

دانشگاه شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

**تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به
کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی با توزیع توانی خواص**

هادی خوشدل

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد کهنوی

استاد مشاور:

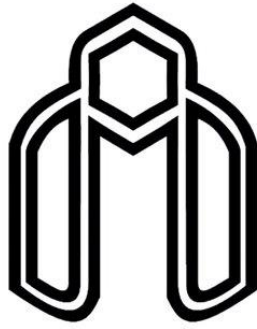
مهندس محمد پرهیزکار یعقوبی

ماه و سال انتشار:

بهمن ماه ۱۳۹۳

أ





دانشگاه شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

**تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به
کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی با توزیع توانی خواص**

هادی خوشدل

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد کهنوی

استاد مشاور:

مهندس محمد پرهیزکار یعقوبی

پایان‌نامه ارشد جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار:

بهمن‌ماه ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک
گروه طراحی کاربردی



دانشگاه شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

شماره :

تاریخ :

بسمه تعالی

فرم صورتجلسه دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره‌ی کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد آقای هادی خوشدل، رشته مهندسی مکانیک، گرایش طراحی کاربردی، تحت عنوان تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدارضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی با توزیع توانی خواص که در تاریخ _____ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید، به شرح زیر است.

قبول (با درجه : _____ امتیاز _____) دفاع مجدد مردود

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)

۵- نمره‌ی کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه‌ی علمی	نام و نام خانوادگی	اعضای هیأت داوران
			۱- استادراهنما
			۲- استاد مشاور
			۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
			۴- استاد ممتحن
			۵- استاد ممتحن

تأیید رئیس دانشکده مکانیک
گروه طراحی کاربردی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد آقای هادی خوشدل

تحت عنوان:

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی با توزیع توانی خواص

در تاریخ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
مورد ارزیابی و با درجه‌ی مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:

تقدیم

این اثر ناچیز را به پیکر خاک و روان پاک شهدای گمنام،
به ویژه شهدای گمنام آرمیده در دانشگاه شاهرود تقدیم می نمایم.

تشکر و قدردانی

به پیشگاه پدر و مادر مهربان، با غیرت، فداکار و عزیزم که زندگی و عمرشان را در راه رشد و موفقیت این حقیر سراپاتقصیر، فدا کردند و همواره پشتیبان و یاور من بودند، خالصانه‌ترین سپاس‌ها را تقدیم و با تمام وجود گلبوسه‌های ارادتم را نثار دستان مهربانشان می‌کنم.

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر مهدی قناد که در این مدت، بزرگواران و دلسوزانه این حقیر را تحمل و مورد ارشاد و محبت خویش قرار دادند، از صمیم قلب سپاسگزارم؛ که حقیقتاً اگر همکاری، صبر و حسن‌نیت ایشان نبود، چه بسا از ادامه این راه دشوار بازمی‌ماندم.

همچنین از اساتید ارجمند آقای دکتر حمیدرضا ایپک‌چی و آقای دکتر محمد جعفری که مرا مورد لطف و مساعدت بی‌دریغ خویش قرار دادند کمال تشکر و امتنان دارم.

بر خود لازم می‌دانم از استاد مشاور، دوست باوفا و برادر مهربانم، جناب آقای مهندس محمد پرهیزکار یعقوبی که ارشادات، همکاری و همیاری بی‌شائبه و خالصانه‌اش همواره برایم امیدبخش و گره‌گشا بود، و همچنین از خانواده محترمشان به‌ویژه پدر گرانقدر ایشان، صمیمانه از بن‌دندان سپاسگزار باشم.

در پایان از همه دوستان و بزرگواران که به هر نحو حقی به گردن بنده دارند با تمام وجود تشکر می‌نمایم.

با ارادت و اخلاص-هادی خوشدل

تعهدنامه

اینجانب هادی خوشدل دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک-گرایش طراحی کاربردی، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی تحلیلی ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدارضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی با توزیع توانی خواص، تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهتویی و مشاوره مهندس پرهیزکار یعقوبی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه شاهرود» و یا «University of Shahrood» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پژوهش با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، معادلات حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمگن پیزوالکتریک که تحت بار حرارتی، الکتریکی و مکانیکی قرار دارد را استخراج می‌کنیم. حل با استفاده از روش الاستیسیته مستوی، حلی دقیق می‌باشد و در پژوهش حاضر به عنوان مبنا در نظر گرفته شده است. نتایج (تنش‌های شعاعی، محیطی، محوری و فن مایسز، جابه‌جایی شعاعی و پتانسیل الکتریکی) برای بارگذاری حرارتی، الکتریکی و مکانیکی با شرایط انتهایی متفاوت (کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای) استخراج و با نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود مقایسه می‌گردد. همچنین اثر ناهمگنی مواد بر روی رفتار حرارتی، الکتریکی و مکانیکی جسم با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بررسی‌ها حاکی از آن است که تحت بارگذاری‌های مختلف، توزیع تنش محیطی، محوری و فن مایسز، مشابه هم می‌باشد؛ می‌توان گفت در مجموع تنش محیطی اثری غالب دارد. همچنین مقدار تنش شعاعی در برابر تنش‌های محیطی، محوری و فن مایسز بسیار کمتر است.

واژگان کلیدی: حل ترموالاستیک، استوانه‌ی جدار ضخیم، نظریه‌ی الاستیسیته‌ی

مستوی (PET)، روش اجزای محدود (FEM)، ماده‌ی ناهمگن پیزوالکتریک (FGPM).

مطالب

فصل ۱	۱
۱-۱ مقدمه‌ای بر پوسته‌ها	۲
۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها	۲
۳-۱ نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها	۴
۱-۳-۱ نظریه‌های پوسته‌های نازک	۴
۲-۳-۱ نظریه‌ی پوسته‌های ضخیم	۶
۴-۱ مقدمه‌ای بر مواد	۱۰
۵-۱ مواد FG	۱۱
۱-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد FG	۱۱
۲-۵-۱ ویژگی‌های مواد FG	۱۲
۳-۵-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد FG	۱۳
۶-۱ مواد پیزوالکتریک	۱۶
۱-۶-۱ تاریخچه‌ی مواد پیزوالکتریک	۱۶
۲-۶-۱ تعریف مواد پیزوالکتریک	۱۷
۳-۶-۱ مبانی رفتاری مواد پیزوالکتریک	۱۸
۴-۶-۱ کاربردهای مواد پیزوالکتریک	۲۰

۲۲ پیشینه‌ی پژوهش
۲۸ ۸-۱ جمع‌بندی
۲۹ فصل ۲
۳۰ ۱-۲ مقدمه
۳۰ ۲-۲ روابط الکتروترموالاستیک در مختصات استوانه‌ای
۳۱ ۱-۲-۲ معادلات تعادل
۳۲ ۲-۲-۲ معادلات ساختاری
۳۳ ۳-۲-۲ معادلات گرادیان
۳۴ ۳-۲ نظریه‌ی الاستوسیتیه‌ی مستوی
۳۹ ۱-۳-۲ شرایط مرزی استوانه
۴۰ ۲-۳-۲ شرایط انتهایی استوانه
۴۳ ۴-۲ استخراج و حل معادلات حاکم بر مسأله
۴۳ ۱-۴-۲ معادله‌ی تعادل حرارت
۴۴ ۲-۴-۲ معادلات تعادل الکتریکی
۴۵ ۳-۴-۲ معادله‌ی تعادل مکانیکی
۴۸ ۴-۴-۲ حالت کرنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر بسته و مقید)
۵۰ ۵-۴-۲ تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز)

فصل ۳	۵۱
۱-۳ مقدمه	۵۲
۳-۲ تحلیل اجزای محدود استوانه‌های همگن	۵۲
۱-۲-۳ تحلیل اجزای محدود الکتروترمو مکانیکی در ANSYS	۵۲
۲-۲-۳ انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله	۵۳
۳-۳ مطالعه موردی استوانه همگن تحت بارگذاری مکانیکی	۵۴
۱-۳-۳ استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای	۵۵
۲-۳-۳ استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای	۶۱
۴-۳ مطالعه موردی استوانه همگن تحت بارگذاری حرارتی	۶۲
۱-۴-۳ استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای	۶۳
۲-۴-۳ استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای	۶۹
۵-۳ مطالعه موردی استوانه همگن تحت بارگذاری الکتریکی	۷۰
۱-۵-۳ استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای	۷۰
۲-۵-۳ استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای	۷۵
فصل ۴	۷۷
۱-۱ پیش‌گفتار	۷۸
۲-۱ تحلیل اجزای محدود استوانه‌های ناهمگن	۷۸

۱-۲-۱	مدل‌سازی مواد ناهمگن پیزوالکتریک	۷۸
۲-۲-۱	انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله	۷۸
۱-۴	مطالعه موردی استوانه ناهمگن تحت بارگذاری مکانیکی	۷۹
۱-۱-۴	استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای	۸۰
۲-۱-۴	استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای	۸۴
۲-۴	مطالعه موردی استوانه ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی	۸۵
۱-۲-۴	استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای	۸۵
۲-۲-۴	استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای	۹۱
۳-۴	مطالعه موردی استوانه ناهمگن تحت بارگذاری الکتریکی	۹۲
۱-۳-۴	استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای	۹۲
۲-۳-۴	استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای	۹۷
۵	فصل ۵	۹۹
۱-۵	نتیجه‌گیری	۱۰۰
۲-۵	پیشنهادها	۱۰۱
مراجع		۱۰۳

شکل‌ها

- شکل ۱-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف ۱۳
- شکل ۲-۱ توزیع خواص در استوانه‌ی ناهمگن ۱۵
- شکل ۳-۱ توزیع خواص به صورت کسر حجمی در استوانه‌ی ناهمگن ۱۶
- شکل ۴-۱ دیسک پیزوالکتریک تغییر شکل یافته ۱۸
- شکل ۵-۱ نمونه‌ای از اثر پیزوالکتریک ۱۹
- شکل ۱-۲ نمایش مختصات استوانه‌ای ۳۰
- شکل ۲-۲ شرایط مرزی تنش در لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه ۴۰
- شکل ۳-۲ شرایط انتهایی استوانه‌ی مورد مطالعه الف-تنش صفحه‌ای ب-کرنش صفحه‌ای ۴۳
- شکل ۱-۳ نمودار همگرایی تحلیل المان محدود ۵۴
- شکل ۲-۳ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری مکانیکی ۵۶
- شکل ۳-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی بر اثر بارگذاری مکانیکی ۵۶
- شکل ۴-۳ توزیع تنش شعاعی بر اثر بارگذاری مکانیکی ۵۷
- شکل ۵-۳ توزیع تنش محیطی تحت بارگذاری مکانیکی ۵۸
- شکل ۶-۳ توزیع تنش محوری تحت بارگذاری مکانیکی ۵۹
- شکل ۷-۳ توزیع تنش فون مایسز تحت بارگذاری مکانیکی ۵۹
- شکل ۸-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری مکانیکی ۶۰
- شکل ۹-۳ تنش فون مایسز تحت بارگذاری مکانیکی برای شرایط انتهایی مختلف ۶۲
- شکل ۱۰-۳ توزیع نرمال میدان دمایی تحت بارگذاری حرارتی ۶۴
- شکل ۱۱-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی بر اثر بارگذاری حرارتی ۶۴

- شکل ۳-۱۲ توزیع تنش شعاعی تحت بارگذاری حرارتی ۶۵
- شکل ۳-۱۳ توزیع تنش محیطی تحت بارگذاری حرارتی ۶۵
- شکل ۳-۱۴ توزیع تنش محوری تحت بارگذاری حرارتی ۶۶
- شکل ۳-۱۵ توزیع تنش فون مایسز تحت بارگذاری حرارتی ۶۷
- شکل ۳-۱۶ توزیع پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری حرارتی ۶۷
- شکل ۳-۱۷ تنش فون مایسز تحت بارگذاری حرارتی برای شرایط مختلف انتهایی ۶۹
- شکل ۳-۱۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی بر اثر بارگذاری الکتریکی ۷۱
- شکل ۳-۱۹ توزیع تنش شعاعی تحت بارگذاری الکتریکی ۷۱
- شکل ۳-۲۰ توزیع تنش محیطی تحت بارگذاری الکتریکی ۷۲
- شکل ۳-۲۱ توزیع تنش محوری تحت بارگذاری الکتریکی ۷۳
- شکل ۳-۲۲ توزیع تنش فون مایسز تحت بارگذاری الکتریکی ۷۳
- شکل ۳-۲۳ توزیع پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری الکتریکی ۷۴
- شکل ۳-۲۴ تنش فون مایسز برای شرایط انتهایی تحت بارگذاری الکتریکی ۷۶
- شکل ۴-۱ جابه‌جایی شعاعی در حالت بارگذاری مکانیکی ۸۰
- شکل ۴-۲ تنش شعاعی در حالت بارگذاری مکانیکی ۸۱
- شکل ۴-۳ تنش محیطی در حالت بارگذاری مکانیکی ۸۲
- شکل ۴-۴ تنش محوری در حالت بارگذاری مکانیکی ۸۲
- شکل ۴-۵ تنش فون مایسز در حالت بارگذاری مکانیکی ۸۳
- شکل ۴-۶ پتانسیل الکتریکی در حالت بارگذاری مکانیکی ۸۴
- شکل ۴-۷ تنش تحت بارگذاری مکانیکی برای شرایط انتهایی و ثابت‌های ناهمگنی مختلف ۸۵
- شکل ۴-۸ میدان دمایی تحت بارگذاری حرارتی ۸۶
- شکل ۴-۹ جابه‌جایی شعاعی تحت بارگذاری حرارتی ۸۷

- شکل ۱۰-۴ تنش شعاعی تحت بارگذاری حرارتی ۸۷
- شکل ۱۱-۴ تنش محیطی تحت بارگذاری حرارتی ۸۸
- شکل ۱۲-۴ تنش محوری تحت بارگذاری حرارتی ۸۸
- شکل ۱۳-۴ تنش فون مایسز تحت بارگذاری حرارتی ۸۹
- شکل ۱۴-۴ پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری حرارتی ۹۰
- شکل ۱۵-۴ تنش تحت بارگذاری حرارتی با شرایط انتهایی و ثابتهای ناهمگنی مختلف ۹۱
- شکل ۱۶-۴ جابه‌جایی شعاعی تحت بارگذاری الکتریکی ۹۳
- شکل ۱۷-۴ تنش شعاعی در حالت بارگذاری الکتریکی ۹۳
- شکل ۱۸-۴ تنش محیطی در حالت بارگذاری الکتریکی ۹۴
- شکل ۱۹-۴ تنش محوری در حالت بارگذاری الکتریکی ۹۵
- شکل ۲۰-۴ تنش فون مایسز در حالت بارگذاری الکتریکی ۹۵
- شکل ۲۱-۴ پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری الکتریکی ۹۶
- شکل ۲۲-۴ تنش تحت بارگذاری الکتریکی با شرایط انتهایی و ثابتهای ناهمگنی مختلف ۹۷

جداول

- جدول ۱-۱ پژوهش‌های صورت گرفته ۲۷
- جدول ۱-۳ خواص استوانه مورد مطالعه ۵۵
- جدول ۲-۳ پنج ترکیب بارگذاری مکانیکی ۵۵
- جدول ۳-۳ تنش محیطی، محوری و فن مایسز تحت بارگذاری مکانیکی ۶۱
- جدول ۴-۳ تنش و جابجایی شعاعی و پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری مکانیکی ۶۱
- جدول ۵-۳ پنج ترکیب بارگذاری حرارتی ۶۳
- جدول ۶-۳ تنش محیطی، محوری و فن مایسز تحت بارگذاری حرارتی ۶۸
- جدول ۷-۳ تنش و جابجایی شعاعی و پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری حرارتی ۶۸
- جدول ۸-۳ پنج ترکیب بارگذاری الکتریکی ۷۰
- جدول ۹-۳ تنش محیطی، محوری و فن مایسز تحت بارگذاری الکتریکی ۷۴
- جدول ۱۰-۳ تنش و جابجایی شعاعی و پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری الکتریکی ۷۵
- جدول ۱-۴ تنش فون مایسز تحت بارگذاری مکانیکی ۸۳
- جدول ۲-۴ تنش فون مایسز تحت بارگذاری حرارتی ۹۰
- جدول ۳-۴ تنش فون مایسز تحت بارگذاری الکتریکی ۹۶

علائم

مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی در مختصات کلی (r, θ, x)	u_r, u_θ, u_x
فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (در پوسته‌ی استوانه‌ای، شعاع استوانه یا مختصه‌ی شعاعی)	r
فاصله‌ی سطح میانی پوسته از محور تقارن (در پوسته‌ی استوانه‌ای، شعاع صفحه‌ی میانی استوانه)	R
مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی در مختصات اصلی (1,2,3)	u_1, u_2, u_3
مؤلفه‌های کرنش نرمال در مختصات اصلی (1,2,3)	$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
مؤلفه‌های کرنش برشی در مختصات اصلی (1,2,3)	$\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ $\gamma_{21}, \gamma_{31}, \gamma_{32}$
مؤلفه‌های کرنش نرمال حرارتی در مختصات اصلی (1,2,3)	$\varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \varepsilon_3^T$
مؤلفه‌های تنش نرمال در مختصات اصلی (1,2,3)	$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$
مؤلفه‌های تنش برشی در مختصات اصلی (1,2,3)	$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ $\sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$
مؤلفه‌های تنش برشی در مختصات اصلی (1,2,3)	$\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ $\tau_{21}, \tau_{31}, \tau_{32}$
مدول کشسانی (الاستیسیته) در مختصات اصلی (1,2,3)	E_1, E_2, E_3
ضرایب انبساط حرارتی در مختصات اصلی (1,2,3)	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
حرف اختصاری بیانگر مؤلفه‌های تنش	σ_i
حرف اختصاری بیانگر مؤلفه‌های کرنش	ε_j
حرف اختصاری بیانگر مؤلفه‌های کرنش حرارتی	ε_i^T
ماتریس سفتی	C
مؤلفه‌های ماتریس سفتی	C_{ij}
ماتریس نرمی	S
مؤلفه‌های کرنش نرمال در مختصات کلی (r, θ, x)	$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_x$
مؤلفه‌های کرنش برشی در مختصات کلی (r, θ, x)	$\gamma_{r\theta}, \gamma_{rx}, \gamma_{\theta x}$ $\gamma_{\theta r}, \gamma_{xr}, \gamma_{x\theta}$
مؤلفه‌های کرنش نرمال حرارتی در مختصات کلی (r, θ, x)	$\varepsilon_r^T, \varepsilon_\theta^T, \varepsilon_x^T$
مؤلفه‌های تنش نرمال در مختصات کلی (r, θ, x)	$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_x$
مؤلفه‌های تنش برشی در مختصات کلی (r, θ, x)	$\sigma_{r\theta}, \sigma_{rx}, \sigma_{\theta x}$ $\sigma_{\theta r}, \sigma_{xr}, \sigma_{x\theta}$

مؤلفه‌های تنش برشی در مختصات کلی (r, θ, x)	$\tau_{r\theta}, \tau_{rx}, \tau_{\theta x}$ $\tau_{\theta r}, \tau_{xr}, \tau_{x\theta}$
تنش فون مایسز	σ_{eff}, σ_v
تانسور تنش	$\tilde{\sigma}$
بردار نیروهای حجمی	\vec{B}
نیروهای حجمی در راستای شعاعی، محیطی و محوری	B_r, B_θ, B_x
مدول کشسانی (الاستیسیته) در مختصات کلی (r, θ, x)	E_r, E_θ, E_x
ضرایب پواسون در مختصات کلی (r, θ, x)	$\nu_{r\theta}, \nu_{rx}, \nu_{\theta x}$ $\nu_{\theta r}, \nu_{xr}, \nu_{x\theta}$
ضرایب انبساط حرارتی در مختصات کلی (r, θ, x)	$\alpha_r, \alpha_\theta, \alpha_x$
سرعت دورانی ثابت	ω
زمان	t
فشار داخلی	P_i
فشار خارجی	P_o
شعاع داخلی	r_i
شعاع خارجی	r_o
طول استوانه	L
دمای لایه‌ی داخلی	T_i
دمای لایه‌ی خارجی	T_o
چگالی	ρ
شعاع بی‌بعد شده	\bar{r}
حل قسمت خصوصی	u_{r_p}
حل قسمت عمومی	u_{r_g}
اختلاف دما	ΔT
بردار شار حرارتی	\vec{Q}_r
شار حرارتی در راستای شعاعی، محیطی و محوری	q_r, q_θ, q_x
حرف اختصاری بیانگر ضرایب انتقال حرارت هدایتی	k_{ij}
ضرایب انتقال حرارت هدایتی	k_{11}, k_{22}, k_{33}

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ مقدمه‌ای بر پوسته‌ها

پوسته‌ها سطوحی‌اند دارای انحنا و تابع هر سه محور x ، y و z که ضخامت آن‌ها در برابر سایر ابعادشان کوچک است. سازه‌های پوسته‌ای به دلیل رفتار مطلوب و مقاومت بالا در برابر تحمل بار، یکپارچگی سازه، نسبت مقاومت به وزن بالا و سفتی بسیار بالا کاربردهای فراوانی دارند و در سیستم‌های طبیعی و مصنوعی به طور گسترده‌ای به کار رفته‌اند؛ از همین‌رو از دیرباز توجه پژوهشگران را به خود جلب کرده‌اند. با پیشرفت علم و مطرح شدن شاخه‌ی جدیدی از مواد، پژوهشگران در پی اعمال تغییراتی در ماده‌ی پوسته‌های استوانه‌ای برآمدند تا مطلوبیت آن‌ها را افزایش دهند و ویژگی‌های جدیدی را به آن‌ها بیفزایند. با توجه به آنچه که بیان شد و لزوم کاربرد پوسته‌های استوانه‌ای با مواد جدید در تجهیزات حاضر، پژوهشگران تلاش خود را برای تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای با مواد جدید آغاز کردند [۱].

۱-۲ دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها بر اساس سه دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

الف) دیدگاه هندسی

پوسته‌ی حاصل از انتقال^۱: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران^۲: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک^۳: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن کوچک‌تر از

$$\frac{1}{20} \text{ باشد. (البته در برخی منابع این نسبت } \frac{1}{10} \text{ ذکر شده است [۲].)}$$

-
1. Shell of Translation
 2. Shell of Rotation
 3. Thin Shell

پوسته‌ی جدار ضخیم^۱: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی^۲ آن بزرگ‌تر از

$$\frac{1}{10} \text{ یا } \frac{1}{20} \text{ باشد.}$$

ب) دیدگاه مادی

پوسته‌ی همگن و همسانگرد^۳: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف و جهات مربوط به هر نقطه یکسان است.

پوسته‌ی همگن و ناهمسانگرد^۴: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است ولی در جهات مربوط به هر نقطه یکسان نیست.

پوسته‌ی ناهمگن و همسانگرد^۵: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست ولی در جهات مربوط به هر نقطه یکسان است.

پوسته‌ی ناهمگن و ناهمسانگرد^۶: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته هم در نقاط مختلف جسم و هم در جهات مربوط به هر نقطه یکسان نیست.

ج) دیدگاه رفتاری

پوسته با تغییرشکل‌های کوچک^۷: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و بی‌باری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییرشکل‌های بزرگ^۸: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و بی‌باری، کوچک نیست (رفتار غیرخطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان خطی^۹: تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند (رفتار خطی از نظر مادی).

-
1. Thin Shell
 2. Middle Surface
 3. Homogeneous and Isotropic Shell
 4. Homogeneous and Anisotropic Shell
 5. Inhomogeneous and Isotropic Shell
 6. Inhomogeneous and Anisotropic Shell
 7. Small Deflection
 8. Large Deflection
 9. Elastic Behavior

پوسته با رفتار مومسان^۱: تغییر شکل‌ها بازگشت‌ناپذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیرخطی از نظر مادی).

۱-۳ نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها

در این بخش نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها به دو دسته‌ی پوسته‌های نازک و ضخیم تقسیم‌بندی می‌شوند و سپس شرح مختصری بر این نظریه‌ها ارائه می‌گردد.

۱-۳-۱ نظریه‌های پوسته‌های نازک

پوسته‌هایی که نسبت ضخامت آن‌ها h ، به شعاع سطح میانی R کوچک‌تر از $\frac{1}{10}$ یا $\frac{1}{20}$ می‌باشد، در زمره‌ی پوسته‌های نازک قرار می‌گیرند. در پوسته‌های نازک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر کاربردی ندارد؛ بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌هایی تحلیلی-تقریبی برای تحلیل این دسته از پوسته‌ها به‌دست می‌آورند. البته باید توجه داشت که درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته بر دقت نتایج نظریه‌های ارائه شده تأثیرگذار خواهد بود.

اولین فرضیات را کیرشهف^۲ (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط نظریه‌ی پوسته‌ها به کار گرفته شد. نظریه‌ی پوسته‌ها مبتنی بر فرضیات کیرشهف، توسط آرون^۳ (۱۸۷۴) معرفی گردید، اما کار وی کامل نبود. لاو^۴ (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌های نازک یا نظریه‌ی لاو-کیرشهف مشهور است. رایسنر^۵ (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لاو، تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری را ارائه نمود. نظریه‌ی پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو با در نظر گرفتن خیزهای کوچک اولین بار توسط فلوگه^۶

1. Plastic Behavior
2. Kirchhoff
3. Aron
4. Love
5. Reissner
6. Flugge

(۱۹۳۲) ارائه شد. معادلات فلوگه به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشند. با ساده‌سازی آن‌ها نظریه‌ی پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به دست می‌آید. نظریات فلوگه توسط بیرنه^۱ (۱۹۴۴) تکمیل شد. نظریه‌ی غیرخطی پوسته‌های نازک به وسیله‌ی نقدی^۲ (۱۹۵۷) فرمول‌بندی شد، که به کارگیری آن‌ها مشکل می‌باشد. سندرز^۳ (۱۹۵۹) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلوف^۴ (۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

نظریه‌ی عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به این‌گونه تقسیم‌بندی کرد.

۱- نظریه با تقریب مرتبه‌ی صفر (نظریه‌ی غشایی^۵)؛

۲- نظریه با تقریب مرتبه‌ی یک (نظریه‌ی خمشی^۶)؛

الف) نظریه‌ی غشایی

غشاء از دیدگاه مکانیکی، یک تار دوبعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری (نیروهای غشایی) را تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آن‌ها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این نظریه تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند؛ به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در نظریه‌ی غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسائل در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای با چشم‌پوشی از تنش و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند [۳].

1. Byrne
2. Naghdi
3. Sanders
4. Novozhilov
5. Membrane Theory
6. Bending Theory

ب) نظریه‌ی خمشی

ورق از دیدگاه مکانیکی، یک تیر دوبعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آن‌ها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این نظریه تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناویر^۱ ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لاو با همین فرضیات، نظریه‌ی خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلی، معادلات تعادل به تنهایی برای به‌دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در نظریه‌ی خمشی نیز، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات نظریه‌ی غشایی و نظریه‌ی خمشی (نظریه‌ی کلاسیک) را فرضیات لاو-کیرشهف می‌نامند که عبارت‌اند از [۳]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم‌پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

۱-۳-۲ نظریه‌ی پوسته‌های ضخیم

لامه^۲ (۱۸۵۲) نخستین فردی بود که حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با جدار

1. Navier
2. Lamé

ثابت را که تحت فشار یکنواخت داخلی قرار داشت با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی^۱، برای ماده‌ی همگن و همسانگرد ارائه کرد [۴]، که تاکنون نیز در حل مسائل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین^۲ (۱۹۳۰) روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به دست آورد. ولاسف^۳ (۱۹۴۹) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ کردن اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، نظریه‌ی تغییر شکل برشی^۴ را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود. میرسکی^۵ و هرمان^۶ (۱۹۵۸) با به‌کارگیری نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول^۷، تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند [۵]. گرینسپن^۸ (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را با نظریه‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود.

نظریه‌ی عمومی پوسته‌های ضخیم را می‌توان این‌گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱- نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی؛

۲- نظریه‌ی تغییر شکل برشی.

الف) نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی

به طور کلی در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول را به دست آورد؛ معادلات عبارت‌اند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جاب‌جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارت‌اند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جاب‌جایی (بردار جاب‌جایی). نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی هر چند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به طور کامل

-
1. Plane Elasticity Theory (PET)
 2. Galerkin
 3. Vlassov
 4. Shear Deformation Theory (SDT)
 5. Mirsky
 6. Hermann
 7. First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)
 8. Greenspon

توصیف می‌کند و منجر به حل دقیق می‌شود ولی حل معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به‌کارگیری آن‌ها امکان‌پذیر نیست. با فرضیات ساده‌شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و نظریه‌ی الاستیسیته‌ی دوبعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه‌ها به‌کار برد. در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌های نازک، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جابه‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این نظریه را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد به‌کار برد و توزیع تنش را در استوانه‌ها به‌دست آورد. نظریه‌ی لامه به نظریه‌ی کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است [۴].

معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌ی ضخیم جدار ثابت، عبارت است از:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r^2} = 0 \quad \text{or} \quad r^2 u_r'' + r u_r' + u_r = 0 \quad (1-1)$$

و جابه‌جایی استوانه u_r برابر است با:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (2-1)$$

r شعاع استوانه، C_1 و C_2 ثابت‌های معادله هستند که با شرایط مرزی به دست می‌آیند.

(ب) نظریه‌ی تغییر شکل برشی

در این نظریه، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف نمی‌شود بلکه با مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌شود. به طور کلی فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (r) برابر است با فاصله‌ی سطح میانی از محور تقارن (R) به علاوه‌ی فاصله‌ی آن نقطه از سطح میانی (z)، یعنی:

$$r = R + z \quad , \quad \left| \frac{z}{R} \right| < 1 \quad (3-1)$$

بر اساس نظریه‌ی لامه، جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی توخالی:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1(R+z) + \frac{C_2}{(R+z)} \quad (۴-۱)$$

به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} u_r &= C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1(R+z) + \frac{C_2}{R} \left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \dots \right) \\ &= \left(C_1 R + \frac{C_2}{R} \right) + z \left(C_1 - \frac{C_2}{R^2} \right) + z^2 \frac{C_2}{R^3} + \dots \\ \Rightarrow u_r &= u_r^0 + z u_r^1 + z^2 u_r^2 + \dots \end{aligned} \quad (۵-۱)$$

بر اساس رابطه‌ی بالا، جابه‌جایی شعاعی را به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب (z) می‌توان نوشت. اگر $(z=0)$ باشد، بیانگر جابه‌جایی سطح میانی پوسته است. اگر فقط جمله‌ی اول در نظر گرفته شود $(u_r = u_r^0)$ ، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی صفر پوسته‌های جدار ضخیم می‌شود که مشابه نظریه‌ی خمشی (نظریه‌ی مرتبه‌ی یک در پوسته‌های نازک) و اگر دو جمله از این بسط در نظر گرفته شود $(u_r = u_r^0 + z u_r^1)$ ، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی یک پوسته‌های جدار ضخیم می‌شود که مشابه نظریه‌ی فلوگه (نظریه‌ی مرتبه‌ی دو در پوسته‌های نازک) می‌باشد.

در این نظریه، علاوه بر اثر نیروهای محوری، اثرات برش، خمش و پیچش، می‌توان اثرات اینرسی دورانی و میدان حرارتی^۱ را نیز در نظر گرفت. نظریه با تقریب مرتبه‌ی یک به نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول میرسکی-هرمان شهرت دارد که تعمیم نظریه‌ی تیموشنکو در تیرها و همچنین نظریه‌ی میندلین^۲ در ورق‌ها می‌باشد.

