

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

تحلیل کمانش ترمومکانیکی ورق حلقوی نازک FGM تحت بار فشاری شعاعی یکنواخت و حرارت

افلاطون شهابی

استاد راهنما

دکتر علیرضا شاطرزاده

بهمن ماه ۱۳۹۳

شماره: ۲۴۵، ۲۸۲
تاریخ: ۱۳۹۸/۱۲/۲۳
ویرایش:

باسمه تعالی



فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خاتم / آقای افلاطون شهبانی رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل گمانش ترمومکانیکی ورق حلقوی نازک FGM تحت بار فشاری شعاعی بکنواخت و حرارت که در تاریخ ۹۳/۱۱/۲۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> مردود	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input checked="" type="checkbox"/> قبول (با درجه: <u>بسیار خوب امتیاز ۱۸</u>)
--------------------------------	------------------------------------	---

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استادارهنما	علیرضا شاطرزاده	استادیار	
۲- استاد مشاور			
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	آرش یزدانی	استادیار	
۴- استاد ممتحن	حمیدرضا ابیک چی	دانشیار	
۵- استاد ممتحن	محمدباقر نظری	دانشیار	

رئیس دانشکده:

چکیده

تحلیل پایداری و مطالعه رفتار کمانش صفحات، همواره به عنوان یکی از مهم‌ترین موضوعات در تحلیل سازه‌ها مورد توجه بوده است. در این مقاله کمانش نامتقارن ورق‌های حلقوی ساخته‌شده از مواد تابعی روی یک محیط الاستیک، تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت به طور تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از نظریه‌ی کلاسیک و فرضیه‌ی غیرخطی ون-کارمن، معادله تعادل به‌دست آمده است. خواص ترمومکانیکی ورق به صورت تابعی و در جهت ضخامت، بر اساس رابطه تابع نمایی تغییر می‌کند درحالی‌که ضریب پواسن ثابت است. همچنین خواص مواد وابسته به دما در نظر گرفته شده است. وجود شاخه‌های کمانش برای انواع شرایط مرزی، تخمین زده شده است و معادلات پایداری توسط معیار تعادل در مجاورت به‌دست آمده است. یک راه‌حل نامتقارن برای محاسبه بار کمانش، استفاده از مقدار ویژه رابطه پایداری است. تأثیر پارامترهایی از جمله نسبت ضخامت ورق به شعاع بیرونی، نسبت شعاع داخلی به خارجی، شاخص تابع نمایی و ضرایب محیط الاستیک و محیط حرارتی بر بار بحرانی کمانش ورق FGM مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج حاصل از کار حاضر تا حد امکان با سایر مراجع مورد راستی‌آزمایی قرار گرفته است.

واژگان کلیدی:

ورق‌های حلقوی، کمانش نامتقارن، مواد تابعی، خواص وابسته به دما.

تقدیم نامہ:

سپاس از دو وجود مقدس

آنان کہ ناتوان شدند تا بہ توانایی برسند

مویشان سپید گشت تار و سفید شوم

وحاشا غنہ سوختند تا کہ ملخش وجود و روغنک را ہم باشند

تقدیم بہ پدر و مادر مہربانم

پاس کزاری:

شکرشایان نثار ایزدمنان که توفیق رارفتی را هم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم.

از پدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوار که همواره بر کوشایی و درستی من قلم حنوکشیده و گریانه از کنار خفت های من گذشتند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاور بی چشم داشت برای من بودن نهایت تقدیر و شکر را داریم.

از زحمات فراوان استاد بزرگوار و عزیزم جناب آقای دکتر علیرضا شاطرزاده که از محضر پر فیض تدریس بهره بسیار برده ام شکر و قدردانی می نمایم.

همچنین از زحمات جناب دکتر کیانی که بار، نمودایشان در نتیجه رسیدن این امر محک شایانی گردید و از دوستان که اقتدرم آقایان مهندس توکلی، نظری، حامی، البرزیان و فرزانه که در تمام مراحل این پایان نامه در کنارم بودند شکر می گویم.

افلاطون شهبانی

بهمن ۹۳

فهرست عنوان‌ها

ج	چکیده.....
ه	تقدیم‌نامه.....
و	سیاسگزاری.....
ز	فهرست عنوان‌ها.....
ی	فهرست شکل‌ها.....
ک	فهرست جدول‌ها.....
ل	فهرست نشانه‌ها.....
۱	فصل ۱ مقدمه و تعاریف.....
۲	۱-۱ تاریخچه مواد هدفمند.....
۴	۲-۱ کمانش.....
۶	۱-۲-۱ مقدمه‌ای بر تحلیل پایداری.....
۷	۳-۱ بسترهای الاستیک.....
۷	۱-۳-۱ تاریخچه.....
۸	۲-۳-۱ مدل وینکلر.....
۱۰	۴-۱ مروری بر کارهای پیشین.....
۱۷	فصل ۲ مواد هدفمند.....
۱۷	۱-۲ ماهیت مکانیکی مواد هدفمند.....
۲۲	۲-۲ روش ساخت مواد هدفمند.....
۲۲	۳-۲ کاربردهای مواد هدفمند.....
۲۳	۴-۲ مدل‌های مواد هدفمند.....
۲۴	۱-۴-۲ مدل ردی.....
۲۵	۲-۴-۲ مدل اردوگان.....
۲۶	۳-۴-۲ مدل تانیگاوا.....

۲۹	فصل ۳ معادلات حاکم و تحلیل کمانش
۳۰	۱-۳ مقدمه
۳۰	۲-۳ تئوری حاکم بر ورق
۳۰	۱-۲-۳ تئوری کلاسیک صفحات (CPT)
۳۱	۲-۲-۳ تئوری جابه‌جایی برشی مرتبه اول (FSDT)
۳۱	۳-۲-۳ تئوری جابه‌جایی برشی مرتبه سوم (TSDT)
۳۱	۳-۳ هندسه و خواص ورق
۳۲	۱-۳-۳ خواص ورق حلقوی FGM
۳۳	۲-۳-۳ خواص وابسته به دما
۳۴	۴-۳ منته‌های نیرو و گشتاور
۳۸	۵-۳ استخراج معادلات تعادل
۴۷	۶-۳ بررسی وجود کمانش در اثر اعمال بارهای داخل صفحه‌ای
۴۸	۱-۶-۳ کمانش مکانیکی
۵۰	۲-۶-۳ کمانش حرارتی
۵۲	۳-۶-۳ کمانش ترمومکانیکی
۵۴	۷-۳ معادلات پایداری
۶۱	۸-۳ حل معادله پایداری
۶۱	۱-۸-۳ تحلیل کمانش مکانیکی
۶۳	۲-۸-۳ تحلیل کمانش حرارتی
۶۶	۳-۸-۳ شرایط مرزی
۶۸	۹-۳ استخراج رابطه نهایی کمانش
۶۸	۱-۹-۳ کمانش مکانیکی
۷۲	۲-۹-۳ کمانش حرارتی
۷۵	فصل ۴ تحلیل و بررسی نتایج
۷۶	۱-۴ مقدمه
۷۶	۲-۴ خواص وابسته به دما
۷۷	۳-۴ صحت‌گذاری و مقایسه نتایج با تحقیقات گذشته
۷۷	۱-۳-۴ کمانش مکانیکی
۷۸	۲-۳-۴ کمانش حرارتی
۷۸	۴-۴ ارائه و بررسی نتایج

۷۹	۱-۴-۴ کمانش مکانیکی
۸۵	۲-۴-۴ کمانش حرارتی
۸۸.....	۵-۴ جمع بندی نتایج
۸۹.....	۶-۴ پیشنهادها
۹۰.....	منبع ها

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱- منحنی بار-جابه‌جایی برای ستون یک سر گیردار تحت بار فشاری. ۵
- شکل ۱-۲- منحنی بار- جابه‌جایی برای یک تیر خمیده در معرض فشار جانبی. ۶
- شکل ۱-۳- خیز یک بستر تحت بار فشاری (الف) بستر وینکلر (ب) یک بستر واقعی. ۹
- شکل ۱-۴- مدل موسوم به وینکلر- پسترناک. ۹
- شکل ۱-۲- نمای یک ورق FGM با سطح داخلی فلز و سطح بیرونی سرامیک. ۱۹
- شکل ۲-۲- ساختار و تغییرات خصوصیات یک ماده FGM. ۲۰
- شکل ۲-۳- مقایسه مدول الاستیسیته و ضریب انتقال حرارتی (الف) ماده FGM (ب) ماده همگن. ۲۰
- شکل ۲-۴- مقایسه خواص FGM و کامپوزیت CLC. ۲۱
- شکل ۱-۳- ورق نازک حلقوی FGM روی محیط الاستیک تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت. ۳۲
- شکل ۲-۳- توزیع کسر حجمی سرامیک در جهت ضخامت به ازای مقادیر مختلف شاخص تابع نمایی. ۳۳
- شکل ۱-۴- تأثیر دما بر بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM، فاقد محیط الاستیک. ۸۲
- شکل ۲-۴- تأثیر توان تابع نمایی (k) بر بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM. ۸۸
- شکل ۳-۴- تأثیر δ بر بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM، به ازای ضرایب محیط الاستیک. ۸۳
- شکل ۴-۴- تأثیر β بر بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM به ازای دماهای مختلف. ۸۹
- شکل ۵-۴- تأثیر شرایط مرزی لبه‌های داخلی و خارجی ورق حلقوی ایزوتروپیک بر بار بحرانی ورق. ۹۰
- شکل ۶-۴- تأثیر توان تابع نمایی بر دمای بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM. ۹۱
- شکل ۷-۴- تأثیر β بر دمای بحرانی کمانش حرارتی ورق حلقوی FGM. ۹۲
- شکل ۸-۴- تأثیر δ بر دمای بحرانی کمانش حرارتی ورق حلقوی FGM روی محیط الاستیک. ۹۳

فهرست جدول‌ها

- جدول ۴-۱- ضرایب خواص وابسته به دما برای دو ماده $SUS304$ و Si_3N_4 [۵۲]..... ۷۶
- جدول ۴-۲- مقایسه پارامتر بی‌بعد بحرانی کمانش ورق همگن ایزوتروپیک با مرجع [۷]..... ۷۷
- جدول ۴-۳- مقایسه بین نتایج حاضر و نتایج مرجع [۳۶] برای ورق حلقوی ایزوتروپ ۷۸
- جدول ۴-۴- بار بحرانی کمانش ورق حلقوی تحت شرایط مرزی گیردار در حالت متقارن و نامتقارن..... ۷۹
- جدول ۴-۵- بررسی اثر ضرایب محیط الاستیک و δ بر بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM..... ۸۰
- جدول ۴-۶- دمای بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM با تحت افزایش دمای یکنواخت..... ۸۵

فهرست نشانه‌ها

M_{rr}	منتجه‌ی گشتاور شعاعی	E	مدول یانگ
$M_{\theta\theta}$	منتجه‌ی گشتاور دورانی	α	ضریب انبساط حرارتی
$M_{r\theta}$	منتجه‌ی گشتاور برشی	ν	ثابت پواسن
N^T	منتجه‌ی نیروی حرارتی	k	شاخص تابع نمایی
M^T	منتجه‌ی گشتاور حرارتی	V_c	کسر حجمی سرامیک
K_w	ضریب وینکلر	V_m	کسر حجمی فلز
K_g	ضریب پسترناک	u_0	جابه‌جایی شعاعی
D_k	سفتی خمشی ورق	v_0	جابه‌جایی دورانی
δ	نسبت ضخامت به شعاع	w_0	جابه‌جایی عرضی
β	نسبت شعاع داخلی به بیرونی	σ	تنش نرمال
		ε	کرنش نرمال
		τ	تنش برشی
		γ	کرنش برشی
		N_{rr}	منتجه‌ی نیرو شعاعی
		$N_{\theta\theta}$	منتجه‌ی نیرو دورانی
		$N_{r\theta}$	منتجه‌ی نیرو برشی

فصل ۱

مقدمه و تعاریف

۱-۱ تاریخچه مواد هدفمند

ماده FG ماده‌ای است که از دو یا چند جزء تشکیل شده و خواص آن به طور پیوسته با مکان تغییر می‌کند. این خاصیت با تغییر تدریجی ترکیب و درصد حجمی اجزای تشکیل دهنده ماده در طی ساخت آن به وجود می‌آید. لذا این مواد در زمره مواد ناهمگن^۱ هستند. از مزایای استفاده از این مواد این است که به علت تغییرات تدریجی در ساختار و خصوصیات ماده، مشکلات موجود در فصل مشترک دو ماده متفاوت حذف شده و تنش‌های حرارتی، تنش‌های پسماند و عامل تمرکز تنش، نسبت به مواد مرکب لایه‌ای بسیار کاهش می‌یابد.

نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالای حرارتی و مکانیکی و قابلیت تحمل گرادیان شدید حرارتی، به انگیزه‌ای برای تولید مواد هدفمند تبدیل گشت. به عنوان مثال سطوح سازه‌های فضایی به هنگام ورود به جو زمین می‌بایست اختلاف دمایی در حدود ۱۶۰۰ درجه کلوین را تحمل نمایند. به این علت دانشمندان علم مواد در ژاپن در سال ۱۹۸۴ در مرکز تحقیقات هوافضا در شهر سندایی^۲ تصمیم گرفتند ماده‌ای طراحی کنند تا گرادیان شدید دما را تحمل کند [۱]. در سال ۱۹۸۷، سه سال بعد از اولین ایده‌های ساخت مواد هدفمند، یک پروژه‌ی عظیم برای رسیدن به فن‌آوری اولیه ساخت این مواد تعریف شد که مؤسسات پژوهشی هفده کشور و چندین دانشگاه و شرکت در آن همکاری کردند [۴].

برای نخستین بار در سال ۱۹۷۲ بور^۳ و دووز^۴ [۵]، ایده ترکیب دو فاز مختلف را با تغییر در نحوه آرایش و ترتیب هرکدام از فازها در هر لایه به منظور بهبود خواص مکانیکی مطرح کردند. ایده آنها عموماً از نتایج تحقیقات گسترده‌ای که گتزل^۵ [۶] در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ روی مواد مرکب انجام داده بود نشأت می‌گرفت. در اواسط دهه‌ی ۱۹۸۰ برای نخستین بار در کشور ژاپن نام علمی FGM^۶ به مواد هدفمند داده شد و عصر جدیدی برای تحقیقات گسترده روی این مواد گشود. سه تن از

¹ Non-Homogenous

² Sendai

³ Bever

⁴ Douwez

⁵ Gotzel

⁶ Functionally Graded Material

دانشمندان به نام‌های نینو^۱، کویزومی^۲ و هیرای [۴] تحقیقات خود را بر روی پروژه‌ی فضاپیماهای فضایی آغاز کردند. تحقیقات این سه تن نشان می‌دهد که با توجه به اینکه اجزای سازه‌های به‌کاررفته در بدنه هواپیماهای فضایی تحت بارهای بسیار شدید قرار می‌گیرند، در ترکیب درجه‌بندی ریزساختارهای سازه‌های بدنه بایستی به دو مورد توجه گردد. نخست، از اجزای سازه‌ای موجود و در دسترس ساخته شده و ثانیاً، از تمرکز تنش در اجزای سازه‌های فضایی به دلیل به وجود آمدن سطوح نوک‌تیز پرهیز گردد. نتیجه این یافته‌ها باعث شد که در سال ۱۹۸۷ در کشور ژاپن سازمانی متشکل از دانشمندان مختلف تأسیس شده و بودجه‌ی بسیار زیادی به منظور تحقیق گسترده در ارتباط مواد هدفمند تخصیص یابد. این سازمان تحقیقات خود را روی اجزایی که یک وجه آن سرد شده‌اند و وجه دیگرشان در محیط بسیار داغ نگهداری می‌شوند، معطوف نمود. کمیته علمی این سازمان مأمور طراحی و ارزیابی سیستم‌های مرکب معدنی گشت که نهایتاً به سمت فلزات و سرامیک‌ها هدایت شدند. برای سطح داغ، دما حدود ۲۰۰۰ درجه کلوین در محیطی اکسید کننده در نظر گرفته شد و آزمایش‌ها سرامیک را ماده مناسبی برای سطح داغ نشان داد. سطح سردتر در دمای ۱۰۰۰ درجه کلوین قرار داشت و به این شکل خصوصیتی مانند مقاومت، سختی و هدایت حرارتی مواد مد نظر قرار گرفت. بین دو سطح داغ‌تر و سردتر را با مخلوطی از سرامیک و فلز با درصدی مشخص پر کردند که این عمل توسط متالوژی پودر صورت گرفت. در سال ۱۹۹۳، کویزومی، میاماتو^۳، نینو و ساساکی^۴ [۶] توجه خود را بر روی سیستم‌های بقای انرژی معطوف کردند. هدف این برنامه تحقیقاتی استفاده از مواد هدفمند برای بهینه کردن تبدیل انرژی حرارتی به الکتریسیته بود که در مواد ترموالکتریک استفاده می‌شود. اهمیت ویژه‌ی این پروژه در زمینه بازدهی بالا در بقای انرژی در محدوده وسیعی از تغییرات درجه حرارت بود. در خارج از کشور ژاپن در بین سال‌های ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۰ و در چند کشور از جمله آلمان، ایالات متحده آمریکا، چین و روسیه تحقیقاتی روی مواد هدفمند صورت گرفت. در آلمان یک برنامه تحقیقاتی از سال ۱۹۹۵ با مشارکت تعداد زیادی از آزمایشگاه‌ها صورت گرفت. این برنامه شامل چهار شاخص اصلی بود که عبارتند از:

۱- فرایند تولید مواد هدفمند بر اساس ریخته‌گری، صاف کردن و رشد کریستالی.

¹ Ninva

² Koizumi

³ Miyamoto

⁴ Sasaki

۲- فرایند تولید مواد بر اساس پودر کردن

۳- مدل سازی ترمومکانیکی

۴- ساخت مواد زیست پزشکی

هر چند تلاش‌های بسیار زیادی به منظور ساخت و کاربرد مواد هدفمند در محیط‌های پژوهشی و آزمایشگاه‌های تحقیقاتی در سال‌های اخیر صورت گرفته است. ولی رشد و شکوفایی بیشتر این مواد در صنعت، در دهه‌های آینده پیش از پیش عیان می‌گردد. برای مواد هدفمند کاربردهای فراوانی پیدا کرده‌اند که از جمله می‌توان به تولید پره‌های توربین، اتصال فلز به سرامیک، اجزای موتورهای انفجاری، تولید ابزار برش، وسایل اطفای حریق در ساختمان‌ها، مواد مرکب پلیمری با مقاومت بالا و پوشش محافظ احتراق پیشران موشک، مواد پیزوالکتریک و کاربردهایی در مهندسی پزشکی اشاره نمود [۶،۲].

۱-۲ کمانش

پدیده کمانش از حدود یک قرن پیش مورد توجه دانشمندان علم مکانیک بوده است. از آن زمان تا به حال پژوهش‌های بسیاری در این زمینه انجام شده است که نخستین مطالعات، مربوط به ستون‌ها بوده و سپس ورق‌ها و پوسته‌ها نیز مورد توجه قرار گرفت.

