بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

مدلسازی انتقال حرارت جابجایی در نانو سیالها

طاهر ارمغانی

اساتید راهنما:

دکتر محمد جواد مغربی

دکتر فرهاد طالبی

بهمن ماه ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که در تمامی این سالها حامی من بودند

تقدیر و تشکر :

ضمن سپاس بیکران خداوند بر خود لازم می‌دانم از بزرگوارانی که این مهم را مدیون و مرهون زحمات بی شائبه آنها هستم تشکر کنم.

از جناب آقای دکتر مغربی که با ارائه راهنمائی های مدبرانه نظارت و سرپرستی این پایان نامه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

جای دارد از جناب آقای دکتر طالبی استاد دانشگاه سمنان که با وسواس و دلسوزی خاص در به فرجام رسیدن این پایان نامه نقش به سزایی داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

بهمن ۱۳۸۷

چکیده:

جریان جت سیال با شرایط فیزیکی دلخواه به جهت آنکه دارای کاربردهای عملی و صنعتی فراوانی است در زمره مهمترین مباحث مکانیک سیالات قرار گرفته است و به همین دلیل از همان زمانیکه علم مکانیک سیالات بنا نهاده شده است مبحث فوق مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است.

جت ها از لحاظ هندسه منفذ به دو نوع صفحه ای و مدور تقسیم بندی می‌شوند. به دلیل هندسه خاص جت های مدور، اینگونه بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفته است. از این رو با توجه به فقر اطلاعاتی در مورد جت های صفحه ای دوبعدی، تلاشی برای شناخت بهتر اینگونه جریان وهمچنین انتقال حرارت انجام شده است.

در این بررسی سعی شده تا با کمک شبیه سازی عددی و بدور از هر گونه مدل سازی و یا فرضی برای ساده سازی، جریان و انتقال حرارت جت دو بعدی غیر قابل تراکم را به روش حل عددی مستقیم تحلیل کنیم. و اینکه نانو سیال را جایگزین سیال پایه کنیم و اثر غلظت نانوذره را بر روی جریان و انتقال حرارت بررسی کنیم

اغتشاشاتی نیز در ورودی جریان، منتج از حل پایداری جت در سرعت عمود بر جریان قرار داده شد. واثر غلظت نانوذره را بر روی جریان و انتقال حرارت بررسی کردیم.

واژگان کلیدی: نانو سیال-خواص حرارتی-شبیه سازی عددی

فهرست مطالب:

فهرست نمودارها:

فهرست علائم:

μ	ویسکوزیته دینامیک
ρ	چگالی
c_p	ظرفیت گرمایی ویژه
K	ضریب هدایت
φ	غلظت نانوسیال
P	فشار
ω	ورتیسیته
V_r	مقدار اغتشاش حقیقی
V_i	مقدار اغتشاش موهومی
C_{exit}	سرعت درخروجی
ψ	تابع جریان
c	سرعت کلی انتقال موج
ζ	عرض دامنه محاسباتی
J	شماره گره
D	اپراتور مشتق
x	طول دامنه فیزیکی و محاسباتی
y	عرض دامنه فیزیکی
N_x	تعداد نقاط شبکه در جهت x

N_y	تعداد نقاط شبکه در جهت y
Δt	گام زمانی
Δx	گام مکانی
β	پارامتر مربوط به کنترل میزان کشیدگی و انقباض
∇	عملگر گرادیان
Re	عدد رینولدز
Pr	عدد پرانتل
Pe	عدد پکلت
δ	عمق نفوذ عرضی

زیر نویسها:

nf	نانو سیال
bf	سیال پایه
p	نانو ذره
0	سیال بدون نانوذره

فصل اول

پیشگفتار

۱-۱- مقدمه

جریان جت سیال با شرایط فیزیکی دلخواه به جهت آنکه دارای کاربردهای عملی و صنعتی فراوانی است در زمره مهمترین مباحث مکانیک سیالات قرار گرفته است و به همین دلیل از همان زمانیکه علم مکانیک سیالات بنا نهاده شده است مبحث فوق مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. جریان سیال از لحاظ نوع مرز به دو نوع محدود و نامحدود[۱] تقسیم می‌شود. جریان‌هایی را که سیال با مرز مادی هیچگونه تماس فیزیکی ندارد جریان‌های برش آزاد[۲] می‌گویند. جریان جت یکی از انواع جریان‌های برش آزاد محسوب می‌شود. [۶]

۱-۲- جریان‌های برش آزاد

در جریان‌های برش آزاد سیال هیچگونه تماس مرزی فیزیکی با محیط خود ندارد. به همین علت به آن جریان‌های برش آزاد می‌گویند. از انواع جریان‌های برش آزاد می توان دنباله[۳]، جت[۴]، لایه‌های اختلاطی[۵] و پلوم[۶] را نام برد. در شکل ۱-۱ می‌توان آنها را دید.

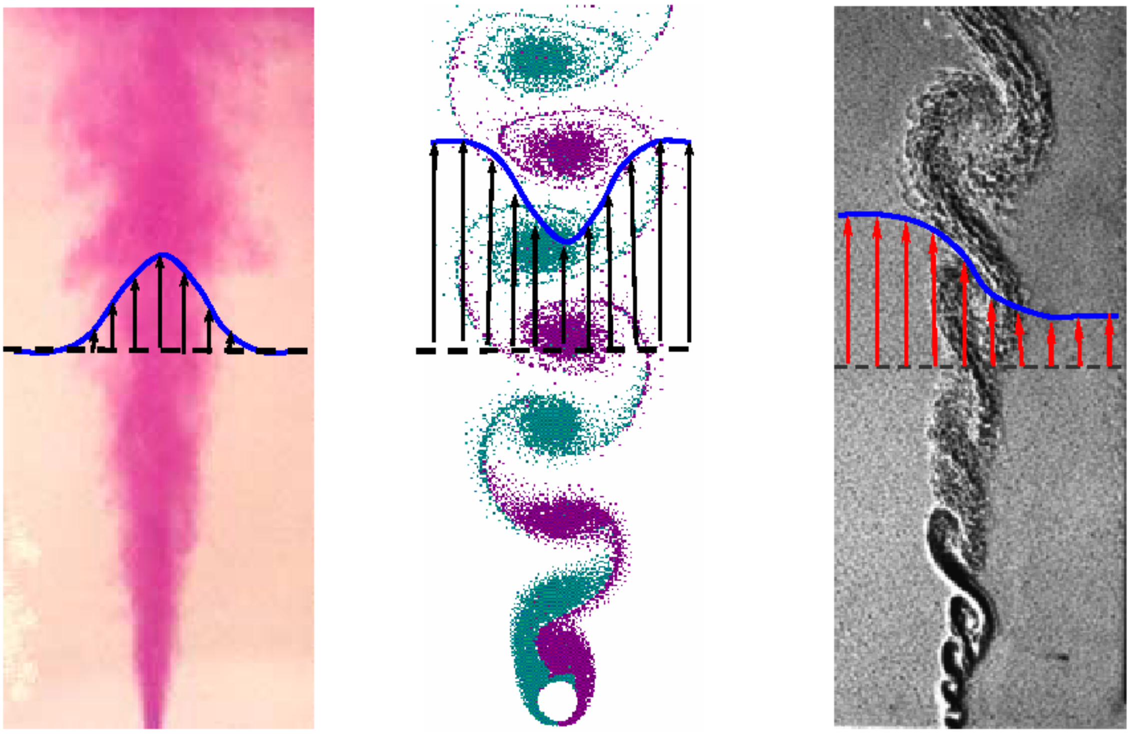
در اینگونه جریانها با پیشروی برش آزاد در محیط، سیال محیط را با خود حمل می‌کنند و محیط های گردابه‌ای تولید می‌کنند. با بی‌بعد کردن ابعاد با یک طول مشخصه خاص و سرعت با مشخصه سرعت، پروفیل‌های سرعت و توزیع تنش‌های رینولدز در ایستگاه های مختلف در دامنه وسیعی به خوبی بر روی هم منطبق می‌شوند. به این پدیده خود تشابهی[۷] می‌گویند. [۶]

۱-۳- آشنایی با جریان جت

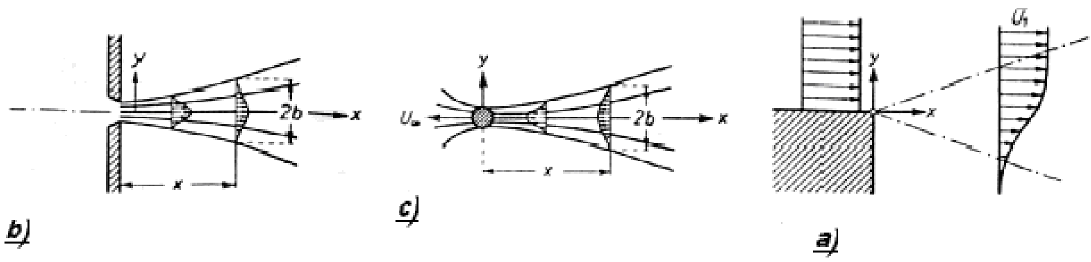
اگر یک سیال جدیدی در مومنتوم بالا, داخل یک سیال ساکن با دانسیته یکسان پاشیده شود، جت تشکیل می‌شود. به عبارت ساده‌تر, یک جت به وسیله خارج شدن جریانی از نازل در سیال

[1] . Unbounded
[2] . Free Shear Flow
[3] . Weak
[4]. Jet
[5] . Mixing layer
[6] . Plum
[7] . Self Similarity

محیط تشکیل می‌شود که این سیال محیط می‌تواند ساکن، در حال حرکت و یا مماس با یک سطح صلب باشد. اگر سیال محیط ساکن باشد یک جت آزاد[1]، اگر در حال حرکت باشد یک سری جت[2] و اگر مماس با یک سطح صلب باشد به ان جت دیواره[3] گویند.



شکل ۱-۱: نمایی از جت، دنباله و لایه اختلاطی و نوع پروفیل سرعت



شکل ۱-۲: a) لایه اختلاطی	b) جت ازاد	c) دنباله پشت یک جسم [۸]

1 . Free Jet Flow
2 . Co flowing Jet
3 . Wall Jet

جت یکی از اشکال اصلی جریان محسوب می‌شود که به طور وسیع در بسیاری از کاربردهای عملی مثل محفظه پاشش سوخت، جلوبرندگی در موتور جت و ... به کار برده می‌شود. یکی از مهمترین بررسی‌های انجام شده برای جریان جت فرایند اختلاط و حمل سیال محیط یک جت با توجه به محیط خودش است. مثلا پاشش سوخت باعث اختلاط یکنواخت‌تر شده و در نتیجه بازده احتراق افزایش می‌یابد و کارکرد موتور بهتر می‌شود. از جریان جت به طور وسیعی در بسیاری از کاربردهای عملی دیگر مانند گرمایش- سرمایش یا خشک کردن سریع برخی از انواع محصولات، خنک کردن قطعات الکترونیکی و پره‌های توربین‌ها را می توان نام برد. استفاده از جریان جت برای اختلاط بهتر در محفظه احتراق توربین‌های گازی و موتورهای احتراقی، بکارگیری جت سیال به عنوان عامل بالا برنده در هواپیماهای عمود پرواز ساکن و یا در حال حرکت می تواند گویای اهمیت این جریان باشد. استفاده از فشار برخوردی بسیار بالای جریان جت در فرایندهای مختلف ماشین‌کاری از قبیل برش، فرزکاری، تراشکاری، دریل و سوراخ زنی مواد سخت و کامپوزیت‌ها و ... نشان دهنده قابلیت بالای این جریان در کاربردهای صنعتی می باشد. جلوگیری و کنترل جدایش لایه مرزی بر روی بال هواپیماها و باله هلی‌کوپتر و افزایش لیفت و کاهش دراگ و جلوگیری از استال را می‌توان از کاربردهای دیگر این جریان شمرد. شکل ۱-۳ جزئیات جریان را در مورد نفوذ یک جت دو بعدی نشان می دهد.

دلایل مستند زیادی در مورد تشابه پروفیل‌های سرعت متوسط جت‌ها و دنباله‌ها در مقاطع مختلف وجود دارد. برای هر نوع جریان دارای پروفیل سرعت ناقوسی شکل، وقتی که سرعت‌ها به وسیله سرعت ماکزیمم متوسط و فواصل (ابعاد) به وسیله بعد عرضی بی بعد می‌شوند، پروفیل‌های سرعت دارای تشابه هندسی با هم می شوند. توجه کنید که مقیاس طول یا بعد عرضی می‌تواند به صورت نیم مقدار بعد عرضی باشد. فاصله نیم مقدار، فاصله‌ای از محور تقارن است که در آن سرعت متوسط برابر نصف سرعت ماکزیمم متوسط است. [۶]

۱-۴- تقریب ها درتحلیل جریان جت

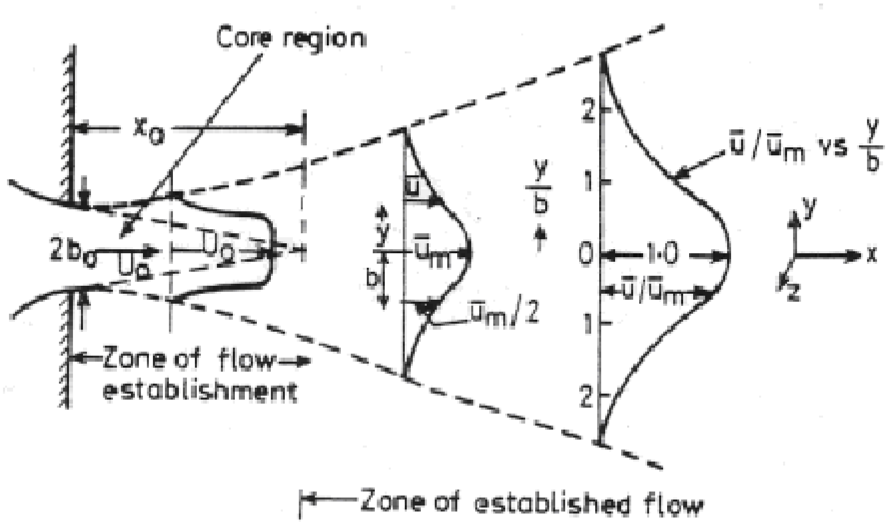
درتحلیل جت‌ها، می‌توان یک جهت اصلی را که سرعت جریان خیلی بزرگتر از دو جهت دیگر است متمایز کرد. همچنین پهنای عرضی خیلی کوچکتر از پهنای طولی است. در نتیجه $\partial/\partial x$ کوچکتر از هر دوی $\partial/\partial y$ و یا $\partial/\partial z$ است. از طرفی بعد پهلویی (بعد سوم) کوچک می‌باشد و مثل لایه مرزی، فشار در سرتاسر جت را می‌توان ثابت و معادل با فشار خارج جت فرض کرد. پس فشار را در جهت طولی ثابت در نظر می‌گیریم. در نتیجه، فرض می‌کنیم که فشار در هر جایی از میدان جریان جت ثابت است. با توجه به شدت اختلاط بالا و عدد رینولدز بزرگ، فرض قابل حذف بودن تنش‌های لزجت در برابر تنش‌های توربلانسی می‌تواند صحیح باشد. [۶]

۱-۵- توصیف جریان در یک جت

حالتی را بررسی می‌کنیم که جت مدور یا دو بعدی دارای سرعت زیاد، در یک سیال نامحدود وارد می‌شود. هر دوی سیالات دارای دانسیته ثابت هستند. به علت اختلاف سرعت خیلی زیاد در صفحه انفصال (منظور صفحه منطبق با خروجی نازل یا دهانه است)، ادی‌های بزرگی بوجود می‌آیند که موجب اختلاط عرضی شدید می‌شوند. فرایند اختلاط در جهت جریان پایین دست هم به سمت داخل و هم به سمت خارج جریان ادامه دارد، تا وقتی که سیال محیط به وسیله سیال جت جابجا می‌شود (عملا سیال محیط شتابدار می‌شود)، سیال جت دچار کاهش شتاب می‌شود. در نتیجه افزایش وسعت جت (پهنای جت)، نرخ جریان در جهت جریان پایین دست به تدریج افزایش می‌یابد. در اینجا، حوزه مخروطی[۱] در جت دارای یک سرعت ثابت است و درهمی در مخروط کم می‌باشد، در صورتی که در لبه خارجی حوزه مخروط، سرعت متوسط به سمت خارج کاهش می‌یابد و جریان خیلی درهم می‌شود. در فاصله‌ای از سوراخ نازل در جریان پایین دست، خط

[1]. Core Region

مرکزی جت[1] دچار کاهش شتاب می‌شود، که محدوده بین خروجی جت از سوراخ و این مقطع به منطقه جریان در حال توسعه[2] شناخته شده است که در شکل ۱-۳ می‌توانید این حوزه را مشاهده کنید. در این منطقه، تولید، رشد، تداخل و خرابی احتمالی ناشی از مقیاس‌های بزرگ ساختار توربلانسی، مکانیزمهای اولیه‌ای هستند که موجب کاهش شتاب می‌شوند. [۶]



شکل ۱-۳: نفوذ جت در سیال محیط

در جریان پایین دست این منطقه، جت کاملا درهم می‌شود و به طور پیوسته دچار کاهش شتاب می‌گردد. سرعت خط مرکزی کمتر از u_0 است و با افزایش x، سرعت خط مرکزی همچنان رو به زوال می رود و دچار کاهش شتاب می‌شود.

در جریان پایین دست منطقه جریان در حال توسعه، توزیع سرعت متوسط در مقاطع مختلف مشابه می‌شود. این منطقه به منطقه جریان توسعه یافته[3] (یا جریان کاملا توسعه یافته) شناخته می‌شود. مقطع دقیق مجزا کننده جریان توسعه یافته و جریان در حال توسعه دقیقا مشخص شده نیست و در آزمایشات می‌توان آن را مشخص کرد. در نهایت، در فاصله‌ای بعد از مقطع سوراخ (مقطع بیرون ریزی جت)، سرعت خط مرکزی به طور قابل ملاحظه‌ای کوچک می‌شود.

[1] . Center Line Jet
[2] .Zone Of Flow Establishment
[3] . Zone Of Established Flow

فصل دوم

مقدمه ای بر نانوسیالها

۲-۱- مرور کلی نانو سیالات

نانوسیالها یک مخلوط ساده ازسیال وجامد نیستند.

یک نانوسیالها دارای خواص وخصوصیات خاصی است مـن جملـه پایـداری سوسپانسـیون ،حـداقل بودن تمرکز و تجمع ذرات عدم تغیرات شیمیایی سیال پایه .

باری به هر جهت نانو سیالها از دو بخش کلی تشکیل می شوند.

۱- نانو ذرات شامل:

cuo,Al_2o_3 که معمولترین نانو ذرات اکسید فلزی هستند.

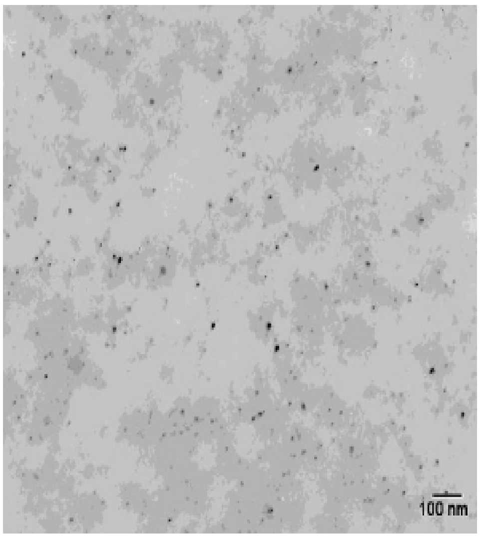
نانوذرات فلزی بیشتر شامل Al ,cu میشوند .

کربیدهای فلزی مانند SiC و TiC نیز نوع دیگری از نانوذرات راتشکیل میدهند.

نانو ذرات نیتریدی SiN ,AlN نیز نوع دیگری از نانو ذرات می باشند.

نوع دیگروبسیار مهم نانوذرات شامل گرافیت وکـربن نـانوتیوب یـک،دو و یـا چنـد دیـواره و مـواد کامپوزیتNCSC[۱] می باشند.

۲- سیال پایه : شامل آب، اتیلن گلیگول،روغن ومحلولهای پلیمری و...



شکل ۲-۱ نمایی واقعی از نانوسیال

[1] . Nanoparticle Core – polymer Shell Composites

۲-۲- ویژگی های اصلی نانو سیالات

محققان مختلفی از تشکیلات مختلف با بررسی روی نانو سیالات رفتار های یکسانی از آنها مشاهده کردند :

۱-افزایش غیر عادی در قابلیت هدایت حرارتی سیال پایه.

استمن یک افزایش ۴۰ درصدی در خواص هدایتی اتیلن گلیکول همراه با نانوذرات مس با قطر ۱۰ نانو متر با ۳درصد حجم گزارش کرد.[۲۶]

داس از یک افزایش ۲۵ درصدی در آب با کسر حجمی[2] ۴-۱ درصد از نانو ذرات اکسید آلومینیوم گزارش کرد.[۲۷]

۲-افزایش غیر عادی ویسکوزیته سیال پایه.

چو و پاک ویسکوریته را در نانو سیال آب –اکسیدآلومینیوم و آب – اکسید تیتانیوم در کسر حجمی ۱۰-۱ درصد اندازه گیری کردند و به این نتیجه رسیدند که ویسکوزیته اینگونه از نانو سیالات خیلی بیشتر از آب خالص است واین به خوبی با مدلهای مرسوم ویسکوزیته نظیر برینکمن[3] مطاقبت داشت .[۲۸]

۳-افزایش غیر عادی ضریب انتقال حرارت جابجایی تک فاز نسبت به سیال پایه.

چو و پاک داده های انتقال حرارت برای نانو سیالاتی نظیر اکسید آلومینیوم- آب و اکسید تیتانیم- آب در جریان مغشوش داخل لوله استوانه ای گزارش دادند داده های آنها بیانگر این امر است که عدد ناسلت به میزان حدوداً ۳۰ درصد نسبت به مقدار پیش گویی شده توسط رابطه سیال خاص (دتیوس – بولتر) بیشتر می باشد.[۲۸]

2 . Volume Fraction
3 . Brinkman

استمن در مرور وسیعی که روی مطالعات قبلی انجام شده در مورد نانو سیالات داشت ، نشان داد که با وجود تلاشهای فراوانی که در این زمینه انجام شده است ، هنوز یک توضیح رضایت بخش برای افزایش غیر عادی قابلیت هدایت حرارتی و ویسکوزیته نانو سیالات ارایه نشده است .[۲۹]

از دیگر ویژگی های کلیدی نانوسیالات که تا کنون کشف شده اند می توان افزایش قابل توجه قابلیت هدایت حرارتی باغلظتهای پایین ذره ،وابستگی شدید هدایت گرمایی به دما و افزایش چشم گیر در شار بحرانی را نام برد.

هرکدام از این ویژگیها در جای خود برای سیستم حرارتی بسیار مطلوب می باشدو در کنار هم نانو سیالات را بهترین کاندیدا برای تولید سردکننده های مبتنی بر مایع می نماید.

