



دانشکده مهندسی مکانیک

گروه تبدیل انرژی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی عددی سه بعدی جریان و انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک در کانال های خمیده

رقیه صائی

استاد راهنما

پرفسور محمدحسن کیهانی

استاد مشاور

دکتر محمود نوروزی

پایان نامه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۴





دانشگاه گیلان

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم رقیه صائمی رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی تحت عنوان بررسی عددی سه بعدی جریان و انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک در کانالهای خمیده که در تاریخ ۱۳۹۴/۰۶/۲۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

شماره دانشجویی: ۹۱۰۴۴۲۴

قبول (با درجه : عالی) امتیاز (۱۹٫۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱- عالی (۲۰ - ۱۹) ۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶) ۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

اعضا	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استاد	محمدحسن کیهانی	۱- استاد راهنما
	استادیار	محمود نوروزی	۲- استاد مشاور
	استادیار	محمود چارماقی	۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	دانشیار	محسن نظری	۴- استاد امتحن
	استادیار	علی خالقی	۵- استاد امتحن

رئیس دانشکده:

اعضا:



تقدیم به:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موباشان سپید شد تا ما رو سفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرما بخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

روح پدر بزرگوارم، اول اسلادم، که همواره چتر محبتش بر سرم بود

بزرگوارسی که الفبای زندگی را از او آموختم،

مادرم، بلندتکیه گاهم که دامن پر مهرش یگانه پناهم است.

مهربانی که عشق ورزیدن را از او آموختم.

تشکر و قدردانی

از استاد با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر محمدحسن کیهانی با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند. و همچنین استاد صبور، جناب آقای دکتر محمود نوروزی، که در کمال سعه صدر زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید. و تمامی اساتید این دانشکده که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتیم، کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تعهد نامه

اینجانب رقیه صائی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی دانشکده مکانیک دانشگاه شاهرود نویسنده پایان نامه " بررسی عددی سه بعدی جریان و انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک در کانال های خمیده " تحت راهنمایی دکتر محمدحسن کیهانی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه شاهرود » و یا « Shahrood University » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

چکیده

بررسی جریان در کانال‌های خمیده از جمله مسائل مهم و کلاسیک در مکانیک سیالات محسوب می‌شود. این مسئله بدلیل کاربرد گسترده در صنعت و علوم پزشکی از مدتها قبل مورد توجه بسیاری از محققین بوده‌است. با این حال همچنان ابهامات زیادی در این زمینه وجود دارد. به عنوان نمونه مکانیزم شروع و توسعه جریان های ثانویه در کانالهای خمیده به‌ویژه در حضور سیالات ویسکوالاستیک همچنان نیازمند بررسی بیشتر است. جریان ثانویه در کانال های خمیده بدلیل عدم تعادل نیروهای ناشی از اثرات گریز از مرکز شکل می‌گیرد. گرادیان فشار شعاعی ایجاد شده، موجب بازگشت جریان از دیوار بیرونی به دیوار داخلی در امتداد بالا و پایین دیواره‌های کانال و جریان از ناحیه دیوار داخلی به دیوار خارجی از قسمت مرکزی سطح مقطع کانال خواهد شد. در این پژوهش جریان و انتقال حرارت اجباری سیال ویسکوالاستیک در حالت سه‌بعدی در کانال مربعی خمیده در حالت ایستا مورد بررسی قرار گرفته است. میدان جریان، آرام و دائمی و سیال ویسکوالاستیک به‌صورت تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته شده است. همچنین میدان جریان و انتقال حرارت در حال توسعه خواهد بود. قابل ذکر است که برای مدل‌سازی سیال ویسکوالاستیک از معادله متشکله غیرخطی گزیکس استفاده شده است.

شبیه‌سازی مسئله با کمک روش عددی تفاضل محدود صورت خواهد گرفت و معادلات حاکم بر روی شبکه جابجا شده گسسته‌سازی شده‌اند. نحوه اختصاص پارامترهای میدان جریان و انتقال حرارت بر روی این شبکه مطابق روش علامتگذاری و سلول است. همچنین روش تراکم پذیری مصنوعی جهت تخمین فشار در طی گام‌های زمانی تحلیل به کار گرفته شده و از برخی تکنیک های عددی برای پایدار نمودن حل عددی در خواص الاستیک بزرگ استفاده شده است. بر اساس شبیه سازی عددی، صحت نتایج

حاصل از حل عددی ارزیابی شده و استقلال پاسخ های عددی از شبکه تحقیق شده است. شرایط مرزی جریان و دما در ورودی کانال به صورت یکنواخت فرض شده است که با پیشروی جریان در طول کانال و اثرگذاری شرایط مرزی، رفته رفته جریان به حالت توسعه یافتگی می رسد. قابل ذکر است نتایج در دو حالت دما ثابت و شار حرارتی ثابت برای شرایط مرزی دیواره ی کانال ارائه شده اند. همچنین در این پژوهش علاوه بر بررسی جریان و انتقال حرارت در ناحیه در حال توسعه، تأثیر برخی از پارامترهایی نظیر عدد دین، عدد پرانتل، اثر ضریب تحرک، اثر بتا، عدد وایزنبرگ بر میدان جریان و انتقال حرارت نشان داده خواهد شد. در اینجا برای نخستین بار نشان داده می شود که با افزایش خواص الاستیک و در پی آن افزایش شدت جریان های عرضی، مقاومت جریان در کانال خمیده افزایش پیدا خواهد کرد. در نتایج انتقال حرارت با شرط مرزی دما ثابت خواهیم دید که در پرانتل های بزرگ دما در خروجی توسعه یافته نمی شود بنابراین در خروجی شرط مرزی دما را اعمال نخواهیم کرد. در معادله انتقال حرارات از گرادیان دما در جهت طولی صرف نظر می شود.

کلمات کلیدی: سیال ویسکوالاستیک، مدل سازی سه بعدی، جریان در حال توسعه، معادله گزیکس

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- ۱- مطالعه اثر عدد وایزنبرگ در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده با مقطع مربعی (کنفرانس بین المللی یافته های نوین پژوهشی در مهندسی صنایع و مهندسی مکانیک)
- ۲- بررسی سه بعدی اثر عدد دین بر ناپایداری جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده با مقطع مربعی (کنفرانس بین المللی یافته های نوین پژوهشی در مهندسی صنایع و مهندسی مکانیک)

فهرست مطالب

فهرست مطالب.....	ر
فهرست تصاویر.....	ش
فهرست جدولها.....	ط
فهرست علائم.....	ط
فصل ۱-مقدمه.....	۱
۱-۱- مقدمه.....	۲
۲-۱- منشأ فیزیکی رفتار سیالات ویسکوالاستیک.....	۳
۳-۱- معادلات ساختاری.....	۶
۳-۱-۱- معادلات ساختاری ویسکوالاستیک.....	۹
۴-۱- تاریخچه.....	۱۸
۴-۱-۱- مجاری خمیده دارای مقطع مدور.....	۱۹
۴-۱-۲- مجاری خمیده دارای مقطع غیرمدور.....	۲۶
۴-۱-۲-۱- جریان سیالات نیوتنی.....	۲۶
۵-۱- تحقیق حاضر.....	۳۷
۵-۱-۱- مشخصات کلی.....	۳۷
۵-۱-۲- ضرورت و کاربرد.....	۳۹
۵-۱-۳- جنبه‌های نوآوری.....	۴۰

۴۰	۱-۵-۴-ساختار کلی
۴۳	فصل ۲-معادلات حاکم
۴۴	۱-۲-مقدمه
۴۴	۲-۲-معادلات حاکم
۴۴	۲-۲-۱-معادلات بقا
۴۶	۲-۲-۲-معادله ساختاری
۴۷	۲-۲-۳-پارامترهای بی بعد
۵۱	فصل ۳-روش عددی
۵۲	۱-۳-مقدمه
۵۲	۲-۳-روش عددی
۵۵	۳-۳-گسسته سازی معادلات حاکم
۵۶	۳-۳-۱-صورت گسسته معادلات حاکم
۶۵	۳-۴-شرایط مرزی
۶۵	۳-۴-۱-شرایط مرزی جریان
۶۸	۳-۴-۲-شرایط مرزی انتقال حرارت
۷۲	۳-۵-شرایط اولیه
۷۴	۳-۶-خطای محاسباتی
۷۶	۳-۷-الگوریتم حل
۸۱	فصل ۴-نتایج
۸۲	۱-۴-مقدمه
۸۲	۲-۴-شرایط و الگوی همگرایی
۸۳	۴-۳-استقلال حل از شبکه

۴-۴-ارزیابی صحت نتایج.....	۸۵
۴-۵- مطالعه جریان.....	۸۷
۴-۵-۱- ناپایداری.....	۸۷
۴-۶-جریان اینرسی.....	۹۲
۴-۶-۱- بررسی اثرات پارامتری بعد β	۹۵
۴-۶-۲- بررسی اثرات ضریب تحرک سیال (α).....	۹۷
۴-۶-۳- بررسی اثرات عدد وایزنبرگ (Wi).....	۹۸
۴-۶-۴- تأثیر پارامترهای سیال بر توزیع تنش سیال.....	۹۹
۴-۷- انتقال حرارت.....	۱۰۷
۴-۷-۱- بررسی میدان دما و انتقال حرارت.....	۱۰۷
فصل ۵- نتیجه گیری و پیشنهاد.....	۱۲۵
۵-۱- مقدمه.....	۱۲۶
۵-۲- نتایج جریان.....	۱۲۶
۵-۳- نتایج انتقال حرارت.....	۱۲۸
۵-۶- پیشنهادات.....	۱۲۹
منابع و مراجع.....:	۱۳۱

فهرست تصاویر

- شکل ۱-۱- نمایش شماتیک از یک ماده پلیمری [۱] ۳
- شکل ۲-۱- هندسه تحقیق سارین [۳۲] ۲۳
- شکل ۳-۱- توزیع تنش نرمال محوری در جریان خزشی در اعداد وایزنبرگ مختلف [۳۵] ۲۵
- شکل ۴-۱- خطوط جریان‌های ثانویه سیال نیوتنی در اعداد دین مختلف در $\theta = 220^\circ$ در پژوهش بار [۳۹] ۲۷
- شکل ۵-۱- توزیع سرعت محوری برحسب دین در یک موقعیت خاص برای n های مختلف [۴۲] ۲۹
- شکل ۶-۱- توزیع سرعت محوری و گردابه‌های دین در n های مختلف [۴۲] ۳۰
- شکل ۷-۱- توزیع سرعت محوری و گردابه‌ها در اعداد دین مختلف [۴۲] ۳۰
- شکل ۸-۱- تأثیر شعاع گوشه بر عدد ناسلت در دیوار داخلی [۴۷] ۳۲
- شکل ۹-۱- تغییرات تنش محوری با تغییرات عدد دوران [۴۸] ۳۳
- شکل ۱۰-۱- کانتورهای تابع جریان سیال در عدد دین ۱۲۵ و عدد دیورای ۰/۴ و $\mathcal{E}$ های مختلف [۴۹] ۳۴
- شکل ۱۱-۱- تغییرات سرعت محوری و جریان ثانویه برحسب نرخ ریتاردیشن در [56] ۳۶
- شکل ۱-۴- توزیع سرعت محوری در عدد دین ۱۳۷ بر مبنای متوسط سرعت محوری ۸۶
- شکل ۲-۴- شدت جریان‌های ثانویه جریان سیال نیوتنی، (الف: $Dn=125$ ، ب: $Dn=137$) ۸۶
- شکل ۴-۴- توزیع سرعت محوری در مقطع $\theta = 240^\circ$ در اعداد دین مختلف در $\beta = 0.3$ و $\alpha = 0.5$ ۸۹
- شکل ۵-۴- جریان‌های ثانویه در ناحیه توسعه یافته جریان در $Wi=0.001$ ، $Dn=125$ و $\alpha = 0.5$ ۹۰
- شکل ۶-۴- جریان‌های ثانویه در کل مقطع کانال در مقاطع مختلف در $Wi=0.001$ ، $Dn=125$ ۹۱
- شکل ۷-۴- پروفیل سرعت محوری در مقاطع مختلف کانال در حالت $Wi=0.001$ ، $Dn=125$ ۹۲
- شکل ۹-۴- تغییرات سرعت محوری در محور مرکزی کانال در اعداد دین مختلف $Wi=0.001$ ، $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.3$ ۹۴

شکل ۴-۱۰- کانتور سرعت‌های عرضی و محوری بی‌بعد در کل مقطع کانال در ناحیه توسعه‌یافته در $Wi=0.001$ ،

شکل ۴-۱۱- تغییرات سرعت محوری در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای تغییرات β ، $Dn=125$ ، $\beta=0.3$ ، ۹۵

شکل ۴-۱۲- تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به ازای تغییرات β ، ۹۵

شکل ۴-۱۳- تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به ازای تغییرات Wi ، $Dn=125$ ، $Wi=0.001$ و $\alpha=0.5$ ، ۹۵

شکل ۴-۱۴- کانتور تنش عمودی $\tau_{\theta\theta}$ در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف β ، ۹۶

شکل ۴-۱۵- کانتور تنش برشی τ_{rz} در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف β ، ۹۸

شکل ۴-۱۶- تغییرات اختلاف تنش نرمال اول بی‌بعد در ناحیه در حال توسعه جریان در $Wi=0.001$ ، ۱۰۰

شکل ۴-۱۷- تغییرات اختلاف تنش نرمال دوم بی‌بعد در ناحیه در حال توسعه جریان در $Wi=0.001$ ، ۱۰۱

شکل ۴-۱۸- کانتور تنش نرمال و تنش برشی نیوتنی و پلیمری در ناحیه جریان توسعه یافته، ۱۰۱

شکل ۴-۱۹- تغییرات میدان فشار بی‌بعد در مقاطع عرضی کانال $Wi=0.001$ ، $Dn=125$ ، $\beta=0.3$ و $\alpha=0.5$ ، ۱۰۲

شکل ۴-۲۰- تغییرات مقاوت جریان در راستای محور کانال در اعداد دین مختلف در $Wi=0.001$ ، ۱۰۲

شکل ۴-۲۱- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد Pr در حالت $Br>0$ و اعمال شرط مرزی T ، ۱۰۳

شکل ۴-۲۲- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد Pr در حالت $Br>0$ و اعمال شرط مرزی H_2 ، ۱۰۳

شکل ۴-۲۳- تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت گرمایش $Br<0$ و اعمال شرط مرزی T ، ۱۰۴

شکل ۴-۲۴- تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت سرمایش $Br>0$ و اعمال شرط مرزی T ، ۱۰۵

شکل ۴-۲۵- تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت گرمایش $Br>0$ و اعمال شرط مرزی H_2 ، ۱۰۶

شکل ۴-۲۶- تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت سرمایش $Br<0$ و اعمال شرط مرزی H_2 ، ۱۰۸

شکل ۴-۲۷- سطوح دمای بی‌بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش $Br>0$ و شرط مرزی H_2 ، ۱۰۹

شکل ۴-۲۸- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد $Br>0$ در حالت $Pr=10$ و اعمال شرط مرزی H_2 ، ۱۱۰

- شکل ۴-۲۹- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد $Br < 0$ در حالت $Pr=10$ و اعمال شرط مرزی H_2 ۱۱۵
- شکل ۴-۳۰- سطوح دمای بیباعد بهازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایش $Br < 0$ و شرط مرزی H_2 ۱۱۶
- شکل ۴-۳۱- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد $Br < 0$ در حالت $Pr=10$ و اعمال شرط مرزی T ۱۱۷
- شکل ۴-۳۲- سطوح دمای بیباعد بهازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش $Br < 0$ و شرط مرزی T ۱۱۷
- شکل ۴-۳۳- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد $Br > 0$ در حالت $Pr=10$ و اعمال شرط مرزی T ۱۱۸
- شکل ۴-۳۴- سطوح دمای بیباعد بهازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایش $Br > 0$ و شرط مرزی T ۱۱۸
- شکل ۴-۳۵- توزیع عدد ناسلت متوسط سیال نیوتنی برای حالات شار ثابت و دما ثابت در شرایط $Br=0$ ، $Re=50$ ۱۲۱
- شکل ۴-۳۶- عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدلسازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت گرمایش و اعمال شرط مرزی H_2 ۱۲۲
- شکل ۴-۳۷- عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدلسازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت گرمایش و اعمال شرط مرزی T ۱۲۳
- شکل ۴-۳۸- عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدلسازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت سرمایش و اعمال شرط مرزی H_2 ، $Br = -10$ ۱۲۳
- شکل ۴-۳۹- عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدلسازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت سرمایش و اعمال شرط مرزی T ۱۲۴

فهرست جدول‌ها

- جدول ۱-۱- مقادیر f_c و f_d به ازای معادلات متشکله مختلف [۷]..... ۱۴
- جدول ۱-۴- مقادیر خطای نسبی برای شبکه‌های مختلف در $Re=100$ و $Wi=0.001$ برای شبکه‌بندی‌های مختلف ۸۴
- جدول ۲-۴- تغییرات ماکزیمم سرعت محوری در یک مقطع از جریان توسعه یافته و شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به ازای تغییرات α در $Wi = 0.001$ ، $Dn = 125$ و $\beta = 0.3$ ۹۷
- جدول ۳-۴- تغییرات سرعت محوری ماکزیمم در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای تغییرات Wi در $Dn = 125$ ، ۹۸
- جدول ۴-۴- مقادیر مقاوت جریان در ناحیه توسعه یافته در β های مختلف ۱۰۷

فهرست علائم

طول و عرض مقطع کانال، m	a, b
عدد برینکمن در حالت دمای دیواره ثابت	Br_T
عدد برینکمن در حالت اعمال شار حرارتی ثابت	Br_q
تراکم پذیری مصنوعی سیال	c
قطر هیدرولیکی (طول مشخصه)، m	D_h
عدد دین	Dn
انرژی داخلی	e
ضریب انتقال حرارت جابجایی، $\frac{W}{m^2 \cdot K}$	h
شمارنده‌های دستگاه مختصات به ترتیب در راستای θ ، r و z	i, j, k
ضریب انتقال حرارت هدایتی، $\frac{W}{m \cdot K}$	k
توان پاورلا	n
اختلاف تنش نرمال اول و دوم ، Pa	N_2, N_1
عدد ناسلت	Nu
عدد ناسلت متوسط محیطی جریان در حالت دمای دیواره ثابت	$Nu_{T,m}$
عدد ناسلت متوسط محیطی جریان در حالت اعمال شار حرارتی ثابت	$Nu_{q,m}$
میدان فشار سیال، Pa	P
میدان فشار بی‌بعد سیال	P^*

عدد پرانتل	Pr
محیط مقطع کانال	p
عدد پکلت	Pe
شار حرارتی، $\frac{W}{m^2}$	q''
عدد رینولدز	Re
شعاع گام کانال خمیده	R
باقیمانده معادله مومنتم در جهت i	$R_{M,i}$
باقیمانده معادله پیوستگی	R_c
بیشینه شدت جریان‌های عرضی	S_{max}
زمان، s	t
میدان دمای سیال، k	T
میدان دمای بی‌بعد سیال	T^*
دمای دیواره، k	T_w
دمای متوسط دیواره، k	T_{w_m}
دمای ورودی سیال، k	T_{in}
دمای بی‌بعد برای حالت دما ثابت	T_T^*
دمای بی‌بعد برای حالت شار ثابت	T_q^*
سرعت مرجع سیال	U_{ref}
سرعت سیال در راستاهای r, θ, z ، $\frac{m}{s}$	v_θ, v_z, v_r
سرعت بی‌بعد سیال در راستاهای r, θ, z	v_θ^*, v_z^*, v_r^*
عدد وایزنبرگ	Wi
ضریب تحرک سیال	α

نسبت انحنای کانال خمیده	δ
نسبت ویسکوزیته پلیمری به ویسکوزیته کل در معادله ساختاری گزیکس	β
نرخ برش تعمیم یافته، s^{-1}	$\dot{\gamma}$
تانسور نرخ برش، s^{-1}	γ
مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته اول، s^{-1}	$\gamma_{(1)}$
مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته دوم، s^{-1}	$\gamma_{(2)}$
ویسکوزیته پلیمری، Pa.s	η_p
ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر، Pa.s	η_0
ویسکوزیته حلال، Pa.s	η_s
دانشیته سیال، $\frac{kg}{m^3}$	ρ
تنش پلیمری، Pa	τ_p
تنش بی بعد پلیمری	τ_p^*

فصل ۱- مقدمه

۱-۱- مقدمه

در این فصل مقدمه‌ای بر سیالات ویسکوالاستیک و ساختار مولکولی آن‌ها و علت اصلی پیدایش خواص و پدیده‌های متفاوت در آن‌ها بیان خواهد شد. در ادامه به معادلات و مدل‌های پیشنهادی جهت مدل‌سازی عددی این سیالات در هندسه‌های مختلف به همراه توضیحی مختصر در مورد هر مدل اشاره خواهد شد. پس‌از آن خلاصه‌ای از تحقیقات پژوهشگران پیشین در زمینه‌ی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های خمیده ایستا را بیان کرده و در پایان ضمن معرفی تحقیق حاضر، به مشخصات کلی، فرضیات، محدودیت‌ها و جنبه‌های نوآوری، اهداف و کاربردها اشاره‌ای خواهیم کرد و در پایان ساختار کلی این تحقیق بیان می‌شود.

با رشد صنعت و گسترش سیالات مورد استفاده پژوهشگران با سیالاتی برخورد کردند که قوانین موجود حاکم بر سیالات نیوتنی در مورد آن‌ها صادق نبوده و پدیده‌های متفاوتی از جمله دارا بودن تنش تسلیم، بالا آمدن سیال از میله چرخان، وجود جریان‌های ثانویه و ... نسبت به سیالات نیوتنی در آن‌ها اتفاق می‌افتد [۱]. به همین خاطر شاخه‌ای جدید از علم مکانیک سیالات به نام رئولوژی^۱ که در آن به صورت خاص، مباحث پیرامون سیالات غیرنیوتنی بحث می‌شود به وجود آمد. با گسترش علم رئولوژی، سیالات غیر نیوتنی به گروه‌های بیشتری تقسیم شدند که سیالات ویسکوالاستیک^۲ یکی از شاخه‌های اصلی آن‌ها بوده و همان‌طور که از نام آن برمی‌آید تلفیقی از خاصیت ویسکوز و الاستیک است. جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی کاربردهای مهمی در بسیاری از صنایع و پزشکی دارد. با وجود این واقعیت که مطالعات بسیاری در ارتباط با این موضوع وجود دارد، اما مکانیسم شروع و توسعه جریان‌های ثانویه در کانال‌های خمیده کاملاً قابل درک نیست، مخصوصاً هنگامی که سیال ویسکوالاستیک باشد.

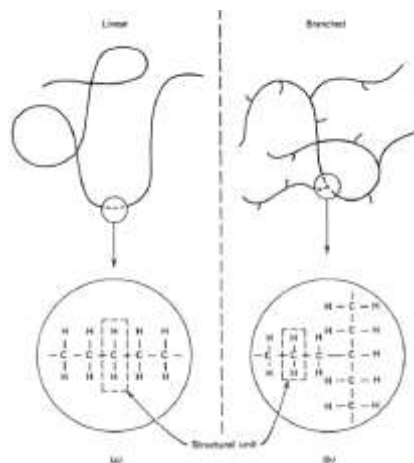
1 - Rheology

2 - Viscoelastic Fluid

جریان سیال در کانال‌های خمیده به دلیل اهمیت اساسی در مهندسی و کاربردهای صنعتی برای مدت‌زمان طولانی مورد مطالعه قرار گرفته‌است. امروزه جریان‌ها در کانال‌های غیردایروی در میکروسیلان‌شناسی دارای اهمیت بالایی است.

۱-۲- منشأ فیزیکی رفتار سیالات ویسکوالاستیک

سیالات غیر نیوتنی به علت ساختار متفاوت مولکولی رفتارهای متفاوت از خود نشان می‌دهند. پلیمرها اکثراً درشت مولکول بوده و ذرات آن‌ها از رشته‌های طویل و یا چند شاخه تشکیل شده است و این مطلب باعث افزایش بسیار زیاد وزن مولکولی آن‌ها شده و همچنین خواص شبیه خواص الاستیک در جامدات در آن‌ها ایجاد می‌کند. در شکل ۱-۱ مولکول خطی و شاخه‌دار پلی‌اتیلن که از واحدهای ساختاری کربن و هیدروژن تشکیل شده‌است نشان داده شده‌است. در سیالات نیوتنی وزن مولکولی معمولاً از ۱۰۰۰ کمتر است در حالیکه در مواد پلیمری وزن مولکولی بین ۱۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰۰ گرم بر مول است [۱].



شکل ۱-۱- نمایی شماتیک از یک ماده پلیمری (پلی‌اتیلن): a-خطی (پلی‌اتیلن سنگین)، b-شاخه‌دار (پلی‌اتیلن سبک)

سبک [۱]

در مواد پلیمری معمولاً مولکول‌ها دارای آرایش ثابتی نیستند و ممکن است آرایش آن‌ها در شرایط قرارگیری مختلف و حتی با زمان نیز تغییر کند. این تغییر آرایش موجب تغییر خواصی نظیر ویسکوزیته

می‌شود و چون این تغییر آرایش به‌طور آنی انجام نمی‌شود، لذا سبب وابستگی تغییر شکل‌های سیال به زمان می‌گردد؛ زیرا در ساختار مولکولی نیروهای بین‌اتمی مانند فنرهایی عمل می‌کنند که قادرند به ماده در حین تغییر آرایش، رفتار الاستیک نیز بدهند. به عبارت دیگر ماده از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان می‌دهد. در محلول‌های غلیظ و مذاب‌های پلیمری دارای وزن مولکولی بالا، شواهد بسیاری وجود دارد که نشان می‌دهد رفتار رئولوژیکی این مواد تحت تأثیر کنش‌های متقابل بسیار شدید مولکول‌ها است. این تأثیرات به قدری قوی هستند که گاهی رفتارهای مشابه با لاستیک‌های دارای پیوند عرضی را از خود نمایش می‌دهند. این مشاهدات منجر به بیان فرضیه‌ای شد که در آن نقاط کنش مولکول‌ها به عنوان محل‌های به هم گره‌خوردگی مولکولی در نظر گرفته می‌شد. لذا می‌توان رشته‌های پلیمری را به صورت شبکه‌ای در نظر گرفت که در این نقاط دارای اتصالات موقتی است. وجود این شبکه موقتی سبب بروز رفتارهای الاستیک (شبیه لاستیک) در محدوده‌های زمانی کوتاه می‌شود. همچنین ایجاد تغییر شکل در این مواد موجب از بین رفتن نقاط اتصال و کاهش ویسکوزیته می‌شود، بنابراین در شدت‌های برش بالا تراکم گره‌خوردگی‌ها و در نتیجه ویسکوزیته ماده کمتر است. همچنین از آنجاکه نقاط گره‌خوردگی انعطاف‌پذیر هستند و پیوندهای بین اتم‌های شبکه نیز نقش المان الاستیک را دارند، لذا در مجموع خاصیت الاستیک شبکه بالا است؛ بنابراین رفتار الاستیک این پلیمرها نسبت به محلول‌های رقیق پلیمری بیشتر است [۲].

پیچیدگی بسیار بالای رفتار پلیمرها سبب می‌شود که نتوان کل خواص رئولوژیکی این مواد را با یک خاصیت بیان نمود و برای این منظور حداقل به یک خاصیت الاستیک و یک خاصیت ویسکوز نیاز است. روش‌های مورد استفاده جهت اندازه‌گیری خواص رئولوژیکی تا حد زیادی تابع مشخصات کلی ماده مورد مطالعه هستند. از این نظر می‌توان مواد پلیمری را به گروه‌های زیر تقسیم‌بندی نمود [۲].

۱- مایعات ویسکوالاستیک دارای ویسکوزیته پایین (محلول‌های پلیمری رقیق)

۲- مایعات ویسکوالاستیک دارای ویسکوزیته بالا (محلول‌های غلیظ و مذاب‌های پلیمری)

۳- جامدات ویسکوالاستیک نرم، یعنی پلیمرهایی که به میزان کمی شبکه‌ای (الاستومر) یا تا حدی بلوری شده‌اند و در دمایی بالاتر از نقطه شیشه‌ای شدن خود قرار دارند.

۴- جامدات ویسکوالاستیک سخت مانند یک پلیمر شیشه‌ای با یک شبکه مستحکم

البته گاهی اوقات این گروه‌ها باهم تداخل پیدا می‌کنند و به عبارت دیگر روش‌هایی یافت می‌شود که می‌توانند چند گروه از تقسیم‌بندی‌های فوق را باهم تلفیق نمایند.

همان‌طور که گفته شد درشت مولکول و رشته‌ای بودن سیالات ویسکوالاستیک باعث به وجود آمدن اختلاف بین تنش‌های نرمال و در پی آن وقوع برخی پدیده‌های خاص در آن‌ها می‌شود. حال اگر جهت اصلی جریان را جهت ۱ و جهت تغییرات کمیت‌ها را جهت ۲ و جهت دیگر را ۳ فرض نماییم، داریم [۱]:

$$N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} \quad (1-1)$$

$$N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} \quad (2-1)$$

که به N_1 اختلاف تنش نرمال اول و به N_2 اختلاف تنش نرمال دوم می‌گویند و همچنین σ_{ii} مؤلفه‌های تانسور تنش در راستاهای بیان شده است. در حقیقت این اختلاف تنش‌ها در جریان سیالات نیوتونی صفر بوده ولی در سیالات غیرنیوتونی منشأ ایجاد پدیده‌های خاصی از قبیل بالا رفتن سیال ویسکوالاستیک از میله چرخان، تشکیل جریان‌های ثانویه، سیفون بدون لوله، تورم جریان خروجی از لوله و... که در مراجع [۳-۵] به تفصیل اشاره شده است، می‌شود. به علت افزایش موارد استفاده از سیالات ویسکوالاستیک در صنعت، نیاز به تحلیل خواص و رفتارهای این سیالات در هندسه‌های مختلف نیز افزایش یافته است. در ضمن تحلیل سه‌بعدی جریان سیالات ویسکوالاستیک به علت دستیابی به میدان‌های سرعت و تنش در هندسه‌های متفاوت نیز ضروری به نظر می‌رسد؛ زیرا که با داشتن این

اطلاعات می توان ابزارها و یا محصولات باکیفیت بالاتری را در فرآیند شکل دهی این مواد تولید کرد. بدین منظور معادلات متشکله گوناگونی جهت مدل سازی ترم تنش این سیالات پیشنهاد شده است که هرکدام بنا به محدودیت های موجود در شرایط خاصی و به منظور بررسی برخی پدیده ها توصیه می شود. در ذیل به معرفی و توضیح برخی از معادلات متشکله پیشنهادی می پردازیم.

۳-۱- معادلات ساختاری

در جریان سیال نیوتنی تنش برشی با اعمال ضریبی ثابت به نام ویسکوزیته به صورت خطی با گرادیان سرعت در ارتباط می باشد که معادله (۳-۱) بیانگر این رابطه می باشد [۶]:

$$\sigma = \eta_0 \gamma \quad (3-1)$$

درحالی که σ تانسور تنش سیال، η_0 ویسکوزیته سیال و γ تانسور نرخ برش سیال بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\gamma = \nabla V + \nabla V^T \quad (4-1)$$

که در آن V بردار سرعت و بالانویس T معرف وارون تانسور^۱ می باشد. در سیال نیوتنی ویسکوزیته سیال ثابت است و در تمامی حالات بدون تغییر باقی می ماند. ولی در حالتی که یک سیال غیرنیوتونی تحت تنش قرار می گیرد، از خود تغییر شکل نشان می دهد. تغییر شکل ابتدایی به مرور زمان ادامه یافته البته مدل آن تغییر می نماید که علت اصلی آن تغییرات ویسکوزیته سیال می باشد. در این حالت به نسبت تنش به تانسور تغییر شکل سیال مدول آرامش^۲ می گویند و با رابطه (۵-۱) نشان داده می شود [۷]:

1 - Transpose

2-Relaxation modulus

$$G(t) = \frac{T(t)}{\gamma} \quad (5-1)$$

در مدت زمان‌های کوتاه تغییر شکل، مدول آرامش به مقدار ثابتی می‌رسد که این وابستگی خطی تنش به کرنش را ویسکوالاستیسیته خطی^۱ می‌گویند. با افزایش تغییر شکل، مدول آرامش به شکل زیر تغییر می‌یابد [۷]:

$$G(t, \gamma) = \frac{T(t, \gamma)}{\gamma} \quad (6-1)$$

که در این حالت، مدول آرامش تابعی از زمان و کرنش می‌باشد و به آن رفتار ویسکوالاستیک غیر خطی^۲ می‌گویند. با افزایش تغییر شکل، مدول آرامش به شکل زیر تغییر می‌یابد. ویسکوالاستیسیته در حقیقت علت اصلی رفتار غیرخطی سیالات ویسکوالاستیک از قبیل نازک شونده‌گی تنش^۳، وجود اختلاف تنش نرمال، تورم جریان خروجی کانال و... می‌باشد که معادلات متشکله می‌بایست قادر به مدل‌سازی آن باشند.

در دهه‌های اخیر تعداد زیادی از معادلات ساختاری جهت مدل‌سازی رفتارهای ویسکوالاستیک غیرخطی جریان پلیمرهای مذاب و محلول پیشنهاد شده‌اند. در حالت تئوری می‌توان تعداد بی‌شماری معادله ساختاری به صورت رابطه‌ای بین بسط مشتقات یا انتگرال‌های تنش و کرنش بیان نمود که تنها بخشی از آن‌ها می‌توانند بیانگر رابطه تنش در حالت واقعی باشند. به‌طور کلی این مدل‌ها را می‌توان به دو گروه اصلی معادلات دیفرانسیلی^۴ و معادلات انتگرالی^۵ تقسیم‌بندی کرد. معادله ساختاری دیفرانسیلی اکثراً به صورت تابعی دیفرانسیلی از مشتقات تانسور تنش و نرخ تغییر شکل می‌باشد و در معادله ساختاری

1-Linear Viscoelasticity

2-Non-linear viscoelastic behavior

3 - Shear thinning

4 - Differential form equation

5 - integral form equation

انتگرالی، تابع تنش اکثراً به صورت انتگرالی از نرخ برش و تغییرات قبلی آن بیان می شود که این معادلات نسبت به معادلات دیفرانسیلی دارای ثابت های زمانی بیشتری بوده و قابلیت تطبیق بیشتری با جریان را از خود نشان می دهد. از طرف دیگر معادلات انتگرالی بسیار پیچیده بوده و استفاده از آن در روش های عددی چندان آسان نیست. ولی معادلات ساختاری دیفرانسیلی قابلیت سازگاری بیشتری با روش های عددی در هنگام مدل سازی جریان سیالات ویسکوالاستیک از خود نشان می دهد. از این رو بنا به ذات معادلات انتگرالی، از آن ها بیشتر در مدل سازی جریان های غیر دائم استفاده می شود.

از ساده ترین مدل های پیشنهادی که فقط قادر به مدل سازی پدیده نازک شوندگی برش^۱ در سیال ویسکوالاستیک می باشد، مدل های تعمیم یافته نیوتونی^۲ می باشند که در این مدل تنها ویسکوزیته تابعی از نرخ برش بوده و به صورت رابطه زیر بیان می شود [۸]:

$$\eta = f(\dot{\gamma}) \quad (۷-۱)$$

که در آن $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته^۳ بوده و به صورت معادله (۸-۱) بیان می شود:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} tr(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})} \quad (۸-۱)$$

جهت توصیف وابستگی ویسکوزیته به نرخ برش، معادلات گوناگونی توصیه شده است که از آن جمله مدل توانی^۴ که به صورت معادله (۹-۱) بیان می شود که در آن ویسکوزیته به صورت تابعی نمایی از نرخ برش در نظر گرفته می شود.

$$\eta = m\dot{\gamma}^{n-1} \quad (۹-۱)$$

که در آن m ضریب ثابت و n توان پاورلا می باشد. اگر $n < 1$ سیال نازک شونده برشی^۵ و اگر $n > 1$

1- Shear thinning

2 - generalized Newtonian model

3 - generalized shear rate

4 - Power law

5 - Shear thinning Fluid

سیال کلفت شونده برشی^۱ یا سیال دیلاتنت^۲ نام دارد. مدل دیگری که می‌تواند بیانگر رابطه بین ویسکوزیته و نرخ برش باشد، مدل کاریویاسودا^۳ می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌شود [۱]:

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (10-1)$$

که در آن η_0 ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر، η_{∞} ویسکوزیته سیال در نرخ برش بی‌نهایت، λ ثابت زمانی و n توان پاورلا می‌باشد. همچنین پارامتر بی‌بعد a بیانگر ناحیه انتقال از نرخ برش صفر به ناحیه پاورلا می‌باشد و در اکثر موارد معادل ۲ در نظر گرفته می‌شود.

در جریان دائم سیالات پلیمری که اثرات الاستیک چندان مهم نمی‌باشند، معادلات ساختاری تعمیم‌یافته نیوتنی می‌توانند جهت اهداف طراحی و مهندسی مورد استفاده قرار بگیرند. در این حالات مهم‌ترین مشخصه رئولوژیکی موردنظر برای این مذاب‌های پلیمری، وابستگی ویسکوزیته آن‌ها به نرخ برش می‌باشد.

۱-۳-۱- معادلات ساختاری ویسکوالاستیک

معادلات ساختاری خطی، ساده‌ترین عبارت برای بیان برخی جریان‌های وابسته به زمان سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد. این معادلات بیشتر در زمان‌هایی که سیال از حالت اولیه خود تغییرات زیاد و سریعی نداشته باشد، قابل استفاده می‌باشد. مدل ماکسول^۴ یکی از مدل‌های پایه در این گروه می‌باشد که می‌توان به صورت تلفیقی از یک جامد الاستیک (قانون هوک) و یک سیال ویسکوز (قانون نیوتن) به صورت رابطه (۱۱-۱) بیان می‌شود [۴]:

6 - Shear thickening Fluid

1- Dilatant

2 - Carreau Yasuda

1 -Maxwell

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (11-1)$$

که در آن λ_0 ثابت زمانی می‌باشد. برای یک جریان دائم که هیچ تغییرات تنشی در بعد زمان اتفاق نمی‌افتد، معادله فوق یک رفتار نیوتنی را پیش‌بینی می‌کند و هنگامی که ترم تنش شامل تغییرات سریعی باشد معادله فوق به قانون هوک تمایل بیشتری پیدا می‌کند [۴]. معادلات خطی دیگری بر پایه تلفیق خواص جامدات خطی و سیالات نیوتنی پیشنهاد شده است که از آن جمله می‌توان به معادلات کلون-ویت^۱، برگرز^۲، جفریز^۳ و... اشاره کرد که به تفصیل در مرجع [۴] به آن‌ها پرداخته شده است. در حالت کلی بنا به شرایط بیان شده توسط اولدروید^۴ که از مکانیک محیط پیوسته به دست آمده است، معادلات ساختاری پیشنهادی جهت مدل‌سازی تنش سیالات ویسکوالاستیک می‌بایست دارای شرایط زیر باشند [۹]:

- اصل قطعیت تنش: تنش در یک جزء براساس تاریخچه حرکت آن بیان می‌شود.
 - اصل اثر موضعی: در تعیین تنش یک نقطه مادی تنها حرکت در همسایگی کوچک آن مهم است و حرکت اجزاء خارج از همسایگی تأثیری در آن ندارد.
 - اصل ناوردایی مختصات: تانسور تنش و تاریخچه حرکت جسم مستقل از ناظر است.
 - اصل عدم تغییر حرکت صلب الحاقی: مدل بایستی مستقل از حرکت مطلق جسم باشد.
- هرچند که مدل‌های ویسکوالاستیک خطی روابط دیفرانسیلی ساده‌ای را بین تنش و نرخ برش پیش‌بینی می‌کنند، اما این مدل‌ها برخی از اصول فوق را نقض کرده و علاوه بر آن قادر به مدل‌سازی برخی از خواص سیالات ویسکوالاستیک مانند وجود اختلاف تنش نرمال و همچنین وابستگی ویسکوزیته به نرخ برش نمی‌باشند. از این‌رو معادلات ساختاری جدیدی که بعضاً دارای مشکلات فوق نبوده و قابلیت

1 -Kelvin- Voigt

2 -Burgers

3 -Jeffreys

4 -Oldroyd

بیشتری در مدل سازی پدیده های واقع در سیالات ویسکوالاستیک دارند، پیشنهاد شدند [۸].

یکی از معروف ترین مدل های غیر خطی پیشنهادی جهت تبیین رفتار سیالات ویسکوالاستیک، خانواده

مدل های اولدروید می باشد که در حالت کلی به صورت زیر نشان داده می شود [۱، ۱۰]:

$$\begin{aligned} \tau + \lambda_1 \tau_{(1)} + \frac{\lambda_3}{2} (\tau \gamma_1 + \gamma_1 \tau) + \frac{\lambda_5}{2} [tr(\tau)] \gamma_1 + \frac{\lambda_6}{2} [tr(\tau \gamma_1)] I = \\ -\eta_0 \left(\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)} + \lambda_4 \gamma_{(1)}^2 + \frac{\lambda_7}{2} [tr(\gamma_{(1)}^2)] I \right) \end{aligned} \quad (12-1)$$

که λ_i ضرایب معادله، $\gamma_{(1)}$ ، $\gamma^{(1)}$ به ترتیب مشتقات زمانی همرفتی همبسته^۱ و پاد همبسته^۲ ماتریس نرخ برش و $\tau_{(1)}$ ، $\tau^{(1)}$ به ترتیب مشتقات زمانی همرفتی همبسته و پاد همبسته ماتریس تنش می باشند و در حالت کلی اگر A را به عنوان ماتریسی دلخواه فرض نماییم، $A_{(i)}$ و $A^{(i)}$ ماتریس های مشتقات زمانی همرفتی همبسته و مشتقات زمانی همرفتی پاد همبسته ماتریس A مرتبه i هستند و به صورت زیر بیان می شوند [۱]:

$$\gamma^{(1)} = \nabla V + (\nabla V)^T \quad (1-13-1)$$

$$\gamma_{(1)} = (\nabla V)^T + \nabla V \quad (2-13-1)$$

$$\tau_{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} - \left\{ (\nabla V)^T \cdot \tau + \tau \cdot (\nabla V) \right\} \quad (3-13-1)$$

$$\tau^{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} + \left\{ (\nabla V) \cdot \tau + \tau \cdot (\nabla V)^T \right\} \quad (4-13-1)$$

$$A_{(n)} = \frac{DA^{(n-1)}}{Dt} - \left\{ (\nabla V)^T \cdot A^{(n-1)} + A^{(n-1)} \cdot (\nabla V) \right\} \quad (5-13-1)$$

1 -Covariant Convected Derivative of the Tensor

2 -Contra variant Convected Derivative of the Tensor

$$A^{(n)} = \frac{DA^{(n-1)}}{Dt} + \left\{ (\nabla V) \cdot A^{(n-1)} + A^{(n-1)} \cdot (\nabla V)^T \right\} \quad (۶-۱۳-۱)$$

مدل ۸ ثابت اولدروید قادر به ارائه رفتار بسیار کاملی از یک سیال ویسکوالاستیک است ولی بسیار پیچیده بوده و ناپایداری عددی آن بالا می‌باشد. این مدل در صورت صفر بودن بعضی از ضرایب آن به مدل‌های ساده‌تری تبدیل می‌شود که مدل‌های اولدروید-ای و اولدروید - بی از همه معروف‌تر بوده و به ترتیب در روابط (۱۴-۱)، (۱۵-۱) نشان داده شده است [۱]:

$$\tau + \lambda_1 \tau^{(1)} = \eta_0 (\gamma^{(1)} + \lambda_2 \gamma^{(2)}) \quad (۱۴-۱)$$

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} = \eta_0 (\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)}) \quad (۱۵-۱)$$

معادلات ساختاری دیگری با بسط معادله ماکسول و بر پایه تعریف مختصات همگرد^۱ نیز به دست آمده‌اند که می‌توان به معادله متشکله سیال مرتبه دو^۲ به شکل معادله (۱-۱۶-۱) اشاره کرد [۱]:

$$\tau = \eta_0 \gamma_{(1)} - \frac{1}{2} \Psi_{1,0} \gamma_{(2)} + \Psi_{2,0} \{ \gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)} \} \quad (۱-۱۶-۱)$$

که در آن $\Psi_{1,0}$ و $\Psi_{2,0}$ به ترتیب ضرایب اختلاف تنش نرمال اول و دوم در حالت تنش برشی صفر بوده که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\Psi_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2} = \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} \quad (۲-۱۶-۱)$$

$$\Psi_2 = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} = \frac{\tau_{22} - \tau_{33}}{\dot{\gamma}^2} \quad (۳-۱۶-۱)$$

حال اگر ضرایب معادله سیال مرتبه دو مانند $\Psi_{1,0}$ و $\Psi_{2,0}$ و η_0 را به عنوان توابعی از نرخ برش تعریف نماییم، در این حالت این معادله به معادله کریمینال اریکسون فیبلی^۳ تبدیل می‌شود که برای مدل سازی مذاب‌های پلیمری در حالت جریان برشی دائم نیز قابل به استفاده خواهد بود [۱]:

1- Co rotating frame of reference

2- Second order fluid (SOF)

3 -Criminale Erickson Filbey (CEF)

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\gamma_{(1)} - \frac{1}{2}\Psi_1(\dot{\gamma})\gamma_{(2)} + \Psi_2(\dot{\gamma})\{\gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)}\} \quad (17-1)$$

که در آن η ویسکوزیته، Ψ_1 ثابت اختلاف تنش نرمال اول، Ψ_2 ثابت اختلاف تنش نرمال دوم، $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته بوده و با استفاده از معادلات پیشنهادی توسط کاریو یاسودا^۱ از روابط زیر تعیین می شود.

