

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه جلدات

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص، کامپوزیت با تقویت مشبک

دانشجو:

سعید کوردزی

استاد راهنما:

دکتر اردشیر کریمی محمدی

استاد مشاور:

دکتر امیرجلالی

شهریور ۹۳



دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سعید گودرزی رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ی مخروطی ناقص، کامپوزیت با تقویت مشبک که در تاریخ ۱۳۹۳/۰۶/۳۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> مردود	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input checked="" type="checkbox"/> قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸٫۲)
--------------------------------	------------------------------------	--

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استادیار	اردشیر کرمی محمدی	۱- استاد راهنما
	استادیار	امیر جلالی	۳- استاد مشاور
	استادیار	رضا طاهریان	۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	استادیار	مهدی بامداد	۵- استاد ممتحن
	استادیار	حبیب احمدی	۶- استاد ممتحن

امضاء

رئیس دانشکده : محمد محسن شاه مردان

تقدیم به عزیزترین ما

مادر م

به جبران قطره‌ای از دریای محبتش

و روح پرفروغ

پدر م

که همواره یادش در دلم نور امید به زندگی را می‌تاباند.

ضمن سپاس و ستایش به درگاه ایزد منان که به من توانایی داد که با استعانت از او بتوانم این پژوهش را انجام دهم، بر خود لازم می‌بینم از دکتری و تشویق اساتید و دوستان که در بحار این مجموعه مرایاری نمودند، قدردانی نمایم:

جناب آقای دکتر اردشیر کریمی محمّدی؛

استاد راهنما، که در طول بحار این مجموعه با راهنمایی‌های عالمانه و با دانش میکروانشان، در کمال صبر و بردباری سکاندار شایسته‌ای در هدایت این پایان‌نامه بوده‌اند.

جناب آقای دکتر امیرجلالی؛

استاد مشاور، که با سعی صدر مشاوره این تحقیق را پذیرفتند و در طول بحار این مجموعه همواره از نظرات کارشناسانه‌شان، بهره‌جتم. و در خاتمه از دوست ارجمند جناب آقای محمدبستانی که مراد انجام این تحقیق یاری نمود، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

تعهد نامه

اینجانب سعید گودرزی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص، کامپوزیت با تقویت مشبک تحت راهنمایی دکتر اردشیر کرمی محمدی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه ارتعاشات پوسته‌ی مخروطی ناقص، با تقویت مشبک، تحت بار دینامیکی عرضی مورد بررسی قرار گرفته است. پوسته‌ی مخروطی، همگن و همسانگرد بوده و شرایط مرزی به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. این پوسته‌ی مخروطی توسط رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی تقویت گردیده است. در استخراج معادلات حاکم بر مسأله از روابط غیرخطی کرنش-جابجایی کارمن استفاده شده است. معادلات حاکم بر حرکت پوسته، با استفاده از تئوری غیرخطی پوسته‌های دانه-مشتري-والسلف، به صورت دو معادله‌ی کوپل به دست می‌آیند که یکی از این معادلات وابسته به زمان و دیگری مستقل از زمان است. برای حل معادلات فوق ابتدا از روش گالرکین غیرخطی استفاده شده و پس از ساده‌سازی، معادله‌ی زمانی به دست آمده، از روش هموتویی پرتوربیشن حل می‌گردد. برای اطمینان از درست بودن روش حل، نتایج حاصل با نتایج موجود در مقالات دیگر مقایسه و صحه‌گذاری گردیده است. تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های طبیعی غیرخطی بررسی شده است. در ادامه نیروی هارمونیک عرضی بر پوسته وارد شده و معادله‌ی ناهمگن به دست آمده از روش مقیاس‌های چندگانه حل شده، پاسخ فرکانسی به دست آمده و نمودارهای پاسخ فرکانسی رسم گردیده است.

مواردی که در این پایان‌نامه بررسی شده عبارتند از: به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی، بررسی تأثیر پارامترهای هندسی مختلف بر فرکانس‌ها، معادله و نمودار پاسخ فرکانسی، مقایسه نتایج با مقالات دیگر و نشان دادن دقت روش حل.

کلمات کلیدی: پوسته‌ی مخروطی ناقص، تقویت مشبک، ارتعاشات غیرخطی، گالرکین، هموتویی پرتوربیشن، پاسخ فرکانسی، مقیاس‌های چندگانه.

فهرست مطالب

تاریخچه و مروری بر مقالات ۱

۱-۱- مقدمه ۲

۲-۱- پوسته‌های مخروطی تقویت‌شده ۳

۳-۱- غیرخطی ۴

۴-۱- تاریخچه ۶

۵-۱- مروری بر مقالات انجام‌شده ۸

۶-۱- اهداف ۱۰

استخراج معادلات ۱۳

۱-۲- مقدمه ۱۴

۲-۲- تعریف مسأله ۱۵

۳-۲- روابط سینماتیک، نیروها و گشتاورهای معادل پوسته‌های مخروطی ناقص ۱۶

۴-۲- روابط سینماتیک، نیروها و گشتاورهای معادل رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی ۱۸

۵-۲- گشتاورها و نیروهای معادل پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده ۱۹

۶-۲- انرژی جنبشی و پتانسیل پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده ۲۰

۷-۲- معادله‌ی حرکت پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده ۲۰

۸-۲- شرایط مرزی ۲۱

تحلیل ارتعاشات آزاد ۲۳

۱-۳- مقدمه ۲۴

۲-۳- انتخاب روش حل ۲۴

۳-۳- معادله‌ی سازگاری ۲۶

۱-۳-۳- طرف راست معادله‌ی سازگاری ۲۶

۲-۳-۳- طرف چپ معادله‌ی سازگاری ۲۶

۳-۳-۳- شکل نهایی معادله‌ی سازگاری و معادله‌ی حرکت ۲۷

۲۸ ۴-۳- حل معادلات حاکم بر مسأله

۳۳ نتایج ارتعاشات آزاد

۳۴ ۱-۴- مقدمه

۳۴ ۲-۴- صحت‌گذاری روش حل

۳۵ ۳-۴- فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی پوسته‌ی مخروطی ناقص با رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی

۴۳ تحلیل ارتعاشات اجباری و نتایج آن

۴۴ ۱-۵- مقدمه

۴۵ ۲-۵- رزونانس اولیه

۴۷ ۳-۵- حرکت حالت ماندگار

۴۹ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۵۰ ۱-۶- مقدمه

۵۰ ۲-۶- نتیجه‌گیری

۵۱ ۳-۶- پیشنهادها

۵۳ پیوست‌ها

۵۴ پیوست الف - ضرایب Ki ، Ti و Li

۵۸ پیوست ب - ضرایب Cij

۷۱ مراجع و منابع

فهرست شکل‌ها و جدول‌ها

- شکل ۱-۱ نمونه‌ای از کاربرد پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده ۴
- شکل ۱-۲ نمای شماتیک سازه‌ی مسأله ۱۵
- شکل ۱-۴ مقایسه فرکانس‌های طبیعی خطی پوسته شماره ۱ با نتایج موجود ۳۷
- شکل ۲-۴ مقایسه فرکانس‌های طبیعی خطی پوسته شماره ۲ با نتایج موجود ۳۸
- شکل ۳-۴ مقایسه فرکانس‌های طبیعی خطی پوسته شماره ۳ با نتایج موجود ۳۸
- شکل ۴-۴ تغییرات نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد ۳۹
- شکل ۵-۴ تغییرات نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد به ازای زوایای رأس مختلف ۴۰
- شکل ۶-۴ تغییرات نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد به ازای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به شعاع کوچک مخروط $\frac{R_1}{h}$ ۴۱
- شکل ۱-۵ نمودار پاسخ فرکانسی برای سه نمونه پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده ۴۸
- جدول ۱-۴ مشخصات هندسی و خصوصیات مکانیکی پوسته‌ی مخروطی ۳۴
- جدول ۲-۴ مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته‌ی مخروطی ناقص با دیگر مقالات ۳۵
- جدول ۳-۴ خصوصیات هندسی پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده ۳۶

علائم و اختصارات

z	فاصله‌ی شعاعی هر نقطه از صفحه‌ی میانی پوسته (m)	A	مساحت سطح مقطع (m^2)
α	زاویه رأس مخروط	E	مدول یانگ (Mpa)
γ	وزن مخصوص	G	مدول برشی (Mpa)
ϵ	کرنش	I	ممان اینرسی سطح مقطع (m^4)
χ	انحنای پوسته	J	ممان اینرسی قطبی سطح مقطع (m^4)
ϑ	نسبت پواسون	P	تعداد رینگ‌ها
ω	فرکانس طبیعی ($\frac{rad}{s}$)	Q	تعداد تقویت‌کننده‌های طولی
sh	پانویس بیانگر پوسته	w	مؤلفه‌ی شعاعی جابجایی
r	پانویس بیانگر رینگ	v	مؤلفه‌ی محیطی جابجایی
st	پانویس بیانگر تقویت‌کننده‌ی طولی	u	مؤلفه‌ی طولی جابجایی
s	پانویس بیانگر جهت طولی	U	انرژی پتانسیل
θ	پانویس بیانگر جهت محیطی	T	انرژی جنبشی
$s\theta$	پانویس بیانگر جهت برشی	c	فاصله‌ی مرکز تقویت‌کننده‌ها از صفحه‌ی میانی پوسته (m)
h	ضخامت پوسته (m)	m	شماره‌ی نیم موج‌های طولی
		n	شماره‌ی موج‌های محیطی
		S	فاصله‌ی هر نقطه از صفحه‌ی میانی پوسته از رأس مخروط (m)
		S_1	فاصله‌ی قاعده‌ی کوچک از رأس مخروط (m)
		S_2	فاصله‌ی قاعده‌ی بزرگ از رأس مخروط (m)
		t	زمان (s)

فصل اول

تاریخچه و مروری بر مقالات

پوسته‌های مخروطی ناقص^۱ یکی از پرکاربردترین عناصر در سازه‌های مهندسی می‌باشند. برای مثال در ساخت دماغه‌ی موشک‌های مافوق صوت^۲، زیردریایی‌ها^۳ و رابط میان پوسته‌های استوانه‌ای در مخازن نگهداری، از پوسته‌های مخروطی ناقص استفاده می‌شود. در تمامی این موارد، سازه در معرض بارهای استاتیکی و دینامیکی گوناگون قرار دارد و به همین دلیل مطالعه‌ی پاسخ دینامیکی و استاتیکی این پوسته‌ها تحت بارگذاری‌های مختلف می‌تواند به درک بهتر رفتار سازه‌های واقعی تحت شرایط بارگذاری مشابه کمک کند.

در اغلب این کاربردها، به‌خصوص ساخت تجهیزات نظامی و فضایی، کاهش وزن سازه از اهمیت بسیاری برخوردار است. بدین منظور در ساخت این تجهیزات، اغلب از پوسته‌های بسیار نازک و سبک استفاده می‌گردد که برای افزایش مقاومت آن از تقویت‌کننده‌هایی به شکل‌های مختلف استفاده می‌شود.

مطالعه‌ی رفتار سیستم‌ها می‌تواند به‌صورت خطی و یا غیرخطی صورت گیرد که بررسی مدل‌های خطی به‌تنهایی برای درک رفتار سیستم کافی نیست. زمانی که دامنه‌ی نوسانات بزرگ باشد و فرکانس‌های طبیعی افزایش یافته و وابسته به دامنه‌هایشان باشد پاسخ‌های خطی نادرست هستند. مدل‌های خطی می‌توانند گمراه‌کننده باشند؛ زیرا ممکن است یک حل خطی پیش‌بینی کند که سیستم پایدار است درحالی‌که در واقعیت ناپایدار است. از طرفی پدیده‌های فیزیکی جالبی در سازه‌های غیرخطی اتفاق می‌افتد که به‌وسیله‌ی مدل‌های خطی نمی‌توان آن‌ها را توضیح داد. این پدیده‌ها شامل پرش^۴، اشباع^۵، تشدیدهای ساب-هارمونیک^۶، سوپر هارمونیک^۷ و ترکیبی^۸، نوسانات خودتحریک^۹ و آشوب^{۱۰} است. در

¹ Truncated Conical Shells

² Supersonic Aircraft

³ Submarine

^۴ Jump

^۵ Saturation

^۶ Subharmonic

^۷ Superharmonic

⁸ Combination

⁹ Self-excited oscillations

¹⁰ Chaos

سیستم‌های پیوسته جملات غیرخطی باعث کوپل شدن مدهای نرمال خطی می‌گردند و این پدیده منجر به انتقال انرژی بین مدها می‌شود. آزمایش‌ها نشان می‌دهند که گاهی انرژی از یک مد با فرکانس بالا به مد فرکانس پایین منتقل می‌شود که این پدیده می‌تواند به شدت خطرناک باشد؛ زیرا دامنه‌ی پاسخ مدهای فرکانس پایین در مقایسه با دامنه‌ی مدهای فرکانس بالا بسیار بزرگ‌تر است. در واقعیت هیچ سیستم فیزیکی کاملاً خطی وجود ندارد و مدل‌های خطی سیستم‌های فیزیکی دارای محدودیت‌هایی هستند. به‌طور کلی مدل‌های خطی برای محدوده‌های بسیار کوچک کاربرد دارد. به‌طورمثال زمانی که دامنه‌ی ارتعاشات بسیار کوچک است؛ بنابراین برای شناخت و درک دقیق‌تر رفتار دینامیکی سازه تحت شرایط بارگذاری عمومی ضروری است که پارامترهای غیرخطی در مدل‌سازی سیستم در نظر گرفته شده و بررسی شوند. [۱]

۱-۲- پوسته‌های مخروطی تقویت‌شده

پوسته‌های مخروطی تقویت‌شده با تقویت‌کننده‌هایی با جنس متفاوت از جنس پوسته، نوع خاصی از سازه‌های مکانیکی کامپوزیتی هستند که برای حداکثر کردن نسبت مقاومت سازه به وزن آن طراحی گردیده و عمدتاً در سازه‌های فضایی و نظامی کاربرد فراوان دارند. این سازه‌ها معمولاً از پوسته‌های بسیار نازک و وزن کم با تقویت‌کننده‌هایی به شکل رینگ و تقویت‌کننده‌هایی به صورت طولی ساخته می‌شوند که به این سازه‌ها به خاطر داشتن ساختاری مشبک، پوسته‌های مخروطی، کامپوزیت با تقویت مشبک گویند. دلیل کامپوزیت بودن این سازه‌ها، تفاوت میان جنس پوسته و تقویت‌کننده‌هاست که باعث می‌شود این سازه‌ها، کامپوزیت دوجنسه^{۱۱} باشند. در سال‌های اخیر پوسته‌های مخروطی با رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های مارپیچ^{۱۲} ساخته شده‌اند که به آن‌ها پوسته‌های مخروطی، کامپوزیت با تقویت مشبک پیشرفته^{۱۳} می‌گویند. تقویت‌کننده‌ها بر اساس نیاز می‌توانند داخل و یا بیرون پوسته قرار بگیرند. بسیاری

¹¹ Bimaterial

¹² Helical

¹³ Advanced Grid Stiffened Composite Conical Shells

از کاربردهای این نوع پوسته‌ها در تجهیزات نظامی دیده می‌شود. شکل زیر موشک ماهواره‌بر ساخته شده در کشور روسیه را نشان می‌دهد که در آن از تقویت‌کننده‌های طولی و رینگ در داخل پوسته استفاده شده است.



شکل ۱-۱ نمونه‌ای از کاربرد پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده

۱-۳- غیرخطی^{۱۴}

سیستم‌های غیرخطی سیستم‌هایی هستند که اصل جمع آثار در مورد آن‌ها صادق نیست. در طبیعت سیستم‌های غیرخطی فراوانی وجود دارند. در حقیقت سیستم‌های غیرخطی نه تنها استثنا نیستند، بلکه قانون و قاعده طبیعت هستند. از نظر ریاضی، یک سیستم، غیرخطی است اگر ضرب متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها در معادلات حرکت، شرایط مرزی و یا روابط سازگاری وجود داشته باشد. علاوه بر این وجود هرگونه پرش و یا ناپیوستگی در سیستم می‌تواند سبب غیرخطی شدن معادلات گردد. ایوان ایوانوسکی [۲]، نایفه و موک [۳] و مون [۴] انواع غیرخطی‌ها را با جزئیات و به وسیله مثال‌های مختلف

¹⁴ Nonlinearity

توضیح داده‌اند. منشأ رفتار غیرخطی در سیستم می‌تواند جنس ماده، هندسه، اینرسی، نیروهای حجمی و یا استهلاک^{۱۵} باشد که هر یک در ادامه توضیح داده خواهد شد.

استهلاک: استهلاک اساساً یک پدیده غیرخطی است؛ زیرا نیروی استهلاک تابع غیرخطی از جابه‌جایی و سرعت است. استهلاک ویسکوز^{۱۶} خطی نوعی ایده‌آل سازی سیستم است. اصطکاک خشک و استهلاک هیستریزیس^{۱۷} نمونه‌هایی از استهلاک غیرخطی هستند.

هندسه: در سیستم‌هایی که تحت تغییر شکل‌ها و یا جابه‌جایی‌های بزرگ قرار دارند، غیرخطی هندسی وجود دارد. این غیرخطی در انرژی پتانسیل سیستم ظاهر می‌شود. در سازه‌ها، تغییر شکل‌های بزرگ معمولاً منجر به روابط غیرخطی کرنش-جابه‌جایی می‌شود. به‌عنوان مثال می‌توان به حرکت یک پاندول ساده با در نظر گرفتن زاویه‌های بزرگ و یا یک تیر یک‌سرگیر دار با انحنای بزرگ اشاره نمود.

اینرسی: غیرخطی اینرسی ناشی از جملات غیرخطی سرعت و شتاب در معادلات حرکت است. انرژی جنبشی سیستم منشأ ایجاد غیرخطی‌های اینرسی است. به‌عنوان مثال، می‌توان به جملات شتاب کریولیس^{۱۸} و مرکزگرا اشاره نمود. همچنین در معادلات توصیف حرکت یک پاندول الاستیک و یا حرکت عرضی یک تیر تحت کشش، غیرخطی‌های اینرسی وجود دارد.

جنس: این نوع غیرخطی زمانی که رابطه‌ی تنش-کرنش غیرخطی باشد ایجاد می‌شود. لاستیک یک مثال کلاسیک این دسته است.

¹⁵ Damping

¹⁶ Viscose Damping

¹⁷ Hysteretic damping

¹⁸ Coriolis

شرایط مرزی و تحریک خارجی: جملات غیرخطی ممکن است که در شرایط مرزی مسأله ظاهر شوند. جملات غیرخطی ممکن است در استخراج معادلات دیفرانسیل، شرایط مرزی و یا هر دو ظاهر شوند.

در سال‌های اخیر، گسترش سریع تحقیقات فضایی سبب انجام تحقیقات گسترده در دینامیک و کنترل سازه‌های فضایی منعطف بزرگ مانند کنترل‌کننده‌های خورشیدی، آنتن‌ها، رادارها، خرپاهای بزرگ، تلسکوپ‌های فضایی و ایستگاه‌های فضایی شده است. برای طراحی روند مناسب برای کنترل ارتعاشات سازه‌ها با دامنه‌ی بزرگ، نیاز به درک رفتار غیرخطی دینامیکی و استاتیکی سیستم‌ها، شامل کوپلینگ مدال (انتقال انرژی میان مدهای سازه) و ناپایداری دینامیکی و استاتیکی است و این‌ها، نیازمند مدل‌سازی صحیح سیستم‌های غیرخطی است.

۱-۴- تاریخچه

همان‌طور که می‌دانیم اجسام الاستیک می‌توانند در معرض جابجایی‌های بزرگ قرار بگیرند درحالی‌که کرنش در هر نقطه کوچک باقی بماند. تئوری کلاسیک الاستیسیته^{۱۹} تنها در مورد مسائلی صادق است که جابجایی‌ها و مشتقات آن‌ها کوچک باشند؛ بنابراین برای حل مسائلی با جابجایی‌های بزرگ می‌بایست تئوری غیرخطی الاستیسیته با کرنش‌های کوچک به کار گرفته شود. در این‌جا برخی از تئوری‌های غیرخطی هندسی الاستیسیته را برای پوسته‌ها بیان می‌کنیم.

دائل [۵] در سال ۱۹۳۴ تئوری غیرخطی مربوط به پوسته‌های استوانه‌ای را با استفاده از فرضیات مربوط به پوسته‌های کوتاه^{۲۰} ارائه کرد. این تئوری با توجه به سادگی و تطابق بسیار زیاد با نتایج آزمایشگاهی یکی از پرکاربردترین تئوری‌های پوسته‌هاست. بیشترین استفاده از این تئوری که به تئوری دائل-مشرتی-والس^{۲۱} نیز معروف است بدین‌صورت است که سه معادله‌ی حرکت برحسب جابجایی‌هایی

¹⁹ Classical Theory of Elasticity

²⁰ Shallow-Shells

²¹ Donnell-Mushtari-Vlasov Theory

شعاعی، طولی و محیطی را به دو معادله که یکی برحسب جابجایی شعاعی و دیگری برحسب تابع تنش^۱ تنش^۱ است تبدیل می‌کند. البته باید توجه داشت که دقت این تئوری با افزایش شماره‌ی موج محیطی^۲ بیشتر می‌شود. تئوری غیرخطی دانل با صرف‌نظر از اینرسی صفحه‌ای^۳، تغییرشکل برشی عرضی^۴ و اینرسی پیچشی^۵ به‌دست‌آمده است و به همین دلیل تنها برای پوسته‌های بسیار نازک دارای دقت بالایی بالایی است. در این تئوری تغییرات انحنا^۶ به‌صورت تابع خطی از جابجایی شعاعی در نظر گرفته می‌شود.

ون کارمن و تساین [۶] پایداری پوسته‌ی استوانه‌ای را تحت بارمحوری با استفاده از تئوری پوسته‌های نازک دانل بررسی کردند. مشتری و گالیموف [۷] در کتابشان تئوری غیرخطی برای پوسته‌های نازک با تغییرشکل‌های بزرگ و نسبتاً بزرگ ارائه کرده‌اند. تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک، همچنین در کتاب وروویچ [۸] مورد بحث قرار گرفته است.