چنانچه سازه‌ای در معرض بار فشاری قرار گیرد برای بارهای کوچک، سازه به سختی تغییر شکل می‌دهد. چنانچه مقدار بار اعمالی افزایش یابد برای مقدار خاصی از بار که مقدار بحرانی^۱ نامیده می‌شود، سازه نمی‌تواند نیروی اعمالی را تحمل کند و از این نقطه به بعد، سازه وارد تغییر شکل بزرگ می‌شود. این رفتار در سازه‌هایی همچون تیر تحت بار فشاری، ورق‌های دایروی و مستطیلی و پوسته‌های استوانه‌ای، مخروطی و کروی مشاهده می‌شود. در بسیاری از موارد چنانچه ورق ضخیم نباشد، مقدار بار کمانش سازه از مقدار تنش تسلیم آن کم‌تر می‌باشد. در چنین مواردی طراحی بر اساس بار بحرانی کمانش مقدم بوده و پدیده کمانش از اهمیت بالایی برخوردار خواهد بود. کمانش در سازه‌ها که از آن به نام ناپایداری سازه‌ای^۲ نیز یاد می‌شود، به دو گروه عمده تقسیم‌بندی می‌شود. این دو دسته عبارتند از کمانش از نوع نقطه دوگانگی^۳ و کمانش از نوع نقطه حدی^۴. برای درک بهتر این دو رفتار،

¹ Critical Load

² Structural instability

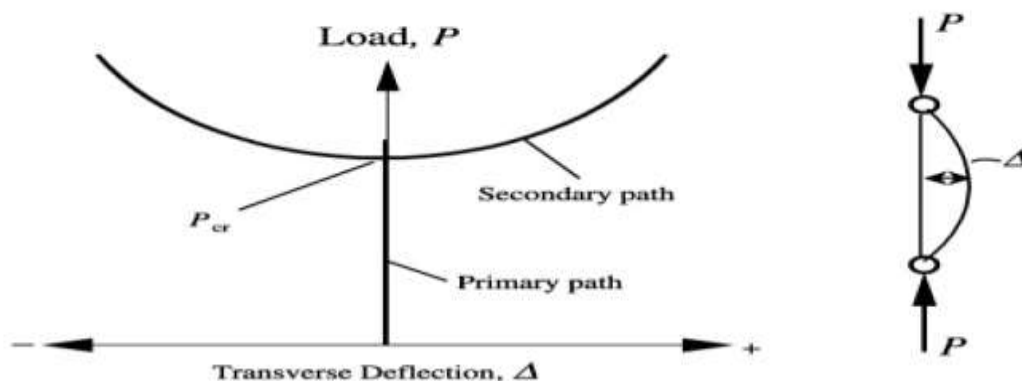
³ Bifurcation Type Buckling

⁴ Limit Type Buckling

لازم است که مسیرهای تعادلی سازه مورد بررسی قرار گیرد. در تئوری پایداری سازه‌ها، به مسیرهای بار بر حسب جابه‌جایی، مسیر تعادلی^۱ سازه می‌گویند.

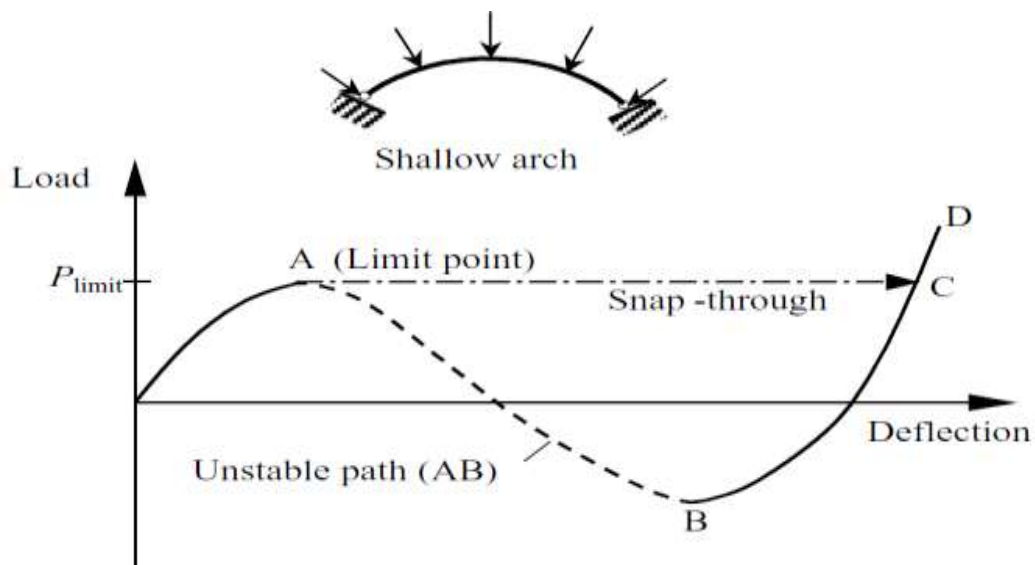
در کمانش از نوع نقطه دوگانگی، تغییر شکل از نوعی به نوع دیگر می‌باشد؛ یعنی مسیر تعادلی سازه از مسیر تعادل اولیه‌اش^۲ که به آن مسیر پیش‌کمانش^۳ می‌گویند رها شده و وارد مسیر پس‌کمانش^۴ که به آن مسیر ثانویه^۵ می‌گویند خواهد شد. در واقع در این نوع از کمانش، مقدار بار بحرانی با تقاطع مسیرهای اولیه و ثانویه سازه برابر خواهد بود. به عنوان مثال برای یک ستون یکسر گیردار که در معرض نیروی فشاری محوری در انتهای آزادش قرار می‌گیرد، اعمال بار در ابتدا باعث کاهش طول سازه (در راستای اعمال نیرو) می‌گردد ولی رفته‌رفته با افزایش نیروی اعمالی و رسیدن بار به مقدار بحرانی، ستون در جهت عرضی خم می‌شود. در این حالت تغییر شکل سازه دو رفتار متفاوت را تجربه می‌کند. در مرحله قبل از کمانش، سازه در برابر خم شدن در مقابل نیروی اعمالی مقاومت می‌کند. هر چند در مرحله پس‌کمانش، خمیدگی سازه در برابر اعمال بار محوری افزایش می‌یابد. بسته به شرایط هندسی و اعمال بار، رفتار سازه در پس‌کمانش می‌تواند به صورت متقارن یا غیرمتقارن باشد. این مطلب در «شکل ۱-۱» نشان داده شده است.

در کمانش از نوع نقطه حدی سازه بدون سپری کردن نقطه دوگانگی به مقدار ماکزیممی از بار می‌رسد. این رفتار معمولاً در پوسته‌های کروی و یا تیرهای خمیده که در معرض بار فشاری قرار گرفته‌اند مشاهده می‌شود. «شکل ۱-۲» نمونه‌ای از کمانش نقطه حدی را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱- منحنی بار-جابه‌جایی برای ستون یکسر گیردار تحت بار فشاری [۷].

¹ Equilibrium path
² Primary path
³ Pre-Buckling
⁴ Post Buckling
⁵ Secondary Path



شکل ۱-۲-۱- منحنی بار- جابه‌جایی برای یک تیر خمیده در معرض فشار جانبی [۷].

۱-۲-۱- مقدمه‌ای بر تحلیل پایداری

برای تحلیل مسائلی که در دسته پایداری قرار می‌گیرند دو راه‌حل وجود دارد. در نوع اول تحلیل که حل بر پایه معیار نقطه مجاورت^۱ صورت می‌پذیرد، تنها قادر به استخراج نقطه کمانش سازه هستیم. این روش معمولاً بر پایه مقدار ویژه^۲ استوار است و در آن مقدار ویژه مسئله برابر مقدار بار بحرانی و بردار ویژه مسئله برابر شکل کمانش یافته سازه خواهد بود. بر پایه این روش حل ابتدا مسیر اولیه تعادلی یا همان مسیر پیش‌کمانش مورد بررسی قرار می‌گیرد. این مطالعات با حل معادلات تعادل در مرحله پیش‌کمانش همراه با فرضیات ساده شونده‌ای صورت می‌پذیرد. از منظر تئوری، سازه تمایل به ادامه مسیر پیش‌کمانش دارد اما در عمل سازه به سمت مسیر ثانویه منحرف می‌شود بنابراین برای تطابق پاسخ تئوری با واقعیت، باید سازه را از مسیر پیش‌کمانش به اندازه غیر صفر ولی کوچک منحرف کنیم. غیر صفر بودن مقدار انحراف به دلیل جدا شدن از مسیر پیش‌کمانش و ناچیز بودن به دلیل مجاورت در مسیر پیش‌کمانش می‌باشد.

بدین ترتیب معادلات حاصله، معادلات پایداری هستند که نسبت به پارامتر اولیه دچار انحراف خطی شده‌اند. حل مقدار ویژه معادلات پایداری، منجر به یافتن بار بحرانی و شکل مد کمانش سازه خواهد شد.

¹ Adjacent-equilibrium

² Eigenvalue

در تحلیل عمومی مسئله پایداری معادلات تعادل در حالت کلی و با حضور جملات ناشی از تغییر شکل هندسی بررسی می‌شوند [۲]. در این دسته از تحلیل‌ها عموماً استفاده از روش‌های عددی بر روش تحلیلی ارجحیت دارد؛ زیرا پیچیدگی ناشی از غیرخطی بودن معادلات، دستیابی به پاسخ‌های تحلیلی را بسیار پیچیده می‌سازد.

۳-۱ بسترهای الاستیک

عکس‌العمل بین فونداسیون و بستر زیرین آن، یکی از مسائل مهم مهندسی عمران می‌باشد که از اواخر قرن نوزدهم توجه مهندسان را به خود جلب کرده است [۸]. استفاده از پی گسترده به گذشته بسیار دور باز می‌گردد و این نوع پی، عملکرد بسیار خوبی در انتقال نیروهای سازه به زمین نشان می‌دهد. به همین دلیل استفاده از پی گسترده بسیار متداول است. پی گسترده یک نوع پی مرکب است که کل سطح زیر سازه را پوشانده و ستون‌ها و دیوارهای متعددی بر روی آن قرار می‌گیرد. این نوع پی زمانی به کار می‌رود که نیروی ستون‌ها زیاد باشد، ستون‌ها به هم نزدیک باشند، خاک زیر پی سست باشد و یا محدود کردن نشست نسبی پی، مدنظر باشد. در حال حاضر در بیشتر مواقع برای تحلیل پی‌های گسترده انعطاف‌پذیر از یک مقدار ثابت ضریب عکس‌العمل بستر که از آزمایشگاه‌های ژئوتکنیک مثل بارگذاری صفحه‌ای به دست می‌آید، استفاده می‌شود [۹].

۱-۳-۱ تاریخچه

اولین و ساده‌ترین مدل برای بررسی اندرکنش بستر و شالوده، مدلی است که در سال ۱۸۶۷ توسط وینکلر^۱ ارائه شده است [۹]. در این مدل نیروی هر نقطه از بستر خاکی متناسب با مقدار تنش در همان نقطه فرض می‌شود و اثر تنش‌ها و تغییر مکان‌های نقاط دیگر نادیده گرفته می‌شود. در این مدل، بستر به‌وسیله مجموعه‌ای از فنرهای مستقل با یک ضریب سختی مشخص جایگزین می‌شود. بنابراین در اینجا تنها یک پارامتر برای بستر در نظر گرفته شده که با $K_{\text{و}}$ نمایش داده می‌شود. از مشخصات بارز این مدل رفتار غیر پیوسته‌ای آن می‌باشد. علیرغم مشکل ذکرشده، به دلیل سادگی مدل وینکلر در مقایسه با سایر مدل‌ها، این مدل کاربرد گسترده‌ای دارد و توسط محققان کاملاً مورد بررسی قرار گرفته است.

نخستین بار هرتز (۱۸۸۲)، از این مدل برای بررسی اندرکنش خاک و شالوده استفاده نمود. سپس اسودلر (۱۸۸۲)، زیمرمن (۱۸۸۸) در مطالعه تنش‌ها و نشست‌های ایجاد شده در ریل‌های راه‌آهن از

^۱ Winkler

این مدل استفاده کردند. هم‌چنین در تجزیه و تحلیل تیرها و صفحات واقع بر بستر الاستیک افراد بسیاری به‌ویژه هایاشی (۱۹۲۱)، چلی چر (۱۹۲۶)، هتنی (۱۹۴۶)، و لاسو و لیون تیو (۱۹۹۶)، این مدل را به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار داده‌اند.

بیشترین تحقیقات در زمینه‌ی تعیین ضریب وینکلر توسط ترزاقی در سال ۱۹۹۵ انجام شده است که روشی جهت تخمین اندازه‌های ثابت فنر ارائه نمود. وی مفهوم ضریب عکس‌العمل افقی و عمودی خاک را پایه‌گذاری کرد و اثر عوامل بر این ضریب‌ها را مورد بررسی قرار داد. از جمله عواملی که اثر آنها به وسیله ترزاقی مورد بررسی قرار گرفت، می‌توان به ابعاد پی، شکل پی و عمق آن اشاره کرد.

علیرغم اینکه در مورد تعیین ضریب عکس‌العمل خاک تحقیقات گسترده‌ای انجام شده است، هنوز در این زمینه اختلاف‌نظر بسیاری وجود دارد. امروزه در بسیاری از کتاب‌ها از همان روابط ترزاقی (۱۹۹۵) برای تعیین K_w استفاده می‌شود.

۱-۳-۲ مدل وینکلر

یکی از رایج‌ترین و ساده‌ترین مدل بستر، روش وینکلر می‌باشد که در بین اکثر طراحان شناخته شده است. در روش وینکلر، محیط خاک، مجموعه‌ای از فنرهای یکسان الاستیک خطی با فاصله نزدیک، ولی مجزا از هم و خطی در نظر گرفته شده و در هر نقطه نسبت فشار تماسی (P) به نشست حاصل از آن (W)، توسط ضریب عکس‌العمل بستر K_w ، برقرار می‌شود که در «رابطه ۱-۱» نشان داده شده است [۱۰].

$$P = K_w W \quad 1-1$$

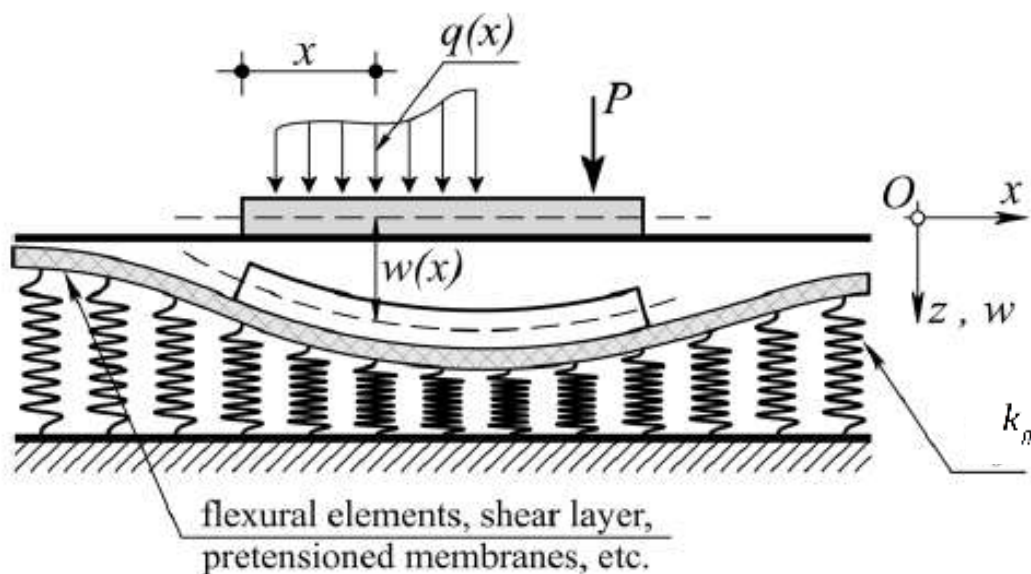
مدل وینکلر بیان دقیقی از خصوصیات تعداد زیادی از بسترهای الاستیک نداشت. یکی از مهم‌ترین کمبودهای مدل وینکلر این بود که یک ناپیوستگی تغییر مکان بین قسمت‌های تحت بار و نواحی بدون بارگذاری ایجاد می‌شد؛ اما در واقعیت بستر الاستیک دارای ناپیوستگی نبود. «شکل ۱-۳» ایراد فوق را نمایش می‌دهد. در واقع بستر الاستیک باید عملکردی شبیه به شکل (ب) داشته باشد. ایرادی که به بستر وینکلر وارد است در شکل (الف) نشان داده شده است.



شکل ۳-۱- خیز یک بستر تحت بار فشاری (الف) بستر وینکلر (ب) یک بستر واقعی [۱۰].

جهت برطرف کردن این ضعف، مدل‌های اصلاح‌شده روش وینکلر از اواسط قرن بیستم معرفی شدند [۱۲،۱۱]. در تمام این مدل‌ها برای مدل‌سازی پیوسته رفتار واقعی بستر، از صفحات الاستیک با قابلیت تحمل تغییر شکل‌های خمشی و یا برشی استفاده شده است. در سال ۱۹۵۴، پژوهشگری به نام پسترناک^۱، مدلی را ارائه نمود که در آن عکس‌العمل برشی بین فنرها به‌وسیله اتصال انتهای آنها به یک لایه که تنها تحت تنش برشی عرضی تغییر شکل می‌یابد به‌دست آمده است. این مدل که شامل عکس‌العمل بین فنرها و لایه برشی است به عنوان مدل دو پارامتری وینکلر- پسترناک نامیده شد.

در «شکل ۴-۱» مدل بستر دو پارامتری وینکلر- پسترناک نشان داده شده است.



شکل ۴-۱- مدل موسوم به وینکلر- پسترناک [۱۰].

¹ Pasternak

در این پژوهش از مدل بستر الاستیک وینکلر- پسترناک برای صفحه پایینی ورق استفاده گردیده است. رابطه عکس‌العمل صفحه زیرین و خیز برای یک ورق گرد و متقارن در صفحه پایینی به شکل زیر است با [۱۲]:

$$P = K_w W + K_g \frac{d^2 W}{dr^2} \quad ۲-۱$$

در رابطه بالا P نیروی عکس‌العمل در زیر ورق به صورت فشاری، K_g یک ثابت برشی و W خیز صفحه است.

۴-۱ مروری بر کارهای پیشین

کمانش سازه‌های مکانیکی از جمله تیرهای مستقیم و یا خمیده، ستون‌ها، ورق‌های مستطیلی و دایره‌ای، پوسته‌های استوانه‌ای، مخروطی و کروی همواره از موضوعات تحقیقات در دوره‌های مختلف بوده است. شرایط مرزی سازه‌ها، شکل هندسی، نوع بارگذاری و حضور نقص^۱ و یا سالم بودن سازه و ابعاد هندسی از جمله عوامل مهم بر مسئله ناپایداری سازه می‌باشد که می‌تواند تحقیقات در زمینه کمانش را روز به روز گسترده‌تر نماید.

اولین مسئله مربوط به ناپایداری سازه‌ها در برابر بارهای فشاری توسط لئوناردو اویلر^۲ ارائه شد. اویلر با بهره‌گیری از دیدگاه حساب تغییرات، معادلات تعادل را برای یک تیر با تکیه‌گاه دو سر ساده استخراج کرد و بار کمانش آنها را محاسبه نمود [۷]. لیاپانوف^۳، مفاهیم و تعاریف بنیادی برای تئوری ناپایداری سازه‌ها مطرح نمود و توابع تعمیم‌یافته انرژی را که از آن پس به نام توابع لیاپانوف شناخته می‌شدند معرفی کرد. پوانکاره^۴، نیز به عنوان اولین کسی که مفهوم نقطه دوگانگی را پایه‌گذاری کرد شناخته می‌شود.

ون کارمن^۵، تحقیقات خود را بر روی کمانش غیر الاستیک ستون‌ها در سال‌های ۱۸۸۱-۱۹۶۳ گسترش داد و تئوری رفتار غیرخطی سازه‌ها در معرض بارهای واقع در صفحه را مطرح کرد. وارنر

^۱ Imperfection

^۲ Leonhard Euler

^۳ Aleksander Mikhailovich Liapanuv

^۴ Jules Henry Poincare

^۵ Theodore von Karman

کوپتر^۱ به تحلیل رفتار غیرخطی سازه‌ها پرداخت و از پیشگامان تحلیل نقطه دوگانگی در حضور معادلات غیرخطی می‌باشد. بودیانسکی^۲ و همکاران نیز، تئوری در خصوص شناسایی نقطه کمانش در طول بارگذاری سازه را ارائه کردند. کارهای ذکرشده مجموعه‌ای از پیشرفت‌ها اساسی در زمینه کمانش به حساب می‌آیند [۷].

کمانش بر روی سازه‌ها در حالت توزیع تنش فشاری رخ می‌دهد. این بار فشاری می‌تواند به صورت نیروی محوری متمرکز یا گسترده با سازه عمل کند. در حالت خاص چنانچه سازه تحت تغییرات درجه حرارت قرار گیرد، ممکن است نیروهای محوری داخل صفحه ایجاد شوند. این نیروهای داخل صفحه مانند بارهای فشاری می‌توانند موجب کمانش سازه‌ها گردند. این حالت از کمانش به حالت کمانش حرارتی موسوم است. از لحاظ تاریخی، کمانش حرارتی نسبت به کمانش مکانیکی مقوله جدیدتری است.

