

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های منظم واقع در مرکز صفحات همسانگرد محدود  
تحت بار کششی

الهه اردلانی

استاد راهنما:

دکتر محمد جعفری

بهمن ۱۳۹۳

دانشگاه شاهرود  
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

شماره :

تاریخ :

بسمه تعالی

شکل صورتجلسه دفاع پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر ( عج ) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم الهه اردلانی رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف منظم واقع در مرکز صفحات همسانگرد محدود تحت بار کششی که در تاریخ ..... با حضور هیأت محجمله داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح زیر است:

قبول ( با درجه : \_\_\_\_\_ امتیاز \_\_\_\_\_ )  دفاع مجدد  مردود

۱- عالی ( ۲۰ - ۱۹ )

۲- بسیار خوب ( ۱۸/۹۹ - ۱۸ )

۳- خوب ( ۱۷/۹۹ - ۱۶ )

۴- قابل قبول ( ۱۵/۹۹ - ۱۴ )

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما			
۲- استاد مشاور			
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی			
۴- استاد ممتحن			
۵- استاد ممتحن			

تأیید رئیس دانشکده

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد خانم الهه اردلانی دانشجوی

## تقدیم

---

تقدیم به تو یا رب که هرآنچه دارم از لطف و رحمت توست

و

تقدیم به پدر و مادر عزیزتر از جانم، دو فرشته‌ای که تمام لحظات زندگی‌شان را تقدیم نمودند.

## تشکر و قدردانی

همتم بدرقه‌ی راه کن ای طایر قدس که دراز است ره مقصد و من نو سشکل  
نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره  
ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه‌ی اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند.  
لذا اکنون که در سایه‌سار بنده‌نوازی‌هایش پایان‌نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم  
تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به‌جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان‌نامه به انجام  
نمی‌رسید.  
ابتدا از استاد گران‌قدم جناب آقای دکتر جعفری که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده  
داشتند و در طول نگارش این مجموعه با راهنمایی‌های عالمانه و به‌جایشان مرا یاری نمودند، کمال سپاس  
را دارم.  
از استادان محجمله دانشکده‌ی مکانیک که همواره از راهنمایی‌هایشان بهره‌بردم کمال سپاس و  
تشکر را دارم.  
از تمام دوستان ارجمندم که به نحوی مرا در انجام این تحقیق یاری نمودند، قدردانی و تشکر  
می‌نمایم.  
سپاس آخر را به مهربان‌ترین همراهان زندگی‌ام، به پدر، مادر و برادر عزیزم تقدیم می‌کنم که  
حضورشان در فضای زندگی‌ام مصداق بی‌ریای سخاوت بوده است.

## تعهدنامه

اینجانب الهه اردلانی دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک-گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های منظم واقع در مرکز صفحات همسانگرد محدود تحت بار کششی، تحت راهنمایی دکتر محمد جعفری متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه شاهرود» و یا «Shahrood University» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### تاریخ

### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در این پایان‌نامه، توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف منتظم واقع در مرکز ورق همسانگرد محدود مطالعه شده است. ورق تحت بار کششی تک‌محوری، دومحوری و برش خالص قرار می‌گیرد. روش به‌کار گرفته‌شده برپایه‌ی حلّ تحلیلی متغیّر مختلط موشخیلشویلی و نگاشت هم‌نوا با فرض تنش صفحه‌ای می‌باشد. ورق، محدود (نسبت طول ضلع گشودگی به بزرگترین ضلع ورق درگشودگی مرتب‌ی و مثلثی و نسبت قطر دایره محیط بر سایر  $n$  ضلعی‌ها به بزرگترین ضلع ورق، بزرگتر از  $0/2$ )، همسانگرد و الاستیک خطّی در نظر گرفته‌شده است. روش حل به گونه‌ای است که با استفاده از تابع نگاشت هم‌نوا ناحیه‌ی محدود خارج گشودگی‌ها در صفحه‌ی  $z$  به ناحیه محدود خارج گشودگی دایروی به شعاع واحد در صفحه‌ی  $z$  نگاشت می‌شود. برای محاسبه‌ی تابع تنش مربوط به صفحه‌ی محدود حاوی گشودگی‌های منتظم، از جمع تابع تنش یک ورق نامحدود حاوی همان گشودگی منتظم و تابع تنش یک ورق محدود بدون گشودگی استفاده‌شده است. ضرایب مجهول در تابع تنش، با استفاده از روش حداقل مرتب‌ات مرزی و اعمال شرایط مرزی مناسب به‌دست می‌آیند. تأثیر پارامترهایی از قبیل انحنای گوشه‌های گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت اندازه‌ی گشودگی به ورق و نوع بارگذاری، به‌عنوان پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش بررسی شده است. با انتخاب صحیح این پارامترها می‌توان از میزان تنش ایجادشده حول گشودگی کاست و طرحی بهینه را ایجاد نمود. نتایج به‌دست‌آمده از حلّ تحلیلی با نتایج به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود به کمک نرم‌افزار آباکوس و نتایج سایر مقالات برای ورق‌های محدود و نامحدود کاملاً هم‌دیگر را تأیید می‌نمایند. مقایسه‌ی نتایج نشان می‌دهد که در بررسی توزیع تنش ورق‌هایی که نسبت طول ضلع گشودگی (قطر دایره محیطی) به بزرگترین طول ورق در آن‌ها بزرگتر از  $0/2$  است؛ استفاده از حلّ مربوط به ورق نامحدود با خطای زیادی همراه خواهد بود.

**واژگان کلیدی:** ورق محدود، گشودگی منتظم، حلّ تحلیلی، روش متغیّر مختلط، بارگذاری

درون صفحه‌ای، ورق همسانگرد

## مقالات

---

- ۱- مجله علمی پژوهشی تربیت مدرس: حلّ تحلیلی محاسبه‌ی توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی برای صفحات همسانگرد محدود تحت بارگذاری درون صفحه‌ای (پذیرش)
- ۲- بیست و سومین کنفرانس بین المللی مکانیک: بررسی تأثیر انحنای گوشه‌ی گشودگی شبه مربعی بر توزیع تنش ورق محدود همسانگرد از روش تحلیلی (پذیرش)
- ۳- کنفرانس سراسری توسعه محوری (عمران، معماری، مکانیک): بررسی تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی شبه مربعی بر توزیع تنش ورق محدود همسانگرد از روش تحلیلی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای (پذیرش)
- ۴- کنفرانس فناورهای نوین: بررسی تأثیر انحنای گوشه‌ی گشودگی مثلثی بر توزیع تنش ورق محدود همسانگرد از روش تحلیلی (پذیرش)
- ۵- کنفرانس سراسری توسعه محوری (عمران، معماری، مکانیک): بررسی تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی پنج ضلعی منتظم بر توزیع تنش ورق محدود همسانگرد از روش تحلیلی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای (پذیرش)



# مطالب

- فصل ۱: مروری بر مطالعات پیشین ..... ۱
- ۱-۱ مقدمه ..... ۲
- ۲-۱ تعریف مسأله ..... ۳
- ۳-۱ مروری بر کارهای انجام شده ..... ۴
- فصل ۲: روش حل تحلیلی ..... ۱۳
- ۱-۲ مقدمه ..... ۱۴
- ۲-۲ فرضیات ..... ۱۴
- ۳-۲ تابع نگاشت ..... ۱۵
- ۴-۲ حل تحلیلی ..... ۱۷
- ۵-۲ روند حل ..... ۲۶
- ۶-۲ بررسی صحت نتایج ..... ۳۲
- ۷-۲ جمع بندی ..... ۳۷
- فصل ۳: گشودگی چهارضلعی ..... ۳۹
- ۱-۳ مقدمه ..... ۴۰
- ۲-۳ تأثیر انحنای گشودگی ( $m$ ) ..... ۴۱
- ۳-۳ تأثیر زاویه ی چرخش گشودگی ( $\beta$ ) ..... ۴۴
- ۴-۳ تأثیر همزمان پارامترهای انحنا و چرخش ..... ۵۰
- ۵-۳ تأثیر نسبت اندازه ی گشودگی به بزرگترین طول ورق ( $\frac{L}{a}$ ) ..... ۵۳

۵۵	۶-۳ تأثیر نسبت اضلاع ورق $(\frac{b}{a})$ .....
۵۷	۷-۳ جمع‌بندی .....
۵۹	فصل ۴: گشودگی مثلثی .....
۶۰	۱-۴ مقدمه .....
۶۱	۲-۴ تأثیر انحنای گشودگی $(m)$ .....
۶۳	۳-۴ تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی $(\beta)$ .....
۶۷	۴-۴ تأثیر همزمان پارامترهای انحنا و چرخش .....
۶۸	۵-۴ تأثیر نسبت اندازه‌ی گشودگی به بزرگترین طول ورق $(\frac{L}{a})$ .....
۷۰	۶-۴ تأثیر نسبت اضلاع ورق $(\frac{b}{a})$ .....
۷۲	۷-۴ جمع‌بندی .....
۷۵	فصل ۵: گشودگی‌های n ضلعی .....
۷۶	۱-۵ مقدمه .....
۷۷	۲-۵ تأثیر انحنای گشودگی $(m)$ .....
۷۸	۱-۲-۵ گشودگی پنج‌ضلعی .....
۷۹	۲-۲-۵ شش‌ضلعی .....
۸۱	۳-۲-۵ هفت‌ضلعی .....
۸۳	۴-۲-۵ هشت‌ضلعی .....
۸۵	۳-۵ تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی $(\beta)$ .....
۸۶	۱-۳-۵ گشودگی پنج‌ضلعی .....

- ۲-۳-۵ گشودگی شش ضلعی ..... ۸۸
- ۳-۳-۵ گشودگی هفت ضلعی ..... ۹۰
- ۴-۳-۵ گشودگی هشت ضلعی ..... ۹۱
- ۴-۵ تأثیر همزمان پارامترهای انحنا و چرخش ..... ۹۳
- ۵-۵ تأثیر نسبت اندازه‌ی گشودگی به بزرگترین طول ورق ( $\frac{L}{a}$ ) ..... ۹۵
- ۶-۵ تأثیر نسبت اضلاع ورق ( $\frac{b}{a}$ ) ..... ۹۸
- ۷-۵ جمع بندی ..... ۹۹
- فصل ۶: نتیجه‌گیری و ارائه‌ی پیشنهادها ..... ۱۰۱
- ۱-۶ نتیجه‌گیری ..... ۱۰۲
- ۲-۶ پیشنهادها ..... ۱۰۳
- مراجع ..... ۱۰۴

## شکل‌ها

- شکل ۱-۱ ورق محدود حاوی گشودگی مربعی تحت کشش دومحوری ..... ۴
- شکل ۱-۲ نگاشت ورق حاوی گشودگی مثلثی به ورق حاوی گشودگی دایروی ..... ۱۵
- شکل ۲-۲ تأثیر پارامتر  $m$  بر گشودگی شش ضلعی ..... ۱۶
- شکل ۳-۲ تأثیر پارامتر  $n$  در ایجاد گشودگی ..... ۱۶
- شکل ۴-۲ شماتیک کانتور  $L$  ..... ۱۸
- شکل ۵-۲ نمایی از روش حل [۲] ..... ۲۳
- شکل ۶-۲ موقعیت نقاط منتخب بر روی مرز داخلی در صفحه‌ی  $\bar{z}$  و مرز خارجی در صفحه‌ی  $z$  ..... ۲۷
- شکل ۷-۲ نمایش چرخش گشودگی به مقدار  $45^\circ$  ..... ۲۹
- شکل ۸-۲ نمایش چرخش ورق به مقدار  $45^\circ$  ..... ۳۰
- شکل ۹-۲ ورق حاوی گشودگی مثلثی، مدل شده در نرم افزار آباکوس، تحت بار کششی تک محوری ..... ۳۳
- شکل ۱۰-۲ نحوه‌ی مش بندی مدل در نرم افزار آباکوس ..... ۳۴
- شکل ۱۱-۲ روند تغییر ماکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی با تعداد المان‌های حول گشودگی ..... ۳۴
- شکل ۱۲-۲ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی مثلثی تحت بار کششی تک محوری از روش تحلیلی و عددی ..... ۳۵
- شکل ۱۳-۲ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی مربعی تحت بار کششی دومحوری از روش تحلیلی و عددی ..... ۳۵
- شکل ۱۴-۲ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی شش ضلعی تحت بار برشی از روش تحلیلی و عددی ..... ۳۶
- شکل ۱۵-۲ تنش بی بعد حول گشودگی مربعی تحت بار کششی تک محوری در جهت محور  $y$  ..... ۳۶

- شکل ۲-۱۶ تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی تحت بار کششی تک‌محوری در جهت محور  $x$  ..... ۳۶
- شکل ۲-۱۷ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی تحت بار کششی تک‌محوری در زوایای چرخش مختلف ..... ۳۷
- شکل ۳-۱ نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی تحت بار (الف) تک‌محوری، (ب) دو‌محوری  $\lambda=2$ ، (ج) برشی ..... ۴۰
- شکل ۳-۲ تأثیر پارامتر  $m$  بر انحنای گوشه‌ی گشودگی چهارضلعی ..... ۴۲
- شکل ۳-۳ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار تک‌محوری ..... ۴۳
- شکل ۳-۴ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار دو‌محوری ..... ۴۳
- شکل ۳-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار برشی ..... ۴۴
- شکل ۳-۶ ماکزیمم تنش بی‌بعد بر حسب انحنا در سه بارگذاری ..... ۴۴
- شکل ۳-۷ ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی تحت کشش دو‌محوری ..... ۴۵
- شکل ۳-۸ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار کششی تک‌محوری (الف)  $(\beta=0^\circ, 45^\circ)$ ، (ب)  $(\beta=15^\circ, 75^\circ)$ ، (ج)  $(\beta=30^\circ, 60^\circ)$  ..... ۴۶
- شکل ۳-۹ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار کششی دو‌محوری  $\lambda=2$  (الف)  $(\beta=0^\circ, 45^\circ)$ ، (ب)  $(\beta=15^\circ, 75^\circ)$ ، (ج)  $(\beta=30^\circ, 60^\circ)$  ..... ۴۷
- شکل ۳-۱۰ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی (الف)  $(\beta=0^\circ, 45^\circ)$ ، (ب)  $(\beta=15^\circ, 75^\circ)$ ، (ج)  $(\beta=30^\circ, 60^\circ)$  ..... ۴۸
- شکل ۳-۱۱ ماکزیمم تنش بی‌بعد بر حسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری ..... ۴۹
- شکل ۳-۱۲ نحوه توزیع تنش حول گشودگی در بارگذاری دو‌محوری در  $\lambda$  های گوناگون ..... ۵۰
- شکل ۳-۱۳ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری تک‌محوری برای زوایا و انحنای گوناگون ..... ۵۱
- شکل ۳-۱۴ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری دو‌محوری برای زوایا و انحنای

گوناگون ..... ۵۲

شکل ۳-۱۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری برشی برای زوایا و انحنای گوناگون

..... ۵۲

شکل ۳-۱۶ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار تک‌محوری ..... ۵۴

شکل ۳-۱۷ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار دومحوری ..... ۵۴

شکل ۳-۱۸ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار برشی ..... ۵۴

شکل ۳-۱۹ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری ..... ۵۴

شکل ۳-۲۰ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بار کششی تک‌محوری ..... ۵۶

شکل ۳-۲۱ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بار کششی دومحوری ..... ۵۶

شکل ۳-۲۲ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بار برشی ..... ۵۷

شکل ۳-۲۳ ماکزیمم تنش حول گشودگی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت بارگذاری ..... ۵۷

شکل ۴-۱ نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی تحت بار (الف) تک‌محوری، (ب) دومحوری

..... ۶۰ (ج) برشی  $\lambda=2$

شکل ۴-۲ روند تأثیر پارامتر  $m$  بر انحنای گوشه‌های گشودگی مثلثی ..... ۶۱

شکل ۴-۳ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار تک‌محوری ..... ۶۳

شکل ۴-۴ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار دومحوری ( $\lambda=2$ ) ..... ۶۳

شکل ۴-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار برشی ..... ۶۳

شکل ۴-۶ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب انحنای مختلف در سه بارگذاری ..... ۶۳

شکل ۴-۷ ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی تحت کشش دومحوری ..... ۶۴

شکل ۴-۸ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک‌محوری ..... ۶۵

شکل ۴-۹ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دومحوری ( $\lambda=2$ )

- ۶۵.....
- شکل ۴-۱۰ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی ..... ۶۶
- شکل ۴-۱۱ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری ..... ۶۶
- شکل ۴-۱۲ نحوه توزیع تنش حول گشودگی در بارگذاری دومحوری در  $\lambda$  های گوناگون ..... ۶۷
- شکل ۴-۱۳ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری تک‌محوری برای زوایا و انحنای گوناگون ..... ۶۷
- شکل ۴-۱۴ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری دومحوری برای زوایا و انحنای گوناگون ..... ۶۸
- شکل ۴-۱۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری برشی برای زوایا و انحنای گوناگون ..... ۶۸
- شکل ۴-۱۶ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار تک‌محوری ..... ۶۹
- شکل ۴-۱۷ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار دومحوری ..... ۶۹
- شکل ۴-۱۸ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار برشی ..... ۷۰
- شکل ۴-۱۹ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری ..... ۷۰
- شکل ۴-۲۰ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بارکششی تک‌محوری ..... ۷۲
- شکل ۴-۲۱ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بارکششی دومحوری ..... ۷۲
- شکل ۴-۲۲ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بار برشی ..... ۷۲
- شکل ۴-۲۳ ماکزیمم تنش حول گشودگی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت بارگذاری ..... ۷۲
- شکل ۵-۱ ورق محدود حاوی گشودگی شش‌ضلعی تحت بار برشی ..... ۷۶
- شکل ۵-۲ روند تأثیر پارامتر  $m$  بر انحنای گوشه‌های گشودگی پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، هفت‌ضلعی و هشت‌ضلعی ..... ۷۸

- شکل ۳-۵ نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی تحت بار (الف) تک‌محوری، (ب) دوماحوری  $\lambda=2$ ، (ج) برشی ..... ۷۸
- شکل ۴-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار تک‌محوری ..... ۷۹
- شکل ۵-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار دوماحوری ( $\lambda=2$ ) ... ۷۹
- شکل ۶-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار برشی ..... ۷۹
- شکل ۷-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب انحناهای مختلف در سه بارگذاری ..... ۷۹
- شکل ۸-۵ نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی شش‌ضلعی تحت بار (الف) تک‌محوری، (ب) دوماحوری  $\lambda=2$ ، (ج) برشی ..... ۸۰
- شکل ۹-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار تک‌محوری ..... ۸۱
- شکل ۱۰-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار دوماحوری ( $\lambda=2$ ) ۸۱
- شکل ۱۱-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار برشی ..... ۸۱
- شکل ۱۲-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب انحناهای مختلف در سه بارگذاری ..... ۸۱
- شکل ۱۳-۵ نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی هفت‌ضلعی تحت بار (الف) تک‌محوری، (ب) دوماحوری  $\lambda=2$ ، (ج) برشی ..... ۸۲
- شکل ۱۴-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار تک‌محوری ..... ۸۳
- شکل ۱۵-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار دوماحوری ( $\lambda=2$ ) ۸۳
- شکل ۱۶-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار برشی ..... ۸۳
- شکل ۱۷-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب انحناهای مختلف در سه بارگذاری ..... ۸۳
- شکل ۱۸-۵ نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی هشت‌ضلعی تحت بار (الف) تک‌محوری، (ب) دوماحوری  $\lambda=2$ ، (ج) برشی ..... ۸۴
- شکل ۱۹-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار تک‌محوری ..... ۸۵



- شکل ۵-۲۰ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار دوماحوری ( $\lambda=2$ ). ۸۵
- شکل ۵-۲۱ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار برشی ..... ۸۵
- شکل ۵-۲۲ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب انحنای مختلف در سه بارگذاری ..... ۸۵
- شکل ۵-۲۳ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک‌محوری. ۸۷
- شکل ۵-۲۴ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دوماحوری ( $\lambda=2$ )  
..... ۸۷
- شکل ۵-۲۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی ..... ۸۷
- شکل ۵-۲۶ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری ..... ۸۷
- شکل ۵-۲۷ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک‌محوری. ۸۹
- شکل ۵-۲۸ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دوماحوری ( $\lambda=2$ )  
..... ۸۹
- شکل ۵-۲۹ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی ..... ۸۹
- شکل ۵-۳۰ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری ..... ۸۹
- شکل ۵-۳۱ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک‌محوری. ۹۰
- شکل ۵-۳۲ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دوماحوری ( $\lambda=2$ )  
..... ۹۰
- شکل ۵-۳۳ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی ..... ۹۱
- شکل ۵-۳۴ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری ..... ۹۱
- شکل ۵-۳۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک‌محوری. ۹۲
- شکل ۵-۳۶ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دوماحوری ( $\lambda=2$ )  
..... ۹۲

- شکل ۳۷-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی ..... ۹۲
- شکل ۳۸-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری ..... ۹۲
- شکل ۳۹-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی در بارگذاری تک‌محوری برای زوایا و انحنای گوناگون ..... ۹۳
- شکل ۴۰-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی در بارگذاری دومحوری برای زوایا و انحنای گوناگون ..... ۹۳
- شکل ۴۱-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی در بارگذاری برشی برای زوایا و انحنای گوناگون ..... ۹۴
- شکل ۴۲-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی شش‌ضلعی در بارگذاری تک‌محوری برای زوایا و انحنای گوناگون ..... ۹۴
- شکل ۴۳-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی شش‌ضلعی در بارگذاری دومحوری برای زوایا و انحنای گوناگون ..... ۹۴
- شکل ۴۴-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی شش‌ضلعی در بارگذاری برشی برای زوایا و انحنای گوناگون ..... ۹۵
- شکل ۴۵-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری ..... ۹۶
- شکل ۴۶-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی شش‌ضلعی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری ..... ۹۶
- شکل ۴۷-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی هفت‌ضلعی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری ..... ۹۶
- شکل ۴۸-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی هشت‌ضلعی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری ..... ۹۶

شکل ۴۹-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت

بارگذاری ..... ۹۸

شکل ۵۰-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی شش‌ضلعی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت

بارگذاری ..... ۹۸

شکل ۵۱-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی هفت‌ضلعی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت

بارگذاری ..... ۹۹

شکل ۵۲-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی هشت‌ضلعی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت

بارگذاری ..... ۹۹

## جداول

- جدول ۱-۲ خواص مکانیکی ورق ..... ۳۳
- جدول ۱-۳ مقادیر و زوایای تنش نامطلوب در سه حالت بارگذاری ..... ۵۰
- جدول ۲-۳ بازه‌ای از زاویه‌ی چرخش در انحنای مختلف که مقدار ماکزیمم تنش چهارضلعی کمتر از دایره می-باشد ..... ۵۲
- جدول ۳-۳ تنش مطلوب و نامطلوب در انحنای مختلف ..... ۵۳
- جدول ۴-۳ مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در حالت نامحدود ..... ۵۵
- جدول ۱-۴ مقادیر و زوایای تنش مطلوب و نامطلوب در سه حالت بارگذاری ..... ۶۶
- جدول ۲-۴ ماکزیمم تنش حول گشودگی در زاویه‌ی چرخش مطلوب در هر بارگذاری برای انحنای مختلف .. ۶۸
- جدول ۳-۴ مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در حالت نامحدود ..... ۷۰
- جدول ۱-۵ مقادیر و زوایای تنش مطلوب و نامطلوب در سه حالت بارگذاری ..... ۸۷
- جدول ۲-۵ مقادیر و زوایای تنش مطلوب و نامطلوب در سه حالت بارگذاری ..... ۸۹
- جدول ۳-۵ مقادیر و زوایای تنش مطلوب و نامطلوب در سه حالت بارگذاری ..... ۹۱
- جدول ۴-۵ مقادیر و زوایای تنش مطلوب و نامطلوب در سه حالت بارگذاری ..... ۹۳
- جدول ۵-۵ مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی در حالت نامحدود ..... ۹۷
- جدول ۶-۵ مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در حالت نامحدود ..... ۹۷
- جدول ۷-۵ مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی‌های پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی در نسبت‌های مختلف  $\frac{b}{a}$  ..... ۹۹

## علائم

ثابت مختلط مجهول در محاسبه $\psi(\zeta)$ و $\varphi(\zeta)$	$A_n$
ثابت های حقیقی مجهول در محاسبه $\psi(\zeta)$ و $\varphi(\zeta)$	$a_{n1}$ و $a_{n2}$
طول ضلع افقی ورق	$a$
ثابت های حقیقی مجهول	$a_n$ و $a'_n$
ثابت مختلط مجهول در محاسبه $\psi(\zeta)$ و $\varphi(\zeta)$	$B_n$
ثابت های حقیقی مجهول در محاسبه $\psi(\zeta)$ و $\varphi(\zeta)$	$b_{n1}$ و $b_{n2}$
طول ضلع عمودی ورق	$b$
ثابت های حقیقی مجهول	$b_n$ و $b'_n$
ثابت مختلط مجهول در محاسبه $\psi(\zeta)$ و $\varphi(\zeta)$	$C_n$
ثابت های حقیقی مجهول در محاسبه $\psi(\zeta)$ و $\varphi(\zeta)$	$c_{n1}$ و $c_{n2}$
ثابت های حقیقی دلخواه	$c_1$ و $c_2$
ثابت مختلط مجهول در محاسبه $\psi(\zeta)$ و $\varphi(\zeta)$	$D_n$
ثابت های حقیقی مجهول در محاسبه $\psi(\zeta)$ و $\varphi(\zeta)$	$d_{n1}$ و $d_{n2}$
مدول الاستیسیته	$E$
نیروی خارجی وارد بر مرز کانتور $L'$ بر حسب متغیر $z$	$F(z)$
مؤلفه های نیروهای خارجی وارد بر مرز کانتور $L'$	$f_1$ و $f_2$
مدول برشی	$G$
جابه جایی معلوم نقاط واقع بر کانتور $L'$ بر حسب ناحیه $S$	$g_1(s)$ و $g_2(s)$
اندیس نشان دهنده تعداد نقاط منتخب	$j$
طول ضلع گشودگی مربعی و مثلثی و طول قطر دایره محیط بر $n$ ضلعی ها	$L$
کانتور محدود کننده ناحیه $S$	$L'$
تعداد جملات مربوط به سری لورنت	$M$
پارامتر تعیین کننده انحنای گوشه ی گشودگی	$m$
تعداد نقاط منتخب بر روی مرز داخلی ورق	$N_{in}$
تعداد نقاط منتخب بر روی مرز خارجی ورق	$N_{ot}$
پارامتر تعیین کننده هندسه ی گشودگی	$n$
بردار یکه ی عمود بر سطح کانتور $L'$	$q$
پارامتر تعیین کننده اندازه ی گشودگی	$R$

اختلاف تنش حاصل از شرایط مرزی و تنش حاصل از حلّ تحلیلی بر روی مرز ورق و گشودگی	$r_1(\rho_j, \theta_j)$ $r_2(\rho_j, \theta_j)$
ناحیه‌ی محدودشده توسط کانتور $L'$	$S$
تابع تنش	$U(x, y)$
جابه‌جایی معلوم نقاط واقع بر کانتور $L'$	$u$ و $v$
تابعی از نسبت پواسون	$\chi$
نیروهای خارجی وارد بر مرز گشودگی	$Y$ و $X$
نیروهای خارجی وارد بر مرز کانتور $L'$	$Y_q, X_q$
متغیر مختلط	$z$
زاویه‌ی بین افق و عمود بر مرز گشودگی	$\alpha$
زاویه‌ی چرخش گشودگی	$\beta$
زاویه‌ی بین بردار عمود بر مرز خارجی ورق و محور $x$	$\gamma$
مرز خارجی و داخلی ورق	$\Gamma$
باقی‌مانده‌ی مرزی	$\Delta$
متغیر مختلط	$\zeta$
مختصات عمودی و افقی در صفحه‌ی $\zeta$	$\eta, \zeta$
زاویه‌ی حول گشودگی	$\theta$
تابع تحلیلی از متغیر مختلط $z$	$\Theta(z)$
ضریب بار دومحوری	$\lambda$
نسبت پواسون	$\nu$
عدد پی ۳/۱۴۱۵	$\pi$
مختصات شعاعی	$\rho$
تنش عمودی در صفحه‌ی $Z$	$\sigma_x$ و $\sigma_y$
تنش عمودی در صفحه‌ی $\zeta$	$\sigma_\rho$ و $\sigma_\theta$
تنش نرمال در مرز خارجی ورق	$\sigma_n$
تنش برشی در صفحه‌ی $Z$	$\tau_{xy}$
تنش برشی در صفحه‌ی $\zeta$	$\tau_{\rho\theta}$
تنش برشی نرمال در مرز خارجی ورق	$\tau_n$
تابع تحلیلی از متغیر مختلط $z$	$\varphi(z)$
تابع تحلیلی از متغیر مختلط $\zeta$	$\varphi(\zeta)$
تابع تحلیلی از متغیر مختلط $z$	$\psi(z)$

تابع تحلیلی از متغیر مختلط  $\zeta$   $\psi(\zeta)$

تابع نگاشت  $\omega(\zeta)$





## فصل ۱

### مروری بر مطالعات پیشین

---

## ۱-۱ مقدمه

طراحی، تدوین نقشه (برنامه) ای برای ارضای نیازی معین و یا حلّ یک مشکل است. اگر این برنامه منجر به خلق چیزی با واقعیت فیزیکی شود، فرآورده‌ی آن باید وظیفه‌مند، ایمن، اعتمادپذیر، رقابت‌پذیر، قابل ساخت و مشتری‌پسند باشد [۱]. بنابراین در روند طراحی همواره توجه و رعایت موارد ذکرشده ضروری می‌باشد. ورق‌های نازک اغلب در سازه‌های فضایی، دریایی، ماشین‌آلات صنعتی و غیر صنعتی، صنعت ساختمان‌سازی و ... به کار می‌روند. در ساختارهای عملی مهندسی بنا به کاربردهای گوناگون، اغلب انواع مختلفی از گشودگی‌ها و بریدگی‌ها با ابعاد و اشکال گوناگون در سازه‌ها ایجاد می‌گردند. از جمله این موارد در کاربردهای عملی، می‌توان به گشودگی درها و پنجره‌ها در بدنه‌ی هواپیماها و زیردریایی‌ها، محلّ اتصال فشارسنج‌ها و دماسنج‌ها در بدنه‌ی کوره‌ها، محلّ اتصال دو ورق به همدیگر توسط پیچ‌ها و پرچ‌ها، گشودگی‌هایی در پره‌های توربین‌ها جهت جریان یافتن سیال خنک‌کننده در آن‌ها و گشودگی‌هایی که در مواردی برای عبور کابل‌های برق و شلنگ‌های هیدرولیک یا تسهیل در امر جریان سوخت در بال هواپیما ایجاد می‌گردند، اشاره کرد. به‌طورکلی کاهش وزن سیستم، ایجاد قابلیت اتصال تجهیزات به سیستم‌ها و ایجاد راه‌های خروجی و ورودی در سازه از عوامل ایجاد گشودگی در ورق‌ها می‌باشد. در همه‌ی این موارد وجود گشودگی‌ها در جسم، باعث به وجود آمدن تنش‌های موضعی شدیدی (تمرکز تنش) در اطراف گشودگی می‌شود. آنچه مهم است بررسی تأثیر این گشودگی‌ها در تنش‌های ایجادشده در سازه می‌باشد. بنابراین در طراحی سازه‌ها دانستن مقدار تنش بیشینه در اطراف گشودگی، همچنین نقطه‌ای که این تنش بیشینه رخ می‌دهد؛ برای ارائه‌ی طرحی مناسب بسیار مؤثر است. بقای بسیاری از فرآورده‌ها به طرز تنظیم درست بار - تنش توسط طراحی بستگی دارد که در محلّ موردنظر از مقاومت سازه کمتر باشد. بنابراین تعیین میزان دقیق مقدار تنش حول گشودگی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

نوع گشودگی، شعاع انحنای گشودگی، جهت‌گیری (زاویه چرخش) گشودگی و نوع بارگذاری

پارامترهایی هستند که بر توزیع تنش در ورق‌ها مؤثر بوده و انتخاب صحیح آن‌ها در دستیابی به طرح موفق کاملاً مفید است. بنابراین همان‌طور که اشاره گردید به‌منظور ارائه‌ی طرحی بهینه و دارای استانداردهای فوق بررسی این تأثیرات لازم به‌نظر می‌رسد. با عنایت به این موضوع در این پایان‌نامه سعی شده است تا پارامترهای مختلف، به‌طور کامل بررسی شده و تأثیرات آن‌ها بر مقدار و نحوه‌ی توزیع تنش مورد مطالعه قرار گیرد. ابتدا در مقدمه‌ی این پایان‌نامه بعد از تعریف مسأله، مروری بر کارهای انجام‌شده در زمینه‌ی تمرکز تنش، در ورق‌های محدود و نامحدود همسانگرد<sup>۱</sup> و غیرهمسانگرد<sup>۲</sup> صورت گرفته است. سپس در فصل‌های مختلف به بررسی گشودگی‌های منتظم و تأثیر پارامترهای گوناگون بر نحوه‌ی توزیع تنش حول گشودگی‌ها پرداخته می‌شود.

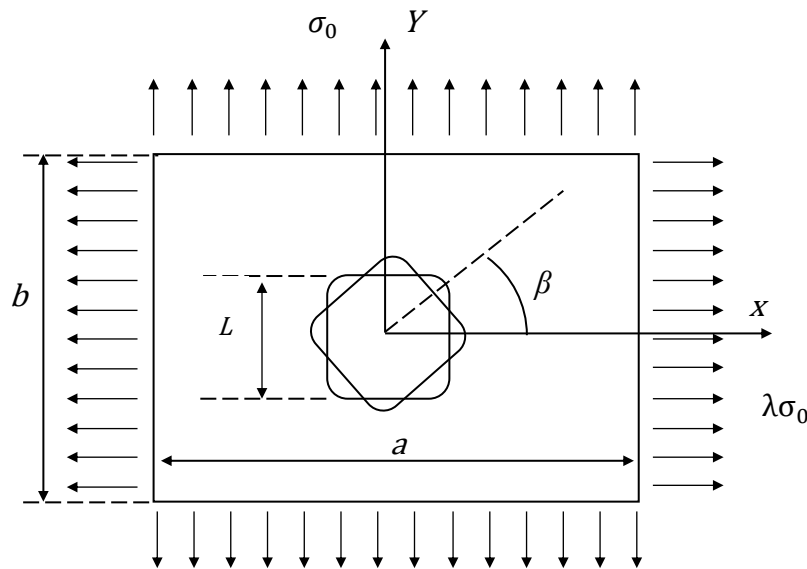
## ۱-۲ تعریف مسأله

هدف اصلی در این پایان‌نامه تحلیل تنش و بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش ورق همسانگرد حاوی گشودگی‌های منتظم مطابق شکل ۱-۱ است. نسبت طول ضلع گشودگی به طول بزرگترین ضلع ورق، بزرگتر از  $0.2$  است [۲]، بنابراین با اطمینان می‌توان ورق را محدود در نظر گرفت. مسأله با فرض تنش صفحه‌ای و در غیاب نیروهای حجمی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین رفتار ورق در ناحیه‌ی الاستیک خطی بررسی می‌شود. فرض می‌شود گشودگی در مرکز صفحه قرار گرفته و گشودگی عاری از هرگونه بار خارجی است؛ یعنی در مرز گشودگی  $\sigma_{\rho} = \sigma_{\rho\theta} = 0$  می‌باشد.

در شکل ۱-۱ زاویه‌ی چرخش گشودگی که نحوه‌ی قرارگیری آن نسبت به محور افق می‌باشد؛ با  $\beta$  نمایش داده شده است. ورق تحت بار کششی تک‌محوری، دو‌محوری و برش خالص قرار می‌گیرد. شکل گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی، ابعاد ورق و گشودگی و نوع بارگذاری درون صفحه‌ای از پارامترهایی هستند که تأثیر آن‌ها در این پایان‌نامه بر توزیع تنش مورد بررسی قرار گرفته است.

<sup>1</sup> Isotropic

<sup>2</sup> Anisotropic



شکل ۱-۱ ورق محدود حاوی گشودگی مربعی تحت کشش دوماحوری

### ۳-۱ مروری بر کارهای انجام شده

در زمینه‌ی تمرکز تنش ورق همسانگرد و ناهمسانگرد نامحدود دارای گشودگی، تحقیقات بسیاری انجام شده است. ابتدا اینگلیس<sup>۱</sup> [۳] در سال ۱۹۱۳ با استفاده از دستگاه مختصات بیضوی و تابع پتانسیل حقیقی ایری<sup>۲</sup> توزیع تنش اطراف گشودگی بیضوی را به دست آورد. راه حل او دقیق و مناسب بود اما به کارگیری آن به ویژه برای اشکال نوک تیز دشوار بود. حل او نشان می‌داد که تمرکز تنش با کوچک شدن شعاع انحنا در یک گوشه از گشودگی در مقایسه با دیگر نقاط گشودگی می‌تواند بسیار بزرگ شود. این نتایج باعث حساس شدن مهندسان در امکان خطر تمرکز تنش به طور مثال در گوشه‌های نوک تیز، شکاف‌ها، گشودگی‌ها، شیار پیچ‌ها و مشابه آن‌ها در سازه‌ها گردید. پس از او محققان زیادی مقالات و کتاب‌های مرجع متعددی در این زمینه منتشر کردند. هوولند<sup>۳</sup> [۴] روابطی برای ورق‌های بلند با گشودگی دایره‌ای و عرض محدود ارائه کرد. وسترگارد<sup>۴</sup> [۵] تابع تنشی با جمله‌هایی از توابع همساز برای تحلیل تنش اطراف گشودگی‌های تیز به دست آورد. تنش‌های به دست آمده

<sup>1</sup> Inglis

<sup>2</sup> Airy

<sup>3</sup> Howland

<sup>4</sup> Westergaard

از تابع تنش او معادلات تعادل، معادلات سازگاری و قانون هوک تعمیم یافته را ارضا می‌کرد.  
 هیوود<sup>۱</sup> [۶] روابطی برای تصحیح ضریب تمرکز تنش در عرض محدود با استفاده از مقادیر ضریب تمرکز تنش ورق‌های نامحدود استخراج کرد. هیوود این روابط را با استفاده از برآیند نیروهای تعادل برای ورق‌های دارای گشودگی تحت بار کششی ارائه کرد که در آن تأثیر عرض محدود به‌تنهایی اعمال شد.

در کتاب‌های استرنبرگ<sup>۲</sup> [۷]، نیوبر<sup>۳</sup> [۸]، پیترسون<sup>۴</sup> [۹] و پیلکی<sup>۵</sup> [۱۰]، برای محدوده‌ی وسیعی از گشودگی‌ها با اندازه‌های مختلف، ضرایب تمرکز تنش مناسبی برای مواد همسانگرد ارائه شده است. در بعضی از این مراجع معادلاتی نیز با استفاده از نتایج آزمایشگاهی ارائه شده است. برای نمونه پیترسون روابطی برای ورق‌های حاوی گشودگی‌های مختلف، هم برای ابعاد نامحدود و هم برای عرض محدود ارائه کرد. نتایجی که در این مراجع موجود است؛ معمولاً از آزمایش‌های تجربی به‌عنوان مثال فتوالاستیک به‌دست آمده است. بسیاری از طراحان در محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش از این کتاب‌ها و استانداردهای مرجع استفاده می‌کنند.

