

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مکانیک

گروه طراحی جامدات

## تحلیل تنش صفحات بی نهایت حاوی گشودگی های

### غیردایروی تحت شار حرارتی یکنواخت

دانشجو: امیر طاهری نسب

اساتید راهنما:

دکتر محمد جعفری

دکتر محمد باقر نظری

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ماه ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مکانیک

گروه : طراحی جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای امیر طاهری نسب

تحت عنوان: تحلیل تنش صفحات بی نهایت حاوی گشودگی های غیردایروی تحت شار

حرارتی یکنواخت

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر محمد جعفری
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر محمد باقر نظری

امضاء	نمایندگانه تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر حمید رضا ایپک چی
	دکتر رضا طاهریان		نام و نام خانوادگی : دکتر علیرضا شاطرزاده
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم به پدر و مادر دلسوز و مهربانم که زحماتشان با هیچ واژه ای قابل قدردانی نیست.

شایسته است از زحمات بی دریغ و راهنمایی‌های ارزشمند استاد گرامی جناب آقای دکتر محمد جعفری در راستای انجام این پروژه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از تمامی اساتید و عزیزانی که در این راستا بنده را یاری نمودند، بویژه آقای دکتر نظری و مهندس شهناز نیز تشکر می‌نمایم.

# تعهد نامه

اینجانب امیر طاهری نسب دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل تنش صفحات بی نهایت حاوی گشودگی های غیردایروی تحت شار حرارتی یکنواخت تحت راهنمایی دکتر محمد جعفری متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

## تاریخ

## امضای دانشجو

## مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

## چکیده

یکی از مباحث مهم در طراحی سازه‌های پیشرفته مهندسی، جلوگیری از شکست سازه‌ها در نتیجه تنش در نواحی ناپیوستگی هندسی است. تنش باعث رکود استحکام و شکست‌های زودرس در سازه‌ها می‌شود زیرا می‌تواند به پیشروی ترک در اثر بارگذاری حرارتی و تغییرشکل‌های پلاستیک در محل تنش کمک کند. برای طراحی بهتر این قبیل سازه‌ها به دلیل وابستگی شدید استحکام شکست آنها به تنش ایجاد شده در اثر گشودگی، نیاز به ارزیابی دقیق تنش می‌باشد. یکی از پارامترهای تاثیرگذار بر توزیع تنش اطراف گشودگی نوع هندسه گشودگی می‌باشد. به طوری که با تغییر هندسه گشودگی، مقدار و محل ایجاد تنش تغییر می‌یابد. علاوه بر هندسه گشودگی، دیگر پارامترهای موثر شامل زاویه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی و زاویه اعمال شار می‌باشند. که با انتخاب مناسب هریک از این پارامترها می‌توان از میزان تنش کاست.

بر پایه تئوری ترموالاستیسیته دوبعدی حالت پایدار، میدان تنش در اطراف گشودگی در یک ورق نامحدود همسانگرد مورد بررسی قرار می‌گیرد. ورق فلزی در بی‌نهایت تحت جریان حرارتی یکنواخت بوده و مرز گشودگی مرکزی عایق است. با استفاده از توابع پتانسیل مختلط و با به‌کارگیری نگاشت همنوا و حل معادلات انتگرالی، توزیع تنش اطراف گشودگی ارائه می‌شود. روش استفاده از روش متغیر مختلط برای ورق نامحدود همسانگرد حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل است. برای سادگی استفاده از انتگرال کوشی، ورق نامحدود شامل گشودگی، به ناحیه درون دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته می‌شود. زاویه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی، کشیدگی گشودگی و زاویه جریان حرارتی از جمله پارامترهای مهمی هستند که در این تحقیق مورد بررسی قرار می‌گیرند. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهند که پارامترهای مذکور تاثیر بسزایی در توزیع تنش اطراف گشودگی دارند.

## کلیدواژگان

نگاشت همنوا، جریان حرارتی یکنواخت، تنش حرارتی، گشودگی شبه مستطیلی

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه



## فهرست مطالب

فصل ۱ مقدمه و مروری بر مطالعات پیشین .....	۱
۱-۱ مقدمه .....	۲
۲-۱ تعریف مسأله .....	۴
۳-۱ مطالعات پیشین .....	۵
فصل ۲ روش حل تحلیلی .....	۱۳
۱-۲ مقدمه .....	۱۴
۲-۲ فرضیه‌ها و ویژگی‌های تجزیه و تحلیل .....	۱۵
۳-۲ معرفی توابع شکل برای مدل کردن انواع گشودگی‌ها .....	۱۵
۴-۲ اثر دما .....	۱۸
۵-۲ تنش‌های حرارتی .....	۲۰
۶-۲ معادلات پایه در صفحه نگاشت .....	۲۱
۱-۶-۲ بخش دمایی .....	۲۲
۲-۶-۲ بخش تنش حرارتی .....	۲۳
۷-۲ محاسبه تابع دمایی مختلط .....	۲۳
۸-۲ محاسبه توابع تحلیلی مختلط تنش $\varphi(z), \psi(z)$ .....	۲۴
۹-۲ بررسی درستی نتایج .....	۲۷
فصل ۳ بررسی پارامترهای موثر بر توزیع تنش .....	۳۱
۱-۳ مقدمه .....	۳۲
۲-۳ جنس ماده .....	۳۲

۳۳	..... بررسی نتایج با فرض تنش صفحه‌ای
۳۳	..... ۱-۳-۳ تأثیر زاویه چرخش گشودگی
۳۵	..... ۱-۱-۳-۳ گشودگی مثلثی
۴۱	..... ۲-۱-۳-۳ گشودگی مربعی
۴۴	..... ۳-۱-۳-۳ گشودگی‌های $n$ ضلعی
۵۰	..... ۲-۳-۳ تأثیر کشیدگی گشودگی
۵۰	..... ۱-۲-۳-۳ گشودگی مثلثی
۵۲	..... ۴-۳ بررسی نتایج با فرض کرنش صفحه‌ای
۵۲	..... ۱-۴-۳ تأثیر زاویه چرخش گشودگی
۵۲	..... ۱-۱-۴-۳ گشودگی مثلثی
۵۶	..... ۲-۴-۳ تأثیر کشیدگی گشودگی
۵۶	..... ۱-۲-۴-۳ گشودگی مثلثی
۵۸	..... ۵-۳ جمع‌بندی
۵۹	..... فصل ۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۶۰	..... ۱-۴ خلاصه نتایج
۶۱	..... ۲-۴ پیشنهادها
۶۶	..... مراجع

## فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۱): صفحه نامحدود تحت جریان یکنواخت با گشودگی مرکزی پنج ضلعی ..... ۵
- شکل (۱-۲): صفحه بی نهایت تحت شار حرارتی  $q$  با زاویه  $\delta$  و گشودگی مرکزی مثلثی ..... ۱۵
- شکل (۲-۲): تاثیر پارامترهای مختلف در ایجاد گشودگی [۳۹] ..... ۱۶
- شکل (۳-۲): تاثیر  $w$  بر روی گشودگی شش ضلعی [۳۹] ..... ۱۶
- شکل (۴-۲): تعریف نقاط خارج از مرز گشودگی [۳۹] ..... ۱۸
- شکل (۵-۲): مختصات منحنی الخط ..... ۲۶
- شکل (۶-۲): انتقال بین مختصات کارتزین  $(x,y)$  و منحنی الخط  $(\rho,\theta)$  و بالعکس ..... ۲۶
- شکل (۷-۲): مقایسه روش تحلیلی حاضر با [۱] برای گشودگی دایره‌ای ..... ۲۸
- شکل (۸-۲): مقایسه روش تحلیلی حاضر با [۳] برای گشودگی بیضوی ..... ۲۸
- شکل (۹-۲): مقایسه‌ی روش تحلیلی حاضر و [۴۳] برای گشودگی مربعی ..... ۲۹
- شکل (۱-۳): مقایسه تاثیر زاویه شار و زاویه چرخش روی تنش گشودگی مثلثی و  $w=1/20$  ..... ۳۲
- شکل (۲-۳): زاویه چرخش گشودگی ..... ۳۴
- شکل (۳-۳): وضعیت بدون چرخش گشودگی‌های مختلف ..... ۳۴
- شکل (۴-۳): تعریف مساله شار حرارتی ..... ۳۴
- شکل (۵-۳): تاثیر انحنای گوشه  $w$  در شکل گشودگی مثلثی ..... ۳۵
- شکل (۶-۳): شکل مثلث با  $w=0.7$  ..... ۳۵
- شکل (۷-۳): تاثیر زاویه چرخش ( $\beta$ ) بر روی تنش بی‌بعد برای گشودگی مثلثی و  $w=1/20$  ..... ۳۷
- شکل (۸-۳): تاثیر زاویه چرخش گشودگی برای گشودگی مثلثی در  $w$ های مختلف ..... ۳۷
- شکل (۹-۳): شکل حالت تنش مطلوب ..... ۳۸
- شکل (۱۰-۳): شکل حالت تنش نامطلوب ..... ۳۸

- شکل (۱۱-۳): تاثیر  $w$  بر روی تنش مطلوب برای گشودگی مثلثی ..... ۴۰
- شکل (۱۲-۳): تاثیر  $w$  بر روی تنش نامطلوب برای گشودگی مثلثی ..... ۴۱
- شکل (۱۳-۳): تاثیر انحنای گوشه ( $w$ ) در شکل گشودگی شبه مربعی ..... ۴۱
- شکل (۱۴-۳): تاثیر زاویه چرخش بر روی تنش برای گشودگی شبه مربعی و  $w=1/20$  ..... ۴۲
- شکل (۱۵-۳): تاثیر زاویه چرخش گشودگی برای گشودگی شبه مربعی در  $w$  های مختلف ..... ۴۲
- شکل (۱۶-۳): تاثیر  $w$  بر روی تنش مطلوب برای گشودگی شبه مربعی ..... ۴۳
- شکل (۱۷-۳): تاثیر  $w$  بر روی تنش نامطلوب برای گشودگی شبه مربعی ..... ۴۴
- شکل (۱۸-۳): تاثیر زاویه چرخش بر روی تنش برای گشودگی پنج ضلعی و  $w=1/20$  ..... ۴۵
- شکل (۱۹-۳): تاثیر زاویه چرخش بر روی تنش برای گشودگی شش ضلعی و  $w=1/20$  ..... ۴۵
- شکل (۲۰-۳): تاثیر زاویه چرخش بر روی تنش برای گشودگی هفت ضلعی و  $w=1/20$  ..... ۴۶
- شکل (۲۱-۳): تاثیر زاویه چرخش بر روی تنش برای گشودگی هشت ضلعی و  $w=1/20$  ..... ۴۶
- شکل (۲۲-۳): تاثیر انحنای گوشه  $w$  در شکل گشودگی های  $n$  ضلعی ..... ۴۷
- شکل (۲۳-۳): تاثیر  $w$  بر روی تنش مطلوب برای گشودگی های  $n$  ضلعی ..... ۴۸
- شکل (۲۴-۳): تنش در  $w=1/20$  برای گشودگیهای مختلف ..... ۴۹
- شکل (۲۵-۳): کمترین تنش مطلوب ممکن برای گشودگیهای مختلف ..... ۴۹
- شکل (۲۶-۳): تأثیر کشیدگی گشودگی و  $w$  بر روی تنش حداکثر ..... ۵۰
- شکل (۲۷-۳): تأثیر کشیدگی گشودگی و زاویه شار بر روی تنش حداکثر ..... ۵۱
- شکل (۲۸-۳): تأثیر زاویه شار و کشیدگی بر روی تنش حداکثر ..... ۵۱
- شکل (۲۹-۳): تاثیر زاویه چرخش ( $\beta$ ) بر روی تنش بی بعد برای گشودگی مثلثی و  $w=1/20$  ..... ۵۳
- شکل (۳۰-۳): تاثیر زاویه چرخش گشودگی برای گشودگی مثلثی در  $w$  های مختلف ..... ۵۳
- شکل (۳۱-۳): تاثیر  $w$  بر روی تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی مثلثی ..... ۵۵
- شکل (۳۲-۳): تأثیر کشیدگی گشودگی و  $w$  بر روی تنش حداکثر ..... ۵۶

شکل (۳-۳۳): تأثیر کشیدگی گشودگی و زاویه شار بر روی تنش حداکثر ..... ۵۷

شکل (۳-۳۴): تأثیر زاویه شار و کشیدگی بر روی تنش حداکثر ..... ۵۸

## فهرست جدول‌ها

- جدول (۱-۳): خواص ماده ..... ۳۳
- جدول (۲-۳): بازه‌ی زاویه‌ی چرخش که تنش از گشودگی دایره‌ای کمتر است ..... ۳۹
- جدول (۳-۳): مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی مثلثی در  $w$ های مختلف ..... ۴۰
- جدول (۴-۳): مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی شبه مربعی در  $w$ های مختلف ..... ۴۳
- جدول (۵-۳): معرفی تنش مطلوب و نامطلوب در گشودگی‌های مختلف برای  $w=1/20$  ..... ۴۷
- جدول (۶-۳): بازه‌ی زاویه‌ی چرخش که تنش از گشودگی دایره‌ای کمتر است ..... ۵۴
- جدول (۷-۳): مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی مثلثی در  $w$ های مختلف ..... ۵۵

# فصل ۱

مقدمه و مروری بر مطالعات

پیشین

## ۱-۱ مقدمه

صفحات و پوسته‌ها در ساختارهای مهندسی کاربرد عمده‌ای دارند. در صنعت کشتی سازی، خودرو و هواپیما این کاربردها بیشتر دیده می‌شوند. بنا به کاربردهای مختلف سازه‌ها، در طراحی اجزائی مثل پنجره هواپیما و یا گشودگی‌هایی که در مواردی برای عبور کابل‌های برق و شیلنگ‌های هیدرولیک یا تسهیل در امر جریان سوخت در بال ایجاد می‌شوند؛ ایجاد گشودگی در صفحه لازم به‌نظر می‌رسد. در مواردی نیز گشودگی برای سبک‌تر کردن سازه‌ها ایجاد می‌شود.

وجود عیوب و ناپیوستگی‌هایی مانند گشودگی در صفحات که تحت جریان حرارتی یکنواخت قرار می‌گیرند؛ باعث تجمع تنش در اطراف آن شده و در عمر مفید و ضریب اطمینان سازه تاثیرگذار است. وقتی جریان حرارتی یکنواخت در یک جسم جامد به‌وسیله ناپیوستگی‌های هندسی مثل ترک یا گشودگی یا ناخالصی‌ها مختل یا مغشوش می‌شود؛ افزایش محلی در توزیع جریان اتفاق می‌افتد. این امر باعث افزایش تنش‌های حرارتی محلی و به‌دنبال آن از کارافتادگی اجزای سازه‌های مهندسی می‌شود. در همه این موارد آنچه که مهم است بررسی تاثیر این گشودگی‌ها در تنش‌های ایجاد شده در سازه است. زیرا گشودگی باعث ایجاد تنش‌های موضعی شدیدی در اطراف آن می‌شود. بنابراین مسأله تمرکز بر روی جریان سیال و تنش‌های الاستیک اطراف ناپیوستگی‌ها و ناخالصی‌ها علاقه بسیاری از محققان را جلب کرده است.

دانستن مقدار تنش بیشینه در اطراف گشودگی، همچنین نقطه‌ای که این تنش بیشینه رخ می‌دهد؛ برای ارائه طراحی مناسب بسیار موثر است. پیشگویی رفتار سازه‌های حاوی گشودگی، مستلزم دانستن توزیع تنش در اطراف گشودگی است. روابط مقدماتی مورد استفاده در طراحی بر اساس اعضای است که سطح مقطع یکسان و ثابت دارند یا این‌که سطح مقطع تغییرات تدریجی دارد. ولی اعضاء مکانیکی همواره این چنین نیستند. وجود پله‌ها، جاخارها، شیارها و رزوه باعث ایجاد تنش‌های موضعی شدیدی در نزدیکی گشودگی می‌شود.



پارامترهای بسیاری بر توزیع تنش اطراف گشودگی در صفحات حاوی گشودگی؛ تاثیرگذار هستند. نوع گشودگی، شعاع انحنای گشودگی، جهت گیری (زاویه ی چرخش) گشودگی پارامترهایی هستند که بر توزیع تنش موثر بوده و انتخاب صحیح آنها در دستیابی به طرح موفق کاملاً مفید است و انتخاب صحیح آنها منجر به کمترین تنش ممکن می‌شود که از گشودگی دایره‌ای نیز کمتر خواهد بود. بنابراین به منظور ارائه یک طرح بهین، بررسی این تاثیرات لازم به نظر می‌رسد.

به‌خاطر مسائل عملی مهمی که در طراحی توربین‌های جدید بخار و گاز، موتورهای موشک و جت و راکتورهای هسته‌ای وجود دارد؛ اجزای این قبیل سازه‌ها تحت حرارت غیریکنواخت قرار می‌گیرند که باعث گرادیان‌های دمایی و انبساط حرارتی متفاوت بین اجزای مختلف می‌شود. در صورتی که انبساط حرارتی غیریکنواخت آزادانه نتواند پیشرفت کند؛ در یک جسم الاستیک باعث تنش‌های حرارتی می‌شود. به‌منظور تحلیل جامع استحکام سازه، مقدار و رفتار تنش حرارتی باید کاملاً مشخص باشد.

تنش‌های حرارتی نقش مهمی در طراحی وسایل نقلیه با سرعت‌های بالا، اجزای ماشین‌ها و همچنین در حوزه مهندسی شیمی و به‌طور خاص مهندسی هسته‌ای دارد. تعیین مقدار و تاثیر و محل این تنش‌ها برای دستیابی به طراحی منطقی و واقع بینانه این اجزاء ضروری است. از این لحاظ تحقیق در مورد تمرکز تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی‌های مختلف در مواد الاستیک که تحت جریان حرارتی یکنواخت قرار گرفته در طراحی پیشرفته سازه‌های مهندسی بسیار مهم است. یکی از مسائل جذاب در این حوزه‌ها، تحلیل توزیع تنش در صفحات حاوی گشودگی است. گرما و میدان‌های دمایی یکنواخت و غیریکنواخت باعث ازکارافتادگی و یا کاهش عمر مفید مواد و سازه‌ها می‌شوند.

مسائل زیادی در کاربردهای مهندسی به‌صورت عام و در مکانیک شکست به‌صورت خاص به بررسی تمرکز تنش ناشی از وجود گشودگی در ورق‌ها پرداخته‌اند. مسأله تنش حرارتی و شکست ناشی از آن، یک مسأله تعیین کننده در شاخه‌های گوناگون از میکروالکترونیک گرفته تا حوزه هوا-فضا است.

حلهای ترموالاستیک متعددی برای اجسام با هندسه‌های مختلف وجود دارد. از میان تمامی آنها استفاده از روش متغیر مختلط برای مطالعه محدوده وسیعی از مسائل دوبعدی حائز اهمیت است. بررسی‌های علمی بیشتر بر رفتار مواد تحت بارگذاری‌های مکانیکی متمرکز بوده و کمتر به سایر پدیده‌ها نظیر تنش‌های حرارتی پرداخته شده است در حالی که گشودگی باعث انسداد تولید جریان گرما شده و اختلالات حرارتی محلی ایجاد می‌کند. بنابراین، آگاهی از تنش‌های حرارتی ناشی از اختلالات حرارتی محلی برای مطالعه شکست مواد ضروری است.

با عنایت به این موضوع در این پایان نامه سعی شده است تا پارامترهای مختلف، به طور کامل بررسی شده و تاثیرات آن بر مقدار و نحوه توزیع تنش مورد مطالعه قرار گیرد. ابتدا در مقدمه این پایان نامه بعد از تعریف مساله مروری بر کارهای انجام شده در زمینه توزیع تنش صورت گرفته است. سپس در فصل‌های مختلف به بررسی پارامترهای موثر بر توزیع تنش اطراف گشودگی پرداخته می‌شود.

## ۱-۲ تعریف مساله

وقتی که شار حرارتی پایدار در اثر وجود گشودگی مغشوش می‌شود تنش‌های حرارتی بزرگی در اطراف گشودگی ایجاد می‌شود. اگر شار حرارتی به اندازه کافی بالا باشد؛ این تنش‌ها می‌توانند منجر به خرابی سازه به ویژه برای مواد ترد شوند.