تحلیل پایداری و مطالعه رفتار کمانش صفحات، همواره به عنوان یکی از مهم‌ترین موضوعات در تحلیل سازه‌ها مورد توجه بوده است. اولین حل مسئله‌ی پایداری برای صفحات توسط برایان [۱۳] در سال ۱۸۹۱ انجام شده است. در این تحقیق کمانش یک صفحه دایره‌ای با تکیه‌گاه گیردار تحت بار یکنواخت شعاعی بررسی شده است. ایشان برای به دست آوردن کمانش از روش انرژی و فرمول حساب تغییرات استفاده کرده‌اند. همچنین در کارهایش شکل مد کمانش را به صورت متقارن و نامتقارن در نظر گرفته شده است.

در حالت کلی مطالعات بر روی کمانش به دو دسته تقسیم می‌شوند. در برخی از تحقیقات مسئله کمانش به طور مستقیم مد نظر قرار دارد. در این حالت مسئله کمانش تبدیل به حل یک مسئله مقدار ویژه می‌گردد که در آن مقادیر ویژه، معرف بار یا دمای بحرانی و بردارهای ویژه^۳ معرف شکل مد سازه کمانش یافته است. در این نوع بررسی، حل‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی بیشتر به چشم می‌خورد. در نوع دوم تحلیل، مسئله پس از کمانش بررسی می‌شود. سپس با کمک گرفتن از منحنی‌های بار-جابه‌جایی و یا بهره‌گیری از معیار بودیانسکی، نقطه دوگانگی سازه شناخته می‌شود. در مقایسه با روش اول، تحقیقات ارائه شده این دسته به جز در موارد محدودی از بارگذاری و شرایط مرزی، عموماً روش‌های عددی می‌باشند.

¹ Warner Tjardus Koiter

² Budiansky

³ Eigenvector

تیموشنکو و گیر [۱۴] مسئله پایداری انواع سازه‌های مهندسی شامل ستون‌ها، قاب‌ها، تیرهای خمیده، صفحات و پوسته‌ها را مورد بررسی قرار داده است. پس از آن المرث و براوش [۱۵] تحلیل جامعی از مسئله‌ی کمانش ستون‌ها، صفحات، پوسته‌ها و روش‌های مختلف برای فرمول‌بندی معادلات تعادل غیرخطی پایداری مورد بررسی قرار داده‌اند.

جواهری و اسلامی [۱۶] در سال ۲۰۰۲ به بررسی کمانش حرارتی یک ورق مستطیل شکل ساخته شده از مواد هدفمند پرداختند. در این تحقیق معادلات تعادل ورق بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌های مستطیلی به دست آمده است. روابط سینماتیکی ساندرز^۱ و استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل، معادلات تعادل ورق را که سه معادله کوپل بر اساس مؤلفه‌ی جابه‌جایی می‌باشند تعیین می‌کند. پس از استخراج معادلات تعادل، معادلات پایداری ورق مستطیلی به کمک روش‌های حساب تغییرات به دست آمده‌اند. شرایط مرزی ورق به صورت چهار تکیه‌گاه ساده که در برابر حرکت مقاومت می‌کند در نظر گرفته می‌شود. ورق در معرض انواع بارگذاری حرارتی قرار می‌گیرد که از جمله آن می‌توان به افزایش درجه‌ی یکنواخت حرارت، توزیع درجه حرارت خطی در ضخامت ورق اشاره کرد. در هر یک از حالت‌های بارگذاری، یک رابطه صریح به شکل بسته برای دمای بحرانی ارائه شده است.

همچنین اسلامی و جواهری در تحقیق دیگری [۱۷] در سال ۲۰۰۲ به بررسی کمانش مکانیکی یک ورق مستطیلی ساخته‌شده از مواد هدفمند پرداختند. کلیات این روش مانند روش ارائه شده در مرجع [۱۶] می‌باشد. ورق در معرض بارهای مکانیکی که به صورت یکنواخت در چهار گوشه ورق توزیع شده‌اند قرار گرفته است. از جمله مهم‌ترین بارگذاری‌های مکانیکی در این حالت می‌توان به بارگذاری فشاری یک‌طرفه، بارگذاری فشاری دوطرفه و بارگذاری ورق در حالتی که یک وجه آن در کشش و وجه دیگر آن در فشار باشد اشاره کرد.

کمانش حرارتی ورق‌های ضخیم حرارتی ساخته‌شده از مواد هدفمند نیز توسط اسلامی و جواهری در سال ۲۰۰۲ گزارش شده است [۱۸]. در این تحقیق برای دستیابی به حلی برای تحلیل کمانش حرارتی ورق‌های ضخیم از مدل جابه‌جایی ردی^۲ استفاده شده است. در این مدل که بر خلاف میدان جابه‌جایی تئوری کلاسیک، میدان جابه‌جایی داخل صفحه به صورت توابع درجه سه از ضخامت در نظر گرفته شده‌اند، کرنش عرضی مقداری غیر صفر داشته و نتایج دقیق‌تری نسبت به تئوری کلاسیک پیش‌بینی می‌شود. در این تحقیق نیز از روش انرژی برای استخراج پنج معادله تعادل استفاده شده

¹ Sander's Kinematic Relations

² Reddy's Displacement Field

است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که تئوری کلاسیک در مقایسه با میدان جابه‌جایی ردی مقادیر دمای بحرانی بیشتری را پیش‌بینی می‌کند. اختلاف میان مقادیر پیش‌بینی شده بین دو تئوری به‌ویژه برای ورق‌های ضخیم زیاد است به نحوی که استفاده از تئوری کلاسیک برای محاسبه دمای بحرانی ورق‌های ضخیم را دچار اشکال می‌کند.

معمولاً سازه‌های مهندسی به صورت کامل نیستند و همواره حضور نقص در سازه‌ها مشاهده می‌شود. کمانش حرارتی و مکانیکی ورق‌های ساخته‌شده از مواد هدفمند توسط اسلامی و شریعت در سال‌های ۲۰۰۵-۲۰۰۷ گزارش شده است [۱۹-۲۳]. در این تحقیقات، معادلات تعادل، پایداری و معادلات سازگاری بر اساس تئوری‌های مختلف مانند تئوری کلاسیک، مرتبه اول ورق و مرتبه سوم برشی ورق به‌دست آمده است. نیروهای پیش‌کمانش بر اساس تئوری غشایی به‌دست آمده‌اند. هرچند در استخراج نیروهای پیش‌کمانش از اثر نقص اولیه صرف‌نظر شده است. نقص اولیه در این مقالات به‌صورت شکل کمانش‌یافته ورق انتخاب شده است و با استفاده از روش گالرکین جواب‌ها به‌صورت فرم بسته درآمده است. نتایج حاصل از این تحقیقات نشان می‌دهد که کمانش حرارتی ورق‌های هدفمند مستقل از تئوری ورق استفاده‌شده همواره در مدهای اول اتفاق می‌افتد. همچنین حضور نقص اولیه در سازه باعث به تأخیر افتادن کمانش سازه می‌شود. در واقع در مقایسه با یک ورق بدون نقص، ورق‌های ناقص دارای دما و نیروی بحرانی بیش‌تری هستند.

کمانش ورق‌های حلقوی برای اولین بار توسط دین در سال ۱۹۲۴ مورد بررسی قرار گرفت. او کمانش یک ورق حلقوی را که در معرض نیروهای برشی در لبه‌ها قرار داشت مورد بررسی قرار داد. از آن زمان تحقیقات زیادی در زمینه کمانش ورق حلقوی انجام گرفت که در زیر به تعدادی از آنها اشاره می‌شود.

یاماکی [۲۴] کمانش صفحات حلقوی با بارگذاری روی لبه‌ی داخلی و خارجی را مورد بررسی قرار داده و در نتایج خود نشان داده که کمانش در این حالت لزوماً در مد اول اتفاق نمی‌افتد.

نجفی زاده و اسلامی [۲۵، ۲۶] کمانش ورق مدور ساخته شده از مواد هدفمند، تحت فشار شعاعی یکنواخت را مورد بررسی قرار داده‌اند. بارگذاری انجام شده بر روی ورق همگی به صورت متقارن محوری بوده و به همین دلیل تنها حالت متقارن محوری معادلات مورد بررسی قرار گرفته است. از معادلات تعادل و پایداری که از طریق فرمول حساب تغییرات به‌دست آمده برای محاسبه نیروی پیش‌کمانش و بار بحرانی کمانش استفاده شده است. همه معادلات بر پایه فرضیه لاو- کیرشهف و روابط غیرخطی ساندرز به‌دست آمده است.

سعیدی و نادری [۲۷-۲۹] به بررسی کمانش مکانیکی، حرارتی و تأثیر محیط الاستیک بر کمانش مکانیکی ورق نازک قطاعی^۱، بر پایه‌ی نظریه‌ی جابه‌جایی مرتبه اول برشی پرداخته‌اند و با استفاده از روش لوی^۲، مسئله‌ی ناپایداری ورق نازک قطاعی در شرایط مرزی مختلف را حل نموده‌اند.

برمک و همکاران [۳۰] به بررسی کمانش ورق‌های حلقوی با ضخامت متغیر پرداختند. در این تحقیق ضخامت با تابعی از شعاع ورق تقریب زده شده است. آن‌ها برای حجم و وزن ثابتی از ورق، به دنبال یافتن بهینه‌ترین حالت برای افزایش ظرفیت تحمل بار کمانشی بودند.

وانگ و همکاران [۳۱] حل کمانش صفحات ضخامت متغیر دایره‌ای تحت فشار یکنواخت با فرض نظریه کلاسیک را مورد بررسی قرار داده‌اند. در کار ایشان معادلات پایداری با به‌کارگیری روش ریلی-ریتز حل شده است.

علی پور و شرعیات در سال ۲۰۱۱ کمانش مکانیکی یک ورق دایروی هدفمند تحت فشار شعاعی یکنواخت را مورد بررسی قرار دادند [۳۲]. ضخامت ورق نیز در این تحقیق متغیر در نظر گرفته شده است و خواص ورق بر اساس یک مدل نمایی در راستای شعاعی گسترش یافته است. ورق بر روی یک محیط الاستیک پسترناک در نظر گرفته شده که در آن آثار برشی بستر نیز لحاظ شده است.

شن [۳۳] در سال ۲۰۰۸ با استفاده از تکنیک آشوب در دو گام، به بررسی کمانش و پس‌کمانش ورق‌های دولایه ساخته شده از مواد هدفمند پرداخت. در این تحقیق نشان داد که ورق‌های تک‌لایه در همه شرایط مرزی از پدیده کمانش پیروی نمی‌کنند و برای بارگذاری حرارتی، وجود گشتاور حرارتی منجر به خمش غیرخطی در ورق می‌شود. در واقع ورق در مرحله پیش‌کمانش دچار خیز شده و به همین دلیل کمانش از نوع نقطه دوگانگی در ورق رخ نمی‌دهد. همچنین برای ورق‌های دولایه هدفمند، کمانش از نوع نقطه دوگانگی تنها در حالتی رخ می‌دهد که ورق در معرض افزایش درجه حرارت یکنواخت قرار گیرد و برای حالات دیگری که در مراجع [۱۶، ۱۸] ذکر شده است، ورق دچار پدیده خمش غیرخطی می‌شود. شن معادلات تعادل ورق را بر اساس تئوری مرتبه سوم ورق استخراج کرده و شرایط مرزی را برای تأکید بر رخ دادن کمانش حرارتی به صورت تکیه‌گاه ثابت غیرقابل حرکت در نظر گرفت. در این تحقیق خواص مواد به صورت وابسته به دما و همچنین مستقل از دما در نظر گرفته شده‌اند. شن نشان داد در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما با دقت بیشتری دمای بحرانی را پیش‌بینی می‌کند.

¹ Thick sector plate

² Levy Method

در سال ۲۰۰۴، لیو و همکاران، کمانش حرارتی ورق‌های کامپوزیتی متقارن و غیرمتقارن را مورد بررسی قرار دادند [۳۴]. آنها انواع حالات مختلف کامپوزیت‌ها مانند ورق‌های کامپوزیتی دولایه دارای تقارن مواد نسبت به لایه میانی، کامپوزیت‌های سه‌لایه متقارن با لایه میانی سرامیکی و لایه بالا و پایین ساخته شده از مواد هدفمند و ... را مورد بررسی قرار دادند. همچنین از تئوری مرتبه اول ورق برای استخراج معادلات استفاده شده است و با استفاده از اصل همیلتون معادلات تعادل ورق به‌دست آمده است. وابستگی اجزاء تشکیل‌دهنده به دما، نقص اولیه در ورق و گستردگی خواص در ضخامت در استخراج روابط لحاظ شده است.

کیانی و اسلامی در سال ۲۰۱۳ به بررسی کمانش حرارتی غیرمتقارن ورق حلقوی پرداختند [۳۵]. در این تحقیق یک ورق دایروی شکل با سوراخ متحدالمرکز در معرض بار حرارتی قرار گرفته است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد برای یک ورق با شرایط مرزی دوسرگیردار، شکل کمانش ورق در معرض بارگذاری متقارن محوری به شکل نامتقارن است.

کیانی و همکارانش [۳۶] به تحلیل کمانش حرارتی ورق حلقوی ساخته شده از مواد هدفمند پرداخته‌اند. خواص ورق بر پایه‌ی قانون تابع نمایی و در راستای ضخامت تغییر می‌کند. همچنین خواص وابسته به دما در نظر گرفته شده است. ورق تحت دو نوع بارگذاری حرارتی شامل افزایش دمای یکنواخت و توزیع حرارت در جهت ضخامت قرار دارد. معادلات تعادل و پایداری بر اساس تئوری مرتبه اول برشی به‌دست آمده‌اند. شرایط مرزی طوری در نظر گرفته شده که از امکان وقوع کمانش در ورق اطمینان حاصل شود. در نهایت یک راه‌حل نامتقارن برای محاسبه اختلاف دمای بحرانی لازم برای کمانش ورق حلقوی ارائه شده است.

تحقیقات بالا مجموعه بخشی از تحقیقات ارائه‌شده در زمینه کمانش و پس‌کمانش ورق‌های مستطیلی، مدور و حلقوی می‌باشد که در آنها بار کمانش حرارتی یا مکانیکی به‌طور مستقیم از روش مقدار ویژه یا استفاده از معیار بودیانسکی به‌دست آمده است. در ادامه به بررسی تحقیق ارائه‌شده در زمینه کمانش ترمومکانیکی ورق تحت بار فشاری و حرارتی می‌پردازیم که در اکثر مواقع از روش عددی برای محاسبه بار کمانش استفاده کرده‌اند.

در سال ۲۰۱۳ باطنی، کیانی و اسلامی [۳۷] به مطالعه کمانش ترمومکانیکی ورق مستطیلی تحت تأثیر فشار شعاعی یکنواخت و حرارت پرداخته‌اند. در تحقیق ایشان خواص ورق بر پایه تابع نمایی و در جهت ضخامت و وابسته به دما در نظر گرفته شده است و در نهایت با استفاده از روش عددی گالرکین بار بحرانی کمانش محاسبه می‌شود. در این تحقیق تأثیر انواع بارگذاری حرارتی و مکانیکی و

شرایط مرزی مورد تحلیل قرار گرفته است. آنها نشان دادند که برای ورق‌هایی که تحت تأثیر هم‌زمان فشار و حرارت قرار می‌گیرند اگر ورق در لبه‌های خود مقید نباشد و بتواند آزادانه حرکت کند تنها کمانش مکانیکی رخ می‌دهد و حرارت باعث ایجاد بار فشاری در ورق و کمانش حرارتی نمی‌گردد. برای ایجاد کمانش ترمومکانیکی باید دو لبه ثابت و دو لبه دیگر تحت بار فشاری قرار گیرند. لبه‌های ثابت و مقید که از انبساط طولی ورق جلوگیری می‌کند باعث ایجاد کمانش حرارتی و لبه‌های تحت فشار یکنواخت باعث ایجاد کمانش مکانیکی می‌شوند.

جمع‌بندی:

مطالعات انجام شده نشان می‌دهد که هیچ نوع کاری در زمینه کمانش نامتقارن ورق‌های حلقوی FGM روی یک محیط الاستیک که در لبه‌های داخلی و خارجی تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت قرار داشته و خواص آن وابسته به دما باشد انجام نگرفته است. در کار حاضر با استفاده نظریه-ی کلاسیک و فرضیه‌ی غیرخطی ون-کارمن معادله تعادل به‌دست آمده است. سپس با به‌دست آوردن شکل عمومی رابطه پایداری و محاسبه مقدار ویژه نامتقارن این رابطه، مقدار بار بحرانی کمانش تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت به‌دست می‌آید. در همه حالت‌ها خواص وابسته به دما است و با تغییر دما، خواص ترمومکانیکی ورق FGM نیز تغییر می‌کند.

فصل ۲

مواد هدفمند

۲-۱ ماهیت مکانیکی مواد هدفمند

با توجه به عدم تأمین نیازهای بشری توسط مواد خالص، نیاز به موادی که دارای خواص کامل‌تری باشند، بشر را به سمت ترکیب مواد خالص با یکدیگر و ساختن مواد مرکب هدایت نمود. به این ترتیب مواد مرکب یا ترکیب مواد خالص تولید شدند که دارای ویژگی‌های بسیار خوبی بودند ولی جوابگوی تمامی نیازهای بشری نبودند. در نتیجه فکر ساختن نوعی از مواد مرکب که خواص در آنها به صورت پیوسته تغییر کند و مشکلات ناشی از لایه‌لایه شدن، تمرکز تنش و توزیع ناپیوسته تنش مواد مرکب پیشین را نداشته باشند، پژوهشگران را به سمت ساخت و تولید مواد هدفمند هدایت نمود. تحقیقات و تقاضای استفاده از این مواد در سال‌های اخیر در صنایع مختلف از جمله صنایع هوافضا به شدت افزایش یافته است.

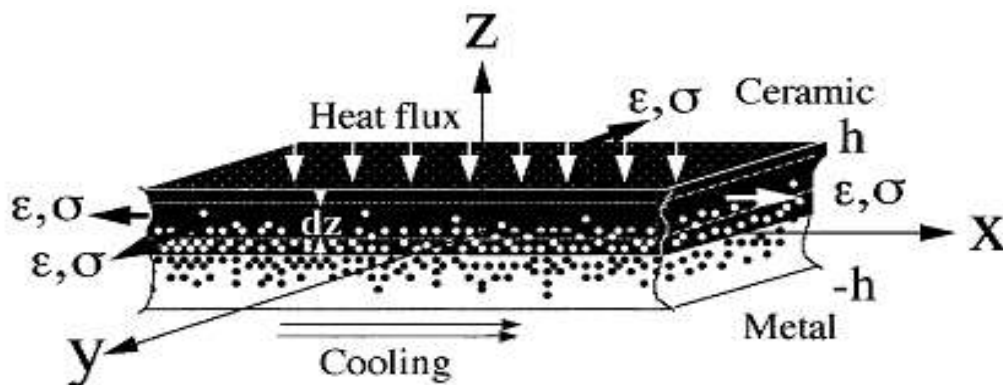
جسم مادی همگن به جسمی گفته می‌شود که خواص مواد در هر نقطه از جسم یکسان باشد و در مقابل جسم مادی ناهمگن جسمی است که در آن خواص مواد تابعی از مکان بوده و از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر تغییر نماید. جسم مادی همسانگرد، جسمی است که کلیه خواص مادی آن در یک نقطه در جهات مختلف یکسان است و از طرفی دیگر جسم مادی ناهمسانگرد، جسمی است که خواص مواد در یک نقطه از جسم در جهات مختلف متفاوت بوده و خواص مادی در این گونه مواد وابسته به جهت می‌باشد.

مواد ناهمگن غالباً در دو دسته تقسیم‌بندی می‌شوند. دسته اول «مواد چند ترکیب» است که دارای چند فاز متمایز مادی است و دیگری دسته‌ی «مواد با خصوصیات متغیر» که درصد ماده تشکیل‌دهنده آنها از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر به صورت تابعی تغییر می‌کند. این دسته در واقع کلاس جدیدی از مواد مرکب هستند که خصوصیات مواد در یک و یا چند جهت، به‌ویژه در جهت ضخامت، به صورت پیوسته تغییر می‌کند. مواد هدفمند یا FGM در واقع ترکیبی از دو یا چند ماده است و طوری طراحی شده است که نسبت حجمی^۱ آنها در یک یا چند جهت تغییر نماید. این ویژگی، ماده را از دیدگاه میکروسکوپی ناهمگن ساخته و از دیدگاه ماکروسکوپی خواص مکانیکی را به نرمی و به‌طور پیوسته تغییر می‌دهد.