میدان جابه‌جایی \vec{U} در این نظریه عبارت است از:

$$\begin{cases} U_x = U_x^0 + z U_x^1 \\ U_\theta = U_\theta^0 + z U_\theta^1 \\ U_z = U_z^0 + z U_z^1 \end{cases} \Rightarrow \vec{U} = \vec{U}^0 + z \vec{U}^1 \quad (۶-۱)$$

1. Thermal Field
2. Mindlin

در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، مستوی باقی می‌مانند ولیکن الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند. هرچند به کارگیری نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، منجر به حل دقیق مسائل می‌شود، ولیکن به دلیل اینکه تاکنون هیچ راه حل کاملی برای پوسته‌های جدار ضخیم (به غیر از موارد خاص) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی ارائه نشده است، نظریه‌ی تغییر شکل برشی برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای مختلف با انواع جداره، انواع مواد، انواع بارگذاری و شرایط مرزی، حتی نامتقارن محوری^۱، روش مناسبی می‌باشد.

۱-۴ مقدمه‌ای بر مواد

بیشتر موادی که در صنعت مورد استفاده قرار می‌گیرند مواد همگن و همسانگرد می‌باشند. این مواد به دلیل یکنواختی خواص، از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی ایجاد می‌کنند. با پیشرفت سریع صنایع، نیاز به مواد با مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا به وجود آمد. در صنایعی که سازه در مجاورت دماهای بسیار بالا قرار دارد استفاده از مواد همگن خواسته‌های طراح را برآورده نمی‌سازد. همچنین در دماهای بالا فلزات و آلیاژهای فلزی به شدت در معرض اکسایش، خوردگی، خزش^۲ و ... قرار می‌گیرند و این در حالی است که استفاده‌ی تنها از مواد با خواص ترمودینامیکی مطلوب همچون سرامیک‌ها، بسیاری از خواص مورد نظر در طراحی مانند چقرمگی و استحکام بالا را برآورده نمی‌سازد. از این رو ایده‌ی مواد مرکب^۳ مطرح گردید [۶].

ماده‌ی کامپوزیتی^۴، ترکیب ماکروسکوپی^۵ دو یا چند ماده‌ی ناهم‌ساز با خواص فیزیکی و شیمیایی متفاوت است که سطح مشترک مشخصی بین آن‌ها وجود دارد. مواد تشکیل‌دهنده،

1. Nonaxisymmetric
2. Creep
3. Compound Materials
4. Composite Material
5. Macroscopic

خصوصیات فیزیکی و شیمیایی خود را حفظ کرده ولی در مجموع ترکیب کامپوزیتی خواص بهتری از هر یک از اجزاء تشکیل دهنده‌ی خود را دارا می‌باشد. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی^۱)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، ولیکن از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آن‌هاست که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا نیاز به ماده‌ای با عدم تغییر ناگهانی خواص، ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد را شکل داد. مواد با تغییرات تابعی خواص^۲ در ساختار ارگانیسیم‌های زنده مانند استخوان قابل مشاهده است. به عنوان مثال: استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این رو تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. مواد *FG* ناهمگن هستند [۷].

۱-۵ مواد FG

در این بخش به توضیح مختصری درباره‌ی ویژگی‌های مواد *FG* پرداخته می‌شود و سپس نحوه‌ی مدل‌سازی آن‌ها به منظور تحلیل، بیان می‌گردد.

۱-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد FG

مفهوم اولیه‌ی مواد متغیر تابعی توسط نینو^۳ و همکارانش در سال ۱۹۸۴ در سازمان هوافضای ژاپن مطرح گردید و از سال ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید آن، در این کشور شروع شد. مرحله‌ی اول پروژه ملی ((فناوری گسترش مواد متغیر تابعی)) طی سال‌های ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد. در

1. Microscopic
2. Functionally Graded Materials (FGM)
3. Niino

این پروژه، سه گروه: ساخت، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء شود. پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلی‌متر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ درجه کلون و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ درجه کلون بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند.

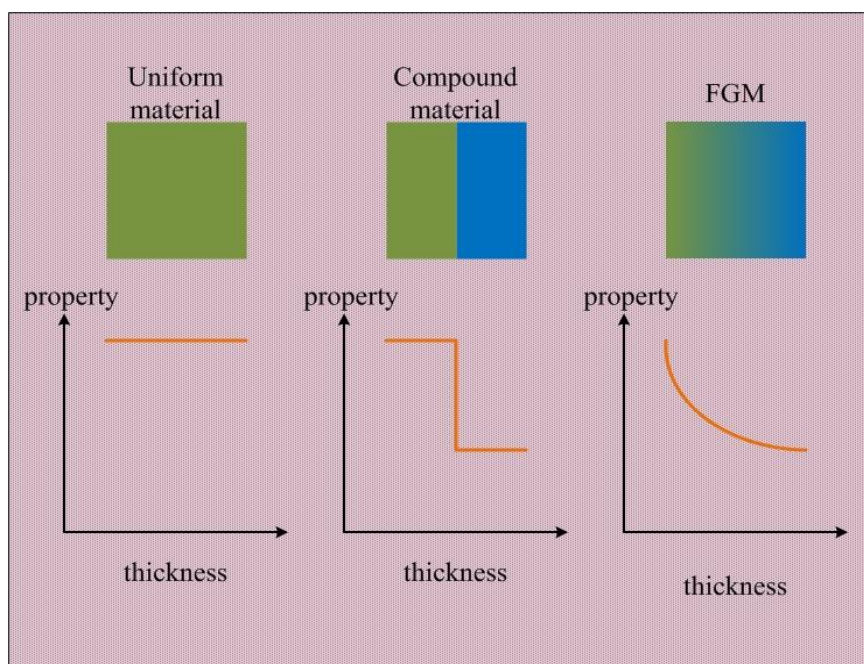
مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلی‌متر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلی‌متر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد. دومین سمپوزیوم جهانی مواد متغیر تابعی در ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به ویژه تحلیل سازه‌های از این جنس، فراگیر شد.

۱-۵-۲ ویژگی‌های مواد FG

مواد ناهمگن FG در مقایسه با مواد همگن (ایزوتروپ‌ها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها) دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر می‌باشند [۸ و ۹]:

- ۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا.
- ۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا.
- ۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد FG، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود که به کمک مواد FG می‌توان آثار نامطلوب تمرکز تنش را به صورت چشم‌گیری کاهش داد.

- ۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد FG است.
- ۵- اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد FG، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.
- ۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد FG، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد FG، به دلیل پیوستگی موجود در خواص تنش‌ها و گرادین آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل ۱-۱ مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و FGM را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف

۳-۵-۱ مدل سازی ریاضی مواد FG

مطابق شکل ۱-۱ خواص در مواد متغیر تابعی به صورت تدریجی و پیوسته تغییر می‌کند. توزیع خواص این دسته از مواد را در استوانه، با توابعی از شعاع آن بیان می‌کنند [۸ و ۹]؛ که عمدتاً از این

قرارند.

الف) توزیع توانی^۱

$$Pr(r) = Pr_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{n_{Pr}} = Pr_i \bar{r}^{n_{Pr}} \quad (۷-۱)$$

ب) توزیع نمایی^۲

$$Pr(r) = Pr_i e^{n_{Pr} \left(\frac{r}{r_i} - 1 \right)} = Pr_i e^{n_{Pr} (\bar{r} - 1)} \quad (۸-۱)$$

ج) توزیع کسر حجمی^۳

$$Pr(r) = (Pr_o - Pr_i) \left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^{n_{Pr}} + Pr_i = (Pr_o - Pr_i) \left(\frac{\bar{r} - 1}{k - 1} \right)^{n_{Pr}} + Pr_i \quad (۹-۱)$$

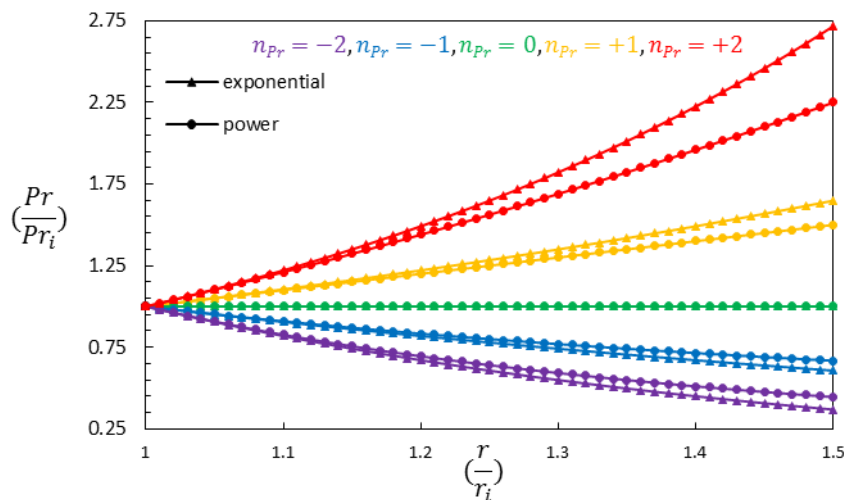
در روابط فوق r_i ، r_o شعاع استوانه و Pr_i ، Pr_o خاصیت ماده به ترتیب در لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه می‌باشد که Pr_i و Pr_o می‌تواند خاصیت مکانیکی، حرارتی و الکتریکی از قبیل مدول الاستیسیته^۴، چگالی^۵، نسبت پوآسون^۶، ضریب هدایت حرارتی^۷، ضریب انبساط خطی حرارتی^۸، ثوابت پیزوالکتریک^۹ و ثوابت دی‌الکتریک^{۱۰} باشد. n_{Pr} در روابط فوق ثابت ناهمگنی خاصیت است؛ جز رابطه (۹-۱) که ثابت ناهمگنی فقط می‌تواند مقادیر حقیقی مثبت را اختیار کند در روابط (۷-۱) و (۸-۱) مقادیر حقیقی منفی را نیز می‌تواند اختیار کند. $n_{Pr} = 0$ در کلیه‌ی توزیع‌ها، نشان‌دهنده مواد همگن است، همچنین \bar{r} نسبت شعاع به شعاع داخلی و k نسبت شعاع خارجی به داخلی می‌باشد. طبق رابطه‌ی (۷-۱) و (۸-۱) برای مشخص شدن توزیع خواص به صورت توانی و نمایی در

-
1. Power
 2. Exponential
 3. Volume Fraction
 4. Elasticity Modulus
 5. Density
 6. Poisson's Ratio
 7. Heat Conduction Coefficient
 8. Thermal Linear Expansion Coefficient
 9. Piezoelectric Constants
 10. Dielectric Constants

استوانه‌ای با هندسه‌ی مشخص، کافی است خواص در لایه‌ی داخلی استوانه و ثابت ناهمگنی مربوط به آن تعیین شود؛ حال آنکه در توزیع کسر حجمی علاوه بر تعیین خواص لایه‌ی داخلی و ثابت ناهمگنی مربوط به آن، نیاز به تعیین خواص در لایه‌ی خارجی استوانه نیز می‌باشد. از این رو برخی پژوهشگران این توزیع را تابع سه متغیره نیز دانسته‌اند، در ادامه به بررسی رفتار توابع بیان شده پرداخته می‌شود.

الف) توزیع توانی و نمایی

شکل ۲-۱ توزیع خواص ناهمگنی را در استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن، نسبت به خواص در لایه‌ی داخلی استوانه، به صورت توانی و نمایی نشان می‌دهد. همان طور که از شکل ۲-۱ پیداست؛ توزیع نمایی سبب می‌گردد تا تغییرات خواص با اختلاف بیشتری از حالت اولیه (خواص در لایه‌ی داخلی استوانه)، صورت گیرد. این امر بدان معناست که می‌توان توزیع نمایی با n_{pr} خاص را، با توزیع توانی که $|n_{pr}|$ آن بزرگ‌تر از حالت نمایی می‌باشد، مدل‌سازی کرد.

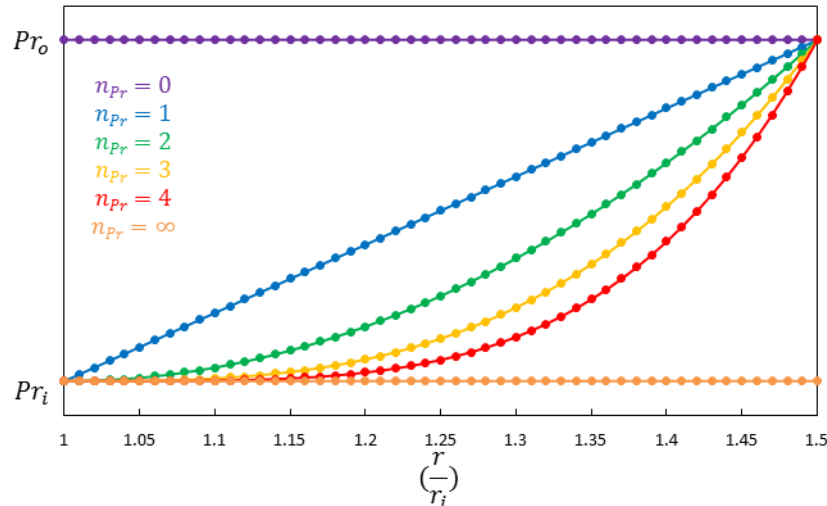


شکل ۲-۱ توزیع خواص در استوانه‌ی ناهمگن

ب) توزیع کسر حجمی

شکل ۳-۱ توزیع خواص مکانیکی را به صورت کسر حجمی در استوانه نشان می‌دهد. همان طور که از شکل پیداست خواص مکانیکی در استوانه‌ی ناهمگن بین خواص مکانیکی در لایه‌ی داخلی و خارجی آن تغییر می‌کند. هنگامی که ثابت ناهمگنی صفر است خواص مکانیکی در کل لایه‌ها ثابت و برابر خاصیت لایه‌ی خارجی است؛ همچنین با افزایش ثابت ناهمگنی و میل کردن آن به سمت

بی‌نهایت، خواص مکانیکی در کل لایه‌ها ثابت و برابر خاصیت لایه‌ی داخلی می‌گردد. همان‌طور که از شکل پیداست، در توزیع کسر حجمی، دو حالت $n_{pr} = 0, \infty$ ، بیانگر مواد همگن می‌باشند.



شکل ۱-۳ توزیع خواص به صورت کسر حجمی در استوانه‌ی ناهمگن

۱-۶ مواد پیزوالکتریک

در این بخش به تعریف و مبانی رفتاری مواد پیزوالکتریک پرداخته می‌شود، سپس برخی کاربردهای آن بیان می‌گردد.

۱-۶-۱ تاریخچه‌ی مواد پیزوالکتریک

اولین رخدادی که سبب توجه به سمت مواد پیزوالکتریک^۱ گردید به تأثیر مواد پایروالکتریک^۲ بازمی‌گردد. خاصیت پایروالکتریک که تولید پتانسیل الکتریکی در اثر ایجاد تغییرات دمایی است؛ در اواسط قرن هجدهم توسط کارلوس لینائوس^۳ و فرانز آپی‌نئوس^۴ مورد پژوهش قرار گرفت. تحت تأثیر نتایج این پژوهش دو محقق دیگر به نام‌های رنه جاست هابی^۵ و آنتوان سیزار بکوگنوارل^۶ به رابطه‌ی

1. Piezoelectric
2. Pyroelectric
3. Carolus Linnaeus
4. Franz Aepinus
5. Rene Just Haüy
6. Antoine Cesar Becquerel

میان تنش مکانیکی و بار الکتریکی^۱ پی بردند. با این وجود تحقیقات آن دو ناتمام ماند. اولین اثبات صریح برای تأثیر پیزوالکتریک در سال ۱۸۸۰ توسط برادران کیور^۲ ارائه گردید [۱۰]. آن‌ها با ترکیب دانش خود در مورد پدیده‌ی پایروالکتریک و ساختارهای کریستالی که منجر به این پدیده می‌گشت موفق به پیش‌بینی رفتار کریستالی شدند و با استفاده از کریستال‌های کهربا^۳، کوارتز^۴، یاقوت زرد^۵، نیشکر^۶ و نمک راجل^۷ رفتار پیزوالکتریک را اثبات نمودند.

اما آن‌ها موفق به کشف پدیده‌ی پیزوالکتریک معکوس نگشتند و این پدیده در سال ۱۸۸۱ به طور ریاضی از اصول بنیادی ترمودینامیک توسط گابریل لیپمان^۸ کشف گردید. پس از انتشار این خبر، برادران کیور وجود این پدیده را تأیید کردند و مشغول به تحقیق برای اثبات کمی بازگشت‌پذیری کامل تغییر شکل الکترو-الاستو-مکانیکی در بلورهای پیزوالکتریک شدند.

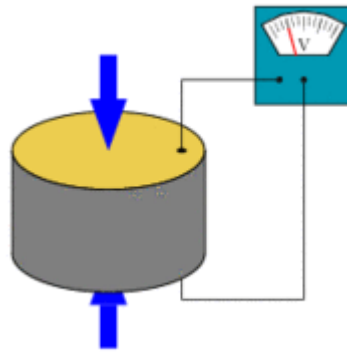
تا چندین دهه‌ی بعد از آن هم این پدیده در سطح آزمایشگاهی باقی ماند و سپس کارهای زیادی برای تعریف ساختار کریستالی که منجر به این پدیده می‌گشت انجام گردید. نقطه‌ی اوج این فعالیت‌ها در سال ۱۹۱۰ با انتشار کتاب فیزیک کریستال‌ها توسط ولدمر ویت^۹، صورت پذیرفت. وی در کتابش درباره‌ی ۲۰ نوع کریستال طبیعی قادر به تولید خاصیت پیزوالکتریکی توضیح داد و سپس ثابت‌های پیزوالکتریک را با استفاده از تحلیل تانسوری تعریف نمود.

۱-۶-۲ تعریف مواد پیزوالکتریک

مواد پیزوالکتریک موادی هستند که تحت تأثیر کرنش مکانیکی یک میدان الکتریکی با جهت‌گیری خاص در آنها پدید می‌آید، ایجاد میدان الکتریکی در این مواد به عنوان اثر پیزوالکتریکی شناخته می‌شود. کرنش مکانیکی فوق می‌تواند توسط هر عامل خارجی از قبیل نیرو، فشار، شوک

-
1. Electric Charge
 2. Curie
 3. Tourmaline
 4. Quartz
 5. Topaz
 6. Cane Sugar
 7. Rochelle Salt (Sodium Potassium Tartrate Tetra hydrate)
 8. Gabriel Lippmann
 9. Woldemar Voigt

حرارتی و ... به وجود آید؛ همچنین ممکن است برای ایجاد کرنش در مواد پیزوالکتریک این مواد را تحت تأثیر یک میدان الکتریکی قرار دهند که این پدیده به عنوان اثر پیزوالکتریک معکوس موسوم است [۱۱].



شکل ۴-۱ دیسک پیزوالکتریک تغییر شکل یافته

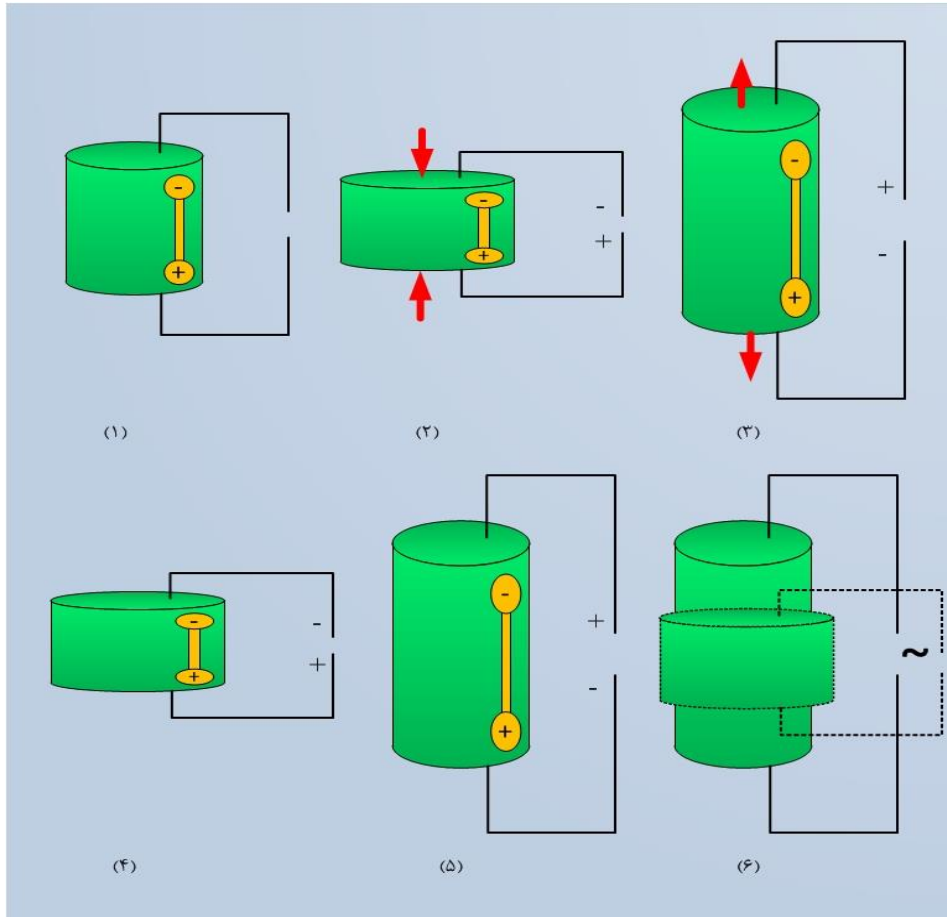
در شکل ۴-۱ دیسک پیزوالکتریک تغییر شکل یافته، ولتاژ الکتریکی ایجاد می‌کند که بیانگر اثر مستقیم پیزوالکتریک می‌باشد. مواد پیزوالکتریک از گستردگی زیادی برخوردار هستند؛ پوست و استخوان انسان نیز خاصیت پیزوالکتریکی دارند [۱۲].

۱-۶-۳ مبانی رفتاری مواد پیزوالکتریک

شکل ۵-۱ بیانگر رفتار سیلندری از جنس پیزوالکتریک است که در راستای محوری خود پلاریزه شده است؛ در شکل نشان داده شده سیلندر اول در شرایط بدون بار می‌باشد اگر یک نیروی خارجی که خواه کششی یا فشاری است بر دو سر سیلندر اعمال شود سبب ایجاد ولتاژ در بین الکترودها می‌گردد.

اگر بار اعمالی فشاری باشد و سبب کرنش فشاری گردد ولتاژ پدید آمده در همان جهت پلاریزه‌ی جسم خواهد بود (سیلندر دوم) اما اگر سیلندر تحت کشش قرار گیرد ولتاژ مابین الکترودها در خلاف

جهت پلاریزه‌ی جسم ایجاد می‌شود (سیلندر سوم).



شکل ۱-۵ نمونه‌ای از اثر پیزوالکتریک

مثال‌های فوق نمونه‌هایی از وضعیت عملکرد مولدی^۱ جسم هستند که مبدل انرژی مکانیکی به الکتریکی می‌باشند؛ از این حالت در شتاب سنج‌ها، هیدروفن‌ها، گرامافون‌ها و ... بهره می‌گیرند. هرگاه ولتاژی در جهت پلاریزه‌ی جسم بر دو سر آن اعمال شود سبب کوتاه شدن طول جسم می‌گردد (سیلندر چهارم) و برعکس اگر ولتاژ اعمالی خلاف جهت پلاریزه‌ی جسم باشد طول جسم بلندتر می‌گردد (سیلندر پنجم)، در نهایت اگر جریان متناوبی را به دو سر جسم پیزوالکتریک متصل نماییم جسم با فرکانس جریان متناوب اعمال شده، شروع به ارتعاش^۲ می‌کند (سیلندر آخر).

1. Generation Action
2. Vibration

مثال‌های فوق نمونه‌هایی از وضعیت عملکرد محرکی^۱ هستند که مبدل انرژی الکتریکی به مکانیکی می‌باشند [۱۳].

دی پلاریزه شدن

در صورتی که مواد پیزوالکتریک خاصیت پیزوالکتریک خود را از دست دهند، دی پلاریزه می‌گردند؛ در حین دی پلاریزه شدن دو قطبی‌های موجود در ماده از بین می‌روند. دی پلاریزه شدن می‌تواند منشأ الکتریکی، مکانیکی و یا حرارتی داشته باشد.

الف) دی پلاریزه‌ی الکتریکی

چنانچه ماده‌ی پیزوالکتریک تحت تأثیر میدان الکتریکی در خلاف جهت پلاریزه‌ی خود قرار گیرد دی پلاریزه می‌شود؛ شدت میدان الکتریکی مورد نیاز به عواملی مانند ابعاد جسم، مدت زمان اعمال میدان و همچنین درجه حرارتی که میدان تحت آن اعمال می‌شود بستگی دارد.

ب) دی پلاریزه‌ی مکانیکی

این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که تنش مکانیکی اعمال شده روی جسم پیزوالکتریک سبب تغییر جهت و از بین رفتن دو قطبی‌ها شود.

ج) دی پلاریزه‌ی حرارتی

مواد پیزوالکتریک تا دمای معینی خواص پیزوالکتریک خود را حفظ می‌کنند این دما، دمای کیور^۲ نام دارد؛ به عبارت دیگر چنانچه دمای این مواد از دمای فوق بالاتر رود اثر پیزوالکتریکی آن‌ها از بین می‌رود. عملیات فوق بازگشت‌ناپذیر است یعنی با سرد کردن مواد پیزوالکتریک تا زیر دمای کیور ماده دوباره خاصیت پیزوالکتریکی پیدا نمی‌کند.

۱-۶-۴ کاربردهای مواد پیزوالکتریک

کاربردهای بسیاری را می‌توان برای مواد پیزوالکتریک متصور شد، در این قسمت به بخشی از این

1. Motor Action
2. Curie Temperature

کاربردها که در [۱۴] آمده است، اشاره‌ای می‌شود.

یکی از کاربردهای اساسی سرامیک‌های پیزوالکتریک استفاده به عنوان آتش‌زنی گاز^۱ می‌باشد. ولتاژ بسیار بالای تولید شده در سرامیک پیزوالکتریک به وسیله‌ی تنش مکانیکی، سبب جرقه^۲ و مشتعل شدن گاز می‌گردد که به دو طریق افزایش ناگهانی و تدریجی می‌توان این نیروی مکانیکی را اعمال کرد.

سرامیک‌های پیزوالکتریک، به علت وجود اثر مستقیم پیزوالکتریک، می‌توانند به عنوان شتاب‌سنج‌ها و تنش‌سنج‌ها مورد استفاده قرار گیرند. ارتعاشگرهای پیزوالکتریک در تجهیزات ارتعاشاتی مکانیکی می‌توانند به عنوان صافی^۳، محرک و یا نوسانگر^۴ استفاده شوند.

امروزه امواج فراصوتی^۵ در زمینه‌های گوناگونی مورد استفاده قرار می‌گیرند. منبع صدای تولید شده توسط سرامیک‌های پیزوالکتریک به خوبی مواد سخت‌مغناطیسی^۶ است. پیزوسرامیک‌ها^۷ در حالت کلی دارای بازده و ابعاد بهتری نسبت به مواد سخت‌مغناطیسی می‌باشند؛ به ویژه مواد پیزوالکتریک سخت به دلیل تولید توان بالا بدون ایجاد گرما دارای ضریب کیفیت مکانیکی بالا هستند، و برای این منظور مناسب‌تر می‌باشند. اغلب محیط مایع برای انتقال انرژی صوتی استفاده می‌شود. شوینده‌های فراصوتی، میکروفن‌های^۸ فراصوتی و دستگاه‌های اندازه‌گیری به کار رفته در سیستم‌های فرمان کوتاه برد، آشکارساز زیرآبی و ردیاب ماهی، سنجش‌گرهای غیر مخرب و ... نمونه‌ای از کاربردها می‌باشند. بررسی فراصوتی آشکارسازها در زمینه‌های پزشکی الکترونیکی، به منظور کاربردهای درمانگاهی^۹ در گستره‌ی تشخیص تا درمان و جراحی مفید می‌باشند. آنچه که گفته شد؛ تنها بخش کوچکی از کاربرد وسیع بیان شده‌ی مواد پیزوالکتریک در [۱۴]، می‌باشد.

-
1. Gas Igniter
 2. Spark
 3. Filter
 4. Oscillator
 5. Ultrasonic
 6. Magnetostrictive
 7. Piezoceramics
 8. Microphones
 9. Clinic

۱-۷ پیشینه پژوهش

از دیرباز تاکنون پژوهش‌های بسیاری بر روی پوسته‌ها به ویژه پوسته‌های استوانه‌ای، به دلیل اهمیت و کاربرد فراوان آن‌ها صورت گرفته است. تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد به روش‌های مختلف دارای قدمت نسبتاً طولانی است. تحلیل استوانه‌های ناهمسانگرد مربوط به حدود نیم قرن پیش می‌باشد، ولیکن تحلیل استوانه‌های ناهمگن مربوط به دهه‌های اخیر است. هر کدام از این پژوهش‌ها از دیدگاهی خاص پوسته‌های استوانه‌ای را مورد تحلیل و بررسی قرار داده‌اند؛ آنچه که در ادامه ارائه می‌گردد تنها بخش اندکی از پژوهش‌های موجود می‌باشد که با توجه به ارتباط و نزدیکی آن‌ها به پژوهش حاضر، انتخاب شده‌اند.

لامه [۴] در سال ۱۸۵۲ نخستین بار استوانه‌های جدار ضخیم را تحلیل نمود. وی جنس استوانه‌ها را همگن و همسانگرد در نظر گرفت و با استفاده از نظریه الاستیسیته‌ی مستوی^۱ معادلات حاکم را استخراج کرد و حل دقیق آن‌ها را به دست آورد.

نظریه‌ی پیزوترموالاستیک^۲ پوسته‌ی نازک، بر اساس نظریه‌ی پیزوالکتریک خطی و فرضیات لاو-کیرشف توسط تئزو^۳ و هووارد^۴ [۱۵] در سال ۱۹۹۴ استخراج گردید؛ در این پژوهش ماده به صورت همسانگرد عرضی^۵ در نظر گرفته شد، سپس ایشان با استفاده از ساده‌سازی‌هایی که مبتنی بر پارامترهای لامه و شعاع انحنای بود کاربرد این نظریه را برای محیط‌های مختلف پیزوالکتریکی، از قبیل پوسته‌ی استوانه‌ای، حلقه‌ی دایروی^۶ و تیر نشان دادند. در سال بعد، تئزو و باو^۷ [۱۶] کاری مشابه پژوهش پیشین انجام دادند با این تفاوت که ماده را به صورت ناهمسانگرد در نظر گرفتند و معادلات ترموالکترومکانیکی^۸ حاکم بر پوسته‌ی چند لایه را با استفاده از اصل همیلتون^۹ استخراج

-
1. Plane Elasticity Theory (PET)
 2. Piezothermoelastic
 3. Tzou
 4. Howard
 5. Transversely Isotropic
 6. Circular Ring
 7. Bao
 8. Thermo-electromechanical
 9. Hamilton

کردند.

در سال ۱۹۹۶ کاپوریا^۱ و همکاران [۱۷] با استفاده از توابع پتانسیلی که شرایط مرزی را در دو سر پوسته‌ی استوانه‌ای ارضاء می‌کرد؛ حل تحلیلی پیروزترموالاستیک پوسته‌ی استوانه‌ای متقارن محوری محدود را با استفاده از سری‌ها به دست آوردند. در این پژوهش جنس پوسته‌ی استوانه‌ای، همسانگرد عرضی در نظر گرفته شده بود که در راستای محوری خود پلاریزه شده بود؛ همچنین بارگذاری متقارن محوری از گسترش سری فوریه^۲ در راستای محوری در نظر گرفته شده بود و ضرایب در مجموعه‌ی توابع پتانسیل نامحدود برای هر مؤلفه‌ی فوریه، از حل شش معادله‌ی جبری که ناشی از ارضاء شرایط مرزی در لایه‌ی داخلی و خارجی پوسته‌ی استوانه‌ای بود، به دست می‌آمد. ایشان نشان دادند؛ حداکثر میزان تنش محوری و جابه‌جایی شعاعی را، می‌توان با کاربرد مناسب بار الکتریکی سطحی، کاهش داد.