۲-۳-کاربردهای نانو سیالات

نانو سیالات کاربرد زیادی دارند، در واقع سایر ذرات محلول در آن است کـه چنــین تفـاوتی در خواص آنها ایجاد می کند و ویژگیهای کاملاً متفاوت از سیال پایه خـود دارنـد. همچنــین خیلــی از مسائل در مورد نانو سیالات نامعلوم است و نیازمند کار و آزمایش و تحقیقات بیشتری است تا بتوان تئوری هایی در این زمینه مطرح کرد و خواص فیزیکی وشیمیایی آنها بهتر مشـخص شـود در ایـن صورت می توان مسائل هزینـه سـاخت و تولیـد ایـن سـیالات را پـایین آورد و در صـنایع مختلـف استفاده کرد تا به مرحله تجاری رساند.

نانو سیالات را می توان در سیستم های گرمایی متنوع برای کاربردهای مهمی من جمله برای خنک کاری در وسایل نقلیه برای بهبود انتقال حرارت و بازده انرژی به کار برد.

اخیراً تعداد شرکتهایی که پتانسیل موجود در تکنولوژی نـانو سـیالات پـی بـرده و در تـلاش بـرای توسعه این زمینه برای کاربردهای ویژه صنعتی می باشد رو به افزایش می باشد .

شرکتهای GMوFORD در میان شرکتهای دیگر که در صنعت حمل و نقل کار میکنند در مـورد علم نانوسیالات و کاربرد آن در صنعت خود قدم هـای اسـتواری را برداشـته و بـه سـرعت در حـال پیشرفت می باشند.

برخی از کاربردهای نانوسیالات در صنایعی نظیر حمـل و نقـل، میکـرو الکترونیـک ،صـنایع دفـاعی ،هسته ای،فضایی وبیولوژیکی می باشد.

۲-۴-تحقیق عددی

برای شبیه سازی عددی دوروش پذیرفته شده است .روش اول نانوسیالها پیوسـته[۴] فـرض مـی شوند وتک فازی[۵] بررسی می شوند.

[4] . Continuum
[5] . Single Phase

در این روش خواص ترمودینامیکی موثر جایگزین خواص ترمودینامیکی سیال پایه می شوند.

روش دوم نانو سیالها به صورت دو فازی[۶] مدل می شوند.

روش تک فازی بسیار ساده تر وازنظر محاسباتی بسیار کارآمدتر است.و این در حالی است که روش دو فازی دقیقتر است.

روش دیگری نیز قابل قبول است که روش بلتزمن[۷] نام دارد.

در این پروژه برای شبیه سازی از مدل تک فازی استفاده کرده ایم.

نانو سیال مورد بررسی در این پروژه متشکل از نانوذره اکسید آلومینیوم کروی شکل و آب به عنوان سیال پایه است.

برای تعیین خواص ترمودینامیکی این نانو سیال از فرمولهای زیر استفاده کرده ایم.

$$\rho_{nf} = (1-\varphi)\rho_{bf} + \varphi\rho_p \qquad (۱-۲)$$

$$(c_p)_{nf} = (1-\varphi)(c_p)_{bf} + \varphi(c_p)_p \qquad (۲-۲)$$

معادلات ۲-۱ و۲-۲ توسط چو و پاک ارائه شده است.[۲۸]

$$\mu_{nf} = (123\varphi^2 + 7.3\varphi + 1)\mu_{bf} \qquad (۳-۲)$$

این فرمول با فیت کردن تابع درجه ۲ از اطلاعات به دست آمده از نتایج تجربی (لی(۱۹۹۹)وماسودا(۱۹۹۹)ووانگ(۱۹۹۹))ارائه شده است.[۳۰و۳۱و۳۲]

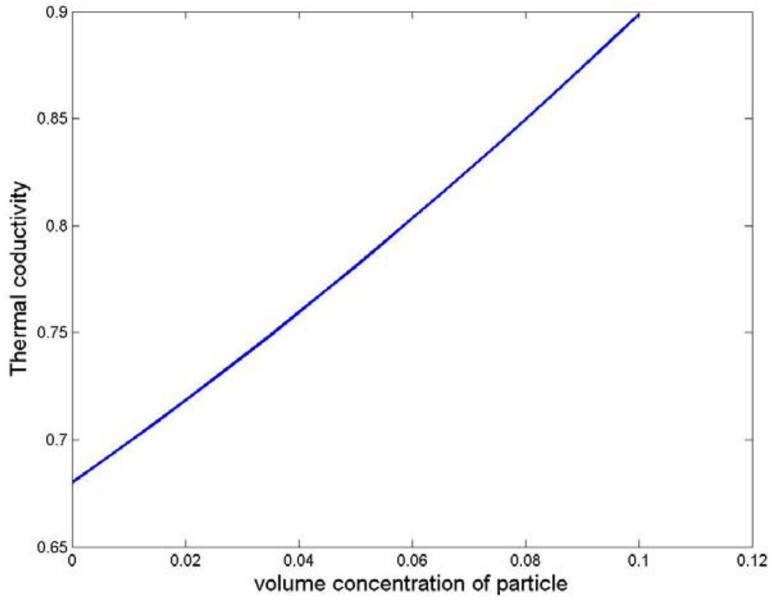
$$K_{nf} = (4.97\varphi^2 + 2.72\varphi + 1)K_{bf} \qquad (۴-۲)$$

این فرمول توسط مایگا(۲۰۰۵) ارائه شده است.[۳۳]

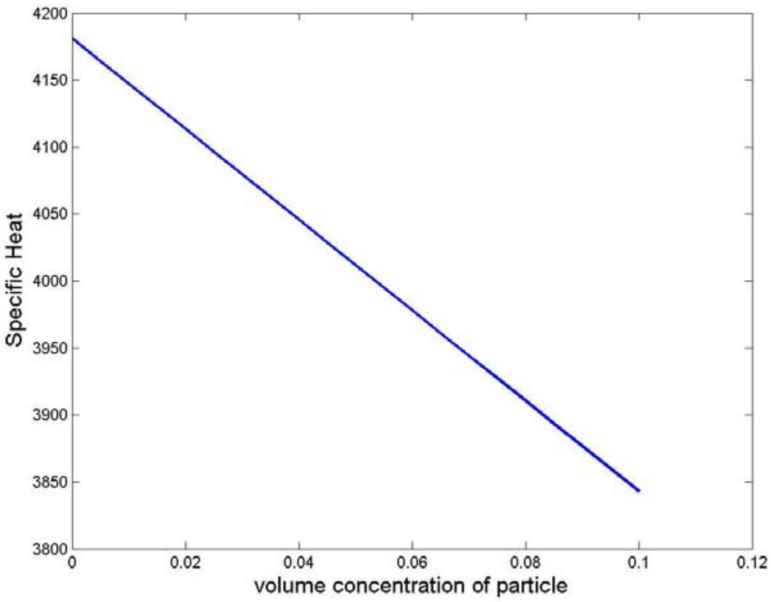
---

[6] . Two Phase
[7] . Boltzmann Theory

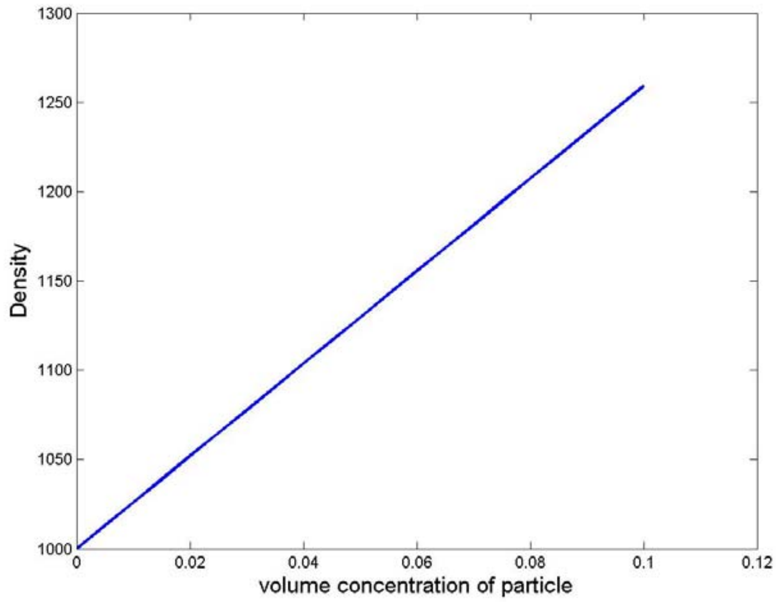
شکلهای زیر بیانگر وابستگی خواص ترمودینامیکی و اعـداد بـی بعـد بـه غلظـت نـانو سـیال هستند.



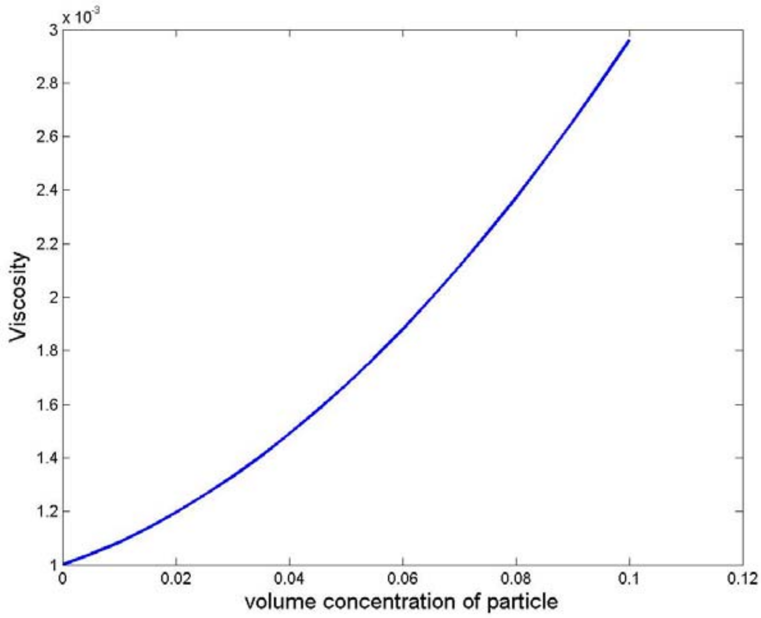
شکل ۲-۲ نمودار ضریب هدایت بر حسب کسر حجمی



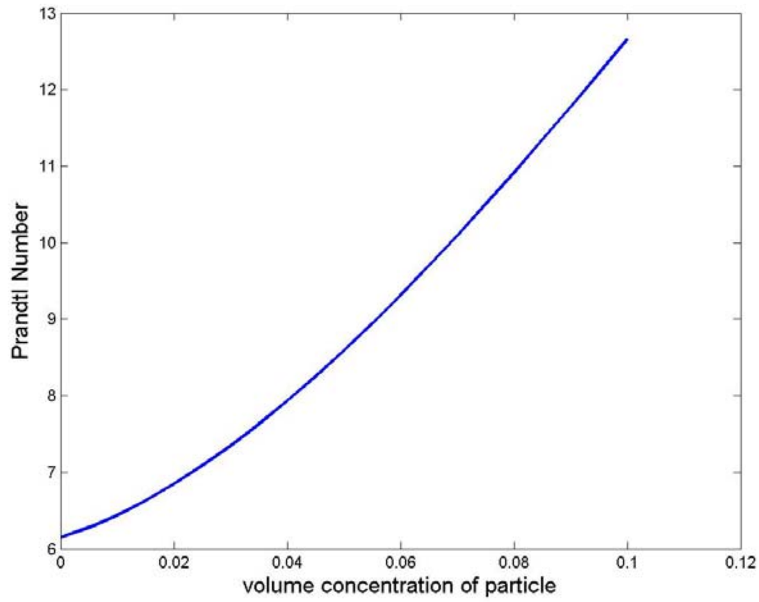
شکل ۲-۳ نمودار ظرفیت گرمایی ویژه بر حسب کسر حجمی



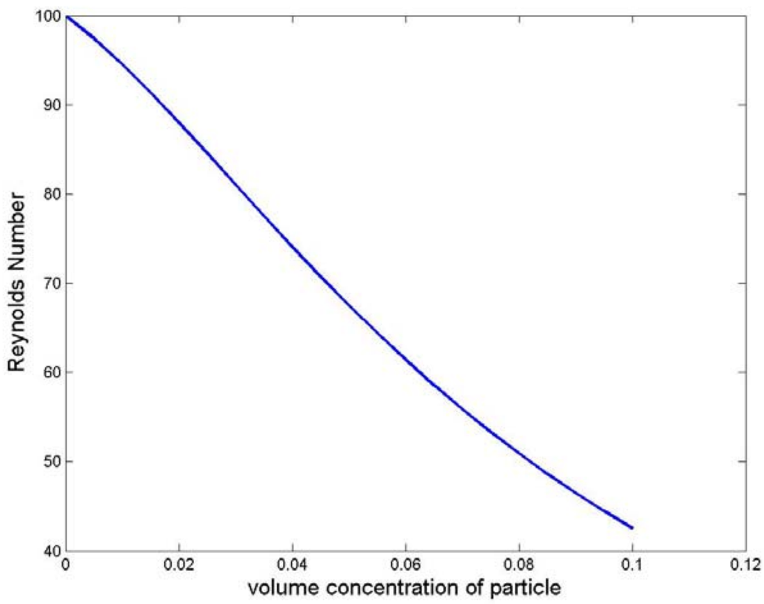
شکل ۲-۴ نمودار دانسیته بر حسب کسر حجمی



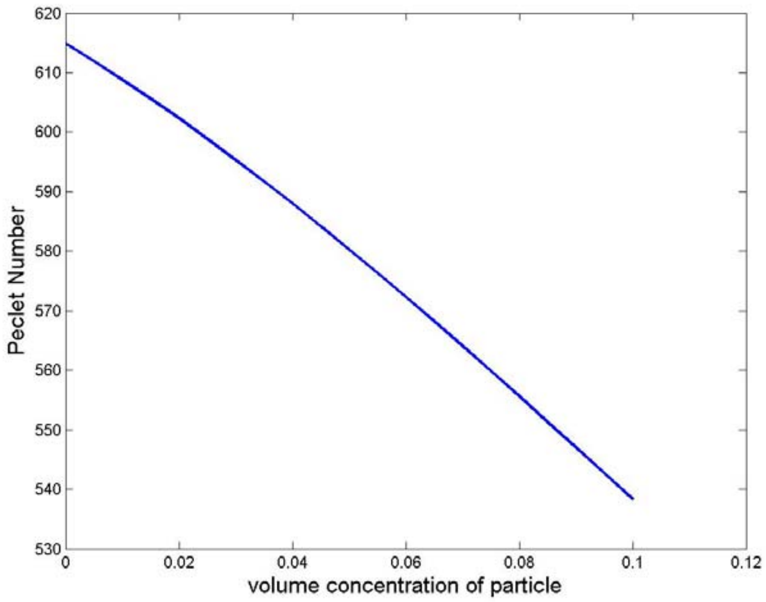
شکل ۲-۵ نمودار ویسکوزیته دینامیک بر حسب کسر حجمی



شکل ۲-۶ نمودار عدد پرانتل بر حسب کسر حجمی



شکل ۲-۷ نمودار عدد رینولدز بر حسب کسر حجمی



شکل ۲-۸ نمودار عدد پکلت بر حسب کسر حجمی

فصل سوم

مروری بر کارهای انجام شده

۳-۱- مقدمه

همانطور که قبلا هم اشاره شد، جریان جت از لحاظ هندسه خروجی به دو نوع مدور[1] و صفحه‌ای[2] تقسیم بندی می‌شود. در این میان جت مدور به دلیل داشتن هندسه منفذ خروجی خاص بیشتر مورد توجه محققان حاضر قرار گرفته است. بررسی‌های بسیاری بر روی جت های دو بعدی توسط دانشمندانی مثل گوتلر[3][۷] و تولمین[4][۱۹] و شلیختینگ[5][۱۶] انجام شده که به صورت تحلیلی و بررسی‌های آزمایشی بوده است. در این فصل با ارائه نتایج کارهای این افراد در مورد جت دو بعدی، علاوه بر آشنایی بیشتر با جریانات جت دو بعدی، میزان انطباق بین نتایج تئوری و حل‌های عددی و نتایج آزمایشی را می‌توان لمس کرد.

۳-۲- تحلیل جت های دو بعدی توربلانس [۶]

چندین مشخصه جت دو بعدی یا سه بعدی نفوذ کننده در یک سیال نامحدود می‌تواند به وسیله تحلیل انتگرالی بدست آید. اگر فرض شود که توزیع سرعت مشابه باشد یعنی $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = f(\eta)$، که $\eta = y/b$ برای جت دو بعدی است، که در اینجا b به صورت نصف پهنای جت یا فاصله از محور تقارن در نظر گرفته می‌شود که $\bar{u} = \bar{u}_m / 2$، (شکل ۳-۱ را ببینید) که $\bar{u}_m$ هم سرعت خط مرکزی است.

ابتدا، به ما اجازه بدهید که یک جت دو بعدی با نصف پهنای b_0 را بررسی کنیم و معادله مومنتوم را برای جریان متوسط به کار ببریم. از آنجا که فرض کردیم که فشار ثابت باشد، و چون نیروی فعال

[1] Round
[2] Plane
[3] Gortler
[4] Tolmien
[5] Schlichting

بیرونی هم روی سیال وجود ندارد، شار مومنتوم M از مقطعی به مقطعی دیگر باید ثابت باقی بماند. در نتیجه، در منطقه جریان توسعه یافته داریم:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0 \qquad (۱-۳)$$

اما:

$$M = 2\int_0^\infty \rho \bar{u}^2 dy = 2\rho \bar{u}_m^2 b \int_0^\infty f^2(\eta) d\eta \qquad (۲-۳)$$

$\partial M / \partial x = 0$ نشان می‌دهد که:

$$\partial / \partial x [2\rho \bar{u}_m^2 b \int_0^\infty f^2(\eta) d\eta] = 0 \qquad (۳-۳)$$

ازآنجا که $\int_0^\infty f^2(\eta) d\eta$ یک مقدار عددی است و برای قانون توزیع سرعت شناخته شده و ثابت می‌باشد، ثابت بودن M از مقطعی به مقطع دیگر نشان می‌دهد که:

$$\partial / \partial x (\bar{u}_m^2 b) = 0 \qquad (۴-۳)$$

یا $\bar{u}_m^2 b$ مستقل از x است، یعنی:

$$\bar{u}_m^2 b \propto x^0 \qquad (۵-۳)$$

با فرض اینکه $\bar{u}_m \propto x^P$ و $b \propto x^q$:

$$2p + q = 0 \qquad (۶-۳)$$

$$\bar{u}_m^2 b \propto x^{2p+q}$$

با دانستن اینکه عرض نیم جت b است و $\bar{u}_m$ با x تغییر می‌کند، ما به یک معادله بیشتر احتیاج داریم، که این معادله می‌توان با بکار بردن $\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = f(\eta)$ ، $\bar{u}_m \propto x^P$ ، $b \propto x^q$ ، $\tau_t / \rho\bar{u}_m^2 = g(\eta)$ و معادله ناویر استوکس در حالت پایدار بدست آورد:

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_t}{\partial y} \qquad (۳-۷)$$

چنین تحلیلی به وسیله راجاراتنام[1] [۶] انجام شده و $\begin{matrix} p = -0.5 \\ q = 1 \end{matrix}$ بدست آمده است. پس:

$$\begin{aligned} &\bar{u}_m \propto 1/\sqrt{x} \\ &b \propto x \end{aligned} \qquad (۳-۸)$$

راجاراتنام همچنین نشان داد که اگر از فرم انتگرالی معادله انرژی استفاده شود $q = 1$ می‌شود.

قبلا هم ذکر شد که به علت سوار کردن سیال محیط توسط جت، تخلیه Q در جت در جهت جریان پایین دست افزایش می‌یابد. همچنین ماهیت وابسته Q همانند b و $\bar{u}_m$ می‌تواند از تحلیل ابعادی تعیین شود. با حذف اثرات لزجت، یعنی برای مقادیر بالای عدد رینولدز، می‌توان نوشت:

$$b, \bar{u}_m or Q = f(M_0, \rho, x) \qquad (۳-۹)$$

که M_0 برابر است با شار مومنتوم اولیه و برابر $2b_0\rho u_0^2$ می‌باشد.

با آنالیز ابعادی داریم:

$$\boxed{\bar{u}_m / \sqrt{M_0 / \rho x} = C_1 = const} \qquad (۳-۱۰)$$

که با جاگذاری مقادیر M_0 داریم:

$$\bar{u}_m / u_0 = \sqrt{2C_1 b_0 / x}; or: \bar{u}_m \propto 1/\sqrt{x} \qquad (۳-۱۱)$$

---

[1] Rajaratnamm

همچنین:

$$b/x = C_2, or: b/b_0 = C_2 x/b_0 \Rightarrow b \propto x \qquad (۱۲-۳)$$

و بالاخره:

$$Q/\sqrt{M_0 x/\rho} = C_3 \Rightarrow Q/Q_0 = C_3\sqrt{x/2b_0} \qquad (۱۳-۳)$$

که $Q_0 = 2b_0 u$ می باشد.

توزیع سرعت در منطقه جریان توسعه یافته به وسیله تولمین و گوتلر مطالعه شده است. تحلیل تولمین در زیر آورده شده است :

برای شروع با بکاربردن فرضیه طول اختلاط پرانتل، تولمین، τ_t را به صورت زیر بیان کرد:

$$\tau_t = \rho l^2 (\frac{\partial \bar{u}}{\partial y})^2 \qquad (۱۴-۳)$$

که در اینجا l طول اختلاط می‌باشد. بررسی‌های ابعادی نشان می‌دهد که در هر مقطع $l = \beta b$ است و از انجا که $b = C_2 x$ می‌باشد، پس l به صورت زیر بیان شده است:

$$l = \beta C_2 x \qquad (۱۵-۳)$$

که β یک ثابت می‌باشد. در نتیجه $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_i}{\partial y}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} = 2(\beta C_2)^2 x^2 (\frac{\partial \bar{u}}{\partial y})(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}) \qquad (۱۶-۳)$$

که می‌توان قرارداد کرد که $a^3 = 2(\beta C_2)^2$ که a یک ثابت می‌باشد.

از آنجا که توزیع سرعت می‌تواند به صورت $\bar{u}/\bar{u}_m = f(y/b)$ بیان شود، آن را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = f(y/ax) = f(\varphi) \qquad (۳-۱۷)$$

که $\varphi = y/ax$ است و a بعدا به طور آزمایشی تعیین می‌شود. همانطور که نشان دادیم $\bar{u}_m \propto 1/\sqrt{x}$ است آن را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\bar{u}_m = n/\sqrt{x} \qquad (۳-۱۸)$$

که n مستقل از x است. در نتیجه:

$$\bar{u} = \frac{n}{\sqrt{x}} f(\varphi) \qquad (۳-۱۹)$$

به منظور بیان $\bar{u}$ و $\bar{v}$ در ترمهایی از یک متغیر، بهتر است که تابع جریانی[۱] را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\bar{u} = \partial\psi/\partial y \qquad (۳-۲۰)$$
$$\bar{v} = -\partial\psi/\partial x$$

$$\Rightarrow \psi = \int \bar{u}dy = \frac{n}{\sqrt{x}} \int f(\varphi)axd\varphi \qquad (۳-۲۱)$$
$$\Rightarrow \psi = an\sqrt{x}F \Rightarrow F = \int fd\varphi$$

با بکاربردن معادلات ۳-۲۰ و ۳-۲۱، عبارات $\bar{u}$ و $\bar{v}$ و $\partial\bar{u}/\partial x$ و $\partial\bar{v}/\partial y$ و $\partial\tau_t/\partial y$ را می‌توان در ترمهایی از F و مشتقاتش بیان کرد.

