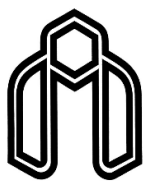


بِسْمِ اللَّهِ
الرَّحْمَنِ
الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

میرایی ترموالاستیک در میکروتیر ساخته شده از مواد متغییر تابعی محوری با استفاده از تئوری کرا دیان کرنش اصلاح شده

دانشجو:

محمد بستانی

استاد راهنما:

دکتر ارشد شیرکرمی محمدی

بهمن ماه ۹۳

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: مهندسی مکانیک

گروه: طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای محمد بستانی

تحت عنوان: میرایی ترموالاستیک در میکروتیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نمایندة تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

أَلَيْسَ اللَّهُ بِكَافٍ عَبْدَهُ وَ

(قرآن کریم، س ۳۹، ص ۳۶)

تقدیم به عزیزترین ما

پدر و مادرم

به جبران قطره‌ای از دریای محبتشان

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، بازبان قاصرو
دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، پاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تا این می‌کند و سلامت امانت‌هایی
را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب
"من لم یسکر المنعم من المخلوقین لم یسکر الله عزوجل":

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوارم، که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عفو کشیده و گریه‌مانه از کنار
غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاور بی‌چشم داشت برای من بوده‌اند؛
و از استاد ارجمند و شایسته؛ جناب آقای دکتر اردشیر کریمی محمدی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ‌کلی در
این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمات را به نمانی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم
باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را پاس گوید.

تعهد نامه

اینجانب محمد بستانی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه میرایی ترموالاستیک در میکروتیر ساخته شده از مواد متغیّر تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده تحت راهنمایی دکتر اردشیر گرمی محمدی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیر گذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده بررسی شده است. نخست معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشات آزاد نامیرای میکروتیر باریک‌شونده‌ی ساخته شده از مواد متغیر تابعی بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده است. فرکانس بی‌بعد طبیعی میکروتیرهای یک سرگیردار و دو سرگیردار به ترتیب به روش‌های نیمه تحلیلی ریلی-ریتز و گالرکین به دست آمده‌اند. از آنجایی که تابع آزمون ریلی-ریتز همه‌ی شرایط مرزی را ارضاء نمی‌کند، معادله دیفرانسیلی حاکم بر رفتار ارتعاشی به معادله انتگرالی تبدیل شده و با استفاده از سری توانی و بسط چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته برای میکروتیر یک سرگیردار و سری توابع متعامد برای میکروتیر دو سرگیردار، فرکانس طبیعی بی‌بعد استخراج و با نتایج به دست آمده از روش‌های نیمه تحلیلی فوق‌الذکر و نتایج مقالات موجود مقایسه شده‌اند که در بسیاری از موارد هم پوشانی بسیار خوبی میان آنها مشاهده شده است. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که انتخاب روش‌های نیمه تحلیلی که تابع آزمون آنها برخی شرایط مرزی را ارضاء می‌کنند، می‌تواند پاسخ قابل قبولی را ارائه دهند. سپس میرایی ترموالاستیک در میکروتیر همگن بر اساس تئوری‌های گرادیان کرنش اصلاح شده و انتقال حرارت تعمیم یافته بررسی شده است. از آنجایی که میرایی ترموالاستیک سبب مختلط شدن فرکانس ارتعاش و تولید آنتروپی می‌شود، روش فرکانس مختلط و روش تولید آنتروپی به کار بسته شده تا نتایج ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر رزوناتور استخراج شود و همچنین ضخامت بحرانی میکروتیر رزوناتور که در آن میرایی حداکثر است برای حالت‌های مختلف به دست آمده است. برخی نتایج ضریب کیفیت با نتایج هر دو دیدگاه مقایسه شده است که سازگاری خوبی میان آنها برقرار است. همچنین میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری مورد ارزیابی قرار گرفته است تا تأثیر استفاده از این مواد در رزوناتورهای میکرو در کنار در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طولی و زمان استراحت حرارتی مرتبط با تئوری انتقال حرارت غیرفوری بر میرایی ترموالاستیک بررسی شود.

کلمات کلیدی:

میرایی ترموالاستیک، تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، انتقال حرارت غیرفوری، مواد متغیر تابعی محوری.

فهرست مقاله‌های مستخرج از پایان‌نامه

میرایی ترموالاستیک در میکروتیر با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، اولین کنفرانس سراسری توسعه محوری مهندسی عمران، معماری، برق و مکانیک ایران، دانشگاه گلستان، گرگان، ۲۷ آذرماه ۹۳.

تحلیل ارتعاشات آزاد میکروتیر باریک‌شونده ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، دومین همایش ملی پژوهش‌های کاربردی در برق، مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه تهران، تهران، بهمن ۹۳.

میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری، چهاردهمین کنفرانس بین‌المللی انجمن هوافضای ایران، سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی ایران، تهران، اسفند ۹۳.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
۱- مقدمه.....	۱
۱-۱- مقدمه.....	۲
۲-۱- اهداف پژوهش.....	۵
۳-۱- ساختار گزارش.....	۵
۲- مفاهیم اولیه و پیشینه تحقیق.....	۷
۱-۲- مقدمه.....	۸
۲-۲- میرایی ترموالاستیک.....	۸
۳-۲- مواد متغیر تابعی.....	۹
۲-۳-۱- روش تولید.....	۱۰
۲-۳-۲- تابع توزیع مواد.....	۱۱
۴-۲- تئوری‌های الاستیسیته.....	۱۲
۲-۴-۱- الاستیسیته کلاسیک.....	۱۲
۲-۴-۲- تئوری‌های مرتبه بالاتر.....	۱۳
۲-۴-۳- الاستیسیته غیرکلاسیک کسرات، میکروپلار و تنش کوپل.....	۱۳
۲-۴-۴- الاستیسیته تنش کوپل اصلاح شده.....	۱۴
۲-۴-۵- الاستیسیته گرادیان کرنش.....	۱۶
۲-۴-۶- الاستیسیته گرادیان کرنش اصلاح شده.....	۱۸
۲-۴-۷- الاستیسیته غیرموضعی.....	۲۰
۲-۵- پیشینه تحقیق.....	۲۱
۳- ارتعاشات آزاد میکروتیر باریک شوندهی AFG.....	۲۷
۳-۱- مقدمه.....	۲۸
۳-۲- مفاهیم اولیه.....	۲۸
۳-۳- فرمول‌بندی مسئله.....	۳۰
۳-۴- روش ریلی-ریتز.....	۳۵
۳-۵- معادله حرکت.....	۳۷
۳-۶- تبدیل معادله دیفرانسیلی حرکت به معادله انتگرالی.....	۴۰
۳-۷- حل معادله انتگرالی.....	۴۳
۳-۸- شرایط مرزی دوسر درگیر.....	۴۴
۳-۸-۱- حل معادله انتگرالی میکروتیر دو سر گیردار.....	۴۸
۳-۸-۲- روش گالرکین.....	۴۹

- ۳-۹- پارامتر مقیاس طولی در دو تئوری غیر کلاسیک الاستیسیته ۵۰
- ۳-۱۰- مسأله نمونه و نتایج آن ۵۱
- ۳-۱۰-۱- نتایج میکروتیر یک سرگردار ۵۱
- ۳-۱۰-۲- نتایج میکروتیر دو سرگردار ۵۷
- ۳-۱۱- نتیجه گیری ۶۱
- ۴- میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور همگن (فرکانس مختلط) ۶۳
- ۴-۱- مقدمه ۶۴
- ۴-۲- فرمولبندی مسئله ۶۴
- ۴-۲-۱- معادله ارتعاشی میکروتیر ۶۴
- ۴-۲-۲- معادله جفت شده انتقال حرارت ۶۹
- ۴-۳- ضریب کیفیت ۷۱
- ۴-۴- مسأله نمونه و نتایج آن ۷۴
- ۴-۴-۱- آنالیز ضخامت بحرانی ۷۶
- ۴-۵- نتیجه گیری ۷۸
- ۵- میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور همگن (تولید آنتروپی) ۷۹
- ۵-۱- مقدمه ۸۰
- ۵-۲- فرمولاسیون ۸۰
- ۵-۳- معادله انتقال حرارت غیر فوریه ۸۱
- ۵-۴- تئوری کلاسیک الاستیسیته ۸۴
- ۵-۵- تئوری کوپل تنش اصلاح شده ۸۵
- ۵-۶- مسأله نمونه و نتایج آن ۸۶
- ۵-۷- نتیجه گیری ۸۹
- ۶- میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور AFG ۹۱
- ۶-۱- مقدمه ۹۲
- ۶-۲- فرمولبندی مسئله ۹۲
- ۶-۲-۱- مدل مواد متغیر تابعی محوری ۹۲
- ۶-۲-۲- معادله ارتعاشاتی میکروتیر ۹۳
- ۶-۲-۳- معادله کوپله انتقال حرارت برای میکروتیر ترموالاستیک ۹۷
- ۶-۳- ضریب کیفیت ۹۸
- ۶-۴- روش گالرکین ۱۰۰
- ۶-۵- مسأله نمونه و نتایج آن ۱۰۱
- ۶-۶- نتیجه گیری و بحث ۱۰۴

۱۰۵.....	۷- پیشنهادها
۱۰۶.....	۷-۱- مقدمه
۱۰۶.....	۷-۲- پیشنهادها
۱۰۹.....	منابع

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۳) نسبت‌های باریک‌شوندگی مختلف یک میکروتیر *AFG* ۳۳
- شکل (۲-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد نخست میکروتیر همگن و یکنواخت برحسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی ۵۳
- شکل (۳-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم میکروتیر همگن و یکنواخت برحسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی ۵۳
- شکل (۴-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیر همگن و با نسبت باریک‌شوندگی ۰,۴، برحسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی. فرکانس نخست (سمت راست) و فرکانس دوم (سمت چپ). ۵۴
- شکل (۵-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیر همگن و با نسبت باریک‌شوندگی ۰,۸، برحسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی. فرکانس نخست (سمت راست) و فرکانس دوم (سمت چپ). ۵۴
- شکل (۶-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد نخست میکروتیر *AFG* و یکنواخت برحسب تغییر نسبت‌های مختلف تغییر مواد. ۵۵
- شکل (۷-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم میکروتیر *AFG* و یکنواخت برحسب تغییر نسبت‌های مختلف تغییر مواد. ۵۵
- شکل (۸-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول میکروتیر باریک‌شونده *AFG* برای نسبت‌های مختلف ضریب تغییرات ماده. $(f_h = f_b = \eta)$ (a) تئوری کلاسیک *MSGT (b)* ۵۶
- شکل (۹-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم میکروتیر باریک‌شونده *AFG* برای نسبت‌های مختلف ضریب تغییرات ماده. $(f_h = f_b = \eta)$ (a) تئوری کلاسیک *MSGT (b)* ۵۶
- شکل (۱۰-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد سوم میکروتیر باریک‌شونده *AFG* برای نسبت‌های مختلف ضریب تغییرات ماده. $(f_h = f_b = \eta)$ (a) تئوری کلاسیک *MSGT (b)* ۵۷
- شکل (۱۱-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیر همگن و یکنواخت دو سر گیردار برحسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی. مود اول (راست)، مود دوم (چپ) ۵۸
- شکل (۱۲-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیر همگن و باریک‌شونده $(f_h = f_b = 0.8)$ دو سر گیردار برحسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی. مود اول (راست)، مود دوم (چپ). ۵۹
- شکل (۱۳-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیر دو سر گیردار *AFG* و یکنواخت برحسب تغییر نسبت‌های مختلف تغییر مواد. فرکانس نخست (راست) و فرکانس دوم (چپ). ۶۰
- شکل (۱۴-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول میکروتیر باریک‌شونده *AFG* دو سر گیردار برای نسبت‌های مختلف ضریب تغییرات ماده. $(f_h = f_b = \eta)$ (سمت چپ) تئوری کلاسیک (سمت راست) *MSGT* ۶۰

- شکل (۳-۱۵) تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد دوّم میکروتیر باریک‌شونده‌ی *AFG* دو سرگیردار برای نسبت‌های مختلف ضریب تغییرات ماده. ($f_h = f_b = \eta$) (سمت چپ) تئوری کلاسیک (سمت راست) *MSGT*
- شکل (۴-۱) تغییرات معکوس ضریب کیفیت بر حسب دمای محیط میکروتیر سیلیکون. میکروتیر دو سر گیردار (راست)، میکروتیر یک سرگیردار (چپ).
- شکل (۴-۲) تغییرات معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت برای سیلیکون. میکروتیر دو سر گیردار (راست)، میکروتیر یک سرگیردار (چپ).
- شکل (۴-۳) تغییرات معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت میکروتیر دو سرگیردار آلومینیوم
- شکل (۴-۴) تغییرات معکوس فرکانس و زمان مشخصه میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت میکروتیر دوسرگیردار (راست) و یک سرگیردار (چپ).
- شکل (۵-۱) تغییرات معکوس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک بر واحد استحکام استراحتی بر حسب ضخامت میکروتیر دو سرگیردار (راست) و یک سر گیردار (چپ).
- شکل (۵-۲) تغییرات معکوس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک بر واحد استحکام استراحتی بر حسب دمای محیط. میکروتیر دو سرگیردار (راست) و یک سر گیردار (چپ).
- شکل (۵-۳) مقایسه مدل فرکانس مختلط و تولید آنتروپی در ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت میکروتیر دو سرگیردار (راست) و یک سر گیردار (چپ).
- شکل (۵-۴) مقایسه تغییر معکوس ضریب کیفیت بر حسب فرکانس برای تئوری *MSGT* و *CT*
- شکل (۶-۱) تغییرات معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت میکروتیر *AFG*
- شکل (۶-۲) انتقال فرکانس ناشی از میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت میکروتیر *AFG*
- شکل (۶-۳) تغییرات معکوس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر *AFG* کلاسیک بر حسب ضخامت

فهرست جدول‌ها

- ۵۲ جدول (۱-۳) مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم $(\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho L A_L}{E_L I_L}})$ تیر یک‌سر گیردار بر اساس تئوری کلاسیک
- ۵۷ جدول (۲-۳) مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم $(\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho L A_L}{E_L I_L}})$ تیر دوسر گیردار باریک‌شونده AFG بر اساس تئوری کلاسیک $(E(x) = (1 + x/L))$ و $(\rho(x) = (1 + x/L + (x/L)^2))$
- ۷۴ جدول (۱-۴) مشخصات هندسی و مکانیکی میکروتیرها
- ۱۰۲ جدول (۱-۶) مشخصات هندسی و مکانیکی میکروتیرها

علائم و اختصارات

T	انرژی جنبشی
U	انرژی کرنشی
σ_{ij}	مؤلفه‌های تانسور تنش کلاسیک
$p_i, \tau_{ijk}, m_{ij}^{(s)}$	مؤلفه‌های تانسور تنش‌های مرتبه بالاتر
ε_{ij}	مؤلفه‌های تانسور کرنش
$\gamma_i, \eta_{ijk}, \chi_{ij}^{(s)}$	مؤلفه‌های تانسور پارامترهای سینماتیکی مرتبه بالاتر
μ, λ	ثوابت لامه
ρ	چگالی
v	ضریب پواسون
L	طول میکروتیر
h	ضخامت میکروتیر
ω	فرکانس طبیعی
t	مختصه زمانی (S)
x, y, z	مختصه‌های کارتیزین
E	مدول الاستیسیته
A	مساحت سطح مقطع
λ_i	مقادیر ویژه
u, v, w	مؤلفه‌های جابه‌جایی
c_v	حرارت مخصوص در حجم ثابت
k	ضریب انتقال حرارت
v_s	سرعت فونون
τ_0	زمان استراحت حرارتی
τ_{TED}	زمان مشخصه میرایی ترموالاستیک
h_{cr}	ضخامت بحرانی
Q^{-1}	معکوس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک

فصل اول:

مقدمه

۱-۱- مقدمه

میکرو یک پیشوند در سیستم متریک است که 10^{-6} (یک میلیونیم) را نشان می‌دهد. این پیشوند در سال ۱۹۶۰ میلادی برگرفته از واژه یونانی *mikrós mikrós* به معنی "کوچک" تصویب شده و نماد اختصاری آن نیز با حرف یونانی (μ) شناخته شده است. میکروتیر به یک تیر در ابعاد میکرومتر یا زیر-میکرومتر اطلاق می‌شود. به طور کلی به سازه‌هایی که در این ابعاد یا کوچکتر ساخته می‌شوند، ریزساختار گفته می‌شود. ریزساختارها امروزه به شکل میکروتیر و میکروصفحه در بیوسنسورها، میکروسکوپ نیرو اتمی، میکروژيروسکوپ‌ها و به طور کلی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی^۱ و نانوالکترومکانیکی^۲ به وفور دیده می‌شوند.

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی و نانوالکترومکانیکی برای اولین بار در دهه‌ی ۱۹۸۰ مورد استفاده قرار گرفت، زمانی که نخستین بار در آمریکا در مجموعه‌ی گسترده‌ای از تکنولوژی با هدف کوچک سازی سیستم‌ها با مجتمع سازی عملگرها در یک پکیج کوچک استفاده شد. سیستم‌های میکروالکترومکانیک به تکنولوژی ساخت دستگاه‌های بسیار کوچک گفته می‌شود که در ابعاد نانو با سیستم‌های نانوالکترومکانیکی ترکیب می‌شود. امروزه سیستم‌های میکروالکترومکانیکی و نانوالکترومکانیکی به طرز باور نکردنی‌ای رشد کرده‌اند. میکروسوئیچ‌های نوری، شتاب‌سنج‌های گوشی‌های همراه و هارد دیسک‌های کامپیوترها، سنسورهای شتاب سنج سیال، ساختارهای میکرونی پرینترهای لیزر جت و انواع رزوناتورها تنها بخش کوچکی از کاربردهای سیستم‌های میکروالکترومکانیکی هستند.

مواد متغیّر تابعی^۳، دسته‌ی جدیدی از مواد غیرهمگن هستند که با تغییرات ریزساختاری از یک ماده به ماده‌ی دیگر با یک شیب مشخص تولید می‌شوند. از این رو، مشخصات مواد به طور پیوسته در یک یا چند جهت تغییر می‌کند. برخلاف مواد کامپوزیتی لایه-لایه‌ای، این ویژگی، این دسته از مواد را قادر

¹ Micro Electro Mechanical System (MEMS)

³ Functionally Graded Materials (FGM)

² Nano Electro Mechanical System (NEMS)

می‌سازد تا مزایای هر دو ماده تشکیل‌دهنده را بدون ایجاد تمرکز تنش ناشی از تغییر ناگهانی ماده داشته باشند. با توجه به قابلیت یاد شده، ماده *FG* در کاربردهای مختلف مهندسی همچون الکترونیک، صنایع مدارهای الکتریکی کامپیوتر، اپتیک، مهندسی هوافضا، صنایع نظامی، صنایع نیمه رساناها و ... گسترش یافته است. اخیراً نیز ریزساختارهای ساخته شده از ماده *FG* در کاربردهای گوناگون، گسترش یافته است [۱،۲]. بنابراین بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی ریزساختارهای ساخته شده از ماده *FG* حائز اهمیت بوده و تاکنون مطالعات بسیاری در این زمینه انجام شده است. اکثر تحقیقات انجام شده بر روی ریزساختارهایی چون میکروتیر ساخته شده از ماده *FG*، با فرض تغییر خصوصیات ماده در راستای ضخامت بوده و مطالعات اندکی به بررسی رفتار میکروتیر ساخته شده از ماده متغیر تابعی محوری^۴، که خصوصیات فیزیکی و مکانیکی ماده در آن در راستای طول تغییر می‌کند، پرداخته شده است. مقاومت مکانیکی و حرارتی که میکروتیرهای ساخته شده از ماده متغیر تابعی محوری دارند سبب می‌شود تا بتوان از آنها در ساخت میکروسکوپ‌های نیرو اتمی^۵ روبش‌کننده محیط‌های داغ و بهبود عملکرد سیستم‌های میکروالکترومکانیکی استفاده کرد.

امروزه انرژی مصرفی وسایل مختلف با وجود محدودیت‌های دسترسی به منابع انرژی، برای دستگاه‌های سیار بایستی بهینه شود. خوشبختانه آنالیزهای مختلفی بر روی فاکتورهای اساسی اتلاف انرژی صورت پذیرفته است. رسیدن به کارایی حداکثری در رزوناتورها به عنوان بخشی از سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، به معنای ساخت آنها در کارکرد با اتلاف انرژی کمتر و ضریب کیفیت بالاتر است. ضریب کیفیت رزوناتور یک معیار برای اندازه‌گیری میزان هدررفت انرژی است. منابع اتلاف کننده در رزوناتورها به دو بخش خارجی و داخلی تقسیم می‌شوند. میرایی هوا و اتلاف تکیه‌گاهی از عوامل عمده‌ی خارجی هستند که می‌توانند با طراحی‌های مطلوب به حداقل رسانده شوند. به عنوان مثال، میرایی ناشی از فشار هوا با ایجاد فضای خلاء به حداقل می‌رسد. از سوی دیگر، منابع اتلاف

⁴ Axially Functionally Graded (AFG)

⁵ Atomic Force Microscopy (AFM)

داخلی یا ذاتی مانند میرایی ترموالاستیک نمی‌توانند به سادگی منابع خارجی، کنترل یا حذف شوند. میرایی ترموالاستیک^۶ ناشی از شار حرارتی برگشت‌ناپذیر تولیدی در سیستم‌های ارتعاشی است. این شار حرارتی از قسمت فشرده به ناحیه کشیده شده، که در دمای پایین‌تری قرار دارد، برقرار می‌شود تا سازه را در تعادل حرارتی نگه دارد. شار حرارتی برگشت‌ناپذیر باعث افزایش آنتروپی شده که در ریزساختارها اتلاف انرژی زیادی را به همراه دارد [۳]. به‌خصوص، این میرایی یک مکانیزم اتلافی مهم در ریزساختارهای میکرو و نانویی است که در مودهای ارتعاشی خمشی نوسان می‌کنند و سبب کاهش ضریب کیفیت و افزایش مصرف انرژی می‌شود. از این‌رو بررسی پارامترهای مؤثر در ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک در ریزساختارها و پیدا کردن راهی که بتوان تا حد امکان اتلافات داخلی مانند میرایی ترموالاستیک را کاهش داد از اهمیت به‌سزایی برخوردار است.

هم نتایج آزمایشگاهی و هم شبیه‌سازی‌های مولکولی نشان دادند که اثر اندازه در مشخصات مکانیکی هنگامی که ابعاد خیلی کوچک می‌شود پر اهمیت می‌شود. اثر اندازه در رفتار استاتیکی و دینامیکی ریزساختارهای میکرو و نانو یک نقش مهم را ایفا می‌کند. مکانیک محیط پیوسته‌ی کلاسیک، اثر اندازه را در ریزساختارها در نظر نمی‌گیرد. به‌همین منظور، تئوری‌های مرتبه بالاتر مانند تنش کوپل اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده توسعه یافته‌اند تا اثر اندازه را در ریزساختارها با معرفی پارامترهای درونی مقیاس طولی در روابط ساختاری آشکار سازند.

تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده^۷ که توسط لم^۸ و همکارانش [۴] توسعه یافته است، با در نظر گرفتن سه پارامتر مقیاس طولی، تأثیر اندازه را بر رفتار مکانیکی ریزساختارها نشان می‌دهد.

کونگ و همکاران [۵] نشان دادند که برای یک میکروتیر، فرکانس طبیعی محاسبه شده با تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده عموماً بالاتر از فرکانسی است که با تئوری کلاسیک به‌دست آمده است. بنابراین انتظار می‌رود که میرایی ترموالاستیک محاسبه شده توسط تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده

⁶ Thermo-Elastic Damping (TED)

⁷ Modified Strain Gradient Theory (MSGT)

⁸ Lam

نیز با نمونه‌ی کلاسیک آن متفاوت باشد. همچنین تأثیر در نظر گرفتن پارامترهای مقیاس طولی بر ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر هنوز یک زمینه پرسش برانگیز بوده که مطالعات کافی در این زمینه انجام نشده است. علاوه بر آن تاکنون مطالعه‌ای بر روی میرایی ترموالاستیک در میکروتیر ساخته شده از مواد متغیّر تابعی محوری گزارش نشده است.

۱-۲- اهداف پژوهش

در این پایان‌نامه میرایی ترموالاستیک در میکروتیرهای ساخته شده از مواد FG محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده بررسی شده است. مدل میکروتیر اولر-برنولی و شرایط تکیه‌گاهی دو سرگیردار و یک سرگیردار در نظر گرفته می‌شود. ابتدا در بخش نخست، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشات آزاد میکروتیر FG محوری بدون در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده استخراج و فرض می‌شود که سطح مقطع میکروتیر در راستای محور متغیّر باشد و در ادامه معادلات دیفرانسیلی حاکم بر میکروتیر یک سرگیردار به روش نیمه‌تحلیلی ریلی-ریتز و میکروتیر دو سرگیردار به روش گالرکین حل می‌شوند. همچنین با تبدیل معادله‌ی دیفرانسیلی حاکم به یک معادله‌ی انتگرالی فردهولم، دو حلّ عددی برای آن پیشنهاد و نتایج آنها با یکدیگر مقایسه می‌شوند. بخش دوم به بررسی میرایی ترموالاستیک و استخراج معادلات حاکم در میکروتیر همگن با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده اختصاص دارد. در این بخش معادله‌ی انتقال حرارت بر اساس تئوری لرد-شولمن در نظر گرفته شده و آنالیز ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک بر اساس دو دیدگاه فرکانس مختلط و دیدگاه تولید آنتروپی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش سوم نیز با افزودن اثر میرایی ترموالاستیک در میکروتیر FG محوری مبتنی بر تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، ضریب کیفیت و رفتار ارتعاشی آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۱-۳- ساختار پایان‌نامه

فصل نخست به مقدمه، ابعاد و جایگاه موضوع پرداخته و اهمیت، اهداف و ساختار پایان‌نامه را تبیین

می‌کند. در فصل دوم مفاهیم پایه و اولیه‌ای چون میرایی ترموالاستیک، ماده FG و تئوری‌های الاستیسیته تعریف شده و مروری بر ادبیات موضوعی انجام می‌شود. فصل سوم معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی یک میکروتیر از جنس ماده FG محوری را بدون در نظر گرفتن میرایی بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده ارائه می‌دهد. فصل چهارم و پنجم به آنالیز میرایی ترموالاستیک میکروتیر همگن با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و تئوری غیر فوریه‌ی انتقال حرارت به ترتیب مبتنی بر روش فرکانس مختلط و روش تولید آنتروپی اختصاص دارد. فصل ششم به بررسی میرایی ترموالاستیک در میکروتیر ساخته شده از ماده متغیر تابعی محوری پرداخته است. در فصل آخر نیز پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی ارائه می‌شود.

فصل دوّم:

مفاهيم اوّليه و پيشينه‌ى تحقيق

۲-۱- مقدمه

در این فصل ابتدا مفاهیم اولیه‌ای که در طول پایان‌نامه از آنها استفاده می‌شود تعریف شده و جایگاه و تاریخچه‌ی مختصری از این اصطلاحات بیان می‌شود. در انتها مروری بر ادبیات موضوعی این پایان‌نامه گزارش می‌شود تا جایگاه و اهمیت آن روشن‌تر شود.

۲-۲- میرایی ترموالاستیک

رزوناتورهای مکانیکی میکرونی حساسیست بالایی در پاسخگویی سریع دارند و به طور گسترده‌ای در سنسورها و مدولاتورها استفاده می‌شوند [۶]. از این رو دانستن این موضوع ضرورت می‌یابد که چه پارامترهایی می‌تواند بر خصوصیات فیزیکی و مکانیکی آنها اثر بگذارد. در مورد رزوناتورها، هدف، طراحی و ساخت سیستم‌هایی با اتلاف انرژی تا حد ممکن کوچک است. متأسفانه، مشاهده شده است که با کاهش اندازه، اتلاف انرژی به طور مشخصی افزایش می‌یابد [۷].

محققان بسیاری درباره‌ی منابع مختلف اتلاف مکانیکی در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی بحث کرده‌اند [۸]. میهایلوویچ^۹ و مک دونالد^{۱۰} [۹] با اندازه‌گیری اتلاف‌های مکانیکی مختلف یک رزوناتور میکرونی که در محیط خلاء کار می‌کرد، سه منبع ممکن برای این اتلافات را که شامل اتلاف ناخالصی ماده خارجی^{۱۱}، اتلاف مرتبط به تکیه‌گاه^{۱۲} و اتلاف مرتبط با سطح^{۱۳} هستند را معرفی کردند. ژانگ^{۱۴} و همکاران [۱۰] تأثیر میرایی هوا را بر پاسخ فرکانسی سنجیدند و نشان دادند که عموماً میرایی هوا فرکانس تشدید را به بیشتر از مرتبه 10^{-6} نمی‌برد و ضریب کیفی را کاهش می‌دهد که این تأثیر با افزایش ابعاد، کاهش می‌یابد. هرینگتون^{۱۵} و همکاران [۱۱] با اندازه‌گیری اتلاف یک رزوناتور دریافتند که فرکانس تشدید با دما تغییر می‌کند. پس از آنها، زنر^{۱۶} در سال ۱۹۳۷ وجود میرایی ترموالاستیک را پیش‌بینی و به سرعت جنبه‌های اساسی تئوری‌اش را به صورت تجربی بازبینی کرد [۱۲-۱۴].

⁹ Mihailovich

¹⁰ MacDonald

¹¹ Doping-impurity losses

¹² Support-related losses

¹³ Surface-related losses

¹⁴ Zhang

¹⁵ Harrington

¹⁶ Zener

در جسم ترموالاستیک، کوپل بین میدان کرنش و میدان دمایی سبب یک مکانیزم اتلاف مکانیکی می‌شود که اجازه می‌دهد تا سیستم به حالت تعادل برگردد. بازگشت به حالت تعادل در جامد ترموالاستیک با شار برگشت ناپذیر حرارت ناشی از گرادیان دمای موضعی صورت می‌پذیرد که با میدان کرنش کوپل است. این فرآیند اتلاف را میرایی ترموالاستیک می‌گویند [۷].

بری^{۱۷} در سال ۱۹۵۵ آزمایشی را بر پایه‌ی تئوری زرن برای برنج-آلفا^{۱۸} انجام داد که در آن میرایی به عنوان تابعی از دمای اتاق اندازه‌گیری شد [۱۵]. رزهارت^{۱۹} [۱۶] در سال ۱۹۹۰ و یاسمورا^{۲۰} و همکاران [۱۷] در سال ۱۹۹۹ به ترتیب میرایی ترموالاستیک برای سیلیکون تک کریستال و میکرورزوناتور سیلیکون نیتريد را در دمای اتاق گزارش کردند. لاندائو و لیفشیتز^{۲۱} یک عبارت دقیق برای ضرایب میرایی ارتعاش ترموالاستیک بیان کردند، اما یک استنتاج قوی و حل معادلات حاکم را ارائه نکردند [۱۸]. اووی^{۲۲} و همکاران [۱۹] و دوول^{۲۳} و همکاران [۲۰] به صورت تجربی نشان دادند که میرایی ترموالاستیک یک منبع عمده در میرایی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی و نانوالکترومکانیکی است. لیفشیتز و روکس^{۲۴} میرایی ترموالاستیک را در یک تیر با سطح مقطع مستطیلی مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که با افزایش اندازه، میرایی ترموالاستیک کاهش می‌یابد [۷]. ایشان یک عبارت تحلیلی برای ضریب کیفیت در میرایی ترموالاستیک در میکروتیر ارائه کردند. نایفه و یونیس^{۲۵} نیز یک عبارت تحلیلی برای ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک در میکروصفحه‌ها با هندسه و شرایط مرزی عمومی استخراج کردند [۲۱].

۲-۳- مواد متغیر تابعی

مواد کامپوزیتی سبک با نسبت مقاومت و استحکام به وزن بالا به طور موفقیت آمیزی در صنایع هوایی و دیگر کاربردهای مهندسی استفاده می‌شوند. اگرچه مواد کامپوزیتی در محیط‌های گرم نیز استفاده

¹⁷ Berry

¹⁸ α -brass

¹⁹ Roszhardt

²⁰ Yasumura

²¹ Landau and Liftshitz

²² Evoy

²³ Duwel

²⁴ Roukes

²⁵ Nayfeh and Younis

می‌شوند، اما این مواد کامپوزیتی قدیمی نمی‌توانند در محیط‌هایی با دمای خیلی زیاد به کار روند. فلز به‌خاطر مقاومت و چقرمگی بالای آن برای سالیان طولانی در زمینه‌های مختلف مهندسی استفاده می‌شود. در شرایط دمایی بالا، استحکام فلز مانند مواد کامپوزیتی قدیمی کاهش می‌یابد. مواد سرامیکی مقاومت حرارتی بسیار خوبی دارند، اما به‌دلیل چقرمگی پایین این مواد، کاربردهای محدودی دارند.

اخیراً دسته‌ی جدیدی از مواد کامپوزیتی به نام مواد متغیر تابعی به‌شدت توجه صنعتگران را به خود جلب کرده است. مواد *FG* دسته‌ی جدیدی از مواد غیرهمگن هستند که با تغییرات ریزساختاری از یک ماده به ماده دیگر با شیب مشخص تولید می‌شوند. با تغییر پیوسته‌ی کسر حجمی مواد سازنده، مشخصات *FGM* برخلاف مواد کامپوزیتی لایه-لایه‌ای، در یک یا چند راستا به‌صورت پیوسته و نرم تغییر می‌کند تا از رخداد مشکلات ناشی از تمرکز تنش خصوصاً تمرکز تنش دمایی به‌دلیل تفاوت در ضریب انبساط حرارتی جلوگیری کند. از آنجایی که مواد سرامیکی تحمل بالایی در محیط‌های دما بالا به‌خاطر مشخصات دمایی بهتر نسبت به فلزات دارند و همچنین فلزات کارایی مکانیکی بهتری را از خود نشان می‌دهند، معمولاً به‌عنوان ماده‌ی سازنده‌ی *FGM* مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲۲].

واژه *FGM*، برای اولین بار در میانه دهه ۱۹۸۰ میلادی توسط یک گروه از دانشمندان ژاپنی استفاده شد [۲۳]. از آن زمان، با استفاده از مواد *FG*، تلاش برای گسترش مواد با مقاومت بالا ادامه یافت. هرچند مواد *FG* در آغاز به‌عنوان مواد برای سازه‌های فضایی و بدنه راکتورها طراحی شدند [۲۴، ۲۵]، اما امروزه به‌عنوان اجزای سازه‌ای مختلفی در محیط‌هایی با دماهای بالا استفاده می‌شوند. اخیراً کاربردهای متنوعی از مواد *FG* در مقالات گزارش شده است، مانند سنسورها [۲۶] و محرک‌های *FGM* [۲۷]، سلاح‌های *FGM* سرامیک-فلز [۲۸]، آشکارساز عکس [۲۹] و ایمپلنت‌های پزشکی از جنس *FGM* [۳۰].

۲-۳-۱- روش تولید

مواد *FG* به روش‌های مختلفی تولید می‌شود که می‌توان آن را به دو دسته تولید لایه لایه‌ای و تولید

بر پایه پدیده انتقال تقسیم بندی کرد. در تولید به روش لایه لایه‌ای که به آن روش ساختمانی گفته می‌شود تغییرات تدریجی در خواص به طور دقیق صورت می‌گیرد و فرآیندهای ساخت آن توسط کامپیوتر کنترل می‌شود. هزینه این روش ساخت بسیار گران است.

می‌توان برای ساخت مواد *FG* و ایجاد تغییرات تدریجی در میکروساختارها و تولید ترکیب دلخواه، از جریان سیال، انتشار اتمی و انتقال حرارت استفاده کرد [۳۱]. این روش‌های تولید در دسته دوم قرار می‌گیرند و قرن‌هاست که برای تولید گرادیان‌های میکروساختاری و ترکیبی در فولادها استفاده می‌شوند. روش‌های مبتنی بر انتقال برخلاف روش‌های ساختمانی اجازه انتخاب دلخواه شیب تغییرات را نمی‌دهد. در روش‌های متداول ساخت می‌توان به روش‌های متالورژی پودر، رسوب‌گذاری اسپری حرارتی، فرآیند روکش‌دهی و پاشش پلاسما اشاره کرد.

در روش متالورژی پودر برای تولید مواد از جنس فلز-سرامیک ابتدا هر دو جنس به صورت پودر در آمده و تغییرات تدریجی مورد نظر در کسر حجمی فازها انجام می‌شود. فرآیند اختلاط می‌تواند توسط کامپیوتر مطابق یک برنامه پاشش مشخص کنترل شود. سپس با فرآیندهای مرسوم حالت جامد مانند پرس کردن متراکم می‌شوند. این روش برای تولید قطعات نازک کاربردی ندارد.

در روش رسوب‌گذاری اسپری حرارتی، فواره‌ای از فلز مذاب به لایه‌ای جامد افشاند می‌شود که در طی این عملیات یک لایه جامد به سرعت تشکیل می‌شود. این روش برای تولید قطعات آلومینیوم و کربید کلسیم استفاده می‌شود.

در فرآیند روکش‌دهی از مواد *FG* به عنوان لایه واسط بهینه بین یک لایه داخلی و یک لایه خارجی استفاده می‌شود.