با پیشرفت علم، شاخه‌ی جدیدی از مواد مطرح و ایجاد گردید که خواص آن‌ها به صورت تدریجی تغییر می‌کرد؛ امروزه این مواد ناهمگن با نام مواد متغیر تابعی (FGM) شناخته می‌شوند. با توجه به مطلوبیت خواص مواد نام‌برده نسبت به مواد معمول مورد استفاده در گذشته و لزوم کاربرد آن‌ها در تجهیزات حاضر، پژوهشگران تلاش خود را برای تحلیل این دسته از مواد آغاز کردند.

در سال ۱۹۹۹ هورگان^۳ و چان^۴ [۱۸] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، معادلات حاکم بر استوانه‌ها و دیسک‌های جدار ضخیم ساخته شده از مواد FG که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را حل کردند. ایشان نسبت پواسون را ثابت و مدول الاستیسیته را به صورت توانی در راستای شعاعی متغیر فرض کردند؛ همچنین نشان دادند خلاف استوانه‌های همگن که بیشینه تنش محیطی الزاماً در شعاع داخلی رخ می‌دهد، این امر در استوانه‌های ناهمگن صادق نبوده و ممکن است در شعاع خارجی رخ دهد که این موضوع بستگی به ثابت ناهمگنی مواد دارد.

1. Kapuria
2. Fourier
3. Horgan
4. Chan

حل دقیق پیژوترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FG با استفاده از سری توانی و فوریه، توسط ژیاو-هونگ^۱ و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۰۳ ارائه شد. ایشان توزیع ناهمگنی را در استوانه به صورت توانی مورد مطالعه قرار دادند و با استفاده از تبدیل هانکل^۲ معادله‌ی انتقال حرارت هدایتی فوریه در حالت پایدار را حل و میدان دما را به صورت معین در معادلات فرض کردند؛ ایشان معادلات حاکم را در حالتی حل کردند که شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی دو سر استوانه به صورت تکیه‌گاه ساده^۳ و اتصال زمین در نظر گرفته شود. در این پژوهش نشان داده شد ثابت ناهمگنی اثری مشهود بر روی رفتار پیژوالکتریکی دارد.

هونگ-جان^۴ و همکاران [۲۰] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، استوانه‌ی جدار ضخیمی که نسبت پواسون و مدول الاستیسیته‌ی آن به صورت خطی و نمایی تغییر می‌کند را به صورت یکپارچه و چند لایه، در سال ۲۰۰۶ مورد تحلیل قرار دادند. استوانه تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشت و در تمامی حالت‌ها جز حالت مربوط به حل تحلیلی برای استوانه‌ی یکپارچه‌ی با خواص متغیر خطی، نسبت پواسون را ثابت در نظر گرفتند. حل به دست آمده مربوط به حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای بود. نتایج نشان می‌داد که تغییر خواص از نمایی به خطی و یا بالعکس، باعث تغییر چندانی بر روی توزیع تنش شعاعی نمی‌گردد اما این امر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را با شدت بیشتری دست‌خوش تغییر می‌کند.

در اوایل سال ۲۰۰۷ ژیفای^۵ و همکاران [۲۱] معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را با استفاده از الاستیسیته‌ی مستوی، تنها در حالت کرنش صفحه‌ای استخراج نمودند. ایشان تغییرات خواص در استوانه‌ی ناهمگن را تنها برای مدول الاستیسیته‌ی آن در نظر گرفتند و به صورت خطی مدل کردند. سپس معادلات حاکم را با دو روش، یک بار با استفاده از چند لایه کردن استوانه به لایه‌هایی با خواص ثابت و به‌کارگیری حل لامه همراه

1. Xiao-Hong
2. Hankel
3. Simply Support
4. Hongjun
5. Zhifei

با روش بازگشتی که از شرایط مرزی پیوستگی بر روی تنش و جابه‌جایی شعاعی بین لایه‌ها استفاده می‌کرد و بار دیگر با در نظر گیری استوانه یکپارچه با خواص متغیر، حل کردند. همچنین نشان دادند که در روش چند لایه کردن با افزایش تعداد لایه‌ها، مقدار جابه‌جایی شعاعی به دست آمده در داخل استوانه کاهش می‌یابد. اندکی بعد در همین سال، توتونچو^۱ [۲۲] پژوهشی مشابه با کار گذشته [۲۰] را انجام داد. ایشان با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به‌کارگیری سری فریبینیوس، استوانه جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی قرار داشت و مدول الاستیسیته آن به صورت نمایی تغییر می‌کرد را در حالت کرنش صفحه‌ای حل کرد. در این پژوهش اثر تغییر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع تنش شعاعی و محیطی و جابه‌جایی شعاعی مورد مطالعه قرار گرفت. در همین زمان وو^۲ و تسای^۳ [۲۳] حل سه بعدی مگنتوالکتروالاستیک^۴ پوسته‌های FG دارای دو انحنا، که دارای شرایط مرزی مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی کاملاً ساده تکیه‌گاهی در لبه‌ی خود بودند را ارائه کردند. ایشان توزیع ناهمگنی خواص را به صورت کسر حجمی در نظر گرفتند و نشان دادند؛ میدان سینماتیک به دست آمده از نظریه‌ی جفت‌شده‌ی^۵ کلاسیک پوسته ممکن است برای پوسته‌های FG و مگنتوالکتروالاستیک مناسب نباشد؛ به ویژه زمانی که بارهای مغناطیسی و الکتریکی وجود دارد.

لی^۶ و پنگ^۷ [۲۴] در سال ۲۰۰۹ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به‌کارگیری روش انتگرال فردهولم^۸ حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن تحت فشار داخلی را به دست آوردند. ایشان توزیع ناهمگنی خواص را در استوانه به صورت دلخواه در نظر گرفتند اما نتایج را تنها برای حالتی که مدول الاستیسیته، به صورت توزیع توانی و کسر حجمی ساده شده تغییر می‌کرد، بیان کردند. همچنین مانند [۲۰] نشان دادند که تغییر نحوه‌ی توزیع خواص، در تغییر نتایج به دست آمده

-
1. Tutuncu
 2. Wu
 3. Tsai
 4. Magneto-Electro-Elastic
 5. Coupled
 6. Li
 7. Peng
 8. Fredholm

برای تنش شعاعی اثری کم و در تنش محیطی اثری مشهود دارد.

در همین سال، دای^۱ و همکاران [۲۵] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی حل تحلیلی سازه‌های توخالی از جنس مواد پیزوالکتریک متغیر تابعی^۲ را به دست آوردند. طبق این پژوهش استوانه و کره‌ی توخالی که تحت بارهای مکانیکی و الکتریکی قرار داشت و خواص آن به صورت توانی تغییر می‌کرد، مورد بررسی قرار گرفت؛ نتایج نشان می‌داد، ثابت ناهمگنی تأثیر زیادی بر روی تنش و پتانسیل الکتریکی دارد همچنین با ایجاد بار الکتریکی مناسب می‌توان توزیع تنش را در جسم کنترل کرد. اندکی بعد، لی و همکاران [۲۶] کاری مشابه پژوهش پیشین [۲۵] انجام دادند. ایشان با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به‌کارگیری انتگرال فردهولم حل دقیق استوانه‌های FGP را برای هر توزیع دلخواه ناهمگنی خواص، به دست آوردند و نتایج را، تنها برای زمانی که خواص به صورت توانی و کسر حجمی تغییر می‌کرد، نشان دادند و نتایجی مشابه [۲۵] به دست آوردند.

حیدرپور و همکاران [۲۷] در سال ۲۰۱۲ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته، معادلات حاکم بر استوانه ناهمگن چرخان که تحت فشار داخلی و توزیع حرارت پایدار قرار داشت را در حالت کلی استخراج کردند و با استفاده از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم در راستای شعاعی و طولی همراه با اعمال شرایط پیوستگی و مرزی جابه‌جایی، تنشی، دمایی و انتقال حرارتی منجر به ایجاد دستگاه معادلات خطی شدند و آن را حل کردند. ایشان ناهمگنی خواص را تنها به صورت کسر حجمی و وابسته به دما در نظر گرفتند و نشان دادند وابستگی خواص به دما تأثیر مشهودی بر روی جابه‌جایی و تنش دارد.

اندکی بعد، قناد و زمانی‌نژاد [۲۸] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و تعریف روابط ساختاری در حالت کلی (تنش و کرنش صفحه‌ای)، حل کامل استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را به دست آوردند. ایشان ناهمگنی خواص برای مدول الاستیسیته به صورت توانی در نظر گرفتند و فرض کردند ضریب پواسون ثابت می‌باشد. همچنین

1. Dai

2. Functionally Graded Piezoelectric (FGP)

نشان دادند برای افزایش یا کاهش تنش و جابه‌جایی، باید مقادیر مثبت یا منفی برای ثابت ناهمگنی اختیار گردد. در همین زمان ایشان [۲۹] با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند، مورد تحلیل قرار دادند. ایشان با بررسی و مقایسه نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی در نواحی دور از دو سر استوانه نشان دادند با افزایش ضخامت استوانه حل نیمه تحلیلی یا نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول از حل دقیق یا نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی دور می‌گردد و همچنین بیان نمودند که اختلاف نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول از الاستیسیته‌ی مستوی در میزان جابه‌جایی شعاعی، وقتی ضخامت جداره‌ی استوانه برابر شعاع لایه‌ی میانی آن است، در حدود ۲۵٪ می‌باشد.

جدول ۱-۱ برخی از مطالعات انجام شده را به صورت فهرست‌وار ارائه می‌کند.

جدول ۱-۱ پژوهش‌های صورت گرفته

سال	پژوهشگر	موضوع پژوهش
۱۸۵۲	لامه [۳]	حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم همگن با استفاده از PET
۱۹۹۴	تئزو و هووارد [۱۵]	ارائه‌ی نظریه‌ی پیروترموالاستیک پوسته‌ی نازک
۱۹۹۵	تئزو و باو [۱۶]	ارائه‌ی نظریه‌ی پیروترموالاستیک پوسته‌ی نازک ناهمسانگرد چند لایه با استفاده از اصل همپلتون
۱۹۹۶	کاپوریا و همکاران [۱۷]	حل تحلیلی پیروترموالاستیک پوسته‌ی استوانه‌ای متقارن محوری محدود
۱۹۹۹	هورگان و چان [۱۸]	حل استوانه‌ها و دیسک‌های جدار ضخیم ناهمگن با استفاده از PET
۲۰۰۳	ژیاو-هونگ و همکاران [۱۹]	حل دقیق پیروترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FG
۲۰۰۶	هونگ-جان و همکاران [۲۰]	آنالیز الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش چند لایه کردن با استفاده از PET
۲۰۰۷	ژیفای و همکاران [۲۱]	حل دقیق الاستیک استوانه‌های ناهمگن با روش‌های چند لایه کردن و یکپارچه در نظر گرفتن
۲۰۰۷	توتونچو [۲۲]	حل دقیق الاستیک استوانه‌های ناهمگن با استفاده از سری‌ها
۲۰۰۷	وو و تسای [۲۳]	حل سه بعدی مگنتوالکتروالاستیک پوسته‌های FG دارای دو انحنا
۲۰۰۹	لی و پنگ [۲۴]	حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با به‌کارگیری روش انتگرال فردهولم و استفاده از PET

حل تحلیلی سازه‌های توخالی FGP با استفاده از PET	دای و همکاران [۲۵]	۲۰۱۰
حل دقیق استوانه‌های FGP با به‌کارگیری روش انتگرال فردهولم و استفاده از PET	لی و همکاران [۲۶]	۲۰۱۰
تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن چرخان با استفاده از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم	حیدرپور و همکاران [۲۷]	۲۰۱۲
حل کامل استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن	قنّاد و زمانی‌نژاد [۲۸]	۲۰۱۲
تحلیل الاستیک استوانه‌های ناهمگن با استفاده از FSDT	قنّاد و زمانی‌نژاد [۲۹]	۲۰۱۲

۸-۱ جمع‌بندی

در این پژوهش سعی شده است با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی پژوهش جامعی درباره‌ی مواد پیزوالکتریک تحت بارگذاری و شرایط مرزی مختلف صورت گیرد تا رفتار این دسته از مواد به صورت جامعی با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی مورد مطالعه و بررسی قرار گیرد و راه‌گشای پژوهشگران، مهندسين و طراحان در دنیای علم و صنعت باشد.

ابتدا با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر یک استوانه‌ی چرخان ساخته شده از مواد FG ناهمگن پیزوالکتریک که تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی و الکتریکی قرار گرفته، در حالت کلی استخراج می‌شود؛ سپس با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف، اقدام به حل آنها صورت می‌گیرد. در ادامه نتایج به دست آمده از دو روش تحلیلی و المان محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌گیرد.

فصل ۲

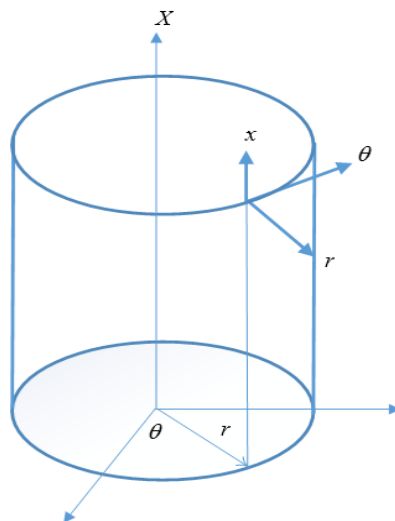
تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان FGPM با
استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی

۱-۲ مقدمه

در این فصل ابتدا روابط الاستیسیته‌ی مستوی در سیستم مختصات استوانه‌ای برای پوسته‌ی جدار ضخیم بیان می‌شوند. پس از آن به طور مختصر به نظریه الاستیسیته‌ی مستوی پرداخته و فرضیات حاکم بر مسأله و شرایط مرزی استوانه‌ی مورد مطالعه ارائه می‌گردد. در ادامه با در نظر گرفتن فرضیات بیان شده، روابط حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم FGPM چرخان تحت بارگذاری همزمان الکتریکی، مکانیکی و حرارتی با استفاده از نظریه الاستیسیته مستوی، استخراج و حل می‌گردد.

۲-۲ روابط الکتروترموالاستیک در مختصات استوانه‌ای

در این بخش روابط الکتروترموالاستیک در سیستم مختصات استوانه‌ای شامل: معادلات تعادل، معادلات ساختاری و معادلات گرادیان بیان می‌گردد. در این مسأله مختصات استوانه‌ای (r, θ, x) بر مختصات اصلی (1,2,3) منطبق می‌باشد.



شکل ۱-۲ نمایش مختصات استوانه‌ای

در مختصات استوانه‌ای میدان جابه‌جایی به طور کلی بر اساس سه پارامتر جابه‌جایی شعاعی u_r ,

جاب‌جایی محیطی u_θ و جاب‌جایی محوری u_x بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(r, \theta, x) \\ u_\theta &= u_\theta(r, \theta, x) \\ u_x &= u_x(r, \theta, x) \end{aligned} \quad (1-2)$$

همچنین میدان پتانسیل الکتریکی به شکل زیر است؛

$$\varphi = \varphi(r, \theta, x) \quad (2-2)$$

همچنین میدان دمایی به شکل زیر است؛

$$T = T(r, \theta, x) \quad (3-2)$$

۲-۲-۱ معادلات تعادل

در این قسمت معادلات تعادل در حالت کلی را بیان می‌کنیم؛ [۳۰].

معادله تعادل مکانیکی به شکل زیر است؛

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{B} = 0 \quad (4-2)$$

با بسط رابطه‌ی بالا در سیستم مختصات استوانه‌ای سه معادله‌ی تعادل مکانیکی به فرم زیر

نوشته می‌شود، که در این معادلات ρB_r ، ρB_θ و ρB_x به ترتیب نیروهای حجمی^۱ در راستای

شعاعی، محیطی و محوری هستند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho B_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \rho B_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \rho B_x &= 0 \end{aligned} \quad (5-2)$$

1. Body force

معادله تعادل الکتریکی به شکل زیر است؛ \vec{D} بردار جابه‌جایی الکتریکی و q چگالی بار الکتریکی آزاد می‌باشد؛

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - q = 0 \quad (6-2)$$

که با بسط آن خواهیم داشت،

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_x}{\partial x} - q = 0 \quad (7-2)$$

معادله تعادل حرارتی عبارت است از؛

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{h} - s = 0 \quad (8-2)$$

\vec{h} بردار شار حرارتی و s منبع گرمایی حجمی در محیط مادی پیزوالکتریک می‌باشد؛

که با بسط رابطه (۸-۲) خواهیم داشت؛

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rh_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial h_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial h_x}{\partial x} - s = 0 \quad (9-2)$$

۲-۲-۲ معادلات ساختاری

در ادامه روابط ساختاری برای یک ماده همسانگرد عرضی که خواص در راستای شعاع متفاوت از

دو راستای دیگر است بیان می‌گردد؛

روابط ساختاری مکانیکی عبارت است از؛

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{rx} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{\theta x} \\ \gamma_{rx} \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{35} \\ 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T \quad (10-2)$$

روابط ساختاری الکتریکی عبارت است از؛

$$\begin{bmatrix} D_r \\ D_\theta \\ D_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{\theta r} \\ \gamma_{rx} \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_x \end{bmatrix} \quad (11-2)$$

روابط ساختاری حرارتی عبارت است از؛

$$\begin{bmatrix} h_r \\ h_\theta \\ h_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_x \end{bmatrix} \quad (12-2)$$

۲-۲-۳ معادلات گرادیان

روابط کرنش-جاب‌جایی (معادلات سینماتیک) در سیستم مختصات استوانه‌ای به فرم زیر بیان

می‌گردند: [۳۱].

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \gamma_{\theta x} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \gamma_{rx} &= \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (13-2)$$

همچنین میدان الکتریکی عبارت است از؛

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned} \quad (14-2)$$

میدان حرارتی نیز به شکل زیر است؛

$$\begin{aligned} e_r &= -\frac{\partial T}{\partial r} \\ e_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ e_x &= -\frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned} \quad (15-2)$$

۲-۳ نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی

در این قسمت، ابتدا فرضیات حاکم بر مسأله را بررسی می‌نماییم؛ پوسته‌ی استوانه‌ای مورد تحلیل از نظر هندسه، جنس، بارگذاری و شرایط مرزی متقارن محوری است و می‌توان از تغییرات در راستای محیطی استوانه θ صرف‌نظر کرد ($\frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) = 0$)؛ بنابراین توابع بیان‌کننده‌ی رفتار مکانیکی، الکتریکی و حرارتی تنها تابعی از شعاع r و محور x استوانه می‌باشند.

پوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه در این پژوهش با سرعت دورانی ثابت ω ، حول محور تقارن

$$\dot{u}_\theta = r\omega$$

خود می‌چرخد ($u_\theta = r\omega$).

با توجه به آنچه که بیان شد؛ میدان جابه‌جایی در این حالت به شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} u_r = u_r(r, x) \\ u_\theta = r\omega t \\ u_x = u_x(r, x) \end{cases} \quad (16-2)$$

و پتانسیل الکتریکی و دما به شکل زیر می‌باشد؛

$$\varphi = \varphi(r, x) \quad (17-2)$$

$$T = T(r, x) \quad (18-2)$$

u_r ، u_θ و u_x مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای شعاعی، محیطی و محوری هستند که u_r ، u_θ ، u_x ،

و φ و T توابعی از r و x می‌باشند.

در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی

استوانه، پس از اعمال بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌ماند و تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور استوانه متقارن‌اند و مقدار آن‌ها در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند؛ در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود. همچنین تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می‌کند؛ به عبارت دیگر تغییر مکان شعاعی فقط تابع شعاع استوانه می‌باشد $(u_r(r))$. بنابراین می‌توان گفت که محورهای استوانه، محورهای اصلی و تنش‌های نرمال، تنش‌های اصلی می‌باشند.

با توجه به فرضیات فوق، داریم؛

$$\gamma_{rx} = \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial x} = 0 \Rightarrow u_r = u_r(r) \\ \frac{\partial u_x}{\partial r} = 0 \Rightarrow u_x = u_x(x) \end{cases} \quad (19-2)$$

بنابراین معادلات (۱۶-۲) به شکل زیر در می‌آید؛

$$\begin{cases} u_r = u_r(r) \\ u_\theta = r\omega t \\ u_x = u_x(x) \end{cases} \quad (20-2)$$

همچنین به دلیل اینکه در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی از تنش و کرنش برشی صرف‌نظر می‌کنیم، T و φ را به صورت یک بعدی در راستای شعاع در نظر می‌گیریم تا ایجاد تنش برشی نکنند. بنابراین خواهیم داشت؛

$$\varphi = \varphi(r) \quad (21-2)$$

$$T = T(r) \quad (22-2)$$

روابط (۱۳-۲) تا (۱۵-۲) نیز به شکل زیر در می‌آید؛

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du_r}{dr} \quad , \quad \gamma_{\theta x} = 0 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} \quad , \quad \gamma_{rx} = 0 \end{aligned} \quad (23-2)$$

$$\varepsilon_x = \frac{du_x}{dx} \quad , \quad \gamma_{r\theta} = 0$$

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} \\ E_\theta &= 0 \\ E_x &= 0 \end{aligned} \quad (24-2)$$

$$\begin{aligned} e_r &= -\frac{\partial T}{\partial r} \\ e_\theta &= 0 \\ e_x &= 0 \end{aligned} \quad (25-2)$$

همچنین معادلات ساختاری مکانیکی، الکتریکی و حرارتی کاهش یافته و به شکل زیر می‌باشد؛

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{12} & C_{32} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{12} \end{bmatrix} E_r - \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} T \quad (26-2)$$

$$D_r = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \end{bmatrix} + \epsilon_{11} E_r \quad (27-2)$$

$$h_r = -k_{11} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (28-2)$$

یوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه دارای جداری ثابت می‌باشد و از جنس مواد ناهمگن و همسانگرد عرضی^۱ است که خاصیت ماده‌ی آن در راستای شعاعی متفاوت از دو راستای دیگر می‌باشد. همچنین توزیع خواص در استوانه، با تابعی توانی از شعاع آن بیان می‌شود،

$$Pr(r) = Pr_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^{n_{Pr}} = Pr_i \bar{r}^{n_{Pr}} \quad (29-2)$$

در رابطه فوق r_i ، شعاع داخلی استوانه و Pr_i خاصیت ماده در لایه‌ی داخلی استوانه می‌باشد که Pr_i می‌تواند خاصیت مکانیکی، حرارتی و الکتریکی از قبیل مدول الاستیسیته^۲، چگالی^۳، نسبت پواسون^۴، ضریب هدایت حرارتی^۵، ضریب انبساط خطی حرارتی^۶، ثوابت پیزوالکتریک^۷ و ثوابت دی‌الکتریک^۸ باشد. n_{Pr} ثابت ناهمگنی خاصیت است که مقادیر حقیقی منفی را نیز می‌تواند اختیار کند. $n_{Pr} = 0$ ، نشان‌دهنده مواد همگن است، همچنین \bar{r} نسبت شعاع به شعاع داخلی می‌باشد.

مدل‌سازی ناهمگنی در خواص

جهت مدل‌سازی ناهمگنی در خواص، همان‌طور که گفته شد؛ از رابطه‌ی (29-2) یا توزیع توانی استفاده می‌شود. خواص به‌کاررفته برای تحلیل مسأله به صورت توانی مدل‌سازی می‌شود.

ناهمگنی ثوابت الاستیک

با استفاده از رابطه‌ی (29-2) ثوابت الاستیک به شکل تابعی از شعاع بیان می‌شوند که c_{11}^0 ، c_{12}^0 ، c_{22}^0 و c_{23}^0 ثوابت الاستیک در شعاع داخلی استوانه که به ترتیب مربوط به خواص c_{11} ، c_{12} ، c_{22} و c_{23} می‌باشند. n ثابت ناهمگنی است.

-
1. Transversely Isotropic
 2. Elasticity Modulus
 3. Density
 4. Poisson's Ratio
 5. Heat Conduction Coefficient
 6. Thermal Linear Expansion Coefficient
 7. Piezoelectric Constants
 8. Dielectric Constants

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= c_{11}^0 \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \\
 c_{12} &= c_{12}^0 \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \\
 c_{22} &= c_{22}^0 \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \\
 c_{23} &= c_{23}^0 \left(\frac{r}{r_i} \right)^n
 \end{aligned}
 \tag{۳۰-۲}$$

ناهمگنی ثوابت پیزوالکتریک-تنش

به کمک رابطه‌ی (۲۹-۲) برای ثوابت پیزوالکتریک-تنش داریم.

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= e_{11}^0 \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \\
 e_{12} &= e_{12}^0 \left(\frac{r}{r_i} \right)^n
 \end{aligned}
 \tag{۳۱-۲}$$

در رابطه‌ی فوق e_{11}^0 و e_{12}^0 ثوابت پیزوالکتریک-تنش در شعاع داخلی استوانه هستند که به ترتیب

مربوط به خواص e_{11} و e_{12} می‌باشند.

با استفاده از رابطه‌ی (۲۹-۲) برای ثوابت تنش حرارتی-دما داریم.

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \alpha_{11}^0 \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \\
 \alpha_{22} &= \alpha_{22}^0 \left(\frac{r}{r_i} \right)^n
 \end{aligned}
 \tag{۳۲-۲}$$

که در رابطه‌ی فوق α_{11}^0 و α_{22}^0 ثوابت تنش حرارتی-دما در شعاع داخلی استوانه هستند که به

ترتیب مربوط به خواص α_{11} و α_{22} می‌باشند.

ناهمگنی ثوابت دی‌الکتریک

برای ثوابت دی‌الکتریک با توجه به (۲۹-۲) داریم.

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{11}^0 \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \quad (33-2)$$

ϵ_{11}^0 ثابت دی‌الکتریک در شعاع داخلی استوانه که مربوط به خاصیت ϵ_{11} در رابطه‌ی فوق می‌باشد.

ناهمگنی ضرایب هدایت حرارتی

ضرایب هدایت حرارتی را با استفاده از رابطه‌ی (۲۹-۲) می‌توان به شکل تابعی از شعاع بیان کرد

که k_{11}^0 ضرایب هدایت حرارتی در شعاع داخلی استوانه مربوط به خاصیت k_{11} می‌باشد.

$$k_{11} = k_{11}^0 \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \quad (34-2)$$

ناهمگنی چگالی

همچنین برای چگالی با توجه به رابطه‌ی (۲۹-۲) داریم.

$$\rho = \rho^0 \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \quad (35-2)$$

که ρ^0 مقدار چگالی در شعاع داخلی استوانه می‌باشد.

۲-۳-۱ شرایط مرزی استوانه

پوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه تحت فشار یکنواخت، دمای ثابت و پتانسیل الکتریکی ثابت در

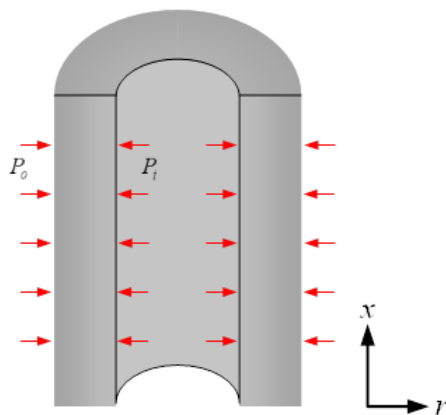
سطوح داخلی و خارجی می‌باشد. لذا شرایط مرزی تنش در لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه به صورت

زیر می‌باشد.

$$\text{شرایط مرزی حرارتی} \quad \begin{cases} T|_{r=r_i} = -T_i \\ T|_{r=r_o} = -T_o \end{cases} \quad (36-2)$$

$$\text{شرایط مرزی مکانیکی} \quad \begin{cases} \sigma_{r|r=r_i} = -P_i \\ \sigma_{r|r=r_o} = -P_o \end{cases} \quad (37-2)$$

$$\text{شرایط مرزی الکتریکی} \quad \begin{cases} \varphi_{|r=r_i} = -\varphi_i \\ \varphi_{|r=r_o} = -\varphi_o \end{cases} \quad (38-2)$$



شکل ۲-۲ شرایط مرزی تنش در لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه

۲-۳-۲ شرایط انتهایی استوانه

دو شرط انتهایی برای استوانه‌ی مورد مطالعه در نظر گرفته شده و دو سر استوانه با حفظ شرایط نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی (تحلیل دو بعدی مسائل) می‌تواند باز یا بسته باشد، یعنی تنش و کرنش طولی، مقداری ثابت دارند.

با توجه به فرضیات حاکم بر مسأله، معادلات ساختاری (۲۶-۲) را به شکل زیر در نظر می‌گیریم؛

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B \\ B & C & D \\ B & D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E \\ F \\ F \end{bmatrix} D_r - \begin{bmatrix} G \\ H \\ H \end{bmatrix} \theta \quad (39-2)$$

الف- کرنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر بسته و مقید)

در حالت کرنش صفحه‌ای ضرایب مربوط به معادله (۳۹-۲) عبارت است از؛

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \left(C_{11} + \frac{e_{11}^2}{\epsilon_{11}} \right) \\ B = \left(C_{12} + \frac{e_{11}e_{12}}{\epsilon_{11}} \right) \\ C = \left(C_{22} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right) \\ D = \left(C_{23} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right) \\ E = \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}} \\ F = \frac{e_{12}}{\epsilon_{11}} \\ G = C_{11}\alpha_{11} + C_{12}\alpha_{22} + C_{12}\alpha_{22} \\ H = C_{12}\alpha_{11} + C_{22}\alpha_{22} + C_{23}\alpha_{22} \end{array} \right. \quad (40-2)$$

همچنین تنش محوری به شکل زیر است؛

$$\sigma_x = B\varepsilon_r + D\varepsilon_\theta - FD_r - H\theta \quad (41-2)$$

ب- تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز)

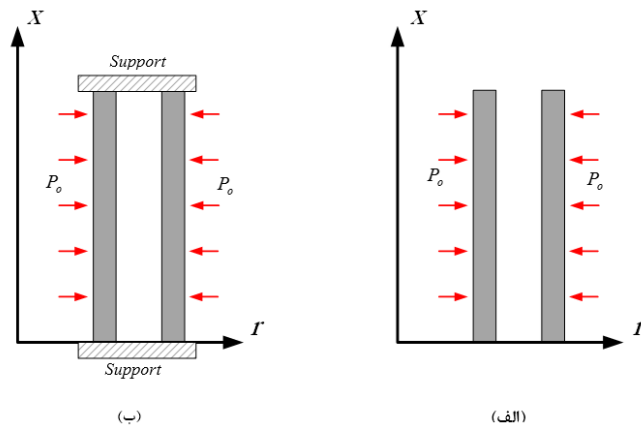
در حالت تنش صفحه‌ای ضرایب مربوط به معادله (۳۹-۲) عبارت است از؛

$$\left\{ \begin{aligned}
 A &= \left(C_{11} + \frac{e_{11}^2}{\epsilon_{11}} \right) - \frac{\left(C_{12} + \frac{e_{11}e_{12}}{\epsilon_{11}} \right)^2}{\left(C_{22} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right)} \\
 B &= \left(C_{12} + \frac{e_{11}e_{12}}{\epsilon_{11}} \right) - \frac{\left(C_{12} + \frac{e_{11}e_{12}}{\epsilon_{11}} \right) \left(C_{23} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right)}{\left(C_{22} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right)} \\
 C &= \left(C_{22} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right) - \frac{\left(C_{23} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right)^2}{\left(C_{22} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right)} \\
 E &= \frac{e_{11}}{\epsilon_{11}} - \frac{\left(C_{12} + \frac{e_{11}e_{12}}{\epsilon_{11}} \right) \left(\frac{e_{12}}{\epsilon_{11}} \right)}{\left(C_{22} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right)} \\
 F &= \frac{e_{12}}{\epsilon_{11}} - \frac{\left(C_{23} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right) \left(\frac{e_{12}}{\epsilon_{11}} \right)}{\left(C_{22} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right)} \\
 G &= C_{11}\alpha_{11} + C_{12}\alpha_{22} + C_{12}\alpha_{22} - \frac{\left(C_{12} + \frac{e_{11}e_{12}}{\epsilon_{11}} \right) (C_{12}\alpha_{11} + C_{22}\alpha_{22} + C_{23}\alpha_{22})}{\left(C_{22} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right)} \\
 H &= C_{12}\alpha_{11} + C_{22}\alpha_{22} + C_{23}\alpha_{22} - \frac{\left(C_{23} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right) (C_{12}\alpha_{11} + C_{22}\alpha_{22} + C_{23}\alpha_{22})}{\left(C_{22} + \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} \right)}
 \end{aligned} \right. \quad (42-2)$$

در حالت تنش صفحه‌ای، مقدار تنش محوری ($\sigma_x = 0$) صفر است. در این حالت رابطه کرنش عبارت

است از:

$$\epsilon_x = \frac{1}{C} (FD_r + H\theta - B\epsilon_r - D\epsilon_\theta) \quad (43-2)$$



شکل ۲-۳ شرایط انتهایی استوانه‌ی مورد مطالعه الف-تنش صفحه‌ای ب- کرنش صفحه‌ای

۲-۴ استخراج و حل معادلات حاکم بر مسأله

در این بخش به استخراج روابط حاکم بر مسأله می‌پردازیم.