#### ورق همسانگرد و ناهمسانگرد نامحدود:

موشخیلشویلی<sup>۶</sup> [۱۱] برپایه‌ی تئوری الاستیک دوبعدی، روش متغیر مختلط را معرفی کرد. با استفاده از این روش مسأله‌ی تعیین توزیع تنش ورق حاوی گشودگی، به محاسبه‌ی دو تابع تحلیلی هولومورفیک<sup>۷</sup> محدود می‌شد. او این روش را با نگاشت هم‌نوا ترکیب کرد تا بتواند به‌صورت تحلیلی مسأله‌ی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های غیر دایروی را در جسم الاستیک دوبعدی حل کند.  
 ساوین<sup>۸</sup> [۱۲] با استفاده از روش متغیر مختلط موشخیلشویلی، توزیع تنش اطراف انواع مختلفی

<sup>1</sup> Heywood

<sup>2</sup> sternberg

<sup>3</sup> Neuber

<sup>4</sup> Peterson

<sup>5</sup> Pilky

<sup>6</sup> Muskhelishvili

<sup>7</sup> Holomorphic

<sup>8</sup> Savin

از گشودگی‌ها را در ورق نامحدود همسانگرد به دست آورد. او ناحیه‌ی نامحدود اطراف گشودگی در صفحه‌ی  $z$  را با استفاده از تابع نگاشت شوارتز-کرسٹفل<sup>۱</sup> به ناحیه‌ی داخل دایره‌ی واحد نگاشت داد و با استفاده از انتگرال کوشی<sup>۲</sup> تابع تنش را به دست آورد. او همچنین تمرکز تنش گشودگی مثلثی با گوشه‌های گرد را نیز در ورق نامحدود بررسی نمود. تئوکاریس و پترو<sup>۳</sup> [۱۳] از روش متغیر مختلط موشخیلشویلی و نگاشت هم‌نوا، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی را در ورق همسانگرد نامحدود بررسی و نتایج را با نتایج تجربی مقایسه کردند. گائو<sup>۴</sup> [۱۴] به منظور اجتناب از به‌کارگیری دو نگاشت هم‌نوا، از دستگاه مختصات بیضوی-هذلولی برای به دست آوردن صریح مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی ورق نامحدود همسانگرد تحت بار دومحوری دلخواه استفاده کرد. موتوک<sup>۵</sup> [۱۵] به بررسی تأثیر شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی‌های مختلف در ورق همسانگرد نامحدود تحت کشش پرداخت. سیمها و موهاپاترا<sup>۶</sup> [۱۶] از یک تابع نگاشت کلی برای یافتن توزیع تنش در اطراف انواع گشودگی‌ها در یک ورق همسانگرد نامحدود استفاده کردند. لی<sup>۷</sup> و همکارانش [۱۷] با اعمال ضرایب تصحیح در تابع نگاشت هم‌نوا، توانستند توزیع تنش و جابه‌جایی حول گشودگی مستطیلی شکل با ابعاد دلخواه در ورق نامحدود همسانگرد و تحت بار تک‌محوری را به دست آورند. رضایی پزند و جعفری [۱۸] از روش ساوین برای مطالعه‌ی تمرکز تنش حول گشودگی‌ها مختلف در ورق نامحدود فلزی استفاده کردند و تأثیر پارامترهایی مانند نوع شکل گشودگی، انحنای گوشه و زاویه‌ی چرخش گشودگی را بر روی ضریب تمرکز تنش مطالعه کردند. باتیستا<sup>۸</sup> [۱۹] با اصلاح روش متغیر مختلط موشخیلشویلی، توزیع تنش حول گشودگی‌های چندضلعی با هندسه‌های پیچیده در ورق نامحدود تحت بارگذاری کششی را محاسبه کرد. شارما<sup>۹</sup> [۲۰] راه حلی عمومی برای توزیع تنش اطراف گشودگی‌های چندضلعی در ورق

<sup>1</sup> Schwartz-chirstoffel

<sup>2</sup> Cauchy integral

<sup>3</sup> Theocaris and Petrou

<sup>4</sup> Gao

<sup>5</sup> Motok

<sup>6</sup> Simha and Mohapatra

<sup>7</sup> Lei

<sup>8</sup> Batista

<sup>9</sup> Sharma

همسانگرد نامحدود را تحت بارگذاری دومحوری به دست آورد. او همچنین تأثیر هندسه‌ی گشودگی و الگوی بارگذاری بر توزیع تنش ورق را بررسی نمود.

توسعه کامل روش موشخلیشویلی به مسائل الاستیسیته دوبعدی برای مواد ناهمسانگرد توسط اشلبای<sup>۱</sup> [۲۱]، اشترو<sup>۲</sup> [۲۲] و لخنیتسکی<sup>۳</sup> [۲۳] انجام شد. لخنیتسکی روش متغیر مختلط موشخلیشویلی را برای مواد الاستیک ناهمسانگرد بسط داد و حلی عمومی برای محاسبه‌ی مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی در حالت تنش صفحه‌ای به دست آورد. او از روش سری‌ها برای به دست آوردن ضرایب تابع تنش استفاده کرد و راه حل بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها با اشکال مختلف را در ورق نامحدود ناهمسانگرد ارائه نمود. بعدها پژوهشگران متعددی با استفاده از روابط ارائه شده توسط آن‌ها به مطالعه‌ی ورق‌های ناهمسانگرد حاوی گشودگی پرداختند. تان<sup>۴</sup> [۲۴] بررسی‌های متعددی بر روی ضریب تمرکز تنش در مواد ناهمسانگرد انجام داد. تان با اطلاعات مربوط به تمرکز تنش ورق ناهمسانگرد نامحدود حاوی گشودگی دایروی و بیضوی و با معرفی ضرایب تصحیح مناسب، تمرکز تنش ورق حاوی این گشودگی‌ها را با عرض محدود به دست آورد. دائوست و هووا<sup>۵</sup> [۲۵] گشودگی مثلثی در ورق همسانگرد و ناهمسانگرد نامحدود را تحت بار کششی تک‌محوری، تحلیل کردند. آن‌ها با تعریف نسبت اضلاع به عنوان یک پارامتر، توانستند علاوه بر مثلث متساوی الاضلاع سایر مثلث‌ها با نسبت اضلاع مختلف را بررسی کنند. همچنین آن‌ها به بررسی پارامتر شعاع انحنای گشودگی نیز پرداختند. ابوالفتوح<sup>۶</sup> [۲۶] رابطه‌ی واحدی را برای مؤلفه‌ی تنش مماس بر مرز گشودگی برای هندسه‌های دایروی، بیضوی، مثلثی و مربعی در ورق نامحدود از ماده‌ی ناهمسانگرد خاص، تحت بار کششی بیان نمود. یوکادگانکر و رائو<sup>۷</sup> [۲۷] توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی در ورق ناهمسانگرد نامحدود را تحت بارگذاری درون صفحه‌ای با استفاده از روش گائو و بدون استفاده از جمع آثار به دست آوردند.

<sup>1</sup> Eshelby

<sup>2</sup> Stroh

<sup>3</sup> Lekhnitskii

<sup>4</sup> Tan

<sup>5</sup> Daoust and Hoa

<sup>6</sup> Abuefoutouh

<sup>7</sup> Ukadgaonker and Rao

آن‌ها همچنین به بررسی تأثیر زاویه‌ی الیاف بر توزیع تنش پرداختند و این روش را برای چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن بسط دادند. رضایی پژند و جعفری [۲۹،۲۸] در ورق ناهمسانگرد نامحدود توزیع تنش در اطراف گشودگی‌های مختلف و تأثیر پارامترهایی مانند انحنای گوشه و زاویه‌ی چرخش گشودگی را بررسی نمودند. اسمر و جبور<sup>۱</sup> [۳۰] توزیع تنش اطراف گشودگی مربعی در یک ورق ناهمسانگرد نامحدود تحت بار کششی را به‌دست آوردند. آن‌ها همچنین به بررسی تأثیر انحنای گشودگی و زاویه‌ی بار در این مقاله پرداختند. شارما و همکارانش [۳۱] در مورد ورق ناهمسانگرد نیز به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی مثلی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای پرداختند و پارامترهای زاویه‌ی بار، زاویه‌ی الیاف، جنس و انحنای گوشه‌ی گشودگی را نیز در نظر گرفتند.

#### ورق‌های همسانگرد و ناهمسانگرد حاوی چندگشودگی:

در مورد ورق‌هایی که بیش از یک گشودگی دارند نیز تحقیقات زیادی صورت گرفته است. راه حلّ کلی برای گروهی از گشودگی‌های واقع در یک ورق نامحدود و ورق با عرض محدود اولین بار توسط هوولند و نایت<sup>۲</sup> [۳۲]، گرین [۳۳]، لینگ و ونگ<sup>۳</sup> [۳۴] به‌دست‌آمده است. آن‌ها به این منظور راه حلّ سری‌ها را گسترش دادند. در این روش، محاسبه‌ی ضرایب پارامتری سری‌ها برای ارضای شرایط مرزی، ساده اما نسبتاً طولانی است. تانگ<sup>۴</sup> [۳۵] با استفاده از روش متغیرهای مختلط، موفق به حلّ مسأله‌ی صفحات دارای چند گشودگی شد. برای حلّ این مشکل هالبرت<sup>۵</sup> [۳۶]، همدا<sup>۶</sup> و همکارانش [۳۷] و واه<sup>۷</sup> [۳۸]، تعدادی از مسائل صفحه‌ای چند گشودگی را به‌وسیله‌ی روش عددی نقطه- نظیر<sup>۸</sup> حل کردند. نتایج، کارایی و انعطاف‌پذیری این روش را نشان داد. ایسادا و ایگوا<sup>۹</sup> [۳۹] این روش را برای مسأله‌ی آرایش زیگ‌زاگی گشودگی‌های دایروی گسترش دادند. همچنین تحقیقاتی

<sup>1</sup> Asmar and Jabbour

<sup>2</sup> Howland and Knight

<sup>3</sup> Ling and Wang

<sup>4</sup> Tang

<sup>5</sup> Hulbert

<sup>6</sup> Hamada

<sup>7</sup> Wah

<sup>8</sup> Point-matching

<sup>9</sup> Isida and Igawa



به وسیله‌ی ژانگ<sup>۱</sup> و همکارانش [۴۰] و یوکادگائونکر [۴۱] بر روی حلّ تحلیلی ورق‌های حاوی دو گشودگی با اشکال مختلف انجام شده است.

### ورق‌های همسانگرد و ناهمسانگرد محدود:

غالب روش‌های تحلیلی به کاررفته شده در مطالعات فوق، برای بررسی توزیع تنش ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی مناسب می‌باشند اما در موارد زیادی از کاربردهای عملی مهندسی، ورق‌ها را نمی‌توان نامحدود در نظر گرفت. از راه حلّ ارائه شده برای ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی، نمی‌توان برای ورق‌های محدود استفاده نمود. زیرا در این حالت تأثیر شرایط مرزی خارجی بر توزیع تنش در نظر گرفته نمی‌شود. بنابراین مطالعه بر روی توزیع تنش ورق محدود دارای گشودگی مرکزی، نیازمند به کارگیری روابط جداگانه‌ای است.

اگونوسکی<sup>۲</sup> [۴۲] با استفاده از متغیرهای مختلط و روش حدّ اقل مربّعات مرزی توزیع تنش حول گشودگی دایروی را در چندلایه‌های کامپوزیتی محدود به دست آورد. لین و کو<sup>۳</sup> [۴۳] با استفاده از تئوری مواد ناهمسانگرد لخنیتسکی به تحلیل چندلایه‌های کامپوزیتی محدود با گشودگی بیضوی پرداختند. برای این منظور آن‌ها از تابع تنش ایری و روش حدّ اقل مربّعات مرزی استفاده کردند. وو و چن<sup>۴</sup> [۴۴] به منظور حلّ مسأله‌ی ورق همسانگرد محدود با تعداد و موقعیت دلخواه از گشودگی‌های دایروی، تابع تنشی را بر اساس روش متغیر مختلط موشخیلشویلی و روش حدّ اقل مربّعات مرزی پیشنهاد کردند. زو و همکاران<sup>۵</sup> [۴۵] با استفاده از بسط سری فابری<sup>۶</sup> و روش حدّ اقل مربّعات مرزی، توزیع تنش اطراف گشودگی بیضوی در چندلایه‌ی کامپوزیتی محدود را به دست آوردند. بیشتر مطالعاتی که تاکنون بر روی ورق‌های محدود حاوی گشودگی انجام شده است؛ محدود به گشودگی

<sup>1</sup> Zhang

<sup>2</sup> Ogonowski

<sup>3</sup> Lin and Ko

<sup>4</sup> Woo and Chan

<sup>5</sup> Xu

<sup>6</sup> Faber series

دایروی و بیضی شکل می‌شود. در سال ۲۰۱۳ پن و همکارانش<sup>۱</sup> [۲] با استفاده از روش متغیر مختلط و حداقل مربعات مرزی و با اصلاح تابع تنش ارائه شده توسط موشخیلشویلی، به بررسی توزیع تنش ورق محدود حاوی گشودگی مربعی تحت بار کششی تک‌محوری پرداختند. آن‌ها از تابع نگاشتی که توسط شارما بر اساس نگاشت شوارتز- کرسٹفل به دست آمده بود، استفاده کردند و یک گشودگی مربعی و دو گشودگی مستطیلی با نسبت ابعادی  $3/2$  به  $1$  و  $5$  به  $1$  را بدون در نظر گرفتن پارامتر انحنا، تحت بار کششی تک‌محوری بررسی نمودند. آن‌ها همچنین پارامتر چرخش گشودگی را برای گشودگی مربعی در زوایای بسیار خاصی بررسی کردند.

تحقیقات زیادی نیز در مورد تأثیر ترک و سایر ناهمواری‌های هندسی برای پیش‌بینی رفتار خستگی و همچنین تمرکز تنش آن‌ها انجام شده است که از آوردن خلاصه‌ی این مقالات و توضیح در مورد آن‌ها صرف‌نظر شده است و فقط به بحث در مورد ورق‌های حاوی گشودگی اکتفا شده است. در این پایان‌نامه سعی می‌شود تا با استفاده از روش متغیر مختلط و با بسط تحقیق انجام شده توسط پن و همکاران، توزیع تنش اطراف گشودگی‌های منتظم واقع در مرکز ورق محدود فلزی بررسی شود. روش ارائه شده در این پایان‌نامه با معرفی تابع نگاشتی مناسب، توانایی تحلیل ورق‌های محدود با گشودگی‌های مختلف را دارد. همچنین این تابع امکان بررسی پارامترهای مختلف مانند زاویه‌ی چرخش و انحنا، گوشه‌های گشودگی را به راحتی فراهم می‌آورد. پارامترهای مورد بررسی در این پایان‌نامه شامل انحنا، گوشه‌های گشودگی، نسبت ابعاد ورق و گشودگی، نوع بارگذاری درون صفحه-ای و زاویه‌ی چرخش گشودگی می‌باشد.

موضوعات بررسی شده در این پایان‌نامه به صورت زیر ارائه می‌گردند:

در فصل دوم اساس روش تحلیلی حاضر، معادلات حاکم و نحوه‌ی پیاده‌سازی آن‌ها توضیح داده می‌شود. همچنین مقایسه‌ی حل تحلیلی حاضر با نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود (نرم‌افزار آباکوس) و مقایسه با نتایج سایر مقالات در این فصل آورده شده است.

<sup>1</sup> Pan

در فصل سوم، چهارم و پنجم به ترتیب به توزیع تنش حول گشودگی مربعی، مثلثی و  $n$  ضلعی - های منتظم پرداخته شده است. در این فصول به بررسی تأثیر پارامترهای گوناگون همچون انحنای گوشه‌های گشودگی، نسبت ابعاد ورق و گشودگی، نوع بارگذاری درون صفحه‌ای و زاویه‌ی چرخش گشودگی بر نحوه‌ی توزیع تنش اطراف این گشودگی‌ها پرداخته شده است.

نهایتاً در فصل ششم به جمع‌بندی فعالیت‌های انجام‌شده در این مطالعه و بیان کلی نتایج به‌دست‌آمده پرداخته خواهد شد. برخی از پیشنهادها نیز برای پیشبرد فعالیت‌های آتی در زمینه‌ی این مسأله ارائه خواهد شد.



## فصل ۲

### روش حلّ تحلیلی

---

## ۲-۱ مقدمه

در بخش اول این فصل، پس از بیان فرضیات مسأله‌ی پیش‌رو تابع نگاشت مورد استفاده در روند حل تحلیلی معرفی می‌شود. پس از آن معادلات حاکم بر ورق محدود همسانگرد، با استفاده از تئوری متغیر مختلط موشخیلیشویلی [۱۱] استخراج می‌شود. سپس با توجه به شرایط مرزی ورق و با کمک روش حداقل مربعات مرزی، معادلات مربوط به شرایط مرزی ورق مشخص و روند حل با استفاده از این روش بیان می‌گردد.

در بخش آخر این فصل، به بررسی نتایج حاصل از حل تحلیلی انجام شده با نتایج حاصل از حل عددی به کمک نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس و همچنین نتایج سایر مقالات برای ورق محدود و نامحدود حاوی گشودگی پرداخته می‌شود.

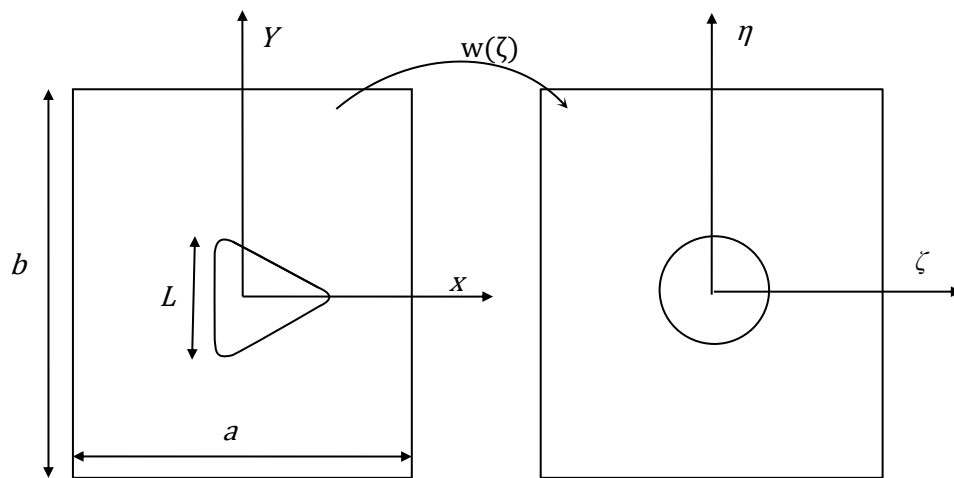
## ۲-۲ فرضیات

فرضیات استفاده شده در این پایان‌نامه به صورت زیر می‌باشند:

- ۱- اندازه‌ی گشودگی در مقابل ابعاد ورق بزرگ می‌باشد، بنابراین ورق محدود است. این معیار در گشودگی مربعی و مثلثی، نسبت طول ضلع گشودگی به طول بزرگترین ضلع ورق بزرگتر از  $0/2$  [۲] و در چندضلعی‌ها نسبت قطر دایره‌ی محیط بر گشودگی به طول بزرگترین ضلع ورق بزرگتر از  $0/2$  تعریف شده است.
- ۲- ورق همگن و همسانگرد است و ماده دارای رفتار الاستیک خطی می‌باشد.
- ۳- مسأله، تنش صفحه‌ای فرض شده است.
- ۴- ورق تحت بارگذاری کششی دومحوری، تک‌محوری و برش خالص قرار می‌گیرد.
- ۵- مرز گشودگی آزاد از بار است. بنابراین با اعمال شرایط مرزی  $\sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0$  تنها تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی  $\sigma_\theta$  است.
- ۶- رفتار ماده در کشش و فشار یکسان است.

## ۳-۲ تابع نگاشت

روش تحلیلی ارائه شده در این پایان نامه برگرفته از روش متغیر مختلط موشخیلشویلی [۱۱] و نگاشت همنا می باشد. به منظور تحلیل تنش گشودگی های غیر دایروی، ابتدا می بایست ورق حاوی گشودگی مختلف در صفحه ی مختلط  $z$  به ورق حاوی گشودگی دایروی به شعاع واحد در صفحه ی نگاشت  $\zeta$  تبدیل شود. شکل ۱-۲ این تبدیل را برای گشودگی مثلثی نشان می دهد.



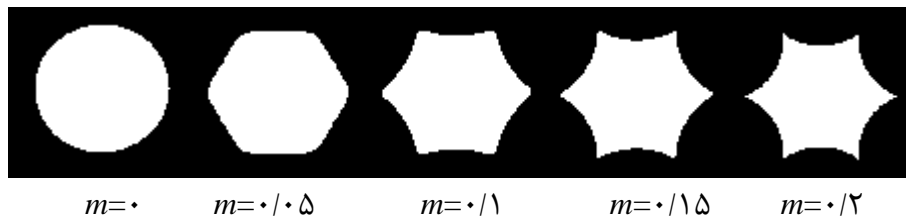
شکل ۱-۲ نگاشت ورق حاوی گشودگی مثلثی به ورق حاوی گشودگی دایروی

این عمل با استفاده از معادله ی (۱-۲) صورت می پذیرد، که در آن،  $R$  اندازه ی گشودگی،  $n$  نوع گشودگی و  $m$  مقدار انحنای گوشه ی گشودگی را مشخص می کند. در این پایان نامه،  $R=1$  در نظر گرفته شده است.

$$z = x + iy = W(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta^n}\right) \quad (1-2)$$

در گشودگی های لبه دار  $m$  معیار تیزی یا نرمی و انحنای گشودگی است ( $m \geq 0$ ). با تغییر این پارامتر ( $m$ ) می توان برای هر گشودگی خاص، شعاع انحنای متفاوتی ایجاد کرد و در هر مورد تنش در جهت های مختلف را مورد بررسی قرار داد. برای هر گشودگی وقتی  $m$  کاهش می یابد گشودگی ملایم تر می شود تا اینکه  $m$  به کمترین مقدار خود، یعنی  $m=0$  می رسد. در این حالت گشودگی به دایره تبدیل می شود. مثلاً برای گشودگی شش ضلعی تغییرات  $m$  در شکل ۲-۲ ارائه شده روند میل

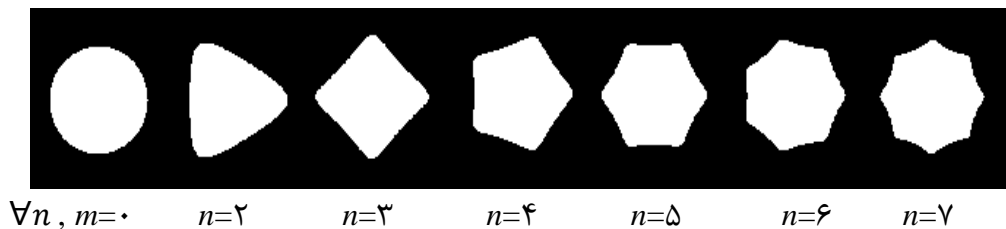
کردن گشودگی شش ضلعی به دایره نشان داده شده است.



شکل ۲-۲ تأثیر پارامتر  $m$  بر گشودگی شش ضلعی

تأثیر پارامتر  $n$  در ایجاد گشودگی‌های مختلف در شکل ۳-۲ نشان داده شده است. همان‌طور که

مشاهده می‌گردد تعداد اضلاع گشودگی برابر با  $n+1$  می‌باشد.



شکل ۳-۲ تأثیر پارامتر  $n$  در ایجاد گشودگی

متغیر مختلط  $\zeta$  بر حسب مختصات  $\rho$  و  $\theta$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\zeta = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (2-2)$$

رابطه‌ی اوپلر:

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (3-2)$$

$$e^{-in\theta} = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta) \quad (4-2)$$

بنابراین با جای گذاری روابط فوق در معادله‌ی (۱-۲) و جداسازی قسمت حقیقی و موهومی تابع

نگاشت،  $x$  و  $y$  نقاط را در صفحه‌ی  $z$ ، بر حسب  $\rho$  و  $\theta$  نقاط در صفحه‌ی  $\zeta$  به صورت معادلات زیر

خواهیم داشت:



$$x = \operatorname{Re}[w(\zeta)] = R \left( \rho \cos(\theta) + \frac{m \cos(n\theta)}{\rho^n} \right) \quad (5-2)$$

$$y = \operatorname{Im}[w(\zeta)] = R \left( \rho \sin(\theta) + \frac{m \sin(n\theta)}{\rho^n} \right) \quad (6-2)$$

## ۴-۲ حل تحلیلی

مسئله‌ی حاضر بر پایه‌ی تئوری الاستیسیته صفحه‌ای تحلیل و بررسی خواهد شد. در مسائل دوبعدی تحت بار درون صفحه‌ای، ماتریس تنش در هر نقطه از ماده‌ی الاستیک، دارای سه تنش  $\sigma_y$ ،  $\sigma_x$  و  $\tau_{xy}$  می‌باشد. این تنش‌ها، در غیاب نیروهای خارجی معادلات تعادل را به صورت زیر ارضا می‌کنند:

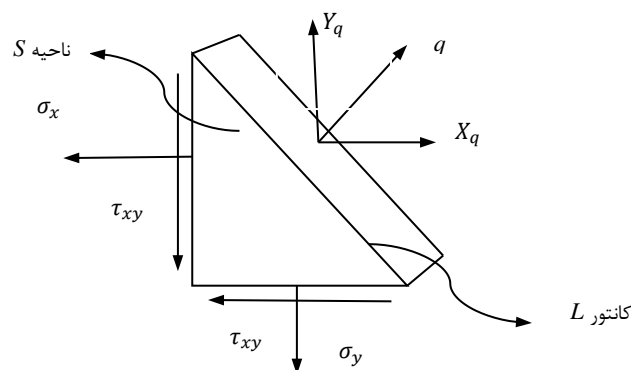
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \quad (7-2)$$

همچنین معادله‌ی سازگاری بر حسب مؤلفه‌های تنش به صورت زیر است:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (8-2)$$

ساده‌سازی مسئله، با ادغام این معادلات، از طریق روابط حاکم بین آن‌ها صورت می‌گیرد.

مطابق شکل ۴-۲ ناحیه  $S$  که توسط کانتور  $L$  از جسم محدود شده است، به صورت دو مسئله‌ی اساسی و تفکیک‌شده از هم تجزیه می‌شود. این دو مسئله‌ی اساسی به ترتیب ارضای شرط مرزی نیرویی و جابه‌جایی در مرز می‌باشند.



شکل ۲-۴ شماتیک کانتور  $L$

برای مسأله‌ی اساسی نوع اول، هنگامی که نیروهای خارجی  $X_q$  و  $Y_q$  به مرزهای خارجی ناحیه‌ی  $S$  از جسم وارد می‌شوند، شرایط مرزی به صورت زیر می‌باشند:

$$\sigma_x \cos(q, x) + \tau_{xy} \cos(q, y) = X_q \quad (9-2)$$

$$\tau_{xy} \cos(q, x) + \sigma_y \cos(q, y) = Y_q \quad (10-2)$$

که در اینجا  $q$  بردار یک‌ه‌ی عمود بر سطح کانتور  $L$  است. برای مسأله‌ی اساسی نوع دوم، در حالتی که جابه‌جایی برای کانتور  $L$  از ناحیه  $S$  در نظر گرفته شده باشد، شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$u = g_1(s) \quad , \quad v = g_2(s) \quad (11-2)$$

که در آن توابع  $g_1(s)$  و  $g_2(s)$  جابه‌جایی معلوم نقاط واقع بر کانتور  $L$  می‌باشند.

با معرفی تابع تنش  $U(x, y)$ ، رابطه‌ی مؤلفه‌های تنش با تابع تنش به صورت زیر خواهند بود:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (12-2)$$

با ترکیب معادلات (۲-۷)، (۲-۸) و (۲-۱۲)، معادله‌ی سازگاری، بر حسب تابع تنش  $U$  به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (13-2)$$

می‌توان نشان داد که تابع  $U(x, y)$  در مرز کانتور برای مسأله‌ی اساسی نوع اول از معادله-ی (۲-۱۴) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_0^s X_q ds + C_1 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\int_0^s Y_q ds + C_2 \quad (14-2)$$

که در آن  $C_1$  و  $C_2$  دو ثابت حقیقی دلخواه هستند؛ که برای یک جسم یکپارچه می‌توان صفر

فرض شوند. بنابراین حل مسائل صفحه‌ای تئوری الاستیسیته، به تعیین تابع بای‌هارمونیک<sup>۱</sup>  $U(x, y)$  که شرایط مرزی معادلات (۱۱-۲) و (۱۴-۲) را ارضا می‌کند، خلاصه می‌شود. به این منظور موشخیلیشوویلی حل زیر را برای معادله‌ی (۱۳-۲) پیشنهاد نمود:

$$U(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \theta(z)] \quad (15-2)$$

در معادله‌ی فوق  $\operatorname{Re}$  نشان‌دهنده‌ی قسمت حقیقی یک عبارت مختلط و  $\varphi(z)$  و  $\theta(z)$  توابعی تحلیلی از متغیر مختلط  $z$  می‌باشند. بنابراین حل مسائل تنش صفحه‌ای به تعیین دو تابع تحلیلی هولومورفیک  $\varphi(z)$  و  $\psi(z) = \theta'(z)$  که بر روی کانتور  $\bar{L}$  شرایط مرزی تعیین شده را ارضا می‌کنند، محدود می‌شود. با ارائه‌ی حل معادله‌ی (۱۳-۲) به شکل معادله‌ی (۱۵-۲)، بسط شرایط مرزی برحسب دو تابع  $\varphi(z)$  و  $\psi(z)$  امکان‌پذیر است. برای مسأله‌ی اساسی نوع دوم، شرایط مرزی را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \int_0^s (X_q + iY_q) ds = f_1 + if_2 + \operatorname{const} \quad (16-2)$$

اگر مقادیر جابه‌جایی‌ها معلوم باشد، می‌توان به همین روش شرایط مرزی جابه‌جایی را تعیین نمود:

$$2G(u + iv) = \chi\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2G(g_1 + ig_2) \text{ on } \bar{L} \quad (17-2)$$

در معادله‌ی فوق  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  مدول برشی،  $\nu$  نسبت پواسون و  $\chi$  تابعی از نسبت پواسون می‌باشد و مقدار آن در شرایط تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای برابر است با:

$$\chi = 3 - 4\nu \quad \text{حالت تنش صفحه‌ای} \quad , \quad \chi = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad \text{حالت کرنش صفحه‌ای} \quad (18-2)$$

همچنین  $E$  مدول الاستیسیته می‌باشد.

با ترکیب معادلات (۱۷-۲) و (۱۸-۲) شکل کامل و یکپارچه‌ای برای شرایط مرزی به دست می‌آید:

<sup>1</sup> Biharmonic

$$\chi\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = F(z) \text{ on } \dot{L} \quad (19-2)$$

که در آن برای مسأله‌ی اساسی نوع اول

$$\chi_1 = 1 \quad , \quad F = i \int_0^s (X_q + iY_q) ds + const \quad (20-2)$$

و برای مسأله‌ی اساسی نوع دوم

$$\chi_1 = -\chi \quad , \quad F = -2G(g_1 + ig_2) \quad (21-2)$$

در نظر گرفته می‌شود.

با مشخص شدن تابع تنش  $U(x, y)$  برحسب توابع  $\varphi(z)$  و  $\psi(z) = \Theta'(z)$  مؤلفه‌های تنش در

حالت دوبعدی و برای ناحیه‌ی همبند ساده به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۱۱]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4Re[\varphi'(z)] \quad (22-2)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)) \quad (23-2)$$

که در آن  $\varphi(z)$  و  $\psi(z)$  توابع مختلط برحسب متغیر  $z$  می‌باشند. مؤلفه‌های تنش در سیستم

مختصات قطبی و با استفاده از نگاشت همنوا، برحسب متغیر  $\zeta$  به صورت زیر تعریف می‌گردند [۱۱]:

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y = 4Re \left[ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \quad (24-2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})e^{2i\alpha} \\ &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2\omega'(\zeta)} \left( \overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta) \right) \end{aligned} \quad (25-2)$$

که در آن،

$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\rho^2\omega'(\zeta)} \quad , \quad \Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (26-2)$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad , \quad \Phi'(\zeta) = \varphi''(\zeta)\omega'(\zeta)$$

از حل دستگاه معادلات (۲-۲۴) و (۲-۲۵) مؤلفه‌های تنش را برحسب توابع تنش و تابع نگاشت  
همینا به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_x = Re \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - (\overline{\omega(\zeta)}\varphi''(\zeta) + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}) \right] \quad (۲۷-۲)$$

$$\sigma_y = Re \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + (\overline{\omega(\zeta)}\varphi''(\zeta) + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}) \right] \quad (۲۸-۲)$$

$$\tau_{xy} = Img \left[ \overline{\omega(\zeta)}\varphi''(\zeta) + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \quad (۲۹-۲)$$

$$\sigma_\rho = Re \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{\zeta^2}{\rho^2\omega'(\zeta)} (\overline{\omega(\zeta)}\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) + \psi'(\zeta)) \right] \quad (۳۰-۲)$$

$$\sigma_\theta = Re \left[ \frac{2\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\zeta^2}{\rho^2\omega'(\zeta)} (\overline{\omega(\zeta)}\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) + \psi'(\zeta)) \right] \quad (۳۱-۲)$$

$$\tau_{\rho\theta} = Img \left[ \frac{\zeta^2}{\rho^2\omega'(\zeta)} (\overline{\omega(\zeta)}\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) + \psi'(\zeta)) \right] \quad (۳۲-۲)$$

بنابراین حل مسأله‌ی تنش صفحه‌ای به تعیین دو تابع تحلیلی هولومورفیک  $\varphi(\zeta)$  و  $\psi(\zeta)$  که شرایط مرزی مسأله را ارضا می‌کنند؛ محدود می‌شود. با مشخص شدن  $\varphi(\zeta)$  و  $\psi(\zeta)$  و با جای‌گذاری آن‌ها در معادلات فوق، مؤلفه‌های تنش محاسبه و مسأله‌ی تنش صفحه‌ای حل می‌گردد. ساوین [۱۲] در حالت کلی توابع پتانسیل مذکور را برای مسأله‌ی محاسبه‌ی تنش در ورق نامحدود همسانگرد دارای گشودگی، در حالت دوبعدی به صورت زیر معرفی کرد:

$$\varphi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \chi)} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad (۳۳-۲)$$

$$\psi(z) = \frac{\chi(X - iY)}{2\pi(1 + \chi)} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n \quad (۳۴-۲)$$

که در آن  $X$  و  $Y$  نیروهای خارجی وارد بر مرز گشودگی در جهت  $x$  و  $y$  می‌باشند. در غیاب این نیروها، جمله‌ی لگاریتمی معادلات فوق حذف می‌گردد.  $\chi$  پیشتر مطابق رابطه‌ی (۲-۱۸) برحسب

تابعی از نسبت پواسون معرفی شد.  $a_n$  و  $b_n$  در معادلات فوق ثابت‌های مجهول می‌باشند. با توجه به اینکه مقادیر تنش در ورق نامحدود باید دارای مقادیر متناهی باشد؛ ساوین [۱۲] توابع  $\varphi(z)$  و  $\psi(z)$  را برای ورق نامحدود به صورت زیر اصلاح نمود:

$$\varphi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \chi)} \ln z + a_1 z + \varphi_0(z) \quad (35-2)$$

$$\psi(z) = \frac{\chi(X - iY)}{2\pi(1 + \chi)} \ln z + b_1 z + \psi_0(z) \quad (36-2)$$

که در آن،

$$\varphi_0(z) = \sum_{n=-\infty}^0 a_n z^n, \quad \psi_0(z) = \sum_{n=-\infty}^0 b_n z^n \quad (37-2)$$

معادلات (۲-۳۸) و (۲-۳۹) برای ورق‌های محدود و نامحدود حاوی گشودگی دایروی و یا بیضوی مناسب می‌باشند. ساوین [۱۲] به منظور حل مسئله‌ی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف در ورق نامحدود تحت بارگذاری درون صفحه‌ای، از تابع نگاشت هم‌نوا استفاده کرد. او توابع  $\varphi(\zeta)$  و  $\psi(\zeta)$  را بر حسب متغیر  $\zeta$  به شکل زیر معرفی کرد:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \chi)} \ln \zeta + a_1 \omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \quad (38-2)$$

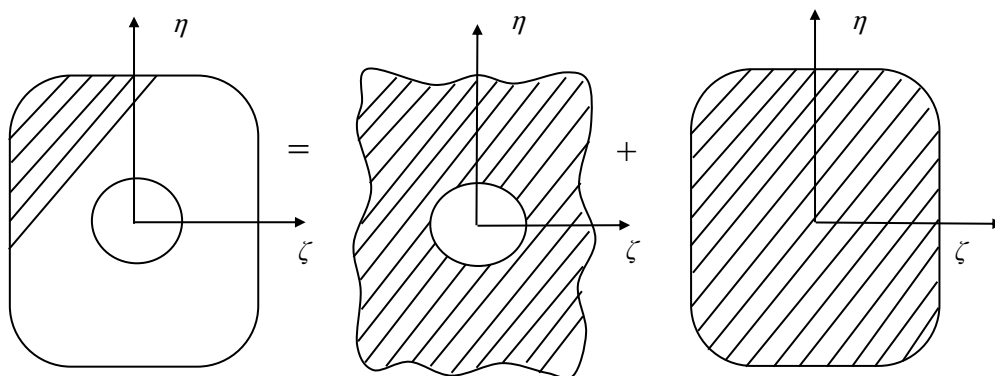
$$\psi(\zeta) = \frac{\chi(X - iY)}{2\pi(1 + \chi)} \ln \zeta + b_1 \omega(\zeta) + \psi_0(\zeta) \quad (39-2)$$

که در آن:

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \zeta^{-n}, \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \zeta^{-n} \quad (40-2)$$

$a'_n$  و  $b'_n$  ثوابت مجهول می‌باشند.  $X$  و  $Y$  مؤلفه‌های تنش در مرز گشودگی هستند که به دلیل آزاد بودن مرز گشودگی از تنش صفر می‌باشند. از معادلات (۲-۳۸) و (۲-۳۹) می‌توان در تحلیل تنش ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف استفاده کرد. اما در ورق‌های محدود علاوه بر هندسه‌ی

گشودگی، شرایط مرز خارجی تأثیر بسزایی در توزیع تنش ورق دارد. بنابراین از معادلات (۲-۳۸) و (۲-۳۹) به شکلی که در بالا ارائه شده است؛ نمی‌توان استفاده کرد. همان‌طور که در شکل ۲-۵ مشاهده می‌شود؛ تابع تنش ورق محدود حاوی گشودگی دایروی در صفحه  $\zeta$ ، از جمع تابع تنش ورق نامحدود حاوی گشودگی دایروی در صفحه  $\zeta$  با تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی در صفحه  $\zeta$  به دست می‌آید [۲].



شکل ۲-۵ نمایی از روش حل [۲]

لذا با استفاده از سری لورنت در یک ناحیه غیر ساده، تابع تنش شامل جملاتی با توان‌های منفی  $\zeta$  که بر روی مرز گشودگی دایروی و ناحیه‌ی خارج آن تحلیلی می‌باشد، تابع تنش ورق نامحدود حاوی گشودگی دایروی را تشکیل می‌دهد. همچنین سری لورنت شامل جملاتی با توان‌های مثبت  $\zeta$ ، که بر روی مرز خارجی ورق تحلیلی می‌باشد، تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی را تشکیل می‌دهد. بنابراین با جمع جمله‌هایی با توان مثبت و منفی  $\zeta$  سری لورنت، توابع تنش  $\varphi(\zeta)$  و  $\psi(\zeta)$  مطابق رابطه‌ی زیر خواهند بود [۲]:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^n \quad (41-2)$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \zeta^{-n}}{\omega'(\zeta)} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \zeta^n \quad (42-2)$$

که در آن ضرایب  $A_n, B_n, C_n, D_n$  اعدادی مختلط هستند که به صورت زیر در نظر گرفته می-شوند:

شوند:

$$A_n = a_{n1} + ia_{n2} \quad , \quad B_n = b_{n1} + ib_{n2} \quad (۴۳-۲)$$

$$C_n = c_{n1} + ic_{n2} \quad , \quad D_n = d_{n1} + id_{n2}$$

$a_{n1}, a_{n2}, b_{n1}, b_{n2}, c_{n1}, c_{n2}, d_{n1}, d_{n2}$  ثابت‌های حقیقی مجهول می‌باشند. با تبدیل توابع

تنش به سری‌هایی با جملات محدود، توابع تنش را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^M A_n \zeta^{-n} + \sum_{n=0}^M B_n \zeta^n \quad (۴۴-۲)$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=1}^M \frac{C_n \zeta^{-n}}{\omega'(\zeta)} + \sum_{n=0}^M D_n \zeta^n \quad (۴۵-۲)$$

که  $M$  در آن تعداد جملات مربوط به بخش‌های مختلف سری لورنت می‌باشد.