با جاگذاری آنها در معادله ناویراستوکس، داریم:

---
1 Stream Function

$$2F''F''' + FF'' + F'^2 = 0 \quad (۲۲-۳)$$
$$or: 2F''F''' + \frac{d}{d\varphi}(FF') = 0$$

که با انتگرال گیری داریم:

$$FF' + F''^2 = C \quad (۲۳-۳)$$

شرایط مرزی برای حل این معادله دیفرانسیلی غیر خطی عادی به صورت زیر است:

$$1) y = o, \bar{u}/\bar{u}_m = 1 \rightarrow \varphi = 0, F' = 1, or, F'(0) = 1$$

$$2) y = \infty, \bar{u}/\bar{u}_m = 0 \rightarrow \varphi = \infty, F' = 0, or, F'(\infty) = 0$$

$$3) y = o, \bar{v} = 0 \rightarrow \varphi = 0, F = 0, or, F(0) = 0$$

$$4) y = o, \tau_t = 0 \rightarrow \varphi = 0, F'' = 0, or, F''(0) = 0$$

$$5) y = \infty, \tau_t = 0 \rightarrow \varphi = \infty, F'' = 0, or, F''(\infty) = 0$$

از این شرایط مرزی می‌توان دید که وقتی $\varphi = 0$ است، معادله ۳-۲۳ نتیجه می‌دهد که C=0 است، پس معادله ۳-۲۳ تبدیل می‌شود به :

$$FF' + F''^2 = 0 \quad (۲۴-۳)$$

تولمین این معادله را به صورت عددی حل کرد و مقدار آزمایشی ضریب a را با بکاربردن داده‌های جمع‌آوری شده به وسیله ریچارد[1] [۱۴] تعیین کرد.

[1] Richardt

گوتلر فرض کرد که برش توربلانس در معادله ناویر استوکس را می‌توان به صورت $\tau_t = \rho\varepsilon \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ بیان کرد، و همچنین با فرض اینکه $\dfrac{\bar{u}}{\bar{u}_m} = F'(\sigma y / x)$ است که σ یک ثابت می‌باشد، او یک تابع جریان به صورت زیر معرفی کرد :

$$\psi = \frac{n\sqrt{x}}{\sigma} F(\xi) \rightarrow \xi = \sigma y / x \qquad (۳-۲۵)$$

و مقادیر $\bar{u}$ و $\bar{v}$ و $\partial\bar{u}/\partial x$ و $\partial\bar{v}/\partial y$ و τ_t را با جایگذاری آنها در معادله ناویر استوکس بدست آورد.

پس داریم:

$$2FF' + F'' = 0 \qquad (۳-۲۶)$$

که با انتگرال گیری داریم:

$$F' + F^2 = C \qquad (۳-۲۷)$$

و با شرایط مرزی:

$$F'(0) = 1, F'(\infty) = 0, F''(0) = 0, F(0) = 0, F''(\infty) = 0$$

از معادله ۳-۲۷ می‌توان دید که در $\xi = 0$، $C = 1$ است، پس معادله ۳-۲۷برابر می‌شود با:

$$F' + F^2 = 1 \qquad (۳-۲۸)$$

این معادله یک حل واقعی دارد و برابر است با:

$$F = \tanh\xi = \frac{1 - e^{-2\xi}}{1 + e^{2\xi}} \qquad (۳-۲۹)$$

پس داریم:

$$\bar{u}/\bar{u}_m = F' = 1 - \tanh^2 \xi \qquad (۳-۳۰)$$

جزئیات حل گوتلر به وسیله راجاراتنام داده شده است. در اینجا دوباره σ یک ثابت است که لازم است که از آزمایشات تعیین شود. فرضیه انتقال ورتیسیته هم برای مطالعه توزیع سرعت در یک جت بکار برده شده است که به وسیله گلدستاین[۱] [۶] بحث شده است.

۳-۳- مطالعات آزمایشی

بسیاری محققان به بررسی جت های صفحه‌ای پرداخته‌اند که به منظور بدست اوردن اطلاعات مفید در مورد تعیین توزیع سرعت و قابلیت تخریب جریان می‌باشد. آزمایشات نشان داد که محل مبدا واقعی که جت شروع می‌شود با شروع از نازل منطبق نیست. در بعضی موارد محل مبدا واقعی جت در پشت نازل و در یک سری موارد هم در جلوی نازل بوده است. بعلاوه، مشخص شد که محل مبدا واقعی به مرحله توربلانسی در جریان در نازل حساس است. در نتیجه، برای اهداف خاصی، محل مبدا با نازل منطبق می باشد.

البرتسون فهمید که طول منطقه در حال توسعه به وسیله $x_0/b_0=10.4$ داده شده است. در این منطقه، آنها فرض کردند که در حوزه مخروطی سرعت ثابت است و در منطقه اختلاط، توزیع گوسی است. برای تغییرات دبی حجمی تخلیه و انرژی سینیتیک در منطقه جریان در حال توسعه آنها پیدا کردند که:

$$\begin{aligned} Q/Q_0 &= 1+0.04x/b_0 \\ E/E_0 &= 1-0.018x/b_0 \end{aligned} \qquad (۳-۳۱)$$

که $Q_0=2b_0u_0$ و $E_0=b_0\rho u_0^3$.

[1] Goldestain

در منطقه جریان در حال توسعه، ثابت در معادله $\overline{u}_m / u_0 \propto 1/\sqrt{x/b_0}$ برابر است با ۳.۲۲۴ که به وسیله البرتسون[1] پیدا شده است، در حالی که ابراموویچ[2] مقدار ۳.۷۸ را اعلام کرد. زیگنن[3] ترجیح داد که معادله را به فرم زیر بیان کند:

$$\overline{u}_m / u_0 = C_1 / \sqrt{(x + C_* b_0)/b_0} \qquad (۳۲-۳)$$

که C_1 از ۳.۱۲ تا ۳.۷۸ و C_* هم از ۰ تا ۲.۴ تغییر می کند. راجاراتنام توصیه کرد که مقادیر C_1 و C_* به ترتیب برابر ۳.۵ و ۰ باشند.

۳-۴- توزیع سرعت

محققان همچنین توزیع سرعت در منطقه جریان توسعه یافته را پیدا کردند. البرتسون فرض کرد که آن به صورت گوسی باشد و آن را به طور آزمایشی تائید کرد. زیگنن توزیع را به فرم زیر بیان کرد:

$$\overline{u} / \overline{u}_m = e^{-a_1 \lambda^2} \qquad (۳۳-۳)$$

که $\lambda = y/x$ و a_1 از ۷۰.۷ تا ۰.۷۵ تغییر می کند. با جاگذاری $b = .1x$ و $a = 70.7$ داریم:

$$\overline{u} / \overline{u}_m = e^{-70.7 (y/b)^2} \qquad (۳۴-۳)$$

توزیعات سرعت بدست آمده به وسیله تولمین و گوتلر در یک فرم جدولی به صورت تغییرات $\overline{u} / \overline{u}_m$ نسبت به y/b داده شد که وقتی $\overline{u} = 0.5\overline{u}_m$ می باشد $y = b$ است. آزمایشات نشان داد که مقدار a در آنالیز تولمین از ۰.۰۹ تا ۰.۱۲ تغییر می کند. اگر a به صورت ۰.۱۰ در نظر گرفته شود، مقادیر جدول زیر از $\overline{u} / \overline{u}_m$ مطابق با تولمین می باشد:

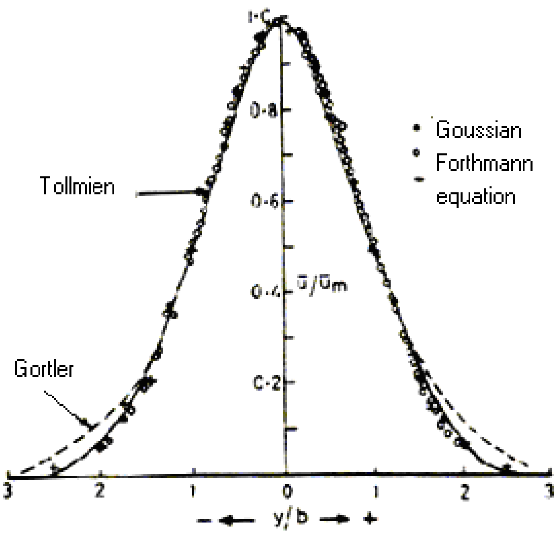
[1] Albertson
[2] Abramovich
[3] Zigenen

جدول ۳-۱: حل تولمین برای توزیع سرعت در جت دو بعدی

y/b	0.0	0.105	0.209	0.419	0.628	0.838	1.048	1.255
$\bar{u}/\bar{u}_m$	1.00	0.979	0.946	0.842	0.721	0.608	0.474	0.357
y/b	1.465	1.780	1.990	2.200	2.300	2.400	2.500	
$\bar{u}/\bar{u}_m$	0.249	0.125	0.067	0.030	0.020	0.009	0.000	

جدول۳-۲: حل گوتلر برای توزیع سرعت در جت دو بعدی

y/b	0.0	0.114	0.227	0.341	0.455	0.568	0.682	0.795	
$\bar{u}/\bar{u}_m$	1.00	0.990	0.961	0.915	0.855	0.788	0.711	0.635	
y/b	0.909	1.022	1.136	1.362	1.590	2.045	2.270	2.500	2.840
$\bar{u}/\bar{u}_m$	0.558	0.486	0.420	0.302	0.218	0.102	0.070	0.048	0.021



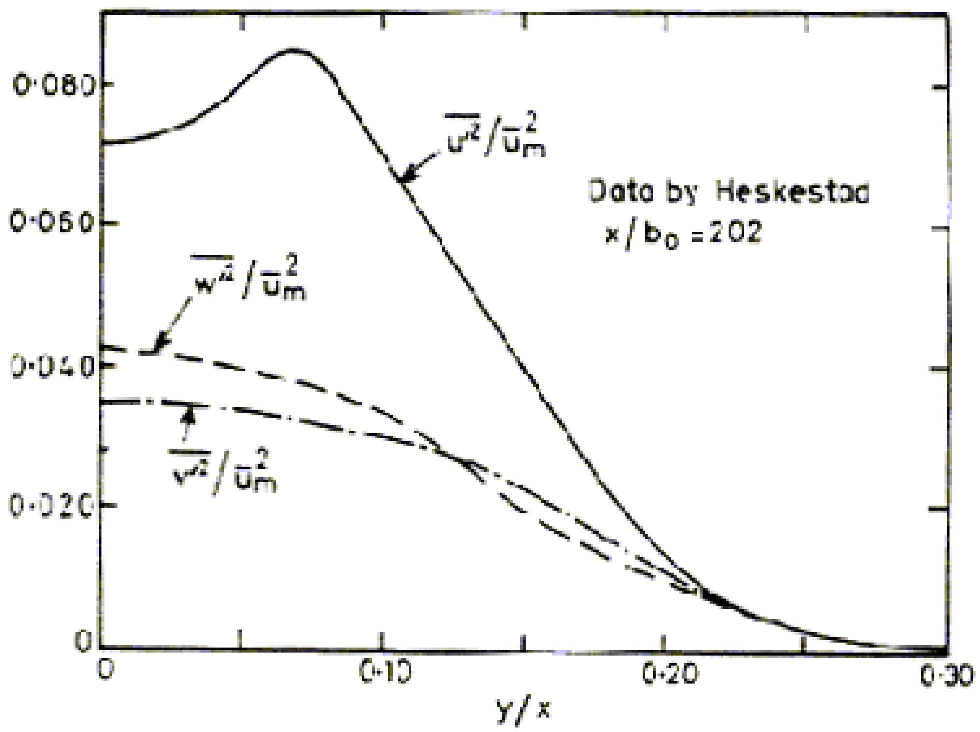
شکل ۳-۱: توزیع سرعت در منطقه جریان توسعه یافته (جت دو بعدی) [۶]

در حالت یکسان، مقدار σ در حل گوتلر برابر ۷.۷۶ پیدا شده بود. با این مقدار از σ، حل گوتلر در جدول ۳-۲ جدول بندی شده است. شکل ۳-۱ توزیعات گوسی تولمین، گوتلر را در فرم بی بعد و فقط با داده های فورتمن نشان می دهد. به خوبی دیده می شود که توزیعات گوسی و تولمین در روی همه محدوده های y/b با هم منطبق هستند. در بخش مرکزی برای مقادیر y/b کمتر از ۱.۵، گوتلر توافق خوبی دارد، اما در محدوده خارج ان مقدار سرعت را بیشتر نشان می دهد. در منطقه جریان توسعه یافته تغییر تخلیه و تغییر انرژی سینیتیک به طور تحلیلی می‌تواند بدست آید. با ثوابت آزمایشی، روابط توسط البرتسون به صورت زیر در آمده اند:

$$Q/Q_0 = 0.44\sqrt{x/b_0}$$
$$E/E_0 = 2.64\sqrt{b_0/x} \qquad (۳۵-۳)$$

۳-۵- توربلانس در جت های دو بعدی

بعضی اندازه گیری های توربلانس جت دو بعدی به وسیله زیگنن و میلر و کامینگز و هسکستاد و گوتمارک و ویگنانسکی انجام شد. این مطالعات نشان می‌دهد که توزیع شدت توربلانس در سرتاسر جت، بعد از $x/b = 85$ تا ۹۰ مشابه است. شکل ۳-۲ تغییرات $\overline{u'^2}/\bar{u}_m^2$ ، $\overline{v'^2}/\bar{u}_m^2$ و $\overline{w'^2}/\bar{u}_m^2$ را با y/x به صورتی که توسط هسکستاد بدست آمده برای $x/b_0 = 202$ نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲: تغییر شدت توربلانسی در سرتاسر جت دو بعدی در محدوده کاملا توسعه یافته [۶]

هسکستاد و گوتمارک و ویگنانسکی همچنین ریز مقیاسهای پهلویی و طولی توربلانس λ_f و λ_g را تعیین کردند، که دارای مقادیری از ۶-۷ میلیمتر و ۴-۵ میلیمتر در نزدیک نازل بودند، و آنها در جهت جریان پایین دست به تدریج افزایش می یابند. مقیاس طول کولموگرف[1] هم از ۰.۰۸ میلیمتر در $x/b_0 = 4.0$ تا ۰.۱۲ در $x/b_0 = 240$ افزایش یافت. برای x/b_0بزرگتر از تقریبا ۷۰ ، محققان در یافتند که $\sqrt{\overline{u'^2}}/\bar{u}_m = 0.22 to 0.25$ است که به روشنی کوچکتر از مقادیر مطابق با مقادیر برای جت دایره ای است.

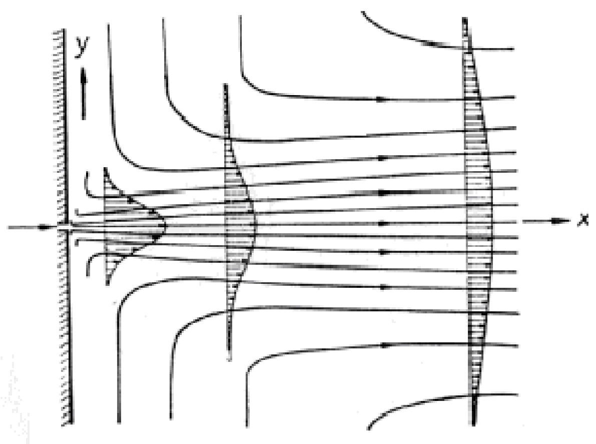
[1] Kolmogorov

۳-۶- تحلیل جت های دو بعدی آرام [۱۶]

خروج یک جت از یک سوراخ مثالی از حرکت سیال در غیاب مرزهای صلب است که در آن می توان از تئوری لایه مرزی کمک گرفت. هدف، بحث در مورد یک جت دو بعدی آرام است، پس ما باید فرض کنیم که جت از یک شکاف بلند و باریک خارج می شود و با سیال محیط مخلوط می شود.

این مسئله به وسیله شلیختینگ [۱۷] و بیکلی[1] [۴] حل شده است. در عمل یک جریان جت به راحتی درهم می شود ولی در اینجا با فرض آرام ماندن جریان، جت را تحلیل می کنیم.

جت مقداری از سیال محیط را (که به طور اولیه در حال سکون می باشد) به علت اصطکاک روی سطح خارجی اش با خودش حمل می کند. الگوی خطوط جریان در شکل ۳-۳ نشان داده شده است. سیستم مختصات ما هم دارای مبدائی منطبق با محل شکاف است و محورش در جهت محور جت است.



شکل۳-۳ : الگوی خطوط جریان برای یک جت دو بعدی آرام [۱۶]

همانند جت درهم، گرادیان فشار در جهت x را می توان حذف کرد. پس مومنتوم کلی در جهت x که در اینجا با J نشان می دهیم در جهت x ثابت بوده و مستقل از فاصله از سوراخ میباشد، در نتیجه:

[1] Schlichting & Bickly

$$J = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = const \qquad (۳۶-۳)$$

همانند جریان درهم، سرعت u تابعی از y/b می باشد که b عرض جت است. همچنین b متناسب با x^q است. ما می توانیم تابع جریان را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$\psi \approx x^p f(y/b) = x^p f(y/x^q) \qquad (۳۷-۳)$$

دو مجهول p و q با توجه به شرایط زیر تعیین می شوند:

۱. فلاکس مومنتوم در جهت x مستقل از x است.

۲. ترم شتاب و اصطکاک در معادله از مرتبه یکسان هستند.

با بررسی این دو شرط می توان دو معادله برای p و q به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} &2p - q = 0 \\ &2p - 2q - 1 = p - 3q \end{aligned} \qquad (۳۸-۳)$$

در نتیجه:

$$p = 1/3; q = 2/3 \qquad (۳۹-۳)$$

نتیجتا، می توان متغییر مستقل و تابع جریان را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\eta = \frac{1}{3\upsilon^{1/2}} \frac{y}{x^{2/3}}; \\ &\psi = \upsilon^{1/2} x^{1/3} f(\eta) \end{aligned} \qquad (۴۰-۳)$$

با در نظر گرفتن فاکتور های ثابت مناسب، مولفه های سرعت به وسیله عبارات زیر مشخص می شوند:

$$\begin{aligned} &u = \frac{1}{3x^{1/3}} f'(\eta) \\ &v = -\frac{1}{3} \upsilon^{1/3} x^{-2/3} (f - 2\eta f') \end{aligned} \qquad (۴۱-۳)$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله دیفرانسیل و معادل صفر قرار دادن ترم فشار با صفر، معادله دیفرانسیل زیر بدست می اید:

$$f'^2 + ff'' + f''' = 0 \qquad (۳-۴۲)$$

که f تابعی از η می باشد.

با شرط مرزی:

$$y = 0 \rightarrow v = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (۳-۴۳)$$

$$y = \infty \rightarrow u = 0$$

$$\Rightarrow \eta = 0 \rightarrow f = 0, f'' = 0$$
$$\Rightarrow \eta = \infty \rightarrow f' = 0$$

حل معادله ۳-۴۲ ساده است. با انتگرال گرفتن داریم:

$$ff' + f'' = 0 \qquad (۳-۴۴)$$

چون در شرط مرزی در $\eta = 0$، f, f'' صفر می‌شوند پس ثابت انتگرال هم صفر می‌شود. معادله دیفرانسیل بالا را می توان به راحتی انتگرال گیری کرد اگر ترم اول فاکتور ۲ داشته باشد که می توان با فرض زیر به این مسئله نائل شد:

$$\xi = \alpha\eta;\ f = 2\alpha F(\xi) \qquad (۳-۴۵)$$

که α یک ثابت آزاد است که بعدا تعیین می شود. پس معادله بالا تبدیل می شود به:

$$F'' + 2FF' = 0 \qquad (۳-۴۶)$$

که علامت پریم نشانه دیفرانسیل نسبت به ξ است. شرایط مرزی برابر می شود با:

$$\xi = 0 \rightarrow F = 0; \xi = \infty \rightarrow F' = 0$$

با یکبار انتگرال گیری داریم:

$$F' + F^2 = 1 \qquad (۳-۴۷)$$

که ثابت انتگرال معادل یک می شود که با توجه به شرط $F'(0) = 1$ بدست می آید. معادله ۳-۴۷ یک معادله دیفرانسیل از نوع ریکاتی است و جواب معادله برابر می شود با:

$$\xi = \int_0^F \frac{dF}{1-F} = \frac{1}{2} Ln \frac{1+F}{1-F} = \tanh^{-1} F \qquad (۳-۴۸)$$

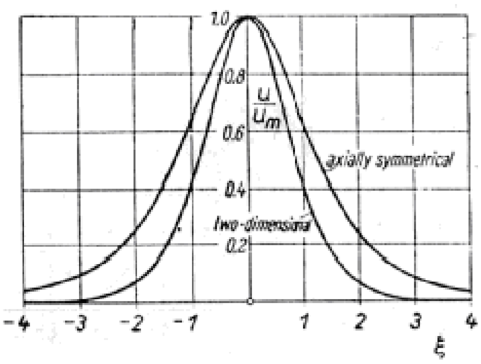
با معکوس کردن این معادله داریم:

$$F = \tanh \xi = \frac{1-e^{-2\xi}}{1+e^{-2\xi}}$$

از آنجا که $\frac{dF}{d\xi} = 1 - \tanh^2 \xi$ ، توزیع سرعت می تواند از معادله ۳-۴۶ بدست آید و برابر است با:

$$u = \frac{2}{3} \alpha^2 x^{-1/3} (1 - \tanh^2 \xi) \qquad (۳-۴۹)$$

توزیع سرعت از معادله ۳-۴۹ در شکل ۳-۴ رسم شده است.



شکل۳-۴ : توزیع سرعت در یک جت دو بعدی و دایره ای [۱۶]

برای تعیین ثابت α با توجه به شرایط ۳-۴۵ می توان این ثابت را تعیین کرد که در آن مومنتوم در جهت x ثابت فرض شده است. داریم:

$$J=\frac{4}{3}\rho\alpha^{3}\upsilon^{1/2}\int_{0}^{\infty}(1-\tanh^{2}\xi)^{2}d\xi=\frac{16}{9}\rho\alpha^{3}\upsilon^{1/2} \tag{۵۰-۳}$$

ما باید فرض کنیم که فلاکس مومنتوم J برای جت را داریم. با معرفی *مومنتوم سینیتیک* ($J/\rho=K$)، از معادله ۵۴ داریم:

$$\alpha=0.8255\left(\frac{K}{\upsilon^{1/2}}\right)^{1/3} \tag{۵۱-۳}$$

و در نتیجه برای توزیع سرعت:

$$\begin{aligned}u&=0.4543\left(\frac{K^{2}}{\upsilon x}\right)^{1/3}(1-\tanh^{2}\xi)\\ v&=0.5503\left(\frac{K\upsilon}{x^{2}}\right)^{1/3}(2\xi(1-\tanh^{2}\xi)-\tanh\xi)\\ \xi&=0.2752\left(\frac{K}{\upsilon^{2}}\right)^{1/3}\frac{y}{x^{2/3}}\end{aligned} \tag{۵۲-۳}$$

سرعت پیمایش در مرز جت برابر است با:

$$v_{\infty}=-0.550\left(\frac{K\upsilon}{x^{2}}\right)^{1/3} \tag{۵۳-۳}$$

و نرخ حجم تخلیه بر واحد ارتفاع شکاف برابر است با $Q=\rho\int_{-\infty}^{\infty}udy$ یا:

$$Q=3.3019(K\upsilon x)^{1/3} \tag{۵۴-۳}$$

اندازه گیری های انجام شده به وسیله اندراده برای جت های دو بعدی آرام نشان داد که جت ها تا عدد رینولدز $R_e=30$ آرام باقی می مانند که عدد رینولدز بر اساس سرعت خروجی از شکاف و عرض شکاف می باشد. [۱۶]

فصل چهارم

مقدمه ای بر شبیه سازی مستقیم عددی

۴-۱- مقدمه:

حل جریان توربولانس،بعلت پیچیدگی ماهیت جریان و نبود امکانات کافی در گذشته چندان مورد توجه نبوده است،زیرا یک حل تحلیلی،حتی برای ساده ترین جریانهای توربولانس وجود ندارد.یک توصیف کامل از جریان توربولانس که در آن متغیرهای جریان (سرعت و فشار)،بعنوان توابعی از زمان یا مکان شناخته شوند،تنها با حل عددی معادله ناویر_استوکس ممکن می باشد.حل عددی استفاده شده در این تحقیق،شبیه سازی مستقیم عددی[1] یابه اختصار D.N.S می باشد.