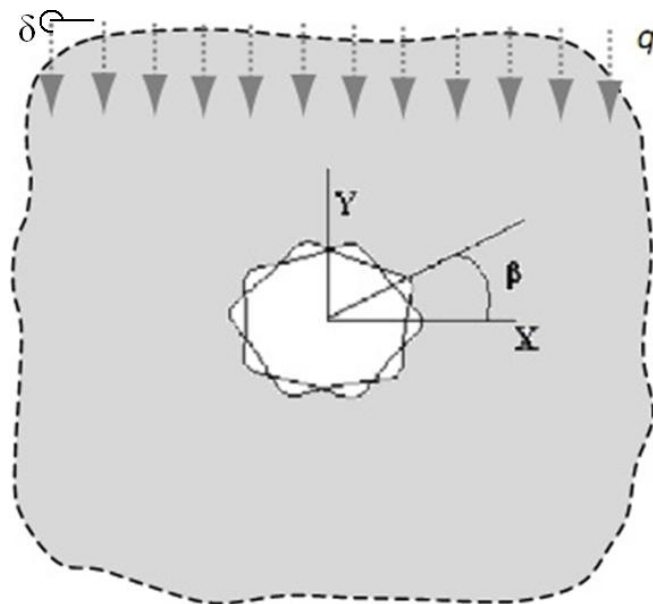
موضوع تنش حرارتی دو بعدی، یکی از مشکلات مهم در زمینه مکانیک جامدات است. در این پایان نامه هدف محاسبه تنش‌های حرارتی موضعی در اطراف یک گشودگی از روش تحلیلی و بررسی تاثیر پارامترهای مختلف همچون: نوع گشودگی، شعاع انحنای گشودگی، جهت گیری (زاویه چرخش) گشودگی بر توزیع تنش صفحه حاوی گشودگی مطابق شکل (۱-۱) است. بنابراین صفحه‌ای همسانگرد<sup>۱</sup> که در مرکز دارای یک گشودگی بوده و مرز این گشودگی عایق حرارتی و عاری از هرگونه

---

<sup>۱</sup> Isotropic

تنش است؛ تحت بارگذاری حرارتی به صورت جریان حرارتی یکنواخت  $q$  تحت زاویه شار  $\delta$  است؛ مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

ابعاد صفحه در مقایسه با ابعاد گشودگی بسیار بزرگ است (صفحه نامحدود). در حالت کلی شکل گشودگی می‌تواند مثلث، مستطیل و  $n$  ضلعی باشد. روش حل، استفاده از توابع پتانسیل مختلط و روش متغیر مختلط می‌باشد. این روش ابزار قدرتمندی برای حل مسائل دوبعدی از جمله مسائل تنش حرارتی می‌باشد. به کارگیری روش متغیرهای مختلط، حل بسیاری از مسائل را که بررسی آن‌ها با روش‌های دیگر مشکل است، ممکن می‌سازد. این روش بر پایه ارائه مسائل مقدار مرزی الاستیسیته، با به کارگیری توابع پتانسیل مختلط استوار است. این فرمول‌بندی اجازه می‌دهد که بسیاری از روش‌های قدرتمند ریاضی موجود در نظریه‌ی متغیرهای مختلط برای حل مسائل به کار گرفته شوند. برای بررسی نتایج تحلیل حاضر، نتایج به دست آمده با داده‌های تحلیلی و عددی موجود در مقالات دیگر مقایسه گردیده‌است.



شکل (۱-۱): صفحه نامحدود تحت جریان یکنواخت با گشودگی مرکزی پنج ضلعی

### ۳-۱ مطالعات پیشین

نظریه ترموالاستیسیته، به عنوان یک مسأله کلاسیک در زمینه مکانیک جامدات، از قرن ۱۹

توسعه یافته شده است. پژوهش بر روی مسأله تنش حرارتی با توجه به برخی از برنامه‌های کاربردی مهندسی جدید مانند مهندسی هسته‌ای، مواد جدید، زمینه هوانوردی و همچنین شکست و یا کاهش عمر مواد و سازه‌ها در اثر درجه حرارت و یا گرمای غیر یکنواخت در سال‌های اخیر همچنان ادامه دارد. تحقیقات متعددی در مورد مسأله ترموالاستیک صفحات حاوی گشودگی یا نقص هندسی انجام شده است. برخی مربوط به صفحاتی از جنس مواد همسانگرد و برخی مربوط به صفحات ناهمسانگرد هستند. بخشی از این تحقیقات شامل بررسی تاثیر وجود گشودگی یا میان‌بار<sup>۱</sup> در تحلیل تنش صفحات نامحدود و تحت بارگذاری حرارتی است. بخش دیگر تحقیقات به بررسی حضور ترک می-پردازد.

گودیر<sup>۲</sup> و فلورنس<sup>۳</sup> [۱] و موشخلیشویلی<sup>۴</sup> [۲] پایه‌گذار تئوری‌های مربوط به حل مسائل ترموالاستیک دوبعدی با استفاده از روش متغیر مختلط هستند. فلورنس و گودیر [۳ و ۱] تنش‌های حرارتی برای یک صفحه الاستیک همسانگرد شامل گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل را با استفاده از روش متغیر مختلط حل کردند. درسیویچ<sup>۵</sup> [۴] با بسط حل گودیر و فلورنس، توابع پتانسیل مختلط را برای گشودگی‌هایی که مرز آنها قابل نگاشت به دایره‌ای به شعاع واحد است؛ ارائه کرد. نگاشت به وسیله تابع نگاشتی هم‌نوا به صورت چندجمله‌ای انجام شد. در انتهای مقاله، برای حالتی خاص توابع پتانسیل نظیر یک حالت از گشودگی مثلثی شکل به دست آورده شد. راثو<sup>۶</sup> [۵-۶] و همکارانش با استفاده از روش حداقل مربعات در نقاط مرزی، توزیع دما و تنش‌های درون صفحه‌ای را در یک صفحه الاستیک مستطیلی با گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل تحت جریان حرارتی یکنواخت به دست آوردند. توزیع دما نیز با حل معادله هدایت حرارتی حالت پایدار محاسبه شده است. تکیوتی<sup>۷</sup> [۷] و همکارانش با به-

---

<sup>۱</sup> Inclusion

<sup>۲</sup> Goodier

<sup>۳</sup> Florence

<sup>۴</sup> Muskhelishvili

<sup>۵</sup> Deresiewicz

<sup>۶</sup> Rao

<sup>۷</sup> Takiuty

کارگیری روش متغیر مختلط و استفاده از توابع تنش مختلط توانستند توزیع تنش حرارتی در ورقی با ابعاد محدود و دارای گشودگی دایره‌ای در مرکز را به دست آورند.

توید<sup>۱</sup> و همکارانش [۸]، تحلیل تنش حرارتی و توزیع دما برای یک صفحه نامحدود دارای گشودگی دایره‌ای که دارای ترک می‌باشد؛ تحت جریان حرارتی یکنواخت در جهت دلخواه انجام دادند. ضریب شدت تنش و تکینگی شار حرارتی در نوک ترک نیز به دست آمد. برای حل از روش متغیر مختلط، نگاشت کسری و روش نابجایی<sup>۲</sup> استفاده شد. توسط هاسبه<sup>۳</sup> [۹] روابط مربوط به حل مسأله ترموالاستیک دوبعدی را برای صفحه حاوی گشودگی به صورت کامل تشریح کرد. صفحه از ماده الاستیک خطی همگن و همسانگرد ساخته شده و از قانون هوک تبعیت می‌کند. در این مقاله آنها از روش متغیر مختلط برای ارائه روابط خود استفاده کردند. توابع پتانسیل مختلط برای توابع نگاشت مورد استفاده در مقاله و همچنین برای شرایط مرزی و دمایی مختلف استخراج شدند. حل عمومی برای مسائل با شرایط مرزی نیرویی، جابجایی و ترکیبی، تحت شار حرارتی یکنواخت و یا تحت یک منبع حرارتی نقطه‌ای به دست آمد. بهولار<sup>۴</sup> [۱۰] مدل دوبعدی مسأله ترموالاستیک در یک ناحیه شش ضلعی با یک گشودگی بیضی شکل را مورد بررسی قرار داد. مرز خارجی تحت جریان حرارتی یکنواخت در نظر گرفته شد. در این تحقیق فرض شد که گشودگی بیضی شکل در مرکز ناحیه عایق است. آسری<sup>۵</sup> [۱۱] از روش متغیر مختلط برای به دست آوردن توابع پتانسیل و توابع گورست برای یک صفحه الاستیک نامحدود دارای گشودگی‌هایی با شکل‌های مختلف استفاده کرد. به منظور دسترسی به حلی صریح، این گشودگی‌ها با استفاده از تابع نگاشتی مناسب و هم‌نوا به خارج دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته شد. بهولار و همکارش [۱۲] با فرض تنش صفحه‌ای، تحلیل تنش حرارتی در یک صفحه همسانگرد با یک گشودگی شبه بیضی را بررسی کردند. آنها از روش متغیر مختلط و از

---

<sup>۱</sup> Tweed

<sup>۲</sup> Dislocation

<sup>۳</sup> Hasebe

<sup>۴</sup> Bhullar

<sup>۵</sup> Aseeri

شرایط همدمائی در مرز گشودگی استفاده کردند. تنش ماکزیمم در اطراف گشودگی‌های مختلف محاسبه شد. در مورد مواد ناهمسانگرد، از تعمیم تئوری‌های ارائه شده توسط اشترو<sup>۱</sup> و لخنیتسکی<sup>۲</sup> برای تحلیل صفحات حاوی گشودگی تحت جریان حرارتی یکنواخت استفاده شد. چن<sup>۳</sup> و همکارانش [۱۳] با استفاده از روش متغیر مختلط، برای صفحه ارتوتروپیک دارای گشودگی عایق دایره‌ای و بیضی‌شکل و به‌منظور ارائه تنش‌های اطراف گشودگی عبارتی تحلیلی به‌دست آوردند. تارن<sup>۴</sup> و همکارانش [۱۴] روش پتانسیل مختلط لخنیتسکی مربوط به الاستیسیته ناهمسانگرد را به بررسی مسأله ترموالاستیک بسط دادند. در این مقاله، فرمول‌بندی مسأله تنش حرارتی جسم الاستیک ناهمسانگرد با یک گشودگی یا میان‌بار صلب در قالب شرط تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای ارائه شد. صفحه ناهمسانگرد نامحدود حاوی گشودگی بیضی‌شکل تحت جریان حرارتی یکنواخت با استفاده از فرمول‌بندی لخنیتسکی و نگاشت همنوا توسط چاو<sup>۵</sup> و همکارش [۱۵] حل شد.

کین<sup>۶</sup> [۱۶] مسأله ترموالکتروالاستیک برای صفحه نامحدود حاوی یک گشودگی به شکل‌های مختلف را مورد بررسی قرار داد. با استفاده از فرمول‌بندی اشترو و روش نگاشت همنوا حلی واحد برای یک صفحه ترموپیزوالکتریک با گشودگی‌هایی با شکل‌های مختلف تحت بار حرارتی به‌دست آمد. بارگذاری می‌تواند به‌صورت جریان حرارتی یکنواخت در بی‌نهایت، منبع حرارتی نقطه‌ای و ناپیوستگی دمایی باشد. هاسبه و همکارانش [۱۷]، با استفاده از روش متغیر مختلط و تابع نگاشت کسری مناسب، مسأله توزیع جریان الکتریکی، دما و تنش‌های حرارتی در یک صفحه هادی نامحدود دارای گشودگی بیضی‌شکل که در مرز گشودگی دارای یک ترک لبه‌ای است؛ کردند. مسأله یک صفحه نامحدود دارای میان‌بار دایره‌ای تحت جریان حرارتی یکنواخت توسط دُنْدُرس<sup>۷</sup> [۱۸] مورد بحث قرار

---

<sup>۱</sup> Eshro

<sup>۲</sup> Lekhnitskii

<sup>۳</sup> Chen

<sup>۴</sup> Tarn

<sup>۵</sup> Chao

<sup>۶</sup> Qin

<sup>۷</sup> Dundurgs

گرفت. محاسبه تابع تنش مربوط به ورق نامحدود الاستیک تحت جریان حرارتی یکنواخت در حالت دوبعدی که در مرکز دارای یک میان‌بار صلب با شکلی دلخواه است به کمک روش پتانسیل مختلط توسط لی<sup>۱</sup> و همکارش [۱۹] انجام شد. میان‌بار صلب در فصل مشترک با ورق در دمای ثابت صفر و یا عایق در نظر گرفته شد. روابط مربوط به ضرایب شدت تنش مربوط به مود یک و دو برای میان‌بارهای با گوشه‌های تیز نیز به دست آمد. فام<sup>۲</sup> [۲۰] مسأله تقابل بین یک گشودگی دارای ترک و یک ترک خطی را با استفاده از تابع گرین، تابع نگاشت و روش متغیر مختلط بررسی کرد. هاسبه و همکارانش [۲۱] مسأله مقدار مرزی ترموالاستیک برای یک میان‌بار صلب در تقابل با یک ترک خطی در یک صفحه نامحدود تحت جریان حرارتی یکنواخت را مطالعه کردند. در این مقاله سعی شد تا چرخش صلب میان‌بار نیز بررسی شود. مسأله با استفاده از روش متغیر مختلط و با ارائه تابع نگاشتی کسری حل شد.

در مورد تحلیل صفحات ناهمسانگرد حاوی میان‌بار با استفاده از روش متغیر مختلط می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. هووا<sup>۳</sup> [۲۲] برای صفحه ناهمسانگرد با گشودگی بیضی‌شکل براساس فرمول‌بندی اشترو، و چو<sup>۴</sup> و شن<sup>۵</sup> [۲۳] برای یک صفحه ناهمسانگرد عمومی براساس فرمول‌بندی لخنیتسکی و روش نگاشت هم‌نوا تحقیقاتی را انجام دادند. حلّ تحلیلی عمومی برای یک میان‌بار ناهمسانگرد بیضی‌شکل در یک صفحه نامحدود ناهمسانگرد تحت جریان حرارتی یکنواخت توسط چاو و همکارش [۲۴] مورد بررسی قرار گرفت. روش مورد استفاده براساس فرمول‌بندی لخنیتسکی و استفاده از تکنیک نگاشت هم‌نوا است.

در مورد صفحات همسانگرد حاوی ترک می‌توان به تحقیقات زیر اشاره کرد.

---

<sup>۱</sup> Lee

<sup>۲</sup> Pham

<sup>۳</sup> Hwu

<sup>۴</sup> Chao

<sup>۵</sup> Shen

سکین<sup>۱</sup> [۲۵] در چارچوب مسائل ترموالاستیک صفحه‌ای، میدان تنش در نزدیکی نوک یک ترک مورب دلخواه را در یک صفحه نیمه‌بی‌نهایت همسانگرد تحت بار حرارتی یکنواخت مورد بررسی قرار داد. با استفاده از روش متغیر مختلط تکینگی تنش حرارتی در نوک ترک و ضرایب شدت تنش محاسبه شد. ضرایب شدت تنش حرارتی حالت پایدار برای گشودگی‌هایی با نوک تیز و متقارن در یک جامد الاستیک نامحدود با استفاده از روش متغیر مختلط در مقاله‌ای توسط لی و همکارانش [۲۶] مورد مطالعه قرار گرفت. تحلیل تنش حرارتی و توزیع دما برای یک صفحه همسانگرد نامحدود با ترک‌هایی متقارن در اطراف گشودگی لوزی‌شکل توسط هاسبه و همکارانش [۲۷] انجام شد. جریان حرارتی یکنواخت در یک جهت در نظر گرفته شد. ضرایب شدت تنش و تکینگی شار حرارتی در نوک ترک نیز به دست آمد. چن [۲۸] مسأله یک ترک به شکل کمانی از دایره در یک صفحه نامحدود را تحت بارگذاری حرارتی به کمک تابع پتانسیل متغیر مختلط و روش معادله انتگرالی حل کرد. فام و همکارانش [۲۹] تقابل بین یک گشودگی ترک‌دار و یک ترک خطی تحت جریان حرارتی یکنواخت را بررسی کردند. نتایج آنها نشان داد که تقابل بین گشودگی ترک‌دار و ترک خطی تحت جریان حرارتی یکنواخت منتهی به حذف ضرایب شدت تنش در نوک ترک لبه‌ای گشودگی می‌شود. این امر برای تقابل بین گشودگی ترک‌دار و ترک خطی تحت کشش یکنواخت در دوردست دیده نشد. اتکینسون<sup>۲</sup> [۳۰] تئوری ترموالاستیسیته مربوط به صفحات ناهمسانگرد دارای ترک را ارائه کرد. هر دو معادلات هدایت حرارتی و معادلات الاستیک به صورت ناهمسانگرد و جدا از هم در نظر گرفته شدند. کلمنتس<sup>۳</sup> [۳۱] روش متغیر مختلط را برای مطالعه مسائل ترموالاستیک مواد ناهمسانگرد همگن و ترموالاستیک مواد ناهمسانگرد غیرهمگن دارای ترک به کار گرفت. کاردوماتیس<sup>۴</sup> [۳۲] با استفاده از فرمول‌بندی نابجایی اشترو، پیشرفت ترک برای یک ماده ناهمسانگرد تحت بارهای ترکیبی مکانیکی و حرارتی را مورد بررسی قرار داد. براساس تئوری ترموالاستیسیته دوبعدی مربوط به مواد ناهمسانگرد، لی و

<sup>۱</sup> Sekine

<sup>۲</sup> Atkinson

<sup>۳</sup> Clements

<sup>۴</sup> Kardomateas



همکارانش [۳۳] ضرایب شدت تنش حرارتی مربوط به ترک خطی عایق در یک ورق نامحدود ناهمسانگرد، در نتیجه جریان حرارتی یکنواخت را محاسبه کردند.

معمولاً دو نوع روش در حل مسائل تنش حرارتی وجود دارد، یک روش متغیر حقیقی و دیگری روش متغیر مختلط است که هر دوی آنها به معرفی تابع پتانسیل ترموالاستیک نیاز دارند. بعد از اینکه بگدانف<sup>۱</sup> [۳۴] و دیگر محققان تحلیل‌های مربوط به تنش‌های حرارتی مسائل ترموالاستیسیته صفحه‌ای تحت توزیع دمای پایدار به روش متغیر مختلط را پایه گذاری کردند؛ تحقیقات زیادی در محاسبه ضریب شدت تنش حرارتی برای استفاده در مسائل مکانیک شکست مورد بررسی قرار گرفت. بیشتر تحقیقاتی که در زمینه صفحات حاوی گشودگی تحت شار حرارتی یکنواخت انجام شده برای گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل می‌باشند [۳۵] و به ندرت بصورت کامل به گشودگی‌های مختلف پرداخته شده است. اخیراً هم از روشهای عددی و تحلیلی در این زمینه تحقیقاتی انجام شده است که بیشتر شامل گشودگی دایره و بیضی هستند [۳۶ و ۳۷]. شکل گشودگی مهمترین پارامتری است که بر مقدار ضریب شدت تنش حرارتی موثر می‌باشد. استفاده از روش متغیر مختلط برای حل تحلیلی در گشودگی‌های خاص کمتر مورد توجه بوده است. برای ارائه شکلی مناسب و تکمیل تحقیقاتی که تاکنون انجام شده است؛ ناچار به بررسی گشودگی با اشکال مختلف هستیم. در این پایان‌نامه سعی می‌شود با به‌کارگیری روش متغیر مختلط و استفاده از تابع نگاشت مناسب میدان تنش اطراف گشودگی‌های مختلف در صفحات نامحدود همسانگرد بررسی شود.

اگرچه در زمینه تحلیل تنش صفحات حاوی گشودگی تحت جریان حرارتی یکنواخت تحقیقات وسیعی صورت گرفته است؛ ولی در هیچ یک از آنها به تأثیر متقابل پارامترهایی از قبیل زاویه چرخش (جهت‌گیری) گشودگی و شعاع انحنا و شکل گشودگی بر توزیع تنش اشاره نشده است. به دلیل اهمیت این پارامترها بر توزیع تنش، بررسی تأثیرات آنها لازم به نظر می‌رسد.

بنابراین در این پایان‌نامه سعی بر این است تا به وسیله روش‌های تحلیلی پارامترهای بهینه

---

<sup>۱</sup>Bogdanoff

مربوط به صفحه‌های گشودگی مرکزی (هر نوع گشودگی با هر زاویه چرخش)، تحت بارگذاری حرارتی، به منظور دستیابی به کمترین تنش ممکن تعیین شود.

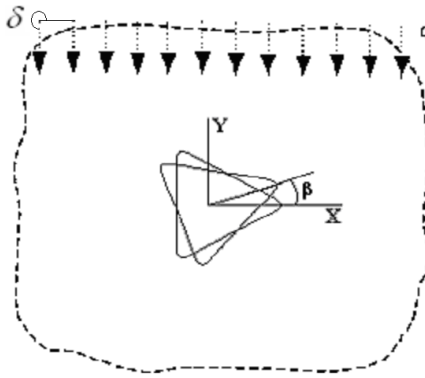
## فصل ۲

### روش حل تحلیلی

## ۲-۱ مقدمه

امروزه در بسیاری موارد، اجزای سازه‌ها و ماشین‌ها علاوه بر نیروهای مکانیکی در معرض بارگذاری حرارتی نیز قرار می‌گیرند. مخازن تحت فشار و لوله‌ها در راکتور نیروگاه هسته‌ای، اجزای داخلی راکتورهای شیمیایی و بدنه هواپیماهای فوق سریع در دماهای بالا، تحت گرادیان شدید و تغییر نوسانی دما قرار می‌گیرند. بنابراین تحلیل تنش‌های حرارتی یکی از مهم‌ترین موضوع‌های مهندسی است. در اکثر مواقع برای کاربردهای عملی ناچار به ایجاد گشودگی‌هایی در صفحات هستیم که استحکام آن را کاهش می‌دهد. پیشگویی رفتار این صفحات حاوی گشودگی، مستلزم دانستن توزیع تنش در اطراف گشودگی است. روابط مقدماتی مورد استفاده در طراحی بر اساس اعضایی است که سطح مقطع یکسان و ثابت دارند یا اینکه سطح مقطع تغییرات تدریجی دارد. ولی اعضاء مکانیکی همواره این چنین نیستند. وجود پله‌ها، جاخارها، شیارها و رزوه باعث ایجاد تنش‌های موضعی شدیدی در نزدیکی ناپیوستگی‌ها می‌شود.