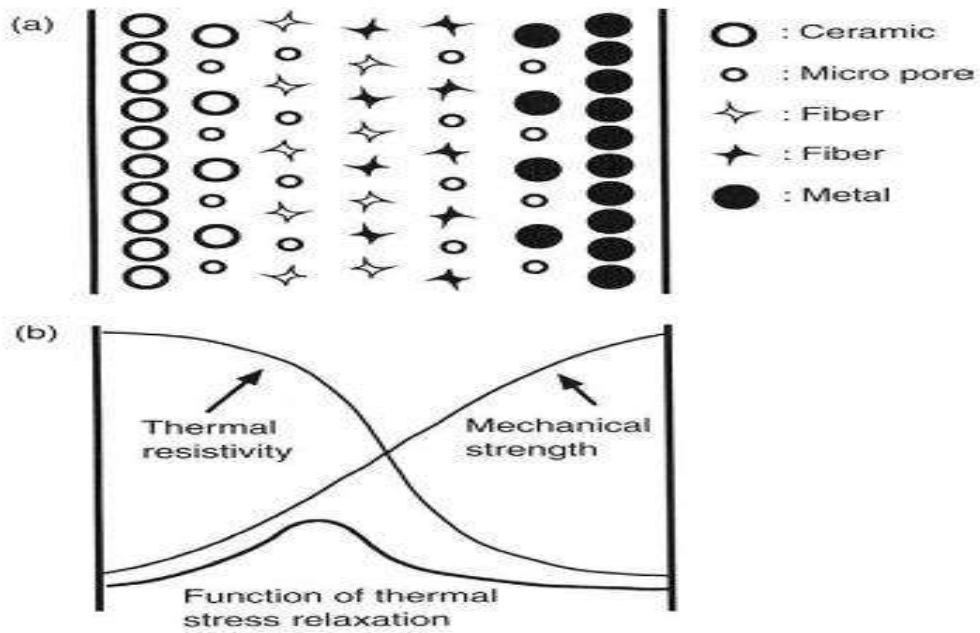
¹ Volume fraction

در سال ۱۹۸۹ شرکت NKK ژاپن مطالعاتی در زمینه مواد FGM آغاز کرد. در آن زمان نیاز به ساختارهای مقاوم در برابر گرما در شاتل‌های فضایی بود؛ اما اخیراً در بسیاری از کشورها برای کاربردهای گوناگون مهندسی تحقیقات فعال و متمرکزی در حال انجام است. معمولاً ترکیبی که برای مواد هدفمند در نظر گرفته می‌شود به صورتی است که خواص مواد ترکیبی، به نوعی مکمل یکدیگر باشند و هر کدام کمبودهای دیگری را جبران کند. یکی از مهم‌ترین ترکیب‌های موجود در ساخت این مواد مربوط به ترکیب فلز و سرامیک می‌باشد که در «شکل ۱-۲» و «شکل ۲-۲» آورده شده است. فلزات دارای قابلیت‌هایی مانند ماشین‌کاری، شکل‌پذیری، استحکام بالا، عمر طولانی و تحمل نیروهای ضربه‌ای هستند ولی در برابر خوردگی و حرارت ضعیف و آسیب‌پذیر می‌باشند. در طرف مقابل سرامیک‌ها دارای خواصی نظیر مقاومت بالا در برابر حرارت، سایش و خوردگی، چقرمگی شکست و قابلیت شکل‌پذیری بسیار پایین و ترد و شکننده بودن هستند.

از این رو با ترکیب فلز و سرامیک می‌توان ماده‌ای ایجاد کرد که دارای محاسن هر دو باشد. مهم‌ترین ویژگی مواد هدفمند، مقاومت نسبتاً بالای آنها در برابر گرادیان‌های حرارتی می‌باشد زیرا سرامیک ضریب هدایت حرارتی بسیار پایینی داشته و مانع مناسبی در مقابل حرارت ایجاد می‌کند. قسمت فلزی مواد هدفمند می‌توانند از انواع فلزات از جمله آلومینیوم، آهن، نیکل، سرب، روی، منیزیم و یا آلیاژهای فلزات انتخاب گردد. درحالی‌که بخش سرامیکی از جنس سرامیک‌های بدون اکسید و بدون فلز مانند (Si_3N_4, SiC) ، سرامیک‌های بدون اکسید با فلز (ZrC, TiC) ، سرامیک‌های با اکسید بدون فلز مانند (SiO_2) و سرامیک‌های با اکسید با فلز مانند $(Al_2O_3N_4, ZrO_2)$ انتخاب می‌شود.

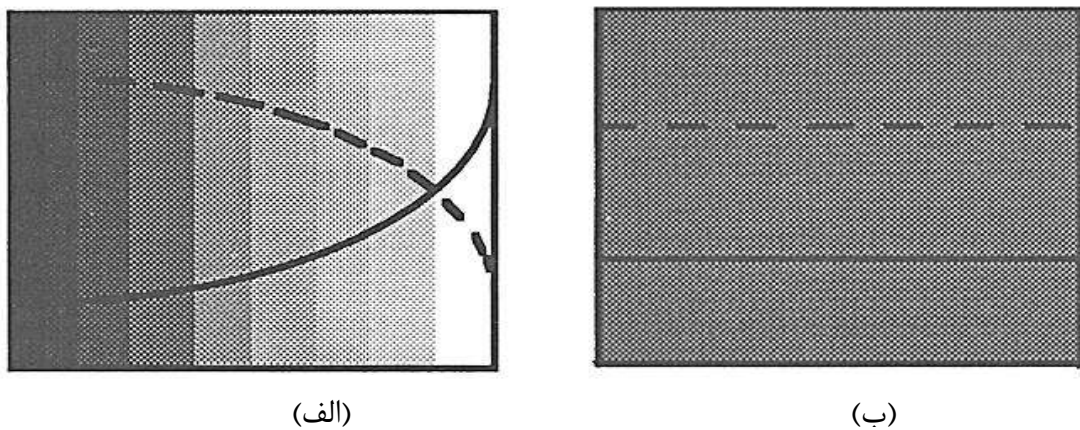


شکل ۱-۲- نمای یک ورق FGM با سطح داخلی فلز و سطح بیرونی سرامیک [۳۸].



شکل ۲-۲- ساختار و تغییرات خصوصیات یک ماده FGM [۳۹].

در «شکل ۲-۳» مقایسه مدول الاستیسیته^۱ (E) و ضریب انتقال حرارتی^۲ (α) یک ماده FGM با یک ماده همگن نشان داده شده است. این شکل تفاوت اصلی در ویژگی‌های بین مواد FGM و مواد همگن را نشان می‌دهد [۴۰].

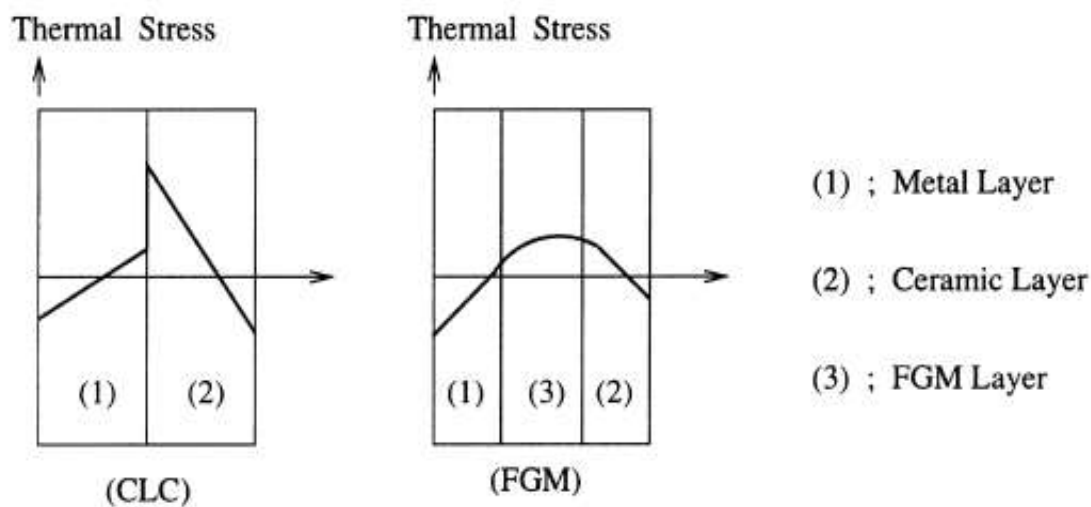


شکل ۲-۳- مقایسه مدول الاستیسیته (-) و ضریب انتقال حرارتی (-) یک ماده FGM (الف)، با یک ماده همگن (ب) [۴۰].

¹ Elasticity Modulus

² Thermal Expansion Coefficient

همان گونه که اشاره شد تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملاً پیوسته است، به گونه‌ای که یک سطح از جنس سرامیک خالص و سطح دیگر فلز خالص است. خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت دارد. به علت تغییرات پیوسته خواص مکانیکی، مشکلات عدم پیوستگی که در سازه کامپوزیتی وجود دارد، در مواد FGM به وجود نمی‌آیند. «شکل ۴-۲» تفاوت‌های یک ماده مرکب با یک ماده هدفمند را از نظر توزیع ویژگی‌ها و مواد سازنده نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲- مقایسه خواص FGM و کامپوزیت CLC [۴۱]

با توجه به «شکل ۴-۲» ترکیب ماده در فصل مشترک لایه‌های یک و سه، صد در صد فلز است، درحالی‌که در فصل مشترک لایه‌های دو و سه به صد در صد سرامیک تبدیل می‌شود. ملاحظه می‌شود که در فصل مشترک مواد FGM در مقایسه با مواد کامپوزیت، میزان پرش به تنش حرارتی حاصله به مراتب کم‌تر است (توزیع تنش ملایم‌تر است).

گرادبانی کردن مواد به طور کلی به طرق زیر باعث بهبود مشخصه‌های مکانیکی و ترمومکانیکی اجزاء می‌گردد [۲].

- کمینه‌سازی تنش‌های حرارتی و کنترل بیشینه‌ی تنش‌های حرارتی در نواحی بحرانی.
- به تأخیر انداختن شروع تسلیم پلاستیک و شکست در یک بارگذاری ترمومکانیکی.
- جلوگیری از تمرکز تنش‌های شدید در محل تقاطع لبه‌ها و نقاط تکین.

- افزایش مقاومت باندهای واسط بین جامدات غیر همگن با جهت‌دار کردن تغییر خواص مکانیکی.
- کاهش رشد ترک با انتخاب مناسب درجه‌بندی خواص مکانیکی.
- سهولت قرارگیری پوشش سخت روی یک ماده با جنس نرم به‌وسیله درجه‌بندی پیوسته خواص مکانیکی و جهت‌دار کردن تغییر خواص مواد.
- بهبود مشخصه‌های تغییر شکل پلاستیک با درجه‌بندی ترکیب در لایه‌های سطحی.

۲-۲ روش ساخت مواد هدفمند

جهت تولید هدفمند از روش‌های مختلف استفاده می‌شود که بسته به نوع کاربرد آن و شرایط حاکم کاملاً متفاوت است. سیفرث^۱ و همکارانش [۱] روشی را برای ساخت مواد هدفمند ابداع نمودند. این روش مبتنی بر ایجاد یک لایه بستر از جنس سرامیک، سپس قرار دادن یک لایه میانی به صورت طبقه به طبقه به گونه‌ای که نسبت حجمی مواد به صورت پیوسته تغییر نماید و در نهایت قرار دادن یک لایه فوقانی از جنس فلز بر روی لایه میانی می‌باشد. لایه میانی که ترکیبی از ذرات فلز و سرامیک می‌باشد شامل مخلوط پودر فلز و رشته‌های پلیمری سرامیک است. ماده حاصله با ساختار فوقانی لایه میانی و لایه تحتانی در کوره حرارت داده شده تا ماده هدفمند تشکیل گردد. مونیر^۲ و همکارانش [۲] روشی را اختراع کردند که در آن نیروی گریز از مرکز جهت تشکیل مواد هدفمند داده می‌شود. در این روش فلز با استفاده از حرارت ذوب شده و ذرات سرامیک به‌وسیله نیروی گریز از مرکز در داخل مذاب منتشر می‌گردند. به‌عنوان مثال برای ساخت $ZrO_2 + Cu$ پودر اکسید مس با پودر فلز زیرکونیم Zr مخلوط و به هم فشرده می‌شوند تا تشکیل یک نمونه استوانه‌ای شکل را بدهند سپس نمونه را درون دستگاه گریز از مرکز قرار گرفته و با اعمال نیروی گریز از مرکز نمونه از هم مشتعل گردیده و یک موج احتراق تولید می‌کند.

۳-۲ کاربردهای مواد هدفمند

¹ Seyferth

² Munir

از آنجا که هدف اصلی ساخت مواد هدفمند، قابلیت تحمل درجه حرارت و گرادیان بسیار زیاد این مواد می‌باشد، این مواد نخستین بار به منظور استفاده در بدنه فضاپیماها و سازه‌های فضایی به‌عنوان مواد مقاوم در برابر دماهای بسیار بالا به‌ویژه شوک‌های حرارتی مورد بررسی قرار گرفتند. از آنجا که در مواد مرکب لایه‌ای همواره یک تنش کششی در سطوح اتصال لایه‌ها ایجاد شده و باعث گسستگی جسم از محل اتصال لایه‌ها می‌گردد، مزیت مهم استفاده از مواد هدفمند یکنواخت بودن توزیع تنش در این مواد است. پیوستگی تغییرات ریز ساختاری، ویژگی بارز مواد هدفمند نسبت به انواع مواد مرکب لایه‌ای می‌باشد. مواد مرکب تشکیل شده از رشته‌های جا گرفته در ماتریس، دارای یک ناپیوستگی خواص مادی در محل اتصال لایه‌ها می‌باشند از این رو در دماهای کاری بالا این مواد تمایل به گسستگی در محل اجزاء را دارند. از طرفی دیگر ایجاد تنش‌های پسماند به دلیل اختلاف ضریب انبساط حرارتی اجزای تشکیل‌دهنده و امکان رشد ترک و شکستگی لایه‌ها از جمله معایب مواد مرکب می‌باشد. این عیوب باعث گسترش سریع مواد هدفمند در کنار سایر مواد طبیعی و مرکب در محیط -هایی با دمای بالا به‌ویژه در صنایع هوافضا شده است.

به تازگی مواد هدفمند کاربردهای ویژه‌ای در سایر صنایع از جمله پزشکی و نیروگاه‌ها پیدا کرده‌اند و پیش‌بینی می‌گردد که صنعت خودرو نیز در آینده به جمع این صنایع بپیوندد. از جمله اصلی‌ترین کاربردهای این مواد می‌توان استفاده در صنایع الکترونیک و مغناطیس (الکتروسرامیک‌ها، پیزوسرامیک‌ها، سنسورها و عملگرها). کاربرد نوری (الکترولیزری دیسک‌های نوری) استفاده در صنایع شیمیایی (کاتالیستها) استفاده در مهندسی پزشکی (کاشت دندان مصنوعی، استخوان‌های مصنوعی) و دیگر فناوری‌های جدید نام برد. نمونه‌ای از کاربرد صنعتی مواد هدفمند استفاده از Cu/TiB_2 در ساخت بدنه موتور موشک می‌باشد که طرف سرامیک آن TiB_2 جهت مقاومت در برابر دمایی معادل ۱۵۰۰ کلوین طراحی شده است. درحالی که طرف فلز آن برای دمای ۱۲۰۰ کلوین در نظر گرفته شده است [۱].

۲-۴ مدل‌های مواد هدفمند

خواص مکانیکی مواد هدفمند در یک، دو و یا سه راستا به صورت پیوسته تغییر می‌کند. مدل‌های ریاضی گوناگونی برای بیان خواص مواد هدفمند به صورت ریاضی پیشنهاد شده است. در اغلب موارد،

ماده هدفمند از دو جزء سرامیک و فلز تشکیل شده است. چنانچه V_m و V_c به ترتیب به عنوان حجم فلز و سرامیک در نظر گرفته شوند کسر حجمی هر یک از دو جزء به صورت زیر خواهد بود.

$$V_m = \frac{V_m}{V_m + V_c}, \quad V_c = \frac{V_c}{V_m + V_c} \quad 1-2$$

در «رابطه ۱-۲» V_m و V_c معرف کسر حجمی جزء فلزی و سرامیکی می‌باشند و همواره از رابطه زیر پیروی می‌کنند.

$$V_m + V_c = 1 \quad 2-2$$

با استفاده از توابع نسبت حجمی، خواص مکانیکی ماده هدفمند به صورت زیر بیان می‌شود.

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad 3-2$$

در رابطه بالا P ، P_m و P_c به ترتیب بیان‌گر خاصیت ماده هدفمند، خاصیت جزء فلزی و خاصیت جزء سرامیکی است. در ادامه چند نمونه مدل مهم برای توزیع خواص مکانیکی ماده هدفمند معرفی خواهند شد.

۱-۴-۲ مدل ردی

در این مدل، به طور کلی خواص مکانیکی ماده هدفمند به صورت غیرخطی، تابعی از درجه حرارت و مختصات که خواص در آن تغییر می‌کند بیان می‌شوند. با این فرض که تغییرات خاصیت ماده هدفمند در راستای η باشد می‌توان نوشت.

$$P(\eta, T) = P_{0,m} \left(\frac{P_{-1,m}}{T} + 1 + P_{1,m} T + P_{2,m} T^2 + P_{3,m} T^3 \right) V_m(\eta) + P_{0,c} \left(\frac{P_{-1,c}}{T} + 1 + P_{1,c} T + P_{2,c} T^2 + P_{3,c} T^3 \right) V_c(\eta) = P_m(T) V_m(\eta) + P_c(T) V_c(\eta) \quad 4-2$$

در رابطه بالا، از زیرنویس c و m برای بیان خواص مربوط به سرامیک و فلز استفاده شده است. T معرف درجه حرارت در درون جسم و ضرایب P_i ، ضرایبی هستند که برای هر ماده تشکیل دهنده به صورت یکتا تعیین می‌شوند.

چنانچه خواص مواد ثابت فرض شوند فرمول ردی برای توزیع خواص به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$P(\eta) = P_m V_m(\eta) + P_c V_c(\eta) \quad 5-2$$

ردی، کسر حجمی به کاررفته در «رابطه ۵-۲» را با تابع توانی به صورت زیر مدل کرده است [۴۲].

$$V_m(\eta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\eta}{h} \right)^k \quad 6-2$$

در «رابطه ۶-۲»، h معرف محدوده‌ای است که خواص در آن تغییر می‌کند. به عنوان مثال برای یک ورق ساخته شده از مواد هدفمند که تغییر خواص آن در راستای ضخامت است، h معرف ضخامت ورق است. ثابت به کاررفته k ، شاخص نمایی^۱ ماده هدفمند نامیده می‌شود و مقادیر نامنفی را اختیار می‌کند. مقدار این نما بیان گر شدت تغییرات خواص ماده است. همچنین η از میانه ضخامت اندازه‌گیری می‌شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در این مدل همواره دو شرط مرزی زیر برای توزیع خواص برقرار است:

$$V_m\left(-\frac{h}{2}\right) = 0, \quad V_m\left(\frac{h}{2}\right) = 0 \quad 7-2$$

در تحقیق حاضر برای مدل‌سازی ماده هدفمند از این مدل استفاده شده است.

۲-۴-۲ مدل اردوگان^۲

اردوگان تغییرات خواص یک ماده هدفمند را به صورت زیر مدل می‌کند [۶].