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2tr(D^2)} \quad (18-1)$$

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty}) \times (1 + (\lambda \times \dot{\gamma})^a)^{\frac{n-1}{a}} \quad (18-2)$$

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = 2 \times \lambda \times (\eta_0 - \eta_{\infty}) \times (1 + (\lambda \times \dot{\gamma})^a)^{\frac{n-1}{a}} \quad (18-3)$$

و مقدار $\Psi_2(\dot{\gamma})$ را می توان تابعی خطی از ویسکوزیته یا اختلاف تنش نرمال اول به صورت رابطه (۱۸-۴) بیان کرد.

$$\Psi_2(\dot{\gamma}) = f(\eta(\dot{\gamma})) \text{ or } \Psi_2(\dot{\gamma}) = f(\Psi_1(\dot{\gamma})) \quad (18-4)$$

ازجمله مزایای این مدل می توان به امکان استفاده مستقیم توابع رئولوژیک وابسته به نرخ برش در مدل اشاره نمود. استفاده از این مدل در مصارف صنعتی رایج می باشد. لازم به ذکر است که معادله کریمینال اریکسون فیبلی قادر به مدل سازی رفتارهای تابع زمان سیالات ویسکوالاستیک نمی باشد. همچنین با استفاده از یک مختصات مرجع همگرد و مشتقات زمان فوق همرفتی^۲، مدل فوق همرفتی ماکسول^۳ که قادر به تحلیل جریان های وابسته به زمان سیالات ویسکوالاستیک می باشد، تبدیل می شود [۱]:

$$\tau + \lambda_0 \tau_{(1)} = \eta_0 \gamma_{(1)} \quad (19-1)$$

چندین مدل دیگر بر پایه مدل ماکسول که هرکدام قادر به مدل سازی یک یا دو پدیده غیرخطی

1 - Carreau-Yasuda

2 - Upper convected time derivative

3 - Upper convected Maxwell (UCM)

مرتبط با جریان سیالات ویسکوالاستیک می باشد شکل گرفته است که به صورت فرم کلی زیر است [۷]:

$$\tau + f_c(\tau, \frac{\tau_{(1)}}{2}) + \frac{1}{\lambda} \tau + f_d(\tau) = G\gamma_{(1)} \quad (۲۰-۱)$$

که f_d و f_c به ترتیب بیانگر نرخ تشکیل^۱ و نرخ زوال تنش^۲ بوده و در مدل های مختلف به شکل

جدول زیر تعریف می شوند [۷]:

جدول ۱-۱- مقادیر f_d و f_c به ازای معادلات متشکله مختلف [۷]

مدل	f_c	f_d	پارامترها
وایت-متزرنر ^۳	$a(\frac{1}{2}\gamma_{(1)} : \gamma_{(1)})$	—	a
لارسن ^۴	$\frac{\alpha}{3G}\gamma_{(1)} : \tau(\tau + GI)$	—	a, G
گزیکس ^۵	—	$\frac{\alpha}{\lambda G}\tau \cdot \tau$	α, λ, G
فن-تین-تنر ^۶	$\frac{\xi}{2}(\gamma_{(1)} \cdot \tau + \tau \cdot \gamma_{(1)})$	$\frac{1}{\lambda}(1 + \frac{\varepsilon}{G} \text{tr}(\tau))(\tau - I)$	$\varepsilon, \alpha, \lambda, G$

مدل وایت-متزرنر یک مدل نسبتاً ساده بوده ولی قادر به مدل سازی اختلاف تنش نرمال دوم نمی باشد

و همچنین مدل لارسن نیز در اکثر جریان ها نتایج منطقی را پیش بینی کرده ولی اختلاف تنش نرمال دوم

را معادل صفر ارزیابی می کند [۷].

1 - Rate of stress build up

2 - Rate of stress decay

3 - White - Metzner

4 - Larsen

5 - Geisekus

6 - Phan-Thien tanner

مدل گریکس نیز یکی از بهترین مدل‌ها در مدل‌سازی جریان‌های برشی بوده ولی در جریان‌های طولی در هندسه‌های پیچیده نتایج خوبی را ارائه نمی‌دهد [۷]. با جاگذاری مقادیر f_c و f_d در معادله (۱-۲۰) معادله متشکله گریکس به صورت رابطه (۱-۲۱) نشان داده می‌شود [۱۱]:

$$\tau_p + \lambda_h \tau_{p(1)} + \alpha \frac{\lambda_h}{\eta_p} (\tau_p \cdot \tau_p) = \eta_p \gamma_{(1)} \quad (1-21)$$

که در آن η_p لزجت محلول، λ_h زمان آسودگی^۱ محلول و α ضریب پویایی^۲ محلول می‌باشد. لازم به ذکر است که در این مدل فقط تنش الاستیک در معادله متشکله منظور شده است و تنش ویسکوز به صورت جدا در معادله مومنوم آورده شده است.

مدل فن-تین-تین نیز یکی از بهترین مدل‌هایی می‌باشد که در اکثر جریان‌ها، نتایج منطقی ارائه می‌دهد. این مدل بر اساس تئوری شبکه برای مدل‌سازی مذاب‌های پلیمری پیشنهاد شده است [۱۲]. علاوه بر معادلات فوق، معادلات متشکله دیگری نیز جهت مدل‌سازی ترم تنش سیالات ویسکوالاستیک پیشنهاد شده‌اند که از آن میان می‌توان به موارد زیر نیز اشاره کرد:

مدل راینر-ریولین^۳ یکی از مدل‌های غیرخطی ساده برای بررسی جریان‌های برشی سیالات ویسکوالاستیک است. در این مدل برخلاف مدل اولدروید-بی مقدار اختلاف تنش‌های نرمال اول صفر لحاظ شده، اما اختلاف تنش‌های نرمال دوم وجود دارد. به همین دلیل این مدل قادر به پیش‌بینی پدیده‌های ناشی از وجود اختلاف تنش‌های نرمال دوم مانند تشکیل جریان‌های ثانویه در کانال‌های غیر مدور بوده ولی پاسخ‌های آن چندان فیزیکی نمی‌باشد. بدین لحاظ استفاده از این مدل عملاً به پدیده‌شناسی اختلاف تنش نرمال دوم محدود شده است. معادله متشکله این مدل در حالت کلی به شکل معادله (۱-۲۲) می‌باشد [۱]:

1 – Relaxation time

2 – Mobility parameter

3 – Reiner-Rivlin

$$\tau = \eta(\text{II}, \text{III}) D + \psi_2(\text{II}, \text{III}) D.D \quad (1-22-1)$$

که در آن D تانسور نرخ تغییر شکل، η ویسکوزیته و ψ_2 ثابت اختلاف تنش نرمال دوم است.

همچنین II و III ناوردایی‌های تانسور تغییر شکل بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{II} = \text{tr}(D^2) \quad (2-22-1)$$

$$\text{III} = \text{tr}(D^3) \quad (3-22-1)$$

یکی دیگر از مدل‌های دیفرانسیلی موجود مدل دامبل^۱ است. این مدل بر اساس تئوری سینتیک

مولکولی برای محلول‌های رقیق پلیمری به دست آمده است که در آن تنش ماده به صورت مجموعی از

تنش پلیمری و نیوتنی به صورت معادله (۱-۲۳-۱) ارائه می‌شود [۱۳]:

$$\tau = \tau_p + \tau_s \quad (1-23-1)$$

که در آن تنش نیوتنی بر اساس رابطه نیوتن و تنش پلیمری به صورت رابطه (۲-۲۱-۱) بیان می‌شود:

$$Z\tau_p + \lambda_h(\tau_{p(1)} - \tau_p - \frac{b}{b+2}nkT\delta)\frac{D\ln Z}{Dt} = \frac{b}{b+2}nkT\lambda_h\gamma \quad (2-23-1)$$

که در آن λ_h ثابت زمانی و Z تابعی از ناوردایی اول تانسور نرخ برش بوده و به شکل معادله (۱-۲۱-۲)

(۳) بیان می‌شود:

$$Z = 1 + \frac{3}{b} \left(\frac{b}{b+2} - \frac{\text{tr}(\tau_p)}{3nkT} \right) \quad (3-23-1)$$

که در آن b نسبت انرژی پتانسیل بین مولکولی به انرژی حرارتی است. مدل دامبل، مدل بسیار

مناسبی جهت مدل سازی کشیدگی و تغییر شکل مولکول‌ها در اثر جریان محلول می‌باشد [۱۴].

یکی دیگر از مدل‌های موجود، مدل دیفرانسیلی بسط یافته پوم پوم^۱ [۱۵، ۱۶] می‌باشد که به صورت

معادله (۲۴-۱) نشان داده شده است:

$$\begin{aligned} V \cdot \nabla \tau - \nabla V^T \cdot \tau - \tau \cdot \nabla V + \lambda(\tau)^{-1} \cdot \tau &= 2GD \\ \lambda(\tau)^{-1} &= \frac{1}{\lambda_b} \left(\frac{\alpha}{G} \tau + F(\tau) I + G(F(\tau) - 1) \tau^{-1} \right) \\ F(\tau) &= 2re^{\mu(\Lambda^{-1})} \left(1 - \frac{1}{\Lambda} \right) + \frac{1}{\Lambda^2} \left(1 - \frac{\alpha \text{tr}(\tau \cdot \tau)}{3G^2} \right) \\ \Lambda &= \sqrt{1 + \frac{\text{tr}(\tau)}{3G}} \end{aligned} \quad (24-1)$$

معادلات ساختاری دیگری نیز از نوع دیفرانسیلی و انتگرالی پیشنهاد شده است که هر کدام قادر به مدل‌سازی پدیده‌های خاصی از سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد و به تفصیل در مراجع [۱، ۱۷، ۱۸] بیان شده است. علاوه بر مدل‌های بیان شده، معادله متشکله دیفرانسیلی را می‌توان به صورت تلفیقی از چند معادله متشکله به صورت معادله (۲۵-۱) اختیار نمود:

$$\tau = \sum_{i=1}^m \tau_i \quad (25-1)$$

که در این حالت بیان می‌شود که پاسخ‌های مواد پلیمری تلفیقی از پاسخ مولکول‌های مختلف با خواص متفاوت می‌باشد. در مدل‌سازی جریان یک سیال ویسکوالاستیک، در ابتدا می‌بایست خواص اصلی سیال مشخص شوند. در روند اندازه‌گیری خواص سیال ویسکوالاستیک که به آزمایش‌های رئومتری^۲ معروف می‌باشند، خواص سیال از قبیل تغییرات ویسکوزیته نسبت به نرخ برش، ثابت‌های زمانی و ضرایب اختلاف تنش نرمال اول و دوم نسبت به نرخ برش مشخص می‌شوند [۱۹، ۲۰]. همچنین با توجه به اینکه علاوه بر مذاب‌های پلیمری، محلول‌های پلیمری نیز قسمت عمده‌ای از سیالات ویسکوالاستیک را شامل

1 - eXtended Pom Pom (XPP)

2 - Rheometry Experiments

می‌شوند، در این موارد می‌بایست نسبت ویسکوزیته محلول^۱ به ویسکوزیته حلال^۲ نیز تعیین گردد. پس از مشخص شدن خواص سیال، با توجه به هندسه مورد بررسی و همچنین خواص سیال می‌توان از بین معادلات ساختاری پیشنهادی، مناسب‌ترین مدل را به شکلی که در جریان موردنظر، کارایی بالاتری از خود نشان دهد، انتخاب نمود. چرا که تاکنون هیچ معادله ساختاری که قادر به مدل‌سازی تمامی پدیده‌های ویسکوالاستیک بوده و جهت استفاده در تمامی جریان‌های سیالات ویسکوالاستیک مناسب باشد پیشنهاد نشده‌است و تمامی آن‌ها در جریان‌ها و حالات خاصی جواب‌های منطقی می‌دهند. به‌عنوان مثال برخی از معادلات ساختاری فقط برای مدل‌سازی محلول‌های رقیق پلیمری توصیه می‌شوند و یا برخی دیگر از معادلات ساختاری موجود، در مدل‌سازی جریان‌های برشی و یا جریان‌های طولی جواب‌های قابل قبولی ارائه نمی‌دهند. از این‌رو بررسی مدل‌های موجود بنا بر خواص سیال موردنظر و همچنین هندسه مورد بررسی جهت انتخاب مدل مناسب لازم به نظر می‌رسد.

در این تحقیق بنا به هندسه مورد بررسی و شرایط موجود، معادله ساختاری گزیکس مدل‌سازی تنش مورد استفاده قرار گرفته است که در فصل دوم به تفصیل در مورد آن توضیحاتی ارائه خواهد شد.

۴-۱- تاریخچه

در این بخش به بررسی مطالعات و تحقیقاتی که در زمینه‌ی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های خمیده صورت گرفته است می‌پردازیم، جریان سیالات نیوتنی در کانال‌های بسته خمیده کاملاً شناخته شده بوده و از دهه دوم قرن بیستم تاکنون تحقیقات بسیاری در قالب مطالعات عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی در مورد جریان این سیالات انجام شده است. در مقابل، تحقیقات اندکی در مورد جریان و انتقال حرارت سیالات غیر نیوتنی و به‌ویژه سیالات ویسکوالاستیک در کانال‌های خمیده صورت

1 - Solution Viscosity

2 - Solvent Viscosity

گرفته است. از جمله مشکلات انجام این تحقیقات، ترکیب اثرات هندسه جریان (به خصوص انحنای مسیر) با رفتار غیرخطی مرتبه بالای ناشی از هر دو خاصیت الاستیک و ویسکوز این دسته از سیالات است که این مطالعات را با دشواری فوق العاده‌ای روبرو نموده است. اکثر تحقیقات پژوهشگران گذشته مربوط به مقاطع مدور بوده و تحقیق در مورد کانال‌های خمیده غیر مدور بسیار اندک است.

۱-۴-۱- مجاری خمیده دارای مقطع مدور

علاقه‌مندی به جریان در کانال‌های خمیده ناشی از نیروی گریز از مرکز ابتدا توسط اوستیک^۱ [۲۱] در سال ۱۹۱۱ میلادی مطرح شد و بعدازآن در سال ۱۹۲۷ و ۱۹۲۸ دین^۲ [۲۲، ۲۳] در مقالات خود پاسخ‌های تحلیلی برای جریان سیالات نیوتنی در کانال‌های خمیده برای شعاع‌های انحنای بزرگ ارائه نمود. دین پاسخ‌ها را به روش حساب اختلالات به دست آورد و جریان‌های ثانویه ناشی از انحنای بزرگ را به صورت تحلیلی نشان داد. این جریان‌های ثانویه به گردابه‌های تیلور-گورتلر^۳ معروف هستند که نتایج به دست آمده نتایج آزمایشگاهی قبل را تأیید می‌نمود وی برای بیان بزرگی این جریان‌های ثانویه عدد دین را به عنوان نرخ اینرسی یا همان نیروی گریز از مرکز به نیروهای ویسکوز به صورت زیر تعریف کرد:

$$Dn = Re\delta^{1/2} \quad (۲۶-۱)$$

که Re عدد رینولدز، δ نسبت انحناء است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta = \left(\frac{D_h}{2}\right)/R \quad (۲۷-۱)$$

در این رابطه R شعاع انحنای کانال (متوسط شعاع‌های داخلی و خارجی) و D_h قطر هیدرولیکی کانال

است. عدد دین پارامتر مناسبی برای مطالعه میزان مقاومت جریان و شدت جریان‌های ثانویه ناشی از انحناء است، درواقع عدد دین همان عدد رینولدز است که انحنای مسیر جریان در آن تصحیح شده است. معمولاً

1-Eustice

2-Dean

3-Taylor-Görtler vortices

معیارهای پایداری جریان سیال نیوتنی در کانال‌های خمیده براساس این عدد تعریف می‌شوند. عدد دین منجر به بروز ناپایداری و تشکیل یک جفت جریان ثانویه جدید می‌شود که دارای جهت چرخش معکوس نسبت به گردابه‌های تیلور-گورتلر بوده و به گردابه‌های دین معروف هستند. اثرات جریان ثانویه می‌تواند در بهتر شدن انتقال حرارت و جرم، افزایش سطح مقطع اختلاط و زمان ماندگاری ذرات سیال در بین آن‌ها مفید باشد یا باعث ناپایداری برای ناحیه گذرا به توربولانس در مقایسه با کانال مستقیم شود. جریان ثانویه در کانال‌های خمیده ناشی از عدم تعادل نیروهای ناشی از اثرات گریز از مرکز، گرادیان فشار شعاعی ایجاد می‌کند که با بازگشت جریان از دیوار بیرونی به دیوار داخلی در امتداد بالا و پایین دیواره‌های کانال منجر به جریان از ناحیه دیوار داخلی به دیوار خارجی از قسمت مرکزی سطح مقطع کانال می‌شود.

جریان ثانویه در کانال خمیده با سطح مقطع مربعی با یک جفت ورتیسیته که سطح مقطع داخلی کانال را اشغال می‌کند توصیف می‌شود. در اولین تحقیقات انجام‌شده در زمینه‌ی جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های خمیده بسته توماس و والتز^[۲۴]، در سال ۱۹۶۳ به بررسی و مدل‌سازی جریان‌های ثانویه تشکیل‌شده حاصل از اثر خواص الاستیک سیال پرداختند، آن‌ها در تحقیقاتشان از مدل سیال اولدروید بی برای مدل‌سازی تنش استفاده کردند. همانند دین، آن‌ها با استفاده از روش حساب اختلالات پاسخ‌هایی را برای جریان سیال اولدروید-بی در کانال خمیده با مقطع مدور به شعاع R به دست آوردند و نشان دادند که تفاوت عمده‌ای میان شکل جریان‌های ثانویه سیال نیوتنی و سیال اولدروید-بی وجود ندارد و همچنین اثر عمده خواص الاستیک سیال در خطوط مسیر جریان مشاهده می‌شود؛ به عبارت دیگر با رها کردن ذرات در جریان، مسیر آن‌ها در سیال ویسکوالاستیک بسیار متفاوت از سیال نیوتنی است. ازجمله نتایج جالب‌توجه این پژوهش، افزایش میزان دبی جریان با ازدیاد خاصیت الاستیک سیال در گرادیان فشار

1 - Thomas and Walters

محوری ثابت است البته نتایج مربوط به این افزایش دبی، تنها در اعداد وایزنبرگ بسیار کوچک (زمان‌های آسودگی از تنش بسیار کوچک) معتبر است.

در سال ۱۹۶۷ توپک‌اوقلو^۱ [۲۵] با استفاده از روش حساب اختلالات، رابطه تحلیلی را برای دبی سیال نیوتنی در لوله‌های خمیده ارائه نمود. وی نشان داد که در نسبت‌های انحنای کوچک، دبی سیال نیوتنی با توان دوم نسبت انحنا متناسب است.

در سال ۱۹۸۵ ایموتو^۲ و همکارانش [۲۶] با استفاده از روش حساب اختلالات، پاسخ‌های تحلیلی را برای جریان آرام توسعه‌یافته سیال توانی در لوله‌های دارای انحنای مختلف به‌دست آوردند، آن‌ها نشان دادند که جریان‌های ثانویه با ازدیاد مقدار عدد دین، افزایش و با ازدیاد مقدار n کاهش می‌یابد، همچنین هنگامی که جهت تقعر کانال تغییر می‌کند جهت چرخش جریان‌های ثانویه معکوس می‌شود. البته معکوس شدن این جریان‌ها آنی نبوده و اندکی پس از تعویض تقعر اتفاق می‌افتد. میزان تأخیر مربوط به معکوس شدن جهت چرخش این جریان‌ها، با افزایش عدد رینولدز افزایش می‌یابد.

یک سال پس‌از این تحقیق، ایموتو و همکارانش [۲۷] تحلیل کاملاً مشابهی را برای جریان سیال ویسکوالاستیک انجام دادند. در پژوهش جدید، هندسه جریان و روش تحلیل کاملاً مشابه تحقیق قبلی آن‌ها بوده و تنها تفاوت آن استفاده از مدل وایت-مترنر برای معادله متشکله سیال ویسکوالاستیک است. آن‌ها تأیید کردند که تقویت خاصیت الاستیک سیال سبب می‌شود تا جریان سیال ویسکوالاستیک زودتر با انحنای مسیر تطبیق یابد. همچنین آن‌ها نشان دادند که تقویت خاصیت الاستیک سیال سبب افزایش شدت جریان‌های ثانویه و دور شدن موقعیت مرکز این جریان‌ها از مرکز کانال می‌شود؛ بنابراین در سال ۱۹۹۲ داس^۳ [۲۸] و در سال ۱۹۸۶ ایموتو و همکاران [۲۷] به‌طور مستقل تأیید کردند که جریان ثانویه یک سیال صرفاً لزج پاورلو (ایموتو) و بینگهام (داس) ضعیف‌تر از یک سیال ویسکوالاستیک (با بررسی

2- Topakoglu

3- Iemoto

1- Das

مدل وایت-متزنر) در یک لوله خمیده است.

در سال ۱۹۹۰ فن تین و ژانگ^۱ [۲۹] برای جریان محلول اولدروید بی بین دو سیلندر متحدالمرکز با عدد انحنای کوچک حل تشابهی ارائه کردند و نشان دادند که حرکات جنبشی جریان بسیار نزدیک به سیال نیوتنی تحت همان شرایط است و در این مسئله جریان ثانویه وجود ندارد. در این تحلیل، انحنای داخلی به عنوان یک دیواره جامد و انحنای خارجی به صورت یک مرز صلب دارای تزریق سیال (شرط مرزی عدم لغزش در جهت مماسی و یک سرعت در جهت شعاعی) در نظر گرفته شد.

در سال ۱۹۹۱ بون^۲ و همکاران [۳۰] با استفاده از مدل سیال مرتبه دو و UCM و روش حساب اختلالات، جریان سیال ویسکوالاستیک را در کانال‌های دایروی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها مطالعه خود را بر روی میزان دبی جریان خزشی در لوله خمیده متمرکز کردند. آن‌ها نشان دادند که وجود خم در مسیر جریان سیال UCM در گرادیان فشارهای بسیار کوچک و جریان سیال مرتبه دو در محدود بزرگی از مقادیر گرادیان فشار (اما برای سیال خزشی)، سبب کاهش مقاومت در برابر جریان نسبت به کانال‌های مستقیم می‌شود.

در سال ۱۹۹۳ سارین^۳ [۳۱] تحقیقی مشابه پژوهش توماس و والتز انجام داد با این تفاوت که سارین اثر تغییرات کوچک شعاع انحنا را مورد مطالعه قرارداد، وی در پژوهش خود از سیال الدروید بی برای معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک استفاده کرد، وی نشان داد که افزایش خاصیت الاستیک سیال باعث افزایش شدت جریان‌های ثانویه می‌شود به طوری که در انحنای ثابت شدت جریان ثانویه سیال ویسکوالاستیک با عدد دبورا، ۴۶ برابر سیال نیوتنی (عدد دبورا برابر صفر) است و در انحنای متغیر یک تأخیر در بروز جریان‌های ثانویه به وجود می‌آید که میزان این تأخیر برای جریان‌های دارای خواص الاستیک قوی‌تر، بیشتر است همچنین تغییر انحنا سبب جابجا شدن موقعیت مرکز جریان‌های ثانویه و

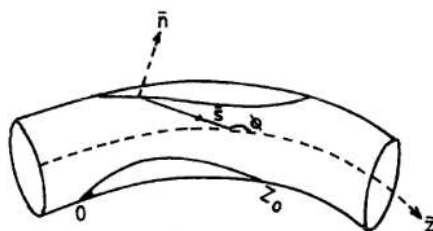
2- Phan-Thien. and Zheng

1- Bowen

2- Sarin

ماکزیمم سرعت محوری می‌شود. با افزوده شدن بر خاصیت الاستیک سیال، موقعیت مرکز گردابه‌ها و ماکزیمم سرعت محوری بیشتر به سمت دیواره کانال متمایل می‌شود و حساسیت موقعیت مرکز گردابه‌ها و نیز ماکزیمم سرعت محوری به تغییرات انحنا در سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی بسیار بیشتر است، نتایج این تحقیق فقط در اعداد دین کوچک معتبر است.

در تحقیق مشابه دیگری در سال ۱۹۹۷ سارین [۳۲] جریان پایدار در داخل کانال‌های خمیده با مقاطع بیضوی گوناگون را بررسی کرد و اثرات عدد دبور در موقعیت حداکثر سرعت محوری و مرکز گردابه‌ها را مورد مطالعه قرار داد و نشان داد ایجاد تغییر در هندسه جریان و نیز خاصیت الاستیک سیال سبب تغییر موقعیت مرکز جریان‌های ثانویه می‌شود. در شکل (۱-۲) هندسه جریان در این تحقیق آمده است.



شکل ۱-۲- هندسه تحقیق سارین [۳۲]

شرما و پرکاش^۱ [۳۳] در سال ۱۹۷۷ با صرف نظر از اختلاف تنش نرمال دوم تنها به اثر اختلاف تنش نرمال اول در جریان سیال مرتبه دو توجه نمودند. آن‌ها از سیال مرتبه دو به عنوان معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک استفاده کردند و تنها به ترم مرتبه اول سری حساب اختلالات برای محاسبات خود بسنده کردند، آن‌ها نشان دادند که ازدیاد اختلاف تنش نرمال اول باعث افزایش شدت جریان‌های ثانویه در لوله خمیده می‌شود. به‌طور کلی اعمال اثر اختلاف تنش نرمال دوم در معادله متشکله سیال مرتبه دو می‌تواند به بروز شرایط عدم یکتایی در محاسبه میدان سرعت به روش حساب اختلالات منجر شود.

یکی از کامل‌ترین تحقیقات صورت گرفته در زمینه‌ی جریان سیالات ویسکوالاستیک در کانال‌های

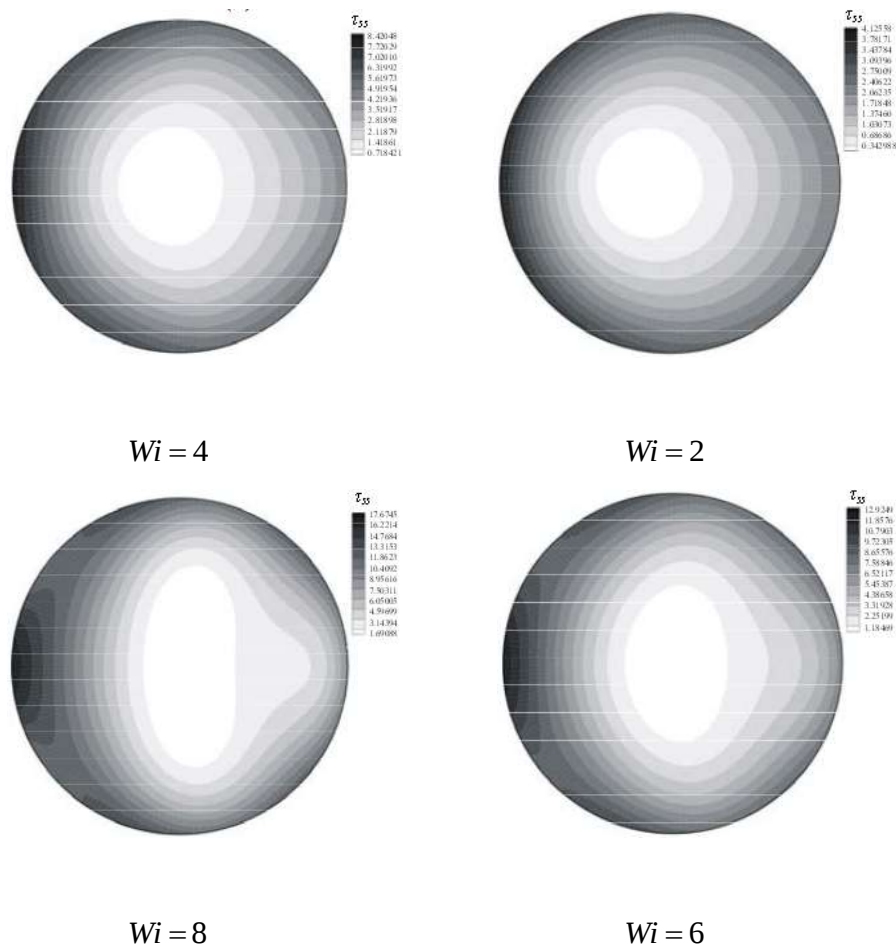
1- Sharma. and Prakash

خمیده مدور پژوهش فان^۱ و همکاران [۳۴] در سال ۲۰۰۱ است، آن‌ها در پژوهش خود از مدل سه ثابتۀ اولدروید که شامل مدل‌های فوق همرفتی ماکسول و مدل الدروید-بی است استفاده کردند. در مدل سه ثابتۀ اولدروید اثر اختلاف تنش نرمال دوم لحاظ شده است که در پژوهش‌های گذشته در کانال‌های خمیده مدور این اثر بررسی نشده بود. ازجمله نتایج این پژوهش این بود که اختلاف تنش نرمال دوم منفی اثر معکوس دارد، یعنی شدت جریان‌های ثانویه را کاهش می‌دهد و باعث کاهش شدید مقاومت انحنا در برابر جریان در اعداد انحنای کوچک می‌شود.

با توجه به مشکلات روش حساب اختلالات برخی از محققین تلاش نمودند که از سایر روش‌های تحلیلی برای مطالعه این جریان استفاده نمایند.

ژانگ^۲ و همکاران [۳۵] در سال ۲۰۰۶ با استفاده از روش گالرکین^۳ حل نیمه‌تحلیلی را برای جریان سیال اولدروید بی در یک کانال خمیده با مقطع عرضی دایروی ارائه نمودند. آن‌ها با در نظر گرفتن بسط وزنی برای پارامترهای جریان و اعمال انتگرال‌گیری گالرکین، معادلات ثانویه‌ای به‌دست آوردند و به‌طور عددی اقدام به حل آن‌ها نمودند و ادعا کردند که حل ارائه شده در محدوده وسیعی از اعداد وایزنبرگ معتبر است آن‌ها شدت جریان ثانویه، سرعت محوری و تنش نرمال محوری را موردبررسی قرار دادند. در شکل ۱-۳ توزیع تنش نرمال محوری برای $Re=0$ و اعداد وایزنبرگ مختلف نشان داده شده است، مطابق این شکل با افزایش عدد وایزنبرگ ماکزیمم تنش نرمال محوری به سمت دیواره خارجی لوله متمایل می‌شود.

2- Fan
1- Zhang
2- Galerkin



شکل ۱-۳- توزیع تنش نرمال محوری در جریان خزشی در اعداد وایزنبرگ مختلف [۳۵]

در سال ۲۰۱۰ نوروژی و همکاران [۳۶] انتقال حرارت جریان کاملاً توسعه‌یافته جریان سیال اولدروید-بی را در یک لوله خمیده تحت شار حرارتی ثابت در دیواره با روش حساب اختلالات به‌صورت تحلیلی بررسی کردند، بر اساس این حل، توزیع دمای نامتقارن جریان دین به‌صورت تحلیلی به‌دست آمد و اثرات پارامترهای جریان در میدان جریان به‌طور دقیق بررسی شد. نتایج تحلیلی آن‌ها نشان داد که افزایش عدد وایزنبرگ، نسبت ویسکوزیته، نسبت انحنا و عدد پرانتل منجر به افزایش انتقال حرارت در جریان سیال اولدروید-بی می‌شود.

در سال ۲۰۱۴ نوروژی و همکاران [۳۷] یک راه‌حل تحلیلی جدید برای جریان ویسکوالاستیک در

کانال‌های خمیده با مقطع بیضوی را برای اولین بار ارائه کردند، در این تحقیق هم همانند تحقیقات گذشته ایشان نسبت انحنا به عنوان پارامتر اغتشاش در نظر گرفته شد و مدل الدروید-بی به عنوان معادله ساختاری استفاده شد، در این تحقیق اثر هندسه و عدد وایزنبرگ و عدد رینولدز در سرعت محوری و جریان‌های ثانویه و دبی مورد مطالعه قرار گرفت. آن‌ها نشان دادند که جریان‌های ثانویه در کانال‌های خمیده بیضوی در جریان خزشی ویسکوالاستیک ایجاد می‌شود و با افزایش عدد وایزنبرگ شدت این جریان‌های ثانویه و ضریب درگ افزایش می‌یابد.

تحقیقات فراوانی نیز در خصوص جریان و انتقال حرارت سیال توانی در مجاری خمیده صورت گرفته است که در اینجا به همین چند بیان از تحقیقات پیشین بسنده می‌کنیم.

۱-۴-۲- مجاری خمیده دارای مقطع غیرمدور

در این قسمت خلاصه‌ای از تحقیقات پیشین انجام‌شده در زمینه‌ی جریان سیالات نیوتنی و ویسکوالاستیک در کانال‌های خمیده غیرمدور را بیان می‌کنیم.

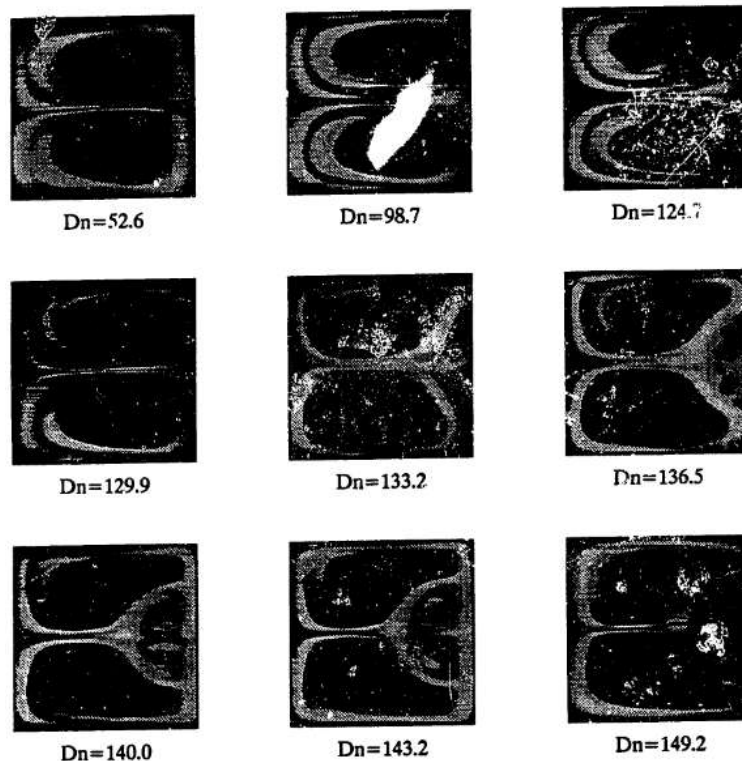
۱-۴-۲-۱- جریان سیالات نیوتنی

در اولین تحقیقات انجام‌شده در کانال‌های خمیده دارای مقطع غیرمدور بارا^۱ [۳۸، ۳۹] در سال ۱۹۹۱ جریان سیال نیوتنی در کانال خمیده دارای مقطع مربعی را به روش عددی و آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار داد. وی آزمایش‌های خود را در نسبت انحنا 0.35 و اعداد دین مختلف روی یک کانال خمیده 270° درجه انجام داد. بارا در تحقیقات خود بیشتر بر روی اثر ناپایداری دین در جریان سیال نیوتنی متمرکز گردید. ناپایداری دین یکی از پدیده‌های جالب توجه در مجاری خمیده است. وی نشان داد که تا عدد دین 125 جریان‌های ثانویه به شکل یک جفت جریان ثانویه تیلور-گورتلر ظاهر می‌شوند. این جریان‌های ثانویه

1-Bara

ناشی از اثر نیروی گریز از مرکز ناشی از انحنا هستند. مطابق آزمایش‌های بارا، با افزایش عدد دین تا ۱۳۷، فرم جریان‌های ثانویه به دو جفت جریان ثانویه تغییر می‌یابد؛ به عبارت دیگر علاوه بر جریان‌های ثانویه تیلورگورتلر، یک جفت جریان ثانویه جدید در ناحیه نزدیک دیواره خارجی به وجود می‌آید. پدیدار شدن این جریان ناشی از تمایل فوق‌العاده زیاد توزیع سرعت محوری به سمت دیواره خارجی و زیاد بودن نیروی گریز از مرکز در این ناحیه است که منجر به بروز ناپایداری در جریان می‌شود. این جریان‌های ثانویه به گردابه‌های دین مشهور بوده و نسبت به گردابه‌های تیلورگورتلر دارای جهت چرخش معکوس و شدت کمتری هستند. در شکل ۴-۱ توزیع جریان‌های ثانویه در اعداد دین مختلف در $\theta = 220^\circ$ نشان داده شده است.

در اینجا وجود جریان‌های ثانویه جدید در نزدیکی دیواره خارجی کاملاً مشهود است همان‌طور که در شکل ۴-۱ نشان داده شده است با افزایش عدد دین اندازه و شدت گردابه‌های دین بزرگ‌تر می‌شود.



شکل ۴-۱- خطوط جریان‌های ثانویه سیال نیوتنی در اعداد دین مختلف در $\theta = 220^\circ$ در پژوهش بارا [۳۹]

ماشالکار و دواراجان^۱ [۴۰] در سال ۱۹۷۶ طی مقالاتی نشان دادند که در هسته جریان در کانال خمیده گرادیان فشار شعاعی با اثر نیروی گریز از مرکز بالانس می‌شود اما در نزدیکی دیواره داخلی و خارجی، مقدار سرعت محوری و در نتیجه نیروی گریز از مرکز اندک است. برای حفظ بالانس بین نیروها، مکانیسم مومنتوم وارد عمل شده و جریان‌های ثانویه پاد چرخان تیلورگورتلر ایجاد می‌شوند.

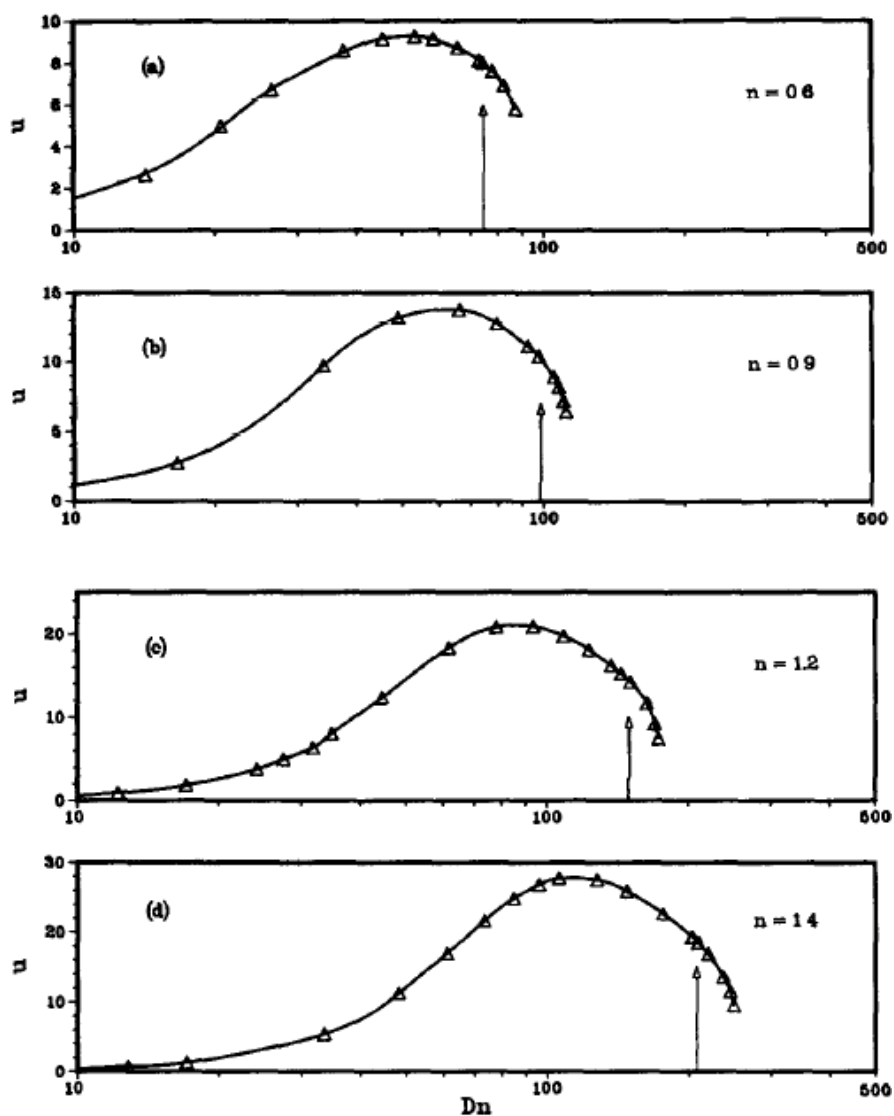
در سال ۲۰۱۳ نوروزی و بیگلری [۴۱] حل کاملاً تحلیلی به روش حساب اختلالات را برای جریان سیال نیوتنی در کانال خمیده با مقطع مستطیلی ارائه کردند. در این تحقیق نسبت انحنا به عنوان پارامتر اغتشاش در نظر گرفته شد. آن‌ها در پژوهش خود اثر انحنا کانال و عدد رینولدز در میدان جریان را به‌طور مفصل بررسی کردند و نشان دادند که روش حساب اختلالات برای اعداد دین کوچک مورد قبول است.

۱-۴-۲-۲- جریان سیالات غیرنیوتنی

تحقیقات گذشته مرتبط با پژوهش حاضر یک سری مطالعات جریان‌ها در فضاهای حلقوی با مقطع عرضی مستطیلی است. نخستین تحقیق در مورد جریان سیالات غیرنیوتنی در کانال‌های خمیده غیر مدور برای مدل توانی در سال ۱۹۸۶ توسط شانسینی و نانداکومار^۲ [۴۲] انجام شده است، آن‌ها پدیده ناپایداری دین را در تحقیق خود مورد مطالعه قرار دادند ناپایداری دین و پدیده به وجود آمدن گردابه‌های جدید اصطلاحاً به پدیده شاخه‌ای شدن نیز معروف است آن‌ها نشان دادند که اثر توان مدل توانی بر گردابه‌های دین تنها در مقدار عدد دین بحرانی است؛ به عبارت دیگر کاهش مقدار n به کاهش عدد دین منجر می‌شود. در شکل ۵-۱ نمودار توزیع سرعت محوری بر حسب دین در یک موقعیت خاص برای n های مختلف رسم شده است همان‌طور که در شکل مشخص است با افزایش n مقدار عدد دین بحرانی که در آن پدیده شاخه‌ای شدن می‌افتد بیشتر می‌شود.

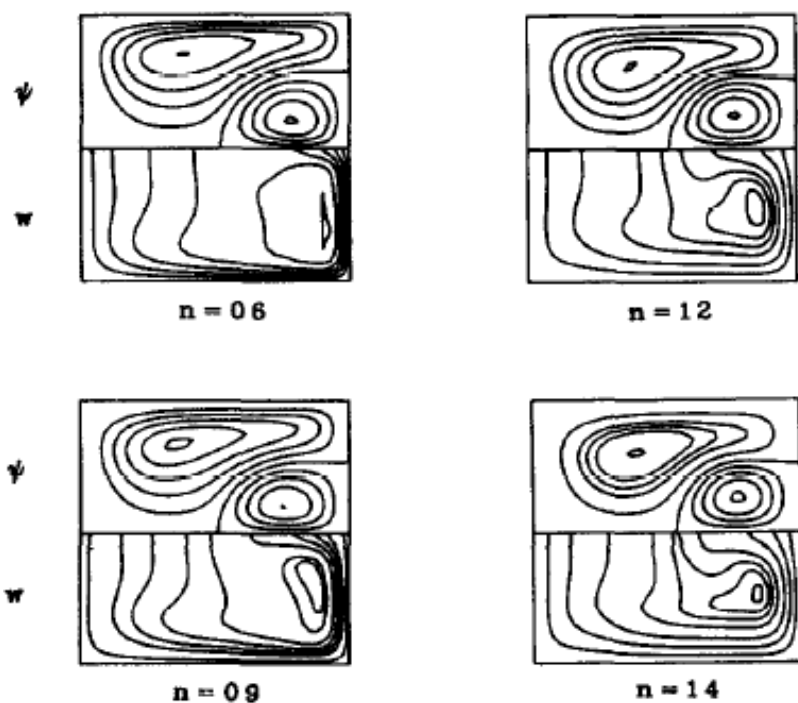
1- Mashelkar and Devarajan

1- Shanthini. and Nandakumar

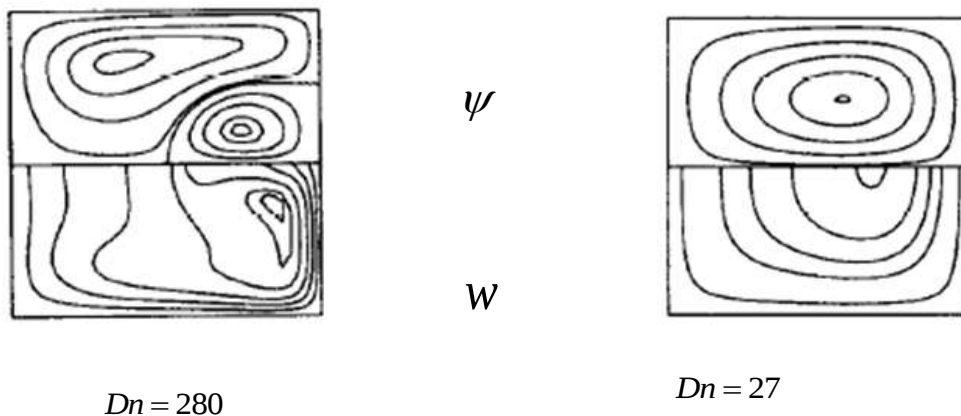


شکل ۱-۵- توزیع سرعت محوری برحسب دین در یک موقعیت خاص برای n های مختلف [۴۲]

همچنین آن‌ها نشان دادند که توزیع سرعت محوری و گردابه‌های دین مستقل از n مدل توانی است که در شکل ۱-۶ و شکل ۱-۷ کاملاً مشخص است و تعداد گردابه‌ها تنها وابسته به عدد دین است، با افزایش عدد دین از یک مقدار بحرانی تعداد گردابه‌ها از یک جفت به دو جفت افزایش می‌یابد و هرچه عدد دین بزرگ‌تر شود شدت و اندازه گردابه‌های جدید ایجاد شده بیشتر می‌شود که نتیجه بارها که برای سیال نیوتنی بررسی کرده بود را تأیید می‌کرد.



شکل ۱-۶- توزیع سرعت محوری و گردابه‌های دین در n های مختلف [۴۲]



شکل ۱-۷- توزیع سرعت محوری و گردابه‌ها در اعداد دین مختلف [۴۲]

در سال ۱۹۸۹ احمدیان و همکاران [۴۳] جریان و انتقال حرارت سیال توانی را در کانال‌های خمیده دارای مقطع مربعی بررسی نموده‌اند. در تحقیق آن‌ها جریان آرام سه‌بعدی دائم و بدون انجماد بخشی از پلیمر در ابتدا مذاب در نظر گرفته شد.

در سال ۱۹۹۲ جو و شاگفه^۱ [۴۴] طی مقالاتی ناپایداری جریان سیال اولدروید بی در کانال‌های خمیده (جریان بین دو صفحه خمیده که قبلاً مورد مطالعه قرار نگرفته بود) را مورد مطالعه قرار دادند، آن‌ها معادله‌ای پایداری برای سیال اولدروید بی (مشابه معادله اورسامرفیلد در سیال نیوتنی) به دست آوردند و نشان دادند که افزایش خاصیت الاستیک سیال (عدد دبورا) می‌تواند به بروز ناپایداری در جریان منجر شود. در سال ۲۰۰۰ المبایه^۲ و همکاران [۴۵] اثر دما و خروج از مرکز مقطع کانال بر پایداری جریان ویسکوالاستیک را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند افزایش خاصیت الاستیک سیال باعث می‌شود ناپایداری دین سریع‌تر اتفاق بیافتد و با مقایسه ویژگی‌های ناپایداری‌های جریان ویسکوالاستیک دین و تیلور-کوئت نشان دادند که حرارت ویسکوز تأثیرات مختلف در دو جریان دارد، برای $Pe=10000$ ناپایداری تیلور-کوئت از حالت غیرمتقارن و وابسته به زمان به حالت متقارن و دائم تغییر می‌کند در حالی که برای $Pe=100000$ ناپایداری دین از حالت متقارن و دائم به حالت غیرمتقارن و وابسته به زمان تغییر می‌کند.

