختلاطی آرام دو بعدی بین دو جریان با خاصیت یکسان که دارای سرعتهای موازی و مقادیر متفاوت U_1 و U_2 است را انجام داد. شلختینگ فرض کرده است سرعت در جهت عمود بر جریان بسیار کوچکتر از سرعت در جهت جریان است. بنابر این معادله لایه مرزی بدون مولفه فشار معتبر خواهد بود. وی با بکار بردن تغییر متغیراتی معادله حاکم بر جریان را به صورت زیر بدست آورد.

$$ff'' + 2f''' = 0 \quad (1_1)$$

متغیرات به کار گرفته شده برای تحلیل جریان آرام اختلاطی به صورت زیر است.

$$= y \cdot \sqrt{U_1 / \nu} x \quad (2_1)$$

$$= \sqrt{\nu U_1} x f \quad (3_1)$$

$$U = f' \quad (4_1)$$

شلختینگ برای حل معادله فوق شرایط مرزی زیر را به کار برد.

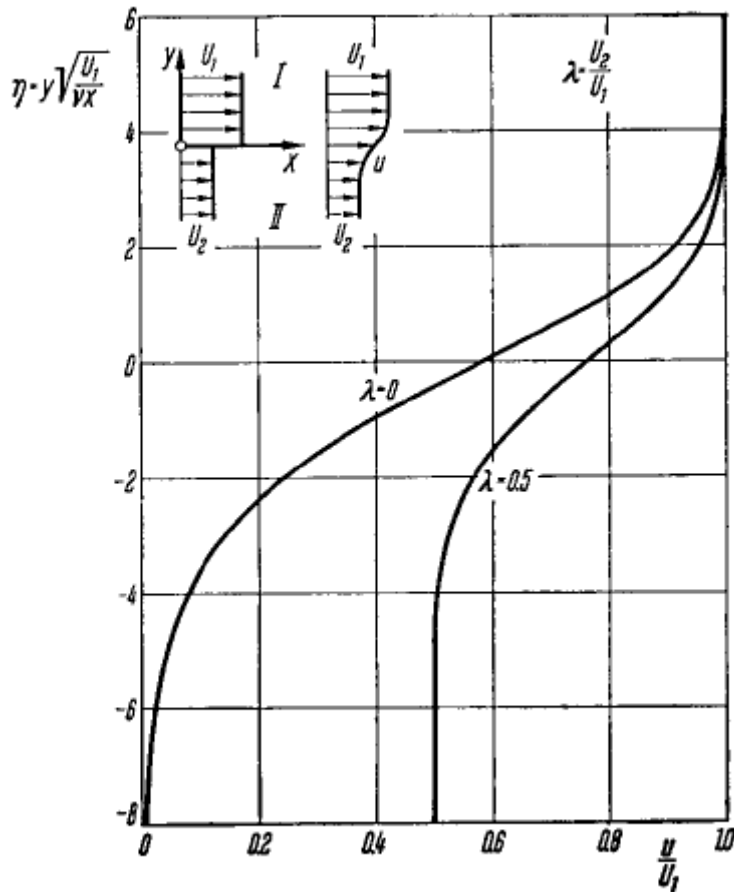
$$= +\infty \rightarrow f' = 1 \quad (5_1)$$

$$= -\infty \rightarrow f' = U_2 / U_1 = \lambda \quad (6_1)$$

همچنین با توجه به شکل (۲-۱) در $y=0$ میزان $\psi = 0$ است بنابراین داریم

$$= 0 \rightarrow f = 0 \quad (۷-۱)$$

حل معادله حاکم بر مسئله با شرط مرزی آورده شده به صورت تحلیلی امکان پذیر نیست. و برای حل آن به ناچار فقط باید از روشهای عددی استفاده کرد. نتیجه حاصل به صورت گراف زیر است.



شکل ۱-۱: نمودار خطوط جریان برای جریان اختلاطی _ [۲۵]

گرتلر^۴ در سال ۱۹۴۲ با بکارگیری تحلیل لزجت گردابه پروفیل سرعت در یک لایه اختلاط دو جریان موازی را در حالی که جریان بالایی با سرعت U_2 و جریان پایینی با سرعت U_1 حرکت می کند را حل

^۴ gortler

کرد. از شرط مرزی مسئله دیده می شود که جریان در نقطه میانی ، غیر متقارن است و شرایط مرزی زیر را داریم:

$$u_{\infty} = U_1 \quad (8_1)$$

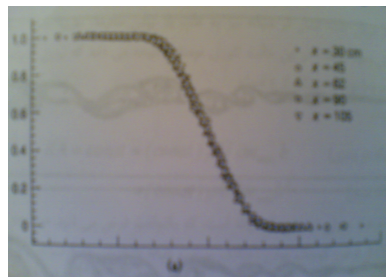
$$u_{\infty} = U_2 \quad (9_1)$$

$$u_{\infty} = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \quad (10_1)$$

وی پاسخ مسئله را به صورت زیر ارائه کرد

$$u = \frac{\bar{u} - U_1}{U_2 - U_1} = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\sigma y}{x} \right) \right] \quad (11_1)$$

پلسنیاک و جانستون^۵ در سال ۱۹۸۸ داده هایی برای جریان اختلاطی در یک کانال آب با سرعت $U_2/U_1 = 0.5$ بدست آوردند. این داده ها نتیجه فرمول گرتلر را به خوبی تایید می کرد. آنها نتایج کار خود را بر حسب y/δ_w بی بعد کردند. نتایج کار آنها به صورت گرافهای زیر بود.



شکل ۱_۲: نمودار سرعت متوسط جریان مغشوش اختلاطی در مختصات خودتشابهی [۶]

جهت بررسی تحقیقات عددی در مورد جریان اختلاطی می توان گفت که در کل سه روش اساسی برای شبیه سازی جریان وجود دارد.

- روش ورتکس

^۵ Plesniak & johnstom

• روش شبیه سازی لایه اختلاطی توسعه یافته زمانی

• روش شبیه سازی لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی

محاسبات اولیه بیشتر به روش ورتکس انجام می شد که این امر به علت حضور ورتیسیتته های بزرگ در این جریان بوده که بازدهی این روش عددی را تضمین می کرد.

آکتون^۶ در سال ۱۹۷۶ انباشتگی صفحه ورتکس را برای فهم نحوه رشد لایه اختلاطی شبیه سازی کرد.

آشورت^۷ در سال ۱۹۷۹ اولین کسی بود که نتایج خود را در مورد لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی به روش ورتکس منتشر کرد.

در شبیه سازی لایه اختلاطی توسعه یافته زمانی، دامنه محاسباتی به طرف پایین دست جریان با سرعت

متوسط لایه جابجا می شود. سپس جریان در گام زمانی اجازه توسعه می یابد. اولین شبیه سازی با این

نگرش در سال ۱۹۸۷ توسط منصور^۸ و همکاران انجام شد. نتایج حاصل از تحقیقات وی نشان داد که

مکانیزم جفت شدن گردابه ها، دلیل رشد لایه می باشد. شبیه سازی وی حضور رفتار خود تشابهی را در مومنتوم متوسط جریان نشان می داد.

کین^۹ در سال ۱۹۸۱ این تحقیق را با اعمال یک تابع تطبیق^{۱۰} که منجر به محدود شدن دامنه

فیزیکی جریان آزاد در جهت Z ، از $Z \rightarrow \pm\infty$ به یک دامنه محدود محاسباتی در جهت عرضی جریان شد ادامه داد.

^۶ Acton

^۷ Ashurts

^۸ Mansour

^۹ Cain

^{۱۰} Mapping

رایلی و متکالف^{۱۱} در سال ۱۹۸۰ شبیه سازی توسعه یافته مکانی را با افزایش میزان تراکم شبکه بندی گسترش داد. نتایج آنها تقابل بین اغتشاشات هارمونیک و تاثیر این اغتشاشات بر روی رشد لایه را مشخص کرد. در تحقیقات اخیر، معادله انتقال بعضی اجزا، به شبیه سازی توسعه یافته زمانی انجام گرفته توسط رایلی، اضافه شد. در این تحقیقات رشد لایه واکنشی مورد بررسی قرار گرفت نتایج این تحقیقات نشان داد که آزاد شدن گرما منجر به کاهش ضخامت لایه می شود شبیه سازی توسعه یافته مکانی از دو روش قبل مشکل تر می باشد. تنها با استفاده از ابر کامپیوترها امکان این نوع شبیه سازیها، ممکن می باشد. در بسیاری از این نوع شبیه سازیها مسئله محدود به مسائل دو بعدی می باشد. منصور در سال ۱۹۸۵ از یک روش جالب برای حل استفاده کرد. او روش ورتکس را در محدوده اولیه لایه استفاده نمود، سپس شبکه اولیه را در انتهای محدوده اعمال کرد تا به این ترتیب محاسبات جزئیات حوزه جریان در ناحیه عمل متقابل گردابه ها امکان پذیر گردد.

گرین استین^{۱۲} و همکاران در سال ۱۹۸۶ شبیه سازی لایه اختلاطی توسعه یافته مکانی را با استفاده از تفاضل محدود انجام دادند. در این نوع شبیه سازی از شبکه بندی و تعداد گره های زیاد استفاده نشد. تحقیقات جدید در زمینه شبیه سازی توسعه یافته زمانی لایه اختلاطی اجباری و لایه اختلاطی واکنشی می باشد.

^{۱۱} Riley & Metcalfe

^{۱۲} Grinstein, et al.

فصل دوم

معادلات ریاضی حاکم بر جریان

فصل دوم _ معادلات ریاضی حاکم بر جریان

۲-۱- مقدمه :

مطالب آورده شده در این فصل

- معادله حاکم بر جریان
- شرایط مرزی
- شرایط اولیه

معادلات ریاضی حاکم بردامنه محاسباتی مسئله از معادله ناویر استوکس تراکم ناپذیر مشتق شده

است. این معادله در یک بازه محاسباتی^{۱۳} حل گردیده است که در جهت X محدود است. و در جهت Y

از دو طرف نا محدود است. این امر به دلیل این است تا تاثیر مرز محیط مادی در آن حس نشود. در

جهت Y ها از نگاشت^{۱۴} استفاده شده است. معادله حاکم بر مسئله توسط یک سرعت و طول مشخصه به

صورت بی بعد در آمده است. این سرعت برابر سرعت متوسط جریان در ورودی است. و طول مشخصه

برابر با نصف طول گردابه ورودی در نظر گرفته شده است. بنابراین عدد بی بعد رینولدز به این صورت

$$Re = \frac{U * L}{\nu}$$

تعریف می شود. که در آن ν لزجت سینماتیکی سیال عامل می باشد.

^{۱۳} Domain

^{۱۴} Mapping

۲-۲ معادله حاکم بر جریان :

پروفیل سرعت اولیه با یک جریان اولیه^{۱۵} $U_0(y)$ مشخص شده است. جریان اختلاطی اجازه می یابد تا در جهت X در دامنه محاسباتی توسعه یابد. در جهت Y ها مجموعه از هر دو طرف نامحدود است. در این تحقیق از فرم چرخشی معادلات ناویر استوکس استفاده شده است. و چون معادله ناویر استوکس به صورت مستقیم حل شده است. به آن " حل مستقیم عددی"^{۱۶} گویند.

فرم کلی بی بعد معادله ناویر استوکس به صورت زیر است.

$$\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (1-2)$$

با توجه به رابطه زیر :

$$A \cdot B = (B \cdot \nabla) A + (A \cdot \nabla) B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B) \quad (2-2)$$

برای حالتی که $A = B = \vec{U} = (U, V, W)$ معادله فوق به صورت زیر در می آید.

$$\nabla \cdot \vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{U} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{U} \cdot \vec{U}) \quad (3-2)$$

که $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ است. اگر معادله (۳-۲) را در (۱-۲) جایگزین کنیم معادله زیر بدست می آید.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \vec{H} - \nabla \left(p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (4-2)$$

که در آن $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3) = \vec{U} \times \vec{\omega}$. اگر عملگر کرل را در معادله (۴-۲) اعمال کنیم داریم

$$\frac{\partial \nabla \times \vec{U}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \left(p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times \vec{U}) \quad (5-2)$$

با توجه به اینکه عبارت $\nabla \times \nabla(\text{Scalar}) = 0$ برابر با صفر هست داریم.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (6-2)$$

^{۱۵} Initial flow

^{۱۶} DNS

با گرفتن کرل از معادله (۶-۲) داریم

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{U}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times (\nabla \times \vec{U})) \quad (7-2)$$

با توجه به رابطه پیوستگی و با به کار بردن رابطه زیر داریم:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{U}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U} \quad (8-2)$$

معادله (۷-۲) به معادله (۹-۲) تبدیل می گردد

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = -\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \vec{U} \quad (9-2)$$

همچنین از پیوستگی داریم

$$\vec{J} = 0 \quad (10-2)$$

عمده ترین مزیت استفاده از فرم چرخشی معادله ناویراستوکس حذف ترم فشار در معادله فوق است. از

دیگر مزایای این روش کاهش تعداد متغییرات مستقل مسئله است که این امر سبب می شود مشکلات

ناشی از حافظه کوتاه مدت رایانه بر طرف شود. اما این امر موجب افزایش درجه معادله دیفرانسیل

حاکم بر جریان شده و دقت جوابها پایین می آید.

برای حالت دو بعدی که در این تحقیق به آن پرداخته شده است. معادله حاکم بر جریان به صورت زیر

است.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - \frac{\partial H_2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 U \quad (11-2)$$

لازم به ذکر است که در معادله (۲ _ ۱۱) مقادیر سرعت به صورت زیر است.

$$x, y, t) = u(x, y, t) + U_0(y) \quad (12-2)$$

$$x, y, t) = v(x, y, t) \quad (13-2)$$

که در معادله آورده شده در صفحه قبل U میزان سرعت در جریان است و u میزان سرعت محاسباتی است.

۲_۲_ شرایط مرزی

ابتدا باید بیان کرد که تمامی شرایط مرزی که در این بخش بیان می شود را باید به متغیرهای محاسباتی تبدیل کرد. این کار به دلیل آن است که معادلات حاکم بر مسئله یعنی همان معادله ناویر استوکس و پیوستگی برای متغیرهای محاسباتی حل شده است. معادله (۲-۱۱) که حاکم بر دامنه محاسباتی ما است در جهت y ها از درجه دوم است و نیاز به دو شرط مرزی در مثبت و منفی بی نهایت دارد. با توجه به اینکه در مثبت و منفی بینهایت سرعت معلوم است. می توان به آسانی سرعت را روی گرهای بالایی و پایینی دامنه محاسباتی قرار داد^{۱۷}. ولی معادله حاکم بر دامنه محاسباتی در جهت x ها از درجه چهارم بوده لذا احتیاج به چهار شرط مرزی در این جهت داریم. مقادیر u در مرز خروجی^{۱۸} و ورودی^{۱۹} دامنه محاسباتی مشخص است. همچنین مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ در مرز ورودی و خروجی مشخص است که این شرایط موسوم به شرط مرزی دریچلت^{۲۰} و نیومن^{۲۱} است. برای اعمال شرط مرزی دریچلت در خروجی دامنه از شرط مرزی استفاده می شود که خاصیت انعکاس ناپذیری^{۲۲} داشته باشد. این امر سبب می شود که جریان به صورت طبیعی از مرز خروجی عبور کند. و اغتشاشات ایجاد شده در دامنه محاسباتی پس از برخورد با مرز خروجی به درون دامنه محاسباتی منعکس نشوند. در این تحقیق سعی بر آن شده که به بررسی انواع مختلف این شرط مرزی پرداخته شود.

انواع شرایط مرزی ارائه شده در این تحقیق به صورت زیر است

^{۱۷} Force

^{۱۸} Out flow boundary condition

^{۱۹} In flow boundary condition

^{۲۰} Dirichlet boundary condition

^{۲۱} Neumann boundary condition

^{۲۲} Non _ reflecting

شرط مرزی انتقالی خطی

$$\frac{f}{\rho} = -C \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۱۴-۲)$$

شرط مرزی انتقالی غیر خطی

$$\frac{f}{\rho} = -\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۱۵-۲)$$

شرط مرزی انتقالی _ لزجی خطی

$$\frac{f}{\rho} = -C \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \psi) \quad (۱۶-۲)$$

شرط مرزی انتقالی _ لزجی غیر خطی

$$\frac{f}{\rho} = -\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \psi) \quad (۱۷-۲)$$

در روابط فوق ψ با هر کدام از مولفه های سرعت u , v جایگزین می شود. همچنین در فرم خطی C سرعت جابجایی ساختار می باشد که توسط سعی و خطا بدست می آید. بدین ترتیب که ابتدا برای C یک حدس اولیه زده سپس سرعت یک موج را در دامنه محاسباتی اندازه می گیریم. سپس مقدار C را آنقدر تغییر داده تا سرعت C با سرعت حرکت امواج در دامنه محاسباتی یکی شود.

لانگ^{۲۳} نشان داد که برای ساختارهای بزرگ لایه اختلاطی C برابر با سرعت متوسط لایه اختلاطی است. باید متذکر شویم که در جریان با رینولدز پایین ساختار لایه مرزی به صورت طبیعی بزرگ است.

۲_۴_ شرایط اولیه

^{۲۳} Long

شرط اولیه برای جریان اختلاطی همراه با اغتشاش یا بدون اغتشاش در تمامی دامنه محاسباتی برابر است با پروفیل سرعت ورودی برای جریان بدون اغتشاش است.

فصل سوم

روشهای عددی

فصل سوم - روشهای عددی

۳_۱_ مقدمه :

همانطور که قبلا اشاره شد معادلات حاکم بر بازه محاسباتی فرم چرخشی معادلات ناویر استوکس است. برای استفاده از این معادلات باید بتوانیم مشتقات در جهت X و Y را محاسبه کنیم. همچنین نیازمند محاسبه گام برداری در زمان هستیم. برای این منظور ما از روش اختلاف محدود فشرده در جهت X ها و Y ها استفاده کردیم. البته لازم به ذکر است که معادلات به کار برده شده در جهت Y ها همراه با نداشت کتانژانت بوده که این امر سبب تغییراتی در اوپراتورهای مشتق در این جهت شده است. برای گام برداری در زمان از روش معرف رانج کوتای مرتبه سوم استفاده شده است. در این فصل بررسی روشهای محاسبه مشتق به کار گرفته شده در کد می پردازیم.