ساندرس [۹] تئوری غیرخطی دقیق‌تری را برای پوسته‌ها به شکل ماتریسی ارائه نمود. پس از او کویتز [۱۰] با استفاده از فرضیات ساندرس، تئوری ساندرس-کویتز^۷ را ارائه نمود. بر اساس تئوری ساندرس-کویتز هر سه مؤلفه‌ی میدان جابجایی در معادلات حرکت وجود دارند. تغییرات انحنا و پیچش^۸ در هر دو تئوری دانل و ساندرس-کویتز خطی فرض می‌شوند [۱۱]. تئوری غیرخطی ساندرس-کویتز نتایج به‌مراتب دقیق‌تری را برای ارتعاشات پوسته‌ها در حالتی که دامنه‌ی ارتعاشات بسیار بزرگتر از ضخامت پوسته باشد، نسبت به تئوری دانل ارائه می‌کند [۱۲]. تئوری غیرخطی دیگری که برای پوسته‌ها به کار می‌رود، تئوری فلاگ-لره-بیرن^۹ است که بسیار به تئوری عمومی پوسته‌های با تغییر شکل بزرگ ارائه‌شده توسط نووژیلِف [۱۳] نزدیک است. تفاوت میان این تئوری با تئوری‌های دانل و ساندرس-کویتز

¹ Stress Function

² Number of Circumferential Waves

³ In-plane Inertia

⁴ Transverse Shear Deformation

⁵ Rotary Inertia

⁶ Curvature

⁷ Sanders-Koiter

⁸ Torsion

⁹ Flugge-Lur'e-Byrne

در غیرخطی بودن تغییرات انحنا و پیچش در این تئوری است. البته بررسی و نتایج عددی نشان می‌دهد که علی‌رغم پیچیدگی ناشی از در نظر گرفتن این ترم‌های غیرخطی، تغییر چندانی در نتایج حاصل نمی‌شود.

تئوری غیرخطی دیگری توسط نقدی و نوردگرن [۱۴] بر اساس فرضیات کیرشهف ارائه شده است. به‌طور کلی برای تحلیل پوسته‌های نسبتاً ضخیم، ردی و همکارانش [۱۵] تئوری غیرخطی تغییر شکل برشی مرتبه اول را ارائه نمودند که این تئوری کاملاً بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه‌شده توسط خود ردی [۱۶] می‌باشد. در این تئوری علاوه بر سه متغیر جابجایی، از دو متغیر چرخش^۱ نیز برای به دست آوردن تغییر شکل‌ها استفاده می‌شود. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر^۲ پوسته‌های خطی توسط ردی و لئو [۱۷] ارائه گردید. دنیس و پالازوتو [۱۸] این تئوری را برای تغییرشکل‌های غیرخطی تعمیم دادند [۱۹]. توضیحات بیشتر در مورد تئوری پوسته‌ها در کتاب پوسته‌ها و ورق‌های نازک [۲۰] آمده است.

۱-۵- مروری بر مقالات انجام‌شده

لیسا [۲۱] در کتاب خود به بسیاری از مقالات که به بررسی خصوصیات ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی ساخته‌شده از مواد ایزوتروپیک^۳ و ارتوتروپیک^۴ پرداخته‌اند، اشاره کرده است. مقالات زیادی در بررسی ارتعاشات پوسته‌های مخروطی ساخته‌شده از مواد ایزوتروپیک وجود دارد. ساندرس و ویسنیفسکی [۲۲] با استفاده از فرضیه‌ی لاو^۵ و روش ریلی-ریتز^۶ فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای پوسته‌ی مخروطی ناقص را تحت شرایط مرزی گیردار-مفصل به دست آورده‌اند. درهر و لیسا [۲۳] ارتعاشات متقارن محوری^۷ پوسته‌های مخروطی را بررسی کردند. ایری، یامادا و کانکو [۲۴] با استفاده

¹ Rotation

² Higher-Order Shear Deformation Theory

³ Isotropic

⁴ Orthotropic

⁵ Love

⁶ Rayleigh-Ritz

⁷ Axisymmetric

از تئوری پوسته‌های نازک کلاسیک، ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ناقص با ضخامت متغیر را بررسی کردند. آن‌ها تغییرات ضخامت را خطی، پارابولیک^۱ و نمایی^۲ در نظر گرفته و با استفاده از ماتریس انتقال، فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها را به دست آوردند. در پایان تأثیر پارامترهای هندسی مختلف مانند زاویه رأس مخروط و ضخامت در فرکانس‌های طبیعی را بررسی کردند. در مقایسه با پوسته‌های مخروطی ساخته شده از مواد ایزوتروپیک، تاکنون ارتعاشات پوسته‌های ساخته شده از مواد ارتوتروپیک و یا پوسته‌های تقویت شده بسیار کمتر بررسی گردیده‌اند. رنولج و ماستر [۲۵] ارتعاشات آزاد پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت شده با تقویت کننده‌های طولی و رینگ‌ها را با استفاده از روش ریلی-ریتز بررسی کرده و نتایج به دست آمده را با نتایج آزمایش تجربی مقایسه کرده‌اند. آن‌ها تأثیر تعداد تقویت کننده‌ها را بر فرکانس طبیعی بررسی کردند. وین کارتن [۲۶] با استفاده از تئوری دانل-مشری، ارتعاشات آزاد پوسته‌ی مخروطی تقویت شده توسط رینگ‌ها را بررسی کردند. باکن و برت [۲۷] تأثیر نسبت بین ثوابت مختلف مواد ارتوتروپیک بر فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ها را بررسی کرده‌اند. آن‌ها با استفاده از تقریب اول لاو^۳ معادلات حاکم بر مسأله را برای مواد ارتوتروپیک و ایزوتروپیک به دست آوردند. همچنین در به دست آوردن معادلات حرکت اینرسی صفحه‌ای و پیچشی را لحاظ نمودند. باکن و برت برای حل معادلات به دست آمده، از روش ریلی-ریتز استفاده نمودند. ویلکینس، برت و اگل [۲۸] ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای ارتوتروپیک و ایزوتروپیک را با استفاده از روش گالرکین^۴، تحت شرایط مرزی مختلف بررسی کرده‌اند. راثو و ردی [۲۹] بهینه‌سازی پوسته‌ی مخروطی تقویت شده با رینگ‌ها و تقویت کننده‌های طولی را با استفاده از قید فرکانس‌های طبیعی انجام داده‌اند. معیار بهینه‌سازی را کاهش وزن و متغیرها را ضخامت پوسته، تعداد، ضخامت و فاصله‌ی بین تقویت کننده‌های طولی و رینگ‌ها در نظر گرفتند. اشنايدر و همکارانش [۳۰] کمانش و ارتعاشات پوسته‌ی مخروطی تقویت شده با رینگ تحت فشار خارجی را بررسی کردند. تانگ [۳۱] ارتعاشات آزاد پوسته‌ی مخروطی ناقص ارتوتروپیک را با

¹ Parabolic

² Exponentially

³ Love's First-Approximation

⁴ Galerkin Method

روشی ساده به صورت دقیق حل کرد و تاثیر پارامترهای مختلف را بر فرکانس‌های پوسته بررسی نمود. راج و همکاران [۳۲] ارتعاشات آزاد پوسته‌ی مخروطی ناقص ساده و پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت‌شده با رینگ را از روش المان محدود بررسی کردند. آن‌ها همچنین مدل آزمایشگاهی این پوسته‌ها را آزمایش و نتایج را با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه کرده و تاثیر رینگ بر ارتعاشات پوسته‌ها را بررسی نمودند. مسیتوگلو و دوکمی [۳۳] ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت‌شده با رینگ و تقویت‌کننده‌های طولی را با استفاده از روش کالوکیشن^۱ بررسی کرده‌اند. آن‌ها اثر پارامترهای مختلف هندسی را بر فرکانس‌های طبیعی سیستم بررسی کردند. مسیتوگلو [۳۴] همچنین ارتعاشات آزاد پوسته-ی مخروطی ناقص تقویت‌شده با رینگ و تقویت‌کننده‌های طولی را با استفاده از روش کالوکیشن و با در نظر گرفتن اثرات اینرسی صفحه‌ای و اینرسی دورانی بررسی کرده است. دانشجو و همکاران [۳۵] تحلیل دینامیکی و سرعت چرخشی بحرانی پوسته‌ی مخروطی با تقویت مشبک را با استفاده از روش DQM^2 انجام داده‌اند. آن‌ها علاوه بر به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی خطی، تاثیر پارامترهای هندسی مختلف را بر فرکانس‌های طبیعی بررسی کردند.

۱-۶- اهداف

تاکنون کارهای انجام‌شده بر روی سازه‌های مشابه بدون در نظر گرفتن عوامل غیرخطی صورت گرفته است. با توجه به لزوم بررسی ارتعاشات غیرخطی که در ابتدای فصل توضیح داده شد، در این تحقیق به بررسی ارتعاشات غیرخطی این پوسته می‌پردازیم. در فصل دوم معادلات حرکت حاکم بر پوسته‌ی موردنظر با استفاده از تئوری دائل-مشرتی-والسف استخراج می‌گردد. معادلات سینماتیک مسأله با استفاده از روابط غیرخطی کرنش-جابجایی کارمن^۳ به دست می‌آید. معادلات حرکت شامل سه معادله‌ی کوپل می‌باشند که یکی وابسته به زمان و دو معادله‌ی دیگر مستقل از زمان است. در فصل سوم روش

¹ Collocation Method

² Differential Quadrature Method

³ Karman

حلی برای معادلات ارائه می‌گردد که در آن ابتدا با استفاده از تعریف تابع تنش، معادلات به دو معادله کاهش یافته و سپس با استفاده از روش گالرکین و اصل جمع آثار^۱ معادلات به یک معادله دیفرانسیل زمانی تبدیل گردیده و این معادله با استفاده از روش هموتویی پرتوربیشن^۲ حل می‌گردد. در فصل چهارم نتایج مربوط به ارتعاشات آزاد برای یک مدل خاص از پوسته‌ی مخروطی ساده ارائه گردیده است. برای اطمینان از صحت روش حل، نتایج به‌دست‌آمده با نتایج موجود تحلیلی و آزمایشگاهی مقایسه گردیده است. سپس نتایج مربوط به ارتعاشات آزاد سه نوع خاص از پوسته‌های مخروطی ناقص تقویت-شده ارائه گردیده است. در فصل پنجم پوسته تحت تأثیر نیروی هارمونیک^۳ عرضی قرار گرفته و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه^۴، پاسخ فرکانسی^۵ به‌دست‌آمده و نمودار آن رسم گردیده است. نتایج و پیشنهادها در فصل پایانی ارائه می‌گردد.

¹ Superposition Method

² Homotopy Perturbation Method

³ Harmonic

⁴ Multiple Scale

⁵ Frequency Response

فصل دوم

استخراج معادلات

۲-۱- مقدمه

با توجه به آنچه در فصل اول در مورد تئوری دائل-مشرتی-والسف برای پوسته‌های نازک گفته شد، در این تحقیق معادلات حرکت حاکم بر مسأله با استفاده از فرضیات این تئوری به دست آمده است. برای استخراج معادلات حرکت فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

- پوسته‌ی مخروطی نازک، همگن و همسانگرد است.
- جابجایی‌ها نسبتاً بزرگ و روابط کرنش-جابجایی غیرخطی است.
- رابطه‌ی تنش-کرنش خطی است و از رابطه‌ی هوک استفاده شده است.
- جنس تقویت‌کننده‌ها با جنس پوسته متفاوت بوده و مجموعه کامپوزیت دوجنسه است.
- رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌ها منشوری^۱ بوده و دارای سطح مقطع متقارن می‌باشند.
- رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌ها از ماده‌ی الاستیک خطی، همگن و ایزوتروپیک ساخته شده‌اند.
- کرنش‌های عمودی در تقویت‌کننده‌ها همانند کرنش‌های پوسته به صورت خطی تغییر می‌کنند.
- نیروی برشی به طور کامل توسط پوسته تحمل می‌گردد.
- از خمش جانبی^۲ تقویت‌کننده‌ها صرف نظر شده است.
- از تابیدگی^۳ صرف نظر شده است.
- برای به دست آوردن نیروها و گشتاورهای معادل، انرژی جنبشی و پتانسیل رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی از خاصیت توزیع^۴ استفاده شده است. بدین صورت که برای مدل کردن نیروها و گشتاورهای معادل، انرژی جنبشی و پتانسیل رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی، مقادیر مربوط به یکی از تقویت‌کننده‌های طولی و یا رینگ‌ها بر فاصله‌ی میان تقویت‌کننده‌های طولی و رینگ‌ها تقسیم می‌گردد.

¹ Prismatic

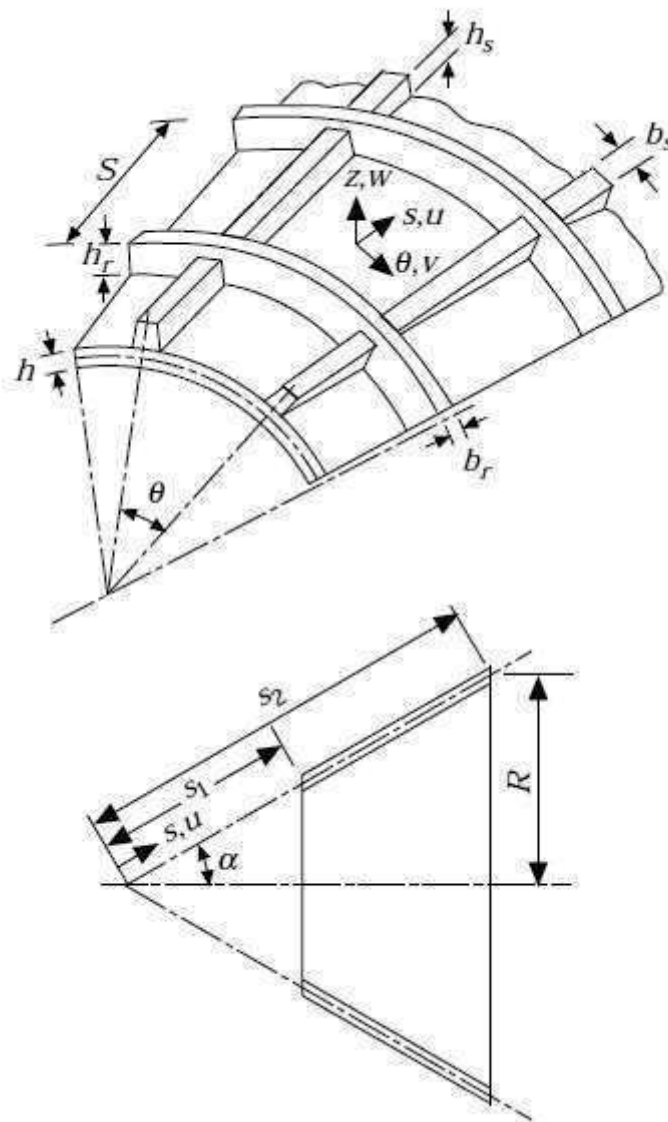
² Lateral Bending

³ Warping

⁴ Smearing

۲-۲- تعریف مسأله

پوسته‌ی مخروطی مطابق شکل (۱-۲)، به ضخامت h ، طول l ، زاویه‌ی رأس α و چگالی ρ مفروض است. این پوسته با تقویت‌کننده‌ها و رینگ‌هایی تقویت شده است که ابعاد آن‌ها در شکل نشان داده شده است.



شکل ۱-۲ نمای شماتیک سازه‌ی مسأله

برای فرمول‌بندی مسأله از سیستم مختصات استوانه‌ای (S, θ, Z) استفاده شده است که در آن S در جهت یال مخروط، θ در جهت محیط و Z در جهت عمود بر ضخامت پوسته است. u, v و w به ترتیب جابجایی در جهت S, θ و Z هستند.

۲-۳- روابط سینماتیک^۵، نیروها و گشتاورهای معادل^۶ پوسته‌های مخروطی

ناقص

مطابق با روابط غیرخطی کرنش-جابجایی^۷ کارمن، مؤلفه‌های کرنش در صفحه‌ی میانی پوسته‌های مخروطی ناقص (که در شکل ۱-۲ با خط چین نشان داده شده است) به صورت زیر است [۳۶]:

$$e_s = \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial S} \right)^2 \quad 1-2$$

$$e_\theta = \frac{1}{S} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u}{S} - \frac{w \cot(\alpha)}{S} + \frac{1}{2 S^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 \quad 2-2$$

$$e_{s\theta} = \frac{\partial v}{\partial S} - \frac{v}{S} + \frac{1}{S} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{S} \frac{\partial w}{\partial S} \frac{\partial w}{\partial \phi} \quad 3-2$$

$$\chi_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial S^2} \quad 4-2$$

$$\chi_\theta = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{1}{S} \frac{\partial w}{\partial S} \quad 5-2$$

$$\chi_{s\theta} = -\frac{1}{S} \frac{\partial^2 w}{\partial S \partial \phi} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} \quad 6-2$$

که در آن $\phi = \theta \sin(\alpha)$.

بر اساس تئوری پوسته‌های انعطاف‌پذیر^۸، روابط تنش-کرنش^۹ برای پوسته‌های نازک و همگن به صورت زیر است [۳۷]:

⁵ Kinematic Relations

⁶ Force and Moment Resultants

⁷ Strain-Displacement

⁸ Flexural Shell Theory

⁹ Stress-Strain Relations

$$\begin{bmatrix} \sigma_S \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{S\theta} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_S + z \chi_S \\ e_\theta + z \chi_\theta \\ e_{S\theta} + z \chi_{S\theta} \end{bmatrix} \quad 7-2$$

نیروها و گشتاورهای معادل وارد بر پوسته‌ی مخروطی با انتگرال‌گیری از تنش‌ها بر روی ضخامت پوسته به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(N_S, N_\theta, N_{S\theta}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_S, \sigma_\theta, \sigma_{S\theta}) dz \quad 8-2$$

$$(M_S, M_\theta, M_{S\theta}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_S, \sigma_\theta, \sigma_{S\theta}) z dz \quad 9-2$$

با جایگذاری رابطه‌ی 7-2 در روابط 8-2 و 9-2 نیروها و گشتاورهای معادل پوسته‌ی مخروطی ناقص به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$N_{Ssh} = A_{10} e_S + A_{20} e_\theta \quad 10-2$$

$$N_{\theta sh} = A_{20} e_S + A_{10} e_\theta \quad 11-2$$

$$N_{S\theta sh} = A_{60} e_{S\theta} \quad 12-2$$

$$M_{Ssh} = A_{12} \chi_S + A_{22} \chi_\theta \quad 13-2$$

$$M_{\theta sh} = A_{22} \chi_S + A_{12} \chi_\theta \quad 14-2$$

$$M_{S\theta sh} = A_{62} \chi_{S\theta} \quad 15-2$$

که در آن :

$$A_{1k} = \frac{E h^{k+1}}{(1-\nu^2)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z^k dz \quad 16-2$$

$$A_{2k} = \frac{\nu E h^{k+1}}{(1 - \nu^2)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z^k dz \quad ۱۷-۲$$

$$A_{6k} = \frac{E h^{k+1}}{(1 + \nu)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z^k dz, \quad k = 0, 1, 2 \quad ۱۸-۲$$

۲-۴- روابط سینماتیک، نیروها و گشتاورهای معادل رینگ‌ها^{۱۰} و تقویت‌کننده-

های طولی^{۱۱}

به‌دست آوردن نیروها و گشتاورهای معادل رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌ها، با بیان جابه‌جایی رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌ها، بر اساس جابه‌جایی‌های پوسته پیچیده می‌گردد.