۲-۴-۱ معادله‌ی تعادل حرارت

در غیاب منبع حرارتی و حالت پایدار بارگذاری حرارتی، قانون فوریه به صورت زیر ارائه می‌شود؛

$$\text{div}(\vec{Q}_r) = 0 \quad (44-2)$$

و با توجه به فرضیات تقارن محوری، انتقال حرارت یک بعدی در راستای شعاعی و ثابت بودن

مقادیر ضرایب انتقال حرارتی داریم؛

$$T'' + \frac{1}{r}T' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (45-2)$$

همچنین روابط زیر را تعریف می‌کنیم؛

$$\bar{r} = \frac{r}{r_i}, \quad 1 \leq \bar{r} \leq k \quad (46-2)$$

$$\theta = T - T^* \quad (47-2)$$

که \bar{r} نسبت شعاع به شعاع داخلی، k نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی و T^* دمای مرجع

می‌باشد.

با جایگذاری روابط (۲-۴۶) و (۲-۴۷) در معادله (۲-۴۵) داریم؛

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \theta = C_1^* \ln \bar{r} + C_2^* \quad (۲-۴۸)$$

با اعمال شرایط مرزی، ثابت‌ها بدست می‌آید؛

$$\bar{r} = 1 \Rightarrow C_2^* = \theta_i = T_i - T^* \quad (۲-۴۹)$$

$$\bar{r} = k \Rightarrow C_1^* \ln k + C_2^* = \theta_o = T_o - T^* \Rightarrow C_1^* = \frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \quad (۲-۵۰)$$

بنابراین معادله حرارت بدست می‌آید:

$$\Rightarrow \theta = \frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \ln \bar{r} + \theta_i \quad (۲-۵۱)$$

۲-۴-۲ معادلات تعادل الکتریکی

با توجه به فرضیات حاکم و در غیاب چگالی بار الکتریکی آزاد، معادله تعادل الکتریکی عبارت

است از:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r = 0 \quad (۲-۵۲)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (۲-۵۲) داریم؛

$$\ln D_r = \ln C - \ln r \Rightarrow D_r = \frac{C_3^*}{r} \quad (۲-۵۳)$$

بنابراین با توجه به معادله (۲-۲۷) میدان الکتریکی عبارت است از:

$$E_r = \frac{1}{\epsilon_{11}} \left(\frac{C_3^*}{r} - e_{11} \epsilon_r - e_{12} \epsilon_\theta - e_{12} \epsilon_x \right) \quad (۲-۵۴)$$

همچنین داریم؛

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{\epsilon_{11}} \left(\frac{C_3^*}{r} - e_{11}\epsilon_r - e_{12}\epsilon_\theta - e_{12}\epsilon_x \right) \quad (55-2)$$

بنابراین با انتگرال‌گیری از رابطه (55-2) پتانسیل الکتریکی حاصل می‌شود:

$$\Rightarrow \varphi = \int_0^r \frac{1}{\epsilon_{11}} \left(\frac{C_3^*}{r} - e_{11}\epsilon_r - e_{12}\epsilon_\theta - e_{12}\epsilon_x \right) dr + C_4^* \quad (56-2)$$

۲-۴-۳ معادله‌ی تعادل مکانیکی

با در نظر گرفتن فرضیات بیان شده در قسمت (۳-۲)، معادلات تعادل تنش (۵-۲) به صورت زیر

خلاصه می‌گردد؛

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho r \omega^2 = 0 \quad (57-2)$$

در ادامه با جایگذاری از معادله (۳۹-۲) در معادله (۵۷-۲) داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} (A\epsilon_r + B\epsilon_\theta - E \frac{C_3^*}{r} - G\theta) + \\ & \frac{1}{r} (A\epsilon_r + B\epsilon_\theta - E \frac{C_3^*}{r} - G\theta - B\epsilon_r - C\epsilon_\theta + F \frac{C_3^*}{r} + H\theta) + \rho r \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (58-2)$$

با جایگذاری معادلات (۲۴-۲) در معادله (۵۸-۲) خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} (A \frac{du_r}{dr} + B \frac{u_r}{r} - E \frac{C_3^*}{r} - G\theta) + \\ & \frac{1}{r} (A \frac{du_r}{dr} + B \frac{u_r}{r} - E \frac{C_3^*}{r} - G\theta - B \frac{du_r}{dr} - C \frac{u_r}{r} + F \frac{C_3^*}{r} + H\theta) + \rho r \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (59-2)$$

بنابراین خواهیم داشت؛

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + r \frac{du_r}{dr} - \frac{C}{A} u_r = \frac{-\rho r^3 \omega^2}{A} + \frac{(G-H)\theta r}{A} - F \frac{C_3^*}{A} + \frac{G}{A} r^2 \frac{d\theta}{dr} \quad (60-2)$$

حل کلی معادله (۶۰-۲) برابر با حاصل جمع حل خصوصی و حل همگن آن می‌باشد؛

$$U_r = U_{r_p} + U_{r_g} \quad (61-2)$$

اگر تعریف شود؛

$$\frac{C}{A} = \nu^* \quad (62-2)$$

و حل را به صورت زیر در نظر بگیریم؛

$$u_r = r^m$$

$$r^m (m(m-1)) + r^m (m) - r^m \nu^* = 0 \quad (63-2)$$

$$r^m \neq 0 \Rightarrow m^2 - m + m - \nu^* = 0 \Rightarrow m = \pm \sqrt{\nu^*} = \pm \sqrt{C/A}$$

حل همگن به شکل زیر خواهد بود؛

$$u_{r_g} = C_5^* r^{\sqrt{\nu^*}} + C_6^* r^{-\sqrt{\nu^*}} \quad (64-2)$$

همچنین حل خصوصی عبارت است از:

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{r_p} = & \frac{\rho \omega^2}{(C-9A)} r^3 + \left(\frac{G-H}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) r \ln \left(\frac{r}{r_i} \right) + \frac{F}{C} C_3^* \\ & + \frac{r}{(A-C)} \left((G-H)\theta_i + G \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) - \left(\frac{2A(G-H)}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \right) \end{aligned} \quad (65-2)$$

بنابراین حل کلی به شکل زیر می‌باشد؛

$$\begin{aligned} u_r = & C_5^* r^{\sqrt{\nu^*}} + C_6^* r^{-\sqrt{\nu^*}} + \frac{\rho \omega^2}{(C-9A)} r^3 + \left(\frac{G-H}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) r \ln \left(\frac{r}{r_i} \right) + \frac{F}{C} C_3^* \\ & + \frac{r}{(A-C)} \left((G-H)\theta_i + G \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) - \left(\frac{2A(G-H)}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \right) \end{aligned} \quad (66-2)$$

با جایگذاری معادله (66-2) در معادلات (23-2) خواهیم داشت؛

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} = C_5^* \sqrt{v^*} r^{(\sqrt{v^*}-1)} - C_6^* \sqrt{v^*} r^{(-1-\sqrt{v^*})} + \frac{3\rho\omega^2}{(C-9A)} r^2 + \left(\frac{G-H}{A-C}\right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k}\right) \left(\ln\left(\frac{r}{r_i}\right) + 1\right) \quad (67-2)$$

$$+ \frac{1}{(A-C)} \left((G-H)\theta_i + G \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k}\right) - \left(\frac{2A(G-H)}{A-C}\right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k}\right) \right)$$

$$\varepsilon_\theta = C_5^* r^{(\sqrt{v^*}-1)} - C_6^* r^{(-1-\sqrt{v^*})} + \frac{\rho\omega^2}{(C-9A)} r^2 + \left(\frac{G-H}{A-C}\right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k}\right) \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) + \frac{F}{rC} C_3^* + \frac{1}{(A-C)} \left((G-H)\theta_i + G \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k}\right) - \left(\frac{2A(G-H)}{A-C}\right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k}\right) \right) \quad (68-2)$$

با توجه به رابطه (۳۹-۲) داریم؛

$$\sigma_r = A\varepsilon_r + B\varepsilon_\theta - E \frac{C_3^*}{r} - G\theta \quad (69-2)$$

$$\sigma_\theta = B\varepsilon_r + C\varepsilon_\theta - F \frac{C_3^*}{r} - H\theta \quad (70-2)$$

همچنین با جایگذاری روابط (۶۷-۲) و (۶۸-۲) در روابط (۶۹-۲) و (۷۰-۲) داریم؛

$$\sigma_r = (A\sqrt{v^*} + B) C_5^* r^{(\sqrt{v^*}-1)} - (A\sqrt{v^*} - B) C_6^* r^{(-\sqrt{v^*}-1)} + (3A+B) \frac{\rho\omega^2}{(C-9A)} r^2 + \left((A+B) \left(\frac{G-H}{A-C}\right) - G \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k}\right) \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) + \left((A+B) \left(\frac{G-H}{A-C}\right) - G \right) \theta_i + \left(\left(\frac{A+B}{A-C}\right) \left(G - \frac{2A(G-H)}{A-C} \right) + A \left(\frac{G-H}{A-C}\right) \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k}\right) + \left(\frac{BF}{C} - E \right) \frac{C_3^*}{r} \quad (71-2)$$

$$\sigma_\theta = (B\sqrt{v^*} + C) C_5^* r^{(\sqrt{v^*}-1)} - (B\sqrt{v^*} - C) C_6^* r^{(-\sqrt{v^*}-1)} + (3B+A) \frac{\rho\omega^2}{(C-9A)} r^2 + \left((B+C) \left(\frac{G-H}{A-C}\right) - H \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k}\right) \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) + \left((B+C) \left(\frac{G-H}{A-C}\right) - H \right) \theta_i + \left(\left(\frac{B+C}{A-C}\right) \left(G - \frac{2A(G-H)}{A-C} \right) + B \left(\frac{G-H}{A-C}\right) \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k}\right) \quad (72-2)$$

با اعمال شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی در لایه داخلی و خارجی، بسته به شرایط انتهایی، یک

دستگاه معادلات خطی با چهار معادله و چهار مجهول تشکیل می‌گردد که با حل آن ضرایب مجهول به دست می‌آید؛ حل دستگاه مذکور با استفاده از نرم‌افزار Maple انجام شده است.

۴-۴-۲ حالت کرنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر بسته و مقید)

با انتگرال‌گیری از رابطه (۲-۵۶)، پتانسیل الکتریکی در حالت کرنش صفحه‌ای به دست می‌آید؛

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon_{11}} C_3^* \ln r - \left[\begin{aligned} & \frac{(e_{11}\sqrt{v^*} + e_{12})}{\sqrt{v^*} - 1} C_5^* r^{\sqrt{v^*}} + \frac{(e_{11}\sqrt{v^*} - e_{12})}{\sqrt{v^*} + 1} C_6^* r^{-\sqrt{v^*}} \\ & + (3e_{11} + e_{12}) \frac{\rho\omega^2}{3(C-9A)} r^3 \\ & + (e_{11} + e_{12}) \left(\frac{G-H}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \left(r \ln \left(\frac{r}{r_i} \right) - r \right) \\ & + r \left[\begin{aligned} & e_{11} \left(\frac{G-H}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \\ & + \frac{(e_{11} + e_{12})}{(A-C)} \left((G-H)\theta_i + G \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) - \left(\frac{2A(G-H)}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \right) \right] \\ & + \frac{e_{12}F}{C} C_3^* \ln r \end{aligned} \right] \right] + C_4^* \quad (۲-۷۳)$$

با توجه به معادلات (۲-۷۱) و (۲-۷۳) و اعمال شرایط مرزی زیر، داریم؛

$$\text{mechanical B.C.} \quad \begin{cases} \sigma_{r|r=r_i} = -P_i \\ \sigma_{r|r=r_o} = -P_o \end{cases}$$

$$\text{electrical B.C.} \quad \begin{cases} \varphi_{|r=r_i} = -\varphi_i \\ \varphi_{|r=r_o} = -\varphi_o \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11} \varphi_i = & \left(1 - \frac{e_{12}F}{C}\right) (\ln r_i) C_3^* + \epsilon_{11} C_4^* - \frac{(e_{11}\sqrt{v^*} + e_{12})}{\sqrt{v^*} - 1} r_i^{\sqrt{v^*}} C_5^* \\
 & - \frac{(e_{11}\sqrt{v^*} - e_{12})}{\sqrt{v^*} + 1} r_i^{-\sqrt{v^*}} C_6^* - (3e_{11} + e_{12}) \frac{\rho\omega^2}{3(C-9A)} r_i^3 \\
 & - r_i \left[\begin{aligned} & e_{11} \left(\frac{G-H}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \\ & + \frac{(e_{11} + e_{12})}{(A-C)} \left((G-H)\theta_i \right. \\ & \left. + G \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) - \left(\frac{2A(G-H)}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (74-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11} \varphi_o = & \left(1 - \frac{e_{12}F}{C}\right) (\ln r_o) C_3^* + \epsilon_{11} C_4^* - \frac{(e_{11}\sqrt{v^*} + e_{12})}{\sqrt{v^*} - 1} r_o^{\sqrt{v^*}} C_5^* \\
 & - \frac{(e_{11}\sqrt{v^*} - e_{12})}{\sqrt{v^*} + 1} r_o^{-\sqrt{v^*}} C_6^* - (3e_{11} + e_{12}) \frac{\rho\omega^2}{3(C-9A)} r_o^3 \\
 & - r_o (e_{11} + e_{12}) \left(\frac{G-H}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) (\ln k - 1) \\
 & - r_o \left[\begin{aligned} & e_{11} \left(\frac{G-H}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \\ & + \frac{(e_{11} + e_{12})}{(A-C)} \left((G-H)\theta_i \right. \\ & \left. + G \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) - \left(\frac{2A(G-H)}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \right) \end{aligned} \right] \quad (75-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -P_i = & \left(\frac{BF}{C} - E \right) \frac{1}{r_i} C_3^* + (A\sqrt{v^*} + B) r_i^{(\sqrt{v^*}-1)} C_5^* - (A\sqrt{v^*} - B) r_i^{(-\sqrt{v^*}-1)} C_6^* \\
 & + (3A+B) \frac{\rho\omega^2}{(C-9A)} r_i^2 + \left((A+B) \left(\frac{G-H}{A-C} \right) - G \right) \theta_i \\
 & + \left(\left(\frac{A+B}{A-C} \right) \left(G - \frac{2A(G-H)}{A-C} \right) + A \left(\frac{G-H}{A-C} \right) \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \quad (76-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -P_o = & \left(\frac{BF}{C} - E \right) \frac{1}{r_o} C_3^* + (A\sqrt{v^*} + B) r_o^{(\sqrt{v^*}-1)} C_5^* - (A\sqrt{v^*} - B) r_o^{(-\sqrt{v^*}-1)} C_6^* \\
 & + (3A+B) \frac{\rho\omega^2}{(C-9A)} r_o^2 + \left((A+B) \left(\frac{G-H}{A-C} \right) - G \right) (\theta_o - \theta_i) \\
 & + \left((A+B) \left(\frac{G-H}{A-C} \right) - G \right) \theta_i \\
 & + \left(\left(\frac{A+B}{A-C} \right) \left(G - \frac{2A(G-H)}{A-C} \right) + A \left(\frac{G-H}{A-C} \right) \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right)
 \end{aligned} \tag{77-2}$$

بنابراین با حل معادلات فوق، ضرایب مجهول C_3^* ، C_4^* ، C_5^* و C_6^* بدست می‌آید.

۲-۴-۵ تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز)

با استفاده از رابطه (۲-۴۳) و انتگرال‌گیری از رابطه (۲-۵۶) پتانسیل الکتریکی در حالت تنش

صفحه‌ای به دست می‌آید؛

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon_{11}} \left[\left(1 - \frac{fe_{12}}{c} \right) C_3^* \ln r + \left(\frac{\left(\left(e_{11} - \frac{be_{12}}{c} \right) \sqrt{v^*} + \left(e_{12} - \frac{de_{12}}{c} \right) \right) C_5^* r^{\sqrt{v^*}} + \left(\left(e_{11} - \frac{be_{12}}{c} \right) \sqrt{v^*} - \left(e_{12} - \frac{de_{12}}{c} \right) \right) C_6^* r^{-\sqrt{v^*}}}{\sqrt{v^*}-1} + \left(\left(e_{11} - \frac{be_{12}}{c} \right) + \left(e_{12} - \frac{de_{12}}{c} \right) \right) \frac{\rho\omega^2}{3(C-9A)} r^3}{\left(e_{11} - \frac{be_{12}}{c} \right) + \left(e_{12} - \frac{de_{12}}{c} \right)} \right) \left(\frac{G-H}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \left(r \ln \left(\frac{r}{r_i} \right) - r \right) \right. \\
 \left. + r \left[\frac{\left(e_{11} - \frac{be_{12}}{c} \right) \left(\frac{G-H}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right)}{\left(e_{11} - \frac{be_{12}}{c} \right) + \left(e_{12} - \frac{de_{12}}{c} \right)} + \frac{\left(\left(e_{11} - \frac{be_{12}}{c} \right) + \left(e_{12} - \frac{de_{12}}{c} \right) \right) \left((G-H)\theta_i + G \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) - \left(\frac{2A(G-H)}{A-C} \right) \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \right)}{(A-C)} \right] \right. \\
 \left. + \frac{\left(e_{12} - \frac{de_{12}}{c} \right) F}{C} C_3^* \ln r + \frac{e_{12}h}{c} \left(\theta_i r + \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln k} \right) \left(r \ln \left(\frac{r}{r_i} \right) - r \right) \right) \right] + C_4^* \tag{78-2}$$

مانند حالت قبل با اعمال شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی، یک دستگاه معادلات چهار معادله و

چهار مجهول بدست می‌آید که با حل آن چهار ضریب مجهول C_3^* ، C_4^* ، C_5^* و C_6^* بدست می‌آید.

فصل ۳

استوانه‌های همگن

۳-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا نحوه‌ی تحلیل اجزای محدود الکتروترمو مکانیکی توضیح داده می‌شود، سپس به مطالعه‌ی موردی استوانه همگن تحت بارگذاری مکانیکی، الکتریکی و حرارتی می‌پردازیم.

۳-۲ تحلیل اجزای محدود استوانه‌های همگن

به منظور تحلیل اجزای محدود مواد با خاصیت پیزوالکتریک از نرم‌افزار *ANSYS 12.0* در این پژوهش، استفاده می‌گردد.

۳-۲-۱ تحلیل اجزای محدود الکتروترمو مکانیکی در *ANSYS*

تحلیل میدان-جفت‌شده^۱، ترکیبی از تحلیل رشته‌های مهندسی (میدان‌های فیزیکی) متفاوت با اثر متقابل می‌باشد که برای حل مسأله‌ی کلی مهندسی استفاده می‌شوند، بنابراین اغلب از تحلیل میدان-جفت‌شده به عنوان تحلیل چند فیزیکی^۲ یاد می‌گردد. زمانی که ورودی تحلیل یک میدان وابسته به نتایج تحلیل میدان دیگری باشد، تحلیل جفت‌شده می‌باشد [۳۲].

برخی تحلیل‌ها می‌توانند جفت‌شدگی یک سو^۳ داشته باشند. برای مثال در مسائل تنش حرارتی، میدان دمایی کرنش حرارتی را در میدان سازه‌ای ایجاد می‌کند اما به طور کلی کرنش سازه‌ای تأثیری بر توزیع دما ندارد، بنابراین نیازی به انجام تکرار متوالی حل‌های دو میدان نیست. نمونه‌های پیچیده‌تر شامل جفت‌شدگی دو سو^۴ می‌باشند. برای مثال تحلیل پیزوالکتریک که تأثیر متقابل میدان الکتریکی و سازه‌ای را به کار می‌برد برای حل توزیع ولتاژ بر اثر جابه‌جایی اعمالی و یا برعکس، استفاده می‌شود. این دسته مسائل نیاز به انجام تکرار متوالی حل بین دو میدان فیزیکی تا همگرا شدن دارند [۳۲].

فرآیند تحلیل میدان-جفت‌شده بستگی به این امر دارد که چه میدان‌هایی باهم جفت شده‌اند، اما

-
1. Coupled-field
 2. Multiphysics
 3. One-way
 4. Two-way

دو روش مجزای مستقیم و انتقال بار، برای این منظور در *ANSYS* به کار گرفته شده است [۳۲].

الف) روش مستقیم

روش مستقیم اغلب شامل تنها یک تحلیل می‌باشد که از یک المان میدان-جفت‌شده با تمامی درجات آزادی مورد نیاز، استفاده می‌کند. جفت‌شدگی با محاسبه‌ی ماتریس‌های المان و بردارهای نیروی المان که شامل عبارات مورد نیاز می‌باشند، اعمال می‌شود. نمونه‌ای از روش مستقیم تحلیل میدان-جفت‌شده، تحلیل پیزوالکتریک با استفاده از المان‌های *PLANE223*، *SOLID226* و *SOLID227* و تحلیل سیستم‌های میکروالکترومکانیک^۱ با استفاده از المان *TRANS126* می‌باشد [۳۲].

ب) روش انتقال بار

روش انتقال بار شامل دو یا چند تحلیل می‌باشد که هر کدام در طول میدان متفاوتی انجام می‌شود. با اعمال نتایج میدان اول به عنوان بار برای میدان دوم، دو میدان با یکدیگر جفت می‌شوند. نوع‌های متفاوتی از تحلیل انتقال بار وجود دارد [۳۲].

با توجه به آنچه که گفته شد، به دلیل خاصیت پیزوالکتریک موجود در پوسته‌ی استوانه‌ای و نیاز به انجام تحلیل الکتروترمو مکانیکی باید تحلیل اجزای محدود آن را در *ANSYS 12.0* به روش مستقیم انجام داد [۳۲].

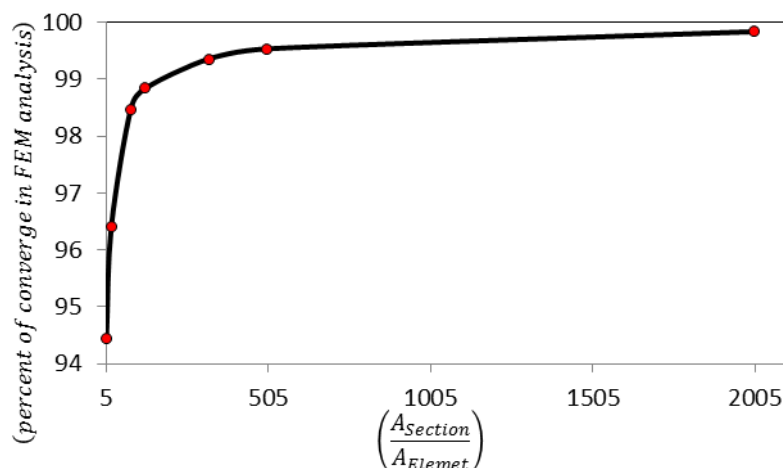
۳-۲-۲ انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله

نظر به آنچه که در بخش فرضیات حاکم بر مسأله، در فصل دوم بیان شد؛ مسأله حالت متقارن محوری دارد. در این حالت نیازی به مدل‌سازی سه بعدی نیست و می‌توان از المان‌های دو بعدی نرم افزار که قابلیت تقارن محوری دارند، استفاده کرد و حتی نتایج را به صورت سه بعدی استخراج کرد [۳۳ و ۳۴].

1. Micro-Electromechanical Systems (MEMS)

در نرم‌افزار ANSYS با استفاده از المان PLANE223 می‌توان استوانه‌ی پیزوالکتریک را تحلیل کرد. این المان دو بعدی از هشت گره تشکیل شده که تا چهار درجه آزادی (دو درجه برای جابه‌جایی، یک درجه برای پتانسیل الکتریکی و یک درجه برای دما) را برای هر گره تأمین می‌کند. این المان دارای دقت بالا برای تحلیل مسائل متقارن محوری می‌باشد.

بنابراین مدل‌سازی مسأله به صورت دو بعدی انجام می‌شود. برای این منظور مقطع مستطیل شکل استوانه به صورت دو بعدی مدل‌سازی می‌گردد. شبکه‌بندی باید به صورتی انجام گیرد که تحلیل المان محدود مستقل از شبکه‌بندی باشد و نتایج به دست آمده قابل اطمینان باشند. برای این منظور المان PLANE223 به شکل مربع بر روی مقطع مستطیل شکل قرار می‌گیرد.



شکل ۱-۳ نمودار همگرایی تحلیل المان محدود

شکل ۱-۳ شبکه‌بندی مناسب جهت تحلیل را نشان می‌دهد، زمانی که مساحت مقطع ($A_{Section}$) حدود ۱۵۰ برابر مساحت المان مربعی شکل ($A_{Element}$) باشد؛ نتایج حاصل از تحلیل المان محدود به همگرایی در حدود ۹۹٪ می‌رسد و تحلیل پذیرفتنی خواهد بود.

۳-۳ مطالعه موردی استوانه همگن تحت بارگذاری مکانیکی

در این بخش استوانه همگن، تحت بارگذاری مکانیکی قرار می‌گیرد و نتایج بررسی می‌شود. مشخصات هندسی $r_o = 60\text{ mm}$ ، $r_i = 40\text{ mm}$ در نظر گرفته می‌شود، استوانه‌ی از جنس PZT-4

می‌باشد که در راستای شعاعی خود پلاریزه شده است. جدول ۱-۳ خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی را در استوانه بیان می‌کند [۳۵ و ۳۶].

جدول ۱-۳ خواص استوانه مورد مطالعه

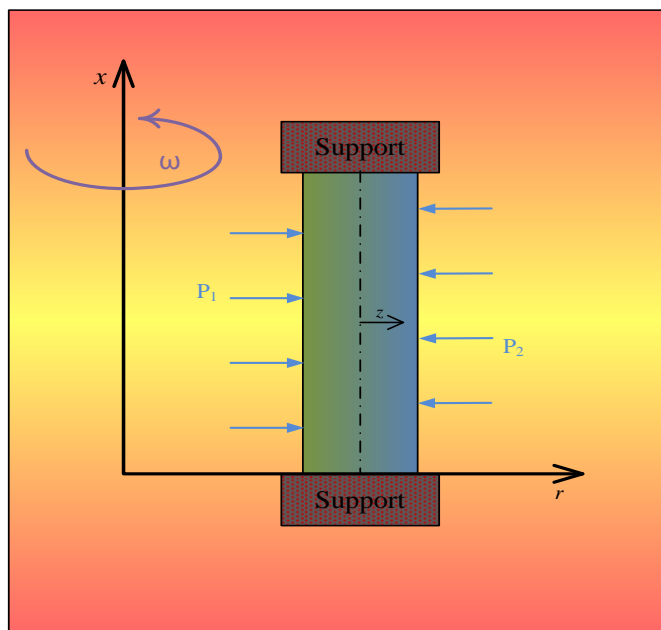
ثوابت الاستیک (GPa)			
c_{23}	c_{22}	c_{12}	c_{11}
78	139	74	115
ثوابت پیزوالکتریک-تنش (C/m^2)			
e_{12}		e_{11}	
-5.2		15.1	
ضرایب انبساط حرارتی ($10^{-6} /K$)		ضرایب هدایت حرارتی (W/mK)	ثوابت دی‌الکتریک ($10^{-8} C/V m$)
α_{22}	α_{11}	k_{11}	ϵ_{11}
1.97	2.62	5.1	0.562
چگالی (kg/m^3)			
$= 7500 \rho$			

۱-۳-۳ استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای

جهت مطالعه‌ی اثر بارگذاری فشاری، پنج ترکیب بارگذاری فشار یکنواخت داخلی و خارجی به همراه چرخش $\omega = 3500 \text{ rad/s}$ ، مانند شکل ۲-۳ بر استوانه اعمال و تأثیرات آن بر جابه‌جایی شعاعی، پتانسیل الکتریکی، تنش شعاعی، محیطی، فون مایسز و تنش محوری (در حالت کرنش صفحه‌ای) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

جدول ۲-۳ پنج ترکیب بارگذاری مکانیکی

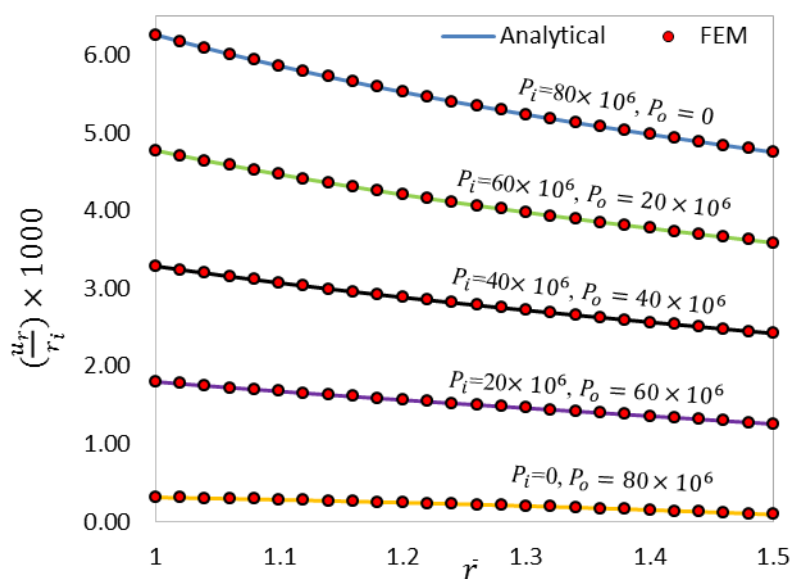
حالت بارگذاری	فشار داخلی (Mpa)	فشار خارجی (Mpa)
I	80	0
II	60	20
III	40	40
IV	20	60
V	0	80



شکل ۲-۳ مقطع عرضی استوانه‌ای چرخان تحت بارگذاری مکانیکی

رفتار حرارتی

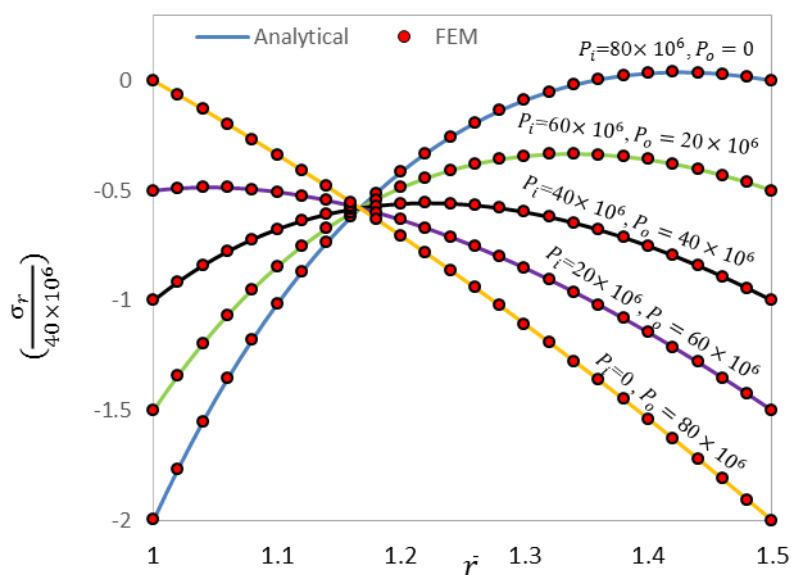
در این بخش به دلیل عدم بارگذاری حرارتی و جفت‌شدگی یک‌سویه‌ی معادلات میدان حرارتی با میدان الکتریکی و مکانیکی، تغییرات دمایی در استوانه وجود ندارد. دما در استوانه مقداری ثابت و برابر دمای ثابت مثبت مرجع $T^* = 295^\circ K$ می‌باشد.