در روش پاشش پلاسما با استفاده از تفنگ پلاسما، ذرات پودر به قطر ۱۰۰ میکرون به سرعت گرم شده و شتاب پیدا می‌کنند و با سرعت کنترل شده با یکدیگر مخلوط می‌شوند.

۲-۳-۲- تابع توزیع مواد

معمولاً مطالعه مواد *FG*، با فرض توزیع مواد به صورت‌های توزیع با تابع توانی، نمایی و یا کسر حجمی

انجام می‌شود. در مورد تیرهای ساخته شده از ماده‌ی FG که گرادیان مواد در راستای ضخامت‌شان پیوسته تغییر می‌کند، عمدتاً از توزیع توانی یا نمایی استفاده می‌شود و بررسی تیرهای ساخته شده از مواد AFG با فرض تابع توزیع خطی انجام می‌شود.

۲-۴- تئوری‌های الاستیسیته

۲-۴-۱- الاستیسیته کلاسیک

رفتار الاستیک خطی مواد بر پایه قانون هوک اساس یافت که در آن نیروی F ، یک نیروی تک محوری در تست کشش یک میله جامد که با جابه‌جایی محوری Δu ، به صورت خطی با یک ثابت فنری k_s تغییر می‌کند.

$$F = k_s \Delta u \quad (1-2)$$

اساس فیزیکی الاستیسیته کلاسیک را همین رفتار الاستیک خطی تشکیل می‌دهد. در الاستیسیته کلاسیک می‌توان از معیارهای اولیه تنش σ_{ij} و کرنش ε_{ij} ، به ترتیب به جای نیرو و جابه‌جایی استفاده کرد که به صورت خطی با مدول الاستیسیته E ، رابطه دارند.

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (2-2)$$

در رابطه فوق، ν ضریب پواسون که برای ماده‌ی همسانگرد مانند E ثابت و مستقل از هندسه و اندازه مواد است. این رابطه را همچنین می‌توان بر حسب ثوابت لامه λ و μ ، به صورت زیر نوشت.

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (3-2)$$

رابطه (۳-۲)، رابطه ساختاری ماده‌ی همسانگرد خطی در تئوری کلاسیک بوده و برای سازه‌هایی در ابعاد ماکرو بسیار دقیق است اما مشاهدات تجربی و آزمایشگاهی نشان می‌دهد که با کاهش مشخصه‌های اندازه، از اعتبار این رابطه کاسته می‌شود [۳۲].

نتایج آزمایشگاهی حاکی از آن است که رفتار مکانیکی مواد در مقیاس‌های طولی میکرون و کوچکتر از آن به شدت به اندازه آن وابسته است. این رفتار مواد در مقیاس‌های میکرون و کوچکتر را به

اصطلاح رفتار وابسته به اندازه^{۲۶} می‌نامند. منظور از رفتار وابسته به اندازه، تغییر در خصوصیات و ویژگی‌های مکانیکی ماده با کاهش مقیاس آن می‌باشد. اگرچه مطالعات بسیاری بر روی رفتار استاتیکی و دینامیکی ریزساختارها با استفاده از تئوری‌های الاستیسیته کلاسیک انجام گرفته است، اما از آنجایی که در معادلات بنیادی این تئوری‌ها، پارامتر یا پارامترهایی که وابستگی رفتار مکانیکی ماده را به مقیاس طولی نشان دهد، وجود ندارد، نمی‌توان به نتایج حاصل از این مطالعات اعتماد کرد. در این مطالعه، پارامتر یا پارامترهایی که رفتار وابسته به اندازه مواد را نشان می‌دهند، پارامتر مقیاس طولی^{۲۷} ماده نامیده می‌شوند. در ادامه به معرفی تئوری‌های الاستیسیته غیر کلاسیک پرداخته می‌شود که معادلات بنیادین آنها شامل پارامترهای مقیاس طولی ماده هستند. به طور کلی می‌توان تئوری‌های الاستیسیته غیر کلاسیک را به تئوری‌های الاستیسیته مرتبه بالاتر و تئوری الاستیسیته غیرموضعی تقسیم کرد.

۲-۴-۲- تئوری‌های مرتبه بالاتر

به طور کلی تئوری‌های مرتبه بالاتر، تئوری‌های الاستیسیته‌ای هستند که در معادلات ساختاری آنها، جملاتی متناظر با گرادیان کرنش وجود دارد. اگر چه تئوری‌های الاستیسیته غیر کلاسیک کسرات، میکروپلار، تنش کوپل و گرادیان کرنش از جمله تئوری‌های مرتبه بالاتر به‌شمار می‌روند اما در تقسیم‌بندی کلی این تئوری‌ها را به دو دسته تنش کوپل و گرادیان کرنش تقسیم می‌کنیم. در ادامه به معرفی این تئوری‌ها خواهیم پرداخت.

۲-۴-۳- الاستیسیته غیر کلاسیک کسرات، میکروپلار و تنش کوپل

برادران کسرات^{۲۸} برای اولین بار تئوری تنش کوپل^{۲۹} خود را در سال ۱۹۰۹ معرفی کردند [۳۳]. این تئوری تنها جابه‌جایی‌های انتقالی موضعی نقاط جسم و تنش (نیرو بر واحد سطح) موجود در الاستیسیته کلاسیک را در نظر نمی‌گیرد، بلکه چرخش موضعی آن نقاط و همچنین تنش‌های ناشی از

²⁶ Size dependent

²⁷ Length scale parameter

²⁸ Cosserat

²⁹ Couple stress

لنگر (لنگر بر واحد سطح) را نیز دخیل می‌داند. رابطه ساختاری ارائه شده بر این اساس به صورت زیر است.

$$\sigma_{ij} = (2\mu + \kappa)\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \kappa e_{ijm}(\hat{w}_m - \phi_m) \quad (4-2)$$

$$m_{ij} = \alpha\phi_{r,r}\delta_{ij} + \beta\phi_{i,j} + \gamma\phi_{j,i} \quad (5-2)$$

در اینجا کاما نشان دهنده مشتق پاره‌ای نسبت به مختصات است. m_{ij} تنش کوپل (لنگر بر واحد سطح)، ϕ میکرو-چرخش^{۳۰} جسم تغییر شکل یافته در موقعیت داده شده است. \hat{w} ماکرو-چرخش محیط پیوسته معمول است ($\hat{w} = (\nabla \times u)/2$) و e_{ijm} تانسور جایگشت می‌باشد. ماکرو-چرخش^{۳۱} به کل جسم اعمال می‌شود در حالی که میکرو-چرخش به چرخش بردارهای سه تایی یک نقطه از جسم در حالت تغییر شکل یافته نسبت به وضعیت اولیه اطلاق می‌شود. پارامترهای باقیمانده (α ، β ، γ و κ) ثوابت میکروپلار^{۳۲} ماده نامیده می‌شوند.

هر چند ایده تنش کوپل توسط ویت معرفی شد [۳۴]، اما با دقت زیاد برای اولین بار کسرات‌ها آن را با روابط (۴-۲) و (۵-۲) تعریف کرده بودند.

ارینگن با انجام بازنگری‌هایی در تئوری کسورات و لزوم پادمتقادن بودن تانسور میکروچرخش (آخرین جمله رابطه (۴-۲)) و تانسور تنش کوپل (m_{ij})، تئوری میکروپلار را معرفی کرد [۳۵]. امروزه تئوری کسرات و میکروپلار معادل با یکدیگر هستند.

میندلین و تیرستن ۱۹۶۲ [۳۶]، توپین ۱۹۶۲ [۳۷] و کویتز ۱۹۶۴ [۳۸]، تئوری تنش کوپل کلاسیک را به عنوان یک تئوری الاستیسیته مرتبه بالای دیگر معرفی کردند. این تئوری شامل دو پارامتر اضافی مقیاس طولی مواد است. با وجود اینکه تنها دو پارامتر غیر کلاسیک اضافی در این تئوری وجود دارد، اما هنوز استفاده از این تئوری مشکل است.

۲-۴-۴ - الاستیسیته تنش کوپل اصلاح شده

رابطه تعادل در تئوری میکروپلار ارائه شده توسط ارینگن و همکارانش رابطه تعادل متداول نیروها و

³⁰ Microrotation

³² Micropolar

³¹ Macrorotation

گشتاور نیروهاست و هیچ رابطه تعادل مرتبه بالایی در آن لحاظ نشده است. یانگ و همکاران با افزودن یک مجموعه جدید از معادلات تعادل حاکم بر رفتار دورانی ذرات ماده و با معرفی مفهوم المان حجم، تئوری تنش کوپل را اصلاح کردند [۳۹].

$$\sigma \cdot \nabla + \frac{1}{2} \epsilon : (m \cdot \nabla \otimes \nabla \otimes + 1 \otimes \nabla) + f = 0 \quad (۶-۲)$$

در این رابطه σ تانسور تنش، m تانسور تنش کوپل و ϵ تانسور جایگشت هستند. این رابطه قید می‌کند که تانسور تنش کوپل باید متقارن باشد و همچنین از آنجایی که قسمت متقارن تانسور پیچش یک معیار اضافی در تغییر شکل مرتبط با تنش کوپل است پس قسمت پادمقارن آن نباید در تابع انرژی کرنشی به صورت صریح وارد شود. بر اساس نتیجه این قیدها تعداد پارامترهای مقیاس طولی از دو پارامتر در تنش کوپل کلاسیک، به یک پارامتر در این تئوری کاهش می‌یابد. امروزه این تئوری به عنوان تئوری الاستیسیته تنش کوپل اصلاح شده شناخته می‌شود.

در این تئوری چگالی انرژی کرنشی، تابعی از دو تانسور کرنش (متناظر با تانسور تنش) و پیچیدگی (متناظر با تانسور تنش کوپل) می‌باشد و برای ماده تغییر شکل یافته الاستیک خطی و همسانگرد که ناحیه V را اشغال کرده است به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (۷-۲)$$

که در آن σ_{ij} ، ϵ_{ij} ، m_{ij} ، χ_{ij} به ترتیب مؤلفه‌های تانسور تنش، تانسور کرنش، قسمت انحرافی تانسور تنش کوپل و قسمت متقارن تانسور انحناء هستند.

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (۸-۲)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (۹-۲)$$

$$m_{ij} = 2l^2 \mu \chi_{ij} \quad (۱۰-۲)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (۱۱-۲)$$

که u_i مؤلفه بردار جابجایی، l پارامتر مقیاس طولی ماده، λ و μ ضرایب لامه و θ_i مؤلفه بردار چرخش

است که بوسیله

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \quad (12-2)$$

داده شده است. که ν ضریب پواسون و e_{ijk} نماد جایگشت می باشد.

پارک^۱ و گائو^۲ اولین محققان بودند که با استفاده از تئوری تنش کوپل رفتار تیرهای اولر برنولی را بررسی کردند [۴۰]. آنها توانستند نتایج آزمایشگاهی مربوط به تست خمش تیر اپوکسی را صحنه‌گذاری کنند. به تقلید از آنها، کونگ^۳ و همکاران معادلات حاکم، شرایط اولیه و مرزی یک تیر اولر-برنولی را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و اصل هامیلتون استخراج کردند [۴۱]. ایشان نشان دادند که فرکانس طبیعی میکروتیرها وابسته به اندازه است و تفاوت محسوسی بین فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده از تئوری کلاسیک و آنچه با تئوری تنش کوپل اصلاح شده بدست آمده، وجود دارد. تئوری تنش کوپل به استفاده در تئوری تیر اولر برنولی ختم نشد؛ ما^۴ و همکاران رفتار استاتیکی و دینامیکی وابسته به اندازه‌ی تیرهای تیموشنکو و ردی-لوینسون را بررسی کردند [۴۲، ۴۳].

۲-۴-۵- الاستیسیته گرادیان کرنش

میندلین^۵ [۴۴] در سال ۱۹۶۵ یک تئوری مرتبه بالاتر تنش را توسعه داد که شامل گرادیان‌های مرتبه مرتبه بالاتر کرنش بود. در ویرایش‌های ساده سازی شده این تئوری، فقط گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل (گرادیان مرتبه اول کرنش) به عنوان یک معیار اضافی در نظر گرفته شده است. گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل (۱۸ مؤلفه مستقل) دارای یک قسمت پاد متقارن (۸ مؤلفه مستقل) و یک قسمت متقارن (۱۰ مؤلفه مستقل) است. معادلات حاکم و شرایط مرزی در این تئوری از اصل کار مجازی استخراج می‌شود. میندلین نتیجه گرفت که برای یک ماده همسانگرد متقارن مرکزی، ۵ پارامتر

¹ Park

² Gao

³ Kong

⁴ Ma

⁵ Mindlin

الاستیک خطی مرتبط با گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل وجود دارد.

فلک و هاچینسون^۱ [۴۵،۴۶] تئوری ساده شده میندلین را مجدداً فرمول بندی کردند و آن را تئوری گرادیان کرنش نامیدند. در تئوری گرادیان کرنش، تانسور گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل به دو قسمت مستقل تانسور گرادیان کشش و تانسور گرادیان چرخش تقسیم می‌شود. عمده‌ترین تفاوت تئوری گرادیان کرنش با تئوری الاستیسیته معمول این است که چگالی انرژی کرنشی w ، هم به کرنش (قسمت متقارن گرادیان مرتبه اول تغییر شکل) و هم به گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل وابسته است.

$$w = w(\varepsilon_{ij}, \eta_{ijk}) \quad (۱۳-۲)$$

که در آن ε_{ij} و η_{ijk} به ترتیب تانسور کرنش و تانسور گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل است. در رابطه فوق تانسور کرنش و تانسور گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i); \quad \eta_{ijk} = \partial_{ij} u_k \quad (۱۴-۲)$$

که در آن ∂_i اپراتور گرادیان رو به جلو و u_i بردار جابه‌جایی است. تانسور کرنش شش مؤلفه مستقل متقارن و تانسور گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل ۱۸ مؤلفه مستقل دارد که همه آنها در دو اندیس ابتدایی متقارن هستند.

از نتایج به‌دست آمده از میندلین [۴۴] و فلک و هاچینسون [۴۵]، تانسور تنش کوشی σ_{ij} و تانسور تنش دابل τ_{ij} ، به ترتیب مرتبط با تانسور کرنش و تانسور گرادیان مرتبه دوم کرنش به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \tau_{ijk} = \frac{\partial w}{\partial \eta_{ijk}}. \quad (۱۵-۲)$$

چگالی انرژی کرنشی بر اساس تعریف میندلین [۴۴] برای ماده همسانگرد الاستیک خطی به صورت زیر تعریف می‌شود.

¹ Fleck and Hutchinson

$$w = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + a_1 \eta_{ijj} \eta_{ikk} + a_2 \eta_{iik} \eta_{kjj} \\ + a_3 \eta_{iik} \eta_{jjk} + a_4 \eta_{ijk} \eta_{ijk} + a_5 \eta_{ijk} \eta_{kji} \quad (۱۶-۲)$$

که در آن λ و μ ثوابت لامه متناظر با تانسور کرنش و a_n ($n = 1, 2, \dots, 5$) پنج ثابت اضافی مرتبه دوم الاستیک مرتبط با گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل هستند.

۲-۴-۶- الاستیسیته گرادیان کرنش اصلاح شده

در فرمولاسیون تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش روابط تعادل معمول استفاده شده و شرایط تعادل مرتبه بالاتر حاکم بر رفتار تنش‌های مرتبه بالاتر نادیده گرفته شده است. لم و همکاران [۴] در سال ۲۰۰۳ با توسعه یک مجموعه جدید از معیار مرتبه بالاتر که منجر به استفاده از شرایط معادله تعادل مرتبه بالاتر شد، توانستند تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش را اصلاح و تعداد پارامترهای مستقل مقیاس طولی الاستیک را از ۵ به ۳ کاهش دهند.

فلک و هاچینسون [۴۵] گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل η_{ijk} را به دو قسمت متقارن η_{ijk}^s و پاد متقارن η_{ijk}^a تجزیه کردند.

$$\eta_{ijk}^s = \frac{1}{3} (\eta_{ijk} + \eta_{jki} + \eta_{kij}), \quad \eta_{ijk}^a = \frac{2}{3} (e_{ikl} \chi_{lj} + e_{jkl} \chi_{li}) \quad (۱۷-۲)$$

که در آن e_{ijk} تانسور جایگشت و $\chi_{ij} = 1/2 e_{ipq} \eta_{jpq}$ تانسور پیچش است. قسمت متقارن ماتریس گرادیان مرتبه دوم تغییر شکل η_{ijk}^s نیز می‌تواند به دو قسمت اثر ($trace$) $\eta_{ijk}^{(0)}$ و بدون اثر ($traceless$) $\eta_{ijk}^{(1)}$ تقسیم کرد.

$$\eta_{ijk}^s = \eta_{ijk}^{(0)} + \eta_{ijk}^{(1)} \quad (۱۸-۲)$$

همچنین ماتریس پیچش را نیز می‌تواند به دو قسمت متقارن χ_{ij}^s و پاد متقارن χ_{ij}^a تقسیم کرد.

$$\chi_{ij} = \chi_{ij}^s + \chi_{ij}^a \quad (۱۹-۲)$$

که در آن قسمت‌های متقارن و پادمتقارن به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{2} (\chi_{ij} + \chi_{ji}), \quad \chi_{ij}^a = \frac{1}{2} (\chi_{ij} - \chi_{ji}) \quad (۲۰-۲)$$

کاربرد قید تعادل مرتبه بالاتر که توسط لیم و همکاران [۴] توسعه یافت، نشان داد که چگالی انرژی

تغییر شکل کل تابعی از قسمت متقارن تانسور کرنش ε_{ij} بردار گرادیان اتساع ε_i ، تانسور گرادیان کشش انحرافی $\eta_{ijk}^{(1)}$ و تانسور متقارن گرادیان چرخش χ_{ij}^s است و مستقل از تانسور پاد متقارن گرادیان چرخش χ_{ij}^a است.

$$w = w(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_i, \eta_{ijk}^{(1)}, \chi_{ij}^s) \quad (21-2)$$

بر اساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش اصلاح شده، چگالی انرژی کرنشی برای ماده همسانگرد متقارن-مرکزی^۱ الاستیک خطی که ناحیه V را اشغال کرده است به صورت یک تابع درجه دوم از ماتریس‌های ناوردای^۲ کرنش تعریف می‌شود.

$$w = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} + a'_0 \varepsilon_{mm,i} \varepsilon_{nn,i} + a'_1 \eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + a'_2 \chi_{ij}^s \chi_{ij}^s \quad (22-2)$$

که در آن کرنش انحرافی ε'_{ij} و همچنین پارامترهای مستقل اضافی ماده a'_n ($n = 0, 1, 2$)، مرتبط با گرادیان اتساع، گرادیان کشش انحرافی و گرادیان چرخش به ترتیب، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{mm} \delta_{ij} \quad (23-2)$$

$$a'_0 = \mu l_0^2, \quad a'_1 = \mu l_1^2, \quad a'_2 = \mu l_2^2 \quad (24-2)$$

در رابطه فوق l_n ($n = 0, 1, 2$) سه پارامتر مقیاس طولی ماده هستند. به عنوان نتیجه می‌توان روابط ساختاری زیر را تعریف کرد.

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu \varepsilon'_{ij}$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \varepsilon_{mm,i}$$

$$\tau_{ijk} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (25-2)$$

$$m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s$$

پارامترهای p ، τ و m تنش‌های مرتبه بالاتر نامیده می‌شوند و σ تانسور تنش کلاسیک است. نتیجتاً

می‌توان انرژی کرنش کل U را طبق این تئوری به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s) dV \quad (26-2)$$

اگر در رابطه (۲۵-۲) پارامترهای مقیاس طولی l_0 و l_1 را برابر صفر قرار دهیم، رابطه (۲۶-۲) معادل

¹ Centre-symetrica

² Invariant

انرژی کرنشی کل بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده خواهد شد.

۲-۴-۷- الاستیسیته غیرموضعی

تئوری الاستیسیته غیرموضعی توسط ارینگن در سال ۱۹۷۲ بر اساس تئوری اتمی و مشاهدات آزمایشگاهی پایه‌گذاری شد [۴۷]. برخلاف تئوری‌های کلاسیک، این تئوری بر این فرض استوار است که تنش در یک نقطه از محیط پیوسته فقط به کرنش در آن نقطه وابسته نیست بلکه به کرنش در تمام نقاط جسم بستگی دارد [۴۸]. پارامتر مقیاس داخلی ماده، به عنوان یک ثابت ماده در معادلات ساختاری این تئوری ظاهر می‌شود. برای یک ماده همگن و همسانگرد، ایرینگن معادله ساختاری زیر را برای تنش غیرموضعی در هر نقطه x معرفی کرد:

$$\sigma_{mn}^{nl} = \int_v \alpha(|x' - x|) H_{mn}(x') dv'(x') \quad (27-2)$$

که در آن

$$H_{mn} = -\beta_{mn}T + C_{mnlk}\varepsilon_{kl} \quad (28-2)$$

که در این σ_{mn} تانسور تنش غیرموضعی، $\alpha(|x' - x|)$ تابع کرنل با ابعاد طول که در حجم v از جسم نرمال شده و مدول غیرموضعی را در رابطه ساختاری بیان می‌کند. در نتیجه برخلاف تئوری کلاسیک (موضعی) الاستیسیته، در این تئوری تخمین مؤثر از یک مشخصه طول داخلی است. $|x - x'|$ فاصله اقلیدسی، H_{mn} تانسور تنش هوکین، β_{mn} ضرایب تنش-دما، T افزایش دما و C_{mnlk} و ε_{mn} مدول الاستیسیته و تانسور کرنش را نشان می‌دهند. تابع کرنل می‌تواند با همسان‌سازی شبکه دینامیکی با تئوری غیرموضعی تخمین زده شود و ارینگن فرم زیر را پیشنهاد داد.

$$\alpha(|x|) = (2\pi l^2 \tau^2)^{-1} k_0 (|x|/l\tau), \quad \tau = e_0 a/l \quad (29-2)$$

در رابطه فوق، k_0 تابع بسط اصلاح شده است که رابطه ساختاری انتگرالی را به یک رابطه دیفرانسیلی معادل مطابق فرم زیر تبدیل می‌کند.

$$(1 - e_0^2 a^2 \nabla^2) \sigma_{mn}^{nl} = C_{mnlk} \varepsilon_{kl} - \beta_{mn} T \quad (30-2)$$

که در آن e_0 یک ثابت ماده است که با نتایج آزمایشگاهی تعریف می‌شود، a نیز طول مشخصه داخلی و l یک طول مشخصه خارجی است.

بر اساس این تئوری، مطالعات بسیاری در زمینه خمش، کمانش و ارتعاشات مدل‌های مختلف تیر انجام شده است.

۲-۵- پیشینه تحقیق

المان‌های سازه‌ها همیشه با سطح مقطع یکنواخت ساخته نمی‌شوند. معمولاً، انواع مختلف المان‌های غیریکنواخت با سطوح مقطع متغیر در کاربردهای مختلف مهندسی به دلیل بهینه‌تر، سبک‌تر و اقتصادی‌تر بودنشان، یافت می‌شوند. آنها در کاربردهای به‌خصوصی چون، میکرو و نانو سنسورها و شتاب‌دهنده‌ها [۴۹]، کامپوزیت‌های تیری شکل غیریکنواخت، نانولوله‌های کربنی [۵۰]، توربین‌ها و پره‌های هلی‌کوپتر استفاده می‌شوند. مطالعه‌های بسیاری در زمینه ارتعاشات تیر با سطح مقطع غیریکنواخت انجام شده است. عموماً معادله حرکت تیر با سطح مقطع غیریکنواخت، معادله‌ای با ضرایب متغیر بوده که حل آن را پیچیده می‌کند. آبریت^۳ [۵۱] نشان داد که معادله حرکت برخی از میله‌ها و تیرهای غیریکنواخت می‌تواند به معادله حرکت تیر و میله یکنواخت تبدیل شود. اگرچه وی پیچیدگی حل را از بین برد و پاسخ تحلیلی برای آنها به‌دست آورد اما این روش تنها برای برخی حالت‌های خاص و محدودی از تغییر سطح مقطع، قابل استفاده است. چانگ هسیو^۴ و همکاران ارتعاشات آزاد تیر اولر-برنولی را با استفاده از روش عددی تجزیه اصلاح شده ادومین^۵ (AMDM) بررسی کرد [۵۲]. اسه و همکاران^۶ [۵۳] ارتعاشات آزاد تیر با سطح مقطع غیریکنواخت را بررسی کردند. ایشان فرض کردند که سطح مقطع با یک تابع نمایی در راستای محور تغییر می‌کند که این موضوع باعث سادگی شکل معادلات شده و عملاً آن را به معادله دیفرانسیلی با ضرایب ثابت تبدیل می‌کند. ایشان فرکانس طبیعی را به روش تحلیلی برای سه شرط مرزی مختلف به‌دست آوردند. باغانی

³ Abrate

⁴ Chang Hsu

⁵ Adomian Modified Decomposition Method

⁶ Ece

و همکاران [۵۴] ارتعاشات آزاد تیر باریک‌شونده درگیر بر بستر الاستیک غیرخطی را به روش عددی تغییرات تکرارشونده^۷ انجام دادند و فرکانس غیرخطی تیر تحت موده‌های مختلف را گزارش کردند. اخیراً، به لحاظ مشخصه‌ها و دامنه گسترده کاربرد ماده FG ، اهمیت دانستن رفتار استاتیکی و دینامیکی آنها افزایش یافته است. مطالعات بسیاری در زمینه کمانش، خمش و پاسخ ارتعاشی سازه‌های FG مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته کلاسیک انجام شده است. بازنگری ادبیات موضوعی تیرهای ساخته شده از ماده FG نشان می‌دهد که بیشتر مطالعات به تیرهای ساخته شده از ماده متغیر تابعی‌ای اختصاص دارد که خصوصیات ماده آنها در راستای ضخامت تغییر می‌کنند [۵۵-۵۹] و پژوهش کمتری در زمینه تیرهای ساخته شده از ماده متغیر تابعی محوری (AFG) که خصوصیات ماده آن در راستای محور تیر تغییر می‌کنند، وجود دارد. از آنجایی که معادلات حاکم بر رفتار تیرهای AFG دارای ضرایب متغیر هستند، حل این معادلات را پیچیده کرده است.

شاهبا و همکاران [۶۰، ۶۱] و آلشوربگی^۸ و همکاران [۶۲] مشخصه‌های ارتعاشی تیر باریک‌شونده‌ی اولر-برنولی AFG را با به‌کارگیری روش المان محدود، بررسی کردند. شاهبا و راجاسکاران^۹ [۶۳] ارتعاشات آزاد تیر باریک‌شونده اولر-برنولی ساخته شده از ماده AFG را با روش عددی مطالعه کردند. ایشان نشان دادند که روش عددی تبدیل دیفرانسیلی معمولی^{۱۰} نمی‌تواند نتایج رضایت بخشی را پوشش دهد، از این رو بررسی ایشان با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی جدید به نام روش اجزای تبدیل دیفرانسیلی^{۱۱} که ضریب پوشش را بهبود می‌بخشد و همچنین روش المان مربع دیفرانسیلی^{۱۲} انجام گرفته است. هوانگ^{۱۳} و لی^{۱۴} [۶۴] معادله حاکم بر رفتار ارتعاشات کلاسیک آزاد تیر اولر-برنولی AFG با سطح مقطع متغیر را به معادله انتگرالی فردهولم تبدیل کردند و با استفاده از روش سری توانی، فرکانس‌های طبیعی تحت شرایط مرزی مختلف را گزارش کردند.

⁷ Variational Iteration Method (VIM)

⁸ Alshorbagy

⁹ Rajasekaran

¹⁰ Differential Transform Method (DTM)

¹¹ Differential Transform Element Method

¹² Differential Quadrature Element Method

¹³ Huang

¹⁴ Li

هوانگ و همکاران [۶۵] معادله حرکت تیر تیموشنکو با سطح مقطع متغیر را با استفاده از سری توانی برای توابع مجهول به یک معادله جبر خطی تبدیل کردند تا فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی مختلف را به دست آورند. سرکار^{۱۵} و گانگولی^{۱۶} [۶۶] ارتعاشات آزاد تیر دو سر گیردار تیموشنکو *AFG* با سطح مقطع متغیر را برای توابع تغییر (تابع تغییر چگالی، سطح مقطع و مدول الاستیسیته) بسیار محدودی به روش تحلیلی بررسی کردند. ایشان یک شکل مود را برای تیر فرض کرده‌اند و برای این شکل مود توابع تغییر را به دست آوردند.

مطالعه رفتار ریزساختارهای نانو و میکرو که از مواد *FG* ساخته شده است به لحاظ کشف کاربردهای فراوان آن در بیوسنسورها، میکروسکوپ‌های نیرواتمی، پراب‌های نانو و همچنین سیستم‌های میکروالکترومکانیکی و نانوالکترومکانیکی، اهمیت یافته است [۱، ۲]. مطالعه رفتارهای پیچشی و خمشی در مقیاس‌های میکرونی به صورت آزمایشگاهی انجام شد [۶۷-۶۹] و نشان داده شد که تئوری الاستیسیته کلاسیک قادر به توضیح و تخمین رفتار وابسته به اندازه این آزمایش‌ها نیست. در مقابل، تئوری‌های غیرکلاسیک مانند تئوری غیرموضعی [۴۸]، کوپل تنش [۳۶-۳۸] و گرادیان کرنش [۴۴-۴۶] رفتار وابسته به اندازه را تا حد قابل قبولی پیش‌بینی و توجیه می‌کنند. در سال‌های گذشته یانگ و همکاران [۳۹] با اصلاح تئوری کوپل تنش و در نظر گرفتن تنها یک پارامتر اضافی مقیاس طولی مواد علاوه بر ثوابت کلاسیک ماده، تئوری شناخته شده کوپل تنش اصلاح شده را توسعه دادند. لیم و همکاران [۴] نیز با در نظر گرفتن سه پارامتر اضافی مقیاس طولی، تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده را معرفی کردند که در حالت خاصی می‌تواند به تئوری تنش کوپل اصلاح شده تبدیل گردد. مطالعات بسیاری در زمینه ارتعاشات وابسته به اندازه مرتبط با تئوری الاستیسیته غیرکلاسیک در سال‌های اخیر انجام شده است. با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده رفتار استاتیکی و دینامیکی تیر اولر-برنولی توسط کونگ^{۱۷} و همکاران فرمول‌بندی شد [۵]. انصاری و همکاران ارتعاشات آزاد میکروتیر

¹⁵ Sarkar
¹⁶ Ganguli

¹⁷ Kong

FGM را با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده بررسی کردند [۷۰]. رهایی فرد و همکاران نیز رفتار استاتیکی و دینامیکی وابسته به اندازه میکروتیر اولر-برنولی را که از مواد *FG* ساخته شده است بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده مطالعه کردند [۷۱].

مطالعات انجام شده در زمینه آنالیز ارتعاشی ریزساختارها با سطح مقطع غیریکنواخت مبتنی بر تئوری‌های غیرکلاسیک الاستیسیته اندک هستند. آنالیز ارتعاشی تیر یک‌سر گیردار غیریکنواخت در مقیاس نانو توسط مورمو^{۱۸} و همکاران [۴۹] ارائه شده است. رافعی و همکاران [۵۰] و مصطفی و همکاران [۷۲] رفتار ارتعاشی نانولوله کربنی غیر یکنواخت را بررسی کردند.

در مقالات اخیر، تئوری الاستیسیته غیرموضعی برای مطالعه رفتار ارتعاشی نانومیله *AFG* باریک‌شونده توسط سیمسک^{۱۹} [۷۳] به کار رفت. ارتعاشات آزاد میکروتیر اولر-برنولی *AFG* باریک‌شونده توسط آگوز^{۲۰} و سیوالک^{۲۱} [۷۴] بررسی شد.

توصیف مکانیسم میرایی ترموالاستیک برای اولین بار توسط زهر گزارش شد و وی آنالیز تقریبی مرتبط با اتلاف انرژی و مشخصات ماده یک سازه میکروتیر را بیان نمود [۱۲-۱۴]. در تئوری زهر اثر میرایی ترموالاستیک در انتقال فرکانس تشدید به حساب آورده نشد. برای همین منظور، لیفشیتز و روکس میرایی ترموالاستیک را در یک تیر با سطح مقطع مستطیلی بر اساس معادله انتقال حرارت فوریه کلاسیک و بدون در نظر گرفتن اثر شرایط مرزی بررسی کردند [۶]. ایشان با جایگذاری اثر کرنش با حل به‌دست آمده از ارتعاشات عرضی تیر یک‌سر گیردار (یا دو سر گیردار) هم‌دما در معادله انتقال حرارت، ضریب کیفیت و انتقال فرکانس را به‌دست آوردند. نایفه و یونس [۲۱] یک عبارت تحلیلی برای اندازه ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک یک میکرو-ورق ارائه کردند. ایشان معادله حرارت را برای جریان دمایی در طول میکرو-ورق حل کردند، به‌طوری‌که معادله دما از معادله مکانیکی ورق دی‌کوپل شود و با استفاده از روش اغتشاشات^{۲۲} توانستند عبارتی تحلیلی برای ضریب کیفیت گزارش

¹⁸ Murmu¹⁹ Simsek²⁰ Akgoz²¹ Civalek²² Perturbation

کنند. سان^{۲۳} و همکاران [۳] میرایی ترموالاستیک یک میکروتیر رزوناتور را با استفاده از روش تبدیل سری سینوسی فوریه مرگب با تبدیل لاپلاس و آنالیز مود نرمال مطالعه کردند. اثر اندازه و شرایط مرزی مختلف و همچنین مقایسه ضریب میرایی و ضریب تغییر مکان فرکانس تشدید یک تیر ناشی از میرایی هوا و میرایی ترموالاستیک توسط سان و همکاران [۷۵] بررسی شد. پرابهاکر^{۲۴} و همکاران [۷۶] نیز آنالیز انتقال فرکانس دوبعدی ناشی از جفت‌شدگی معادله ترموالاستیک با ارتعاشات خمشی یک تیر اولر-برنولی را بررسی کردند.

از مقایسه فرکانس طبیعی ریزساختارهای به‌دست آمده از تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک الاستیسیته و مشاهده اختلاف چشمگیر میان آنها، انتظار می‌رود که میرایی ترموالاستیک به‌دست آمده از تئوری‌های مرتبه بالاتر نیز اختلاف معنی‌داری با آنچه از تئوری‌های غیر کلاسیک به‌دست آمده‌اند، داشته باشد.

در آخرین مقالات، خوانچه‌گردان و همکاران [۷۷] اثر میرایی ترموالاستیک بر رزوناتور نانو-تیر را با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته و فرضیه اولر-برنولی بررسی کردند. ایشان تیر دو سرگیردار با شرایط مرزی هم‌دما را با استفاده از روش گالرکین مطالعه کردند تا تأثیر پارامتر مقیاس طولی را بر ضریب میرایی مشاهده کنند. نتیجه این مطالعه نشان داد که میان نتایج به‌دست آمده از تئوری غیرموضعی با آنچه از تئوری کلاسیک به‌دست می‌آید، تفاوت چشم‌گیری وجود دارد. رضازاده و همکاران [۷۸] یک عبارت تحلیلی برای ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده برای رزوناتور میکروتیر همگن ارائه کردند تا اثر یک پارامتر مقیاس طولی را بر آن مشاهده کنند. نتایج ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک در مطالعه ایشان نشان داد که هنگامی که ضخامت تیر به پارامتر مقیاس طولی نزدیک می‌شود، تئوری کوپل تنش اصلاح شده از تئوری کلاسیک فاصله می‌گیرد و برعکس.

²³ Sun²⁴ Prabhakar

۲-۶- جمع‌بندی

در این فصل، در ابتدا به معرفی مفاهیم اولیه‌ای چون میرایی ترموالاستیک، مواد تابعی و تئوری‌های غیرکلاسیک الاستیسیته پرداخته شد. همچنین تاریخچه مختصری از کارهای انجام شده مرتبط با موضوع پایان‌نامه بیان گردید. مرور مقالات و پیشینه تحقیق نشان داد که کمتر به تحلیل رفتار مکانیکی میکروتیرهای ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری پرداخته شده است. علاوه بر آن تأثیر پارامترهای مقیاس طولی مرتبط با تئوری‌های غیرکلاسیک و در نظر گرفتن مواد متغیر تابعی بر میرایی ترموالاستیک هنوز یک زمینه‌ی پرسش برانگیز می‌باشد. در این پایان‌نامه ارتعاشات آزاد میکروتیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده بررسی شده است. علاوه بر آن میرایی ترموالاستیک در میکروتیر همگن و غیر همگن تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و تئوری انتقال حرارت غیرفوریه مورد مطالعه قرار گرفته است.