با توجه به فرضیات ذکرشده در ابتدای فصل، نیروها و گشتاورهای معادل رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌ها به‌صورت زیر به‌دست‌آمده می‌آیند [۲۵]:

$$N_{Sst} = A_{30} e_s + A_{31} \chi_s \quad ۱۹-۲$$

$$N_{\theta r} = A_{32} e_\theta + A_{33} \chi_\theta \quad ۲۰-۲$$

$$M_{Sst} = A_{31} e_s + A_{34} \chi_\theta \quad ۲۱-۲$$

$$M_{\theta r} = A_{33} e_\theta + A_{35} \chi_\theta \quad ۲۲-۲$$

$$M_{S\theta r} = A_{36} \chi_{s\theta} \quad ۲۳-۲$$

$$M_{S\theta st} = A_{37} \chi_{s\theta} \quad ۲۴-۲$$

¹⁰ Rings

¹¹ Stringers

که در آن اندیس St بیانگر تقویت کننده‌ها و اندیس r بیانگر رینگ‌هاست. ضرایب A_{30} تا A_{35} از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 A_{30} &= \frac{E_{st}A_{st}}{b_{st}} & A_{31} &= \frac{E_{st}A_{st}}{b_{st}} C_{st} \\
 A_{32} &= \frac{E_r A_r}{b_r} & A_{33} &= \frac{E_r A_r}{b_r} C_r \\
 A_{34} &= \frac{E_{st}A_{st}}{b_{st}} (C_{st}^2 + I_{st}^2) & A_{35} &= \frac{E_r A_r}{b_r} (C_r^2 + I_r^2) \\
 A_{36} &= \frac{G_r J_r}{b_r} & A_{37} &= \frac{G_{st} J_{st}}{b_{st}}
 \end{aligned} \tag{۲۵-۲}$$

۲-۵- گشتاورها و نیروهای معادل پوسته‌ی مخروطی تقویت شده

گشتاورها و نیروهای معادل پوسته‌ی مخروطی تقویت شده، از برآیند نیروها و گشتاورهای پوسته‌ی مخروطی، رینگ‌ها و تقویت کننده‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$N = N_{sh} + N_r + N_{st} \tag{۲۶-۲}$$

$$M = M_{sh} + M_r + M_{st} \tag{۲۷-۲}$$

با جایگذاری روابط ۱۰-۲ تا ۱۵-۲ و ۱۹-۲ تا ۲۴-۲ در روابط ۲۶-۲ و ۲۷-۲ نیروها و گشتاورهای معادل پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت شده به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$N_s = (A_{10} + A_{30}) e_s + A_{20} e_\theta + A_{31} \chi_s \tag{۲۹-۲}$$

$$N_\theta = A_{20} e_s + (A_{10} + A_{32}) e_\theta + A_{33} \chi_\theta \tag{۳۰-۲}$$

$$N_{s\theta} = A_{60} e_{s\theta} \tag{۳۱-۲}$$

$$M_S = A_{12} \chi_S + (A_{22} + A_{34}) \chi_\theta + A_{31} e_S \quad ۳۲-۲$$

$$M_\theta = A_{22} \chi_S + (A_{12} + A_{35}) \chi_\theta + A_{33} e_\theta \quad ۳۳-۲$$

$$M_{S\theta} = (A_{62} + A_{36} + A_{37}) \chi_{S\theta} \quad ۳۴-۲$$

۲-۶- انرژی جنبشی و پتانسیل پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده

در غیاب نیروهای خارجی، انرژی پتانسیل برابر با انرژی کرنشی پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده می‌باشد. انرژی کرنشی پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [۳۷]:

$$U = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{2} [N_S e_S + N_\theta e_\theta + N_{S\theta} e_{S\theta} + M_S \chi_S + M_\theta \chi_\theta + 2M_{S\theta} \chi_{S\theta}] \right\} s \, ds \, d\phi \quad ۳۵-۲$$

انرژی جنبشی پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده، با استفاده از فرضیات تئوری دائل-مشرتی-والسف به‌صورت زیر است:

$$T = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{2} [m_{sh} + m_{st} + m_r] \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} s \, ds \, d\phi \quad ۳۶-۲$$

که در آن:

$$m_{sh} = \rho_{sh} h$$

$$m_r = \frac{\rho_r A_r}{b_r}$$

$$m_{st} = \frac{\rho_{st} A_{st}}{b_{st}} \quad ۳۷-۲$$

۲-۷- معادله‌ی حرکت پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده

برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده از اصل هامیلتون^{۱۲} استفاده می‌کنیم:

¹² Hamilton Principle

$$\delta \int_{t_0}^t (U - T) dt = 0 \quad 38-2$$

با جایگذاری انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی از روابط ۳۵-۲ و ۳۶-۲ در رابطه‌ی ۳۸-۲ و پس از گرفتن انتگرال جزء‌به‌جزء داریم:

$$\frac{\partial N_S}{\partial S} + \frac{1}{S} \frac{\partial N_{S\theta}}{\partial \phi} + \frac{N_S - N_\theta}{S} = 0 \quad 39-2$$

$$\frac{\partial N_{S\theta}}{\partial S} + \frac{1}{S} \frac{\partial N_\theta}{\partial \phi} + \frac{N_{S\theta}}{S} = 0 \quad 40-2$$

$$\frac{\partial^2 M_S}{\partial S^2} + \frac{2}{S} \frac{\partial M_S}{\partial S} + \frac{2}{S} \frac{\partial^2 M_{S\theta}}{\partial S \partial \phi} - \frac{1}{S} \frac{\partial M_\theta}{\partial S} + \frac{2}{S^2} \frac{\partial M_{S\theta}}{\partial \phi} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{N_\theta \cot(\gamma)}{S}$$

$$+ N_S \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} - N_\theta \left(\frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial W}{\partial S} \right) - 2 N_{S\theta} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial^2 W}{\partial S \partial \phi} - \frac{1}{S^2} \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) \quad 41-2$$

$$- (m_{sh} + m_{st} + m_r) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

۸-۲- شرایط مرزی

در این تحقیق مرزهای پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت‌شده به‌صورت تکیه‌گاه ساده^{۱۳} در نظر گرفته شده است. همان‌طور که می‌دانیم شرایط مرزی هندسی و نیرویی در تکیه‌گاه ساده به‌صورت زیر است:

$$v(S_1, \theta) = v(S_2, \theta) = 0 \quad w(S_1, \theta) = w(S_2, \theta) = 0$$

$$N_S(S_1, \theta) = N_S(S_2, \theta) = 0 \quad M_S(S_1, \theta) = M_S(S_2, \theta) = 0 \quad 42-2$$

¹³ Simply Supported

فصل سوم

تحليل ارتفاعات آزاد

۳-۱- مقدمه

در فصل قبل معادلات حاکم بر پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت‌شده‌ی مشبک با استفاده از فرضیات تئوری دائل-مشتري-والسف به‌دست آمد. معادلات حرکت به‌صورت یک دستگاه معادله شامل سه معادله‌ی با مشتقات جزئی کوپل می‌باشند. برای حل این معادلات در ادامه‌ی فصل، ابتدا متغیرهای مسأله را که شامل سه مؤلفه‌ی جابجایی u ، v و w می‌باشند را به کمک تعریف تابع تنش به دو متغیر تابع تنش و جابجایی شعاعی تبدیل می‌کنیم. سپس با استفاده از روش گالرکین غیرخطی، معادلات را به‌صورت معادله‌ی دیفرانسیلی بر حسب زمان در می‌آوریم. معادله‌ی حاصل در ادامه به روش هموتوپی پرتوربیشن حل می‌گردد. برای اطمینان از درستی روش حل، در انتها با حذف رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی، نتایج برای یک پوسته‌ی مخروطی ساده به‌دست آمده و با نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه گردیده است.

۳-۲- انتخاب روش حل

به‌طور کلی برای حل مسائل مربوط به پوسته‌ها از دو روش استفاده می‌شود. در روش اول، معادلات حاکم بر حسب جابه‌جایی‌های صفحه‌ی میانی پوسته حل می‌گردد که در این روش سه متغیر u ، v و w در معادلات وجود دارند. در روش دوم، معادلات حاکم بر مسأله بر حسب تنش‌ها و گشتاورهای معادل حل می‌شود که در این روش با معرفی تابع تنش ایری^{۱۴}، تنها دو متغیر تابع تنش F و جابه‌جایی w در مسأله باقی می‌مانند.

در این تحقیق از روش دوم برای حل معادلات حرکت استفاده شده است. بدین منظور، تابع تنش ایری به‌صورتی تعریف می‌شود که روابط زیر صادق باشند [۳۷]:

$$N_s = \frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \quad ۱-۳$$

¹⁴ Airy's Stress Function

$$N_{\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \quad 2-3$$

$$N_{S\theta} = \frac{1}{S^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{S} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial S} \quad 3-3$$

مشاهده می‌شود که با انتخاب تابع تنش بدین شکل، معادلات ۲-۳۹ و ۲-۴۰ ارضا می‌شوند. روابط نیروها و گشتاورهای معادل بر حسب مؤلفه‌های کرنش (که در فصل قبل به دست آمد) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \chi \end{bmatrix} \quad 4-3$$

که در فصل قبل ضرایب A ، B و D در فصل قبل به دست آمده‌اند. با نیمه معکوس کردن رابطه‌ی ماتریسی فوق داریم:

$$\begin{bmatrix} e \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \chi \end{bmatrix} \quad 5-3$$

که در آن:

$$[A^*] = [A^{-1}]$$

$$[B^*] = -[A^{-1}][B]$$

$$[C^*] = [B][A^{-1}]$$

$$[D^*] = [D] - [B][A^{-1}][B] \quad 6-3$$

با استفاده از روابط ۲-۴ تا ۲-۶ و ۳-۱ تا ۳-۶ داریم:

$$\begin{aligned} M_S &= C_{11}^* \left(\frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right) + C_{12}^* \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + C_{16}^* \left(\frac{1}{S^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{S} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial S} \right) \\ &\quad - D_{11}^* \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} - D_{12}^* \left(\frac{1}{S} \frac{\partial W}{\partial S} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \right) - 2D_{16}^* \left(-\frac{1}{S^2} \frac{\partial W}{\partial \phi} + \frac{1}{S} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial S} \right) \\ M_{\theta} &= C_{21}^* \left(\frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right) + C_{22}^* \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + C_{26}^* \left(\frac{1}{S^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{S} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial S} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -D_{12}^* \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} - D_{22}^* \left(\frac{1}{S} \frac{\partial W}{\partial S} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \right) - 2D_{26}^* \left(-\frac{1}{S^2} \frac{\partial W}{\partial \phi} + \frac{1}{S} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial S} \right) \\
\frac{M_{S\theta}}{2} &= C_{61}^* \left(\frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right) + C_{62}^* \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + C_{66}^* \left(\frac{1}{S^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{S} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial S} \right) \\
& -D_{16}^* \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} - D_{26}^* \left(\frac{1}{S} \frac{\partial W}{\partial S} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \right) - 2D_{66}^* \left(-\frac{1}{S^2} \frac{\partial W}{\partial \phi} + \frac{1}{S} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi \partial S} \right)
\end{aligned} \tag{۷-۳}$$

۳-۳- معادله سازگاری^{۱۵}

در صورت استفاده از روش حل دوم، برای تعریف تابع تنش نیاز به یک معادله سازگاری وجود دارد. به عبارت دیگر، باید لایه‌ی میانی پوسته پس از تغییر شکل پیوسته باقی بماند.

۳-۳-۱- طرف راست معادله سازگاری

با استفاده از رابطه‌ی زیر می‌توان متغیرهای u و v را از روابط کرنش-جابجایی حذف کرد.

$$S \frac{\partial^2 e_{S\theta}}{\partial S \partial \phi} + \frac{\partial e_{S\theta}}{\partial \phi} - \frac{\partial^2 e_S}{\partial \phi^2} + S \frac{\partial e_S}{\partial S} - 2S \frac{\partial e_\theta}{\partial S} - S^2 \frac{\partial^2 e_\theta}{\partial S^2} \tag{۸-۳}$$

با جایگذاری معادلات ۱-۲ تا ۳-۲ در معادله‌ی ۸-۳ داریم:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 - 2 \frac{\partial W}{\partial \phi} \frac{\partial^2 W}{\partial S \partial \phi} - \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} \frac{\partial W}{\partial S} \\
& -\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial S \partial \phi} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial S} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \frac{\partial W}{\partial S} \cot(\alpha) + \left(\frac{\partial W}{\partial S} \right)^2
\end{aligned} \tag{۹-۳}$$

۳-۳-۲- طرف چپ معادله سازگاری

با استفاده از روابط ۱-۳ تا ۳-۳، می‌توان کرنش‌های صفحه‌ی میانی پوسته‌ی مخروطی ناقص را بر حسب تابع تنش به صورت زیر بیان کرد:

¹⁵ Compatibility Equation

$$e_S = b_1 \left(\frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right) + b_2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \quad 10-3$$

$$e_\theta = b_2 \left(\frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right) + b_1 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \quad 11-3$$

$$e_{S\theta} = b_5 \left(\frac{1}{S^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{S} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial S} \right) \quad 12-3$$

که در آن ضرایب b_1 تا b_5 با استفاده از روابط ۲-۲۹ تا ۲-۳۱ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$b_1 = \frac{A_{10} + A_{32}}{A_{10}^2 + A_{10}A_{32} + A_{30}A_{10} + A_{30}A_{32} - A_{20}^2}$$

$$b_2 = -\frac{A_{20}}{A_{10}^2 + A_{10}A_{32} + A_{30}A_{10} + A_{30}A_{32} - A_{20}^2} \quad 13-3$$

$$b_5 = \frac{1}{A_{60}}$$

با قرار دادن معادلات ۳-۶ تا ۳-۸ در معادله‌ی ۳-۴ طرف چپ معادله‌ی سازگاری به صورت زیر به دست

می‌آید:

$$b_1 \frac{\partial^4 F}{\partial \phi^4} + 2(b_2 + b_5) \frac{\partial^4 F}{\partial \phi^2 \partial S^2} + 4(b_2 + b_5) \frac{\partial^4 F}{\partial \phi^2 \partial S} + 2(b_5 + b_2 + b_1) \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \quad 14-3$$

$$+ b_1 \frac{\partial^4 F}{\partial S^4} + 4 b_1 \frac{\partial^3 F}{\partial S^3} + 4 b_1 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}$$

۳-۳-۳- شکل نهایی معادله‌ی سازگاری و معادله‌ی حرکت

به منظور ساده‌سازی معادلات حرکت و سازگاری، متغیرهای $S = S_1 e^x$ و $F = F_1 e^{2x}$ را در نظر

می‌گیریم. پس از جایگذاری این متغیرها در معادلات ۲-۴۱، ۳-۹ و ۳-۱۴، ساده‌سازی‌های ریاضیاتی و

برابر قرار دادن طرفین معادله‌ی سازگاری، شکل نهایی معادلات حرکت و سازگاری به صورت زیر است:

$$b_1 e^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial \phi^4} + 2(b_2 + b_5) e^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial \phi^2 \partial x^2} + 4(b_2 + b_5) e^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial \phi^2 \partial x} \quad 15-3$$

$$+ 4 b_1 e^{2x} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} + 4 b_1 e^{2x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + 2(b_5 + b_2 + b_1) e^{2x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \phi^2} - \left(\frac{\partial W}{\partial S} \right)^2$$

$$+S_1 e^x \cot(\alpha) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial W}{\partial \phi} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial x} + b_1 e^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4}$$

$$+ \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \phi} \right)^2 - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} - \frac{\partial W}{\partial x} S_1 e^x \cot(\alpha) - \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial F_1}{\partial x} + 2 F_1 \right) S_1 e^{3x} \cot(\alpha) - c_3 \left(\frac{\partial^4 W}{\partial \phi^4} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right.$$

$$\left. - 4 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + 4 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2(c_4 + c_6) \left(\frac{\partial^4 W}{\partial \phi^2 \partial x^2} - 2 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial \phi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} \right) \right.$$

$$+ e^{2x} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \phi^2} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + 2 F_1 \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + e^{2x} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial F_1}{\partial x} + 2 F_1 \right) \quad ۱۶-۳$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + 2 e^{2x} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial F_1}{\partial \phi} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \phi} - \frac{\partial W}{\partial \phi} \right) - \rho h S_1^4 e^{4x} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

۳-۴- حل معادلات حاکم بر مسأله:

در این تحقیق برای حل مسأله، ابتدا با توجه به شرایط مرزی، تابعی برای جابجایی شعاعی حدس می‌زنیم که شرایط هندسی مسأله را ارضا کند. سپس با استفاده از روش جمع آثار و رابطه‌ی سازگاری تابع تنش را به دست می‌آوریم. با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه مفصلی در دو انتهای پوسته‌ی مخروطی ناقص، جواب معادله‌ی ۳-۱۵ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۳۸]:

$$W = f(t) e^x [\sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) + \Psi \sin^2(\beta_1 x)] \quad ۱۷-۳$$

که در آن $f(t)$ تابعی مجهول از زمان و Ψ پارامتر ایجاد ارتباط بین قسمت‌های خطی و غیرخطی جابجایی (W) می‌باشند. همچنین $\beta_1 = \frac{m\pi}{x_0}$ ، $\beta_2 = \frac{n}{\sin(\alpha)}$ ، $x_0 = \ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ ، m شماره‌ی نیم-موج‌های طولی و n شماره‌ی موج‌های محیطی است.

مشاهده می‌شود که تابع در نظر گرفته شده، شرایط مرزی هندسی را در دو انتهای پوسته‌ی مخروطی ارضا می‌کند. پس از قرار دادن معادله‌ی ۳-۱۷ در ۳-۱۵ و با استفاده از روش جمع آثار، پاسخ خصوصی تابع تنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
F_1(x, \phi, t) = f(t) \{ & [\Lambda_{51} \Psi^2 f(t) + \Lambda_{52} f(t) + \Lambda_{53} \Psi] \cos(2\beta_1 x) \\
& + [\Lambda_{61} \Psi^2 f(t) + \Lambda_{62} f(t) + \Lambda_{63} \Psi] \sin(2\beta_1 x) \\
& + \Lambda_7 f(t) \cos(2\beta_1 x) \cos(2\beta_2 \phi) \\
& + \Lambda_8 f(t) \sin(2\beta_1 x) \cos(2\beta_2 \phi) \\
& + [\Lambda_{91} \Psi f(t) + \Lambda_{92}] \cos(\beta_1 x) \sin(2\beta_2 \phi) \\
& + [\Lambda_{1011} \Psi f(t) + \Lambda_{102}] \sin(\beta_1 x) \sin(2\beta_2 \phi) \\
& + \Lambda_{11} \Psi f(t) \cos(3\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) \\
& + \Lambda_{12} \Psi f(t) \sin(3\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) + \Lambda_{13} \Psi^2 f(t) \cos(4\beta_1 x) \\
& + \Lambda_{14} \Psi^2 f(t) \sin(4\beta_1 x) + \Lambda_{15} f(t) \cos(2\beta_2 \phi)
\end{aligned}
\tag{۱۸-۳}$$

که در آن Λ_i ضرایب وابسته به هندسه و خواص مکانیکی پوسته‌ی مخروطی می‌باشند که در پیوست الف آمده است.

حال برای به دست آوردن معادله‌ای بر حسب زمان و بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ی مخروطی، پس از جایگذاری تابع تنش به دست آمده در معادله‌ی ۱۶-۳، روش گالرکین را به صورت زیر بر معادله‌ی ۱۶-۳ اعمال می‌کنیم:

$$\int_0^{x_0} \int_0^{2\pi \sin(\alpha)} \Pi e^x \sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) d\phi dx = 0 \tag{۱۹-۳}$$

$$\int_0^{x_0} \int_0^{2\pi \sin(\alpha)} \Pi e^x \sin^2(\beta_1 x) d\phi dx = 0 \tag{۲۰-۳}$$

که در آن Π ، معادله‌ی ۱۶-۳ پس از جایگذاری F_1 و W است.

با جایگذاری معادله‌ی ۱۶-۳ در معادلات ۱۹-۳ و ۲۰-۳ به ترتیب داریم:

$$C_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + C_2 f + C_3 \Psi f^2 + C_4 \Psi^2 f^3 + C_5 f^3 = 0 \tag{۲۱-۳}$$

$$C_6 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + C_7 \Psi f + C_8 f^2 + C_9 \Psi^2 f^2 + C_{10} \Psi^3 f^3 + C_{11} \Psi f^3 = 0 \tag{۲۲-۳}$$

با حذف $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ از روابط فوق، رابطه‌ی میان Ψ و f به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Psi = \lambda f \tag{۲۳-۳}$$

که در آن:

$$\lambda = \frac{C_8 - C_{12} C_5}{C_3 C_{12} + C_2 C_{13} - C_7} \tag{۲۴-۳}$$

که ضرایب C_i در پیوست ب آمده است.

با حذف Ψ از روابط ۲۱-۳ و ۲۲-۳ و با در نظر گرفتن $u(t) = \frac{f(t)}{h}$ داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_0 u + Q_1 u^3 + Q_2 u^5 = 0 \quad 25-3$$

که در آن :

$$Q_0 = \frac{C_2}{C_1}$$

$$Q_1 = \lambda \frac{C_3}{C_1} + \frac{C_5}{C_1} \quad 26-3$$

$$Q_2 = \lambda^2 \frac{C_4}{C_1}$$

در این تحقیق برای حل معادله‌ی ۲۵-۳ از روش هموتوپی پرتوربیشن استفاده شده است. برای حل معادله‌ی ۲۵-۳ هموتوپی زیر را در نظر می‌گیریم [۴۰] و [۴۱]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 u + p[(Q_0 - \omega^2)u + Q_1 u^3 + Q_2 u^5] = 0 \quad 27-3$$

که در آن $p \in [0,1]$ ضریب تأثیر است.

اگر $p = 0$ باشد، معادله‌ی ۲۷-۳ به معادله‌ی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 u = 0 \quad 28-3$$

اگر $p = 1$ باشد، معادله‌ی ۲۷-۳ به معادله‌ی اصلی ۲۵-۳ تبدیل می‌شود.

پاسخ هارمونیک معادله‌ی ۲۵-۳ را می‌توان به صورت سری توانی p به صورت زیر در نظر گرفت:

$$u = u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + \dots \quad 29-3$$

با جایگذاری معادله‌ی ۲۹-۳ در معادله‌ی ۲۵-۳ و برابر صفر قرار دادن ضرایب جملات با توان‌های مختلف p داریم:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \omega^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad \frac{\partial u_0(0)}{\partial t} = 0 \quad 30-3$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 + (Q_0 - \omega^2)u_0 + Q_1 u_0^3 + Q_2 u_0^5 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(0)}{\partial t} = 0 \quad 31-3$$

پاسخ معادله‌ی ۳-۳۰ را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$u_0 = A \cos \omega t \quad ۳۲-۳$$

که در آن A دامنه‌ی بی‌بعد ارتعاشات و ω فرکانس طبیعی ارتعاشات غیرخطی مجموعه می‌باشند.

با جایگذاری u_0 در معادله‌ی ۳-۳۱ و انجام عملیات ریاضی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 + \left(Q_0 - \omega^2 + \frac{3}{4} Q_1 A^2 + \frac{5}{8} Q_2 A^4 \right) A \cos \omega t \\ + \left(Q_1 + \frac{5}{4} Q_2 A^2 \right) \frac{A^3}{4} \cos(3\omega t) + \frac{Q_2 A^5}{16} \cos(5\omega t) = 0 \end{aligned} \quad ۳۳-۳$$

با حذف جمله‌ی سکولار^{۱۶} از معادله‌ی ۳-۳۳ داریم:

$$Q_0 - \omega^2 + \frac{3}{4} Q_1 A^2 + \frac{5}{8} Q_2 A^4 = 0 \quad ۳۴-۳$$

از معادله‌ی ۳-۳۴ فرکانس‌های طبیعی غیرخطی پوسته‌ی مخروطی ناقص به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\omega_{NL} = \left(Q_0 + \frac{3}{4} Q_1 A^2 + \frac{5}{8} Q_2 A^4 \right)^{.5} \quad ۳۵-۳$$

زمانی که $A = 0$ باشد، از معادله‌ی ۳-۳۵ فرکانس‌های طبیعی خطی به دست می‌آیند:

$$\omega_L = (Q_0)^{.5} \quad ۳۶-۳$$

¹⁶ Secular Term

فصل چهارم

نتایج ارتعاشات آزاد

۴-۱- مقدمه

در این فصل به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش ارائه شده در فصل سوم پرداخته می‌شود. تمامی محاسبات با استفاده از نرم‌افزارهای *Maple 16* و *Mtlab* انجام گرفته است. در ابتدا برای اطمینان از دقت روش ارائه شده، فرکانس‌های طبیعی خطی یک نمونه پوسته‌ی مخروطی ساده به دست آمده و با نتایج مقالات موجود مقایسه گردیده است. سپس فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی یک نمونه پوسته‌ی مخروطی که با رینگ تقویت شده است را به دست آورده و با نتایج موجود تحلیلی و آزمایشگاهی مقایسه کرده‌ایم. سپس تقویت‌کننده‌های طولی به سیستم اضافه شده و تأثیر پارامترهای مختلف بررسی گردیده است.

۴-۲- صحه‌گذاری روش حل

در ابتدای این فصل، پوسته‌ی مخروطی ناقص همگنی را بدون رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی در نظر می‌گیریم. جدول (۴-۱) مشخصات هندسی و خصوصیات مکانیکی پوسته‌ی موردنظر را نشان می‌دهد.