هدف اصلی D.N.S حل معادلات برای جریان توربولانس بدون استفاده از هیچگونه مدل توربولانسی می باشد و برای این منظور می بایستس معادلات ناویر_استوکس بدون هیچگونه ساده سازی مورد استفاده قرار گیرند.

در حال حاضر با ظهور ابر کامپیوترها می توان جریانهای توربولانس کاملاً توسعه یافته را به کمک روشهای D.N.S بطور دقیق تحلیل کنیم و خواص آنرا بدست آوریم.جهت گسسته سازی یک شبکه بندی دقیق و کامل مورد احتیاج است.بنابراین،اجرای هر برنامه D.N.S احتیاج به مدت زمان طولانی دارد.بنابراین،تا امروز محاسبات D.N.S فقط تا رینولدزهای متوسط امکان پذیر بوده است.

۴-۲- تاریخچه:

استفاده ازD.N.S برای اولین بار توسط اورزاگ و پترسون[2] در سال ۱۹۷۲ در مرکز تحقیقات اتمسفریک آمریکا صورت گرفت.این اشخاص از روش طیفی[3] برای انجام $۳۲^۳$محاسبه جریان توربولانس ایزوتروپیک در Re=35 (بر اساس مقیاسهای تیلور)،استفاده کردند.

[1] . Direct Numerical Simulation
[2] . Orszag&patterson
[3] . Spectral Method

گام مهم بعدی در این زمینه توسط روگالو[۴] در سال ۱۹۸۱ برداشته شد.تحقیقات بعدی توسط اسپارلات[۵] انجام گرفت.او با استفاده از یک روش ابتکاری،جریان لایه مرزی توربولانس را بر روی یک صفحه تخت ،تحت گرادیان فشارهای مختلف حل کرد.

جریانات محدود به دیواره مانند جریان تراکم پذیر در کانال و لایه مرزی توربولانس در دهه اخیر مورد توجه قرار گرفته است.به تازگی از D.N.S جهت بررسی لایه اختلاطی تورب با سرعت زیاد و عمل متقابل بین موجهای شوک و توربولانس استفاده می شود.

۴-۳- دیدگاه عددی:

جهت تحلیل جریانهای پیچیده تر به کمک D.N.S احتیاج به کامپیوترهایی با حافظه و سرعت بیشتر و همچنین استفاده از برنامه های هوشمندتر و الگوریتم های سریعتر می باشد.

برای جریانهای پریودیک از روش FFT[۶] در جهت شبیه سازی زمانی[۷] استفاده می شود،در حالیکه برای استفاده از شبیه سازی مکانی[۸] استفاده از روشهای تفاضل محدود مرتبه بالا[۹]،معمول می باشد.اخیراً از روش تفاضل محدود فشرده مرتبه بالا Lele بسیاری از روشهایD.N.S ،استفاده شده است.المانهای طیفی[۱۰]وروشهای جمعی[۱۱]،جهت گسسته سازی مکانی در هندسه خای پیچیده بکار می رود. از چندجمله ایهای چبیشف در جریانهای غیرپریودیک،لایه مرزی و کانال استفاده می شود.در گام زمانی از روشهایی همچون رانج_کوتا[۱۲]، کرانک_نیکلسون[۱۳]،آدامز_بشفورد[۱۴]و...استفاده می شود. معمولاً معادلات پواسون یا هلمهولتز(شرایط مرزی دیریشله و نیومن)در طی استفاده از D.N.S بایستی حل شوند.

---

[4] . Rogallo
[5] . Spalart
[6] . Fast Fourier Transformation
[7] . Temporal
[8] . Spatial
[9] . High Order Finite Difference
[10] . Spectral Elements
[11] . Collocation Method
[12] . Runge_Kutta
[13] . Crank_Nicolson
[14] . Adams_Bashford

۴-۴- شرایط مرزی[۱۵]:

در D.N.S ،انتخاب شرایط مرزی یک انتخاب مهم و حساس می باشد.انتخاب شرایط مرزی در مرزهای آزاد یک برآورد مشکل می باشد.برای جریانات تراکم ناپذیر که در جهات آماری هموژن می باشند،مانند جهت عرضی لایه مرزی دو بعدی،معمولاً شرایط مرزی پریودیک اعمال می شوند.

اما بسیاری از جریانات پیچیده توسعه یافته،در جهت جریان غیر هموژن بوده،که بنابراین احتیاج به انتخاب شرایط مرزی مناسب دارند.

همچنین تراکم پذیر بودن جریان،واکنش پذیری سیال و تولید حرارت در سیال منجر به اعمال شرایط مرزی اضافی می شوند.

[15] . Boundary Condition

فصل پنجم

آنالیز ریاضی

۵-۱- مقدمه

مقصود در این پروژه، تنظیم برنامه ای کامپیوتری برای حل عددی معادلات ناویراستوکس و معادله انرژی دو بعدی برای تحلیل جریان و انتقال حرارت یک جت صفحه‌ای غیر قابل تراکم می‌باشد.

البته این برنامه کامپیوتری برای هر جریان برش آزادی قابلیت استفاده دارد.

نکته قابل ملاحظه در پروژه این است که سیال مورد مطالعه سوسپانسیونی است با ذرات جامد در ابعاد نانو متر که در اصطلاح آنرا نانوسیال گویند.

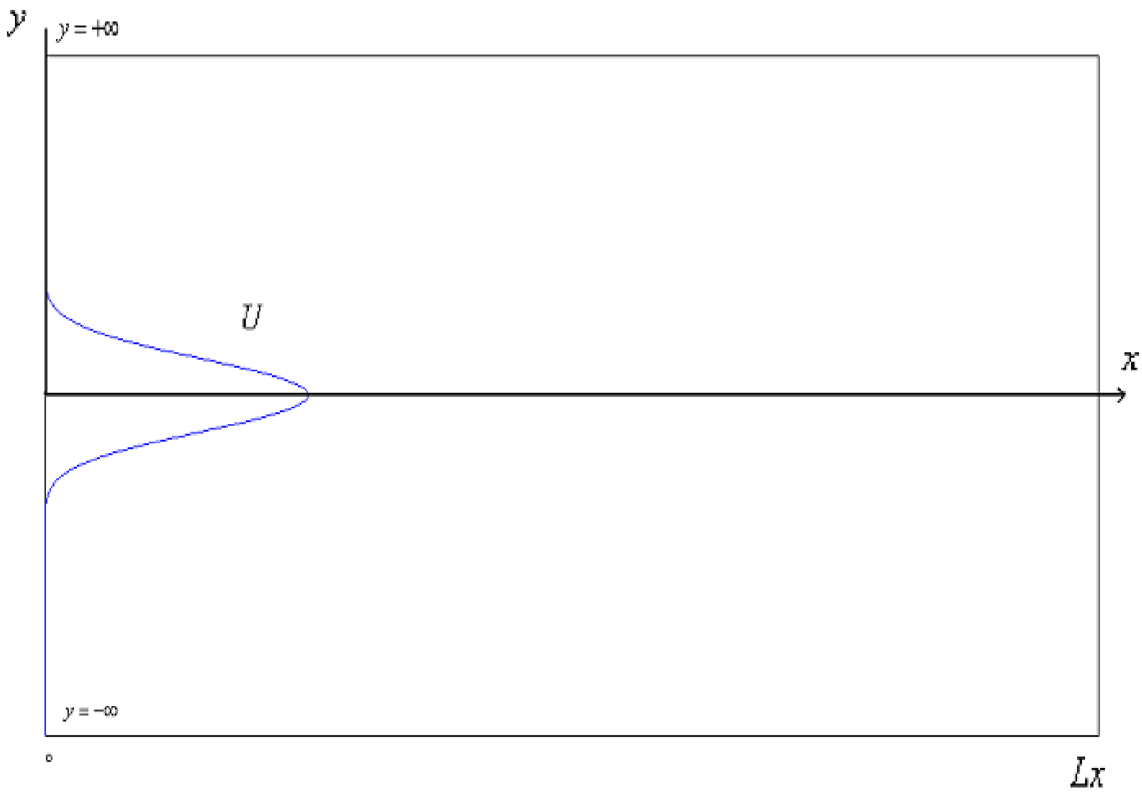
دامنه محاسباتی جریان جت صفحه ای مطابق شکل ۵-۱ در جهت اصلی جریان x محدود به طول دامنه فیزیکی جریان می‌باشد و در جهت عمود به جریان y از هر دو طرف نامحدود[۱] در نظر گرفته می‌شود تا مرز محیط مادی در آن احساس نشود. در جهات x و y از طرح اختلاف محدود فشرده[۲] استفاده شده است. در جهت عمود به جریان y از روش "فشرده سازی"[۳] جهت متناظر نمودن دامنه فیزیکی به دامنه محاسباتی به طول واحد استفاده شده است[۱۱].

[1] Double-Infinity
[2] Compact Finite Difference Scheme
[3] Mapping

۵-۲- معادلات حاکم

نمای شماتیک یک جت دوبعدی در شکل ۵-۱ مشاهده میشود.

برای تحلیل جریان و انتقال حرارت، معادلات ناویر استوکس و انرژی را به صورت عددی حل می کنیم.



شکل ۵-۱: شماتیکی از دامنه فیزیکی مسئله

۵-۲-۱- معادله ناویراستوکس

پروفیل سرعت جت ورودی با یک جریان اولیه[۴] $U_0(y)$ مشخص شده است. جریان جت اجازه پیدا می‌کند که در جهت x توسعه یابد. در جهت y مجموعه از هر دو طرف نامحدود است. با توجه به قانون دوم نیوتن، معادلات مومنتوم برای یک ذره سیال نیوتنی معرفی می‌شود. این معادلات به معادلات ناویراستوکس معروفند.

فرم کلی معادله ناویر استوکس برای جریان نیوتنی تراکم ناپذیر با خواص ثابت بصورت زیر است:

$$\rho_{nf}\left(\frac{D\vec{U}}{Dt}\right) = -\nabla p + \mu_{nf}(\nabla^2\vec{U}) \qquad (۵-۱)$$

در این پروژه فرم بی بعد شده معادله ناویر استوکس حل می شود، برای بی بعدسازی معادلات بایستی همه کمیت‌ها به وسیله مشخصه طول و مشخصه سرعت بی‌بعد شوند که در این ارتباط نیم‌عرض جت[۵] ورودی $b_{1/2}$ و سرعت ورودی U_{in} به عنوان مقیاس‌های بی‌بعد کننده مورد استفاده قرار می گیرند.برای ترم فشار نیز ρU_{in}^2 به عنوان مقیاس‌های بی‌بعد کننده مورد استفاده قرار می گیرد روش بی بعد کردن معادله ناویر استوکس در پیوست الف ارائه شده است.

فرم بی بعد معادله ناویراستوکس به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}.\nabla)\vec{U} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2\vec{U}) \qquad (۵-۲)$$

یکی از مشکلات اصلی در حل معادله ناویر استوکس،نبود اطلاعات در مورد فشار در مرزها می باشد؛ برای رفع این مشکل بایستی از شبکه بندی بسیار ریز و متراکم برای گسسته سازی استفاده کنیم(که منجر به ارزیابی متغیرهای مختلف در نقاط مختلف شبکه می شود.) و یا اینکه جمله فشار را از معادله ناویر استوکس حذف کنیم.

[4]Initial Flow
[5] Half Width Jet

با استفاده از روابط ریاضی شرح داده شده در پیوست ب جمله فشار از معادله ناویر استوکس حذف شده و به شکل چرخشی[۶] معادله ناویر استوکس می رسیم:

$$\frac{\partial \nabla^2 \vec{U}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^4 \vec{U} \quad (۵-۳)$$

در نتیجه معادلات ۵-۳ و ۵-۴ معادلات بی بعد شده با مقیاس مشخصه طول و سرعت می‌باشند.[۱۰]

$$\nabla . U = 0 \quad (۵-۴)$$

که $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3) = \vec{U} \times \vec{\omega}$ ترم‌های غیرخطی[۷] هستند. باید توجه داشت که برای حالت دو بعدی $\omega_1 = \omega_2 = H_3 = 0$ و $H_1 = V\omega_3$ و $H_2 = -U\omega_3$.

عمده مزیت استفاده از این فرم معادلات ناویر استوکس، کاهش تعداد متغیرهای مستقل، کاهش فضای دیسک مورد نیاز می‌باشند. در عین حال در قبال این دو مزیت تغییر درجه معادله دیفرانسیل حاکم از دو به چهار را نیز تجربه می کنیم.

سرعت لحظه ای $\vec{U} = (U,V)$ به دو قسمت جریان اولیه $(\vec{U}_0(y),0)$ و سرعت محاسباتی $(u(x,y,t), v(x,y,t))$ به گونه ای که در معادلات ۵-۵ و۵-۶ نشان داده شده اند، تجزیه میگردند.

$$U(x,y,t) = u(x,y,t) + U_0(y) \quad (۵-۵)$$

$$V(x,y,t) = v(x,y,t) \quad (۵-۶)$$

با منظور نمودن اولین مولفه معادله ناویراستوکس در جهت اصلی جریان (x) از معادله ۵-۳ و با توجه به معادله ۵-۴، معادله زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H_3}{\partial x \partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^4 U \quad (۵-۷)$$

---
[6] Rotational form
[7] Non Linear Term

که برای حالت دو بعدی معادله تبدیل به معادله ۵-۸ می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u = \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\text{Re}}\nabla^4 U \qquad (۸-۵)$$

این معادله برای پیشرفت زمانی[۸] در شبیه سازی مورد استفاده قرار می گیرد.

دومین مولفه سرعت در جهت y هم به کمک معادله پیوستگی به راحتی بدست می آید.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (۹-۵)$$

۵-۲-۲- معادله انرژی

فرم کلی معادله انرژی با در نظرگرفتن تلفات ناچیز حرارتی به صورت زیر است:

$$\frac{D((\rho c_p)_{nf} T)}{Dt} = K_{nf}\nabla^2 T \qquad (۱۰-۵)$$

با توجه به ثابت بودن خواص ترمودینامیکی معادله زیر از معادله (۵-۱۰) بدست می آید

$$(\rho c_p)_{nf}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + U\frac{\partial T}{\partial x} + V\frac{\partial T}{\partial y}\right) = K_{nf}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \qquad (۱۱-۵)$$

برای تحلیل انتقال حرارت ، فرم بی بعد شده معادله انرژی مورد استفاده قرار مـی گیرد؛مقیاسـهای بی بعدکننده همانهایی است که برای بی بعد کردن معادله ناویر استوکس از آنها بهره جسته ایم.

برای بی بعد کردن دما،دمای ورودی T_{in} مقیاس بی بعد کننده دماست.

روش بی بعد کردن معادله انرژی در پیوست ج ارائه شده است.

معادله زیر فرم بی بعد شده معادله انرژی است:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U}\cdot(\nabla T) = \frac{1}{Pe}(\nabla^2 T) \qquad (۱۲-۵)$$

[8] Time advancement

دمای لحظه ای T به دو قسمت دمای اولیه $T_0(y)$ و دمای محاسباتی $T1(x,y,t)$ به گونه ای که در معادله ۵-۱۳ نشان داده شده است، تجزیه میگردد.

$$T(x,y,t)=T1(x,y,t)+T_0(y) \qquad (۱۳\text{-}۵)$$

۵-۳- شرایط مرزی

۵-۳-۱- شرایط مرزی برای حل معادله ناویر استوکس

به دلیل اینکه معادلات ناویر استوکس و پیوستگی برای متغییر های محاسباتی حل می شوند شرایط مرزی بر روی متغییر های محاسباتی اعمال می شوند. معادله ۵-۸ یک معادله دیفرانسیل درجه چهار می‌باشد، در نتیجه نیاز به اعمال چهار شرط مرزی داریم. مقادیر u در مرز ورودی[۹] و مرز خروجی[۱۰] مجموعه محاسباتی بایستی مشخص شوند. همچنین با توجه به معادله پیوستگی، $\frac{\partial u}{\partial x}$ هم در مرزهای ورودی و خروجی مجموعه محاسباتی معلوم می شوند. این شرایط مرزی به شرایط دریچلت[۱۱] و نیومن[۱۲] معروف می باشند.

در شبیه سازی، مولفه سرعت لحظه ای در جهت جریان اصلی در ورودی می تواند به صورت یک پروفیل سرعت گوسی به صورت $e^{-\gamma y^2}$ مطابق نتایج آزمایشی زیگنن و آلبرتسون [۶] باشد و یا پروفیلی هیپربولیکی به صورت $\frac{1}{\cosh^2 y}$ مطابق نتایج تحلیلی شلیختینگ باشد [۱۶] که به همراه آن مقداری اغتشاشات به صورت نتایج عددی سلمانی [۲] منتج از حل عددی معادله

[9] Inflow Boundary Condition
[10] Outflow Boundary Condition
[11] Dirichlit Boundary Condition
[12] Neumann Boundary Condition

اورساملفیلد[۱۳] و بررسی پایداری جریان جت دوبعدی به دست آمده است. یکی از دلایل استفاده از پروفیل هیپربولیکی در ورودی، به علت نتایج سلمانی[۱۴] طبق این پروفیل می‌باشد.

اغتشاشات به صورت زیر می باشند:

$$\vec{v}_{forcing} = A_{2D}(\vec{V}_r \cos\omega t + \vec{V}_i \sin\omega t) \qquad (۱۴\text{-}۵)$$

V_r و V_i مقادیر اغتشاشات حقیقی و موهومی بدست آمده از تحلیل پایداری می باشند.

پارامتر $\omega = \alpha C_{exit}$ می باشد که C_{exit} سرعت درخروجی است که از تحلیل پایداری می تواند نتیجه شود. [۹]

در مرز خروجی هم از یک شرط مرزی جابجایی[۱۵] استفاده شده است. در مرز خروجی نباید هیچگونه برگشت جریان و یا وجود تاثیرات خروجی به داخل شبکه محاسباتی باشیم. در این مرز از معادله جابجایی برای تولید شرط مرزی دریچلت برای هر دو مولفه سرعت استفاده می‌کنیم که معادله آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (۱۵\text{-}۵)$$

در این معادله، مولفه های سرعت u و v جایگزین ψ می‌گردند. ضریب c برابر با سرعت کلی انتقال موج و یا سرعت متوسط جریان در جهت اصلی در مرز خروجی است. مقدار c بین صفر و یک می باشد. البته مقدار دقیق این پارامتر مشخص نیست و باید با تخمین مناسبی در مجموعه محاسباتی تعیین شود [۹]. سرعت ساختار بزرگ جریان برای معرفی c مناسب می باشد. استفاده از سرعت انتقال موج که از تحلیل پایداری خطی بدست می آید نیز جهت تعیین c مناسب می باشد [۲].

13 Orr Summerfield

۱۴. سلمانی با کمک این پروفیل معادله پایداری را حل کرده است.

15 Convective Outflow Boundary Condition

۵-۳-۲- شرایط مرزی برای حل معادله انرژی

با توجه به اینکه معادله انرژی یک معادله دیفرانسیل درجه ۲ است نیاز به اعمال دو شـرط مـرزی داریم.

برای T در ورودی و خروجی ، دو شرط دریشلت قرار می دهیم.

برای T ورودی همان تابع سرعت در ورودی را قرار می دهیم و برای T درمرز خروجی نیاز به حل معادله (۵-۱۵) داریم در این معادله، مولفه دما T جایگزین ψ می‌گردد.

۵-۴- شرط اولیه

شرط اولیه برای شبیه سازی جت دو بعدی همراه با اغتشاشات، نتیجه بدست آمده از جت دو بعدی در حالت پایدار زمانی می‌باشد که در آن شرط مرزی ورودی برابر با جریان اولیه می‌باشد و هیچگونه اغتشاش نداریم.

در حالت پایدار زمانی یک پروفیل با توزیع هیپربولیکی برای تمام مقاطع مختلف x به عنوان شرط اولیه برای جریان وانتقال حرارت جت انتخاب کرده‌ایم.

در جت پایدار زمانی در گره‌های مختلف بعد از گذشت زمانی، مقدار سرعت ودما در آن دیگر تغییر نمی‌کند و مستقل از زمان و پایدار می‌گردد.

فصل ششم

روش های عددی

۶-۱- مقدمه

همانطور که قبلا اشاره شد برای حل معادلات ناویر استوکس از روش عددی اختلاف محدود فشرده در دو جهت x و y استفاده می‌شود. در این فصل توضیحاتی به تفضیل در مورد این روش ارائه می‌شود.

۶-۱-۱- الگوریتم کاری برای حل معادله ناویر استوکس

الگوریتم کاری برای حل معادله ناویر استوکس با توجه به ۴ شرط مرزی و یک شرط اولیه در زیر توضیح داده شده است:

۱. با توجه به شرط اولیه مشخص برای u ، مقدار v محاسبه می شود.

۲. با توجه به اینکه $\omega = \nabla \times U$ است و برای حالت دو بعدی $\omega_1 = 0$ و $\omega_2 = 0$ است، مقدار $\omega_3 = \omega = \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}$ حساب می شود.

۳. مقدار $H = U \times \omega$ می باشد که برای حالت دو بعدی $H_3 = 0$ است مقادیر $H_1 = V.\omega$ و $H_2 = -U.\omega$ محاسبه می شود.

۴. محاسبه ترم های غیر خطی در معادله که به صورت $\dfrac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y}$ است.

۵. محاسبه ترم های لزجتی در معادله که به صورت $\dfrac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^4 U$ است.

۶. بعد از محاسبه طرف راست معادله، با توجه به روش رانج کوتای مرتبه سوم مقدار $\nabla^2 u$محاسبه می شود.

۷. با مشخص شدن $\nabla^2 u$، مقدار u از ان استخراج می شود.

۸. تمام مراحل ذکر شده در بالا برای یک گام زمانی است که از u تولید شده در مرحله قبل به عنوان شرط اولیه استفاده می شود.