فصل سوم:

ارتعاشات آزاد میکروتیر

باریک شوندهی AFG

(بر اساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش اصلاح شده)

۳-۱- مقدمه

در این فصل ارتعاشات آزاد میکروتیر بدون میرایی، ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده بررسی شده است. فرض شده است که سطح مقطع و خصوصیات ماده میکروتیر غیریکنواخت و غیرهمگن به صورت خطی در راستای محور میکروتیر تغییر کنند. شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک برای دو هندسه متداول یک سر گیردار و دوسر گیردار و همچنین معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی این میکروتیرها با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده است. فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد میکروتیر با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی ریلی-ریتز و گالرکین به دست آمده‌اند. همچنین برای تقریب صحیح‌تر نتایج، از آنجایی که معادله ارتعاشات آزاد میکروتیر یک معادله مرتبه ششم با مشتقات جزئی و ضرایب متغیر است و انتخاب تابع مقایسه (اتخاذ شده در روش ریلی-ریتز) همه شرایط تکیه‌گاهی را ارضاء نمی‌کند، معادله دیفرانسیلی حاکم و شش شرط مرزی مرتبط با آن به یک معادله انتگرالی تبدیل شده و با استفاده از روش بسط چندجمله‌ای، بسط چندجمله‌ای انتقال‌یافته‌ی لژاندر و بسط تابع آزمون متداول و متعامد تیر دو سرگیردار، فرکانس‌های طبیعی دقیق‌تر استخراج و با نتایج حاصل از روش‌های نیمه‌تحلیلی مقایسه شده‌اند. همچنین اعتبارسنجی نتایج با مقایسه آنها با نتایج موجود در مقالات انجام شده که سازگاری خوبی میان آنها برقرار است.

۳-۲- مفاهیم اولیه

بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده [۴]، انرژی کرنشی ذخیره شده U در مواد الاستیک خطی که ناحیه V از فضا را با تغییرشکل‌های محدود اشغال کرده است، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U = \int_V \bar{u} dv = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s) dv \quad (۱-۳)$$

که در آن σ_{ij} نشان‌دهنده‌ی مؤلفه‌های تانسور تنش کوشی σ است. همچنین مؤلفه‌های تانسور کرنش کلاسیک ε ، بردار گرادیان اتساع γ ، تانسور گرادیان کشش انحرافی $\eta^{(1)}$ و قسمت متقارن تانسور گرادیان چرخش χ^s را به ترتیب با ε_{ij} ، γ_i ، $\eta_{ijk}^{(1)}$ و χ_{ij}^s نشان داده شده است که برای تغییرشکل

بسیار کوچک به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2-3)$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm,i} \quad (3-3)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15}\delta_{ij}(\varepsilon_{mm,k} + 2\varepsilon_{mk,m}) - \frac{1}{15}[\delta_{jk}(\varepsilon_{mm,i} + 2\varepsilon_{mi,m}) + \delta_{ki}(\varepsilon_{mm,j} + 2\varepsilon_{mj,m})], \quad (4-3)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (5-3)$$

که در روابط فوق u_i مؤلفه های کارتیزین بردار جابه جایی، کما نشان دهنده ی مشتق جزئی نسبت به مختصات فضا و θ_i مؤلفه های بردار چرخش بی نهایت کوچک θ که به صورت زیر تعریف می شود را نشان می دهند.

$$\theta_i = \frac{1}{2}(\text{curl}(u))_i = \frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j} \quad (6-3)$$

بر اساس روابط ساختاری برای ماده الاستیک همسانگرد خطی، پارامترهایی که با مشتق گیری از چگالی انرژی کرنشی نسبت به پارامترهای سینماتیکی ε ، γ ، $\eta^{(1)}$ و χ^s به دست می آیند به ترتیب σ ، p ، $\tau^{(1)}$ و m^s هستند. پارامترهای p ، $\tau^{(1)}$ و m^s معمولاً تنش های مرتبه ی بالاتر نامیده می شوند. بر اساس معادلات سازگاری برای مواد الاستیک همسانگرد خطی، مؤلفه های تنش مربوط به پارامترهای سینماتیکی تأثیرگذار بر \bar{u} به صورت زیر است.

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (7-3)$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (8-3)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk} \quad (9-3)$$

$$m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s \quad (10-3)$$

در روابط فوق λ و μ ضرایب لامه هستند و به صورت زیر بر حسب مدول یانگ E و ضریب پواسون ν نمایش داده می شوند:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (11-3)$$

همچنین l_0 ، l_1 و l_2 پارامترهای مقیاس طولی مواد به ترتیب مرتبط با گرادیان اتساع، گرادیان کشش

انحرافی و گرادیان چرخش هستند. برای مشخص کردن این پارامترها برای مواد مختلف، برخی آزمایش‌های متنوع مانند تست میکروخمش، میکروپیچش و فرورفتگی میکرو/نانو انجام شده است [۶۹]. در یک حالت خاص هنگامی که دو پارامتر مقیاس طولی مرتبط با گرادیان اتساع و کشش انحرافی نادیده گرفته شوند ($l_0 = l_1 = 0$)، انرژی کرنشی U ، که در رابطه (۱-۳) معرفی شده است، به انرژی کرنشی معرفی شده در تئوری کوپل تنش اصلاح شده کاهش می‌یابد و همچنین با صرف نظر کردن از هر سه پارامتر مقیاس طولی ($l_0 = l_1 = l_2 = 0$) در رابطه (۱-۳) انرژی کرنشی مرتبط با تئوری کلاسیک به دست می‌آید.

۳-۳- فرمول بندی مسئله

در این قسمت، معادله حاکم بر میکروتیر اولر-برنولی AFG با سطح مقطع باریک شونده توسعه می‌یابد، سپس آنالیز ارتعاشی آن ارائه می‌شود.

مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی u یک تیر اولر-برنولی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u_1 = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (۱۲-۳)$$

$$u_2 = 0 \quad (۱۳-۳)$$

$$u_3 = w(x, t) \quad (۱۴-۳)$$

که u_1 ، u_2 و u_3 جابه‌جایی در راستاهای x ، y و z را به ترتیب نشان می‌دهند و x نشان‌دهنده‌ی محور خنثی در راستای طول تیر است.

با جایگذاری معادلات (۱۲-۳) تا (۱۴-۳) در معادله (۲-۳)، مؤلفه‌های تانسور کرنش ϵ بدون در نظر گرفتن اثر پواسون به دست خواهد آمد.

$$\epsilon_{11} = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (۱۵-۳)$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \quad (۱۶-۳)$$

اثر پواسون در نتایج به دست آمده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده برای میکروتیر باریک و بلند با نسبت طول به ضخامت^{۲۵} بزرگ می‌تواند نادیده گرفته شود [۷۴]، در صورتی که در تئوری گرادیان

²⁵ Aspect ratio

کرنش اصلاح شده، اثر پواسون باید در نظر گرفته شود. متأسفانه در اکثر مقالات اثر پواسون نادیده گرفته شده است. با در نظر گرفتن اثر پواسون، مؤلفه‌های غیر صفر کرنش به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\varepsilon_{11} = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} \quad (17-3)$$

مؤلفه‌های بردار گرادینان اتساع γ و مؤلفه‌های غیر صفر تانسور گرادینان کشش انحرافی $\eta^{(1)}$ با جایگذاری روابط (3-15) و (3-16) در (3-3) و (3-4) به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\gamma_1 = (1 - 2\nu) \left(-z \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right), \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = (1 - 2\nu) \left(-\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \quad (18-3)$$

$$\begin{aligned} \eta_{111}^{(1)} &= -\frac{2}{5} (1 + \nu) z \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \\ \eta_{122}^{(1)} &= \eta_{331}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{133}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} = \frac{1}{5} (1 + \nu) z \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \\ \eta_{232}^{(1)} &= \eta_{223}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} = \frac{1}{15} (1 + \nu) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \\ \eta_{113}^{(1)} &= \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} = -\frac{4}{15} (1 + \nu) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \\ \eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{5} (1 + \nu) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (19-3)$$

به علاوه با توجه به معادله (3-6) مؤلفه‌های بردار چرخش θ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = -\frac{\partial(w(x, t))}{\partial x}, \quad \theta_3 = 0 \quad (20-3)$$

با در نظر گرفتن مؤلفه‌های بردار چرخش θ می‌توان مؤلفه‌های غیر صفر قسمت متقارن تانسور گرادینان چرخش χ^s معرفی شده در رابطه‌ی (3-5) را به دست آورد.

$$\chi_{12}^s = \chi_{21}^s = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (21-3)$$

به طور مشابه، با به کارگیری مؤلفه‌های به دست آمده ε ، $\eta^{(1)}$ و χ^s و با در نظر گرفتن روابط (3-7)،

(3-8)، (3-9) و (3-10)، مؤلفه‌های غیر صفر تانسور تنش σ و تانسورهای مرتبه بالای تنش $p^{(1)}$

و m^s به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\sigma_{11} = -z E(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (22-3)$$

$$p_1 = -2\mu(x) l_0^2(x) (1 - 2\nu) z \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \quad (23-3)$$

$$\begin{aligned}
p_2 = 0, \quad p_3 &= -2\mu(x)l_0^2(x)(1-2\nu)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\
\tau_{111}^{(1)} &= -\frac{4}{5}(1+\nu)\mu(x)l_1^2(x)z\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \\
\tau_{122}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} = \tau_{133}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} &= \frac{2}{5}(1+\nu)\mu(x)l_1^2(x)z\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \\
\tau_{232}^{(1)} = \tau_{223}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} &= \frac{2}{15}(1+\nu)\mu(x)l_1^2(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (24-3) \\
\tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} &= -\frac{8}{15}(1+\nu)\mu(x)l_1^2(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\
\tau_{333}^{(1)} &= \frac{2}{5}(1+\nu)\mu(x)l_1^2(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\
m_{12}^s = m_{21}^s &= -\mu(x)l_2^2(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (25-3)
\end{aligned}$$

برای ساده‌سازی، شرایط تنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است و از آنجا که ضخامت و عرض میکروتیر در مقایسه با طول آن به اندازه کافی کوچک فرض می‌شوند، می‌توان از مؤلفه‌های تنش در راستای y و z صرف‌نظر کرد. ($\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0$). همچنین معادلات قبلی با فرض اینکه هم خصوصیات هندسی (ارتفاع یا عرض و یا هر دو) و هم خصوصیات مکانیکی ماده و همچنین پارامترهای مقیاس طولی l_0 ، l_1 و l_2 در راستای x تغییر کرده به‌دست آمده‌اند و خصوصیات مکانیکی مواد در راستای ضخامت ثابت فرض شده‌اند. این تغییرات ($F(x)$) به‌صورت خطی در جهت طول به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

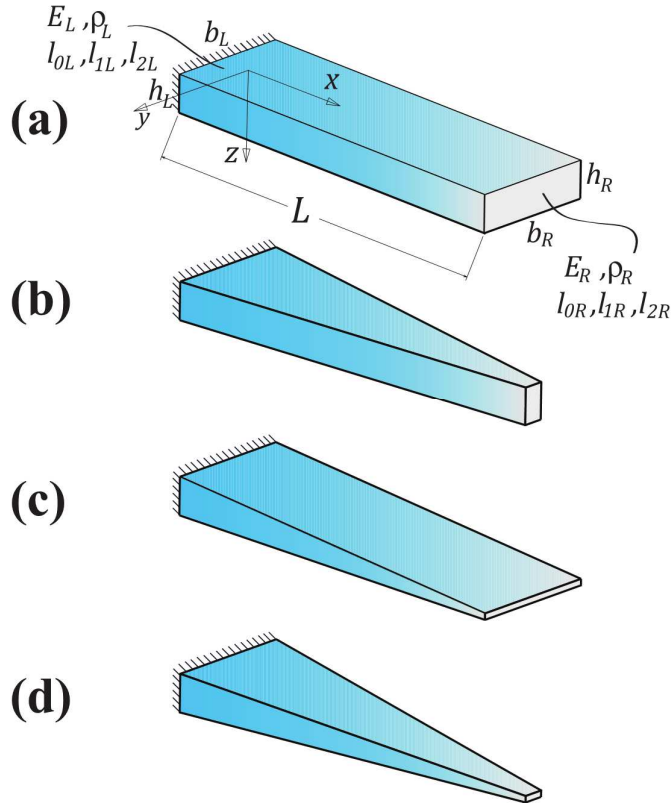
$$F(x) = F_L - (F_L - F_R)\frac{x}{L} \quad (3-26)$$

مطابق شکل (۳-۱)، اندیس‌های R و L در معادله فوق نشان‌دهنده‌ی سمت راست و چپ میکروتیر است. شکل (۳-۱) شماتیکی از یک میکروتیر یک سرگیردار ساخته شده از مواد متغیر تابعی را برای نسبت‌های مختلف باریک‌شوندگی نشان می‌دهد. با معرفی f به‌عنوان

$$f = 1 - \frac{F_L}{F_R} \quad (27-3)$$

معادله (۳-۲۷) می‌تواند به‌شکل زیر نوشته شود.

$$F(x) = F_L \left(1 - f \frac{x}{L}\right) \quad (28-3)$$



شکل (۱-۳) نسبت‌های باریک‌شوندگی مختلف یک میکروتیر AFG
 (a) $f_h = f_b = 0$, (b) $f_h = 0, f_b \neq 0$, (c) $f_h \neq 0, f_b = 0$ and (d) $f_h \neq 0, f_b \neq 0$

بنابراین، ویژگی‌های مؤثر مواد (مدول یانگ (E)، مدول برشی (μ)، چگالی جرمی (ρ) و پارامترهای مقیاس طولی (l_0, l_1 و l_2) و همچنین تغییرات مشخصه‌های هندسی (ارتفاع (h) و عرض (b) سطح مقطع میکروتیر) می‌توانند به صورت زیر بیان شوند.

$$E(x) = E_L \left(1 - f_E \frac{x}{L}\right) \quad (29-3)$$

$$\mu(x) = \mu_L \left(1 - f_\mu \frac{x}{L}\right) \quad (30-3)$$

$$\rho(x) = \rho_L \left(1 - f_\rho \frac{x}{L}\right) \quad (31-3)$$

$$h(x) = h_L \left(1 - f_h \frac{x}{L}\right) \quad (32-3)$$

$$b(x) = b_L \left(1 - f_b \frac{x}{L}\right) \quad (33-3)$$

$$l_0(x) = l_{0L} \left(1 - f_{l_0} \frac{x}{L}\right) \quad (34-3)$$

$$l_1(x) = l_{1L} \left(1 - f_{l_1} \frac{x}{L}\right) \quad (35-3)$$

$$l_2(x) = l_{2L} \left(1 - f_{l_2} \frac{x}{L}\right) \quad (36-3)$$

که در آنها

$$f_E = 1 - (E_R/E_L) \quad (37-3)$$

$$f_\mu = 1 - (\mu_R/\mu_L) \quad (38-3)$$

$$f_\rho = 1 - (\rho_R/\rho_L) \quad (39-3)$$

$$f_h = 1 - (h_R/h_L) \quad (40-3)$$

$$f_b = 1 - (b_R/b_L) \quad (41-3)$$

$$f_{l_0} = 1 - (l_{0R}/l_{0L}) \quad (42-3)$$

$$f_{l_1} = 1 - (l_{1R}/l_{1L}) \quad (43-3)$$

$$f_{l_2} = 1 - (l_{2R}/l_{2L}) \quad (44-3)$$

مساحت سطح مقطع (A) و ممان دوم سطح مقطع (I) میکروتیر باریک شونده به صورت زیر نوشته می شود.

$$A(x) = A_L \left(1 - f_b \frac{x}{L}\right) \left(1 - f_h \frac{x}{L}\right)$$

$$I(x) = I_L \left(1 - f_b \frac{x}{L}\right) \left(1 - f_h \frac{x}{L}\right)^3 \quad (45-3)$$

انرژی کرنشی (U) که در رابطه (3-1) بیان شد، می تواند برای میکروتیر باریک شونده ی خطی ساخته شده از مواد AFG به صورت زیر بازنویسی شود.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ (EI)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + 2(a'_0 I)_{eq} \left(\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \right)^2 + 2(a'_0 A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{4}{5} (a'_1 I)_{eq} \left(\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \right)^2 + \frac{8}{15} (a'_1 A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 + (a'_2 A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx \quad (46-3)$$

که ضرایب معادله فوق به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned}
(EI)_{eq} &= E(x)I(x) \\
(a'_0 I)_{eq} &= (1 - 2\nu)^2 l_0^2(x) \mu(x) I(x) \\
(a'_0 A)_{eq} &= (1 - 2\nu)^2 l_0^2(x) \mu(x) A(x) \\
(a'_1 I)_{eq} &= (1 + \nu)^2 l_1^2(x) \mu(x) I(x) \\
(a'_1 A)_{eq} &= (1 + \nu)^2 l_1^2(x) \mu(x) A(x) \\
(a'_2 A)_{eq} &= l_2^2(x) \mu(x) A(x)
\end{aligned} \tag{۴۷-۳}$$

به سادگی می‌توان مشاهده نمود انرژی کرنشی (U) که با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده

توسط آنگوز و سیوالک [۷۴] برای میکروتیر باریک شونده‌ی AFG گزارش شده است، با حذف l_0 و l_1 در رابطه (۴۶-۳) به دست می‌آید.

با صرف نظر کردن از اینرسی چرخشی، انرژی جنبشی (T) برای میکروتیر باریک شونده‌ی AFG به صورت زیر بیان می‌شود.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A(x) \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \tag{۴۸-۳}$$

۳-۴- روش ریلی-ریتز

در این قسمت با استفاده از عبارات انرژی کرنشی و انرژی جنبشی میکروتیر باریک شونده‌ی AFG که در قسمت قبلی به دست آمدند و با اتخاذ روش ریلی-ریتز فرکانس طبیعی میکروتیر یک سرگردار باریک شونده‌ی AFG بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده تخمین زده می‌شوند.

با فرض ارتعاش هارمونیک، $w(x, t)$ می‌تواند به صورت زیر معرفی شود.

$$w(x, t) = W(x) \cos \omega t \tag{۴۹-۳}$$

که $W(x)$ تابع شکل مود و ω فرکانس طبیعی دایره‌ای هستند. با جایگذاری معادله‌ی (۴۹-۳) در معادله‌های (۴۶-۳) و (۴۸-۳)، بیشینه‌ی انرژی پتانسیل و جنبشی میکروتیر باریک شونده‌ی AFG به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
U_{max} &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \left[(EI)_{eq} + 2(a'_0 A)_{eq} + \frac{8}{15} (a'_1 A)_{eq} + (a'_2 A)_{eq} \right] \left(\frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[2(a'_0 I)_{eq} + \frac{4}{5} (a'_1 I)_{eq} \right] \left(\frac{d^3 W(x)}{dx^3} \right)^2 \right\} dx
\end{aligned} \tag{۵۰-۳}$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho(x) A(x) (W(x))^2 dx \quad (51-3)$$

شکل مود $W(x)$ به صورت یک سری از n تابع مجاز^{۲۶} خطی مستقل $\phi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) که

بایستی همه‌ی شرایط مرزی هندسی (شرایط ضروری) را ارضاء کنند، در نظر گرفته می‌شود [۷۹].

$$W(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \quad (52-3)$$

که c_i ضرایب نامعینی (ثابت) هستند که با انتخاب مناسب قادر خواهند بود تا خارج قسمت ریلی^{۲۷} که

به صورت زیر بیان می‌شود، را کمینه کنند.

$$R[W(x)] = \omega^2 = \frac{U_{max}}{T_{max}} \quad (53-3)$$

شرایط مرزی هندسی برای یک تیر یک‌سر درگیر شکل (۱-۳) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (54-3)$$

تابع مجاز ϕ_i وابسته به شرایط مرزی هندسی فوق انتخاب می‌شود که با استفاده از توابع چندجمله‌ای

زیر ساخته می‌شوند.

$$\phi_i(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 20 \quad (55-3)$$

می‌توان مشاهده کرد که رابطه (۵۴-۳) با جایگذاری معادله (۵۵-۳)، دقیقاً ارضاء می‌شود.

ضرایب c_1, c_2 تا c_{20} با مشتق‌گیری از رابطه (۵۳-۳) بر حسب هر ضریب برای کمینه کردن خارج

قسمت ریلی، به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial(R)}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 20 \quad (56-3)$$

رابطه فوق یک دستگاه متشکل از بیست معادله جبری همگن خطی با ثوابت c_1, c_2 تا c_{20} را نشان

می‌دهند که برای داشتن پاسخ غیربديهی، دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه بایستی برابر صفر

شود. با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، معادله مشخصه‌ای به دست می‌آید که ریشه‌های آن

بیست فرکانس طبیعی اول میکروتیر باریک شونده‌ی AFG را نشان می‌دهد.

²⁶ Admissible function

²⁷ Rayleigh's quotient

۳-۵- معادله حرکت

در این قسمت معادله حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروتیر باریک شونده‌ی AFG با استفاده از اصل هامیلتون به دست می‌آید. سپس آنالیز ارتعاشات با تبدیل معادله دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی آن به یک معادله انتگرالی انجام می‌گیرد.

عبارت انرژی کرنشی (U) می‌تواند به فرم ساده شده‌ی زیر بیان شود.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ S(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + K(x) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \right\} dx \quad (۵۷-۳)$$

که در آن

$$S(x) = (EI)_{eq} + 2(a'_0 A)_{eq} + \frac{8}{15} (a'_1 A)_{eq} + (a'_2 A)_{eq} \quad (۵۸-۳)$$

$$K(x) = 2(a'_0 I)_{eq} + \frac{4}{5} (a'_1 I)_{eq}$$

بر اساس اصل هامیلتون با کمینه کردن لاگرانژین (L) یک سیستم تغییر شکل پذیر، معادله حرکت و عبارتی برای به دست آوردن شرایط مرزی استخراج می‌شود.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0 \quad (۵۹-۳)$$

با جایگذاری روابط (۳-۴۶) و (۳-۴۸) در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 - (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dt = 0 \quad (۶۰-۳)$$

که در آن $(\rho A)_{eq} = \rho(x)A(x)$. تک تک جمله‌های معادله فوق به ترتیب به صورت زیر حساب می‌شوند.

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^L S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w_{,xx} dx dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \delta w_{,x} dx dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \delta w \Big|_0^L dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \delta w dx dt \end{aligned} \quad (۶۱-۳)$$

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^L K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \delta w_{,xxx} dx dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \delta w_{,xx} \Big|_0^L dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \delta w_{,xx} dx dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \delta w_{,xx} \Big|_0^L dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \delta w_{,x} dx dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \delta w_{,xx} \Big|_0^L dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \delta w_{,x} \Big|_0^L dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \delta w \Big|_0^L dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{۶۲-۳}$$

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^L (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w_{,t} dx dt \\
&= \int_0^L (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w \Big|_{t_0}^{t_1} dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dx dt
\end{aligned} \tag{۶۳-۳}$$

با جایگذاری روابط (۶۱-۳)، (۶۲-۳) و (۶۳-۳) در (۶۰-۳)، معادله حرکت به صورت زیر به دست می آید.

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(K(x) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(S(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) - (\rho A)_{eq} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \tag{۶۴-۳}$$

همچنین شرایط مرزی عمومی مرتبط با آن به صورت زیر خواهد آمد.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \Big|_{x=0, L} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta w \Big|_{x=0, L} = 0 \tag{۶۵-۳}$$

$$S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \Big|_{x=0, L} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta w_{,x} \Big|_{x=0, L} = 0 \tag{۶۶-۳}$$

$$K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=0, L} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta w_{,xx} \Big|_{x=0, L} = 0 \tag{۶۷-۳}$$

با استفاده از روابط فوق، برای میکروتیر یک سر درگیر، شرایط مرزی به صورت زیر بیان خواهد شد.

$$V = \frac{\partial}{\partial x} \left(S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad \text{و} \quad w(0) = 0 \tag{۶۸-۳}$$

$$M = S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad \text{و} \quad w_{,x} \Big|_{x=0} = 0 \tag{۶۹-۳}$$

$$M_{nc} = K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad \text{و} \quad w_{,xx} \Big|_{x=0} = 0 \tag{۷۰-۳}$$

که در آنها M ، V و M_{nc} به ترتیب نیروی برشی مرزی، ممان کلاسیک مرزی و ممان غیر کلاسیک (مرتبه بالاتر) مرزی هستند که شرط مرزی غیر کلاسیک، شرط مرزی گرادیان کرنش نیز نامیده می شود. هر چند برای طرف آزاد میکروتیر یکی از دو شرط مرزی غیر کلاسیک $M_{nc}|_{x=L}$ و $w_{,xx}|_{x=0} = 0$ وجود دارد، اما کنگ و همکاران [۵] نشان دادند که در فرکانس های طبیعی پایین برای میکروتیر یک سر گیردار میان انتخاب این دو شرط مرزی تفاوت چندانی وجود ندارد. در این مسئله از میان این دو شرط مرزی ممکن، شرط $M_{nc}|_{x=L}$ که متداول تر است انتخاب می شود.

برای سادگی بیشتر، پارامترهای بی بعد زیر تعریف می شوند.

$$\xi = \frac{x}{L}, \hat{I} = \frac{I}{I_L}, \hat{E} = \frac{E}{E_L}, \hat{\mu} = \frac{\mu}{\mu_L}, \hat{A} = \frac{A}{A_L}, \tau = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{E_L I_L}{\rho_L A_L}} t, \lambda = \omega^2$$

$$\hat{h}_L = \frac{h_L}{L}, \quad \hat{l}_i = \frac{l_i}{h_L}, \quad i = 0, 1, 2$$

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \hat{h}_L^2 \left(2(\hat{a}'_0 I)_{eq} + \frac{4}{5} (\hat{a}'_1 I)_{eq} \right)$$

$$\hat{S} = (\hat{E} I)_{eq} + 12(\hat{a}'_0 A)_{eq} + \frac{48}{15} (\hat{a}'_1 A)_{eq} + 6(\hat{a}'_2 A)_{eq}$$

$$m(\xi) = (\hat{\rho} A)_{eq} = \hat{\rho}(\xi) \hat{A}(\xi).$$

که در آن τ یک مقیاس زمانی و

$$\begin{aligned} (\hat{E} I)_{eq} &= \hat{E}(\xi) \hat{I}(\xi) \\ (\hat{a}'_0 I)_{eq} &= (1 - 2\nu)^2 \hat{l}_0^2(\xi) \hat{\mu}(\xi) \hat{I}(\xi) \\ (\hat{a}'_1 I)_{eq} &= (1 - 2\nu)^2 \hat{l}_1^2(\xi) \hat{\mu}(\xi) \hat{I}(\xi) \\ (\hat{a}'_2 I)_{eq} &= (1 + \nu)^2 \hat{l}_2^2(\xi) \hat{\mu}(\xi) \hat{I}(\xi) \\ (\hat{a}'_0 A)_{eq} &= (1 - 2\nu)^2 \hat{l}_0^2(\xi) \hat{\mu}(\xi) \hat{A}(\xi) \\ (\hat{a}'_1 A)_{eq} &= (1 + \nu)^2 \hat{l}_1^2(\xi) \hat{\mu}(\xi) \hat{A}(\xi) \\ (\hat{a}'_2 A)_{eq} &= \hat{l}_2^2(\xi) \hat{\mu}(\xi) \hat{A}(\xi). \end{aligned}$$

با جایگذاری پارامترهای بی بعد فوق الذکر در معادله (۳-۶۴) و حذف کلاهکها، معادله حرکت بی بعد

میکروتیر باریک شونده AFG به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left(K(\xi) \left(\frac{\partial^3 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \right) \right) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(S(\xi) \left(\frac{\partial^2 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right) \right) - m(\xi) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right) = 0 \quad (۳-۷۳)$$

همچنین شرایط مرزی بر حسب پارامترهای بی بعد به صورت زیر بازنویسی می شوند.

$$V = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} \right) \right) \Big|_{\xi=1} = 0 \quad , \quad w(0) = 0 \quad (۳-۷۴)$$

$$M = S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} \right) \right) \Big|_{\xi=1} = 0 \quad \text{و} \quad w_{,\xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (75-3)$$

$$M_{nc} = K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} \right) \Big|_{\xi=1} = 0 \quad \text{و} \quad w_{,\xi\xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (76-3)$$

با فرض ارتعاش هارمونیک و حل به فرم زیر:

$$w(\xi, \tau) = W(\xi) e^{i\omega\tau} \quad (77-3)$$

و جایگذاری در معادله (73-3)، معادله حرکت به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\frac{d^3}{d\xi^3} \left(K(\xi) \left(\frac{d^3 W(\xi)}{d\xi^3} \right) \right) - \frac{d^2}{d\xi^2} \left(S(\xi) \left(\frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} \right) \right) + \lambda m(\xi) W(\xi) = 0 \quad (78-3)$$

که در آن $\lambda = \omega^2$ همچنین با جایگذاری رابطه (71-3) در (78-3) تا (70-3)، شرایط مرزی معادله

دیفرانسیلی با مشتقات معمولی فوق به صورت زیر بیان می‌شود.

$$V = \frac{d}{d\xi} \left(S \left(\frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) \right) - \frac{d^2}{d\xi^2} \left(K \left(\frac{d^3 w}{d\xi^3} \right) \right) \Big|_{\xi=1} = 0 \quad \text{و} \quad w(0) = 0 \quad (79-3)$$

$$M = S \left(\frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) - \frac{d}{d\xi} \left(K \left(\frac{d^3 w}{d\xi^3} \right) \right) \Big|_{\xi=1} = 0 \quad \text{و} \quad w_{,\xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (80-3)$$

$$M_{nc} = K \left(\frac{d^3 w}{d\xi^3} \right) \Big|_{\xi=1} = 0 \quad \text{و} \quad w_{,\xi\xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \quad (81-3)$$

معادله (78-3) یک معادله دیفرانسیلی مرتبه ششم با مشتقات معمولی و ضرایب متغیر است که حل

تحلیلی و دقیق آن امکان‌پذیر نیست. همچنین استفاده از روش گالرکین برای تخمین پاسخ تقریبی -

تحلیلی منوط به پیدا کردن تابع مقایسه‌ای است که شرایط مرزی رابطه (79-3) تا (81-3) را ارضاء

کند. از آنجایی که این شرایط مرزی یک دسته معادله دیفرانسیلی با ضرایب متغیر هستند، یافتن تابع

مقایسه‌ای برای روش گالرکین دشوار است. همچنین حل معادله دیفرانسیلی با پیشنهاد تابع $W(\xi)$

به صورت سری با توجه به شرایط مرزی پیچیده، کار بسیار مشکلی است. در ادامه معادله دیفرانسیل و

شرایط مرزی آن به یک معادله انتگرالی تبدیل خواهد شد، تا بتوان آن را با بسط $W(\xi)$ به یک سری

حل کرد.

3-6- تبدیل معادله دیفرانسیلی حرکت به معادله انتگرالی

در این قسمت معادله دیفرانسیلی حرکت و شرایط مرزی آن به یک معادله انتگرالی تبدیل شده و در

ادامه با استفاده از بسط سری چندجمله‌ای و لژاندر انتقال یافته، آنالیز ارتعاشی میکروتیر باریک

شونده‌ی AFG ارائه می‌شود. با انتگرال‌گیری از دو طرف معادله (۷۸-۳) نسبت به ξ از صفر تا ξ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(K(\xi) \frac{d^3 W(\xi)}{d\xi^3} \right) - \frac{d}{d\xi} \left(S(\xi) \frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} \right) + \lambda \int_0^\xi m(s) W(s) ds = c_1 \quad (۸۲-۳)$$

با انتگرال‌گیری مجدد از دو طرف رابطه فوق تا پنج مرتبه دیگر خواهیم داشت:

$$\frac{d}{d\xi} \left(K(\xi) \frac{d^3 W(\xi)}{d\xi^3} \right) - \left(S(\xi) \frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} \right) + \lambda \int_0^\xi m(s) (\xi - s) W(s) ds = c_1 \xi + c_2 \quad (۸۳-۳)$$

$$\left(K(\xi) \frac{d^3 W(\xi)}{d\xi^3} \right) - \left(S(\xi) \frac{dW(\xi)}{d\xi} - S'(\xi) W(\xi) + \int_0^\xi S''(s) W(s) ds \right) + \lambda \int_0^\xi \frac{1}{2} (\xi - s)^2 m(s) W(s) ds = \frac{c_1 \xi^2}{2} + c_2 \xi + c_3 \quad (۸۴-۳)$$

$$\left(K(\xi) \frac{d^2 W(\xi)}{d\xi^2} - K'(\xi) \frac{dW(\xi)}{d\xi} + K''(\xi) W(\xi) - \int_0^\xi K^{(3)}(s) W(s) ds \right) - \left(S(\xi) W(\xi) - 2 \int_0^\xi S'(s) W(s) ds \right) + \int_0^\xi (\xi - s) S''(s) W(s) ds + \lambda \int_0^\xi \frac{1}{6} (\xi - s)^3 m(s) W(s) ds = \frac{c_1 \xi^3}{6} + \frac{c_2 \xi^2}{2} + c_3 \xi + c_4 \quad (۸۵-۳)$$

$$\left(K(\xi) \frac{dW(\xi)}{d\xi} - 2K'(\xi) W(\xi) + 3 \int_0^\xi K''(s) W(s) ds - \int_0^\xi (\xi - s) K^{(3)}(s) W(s) ds \right) - \left(\int_0^\xi \left[S(s) - 2(\xi - s) S'(s) + \frac{1}{2} (\xi - s)^2 S''(s) \right] W(s) ds \right) + \lambda \int_0^\xi \frac{1}{24} (\xi - s)^4 m(s) W(s) ds = \frac{c_1 \xi^4}{24} + \frac{c_2 \xi^3}{6} + \frac{c_3 \xi^2}{2} + c_4 \xi + c_5 \quad (۸۶-۳)$$

$$\left(K(\xi) W(\xi) + \int_0^\xi \left[-3K'(s) + 3(\xi - s) K''(s) - \frac{1}{2} (\xi - s)^2 K^{(3)}(s) \right] W(s) ds \right) - \left(\int_0^\xi \left[(\xi - s) S(s) - (\xi - s)^2 S'(s) + \frac{1}{6} (\xi - s)^3 S''(s) \right] W(s) ds \right) + \lambda \int_0^\xi \frac{1}{120} (\xi - s)^5 m(s) W(s) ds = \frac{c_1 \xi^5}{120} + \frac{c_2 \xi^4}{24} + \frac{c_3 \xi^3}{6} + \frac{c_4 \xi^2}{2} + c_5 \xi + c_6 \quad (۸۷-۳)$$

که c_1 تا c_6 ثوابت انتگرال‌گیری هستند که با جایگذاری شرایط مرزی (۷۹-۳) تا (۸۱-۳) به دست

خواهند آمد. با جایگذاری شرایط مرزی طرف آزاد میکروتیر $(V(\xi = 1) = 0, M(\xi = 1) = 0)$ و

$M_{nc}(\xi = 1) = 0$ در معادلات (۸۲-۳) تا (۸۵-۳)، ضرایب c_1, c_2 و c_3 به ترتیب به دست می آیند.

$$\begin{aligned} c_1 &= \lambda \int_0^1 m(s)W(s) ds \\ c_2 &= -\lambda \int_0^1 sm(s)W(s) ds \end{aligned} \quad (۸۸-۳)$$

به طور مشابه، از جایگذاری شرایط مرزی طرف آزاد میکروتیر $(w|_{\xi=0} = 0, w(0) = 0)$ و $w|_{\xi=0} = 0$

در معادلات (۸۵-۳) تا (۸۷-۳)، ضرایب c_4, c_5 و c_6 صفر خواهند شد. بنابراین

معادله دیفرانسیلی (۷۸-۳) می تواند به یک معادله انتگرالی به صورت زیر بازنویسی شود.

$$K(\xi)W(\xi) + \int_0^1 K_1(\xi, s)W(s)ds + \lambda \int_0^1 K_2(\xi, s)W(s) ds + f(\xi) = 0 \quad (۸۹-۳)$$

که در آن

$$K_1(\xi, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\xi - s)^2 K^{(3)}(s) + 3(\xi - s)K''(s) - 3K'(s) \\ -\left\{(\xi - s)S(s) - (\xi - s)^2 S'(s) + \frac{1}{6}((\xi - s)^3 - \xi^3)S''(s)\right\} & 0 \leq s \leq \xi \\ \frac{1}{6}\xi^3 S''(s) & \xi \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (۹۰-۳)$$

$$K_2(\xi, s) = \begin{cases} m(s) \left\{ -\frac{1}{120}s^5 + \frac{1}{24}s^4\xi - \frac{1}{12}s^3\xi^2 \right\} & 0 \leq s \leq \xi \\ m(s) \left\{ -\frac{1}{120}\xi^5 + \frac{1}{24}\xi^4s - \frac{1}{12}\xi^3s^2 \right\} & \xi \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (۹۱-۳)$$

$$f(\xi) = \left\{ S(1) \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\xi=1} - S'(1)W(1) \right\} \left(\frac{\xi^3}{6} \right) \quad (۹۲-۳)$$

رابطه (۸۹-۳) یک معادله انتگرالی فردهم^{۲۸} را نشان می دهد که روش های مختلفی برای حل آن

وجود دارد. لازم به توضیح است که حد بالای انتگرال در معادله انتگرالی فوق به دلیل اعمال شرایط

مرزی تا یک در نظر گرفته شده است و همانطور که در رابطه (۹۰-۳) و (۹۱-۳) مشاهده می شود، بازه

انتگرال از صفر تا ξ و از ξ تا یک شکسته شده است.