۳-۲-۱- روش تفاضلات محدود فشرده برای محاسبه مشتقات

در این تحقیق برای محاسبه مشتقات جزئی بر روی مکان از روش اختلاف محدود فشرده استفاده شده است. روش مذکور که فرم پیوسته ای برای محاسبه مشتق است اولین بار توسط لیلی [۲۳] ارائه گردید. با استفاده از این روش می توان مشتقات موجود در معادلات حاکم بر جریان و شرایط مرزی را با دقت بالایی محاسبه کرد. اگر ما بخواهیم مشتق اول تابعی را روی بازه یک بعدی که شامل J گره است محاسبه کنیم. لیلی فرم زیر را پیشنهاد می کند.

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha+2}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha-1}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (1-3)$$

به این ترتیب برای شبکه یک بعدی با J گره محاسباتی ما یک دستگاه معادله J معادله J مجهول داریم. که به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4\alpha-1}{12\Delta x} & -\frac{\alpha+2}{3\Delta x} & 0 & \frac{\alpha+2}{3\Delta x} & \frac{4\alpha-1}{12\Delta x} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه برای بدست آوردن مشتق‌هایی از مرتبه شش یا چهار ، باید $\alpha = 4$ یا $\alpha = 3$ باشد . در این حالت دستگاه معادلات فوق تبدیل به یک دستگاه معادلات ناهنجار می شود. برای رفع این مشکل دو طرف معادله (۱-۳) را در $\frac{1}{\alpha}$ ضرب می کنیم. بدین ترتیب رابطه (۱-۳) به صورت رابطه زیر در می آید.

$$(3-3) \quad f'_{j-1} + \alpha f'_j + f'_{j+1} = \frac{1+2\alpha}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4-\alpha}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_j)$$

همچنین لیلی برای گرههای مرزی که نمی توان از معادله بالا استفاده کرد فرم زیر را پیشنهاد کرد.

$$(۴-۳) \quad j = 0 \longrightarrow f'_0 + 2f'_1 = \frac{1}{2\Delta x}(-5f_0 + 4f_1 + \dots$$

$$(۵-۳) \quad j = J \longrightarrow f'_J + 2f'_{J-1} = \frac{1}{2\Delta x}(5f_J - 4f_{J-1} - f_J$$

لیلی برای محاسبه مشتق دوم نیز معادله ای به صورت زیر ارائه داد.

$$(۶-۳) \quad f''_{j-1} + \gamma f''_j + f''_{j+1} = \frac{4(\gamma-1)}{3\Delta x^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10-\gamma}{12\Delta x^2}(f_{j-2} - 2f_j + f_j$$

در معادله بالا اگر $\gamma = \frac{11}{2}$ باشد دقت جوابهای حاصله از مرتبه شش می شود. لیلی برای نقاط واقع در

مجاور گرههای مرزی معادلات زیر را پیشنهاد کرد.

$$(۷-۳) \quad f''_1 + 11f''_2 = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_1 - 27f_2 + 15f_3 - \dots$$

$$(۸-۳) \quad f''_J + 11f''_{J-1} = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_J - 27f_{J-1} + 15f_{J-2} - f_J$$

فرمولهای ارائه شده در بالا برای محاسبه مشتق و انتگرال تمامی پارامترها نسبت به مکان بجز u به کار

می رود. چون در ورودی و خروجی جریان $\frac{\partial u}{\partial x}$ به عنوان شرط مرزی مسئله باید در مسئله اعمال گردد.

برای محاسبه مشتق دوم برای ترم سرعت در جهت جریان از معادله (۴-۳) یک بار مشتق می گیریم.

معادله (۹-۳) بدست می آید.

$$(۹-۳) \quad f''_1 + 2f''_2 = \frac{1}{2\Delta x}(-5f'_1 + 4f'_2 + \dots$$

به راحتی می توان نشان داد معادله (۹-۳) معادل رابطه (۱۰-۳) است.

$$(۱۰-۳) \quad f''_1 + 2f''_2 = \frac{-3}{\Delta x}f'_1 + \frac{1}{2\Delta x}(f'_1 + 4f'_2 + \dots$$

با جایگزاری طرف چپ رابطه (۱-۳) و با فرض اینکه $\alpha = 4$ است. برای ترمهای داخل پارانترز به رابطه

زیر می رسیم.

$$(11-3) \quad f_1'' + 2f_2'' = \frac{-3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{(x=0)} - \frac{3}{2\Delta x^2} (f_1 - \dots)$$

معادله فوق بر روی مرزهایی که شرایط نیومن و دریچلت بر آن اعمال شده به کار می رود. به طریق مشابه می توان معادله ای را برای مرز خروجی به صورت زیر بدست آورد.

$$(12-3) \quad f_J'' + 2f_{J-1}'' = \frac{3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{(x=L_x)} - \frac{3}{2\Delta x^2} (f_J - f_{J-1})$$

۳-۲-۲- بررسی روابط مشتقی ارائه شده در جهت جریان

برای بررسی روابط مشتقی ارائه شده یک تابع دلخواه در نظر گرفته و اوپراتور مشتق اول و دوم را روی آن اعمال می گردد. جواب حاصل از اعمال اوپراتور مشتق را با جواب مشتق گیری به روش تحلیلی مقایسه می کنیم. و نتایج را به صورت گراف رسم میکنیم. تابع بکار رفته جهت بررسی اوپراتور مشتق اول و دوم به صورت زیر است.

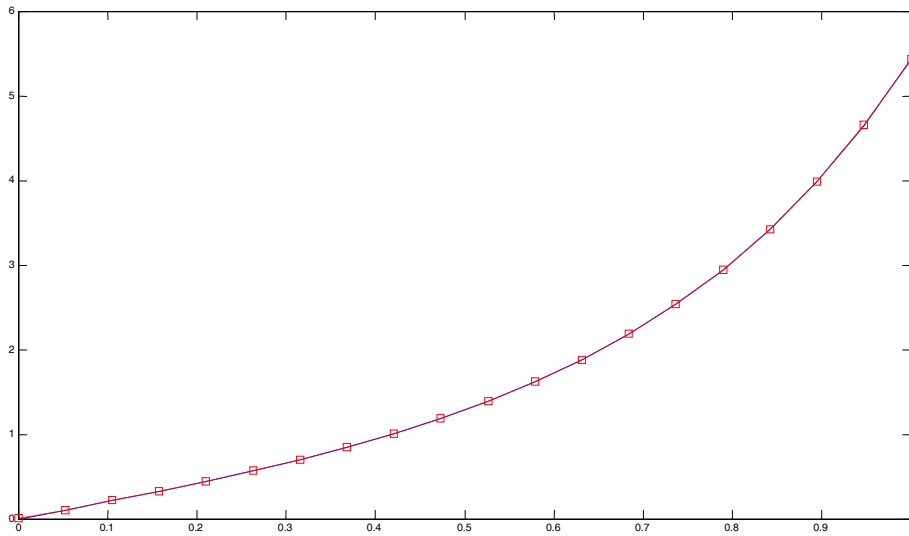
$$f_{(x)} = \exp(x^2)$$

از مشتق گیری به روش تحلیلی از معادله فوق به معادلات زیر می رسیم.

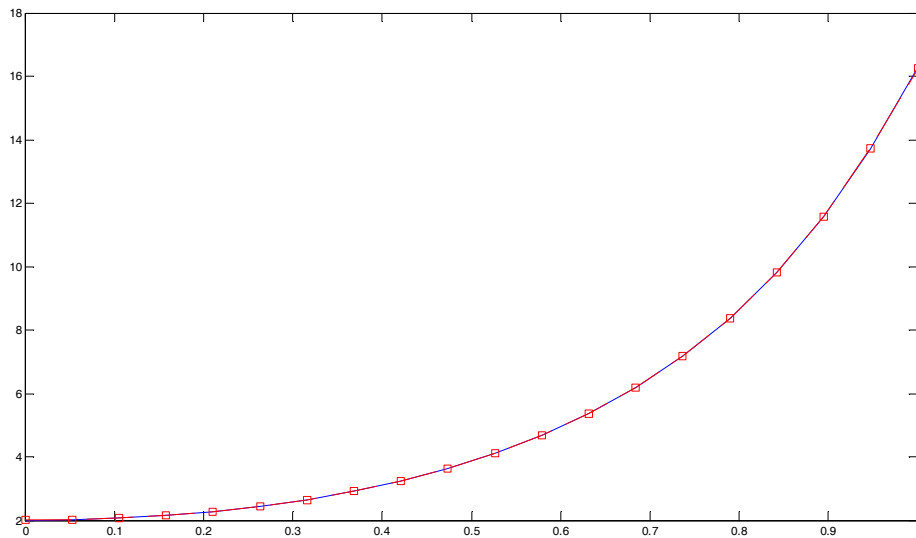
$$f'_{(x)} = 2x \cdot \exp(x^2)$$

$$f''_{(x)} = 2 \cdot \exp(x^2) + (2x)^2 \cdot \exp(x^2)$$

نتایج مشتق گیری به روش عددی و تحلیلی هر دو در شکل ۳-۱ و ۳-۲ نشان داده شده است.



شکل شماره ۱-۳ مقایسه مشتق مرتبه اول تحلیلی و عددی تابع $f(x) = \exp(x^2)$



شکل شماره ۲-۳ مقایسه مشتق مرتبه دوم تحلیلی و عددی تابع $f(x) = \exp(x^2)$

۳-۳-۱ - نگاشت

در روشهای عددی، به خصوص بررسی لایه مرزی باید این توانایی را داشت در نقاطی که گرادیان یک پارامتر جریان زیاد می شود تراکم نقاط محاسباتی را افزایش داد. این کار در مورد جریان بررشی آزادی چون جریان اختلاطی نیز صادق است. علت اصلی انجام این کار پایین آوردن هزینه محاسباتی است. در این تحقیق به دلیل اینکه مرز مادی تاثیری بر روی جریان اختلاطی نداشته باشد. در جهت y ها دامنه محاسباتی را مثبت و منفی بینهایت گرفته شد. و به دلیل اینکه تمامی دامنه محاسباتی را نمی توانستیم شبکه بندی کنیم. و همچنین بیشترین گرادیان پارامترهای درون مسئله در حوالی محور $y = 0$ بود. از یک تابع کوتانژانتی جهت نگاشت یک به یک استفاده شد. تا دامنه فیزیکی $y \in (-\infty, +\infty)$ را به دامنه محاسباتی $0 < \xi < 1$ انتقال دهیم. تابع نگاشت استفاده شده برای انتقال دامنه فیزیکی به دامنه محاسباتی را به صورت زیر در نظر گرفته شد.

$$y = -\beta \cot(\tau) \quad (13-3)$$

β پارامتر مربوط به کشیدگی و انقباض ساختار جریان است. به عنوان مثال با کاهش Re ناحیه اختلاطی بزرگ شده پس جهت شبیه سازی جریان اختلاطی باید از β بزرگتری استفاده کنیم. برای مشتق گیری تابع f نسبت به y به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{d}{dy} f = \frac{d}{d\xi} f \times \frac{d}{dy} \xi = \frac{1}{\pi\beta} \sin^2(\pi\xi) \times \frac{d}{d\xi} \quad (14-3)$$

$$\text{با قرار دادن } \lambda_1 = \frac{1}{\pi\xi} \sin^2(\pi\xi) \text{ داریم.}$$

$$\frac{d}{dy} f = \lambda_1 \frac{d}{d\xi} \quad (15-3)$$

در رابطه فوق λ_1 باید در تک تک درایه های ماتریس $\frac{d}{d\xi} f$ ضرب شود.

همچنین برای محاسبه مشتق دوم یک بار از معادله (۳-۱۵) مشتق می‌گیریم. که نتیجه به صورت معادله (۳-۱۶) است.

$$(۳-۱۶) \quad \frac{d^2}{dy^2} f = \lambda_2 \frac{d^2}{d\xi^2} f + \lambda_3 \frac{d}{d\xi}$$

که در آن مقادیر λ_2 و λ_3 به صورت معادلات آورده شده در زیر است.

$$(۳-۱۷) \quad \lambda_2 =$$

$$(۳-۱۸) \quad \lambda_3 = \frac{2}{\pi\beta} \sin^3(\pi\xi) \cdot \cos(\gamma)$$

۳-۲-۳- بررسی فرمولهای ارائه شده برای محاسبه مشتق در راستای y

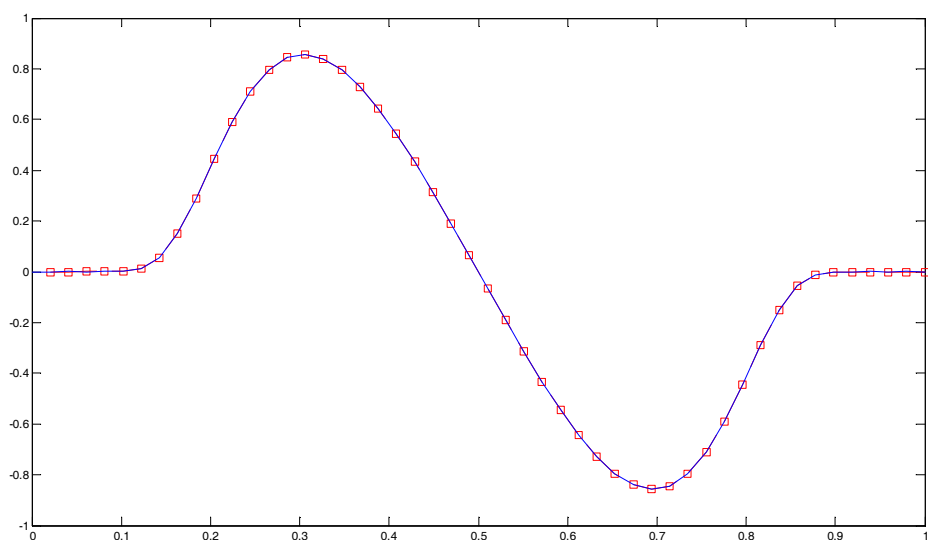
برای بررسی فرمولهای مشتق ارائه شده در جهت y ها یک تابع دلخواه به صورت زیر در نظر گرفته شده است. اوپراتور مشتق اول و دوم بر روی آن اعمال گردیده شده است. و نتایج حاصل با نتایج حل دقیق با هم در یک نمودار ترسیم شده است. لازم به یاد آوری است که در جهت y ها از نگاشت کتانژانت استفاده شده است.

$$f_{(y)} = \exp(-$$

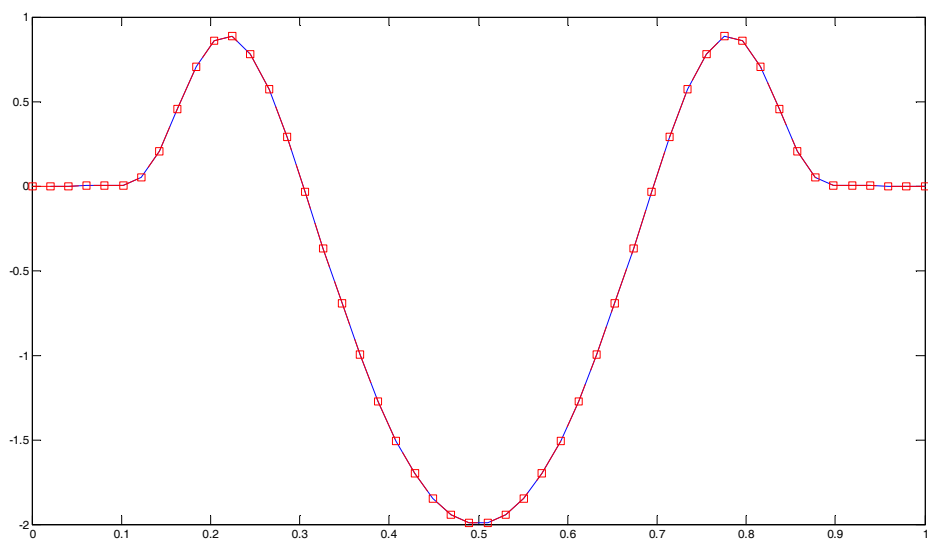
$$f'_{(y)} = -2y \cdot \exp(-$$

$$f''_{(y)} = 4 \cdot y^2 \cdot \exp(-y^2) - 2 \cdot \exp(-y^2)$$

$$y = -\beta \cdot \cot t$$



شکل شماره ۳-۳ مقایسه مشتق اول همراه با نگاشت کتانژانتی ، تابع $f(y) = \exp(-y^2)$



شکل شماره ۴-۳ مقایسه مشتق دوم همراه با نگاشت کتانژانتی ، تابع $f(y) = \exp(-y^2)$

۳-۴- پیشروی در زمان

برای پیشروی در زمان از روش رانج کوتای مرتبه سه استفاده شده است. این روش توسط ورای^{۲۴} ارائه

گردیده است. و بیشتر برای حل معادلاتی به صورت $\frac{d}{dt}u = R(u)$ به کار می رود. جدول زیر مراتب مختلف در حل معادله را توضیح می دهد.

جدول ۳-۱: الگوی پیشروی در زمان رانج - کوتا مرتبه سوم

نقطه بعدی	نقطه اولیه	زمان
$R(u^n)$	u^n	t^n
$R'(u')$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$t' = t^n + c_1 \Delta t$
$R''(u'')$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R) \Delta t$	$t'' = t' + (c_2 + d_2) \Delta t$
	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R') \Delta t$	$t^{n+1} = t'' + \Delta t$

برای بدست آوردن ضرایب جدول فوق باید ضرایب حاصل از سری تیلور نسبت به متغیر زمان و مساوی

قرار دادن ضرایب هم مرتبه بدست می آید

$$c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1$$

$$c_1 c_2 + c_3 \left[\frac{d_2}{c_2} \left(1 + \frac{d_3}{c_3} \right) + c_2 \left(1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right] = \frac{1}{2}$$

$$c_1^2 c_2 + c_3 \left[c_1 + c_2 \left(1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right]^2 + c_1^2 d_3 = \frac{1}{3}$$

$$c_1 c_2 c_3 = \frac{1}{6}$$

در روابط بالا مقدار دو پارامتر باید پیش‌بینی شود تا حل کامل شود. در شروع حل واضح است که $d=0$.