در همان سال سورشکومار و آوگوستی^۳ [۴۶] تحقیق مشابهی را انجام دادند. آن‌ها از روش شبه طیفی نظم چبیشف-فوریه برای گسسته سازی معادلات حاکم و از مدل فوق همرفتی ماکسول به عنوان سیال ویسکوالاستیک استفاده کردند و تأیید کردند که افزایش خاصیت الاستیک سیال می‌تواند به بروز ناپایداری در جریان منجر شود.

در سال ۲۰۰۵ وو^۴ [۴۷] جریان خزشی و انتقال حرارت مواد پلیمری را در کانال خمیده مورد بررسی قرار داده است. وی معادله متشکله وایت-متزنر به عنوان مدل ویسکوالاستیک استفاده کرد. در این تحقیق به دلیل کوچک بودن عدد دین از نیروی گریز از مرکز در معادله مومنتم صرف نظر شده است. همچنین در

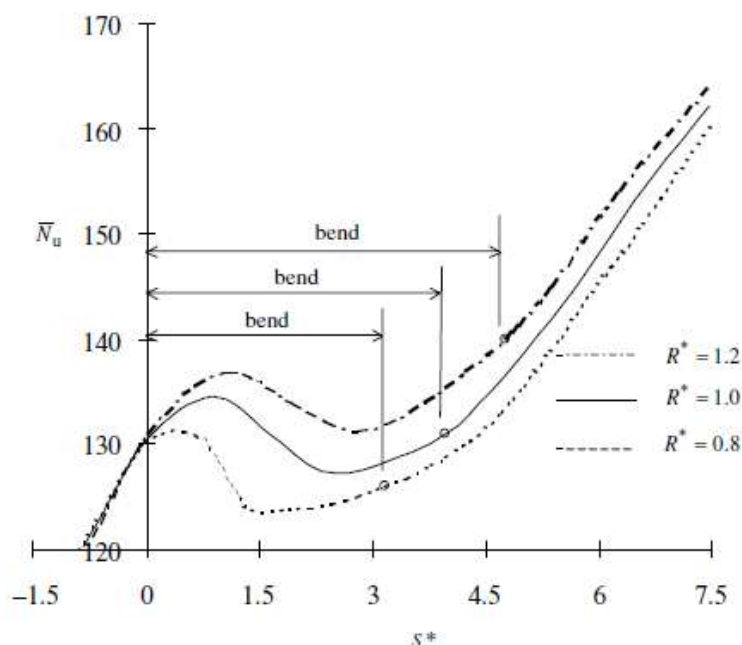
1- Joo and Shaqfeh

2- Al-Mubaiyedh

3- Sureshkumar. and Avgousti

4- Wu

این تحقیق، اثر هندسه و دبی جریان بر انتقال حرارت نیز مورد توجه قرار گرفته و نشان داده شد که اثر شعاع گوشه‌های مقطع بر عدد ناسلت جریان قابل توجه است. میدان دمایی تولید شده به دلیل وجود حرارت ویسکوز است. اتلافات حرارتی در پایین دست جریان در طول کانال جابه‌جا می‌شود و در خروجی کانال نزدیک دیواره بیرونی به دلیل اعداد پکلت و نرخ برش زیاد این جریان دما بیشترین مقدار خود را دارد. در مقابل دما نزدیک ناحیه خط مرکز نسبتاً کم است.

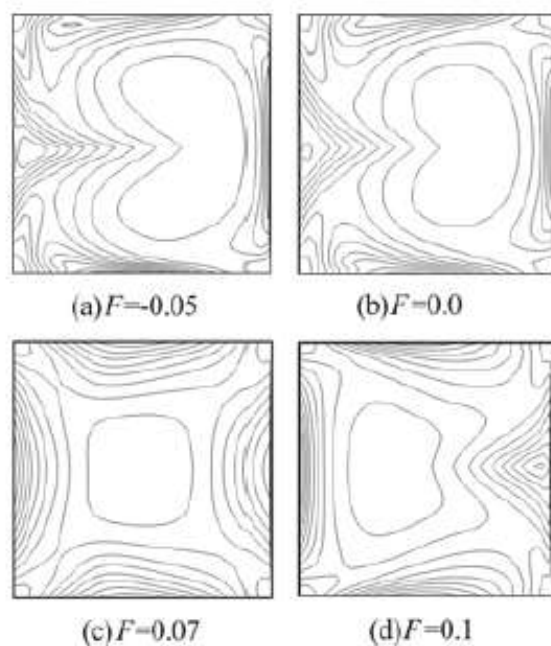


شکل ۱-۸- تأثیر شعاع گوشه بر عدد ناسلت در دیوار داخلی [۴۷]

در سال ۲۰۰۷ ژانگ^۱ و همکاران [۴۸] جریان کاملاً توسعه یافته سیال اولدروید-بی را در یک کانال خمیده چرخان مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها اثر دوران را بر سرعت محوری، جریان‌های ثانویه و تنش نرمال محوری را بررسی کردند و نشان دادند که دوران مجرا به شدت این پارامترهای جریان را تحت تأثیر قرار می‌دهد. شکل زیر تغییرات تنش نرمال محوری بر حسب تغییرات عدد دوران نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل واضح است در عدد دوران منفی حداکثر تنش در دیواره داخلی رخ می‌دهد

1- Zhang

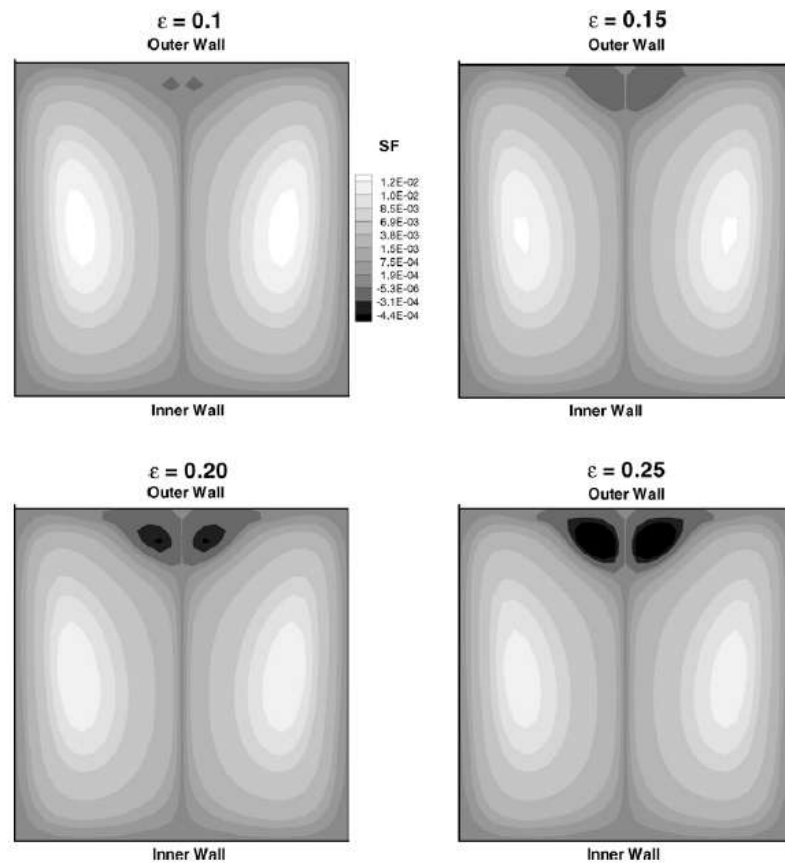
درحالی که تمرکز تنش در دیوار داخلی و بالای و پایینی است؛ اما در اعداد دوران مثبت حداکثر تنش با غلبه نیروی کوریولیس به سمت دیواره بیرونی حرکت می کند و تمرکز تنش در دیوار بیرونی و بالای و پایینی است.



شکل ۹-۱- تغییرات تنش محوری با تغییرات عدد دوران [۴۸]

در سال ۲۰۰۹ هِلین^۱ و همکاران [۴۹] اثر خاصیت الاستیک سیال در جریان توسعه یافته در یک کانال U شکل با مقطع مربعی را با در نظر گرفتن سیال ویسکوالاستیک MPTT مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که با ازدیاد عدد دیورا سیال MPTT گردابه‌های دین در نزدیکی دیواره خارجی در رینولدز پایین‌تری نسبت به سیال نیوتنی به وجود می‌آیند و جریان در وضعیت ناپایدار قرار می‌گیرد، همچنین آن‌ها با بررسی سیال اولدروید-بی به این نتیجه رسیدند که شدت و اندازه گردابه‌های دین در نزدیکی دیواره خارجی با افزایش خاصیت الاستیک سیال افزایش می‌یابد.

1-Helin



شکل ۱-۱۰- کانتورهای تابع جریان سیال در عدد دین ۱۲۵ و عدد دورای ۰/۴ و ε های مختلف [۴۹]

نتیجه بعدی در همان سال توسط بوتابا^۱ و همکاران [۵۰] با بررسی همان هندسه و همان سیال به صورت عددی گزارش شده است. آن‌ها نشان دادند که خاصیت الاستیک سیال سبب می‌شود که بروز ناپایداری در راستای پیشروی جریان سریع‌تر از جریان سیال نیوتنی اتفاق بیفتد.

نوروزی [۳۶، ۵۱-۵۴] در قالب رساله دکتری خویش و همچنین مقالات منتشر شده توسط وی و همکارانش به بررسی عددی و تحلیلی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های خمیده با استفاده از معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلی پرداخته است. در تحقیق وی که در دو حالت ایستا و چرخان کانال انجام شده است، هدف اصلی شناخت بهتر اثرات خواص ویسکوالاستیک بر جریان این سیالات معرفی شده است. همچنین در آن تحقیق با استفاده از روش مرتبه بزرگی رابطه‌ای تحلیلی

1- Boutabaa

برای تعادل نیروها در ناحیه هسته جریان در کانال خمیده ارائه شده است که این مطلب به شناخت بهتر اثر نیروهای مؤثر به میدان جریان کمک می‌کند. همچنین در این تحقیق برای اولین بار با استفاده از همین روش روابط تحلیلی برای میدان جریان خزشی سیال مرتبه دو در کانال‌های خمیده با مقطع چهارگوش ارائه شده است. نتایج عددی ایشان نشان می‌دهد که افزایش اختلاف تنش نرمال دوم منفی باعث پایداری در جریان خزشی در کانال خمیده می‌شود، درحالی‌که افزایش اختلاف تنش نرمال اول ناپایداری را تقویت می‌کند. نتایج ارائه‌شده توسط ایشان در قسمت‌های مشترک، هماهنگی خوبی با تحقیقات ارائه شده توسط دیگر محققین دارد.

فلو^۱ و همکاران [۵۵] ناپایداری دین را با استفاده از سیالات پاورلو و بینگهام به روش عددی و تحلیلی در کانال خمیده با مقطع مستطیلی مورد مطالعه قرار دادند.

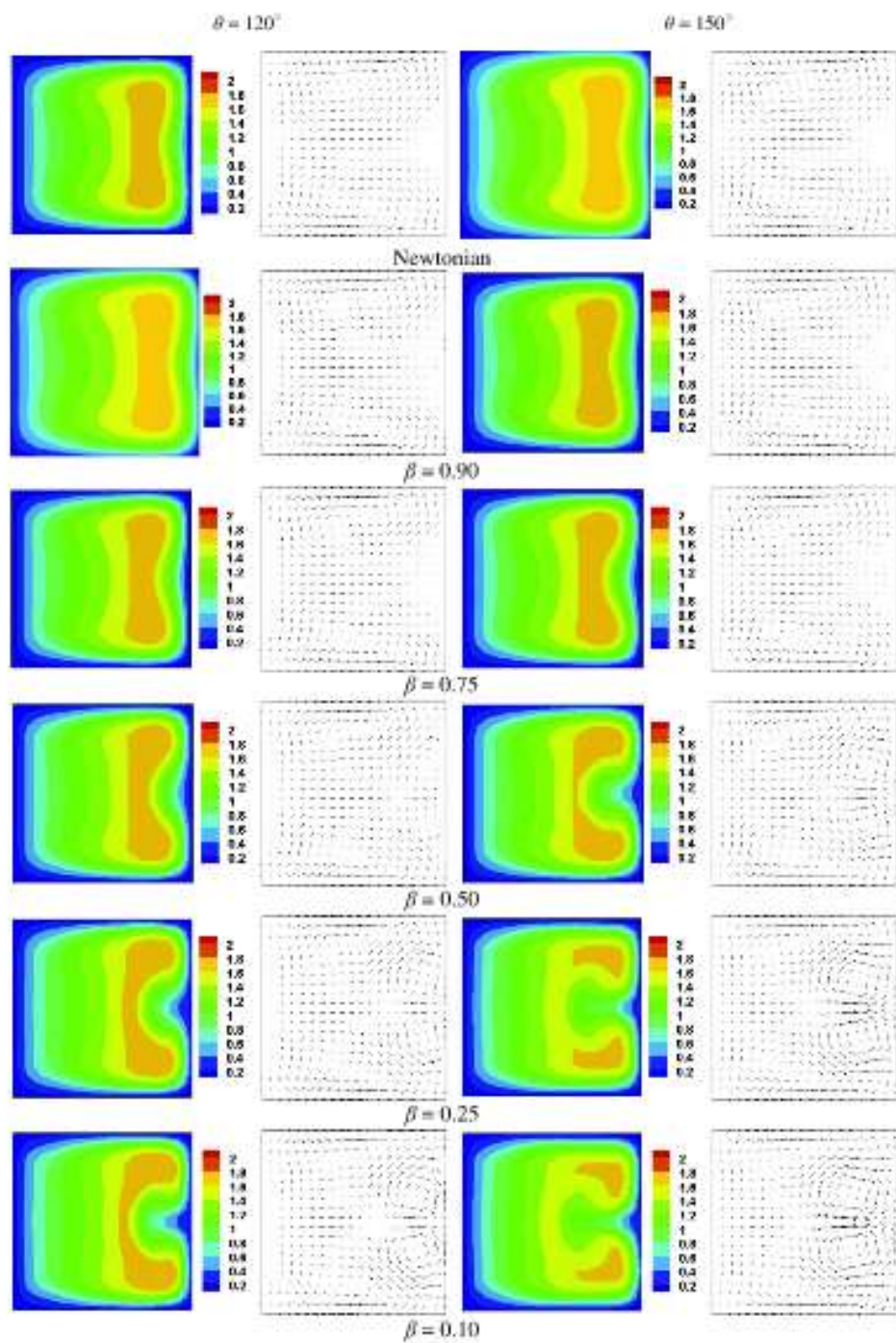
در سال ۲۰۱۳ مالهیرو^۲ و همکاران [۵۶] برای سیال ویسکوالاستیک FENE-CR در کانال U شکل با سطح مقطع مربعی، شبیه‌سازی‌های عددی برای اعداد رینولدز و وایزنبرگ مختلف و با پارامترهای مختلف مدل نظیر نرخ ریتاردیشن و قابلیت کشش (L^2) انجام دادند، نرخ ریتاردیشن به صورت نسبت

$$\beta = \frac{\lambda_r}{\lambda} \text{ از تنش تعریف می‌شود}$$

در شکل ۱-۱۱ تغییرات توزیع سرعت محوری و شدت و اندازه جریان ثانویه با تغییرات نرخ ریتاردیشن در زوایای ۱۲۰ و ۱۵۰ درجه نشان داده شده است. آن‌ها نشان دادند که با افزایش قابلیت کشش و کاهش نرخ ریتاردیشن یک جفت جریان‌های ثانویه در نزدیکی دیواره خارجی ایجاد می‌شود.

1- Fellouah

2- Malheiro



شکل ۱-۱۱- تغییرات سرعت محوری و جریان ثانویه بر حسب نرخ ریتاردیشن در $L^2 = 100, Re = 532, Wi = 1$

[۵۶]

۱-۵- تحقیق حاضر

در این بخش تحقیق حاضر و مشخصات کلی و ضرورت و کاربرد آن و در پایان خلاصه‌ای از ساختار کلی این تحقیق بیان می‌شود.

۱-۵-۱- مشخصات کلی

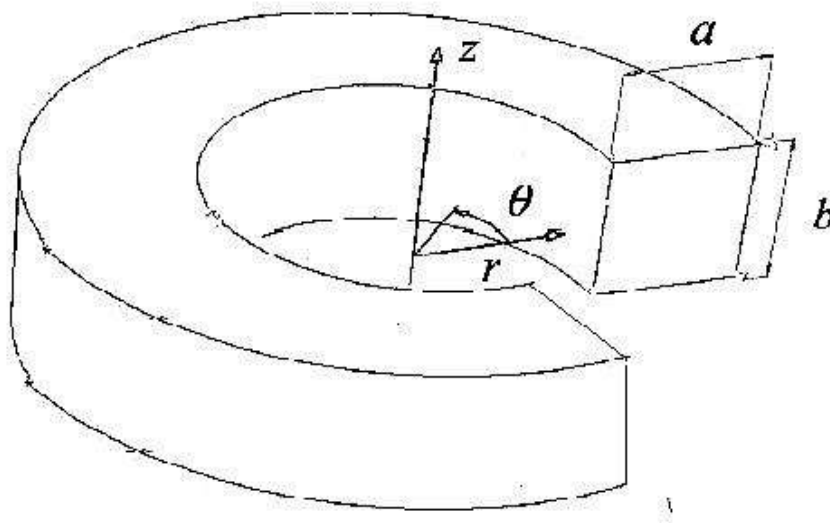
با توجه به مطالب بیان شده، تاکنون تحقیق کاملی در مورد جریان و انتقال حرارت در حال توسعه سیالات ویسکوالاستیک در کانال خمیده غیردایروی در حالت سه‌بعدی ارائه نشده است. بدین منظور در این تحقیق مدل‌سازی جریان و انتقال حرارت اجباری سیال ویسکوالاستیک در حالت سه‌بعدی در کانال مربعی خمیده در حالت ایستا مورد بررسی قرار می‌گیرند که در آن هم میدان جریان و هم انتقال حرارت در حال توسعه در نظر گرفته شده است. همچنین میدان جریان به شکل آرام و دائمی و سیال ویسکوالاستیک به صورت تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته شده است. در این مطالعه از معادله ساختاری غیرخطی گزیکس به عنوان معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است. شرایط مرزی جریان و دما در ورودی کانال به صورت یکنواخت فرض شده است که با پیشروی جریان در طول کانال و اثرگذاری شرایط مرزی، رفته رفته جریان به حالت توسعه یافتگی می‌رسد. ضمناً در تحقیق پیش‌رو معادله انرژی در دو حالت دمای دیواره ثابت و فرض شار حرارتی ثابت حل شده است.

در شکل ۱-۱۲ نمای شماتیک کانال خمیده نشان داده شده است. در اکثر تحقیقات پیشین از دستگاه مختصات منحنی الخط ترویدال جهت تحلیل جریان استفاده شده، حال آنکه در اینجا دستگاه مختصات متعامد استوانه‌ای برای این منظور به کار رفته است. مزیت اصلی دستگاه مختصات استوانه‌ای نسبت به دستگاه مختصات ترویدال، فرم ساده‌تر معادلات حاکم در این دستگاه مختصات است. همچنین با توجه به هندسه جریان، گسسته‌سازی معادلات حاکم و اعمال شرایط مرزی در دستگاه مختصات

استوانه‌ای به صورت ساده‌تری انجام می‌شود. مطابق شکل θ معرف جهت پیشروی جریان و جهات r و z معرف جهات عرضی (جهات سطح مقطع کانال) است. طول هر ضلع کانال در جهات r و z برابر a و شعاع انحنا گام کانال خمیده نیز برابر R فرض شده است. به علت تقارن موجود در هندسه مورد بررسی و همچنین صرفه‌جویی در هزینه محاسبات، فضای محاسباتی به یک دوم هندسه اولیه کاهش داده شده و در این صورت شرایط مرزی تقارن به همراه بقیه شرایط مرزی به خوبی اعمال شده است.

با توجه به سه بعدی بودن دامنه حل و همچنین قابلیت معادله ساختاری مورد استفاده در دسترسی به یک جریان غیرمستقیم‌الخط، جریان‌های ثانویه که یکی از پدیده‌های منحصربه‌فرد جریان سیال ویسکوالاستیک در مجاری غیر دایروی می‌باشد قابل مدل‌سازی و مشاهده می‌باشند.

به‌طور خلاصه در این تحقیق علاوه بر بررسی جریان و انتقال حرارت در ناحیه در حال توسعه تأثیر برخی از پارامترهایی نظیر عدد رینولدز، عدد دین، عدد پرانتل، اثر پارامتر آلفا، اثر پارامتر بتا، عدد وایزنبرگ، (بر میدان جریان و انتقال حرارت در جریان اینرسی) به روش عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل ۱-۱۲- هندسه جریان در تحقیق حاضر

۱-۵-۲- ضرورت و کاربرد

با توجه به گسترش روزافزون موارد استفاده از سیالات غیرنیوتنی بالاخص سیالات ویسکوالاستیک که مذاب‌ها و محلول‌های پلیمری نیز گروه عمده‌ای از آن‌ها می‌باشد و همچنین فیزیک متفاوت این سیالات و در پی آن وقوع برخی پدیده‌های خاص در جریان آن‌ها، شناخت کامل جریان و همچنین پدیده‌های واقع در این سیالات در هندسه‌های متفاوت ضروری به نظر می‌رسد. از طرف دیگر در برخی از صنایع مربوط به سیالات ویسکوالاستیک از قبیل تجهیزات مربوط به تزریق و انتقال مواد پلیمری، طول و زمان کافی برای رسیدن سیال به ناحیه توسعه‌یافته وجود ندارد و در این حالت جریان در طول کانال، در حال توسعه می‌باشد. بدین لحاظ شناخت کامل میدان‌های سرعت و دما و تنش در ناحیه در حال توسعه جهت ساخت و طراحی ابزار مناسب به منظور دستیابی به محصولات با کیفیت بالاتر که از آن جمله می‌توان به از بین بردن نقاط تمرکز تنش در روند تولید محصولات اشاره نمود، لازم به نظر می‌رسد. جریان سیالات غیرنیوتنی در مجاری خمیده دارای کاربردهای متنوعی نظیر استخراج نفت و انتقال مشتقات و محصولات نفتی، تزریق مواد پلیمری، جریان زیست سیالات و انتقال مواد در صنایعی نظیر صنایع غذایی، شیمیایی (مانند تولید انواع مواد شوینده، آرایشی، بهداشتی، رنگ، رزین و...)، صنایع نظامی و ... است. همچنین اخیراً جریان میکروسیالات ویسکوالاستیک در کانال‌های بسته مربعی و مستطیلی که به روش لیتوگرافی تولید شده‌اند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار شده است.

با توجه به مطالب فوق و همچنین پیچیدگی تحلیل سیالات ویسکوالاستیک و نبودن تحقیقی جامع در زمینه‌ی مورد نظر این تحقیق، ضرورت انجام این تحقیق واضح به نظر می‌رسد.

۱-۵-۳- جنبه‌های نوآوری

تاکنون تحقیقات زیادی در زمینه جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های خمیده با مقطع غیردایروی با معادلات متشکله گوناگون انجام شده است در اینجا به چند مورد از تفاوت این تحقیق با تحقیقات پژوهشگران گذشته و جنبه‌های نوآوری آن اشاره می‌کنیم:

در این تحقیق اثرات ناحیه ورودی و ناحیه در حال توسعه مدنظر قرار گرفته است در حالی که بیشتر تحقیقات گذشته معطوف به ناحیه توسعه یافته می‌باشد.

به دلیل کمبود امکانات سخت‌افزاری مناسب، بسیاری از تحقیقات پیشین در حالت دوبعدی انجام شده است که یا ناحیه در حال توسعه را شامل نمی‌شود یا قادر به مدل‌سازی جریان‌های ثانویه نمی‌باشند. ولی در این تحقیق معادلات و ناحیه حل کاملاً سه‌بعدی فرض شده است

در اکثر تحقیقات پیشین، معادلات جریان به عنوان هدف اصلی تحقیق انتخاب شده است ولی در این تحقیق معادله انرژی نیز در دو حالت دمای دیواره ثابت و شار حرارتی ثابت مورد تحلیل قرار گرفته است و اثر کار میدان ویسکوالاستیک بر انتقال حرارت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

از دیگر مزیت‌های این تحقیق استفاده از معادله ساختاری غیرخطی گزیکس در مدل‌سازی ترم تنش می‌باشد که یکی از بهترین معادلات پیشنهادی می‌باشد.

۱-۵-۴- ساختار کلی

خلاصه ای از تحقیق حاضر به شرح زیر می‌باشد:

- در فصل دوم، معادلات حاکم بر مسئله در حالت کلی به همراه معادله ساختاری مورد استفاده معرفی خواهند شد و بعد از آن، پارامترهای مورد استفاده جهت بی‌بعد سازی معادلات حاکم و متشکله و همچنین اعداد بی‌بعد اثرگذار بر جریان و انتقال حرارت را معرفی می‌نماییم و پس از

آن معادلات حاکم در حالت بی‌بعد گزارش شده و ترم‌های آن‌ها معرفی می‌شوند.

- در فصل سوم محدودیت‌های معادلات حاکم بر مسئله در گسسته‌سازی و حل و همچنین چگونگی رفع آن‌ها بیان خواهد شد. در ادامه این فصل، روش‌های عددی مورد استفاده جهت گسسته‌سازی و حل معادلات حاکم، نحوه شبکه‌بندی و فضای محاسباتی و همچنین شرایط مرزی و اولیه اعمال شده بر مسئله جهت حل معادلات حاکم و الگوریتم حل بیان خواهد شد و در نهایت به توضیح خطای محاسباتی موجود در نتایج بدست آمده می‌پردازیم.
- در فصل چهارم به ارائه نتایج حاصل از حل عددی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در کانال‌های مربعی خمیده پرداخته می‌شود. البته قبل از ارائه نتایج، بررسی استقلال حل از شبکه و نحوه ارزیابی صحت نتایج بیان خواهد شد.
- در فصل پنجم خلاصه‌ای از نتایج کلی بدست آمده از این تحقیق، نتیجه‌گیری و بیان ایده‌ها و راه‌کارهای پیشنهادی جهت تحقیق‌های آینده بیان خواهد شد.

فصل ۲- معادلات حاکم

۲-۱-مقدمه

در این فصل معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در دستگاه مختصات استوانه ای بیان می‌شود و همچنین توضیحاتی در مورد معادلات متشکله مورد استفاده نیز بیان می‌شود. در ادامه، پارامترهای مورد استفاده جهت بی‌بعد سازی معادلات و همچنین اعداد بی‌بعد مهم و اثر گذار در جریان معرفی شده و معادلات حاکم در حالت بی‌بعد ارائه می‌شوند. در ادامه نیز توضیحاتی در مورد هر یک از ترم‌های معادلات و همچنین اثر آن‌ها در جریان و انتقال حرارت بیان می‌شود. بطور کلی دستگاه مختصات استوانه ای جهت مطالعه جریان و انتقال حرارت در کانال‌های خمیده دارای مقاطع مستطیلی، مدور و حلقوی مناسب هستند معادلات و روابط فیزیکی ارائه شده در این فصل برای مطالعه عددی جریان در کانال‌های خمیده به کار گرفته شده‌اند که نتایج حاصل از آن‌ها در فصل چهارم آمده است.

۲-۲-معادلات حاکم

۲-۲-۱-معادلات بقا

همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، سیالات ویسکوالاستیک شاخه‌ای از سیالات غیرنیوتنی بوده که به‌طور همزمان دارای خواص جامد الاستیک و سیال ویسکوز می‌باشد. طبق اصول اولیه مکانیک سیالات، معادلات حاکم بر هر جریان سیال پیوسته‌ای صرف‌نظر از نوع آن، معادلات بقای جرم، ممنتوم و بقای انرژی می‌باشد که در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (۱-۲)$$

$$\frac{\partial (\rho V)}{\partial t} + \rho V \cdot \nabla V = -\nabla P + \nabla \cdot \tau + F \quad (۲-۲)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e V) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \tau : \nabla V + S \quad (3-2)$$

در معادلات فوق V بردار سرعت، P میدان فشار، τ تانسور تنش، k ضریب رسانش، ρ چگالی

سیال، T میدان دمای سیال و e انرژی داخلی سیال می‌باشد و همچنین در معادله پیوستگی، $\frac{\partial \rho}{\partial t}$

تغییرات چگالی نسبت به زمان، $\nabla \cdot (\rho V)$ نرخ ورود و خروج جرم بر واحد زمان و سطح از مرزها می‌باشد.

در معادله ممنتوم $\frac{\partial V}{\partial t}$ ، تغییرات سرعت و چگالی نسبت به زمان یا همان شتاب غیردائم^۱، $\nabla \cdot \tau$ گرادیان

نیروهای سطحی دیگر مانند تنش، ∇P گرادیان فشار سیال، $V \cdot \nabla V$ شتاب همرفتی^۲ سیال و F معرف

نیروهای حجمی سیال می‌باشد. در معادله انرژی، $\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}$ تغییرات انرژی داخلی نسبت به زمان، $\tau : \nabla V$

کار انجام شده، $\nabla \cdot (k \nabla T)$ نرخ پخش حرارت^۳، $\nabla \cdot (\rho e V)$ نرخ جریان حرارت^۴ و S هم معرف منابع

حرارتی دیگر در سیال می‌باشد. در این تحقیق، جریان دائمی و تراکم‌ناپذیر سیال ویسکوالاستیک مورد

بررسی قرار گرفته است که در این صورت ترم‌های گذرا و همچنین ترم‌های مربوط به تغییرات چگالی

سیال صفر می‌شود. از طرف دیگر در حالت کلی به علت ناچیز بودن اثر تمامی نیروهای حجمی و

همچنین نیروی گرانش از این نیروها صرف‌نظر شده است.

با معادل سازی:

$$e = h + \frac{P}{\rho} \quad (4-2)$$

$$h = CT \quad (5-2)$$

که در آن C ظرفیت حرارتی ویژه سیال می‌باشد و همچنین با ساده‌سازی و حذف ترم‌های معادل

1-Unsteady acceleration

2-Convective acceleration

3-Diffusion term of heat

4-Convection term of heat

صفر، معادلات حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (۶-۲)$$

$$\rho V \cdot \nabla V = -\nabla P + \nabla \cdot \tau \quad (۷-۲)$$

$$\rho c V \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T) + \tau : \nabla V \quad (۸-۲)$$

همان‌طور که در معادلات فوق دیده می‌شود، تنها تفاوت بین سیالات نیوتنی و ویسکوالاستیک از نظر معادلات حاکم، مدل‌سازی و تخمین ترم تنش موجود در معادلات می‌باشد. در سیالات نیوتنی، تنش سیال تنها با نرخ تغییر شکل سیال رابطه داشته و این ارتباط با اعمال ضریبی ثابت با عنوان ویسکوزیته، در قالب معادله نیوتن بیان می‌شود. ولی در مورد سیال ویسکوالاستیک علاوه بر اینکه ویسکوزیته می‌تواند تابعی از نرخ برش باشد، تنش سیال نیز تابعی از توان‌های مختلف نرخ برش و همچنین تابعی از برخی خواص الاستیک سیال می‌باشد. ضمناً در بعضی مواقع تغییرات تنش در زمان‌های پیشین هم می‌تواند بر مقادیر آن در زمان حال اثرگذار باشد. در مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک بنا به مدل انتخابی که بیان‌گر رابطه بین تنش و متغیرهای دیگر می‌باشد، نحوه مدل‌سازی تنش و ارتباط دادن آن با سایر مقادیر تفاوت پیدا می‌کند که در بخش قبل انواع معادلات متشکله و نقاط قوت و ضعف هر کدام به صورت خلاصه بیان گردید.

۲-۲-۲- معادله ساختاری

در این تحقیق از معادله متشکله گزیکس جهت مدل‌سازی ترم تنش استفاده شده است حال با ارائه توضیحات بیشتری به بررسی این مدل می‌پردازیم.

این مدل بر مبنای دیدگاه مولکولی بدست آمد و قادر به ارائه رفتار پاورلا برای مقادیر ویسکوزیته و ضرایب اختلاف تنش نرمال اول و دوم می‌باشد. معادله متشکله این مدل در رابطه (۹-۲) نشان داده شده است.

$$\tau + \lambda_h \tau_{p(1)} + \alpha \frac{\lambda_h}{\eta_p} (\tau_p \cdot \tau_p) = \eta_p \gamma_{(1)} \quad (9-2)$$

$$\gamma_{(1)} = (\nabla V + \nabla V^T)$$

که در آن η_p لزجت محلول، λ_h زمان آسودگی^۱ از تنش و α ضریب پویایی^۲ محلول می‌باشد. همان‌طور که گفته شد در این مدل فقط تنش الاستیک در معادله متشکله منظور شده‌است و تنش ویسکوز به صورت جدا در معادله ممنتوم آورده شده است.

۲-۲-۳- پارامترهای بی بعد

در تمامی مدل‌سازی‌های عددی جریان سیال ویسکوالاستیک، جهت دستیابی به حل کامل مسئله می‌بایست معادلات بقا همراه معادله ساختاری به صورت همزمان حل شوند. در ابتدای حل، جهت بی بعد سازی معادلات، پارامترهای پایه همان‌طور که در روابط زیر نشان داده شده‌اند مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

$$\begin{aligned} v_\theta^* &= \frac{v_\theta}{U_{ref}}, v_r^* = \frac{v_r}{U_{ref}}, v_z^* = \frac{v_z}{U_{ref}}, z^* = \frac{z}{D_h}, r^* = \frac{r}{D_h}, D_h = \frac{2ab}{a+b} \\ Wi &= \frac{\lambda U_{ref}}{D_h}, Re = \frac{\rho U_{ref} D_h}{\eta_0}, \gamma_{(1)}^* = \gamma_{(1)} \frac{D_h}{U_{ref}}, \tau^* = \frac{\tau D_h}{\eta_0 U_{ref}}, P^* = \frac{P D_h}{\eta_0 U_{ref}} \quad (10-2) \\ Pr &= \frac{\eta_0}{\rho \alpha}, Br_q = -\frac{\eta_0 U_{ref}^2}{D_h q''}, Br_T = \frac{\eta_0 U_{ref}^2}{k(T_{in} - T_w)} \\ T_T^* &= \frac{T - T_w}{T_{in} - T_w}, R^* = \frac{R}{D_h}, \delta = \frac{a}{2R}, \alpha = \frac{k}{\rho c}, Dn = Re \delta^{1/2}, Nu = \frac{h D_h}{k} \\ T_q^* &= \frac{T - T_{in}}{D_h q'' / k} \end{aligned}$$

که در روابط فوق D_h معرف قطر هیدرولیکی، a و b طول و عرض مقطع کانال، R شعاع انحنای

گام مسیر کانال خمیده، δ نسبت انحنای، r, θ, z جهت‌های دستگاه استوانه ای، v_r, v_θ, v_z معرف سرعت سیال در راستاهای r, θ, z ، τ میدان تنش، P میدان فشار سیال، η_0 ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر،

1-Relaxation time

2-Mobility parameter

U_{ref} سرعت مرجع سیال، $\gamma_{(1)}$ مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته اول تانسور نرخ برش، Re عدد رینولدز که بیانگر نسبت نیروهای اینرسی به ویسکوز می‌باشد، Wi عدد وایزنبرگ که نسبت نیروی ناشی از خاصیت الاستیک به نیروی حاصل از ویسکوز می‌باشد، Br_T عدد برینکمن که بیانگر نسبت تلفات ویسکوز بر انتقال حرارت در حالت دمای دیواره ثابت، Br_q عدد برینکمن در حالت شار ثابت، Pr عدد پرانتل که نسبت طول توسعه‌یافتگی حرارتی به طول توسعه‌یافتگی هیدرودینامیکی می‌باشد. Nu عدد ناسلت، α نسبت ضریب هدایت به ظرفیت حرارتی، T_T معرف دمای سیال در حالت دمای دیواره ثابت و T_q معرف دمای سیال در حالت شار حرارتی ثابت می‌باشد. لازم به توضیح است که در تمامی روابط فوق منظور از ذکر کمیت‌ها به همراه بالانویس *، مقادیر بی بعد آن کمیت می‌باشد.

با جاگذاری روابط فوق به عنوان شکل بی بعد کمیت‌ها و ضرایب مربوط به آن‌ها در معادلات حاکمه و همچنین مرتب‌سازی و تعریف چند پارامتر بی بعد جدید، دستگاه معادلات حاکم بر مسئله در حالت بدون بعد به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^* = 0 \quad (11-2)$$

$$V^* \cdot \nabla V^* = \frac{1}{Re} (-\nabla P^* + \nabla \cdot \tau^*) \quad (12-2)$$

$$V^* \cdot \nabla T^* = \frac{1}{Re \cdot Pr} (\nabla^2 T^* + Br(\tau^* : \nabla V^*)) \quad (13-2)$$

در معادله (12-2) سمت چپ معادله معرف ترم جابجایی حرارت، ترم اول سمت راست، معرف ترم نفوذ حرارت و عبارت دوم بیانگر کار نیروی تنش می‌باشد که این ترم معمولاً در جریان سیال ویسکوالاستیک به عنوان یک منبع تولید حرارت عمل می‌کند. در جریان سیال نیوتنی، این ترم اکثراً مثبت بوده و نقش یک تلف کننده حرارتی را ایفا می‌کند، از این رو به تلفات لزجت معروف شده است. در جریان سیال ویسکوالاستیک ممکن است این ترم به طور موضعی دارای مقدار منفی باشد که بیانگر ذخیره انرژی در بخش الاستیک سیال می‌باشد.

همچنین معادله متشکله گزیکس در حالت بی بعد به صورت زیر نشان داده می شود.

$$\tau_p^* = -Wi(\tau_{(1)}^* + (\alpha / \beta)(\tau_p^* . \tau_p^*)) + \beta \gamma_{(1)}^* \quad (14-2)$$

$$\gamma_{(1)}^* = (\vec{\nabla} \vec{V}^* + \vec{\nabla} \vec{V}^{T*})$$

$$Wi = \frac{\lambda U_{ref}}{D_h}$$

که در آن τ_p^* معرف تنش بی بعد پلیمری می باشد. معادله مومنتوم مورد استفاده در مدل سازی با معادله متشکله گزیکس به شکل معادله (۱۵-۲) نوشته می شود.

$$\vec{V}^* . \vec{\nabla} \vec{V}^* = \frac{1}{Re} (-\vec{\nabla} P^* + (1-\beta) \vec{\nabla}^2 \vec{V}^* + \vec{\nabla} . \tau_p^*) \quad (15-2)$$

$$\eta_0 = \eta_p + \eta_s, \beta = \frac{\eta_p}{\eta_0}$$

که در آن η_p ویسکوزیته پلیمری، η_s ویسکوزیته حلال و β نسبت ویسکوزیته پلیمری به ویسکوزیته کل می باشد.

لازم به ذکر است که معادلات فوق همگی ضمنی بوده و حل آن در حالت نشان داده شده ممکن نمی باشد. بدین لحاظ با استفاده از روش های عددی تغییراتی در معادلات حاکم داده شده که در ظاهر به معادلات صریح تبدیل شوند. در مورد روش های عددی مورد استفاده و همچنین شرایط حاکم، در فصل بعد به تفصیل بحث خواهد شد.

با جاگذاری معادله ساختاری گزیکس در حالت بی بعد، بسط معادلات حاکم بر مسئله مورد نظر در حالت دائم و تراکم ناپذیر و در غیاب نیروهای خارجی به صورت زیر بازنویسی می شوند.

$$\frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} + \frac{v_r^*}{r^*} = 0 \quad (16-2)$$

$$\begin{aligned}
v_r^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta^*} + v_z^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial z^*} + \frac{v_\theta^* v_r^*}{r^*} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{1}{r^*} \frac{\partial P^*}{\partial \theta^*} + \right. \\
(1-\beta) \left(\frac{\partial^2 v_\theta^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_\theta^*}{\partial \theta^{*2}} + \frac{\partial^2 v_\theta^*}{\partial z^{*2}} - \frac{v_\theta^*}{r^{*2}} \right. \\
\left. \left. - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial r^{*2} \tau_{r\theta}^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial \tau_{\theta z}^*}{\partial z^*} \right)
\end{aligned} \tag{۱۷-۲}$$

$$\begin{aligned}
v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta^*} + v_z^* \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} - \frac{v_\theta^{*2}}{r^*} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \right. \\
(1-\beta) \left(\frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial \theta^{*2}} + \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial z^{*2}} - \frac{v_r^*}{r^{*2}} \right. \\
\left. \left. - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial r^* \tau_{rr}^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \tau_{r\theta}^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial z^*} - \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} \right)
\end{aligned} \tag{۱۸-۲}$$

$$\begin{aligned}
v_r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_z^*}{\partial \theta^*} + v_z^* \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \right. \\
(1-\beta) \left(\frac{\partial^2 v_z^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial \theta^{*2}} + \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z^{*2}} \right) \\
\left. + \frac{1}{r^*} \frac{\partial r^* \tau_{rz}^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \tau_{z\theta}^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z^*} \right)
\end{aligned} \tag{۱۹-۲}$$

$$\begin{aligned}
v_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta^*} + v_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} &= \frac{1}{\text{RePr}} \left\{ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + Br \Phi^* \right\} \\
\Phi^* &= \left\{ \left(\frac{v_r^*}{r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta^*} \right) \sigma_{\theta\theta}^* + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} - \frac{v_\theta^*}{r^*} \right) \sigma_{r\theta}^* + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} \sigma_{rr}^* + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial v_z^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial v_\theta^*}{\partial z^*} \right) \sigma_{z\theta}^* + \left(\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} \right) \sigma_{zr}^* + \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} \sigma_{zz}^* \right\}
\end{aligned} \tag{۲۰-۲}$$

که در معادله (۲۰-۲) تنش کلی سیال را به صورت مجموع تنش پلیمری و تنش ویسکوز به صورت

معادله (۲۱-۲) در نظر می‌گیریم.

$$\sigma^* = \tau_N^* + \tau_p^* \tag{۲۱-۲}$$

فصل ۳- روش عددی

۳-۱- مقدمه

کلیه موارد بحث شده در این فصل پیرامون نحوه گسسته‌سازی و حل معادلات حاکم و روش‌های استفاده شده در این خصوص می‌باشد. به این ترتیب در ابتدای فصل مشکلات معادلات حاکم از نظر روش‌های عددی بیان شده و در ادامه روش‌های موجود و همچنین روش مورد استفاده در این تحقیق جهت رفع این مشکلات ارائه می‌گردد. در مرحله بعد ضمن تشریح شبکه‌بندی دامنه حل و تعریف پارامترهای موجود در هر شبکه، توضیحاتی در مورد نحوه گسسته‌سازی معادلات بر روی دامنه حل و همچنین صورت گسسته معادلات حاکم ارائه گردیده و در نهایت به بیان شرایط مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی حاکم بر مسئله، شرایط اولیه مورد استفاده جهت حل معادلات، حداکثر خطای محاسباتی و همچنین الگوریتم کلی حل مسئله پرداخته می‌شود.

۳-۲- روش عددی

با توجه به معادلات حاکم بر مسئله که در فصل قبل پیرامون آن‌ها مطالبی ارائه گردید، به علت بررسی مسئله در حالت دائم، تمامی معادلات به صورت ضمنی می‌باشند. در این حالت حل معادلات غیرخطی که در آن متغیرهای سرعت و فشار به صورت مشترک در تمامی معادلات وجود داشته و همچنین معادلات دارای ناپایداری عددی بالایی می‌باشند، تقریباً غیرممکن به نظر می‌رسد. معمولاً در حل عددی جریان‌های دائم، سعی می‌شود با تغییراتی در شکل ظاهری معادلات، بتوان آن‌ها را به صورت شبه‌گذرا تبدیل کرد تا با استفاده از روش‌های تکرارپذیر، پایداری حل مسئله را افزایش داده و همچنین روند دستیابی به حل دائم مسئله را سهل‌تر نمایند. از طرف دیگر با توجه به معادلات حاکم بر مسئله در می‌یابیم که یک کوپل ناقص در معادلات حاکم وجود دارد. بدین معنی که در معادله مومنتوم ترم‌های سرعت و فشار وجود داشته ولی در معادلات پیوستگی و انرژی مقدار فشار استاتیک سیال هیچ اثرگذاری مستقیمی ندارد. از

طرف دیگر در معادلات غیر دائم نیز، ترم‌های گذرای سرعت و دما در معادلات حاکمه به چشم می‌خورد و هیچ ترمی که مبین تغییرات فشار نسبت به زمان باشد در معادلات حاکمه وجود ندارد. بدین ترتیب محاسبه فشار استاتیک مسائل به صورت صریح و با استفاده از روش‌های تکرار پذیر مقدور نمی‌باشد.

در روش‌های عددی حل مسائل، تکنیک‌هایی جهت تغییر ظاهر در معادلات حاکمه و افزودن ترم فشار گذرا به معادلات حاکم وجود دارد. یکی از روش‌های موجود استفاده از معادله پواسون برای دستیابی به مقادیر فشار می‌باشد. در این روش از هر کدام معادلات مومنتوم مشتقی نسبت به راستای مربوطه‌ی خود گرفته می‌شود و هر سه معادله با هم جمع می‌شود. بعد از ساده‌سازی و فاکتورگیری از ترم‌های همسان در معادله تشکیل شده، معادله‌ای بر حسب مشتقات مرتبه دو مقادیر فشار در یک طرف و مقادیر سرعت و مشتقات آن در طرف دیگر بدست می‌آید که به معادله پواسون مشهور است.