جدول ۴-۱ مشخصات هندسی و خصوصیات مکانیکی پوسته‌ی مخروطی	
۰,۰۰۴	ضخامت (m)
۳۰	زاویه رأس (درجه)
۰,۳	شعاع قاعده‌ی کوچک (m)
۰,۴	شعاع قاعده‌ی بزرگ (m)
۷۰	مدول الاستیسیته (Mpa)
۰,۳	ضریب پواسون
۲۷۱۰	چگالی ($\frac{Kg}{m^3}$)

با جایگذاری مقادیر فوق و استفاده از رابطه‌ی ۳-۳۶، فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آید. برای مقایسه‌ی نتایج به دست آمده با نتایج موجود در مقالات گوناگون، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$\omega_{1L} = \omega_L R_2 \sqrt{\frac{(1 - \nu^2)\rho}{E}} \quad 1-4$$

نتایج حاصل در جدول ۲-۴ نشان داده شده است:

جدول ۲-۴ مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته‌ی مخروطی ناقص با دیگر مقالات ($m = 1$)

تحقیق حاضر	کریوا و همکاران [۴۶]	لی و همکاران [۴۵]	لیو و همکاران [۴۴]	تانگ [۴۳]	ایریه و همکاران [۴۲]	n
۰,۷۹۴۳	۰,۷۹۰۹	۰,۸۴۳۱	۰,۷۹۰۴	۰,۷۹۱۰	۰,۷۹۱۰	۲
۰,۷۰۸۵	۰,۷۲۸۲	۰,۷۴۱۶	۰,۷۲۷۴	۰,۷۲۸۴	۰,۷۲۸۴	۳
۰,۶۱۹۹	۰,۶۳۴۹	۰,۶۴۱۹	۰,۶۳۳۹	۰,۶۳۵۳	۰,۶۳۵۲	۴
۰,۵۴۳۷	۰,۵۵۲۵	۰,۵۵۹۰	۰,۵۵۱۴	۰,۵۵۳۱	۰,۵۵۳۱	۵
۰,۴۸۹۶	۰,۴۹۴۰	۰,۵۰۰۸	۰,۴۹۳۰	۰,۴۹۴۹	۰,۴۹۴۹	۶
۰,۴۶۲۳	۰,۴۶۴۱	۰,۴۷۰۱	۰,۴۶۳۲	۰,۴۶۴۳	۰,۴۶۴۳	۷
۰,۴۶۲۷	۰,۴۶۳۱	۰,۴۶۸۷	۰,۴۶۲۳	۰,۴۶۴۴	۰,۴۶۴۵	۸
۰,۴۸۸۲	۰,۴۸۷۲	-----	۰,۴۸۷۰	۰,۴۸۹۲	۰,۴۸۹۲	۹

مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از روش حل این تحقیق مطابقت بسیار خوبی با نتایج موجود دارد.

در ادامه و با حل مسأله‌ی تقویت‌شده نشان می‌دهیم که نتایج حاصل از این روش در مقایسه با نتایج موجود تحلیلی، بسیار به نتایج آزمایشگاهی نزدیک است.

۳-۴- فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی پوسته‌ی مخروطی ناقص با رینگ‌ها

و تقویت‌کننده‌های طولی

در این تحقیق سه نوع مختلف پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت‌شده برای بررسی انتخاب گردیده است.

پوسته‌ی شماره‌ی ۱ تنها توسط سه عدد رینگ با فواصل یکسان تقویت‌شده است. پوسته‌ی شماره‌ی ۲

علاوه بر سه عدد رینگ، توسط سه عدد تقویت‌کننده‌ی طولی نیز تقویت گردیده و در پوسته‌ی شماره‌ی

۳ تعداد تقویت‌کننده‌ها به ۶ عدد افزایش یافته است. هر سه پوسته‌ی مخروطی دارای ابعاد و جنس

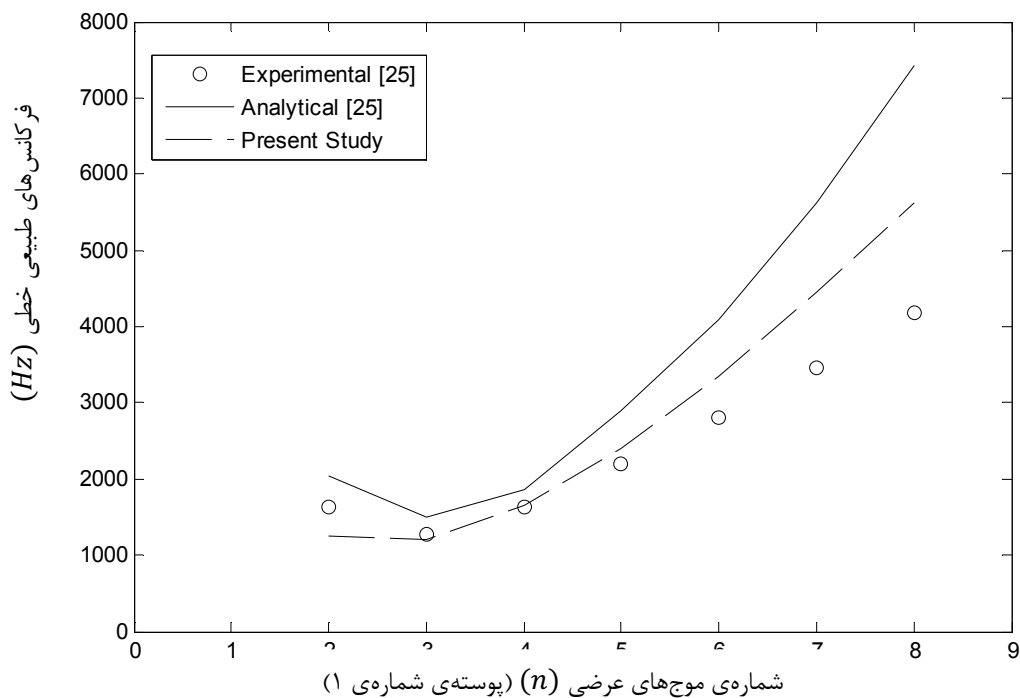
مشابه بوده و تفاوت آن‌ها تنها در تعداد رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی است. سطح مقطع رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی به ترتیب مربع و مستطیل شکل در نظر گرفته شده و فرض بر این است که بر روی سطح خارجی پوسته قرار گرفته‌اند. مشخصات هندسی و جنس پوسته‌ی مخروطی، رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی، در جدول ۳-۴ آمده است:

جدول ۳-۴ خصوصیات هندسی و جنس پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده

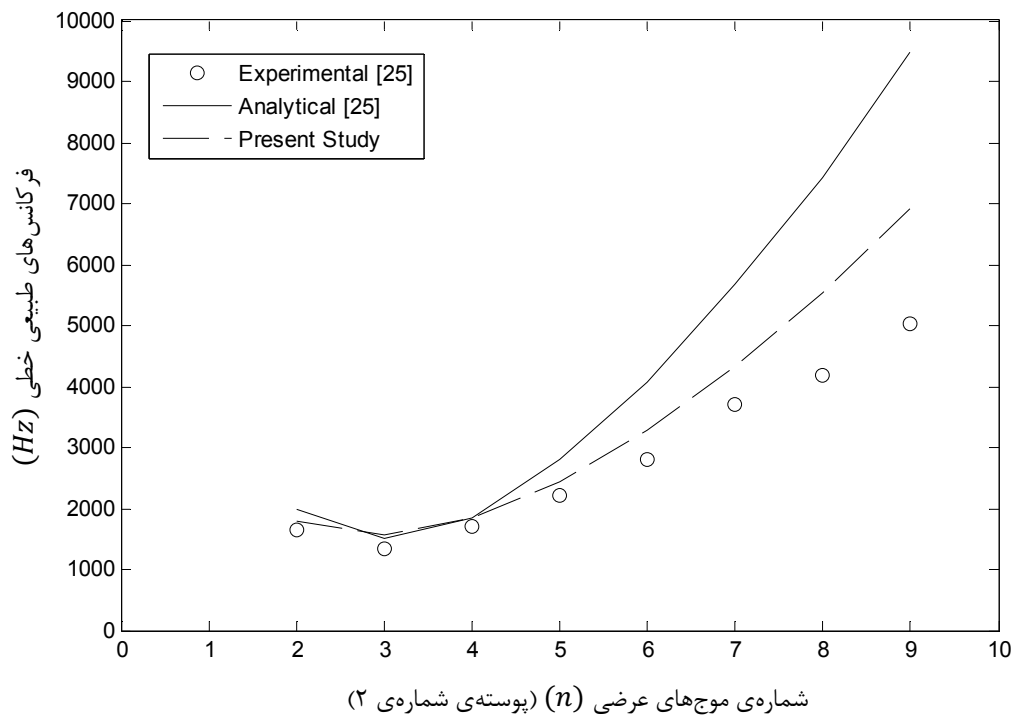
پوسته‌ی شماره ۳	پوسته‌ی شماره ۲	پوسته‌ی شماره ۱	
۰,۰۰۲۵۴	۰,۰۰۲۵۴	۰,۰۰۲۵۴	ضخامت (m)
۱۰	۱۰	۱۰	زاویه رأس (درجه)
۰,۰۸۶۹۹۵	۰,۰۸۶۹۹۵	۰,۰۸۶۹۹۵	شعاع قاعده‌ی کوچک (m)
۰,۱۳۳۳۵	۰,۱۳۳۳۵	۰,۱۳۳۳۵	شعاع قاعده‌ی بزرگ (m)
۳	۳	۳	تعداد رینگ‌ها
۶	۳	۰	تعداد تقویت‌کننده‌های طولی
۰,۲۵*۰,۲۵	۰,۲۵*۰,۲۵	۰,۲۵*۰,۲۵	مقطع رینگ‌ها
۰,۵*۰,۲۵	۰,۵*۰,۲۵	۰,۵*۰,۲۵	مقطع تقویت‌کننده‌ها
Aluminum 6061	Aluminum 6061	Aluminum 6061	جنس پوسته‌ی مخروطی
Aluminum 6061	Aluminum 6061	Aluminum 6061	جنس رینگ‌ها
Aluminum 2024	Aluminum 2024	Aluminum 2024	جنس تقویت‌کننده‌های طولی

با جایگذاری خصوصیات هندسی و فیزیکی پوسته‌ها مطابق جدول ۳-۴ در رابطه‌ی ۳-۳۶ و با در نظر گرفتن اولین مد طولی ($m = 1$)، فرکانس‌های طبیعی خطی برای هر سه نمونه پوسته محاسبه

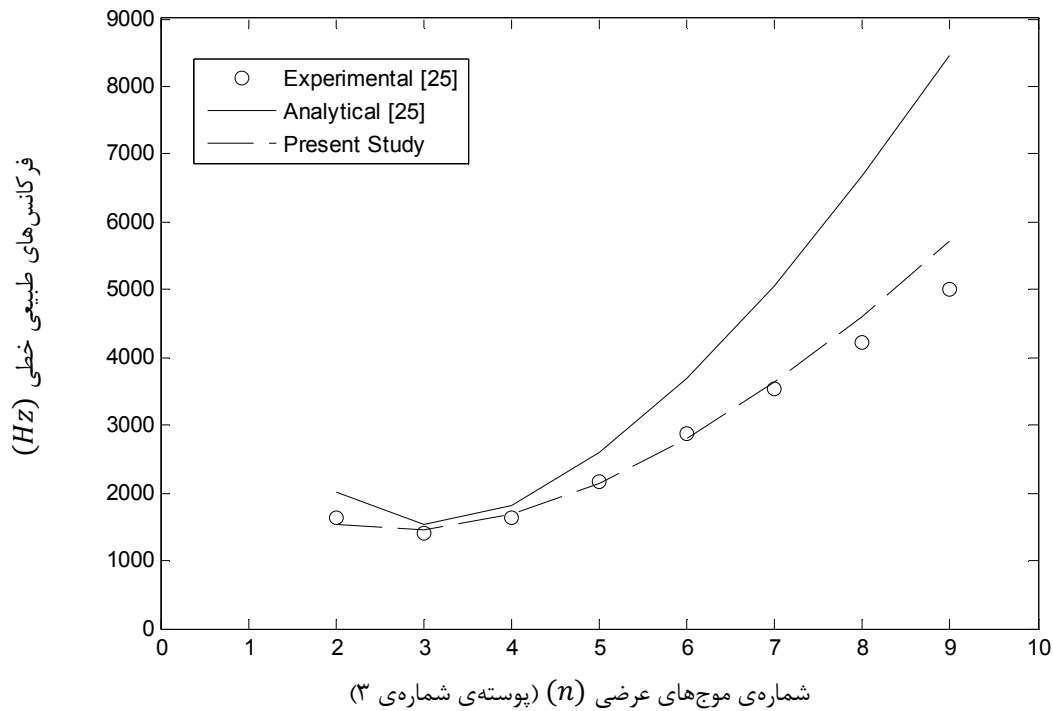
گردیده و در نمودارهای زیر با نتایج موجود تحلیلی و آزمایشگاهی موجود [۲۵] مقایسه گردیده است.



شکل ۴-۱ مقایسه فرکانس‌های طبیعی خطی پوسته شماره ۱ با نتایج موجود



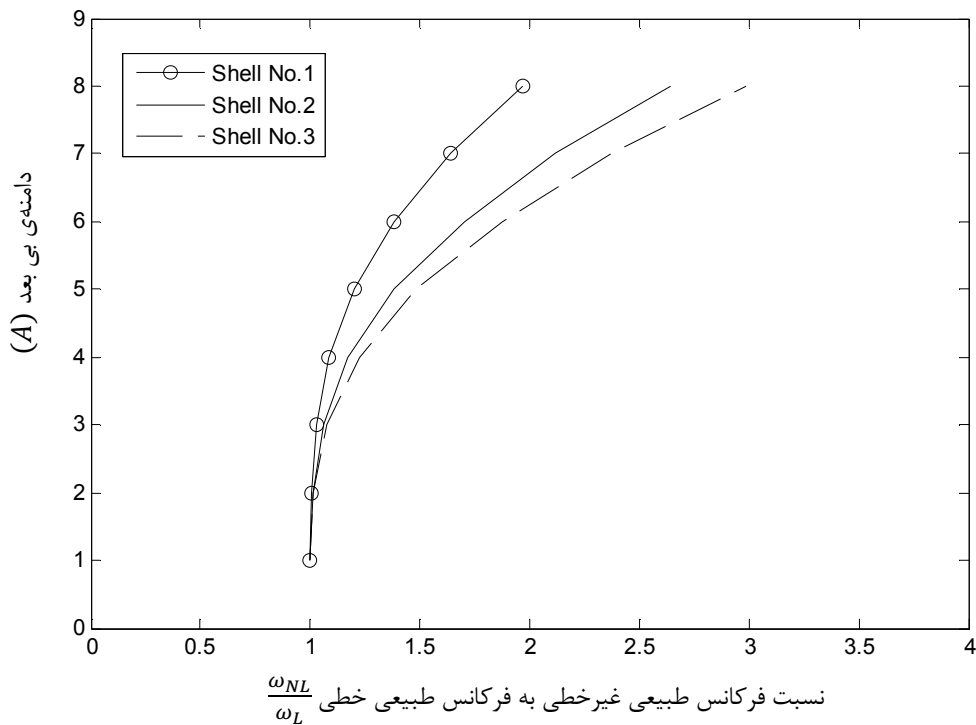
شکل ۲-۴ مقایسه فرکانس‌های طبیعی خطی پوسته شماره ۲ با نتایج موجود



شکل ۳-۴ مقایسه فرکانس‌های طبیعی خطی پوسته شماره ۳ با نتایج موجود

بررسی نمودارهای شکل ۱-۴ تا ۳-۴ نشان می‌دهد که روش به‌کاررفته در این تحقیق در مقایسه با روش ریلی-ریتز به‌کاررفته در مرجع [۲۵]، بسیار به نتایج آزمایشگاهی نزدیک‌تر است و از این حیث از دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین نتیجه‌ی دیگری که از مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل‌های تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی مشاهده می‌شود این است که نمونه‌ی واقعی با رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی مجزا (نمونه‌ی آزمایشگاهی) دارای سختی کمتری نسبت به مدل در نظر گرفته شده در این تحقیق می‌باشد.

نمودار شکل ۴-۴ تغییرات نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد^{۱۷} را برای هر سه نمونه پوسته نشان می‌دهد. در این نمونه‌ها اولین موج طولی و ششمین موج محیطی مد نظر است. ($m = 1, n = 6$)

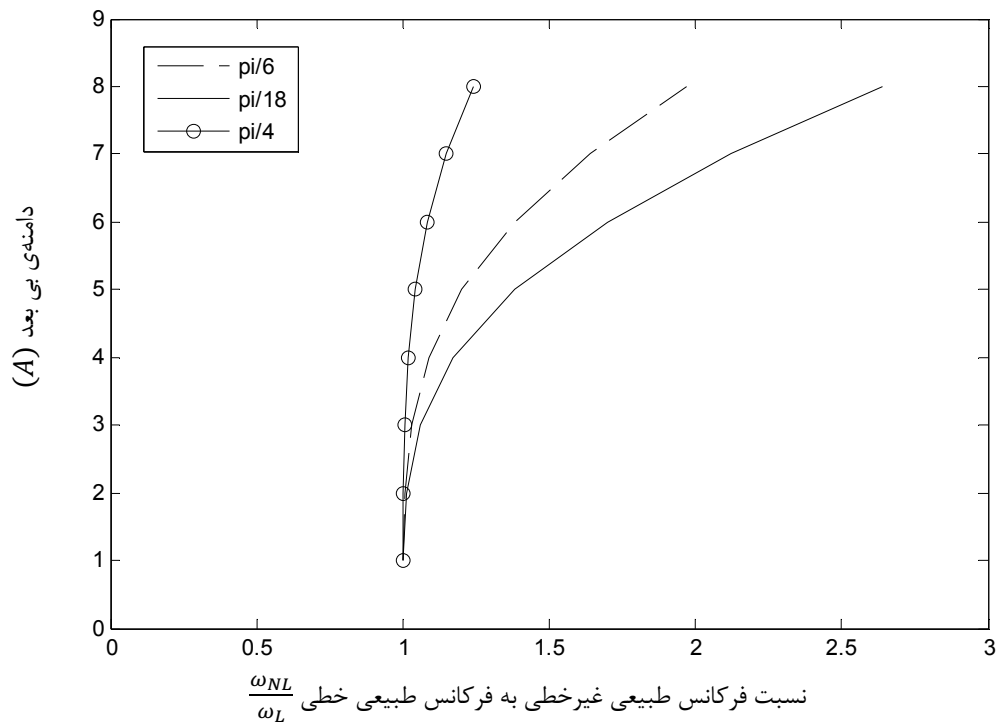


شکل ۴-۴ تغییرات نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد

نمودار شکل ۴-۴ نشان می‌دهد که افزایش نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد، با تعداد تقویت‌کننده‌های طولی نسبت مستقیم دارد.

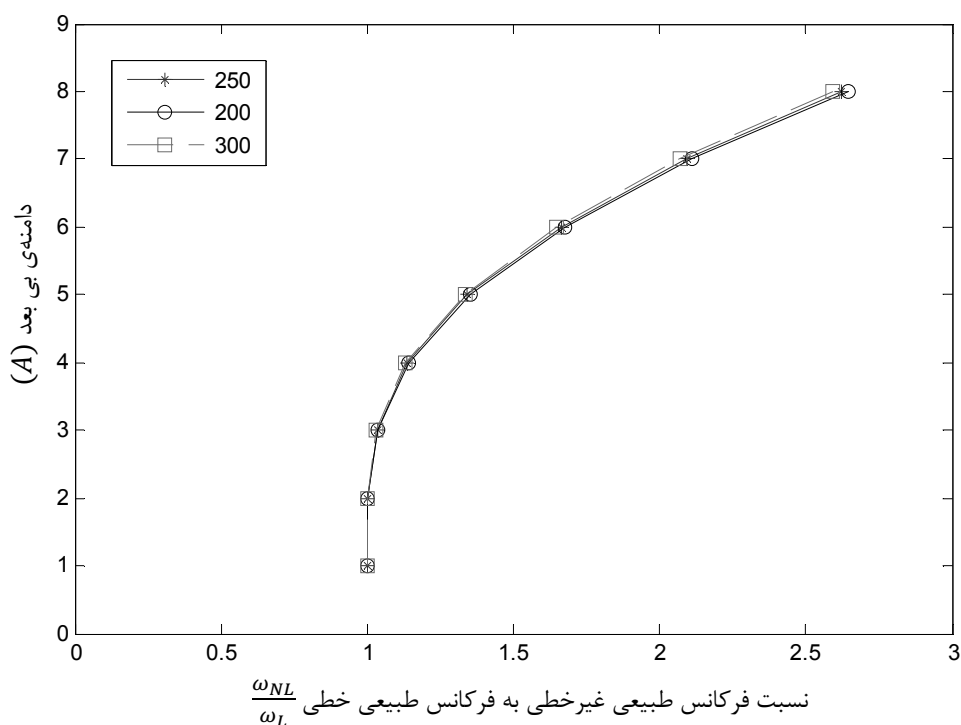
نمودار شکل ۴-۵ تغییرات نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد را به ازای زاویه‌ی رأس‌های گوناگون نشان می‌دهد. در این نمونه‌ها اولین موج طولی و ششمین موج محیطی و پوسته‌ی شماره‌ی ۲ مدنظر است. ($m = 1, n = 6$)

¹⁷ Dimensionless Amplitude



شکل ۴-۵ تغییرات نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد به ازای زوایای رأس مختلف

نمودار شکل ۴-۵ نشان می‌دهد که افزایش نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد، با زاویه رأس مخروط نسبت عکس دارد؛ به عبارت دیگر این نسبت با افزایش زاویه رأس مخروط کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۶ تغییرات نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد به ازای مقادیر

$$\frac{R_1}{h} \text{ مختلف نسبت شعاع کوچک مخروط به ضخامت}$$

نمودار شکل ۴-۶ نشان می‌دهد که افزایش نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی

با دامنه‌ی بدون بعد، با نسبت شعاع کوچک مخروط به ضخامت نسبت عکس دارد. به عبارت دیگر این

نسبت با افزایش نسبت ضخامت به شعاع کوچک مخروط افزایش می‌یابد.