با محاسبه‌ی مشتقات توابع تنش به صورت زیر:

$$\varphi'(\zeta) = \sum_{n=1}^M -nA_n \zeta^{-n-1} + \sum_{n=0}^M nB_n \zeta^{n-1} \quad (۴۶-۲)$$

$$\varphi''(\zeta) = \sum_{n=1}^M n(n+1)A_n \zeta^{-n-2} + \sum_{n=0}^M n(n-1)B_n \zeta^{n-2} \quad (۴۷-۲)$$

$$\psi'(\zeta) = \sum_{n=1}^M \frac{C_n(-n\zeta^{-n-1}\omega'(\zeta) - \omega''(\zeta)\zeta^{-n})}{(\omega'(\zeta))^2} + \sum_{n=0}^M nD_n \zeta^{n-1} \quad (۴۸-۲)$$

و با جای‌گذاری معادلات (۴۴-۲)، (۴۵-۲) و معادلات فوق در معادلات (۲۷-۲) تا (۳۲-۲) مؤلفه-

های تنش به شکل نهایی زیر به دست می‌آیند:



$$\begin{aligned} \sigma_x = Re & \left[ \left[ \frac{\sum_{n=1}^M -2n \zeta^{-n-1}}{\omega'(\zeta)} - \left( \overline{\omega(\zeta)} \sum_{n=1}^M n(n+1) \zeta^{-n-2} \right) \right] A_n \right. \\ & + \left[ \frac{\sum_{n=0}^M 2n \zeta^{n-1}}{\omega'(\zeta)} - \sum_{n=0}^M \overline{\omega(\zeta)} n(n-1) \zeta^{n-2} \right] B_n \\ & \left. - \left[ \sum_{n=1}^M \frac{(-n \zeta^{-n-1})}{(\omega'(\zeta))^2} - \frac{\omega''(\zeta) \zeta^{-n}}{(\omega'(\zeta))^3} \right] C_n - \left[ \frac{\sum_{n=0}^M n \zeta^{n-1}}{\omega'(\zeta)} \right] D_n \right] \end{aligned} \quad (49-2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = Re & \left[ \left[ \frac{\sum_{n=1}^M -2n \zeta^{-n-1}}{\omega'(\zeta)} + \left( \overline{\omega(\zeta)} \sum_{n=1}^M n(n+1) \zeta^{-n-2} \right) \right] A_n \right. \\ & + \left[ \frac{\sum_{n=0}^M 2n \zeta^{n-1}}{\omega'(\zeta)} + \sum_{n=0}^M \overline{\omega(\zeta)} n(n-1) \zeta^{n-2} \right] B_n \\ & \left. + \left[ \sum_{n=1}^M \frac{(-n \zeta^{-n-1})}{(\omega'(\zeta))^2} - \frac{\omega''(\zeta) \zeta^{-n}}{(\omega'(\zeta))^3} \right] C_n + \left[ \frac{\sum_{n=0}^M n \zeta^{n-1}}{\omega'(\zeta)} \right] D_n \right] \end{aligned} \quad (50-2)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = Re & \left[ \left[ \overline{\omega(\zeta)} \sum_{n=1}^M n(n+1) \zeta^{-n-2} \right] A_n + \left[ \sum_{n=0}^M \overline{\omega(\zeta)} n(n-1) \zeta^{n-2} \right] B_n \right. \\ & \left. + \left[ \sum_{n=1}^M \frac{(-n \zeta^{-n-1})}{(\omega'(\zeta))^2} - \frac{\omega''(\zeta) \zeta^{-n}}{(\omega'(\zeta))^3} \right] C_n + \left[ \frac{\sum_{n=0}^M n \zeta^{n-1}}{\omega'(\zeta)} \right] D_n \right] \end{aligned} \quad (51-2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\rho = Re & \left[ \left[ \frac{\sum_{n=1}^M -2n \zeta^{-n-1}}{\omega'(\zeta)} - \left( \frac{\overline{\omega(\zeta)} \omega'(\zeta)}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \sum_{n=1}^M n(n+1) \zeta^{-n} \right) \right] A_n \right. \\ & + \left[ \frac{\sum_{n=0}^M 2n \zeta^{n-1}}{\omega'(\zeta)} - \frac{\overline{\omega(\zeta)} \omega'(\zeta)}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \sum_{n=0}^M n(n-1) \zeta^n \right] B_n \\ & \left. - \left[ \sum_{n=1}^M \frac{-\omega'(\zeta) n \zeta^{-n+1} - \omega''(\zeta) \zeta^{-n+2}}{\rho^2 (\omega'(\zeta))^2 \overline{\omega'(\zeta)}} \right] C_n - \left[ \frac{\sum_{n=0}^M n \zeta^{n+1}}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \right] D_n \right] \end{aligned} \quad (52-2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = Re & \left[ \left[ \frac{\sum_{n=1}^M -2n \zeta^{-n-1}}{\omega'(\zeta)} + \left( \frac{\overline{\omega(\zeta)} \omega'(\zeta)}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \sum_{n=1}^M n(n+1) \zeta^{-n} \right) \right] A_n \right. \\ & + \left[ \frac{\sum_{n=0}^M 2n \zeta^{n-1}}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\omega(\zeta)} \omega'(\zeta)}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \sum_{n=0}^M n(n-1) \zeta^n \right] B_n \\ & \left. + \left[ \sum_{n=1}^M \frac{-\omega'(\zeta) n \zeta^{-n+1} - \omega''(\zeta) \zeta^{-n+2}}{\rho^2 (\omega'(\zeta))^2 \overline{\omega'(\zeta)}} \right] C_n + \left[ \frac{\sum_{n=0}^M n \zeta^{n+1}}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \right] D_n \right] \end{aligned} \quad (53-2)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta} = Re \left[ \left[ \left( \frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}} \sum_{n=1}^M n(n+1)\zeta^{-n} \right) A_n \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}} \sum_{n=0}^M n(n-1)\zeta^n \right] B_n \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \sum_{n=1}^M \frac{-\omega'(\zeta)n\zeta^{-n+1} - \omega''(\zeta)\zeta^{-n+2}}{\rho^2(\omega'(\zeta))^2\overline{\omega'(\zeta)}} \right] C_n + \left[ \frac{\sum_{n=0}^M n\zeta^{n+1}}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}} \right] D_n \right] \end{aligned} \quad (54-2)$$

که در آن:

$$\omega'(\zeta) = R \left( 1 - \frac{nm}{\zeta^{n+1}} \right) \quad (55-2)$$

$$\omega''(\zeta) = R \left( \frac{n(n+1)m}{\zeta^{n+2}} \right) \quad (56-2)$$

$$\overline{\omega'(\zeta)} = R \left( 1 - \frac{nm}{\zeta^{n+1}} \right) \quad (57-2)$$

$$\overline{\omega''(\zeta)} = R \left( \frac{n(n+1)m}{\zeta^{n+2}} \right) \quad (58-2)$$

با توجه به روابط ذکر شده برای بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی، نیاز به محاسبه‌ی ضرایب مجهول  $A_n, B_n, C_n$  و  $D_n$  در معادلات (۲-۴۹) تا (۲-۵۴) می‌باشد. به این منظور از روش حداقل مربعات مرزی استفاده شده است که روند حل در ادامه تشریح می‌گردد.

## ۲-۵ روند حل

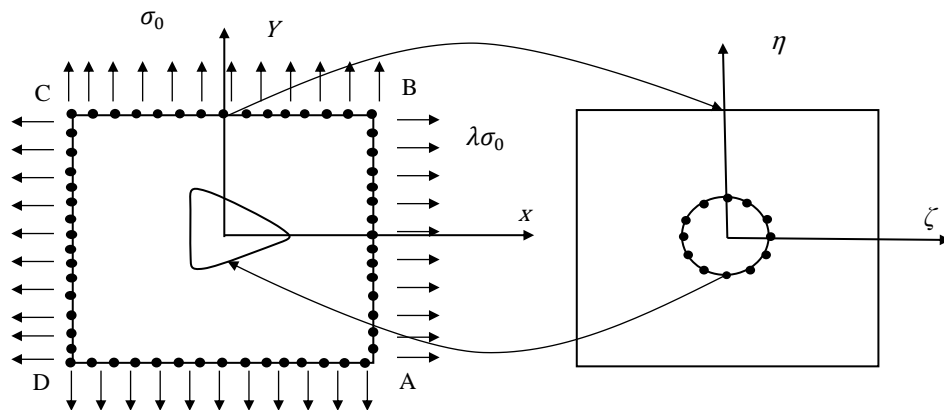
گام اول: تعیین نقاط منتخب

مطابق شکل ۲-۶ نقاطی با فاصله‌ی برابر بر روی مرز داخلی (مرز گشودگی) در صفحه‌ی  $\zeta$  و بر روی مرز خارجی (مرز ورق) در صفحه‌ی  $z$  انتخاب می‌شوند. با انتخاب این نقاط و با استفاده از معادله-ی (۲-۱) در بخش تابع نگاشت می‌توان نقاط متناظر بر روی مرز داخلی گشودگی (در اینجا گشودگی مثلی) در صفحه‌ی  $z$  و نقاط متناظر بر روی مرز خارجی ورق در صفحه‌ی  $\zeta$  را به دست آورد. برای استفاده از روش حداقل مربعات مرزی، به نقاط منتخب بر روی مرز داخلی و خارجی در صفحه  $\zeta$  نیاز

می‌باشد مختصات نقاط در صفحه  $\zeta$  به صورت  $\zeta(\rho, \theta)$  و در صفحه  $Z$  به صورت  $Z(x, y)$  می‌باشند. نقاط منتخب بر روی مرز داخلی دایره‌ی واحد در صفحه  $\zeta$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho = 1, \quad \theta = \frac{2\pi}{N_{in}}(j-1) \quad (j = 1, \dots, N_{in}) \quad (59-2)$$

در معادله‌ی (59-2)،  $N_{in}$  تعداد نقاط منتخب بر روی مرز داخلی دایره‌ی واحد می‌باشد. با جای گذاری مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  نقاط منتخب در صفحه  $Z$  در سمت چپ معادلات (5-2) و (6-2)، با استفاده از حل عددی، مؤلفه‌های  $\rho$  و  $\theta$  نقاط متناظر در صفحه  $\zeta$  محاسبه می‌شوند.



شکل 6-2 موقعیت نقاط منتخب بر روی مرز داخلی در صفحه  $\zeta$  و مرز خارجی در صفحه  $Z$

### گام دوم: تعیین شرایط مرزی

در استفاده از روش حداقل مربعات مرزی، برای شرایط مرزی داخلی از شرایط مرزی دایره‌ی واحد در صفحه  $\zeta$  و در مختصات قطبی استفاده شده است. شرایط مرزی بر روی مرز گشودگی (مرز داخلی ورق محدود)، به صورت زیر است:

$$\sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0, \quad |\zeta| = 1 \quad (60-2)$$

این در حالی است که برای شرایط مرزی خارجی ورق (لبه‌های ورق) از شرایط مرزی ورق در صفحه  $Z$  و مختصات کارتزین استفاده می‌شود. شرایط مرزی خارجی ورق محدود حاوی گشودگی به صورت زیر است:

$$\sigma_x \cos^2 \gamma + \sigma_y \sin^2 \gamma + 2\tau_{xy} \sin \gamma \cos \gamma = \sigma_n \quad (۶۱-۲)$$

$$(\sigma_y - \sigma_x) \sin \gamma \cos \gamma + \tau_{xy} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = \tau_n \quad (۶۲-۲)$$

در معادلات فوق  $\gamma$  زاویه‌ی بین بردار عمود بر مرز خارجی ورق و محور  $x$  می‌باشد. همچنین  $\sigma_n$  و  $\tau_n$  به ترتیب تنش نرمال و تنش برشی در مرز خارجی می‌باشند. با استفاده از معادلات فوق شرایط مرزی را برای هر سه نوع بارگذاری مورد بحث در پایان‌نامه به شرح زیر خواهد بود:

بارگذاری کششی تک‌محوری

$$\sigma_\rho = 0, \tau_{\rho\theta} = 0 \quad \text{بر روی مرز داخلی}$$

$$\sigma_x = \sigma_n = 0, \tau_{\rho\theta} = \tau_n = 0 \quad \text{بر روی ضلع } AB \text{ و } CD \quad (۶۳-۲)$$

$$\sigma_y = \sigma_n = \sigma_0, \tau_{\rho\theta} = \tau_n = 0 \quad \text{بر روی ضلع } BC \text{ و } DA$$

بارگذاری کششی دوماحوری

$$\sigma_\rho = 0, \tau_{\rho\theta} = 0 \quad \text{بر روی مرز داخلی}$$

$$\sigma_x = \sigma_n = \lambda \sigma_0, \tau_{\rho\theta} = \tau_n = 0 \quad \text{بر روی ضلع } AB \text{ و } CD \quad (۶۴-۲)$$

$$\sigma_y = \sigma_n = \sigma_0, \tau_{\rho\theta} = \tau_n = 0 \quad \text{بر روی ضلع } BC \text{ و } DA$$

بارگذاری برشی

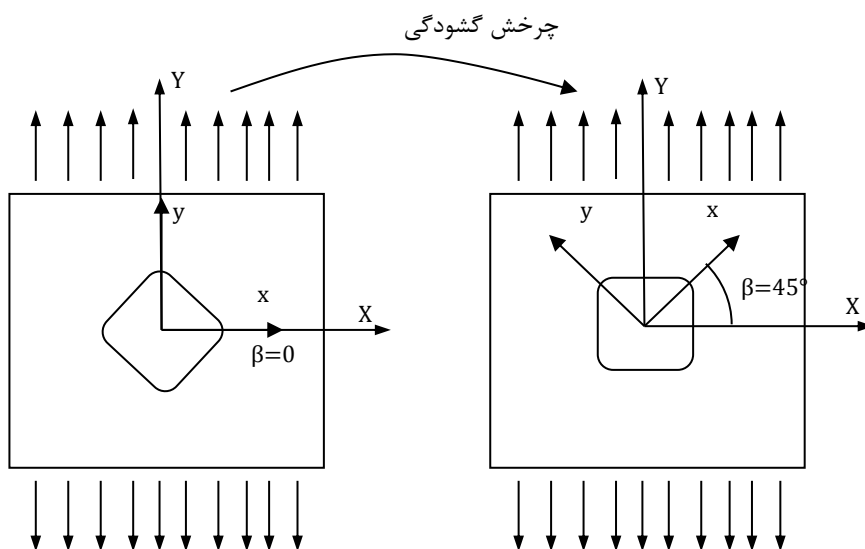
$$\sigma_\rho = 0, \tau_{\rho\theta} = 0 \quad \text{بر روی مرز داخلی}$$

$$\sigma_x = \sigma_n = 0, \tau_{\rho\theta} = \tau_n = \tau_0 \quad \text{بر روی ضلع } AB \text{ و } CD \quad (۶۵-۲)$$

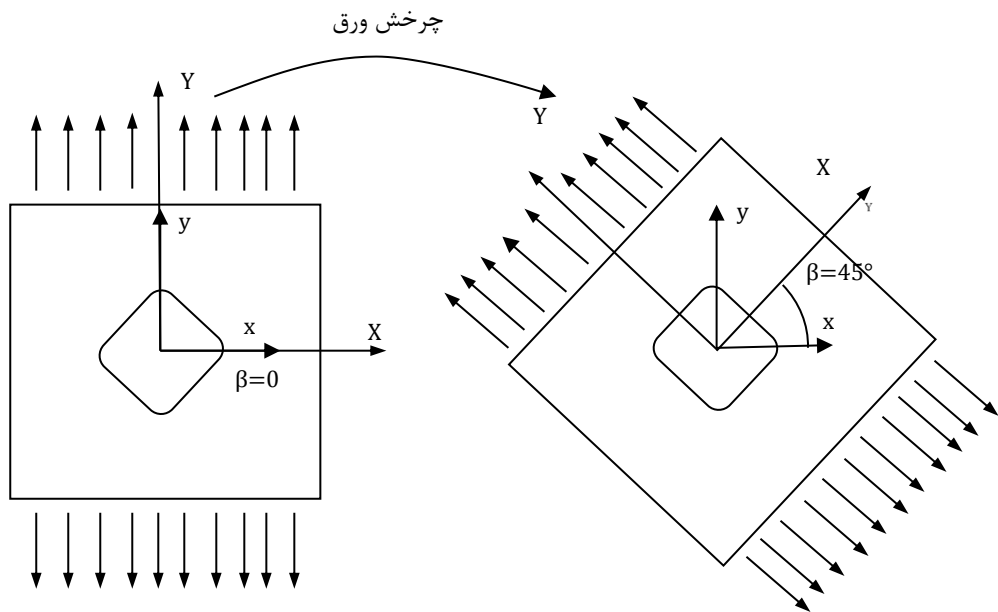
$$\sigma_y = \sigma_n = 0, \tau_{\rho\theta} = \tau_n = \tau_0 \quad \text{بر روی ضلع } BC \text{ و } DA$$

$\sigma_0$  تنش کششی وارد شده بر مرز خارجی ورق می‌باشد و در این پایان‌نامه  $1 \text{ MPa}$  در نظر گرفته شده است. همچنین در بارگذاری کششی دوماحوری  $\lambda = 2$  و در بارگذاری برشی تنش  $\tau_0$  برابر  $1 \text{ MPa}$  می‌باشد. به منظور چرخش گشودگی‌های گوناگون دو دستگاه مختصات کارترین در مرکز ورق،

یکی ثابت بر گشودگی و دیگری ثابت بر ورق تعریف می‌گردد. با چرخش گشودگی زاویه‌ی بین این دو دستگاه مختصات، زاویه‌ی چرخش گشودگی را به وجود می‌آورد. همان‌طور که در شکل ۷-۲ و شکل ۸-۲ مشاهده می‌گردد، با چرخش ورق و یا گشودگی با زاویه‌ی چرخش برابر شرایط ورق از لحاظ هندسی و فیزیکی یکسان خواهد بود و زاویه‌ی ایجادشده بین این دو دستگاه مختصات ناشی از چرخش گشودگی برابر با زاویه‌ی ایجادشده بین این دو دستگاه مختصات ناشی از چرخش ورق می‌گردد. بنابراین برای به دست آوردن توزیع تنش ورق در زوایای گوناگون چرخش، می‌توان از این ایده استفاده نمود که ورق حاوی گشودگی را به اندازه‌ی زاویه‌ی چرخش موردنظر چرخاند و توزیع تنش را در این حالت محاسبه نمود. در این صورت برای هر زاویه‌ی چرخش لازم است از معادلات (۶۱-۲) و (۶۲-۲) شرایط مرزی مربوط به ورق چرخیده را به دست آورد.



شکل ۷-۲ نمایش چرخش گشودگی به مقدار  $45^\circ$



شکل ۸-۲ نمایش چرخش ورق به مقدار  $45^\circ$

گام سوم: محاسبه‌ی مجذور باقی‌مانده‌ی مرزی

بر اساس روش حداقل مربعات مرزی، مجذور باقی‌مانده‌ی مرزی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta^2 = \int_{\Gamma} r^2 dr \quad (66-2)$$

که در آن  $\Gamma$  مرز خارجی و داخلی کانتور می‌باشد. شکل گسسته‌ی مجذور باقی‌مانده‌ی مرزی

به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta^2 = \sum_{j=1}^{N_{in}+N_{ot}} r^2(\rho_j, \theta_j) \quad (67-2)$$

که در آن  $N_{in}$  تعداد نقاط منتخب بر روی مرز داخلی دایره‌ی واحد،  $N_{ot}$  تعداد نقاط منتخب بر

روی مرز خارجی ورق در محل اعمال بار، اندیس نشان‌دهنده‌ی تعداد نقاط منتخب و

$$r^2(\rho_j, \theta_j) = r_1^2(\rho_j, \theta_j) + r_2^2(\rho_j, \theta_j) \quad (68-2)$$

می‌باشد. تعداد نقاط منتخب بر روی مرز داخلی در این پایان‌نامه پس از همگرا شدن جواب‌ها ۸۰

عدد و بر روی مرز خارجی ۱۲۰ عدد می‌باشد. در رابطه‌ی فوق،  $r_1(\rho_j, \theta_j)$  و  $r_2(\rho_j, \theta_j)$  اختلاف دو

تنش، یکی تنش حاصل از شرایط مرزی و دیگری تنش حاصل از حل تحلیلی ارائه شده در نقاط منتخب بر روی مرزها هستند، بنابراین  $r_1(\rho_j, \theta_j)$  و  $r_2(\rho_j, \theta_j)$  را به صورت زیر داریم:

بر روی مرز داخلی ورق برای هر سه نوع بارگذاری

$$r_1(\rho_j, \theta_j) = \sigma_\rho(\rho_j, \theta_j) - 0 \quad (۶۹-۲)$$

$$r_2(\rho_j, \theta_j) = \tau_{\rho\theta}(\rho_j, \theta_j) - 0 \quad (۷۰-۲)$$

بارگذاری کششی تک محوری

بر روی ضلع AB و CD

$$r_1(\rho_j, \theta_j) = \sigma_x(\rho_j, \theta_j) - 0 \quad (۷۱-۲)$$

$$r_2(\rho_j, \theta_j) = \tau_{xy}(\rho_j, \theta_j) - 0 \quad (۷۲-۲)$$

بر روی ضلع BC و DA

$$r_1(\rho_j, \theta_j) = \sigma_y(\rho_j, \theta_j) - \sigma_0 \quad (۷۳-۲)$$

$$r_2(\rho_j, \theta_j) = \tau_{xy}(\rho_j, \theta_j) - 0 \quad (۷۴-۲)$$

بارگذاری کششی دومحوری:

بر روی ضلع AB و CD

$$r_1(\rho_j, \theta_j) = \sigma_x(\rho_j, \theta_j) - \lambda\sigma_0 \quad (۷۵-۲)$$

$$r_2(\rho_j, \theta_j) = \tau_{xy}(\rho_j, \theta_j) - 0 \quad (۷۶-۲)$$

بر روی ضلع BC و DA

$$r_1(\rho_j, \theta_j) = \sigma_y(\rho_j, \theta_j) - \sigma_0 \quad (۷۷-۲)$$

$$r_2(\rho_j, \theta_j) = \tau_{xy}(\rho_j, \theta_j) - 0 \quad (۷۸-۲)$$

بارگذاری برشی:

بر روی ضلع AB و CD

$$r_1(\rho_j, \theta_j) = \sigma_x(\rho_j, \theta_j) - 0 \quad (79-2)$$

$$r_2(\rho_j, \theta_j) = \tau_{xy}(\rho_j, \theta_j) - \tau_0 \quad (80-2)$$

بر روی ضلع BC و DA

$$r_1(\rho_j, \theta_j) = \sigma_y(\rho_j, \theta_j) - 0 \quad (81-2)$$

$$r_2(\rho_j, \theta_j) = \tau_{xy}(\rho_j, \theta_j) - \tau_0 \quad (82-2)$$

گام چهارم: حل معادلات

پس از به دست آوردن  $\Delta^2$  برای هر نوع بارگذاری، به منظور کمینه کردن تابع اختلاف به دست آمده،

از روابط زیر استفاده می شود:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{n1}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{n2}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_{n1}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_{n2}} = 0 \quad (83-2)$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial c_{n1}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial c_{n2}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial d_{n1}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial d_{n2}} = 0 \quad (84-2)$$

در نتیجه از روابط فوق، دستگاه معادلاتی خطی تشکیل می شود که از حل آن ثوابت مجهول به-

دست می آیند. با جای گذاری این ثوابت در معادلات (۲-۴۹) تا (۲-۵۴) مؤلفه های تنش به دست آمده و

مسأله ی مورد نظر حل می گردد.

## ۲-۶ بررسی صحت نتایج

برای اطمینان از صحت روش حل حاضر، مقایسه ای بین حل تحلیلی و نتایج حاصل از حل عددی

المان محدود (نرم افزار آباکوس) و همچنین مراجع [۲]، [۱۸] و [۲۵] صورت گرفته است؛ که در ادامه

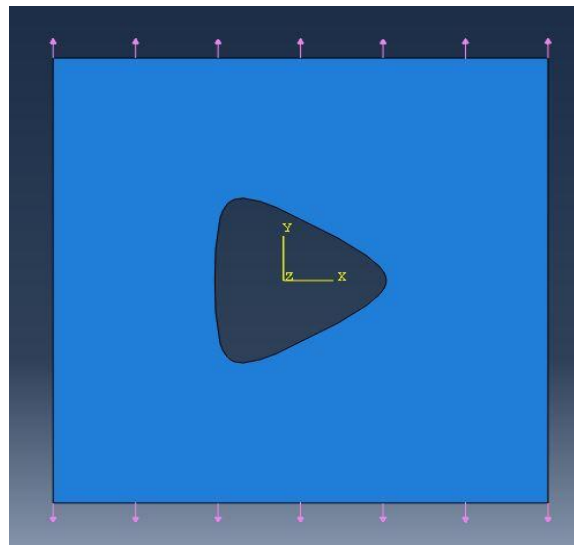
به مقایسه ی این نتایج پرداخته می شود.



به منظور مدل سازی ورق در نرم افزار آباکوس ابتدا کد متلبی بر اساس معادله‌ی (۱-۲) برای تشکیل هندسه‌ی گشودگی نوشته شد، سپس مختصات به دست آمده عیناً وارد نرم افزار آباکوس گردید تا هندسه‌ی گشودگی کاملاً مطابق با مسأله‌ی حاضر باشد.

ورق حاوی گشودگی مثلثی در حالت  $m=0.2$ ،  $\beta=0$ ،  $\frac{L}{a}=0.4$  و  $\frac{b}{a}=1$ ، تحت بارگذاری کششی تک محوری، مطابق شکل ۹-۲ مدل شده است.

همان طور که از روابط تحلیلی ذکر شده در قسمت قبل، مشخص است تمرکز تنش در ورق همسانگرد حاوی گشودگی مستقل از جنس و خصوصیات مکانیکی ماده می باشد. بنابراین نتایج را می توان برای هر ماده‌ی همسانگرد دلخواه به دست آورد. مشخصات ورق در نظر گرفته شده برای مدل سازی ورق در نرم افزار آباکوس مطابق جدول ۱-۲ می باشد.

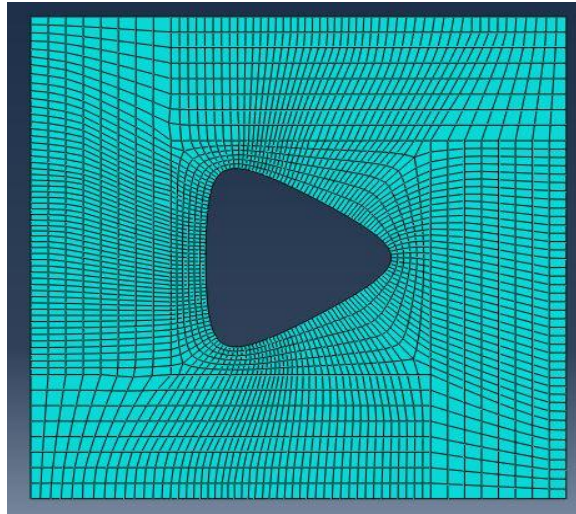


شکل ۹-۲ ورق حاوی گشودگی مثلثی، مدل شده در نرم افزار آباکوس، تحت بار کششی تک محوری

جدول ۱-۲ خواص مکانیکی ورق

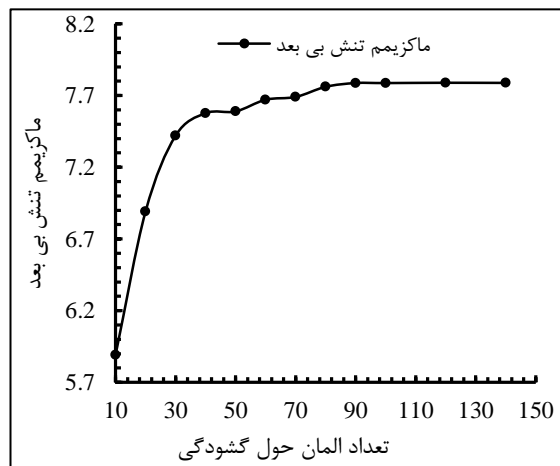
ماده	E (MPa)	$\nu$
فولاد	۲۰۷	۰/۳

مطابق شکل ۱۰-۲ با توجه به هندسه‌ی مسأله برای مش بندی مدل از المان CPS8R استفاده شد. این المان یک المان تنش صفحه‌ای مربعی هشت نقطه‌ای ( تغییرات هندسی غیر خطی) می باشد.



شکل ۱۰-۲ نحوه‌ی مش‌بندی مدل در نرم‌افزار آباکوس

به‌منظور تعیین تعداد المان بهینه، ناحیه‌ی کوچکی اطراف گشودگی در نظر گرفته شد تا تعداد المان‌ها در آن افزایش داده شود. مطابق شکل ۱۱-۲ با تغییر تعداد المان‌های حول گشودگی، تعداد المان بهینه‌ی حول گشودگی تعیین شد و نتایج برای این تعداد المان به‌دست آمد.



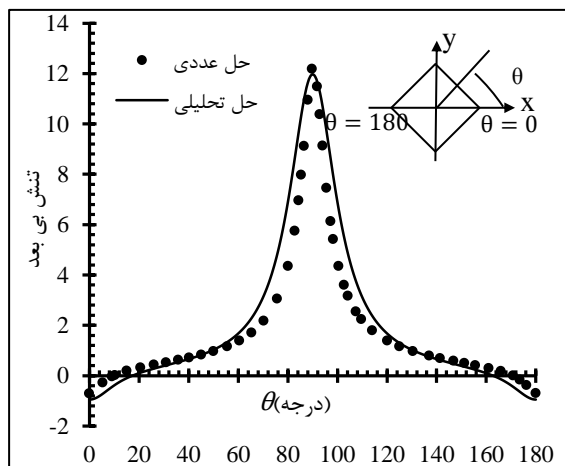
شکل ۱۱-۲ روند تغییر ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی با تعداد المان‌های حول گشودگی

در این تحقیق منظور از تنش بی‌بعد در بارگذاری کششی تک‌محوری، مقدار تنش محیطی ایجادشده در اطراف گشودگی، به تنش اعمالی  $\sigma_0$  و در بارگذاری دو‌محوری و برشی مقدار تنش محیطی ایجادشده در اطراف گشودگی، به تنش معادل فون میسز اطراف گشودگی است. همچنین به علت تقارن موجود در توزیع تنش حول گشودگی، در همه‌ی بارگذاری‌های مورد بحث، نتایج تا

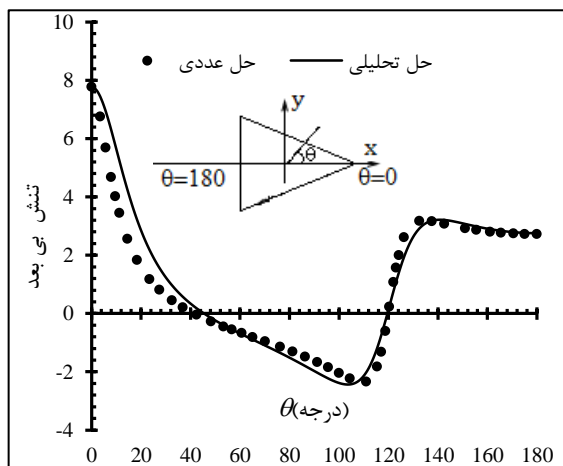
$\theta = 180^\circ$  ارائه شده است.

مطابق مراحل ذکر شده در مدل سازی، ورق حاوی گشودگی مثلثی ( $m=0/2$ ) تحت بار کششی تک محوری، ورق حاوی گشودگی مربعی ( $\lambda=2$  و  $m=0/15$ ) تحت بار کششی دومحوری و ورق حاوی گشودگی شش ضلعی ( $m=0/05$ ) تحت بار برشی، مدل گردیدند. در شکل ۲-۱۲ تا شکل ۲-۱۴ به ترتیب مقایسه‌ی نتایج توزیع تنش بی بعد حول گشودگی مثلثی، مربعی و شش ضلعی، حاصل از روش تحلیلی و عددی نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها تطابق خوبی بین دو روش حل وجود دارد که نشان دهنده صحت حلّ تحلیلی حاضر می باشد.

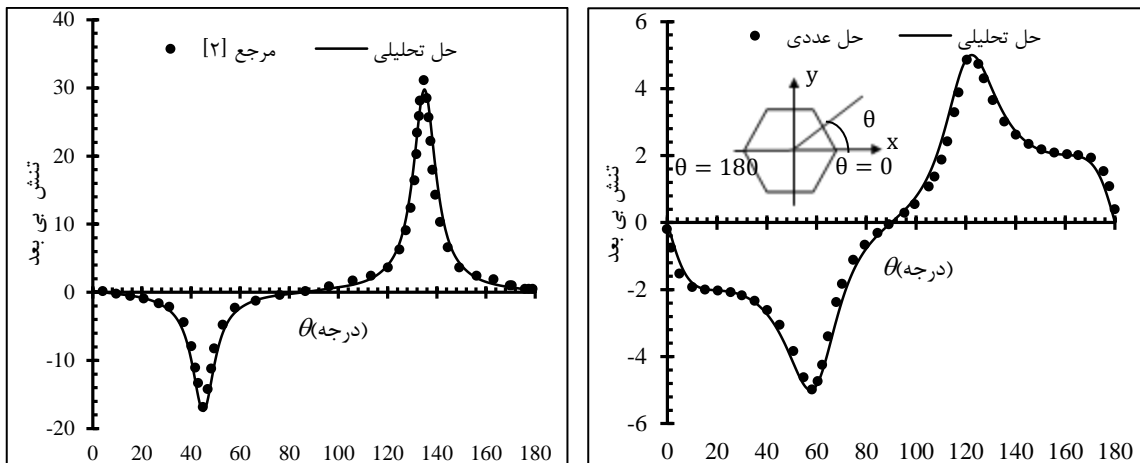
در شکل ۲-۱۵ مقایسه‌ی حلّ تحلیلی حاضر با حلّ پن و همکاران [۲] برای ورق محدود همسانگرد حاوی گشودگی مربعی ( $m=0/225$ ) تحت بارگذاری تک محوری در جهت محور  $y$ ، زاویه‌ی چرخش صفر درجه و  $L/a = 0/4$ ، که معادل با مربع ۴۵ درجه چرخیده در مقاله‌ی پن و همکاران می باشد؛ آورده شده است که نتایج کاملاً همدیگر را تأیید می کنند.



شکل ۲-۱۳ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی مربعی تحت بار کششی دومحوری از روش تحلیلی و عددی

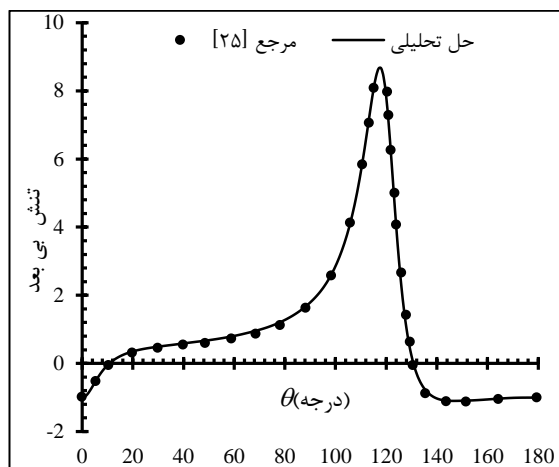


شکل ۲-۱۲ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی مثلثی تحت بار کششی تک محوری از روش تحلیلی و عددی



شکل ۲-۱۴ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی شش ضلعی تحت بار برشی از روش تحلیلی و عددی کششی تک‌محوری در جهت محور  $y$  شکل ۲-۱۵ تنش بی‌بعد حول گشودگی مربعی تحت بار کششی تک‌محوری در جهت محور  $y$

شکل ۲-۱۶ مقایسه‌ی حل تحلیلی حاضر با حل دائوست وهووا [۲۵] برای ورق نامحدود همسانگرد حاوی گشودگی مثلثی ( $m=0/33$ ) تحت بارگذاری تک‌محوری در جهت محور  $x$ ، زاویه‌ی چرخش صفر درجه و  $L/a=0/01$  که معادل صفحه‌ی نامحدود است را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد نتایج کاملاً همدیگر را تأیید می‌نمایند.



شکل ۲-۱۶ تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی تحت بار کششی تک‌محوری در جهت محور  $x$

به‌منظور بررسی صحت نتایج به‌دست‌آمده در رابطه با پارامترهای انحنا و چرخش در حل تحلیلی حاضر، مقایسه‌ای با حل رضایی پژند و جعفری [۱۸] برای ورق نامحدود همسانگرد حاوی گشودگی مثلثی، ( $m=0/25$ ) و پنج ضلعی ( $m=0/05$ )، تحت بارگذاری تک‌محوری در جهت محور  $x$  و زاویه‌ی

چرخش صفر درجه و  $\frac{L}{a} = 0/01$  انجام شده است.

**Error! Reference source not found.** ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی را در

**Error! Reference source not found.** در زوایای مختلف چرخش نشان می‌دهد. همچنین در

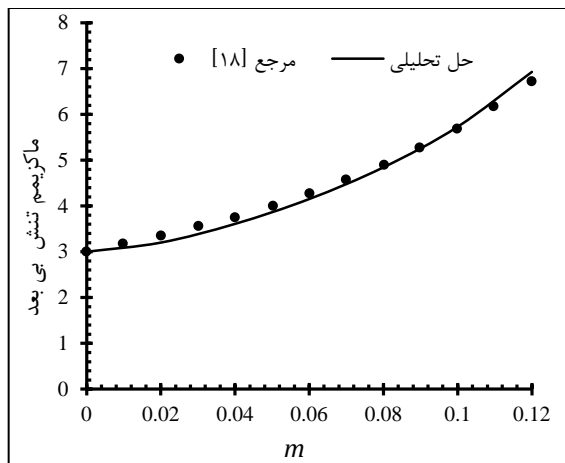
ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی، در انحنای مختلف آورده شده است. همان‌طور که از

دو شکل مذکور پیداست تطابق کامل بین نمودارها مشاهده می‌گردد. این نمودارها علاوه بر اینکه

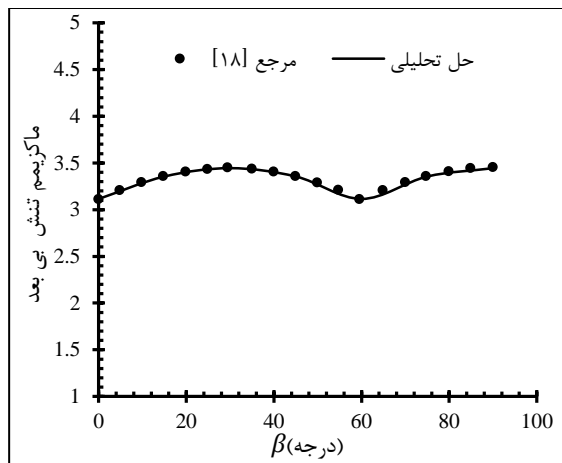
مجدداً صحت حلّ تحلیلی حاضر را برای دو گشودگی مثلثی و پنج‌ضلعی نشان می‌دهند، این اطمینان

را حاصل می‌نماید که روش حاضر نتایجی کاملاً قابل اطمینان را در رابطه با پارامترهای بررسی شده،

ارائه می‌کند.



شکل ۲-۱۸ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی تحت بار کششی تک‌محوری در انحنای مختلف



شکل ۲-۱۷ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی تحت بار کششی تک‌محوری در زوایای مختلف

## ۷-۲ جمع‌بندی

در این فصل با به‌کارگیری روش متغیّر مختلط موشخیشویلی، نگاشت هم‌نوا و روش حدّ اقل

مربّعات مرزی روابط حاکم بر ورق محدود همسانگرد حاوی گشودگی استخراج گردید. شرایط مرزی،

روند حلّ تحلیلی و نحوه‌ی بررسی پارامترها بیان شد. در انتها با بررسی نتایج حاصل از این روش با نتایج حاصل از شبیه‌سازی ورق در نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس و همچنین نتایج سایر مقالات در حالت ورق محدود و نامحدود صحت و دقت حلّ حاضر نشان داده شد.

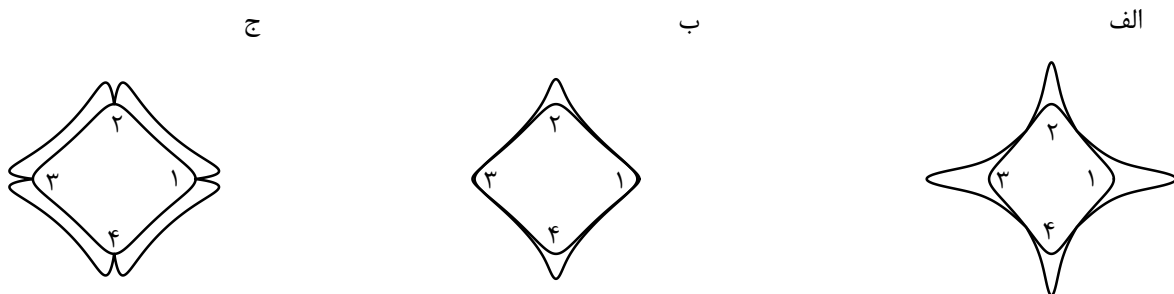
## فصل ۳

### گشودگی چهارضلعی

---

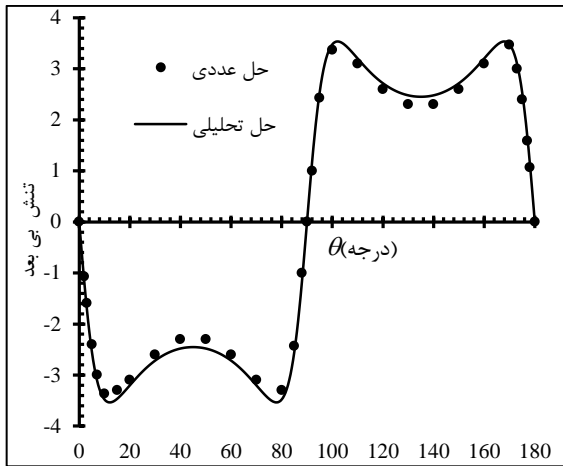
### ۳-۱ مقدمه

در این فصل سعی می‌شود تأثیر پارامترهایی همچون نوع بارگذاری، انحنای گوشه‌های گشودگی، چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت ضلع گشودگی به بزرگترین ضلع ورق، بر توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی مورد بررسی قرار گیرد. در شکل ۳-۱ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی برای حالت  $\beta=0$ ،  $\frac{L}{a}=0.14$ ،  $\frac{b}{a}=1$  و  $m=0.15$  برای سه نوع بارگذاری مورد بحث در این پایان‌نامه آورده شده است. تفاوت نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد اطراف گشودگی چهارضلعی، برای حالات مختلف بارگذاری در این شکل مشاهده می‌گردد. در بارگذاری تک‌محوری بیشترین تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $0^\circ$ ،  $180^\circ$  و در بارگذاری دومحوری در  $90^\circ$ ،  $270^\circ$  و در نهایت در بارگذاری برشی در حوالی زوایای  $0^\circ$ ،  $90^\circ$ ،  $180^\circ$ ،  $270^\circ$  ایجاد می‌گردد. لازم به ذکر است به علت تقارن موجود در توزیع تنش حول این گشودگی، در همه‌ی بارگذاری‌های مورد بحث، نتایج تا  $\theta=180^\circ$  ارائه شده است. برای هر سه نوع بارگذاری مورد بحث، در هر بخش با تغییر یکی از پارامترهای فوق و ثابت نگه‌داشتن سایر پارامترها تأثیر هر پارامتر بر توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی بررسی می‌گردد. در شکل ۳-۲ و شکل ۳-۳ مقایسه حل تحلیلی و عددی برای بارگذاری‌های تک‌محوری و برشی آورده شده است.