شکل ۳-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی بر اثر بارگذاری مکانیکی

رفتار مکانیکی

شکل ۳-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی در اثر بارگذاری مکانیکی در استوانه نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد، با افزایش شعاع، جابه‌جایی شعاعی به تدریج کاهش می‌یابد؛ با افزایش فشار خارجی و کاهش فشار داخلی نیز، جابه‌جایی شعاعی کاهش پیدا می‌کند. همچنین نتایج اجزای محدود با نتایج تحلیلی انطباق خوبی دارد.

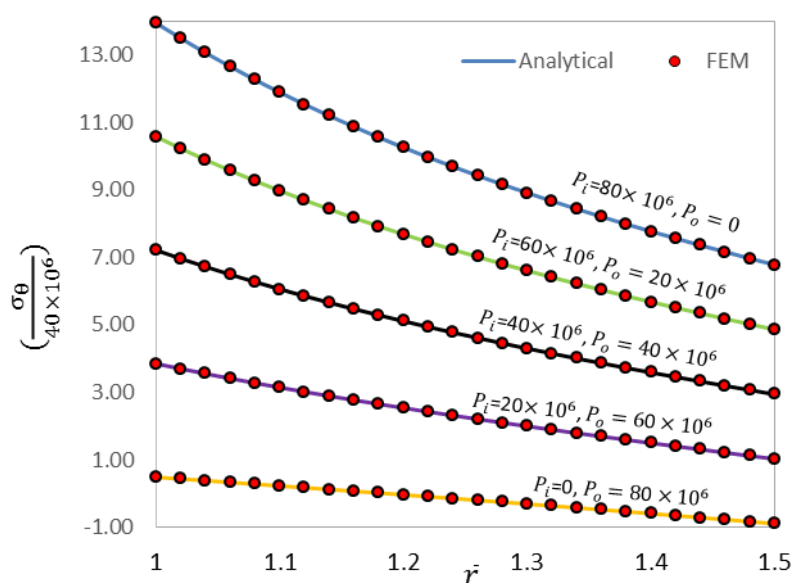


شکل ۳-۴ توزیع تنش شعاعی بر اثر بارگذاری مکانیکی

شکل ۳-۴ توزیع نرمال تنش شعاعی را تحت بارگذاری مکانیکی با استفاده از روش تحلیلی و روش اجزای محدود در استوانه نمایش می‌دهد؛ برای دستیابی به توزیع نرمال تنش، فشار متوسط داخلی و خارجی را 40 MPa در نظر گرفته‌ایم و مقادیر تنش را بر آن تقسیم کرده‌ایم. مشاهده می‌شود، هر دو روش انطباق خوبی دارند. در یک شعاع خاص (حدود $\bar{r} = 1.16$) مقادیر تنش شعاعی به ازای تمام حالات بارگذاری تقریباً با هم برابرند و نمودارها تلاقی دارند. برای حالت اول بارگذاری با افزایش شعاع نمودار سیر صعودی دارد. البته قدر مطلق تنش روند کاهشی دارد؛ اما برای حالت انتهایی روندی متفاوت مشاهده می‌گردد. یعنی با دور شدن از سطحی که تحت فشار قرار دارد اندازه تنش کاهش می‌یابد. در حالت سوم یعنی هنگامی که سطوح داخلی و خارجی هر دو تحت بارگذاری

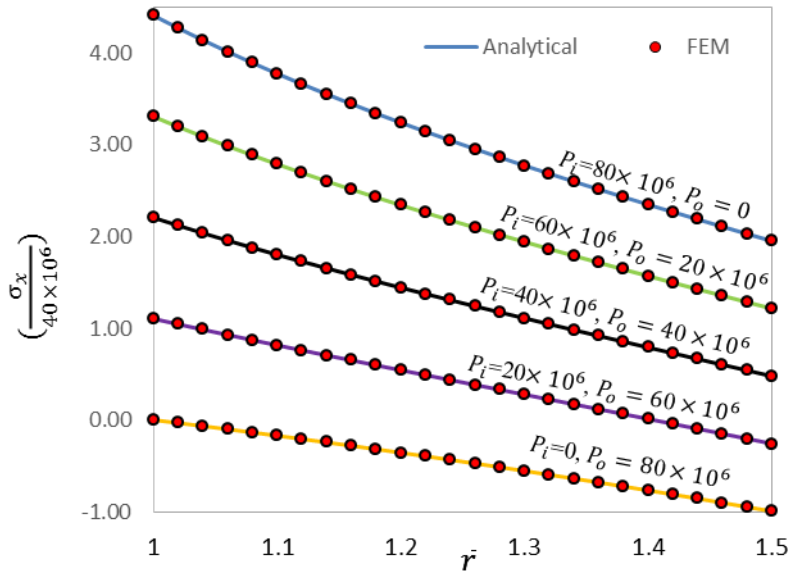
فشاری همسان هستند، مقادیر تنش در شعاع داخلی و خارجی دقیقاً با هم برابر است؛ در این حالت حداقل مقدار تنش، تقریباً در شعاع میانی اتفاق می‌افتد.

توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه تحت بارگذاری مکانیکی با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و روش اجزای محدود در شکل ۳-۵ نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد، با افزایش شعاع، تنش محیطی به تدریج کاهش می‌یابد؛ همچنین با افزایش فشار خارجی و کاهش فشار داخلی، تنش محیطی، کاهش پیدا می‌کند. نتایج حاصل از هر دو روش از انطباق خوبی برخوردار است.

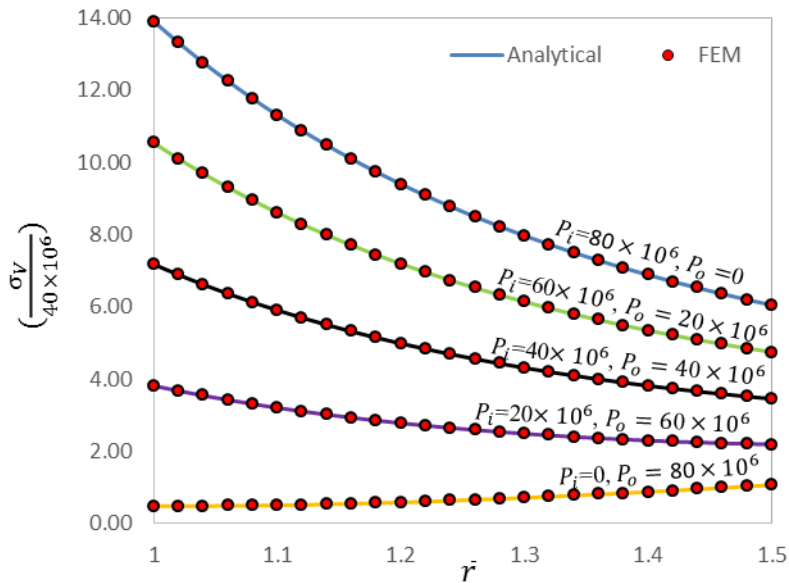


شکل ۳-۵ توزیع تنش محیطی تحت بارگذاری مکانیکی

در شکل ۳-۶ توزیع تنش محوری در راستای ضخامت استوانه تحت بارگذاری مکانیکی با استفاده از *PET* و *FEM* مورد بررسی قرار گرفته است. با مقایسه‌ی شکل ۳-۵ با شکل ۳-۶ می‌توان گفت که تنش محیطی و تنش محوری دارای رفتاری مشابه هستند؛ با این تفاوت که تنش محیطی مقادیر بزرگ‌تری را نسبت به مقادیر تنش محوری دارا می‌باشد.



شکل ۳-۶ توزیع تنش محوری تحت بارگذاری مکانیکی



شکل ۳-۷ توزیع تنش فون مایسز تحت بارگذاری مکانیکی

شکل ۳-۷ توزیع تنش فون مایسز در راستای ضخامت استوانه تحت بارگذاری مکانیکی را با

استفاده از حل تحلیلی و عددی نشان می‌دهد. توزیع تنش در راستای شعاعی، در حالت اول بیشترین

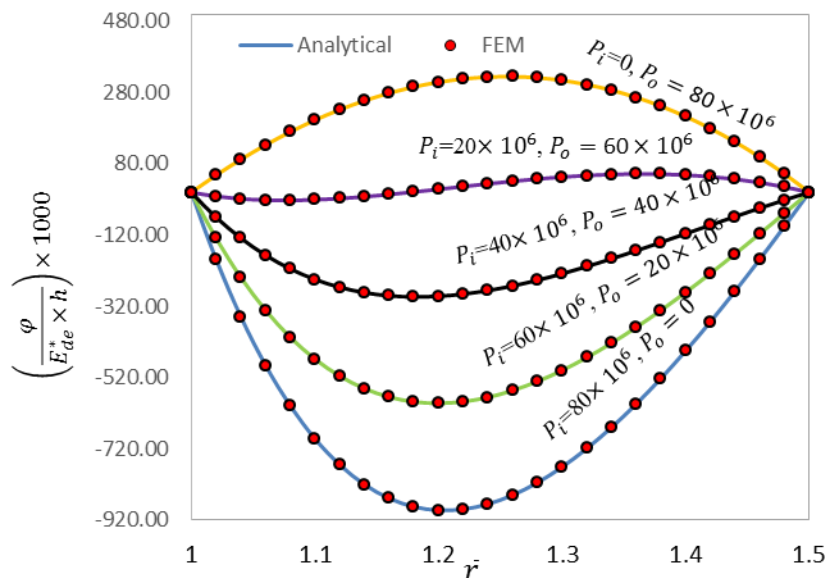
تغییرات را نسبت به سایر حالات دارد. در حالت آخر که تنها بارگذاری خارجی داریم، نمودار صعودی

و در سایر حالات بارگذاری، نمودارها روند نزولی دارند. در ضمن با افزایش فشار خارجی و کاهش

فشار داخلی مقادیر تنش کاهش می‌یابد. نتایج نشانگر این است که اثر فشار داخلی نسبت به فشار خارجی بر روی تنش فون مایسز، مشهودتر است.

رفتار الکتریکی

شکل ۳-۸ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی و روش اجزای محدود در استوانه، بر اثر بارگذاری مکانیکی نشان می‌دهد. در شعاع داخلی و به‌طور مشابه در شعاع خارجی، مقادیر پتانسیل الکتریکی به ازای بارگذاری‌های مختلف، با هم برابر است که این امر ناشی از شرایط مرزی استوانه در لایه داخلی و خارجی استوانه است. با دور شدن از شعاع خارجی و داخلی مقادیر قدر مطلق پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار پتانسیل الکتریکی مربوط به حالت اول است. با افزایش فشار خارجی و کاهش فشار داخلی، پتانسیل الکتریکی به تدریج از منفی به مثبت، و تعقر نمودارها از مثبت به منفی، تغییر علامت می‌دهد. تقریباً به ازای بارگذاری‌های مختلف، بیشینه پتانسیل الکتریکی در لایه‌های میانی رخ می‌دهد.



شکل ۳-۸ توزیع پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری مکانیکی

در جدول ۳-۳ و جدول ۴-۳ نتایج حاصل از روش تحلیلی با روش عددی مقایسه شده است. برای محاسبه درصد اختلاف، چون روش تحلیلی حل دقیق می‌باشد، حل تحلیلی به عنوان مبنا در نظر گرفته شده است.

جدول ۳-۳ تنش محیطی، محوری و فن مایسز تحت بارگذاری مکانیکی

		σ_y (Mpa)	σ_x (Mpa)	σ_θ (Mpa)
$\bar{r} = 1$	FEM	555.900	176.330	557.910
	PET	556.096	176.3646	558.036
	درصد اختلاف	0.035	0.02	0.023
$\bar{r} = 1.25$	FEM	345.180	120.100	382.210
	PET	345.2627	120.108	382.260
	درصد اختلاف	0.024	0.007	0.13
$\bar{r} = 1.5$	FEM	241.810	78.162	271.240
	PET	241.8486	78.165	271.26455
	درصد اختلاف	0.016	0.004	0.009

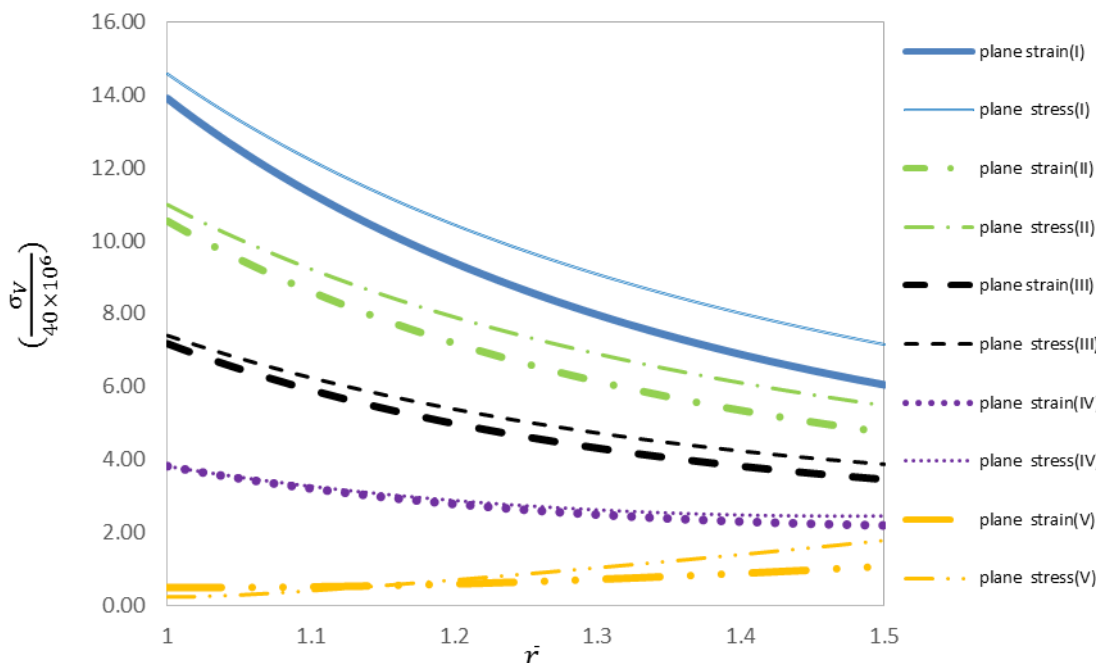
جدول ۴-۳ تنش و جابجایی شعاعی و پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری مکانیکی

		φ (V)	σ_r (Mpa)	u_r (mm)
$\bar{r} = 1.25$	FEM	-8646.2	-8.8897	0.21488
	PET	-8646.216	-8.9382	0.214878
	درصد اختلاف	1.85	0.54	0.001

۳-۳-۲ استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای

در شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای، رفتار مکانیکی، حرارتی و الکتریکی استوانه، مشابه شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای می‌باشد و نمودارهای مربوط به تنش، جابجایی و پتانسیل الکتریکی مشابه حالت کرنش صفحه‌ای هستند. همچنین نمودارها در حالت تنش صفحه‌ای فاقد نتیجه‌گیری خاصی نسبت به حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشند؛ بنابراین در این بخش تنها به مقایسه نمودار تنش فون مایسز، برای حالات مختلف بارگذاری مکانیکی، در شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای

می‌پردازیم.



شکل ۳-۹ تنش فون مایسز تحت بارگذاری مکانیکی برای شرایط انتهایی مختلف

شکل ۳-۹ توزیع تنش فون مایسز را در حالات گوناگون بارگذاری مکانیکی، برای حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای، نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۳-۹ درمی‌یابیم که توزیع تنش فون مایسز برای حالات مختلف بارگذاری در شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای کاملاً شبیه به هم هستند. خطوط نازک، مربوط به شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای و خطوط کلفت، مربوط به شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای می‌باشد. می‌توان گفت مقدار تنش فون مایسز به ازای شعاع‌های مختلف، برای تنش صفحه‌ای بیشتر از کرنش صفحه‌ای است. البته در حالتی که فقط فشار خارجی داریم در شعاع‌های قبل از شعاع میانی این امر صادق نیست.

۳-۴ مطالعه موردی استوانه همگن تحت بارگذاری حرارتی

در این بخش استوانه همگن، تحت بارگذاری حرارتی قرار می‌گیرد و نتایج بررسی می‌شود. مشخصات هندسی و خواص مانند حالت بارگذاری مکانیکی در نظر گرفته می‌شود.

۳-۴-۱ استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای

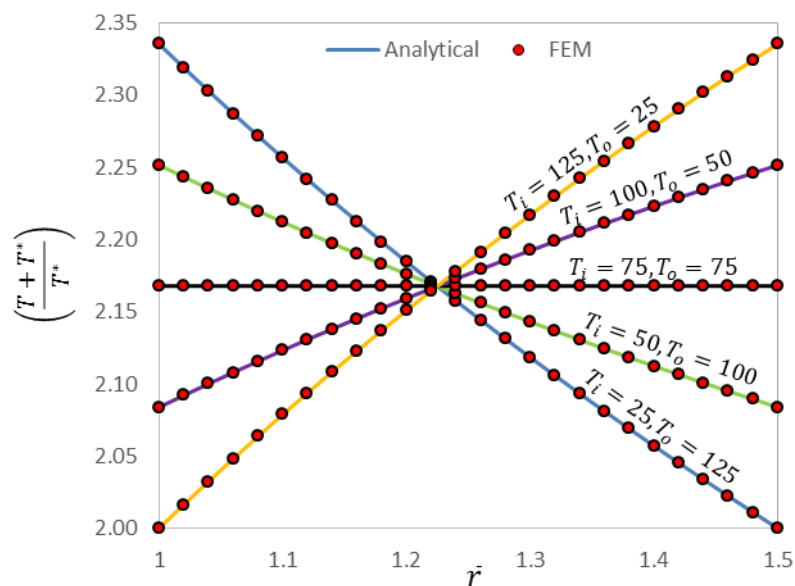
جهت مطالعه‌ی اثر بارگذاری حرارتی، پنج ترکیب بارگذاری حرارتی یکنواخت داخلی و خارجی را بر استوانه اعمال می‌کنیم. برای تمام حالت‌ها، فشار خارجی و پتانسیل الکتریکی اعمالی را برابر صفر، فشار داخلی را برابر $P_i = 80 \text{ MPa}$ و چرخش را $\omega = 3500 \text{ rad/s}$ در نظر می‌گیریم. توزیع نرمال میدان دمایی، جابه‌جایی شعاعی، پتانسیل الکتریکی، تنش شعاعی، محیطی، فون مایسز و تنش محوری (در حالت کرنش صفحه‌ای) مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین لازم به ذکر است، دمای ثابت مثبت مرجع $T^* = 25^\circ \text{ C}$ فرض شده است.

جدول ۳-۵ پنج ترکیب بارگذاری حرارتی

حالت بارگذاری	دمای داخلی ($^\circ \text{ C}$)	دمای خارجی ($^\circ \text{ C}$)
I	125	25
II	100	50
III	75	75
IV	50	100
V	25	125

رفتار حرارتی

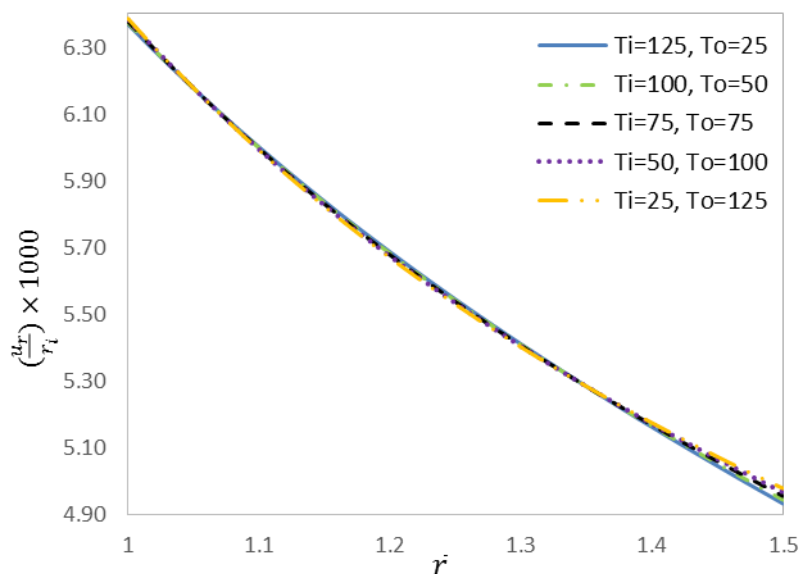
شکل ۳-۱۰ توزیع نرمال میدان دمایی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی در استوانه نشان می‌دهد. بر اثر بارگذاری حرارتی اعمال شده، با دور شدن از شعاعی که تحت بارگذاری حرارتی بیشتر است، دما در استوانه کاهش می‌یابد. در شعاع میانی برای تمام حالت‌های بارگذاری، دما برابر است و در آن نقطه نمودارها با هم تلاقی دارند. برای حالتی که بارگذاری داخلی و خارجی با هم برابر است، دما به ازای شعاع‌های مختلف، ثابت و مستقل از شعاع استوانه است. با افزایش بارگذاری خارجی و کاهش بارگذاری داخلی، رفتار میدان دمایی از صعودی به نزولی تغییر می‌کند.



شکل ۱۰-۳ توزیع نرمال میدان دمایی تحت بارگذاری حرارتی

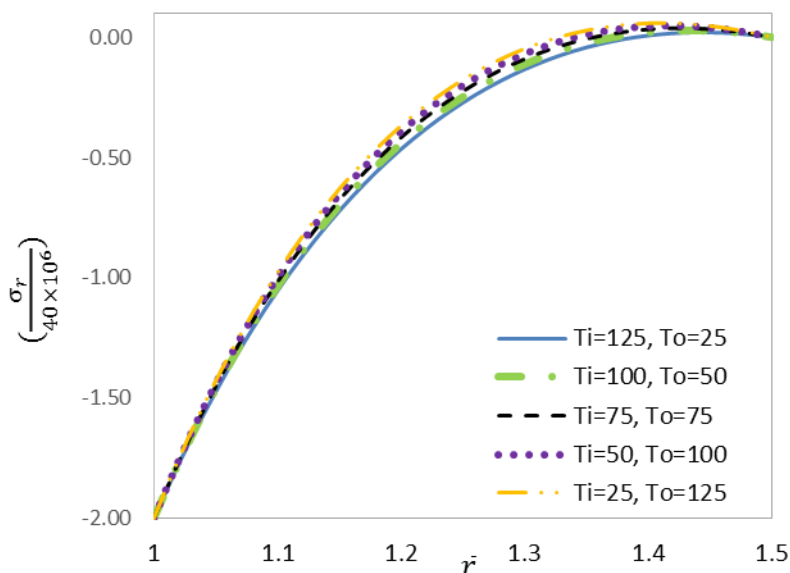
رفتار مکانیکی

شکل ۱۱-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی در اثر بارگذاری حرارتی در استوانه نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد، با افزایش شعاع، جابه‌جایی شعاعی به تدریج کاهش می‌یابد؛ برای تمام حالت‌های بارگذاری، نمودارها روی هم می‌افتد؛ به جز در نزدیکی شعاع خارجی که اندکی نمودارها از هم فاصله می‌گیرند.

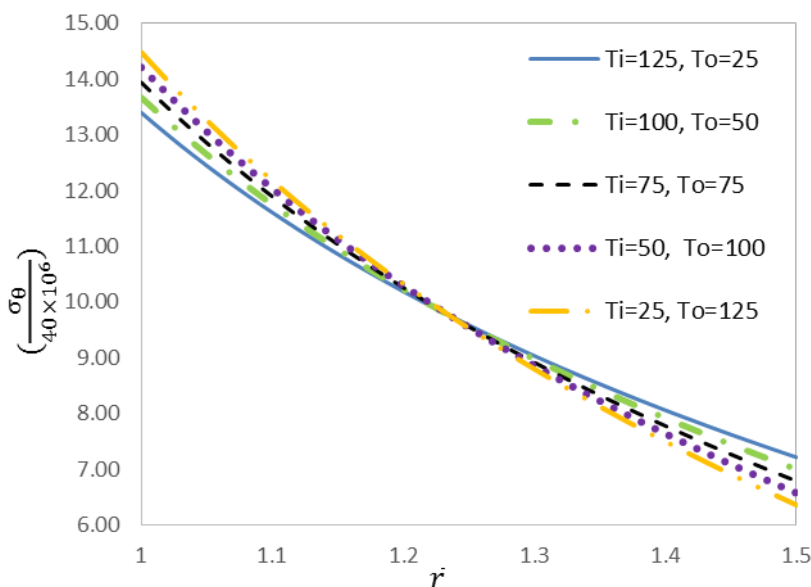


شکل ۱۱-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی بر اثر بارگذاری حرارتی

شکل ۳-۱۲ توزیع تنش شعاعی را در استوانه تحت بارگذاری حرارتی نمایش می‌دهد؛ مشاهده می‌شود، با افزایش شعاع، مقدار تنش کاهش می‌یابد و نمودارها سیر صعودی دارند. همچنین با افزایش بارگذاری خارجی و کاهش بارگذاری داخلی، مقدار تنش کاهش می‌یابد.

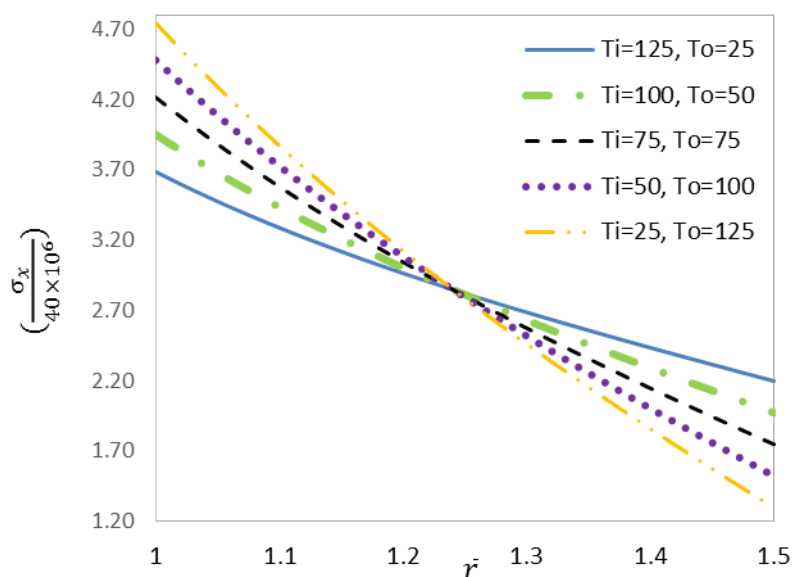


شکل ۳-۱۲ توزیع تنش شعاعی تحت بارگذاری حرارتی



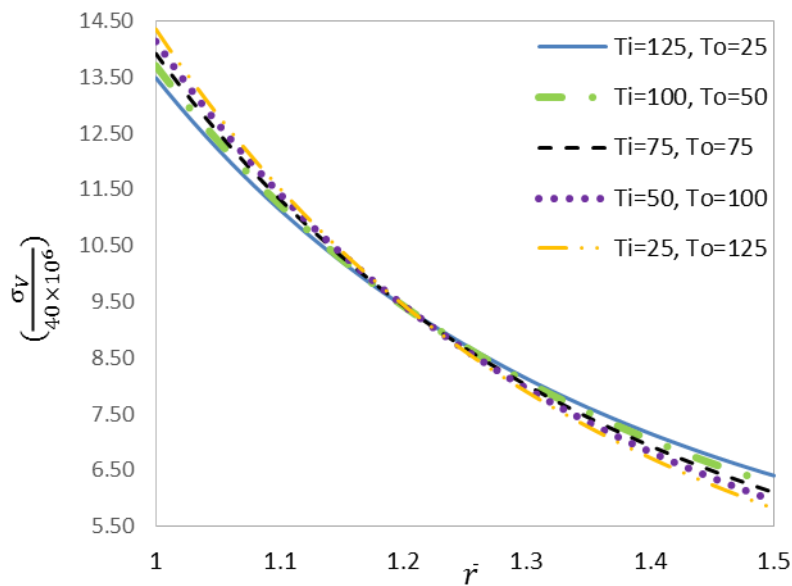
شکل ۳-۱۳ توزیع تنش محیطی تحت بارگذاری حرارتی

توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه تحت بارگذاری حرارتی با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی در شکل ۳-۱۳ نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد، با افزایش شعاع، تنش محیطی به تدریج کاهش می‌یابد؛ تمام نمودارها در شعاع میانی دارای مقدار یکسان هستند و در این نقطه با هم تلاقی دارند.



شکل ۳-۱۴ توزیع تنش محوری تحت بارگذاری حرارتی

در شکل ۳-۱۴ توزیع تنش محوری در راستای ضخامت استوانه تحت بارگذاری حرارتی با استفاده روش الاستیسیته مستوی، مورد بررسی قرار گرفته است. با مقایسه‌ی شکل ۳-۱۳ با شکل ۳-۱۴ می‌توان گفت که تنش محیطی و تنش محوری دارای رفتاری مشابه هستند؛ با این تفاوت که تنش محیطی مقادیر بزرگ‌تری را نسبت به مقادیر تنش محوری دارا می‌باشد.