روش دیگر در فائق آمدن بر مشکل عدم وجود ترم گذرای فشار در معادلات استفاده از روش تراکم‌پذیری مصنوعی می‌باشد. این روش که از طرف چورین و در سال ۱۹۶۷ پیشنهاد شده است مربوط به حل معادلات دائم می‌باشد. در این روش ترم‌های گذرای $\frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial P}{\partial t}, \frac{\partial v_z}{\partial t}, \frac{\partial v_r}{\partial t}, \frac{\partial v_t}{\partial t}$ به ترتیب به معادلات مومنتوم در جهت‌های z, r, θ و معادله پیوستگی و معادله انرژی افزوده می‌شود. البته می‌توان معادلات را در حالت بی‌بعد به کار گرفت و یا ضریبی جهت هم‌بعد و هم‌مرتبه‌سازی آن‌ها اختیار نمود. معادله پیوستگی پس از افزودن ترم‌های گذرا در حالت بی‌بعد به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \cdot V = 0 \quad (۱-۳)$$

که c تراکم‌پذیری مصنوعی سیال می‌باشد که با توجه به معادلات حالت می‌توان رابطه‌ای برای آن بر حسب مقادیر فشار و چگالی به صورت زیر تعریف کرد.

$$c = \frac{1}{a^2}, a^2 = \frac{P}{\rho} \quad (۲-۳)$$

که با توجه به معادله (۳-۱) و (۳-۲) معادله پیوستگی به فرم نهایی زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a^2 \nabla \cdot V = 0 \quad (3-3)$$

که مقدار a را می‌توان طبق شرایط مسئله و محدودیت‌های همگرایی اختیار نمود. در این حالت تمامی معادلات حاکم در ظاهر به صورت گذرا با زمان می‌باشند. با حل معادلات حاکم با استفاده از روش‌های گام به جلو در بازه زمانی مصنوعی و در نهایت دستیابی به حل دائم مسئله، تمامی ترم‌های اضافه شده به معادلات که بیانگر تغییرات پارامتر مورد نظر با زمان می‌باشد به سمت صفر میل کرده و حل دائم مسئله در حالت اولیه که مدنظر این تحقیق نیز می‌باشد، حاصل می‌شود. لازم به ذکر است که به علت تغییرات در معادلات حاکمه، حل گذرای بدست آمده از این روش قابل اطمینان و صحیح نمی‌باشد و تنها حل دائم مسئله به علت صفر بودن مقادیر اضافه شده به معادلات قابل استفاده می‌باشد.

در این روش علاوه بر ایجاد یک کوپل کامل بین معادلات مومنتوم و پیوستگی و همچنین ایجاد ترم گذاری فشار، معادلات به روش تکرار حل می‌شوند که انجام آن با پردازنده‌های شخصی که قادر به انجام پردازش موازی اطلاعات با سرعت بسیار بالایی هم نمی‌باشند، ممکن می‌باشد. لازم بذکر است که معادلات مومنتوم حاکم بر مسئله در ابتدا از نوع معادلات بیضوی بوده که با استفاده از روش تراکم‌پذیری مصنوعی به حالت سهموی تبدیل شده که در این حالت برای حل معادلات به شرایط اولیه نیز نیاز می‌باشد.

مشکل دیگر در حل معادلات حاکمه عدم وجود شرط مرزی مناسب برای فشار بر روی مرزهای جامد و حتی مرزهای ورودی و خروجی می‌باشد؛ زیرا معمولاً در مدل‌سازی‌های عددی انجام شده، شرط مرزی مناسبی برای فشار که اولاً اعمال آن در روش عددی ممکن بوده و ثانیاً تعبیر فیزیکی مناسبی برای آن بتوان در نظر گرفت موجود نمی‌باشد. از اینرو برای فائق آمدن بر این مشکل نیز در این تحقیق از روش شبکه جابه‌جا شده استفاده گردیده‌است. بدین منظور دامنه محاسبات با استفاده از دو شبکه مجزا سلول‌بندی می‌شوند. این شبکه‌بندی می‌تواند با استفاده از روش‌های متفاوتی صورت پذیرد. به عنوان مثال

می‌توان یکی از شبکه‌ها را به اندازه نصف فاصله طولی و عرضی و ارتفاعی هر سلول، از شبکه اولیه انتقال داد که در این حالت بین هر دو سلول شبکه اولیه، یک سلول از شبکه ثانویه قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که مرزهای ناحیه محاسباتی همگی بر روی شبکه ثانویه قرار می‌گیرند. البته روش‌های دیگری هم جهت تولید شبکه جابه‌جا شده وجود دارد ولی در این تحقیق از این روش جهت شبکه‌بندی دامنه حل استفاده شده است. در این حالت می‌توان متغیرها و کمیت‌های موجود در مسئله را بر روی شبکه اولیه و یا ثانویه و یا تلفیقی از هر دوی این شبکه‌ها تعریف نمود. لازم به ذکر است که جهت اجتناب از کسری شدن شمارنده‌ها، تمامی شمارنده‌ها در عدد ضرب شده و در این حالت شمارنده‌های زوج مربوط به شبکه اولیه و شمارنده‌های فرد مربوط به شبکه ثانویه می‌باشد.

در این تحقیق سرعت در جهت‌های θ ، r ، Z بر روی شبکه ثانویه و بقیه کمیت‌ها از جمله فشار، تنش، دما و گرادیان‌های تمامی کمیت‌ها همگی بر روی شبکه اولیه تعریف می‌شوند.

با توجه به اینکه فشار بر روی شبکه داخلی تعریف شده و در معادلات حاکم فاقد مشتق مرتبه دوم است و از طرفی قرارگیری مرزها بر روی شبکه خارجی، می‌توان گسسته‌سازی معادلات را به نحوی انجام داد که نیازی به تعریف شرط مرزی برای فشار نباشد. در شکل ۳-۱ نمایی از شبکه‌بندی دامنه حل و همچنین تعریف مقادیر بر روی نودهای مربوطه، نشان داده شده است.

با توجه به تقارن هندسه مورد بررسی در این تحقیق در راستای Z از طرفی کاهش هزینه‌های محاسباتی، فضای محاسباتی به یک دوم دامنه حل کاهش داده می‌شود که در این حالت به جای دیواره موجود در راستای Z مرز تقارن در این جهت ایجاد می‌گردد.

۳-۳- گسسته سازی معادلات حاکم

تاکنون روش‌های متفاوتی جهت گسسته‌سازی معادلات حاکم مورد استفاده در مدل‌سازی‌های عددی پیشنهاد شده است که هر کدام بنا به قابلیت‌های موجود و شرایط مدل‌سازی، در حالت‌های خاصی قابل

استفاده بوده و منجر به روند حل کوتاه‌تر، پایداری عددی بیشتر و... می‌شود. از میان روش‌های موجود، روش تفاضل محدود کاربرد ساده‌تری داشته و تاکنون در مسائل مربوط به جریان‌های تراکم‌ناپذیر دائمی عملکرد خوبی از خود نشان داده است. در این تحقیق نیز از این روش جهت گسسته‌سازی معادلات حاکمه استفاده شده و از تقریب تفاضل محدود پیشرو مرتبه اول برای مشتقات زمانی و از تقریب تفاضل محدود مرکزی مرتبه دوم برای مشتقات مکانی درجه اول و دوم مورد استفاده قرار گرفته‌است.

۳-۳-۱- صورت گسسته معادلات حاکم

همانطور که در بخش‌های پیشین بیان شد، معادلات حاکم بر این مسئله، معادلات پیوستگی، مومنتوم، انرژی و معادله متشکله می‌باشد. بنابر روش‌های عددی مورد استفاده و تعریف هر یک از پارامترها بر شبکه مورد نظر، صورت گسسته معادلات با استفاده از روش تفاضل محدود و تقریب‌های بیان شده به شکل معادلات می‌باشد. شایان ذکر است که همه مقادیر زیر بی‌بعد بوده و به علت جلوگیری از پیچیدگی نوشتاری از آوردن بالانویس * برای آن‌ها صرف‌نظر شده است.

$$\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{(2i,2j,2k)} + a^2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{(2i,2j,2k)} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \Big|_{(2i,2j,2k)} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k)} + \frac{v_r}{r} \Big|_{(2i,2j,2k)} \right) = 0 \quad (۴-۳)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta^2}{\partial \theta} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} + \frac{\partial v_r v_\theta}{\partial r} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} + \frac{\partial v_z v_\theta}{\partial z} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} \\ & + \frac{2}{r} v_r v_\theta \Big|_{(2i+1,2j,2k)} = \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} - \frac{v_\theta}{r^2} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} \Big|_{(2i+1,2j,2k)} \right) \end{aligned} \quad (۵-۳)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_r}{\partial t} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r v_\theta}{\partial \theta} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} + \frac{\partial v_r^2}{\partial r} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} + \frac{\partial v_z v_r}{\partial z} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} + \\
& \frac{v_r^2 - v_\theta^2}{r} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} = \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} \right. \\
& + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} - \frac{v_r}{r^2} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} + \\
& \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} \right)
\end{aligned} \tag{۶-۳}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_z}{\partial t} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z v_\theta}{\partial \theta} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{\partial v_r v_z}{\partial r} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{\partial v_z^2}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{v_r v_z}{r} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} = \\
& \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} \right. \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k+1)} \left. \right)
\end{aligned} \tag{۷-۳}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{(2i,2j,2k)} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{(2i,2j,2k)} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{(2i,2j,2k)} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k)} \\
& = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \Big|_{(2i,2j,2k)} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \Big|_{(2i,2j,2k)} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_{(2i,2j,2k)} + \right. \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{(2i,2j,2k)} + Br(\sigma_{\theta\theta} \frac{v_r}{r} \Big|_{(2i,2j,2k)} + \sigma_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{(2i,2j,2k)} + \sigma_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k)} \\
& \left. - \sigma_{r\theta} \frac{v_\theta}{r} \Big|_{(2i,2j,2k)} + \sigma_{r\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \Big|_{(2i,2j,2k)} + \sigma_{rz} (\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}) \Big|_{(2i,2j,2k)} + \sigma_{z\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k)} \right]
\end{aligned} \tag{۸-۳}$$

که در معادلات فوق، بسط ترم‌های معادله پیوستگی بر روی گره‌های $(2i, 2j, 2k)$ به صورت معادلات

(۱-۴-۳) تا (۵-۴-۳) می‌باشد.

$$\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{(2i,2j+1,2k)} = \frac{P^{n+1}(2i, 2j, 2k) - P^n(2i, 2j, 2k)}{\Delta t} \tag{۱-۴-۳}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \Big|_{(2i,2j,2k)} = \frac{1}{r(2j)} \frac{v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) - v_\theta^n(2i-1, 2j, 2k)}{\Delta \theta} \tag{۲-۴-۳}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{(2i, 2j, 2k)} = \frac{v_r^n(2i, 2j+1, 2k) - v_r^n(2i, 2j-1, 2k)}{\Delta r} \quad (3-4-3)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{(2i, 2j, 2k)} = \frac{v_z^n(2i, 2j, 2k+1) - v_z^n(2i, 2j, 2k-1)}{\Delta z} \quad (4-4-3)$$

$$\frac{v_r}{r} \Big|_{(2i, 2j, 2k)} = \frac{v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i, 2j-1, 2k)}{2r(2j)} \quad (5-4-3)$$

و همچنین بسط ترم‌های معادله مومنتوم در جهت θ بر روی گره‌های $(2i+1, 2j, 2k)$ به صورت

معادلات (۱-۱۰-۳) تا (۱۵-۱۰-۳) می‌باشد.

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \frac{v_\theta^{n+1}(2i+1, 2j, 2k) - v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k)}{\Delta t} \quad (1-5-3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta^2}{\partial \theta} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \left[\left(\frac{(v_\theta^n(2i+3, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k))^2}{4} \right) - \left(\frac{(v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i-1, 2j, 2k))^2}{4} \right) \right] \Big/ r(2j)\Delta\theta \quad (2-5-3)$$

$$\frac{\partial v_r v_\theta}{\partial r} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \left[\left(\frac{(v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j+2, 2k)) \times (v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i+2, 2j+1, 2k))}{4} \right) - \left(\frac{(v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j-2, 2k)) \times (v_r^n(2i, 2j-1, 2k) + v_r^n(2i+2, 2j-1, 2k))}{4} \right) \right] \Big/ \Delta r \quad (3-5-3)$$

$$\frac{\partial v_z v_\theta}{\partial z} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \left[\left(\frac{(v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k+2)) \times (v_z^n(2i, 2j, 2k+1) + v_z^n(2i+2, 2j, 2k+1))}{4} \right) - \left(\frac{(v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k-2)) \times (v_z^n(2i, 2j, 2k-1) + v_z^n(2i+2, 2j, 2k-1))}{4} \right) \right] \Big/ \Delta z \quad (4-5-3)$$

$$\frac{2}{r} v_r v_\theta \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \frac{v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) \times (v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i, 2j-1, 2k)) + v_r^n(2i+2, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i+2, 2j-1, 2k)}{2r(2j)} \quad (5-5-3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \frac{P^n(2i+2, 2j, 2k) - P^n(2i, 2j, 2k)}{r(2j)\Delta\theta} \quad (۶-۵-۳)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \frac{(v_\theta^n(2i-1, 2j, 2k) - 2v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i+3, 2j, 2k))}{(r(2j))^2 (\Delta\theta)^2} \quad (۷-۵-۳)$$

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \frac{(v_\theta^n(2i+1, 2j-2, 2k) - 2v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j+2, 2k))}{(\Delta r)^2} \quad (۸-۵-۳)$$

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \frac{(v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k-2) - 2v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k+2))}{(\Delta z)^2} \quad (۹-۵-۳)$$

$$\frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \frac{\left(\begin{aligned} &v_r^n(2i+2, 2j-1, 2k) + v_r^n(2i+2, 2j+1, 2k) \\ &- (v_r^n(2i, 2j-1, 2k) + v_r^n(2i, 2j+1, 2k)) \end{aligned} \right)}{(r(2j))^2 \Delta\theta} \quad (۱۰-۵-۳)$$

$$\frac{v_\theta}{r^2} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) / (r(2j))^2 \quad (۱۱-۵-۳)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \frac{\left(\begin{aligned} &(v_\theta^n(2i+1, 2j+2, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k)) - \\ &(v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j-2, 2k)) \end{aligned} \right)}{2r(2j)\Delta r} \quad (۱۲-۵-۳)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \frac{\tau_{\theta\theta}^n(2i+2, 2j, 2k) - \tau_{\theta\theta}^n(2i, 2j, 2k)}{r(2j)\Delta\theta} \quad (۱۳-۵-۳)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \frac{\left(\begin{aligned} &(r(2j+2))^2 \times (\tau_{r\theta}^n(2i+2, 2j+2, 2k) + \tau_{r\theta}^n(2i, 2j+2, 2k)) \\ &- (r(2j-2))^2 \times (\tau_{r\theta}^n(2i+2, 2j-2, 2k) + \tau_{r\theta}^n(2i, 2j-2, 2k)) \end{aligned} \right)}{4(r(2j))^2 \Delta r} \quad (۱۴-۵-۳)$$

$$\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} \Big|_{(2i+1, 2j, 2k)} = \frac{\left(\begin{aligned} &(\tau_{z\theta}^n(2i+2, 2j, 2k+2) + \tau_{z\theta}^n(2i, 2j, 2k+2)) \\ &- (\tau_{z\theta}^n(2i+2, 2j, 2k-2) + \tau_{z\theta}^n(2i, 2j, 2k-2)) \end{aligned} \right)}{4\Delta z} \quad (۱۵-۵-۳)$$

و همچنین بسط ترم‌های معادله مومنتوم در جهت r بر روی گره‌های $(2i, 2j+1, 2k)$ به صورت

معادلات (۱-۶-۳) تا (۱۶-۶-۳) می‌باشد.

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{v_r^{n+1}(2i, 2j+1, 2k) - v_r^n(2i, 2j+1, 2k)}{\Delta t} \quad (1-6-3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r v_\theta}{\partial \theta} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \left[\left((v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j+2, 2k)) \times (v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i+2, 2j+1, 2k))/4 \right) - \left((v_\theta^n(2i-1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i-1, 2j+2, 2k)) \times (v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i-2, 2j+1, 2k))/4 \right) \right] / r(2j+1)\Delta\theta$$

$$\frac{\partial v_r^2}{\partial r} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \left(\left((v_r^n(2i, 2j+3, 2k) + v_r^n(2i, 2j+1, 2k))^2 / 4 \right) - \left((v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i, 2j-1, 2k))^2 / 4 \right) \right) / \Delta r \quad (3-6-3)$$

$$\frac{\partial v_z v_r}{\partial z} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \left[\left((v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i, 2j+1, 2k+2)) \times (v_z^n(2i, 2j, 2k+1) + v_z^n(2i, 2j+2, 2k+1))/4 \right) - \left((v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i, 2j+1, 2k-2)) \times (v_z^n(2i, 2j, 2k-1) + v_z^n(2i, 2j+2, 2k-1))/4 \right) \right] / \Delta z$$

$$\frac{v_r^2 - v_\theta^2}{r} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \left((v_r^n(2i, 2j+1, 2k))^2 - \left(v_\theta^n(2i-1, 2j+2, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j+2, 2k) \right) / 16 \right) / r(2j+1) \quad (5-6-3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{P^n(2i, 2j+2, 2k) - P^n(2i, 2j, 2k)}{\Delta r} \quad (6-6-3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \left(v_r^n(2i-2, 2j+1, 2k) - 2v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i+2, 2j+1, 2k) \right) / (r(2j+1))^2 (\Delta\theta)^2 \quad (7-6-3)$$

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \left(v_r^n(2i, 2j-1, 2k) - 2v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i, 2j+3, 2k) \right) / (\Delta r)^2 \quad (8-6-3)$$

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \left(v_r^n(2i, 2j+1, 2k-2) - 2v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i, 2j+1, 2k+2) \right) / (\Delta z)^2 \quad (9-6-3)$$

$$\frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \left(\left(v_\theta^n(2i+1, 2j+2, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) \right) - \left(v_\theta^n(2i-1, 2j+2, 2k) + v_\theta^n(2i-1, 2j, 2k) \right) \right) / (r(2j+1))^2 \Delta\theta \quad (10-6-3)$$

$$\frac{v_r}{r^2} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = v_r^n(2i, 2j+1, 2k) / (r(2j))^2 \quad (11-6-3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{\left(\left(v_r^n(2i, 2j+3, 2k) + v_r^n(2i, 2j+1, 2k) \right) - \left(v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i, 2j-1, 2k) \right) \right)}{2r(2j+1)\Delta r} \quad (۱۲-۶-۳)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{\left(\left(\tau_{r\theta}^n(2i+2, 2j+2, 2k) + \tau_{r\theta}^n(2i+2, 2j, 2k) \right) - \left(\tau_{r\theta}^n(2i-2, 2j, 2k) + \tau_{r\theta}^n(2i-2, 2j+2, 2k) \right) \right)}{4r(2j+1)\Delta \theta} \quad (۱۳-۶-۳)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{rr})}{\partial r} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{\left((r(2j+2)) \times \tau_{rr}^n(2i, 2j+2, 2k) - (r(2j)) \times \tau_{rr}^n(2i, 2j, 2k) \right)}{r(2j+1)\Delta r} \quad (۱۴-۶-۳)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{\left(\left(\tau_{rz}^n(2i, 2j+2, 2k+2) + \tau_{rz}^n(2i, 2j, 2k+2) \right) - \left(\tau_{rz}^n(2i, 2j+2, 2k-2) + \tau_{rz}^n(2i, 2j, 2k-2) \right) \right)}{4\Delta z} \quad (۱۵-۶-۳)$$

$$\frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \Big|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{\tau_{\theta\theta}^n(2i, 2j+2, 2k) + \tau_{\theta\theta}^n(2i, 2j, 2k)}{2r(2j+1)} \quad (۱۶-۶-۳)$$

و همچنین بسط ترمهای معادله مومنتوم در جهت z بر روی گره‌های $(2i, 2j, 2k+1)$ به صورت

معادلات (۱-۷-۳) تا (۱۲-۷-۳) می‌باشد.

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{v_z^{n+1}(2i, 2j, 2k+1) - v_z^n(2i, 2j, 2k+1)}{\Delta t} \quad (۱-۷-۳)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_z v_\theta}{\partial \theta} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{\left[\left((v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i+1, 2j, 2k+2)) \times (v_z^n(2i, 2j, 2k+1) + v_z^n(2i+2, 2j, 2k+1))/4 \right) - \left((v_\theta^n(2i-1, 2j, 2k) + v_\theta^n(2i-1, 2j, 2k+2)) \times (v_z^n(2i, 2j, 2k+1) + v_z^n(2i-2, 2j, 2k+1))/4 \right) \right]}{r(2j)\Delta \theta} \quad (۲-۷-۳)$$

$$\frac{\partial v_r v_z}{\partial r} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{\left[\left((v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i, 2j+1, 2k+2)) \times (v_z^n(2i, 2j, 2k+1) + v_z^n(2i, 2j+2, 2k+1))/4 \right) - \left((v_r^n(2i, 2j-1, 2k) + v_r^n(2i, 2j-1, 2k+2)) \times (v_z^n(2i, 2j, 2k+1) + v_z^n(2i, 2j-2, 2k+1))/4 \right) \right]}{\Delta r} \quad (۳-۷-۳)$$

$$\frac{\partial v_z^2}{\partial z} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{\left(\left((v_z^n(2i, 2j, 2k+3) + v_z^n(2i, 2j, 2k+1))^2 / 4 \right) - \left((v_z^n(2i, 2j, 2k+1) + v_z^n(2i, 2j, 2k-1))^2 / 4 \right) \right)}{\Delta z} \quad (۴-۷-۳)$$

$$\frac{v_r v_z}{r} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{\left(\left(v_r^n(2i, 2j+1, 2k) + v_r^n(2i, 2j-1, 2k) \right) \times v_z^n(2i, 2j, 2k+1) \right)}{4r(2j)} \quad (5-7-3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{P^n(2i, 2j, 2k+2) - P^n(2i, 2j, 2k)}{\Delta z} \quad (6-7-3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{\left(v_z^n(2i-2, 2j, 2k+1) - 2v_z^n(2i, 2j, 2k+1) + v_z^n(2i+2, 2j, 2k+1) \right)}{(r(2j))^2 (\Delta \theta)^2} \quad (7-7-3)$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{\left(v_z^n(2i, 2j-2, 2k+1) - 2v_z^n(2i, 2j, 2k+1) + v_z^n(2i, 2j+2, 2k+1) \right)}{(\Delta r)^2} \quad (8-7-3)$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{\left(v_z^n(2i, 2j, 2k+3) - 2v_z^n(2i, 2j, 2k+1) + v_z^n(2i, 2j, 2k-1) \right)}{(\Delta z)^2} \quad (9-7-3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{\left(\left(v_z^n(2i, 2j+2, 2k+1) - v_z^n(2i, 2j-2, 2k+1) \right) \right)}{2r(2j)\Delta r} \quad (10-7-3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{\left(\left(\tau_{z\theta}^n(2i+2, 2j, 2k+2) + \tau_{z\theta}^n(2i+2, 2j, 2k) \right) - \left(\tau_{z\theta}^n(2i-2, 2j, 2k) + \tau_{z\theta}^n(2i-2, 2j, 2k+2) \right) \right)}{4r(2j)\Delta \theta} \quad (11-7-3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{\left(r(2j+2) \times \left(\tau_{rz}^n(2i, 2j+2, 2k+2) + \tau_{rz}^n(2i, 2j+2, 2k) \right) - r(2j-2) \times \left(\tau_{rz}^n(2i, 2j-2, 2k) + \tau_{rz}^n(2i, 2j-2, 2k+2) \right) \right)}{4r(2j)\Delta r} \quad (12-7-3)$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \Big|_{(2i, 2j, 2k+1)} = \frac{\left(\tau_{zz}^n(2i, 2j, 2k+2) - \tau_{zz}^n(2i, 2j, 2k) \right)}{\Delta z} \quad (13-7-3)$$

بسط ترمهای معادله انرژی نیز بر روی گره‌های $(2i, 2j, 2k)$ در روابط (3-8-1) تا (3-8-16) نشان داده شده است.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{T^{n+1}(2i,2j,2k) - T^n(2i,2j,2k)}{\Delta t} \quad (1-\lambda-\text{3})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right|_{(2i,2j,2k)} &= \frac{v_\theta^n(2i+1,2j,2k) + v_\theta^n(2i-1,2j,2k)}{2r(2j)} \\ &\times \frac{T^n(2i+2,2j,2k) - T^n(2i-2,2j,2k)}{2\Delta\theta} \end{aligned} \quad (2-\lambda-\text{3})$$

$$\begin{aligned} v_r \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{(2i,2j,2k)} &= \frac{v_r^n(2i,2j+1,2k) + v_r^n(2i,2j-1,2k)}{2} \\ &\times \frac{T^n(2i,2j+2,2k) - T^n(2i,2j-2,2k)}{2\Delta r} \end{aligned} \quad (3-\lambda-\text{3})$$

$$\begin{aligned} v_z \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k)} &= \frac{v_z^n(2i,2j,2k+1) + v_z^n(2i,2j,2k-1)}{2} \\ &\times \frac{T^n(2i,2j,2k+2) - T^n(2i,2j,2k-2)}{2\Delta z} \end{aligned} \quad (4-\lambda-\text{3})$$

$$\left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{(T^n(2i-2,2j,2k) - 2T^n(2i,2j,2k) + T^n(2i+2,2j,2k))}{(r(2j))^2 (\Delta\theta)^2} \quad (5-\lambda-\text{3})$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{(T^n(2i,2j-2,2k) - 2T^n(2i,2j,2k) + T^n(2i,2j+2,2k))}{(\Delta r)^2} \quad (6-\lambda-\text{3})$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{(T^n(2i,2j,2k-2) - 2T^n(2i,2j,2k) + T^n(2i,2j,2k+2))}{(\Delta z)^2} \quad (7-\lambda-\text{3})$$

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{((T^n(2i,2j+2,2k) - T^n(2i,2j-2,2k)))}{2r(2j)\Delta r} \quad (8-\lambda-\text{3})$$

$$\sigma_{\theta\theta} \left. \frac{v_r}{r} \right|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{\theta\theta}^n(2i,2j,2k) \times \frac{v_r^n(2i,2j+1,2k) + v_r^n(2i,2j-1,2k)}{2r(2j)} \quad (9-\lambda-\text{3})$$

$$\sigma_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{rr}^n(2i,2j,2k) \times \frac{v_r^n(2i,2j+1,2k) - v_r^n(2i,2j-1,2k)}{\Delta r} \quad (۱۰-۸-۳)$$

$$\sigma_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{zz}^n(2i,2j,2k) \times \frac{v_z^n(2i,2j,2k+1) - v_z^n(2i,2j,2k-1)}{\Delta z} \quad (۱۱-۸-۳)$$

$$\sigma_{r\theta} \frac{v_\theta}{r} \Big|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{r\theta}^n(2i,2j,2k) \times \frac{v_\theta^n(2i+1,2j,2k) + v_\theta^n(2i-1,2j,2k)}{2r(2j)} \quad (۱۲-۸-۳)$$

$$\sigma_{r\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \Big|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{r\theta}^n(2i,2j,2k) \times \frac{v_\theta^n(2i+1,2j+2,2k) + v_\theta^n(2i-1,2j+2,2k) - v_\theta^n(2i+1,2j-2,2k) - v_\theta^n(2i-1,2j-2,2k)}{4\Delta r} \quad (۱۳-۸-۳)$$

$$\sigma_{rz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \Big|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{rz}^n(2i,2j,2k) \times \left(\frac{v_z^n(2i,2j+2,2k+1) + v_z^n(2i,2j+2,2k-1) - v_z^n(2i,2j-2,2k+1) - v_z^n(2i,2j-2,2k-1)}{4\Delta r} + \frac{v_r^n(2i,2j+1,2k+2) + v_r^n(2i,2j-1,2k+2) - v_r^n(2i,2j+1,2k-2) - v_r^n(2i,2j-1,2k-2)}{4\Delta z} \right) \quad (۱۴-۸-۳)$$

$$\sigma_{z\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{z\theta}^n(2i,2j,2k) \times \frac{v_\theta^n(2i+1,2j,2k+2) + v_\theta^n(2i-1,2j,2k+2) - v_\theta^n(2i+1,2j,2k-2) - v_\theta^n(2i-1,2j,2k-2)}{4\Delta z} \quad (۱۵-۸-۳)$$

لازم به ذکر است که کار نیروی تنش موجود در معادلات فوق، شامل کار میدان فشار و تنش ویسکوز

نیز می‌باشد. با توجه به معادلات متشکله مورد استفاده، ترم تنش در معادلات مومنتوم و انرژی به صورت‌های مختلفی مدلسازی می‌شوند. ترم تنش نیوتنی که در نهایت منجر به لاپلاسین میدان سرعت شده، نقش موثری را در افزایش پایداری عددی کد کامپیوتری ایفا می‌کند از این رو در تمام معادلات متشکله مورد استفاده در این تحقیق با استفاده از روش جداسازی تنش الاستیک ویسکوز، سعی بر جدا سازی ترم تنش الاستیک از تنش ویسکوز شده است. به عبارت ساده‌تر تنش کلی سیال را به صورت مجموع تنش پلیمری و تنش ویسکوز به صورت معادله (۹-۳) در نظر می‌گیریم.

$$\sigma_{ij} = \tau_{N_{ij}} + \tau_{P_{ij}} \quad (۹-۳)$$

که در آن تنش پلیمری با استفاده از معادله متشکله تعریف شده و تنش ویسکوز نیز با استفاده از

معادله متشکله نیوتن محاسبه می‌شود.

۳-۴-شرایط مرزی

معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله مورد نظر که در مطالب بیان شده، به تفصیل مورد بررسی قرار گرفت، دارای گروهی از جواب‌هایی می‌باشد که همگی در معادله اصلی صادق می‌باشند. جهت دستیابی به جواب منحصر به فرد مسئله مورد نظر، می‌بایست شرایط مرزی حاکم بر مسئله را در جواب‌های بدست آمده اعمال نماییم. به طور کلی شرایط مرزی بیانگر حالت جریان در مجاور مرزها و تأثیر گذاری محیط اطراف به جریان سیال بوده که به سه صورت کلی دیریشله، نیومن و رابین موجود می‌باشند. در تحقیق حاضر بنا بر شرایط جریان و همچنین مرزهای فرض شده در اطراف فضای محاسباتی تلفیقی از شرایط مرزی دیریشله و نیومن به شرح زیر حاکم می‌باشد.

۳-۴-۱-شرایط مرزی جریان

همانطور که گفته شد، در این تحقیق هم میدان جریان و هم میدان دما به صورت در حال توسعه در نظر گرفته شده است. از این رو میدان سرعت در ورودی کانال با میدان سرعت در مقاطع بعدی کاملاً متفاوت می‌باشد. فرضیات متفاوتی برای میدان سرعت در ورودی به کانال قابل تصور می‌باشد که البته برای بعضی از این موارد، توجیه فیزیکی مناسبی موجود نمی‌باشد. در این تحقیق، شرط ورودی سرعت یکنواخت برای سرعت محوری و سرعت صفر برای سرعت در جهت‌های عرضی فرض شده است. در حقیقت این فرض معادل ورود جریان آزاد یک سویه در ابتدای کانال می‌باشد. با توجه به کاهش فضای محاسباتی به یک دوم هندسه اولیه و در پی آن ایجاد یک مرز تقارن، می‌بایست شرایط مرزی مناسبی برای مرز تقارن نیز تعریف شود. با توجه به خاصیت آئینه‌ای موجود در مرز تقارن، سرعت گره‌های روی مرز در جهت عمود بر صفحه تقارن صفر و در جهت‌های موازی با صفحه تقارن برابر با نود مجاور مرز منظور شده است. بر روی دیواره‌ها

هم شرط مرزی عدم لغزش که برای این تحقیق شرط مناسبی می باشد رعایت شده است. با توجه به در نظر گرفتن طول کافی برای کانال و در پی آن فرض توسعه یافتگی جریان و انتقال حرارت در خروجی کانال تغییرات سرعت در سه جهت نسبت به محور کانال صفر منظور شده است. شرطهای مرزی اعمال شده برای سرعت در تمامی مرزها، در روابط نشان داده شده است.

$$V^+ = -V^- \quad (1-10-3)$$

$$v_\theta(:, a^-, :) = -v_\theta(:, a^+, :), v_r(:, a, :) = 0, v_z(:, a^-, :) = -v_z(:, a^+, :) \quad (2-10-3)$$

صفحه $r = a$

$$v_\theta(:, :, 0^-) = -v_\theta(:, :, 0^+), v_r(:, :, 0^-) = -v_r(:, :, 0^+), v_z(:, :, 0) = 0 \quad (3-10-3)$$

صفحه $z = 0$

$$v_\theta(:, :, b^-) = v_\theta(:, :, b^+), v_r(:, :, b^-) = v_r(:, :, b^+), v_z(:, :, b) = 0 \quad (4-10-3)$$

صفحه تقارن $z = b$

$$v_\theta(0, :, :) = v_{\theta_n}, v_r(0^-, :, :) = -v_r(0^+, :, :), v_z(0^-, :, :) = -v_z(0^+, :, :) \quad (5-10-3)$$

ورودی $\theta = 0$

$$v_\theta(\frac{3\pi^-}{2}, :, :) = v_\theta(\frac{3\pi^+}{2}, :, :), v_r(\frac{3\pi^-}{2}, :, :) = v_r(\frac{3\pi^+}{2}, :, :), v_z(\frac{3\pi^-}{2}, :, :) = v_z(\frac{3\pi^+}{2}, :, :) \quad (6-10-3)$$

خروجی $\theta = 3\pi/2$

که در معادلات فوق، منظور از ذکر پارامترها با بالانویس +، - بترتیب نودهای مجاور قبلی و بعدی دیواره می باشد. در اینجا مجدداً یادآوری می نماییم که تمامی مرزها بر روی شمارنده های فرد قرار دارند و در مورد کمیت هایی که تعریف آنها بر روی شمارنده های زوج می باشد، شرایط مرزی را می بایست با استفاده از گره های مجاور اعمال نمود؛ از اینرو لازم است بعضی از گره ها در خارج از هندسه مورد بررسی نیز تعریف شوند. در حقیقت این گره ها که شمارنده های ۲ و $2n+4$ را به خود اختصاص می دهند تنها روشی به منظور دستیابی به تعریفی صحیح برای شرایط مرزی بر روی مرزها می باشد و در عمل این گره ها هیچ تعبیر فیزیکی نداشته و در فیزیک مسئله و جواب های بدست آمده هیچ تغییری ایجاد نمی کنند. به عنوان مثال

همانطور که از رابطه (۳-۱۰-۱) مشخص است، بنا به شرط مرزی عدم لغزش سرعت در راستای محور r بر روی دیواره $z = 0$ برابر با صفر است ولی با توجه به اینکه مرزها بر روی شمارنده‌های فرد قرار گرفته و همانطور که پیش‌تر گفته شد، تعریف سرعت در راستای محور r بر روی شمارنده‌های زوج محور z انجام شده است، پس امکان تعریف مستقیم شرط مرزی برای سرعت در جهت محور r بر روی مرز جامد $z = 0$ وجود ندارد. از این‌رو با تعریف یک گره مجازی قبل از مرزهای سیستم و برابر قرار دادن سرعت آن با منفی سرعت گره متقارن آن داخل سیستم، سرعت بر روی مرز جامد از نظر محاسباتی برابر صفر خواهد شد. با توجه به تعریف مستقیم مقدار تنش بر روی فضای محاسباتی، تعریف شرط مرزی برای این کمیت نیز لازم به نظر می‌رسد. از این‌رو با توجه به وجود جریان آزاد در مرز ورودی سیستم، تنش سیال در ورودی کانال در تمامی جهت‌ها صفر منظور شده است.

بر روی دیواره‌های جامد به علت موجود نبودن شرط مرزی مناسبی برای تنش که از نظر فیزیکی نیز قابل توجیه باشد، شرط مرزی تنش با استفاده از مولفه‌های آن از جمله گرادیان سرعت و نرخ برش تعریف شده است. در اینجا مجدداً یادآوریم می‌کنیم که با توجه به شبکه مورد استفاده در این تحقیق، هیچ نیازی به تعریف شروط مرزی فشار بر روی دیواره‌ها و یا مرزهای ورودی و خروجی احساس نبوده و میدان فشار در کانال با استفاده از معادله پیوستگی تشکیل شده و در معادله مومنتوم تصحیح می‌شود.

بر روی مرز تقارن، مولفه‌های تنش در راستای عمود بر مرز بصورت متقارن و مخالف جهت در دو طرف مرز در نظر گرفته شده است و مولفه‌های تنش موازی با مرز تقارن، بصورت متقارن و هم جهت در دو طرف مرز در نظر گرفته شده است. در خروجی کانال نیز شرط توسعه‌یافتگی برای تمامی مولفه‌های تنش نیز اعمال شده است. شروط مرزی در نظر گرفته شده برای مولفه‌های تنش در مرزهای محاسباتی در روابط (۳-۱۱-۱) تا (۳-۱۱-۶) نشان داده شده است.

(۳-۱۱-۱)

صفحه $r = 0$

تعریف با استفاده از شروط مرزی سرعت و رابطه آن با تنش بر حسب معادله متشکله

تعریف با استفاده از شروط مرزی سرعت و رابطه آن با تنش بر حسب معادله متشکله (۲-۱۱-۳)

صفحه $r = a$

تعریف با استفاده از شروط مرزی سرعت و رابطه آن با تنش بر حسب معادله متشکله (۳-۱۱-۳)

صفحه $z = 0$

$$\tau_{rz}(:, :, b^-) = -\tau_{rz}(:, :, b^+), \tau_{zz}(:, :, b^-) = \tau_{zz}(:, :, b^+), \tau_{\theta\theta}(:, :, b^-) = \tau_{\theta\theta}(:, :, b^+) \quad (۴-۱۱-۳)$$

$$\tau_{z\theta}(:, :, b^-) = -\tau_{z\theta}(:, :, b^+), \tau_{rr}(:, :, b^-) = \tau_{rr}(:, :, b^+), \tau_{r\theta}(:, :, b^-) = \tau_{r\theta}(:, :, b^+) \quad \text{صفحه تقارن } z = b$$

$$\tau_{rz}(0^-, :, :) = -\tau_{rz}(0^+, :, :), \tau_{zz}(0^-, :, :) = -\tau_{zz}(0^+, :, :), \tau_{\theta\theta}(0^-, :, :) = -\tau_{\theta\theta}(0^+, :, :) \quad (۵-۱۱-۳)$$

$$\tau_{z\theta}(0^-, :, :) = -\tau_{z\theta}(0^+, :, :), \tau_{rr}(0^-, :, :) = -\tau_{rr}(0^+, :, :), \tau_{r\theta}(0^-, :, :) = -\tau_{r\theta}(0^+, :, :) \quad \text{ورودی } \theta = 0$$

$$\tau_{rz}\left(\frac{3\pi^-}{2}, :, :\right) = \tau_{rz}\left(\frac{3\pi^+}{2}, :, :\right), \tau_{zz}\left(\frac{3\pi^-}{2}, :, :\right) = \tau_{zz}\left(\frac{3\pi^+}{2}, :, :\right), \tau_{\theta\theta}\left(\frac{3\pi^-}{2}, :, :\right) = \tau_{\theta\theta}\left(\frac{3\pi^+}{2}, :, :\right) \quad (۶-۱۱-۳)$$

$$\tau_{z\theta}\left(\frac{3\pi^-}{2}, :, :\right) = \tau_{z\theta}\left(\frac{3\pi^+}{2}, :, :\right), \tau_{rr}\left(\frac{3\pi^-}{2}, :, :\right) = \tau_{rr}\left(\frac{3\pi^+}{2}, :, :\right), \tau_{r\theta}\left(\frac{3\pi^-}{2}, :, :\right) = \tau_{r\theta}\left(\frac{3\pi^+}{2}, :, :\right) \quad \text{خروجی } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

لازم بذکر است که در بعضی از موارد، احتیاج به تعریف گرادیانهای سرعت بر روی نودهای مجاور

مرزهای سیستم نیز بوجود می آید که این عمل نیز با توجه به تعریف نودهای مجازی در اطراف مرزها، با

استفاده از عمگر اختلاف محدود مرکزی امکانپذیر می باشد.

۳-۴-۲- شرایط مرزی انتقال حرارت

تاکنون شروط مرزی مربوطه و مورد استفاده در معادلات پیوستگی و مومنتوم بیان شد. جهت دستیابی به

حل منحصر به فرد معادله انرژی نیز می بایست شروط مرزی در مرزهای دامنه محاسباتی برای دما نیز

مشخص شوند. در کانالهای خمیده که چهار دیواره ثابت وجود دارد، شرایط مرزی حرارتی متفاوتی برای

دیوارهها متصور می باشد.

به عنوان مثال می توان هر چهار دیواره را با دمای ثابت که برابر یا غیر برابر هستند محدود نمود که در

حالت اختصار این شرط مرزی حرارتی را با نماد T نشان می دهند. در حالتی دیگر، یک شار حرارتی ثابت

محوری به دیوارهها اعمال شده و همچنین دمای دیوارهها به صورت محیطی ثابت فرض می شود که این

شرط مرزی حرارتی نیز به شرط H_1 معروف می‌باشد. این شرط مرزی حالتی رایج در مدل‌سازی مسائل مهندسی از جمله گرمایش مقاومت‌های الکتریکی، گرمایش هسته‌ای، مبدل‌های حرارتی جریان معکوس و ... می‌باشد. در حالتی دیگر می‌توان یک شار حرارتی که هم از نظر محوری و هم از نظر محیطی یکنواخت باشد، به دیواره‌ها اعمال نمود که در اختصار به شرط مرزی حرارتی H_2 معروف می‌باشد. در این تحقیق از شرایط مرزی T و H_2 استفاده شده‌است که در هر مورد از ارائه نتایج، به شرط مرزی حرارتی مورد استفاده نیز اشاره خواهد شد.

شرط مرزی T از نوع دیرپیشله بوده و اعمال آن بر روی مرزهای سیستم به راحتی صورت می‌پذیرد. دمای دیواره‌های جامد در دو حالت بیشتر از دمای ورودی سیال و دیگری کمتر از دمای ورودی سیال که در حالت اول منجر به گرمایش سیال و در حالت دوم منجر به سرد شدن سیال می‌شود، در نظر گرفته شده است. دمای مرزهای تقارن نیز همانند قبل با توجه به خاصیت آینه‌ای اعمال شده است. در این صورت با توجه به پارامترهای بی‌بعد اعمال شده در حالت دما ثابت، دمای اعمالی بر روی مرزها به همراه شرایط مرزی آن‌ها در روابط (۳-۱۲-۱) تا (۳-۱۲-۶) قابل مشاهده می‌باشد.

$$T = T_{wall} \ \& \ T^* = \frac{T - T_{wall}}{T_{in} - T_{wall}} \rightarrow T_{wall}^* = 0 \quad (۳-۱۲-۱)$$

صفحه $r = 0$

$$T^*(:, 2, :) = 2 \times T_{wall}^* - T^*(:, 4, :)$$

$$T = T_{wall} \ \& \ T^* = \frac{T - T_{wall}}{T_{in} - T_{wall}} \rightarrow T_{wall}^* = 0 \quad (۳-۱۲-۲)$$

صفحه $r = a$

$$T^*(:, a^-, :) = 2 \times T_{wall}^* - T^*(:, a^+, :)$$

$$T = T_{wall} \ \& \ T^* = \frac{T - T_{wall}}{T_{in} - T_{wall}} \rightarrow T_{wall}^* = 0 \quad (۳-۱۲-۳)$$

صفحه $z = 0$

$$T^*(:,:, 0^-) = 2 \times T_{wall}^* - T^*(:,:, 0^+)$$

$$T^*(:,:, b^-) = T^*(:,:, b^+) \quad (۳-۱۲-۴)$$

صفحه تقارن $z = b$

$$T = T_{in} \text{ \& } T^* = \frac{T - T_{wall}}{T_{in} - T_{wall}} \rightarrow T_{in}^* = 1 \quad (5-12-3)$$

$\theta = 0$ ورودی

$$T^*(0^-, :, :) = 2 \times T_{in}^* - T^*(0^+, :, :)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \theta} = 0 \rightarrow T^*\left(\frac{3\pi^-}{2}, :, :\right) = T^*\left(\frac{3\pi^+}{2}, :, :\right) \quad (6-12-3)$$

$\theta = 3\pi/2$ خروجی

لازم بذکر است که در این حالت نیز مقادیر دما همگی بر روی نودهای زوج سیستم تعریف شده در حالی که تمامی مرزها بر روی نودهای فرد قرار دارند؛ که در این صورت اعمال شروط مرزی دما ثابت نیز بر روی مرزهای سیستم با بهره‌گیری از دمای تعریف شده برای نودهای مجازی مجاور مرز ممکن خواهد بود. در حالت اعمال شار حرارتی ثابت به دیواره‌ها، شرط H_2 شرط مرزی سیستم از نوع نیومن خواهد بود که در این حالت گرادیان دما در جهت عمود بر مرز موجود می‌باشد. حال با تقریب مرکزی اختلاف محدود بر روی مرزهای جامد و برابر قرار دادن آن با شار حرارتی اعمالی به مرزها، می‌توان شرط مرزی قابل اعمال بر روی مرزهای جامد ناحیه محاسباتی را بدست آورد که این مطلب در روابط (3-13-1) تا (3-13-4) دیده می‌شود. شرط مرزی بر روی دیواره تقارن و همچنین ورودی کانال نیز همانند حالت قبل، قابل اعمال خواهد بود.

$$q'' = -k \frac{\partial T^*}{\partial r} \Big|_{wall} \rightarrow q'' = -k \frac{T(:, 0^+, :) - T^*(:, 0^-, :)}{\Delta r} \quad (1-13-3)$$

$$T^*(:, 0^-, :) = -\frac{q'' \Delta r}{k} + T(:, 0^+, :)$$

صفحه $r = 0$

$$T^* = \frac{T - T_{in}}{q'' D_h / k}, \rightarrow T^*(:, 2^+, :) = \Delta r^* + T^*(:, 4^+, :)$$

$$q'' = -k \frac{\partial T^*}{\partial z} \Big|_{wall} \rightarrow q'' = -k \frac{T(:, a^+, :) - T(:, a^-, :)}{\Delta r} \quad (2-13-3)$$

$$T^*(:, a^-, :) = -\frac{q'' \Delta r}{k} + T(:, a^+, :)$$

صفحه $r = a$

$$T^* = \frac{T - T_{in}}{q'' D_h / k}, \rightarrow T^*(:, a^+, :) = \Delta r^* + T^*(:, a^-, :)$$

$$q'' = -k \frac{\partial T^*}{\partial z} \Big|_{wall} \rightarrow q'' = -k \frac{T(:, :, 0^+) - T(:, :, 0^-)}{\Delta z} \quad (3-13-3)$$

$$T^*(:, :, 0^-) = -\frac{q'' \Delta r}{k} + T(:, :, 0^+)$$

صفحه $z = 0$

$$T^* = \frac{T - T_{in}}{q'' D_h / k}, \rightarrow T^*(:, :, 2^+) = \Delta z^* + T^*(:, :, 4^+)$$

(4-13-3)

$$T^*(:, :, b^-) = T^*(:, :, b^+)$$

صفحه تقارن $z = b$

می‌بایست توجه داشت که در حالت انتقال حرارت از دیواره به سیال، q'' مثبت در نظر گرفته شده است. یکی از تفاوت‌های قابل توجه این حالت با حالت‌های در نظر گرفته شده قبلی، شرط مرزی حرارتی در خروجی کانال می‌باشد زیرا با اعمال شار حرارتی ثابت به دیواره‌های کانال، بر خلاف حالت‌های قبلی، جریان در کانال هیچ موقع به حالت دائم حرارتی که در آن تغییرات دما نسبت به محور کانال صفر باشد، نمی‌رسد؛ بنابراین فرض حالت توسعه‌یافته‌ی حرارتی برای مرز خروجی کانال، فرض نامناسبی می‌باشد. در این حالت دو شرط مرزی برای خروجی کانال مفروض می‌باشد. در حالت اول با فرض کل کانال به عنوان یک حجم کنترل و اعمال قانون بقای انرژی، می‌توان شرط مرزی مناسب برای خروجی کانال را بدست آورد که البته این شرط با صرف‌نظر از تلفات ویسکوز و فرض صفر بودن عدد برینکمن صادق است.