طراح در موقع طراحی قطعه حتما تجزیه و تحلیل لازم برای بدست آوردن مقدار تنش ماکزیمم را نیاز خواهد داشت. یک طراح بیش از آنکه مایل به دانستن نحوه توزیع تنش در یک سطح مقطع داده شده باشد؛ به دانستن مقدار حداکثر تنش در همان سطح مقطع علاقمند است. چرا که بررسی کند که آیا بار وارد شده از تنش مجاز تجاوز می‌کند یا نه و مهم نیست که این تجاوز در کجا اتفاق می‌افتد. همانطور که در فصل قبل اشاره شد؛ هدف از این تحقیق، محاسبه تنش‌های حرارتی موضعی در اطراف یک گشودگی از روش تحلیلی و بررسی تاثیر پارامترهای مختلف همچون: زاویه شار، نوع گشودگی، شعاع انحنای گشودگی، جهت گیری (زاویه چرخش) گشودگی بر توزیع تنش صفحه حاوی گشودگی مطابق شکل (۲-۱) است.



شکل (۱-۲): صفحه بی نهایت تحت شار حرارتی  $q$  با زاویه  $\delta$  و گشودگی مرکزی مثلثی

## ۲-۲ فرضیه‌ها و ویژگی‌های تجزیه و تحلیل

مفروضات و ویژگی‌های تجزیه و تحلیل مورد استفاده در این پایان نامه به شرح زیر است:

- ✓ صفحه همگن، الاستیک و همسانگرد است. همچنین تغییر شکل‌ها کوچک است.
- ✓ مسأله استاتیکی در نظر گرفته شده است.
- ✓ اندازه گشودگی در مقابل ابعاد صفحه کوچک است (صفحه بی نهایت).
- ✓ صفحه تحت شار حرارتی یکنواخت است.

## ۳-۲ معرفی توابع شکل برای مدل کردن انواع گشودگی‌ها

با استفاده از یک تابع نگاشت ساده ( $z=x+iy$ ) نقاط روی مرز هر گشودگی با شکل (کانتور) خاص

را به دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل می‌کنیم که مقادیر  $x$  و  $y$  از رابطه زیر بدست می‌آیند [۳۸]:

$$x = \lambda(\cos\theta + w\cos(n\theta)) \quad (1-2)$$

$$y = -\lambda(c\sin\theta - w\sin(n\theta))$$

در رابطه (۱-۲)، پارامترهای مختلفی وجود دارند که با تغییر آن‌ها، می‌توان گشودگی‌های مختلف

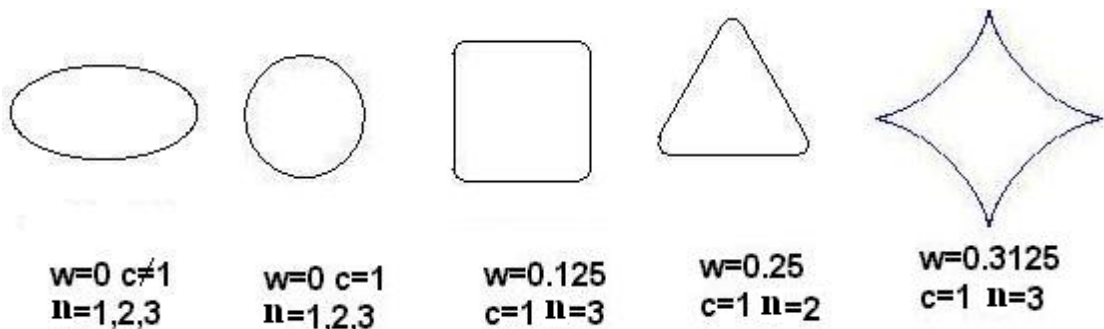
را مدل کرد. این پارامترها نوع شکل، بزرگی، تیزی یا نرمی آن را نشان می‌دهند.  $n$  و  $c$  نشان دهنده

نوع هندسه گشودگی است. به عنوان مثال برای گشودگی مثلثی باید  $n=2$  و  $c=1$  باشد و برای

گشودگی مربعی  $c=1$  و  $n=3$  است.  $\lambda$  بزرگی گشودگی را نشان می‌دهد و در گشودگی‌های لبه دار  $w$

معیار تیزی یا نرمی انحنا گشودگی است. با تغییر این پارامتر می توان گشودگی های مختلف را با شعاع انحناهای متفاوت ایجاد کرد.

تاثیر پارامترهای مختلف در ایجاد گشودگی در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. وقتی  $w$  کاهش می یابد گشودگی ملایم تر می شود تا این که به کمترین مقدار خود یعنی  $w=0$  می رسد. در این حالت گشودگی به دایره تبدیل می شود. تغییرات  $w$  و روند میل کردن گشودگی شش ضلعی به دایره در شکل (۳-۲) نشان داده شده است.



شکل (۲-۲): تاثیر پارامترهای مختلف در ایجاد گشودگی [۳۹]



شکل (۳-۲): تاثیر  $w$  بر روی گشودگی شش ضلعی [۳۹]

رابطه پارامتری (۱-۲) تنها برای نقاط روی مرز گشودگی به کار می رود. برای نقاط خارج از گشودگی از متغیر موهومی  $\xi$  استفاده می شود که بر حسب مختصات  $\rho, \theta$  تعریف می شود. این متغیر به این صورت معرفی می شود:

$$\xi = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) \quad (۲-۲)$$

از رابطه اوایلر داریم:

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (۳-۲)$$

$$e^{-in\theta} = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)$$

برای دایره ای به شعاع واحد  $\rho = 1$  می باشد از طرفی با ترکیب روابط (۲-۲) و (۳-۲):

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= 1/2[\zeta^n + 1/\zeta^n] \\ \sin(n\theta) &= -\frac{i}{2} \left[ \zeta^n - \frac{1}{\zeta^n} \right] \end{aligned} \quad (4-2)$$

برای نگاشت کلیه نقاط گشودگی‌های مختلف روی دایره‌ای به شعاع واحد از تابع انتقال  $w(\zeta)$  بصورت زیر استفاده می‌شود:

$$w(\xi) = r\xi + iy \quad (5-2)$$

برای ایجاد شکل‌های غیر منتظم مانند مثلث متساوی الساقین ضریب  $r$  را به صورت تابعی از قاعده و ارتفاع مثلث که قابل تغییر می‌باشد؛ تعریف می‌کنیم [۳۹].

$$r = \frac{2h}{\sqrt{3l}} \quad (6-2)$$

$h$  ارتفاع و  $l$  قاعده مثلث متساوی الساقین می‌باشد. با تلفیق معادلات (۲-۲) و (۶-۲) داریم:

$$w(\xi) = \frac{\lambda}{2} \left[ r \left( \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) + w \left( \xi^n + \frac{1}{\xi^n} \right) \right) - c \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) + w \left( \xi^n - \frac{1}{\xi^n} \right) \right] \quad (7-2)$$

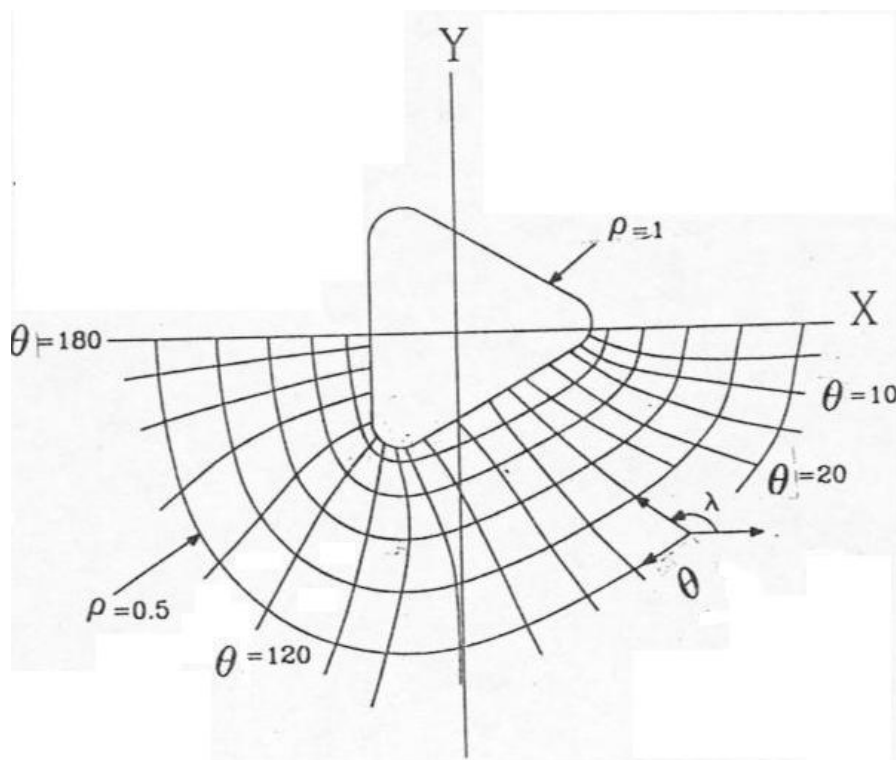
یا بصورت ساده‌تر:

$$w(\xi) = \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{a}{\xi} + b\xi + wd\xi^n + \frac{we}{\xi^n} \right] \quad (8-2)$$

که:

$$\begin{aligned} a &= r - c & b &= r + c \\ d &= r - 1 & e &= r + 1 \end{aligned} \quad (9-2)$$

حال اگر بخواهیم نقاط روی مرز گشودگی را مشخص کنیم  $\rho = 1$  خواهد بود. برای نقاط خارج گشودگی مانند شکل (۴-۲) کفایت مقدار  $\rho$  را کوچکتر انتخاب کرد. به این ترتیب و به کمک روابط (۲-۲) و (۸-۲) با انتخاب پارامترهای مناسب برای  $n$ ،  $c$  و  $w$  توانایی مدل کردن گشودگی‌هایی با هندسه‌های مختلف را خواهیم داشت.



شکل (۲-۴): تعریف نقاط خارج از مرکز گشودگی [۳۹]

## ۲-۴ اثر دما

تابع دمایی  $T(x,y)$  برای یک جسم الاستیک خطی باید یک تابع هارمونیک باشد که معادله انتقال حرارت زیر را ارضا کند.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (۲-۱۰)$$

با توجه به اینکه قسمت حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی در معادله (۲-۱۰) صدق می‌کند؛ با استفاده از متغیرهای مختلط  $z = x + iy$  و  $\bar{z} = x - iy$  تابع دمایی  $T(x,y)$  را می‌توان به عنوان بخشی حقیقی از تابع مختلط  $\Omega_0(z)$  به صورت زیر در نظر گرفت.

$$T(x, y) = 1/2[\Omega_0(z) + \overline{\Omega_0(z)}] \quad (۲-۱۱)$$

مولفه‌های شار حرارتی  $q_x, q_y$  در جهات  $x$  و  $y$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$



$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\Omega_0(z) = T + iT'$$

$$q_x - iq_y = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x} - i \frac{\partial T}{\partial y} \right) \xrightarrow{\text{کوشی-ریمن}}$$

$$-k \left( \frac{\partial T}{\partial x} - i \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -k \frac{d\Omega_0}{dz}$$

$$q_x - iq_y = -k\Omega'_0(z) \quad (۱۲-۲)$$

که در آن  $k$  نشان‌دهنده ضریب هدایت حرارتی ماده است. شرایط مرزی برای تابع دمایی داده شده را می‌توان از معادله (۱۱-۲) به‌دست آورد.

$$\Omega_0(z) + \overline{\Omega_0(z)} = 2T(x, y) \quad (۱۳-۲)$$

شرایط مرزی شار حرارتی به صورت زیر است.

$$\frac{d\Omega_0}{dz} = -\frac{1}{k} q_x - iq_y$$

$$d\Omega_0 = -\frac{1}{k} (q_x - iq_y)(dx + idy)$$

$$d\Omega_0 = -\frac{1}{k} [(q_x dx - iq_y dy) + i(q_x dy - q_y dx)]$$

$$d\Omega_0 - d\overline{\Omega_0} = -\frac{2i}{k} (q_x dy - q_y dx)$$

$$\hat{n} = \frac{dy}{ds} \hat{i} - \frac{dx}{ds} \hat{j}$$

$$q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = q_x \frac{dy}{ds} - q_y \frac{dx}{ds}$$

$$q_n ds = q_x dy - q_y dx$$

$$d\Omega_0 - d\overline{\Omega_0} = -\frac{2i}{k} q_n ds$$

$$\Omega_0(z) - \overline{\Omega_0(z)} = -2i/k \int q_n(s) ds + const \quad (۱۴-۲)$$

که در آن  $q_n(s)$  نشان‌دهنده شار حرارتی نرمال برای نقطه  $s$  در مرز است [۴۰].

## ۲-۵ تنش‌های حرارتی

مولفه‌های تنش با استفاده از تابع تنش ایری  $F(x,y)$  به صورت زیر است.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (15-2)$$

با جایگذاری تابع تنش (۱۵-۲) به جای تنش در داخل معادله همساز، معادله دوهمسازه (۱۶-۲) برحسب تابع تنش بدست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (16-2)$$

با حل معادله (۱۶-۲) تابع  $F$  به صورت زیر بدست می‌آید.

$$F(x, y) = \text{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] = 1/2[\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \chi(z) + \overline{\chi'(z)}] \quad (17-2)$$

که در آن  $\varphi(z), \chi(z)$  توابع تحلیلی در ناحیه در نظر گرفته شده هستند [۴۱].

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}$$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}$$

اگر معادلات بالا را یکبار با هم جمع و یکبار از هم کم کنیم، مولفه‌های تنش با استفاده از این توابع

بصورت زیر بدست می‌آید.  $(\chi'(z) \equiv \psi(z))$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4 \text{Re}[\varphi'(z)]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi(z)] \quad (18-2)$$

برای مسأله ترموالاستیک، تابع دمایی معادله (۱۱-۲) ممکن است جابجایی تولید کند. کل این جابجایی که شامل اثر گرمایی نیز می‌شود را می‌توان با استفاده از معادله زیر محاسبه نمود.

$$u + iv = 1/2G[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}] + \alpha' \int \Omega_0(z) dz \quad (19-2)$$

که در آن  $G$  نشان دهنده مدول برشی ماده است.  $\kappa, \alpha'$  ضرایبی هستند که با فرض تنش صفحه‌ای و

کرنش صفحه‌ای به صورت زیر تعیین می‌شوند. ضریب پواسون  $\nu$  و انبساط حرارتی خطی  $\alpha_0$  به صورت زیر هستند.

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad \alpha' = (1 + \nu)\alpha_0 \quad \text{حالت کرنش صفحه‌ای (۲۰-۲)}$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \alpha' = \alpha_0 \quad \text{حالت تنش صفحه‌ای (۲۱-۲)}$$

در روابط فوق  $\alpha_0$  ضریب انبساط حرارتی و  $\nu$  ضریب پواسون می‌باشد.

نیروی حاصل بین دو نقطه در یک جسم الاستیک را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد.

$$\sin \theta = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$$

$$\cos \theta = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds}$$

$$p_x = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

$$p_y = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)$$

$$p_x + ip_y = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial F}{\partial y} - i \frac{\partial F}{\partial x} \right)$$

$$(p_x + ip_y) ds = -id \left( \frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

$$\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = i \int (p_x + ip_y) ds + const \quad (۲۲-۲)$$

وقتی  $p_x, p_y$  به مرز اعمال می‌شوند، این معادله به عنوان شرط مرزی نیروی خارجی استفاده

می‌شود؛ مقدار ثابت را می‌توان صفر در نظر گرفت. شرط مرزی جابجایی با استفاده از معادله (۱۹-۲)

بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2G(u + iv) - 2G\alpha' \int \Omega_0(z) dz \quad (۲۳-۲)$$

## ۶-۲ معادلات پایه در صفحه نگاشت

در این بخش معادلات پایه برای دما و تجزیه و تحلیل بخش ترموالاستیک با توجه به یک تابع

نگاشت  $z = \omega(\zeta)$  در صفحه نگاشت بررسی می‌شود.

## ۲-۶-۱ بخش دمایی

تابع پتانسیل مربوط به درجه حرارت مختلط به صورت زیر است:

$$\Omega_0(z) = \Omega_0[\omega(\zeta)] \equiv \Omega(\zeta) \quad (24-2)$$

دمای  $T(x,y)$  و مولفه‌های شار حرارتی  $q_x, q_y$  در جهات  $x$  و  $y$  نیز به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$T(x, y) = 1/2[\Omega(\zeta) + \overline{\Omega(\zeta)}] \quad (25-2)$$

$$q_x - iq_y = -k\Omega'(\zeta) / \omega'(\zeta) \quad (26-2)$$

مولفه‌های شار حرارتی در مختصات قطبی با استفاده از تابع نگاشت به صورت زیر به دست می‌آید.

$$q_r + iq_\theta = \frac{\overline{\zeta\omega'(\zeta)}}{|\zeta\omega'(\zeta)|} (q_x + iq_y) \quad (27-2)$$

شار حرارتی خالص در امتداد یک خط بین دو نقطه را می‌توان با استفاده از رابطه زیر محاسبه نمود [۴۲].

$$\Omega(\zeta) - \overline{\Omega(\zeta)} = -2i/k \int q_n(s) ds + const \quad (28-2)$$

با در نظر گرفتن نقطه مرزی  $\zeta = \sigma$ ، شرایط مرزی برای دما و شار حرارتی به شرح زیر است:

برای شرایط مرزی دمایی

$$\Omega(\sigma) + \overline{\Omega(\sigma)} = 2T(x, y) \equiv 2T(\sigma, \bar{\sigma}) \quad (29-2)$$

برای شرایط مرزی شار حرارتی

$$\Omega(\sigma) - \overline{\Omega(\sigma)} = -2i/k \int q_n(s) ds + const \quad (30-2)$$

زمانی که طرف راست این روابط صفر است آنها را می‌توان به صورت زیر ترکیب نمود.

$$\Omega(\sigma) - \Gamma\overline{\Omega(\sigma)} = cons \quad (31-2)$$

که  $\Gamma = 1$  برای موقعیت عایق و  $\Gamma = -1$  برای موقعیت هم دما است.

## ۲-۶-۲ بخش تنش حرارتی

با معرفی تابع نگاشت، مولفه‌های تابع تنش مختلط به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi[\omega(\zeta)] \equiv \phi(\zeta) \\ \chi'(z) &= \chi'[\omega(\zeta)] \equiv \psi(\zeta)\end{aligned}\quad (۳۲-۲)$$

مولفه‌های تنش در معادله (۲-۱۸) و جابجایی در معادله (۲-۱۹) نیز به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re}\left[\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2\left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\left\{\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right\}' + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]\end{aligned}\quad (۳۳-۲)$$

$$u + iv = 1/2G\left[\kappa\phi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\phi'(\zeta) - \overline{\psi(\zeta)}\right] + \alpha' \int \Omega(\zeta)\omega'(\zeta)d\zeta$$

و مولفه‌های تنش و جابجایی در مختصات قطبی با استفاده از تابع نگاشت به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= \frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{|\zeta|^2\omega'(\zeta)}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \\ u_r + iv_\theta &= \frac{\overline{\zeta\omega'(\zeta)}}{|\zeta\omega'(\zeta)|}(u + iv)\end{aligned}\quad (۳۴-۲)$$

از آنجا که اصل جمع آثار قابل اعمال است، بدون از دست دادن کلیت، در مسأله ترموالاستیک ممکن است نیروهای خارجی و یا جابجایی صفر در نظر گرفته شود. اگر نیروهای خارجی غیر صفر اما جابجایی صفر در نظر گرفته شود؛ شرایط مرزی تنش و جابجایی به ترتیب به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} &= -\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\sigma\bar{A} \\ \kappa\phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\phi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} &= -2G\alpha' \int \Omega(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma\end{aligned}\quad (۳۵-۲)$$

## ۷-۲ محاسبه تابع دمایی مختلط

از آنجا که شار حرارتی یکنواخت در بی نهایت اعمال می‌شود، تابع دمایی مختلط، از دو بخش

مجزا به صورت زیر به دست می‌آید. (در مرز گشودگی  $q_n(s) = 0$ )

$$\Omega(\zeta) = \Omega_1(\zeta) + \Omega_2(\zeta) \quad (۳۶-۲)$$

$\Omega_1(\zeta)$  با در نظر گرفتن شار حرارتی یکنواخت در معادله (۲۶-۲) به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\Omega_1(\zeta) = -\frac{q}{k} e^{-i\delta} \omega(\zeta) \quad (۳۷-۲)$$

در معادله بالا  $q$  شار حرارتی بر واحد سطح و  $\delta$  جهت شار می‌باشد.