پس بقیه پارامترها به صورت تابعی از یک پارامتر بدست می‌آید. یک جواب از دسته جوابها می‌تواند به

صورت زیر باشد:

$$c_1 = 8/15, \quad d_1 = 0$$

$$c_2 = 5/12, \quad d_2 = -17/60$$

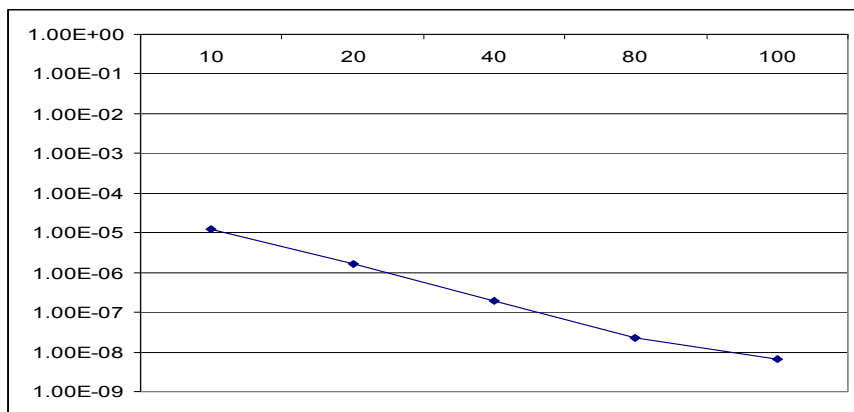
$$c_3 = 3/4, \quad d_3 = -5/12$$

^{۲۴} wray

برای تست روش ذکر شده در بالا و همچنین بررسی میزان دقت آن معادله زیر را در نظر گرفته و آن را به روش عددی حل می‌کنیم:

$$\frac{du}{dt} = -u(t) \quad , \quad u(0) = -1$$

می‌دانیم که جواب حل تحلیلی معادله بالا به صورت $u(t) = e^{-t}$ است. ماکزیمم خطای نتایج عددی و حل دقیق در شکل (۳-۱۲) رسم شده است. این شکل به طور واضح میزان دقت این روش را که از مرتبه سه است نشان می‌دهد.



شکل شماره ۳_۵: بررسی خطای رانج کوتای مرتبه سه

فصل چہارم

الگوریتم حل و بررسی صحت جوابها

فصل چهارم - الگوریتم حل و بررسی صحت جوابها

۴-۱ - مقدمه:

همانطور که اشاره شد معادله حاکم بر دامنه محاسباتی فرم چرخشی معادله ناویر استوکس است. در این فصل ابتدا به بررسی گام به گام روش حل این معادله در دامنه پرداخته می شود. سپس به منظور بررسی صحت برنامه نوشته شده، نتایج بدست آمده را با بعضی از نتایج دقیق معادله ناویر استوکس که در حالت خاص بدست آمده است مقایسه می کنیم.

۴-۲ روش حل:

در فصل دوم معادله حاکم بر دامنه محاسباتی به صورت زیر بدست آمد.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - \frac{\partial H_2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 U \quad (1-4)$$

برای حل معادله فوق سرعت را به صورت زیر تفکیک کرده ایم

$$u_{(x,y,t)} = u_{(x,y,t)} + U_{0(y)} \quad (2-4)$$

$$v_{(x,t)} = v_{(x,y,t)} \quad (3-4)$$

در رابطه بالا $U_{0(y)}$ سرعت مینا است. که فقط تابعی از y است. v و u سرعت محاسباتی است. که باید

به روش عددی محاسبه شود. U و V سرعت واقعی جریان است. مزیت تفکیک انجام شده در معادله

(۲-۴) و (۳-۴) در این است که مقدار سرعت در مرزهای جریان آزاد برابر صفر خواهد بود. برای اینکه

یک روش عددی مناسب برای حل جریان ارائه دهیم ابتدا طرف راست معادله را که شامل مشتقات جزئی است را به روش تفاضلات محدود فشرده محاسبه کرده. نتیجه محاسبات فوق یک ماتریس N_{y+1}, N_{x+1} خواهد بود. که این ماتریس را با RHS نمایش می دهیم. با این عمل و گسسته سازی طرف چپ معادله (۴_۱) به معادله زیر می رسیم .

$$\frac{u^{n+1} - \nabla^2 u^n}{\Delta t} = RHS^n \quad (4_4)$$

به بیان دیگر سرعت در لحظه $n+1$ از رابطه زیر بدست می آید.

$$u^{n+1} = \Delta t (RHS^n + \nabla^2 u^n) \quad (5-4)$$

البته باید متذکر شد که در کد نوشته شده از روش رانج کوتای مرتبه سه برای محاسبه مشتق زمانی استفاده شده است. طرف راست معادله بالا معلوم است . پس در لحظه $n+1$ میزان $\nabla^2 u$ را داریم

$$u = const \quad (6_4)$$

از بسط معادله فوق داریم

$$u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = const \quad (7_4)$$

اگر اپراتور مشتق اول و دوم را در جهت X و Y در معادله فوق جایگزاری کنیم داریم

$$2X \times u^t + D2Y \times u = const \quad (8_4)$$

در عبارات فوق $D2Y$ و $D2X$ به ترتیب ماتریسهایی $N_{x+1} \times N_{x+1}$ و $N_{y+1} \times N_{y+1}$ هستند. که در فصل چهارم برای محاسبه مشتقات مکانی در جهت X و Y ارائه گردیدند. با توجه به قوانین حاکم بر ماتریس ترانسپوز داریم.

$$(T \times S)^t = T^t \times S^t \quad (9_4)$$

با استفاده از معادله فوق معادله (۸_۴) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$D2X^t + D2Y \times u^t = const \quad (10_4)$$

معادله ماتریسی فوق که به بیان دیگر معادل عبارت ماتریسی زیر است به راحتی توسط دستور `lyap` در

نرم افزار MATLAB قابل حل است

$$\zeta + XB = const \quad (11_4)$$

. در کل برای بدست آوردن جواب در دامنه محاسباتی مراحل زیر طی شده است.

- با توجه به شرط اولیه برای u مقدار V محاسبه شده است.
- با توجه به اینکه $\omega = \nabla \times U$ و برای حالت دو بعدی $\omega_1 = 0$ و $\omega_2 = 0$ است. مقدار $\omega_3 = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$ حساب می شود.
- مقدار $H = U \times \omega$ می باشد. که برای حالت دو بعدی $H_3 = 0$ است مقادیر $H_1 = V.\omega$ و $H_2 = -U.\omega$ محاسبه می شود.
- محاسبه ترمهای غیر خطی در معادله که به صورت $\frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y}$ است.
- بدست آوردن ترمهای لزج در معادله که به فرم $\frac{1}{Re} \nabla^4 U$ است.
- پس از به دست آوردن طرف راست معادله دیفرانسیل به مقدار $\nabla^2(\Delta u)$ با استفاده از روش رانج کوتای محاسبه می شود.
- شرط مرزی برای V و Δu برای مرحله زمانی جدید محاسبه می شود.
- با مشخص شدن $\nabla^2(\Delta u)$ مقدار Δu و پس از آن u در مرحله جدید استخراج می شود.
- مراحل بالا را برای گامهای زمانی دیگر مجدداً تکرار می شود.

برای محاسبه معادله (1_4) طبق الگوریتم بالا باید قادر به انجام اعمال زیر باشیم.

۱. محاسبه مشتقات مادی

۲. انتگرال گیری از معادله پیوستگی به منظور محاسبه V .

۳. محاسبه ترمهای غیر خطی

۴. حل معادله پواسون برای حالت دو بعدی

۵. پیشرفت زمانی (به دست آوردن داده های جدید که در اصل آنها به صورت شرط اولیه برای زمان بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت).

۴_۳_۱_ ارزیابی کد و شبیه سازی عددی

به منظور بررسی کد نوشته شده در این قسمت کد را برای بعضی از جریانها که حل تحلیلی آنها موجود است اجرا کرده و نتایج حاصله را با نتایج حل تحلیلی مقایسه می کنیم.

۴_۳_۲_ گردابه استوارت

استوارت تابع جریان وابسته به زمان معادله ناویر استوکس غیر لزج را برای گروه لایه های اختلاطی معرفی کرد. این تابع جریان به صورت زیر است.

$$v, t) = c.y + \ln(a.\cosh(y - y_0) + b.\cos(x - ct)) \quad (12_4)$$

که در معادله فوق $b = \sqrt{a^2 - 1}$ است.

با توجه به رابطه (۱۲_۵) و تعریف تابع جریان مقادیر u و v به صورت زیر بدست می آید.

$$= \frac{b.\sin(x - ct)}{a.\cosh(y - y_0) + b.\cos(x - ct)} \quad (14_4)$$

برای بدست آوردن ثابت انتقال در شرط مرزی خروجی به صورت زیر عمل می کنیم.

از شرط مرزی خروجی انتقالی خطی داریم

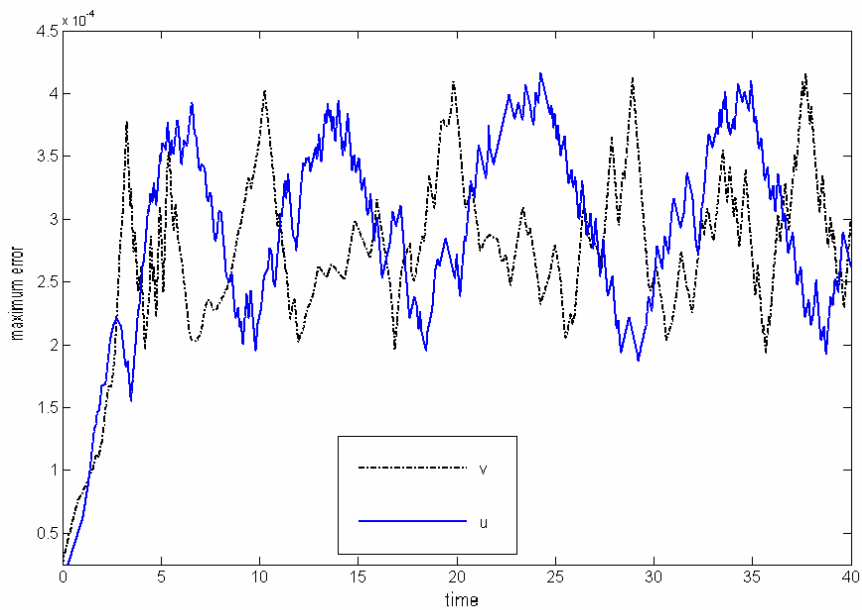
$$\frac{\psi}{\psi_0} = -C \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (15_4)$$

با جای گذاری تابع جریان استوارت در معادله فوق داریم

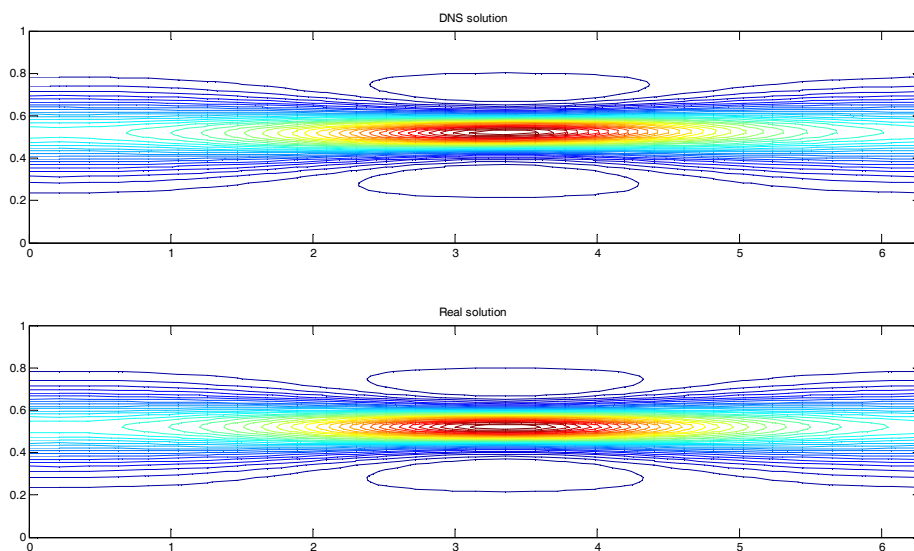
$$\gamma = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{\frac{-b.c.\sin(x-ct)}{a.\cosh(y-y_0)+b.\cos(x-ct)}}{\frac{b.\sin(x-ct)}{a.\cosh(y-y_0)+b.\cos(x-ct)}} = c \quad (16_4)$$

بنابر این مقدار c در معادله (12_4) برابر مقدار C در شرط مرزی خروجی خطی است. بنابر این از حل استوارت به خوبی می توان برای بررسی صحت شرط مرزی خروجی انتقالی خطی استفاده کرد. با استفاده از حل گردابه های استوارت می توان صحت تمامی بخشهای کد نوشته شده را بررسی کرد، به غیر از ترمهای لزج که به خاطر بالا بودن عدد رینولدز این ترمها به سمت صفر میل می کنند. به این نکته باید توجه کرد که مولفه سرعت در جهت جریان نمی تواند حل پایدار داشته باشد. برای رفع این مشکل $\tanh(y-y_0)$ را به آن اضافه و از آن کسر می کنیم. قسمت پایدار آن یعنی $a.\sinh(y-y_0)/(a.\cosh(y-y_0)+b.\cos(x-ct)) - \tanh(y-y_0)$ را به عنوان شرط اولیه و مرزی ورودی در نظر می گیریم. و باقی مانده را یعنی $C + \tanh(y-y_0)$ را به عنوان جریان اولیه که فقط تابعی از y است محسوب می شود.

پارامترهای به صورت $L_x = 2\pi$ و $\beta = 3$ و $Re = 10^9$ در نظر گرفته شده است. تا جریان به صورت موثر ایده آل باقی بماند.



شکل شماره ۴_۱ ماکزیمم خطا بر حسب زمان برای گردابه استوات



شکل ۴_۲ : شکل اول از بالا حل دقیق گردابه استوات و شکل پایین نتیجه حاصل از DNS

۴_۳_۳_ لایه اختلاطی دو بعدی آرام

یکی دیگر از راههایی که می توان جواب برنامه را بررسی کرد جواب لایه اختلاطی آرام هست. مطابق نتایج تئوری [۵] ضخامت ورتیسیتته در جریان آرام اختلاطی بدون اغتشاش ورودی متناسب با $x^{0.5}$ است. لازم به یاد آوری هست که ضخامت ورتیسیتته به صورت زیر تعریف شده.

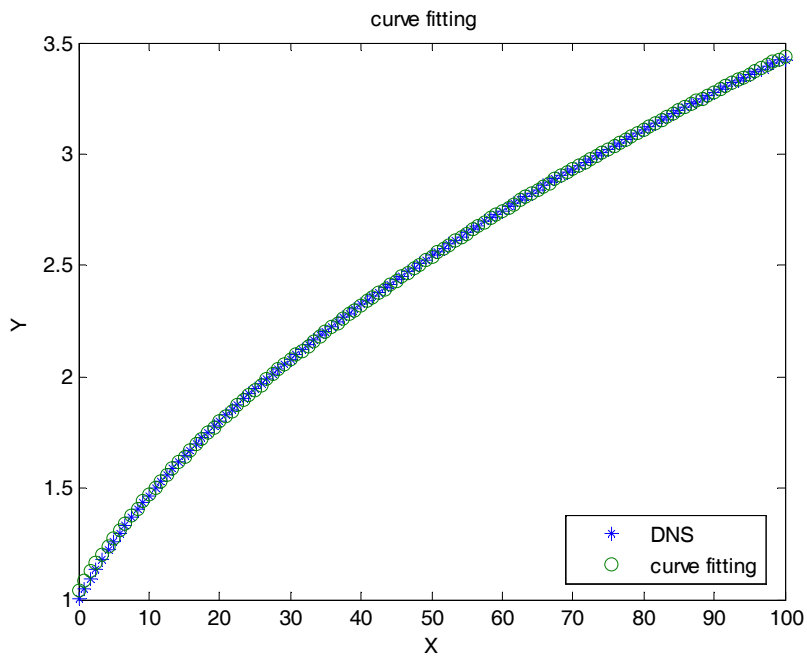
$$= \frac{\Delta U}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{\max}} \quad (17_4)$$

برای بررسی صحت جواب کد، منحنی به معادله $a \times X^{(-1/2)} + b$ بر روی داده های δ_{ω} حاصل از جواب برازش می کنیم^{۲۵}. همانطور که در شکل (۴_۳) نشان داده شده است. جواب حاصل از DNS رفتاری متناسب با $x^{0.5}$ دارند. و معادله برازش شده بر دادهها به صورت زیر است.

$$= \left(\frac{x + 10.12}{9.314}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (18_4)$$

همچنین مطابق نتایج تئوری در جریان اختلاطی آرام پروفیل سرعت در جریان اختلاطی آرام دارای خاصیت خود تشابهی است. در فصل ششم در بخش جریان آرام اختلاطی نشان داده می شود که پروفیلهای بدست آمده دارای خاصیت خود تشابهی هستند.