برای حل معادله ۵-۳ و طبق الگوریتم بالا، ما باید قادر به انجام اعمال زیر باشیم:

۱- محاسبه مشتقات مادی

۲- انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی به منظور بدست اوردن v از معادله ۵-۴ .

۳- محاسبه ترم های غیر خطی

۴- حل معادله پواسون [۳] برای حالت دو بعدی

۵- پیشرفت زمانی (بدست آوردن داده های جدید که در اصل آنها به صورت شرط اولیه برای زمان بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت).

۶-۱-۲- الگوریتم کاری برای حل معادله انرژی

الگوریتم کاری برای حل معادله انرژی با توجه به ۲ شرط مرزی و یک شرط اولیه در زیر توضیح داده شده است:

۱. محاسبه ترمهای نفوذ که به صورت $\frac{1}{Pe}\nabla^2 U$ است.

۲. محاسبه ترمهای غیرخطی در معادله که به صورت $(U\frac{\partial T}{\partial x}+V\frac{\partial T}{\partial y})$ است.

۳. بعد از محاسبه طرف راست معادله، با توجه به روش رانج کوتای مرتبه سوم مقدار $T1$محاسبه می شود.

۴. تمام مراحل ذکر شده در بالا برای یک گام زمانی است که از$T1$تولید شده در مرحله قبل به عنوان شرط اولیه استفاده می شود.

۶-۲- محاسبه مشتقات مادی

مشتقات مادی با بکار بردن طرح اختلاف محدوده فشرده استاندارد ارائه شده توسط لیلی [۸] محاسبه شده است . لیلی[1] مشتق اول تابع $f(x)$ را به طور ضمنی[2] مطابق معادله ۶-۱ بیان کرده است.

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha+2}{3h}(f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha-1}{12h}(f_{j+2} - f_{j-2}) \qquad (۱-۶)$$

که علامت پریم نمایانگر مشتق اول، j بیان کننده تعداد گره $(1 \le j \le J)$ و $\Delta x = Lx/Nx$ است که $Nx = J-1$ است.

اگر در معادله ۶-۱، $\alpha = 1/4$ یا $\alpha = 1/3$ قرار داده شود به طرحهایی با مرتبه خطای چهارم و ششم می‌رسیم. برای جلوگیری از ناهنجار بودن ماتریس طرف چپ معادله فوق، طرفین آن را در $1/\alpha$ ضرب می کنیم.

نتیجه به صورت زیر می شود:

$$f'_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f'_j + f'_{j+1} = \frac{1+2/\alpha}{3h}(f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4-1/\alpha}{12h}(f_{j+2} - f_{j-2}) \qquad (۲-۶)$$

در مرزها یعنی جایی که $j=1$ یا $j=J$ است یک طرح مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f'_1 + 2f'_2 = \frac{1}{2h}(-5f_1 + 4f_2 + f_3) \qquad (۳-۶)$$

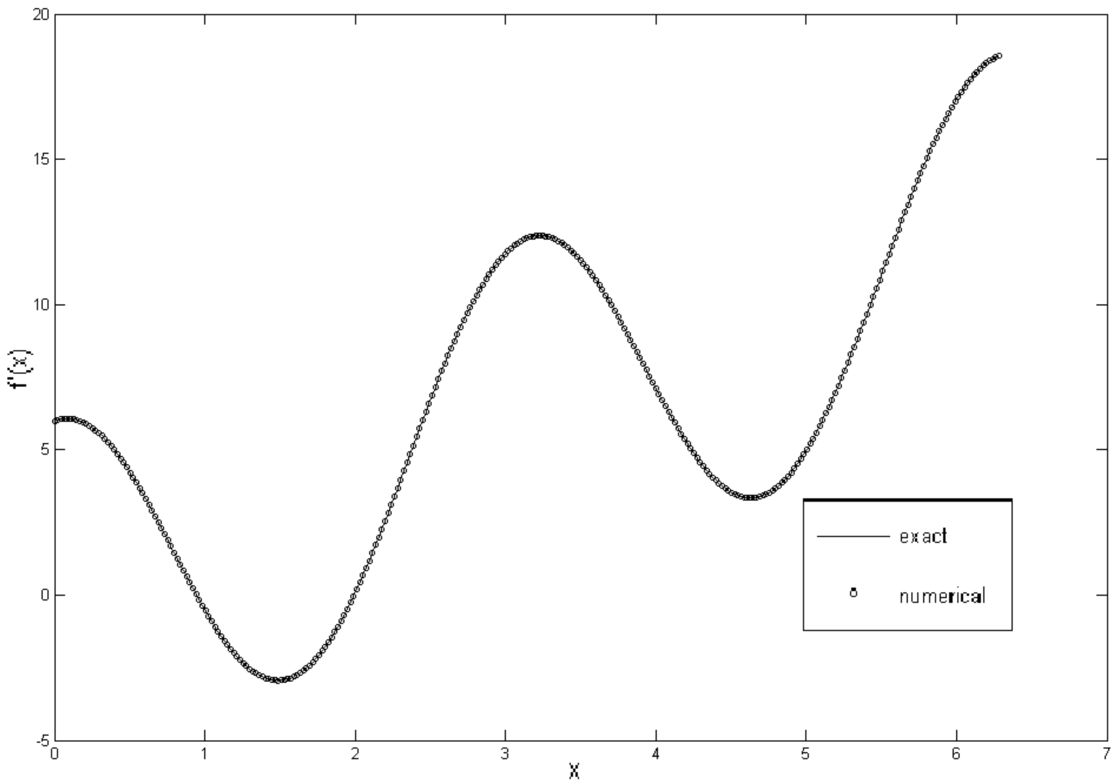
$$f'_J + 2f'_{J-1} = \frac{1}{2h}(5f_J - 4f_{J-1} - f_{J-2}) \qquad (۴-۶)$$

[1] S.K.Lele
[2] Implicitly

در همسایگی مرزها یعنی جایی که $j=2$ یا $j=J-1$ است از معادله ۶-۲ در حالتی که $\alpha=1/4$ است استفاده می شود.

همانطور که توسط لیلی بحث شده است با قرار دادن $\alpha'=(16\alpha+32)/(40\alpha-1)$ به جای α در معادله ۶-۲ برای گره های $j=3$ و $j=J-2$ می‌توان پایداری و بقای عددی معادله $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}f(u)$ را تضمین کرد. در شکل ۶-۱ می‌توانید میزان دقت آن را برای تابعی به فرم $y=3\sin(2x)+x^2$ ملاحظه کنید.

انتظار داریم که طرحی با مرتبه خطای سوم در مرز و مرتبه خطای ششم در گره های مرکزی داشته باشیم. شکل ۶-۲ مرتبه دقت را نشان می دهد.

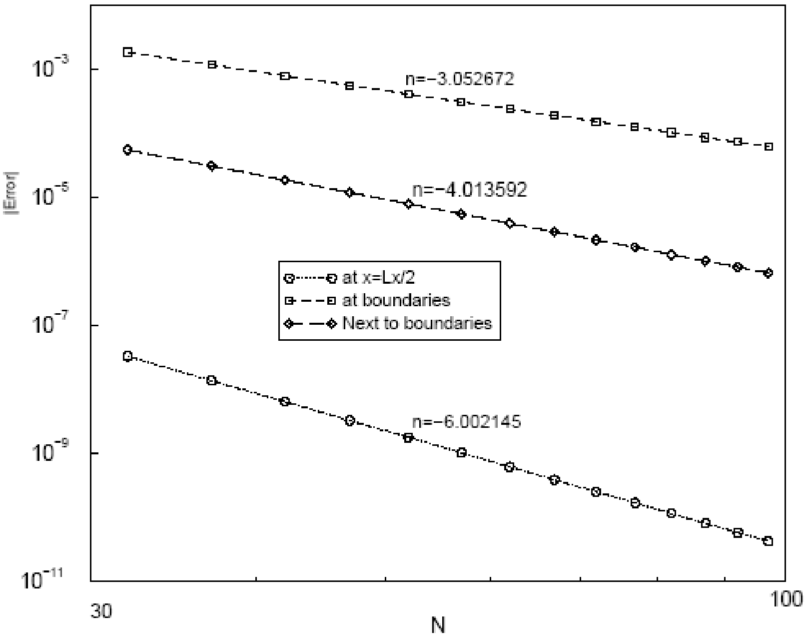


شکل ۶-۱: تقریب مشتق اول تابع $y=3\sin(2x)+x^2$

معادله ۶-۵ مشتق دوم تابع $f(x)$ را نشان می دهد که یک طرح اختلاف محدود فشرده و با دقت مرتبه چهارم است.

$$\alpha f''_{j-1} + f''_j + \alpha f''_{j+1} = \frac{4(1-\alpha)}{3h^2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) + \frac{10\alpha - 1}{12h^2}(f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2}) \quad (۶-۵)$$

که در آن $\alpha = 1/4$ است. در اینجا مسئله ناهنجاری هم مورد توجه قرار گرفته است و معادله در $1/\alpha$ ضرب شده است.



شکل ۶-۲: مرتبه دقت برای مشتق اول با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [۱۰]

در مرزها از یک طرف مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f''_1 + 11f''_2 = \frac{1}{h^2}(13f_1 - 27f_2 + 15f_3 - f_4) \quad (۶-۶)$$

$$f''_J + 11f''_{J-1} = \frac{1}{h^2}(13f_J - 27f_{J-1} + 15f_{J-2} - f_{J-3}) \quad (۶-۷)$$

با مشتق گیری از معادله ۶-۳ معادله ۶-۸ تولید می‌شود.

$$f_1''+2f_2''=\frac{1}{2h}(-5f_1'+4f_2'+f_3')= \tag{۸-۶}$$
$$\frac{-3}{h}f_1'+\frac{1}{2h}(f_1'+4f_2'+f_3')$$

اگر ترم طرف راست معادله ۶-۸ را با معادله ۶-۱ در حالتی که $\alpha=1/4$ جایگزین کنیم داریم:

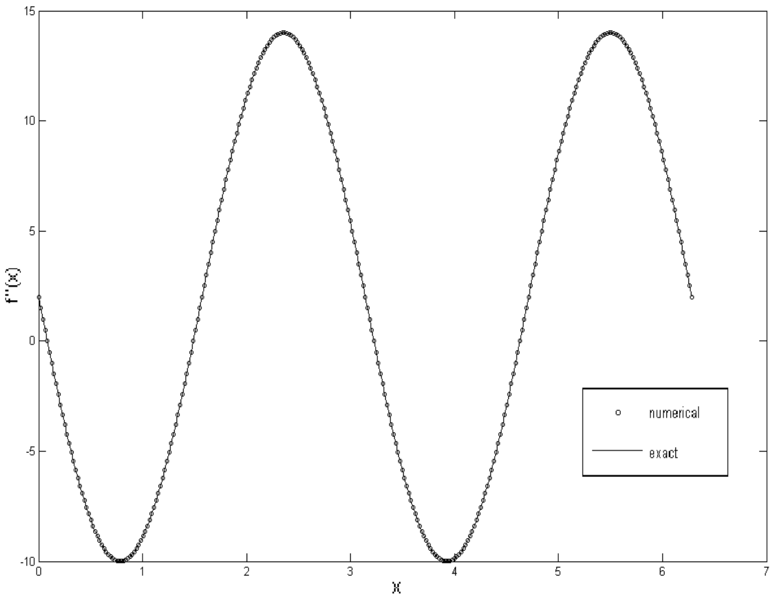
$$f_1''+2f_2''=\frac{-3}{h}(\frac{df}{dx})_{x=0}-\frac{3}{2h^2}(f_1-f_3) \tag{۹-۶}$$

روش مشابهی می‌توان برای گره J به کار برد.

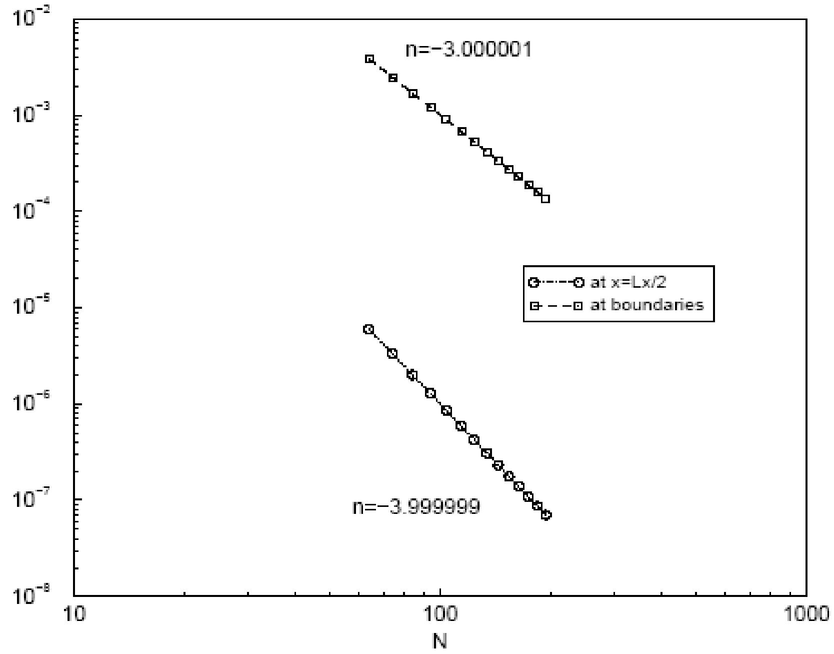
$$f_J''+2f_{J-1}''=\frac{3}{h}(\frac{df}{dx})_{x=Lx}-\frac{3}{2h^2}(f_J-f_{J-2}) \tag{۱۰-۶}$$

نزدیک مرزها یعنی جائیکه $j=2$ و $j=J-1$ است از طرح اختلاف محدوده فشرده مرتبه دوم استفاده شده است که با جایگزینی $\alpha=1/10$ در معادله ۶-۵ بدست می آید.

در شکل ۶-۳ مقایسه بین نتایج عددی مشتق دوم و مقدار حقیقی تابع $y=3\sin(2x)+x^2$ را می‌توانید ملاحظه کنید. میزان خطا نیز در شکل ۶-۴ برای گره های مرزی و گره های داخلی ترسیم شده است.



شکل ۶-۳: تقریب مشتق دوم تابع $y=3\sin(2x)+x^2$.



شکل ۶-۴: مرتبه دقت برای مشتق دوم با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد[۱۰]

برای محاسبه مشتقات چهارم هم می‌توان اپراتور مشتق دوم را دوبار اعمال کرد که در طرف راست معادله ناویر استوکس و در قسمت ترم های لزجتی وجود دارد.

۶-۳- روش محدود کردن دامنه y

جریان جت جریانی آزاد و دور از مرزهای صلب می‌باشد و در نتیجه در جهت y نباید هیچگونه محدودیت مادی داشته باشیم. یعنی $-\infty \le y \le \infty$ می‌باشد. برای گنجاندن y در یک دامنه محاسباتی از یک تابع یک به یک مثلثاتی استفاده می کنیم که مختصات فیزیکی y تبدیل به مختصات محاسباتی $0 \le \zeta \le 1$ می‌شود. فواصل گره‌ها در مجموعه محدود شده یک اندازه و یکنواخت می باشند ولی در مجموعه فیزیکی این فواصل متساوی نیستند و در ناحیه ای بیشتر متمرکزند. رابطه مورد استفاده بین مکان گره‌های موجود در مجموعه محاسباتی و مجموعه فیزیکی به وسیله معادله ۶-۱۱ بیان شده است. [۱۱]

$$y = -\beta \cot(\pi\zeta) \qquad (۶-۱۱)$$

که β پارامتر مربوط به کنترل میزان کشیدگی و انقباض است. برای مشتق گیری تابع f نسبت به y به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{d\zeta} \times \frac{d\zeta}{dy} = \frac{1}{\pi\beta}\sin^2(\pi\zeta)\frac{df}{d\zeta} \qquad (۶-۱۲)$$

با برابر قرار دادن $\lambda_1 = \dfrac{1}{\pi\beta}\sin^2(\pi\zeta)$ داریم:

$$\frac{df}{dy} = \lambda_1 \frac{df}{d\zeta} \qquad (۶-۱۳)$$

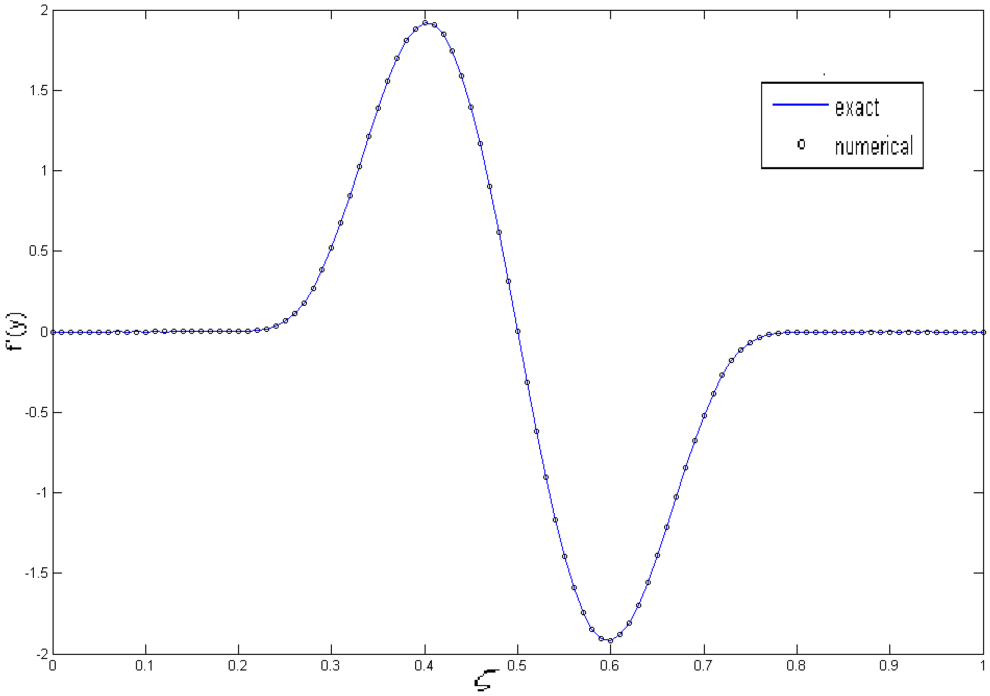
برای محاسبه مشتق دوم نیز به صورتی مشابه عمل می کنیم:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \lambda_2 \frac{d^2 f}{d\zeta^2} + \lambda_3 \frac{df}{d\zeta} \qquad (۶-۱۴)$$

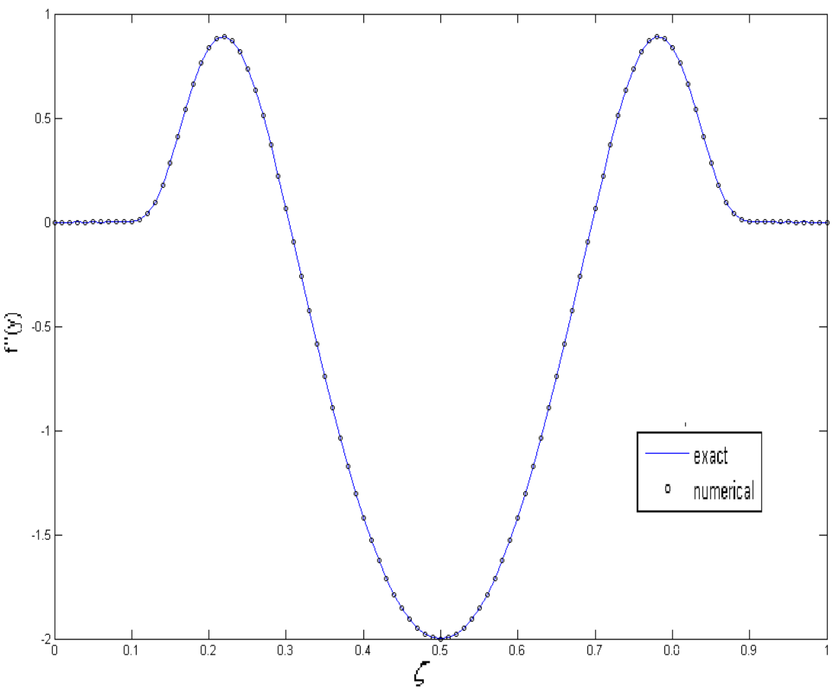
$$\lambda_2 = {\lambda_1}^2 \qquad (۶-۱۴)$$

$$\lambda_3 = \frac{-4}{\pi\beta^2}\sin^3(\pi\zeta)\cos(\pi\zeta) \qquad (۶-۱۵)$$

در شکل های ۶-۵ و ۶-۶ می‌توان نتیجه این روش مشتق گیری را با توجه به محدود کردن موجود و $\beta = 1$ و $N_y = 100$ ملاحظه نمایید.



شکل ۶-۵: تقریب مشتق اول تابع $f(y)=e^{-\gamma y^2}$ با توجه به فشرده سازی در جهت y با $\gamma=5, \beta=1$.



شکل ۶-۶: تقریب مشتق دوم تابع $f(y)=e^{-\gamma y^2}$ با توجه به فشرده سازی در جهت y با $\gamma=\beta=1$.

۶-۴- انتگرال گیری

با حل معادله ۵-۳ می‌توان $u(x,y,t)$ را بدست آورد. برای محاسبه سرعت در جهت عرضی v از معادله پیوستگی بهره می‌گیریم. طبق معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{۶-۱۶}$$

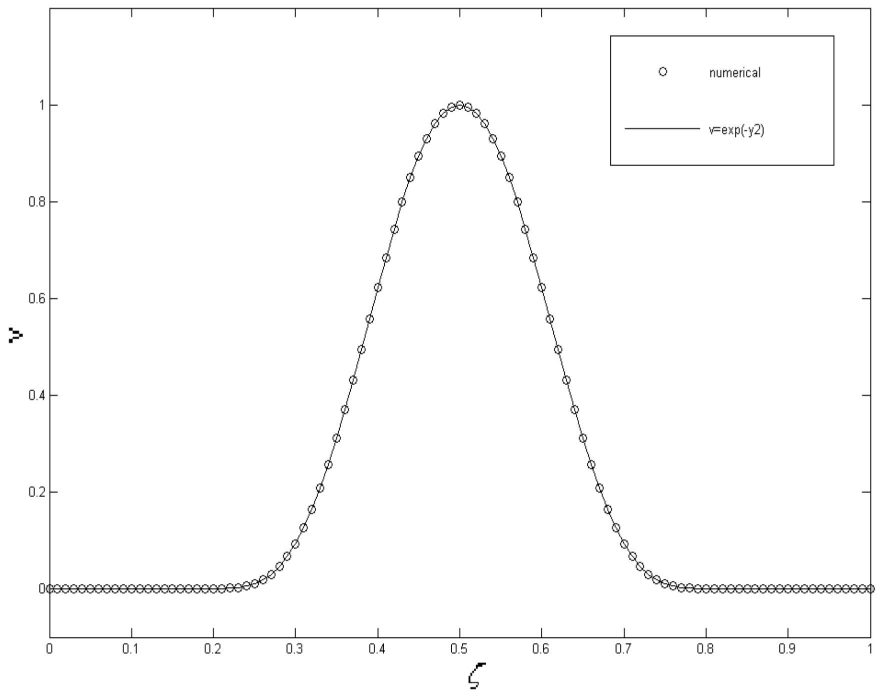
$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x} \tag{۶-۱۷}$$

چنانچه از طرح اختلاف محدود فشرده استفاده کنیم که ماتریس سمت راست معادله ۶-۲ دارای عناصر صفر بر روی قطر اصلی است و با این وضع نمی توان به انتگرال گیری پرداخت. جهت غلبه بر این مشکل با مشتق گیری از دو طرف معادله بر حسب y معادله ۶-۱۸ بدست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \tag{۶-۱۸}$$

با وجود دو شرط مرزی برای v به صورت $y=\pm\infty \rightarrow v=0$ این معادله حل می‌شود.