²⁸ Fredholm integral equation

۷-۳- حل معادله انتگرالی

در این قسمت، مقدار ویژه‌ی معادله انتگرالی (۳-۸۹) که نشان‌دهنده‌ی توان دوم فرکانس است تخمین زده می‌شود. برای این منظور، $W(\xi)$ با هر دو سری توانی و سری لژاندر انتقال یافته بسط داده می‌شود. اگر از خطاهای کوچک صرف‌نظر شود، مقدار تقریبی تابع نامعین $W(\xi)$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$W(\xi) = \sum_{n=0}^N c_n \xi^n, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (۳-۹۳)$$

و

$$W(\xi) = \sum_{n=0}^N c_n \widetilde{P}_n(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (۳-۹۴)$$

که در آنها c_n ها ضرایب نامعلوم، N یک عدد صحیح معین و $\widetilde{P}_n(\xi)$ چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته در بازه‌ی $[0,1]$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\widetilde{P}_n(\xi) = P_n(2\xi - 1) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n+j} (n+j)!}{j! (n-j)!} \xi^j \quad (۳-۹۵)$$

که $P(*)$ چندجمله‌ای استاندارد لژاندر در بازه‌ی $[-1,1]$ را نشان می‌دهد.

برای تقریب بهتر و ارضاء شرایط مرزی کلاسیک در طرف درگیر میکروتیر، دو ضریب نامعلوم اول بایستی صفر شوند ($c_1 = c_2 = 0$). با جایگذاری معادله (۳-۹۳) و (۳-۹۴) در معادله انتگرالی (۳-۸۹) و ضرب طرفین رابطه حاصل در ξ^m (برای تقریب سری توانی) یا $\widetilde{P}_m(\xi)$ (برای چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته)، که در آن $2 \leq m \leq N$ ، و سپس با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه حاصله نسبت به ξ از صفر تا یک، یک دستگاه معادله بر حسب c_n ها به دست می‌آید:

$$\sum_{n=2}^N (d_{mn} + k_{1mn} + f_{mn} + \lambda k_{2mn}) c_n = 0, \quad m = 2, 3, 4, \dots, N. \quad (۳-۹۶)$$

که در آن

$$\begin{cases} d_{mn} = \int_0^1 K(\xi) \xi^{n+m} d\xi, \\ k_{1mn} = \int_0^1 \int_0^1 K_1(\xi, s) s^n \xi^m ds d\xi, \\ k_{1mn} = \int_0^1 \int_0^1 K_1(\xi, s) s^n \xi^m ds d\xi, \\ f_{mn} = \int_0^1 (nS(1) - S'(1)) \left(\frac{\xi^{3+m}}{6} \right) d\xi. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(برای تقریب سری توانی)} \\ \text{(۹۷-۳)} \end{array}$$

$$\begin{cases} d_{mn} = \int_0^1 K(\xi) \bar{P}_n(\xi) \bar{P}_m(\xi) d\xi, \\ k_{1mn} = \int_0^1 \int_0^1 K_1(\xi, s) \bar{P}_n(s) \bar{P}_m(\xi) ds d\xi, \\ k_{2mn} = \int_0^1 \int_0^1 K_2(\xi, s) \bar{P}_n(s) \bar{P}_m(\xi) ds d\xi, \\ f_{mn} = \int_0^1 \left(s(1) \bar{P}_n'(s=1) - s'(1) \bar{P}_n(1) \right) \left(\frac{\xi^3}{6} \right) \bar{P}_m(\xi) d\xi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(برای تقریب سری} \\ \text{چندجمله‌ای لژاندر انتقال} \\ \text{یافته)} \end{array} \quad \text{(۹۸-۳)}$$

برای حل غیربندی معادله (۹۶-۳)، بایستی دترمینان ماتریس ضرایب صفر شود؛ پس داریم:

$$\det(d_{mn} + k_{1mn} + f_{mn} + \lambda k_{2mn}) = 0, \quad m, n = 2, 3, 4, \dots, N \quad (۹۹-۳)$$

معادله فوق، معادله مشخصه‌ی رابطه‌ی (۹۶-۳) می‌باشد که با حل آن مقدار مشخصه‌ی λ (توان دوم

فرکانس طبیعی) به دست خواهد آمد. همچنین با جایگذاری مقدار ویژه‌های به دست آمده از رابطه (۳-۳)

(۹۹) در رابطه (۹۶-۳)، شکل موده‌های مرتبط با آن حاصل خواهد شد.

۳-۸- شرایط مرزی دو سرگیردار

در این بخش معادله انتگرالی حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروتیر باریک شونده‌ی AFG دو سرگیردار

استخراج شده و نتایج به دست آمده با روش گالرکین مقایسه می‌شود. با توجه به روابط (۳-۶۵) تا (۳-۶۷)

(۶۷) که بیانگر شرایط مرزی عمومی میکروتیر باریک شونده‌ی AFG است، برای میکروتیر دو سر

درگیر، شرایط مرزی به صورت زیر بیان خواهد شد.

$$W(0) = 0 \quad \text{و} \quad W(L) = 0 \quad (۱۰۰-۳)$$

$$W_{,x}|_{x=0} = 0 \quad \text{و} \quad W_{,x}|_{x=L} = 0 \quad (۱۰۱-۳)$$

$$W_{,x}|_{x=0} = 0 \quad \text{و} \quad W_{,xx}|_{x=L} = 0 \quad (۱۰۲-۳)$$

که چهار شرط مرزی اول، شرایط مرزی کلاسیک و دو شرط مرزی آخر شرایط مرزی غیر کلاسیک

مرتبط با تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده است. شرایط مرزی معادله دیفرانسیل معمولی (۳-۶۴) بعد از تعریف پارامترهای بی‌بعد رابطه (۳-۷۱) و فرض هارمونیک بودن ارتعاش برای میکروتیر دو سر گیردار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$W(0) = 0 \quad \text{و} \quad W(1) = 0 \quad (۳-۱۰۳)$$

$$W_{,\xi}|_{\xi=0} = 0 \quad \text{و} \quad W_{,\xi}|_{\xi=1} = 0 \quad (۳-۱۰۴)$$

$$W_{,\xi\xi}|_{\xi=0} = 0 \quad \text{و} \quad W_{,\xi\xi}|_{\xi=1} = 0 \quad (۳-۱۰۵)$$

جایگذاری شرایط مرزی مرتبط با $\xi = 0$ میکروتیر در معادلات (۳-۸۵) تا (۳-۸۷)، ضرایب c_4 ، c_5 و c_6 صفر خواهند شد. همچنین با جایگذاری شرایط مرزی طرف $\xi = 1$ در معادلات (۳-۸۵) تا (۳-۸۷) نتیجه می‌شود:

$$\int_0^1 (2S'(s) - K^{(3)}(s) - (1-s)S''(s))W(s)ds + \lambda \int_0^1 \frac{1}{6}(1-s)^3 m(s)W(s)ds = \frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{2} + c_3 \quad (۳-۱۰۶)$$

$$\int_0^1 \left(3K''(s) - (1-s)K^{(3)}(s) - S(s) + 2(1-s)S'(s) - \frac{1}{2}(1-s)^2 S''(s) \right) W(s)ds + \lambda \int_0^1 \frac{1}{24}(1-s)^4 m(s)W(s)ds = \frac{c_1}{24} + \frac{c_2}{6} + \frac{c_3}{2} \quad (۳-۱۰۷)$$

$$\left(\int_0^1 \left[-3K'(s) + 3(\xi-s)K''(s) - \frac{1}{2}(1-s)^2 K^{(3)}(s) \right] W(s)ds \right) - \left(\int_0^1 \left[(1-s)S(s) - (1-s)^2 S'(s) + \frac{1}{6}(1-s)^3 S''(s) \right] W(s)ds \right) + \lambda \int_0^1 \frac{1}{120}(1-s)^5 m(s)W(s)ds = \frac{c_1}{120} + \frac{c_2}{24} + \frac{c_3}{6} \quad (۳-۱۰۸)$$

با حل سه معادله، سه مجهول فوق برای ضرایب c_1 ، c_2 و c_3 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
c_1 = \int_0^1 & [(360(1-s) - 360(1-s)^2 - 60)K^{(3)}(s) \\
& + (2160(1-s) - 1080)K''(s) - 2160K'(s) \\
& + (180(1-s)^2 - 120(1-s)^3 - 60(1-s))S''(s) \\
& + (120 - 720(1-s) + 720(1-s)^2 - 120(1-s)^3)S'(s) \\
& + (360 - 720(1-s))S(s)]W(s)ds \\
& + \lambda \int_0^1 [6(1-s)^5 - 15(1-s)^4 \\
& + 10(1-s)^3]m(s)W(s) ds
\end{aligned} \tag{۱۰۹-۳}$$

$$\begin{aligned}
c_2 = \int_0^1 & [(-168(1-s) + 180(1-s)^2 + 24)K^{(3)}(s) \\
& + (-1080(1-s) + 504)K''(s) + 1080K'(s) \\
& + (-84(1-s)^2 + 60(1-s)^3 + 24(1-s))S''(s) \\
& + (-48 + 336(1-s) - 360(1-s)^2)S'(s) \\
& + (-168 + 360(1-s))S(s)]W(s)ds \\
& + \lambda \int_0^1 [-3(1-s)^5 + 7(1-s)^4 - 4(1-s)^3]m(s)W(s) ds
\end{aligned} \tag{۱۱۰-۳}$$

$$\begin{aligned}
c_3 = \int_0^1 & [(24(1-s) - 30(1-s)^2 - 3)K^{(3)}(s) + (180(1-s) - 72)K''(s) \\
& - 180K'(s) + (-84(1-s)^2 + 60(1-s)^3 + 24(1-s))S''(s) \\
& + (6 - 48(1-s) + 60(1-s)^2)S'(s) \\
& + (24 - 60(1-s))S(s)]W(s)ds \\
& + \lambda \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(1-s)^5 - (1-s)^4 + \frac{1}{2}(1-s)^3 \right] m(s)W(s) ds
\end{aligned} \tag{۱۱۱-۳}$$

معادله (۸۷-۳) با جایگذاری ضرایب c_1 ، c_2 ، ... تا c_6 به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$K(\xi)W(\xi) + \int_0^1 K_1(\xi, s)W(s)ds + \lambda \int_0^1 K_2(\xi, s)W(s) ds = 0 \tag{۱۱۲-۳}$$

که در آن

$$K_1(\xi, s) = \begin{cases} \left\{ A_0^{(3)}K^{(3)}(s) + A_0^{(2)}K''(s) + A_0^{(1)}K'(s) \right. \\ \left. + \{B_0^{(0)}S(s) + B_0^{(1)}S'(s) + B_0^{(2)}S''(s)\} \right\} & 0 \leq s \leq \xi \\ \left\{ A_1^{(3)}K^{(3)}(s) + A_1^{(2)}K''(s) + A_1^{(1)}K'(s) \right. \\ \left. + \{B_1^{(0)}S(s) + B_1^{(1)}S'(s) + B_1^{(2)}S''(s)\} \right\} & \xi \leq s \leq 1 \end{cases} \tag{۱۱۳-۳}$$

$$K_2(\xi, s) = \begin{cases} m(s)D_0(s, \xi) & 0 \leq s \leq \xi \\ m(s)D_1(s, \xi) & \xi \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (114-3)$$

رابطه (3-112) یک معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم را نشان می‌دهد که روش‌های مختلفی برای حل آن وجود دارد. در معادلات فوق ضرایب $A_p^{(q)}$ ، $B_p^{(q)}$ و D_p ($p, q = 0, 1, 2, 3$) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_0^{(3)} &= -\frac{1}{2}(\xi - s)^2 - \left(-\frac{1}{2} + 3s - 3s^2\right)\xi^5 - \left(-8s + \frac{15}{2}s^2 + \frac{3}{2}\right)\xi^4 \\ &\quad - \left(-5s^2 - \frac{3}{2} + 6s\right)\xi^3 \\ A_0^{(2)} &= 3(\xi - s) - (9 - 18s)\xi^5 - (45s - 24)\xi^4 - (18 - 30s)\xi^3 \\ A_0^{(1)} &= 18\xi^5 - 45\xi^4 + 30\xi^3 - 3 \\ B_0^{(2)}(s, \xi) &= -\frac{1}{6}(\xi - s)^3 - \left(\frac{1}{2}s - \frac{3}{2}s^2 + s^3\right)\xi^5 - \left(-\frac{3}{2}s - \frac{5}{2}s^3 + 4s^2\right)\xi^4 \\ &\quad - \left(\frac{5}{3}s^3 - 3s^2 + \frac{3}{2}s - \frac{1}{6}\right)\xi^3 \end{aligned} \quad (115-3)$$

$$B_0^{(1)}(s, \xi) = (\xi - s)^2 - (1 - 6s + 6s^2)\xi^5 - (16s - 15s^2 - 3)\xi^4 - (10s^2 + 3 - 12s)\xi^3$$

$$B_0^{(0)}(s, \xi) = -(\xi - s) - (6s - 3)\xi^5 - (8 - 15s)\xi^4 - (10s - 6)\xi^3$$

$$D_0(s, \xi) = \frac{1}{120}(z - 1)^3 \left((6z^2 + 3z + 1)s^5 + (-15z^2 - 5z)s^4 + 10z^2s^3 \right)$$

$$A_1^{(3)} = \left(\frac{1}{2} - 3s + 3s^2\right)\xi^5 - \left(-8s + \frac{15}{2}s^2 + \frac{3}{2}\right)\xi^4 - \left(-5s^2 - \frac{3}{2} + 6s\right)\xi^3$$

$$A_1^{(2)} = (-9 + 18s)\xi^5 - (45s - 24)\xi^4 - (18 - 30s)\xi^3$$

$$A_1^{(1)} = 18\xi^5 - 45\xi^4 + 30\xi^3$$

$$\begin{aligned} B_1^{(2)}(s, \xi) &= \left(\frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}s - s^3\right)\xi^5 - \left(-\frac{3}{2}s - \frac{5}{2}s^3 + 4s^2\right)\xi^4 \\ &\quad - \left(\frac{5}{3}s^3 - 3s^2 + \frac{3}{2}s - \frac{1}{6}\right)\xi^3 \end{aligned} \quad (116-3)$$

$$B_1^{(1)}(s, \xi) = (6s - 1 - 6s^2)\xi^5 - (16s - 15s^2 - 3)\xi^4 - (10s^2 + 3 - 12s)\xi^3$$

$$B_1^{(0)}(s, \xi) = (3 - 6s)\xi^5 - (8 - 15s)\xi^4 - (10s - 6)\xi^3$$

$$D_1(s, \xi) = \frac{1}{120}(s - 1)^3 \left((6s^2 + 3s + 1)\xi^5 + (-15s^2 - 5s)\xi^4 + 10s^2\xi^3 \right)$$

۳-۸-۱- حل معادله انتگرالی میکروتیر دو سر گیردار

در این قسمت، مقدار ویژه‌ی معادله انتگرالی (۳-۱۱۲)، که نشان‌دهنده‌ی توان دوم فرکانس است، تخمین زده شده است. برای این منظور، $W(\xi)$ با سری توابع مقایسه‌ای معمول تیر دو سرگیردار کلاسیک داده می‌شود. اگر از خطاهای کوچک صرف‌نظر کنیم، مقدار تقریبی تابع نامعین $W(\xi)$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$W(\xi) = \sum_{n=0}^N c_n \phi_n(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (۱۱۷-۳)$$

که در آنها c_n ها ضرایب نامعلوم، N یک عدد صحیح معین و $\phi_n(\xi)$ تابع مقایسه‌ای معمول تیر دو سرگیردار کلاسیک در بازه‌ی $[0,1]$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi_n(\xi) = \left[(\cos \beta_n \xi - \cosh \beta_n \xi) - \frac{\cos \beta_n L - \cosh \beta_n L}{\sin \beta_n L - \sinh \beta_n L} (\sin \beta_n \xi - \sinh \beta_n \xi) \right] \quad (۱۱۸-۳)$$

که در آن β_n ها ریشه‌های مثبت معادله زیر هستند:

$$\cos(\beta_n L) \cosh(\beta_n L) - 1 = 0 \quad (۱۱۹-۳)$$

معادله (۳-۱۱۸) تمامی شرایط مرزی معادله دیفرانسیل را ارضاء می‌کند و انتظار می‌رود که پاسخ به‌دست آمده از معادله انتگرالی نزدیک به پاسخ به‌دست آمده از معادله دیفرانسیلی باشد. با جایگذاری معادله (۳-۱۱۷) در (۳-۱۱۲) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=2}^N (d_{mn} + k_{1mn} + \lambda k_{2mn}) c_n = 0, \quad m = 2, 3, 4, \dots, N. \quad (۱۲۰-۳)$$

که در آن

$$\begin{cases} d_{mn} = \int_0^1 K(\xi) \phi_n(\xi) \phi_m(\xi) d\xi, \\ k_{1mn} = \int_0^1 \int_0^1 K_1(\xi, s) \phi_n(s) \phi_m(\xi) ds d\xi, \\ k_{2mn} = \int_0^1 \int_0^1 K_2(\xi, s) \phi_n(s) \phi_m(\xi) ds d\xi. \end{cases} \quad (۱۲۱-۳)$$

برای حل غیربدیهی معادله (۳-۱۲۰)، بایستی دترمینان ماتریس ضرایب صفر شود؛ پس داریم:

$$\det(d_{mn} + k_{1mn} + \lambda k_{2mn}) = 0, \quad m, n = 2, 3, 4, \dots, N \quad (۱۲۲-۳)$$

معادله فوق، معادله مشخصه‌ی رابطه‌ی (۳-۱۱۲) می‌باشد که با حل آن مقدار مشخصه‌ی λ (توان دوم

فرکانس طبیعی بی‌بعد) به‌دست خواهد آمد. همچنین با جایگذاری مقدار ویژه‌های به‌دست آمده از رابطه (۳-۱۲۲) در رابطه (۳-۱۱۲)، شکل موده‌های مرتبط با آن حاصل خواهد شد.

۳-۸-۲- روش گالرکین

در این قسمت، فرکانس طبیعی بی‌بعد معادله دیفرانسیلی (۳-۷۸) برای شرایط مرزی دوسر گیردار از روش گالرکین تخمین زده شده است. بر اساس روش معمول گالرکین یک حل تقریبی برای $W(\xi)$ به‌صورت زیر فرض می‌شود:

$$W(\xi) = \sum_{n=1}^N q_n \phi_n(\xi) \quad (۳-۱۲۳)$$

که در آن q_n ها ضرایب نامعلوم هستند که باید به‌دست آیند و $\phi_n(\xi)$ تابع آزمون روش گالرکین برای شرایط مرزی معادلات (۳-۱۰۳) تا (۳-۱۰۵) همانند رابطه (۳-۱۱۸) تعریف می‌شود. این تابع آزمون تمام شرایط مرزی فوق‌الذکر را ارضاء می‌کند. با جایگذاری حل تقریبی معادله (۳-۱۲۳) در معادله دیفرانسیلی (۳-۷۸) و سپس ضرب طرفین در $\phi_m(\xi)$ و انتگرال‌گیری از نتیجه حاصل در بازه $[0,1]$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N q_n \int_0^1 \phi_m(\xi) \frac{d^3}{d\xi^3} (K(\xi) \phi_n'''(\xi)) d\xi \\ - \sum_{n=1}^N q_n \int_0^1 \phi_m(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} (S(\xi) \phi_n''(\xi)) d\xi \\ + \lambda \sum_{n=1}^N q_n \int_0^1 m(\xi) \phi_n(\xi) \phi_m(\xi) d\xi = 0 \end{aligned} \quad (۳-۱۲۴)$$

رابطه فوق می‌تواند به شکل ماتریسی زیر بیان شود:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \lambda[\mathbf{M}]\{\mathbf{q}\} \quad (۳-۱۲۵)$$

ضرایب ماتریس معادله فوق به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} K_{mn} = \int_0^1 K(\xi) \phi_n^{(vi)}(\xi) \phi_m(\xi) d\xi + 3 \int_0^1 K'(\xi) \phi_n^{(v)}(\xi) \phi_m(\xi) d\xi \\ + 3 \int_0^1 K''(\xi) \phi_n^{(iv)}(\xi) \phi_m(\xi) d\xi + \int_0^1 K'''(\xi) \phi_n'''(\xi) \phi_m(\xi) d\xi \\ - \int_0^1 S(\xi) \phi_n^{(iv)}(\xi) \phi_m(\xi) d\xi - 2 \int_0^1 S'(\xi) \phi_n'''(\xi) \phi_m(\xi) d\xi \\ - \int_0^1 S''(\xi) \phi_n''(\xi) \phi_m(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (۳-۱۲۶)$$

$$M_{mn} = - \int_0^1 m(\xi) \phi_n(\xi) \phi_m(\xi) \quad (127-3)$$

توان دوم فرکانس طبیعی بی بعد λ از حل مسئله مقدار ویژه ی (3-125) حاصل می شود.

3-9- پارامتر مقیاس طولی در دو تئوری غیر کلاسیک الاستیسیته

از آنجایی که مقدار پارامترهای مقیاس طولی تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده برای مواد مختلف گزارش نشده است، بسیار معمول است که هر سه پارامتر مقیاس طولی را مساوی یک پارامتر مقیاس طولی معادل در نظر بگیرند ($l_0 = l_1 = l_2 = l_{MSGT}$). اما اشتباه آشکاری که اغلب پژوهشگران می کنند برابر قرار دادن این پارامتر مقیاس طولی معادل با پارامتر مقیاس طولی کوپل تنش اصلاح شده است [70]، که نتایج حاصل از پژوهش ایشان نیز با واقعیت تفاوت بسیاری دارد. در این قسمت رابطه ای میان پارامتر مقیاس طولی معادل تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و پارامتر مقیاس طولی کوپل تنش اصلاح شده بیان شده است.

برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده پارامتر خمش مرتبه بالاتر b_h که خمش تیر را به ضخامت وابسته می کند، توسط لم و همکاران [4] به صورت زیر بیان شده است.

$$b_h^2 = 6(1 - 2\nu)l_0^2 + \frac{2}{5}(4 - \nu)l_1^2 + 3(1 - \nu)l_2^2, \quad (128-3)$$

از این رو هنگامی که هر سه پارامتر مقیاس طولی را مساوی قرار می دهیم ($l_0 = l_1 = l_2 = l_{MSGT}$)، پارامتر مرتبه بالاتر b_h برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده به صورت زیر به دست می آید.

$$b_h^2 = (10.6 - 15.4\nu)l_{MSGT}^2 \quad (129-3)$$

همچنین با صفر قرار دادن پارامترهای مقیاس طولی مرتبط با گرادیان کرنش اصلاح شده ($l_0 = l_1 = 0$)، در رابطه (3-128)، پارامتر مرتبه بالاتر خمش برای تئوری کوپل تنش اصلاح شده به صورت زیر خواهد آمد:

$$b_h^2 = 3(1 - \nu)l_{MCST}^2 \quad (130-3)$$

که در آن l_{MCST} تنها پارامتر مقیاس طولی برای تئوری کوپل تنش اصلاح شده است. با حذف b_h^2 از رابطه (3-129) و (3-130)، رابطه ای میان پارامتر مقیاس طولی تئوری کوپل تنش اصلاح شده (l_{MCST}) و پارامتر مقیاس طولی معادل گرادیان کرنش اصلاح شده (l_{MSGT}) به صورت زیر برقرار

می شود:

$$l_{MSGT}^2 = \frac{3(1-\nu)}{(10.6 - 15.4\nu)} l_{MCST}^2 \quad (3-131)$$

برای مقایسه نتایج دو تئوری غیر کلاسیک الاستیسیته (گرادیان کرنش اصلاح شده و کوپل تنش اصلاح شده)، پارامتر مقیاس طولی معادل گرادیان کرنش اصلاح شده بایستی از رابطه (3-131) تخمین زده شود.

3-10- مسأله نمونه و نتایج آن

در این قسمت، آنالیز ارتعاشی میکروتیر باریک شونده AFG یک سر گیردار که در یک طرف درگیر ($x = 0$) و در سمت دیگر ($x = L$) آزاد می باشد و همچنین میکروتیر باریک شونده AFG دو سر گیردار بررسی شده است. برای سادگی مطالعه، هر سه پارامتر مقیاس اندازه برابر فرض می شوند ($l_0 = l_1 = l_2 = l_{MSGT}$). طول میکروتیر 20 برابر بزرگتر از عرض سطح مقطع طرف چپ فرض شده است ($L = 20h_L$). برای سادگی در نگارش، به جای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، تئوری کوپل تنش اصلاح شده و تئوری کلاسیک الاستیسیته از کوتاه شده‌ی نام لاتین آنها $MSGT$ ، $MCST$ و CT استفاده شده است.

3-10-1- نتایج میکروتیر یک سرگیردار

دو فرکانس طبیعی بی بعد نخست تیر AFG باریک شونده یک سرگیردار برای نسبت های باریک شوندگی مختلف در جدول (3-1) نشان داده شده است. نتایج با صفر قرار دادن پارامتر مقیاس طولی معادل l_{MSGT} و در نظر گرفتن تابع تغییرات مدول الاستیسیته و چگالی به فرم $E(x) = (1 + x/L)$ و $\rho(x) = (1 + x/L + (x/L)^2)$ به دست آمده اند تا با نتایج به دست آمده از مرجع [60] که به روش $DTEM$ ²⁹ استخراج شده اند مقایسه شود. همچنین نتایج این جدول با نتایج به دست آمده از مرجع [74] مقایسه شده است که برای هر سه مورد نتایج به دست آمده از روش ریلی-ریتز، چند جمله ای لژاندر انتقال

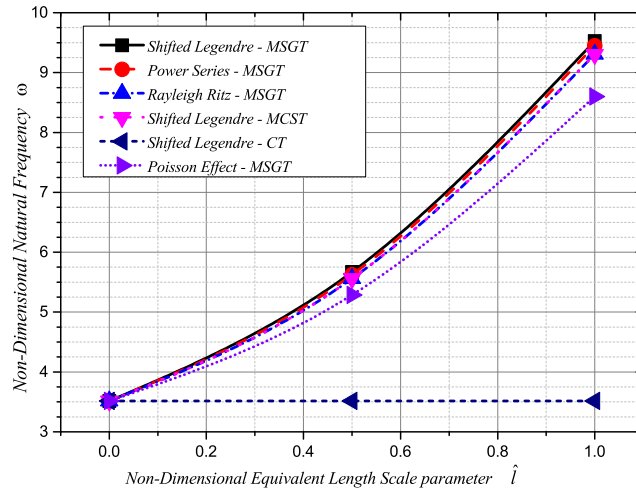
²⁹ Differential Transform Element Method

یافته و سری توانی که در مطالعه حاضر بررسی شده است با نتایج مقالات قبلی سازگاری بسیار خوبی مشاهده می‌شود. همچنین نتایج این جدول نشان می‌دهد که با افزایش نسبت مخروطی، فرکانس بنیادی طبیعی بی‌بعد افزایش و دومین فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

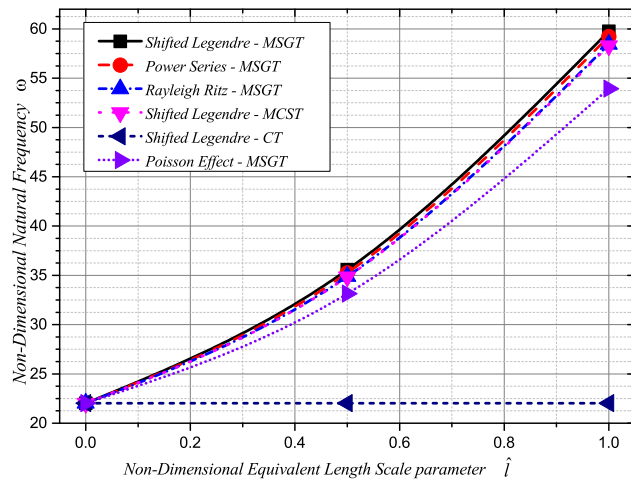
جدول (۳-۱) مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم $(\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho L A_L}{E_L I_L}})$ تیر یک‌سر گیردار بر اساس تئوری کلاسیک

f_h	f_b		0		0.4		0.8	
			$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$
0	Rayleigh-Ritz	N=20	2.4256	18.6041	2.8508	19.5303	3.8310	21.6759
	Shifted Legendre	N=10	2.4256	18.6041	2.8508	19.5303	3.8310	21.6760
	Power Series	N=9	2.4256	18.6041	2.8508	19.5301	3.8311	21.6752
	DTEM[59]		2.4256	18.6041	2.8508	19.5303	3.8310	21.6759
	CT[74]		2.4256	18.6041	2.8508	19.5303	3.8310	21.6759
0.4	Rayleigh-Ritz	N=20	2.6155	16.0705	3.0486	16.8571	4.0471	18.7164
	Shifted Legendre	N=10	2.6155	16.0705	3.0486	16.8571	4.0471	18.7164
	Power Series	N=9	2.6155	16.0705	3.0486	16.8569	4.0472	18.7147
	DTEM[59]		2.6155	16.0705	3.0486	16.8571	4.0471	18.7164
	CT[74]		2.6155	16.0705	3.0486	16.8571	4.0471	18.7164
0.8	Rayleigh-Ritz	N=20	3.0871	13.1142	3.5401	13.7466	4.5695	15.2955
	Shifted Legendre	N=10	3.0871	13.1148	3.5401	13.7472	4.5694	15.2963
	Power Series	N=9	3.0873	13.1069	3.5403	13.7383	4.5696	15.2885
	DTEM[59]		3.0871	13.1142	3.5401	13.7466	4.5695	15.2954
	CT[74]		3.0871	13.1142	3.5401	13.7466	4.5695	15.2955

شکل (۳-۲) و شکل (۳-۳) به ترتیب تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم میکروتیر همگن و یکنواخت و شکل (۳-۴) و شکل (۳-۵) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم میکروتیر همگن با نسبت باریک‌شوندگی به ترتیب ۰٫۴، ۰٫۸ و ۰٫۸ بر حسب تغییر پارامتر مقیاس طولی بی‌بعد معادل را نشان می‌دهند. در شکل (۳-۲) تا شکل (۳-۴)، تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیر یک سرگیردار حاصل از اعمال تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده ($MSGT$) با سه روش ریلی-ریتز، سری توانی و چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته و همچنین تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد حاصل از تئوری کلاسیک و کوپل تنش اصلاح شده در منحنی‌های جداگانه نشان داده شده‌اند. همچنین یک منحنی که نشان‌دهنده تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد با در نظر گرفتن اثر پواسون حاصل از اعمال تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده می‌باشد، رسم شده است.



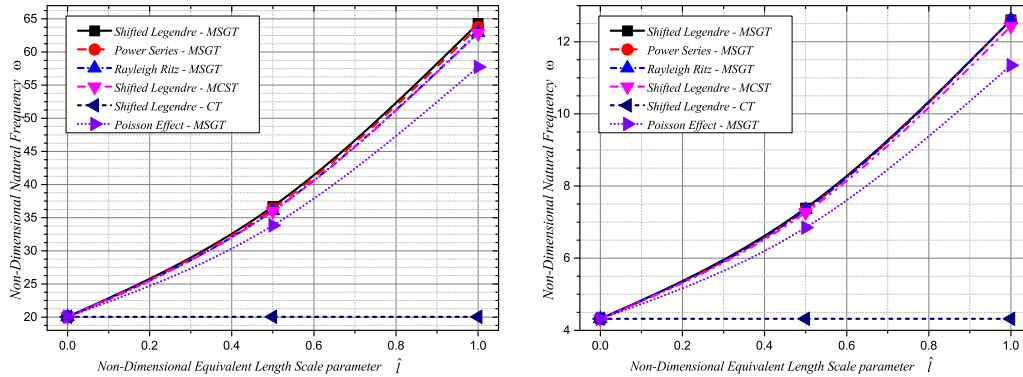
شکل (۲-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد نخست میکروتیر همگن و یکنواخت بر حسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی



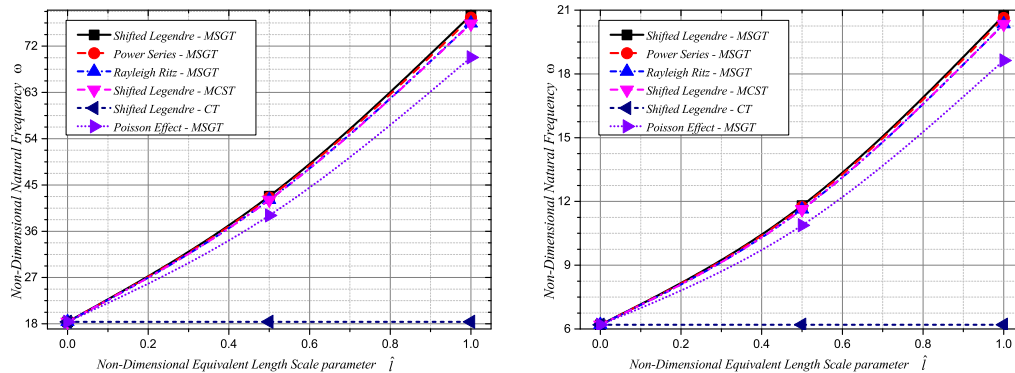
شکل (۳-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم میکروتیر همگن و یکنواخت بر حسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی

همانطور که شکل (۲-۳) تا شکل (۴-۳) مشاهده می‌شود، با افزایش پارامتر مقیاس طولی، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و اختلاف میان نتایج به‌دست آمده از تئوری‌های کلاسیک الاستیسیته، کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده بیشتر می‌شود. همچنین اختلاف نتایج به‌دست آمده از روش ریلی-ریتز با نتایج به‌دست آمده از حل معادله انتگرالی با افزایش پارامتر مقیاس طولی کمی افزایش می‌یابد اما نتایج برای هر دو حل معادله انتگرالی هم‌پوشانی خوبی دارد.

علاوه بر آن، همانطور که مشاهده می‌شود در نظر گرفتن اثر پواسون در استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده تأثیر غیرقابل اغمازی دارد.



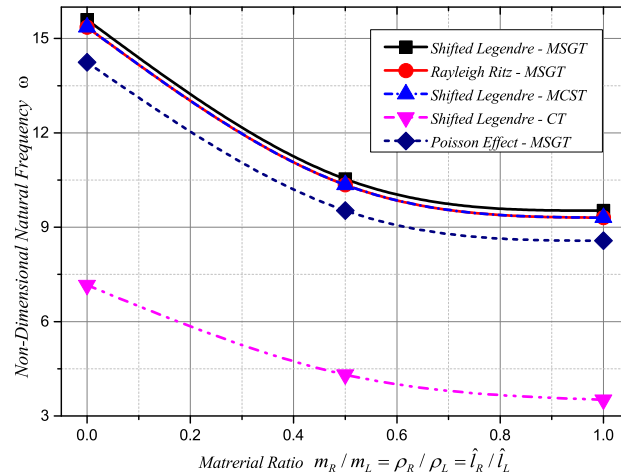
شکل (۳-۴) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیر همگن و با نسبت باریک‌شوندگی ۰,۴، بر حسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی. فرکانس نخست (سمت راست) و فرکانس دوم (سمت چپ).



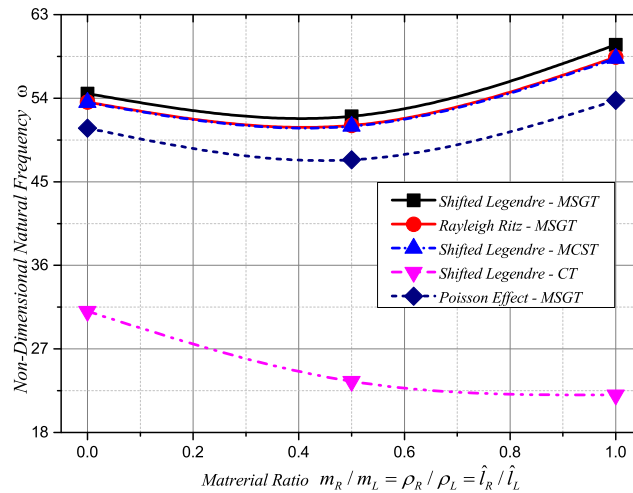
شکل (۳-۵) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیر همگن و با نسبت باریک‌شوندگی ۰,۸، بر حسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی. فرکانس نخست (سمت راست) و فرکانس دوم (سمت چپ).

در شکل (۳-۶) و شکل (۳-۷) تغییرات فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم به‌ازای نسبت‌های مختلف تغییر ماده در طول میکروتیر AFG یک شکل را نشان می‌دهد. فرکانس طبیعی اول برای همه حالت‌ها با افزایش نسبت تغییر ماده کاهش می‌یابد اما در مورد فرکانس دوم، افزایش نسبت تغییر ماده، کاهش فرکانس را برای تئوری کلاسیک و ابتدا کاهش و سپس افزایش فرکانس را برای مابقی حالت‌ها در پی دارد. به‌طور کلی افزایش نسبت تغییرات ماده برای تیر یک سر گیردار کلاسیک کاهش فرکانس طبیعی را در پی دارد، اما زمانی که نسبت تغییرات ماده شامل تغییر در پارامتر مقیاس طولی باشد و از

آنجا که افزایش این پارامتر منجر به افزایش فرکانس می‌شود، وجود یک نقطه بهینه در شکل (۳-۷) منطقی به نظر می‌رسد. مجدداً مشاهده می‌شود که در نظر گرفتن اثر پواسون تأثیر قابل ملاحظه‌ای در نتایج دارد و فرکانس طبیعی به دست آمده در این حالت پایین‌تر از حالتی است که ضریب پواسون صفر در نظر گرفته می‌شود.



شکل (۳-۶) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد نخست میکروتیر AFG و یکنواخت بر حسب تغییر نسبت‌های مختلف تغییر مواد.