¹ Power Law Index
² Ordogan

$$P(\eta) = P_0 e^{\delta \eta}$$

۸-۲

در این مدل δ و P_0 دو ثابت هستند که به خواص تشکیل دهنده ماده هدفمند بستگی دارد. در این مدل معمولاً مختصات η از یکی از دو لبه راستایی که خواص در آن تغییر می‌کند، اندازه‌گیری می‌شود. به عنوان مثال، برای استوانه‌ای که تغییرات خواص تغییرات آن در جهت شعاعی با مدل اردوگان است، مبدأ اندازه‌گیری η شعاع خارجی و یا شعاع داخلی استوانه است. مقدار ثابت δ ، می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

۲-۴-۳ مدل تانیگاوا

بر مبنای مدل تانیگاوا هر یک از خواص مواد هدفمند مطابق با توزیع مخصوص به خود فرمول‌بندی می‌شوند. برای دو خاصیت مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی، تانیگاوا روابط زیر را ارائه کرد [۴۳].

$$E(\eta) = \frac{2\eta+6}{\eta+2} E_0 \left(1 + \frac{\eta}{L}\right)^n$$

$$\alpha(\eta) = \alpha_0 \left(1 + \frac{\eta}{L}\right)^p$$

۹-۲

در رابطه بالا L ثابتی است که برای نرمالیزه کردن به کار می‌رود و دارای بعد طول است. ثابت‌های دیگر که به صورت ضریب و نما به کار رفته‌اند، در هر ماده هدفمند بسته به نوع اجزای سرامیک و فلزی‌اش به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. لازم به ذکر است تانیگاوا ضریب پواسن^۱ را در سراسر ماده یکسان در نظر می‌گیرد.

۲-۴-۴ مدل ندا

ندا مدل غیرخطی زیر را که بر پایه توزیع نمایی استوار است، برای بیان توزیع کلیه خواص هدفمند ارائه کرده است [۴۴].

¹ Poisson's Ratio

$$P(\eta) = P_m e^{\frac{\eta}{h} \ln \frac{P_c}{P_m} + \ln \left(\frac{P_c}{P_m} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad ۱۰-۲$$

در رابطه بالا، η از میانه جهت گستردگی خواص محاسبه می‌شود و h محدوده‌ای است که خواص در آن به صورت پیوسته تغییر می‌کند ($-\frac{h}{2} \leq \eta \leq \frac{h}{2}$). به راحتی مشاهده می‌شود در این مدل دو شرط مرزی «۷-۲» برقرار است.

فصل ۳

معادلات حاکم و تحلیل کمانش

۳-۱ مقدمه

در این بخش ابتدا به معرفی فرضیه مورد استفاده در ورق و بررسی هندسه و خواص ورق حلقوی بر بستر الاستیک پرداخته می‌شوند. هم‌چنین روابط تنش-کرنش و منته‌های نیرو و گشتاور را به دست آورده و به کمک روش انرژی و اصل جابه‌جایی مجازی معادلات تعادل ورق حلقوی را محاسبه می‌شوند. سپس به کمک فرضیه تعادل در مجاورت، روابط پایداری بر حسب جابه‌جایی را حساب کرده و با ساده‌سازی لازم، معادله نهایی پایداری بر حسب جابه‌جایی به دست می‌آید.

۳-۲ تئوری حاکم بر ورق

در حالت کلی ورق‌ها سازه‌هایی هستند که شکل اولیه‌شان تخت یا خمیده است. آشنا‌ترین مثال‌ها برای این نوع ورق عبارت است از: روی میزها، پوشش یا دريچه توربین، دیواره‌ها و کف مخازن. به عنوان مثالی دیگر در مورد ورق‌های مدور که بار جانبی تحمل می‌کنند می‌توان به کاربرد آن در کلاچ‌ها، ورق‌های انتهایی و دیسک‌های توربین اشاره کرد.

در اینجا تعدادی از تئوری‌های مورد استفاده در ورق‌های معمولی که محققین از این فرضیات برای ارائه مدل‌هایی برای صفحات FGM بهره برده‌اند را ارائه می‌کنیم.

۳-۲-۱ تئوری کلاسیک صفحات (CPT)

این تئوری قدیمی‌ترین و پرکاربردترین فرضیه در تئوری صفحات است. این تئوری برای صفحات نازک که جابه‌جایی آنها کسر کوچکی از ضخامت باشد مناسب است ($\frac{h}{L_b} < \frac{1}{20}$)؛ که h, L_b به ترتیب عرض صفحه و ضخامت صفحه می‌باشد [۱۴].

فرضیات اصلی مربوط به نظریه کلاسیک، برای ورق نازک، الاستیک، همگن و همسانگرد مبتنی بر هندسه تغییر شکل است که آنها را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

- خیز سطح میانی در مقایسه با ضخامت ورق کوچک است.
- مقاطع مسطح که عمود بر صفحه میانی بوده‌اند پس از خمش، مسطح و عمود بر صفحه باقی می‌ماند.

- تنش‌های عمود بر صفحه میانی در مقایسه با مؤلفه‌های دیگر تنش کوچک است و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

فرضیات فوق به فرضیات کیرشهف معروف می‌باشند.

ورق‌های نازک یا صفحات هرچند قادر به تحمل بارهای کششی هستند مقاومتشان در برابر فشار بسیار کم است. معمولاً پدیده کماتش یا چروک شدن در ورق‌ها تحت اثر نیروی فشاری به طور ناگهانی رخ می‌دهد.

۲-۲-۳ تئوری جابه‌جایی برشی مرتبه اول (FSDT)

در صفحات که به صفحات نسبتاً ضخیم معروف هستند ($\frac{1}{5} < \frac{h}{L_b} < \frac{1}{10}$) خطای تئوری CPT نسبتاً زیاد می‌شود. به همین جهت در این صفحات از این تئوری که توسط Midline (1951) ارائه شده استفاده می‌شود [۳۵]. این تئوری دشواری بیشتری نسبت به CPT در معادلات دارد و علاوه بر آن نیاز به یک ضریب تصحیح در نیروهای برشی دارد.

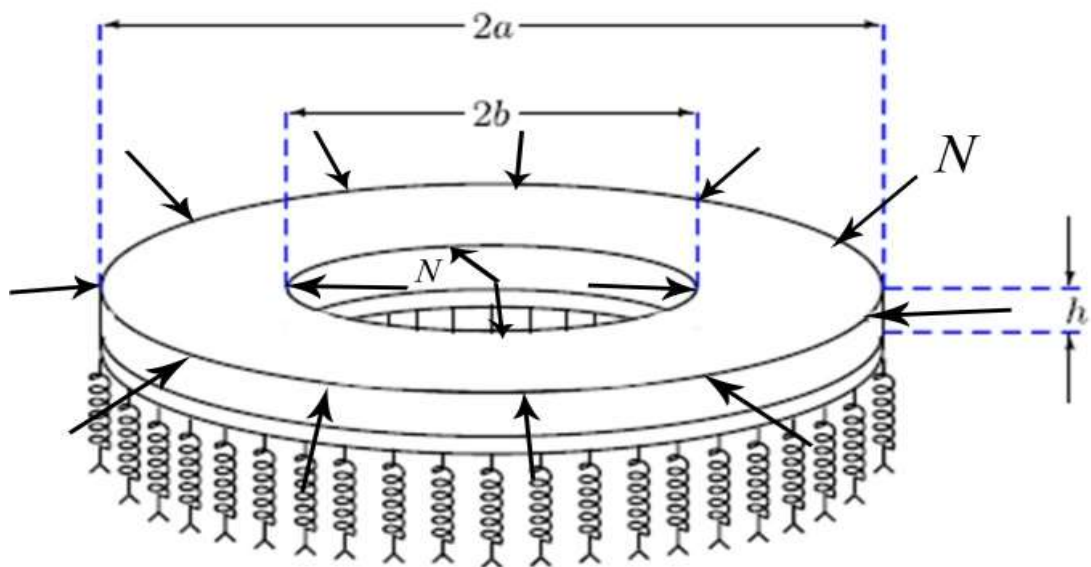
۳-۲-۳ تئوری جابه‌جایی برشی مرتبه سوم (TSDT)

در صفحات ضخیم این تئوری مورد استفاده دارد ($\frac{1}{5} < \frac{h}{L_b}$). معادلات این روش بسیار پیچیده‌تر هستند و البته موارد کاربرد آن به مراتب از دو تئوری قبل کمتر است.

در این پژوهش برای تحلیل کماتش ورق نازک حلقوی FGM از تئوری کلاسیک استفاده شده است.

۳-۳ هندسه و خواص ورق

یک ورق نازک حلقوی FGM به ضخامت h ، شعاع داخلی b ، شعاع خارجی a و در مختصات قطبی (r, θ, z) که روی محیط الاستیک قرار دارد مفروض است «شکل ۳-۱». ورق تحت بار فشار شعاعی یکنواخت N و حرارت می‌باشد.



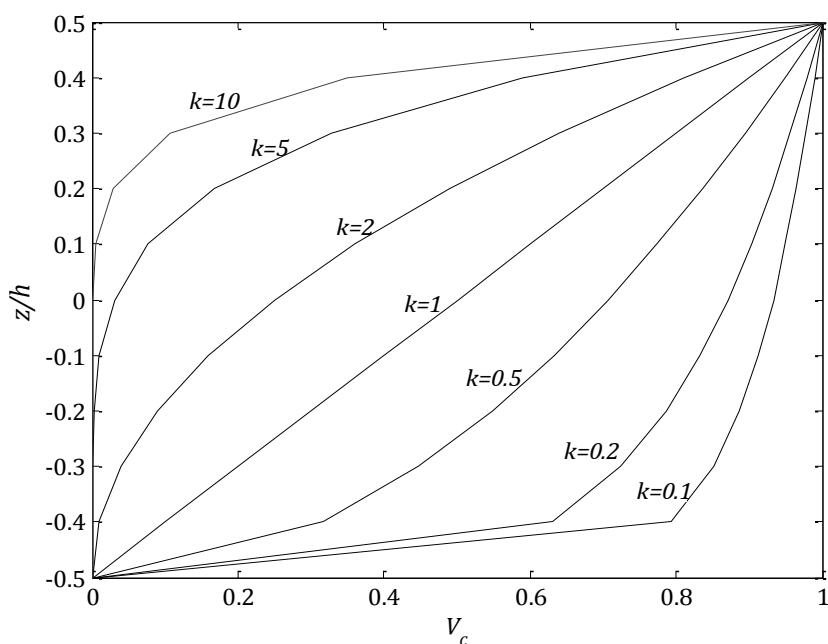
شکل ۱-۳- ورق نازک حلقوی FGM روی محیط الاستیک تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت.

۱-۳-۳- خواص ورق حلقوی FGM

زمانی که خواص مواد در جهت ضخامت متغیر باشد، با استفاده از رابطه تابع توانی، توزیع کسر حجمی سرامیک V_c برابر است با:

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k, \quad V_m = 1 - V_c \quad 1-3$$

که h ضخامت ورق و z مختصات ضخامت اندازه‌گیری شده از صفحه میانی ورق $\left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right)$ می‌باشد. V_m و k به ترتیب بیانگر توزیع کسر حجمی فلز و شاخص تابع نمایی می‌باشد. تغییرات V_c به ازای مقادیر مختلف k بر حسب $\frac{z}{h}$ در «شکل ۲-۳» نشان داده شده است.



شکل ۳-۲- توزیع کسر حجمی سرامیک در جهت ضخامت به ازای مقادیر مختلف شاخص تابع نمایی. اگر در «رابطه ۳-۱» مقدار k برابر صفر باشد بیانگر سرامیک خالص ($V_c = 1$) و اگر k به سمت بی- نهایت میل کند نشان‌دهنده ورق فلزی خالص است ($V_c = 0$).

۳-۳-۲ خواص وابسته به دما

معمولاً مواد FG در محیط‌هایی با دمای بالا به کار می‌رود که در این صورت تغییرات قابل توجه‌ای در خواص آن به وجود می‌آید. ضروری است برای دقت در پیش‌بینی خواص مواد، آنها را وابسته به دما در نظر بگیریم.

طبق قانون ویت^۱ هر خاصیت مکانیکی در ورق FG مانند p را می‌توان بر حسب خواص اصلی مطابق رابطه زیر بیان کرد [۴۵]:

$$p_{eff}(z, T) = p_m(T) + p_{cm}(T) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k$$

$$p_{cm}(T) = p_c(T) - p_m(T)$$

۳-۲

^۱ Voigt

که p_c و p_m به ترتیب بیان گر خواص فلز و سرامیک می باشد. در «رابطه ۳-۲»، خواص مکانیکی مانند مدول یانگ و ضریب انبساط حرارتی وابسته به دما فرض شده و می توان با یک تابع غیرخطی از دما آن را نشان داد [۴۵].

$$p(T) = p_0 \left(p_{-1} T^{-1} + 1 + p_1 T + p_2 T^2 + p_3 T^3 \right)^k \quad ۳-۳$$

۳-۴ نتیجه های نیرو و گشتاور

با توجه به فرضیه کلاسیک برای ورق های نازک، میدان جابه جایی برابر است با [۲۶،۲۵]:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z) &= u_0(r, \theta) - z w_{0,r}(r, \theta) \\ v(r, \theta, z) &= v_0(r, \theta) - z w_{0,\theta}(r, \theta) \\ w(r, \theta, z) &= w_0(r, \theta) \end{aligned} \quad ۴-۳$$

در «رابطه ۳-۴» u_0 ، v_0 و w_0 به ترتیب بیانگر جابه جایی روی صفحه میانی ($z=0$) در جهت r ، θ و z است. بر پایه فرضیه ون-کارمن^۱ در مختصات قطبی، رابطه کرنش-جابه جایی غیرخطی برابر است با [۲۶،۲۵]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= u_{,r} + \frac{1}{2} w_{,r}^2 \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} v_{,\theta} + \frac{1}{r} u - \frac{1}{2r^2} w_{,r}^2 \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} u_{,\theta} + v_{,r} - \frac{1}{r} v + \frac{1}{r} w_{,\theta} w_{,r} \end{aligned} \quad ۵-۳$$

در رابطه بالا ε_{rr} ، $\varepsilon_{\theta\theta}$ و $\gamma_{r\theta}$ به ترتیب کرنش شعاعی، کرنش محیطی و کرنش برشی در صفحه می باشد.

با جایگزین کردن میدان جابه جایی «رابطه ۳-۴» در «رابطه ۳-۵»، مؤلفه های کرنش بر حسب جابه-جایی صفحه میانی برابر است با:

¹ Von-Karman

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,r} + \frac{1}{2}W_{0,r}^2 \\ \frac{1}{r}u_0 + \frac{1}{r}v_{0,\theta} + \frac{1}{2r^2}W_{0,\theta}^2 \\ \frac{1}{r}u_{0,\theta} + v_{0,r} - \frac{1}{r}v_0 + \frac{1}{r}W_{0,\theta}W_{0,r} \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} -W_{0,rr} \\ -\left(\frac{1}{r^2}W_{0,\theta\theta} + \frac{1}{r}W_{0,r}\right) \\ 2\left(\frac{1}{r^2}W_{0,\theta} - \frac{1}{r}W_{0,r\theta}\right) \end{Bmatrix} \quad 6-3$$

با در نظر گرفتن ترموالاسیسیته خطی و شرایط تنش صفحه‌ای برای ورق نازک، روابط تنش-کرنش برابر است با [۴۶]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix}^{Th} \end{pmatrix} \quad 7-3$$

که کرنش حرارتی برابر است با:

$$\varepsilon^T = \Delta T * \alpha \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix}^{Th} = (T - T_0) * \begin{Bmatrix} \alpha_{rr} \\ \alpha_{\theta\theta} \\ \alpha_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad 8-3$$

که T و T_0 به ترتیب بیانگر توزیع دمای ورق و دمای مرجع است. همچنین α_{rr} و $\alpha_{\theta\theta}$ به ترتیب ضریب انبساط حرارتی ورق در جهت r و θ و برابر مقدار ثابت α می‌باشد. از طرفی در جهت برشی، کرنش حرارتی نداریم.

$$\alpha_{rr} = \alpha_{\theta\theta} = \alpha, \quad \alpha_{r\theta} = 0 \quad 9-3$$

با قرار دادن «روابط ۸-۳ و ۹-۳» در رابطه «۷-۳» مؤلفه تنش بر حسب کرنش برابر است با:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{pmatrix} - (T-T_0) \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad ۱۰-۳$$

با جایگذاری رابطه «۳-۶» در رابطه «۳-۱۰»، مؤلفه‌های تنش بر حسب جابه‌جایی صفحه میانی برابر است با:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E(z,T)}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} - \alpha \Delta T) = \frac{E(z,T)}{1-\nu^2} \left\{ \left(u_{0,r} + \frac{1}{2} w_{0,r}^2 \right) + \nu \left(\frac{1}{r} u_0 + \frac{1}{r} v_{0,\theta} + \frac{1}{2r^2} w_{0,\theta}^2 \right) \right\} \\ &+ \frac{zE(z,T)}{1-\nu^2} \left\{ (-w_{0,rr}) + \nu \left(-\frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta} - \frac{1}{r} w_{0,r} \right) \right\} - \frac{E(z,T)\alpha(z,T)}{1-\nu^2} (T-T_0) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E(z,T)}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} - \alpha \Delta T) = \frac{E(z,T)}{1-\nu^2} \left\{ \nu \left(u_{0,r} + \frac{1}{2} w_{0,r}^2 \right) + \left(\frac{1}{r} u_0 + \frac{1}{r} v_{0,\theta} + \frac{1}{2r^2} w_{0,\theta}^2 \right) \right\} \\ &+ \frac{zE(z,T)}{1-\nu^2} \left\{ \nu (-w_{0,rr}) + \left(-\frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta} - \frac{1}{r} w_{0,r} \right) \right\} - \frac{E(z,T)\alpha(z,T)}{1-\nu^2} (T-T_0) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E(z,T)}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} * \gamma_{r\theta} \right) = \frac{E(z,T)}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{r} u_{0,\theta} + v_{0,r} - \frac{1}{r} v_0 + \frac{1}{r} w_{0,\theta} w_{0,r} \right) \right\} \\ &+ \frac{zE(z,T)}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{r^2} w_{0,\theta} - \frac{1}{r} w_{0,r\theta} \right) \right\} \end{aligned}$$

۱۱-۳

برای به دست آوردن منته‌های نیرو و گشتاور می‌توانیم از روابط زیر استفاده کنیم [۲۶،۲۵]:

$$\begin{pmatrix} N_{rr} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{r\theta} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} dz \quad ۱۲-۳$$

$$\begin{pmatrix} M_{rr} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{r\theta} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} dz$$

۱۳-۳

با قرار دادن «روابط ۱۱-۳» در «روابط ۱۲-۳ و ۱۳-۳» منتجه‌های نیرو و گشتاور بر حسب جابه‌جایی صفحه میانی برابر است با:

$$\begin{pmatrix} N_{rr} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{r\theta} \\ M_{rr} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 & E_2 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 & \nu E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} E_1 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} E_2 \\ E_2 & \nu E_2 & 0 & E_3 & \nu E_3 & 0 \\ \nu E_2 & E_2 & 0 & \nu E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} E_2 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} E_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(u_{0,r} + \frac{1}{2}w_{0,r}^2\right) \\ \left(\frac{1}{r}u_0 + \frac{1}{r}v_{0,\theta} + \frac{1}{2r^2}w_{0,\theta}^2\right) \\ \left(\frac{1}{r}u_{0,\theta} + v_{0,r} - \frac{1}{r}v_0 + \frac{1}{r}w_{0,\theta}w_{0,r}\right) \\ (-w_{0,rr}) \\ \left(\frac{1}{r^2}w_{0,\theta\theta} + \frac{1}{r}w_{0,r}\right) \\ \left(\frac{1}{r^2}w_{0,\theta} - \frac{1}{r}w_{0,r\theta}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^T \\ N^T \\ 0 \\ M^T \\ M^T \\ 0 \end{pmatrix}$$

۱۴-۳

N^T و M^T بیان‌گر منتجه‌های نیرو و گشتاور حرارتی و E_1 ، E_2 و E_3 ثابت‌هایی هستند که طبق رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$N^T = \frac{1}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E(z,T) \alpha(z,T) (T-T_0) dz$$

$$M^T = \frac{1}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z E(z,T) \alpha(z,T) (T-T_0) dz$$
۱۵-۳

$$E_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E(z,T) dz = h \left(E_m(T) + \frac{E_{cm}(T)}{k+1} \right)$$

$$E_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z E(z,T) dz = h^2 E_{cm}(T) \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{2k+2} \right)$$

$$E_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 E(z,T) dz$$

$$= h^3 \left(\frac{1}{12} E_m(T) + E_{cm}(T) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4} \right) \right)$$
۱۶-۳

لازم به ذکر است برای به دست آوردن ثابت‌های بالا از «رابطه ۲-۳» استفاده شده است.