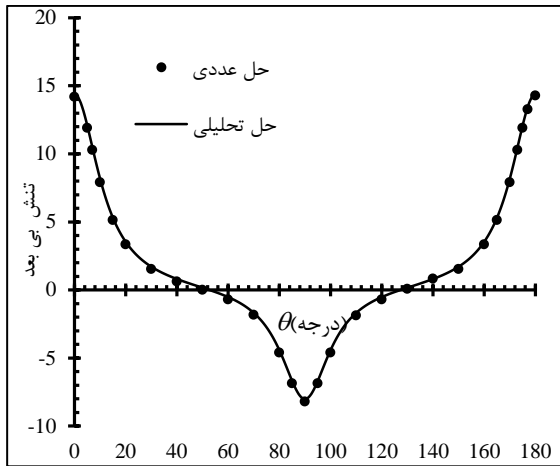


شکل ۳-۱ نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی تحت بار (الف) تک‌محوری، (ب) دومحوری  $\lambda=2$ ، (ج) برشی





شکل ۳-۳ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی مربعی تحت بار کششی برشی از روش تحلیلی و عددی



شکل ۲-۳ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی مربعی تحت بار کششی تک‌محوری از روش تحلیلی و عددی

### ۲-۳ تأثیر انحنای گشودگی ( $m$ )

همان‌طور که در معادله‌ی (۲-۱) به آن اشاره شد؛ پارامتر  $m$  مستقیماً بر هندسه‌ی گشودگی تأثیر می‌گذارد به‌گونه‌ای که با تغییر در مقدار  $m$  میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی قابل کنترل خواهد بود. روند تأثیر این پارامتر بر انحنای گوشه‌ی گشودگی چهارضلعی در شکل ۳-۴ مشاهده می‌گردد. انحنای گوشه‌ی گشودگی یکی از پارامترهای مهم و تأثیرگذار در توزیع تنش اطراف گشودگی می‌باشد که در این قسمت به نتایج مربوط به گشودگی چهارضلعی پرداخته شده است. در تابع نگاشت استفاده شده در این پایان‌نامه، محدوده‌ی مجاز پارامتر  $m$  که تعیین‌کننده‌ی انحنای گوشه‌های گشودگی می‌باشد، برای گشودگی چهارضلعی ۰ تا ۰/۳۳ است. از آنجایی که با افزایش  $m$ ، گوشه‌های گشودگی تیزتر می‌شود و در کاربردهای عملی مهندسی، استفاده از گشودگی‌های بسیار نوک‌تیز معقول نمی‌باشد؛ تأثیر این پارامتر تا مقدار ۰/۲ بررسی شده است.



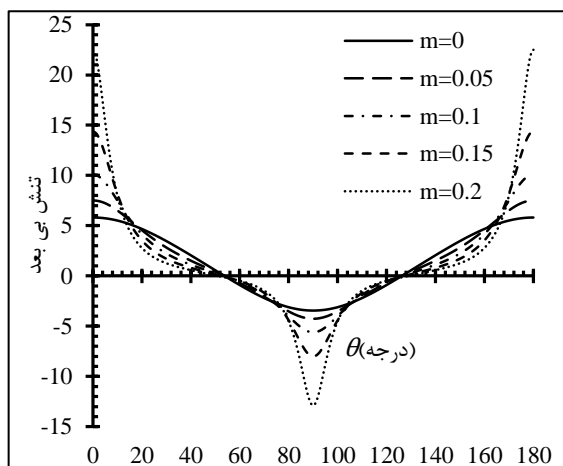
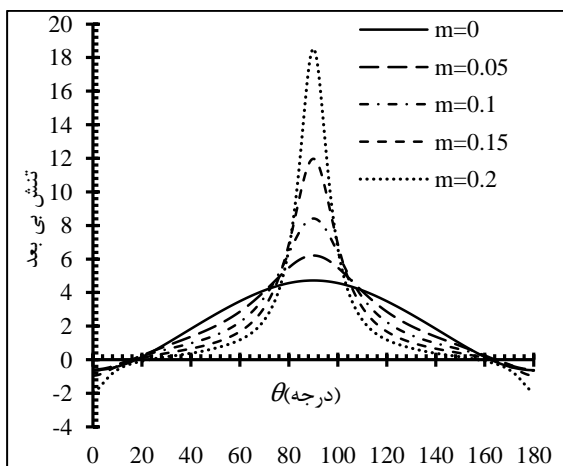
$$m=0 \quad m=0/0.5 \quad m=0/1 \quad m=0/1.5 \quad m=0/2$$

شکل ۳-۴ تأثیر پارامتر  $m$  بر انحنای گوشه‌ی گشودگی چهارضلعی

در شکل ۳-۵ تا شکل ۳-۷ توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی در سه حالت بارگذاری تک‌محوری، دومحوری و برشی، برای انحنای مختلف آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی مقدار تنش در بارگذاری کششی تک‌محوری و دومحوری افزایش می‌یابد و در تیزترین انحنای  $m=0/2$ ، این افزایش تنش به مقدار بیشتری شدت می‌یابد. در بارگذاری برشی با افزایش انحنای گشودگی مقدار تنش ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی در بارگذاری تک‌محوری، برای تمامی انحنایها، ماکزیمم تنش بی‌بعد در  $\theta=0^\circ$  اتفاق می‌افتد، [ زاویه‌ی  $\theta$  در شکل ۲-۱۳ نشان داده شده است. ] در بارگذاری دومحوری محلّ ماکزیمم تنش بی‌بعد (مقدار زاویه‌ی  $\theta$ ) برای انحنایها گوناگون  $\theta=90^\circ$  می‌باشد. در بارگذاری برشی برای حالت دایروی  $m=0^\circ$  ماکزیمم تنش در زوایای  $\theta=45^\circ$  و  $\theta=135^\circ$  درجه رخ می‌دهد. در سایر انحنایها با افزایش مقدار انحنای محلّ ایجاد ماکزیمم تنش تغییر می‌یابد. هرچه انحنای کمتر باشد این نقاط به زوایای  $45^\circ$  و  $135^\circ$  نزدیکتر و با افزایش انحنای از این زوایا دورتر می‌گردند. برای نمونه در  $m=0/0.5$  محلّ ایجاد ماکزیمم تنش در زوایای  $\theta=37^\circ$  و  $\theta=54^\circ$  (حوالی زاویه  $45^\circ$ ) و  $\theta=127^\circ$  و  $\theta=143^\circ$  (حوالی زاویه  $145^\circ$ ) می‌باشد. در  $m=0/1.5$  محلّ ایجاد ماکزیمم تنش در زوایای  $\theta=8^\circ$  و  $\theta=82^\circ$  (حوالی گوشه‌ی شماره ۱ و ۲ نشان داده شده در شکل ۳-۱) ،  $\theta=98^\circ$  و  $\theta=172^\circ$  (حوالی گوشه‌ی شماره ۲ و ۳ نشان داده شده در شکل ۳-۱) می‌باشد.

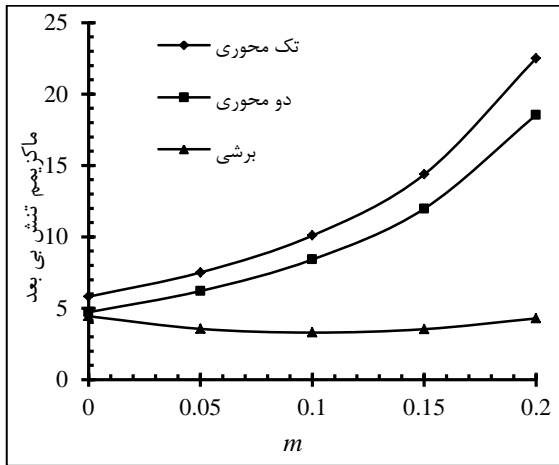
همان‌طور که بیان شد مشاهده می‌گردد در  $m=0/1.5$  محلّ ایجاد ماکزیمم تنش از زوایای  $45^\circ$  و  $135^\circ$  دور و به زوایای گوشه‌های چهارضلعی نزدیک می‌گردد. بنابراین در بارگذاری کششی تک‌محوری و دومحوری با افزایش انحنای مقدار تنش افزایش می‌یابد و محلّ ماکزیمم تنش در تمام انحنایها ثابت است. ولی در بارگذاری برشی با افزایش انحنای، مقدار تنش ابتدا کاهش سپس افزایش می‌یابد و محلّ ماکزیمم تنش بسته به مقدار انحنای، متفاوت می‌باشد.

شکل ۳-۸ ماکزیمم تنش بی بعد را در سه حالت بارگذاری، برای انحنای مختلف مقایسه می کند. از آن جایی که رفتار ماده در نظر گرفته شده برای پایان نامه در کشش و فشار یکسان می باشد، به منظور بررسی ماکزیمم تنش بی بعد از ماکزیمم قدر مطلق تنش بی بعد در همه ی قسمت ها استفاده شده است. کمترین تنش ایجاد شده حول گشودگی در بارگذاری های کششی تک محوری و دو محوری مربوط به  $m=0$  می باشد که در این حالت گشودگی چهارضلعی به گشودگی دایروی تبدیل می شود و کمترین تنش ایجاد شده حول گشودگی در بارگذاری برشی مربوط به  $m=0/1$  می باشد. این امر نشان می دهد در بارگذاری برشی بهترین شکل گشودگی دایروی نمی باشد. در بارگذاری کششی تک محوری مقدار تنش برای گشودگی چهارضلعی با  $m=0/15$  به نسبت گشودگی دایروی با شرایط برابر ۱۴۷ درصد افزایش می یابد؛ در بارگذاری کششی دو محوری نیز افزایش ۱۵۳ درصدی مشاهده می گردد. این در حالیست که در بارگذاری برشی کاهش ۲۰ درصدی مقدار تنش را خواهیم داشت. نکته ی قابل توجه دیگر این است که با توجه به شکل ۳-۸ مشاهده می شود که نمودارها رفتاری غیر خطی دارند بنابراین افزایش مقدار یکسان انحنای افزایش و یا کاهش مقدار یکسانی از تنش را در پی نخواهد داشت. پس در بارگذاری کششی تک محوری و دو محوری هرچه انحنای بیشتر گردد، مقدار تنش نیز بیشتر می شود. میزان افزایش تنش با افزایش انحنای بالاتر شدت می یابد.



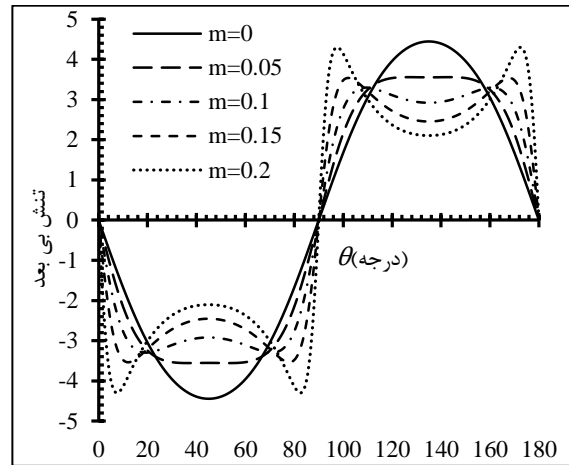
شکل ۳-۵ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای شکل ۳-۶ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای

مختلف تحت بار دومحوری



شکل ۳-۸ ماکزیمم تنش بی بعد برحسب انحنا در سه بارگذاری

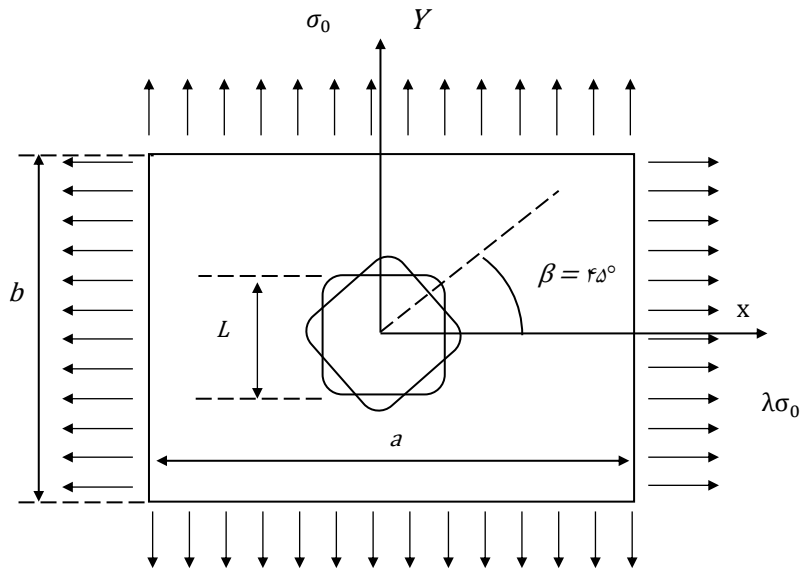
مختلف تحت بار تک محوری



شکل ۳-۷ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحناهای مختلف تحت بار برشی

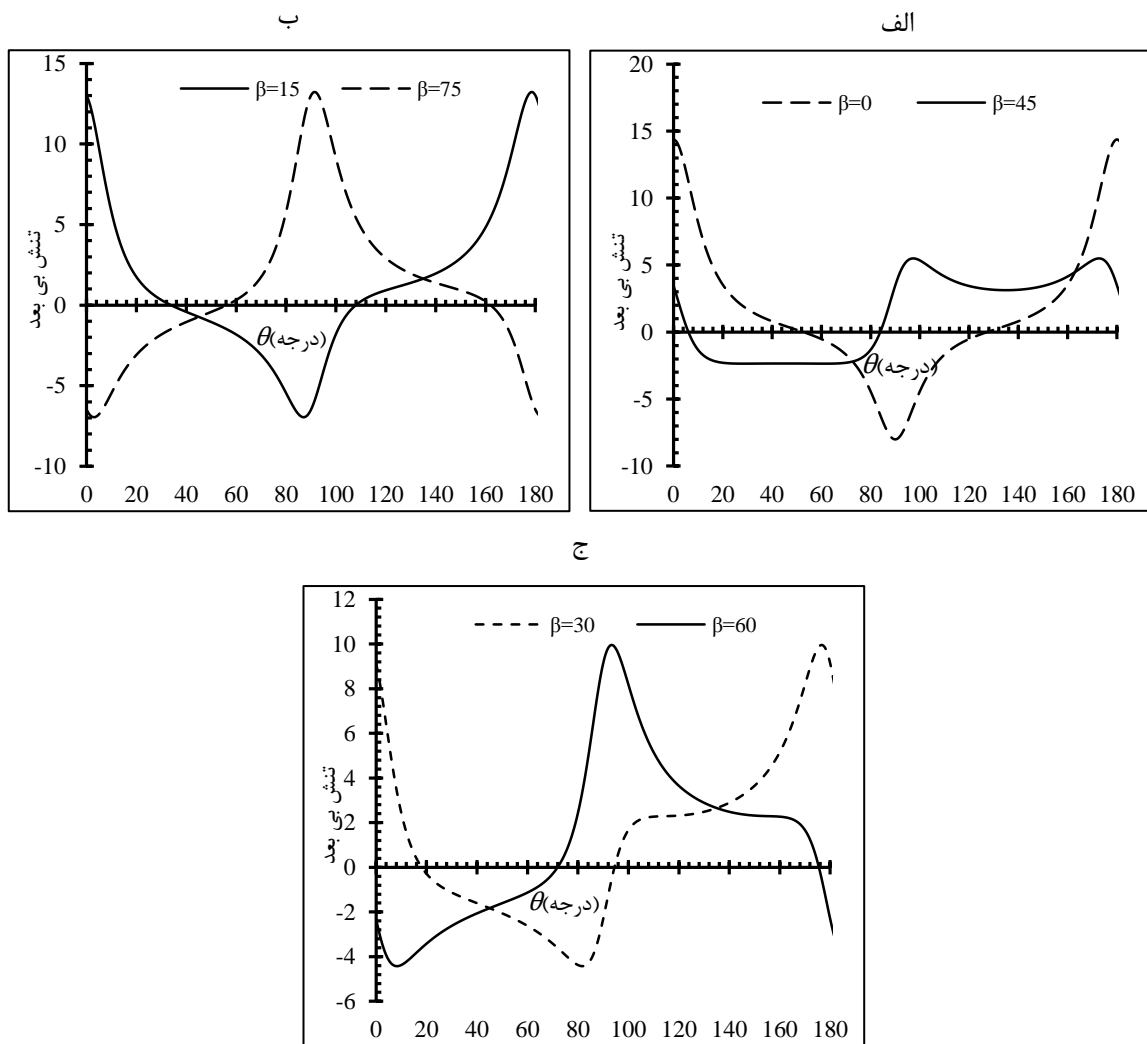
### ۳-۳ تأثیر زاویه ی چرخش گشودگی ( $\beta$ )

در این قسمت به بررسی تأثیر زاویه ی چرخش گشودگی بر توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی پرداخته می شود. در شکل ۳-۹ چرخش گشودگی برای حالت  $\beta=45^\circ$  نشان داده شده است. تغییرات تنش برحسب زاویه ی چرخش گشودگی برای هر گشودگی از یک رفتار تناوبی برخوردار است. دوره ی تناوب این تغییرات برای گشودگی های مختلف، متفاوت است. به این معنا که با چرخاندن گشودگی به اندازه ی زاویه ای خاص نحوه ی توزیع تنش حول گشودگی تکرار می گردد. با توجه به شکل ۳-۹ بدیهی است این زاویه برای گشودگی چهارضلعی  $90^\circ$  می باشد و پس از  $90^\circ$  چرخش گشودگی از لحاظ فیزیکی به حالت مشابه حالت اولیه ( $\beta=0^\circ$ ) تبدیل می گردد. بنابراین رفتار این گشودگی در چرخش تا زاویه ی  $90^\circ$  بررسی می گردد.



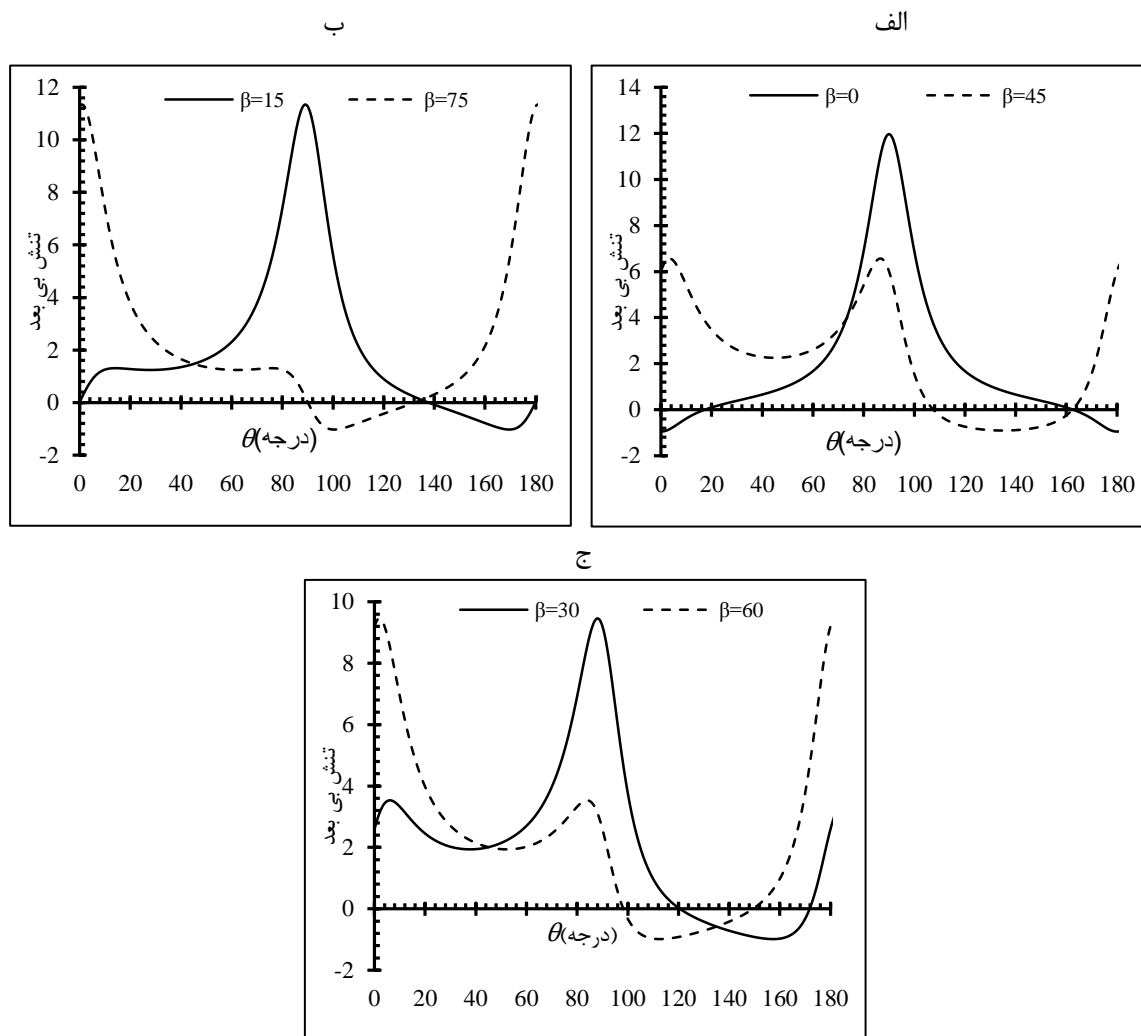
شکل ۹-۳ ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی تحت کشش دومحوری

شکل ۱۰-۳ توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی را برای زوایای چرخش صفر درجه تا  $90^\circ$  در بارگذاری کششی تک‌محوری نشان می‌دهد. برای مشاهده بهتر رفتار، نتایج برای این بارگذاری، در نمودارهای مختلف آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد چرخش تأثیر بسزایی در نحوه‌ی توزیع و مقدار تنش اطراف گشودگی چهارضلعی در این نوع بارگذاری دارد. برای زوایای چرخش صفر درجه،  $15^\circ$  و  $30^\circ$  نقطه‌ی بحرانی که بیشترین تنش بی‌بعد حول گشودگی در آن اتفاق می‌افتد؛ در حوالی  $\theta=180^\circ$  واقع است. برای زوایای چرخش  $60^\circ$  و  $75^\circ$  این نقطه حوالی  $\theta=90^\circ$  قرار دارد. در نهایت در زاویه‌ی چرخش  $45^\circ$ ، نقطه‌ی بحرانی در حوالی دو زاویه‌ی  $90^\circ$ ،  $180^\circ$  به وجود می‌آید.



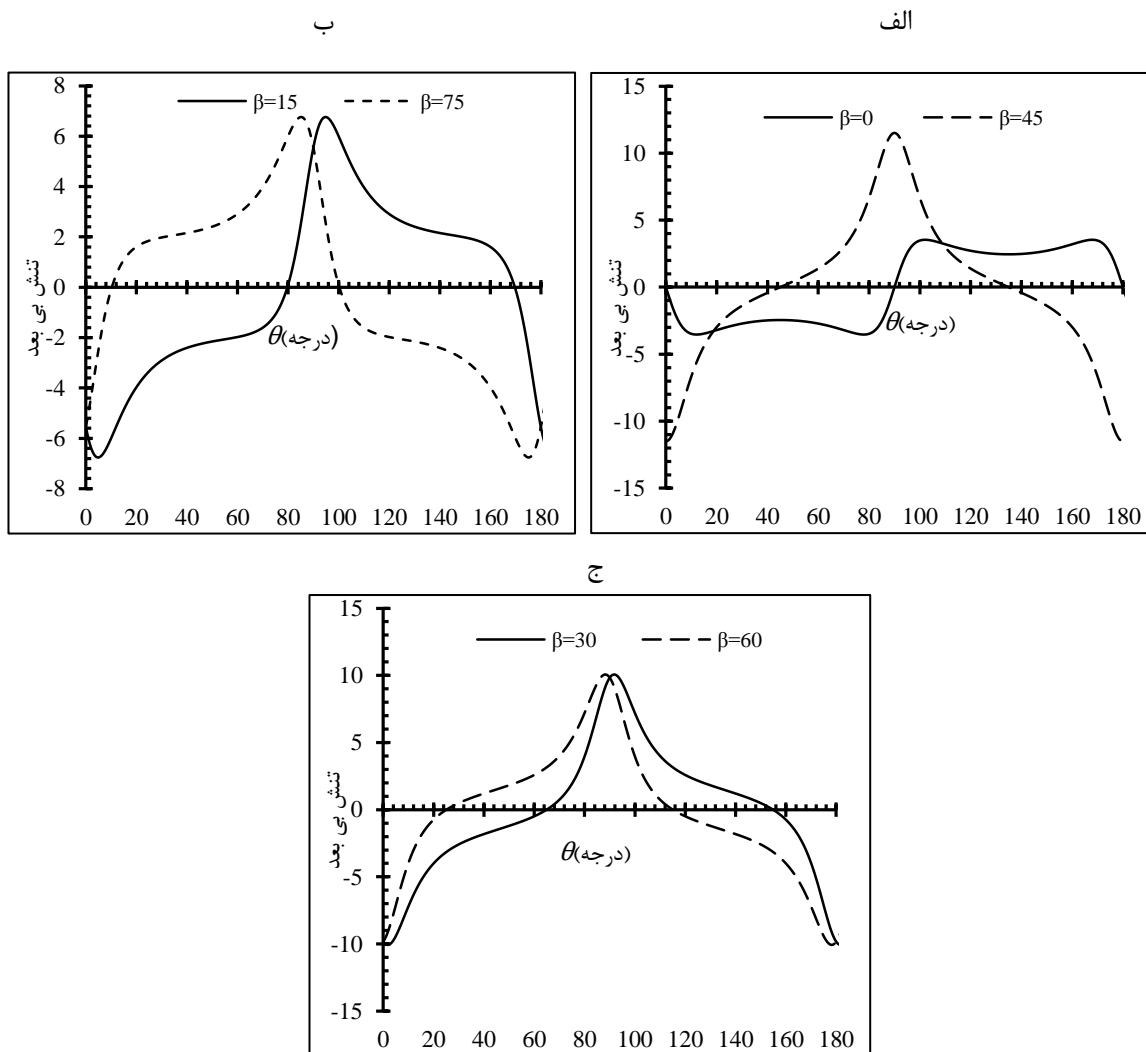
شکل ۳-۱۰ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار کششی تک محوری  $\lambda = 0$  (الف)  $\beta = 45^\circ, 0^\circ$  (ب)  $\beta = 75^\circ, 15^\circ$  (ج)  $\beta = 60^\circ, 30^\circ$

شکل ۳-۱۱ توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی را برای زوایای چرخش صفر درجه تا  $90^\circ$  در بارگذاری کششی دوماحوری نشان می دهد. در این بارگذاری نیز تفاوت در نحوه توزیع و مقدار تنش اطراف گشودگی برای زوایای مختلف چرخش مشاهده می گردد. در بارگذاری دوماحوری برای زوایای چرخش صفر درجه،  $15^\circ$  و  $30^\circ$  بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی در حوالی  $\theta = 90^\circ$  و برای زوایای چرخش  $60^\circ$  و  $75^\circ$  در حوالی  $\theta = 0^\circ$  قرار دارد. برای زاویه  $45^\circ$  هر دو نقطه مذکور بحرانی و محل ایجاد بیشترین تنش بی بعد می باشند.



شکل ۳-۱۱ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار کششی دومحوری  $\lambda=2$  (الف)  $\beta=45^\circ, 0^\circ$  (ب)  $\beta=75^\circ, 15^\circ$  (ج)  $\beta=60^\circ, 30^\circ$

شکل ۳-۱۲ توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی را در بارگذاری برشی نشان می دهد. در این بارگذاری نیز همان طور که مشاهده می گردد پارامتر چرخش پارامتری بسیار تأثیرگذار بر مقدار توزیع تنش حول گشودگی می باشد. در بارگذاری برشی نیز همانند دو بارگذاری دیگر بسته به مقدار زاویه چرخش، محلی که بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی رخ می دهد؛ متفاوت خواهد بود. در این بارگذاری در زوایای چرخش  $15^\circ$ ،  $30^\circ$  و  $45^\circ$ ، دونقطه‌ی بحرانی یکی در حوالی  $\theta=0^\circ$  و دیگری در حوالی  $\theta=90^\circ$  به وجود می آیند و در زوایای چرخش  $60^\circ$  و  $75^\circ$  نیز این نقاط حوالی  $\theta=90^\circ, 180^\circ$  می باشند.

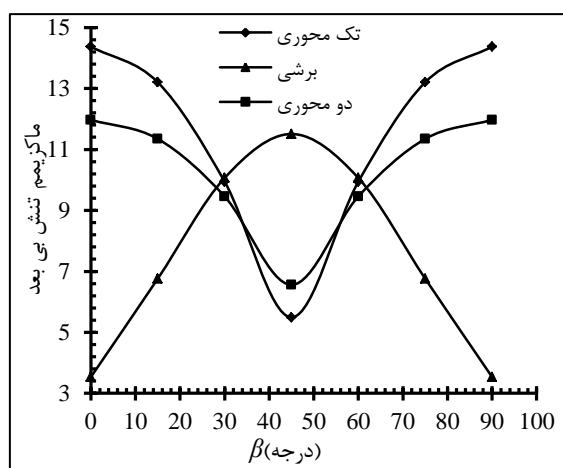


شکل ۳-۱۲ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی الف)  $\beta=45^\circ, 0^\circ$  ب)  $\beta=75^\circ, 15^\circ$  ج)  $\beta=60^\circ, 30^\circ$

در شکل ۳-۱۳ ماکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی برحسب زوایای چرخش در سه حالت بارگذاری مقایسه شده است. بنابراین این شکل نشان دهنده مقدار تنش ماکزیمم ایجاد شده در اطراف گشودگی به ازای هر زاویه چرخش است. لازم به ذکر است که منظور از بیشترین تنش حول گشودگی هم مقادیر مثبت (کششی) و هم مقادیر منفی (فشاری) تنش می باشد. از بین این تنش های ماکزیمم کمترین و بیشترین مقدار به ترتیب تنش بی بعد مطلوب و تنش بی بعد نامطلوب و یا به اختصار تنش مطلوب و تنش نامطلوب نامیده می شود. در طراحی ها باید از تنش نامطلوب اجتناب کرد و به شرایط تنش مطلوب نزدیک شد. باتوجه به این شکل، در بارگذاری تک محوری و دومحوری،



تنش نامطلوب در زوایای چرخش صفر درجه و  $90^\circ$  و تنش مطلوب در زاویه‌ی چرخش  $45^\circ$  رخ می‌دهد. در بارگذاری برشی تنش نامطلوب در زاویه‌ی  $45^\circ$  و تنش مطلوب در زوایای صفر درجه و  $90^\circ$  ایجاد می‌گردد. بنابراین بسته به نوع بارگذاری زاویه‌ی چرخشی که در آن تنش نامطلوب ایجاد می‌گردد؛ متفاوت خواهد بود. برای نمونه با وجود آن که بیشترین تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری تک‌محوری و دو‌محوری در زاویه‌ی چرخش صفر درجه اتفاق می‌افتد، همین زاویه‌ی چرخش در بارگذاری برشی کمترین مقدار تنش را داراست. بنابراین توجه به تفاوت روند تأثیر زاویه‌ی چرخش در بارگذاری‌های مختلف امری بسیار مهم می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که مقدار ماکزیمم تنش حول گشودگی در هر سه نوع بارگذاری نسبت به زاویه‌ی  $45^\circ$  دارای تقارن است. بر اساس توزیع تنش حول گشودگی می‌دانیم این تقارن در رابطه با محل ایجاد ماکزیمم تنش‌ها وجود ندارد. نتایج تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی در بارگذاری‌های مختلف بر مقدار تنش مطلوب و نامطلوب در جدول ۳-۱ آورده شده است. با توجه به این مقادیر و درصد اختلاف آن‌ها اهمیت انتخاب زاویه‌ی چرخش مناسب در طراحی‌ها مشخص می‌گردد.

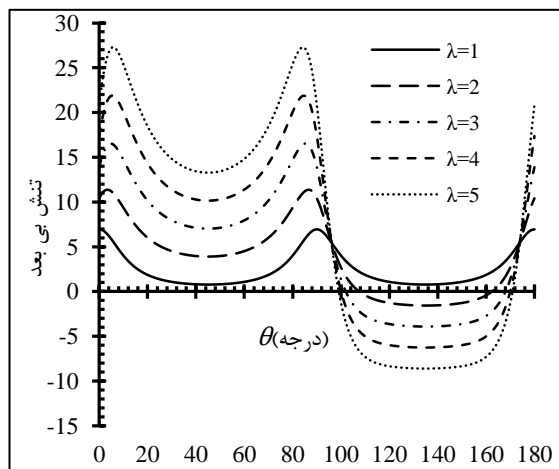


شکل ۳-۱۳ ماکزیمم تنش بی‌بعد بر حسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری

جدول ۱-۳ مقادیر و زوایای تنش نامطلوب در سه حالت بارگذاری

نوع بارگذاری	زاویه چرخش تنش مطلوب (درجه)	مقدار تنش نامطلوب	زاویه چرخش تنش نامطلوب (درجه)	مقدار تنش نامطلوب
تک‌محوری	۴۵	۵/۴۹۳	۰ یا ۹۰	۱۴/۳۷۰
دومحوری	۴۵	۶/۵۵۹	۰ یا ۹۰	۱۱/۹۷۰
برشی	۰ یا ۹۰	۳/۵۳۵	۴۵	۱۱/۵۰۵

شکل ۱۴-۳ نحوه‌ی توزیع تنش حول گشودگی را در مقادیر گوناگون  $\lambda$  در بارگذاری دومحوری نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد در بارگذاری دومحوری افزایش مقدار  $\lambda$  تنها افزایش مقدار تنش‌ها را حول گشودگی در پی دارد و در نحوه‌ی توزیع تنش حول گشودگی تغییری ایجاد نمی‌کند. به همین جهت در این بارگذاری نتایج تأثیر پارامترهای گوناگون بر توزیع تنش حول گشودگی برای  $\lambda=2$  گزارش شده است.

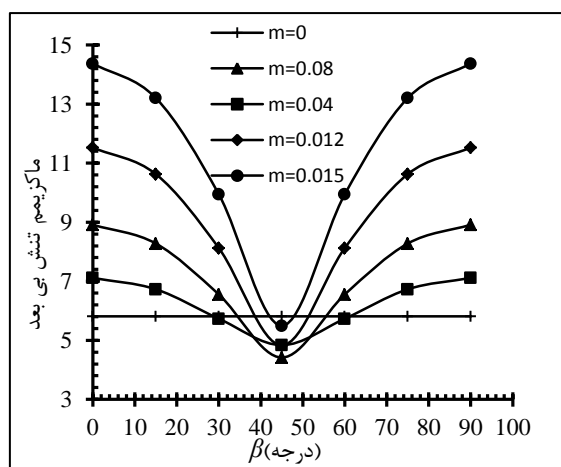


شکل ۱۴-۳ نحوه توزیع تنش حول گشودگی در بارگذاری دومحوری در  $\lambda$  های گوناگون

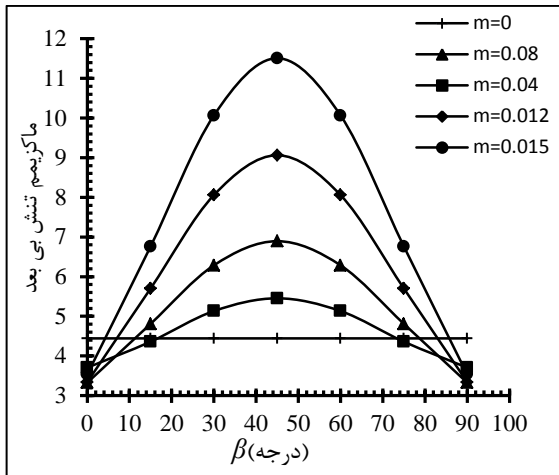
### ۳-۴ تأثیر همزمان پارامترهای انحنا و چرخش

همان‌طور که در بخش ۲-۳ مشاهده گردید با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی چهارضلعی در زاویه‌ی چرخش صفر درجه، در بارگذاری تک‌محوری و دومحوری مقدار ماکزیمم تنش حول گشودگی افزایش یافت. اما برخلاف انتظار با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی و در واقع تیزتر شدن گوشه‌ها در بارگذاری برشی چنین رفتاری مشاهده نگردید و حتی تنشی کمتر از تنش حول گشودگی دایروی

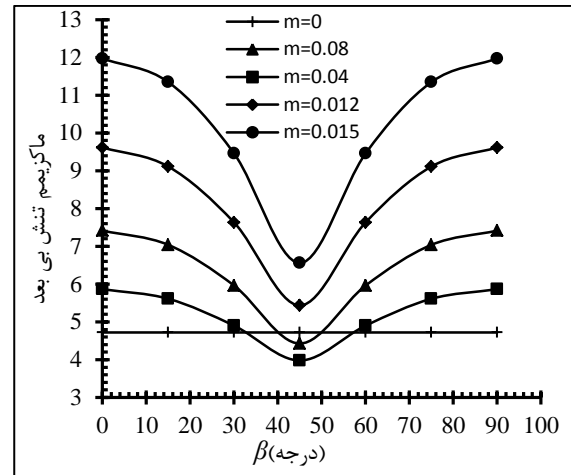
برای زاویه‌ی چرخش صفر درجه و انحنای ۰/۱۵ مشاهده شد. به علت چنین رفتاری لازم به نظر می‌رسد تأثیر همزمان پارامتر چرخش و انحنا بر مقدار تنش حول گشودگی بررسی گردد تا مشخص گردد در سایر زوایای چرخش و انحنا نیز چنین رفتاری وجود دارد! در شکل ۳-۱۵ تا شکل ۳-۱۷ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی، در زوایای گوناگون چرخش و برای پنج انحنا، در سه حالت بارگذاری آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد در بارگذاری تک‌محوری و برشی برای تمامی انحناها، در بازه‌ای از زاویه‌ی چرخش گشودگی مقدار ماکزیمم تنش حول گشودگی چهارضلعی کمتر از مقدار ماکزیمم تنش برای گشودگی دایروی ( $m=0$ ) است. در بارگذاری دومحوری نیز در بازه‌ای از زاویه‌ی چرخش برای چند انحنا مقدار ماکزیمم تنش حول گشودگی از حالت دایروی آن کمتر می‌شود. در واقع این نمودارها نشان می‌دهند همواره با افزایش تیزی افزایش مقدار تنش در چهارضلعی وجود ندارد و این امر به زاویه‌ی چرخش گشودگی نیز بستگی دارد. بنابراین با کنترل صحیح پارامترهای چرخش و انحنا در گشودگی چهارضلعی برای هر سه نوع بارگذاری مورد بحث، می‌توان به ماکزیمم تنشی کمتر از گشودگی دایروی رسید. برای هر مقدار  $m$ ، بازه‌هایی از زاویه‌ی چرخش که مقدار ماکزیمم تنش حول گشودگی در آن کمتر از حالت دایروی می‌باشد در جدول ۳-۲ آورده شده است.



شکل ۳-۱۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری تک‌محوری برای زوایای و انحناهای گوناگون



شکل ۱۷-۳ مکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی در بارگذاری برشی برای زوایا و انحناهای گوناگون



شکل ۱۶-۳ مکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی در بارگذاری دوماحوری برای زوایا و انحناهای گوناگون

جدول ۲-۳ بازه‌ای از زاویه‌ی چرخش در انحناهای مختلف که مقدار مکزیمم تنش چهارضلعی کمتر از دایره می‌باشد

بارگذاری برشی		بارگذاری دوماحوری		بارگذاری تک‌محوری	
بازه‌ی چرخش	$m$	بازه‌ی چرخش	$m$	بازه‌ی چرخش	$m$
$0 \leq \beta \leq 16$ و $74 \leq \beta \leq 90$	۰/۰۴	$33 \leq \beta \leq 57$	۰/۰۴	$31 \leq \beta \leq 59$	۰/۰۴
$0 \leq \beta \leq 9$ و $81 \leq \beta \leq 90$	۰/۰۸	$41 \leq \beta \leq 49$	۰/۰۸	$36 \leq \beta \leq 54$	۰/۰۸
$0 \leq \beta \leq 6$ و $74 \leq \beta \leq 90$	۰/۱۲	-	۰/۱۲	$39 \leq \beta \leq 51$	۰/۱۲
$0 \leq \beta \leq 4$ و $76 \leq \beta \leq 90$	۰/۱۵	-	۰/۱۵	$43 \leq \beta \leq 47$	۰/۱۵

در بارگذاری تک‌محوری و دوماحوری تنش مطلوب و نامطلوب به ترتیب در زوایای چرخش  $45^\circ$  و صفر درجه رخ می‌دهند. در بارگذاری برشی برعکس دو بارگذاری دیگر، تنش مطلوب در زاویه‌ی چرخش صفر درجه و تنش نامطلوب در زاویه‌ی چرخش  $45^\circ$  به وجود می‌آید. در جدول ۳-۳ تنش مطلوب و نامطلوب در انحناهای مختلف برای هر سه نوع بارگذاری آورده شده است. اعداد پررنگ شده در جدول کمترین تنش مطلوبی است که در هر حالت از بارگذاری امکان به وجود آمدن دارد را نشان می‌دهد. در بارگذاری تک‌محوری و برشی  $m=0/08$  و در بارگذاری دوماحوری  $m=0/04$  بهترین

انتخاب برای انحنای گوشه‌های گشودگی می‌باشد. مشاهده می‌گردد در هر سه حالت بارگذاری با انتخاب صحیح پارامتر چرخش و انحنای می‌توان به ماکزیمم تنش کمی کمتر از ماکزیمم تنش حول گشودگی دایروی تحت همان شرایط رسید.