^{۲۵} Curve fitting



شکل (۴_۳): برازش کردن یک تابع $x^{0.5}$ بر δ_ω

فصل پنجم

بررسی نتایج بدست آمده برای تحلیل
جریان اختلاطی

فصل پنجم - بررسی نتایج بدست آمده برای تحلیل جریان اختلاطی

۱_۵ مقدمه

سر فصل مطالب ارائه شده در این فصل

- جریان اختلاطی دو بعدی آرام
- جریان اختلاطی دو بعدی مغشوش
- بررسی شرط مرزی خروجی

رژیم جریان اختلاطی آزاد شدیداً به مقدار عدد رینولدز وابسته است. در این فصل ابتدا جریان اختلاطی

با رینولدز پایین را بررسی کرده و سپس آنقدر رینولدز را بالا برده تا رژیم جریان از حالت آرام به

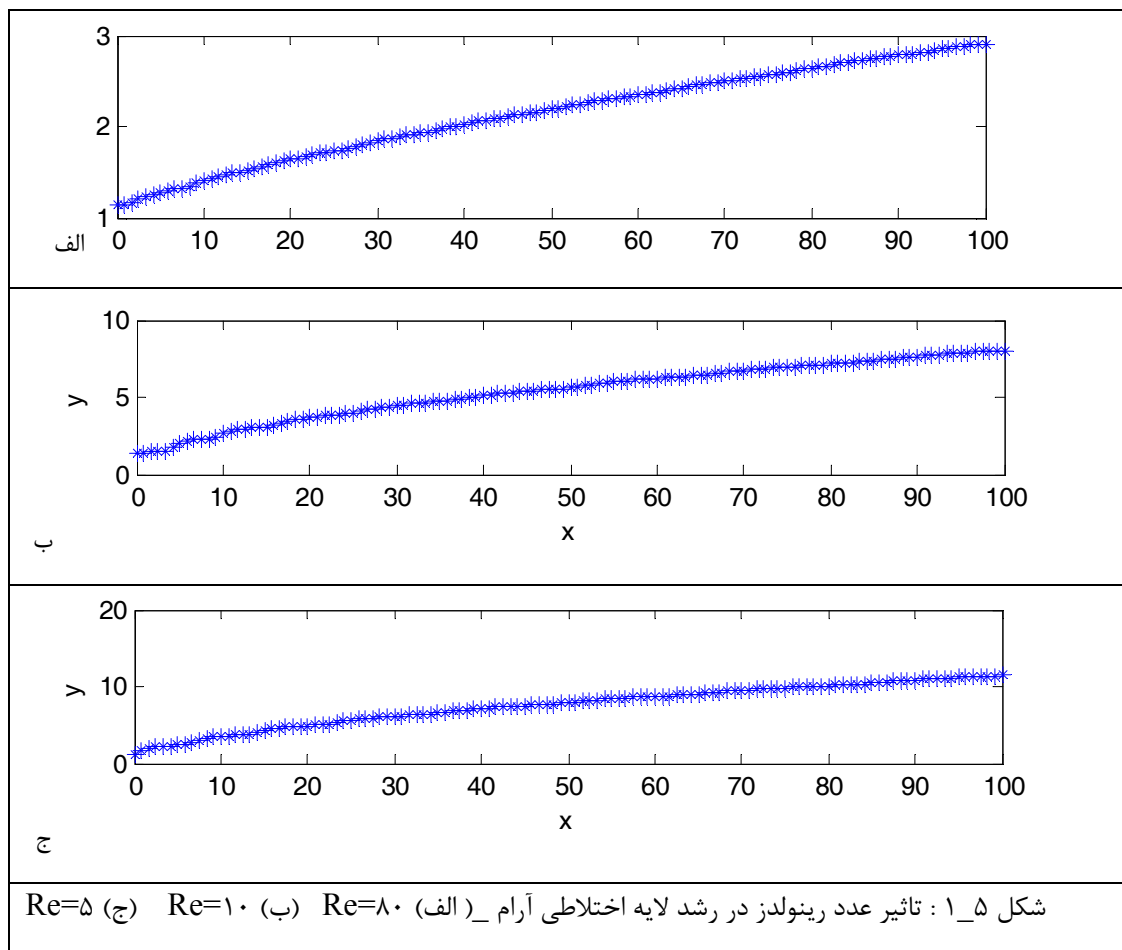
مغشوش تغییر کند. در این حالت نیز به بررسی جریان اختلاطی می پردازیم. پس از آن به بررسی

شرایط مرزی خروجی بر روی جریان اختلاطی پرداخته می شود و مزایا و معایب هر شرط را مورد بررسی

و تحلیل قرار می دهیم. و در پایان این فصل نتیجه گیری کلی از انجام این پروژه آورده شده است.

۲_۵ جریان اختلاطی دو بعدی آرام

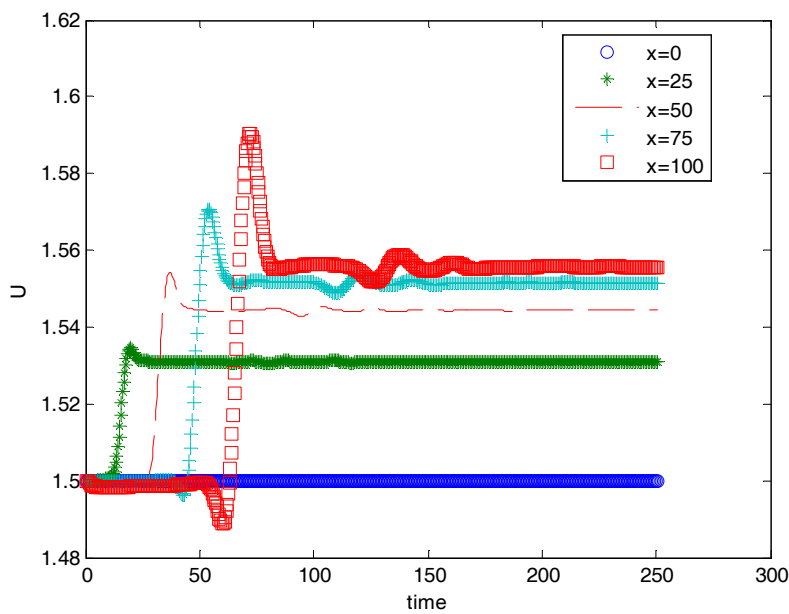
ساختار جریان اختلاطی آرام به شدت تحت تاثیر عدد رینولدز است. بدین ترتیب که با کوچک شدن عدد رینولدز ساختار لایه اختلاطی بزرگ شده و با بزرگ شدن عدد رینولدز ابتدا این ساختار کوچک شده و سپس این رژیم جریان از حالت آرام به حالت مغشوش تغییر می کند. این تغییر در اندازه ساختار در شکل (۱_۵) به خوبی نشان داده شده است. لازم به یاد آوری است که ضخامت لایه اختلاطی (δ_y) را به صورت مکان هندسی نقاطی در نظر گرفته شده است که در آن نقاط $\bar{U}/U_2 = 0.99$ است.



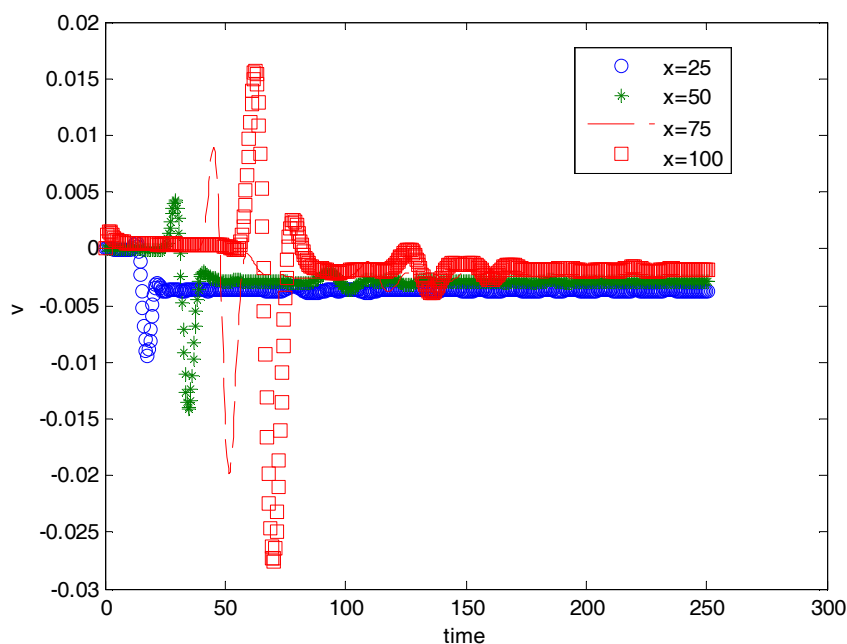
جهت تحلیل جوابهای لایه اختلاطی آرام پارامترهای محاسباتی به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$= 80, N_x = 120, N_y = 100, \beta = 6, \Delta t = 0.25 \times \Delta x, L_x = 100$$

همانطور که انتظار داریم باید جریان بعد از گذشت زمانی به حالت آرام و یکنواخت در مکان در آید. این امر در نمودار شماره (۲_۵) و (۳_۵) نشان داده شده اند. در این نمودارها پنج نقطه در فواصل مساوی بر روی محور y ها تعریف شده اند. همان گونه که در نمودارهای (۲_۵) و (۳_۵) مشخص شده است. پس از گذشت زمانی مشخص سرعت در گرههای مورد نظر به مقدار خاصی میل کرده و در آن ثابت باقی میماند.



شکل (۲_۵) : سرعت در راستای جریان در پنج نقطه از دامنه محاسباتی



شکل (۳_۵): سرعت در راستای عمود بر جریان در چهار نقطه از دامنه محاسباتی

از طرفی مطابق نتایج تئوری جریان اختلاطی آرام خود تشابه است. برای این منظور سرعت را به صورت

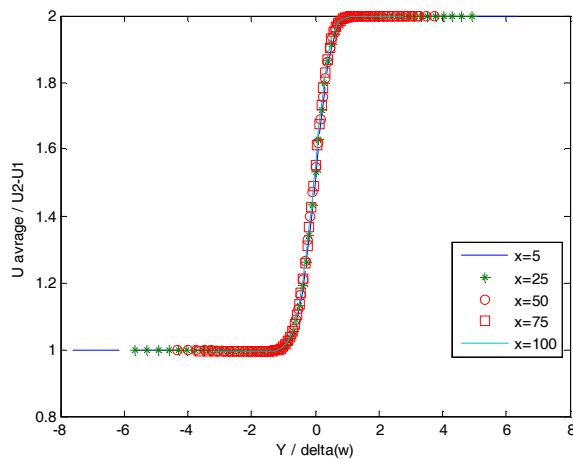
$$U/(U_2 - U_1) \text{ و طول را به صورت } y/\delta_{\omega} \text{ بی بعد شده اند. پروفیل سرعت در نقاط مختلف دامنه}$$

محاسباتی مطابق شکل (۴_۵) بدست آمده است. این شکل نشان دهنده خاصیت خودتشابهی پروفیل

سرعت در جریان اختلاطی آرام است. لازم به یاد آوری است که δ_{ω} در جریان دو بعدی اختلاطی آرام به

صورت زیر تعریف می شود.

$$= \frac{(U_2 - U_1)}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\max}} \quad (۱-۵)$$



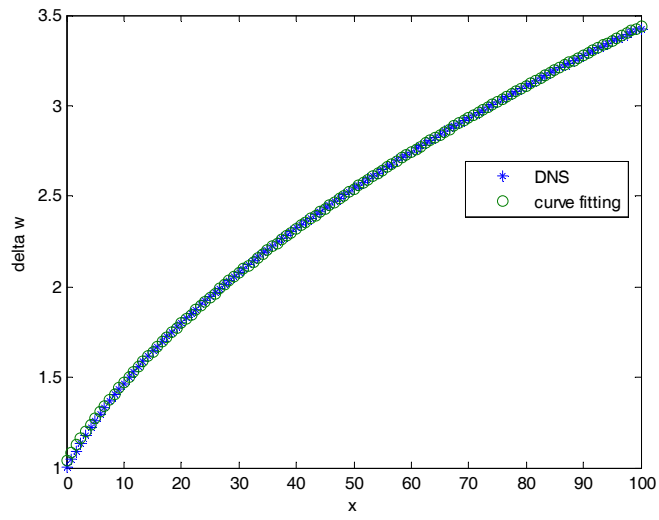
شکل (۴_۵): پروفیل بدست آمده سرعت در دستگاه خود تشابه

همچنین مطابق نتایج تئوری δ_w در جریان دو بعدی اختلاطی آرام متناسب با $x^{1/2}$ است. برای تحقیق این موضوع ابتدا میزان δ_w را توسط فرمول (۱_۵) بدست آورده. سپس به مقادیر حاصله یک منحنی به فرم $a \times x^{1/2} + b$ برازش^{۲۶} گردید. تابعی که نرم افزار MATLAB بر داده های δ_w بر حسب x برازش کرد به فرم زیر است.

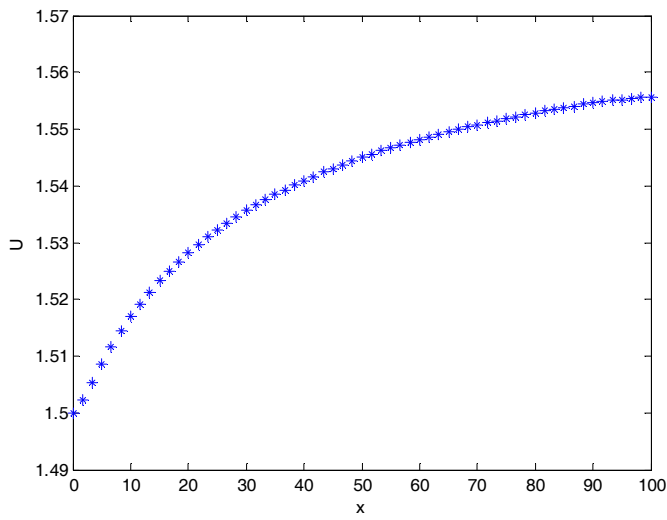
$$= \left(\frac{x + 10.12}{9.314} \right)^{1/2} \quad (۲_۵)$$

نتیجه حاصل از این نگاشت به صورت گراف شکل (۵_۵) است. همان طور که در این گراف مشاهده می شود. مقادیر حاصل از DNS رفتاری کاملاً مشابه با $x^{1/2}$ دارند.

^{۲۶} Curve fitting



شکل (۵_۵): رشد ضخامت ورتیسیتة و فیت کردن منحنی بر آن



شکل (۶_۵): سرعت بر روی خط مرکزی

۵_۳_ جریان اختلاطی دو بعدی مغشوش

جریان لایه ای منظم و هموار ، شدیداً به مقادیر معینی از یک پارامتر بحرانی_ عدد رینولدز ، عدد گرافش ، عدد تیلور ، عدد ریچاردسون _ محدود است. علاوه بر آن ، جریان لایه ای ، ناپایدار می باشد و در حالتی که پارامتر بحرانی به مقدار کافی بزرگ باشد. به رژیم جدیدی از جریان تبدیل می شود. ساختار این رژیم جدید توسط تئوری پایداری پیش بینی نمی شود، اما با این حال بدون شک یک حرکت نوسانی و بدون نظم است که اغتشاش نامیده می شود. از آنجا که اغتشاش پدیده بسیار پیچیده ای است، تحلیل و شناسایی دقیق آن هیچگاه امکان پذیر نخواهد شد. در این قسمت با افزایش عدد رینولدز و قرار دادن یک اغتشاش در ورودی جریان لایه ای منظم را به جریان مغشوش تبدیل می کنیم. این اغتشاش که از تبدیل پایداری خطی بدست آمده است [۳] و بر روی سرعت v اعمال می گردد و به صورت زیر است.

$$= -2 \times A \times y \times e^{(-y^2)} \times \sin(\omega t) \quad (۳_۵)$$

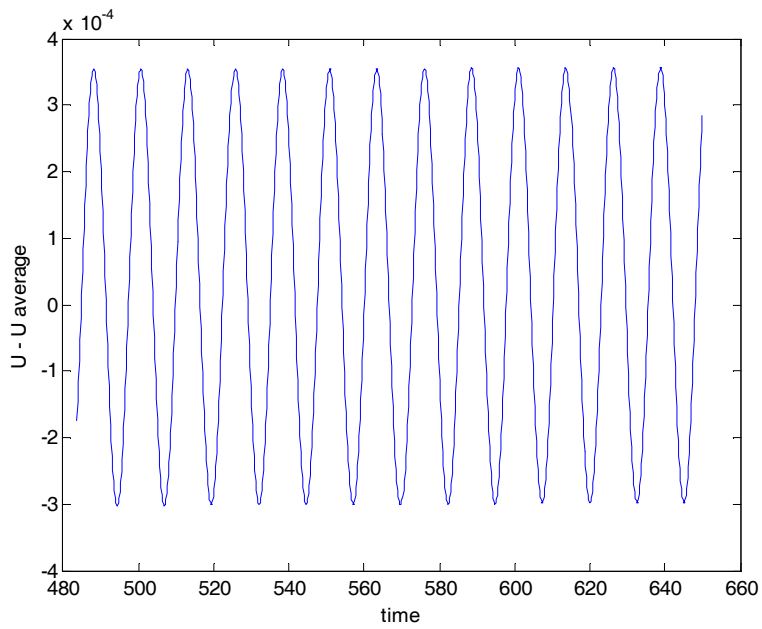
در فرمول فوق ω فرکانس نوسانات و A دانه نوسانات است.