۳-۵ استخراج معادلات تعادل

در تحقیق حاضر انرژی پتانسیل کل ورق (V) برابر است با مجموع انرژی کرنشی مجازی ورق (U)، انرژی کرنشی محیط الاستیک (U_f) و انرژی کرنشی فشار شعاعی یکنواخت N که به دو لبه داخلی و خارجی اعمال می‌شود (U_N). معادله تعادل ورق حلقوی FG روی یک محیط الاستیک تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت، با استفاده از حالت استاتیکی روش جابه‌جایی مجازی^۱ مطابق رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\delta V = \delta U + \delta U_f + \delta U_N$$
۱۷-۳

¹ Virtual Displacement Method

برای به دست آوردن انرژی کرنشی مجازی ورق (U) از رابطه زیر داریم:

$$\delta U = \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{rr} \delta \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta}) r dz d\theta dr \quad ۱۸-۳$$

برای به دست آوردن انرژی کرنشی ناشی از اثر محیط الاستیک (U_f) طبق مرجع [۳۵] داریم:

$$U_f = \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} K_w w_0^2 + \frac{1}{2} K_g (\gamma_{\theta z}^2 + \gamma_{rz}^2) \right) r d\theta dr =$$

$$\int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} K_w w_0^2 + \frac{1}{2} K_g \left(\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \right) r d\theta dr$$

$$\delta U_f = \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(K_w w_0 \delta w_0 + K_g \left(w_{0,r} \delta w_{0,r} + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta} \delta w_{0,\theta} \right) \right) r d\theta dr \quad ۱۹-۳$$

در رابطه بالا γ_{rz} و $\gamma_{\theta z}$ به ترتیب بیانگر کرنش برشی در صفحات θz و rz می‌باشد.

برای به دست آوردن δU_N باید به این نکته توجه داشت که در شعاع داخلی b و شعاع خارجی، بار فشاری N اعمال می‌شود.

$$\delta U_N = \int_0^{2\pi} N a \delta u(a) d\theta - \int_0^{2\pi} N b \delta u(b) d\theta$$

۲۰-۳

با جایگذاری «روابط ۱۸-۳، ۱۹-۳ و ۲۰-۳» در «رابطه ۱۷-۳» انرژی پتانسیل کل ورق برابر است با:

$$\delta V = \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{rr} \delta \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta}) r dz d\theta dr$$

$$+ \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(K_w w_0 \delta w_0 + K_g \left(w_{0,r} \delta w_{0,r} + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta} \delta w_{0,\theta} \right) \right) r d\theta dr$$

$$+ \int_0^{2\pi} N a \delta u(a) d\theta - \int_0^{2\pi} N b \delta u(b) d\theta = 0 \quad ۲۱-۳$$

با جایگذاری رابطه «۳-۶» در «رابطه ۳-۲۱» انرژی پتانسیل کل بر حسب جابه‌جایی صفحه میانی برابر است با:

$$\delta V = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{rr} (\delta u_{0,r} + w_{0,r} \delta w_{0,r}) - z \sigma_{rr} (\delta w_{0,rr}) + \sigma_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \delta u_0 + \frac{1}{r} \delta v_{0,\theta} + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta} \delta w_{0,\theta} \right) - z \sigma_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r^2} \delta w_{0,\theta\theta} + \frac{1}{r} \delta w_{0,r} \right) + \tau_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \delta u_{0,\theta} + \delta v_{0,r} - \frac{1}{r} \delta v_0 + \frac{1}{r} \delta w_{0,\theta} w_{0,r} + \frac{1}{r} w_{0,\theta} \delta w_{0,r} \right) + z \tau_{r\theta} \left(\frac{2}{r^2} \delta w_{0,\theta} - \frac{2}{r} \delta w_{0,r\theta} \right) \right) r dz d\theta dr$$

$$+ \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(K_w w_0 \delta w_0 + K_g (w_{0,r} \delta w_{0,r} + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta} \delta w_{0,\theta}) \right) r d\theta dr$$

$$+ \int_0^{2\pi} N a \delta u(a) d\theta - \int_0^{2\pi} N b \delta u(b) d\theta = 0 \quad ۲۲-۳$$

اکنون با قرار دادن «روابط ۳-۱۲ و ۳-۱۳» در «رابطه ۳-۲۲» و استفاده از روش حساب تغییرات معادلات تعادل در سه جهت r ، θ و z به دست می‌آید.

برای به دست آوردن معادله تعادل در جهت شعاعی، ابتدا جمله‌هایی از «رابطه ۳-۲۲» که شامل δu_0 باشد مطابق زیر بیان به دست می‌آیند:

$$\delta u_0 : \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(N_{rr} \delta u_{0,r} + \frac{1}{r} N_{\theta\theta} \delta u_0 + \frac{1}{r} N_{r\theta} \delta u_{0,\theta} \right) r dr d\theta + \int_0^{2\pi} N a \delta u(a) d\theta - \int_0^{2\pi} N b \delta u(b) d\theta = 0$$

$$\delta u_0 : \int_0^{2\pi} \int_a^b r N_{rr} \delta u_{0,r} dr d\theta + \int_b^a \int_0^{2\pi} N_{\theta\theta} \delta u_0 dr d\theta + \int_b^a \int_0^{2\pi} N_{r\theta} \delta u_{0,\theta} dr d\theta + \int_0^{2\pi} N (a \delta u(a) - b \delta u(b)) d\theta = 0$$

۲۳-۳

به کمک روش جز به جز انتگرال‌های «رابطه ۳-۲۳» مطابق زیر بیان به دست می‌آیند:

$$\delta u_0 : \int_0^{2\pi} (r N_{rr} \delta u_0)_b^a d\theta - \int_b^a \int_0^{2\pi} (r N_{rr,r} + N_{rr}) \delta u_0 d\theta dr$$

$$+ \int_b^a \int_0^{2\pi} N_{\theta\theta} \delta u_0 d\theta dr + \int_a^b (N_{r\theta} \delta u_0)_0^{2\pi} dr - \int_b^a \int_0^{2\pi} N_{r\theta,\theta} \delta u_0 d\theta dr + \int_0^{2\pi} N (a\delta u(a) - b\delta u(b)) d\theta = 0$$

۲۴-۳

با حل «رابطه ۳-۲۴» معادله تعادل اول در جهت شعاعی به صورت زیر به دست می آید.

$$\delta u_0 : N_{rr,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (N_{rr} - N_{\theta\theta}) = 0 \quad ۲۵-۳$$

اکنون شرایط مرزی معادله تعادل در جهت شعاعی را به دست می آوریم:

$$\delta u_0 : \int_0^{2\pi} (r N_{rr} \delta u_0)_b^a d\theta + \int_a^b (N_{r\theta} \delta u_0)_0^{2\pi} dr + \int_0^{2\pi} N (a\delta u(a) - b\delta u(b)) d\theta = 0$$

$$\delta u_0 : \int_0^{2\pi} ((aN_{rr}(a)\delta u_0(a) - bN_{rr}(b)\delta u_0(b)) + N(a\delta u(a) - b\delta u(b))) d\theta = 0$$

$$\delta u_0 : (aN_{rr}(a) + Na)\delta u(a) + (bN_{rr}(b) + Nb)\delta u(b) = 0 \quad ۲۶-۳$$

شرایط مرزی هندسی و طبیعی ورق با استفاده از «رابطه ۳-۲۶» به صورت زیر به دست می آید.

$$\delta u_0(a) = 0, \quad \delta u_0(b) = 0 \quad ۲۷-۳$$

$$N_{rr}(a) = -N, \quad N_{rr}(b) = -N \quad ۲۸-۳$$

برای به دست آوردن معادله تعادل دوم در جهت محیطی، ابتدا جمله‌هایی از «رابطه ۳-۲۲» که شامل δV_0 باشد را مطابق زیر بیان می‌کنیم:

$$\delta V_0 : \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} N_{\theta\theta} \delta V_{0,\theta} + N_{r\theta} \delta V_{0,r} - \frac{1}{r} N_{r\theta} \delta V_0 \right) r d\theta dr = 0$$

$$\delta V_0 : \int_b^a \int_0^{2\pi} N_{\theta\theta} \delta V_{0,\theta} d\theta dr - \int_b^a \int_0^{2\pi} N_{r\theta} \delta V_0 d\theta dr + \int_0^{2\pi} \int_b^a r N_{r\theta} \delta V_{0,r} dr d\theta = 0 \quad ۲۹-۳$$

به کمک روش جز به جز انتگرال‌های «رابطه ۳-۲۹» را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \delta V_0 : & \int_b^a (N_{\theta\theta} \delta V_0)_0^{2\pi} dr - \int_b^a \int_0^{2\pi} N_{\theta\theta, \theta} \delta V_0 d\theta dr - \int_b^a \int_0^{2\pi} (N_{r\theta}) \delta V_0 d\theta dr \\ & + \int_0^{2\pi} (r N_{r\theta, \theta} \delta V_0)_b^a d\theta - \int_b^a \int_0^{2\pi} (r N_{r\theta, r} + N_{r\theta}) \delta V_0 d\theta dr = 0 \end{aligned} \quad ۳۰-۳$$

با حل «رابطه ۳-۳۰» معادله تعادل در جهت محیطی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\delta V_0 : N_{r\theta, r} + \frac{2}{r} N_{r\theta} + \frac{1}{r} N_{\theta\theta, \theta} = 0 \quad ۳۱-۳$$

اکنون شرایط مرزی معادله تعادل در جهت محیطی را به دست می‌آوریم:

$$\delta V_0 : \int_b^a (N_{\theta\theta} \delta V_0)_0^{2\pi} dr + \int_0^{2\pi} (r N_{r\theta, \theta} \delta V_0)_b^a d\theta = 0$$

$$\delta V_0 : \int_0^{2\pi} (a N_{r\theta, \theta}(a) \delta V_0(a) - b N_{r\theta, \theta}(b) \delta V_0(b)) d\theta = 0$$

$$\delta V_0 : a N_{r\theta, \theta}(a) \delta V_0(a) - b N_{r\theta, \theta}(b) \delta V_0(b) = 0 \quad ۳۲-۳$$

شرایط مرزی هندسی و طبیعی ورق با استفاده از «رابطه ۳-۲۶» به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\delta v_0(a)=0, \quad \delta v_0(b)=0 \quad ۳۳-۳$$

$$N_{r\theta,\theta}(a)=0, \quad N_{r\theta,\theta}(b)=0 \quad ۳۴-۳$$

روابط مربوط به معادله تعادل در جهت ضخامت برابر مجموع روابط مربوط به تعادل منتجه‌های نیرو (δw_1)، معادله تعادل منتجه‌های گشتاور (δw_2) و معادله تعادل مربوط به محیط الاستیک (δw_3) می‌باشد.

$$\delta w_0 = \delta w_1 + \delta w_2 + \delta w_3$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(r N_{rr} w_{0,r} + N_{r\theta} w_{0,\theta} \right) \delta w_{0,r} + \left(\frac{1}{r} N_{\theta\theta} w_{0,\theta} + N_{r\theta} w_{0,r} \right) \delta w_{0,\theta} \Big) d\theta dr \\ & - \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(r M_{rr} \delta w_{0,rr} + \frac{1}{r} M_{\theta\theta} \delta w_{0,\theta\theta} + M_{\theta\theta} \delta w_{0,r} - \frac{2}{r} M_{r\theta} \delta w_{0,\theta} + 2 M_{r\theta} \delta w_{0,r\theta} \right) d\theta dr \\ & + \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(r K_w w_0 \delta w_0 + K_g \left(r w_{0,r} \delta w_{0,r} + \frac{1}{r} w_{0,\theta} \delta w_{0,\theta} \right) \right) d\theta dr = 0 \end{aligned} \quad ۳۵-۳$$

ابتدا معادله تعادل مربوط به منتجه‌های نیرو (δw_1) را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \delta w_1 : & \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(r N_{rr} w_{0,r} + N_{r\theta} w_{0,\theta} \right) \delta w_{0,r} + \left(\frac{1}{r} N_{\theta\theta} w_{0,\theta} + N_{r\theta} w_{0,r} \right) \delta w_{0,\theta} \Big) d\theta dr \\ \delta w_1 : & \int_0^{2\pi} \int_b^a r N_{rr} w_{0,r} \delta w_{0,r} dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_b^a N_{r\theta} w_{0,\theta} \delta w_{0,r} dr d\theta + \int_b^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} N_{\theta\theta} w_{0,\theta} \delta w_{0,\theta} d\theta dr \\ & + \int_b^a \int_0^{2\pi} N_{r\theta} w_{0,r} \delta w_{0,\theta} d\theta dr = 0 \end{aligned} \quad ۳۶-۳$$

به کمک روش جز به جز انتگرال‌های «رابطه ۳-۳۶» را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \delta w_1 : & \int_0^{2\pi} \left(r N_{rr} w_{0,r} \delta w_0 \right)_b^a d\theta - \int_b^a \int_0^{2\pi} \left((r N_{rr,r} + N_{rr} w_{0,r}) w_{0,r} + r N_{rr} w_{0,rr} \right) \delta w_0 \\
 & + \int_0^{2\pi} \left(N_{r\theta} w_{0,\theta} \delta w_0 \right)_b^a d\theta - \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(N_{r\theta,r} w_{0,\theta} + N_{r\theta} w_{0,r\theta} \right) \delta w_0 + \int_b^a \left(\frac{1}{r} N_{\theta\theta} w_{0,\theta} \delta w_0 \right)_0^{2\pi} \\
 & - \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta} w_{0,\theta} + \frac{1}{r} N_{\theta\theta} w_{0,\theta\theta} \right) \delta w_0 + \int_b^a \left(N_{r\theta} w_{0,r} \delta w_0 \right)_0^{2\pi} \\
 & - \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(N_{r\theta,\theta} w_{0,r} + N_{r\theta} w_{0,r\theta} \right) \delta w_0 = 0 \quad 37-3
 \end{aligned}$$

با حل «رابطه ۳-۳۷» معادله تعادل مربوط به منتجه‌های نیرو (δw_1) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\delta w_1 : - \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\begin{aligned} & (r N_{rr,r} + N_{rr} + N_{r\theta,\theta}) w_{0,r} + \left(\frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta} + N_{r\theta,r} \right) w_{0,\theta} \\ & + \frac{1}{r} N_{\theta\theta} w_{0,\theta\theta} + N_{r\theta} w_{0,rr} + N_{r\theta} w_{0,r\theta} + r N_{rr} w_{0,rr} \end{aligned} \right) d\theta dr \quad 38-3$$

در این قسمت برای ساده‌سازی «رابطه ۳-۳۸» از معادلات تعادل «روابط ۳-۲۵ و ۳-۳۱» استفاده کرده و معادله تعادل در جهت ضخامت مطابق زیر به دست می‌آید.

$$\delta w_1 : N_{rr} w_{0,rr} + N_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} w_{0,r} + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta} \right) + 2N_{r\theta} \left(\frac{1}{r} w_{0,r\theta} - \frac{1}{r^2} w_{0,\theta} \right) = 0 \quad 39-3$$

اکنون معادله تعادل مربوط به منتجه‌های گشتاور (δw_2) را به دست می‌آوریم.

$$\delta w_2 : - \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(r M_{rr} \delta w_{0,rr} + \frac{1}{r} M_{\theta\theta} \delta w_{0,\theta\theta} + M_{\theta\theta} \delta w_{0,r} - \frac{2}{r} M_{r\theta} \delta w_{0,\theta} + 2 M_{r\theta} \delta w_{0,r\theta} \right) d\theta dr$$

$$\begin{aligned} \delta w_2 : & - \int_0^{2\pi} \int_b^a r M_{rr} \delta w_{0,rr} dr d\theta - \int_b^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} M_{\theta\theta} \delta w_{0,\theta\theta} d\theta dr - \int_0^{2\pi} \int_b^a M_{\theta\theta} \delta w_{0,r} dr d\theta \\ & + \int_b^a \int_0^{2\pi} \frac{2}{r} M_{r\theta} \delta w_{0,\theta} d\theta dr - 2 \int_b^a \int_0^{2\pi} M_{r\theta} \delta w_{0,r\theta} dr d\theta = 0 \end{aligned}$$

۴۰-۳

به کمک روش جز به جز انتگرال‌های «رابطه ۳-۴۰» را حل می‌کنیم.

$$\delta w_2 : - \int_0^{2\pi} \left(r M_{rr} \delta w_{0,r} \right)_b^a d\theta + \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(M_{rr} + r M_{rr,r} \right) \delta w_{0,r} dr d\theta - \int_b^a \left(\frac{1}{r} M_{\theta\theta} \delta w_{0,\theta} \right) dr$$

$$+ \int_b^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} M_{\theta\theta,\theta} \delta w_{0,\theta} d\theta dr - \int_0^{2\pi} \left(M_{\theta\theta} \delta w_0 \right)_b^a d\theta + \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(M_{\theta\theta,r} \right) \delta w_0 dr d\theta$$

$$+ \int_b^a \left(\frac{2}{r} M_{r\theta} \delta w_0 \right)_0^{2\pi} dr - \int_b^a \int_0^{2\pi} \frac{2}{r} M_{r\theta,\theta} \delta w_0 d\theta dr - 2 \int_0^{2\pi} \left(M_{r\theta} \delta w_{0,\theta} \right)_b^a d\theta$$

$$+ 2 \int_b^a \int_0^{2\pi} M_{r\theta,r} \delta w_{0,\theta} d\theta dr = 0$$

$$\delta w_2 : - \int_0^{2\pi} \left(r M_{rr} \delta w_{0,r} \right)_b^a d\theta + \int_b^a \left(\left(M_{rr} + r M_{rr,r} \right) \delta w_0 \right)_0^{2\pi} dr - \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(2 M_{rr,r} + r M_{rr,rr} \right) \delta w_0 dr d\theta$$

$$- \int_b^a \left(\frac{1}{r} M_{\theta\theta} \delta w_{0,\theta} \right)_0^{2\pi} dr + \int_b^a \left(\frac{1}{r} M_{\theta\theta,\theta} \delta w_0 \right)_0^{2\pi} dr - \int_b^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} M_{\theta\theta,\theta\theta} \delta w_0 d\theta dr$$

$$- \int_0^{2\pi} \left(M_{\theta\theta} \delta w_0 \right)_b^a d\theta + \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(M_{\theta\theta,r} \right) \delta w_0 dr d\theta + \int_b^a \left(\frac{2}{r} M_{r\theta} \delta w_0 \right)_0^{2\pi} dr - \int_b^a \int_0^{2\pi} \frac{2}{r} M_{r\theta,\theta} \delta w_0 d\theta dr$$

$$- 2 \int_0^{2\pi} \left(M_{r\theta} \delta w_{0,\theta} \right)_b^a d\theta + 2 \int_b^a \left(M_{r\theta,r} \delta w_0 \right)_0^{2\pi} dr - 2 \int_b^a \int_0^{2\pi} M_{r\theta,r\theta} \delta w_0 d\theta dr = 0$$

۴۱-۳

با حل «رابطه ۳-۴۱» معادله تعادل مربوط به نتیجه‌های گشتاور (δw_2) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\delta w_2 : M_{rr,rr} + \frac{2}{r} M_{rr,r} + \frac{1}{r^2} M_{\theta\theta,\theta\theta} - \frac{1}{r} M_{\theta\theta,r} + \frac{2}{r^2} M_{r\theta,\theta} + \frac{2}{r} M_{r\theta,r\theta}$$

۴۲-۳

معادله تعادل مربوط به اثر محیط الاستیک (δw_3) را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$\delta w_3 : \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(r K_w w_0 \delta w_0 + K_g \left(r w_{0,r} \delta w_{0,r} + \frac{1}{r} w_{0,\theta} \delta w_{0,\theta} \right) \right) d\theta dr$$

$$\delta w_3 : \int_b^a \int_0^{2\pi} (r K_w w_0 \delta w_0) d\theta dr + \int_b^a \int_0^{2\pi} (r K_g w_{0,r} \delta w_{0,r}) dr d\theta + \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} K_g w_{0,\theta} \delta w_{0,\theta} \right) d\theta dr$$

۴۳-۳

به کمک روش جز به جز، انتگرال های «رابطه ۳-۴۳» را حل می کنیم.

$$\delta w_3 : \int_b^a \int_0^{2\pi} (r K_w w_0 \delta w_0) d\theta dr + \int_b^a (r K_g w_{0,r} \delta w_0)_0^{2\pi} dr$$

$$- \int_b^a \int_0^{2\pi} K_g (r w_{0,rr} + w_{0,r}) \delta w_0 d\theta dr + \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} K_g w_{0,\theta} \delta w_0 \right)_b^a d\theta - \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} K_g w_{0,\theta\theta} \delta w_0 \right) d\theta dr$$

۴۴-۳

با حل «رابطه ۳-۴۴» معادله تعادل مربوط به اثر محیط الاستیک (δw_3) به صورت زیر به دست می آید.

$$\delta w_3 : K_w w_0 - K_g \left(w_{0,rr} + \frac{1}{r} w_{0,r} + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta} \right)$$

۴۵-۳

اکنون با جایگذاری روابط «۳-۳۹، ۳-۴۲ و ۳-۴۵» در قسمت اول «رابطه ۳-۳۵» معادله نهایی

تعادل در جهت ضخامت برابر است با:

$$\begin{aligned} \delta W_0 : & M_{rr,rr} + \frac{2}{r} M_{rr,r} + \frac{1}{r^2} M_{\theta\theta,\theta\theta} - \frac{1}{r} M_{\theta\theta,r} + \frac{2}{r^2} M_{r\theta,\theta} + \frac{2}{r} M_{r\theta} + N_{rr} w_{0,rr} \\ & + N_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} w_{0,r} + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta} \right) + 2N_{r\theta} \left(\frac{1}{r} w_{0,r\theta} - \frac{1}{r^2} w_{0,\theta} \right) + K_w w_0 \\ & - K_g \left(w_{0,r} + r w_{0,rr} + \frac{1}{r} (w_{0,\theta\theta}) \right) = 0 \end{aligned} \quad ۴۶-۳$$

۳-۶ بررسی وجود کمانش در اثر اعمال بارهای داخل صفحه‌ای

ورق حلقوی ساخته شده از مواد هدمندی در نظر گرفته می‌شود که تحت بارهای فشاری در راستای شعاع و حرارت قرار گرفته است. مقدار این نیرو در لبه داخل را N می‌نامیم. در ابتدا ورق کاملاً مسطح می‌باشد. با اعمال بارهای داخل صفحه‌ای، صفحه دچار کاهش طول می‌شود تا اینکه مقدار بار به مقدار بحرانی‌اش برسد. پس از رسیدن به مقدار بحرانی، ورق علاوه بر تغییر شکل‌های داخل صفحه، دچار تغییر شکل عرضی (خیز) نیز خواهد شد.