فصل پنجم

تحلیل ارتعاشات اجباری و نتایج آن

۵-۱- مقدمه

در این فصل به بررسی ارتعاشات اجباری پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت‌شده با رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی می‌پردازیم. هدف از این بررسی به‌دست آوردن پاسخ فرکانسی و بررسی رفتار سیستم از نظر سخت‌شوندگی و یا نرم‌شوندگی است. بدین منظور سیستم را تحت تأثیر نیروی هارمونیک جانبی (در جهت ضخامت) به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$F = f \sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) \cos(\Omega t) \quad ۱-۵$$

در نتیجه معادله‌ی ۳-۱۲ به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\Pi = f \sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) \cos(\Omega t) \quad ۲-۵$$

با اعمال روش گالرکین (روابط ۳-۱۴ و ۳-۱۵) عبارت‌های شامل متغیرهای x و ϕ بین رفته و شکل نهایی و ناهمگن معادله‌ی ۳-۲۱ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_0 u + Q_1 u^3 + Q_2 u^5 = f_1 \cos(\Omega t) \quad ۳-۵$$

که در آن f_1 ثابت و حاصل انتگرال‌گیری گالرکین از طرف راست معادله‌ی ۲-۵ می‌باشد. برای آنکه تأثیر ترم‌های غیرخطی را بر نیروی تحریک مشاهده کنیم، ترم‌های غیرخطی و نیروی هارمونیک تحریک را در ϵ ضرب می‌کنیم تا هم‌مرتب شوند. همچنین فرض اولیه بر این است که در سیستمی با ترم‌های غیرخطی کوچک، تحریک با دامنه کوچک با پاسخ با دامنه بزرگ رابطه خواهد داشت. در رابطه فوق Q_0 مربع فرکانس طبیعی خطی را نشان می‌دهد پس خواهیم داشت: $\omega_0^2 = Q_0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_0 u + Q_1 \epsilon u^3 + Q_2 \epsilon u^5 = \epsilon f_1 \cos(\Omega t) \quad ۴-۵$$

۵-۲- رزونانس اولیه^{۱۸}

به جای استفاده از فرکانس تحریک Ω ، یک پارامتر تنظیم σ که میزان نزدیکی Ω را به ω_0 نشان می‌دهد را تعریف می‌کنیم. این تعریف این مزیت را دارد تا ترم‌هایی که در معادله حرکت سکولار یا نزدیک سکولار می‌شوند را شناسایی کنیم. بنابراین :

$$\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma \quad ۵-۵$$

پاسخ تقریبی مسأله با استفاده از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه به دست خواهد آمد. براساس این روش، پاسخ را در مقیاس‌های زمانی مختلف مانند زیر بیان می‌کنیم.

$$u(t; \epsilon) = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1) + O(\epsilon^2) \quad ۶-۵$$

که در آن $T_0 = t$ و $T_1 = \epsilon t$ است. مشتق زمانی را نیز بر حسب پارامترهای چندگانه زمانی به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \dots \quad ۷-۵$$

همچنین تحریک بر حسب T_1 و T_0 به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$F(t) = \epsilon f_1 \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad ۸-۵$$

با جایگذاری روابط ۵-۵ تا ۸-۵ در رابطه ۴-۵ و برابر قرار دادن ضرایب ϵ^0 و ϵ در دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\epsilon^0: D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad ۹-۵$$

$$\epsilon^1: D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = [f_1 \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) - 2 D_0 D_1 u_0 - Q_1 u_0^3 - Q_2 u_0^5] \quad ۱۰-۵$$

¹⁸ Primary resonances

پاسخ عمومی معادله ۹-۵ به صورت زیر خواهد بود :

$$u_0 = A(T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_2) e^{-i\omega_0 T_0} \quad ۱۱-۵$$

که در آن $A(T_2)$ یک تابع مجهول و $\bar{A}(T_2)$ مزدوج مختلط آن است که با حذف ترم‌های سکولار از u_1 به دست خواهند آمد.

با جایگذاری u_0 در رابطه ۱۰-۵ و بازنویسی $f_1 \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)$ در فرم قطبی؛ نتیجه زمانی پاسخ خصوصی خواهد داشت که ترم سکولار زیر برابر صفر باشد:

$$2 i \omega_0 D_1 A + 3 Q_1 A^2 \bar{A} + 10 Q_2 A^3 \bar{A}^2 - \frac{1}{2} f_1 \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad ۱۲-۵$$

برای حل رابطه فوق، A را در فرم قطبی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta) \quad ۱۳-۵$$

که در آن a و β حقیقی هستند. با جایگذاری رابطه ۱۳-۵ در ۱۲-۵ و جدا کردن نتیجه به دو قسمت حقیقی و موهومی خواهیم داشت:

$$a' = \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_0} (\sin(\sigma \tau_1 - \beta)) \quad ۱۴-۵$$

$$a\beta' = \frac{3 Q_1}{8 \omega_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_0} \cos(\sigma \tau_1 - \beta) + \frac{10 Q_2}{32 \omega_0} a^5$$

با جایگذاری رابطه ۱۳-۵ در ۱۱-۵ و نتیجه آن در رابطه ۶-۵ اولین تقریب به دست می‌آید:

$$u = a \cos(\omega_0 t + \beta) + O(\varepsilon) \quad ۱۵-۵$$

که در آن a و β از رابطه ۱۴-۵ به دست می‌آید.

معادلات ۱۴-۵ می‌تواند به یک سیستم خودگردان^{۱۹} تبدیل شود (که در آن T_1 به صورت صریح ظاهر نمی‌شود)، برای این منظور پارامتر γ را مانند زیر تعریف می‌کنیم:

^{۱۹} Autonomous system

$$\gamma = \sigma\tau_1 - \beta \quad ۱۶-۵$$

با جایگذاری ۱۶-۵ در ۱۴-۵ خواهیم داشت:

$$a' = \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_0} (\sin(\gamma)) \quad ۱۷-۵$$

$$a\gamma' = a\sigma - \frac{3}{8} \frac{Q_1}{\omega_0} a^3 - \frac{10}{32} \frac{Q_2}{\omega_0} a^5 + \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_0} \cos(\gamma)$$

برای مشخص کردن حل رابطه ۱۷-۵، نقطه تکین را تعیین و حرکت در همسایگی آن را مشخص می‌کنیم. از آنجایی که دامنه و فاز در نقطه تکین تغییر نمی‌کنند، پاسخ سیستم را حرکت حالت ماندگار^{۲۰} می‌گوییم.

۳-۵- حرکت حالت ماندگار

حرکت حالت ماندگار زمانی اتفاق می‌افتد که $a' = \gamma' = 0$ ، که متناسب با نقطه تکین رابطه ۱۷-۵ است. پاسخ حالت ماندگار برای رابطه ۱۷-۵ به صورت زیر خواهد بود:

$$\sin(\gamma) = 0 \quad ۱۸-۵$$

$$a\sigma - \frac{3}{8} \frac{Q_1}{\omega_0} a^3 - \frac{10}{32} \frac{Q_2}{\omega_0} a^5 = -\frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_0} \cos(\gamma)$$

پس از به توان دو رساندن دو معادله فوق و جمع آن با یکدیگر خواهیم داشت:

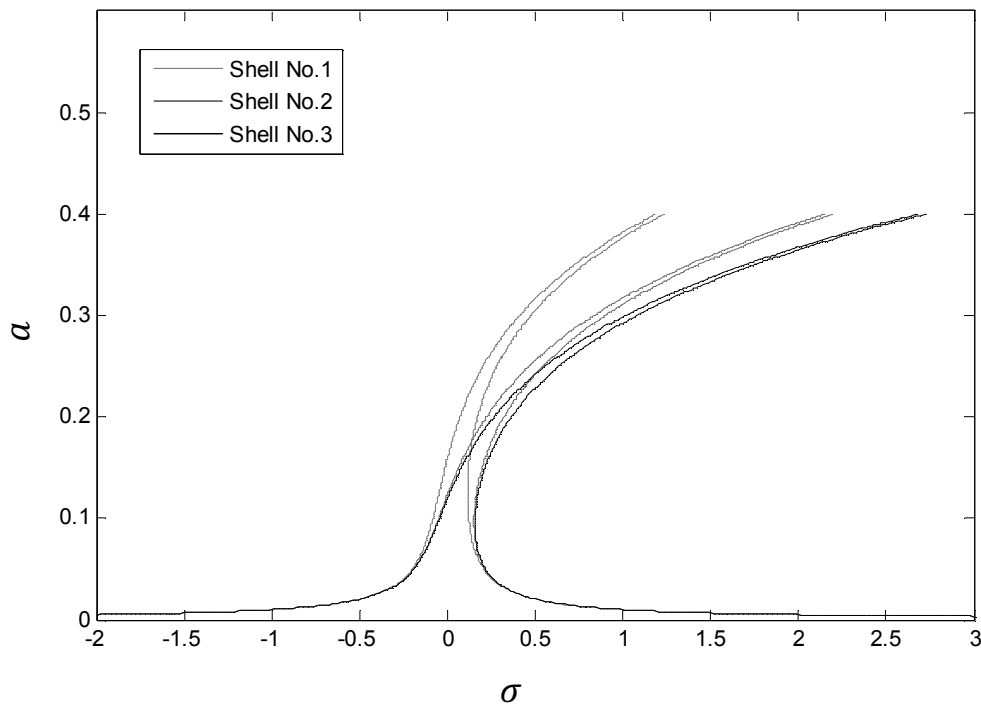
$$\left(a\sigma - \frac{3}{8} \frac{Q_1}{\omega_0} a^3 - \frac{10}{32} \frac{Q_2}{\omega_0} a^5 \right)^2 = \frac{f_1^2}{4\omega_0} \quad ۱۹-۵$$

رابطه ۱۹-۵ یک معادله ضمنی برای پاسخ a به عنوان تابعی از پارامتر تنظیم σ (یا تابعی از فرکانس تحریک) و دامنه تحریک f_1 است که معادله پاسخ فرکانسی خوانده می‌شود.

²⁰ Steady-state motion

نمودار a به عنوان تابعی از σ برای f_1 های داده شده، منحنی پاسخ فرکانسی خوانده می شود. هر نقطه در این نمودار متناظر با یک نقطه تکین در یک فضای حالت مختلف است.

در شکل زیر نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه نمونه پوسته به ازای اولین موج طولی و ششمین موج محیطی و مقدار یکسان ضریب ثابت f_1 رسم گردیده است:



شکل ۵-۱ نمودار پاسخ فرکانسی برای سه نمونه پوسته‌ی مخروطی تقویت شده

بررسی نمودار پاسخ فرکانسی در شکل ۵-۱ نشان می دهد که پوسته‌ی مخروطی تقویت شده، به صورت یک سیستم غیرخطی سخت شونده عمل می کند؛ به عبارت دیگر فرکانس تشدید با افزایش دامنه، افزایش می یابد. نکته‌ی دیگری که از بررسی نمودار فوق به دست می آید این است که افزایش تعداد تقویت کننده‌های طولی باعث افزایش میزان انحراف منحنی پاسخ فرکانسی گردیده و با افزایش تعداد تقویت کننده‌های طولی، سیستم صلب تر می گردد.

فصل ششم

نتیجہ گیری و پیشہ ادا

۶-۱- مقدمه

در این پایان‌نامه به حل ریاضی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ی مخروطی ناقص، کامپوزیت با تقویت مشبک پرداخته شد. در ابتدا، با استفاده از تئوری دائل-مشری-والسلف و روابط کرنش-جابجایی کارمن، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی سیستم استخراج گردید. این معادلات شامل دو معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی کوپل بوده که به کمک اصل هامیلتون به دست آمدند. سپس این معادلات، با در نظر گرفتن تابع تنش مناسب و استفاده از روش گالرکین غیرخطی به یک معادله دیفرانسیل بر حسب زمان تبدیل گردید که این معادله با استفاده از روش هموتوپی پرتوربیشن حل شد. برای اطمینان از دقت روش به‌کاررفته، نتایج خطی با نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه شد. این مقایسه نشان می‌دهد که روش ارائه شده در این پایان‌نامه نسبت به روش‌های موجود از دقت بسیار بالاتری برخوردار است. پس از اطمینان از دقت روش حل، تغییرات نسبت فرکانس‌های غیرخطی به خطی به ازای پارامترهای مختلف بررسی گردید. در ادامه نیروی عرضی بر پوسته وارد شد و معادله‌ی ناهمگن حاصل با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل شد و معادله‌ی پاسخ فرکانسی به دست آمد. با رسم نمودار پاسخ فرکانسی مشخص گردید که رفتار پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده به‌صورت سخت‌شونده بوده و افزایش تعداد تقویت‌کننده‌ها باعث افزایش صلبیت سیستم می‌گردد.

۶-۲- نتیجه‌گیری

نتایج این پایان‌نامه به‌صورت زیر قابل بیان است:

- نتایج حاصل از روش ارائه‌شده نسبت به روش‌های موجود از دقت بسیار بالاتری برخوردار است. (شکل ۱-۴ تا ۳-۴)
- روش ارائه‌شده در این پایان‌نامه برای بسیاری از مسائل غیرخطی به‌خصوص معادلات ضرایب متغیر، قابل استفاده است.

- با افزایش تعداد تقویت کننده‌های طولی، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد، افزایش می‌یابد. (شکل ۴-۴)
- با افزایش زاویه رأس مخروط، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد، کاهش می‌یابد. (شکل ۵-۴)
- با افزایش نسبت شعاع کوچک مخروط به ضخامت، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی با دامنه‌ی بدون بعد، کاهش می‌یابد. (شکل ۶-۴)
- پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت شده، رفتار سخت‌شونده از خود نشان می‌دهد.
- افزایش تعداد تقویت کننده‌های طولی، باعث انحراف بیشتر نمودار پاسخ فرکانسی شده که بیانگر افزایش صلبیت سیستم است.

۳-۶- پیشنهادها

جهت انجام مطالعه‌ی جامع‌تر در زمینه‌ی جاری، موارد زیر قابل بررسی هستند:

- استفاده از تئوری‌های دیگر پوسته‌ها
- در نظر گرفتن و بررسی اثر اینرسی‌های صفحه‌ای، ممان‌های چرخشی و برش در صفحه
- در نظر گرفتن ماده به صورت FG
- در نظر گرفتن ماده به صورت ویسکوالاستیک
- در نظر گرفتن تقویت کننده‌های مارپیچ (تقویت مشبک پیشرفته)
- بررسی پدیده‌هایی از قبیل تشدید ساب‌هارمونیک، سوپرهارمونیک و ...

پوستہ

بيوست الف - ضرايب Λ_i و T_i و K_i

$$K_{11} = (B_{11}\beta_1^2\beta_2^2 + B_{22}\beta_1^2\beta_2^2 + B_{12} - 2B_{12}\beta_2^2 + B_{12}\beta_2^4 + B_{21}\beta_1^4 + B_{21}\beta_1^2 + B_{12}\beta_1^2)$$

$$K_{12} = \beta_1(-\beta_2^2 + 1 + \beta_1^2)(-B_{22} + B_{11}) \quad K_{31} = -\frac{1}{2}(4B_{21}\beta_1^2 + B_{12})$$

$$K_{41} = \beta_1(-B_{22} + B_{11}) \quad K_{161} = \frac{1}{2}B_{12}$$

$$K_{92} = -\beta_1 \quad K_{102} = \beta_1^2$$

$$K_{91} = \frac{1}{2}\beta_1(\beta_2^2 - \beta_1^2 - 1.5) \quad K_{101} = -\beta_1^2\left(\beta_2^2 - \frac{3}{4}\right)$$

$$K_{111} = -\frac{1}{2}\beta_2^2\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_1^3 + \frac{3}{4}\beta_1 \quad K_{121} = \beta_2^2\beta_1^2 - \frac{9}{4}\beta_1^2$$

$$K_{51} = -\beta_1^2 \quad K_{61} = -\frac{1}{2}\beta_1$$

$$K_{52} = \frac{1}{2}\beta_1^2\beta_2^2 - \frac{1}{2}\beta_1^2 \quad K_{62} = \frac{1}{4}\beta_1^3 - \frac{1}{4}\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_2^2\beta_1$$

$$K_{53} = -2\beta_1^2 \quad K_{63} = -\beta_1$$

$$K_{71} = \frac{1}{2}\beta_1^2 \quad K_{81} = -\frac{1}{4}\beta_2^2\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_1^3 + \frac{1}{4}\beta_1$$

$$K_{151} = \frac{1}{2}\beta_1^2\beta_2^2 \quad K_{131} = \beta_1^2$$

$$K_{141} = \frac{1}{4}\beta_1 - \beta_1^3$$

$$T_1 = (A_{11} + A_{11}\beta_1^2 + 2(A_{12} + A_{66})\beta_1^2\beta_2^2 + A_{22}\beta_1^4 + A_{22}\beta_1^2 + A_{11}\beta_2^4 - 2A_{11}\beta_2^2)$$

$$T_3 = (4A_{22}\beta_1^2 + A_{11}) \quad T_{16} = A_{11}$$

$$T_5 = 4A_{11}\beta_1^2 + 16A_{22}\beta_1^4 - 20A_{22}\beta_1^2 \quad T_6 = 32A_{22}\beta_1^3 + 4A_{11}\beta_1 - 4A_{22}\beta_1$$

$$T_7 = 4A_{11}\beta_1^2 + 32A_{12}\beta_2^2\beta_1^2 + 16A_{22}\beta_1^4 - 20A_{22}\beta_1^2 + 16A_{11}\beta_2^4 - 8A_{11}\beta_2^2 - 8A_{12}\beta_2^2 + 32A_{66}\beta_1^2\beta_2^2 - 8A_{66}\beta_2^2$$

$$T_8 = 32A_{22}\beta_1^3 + 32A_{12}\beta_1\beta_2^2 + 4A_{11}\beta_1 - 4A_{22}\beta_1 + 32A_{66}\beta_1\beta_2^2$$

$$T_9 = A_{11}\beta_1^2 + 2A_{12}\beta_1^2\beta_2^2 + A_{22}\beta_1^4 - 5A_{22}\beta_1^2 + A_{11}\beta_2^4 - 2A_{11}\beta_2^2 - 2A_{12}\beta_2^2 - 2A_{66}\beta_2^2 + 2A_{66}\beta_1^2\beta_2^2$$

$$T_{10} = 4A_{22}\beta_1^3 + 4A_{12}\beta_1\beta_2^2 + 2A_{11}\beta_1 - 2A_{22}\beta_1 + 4A_{66}\beta_1\beta_2^2$$

$$T_{11} = 9 A_{11} \beta_1^2 + 18 A_{12} \beta_2^2 \beta_1^2 + 81 A_{22} \beta_1^4 - 45 A_{22} \beta_1^2 + A_{11} \beta_2^4 - 2 A_{11} \beta_2^2 - 2 A_{12} \beta_2^2 + 18 A_{66} \beta_2^2 \beta_1^2 - 2 A_{66} \beta_2^2$$

$$T_{12} = 108 A_{22} \beta_1^3 + 12 A_{12} \beta_1 \beta_2^2 + 6 A_{11} \beta_1 - 6 A_{22} \beta_1 + 12 A_{66} \beta_1 \beta_2^2$$

$$T_{14} = 8 A_{11} \beta_1 + 256 A_{22} \beta_1^3 - 8 A_{22} \beta_1$$

$$T_{13} = 16 A_{11} \beta_1^2 + 256 A_{22} \beta_1^4 - 80 A_{22} \beta_1^2$$

$$T_{15} = 16 A_{11} \beta_2^4 - 8 A_{11} \beta_2^2 - 8 A_{12} \beta_2^2 - 8 A_{66} \beta_2^2$$

$$K_{151} = \frac{1}{2} \beta_1^2 \beta_2^2 \qquad K_{131} = \beta_1^2$$

$$K_{141} = \frac{1}{4} \beta_1 - \beta_1^3$$

$$\Lambda_1 = \frac{K_{11}}{T_1}$$

$$\Lambda_2 = \frac{K_{12}}{T_1}$$

$$\Lambda_3 = \frac{K_{31}}{T_3}$$

$$\Lambda_4 = \frac{K_{41}}{T_3}$$

$$\Lambda_{51} = \frac{K_{51} T_5 - K_{61} T_6}{T_5^2 + T_6^2}$$

$$\Lambda_{52} = \frac{K_{52} T_5 - K_{62} T_6}{T_5^2 + T_6^2}$$

$$\Lambda_{53} = \frac{K_{53} T_6 + K_{63} T_5}{T_5^2 + T_6^2} S_1 \cot(\alpha)$$

$$\Lambda_{61} = \frac{K_{51} T_6 + K_{61} T_5}{T_5^2 + T_6^2}$$

$$\Lambda_{62} = \frac{K_{52} T_6 + K_{62} T_5}{T_5^2 + T_6^2}$$

$$\Lambda_{63} = \frac{K_{53} T_6 + K_{63} T_5}{T_5^2 + T_6^2} S_1 \cot(\alpha)$$

$$\Lambda_7 = \frac{K_{71} T_7 - K_{81} T_8}{T_7^2 + T_8^2}$$

$$\Lambda_8 = \frac{K_{71} T_8 + K_{81} T_7}{T_7^2 + T_8^2}$$

$$\Lambda_{91} = \frac{K_{91} T_9 - K_{101} T_{10}}{T_9^2 + T_{10}^2}$$

$$\Lambda_{92} = \frac{K_{92} T_9 - K_{102} T_{10}}{T_9^2 + T_{10}^2} S_1 \cot(\alpha)$$

$$\Lambda_{101} = \frac{K_{91} T_{10} + K_{101} T_9}{T_9^2 + T_{10}^2}$$

$$\Lambda_{102} = \frac{K_{92} T_{10} + K_{102} T_9}{T_9^2 + T_{10}^2} S_1 \cot(\alpha)$$