به دلیل اینکه فرکانس اغتشاشات قرار داده شده در ورودی جریان ثابت است و با گذشت زمان \bar{u} و \bar{v} به مقدار ثابتی می رسد. می توان نتیجه گرفت که سرعت لحظه ای در شبیه سازی همراه با اغتشاشات به صورت آماری ساکن است. برای بررسی این موضوع سرعت متوسط جریان را با انتگرال گیری از سرعت روی زمان از زمان $t = 200$ تا زمان $t = 480$ مطابق فرمول (۴-۵) بدست آورده. سپس سرعت در هر لحظه را از آن کم می کنیم

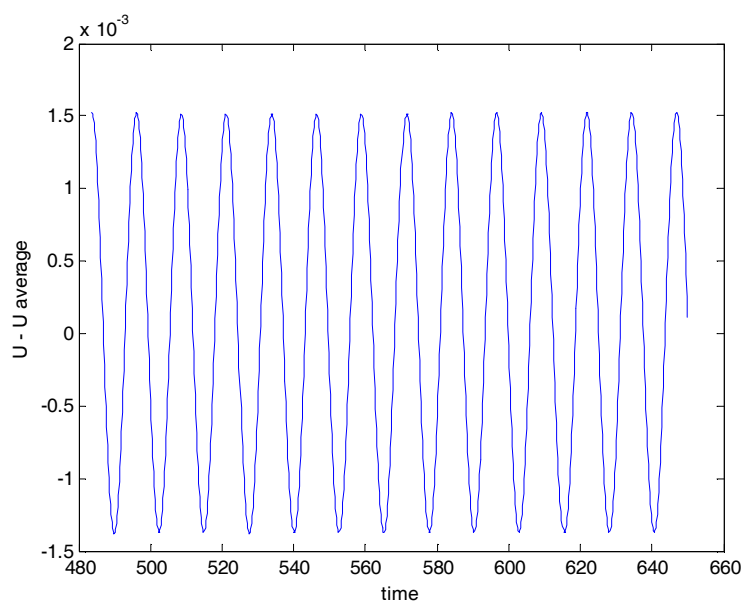
نتایج را برای چهار ایستگاه مختلف بر روی دامنه محاسباتی که بر روی محور $y = 0$ قرار داشتند رسم گردید. همانطور که در اشکال (۷_۵)، (۸_۵)، (۹_۵) و (۱۰_۵) نشان داده شده است. با توجه به اینکه این اشکال حول محور $y = 0$ در حال نوسان هستند. می توان نتیجه گرفت که مولفه های سرعت u و v به یک حالت پایدار ایستایی رسیده اند.

$$average = \frac{1}{T} \int_{t1}^{t2} U \cdot dt$$

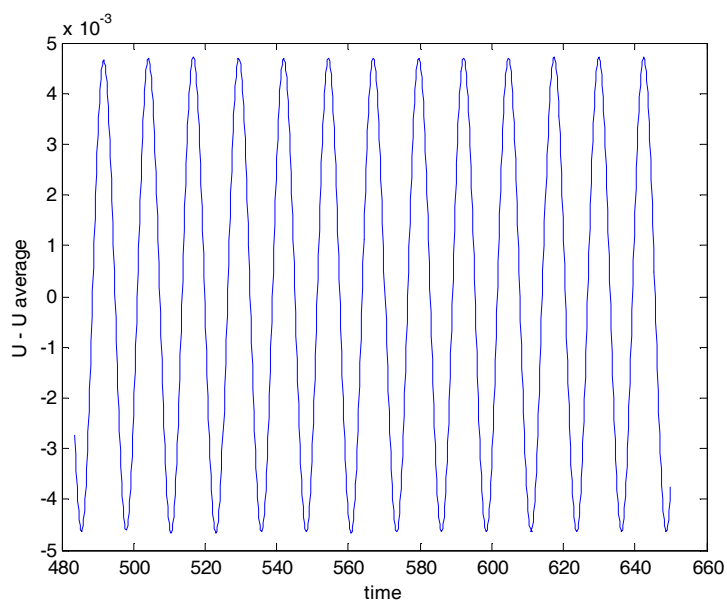
(۴_۵)



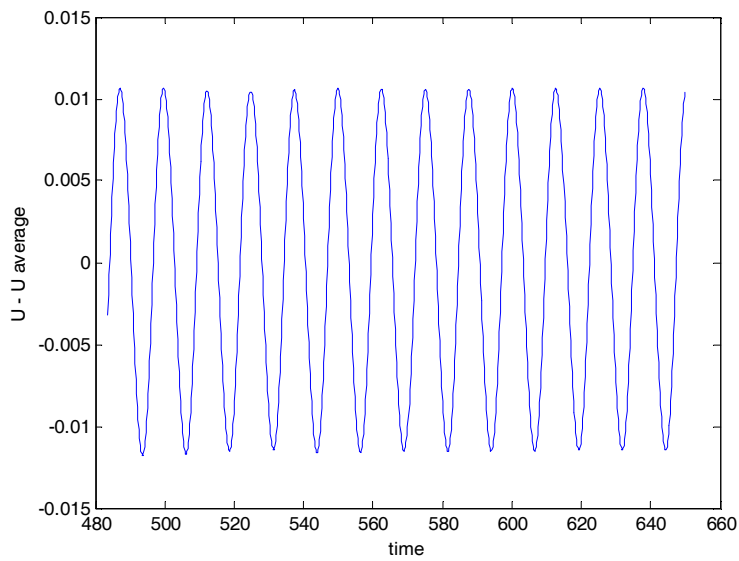
شکل (۷_۵): نمودار $U - U_{average}$ در نقطه $x=۵۰$ روی محور y ها بر حسب زمان



شکل (۸_۵): نمودار $U - U_{average}$ در نقطه $X=100$ روی محور y ها بر حسب زمان



شکل (۹_۵): نمودار $U - U_{average}$ در نقطه $X=150$ روی محور y ها بر حسب زمان



شکل (۱۰_۵) : نمودار $U - U_{average}$ در نقطه $x=200$ روی محور y ها بر حسب زمان

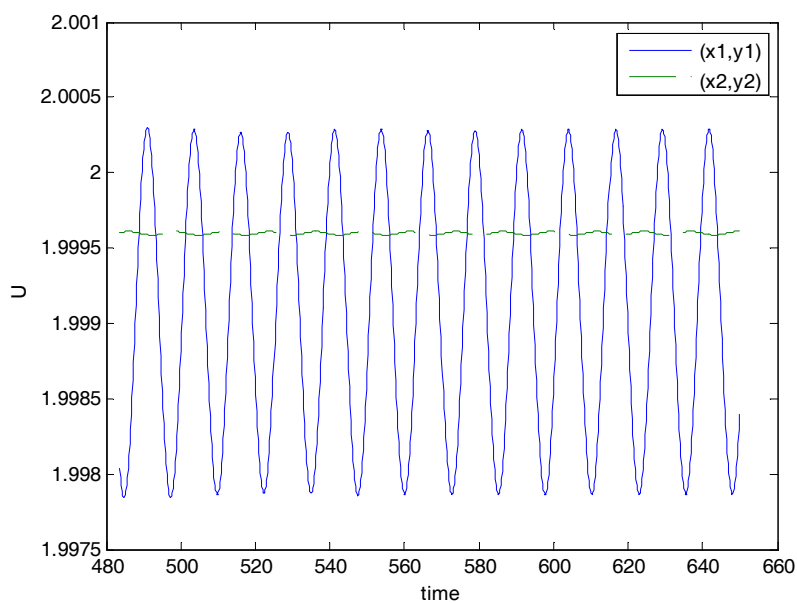
در شکل (۱۱_۵) و (۱۲_۵) گذر زمانی برای u و v در ایستگاههای $(x_1, y_1) = (20, 7.8802)$ و

$(x_2, y_2) = (200, 7.8802)$ نشان داده شده است. ضخامت لایه اختلاطی را اگر به صورت $\bar{U}/U_2 = 0.99$

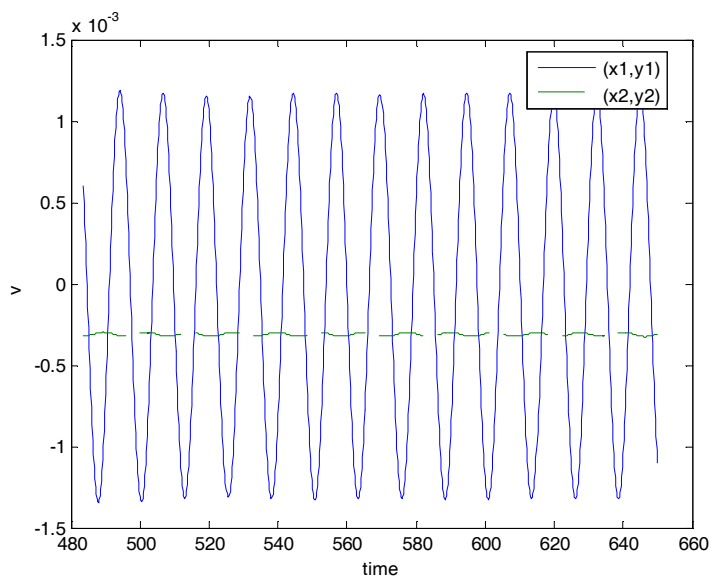
تعریف کنیم. برای دو ایستگاه فوق به ترتیب ضخامت لایه اختلاطی برابر با $\delta_1 = 1.2615$ و

$\delta_2 = 2.2290$ است. از تمامی اشکال (۷_۵) تا (۱۲_۵) می توان نتیجه گرفت که u و v به یک مقدار

ثابت رسیده اند و حول این مقدار ثابت در حال نوسان هستند.

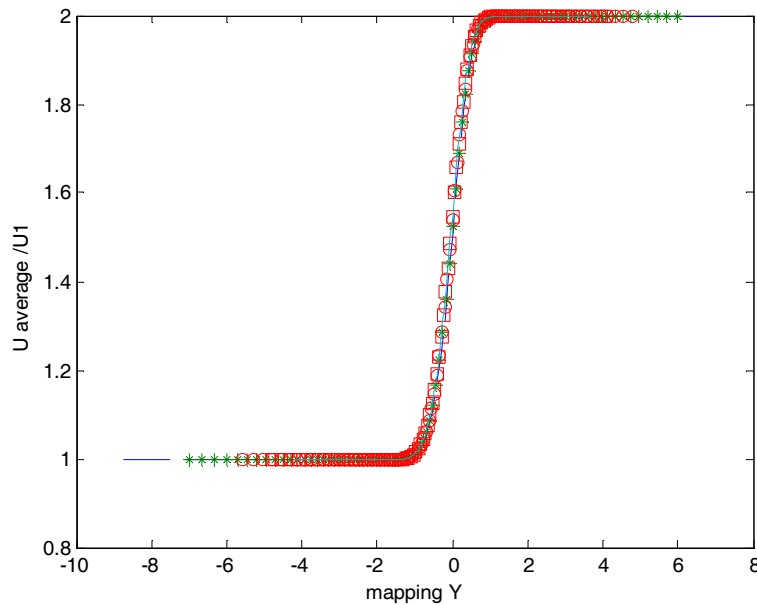


شکل (۱۱_۵): سرعت لحظه ای U در نقطه $(x_1, y_1) = (200, 7.8802)$ و $(x_2, y_2) = (20, 7.8802)$



شکل (۱۲_۵): سرعت لحظه ای عمود بر جریان در نقطه $(x_1, y_1) = (200, 7.8802)$ و $(x_2, y_2) = (20, 7.8802)$

شکل (۱۳_۵) نتیجه شبیه سازی را برای سرعت متوسط در جهت جریان در مختصات خود تشابه نشان می دهد. در این شکل به خوبی می توان پدیده خود تشابهی را برای سرعت متوسط مشاهده کرد.

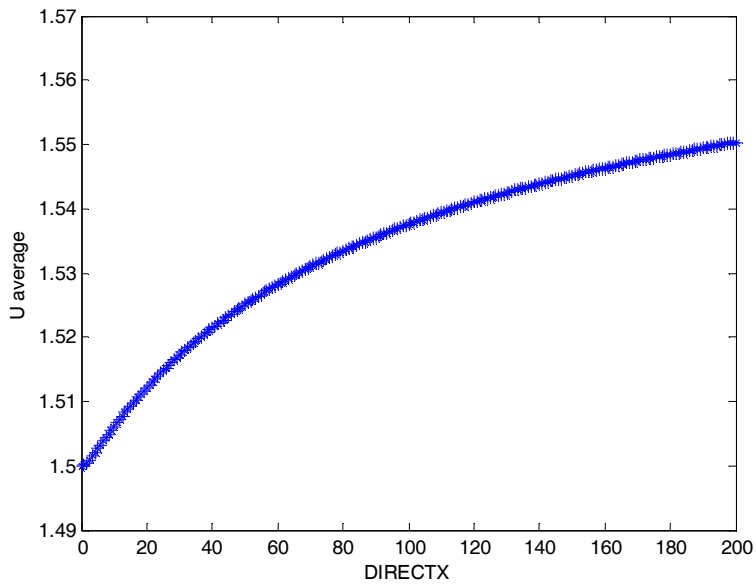


شکل (۱۳_۵): نمودار سرعت متوسط در جریان مغشوش در مختصات خود تشابه برای Xهای مختلف

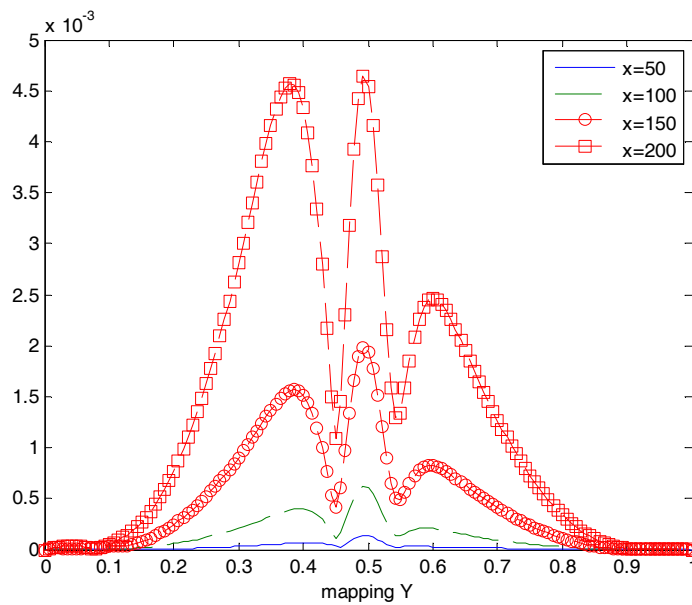
در شکل (۱۴_۵) میزان سرعت متوسط بر روی محور $y=0$ بر حسب X ترسیم شده است. بر اساس این شکل می توان نتیجه گرفت که سرعت متوسط در خط مرکزی رابطه مستقیم با X دارد.

در شکل (۱۵_۵) تنش رینولدز u'_{rms} در دامنه نگاشت γ ها نمایش داده شده است. همان گونه که از شکل (۱۵_۵) مشخص است با دور شدن از ورودی بازه محاسباتی رشد این تنشها بیشتر می شوند. در شکل (۱۶_۵)، (۱۷_۵) و (۱۸_۵) تنشهای رینولدز در مختصات خود تشابه نشان داده شده است. بر خلاف سرعت متوسط که در آن خاصیت خود تشابهی دیده می شود در تنشهای رینولدز این خاصیت دیده نمی شود. البته شایان ذکر است که با افزایش طول بازه محاسباتی خطوط تنشهای رینولدز در ایستگاههای مختلف نزدیک انتهای دامنه محاسباتی به هم نزدیکتر شده که این امر گویای آن است که احتمالاً در مقادیر زیاد X این تنشها بر روی یکدیگر قرار می گیرند. و خاصیت خود تشابهی در آنها دیده

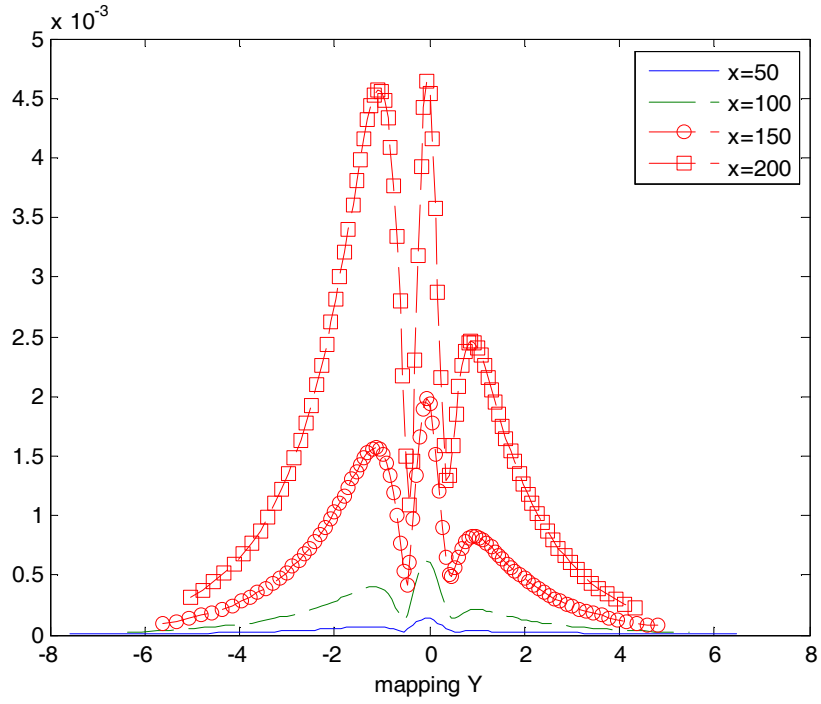
می شود. در شکل (۱۹_۵) تنشهای رینولدز بر حسب y/δ رسم گردیده است. که در آن $\delta = U/U_2 = 0.99$ است.