با جایگذاری معادلات (۲-۹)، (۲-۳۶) و (۲-۳۷) در معادله شرط مرزی (۲-۳۰) و با در نظر گرفتن

در  $q_n(s) = 0$  در مرز گشودگی و شار حرارتی یکنواخت و همچنین ضرب دو طرف معادله (۲-۳۰) در

$\frac{d\sigma}{[2\pi i(\sigma - \zeta)]}$  و گرفتن انتگرال کوشی،  $\Omega_2(\zeta)$  به دست می‌آید، در نهایت با جایگذاری  $\Omega_2(\zeta)$  در

معادله (۲-۳۶)،  $\Omega(\zeta)$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & -\frac{q\lambda}{2k} e^{-i\delta} \left( \frac{a}{\sigma} + b\sigma + \frac{we}{\sigma^n} \right) + \Omega_2(\sigma) + \frac{q\lambda}{2k} e^{i\delta} \left( \frac{b}{\sigma} + a\sigma + we\sigma^n \right) - \bar{\Omega}_2(\sigma) = c \\ & \frac{1}{2\pi i} \left\{ \oint -\frac{q\lambda}{2k} e^{-i\delta} \left( \frac{a}{\sigma} + b\sigma + \frac{we}{\sigma^n} \right) \frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta)} + \oint \Omega_2(\sigma) \frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta)} \right. \\ & \quad \left. + \oint \frac{q\lambda}{2k} e^{i\delta} \left( \frac{b}{\sigma} + a\sigma + we\sigma^n \right) \frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta)} - \oint \bar{\Omega}_2(\sigma) \frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta)} \right\} \\ & = \oint c \frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta)} \end{aligned}$$

$$\frac{q\lambda}{2k} e^{-i\delta} \left( \frac{a}{\xi} + \frac{we}{\xi^n} \right) - \Omega_2(\xi) - \frac{q\lambda}{2k} e^{i\delta} \left( \frac{b}{\xi} \right) = c$$

$$\Omega_2(\xi) = -\frac{q\lambda}{2k} e^{i\delta} \left( \frac{b}{\xi} \right) + \frac{q\lambda}{2k} e^{-i\delta} \left( \frac{a}{\xi} + \frac{we}{\xi^n} \right) - c$$

$$\Omega(\zeta) = -\frac{q\lambda}{2k} \left[ e^{-i\delta} (b\zeta + wd\zeta) + e^{i\delta} \left( \frac{b}{\zeta} + \frac{wd}{\zeta^n} \right) \right] + const \quad (۳۸-۲)$$

عدد ثابت را می‌توان با داشتن دما در یک نقطه استاندارد تعیین نمود.

## ۲-۸ محاسبه توابع تحلیلی مختلط تنش $\varphi(z), \psi(z)$

با جایگذاری تابع دمایی مختلط (معادله (۲-۳۸))، در شرط مرزی نیرویی، معادله سوم (۲-۳۳) و

گرفتن انتگرال کوشی، تابعی لگاریتمی ظاهر می‌شود که چند مقداره است یعنی پس از یک دور

کامل، در دوره‌های بعدی در نقطه‌ای خاص دور گشودگی میزان جابجایی تغییر می‌کند. این موضوع باعث ایجاد یک نابجایی در جابجایی می‌شود. از آنجا که جابجایی باید تک مقدار باشد، یک تابع تنش که از این نابجایی جلوگیری می‌کند به صورت زیر آمده است [۳۱].

$$\begin{aligned}\phi_1(\zeta) &= A \log \zeta \\ \psi_1(\zeta) &= B \log \zeta\end{aligned}\quad (۳۹-۲)$$

با جایگذاری این روابط در معادله اول شرط مرزی (۳۵-۲) و معادله سوم (۳۳-۲) و با توجه به این که مقادیر جابجایی پس از دوران روی مرز باید به مقدار اولیه خود باز گردد؛ نتایج زیر حاصل می‌شود.

$$A = -\frac{q\lambda^2}{8k} G\alpha_0\kappa [e^{-i\delta}(ba) + e^{i\delta}(-b^2)] \quad (۴۰-۲)$$

$$B = \bar{A}$$

$$\kappa = \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

$$\kappa = 1+\nu$$

کرنش صفحه ای

تنش صفحه ای

با توجه به معادله (۳۹-۲) توابع تنش تحلیلی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\phi(\zeta) &= \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta)\end{aligned}\quad (۴۱-۲)$$

با جایگذاری معادلات بالا در اولین معادله (۳۵-۲) و ضرب دو طرف معادله در  $\frac{d\sigma}{[2\pi i(\sigma - \zeta)]}$  و

گرفتن انتگرال کوشی، توابع تحلیلی مختلط تنش به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\varphi(\zeta) = A \log(\zeta) - \frac{\omega e}{b\zeta^{n-1}} \bar{A} \quad (۴۲-۲)$$

$$\psi(\zeta) = \bar{A} \log(\zeta) + G(\zeta)$$

و  $G(\zeta)$  برابر است با:

$$G(\zeta) = A \frac{\omega e}{b} \zeta^{n-1} - (A\zeta^{n-1} + \bar{A} \frac{(n-1)\omega e}{b}) \left( \frac{a\zeta^2 + b + we\zeta^{n+1}}{-a\zeta^{n-1} + b\zeta^{n+1} - nwe} \right) \quad (۴۳-۲)$$

با جایگذاری معادلات (۴۲-۲) و (۴۳-۲) در معادلات (۳۳-۲) و (۳۴-۲) مولفه‌های تنش در مختصات

قطبی به صورت زیر به دست می آیند:

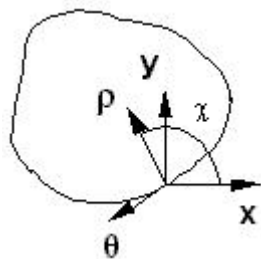
$$\begin{aligned} \tau_{r,\theta} &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{2\zeta^2}{\omega'(\zeta)} \left\{ \omega(\zeta) \left[ \frac{(\varphi''(\zeta)/\omega'(\zeta)) - (\varphi'(\zeta)/\omega''(\zeta))}{(\omega'(\zeta))^2} \right] + \psi'(\zeta) \right\} \right) \\ \sigma_{\theta} &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{Re} \left( \frac{2\zeta^2}{\omega'(\zeta)} \left\{ \omega(\zeta) \left[ \frac{(\varphi''(\zeta)/\omega'(\zeta)) - (\varphi'(\zeta)/\omega''(\zeta))}{(\omega'(\zeta))^2} \right] + \psi'(\zeta) \right\} \right) + 4 \operatorname{Re} \left( \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right) \right) \quad (44-2) \\ \sigma_r &= 4 \operatorname{Re} \left( \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right) - \sigma_{\theta} \end{aligned}$$

برای این که از  $\sigma_r, \sigma_{\theta}, \tau_{r,\theta}$  مقادیر  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  و برعکس را بدست آوریم از روابط انتقال زیر می توان استفاده کرد:

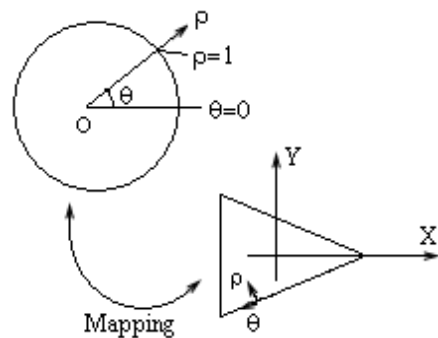
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & -n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{\rho} \\ \sigma_{\theta} \\ \tau_{\rho\theta} \end{Bmatrix} \quad (45-2)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\rho} \\ \sigma_{\theta} \\ \tau_{\rho\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (46-2)$$

$$m = \cos \chi, \quad n = \sin \chi$$



شکل (۶-۲): انتقال بین مختصات کارتزین  $(x, y)$  و منحنی الخط  $(\rho, \theta)$  و بالعکس



شکل (۵-۲): مختصات منحنی الخط

مطابق شکل (۶-۲)، زاویه بین محور  $x$  ها و محور منحنی الخط  $\rho$  می باشد (جهت  $\rho$  جهت عمود بر سطح گشودگی است).

با توجه به مطالب بیان شده الگوریتم حل تحلیلی به این صورت انجام می گیرد:

۱. با توجه به پارامترهای  $n$  و  $c$  و  $w$  هندسه گشودگی مشخص می شود.



۲. با انتخاب  $\rho$  و  $\theta$  یک نقطه روی دایره مبنا مشخص شده و آنگاه پارامترهای موهومی  $\xi$  بصورت زیر تعیین می‌شود:

$$\xi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

۳. با توجه به تابع تبدیل مقادیر  $x$  و  $y$  مشخص می‌شوند.

۴. مقادیر توابع تنش محاسبه می‌شوند.

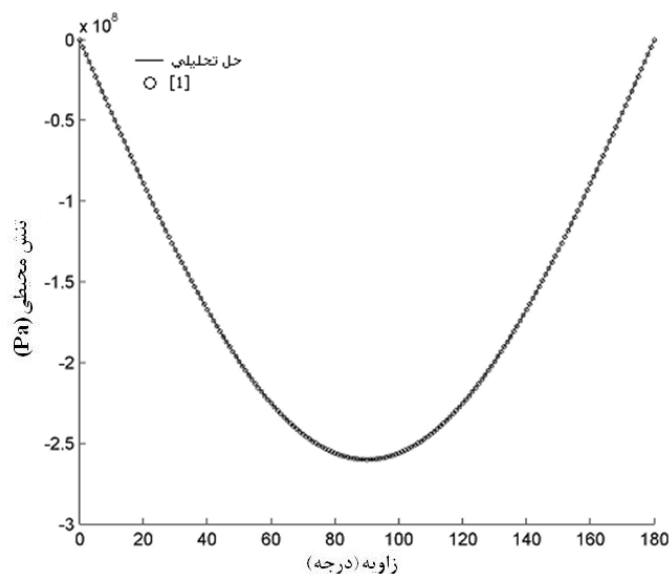
۵. مقادیر  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r,\theta}$  از روابط مربوطه بدست می‌آیند.

به کمک روابط ارائه شده می‌توان پارامترهای مختلف و موثر بر توزیع تنش را وارد مسأله کرد و اثرات آنها را بررسی نمود. این پارامترها عبارتند از: نوع گشودگی، شعاع انحنای گشودگی، جهت گیری (زاویه چرخش) گشودگی، که بر توزیع تنش موثر بوده و انتخاب صحیح آنها در دستیابی به طرح موفق کاملاً مفید است و منجر به کمترین تنش ممکن می‌شود که از گشودگی دایره‌ای نیز کمتر خواهد بود. تاثیر این پارامترها بر توزیع تنش در فصل بعد بررسی می‌شود.

همانطور که در فصل اول اشاره شد؛ هدف اصلی این پایان نامه تحلیل یک صفحه حاوی گشودگی مرکزی تحت شار حرارتی یکنواخت است. اندازه گشودگی چنان کوچک است که صفحه نامحدود در نظر گرفته می‌شود. فرضیات حاکم بر مسأله در بخش ۲-۲ همین فصل اشاره شده است.

## ۲-۹ بررسی درستی نتایج

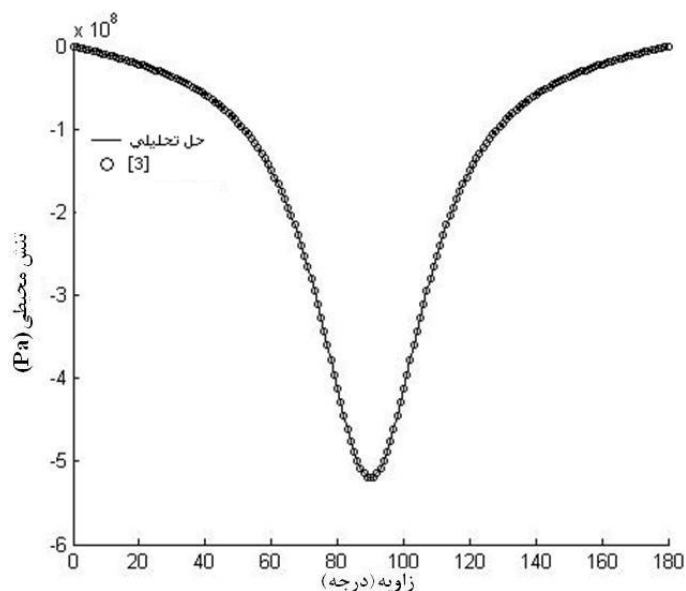
برای تایید درستی نتایج مقایسه‌ای بین حل تحلیلی حاضر و نتایج ارائه شده در مراجع [۱] و [۳] که توسط فلورنس و گودیر ارائه شدند؛ صورت گرفته است. فلورنس و گودیر در مرجع [۱] در یک صفحه نامحدود تحت شار حرارتی یکنواخت، تنش‌های حرارتی موضعی را در اطراف گشودگی دایره‌ای بررسی کردند. مقایسه حل تحلیلی حاضر و تحقیقات فلورنس و گودیر در شکل (۲-۷) آمده است.



شکل (۷-۲): مقایسه روش تحلیلی حاضر با [۱] برای گشودگی دایره‌ای

نتایج حل تحلیلی حاضر و مرجع [۱] به طور کامل بر یکدیگر منطبق هستند.

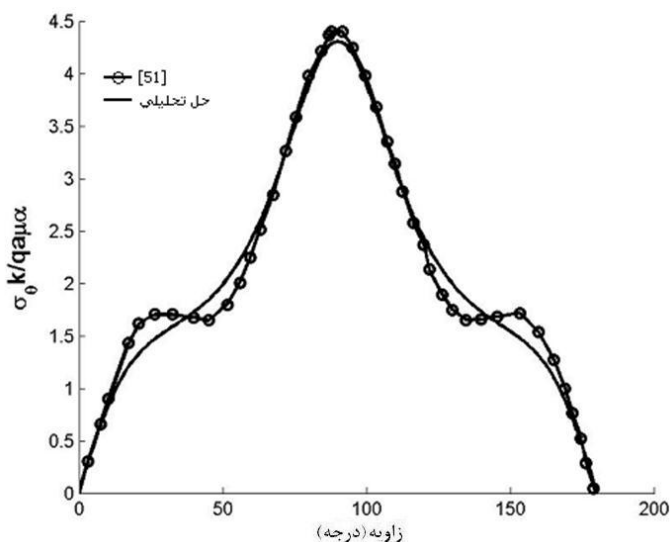
در [۳] فلورنس و گودیر در یک صفحه نامحدود تحت شار حرارتی یکنواخت، تنش‌های حرارتی موضعی را حول یک گشودگی بیضی شکل بررسی کردند. مقایسه حل تحلیلی حاضر و این تحقیقات در شکل (۸-۲) آمده است.



شکل (۸-۲): مقایسه روش تحلیلی حاضر با [۳] برای گشودگی بیضی

نتایج حل تحلیلی حاضر و مرجع [۳] به طور کامل منطبق بر یکدیگر هستند.

لازم به توضیح است که تحقیقات فلورنس و گودیر تنها برای اشکالی خاص صورت گرفته و تاثیر پارامترهای دیگر همچون زاویه چرخش گشودگی در آن لحاظ نشده است. مقایسه‌ی دیگری بین حل تحلیلی حاضر (با انتخاب  $w$  و  $\lambda$  مناسب) و نتیجه ارائه شده توسط وانگ<sup>۱</sup> [۴۳]؛ صورت گرفته است. وانگ تنش‌های حرارتی موضعی را در یک صفحه نامحدود تحت شار حرارتی یکنواخت، در اطراف گشودگی مربعی به روش اغتشاشات<sup>۲</sup> بررسی کرد. نتیجه این مقایسه در شکل (۹-۲) آمده است. همان‌طور که در شکل (۹-۲) ملاحظه می‌شود نتایج حل تحلیلی حاضر و [۴۲] با  $w=0.05$  و  $\lambda=1.28$  در بیشتر زوایا بر یکدیگر منطبق‌اند اما در بعضی از زوایا مقداری اختلاف مشاهده می‌شود.



شکل (۹-۲): مقایسه‌ی روش تحلیلی حاضر و [۴۳] برای گشودگی مربعی

در شکل (۹-۲)، ضرایب  $k$  و  $\mu$ ،  $\alpha$  به ترتیب عبارتند از: ضریب انبساط حرارتی، ضریب برشی و ضریب هدایت حرارتی،  $a$  شعاع دایره نگاشت شده می‌باشد. در فصل بعد هریک از پارامترهای موثر بر تنش، از قبیل زاویه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گشودگی و همچنین فرض تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای بررسی خواهد شد. این بررسی‌ها به طور

<sup>1</sup> Wang

<sup>2</sup> Perturbation

مفصل بر روی مثلث و مربع خواهد بود، برای پنج ضلعی تا هشت ضلعی نیز نتایج آمده است.

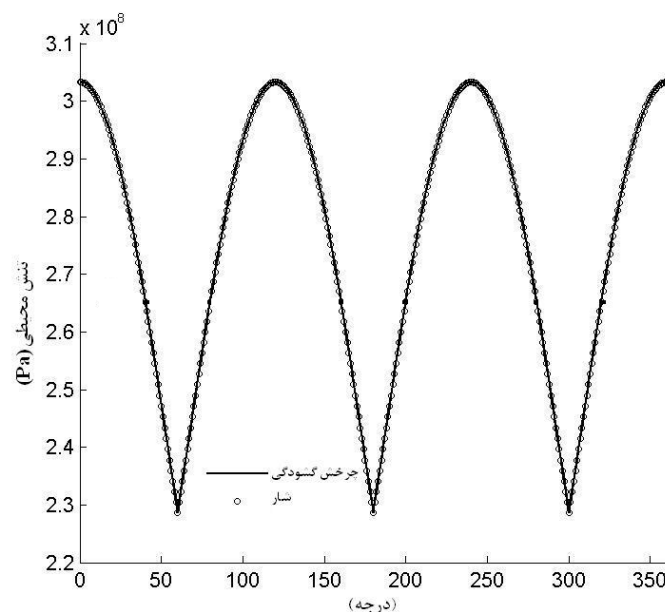
## فصل ۳

# بررسی پارامترهای موثر بر توزیع

## تنش

### ۳-۱ مقدمه

در این فصل تاثیر هر پارامتر بر روی توزیع تنش اطراف گشودگی به تنهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. لذا در بررسی هر پارامتر، سایر پارامترها ثابت در نظر گرفته می‌شوند. در بررسی نتایج، دو پارامتر زاویه چرخش گشودگی و کشیدگی گشودگی پارامترهای اصلی است. در این فصل سعی شده است که تاثیر این پارامترها به طور مجزا بررسی شود. سایر پارامترها مانند نوع گشودگی، انحنای گوشه گشودگی و زاویه شار نیز در حین بررسی پارامترهای اصلی، مطالعه می‌شود. لازم به یادآوری است که به دلیل نامحدود بودن صفحه، تأثیر زاویه شار کاملاً مشابه تأثیر زاویه چرخش است (شکل (۳-۱)).



شکل (۳-۱): مقایسه تاثیر زاویه شار و زاویه چرخش روی تنش گشودگی مثلثی و  $w=1/20$

### ۳-۲ جنس ماده

همانطور که روابط تحلیلی [۴۴] نشان می‌دهد؛ تمرکز تنش در صفحات همسانگرد دارای گشودگی مستقل از جنس و خواص مکانیکی ماده می‌باشد، بنابراین نتایج این پژوهش را می‌توان برای صفحات همسانگرد از سایر جنس‌ها نیز استفاده کرد. صفحه در نظر گرفته شده در این پژوهش، صفحه‌ای

همسانگرد با خواصی مطابق جدول (۱-۳) می‌باشد. صفحه در مرکز دارای یک گشودگی بوده و مرز این گشودگی عایق حرارتی و عاری از هرگونه تنش است؛ همچنین تحت بارگذاری حرارتی به صورت جریان حرارتی یکنواخت  $q$  تحت زاویه شار  $\delta$  قرار می‌گیرد.

جدول (۱-۳): خواص ماده

ماده	$\alpha_0 (\frac{\mu m}{m}/^{\circ}C)$	$k (w/m^{\circ}C)$	$\nu$	$E (MPa)$
فولاد	11.1	50.2	0.3	210

### ۳-۳ بررسی نتایج با فرض تنش صفحه‌ای

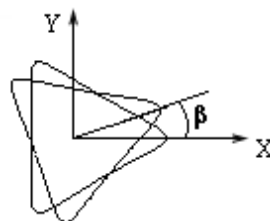
مطابق رابطه (۱۹-۲) با تغییر در مقادیر  $K$  و  $\alpha'$  می‌توان جوابهای مربوط به فرض تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای را بدست آورد. در این قسمت ابتدا به بررسی نتایج با فرض تنش صفحه‌ای پرداخته شده است.

#### ۱-۳-۳ تاثیر زاویه چرخش گشودگی

یکی از پارامترهایی که تأثیر عمده‌ای در توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها ایجاد می‌کند؛ زاویه چرخش گشودگی است. منظور از زاویه چرخش گشودگی مطابق شکل (۲-۳)، زاویه‌ای است که محور اصلی گشودگی نسبت به محور افق (محور  $x$ ) می‌سازد. این زاویه در شکل با  $\beta$  نشان داده شده است. شکل (۲-۳) گشودگی مثلثی را در دو حالت بدون چرخش ( $\beta=0$ ) و با چرخش ( $\beta=15$ ) نشان می‌دهد. برای گشودگی‌های مختلف وضعیت بدون چرخش آنها، یعنی حالتی که  $\beta=0$  می‌باشد؛ در شکل (۳-۳) دیده می‌شود.