حالت دیگر که در برخی مراجع نیز پیشنهاد شده و در این تحقیق هم از این شرط مرزی استفاده شده است، فرض صفر بودن مشتق دوم دما در خروجی کانال می‌باشد که با اعمال این شرط مرزی هم جواب‌های

قابل قبولی بدست خواهد آمد. لازم بذکر است که با اعمال این شرط و در حالت صفر نبودن عدد برینکمن، تغییرات دمای متوسط سیال در راستای کانال هیچگاه به مقداری ثابت نخواهد رسید و مقدار گرادیان لحظه‌ای دمای متوسط سیال تابعی از عدد برینکمن سیال خواهد بود. شرایط مرزی حرارتی مناسب برای ورودی و خروجی کانال در حالت شار ثابت به همراه نحوه اعمال این شرایط در روابط (۳-۱۴) و (۳-۱۴-۱) نشان داده شده‌است.

$$T = T_{in} \ \& \ T^* = \frac{T - T_{in}}{q'' D_h / k}, \rightarrow T_{in}^* = 0 \quad (۳-۱۴-۱)$$

ورودی $\theta = 0$

$$T^*(2, :, :) = 2 \times T_{in}^* - T^*(4, :, :)$$

$$\dot{Q} = \dot{m} c \Delta t \quad (۳-۱۴-۲ \text{ الف})$$

$$T_{out} = \frac{q'' \times S}{\dot{m} c} + T_{in}, \dot{m} = \rho A U_{ref}, A = a \times \frac{b}{2}, S = \left(\frac{b}{2} \times L_{mean}\right) + (a \times L_{mean})$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \text{ خروجی}$$

$$T_{out} = \frac{q'' \times L_{mean} \times (a + b/2)}{\rho a \times \frac{b}{2} U_{ref} c} + T_{in}, T^* = \frac{T - T_{in}}{q'' D_h / k}$$

$$T_{out}^* = \frac{4d\theta \times R_p}{Re.Pr}$$

$$T^*\left(\frac{3\pi}{2}^+, :, :\right) = 2 \left(\frac{4d\theta \times R_p}{Re.Pr} \right) - T^*\left(\frac{3\pi}{2}^-, :, :\right) + Br \phi(:, :, :)$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} = 0 \rightarrow T^*\left(\frac{3\pi}{2}^+, :, :\right) = 2 \times T^*\left(\frac{3\pi}{2}^-, :, :\right) - T^*\left(\frac{3\pi}{2}^{--}, :, :\right) \quad (۳-۱۴-۲ \text{ ب})$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \text{ خروجی}$$

۳-۵- شرایط اولیه

همانطور که گفته شد در تحقیق حاضر جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت دائم مد نظر قرار گرفته‌است ولی با توجه به روش عددی مورد استفاده و تبدیل معادلات به شکل ظاهراً گذرا اعمال شرایط اولیه مناسب

جهت شروع حل لازم می‌باشد. البته لازم بذکر است که ترم زمان موجود در معادلات و همچنین ترم‌های اضافه شده به معادلات حاکمه، ارزش و معنی فیزیکی نداشته و صرفاً یک روش عددی برای رسیدن به جواب‌های حالت پایدار مسئله بوده و شبیه به یک کاتالیزور عددی عمل می‌کنند که در نتایج بدست آمده هیچ تاثیری نداشته و در پایان از معادلات حذف می‌شوند. با توجه به روش به کار برده شده و همچنین بررسی‌های انجام شده بر روی نتایج، شرایط اولیه فرض شده هیچ تاثیری در نتایج حالت دائم سیستم ندارند ولی فرض بعضی از شرایط اولیه که توجیه فیزیکی نداشته و یا از حالت دائم سیستم اختلاف زیادی دارند، باعث واگرایی جواب‌ها و یا همگرایی معادلات به مقادیر غیر منطقی جواب‌های معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله می‌شود. از این رو می‌بایست در فرض شرایط اولیه برای کلیه کمیت‌ها دقت کافی مدنظر قرار گیرد تا شرایط اولیه فرض شده باعث همگرایی مسئله به جواب‌های غیر قابل قبول و یا واگرایی جواب‌ها نشود. بهترین روش به منظور افزایش اطمینان از همگرایی جواب‌ها به مقادیر قابل قبول، تغییر تدریجی کمیت‌ها از حالت اولیه و فرض جواب بدست آمده از نتایج قبلی به عنوان شرایط اولیه جدید می‌باشد که در این تحقیق نیز از این روش استفاده شده است. بدیهی است این روش باعث افزایش چشمگیر محاسبات جهت رسیدن به جواب‌های مدنظر شده ولی همگرایی و صحت نتایج بدست آمده را تضمین کرده و در بعضی شرایط هم به علت غیر خطی بودن معادلات و در پی آن تمایل مقادیر خروجی به واگرایی، ناگزیر به استفاده از این روش می‌باشیم.

با در نظر گرفتن مطالب بیان شده مقادیر اولیه صفر برای سرعت در جهت‌های عرضی و مقدار یک برای سرعت محوری فرض شده است. دمای نقاط مختلف کانال در دو شرط مرزی دما ثابت و شار حرارتی ثابت در حالت اولیه یک فرض شده است. لازم بذکر است که تمامی مقادیر اولیه فرض شده برای سیستم بی‌بعد می‌باشد. مقادیر اولیه کمیت‌هایی از جمله ویسکوزیته، ضریب رسانش، ظرفیت حرارتی ویژه و ضریب آسودگی تنش که با تغییرات دما در طول کانال تغییر می‌کنند، برابر با مقدار آن‌ها در دمای ورودی کانال در

نظر گرفته شده است. شرایط اولیه مفروض برای حل این مسئله در روابط (۳-۱۶) نشان داده شده است.

$$v_{\theta}^*(; ; ;)=1, v_r^*(; ; ;)=0, v_z^*(; ; ;)=0, T^*(; ; ;)=0 \quad (۳-۱۶)$$

بدیهی است که شرایط اولیه بیان شده بهترین شرایط اولیه از نظر نگارنده برای تحقیق مورد نظر بوده و

شرط عدم اثر گذاری این شرایط بر نتایج حالت دائم و همچنین همگرایی جواب‌ها به مقادیر صحیح و قابل

قبول در تمامی حالت‌های گزارش شده مورد بررسی قرار گرفته و صحت آن تأیید شده است.

۳-۶- خطای محاسباتی

در این تحقیق نیز همانند تمامی مدل‌سازی‌های عددی نتایج بدست آمده مقداری با نتایج حل دقیق تفاوت

داشته که این تفاوت حاصل از خطای عددی می‌باشد. البته لازم بذکر است که در بعضی از مسائل، از جمله

تحقیق حاضر، حل دقیق وجود نداشته و حل عددی ناگزیر به نظر می‌رسد. فقط می‌بایست در حل عددی

سعی در از بین بردن منابع خطا و یا حداقل نمودن آن‌ها شود. دو خطای رایج در محاسبات عددی، خطای

کوتاه‌سازی و یا همان ترانکیشن و دیگری خطای گرد کردن می‌باشد. عامل بوجود آمدن خطای کوتاه‌سازی،

جایگزینی برخی از ترم‌های موجود در معادلات حاکم بر مسئله با تعداد جملات متناهی از فرم‌های گسسته

آن‌ها مانند بسط تیلور می‌باشد. با توجه به اینکه در مدل‌سازی‌های عددی مجبور به جایگزینی عبارت‌های

پیوسته معادلات حاکمه بوسیله بسط‌های گسسته آن‌ها بر روی شبکه محاسباتی و سلول‌های ایجاد شده

می‌باشیم، در تمامی تحقیقات انجام شده بوسیله مدل‌سازی‌های عددی این خطا ناگزیر به نظر می‌رسد ولی

می‌توان با استفاده از برخی روش‌های موجود، مقدار این خطا را کاهش داد. با توجه به جایگزینی معادلات

حاکمه بوسیله مقدار متناهی از جملات بسط تیلور، بدیهی به نظر می‌رسد که با افزایش جملات مورد

استفاده از این سری می‌توان تفاوت بین مقدار اصلی کمیت و مقدار تخمین زده شده آن را کاهش داد.

البته با توجه به افزایش توان جملات موجود در سری، انتخاب تعداد بیشتری از جملات باعث پیچیده تر

شدن مدل‌سازی و در پی آن افزایش ناپایداری حل شود. مطلب اثر گذار دیگر بر خطای کوتاه‌سازی، سائز

سلول‌های محاسباتی می‌باشد. با توجه به ثابت بودن فضای محاسباتی با افزایش تعداد سلول‌های مورد استفاده می‌توان سائز سلول‌ها را کاهش داد که این عمل در نهایت به کاهش خطای کوتاه‌سازی منجر می‌شود. البته باید توجه داشت که افزایش تعداد سلول‌ها باعث افزایش خطای گردکردن شده که در ادامه بیشتر راجع به آن توضیح داده می‌شود.

همان‌طور که گفته شد در این تحقیق از روش تفاضل محدود جهت گسسته‌سازی معادلات استفاده شده است و با توجه به تخمین جملات مشتق مرتبه اول نواحی مرزی با تفاضل محدود پیشرو و پسرو که جملات مؤثر در خطای کوتاه‌سازی آن‌ها از مرتبه اول سائز شبکه بوده و همچنین استفاده از تفاضل محدود مرکزی برای تخمین جملات مشتق مرتبه اول و بالاتر که جملات مؤثر در کوتاه‌سازی آن‌ها از مرتبه دوم سائز شبکه می‌باشد، حداکثر خطای حاصل از این موضوع، وابسته به سائز شبکه و کمتر از توان دوم آن می‌باشد. دیگر خطای موجود در محاسبات عددی خطای گردکردن می‌باشد که منبع اصلی این خطا رند کردن اعداد اعشاری مورد استفاده در محاسبات توسط پردازنده می‌باشد؛ به عبارت دیگر هرچه اعداد اعشاری با دقت بیشتری مورد استفاده قرار گیرند خطای گردکردن اثر کمتری در محاسبات خواهد داشت. البته بر عکس خطای کوتاه‌سازی، مقدار این خطا با تعداد سلول‌های شبکه رابطه مستقیم دارد و با افزایش نودهای محاسباتی، مقدار این خطا افزایش می‌یابد. چرا که با افزایش نودها، مقدار محاسبات عددی مربوط به کل شبکه بیشتر شده و در حقیقت تعداد منابع ایجاد خطای گردکردن بیشتر می‌شود. البته با توجه به اینکه در تحقیق حاضر از نرم افزار متلب جهت انجام محاسبات استفاده شده و همچنین فرمت اعشاری دقیق با دقت 10^{-16} برای اعداد در نظر گرفته شده است، لذا حداکثر خطای گردکردن در هر عملیات انجام شده، کمتر از 10^{-16} بوده که در مقیاس بزرگی اعداد مورد محاسبه، قابل صرف نظر کردن می‌باشد. با توجه به اثر معکوس تعداد نودهای محاسباتی بر خطای کوتاه‌سازی و اثر مستقیم و ناچیز آن بر خطای گردکردن، انتظار آن می‌رود که در این تحقیق با افزایش تعداد سلول‌های شبکه، مقدار خطای کلی محاسبات کاهش یابد که

البته این عمل باعث افزایش هزینه محاسبات می‌شود. بدین منظور شبکه‌های محاسباتی متفاوتی مورد بررسی قرار گرفته که از میان آن‌ها شبکه بهینه انتخاب شده است. در فصل بعد توضیحات بیشتری در این زمینه ارائه خواهد شد.

۳-۷- الگوریتم حل

با توجه به مطالب بیان شده تاکنون، روند مدل‌سازی عددی استفاده شده در این تحقیق به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته و معادلات حاکم، نحوه گسسته‌سازی آن‌ها و همچنین روش عددی مورد استفاده و شرایط مرزی آن‌ها ارائه شده است. جهت انجام محاسبات ریاضی و حل معادلات گسسته، برنامه‌ای با استفاده از نرم افزار متلب تهیه شده است که در این قسمت به صورت کلی به روند انجام محاسبات و ترتیب مراحل انجام شده (الگوریتم حل) در این برنامه اشاره خواهیم کرد.

روند انجام محاسبات در کد تهیه شده در این تحقیق به شرح زیر است.

گام اول: وارد نمودن اطلاعات هندسی و مقادیر مربوط به کمیت‌ها:

در ابتدای اجرای برنامه می‌بایست سائز شبکه، تعداد نودهای محاسباتی، سائز نودهای محاسباتی، مقدار مربوط به خواص هیدرودینامیکی و حرارتی سیال از قبیل ویسکوزیته، ضریب هدایت، ... و همچنین شرایط جریان ورودی کانال از قبیل دما و سرعت ورودی تعیین شوند. با مشخص شدن این مقادیر، همه کمیت‌ها با استفاده از تعاریف مربوطه بی‌بعد شده و برخی از پارامترها و اعداد بی‌بعد اثر گذار در جریان و انتقال حرارت از قبیل عدد رینولدز، پرانتل و ... محاسبه می‌شوند. پس از آن برخی از پارامترهای مربوط به روش عددی مورد استفاده از قبیل گام زمانی، خطای مجاز محاسبات و ... تعیین می‌شوند.

گام دوم: اعمال شرایط اولیه:

علیرغم تمرکز تحقیق به حل دائم مسئله مورد نظر، با توجه به روش استفاده شده در این تحقیق می‌بایست شرایط اولیه جهت شروع حل نیز تعیین شوند که تعیین این شرایط با توجه به مطالب

بیان شده در قسمت‌های مربوطه انجام می‌پذیرد.

◀ حلقه اصلی برنامه

گام سوم: محاسبه برخی از پارامترهای مورد نیاز از جمله سرعت و گرادیان‌های مربوط به آن‌ها بر روی شبکه اولیه (نودهای زوج):

از آنجا که در روند حل نیاز به استفاده از مقدار برخی پارامترها و یا مشتق آن‌ها در شبکه‌های ابتدایی و ثانویه می‌باشد، از اینرو می‌بایست مقدار آن‌ها بر روی هر دو شبکه موجود باشد. با توجه به اینکه تعریف اولیه هر پارامتر تنها بر روی یکی از دو شبکه موجود می‌باشد، می‌بایست مقدار برخی پارامترهای مورد نیاز را بر روی شبکه دیگر نیز محاسبه نماییم.

گام چهارم: محاسبه و برآورد برخی از پارامترها در نودهای مجازی خارج از دامنه حل: همانطور که در بخش (۳-۲) به تفصیل بیان شد، با توجه به وجود دو شبکه حل، می‌بایست به منظور قابلیت اعمال شرایط مرزی، برخی از پارامترها در نودهای مجازی خارج از دامنه حل نیز تعریف شوند.

گام پنجم: محاسبه تانسور نرخ برش با استفاده از مقادیر گرادیان سرعت بر روی شبکه اولیه.

گام ششم: محاسبه برخی از جملات مربوط به معادله متشکله از جمله حاصل ضرب سرعت در تانسور تنش:

در این قسمت با استفاده از زیر برنامه‌های تهیه شده در نرم افزار متلب، برخی از مقادیر مربوط به معادلات حاکمه از جمله ترمهای موجود در معادله متشکله، نرخ برش تعمیم‌یافته و ... به صورت جداگانه و با فراخوانی مقادیر اثرگذار در آن‌ها محاسبه می‌شود.

گام هفتم: محاسبه تنش پلیمری:

در این قسمت تانسور تنش پلیمری با توجه به تعریف آن در معادله متشکله و با استفاده از ترم‌های

تشکیل دهنده آن که در قسمت‌های قبل مورد محاسبه قرار گرفته‌اند، تعیین می‌شود.

گام هشتم: محاسبه تنش پلیمری در نودهای مجازی:

با توجه به دلایل بیان شده در قسمت‌های قبل، مقدار تنش در نودهای مجازی خارج از شبکه محاسباتی جهت اعمال شرایط مرزی تنش نیز محاسبه می‌شود.

گام نهم: حل معادله مومنتوم:

در این قسمت در ابتدا جملات تشکیل دهنده معادلات مومنتوم با استفاده از مقادیر پارامترهای مربوط در گام زمانی فعلی محاسبه شده و پس از آن با استفاده از گسسته‌سازی انجام شده بر روی معادلات مومنتوم، مقادیر مربوط به سرعت‌ها در سه جهت r, θ, z در گام زمانی جدید با استفاده از مقادیر تعریف شده در گام زمانی قبلی محاسبه می‌شود.

گام دهم: اعمال شرایط مرزی سرعت:

در این قسمت شرایط مرزی سرعت در مرزهای ورودی و خروجی، دیواره‌ها و مرز تقارن با استفاده از مقادیر جدید بدست آمده و با توجه به مطالب بیان شده در قسمت مربوط به شرایط مرزی اعمال می‌شود.

گام یازدهم: حل معادله پیوستگی:

در این قسمت با استفاده از مقادیر جدید بدست آمده برای میدان سرعت در گام زمانی جدید و مقادیر فشار در گام زمانی قبلی، معادله پیوستگی حل شده و میدان فشار در گام زمانی جدید محاسبه می‌شود.

گام دوازدهم: حل معادله انرژی:

در این قسمت در ابتدا جملات تشکیل دهنده معادله انرژی از قبیل کار میدان تنش، ترم نفوذ حرارتی، ترم جابجایی حرارتی و ... با استفاده از مقادیر مربوط به سرعت و تنش در گام زمانی جدید و

مقادیر مربوط به دما در گام زمانی فعلی حساب شده و پس از آن با استفاده از گسسته‌سازی انجام شده بر روی معادله انرژی، مقادیر مربوط به میدان دما در گام زمانی جدید محاسبه می‌شود.

گام سیزدهم: اعمال شرایط مرزی دما

در این قسمت بنا به شرایط مرزی در نظر گرفته‌شده برای دما (شرایط مرزی حرارتی T یا H_2) این شرایط بنا به توضیحات داده شده بر روی مقادیر مرزی اعمال می‌شوند.

گام چهاردهم: محاسبه مقدار باقیمانده:

با استفاده از مقادیر به‌دست‌آمده برای پارامترهای جریان و انتقال حرارت (فشار، سرعت، دما) در گام زمانی جدید و مقادیر مربوط به آن‌ها در گام زمانی قبلی، مقدار تفاوت بین آن‌ها که همان خطای این مقادیر از حالت دائم حل می‌باشد، محاسبه می‌شود.

گام پانزدهم: ترسیم نمودار همگرایی:

به‌منظور رؤیت روند همگرایی برنامه در زمان اجرا، مقادیر باقیمانده معادلات نسبت به گام زمانی بر روی یک گراف ترسیم می‌شود.

گام شانزدهم: سنجش مقادیر باقیمانده با معیارهای همگرایی:

در این قسمت مقادیر باقیمانده محاسبه‌شده با معیارهای همگرایی در نظر گرفته‌شده که همان دقت قابل قبول محاسبات می‌باشند، سنجیده شده و در صورت ارضای آن‌ها، جواب‌های به‌دست‌آمده به‌عنوان جواب‌های قابل قبول معرفی می‌شوند و در صورت رد آن‌ها، این جواب‌ها به‌عنوان حدس‌های اولیه برای شروع محاسبات در گام زمانی جدید در نظر گرفته‌شده و محاسبات به ابتدای گام ۳ برمی‌گردد و از ابتدای این مرحله محاسبات مجدداً انجام‌شده و تا جایی که دقت محاسبات به حد قابل قبول برسد، این روند ادامه می‌یابد.

فصل ۴- نتایج

۴-۱- مقدمه

در این فصل، نتایج بدست‌آمده از حل عددی برای شبیه سازی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در کانال خمیده مربعی که با استفاده از معادله ساختاری گزیکس مدل‌سازی شده، ارائه خواهد شد. در ابتدای این فصل شرایط اعمال شده به منظور میل به جواب قابل قبول مسئله آورده شده است. در ادامه به منظور دستیابی به شبکه‌بندی مناسب دامنه محاسباتی، استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی بررسی شده و میزان خطا و هزینه محاسباتی مربوط به هر شبکه ارائه شده است و در نهایت شبکه‌بندی بهینه انتخاب شده است.

در ادامه فصل و قبل از ارائه نتایج این تحقیق، صحت نتایج بدست آمده با استفاده از تحقیقات پیشین در حالت‌های ممکن ارزیابی می‌گردد و پس از آن به ارائه نتایج بدست آمده از این تحقیق در دو مبحث جریان و انتقال حرارت سیال می‌پردازیم. لازم به ذکر است که در هر مورد مشخصه‌های میداین جریان و انتقال حرارت ارائه شده و مقادیر اثر گذار بر این مشخصه‌ها نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند.

این فصل مهم‌ترین بخش گزارش پژوهش حاضر محسوب می‌شود که در آن بر اساس نتایج حاصل از حل عددی، بر روی فیزیک این جریان و منشأ و علل اثر پارامترهای مختلف بحث می‌شود.

۴-۲- شرایط و الگوی همگرایی

همان‌طور که در فصل‌های پیشین بیان شد، در این تحقیق با تبدیل معادلات به صورت شبه گذرا، از روش تکرار برای حل معادلات استفاده شده است؛ بدین صورت که در هر تکرار، تمامی معادلات پیوستگی، مومنتوم، انرژی و معادلات متشکله مورد حل قرار می‌گیرند و نتایج بدست آمده از آن‌ها که همان مقادیر مربوط به میدان فشار، میدان سرعت، میدان دما و میدان تنش می‌باشد با مقادیر بدست آمده از حل در تکرار قبلی مقایسه می‌شوند. در صورتی که مقدار تفاوت آن‌ها کمتر از مقدار خطای قابل قبول در نظر

گرفته شده باشد، جواب این تکرار به عنوان جواب مسئله مورد قبول واقع می‌شود و در صورتی که تفاوت آن‌ها بیشتر از خطای مورد قبول باشد، جواب‌های بدست آمده به عنوان فرض اولیه برای تکرار بعدی انتخاب می‌شوند و این روند تا رسیدن به جواب‌های قابل قبول تکرار می‌شود. در تحقیق حاضر باقیمانده معادلات مومنتوم و پیوستگی به شکل زیر تعریف شده است:

$$R_{M,i} = \max \left\{ \left| \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} \right| \right\} \quad (1-4)$$

$$R_c = \max \left\{ \left| \frac{P^{n+1} - P^n}{c^2 \Delta t} \right| \right\} \quad (2-4)$$

در رابطه فوق، $R_{M,i}$ باقیمانده معادله مومنتم در جهت i و R_c باقیمانده معادله پیوستگی است. همچنین بالانویس هر پارامتر (مقادیر n و $n+1$) نیز معرف شماره گام زمانی است.

۴-۳- استقلال حل از شبکه

یکی از مطالب قابل توجه دیگر که قبل از دستیابی به جواب‌ها در هر مدل‌سازی عددی می‌بایست به آن پرداخته شود، استقلال جواب‌های بدست آمده از شبکه‌بندی دامنه محاسباتی می‌باشد. به عبارت دیگر نظریه اینکه در حل عددی دامنه حل را به شبکه‌های کوچک‌تری تقسیم‌بندی کرده و سپس معادلات حاکم بر مسئله را در این فضاهاى کوچک‌تر که معروف به سلول می‌باشند بررسی می‌نماییم، این عمل صرفاً یک روش در دستیابی به جواب کلی مسئله می‌باشد، نباید اندازه و مدل این سلول‌ها تأثیری در جواب نهایی مسئله ایجاد نماید. در این تحقیق بنا به هندسه مورد بررسی، بدیهی است که بهترین نوع شبکه‌بندی برای این دامنه، شبکه‌بندی با سلول‌های مستطیلی می‌باشد. از این‌رو در تمامی حالات مدل‌سازی در این تحقیق از شبکه‌هایی با نودهای مکعب مستطیل استفاده شده است.

ریز کردن اندازه سلول‌های محاسباتی و در پی آن افزایش تعداد سلول‌ها باعث افزایش خطای

گرد کردن و کاهش خطای کوتاه‌سازی می‌شود و از طرف دیگر به علت افزایش تعداد شبکه، تعداد محاسبات لازم و همچنین هزینه محاسباتی نیز افزایش پیدا می‌کند. از این‌رو فضای محاسباتی در این تحقیق با شبکه‌بندی با سایزهای متفاوت مورد تحلیل قرار گرفت تا شبکه مناسبی که اولاً مقدار خطای عددی آن در حد خطای قابل قبول باشد و همچنین به ازای آن هزینه محاسباتی افزایش چندانی نداشته باشد، انتخاب شود. همان‌طور که در جدول ۴-۱ دیده می‌شود چهار شبکه مختلف جهت شبکه‌بندی دامنه محاسباتی مورد بررسی قرار گرفت که از میان آن‌ها شبکه‌های N_1 و N_2 خطای زیادی در جواب‌ها ایجاد می‌کنند و کوچک کردن اندازه شبکه باعث افزایش دقت جواب‌ها می‌شود. ولی در تغییر شبکه از N_3 به N_4 تغییر زیادی در دقت جواب‌ها حاصل نمی‌شود؛ ولی در عوض هزینه محاسبات به نحو چشم‌گیری افزایش پیدا می‌کند. با توجه به این که خطای حاصل از شبکه‌بندی N_3 برای این محاسبات قابل قبول بوده و از طرف دیگر افزایش تعداد سلول‌ها هزینه محاسبات را به نحو زیادی بالا می‌برد، این شبکه به عنوان شبکه بهینه در تمامی محاسبات مورد استفاده واقع شده است. شایان ذکر است که مقدار خطا بر حسب قانون بقای جرم و با استفاده از معادله پیوستگی نسبت به شبکه N_4 سنجیده شده است.

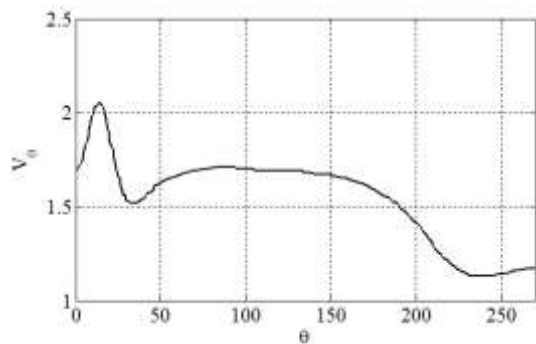
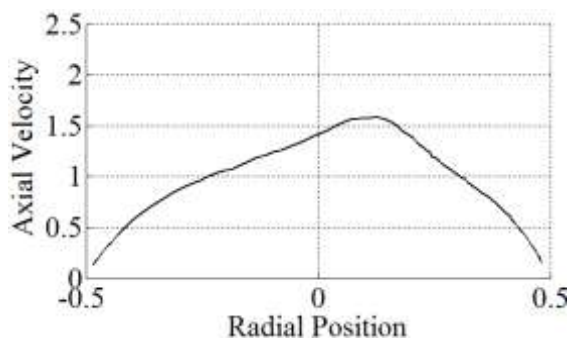
جدول ۴-۱- مقادیر خطای نسبی برای شبکه‌های مختلف در $Re=100$ و $Wi=0.001$ برای شبکه‌بندی‌های مختلف نسبت به شبکه $N_4 = 700 \times 50 \times 25$

شبکه	تعداد سلول‌های شبکه	درصد خطا
N_1	$420 \times 20 \times 10$	۴/۱۲
N_2	$500 \times 30 \times 15$	۱/۱۷
N_3	$600 \times 40 \times 20$	۰/۶۷

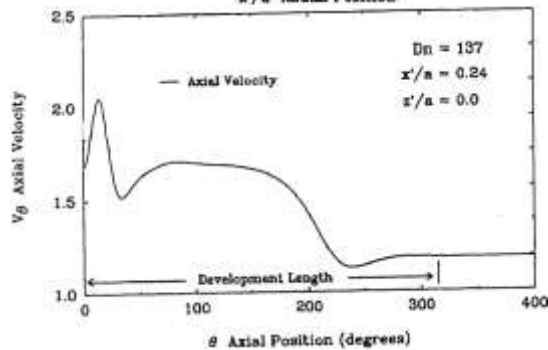
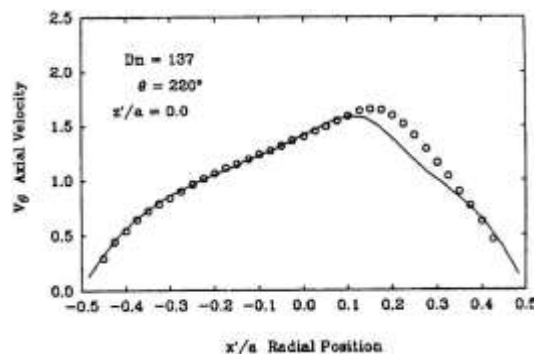
۴-۴- ارزیابی صحت نتایج

در این تحقیق نیز بنا به روند موجود برای کلیه مدل‌سازی‌های عددی، می‌بایست صحت نتایج بدست آمده مورد ارزیابی قرار گیرند؛ زیرا که در مدل‌سازی‌های عددی با انتخاب روشی نامناسب برای حل و یا گسسته‌سازی نادرست معادلات و یا فرض مقادیر نامناسب برای کمیت‌های موجود می‌تواند جواب‌ها را به سمت جواب‌های غیر قابل قبول همگرا نماید و از طرف دیگر جهت استفاده دیگر محققین از نتایج گزارش شده این امر ضروری به نظر می‌رسد

برای ارزیابی نتایج مربوط به جریان در کانال‌های خمیده از نتایج آزمایشگاهی بار [۳۸] استفاده شده است. وی در تحقیقات خود جریان در حال توسعه و توسعه یافته سیال نیوتنی در کانال‌های خمیده دارای مقطع مربعی را بصورت آزمایشگاهی و عددی مورد بررسی قرار داده است. در اینجا نتایج حاصل از توزیع سرعت محوری جریان که بوسیله حل عددی بدست آمده با نتایج آزمایشگاهی بار مقایسه شده است. وی آزمایشات خود را در نسبت انحنای $0.35/0$ و در اعداد دین متفاوت روی یک کانال خمیده 270° درجه انجام داد. مطابق آزمایشات وی در عدد دین 137 که براساس سرعت بالک تعریف شده است در موقعیت 220° درجه نسبت به ورودی، جریان به حالت توسعه یافته در می‌آید. در شکل ۴-۱ تطابق توزیع سرعت محوری حاصل از تحقیق اخیر با تحقیق بار نشان داده شده است. بار [۳۸] نشان داد که در عدد دین 125 جریان در آستانه تبدیل از یک جفت گردابه به دو جفت گردابه قرار می‌گیرد. در اینجا نیز شبیه‌سازی عددی در دو عدد دین 125 و 137 انجام شده است. در شکل ۴-۲ جریان‌های ثانویه در این دو عدد نشان داده شده است. مطابق شکل، نتایج بدست آمده از این تحقیق نتایج بار [۳۸] را تایید می‌نماید. در اینجا نیز جریان در عدد دین 125 ، در وضعیت پایدار قرار می‌گیرد ولی در عدد دین 137 ، ناپایداری دین بروز می‌نماید و یک جفت گردابه دین در نزدیکی دیواره خارجی ایجاد می‌شود

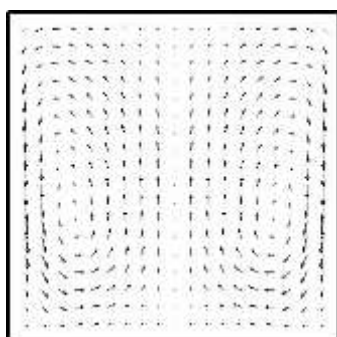


تحقیق حاضر

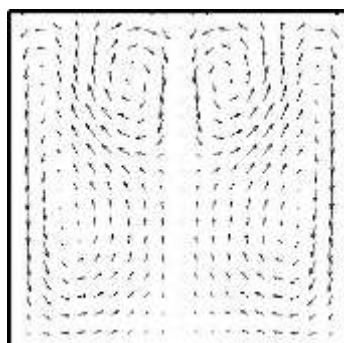
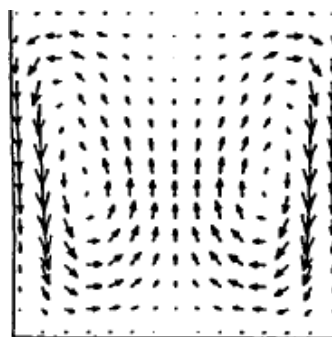


تحقیق بارا [۳۸]

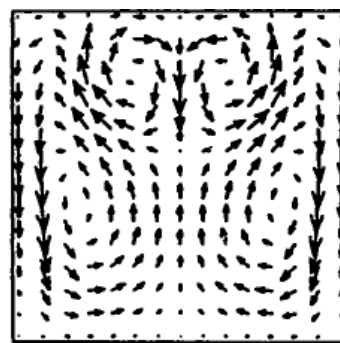
شکل ۴-۱- توزیع سرعت محوری در عدد دین ۱۳۷ بر مبنای متوسط سرعت محوری



(الف)



(ج)



تحقیق حاضر

تحقیق بارا [۳۸]

شکل ۴-۲- شدت جریان‌های ثانویه جریان سیال نیوتنی، (الف: Dn=125، ب: Dn=137)

۴-۵- مطالعه جریان

در این بخش جریان اینرسی سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده مورد بررسی قرار می گیرد. برای این منظور اثر پارامترهای مختلفی نظیر عدد دین، عدد وایزنبرگ، ضریب تحرک معادله‌ی گزیکس بر میدان سرعت و دما مطالعه شده است. همچنین در این بخش به پدیده ناپایداری دین در جریان سیال ویسکوالاستیک نیز پرداخته می شود.

۴-۵-۱- ناپایداری

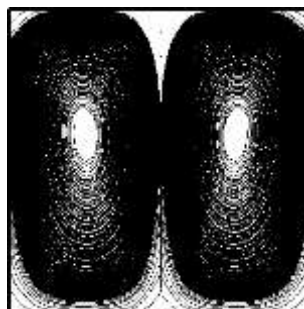
ناپایداری در جریان اینرسی پدیده جالب توجهی است که تحقیقات متعددی در این خصوص انجام شده است. اثر نیروی گریز از مرکز مسبب تشکیل جریان‌های ثانویه در جریان اینرسی سیال در کانال‌های خمیده است. در ناحیه هسته جریان، گرادیان فشار شعاعی با نیروی گریز از مرکز ناشی از مولفه محوری سرعت بالانس می شود. در ناحیه نزدیک دیواره خارجی، مقدار سرعت محوری و در نتیجه نیروی گریز از مرکز به سمت صفر میل می کند حال آنکه اثر گرادیان فشار شعاعی در این ناحیه همچنان بالا است. لذا تعادل موجود در ناحیه هسته جریان دیگر در ناحیه نزدیک دیواره خارجی برقرار نبوده و جهت حفظ تعادل مکانیزم مومنوم وارد عمل می شود و جریان‌های ثانویه تشکیل می گردد. چنانچه عدد دین چندان بزرگ نباشد، این جریان‌های ثانویه به شکل یک جفت جریان ثانویه دارای جهت گردش مخالف نسبت به یکدیگر بوجود می‌آیند. با افزایش عدد دین، سرعت محوری هر چه بیشتر به سمت جداره خارجی متمایل می شود و در این حالت اثرات ویسکوز دیگر قادر به حفظ گردابه‌ها به صورت یک جفت گردابه نبوده و لذا جریان ناپایدار می گردد. در این حالت گردابه‌های جدیدی بوجود می‌آیند که به گردابه‌های دین موسوم هستند.

در شکل ۳-۴ خطوط جریان‌های ثانویه و در شکل ۴-۴ توزیع سرعت محوری جریان سیال ویسکوالاستیک برای اعداد دین مختلف نشان داده شده است. مطابق شکل جریان‌های ثانویه تا عدد دین ۱۲۵ بصورت یک جفت گردابه تیلور گورتلر ظاهر می‌شود اما با ازدیاد عدد دین جریان ناپایدار شده و یک جفت جریان ثانویه پادگرد جدید موسوم به گردابه‌های دین در نزدیکی دیواره خارجی ایجاد شده است. همچنین بروز ناپایداری منجر به ایجاد تغییرات عمده در توزیع سرعت محوری و فشار استاتیکی جریان می‌شود. مطابق شکل ۳-۴ افزایش عدد دین منجر به ازدیاد و رشد گردابه‌های ناشی از ناپایداری (گردابه‌های دین) در بخش عمده مقطع کانال می‌شود و گردابه‌های تیلور گورتلر که پیش از بروز ناپایداری نیز وجود داشتند به سمت دیواره‌های جانبی مقطع (دیواره‌های سمت چپ و راست) رانده می‌شوند و از ابعاد آن‌ها کاسته می‌شود، مطابق شکل ۴-۴ بروز ناپایداری سبب ایجاد چین خوردگی‌هایی در توزیع سرعت محوری جریان می‌شود.

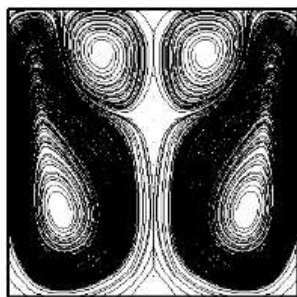
$$S_{\max} = 19.15\%, Dn = 37.4$$



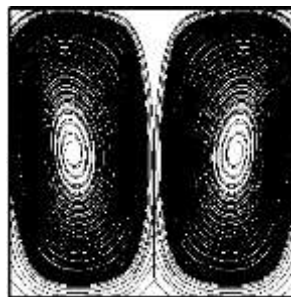
$$S_{\max} = 16.21\%, Dn = 18.7$$



$$S_{\max} = 25.06\%, Dn = 125$$

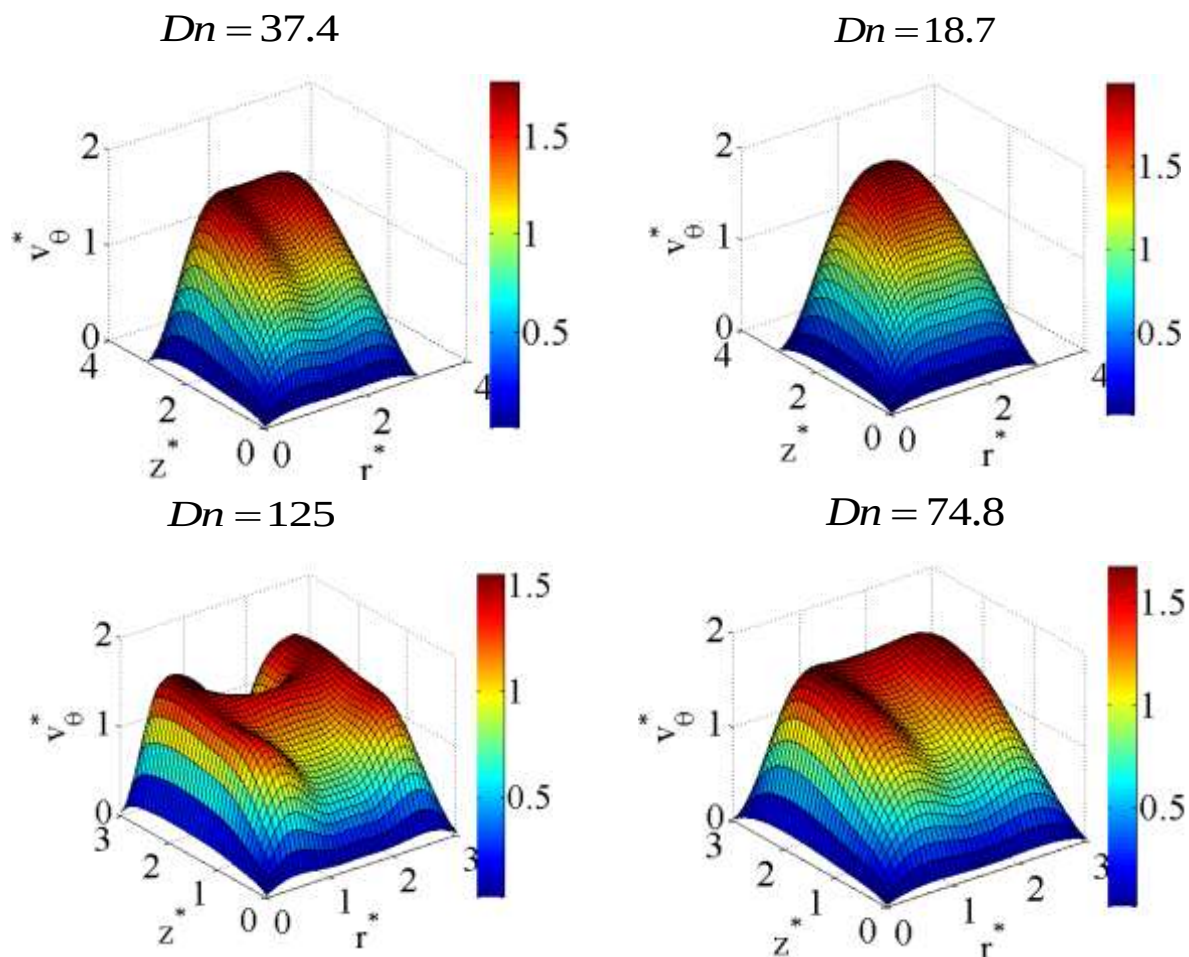


$$S_{\max} = 22.92\%, Dn = 74.8$$



شکل ۳-۴ خطوط جریان‌های ثانویه برای جریان سیال در مقطع $\theta = 240^\circ$ در اعداد دین مختلف در $Wi = 0.001$.

$$\alpha = 0.5 \text{ و } \beta = 0.3$$

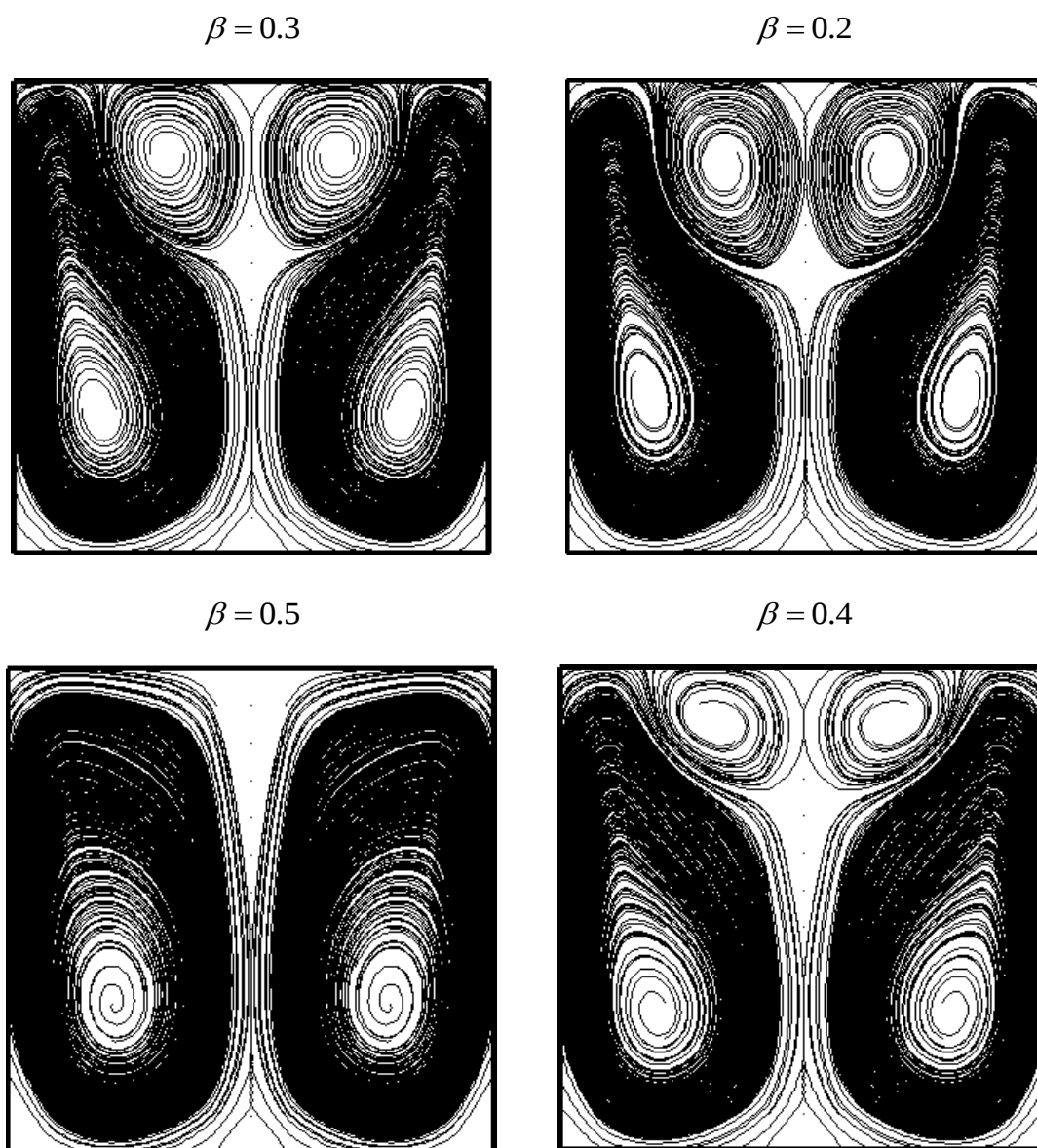


شکل ۴-۴- توزیع سرعت محوری در مقطع $\theta = 240^\circ$ در اعداد دین مختلف در $Wi = 0.001$ و $\beta = 0.3$

$$\alpha = 0.5$$

در اکثر مدل‌های ویسکوالاستیک، با افزایش خواص الاستیک سیال، جمله مربوط به تنش الاستیک سیال افزایش یافته و در پی آن فعالیت جریان‌های عرضی سیال بیشتر می‌شود و با افزایش شدت جریان‌های عرضی، جریان به سمت ناپایداری میل می‌نماید. در ناحیه هسته جریان سیال گریکس، اثر نیروی گریز از مرکز با گرادیان فشار در جهت شعاع انحنا و تنش نرمال محوری بالانس می‌شود. کاهش β در یک محدوده خاص منجر به ایجاد تنش نرمال محوری قوی در نزدیکی دیواره خارجی می‌شود. به دلیل کوچک بودن اثر سرعت محوری و نیروی گریز از مرکز و بزرگ بودن مقدار تنش نرمال محوری در این ناحیه، بالانس نیروها به هم خورده و مکانیزم مومنتوم جهت حفظ تعادل وارد عمل می‌شود.