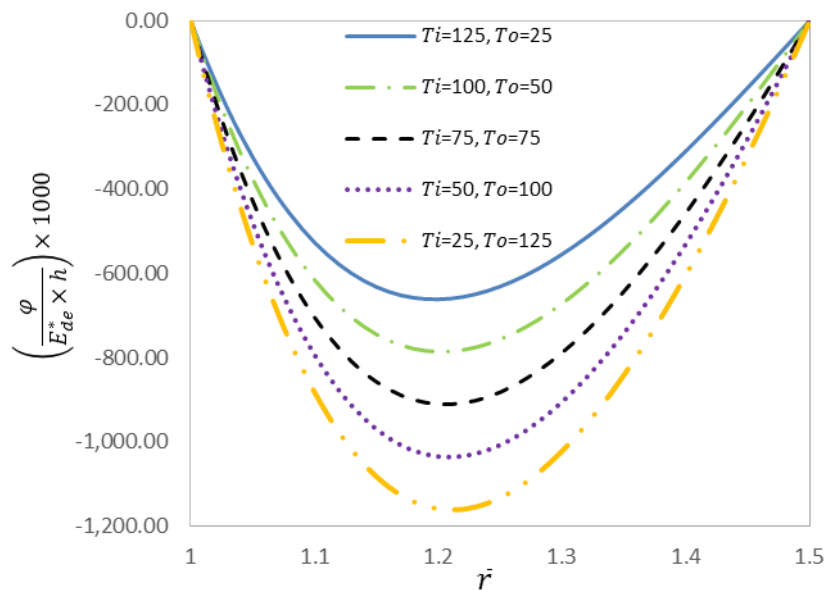


شکل ۱۵-۳ توزیع تنش فون مایسز تحت بارگذاری حرارتی

شکل ۱۵-۳ توزیع تنش فون مایسز در راستای ضخامت استوانه تحت بارگذاری حرارتی را نشان

می‌دهد، که در راستای ضخامت استوانه روندی کاهشی را پیش‌بینی می‌کند. با مقایسه‌ی شکل ۱۳-۳

تا شکل ۱۵-۳ می‌توان گفت که تنش محیطی، محوری و فون مایسز دارای رفتاری مشابه هستند.



شکل ۱۶-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری حرارتی

رفتار الکتریکی

شکل ۱۶-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی در استوانه، بر اثر بارگذاری حرارتی نشان می‌دهد. تقعر تمام نمودارها رو به بالاست. به ازای بارگذاری‌های مختلف، بیشینه پتانسیل الکتریکی در لایه‌های میانی رخ می‌دهد. در جدول ۶-۳ و جدول ۷-۳ نتایج حاصل از روش تحلیلی با روش عددی مقایسه شده است. همان‌طور که قبلاً گفته شد، برای محاسبه درصد اختلاف، چون روش تحلیلی حل دقیق می‌باشد، حل تحلیلی به عنوان مبنا در نظر گرفته شده است.

جدول ۶-۳ تنش محیطی، محوری و فن مایسز تحت بارگذاری حرارتی

		σ_v (Mpa)	σ_x (Mpa)	σ_θ (Mpa)
$\bar{r} = 1$	FEM	540.36	148.92	537.22
	PET	539.485	147.429	535.961
	درصد اختلاف	0.16	1.01	0.23
$\bar{r} = 1.25$	FEM	349.11	112.89	383.42
	PET	349.271	112.846	383.425
	درصد اختلاف	0.05	0.04	0.0013
$\bar{r} = 1.5$	FEM	254.97	864.56	286.98
	PET	256.145	879.194	288.527
	درصد اختلاف	0.46	1.7	0.53

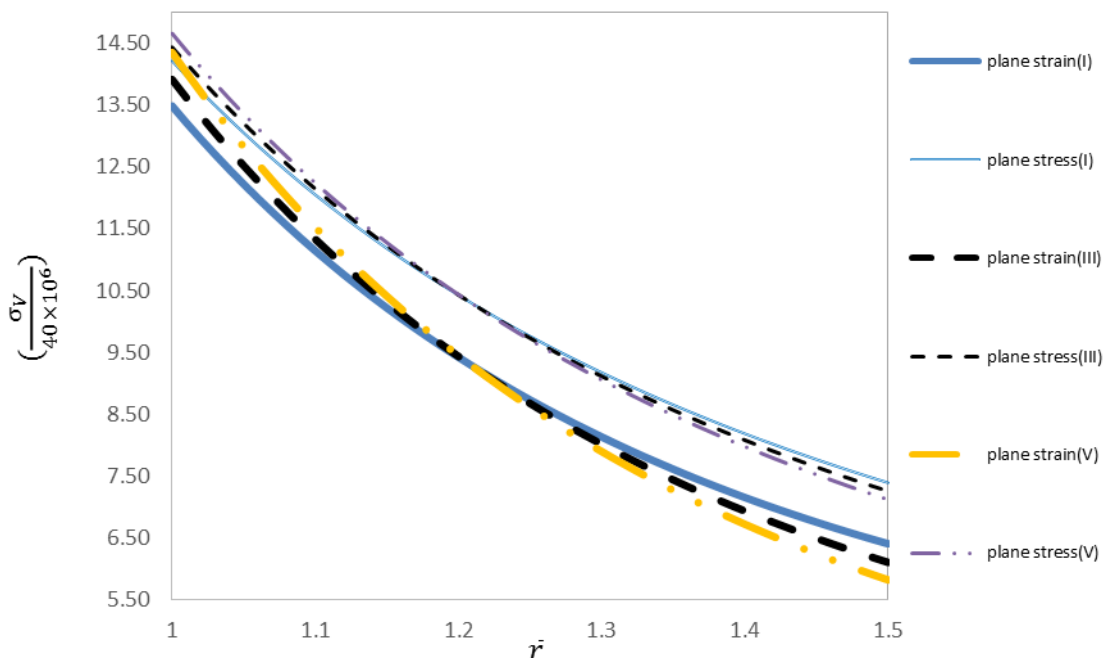
جدول ۷-۳ تنش و جابجایی شعاعی و پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری حرارتی

		φ (V)	σ_r (Mpa)	u_r (mm)
$\bar{r} = 1.25$	FEM	-6813.8	-10.671	0.22178
	PET	-6510.661	-10.864	0.22178
	درصد اختلاف	4.5	1.8	0

۳-۴-۲ استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای

همانطور که قبلاً گفته شد به دلیل تشابه رفتاری در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای در این بخش تنها به مقایسه نمودار تنش فون مایسز، برای حالات مختلف بارگذاری حرارتی، در شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای می‌پردازیم.

شکل ۳-۱۷ توزیع تنش فون مایسز را در حالات گوناگون بارگذاری حرارتی، برای حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای، نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۳-۱۷ در می‌یابیم که توزیع تنش فون مایسز برای حالات مختلف بارگذاری در شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای کاملاً شبیه به هم هستند. خطوط نازک مربوط به شرط انتهایی تنش صفحه‌ای و خطوط کلفت مربوط به حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشد. می‌توان گفت مقدار تنش به ازای شعاع‌های مختلف، برای حالت تنش صفحه‌ای بیشتر از حالت دیگر است.



شکل ۳-۱۷ تنش فون مایسز تحت بارگذاری حرارتی برای شرایط مختلف انتهایی

۳-۵ مطالعه موردی استوانه همگن تحت بارگذاری الکتریکی

در این بخش استوانه همگن، تحت بارگذاری الکتریکی قرار می‌گیرد و نتایج بررسی می‌گردد. مشخصات هندسی و خواص مانند حالت بارگذاری مکانیکی در نظر گرفته می‌شود.

۳-۵-۱ استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای

جهت مطالعه اثر بارگذاری الکتریکی، پنج ترکیب بارگذاری پتانسیل الکتریکی را در لایه داخلی و خارجی بر استوانه اعمال می‌کنیم. برای تمام حالت‌ها، فشار داخلی را برابر $P_i = 80 \text{ MPa}$ ، چرخش را $\omega = 3500 \text{ rad/s}$ ، دمای داخلی و خارجی و نیز فشار خارجی را برابر صفر در نظر می‌گیریم. توزیع نرمال میدان دمایی، جابه‌جایی شعاعی، پتانسیل الکتریکی، تنش شعاعی، محیطی، فون مایسز و تنش محوری (در حالت کرنش صفحه‌ای) مورد بررسی قرار می‌گیرد. دمای مرجع مشابه حالت پیش در نظر گرفته می‌شود.

پنج ترکیب بارگذاری الکتریکی به صورت زیر می‌باشد:

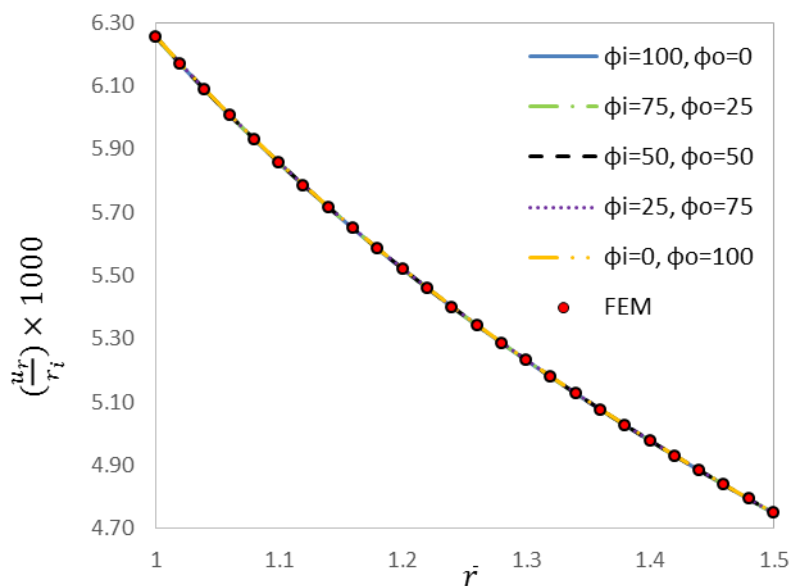
جدول ۳-۸ پنج ترکیب بارگذاری الکتریکی

حالت بارگذاری	پتانسیل الکتریکی داخلی (V)	پتانسیل الکتریکی خارجی (V)
I	100	0
II	75	25
III	50	50
IV	25	75
V	0	100

رفتار حرارتی

مطابق آنچه در بخش بارگذاری مکانیکی بیان شد، تغییرات دمایی در استوانه وجود ندارد؛

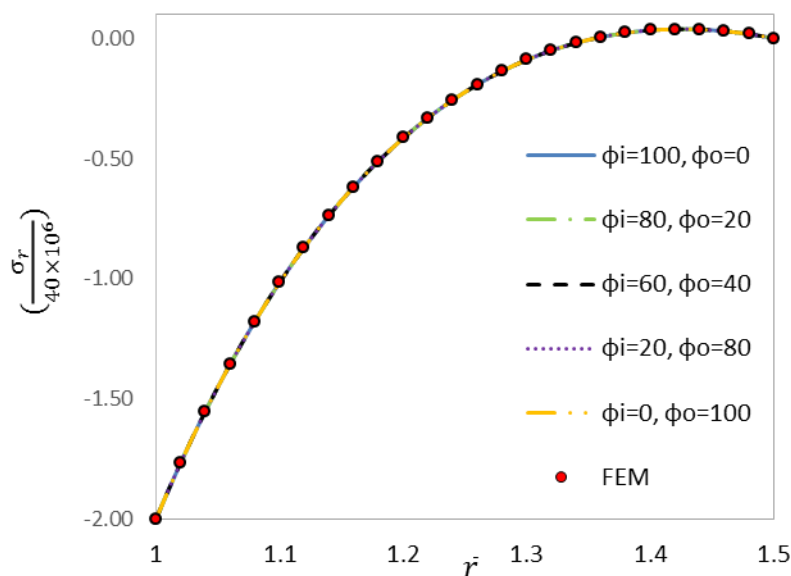
دما در استوانه مقداری ثابت و برابر دمای ثابت مثبت مرجع $T^* = 295^\circ \text{ K}$ دارد.



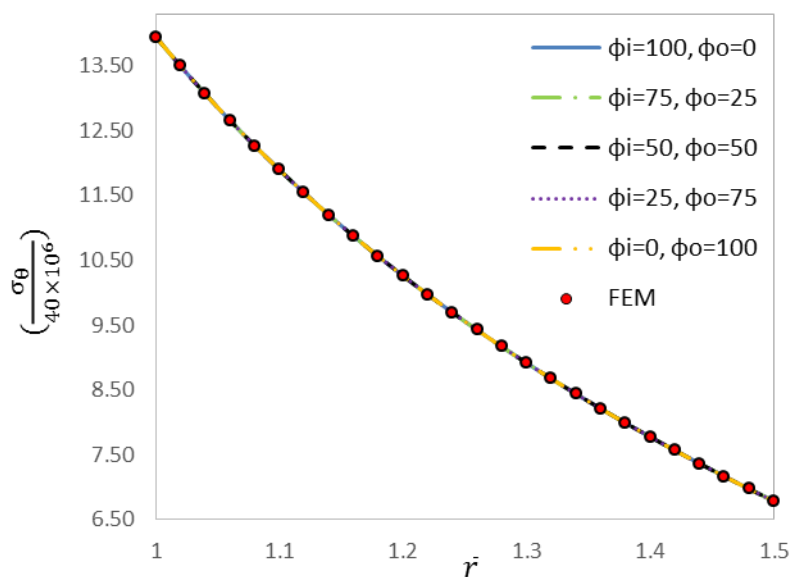
شکل ۳-۱۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی بر اثر بارگذاری الکتریکی

رفتار مکانیکی

شکل ۳-۱۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی در اثر بارگذاری الکتریکی در استوانه همگن نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد، با افزایش شعاع، جابه‌جایی شعاعی به تدریج کاهش می‌یابد؛ اثر بارگذاری الکتریکی ناچیز بوده و قابل صرف‌نظر کردن است.



شکل ۳-۱۹ توزیع تنش شعاعی تحت بارگذاری الکتریکی

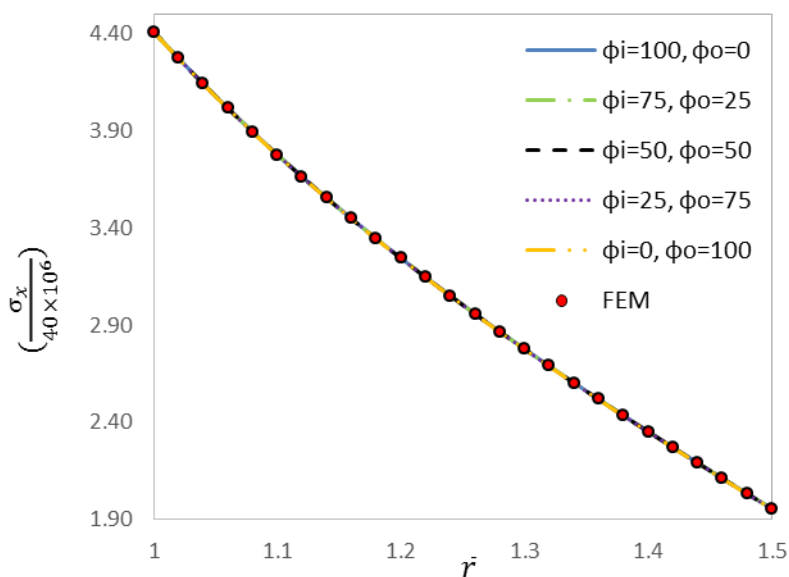


شکل ۳-۲۰ توزیع تنش محیطی تحت بارگذاری الکتریکی

شکل ۳-۱۹ توزیع تنش شعاعی را در استوانه نمایش می‌دهد؛ مشاهده می‌شود، با افزایش شعاع، مقدار تنش کاهش می‌یابد و نمودارها سیر صعودی دارند. همانند جابه‌جایی شعاعی، اثر بارگذاری الکتریکی قابل چشم‌پوشی است.

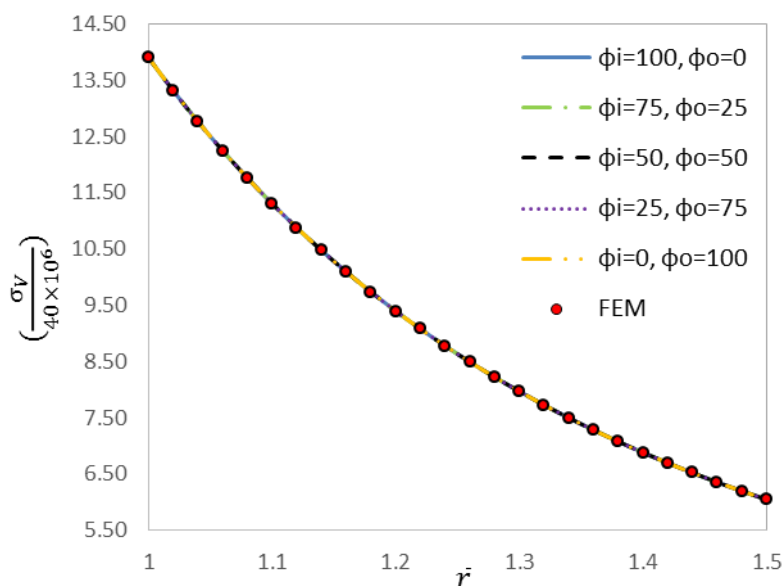
توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه با استفاده از نظریه الاستیسیته‌ی مستوی در شکل ۳-۲۰ نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد، با افزایش شعاع، تنش محیطی به تدریج کاهش می‌یابد. همانند گذشته بارگذاری الکتریکی اثری مشهودی بر رفتار تنش محیطی ندارد. همچنین واضح است، اندازه تنش محیطی از تنش محوری و شعاعی بیشتر است.

در شکل ۳-۲۱ توزیع تنش محوری در راستای ضخامت استوانه با استفاده روش الاستیسیته مستوی، مورد بررسی قرار گرفته است. با مقایسه‌ی شکل ۳-۲۰ با شکل ۳-۲۱ می‌توان گفت که تنش محیطی و تنش محوری دارای رفتاری مشابه هستند؛ با این تفاوت که تنش محیطی مقادیر بزرگ‌تری را نسبت به مقادیر تنش محوری دارا می‌باشد.



شکل ۲۱-۳ توزیع تنش محوری تحت بارگذاری الکتریکی

شکل ۲۲-۳ توزیع تنش فون مایسز در راستای ضخامت استوانه همگن تحت بارگذاری الکتریکی را نشان می‌دهد، که در راستای ضخامت استوانه روندی کاهشی را پیش‌بینی می‌کند. با مقایسه‌ی شکل ۲۰-۳ تا شکل ۲۲-۳ می‌توان گفت که تنش محیطی، محوری و فون مایسز دارای رفتاری مشابه هستند.

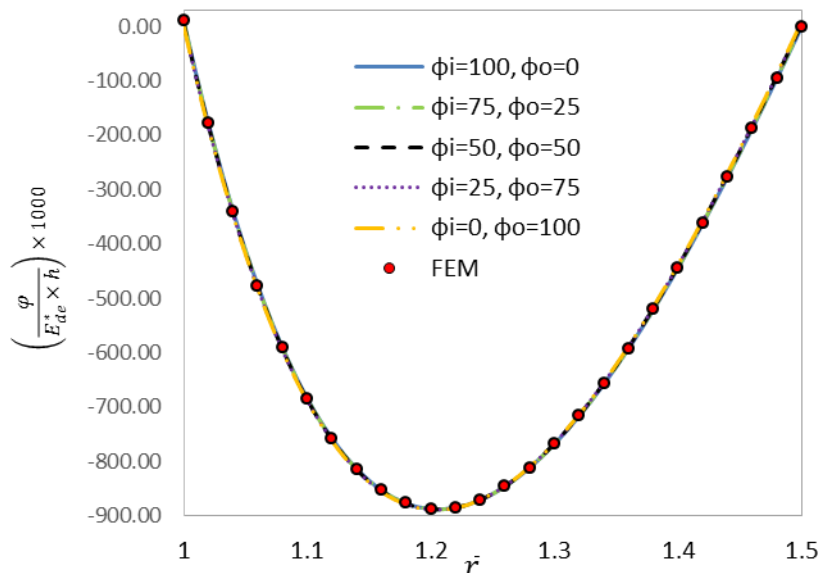


شکل ۲۲-۳ توزیع تنش فون مایسز تحت بارگذاری الکتریکی

رفتار الکتریکی

شکل ۲۳-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی در

استوانه، بر اثر بارگذاری الکتریکی نشان می‌دهد. تقعر تمام نمودارها رو به بالاست و بیشینه پتانسیل الکتریکی در لایه‌های میانی رخ می‌دهد. اثر بارگذاری مکانیکی موجود بر روی سیلندر غالب بوده و تمام حالت‌ها تحت این اثر دارای تفاوتی ناچیز و قابل چشم پوشی می‌باشند.



شکل ۳-۲۳ توزیع پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری الکتریکی

در جدول ۳-۹ و جدول ۳-۱۰ نتایج حاصل از روش تحلیلی با روش عددی مقایسه شده که حل تحلیلی به عنوان مبنا در نظر گرفته شده است.

جدول ۳-۹ تنش محیطی، محوری و فن مایسز تحت بارگذاری الکتریکی

		σ_V (Mpa)	σ_x (Mpa)	σ_θ (Mpa)
$\bar{r} = 1$	FEM	555.860	176.380	557.880
	PET	556.060	176.408	558.002
	درصد اختلاف	0.036	0.016	0.022
$\bar{r} = 1.25$	FEM	345.180	120.150	382.210
	PET	345.258	120.158	382.263
	درصد اختلاف	0.023	0.007	0.014
$\bar{r} = 1.5$	FEM	241.820	78.214	271.260
	PET	241.859	78.217	271.288
	درصد اختلاف	0.016	0.004	0.01

جدول ۱۰-۳ تنش و جابجایی شعاعی و پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری الکتریکی

		φ (V)	σ_r (Mpa)	u_r (mm)
$\bar{r} = 1.25$	FEM	-8599	-8.893	0.21484
	PET	-8599	-8.941	0.21421
	درصد اختلاف	0	0.54	0.3

۳-۵-۲ استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای

در این بخش نیز تنها به مقایسه نمودار تنش فون مایسز، برای حالات مختلف بارگذاری حرارتی،

در شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای می‌پردازیم.

شکل ۳-۲۴ توزیع تنش فون مایسز را در حالات گوناگون بارگذاری الکتریکی، برای حالت کرنش

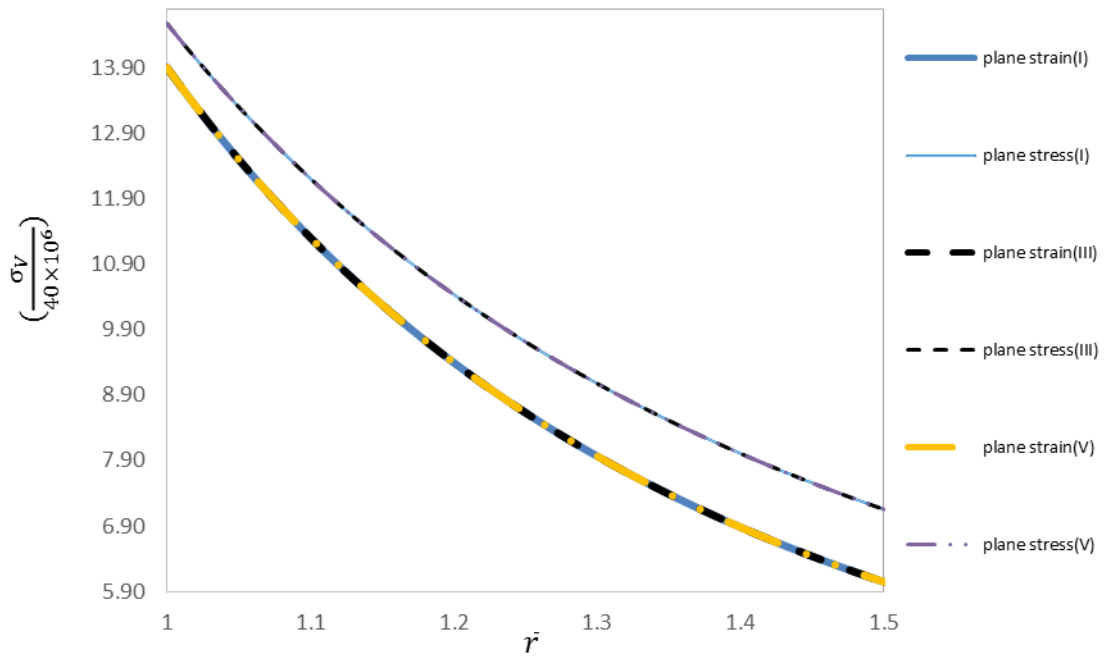
صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای، نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۳-۲۴ درمی‌یابیم که توزیع تنش

فون مایسز برای حالات مختلف بارگذاری در شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای، کاملاً

شبهه به هم هستند. خطوط نازک مربوط به حالت دوم و خطوط کلفت مربوط به حالت کرنش

صفحه‌ای می‌باشد. می‌توان گفت مقدار تنش به ازای شعاع‌های مختلف، برای نوع دوم بیشتر از نوع

اول است.



شکل ۳-۲۴ تنش فون مایسز برای شرایط انتهایی مختلف تحت بارگذاری الکتریکی

فصل ۴

استوانه‌های ناهمگن

۱-۱-۱ پیش‌گفتار

در این فصل نخست نحوه‌ی تحلیل اجزای محدود استوانه‌ی ناهمگن پیزوالکتریک بیان می‌گردد، سپس نتایج مربوط به مطالعه‌ی عددی بیان می‌شوند.

۱-۲-۱ تحلیل اجزای محدود استوانه‌های ناهمگن

برای تحلیل اجزای محدود الکتروترمو مکانیکی مواد ناهمگن پیزوالکتریک در این پژوهش از نرم‌افزار ANSYS 12.0 استفاده می‌شود.

۱-۲-۱-۱ مدل‌سازی مواد ناهمگن پیزوالکتریک

همان‌طور که در فصل اول بیان شد در مواد ناهمگن خواص به صورت تدریجی تغییر می‌کند. در نرم‌افزار ANSYS 12.0 المانی جهت تعریف و مدل‌سازی مواد ناهمگن وجود ندارد؛ بنابراین برای تحلیل، استوانه به لایه‌های زیادی با ضخامت یکسان d تقسیم می‌شود؛ به طوری که تغییرات خواص در هر لایه اندک باشد و بتوان خواص ثابتی را به هر لایه نسبت داد.

$$Pr^n = Pr|_{r=r_m^n}; r_m^n = \left(r_i^n + \frac{d}{2} \right) \quad (1-4)$$

در رابطه‌ی فوق Pr^n خاصیت در لایه‌ی n ام است که با توجه به شعاع متوسط آن r_m^n تعیین می‌گردد، r_i^n نیز شعاع داخلی لایه‌ی n ام است. خواص برای هر لایه محاسبه می‌شود و به آن اختصاص می‌یابد، سپس این لایه‌ها به هم متصل می‌شوند و استوانه‌ی FGP را به وجود می‌آورند، در حقیقت این کار تقریب بسیار خوبی از تغییر تدریجی خواص در استوانه می‌باشد [۳۳-۳۴].

۱-۲-۱-۲ انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله

همان‌طور که در فصل گذشته، بخش تحلیل اجزای محدود آن توضیح داده شد؛ مسأله حالت متقارن محوری دارد و از المان‌های دو بعدی می‌توان جهت تحلیل استفاده کرد. مطابق تحلیل اجزای محدود فصل گذشته از المان PLANE 223 استفاده می‌گردد.

جهت مدل‌سازی مسأله به صورت دو بعدی مقطع مستطیل شکل استوانه به صورت دو بعدی مدل‌سازی می‌گردد؛ سپس با توجه به ابعاد هندسی مسأله و چند لایه کردن آن، مقطع مستطیل شکل به لایه‌هایی تقسیم می‌گردد و با استفاده از رابطه‌ی (۴-۱) خواص به هر لایه اختصاص می‌یابد. شبکه‌بندی هر لایه باید به صورتی انجام گیرد که تحلیل المان محدود مستقل از شبکه‌بندی باشد و نتایج به دست آمده قابل اطمینان باشند. با استفاده از نتایج به دست آمده برای شبکه‌بندی در بخش تحلیل اجزای محدود فصل گذشته، المان‌های PLANE 223 به شکل مربع بر روی لایه‌های مستطیل شکل قرار می‌گیرند. با توجه به همگن بودن هر لایه و شکل ۳-۱ زمانی که مساحت هر لایه A_{Layer} که به شکل مستطیل است، حدود ۱۵۰ برابر مساحت المان مربعی شکل $A_{Element}$ باشد؛ نتایج حاصل از تحلیل المان محدود به همگرایی در حدود ۹۹٪ می‌رسد و تحلیل پذیرفتنی خواهد بود.

بنابراین برای شبکه‌بندی، مقطع مستطیل شکل استوانه به لایه‌های یکسان تقسیم می‌شود و هر لایه با المان‌های مربعی شکل به گونه‌ای پوشانده می‌شوند که نسبت مساحت هر لایه از استوانه به مساحت المان‌های همانند مربعی شکل حدود ۱۵۰ یا بیشتر باشد.

۴-۱ مطالعه موردی استوانه ناهمگن تحت بارگذاری مکانیکی

در این بخش استوانه ناهمگن، تحت بارگذاری مکانیکی قرار می‌گیرد و نتایج بررسی می‌شود. مطابق فصل گذشته، مشخصات هندسی $r_o = 60\text{ mm}$ ، $r_i = 40\text{ mm}$ در نظر گرفته می‌شود، استوانه‌ی از جنس PZT-4 می‌باشد که در راستای شعاعی خود پلاریزه شده است، جدول ۳-۱ خواص استوانه مورد مطالعه خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی را در استوانه بیان می‌کند [۳۷ و ۳۸]. برای بررسی اثر ثابت ناهمگنی کلیه‌ی ثوابت ناهمگنی، برابر ثابت ناهمگنی کل n فرض می‌شود و مقادیر $n = -2, -1, 0, 1, 2$ با توجه به [۱۸-۲۹]، مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

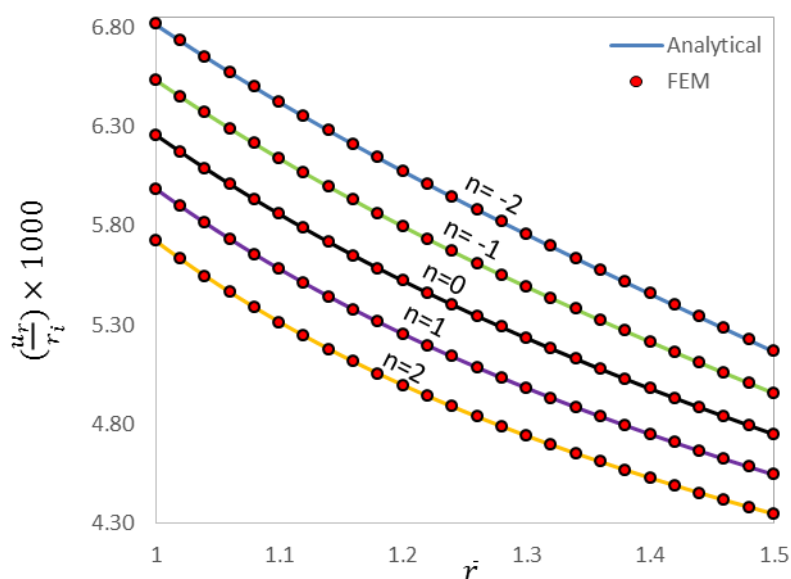
۴-۱-۱ استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای

جهت مطالعه‌ی اثر ثابت ناهمگنی بر روی استوانه ناهمگن تحت بارگذاری مکانیکی، فشار داخلی را $P_i = 80 \text{ MPa}$ ، فشار خارجی را برابر صفر و چرخش را برابر $\omega = 3500 \text{ rad/s}$ ، در نظر می‌گیریم. اثر ثابت ناهمگنی در حالت بارگذاری مکانیکی، بر جابه‌جایی شعاعی، پتانسیل الکتریکی، تنش شعاعی، محیطی، فون مایسز و تنش محوری (در حالت کرنش صفحه‌ای) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

رفتار حرارتی

در این بخش به دلیل عدم بارگذاری حرارتی، تغییرات دمایی در استوانه وجود ندارد ($T = 0^\circ \text{ K}$) و دما در استوانه مقداری ثابت دارد و برابر دمای مرجع $T^* = 295^\circ \text{ K}$ است.