فرض بر آن است که جابه‌جایی v_0^0 به دلیل تقارن در بارگذاری و جابه‌جایی کمانشی w_0^0 در مرحله پیش کمانش برابر صفر باشد. در واقع تنها درجه آزادی $u_0^0(r, \theta)$ است که می‌تواند در حالت پیش کمانش وجود داشته باشد.

با حذف v_0 و w_0 از «رابطه ۳-۱۴» نتیجه‌های نیرو پیش کمانش برابر است با:

$$\begin{aligned} N_{rr}^0 &= \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(u_{0,r} + \frac{\nu}{r} u_0 \right) - N^T \\ N_{\theta\theta}^0 &= \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\nu u_{0,r} + \frac{1}{r} u_0 \right) - N^T \\ N_{r\theta}^0 &= 0 \end{aligned} \quad ۴۷-۳$$

با قرار دادن «رابطه ۳-۴۷» در معادله تعادل «۳-۲۵»، معادله اویلر بر حسب جابه‌جایی $u_0^0(r, \theta)$ مطابق زیر به دست می‌آید:

$$N_{rr,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (N_{rr} - N_{\theta\theta}) = 0$$

$$\frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\left(u_{0,rr} + \frac{\nu}{r} u_{0,r} - \frac{\nu}{r^2} u_0 \right) + \frac{1}{r} \left((1-\nu) u_{0,r} - \frac{(1-\nu)}{r} u_0 \right) \right) = 0$$

$$\frac{E_1}{1-\nu^2} \left(u_{0,rr} + \frac{1}{r} u_{0,r} - \frac{1}{r^2} u_0 \right) = 0$$

$$r^2 u_{0,rr} + r u_{0,r} - u_0 = 0$$

۴۸-۳

با حل معادله اویلر جابه‌جایی در جهت شعاع برابر است با:

$$u_0(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

۴۹-۳

می‌توان از سه حالت مختلف بارگذاری برای به‌دست آوردن ضرایب C_1 و C_2 استفاده کرد که در ادامه به بررسی این سه حالت و به‌دست آوردن نتیجه‌های نیرو و گشتاور می‌پردازیم.

۳-۶-۱ پیش‌کمانش مکانیکی

در این حالت ورق حلقوی در لبه داخل و خارجی خود تحت فشار شعاعی یکنواخت N قرار دارد؛ بنابراین برای به‌دست آوردن ضرایب C_1 و C_2 ، باید از شرایط مرزی طبیعی معادله تعادل در جهت شعاعی استفاده شود؛ یعنی با قرار دادن روابط «۳-۴۷» و «۳-۴۹» در «رابطه ۳-۲۸» و انجام ساده‌سازی لازم داریم:

$$N_{rr}(a) = -N \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(u_{0,r}(a) + \frac{\nu}{a} u_0(a) \right) - N^T = -N$$

$$N_{rr}(b) = -N \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(u_{0,r}(b) + \frac{\nu}{a} u_0(b) \right) - N^T = -N$$

$$u_0(r, \theta) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

$$\frac{E_1}{1-v^2} \left(\left(C_1 - \frac{C_2}{a^2} \right) + \frac{v}{a} \left(C_1 a + \frac{C_2}{a} \right) \right) = -N + N^T$$

$$\frac{E_1}{1-v^2} \left(\left(C_1 - \frac{C_2}{b^2} \right) + \frac{v}{b} \left(C_1 a + \frac{C_2}{b} \right) \right) = -N + N^T \quad 50-3$$

با حل دستگاه معادلات «۵۰-۳»، دو ضریب C_1 و C_2 مطابق زیر به دست می‌آید.

$$\frac{E_1}{1-v^2} \left(C_2 (v-1) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \right) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\frac{E_1}{1-v} C_1 = -N + N^T \Rightarrow C_1 = \frac{1-v}{E_1} (-N + N^T) \quad 51-3$$

با قرار دادن ضرایب به دست آمده «رابطه ۵۱-۳» در «رابطه ۴۹-۳»، جابه‌جایی در راستای شعاع برابر است با:

$$u_0(r, \theta) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \Rightarrow u_0(r, \theta) = \frac{1-v}{E_1} (-N + N^T) r \quad 52-3$$

همان‌طور که در «رابطه ۵۲-۳» نشان داده شده است جابه‌جایی در راستای شعاعی به بار یکنواخت فشاری N و بار حرارتی N^T وابسته می‌باشد.

حال با قرار دادن «رابطه ۴۷-۳» در «رابطه ۳۹-۳» نتیجه‌های پیش‌کمانش نیرو و گشتاور را به دست می‌آوریم:

$$u_0(r, \theta) = \frac{1-v}{E_1} (-N + N^T) r$$

$$N_{rr}^0 = \frac{E_1}{1-v^2} \left(u_{0,r} + \frac{v}{r} u_0 \right) - N^T$$

$$N_{rr}^0 = \frac{E_1}{1-v^2} \left(\frac{1-v}{E_1} (-N + N^T) + \frac{v}{r} \frac{1-v}{E_1} (-N + N^T) r \right) - N^T = -N \quad 53-3$$

$$N_{\theta\theta}^0 = \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\nu u_{0,r} + \frac{1}{r} u_0 \right) - N^T$$

$$N_{\theta\theta}^0 = \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\frac{\nu(1-\nu)}{E_1} (-N + N^T) + \frac{1}{r} \frac{1-\nu}{E_1} (-N + N^T) r \right) - N^T = -N \quad 54-3$$

$$N_{r\theta}^0 = 0 \quad 55-3$$

از طرفی با حذف w_0 و v_0 از «رابطه ۳-۱۴» منتهجهای گشتاور برابر است با:

$$M_{rr}^0 = M_{\theta\theta}^0 = -M^T, \quad M_{r\theta}^0 = 0 \quad 56-3$$

«روابط ۳-۵۳ تا ۳-۵۵» نشان می‌دهند که وقتی ورق در محیط حرارتی در دو لبه داخلی و خارجی تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت باشد، به دلیل مقید نبودن $u_0(r, \theta)$ ، اثر بار حرارتی (N^T) حذف و کمانش حرارتی رخ نمی‌دهد و فشار اعمالی به لبه‌ها باعث ایجاد کمانش مکانیکی می‌شود. هم‌چنین «رابطه ۳-۵۶» نشان می‌دهد که در این حالت حرارت باعث ایجاد گشتاور حرارتی می‌شود.

۳-۶-۲ پیش‌کمانش حرارتی

ورق حلقوی تحت محیط حرارتی که در لبه داخلی و خارجی مقید بوده اما بار فشار یکنواخت N به آن اعمال نمی‌شود. در این حالت برای به‌دست آوردن ضرایب C_1 و C_2 ، باید از شرایط مرزی هندسی معادله تعادل در جهت شعاع استفاده شود ($\delta u_0(a) = 0, \delta u_0(b) = 0$)؛ یعنی با قرار دادن روابط «۳-۴۷ و ۳-۴۹» در «رابطه ۳-۲۷» و انجام ساده‌سازی لازم داریم:

$$u_0(r, \theta) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

$$u_0(a, \theta) = C_1 a + \frac{C_2}{a} = 0$$

$$u_0(b, \theta) = C_1 b + \frac{C_2}{b} = 0$$

$$C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow u_0^0(r, \theta) = 0 \quad 57-3$$

پس جابه‌جایی در هر سه جهت r ، θ و z برابر صفر می‌باشد.

$$u_0^0(r, \theta) = 0, \quad v_0^0(r, \theta) = 0, \quad w_0^0(r, \theta) = 0 \quad 58-3$$

اکنون با جایگذاری «رابطه 3-58» در «رابطه 3-14» متجه‌های نیرو و گشتاور قبل کمانش به دست می‌آید:

$$N_{rr}^0 = N_{\theta\theta}^0 = -N^T, \quad N_{r\theta}^0 = 0 \quad 59-3$$

$$M_{rr}^0 = M_{\theta\theta}^0 = -M^T, \quad M_{r\theta}^0 = 0 \quad 60-3$$

«روابط 3-56 و 3-60» نشان می‌دهد در ورق با خواص متغیر (مانند مواد هدفمند)، اعمال بارهای مکانیکی و حرارتی داخل صفحه، گشتاور حرارتی اضافی (M^T) به وجود می‌آورد. حضور این گشتاورها باعث می‌شوند از همان ابتدا ورق در مرحله پیش‌کمانش دچار خمش شده و در نتیجه مانع از بروز پدیده کمانش می‌گردد (قبل از کمانش، خمش رخ می‌دهد).

در حالت کلی حضور گشتاور اضافی در ورق به معنی ایجاد تغییر شکل عرضی و خمش نمی‌باشد؛ زیرا می‌توان شرایط مرزی را طوری تعریف کرد که تکیه‌گاه‌ها این گشتاور اضافی را تحمل نمایند. در میان سه گونه شرایط مرزی رایج در تئوری صفحات، شرط مرزی گیردار قادر به تحمل این گشتاور اضافی می‌باشد. شرایط مرزی آزاد یا تکیه‌گاه ساده قادر به تحمل گشتاور اضافی در لبه‌ها نمی‌باشند [33].

صفحات از جنس مواد هدفمند، بسته به اینکه محیط با دمای بالا در یک طرف یا دو طرف صفحه اعمال شود، به دو دسته یک‌طرفه و دوطرفه¹ تقسیم می‌شوند. در حالت یک‌طرفه، یک سطح سرامیک خالص و سطح دیگر فلز خالص است درحالی‌که در حالت دوطرفه معمولاً دو سطح سرامیک خالص و صفحه میانی فلز خالص می‌باشد.

¹ Bimorph

گشتاور (M^T) برای یک ماده هدفمند تک لایه که خواص آن نسبت به صفحه میانی دارای تقارن نباشد، برابر صفر نیست. هر چند محدوده انتگرال گیری برای محاسبه M^T متقارن است. چنانچه ورق نسبت به صفحه میانی دارای خواص متقارنی باشد، این انتگرال برابر صفر خواهد بود و کمانش در ورق رخ می دهد. ورق های ساخته شده از مواد هدفمند دوطرفه این خاصیت را دارا می باشد.

۳-۶-۳ کمانش ترمومکانیکی

ورق حلقوی تحت محیط حرارتی که از طرف لبه داخلی گیردار و از طرف لبه خارج، تحت فشار شعاعی یکنواخت N قرار گرفته است. در این حالت برای به دست آوردن ضرایب C_1 و C_2 ، باید از شرط مرزی هندسی در لبه داخلی ($\delta u_0(b)=0$) و شرط مرزی طبیعی در لبه خارجی ورق حلقوی ($N_{rr}^0(a)=-N$) استفاده شود.

شرایط مرزی جدید مسئله عبارتند از:

$$u_0(b)=0, \quad N_{rr}^0(a)=-N$$

۶۱-۳

با قرار دادن «رابطه ۶۱-۳» در «روابط ۴۷-۳ و ۴۹-۳» و انجام ساده سازی لازم داریم:

$$u_0(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

$$u_0(b) = 0 \rightarrow C_1 b + \frac{C_2}{b} = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{C_2}{b^2}$$

$$N_{rr}^0(a) = -N \rightarrow \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(u_{0,r}(a) + \frac{\nu}{a} u_0(a) \right) - N^T = -N$$

$$\frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\left(C_1 - \frac{C_2}{a^2} \right) + \frac{\nu}{a} \left(C_1 a + \frac{C_2}{a} \right) \right) = -N + N^T$$

$$-C_2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \right) - \nu C_2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \right) = \frac{1-\nu^2}{E_1} (-N + N^T)$$

$$-C_2 \left(\frac{(a^2 + b^2) + \nu(a^2 - b^2)}{a^2 b^2} \right) = \frac{1-\nu^2}{E_1} (-N + N^T)$$

۶۲-۳

با حل دستگاه معادلات «۶۲-۳»، دو ضریب C_1 و C_2 مطابق زیر به دست می آید.

$$C_2 = \frac{a^2 b^2 (1-v^2)(N-N^T)}{E_1 \left((a^2 + b^2) + v(a^2 - b^2) \right)}$$

$$C_1 = \frac{-a^2 (1-v^2)(N-N^T)}{E_1 \left((a^2 + b^2) + v(a^2 - b^2) \right)} \quad ۶۳-۳$$

با قرار دادن ضرایب به دست آمده از «رابطه ۳-۶۳» در «رابطه ۳-۴۹» جابه‌جایی در راستای شعاع برابر است با:

$$u_0(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_2 \left(\frac{b^2 - r^2}{rb^2} \right)$$

$$u_0(r) = \frac{a^2 b^2 (1-v^2)}{E_1 \left((a^2 + b^2) + v(a^2 - b^2) \right)} \left(\frac{b^2 - r^2}{rb^2} \right) (N - N^T) \quad ۶۴-۳$$

حال با قرار دادن «رابطه ۳-۶۴» در «رابطه ۳-۴۷» منته‌های پیش‌کمانش نیرو و گشتاور را به دست می‌آوریم:

$$N_{rr}^0 = \frac{E_1}{1-v^2} \left(u_{0,r} + \frac{v}{r} u_0 \right) - N^T$$

$$N_{rr}^0 = \frac{E_1}{1-v^2} \left(\frac{a^2 b^2 (1-v^2)}{E_1 \left((a^2 + b^2) + v(a^2 - b^2) \right)} \left(\frac{-(b^2 + r^2)}{r^2} \right) (N - N^T) + \frac{v}{r} \left(\frac{a^2 b^2 (1-v^2)}{E_1 \left((a^2 + b^2) + v(a^2 - b^2) \right)} \left(\frac{b^2 - r^2}{rb^2} \right) (N - N^T) \right) \right) - N^T \quad ۶۵-۳$$

$$N_{\theta\theta}^0 = \frac{E_1}{1-v^2} \left(v u_{0,r} + \frac{1}{r} u_0 \right) - N^T$$

$$N_{\theta\theta}^0 = \frac{E_1}{1-v^2} \left(\frac{v a^2 b^2 (1-v^2)}{E_1 \left((a^2 + b^2) + v(a^2 - b^2) \right)} \left(\frac{-(b^2 + r^2)}{r^2} \right) (N - N^T) + \frac{1}{r} \left(\frac{a^2 b^2 (1-v^2)}{E_1 \left((a^2 + b^2) + v(a^2 - b^2) \right)} \left(\frac{b^2 - r^2}{rb^2} \right) (N - N^T) \right) \right) - N^T \quad ۶۶-۳$$

$$N_{r\theta}^0 = 0 \quad ۶۷-۳$$

در این پژوهش حالت‌های اول و دوم به روش تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج آن به دست آمده است. در واقع در حالت اول (کمانش مکانیکی) اثر دما تنها بر خواص ورق حلقوی FG مورد بررسی قرار گرفته است. اما حالت سوم به علت پیچیدگی در روابط منته‌های پیش‌کمانش به روش تحلیلی قابل حل نیست و باید به روش عددی مورد بررسی قرار بگیرد که در این پژوهش به آن پرداخته نشده است.

۳-۷ معادلات پایداری

برای به دست آوردن بارهای بحرانی ورق نیاز به استخراج معادلات پایداری می‌باشد [۴۷،۲۸،۲۶،۲۵]. برای به دست آوردن معادلات پایداری از دو روش مختلف استفاده می‌شود. در ابتدا می‌توان با استفاده از معادلات تعادل و نمو جزئی، مؤلفه‌های جابه‌جایی این معادلات را استخراج نمود. همچنین می‌توان با استفاده از تابع انرژی پتانسیل ورق و استفاده از قاعده ترفترز به این معادلات دست یافت. در ادامه از روش تعادل در مجاورت به استخراج معادلات پایداری می‌پردازیم.

بدین منظور لحظه‌ای از تعادل ورق را در مرحله پیش‌کمانش در نظر می‌گیریم که با مؤلفه‌های جابه‌جایی u_0^0, v_0^0, w_0^0 بیان می‌شود. در اینجا از بالانویس صفر برای بیان یک موقعیت تعادل در مرحله پیش‌کمانش استفاده شده است. حال به هریک از مؤلفه‌های جابه‌جایی نمو کوچکی را اضافه می‌کنیم تا به موقعیت جدید تعادلی برسیم؛ بنابراین مؤلفه‌های جابه‌جایی زیر یک لحظه تعادل را مشخص می‌کنند [۴۷،۲۸،۲۶،۲۵].