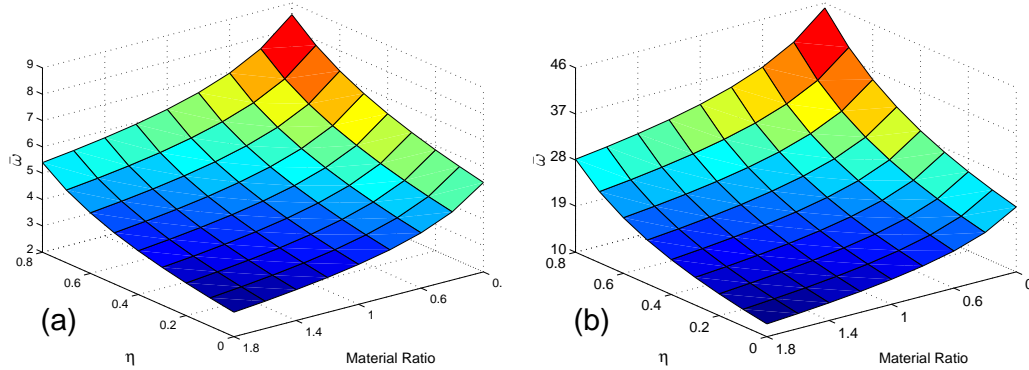


شکل (۳-۷) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم میکروتیر AFG و یکنواخت بر حسب تغییر نسبت‌های مختلف تغییر مواد.

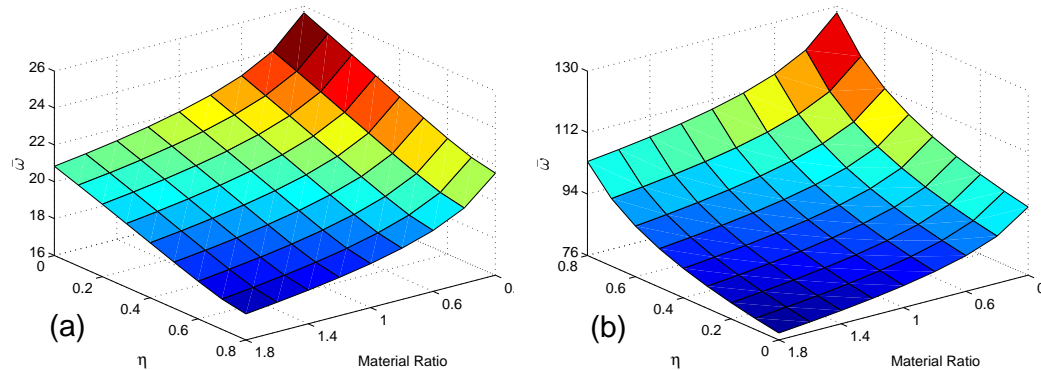
اگرچه اختلاف نتایج به دست آمده از روش ریلی-ریتز با نتایج به دست آمده از حل معادله انتگرالی

کمتر از ۲ درصد اختلاف دارند، اما مشاهده می‌شود که در نظر گرفتن شرایط مرزی‌ای که در روش ریلی-ریتز لحاظ نشده است، می‌تواند در نتایج اثرگذار باشد.

شکل (۸-۳) تا شکل (۱۰-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول تا سوم میکروتیر یک سرگردار باریک‌شده‌ی AFG را برای دو تئوری کلاسیک و گرادپان کرنش اصلاح شده الاستیسیته نشان می‌دهد.



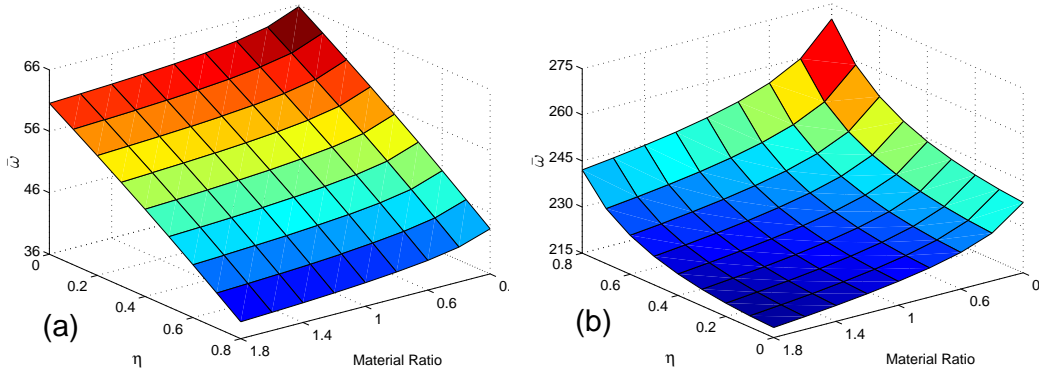
شکل (۸-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول میکروتیر باریک‌شونده‌ی AFG برای نسبت‌های مختلف ضریب تغییرات ماده. (a) تئوری کلاسیک $(f_h = f_b = \eta)$ (b) MSGT



شکل (۹-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم میکروتیر باریک‌شونده‌ی AFG برای نسبت‌های مختلف ضریب تغییرات ماده. (a) تئوری کلاسیک $(f_h = f_b = \eta)$ (b) MSGT

شکل (۸-۳) یک تقابل معکوس میان نسبت باریک‌شوندگی و تغییر ماده را برای هر دو تئوری نشان می‌دهد. بر اساس نتایج شکل (۹-۳) و شکل (۱۰-۳) با افزایش نسبت تغییر ماده فرکانس دوم و سوم بی‌بعد برای هر دو تئوری مذکور کاهش می‌یابد. در حالی که در فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم و سوم یک

رفتار معکوس برای تغییر نسبت باریک‌شوندگی میان نتایج تئوری کلاسیک و تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده مشاهده می‌شود. همانطور که مشخص است با افزایش نسبت باریک‌شوندگی، فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم و سوم برای تئوری کلاسیک کاهش و برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده افزایش می‌یابد.



شکل (۳-۱۰) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد سوم میکروتیر باریک‌شونده AFG برای نسبت‌های مختلف ضریب تغییرات ماده. (a) تئوری کلاسیک (b) MSGT

۳-۱۰-۲- نتایج میکروتیر دو سر گیردار

جدول (۳-۲) یک مقایسه میان نتایج به‌دست آمده از فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر دو سر گیردار AFG مطالعه حاضر (حل معادله انتگرالی و روش گالرکین) با نتایج به‌دست آمده از مرجع [۵۹] را نشان می‌دهد.

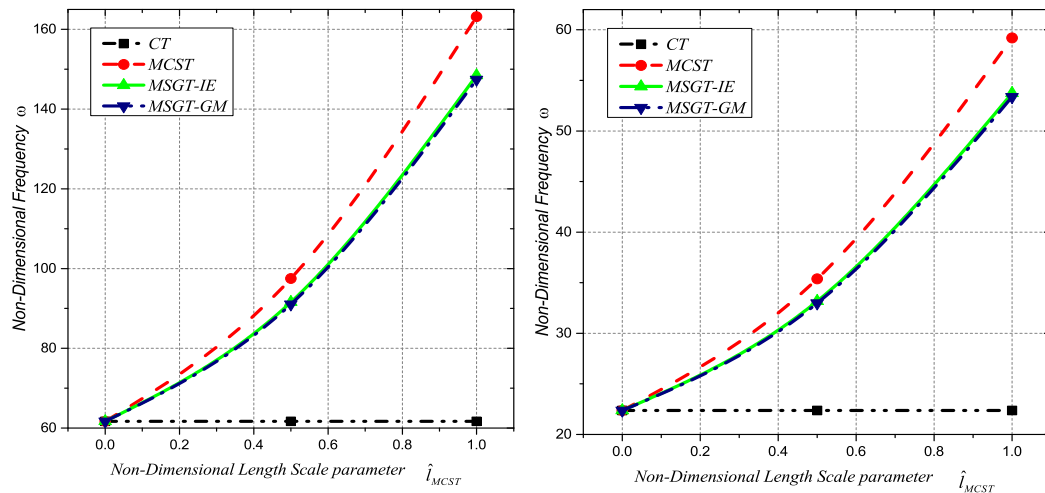
جدول (۳-۲) مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم ($\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho L A_L}{E L I_L}}$) تیر دوسر گیردار باریک‌شونده AFG

بر اساس تئوری کلاسیک ($E(x) = (1 + x/L)$) و $(\rho(x) = (1 + x/L + (x/L)^2))$

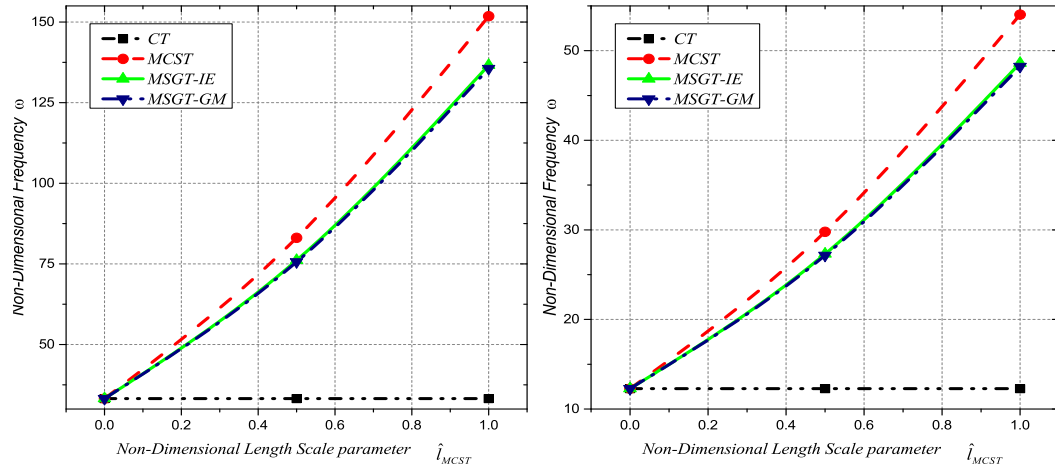
f_h	f_b	0		0.8	
		$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$
0	Integral Equation N=14	20.4657	56.5798	19.4125	55.0577
	Galerkin N=14	20.4604	56.5850	19.3904	54.9968
	Galerkin N=9	20.4721	56.5484	19.3854	54.9756
	DTEM[59]	20.4721	56.5482	19.3844	54.9699
0.8	Integral Equation N=14	10.2871	29.9021	10.6355	29.5036
	Galerkin N=14	10.2775	28.8741	10.6259	29.4634
	Galerkin N=9	10.2524	28.8889	10.6077	29.5531
	DTEM[59]	10.2217	28.7406	10.5301	29.2239

فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم تیر دو سر گیردار AFG با اعمال تئوری کلاسیک و نسبت‌های

مختلف باریک‌شوندگی از دو روش حل معادله انتگرالی و روش گالرکین استخراج شده که با نتایج به‌دست آمده از روش عددی *DTEM* [۵۹] هم‌پوشانی قابل قبولی مشاهده می‌شود. بر اساس نتایج به‌دست آمده افزایش نسبت باریک‌شوندگی فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم را کاهش می‌دهد. شکل (۱۱-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد نخست و دوم میکروتیر دو سرگیردار همگن و یکنواخت را برحسب تغییر پارامتر مقیاس طولی بی‌بعد معادل را نشان می‌دهند. شکل (۱۲-۳) نیز فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم یک میکروتیر دوسر گیردار باریک شده با نسبت ۰.۸ را نشان می‌دهد. شکل (۱۱-۳) و شکل (۱۲-۳) شامل منحنی‌های تغییر فرکانس بی‌بعد طبیعی مرتبط با تئوری کلاسیک (*CT*)، کوپل تنش اصلاح شده (*MCST*) و گرادیان کرنش اصلاح شده (*MSGT*) می‌باشد که نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد حاصل از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده برای حل معادله انتگرالی (*IE*) و حل روش گالرکین (*GM*) گزارش شده‌اند.



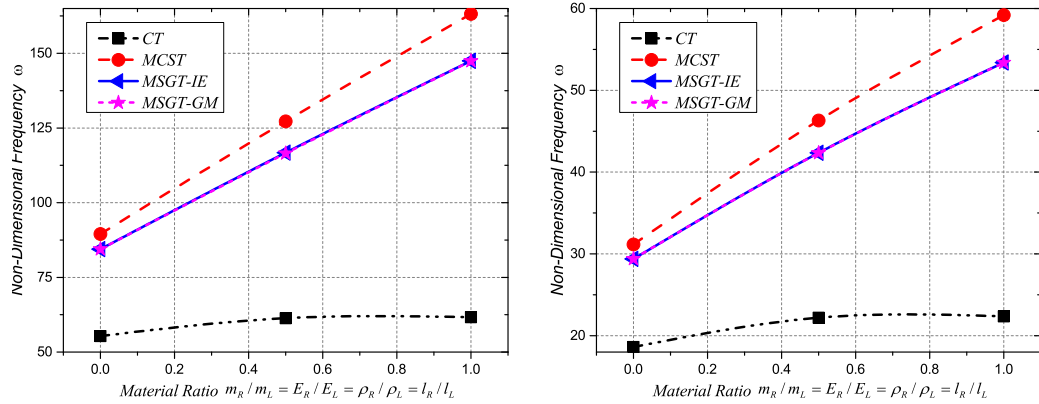
شکل (۱۱-۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیر همگن و یکنواخت دو سرگیردار برحسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی. مود اول (راست)، مود دوم (چپ)



شکل (۳-۱۲) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیر همگن و باریک شونده ($f_h = f_b = 0.8$) دو سر گیردار بر حسب تغییر پارامتر بی‌بعد مقیاس طولی. مود اول (راست)، مود دوم (چپ).

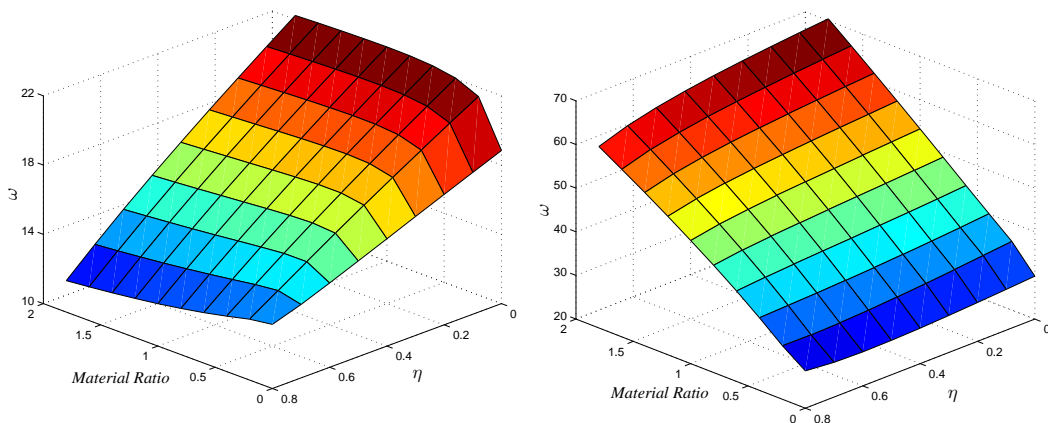
همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر مقیاس طولی، اختلاف میان نتایج تئوری‌های کلاسیک، کوپل تنش و گرادیان کرنش اصلاح شده افزایش می‌یابد. بر خلاف میکروتیر یک سرگیردار که میان نتایج به‌دست آمده از معادله دیفرانسیلی و معادله انتگرالی اختلاف کوچکی مشاهده می‌شود، نتایج فرکانس طبیعی بی‌بعد نخست و دوم برای میکروتیر دو سرگیردار حاصل از معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی با تقریب بسیار خوبی یکسان هستند.

شکل (۳-۱۳) تغییرات فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم به‌زای نسبت‌های مختلف تغییر ماده در طول میکروتیر AFG یک‌شکل را برای حالت‌های کلاسیک، کوپل تنش اصلاح شده، حل معادله انتگرالی مرتبط با گرادیان کرنش اصلاح شده و حل گالرکین مرتبط با گرادیان کرنش اصلاح شده نشان می‌دهد. افزایش نسبت تغییر ماده برای هر دو فرکانس و هر سه تئوری، افزایش فرکانس را در پی دارد. همچنین نتایج به‌دست آمده از روش گالرکین با نتایج حاصل از حل معادله انتگرالی هم‌پوشانی بسیار خوبی دارند. از آنجایی که پارامتر مقیاس طولی تأثیر به‌سزایی در نتایج فرکانس طبیعی بی‌بعد دارد و افزایش نسبت تغییر ماده سبب افزایش اثر اندازه در نتایج می‌شود، همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج دو تئوری غیر کلاسیک با یک شیب بزرگتری افزایش می‌یابند.

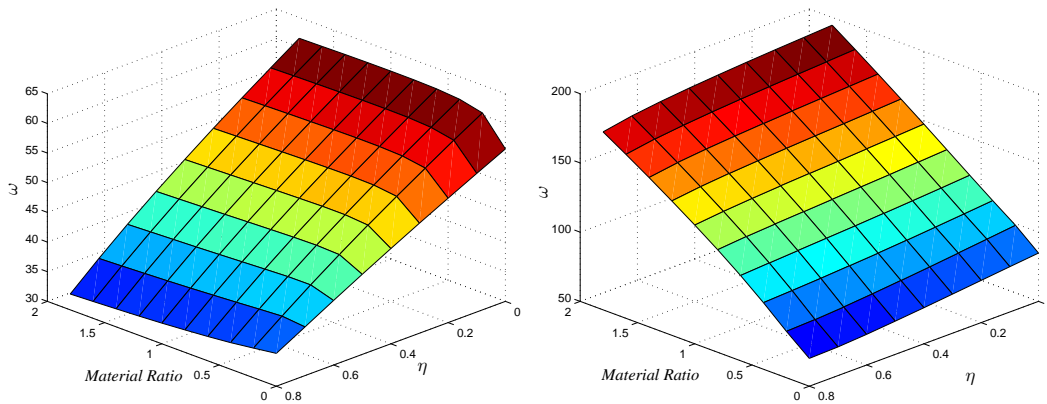


شکل (۳-۱۳) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیر دو سرگیردار AFG و یکنواخت بر حسب تغییر نسبت‌های مختلف تغییر مواد. فرکانس نخست (راست) و فرکانس دوم (چپ).

شکل (۳-۱۴) و شکل (۳-۱۵) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم میکروتیر دو سرگیردار باریک‌شده AFG را برای دو تئوری کلاسیک و گرادیان کرنش اصلاح شده الاستیسیته نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود افزایش ضریب تغییر ماده، فرکانس طبیعی بی‌بعد اول و دوم میکروتیر دو سرگیردار AFG را با اعمال تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده افزایش می‌دهد، در حالی که اعمال تئوری کلاسیک الاستیسیته نتیجه‌ای در تقابل را نشان می‌دهد. همچنین افزایش نسبت باریک‌شوندگی کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد را برای اعمال هر دو تئوری الاستیسیته دربر دارد، هرچند که میزان اثرگذاری آن برای این دو تئوری‌ها محسوس است.



شکل (۳-۱۴) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد اول میکروتیر باریک‌شونده AFG دو سرگیردار برای نسبت‌های مختلف ضریب تغییر ماده. $(f_h = f_b = \eta)$ (سمت چپ) تئوری کلاسیک (سمت راست) MSGT



شکل (۳-۱۵) تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد دوم میکروتیر باریک‌شونده AFG دو سرگیردار برای نسبت‌های مختلف ضریب تغییرات ماده. ($f_h = f_b = \eta$) (سمت چپ) تئوری کلاسیک (سمت راست) MSGT

۳-۱۱- نتیجه‌گیری

در این فصل، ارتعاشات آزاد نامیرای میکروتیر یک سرگیردار و دو سرگیردار باریک‌شونده‌ی ساخته شده از مواد متغییر تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده بررسی شده است. معادلات حاکم و شرایط مرزی با کمک اصل هامیلتون استخراج شده، سپس با روش‌های تقریبی-تحلیلی ریلی-ریتز و گالرکین فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد به‌دست آمده‌اند. همچنین با تبدیل معادله دیفرانسیلی به یک معادله انتگرالی و حل آن، فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروتیرهای یک و دو سرگیردار برای حالت‌های مختلف باریک‌شوندگی و نسبت‌های مختلف تغییر ماده استخراج و با نتایج قبلی مقایسه شده‌اند. از نتایج به‌دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که:

- فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌دست آمده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده همواره بزرگتر از نتایج به‌دست آمده از تئوری‌های گرادیان کرنش اصلاح شده و کلاسیک می‌باشد و می‌توان نتیجه گرفت که تئوری‌های کوپل تنش و گرادیان کرنش اصلاح شده، میکروتیر باریک‌شونده AFG را سفت‌تر تخمین می‌زنند.
- نتایج فرکانس طبیعی بی‌بعد حاصل از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده در پارامترهای مقیاس طولی کوچک به نتایج به‌دست آمده از تئوری‌های کوپل تنش اصلاح شده و کلاسیک

نزدیک می شود و برعکس.

- باریک شوندگی و تغییر خصوصیات ماده علاوه بر در نظر گرفتن مقیاس اندازه می تواند تأثیر به سزایی در نتایج داشته باشد.
- اثر پواسون در اعمال تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده تأثیر به سزایی داشته که نمی توان از آن صرف نظر کرد.

فصل چهارم:

میرایی ترموالاستیک در

میکروتیر رزوناتور همگن

(فرکانس مختلط)

(بر اساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش اصلاح شده)

۴-۱- مقدمه

در این فصل ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور همگن با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، بررسی شده است. معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروتیر با استفاده از اصل هامیلتون استخراج می‌شود و معادله انتقال حرارت غیرفوری جفت شده با استفاده از تئوری لرد-شولمن با در نظر گرفتن یک زمان استراحت فرض می‌شود. از حل معادله انتقال حرارت، توزیع دما بر حسب کرنش به دست می‌آید و سپس با جایگذاری معادله توزیع دما در معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی و استفاده از روش گالرکین، فرکانس‌های طبیعی میکروتیر رزوناتور تخمین زده می‌شوند. در نهایت با استفاده از دیدگاه مختلط بودن فرکانس، ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک استخراج می‌شود. در پایان این فصل، نتایج عددی برای میکروتیرهایی با خصوصیات مکانیکی و شرایط تکیه‌گاهی مختلف نشان داده شده‌اند و برخی نتایج به دست آمده از آنالیز عددی با مقایسه با نتایج موجود در مقالات اعتبارسنجی شده‌اند که سازگاری بسیار خوبی میان آنها برقرار است.

۴-۲- فرمول‌بندی مسئله

۴-۲-۱- معادله ارتعاشی میکروتیر

در این قسمت معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروتیر را در حضور میرایی ترموالاستیک با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده استخراج می‌شود.

برای یک تیر اولر-برنولی، مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی u به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$u_1 = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (1-4)$$

$$u_2 = 0 \quad (2-4)$$

$$u_3 = w(x, t) \quad (3-4)$$

در معادلات بالا u_1 ، u_2 و u_3 به ترتیب نشان دهنده‌ی جابه‌جایی در راستای محورهای x ، y و z هستند و x مختصات طولی میکروتیر و z فاصله‌ی هر نقطه‌ی دلخواه تا محور خنثی را نشان می‌دهد. با جایگذاری معادلات (۱-۴) تا (۳-۴) در رابطه (۲-۳)، مؤلفه‌های تانسور کرنش ϵ به دست می‌آیند که

عبارتند از:

$$\varepsilon_{11} = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (4-4)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

در حضور اثر حرارتی، رابطه تنش کرنش به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (5-4)$$

که در آن میدان کرنش کل را نشان می‌دهد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^{(T)} \quad (6-4)$$

در رابطه فوق ε_{ij} و ε_{ij}^T به ترتیب نشان‌دهنده کرنش مکانیکی و حرارتی هستند که برای ماده‌ی

همگن، همسانگرد و الاستیک خطی، کرنش حرارتی به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha \theta \delta_{ij} \quad (7-4)$$

که α ضریب انبساط حرارتی و θ اختلاف دما با دمای محیط T_0 را نشان می‌دهد.

همچنین، مؤلفه‌های غیرصفر تانسور کرنش کل با استفاده از رابطه‌ی (4-4)، (6-4) و (7-4) و با در

نظر گرفتن ضریب پواسون به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$e_{11} = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \alpha \theta, \quad e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11} \quad (8-4)$$

با استفاده از رابطه (3-3) و (4-4) مؤلفه‌های غیرصفر بردار گرادیان اتساع γ به صورت زیر نوشته

می‌شوند:

$$\gamma_1 = (1 - 2\nu) \left(-z \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right), \quad \gamma_3 = (1 - 2\nu) \left(-\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \quad (9-4)$$

همچنین مؤلفه‌های غیرصفر بردار گرادیان اتساع حرارتی γ^T با در نظر گرفتن کرنش‌های حرارتی رابطه

(7-4) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\gamma_1^T = (1 - 2\nu) \left(-3\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad \gamma_3^T = (1 - 2\nu) \left(-3\alpha \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad (10-4)$$

که از آنجایی که تانسور کرنش حرارتی یک تانسور متقارن و قطری است، پس کرنش حرارتی بر دیگر

روابط ساختاری تأثیری نخواهد داشت و می‌توان درستی آن را به راحتی نشان داد. از این رو پارامتر

سینماتیکی p در رابطه (8-3) بایستی به صورت زیر اصلاح شود:

$$p_i = 2\mu l_0^2 (\gamma_i + \gamma_i^T) \quad (11-4)$$

به علاوه، بر اساس معادلات (۳-۴) و (۳-۵)، مؤلفه‌های غیرصفر تانسور گرادیان کشش انحرافی $\eta^{(1)}$ و قسمت متقارن تانسور گرادیان چرخش χ^s به دست خواهند آمد.

$$\begin{aligned}\eta_{111}^{(1)} &= -\frac{2}{5}(1+\nu)\left(z\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\right) \\ \eta_{122}^{(1)} = \eta_{331}^{(1)} = \eta_{313}^{(1)} = \eta_{133}^{(1)} = \eta_{221}^{(1)} = \eta_{212}^{(1)} &= \frac{1}{5}(1+\nu)\left(z\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\right) \\ \eta_{232}^{(1)} = \eta_{223}^{(1)} = \eta_{322}^{(1)} &= \frac{1}{15}(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) \\ \eta_{113}^{(1)} = \eta_{131}^{(1)} = \eta_{311}^{(1)} &= -\frac{4}{15}(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) \\ \eta_{333}^{(1)} &= \frac{1}{5}(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right)\end{aligned}\quad (12-4)$$

$$\chi_{12}^s = \chi_{21}^s = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\quad (13-4)$$

به طور مشابه با استفاده از روابط (۴-۵) و (۴-۱۱)، پارامترهای تنش کلاسیک و مرتبه بالاتر به صورت

زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_{11} = Ee_{11}^{(M)} + (3\lambda + 2\mu)e_{11}^{(T)} = -E\left(z\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\alpha\theta}{1-2\nu}\right)\quad (14-4)$$

$$\begin{aligned}p_1 &= -2\mu l_0^2(1-2\nu)z\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} - \frac{3E\alpha l_0^2}{(1+\nu)}\frac{\partial\theta}{\partial x} \\ p_3 &= -2\mu l_0^2(1-2\nu)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{3E\alpha l_0^2}{(1+\nu)}\frac{\partial\theta}{\partial z}\end{aligned}\quad (15-4)$$

$$\begin{aligned}\tau_{111}^{(1)} &= -\frac{4}{5}(1+\nu)\mu l_1^2\left(z\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\right) = \tau_1 \\ \tau_{122}^{(1)} = \tau_{331}^{(1)} = \tau_{313}^{(1)} = \tau_{133}^{(1)} = \tau_{221}^{(1)} = \tau_{212}^{(1)} &= \frac{2}{5}(1+\nu)\mu l_1^2\left(z\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\right) = \tau_2 \\ \tau_{232}^{(1)} = \tau_{223}^{(1)} = \tau_{322}^{(1)} &= \frac{2}{15}(1+\nu)\mu l_1^2\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) = \tau_3 \\ \tau_{113}^{(1)} = \tau_{131}^{(1)} = \tau_{311}^{(1)} &= -\frac{8}{15}(1+\nu)\mu l_1^2\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) = \tau_4 \\ \tau_{333}^{(1)} &= \frac{2}{5}(1+\nu)\mu l_1^2\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) = \tau_5\end{aligned}\quad (16-4)$$

$$m_{12}^s = m_{21}^s = -\mu l_2^2\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\quad (17-4)$$

برای ساده‌سازی، شرایط تنش صفحه‌ای فرض شده است و از آنجا که ضخامت (در جهت z) و عرض

(در جهت y) میکروتیر در مقایسه با طول آن به اندازه کافی کوچک فرض می‌شوند، می‌توان از

مؤلفه‌های تنش در راستای y و z صرف نظر کرد. ($\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0$).

معادله حاکم بر ارتعاش آزاد میکروتیر اولر-برنولی در حضور اثر حرارت می‌تواند با استفاده از اصل هامیلتون، استخراج شود.

$$0 = \int_{t_0}^t (\delta U - \delta T) dt \quad (18-4)$$

با جایگذاری معادلات (4-4) تا (4-17) در رابطه (3-1)، تغییرات انرژی کرنشی δU برای میکروتیر

همگن، الاستیک خطی و همسانگرد در حضور اثر حرارت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \delta U dt &= \int_{t_0}^t \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \delta \chi_{ij}^s) dt \\ &= \int_{t_0}^t \int_0^L \left[-N_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} - (1 - 2\nu) P_1^{(1)} \frac{\partial^3 \delta w(x, t)}{\partial x^3} \right. \\ &\quad - (1 - 2\nu) P_3^{(1)} \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{2}{5} (1 + \nu) T_1^{(1)} \frac{\partial^3 \delta w(x, t)}{\partial x^3} \\ &\quad + \frac{6}{5} (1 + \nu) T_2^{(1)} \frac{\partial^3 \delta w(x, t)}{\partial x^3} + \frac{3}{15} (1 + \nu) T_3^{(1)} \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{12}{15} (1 + \nu) T_4^{(1)} \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{5} (1 + \nu) T_5^{(1)} \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} \\ &\quad \left. - M_1^{(0)} \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} \right] dx dt \\ &= \int_{t_0}^t \int_0^L \left\{ N_{(w)}^{(2)} \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} + N_{(w)}^{(3)} \frac{\partial^3 \delta w(x, t)}{\partial x^3} \right\} dx dt \\ &= \int_{t_0}^t \int_0^L \left\{ \frac{\partial^2 N_{(w)}^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 N_{(w)}^{(3)}}{\partial x^3} \right\} \delta w dx dt \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left[\left\{ \frac{\partial^2 N_{(w)}^{(3)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N_{(w)}^{(2)}}{\partial x^2} \right\} \delta w + \left\{ N_{(w)}^{(2)} - \frac{\partial N_{(w)}^{(3)}}{\partial x} \right\} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + N_{(w)}^{(3)} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right]_{x=0}^{x=L} dt \end{aligned} \quad (19-4)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} N_{(w)}^{(2)} &= -N_{11}^{(1)} - (1 - 2\nu) P_3^{(1)} + (1 + \nu) \left(\frac{3}{15} T_3^{(1)} - \frac{12}{15} T_4^{(1)} + \frac{1}{5} T_5^{(1)} \right) - M_1^{(0)} \\ N_{(w)}^{(3)} &= -(1 - 2\nu) P_1^{(1)} - \frac{2}{5} (1 + \nu) T_1^{(1)} + \frac{6}{5} (1 + \nu) T_2^{(1)} \end{aligned} \quad (20-4)$$

$$\begin{aligned} [N_{ij}^{(0)}, N_{ij}^{(1)}] &= \int_A [1, z] \sigma_{ij} dA, \quad [P_i^{(0)}, P_i^{(1)}] = \int_A [1, z] p_i dA \\ [T_i^{(0)}, T_i^{(1)}] &= \int_A [1, z] \tau_i dA, \quad [M_i^{(0)}, M_i^{(1)}] = \int_A [1, z] m_{ij}^s dA \end{aligned}$$

همچنین با صرف نظر کردن از اینرسی چرخشی، تغییرات انرژی جنبشی δT میکروتیر به صورت زیر

بیان می‌شود.

$$\int_{t_0}^t \delta T dt = \int_{t_0}^t \int_V \rho \left(\frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dv = \int_{t_0}^t \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx dt \quad (21-4)$$

که ρ نشان دهنده‌ی چگالی و A مساحت سطح مقطع میکروتیر است.

با جایگذاری تغییرات انرژی کرنشی و انرژی جنبشی میکروتیر (روابط (۴-۱۹) و (۴-۲۱)) در رابطه

(۴-۱۸)، معادله حرکت میکروتیر با میرایی ترموالاستیک بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده

به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$S_1 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - S_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 S_3}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 S_4}{\partial x^2} - \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (22-4)$$

که در آن

$$S_1 = 2(1-2\nu)^2 \mu l_0^2 I + \frac{4}{5} \mu l_1^2 (1+\nu)^2 I$$

$$S_2 = EI + 2(1-2\nu)^2 \mu l_0^2 A + \frac{8}{15} \mu l_1^2 (1+\nu)^2 A + \mu l_2^2 A$$

$$S_3 = 3l_0^2 \frac{(1-2\nu)^2}{(1+\nu)} \frac{\partial M_T}{\partial x} \quad (23-4)$$

$$S_4 = \frac{M_T}{1-2\nu} + 3l_0^2 \frac{(1-2\nu)^2}{(1+\nu)} Q_T$$

و ممان‌های حرارتی M_T و Q_T به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M_T = \int_A E \alpha \theta z dA = E b \alpha \int_{-h/2}^{h/2} \theta z dz$$

$$Q_T = \int_A E \frac{\partial}{\partial z} (\alpha \theta) dA = E b \alpha \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \theta}{\partial z} dz \quad (24-4)$$

که b عرض میکروتیر را نشان می‌دهد. همچنین از رابطه (۴-۱۹)، عبارات عمومی شرایط مرزی

به‌صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\left[S_1 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} - S_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 S_3}{\partial x^2} - \frac{\partial S_4}{\partial x} \right] \Big|_{x=0,L} \quad \text{یا} \quad \delta w \Big|_{x=0,L} = 0$$

= 0

$$\left[S_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - S_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial S_3}{\partial x} - S_4 \right] \Big|_{x=0,L} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta w_{,x} \Big|_{x=0,L} = 0$$

$$\left[S_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + S_3 \right] \Big|_{x=0,L} = 0 \quad \text{یا} \quad \delta w_{,xx} \Big|_{x=0,L} = 0 \quad (25-4)$$

در معادله (۴-۲۲) اگر از پارامترهای مقیاس طولی l_0 و l_1 صرف‌نظر شود، معادله حاکم بر رفتار

ارتعاشی میکروتیر با میرایی ترموالاستیک بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده به دست خواهد آمد که مشابه مرجع [۷۸] خواهد بود. همچنین اگر از هر سه پارامترهای مقیاس طولی l_0 ، l_1 و l_2 به صورت هم‌زمان صرف‌نظر شود، معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروتیر با میرایی ترموالاستیک بر اساس تئوری کلاسیک به دست خواهد آمد که با مرجع [۷] سازگاری دارد. به طور مشابه با صرف‌نظر کردن از ممان حرارتی، معادله ارتعاشات آزاد میکروتیر بدون میرایی بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده [۴۱] استخراج می‌شود.

۴-۲-۲- معادله جفت شده انتقال حرارت

بر اساس قانون فوریه^{۳۰}، اگر یک گرادیان دما در یک جسم همسانگرد همگن ایجاد شود، شار حرارتی در جسم فوراً جریان می‌یابد. به طور فیزیکی، این رفتار انتشار موج با سرعت بینهایت با مکانیسم واقعی انتقال حرارت غیرپذیرفتنی است؛ خصوصاً در ابزارهایی با مقیاس‌های کوچک که در مقیاس‌های زمانی کوتاه کار می‌کنند، مانند میکروتیر رزوناتور که در فرکانس‌های بالا کار می‌کند. از این رو، نوع سهموی^{۳۱} معادله، که بیان‌گر انتقال حرارت تئوری کلاسیک بر مبنای قانون فوریه است، بایستی به یک نوع هذلولوی^{۳۲}، که انتشار موج انتقال حرارت را با سرعت متناهی مدل می‌کند، اصلاح شود. اساسی‌ترین مدل انتقال حرارت، که تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته^{۳۳} (GTE) را اصلاح می‌کند، توسط لرد-شولمن^{۳۴} [۸۰] بر اساس معادله انتقال حرارت غیرفوریه معرفی شده است. تئوری تعمیم یافته‌ی ترموالاستیسیته^{۳۵} (GTE) بر پایه‌ی یک معادله هذلولوی استوار است که سرعت متناهی انتشار حرارت را تضمین می‌کند.

در این مطالعه، تئوری تعمیم یافته‌ی ترموالاستیسیته بر اساس معادله انتقال حرارت غیرفوریه استفاده

³⁰ Fourier's law

³¹ Parabolic

³² Hyperbolic

³³ Classical Thermoelasticity Theory

³⁴ Lord-Schulman

³⁵ Generalized Thermoelasticity Theory

شده تا تأثیر در نظر گرفتن یک زمان استراحت حرارتی^{۳۶} بر ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیسته میکروتیر رزوناتور بررسی شود. معادله انتقال حرارت غیرفوریه برای میکروتیر ترموالاستیک می‌تواند به صورت زیر بیان شود [۸۰]:

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} + E \alpha T_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_i} + \tau_0 \rho c_v \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_0 E \alpha T_0 \frac{\partial^3 u_i}{\partial t^2 \partial x_i} \quad (۲۶-۴)$$

که در آن k ، c_v ، α ، T_0 و τ_0 به ترتیب ضریب هدایت حرارتی، حرارت مخصوص در حجم ثابت، مدول حرارتی، دمای محیط و زمان استراحت حرارتی را نشان می‌دهند. همچنین x_1 ، x_2 و x_3 نشان‌دهنده‌ی راستاهای x ، y و z هستند.