رفتار مکانیکی

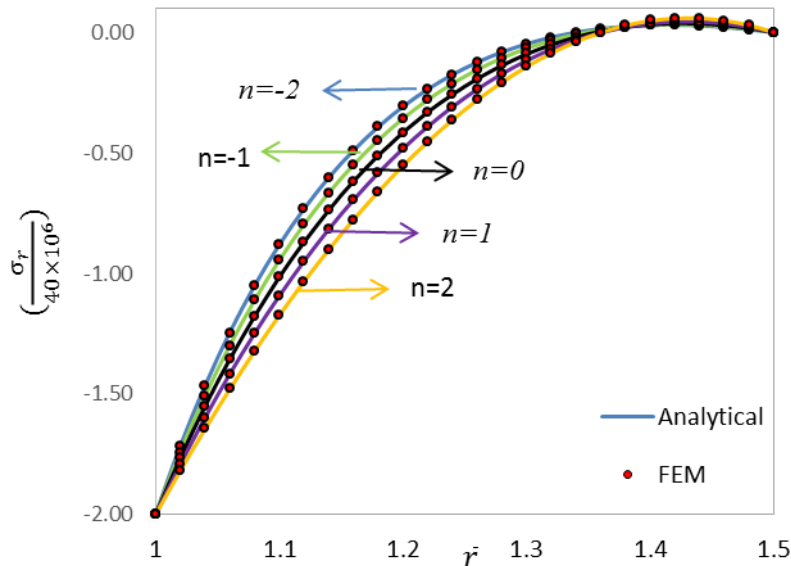


شکل ۴-۱ جابه‌جایی شعاعی در حالت بارگذاری مکانیکی

شکل ۴-۱ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی، برای استوانه تحت بارگذاری مکانیکی، نشان می‌دهد. با افزایش n جابه‌جایی شعاعی کاهش می‌یابد.

شکل ۴-۲ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، بر روی توزیع تنش

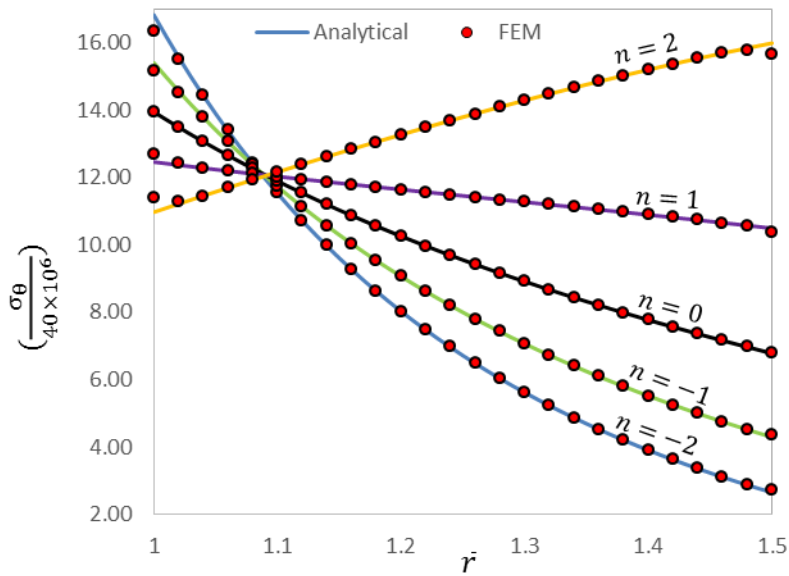
شعاعی، برای استوانه تحت بارگذاری مکانیکی، نشان می‌دهد؛ با افزایش مقدار ثابت ناهمگنی، مقدار تنش در جدار استوانه افزایش می‌یابد.



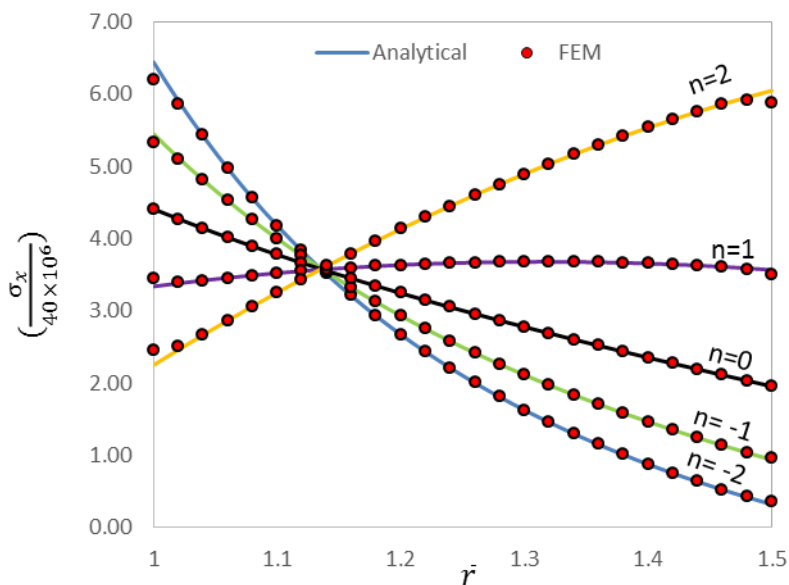
شکل ۴-۲ تنش شعاعی در حالت بارگذاری مکانیکی

شکل ۴-۳ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی و روش اجزای محدود، بر روی توزیع تنش محیطی، برای استوانه تحت بارگذاری مکانیکی، نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود، نتایج به دست آمده از هر دو روش تقریباً یکسان است. در یک شعاع خاص (حدود $\bar{r} = 1.08$) مقادیر تنش محیطی به ازای تمام مقادیر ثابت ناهمگنی، تقریباً با هم برابرند و نمودارها تلاقی دارند. با افزایش ثابت ناهمگنی، به تدریج رفتار تنش محیطی تغییر کرده و سیر صعودی پیدا می‌کند.

شکل ۴-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی و روش اجزای محدود، بر روی توزیع تنش محوری، برای استوانه تحت بارگذاری مکانیکی، نشان می‌دهد. در این حالت نیز در یک شعاع خاص (حدود $\bar{r} = 1.14$) مقادیر تنش به ازای تمام مقادیر ثابت ناهمگنی، تقریباً با هم برابر می‌شوند و نمودارها تلاقی پیدا می‌کنند. با مقایسه‌ی شکل ۴-۳ با شکل ۴-۲ می‌توان گفت که تنش محیطی و تنش محوری دارای رفتاری مشابه هستند.



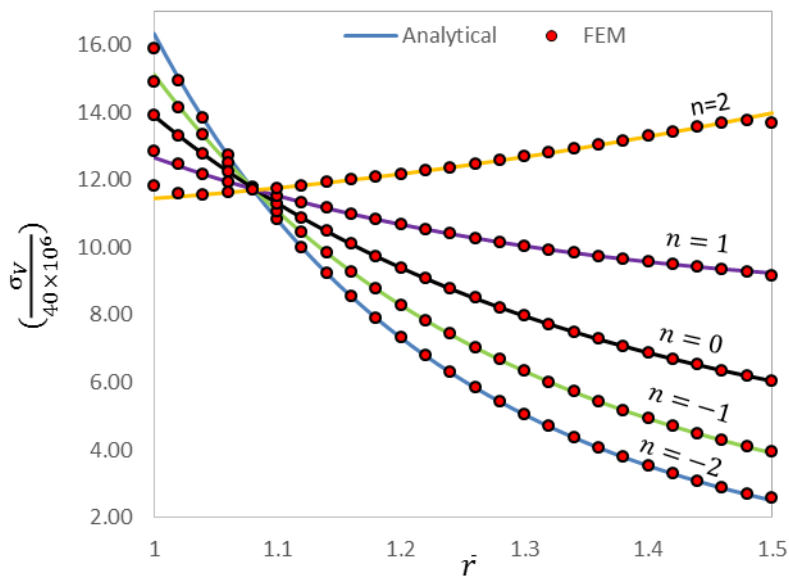
شکل ۳-۴ تنش محیطی در حالت بارگذاری مکانیکی



شکل ۴-۴ تنش محوری در حالت بارگذاری مکانیکی

شکل ۴-۵ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی و روش اجزای محدود، بر روی توزیع تنش فون مایسز، برای استوانه تحت بارگذاری مکانیکی، نشان می‌دهد؛ مشابه تنش محیطی و محوری در یک شعاع خاص (حدود $\bar{r} = 1.08$) مقادیر تنش به ازای تمام مقادیر ثابت ناهمگنی، تقریباً با هم برابرند و نمودارها تلاقی دارند. نتایج نشان می‌دهند که تنش محیطی، محوری

و فون مایسز دارای رفتاری مشابه هستند.



شکل ۴-۵ تنش فون مایسز در حالت بارگذاری مکانیکی

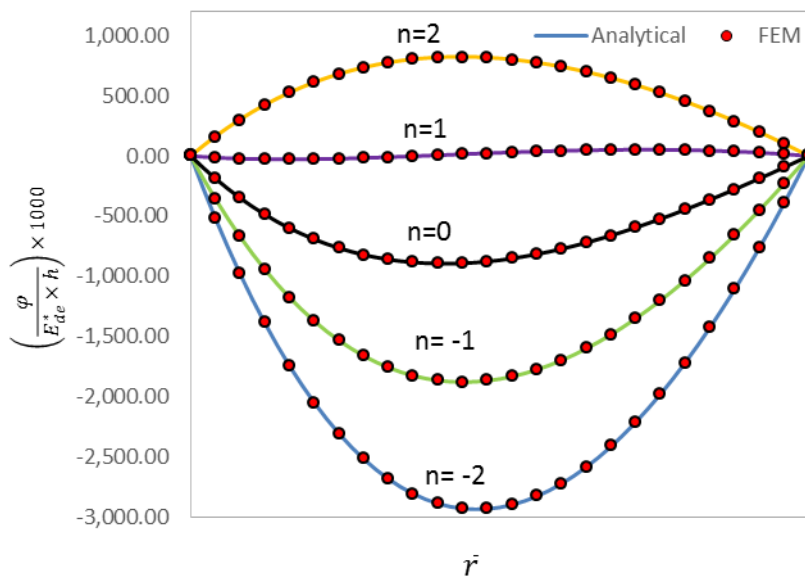
در جدول ۴-۱ نتایج حاصل از روش تحلیلی و عددی برای تنش فن مایسز به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف آورده شده است.

جدول ۴-۱ تنش فون مایسز تحت بارگذاری مکانیکی

		σ_v (Mpa)	n=-2	n=-1	n=0	n=1	n=2
$\bar{r} = 1$	FEM	472.740	636.040	596.720	555.900	514.230	472.740
	PET	458.274	653.452	605.220	556.097	506.755	458.274
	درصد اختلاف	3.15	2.66	1.4	0.035	1.47	3.15
$\bar{r} = 1.25$	FEM	496.780	242.580	288.970	345.180	413.460	496.780
	PET	496.963	242.457	288.949	345.263	413.619	496.963
	درصد اختلاف	0.037	0.051	0.007	0.024	0.038	0.037
$\bar{r} = 1.5$	FEM	548.050	102.840	158.320	241.810	365.760	548.050
	PET	559.468	100.339	156.474	241.849	369.766	559.468
	درصد اختلاف	2.02	2.5	1.18	0.016	1.08	2.04

رفتار الکتریکی

شکل ۴-۶ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی و روش اجزای محدود، بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی، برای استوانه تحت بارگذاری مکانیکی، نشان می‌دهد؛ با دور شدن از شعاع خارجی و داخلی مقادیر پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد. با افزایش ثابت ناهمگنی، پتانسیل الکتریکی به تدریج از مقدار منفی به مثبت تغییر می‌یابد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، بیشینه پتانسیل الکتریکی در لایه‌های میانی رخ می‌دهد؛ همچنین $n=1$ حالتی بحرانی داشته و به ازای آن رفتار الکتریکی استوانه تقریباً مستقل از شعاع می‌گردد و در این حالت پتانسیل الکتریکی مقداری ناچیز دارد و از این رو در طراحی این امر را می‌توان مورد استفاده قرار داد.

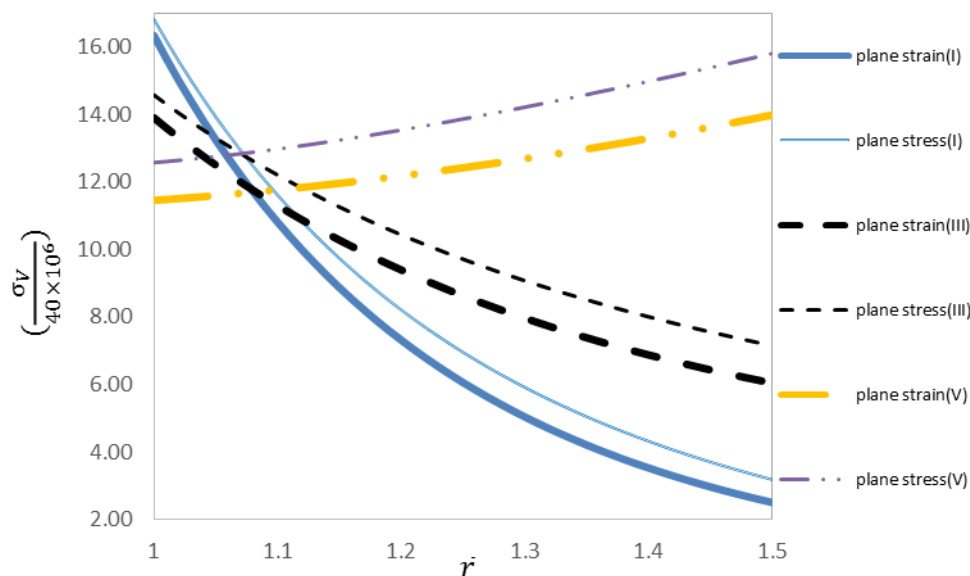


شکل ۴-۶ پتانسیل الکتریکی در حالت بارگذاری مکانیکی

۴-۱-۲ استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای

همانند فصل گذشته نتایج در حالت تنش صفحه‌ای مشابه حالت کرنش صفحه‌ای است؛ بنابراین در این بخش تنها به مقایسه نمودار تنش فون مایسز، برای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی در استوانه

ناهمگن تحت بارگذاری مکانیکی، در شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای می‌پردازیم. شکل ۷-۴ توزیع تنش فون مایسز را به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی، در استوانه ناهمگن تحت بارگذاری مکانیکی، برای حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای، نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۷-۴ درمی‌یابیم که توزیع تنش فون مایسز برای حالات مختلف ثابت ناهمگنی در شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای کاملاً شبیه به هم هستند. خطوط نازک مربوط به تنش صفحه‌ای و خطوط کلفت مربوط به کرنش صفحه‌ای می‌باشد. می‌توان گفت برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف، مقدار تنش به ازای شعاع‌های مختلف، برای تنش صفحه‌ای بیشتر از کرنش صفحه‌ای است.



شکل ۷-۴ تنش تحت بارگذاری مکانیکی برای شرایط انتهایی و ثابت‌های ناهمگنی مختلف

۲-۴ مطالعه موردی استوانه ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی

در این بخش استوانه ناهمگن، تحت بارگذاری حرارتی قرار می‌گیرد و اثر ثابت ناهمگنی بررسی می‌گردد. مشخصات هندسی و خواص مانند حالت بارگذاری مکانیکی در نظر گرفته می‌شود.

۲-۴-۱ استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای

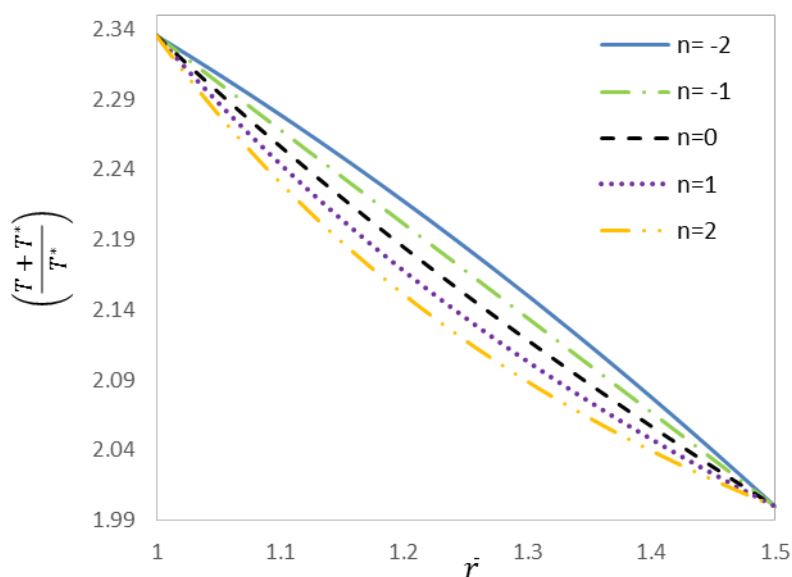
جهت مطالعه‌ی اثر ثابت ناهمگنی بر روی استوانه ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی، فشار داخلی، فشار خارجی، چرخش و پتانسیل الکتریکی را صفر در نظر می‌گیریم. دمای در لایه داخلی

بر جابه‌جایی شعاعی، پتانسیل الکتریکی، تنش شعاعی، محیطی، فون مایسز و تنش محوری (در حالت کرنش صفحه‌ای) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

لازم به ذکر است، دمای ثابت مثبت مرجع $T^* = 25^\circ C$ فرض شده است.

رفتار حرارتی

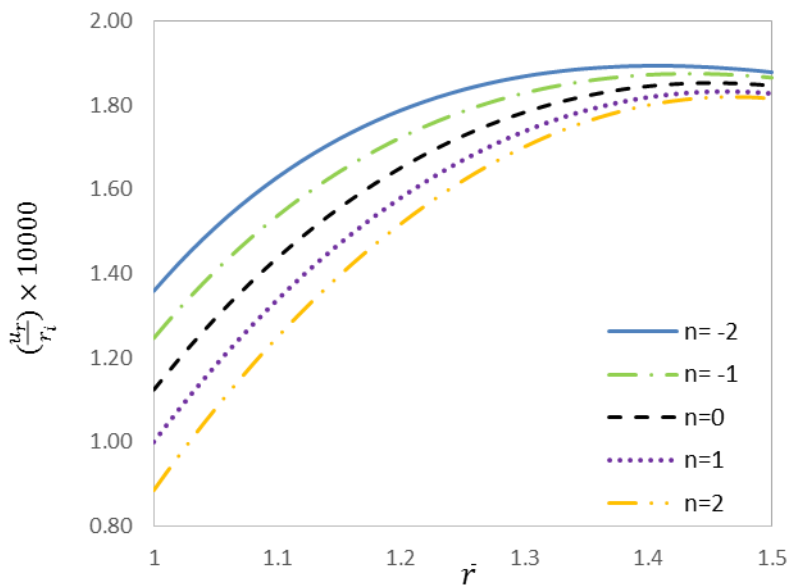
شکل ۴-۸ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، بر روی توزیع میدان دمایی در جداره استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی نشان می‌دهد. با افزایش مقدار ثابت ناهمگنی، دما در جداره‌ی استوانه کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۸ میدان دمایی تحت بارگذاری حرارتی

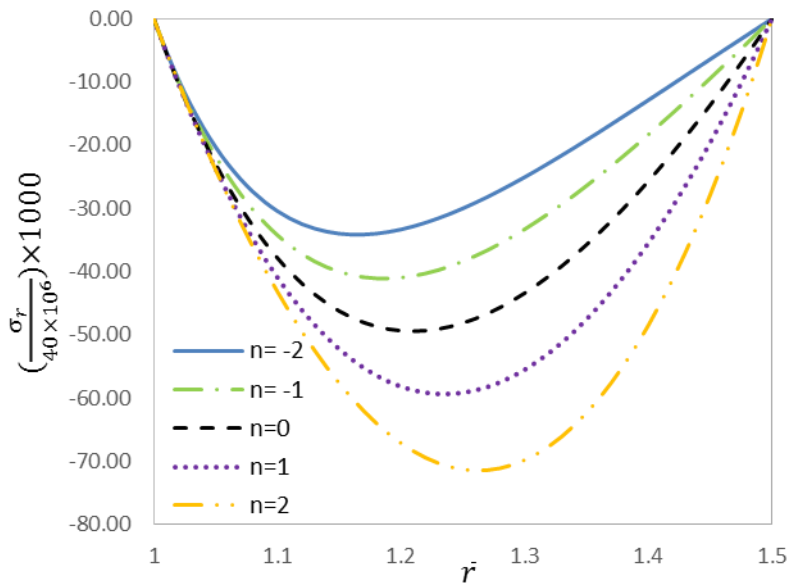
رفتار مکانیکی

شکل ۴-۹ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی، برای استوانه تحت بارگذاری حرارتی، نشان می‌دهد. با افزایش n جابه‌جایی شعاعی کاهش می‌یابد. هر چه از شعاع داخلی به سمت شعاع خارجی پیش رویم، اثر ثابت ناهمگنی کمتر و نمودارها همگرا می‌شوند.

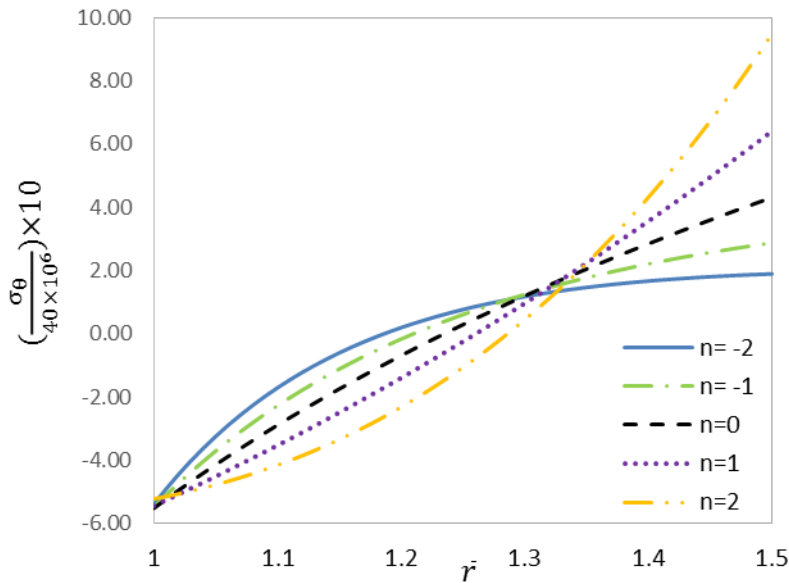


شکل ۹-۴ جابه‌جایی شعاعی تحت بارگذاری حرارتی

شکل ۱۰-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، بر روی توزیع تنش شعاعی، برای استوانه تحت بارگذاری حرارتی، نشان می‌دهد؛ با افزایش مقدار ثابت ناهمگنی، مقدار تنش افزایش می‌یابد.



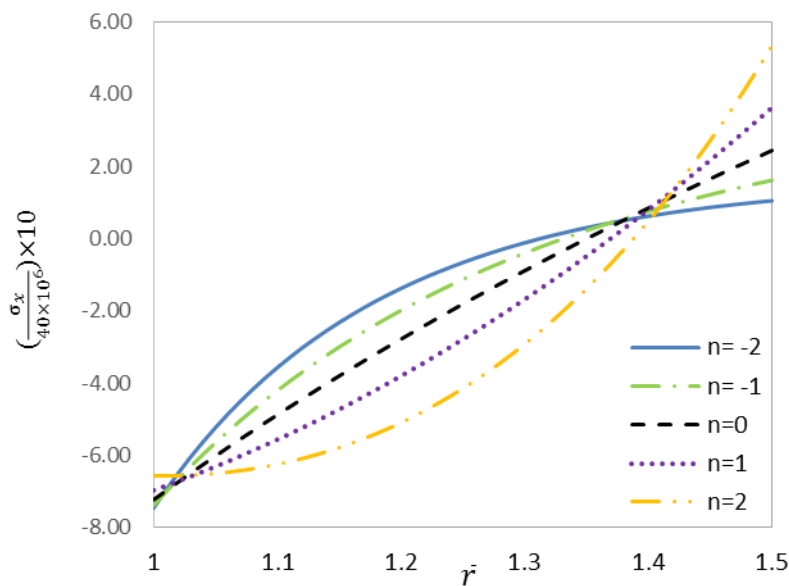
شکل ۱۰-۴ تنش شعاعی تحت بارگذاری حرارتی



شکل ۴-۱۱ تنش محیطی تحت بارگذاری حرارتی

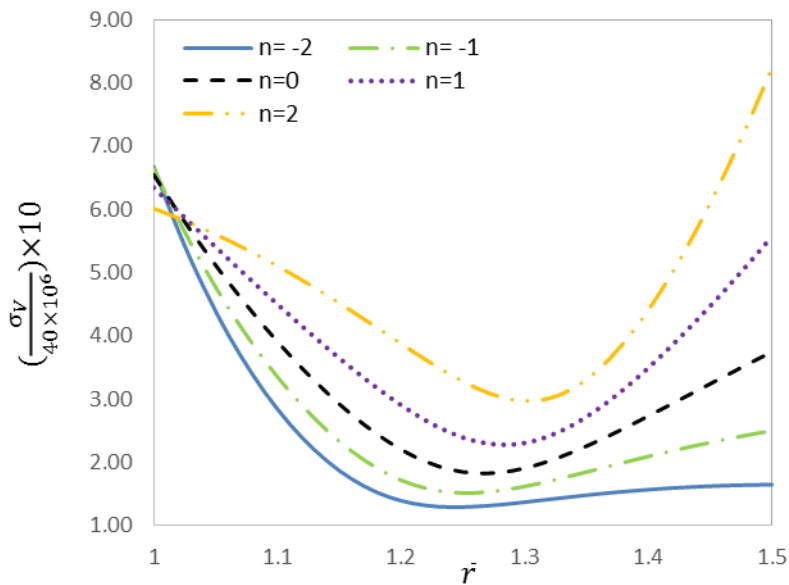
شکل ۴-۱۱ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، بر روی توزیع تنش

محیطی، برای استوانه تحت بارگذاری حرارتی، نشان می‌دهد؛ مشاهده می‌شود، در نزدیکی لایه داخلی و در یک شعاع خاص (حدود $\bar{r} = 1.33$) مقادیر تنش محیطی به ازای تمام مقادیر ثابت ناهمگنی، تقریباً با هم برابرند و نمودارها تلاقی دارند؛ پس از آن نمودارها واگرا شده و در نزدیکی شعاع خارجی اثر ثابت ناهمگنی بیشتر به چشم می‌آید.



شکل ۴-۱۲ تنش محوری تحت بارگذاری حرارتی

شکل ۱۲-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، بر روی توزیع تنش محوری، برای استوانه تحت بارگذاری حرارتی، نشان می‌دهد؛ مشاهده می‌شود، در نزدیکی لایه داخلی و در یک شعاع خاص (حدود $\bar{r} = 1.40$) مقادیر تنش محیطی به ازای تمام مقادیر ثابت ناهمگنی، تقریباً با هم برابرند و نمودارها تلاقی دارند. با مقایسه‌ی شکل ۱۱-۴ با شکل ۱۲-۴ می‌توان گفت که تنش محیطی و تنش محوری دارای رفتاری مشابه هستند.



شکل ۱۳-۴ تنش فون مایسز تحت بارگذاری حرارتی

شکل ۱۳-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، بر روی توزیع تنش فون مایسز، برای استوانه تحت بارگذاری حرارتی، نشان می‌دهد؛ مشاهده می‌شود، با پیش‌روی به سمت شعاع خارجی، اختلاف نمودارها بیشتر مشهود و اثر ثابت ناهمگنی بارزتر است. همچنین با افزایش ثابت ناهمگنی، مقدار تنش افزایش می‌یابد. همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد مقادیر تنش در نزدیکی لایه داخلی تقریباً مقداری ثابت و مستقل از ثابت ناهمگنی دارد.

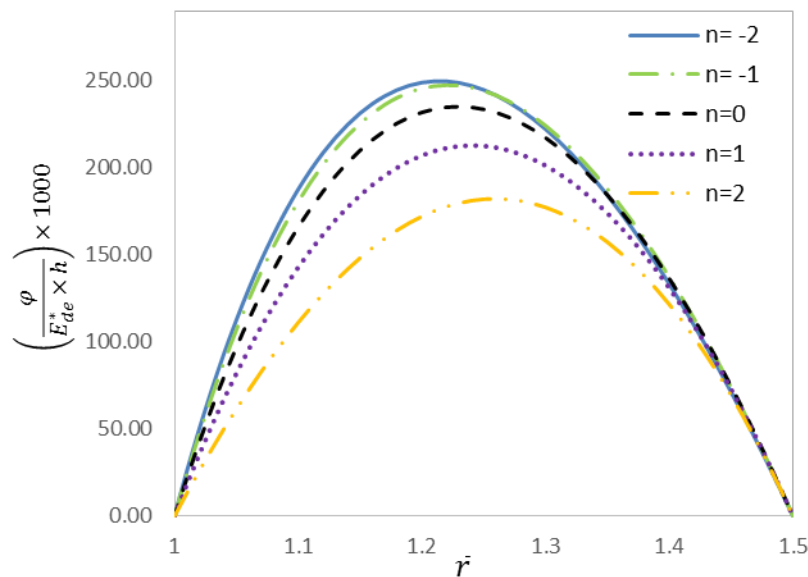
در جدول ۲-۴ نتایج حاصل از روش تحلیلی و عددی برای تنش فن مایسز تحت بارگذاری حرارتی به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف آورده شده است.

جدول ۲-۴ تنش فون مایسز تحت بارگذاری حرارتی

		σ_V (Mpa)	n=-2	n=-1	n=0	n=1	n=2
$\bar{r} = 1$	FEM	25.455	23.215	24.036	24.743	25.246	25.455
	PET	24.053	26.691	26.583	26.188	25.380	24.053
	درصد اختلاف	5.8	13	9.58	5.51	0.53	5.8
$\bar{r} = 1.25$	FEM	12.957	4.991	5.976	7.390	9.568	12.957
	PET	13.114	5.164	6.055	7.384	9.564	13.114
	درصد اختلاف	1.2	3.3	1.3	0.08	0.04	1.2
$\bar{r} = 1.5$	FEM	30.461	5.871	9.003	13.636	20.449	30.461
	PET	32.973	6.579	9.994	14.992	22.285	32.973
	درصد اختلاف	7.6	10	10	9.04	8.23	7.62

رفتار الکتریکی

شکل ۴-۱۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی، برای استوانه تحت بارگذاری حرارتی، نشان می‌دهد؛ با دور شدن از شعاع خارجی و داخلی مقادیر پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد. با افزایش ثابت ناهمگنی، پتانسیل الکتریکی به تدریج کاهش می‌یابد و بیشینه پتانسیل الکتریکی در لایه‌های میانی رخ می‌دهد.