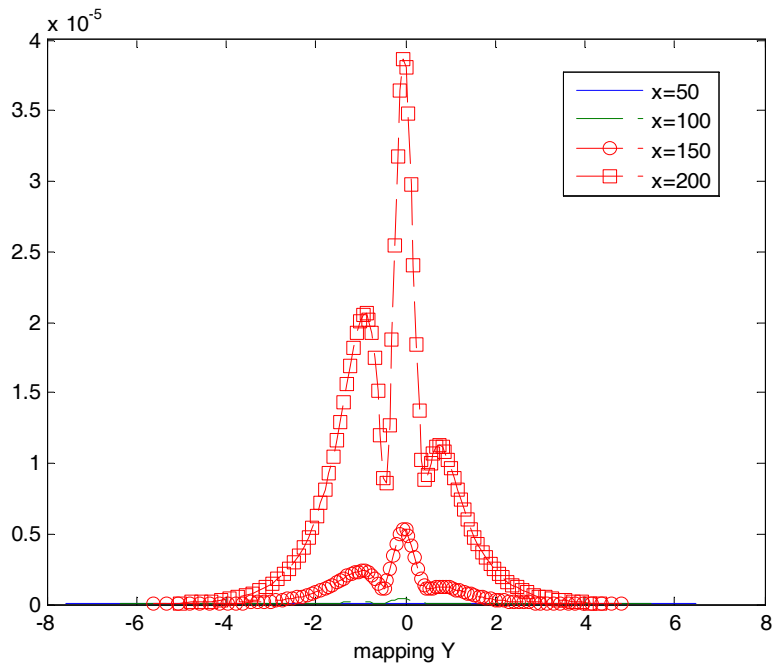
شکل (۱۴_۵): نمودار سرعت متوسط در جریان مغشوش در روی محور $y=0$



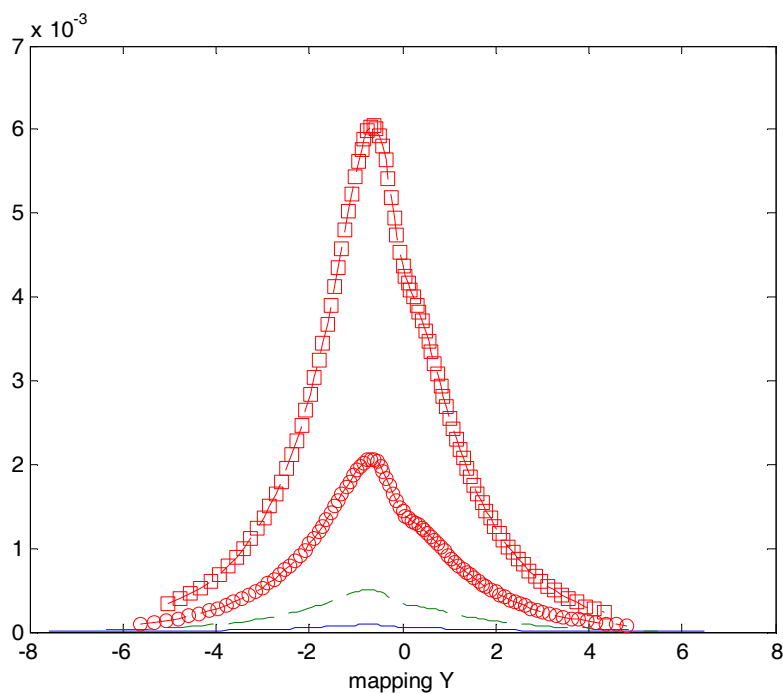
شکل (۱۵_۵): نمودار $\sqrt{(\overline{u'})^2} / U_{average}$ بر حسب ζ



شکل (۱۶_۵) پرفیل $\sqrt{(\overline{u'})^2} / U_{average}$ بر حسب y / δ_w

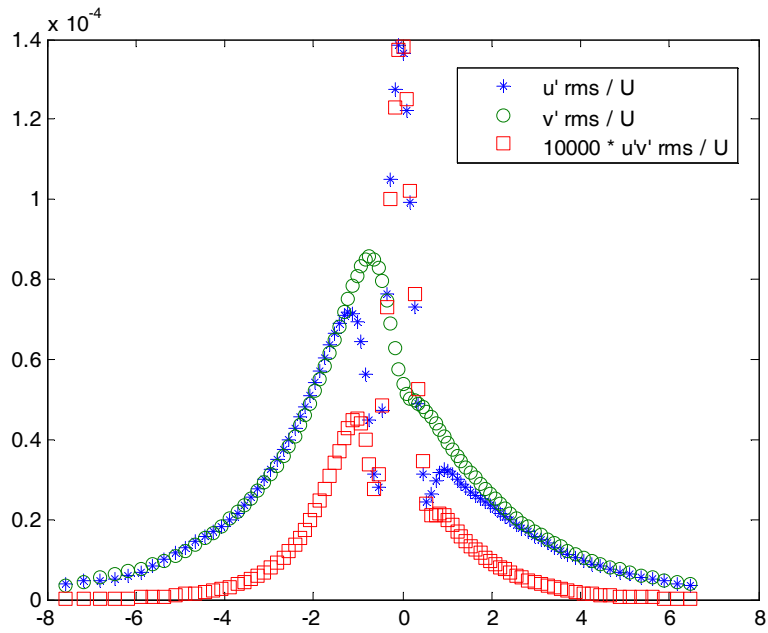


شکل (۱۷_۵) پرفیل $u'v'_{rms} / U_{average}$ بر حسب y / δ_w

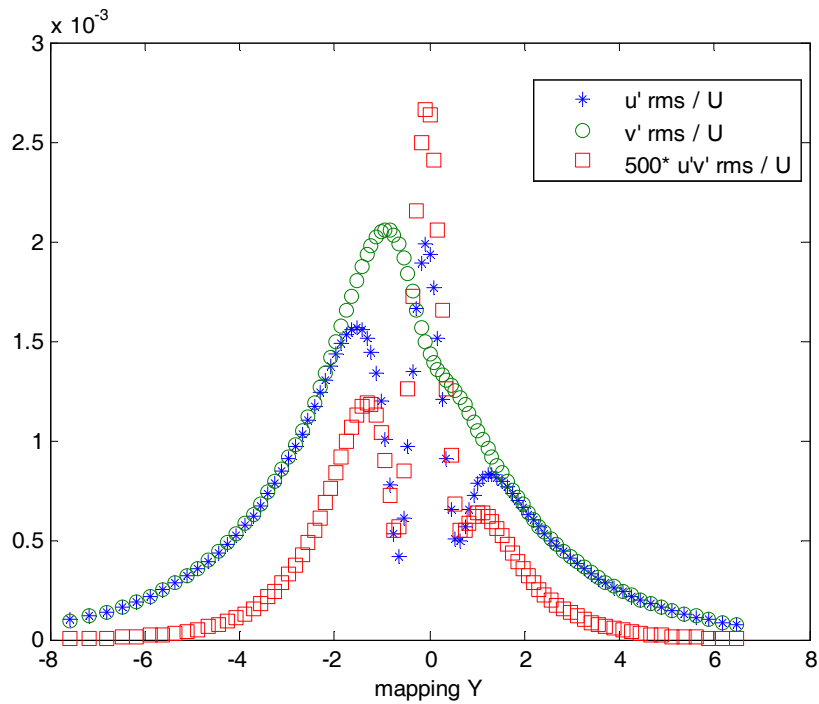


شکل (۱۸_۵) پروفیل $\sqrt{(\bar{v}')^2}/U_{average}$ بر حسب y/δ

در شکل‌های (۱۹_۵) و (۲۰_۵) هر سه تنش رینولدز در $X=50$ و $X=150$ رسم گردیده شده است. همانطور که در شکلها نشان داده شده است در ابتدا تنش $u'v'_{rms}$ نسبت به تنشهای u'_{rms} و v'_{rms} کوچک بوده ولی این تنش به سرعت در حال رشد بوده به نحوی که با شروع ایجاد گردابه ها در جریان مقدار تنش $u'v'_{rms}$ به حدود ۱۰٪ تنشهای u'_{rms} و v'_{rms} می رسد.

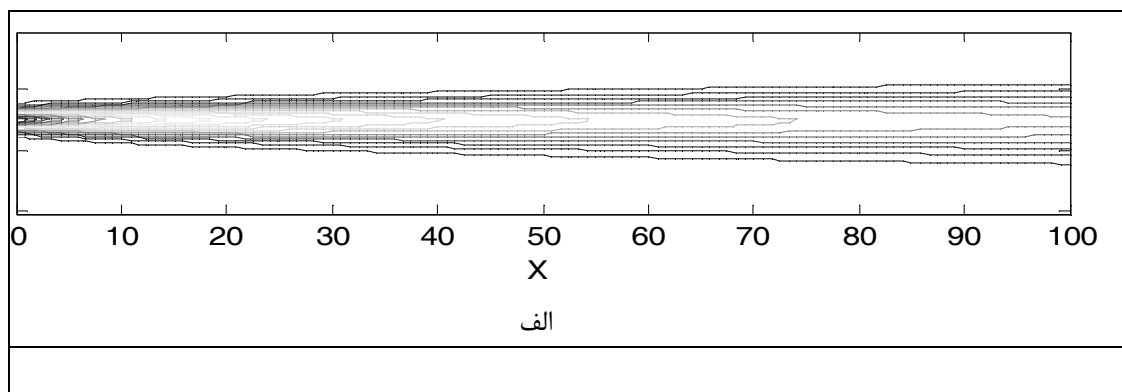


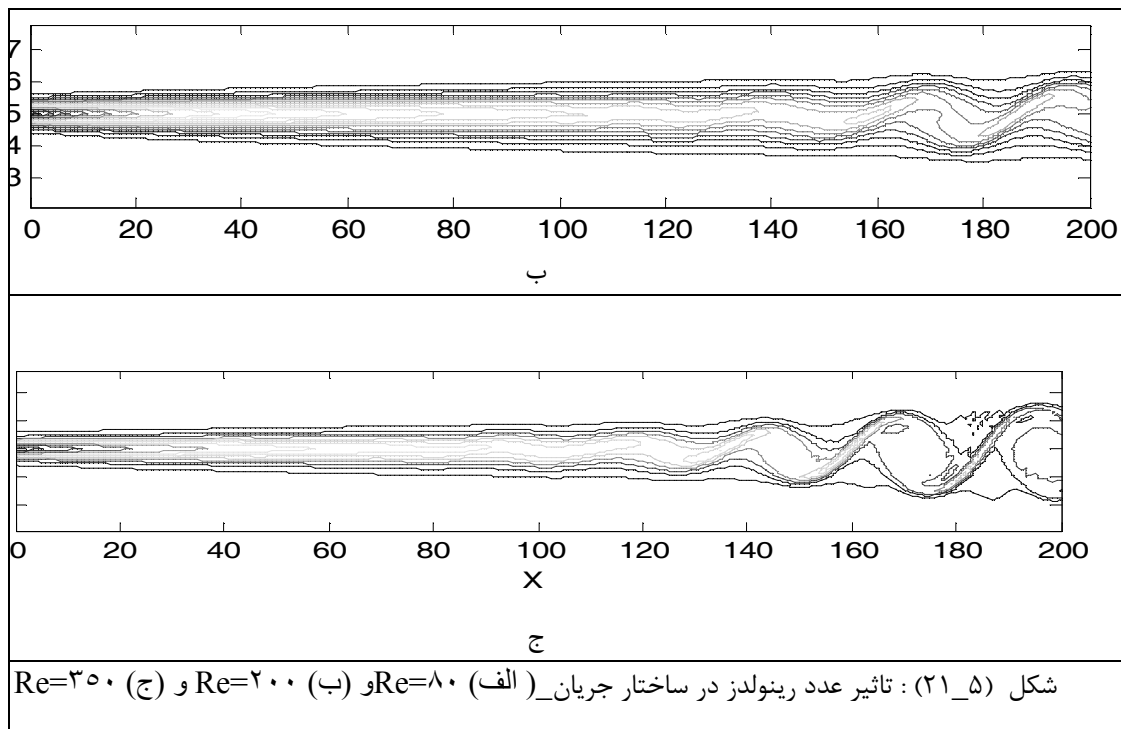
شکل (۱۹_۵): نمودار $\sqrt{(\bar{u}')^2}/U_{average}$ ، $\sqrt{(\bar{v}')^2}/U_{average}$ و $10000 \times u'v'_{rms}/U_{average}$ در نقطه $X = 50$ حسب y/δ_w



شکل (۲۰_۵): نمودار $\sqrt{(\bar{u}')^2}/U_{average}$ ، $\sqrt{(\bar{v}')^2}/U_{average}$ و $500 \times u'v'_{rms}/U_{average}$ در نقطه $X = 150$ بر حسب y/δ_w

در شکل (۲۱_۵) تاثیر عدد رینولدز بر ساختار جریان نشان داده شده است. در شکل (الف_۲۱_۵) عدد رینولدز جریان برابر با $Re=۸۰$ و در شکل (ب_۲۱_۵) برابر با $Re=۲۰۰$ و در (ج_۲۱_۵) برابر با $Re=۳۵۰$ است. لازم به ذکر است که در شکل (الف_۲۱_۵) و (ج_۲۱_۵) میزان دامنه اغتشاش برابر با 10^{-4} است و در شکل (ب_۲۱_۵) میزان دامنه اغتشاش برابر با 10^{-3} است.





۵_۴ بررسی شرط مرزی خروجی

همانگونه که در فصل سوم بیان گردید دو شرط مرزی از چهار شرط مرزی لازم در جهت محور X ها بر روی خروجی دامنه قرار داده شده است. معادلات بکار برده در مرز خروجی جریان باید خاصیت انعکاس ناپذیری داشته باشد. لزوم خاصیت انعکاس ناپذیری در معادلات حاکم بر شرط مرزی از آن جهت است که اغنشاشات ایجاد شده در درون جریان پس از برخورد با مرز خروجی به درون دامنه محاسباتی بر نگردند و جریان به صورت کاملاً عادی از مرز خروجی عبور کند. شرایط مرزی خروجی به صورت زیر است.

شرط مرزی انتقالی خطی

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -C \quad (۵_۵)$$

شرط مرزی انتقالی غیر خطی

$$\frac{f}{\rho} = -\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6_5)$$

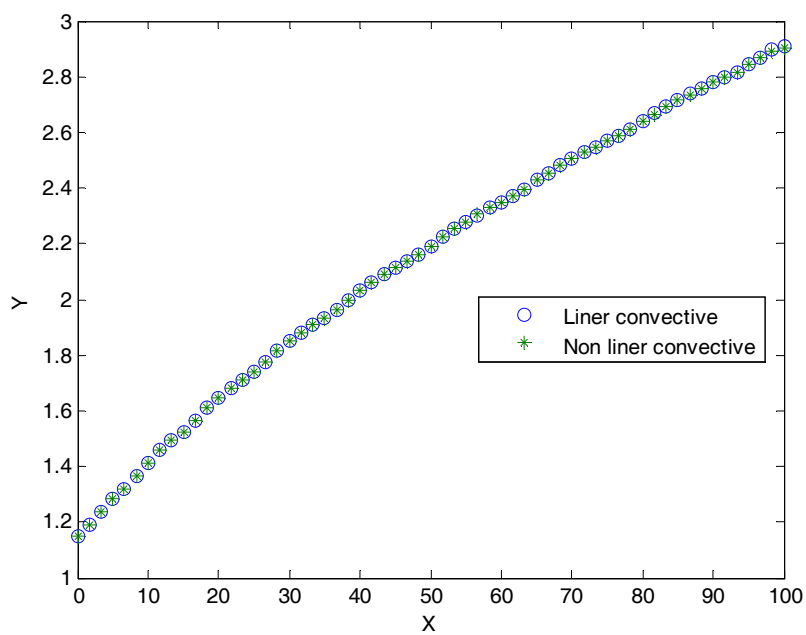
شرط مرزی انتقالی _ لزجی خطی

$$\frac{f}{\rho} = -C \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \psi) \quad (7_5)$$

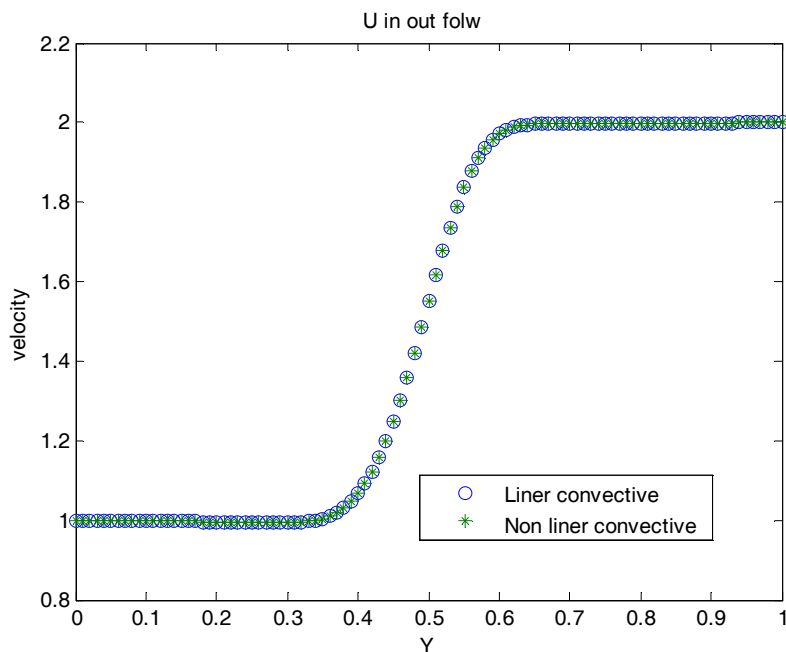
شرط مرزی انتقالی _ لزجی غیر خطی

$$\frac{f}{\rho} = -\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \psi) \quad (8_5)$$

پارامتر ψ را برابر u و v در نظر می گیریم. C ثابت انتقال است. و برابر سرعت حرکت گردابه ها در درون جریان است. مقدار ثابت C باید توسط سعی و خطا در کد نوشته شده بدست آید. این عمل بدین ترتیب است که ابتدا یک بازه محاسباتی به طول Lx در نظر گرفته و کد را اجرا می کنیم. سپس طول بازه محاسباتی را به $2 \times Lx$ کاهش داده مجدداً برنامه را اجرا کرده سپس نتایج دو برنامه را در دامنه محاسباتی مشترک یعنی $(0, Lx/2)$ مقایسه می کنیم. جوابهای حاصله باید در تمامی دامنه محاسباتی بر روی همدیگر قرار گرفته باشند. در حقیقت بزرگترین مشکل اصلی شرایط مرزی معادلات (5_5) و (7_5) بکار بردن سعی و خطا در محاسبات است. سعی و خطا نه تنها باعث ایجاد خطا در محاسبات شده بلکه در مواردی که تعداد گرههای محاسباتی زیاد بوده هزینه زمانی را به شدت بالا می برد. با انتخاب مناسب ثابت C همانند شکل (5_22) و (5_23) جوابهای هر دو شرط مرزی خطی و غیر خطی در حالت آرام کاملاً بر روی یکدیگر قرار می گیرند. برای اشکال آورده شده $\text{Re}=80$ است