مفهوم زمان استراحت حرارتی τ_0 ، سرعت متناهی پالس حرارتی را تأکید می‌کند و به معنای یک زمان تأخیر مورد نیاز است تا انتقال حرارت ماندگار در یک جسم هنگامی که یک گرادیان دمایی به یک مرتبه اتفاق می‌افتد، برقرار شود. چستر [۸۱] یک معیار کمی برای زمان استراحت حرارتی τ_0 مانند زیر به دست آورد.

$$\tau_0 = \frac{3k}{c_v v_s^2} \quad (۲۷-۴)$$

که در آن v_s سرعت صوت (فونون) است.

برای ساده سازی، این فرض که گرادیان حرارتی در راستای z بسیار بزرگتر از گرادیان حرارتی در راستاهای x و y است منطقی به نظر می‌رسد، بنابراین می‌توان در معادله (۲۶-۴) از ترم $(\partial^2 \theta / \partial x^2)$ صرف نظر کرد. مطابق میدان جابه‌جایی میکروتیر اولر-برنولی، که در روابط (۱-۴) تا (۳-۴) عنوان شده و همچنین با تعریف پارامترهای بی‌بعد ضریب پخش^{۳۷} $\chi = \frac{k}{\rho c_v}$ و استحکام استراحتی^{۳۸}

$(\Delta_E = \frac{E \alpha^2 T_0}{\rho c_v})$ ، معادله انتقال حرارت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\chi \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = (1 + \Gamma) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \frac{\Delta_E}{\alpha} z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} - \tau_0 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \right) \quad (۲۸-۴)$$

که در آن Γ به صورت زیر تعریف می‌شود.

³⁶ Thermal relaxation time

³⁸ Relaxation strength

³⁷ Thermal diffusivity

$$\Gamma = 2\Delta_E \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \quad (29-4)$$

معادله (۲۸-۴)، معادله جفت شده‌ی ترموالاستیسیته‌ی میکروتیر را بر مبنای انتقال حرارت غیرفوریه نشان می‌دهد. اگرچه در اکثر مقالات از آنجایی که Δ_E از مرتبه 10^{-4} بوده از Γ صرف‌نظر شده، اما در این فصل برای دقت بیشتر این پارامتر تا انتها در معادلات لحاظ شده است.

۳-۴- ضریب کیفیت

در این قسمت عبارت‌هایی تحلیلی برای ممان‌های حرارتی بر حسب $w(x, t)$ معرفی خواهد شد، سپس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر استخراج خواهد شد. حل معادلات (۲۲-۴) و (۲۸-۴) با فرض هارمونیک بودن نسبت به زمان با فرکانس یکسان به صورت زیر است:

$$w(x, t) = w_0(x)e^{st}, \quad \theta(x, z, t) = \theta_0(x, z)e^{st}, \quad s = \omega_r + i\omega_i \quad (30-4)$$

که در آن ω_r مقدار حقیقی که نشان‌دهنده‌ی فرکانس جدید تشدید در حضور میرایی ترموالاستیک است و ω_i قسمت موهومی فرکانس است که مرتبط با میرایی ترموالاستیک می‌باشد.

با جایگذاری رابطه (۳۰-۴) در معادله (۲۸-۴) عبارت تحلیلی تغییرات دما به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\theta_0(x, z) = \frac{\Delta_E}{\alpha(1 + \Gamma)} z \frac{d^2 w_0}{dx^2} + C_1 \sin(\gamma z) + C_2 \cos(\gamma z) \quad (31-4)$$

ضرایب C_1 و C_2 با اعمال شرایط مرزی انتقال حرارت به دست خواهند آمد و γ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\gamma = \left(\frac{s}{\chi} (1 + \Gamma)(s\tau_0 - i) \right)^{1/2} \quad (32-4)$$

با اعمال شرایط مرزی حرارتی آدیاباتیک در سطوح پایینی و بالایی میکروتیر ($\partial\theta/\partial z = 0$) در $z = \pm h/2$ ، معادله (۳۱-۴) به یک معادله صریح برای تغییرات دما به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\theta_0(x, z) = \frac{\Delta_E}{\alpha(1 + \Gamma)} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \left[z - \frac{\sin(\gamma z)}{\gamma \cos\left(\frac{\gamma h}{2}\right)} \right] \quad (33-4)$$

همچنین با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۲۴-۴)، عبارت‌هایی تحلیلی برای ممان‌های حرارتی بر حسب w_0 به دست می‌آید:

$$M_T = \frac{EI\Delta_E}{(1+\Gamma)} \frac{d^2 w_0}{dx^2} [1+f(s)] \quad (34-4)$$

$$Q_T = \frac{EI\Delta_E}{(1+\Gamma)} \frac{d^2 w_0}{dx^2} g(s) \quad (35-4)$$

که در آن

$$f(s) = \frac{24}{(\gamma h)^3} \left[\frac{\gamma h}{2} - \tan\left(\frac{\gamma h}{2}\right) \right], \quad g(s) = \frac{24}{\gamma h^3} \left[\frac{\gamma h}{2} - \tan\left(\frac{\gamma h}{2}\right) \right]. \quad (36-4)$$

با جایگذاری روابط (34-4) و (35-4) در معادله (22-4)، معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروتیر در

حضور میرایی ترموالاستیک به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$(S_1 + H_1) \frac{d^6 w_0}{dx^6} - (S_2 + H_2) \frac{d^4 w_0}{dx^4} - \rho A s^2 w_0 = 0 \quad (37-4)$$

که در آن:

$$H_1 = 3EI\Delta_E(1-2\nu)^2 l_0^2 [1+f(s)] / (1+\Gamma)(1+\nu) \quad (38-4)$$

$$H_2 = \frac{EI\Delta_E}{(1+\Gamma)} [1+f(s) + 3l_0^2 g(s)(1-2\nu)/(1+\nu)]$$

در این تحقیق، برای نشان دادن ضریب کیفیت وابسته به اندازه میکروتیر گرادیان کرنشی، شرایط

مرزی میکروتیر یک‌سر گیردار ($C-F$) و دوسر گیردار ($C-C$) را در نظر گرفته شده است.

براساس عبارتهای عمومی شرایط مرزی که در معادله (25-4) بیان شد، شرایط مرزی کلاسیک برای

میکروتیرهای فوق‌الذکر به صورت زیر خواهد بود.

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0(0) = [dw_0/dx]_{x=0} = 0, \\ \left[(S_1 + H_1) \frac{d^5 w_0}{dx^5} - (S_2 + H_2) \frac{d^3 w_0}{dx^3} \right]_{x=L} = 0, \\ \left[(S_1 + H_1) \frac{d^4 w_0}{dx^4} - (S_2 + H_2) \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right]_{x=L} = 0. \end{array} \right. \quad (C-F) \quad (39-4)$$

$$w_0(0) = w_0(L) = [dw_0/dx]_{x=0,L} = [d^2 w_0/dx^2]_{x=0,L} = 0 \quad (C-C) \quad (40-4)$$

همچنین، شرایط مرزی غیرکلاسیک برای میکروتیرهای یک‌سر گیردار و دوسر گیردار به صورت زیر

انتخاب می‌شوند که متداول‌ترند.

$$\left[\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right]_{x=0} = \left[(S_1 + H_1) \frac{d^3 w_0}{dx^3} \right]_{x=L} = 0 \quad (C-F) \quad (41-4)$$

$$\left[\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right]_{x=0,L} = 0 \quad (C-C) \quad (42-4)$$

انتخاب شکل مودی که شرایط مرزی فوق را دقیقاً ارضاء کند، کار بسیار دشواری است. به همین منظور برای حل معادله (۴-۳۷) با توجه به (۴-۳۹) تا (۴-۴۲)، شکل موده‌های تقریبی زیر را که برای مود m یک میکروتیر به طول L است، به کار بسته شده است:

$$W_n^{CF}(x) = C_n \left[(\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) - \frac{\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L}{\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L} (\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x) \right] \quad (۴۳-۴)$$

$$W_n^{CC}(x) = C_n \left[(\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) - \frac{\cos \beta_n L - \cosh \beta_n L}{\sin \beta_n L - \sinh \beta_n L} (\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x) \right] \quad (۴۴-۴)$$

که در آن β_n ها ریشه‌های مثبت معادله زیر هستند:

$$\cos(\beta_n L) \cosh(\beta_n L) + 1 = 0 \quad (CF) \quad (۴۵-۴)$$

$$\cos(\beta_n L) \cosh(\beta_n L) - 1 = 0 \quad (CC) \quad (۴۶-۴)$$

نتیجتاً با جایگذاری رابطه (۴-۴۳) و (۴-۴۴) در (۴-۳۷)، فرکانس‌های m ام میکروتیر با میرایی ترموالاستیک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Omega_n = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{\beta_n^6 (S_1 + H_1) + \beta_n^4 (S_2 + H_2)}{\rho A}} \quad (۴۷-۴)$$

از آنجایی که میرایی ترموالاستیک، یک میرایی ضعیف است ($\omega_i \ll 1$)، در محاسبه ضرایب H_1 و H_2 می‌توان فرکانس طبیعی میکروتیر هم‌دما ω_{iso} را جایگزین s کرد. با فرض هارمونیک بودن ارتعاش، معادله مقدار ویژه میکروتیر گرادیان کرنش هم‌دما با حذف جمله‌های مربوط به اثر دما در رابطه (۴-۳۷) به دست می‌آید.

$$S_1 \frac{d^6 w_0}{dx^6} - S_2 \frac{d^4 w_0}{dx^4} - \rho A s^2 w_0 = 0 \quad (۴۸-۴)$$

می‌توان با جایگذاری شکل موده‌های تقریبی (۴-۴۳) و (۴-۴۴)، فرکانس طبیعی هم‌دما m ام را به صورت زیر به دست آورد.

$$\omega_{n,iso} = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{\beta_n^6 S_1 + \beta_n^4 S_2}{\rho A}} \quad (۴۹-۴)$$

بر اساس دیدگاه فرکانس مختلط، معکوس ضریب کیفیت میکروتیر Q_{MSGT}^{-1} مرتبط با تئوری گرادیان کرنش/اصلاح شده و تئوری انتقال حرارت غیرفوری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Q_{MSGT}^{-1} = 2 \left| \frac{\Im(\Omega)}{\Re(\Omega)} \right| \quad (۵۰-۴)$$

نتایج به دست آمده از معکوس میرایی ترموالاستیک با در نظر گرفتن تقریب استفاده شده در محاسبه فرکانس طبیعی، منطقی به نظر می‌رسد چرا که مرتبه $\Im(\Omega)$ بسیار کوچکتر از $\Re(\Omega)$ است.

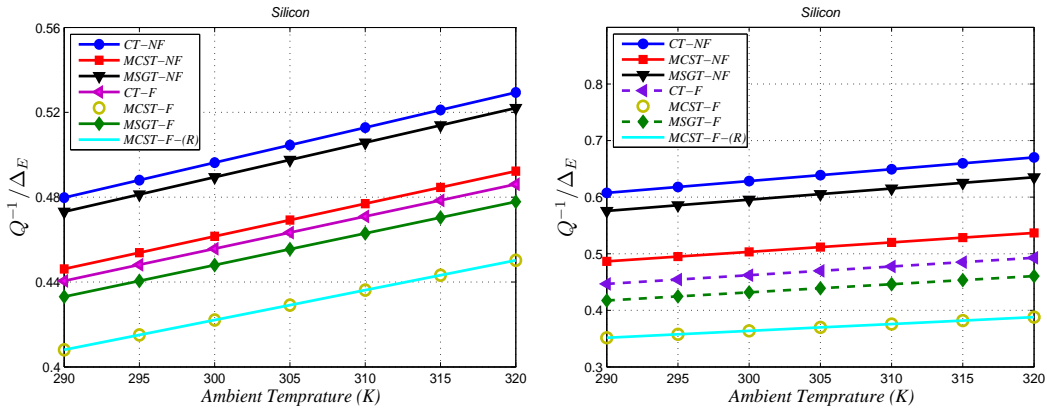
۴-۴- مسأله نمونه و نتایج آن

در این بخش، بررسی و آنالیز ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر با نتایج عددی نشان داده شده‌اند تا رابطه معکوس ضریب کیفیت را با پارامترهای مختلف نشان دهند و نتایج به دست آمده را با نتایج مقالات موجود مقایسه کنند. جدول (۴-۱) مشخصات فیزیکی و هندسی دو میکروتیر مورد ارزیابی قرار گرفته در این آنالیز عددی را نشان می‌دهد.

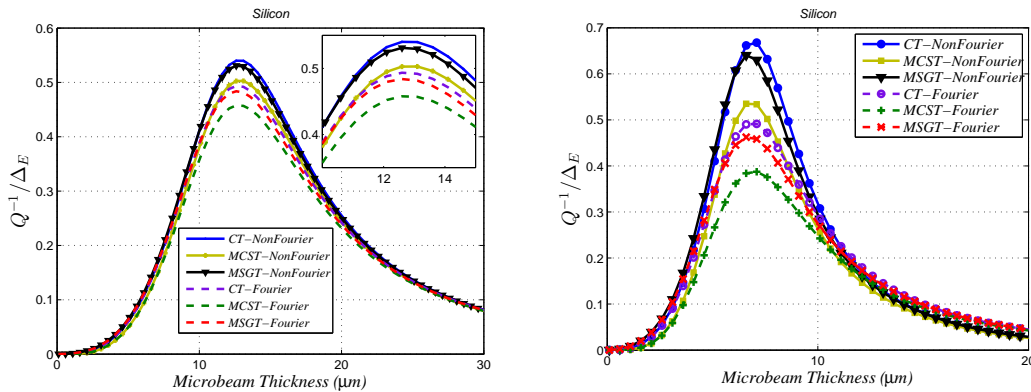
پارامترها	سیلیکون	آلومینیوم
مدول الاستیسیته E (GPa)	169	70
چگالی ρ (kg/m^3)	2.33×10^3	2.7×10^3
حرارت مخصوص در حجم ثابت c_p (J/kgK)	700	920
ضریب انبساط حرارتی α_T (K^{-1})	2.59×10^{-6}	23.1×10^{-6}
ضریب پواسون ν	0.22	0.31
ضریب انتقال حرارت k (W/mK)	150	237
سرعت فونون v_s (m/s)	8433	5000
طول L (μm)	140	1000
ضخامت میکروتیر h (μm)	12	30

شکل (۴-۱) تغییرات میرایی ترموالاستیک را با تغییر در دمای محیط برای میکروتیر سیلیکون یک و دو سرگردار نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش دمای محیط، معکوس ضریب کیفیت به صورت خطی افزایش می‌یابد. نتایج برای اعمال تئوری کلاسیک (CT)، کوپل تنش اصلاح شده ($MCST$) و گرادیان کرنش اصلاح شده ($MSGT$) برای هر دو تئوری انتقال حرارت فوریه (F) و غیرفوریه (NF) استخراج شده است. از آنجایی که فرکانس تخمین زده شده با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده بیش از فرکانس حاصل از اعمال تئوری کلاسیک و گرادیان کرنش اصلاح شده است، معکوس ضریب کیفیت به دست آمده با تئوری کوپل تنش اصلاح شده کوچک‌تر از نتایج به دست آمده

از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و تئوری کلاسیک است. همانطور که قبلا اشاره شد در مورد خاصی تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده به تئوری کوپل تنش اصلاح شده تبدیل می‌شود که نتایج به دست آمده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده این آنالیز با نتایج به دست آمده از مرجع [۸۰] که در شکل با (R) نمایش داده شده، مقایسه شده است که تطابق بسیار خوبی در آن مشاهده می‌شود.



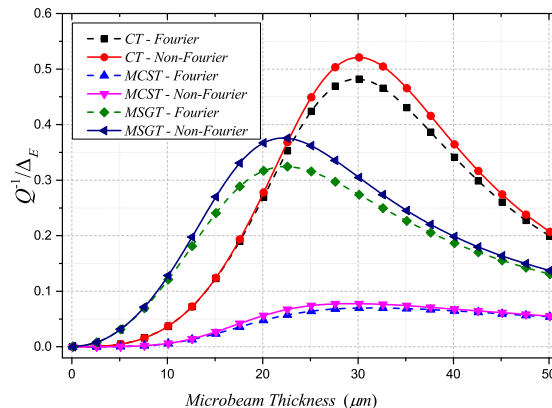
شکل (۴-۱) تغییرات معکوس ضریب کیفیت بر حسب دمای محیط میکروتیر سیلیکون. میکروتیر دو سر گیردار (راست)، میکروتیر یک سر گیردار (چپ).



شکل (۴-۲) تغییرات معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت برای سیلیکون. میکروتیر دو سر گیردار (راست)، میکروتیر یک سر گیردار (چپ).

همچنین اثر تغییرات ضخامت بر میرایی ترموالاستیک برای میکروتیرهای فوق‌الذکر در شکل (۴-۲) نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که با نزدیک شدن ضخامت میکروتیر به ضخامت بحرانی نتایج برای هر سه تئوری الاستیسیته (کلاسیک، کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده) و دو تئوری انتقال حرارت (فوری و غیرفوری) از یکدیگر فاصله می‌گیرند. همچنین قابل مشاهده است که

در نظر گرفتن زمان استراحت مرتبط با تئوری انتقال حرارت غیرفوریه سبب افزایش مقدار میرایی ترموالاستیک می‌شود.



شکل (۳-۴) تغییرات معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت میکروتیر دو سرگردار آلومینیوم

شکل (۳-۴) نیز تغییرات معکوس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک را به ازای ضخامت‌های مختلف برای میکروتیر دو سرگردار آلومینیوم نشان می‌دهد. نتایج این شکل نیز برای هر سه تئوری الاستیسیته و دو تئوری انتقال حرارت فوق‌الذکر نمایش داده شده است. از آنجایی که پارامتر مقیاس طولی آلومینیوم در قیاس با ضخامت میکروتیر بزرگتر از سیلیکون است، در نتایج به دست آمده از سه تئوری الاستیسیته اختلاف چشم‌گیری مشاهده می‌شود.

۴-۴-۱ - آنالیز ضخامت بحرانی

زنر [۱۳] اتلاف ترموالاستیک را با محاسبه میانگین زمانی تنش، کرنش و دما به صورت زیر بیان کرد:

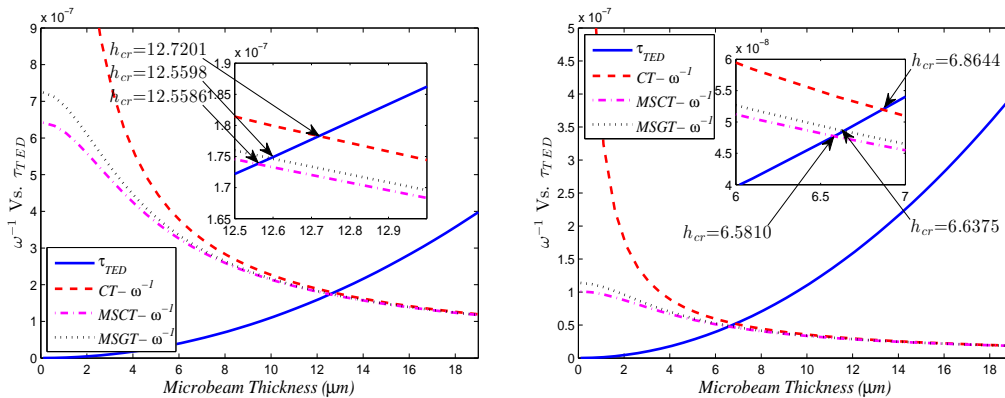
$$Q_{zener}^{-1} = \frac{\alpha^2 T_0 E}{\rho C_v} \frac{\omega \tau_{TED}}{1 + (\omega \tau_{TED})^2} \quad (۵۱-۴)$$

که در آن $\tau_{TED} = \frac{h^2 \rho C_v}{\pi^2 k}$ زمان مشخصه میرایی ترموالاستیک^{۳۹} است. این پارامتر در مقالات با نام زمان استراحت حرارتی عنوان شده است، اما برای تمایز میان این مفهوم با مفهوم زمان استراحت تئوری انتقال حرارت لرد-شولمن، در این مطالعه از زمان مشخصه میرایی ترموالاستیک استفاده شده است. همانطور که در این رابطه پیداست ارتباط میان فرکانس رزونانس با زمان مشخصه میرایی

³⁹ Thermal relaxation time

ترموالاستیک شدت اتلاف ترموالاستیک را مشخص می‌کند. در فرکانس‌های پایین ($\omega \ll \tau_{TED}^{-1}$)، شار حرارتی لحظه‌ای اتفاق افتاده و در واقع گرادیان دما رخ نخواهد داد. این رژیم را هم‌دما نامیده که در آن میرایی بسیار کوچک است. در فرکانس‌های بسیار بالا ($\omega \gg \tau_{TED}^{-1}$)، فرآیند آدیاباتیکی رخ داده و گرادیان حرارتی آنقدر به‌سرعت تغییر می‌کند که حتی در گرادیان‌های دمایی بزرگ هم، شار حرارتی فرصت وقوع را نمی‌یابد. اتلاف ترموالاستیک در $\omega^{-1} = \tau_{TED}$ مقدار بیشینه را به‌خود اختصاص می‌دهد که در آن فرکانس را رزونانس دمای^{۴۰} می‌نامند. از آنجایی که پس از انتخاب جنس میکروتیر رزوناتور تنها پارامتر کنترلی زمان مشخصه، ضخامت میکروتیر است، در این بخش، ضخامت بحرانی که در آن میرایی حداکثری اتفاق می‌افتد، مورد بررسی قرار گرفته است.

در شکل (۴-۴) تغییرات معکوس فرکانس و زمان مشخصه میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت رسم شده است تا از محل برخورد این دو نمودار، ضخامت بحرانی برای حالت‌های مختلف به‌دست آید.



شکل (۴-۴) تغییرات معکوس فرکانس و زمان مشخصه میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت میکروتیر

دوسرگردار (راست) و یک سرگردار (چپ).

همانطور که در شکل بالا مشاهده می‌شود، در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طولی با اعمال تئوری‌های گرادیان کرنش اصلاح شده و کوپل تنش اصلاح شده سبب می‌شود تا ضخامت بحرانی در مقدارهای کوچکتر از ضخامت بحرانی حالت کلاسیک اتفاق افتد و این درست همان نتیجه‌ای است که می‌تواند از شکل (۲-۴) نیز استخراج شود.

⁴⁰ Debye Resonance

۴-۵- نتیجه گیری

در این فصل میرایی ترموالاستیک در میکروتیر همگن مبتنی بر دیدگاه فرکانس مختلط و با استفاده از تئوری‌های گرادیان کرنش اصلاح شده و تعمیم یافته انتقال حرارت بررسی شد تا اثر در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طولی و زمان استراحت حرارتی مرتبط با تئوری انتقال حرارت غیرفوریه بر نتایج ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک مشاهده شود. با توجه به نتایج عددی استخراج شده در این فصل، که با نتایج مقاله [۸۰] هم‌پوشانی بسیار خوبی دارد، می‌توان نتیجه گرفت:

- ۱) میرایی ترموالاستیک در میکروتیرهای یک و دو سرگردار مرتبط با هر سه تئوری الاستیسیته (کلاسیک، کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده) و دو تئوری متدوال انتقال حرارت (کلاسیک و تعمیم یافته) با افزایش دما، افزایش می‌یابد؛
- ۲) از آنجایی که هر دو تئوری کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده، میکروتیر را سفت‌تر از حالت کلاسیک تخمین می‌زنند و فرکانس طبیعی را بالاتر پیش‌بینی می‌کنند، میرایی ترموالاستیک به دست آمده از اعمال این دو تئوری غیرکلاسیک الاستیسیته، پایین‌تر از میکروتیر کلاسیک است و نشان می‌دهد که در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طولی می‌تواند در نتایج میرایی ترموالاستیک خصوصاً در نزدیکی ضخامت بحرانی اثرگذار باشد؛
- ۳) در نظر گرفتن زمان استراحت مرتبط با تئوری غیرفوریه انتقال حرارت، اختلاف فاز میان تنش و کرنش را افزایش داده که سبب افزایش میرایی ترموالاستیک می‌شود،
- ۴) نتایج ضخامت بحرانی، به عنوان مهم‌ترین پارامتر طراحی میکروتیر رزوناتورها نشان می‌دهند که ضخامت بحرانی میکروتیر رزوناتور با اعمال تئوری‌های غیرکلاسیک بررسی شده کاهش می‌یابد، چرا که فرکانس طبیعی را بالاتر تخمین می‌زنند و زمان مشخصه میرایی ترموالاستیک مقدار ثابتی دارد.

فصل پنجم:

میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور همگن (تولید آنتروپی)

(بر اساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش اصلاح شده)

۵-۱- مقدمه

هنگامی که در یک جسم (همگن یا غیرهمگن) یک میدان تنش غیر همگن اعمال می‌شود، شار حرارتی برگشت‌ناپذیر در جسم اتفاق افتاده و آنتروپی تولید می‌شود. در این فصل میرایی ترموالاستیک یک میکروتیر رزوناتور با استفاده از دیدگاه تولید آنتروپی تحلیل شده است. انرژی اتلافی با استفاده از نرخ آنتروپی تولیدی در یک سیکل ارتعاشی و با فرض معادله انتقال حرارت بر مبنای تئوری لرد-شولمن به شکل غیرفوری به دست آمده است. همچنین انرژی ذخیره شده در جسم الاستیک خطی، همگن، همسانگرد و ترموالاستیک با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده استخراج شده است، سپس عبارتی برای ضریب کیفیت وابسته به اندازه‌ی میرایی ترموالاستیک میکروتیر رزوناتور بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده ارائه شده است. همچنین عبارت تحلیلی برای میرایی ترموالاستیک میکروتیر بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده و تئوری کلاسیک الاستیسیته برای هر دو تئوری انتقال حرارت کلاسیک و تعمیم یافته استخراج شده است.

۵-۲- فرمول بندی

بر اساس مدل زنر، که برای اولین بار در سال ۱۹۳۷ توسعه یافت، ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک در یک تیر با ضخامت b به صورت زیر بیان می‌شود [۱۳]:

$$Q_{Zener}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W_{stored}} = \frac{E \alpha^2 T_0}{C_v} \frac{\omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} \quad (۱-۵)$$

که در آن ΔW انرژی از دست رفته در یک دوره زمانی از ارتعاش، W_{stored} بیشینه انرژی ذخیره شده در طی یک دوره زمانی ارتعاش، E مدول الاستیسیته، α ضریب انبساط حرارتی، T_0 دمای تعادل تیر، C_v ظرفیت حرارتی بر واحد حجم، ω فرکانس ارتعاش، $\tau = b^2 / (\pi^2 \chi)$ زمان مشخصه ثابت برای استراحت حرارت و χ ضریب پخش حرارتی در مواد هستند.

به طور کلی، آنتروپی معیاری است که شار حرارتی برگشت‌ناپذیر را نشان می‌دهد. بر اساس قانون دوم ترمودینامیک، هنگامی که حرارت از ناحیه با دمای بالاتر به ناحیه با دمای پایین‌تر انتقال می‌یابد،

انرژی مکانیکی مفید به حرارت تبدیل می‌شود و آنتروپی تولید می‌شود. برای انتقال حرارت، نسبت تولید آنتروپی بر واحد حجم به صورت زیر بیان می‌شود [۸۲]:

$$\dot{s}_g = k \frac{\nabla T \cdot \nabla T}{T^2} = k \frac{\nabla \theta \cdot \nabla \theta}{T^2} \quad (۲-۵)$$

که در آن k رسانندگی گرمایی، T میدان دمایی و $\theta = T - T_0$ تغییر دما نسبت به دمای محیط T_0 را نشان می‌دهد. با انتگرال‌گیری از معادله فوق روی یک سیکل زمانی خواهیم داشت:

$$\Delta s = \oint \dot{s}_g dt \quad (۳-۵)$$

با انتگرال‌گیری از معادله فوق روی حجم، آنتروپی کل تولید شده در یک سیکل زمانی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta S = \int_V \Delta s dV \quad (۴-۵)$$

با استفاده از عبارت آنتروپی تولیدی، کل کار تلف شده به صورت زیر به دست می‌آید [۸۲]:

$$\Delta W = \Delta Q = T_0 |\Delta S| \quad (۵-۵)$$

با استفاده از رابطه فوق و رابطه (۱-۵) تعریفی از ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک بر اساس دیدگاه تولید آنتروپی به دست می‌آید.

۵-۳- معادله انتقال حرارت غیرفوری

همانطور که در فصل قبل عنوان شد، با استفاده از تئوری لرد-شولمن و در نظر گرفتن یک زمان استراحت، توزیع دما از معادله انتقال حرارت غیرفوری با فرض هارمونیک بودن زمان ($w(x, t) = w_0 \sin(\omega t)$ و $\theta(x, z, t) = \theta_0 \sin(\omega t)$) و شرایط مرزی آدیاباتیک برای یک میکروتیر اولر-برنولی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\theta_0(x, z) = \frac{\Delta_E}{\alpha(1 + \Gamma)} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \left[z - \frac{\sin(\gamma z)}{\gamma \cos\left(\frac{\gamma h}{2}\right)} \right] \quad (۶-۵)$$

که در آن

$$\Gamma = 2\Delta_E \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\omega}{\chi} (1 + \Gamma)(\omega\tau_0 - i)} \quad (۷-۵)$$

از آنجایی که $\Delta_E \ll 1$ و از مرتبه 10^{-4} تا 10^{-6} برای مواد مختلف می‌باشد، می‌تواند از Γ در رابطه

(۶-۵) صرفنظر کرد. بنابراین:

$$\theta_0(x, z) = \frac{\Delta_E d^2 w_0}{\alpha dx^2} \left[z - \frac{\sin(\gamma z)}{\gamma \cos\left(\frac{\gamma h}{2}\right)} \right] \quad (۸-۵)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega}{\chi} (\omega \tau_0 - i)} = \frac{1}{h} \xi \left(\eta - i \frac{1}{\eta} \right), \quad \xi = h \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}, \quad \eta = \sqrt{\omega \tau_0 + \sqrt{(\omega \tau_0)^2 + 1}} \quad (۹-۵)$$

با جایگذاری معادله (۸-۵) در (۲-۵) و در نظر گرفتن گرادیان دما فقط در جهت z ، نرخ تولید آنتروپی

بر واحد حجم به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\dot{s}_g = \frac{k}{T^2} \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) \sin(\omega t) \quad (۱۰-۵)$$

برای ساده سازی، بسط سری تیلور T^{-2} در نزدیکی T_0 تا مرتبه اول به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{T_0^2} - \frac{2}{T_0^3} \theta \quad (۱۱-۵)$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۱۰-۵)، آنتروپی تولیدی در واحد حجم در یک سیکل زمانی

به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\Delta s = \frac{\pi k}{\omega T_0^2} \left(\frac{\Delta_E d^2 w_0}{\alpha dx^2} \right)^2 \left[1 - \frac{\cos(\gamma z)}{\cos\left(\frac{\gamma h}{2}\right)} \right]^2 \quad (۱۲-۵)$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۴-۵)، آنتروپی تولیدی در یک سیکل به صورت زیر به دست می آید:

$$\Delta S = \frac{\pi k \Delta_E^2 h}{\omega \alpha^2 T_0^2} A \cdot B = \frac{\pi h k \Delta_E (E \alpha^2 T_0 / \rho C_v)}{\alpha^2 T_0^2} A \cdot B = \frac{A}{\xi^2} \cdot \frac{B E \Delta_E \pi h^3}{2 T_0} \quad (۱۳-۵)$$

که در آن A جمله مختلط و B جمله انتگرالی روی صفحه xy است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{2 \cos(\gamma z)}{\cos\left(\frac{\gamma h}{2}\right)} + \frac{\cos^2(\gamma z)}{\cos^2\left(\frac{\gamma h}{2}\right)} \right) dz = 1 + \frac{1}{1 + \cos(\gamma h)} - \frac{3}{\gamma h} \tan\left(\frac{\gamma h}{2}\right)$$

$$B = \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 dy dx = b \int_0^L \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 dx \quad (۱۴-۵)$$

قسمت حقیقی و موهومی A با جایگذاری $(\gamma h = \xi \left(\eta - i \frac{1}{\eta} \right))$ از معادله (۹-۵) به صورت زیر به دست

می آید:

$$\mathcal{R}(A) = 1 + \frac{1 + \cos(\xi \eta) \cosh\left(\frac{\xi}{\eta}\right)}{\left(\cos(\xi \eta) + \cosh\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \right)^2} - \frac{3 \eta \left(\eta^2 \sin(\xi \eta) + \sinh\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \right)}{\xi (\eta^4 + 1) \left(\cos(\xi \eta) + \cosh\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \right)} \quad (۱۵-۵)$$

$$J(A) = -\frac{\sin(\xi\eta)\sinh\left(\frac{\xi}{\eta}\right)}{\left(\cos(\xi\eta) + \cosh\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right)^2} - \frac{3\eta\left(\sin(\xi\eta) - \eta^2\sinh\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right)}{\xi(1 + \eta^4)\left(\cos(\xi\eta) + \cosh\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right)} \quad (۱۶-۵)$$

مدول تولید آنتروپی به صورت زیر بیان می شود:

$$|\Delta S| = \frac{|A|}{\xi^2} \cdot \frac{BE\Delta_E\pi h^3}{2T_0} = \frac{BE\Delta_E\pi h^3}{2\xi^2 T_0} \sqrt{\mathcal{R}(A)^2 + J(A)^2} \quad (۱۷-۵)$$

بر اساس معادله (۵-۵)، کار از دست رفته کل در یک سیکل کامل از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta W = T_0 |\Delta S| = \frac{BE\Delta_E\pi h^3}{2\xi^2} \sqrt{\mathcal{R}(A)^2 + J(A)^2} \quad (۱۸-۵)$$

تنش حرارتی تولید شده با تغییرات دما به اندازه ای کوچک هستند که می توان از آنها در برابر تنش اعمالی صرف نظر کرد. با استفاده از رابطه (۳-۱)، بیشینه انرژی ذخیره شده در یک سیکل برای میکروتیر به صورت زیر بیان می شود:

$$W_{stored} = \frac{1}{2} \int_V (\hat{\sigma}_{ij}\hat{\epsilon}_{ij} + \hat{p}_i\hat{v}_i + \hat{t}_{ijk}^{(1)}\hat{\eta}_{ijk}^{(1)} + \hat{m}_{ij}^s\hat{\chi}_{ij}^s) dV \\ = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ S \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + K \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \right)^2 \right\} dx \quad (۱۹-۵)$$

نماد (۸) نشان دهنده ی بیشینه مقدار در طول یک سیکل از ارتعاش است و K و S به صورت زیر بیان می شوند:

$$S = EI + 2(a'_0 A)_{eq} + \frac{8}{15}(a'_1 A)_{eq} + (a'_2 A)_{eq} \quad (۲۰-۵) \\ K = 2(a'_0 I)_{eq} + \frac{4}{5}(a'_1 I)_{eq}$$

که در آن $((a'_i A), i = 0, 1, 2)$ و $((a'_i I), i = 0, 1)$ در رابطه (۳-۴۷) تعریف شده اند. می توان با جایگذاری رابطه (۵-۱۸) و (۵-۱۹) در رابطه (۵-۱)، یک عبارت برای ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک به صورت زیر استخراج می شود:

$$Q_{MSGT}^{-1} = \frac{BE\Delta_E h^3}{4\xi^2 b W_{stored}} \left\{ \left[1 + \frac{1 + \cos(\xi\eta)\cosh(\xi/\eta)}{(\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta))^2} - \frac{3\eta}{\xi(\eta^4 + 1)} \frac{\eta^2 \sin(\xi\eta) + \sinh(\xi/\eta)}{\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta)} \right]^2 \right. \\ \left. + \left[-\frac{\sin(\xi\eta)\sinh(\xi/\eta)}{(\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta))^2} + \frac{3\eta}{\xi(\eta^4 + 1)} \frac{\eta^2 \sinh(\xi/\eta) - \sin(\xi\eta)}{\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta)} \right]^2 \right\} \quad (۲۱-۵)$$

رابطه فوق یک عبارت کلی برای ضریب کیفیت وابسته به اندازه میرایی ترموالاستیک در میکروتیر

رزوناتور مبتنی بر دیدگاه تولید آنتروپی و بر اساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش اصلاح شده و انتقال حرارت غیرفوریه است.