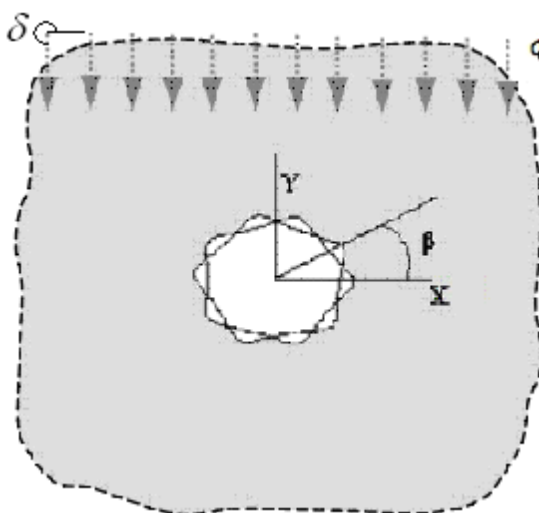


شکل (۲-۳): وضعیت بدون چرخش گشودگی‌های مختلف



شکل (۱-۳): زاویه چرخش گشودگی

صفحه‌ای را که ابعاد آن نسبت به ابعاد گشودگی، بزرگتر است در نظر بگیرید. مرکز این صفحه شامل یک گشودگی می‌باشد؛ که شکل این گشودگی و نحوه قرار گرفتن آن از متغیرهای مسأله به شمار می‌آیند. منظور از نحوه قرار گرفتن گشودگی، مقدار زاویه  $\beta$  می‌باشد. بنابراین صفحه‌ای همسانگرد که در مرکز دارای یک گشودگی بوده و تحت بارگذاری حرارتی به صورت جریان یکنواخت حرارت  $q$  در راستای عمودی است و گشودگی نسبت به انتقال حرارت عایق شده است؛ مانند آنچه در شکل (۴-۳) نشان داده شده است؛ مورد تحلیل قرار می‌گیرد. توزیع تنش در اطراف گشودگی، برحسب نوع گشودگی و نحوه قرار گرفتن آن متفاوت خواهد بود. در این قسمت، این توزیع تنش بررسی می‌شود. زاویه شار در این بخش  $\delta = 270^\circ$  در نظر گرفته می‌شود. در تمام نتایج زوایا برحسب درجه هستند.



شکل (۳-۳): تعریف مسأله شار حرارتی

نتایج ارائه شده در این بخش برحسب نوع گشودگی مرتب شده است. برای هر گشودگی نیز،

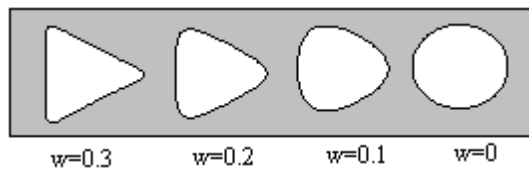


پارامتر چرخش گشودگی بطور کامل بررسی می‌شود.

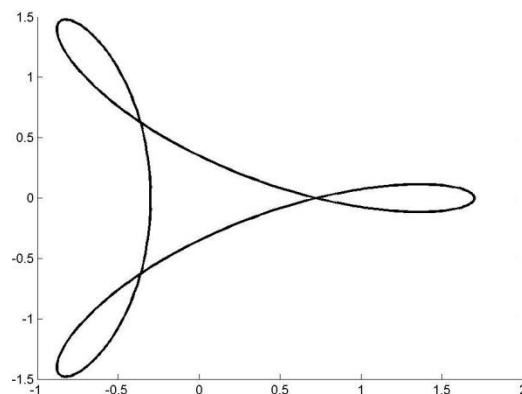
از پارامترهای مهم دیگر که در بحث توزیع تنش مهم می‌باشد انحنای گوشه‌های گشودگی است. همانطور که قبلاً اشاره شد؛  $w$  پارامتری است که با تغییر آن می‌توان انحنای گوشه‌های گشودگی را کنترل کرد. در حقیقت با تغییر  $w$  اگرچه نوع گشودگی تغییر نمی‌کند؛ ولی انحنای گشودگی دستخوش تغییر خواهد بود. این امر تاثیر بسزایی بر توزیع تنش دارد. در این فصل در کنار هر پارامتر اصلی مورد بحث، تاثیر  $w$  نیز بعنوان یک پارامتر جانبی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

### ۳-۳-۱-۱ گشودگی مثلثی

اگر در رابطه‌ای که در فصل قبل برای ایجاد گشودگی‌ها به آن اشاره شد (رابطه ۲-۱)؛ مقادیر  $n$  و  $c$  به ترتیب برابر ۲ و ۱ قرار داده شود؛ برای  $w$ های مختلف در بازه  $0 < w < 0.5$ ، نقاط به دست آمده در فاصله  $0 < \theta < 2\pi$  مثلث گونه‌هایی با انحنای مختلف را ایجاد می‌کنند (شکل ۳-۵). همانند شکل (۳-۶) اگر مقدار  $w$  خارج از محدوده فوق در نظر گرفته شود اضلاع مثلث در نقاطی یکدیگر را قطع خواهند کرد.



شکل (۳-۵): تاثیر انحنای گوشه  $w$  در شکل گشودگی مثلثی



شکل (۳-۵): شکل مثلث با  $w=0.7$

برای مدل کردن زاویه چرخش گشودگی از انتقال زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

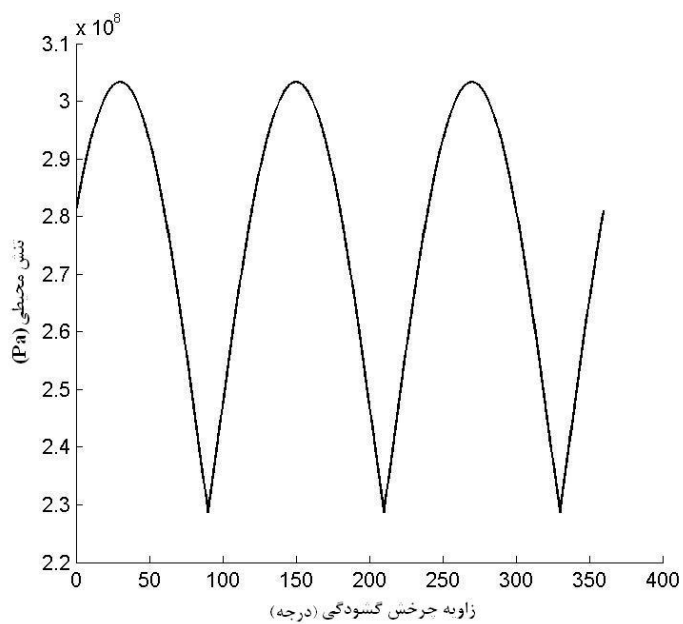
که X و Y قبلاً از رابطه (1-2) محاسبه شده‌اند.

ابتدا برای هر گشودگی، بدون در نظر گرفتن تاثیر w فقط به بررسی تاثیر زاویه چرخش گشودگی پرداخته می‌شود. بدین منظور لازم است تا برای یک مقدار مشخص w، تاثیر زاویه چرخش گشودگی مورد مطالعه قرار گیرد. نتایج شکل (7-3) در  $w=1/20$  آورده شده است. این شکل گویای چند نکته مهم است: اول این که تابع شکل (7-3) یک تابع نوسانی با نوسان  $120^\circ$  درجه است بنابراین کافی است تا نتایج در زاویه چرخش بین صفر تا  $120^\circ$  درجه ارائه شود. ثانیاً این منحنی نشان دهنده بیشترین تنش ایجاد شده در هر زاویه چرخش خاص، در اطراف گشودگی است که ممکن است در نقاط مختلفی از گشودگی رخ دهد. ثالثاً این منحنی نشان می‌دهد که با تغییر زاویه چرخش، تنش تغییر می‌کند و در زوایای خاصی که برای گشودگی‌های مختلف، متفاوت است؛ تنش کمترین و بیشترین مقدار را داراست. بنابراین برای گشودگی مثلی و  $w=1/20$  در زاویه چرخش خاصی ( $\beta$ )، تنش کمترین مقدار است. این زاویه چرخش خاص برای گشودگی مثلی  $90^\circ$  یا  $210^\circ$  درجه می‌باشد که در شکل (7-3) مشخص شده‌اند.

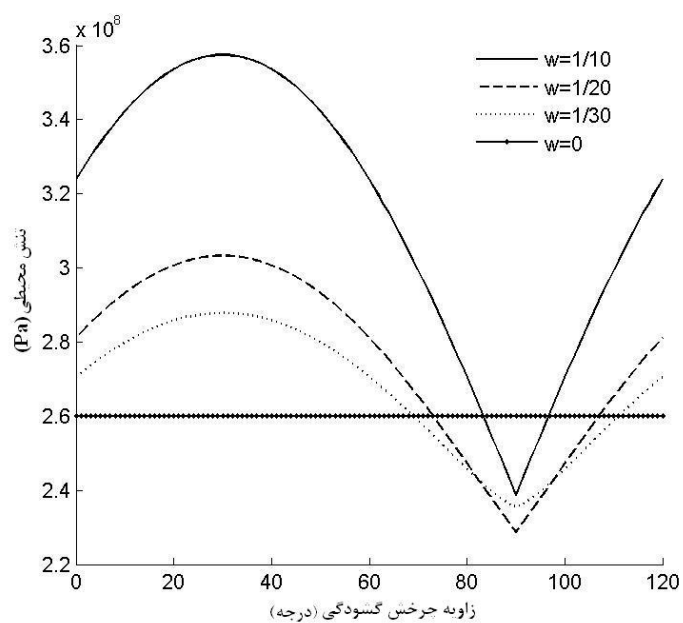
این کمترین تنش، **تنش مطلوب**<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. در طراحی باید با انتخاب زاویه چرخش مناسب سعی کرد تا به تنش مطلوب رسید. از طرفی اگر زاویه چرخش  $30^\circ$  درجه انتخاب شود؛ آنگاه تنش بیشترین مقدار خواهد بود که تنش حاصل، **تنش نامطلوب**<sup>۲</sup> نامگذاری شده است. شکل حالت تنش مطلوب و نامطلوب به ترتیب در شکل‌های (9-3) و (10-3) آمده است.

<sup>۱</sup>Desirable Stress

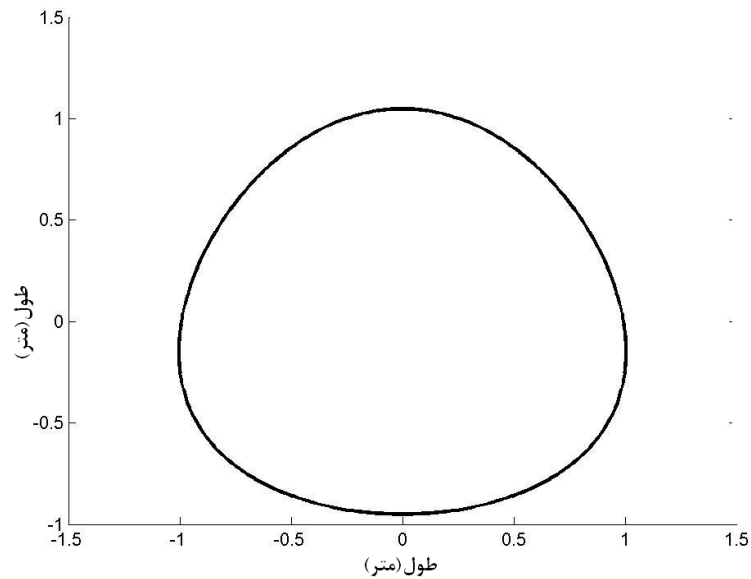
<sup>۲</sup>Undesirable Stress



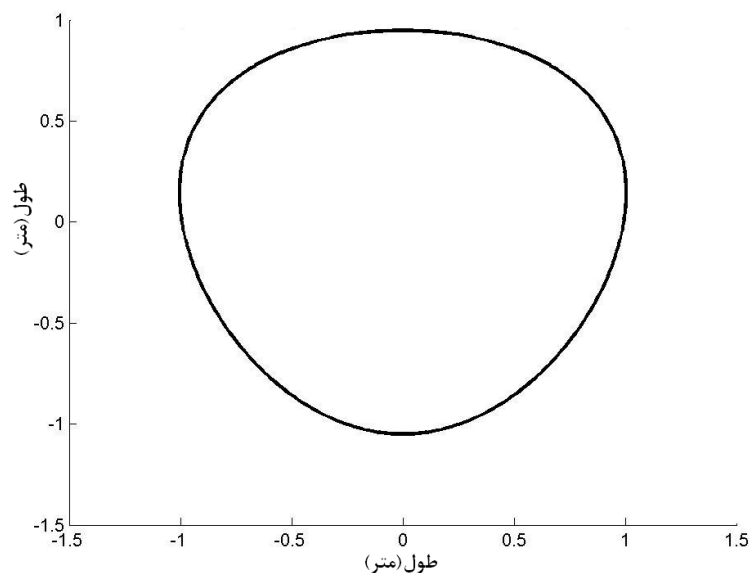
شکل (۳-۶): تاثیر زاویه چرخش ( $\beta$ ) بر روی تنش بی بعد برای گشودگی مثلثی و  $w=1/20$



شکل (۳-۷): تاثیر زاویه چرخش گشودگی برای گشودگی مثلثی در  $w$  های مختلف



شکل (۸-۳): شکل حالت تنش مطلوب



شکل (۹-۳): شکل حالت تنش نامطلوب

نتیجه‌ای که از شکل‌های فوق برای استفاده در طراحی بکار برده می‌شود این است که، برای یک صفحه تحت شار حرارتی و دارای گشودگی مثلثی، با زاویه شار  $270^\circ$  درجه، هیچ وقت نباید زاویه  $\beta$  را در محدوده  $30^\circ$  درجه انتخاب کرد و بهتر آن است که این زاویه  $90^\circ$  یا  $210^\circ$  درجه باشد. اگرچه این نتایج برای  $w=1/20$  آورده شده ولی همانطور که در شکل (۸-۳) نشان داده شده است؛ برای سایر  $w$ ها نیز تنش مطلوب در همان زوایای  $90^\circ$  یا  $210^\circ$  درجه اتفاق می‌افتد.

نتیجه جالبی که در این شکل دیده می‌شود این است که در محدوده وسیعی از زاویه‌ی چرخش، تنش مطلوب مربوط به گشودگی مثلثی از تنش مطلوب ناشی از گشودگی دایره‌ای ( $w=0$ ) کمتر است. با توجه به شکل (۸-۳) بسته به مقدار  $w$ ، در محدوده خاصی از زاویه چرخش تنش مربوط به گشودگی مثلثی کمتر از تنش مربوط به گشودگی دایره‌ای است. این محدوده در جدول (۲-۳) مشخص شده است.

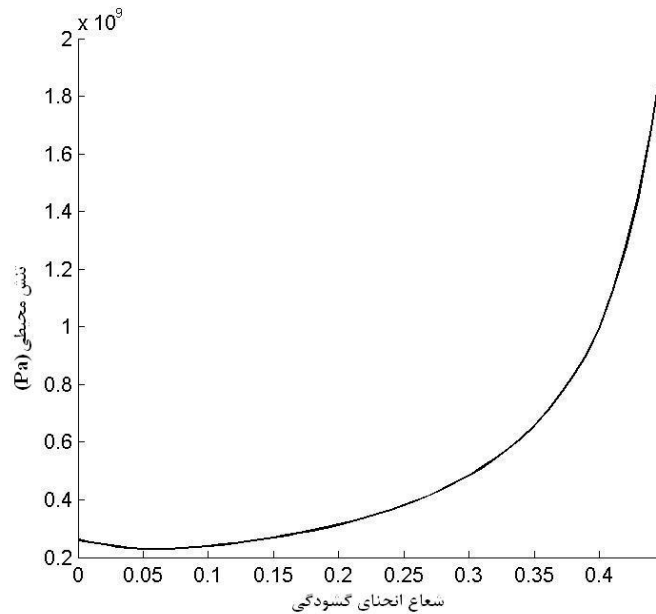
جدول (۲-۳): بازه‌ی زاویه‌ی چرخش که تنش از گشودگی دایره‌ای کمتر است

w	محدوده $\beta$	w	محدوده $\beta$	w	محدوده $\beta$
1/10	$84 < \beta < 96$	1/20	$74 < \beta < 106$	1/30	$70 < \beta < 110$

از تنش مطلوب و نامطلوب زیاد در این فصل استفاده می‌شود. لازم است تاکید شود که در بحث حاضر این دو تنش فقط با در نظر گرفتن زاویه چرخش تعریف شده‌اند. زوایایی که تحت آنها تنش مطلوب و نامطلوب رخ می‌دهد با تغییر  $w$ ، تغییر نمی‌کند. ولی مقدار این تنش‌ها در  $w$ های مختلف، متفاوت است. شکل (۸-۳) و جدول (۳-۳) گویای این مطلب است. تغییرات تنش مطلوب همان‌طور که در جدول (۳-۳) نشان داده شده است؛ پراکندگی خاصی دارد. اگر این تنش برحسب  $w$ های مختلف رسم شود نتیجه جالبی به دست می‌آید. نتایج تنش مطلوب در اثر تغییر  $w$  در شکل (۱۱-۳) و نتایج تنش نامطلوب در شکل (۱۲-۳) آورده شده است. همان‌طور که در شکل (۱۱-۳) نشان داده شده است؛ برای گشودگی مثلثی تنش مطلوب با افزایش  $w$  تا  $w=0.14$  کمتر از تنش مطلوب ناشی از گشودگی دایره‌ای ( $w=0$ ) است؛ کمترین مقدار تنش در  $w=0.06$  می‌باشد. کمترین تنش مطلوب در  $w=0.06$  برابر  $2/28$  می‌باشد. لازم به توضیح است که در حالت  $w=0$  یا گشودگی دایره‌ای مقدار تنش مطلوب  $2/6$  می‌باشد.

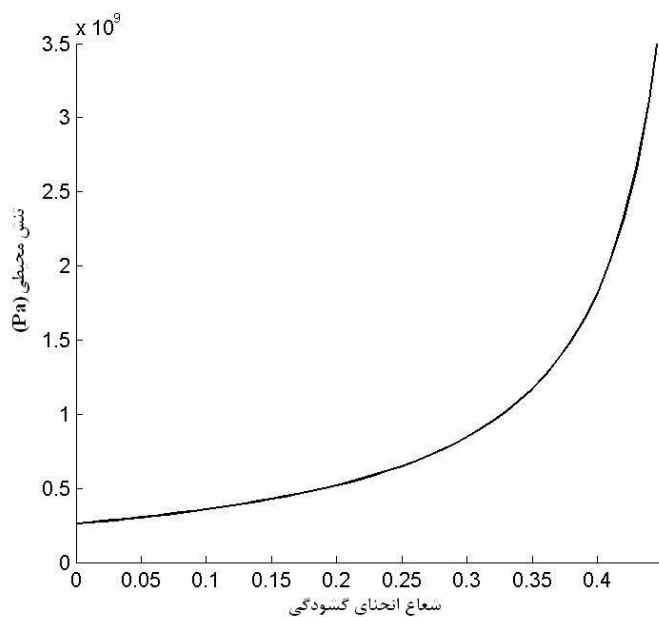
جدول (۳-۳): مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی مثلثی در  $w$  های مختلف

$w$	زاویه چرخش تنش مطلوب	مقدار تنش مطلوب (MPa)	زاویه چرخش تنش نامطلوب	مقدار تنش نامطلوب (MPa)
۰	-	۲۶۰	-	۲۶۰
۱/۳۰	۹۰	۲۳۶	۳۰	۲۸۸
۱/۲۰	۹۰	۲۲۹	۳۰	۳۰۰
۱/۱۰	۹۰	۲۳۹	۳۰	۳۵۶



شکل (۳-۱۰): تاثیر  $w$  بر روی تنش مطلوب برای گشودگی مثلثی

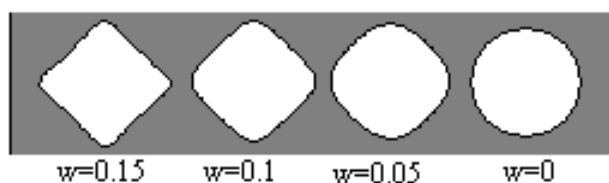
شکل (۳-۱۲) نشان می‌دهد که با بیشتر شدن  $w$  مقدار تنش نامطلوب نیز افزایش می‌یابد. در  $w=0$  که معادل گشودگی دایره‌ای است؛ تنش نامطلوب کمترین مقدار ممکن است. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد تنش مطلوب برای تمام  $w$ ها در زاویه ۹۰ یا ۲۱۰ درجه اتفاق می‌افتد و تنش نامطلوب در زاویه ۳۰ درجه. این زاویه مستقل از  $w$  است.