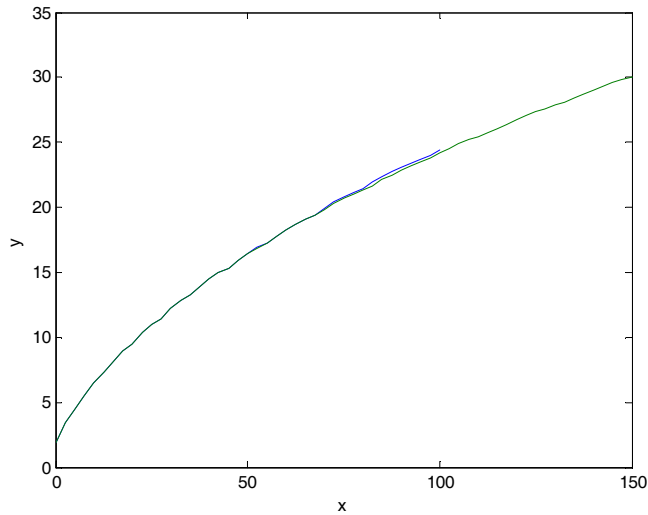
شکل ۲۲_۵: مقایسه δ بر حسب X با دو شرط مرزی خطی و غیر خطی انتقالی در جریان آرام



شکل ۲۳_۵: مقایسه U بر حسب y در $x=100$ با دو شرط مرزی خطی و غیر خطی انتقالی در جریان آرام

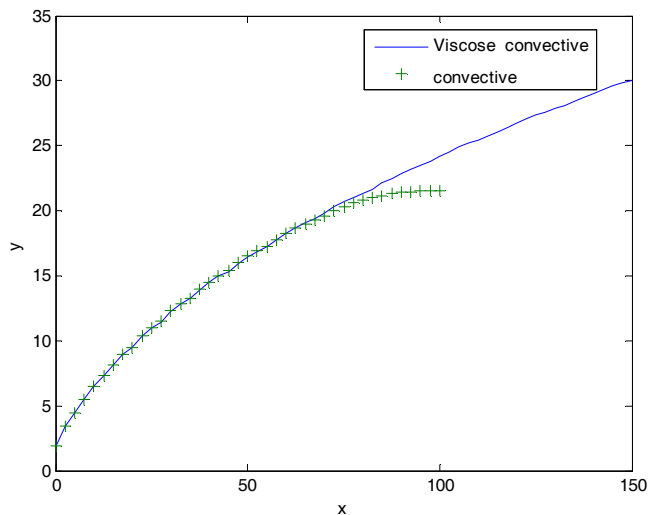
مشکل اصلی هر دو شرط مرزی انتقالی خطی و غیر خطی عدد رینولدزهای پایین جریان است. با کم شدن رینولدز دقت جوابهای این دو شرط مرزی کم می شود. این کاهش دقت را می توان در شکل (۲۴_۵) و (۲۵-۵) مشاهده کرد. عدد رینولدز در این جریان برابر با سه در نظر گرفته شده است. برنامه برای دو حالت مختلف اجرا شده است. بدین ترتیب که یک بار برنامه با شرط مرزی انتقالی ویسکوز غیر خطی برای دو طول دامنه محاسباتی $L \times 100$ و $L \times 150$ اجرا گردید شکل (۲۴-۵). سپس از آن شرط مرزی انتقالی غیر خطی و شرط مرزی انتقالی ویسکوز غیر خطی با طول $L \times 100$ استفاده شده است که نتیجه به صورت شکل (۲۵-۵) شد. همانطور که در نمودار (۲۴-۵) مشاهده می شود دو گراف کاملاً بر هم منطبق بوده. این امر تایید کننده شرایط مرزی را در این حالت است. در شکل (۲۵-۵) در نزدیکی ایستگاه $x=80$ نمودار انتقالی از نمودار انتقالی ویسکوز جدا شده است. پس می توان نتیجه گرفت شرط مرزی انتقالی در این رینولدز شرط مناسبی برای خروجی جریان نمی باشد. باید متذکر شد برای بررسی شرط مرزی انتقالی در رینولدز پایین می توانستیم آن را برای دو طول متفاوت

همانند شکل (۵-۲۴) ، نیز رسم کرد. شایان ذکر است که تمامی پارامترها موثر در هر دو اجرا برنامه از جمله تراکم نقاط محاسباتی ثابت در نظر گرفته شده است



شکل ۵-۲۴: نمودار δ بر حسب x برای $Re = 3$ برای شرط مرزی انتقالی_ویسکوز غیر خطی $Lx=100$ و

$$Lx=150.$$



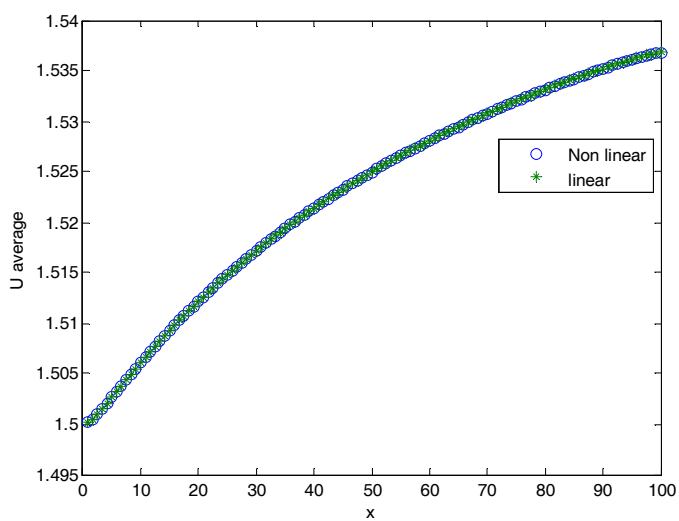
شکل ۵-۲۵: نمودار δ بر حسب x برای $Re = 3$ برای شرط مرزی انتقالی_ویسکوز غیر خطی و انتقالی غیر خ

برای بدست آوردن ثابت C به جای سعی و خطا می توان از معادله غیر خطی انتقالی _ ویسکوز نیز استفاده کرد. به این ترتیب که ابتدا برای شرایط مشخص این معادله را برای زمانی کوتاه با استفاده از فرم

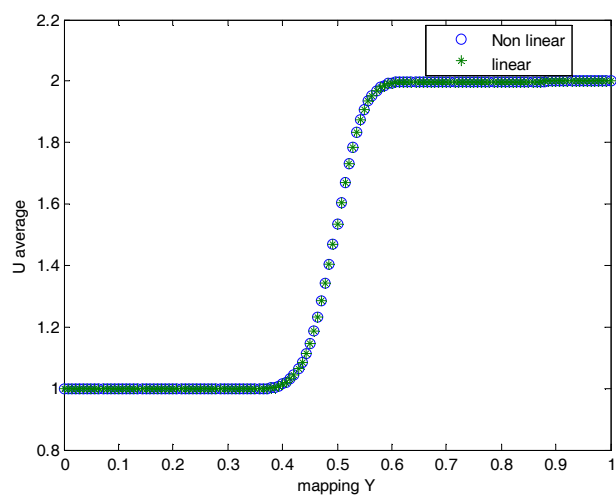
غیر خطی انتقالی _ ویسکوز در دامنه محاسباتی حل کرد. در هنگام حل یک موج به صورت مصنوعی در جریان ایجاد کرده و سرعت موج را توسط دو نقطه ترجیها در انتهای دامنه محاسباتی اندازه گرفت. بدین صورت که وقتی قله موج به ایستگاه اول رسید زمان ثبت شده و هنگام رسیدن قله موج به ایستگاه دوم زمان در ایستگاه دوم مجدداً ثبت می گردد. با داشتن زمان و فاصله دو ایستگاه ثابت C را بدست می آوریم. مقدار C بدست آمده از این روش بسیار دقیق است.

برای بررسی شرایط مرزی خروجی خطی و غیر خطی انتقالی _ ویسکوز در جریان مغشوش پارامترهای مقابل در نظر گرفته شد. $Re=300, N_x=240, N_y=140$ جریان را برای دو طول مختلف $L_x=200$ و $L_x=100$ اجرا گردید. گرافهای حاصله به صورت نمودارهای (۲۶_۵) تا (۳۳_۵) گردید.

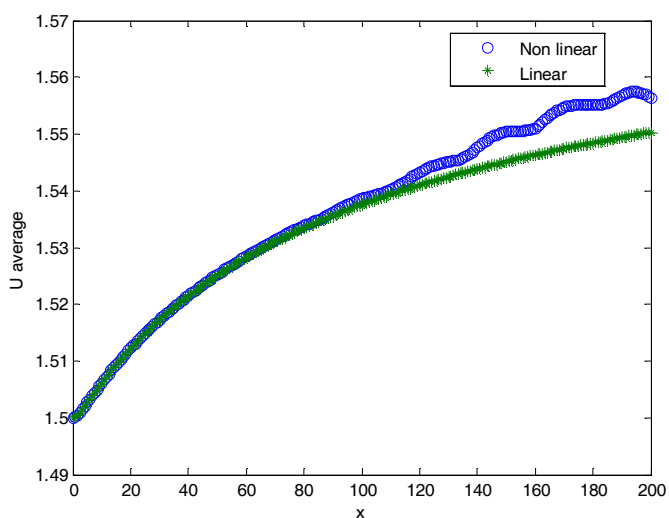
با توجه به اینکه در نمودارهای اشکال (۲۶_۵) و (۲۷_۵) کاملاً بر هم منطبق بوده و نمودار (۲۸_۵) و (۲۹_۵) در حوالی $X=100$ از هم جدا می شوند. می توان گفت که شرط مرزی انتقالی_ویسکوز غیر خطی در حالتی که در جریان گردابه های بزرگ ایجاد می شود، شرط خوبی نیست و بهتر است در این جریانها از شرط مرزی انتقالی خطی استفاده کرد. صحت این گفته را می توان در نمودارهای (۳۰_۵) تا (۳۳_۵) نیز جستجو کرد.



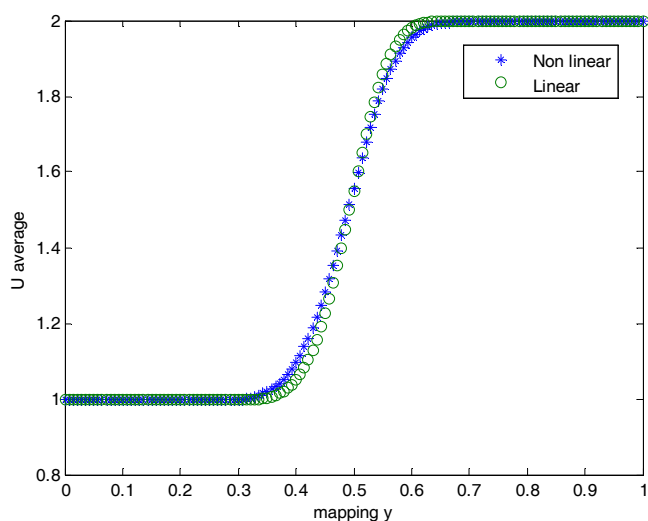
شکل (۲۶_۵) : پروفیل سرعت متوسط در روی محور y ها در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای دو شرط خروجی متفاوت انتقالی_ویسکوز خطی و غیر خطی



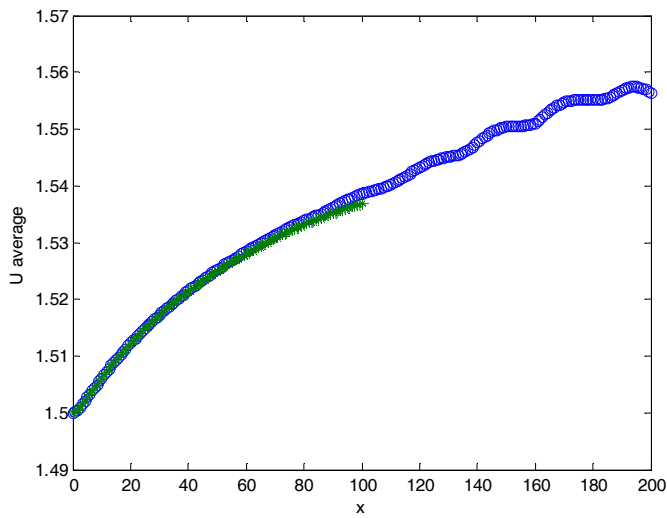
شکل (۲۷_۵) : پروفیل سرعت متوسط در $X=100$ در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای دو شرط مرز خروجی متفاوت انتقالی_ویسکوز خطی و غیر خطی . طول بازه محاسباتی برابر با $Lx=100$



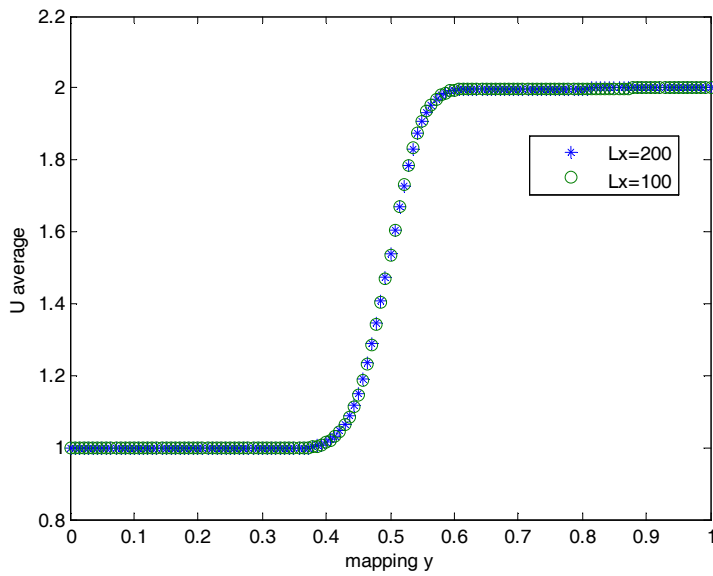
شکل (۲۸_۵) : پروفیل سرعت متوسط در روی محور y ها در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای دو شرط خروجی متفاوت انتقالی_ویسکوز خطی و غیر خطی طول محاسباتی برابر $LX=200$



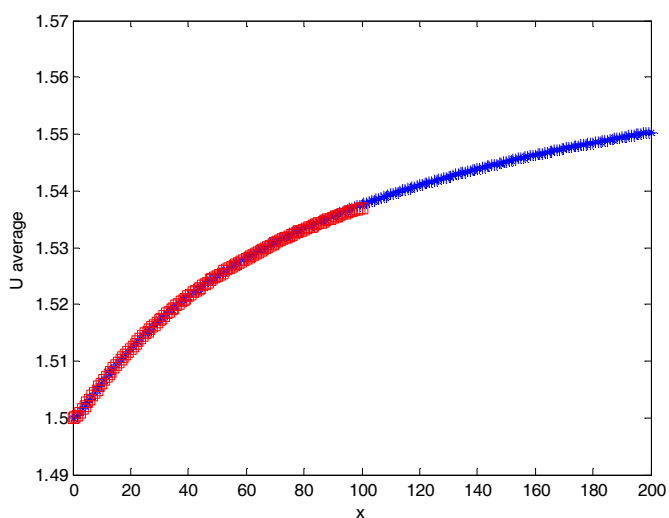
شکل (۲۹_۵) : پروفیل سرعت متوسط در $X=200$ در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای دو شرط مرز خروجی متفاوت انتقالی_ویسکوز خطی و غیر خطی طول محاسباتی برابر $LX=200$



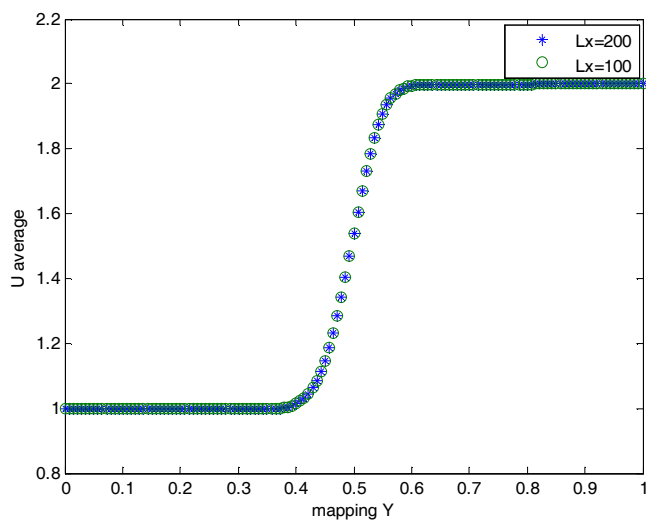
شکل (۳۰_۵) : پروفیل سرعت متوسط در روی محور y ها در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای شرط مرز خروجی انتقالی_ویسکوز غیر خطی طول محاسباتی یکبار برابر $LX=200$ و بار دیگر برابر با $LX=100$ است.



شکل (۳۱_۵) : پروفیل سرعت متوسط در $X=100$ در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای شرط مرزی خر انتقالی_ویسکوز غیر خطی طول محاسباتی یکبار برابر $LX=200$ و بار دیگر برابر با $LX=100$ است.



شکل (۳۲_۵): پروفیل سرعت متوسط در روی محور y ها در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای شرط مرز خروجی انتقالی_ویسکوز خطی طول محاسباتی یکبار برابر $LX=200$ و بار دیگر برابر با $LX=100$ است.