۵-۴- تئوری کلاسیک الاستیسیته

در این قسمت یک عبارت تحلیلی برای ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور مبتنی بر دیدگاه تولید آنتروپی و بر اساس تئوری کلاسیک الاستیسیته استخراج می‌شود. انرژی ذخیره شده میکروتیر کلاسیک در یک سیکل ارتعاش میکروتیر با صفر در نظر گرفتن سه پارامتر مقیاس اندازه‌ی مرتبط با تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده ($l_0 = l_1 = l_2 = 0$) در رابطه (۵-۱۹) به دست خواهد آمد.

$$W_{stored} = \frac{1}{2} \int_V (\hat{\sigma}_{ij} \hat{\epsilon}_{ij}) dV = \frac{Ebh^3}{24} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EBh^3}{24} \quad (۲۲-۵)$$

با جایگذاری رابطه فوق و (۵-۱۸) در رابطه (۵-۱۹)، نتیجه می‌شود:

$$Q_{CT}^{-1} = \frac{6\Delta_E}{\xi^2} \left\{ \left[1 + \frac{1 + \cos(\xi\eta) \cosh(\xi/\eta)}{(\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta))^2} - \frac{3\eta}{\xi(\eta^4 + 1)} \frac{\eta^2 \sin(\xi\eta) + \sinh(\xi/\eta)}{\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta)} \right]^2 + \left[-\frac{\sin(\xi\eta) \sinh(\xi/\eta)}{(\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta))^2} + \frac{3\eta}{\xi(\eta^4 + 1)} \frac{\eta^2 \sinh(\xi/\eta) - \sin(\xi\eta)}{\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta)} \right]^2 \right\} \quad (GTE) \quad (۲۳-۵)$$

معادله فوق، یک عبارت تحلیلی از ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر مرتبط با تئوری انتقال حرارت غیرفوریه را بیان می‌کند. همچنین معادله فوق با حذف زمان استراحت مرتبط با تئوری انتقال حرارت فوریه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Q_{CT}^{-1} = \frac{6\Delta_E}{\xi^2} \left\{ \left[1 + \frac{1 + \cos(\xi) \cosh(\xi)}{(\cos(\xi) + \cosh(\xi))^2} - \frac{3(\sin(\xi) + \sinh(\xi))}{2\xi(\cos(\xi) + \cosh(\xi))} \right]^2 + \left[-\frac{\sin(\xi) \sinh(\xi)}{(\cos(\xi) + \cosh(\xi))^2} + \frac{3(\sinh(\xi) - \sin(\xi))}{2\xi(\cos(\xi) + \cosh(\xi))} \right]^2 \right\} \quad (CTE) \quad (۲۴-۵)$$

رابطه فوق، عبارت تحلیلی میرایی ترموالاستیک در میکروتیر را بر اساس تئوری کلاسیک انتقال حرارت را نشان می‌دهد که با عبارت به دست آمده از مرجع [۷] سازگاری بسیار عالی‌ای را نشان می‌دهد.

۵-۵- تئوری کوپل تنش اصلاح شده

در این قسمت یک عبارت تحلیلی برای ضریب کیفیت وابسته به اندازه میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور مبتنی بر دیدگاه تولید آنتروپی و با استفاده از تئوری تعمیم یافته انتقال حرارت و تئوری الاستیسیته کوپل تنش استخراج می‌شود. با صفر در نظر گرفتن دو پارامتر مقیاس اندازه‌ی مرتبط با تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده ($l_0 = l_1 = 0$)، رابطه (۱۹-۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} W_{stored} &= \frac{1}{2} \int_V (\hat{\sigma}_{ij} \hat{\varepsilon}_{ij} + \hat{p}_i \hat{y}_i + \hat{t}_{ijk}^{(1)} \hat{\eta}_{ijk}^{(1)} + \hat{m}_{ij}^s \hat{\chi}_{ij}^s) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ (EI + (a'_2 A)_{eq}) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{Eh^3 B}{24} \left(1 + \frac{6l_{MCST}^2}{(1+\nu)h^2} \right) = \frac{E\lambda h^3 B}{24} \end{aligned} \quad (۲۵-۵)$$

که در آن $\lambda = (1 + 6l_{MCST}^2 / (1 + \nu)h^2)$ معادله فوق، یک عبارت تحلیلی از ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر را بیان می‌کند که با حذف زمان استراحت مرتبط با تئوری انتقال حرارت فوریه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Q_{MCST}^{-1} &= \frac{6\Delta_E}{\lambda \xi^2} \left\{ \left[1 + \frac{1 + \cos(\xi\eta) \cosh(\xi/\eta)}{(\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta))^2} - \frac{3\eta}{\xi(\eta^4 + 1)} \frac{\eta^2 \sin(\xi\eta) + \sinh(\xi/\eta)}{\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta)} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{\sin(\xi\eta) \sinh(\xi/\eta)}{(\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta))^2} + \frac{3\eta}{\xi(\eta^4 + 1)} \frac{\eta^2 \sinh(\xi/\eta) - \sin(\xi\eta)}{\cos(\xi\eta) + \cosh(\xi/\eta)} \right]^2 \right\} (GTE) \end{aligned} \quad (۲۶-۵)$$

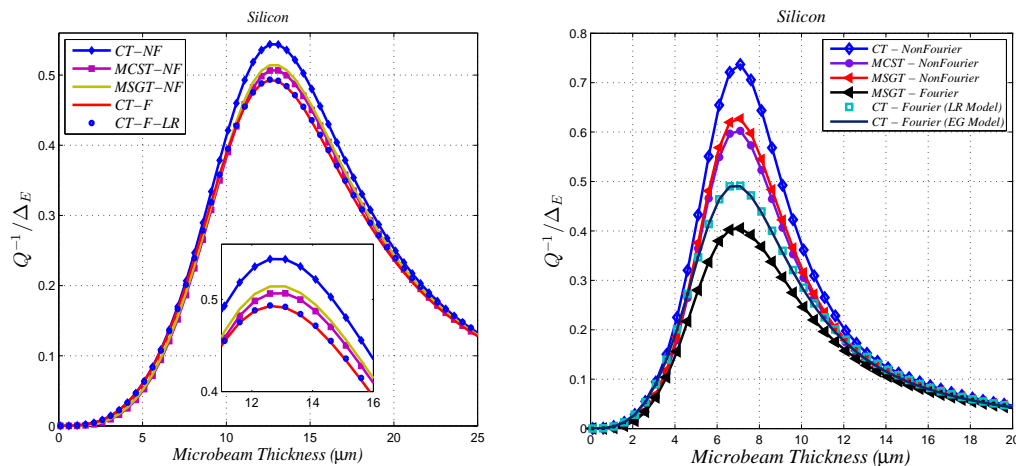
همچنین با نادیده گرفتن زمان استراحت حرارتی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Q_{MCST}^{-1} &= \frac{6\Delta_E}{\lambda \xi^2} \left\{ \left[1 + \frac{1 + \cos(\xi) \cosh(\xi)}{(\cos(\xi) + \cosh(\xi))^2} - \frac{3(\sin(\xi) + \sinh(\xi))}{2\xi(\cos(\xi) + \cosh(\xi))} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{\sin(\xi) \sinh(\xi)}{(\cos(\xi) + \cosh(\xi))^2} + \frac{3(\sinh(\xi) - \sin(\xi))}{2\xi(\cos(\xi) + \cosh(\xi))} \right]^2 \right\} (CTE) \end{aligned} \quad (۲۷-۵)$$

رابطه فوق، عبارت تحلیلی میرایی ترموالاستیک در میکروتیر را بر اساس تئوری کلاسیک انتقال حرارت و کوپل تنش اصلاح شده الاستیسیته را نشان می‌دهد که با عبارت تحلیلی به دست آمده در مرجع [۸۰] سازگاری دارد.

۵-۶- مسأله نمونه و نتایج آن

برای مطالعه تأثیر پارامتر مقیاس طولی بر میرایی ترموالاستیک، میکروتیر رزوناتور از جنس سیلیکون در نظر گرفته شده است که در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی بسیار پرکاربرد هستند. خصوصیات مکانیکی و حرارتی رزوناتور در جدول (۴-۱) آورده شده است. شکل (۵-۱) تغییرات معکوس ضریب کیفیت بر واحد ضریب استحکام استراحتی را برای سه تئوری الاستیسیته (کلاسیک CT ، کوپل تنش اصلاح شده $MCST$ و گرادیان کرنش اصلاح شده $MSGT$) مرتبط با تئوری انتقال حرارت غیرفوریه (NF) به ترتیب برای میکروتیر دوسر گیردار و یکسر گیردار را نشان می‌دهد. همچنین این شکل یک مقایسه میان نتایج به دست آمده از دیدگاه تولید آنتروپی (EG) و مدل لیفشیتز-روکس (LR) که مبتنی بر دیدگاه فرکانس مختلط است را نشان می‌دهد. نتایج مقایسه شده بر اساس تئوری انتقال حرارت فوریه (F) استخراج شده‌اند.

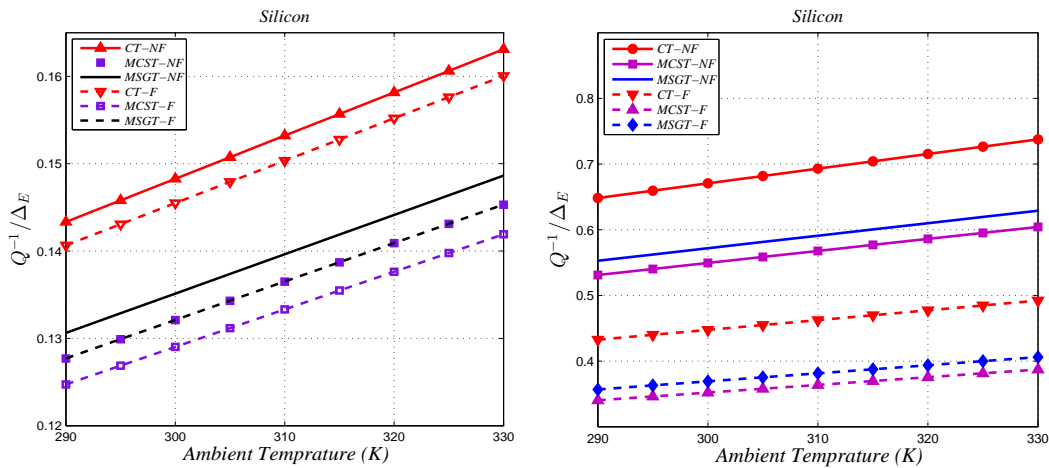


شکل (۵-۱) تغییرات معکوس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک بر واحد استحکام استراحتی بر حسب ضخامت میکروتیر دو سرگیردار (راست) و یک سرگیردار (چپ).

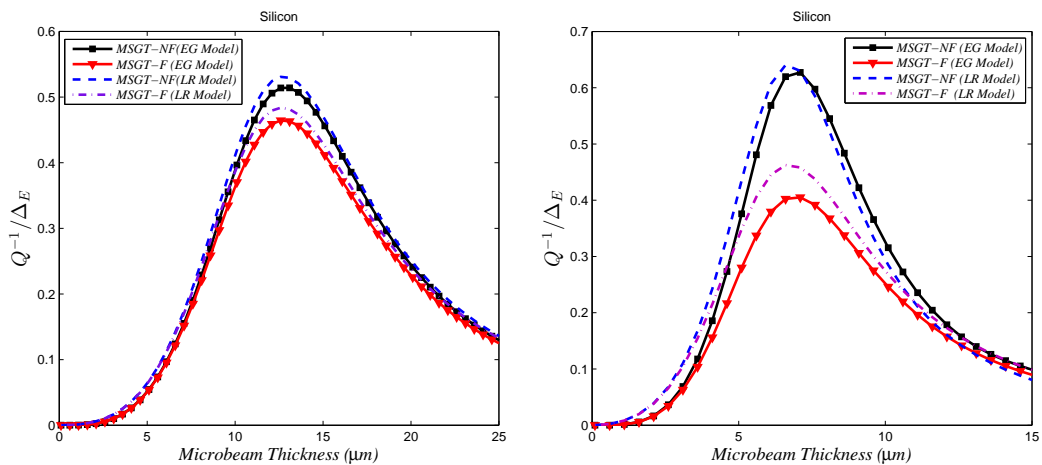
همانطور که در شکل‌های بالا دیده می‌شود از آنجایی که در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طولی با اعمال تئوری کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده، میکروتیر را سفت‌تر می‌کند، ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک مبتنی بر تئوری کلاسیک الاستیسیته با نتایج به دست آمده از دو تئوری غیرکلاسیک الاستیسیته متفاوت است و این نشان می‌دهد که علاوه بر ضخامت میکروتیر، در نظر

گرفتن پارامتر مقیاس طولی در نتایج تأثیرگذار است.

شکل (۲-۵) نیز تغییرات معکوس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر را مبتنی بر روش تولید آنتروپی بر حسب دمای محیط برای هر دو تئوری کلاسیک و تعمیم یافته ترموالاستیک و همچنین برای تئوری‌های کلاسیک، کوپل تنش اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده الاستیسیته نشان می‌دهد. مطابق نتایج شکل (۲-۵) با افزایش دمای محیط، معکوس ضریب کیفیت برای تمام حالت‌ها افزایش می‌یابد.



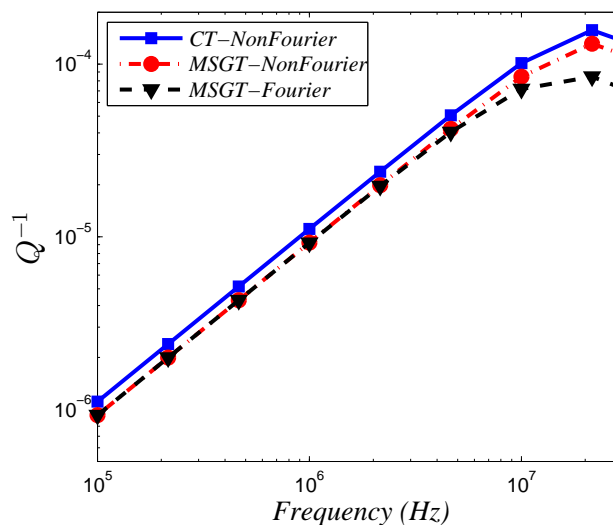
شکل (۲-۵) تغییرات معکوس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک بر واحد استحکام استراحتی بر حسب دمای محیط. میکروتیر دو سرگیردار (راست) و یک سرگیردار (چپ).



شکل (۳-۵) مقایسه مدل فرکانس مختلط و تولید آنتروپی در ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت میکروتیر دو سرگیردار (راست) و یک سرگیردار (چپ).

شکل (۳-۵) یک مقایسه از نتایج به دست آمده با استفاده از دیدگاه‌های تولید آنتروپی و فرکانس

مختلط را برای هر دو تئوری انتقال حرارت فوریه و غیرفوریه بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده در میکروتیر دوسر گیردار و یکسر گیردار نشان می‌دهد. تغییرات ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک برای فرکانس‌های پایین برای هر دو دیدگاه یکسان است و با افزایش فرکانس میان نتایج این دو مدل تفاوت چشم‌گیری اتفاق می‌افتد. برای مدل کلاسیک الاستیسیته و با توجه به نتایج فصل سوم از آنجایی که فرکانس تخمین زده شده از آنچه با اعمال تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده به دست آمده است، پایین تر است، تفاوتی میان نتایج دو این دو دیدگاه مشاهده نمی‌شود. فرکانس نخست میکروتیر یکسر گیردار نیز از میکروتیر دو سرگیردار کوچک تر است و همانطور که مشخص است نتایج به دست آمده از دیدگاه تولید آنتروپی و دیدگاه فرکانس مختلط بسیار به یکدیگر نزدیک‌ترند. آنچه در این نتایج به روشنی دیده می‌شود تأثیر زمان استراحت مرتبط با تئوری تعمیم‌یافته انتقال حرارت است که نمی‌توان آن را در این مقیاس نادیده گرفت.



شکل (۴-۵) مقایسه تغییر معکوس ضریب کیفیت بر حسب فرکانس برای تئوری *MSGT* و *CT*

شکل (۴-۵) نیز تغییرات میرایی ترموالاستیک را بر حسب فرکانس برای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و تئوری کلاسیک الاستیسیته نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است، میرایی ترموالاستیک با افزایش فرکانس افزایش می‌یابد اما نسبت تغییرات میرایی ترموالاستیک به تغییرات فرکانس بسیار

کوچک است. همچنین در فرکانس‌های بالا تفاوت میان نتایج تئوری کلاسیک و تعمیم‌یافته انتقال حرارت بیشتر می‌شود.

۵-۷- نتیجه‌گیری

در این فصل میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور همگن مبتنی بر دیدگاه تولید آنتروپی بررسی شد تا تأثیر در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طولی و زمان استراحت حرارتی بر رفتار اتلاف ترموالاستیک مشاهده شود. عبارتهای تحلیلی به دست آمده در برخی موارد با مقایسه با مقالات قبلی هم‌پوشانی بسیار عالی دارد. همچنین برخی نتایج عددی با نتایج به دست آمده از فصل قبل مقایسه شده‌اند که سازگاری خوبی میان آنها برقرار است. از نتایج عددی مطالعه شده، نتایج زیر قابل استخراج است:

(۱) از آنجایی که فرکانس طبیعی تخمین زده شده با استفاده از تئوری‌های غیر کلاسیک تنش کوپل اصلاح شده و گرادیان کرنش اصلاح شده بالاتر از فرکانس طبیعی کلاسیک میکروتیر است، میان نتایج حاصل از میرایی ترموالاستیک در نزدیکی ضخامت بحرانی برای سه تئوری الاستیسیته اختلاف قابل ملاحظه‌ای مشاهده می‌شود که میرایی ترموالاستیک حاصل از اعمال تئوری‌های غیر کلاسیک الاستیسیته پایین‌تر از نتایج مستخرج از اعمال تئوری کلاسیک است.

(۲) میرایی ترموالاستیک با در نظر گرفتن زمان استراحت حرارتی نیز همانند فصل قبل بزرگتر تخمین زده شده است، چرا که اختلاف فاز تنش و کرنش با در نظر گرفتن سرعت متناهی انتقال حرارت افزایش می‌یابد؛

(۳) میرایی ترموالاستیک با افزایش دمای محیط برای هر سه تئوری الاستیسیته و دو تئوری انتقال حرارت، افزایش می‌یابد؛

(۴) نتایج حاصل از میرایی ترموالاستیک مبتنی بر دو دیدگاه تولید آنتروپی و فرکانس مختلط تا حد قابل قبولی به یکدیگر نزدیک هستند و در فرکانس‌های پایین‌تر نتایج میرایی

ترموالاستیک حاصل از دو دیدگاه فرکانس مختلط و تولید آنتروپی، سه تئوری الاستیسیته و

دو تئوری انتقال حرارت به یکدیگر نزدیک تر می شوند.

فصل ششم:

میرایی ترموالاستیک در میکروتیر رزوناتور *AFG*

(بر اساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش اصلاح شده)

۶-۱- مقدمه

در فصل چهارم نشان داده شد که چگونه پارامتر مقیاس طولی برای مواد گوناگون و در شرایط مرزی مختلف در ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک اثرگذار است. همچنین نتیجه گرفته شد که در نظر گرفتن یک زمان استراحت مطابق با تئوری لرد-شولمن می‌تواند تأثیر به‌سزایی در نتایج بگذارد. در این فصل میرایی ترموالاستیک در میکروتیر ساخته شده از مواد *FG* محوری مورد آنالیز قرار می‌گیرد تا نشان داده شود که تغییر خصوصیات ماده در کنار در نظر گرفتن سه پارامتر مقیاس طولی چگونه بر نتایج ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک تأثیر می‌گذارد. معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروتیر *AFG* با استفاده از اصل هامیلتون و بر مبنای تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده استخراج می‌شود و توزیع دما در این میکروتیر از حل تحلیلی معادله هایپربولیک جفت شده که انتقال حرارت غیرفوریه بر مبنای تئوری لرد-شولمن را توصیف می‌کند، به‌دست خواهد آمد. از آنجایی که میرایی ترموالاستیک سبب مختلط شدن فرکانس خواهد شد، دیدگاه فرکانس مختلط منجر به استخراج نتایج ضریب کیفیت خواهد شد.

در پایان این فصل، نتایج عددی برای یک میکروتیرهای *AFG* با خصوصیات هندسی و شرایط تکیه‌گاهی مختلف نشان داده شده‌اند.

۶-۲- فرمول‌بندی مسئله

۶-۲-۱- مدل مواد متغیر تابعی محوری

در این فصل، تابع تغییرات خصوصیات ماده میکروتیر *AFG* در راستای طولی (x) با فرم توانی و به‌صورت زیر فرض می‌شوند.

$$F(x) = (F_L - F_R) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^k + F_R \quad (1-6)$$

که در آن زیرنویس L و R انتهای چپ ($x = 0$) و راست ($x = L$) میکروتیر را نشان می‌دهند. در نتیجه، اثر خصوصیات مانند مدول یانگ ($E(x)$)، چگالی جرمی ($\rho(x)$)، ضریب انتقال حرارات

$(k(x))$ ، حرارت مخصوص در حجم ثابت $(C_v(x))$ ، ضریب انبساط حرارتی $(\alpha(x))$ ، زمان استراحت

$(\tau_0(x))$ و پارامترهای مقیاس طولی $(l_i(x))$ می‌توانند به صورت:

$$E(x) = (E_L - E_R) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^k + E_R \quad (۲-۶)$$

$$\rho(x) = (\rho_L - \rho_R) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^k + \rho_R \quad (۳-۶)$$

$$k(x) = (k_L - k_R) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^k + k_R \quad (۴-۶)$$

$$C_v(x) = (C_{vL} - \rho C_{vR}) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^k + C_{vR} \quad (۵-۶)$$

$$\alpha(x) = (\alpha_L - \alpha_R) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^k + \alpha_R \quad (۶-۶)$$

$$\tau_0(x) = (\tau_{0L} - \tau_{0R}) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^k + \tau_{0R} \quad (۷-۶)$$

$$l_i(x) = (l_{iL} - l_{iR}) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^k + l_{iR} \quad i = 0,1,2 \quad (۸-۶)$$

بیان شوند. در رابطه (۲-۶) تا (۸-۶) اگر $k = 0$ باشد، آنگاه خصوصیات ماده در راستای محور تغییر

نخواهد کرد و مدول الاستیسیته، چگالی، ضریب انتقال حرارت (k_L) ، حرارت مخصوص در حجم ثابت

(C_{vL}) و ضریب انبساط حرارتی میکروتیر همگن در طول تیر برابر مقدار ثابت انتهایی چپ خواهد بود.

۲-۲-۶- معادله ارتعاشاتی میکروتیر

در این قسمت معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروتیر AFG، که خصوصیات فیزیکی آن در راستای

محور تغییر می‌کند، در حضور میرایی ترموالاستیک با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده

استخراج می‌شود.

همانطور که در فصل قبل عنوان شد؛ حضور کرنش حرارتی فقط در روابط ساختاری تنش و کرنش

کلاسیک و همچنین پارامتر سینماتیکی مرتبط با بردار گرادیان اتساع \mathbf{p} اثرگذار است، از این رو در این

فصل از دوباره نویسی مؤلفه‌های تانسور گرادیان کشش انحرافی $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ ، قسمت متقارن تانسور گرادیان

چرخش $\boldsymbol{\chi}^s$ و پارامترهای سینماتیکی مرتبط با آنها که در فصل سوم برای میکروتیر AFG استخراج

شده، پرهیز شده است.

در حضور اثر حرارتی، رابطه‌ی تنش کرنش برای میکروتیر AFG به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (9-6)$$

که در آن $\lambda(x)$ و $\mu(x)$ ضرایب لامه و e_{ij} میدان کرنش کل را نشان می‌دهد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^{(T)} \quad (10-6)$$

در رابطه فوق ε_{ij} و ε_{ij}^T به ترتیب نشان‌دهنده کرنش مکانیکی و حرارتی هستند. کرنش حرارتی برای ماده‌ی AFG و الاستیک خطی، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha(x)\theta(x, t)\delta_{ij} \quad (11-6)$$

که $\alpha(x)$ تابع تغییرات ضریب انبساط حرارتی در راستای محور میکروتیر و θ اختلاف دما با دمای محیط T_0 را نشان می‌دهد.

همچنین، مؤلفه‌های غیرصفر تانسور کرنش کل با استفاده از رابطه‌ی (10-6) برای میکروتیر اولر-برنولی و با در نظر گرفتن نسبت پواسون به صورت زیر به دست می‌آید:

$$e_{11} = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \alpha(x)\theta, \quad e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11} \quad (12-6)$$

از آنجایی که ضریب پواسون برای مواد مختلف در یک محدوده است، در معادله بالا، فرض بر این است که ضریب پواسون در راستای محور میکروتیر تغییر نکند.

مؤلفه‌های غیر صفر بردار گرادیان اتساع حرارتی γ^T با در نظر گرفتن کرنش‌های حرارتی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\gamma_1^T = (1 - 2\nu) \left(-3 \frac{\partial \alpha(x)\theta}{\partial x} \right), \quad \gamma_3^T = (1 - 2\nu) \left(-3\alpha(x) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad (13-6)$$

پارامتر سینماتیکی p در حضور کرنش حرارتی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$p_i = 2\mu(x)l_0^2(x)(\gamma_i + \gamma_i^T) \quad (14-6)$$

با استفاده از روابط (9-6) و (14-6)، پارامترهای تنش کلاسیک و مرتبه بالاتر مرتبط با بردار گرادیان اتساع به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_{11} = E(x)e_{11}^{(M)} + (3\lambda + 2\mu)e_{11}^{(T)} = -E(x) \left(z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\alpha(x)\theta}{1 - 2\nu} \right) \quad (15-6)$$

$$p_1 = -2\mu(x)l_0^2(x)(1 - 2\nu)z \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} - 3 \frac{(1 - 2\nu)E(x)l_0^2(x)}{(1 + \nu)} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(x)\theta) \quad (16-6)$$

$$p_3 = -2\mu(x)l_0^2(x)(1-2\nu)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - 3\frac{(1-2\nu)}{(1+\nu)}E(x)\alpha(x)l_0^2(x)\frac{\partial \theta}{\partial z}$$

در این فصل نیز، برای ساده‌سازی، شرایط تنش صفحه‌ای فرض شده است و از آنجا که ضخامت (در جهت z) و عرض (در جهت y) میکروتیر در مقایسه با طول آن به اندازه کافی کوچک فرض می‌شوند، می‌توان از مؤلفه‌های تنش در راستای y و z صرف‌نظر کرد. ($\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0$). معادله حاکم بر ارتعاش آزاد میکروتیر اولر-برنولی AFG در حضور میرایی ترموالاستیک می‌تواند با استفاده از اصل هامیلتون، استخراج شود.

$$0 = \int_{t_0}^t (\delta U - \delta T) dt \quad (17-6)$$

با جایگذاری معادلات (۱۲-۶) تا (۱۶-۶) در رابطه (۱-۳)، تغییرات انرژی کرنشی δU برای میکروتیر همگن، الاستیک خطی و همسانگرد در حضور اثر حرارت به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \delta U dt &= \int_{t_0}^t \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \delta \chi_{ij}^s) dt \\ &= \int_{t_0}^t \int_0^L \left[-N_{11}^{(1)}(x) \frac{\partial^2 \delta w(x,t)}{\partial x^2} - (1-2\nu)P_1^{(1)}(x) \frac{\partial^3 \delta w(x,t)}{\partial x^3} \right. \\ &\quad - (1-2\nu)P_3^{(1)}(x) \frac{\partial^2 \delta w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{2}{5}(1+\nu)T_1^{(1)}(x) \frac{\partial^3 \delta w(x,t)}{\partial x^3} \\ &\quad + \frac{6}{5}(1+\nu)T_2^{(1)}(x) \frac{\partial^3 \delta w(x,t)}{\partial x^3} + \frac{3}{15}(1+\nu)T_3^{(1)}(x) \frac{\partial^2 \delta w(x,t)}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{12}{15}(1+\nu)T_4^{(1)}(x) \frac{\partial^2 \delta w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{5}(1+\nu)T_5^{(1)}(x) \frac{\partial^2 \delta w(x,t)}{\partial x^2} \\ &\quad \left. - M_1^{(0)}(x) \frac{\partial^2 \delta w(x,t)}{\partial x^2} \right] dx dt \\ &= \int_{t_0}^t \int_0^L \left\{ N_{(w)}^{(2)}(x) \frac{\partial^2 \delta w(x,t)}{\partial x^2} + N_{(w)}^{(3)}(x) \frac{\partial^3 \delta w(x,t)}{\partial x^3} \right\} dx dt \\ &= \int_{t_0}^t \int_0^L \left\{ \frac{\partial^2 N_{(w)}^{(2)}(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 N_{(w)}^{(3)}(x)}{\partial x^3} \right\} \delta w dx dt \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left[\left\{ \frac{\partial^2 N_{(w)}^{(3)}(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N_{(w)}^{(2)}(x)}{\partial x^2} \right\} \delta w \right. \\ &\quad \left. + \left\{ N_{(w)}^{(2)}(x) - \frac{\partial N_{(w)}^{(3)}(x)}{\partial x} \right\} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + N_{(w)}^{(3)}(x) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right]_{x=0}^{x=L} dt \quad (18-6) \end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 N_{(w)}^{(2)}(x) &= -N_{11}^{(1)}(x) - (1 - 2\nu)P_3^{(1)}(x) \\
 &\quad + (1 + \nu) \left(\frac{3}{15}T_3^{(1)}(x) - \frac{12}{15}T_4^{(1)}(x) + \frac{1}{5}T_5^{(1)}(x) \right) - M_1^{(0)}(x) \\
 N_{(w)}^{(3)}(x) &= -(1 - 2\nu)P_1^{(1)}(x) - \frac{2}{5}(1 + \nu)T_1^{(1)}(x) + \frac{6}{5}(1 + \nu)T_2^{(1)}(x) \\
 [N_{ij}^{(0)}(x), N_{ij}^{(1)}(x)] &= \int_A [1, z] \sigma_{ij}(x) dA \\
 [P_i^{(0)}(x), P_i^{(1)}(x)] &= \int_A [1, z] p_i(x) dA \\
 [T_i^{(0)}(x), T_i^{(1)}(x)] &= \int_A [1, z] \tau_i(x) dA \\
 [M_i^{(0)}(x), M_i^{(1)}(x)] &= \int_A [1, z] m_{ij}^s(x) dA
 \end{aligned} \tag{۱۹-۶}$$

همچنین با صرف نظر کردن از اینرسی چرخشی، تغییرات انرژی جنبشی δT میکروتیر AFG به صورت زیر بیان می شود.

$$\int_{t_0}^t \delta T dt = \int_{t_0}^t \int_V \rho(x) \left(\frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial t} \right)^2 dv = \int_{t_0}^t \int_0^L \rho(x) A \left(\frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx dt \tag{۲۰-۶}$$

که $\rho(x)$ نشان دهنده‌ی تابع تغییرات چگالی در راستای محور و A مساحت سطح مقطع میکروتیر است.

با جایگذاری تغییرات انرژی کرنشی و انرژی جنبشی میکروتیر (روابط (۶-۱۸) و (۶-۲۰)) در رابطه (۶-۱۷)، معادله حرکت میکروتیر با میرایی ترموالاستیک بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(S_1(x) \frac{\partial^6 w(x, t)}{\partial x^6} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(S_2(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^3 S_3(x)}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 S_4(x)}{\partial x^2} \\
 - \rho(x) A \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{۲۱-۶}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 2(1 - 2\nu)^2 \mu(x) l_0^2(x) I + \frac{4}{5} \mu(x) l_1^2(x) (1 + \nu)^2 I \\
 S_2 &= E(x) I + 2(1 - 2\nu)^2 \mu(x) l_0^2(x) A + \frac{8}{15} \mu(x) l_1^2(x) (1 + \nu)^2 A + \mu(x) l_2^2(x) A \\
 S_3 &= 3E(x) l_0^2(x) b \frac{(1 - 2\nu)^2 \partial M_T(x)}{(1 + \nu) \partial x} \\
 S_4 &= E(x) b \frac{M_T(x)}{1 - 2\nu} + 3 \frac{(1 - 2\nu)^2}{(1 + \nu)} Q_T(x)
 \end{aligned} \tag{۲۲-۶}$$

و تابع ممان‌های حرارتی $M_T(x)$ و $Q_T(x)$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$M_T(x) = \alpha(x) \int_{-h/2}^{h/2} \theta z dz$$

$$Q_T = \int_A E(x) l_0^2(x) \frac{\partial}{\partial z} (\alpha(x) \theta) dA = E(x) l_0^2(x) \alpha(x) b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \theta}{\partial z} dz \quad (23-6)$$

که b عرض میکروتیر را نشان می‌دهد. در معادله (۶-۲۱) اگر از پارامترهای مقیاس طولی l_0 و l_1 صرف‌نظر شود، معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروتیر AFG با میرایی ترموالاستیک بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاح شده به‌دست خواهد آمد. همچنین اگر از هر سه پارامترهای مقیاس طولی l_0 ، l_1 و l_2 به‌صورت هم‌زمان صرف‌نظر شود، معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروتیر AFG با میرایی ترموالاستیک بر اساس تئوری کلاسیک به‌دست خواهد آمد. به‌طور مشابه با صرف‌نظر کردن از ممان حرارتی، معادله ارتعاشات آزاد میکروتیر بدون میرایی ترموالاستیک بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده استخراج می‌شود.

۶-۲-۳- معادله کوپله انتقال حرارت برای میکروتیر ترموالاستیک

در این فصل نیز برای توصیف معادله انتقال حرارت، تئوری تعمیم یافته‌ی ترموالاستیسیته بر اساس معادله انتقال حرارت غیرفوری به‌کار بسته شده تا تأثیر درنظر گرفتن یک زمان استراحت حرارتی^{۴۱} بر ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر رزوناتور AFG بررسی شود. معادله انتقال حرارت غیرفوری برای میکروتیر ترموالاستیک AFG به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$k(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} = \rho(x) c_v(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + E(x) \alpha(x) T_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_i} + \tau_0(x) \rho(x) c_v(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_0(x) E(x) \alpha(x) T_0 \frac{\partial^3 u_i}{\partial t^2 \partial x_i} \quad (24-6)$$

که در آن $k(x)$ ، $c_v(x)$ ، $\alpha(x)$ ، T_0 و $\tau_0(x)$ به‌ترتیب توابع تغییرات ضریب هدایت حرارتی، حرارت مخصوص در حجم ثابت، مدول حرارتی، زمان استراحت حرارتی در راستای محور و دمای محیط را نشان می‌دهند. همچنین x_1 ، x_2 و x_3 نشان‌دهنده‌ی راستاهای x ، y و z هستند.

برای ساده‌سازی، این فرض که گرادیان حرارتی در راستای z بسیار بزرگتر از گرادیان حرارتی در

⁴¹ Thermal relaxation time

راستاهای x و y است منطقی به نظر می‌رسد، بنابراین می‌توان در معادله فوق از جمله $(\partial^2 \theta / \partial x^2)$ صرف نظر کرد. مطابق میدان جابه‌جایی میکروتیر اولر-برنولی و همچنین با تعریف توابع تغییرات ضریب پخش $(\chi(x) = \frac{k(x)}{\rho(x)c_v(x)})$ و استحکام استراحتی $(\Delta_E(x) = \frac{E(x)\alpha(x)^2 T_0}{\rho(x)c_v(x)})$ در راستای محور میکروتیر، معادله انتقال حرارت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\chi(x) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = (1 + \Gamma(x)) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \tau_0(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \frac{\Delta_E(x)}{\alpha(x)} z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} - \tau_0(x) \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \right) \quad (25-6)$$

که در آن Γ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(x) = 2\Delta_E(x) \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \quad (26-6)$$

معادله (۲۵-۶)، معادله جفت شده‌ی ترموالاستیسیته‌ی میکروتیر AFG را بر مبنای انتقال حرارت غیرفوریه نشان می‌دهد.

۳-۶- ضریب کیفیت

در این قسمت عبارتی تحلیلی برای ممان‌های حرارتی بر حسب $w(x, t)$ معرفی خواهد شد، سپس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر AFG به دست خواهد آمد. حل معادلات (۲۱-۶) و (۶-۶)

(۲۵) با فرض هارمونیک بودن نسبت به زمان با فرکانس یکسان به صورت زیر است:

$$w(x, t) = w_0(x) e^{st}, \quad \theta(x, z, t) = \theta_0(x, z) e^{st}, \quad s = \omega_r + i\omega_i \quad (27-6)$$

که در آن ω_r مقدار حقیقی که نشان‌دهنده‌ی فرکانس جدید تشدید در حضور میرایی ترموالاستیک است و ω_i قسمت موهومی فرکانس است که مرتبط با میرایی ترموالاستیک می‌باشد.