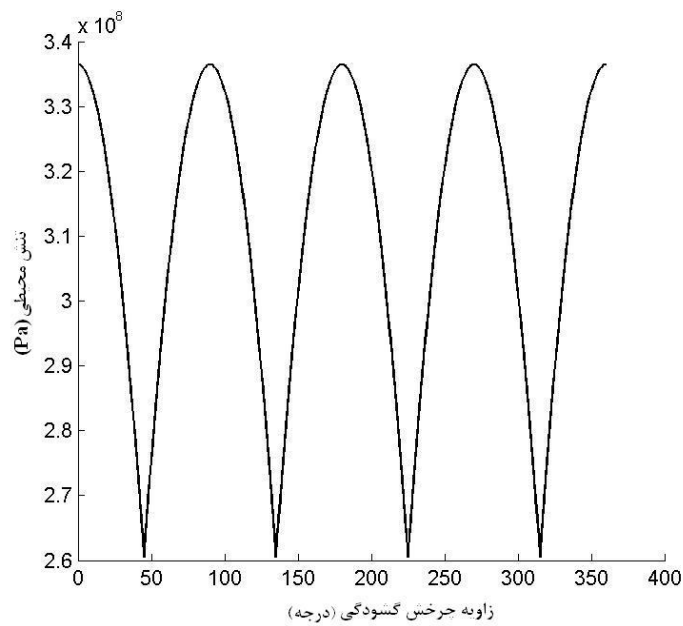
شکل (۱۱-۳): تاثیر  $w$  بر روی تنش نامطلوب برای گشودگی مثلثی

### ۳-۱-۳-۲ گشودگی مربعی

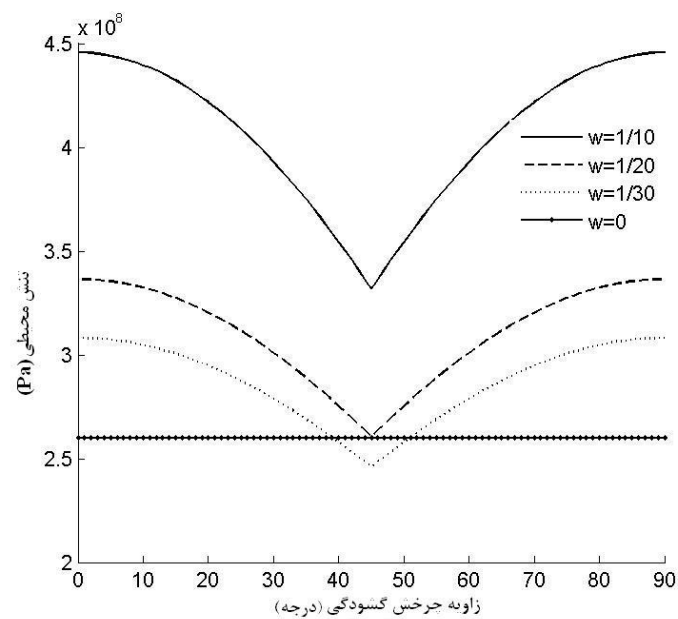
برای این گشودگی  $n=3$  و  $c=1$  می باشد. محدوده مجاز تغییرات  $w$  نیز بین صفر تا  $0.33$  خواهد بود ( $0 \leq w \leq 0.33$ ). تاثیر  $w$  در ایجاد گشودگی شبه مربعی در شکل (۱۳-۳) نشان داده شده است.



شکل (۱۲-۳): تاثیر انحنای گوشه ( $w$ ) در شکل گشودگی شبه مربعی



شکل (۳-۱۳): تاثیر زاویه چرخش بر روی تنش برای گشودگی شبه مربعی و  $w=1/20$



شکل (۳-۱۴): تاثیر زاویه چرخش گشودگی برای گشودگی شبه مربعی در  $w$ های مختلف

ابتدا در شکل (۳-۱۴) تاثیر زاویه چرخش در  $w=1/20$  ارائه شده است. همانطور که از این شکل پیداست دوره نوسان در این حالت ۹۰ درجه است. تنش مطلوب در زاویه ۴۵ درجه و تنش نامطلوب در زوایای صفر یا ۹۰ درجه اتفاق می افتد. زوایایی که تحت آنها تنش مطلوب و نامطلوب رخ می دهد با تغییر  $w$ ، تغییر نمی کند. ولی مقدار این تنش ها در  $w$ های مختلف، متفاوت است. شکل (۳-۱۵) و

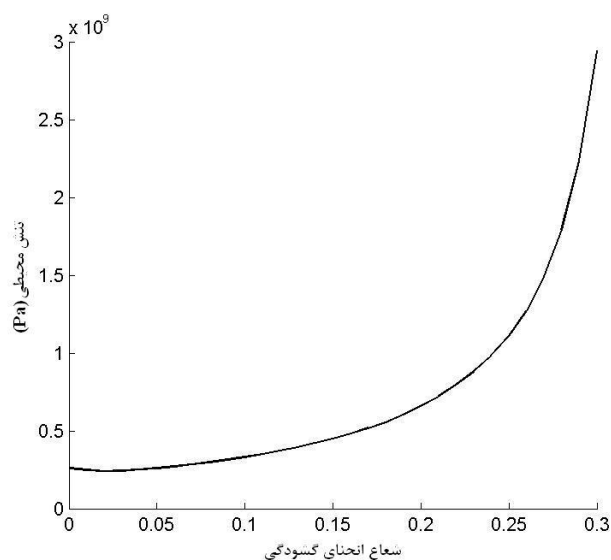


جدول (۴-۳) گویای این مطلب است.

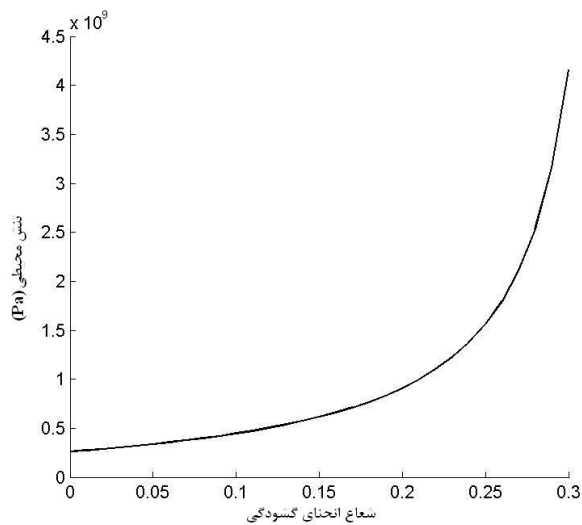
جدول (۴-۳): مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی شبه مربعی در  $w$  های مختلف

$w$	زاویه چرخش تنش مطلوب	مقدار تنش مطلوب (MPa)	زاویه چرخش تنش نامطلوب	مقدار تنش نامطلوب (MPa)
۱/۱۰	۴۵	۳۳۲	۰	۴۴۶
۱/۲۰	۴۵	۲۶۰	۰	۳۳۷
۱/۳۰	۴۵	۲۴۶	۰	۳۱۰
۰	-	۲۶۰	-	۲۶۰

تغییرات تنش مطلوب همانطور که در جدول (۴-۳) نشان داده شده است؛ پراکندگی خاصی دارد. نتایج تنش مطلوب و نامطلوب در اثر تغییر  $w$  به ترتیب در شکل‌های (۱۶-۳ و ۱۷-۳) آورده شده است. مطابق شکل (۱۶-۳) برای گشودگی شبه مربعی تنش مطلوب با افزایش  $w$  تا  $w=0.05$  کاهش می‌یابد و کمتر از تنش مطلوب ناشی از گشودگی دایره‌ای ( $w=0$ ) است؛ از طرفی با توجه به شکل (۳-۳) (۱۷) برای گشودگی شبه مربعی تنش نامطلوب با افزایش  $w$  افزایش می‌یابد.



شکل (۱۵-۳): تاثیر  $w$  بر روی تنش مطلوب برای گشودگی شبه مربعی

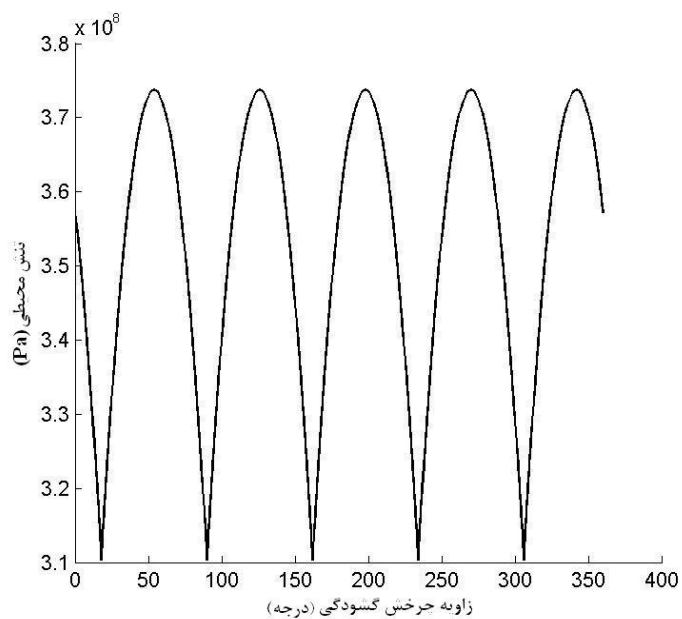


شکل (۱۶-۳): تاثیر  $w$  بر روی تنش نامطلوب برای گشودگی شبه مربعی

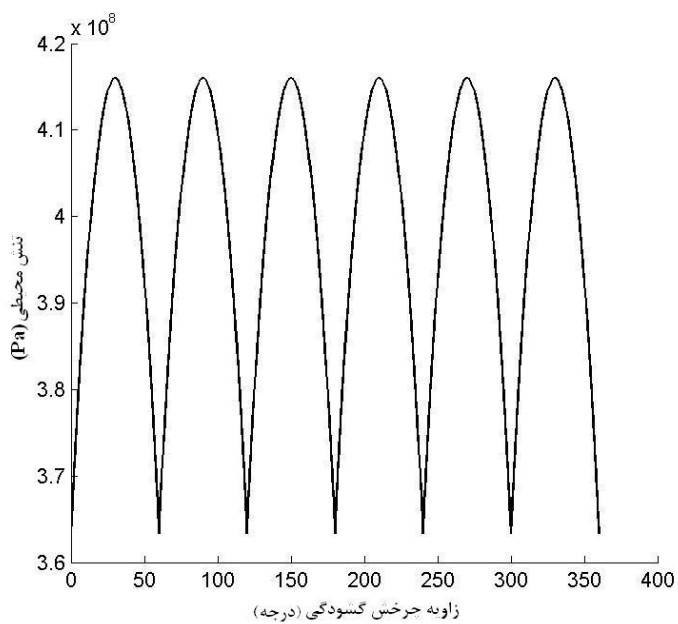
باتوجه به شکل (۱۶-۳) در یک  $w$  خاص تنش مطلوب کمترین مقدار خود را دارد. این مقدار  $w=0.02$  می باشد. کمترین تنش مطلوب در  $w=0.02$  برابر  $2/41$  می باشد. لازم به توضیح است که در حالت  $w=0$  یا گشودگی دایره ای مقدار تنش مطلوب  $2/6$  می باشد.

### ۳-۱-۳-۳ گشودگی های $n$ ضلعی

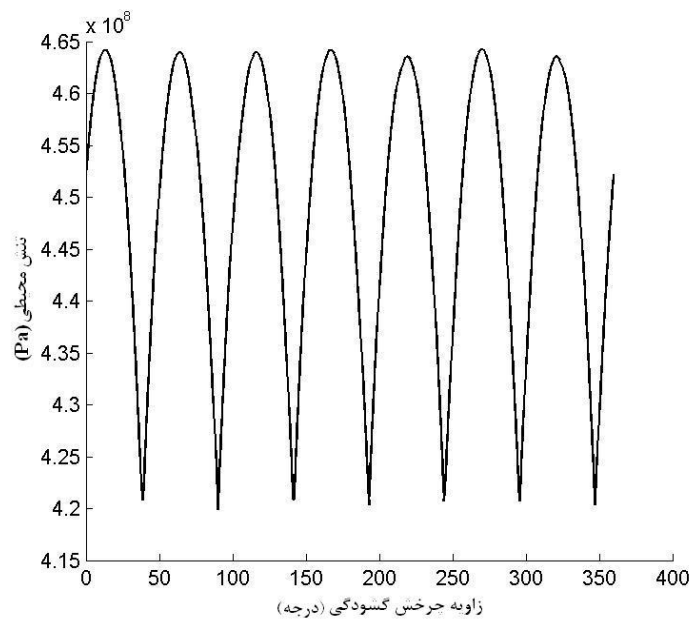
برای این گونه گشودگی ها نیز مطابق با روندی که در ارائه نتایج گشودگی های مثلثی و مربعی بکار برده شد؛ نتایج آورده می شود. ابتدا برای گشودگی های پنج، شش، هفت و هشت ضلعی تاثیر زاویه چرخش بر روی تنش برای  $w=1/20$  از صفر تا  $360$  درجه به ترتیب در شکل های (۳-۱۸ تا ۳-۲۱) رسم شده است تا بدین طریق دوره نوسان تابع قابل دسترسی باشد.



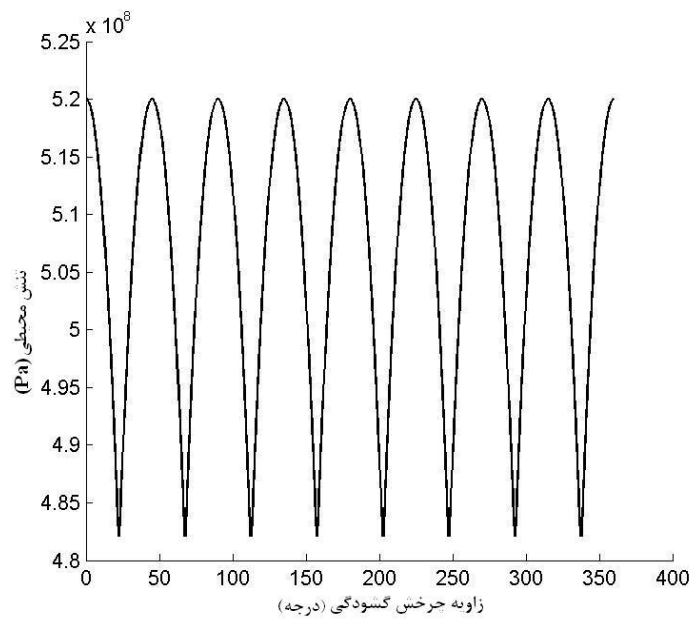
شکل (۳-۱۷): تاثیر زاویه چرخش بر روی تنش برای گشودگی پنج ضلعی و  $w=1/20$



شکل (۳-۱۸): تاثیر زاویه چرخش بر روی تنش برای گشودگی شش ضلعی و  $w=1/20$



شکل (۳-۱۹): تاثیر زاویه چرخش بر روی تنش برای گشودگی هفت ضلعی و  $w=1/20$



شکل (۳-۲۰): تاثیر زاویه چرخش بر روی تنش برای گشودگی هشت ضلعی و  $w=1/20$

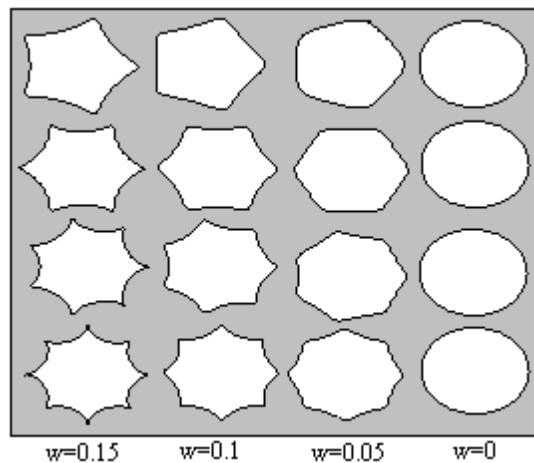
بحث در مورد نتایج حاصل از این گشودگی‌ها در جدول (۳-۵) خلاصه شده است:

جدول (۳-۵): معرفی تنش مطلوب و نامطلوب در گشودگی‌های مختلف برای  $w=1/20$

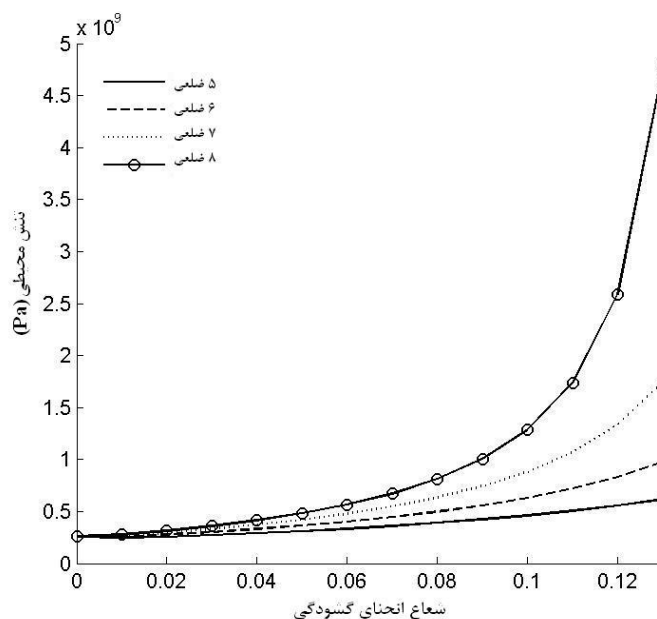
نوع گشودگی	دوره تناوب	زاویه چرخش تنش مطلوب	مقدار تنش مطلوب (MPa)	زاویه چرخش تنش نامطلوب	مقدار تنش نامطلوب (MPa)
پنج ضلعی	۷۲	۱۸	۳۱۰	۵۵	۳۷۴
شش ضلعی	۶۰	۰	۳۶۳	۳۰	۴۱۶
هفت ضلعی	۵۰	۳۹	۴۲۱	۱۳	۴۶۴
هشت ضلعی	۴۵	۲۳	۴۸۲	۰	۵۲۰

معمولاً رابطه‌ای که دوره تناوب در این حالت با تعداد اضلاع ( $n$ ) دارد بصورت  $T=360/n$  می‌باشد [۳۹]. ولی در موردی مانند گشودگی هفت ضلعی دوره تناوب اصلی، ۵۰ درجه است درحالی که طبق فرمول باید حدود ۵۱/۵ درجه باشد. برای گشودگی‌های بیشتر از هشت ضلعی رفتار به گشودگی دایره‌ای نزدیک می‌شود که از آوردن نتایج برای آنها صرفنظر شده است.

اکنون برای گشودگی‌های مختلف به بررسی تاثیر  $w$  می‌پردازیم. ابتدا در شکل (۳-۲۲) تاثیر  $w$  بر روی شکل ظاهری گشودگی‌های مختلف نشان داده شده است. سپس در شکل (۳-۲۳) تاثیر  $w$  بر روی تنش مطلوب ارائه شده است.



شکل (۳-۲۱): تاثیر انحنای گوشه  $w$  در شکل گشودگی‌های  $n$  ضلعی

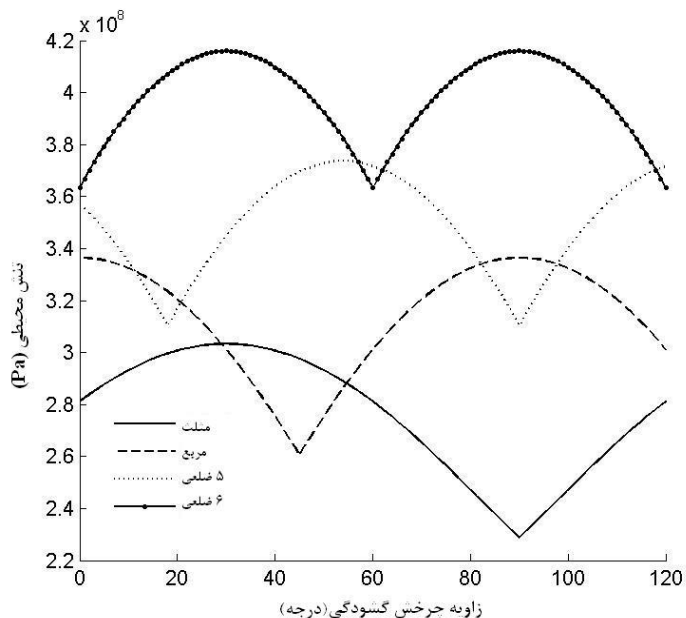


شکل (۳-۲۲): تاثیر  $w$  بر روی تنش مطلوب برای گشودگی‌های  $n$  ضلعی

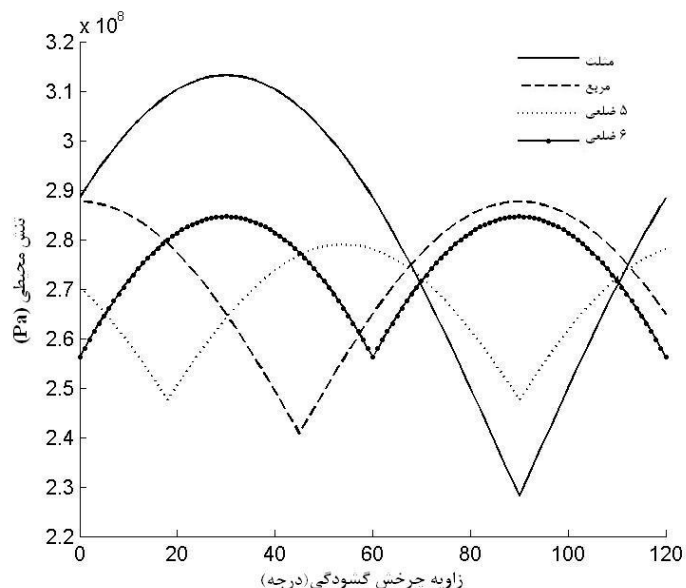
برای گشودگی‌های مختلف با نرم‌تر شدن گشودگی یا کاهش  $w$  تا مقدار مشخصی که بستگی به تعداد اضلاع گشودگی دارد تنش کاهش، سپس با کاهش مجدد  $w$  و میل کردن آن به سمت صفر، مقدار تنش افزایش می‌یابد. در این حالت گشودگی دایره‌ای، بهترین شکل گشودگی نمی‌باشد. بنابراین با افزایش  $w$  و انتخاب زاویه چرخش مناسب که برای گشودگی‌های مختلف، متفاوت است؛ می‌توان به تنش مطلوبی حتی کمتر از گشودگی دایره‌ای رسید. مثلاً برای گشودگی‌های شش ضلعی و هشت ضلعی می‌توان زاویه چرخش و  $w$  بهینه‌ای یافت؛ طوری که با انتخاب آن‌ها در طراحی به تنش مطلوبی کمتر از تنش مطلوب حاصل از گشودگی دایره‌ای دست یافت.