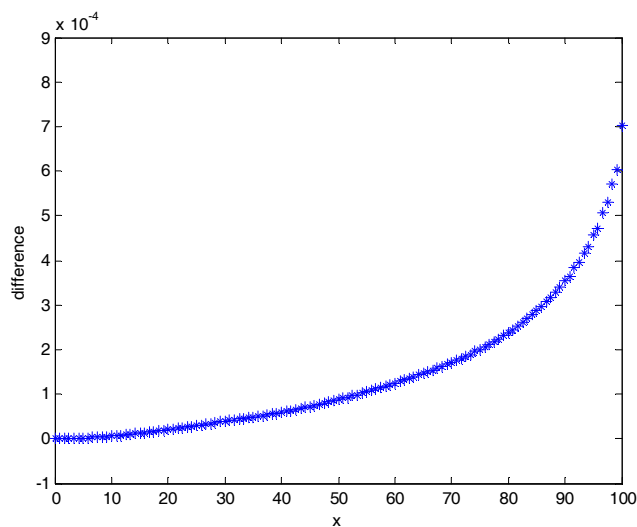


شکل (۳۳_۵): پروفیل سرعت متوسط در $X=100$ در جریان اختلاطی مغشوش با $Re=300$ برای شرط مرزی مرز انتقالی_ویسکوز خطی طول محاسباتی یکبار برابر $LX=200$ و بار دیگر برابر با $LX=100$ است.

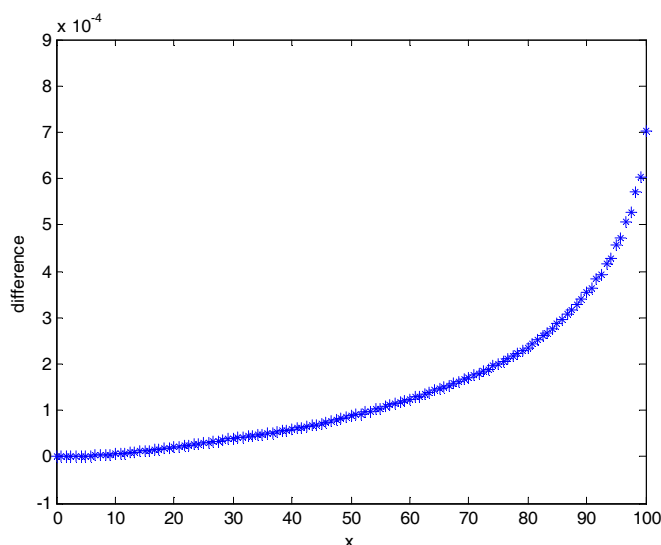
برای بررسی شرط مرزی انتقالی ویسکوز خطی و شرط مرزی مرزی انتقالی خطی. دو گراف به

صورت شکل (۳۴-۵) و (۳۵-۵) تهیه کردیم. در این دو گراف ابتدا طول بازه محاسباتی را برابر با

۱۵۰ در نظر گرفته سپس برنامه را با شرط مرزی انتقالی_ویسکوز اجرا می کنیم. سپس طول بازه محاسباتی را برابر با ۱۰۰ گرفته و مجدداً برنامه را برای دو حالت مختلف اجرا می کنیم. در حالت نخست شرط مرزی خروجی شرط مرزی انتقالی است. و در دومین حالت شرط مرزی انتخابی شرط مرزی انتقالی_ویسکوز است. حال نتایج حاصل از دو اجرا را با نتایج حاصل از اجرای که با طول بازه محاسباتی ۱۵۰ انجام داده بودیم مقایسه می کنیم. نمودارها در هر دو حالت کاملاً بر روی هم قرار گرفتند. برای وضوح بیشتر در اینجا ما نمودارهای اختلاف سرعت متوسط روی محور y ها را رسم کردیم. که به صورت شکل (۵-۳۴) و (۵-۳۵) بدست آمد. همان طور که مشاهده می شود هر دو نمودار کاملاً مثل هم بوده بنابر این میانگین خطای آنها را بدست آوردیم. که برای هر دو حالت عدد $1.3967e-004$ بدست آمد.



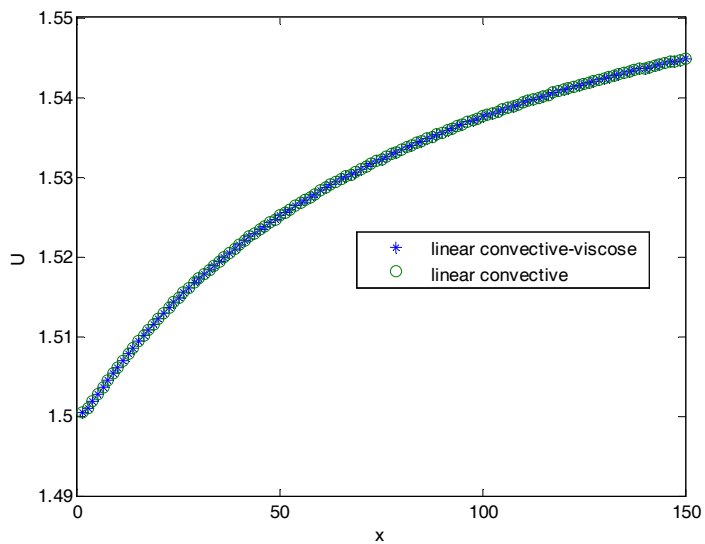
شکل (۵-۳۴): مقایسه اختلاف روش انتقالی_ویسکوز با طول ۱۵۰ و روش انتقالی با طول ۱۰۰



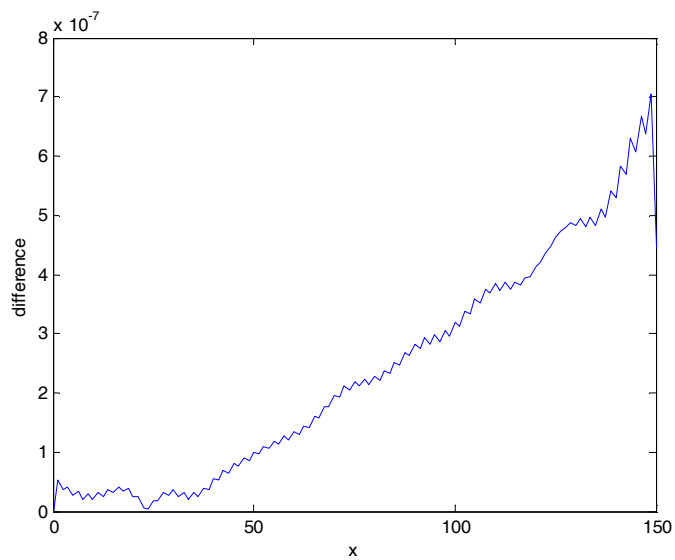
شکل (۵-۳۵): مقایسه اختلاف روش انتقالی با طول ۱۵۰ و روش انتقالی با طول ۱۰۰

برای بررسی بیشتر دو شرط مرزی انتقالی_ویسکوز خطی و شرط مرزی انتقالی خطی در نظر گرفته شد. و برنامه برای پارامترهای $R_e = 300$ ، $L \approx 150$ ، $N_x = 150$ و $N_y = 100$ اجرا گردید. سرعت بر روی محور y ها به ازای x های مختلف به صورت شکل (۵-۳۶) بدست آمد. همچنین برای بررسی اختلاف بین دو جواب با شرایط مرزی مختلف نمودار قدر مطلق اختلاف بین دو جواب رسم گردید که به صورت شکل (۵-۳۷) است. نتایج بدست آمده در اینجا کاملاً منتظره بوده است. به دلیل افزایش عدد رینولدز ترم لزج که با ضریب $1/Re$ در معادلات شرایط مرزی حاضر شده بود. خود به خود از درون معادلات شرایط مرزی حذف می شود.

بنابر این می توان گفت که در رینولدز ۳۰۰ که برای این آزمایش در نظر گرفته شده است. استفاده از شرط مرزی خطی انتقالی_ویسکوز و شرط مرزی انتقالی خطی منجر به یک جواب شده است. پس برای رینولدزهای ۳۰۰ و بالا تر از آن لازم به استفاده از شرایط انتقالی_ویسکوز خطی نیست. و شرط انتقالی خطی برای این حالت کافی است.



شکل (۳۶-۵): سرعت بر روی خط مرکزی برای دو شرط مرزی مختلف



شکل (۳۷-۵): اختلاف بین دو نتیجه بدست آمده در شکل ۳۶-۵

نتیجه گیری

نتیجه گیری:

هدف از انجام این پایان نامه بیان شرایط مرزی برای خروجی جریان اختلاطی بود. در این پایان نامه چهار شرط مرزی برای خروجی جریان اختلاطی بیان شد. شرایط مرزی ارائه شده دارای مزایا و معایبی بوده که بر اثر تحلیل نتایج برنامه در این پایان نامه به دست آمده است.

۱ شرط مرزی انتقالی خطی

بزرگترین مشکل این شرط احتیاج به سعی و خطا در بدست آوردن پارامتر انتقال مناسب برای این جریان است. همانطور که بیان گردید برای رفع این مشکل می توان ابتدا ثابت انتقال جریان را توسط شرط مرزی انتقالی غیر خطی به دست آورد و از آن استفاده کرد. مشکل دوم این شرط مرزی رینولدزهای پایین جریان است که در آن دقت مسئله کاهش می یابد. به عنوان مثال برای حالتی که پروفیل سرعت ورودی لایه اختلاطی به صورت پروفیل سرعت ورودی در این پروژه باشد. استفاده از این شرط مرزی، برای رینولدز زیر ۱۰ توصیه نمی شود.

۲ شرط مرزی انتقالی غیر خطی

با این شرط مرزی دیگر مشکل سعی و خطا برطرف شده ولی سرعت برنامه به دلیل بالا رفتن حجم محاسبات مقداری کاهش می یابد البته باید متذکر شد که زمان از دست داده بابت کاهش سرعت در این روش نسبت به زمان صرف شده برای سعی و خطای، در روش غیر خطی بسیار کمتر است.

. از دیگر معایب این شرط مرزی پیچیده تر شدن ساختار برنامه است. (برای اعمال شرط مرزی باید متغییرات محاسباتی به متغییرات اصلی در جریان تبدیل گردد.).

استفاده از این شرط باعث اشغال بیشتر فضای کوتاه مدت رایانه می شود. پس در مواردی که گره های محاسباتی زیاد می شوند این شرط توسعه نمی شود.

استفاده از این شرط در رینولدزهای پایین توصیه نمی شود. به عنوان مثال برای حالتی که پروفیل سرعت ورودی لایه اختلاطی به صورت پروفیل سرعت ورودی در این پروژه باشد. استفاده از این شرط مرزی برای رینولدز زیر ۱۰ توصیه نمی شود.

۳ شرط مرزی انتقالی_ویسکوز خطی

بزرگترین مشکل این شرط همانند حالت شماره یک، احتیاج به سعی و خطا در بدست آوردن پارامتر انتقال مناسب برای این جریان است.

استفاده از این روش حجم محاسبات لازم را بالاتر می برد
استفاده از این روش موجب بالا رفتن فضای اشغال شده حافظه کوتاه مدت رایانه می شود. پس در حالتی که تعداد گره های محاسباتی زیاد می شود استفاده از این روش توصیه نمی شود.
استفاده از این شرط برای جریانهای آرام توصیه می شود.

۴ شرط مرزی انتقالی_ویسکوز غیر خطی

با این شرط مرزی دیگر مشکل سعی و خطا برطرف شده ولی سرعت برنامه به دلیل بالا رفتن حجم محاسبات مقداری کاهش می یابد البته باید متذکر شد که زمان از دست داده بابت کاهش سرعت در این روش نسبت به زمان صرف شده برای سعی و خطای، در روش غیر خطی بسیار کمتر است.

. از دیگر معایب این شرط مرزی پیچیده تر شدن ساختار برنامه است. (برای اعمال شرط مرزی باید متغیرات محاسباتی به متغیرات اصلی در جریان تبدیل گردد.)

اصلی ترین مشکل این روش در این است که برای حالتی که گردابه های بزرگ در جریان ایجاد می شود برنامه دقت برنامه کاهش می یابد. پس برای حالتی که گردابه های بزرگ در جریان ایجاد می شود، توصیه می شود که از این روش استفاده نگردد.

استفاده از این شرط باعث اشغال بیشتر فضای کوتاه مدت رایانه می شود. در حقیقت این شرط بیشترین فضا را اشغال می کند. پس در مواردی که گره های محاسباتی زیاد می شوند این شرط توصیه نمی شود.

پیشنهادات:

- ۱ صحت شرایط مرزی آورده شده در این پایان نامه را برای جریانهای برشی آزاد دیگر بررسی شود.
- ۲ با توجه به شرط مرزیهای آورده شده در این پایان نامه برای یک رینولدز خاص یک شرط مرزی مناسب برای جریان انتخاب شده، سپس بازه محاسباتی را به چند بلوک تقسیم کرده مسئله روی بلوکها به صورت جداگانه حل گردد. به این ترتیب سرعت محاسبات را افزایش داده. و می توان طول بازه محاسباتی را طولانی تر در نظر گرفت و گردابه های ایجاد شده در جریان را تحلیل کرد.

مراجع:

- ۱- ایزی، ح. ۱۳۸۵. حل مستقیم عددی جریان جت. دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود.
- ۲- دیبائی بناب، م. ح. ۱۳۸۵. تدوین نرم افزار جهت تحلیل جریان بررشی، دو بعدی، گذرا و غیر قابل تراکم.
- ۳- سلمانی ماهینی. ۱۳۸۴. تحلیل پایداری جت. دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود.
- ۴- شیمز، ا. ۱۳۸۲. مکانیک سیالات. ترجمه علیرضا انتظاری چاپ هشتم. ناشر: نورپردازان تهران
- ۵- ضرغامی، ا. ۱۳۸۵. حل مستقیم عددی جریان اختلاطی آزاد. دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود.
- ۶- وایت. ۱۳۸۴، مکانیک سیالات پیشرفته، ترجمه محمد رضایی نیا، موسسه انتشاراتی فرهنگی فکر خلاق نوین
- ۷- ویتلی، جرالد. ۱۳۸۲، محاسبات عددی، ترجمه محمد علی پورپاک. چاپ سوم، تهران.
- ۸- Ansari.A.R, Shishkin. *Meshes and their Applications*. Department of Mathematics, Gulf University for Science & Technology, Hawally ۳۲۰۹۳, Kuwait._
- ۹- ASpley.D. ۲۰۰۴. *Turbulent boundary layer*.
- ۱۰- Chollet.J.P, Lesieur.M.L. ۱۹۸۵. Numerical Simulation of Vortex in Mixing Layer & Plane Jet.
- ۱۱-Ferziger, J. Peric, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics. Third, rev edition*.
- ۱۲- Garde. R.J. ۲۰۰۰. *Turbulent Flow*. New Age International Limited.
- ۱۳- Ho.C.M, Huerre.P. Fluid Mech. ۱۹۸۴. *Perturbed Free Shear Layer*. Annual.Rew.

- ١٤- Hoffmann,K.A and Chiang,S.T. ٢٠٠٠. *Computational Fluid Dynamics. Volume 1. Fourth edition. Publication of Engineering Education system ,Wichita , Kansas.*
- ١٥- Hu.Z , Luo.X , Luo.K.H. ٢٠٠٢. *Numerical Simulation of Particle Dispersion in Spatially Developing Mixing Layer. Theoretical and Computational Fluid Dynamics.*
- ١٦- Maghrebi.M.J. . ١٩٩٩. *A Study of Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three-Dimensional Planer Wake.* PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia.
- ١٧- Mathieu.J,Scott.J. ٢٠٠٠. *An Introduction to Turbulent Flow.*Cambridge University Press.
- ١٨- Modi.A. April ٢٦,١٩٩٩ *Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow.*
- ١٩- Moin.P , Mohesh.K. Fluid Mech.١٩٨٩. *Direct Numerical Simulation : A Toolin Turbulence Research.*
- ٢٠- Michalke.A. ١٩٦٥. *On Spatially Grow thing Disturbance in Inviscid Shear Layer.* Institute of turbulence.Berlin
- ٢١- Oleg Mikhailovich,B. *Turbulence :New Approaches. 2005. Cambrifge International Science PubliSHing.*
- ٢٢- LoweryP.S , Reynolds.W. ١٩٨٦. *Numerical Simulation of Spatially Developing, Forced, Plane Mixinh Layer.* NASA NCC٢-٠١٥
- ٢٣-Lele.k,١٩٩١, Compact finite difference schemes with spectral_ like Resolution.
- ٢٤- Liu.J.T.C.Mech.١٩٨٩. *Coherent Structures in Transitional and Turbulence Free Shear Flows.* Ann.Rew.
- ٢٥- Pellerin.S , Dulieu.A. ٢٠٠٠. *Evaluation of Time and Space Scales in Developing ٣D Turbulence Incompressible Mixing Layer by Using LES.*
- ٢٦- Schlichting.H. ١٩٧٩. *Boundary Layer Theory.* Mc Graw Hill
- ٢٧- Wray.A & Hussaini. ١٩٨٤. M.Y. *Numerical Experiments in Boundary Layer Stability.* Proc.R. Soc. Lond. A, vol. ٣٩٢, pp ٣٧٣-٣٨٩.

Abstract

The non-dimensional Navier-Stokes equations in rotational form for the two dimensional mixing layer flow are solved using direct numerical simulation. The length scale and the velocity scale of the base flow at the inlet boundary of computational domain are used as two characteristics to define the flow Reynolds number. These two characteristics are the mixing layer half width and velocity difference of two streams. The governing equations are discrete in the stream wise direction (x), using a sixth order compact finite difference scheme, and cross stream direction (y), a mapped compact finite difference scheme, respectively. A tangent mapped of $y = \beta \tan(\pi\zeta / \gamma)$ is used to relate the physical domain in the double infinity of $-\infty < y < \infty$ to the computational domain of ζ ($-\gamma \leq \zeta \leq \gamma$). The compact third order of runge-kutta method is used for the time-advancement purpose. Four models is used in outflow boundary condition to create a non-reflective type boundary condition at the outlet then we changed the mixing layer structure and found the best model for mixing outflow boundary condition in different structures.

Key words

γ D Mixing Layer, Compact finite difference, Self similarity and Mixing layer half width.



Shahrood University of Technology
Department of Mechanical Engineering
M.Sc. Thesis

Title:

A Study of out flow boundary condition
in incompressible free mixing layer

By:

Hamid Reza Sanandaji

Supervisor:

DrM.J. Maghrebi

2008-2009