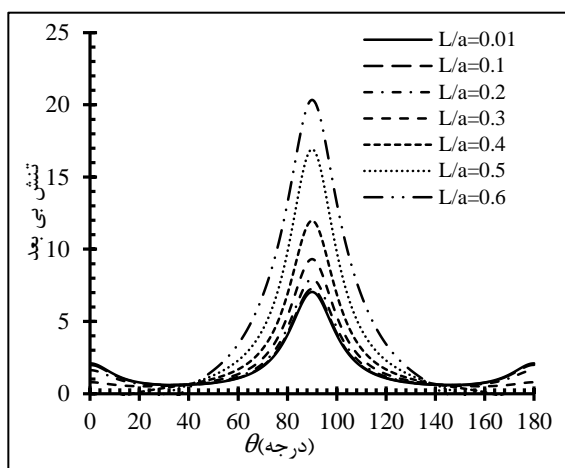
جدول ۳-۳ تنش مطلوب و نامطلوب در انحنای مختلف

m	بارگذاری تک‌محوری		بارگذاری دو‌محوری		بارگذاری برشی	
	تنش مطلوب	تنش نامطلوب	تنش مطلوب	تنش نامطلوب	تنش مطلوب	تنش نامطلوب
۰	۵/۸۱۱	۵/۸۱۱	۴/۷۲۱	۴/۷۲۱	۴/۴۴۳	۴/۴۴۳
۰/۰۴	۴/۸۳۶	۷/۱۱۳	۳/۹۷۹	۵/۸۶۵	۳/۷۰۵	۵/۵۴۳
۰/۰۸	۴/۴۱۷	۸/۹۱۲	۴/۴۲۷	۷/۴۱۵	۳/۳۲۵	۶/۸۹۴
۰/۱۲	۴/۸۳۰	۱۱/۵۲۴	۵/۴۳۵	۹/۶۱۵	۳/۳۴۰	۹/۰۶۰
۰/۱۵	۵/۴۹۳	۱۴/۳۷۰	۶/۵۵۹	۱۱/۹۷۰	۳/۵۳۵	۱۱/۵۰۵

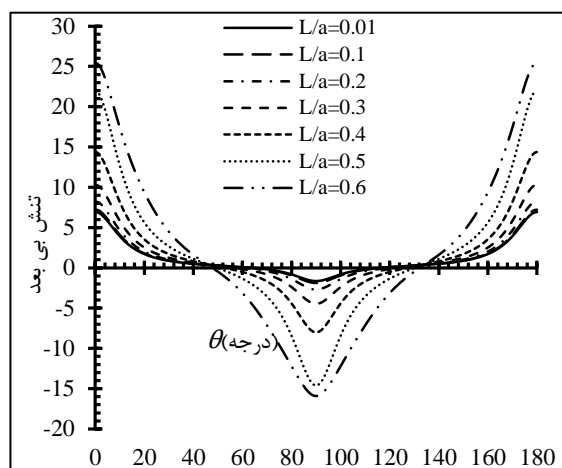
### ۳-۵ تأثیر نسبت اندازه‌ی گشودگی به بزرگترین طول ورق ( $\frac{L}{a}$ )

در این قسمت به بررسی تأثیر نسبت  $\frac{L}{a}$  (اندازه‌ی گشودگی به ورق) پرداخته شده است. شکل ۱۸-۳ تا شکل ۲۰-۳ توزیع تنش حول گشودگی را در سه حالت بارگذاری، برای نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  نشان می‌دهند. همان‌طور مشاهده می‌شود با افزایش نسبت  $\frac{L}{a}$  تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می‌یابد. در محدوده‌ی  $\frac{L}{a}$  بزرگتر از ۰/۲، تنش به میزان زیادی افزایش می‌یابد و با بزرگتر شدن این نسبت، مقدار افزایش تنش بیشتر می‌گردد. این در حالی است که در محدوده‌ی  $\frac{L}{a}$  کوچکتر از ۰/۲ اختلاف مقدار تنش حول گشودگی ناچیز است. این امر نشان‌دهنده‌ی تأثیر بسیار زیاد اندازه‌ی گشودگی به ورق، در ورق‌های محدود می‌باشد. شکل ۲۱-۳ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی بر حسب نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  را در سه حالت بارگذاری نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود؛ با افزایش نسبت  $\frac{L}{a}$ ، در محدوده‌ی  $\frac{L}{a}$  کمتر از ۰/۲ مقدار تنش تقریباً ثابت و در محدوده‌ی  $\frac{L}{a}$  بزرگتر از ۰/۲، با افزایش این نسبت مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می‌یابد. نتایج مربوط به مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول

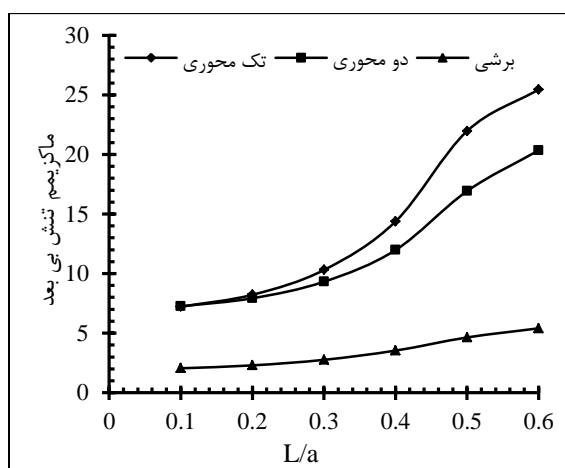
گشودگی در حالت نامحدود در جدول ۳-۴ آورده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده و مقایسه‌ی آن با حل ورق نامحدود ( $\frac{L}{a} = 0.1$ ) مشاهده می‌شود که در نسبت‌های  $\frac{L}{a}$  کوچکتر از ۰/۲، اختلاف ماکزیمم تنش از دو روش کمتر از ۲۰٪ می‌باشد؛ بنابراین در کاربردهای عملی مهندسی، ورق‌های محدود با نسبت  $\frac{L}{a}$  کوچکتر از ۰/۲ را می‌توان نامحدود در نظر گرفت. این در حالی است که در نسبت‌های بزرگتر از ۰/۲ اختلاف توزیع تنش با حالت نامحدود تا ۲۶۷٪ هم می‌رسد و این نشان‌دهنده‌ی این امر می‌باشد که در این نسبت‌ها نمی‌توان از حل نامحدود ورق استفاده کرد.



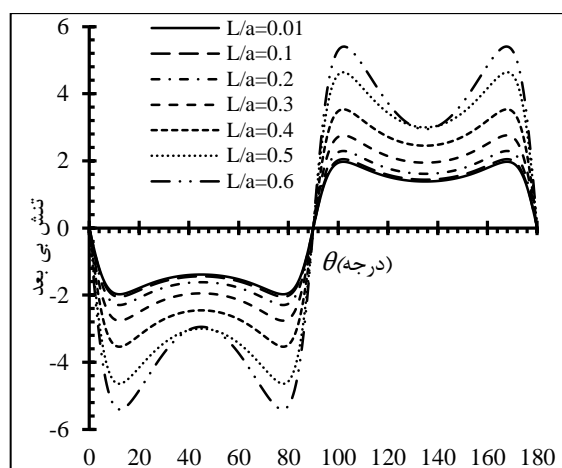
شکل ۳-۱۹ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار دومحوری



شکل ۳-۱۸ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار تک‌محوری



شکل ۳-۲۱ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری



شکل ۳-۲۰ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار برشی

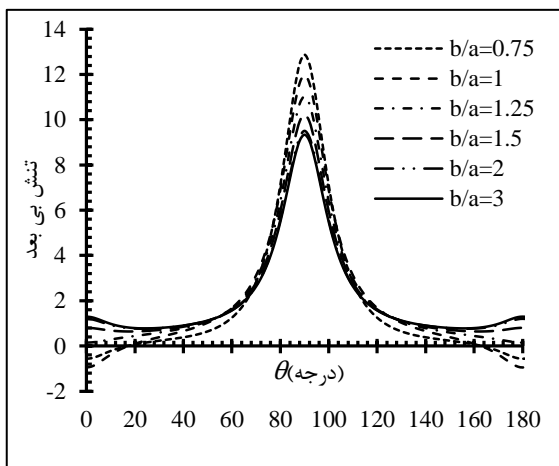
جدول ۳-۴ مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در حالت نامحدود

بارگذاری برشی		بارگذاری کششی دوجوری		بارگذاری کششی تک‌محوری		$\frac{L}{a}$
درصد اختلاف		درصد اختلاف		درصد اختلاف		
با ورق نامحدود	ماکزیمم تنش بی‌بعد	با ورق نامحدود	ماکزیمم تنش بی‌بعد	با ورق نامحدود	ماکزیمم تنش بی‌بعد	
$\frac{L}{a} = 0.1$		$\frac{L}{a} = 0.1$		$\frac{L}{a} = 0.1$		
۰	۱/۹۷۳۸	۰	۷/۰۳۹۷	۰	۶/۹۱۸	۰/۰۱
۳/۸۰	۲/۰۴۹	۲/۹۴	۷/۲۴۷	۴/۳۲	۷/۲۱۷	۰/۱
۱۶/۱۷	۲/۲۹۳	۱۲/۶۳	۷/۹۲۹	۱۸/۷۹	۸/۲۱۸	۰/۲
۳۹/۷۸	۲/۷۵۹	۳۲/۲۹	۹/۳۱۳	۴۸/۸۷	۱۰/۲۹۹	۰/۳
۷۹/۰۹	۳/۵۳۵	۷۰/۰۳	۱۱/۹۷۰	۱۰۷/۷۱	۱۴/۳۷۰	۰/۴
۱۳۵/۰۴	۴/۶۳۹۳	۱۴۰/۳۵	۱۶/۹۲۰	۲۱۷/۲۸	۲۱/۹۵۶	۰/۵
۱۷۳/۷۳	۵/۴۰۳	۱۸۸/۹۱	۲۰/۳۳۹	۲۶۷/۷۳	۲۵/۴۴۴	۰/۶

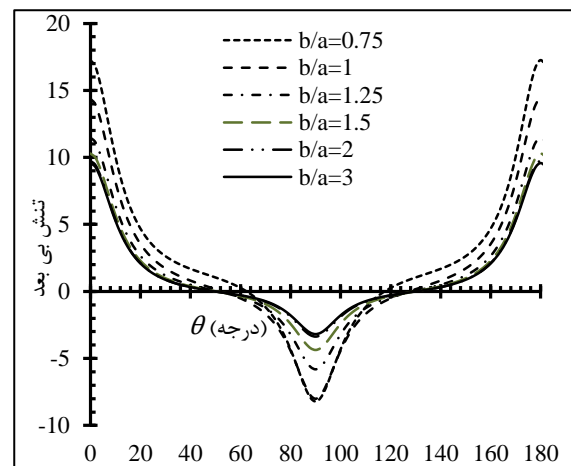
### ۳-۶ تأثیر نسبت اضلاع ورق $(\frac{b}{a})$

به‌منظور مطالعه‌ی تأثیر نسبت ابعاد ورق، توزیع تنش بی‌بعد اطراف گشودگی، برای نسبت‌های مختلف  $\frac{b}{a}$  و سه حالت بارگذاری در شکل ۳-۲۲ تا شکل ۳-۲۴ آورده شده است. از آن‌جایی که اندازه‌ی گشودگی به ورق مقداری ثابت و برابر،  $\frac{L}{a} = 0.4$  در نظر گرفته شده، کمترین نسبت  $\frac{b}{a}$  برای گشودگی با زاویه‌ی چرخش صفر درجه،  $0.56$  می‌باشد که در این صورت دو ضلع گشودگی مماس بر دو گوشه‌ی چهارضلعی می‌گردند که این امر در کاربردهای عملی معقول به‌نظر نمی‌رسد؛ بنابراین در این قسمت نسبت  $\frac{b}{a}$  های بزرگتر از  $0.75$  بررسی می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت  $\frac{b}{a}$  مقدار تنش بی‌بعد حول گشودگی در سه حالت بارگذاری کاهش می‌یابد و اختلاف توزیع تنش، با افزایش این نسبت، کاهش پیدا می‌کند. علت این امر این است که، ورق در صورتی محدود می‌باشد که نسبت طول ضلع گشودگی به طول بزرگترین ضلع ورق بزرگتر از  $0.2$  باشد. بنابراین برای نسبت  $\frac{b}{a} -$  های کوچکتر از  $1$ ، شرایط  $\frac{L}{a} = 0.4$  (نسبت طول ضلع گشودگی به بزرگترین طول ورق بزرگتر از  $0.2$

( برقرار است و با کوچک شدن ابعاد، مقدار تنش افزایش می‌یابد. برای نسبت‌های  $\frac{b}{a}$  بزرگتر از یک،  $b$  ضلع بزرگتر ورق می‌شود و در صورتی که، شرایط ورق محدود برای آن صدق نکند تغییر چندانی در مقدار تنش، همانند ورق‌های نامحدود به وجود نمی‌آید. به همین خاطر مشاهده می‌شود که در نسبت  $\frac{b}{a}$  برابر با  $1/5$  و بیشتر از آن تغییر چندانی در مقدار تنش ایجاد نمی‌شود. شکل ۳-۲۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد را بر حسب نسبت  $\frac{b}{a}$  در سه نوع بارگذاری مورد بحث نشان می‌دهد. همان‌طور که اشاره شد؛ این شکل نشان می‌دهد که با افزایش نسبت  $\frac{b}{a}$  مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در سه حالت بارگذاری کاهش می‌یابد و در نسبت‌های بزرگتر از  $\frac{b}{a} = 1/5$  مقدار تنش به حالت پایدار رسیده و با افزایش این نسبت تغییر چندانی در مقدار تنش ماکزیمم بی‌بعد ایجاد نمی‌شود. علت این امر همان‌طور که بیان شد افزایش طول  $b$  و کاهش نسبت طول ضلع گشودگی به بزرگترین طول ورق و در نتیجه تبدیل ورق به شرایط برابر با ورق نامحدود می‌باشد. همچنین تأثیر نسبت اضلاع ورق برای بارگذاری تک‌محوری بیشتر از دو بارگذاری دیگر می‌باشد.

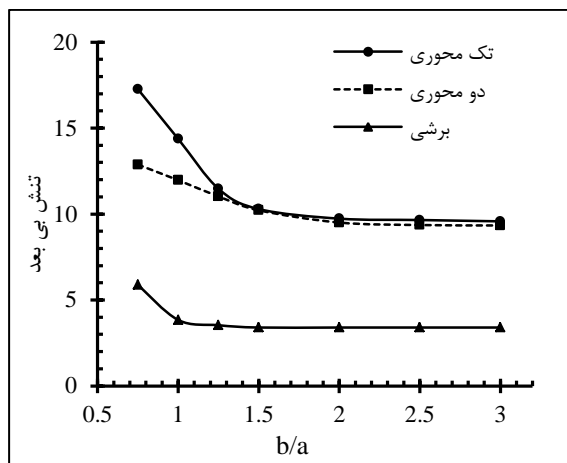


شکل ۳-۲۳ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بارکشی دوماحوری

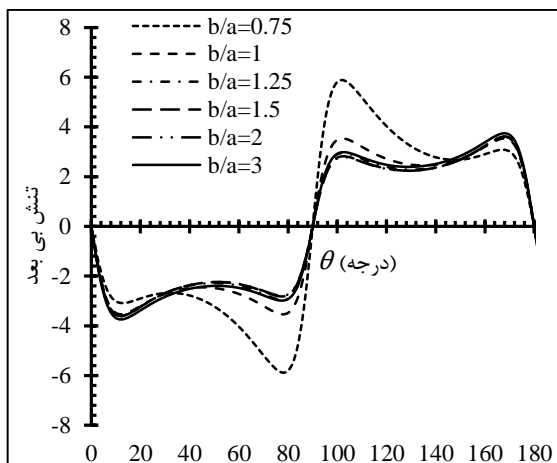


شکل ۳-۲۲ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بارکشی تک‌محوری





شکل ۲۵-۳ ماکزیمم تنش حول گشودگی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت بارگذاری



شکل ۲۴-۳ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بار برشی

### ۷-۳ جمع بندی

در این فصل با به کارگیری روش متغیر مختلط، حل تحلیلی ورق محدود حاوی گشودگی چهارضلعی ممکن گردید. تأثیر انحنای گوشه‌ی گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی، نسبت ابعاد ورق، نسبت اندازه‌ی گشودگی به بزرگترین طول ورق و نوع بارگذاری به‌عنوان پارامترهای مهم در توزیع تنش اطراف این گشودگی مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج حاصل از این فصل نشان داد که در گشودگی چهارضلعی برخلاف انتظار با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی، همواره مقدار تنش افزایش نمی‌یابد بلکه بسته به زاویه‌ی چرخش در مواردی کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده گردید که با انتخاب صحیح پارامترهای چرخش و انحنا می‌توان به تنشی کمتر از تنش حول گشودگی دایروی در شرایط یکسان رسید. در بارگذاری‌های مختلف محلی که بیشترین تنش بی‌بعد در اطراف گشودگی اتفاق می‌افتد متفاوت است. در بارگذاری کششی تک‌محوری برای تمامی انحنایها، این تنش در  $\theta = 0^\circ$  و در بارگذاری دو‌محوری در  $\theta = 90^\circ$  اتفاق می‌افتد. برای بارگذاری برشی در حالت  $\beta = 0$  و  $m = 0.15$   $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 180^\circ$  محل ماکزیمم تنش حول گشودگی می‌باشند که این زوایا با تغییر انحنایها تغییر می‌یابند. تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی چهارضلعی در بارگذاری‌های مختلف، متفاوت است. برای  $\frac{L}{a} = 0.4$ ،  $\frac{b}{a} = 1$  و  $m = 0.15$  مشاهده گردید که در بارگذاری کششی تک‌محوری و دو‌محوری

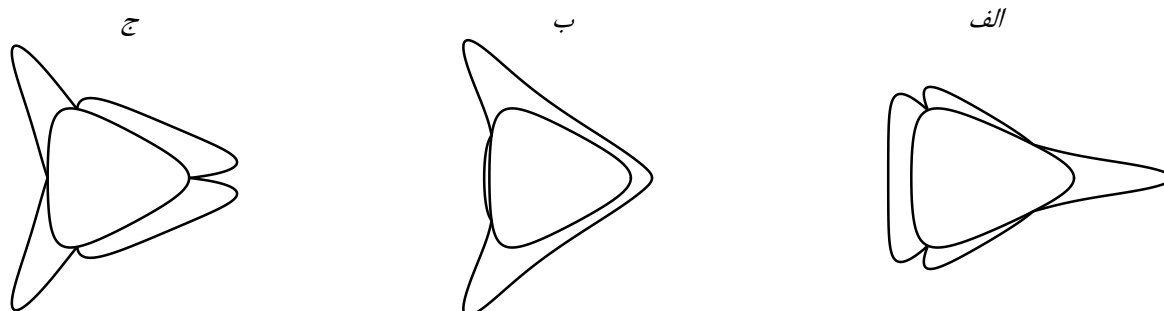
کمترین مقدار تنش در زاویه‌ی چرخش  $45^\circ$  و بیشترین مقدار تنش در زوایای چرخش  $0^\circ$  و  $90^\circ$  درجه اتفاق می‌افتد. در بارگذاری برشی کمترین مقدار تنش، در زوایای چرخش  $0^\circ$  و  $90^\circ$  و بیشترین مقدار تنش، در زاویه‌ی چرخش  $45^\circ$  رخ می‌دهد. تأثیر نسبت ابعاد گشودگی به ابعاد ورق بر توزیع تنش اطراف گشودگی مورد بررسی قرار گرفت. با افزایش اندازه‌ی گشودگی در هر سه حالت بارگذاری، مقدار ماکزیمم تنش افزایش یافت که مقدار این افزایش در بارگذاری کششی تک‌محوری و دو‌محوری بیشتر از بارگذاری برشی می‌باشد. با مقایسه‌ی مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در نسبت‌های مختلف با مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در ورق نامحدود، نشان داده شد که از حلّ ورق نامحدود نمی‌توان برای حلّ ورق‌هایی با نسبت  $\frac{L}{a}$  بزرگتر از  $0.2$  (ورق محدود) استفاده نمود. همچنین با تغییر نسبت ابعاد ورق، ابتدا کاهش مقدار تنش و سپس ثابت ماندن این مقدار برای نسبت‌های بزرگتر از  $\frac{b}{a} = 1/5$  در سه حالت بارگذاری مشاهده گردید. نتایج نشان داد که با انتخاب صحیح پارامترهای یاد شده می‌توان از مقدار تنش، در اطراف این گشودگی کاست.

فصل ۴  
گشودگی مثلثی

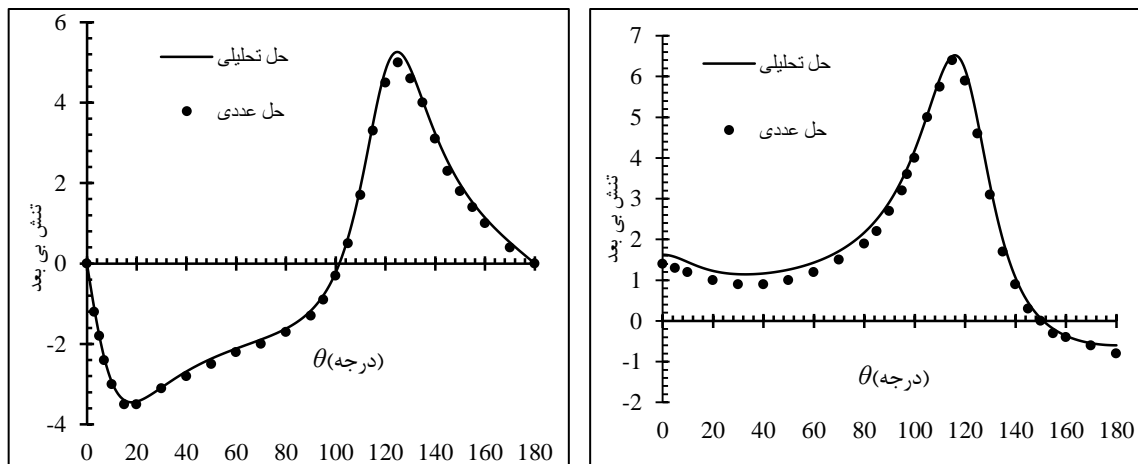
---

## ۱-۴ مقدمه

در این فصل همانند فصل پیشین تأثیر پارامترهای نوع بارگذاری، انحنای گوشه‌های گشودگی، چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت ضلع گشودگی به بزرگترین ضلع ورق بر توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۱-۴ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی برای حالت  $\beta=0$ ،  $\frac{L}{a}=0.4$ ،  $\frac{b}{a}=1$  و  $m=0.2$  برای سه نوع بارگذاری مورد بحث در پایان‌نامه آورده شده است. دیده می‌شود در بارگذاری تک‌محوری بیشترین تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\theta=0^\circ$  و در بارگذاری دوماحوری و برشی در  $\theta=120^\circ$  و  $\theta=240^\circ$  ایجاد می‌گردد. برای هر سه نوع بارگذاری مورد بحث، در هر بخش با تغییر یکی از پارامترهای فوق و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها تأثیر هر پارامتر بر توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی بررسی می‌گردد. در شکل ۲-۴ و شکل ۵-۴ مقایسه حل تحلیلی و عددی برای بارگذاری‌های دوماحوری و برشی آورده شده است.



شکل ۱-۴ نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی تحت بار (الف) تک‌محوری  $\lambda=0$ ، (ب) دوماحوری  $\lambda=2$ ، (ج) برشی

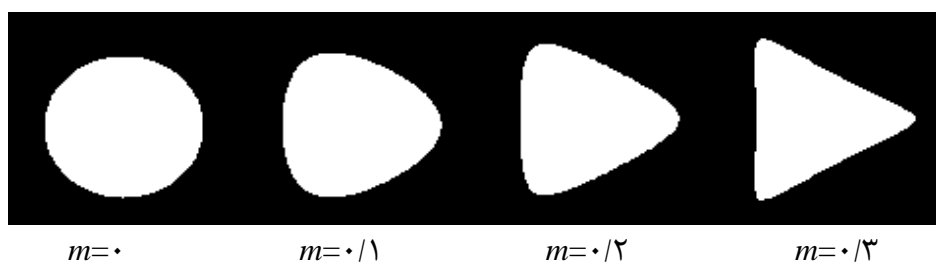


شکل ۳-۴ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی مثلثی تحت بار کششی برشی از روش تحلیلی و عددی

شکل ۲-۴ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی مثلثی تحت بار کششی دومحوری از روش تحلیلی و عددی

#### ۲-۴ تأثیر انحنای گشودگی ( $m$ )

همان طور که در فصل قبل به آن اشاره شد؛ پارامتر  $m$  مستقیماً بر هندسه‌ی گشودگی تأثیر می‌گذارد و با تغییر آن مطابق شکل ۴-۴ میزان تیزی و یا نرمی گوشه‌های گشودگی قابل کنترل خواهد بود. از آنجایی که انحنای گوشه‌ی گشودگی پارامتری مؤثر بر مقدار تنش ایجادشده حول گشودگی می‌باشد، در این قسمت تأثیر این پارامتر بر توزیع تنش حول گشودگی بررسی می‌گردد.

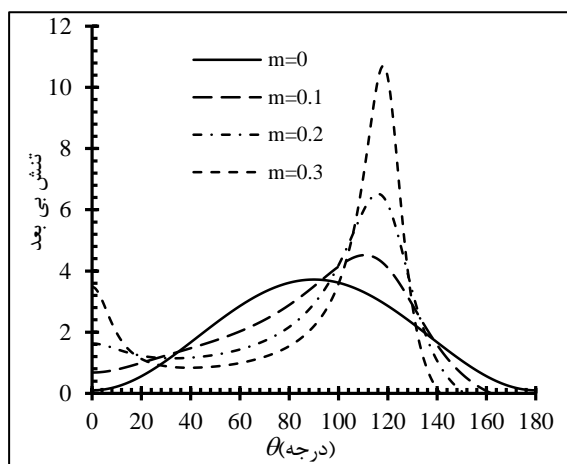


شکل ۴-۴ روند تأثیر پارامتر  $m$  بر انحنای گوشه‌های گشودگی مثلثی

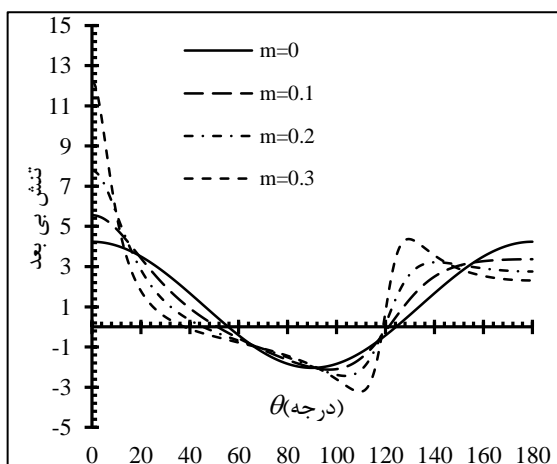
در شکل ۴-۵ تا شکل ۴-۷ توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی در سه حالت بارگذاری تک‌محوری، دومحوری و برشی، برای انحنای مختلف آورده شده است. همان طور که مشاهده می‌-

شود با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می‌یابد در تیزترین انحنا،  $m=0/3$ ، این افزایش تنش به مقدار بیشتری شدت می‌یابد. در بارگذاری تک‌محوری، برای تمامی انحناها، ماکزیمم تنش بی‌بعد در  $\theta=0^\circ$  اتفاق می‌افتد، در بارگذاری دومحوری محلّ ماکزیمم تنش بی‌بعد (مقدار زاویه  $\theta$ ) برای انحناها گوناگون به جز  $m=0$ ، بین زاویه‌ی  $111^\circ$  تا  $118^\circ$  متغیر است و با افزایش انحنا، این زاویه افزایش می‌یابد. برای حالت دایروی  $m=0$  ماکزیمم تنش در زاویه‌ی  $90^\circ$  رخ می‌دهد. محلّ ماکزیمم تنش بی‌بعد در اطراف گشودگی برای بارگذاری برشی بین  $120^\circ$  تا  $130^\circ$  متغیر می‌باشد. شکل ۴-۸ ماکزیمم تنش بی‌بعد را در سه حالت بارگذاری، برای انحناهاى مختلف مقایسه می‌کند. کمترین تنش ایجادشده حول گشودگی برای هر سه حالت بارگذاری مربوط به  $m=0$  می‌باشد که در این حالت گشودگی مثلثی به گشودگی دایروی تبدیل می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که علاوه بر اینکه افزایش میزان انحنا مقدار تنش را در سه حالت بارگذاری افزایش می‌دهد، این تأثیر در بارگذاری تک‌محوری و دومحوری بیشتر از بارگذاری برشی بوده است و با شیب بیشتری این افزایش در مقدار تنش اتفاق می‌افتد.

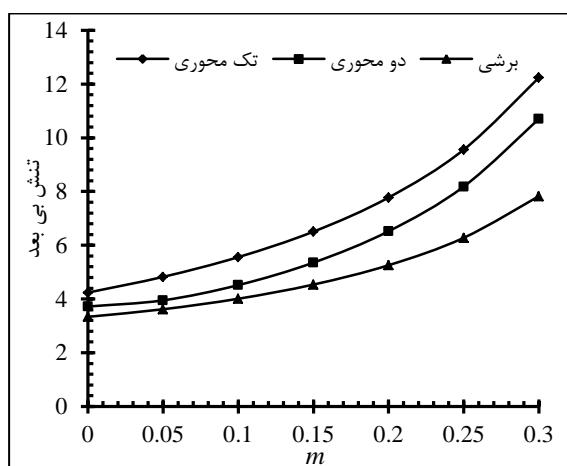
در تابع نگاشت استفاده شده در این پایان‌نامه محدوده‌ی مجاز برای پارامتر  $m$  که تعیین‌کننده‌ی انحنای گوشه‌های گشودگی می‌باشد، ۰ تا  $0/5$  می‌باشد [۱۱]. از آنجایی که با افزایش  $m$ ، گوشه‌های گشودگی تیزتر می‌شود و در کاربردهای عملی مهندسی، استفاده از گشودگی‌های بسیار نوک‌تیز معقول نمی‌باشد؛ تأثیر این پارامتر تا مقدار  $0/3$  بررسی شده است.



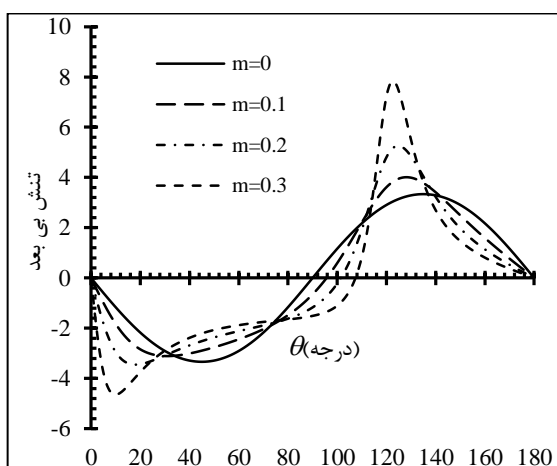
شکل ۴-۶ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار دوماحوری ( $\lambda=2$ )



شکل ۴-۵ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار تک محوری



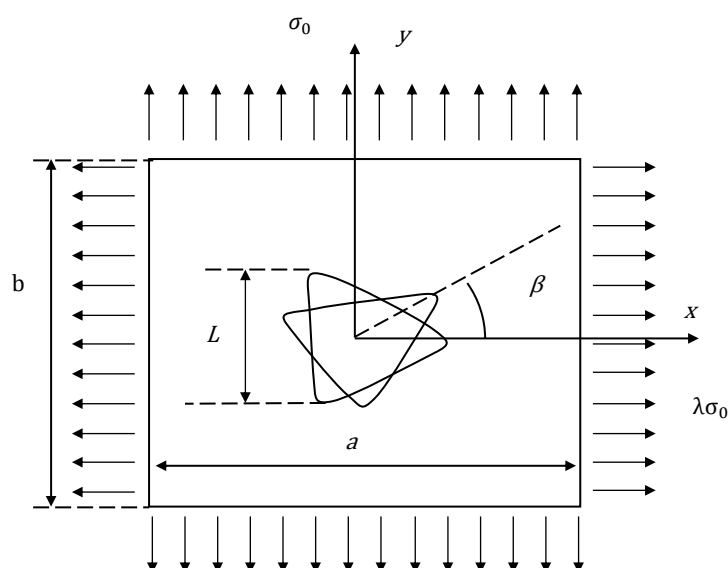
شکل ۴-۸ ماکزیمم تنش بی بعد بر حسب انحنای مختلف در سه بارگذاری



شکل ۴-۷ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار برشی

### ۴-۳ تأثیر زاویه چرخش گشودگی ( $\beta$ )

در این قسمت تأثیر پارامتر زاویه چرخش گشودگی بر توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی بررسی می‌گردد. زاویه چرخش گشودگی مثلثی که نحوه قرارگیری آن نسبت به محور افق می‌باشد؛ در شکل ۴-۹ با  $\beta$  نمایش داده شده است. برای این گشودگی دوره تناوب چرخش  $60^\circ$  می‌باشد بنابراین در این بخش این پارامتر تا زاویه  $60^\circ$  بررسی می‌شود.



شکل ۹-۴ ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی تحت کشش دوماحوری

توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی برای زوایای چرخش  $0^\circ$ ،  $15^\circ$ ،  $30^\circ$  و  $45^\circ$  در سه حالت بارگذاری در شکل ۱۰-۴ تا شکل ۱۲-۴ آورده شده است. لازم به ذکر است که با چرخش این گشودگی تقارن توزیع تنش حول گشودگی از بین می‌رود بنابراین نمودارهای چرخش برای  $360^\circ$  حول گشودگی گرفته شده‌اند. همان‌طور که نمودارها نشان می‌دهند پارامتر چرخش تأثیر بسزایی در نحوه‌ی توزیع و مقدار تنش اطراف گشودگی مثلثی در هر سه نوع بارگذاری دارد. در بارگذاری تک-محوری برای زوایای چرخش صفر درجه و  $15^\circ$ ، نقطه‌ی بحرانی که بیشترین تنش حول گشودگی در آن اتفاق می‌افتد؛ در  $\theta=0^\circ$  واقع است. برای زاویه‌ی چرخش  $30^\circ$ ، بیشترین تنش در اطراف گشودگی در حوالی  $\theta=0^\circ$  و  $\theta=120^\circ$  ایجاد می‌شود. و در نهایت در زاویه چرخش  $45^\circ$ ، نقطه‌ی بحرانی در  $\theta=120^\circ$  قرار دارد. در بارگذاری دوماحوری و برشی نیز بسته به مقدار زاویه‌ی چرخش، محلی که بیشترین تنش در اطراف گشودگی رخ می‌دهد؛ متفاوت خواهد بود.

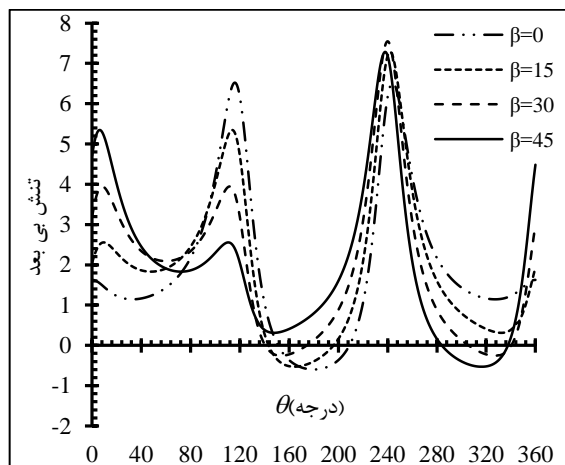
در شکل ۱۳-۴ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی برحسب زوایای چرخش در سه حالت بارگذاری مقایسه شده است. در فصل قبل تنش مطلوب و تنش نامطلوب به ترتیب به‌عنوان کمترین



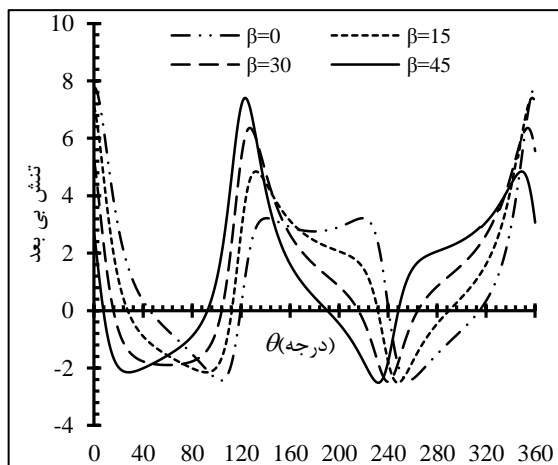
ماکزیمم تنش به وجود آمده حول گشودگی و بیشترین ماکزیمم تنش به وجود آمده حول گشودگی معرفی شده‌اند. با توجه به این شکل، در بارگذاری تک‌محوری، تنش نامطلوب در زوایای چرخش صفر درجه و  $60^\circ$  رخ می‌دهد. در بارگذاری دومحوری تنش نامطلوب در زاویه‌ی چرخش  $30^\circ$  و در بارگذاری برشی در زاویه‌ی چرخش  $15^\circ$  و  $45^\circ$  رخ می‌دهد. با توجه به این نمودار دیده می‌شود که با وجود آنکه بیشترین تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری دومحوری در زاویه‌ی چرخش  $30^\circ$  اتفاق می‌افتد، همین زاویه‌ی چرخش در بارگذاری تک‌محوری کمترین مقدار تنش را داراست. این امر نشان‌دهنده‌ی آن است که روند تأثیر زاویه‌ی چرخش در بارگذاری‌های مختلف متفاوت و توجه به آن امری بسیار مهم می‌باشد.

نتایج تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی در بارگذاری‌های مختلف بر مقدار تنش مطلوب و نامطلوب

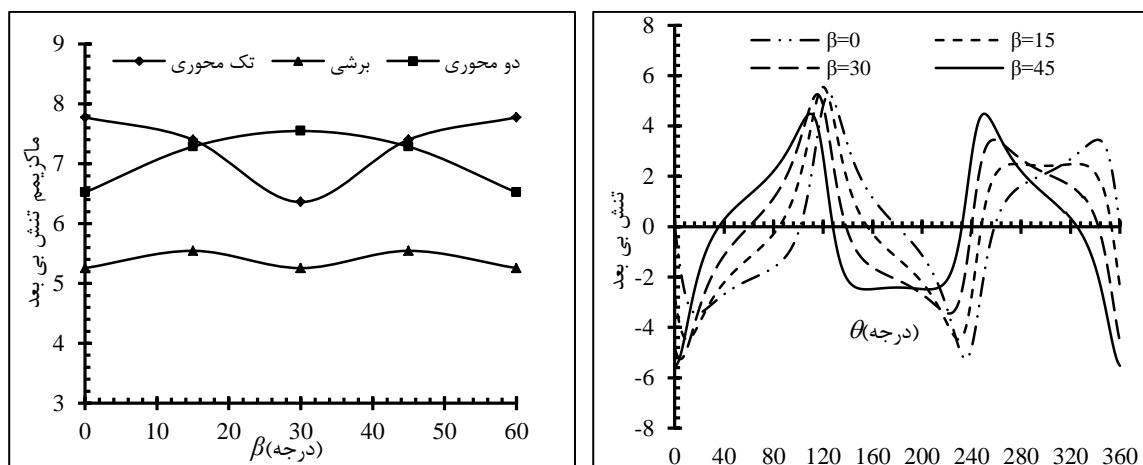
در جدول ۴-۱ آورده شده است.