نتایج مربوط به انتگرال گیری در شکل ۶-۷ آمده است.



شکل ۶-۷: تقریب انتگرال تابع $f'(y) = -2ye^{-y^2}$ با شرایط مرزی $f(y(0)) = f(y(1)) = 0$ که به صورت $f(y) = e^{-y^2}$ می باشد .

۶-۵- پیشروی در زمان:

طرح اختلاف زمانی رانج کوتای مرتبه سوم فشرده به وسیله رای[1] [۲۲] بیان شده است که برای پیشرفت زمانی به کار برده می‌شود. برای پیشروی زمانی معادله‌ای به صورت معادله ۶-۱۹، مطابق با جدول ۶-۱ می‌توان فرایند را انجام داد.

جدول۶-۱: طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم.

زمان	اولین موقعیت	دومین موقعیت
t^n	u^n	$R(u^n)$
$t' = t^n + c_1\Delta t$	$u' = u^n + c_1\Delta t R$	$R' = R(u')$
$t'' = t' + (c_2 + d_2)\Delta t$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R)\Delta t$	$R'' = R(u'')$
$t^{n+1} = t^n + \Delta t$	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R')\Delta t$	

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u) \qquad (۶\text{-}۱۹)$$

برای پیشروی زمانی معادله مدل فوق به اندازه Δt، طرف راست معادله باید در سه مرحله زمانی محاسبه گردد. در هر یک از این مراحل زمانی، زمان به اندازه $(c_i + d_i)\Delta t$ جلو می رود و u به وسیله یک ترکیب خطی از R در مرحله زمانی حال و R در مرحله زمانی گذشته محاسبه می‌گردد. بعد از گذشت مرحله سوم، زمان به اندازه Δt و مقدار u محاسبه شده برابر مقدار u بعد از گذر از یک Δt زمانی است.

برای محاسبه ضرایب با معادل قرار دادن ضرایب حاصل از سری تیلور با طرح می‌توان اقدام نمود.

داریم:

[1] A.Wray

$$c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1$$

$$c_1^2 c_2 + c_3 (c_1 + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2}))^2 + c_1^2 d_3 = 1/3$$

$$c_1 c_2 + c_3 (\frac{d_2}{c_2} (1 + \frac{d_3}{c_3}) + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2})) = 1/2$$

$$c_1 c_2 c_3 = 1/6$$

برای حل $d_1 = 0$ قرار می‌دهیم. نتیجه به صورت زیر است:

$$c_1 = 8/15 \qquad d_1 = 0$$

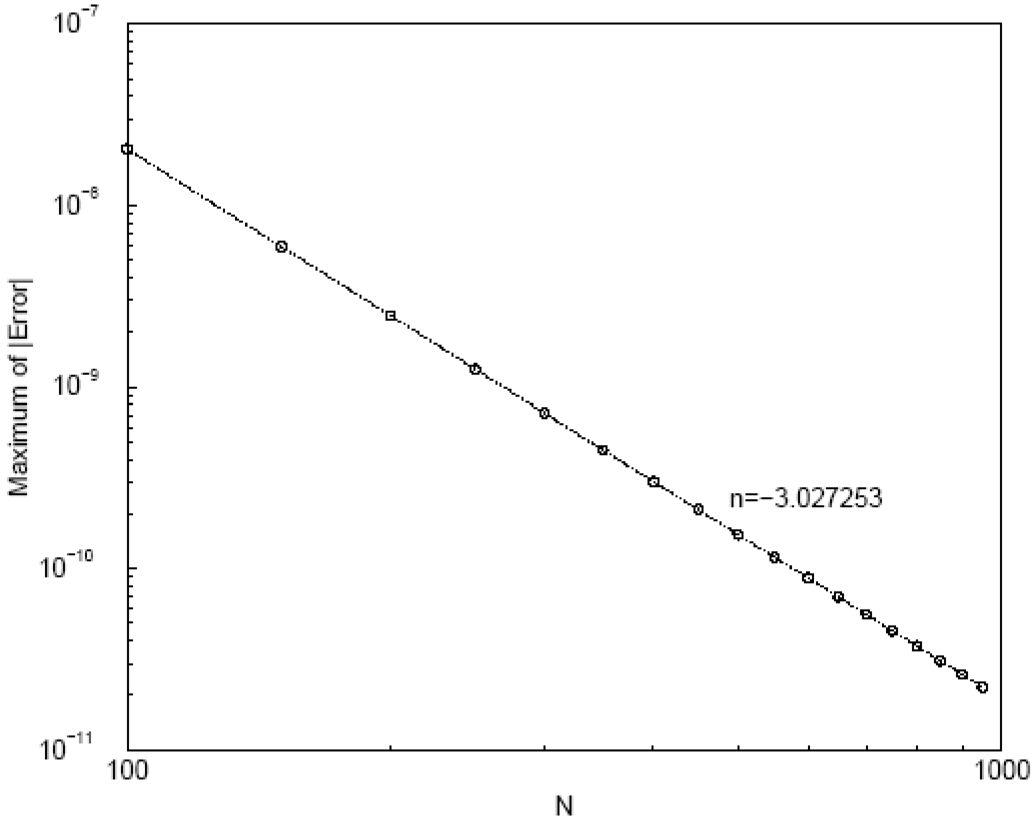
$$c_2 = 5/12 \qquad d_2 = -17/60$$

$$c_3 = 3/4 \qquad d_3 = -5/12$$

تست زیر برای تعیین دقت طرح مذکور انجام شده است. $u(t) = e^{-t}$ همراه با شرط اولیه $u(0) = 1$ یک حل تحلیلی برای معادله ۶-۲۰ است.

$$\frac{du}{dt} = -u(t) \qquad (۶-۲۰)$$

ماکزیمم خطا بین نتایج عددی و حل واقعی در شکل ۶-۸ رسم شده است که به روشنی نشان دهنده صحیح بودن دقت مرتبه سوم این طرح می‌باشد.



شکل ۶-۸: مرتبه دقت طرح پیشروی در زمان برای $\frac{du}{dt}=-u(t)$ با $u(0)=1$. [۱۰]

۶-۶- حل معادله پواسون

بعد از محاسبه طرف راست معادله ناویر استوکس و پیشروی در زمان، مقدار $\nabla^2 u$ بدست می آید. پس داریم:

$$\nabla^2 u = C \qquad (۶-۲۱)$$

که C معلوم می باشد و مقدار u مجهول است. با بسط معادله داریم:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C \qquad (۶-۲۲)$$

با جایگزین کردن اپراتور های مشتقات دوم در جهات x و y معادله زیر بدست می آید:

$$(D2X.u^T)^T + D2Y.u = C \qquad (۶-۲۳)$$

توجه کنید که برای اعمال اپراتور مشتق دوم در جهت X باید تابع مفعول را ترانسپوز کرده و در ماتریس اپراتور $D2X$ ضرب کرده و در نهایت از نتیجه ضرب دو ماتریس، یک ترانسپوز گرفته شود.

با توجه به اینکه:

$$(ST)^T = T^T S^T \qquad (۶-۲۴)$$

پس معادله ۶-۲۳ به معادله زیر تبدیل می شود.

$$u.D2X^T + D2Y.u = C \qquad (۶-۲۵)$$

بارتلز [۳] چگونگی روش حل معادله ماتریسی $AX + XB = C$ را ارائه کرده است که در اینجا $A = D2Y$ و $B = D2X^T$ و $X = u$ است و در نهایت u بدست می آید.

فصل هفتم

ارزیابی صحت و درستی برنامه عددی و شبیه سازی عددی

۷-۱- ارزیابی کد و شبیه سازی عددی:

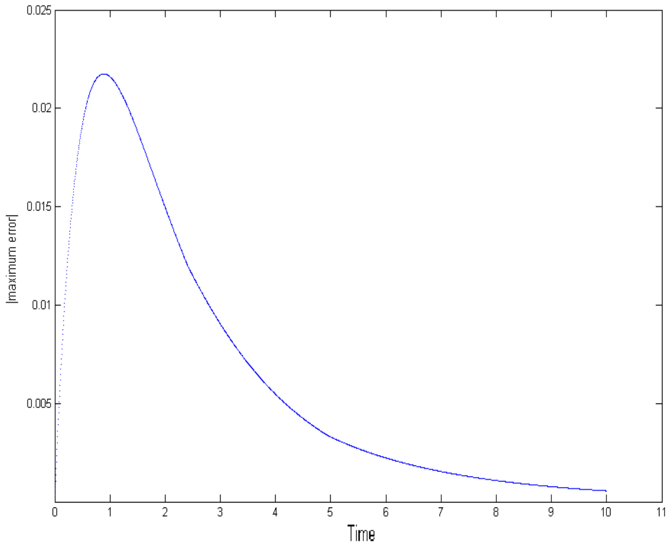
به منظور تست و ارزیابی صحت برنامه نوشته شده، در حالتی که مود های مختلف کد فعال هستند، نتایج را با بعضی از حل‌های دقیق معادله ناویر استوکس در حالات خاص تست و مقایسه می‌کنیم.

۷-۱-۱- معادله نفوذ وابسته به زمان

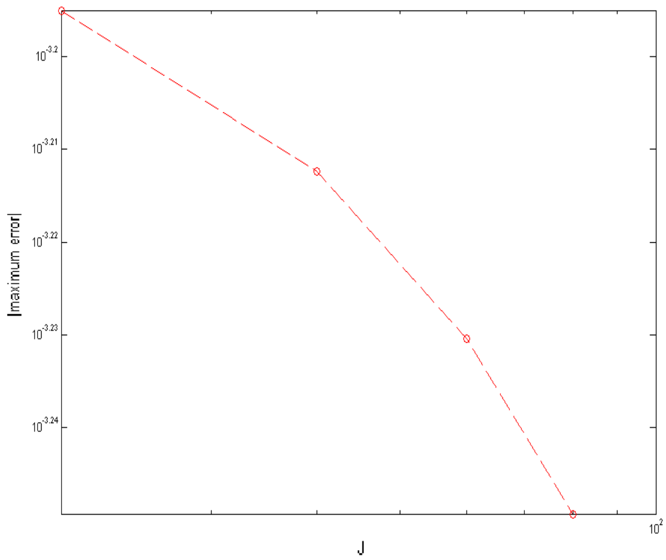
حل معادله ناویر استوکس (۴-۳) با توجه به پیشرفت در زمانی در برنامه عددی با حل واقعی معادله نفوذ تست شده است. معادله نفوذ مربوط به حالتی است که $H = 0$ است. یک حل خاص برای معادله نفوذ به صورت زیر است: [۱۰]

$$u(x,y,t) = \cos(x)\times\frac{y-1}{(1+\frac{4t}{\mathrm{Re}})^{1.5}}\times\exp(-2t/\mathrm{Re})\times\exp(-\frac{(y-1)^2}{(1+\frac{4t}{\mathrm{Re}})}) \qquad (۷-۱)$$

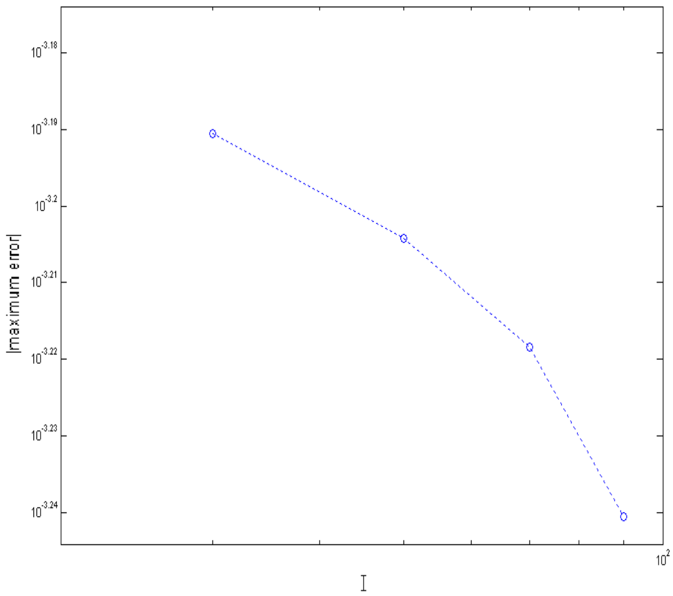
برای انجام این تست بایستی از این معادله برای تولید شرط مرزی و شرط اولیه استفاده نمود. در نتیجه شرط مرزی خروجی جابجایی و تشکیل ترم‌های غیر خطی در این تست نمی‌توانند ارزیابی شوند. ولی حل معادله پواسون و کیفیت پیشرفت در زمان ارزیابی می‌شوند. توجه کنید که u شرط پایداری را ارضاء می‌کند و حل می‌تواند برای شبیه سازی جریان جت کاملا لزج مورد استفاده قرار گیرد. پارامترها در این تست به صورت $L_x = 2\pi/3$ و $\beta = 4$ و $\mathrm{Re} = 10$ و $t = 20$ و $Nx = 45$ و $Ny = 40$ می‌باشند. شکل ۷-۱ دقت حل وابسته به زمان برای u را نشان می‌دهد. شکل‌های ۷-۱-۱ و ۷-۱-۲ هم مقدار ماکزیمم خطا به صورت تابعی از تعداد گره‌ها در جهات x و y را ترسیم کرده است.



شکل ۷-۱: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از زمان



شکل ۷-۱-۱ : ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت x



شکل ۷-۱-۲: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت y

۷-۱-۲- گردابه های استوارت

استوارت[1] حل دو بعدی وابسته به زمان معادله ناویر استوکس غیر لزج[2] را برای گروه لایه‌های اختلاطی معرفی کرد. حل به صورت تابع جریان ψ است که مولفه‌های سرعت $u=\frac{\partial \psi}{\partial y}$ و $v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$ است. [۱۰]

$$\psi(x,y,t)=cy+\ln(a\cosh(y-y_0)+b\cos(x-ct)) \qquad (۷-۲)$$

در اینجا $b=\sqrt{a^2-1}$. به راحتی می‌توان نشان داد که معادله بالا، معادله جابجایی را ارضاء می‌کند که c برابر سرعت جابجایی موج است. در نتیجه حل استوارت می‌تواند برای ارزیابی صحت شرط مرزی خروجی جابجایی مورد استفاده قرار گیرد. در این تست تشکیل ترم لزج تست نمی‌شود ولی برای ارزیابی تشکیل ترم‌های غیرخطی و پیشروی محاسبات در زمان مناسب است.

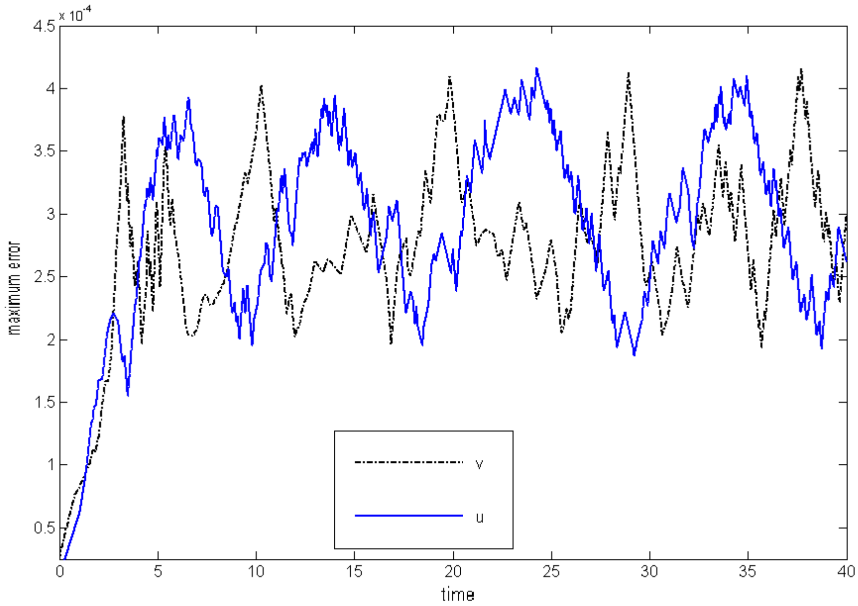
به این نکته توجه کنید که مولفه سرعت در جهت جریان نمی تواند حل پایداری داشته باشد. برای رفع این مشکل $\tanh(y-y_0)$ را به آن اضافه و کسر می‌کنیم. قسمت پایدار آن یعنی

[1] Stewart
[2] In viscid

$a\sinh(y-y_0)/(a\cosh(y-y_0)+b\cos(x-ct))-\tanh(y-y_0)$ را به صورت شرط اولیه و شرط مرزی ورودی در نظر می‌گیریم. باقیمانده عبارت به عنوان جریان اولیه محسوب می‌شود.

پارامتر ها به صورت $L_x=2\pi$ و $\beta=3$ و $\mathrm{Re}=10^9$ در نظر گرفته می شود تا جریان بصورت موثر ایده ال باقی بماند. به عبارت دیگر با در نظر گرفتن $\mathrm{Re}=10^9$ جمله غیر خطی در مقایسه با جمله لزجتی کاملا غالب خواهد بود.

شکل ۷-۱-۳ دقت حل وابسته به زمان را برای u و v نشان می‌دهد.



شکل ۷-۱-۳: ماکزیمم خطا در u و v برای تست گردابه های استوارت به صورت تابعی از زمان

۷-۲- مطالعه شبکه[3]

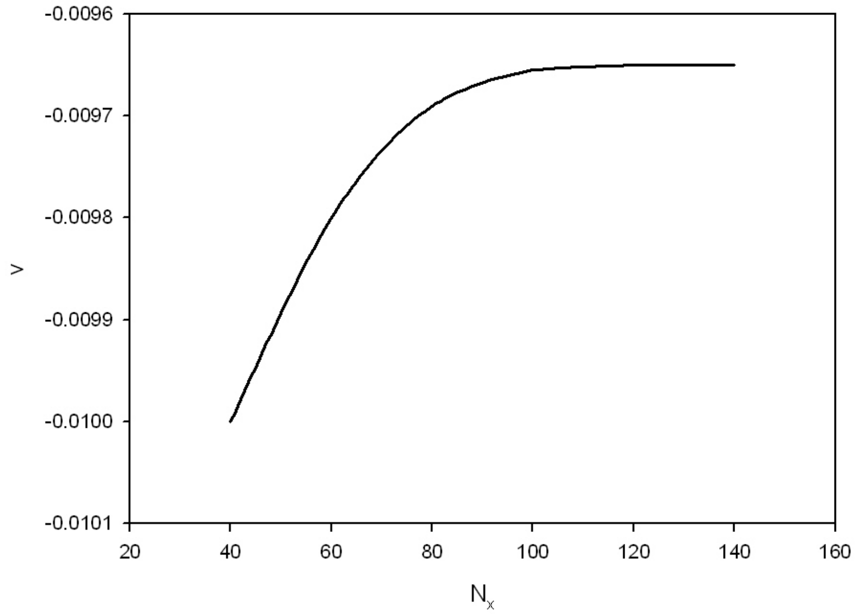
برای ارزیابی صحت و درستی برنامه عددی، من جمله تستهای معمول مطالعه شبکه است.

برای انجام این مهم برنامه عددی نوشته شده را در شرایط زیر اجرا کرده ایم.

$\mathrm{Re}=100$ و $\beta=4$ و $Ny=70$ و $L_x=25$ و $\Delta t=0.01$ و $\mathrm{Pr}=3$ برای N_x تعداد گره ها رااز ۴۰ تا ۱۴۰ تغییر دادیم و نتایج را در $time=100$ و $x=0.75L_x$ و $y=0$ رصد کردیم.

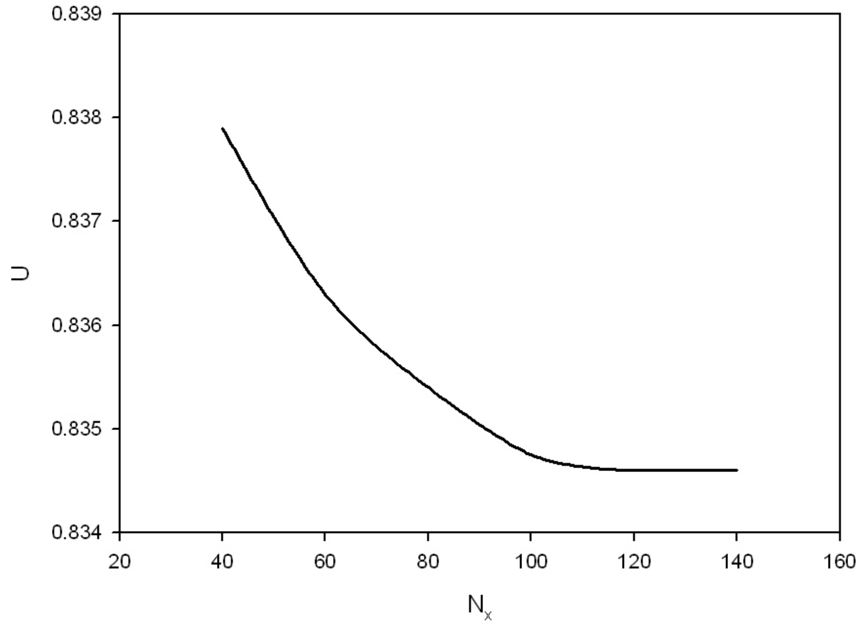
نتایج عددی به ازای $N_x>100$ مستقل از تعداد گره خواهد شد.

شکلهای ۷-۲-۱ و۷-۲-۲ و۷-۲-۳ موید این امر هستند.