با جایگذاری رابطه (۲۷-۶) در معادله (۲۵-۶) عبارت تحلیلی تغییرات دما به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\theta_0(x, z) = \frac{\Delta_E(x)}{\alpha(x)(1 + \Gamma(x))} z \frac{d^2 w_0}{dx^2} + C_1 \sin(\gamma(x)z) + C_2 \cos(\gamma(x)z) \quad (28-6)$$

ضرایب C_1 و C_2 با اعمال شرایط مرزی انتقال حرارت به دست خواهند آمد و γ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\gamma = \left(\frac{s}{\chi(x)} (1 + \Gamma(x)) (s\tau_0(x) - i) \right)^{1/2} \quad (29-6)$$

با اعمال شرایط مرزی حرارتی آدیاباتیک در سطوح پایینی و بالایی میکروتیر ($\partial\theta/\partial z = 0$) در $z = \pm h/2$ ، معادله (۶-۲۸) به یک معادله صریح برای تغییرات دما به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\theta_0(x, z) = \frac{\Delta_E(x)}{\alpha(x)(1 + \Gamma(x))} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \left[z - \frac{\sin(\gamma(x)z)}{\gamma(x) \cos\left(\frac{\gamma(x)h}{2}\right)} \right] \quad (۳۰-۶)$$

همچنین با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۶-۲۳)، عبارتی تحلیلی برای ممان‌های حرارتی بر حسب w_0 به دست می‌آید:

$$M_T = \frac{\Delta_E(x)h^3}{12(1 + \Gamma(x))} \frac{d^2 w_0}{dx^2} [1 + f(s, x)] \quad (۳۱-۶)$$

$$Q_T = \frac{E(x)l_0^2(x)I\Delta_E(x)}{(1 + \Gamma)} \frac{d^2 w_0}{dx^2} g(s, x) \quad (۳۲-۶)$$

که در آن

$$f(s, x) = \frac{24}{(\gamma h)^3} \left[\frac{\gamma h}{2} - \tan\left(\frac{\gamma h}{2}\right) \right], \quad g(s, x) = \frac{24}{\gamma h^3} \left[\frac{\gamma h}{2} - \tan\left(\frac{\gamma h}{2}\right) \right]. \quad (۳۳-۶)$$

با جایگذاری روابط (۶-۲۷)، (۶-۳۱) و (۶-۳۲) در معادله (۶-۲۱)، معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی میکروتیر در حضور میرایی ترموالاستیک به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & (S_1(x) + H_1^{(3)}(x)) \frac{d^6 w_0}{dx^6} + \left(3 \frac{dS_1(x)}{dx} + 3 \frac{dH_1^{(3)}(x)}{dx} + H_1^{(2)}(x) \right) \frac{d^5 w_0}{dx^5} \\ & + \left(3 \frac{d^2 S_1(x)}{dx^2} + 3 \frac{dH_1^{(2)}(x)}{dx} + 3 \frac{d^2 H_1^{(3)}(x)}{dx^2} - H_2^{(2)}(x) - S_2(x) \right) \frac{d^4 w_0}{dx^4} \\ & + \left(\frac{d^3 S_1(x)}{dx^3} + 3 \frac{d^2 H_1^{(2)}(x)}{dx^2} + \frac{d^3 H_1^{(3)}(x)}{dx^3} - 2 \frac{dH_2^{(2)}(x)}{dx} - 2 \frac{dS_2(x)}{dx} \right) \frac{d^3 w_0}{dx^3} \\ & + \left(\frac{d^3 H_1^{(2)}(x)}{dx^2} - \frac{d^2 H_2^{(2)}(x)}{dx^2} - \frac{d^2 S_2(x)}{dx^2} \right) \frac{d^2 w_0}{dx^2} + s^2 \rho(x) A w_0 = 0 \end{aligned} \quad (۳۴-۶)$$

که در آن

$$\begin{aligned} H_1^{(2)}(x) &= 3E(x)l_0^2(x)I \frac{(1 - 2\nu)^2}{(1 + \nu)} \frac{d}{dx} \left(\frac{\Delta_E(x)}{(1 + \Gamma(x))} [1 + f(s_{iso}, x)] \right) \\ H_1^{(3)}(x) &= 3E(x)l_0^2(x)I \frac{(1 - 2\nu)^2}{(1 + \nu)} \frac{\Delta_E(x)}{(1 + \Gamma(x))} [1 + f(s_{iso}, x)] \\ H_2^{(2)}(x) &= \frac{E(x)I\Delta_E(x)}{(1 + \Gamma(x))} \left(\frac{1}{1 - 2\nu} [1 + f(s_{iso}, x)] + 3 \frac{(1 - 2\nu)^2}{(1 + \nu)} l_0^2(x) g(s_{iso}, x) \right) \end{aligned} \quad (۳۵-۶)$$

از آنجایی که میرایی ترموالاستیک، یک میرایی ضعیف است ($\omega_i \ll 1$)، در محاسبه ضرایب H_1 و H_2 می‌توان فرکانس طبیعی میکروتیر هم‌دما s_{iso} را جایگزین s کرد. فرکانس‌های طبیعی میکروتیر

هم‌دما به روش‌های مختلفی در فصل سوم استخراج شده‌اند و در این فصل از بازنویسی آنها اجتناب شده است. معادله (۳۴-۶) به فرم ساده شده زیر قابل بازنویسی است:

$$K_6 \frac{d^6 w_0}{dx^6} + K_5 \frac{d^5 w_0}{dx^5} + K_4 \frac{d^4 w_0}{dx^4} + K_3 \frac{d^3 w_0}{dx^3} + K_2 \frac{d^2 w_0}{dx^2} + s^2 K_0 w_0 = 0 \quad (34-6)$$

که در آن

$$\begin{aligned} K_0 &= \rho(x)A, \quad K_2 = \frac{d^3 H_1^{(2)}(x)}{dx^2} - \frac{d^2 H_2^{(2)}(x)}{dx^2} - \frac{d^2 S_2(x)}{dx^2}, \\ K_3 &= \frac{d^3 S_1(x)}{dx^3} + 3 \frac{d^2 H_1^{(2)}(x)}{dx^2} + \frac{d^3 H_1^{(3)}(x)}{dx^3} - 2 \frac{dH_2^{(2)}(x)}{dx} - 2 \frac{dS_2(x)}{dx} \\ K_4 &= 3 \frac{d^2 S_1(x)}{dx^2} + 3 \frac{dH_1^{(2)}(x)}{dx} + 3 \frac{d^2 H_1^{(3)}(x)}{dx^2} - H_2^{(2)}(x) - S_2(x), \\ K_5 &= 3 \frac{dS_1(x)}{dx} + 3 \frac{dH_1^{(3)}(x)}{dx} + H_1^{(2)}(x), \quad K_6 = S_1(x) + H_1^{(3)}(x). \end{aligned} \quad (37-6)$$

در این تحقیق، برای نشان دادن ضریب کیفیت وابسته به اندازه میکروتیر AFG گرادیان کرنشی، شرایط مرزی میکروتیر یک‌سر گیردار (C-F) و دوسر گیردار (C-L) در نظر گرفته شده است.

۴-۶- روش گالرکین

در این قسمت، فرکانس معادله دیفرانسیلی (۳۶-۶) برای شرایط مرزی دوسر گیردار و یک‌سر گیردار از روش گالرکین تخمین زده شده است. بر اساس روش معمول گالرکین یک حل تقریبی برای $w_0(x)$ به صورت زیر فرض می‌شود:

$$w_0(x) = \sum_{n=1}^N q_n \phi_n(x) \quad (38-6)$$

که در آن q_n ها ضرایب نامعلوم هستند که باید به دست آیند و $\phi_n(x)$ تابع آزمون روش گالرکین که در رابطه (۴۳-۴) و (۴۴-۴) تعریف شده‌اند. این معمول است که تابع آزمون برخی شرایط مرزی را ارضاء کند. با جایگذاری حل تقریبی معادله (۳۸-۶) در معادله (۳۶-۶) و سپس ضرب طرفین در $\phi_m(x)$ و انتگرال‌گیری از نتیجه حاصل در بازه $[0, L]$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N q_n \int_0^L K_6(x) \phi_m(x) \phi_n^{(vi)}(x) dx + \sum_{n=1}^N q_n \int_0^L K_5(x) \phi_m(x) \phi_n^{(v)}(x) dx \\ & + \sum_{n=1}^N q_n \int_0^L K_4(x) \phi_m(x) \phi_n^{(iv)}(x) dx \\ & + \sum_{n=1}^N q_n \int_0^L K_3(x) \phi_m(x) \phi_n'''(x) dx \\ & + \sum_{n=1}^N q_n \int_0^L K_2(x) \phi_m(x) \phi_n''(x) dx \\ & + s^2 \sum_{n=1}^N q_n \int_0^L K_0(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx \end{aligned} \quad (39-6)$$

رابطه فوق می‌تواند به فرم ماتریسی زیر بیان شود:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = s^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{q}\} \quad (40-6)$$

ضرایب ماتریس معادله فوق به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} K_{mn} = & \int_0^L K_6(x) \phi_m(x) \phi_n^{(vi)}(x) dx + \int_0^L K_5(x) \phi_m(x) \phi_n^{(v)}(x) dx \\ & + \int_0^L K_4(x) \phi_m(x) \phi_n^{(iv)}(x) dx + \int_0^L K_3(x) \phi_m(x) \phi_n'''(x) dx \\ & + \int_0^L K_2(x) \phi_m(x) \phi_n''(x) dx \end{aligned} \quad (41-6)$$

$$M_{mn} = - \int_0^L K_0(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx \quad (42-6)$$

فرکانس ارتعاش s از حل مسئله مقدار ویژه $(40-6)$ حاصل می‌شود. بر اساس دیدگاه فرکانس

مختلط، معکوس ضریب کیفیت میکروتیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری Q_{MSGT}^{-1} مرتبط با

تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و تئوری انتقال حرارت غیرفوری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Q_{MSGT}^{-1} = 2 \left| \frac{\Im(s)}{\Re(s)} \right| \quad (43-6)$$

که در آن $\Re(s)$ و $\Im(s)$ به ترتیب قسمت حقیقی و موهومی فرکانس را نشان می‌دهند. نتایج به دست

آمده از معکوس میرایی ترموالاستیک با در نظر گرفتن تقریب استفاده شده در محاسبه فرکانس

طبیعی، منطقی به نظر می‌رسد چرا که مرتبه $\Im(s)$ بسیار کوچکتر از $\Re(s)$ است.

۶-۵- مسأله نمونه و نتایج آن

در این بخش، بررسی و آنالیز ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر AFG آلومینیوم-نیکل با

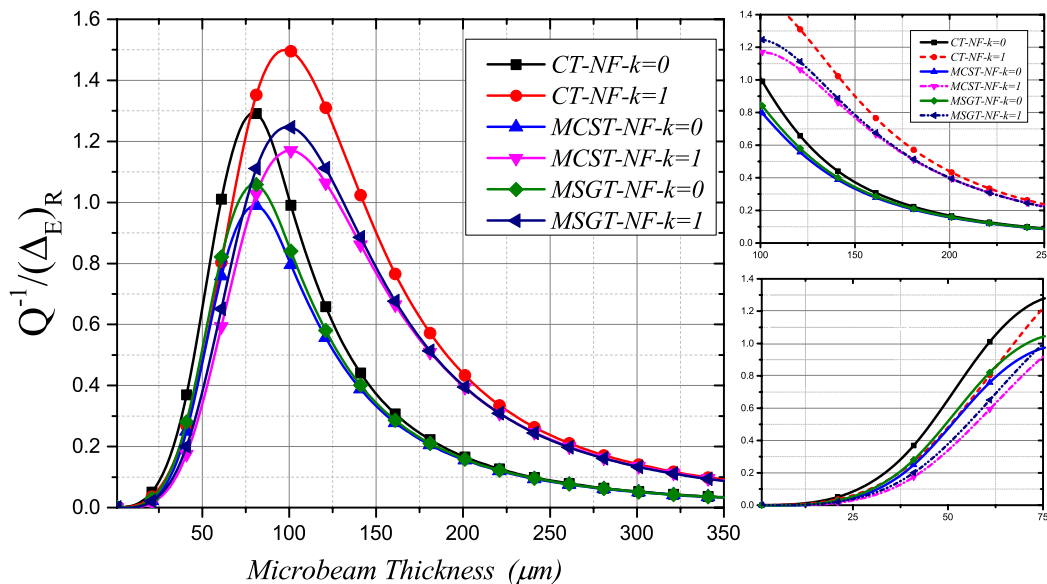
نتایج عددی نشان داده شده‌اند تا رابطه معکوس ضریب کیفیت را با پارامترهای مختلف نشان دهند.

جدول (۱-۶) مشخصات هندسی و فیزیکی مواد میکروتیر مورد ارزیابی قرار گرفته در این آنالیز عددی را نشان می‌دهد.

جدول (۱-۶) مشخصات هندسی و مکانیکی میکروتیرها

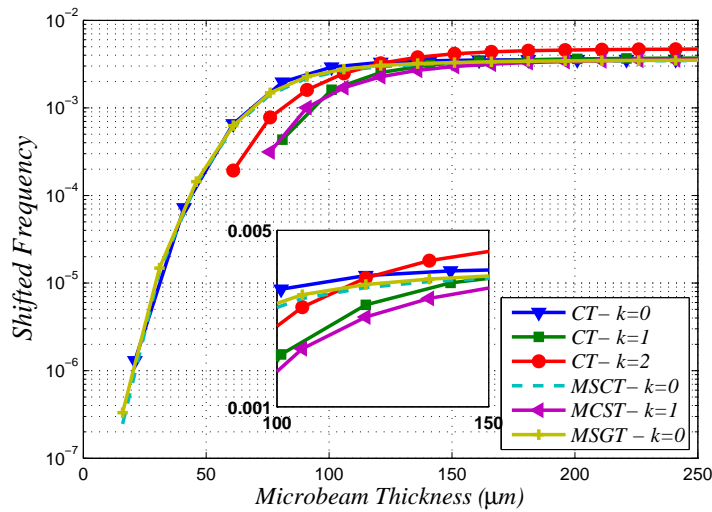
پارامترها	آلومینیوم	نیکل
مدول الاستیسیته E (Gpa)	70	210
چگالی ρ (kg/m^3)	2.7×10^3	8.90×10^3
حرارت مخصوص در حجم ثابت c_v (J/kgK)	920	438
ضریب انبساط حرارتی α_T (K^{-1})	23.1×10^{-6}	13×10^{-6}
نسبت پواسون ν	0.31	0.31
ضریب انتقال حرارت k (W/mK)	237	92
طول L (μm)	8000	
ضخامت میکروتیر h (μm)	10	

اثر تغییرات ضخامت بر میرایی ترموالاستیک میکروتیر AFG در شکل (۱-۶) با فرض انتقال حرارت غیرفوریه (NF) و توان‌های مختلف تغییرات (k) برای تئوری‌های کلاسیک، کوپل تنش و گرادیان کرنش اصلاح شده الاستیسیته نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با نزدیک شدن ضخامت میکروتیر به پارامتر مقیاس طولی نتایج برای هر سه تئوری فوق‌الذکر از یکدیگر فاصله می‌گیرند.

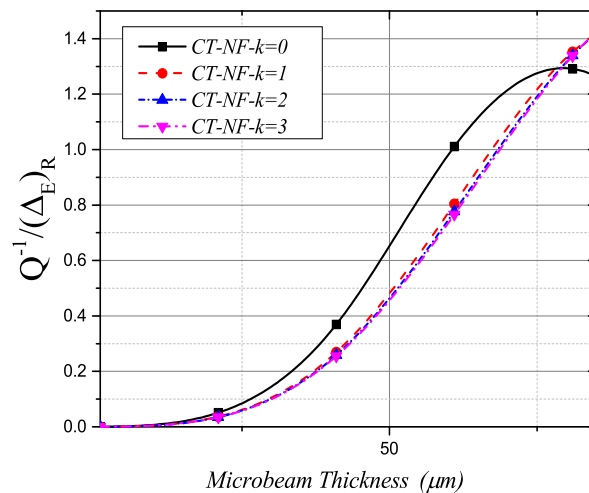


شکل (۱-۶) تغییرات معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت میکروتیر AFG

همچنین، شکل (۲-۶) انتقال فرکانس ناشی از میرایی ترموالاستیک را برای ضخامت‌های مختلف میکروتیر نشان می‌دهد. بر اساس آنچه نشان داده شده است، در ضخامت‌های پایین با افزایش ضخامت میکروتیر، انتقال فرکانس افزایش می‌یابد و پس از ضخامت بحرانی نمودار انتقال فرکانس به یک مقدار ثابت همگرا می‌شود.



شکل (۲-۶) انتقال فرکانس ناشی از میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت میکروتیر AFG



شکل (۳-۶) تغییرات معکوس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر AFG کلاسیک بر حسب ضخامت

۶-۶- نتیجه‌گیری

در این فصل، ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروتیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفت که از نتایج به دست آمده از آنالیز عددی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف) استفاده از مواد متغیر تابعی محوری مورد مطالعه در ضخامت‌های کوچک میکروتیر می‌تواند باعث بهبود ضریب کیفیت شود و برعکس؛

ب) افزایش توان تابع تغییر ماده نیز در نسبت‌های بالای طول به ضخامت میکروتیر می‌تواند بهبود عملکرد و کاهش میرایی ترموالاستیک را به همراه داشته باشد؛

ج) ضخامت بحرانی میکروتیر، ضخامتی که در آن کمینه‌ی ضریب کیفیت اتفاق می‌افتد، برای میکروتیر غیرهمگن نسبت به میکروتیر همگن افزایش داشته و با نزدیک شدن ضخامت میکروتیر به ضخامت بحرانی میان نتایج به دست آمده از تئوری‌های گرادیان کرنش اصلاح شده، کوپل تنش اصلاح و کلاسیک اختلاف چشم‌گیری مشاهده می‌شود.

فصل ہفتم:

پیشنہادها

۷-۱- مقدمه

در این مطالعه میرایی ترموالاستیک در میکروتیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده بررسی و نشان داده شد که در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طولی مرتبط با تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده، زمان استراحت حرارتی مرتبط با تئوری غیرفوریه انتقال حرارت می‌تواند اثر محسوسی در نتایج داشته باشد. همچنین در نظر گرفتن مواد غیرهمگن FG علاوه بر انتقال فرکانس طبیعی، می‌تواند در برخی موارد بهبود عملکرد میکروتیرهای رزوناتور را به همراه داشته باشد. مدل ارائه شده در این پایان‌نامه اگرچه با فرض غیرکلاسیک بودن تئوری الاستیسیته و در نظر گرفتن تئوری تعمیم‌یافته انتقال حرارت به فیزیکی واقعی مسائل در ابعاد میکرو نزدیک شده است، اما ارائه پیشنهادهایی در این فصل می‌تواند به بهبود این مطالعه و همچنین بررسی عوامل مختلف تأثیرگذار در این زمینه و زمینه‌های نزدیک به آن کمک کند.

۷-۲- پیشنهادها

با توجه به مطالعات انجام شده در این زمینه پیشنهادهای مختلفی را می‌توان ارائه نمود که برخی از این پیشنهادها به قرار زیر است.

- ۱) تحلیل ارتعاشات آزاد نامیرای میکروتیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری باریک‌شونده با استفاده از روش‌های عددی مانند روش تبدیل دیفرانسیلی معمولی، دیفرانسیل مربعی و ...؛
- ۲) تحلیل ارتعاشات میکروتیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی با دیگر مدل‌های تغییر ماده، مانند مدل کسری و ...؛
- ۳) بررسی میرایی ترموالاستیک با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته برای میکروتیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری؛
- ۴) تحلیل میرایی ترموالاستیک در میکروتیرهای ساخته شده از مواد با فرض تغییرات ماده در راستای ضخامت؛
- ۵) تحلیل ارتعاشات اجباری و غیرخطی میکروتیر ساخته شده از مواد متغیر تابعی محوری؛
- ۶) تحلیل میرایی ترموالاستیک با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما؛

۷) بررسی عوامل اتلاف کننده‌ی ذاتی و خارجی دیگر بر عملکرد میکرو و نانو تیرها، صفحه‌ها و هندسه‌های متدوال موجود در مسائل میکرو و نانو.

پیشنهادهای ارائه شده تنها بخش کوچکی از مواردی است که می‌تواند به نزدیک شدن مطالعه حاضر به واقعیت فیزیکی مسائل موجود کمک کند.

منابع

- [1] Witvrouw A., Mehta A.; The Use of Functionally Graded Poly-SiGe Layers for MEMS Applications, *Mater. Sci. Forum.* Vol. 492-493, PP. 255–260, 2005.
- [2] Rahaeifard M., Kahrobaiyan M.H., Ahmadian M.T.; Sensitivity Analysis of Atomic Force Microscope Cantilever Made of Functionally Graded Materials; in: Vol. 6 ASME Power Transm. Gearing Conf. 3rd Int. Conf. Micro- Nanosyst. 11th Int. Conf. Adv. Veh. Tire Technol.; ASME; 2009; pp. 539–544.
- [3] Sun Y., Fang D., Soh A.K.; Thermoelastic Damping in Micro-Beam Resonators, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 43, No 10, PP. 3213–3229, 2006.
- [4] Lam D.C.C., Yang F., Chong a. C.M., Wang J., Tong P.; Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity, *J. Mech. Phys. Solids.* Vol. 51, No 8, PP. 1477–1508, 2003.
- [5] Kong S., Zhou S., Nie Z., Wang K.; Static and Dynamic Analysis of Micro Beams Based on Strain Gradient Elasticity Theory, *Int. J. Eng. Sci.* Vol. 47, No 4, PP. 487–498, 2009.
- [6] Cleland A.N., Roukes M.L.; External Control of Dissipation in a Nanometer-Scale Radiofrequency Mechanical Resonator, *Sensors Actuators A Phys.* Vol. 72, No 3, PP. 256–261, 1999.
- [7] Lifshitz R., Roukes M.L.; Thermoelastic Damping in Micro- and Nanomechanical Systems, *Phys. Rev. B.* Vol. 61, No 8, PP. 5600–5609, 2000.
- [8] Hosaka H., Itao K., Kuroda S.; Damping Characteristics of Beam-Shaped Micro-Oscillators, *Sensors Actuators A Phys.* 1995.
- [9] Mihailovich R., MacDonald N.; Dissipation Measurements of Vacuum-Operated Single-Crystal Silicon Microresonators, *Sensors Actuators A Phys.* 1995.
- [10] Zhang C., Xu G., Jiang Q.; Analysis of the Air-Damping Effect on a Micromachined Beam Resonator, *Math. Mech. Solids.* 2003.
- [11] Harrington D., Mohanty P., Roukes M.; Energy Dissipation in Suspended Micromechanical Resonators at Low Temperatures, *Phys. B Condens. Matter.* 2000.
- [12] Zener C.; Internal Friction in Solids. I. Theory of Internal Friction in Reeds, *Phys. Rev.* Vol. 52, No 3, PP. 230–235, 1937.
- [13] Zener C.; Internal Friction in Solids II. General Theory of Thermoelastic Internal Friction, *Phys. Rev.* Vol. 53, No 1, PP. 90–99, 1938.
- [14] Zener C., Otis W., Nuckolls R.; Internal Friction in Solids III. Experimental Demonstration of Thermoelastic Internal Friction, *Phys. Rev.* 1938.
- [15] Berry B.; Precise Investigation of the Theory of Damping by Transverse Thermal Currents, *J. Appl. Phys.* 1955.
- [16] Roszhart T.; The effect of thermoelastic internal friction on the Q of micromachined silicon resonators; in: Solid-State Sens. Actuator Work.; Hilton Head Island, SC, USA; 1990; pp. 13–16.
- [17] Yasumura K., Stowe T., Kenny T., Rugar D.; Thermoelastic Energy Dissipation in Silicon Nitride Microcantilever Structures, *Bull. Am. Phys. Society.* Vol. 44, No 1, PP. 540, 1999.
- [18] Landau L., Lifshitz E.; Theory of Elasticity, 1959, *New York.* n.d.
- [19] Evoy S., Olkhovets A., Sekaric L., Parpia J.M., Craighead H.G., Carr D.W.; Temperature-Dependent Internal Friction in Silicon Nanoelectromechanical Systems, *Appl. Phys. Lett.* Vol. 77, No 15, PP. 2397, 2000.
- [20] Duwel A., Gorman J., Weinstein M.; Experimental Study of Thermoelastic Damping in MEMS Gyros, *Sensors Actuators A Phys.* Vol. 103, No 1-2, PP. 70–75, 2003.

- [21] Nayfeh A., Younis M.; Modeling and Simulations of Thermoelastic Damping in Microplates, *J. Micromechanics Microengineering*. Vol. 14, No 12, PP. 1711, 2004.
- [22] Shen H.; Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells; 2009.
- [23] Koizumi M.; FGM Activities in Japan, *Compos. Part B Eng.* 1997.
- [24] Hirai T., Chen L.; Recent and Prospective Development of Functionally Graded Materials in Japan, *Mater. Sci. Forum*. 1999.
- [25] Uemura S.; The Activities of FGM on New Application, *Mater. Sci. Forum*. 2003.
- [26] Müller E., Drašar Č., Schilz J., Kaysser W.; Functionally Graded Materials for Sensor and Energy Applications, *Mater. Sci. Eng. A*. Vol. 362, No 1-2, PP. 17–39, 2003.
- [27] Qiu J., Tani J., Ueno T., Morita T., Takahashi H., Du H.; Fabrication and High Durability of Functionally Graded Piezoelectric Bending Actuators, *Smart Mater. Struct.* Vol. 12, No 1, PP. 115–121, 2003.
- [28] Liu L., Zhang Q., Zhai P.; The Optimization Design on Metal/Ceramic FGM Armor with Neural Net and Conjugate Gradient Method, *Mater. Sci. Forum*. 2003.
- [29] Paszkiewicz B., Paszkiewicz R., Wosko M.; Functionally Graded Semiconductor Layers for Devices Application, *Vacuum*. 2007.
- [30] Watari F., Yokoyama A., Omori M.; Biocompatibility of Materials and Development to Functionally Graded Implant for Bio-Medical Application, *Compos. Sci. Technol.* Vol. 64, No 6, PP. 893–908, 2004.
- [31] Suresh S., Mortensen A.; Fundamentals of Functionally Graded Materials, 1998, *IOM Commun. Ltd., London*. n.d.
- [32] Lakes R.; Size Effects and Micromechanics of a Porous Solid, *J. Mater. Sci.* 1983.
- [33] Cosserat E., Cosserat F.; Théorie Des Corps Déformables, *Paris*. 1909.
- [34] Voigt W.; Theoretische Studien Über Die Elastizitätsverhältnisse Der Krystalle.; Dieterichsche Verlags-buchhandlung; Göttingen; 1887.
- [35] Gauthier R.; Analytical and Experimental Investigations in Linear Isotropic Micropolar Elasticity, 1974.
- [36] Mindlin R., Tiersten H.; Effects of Couple-Stresses in Linear Elasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1962.
- [37] Toupin R.; Elastic Materials with Couple-Stresses, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1962.
- [38] Koiter W.; Couple Stresses in the Theory of Elasticity, I and II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. B*. 1964.
- [39] Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P.; Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 39, PP. 2731–2743, 2002.
- [40] Park S.K., Gao X.-L.; Bernoulli–Euler Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory, *J. Micromechanics Microengineering*. Vol. 16, No 11, PP. 2355–2359, 2006.
- [41] Kong S., Zhou S., Nie Z., Wang K.; The Size-Dependent Natural Frequency of Bernoulli–Euler Micro-Beams, *Int. J. Eng. Sci.* Vol. 46, No 5, PP. 427–437, 2008.
- [42] Ma H., Gao X., Reddy J.; A Microstructure-Dependent Timoshenko Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory, *J. Mech. Phys. Solids*. 2008.
- [43] Ma H.M., Gao X.X.-L., Reddy J.J.N.; A Nonclassical Reddy-Levinson Beam Model Based on a Modified Couple Stress Theory, *Int. J. Multiscale* Vol. 8, No 2, PP. 167–180, 2010.
- [44] Mindlin R.D.; Second Gradient of Strain and Surface-Tension in Linear Elasticity, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 1, PP. 417–438, 1965.
- [45] Fleck N.A., Hutchinson J.W.; Strain Gradient Plasticity, *Adv. Appl. Mech.* Vol. 33, PP. 295–361, 1997.

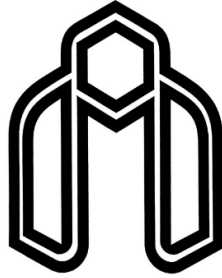
- [46] Fleck N.A., Hutchinson J.W.; A Reformulation of Strain Gradient Plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*. Vol. 49, PP. 2245–2271, 2001.
- [47] Eringen A.; Nonlocal Continuum Field Theories; 2002.
- [48] Eringen A., Edelen D.; On Nonlocal Elasticity, *Int. J. Eng. Sci.* 1972.
- [49] Murmu T., Pradhan S.C.; Small-Scale Effect on the Vibration of Nonuniform Nanocantilever Based on Nonlocal Elasticity Theory, *Phys. E Low-Dimensional Syst. Nanostructures*. Vol. 41, PP. 1451–1456, 2009.
- [50] Rafiei M., Mohebpour S.R., Daneshmand F.; Small-Scale Effect on the Vibration of Non-Uniform Carbon Nanotubes Conveying Fluid and Embedded in Viscoelastic Medium, *Phys. E Low-Dimensional Syst. Nanostructures*. Vol. 44, PP. 1372–1379, 2012.
- [51] Abrate S.; Vibration of Non-Uniform Rods and Beams, *J. Sound Vib.* Vol. 185, PP. 703–716, 1995.
- [52] Hsu J.-C., Lai H.-Y., Chen C.K.; Free Vibration of Non-Uniform Euler–Bernoulli Beams with General Elastically End Constraints Using Adomian Modified Decomposition Method, *J. Sound Vib.* Vol. 318, No 4-5, PP. 965–981, 2008.
- [53] Ece M., Aydogdu M., Taskin V.; Vibration of a Variable Cross-Section Beam, *Mech. Res. Commun.* 2007.
- [54] Baghani M., Mazaheri H., Salarieh H.; Analysis of Large Amplitude Free Vibrations of Clamped Tapered Beams on a Nonlinear Elastic Foundation, *Appl. Math. Model.* 2013.
- [55] Li X.; A Unified Approach for Analyzing Static and Dynamic Behaviors of Functionally Graded Timoshenko and Euler–Bernoulli Beams, *J. Sound Vib.* 2008.
- [56] Pradhan K., Chakraverty S.; Free Vibration of Euler and Timoshenko Functionally Graded Beams by Rayleigh–Ritz Method, *Compos. Part B Eng.* 2013.
- [57] Aydogdu M., Taskin V.; Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with Simply Supported Edges, *Mater. Des.* Vol. 28, No 5, PP. 1651–1656, 2007.
- [58] Şimşek M.; Fundamental Frequency Analysis of Functionally Graded Beams by Using Different Higher-Order Beam Theories, *Nucl. Eng. Des.* 2010.
- [59] Neves A., Ferreira A.; A Quasi-3D Sinusoidal Shear Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates, *Compos. Part B Eng.* Vol. 43, No 2, PP. 711–725, 2012.
- [60] Shahba A., Attarnejad R., Marvi M.T., Hajilar S.; Free Vibration and Stability Analysis of Axially Functionally Graded Tapered Timoshenko Beams with Classical and Non-Classical Boundary Conditions, *Compos. Part B Eng.* Vol. 42, PP. 801–808, 2011.
- [61] Shahba A., Attarnejad R., Hajilar S.; Free Vibration and Stability of Axially Functionally Graded Tapered Euler-Bernoulli Beams, *Shock Vib.* 2011.
- [62] Alshorbagy A., Eltaher M., Mahmoud F.; Free Vibration Characteristics of a Functionally Graded Beam by Finite Element Method, *Appl. Math. Model.* 2011.
- [63] Shahba A., Rajasekaran S.; Free Vibration and Stability of Tapered Euler-Bernoulli Beams Made of Axially Functionally Graded Materials, *Appl. Math. Model.* Vol. 36, PP. 3094–3111, 2012.
- [64] Huang Y., Li X.F.; A New Approach for Free Vibration of Axially Functionally Graded Beams with Non-Uniform Cross-Section, *J. Sound Vib.* Vol. 329, PP. 2291–2303, 2010.
- [65] Huang Y., Yang L.E., Luo Q.Z.; Free Vibration of Axially Functionally Graded Timoshenko Beams with Non-Uniform Cross-Section, *Compos. Part B Eng.* Vol. 45, PP. 1493–1498, 2013.

- [66] Sarkar K., Ganguli R.; Closed-Form Solutions for Axially Functionally Graded Timoshenko Beams Having Uniform Cross-Section and Fixed-fixed Boundary Condition, *Compos. Part B Eng.* 2014.
- [67] Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F., Hutchinson J.W.; Strain Gradient Plasticity: Theory and Experiment, *Acta Metall. Mater.* Vol. 42, PP. 475–487, 1994.
- [68] Stölken J.S., Evans A.G.; A Microbend Test Method for Measuring the Plasticity Length Scale, *Acta Mater.* Vol. 46, PP. 5109–5115, 1998.
- [69] McFarland A.W., Colton J.S.; Role of Material Microstructure in Plate Stiffness with Relevance to Microcantilever Sensors, *J. Micromechanics Microengineering.* Vol. 15, No 5, PP. 1060–1067, 2005.
- [70] Ansari R., Gholami R., Sahmani S.; Free Vibration Analysis of Size-Dependent Functionally Graded Microbeams Based on the Strain Gradient Timoshenko Beam Theory, *Compos. Struct.* Vol. 94, No 1, PP. 221–228, 2011.
- [71] Rahaeifard M., Kahrobaiyan M.H., Ahmadian M.T., Firoozbakhsh K.; Strain Gradient Formulation of Functionally Graded Nonlinear Beams, *Int. J. Eng. Sci.* Vol. 65, PP. 49–63, 2013.
- [72] Mustapha K.B., Zhong Z.W.; Free Transverse Vibration of an Axially Loaded Non-Prismatic Single-Walled Carbon Nanotube Embedded in a Two-Parameter Elastic Medium, *Comput. Mater. Sci.* Vol. 50, PP. 742–751, 2010.
- [73] Şimşek M.; Nonlocal Effects in the Free Longitudinal Vibration of Axially Functionally Graded Tapered Nanorods, *Comput. Mater. Sci.* Vol. 61, PP. 257–265, 2012.
- [74] Akgöz B., Civalek Ö.; Free Vibration Analysis of Axially Functionally Graded Tapered Bernoulli–Euler Microbeams Based on the Modified Couple Stress Theory, *Compos. Struct.* Vol. 98, PP. 314–322, 2013.
- [75] Sun Y., Fang D., Saka M., Soh A.K.; Laser-Induced Vibrations of Micro-Beams under Different Boundary Conditions, *Int. J. Solids Struct.* Vol. 45, No 7-8, PP. 1993–2013, 2008.
- [76] Prabhakar S., Païdoussis M.P., Vengallatore S.; Analysis of Frequency Shifts due to Thermoelastic Coupling in Flexural-Mode Micromechanical and Nanomechanical Resonators, *J. Sound Vib.* Vol. 323, No 1-2, PP. 385–396, 2009.
- [77] Khanchehgardan A., Shah-Mohammadi-Azar A., Rezazadeh G., Shabani R.; Thermo-Elastic Damping in Nano-Beam Resonators Based on Nonlocal Theory, *Int. J. Eng. - Trans. C Asp.* Vol. 26, No 12, PP. 1505–1514, 2013.
- [78] Rezazadeh G., Saeedi A., Tayefeh-rezaei S., Vahdat A.S., Tayefeh-rezaei S., Cetinkaya C., et al.; Thermoelastic Damping in a Micro-Beam Resonator Using Modified Couple Stress Theory, *Acta Mech.* Vol. 223, No 12, PP. 1137–1152, 2013.
- [79] Rao S., Yap F.; Mechanical Vibrations; 1995.
- [80] Lord H.W., Shulman Y.; A Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity, *J. Mech. Phys. Solids.* Vol. 15, No 5, PP. 299–309, 1967.
- [81] Chester M.; Second Sound in Solids, *Phys. Rev.* Vol. 131, No 5, PP. 2013–2015, 1963.
- [82] Kinra V.K., Milligan K.B.; A Second-Law Analysis of Thermoelastic Damping, *J. Appl. Mech.* Vol. 61, No 1, PP. 71, 1994.

Abstract

In this research, thermoelastic damping in axially functionally graded microbeam resonators is investigated using modified strain gradient theory. First, by adopting Hamilton principle, the governing equation of free vibration of tapered microbeam made of axially functionally graded materials is derived based on modified strain gradient theory. The dimensionless natural frequencies of cantilever and clamped-clamped microbeams are obtained by the semi-analytical methods, Rayleigh-Ritz and Galerkin, respectively. Since, the Rayleigh-Ritz test function does not satisfy all the boundary conditions, the governing differential equation and all boundary expressions are converted to an integral equation. According to integral equation, natural frequencies are determined using power expansion series and shifted Legendre polynomials series for cantilevered microbeam and series of common orthogonal function for clamped-clamped microbeam. The results of semi-analytical methods and solution of integral equation are compared to results of available literatures which in many cases a good overlap among them is observed. Hence, it can be concluded that the selection of semi-analytic test functions satisfy certain boundary conditions, therefore they can offer an acceptable answer. The thermoelastic damping in homogeneous microbeam is investigated based on the modified strain gradient and generalized thermoelasticity theories. The both complex frequency and entropy generation approaches are employed to determine the results of the quality factor and the critical thickness of microbeam resonator are obtained that the attenuation of critical thickness is maximum. By comparing some results of the quality factor based on both approaches, an excellent agreement is observed between them. The thermoelastic damping in the microbeam resonator made of axially functionally graded materials are studied with respect to the length scale parameters and the thermal relaxation time which are related to the modified strain gradient and Non-Fourier heat conduction theories, respectively.

Key words: Thermoelastic damping, modified strain gradient theory, generalized thermoelasticity, axially functionally graded materials.



Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering

Thermoelastic Damping in an Axially Functionally Graded Microbeam Using Modified Strain Gradient Elasticity Theory

Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
Master of Science (M.Sc)
In Mechanical Engineering, Applied mechanics

Mohammad Bostani

Supervisor:
Dr. Ardeshir Karami mohammadi

February 2015