شکل ۴-۱۱ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دومحوری ( $\lambda=2$ )



شکل ۴-۱۰ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک‌محوری

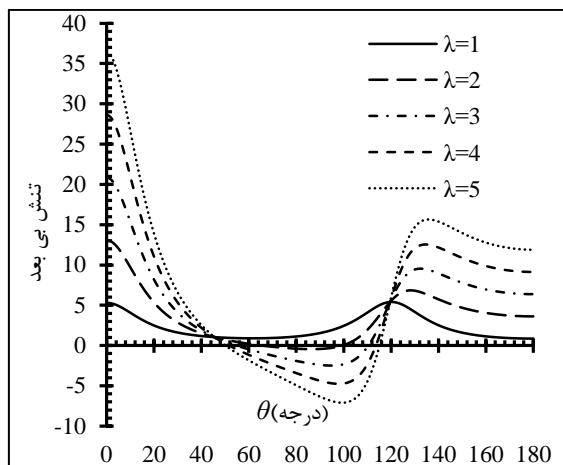


شکل ۴-۱۲ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی  
 شکل ۴-۱۳ مکزیم تنش بی بعد بر حسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری

جدول ۴-۱ مقادیر و زوایای تنش مطلوب و نامطلوب در سه حالت بارگذاری

نوع بارگذاری	زاویه چرخش تنش مطلوب (درجه)	مقدار تنش مطلوب	زاویه چرخش تنش نامطلوب (درجه)	مقدار تنش نامطلوب
تک محوری	۳۰	۶/۳۵۹	صفر و ۶۰	۷/۷۷۵
دو محوری	صفر و ۶۰	۶/۵۲۰	۳۰	۷/۵۴۶
برشی	۳۰	۴/۴۸۲	۱۵ و ۴۵	۵/۵۴۵

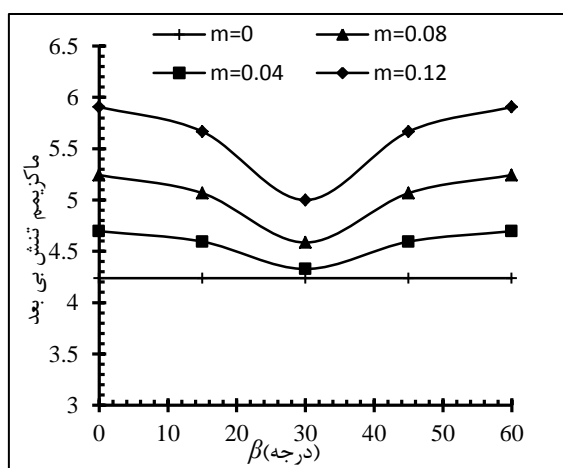
شکل ۴-۱۴ نحوه توزیع تنش حول گشودگی را در مقادیر گوناگون  $\lambda$  در بارگذاری دو محوری برای گشودگی مثلثی نشان می دهد. مشاهده می گردد همانند گشودگی چهارضلعی تغییر مقدار  $\lambda$  تنها مقدار تنش را حول گشودگی تغییر داده و بر نحوه توزیع تنش حول گشودگی تأثیری نخواهد داشت. این تأثیر برای سایر گشودگی ها نیز به همین شکل می باشد، به همین جهت در بارگذاری دو محوری برای تمام گشودگی ها  $\lambda = 2$  بررسی می شود.



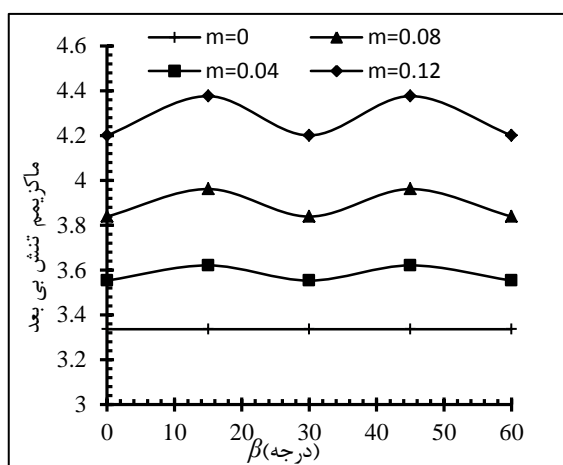
شکل ۴-۱۴ نحوه توزیع تنش حول گشودگی در بارگذاری دوماحوری در  $\lambda$  های گوناگون

#### ۴-۴ تأثیر همزمان پارامترهای انحنا و چرخش

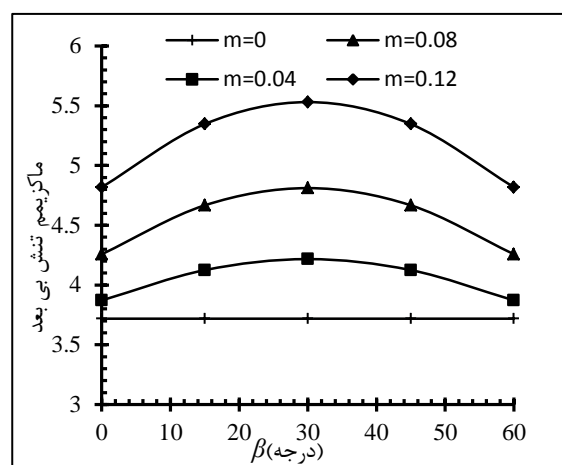
در این بخش تأثیر همزمان دو پارامتر چرخش و انحنا بر روی ماکزیمم تنش حول گشودگی مثلثی بررسی می‌شود. همان‌طور که در شکل ۴-۱۵ تا شکل ۴-۱۷ دیده می‌شود در هر سه نوع بارگذاری با افزایش انحنا در تمام زوایای چرخش مقدار تنش افزایش یافته و در هیچ زاویه‌ی چرخش و انحنایی مقدار تنش از مقدار تنش حول گشودگی دایروی کمتر نشده است. بنابراین در این گشودگی برای تمام حالات زاویه‌ی چرخش کمترین مقدار تنش حول گشودگی در  $m=0$  (دایروی) اتفاق می‌افتد.



شکل ۴-۱۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری تک‌محوری برای زوایا و انحناهای گوناگون



شکل ۴-۱۷ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری برشی برای زوایا و انحناهای گوناگون



شکل ۴-۱۶ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در بارگذاری دوماحوری برای زوایا و انحناهای گوناگون

مطابق با این نمودارها در صورت استفاده از گشودگی مثلثی برای داشتن کمترین ماکزیمم تنش حول گشودگی باید از زاویه‌ی چرخش مطلوب و حداالامکان کمترین مقدار انحنا استفاده نمود. این مقادیر در جدول ۴-۲ گزارش داده شده است.

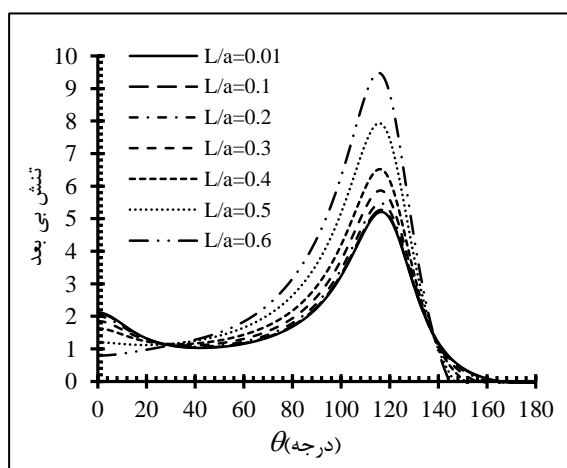
جدول ۴-۲ ماکزیمم تنش حول گشودگی در زاویه‌ی چرخش مطلوب در هر بارگذاری برای انحناهای مختلف

انحنا	بارگذاری تک‌محوری	بارگذاری دوماحوری	بارگذاری برشی
$m=0$	۴/۲۳	۳/۷۱۸	۳/۳۳۶
$m=0/04$	۴/۳۲۷	۳/۸۷۱	۳/۵۵۳
$m=0/08$	۴/۵۸۵	۴/۲۵۷	۳/۸۳۸
$m=0/12$	۴/۹۹۹	۴/۸۱۸	۴/۲۰۱

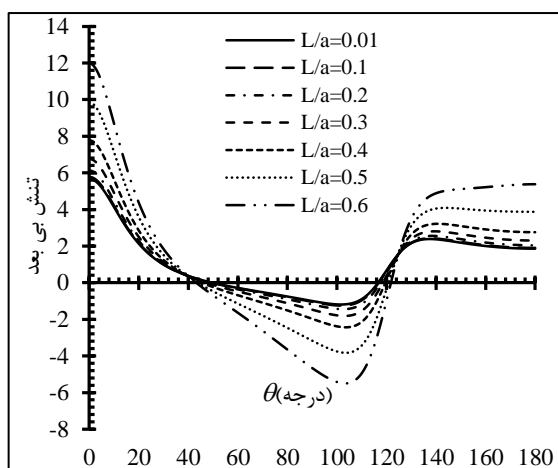
#### ۴-۵ تأثیر نسبت اندازه‌ی گشودگی به بزرگترین طول ورق ( $\frac{L}{a}$ )

در این قسمت به بررسی تأثیر نسبت  $\frac{L}{a}$  (اندازه‌ی گشودگی به ورق) پرداخته می‌شود. در شکل ۴-۱۸ تا شکل ۴-۲۰ توزیع تنش حول گشودگی، برای نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  در سه نوع بارگذاری آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود همانند گشودگی چهارضلعی با افزایش نسبت  $\frac{L}{a}$  تنش در هر

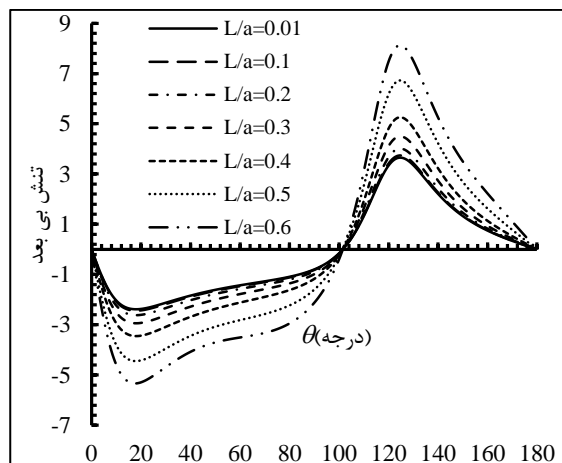
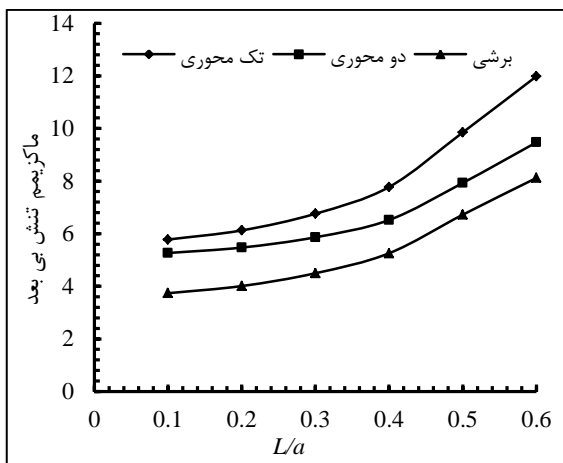
سه حالت بارگذاری افزایش می‌یابد. در محدوده‌ی  $\frac{L}{a}$  بزرگتر از  $0/2$ ، این افزایش به میزان بیشتری می‌باشد در حالی که در محدوده‌ی  $\frac{L}{a}$  کوچکتر از  $0/2$  افزایش مقدار تنش ناچیز و تقریباً مقدار تنش حول گشودگی ثابت می‌باشد. این امر نشان‌دهنده‌ی تأثیر بسیار زیاد اندازه‌ی گشودگی به ورق در ورق‌های محدود می‌باشد. شکل ۴-۲۱ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی برحسب نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  را در سه حالت بارگذاری نشان می‌دهد. با افزایش نسبت  $\frac{L}{a}$ ، در محدوده‌ی  $\frac{L}{a}$  کمتر از  $0/2$  مقدار تنش تقریباً ثابت و در محدوده‌ی  $\frac{L}{a}$  بزرگتر از  $0/2$ ، با افزایش این نسبت مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می‌یابد. نتایج مربوط به مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در حالت نامحدود در جدول ۴-۳ آورده شده است. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده و مقایسه‌ی آن با حل ورق نامحدود ( $\frac{L}{a} = 0/1$ ) مشاهده می‌شود که در نسبت‌های  $\frac{L}{a}$  کوچکتر از  $0/2$ ، اختلاف ماکزیمم تنش از دو روش کمتر از  $10\%$  می‌باشد؛ بنابراین در کاربردهای عملی مهندسی، ورق‌های محدود با نسبت  $\frac{L}{a}$  کوچکتر از  $0/2$  را می‌توان نامحدود در نظر گرفت. این در حالی است که در نسبت‌های بزرگتر از  $0/2$  اختلاف توزیع تنش با حالت نامحدود تا  $122\%$  هم می‌رسد و این نشان می‌دهد که در این نسبت‌ها نمی‌توان از حل نامحدود ورق استفاده کرد.



شکل ۴-۱۹ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار دومحوری



شکل ۴-۱۸ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار تک‌محوری



شکل ۲۱-۴ ماکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری

شکل ۲۰-۴ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در  $\frac{L}{a}$  های مختلف تحت بار برشی

جدول ۳-۴ مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی در حالت نامحدود

بارگذاری کششی تک محوری		بارگذاری کششی دو محوری		بارگذاری برشی		$\frac{L}{a}$
درصد اختلاف	ماکزیمم تنش بی بعد	درصد اختلاف	ماکزیمم تنش بی بعد	درصد اختلاف	ماکزیمم تنش بی بعد	
نامحدود $\frac{L}{a} = 0.1$		نامحدود $\frac{L}{a} = 0.1$		نامحدود $\frac{L}{a} = 0.1$		
۰	۵/۶۶۷	۰	۵/۲۰۲	۳/۶۵۰	۰	۰/۰۱
۱/۹۴	۵/۷۷۷	۱/۲	۵/۲۶۵	۳/۷۳۷	۲/۳۸	۰/۱
۸/۰۸	۶/۱۲۵	۵/۱	۵/۴۷۲	۴/۰۱۰	۹/۸۴	۰/۲
۱۹/۲۳	۶/۷۵۷	۱۲/۷۱	۵/۸۶۴	۴/۴۹۷	۲۳/۱۸	۰/۳
۳۷/۱۸	۷/۷۷۵	۲۹/۷۰	۶/۵۲۰	۵/۲۵۶	۴۳/۹۸	۰/۴
۷۳/۷۹	۹/۸۵۰	۵۲/۴۲	۷/۹۳۰	۶/۷۲۱	۸۴/۱۰	۰/۵
۱۱۱/۳۹	۱۱/۹۸۱	۸۲/۰۴	۹/۴۷۱	۸/۱۱۸	۱۲۲/۳۸	۰/۶

#### ۴-۶ تأثیر نسبت اضلاع ورق ( $\frac{b}{a}$ )

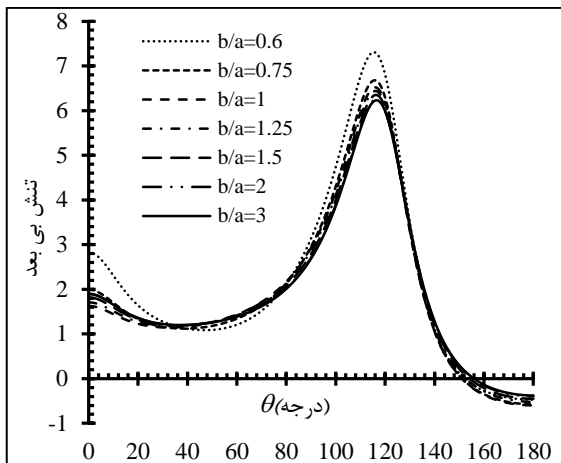
بهمنظور مطالعه‌ی تأثیر نسبت ابعاد ورق، توزیع تنش بی بعد اطراف گشودگی، برای نسبت‌های

مختلف  $\frac{b}{a}$  و سه حالت بارگذاری در شکل ۲۲-۴ تا شکل ۲۴-۴ آورده شده است. از آن جایی که اندازه

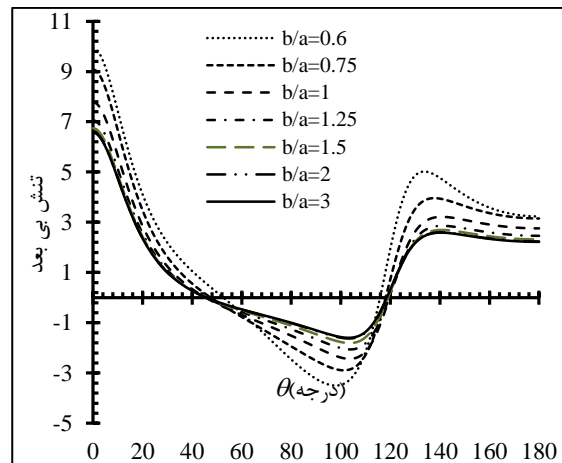
گشودگی به ورق مقداری ثابت و برابر  $\frac{L}{a} = 0/4$  در نظر گرفته شده، کمترین نسبت  $\frac{b}{a}$  می تواند برابر با عدد  $0/4$  باشد که در این صورت دو ضلع ورق مماس بر گشودگی می شوند که این امر در کاربردهای عملی معقول به نظر نمی رسد بنابراین در این قسمت نسبت  $\frac{b}{a}$  های بزرگتر از  $0/6$  بررسی می گردند.

همان طور که مشاهده می گردد با افزایش نسبت  $\frac{b}{a}$  مقدار تنش بی بعد حول گشودگی در سه حالت بارگذاری کاهش می یابد و اختلاف توزیع تنش، با افزایش این نسبت، کاهش پیدا می کند.

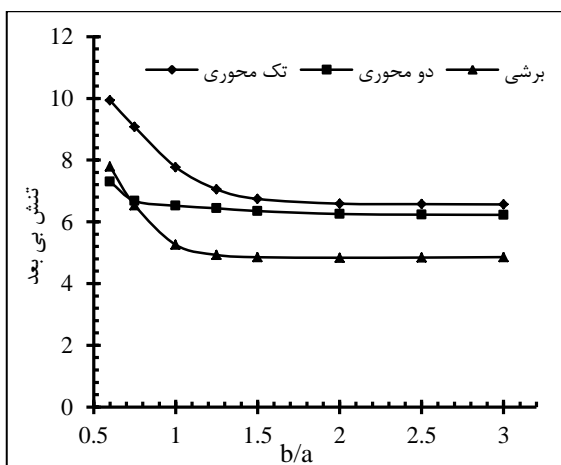
همان طور که در فصل پیش بیان شد علت این امر این است که، ورق در صورتی محدود می باشد که نسبت طول ضلع گشودگی به طول بزرگترین ضلع ورق بزرگتر از  $0/2$  باشد. برای نسبت  $\frac{b}{a}$  های کوچکتر از  $0/4$  (نسبت طول ضلع گشودگی به بزرگترین طول ورق بزرگتر از  $0/2$ ) برقرار است و با کوچک شدن ابعاد، مقدار تنش افزایش می یابد. برای نسبت های  $\frac{b}{a}$  بزرگتر از یک،  $b$  ضلع بزرگتر ورق می شود و در صورتی که، شرایط ورق محدود برای آن صدق نکند تغییر چندانی در مقدار تنش، همانند ورق های نامحدود به وجود نمی آید. به همین خاطر مشاهده می شود که در نسبت  $\frac{b}{a}$  برابر با  $1/5$  و بیشتر از آن تغییر چندانی در مقدار تنش ایجاد نمی شود. شکل ۴-۲۵ ماکزیمم تنش بی بعد را بر حسب نسبت  $\frac{b}{a}$  در سه نوع بارگذاری مورد بحث نشان می دهد. در این جا نیز مشاهده می - گردد با افزایش نسبت  $\frac{b}{a}$  مقدار ماکزیمم تنش بی بعد در سه حالت بارگذاری کاهش می یابد و در نسبت های بزرگتر از  $\frac{b}{a} = 1/5$  مقدار تنش به حالت پایدار رسیده و با افزایش این نسبت تغییر چندانی در مقدار تنش ماکزیمم بی بعد ایجاد نمی شود. همچنین تأثیر نسبت اضلاع ورق برای دو بارگذاری برشی و تک محوری بیشتر از بارگذاری دومحوری می باشد و این کاهش مقدار تنش در این دو بارگذاری با شیب بیشتری اتفاق می افتد. لازم به ذکر است که با تغییر نسبت  $\frac{L}{a}$  به طوری که ورق همچنان محدود باقی بماند می توان گستره ی نسبت  $\frac{b}{a}$  را تغییر داد.



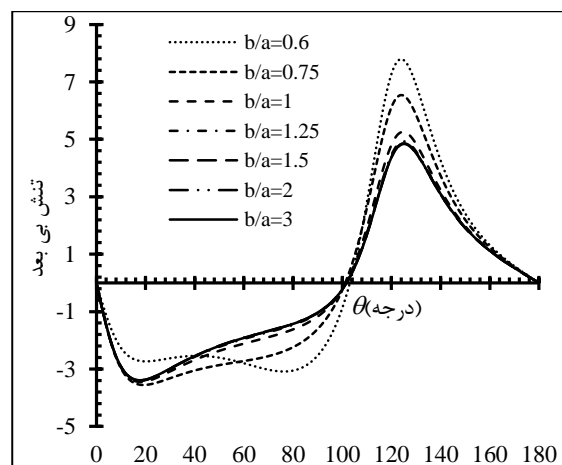
شکل ۲۳-۴ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بارکششی دوماحوری



شکل ۲۲-۴ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بارکششی تکمحوری



شکل ۲۵-۴ ماکزیمم تنش حول گشودگی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت بارگذاری



شکل ۲۴-۴ توزیع تنش حول گشودگی در  $\frac{b}{a}$  های مختلف تحت بار برشی

## ۷-۴ جمع‌بندی

در این فصل، توزیع تنش حول گشودگی مثلثی در ورق محدود بررسی گردید. تأثیر انحنای گوشه‌ی گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، نسبت ابعاد ورق، نسبت اندازه‌ی گشودگی به بزرگترین طول ورق و نوع بارگذاری به‌عنوان پارامترهای مهم در توزیع تنش اطراف این گشودگی مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج حاصل از این فصل نشان داد که در گشودگی مثلثی با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی در تمام زوایای چرخش، مقدار تنش افزایش می‌یابد و این افزایش در بارگذاری کششی تک-



محوری و دومحوری با شیب بیشتری اتفاق می‌افتد. محلی که بیشترین تنش بی‌بعد در اطراف گشودگی اتفاق می‌افتد در بارگذاری‌های مختلف، متفاوت است. در بارگذاری کششی تک‌محوری برای تمامی انحنایها، این تنش در  $\theta=0^\circ$ ، برای بارگذاری دومحوری این تنش در زاویه بین  $111^\circ$  تا  $118^\circ$  و در بارگذاری برشی برای تمامی انحنایها این تنش در زاویه بین  $120^\circ$  تا  $130^\circ$  رخ می‌دهد. تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی مثلثی در بارگذاری‌های مختلف، متفاوت است. برای  $\frac{L}{a}=0/4$ ،  $\frac{b}{a}=1$  و  $m=0/2$  مشاهده گردید که در بارگذاری کششی تک‌محوری کمترین مقدار تنش در زاویه‌ی چرخش  $30^\circ$  و بیشترین مقدار تنش در زاویه‌ی چرخش  $0^\circ$  و  $60^\circ$  اتفاق می‌افتد. در بارگذاری کششی دومحوری کمترین مقدار تنش، در زاویه‌ی چرخش  $0^\circ$  و بیشترین مقدار تنش، در زاویه‌ی چرخش  $30^\circ$  و برای بارگذاری برشی کمترین مقدار تنش، در زاویه‌ی چرخش  $30^\circ$  و بیشترین مقدار تنش، در زاویه‌ی چرخش  $15^\circ$  و  $45^\circ$  رخ می‌دهد. با افزایش اندازه‌ی گشودگی در هر سه حالت بارگذاری، مقدار تنش افزایش یافت که مقدار این افزایش در بارگذاری کششی تک‌محوری بیشتر از دو بارگذاری دیگر صورت گرفت. در این بخش نیز با مقایسه‌ی مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در نسبت‌های مختلف با مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در ورق نامحدود، نشان داده شد که از حل ورق نامحدود نمی‌توان برای حل ورق‌هایی با نسبت  $\frac{L}{a}$  بزرگتر از  $0/2$  (ورق محدود) استفاده نمود. همچنین با تغییر نسبت ابعاد ورق، ابتدا کاهش مقدار تنش و سپس ثابت ماندن این مقدار برای نسبت‌های بزرگتر از  $\frac{b}{a}=1/5$  در سه حالت بارگذاری مشاهده گردید. نتایج نشان داد که با انتخاب صحیح پارامترهای یاد شده می‌توان از مقدار تنش در اطراف گشودگی کاست.



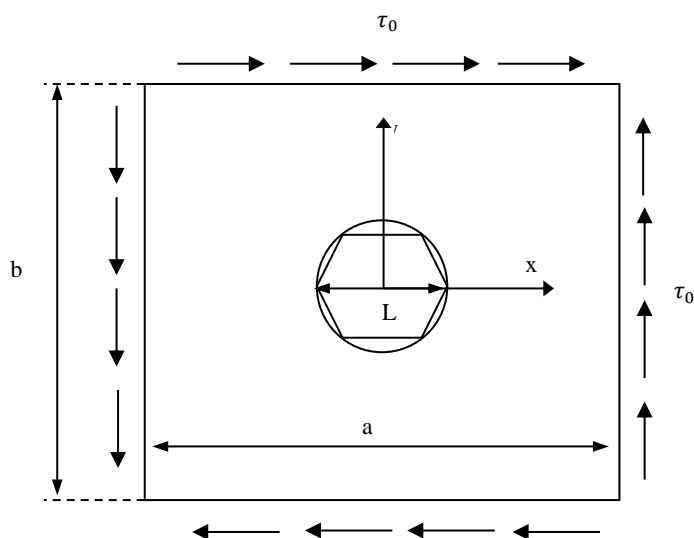
## فصل ۵

### گشودگی‌های $n$ ضلعی

---

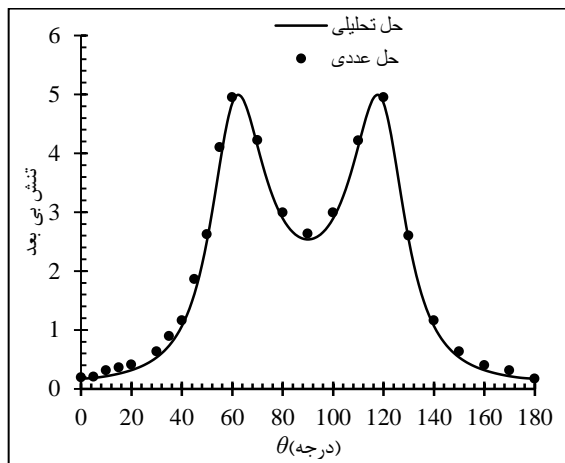
## ۵-۱ مقدمه

در این فصل همانند فصل‌های پیشین به بررسی تأثیر پارامترهای بارگذاری، انحنای گوشه‌های گشودگی، چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت ضلع گشودگی به ضلع ورق بر توزیع تنش اطراف گشودگی‌های پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، هفت‌ضلعی و هشت‌ضلعی پرداخته می‌شود. برای گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع بیشتر از هشت رفتار گشودگی به گشودگی دایره‌ای نزدیک می‌شود که از آوردن نتایج برای آن‌ها صرف‌نظر شده است. در این گشودگی‌ها با افزایش تعداد اضلاع گشودگی طول ضلع گشودگی کاهش یافته و به همین خاطر نسبت طول ضلع گشودگی به طول ضلع ورق معیاری مناسب برای تعیین محدود و یا نامحدود بودن ورق نخواهد بود. بنابراین در این اشکال همانند شکل ۵-۱ طول قطر دایره محیط بر چند ضلعی  $L$  در نظر گرفته شده و بر اساس آن محدود بودن و یا نامحدود بودن ورق تعیین شده است. توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی برای این اشکال در حالت  $\beta=0$ ،  $\frac{L}{a}=0.4$ ،  $\frac{b}{a}=1$  و  $m=0.05$  در هر سه نوع بارگذاری مورد بحث آورده شده است. همانند فصل‌های قبل در هر بخش با تغییر یکی از پارامترها و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها، تأثیر هر کدام بر توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی بررسی می‌گردد.

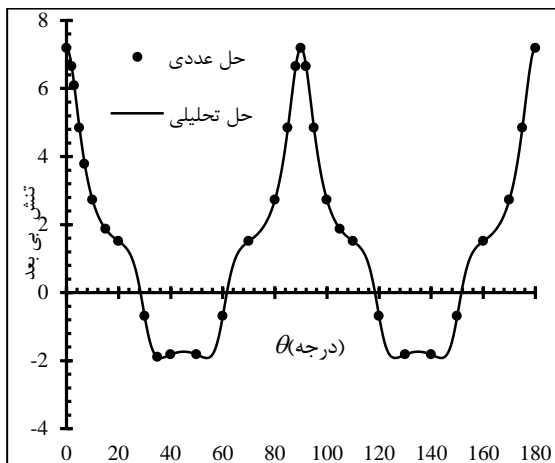


شکل ۵-۱ ورق محدود حاوی گشودگی شش‌ضلعی تحت بار برشی

در شکل ۲-۵ و شکل ۳-۵ مقایسه حل تحلیلی و عددی برای بارگذاری‌های تک‌محوری و دو‌محوری در گشودگی شش‌ضلعی آورده شده است.



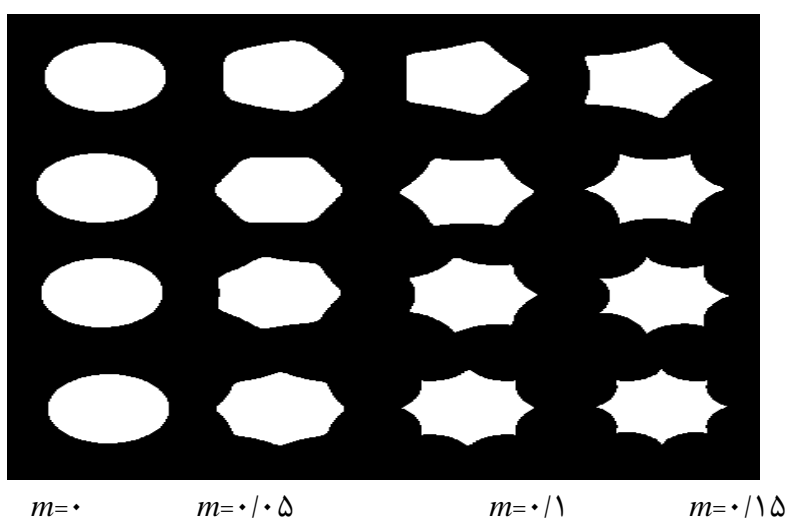
شکل ۳-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی شش‌ضلعی تحت بار کششی دو‌محوری از روش تحلیلی و عددی



شکل ۲-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی شش‌ضلعی تحت بار کششی تک‌محوری از روش تحلیلی و عددی

## ۲-۵ تأثیر انحنای گشودگی ( $m$ )

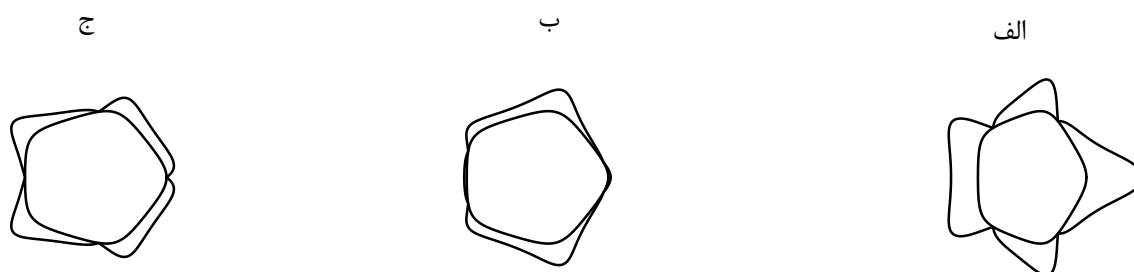
پیشتر بیان شد پارامتر  $m$  مستقیماً بر هندسه‌ی گشودگی تأثیر می‌گذارد، شکل ۴-۵ تأثیر این پارامتر را بر انحنای گوشه‌های گشودگی پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، هفت‌ضلعی و هشت‌ضلعی نشان می‌دهد. به علت تقارن در بارگذاری و شکل گشودگی‌ها نمودارهای این بخش تا  $\theta=180^\circ$  آورده شده‌اند.



شکل ۴-۵ روند تأثیر پارامتر  $m$  بر انحنای گوشه‌های گشودگی پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، هفت‌ضلعی و هشت‌ضلعی

### ۵-۲-۱ گشودگی پنج‌ضلعی

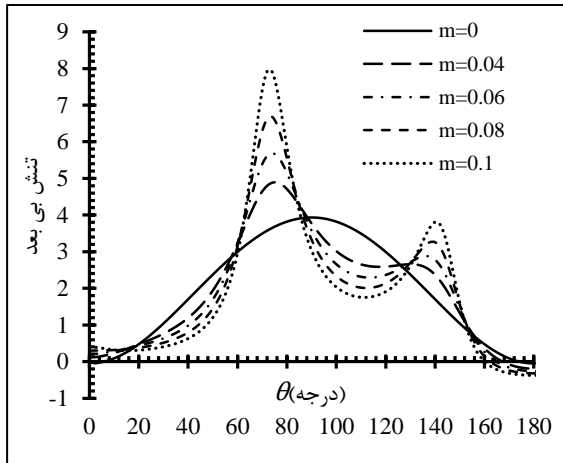
در شکل ۵-۵ تفاوت نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد اطراف گشودگی پنج‌ضلعی برای حالت‌های مختلف بارگذاری مشاهده می‌شود. در بارگذاری تک‌محوری بیشترین تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\theta=0^\circ$ ، در بارگذاری دو‌محوری در  $\theta=72^\circ$  و  $\theta=288^\circ$  و در بارگذاری برشی در  $\theta=144^\circ$  و  $\theta=216^\circ$  ایجاد می‌گردد.



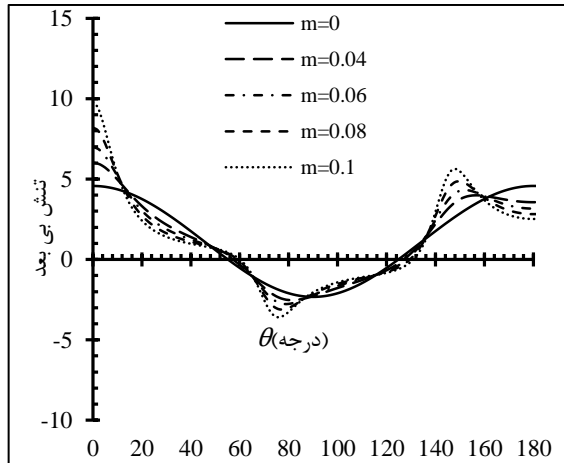
شکل ۵-۵ نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی تحت بار (الف) تک‌محوری، (ب) دو‌محوری  $\lambda=2$ ، (ج) برشی

در شکل ۵-۶ و شکل ۵-۸ توزیع تنش اطراف گشودگی پنج‌ضلعی در سه حالت بارگذاری تک‌محوری، دو‌محوری و برشی، برای انحنای مختلف آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می‌یابد. در بارگذاری تک‌محوری، برای تمامی انحنای، ماکزیمم تنش بی‌بعد در  $\theta=0^\circ$  و در بارگذاری دو‌محوری به جز حالت  $m=0$  که ماکزیمم تنش در  $\theta=90^\circ$  اتفاق می‌افتد، برای سایر انحنای این مقدار حوالی  $\theta=74^\circ$  رخ می‌دهد. در بارگذاری برشی نیز برای  $m=0$  ماکزیمم تنش در  $\theta=45^\circ$  و  $\theta=135^\circ$  و برای سایر انحنای حوالی  $\theta=144^\circ$  و  $\theta=216^\circ$  اتفاق می‌افتد. شکل ۵-۹ ماکزیمم تنش بی‌بعد را در سه حالت بارگذاری، برای انحنای مختلف مقایسه می‌کند. دیده می‌شود کمترین تنش ایجادشده حول

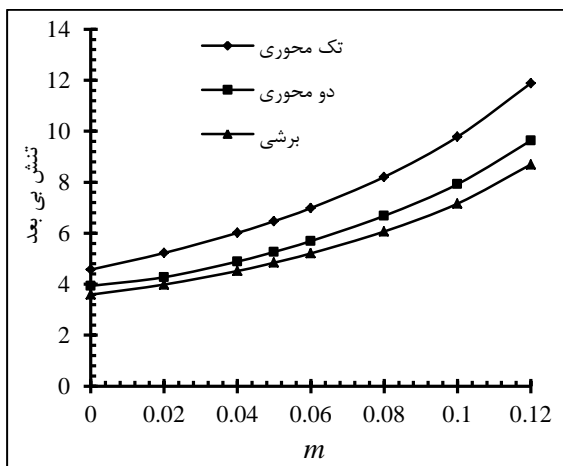
گشودگی مربوط به  $m=0$  می‌باشد که در این حالت گشودگی پنج‌ضلعی به گشودگی دایروی تبدیل می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که علاوه بر اینکه افزایش میزان انحنای مقدار تنش را در سه حالت بارگذاری افزایش می‌دهد، این تأثیر در بارگذاری تک‌محوری بیشتر از دو بارگذاری دیگر بوده است.



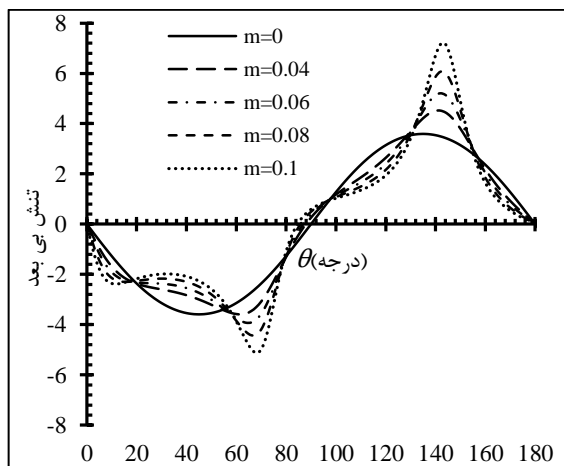
شکل ۷-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار دو محوری ( $\lambda=2$ )



شکل ۶-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار تک‌محوری



شکل ۹-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب انحنای مختلف در سه بارگذاری

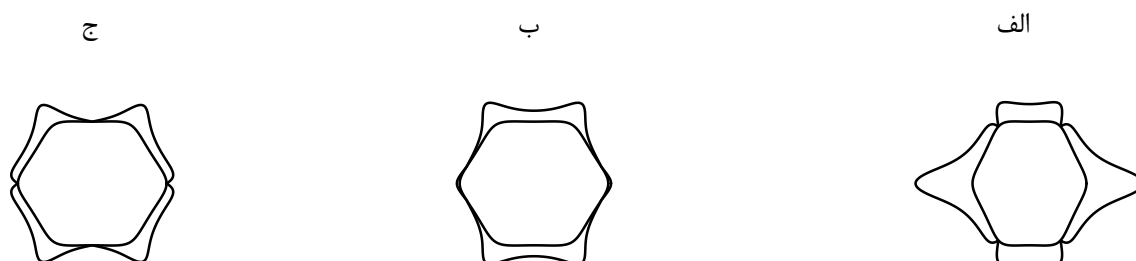


شکل ۸-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار برشی

## ۵-۲-۲ شش ضلعی

در شکل ۱۰-۵ توزیع تنش بی‌بعد اطراف گشودگی شش ضلعی برای حالت‌های مختلف بارگذاری

مشاهده می‌گردد. در بارگذاری تک‌محوری بیشترین تنش بی‌بعد حول گشودگی در  $\theta=0^\circ$  و  $\theta=180^\circ$ ، در بارگذاری دومحوری و برشی در  $\theta=60^\circ$ ،  $120^\circ$ ،  $240^\circ$ ،  $300^\circ$  ایجاد می‌شود.

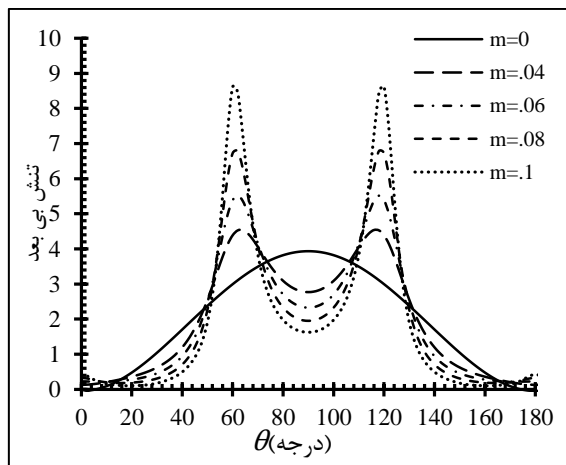


شکل ۵-۱۰ نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی شش‌ضلعی تحت بار (الف) تک‌محوری، (ب) دومحوری  $\lambda=2$ ، (ج) برشی

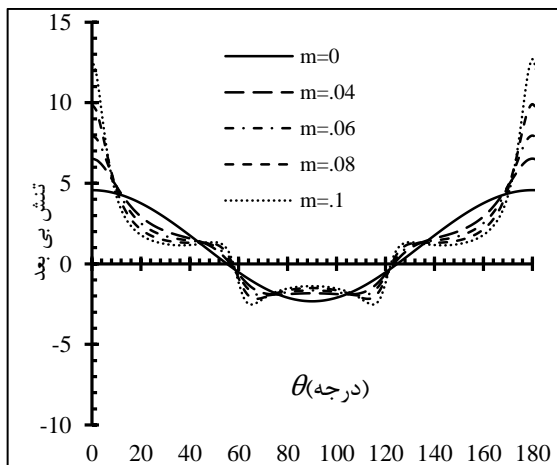
در شکل ۵-۱۱ تا شکل ۵-۱۳ توزیع تنش اطراف گشودگی شش‌ضلعی در سه حالت بارگذاری تک‌محوری، دومحوری و برشی، برای انحنای مختلف آورده شده است. مشاهده می‌گردد با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی در زاویه‌ی چرخش صفر درجه و انحنای بررسی‌شده مقدار تنش در هر سه نوع بارگذاری افزایش می‌یابد. در بارگذاری تک‌محوری، برای تمامی انحنای، ماکزیمم تنش بی‌بعد در  $\theta=0^\circ$  و در بارگذاری دومحوری به جز حالت  $m=0$  که ماکزیمم تنش در  $\theta=90^\circ$  اتفاق می‌افتد برای سایر انحنای این مقدار حوالی  $\theta=60^\circ$  و  $\theta=120^\circ$  رخ می‌دهد. در نهایت در بارگذاری برشی نیز برای  $m=0$  ماکزیمم تنش در  $\theta=45^\circ$  و  $\theta=135^\circ$  و برای سایر انحنای حوالی  $\theta=60^\circ$  و  $\theta=120^\circ$  اتفاق می‌افتد. شکل ۵-۱۴ ماکزیمم تنش بی‌بعد را در سه حالت بارگذاری، برای انحنای مختلف مقایسه می‌کند. دیده می‌شود که با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی مقدار تنش در بارگذاری تک‌محوری و برشی افزایش ولی در بارگذاری دومحوری در  $m=0/0.2$  کاهش و سپس افزایش می‌یابد. بنابراین کمترین تنش ایجادشده حول گشودگی برای بارگذاری تک‌محوری و برشی مربوط به  $m=0$  (گشودگی دایروی) و برای بارگذاری دومحوری  $m=0/0.2$  می‌باشد. این نتایج برای زاویه‌ی چرخش صفر درجه در انحنای گوناگون آورده شده است و با توجه به روندی که در این قسمت برای بارگذاری برشی دیده



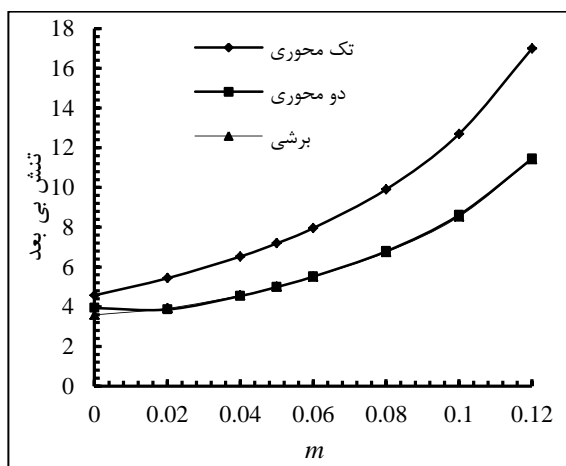
شد ممکن است در زوایای چرخش دیگری نیز چنین روندی مشاهده گردد. این امر به بررسی همزمان پارامترهای چرخش و انحنا نیاز دارد.