شعاع انحنایی ( $w$ ) که تنش مطلوب در آن کمتر است؛  $w$  بهینه نام دارد. برای مثلث و پنج ضلعی به ترتیب  $w=0.05$  و  $w=0.01$ ؛  $w$  بهینه می‌باشد. در این حالت مقدار تنش برابر  $2/28$  و  $2/48$  است. برای گشودگی شش ضلعی  $w=0.01$  بهینه است. در این حالت مقدار تنش مطلوب برای گشودگی شش ضلعی برابر  $2/56$  است. هرچه تعداد اضلاع بیشتر می‌شود  $w$  بهینه برای تعداد اضلاع زوج نیز به صفر نزدیک می‌شود. برای یک  $w$  خاص، مثلاً  $w=1/20$  تاثیر تعداد اضلاع بر روی تنش در شکل (۳-۲۴) بررسی شده است. با احتساب زاویه شار  $270^\circ$  درجه کمترین تنش مطلوب ممکن که در

گشودگی‌های مختلف در زوایای چرخش و شعاع انحنای خاصی رخ می‌دهد؛ در شکل (۳-۲۵) نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که به غیر از پنج ضلعی در دیگر گشودگی‌ها، با افزایش تعداد اضلاع، تنش نامطلوب کمتر می‌شود.



شکل (۳-۲۳): تنش در  $w=1/20$  برای گشودگی‌های مختلف



شکل (۳-۲۴): کمترین تنش مطلوب ممکن برای گشودگی‌های مختلف

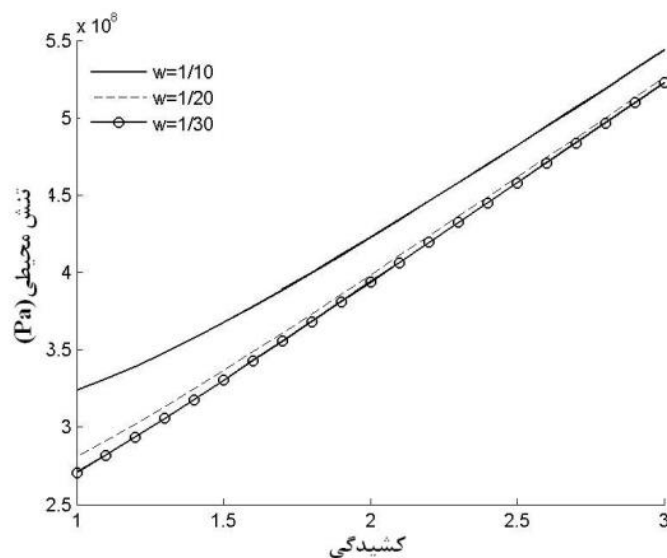
در ادامه کشیدگی گشودگی (c) به عنوان یکی دیگر از پارامترهای اصلی موثر بر توزیع تنش

بررسی می‌شود.

## ۳-۳-۲ تأثیر کشیدگی گشودگی

### ۳-۳-۱-۲ گشودگی مثلثی

این پارامتر همانطور که در تابع نگاشت به آن اشاره شد؛ مستقیماً بر هندسه گشودگی تأثیر می‌گذارد به گونه‌ای که با تغییر در مقدار  $c$  نسبت طول به عرض گشودگی (کشیدگی گشودگی) قابل کنترل خواهد بود. مطابق شکل (۳-۲۶) مقدار تنش با تغییرات  $c$  رابطه تقریباً خطی داشته و افزایش یا کاهش این پارامتر به ترتیب موجب افزایش و یا کاهش حداکثر تنش خواهد شد و همچنین با افزایش  $w$  برای کشیدگی‌های مختلف، تنش حداکثر افزایش می‌یابد. نرخ این افزایش برای کشیدگی‌های مختلف، یکسان است. برای دستیابی به یک نگاشت هم‌نوا مقدار  $c$  در تابع نگاشت باید در محدوده خاصی باشد لذا سعی شده است نتایج ارائه شده برای  $c$  در این محدوده قرار گیرد.

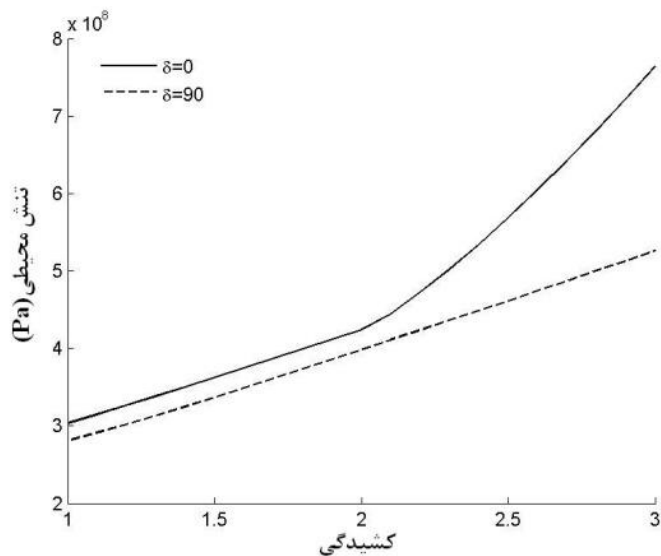


شکل (۳-۲۵): تأثیر کشیدگی گشودگی و  $w$  بر روی تنش حداکثر

باتوجه به رابطه (۱-۲) پارامتر  $c$  فقط در جهت  $y$  تابع نگاشت اعمال شده است لذا با افزایش مقدار  $c$  شکل گشودگی در جهت  $y$  کشیده می‌شود. مطابق شکل (۳-۲۷) روند افزایش تنش با افزایش مقدار  $c$  برای وقتی که زاویه اعمال بار صفر باشد یا به عبارت دیگر زاویه بار عمود بر امتداد کشیدگی گشودگی باشد شدیدتر است. برای وقتی که بارگذاری در جهت  $y$  است ( $\delta=90$ ) با افزایش  $c$  تنش با

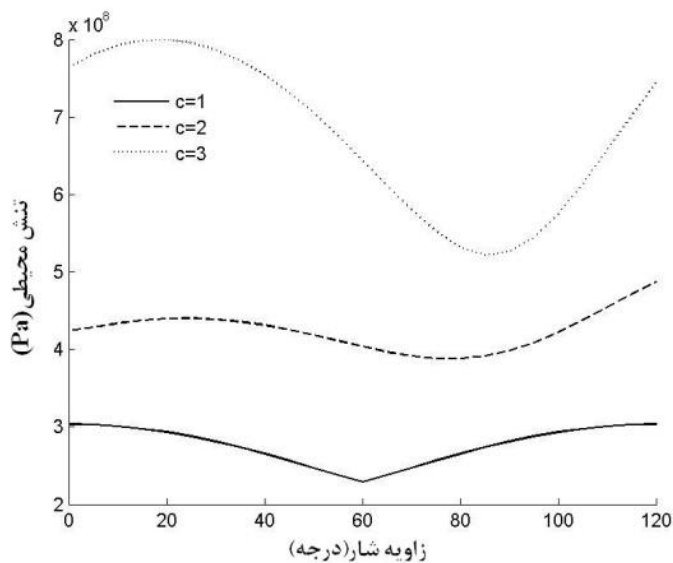


شیب کمتری افزایش می‌یابد.



شکل (۳-۲۶): تأثیر کشیدگی گشودگی و زاویه شار بر روی تنش حداکثر

مطابق آنچه که در شکل (۳-۲۸) دیده می‌شود؛ تغییرات تنش برحسب زاویه شار در  $c$  های مختلف و برای  $w=0/05$  رفتار نامنظمی دارد. کمترین تنش و زاویه شار مطلوب متناظر با آن، با تغییر  $c$ ، تغییر می‌کند. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد؛ کاهش مقدار تنش با تغییر مقدار  $c$ ، بستگی به زاویه بار دارد. در زوایای بار خاصی ( $\delta=0$ ) با کاهش  $c$ ، مقدار تنش با شیب بیشتری کاهش می‌یابد و برای بعضی دیگر از زوایای بار مانند زاویه بار  $90^\circ$  درجه، این رفتار کاملاً متفاوت است.



شکل (۳-۲۷): تأثیر زاویه شار و کشیدگی بر روی تنش حداکثر

تنها تأثیر کشیدگی گشودگی همراه با زاویه بار است. همان‌طور که ذکر شد روند افزایش تنش با افزایش مقدار  $c$  برای وقتی که زاویه اعمال شار صفر باشد یا به عبارت دیگر زاویه شار عمود بر امتداد کشیدگی گشودگی باشد شدیدتر است. برای وقتی که بارگذاری در جهت  $y$  است ( $\beta=90$ ) با افزایش  $c$  تنش با شیب کمتری افزایش می‌یابد. این نتیجه در گشودگی‌های دیگر نیز به همین صورت است؛ لذا از آوردن نتایج برای آن‌ها صرف‌نظر شده است.

### ۳-۴ بررسی نتایج با فرض کرنش صفحه‌ای

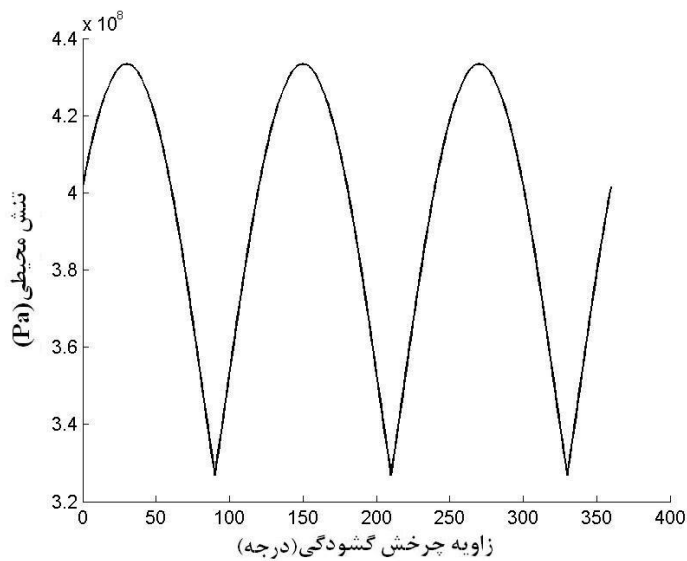
در این قسمت با تغییر در مقادیر  $K$  و  $\alpha'$  به بررسی نتایج با فرض کرنش صفحه‌ای می‌پردازیم.

### ۳-۴-۱ تأثیر زاویه چرخش گشودگی

#### ۳-۴-۱-۱ گشودگی مثلثی

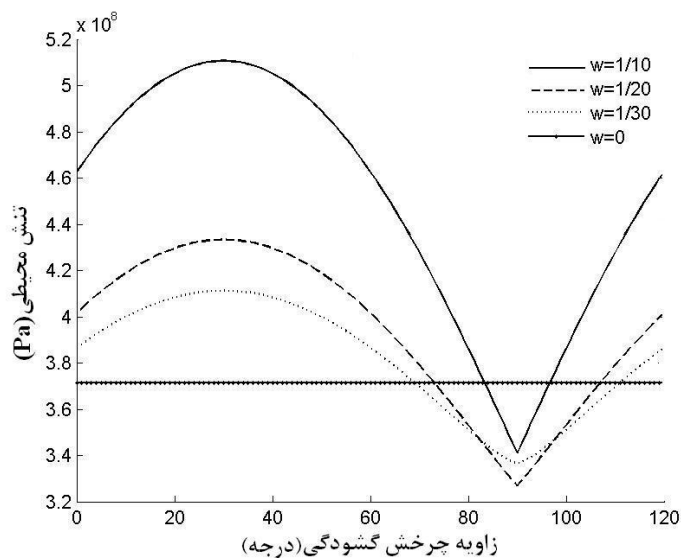
همانند بخش قبل ابتدا برای هر گشودگی، بدون در نظر گرفتن تأثیر  $w$  فقط به بررسی تأثیر زاویه چرخش گشودگی پرداخته می‌شود. بدین منظور لازم است تا برای یک مقدار مشخص  $w$ ، تأثیر زاویه چرخش گشودگی مورد مطالعه قرار گیرد. بنابراین نتایج شکل (۳-۲۹) در  $w=1/20$  آورده شده است. با توجه به این شکل همانند بخش قبل تنش مطلوب در زاویه چرخش  $90$  درجه و تنش نامطلوب در زاویه  $30$  درجه اتفاق می‌افتند؛ اما مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب با فرض کرنش صفحه‌ای از مقادیر این تنش‌ها با فرض تنش صفحه‌ای بیشتر است.

مقادیر تنش‌های مطلوب و نامطلوب با فرض کرنش صفحه‌ای و  $w=1/20$  به ترتیب برابر  $3/27$  و  $4/33$  می‌باشد.



شکل (۲۸-۳): تأثیر زاویه چرخش ( $\beta$ ) بر روی تنش بی‌بعد برای گشودگی مثلثی و  $w=1/20$

در شکل (۳۰-۳) تأثیر زاویه چرخش گشودگی در  $w$ های مختلف مشاهده می‌شود.



شکل (۲۹-۳): تأثیر زاویه چرخش گشودگی برای گشودگی مثلثی در  $w$ های مختلف

همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است؛ همانند بخش قبل در محدوده وسیعی از زاویه‌ی چرخش، تنش مطلوب مربوط به گشودگی مثلثی از تنش مطلوب ناشی از گشودگی دایره‌ای ( $w=0$ ) کمتر است. با توجه به شکل (۳۰-۳) بسته به مقدار  $w$ ، در محدوده خاصی از زاویه چرخش تنش مربوط به گشودگی مثلثی کمتر از تنش مربوط به گشودگی دایره‌ای است. این محدوده در جدول (۳-۳)

۶) مشخص شده است.

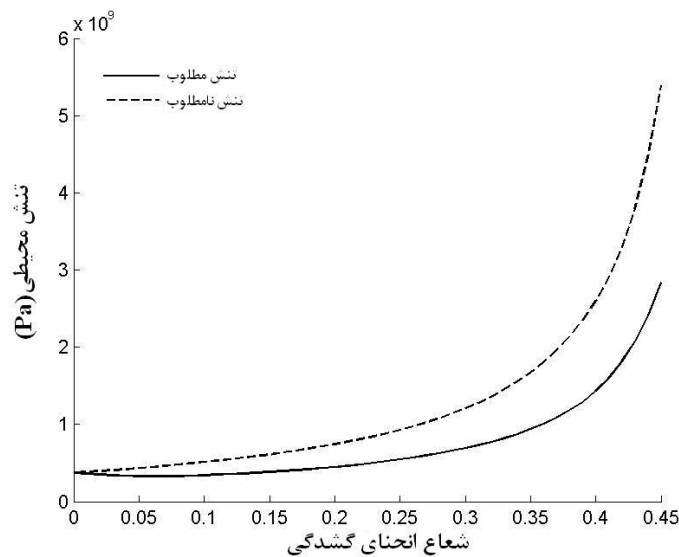
جدول (۳-۶): بازه‌ی زاویه‌ی چرخش که تنش از گشودگی دایره‌ای کمتر است

w	محدوده $\beta$	w	محدوده $\beta$	w	محدوده $\beta$
1/10	$84 < \beta < 96$	1/20	$74 < \beta < 106$	1/30	$70 < \beta < 110$

با مقایسه جدول‌های (۳-۶ و ۳-۲) و همچنین شکل‌های (۳-۳۰ و ۳-۸) مشاهده می‌شود، زوایای چرخش مطلوب و نامطلوب و همچنین بازه‌ای از زاویه چرخش که تنش مطلوب گشودگی مثلثی کمتر از تنش مربوط به گشودگی دایره‌ای می‌شود در دو حالت فرض تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای با یکدیگر برابرند.

حال به بررسی شعاع انحنای گشودگی در زاویه چرخش مطلوب و نامطلوب می‌پردازیم. نتایج این بررسی در شکل (۳-۳۱) آمده است. همانطور که در این شکل نشان داده شده است؛ برای گشودگی مثلثی تنش مطلوب با افزایش w تا  $w=0.14$  کمتر از تنش مطلوب ناشی از گشودگی دایره‌ای ( $w=0$ ) است؛ کمترین مقدار تنش در  $w=0.06$  می‌باشد. کمترین تنش مطلوب در  $w=0.06$  برابر  $3/26$  می‌باشد. لازم به توضیح است که در حالت  $w=0$  یا گشودگی دایره‌ای مقدار تنش مطلوب  $3/71$  می‌باشد.

با بیشتر شدن w مقدار تنش نامطلوب نیز افزایش می‌یابد. در  $w=0$  که معادل گشودگی دایره‌ای است؛ تنش نامطلوب کمترین مقدار ممکن است. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد تنش مطلوب برای تمام wها در زاویه ۹۰ یا ۲۱۰ درجه اتفاق می‌افتد و تنش نامطلوب در زاویه ۳۰ درجه. این زاویه مستقل از w است.



شکل (۳-۳۰): تاثیر  $w$  بر روی تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی مثلثی  
 مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب با فرض کرنش صفحه‌ای در جدول (۳-۷) آمده است.