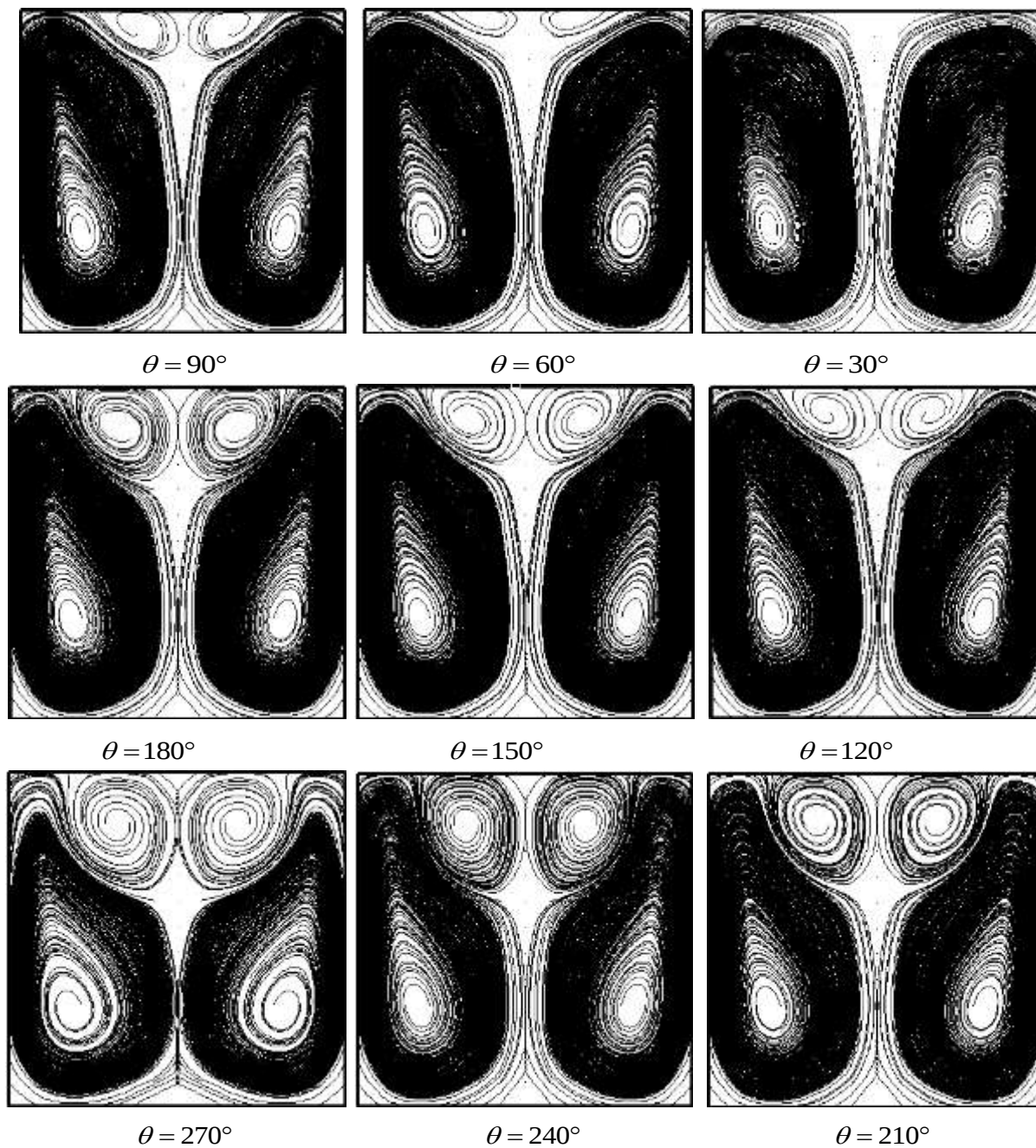
شود و جریانهای ثانویه ای در جهت گردابه های تیلور- گورتلر ایجاد می شود . در نتیجه برآیند شدت جریانهای ثانویه افزایش پیدا می کند. مطابق شکل جریانهای ثانویه در $0.2 < \beta < 0.5$ بصورت دو جفت گردابه ظاهر می شود



شکل ۴-۵- جریانهای ثانویه در ناحیه توسعه یافته جریان در $Wi=0.001$ ، $Dn=125$ و $\alpha = 0.5$

همانطور که در شکل ۴-۶ نشان داده شده است، در مقاطع آغازین کانال و تا رسیدن جریان به حالت توسعه یافته، یک جفت جریانهای ثانویه شکل می گیرند، با افزایش خواص الاستیک بر جریانهای

عرضی افزوده شده دو جفت گردابه تشکیل می‌شود و این افزایش در ناحیه توسعه یافته بیشتر قابل مشاهده است. با رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته، از قدرت یکی از جریان‌های ثانویه کاسته شده و بر قدرت دیگری افزوده می‌شود.

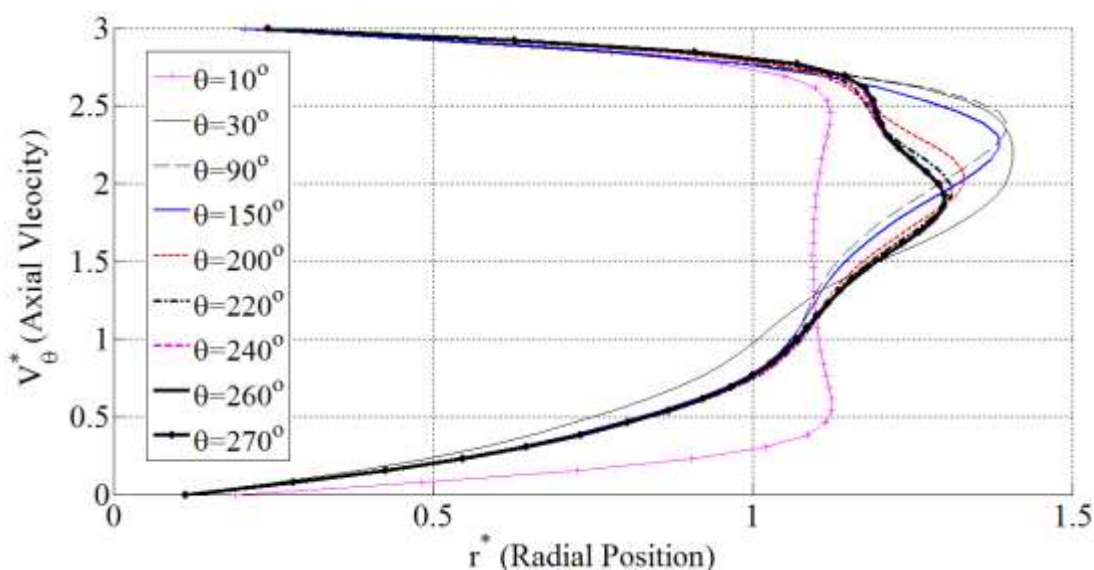


شکل ۴-۶- جریان‌های ثانویه در کل مقطع کانال در مقاطع مختلف در $\beta = 0.3$ ، $Dn=125$ ، $Wi = 0.001$ و

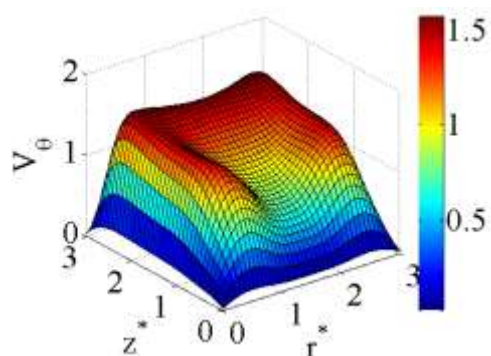
$$\alpha = 0.5$$

۴-۶- جریان اینرسی

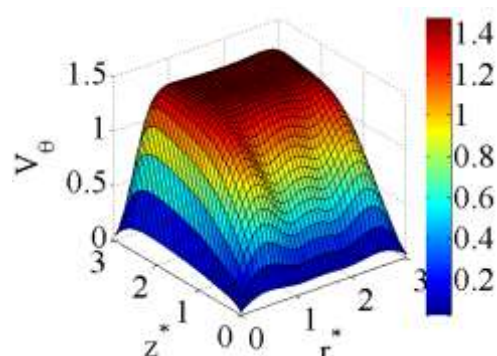
همان‌طور که در فصول قبلی بیان شد با فرض جریان یکنواخت در ورودی کانال، جریان از حالت یکنواخت وارد کانال شده و با پیشروی در کانال و تشکیل لایه مرزی، به حالت توسعه‌یافته خود نزدیک می‌شود. با توجه به شکل‌های ۴-۷ و ۴-۸ درمی‌یابیم که در مقاطع اولیه کانال پروفیل سرعت محوری دائماً در حال تغییر بوده و به علت اثر گذاری شرایط عدم لغزش دیواره‌ها بر روی سرعت محوری، از مومنتوم اطراف دیواره‌ها کاسته شده و به مومنتوم سیال در نواحی مرکز کانال افزوده می‌شود. با رسیدن جریان به ناحیه توسعه‌یافته، پروفیل سرعت به حالتی دائمی رسیده و تا انتهای کانال بدون تغییر باقی می‌ماند.



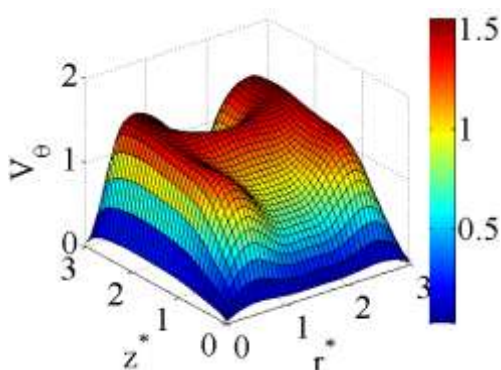
شکل ۴-۷- پروفیل سرعت محوری در مقاطع مختلف کانال در حالت $Dn = 125$ ، $Wi = 0.001$ ، $\beta = 0.3$ و $\alpha = 0.5$



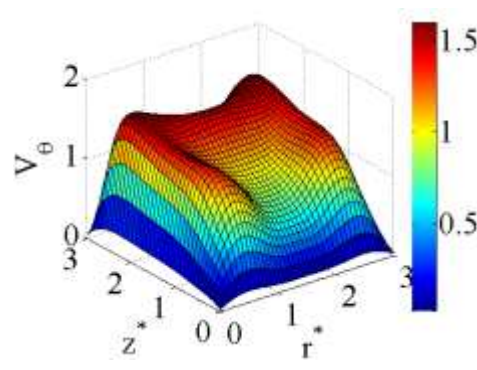
(ب)



(الف)



(د)



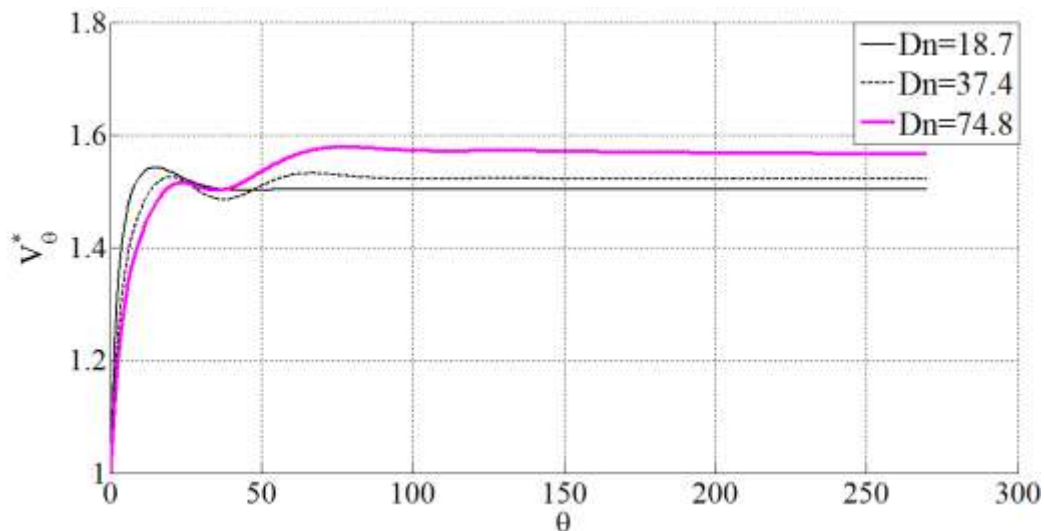
(ج)

شکل ۴-۸- سطوح سرعت محوری در مقاطع مختلف کانال در حالت $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.3$ ، $Wi = 0.001$ ، $Dn = 125$

$\theta = 240^\circ$: (د)، $\theta = 180^\circ$: (ج)، $\theta = 80^\circ$: (ب)، $\theta = 20^\circ$: (الف)

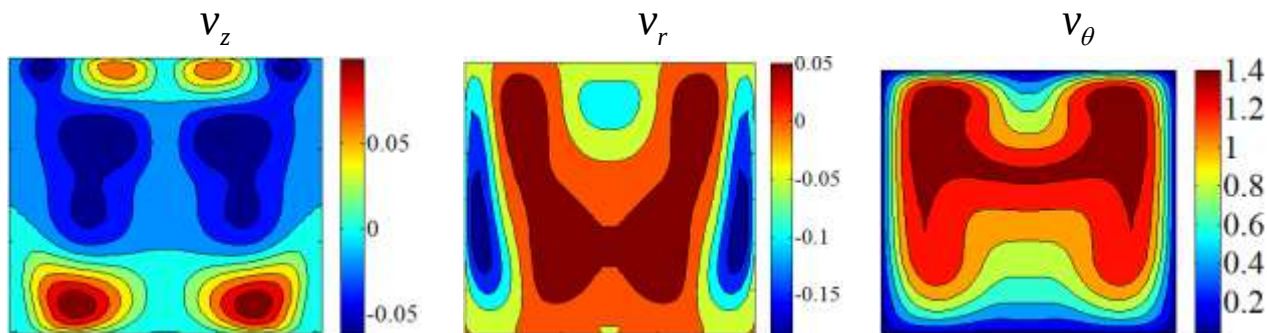
سرعت محوری بی‌بعد سیال در روی خط مرکزی کانال نیز از مقدار یک در دهانه ورودی شروع شده و در راستای کانال به علت تشکیل لایه مرزی و در پی آن کم شدن مومنوم عبوری از نواحی اطراف دیواره‌ها، افزایش می‌یابد. این افزایش تا نواحی توسعه یافتگی جریان ادامه می‌یابد. قبل از رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته، سرعت روی محور مرکزی کانال مقداری افزایش می‌یابد که علت آن رسیدن دو لایه مرزی در اطراف دیواره‌ها به یکدیگر و افزایش مومنوم سیال در نواحی مرکزی کانال به علت این تداخل می‌باشد. البته با کاهش عدد دین و کم اثر شدن نیروی اینرسی سیال، این افزایش مجدد در مقدار سرعت محوری نیز کاهش می‌یابد. همان‌طور که در شکل ۴-۹ می‌شود طول توسعه یافتگی جریان که به ناحیه ورودی جریان تا رسیدن به حالت توسعه یافته اطلاق می‌شود، شدیداً تابع عدد دین بوده با افزایش عدد دین

ناحیه توسعه یافتگی جریان به مقاطع جلوتر کانال منتقل می‌شود زیرا که با افزایش عدد دین، المان‌های سیال فرصت کمتری برای اثر پذیری از شرایط مرزی داشته و تکمیل و رشد لایه مرزی در فاصله بیشتری از لبه ابتدایی کانال به طول می‌انجامد.



شکل ۴-۹ - تغییرات سرعت محوری در محور مرکزی کانال در اعداد دین مختلف $Wi = 0.001$ و $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.3$

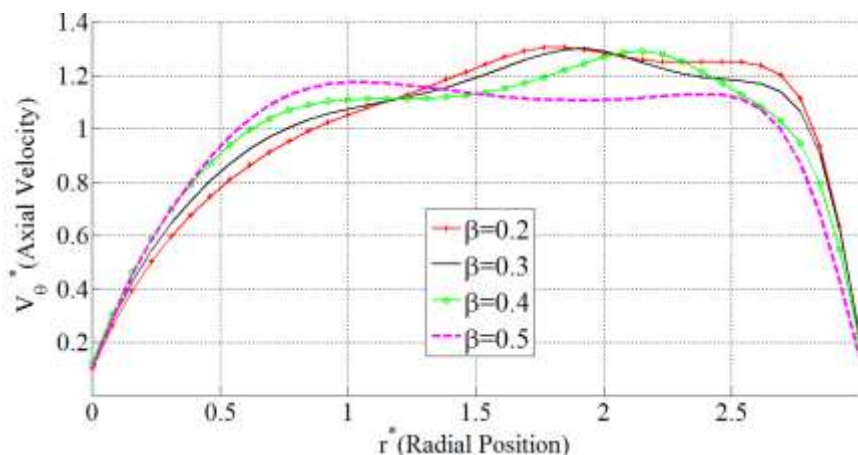
کانتورهای سرعت عرضی v_r و v_z و سرعت محوری نیز در یک مقطع در ناحیه توسعه یافته در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است. نکته حائز اهمیت، اندازه و بزرگی سرعت‌های عرضی نسبت به سرعت محوری می‌باشد. در جریان‌های سیال‌های نیوتنی، سرعت عرضی سیال در مقاطع توسعه یافته متمایل به صفر می‌باشد ولی در جریان سیال‌های ویسکوالاستیک، به علت وجود خواص متفاوت این سرعت‌های عرضی صفر نبوده و اندازه و بزرگی آن‌ها به خواص ماده ویسکوالاستیک وابسته می‌باشد که البته این مقادیر با افزایش خواص الاستیک افزایش می‌یابند.



شکل ۴-۱۰- کانتور سرعت‌های عرضی و محوری بی‌بعد در کل مقطع کانال در ناحیه توسعه‌یافته در $Wi=0.001$ ،
 $\beta = 0.3$ و $\alpha = 0.5$ ، $Dn = 125$

۴-۶-۱- بررسی اثرات پارامتر بی‌بعد β

در مدل‌سازی با استفاده از معادله ساختاری گزیکس پارامترهایی چون Wi ، β ، α بر توزیع سرعت محوری اثرگذار می‌باشد. همان‌طور که در شکل ۴-۱۱ دیده می‌شود، با افزایش مقدار β ، درصد لزجت حلال (ماده نیوتنی) به لزجت کل کمتر شده و در پی آن خواص الاستیک ماده افزایش یافته و با تغییر آرایش مولکولی توزیع سرعت محوری بهم زده می‌شود و با افزایش β الگوهای جدیدی از توزیع سرعت محوری را مشاهده می‌کنیم. با توجه به شکل درمی‌یابیم که با افزایش β جریان پایدارتر شده و منحنی سرعت در نواحی مرکزی تخت‌تر می‌گردد



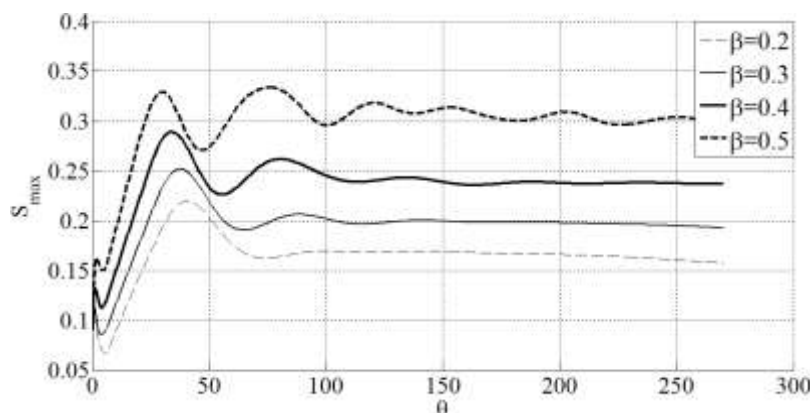
شکل ۴-۱۱- تغییرات سرعت محوری در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای تغییرات β
در $Wi = 0.001$ ، $Dn = 125$ و $\alpha = 0.5$

همان‌طور که گفته شد یکی از پدیده‌های مهم در جریان سیال ویسکوالاستیک، تشکیل جریان‌های ثانویه در مقاطع عرضی کانال است. برای مقایسه شدت این جریان‌ها، پارامتر شدت جریان‌های عرضی که نسبت جریان‌های عرضی به جریان محوری را نشان می‌دهد به صورت زیر تعریف می‌کنیم، با در نظر گرفتن این موضوع که در ناحیه در حال توسعه بزرگی این عدد دلیلی بر وجود و تشکیل جریان‌های ثانویه نیست.

$$S = \frac{\sqrt{v_r^2 + v_z^2}}{U} \quad (3-4)$$

در مدل‌سازی با استفاده از معادله متشکله گزیکس نیز پارامترهایی چون β , α , Wi بر شدت جریان‌های عرضی اثرگذار می‌باشد.

شدت جریان‌های عرضی در مقاطع اولیه کانال بسیار بالا است. با پیشروی در راستای کانال و افزایش ضخامت لایه مرزی، از شدت این جریان‌ها کاسته شده و با رسیدن جریان به حالت توسعه یافتگی شدت این جریان‌ها به مقدار ثابتی رسیده و تا انتهای کانال با همین شدت ادامه می‌یابد. همان‌طور که در شکل ۴-۱۲ دیده می‌شود، با افزایش مقدار β ، درصد لزجت حلال (ماده نیوتنی) به لزجت کل کمتر شده و در پی آن خواص الاستیک ماده افزایش یافته و شدت جریان‌های ثانویه افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۱۲- تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات β در $Wi = 0.001$, $Dn = 125$ و $\alpha = 0.5$

۴-۶-۲- بررسی اثرات ضریب تحرک سیال (α)

با افزایش ضریب تحرک سیال (α) میزان خاصیت باریک شوندگی لزجت با نرخ برش، افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر با افزایش نرخ برش در بعضی از سیالات ویسکوالاستیک، تعدادی از پیوندها در بین شاخه‌ها و زنجیره‌های این ماکرومولکول‌ها شکسته شده و از لزجت سیال کاسته می‌شود. کم شدن لزجت نیز باعث افزایش تغییرات سرعت محوری می‌گردد. از آنجایی که سیال تمایل به جریان یافتن در نواحی با لزجت کمتر را دارد با افزایش مقدار α ، سرعت محوری کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش α که در حقیقت تأثیر معکوس بر ثابت زمانی آسودگی تنش دارد مقدار خواص الاستیک کم می‌شود از این رو همان‌طور که در جدول ۴-۲ نشان داده شده است با افزایش این پارامتر مقدار شدت جریان‌های عرضی کاهش می‌یابد. البته کاهش لزجت سیال تأثیر کمی بر روی میدان سرعت محوری و شدت جریان‌های ثانویه دارد.

جدول ۴-۲- تغییرات ماکزیمم سرعت محوری در یک مقطع از جریان توسعه یافته و شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به ازای تغییرات α در $Wi = 0.001$ ، $Dn = 125$ و $\beta = 0.3$

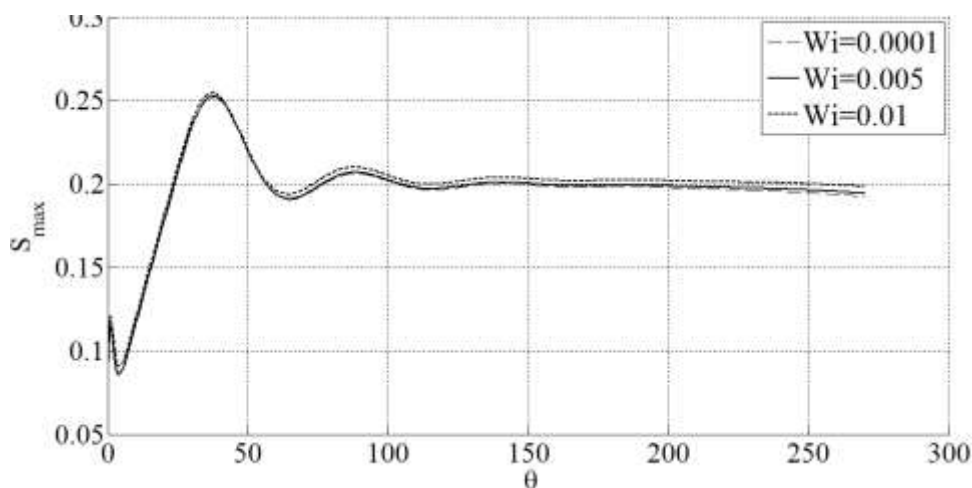
α	۰/۱	۰/۳	۰/۳	۰/۴	۰/۵
V_t	۱/۶۴۱۳	۱/۶۴۱۲	۱/۶۴۰۹	۱/۶۴۰۸	۱/۶۴۰۶
S_{max}	%۱۹/۶۳	%۱۹/۶۲	%۱۹/۵۹	%۱۹/۵۷	%۱۹/۵۰

۴-۶-۳- بررسی اثرات عدد وایزنبرگ (Wi)

در اینجا افزایش عدد وایزنبرگ توسط افزایش ثابت زمانی رهایی از تنش سیال (λ) بوده است. در معادله ساختاری گزیکس زمان آسودگی از تنش تأثیر مستقیمی بر خواص الاستیک سیال و شدت جریان‌های ثانویه دارد به نحوی که با افزایش مقدار زمان آسودگی از تنش، یا به عبارتی افزایش عدد وایزنبرگ خواص الاستیک ماده تقویت شده و ماکزیمم سرعت محوری در ناحیه توسعه یافته کاهش و شدت جریان‌های ثانویه افزایش می‌یابد. تغییرات شدت جریان‌های ثانویه در شکل ۴-۱۳ نشان داده شده است. همان‌طور که در جدول ۴-۳ نشان داده شده است افزایش عدد وایزنبرگ تأثیر کمی بر روی میدان سرعت محوری دارد.

جدول ۴-۳- تغییرات سرعت محوری ماکزیمم در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای تغییرات Wi در $\beta = 0.3$ ، $\alpha = 0.5$ ، $Dn = 125$

Wi	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۵	۰/۰۱
v_{tmax}	۱/۶۴۰۹	۱/۶۴۰۶	۱/۶۴۰۴	۱/۶۳۹۵

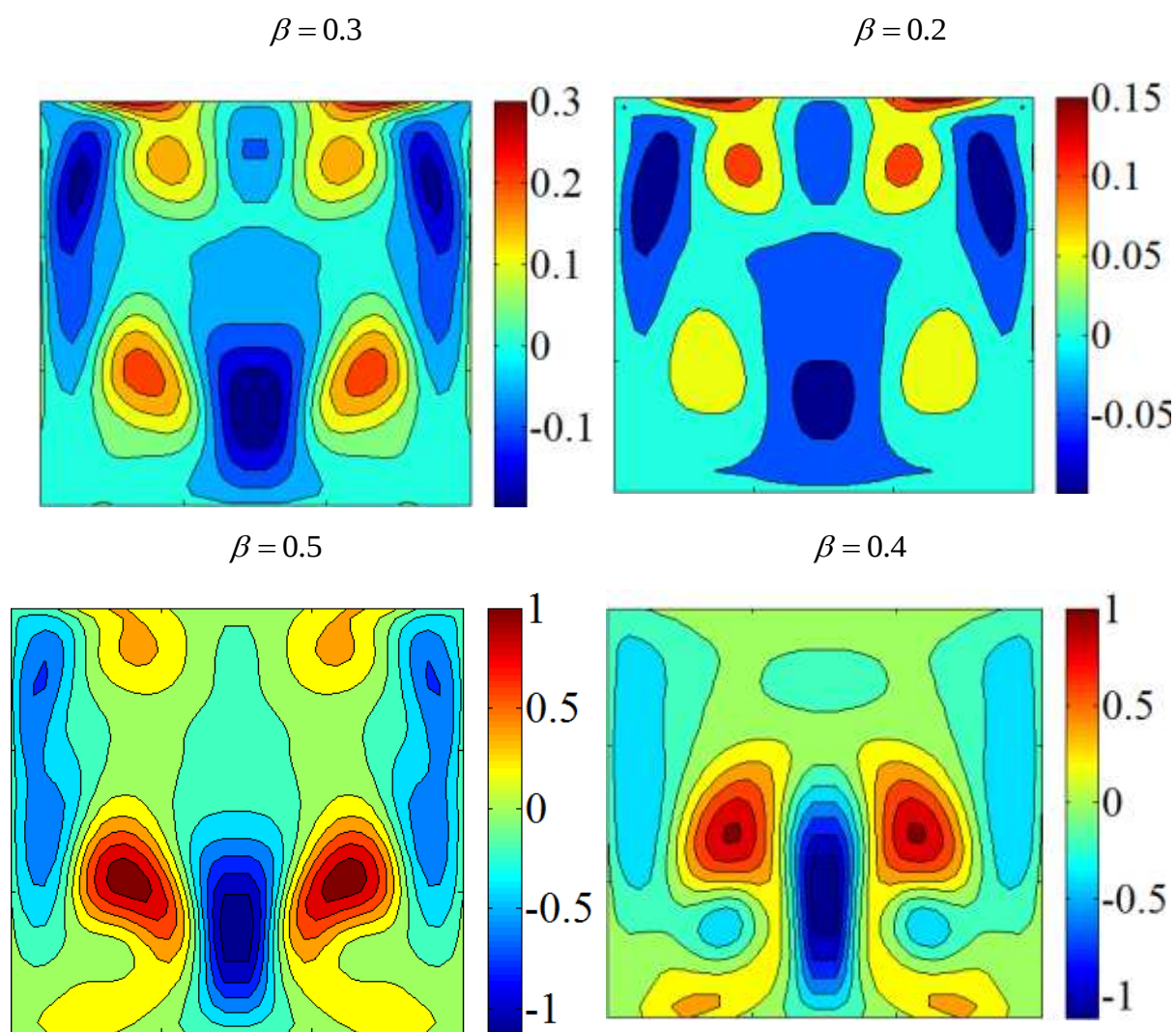


شکل ۴-۱۳- تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به ازای تغییرات Wi

در $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.3$ ، $Dn = 125$

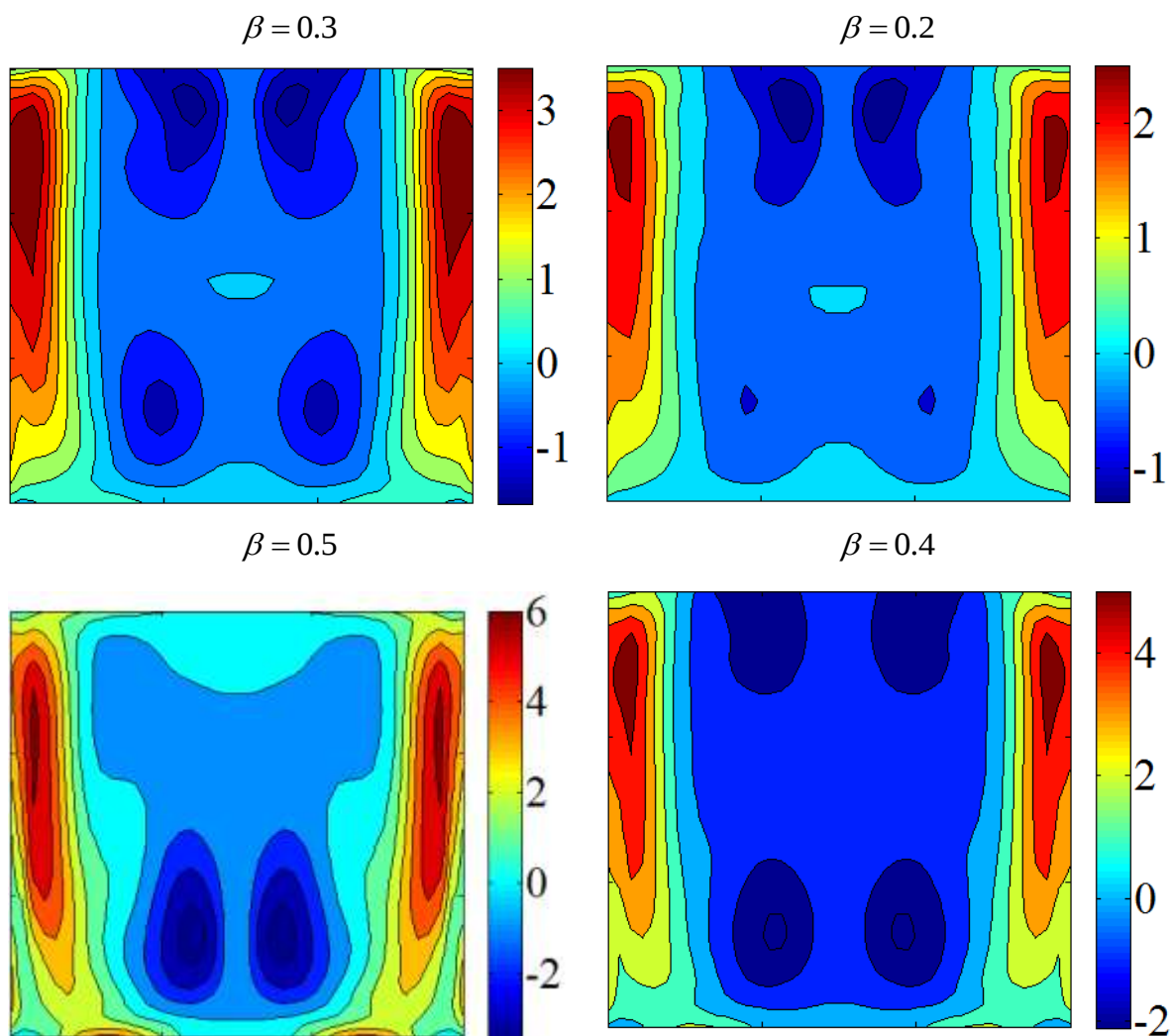
۴-۶-۴- تأثیر پارامترهای سیال بر توزیع تنش سیال

یکی از خواص ویژه و وجه تمایز سیالات ویسکوالاستیک با سیالات نیوتنی، وجود اختلاف بین تنش‌های نرمال در این سیالات می‌باشد. بدین معنی که در جریان سیالات نیوتنی، تنش‌های نرمال (تنش روی قطر اصلی ماتریس تنش) یا صفر بوده و یا در صورت غیر صفر بودن مقدار آن‌ها با هم برابر می‌باشد که در این صورت هم اختلاف بین این مقادیر صفر می‌باشد. ولی در مورد سیالات ویسکوالاستیک، به علت خواص فیزیکی متفاوت آن‌ها، تنش‌های نرمال یکسان نبوده و مقادیر این تنش‌ها چه از نظر علامت و چه از نظر بزرگی با یکدیگر متفاوت می‌باشند که این اختلاف بین تنش‌های نرمال، خود عامل بروز برخی از پدیده‌های خاص در جریان این سیالات می‌باشد. در تحقیق حاضر به علت سه‌بعدی بودن دامنه حل و در حال توسعه بودن جریان و همچنین صورت پیچیده وابستگی تنش به مقادیر مربوطه، امکان ساده‌سازی و مشخص کردن رابطه مستقیم پارامترهای مادی و اختلاف تنش نرمال اول و دوم فراهم نمی‌باشد. پارامترهای مادی سیال گزیکس علاوه بر اختلاف تنش‌های نرمال، مقدار تنش‌های برشی سیال را تحت اثر خود قرار می‌دهند. با افزایش مقدار β ، درصد لزجت حلال (ماده نیوتنی) به لزجت کل کمتر شده و در پی آن خواص الاستیک ماده افزایش یافته و مقادیر تنش‌های برشی و همچنین تنش‌های نرمال ماده افزایش می‌یابد. این مطلب در شکل‌های ۴-۱۴ و ۴-۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۴- کانتور تنش عمودی $\tau_{\theta\theta}$ در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف β

در $\alpha = 0.5$ و $Wi = 0.001$ ، $Dn = 125$

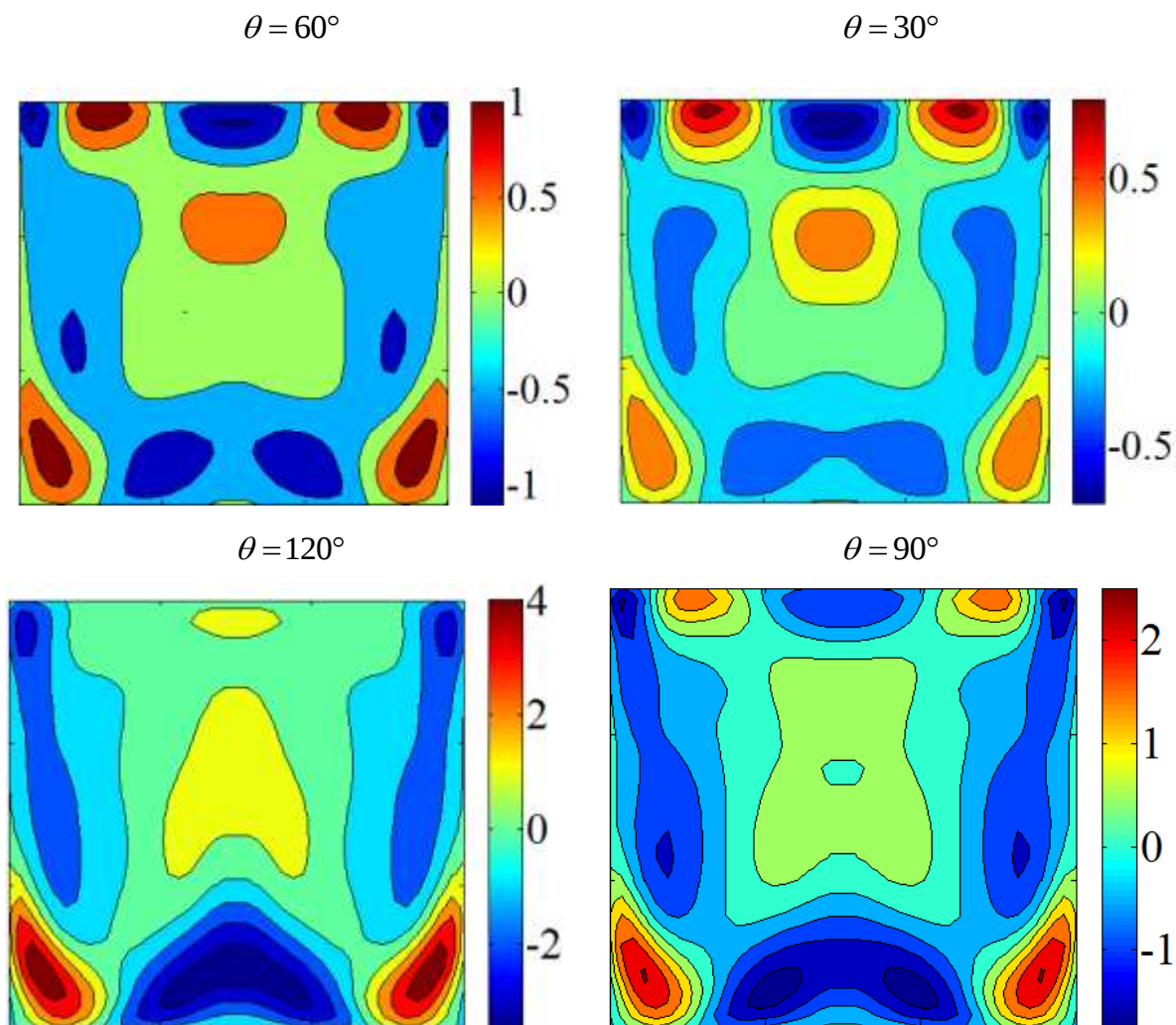


شکل ۴-۱۵- کانتور تنش برشی τ_{rz} در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف β در $\alpha = 0.5$ و $Wi = 0.001$ ، $Dn = 125$

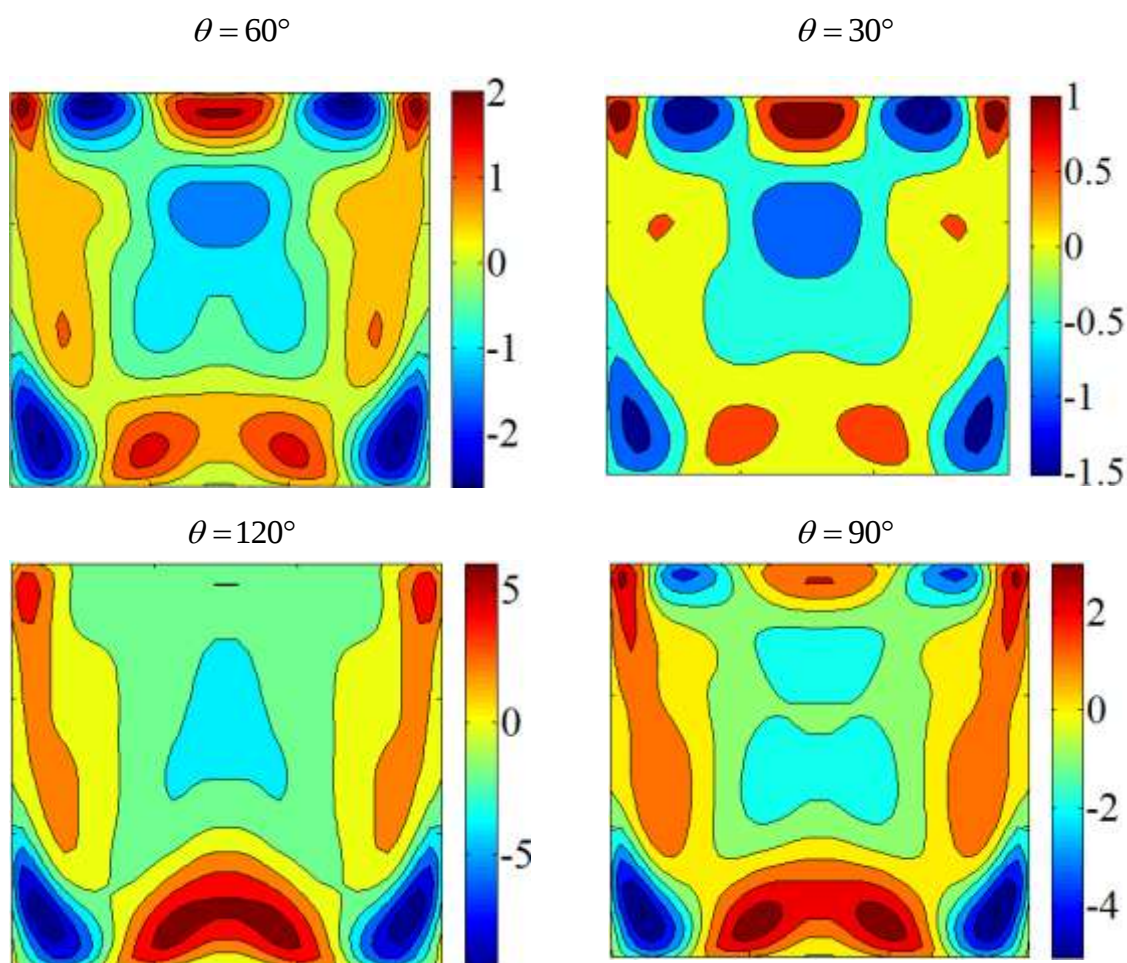
مطلب قابل تأمل دیگر در این نمودارها، بیشتر بودن تنش‌های برشی در اطراف دیواره‌های کانال نسبت به مرکز کانال بوده که علت این مطلب نیز بیشتر بودن نرخ برش در این نواحی می‌باشد.

همان‌طور که در شکل ۴-۱۶ و ۴-۱۷ نشان داده شده است، اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم نیز با افزایش خواص الاستیک افزایش می‌یابند. درحقیقت افزایش خواص الاستیک به معنی بیشتر شدن مدول

الاستیک ماده و نزدیک تر شدن خواص ماده به سمت جامد ویسکوالاستیک می باشد. لازم به ذکر است که با افزایش کمیت های مادی و خواص الاستیک، ناپایداری حل در مدل سازی عددی جریان این سیالات بیشتر شده و همگرایی جواب ها دشوارتر می شود که البته در بعضی موارد دستیابی به جواب همگرا و صحیح مسئله امکان پذیر نمی باشد.



شکل ۴-۱۶- تغییرات اختلاف تنش نرمال اول بی بعد در ناحیه در حال توسعه جریان در $Wi = 0.001$
 $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.3$ ، $Dn = 125$

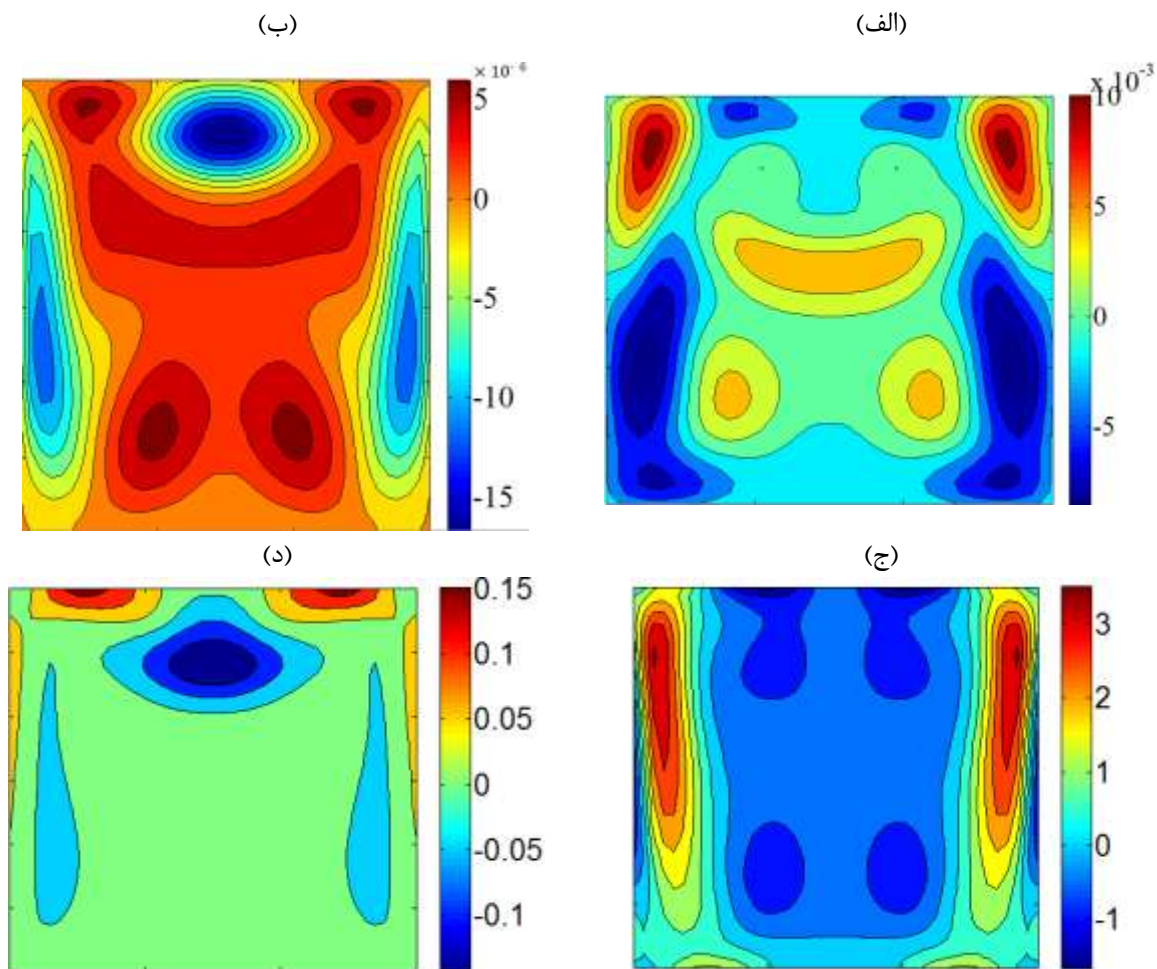


شکل ۴-۱۷- تغییرات اختلاف تنش نرمال دوم بی‌بعد در ناحیه در حال توسعه جریان در $Wi = 0.001$ و $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.3$ ، $Dn = 125$

همان‌طور که در شکل‌های ۴-۱۶ و ۴-۱۷ دیده می‌شود و در مرجع [۵۸] نیز بیان شده است اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم نیز در اطراف دیواره‌ها، مقادیر بیشتری نسبت به نواحی مرکزی کانال دارا می‌باشد.