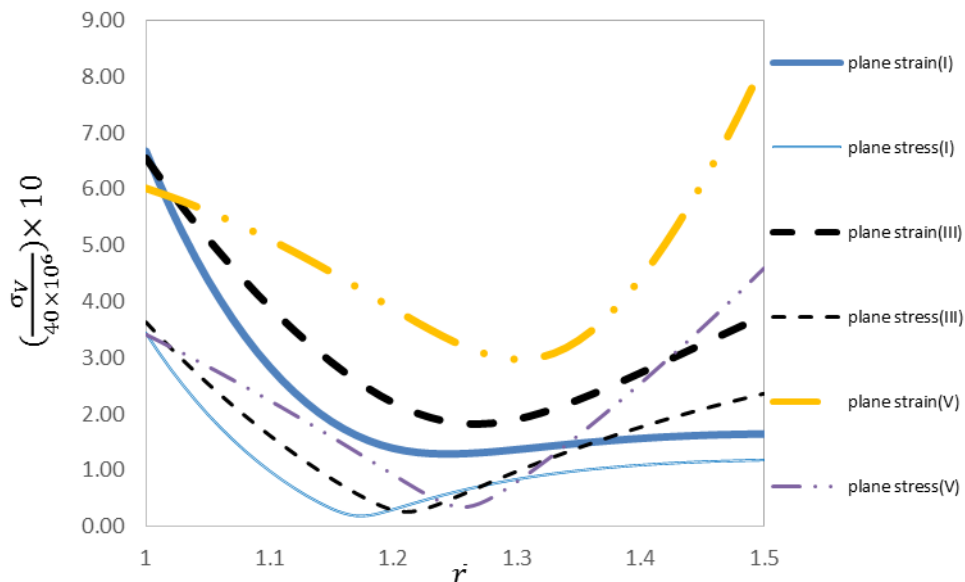


شکل ۴-۱۴ پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری حرارتی

۲-۲-۴ استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای

در شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای، رفتار الکتروترمو مکانیکی استوانه، مشابه شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای می‌باشد و نمودارهای مربوطه مشابه حالت کرنش صفحه‌ای هستند؛ از این رو در این بخش تنها به مقایسه نمودار تنش فون مایسز، برای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی در استوانه ناهمگن پرداخته می‌شود.

شکل ۴-۱۵ توزیع تنش فون مایسز را به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی، در استوانه ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی، برای حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای، نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۴-۱۵ در می‌یابیم که توزیع تنش فون مایسز برای حالات مختلف ثابت ناهمگنی در شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای کاملاً شبیه به هم هستند. خطوط نازک مربوط به تنش صفحه‌ای و خطوط کلفت مربوط به کرنش صفحه‌ای می‌باشد. می‌توان گفت برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف، مقدار تنش به ازای شعاع‌های مختلف، برای حالت اول بیشتر از حالت دوم است.



شکل ۴-۱۵ تنش تحت بارگذاری حرارتی با شرایط انتهایی و ثابت‌های ناهمگنی مختلف

۴-۳ مطالعه موردی استوانه ناهمگن تحت بارگذاری الکتریکی

در این بخش استوانه ناهمگن، تحت بارگذاری الکتریکی قرار می‌گیرد و اثر ثابت ناهمگنی بررسی می‌گردد. مشخصات هندسی و خواص مانند حالت بارگذاری مکانیکی در نظر گرفته می‌شود.

۴-۳-۱ استوانه با شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای

جهت مطالعه‌ی اثر ثابت ناهمگنی بر روی استوانه ناهمگن تحت بارگذاری الکتریکی، فشار و دمای داخلی، فشار و دمای خارجی و چرخش را صفر در نظر می‌گیریم. پتانسیل الکتریکی در لایه داخلی $\varphi_i = 100V$ و در لایه خارجی $\varphi_o = 25V$ می‌باشد. اثر ثابت ناهمگنی در حالت بارگذاری الکتریکی، بر جابه‌جایی شعاعی، پتانسیل الکتریکی، تنش شعاعی، محیطی، فون مایسز و تنش محوری (در حالت کرنش صفحه‌ای) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

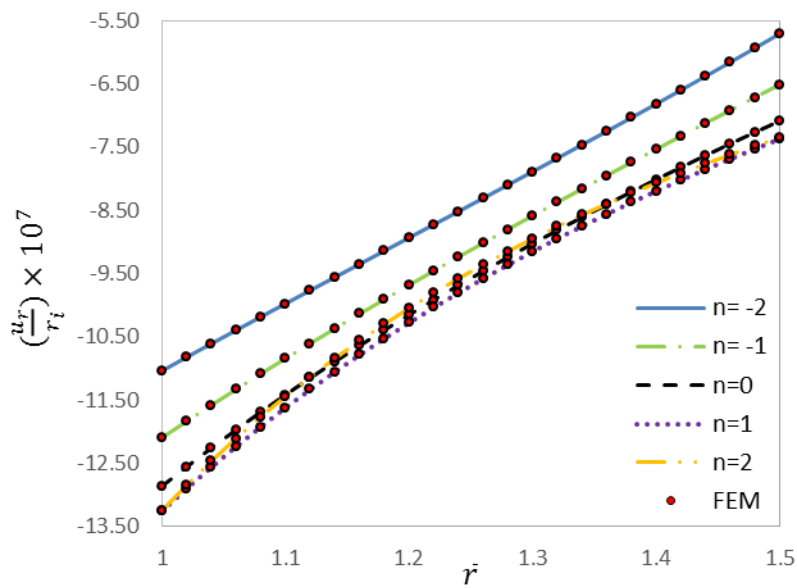
رفتار حرارتی

در این بخش به دلیل عدم بارگذاری حرارتی، دما در استوانه مقداری ثابت و برابر دمای ثابت

$$\text{مثبت مرجع } T^* = 295^\circ K \text{ دارد.}$$

رفتار مکانیکی

شکل ۴-۱۶ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی و روش اجزای محدود، بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی، برای استوانه تحت بارگذاری الکتریکی، نشان می‌دهد. با افزایش n جابجایی شعاعی کاهش می‌یابد. نتایج نشان می‌دهد افزایش ثابت ناهمگنی نقشی دوگانه بر توزیع جابه‌جایی دارد، به طوری که ابتدا سبب کاهش و سپس سبب افزایش آن شده است؛ بنابراین در طراحی می‌توان به ثابتی ناهمگنی دست یافت که سبب کمترین توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه می‌گردد و بیان‌کننده حالتی بهینه در استوانه می‌باشد.

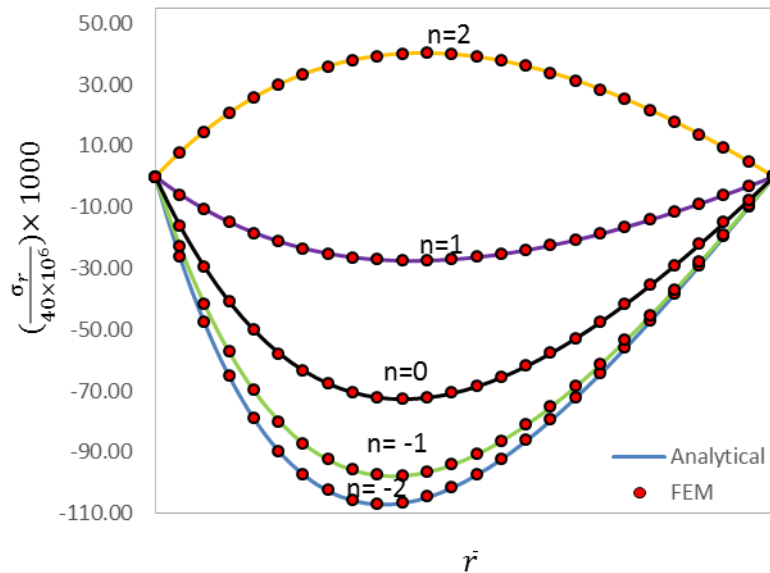


شکل ۴-۱۶ جابه‌جایی شعاعی تحت بارگذاری الکتریکی

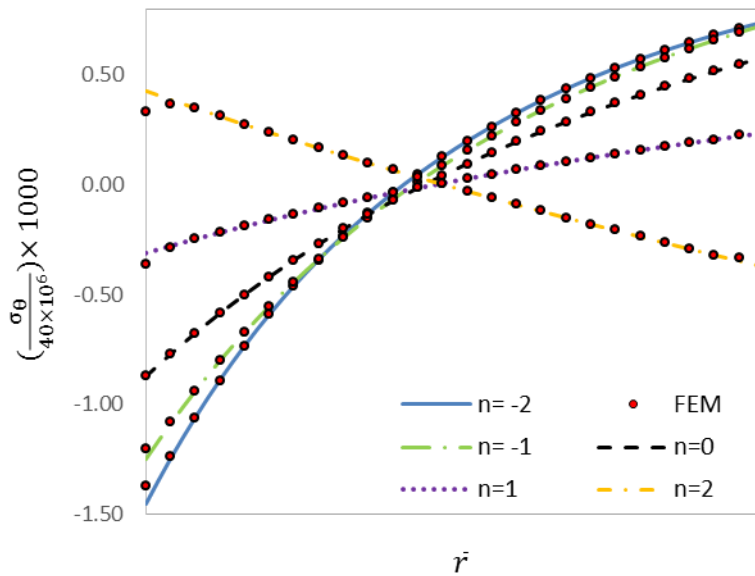
شکل ۴-۱۷ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، بر روی توزیع تنش

شعاعی، برای استوانه تحت بارگذاری الکتریکی، نشان می‌دهد؛ با افزایش مقدار ثابت ناهمگنی تنش

افزایش می‌یابد و از حالت فشاری به کششی تغییر وضعیت می‌دهد



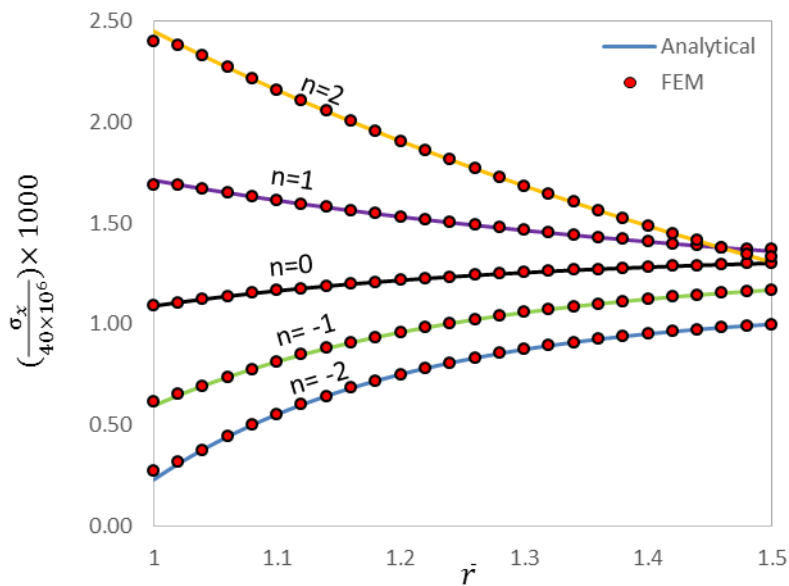
شکل ۴-۱۷ تنش شعاعی در حالت بارگذاری الکتریکی



شکل ۴-۱۸ تنش محیطی در حالت بارگذاری الکتریکی

شکل ۴-۱۸ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع تنش محیطی، برای استوانه تحت بارگذاری الکتریکی، نشان می‌دهد؛ مشاهده می‌شود، نتایج نظریه‌ی الاستیسیته مستوی و روش اجزای محدود انطباق خوبی دارند. در شعاع میانی، مقادیر تنش محیطی به ازای تمام مقادیر ثابت ناهمگنی، تقریباً با هم برابرند و نمودارها تلاقی دارند یعنی میتوان مقدار تنش در این لایه را مستقل از ثابت ناهمگنی دانست. با افزایش ثابت ناهمگنی، رفتار تنش محیطی از صعودی به نزولی در امتداد جداره تغییر وضعیت می‌دهد.

شکل ۴-۱۹ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی و روش اجزای محدود، بر روی توزیع تنش محوری، برای استوانه تحت بارگذاری الکتریکی، نشان می‌دهد؛ مشاهده می‌شود، هر دو روش انطباق خوبی دارند. اثر ثابت ناهمگنی در نزدیکی شعاع داخلی بارزتر است. با نزدیک شدن به شعاع خارجی، نمودارها همگرا می‌شوند. با افزایش ثابت ناهمگنی، توزیع تنش در استوانه افزایش می‌یابد.

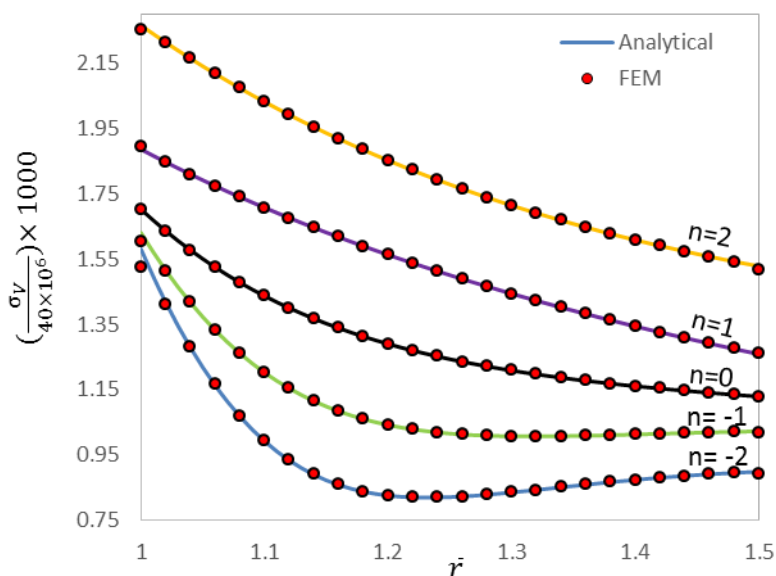


شکل ۱۹-۴ تنش محوری در حالت بارگذاری الکتریکی

شکل ۲۰-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی و روش اجزای

محدود، بر روی توزیع تنش فون مایسز، برای استوانه تحت بارگذاری الکتریکی، نشان می‌دهد؛

مشاهده می‌شود، هر دو روش انطباق خوبی دارند. با افزایش ثابت ناهمگنی، تنش افزایش یافته است.



شکل ۲۰-۴ تنش فون مایسز در حالت بارگذاری الکتریکی

در جدول ۳-۴ نتایج حاصل از روش تحلیلی و عددی برای تنش فن مایسز تحت بارگذاری حرارتی به

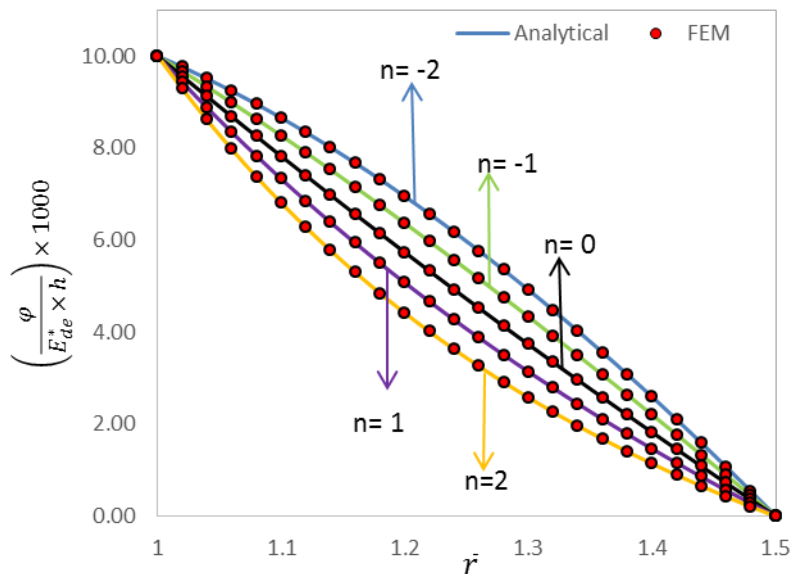
ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف آورده شده است.

جدول ۳-۴ تنش فون مایسز تحت بارگذاری الکتریکی

		σ_V (Mpa)	n=-2	n=-1	n=0	n=1	n=2
$\bar{r} = 1$	FEM	90.161	61.004	64.189	68.084	75.720	90.161
	PET	90.625	63.232	65.230	68.103	75.452	90.625
	درصد اختلاف	0.51	3.52	1.59	0.03	0.35	0.51
$\bar{r} = 1.25$	FEM	71.150	32.843	40.628	49.744	60.035	71.150
	PET	71.141	32.848	40.630	49.744	60.033	71.141
	درصد اختلاف	0.13	0.015	0.005	0	0.003	0.013
$\bar{r} = 1.5$	FEM	60.747	35.738	40.745	45.171	50.470	60.747
	PET	61.134	35.952	40.901	45.169	50.360	61.134
	درصد اختلاف	0.63	0.6	0.38	0.004	0.22	0.63

رفتار الکتریکی

شکل ۴-۲۱ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی و روش اجزای محدود، بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی، برای استوانه تحت بارگذاری مکانیکی، نشان می‌دهد؛ با دور شدن از شعاع خارجی و داخلی مقادیر پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد. با افزایش ثابت ناهمگنی، تعقر نمودارها از مثبت به منفی، تغییر علامت می‌دهد.

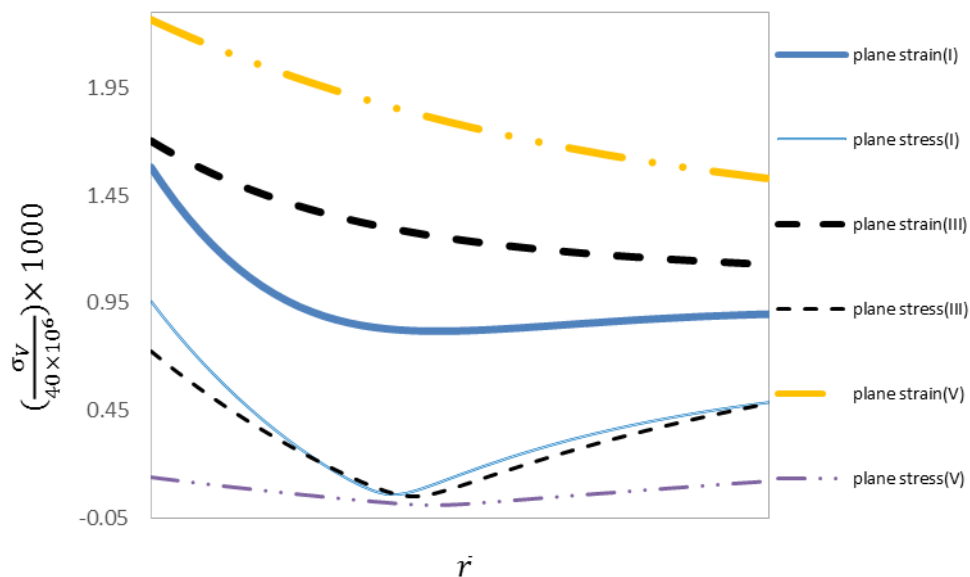


شکل ۴-۲۱ پتانسیل الکتریکی تحت بارگذاری الکتریکی

۲-۳-۴ استوانه با شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای

در این بخش تنها به مقایسه نمودار تنش فون مایسز، برای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی در استوانه ناهمگن تحت بارگذاری الکتریکی، در شرایط انتهایی کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای می‌پردازیم.

شکل ۲۲-۴ توزیع تنش فون مایسز را به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی، در استوانه ناهمگن تحت بارگذاری الکتریکی، برای حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای، نشان می‌دهد. خطوط نازک مربوط به تنش صفحه‌ای و خطوط کلفت مربوط به کرنش صفحه‌ای می‌باشد. می‌توان گفت برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف، مقدار تنش به ازای شعاع‌های مختلف، برای حالت اول بیشتر از حالت دوم است. و در حالت تنش صفحه‌ای نمودارها از همگرایی بیشتری برخوردارند.



شکل ۲۲-۴ تنش تحت بارگذاری الکتریکی با شرایط انتهایی و ثابت‌های ناهمگنی مختلف

فصل ۵

نتیجه گیری و جمع بندی

۵-۱ نتیجه‌گیری

در فصل‌های گذشته با استفاده از روش الاستیسیته مستوی به تحلیل الکتروترموالاستیک استوانه‌های جدارکلفت چرخان FGPM با توزیع توانی خواص پرداختیم؛ بدین‌صورت که پس از استخراج معادلات حاکم بر مسأله و حل آن، اثر بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و الکتریکی را بر روی رفتار مکانیکی، حرارتی و الکتریکی استوانه همگن در دو حالت انتهایی تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای بررسی کردیم. همچنین اثر ثابت ناهمگنی را بر رفتار مکانیکی، حرارتی و الکتریکی تحت بارگذاری مکانیکی، حرارتی و الکتریکی مورد بررسی قرار دادیم.

در ادامه به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری از بررسی‌ها و نتایج به‌دست‌آمده می‌پردازیم.

۱. حل با استفاده از روش الاستیسیته مستوی، حلی دقیق می‌باشد و در پژوهش حاضر به عنوان مبنا در نظر گرفته شده است. همچنین برای اطمینان از صحت نتایج حاصل از روش تحلیلی و نیز بررسی و محاسبه میزان خطا از روش عددی با استفاده از نرم‌افزار ANSYS استفاده کرده‌ایم. شایان ذکر است که روش عددی اندکی دارای خطا می‌باشد؛ ولی مشاهدات حاکی از آن است که نتایج حاصل از روش تحلیلی و روش عددی از انطباق خوبی برخوردارند.

۲. با توجه به برقرار بودن اصل جمع آثار، نتایج به دست آمده برای تحلیل الکتروترمو مکانیکی برابر مجموع نتایج تحلیل حرارتی، الکتریکی و مکانیکی می‌باشد. در ضمن با بررسی جداگانه نتایج حاصل از هر یک از بارگذاری‌ها می‌توان میزان تأثیر هر کدام از بارگذاری‌ها را در جابه‌جایی و تنش‌های ایجاد شده در جسم مشاهده کرد.

۳. اثر پیزوالکتریک برای پتانسیل الکتریکی رفتاری غیرخطی ایجاد می‌کند. همچنین اثر بارگذاری مکانیکی و حرارتی در برابر بارگذاری الکتریکی اثری غالب دارد.

۴. بررسی‌ها حاکی از آن است که تحت بارگذاری‌های مختلف، توزیع تنش محیطی، محوری

و فن مایسز، مشابه هم می‌باشد، به طور تقریبی می‌توان گفت در مجموع تنش محیطی اثری غالب دارد.

۵. میتوان نتیجه گرفت که مقدار تنش شعاعی در برابر تنش‌های محیطی، محوری و فن مایسز بسیار کمتر است.

۶. رفتار مکانیکی، حرارتی و الکتریکی استوانه در شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای تقریباً روندی مشابه داشته و با استفاده از ضریب اطمینانی مناسب می‌توان از نتایج حالت کرنش صفحه‌ای برای تنش صفحه‌ای استفاده کرد و یا بالعکس.

۷. اثر ثابت ناهمگنی بر رفتار ماده بسیار چشم‌گیر است؛ بنابراین در طراحی‌ها برای دستیابی به حالت بهینه و رسیدن به کمترین جابجایی و تنش شعاعی، می‌توان از اثر ثابت ناهمگنی بهره برد.

۲-۵ پیشنهادها

با توجه به مطالعات انجام شده در این زمینه پیشنهادهای مختلفی را می‌توان ارائه نمود که برخی از این پیشنهادها به قرار زیر است.

۱. تحلیل مگنتوالکترترمو مکانیکی استوانه‌های ناهمگن با استفاده از روش الاستیسیته مستوی

۲. تحلیل کمانشی و یا ارتعاشاتی استوانه‌های جدار ضخیم FGPM.

۳. تحلیل الکترترمو مکانیکی استوانه‌های FGPM با تغییر خواص ماده به صورت تابع نمایی و مقایسه‌ی نتایج آن با پژوهش حاضر

۴. تحلیل استوانه‌های FGM تحت فشار غیر یکنواخت متغیر با زمان $p=p(r,t)$

۵. تحلیل استوانه‌های FGM تحت انتقال حرارت گذرا

پیشنهادهای ارائه شده تنها بخش کوچکی از میان موارد بسیار است، چرا که تغییر در تحلیل،

بارگذاری، هندسه، جنس و شرایط مرزی هر کدام سبب ایجاد موضوعات جدید برای پژوهش می‌گردد.

مراجع

- [۱] محسنی شکیب م.; مکانیک سازه‌های مرکب، مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه امام حسین (ع)، تهران، ۱۳۸۵.
- [2] Timoshenko S. P., Krieger S. W.; *Theory of Plate and Shells*, 2th ed, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [3] Ugral A.C.; *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- [4] Ugral A.C., Fenster S.K.; *Advanced Strength and Applied Elasticity*, 4th ed., Prentice Hall, New Jersey, 2003.
- [5] Mirsky I., Hermann G.; *Axially Motions of Thick Cylindrical Shells*, J. Appl. Mech., Vol. 25, pp. 97-102, 1958.
- [۶] یوسفی م.; تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، زمستان ۱۳۹۱.
- [۷] پرهیزکار یعقوبی م.; تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با توزیع توانی خواص، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، تابستان ۱۳۹۲.
- [۸] فارونی ح.; تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی مدول الاستیسیته به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، زمستان ۱۳۹۰.
- [۹] رستاقی ع.; تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات توانی مدول الاستیسیته به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، تابستان ۱۳۹۱.
- [10] Manbachi A., Cobbold R.S.C.; *Development and Application of Piezoelectric Materials for Ultrasound Generation and Detection*, Ultrasound, 19 (4), pp. 187–196, 2011.

- [11] Gaultschi G.; *Piezoelectric Sensorics: Force, Strain, Pressure, Acceleration and Acoustic Emission Sensors, Materials and Amplifiers*, Springer, Berlin, 2002.
- [12] Holler F.J., Skoog D.A., Crouch S.R.; *Principles of Instrumental Analysis*, 6th ed., Cengage Learning, 2007.
- [13] Moulson A.J., Herbert J.M.; *Electroceramics: Materials Properties Applications*, 2nd ed., John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, 2003.
- [14] Uchino K.; *Advanced piezoelectric materials: Science and technology*, Woodhead Publishing Limited, Cambridge, 2010.
- [15] Tzou H.S., Howard R.V.; *a Piezothermoelastic Thin Shell Theory Applied to Active Structures*, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 116, pp. 295-302, 1994.
- [16] Tzou H.S., Bao Y.; *a Theory on Anisotropic Piezothermoelastic Shell Laminates with Sensor/Actuator Applications*, Journal of Sound and Vibration, 184(3), pp. 453-473, 1995.
- [17] Kapuria S., Dumir P.C., Sengupta S.; *Exact Piezothermoelastic Axisymmetric Solution of a Finite Transversely Isotropic Cylindrical Shell*, Computers & Structures, Vol. 61, No. 6, pp. 1085-1099, 1996.
- [18] Horgan C.O., Chan A.M.; *The Pressurized Hollow Cylinder or Disk Problem for Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Materials*, journal of elasticity, 55, pp.43-59, 1999.
- [19] Xiao-Hong W., Ya-Peng S., Changqing C.; *an Exact Solution for Functionally Graded Piezothermoelastic Cylindrical Shell as Sensors or Actuators*, Materials Letters, 57, pp. 3532-3542, 2003.
- [20] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z.; *Elastic Analysis of Heterogeneous Hollow Cylinders*, Mechanics Research Communications, 33, pp. 681-691, 2006.
- [21] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X.; *Exact Solutions of Heterogeneous Elastic Hollow Cylinders*, Composite Structures, 79, pp. 140-147, 2007.
- [22] Tutuncu N.; *Stresses in Thick-Walled FGM Cylinders with Exponentially-Varying Properties*, Engineering Structures, 29, pp. 2032-2035, 2007.
- [23] Wu C.P., Tsai Y.H.; *Static Behavior of Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Shells Under Electric Displacement and Magnetic Flux*, International Journal of Engineering Science, 45, pp. 744-769, 2007.

[24] Li X.F., Peng X.L.; *a Pressurized Functionally Graded Hollow Cylinder with Arbitrarily Varying Material Properties*, J. Elast., pp. 81-95, 2009.

[25] Dai H.L., Xiao X., Fu Y.M.; *Analytical Solutions of Stresses in Functionally Graded Piezoelectric Hollow Structures*, Solid State Communications, 150, pp. 763-767, 2010.

[26] Li X.F., Peng X.L., Lee K.Y.; *Radially Polarized Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinders as Sensors and Actuators*, European Journal of Mechanics A/Solids, 29, pp. 704-713, 2010.

[27] Heydarpour Y., Malekzadeh P., Golbahar-Haghighi M.R., Vaghefi M.; *Thermoelastic Analysis of Rotating Laminated Functionally Graded Cylindrical Shells Using Layerwise Differential Quadrature Method*, Acta Mech, 223, pp. 81-93, 2012.

[28] Ghannad M., Zamani-Nejad M.; *Complete Elastic Solution of Pressurized Thick Cylindrical Shells Made of Heterogeneous Functionally Graded Materials*, Mechanika, 18(6), pp. 640-649, 2012.

[29] Ghannad M., Zamani-Nejad M.; *Elastic Analysis of Heterogeneous Thick Cylinders Subjected to Internal or External Pressure Using Shear Deformation Theory*, Acta Polytechnica Hungarica, Vol. 9, No. 6, pp. 117-136, 2012.

[۳۰] بوژمه‌رانی م.؛ *تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم چرخان از مواد ناهمگن FG تحت فشار داخلی و خارجی*، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، تیر ۱۳۹۰.

[۳۱] والپین اس.؛ *مکانیک محیط‌های پیوسته*، مترجم کلاتری ف.، دانشگاه گیلان، گیلان، ۱۳۷۹.

[32] Ansys Co.; *Coupled-Field Analysis Guide*, ANSYS Inc., USA, 2009.

[۳۳] م. پرهیزکار، م. قنّاد؛ *تحلیل عددی استوانه‌ی FGM دارای گشودگی از نوع دایروی و مربعی*، یازدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ۱-۳ اسفند، ۱۳۹۰.

[۳۴] م. پرهیزکار، م. قنّاد؛ مطالعه‌ی عددی اثر ثابت ناهمگنی بر روی استوانه‌ی FGM دارای گشودگی از نوع دایروی و مربعی، کنفرانس بین‌المللی مهندسی مکانیک و فناوری‌های پیشرفته، دانشگاه آزاد اسلامی - واحد شهر مجلسی، اصفهان، ۱۹-۲۱ مهر، ۱۳۹۱.

[35] Yang J.; *the Mechanics of Piezoelectric Structures*, World Scientific Publishing, Singapore, 2006.

[36] Akbari Alashti R., Khorsand M.; *Three-Dimensional Dynamo-Thermo-Elastic Analysis of a Functionally Graded Cylindrical Shell with Piezoelectric Layers by DQ-FD Coupled*, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 96-97, pp. 49-67, 2012.

[37] Yang J.; *the Mechanics of Piezoelectric Structures*, World Scientific Publishing, Singapore, 2006.

[38] Akbari Alashti R., Khorsand M.; *Three-Dimensional Dynamo-Thermo-Elastic Analysis of a Functionally Graded Cylindrical Shell with Piezoelectric Layers by DQ-FD Coupled*, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 96-97, pp. 49-67, 2012.

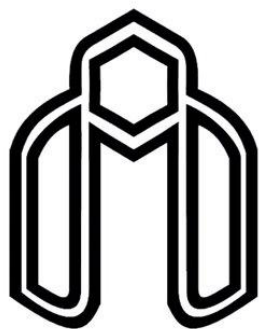
Abstract

On the basis of plane elasticity theory (PET), the governing equations for axisymmetric thick cylindrical shells made of nonhomogeneous functionally graded piezoelectric materials (FGPMs) subjected to electrical, thermal and mechanical loading are derived. The material properties are assumed to vary nonlinearly in the radial direction. The temperature distribution is assumed to be a function of radius.

The obtained result (radial stress, meridional stress, axial stress, Von Mises stress, radial displacement and electrical potential) are presented in the form of graph.

The problem was also solved, using the finite element method (FEM), the results of which were compared with those of the analytical method. It was observed that the two method's results are in good agreement.

Key words: Thick cylindrical shells, FGPM, Plane elasticity theory (PET), Finite element method (FEM).



دانشگاه شاهرود

University of Shahrood
Mechanical Engineering Faculty

Master of Science thesis

**Thermoelastic analysis of heterogeneous
rotating thick-walled cylindrical using plane
elasticity theory with power-varying properties**

Hadi Khoshdel

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

Consultant:

Mr. Mohammad Parhizkar Yaghoobi

February 2015