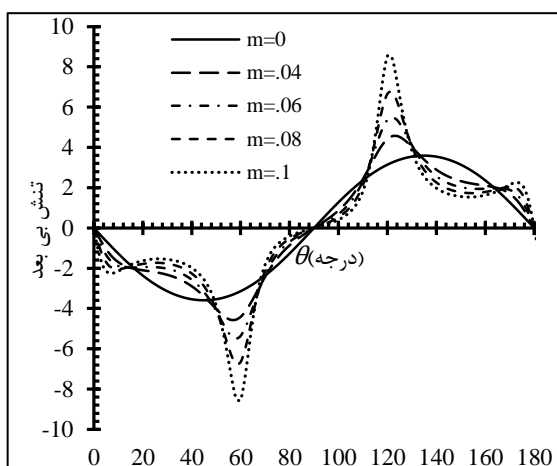
شکل ۵-۱۲ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار دوماحوری ( $\lambda=2$ )



شکل ۵-۱۱ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار تک محوری



شکل ۵-۱۴ ماکزیمم تنش بی بعد بر حسب انحنای مختلف در سه بارگذاری

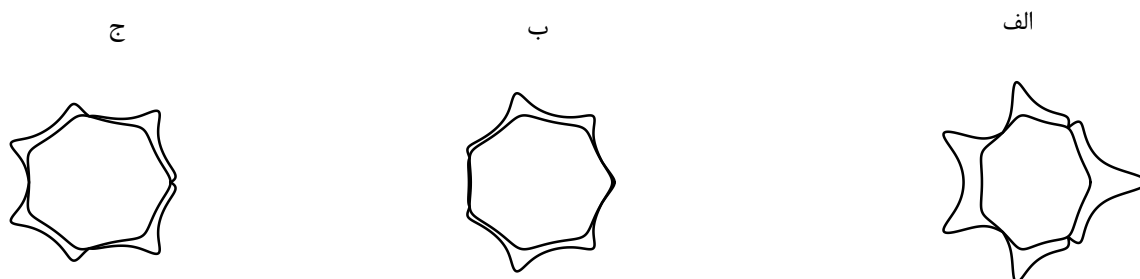


شکل ۵-۱۳ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار برشی

### ۵-۲-۳ هفت ضلعی

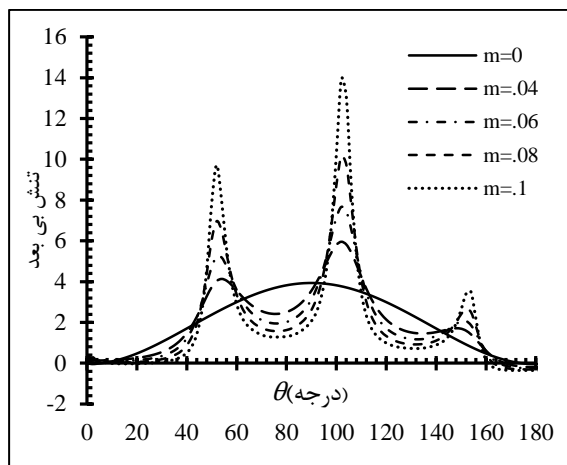
شکل ۵-۱۵ نحوه‌ی توزیع تنش بی بعد اطراف گشودگی هفت ضلعی را برای حالت‌های مختلف بارگذاری نشان می‌دهد. برای این گشودگی در بارگذاری تک محوری بیشترین تنش بی بعد حول گشودگی در  $\theta=0^\circ$ ، در بارگذاری دوماحوری در  $257^\circ$  و  $102^\circ$  و در بارگذاری برشی در

$30.8^\circ$  و  $\theta = 51^\circ$  رخ می دهد.

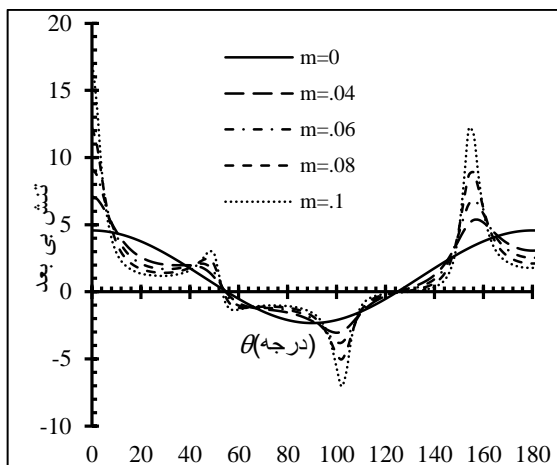


شکل ۵-۱۵ نحوه ی توزیع تنش بی بعد حول گشودگی هفت ضلعی تحت بار (الف) تک محوری، (ب) دو محوری  $\lambda=2$ ، (ج) برشی

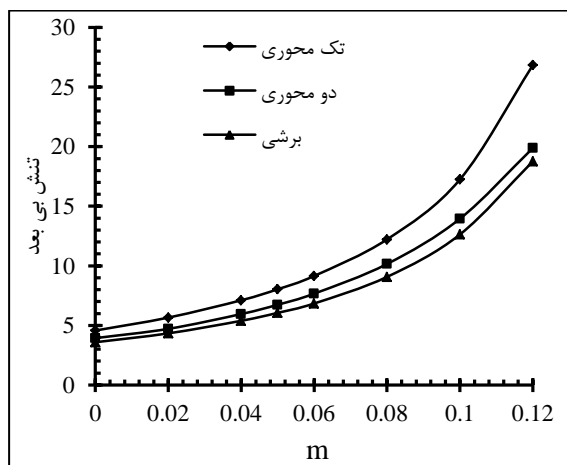
در شکل ۵-۱۶ تا شکل ۵-۱۸ توزیع تنش اطراف گشودگی هفت ضلعی برای بارگذاری های مختلف مورد نظر در انحناهای مختلف آورده شده است. در این گشودگی نیز با افزایش انحنا گوشه های گشودگی مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می یابد و هرچه این انحنا بیشتر باشد مقدار افزایش تنش نیز به مقدار بیشتری صورت می گیرد. همانند سایر اشکال در گشودگی هفت ضلعی نیز در تمامی بارگذاری ها با افزایش انحنا، محل ایجاد ماکزیمم تنش حول گشودگی گوشه های بحرانی ذکر شده در ابتدای این قسمت (با اختلاف چند درجه ای) می باشند. شکل ۵-۱۹ ماکزیمم تنش بی بعد را در هر سه حالت بارگذاری، برای انحناهای مختلف مقایسه می کند. همان طور که مشاهده می گردد کمترین تنش ایجاد شده حول گشودگی در هر سه نوع بارگذاری مربوط به  $m=0$  (گشودگی دایروی) می باشد. در بارگذاری تک محوری برای  $m=0/0.5$  (انحنا مورد بررسی در سایر پارامترها) افزایش ۷۵ درصدی ماکزیمم تنش نسبت به ماکزیمم تنش حالت دایروی مشاهده می گردد. این افزایش در بارگذاری دو محوری ۷۱ درصد و در بارگذاری برشی ۶۹ درصد می باشد. با توجه به اینکه هرچه انحنا بیشتر می گردد شیب نمودارهای شکل ۵-۱۹ بیشتر می گردد این تأثیر در بارگذاری تک محوری بیشتر از دو بارگذاری دیگر خواهد بود.



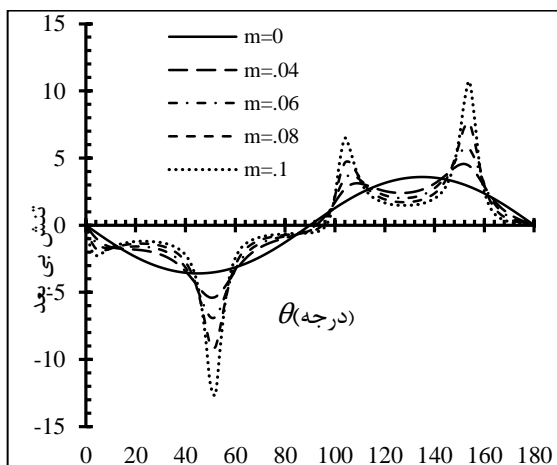
شکل ۵-۱۷ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار دمحوری ( $\lambda=2$ )



شکل ۵-۱۶ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار تک محوری



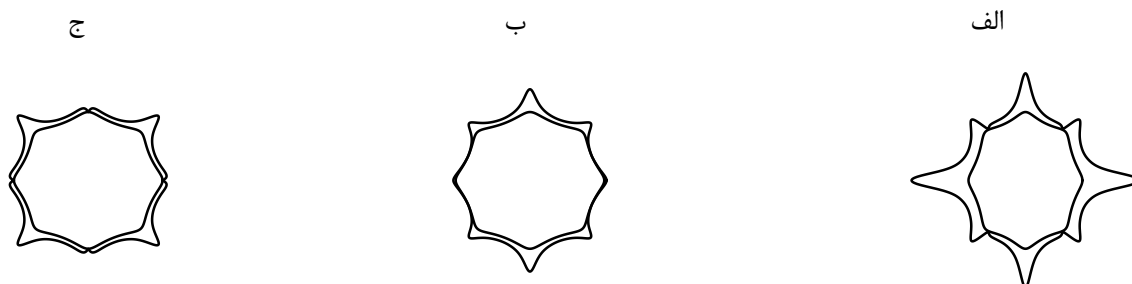
شکل ۵-۱۹ ماکزیمم تنش بی بعد بر حسب انحنای مختلف در سه بارگذاری



شکل ۵-۱۸ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار برشی

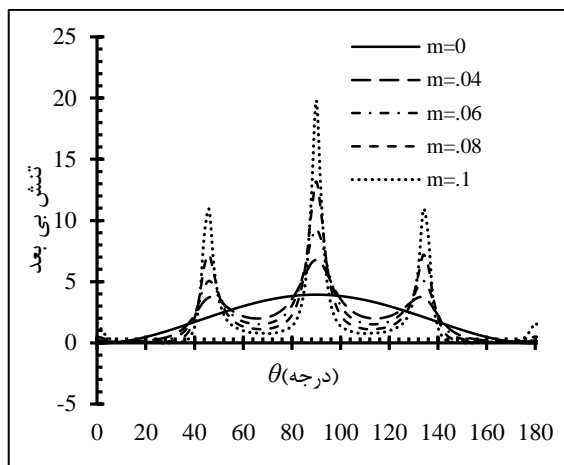
## ۴-۲-۵ هشت ضلعی

شکل ۵-۲۰ نحوه‌ی توزیع تنش بی بعد اطراف گشودگی هشت ضلعی را برای حالت‌های مختلف بارگذاری نشان می‌دهد. در این گشودگی در بارگذاری تک محوری بیشترین تنش بی بعد حول گشودگی در  $0^\circ$ ،  $180^\circ$ ، در بارگذاری دمحوری در  $270^\circ$  و  $90^\circ$  و در بارگذاری برشی در  $270^\circ$ ،  $225^\circ$ ،  $135^\circ$ ،  $45^\circ$  ایجاد می‌شود.

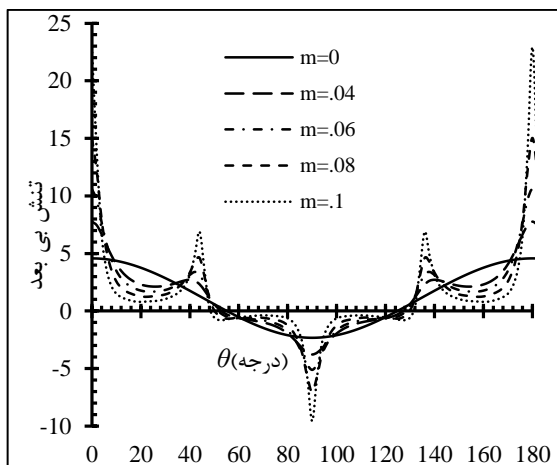


شکل ۵-۲۰ نحوه ی توزیع تنش بی بعد حول گشودگی هشت ضلعی تحت بار (الف) تک محوری، (ب) دومحوری  $\lambda=2$ ، (ج) برشی

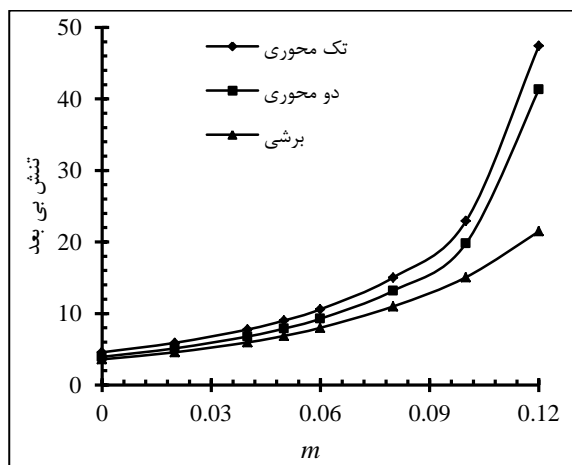
شکل ۵-۲۱ تا شکل ۵-۲۳ توزیع تنش اطراف گشودگی هشت ضلعی را در حالات مختلف بارگذاری نشان می دهند. مشاهده می گردد که در این گشودگی با زاویه ی چرخش انتخاب شده در تمامی بارگذاری ها با افزایش انحنای گوشه های گشودگی مقدار تنش افزایش می یابد. همچنین در هر سه نوع بارگذاری هم برای حالت  $m=0$  و هم سایر انحنای محل ایجاد ماکزیمم تنش حول گشودگی یکسان و برابر با زوایای اعلام شده در ابتدای این قسمت می باشد. علت این امر این است که با افزایش تعداد اضلاع گشودگی هندسه به حالت هندسه ی گشودگی دایروی نزدیک می شود. شکل ۵-۲۴ ماکزیمم تنش بی بعد را در سه حالت بارگذاری، برای انحنای مختلف مقایسه می کند. کمترین تنش ایجاد شده حول گشودگی مربوط به  $m=0$  می باشد. مقدار ماکزیمم تنش حول گشودگی هشت ضلعی در بارگذاری تک محوری برای حالت  $m=0/0.5$ ، ۹۷ درصد بیشتر از ماکزیمم تنش حول گشودگی دایروی با همین شرایط می باشد. این افزایش در بارگذاری دومحوری ۱۰۰ درصد و در بارگذاری برشی ۹۱ درصد می باشند.



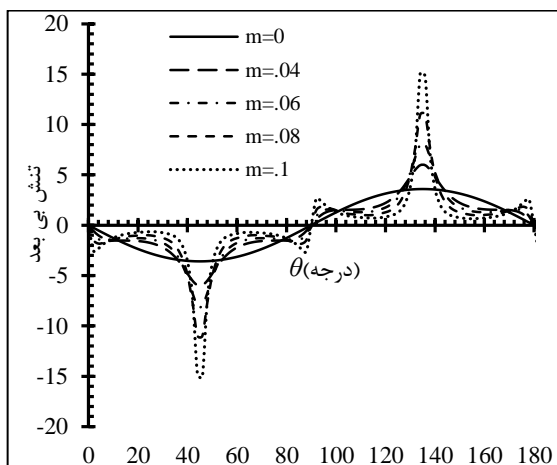
شکل ۲۲-۵ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار دومحوری ( $\lambda=2$ )



شکل ۲۱-۵ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار تک محوری



شکل ۲۴-۵ ماکزیمم تنش بی بعد بر حسب انحنای مختلف در سه بارگذاری



شکل ۲۳-۵ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در انحنای مختلف تحت بار برشی

### ۳-۵ تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی ( $\beta$ )

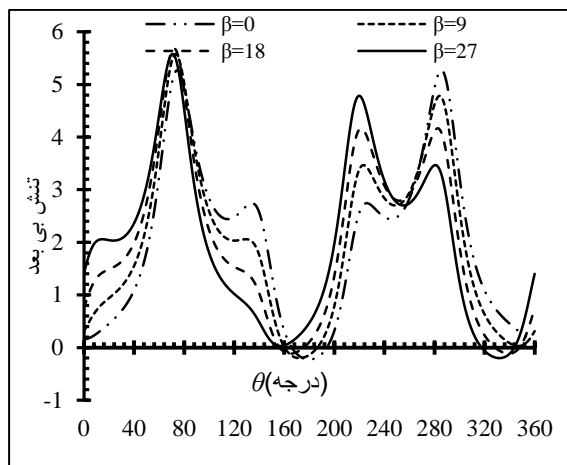
در این قسمت تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر توزیع تنش اطراف گشودگی‌های  $n$  ضلعی بررسی می‌گردد. همان‌طور که در فصل‌های قبلی ملاحظه گردید انتخاب صحیح این پارامجمله‌ی تواند به مقدار چشمگیری از مقدار تنش ماکزیمم حول گشودگی بکاهد. در این قسمت نمودارهای گشودگی با اضلاع زوج تا  $\theta=180^\circ$  و با اضلاع فرد به علت از بین رفتن تقارن حول گشودگی بر اثر چرخش تا  $\theta=360^\circ$  آورده شده است. تمام نتایج این قسمت در حالت  $\frac{L}{a}=0.4$ ،  $\frac{b}{a}=1$  و  $m=0.5$

آورده شده است. از آن جایی که محلّ ماکزیمم تنش حول گشودگی در زاویه‌ی چرخش صفر درجه در بخش‌های قبلی تعیین گردیده از تکرار مجدد آن‌ها در این بخش برای گشودگی‌های مختلف پرهیز شده است.

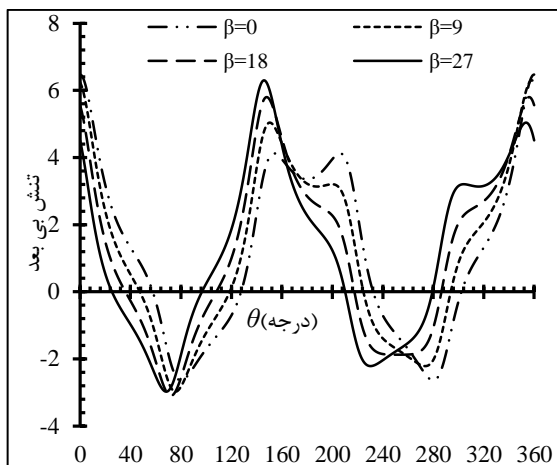
### ۵-۳-۱ گشودگی پنج‌ضلعی

در شکل ۵-۲۵ تا شکل ۵-۲۷، توزیع تنش اطراف گشودگی پنج‌ضلعی برای زوایای چرخش صفر درجه،  $9^\circ$ ،  $18^\circ$  و  $27^\circ$ ، در سه نوع بارگذاری آورده شده است. دوره‌ی تناوب چرخش برای گشودگی پنج‌ضلعی  $36^\circ$  می‌باشد به همین علّت زوایای فوق بررسی شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌گردد چرخش تأثیر بسزایی در نحوه توزیع و مقدار تنش اطراف گشودگی پنج‌ضلعی در هر سه نوع بارگذاری مورد بحث دارد. در بارگذاری تک‌محوری برای زاویه‌ی چرخش  $9^\circ$  ماکزیمم تنش در  $\theta=0^\circ$  و برای زاویه‌ی چرخش  $18^\circ$  ماکزیمم تنش در  $\theta=144^\circ$  و  $\theta=0^\circ$  و برای زاویه‌ی چرخش  $27^\circ$  در  $\theta=144^\circ$  واقع است. در بارگذاری دومحوری نیز برای تمام زوایای چرخش  $\theta=72^\circ$  محلّ ایجاد ماکزیمم تنش حول گشودگی می‌باشد. در بارگذاری برشی نیز بسته به مقدار زاویه‌ی چرخش، محلّی که بیشترین تنش در اطراف گشودگی رخ می‌دهد؛ متفاوت خواهد بود.

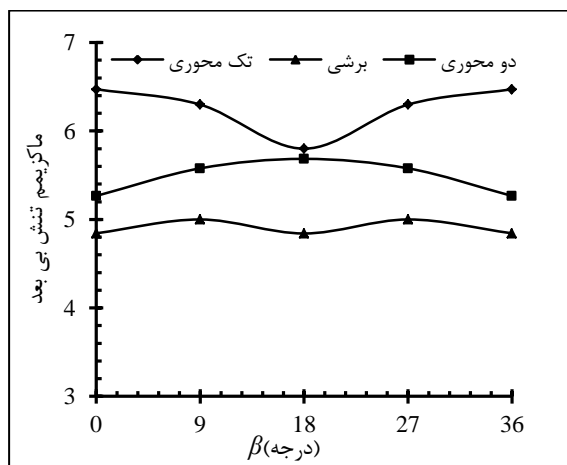
در شکل ۵-۲۸ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی برحسب زوایای چرخش در سه حالت بارگذاری مقایسه شده است. باتوجه به این شکل، در بارگذاری تک‌محوری، تنش نامطلوب در زوایای چرخش صفر درجه و  $36^\circ$  و در بارگذاری دومحوری در زاویه‌ی چرخش  $18^\circ$  اتفاق می‌افتد. در بارگذاری برشی نیز تنش نامطلوب در زوایای  $9^\circ$  و  $27^\circ$  رخ می‌دهد. نتایج تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی در بارگذاری‌های مختلف بر مقدار تنش مطلوب و نامطلوب در جدول ۵-۱ آورده شده است.



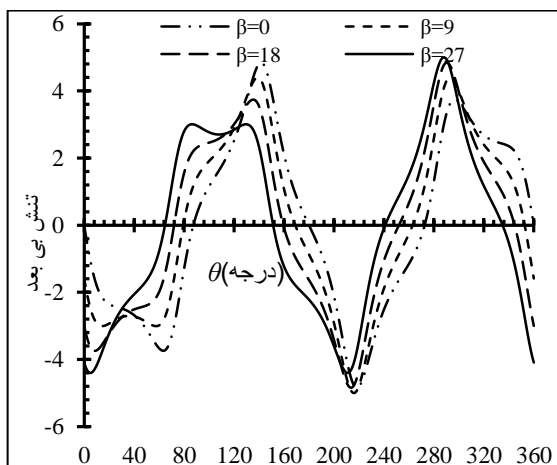
شکل ۲۶-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دومحوری ( $\lambda=2$ )



شکل ۲۵-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک‌محوری



شکل ۲۸-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد برحسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری



شکل ۲۷-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی

جدول ۱-۵ مقادیر و زوایای تنش مطلوب و نامطلوب در سه حالت بارگذاری

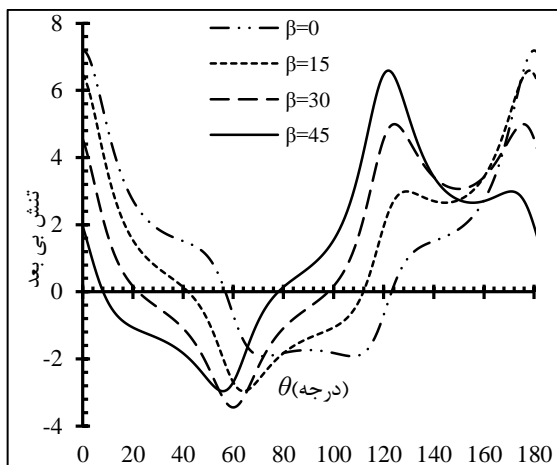
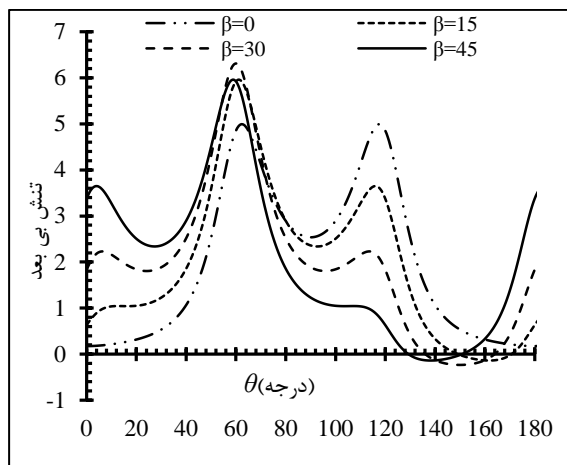
نوع بارگذاری	زاویه چرخش تنش مطلوب (درجه)	مقدار تنش مطلوب	زاویه چرخش تنش نامطلوب (درجه)	مقدار تنش نامطلوب
تک‌محوری	۱۸	۵/۰۷	۰،۳۶	۶/۴۷
دومحوری	۰،۳۶	۵/۲۶	۱۸	۵/۶۸
برشی	۱۸	۴/۸۴	۹،۲۷	۴/۹۹

### ۵-۳-۲ گشودگی شش ضلعی

در گشودگی شش ضلعی دوره‌ی تناوب چرخش  $60^\circ$  می‌باشد، بنابراین در شکل ۵-۲۹ تا شکل ۵-۳۱ توزیع تنش اطراف گشودگی شش ضلعی برای زوایای چرخش صفر درجه،  $15^\circ$ ،  $30^\circ$  و  $45^\circ$  در سه نوع بارگذاری مورد بحث آورده شده است. در بارگذاری تک‌محوری برای زاویه‌ی چرخش صفر درجه و  $15^\circ$  ماکزیمم تنش در صفر درجه،  $\theta=180^\circ$  و برای زوایای چرخش  $30^\circ$  و  $45^\circ$  در  $\theta=120^\circ$  واقع است. در بارگذاری دومحوری نیز برای زاویه‌ی چرخش  $18^\circ$ ، محلی که بیشترین تنش در اطراف گشودگی رخ می‌دهد  $\theta=72^\circ$  است. برای زاویه‌ی چرخش  $36^\circ$ ، این زاویه  $72^\circ$  و  $\theta=216^\circ$  و در نهایت برای زاویه‌ی چرخش  $54^\circ$ ،  $\theta=216^\circ$  محلّ ایجاد ماکزیمم تنش حول گشودگی می‌باشند. در بارگذاری برشی نیز بسته به مقدار زاویه‌ی چرخش،  $0^\circ$ ،  $60^\circ$ ،  $120^\circ$  محلّ ایجاد ماکزیمم تنش حول گشودگی خواهند بود.

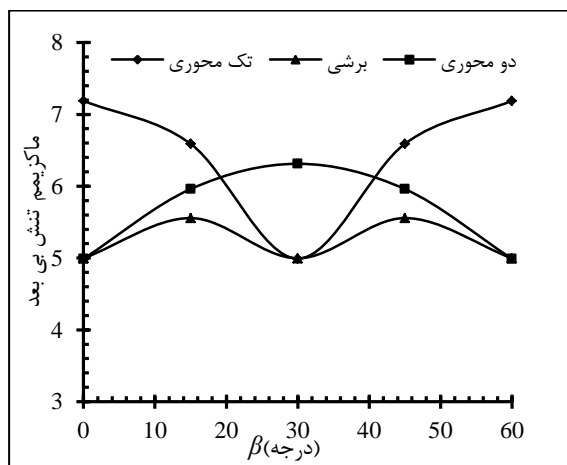
شکل ۵-۳۲ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی برحسب زوایای چرخش را در سه حالت بارگذاری نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد که در بارگذاری تک‌محوری، تنش نامطلوب در زوایای چرخش صفر درجه و  $60^\circ$  و در بارگذاری دومحوری در زاویه‌ی چرخش صفر درجه اتفاق می‌افتد. برای بارگذاری برشی نیز تنش نامطلوب را در زوایای چرخش  $15^\circ$  و  $45^\circ$  خواهیم داشت. نتایج تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی در بارگذاری‌های مختلف بر مقدار تنش مطلوب و نامطلوب در جدول ۵-۲ آورده شده است.



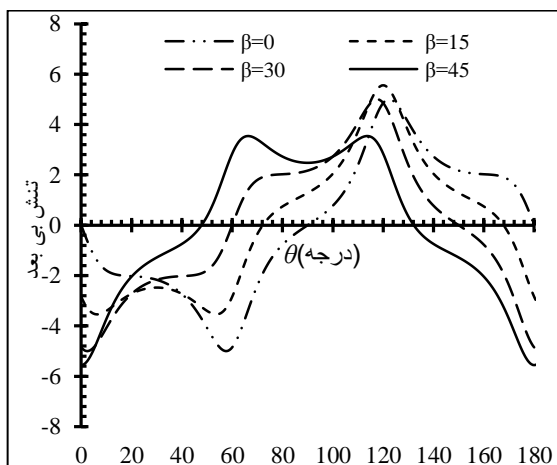


شکل ۵-۳۰ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دومحوری ( $\lambda=2$ )

شکل ۵-۲۹ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک محوری



شکل ۵-۳۲ ماکزیمم تنش بی بعد بر حسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری



شکل ۵-۳۱ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی

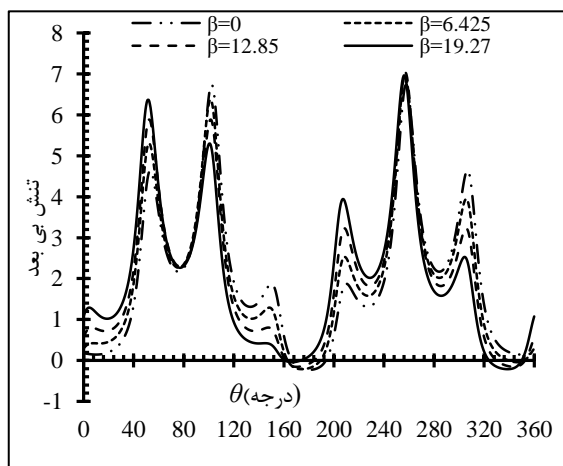
جدول ۵-۲ مقادیر و زوایای تنش مطلوب و نامطلوب در سه حالت بارگذاری

مقدار تنش نامطلوب	زاویه چرخش تنش نامطلوب (درجه)	مقدار تنش مطلوب	زاویه چرخش تنش مطلوب (درجه)	نوع بارگذاری
۷/۱۸	۶۰،۰	۴/۹۹	۳۰	تک محوری
۶/۳۱	۳۰	۴/۹۹	۶۰،۰	دومحوری
۵/۵۵	۱۵،۴۵	۴/۹۹	۳۰	برشی

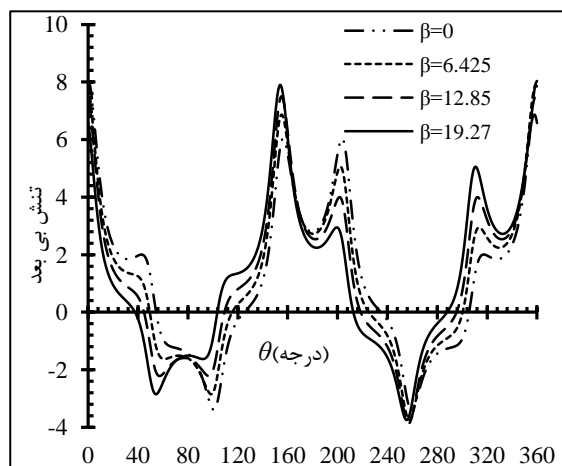
## ۵-۳-۳ گشودگی هفت ضلعی

در گشودگی هفت ضلعی دوره‌ی تناوب چرخش  $25/71^\circ$  می‌باشد، بنابراین در شکل ۵-۳۳ تا شکل ۵-۳۵، توزیع تنش اطراف گشودگی هفت ضلعی برای زوایای چرخش صفر درجه،  $6/42^\circ$ ،  $12/85^\circ$  و  $19/27^\circ$ ، در سه نوع بارگذاری مورد بحث آورده شده است. مشاهده می‌گردد در هر بارگذاری بسته به زاویه‌ی چرخش انتخاب شده، گوشه‌های مختلف گشودگی هفت ضلعی، محلّ ایجاد ماکزیمم تنش حول گشودگی می‌باشند. در بارگذاری تک‌محوری گوشه‌های هفت ضلعی با زوایای  $0^\circ$  و  $154^\circ$  و در بارگذاری دومحوری با زاویه‌ی  $257^\circ$  و در نهایت در بارگذاری برشی با زوایای  $51^\circ$ ،  $205^\circ$  و  $308^\circ$  محلّ ایجاد ماکزیمم تنش حول گشودگی می‌باشند.

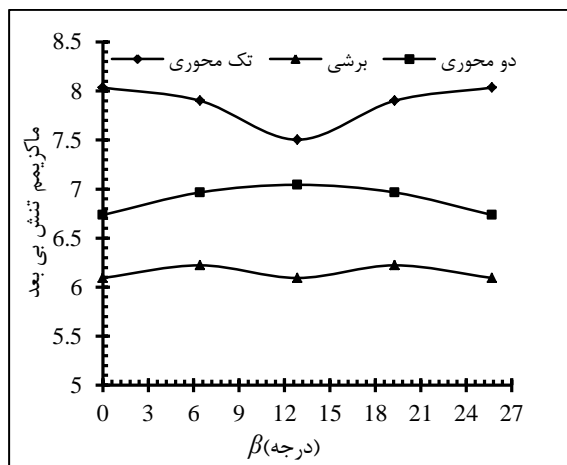
شکل ۵-۳۶ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی را برحسب زوایای چرخش در سه حالت بارگذاری نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد زوایای چرخش نامطلوب در بارگذاری تک‌محوری صفر درجه،  $25/71^\circ$  و در بارگذاری دومحوری  $12/85^\circ$  می‌باشند. برای بارگذاری برشی نیز زوایای  $19/27^\circ$ ،  $6/42^\circ$  محلّ ایجاد ماکزیمم تنش حول گشودگی می‌باشند. نتایج تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی در بارگذاری‌های مختلف بر مقدار تنش مطلوب و نامطلوب در جدول ۵-۳ آورده شده است.



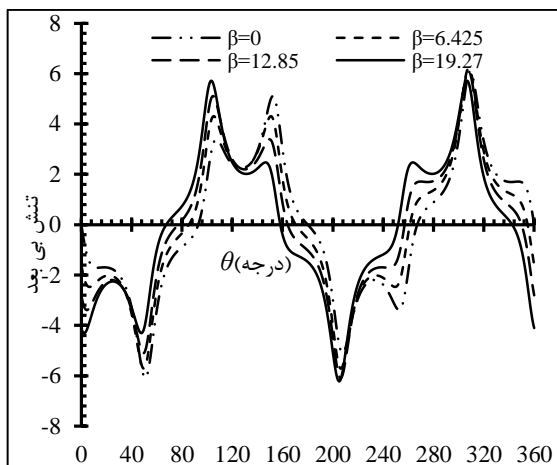
شکل ۵-۳۴ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دومحوری ( $\lambda=2$ )



شکل ۵-۳۳ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک‌محوری



شکل ۳۶-۵ مکزیتم تنش بی‌بعد برحسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری



شکل ۳۵-۵ توزیع تنش بی‌بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی

جدول ۳-۵ مقادیر و زوایای تنش مطلوب و نامطلوب در سه حالت بارگذاری

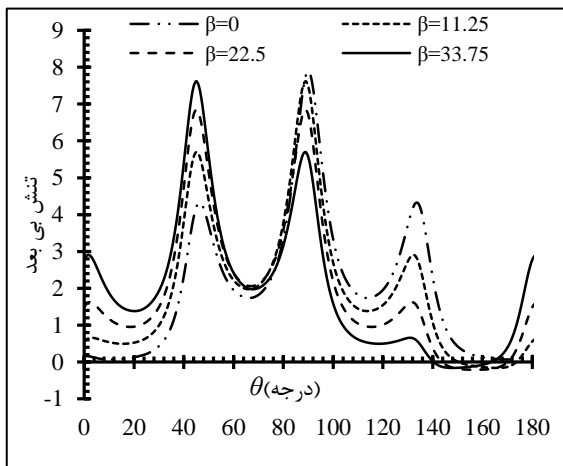
نوع بارگذاری	زاویه چرخش تنش مطلوب (درجه)	مقدار تنش مطلوب	زاویه چرخش تنش نامطلوب (درجه)	مقدار تنش نامطلوب
تک محوری	۱۲/۸۵	۷/۵۰	۰، ۲۵/۷۱	۸/۰۳
دومحوری	۰، ۲۵/۷۱	۶/۷۳	۱۲/۸۵	۷/۰۴
برشی	۱۲/۸۵	۶/۰۹	۶/۴۲، ۱۹/۲۷	۶/۲۲

### ۳-۴-۵ گشودگی هشت ضلعی

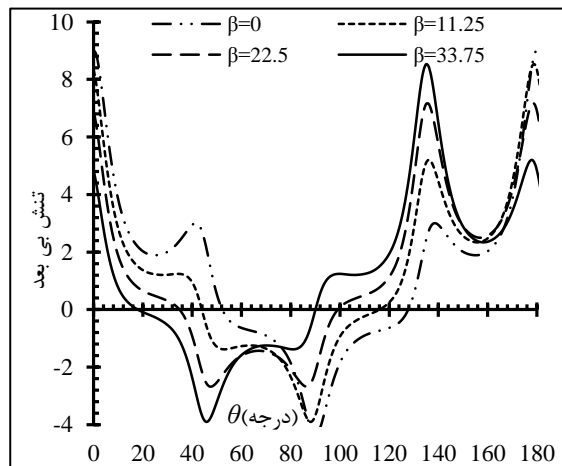
در گشودگی هشت ضلعی دوره‌ی تناوب چرخش  $45^\circ$  می‌باشد، بنابراین در شکل ۳۷-۵ تا شکل ۳۹-۵ توزیع تنش اطراف گشودگی هشت ضلعی برای زوایای چرخش صفر درجه،  $11/25^\circ$ ،  $22/5^\circ$  و  $33/75^\circ$ ، در بارگذاری‌های مورد بحث آورده شده است. مطابق سایر گشودگی‌ها در هر بارگذاری بسته به زاویه‌ی چرخش انتخاب شده، گوشه‌های هشت ضلعی با زوایای گوناگون، محل ایجاد مکزیتم تنش حول گشودگی می‌باشند. در بارگذاری تک محوری گوشه‌های هشت ضلعی با زوایای  $0^\circ$ ،  $135^\circ$ ،  $180^\circ$  و در بارگذاری دومحوری زوایای  $90^\circ$ ،  $45^\circ$  و در نهایت در بارگذاری برشی تمامی گوشه‌ها محل ایجاد مکزیتم تنش حول گشودگی می‌باشند.

شکل ۴۰-۵ مکزیتم تنش بی‌بعد حول گشودگی را برحسب زوایای چرخش در سه حالت بارگذاری

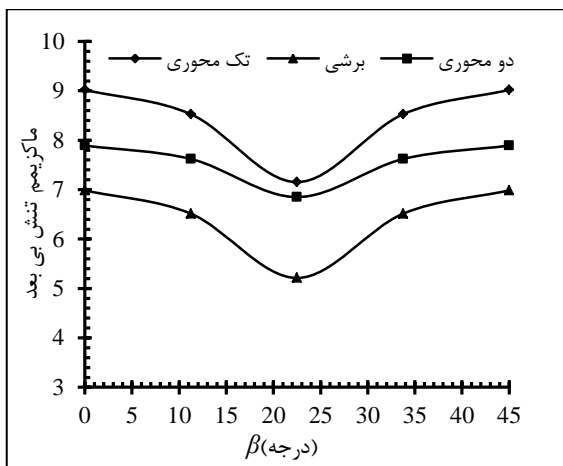
نشان می دهد. مشاهده می گردد در هر سه نوع بارگذاری تنش نامطلوب در زوایای چرخش صفر درجه و  $45^\circ$  ایجاد می گردد. نتایج تأثیر زاویه ی چرخش گشودگی در بارگذاری های مختلف بر مقدار تنش مطلوب و نامطلوب در جدول ۴-۵ آورده شده است.