جدول (۳-۷): مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب برای گشودگی مثلثی در  $w$ های مختلف

$w$	زاویه چرخش تنش مطلوب	مقدار تنش مطلوب (MPa)	زاویه چرخش تنش نامطلوب	مقدار تنش نامطلوب (MPa)
۰	-	۳۷۱	-	۳۷۱
۱/۳۰	۹۰	۳۳۶	۳۰	۴۱۱
۱/۲۰	۹۰	۳۳۷	۳۰	۴۳۳
۱/۱۰	۹۰	۳۴۱	۳۰	۵۱۱

با مقایسه جدول‌های (۳-۳ و ۳-۷) مشاهده می‌شود تنها تفاوت بین فرض تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای در مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب است. اگر مقادیر این تنش‌ها در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای بر یکدیگر تقسیم شوند نتیجه جالبی به دست می‌آید.  
 با تقسیم این مقادیر بر یکدیگر متوجه خواهیم شد نتیجه برای همه مقادیر عدد ثابت ۱/۴۳ است. یعنی با تقسیم مقادیر حاصل از فرض کرنش صفحه‌ای به مقادیر حاصل از فرض تنش صفحه‌ای به

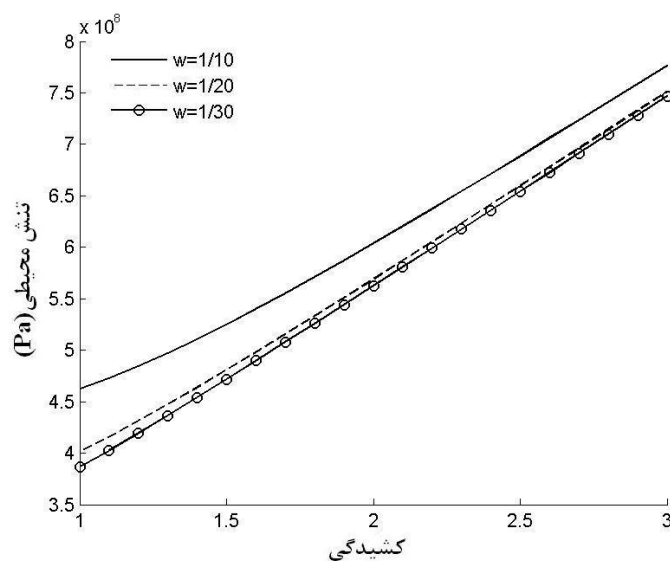
مقدار ثابت  $1/43$  خواهیم رسید. با توجه به نتیجه بدست آمده و همچنین برابری زوایای چرخش مطلوب و نامطلوب، و همچنین برابری بازه زاویه چرخشی که تنش گشودگی کمتر از گشودگی دایروی می‌شود؛ دیگر نیازی به بررسی تأثیر فرض کرنش صفحه‌ای برای دیگر گشودگی‌ها نمی‌باشد زیرا می‌دانیم تنها تفاوت بین این دو فرض در مقادیر تنش‌ها است که آن مقدار نیز با توجه به رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$(2-3) \quad 1/43 = \text{مقادیر با فرض تنش صفحه ای} / \text{مقادیر با فرض کرنش صفحه ای}$$

### ۳-۴-۲ تأثیر کشیدگی گشودگی

#### ۳-۴-۲-۱ گشودگی مثلی

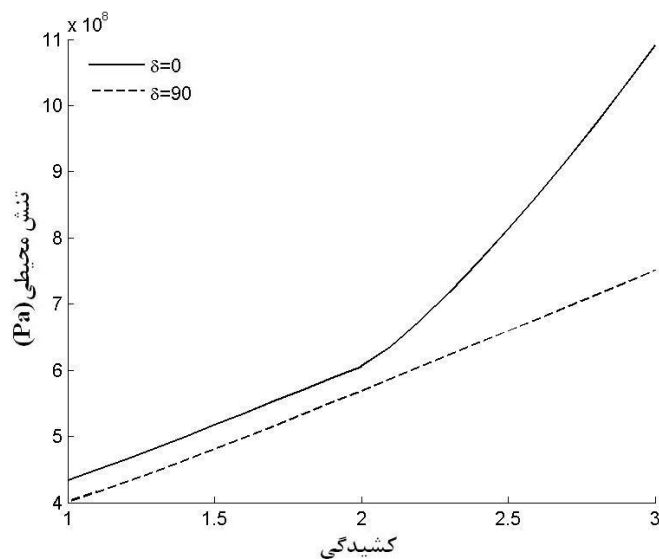
مطابق شکل (۳-۳۲) همانند فرض تنش صفحه‌ای مقدار تنش با تغییرات  $c$  رابطه تقریباً خطی داشته و افزایش یا کاهش این پارامتر به ترتیب موجب افزایش و یا کاهش حداکثر تنش خواهد شد و همچنین با افزایش  $w$  برای کشیدگی‌های مختلف، تنش حداکثر افزایش می‌یابد. نرخ این افزایش برای کشیدگی‌های مختلف، یکسان است.



شکل (۳-۳۱): تأثیر کشیدگی گشودگی و  $w$  بر روی تنش حداکثر

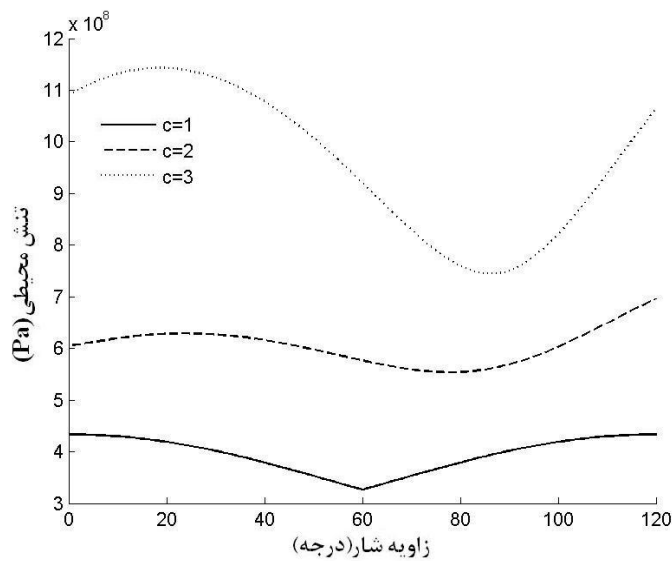
مطابق شکل (۳-۳۳) روند افزایش تنش با افزایش مقدار  $c$  برای وقتی که زاویه اعمال بار صفر

باشد یا به عبارت دیگر زاویه بار عمود بر امتداد کشیدگی گشودگی باشد شدیدتر است. برای وقتی که بارگذاری در جهت  $y$  است ( $\beta=90$ ) با افزایش  $c$  تنش با شیب کمتری افزایش می‌یابد.



شکل (۳-۳۲): تأثیر کشیدگی گشودگی و زاویه شار بر روی تنش حداکثر

مطابق آنچه که در شکل (۳-۳۴) دیده می‌شود؛ تغییرات تنش برحسب زاویه شار در  $c$  های مختلف و برای  $w=0/05$  رفتار نامنظمی دارد. کمترین تنش و زاویه شار مطلوب متناظر با آن، با تغییر  $c$ ، تغییر می‌کند. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد؛ کاهش مقدار تنش با تغییر مقدار  $c$ ، بستگی به زاویه بار دارد. در زوایای بار خاصی ( $\delta=0$ ) با کاهش  $c$ ، مقدار تنش با شیب بیشتری کاهش می‌یابد و برای بعضی دیگر از زوایای بار مانند زاویه بار ۹۰ درجه، این رفتار کاملاً متفاوت است.



شکل (۳-۳۳): تأثیر زاویه شار و کشیدگی بر روی تنش حداکثر

همان‌طور که مشاهده شد تفاوتی بین نتایج حاصل از فرض کرنش صفحه‌ای با نتایج حاصل از فرض تنش صفحه‌ای وجود ندارد. تنها تفاوت در مقادیر تنش‌ها است که این مقادیر نیز توسط رابطه (۲-۳) قابل محاسبه می‌باشد. بنابراین از آوردن نتایج مربوط به گشودگی‌های دیگر صرف‌نظر شد.

### ۳-۵ جمع‌بندی

در این فصل به بررسی زاویه چرخش گشودگی و همچنین کشیدگی گشودگی پرداخته شد. با توجه به بررسی‌های انجام شده به این نتیجه رسیده شد که با انتخاب زاویه چرخش و شعاع انحنای گشودگی مناسب که با توجه به نوع گشودگی متفاوت است می‌توان به تنش‌هایی حتی کمتر از گشودگی دایره‌ای دست یافت. همچنین با بررسی کشیدگی گشودگی نتیجه شد با افزایش این پارامتر اگر شار بر امتداد گشودگی عمود باشد تنش با شیب بیشتری افزایش می‌یابد بنابراین در این‌گونه شرایط تا حد ممکن باید سعی شود زاویه‌ی شار به نحوی انتخاب شود که مماس بر امتداد گشودگی باشد.



## فصل ۴

# نتیجه‌گیری و پیشنهادها

## ۴-۱ خلاصه نتایج

در این پایان‌نامه با استفاده از توابع پتانسیل مختلط و با به‌کارگیری نگاشت همنوا و حل معادلات انتگرالی، توزیع تنش اطراف گشودگی ارائه شد. روش حل برپایه بسط روش گودیر و فلورانس است. آنها از روش متغیر مختلط برای ورق نامحدود همسانگرد حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل استفاده کردند. برای سادگی استفاده از انتگرال کوشی، ورق نامحدود شامل گشودگی، به ناحیه درون دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته می‌شود. برای بررسی صحت نتایج تحلیل حاضر و درستی برنامه نوشته شده، نتایج بدست آمده با داده‌های موجود در مقالات دیگر مقایسه گردیده‌است، نتایج حاصل تطابق قابل قبولی با نتایج و مقادیر گزارش شده دارد. در انتها مقادیر تنش با در نظر داشتن پارامترهای مهمی مانند: نوع گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی، کشیدگی گشودگی و زاویه جریان حرارتی بدست آمد.

طبق نتایج، با چرخش گشودگی در یک بازه خاص که بسته به نوع گشودگی متفاوت است، می‌توان به مقادیر تنشی کمتر از تنش ایجاد شده در گشودگی دایره‌ای رسید. بعد از یافتن زاویه چرخش مطلوب به بررسی تأثیر شعاع انحنای گشودگی در این زاویه پرداخته شد. با بررسی شعاع انحنای گشودگی بر خلاف انتظار با افزایش این مقدار تا محدوده خاصی که بسته به نوع گشودگی متفاوت است، تنش کمتر از گشودگی دایره‌ای شد اما بعد از این محدوده با افزایش مجدد شعاع انحناء تنش افزایش یافت.

از بین گشودگی‌های مختلف در مثلث با انتخاب زاویه چرخش و شعاع انحنای مناسب کمترین مقدار تنش به دست آمد. این کمترین مقدار با انتخاب شعاع انحنای گشودگی  $0/06$  و زاویه چرخش گشودگی  $90$  درجه اتفاق می‌افتد. حداکثر تنش در این حالت برابر  $2/28$  است. لازم به توضیح است که حداکثر تنش در گشودگی دایره‌ای برابر  $2/6$  می‌باشد.

با بررسی تأثیر کشیدگی گشودگی متوجه شدیم با افزایش این پارامتر اگر شار بر امتداد گشودگی

عمود باشد تنش با شیب بیشتری افزایش می‌یابد بنابراین در اینگونه شرایط تا حد ممکن باید سعی شود زاویه‌ی شار به نحوی انتخاب شود که مماس بر امتداد گشودگی باشد.

با بررسی فرض تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای متوجه شدیم این فرضیات در زوایای چرخش مطلوب و نامطلوب هیچ تأثیری ندارند و تنها در مقادیر تنش مؤثر هستند. برای یافتن مقادیر تنش با فرض تنش صفحه‌ای از مقادیر تنش با فرض کرنش صفحه‌ای رابطه‌ای بدست آمد.

با توجه به دقت بالای روش تحلیلی ارائه شده در این پایان‌نامه، می‌توان با اطمینان بیشتر، از این روش در حل مسائل حرارتی استفاده کرد.

## ۲-۴ پیشنهادها

- بررسی شدت تنش در مواد مرکب
- بررسی شدت تنش تحت بارگذاری ترکیبی حرارتی و مکانیکی
- بررسی شدت تنش با در نظر گرفتن منبع حرارتی داخل گشودگی
- بررسی رشد ترک

## مراجع

- [1] A.L. Florence, J.N. Goodier, (1995) Thermal stress at spherical cavities and circular holes in uniform heat flow, **J.Appl. Mech.** **26** 293-294.
- [2] N. I. Muskhelishvili, (1963) Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, **4th edition, Noordhoff, the Netherlands.**
- [3] A.L. Florence, J.N. Goodier, (1960) Thermal stresses due to disturbance of uniform heat flow by an insulated ovaloid hole, **J. Appl. Mech.** **27** 635-639.
- [4] H. Deresiewicz, (1961) Thermal Stress in a Plate Due to iisturbance of Uniform Heat Flow by a Hole of General Shape, **J.Appl. Mech.**
- [5] K.S. Rao, M.N. Rao, T. Ariman, (1971) Thermal stresses in plates with circular holes, **Nucl. Eng. Des.** **15** 97-112.
- [6] K.S. Rao, M.N. Rao, T. Ariman, (1974) Thermal stresses in elastic plates with elliptic holes. **J. Eng. Ind. ASME Paper** 73 WA/DE-3.
- [7] Y. Takeuti and N. Sumi, Yhermal, (1976) Stresses In Rectangular Plate With A Circular Hole Based On An Improve Complex Variable Approach, **Mech. Res. Comm.** **Vol.3**, 133-138.
- [8] J. TWEED and G. MELROSE, (1988) The Thermal Stresses Due To A Uniform Heat Flow Past Two Collinear Cracks, **Int. J. Engng Sci.** **Vol. 26, No. 10.** pp. 1053-1057.
- [9] N. Hasebe, K. Tamai, T. Nakamura, (1986) Analysis of a Kinked Crack Under Uniform Heat Flow,ASCE, **J. Eng. Mech.**, **vol. 112**, pp. 31-42.
- [10] Sukhwinder Kaur Bhullar, (2006) Thermal Stresses in a Hexagonal Region With an Elliptic Hole, **Nonlinear Dynamics and Systems Theory**, **6(3)** 245-256.
- [11] S.A. Aseeri, (2008) Goursat Functions for a Problem of an Isotropic Plate With a Curvilinear Hole, **Int. J. Open Problems Compt. Math.**, **Vol. 1, No. 3.**
- [12] S. K. Bhullar and J. L. Wegner, (2009) Thermal stresses in a plate with hyperelliptical hole, **Journal of Engineering and Technology Research** **Vol.1 (8)**, pp. 152-170, November.
- [13] W. T. Chen, (1967) Plane Thermal Stress at an Insulated Hole Under Uniform Heat Flow in an Orthotropic Medium, **ASME J. Appl. Mech.**, **34**, pp. 133-136.
- [14] Jiann-Quo Tarn & Yung-Ming Wang, (1993) Thermal Stresses in Anisotropic Bodies With A Hole or A Rigid Inclusion, **Journal of Thermal Stresses**, **16:4**, 455-471.
- [15] C. K. Chao and M. H. Shen, (1998) Thermal Stresses in a Generally Anisotropic Body With an Elliptic Inclusion Subject to Uniform Heat Flow, **Journal of Applied Mechanics**, **Vol. 65.**
- [16] Qing-Hua Qin, (2000) General solutions for thermopiezoelectrics with various holes under thermal loading, **International Journal of Solids and Structures** **37**, 5561-5578.
- [17] Norio Hasebe, Christian Bucher, Rudolf Heuer, (2010) Heat conduction and thermal stress induced by an electric current in an infinite thin plate containing an elliptical hole with an edge crack, **International Journal of Solids and Structures** **47**, 138-147.
- [18] J. Dundurgs and O.C. Zienkiewicz, (1964) Stresses around Circular Inclusions Due to Thermal Gradients with Particular Reference to Reinforced Concrete, **J. Amer. Conc. Inst.** **61**, S. 1523-1532.

- [19] T. Ariman and L.H.N. Lee, (1974) Thermal Analysis Of Plate With Circular Inclusions, **Nuclear Engineering And Design** 30, 339-348.
- [20] Pham Chi Vinh, Norio Hasebe, Xian-Feng Wang and Takahiro Saito, (2005) Interaction between a cracked hole and a line crack under uniform heat flux, **International Journal of Fracture**, 131:367–384.
- [21] Norio Hasebe, Xian-Feng Wang, Takahiro Saito, Wei Sheng, (2007) Interaction between a rigid inclusion and a line crack under uniform heat flux, **International Journal of Solids and Structures** 44, 2426–2441.
- [22] C. Hwu, (1990) Thermal Stresses in an Anisotropic Plate Disturbed by an Insulated Elliptic Hole or Crack, **ASME J. Appl. Mech.**, 57, pp. 916–922.
- [23] C. K. Chao, and M. H. Shen, (1998) Thermal Stresses in a Generally Anisotropic Body With an Elliptic Inclusion Subject to Uniform Heat Flow, **ASME J. Appl. Mech.**, 65, pp. 51–58.
- [24] Ching-Kong Chao, B. Gao, (2001) Mixed Boundary-value problems of two-dimensional anisotropic thermoelasticity with elliptic boundaries, **International Journal of Solid and Structures** 38, 5975-5994.
- [25] H. Sekine, (1977) Thermal stresses Near Tips of An Insulated Line Crack in A Semi-Infinite Medium Under niform Heat Flow, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 9, pp. 499-507.
- [26] Kang Yong Lee and Heun Soap Cho, (1989) Determation of Thermal Stress Intensity Fracture For Rigid Cusp Cracks Under Uniform Heat Flow, **Engineering Fracrure Mechanics Vol. 32, No. 2, pp. 183493.**
- [27] Norio Hasebe, Hideaki Irikura and Takuji Nakamura, (1992) Stress Intensity Fracture of Cracks Initiating From a Rhombic Hole Due to Uniform Heat Flux, **Engineering Fracture Mechanics Vol. 42, No. 2, pp. 331-337.**
- [28] Y.Z. Chen, (2002) General solution for arc crack problem in thermoelastic medium, **International Journal of Engineering Science** 40, 2223–2234.
- [29] Pham Chi Vinh, Norio Hasebe, Xian-Feng Wang and Takahiro Saito, (2005) Interaction between a cracked hole and a line crack under uniform heat flux, **International Journal of Fracture**, 131:367–384.
- [30] C. Atkinson, (1917) On Some Crack Problems in Anisotropic Thermoelasticity, **Int. J. Solids Structures, Vol, 13, pp, 855-864.**
- [31] C. Atkinson, D.L. Clements, (1972) One some crack problems in anisotropic thermoelasticity, **Int, J, Solids Struct, 13, 855–864.**
- [32] R. Li, G.A. Kardomateas, (2005) Thermo-elastic crack branching in general anisotropic media, **International Journal of Solids and Structures** 42, 1091–1109.
- [33] Kang Yong Lee and Heung Soap Choi, (1988) Determation of Thermal Stress Intensity Fracture for Traction Free Cusp Cracks Under Uniform Heat Flow, **Engineerin Fracture Mechanics Vol. 31. No. 4, pp. 661-672.**
- [34] J. L. Bogdanoff. (1954) Note on thermal stresses, **J. appl. Mech, Vol 76, P. 88.**
- [35] Y. Takeuti, N. Sumi, (1976) Thermal stresses in rectangular plate with a circular hole based on improved complex variable approach, **Mech. Res. Commun, Vol 3, 133-138.**
- [36] C.K. Chao, F.M. Chen, M.H. Shen, (2007) An exact solution for thermal stresses in a three-phase composite cylinder under uniform heat flow, **Int. J. Sol. and Struct.,Vol 44, 926–940.**
- [37] C.K. Chao, A. Wikarta, A.M. Korsunsky, (2010) Anti-plane interaction of a crack and reinforced elliptic hole in an infinite matrix, **Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol 53, 205–210.**

- [38] N.M. Abuelfoutouh, (1993) "Preliminary Design of Unstiffend Composite Shells", **Symposium of 7th Technical Conference of ASC**, pp. 693-786.
- [39] جعفری م، (۱۳۸۸)، رساله دکتر، "تحلیل تنش صفحات همسانگرد و غیر همسانگرد ارتوتروپیک با گشودگی های غیردایره ای تحت تک محوره"، دانشکده مکانیک، دانشگاه فردوسی.
- [40] N. Hasebe, K. Tamai, and T. Nakamura, (1986) Analysis of a Kinked Crack Under Uniform Heat Flow, **ASCE, J. Eng. Mech.**, vol. 112, pp. 31-42.
- [41] N. I. Muskhelishvili, (1963) **Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity**, 4th edition, Noordhoff, the Netherlands.
- [42] N. Hasebe, K. Tamai, and T. Nakamura, (1986) Analysis of a Kinked Crack Under Uniform Heat Flow, **ASCE, J. Eng. Mech.**, vol. 112, pp. 31-42.
- [43] Wang, C.H., and Chao, C.K, (2002) On perturbation solutions for nearly circular inclusion problems in plane thermoelasticity. **J. Appl. Mech.** 69:36-44.
- [44] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, (2010) Stress Concentration in Metallic Plates with Special Shaped Cutout, **International Journal of Mechanical Sciences**, 52, pp. 96-102.

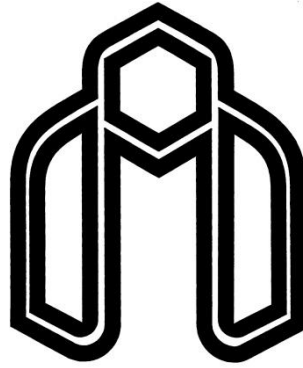
## **Abstract**

One of the most important issues in design of advanced engineering structures is prevention of failure of structures due to stress in discontinuous regions. Stress causes a decrease in strength and premature failures in structures by reason of thermal cracking and plastic deformations at the location of stress. In order to better design of these structures and because of the relationship between their failure strength and stress caused by a hole, the accurate calculation of stress is required. The hole geometry is one of the effective parameters on stress distribution around hole, so that by the variation of the hole geometry, also the location and amount of stress change. In addition to hole geometry, rotation angle of hole, bluntness and load angle are other effective parameters on stress analysis of perforated plates. The appropriate selection of each of these parameters reduces the amount of stress.

On the basis of the steady-state two-dimensional theory of thermoelasticity, stress field around a hole in infinite isotropic plate is discussed. The metallic plate is subjected to uniform heat flux and thermal insulated condition along the hole boundary is assumed. by using the complex potential functions and by applying the conformal mapping and solving the integral equations, stress distribution around the hole is represented. The used method is the expansion of the Goodier and Florence's method. They used complex variable method for stress analysis of infinite isotropic plates with elliptical and circular holes. For simplicity of using the Cauchy integral formula, the infinite area external to the hole can be represented by the area outside the unit circle. The rotation angle of hole, bluntness, aspect ratio of hole size and angle of heat flux are important parameters that are considered in this paper. The results obtained demonstrate the effect of these parameters on stress distribution around hole.

## **Keywords**

Conformal Mapping, Analytical Solution, Complex Variable, quasi-rectangular hole



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mechanical Engineering**

**Thermal stress analysis of an infinite plate with non-circular cutouts subjected to a uniform heat flow**

**Amir Taherinasab**

**Supervisor**

**Mohammad Jafari**

**Mohammad Bagher Nazari**

**September 2014**