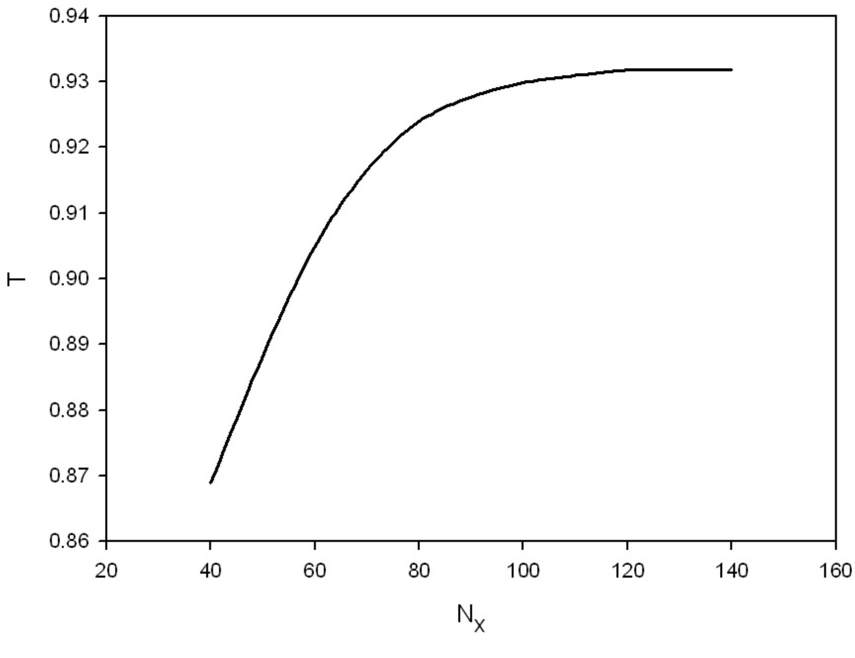


شکل ۷-۲-۱: مطالعه شبکه برای v

[3] Grid-Study



شکل ۷-۲-۲: مطالعه شبکه برای U



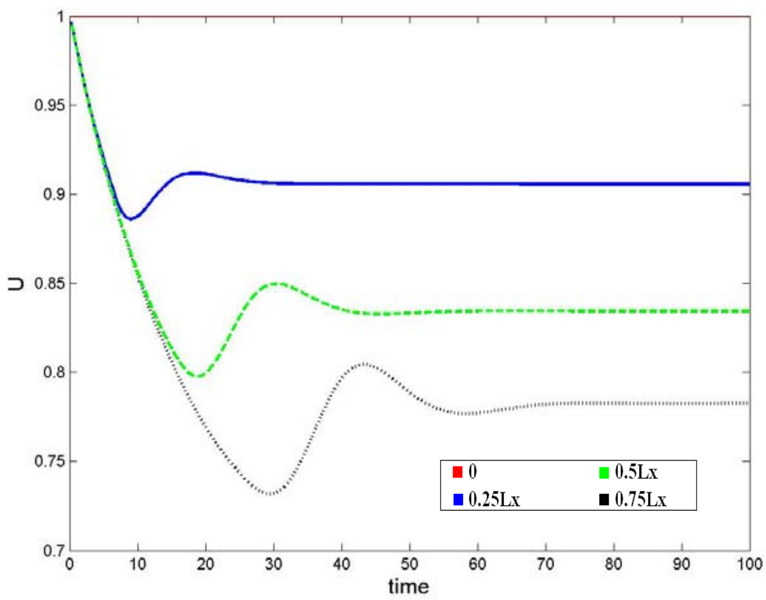
شکل ۷-۲-۳: مطالعه شبکه برای دما

فصل هشتم

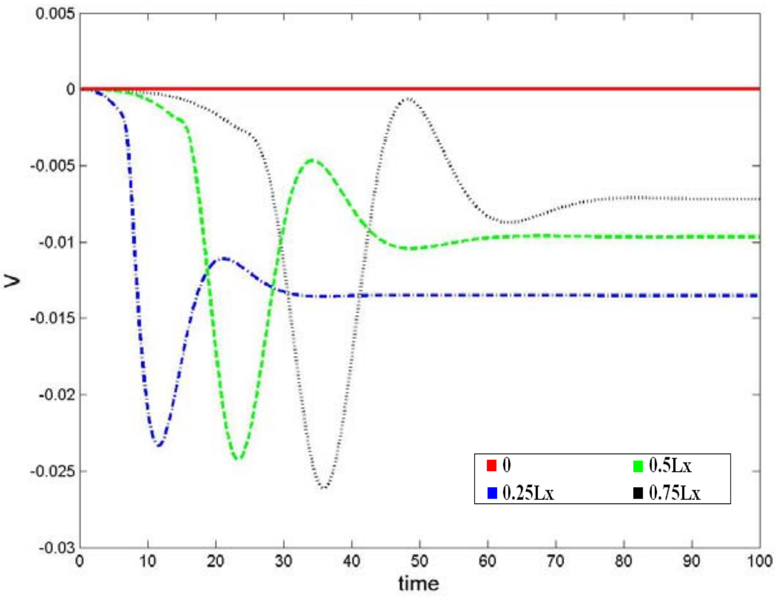
نتایج عددی برای جت آرام

۸-۱- جریان و انتقال حرارت جت دو بعدی آرام

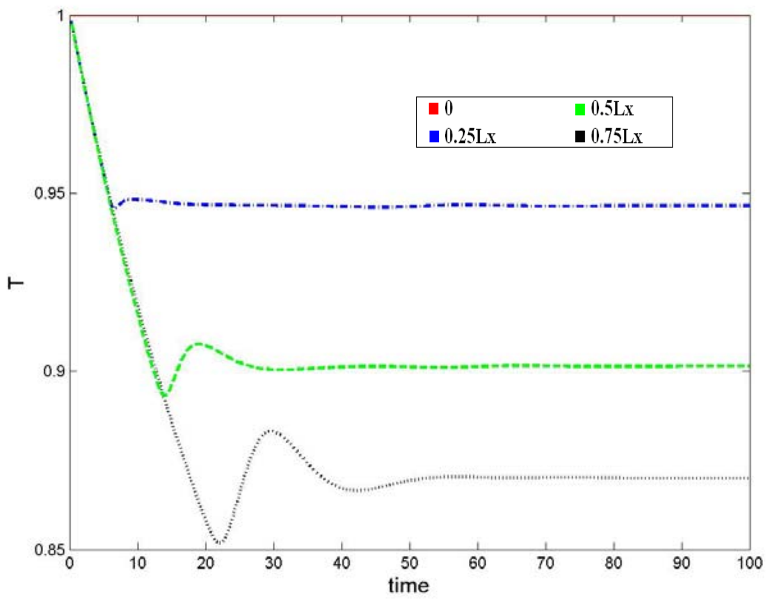
برای شبیه سازی جریان جت، بدون اغتشاشات ورودی انتظارداریم که سرعت لحظه ای و دمای لحظه ای در هر نقطه ای از دامنه به یک حالت پایدار برسد. این موضوع کاملا و به وضوح در شکل های ۸-۱و۸-۲ و۸-۳نشان داده شده است که تاریخچه ای از سرعت های U و V وT در مکان های معادل و متساوی در جهت جریان نمایش داده شده است. پارامتر های مورد استفاده در این شبیه سازی عبارتند از $\mathrm{Re} = 100$ و $\beta = 4$ و $N_x = 140$ و $N_y = 70$ و $\Delta t = 0.1\Delta x$ و $Lx = 25$ و $\mathrm{Pr} = 2$.



شکل ۸-۱:گذر زمانی U درy=0 ودر ۴ فاصله در طول Lx برای شبیه سازی جت دو بعدی آرام بدون اغتشاش ورودی



شکل ۸-۲:گذر زمانی V در y=0 ودر ۴ فاصله در طول Lx برای شبیه سازی جت دو بعدی آرام بدون اغتشاش ورودی



شکل ۸-۳:گذر زمانی T در y=0 ودر ۴ فاصله در طول Lx برای شبیه سازی جت دو بعدی آرام بدون اغتشاش ورودی

۸-۲- اثرات غلظت نانوذرات بر جریان و انتقال حرارت جت دو بعدی آرام

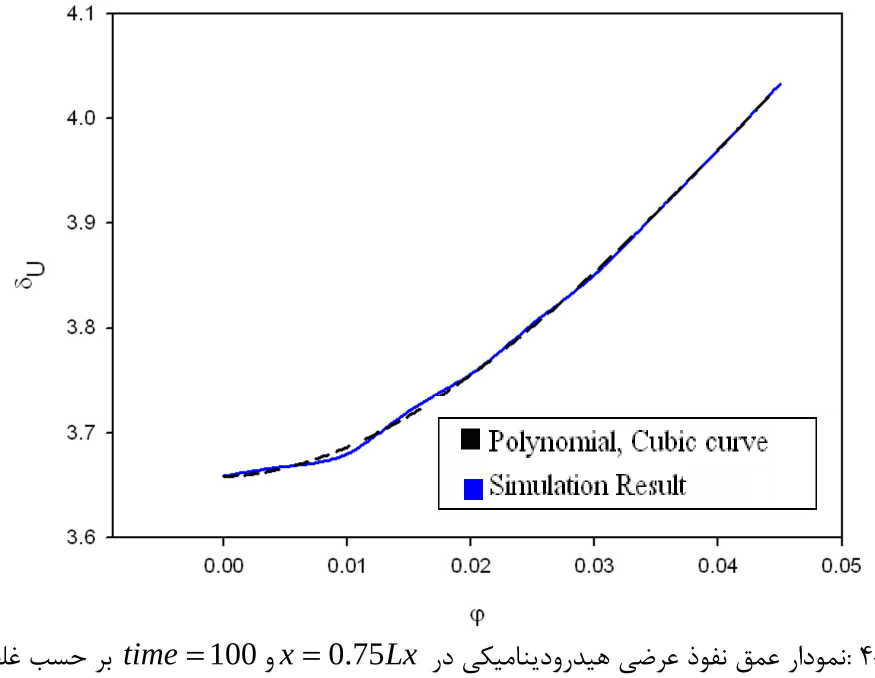
در این پروژه اثرات غلظت نانو ذرات را بر روی جریان و انتقال حرارت جت آرام بررسی کردیم.

۸-۲-۱- اثرات غلظت نانوذرات بر عمق نفوذ حرارتی و هیدرودینامیکی

برای مطالعه اثرات غلظت نانوذرات بر روی عمق نفوذ عرضی حرارتی و هیدرودینامیکی بدینگونه عمل کردیم که در یک x ثابت،y را به گونه ای بیابیم که درآن نقطه خاص مقدار سرعت و دما ۰/۰۱ (یکصدم)باشد.

این مهم برای غلظتهای مختلف نانوذرات انجام شد. نتایج نشان داد که با افزایش غلظت نانوذرات شاهد افزایش عمق نفوذ عرضی حرارتی و هیدرودینامیکی خواهیم بود.

شکل ۸-۴ مربوط است به نمودار عمق نفوذ عرضی هیدرودینامیکی بر حسب غلظت نانوذرات. توضیح اینکه دقیقترین تابعی که به این نمودار فیت شده است تابعی درجه ۳ است.



شکل ۸-۴ :نمودار عمق نفوذ عرضی هیدرودینامیکی در $x = 0.75Lx$ و $time = 100$ بر حسب غلظت نانوذرات.

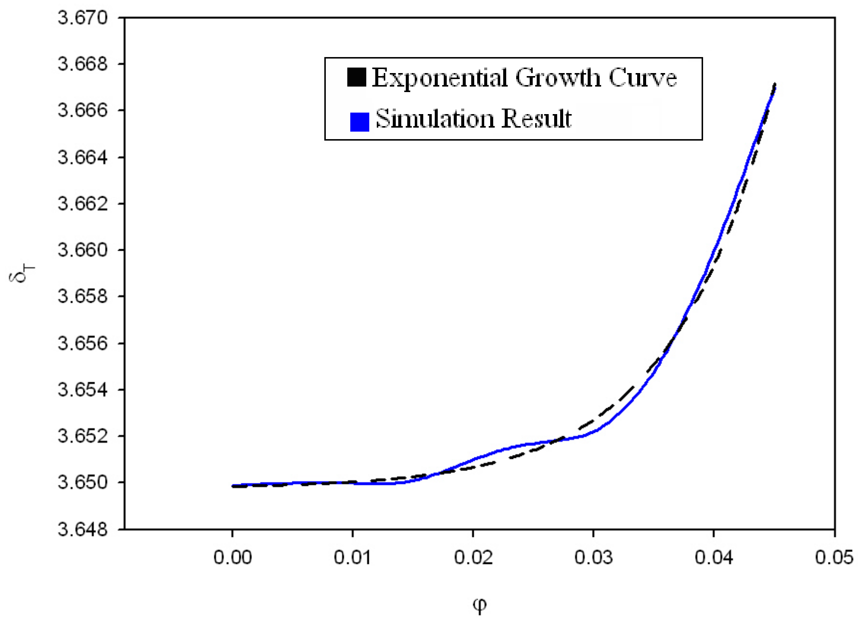
فرمول زیر را برای بیان رابطه ای که بین نفوذ عرضی هیدرودینامیکی و غلظت نانوذرات وجود دارد ارائه کرده ایم:

$$\delta_U = \delta_{U0} + 0.45\varphi + 257\varphi^2 - 1827\varphi^3 \qquad (۸-۱)$$

اطلاعات کامل مربوط به تابع فیت شده در پیوست د ارائه شده است.

شکل ۸-۵ مربوط است به نمودار عمق نفوذ عرضی حرارتی بر حسب غلظت نانوذرات.

توضیح اینکه دقیقترین تابعی که به این نمودار فیت شده است تابعی نمایی است.



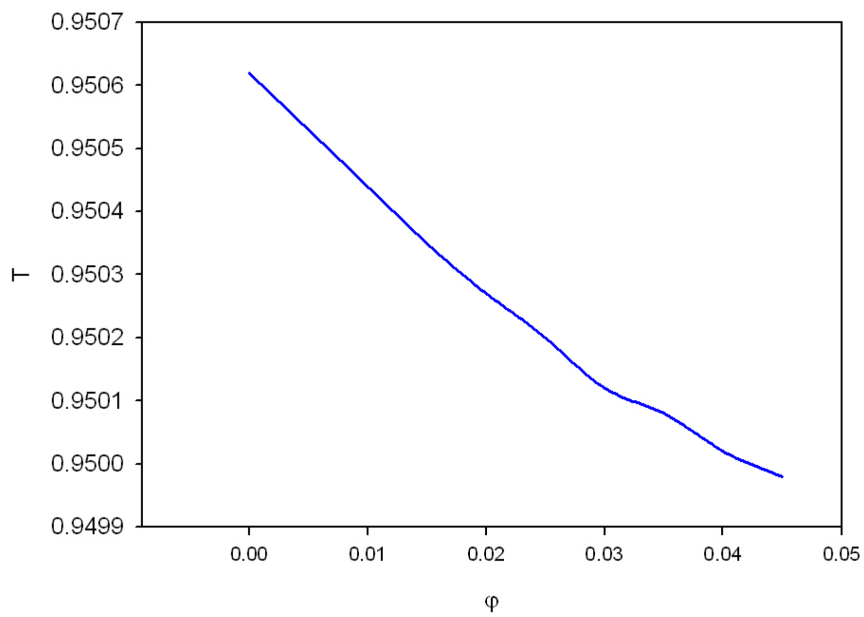
شکل ۸-۵ :نمودار عمق نفوذ عرضی حرارتی در $x = 0.75Lx$ و $time = 100$ بر حسب غلظت نانوذرات.

فرمول زیر را برای بیان رابطه ای که بین نفوذ عرضی حرارتی و غلظت نانوذرات وجود دارد ارائه کرده ایم:

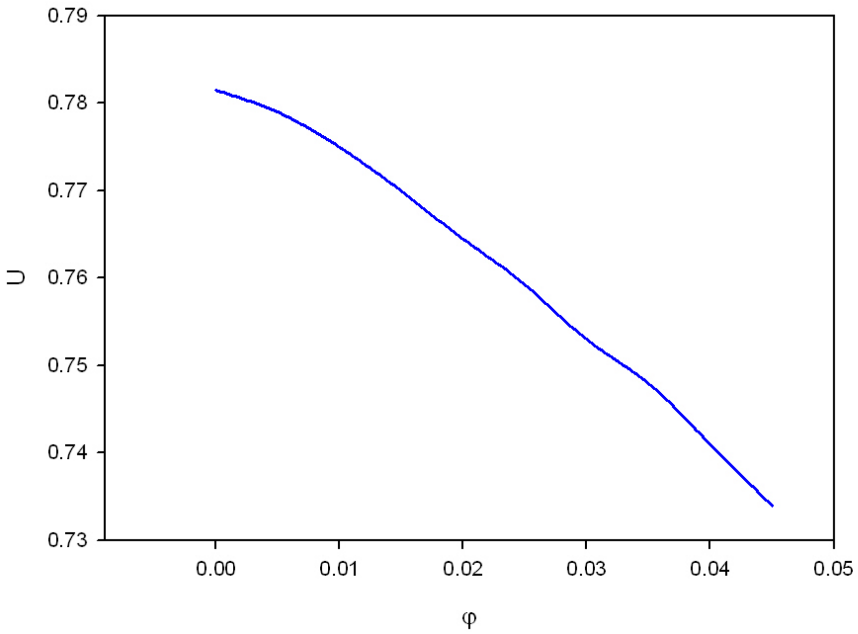
$$\delta_T = \delta_{T0} + (8.6E-5)\exp(117.93\varphi) \qquad (۲-۸)$$

اطلاعات کامل مربوط به تابع فیت شده در پیوست ط ارائه شده است.

اثرات غلظت نانوذرات بر روی عمق نفوذ طولی حرارتی و هیدرودینامیکی نیز مورد مطالعه قرار گرفت.بدینگونه که در یک نقطه مشخص مقدار U و T رادر یک نقطه مشخص برای غلظتهای مختلف بدست آوردیم.
نتایج نشان داد که با افزایش غلظت نانو ذرات شاهد کاهش عمق نفوذ طولی حرارتی و هیدرودینامیکی خواهیم بود.
شکلهای ۸-۷و۸-۸ مربوط است به نمودار عمق نفوذ طولی حرارتی و هیدرودینامیکی بر حسب غلظت نانوذرات.



شکل ۸-۶ :نمودار عمق نفوذ طولی حرارتی در $x = 0.75Lx$ و $time = 100$ و $y = 0$ بر حسب غلظت نانوذرات.



شکل ۸-۷ :نمودار عمق نفوذ طولی هیدرودینامیکی در $x = 0.75Lx$ و $time = 100$ و $y = 0$ بر حسب غلظت نانوذرات.

فصل نهم

جت مغشوش

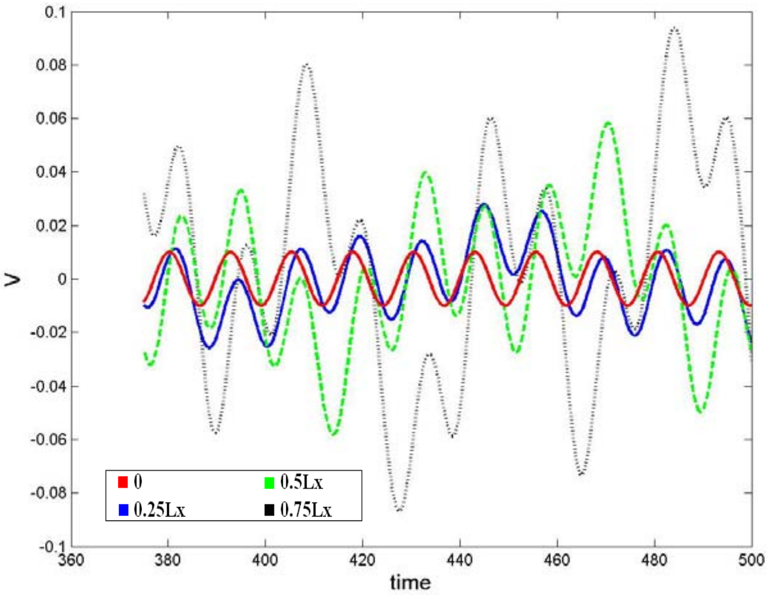
۹-۱- مقدمه

در این بخش یک جت دو بعدی را در حالتی توسعه می دهیم که یک اغتشاش در ورودی قرار می دهیم. این اغتشاش در اصل تابع ویژه سرعت در جهت y منتج از حل معادله اورساملفیلد و تحلیل پایداری خطی جریان جت می باشد. این تحلیل توسط سلمانی [۲] انجام شده است. توجه کنید که این اغتشاشات فقط در v به کار برده می شود. لازم به ذکر است چنانچه اغتشاشاتی برای u نیز به کار رود، در این صورت بایستی این پروفیل برای u توزیعی پادمتقارن داشته باشد. همانطور که مغربی [۱۰] بحث کرده است. این موضوع مربوط به شرط حل شدن[1] می باشد که برای جزئیات به مرجع [۱۰] رجوع شود.

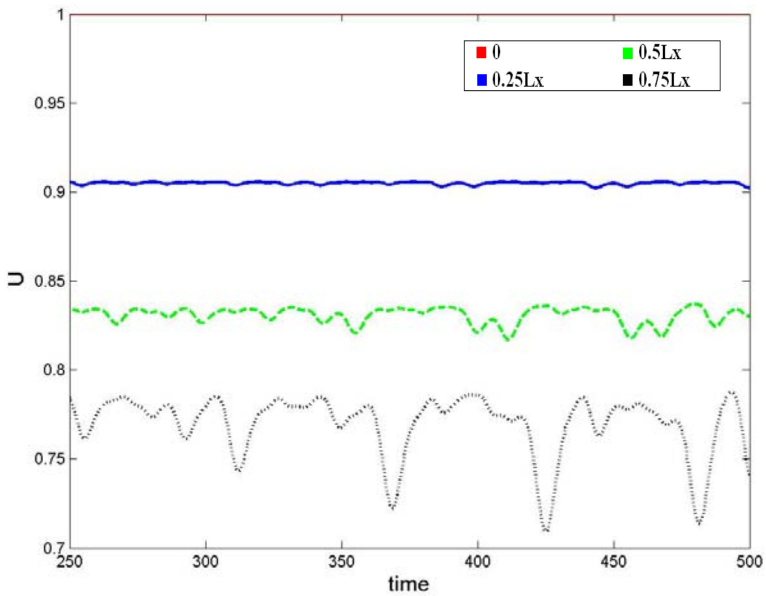
۹-۲- اغتشاشات ورودی

در حل معادله پایداری دومود ناپایدار وجود دارد که یکی بسیار بزرگتر از دیگری است که طبق آن مود ناپایدار مولفه های اغتشاش U و vو T بدست آمده اند. سرعت لحظه ای و دمای لحظه ای در شبیه سازی همراه با اغتشاشات باید به صورت آماری ساکن[2] برسد و در این حالت سرعت متوسط و دمای متوسط مستقل از زمان است. گذر زمانی U و v و T در ۴ فاصله مساوی در جهت طول L_x در شکل های ۹-۱ و ۹-۲ و ۹-۳ و نشان داده‌اند. با توجه این شکل ها می توان ملاحظه کرد که مولفه های سرعت U و v و T به یک حالت پایدار ایستایی رسیده اند و مقادیر متوسط آنها به لحاظ آماری نسبت به زمان تغییراتی ندارد.