در این تحقیق جهت بالا بردن پایداری حل، سعی در جداسازی تنش نیوتنی از تنش پلیمری شده است. در شکل ۴-۱۸ تنش نیوتنی و تنش پلیمری در یک مقطع یکسان نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، علاوه بر توزیع کاملاً متفاوت تنش‌های نیوتنی و پلیمری در مقطع کانال، سهم تنش پلیمری بیشتر از تنش نیوتنی بوده که البته این تفاوت برای تنش‌های مختلف و همچنین با تغییر خواص

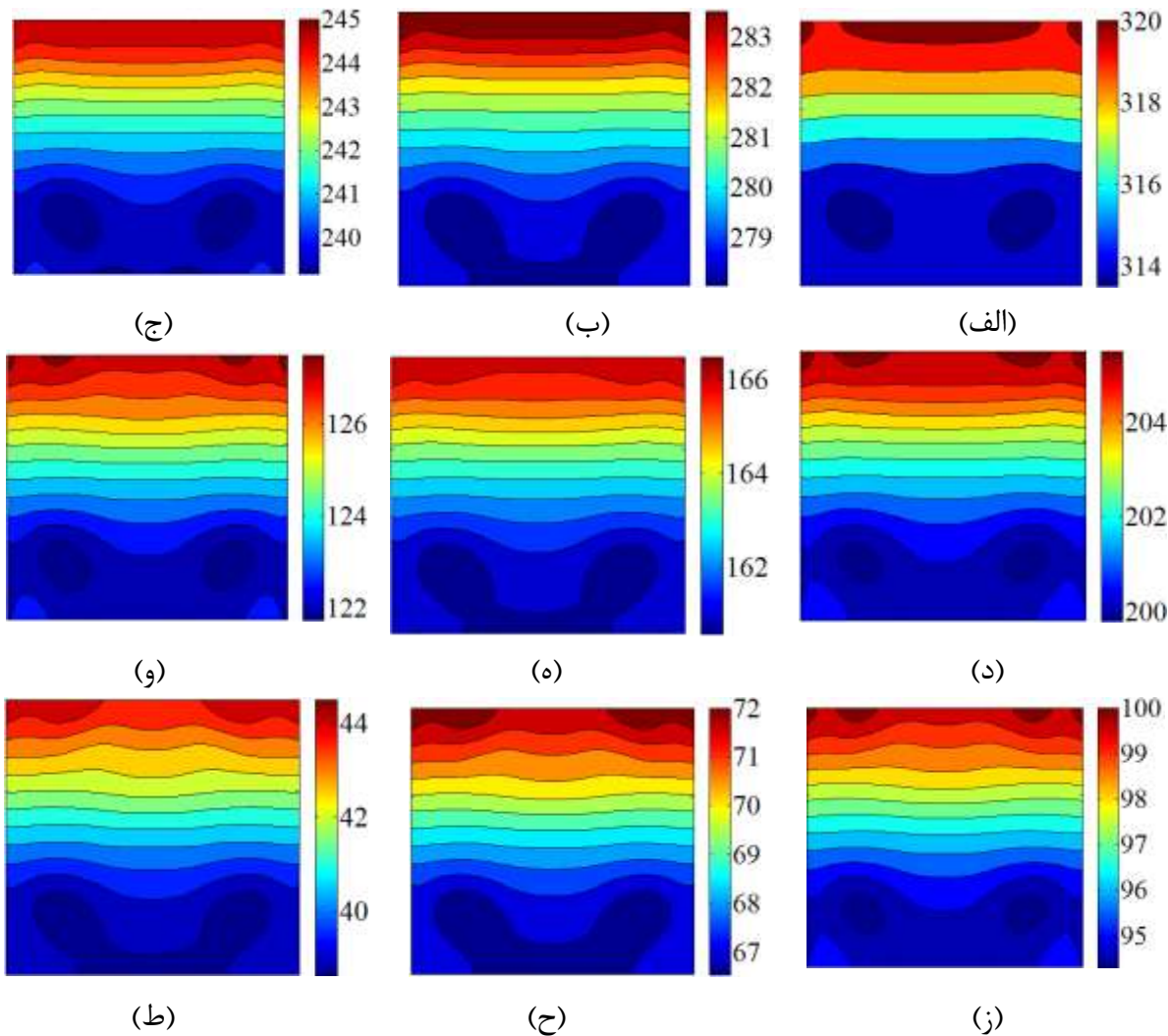
سیال و خواص الاستیک ماده تغییر خواهد کرد. تنش پلیمری، تلفیقی از خاصیت ویسکوز و خاصیت الاستیک ماده می‌باشد. مطلب قابل ذکر دیگر، توزیع کیفی متفاوت تنش‌ها در سطح مقطع کانال می‌باشد؛ به عبارت دیگر توزیع تنش برشی نیوتنی در اطراف دیواره‌ها بر خلاف تنش پلیمری بیشینه می‌باشد.



شکل ۴-۱۸- کانتور تنش نرمال و تنش برشی نیوتنی و پلیمری در ناحیه جریان توسعه یافته ، (الف): تنش برشی نیوتنی، (ب): تنش نرمال نیوتنی، (ج): تنش برشی پلیمری، (د): تنش نرمال پلیمری

پروفیل فشار نیز از ابتدای کانال دائماً در حال تغییر بوده و تا انتهای کانال نیز این تغییرات ادامه پیدا می‌کند. البته با رسیدن به ناحیه توسعه یافته، الگوی توزیع فشار در مقاطع عرضی کانال به شکل ثابتی رسیده و فقط در شدت آن تغییراتی رخ خواهد داد. همچنین با وجود تغییرات در مقدار متوسط فشار در راستای کانال، از شدت تغییرات آن در مقاطع عرضی کاسته می‌شود. این مطلب در شکل ۴-۱۹ نشان

داده شده است. با پیشروی جریان در راستای کانال گرادیان فشار با نیروی گریز از مرکز بالانس شده و نیروی گریز از مرکز با جریان اصلی زیاد می‌شود.



شکل ۴-۱۹- تغییرات میدان فشار بی‌بعد در مقاطع عرضی کانال $\beta = 0.3$ ، $Dn=125$ ، $Wi=0.001$ و $\alpha = 0.5$ (الف): $\theta = 30^\circ$ ، (ب): $\theta = 60^\circ$ ، (ج): $\theta = 90^\circ$ ، (د): $\theta = 120^\circ$ ، (ه): $\theta = 150^\circ$ ، (و): $\theta = 180^\circ$ ، (ز): $\theta = 200^\circ$ ، (ح): $\theta = 220^\circ$ ، (ط): $\theta = 240^\circ$

در ادامه مقاومت جریان در کانال خمیده می‌پردازیم، برای این منظور می‌توان از رابطه داری

ویتسباخ که به صورت معادله ۴-۴ استفاده نمود:

$$h = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (4-4)$$

از طرفی داریم:

$$-\frac{\Delta P}{\gamma} = h \quad (۵-۴)$$

$$P^* = \frac{P}{\rho U^2} ; \frac{dP}{ds} = \frac{\Delta P}{Rd\theta} ; \frac{dP}{ds} = \frac{\Delta P}{L} \quad (۶-۴)$$

با برابر قرار دادن معادلات (۴-۴) و (۵-۴) و با استفاده از روابط معادله (۶-۴)، مقاوت جریان در

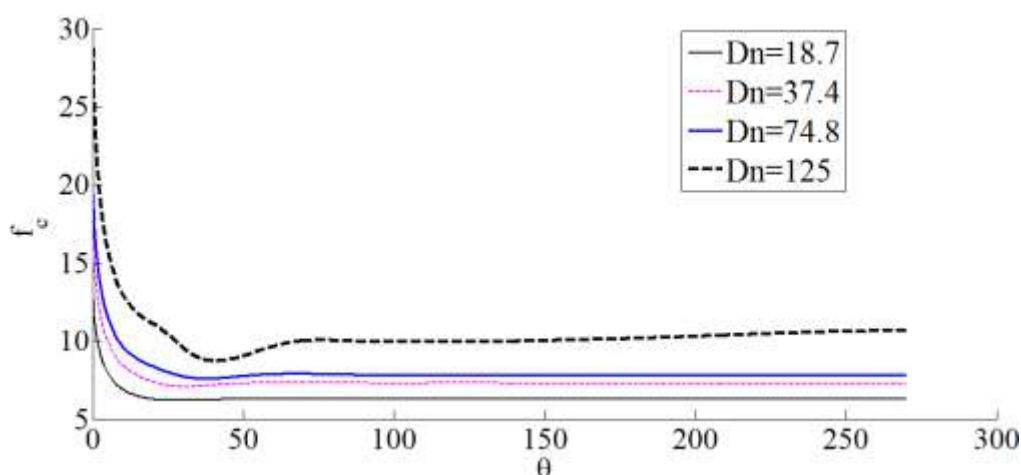
کانال خمیده به صورت رابطه (۷-۴) بدست می‌آید:

$$f_c = -2 \frac{dP^*}{ds^*} \quad (۷-۴)$$

با افزایش عدد دین و در پی آن افزایش شدت جریان‌های عرضی نیز مقدار افت فشار شدت بیشتری

پیدا خواهد کرد و در نتیجه مقاوت جریان در کانال خمیده افزایش می‌یابد. این مطلب در شکل ۴-۲۰

نشان داده شده است.



شکل ۴-۲۰- تغییرات مقاوت جریان در راستای محور کانال در اعداد دین مختلف در $Wi = 0.001$

$$\alpha = 0.5 \text{ و } \beta = 0.3,$$

همچنین با افزایش خواص الاستیک و در پی آن افزایش شدت جریان‌های عرضی نیز مقاوت جریان

در کانال خمیده افزایش پیدا خواهد کرد که البته این مقدار در مقایسه با مقادیر اولیه افت فشار در مقاطع

اولیه کانال چندان قابل ملاحظه نمی‌باشد. این مطلب در جدول ۴-۴ برای مقادیر مختلف β نشان داده

شده است:

جدول ۴-۴- مقادیر مقاوت جریان در ناحیه توسعه یافته در β های مختلف در $Wi = 0.001$

$$\alpha = 0.5 \text{ و } Dn = 125$$

β	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
f_c	۸/۷۹۷	۹/۱۳۱	۹/۶۷۶	۱۰/۴۸

۴-۷- انتقال حرارت

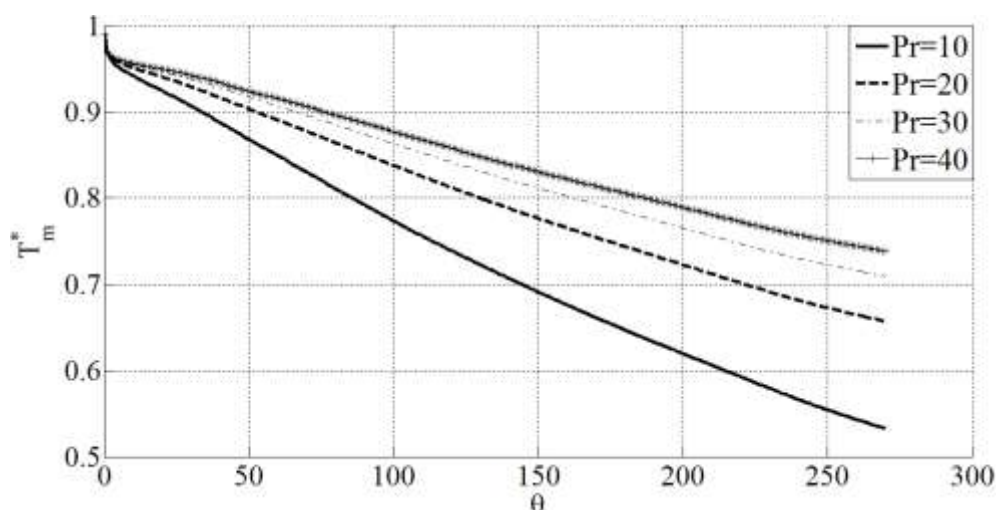
همانطور که پیش‌تر بیان شد، در این تحقیق معادله انرژی با دو شرط مرزی دمای دیواره ثابت و همچنین اعمال شار حرارتی محیطی ثابت به دیواره‌ها مورد تحلیل قرار گرفته است.

۴-۷-۱- بررسی میدان دما و انتقال حرارت

اولین شرط مرزی حرارتی مورد استفاده، اعمال دمای ثابت به دیواره‌ها و یا همان شرط مرزی T باشد. در این حالت سیال ویسکوالاستیک با دمای ثابتی وارد کانال شده و پس از تماس با دیواره‌ها که دمای آن‌ها بیشتر (حالت گرمایش) و یا کمتر (حالت سرمایش) از دمای ورودی سیال می‌باشد، دمای سیال رفته رفته تغییر کرده و به دمای دیواره‌ها نزدیک می‌شود. در این حالت پس از ورود سیال به کانال و به علت وجود گرادیان بین دمای ورودی سیال و دمای دیواره‌ها، لایه مرزی حرارتی رفته رفته شکل گرفته و با پیشروی در راستای کانال به ضخامت آن افزوده می‌شود تا جایی که لایه مرزی کامل شده و دمای سیال تا انتهای کانال هیچ تغییری پیدا نمی‌کند. لازم به ذکر است که در این بین لایه مرزی هیدرودینامیکی هم شکل گرفته و در حال تکامل می‌باشد. نسبت ضخامت لایه مرزی حرارتی به لایه مرزی هیدرودینامیکی بستگی به عدد پرانتل سیال دارد و با بیشتر شدن عدد پرانتل، نسبت ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی به لایه مرزی حرارتی رشد یافته و در پی آن طول توسعه یافتگی هیدرودینامیکی کمتر از طول توسعه یافتگی

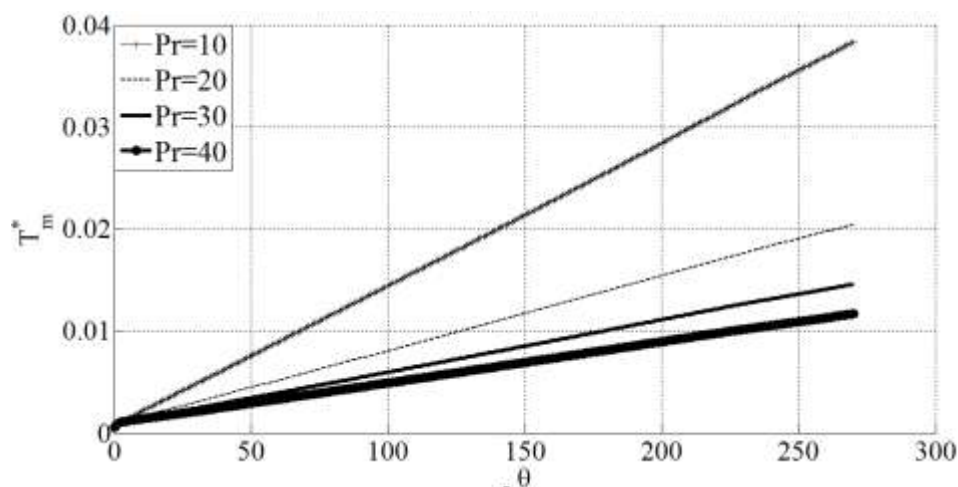
حرارتی می‌شود.

در حالت اعمال شرط مرزی T ، در هر دو حالت سرمایش و گرمایش و به ازای تمامی اعداد پرانتل، در ابتدای کانال و در محدوده در حال توسعه جریان، علی‌رغم عدم حضور جریان‌های ثانویه و بدلیل بالا بودن جریان‌های عرضی، گرادیان دما بسیار شدیدتر از ناحیه توسعه یافته می‌باشد. این روند با تشکیل لایه مرزی کاهش می‌یابد. البته لازم به ذکر است که مقدار عدد برینکمن که علامت آن قرارگیری سیال در حالت سرمایش و یا گرمایش را نشان می‌دهد، در چگونگی تغییرات دمای متوسط سیال در راستای کانال و همچنین مقدار دمای متوسط سیال در ناحیه توسعه یافته مؤثر بوده که در ادامه به این مطلب نیز پرداخته می‌شود. عدد پرانتل نیز بر نحوه تغییرات دما در راستای و همچنین مقاطع عمودی کانال اثرگذار می‌باشد. با افزایش عدد پرانتل هدایت در جهت طولی از هدایت در جهت عرضی ضعیفتر شده و از گرادیان دما در راستای کانال صرف‌نظر می‌کنیم به طوری که در خروجی کانال توسعه یافتگی دما نداریم و دما باید در فاصله بیشتری از دهانه ورودی کانال به حالت یکنواخت برسد. این مطلب در شکل ۴-۲۱ نشان داده شده است.



شکل ۴-۲۱- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد Pr در حالت $Br > 0$ و اعمال شرط مرزی T

در حالت اعمال شرط مرزی H_2 ، و گرمایش سیال نیز، دمای سیال در ابتدای کانال از مقدار اولیه خود شروع شده و با دریافت حرارت از دیواره‌ها بر مقدار آن افزوده می‌شود که این روند افزایشی تا پایان کانال ادامه می‌یابد و فقط با پیشروی در راستای کانال از شدت آن کاسته می‌شود. با افزایش عدد پرانتل نیز به علت بیشتر شدن ناحیه در حال توسعه حرارتی در ابتدای کانال، از شدت افزایش دما در این ناحیه کاسته می‌شود.

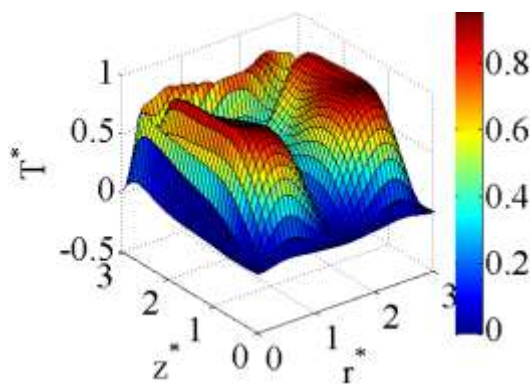


شکل ۴-۲۲- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد Pr در حالت $Br > 0$ و اعمال شرط مرزی H_2

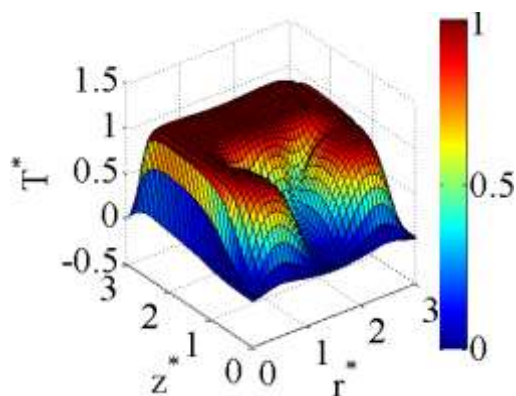
در شکل ۴-۲۳ و ۴-۲۴ نیز سطوح دما در مقاطع مختلف کانال در یک عدد پرانتل و در شرط مرزی حرارتی T نشان داده شده‌است. در حالت سرمایش کانال و به ازای اعداد برینکمن مثبت، پروفیل دمای بی‌بعد سیال از حالت یکنواخت در دهانه ورودی کانال شروع شده و پس از انتقال حرارت با دیواره‌ها رفته رفته به حالت نهایی خود می‌رسد که در این حالت یک توازن تقریبی حرارتی بین گرمای ایجاد شده توسط تلفات ویسکوز و حرارت منتقل شده به دیواره‌ها ایجاد می‌شود.

در حالت گرمایش سیال و به ازای برخی از اعداد برینکمن منفی که فعالیت ترم تنش حائز اهمیت می‌باشد، علیرغم اینکه دمای ورودی سیال پایین‌تر از دمای دیواره‌ها بوده و در ابتدای کانال حرارت از

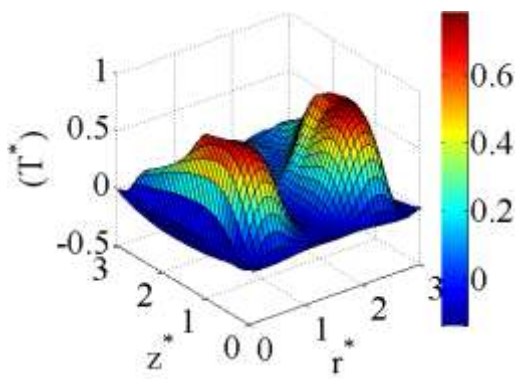
دیواره‌ها به سیال منتقل می‌شود، در مقاطع میانی کانال به علت فعالیت ترم تنش به عنوان یک منبع حرارتی، دمای میانگین سیال از دمای دیواره‌ها بالاتر رفته و این مطلب باعث تغییر در الگوی پروفیل دمای سیال و همچنین تغییر علامت دمای متوسط سیال از مقادیر مثبت به مقادیر منفی می‌شود



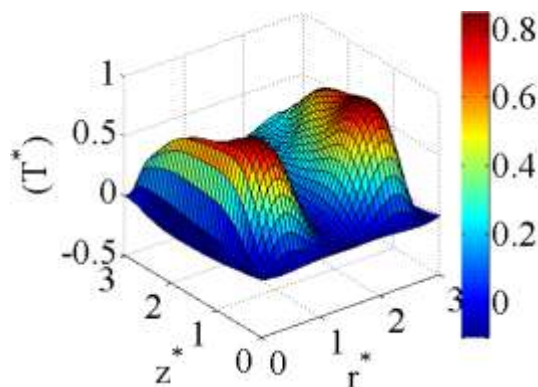
(ب)



(الف)



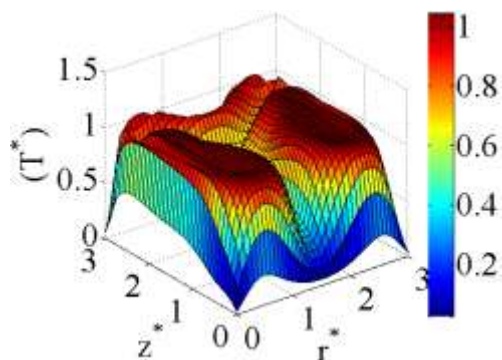
(د)



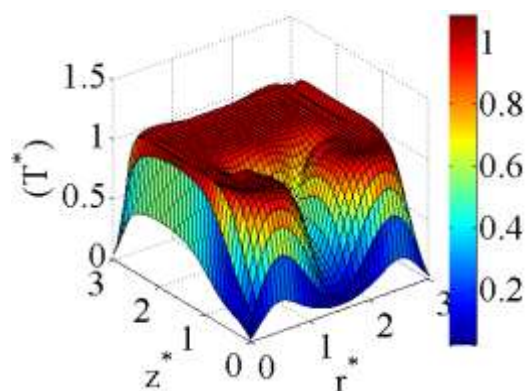
(ج)

شکل ۴-۲۳- تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت گرمایش $Br < 0$ و اعمال شرط مرزی T

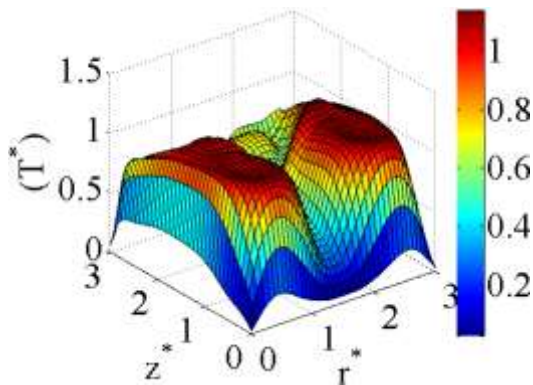
(الف): $\theta = 30^\circ$ ، (ب): $\theta = 90^\circ$ ، (ج): $\theta = 180^\circ$ ، (د): $\theta = 240^\circ$



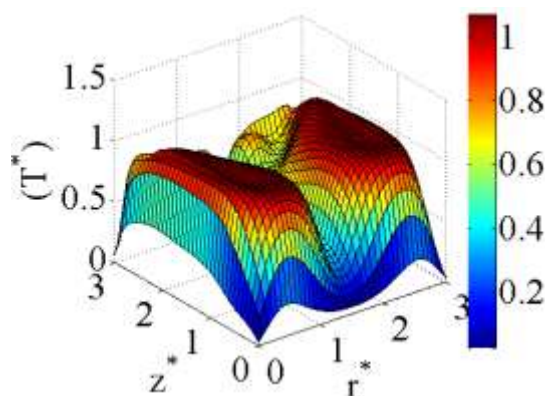
(ب)



(الف)



(د)



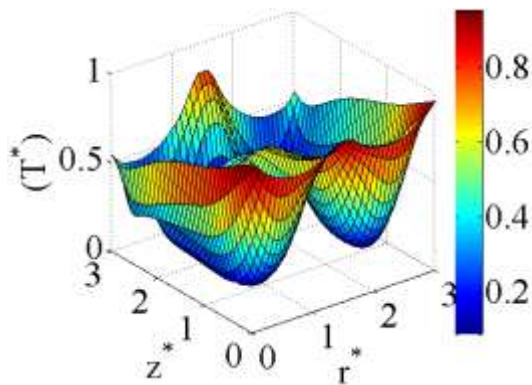
(ج)

شکل ۴-۲۴- تغییرات میدان دمای بی بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت سرمایش $Br > 0$ و اعمال شرط مرزی T

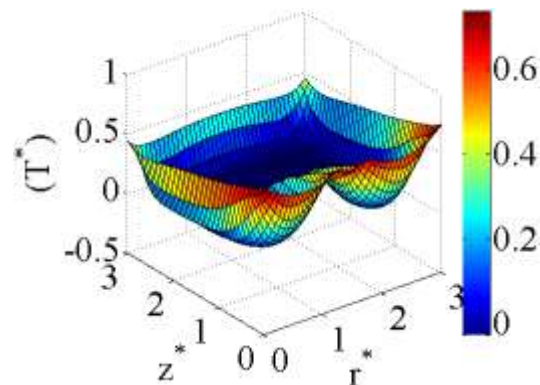
(الف): $\theta = 30^\circ$ ، (ب): $\theta = 90^\circ$ ، (ج): $\theta = 180^\circ$ ، (د): $\theta = 240^\circ$

در شکل ۴-۲۵ و ۴-۲۶ نیز سطوح دما در مقاطع مختلف کانال در یک عدد پرانتل و در شرط مرزی حرارتی H_2 نشان داده شده است. در حالت گرمایش سیال، پروفیل دما از حالت یکنواخت در دهانه ورودی کانال آغاز شده و با پیشروی در راستای کانال و دریافت حرارت از دیواره ها و همچنین فعالیت همزمان ترم تنش، دمای سیال افزایش یافته تا جایی که پروفیل دما به حالت توسعه یافته خود که

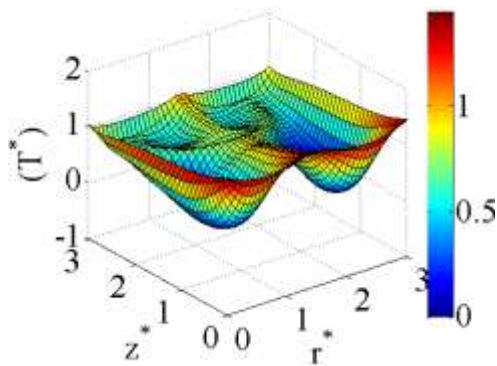
در قسمت قبل توضیح داده شده رسیده و بعد از آن با حفظ الگوی پروفیل دما، فقط شدت آن افزایش می‌یابد. در حالت سرمایش، در اعداد برینکمن کوچک، فعالیت ترم تنش در مقایسه با میزان حرارت منتقل شده از سیال به دیواره‌ها ناچیز بوده و با پیشروی در راستای کانال، دمای سیال رفته رفته کاهش یافته و پروفیل سیال به حالت دائم خود می‌رسد.



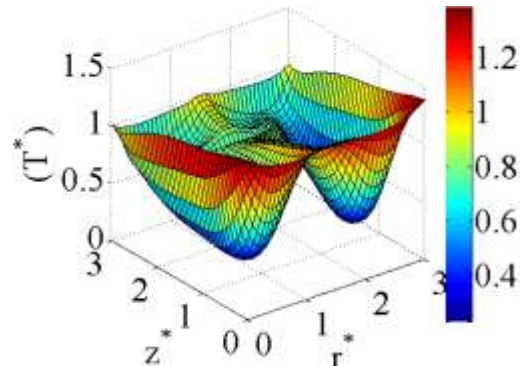
(ب)



(الف)



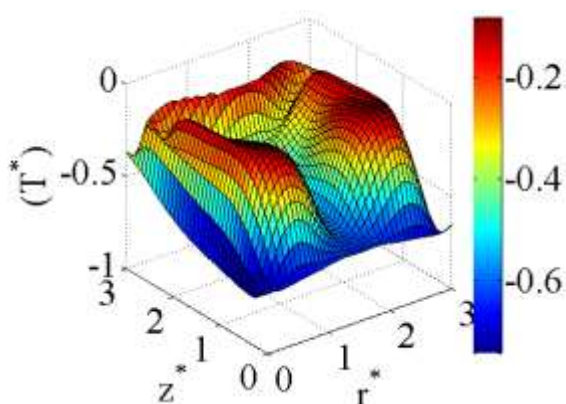
(د)



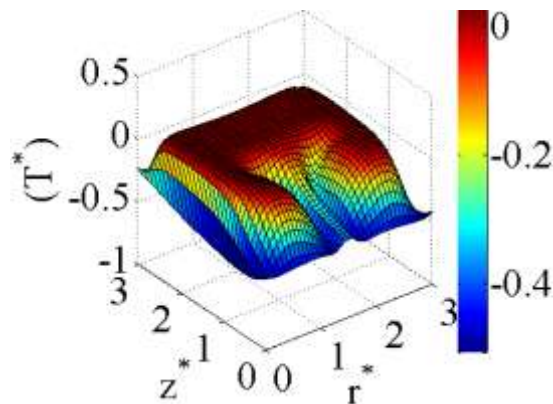
(ج)

شکل ۴-۲۵- تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت گرمایش $Br > 0$ و اعمال شرط مرزی H_2

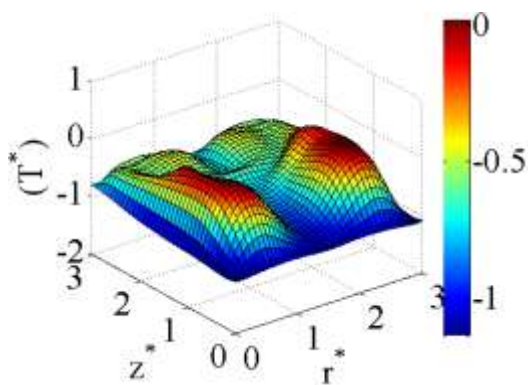
(الف): $\theta = 30^\circ$ ، (ب): $\theta = 90^\circ$ ، (ج): $\theta = 180^\circ$ ، (د): $\theta = 240^\circ$



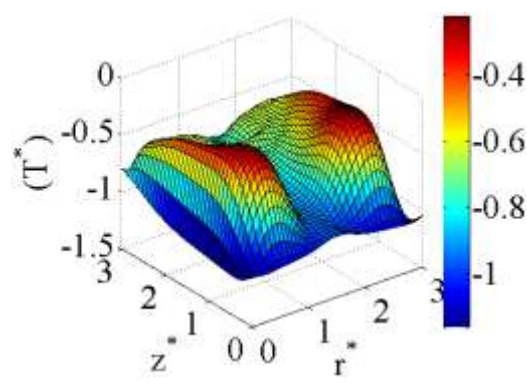
(ب)



(الف)



(د)



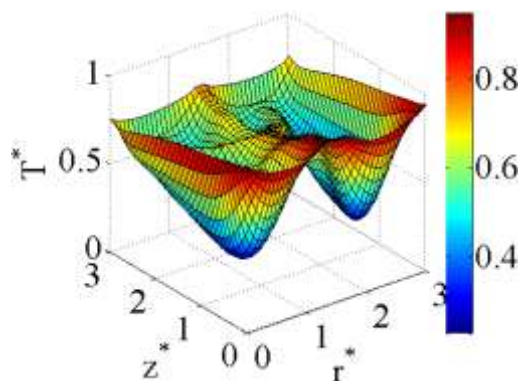
(ج)

شکل ۴-۲۶- تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت سرمایش $Br < 0$ و اعمال شرط مرزی H_2

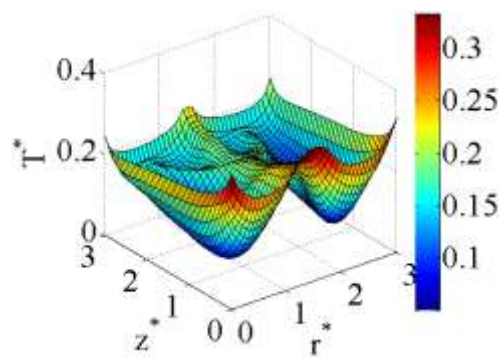
(الف): $\theta = 30^\circ$ ، (ب): $\theta = 90^\circ$ ، (ج): $\theta = 180^\circ$ ، (د): $\theta = 240^\circ$

دمای میانگین سیال در راستای کانال و همچنین سطوح دما در حالت گرمایش سیال به ازای شرط مرزی H_2 در اعداد برینکمن متفاوت در شکل‌های ۴-۲۷ و ۴-۲۸ نشان داده شده است. در حالت گرمایش سیال به ازای تمامی اعداد برینکمن، الگوی کلی پروفیل دما ثابت بوده و با افزایش عدد برینکمن، تنها مقدار دمای بی‌بعد سیال افزایش می‌یابد. نکته قابل توجه دیگر که در شکل ۴-۲۸ قابل مشاهده می‌باشد، افزایش

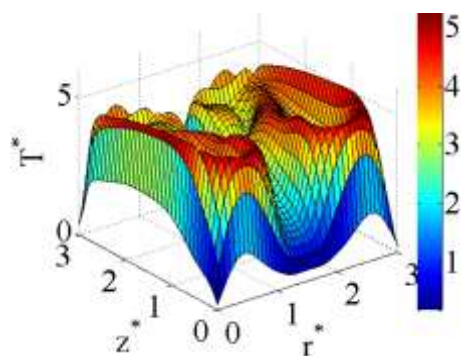
شدیدتر دما در اطراف دیواره‌ها در اعداد برینکمن بزرگتر می‌باشد که علت این مطلب شدیدتر بودن نرخ برش در اطراف دیواره‌ها و در پی آن افزایش کار میدان تنش در این نواحی می‌باشد.



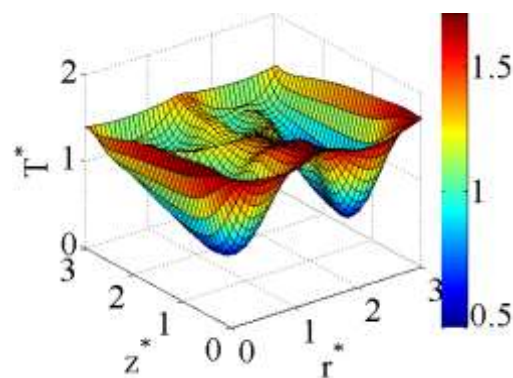
(ب)



(الف)



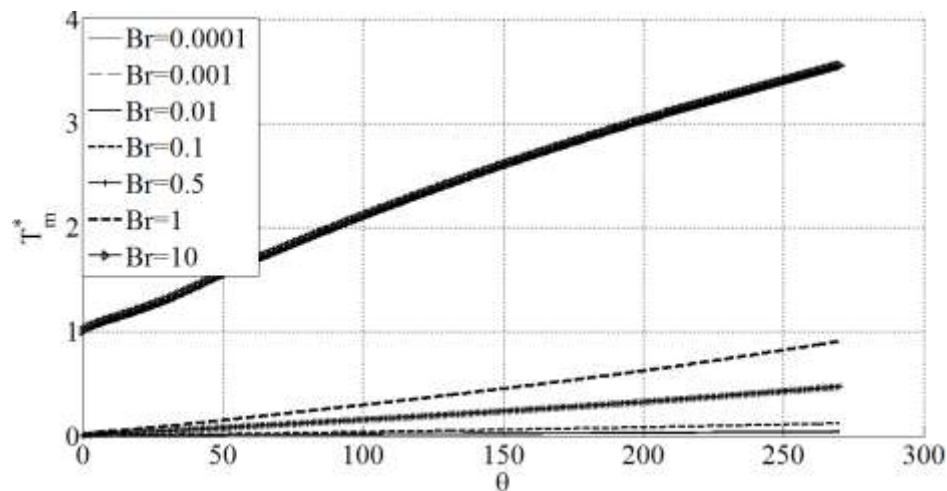
(د)



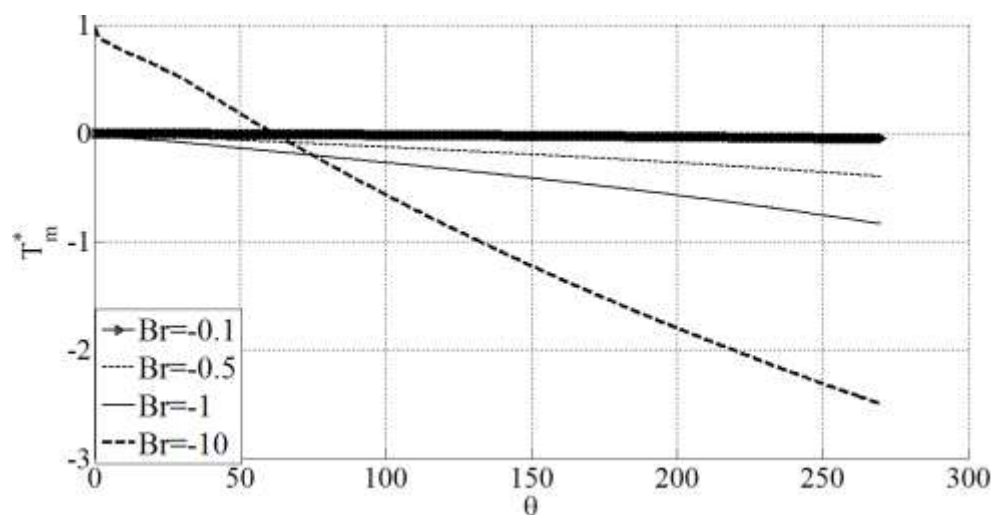
(ج)

شکل ۴-۲۷- سطوح دمای بی‌بعد به‌ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش $Br > 0$ و شرط مرزی H_2 در

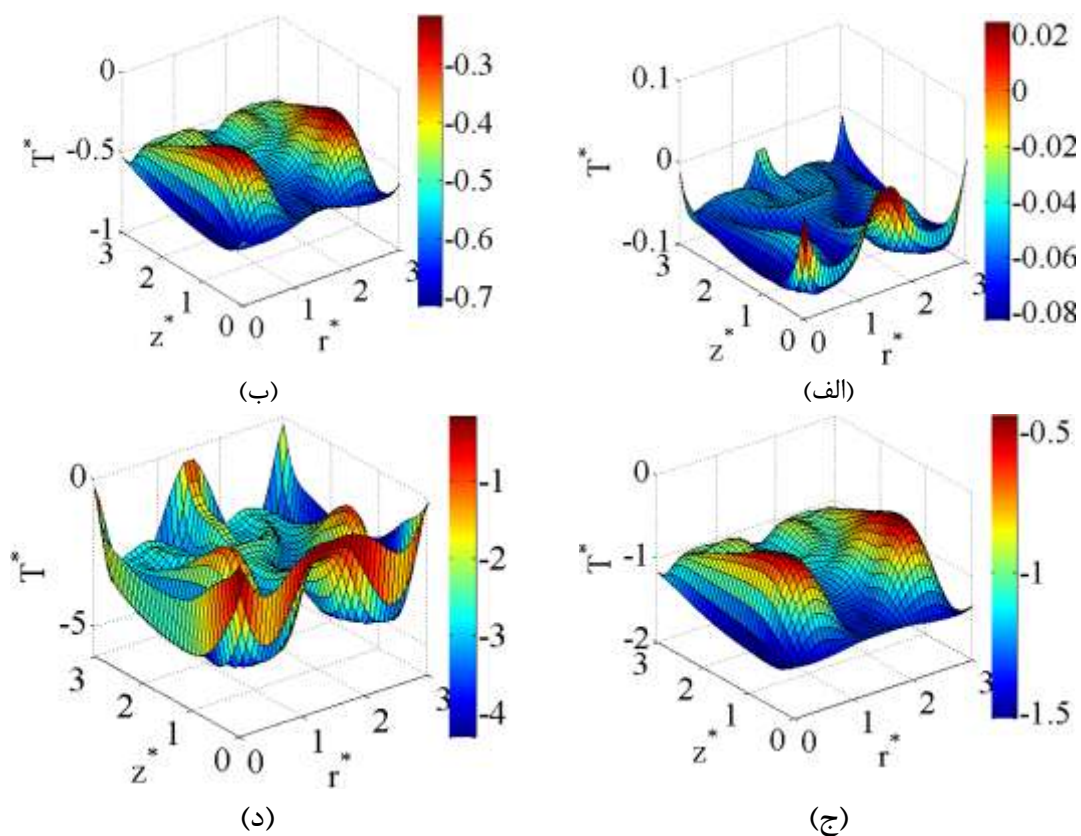
مقطع توسعه‌یافته (الف): $Br=0.1$ ، (ب): $Br=0.5$ ، $Br=1$ ، (د): $Br=10$



شکل ۴-۲۸- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد $Br > 0$ در حالت $Pr=10$ و اعمال شرط مرزی H2 همان طور که در شکل های ۴-۲۹ و ۴-۳۰ مشاهده می شود، در حالت سرمایه نیز به ازای برخی از مقادیر کم عدد برینکمن، کار میدان تنش در مقایسه با حرارت منتقل شده به دیواره ها چندان قابل ملاحظه نبوده و دمای سیال با پیشروی در راستای کانال کاهش می یابد. در اعداد برینکمن بزرگتر، رفته رفته کار میدان تنش در مقایسه با حرارت منتقل شده از دیواره ها افزایش می یابد. در این حالت دمای بی بعد سیال در مقاطع کانال منفی است و دمای سیال با پیشروی در راستای کانال کاهش می یابد.