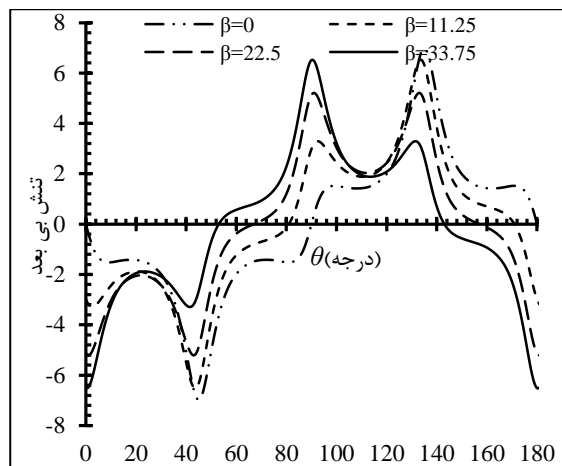
شکل ۳۸-۵ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار دو محوری ( $\lambda=2$ )



شکل ۳۷-۵ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت بار تک محوری



شکل ۴۰-۵ ماکزیمم تنش بی بعد بر حسب زوایای چرخش مختلف در سه بارگذاری



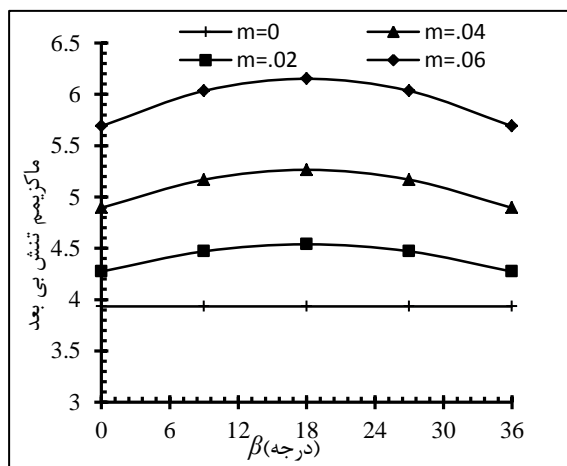
شکل ۳۹-۵ توزیع تنش بی بعد حول گشودگی در زوایای چرخش مختلف تحت برشی

جدول ۴-۵ مقادیر و زوایای تنش مطلوب و نامطلوب در سه حالت بارگذاری

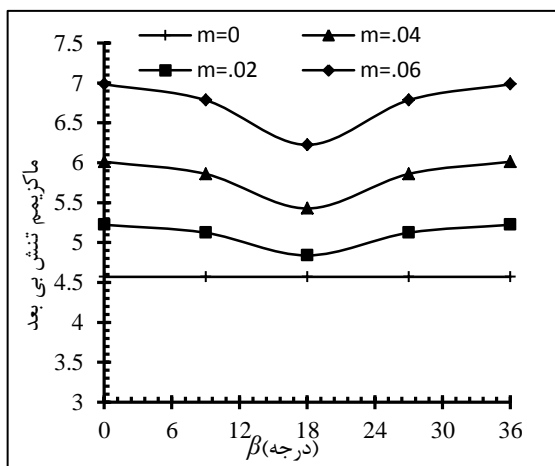
نوع بارگذاری	زاویه چرخش تنش مطلوب (درجه)	مقدار تنش مطلوب	زاویه چرخش تنش نامطلوب (درجه)	مقدار تنش نامطلوب
تک‌محوری	۲۲/۵	۷/۱۵	۴۵ .۰	۹/۰۱
دومحوری	۲۲/۵	۶/۸۴	۴۵ .۰	۷/۸۹
برشی	۲۲/۵	۵/۲۱	۴۵ .۰	۶/۹۸

## ۴-۵ تأثیر همزمان پارامترهای انحنا و چرخش

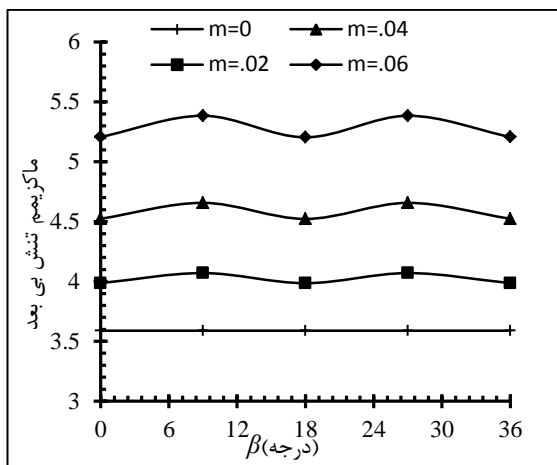
در این قسمت تأثیر همزمان دو پارامتر زاویه‌ی چرخش و انحنا بر روی گشودگی‌های  $n$  ضلعی بررسی می‌گردد. شکل ۴۱-۵ تا شکل ۴۳-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی را برای زوایا و انحناهای گوناگون در سه نوع بارگذاری نشان می‌دهد. برای این گشودگی دیده می‌شود در هیچ زاویه‌ی چرخش و انحنایی ماکزیمم تنش حول گشودگی کمتر از حالت دایروی نمی‌گردد و با افزایش انحنا ماکزیمم تنش حول گشودگی برای تمام زوایای چرخش و در هر سه بارگذاری افزایش می‌یابد.



شکل ۴۲-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی در بارگذاری دومحوری برای زوایا و انحناهای گوناگون

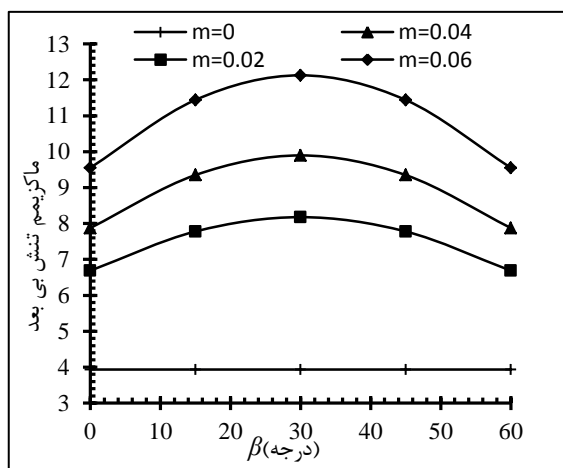


شکل ۴۱-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی در بارگذاری تک‌محوری برای زوایا و انحناهای گوناگون

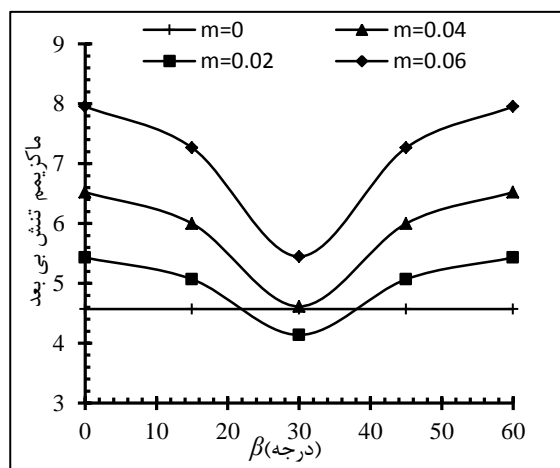


شکل ۴۳-۵ مکزیتم تنش بی بعد حول گشودگی پنج ضلعی در بارگذاری برشی برای زوایا و انحنای گوناگون

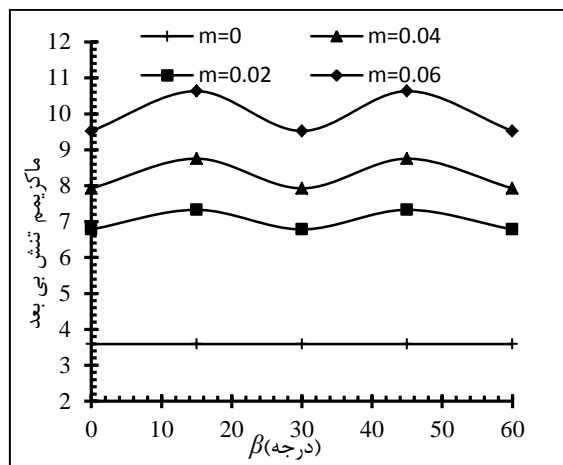
در شکل ۴۴-۵ تا شکل ۴۶-۵ این تأثیر برای گشودگی شش ضلعی در بارگذاری های مختلف بررسی شده است. ملاحظه می گردد برای این گشودگی در بارگذاری دومحوری و برشی مکزیتم تنش کمتر از حالت دایروی ایجاد نمی گردد اما در بارگذاری تک محوری برای انحنای  $0.2\%$  و بازه ی زاویه ی چرخش  $22^\circ$  تا  $38^\circ$  مکزیتم تنشی کمتر از حالت دایروی خواهیم داشت همچنین در انحنای  $0.4\%$  و زاویه ی چرخش  $30^\circ$  مقدار تنش برابر با حالت دایروی می باشد.



شکل ۴۵-۵ مکزیتم تنش بی بعد حول گشودگی شش ضلعی در بارگذاری دومحوری برای زوایا و انحنای گوناگون



شکل ۴۴-۵ مکزیتم تنش بی بعد حول گشودگی شش ضلعی در بارگذاری تک محوری برای زوایا و انحنای گوناگون



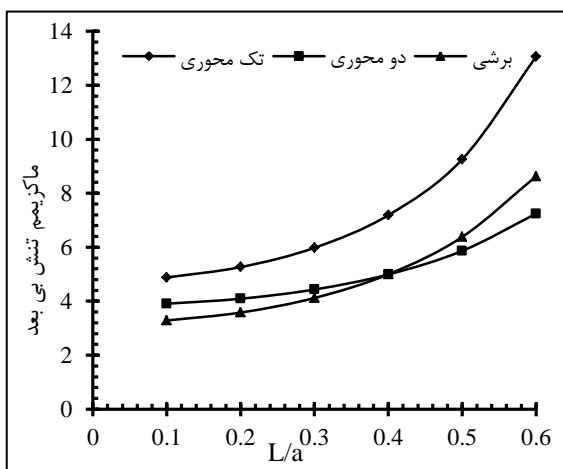
شکل ۵-۴ مکزیم تنش بی بعد حول گشودگی شش ضلعی در بارگذاری برشی برای زوایا و انحنای گوناگون

تأثیر همزمان این پارامترها برای گشودگی هفت ضلعی و هشت ضلعی نیز بررسی گردید. نتایج نشان داد که برای گشودگی هفت ضلعی، در هیچ زاویه‌ی چرخش و انحنایی مکزیم تنش کوچکتر از حالت دایروی ایجاد نخواهد شد؛ ولی برای گشودگی هشت ضلعی، در زاویه‌ی چرخش  $22/5^\circ$  و انحنای  $0/01$  برای هر سه بارگذاری مقدار تنش از حالت دایروی آن کمتر شد. نتایج این فصل و فصول قبلی نشان می‌دهد که برای گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع فرد افزایش انحنای، افزایش مقدار تنش مکزیم حول گشودگی را در پی دارد و بهترین انحنای تمام این اشکال  $m=0$  (حالت دایروی) می‌باشد. این در حالیست که برای گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع زوج مشاهده شد که همواره با افزایش میزان انحنای مقدار تنش افزایش پیدا نخواهد کرد و این امر به زاویه‌ی چرخش گشودگی نیز بستگی خواهد داشت. بنابراین در این گشودگی‌ها بسته به زاویه‌ی چرخش و انحنای می‌توان مکزیم تنشی کمتر از حالت دایروی حول گشودگی مورد نظر یافت.

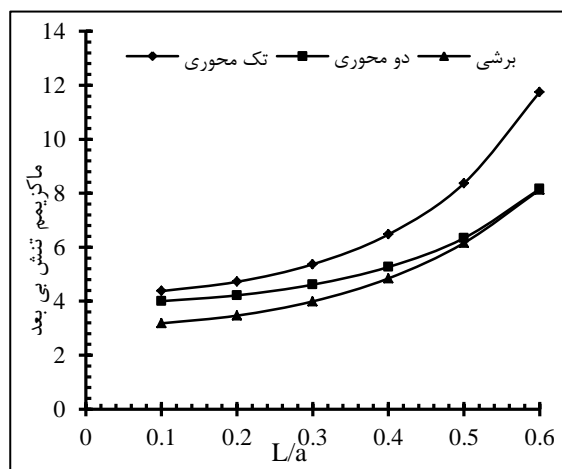
## ۵-۵ تأثیر نسبت اندازه‌ی گشودگی به بزرگترین طول ورق ( $\frac{L}{a}$ )

در این قسمت تأثیر نسبت  $\frac{L}{a}$  (اندازه‌ی گشودگی به ورق) بررسی شده است. در شکل ۵-۴ تا شکل ۵-۵ مکزیم تنش بی بعد حول هر گشودگی بر حسب نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  در سه حالت

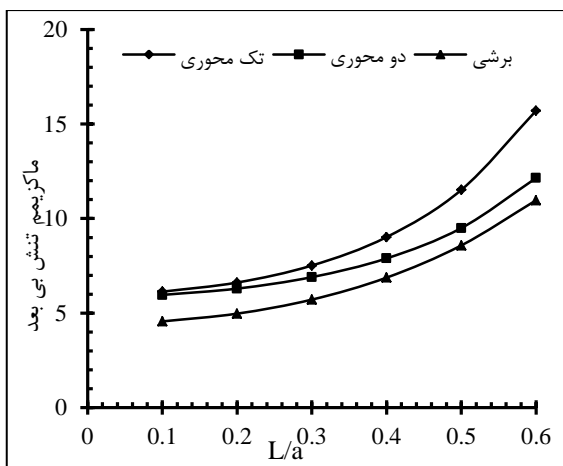
بارگذاری آورده شده است. همان طور که مشاهده می شود با افزایش نسبت  $\frac{L}{a}$  تنش در هر سه حالت بارگذاری، برای تمام گشودگی ها افزایش می یابد. در محدوده  $\frac{L}{a}$  بزرگتر از  $0.2$ ، تنش به میزان زیادی افزایش می یابد و هرچقدر این نسبت بزرگتر شود، مقدار افزایش تنش بیشتر می گردد. این در حالی است که در محدوده  $\frac{L}{a}$  کوچکتر از  $0.2$  اختلاف مقدار تنش ها ناچیز و تقریباً ثابت می باشد و این نشان دهنده تأثیر بسیار زیاد اندازه ی گشودگی به ورق در ورق های محدود می باشد.



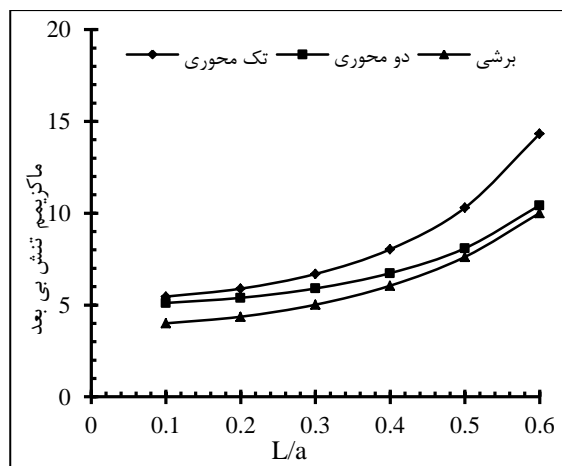
شکل ۴۸-۵ ماکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی شش-ضلعی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری



شکل ۴۹-۵ ماکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی پنج-ضلعی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری



شکل ۵۰-۵ ماکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی هشت-ضلعی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری



شکل ۴۹-۵ ماکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی هفت-ضلعی برحسب  $\frac{L}{a}$  های مختلف در سه بارگذاری

نتایج مربوط به مقایسه ی ماکزیمم تنش بی بعد حول گشودگی پنج ضلعی و شش ضلعی، در چند



نسبت  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در حالت نامحدود در جدول ۵-۵ و جدول ۶-۵ آورده شده است. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده و مقایسه‌ی آن با حل ورق نامحدود ( $\frac{L}{a} = 0.1$ ) مشاهده می‌شود که در نسبت  $\frac{L}{a}$  های کوچکتر از ۰/۲، اختلاف ماکزیمم تنش با حالت نامحدود کمتر از ۱۵٪ و در نسبت‌های بزرگتر از ۰/۲ اختلاف توزیع تنش با حالت نامحدود تا ۱۷۵٪ هم می‌رسد. بنابراین در نسبت  $\frac{L}{a}$  های بزرگتر از ۰/۲ به علت افزایش شدید مقدار تنش حول گشودگی‌ها نمی‌توان از حل نامحدود ورق استفاده کرد. همچنین مشاهده می‌گردد که افزایش مقدار تنش برای بارگذاری تک‌محوری بیشتر از دو بارگذاری دو‌محوری و برشی می‌باشد.

جدول ۵-۵ مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی در حالت نامحدود

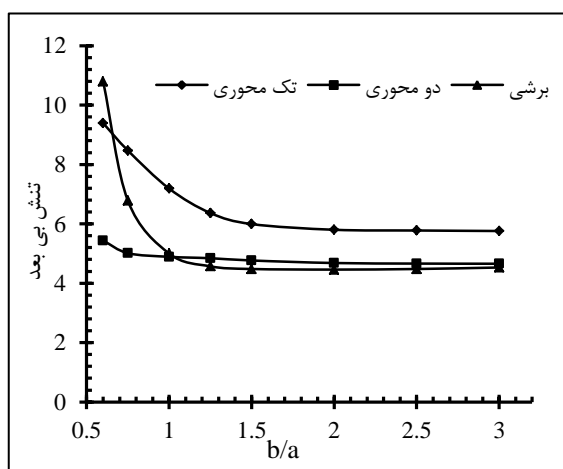
$\frac{L}{a}$	بارگذاری کششی تک‌محوری		بارگذاری کششی دو‌محوری		بارگذاری برشی	
	درصد اختلاف		درصد اختلاف		درصد اختلاف	
	با ورق نامحدود $\frac{L}{a} = 0.1$	ماکزیمم تنش بی‌بعد	با ورق نامحدود $\frac{L}{a} = 0.1$	ماکزیمم تنش بی‌بعد	با ورق نامحدود $\frac{L}{a} = 0.1$	ماکزیمم تنش بی‌بعد
۰/۰۱	۴/۲۶	۰	۳/۹۳	۰	۳/۰۸	۰
۰/۲	۴/۷۱	۱۰/۵۶	۴/۲۱	۷/۱۲	۳/۴۶	۱۲/۳۳
۰/۴	۶/۴۷	۵۱/۹۲	۵/۲۶	۳۳/۸۴	۴/۸۴	۵۷/۱۴
۰/۶	۱۱/۷۴	۱۷۵/۳۶	۸/۱۸	۱۰۷/۳۷	۸/۱۲	۱۶۳/۶۳

جدول ۶-۵ مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در نسبت‌های مختلف  $\frac{L}{a}$  با ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی در حالت نامحدود

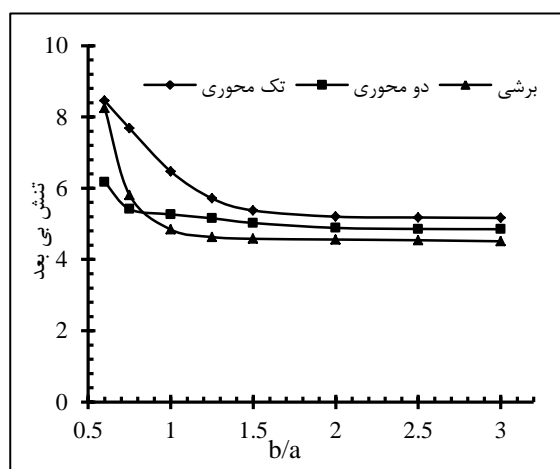
$\frac{L}{a}$	بارگذاری کششی تک‌محوری		بارگذاری کششی دو‌محوری		بارگذاری برشی	
	درصد اختلاف		درصد اختلاف		درصد اختلاف	
	با ورق نامحدود $\frac{L}{a} = 0.1$	ماکزیمم تنش بی‌بعد	با ورق نامحدود $\frac{L}{a} = 0.1$	ماکزیمم تنش بی‌بعد	با ورق نامحدود $\frac{L}{a} = 0.1$	ماکزیمم تنش بی‌بعد
۰/۰۱	۴/۷۵	۰	۳/۸۴	۰	۳/۱۹	۰
۰/۲	۵/۲۶	۱۰/۷	۴/۰۹	۶/۵۱	۳/۵۷	۱۱/۹
۰/۴	۷/۱۸	۵۱/۱۵	۴/۹۹	۲۹/۹	۴/۹۹	۵۶/۴۲

## ۵-۶ تأثیر نسبت اضلاع ورق $(\frac{b}{a})$

به منظور مطالعه‌ی تأثیر نسبت ابعاد ورق، ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی‌های  $n$  ضلعی بر حسب نسبت  $\frac{b}{a}$  در سه نوع بارگذاری مورد بحث در شکل ۵-۵ تا شکل ۵-۴ آورده شده است. همان‌طور که در فصل‌های پیشین بیان شد از آن‌جایی که اندازه گشودگی به ورق مقداری ثابت و برابر  $\frac{L}{a} = 0.4$ ، در نظر گرفته شده، کمترین نسبت  $\frac{b}{a}$  می‌تواند برابر با عدد  $0.4$  باشد که به منظور معقول و کاربردی بودن این نسبت، نتایج این بخش برای  $\frac{b}{a}$  های بزرگتر از  $0.6$  بررسی می‌شوند. با افزایش نسبت  $\frac{b}{a}$  مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی‌ها در هر سه حالت بارگذاری کاهش می‌یابد و پس از رسیدن این نسبت به مقدار معینی، هرچه  $\frac{b}{a}$  افزایش یابد مقادیر تنش تغییر چندانی نخواهند کرد. در این گشودگی‌ها نیز همانند قبل علت این امر این است که با افزایش این نسبت و بزرگتر شدن اندازه‌ی ضلع  $b$ ، شرایط ورق به شرایط ورق نامحدود نزدیک گشته و در نتیجه در نسبت‌های  $\frac{b}{a}$  بزرگتر از  $1/5$  مقدار ماکزیمم تنش حول گشودگی تقریباً ثابت می‌گردد. مقادیر تنش در چند نسبت  $\frac{b}{a}$  برای گشودگی‌های پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی در جدول ۵-۷ آورده شده است.

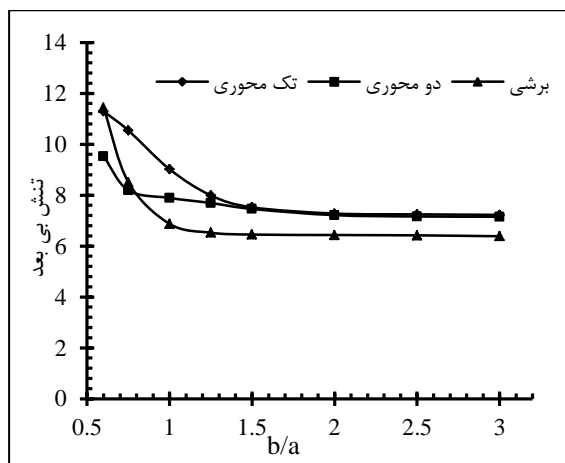


شکل ۵-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی شش-



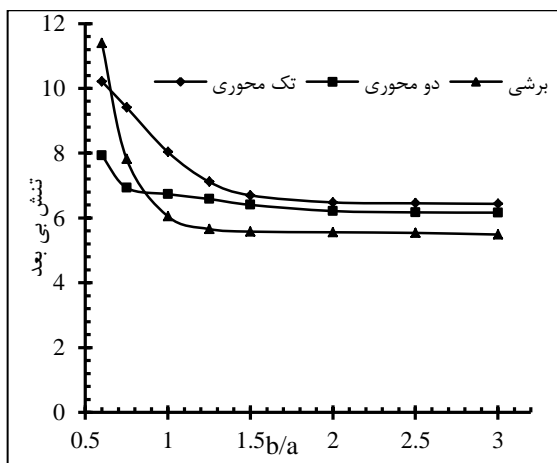
شکل ۵-۵ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج-

ضلعی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت بارگذاری



شکل ۵-۴ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی هشت-ضلعی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت بارگذاری

ضلعی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت بارگذاری



شکل ۵-۳ ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی هفت-ضلعی برحسب  $\frac{b}{a}$  های مختلف در سه حالت بارگذاری

جدول ۷-۵ مقایسه‌ی ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی‌های پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی در نسبت‌های مختلف  $\frac{b}{a}$

ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی شش‌ضلعی		ماکزیمم تنش بی‌بعد حول گشودگی پنج‌ضلعی		$\frac{b}{a}$		
بارگذاری برشی	بارگذاری کششی دو محوری	بارگذاری کششی تک محوری	بارگذاری برشی	بارگذاری کششی دو محوری	بارگذاری کششی تک محوری	
۱۰/۰۸	۵/۴۳	۹/۳۹	۸/۲۵	۶/۱۷	۸/۴۵	۰/۶
۶/۷۸	۵/۰۲	۸/۴۷	۵/۸۱	۵/۴۱	۷/۶۸	۰/۷۵
۵	۴/۹۰	۷/۱۸	۴/۸۴	۵/۲۶	۶/۴۷	۱
۴/۵۷	۴/۸۴	۶/۳۶	۴/۶۳	۵/۱۵	۵/۷۱	۱/۲۵

## ۷-۵ جمع‌بندی

در این فصل توزیع تنش حول گشودگی‌های n ضلعی در ورق محدود همسانگرد، تحت بارگذاری درون صفحه‌ای بررسی گردید. تأثیر پارامترهای گوناگون بر روی توزیع تنش اطراف این گشودگی‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج نشان داد که در گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع فرد با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی، همواره مقدار تنش افزایش می‌یابد و در گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع زوج بسته

به زاویه چرخش در مواردی کاهش می‌یابد. بنابراین برای گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع فرد با کاهش انحنا کمترین مقدار تنش در  $m=0$  (گشودگی دایروی) به وجود می‌آید در حالی که در گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع زوج با انتخاب صحیح پارامترهای چرخش و انحنا می‌توان به تنشی کمتر از تنش حول گشودگی دایروی ( $m=0$ ) رسید. محلّ ایجاد ماکزیمم تنش حول هر گشودگی بسته به هندسه‌ی گشودگی و نوع بارگذاری متفاوت است. مشاهده گردید با چرخش هر گشودگی مقدار ماکزیمم تنش حول گشودگی تغییر کرده و با انتخاب زاویه چرخش مناسب می‌توان مقدار ماکزیمم تنش حول گشودگی را کاهش داد. تأثیر زاویه چرخش هر گشودگی در بارگذاری‌های مختلف، متفاوت است. برای مثال در گشودگی شش ضلعی، در بارگذاری کششی تک‌محوری کمترین مقدار تنش در زاویه چرخش  $30^\circ$  و در بارگذاری کششی دو محوری در زاویه چرخش صفر درجه و  $60^\circ$  اتفاق می‌افتد. با افزایش اندازه‌ی گشودگی‌ها در هر سه حالت بارگذاری، مقدار ماکزیمم تنش افزایش یافت که مقدار این افزایش در بارگذاری کششی تک‌محوری بیشتر از دو بارگذاری دیگر صورت گرفت. با مقایسه‌ی مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در چند نسبت  $\frac{L}{a}$  با مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در ورق نامحدود، نشان داده شد که از حلّ ورق نامحدود نمی‌توان برای حلّ ورق‌هایی با نسبت  $\frac{L}{a}$  بزرگتر از  $0/2$  (ورق محدود) استفاده نمود. نتایج نشان داد که با انتخاب صحیح پارامترهای یاد شده برای هر گشودگی می‌توان از مقدار تنش حول گشودگی کاست.

## فصل ۶

### نتیجه‌گیری و ارائه‌ی پیشنهادها

---

## ۱-۶ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه با به‌کارگیری روش متغیر مختلط، حلّ تحلیلی ورق محدود حاوی گشودگی‌های گوناگون تحت بارگذاری درون صفحه‌ای ممکن گردید. تأثیر انحنای گوشه‌ی گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی، نسبت ابعاد ورق، نسبت اندازه‌ی گشودگی به بزرگترین طول ورق و نوع بارگذاری به‌عنوان پارامترهای مهم در توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج حاصل از این تحقیق نشان داد برای گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع فرد افزایش انحنا افزایش مقدار تنش را در هر سه حالت بارگذاری در پی دارد؛ بنابراین در این‌گونه اشکال کمترین تنش ماکزیمم حول گشودگی در حالت  $m=0$  (گشودگی دایروی) ایجاد می‌گردد. برای گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع زوج همواره با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی، تنش حول گشودگی لزوماً افزایش نمی‌یابد بلکه در مواردی بسته به زاویه‌ی چرخش انتخاب‌شده این مقدار کاهش می‌یابد. بنابراین در این نوع گشودگی‌ها با انتخاب زاویه‌ی چرخش و انحنای مناسب می‌توان ماکزیمم تنشی کمتر از حالت دایروی حول گشودگی داشت. همچنین مشاهده شد که پارامتر زاویه‌ی چرخش گشودگی یکی از پارامترهای بسیار تأثیرگذار در تمام گشودگی‌ها و بارگذاری‌ها می‌باشد. برای هر گشودگی و بارگذاری زاویه‌ی چرخش مطلوبی وجود دارد که در آن کمترین مقدار تنش ماکزیمم حول گشودگی اتفاق می‌افتد و بهتر است به هنگام طراحی همواره این نکته مورد توجه قرار گیرد و اشکال در زاویه‌ی چرخش مطلوب خود ایجاد گردند. تأثیر نسبت ابعاد گشودگی به ابعاد ورق بر توزیع تنش اطراف گشودگی مورد بررسی قرار گرفت. مشاهده گردید که با افزایش اندازه‌ی گشودگی در تمام اشکال و بارگذاری‌ها، مقدار ماکزیمم تنش افزایش می‌یابد. با مقایسه‌ی مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در نسبت‌های مختلف با مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در ورق نامحدود در اشکال گوناگون، نشان داده شد که از حلّ ورق نامحدود نمی‌توان برای حلّ ورق‌هایی با نسبت  $\frac{L}{a}$  بزرگتر از  $0.2$  (ورق محدود) استفاده نمود. همچنین با تغییر نسبت ابعاد ورق، ابتدا کاهش مقدار تنش و سپس ثابت ماندن این مقدار برای نسبت‌های بزرگتر از  $\frac{b}{a} = 1/5$  در تمام

اشکال و بارگذاری‌ها مشاهده گردید؛ که علت این امر نزدیک شدن شرایط ورق به شرایط ورق نامحدود بود. همچنین در تمام قسمت‌ها مشاهده شد که در ورق محدود به علت کوچک شدن ابعاد ورق، مقدار تنش حول گشودگی به مقدار زیادی بیشتر از حالت نامحدود آن است به همین جهت ضروری است تا حتماً از حل محدود ورق برای به دست آوردن مقادیر صحیح ماکزیمم تنش حول گشودگی‌ها استفاده شود.

## ۲-۶ پیشنهادها

موارد زیر جهت ادامه‌ی تحقیقات بر روی توزیع تنش حول گشودگی در ورق‌های محدود پیشنهاد می‌گردد.

۱- بررسی توزیع تنش حول گشودگی‌های مختلف غیرمنتظم در ورق محدود همسانگرد

تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

۲- بررسی توزیع تنش حول چند گشودگی دایروی و یا غیر دایروی در ورق محدود

همسانگرد تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

۳- بررسی توزیع تنش حول گشودگی‌های مختلف منتظم و غیرمنتظم در ورق محدود

ناهمسانگرد تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

۴- بررسی توزیع تنش حول چند گشودگی دایروی و یا غیر دایروی در ورق محدود

ناهمسانگرد تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

۵- بررسی توزیع تنش حول گشودگی‌های مختلف منتظم و غیرمنتظم در ورق محدود

همسانگرد و یا ناهمسانگرد تحت بارگذاری داخلی

۶- بهینه‌سازی پارامترها با استفاده از الگوریتم‌های ژنتیک و یافتن بهترین گشودگی در

شرایط پارامترهای بهینه

## مراجع

---

- [۱] شیگلی ج.، میشکه چ.، بادیناس ر.، (۱۳۸۷)، "طراحی اجزای ماشین"، ویرایش هفتم، چاپ سوم، انتشارات نوپردازان، مترجم ایرج شادروان، تهران، ص ۵.
- [2] Pan Z., Cheng Y., Liu J. (2013), "Stress analysis of a finite plate with a rectangular hole subjected to uniaxial tension using modified stress functions", **Int. J. Mech. Sci.**, **75**, pp. 265-277.
- [3] Inglis C. E. (1913), "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners", **Trans. Inst. Nav. Archit.**, **55**, pp. 219-230.
- [4] Howland R. C. J. (1929), "On the stresses in the neighborhood of circular hole in a strip under tension", **Phil. Trans. Roy. Soc.**, **229**, pp. 49-86.
- [5] Westergaard H. M. (1939), "Bearing pressures and cracks" **J. App. Mech.**, **6**, pp. 49-53.
- [6] Heywood R. B. (1952), "**Designing by Photoelasticity**", Chapman and Hall, London.
- [7] Sternberg, E. (1958), "**Couple-stresses and singular stress concentrations in elastic solids**", Springer, verlag Berlin.
- [8] Neuber H. (1968), "**On the effect of stress concentration in cosserat continua**", Springer, verlag Berlin Heidelberg.
- [9] Peterson R.E. (1974), "**Stress concentration factors**", John Wiley & Sons Inc, New York.
- [10] Pilkey W. D. (1997), "**Peterson's stress concentration factors**", John Wiley & Sons Inc, Second Edition, New York.
- [11] Muskhelishvili N. I. (1953), "**Some basic problems of mathematical theory of elasticity**", Netherlands: Noordhoff, Groningen, Holland, pp. 56-104.
- [12] Savin G. N. (1961), "**Stress concentration around holes**", Pergamon Press, New York.
- [13] Theocaris P. S. and Petrou L. (1986), "Stress distributions and intensities at corners



- of equilateral triangular holes”, **Int. J. Fracture**, **31**, pp. 271-289.
- [14] Gao X. L. (1996), “A general solution of an infinite elastic plate with an elliptic hole under biaxial loading”, **Int. J. Pressure Vessels Piping**, **67**, pp. 95-104.
- [15] Motok M. D. (1997), “Stress concentration on the contour of a plate opening of an arbitrary cornerradius of curvature”, **Mar. Struct.**, **10**, pp. 1-12.
- [16] Simha K. R. Y. and Mohapatra S. S.( 1998), “Stress concentration around irregular holes using complex variable method”, **Sadhna (India)**, **23**, pp. 394-412.
- [17] Lei G. H., Ng C. W. W., Rigby D. B.( 2001), “Stress and displacement around an elastic artificial rectangular hole”, **J. Eng. Mech.**, **127**, pp. 880-890.
- [18] Rezaeepazhand J. and Jafari M. (2010), “Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout”, **Int. J. Mech. Sci.**, **52**, pp. 96-102.
- [19] Batista M. (2011), “On the stress concentration around a hole in an infinite plate subject to a uniform load at infinity”, **Int. J. Mech. Sci.**, **53**, pp. 254-261.
- [20] Sharma D. S. (2012), “Stress distribution around polygonal holes”, **Int. J. Mech. Sci.**, **65**, pp. 115-124.
- [21] Eshelby J. D. , Read W. T., Shockley W. (1953), “Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory”, **Acta Metallurgica.**, **3**, **1**, pp. 251-259.
- [22] Stroh A. N, (1958), “Dislocations and cracks in anisotropic elasticity”, **Philosophical Magazine**, **30**, **3**, pp. 625-646.
- [23] Lekhnitskii S. G. (1968), “**Anisotropic plates**”, Second Edittion, NewYork.
- [24] Tan S. C. (1988), “Finite-Width Correction Factors for Anisotropic Plate Containing a Central Opening”, **J. Compos. Mat.**, **11**, **22**, pp. 1080.
- [25] Daoust J. and Hoa S. V. (1991), “An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes”, **Compos. Struct.**, **2**, **19**, pp. 107-130.
- [26] Abuelfoutouh N. M. (1993), “Preliminary design of unstiffend composite shells”, **Symposium of 7th technical Conference of ASC** , pp. 693-786, NewYork.
- [27] Ukadgaonker V. G. and Rao D. K. N. (1999), “Stress distribution around triangular holes in anisotropic plates”, **Compos. Struct.**, **45**, pp.171-183.
- [28] Rezaeepazhand J. and Jafari M. (2005), “Stress analysis of perforated composite plates”, **Compos. Struct.**, **71**, pp. 463-486.

- [29] Rezaeepazhand J. and Jafari M. (2008), "Stress analysis of composite plates with non circular cut out", **key Eng. Mater.**, 385, pp. 365-368.
- [30] Asmar G. H., Jabbour T. G. (2007), "Stress analysis of anisotropic plates containing rectangular holes", **Int. J. Mech. & Solid**, 1, 2, pp. 59-84.
- [31] Sharma D. S., Patel Nirav P., Panchal Khushbu C. (2010), "Stress distribution around triangular holes in orthotropic plate", **N. U. J. Engin. tech.**, 1, pp. 59-63.
- [32] Howland R. C. J and Knight R. C. (1939), "Stress functions for a plate containing groups of circular holes", **Phil. Trans. R. Sec. Lond.**, 238, pp. 357-392.
- [33] Green A. E. (1940), "General bi-harmonic analysis for a plate containing circular holes", **Proc. R. Soc. Lond. A**, 176, pp. 121-139.
- [34] Ling C. B. and Wang P. S. (1943), Technical Report, "**Stresses in perforated plate containing a ring of circular holes**", Chinese Bureau of Aeronautical Research, 6.
- [35] Tang Li-min (1959), "Analysis of stress concentration for several adjacent circular holes on elastical plate", **Sci. Record**, pp. 366-375.
- [36] Hulbert L. E. (1963), PhD. Thesis, "**The numerical solution of two-dimension problems of the theory of elasticity**", Mech. Depart., Ohio State University.
- [37] Hamada M., Mizushima I., Hamamoto M. and Masuda T. (1974), "A numerical method for stress concentration problems of infinite plates with many circular holes subjected to uniaxial tension", **J. Eng. Mater. Tech.**, 96, pp. 65-79.
- [38] Wah T. (1986), "Stresses in polygonal plates with circular holes", **Eng. Fract. Mech.**, 23, pp. 489-493.
- [39] Isida M. and Igawa H. (1991), "Analysis of zig-zag array of circular holes in an infinite solid under uniaxial tension", **int. J. Solids Struct.**, 27, pp. 849-864.
- [40] Zhang L., Yang Z., Lu A. (2001), "Analytics study on the problem of two holes having arbitrary shapes and arrangements in plane elastostatics", 2, 44, pp. 146-158.
- [41] Ukadgaonker V. G. and Patil D. B. (2008), "Stress Analysis of a Plate Containing Two Elliptical Holes Subjected to Uniform Pressures and Tangential Stresses on Hole Boundaries", **J. Manuf. Sci. Eng.**, 115, pp. 93-101.

- [42] Ogonowski I. M., (1980), "Analytical study of finite geometry plate with stress concentration", **AfAA/ASME/ AHS 21s SDM Conference.**, pp. 694-698.
- [43] Lin C. C. and Ko C. C. (1988), "Stress and strength analysis of finite composite laminates with elliptical holes", **J. Compos. Mater.**, 4, 22, pp. 373-385.
- [44] Woo C. W. and Chan L. W. ( 1992), "Boundary collocation method for analyzing perforated plate problems", **Eng. Fract. Mech.**, 5, 43, pp. 757-768.
- [45] Xu X., Sun L., Fan X. (1995), "Stress concentration of finite composite laminates with elliptical hole", **Comput. Struct.**, 1, 57, pp. 29-34.

## **Abstract**

In this thesis, stress distribution around a different regular holes in finite isotropic plate under uniaxial loading is studied. With the assumption of plane stress conditions, the method employed is based on the analytical solution of Muskhelishvili's complex variable method and conformal mapping. The finite plate (the ratio of the side length of the triangular hole and square hole and the diameter of circumscribed circle of Polygon holes to biggest side of the plate is greater than 0.2) can be considered as isotropic and linearly elastic. For solving the problem, the finite area with different shape of holes in  $z$  plan is mapped onto finite area outside a unite circle in  $\zeta$  plan using the conformal mapping function. The stress function in finite plate with different shape of holes is presented by superposition of the stress function for an infinite plate with different shape of holes and ones for a finite plate without a hole. The unknown coefficients in stress function are obtained by using the least square boundary collocation method and applying the appropriate boundary conditions. The effect of hole curvature, hole orientation, plate's aspect ratio, hole size, type of loading as the effective parameters on the stress distribution has been investigated. by choosing the appropriate parameters can be reduced the amount of tension around holes and create the optimal plan. The results based on analytical solution are in a good agreement with the results obtained from the finite element method using Abaqus software and result of other paper in finite and infinite plates. The results show that the analysis of the stress distribution in perforated plates that the ratio of the length of the biggest side of the hole to the smallest side of the plate is greater than 0.2, by using the infinite plate theory has a great error.

### **Keywords**

Finite plate, regular hole, analytical solution, complex variable method, in plane loading, isotropic plate.



دانشگاه شاهرود

**University of Shahrood**

**Faculty of Mechanic**

**Study of the stress distribution around regular holes in  
finite isotropic plate under in plan loading**

**Elahe Ardalani**

**Supervisor:**

**Dr. Mohammad Jafari**

**February 2015**