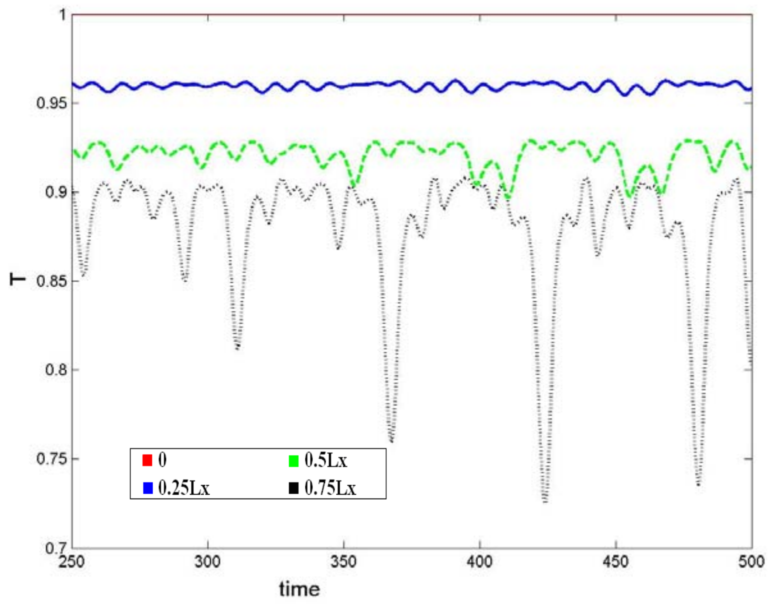
[1] Solvability Condition
[2] Statistically Steady



شکل ۹-۱: گذر زمانی v در ۴ فاصله مساوی در طول L_X برای شبیه سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی



شکل ۹-۲: گذر زمانی U در ۴ فاصله مساوی در طول L_X برای شبیه سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی

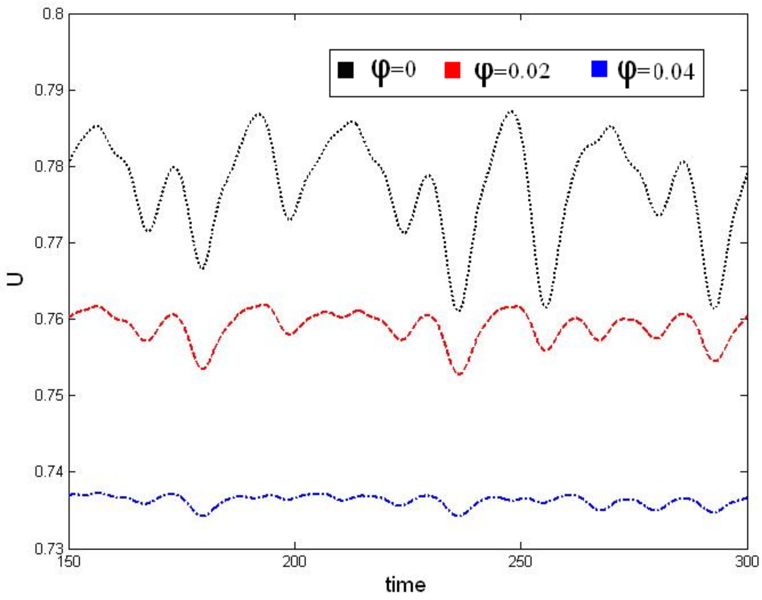


شکل ۹-۳: گذر زمانی T در ۴ فاصله مساوی در طول L_X برای شبیه سازی جت دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی

۹-۳- اثرنانوذره برروی جریان ودمای جت مغشوش

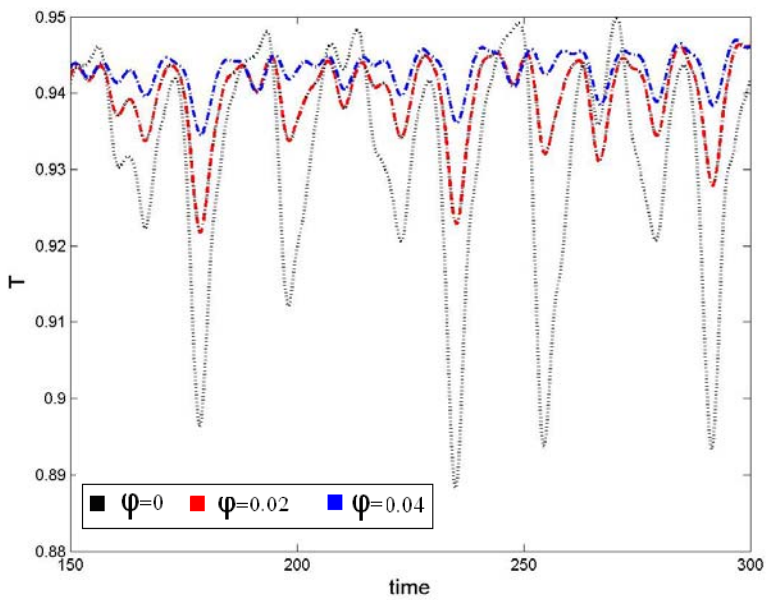
در این قسمت اثرات نانو ذرات بر روی دامنه اغتشاش بررسی شد و نتایج بدینگونه است که با افزایش غلظت نانوذرات شاهد کاهش دامنه اغتشاش هستیم.

شکل ۹-۴ مربوط است به گذر زمانی U در یک نقطه مشخص برای نانو سیال با غلظت های مختلف برای نانوذرات



شکل ۹-۴: گذر زمانی U در y=0 ودر $x = 0.75Lx$ برای نانوسیال همراه با اغتشاش ورودی

شکل ۹-۵ مربوط است به گذر زمانی T در یک نقطه مشخص برای نانو سیال با غلظت های مختلف برای نانوذرات



شکل ۹-۵: گذر زمانی T در y=0 ودر $x = 0.75Lx$ برای نانوسیال همراه با اغتشاش ورودی

۹-۴-پیشنهادات برای تحقیقات آینده:

با توجه به تحلیل صورت گرفته،موارد زیر برای تحقیقات آینده پیشنهاد می شود.

الف:روش عددی استفاده شده در این تحقیق،تفاضل محدود فشرده می باشد.در این زمینه می توان از روشهای عددی دیگر مانند تفاضل محدود فوق فشرده که دارای دقتی به مراتب بالاتر میباشد،استفاده کرد.

ب:ضریب هدایت نانو سیال متأثر از پارامترهای مختلفی است من جمله قطر متوسط و ضریب شکل وحرکت براونی و...نانو ذرات که می توان تأثیر آنها را بر انتقال حرارت جت دوبعدی بررسی کرد.

ج:نانوسیال با نانوذره و سیال پایه مختلف می تواند برای جت مورد بررسی قرار می گیرد.

د:نانو سیال را با روش دوفازی مورد تحلیل قرار دهیم.

پیوستها

پیوست الف :روش بی بعد کردن معادله ناویر استوکس

فرم کلی معادله ناویر استوکس برای جریان نیوتنی تراکم ناپذیر با خواص ثابت بصورت زیر است:

$$\rho_{nf}\left(\frac{D\vec{U}}{Dt}\right) = -\nabla p + \mu_{nf}(\nabla^2 \vec{U})$$

$$\rho_{nf}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}.\nabla)\vec{U}\right) = -\nabla p + \mu_{nf}(\nabla^2 \vec{U})$$

برای بی بعدسازی معادلات بایستی همه کمیت‌ها به وسیله مشخصه طول و مشخصه سرعت بی‌بعد شوند که در این ارتباط نیم‌عرض جت ورودی $b_{1/2}$ و سرعت ورودی U_{in} به عنوان مقیاس‌های بی‌بعد کننده مورد استفاده قرار می گیرند.برای ترم فشار نیز $\rho U_{in}{}^2$ به عنوان مقیاس‌های بی‌بعد کننده مورد استفاده قرار می گیرد.

$$U^* = \frac{U}{U_{in}} \quad V^* = \frac{V}{U_{in}} \quad x^* = \frac{x}{b_{1/2}} \quad y^* = \frac{y}{b_{1/2}} \quad t^* = \frac{t}{\frac{b_{1/2}}{U_{in}}} \quad P^* = \frac{P}{\rho U_{in}{}^2} \quad \nabla^* = b_{1/2}\nabla$$

با توجه به مقادیر بی بعد معادله ناویر استوکس به صورت زیر در می آید.

$$\left(\frac{\rho U_{in}{}^2}{b_{1/2}}\right)\left(\frac{\partial \vec{U}^*}{\partial t^*} + (\vec{U}^*.\nabla^*)\vec{U}^*\right) = \left(\frac{-\rho U_{in}{}^2}{b_{1/2}}\right)\nabla^* p^* + \left(\frac{\mu U_{in}}{b_{1/2}{}^2}\right)(\nabla^{*2}\vec{U}^*)$$

باتقسیم طرفین بر $\left(\frac{\rho U_{in}{}^2}{b_{1/2}}\right)$ داریم

$$\left(\frac{\partial \vec{U}^*}{\partial t^*} + (\vec{U}^*.\nabla^*)\vec{U}^*\right) = -\nabla^* p^* + \left(\frac{\mu}{\rho U_{in} b_{1/2}}\right)(\nabla^{*2}\vec{U}^*)$$

باتوجه به اینکه $\frac{1}{\mathrm{Re}} = \frac{\mu}{\rho U_{in} b_{1/2}}$ بفرم نهایی بی بعد شده معادله ناویر استوکس می رسیم

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}.\nabla)\vec{U} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2 \vec{U})$$

پیوست ب:بدست آوردن شکل چرخشی معادله ناویر استوکس

فرم کلی معادله ناویراستوکس به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+(\vec{U}.\nabla)\vec{U}=-\nabla p+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2\vec{U}) \qquad (۱)$$

با توجه به رابطه زیر:

$$\nabla(A.B)=(B.\nabla)A+(A.\nabla)B+B\times(\nabla\times A)+A\times(\nabla\times B) \qquad (۲)$$

برای مورد $A=B=\vec{U}=(U,V,W)$، معادله ۲ به صورت زیر در می آید:

$$(\vec{U}.\nabla)\vec{U}=\vec{\omega}\times\vec{U}+\frac{1}{2}\nabla(\vec{U}.\vec{U}) \qquad (۳)$$

که $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. اگر معادله ۳ در معادله ۱ جایگزین گردد. معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}=\vec{H}-\nabla(p+\frac{\vec{U}.\vec{U}}{2})+\frac{1}{\mathrm{Re}}(\nabla^2\vec{U}) \qquad (۴)$$

که $\vec{H}=(H_1,H_2,H_3)=\vec{U}\times\vec{\omega}$. با گرفتن کرل از معادله ۴ داریم:

$$\frac{\partial(\nabla\times\vec{U})}{\partial t}=\nabla\times\vec{H}-\nabla\times\nabla(p+\frac{\vec{U}.\vec{U}}{2})+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2(\nabla\times\vec{U}) \qquad (۵)$$

که با توجه به اینکه $\nabla\times\nabla(scalar)=0$، معادله به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}=\nabla\times\vec{H}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\vec{\omega} \qquad (۶)$$

با گرفتن کرل از معادله ۶ ، معادله زیر بدست خواهد آمد.

$$\frac{\partial\nabla\times(\nabla\times\vec{U})}{\partial t}=\nabla\times(\nabla\times\vec{H})+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2(\nabla\times(\nabla\times\vec{U})) \qquad (۷)$$

با توجه به معادله پیوستگی $(\nabla.\vec{U}=0)$ و به کار بردن رابطه زیر :

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{U})=\nabla(\nabla.\vec{U})-\nabla^2\vec{U} \qquad (۸)$$

معادله ۷ به معادله ۹ تبدیل می گردد.

$$\frac{\partial \nabla^2 \vec{U}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^4 \vec{U} \qquad (۹)$$

پیوست ج :روش بی بعد کردن معادله انرژی

فرم کلی معادله انرژی با در نظرگرفتن تلفات ناچیز حرارتی به صورت زیر است:

$$(\rho c_p)_{nf}(\frac{\partial T}{\partial t}+U\frac{\partial T}{\partial x}+V\frac{\partial T}{\partial y})=K_{nf}(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2})$$

برای بی بعدسازی معادلات بایستی همه کمیت‌ها به وسیله مشخصه طول و مشخصه سرعت بی‌بعد شوند که در این ارتباط نیم‌عرض جت ورودی $b_{1/2}$ و سرعت ورودی U_{in} به عنوان مقیاس‌های بی‌بعد کننده مورد استفاده قرار می گیرند.

برای بی بعد کردن دما،دمای ورودی T_{in} مقیاس بی بعد کننده دماست.

$$U^*=\frac{U}{U_{in}}\quad V^*=\frac{V}{U_{in}}\quad x^*=\frac{x}{b_{1/2}}\quad y^*=\frac{y}{b_{1/2}}\quad t^*=\frac{t}{\frac{b_{1/2}}{U_{in}}}\quad T^*=\frac{T-T_\infty}{T_{in}-T_\infty}\quad \nabla^*=b_{1/2}\nabla$$

با توجه به مقادیر بی بعد معادله انرژی به صورت زیر در می آید.

$$(\frac{U_{in}(T_{in}-T_\infty)}{b_{1/2}})(\frac{\partial T^*}{\partial t^*}+\vec{U}^*.\nabla^* T^*)=\frac{K}{\rho c_p}\frac{(T_{in}-T_\infty)}{{b_{1/2}}^2}(\nabla^{*2}T^*)$$

باتقسیم طرفین بر $(\frac{U_{in}(T_{in}-T_\infty)}{b_{1/2}})$ داریم

$$(\frac{\partial T^*}{\partial t^*}+\vec{U}^*.\nabla^* T^*)=\frac{K}{\mu c_p}\frac{\mu}{\rho U_{in}b_{1/2}}(\nabla^{*2}T^*)$$

باتوجه به اینکه $\frac{1}{\mathrm{Re}}=\frac{\mu}{\rho U_{in}b_{1/2}}$ و $\frac{1}{\mathrm{Pr}}=\frac{K}{\mu c_p}$ و $Pe=\mathrm{Pr}.\mathrm{Re}$ بفرم نهایی بی بعد شده معادلـه انـرژی می رسیم

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{U}\cdot(\nabla T)=\frac{1}{Pe}(\nabla^2 T)$$

پیوست د:اطلاعات مربوط به تابع درجه ۳

Nonlinear Regression

Equation: Polynomial, Cubic
f=y0+a*x+b*x^2+c*x^3

R	Rsqr	Adj Rsqr	Standard Error of Estimate
0.9997	0.9995	0.9992	0.0036

	Coefficient	Std. Error	t	P	VIF
y0	3.6583	0.0033	1108.4074	<0.0001	8.2377<
a	0.4474	0.6719	0.6659	0.5302	243.2643<
b	256.9930	35.8947	7.1596	0.0004	933.7280<
c	-1827.5058	523.4387	-3.4913	0.0130	316.7544<

Analysis of Variance:

Uncorrected for the mean of the observations:

	DF	SS	MS
Regression	4	144.9529	36.2382
Residual	6	7.9341E-005	1.3224E-005
Total	10	144.9530	14.4953

Corrected for the mean of the observations:

	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	0.1574	0.0525	3968.6353	<0.0001
Residual	6	7.9341E-005	1.3224E-005		
Total	9	0.1575	0.0175		

Statistical Tests:

PRESS 0.0002

Durbin-Watson Statistic 2.9449 Failed

Normality Test Passed (P = 0.5231)

K-S Statistic = 0.2451 Significance Level = 0.5231

Constant Variance Test Passed (P = 0.1371)

Power of performed test with alpha = 0.0500: 1.0000

Regression Diagnostics:

Row	Std. Res.	Stud. Res.	Stud. Del. Res.
1	0.1969	0.4691	0.4363
2	0.3527	0.4220	0.3911

3	-1.8232	-2.2210<	-4.8076<
4	1.1959	1.4371	1.6200
5	0.1623	0.1863	0.1706
6	0.6777	0.7779	0.7489
7	-0.7310	-0.8783	-0.8589
8	-0.1117	-0.1361	-0.1244
9	-0.1127	-0.1348	-0.1233
10	0.1931	0.4599	0.4275

Influence Diagnostics:

Row	**Cook's Dist**	**Leverage**	**DFFITS**
1	0.2572	0.8238	0.9433
2	0.0192	0.3016	0.2570
3	0.5968	0.3261	-3.3443
4	0.2292	0.3075	1.0794
5	0.0028	0.2410	0.0961
6	0.0480	0.2410	0.4220
7	0.0856	0.3075	-0.5723
8	0.0022	0.3261	-0.0866
9	0.0020	0.3016	-0.0810
10	0.2472	0.8238	0.9242

95% Confidence:

Row	**Predicted**	**95% Conf-L**	**95% Conf-U**	**95% Pred-L**	**95% Pred-U**
1	3.6583	3.6502	3.6664	3.6463	3.6703
2	3.6667	3.6618	3.6716	3.6566	3.6769
3	3.6866	3.6815	3.6917	3.6764	3.6969
4	3.7167	3.7117	3.7216	3.7065	3.7268
5	3.7554	3.7510	3.7598	3.7455	3.7653
6	3.8015	3.7972	3.8059	3.7916	3.8114
7	3.8537	3.8487	3.8586	3.8435	3.8638
8	3.9104	3.9053	3.9155	3.9002	3.9207
9	3.9704	3.9655	3.9753	3.9603	3.9806
10	4.0323	4.0242	4.0404	4.0203	4.0443

Fit Equation Description:

```
[Variables]
x = col(1)
y = col(2)
'Automatic Initial Parameter Estimate Functions
F(q)=ape(x,y,3,0,1)
[Parameters]
y0 = F(0)[1] "Auto {{previous: 3.65828}}
a = F(0)[2] "Auto {{previous: 0.447436}}
b = F(0)[3] "Auto {{previous: 256.993}}
c = F(0)[4] "Auto {{previous: -1827.51}}
[Equation]
f=y0+a*x+b*x^2+c*x^3
fit f to y
"fit f to y with weight reciprocal_y
"fit f to y with weight reciprocal_ysquare
[Constraints]
[Options]
tolerance=1e-10
stepsize=1
iterations=200
```

Number of Iterations Performed = 1

پیوست ط:اطلاعات مربوط به تابع نمایی

Nonlinear Regression

Equation: Exponential Growth, Single, 3 Parameter
f=y0+a*exp(b*x)

R	Rsqr	Adj Rsqr	Standard Error of Estimate
0.9983	0.9966	0.9956	0.0004

	Coefficient	Std. Error	t	P	VIF
y0	3.6498	0.0002	17688.7273	<0.0001	3.0397
a	8.6184E-005	2.4442E-005	3.5260	0.0096	250.7599<
b	117.9363	6.3062	18.7016	<0.0001	228.8940<

Analysis of Variance:

Uncorrected for the mean of the observations:

	DF	SS	MS
Regression	3	133.4933	44.4978
Residual	7	9.8041E-007	1.4006E-007
Total	10	133.4933	13.3493

Corrected for the mean of the observations:

	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	0.0003	0.0001	1017.8666	<0.0001
Residual	7	9.8041E-007	1.4006E-007		
Total	9	0.0003	3.1789E-005		

Statistical Tests:

PRESS 7.5115E-006

Durbin-Watson Statistic 2.4216 Passed

Normality Test Passed (P = 0.9976)

K-S Statistic = 0.1193 Significance Level = 0.9976

Constant Variance Test Failed (P = 0.0186)

Power of performed test with alpha = 0.0500: 1.0000

Regression Diagnostics:

Row	Std. Res.	Stud. Res.	Stud. Del. Res.
1	0.0975	0.1129	0.1047
2	0.1797	0.2047	0.1901
3	-0.1540	-0.1717	-0.1593
4	-0.4885	-0.5325	-0.5033
5	0.8311	0.8917	0.8769
6	0.7446	0.8046	0.7820

7	-1.4487	-1.6483	-1.9508
8	-0.8661	-1.0786	-1.0936
9	1.5502	1.9589	2.6981<
10	-0.4456	-1.6795	-2.0124<

Influence Diagnostics:

Row	**Cook's Dist**	**Leverage**	**DFFITS**
1	0.0015	0.2553	0.0613
2	0.0042	0.2297	0.1038
3	0.0024	0.1959	-0.0786
4	0.0178	0.1583	-0.2182
5	0.0400	0.1312	0.3408
6	0.0362	0.1437	0.3203
7	0.2667	0.2275	-1.0586
8	0.2136	0.3552	-0.8116
9	0.7634	0.3738	2.0844<
10	12.4152<	0.9296	-7.3125

95% Confidence:

Row	**Predicted**	**95% Conf-L**	**95% Conf-U**	**95% Pred-L**	**95% Pred-U**
1	3.6499	3.6494	3.6503	3.6489	3.6509
2	3.6499	3.6495	3.6504	3.6490	3.6509
3	3.6501	3.6497	3.6504	3.6491	3.6510
4	3.6503	3.6499	3.6506	3.6493	3.6512
5	3.6507	3.6504	3.6510	3.6497	3.6516
6	3.6514	3.6511	3.6518	3.6505	3.6524
7	3.6527	3.6523	3.6532	3.6518	3.6537
8	3.6551	3.6546	3.6557	3.6541	3.6562
9	3.6594	3.6589	3.6600	3.6584	3.6605
10	3.6672	3.6663	3.6680	3.6659	3.6684

Fit Equation Description:

```
[Variables]
x = col(1)
y = col(2)
reciprocal_y = 1/abs(y)
reciprocal_ysquare = 1/y^2
'Automatic Initial Parameter Estimate Functions
F(q)=ape(x,ln(y-min(y)),1,0,1)
[Parameters]
y0 = min(y) "Auto {{previous: 3.64978}}
a = exp(F(0)[1]) "Auto {{previous: 8.61839e-005}}
b = F(0)[2] "Auto {{previous: 117.936}}
[Equation]
f=y0+a*exp(b*x)
fit f to y
"fit f to y with weight reciprocal_y
"fit f to y with weight reciprocal_ysquare
[Constraints]
b>0
[Options]
tolerance=1e-10
stepsize=1
iterations=200
```

Number of Iterations Performed = 12

ی - تحلیل خطا :

به منظور تعیین مرتبه دقت یک طرح عددی برای ارزیابی یک تابع، بسط سری تیلور مورد استفاده قرار می گیرد. اجازه بدهید خطای عددی در یک نقطه خاص از یک مجموعه را به صورت اختلاف بین مقدار حقیقی و مقدار تقریبی تابع در آن نقطه تعریف کنیم. در تقریب های عددی با استفاده از سری محدودی از جملات بسط سری تیلور برای تحلیل استفاده می شود. اولین ترم بریده شده از بسط در تقریب عددی می توان تخمین خیلی خوبی برای خطا باشد که می تواند مرتبه دقت را نشان دهد. اگر

$$E(x_i) \cong \frac{(L/N)^n}{n!} f^{(n)}(x_i) \qquad \text{(الف-۱)}$$

که $E(x_i)$، خطا در ارزیابی $f(x_i)$ در x_i است و L و N برابر طول و تعداد قطعات در مجموعه می باشند.

با گرفتن لگاریتم از هر دو طرف معادله الف-۱ به معادله الف-۲ می رسیم.

$$\log(E_{\max}) \cong C - n\log(N) \qquad \text{(الف-۲)}$$

که C یک ثابت است. معادله الف-۲ به وضوح نشان می‌دهد که شیب خط در نمودار $\log(E_{\max})$ بر روی $\log N$ برابر $-n$ می باشد که برابر مرتبه خطای تقریب می باشد.

Abstract:

Jet flow with desired physical conditions thought lots of applications in industrial and scientific scope has been the most important subjects in fluid mechanic and from appearance of fluid mechanic theory; many researchers have attended this subject.

Orifice geometry of jets introduce in two kind of planar and circular. Through special geometry of circular jets, the researchers have had more attention on this kind. Therefore, there isn't enough information about planar jet and in this thesis we attempt to study planar jets.

In this study, we attempted to analyze two dimensional incompressible jet flows by direct numerical simulation method without any modeling or simplification assumption.

Also we replaced base fluid with nanofluid and see the new result. the result shows in laminar jet when volume concentration of particle increased,

δ_u & δ_T increased.

In forced jet when volume concentration of particle increased, the amplitude of noise decreased.

Keywords: Nanofluid-Thermal Properties-Modeling

Shahrood University of technology
Faculty of mechanical engineering

Modeling Convective Heat Transfer In Nano Fluid

Advisor:
M. J. Maghrebi, PhD
F.Talebi, PhD

By:
T. Armaghani

2009