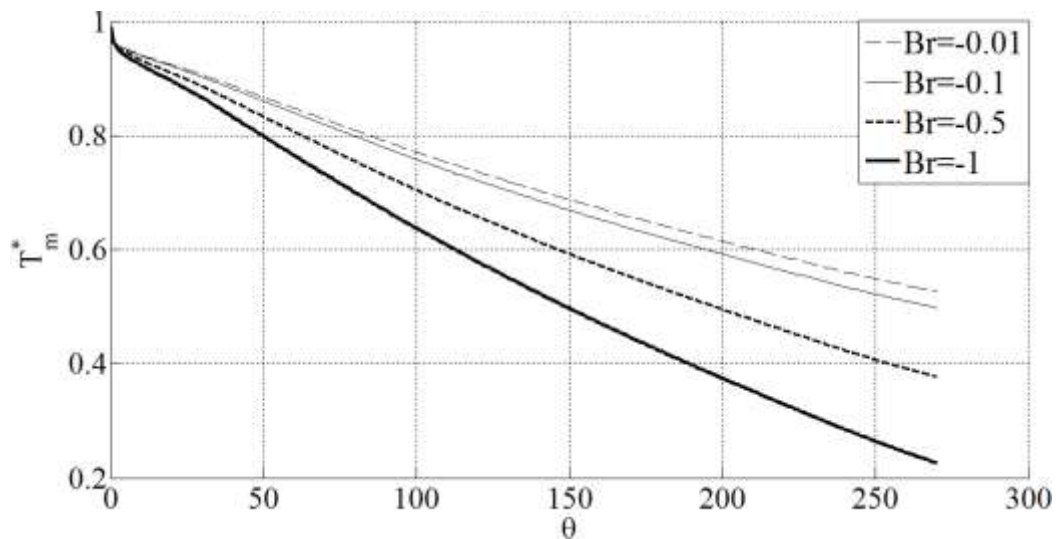


شکل ۴-۲۹- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد $Br < 0$ در حالت $Pr=10$ و اعمال شرط مرزی H2

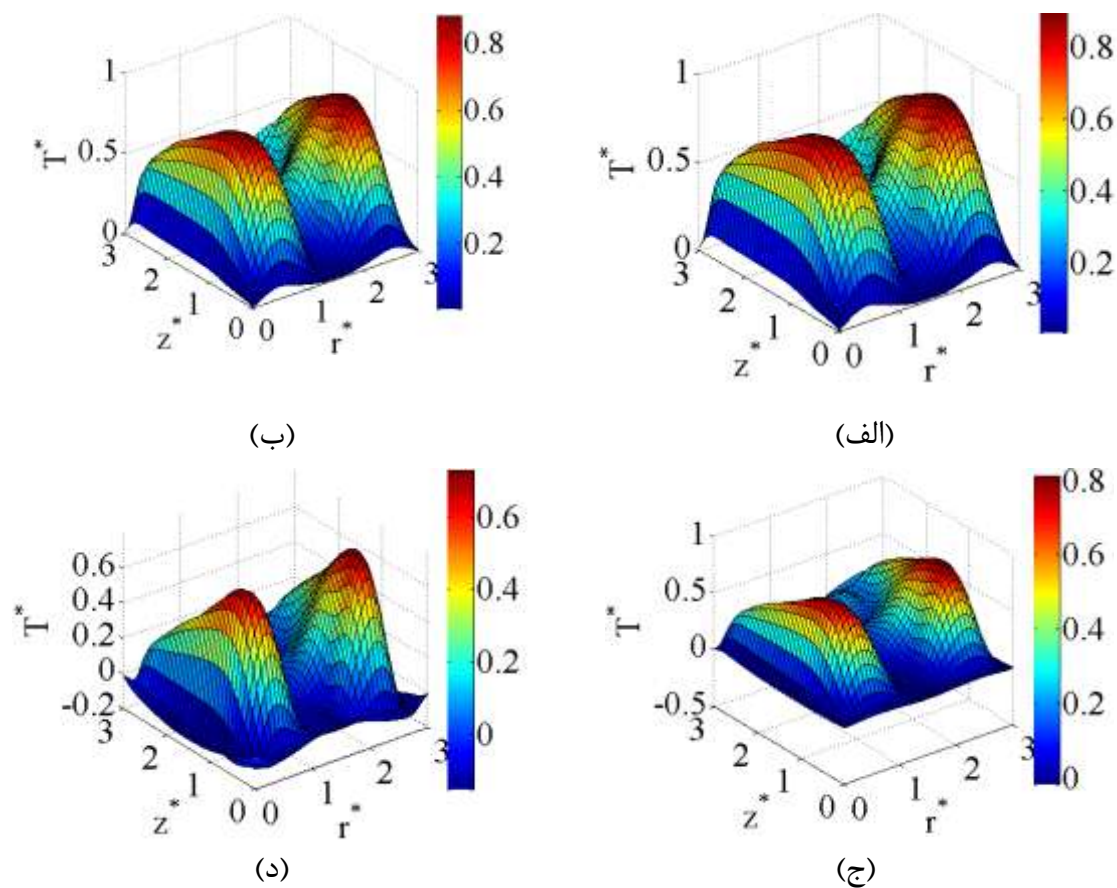


شکل ۴-۳۰- سطوح دمای بی بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایش $Br < 0$ و شرط مرزی H_2 در مقطع توسعه یافته (الف): $Br = -0.1$ ، (ب): $Br = -0.5$ ، (ج): $Br = -1$ ، (د): $Br = -10$

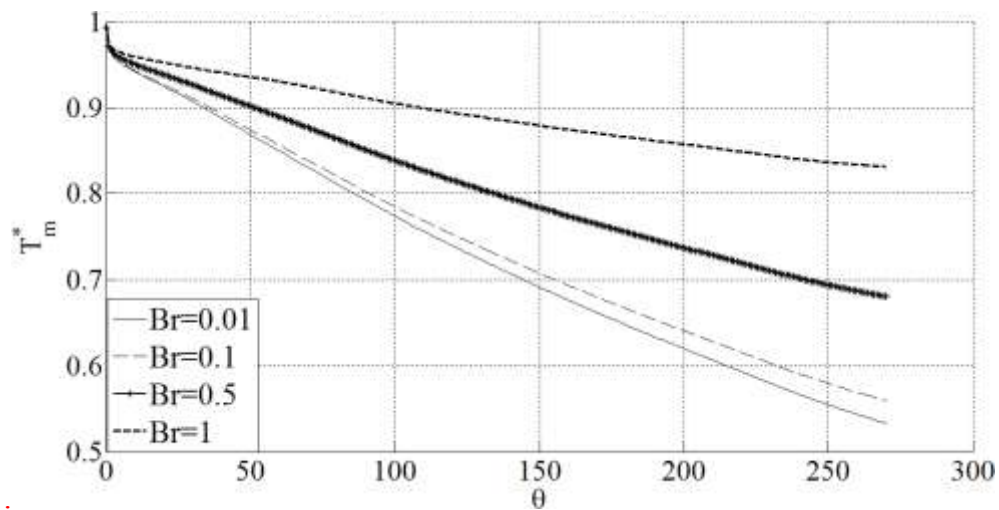
دمای میانگین سیال در راستای کانال و همچنین سطوح دما در حالت گرمایش سیال به ازای شرط مرزی T در اعداد برینکمن متفاوت در شکل های ۴-۳۱ و ۴-۳۲ نشان داده شده است. در حالت گرمایش سیال به ازای تمامی اعداد برینکمن، الگوی کلی پروفیل دما ثابت بوده و با افزایش عدد برینکمن، تنها مقدار دمای بی بعد سیال کاهش می یابد.



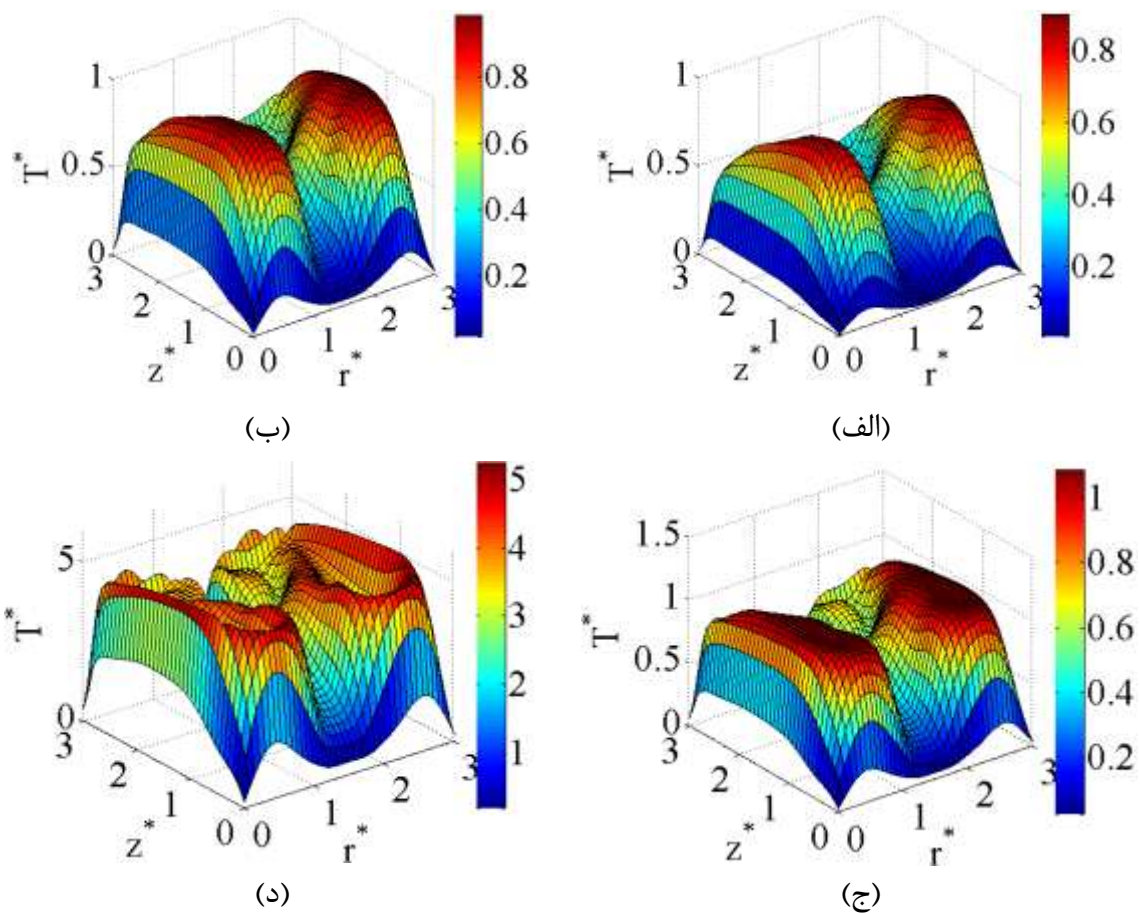
شکل ۳۱-۴- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد $Br < 0$ در حالت $Pr=10$ و اعمال شرط مرزی T



شکل ۳۲-۴- سطوح دمای بی بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش $Br < 0$ و شرط مرزی T در مقطع توسعه یافته (الف): $Br = -0.1$ ، (ب): $Br = -0.5$ ، $Br = -1$ ، (د): $Br = -10$



شکل ۴-۳۳- تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد $Br > 0$ در حالت $Pr=10$ و اعمال شرط مرزی T



شکل ۴-۳۴- سطوح دمای بی بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایش $Br > 0$ و شرط مرزی T در مقطع توسعه یافته (الف): $Br=0.1$ ، (ب): $Br=0.5$ ، $Br=1$ ، (د): $Br=10$

همانطور که در شکل‌های ۴-۳۳ و ۴-۳۴ نشان داده شده است در حالت سرمایش سیال به ازای تمامی اعداد برینکمن، الگوی کلی پروفیل دما ثابت بوده و با افزایش عدد برینکمن، تنها مقدار دمای بی بعد افزایش می‌یابد.

یکی از مسائل مهم در جریان سیالات و سیستم‌های انتقال حرارت، میزان توان سیال در انتقال حرارت با محیط پیرامون خود از طریق مرزهای سیستم می‌باشد که در بعضی از سیستم‌ها سعی در افزایش قابلیت انتقال حرارت و در برخی دیگر در جهت کاهش انتقال حرارت سیال با محیط تلاش می‌شود. در این زمینه، یکی از پارامترهای مهم که بعضاً بزرگی آن توان سیال در انتقال حرارت با محیط را نشان می‌دهد، عدد ناسلت بوده که تعریف اولیه آن به صورت معادله (۴-۸) تعریف می‌شود.

$$Nu = \frac{hD_h}{k} \quad (۴-۸)$$

در رابطه فوق، h ضریب انتقال حرارت همرفتی سیال بوده از اعمال موازنه انرژی بر روی مرزهای جامد سیستم به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} hA(T_m - T_w) &= kA \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{wall} \\ \rightarrow h &= \frac{k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{wall}}{T_m - T_w} \end{aligned} \quad (۴-۹)$$

که در آن T_m دمای متوسط سیال در هر مقطع، T_w دمای دیواره و k ضریب رسانش سیال می‌باشد. با قرار دادن معادله ضریب همرفتی سیال در معادله (۴-۸)، عدد ناسلت موضعی و با انتگرال گیری آن بر روی محیط کانال، و بی بعد سازی با استفاده از اعداد بی بعد، عدد ناسلت متوسط به ازای اعمال دو شرط مرزی حرارتی T و H_2 بر حسب محور مرکزی کانال به صورت معادلات (۴-۱۰) و (۴-۴)

(۱۱) مورد محاسبه قرار می گیرد.

$$Nu_{T,m} = \frac{1}{pT_{T,m}} \int_p \frac{\partial T_T}{\partial n} \bigg|_{wall} dp \quad (۱۰-۴)$$

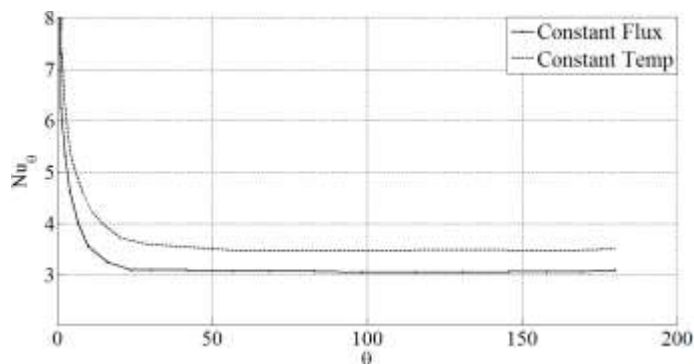
$$Nu_{H,m} = \frac{1}{p} \int_p \frac{1}{T_{H,w} - T_{H,m}} dp \quad (۱۱-۴)$$

در رابطه فوق، $Nu_{T,m}$ ، $Nu_{H,m}$ عدد ناسلت متوسط در هر مقطع برای حالات شار ثابت و دما ثابت و p محیط کانال $(2(a+b))$ است.

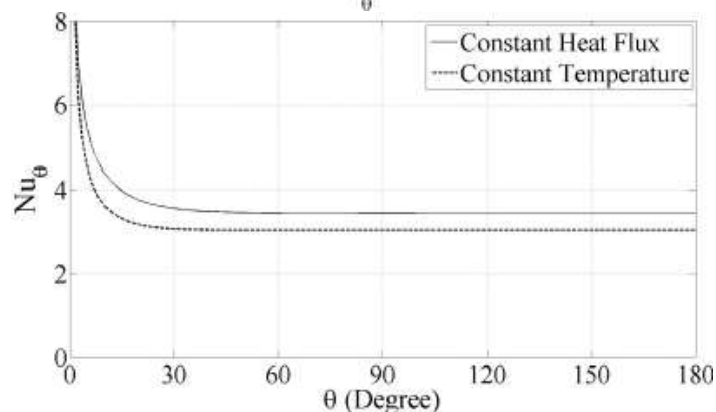
در ابتدا به منظور صحت سنجی نتایج انتقال حرارت بدست آمده از این تحقیق، هندسه مورد نظر را برای جریان سیال نیوتنی در دو حالت اعمال شرط مرزی حرارتی H_2 و T نتایج بدست آمده برای عدد ناسلت را با نتایج ارائه شده توسط نوروزی و همکاران [۵۵] مقایسه شد، در تحقیق وی $Br=0, Re=50$ و نسبت انحنا $0/15$ در نظر گرفته شد و شبیه سازی در یک کانال خمیده 180° درجه انجام شد. در این تحقیق نیز برای صحت سنجی همین شرایط در نظر گرفته شد. همان طور که در شکل ۴-۳۵ دیده می شود، عدد ناسلت بدست آمده از این تحقیق به ازای دو شرط مرزی T و H_2 دارای تطابق خوبی با نتایج ارائه شده توسط نوروزی و همکاران [۵۵] در ناحیه توسعه یافته می باشد.

عدد ناسلت در هر دو حالت شار ثابت و دما ثابت در شرایط $\theta > 90^\circ$ به سمت مقادیر $3/439$ و $3/035$ میل می کند و انتقال حرارت توسعه یافته می شود.

(الف)



(ب)



شکل ۴-۳۵- توزیع عدد ناسلت متوسط سیال نیوتنی برای حالات شار ثابت و دما ثابت در شرایط $Re=50$ ، $Br=0$ ، $\delta=0.15$ (الف): تحقیق حاضر، (ب): تحقیق نوروزی [۵۵]

البته در تحقیقات دیگری عدد ناسلت برای جریان سیال ویسکوالاستیک در هندسه‌ها و شرایط مرزی

متفاوتی نیز ارائه شده است [۵۹] که بدلیل متفاوت بودن شرایط مورد بررسی آنها با شرایط مفروض در

این تحقیق، نتایج ارائه شده قابل مقایسه نمی‌باشد.

در شکل ۴-۳۶ و ۴-۳۷ دیده می‌شود، عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال

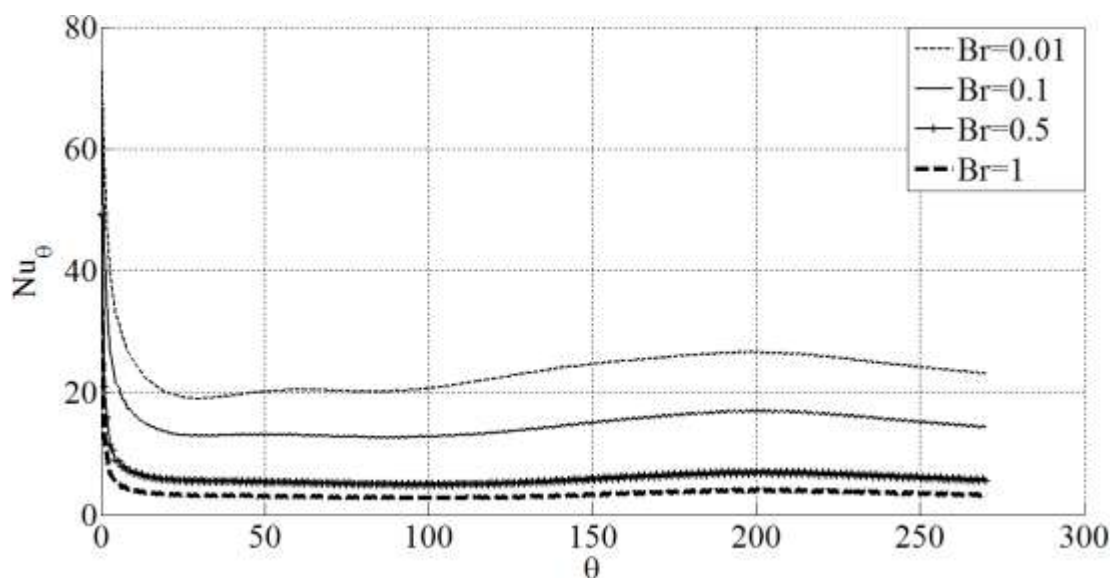
ویسکوالاستیک در اعداد برینکمن مختلف در دو شرط مرزی T و H_2 در حالت گرمایش کانال نشان داده شده‌است.

همان‌طور که در شکل ۴-۳۶ نشان داده شده‌است، در حالت اعمال شرط مرزی H_2 ، و گرمایش

سیال، ناسلت از یک مقدار نسبتاً زیاد در ابتدای کانال شروع شده و با پیشروی در راستای کانال و تشکیل

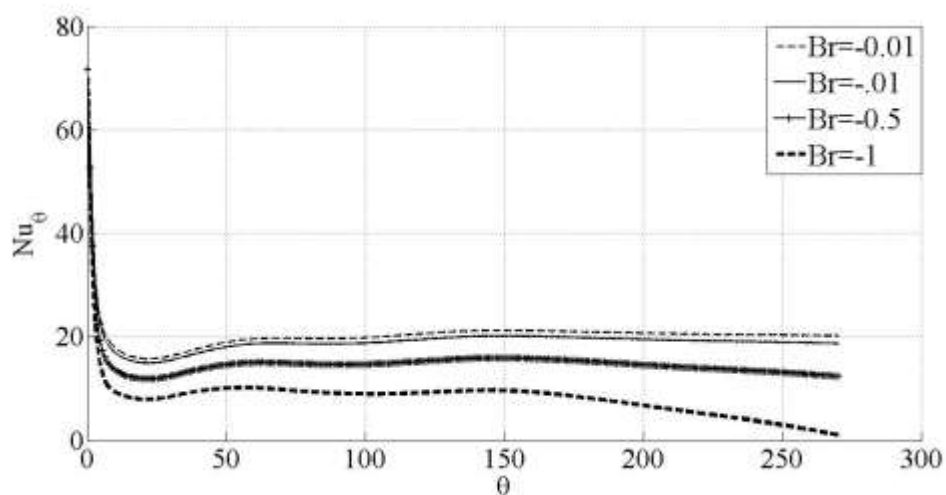
لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی از مقدار آن کاسته شده تا به مقدار ثابتی رسیده و تا انتهای کانال

بدون تغییر باقی می ماند. با افزایش عدد برینکمن، دمای میانگین سیال در مقاطع کانال افزایش می یابد و از طرف دیگر به دلیل تمرکز بیشتر اثرات کار میدان تنش در اطراف دیواره ها، دمای دیواره ها افزایش بیشتری داشته و بدین صورت اختلاف بین دمای میانگین سیال و دمای دیواره ها بیشتر شده که این مطلب باعث کاهش عدد ناسلت متوسط می شود و در اعداد برینکمن بزرگتر عدد ناسلت متوسط به سمت صفر میل می نماید.



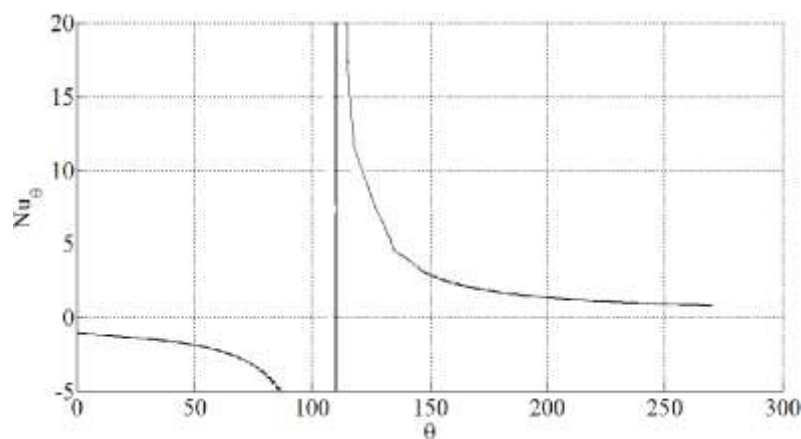
شکل ۴-۳۶- عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت گرمایش و اعمال شرط مرزی H_2

همان طور که در شکل ۴-۳۷ نشان داده شده است، در حالت اعمال شرط مرزی T ، و گرمایش سیال، کاهش عدد برینکمن، دمای سیال اطراف دیواره ها و به تبع آن دمای دیواره ها، کاهش بیشتری نسبت به دمای میانگین سیال داشته و از اینرو اختلاف بین دمای میانگین سیال و دمای دیواره ها افزایش یافته که این مطلب باعث کاهش عدد ناسلت می شود.



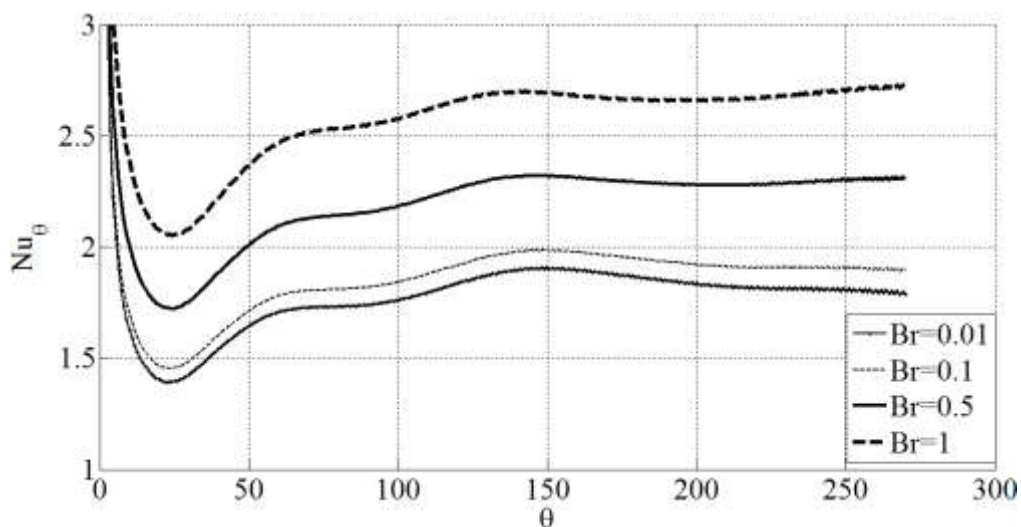
شکل ۴-۳۷- عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت گرمایش و اعمال شرط مرزی T

در حالت سرمایش سیال و اعمال شرط مرزی H_2 ، در $Br = -10$ دمای سیال اطراف دیواره‌ها افزایش بیشتری نسبت به دمای میانگین سیال داشته و اختلاف بین دمای دیواره‌ها و دمای متوسط سیال به سمت صفر میل کرده و در نهایت دمای دیواره‌ها از دمای متوسط سیال بیشتر می‌شود که این مطلب باعث ایجاد یک پرش در نمودار عدد ناسلت و همچنین تغییر نمودار از مقادیر مثبت به مقادیر منفی خواهد شد. پرش در نمودار عدد ناسلت جریان سیال ویسکوالاستیک به ازای برخی مقادیر عدد برینکمن و در حالت اعمال شار حرارتی ثابت دیواره‌ها در مرجع [۶۰] گزارش شده است.



شکل ۴-۳۸- عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت سرمایش و اعمال شرط مرزی H_2 ، $Br = -10$

در حالت سرمایش سیال و اعمال شرط مرزی T دمای ورودی سیال بیشتر از دمای دیواره‌ها می‌باشد، از همان ابتدای کانال، سیال در حالت سرمایش قرار گرفته و با پیشروی در راستای محور اصلی کانال، موازنه حرارتی به حالتی دائم رسیده و پس از آن عدد ناسلت با مقدار ثابتی می‌رسد و تا انتهای کانال ثابت باقی می‌ماند. علت افزایش مجدد در مقدار متوسط عدد ناسلت، فعالیت ترم مربوط به کار میدان تنش می‌باشد که با اضافه شدن حرارت تولیدی از فعالیت این ترم، عدد ناسلت افزایش می‌یابد که البته با افزایش عدد برینکمن این افزایش در عدد ناسلت در فواصل نزدیکتری نسبت به ابتدای کانال رخ می‌دهد. این مطلب در شکل ۴-۳۹ نشان داده شده است.



شکل ۴-۳۹- عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت سرمایش و اعمال شرط مرزی T

فصل ۵- نتیجه گیری و پیشنهاد

۵-۱- مقدمه

در این فصل نتایج بدست آمده از مدل سازی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال خمیده حاصل از این تحقیق، به صورت اختصار بیان می شود. بدین منظور مطالب مورد بررسی و همچنین نتایج بدست آمده در قسمت های جدا و سرفصل های مرتبط، دسته بندی و ارائه شده است. همان طور که پیشتر گفته شد تاکنون تحقیق کاملی در مورد جریان و انتقال حرارت در حال توسعه سیالات ویسکوالاستیک در کانال خمیده غیردایروی در حالت سه بعدی ارائه نشده است. بدین منظور در این تحقیق مدل سازی جریان و انتقال حرارت اجباری سیال ویسکوالاستیک در حالت سه بعدی در کانال مربعی خمیده در حالت ایستا مورد بررسی قرار گرفت که در آن هم میدان جریان و هم انتقال حرارت در حال توسعه در نظر گرفته شده است. همچنین از معادله ساختاری غیرخطی گزیکس در مدل سازی ترم تنش استفاده شد، معادله انرژی نیز در دو حالت دمای دیواره ثابت و شار حرارتی ثابت مورد تحلیل قرار گرفته است و اثر کار میدان ویسکوالاستیک بر انتقال حرارت مورد بررسی قرار گرفت.

۵-۲- نتایج جریان

- در جریان اینرسی سیالات ویسکوالاستیک ناپایداری در اعداد دین کمتری نسبت به سیالات نیوتنی اتفاق می افتد، در جریان سیال گزیکس در کانال خمیده جریان های ثانویه تا عدد دین ۱۲۵ بصورت یک جفت گردابه تیلور گورتلر ظاهر می شود اما با ازدیاد عدد دین جریان ناپایدار شده و یک جفت جریان ثانویه پادگرد جدید موسوم به گردابه های دین در نزدیکی دیواره خارجی ایجاد شده است. افزایش عدد دین منجر به ازدیاد و رشد گردابه های ناشی از ناپایداری (گردابه های دین) در بخش عمده مقطع کانال می شود و گردابه های تیلور گورتلر که پیش از بروز ناپایداری نیز وجود داشتند به سمت دیواره های جانبی مقطع (دیواره های سمت چپو راست) رانده

می‌شوند و از ابعاد آن‌ها کاسته می‌شود.

- در ناحیه هسته جریان سیال گزیکس، اثر نیروی گریز از مرکز با گرادیان فشار در جهت شعاع انحنا و تنش نرمال محوری بالانس می‌شود. کاهش β منجر به ایجاد تنش نرمال محوری قوی در نزدیکی دیواره خارجی می‌شود. به دلیل کوچک بودن اثر سرعت محوری و نیروی گریز از مرکز و بزرگ بودن مقدار تنش نرمال محوری در این ناحیه، بالانس نیروها به هم خورده و مکانیزم مومنتوم جهت حفظ تعادل وارد عمل می‌شود و جریانهای ثانویه ای در جهت گردابه های تیلور- گورتلر ایجاد می‌شود. در نتیجه برآیند شدت جریانهای ثانویه افزایش پیدا می‌کند.

- طول توسعه یافتگی جریان که به ناحیه ورودی جریان تا رسیدن به حالت توسعه یافته اطلاق می‌شود، شدیداً تابع عدد دین بوده با افزایش عدد دین ناحیه توسعه یافتگی جریان به مقاطع جلوتر کانال منتقل می‌شود.

- با افزایش مقدار β ، درصد لزجت حلال (ماده نیوتنی) به لزجت کل کمتر شده و در پی آن خواص الاستیک ماده افزایش یافته و با تغییر آرایش مولکولی جریان پایدارتر شده و منحنی سرعت در نواحی مرکزی تخت‌تر می‌گردد و همچنین مقادیر تنش‌های برشی و همچنین تنش‌های نرمال ماده افزایش می‌یابد، و تنش‌های برشی در اطراف دیواره‌های کانال نسبت به مرکز کانال بیشتر بوده که علت این مطلب نیز بیشتر بودن نرخ برش در این نواحی می‌باشد.

- با افزایش ضریب تحرک سیال (α) میزان خاصیت باریک شونده‌ی لزجت با نرخ برش، افزایش می‌یابد. و با کاهش لزجت سرعت محوری کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش α که

در حقیقت تأثیر معکوس بر ثابت زمانی آسودگی تنش دارد مقدار خواص الاستیک کم می-
شود با افزایش این پارامتر مقدار شدت جریان‌های عرضی کاهش می‌یابد.

- در معادله ساختاری گزیکس زمان آسودگی از تنش تأثیر مستقیمی بر خواص الاستیک سیال و شدت جریان‌های ثانویه دارد به نحوی که با افزایش مقدار زمان آسودگی از تنش، یا به عبارتی افزایش عدد وایزنبرگ خواص الاستیک ماده تقویت شده و ماکزیمم سرعت محوری در ناحیه توسعه‌یافته کاهش و شدت جریان‌های ثانویه افزایش می‌یابد
- در اینجا برای نخستین بار پارامتر مقاومت جریان در کانال‌های خمیده مورد بررسی قرار می‌گیرد و نشان داده می‌شود که با افزایش خواص الاستیک و در پی آن افزایش شدت جریان‌های عرضی، مقاومت جریان در کانال خمیده افزایش پیدا خواهد کرد.

۵-۳- نتایج انتقال حرارت

لازم به ذکر است که در مدل‌سازی انجام شده در این تحقیق، افزایش پارامترهای مادی و ثابت زمانی در معادله ساختاری گزیکس، باعث افزایش خواص الاستیک و در پی آن افزایش شدت جریان‌های ثانویه می‌شود که انتظار می‌رود در این‌صورت با افزایش تحرکات عرضی، قابلیت انتقال حرارت و عدد ناسلت جریان نیز افزایش پیدا کند. ولی به علت اینکه سهم کار ترم‌های جابجایی سرعت‌های عرضی V_z و V_r در مقایسه با بقیه ترم‌ها از جمله کار ترم جابجایی سرعت محوری و همچنین کار نیروی ویسکوز در معادله انرژی نسبتاً اندک است، از اینرو افزایش خواص الاستیک سیال در حد تغییرات داده شده در این تحقیق که باعث افزایش چند صد برابری شدت جریان‌های ثانویه در کانال می‌شود، تأثیر افزایشی چشمگیری در معادله انرژی، میدان دما و همچنین قابلیت انتقال حرارت جریان سیال نخواهد داشت.

- عدد پرانتل بر نحوه تغییرات دما در راستای و همچنین مقاطع عمودی کانال اثرگذار

می‌باشد. در حالت اعمال شرط مرزی T با افزایش عدد پرناتل هدایت در جهت طولی از هدایت در جهت عرضی ضعیفتر شده، به طوری که در خروجی کانال توسعه یافتگی دما نداریم و دما باید در فاصله بیشتری از دهانه ورودی کانال به حالت یکنواخت برسد. در حالت اعمال شرط مرزی H_2 ، و گرمایش سیال دمای سیال در ابتدای کانال از مقدار اولیه خود شروع شده و با دریافت حرارت از دیواره‌ها بر مقدار آن افزوده می‌شود که این روند افزایشی تا پایان کانال ادامه می‌یابد و فقط با پیشروی در راستای کانال از شدت آن کاسته می‌شود..

- در حالت اعمال شرط مرزی H_2 ، و گرمایش سیال، ناسلت از یک مقدار نسبتاً زیاد در ابتدای کانال شروع شده و با پیشروی در راستای کانال از مقدار آن کاسته شده تا به مقدار ثابتی رسیده و تا انتهای کانال بدون تغییر باقی می‌ماند. و با افزایش عدد برینکمن عدد ناسلت کاهش می‌یابد. در حالت اعمال شرط مرزی T ، و گرمایش سیال، کاهش عدد برینکمن، باعث کاهش عدد ناسلت می‌شود

۵-۶- پیشنهادات

در پایان این تحقیق میتوان موارد و مسائل ذیل را به عنوان موضوعاتی پیشنهادی و همچنین نو در ادامه تحقیق در زمینه جریان و انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک که با موضوع تحقیق حاضر نیز مرتبط باشد، برای ادامه تحقیقات مولف در آینده و یا به عنوان موضوعاتی پیشنهادی برای علاقمندان به فعالیت در این زمینه مطرح نمود:

✓ حل تحلیلی میدان جریان و دما در کانال خمیده دارای مقطع غیر مدور (نظیر روشهای بر پایه حساب اختلالات)

✓ حل سه بعدی جریان و انتقال حرارت در حال توسعه سیالات ویسکوالاستیک در کانال های

خمیده چرخان

✓ بررسی توانان انتقال حرارت و جریان سیالات ویسکوالاستیک در کانال خمیده (اعمال وابستگی

دانسیته و توابع ویسکومتريک به دما)

✓ بررسی جریان و انتقال حرارت غیردائم سیالات ویسکوالاستیک در کانال های خمیده

✓ حل سه بعدی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در اشکال دیگر سطح مقطع کانال و

با استفاده از معادلات متشکله انتگرالی و یا دیفرانسیلی

منابع و مراجع:

- [1]. Bird, R.B., Curtiss, C.F., Armstrong, R.C and Hassager, O. (1987), “Dynamics of polymeric liquids”, Volume I, **JOHN WILEY & SONS, New York.**
- [2]. Malkin, A. Y. (1994), “Rheology Fundamentals”, First Edition, Chem. **Tech. Publishing, Toronto.**
- [3]. Tanner, R.I., *Engineering rheology*. (2000) ,Second Edition,**Oxford University Press.**
- [4]. Phan-Thien, N., *Understanding viscoelasticity: basics of rheology* (2002) Springer Science & Business Media.
- [5]. Huilgol, R.R., *Fluid Mechanics of Viscoplasticity*. 2015: Springer.
- [6]. آ، ل.م.ر.د.و.ک., مقدمه ای بر مکانیک محیط‌های پیوسته. ۱۳۷۸, تهران: دانشگاه تربیت مدرس.
- [7]. Macosko, C.W. and R.G. Larson(1994), *Rheology: principles, measurements, and applications*.
- [8]. Larson, R., *Constitutive equations for polymer melts and solutions*. **Butterworths series in Chem. E.**
- [9]. Oldroyd, J. G. (1950), “On the formulation of rheological equations of state”, **Proc. Roy.Soc., London Ser. A** 200, pp. 523-541.
- [10]. Oldroyd, J.(1958), *Non-Newtonian effects in steady motion of some idealized elastico-viscous liquids*. Proceedings of the Royal Society of London. **Series A. Mathematical and Physical Sciences**. 245(1241): p. 278-297.
- [11]. Giesekus, H.(1982), *A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility*. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, 11(1): p. 69-109.
- [12]. Thien, N.P. and R.I. Tanner, (1977), *A new constitutive equation derived from network theory*. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, 2(4): p. 353-365.

- [13]. Wedgewood, L.E. and R.B. Bird ,(1988), *From molecular models to the solution of flow problems*. **Industrial & engineering chemistry research**. 27(7): p. 1313-1320.
- [14]. Armstrong, R.C. and S. Ishikawa,(1980), *A Rheological Equation of State for Dilute Solutions of Nearly-Hookean Dumbbells*. **Journal of Rheology** (1978-present), 24(2): p. 143-165.
- [15]. McLeish, T. and R. Larson.(1998), *Molecular constitutive equations for a class of branched polymers: The pom-pom polymer*. **Journal of Rheology** (1978-present),. 42(1): p. 81-110.
- [16]. Verbeeten, W.M., G.W. Peters, and F.P. Baaijens,(2001), *Differential constitutive equations for polymer melts: the eXtended Pom-Pom model*. **Journal of Rheology (1978-present)**,. 45(4): p. 823-843.
- [17]. Schieber, J.D., C.F. Curtiss, and R.B. Bird,(1986), *Kinetic theory of polymer melts. 7. Polydispersity effects*. **Industrial & engineering chemistry fundamentals**. 25(4): p. 471-475.
- [18]. Schieber, J.(1987), *Kinetic theory of polymer melts. VIII. Rheological properties of polydisperse mixtures*. **The Journal of chemical physics**. 87(8): p. 4917-4927.
- [۱۹]. م. ش.ن. بررسی خواص جریان، انتقال حرارت و اختلاط سیالات غیر نیوتنی. اول، ۱۳۷۱. تهران:

جهاد دانشگاهی صنعتی امیر کبیر.

- [20]. Shaw, M.T. and W.J. MacKnight,(2005), *Introduction to polymer viscoelasticity*.: **John Wiley & Sons**.
- [21]. Eustice, J. (1911), *Experiments on stream-line motion in curved pipes*. **Proceedings of the Royal Society of London**. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 85(576): p. 119-131.
- [22]. Dean, W., LXXII. (1928), *The stream-line motion of fluid in a curved pipe (Second paper)*. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**,. 5(30): p. 673-695.
- [23]. Dean, W.(1927), XVI., *Note on the motion of fluid in a curved pipe*. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**,. 4(20): p. 208-223.

- [24]. Thomas, R. and K. Walters,(1963), *On the flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe under a pressure gradient*. **Journal of fluid mechanics**. **16**(02): p. 228-242.
- [25]. Topakoglu, H.(1967.), *Steady laminar flows of an incompressible viscous fluid in curved pipes(Approximation method for steady laminar flows of incompressible viscous fluid in curved pipes, obtaining flow rate)*. **Journal of Mathematics and Mechanics**, **16**: p. 1321-1337.
- [26]. Iemoto, Y., M. Nagata, and F. Yamamoto,(1985.), *Steady laminar flow of a power-law fluid in a curved pipe of circular cross-section with varying curvature*. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**, **19**(2): p. 161-183.
- [27]. Iemoto, Y., M. Nagata, and F. Yamamoto,(1986.), *Steady laminar flow of viscoelastic fluid in a curved pipe of circular cross-section with varying curvature*. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**, **22**(1): p. 101-114.
- [28]. Das, B.(1992), *Flow of a Bingham fluid in a slightly curved tube*. **International journal of engineering science**. **30**(9): p. 1193-1207.
- [29]. Phan-Thien, N. and R. Zheng,(1990), *Viscoelastic flow in a curved channel: a similarity solution for the Oldroyd-B fluid*. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP**, **41**(6): p. 766-781.
- [30]. Bowen, P., A. Davies, and K. Walters,(1991), *On viscoelastic effects in swirling flows*. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**. **38**(2): p. 113-126.
- [31]. Sarin, V.(1993), *Flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe of slowly varying curvature*. **International journal of bio-medical computing**. **32**(2): p. 135-149.
- [32]. Sarin, V.(1997), *The steady laminar flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe of varying elliptic cross section*. **Mathematical and Computer Modelling**, **26**(3): p. 109-121.
- [33]. Sharma, H. and A. Prakash,(1977), *Flow of a second order fluid in a curved pipe*. **Indian J. Pure Appl. Math**, **8**: p. 546-557.
- [34]. Fan, Y., R.I. Tanner, and N. Phan-Thien,(2001), *Fully developed viscous and viscoelastic flows in curved pipes*. **Journal of Fluid Mechanics**, **440**: p. 327-357.

- [35]. Zhang, M.-k., et al.(2006), *Galerkin method study on flow of Oldroyd-B fluids in curved circular cross-section pipes*. **Journal of Zhejiang University SCIENCE A**, 7(2): p. 263-270.
- [36]. Norouzi, M., et al.(2010), *Convective heat transfer for viscoelastic fluid in a curved pipe*. **Heat and mass transfer**,46(8-9): p. 975-987.
- [37]. Norouzi, M., M. Sedaghat, and M. Shahmardan,(2014), *An analytical solution for viscoelastic dean flow in curved pipes with elliptical cross section*. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**. 204: p. 62-71.
- [38]. Bara, B., K. Nandakumar, and J. Masliyah,(1992), *An experimental and numerical study of the Dean problem: flow development towards two-dimensional multiple solutions*. **Journal of Fluid Mechanics**. 244: p. 339-376.
- [39]. Bara, B.M.(1991), *Experimental investigation of developing and fully developed flow in a curved duct of square cross section*, **Alberta Univ., Edmonton, AB (Canada)**.
- [40]. Mashelkar, R. and G. Devarajan,(1976), *Secondary flows of non-Newtonian fluids: Part I-Laminar boundary layer flow of a generalised non-Newtonian fluid in a coiled tube*. **Transactions of the Institution of Chemical Engineers**,54: p. 100-107.
- [41]. Norouzi, M. and N. Biglari,(2013), *An analytical solution for Dean flow in curved ducts with rectangular cross section*. **Physics of Fluids** (1994-present). 25(5): p. 053602.
- [42]. Shanthini, W. and K. Nandakumar,(1986), *Bifurcation phenomena of generalized Newtonian fluids in curved rectangular ducts*. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**,. 22(1): p. 35-60.
- [43]. Ahmadian, M.T., L. Burmeister, and R. Johnson,(1989), *Three-dimensional solidification and flow of polymers in curved square ducts*. **Polymer Engineering & Science**. 29(2): p. 91-99.
- [44]. Joo, Y.L. and E.S. Shaqfeh,(1992), *The effects of inertia on the viscoelastic Dean and Taylor–Couette flow instabilities with application to coating flows*. **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics** (1989-1993). 4(11): p. 2415-2431.

- [45]. Al-Mubaiyedh, U., R. Sureshkumar, and B. Khomami,(2000), *Energetic effects on the stability of viscoelastic Dean flow*. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**, **95**(2): p. 277-293.
- [46]. Sureshkumar, R. and M. Avgousti,(2000), *Influence of eccentricity on stability of purely elastic Dean flow*. **Journal of non-newtonian fluid mechanics**. **93**(1): p. 61-82.
- [47]. Wu, G.-H.,(2005), *The creeping flow of a polymeric fluid through bent square ducts with heat dissipation*. **International journal of heat and mass transfer**. **48**(17): p. 3628-3636.
- [48]. ZHANG, M.-k., X.-r. SHEN, and B.-z. ZHANG,(2007), *Flow of Oldroyd-B fluid in rotating curved square ducts*. **Journal of Hydrodynamics**, Ser. B. **19**(1): p. 36-41.
- [49]. Helin, L., L. Thais, and G. Mompean,(2009), *Numerical simulation of viscoelastic Dean vortices in a curved duct*. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** **156**(1): p. 84-94.
- [50]. Boutabaa, M., et al.(2009), *Numerical study of Dean vortices in developing Newtonian and viscoelastic flows through a curved duct of square cross-section*. **Comptes Rendus Mecanique**. **337**(1): p. 40-47.
- [51]. Norouzi, M., et al.(2011), *Analytical investigation of viscoelastic creeping flow and heat transfer inside a curved rectangular duct*. **Theoretical Foundations of Chemical Engineering**, **45**(1): p. 53-67.
- [52]. Norouzi, M., et al (2010)., *Flow of second-order fluid in a curved duct with square cross-section*. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**. **165**(7): p. 323-339.
- [53]. Norouzi, M., et al.(2012), *Instability investigation of creeping viscoelastic flow in a curved duct with rectangular cross-section*. **International Journal of Non-Linear Mechanics**. **47**(1): p. 14-25.

[۵۴]. نوروزی، م.، بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده دارای مقطع

مستطیلی و در حالت‌های ایستا و چرخان ۱۳۸۹.

- [55]. Fellouah, H., et al.(2010), *The Dean instability in power-law and Bingham fluids in a curved rectangular duct*. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**,. **165**(3): p. 163-173.

- [56]. Malheiro, J.M., P.J. Oliveira, and F.T. Pinho (2013), *Parametric study on the three-dimensional distribution of velocity of a FENE-CR fluid flow through a curved channel*. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**. **200**: p. 88-102.
- [58]. TANOUE S., NAGANAWA T. and IEMOTO Y. (2006), "Quasi-Three-Dimensional Simulation of Viscoelastic Flow through a Straight Channel with Square Cross Section", **J. Soc. Rheol.**, Jpn. 34, pp. 105–113.
- [59]. Peres, N., Afonso, A.M., Alves, M.A. and Pinho, F.T. (2009), "Heat transfer enhancement in laminar flow of viscoelastic fluids through a rectangular duct", **Congreso Métodos Numéricos en Ingeniería**.
- [60]. Pinho F.T. and Coelho P.M. (2006), "Fully-developed heat transfer in annuli for viscoelastic fluids with viscous dissipation", **J. of Non-Newtonian Fluid Mech.**, 138 , pp. 7-21.

Abstract

During past decades analysis over fluid flow in curved conduits been considered as one of the benchmark problem in fluid flow investigations stemming from its wide range of applications in related industry and medicine investigations. This topic has been studied via lots of experimental, numerical and analytical methods.

It should be Noted that most of investigation, so far, are limited to cases with Newtonian fluids, with few considering non-Newtonian fluids.

In the current research, both the viscoelastic flow and heat transfer in stationary dean conduit with rectangular cross section has been investigated. To analyze the effect of viscoelasticity in this geometry the famous non-linear Giesekus constitutive equation is implemented.

In the presented work, the regular finite difference method has been used to discrete governing equations using the staggered mesh technics and allocating method of flow and heat transfer parameters on this mesh is according to the Marker and Cell method. Artificial To estimate the pressure in time steps of numerical simulation the compressibility method is applied .

The accuracy of the presented numerical results is checked for different bench mark cases and independency of the results from mesh size is also accurately investigated. In following the mutual effects of parameters such as Reynolds number, Dean Number, Prandtel number, curvature ratio, alpha and beta parameters of the constitutive equation, Weissenberg Number, aspect ratio and effect of viscosity on the flow field and heat transfer has been widely studied. It is shown that as the viscoelasticity effects are amplified, the flow resistance in decreased that can be attributed to the pattern of flow distribution . In heat transfer investigation, the effect of these parameters on flow distribution is investigated. It is illustrated that in the isothermal scenario the temperature distribution cannot get into its fully developed distribution.

Keywords: viscoelastic flow, Giesekus constitutive equation, numerical method, Dean Number



University of Shahrood
Faculty of Mechanical Engineering

**Numerical Investigation of 3D Viscoelastic Fluid Flow and Heat
Transfer in Curved Ducts**

Roghayeh Saemi

Supervisors:

Dr. M.Keyhani

Advisor:

Dr. M.Norozi

September 2015