$$\Lambda_{11} = \frac{K_{111} T_{11} - K_{121} T_{12}}{T_{11}^2 + T_{12}^2}$$

$$\Lambda_{12} = \frac{K_{111} T_{12} + K_{121} T_{11}}{T_{11}^2 + T_{12}^2}$$

$$\Lambda_{13} = \frac{K_{131} T_{13} - K_{141} T_{14}}{T_{13}^2 + T_{14}^2}$$

$$\Lambda_{14} = \frac{K_{131} T_{14} + K_{141} T_{13}}{T_{13}^2 + T_{14}^2}$$

$$\Lambda_{15} = \frac{K_{151}}{T_{15}}$$

$$\Lambda_{16} = \frac{K_{161}}{T_{16}}$$

که در آنها:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{D_{sh} + D_r}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 A_{12} &= \frac{D_{sh} v_{sh}}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2}, A_{12} = A_{21} \\
 A_{22} &= \frac{D_{sh} + D_{st}}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 A_{66} &= -\frac{1}{(v_{sh} - 1) D_{sh}} \\
 B_{11} &= \frac{(D_{sh} + D_r) S_{st}}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 B_{12} &= -\frac{D_{sh} v_{sh} S_r}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 B_{21} &= -\frac{D_{sh} v_{sh} S_{st}}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 B_{22} &= \frac{(D_{sh} + D_{st}) S_r}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 C_{11} &= -\frac{(D_{sh} + D_r) S_{st}}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 C_{12} &= \frac{D_{sh} v_{sh} S_{st}}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 C_{21} &= \frac{D_{sh} v_{sh} S_r}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 C_{22} &= -\frac{(D_{sh} + D_{st}) S_r}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 D_{11} &= K_{sh} + K_{st} - \frac{(D_{sh} + D_r) S_{st}^2}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 D_{12} &= K_{sh} v_{sh} + \frac{D_{sh} v_{sh} S_{st} S_r}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2}, D_{12} = D_{21} \\
 D_{22} &= K_{sh} + K_r - \frac{(D_{sh} + D_{st}) S_r^2}{D_{sh}^2 + D_{sh} D_r + D_{st} D_{sh} + D_{st} D_r - v_{sh}^2 D_{sh}^2} \\
 D_{66} &= 2 K_{sh} (1 - v_{sh}) + T_r + T_{st}
 \end{aligned}$$

$$D_{sh} = \frac{E_{sh} A_{sh}}{1 - \nu_{sh}^2}$$

$$D_r = \frac{E_r A_r}{b_r}$$

$$K_r = \frac{E_r A_r (I_r^2 + C_r^2)}{b_r}$$

$$K_{st} = \frac{E_{st} A_{st} (I_{st}^2 + C_{st}^2)}{b_{st}}$$

$$S_{st} = \frac{E_{st} A_{st} C_{st}}{b_{st}}$$

$$\rho_t = \frac{m_r}{b_r} + m_{sh} + \frac{m_{st}}{b_{st}}$$

$$K_{sh} = \frac{E_{sh} h_{sh}^3}{12 (1 - \nu_{sh}^2)}$$

$$S_r = \frac{E_r A_r C_r}{b_r}$$

$$T_r = \frac{G_r J_r}{b_r}$$

$$D_{st} = \frac{E_{st} A_{st}}{b_{st}}$$

$$T_{st} = \frac{G_{st} J_{st}}{b_{st}}$$

پیوست ب - ضرایب C_{ij}

$$C_1 = -\frac{1}{12} \frac{\left(e^{\frac{6m\pi}{\beta_1}} - 1 \right) h \rho_t S_1^4 \beta_1^4 n \pi}{(\beta_1^2 + 9)\beta_2}$$

$$C_6 = -\frac{1}{2} \frac{\left(e^{\frac{6m\pi}{\beta_1}} - 1 \right) h \rho_t S_1^4 \beta_1^4 n \pi}{(9 + 4\beta_1^2)(\beta_1^2 + 9)\beta_2}$$

$$C_{10} = \frac{1}{(9\beta_1^6 + 49\beta_1^4 + 56\beta_1^2 + 16)\beta_2} \left(9 \left(-\frac{3}{2} \Lambda_{14} + \Lambda_{61} \right) \beta_1^5 \right. \\ \left. + \left(\frac{13}{3} \Lambda_{13} + \frac{1}{2} \Lambda_{51} \right) \beta_1^4 + \left(\frac{49}{36} \Lambda_{61} + \frac{139}{72} \Lambda_{14} \right) \beta_1^3 + \left(\frac{7}{9} \Lambda_{51} + \frac{137}{72} \Lambda_{13} \right) \beta_1^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{13}{18} \Lambda_{14} + \frac{13}{36} \Lambda_{61} \right) \beta_1 + \frac{5}{18} \Lambda_{13} + \frac{5}{18} \Lambda_{51} \right) \beta_1^4 n \pi \left(e^{\frac{4m\pi}{\beta_1}} - 1 \right)$$

$$C_{11} = \frac{1}{(576\beta_1^{10} + 4756\beta_1^8 + 13133\beta_1^6 + 15073\beta_1^4 + 7416\beta_1^2 + 1296)\beta_2} \\ (36 \left(\beta_1^2 + \frac{9}{4} \right) \pi n \beta_1^3 \left(\beta_1^2 + \frac{9}{16} \right) \left(e^{\frac{4m\pi}{\beta_1}} - 1 \right) \left((-6\Lambda_{11} + 16\Lambda_{62} + 2\Lambda_{91}) \beta_1^6 \right. \\ \left. + \left((\Lambda_{12} + \Lambda_{101}) \beta_2^2 - \frac{5}{2} \Lambda_{101} + 8\Lambda_{52} - \frac{33}{2} \Lambda_{12} \right) \beta_1^5 \right. \\ \left. + \left(-\frac{13}{3} \Lambda_{12} + \frac{13}{9} \Lambda_{101} \right) \beta_2^2 \right. \\ \left. + \left(\left(-\frac{11}{3} \Lambda_{11} - \Lambda_{91} \right) \beta_2^2 + \frac{196}{9} \Lambda_{62} + \frac{10}{3} \Lambda_{11} + \frac{53}{9} \Lambda_{91} \right) \beta_1^4 + \frac{112}{9} \Lambda_{52} \right. \\ \left. - \frac{89}{6} \Lambda_{12} - \frac{65}{18} \Lambda_{101} \right) \beta_1^3 \\ \left. + \left(\left(\frac{23}{9} \Lambda_{11} - \frac{13}{9} \Lambda_{91} \right) \beta_2^2 + \frac{47}{9} \Lambda_{91} + \frac{17}{3} \Lambda_{11} + \frac{52}{9} \Lambda_{62} \right) \beta_1^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left(\frac{4}{3} \Lambda_{12} + \frac{4}{9} \Lambda_{101} \right) \beta_2^2 + \frac{40}{9} \Lambda_{52} - \frac{10}{3} \Lambda_{12} - \frac{10}{9} \Lambda_{101} \right) \beta_1 \\
& - \frac{4}{9} (\beta_2^2 - 3)(\Lambda_{91} + \Lambda_{11})) \\
C_4 = & - \frac{9}{8(9\beta_1^6 + 49\beta_1^4 + 56\beta_1^2 + 16)\beta_2} (\pi n \left(e^{\frac{4\pi m}{\beta_1}} - 1 \right) \\
& \left(\left(\frac{15}{2} \Lambda_{11} - 3\Lambda_{61} - \frac{3}{2} \Lambda_{91} \right) \beta_1^7 \right. \\
& + \left((-2\Lambda_{51} - \Lambda_{101} + \Lambda_{12})\beta_2^2 + \frac{51}{4} \Lambda_{12} + 4\Lambda_{51} - 12\Lambda_{13} + \frac{19}{4} \Lambda_{101} \right) \beta_1^6 \\
& + \left(\left(-\frac{1}{2} \Lambda_{91} + \frac{16}{3} \Lambda_{14} - 3\Lambda_{61} - \frac{13}{6} \Lambda_{11} \right) \beta_2^2 + \frac{43}{3} \Lambda_{11} - \frac{98}{3} \Lambda_{14} + \frac{17}{6} \Lambda_{91} \right. \\
& \quad \left. - \frac{28}{3} \Lambda_{61} \right) \beta_1^5 \\
& + \left(\left(\frac{1}{18} \Lambda_{101} + \frac{5}{6} \Lambda_{12} - \frac{140}{9} \Lambda_{13} - \frac{44}{9} \Lambda_{51} \right) \beta_2^2 + \frac{193}{36} \Lambda_{101} + \frac{70}{9} \Lambda_{13} + \frac{185}{12} \Lambda_{12} \right. \\
& \quad \left. + \frac{70}{9} \Lambda_{51} \right) \beta_1^4 \\
& + \left(\left(\frac{20}{9} (\Lambda_{11} - \Lambda_{91}) - \frac{13}{3} \Lambda_{61} - \frac{22}{3} \Lambda_{14} \right) \beta_2^2 - \frac{214}{9} \Lambda_{14} + \frac{145}{18} \Lambda_{91} - \frac{77}{9} \Lambda_{61} \right. \\
& \quad \left. + \frac{205}{18} \Lambda_{11} \right) \beta_1^3 \\
& + \left(\left(\frac{2}{9} \Lambda_{101} - \frac{34}{9} \Lambda_{51} + \frac{2}{3} \Lambda_{12} - \frac{58}{9} \Lambda_{13} \right) \beta_2^2 + \frac{13}{3} \Lambda_{12} + \frac{22}{3} \Lambda_{13} + \frac{13}{9} \Lambda_{101} \right. \\
& \quad \left. + \frac{14}{3} \Lambda_{51} \right) \beta_1^2 \\
& + \left(\left(-\frac{8}{9} \Lambda_{11} - \frac{8}{9} \Lambda_{91} - \frac{4}{3} \Lambda_{61} - \frac{8}{3} \Lambda_{14} \right) \beta_2^2 + \frac{26}{9} \Lambda_{11} - \frac{20}{9} \Lambda_{61} - \frac{40}{9} \Lambda_{14} \right. \\
& \quad \left. + \frac{26}{9} \Lambda_{91} \right) \beta_1 \\
& - \frac{8}{9} (\beta_2 - 1)(\beta_2 + 1)(\Lambda_{51} + \Lambda_{13}) \beta_1^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_5 = & -\frac{1}{(4\beta_1^6 + 29\beta_1^4 + 61\beta_1^2 + 36)\beta_2} \left(\pi \left(\frac{9}{4} + \beta_1^2 \right) \left(-\frac{3}{2} \Lambda_{62} + \frac{3}{4} \Lambda_8 \right) \beta_1^5 \right. \\
& + \left((-\Lambda_7 - \Lambda_{52} + \Lambda_{15}) \beta_2^2 - \Lambda_7 - \frac{1}{2} \Lambda_{15} 2\Lambda_{52} \right) \beta_1^4 \\
& + \left(\left(-\frac{3}{2} \Lambda_{62} - \frac{7}{4} \Lambda_8 \right) \beta_2^2 - 4\Lambda_{62} + 2\Lambda_8 \right) \beta_1^3 \\
& + \left(\left(\frac{3}{2} \Lambda_{15} - 2\Lambda_{52} - 2\Lambda_7 \right) \beta_2^2 - \Lambda_{15} + 3\Lambda_{52} - \frac{3}{2} \Lambda_7 \right) \beta_1^2 + \left(-\frac{13}{4} \Lambda_8 - \frac{3}{2} \Lambda_{62} \right) \beta_2^2 \\
& - \frac{5}{2} \Lambda_{62} + \frac{5}{4} \Lambda_8 \beta_1 + \frac{1}{2} (\beta_2 - 1)(\beta_2 + 1)(\Lambda_7 - 2\Lambda_{52} + \Lambda_{15}) \left(e^{\frac{4\pi m}{\beta_1}} - 1 \right) \beta_1^2 n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_7 = & \frac{1}{(576\beta_1^{10} + 4756\beta_1^8 + 13133\beta_1^6 + 15073\beta_1^4 + 7416\beta_1^2 + 1296)\beta_2 \sin(\alpha)} \\
& (288n \left(\beta_1^2 + \frac{4}{9} \right) \left(\beta_1^2 + \frac{9}{16} \right) \left((8C_{12}\Lambda_3 + 4D_{11})\beta_1^4 - 4\Lambda_4(C_{11} - 3C_{12} - C_{22})\beta_1^3 \right. \\
& + \left. \left((6(C_{11} - C_{22}) + 2C_{21} - 4C_{12})\Lambda_3 - 2D_{11} + D_{22} \right) \beta_1^2 \right. \\
& + \left. 2 \left(\frac{3}{2} C_{21} + C_{11} - C_{22} \right) \Lambda_4 \beta_1 \right. \\
& - \left. C_{21}(\Lambda_3 + \Lambda_{16}) \right) \left(\beta_1^2 + 4 \right) \left(\beta_1^2 + \frac{9}{4} \right) \sin(\alpha) e^{\frac{2m\pi}{\beta_1}} + \frac{16}{3} \left(\beta_1^5 C_{12} \Lambda_{53} \right. \\
& - \frac{1}{2} \left(-C_{22} - \frac{1}{2} C_{12} + C_{11} \right) \Lambda_{63} \beta_1^4 + \frac{3}{8} \left(\frac{2}{3} C_{21} - C_{22} + \frac{17}{3} C_{12} + C_{11} \right) \Lambda_{53} \beta_1^3 \\
& - \frac{7}{8} \left(-C_{22} - \frac{5}{14} C_{21} + \frac{5}{14} C_{12} + C_{11} \right) \Lambda_{63} \beta_1^2 \\
& + \frac{9}{32} \Lambda_{53} (-C_{22} + C_{21} + 3C_{12} + C_{11}) \beta_1 - \frac{9}{32} \Lambda_{63} (-C_{22} + C_{11} + C_{12} - C_{21}) \sin(\alpha) \\
& - \frac{1}{4} \left(\left(\frac{7}{4} \beta_1^2 + \frac{9}{16} \right) \Lambda_4 + \beta_1^3 \Lambda_3 \right) S_1 \cos(\alpha) \beta_1 (\beta_1^2 + 4) (\beta_1^2 + 1) e^{\frac{3m\pi}{\beta_1}} - \left(\beta_1^2 - \frac{9}{16} \right) \\
& \left(\beta_1^2 \Lambda_{53} + \frac{3}{2} \beta_1 \Lambda_{63} + \Lambda_{53} \right) S_1 \cos(\alpha) \left(\beta_1^2 + \frac{9}{4} \right) (\beta_1^2 + 1) e^{\frac{4m\pi}{\beta_1}} - (\beta_1^2 + 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{16}{3} \Lambda_{53} C_{12} + 8 C_{12} \Lambda_3 + 4 D_{11} \right) \beta_1^8 + \left(-\frac{8}{3} (C_{11} - C_{22}) + \frac{4}{3} C_{12} \right) \Lambda_{63} \\
& - 4 \Lambda_4 \beta_1^7 (C_{11} - 3 C_{12} - C_{22}) \\
& + \left(\frac{50}{3} C_{12} + 2(C_{11} - C_{22}) + \frac{4}{3} C_{21} \right) \Lambda_{53} + \left(\frac{37}{2} C_{12} - 6(C_{22} - C_{11}) + 2 C_{21} \right) \Lambda_3 \\
& + D_{22} + \frac{37}{4} D_{11} \beta_1^6 + \left(-\frac{22}{3} (C_{11} - C_{22}) - \frac{1}{3} C_{12} + \frac{5}{3} C_{21} \right) \Lambda_{63} - \frac{37}{4} \Lambda_4 (-C_{22} \\
& - \frac{135}{37} C_{12} + C_{11} - \frac{12}{37} C_{21}) \beta_1^5 + \left(\frac{17}{6} C_{21} + \frac{95}{6} C_{12} + \frac{7}{2} (C_{11} - C_{22}) \right) \Lambda_{53} \\
& + \left(\frac{135}{8} (C_{11} - C_{22}) + \frac{37}{8} C_{21} - \frac{9}{8} C_{12} \right) \Lambda_3 \\
& + \frac{45}{16} D_{22} - \frac{9}{16} D_{11} - C_{21} \Lambda_{16} \beta_1^4 + \left(\frac{19}{6} C_{21} + \frac{37}{6} C_{22} - \frac{37}{6} C_{11} - \frac{19}{6} C_{12} \right) \Lambda_{63} \\
& + \frac{9}{16} \Lambda_4 (15 C_{21} + 27 C_{12} - C_{22} + C_{11}) \beta_1^3 + \left(\frac{3}{2} C_{11} + \frac{9}{2} C_{12} + \frac{3}{2} C_{21} - \frac{3}{2} C_{22} \right) \Lambda_{53} \\
& + \left(-\frac{243}{32} C_{22} + \frac{243}{32} C_{11} - \frac{9}{32} C_{21} - \frac{81}{16} C_{12} \right) \Lambda_3 - \frac{81}{32} D_{11} + \frac{81}{64} D_{22} - \frac{45}{16} C_{21} \Lambda_{16} \beta_1^2 \\
& + \left(\left(\frac{3}{2} (C_{21} + C_{22} - C_{11} - C_{12}) \right) \Lambda_{63} + \frac{81}{32} \left(\frac{3}{2} C_{21} + C_{11} - C_{22} \right) \Lambda_4 \right) \beta_1 \\
& - \frac{81}{64} C_{21} (\Lambda_3 + \Lambda_{16}) \sin(\alpha) + \frac{4}{3} S_1 \cos(\alpha) \left((\Lambda_3 + \frac{3}{4} \Lambda_{53}) \beta_1^6 + \left(\frac{7}{4} \Lambda_4 + \frac{9}{8} \Lambda_{63} \right) \beta_1^5 \right. \\
& \left. + \left(\frac{183}{64} \Lambda_{53} + 4 \Lambda_3 \right) \beta_1^4 + \left(\frac{121}{16} \Lambda_4 + \frac{405}{128} \Lambda_{63} \right) \beta_1^3 + \frac{783}{256} \beta_1^2 \Lambda_{53} \right. \\
& \left. + \left(\frac{729}{512} \Lambda_{63} + \frac{9}{4} \Lambda_4 \right) \beta_1 + \frac{243}{256} \Lambda_{53} \right) (\beta_1^2 + 1) \beta_1^2 \pi) \\
C_2 = & - \frac{1}{(4 \beta_1^6 + 29 \beta_1^4 + 61 \beta_1^2 + 36) \beta_2 \sin(\alpha)} (2 (\beta_1^2 + 4) n \beta_1 \pi (\sin(\alpha) \left(\beta_1^2 + \frac{9}{4} \right) \\
& \left(\frac{1}{2} D_{11} - \frac{1}{2} C_{12} \Lambda_1 \right) \beta_1^5 - \frac{1}{2} \Lambda_2 (-C_{22} + C_{11} - C_{12}) \beta_1^4 \\
& + \left(\left(-\frac{1}{2} C_{11} - \frac{1}{2} C_{22} \right) \Lambda_1 + D_{12} + D_{66} \right) \beta_2^2 - \frac{1}{2} \Lambda_1 C_{21} \\
& + \left(-\frac{1}{2} C_{11} - \frac{1}{2} C_{12} + \frac{1}{2} C_{22} \right) \Lambda_1 + \frac{1}{2} D_{11} + \frac{1}{2} D_{22} \beta_1^3 + \Lambda_2 \left(\frac{1}{2} (C_{21} + C_{12}) + \beta_2^2 C_{11} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} C_{22} - \frac{1}{2} C_{11}) \beta_1^2 + \frac{1}{2} (\beta_2 - 1) ((D_{22} - \Lambda_1 C_{21}) \beta_2^2 + (C_{11} - C_{22} + C_{21}) \Lambda_1 - D_{22}) \beta_1 \\
& (\beta_2 + 1) + \frac{1}{2} C_{21} \Lambda_2 (\beta_2 - 1)^2 (\beta_2 + 1)^2 e^{\frac{2m\pi}{\beta_1}} - \frac{1}{3} (\beta_1^2 + 1) ((C_{12} \beta_1^5 \Lambda_{102} \\
& + \Lambda_{92} (\frac{5}{2} C_{12} + C_{11} - C_{22}) \beta_1^4 \\
& + \left((C_{11} + C_{22}) \beta_2^2 + C_{12} + C_{21} + \frac{3}{2} C_{22} - \frac{3}{2} C_{11} \right) \Lambda_{102} \beta_1^3 - \frac{1}{2} \Lambda_{92} ((C_{11} - 3 C_{22}) \beta_2^2 \\
& - C_{21} + 5 C_{22} - 5 C_{11} - 11 C_{12}) \beta_1^2 + (C_{21} \beta_2^4 + \left(\frac{3}{2} C_{11} - 2 C_{21} + \frac{5}{2} C_{22} \right) \beta_2^2 + 3 C_{21} \\
& - 3 C_{12} + 3 (C_{22} - C_{11})) \Lambda_{102} \beta_1 - \frac{3}{2} \beta_2^2 \Lambda_{92} (C_{21} \beta_2^2 - 2 (C_{22} + C_{21}))) \sin(\alpha) \\
& - ((\beta_1^2 + \frac{3}{2}) \Lambda_1 - \frac{1}{2} \beta_1 \Lambda_2) \\
& S_1 \cos(\alpha) \beta_1) e^{\frac{3m\pi}{\beta_1}} + \frac{1}{4} S_1 \cos(\alpha) (\beta_1^2 + 1) \left(\beta_1^2 + \frac{4}{9} \right) (\Lambda_{102} \beta_1 + \Lambda_{92}) e^{\frac{4m\pi}{\beta_1}} \\
& + \left(-\frac{1}{2} D_{11} + \frac{1}{3} \Lambda_{102} C_{12} + \frac{1}{2} C_{12} \Lambda_1 \right) \beta_1^7 \\
& + \left(-\frac{1}{3} C_{22} + \frac{5}{6} C_{12} + \frac{1}{3} C_{11} \right) \Lambda_{92} + \frac{1}{2} \Lambda_2 (-C_{22} + C_{11} - C_{12}) \beta_1^6 \\
& + \left(\left(\frac{1}{3} C_{22} + \frac{1}{3} C_{11} \right) \Lambda_{102} + \left(\frac{1}{2} C_{22} + \frac{1}{2} C_{11} \right) \Lambda_1 - D_{12} - D_{66} \right) \beta_2^2 \\
& + \left(\frac{1}{3} \Lambda_{102} + \frac{1}{2} \Lambda_1 \right) C_{21} + \left(-\frac{1}{2} C_{11} + \frac{2}{3} C_{12} + \frac{1}{2} C_{22} \right) \Lambda_{102} \\
& + \left(\frac{13}{8} C_{12} - \frac{1}{2} C_{22} + \frac{1}{2} C_{11} \right) \Lambda_1 - \frac{13}{8} D_{11} - \frac{1}{2} D_{22}) \beta_1^5 \\
& + \left(\left(\frac{1}{2} C_{22} - \frac{1}{6} C_{11} \right) \Lambda_{92} - \Lambda_2 C_{11} \right) \beta_2^2 + \left(-\frac{1}{2} \Lambda_2 + \frac{1}{6} \Lambda_{92} \right) C_{21} \\
& + \left(\frac{8}{3} C_{12} + \frac{7}{6} C_{11} - \frac{7}{6} C_{22} \right) \Lambda_{92} + \frac{13}{8} \Lambda_2 (-C_{22} + C_{11} - C_{12}) \beta_1^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left(\frac{1}{3} \Lambda_{102} + \frac{1}{2} \Lambda_1 \right) C_{21} - \frac{1}{2} D_{22} \right) \beta_2^4 \\
& + \left(\left(-\frac{2}{3} \Lambda_{102} - \Lambda_1 \right) C_{21} + \left(\frac{7}{6} C_{22} + \frac{5}{6} C_{11} \right) \Lambda_{102} + \left(\frac{13}{8} C_{22} + \frac{5}{8} C_{11} \right) \Lambda_1 - \frac{9}{4} D_{66} \right. \\
& + D_{22} - \frac{9}{4} D_{12} \left. \right) \beta_2^2 + \left(\frac{13}{8} \Lambda_1 + \frac{4}{3} \Lambda_{102} \right) C_{21} + \left(\frac{3}{2} (C_{22} - C_{11}) - \frac{2}{3} C_{12} \right) \Lambda_{102} \\
& + \left(\frac{13}{8} (C_{11} - C_{22}) + \frac{9}{8} C_{12} \right) \Lambda_1 - \frac{13}{8} D_{22} - \frac{9}{8} D_{11} \left. \right) \beta_1^3 + \left(-\frac{1}{2} C_{21} (\Lambda_{92} + \Lambda_2) \right) \beta_2^4 \\
& + \left(C_{21} (\Lambda_{92} + \Lambda_2) + \left(\frac{3}{2} C_{22} - \frac{1}{6} C_{11} \right) \Lambda_{92} - \frac{9}{4} \Lambda_2 C_{11} \right) \beta_2^2 + \left(-\frac{13}{8} \Lambda_2 + \frac{1}{6} \Lambda_{92} \right) C_{21} \\
& + \left(\frac{11}{6} C_{12} + \frac{5}{6} (C_{11} - C_{22}) \right) \Lambda_{92} + \frac{9}{8} \Lambda_2 (-C_{22} + C_{11} - C_{12}) \left. \right) \beta_1^2 \\
& + \left(\left(\frac{9}{8} \Lambda_1 + \frac{1}{3} \Lambda_{102} \right) C_{21} - \frac{9}{8} D_{22} \right) \beta_2^4 \\
& + \left(\left(-\frac{2}{3} \Lambda_{102} - \frac{9}{4} \Lambda_1 \right) C_{21} + \left(\frac{5}{6} C_{22} + \frac{1}{2} C_{11} \right) \Lambda_{102} + \left(-\frac{9}{8} C_{11} + \frac{9}{8} C_{22} \right) \Lambda_1 \right. \\
& \quad \left. + \frac{9}{4} D_{22} \right) \beta_2^2 \\
& + \left(\frac{9}{8} \Lambda_1 + \Lambda_{102} \right) C_{21} + (-C_{11} - C_{12} + C_{22}) \Lambda_{102} + \left(-\frac{9}{8} C_{22} + \frac{9}{8} C_{11} \right) \Lambda_1 - \frac{9}{8} D_{22} \left. \right) \beta_1 \\
& - \frac{9}{8} \left(\Lambda_2 + \frac{4}{9} \Lambda_{92} \right) C_{21} \beta_2^4 + \left(\left(\Lambda_{92} + \frac{9}{4} \Lambda_2 \right) C_{21} + \Lambda_{92} C_{22} \right) \beta_2^2 - \frac{9}{8} C_{21} \Lambda_2 \sin(\alpha) \\
& - \frac{1}{3} \left(\left(\Lambda_1 + \frac{3}{4} \Lambda_{102} \right) \beta_1^3 + \left(-\frac{1}{2} \Lambda_2 + \frac{3}{4} \Lambda_{92} \right) \beta_1^2 + \left(\frac{3}{2} \Lambda_1 + \frac{27}{16} \Lambda_{102} \right) \beta_1 + \frac{27}{16} \Lambda_{92} \right) \\
& S_1 \cos(\alpha) (\beta_1^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$C_9 = -\frac{1}{(576 \beta_1^{10} + 4756 \beta_1^8 + 13133 \beta_1^6 + 15073 \beta_1^4 + 7416 \beta_1^2 + 1296) \beta_2 \sin(\alpha)}$$

$$(1536 n \pi \beta_1^2 (\beta_1^2 + 4) (\beta_1^2 + 1) \beta_1 \left(\beta_1^2 + \frac{4}{9} \right) (C_{12} \beta_1^5 \Lambda_{51}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{4} C_{12} + \frac{1}{2} C_{22} - \frac{1}{2} C_{11} \right) \Lambda_{61} - \frac{1}{2} \Lambda_4 - 8 C_{12} \Lambda_{14} \beta_1^4 \\
& + \left(\frac{3}{8} C_{11} + \frac{17}{8} C_{12} + \frac{1}{4} C_{21} - \frac{3}{8} C_{22} \right) \Lambda_{51} + (14 C_{12} + 2 C_{22} - 2 C_{11}) \Lambda_{13} \\
& + \frac{1}{8} \Lambda_3 + \frac{1}{8} \Lambda_{16} \beta_1^3 + \left(\frac{7}{8} C_{22} + \frac{15}{6} C_{21} - \frac{5}{16} C_{12} - \frac{7}{8} C_{11} \right) \Lambda_{61} + (-4 C_{11} + \frac{1}{2} C_{12} \\
& + 4 C_{22} - \frac{1}{2} C_{21}) \Lambda_{14} - \frac{3}{16} \Lambda_4 \beta_1^2 + \frac{9}{32} (C_{21} - C_{22} + C_{11} + 3 C_{12}) (4 \Lambda_{13} + \Lambda_{51}) \beta_1 \\
& - \frac{9}{32} (\Lambda_{61} + 2 \Lambda_{14}) (C_{11} - C_{22} - C_{21} + C_{12}) \sin(\alpha) e^{\frac{3m\pi}{\beta_1}} \\
& - \frac{3}{8} \left(\beta_1^3 \Lambda_{63} + \frac{1}{2} \Lambda_{53} \beta_1^2 + \frac{13}{36} \beta_1 \Lambda_{63} + \frac{5}{18} \Lambda_{53} \right) \\
& (\beta_1^2 + 1) \beta_1^2 \sin(\alpha) + \frac{1}{2} S_1 \cos(\alpha) (\beta_1^6 \Lambda_{51} + \left(\frac{3}{2} \Lambda_{61} - \frac{8}{3} \Lambda_{14} \right) \beta_1^5 \\
& + \left(\frac{70}{9} \Lambda_{13} + \frac{22}{9} \Lambda_{51} \right) \beta_1^4 + \left(\frac{13}{6} \Lambda_{61} + \frac{11}{3} \Lambda_{14} \right) \beta_1^3 + \left(\frac{29}{9} \Lambda_{13} + \frac{17}{9} \Lambda_{51} \right) \beta_1^2 \\
& + \left(\frac{2}{3} \Lambda_{61} + \frac{4}{3} \Lambda_{14} \right) \beta_1 + \frac{4}{9} \Lambda_{13} + \frac{4}{9} \Lambda_{51}) \left(\beta_1^2 + \frac{9}{4} \right) \left(\beta_1^2 + \frac{9}{16} \right) e^{\frac{4m\pi}{\beta_1}} \\
& - (\beta_1^2 + 1) \beta_1 (C_{12} \beta_1^9 \Lambda_{51} + \left(\frac{1}{4} C_{12} + \frac{1}{2} C_{22} - \frac{1}{2} C_{11} \right) \Lambda_{61} - 8 C_{12} \\
& - \frac{1}{2} \Lambda_4 - \frac{3}{8} \Lambda_{63} \Lambda_{14}) \beta_1^8 + \left(\frac{3}{8} C_{11} + \frac{473}{72} C_{12} + \frac{1}{4} C_{21} - \frac{3}{8} C_{22} \right) \Lambda_{51} \\
& + (14 C_{12} + 2 C_{22} - 2 C_{11}) \Lambda_{13} + \frac{1}{8} \Lambda_3 - \frac{3}{16} \Lambda_{53} + \frac{1}{8} \Lambda_{16} \beta_1^7 \\
& + \left(\frac{115}{144} C_{12} + \frac{223}{72} C_{22} - \frac{223}{72} C_{11} + \frac{5}{16} C_{21} \right) \Lambda_{61} + (-4 C_{11} - \frac{1}{2} C_{21} - \frac{631}{18} C_{12} \\
& + 4 C_{22}) \Lambda_{14} - \frac{347}{144} \Lambda_4 - \frac{457}{384} \Lambda_{63} \beta_1^6 + \left(\frac{187}{96} C_{11} + \frac{401}{288} C_{21} + \frac{3475}{288} C_{12} \right. \\
& \left. - \frac{187}{96} C_{22} \right) \Lambda_{51} + \left(\frac{4723}{72} C_{12} + \frac{9}{8} C_{21} + \frac{559}{72} C_{22} - \frac{559}{72} C_{11} \right) \Lambda_{13} - \frac{485}{768} \Lambda_{53} \\
& + \frac{5}{9} \Lambda_{16} + \frac{5}{9} \Lambda_3 \beta_1^5 + \left(\frac{1457}{288} C_{22} - \frac{353}{288} C_{12} - \frac{1457}{288} C_{11} + \frac{481}{288} C_{21} \right) \Lambda_{61} \\
& + \left(-\frac{239}{144} C_{21} + \frac{2641}{144} (C_{22} - C_{11}) \right) - \frac{201}{16} C_{12} \Lambda_{14} - \frac{31}{18} \Lambda_4 - \frac{219}{256} \Lambda_{63} \beta_1^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{23}{12} C_{22} + \frac{271}{36} C_{12} + \frac{61}{36} C_{21} + \frac{23}{12} C_{11} \right) \Lambda_{51} \\
& + \left(\frac{13}{9} C_{11} - \frac{13}{9} C_{22} + 5C_{21} + \frac{359}{9} C_{12} \right) \Lambda_{13} - \frac{543}{1024} \Lambda_{53} + \frac{2}{9} \Lambda_{16} + \frac{2}{9} \Lambda_3 \beta_1^3 \\
& + \left(\frac{101}{36} (C_{22} - C_{11}) + \frac{65}{36} (C_{21} - C_{12}) \right) \Lambda_{61} + \left(\frac{173}{18} C_{22} - \frac{173}{18} C_{11} - \frac{29}{18} C_{12} \right. \\
& + \left. \frac{29}{18} C_{21} \right) \Lambda_{14} - \frac{351}{2048} \Lambda_{63} - \frac{1}{3} \Lambda_4 \beta_1^2 + \left(\frac{1}{2} C_{21} - \frac{1}{2} C_{22} + \frac{1}{2} C_{11} + \frac{3}{2} C_{12} \right) \Lambda_{51} \\
& + (2C_{11} + 6C_{12} + 2C_{21} - 2C_{22}) \Lambda_{13} - \frac{135}{1024} \Lambda_{53} \beta_1 - \frac{1}{2} (\Lambda_{61} + 2\Lambda_{14}) \\
& (C_{11} - C_{22} - C_{21} + C_{12}) \sin(\alpha) + \frac{3}{16} S_1 \left(\beta_1^2 + \frac{9}{4} \right) \cos(\alpha) \left(\beta_1^2 + \frac{9}{16} \right) \\
& (\beta_1^6 \Lambda_{51} + \left(\frac{3}{2} \Lambda_{61} - \frac{8}{3} \Lambda_{14} \right) \beta_1^5 + \left(\frac{70}{9} \Lambda_{13} + \frac{22}{9} \Lambda_{51} \right) \beta_1^4 + \left(\frac{13}{6} \Lambda_{61} + \frac{11}{3} \Lambda_{14} \right) \beta_1^3 \\
& + \left(\frac{29}{9} \Lambda_{13} + \frac{17}{9} \Lambda_{51} \right) \beta_1^2 + \left(\frac{2}{3} \Lambda_{61} + \frac{4}{3} \Lambda_{14} \right) \beta_1 + \frac{4}{9} \Lambda_{13} + \frac{4}{9} \Lambda_{51} \beta_1) \\
c_8 = & -\frac{512}{3} \frac{1}{(64\beta_1^6 + 436\beta_1^4 + 801\beta_1^2 + 324)} (\pi \beta_1^2 n \\
& ((C_{12} \Lambda_{52} \beta_1^5 + \left(\left(\frac{1}{2} C_{22} + \frac{1}{4} C_{12} - \frac{1}{2} C_{11} \right) \Lambda_{62} - \frac{1}{16} \Lambda_2 \right) \beta_1^4 \\
& + \left(\frac{3}{8} C_{11} + \frac{17}{8} C_{12} - \frac{3}{8} C_{22} + \frac{1}{4} C_{21} \right) \Lambda_{52} - \frac{1}{32} \beta_2^2 \Lambda_1) \beta_1^3 \\
& + \left(\left(-\frac{7}{8} C_{11} + \frac{5}{16} C_{21} - \frac{5}{16} C_{12} + \frac{7}{8} C_{22} \right) \Lambda_{62} - \frac{1}{128} \Lambda_2 \left(\frac{25}{2} + \beta_2^2 \right) \right) \beta_1^2 \\
& + \left(\left(\frac{9}{32} (C_{11} + C_{21} - C_{22}) + \frac{27}{32} C_{12} \right) \Lambda_{52} - \frac{9}{128} \beta_2^2 \Lambda_1 \right) \beta_1 \\
& + \frac{9}{32} (C_{22} + C_{21} - C_{11} - C_{12}) \Lambda_{62} + \frac{9}{256} \Lambda_2 (\beta_2^2 - 1) \beta_1 (\beta_1^2 + 4) \sin(\alpha) e^{\frac{3m\pi}{\beta_1}} \\
& - \frac{3}{64} \beta_1 \left(\beta_1^2 \Lambda_{92} + \left(\frac{1}{2} \beta_2^2 \Lambda_{102} - \frac{5}{4} \Lambda_{102} \right) \beta_1 - \frac{1}{2} \Lambda_{92} (\beta_2^2 - 3) \right) \sin(\alpha) \\
& + 4 S_1 \left(\frac{3}{2} \beta_1 \Lambda_{62} + \Lambda_{52} (\beta_1^2 + 1) \right) \cos(\alpha) \left(\beta_1^2 + \frac{9}{16} \right) \left(\beta_1^2 + \frac{9}{4} \right) e^{\frac{4m\pi}{\beta_1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_1(\beta_1^7 C_{12}\Lambda_{52} + \left(\left(\frac{1}{2}C_{22} + \frac{1}{4}C_{12} - \frac{1}{2}C_{11}\right)\Lambda_{62} - \frac{3}{64}\Lambda_{92} - \frac{1}{16}\Lambda_2\right)\beta_1^6 \\
& + \left(+\frac{15}{256}\Lambda_{102} + \left(\frac{49}{8}C_{12} + \frac{1}{4}C_{21} + \frac{3}{8}C_{11} - \frac{3}{8}C_{22}\right)\Lambda_{52}\right. \\
& + \left(-\frac{3}{128}\Lambda_{102} - \frac{1}{32}\Lambda_1\right)\beta_2^2\beta_1^5 + \left(-\frac{207}{1024}\Lambda_{92} - \frac{89}{256}\Lambda_2\right. \\
& + \left.\left(\frac{11}{16}C_{12} - \frac{23}{8}C_{11} + \frac{23}{8}C_{22} + \frac{5}{16}C_{21}\right)\Lambda_{62} + \left(\frac{3}{128}\Lambda_{92} - \frac{1}{128}\Lambda_2\right)\beta_2^2\right)\beta_1^4 + \\
& \left.\left(\left(\frac{41}{32}C_{21} + \frac{57}{32}(C_{11} - C_{22}) + \frac{299}{32}C_{12}\right)\Lambda_{52} + \left(-\frac{25}{128}\Lambda_1 - \frac{135}{2048}\Lambda_{102}\right)\beta_2^2 + \frac{675}{4096}\Lambda_{102}\right)\beta_1^3\right. \\
& + \left.\left(\left(\frac{49}{32}(C_{21} - C_{12}) + \frac{121}{32}(C_{22} - C_{11})\right)\Lambda_{62} + \left(\frac{1}{256}\Lambda_2 + \frac{135}{2048}\Lambda_{92}\right)\beta_2^2 - \frac{1035}{4096}\Lambda_{92}\right.\right. \\
& \quad \left.\left. - \frac{109}{256}\Lambda_2\right)\beta_1^2\right) \\
& + \left(\left(\frac{9}{8}(C_{21} - C_{11} - C_{22}) + \frac{27}{8}C_{12}\right)\Lambda_{52} + \left(-\frac{243}{8192}\Lambda_{102} - \frac{9}{32}\Lambda_1\right)\beta_2^2 + \frac{1215}{16384}\Lambda_{102}\right)\beta_1 \\
& + \frac{9}{8}(C_{22} + C_{21} - C_{11} - C_{12})\Lambda_{62} + \left(\frac{9}{64}\Lambda_2 + \frac{243}{8192}\Lambda_{92}\right)\beta_2^2 - \frac{9}{64}\Lambda_2 \\
& - \frac{729}{8192}\Lambda_{92})\sin(\alpha) \\
& + \frac{3}{16}S_1\left(\beta_1^2 + \frac{9}{16}\right)\left(\frac{3}{2}\beta_1\Lambda_{62} + (\beta_1^2 + 1)\Lambda_{52}\right)\left(\beta_1^2 + \frac{9}{16}\right)\cos(\alpha))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & \frac{32}{3(64\beta_1^8 + 500\beta_1^6 + 1237\beta_1^4 + 1125\beta_1^2 + 324)\beta_2\sin(\alpha)}(((\beta_1^2 + 4)(\beta_1^2 + 1) \\
& (C_{12}\beta_1^7\Lambda_{101} + \left(\left(-C_{22} + \frac{5}{2}C_{12} + C_{11}\right)\Lambda_{91} + \frac{243}{4}\Lambda_{11}C_{12} + 3\Lambda_4 + \frac{3}{2}\Lambda_2\right)\beta_1^6 \\
& + (((C_{11} + C_{22})\Lambda_{101} + 2\Lambda_3 + \Lambda_1)\beta_2^2 + \Lambda_{101}C_{21} + \left(\frac{891}{16}C_{12} - \frac{81}{4}C_{11}\right)\Lambda_{12} \\
& + \left(\frac{3}{2}C_{22} - \frac{3}{2}C_{11} + \frac{25}{16}C_{12}\right)\Lambda_{101} + \frac{81}{4}\Lambda_{12}C_{22} - \frac{17}{8}\Lambda_1 - \frac{21}{4}\Lambda_3 - \Lambda_{16})\beta_1^5 \\
& + (((-\frac{1}{2}C_{11} + \frac{3}{2}C_{22})\Lambda_{91} + \left(\frac{27}{4}C_{22} + \frac{27}{4}C_{11}\right)\Lambda_{11} + \frac{1}{4}\Lambda_2 + \frac{7}{2}\Lambda_4)\beta_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{27}{4} \Lambda_{11} + \frac{1}{2} \Lambda_{91} \right) C_{21} + \left(\frac{221}{32} C_{12} + \frac{49}{16} C_{11} - \frac{49}{16} C_{22} \right) \Lambda_{91} + \left(\frac{2565}{32} C_{12} \right. \\
& + \frac{405}{16} (C_{11} + C_{22}) \Lambda_{11} + \frac{3}{2} \Lambda_4 - \frac{1}{16} \Lambda_2 \beta_1^4 + (C_{21} \beta_2^4 \Lambda_{101} + (-2 \Lambda_{101} C_{21} \\
& + \frac{49}{16} C_{22} + \frac{33}{16} C_{11}) \Lambda_{101} + \frac{207}{16} \left(\frac{15}{23} C_{22} + C_{11} \right) \Lambda_{12} \beta_2^2 \\
& + \left(\frac{171}{16} \Lambda_{12} + \frac{57}{16} \Lambda_{101} \right) C_{21} + \left(+ \frac{123}{32} (C_{22} - C_{11}) - \frac{39}{16} C_{12} \right) \Lambda_{101} + \frac{585}{32} \Lambda_{12} C_{22} \\
& + \left(- \frac{585}{32} C_{11} + \frac{315}{16} C_{12} \right) \Lambda_{12} - \frac{9}{8} \Lambda_1 - \frac{33}{16} \Lambda_{16} - \frac{69}{16} \Lambda_3 \beta_1^3 \\
& + \left(- \frac{3}{2} C_{21} \left(- \frac{1}{2} \Lambda_{11} + \Lambda_{91} \right) \beta_2^4 + \left(- \frac{3}{2} \Lambda_{11} + 3 \Lambda_{91} \right) C_{21} \right. \\
& + \left(- \frac{9}{32} C_{11} + \frac{123}{32} C_{22} \right) \Lambda_{91} + \left(- \frac{81}{32} C_{11} + \frac{195}{32} C_{22} \right) \Lambda_{11} + \frac{9}{8} \Lambda_4 + \frac{9}{16} \Lambda_2 \\
& \left(\frac{81}{32} \Lambda_{11} + \frac{9}{32} \Lambda_{91} \right) C_{21} + \left(- \frac{45}{32} C_{22} + \frac{99}{32} C_{12} + \frac{45}{32} C_{11} \right) \Lambda_{91} \Lambda_{11} \\
& \left(\frac{405}{32} C_{11} + \frac{891}{32} C_{12} - \frac{405}{32} C_{22} \right) - \frac{9}{16} \Lambda_2 \beta_1^2 + \left(\frac{27}{16} C_{21} \left(\frac{1}{3} \Lambda_{101} + \Lambda_{12} \right) \beta_2^4 \right. \\
& + \frac{81}{32} \beta_2^2 (C_{11} - \frac{4}{3} C_{21} + \frac{5}{3} C_{22}) \left(\frac{1}{3} \Lambda_{101} + \Lambda_{12} \right) + \left(\frac{27}{16} \Lambda_{101} + \frac{81}{16} \Lambda_{12} \right) C_{21} \\
& + \left(\frac{27}{16} C_{22} - \frac{27}{16} (C_{12} + C_{11}) \right) \Lambda_{101} + \frac{81}{16} \Lambda_{12} C_{22} + \left(- \frac{81}{16} (C_{12} + C_{11}) \right) \Lambda_{12} \\
& - \frac{27}{32} (\Lambda_3 + \Lambda_{16}) \beta_1 - \frac{27}{32} \beta_2^2 (C_{21} \beta_2^2 - 2 C_{21} - 2 C_{22}) (\Lambda_{11} + \Lambda_{91}) \sin(\alpha) e^{\frac{3m\pi}{\beta_1}} \\
& + \frac{9}{4} \left(\beta_1^2 + \frac{9}{4} \right) \left(\beta_1^2 + \frac{9}{16} \right) + \left(\left(\Lambda_{63} + \frac{1}{2} \Lambda_{92} \right) \beta_1^5 + \left(\frac{1}{3} \Lambda_{102} + \frac{2}{3} \Lambda_{53} \right) \beta_2^2 \right. \\
& - \frac{19}{12} \Lambda_{102} - \frac{4}{3} \Lambda_{53} \beta_1^4 + \left(\left(\Lambda_{63} + \frac{1}{6} \Lambda_{92} \right) \beta_2^2 + \frac{8}{3} \Lambda_{63} - \frac{7}{6} \Lambda_{92} \right) \beta_1^3 \\
& + \left(\frac{4}{3} \Lambda_{53} - \frac{1}{6} \Lambda_{102} \right) \beta_2^2 - 2 \Lambda_{53} - \frac{13}{12} \Lambda_{102} \beta_1^2 \\
& + \left(\left(\Lambda_{63} + \frac{2}{3} \Lambda_{92} \right) \beta_2^2 + \frac{5}{3} \Lambda_{63} - \frac{13}{6} \Lambda_{92} \right) \beta_1 + \frac{2}{3} \beta_2^2 \Lambda_{53} - \frac{2}{3} \Lambda_{53} \beta_1 \sin(\alpha) \\
& - \frac{1}{3} (\Lambda_{101} \beta_1^5 + (\Lambda_{91} + 9 \Lambda_{11}) \beta_1^4 + (18 \Lambda_{12} + 5 \Lambda_{101}) \beta_1^3 + (5 \Lambda_{91} + 7 \Lambda_{11}) \beta_1^2 + 4 \Lambda_{91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4 \Lambda_{11} + (4 \Lambda_{101} + 12 \Lambda_{12})\beta_1) S_1 \cos(\alpha) e^{\frac{4m\pi}{\beta_1}} + (-C_{12} \beta_1^{11} \Lambda_{101} \\
& + \left(C_{22} - \frac{5}{2} C_{12} - C_{11} \right) \Lambda_{91} - \frac{9}{8} \Lambda_{92} - \frac{3}{2} \Lambda_2 - 3 \Lambda_4 - \frac{243}{4} \Lambda_{11} C_{12} - \frac{9}{4} \Lambda_{63}) \beta_1^{10} \\
& + \left((-C_{11} - C_{22}) \Lambda_{101} - \frac{3}{2} \Lambda_{53} - 2 \Lambda_3 - \frac{3}{4} \Lambda_{102} - \Lambda_1 \right) \beta_2^2 - \Lambda_{101} C_{21} \\
& + \left(-\frac{3}{2} C_{22} - \frac{105}{16} C_{12} + \frac{3}{2} C_{11} \right) \Lambda_{101} - \frac{81}{4} \Lambda_{12} C_{22} + \left(-\frac{891}{16} C_{12} \right. \\
& + \frac{81}{4} C_{11}) \Lambda_{12} + \frac{21}{4} \Lambda_3 + \frac{17}{8} \Lambda_1 + \frac{57}{16} \Lambda_{102} + 3 \Lambda_{53} + \Lambda_{16}) \beta_1^9 \\
& + \left(\left(-\frac{3}{2} C_{22} + \frac{1}{2} C_{11} \right) \Lambda_{91} + \left(-\frac{27}{4} (C_{11} + C_{22}) \right) \Lambda_{11} - \frac{7}{2} \Lambda_4 - \frac{3}{8} \Lambda_{92} \right. \\
& - \frac{9}{4} \Lambda_{63} - \frac{1}{4} \Lambda_2) \beta_2^2 + \left(-\frac{27}{4} \Lambda_{11} - \frac{1}{2} \Lambda_{91} \right) C_{21} \\
& + \left(-\frac{621}{32} C_{12} - \frac{129}{16} C_{11} + \frac{129}{16} C_{22} \right) \Lambda_{91} + \left(\frac{405}{16} C_{22} - \frac{405}{16} C_{11} - \frac{12285}{32} C_{12} \right) \Lambda_{11} \\
& - \frac{119}{16} \Lambda_2 - \frac{789}{64} \Lambda_{63} - \frac{33}{2} \Lambda_4 - \frac{69}{128} \Lambda_{92}) \beta_1^8 + (-C_{21} \beta_2^2 \Lambda_{101} + (2 \Lambda_{101} C_{21} \\
& + \left(-\frac{131}{16} C_{11} - \frac{129}{16} C_{22} \right) \Lambda_{101} - 5 \Lambda_1 - \frac{231}{32} \Lambda_{53} - \frac{111}{64} \Lambda_{102} - 10 \Lambda_3 - \frac{207}{16} \Lambda_{12} C_{11} \\
& - \frac{135}{16} \Lambda_{12} C_{22}) \beta_2^2 + \left(-\frac{137}{16} \Lambda_{101} - \frac{171}{16} \Lambda_{12} \right) C_{21} - \frac{3825}{32} \Lambda_{12} C_{22} \\
& + \left(-\frac{363}{32} (C_{22} - C_{11}) - \frac{75}{8} C_{12} \right) \Lambda_{101} + \left(\frac{3825}{32} (C_{11} - C_{12}) \right) \Lambda_{12} + \frac{207}{16} \Lambda_{53} \\
& + \frac{113}{16} \Lambda_{16} + \frac{3189}{256} \Lambda_{102} + \frac{489}{16} \Lambda_3 + \frac{47}{4} \Lambda_1) \beta_1^7 + \left(\frac{3}{2} C_{21} \left(-\frac{1}{2} \Lambda_{11} + \Lambda_{91} \right) \beta_2^4 \right. \\
& + \left((-3 \Lambda_{91} + \frac{3}{2} \Lambda_{11}) C_{21} + \left(-\frac{363}{32} C_{22} + \frac{89}{32} C_{11} \right) \Lambda_{91} + \left(-\frac{999}{32} C_{11} - \frac{1275}{32} C_{22} \right) \Lambda_{11} \right. \\
& - \frac{327}{128} \Lambda_{92} - \frac{549}{64} \Lambda_{63} - \frac{149}{8} \Lambda_4 - \frac{29}{16} \Lambda_2) \beta_2^2 + \left(-\frac{1161}{32} \Lambda_{11} - \frac{89}{32} \Lambda_{91} \right) C_{21} \\
& + \left(\frac{663}{32} (C_{22} - C_{11}) - \frac{381}{8} C_{12} \right) \Lambda_{91} + \left(\frac{4455}{32} C_{22} - \frac{5373}{8} C_{12} - \frac{4455}{32} C_{11} \right) \Lambda_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{41}{8} \Lambda_2 - \frac{6009}{256} \Lambda_{63} + \frac{5547}{512} \Lambda_{92} - \frac{39}{2} \Lambda_4) \beta_1^6 + \left(-\frac{27}{16} \left(\Lambda_{12} + \frac{89}{27} \Lambda_{101}\right) C_{21} \beta_2^4\right. \\
& + \left(\frac{27}{8} \Lambda_{12} + \frac{89}{8} \Lambda_{101}\right) C_{21} + \left(-\frac{663}{32} C_{22} - \frac{485}{32} C_{11}\right) \Lambda_{101} - 4 \Lambda_1 - \frac{1515}{128} \Lambda_{53} \\
& + \frac{27}{256} \Lambda_{102} - 8 \Lambda_3 - \frac{2151}{32} \Lambda_{12} C_{11} - \frac{1485}{32} \Lambda_{12} C_{22}) \beta_2^2 \\
& + \left(-\frac{47}{2} \Lambda_{101} - \frac{117}{2} \Lambda_{12}\right) C_{21} + \left(\frac{61}{8} C_{12} + \frac{861}{32} (C_{11} - C_{22})\right) \Lambda_{101} - \frac{5679}{32} \Lambda_{12} C_{22} \\
& + \frac{113}{8} \Lambda_1 + \left(-\frac{2529}{8} C_{12} + \frac{5679}{32} C_{11}\right) \Lambda_{12} + \frac{1389}{32} \Lambda_3 + \frac{1149}{64} \Lambda_{53} + \frac{485}{32} \Lambda_{16} \\
& + \frac{11637}{1024} \Lambda_{102}) \beta_1^5 + \left(\frac{267}{32} \left(-\frac{31}{89} \Lambda_{11} + \Lambda_{91}\right) C_{21} \beta_2^4 + \left(-\frac{267}{16} \Lambda_{91} + \frac{93}{16} \Lambda_{11}\right) C_{21}\right. \\
& + \left(-\frac{861}{31} C_{22} + \frac{109}{32} C_{11}\right) \Lambda_{91} + \left(-\frac{459}{32} C_{11} - \frac{1893}{32} C_{22}\right) \Lambda_{11} - \frac{2349}{256} \Lambda_{63} - \frac{157}{8} \Lambda_4 \\
& - \frac{61}{16} \Lambda_2 - \frac{2043}{512} \Lambda_{92}) \beta_2^2 + \left(-\frac{109}{32} \Lambda_{91} - \frac{1269}{32} \Lambda_{11}\right) C_{21} \\
& + \left(-\frac{617}{32} (C_{11} - C_{22}) - \frac{1379}{32} C_{12}\right) \Lambda_{91} + \left(-\frac{5265}{32} (C_{11} - C_{22}) - \frac{14715}{32} C_{12}\right) \Lambda_{11} \\
& + \frac{8721}{512} \Lambda_{92} - 6 \Lambda_4 - \frac{1161}{64} \Lambda_{63} + \frac{49}{16} \Lambda_2) \beta_1^4 + \left(-\frac{135}{16} \left(\frac{109}{135} \Lambda_{101} + \Lambda_{12}\right) C_{21} \beta_2^4\right. \\
& + \left(\frac{135}{8} \Lambda_{12} + \frac{109}{8} \Lambda_{101}\right) C_{21} + \left(-\frac{399}{32} C_{11} - \frac{617}{32} C_{22}\right) \Lambda_{101} - \frac{2061}{32} \Lambda_{12} C_{11} \\
& - \frac{513}{64} \Lambda_{53} - \frac{1755}{32} \Lambda_{12} C_{22} + \frac{243}{512} \Lambda_{102}) \beta_2^2 + \left(-\frac{363}{16} \Lambda_{101} - \frac{1089}{16} \Lambda_{12}\right) C_{21} \\
& + \left(\frac{381}{16} (C_{11} - C_{22}) + \frac{291}{16} C_{12}\right) \Lambda_{101} - \frac{1575}{16} \Lambda_{12} C_{22} + \left(-\frac{855}{16} C_{12} + \frac{1575}{16} C_{11}\right) \Lambda_{12} \\
& + \frac{399}{32} \Lambda_{16} + \frac{9}{2} \Lambda_1 + \frac{1269}{128} \Lambda_{53} + \frac{687}{32} \Lambda_3 + \frac{3159}{1024} \Lambda_{102}) \beta_1^3 \\
& + \left(\frac{327}{32} \left(\Lambda_{91} + \frac{3}{109} \Lambda_{11}\right) C_{21} \beta_2^4 + \left(-\frac{39}{16} \Lambda_{11} - \frac{327}{16} \Lambda_{91}\right) C_{21}\right. \\
& + \left(-\frac{381}{16} C_{22} + \frac{9}{8} C_{11}\right) \Lambda_{91} + \left(\frac{81}{8} C_{11} - \frac{525}{16} C_{22}\right) \Lambda_{11} - \frac{729}{256} \Lambda_{63} - \frac{9}{4} \Lambda_2 \\
& - \frac{9}{2} \Lambda_4 - \frac{243}{128} \Lambda_{92}) \beta_2^2 + \left(-\frac{9}{8} \Lambda_{91} - \frac{81}{8} \Lambda_{11}\right) C_{21} + \left(-\frac{45}{8} (C_{11} - C_{22}) - \frac{99}{8} C_{12}\right) \Lambda_{91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{405}{8} (C_{22} - C_{11}) - \frac{891}{8} C_{12} \right) \Lambda_{11} - \frac{1215}{256} \Lambda_{63} + \frac{3159}{512} \Lambda_{92} + \frac{9}{4} \Lambda_2 \beta_1^2 \\
& + \left(-\frac{27}{4} \left(\frac{\Lambda_{101}}{3} + \Lambda_{12} \right) C_{21} \beta_2^2 + \left(\frac{9}{2} \Lambda_{101} + \frac{27}{2} \Lambda_{12} \right) C_{21} + \left(-\frac{45}{8} C_{22} - \frac{27}{8} C_{11} \right) \Lambda_{101} \right. \\
& - \frac{81}{8} \Lambda_{12} C_{11} - \frac{243}{128} \Lambda_{53} - \frac{135}{8} \Lambda_{12} C_{22} \beta_2^2 + \left. \left(-\frac{27}{4} \Lambda_{101} - \frac{81}{4} \Lambda_{12} \right) C_{21} \right. \\
& + \left. \left(\frac{27}{4} (C_{11} - C_{22} + C_{12}) \Lambda_{101} \right) + \frac{27}{8} (\Lambda_{16} + \Lambda_3) - \frac{81}{4} \Lambda_{12} C_{22} + \left(\frac{81}{4} (C_{11} + C_{12}) \Lambda_{12} \right) \right. \\
& + \frac{243}{128} \Lambda_{53} \beta_1 + \frac{27}{8} \beta_2^2 (C_{21} \beta_2^2 - 2 C_{21} - 2 C_{22}) (\Lambda_{11} + \Lambda_{91}) \sin(\alpha) \\
& + \frac{3}{4} \left(\beta_1^2 + \frac{9}{4} \right) (\Lambda_{101} \beta_1^5 + (\Lambda_{91} + 9 \Lambda_{11}) \beta_1^4 + (18 \Lambda_{12} + 5 \Lambda_{101}) \beta_1^3 + (5 \Lambda_{91} \\
& + 7 \Lambda_{11}) \beta_1^2 + (4 \Lambda_{101} + 12 \Lambda_{12}) \beta_1 + 4 \Lambda_{91} + 4 \Lambda_{11}) S_1 \left(\beta_1^2 + \frac{9}{16} \right) \cos(\alpha) \beta_1 n \pi
\end{aligned}$$

مراجع و منابع

- [1] Malatkar P., (2003), Ph.D. thesis ,“Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates”, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.
- [2] Evan-Iwanowski R.M., (1976), “Resonance Oscillations in Mechanical Systems”, {Volume, Edition}, {Press}, {City}, pp. {page(s)}.
- [3] Nayfeh A.H., Mook D.T., (1979), “**Nonlinear Oscillations**”, John Wiley & Sons, New York.
- [4] Moon F.C., (1987), “**Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers**”, John Wiley & Sons, New York.
- [5] L. H. Donnell, (1934), “A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending” *Transactions of the ASME* **56**, 795–806.
- [6] T. von Kármán and H. S. Tsien (1941) “The buckling of thin cylindrical shells under axial compression” *Journal of the Aeronautical Sciences* **8**, 303–312.
- [7] Kh. M. Mushtari and K. Z. Galimov (1957) “*Non-Linear Theory of Thin Elastic Shells*”. **Academy of Sciences (Nauka), Kazan’**; English version, NASA-TT-F62 in 1961.
- [8] I. I. Vorovich (1999) *Nonlinear Theory of Shallow Shells*. Springer-Verlag, New York, USA.
- [9] J. L. Sanders Jr. (1963), “Nonlinear theories for thin shells” *Quarterly of Applied Mathematics* **21**, 21–36
- [10] W. T. Koiter (1966) “On the nonlinear theory of thin elastic shells. I, II, III” *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen B* **69**, 1–54.
- [11] N. Yamaki (1984) *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*. North-Holland, Amsterdam.
- [12] M. Amabili (2003) “Comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach” *Journal of Sound and Vibration* **264**, 1091–1125.
- [13] V. V. Novozhilov (1953) *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*. Graylock Press, Rochester, NY, USA (now available from Dover, NY, USA).
- [14] P. M. Naghdi and R. P. Nordgren (1963) “On the nonlinear theory of elastic shells under the Kirchhoff hypothesis” *Quarterly of Applied Mathematics* **21**, 49–59.

- [15] J. N. Reddy and K. Chandrashekhara (1985), “Geometrically non-linear transient analysis of laminated, doubly curved shells” *International Journal of Non-Linear Mechanics* **20**, 79–90.
- [16] J.N. Reddy (1984), “Exact solutions of moderately thick laminated shells” *Journal of Engineering Mechanics* **110**, 794–809.
- [17] J. N. Reddy and C. F. Liu (1985), “A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells” *International Journal of Engineering Science* **23**, 319–330.
- [18] S. T. Dennis and A. N. Palazotto (1990), “Large displacement and rotation formulation for laminated shells including parabolic transverse shear” *International Journal of Non-Linear Mechanics* **25**, 67–85.
- [19] M. Amabili (2008), **Nonlinear Vibration And Stability of Shells And Plates**. Cambridge University Press.
- [20] E. Ventsel and T. Krauthammer (2001), **Thin Plates And Shells: Theory, Analysis And Applications**. Marcel Dekker
- [21] A. W. Leissa (1973), **Vibration of shells** (NASA SP-228). Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office.
- [22] H. Saunders, R. J. Wisniewski and P. R. Pasley (1960) “**Vibration of conical shells**” *Journal of the Acoustical Society of America* **32**, 765-772.
- [23] J. F. Dreher and A. W. Leissa (1970), “Axisymmetric Vibration of Thin Conical Shells” *Developments in Theoretical and Applied Mechanics* **4**, 163-181.
- [24] T. Irie, G. Yamada and Y. Kaneko (1982), “Free Vibration of a Conical Shell With Variable Thickness” *Journal of Sound and Vibration* **82**, 83-94.
- [25] O. E. Crenwelge and D. Muster (1969), “Free Vibration of Ring and Stringer Stiffened Conical Shells” *Journal of the Acoustical Society of America* **46**, 176-185.
- [26] V. I. Weingarten (1965), “Free Vibration of Ring-Stiffened Conical Shells” *American Institute of Aeronautics Journal* **3**, 1475-1481.
- [27] M. D. Bacon and C. W. Bert (1967), “Unsymmetric Free Vibrations of Orthotropic Sandwich Shells of Revolution” *American Institute of Aeronautics Journal* **5**, 413-417.

- [28] D. J. Wilkins, C. W. Bert and D. M. Egle (1970), “Free Vibration of Orthotropic Sandwich Conical Shells With Various Boundary Conditions” **Journal of Sound and Vibration** **13**, 211-228.
- [29] S. S. Rao and E. S. Reddy (1981), “Optimum Design of Stiffened Conical Shells With Natural Frequency Constraints” **Computers and Structures** **14**, 103-110.
- [30] M. H. Schneider, R. F. Snell, J. J. Tracy and D. R. Powers (1991) “Buckling and Vibration of Externally Pressurized Conical Shells With Continuous and Discontinuous rings” **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal** **29**, 1515-1522.
- [31] L. Tong (1993), “Free Vibration of Orthotropic Conical shells” **International Journal of Engineering Sciences** **31**, 719-733.
- [32] D. M. Raj, R. Narayanan, A. G. Khadakkar and V. Paramasivam (1995), “Effect of Ring Stiffeners on Vibration of Cylindrical and Conical Shell Models” **Journal of Sound and Vibration** **179**, 413-426.
- [33] Z. Mecitoglu and Dokmeci (1992), “Free Vibrations of a Thin Stiffened Cylindrical Shallow Shell” **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal** **30**, 848-850.
- [34] Z. Mecitoglu (1996), “Vibration Characteristics of a Stiffened Conical Shell” **Journal of Sound and Vibration** **197**, 191-206.
- [35] Daneshjou. K, Talebitooti. M, Saeidi. H, (2013) “ Dynamic Analysis and Critical Speed of Rotating Laminated Conical Shells with Orthogonal Stiffeners Using Generalized Differential Quadrature Method” **Latin Journal of Mechanical Solids and Structures** **10**, 349-390.
- [36] G.Q. Zhang (1989), P.h.D Thesis, “**Derivation of The Governing Equations of Anisotropic Conical Shells**” Delft University of Technology
- [37] W. Soedel, (2004), “**Vibrations of Shells and Plates**”, Marcel Dekker, Inc., New York.
- [38] Agamirov V.L (1990), “**Dynamic problems of nonlinear shells theory**”. Moscow: Nauka; [in Russian].
- [39] Sofiyev AH. (2011), “Non-linear Buckling Behavior of FGM Truncated Conical Shells Subjected to Axial Load” **Int J Non Lin Mech**; **46**:711–9.
- [40] Liao, S.J., Chwang, A.T. (1998), “Application of Homotopy Analysis Method in Nonlinear Oscillations” **ASME J. Appl. Mech.** **65**, 914–922.

[41] He, J.H. (1999), “Homotopy Perturbation Technique” **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.** **178**, 257–262.

[42] Irie T, Yamada G, Tanaka K. (1984), “Natural Frequencies of Truncated Conical Shells” **J Sound Vib** ;**92**:447–53.

[43] Tong L. (1996), “Effect of Axial Load on Free Vibration of Orthotropic Conical Shells” **J Vib Acoust** ;**118**:164–8.

[44] Liew KM, Ng TY, Zhao X. (2005) “Free Vibration Analysis of Conical Shells via The Element-Free Kp-Ritz Method” **J Sound Vib** ;**281**:627–45.

[45] Li FM, Kishimoto K, Huang WH (2009), “The Calculations of Natural Frequencies and Forced Vibration Responses of Conical Shell Using The Rayleigh–Ritz Method” **Mech Res Comm** ;**36**:595–602.

[46] Kerboua Y, Lakis AA, Hmila M (2010), “Vibration Analysis of Truncated Conical Shells Subjected to Flowing Fluid” **Appl Math Model** ;**34**:791–809.

Abstract

In this research, mathematical analysis of truncated conical shells under transverse load is presented. Equations of motion are derived using Donnell-Mushtari-Vlasov Theory. The kinematic of problem is according to the Karman strain-displacement relation and the Hook's law is used as the constitutive equation. These equations which are a system of coupled nonlinear partial differential equations with variable coefficients have been derived by using the Hamilton's principle. The nonlinear Galerkin method and the homotopy perturbation method (HPM) has been applied to solve the equations. Based on this analytical solution, the response of the system and the natural frequencies, are determined for a given set of initial values and boundary conditions. Finally, a parametric study is performed to investigate the effects of the various parameters such as thickness, density, length and semi-vertex angle on the linear and nonlinear natural frequencies.

Key words: Donnell-Mushtari-Vlasov Theory, Frequency analysis, homotopy perturbation method, Galerkin method, truncated conical shell, nonlinear vibration, stiffened, multiple scale method.



Shahrood University of Technology

Faculty of mechanical engineering

**Investigation of Nonlinear Vibration of Grid Stiffened Composite
Truncated Conical Shell**

Saeid Goodarzi

Supervisor:

Dr. Ardeshir Karami Mohammadi

Advisor:

Dr. Amir Jalali

September 2014