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1, \quad w_0 = w_0^0 + w_0^1 \quad ۶۸-۳$$

مشابه مؤلفه‌های جابه‌جایی، منته‌های نیرو و گشتاور نیز به دو جمله قبل از کمانش و در مجاورت کمانش تقسیم می‌شوند.

$$\begin{aligned}
N_{rr} &= N_{rr}^0 + N_{rr}^1 & M_{rr} &= M_{rr}^0 + M_{rr}^1 \\
N_{\theta\theta} &= N_{\theta\theta}^0 + N_{\theta\theta}^1 & M_{\theta\theta} &= M_{\theta\theta}^0 + M_{\theta\theta}^1 \\
N_{r\theta} &= N_{r\theta}^0 + N_{r\theta}^1 & M_{r\theta} &= M_{r\theta}^0 + M_{r\theta}^1
\end{aligned}
\tag{۶۹-۳}$$

ابتدا با قرار دادن «رابطه ۶۹-۳» در معادله تعادل «رابطه ۲۵-۳»، معادله پایداری در جهت شعاع را مطابق زیر به دست می آوریم.

$$\begin{aligned}
\delta u_0^1 : (N_{rr,r}^0 + N_{rr,r}^1) + \frac{1}{r}(N_{r\theta,\theta}^0 + N_{r\theta,\theta}^1) + \frac{1}{r}((N_{rr}^0 + N_{rr}^1) - (N_{\theta\theta}^0 + N_{\theta\theta}^1)) &= 0 \\
\delta u_0^1 : (N_{rr,r}^0 + \frac{1}{r}N_{r\theta,\theta}^0 + \frac{1}{r}(N_{rr}^0 - N_{\theta\theta}^0)) + (N_{rr,r}^1 + \frac{1}{r}N_{r\theta,\theta}^1 + \frac{1}{r}(N_{rr}^1 - N_{\theta\theta}^1)) &= 0
\end{aligned}
\tag{۷۰-۳}$$

قسمت اول «رابطه ۷۰-۳» مربوط به قبل از کمانش و طبق معادله تعادل برابر صفر است.

$$\left(N_{rr,r}^0 + \frac{1}{r}N_{r\theta,\theta}^0 + \frac{1}{r}(N_{rr}^0 - N_{\theta\theta}^0) \right) = 0
\tag{۷۱-۳}$$

معادله نهایی پایداری در جهت شعاع برابر است با:

$$\delta u_0^1 : N_{rr,r}^1 + \frac{1}{r}N_{r\theta,\theta}^1 + \frac{1}{r}(N_{rr}^1 - N_{\theta\theta}^1) = 0
\tag{۷۲-۳}$$

حال با قرار دادن «رابطه ۶۹-۳» در معادله تعادل «رابطه ۳۱-۳»، معادله پایداری در جهت محیطی را مطابق زیر به دست می آوریم.

$$\delta V_0^1 : \left(N_{r\theta,r}^0 + N_{r\theta,r}^1 \right) + \frac{2}{r} \left(N_{r\theta}^0 + N_{r\theta}^1 \right) + \frac{1}{r} \left(N_{\theta\theta,\theta}^0 + N_{\theta\theta,\theta}^1 \right) = 0$$

$$\delta V_0^1 : \left(\left(N_{r\theta,r}^0 + \frac{2}{r} N_{r\theta}^0 + \frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta}^0 \right) + \left(N_{r\theta,r}^1 + \frac{2}{r} N_{r\theta}^1 + \frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta}^1 \right) \right) = 0 \quad 73-3$$

قسمت اول «رابطه ۷۳-۳» مربوط به قبل از کمانش و طبق معادله تعادل برابر صفر است.

$$\left(N_{r\theta,r}^0 + \frac{2}{r} N_{r\theta}^0 + \frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta}^0 \right) = 0 \quad 74-3$$

معادله نهایی پایداری در جهت محیطی برابر است با:

$$\delta V_0^1 : \left(N_{r\theta,r}^1 + \frac{2}{r} N_{r\theta}^1 + \frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta}^1 \right) = 0 \quad 75-3$$

در نهایت با قرار دادن «رابطه ۶۹-۳» در معادله تعادل «رابطه ۴۶-۳»، معادله پایداری در جهت ضخامت را مطابق زیر به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \delta W_0 : & \left(M_{rr,rr}^0 + M_{rr,rr}^1 \right) + \frac{2}{r} \left(M_{rr,r}^0 + M_{rr,r}^1 \right) + \frac{1}{r^2} \left(M_{\theta\theta,\theta\theta}^0 + M_{\theta\theta,\theta\theta}^1 \right) - \frac{1}{r} \left(M_{\theta\theta,r}^0 + M_{\theta\theta,r}^1 \right) \\ & + \frac{2}{r^2} \left(M_{r\theta,\theta}^0 + M_{r\theta,\theta}^1 \right) + \frac{2}{r} \left(M_{r\theta}^0 + M_{r\theta}^1 \right) + \left(N_{rr}^0 + N_{rr}^1 \right) \left(w_{0,rr}^0 + w_{0,rr}^1 \right) \\ & + \left(N_{\theta\theta}^0 + N_{\theta\theta}^1 \right) \left(\frac{1}{r} \left(w_{0,r}^0 + w_{0,r}^1 \right) + \frac{1}{r^2} \left(w_{0,\theta\theta}^0 + w_{0,\theta\theta}^1 \right) \right) \\ & + 2 \left(N_{r\theta}^0 + N_{r\theta}^1 \right) \left(\frac{1}{r} \left(w_{0,r\theta}^0 + w_{0,r\theta}^1 \right) - \frac{1}{r^2} \left(w_{0,\theta}^0 + w_{0,\theta}^1 \right) \right) \\ & + K_w \left(w_0^0 + w_0^1 \right) - K_g \left(\left(w_{0,r}^0 + w_{0,r}^1 \right) + \frac{1}{r} \left(w_{0,rr}^0 + w_{0,rr}^1 \right) + \frac{1}{r^2} \left(w_{0,\theta\theta}^0 + w_{0,\theta\theta}^1 \right) \right) = 0 \quad 76-3 \end{aligned}$$

قسمت اول «رابطه ۷۶-۳» مربوط به قبل از کمانش و طبق معادله تعادل برابر صفر است.

$$\begin{aligned} \delta W_0^0 : & M_{rr,rr}^0 + \frac{2}{r} M_{rr,r}^0 + \frac{1}{r^2} M_{\theta\theta,\theta\theta}^0 - \frac{1}{r} M_{\theta\theta,r}^0 + \frac{2}{r^2} M_{r\theta,\theta}^0 + \frac{2}{r} M_{r\theta}^0 + N_{rr}^0 W_{0,rr}^0 \\ & + N_{\theta\theta}^0 \left(\frac{1}{r} (w_{0,r}^0) + \frac{1}{r^2} (w_{0,\theta\theta}^0) \right) + 2N_{r\theta}^0 \left(\frac{1}{r} w_{0,r\theta}^0 - \frac{1}{r^2} w_{0,\theta}^0 \right) + K_w W_0^0 - \\ & K_g \left(w_{0,r}^0 + \frac{1}{r} (w_{0,rr}^0) + \frac{1}{r^2} (w_{0,\theta\theta}^0) \right) = 0 \end{aligned}$$

۷۷-۳

برای به دست آوردن معادله پایداری در جهت ضخامت باید دو نکته را مد نظر داشت [۱۴]:

۱- همان‌طور که در بخش قبل مورد بررسی قرار گرفت ورق باید در لحظه قبل از کمانش ثابت

در نظر گرفته شود و جابه‌جایی در جهت ضخامت و مشتقات آن برابر صفر است (

$$.(w_0^0, w_{0,r}^0, w_{0,\theta}^0, \dots = 0$$

۲- از آنجایی که در نقاط همسایگی لحظه تعادل، مؤلفه‌های جابه‌جایی مانند u_0^1, v_0^1, w_0^1 و

منتجه‌های نیرو مانند $N_{rr}^1, N_{\theta\theta}^1, N_{r\theta}^1$ بسیار کوچک هستند جمله‌هایی از حاصل ضرب آنها به

علت کوچکی قابل صرف‌نظر هستند؛ یعنی جمله‌های غیرخطی به علت کوچکی حذف می‌-

شود.

معادله نهایی پایداری در جهت ضخامت برابر است با:

$$\begin{aligned} \delta W_0^1 : & M_{rr,rr}^1 + \frac{2}{r} M_{rr,r}^1 + \frac{1}{r^2} M_{\theta\theta,\theta\theta}^1 - \frac{1}{r} M_{\theta\theta,r}^1 + \frac{2}{r^2} M_{r\theta,\theta}^1 + \frac{2}{r} M_{r\theta,r\theta}^1 + N_{rr}^0 W_{0,rr}^1 \\ & + N_{\theta\theta}^0 \left(\frac{1}{r} (w_{0,r}^1) + \frac{1}{r^2} (w_{0,\theta\theta}^1) \right) + 2N_{r\theta}^0 \left(\frac{1}{r} w_{0,r\theta}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,\theta}^1 \right) + K_w W_0^1 - \\ & K_g \left(w_{0,r}^1 + \frac{1}{r} (w_{0,rr}^1) + \frac{1}{r^2} (w_{0,\theta\theta}^1) \right) = 0 \end{aligned}$$

۷۸-۳

با در نظر گرفتن «رابطه‌ی ۱۴-۳» برای قسمت پایداری و حذف جملات غیرخطی و مرتبه بالا از آن

منتجه‌های نیرو و گشتاور در لحظه پایداری بر حسب جابه‌جایی برابر است با:

$$\begin{aligned}
N_{rr}^1 &= \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(u_{0,r}^1 + \frac{\nu}{r} (u_0^1 + \nu_{0,\theta}^1) \right) + \frac{E_2}{1-\nu^2} \left(-w_{0,rr}^1 + \frac{\nu}{r} \left(w_{0,r}^1 + \frac{1}{r} w_{0,\theta\theta}^1 \right) \right) \\
N_{\theta\theta}^1 &= \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\nu u_{0,r}^1 + \frac{1}{r} (u_0^1 + \nu_{0,\theta}^1) \right) + \frac{E_2}{1-\nu^2} \left(-\nu w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r} \left(w_{0,r}^1 + \frac{1}{r} w_{0,\theta\theta}^1 \right) \right) \\
N_{r\theta}^1 &= \frac{E_1}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r} u_{0,\theta}^1 + \nu_{0,r}^1 - \frac{1}{r} \nu_0^1 \right) + \frac{E_2}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r^2} w_{0,\theta}^1 - \frac{1}{r} w_{0,r\theta}^1 \right)
\end{aligned} \tag{۷۹-۳}$$

$$\begin{aligned}
M_{rr}^1 &= \frac{E_2}{1-\nu^2} \left(u_{0,r}^1 + \frac{\nu}{r} (u_0^1 + \nu_{0,\theta}^1) \right) + \frac{E_3}{1-\nu^2} \left(-w_{0,rr}^1 + \frac{\nu}{r} \left(w_{0,r}^1 + \frac{1}{r} w_{0,\theta\theta}^1 \right) \right) \\
M_{\theta\theta}^1 &= \frac{E_2}{1-\nu^2} \left(\nu u_{0,r}^1 + \frac{1}{r} (u_0^1 + \nu_{0,\theta}^1) \right) + \frac{E_3}{1-\nu^2} \left(-\nu w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r} \left(w_{0,r}^1 + \frac{1}{r} w_{0,\theta\theta}^1 \right) \right) \\
M_{r\theta}^1 &= \frac{E_1}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r} u_{0,\theta}^1 + \nu_{0,r}^1 - \frac{1}{r} \nu_0^1 \right) + \frac{E_2}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r^2} w_{0,\theta}^1 - \frac{1}{r} w_{0,r\theta}^1 \right)
\end{aligned} \tag{۸۰-۳}$$

اکنون با جایگذاری «رابطه ۷۹-۳ و ۸۰-۳» در «روابط ۷۲-۳، ۷۵-۳ و ۷۸-۳»، سه رابطه پایداری بر حسب مؤلفه‌ی جابه‌جایی طبق نظریه کلاسیک برای ورق حلقوی FGM که روی محیط الاستیک قرار دارد، به دست می‌آید [۴۹، ۴۸].

$$\begin{aligned}
&\frac{E_1}{1-\nu^2} \left(u_{0,rr}^1 + \frac{1}{r} u_{0,r}^1 - \frac{1}{r^2} u_0^1 - \frac{1}{r^2} \nu_{0,\theta}^1 + \frac{\nu}{r} \nu_{0,r\theta}^1 \right) \\
&+ \frac{E_1}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r^2} u_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r} \nu_{0,r\theta}^1 - \frac{1}{r^2} \nu_{0,\theta}^1 \right) \\
&\frac{E_2}{1-\nu^2} \left(w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,r}^1 + \frac{1}{r} w_{0,rr}^1 - \frac{2}{r^3} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) = 0
\end{aligned} \tag{۸۱-۳}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} u_{0,r\theta}^1 + \frac{1}{r^2} (u_0^1 + \nu_{0,\theta\theta}^1) \right) \\
&+ \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \left(-\frac{1}{r} u_{0,r\theta}^1 + \frac{1}{r^2} u_{0,\theta}^1 + \nu_{0,rr}^1 + \frac{1}{r} \nu_{0,r}^1 - \frac{1}{r^2} \nu_0^1 \right) \right) \\
&- \frac{E_2}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r} w_{0,rr\theta}^1 + \frac{1}{r^2} \left(w_{0,r\theta}^1 + \frac{1}{r} w_{0,\theta\theta\theta}^1 \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{۸۲-۳}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{E_2}{1-v^2} \left(u_{0,rrr}^1 + \frac{2}{r} u_{0,rr}^1 - \frac{1}{r^2} u_{0,r}^1 - \frac{1}{r^3} u_0^1 - \frac{1}{r^3} u_{0,\theta\theta}^1 \right. \\
& \left. + \frac{1}{r^2} u_{0,r\theta\theta}^1 - \frac{1}{r^2} v_{0,r\theta}^1 + \frac{1}{r^3} v_{0,\theta}^1 + \frac{1}{r^3} v_{0,\theta\theta\theta}^1 + \frac{1}{r} v_{0,rr\theta}^1 \right) \\
& - \frac{E_3}{1-v^2} \left(w_{0,rrrr}^1 + \frac{2}{r} w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^3} w_{0,r}^1 \right. \\
& \left. + \frac{2}{r^2} w_{0,rr\theta\theta}^1 - \frac{2}{r^3} w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{4}{r^4} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^4} w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 \right) + N_{rr}^0 w_{0,rr}^1 \\
& + N_{\theta\theta}^0 \left(\frac{1}{r} (w_{0,r}^1) + \frac{1}{r^2} (w_{0,\theta\theta}^1) \right) + 2N_{r\theta}^0 \left(\frac{1}{r} w_{0,r\theta}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,\theta}^1 \right) \\
& + K_w w_0^1 - K_g \left(w_{0,r}^1 + \frac{1}{r} (w_{0,rr}^1) + \frac{1}{r^2} (w_{0,\theta\theta}^1) \right) = 0 \tag{۸۳-۳}
\end{aligned}$$

حال با استفاده از برخی عملیات ریاضی، می‌توان روابط پایداری «۳-۸۱ تا ۳-۸۳» را به یک معادله بر حسب جابه‌جایی عرضی w_0^1 تبدیل کرد.

ابتدا از «رابطه ۳-۸۱» نسبت به r مشتق گرفته و بر r تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
& \frac{E_1}{1-v^2} \left(\frac{1}{r} u_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^2} u_{0,r}^1 - \frac{1}{r^3} u_0^1 - \frac{1}{r^3} v_{0,\theta}^1 + \frac{v}{r^2} v_{0,r\theta}^1 \right) \\
& + \frac{E_1}{2(1+v)} \left(\frac{1}{r^3} u_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^2} v_{0,r\theta}^1 - \frac{1}{r^3} v_{0,\theta}^1 \right) \\
& + \frac{E_2}{1-v^2} \left(\frac{1}{r} w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^3} w_{0,r}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,rr}^1 - \frac{2}{r^4} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^3} w_{0,\theta\theta}^1 \right) = 0 \tag{۸۴-۳}
\end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از «رابطه ۳-۸۲» نسبت به θ و تقسیم بر r داریم.

$$\begin{aligned} & \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r^2} u_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^3} (u_{0,\theta\theta}^1 + v_{0,\theta\theta\theta}^1) \right) \\ & + \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \left(-\frac{1}{r^2} u_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^3} u_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r} v_{0,rr\theta}^1 + \frac{1}{r^2} v_{0,r\theta}^1 - \frac{1}{r^3} v_{0,\theta}^1 \right) \right) \\ & - \frac{E_2}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r^2} w_{0,rr\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^3} \left(w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{1}{r} w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 \right) \right) \end{aligned}$$

۸۵-۳

سپس با جمع «روابط ۳-۸۴ و ۳-۸۵» و ضرب در عبارت $\frac{-E_2}{E_1}$ خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} & \frac{-E_2}{1-\nu^2} \left(\begin{aligned} & u_{0,rrr}^1 + \frac{2}{r} u_{0,rr}^1 - \frac{1}{r^2} u_{0,r}^1 - \frac{1}{r^2} u_{0,r}^1 - \frac{1}{r^3} u_0^1 - \frac{1}{r^2} v_{0,r\theta}^1 + \frac{1}{r^3} v_{0,\theta}^1 \\ & + \frac{1}{r} v_{0,rr\theta}^1 - \frac{1}{r^2} v_{0,r\theta}^1 + \frac{1}{r^3} v_{0,\theta\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^3} u_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^2} u_{0,r\theta\theta}^1 \end{aligned} \right) - \\ & \frac{E_2^2}{E_1(1-\nu^2)} \left(\begin{aligned} & w_{0,rrrr}^1 + \frac{2}{r} w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,rr}^1 + \frac{4}{r^4} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^3} w_{0,r}^1 \\ & - \frac{2}{r^3} w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{2}{r^2} w_{0,rr\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^4} w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 \end{aligned} \right) = 0 \end{aligned}$$

۸۶-۳

با جمع «رابطه ۳-۸۳» با «رابطه ۳-۸۶» داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1(1-\nu^2)} \left(\begin{aligned} & w_{0,rrrr}^1 + \frac{2}{r} w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,rr}^1 + \frac{4}{r^4} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^3} w_{0,r}^1 \\ & - \frac{2}{r^3} w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{2}{r^2} w_{0,rr\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^4} w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 \end{aligned} \right) \\ & - N_{rr}^0 w_{0,rr}^1 - N_{\theta\theta}^0 \left(\frac{1}{r} (w_{0,r}^1) + \frac{1}{r^2} (w_{0,\theta\theta}^1) \right) - 2N_{r\theta}^0 \left(\frac{1}{r} w_{0,r\theta}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,\theta}^1 \right) \\ & + K_w w_0^1 - K_g \left(w_{0,r}^1 + \frac{1}{r} (w_{0,rr}^1) + \frac{1}{r^2} (w_{0,\theta\theta}^1) \right) = 0 \end{aligned}$$

۸۷-۳

با انجام عملیات ریاضی و ساده‌سازی لازم، رابطه نهایی بر حسب جابه‌جایی عرضی w_0^1 برابر است با:

$$D_k \left(\begin{aligned} &w_{0,rrrr}^1 + \frac{2}{r}w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2}w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^3}w_{0,r}^1 \\ &+ \frac{2}{r^2}w_{0,rr\theta\theta}^1 - \frac{2}{r^3}w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{4}{r^4}w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^4}w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 \end{aligned} \right) \\ - N_{rr}^0 w_{0,rr}^1 - N_{\theta\theta}^0 \left(\frac{1}{r}w_{0,r}^1 + \frac{1}{r^2}w_{0,\theta\theta}^1 \right) \\ + 2N_{r\theta}^0 \left(\frac{1}{r}w_{0,r\theta}^1 - \frac{1}{r^2}w_{0,\theta}^1 \right) + K_w w_0^1 \\ - K_g \left(\frac{1}{r}w_{0,r}^1 + w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^2}w_{0,\theta\theta}^1 \right) = 0 \quad 88-3$$

$$D_k = \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)} \quad 89-3$$

که D_k بیانگر سفتی خمشی^۱ ورق حلقوی FGM می‌باشد هم‌چنین D_0 و D_∞ به ترتیب بیانگر سفتی خمشی قسمت‌های سرامیک و فلز ورق است.

۳-۸ حل معادله پایداری

در این قسمت یک روش تحلیلی برای حل «رابطه ۳-۸۸» ارائه می‌شود. این تحلیل برای دو حالت بارگذاری که در بخش «۳-۳» بیان شده، به صورت زیر می‌باشد.

۳-۸-۱ تحلیل کمانش مکانیکی

ورق حلقوی در لبه داخلی و خارجی تحت فشار شعاعی یکنواخت N قرار گرفته و کمانش مکانیکی در ورق رخ می‌دهد.

^۱ Flexural Rigidity

با جایگذاری نیروهای قبل کمانش «روابط ۳-۵۳ تا ۳-۵۵» در «رابطه ۳-۸۸» داریم:

$$N_{rr}^0 = N_{\theta\theta}^0 = -N \quad , \quad N_{r\theta}^0 = 0$$

$$D_k \left(\begin{array}{l} w_{0,rrrr}^1 + \frac{2}{r} w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^3} w_{0,r}^1 \\ + \frac{2}{r^2} w_{0,rr\theta\theta}^1 - \frac{2}{r^3} w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{4}{r^4} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^4} w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 \end{array} \right) + N w_{0,rr}^1 + N \left(\frac{1}{r} w_{0,r}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) + K_w w_0^1 - K_g \left(\frac{1}{r} w_{0,r}^1 + w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) = 0 \quad 90-3$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\nabla^4 w = \left(\begin{array}{l} w_{0,rrrr}^1 + \frac{2}{r} w_{0,rrr}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^3} w_{0,r}^1 \\ + \frac{2}{r^2} w_{0,rr\theta\theta}^1 - \frac{2}{r^3} w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{4}{r^4} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^4} w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 \end{array} \right) \quad 91-3$$

$$\nabla^2 w = \left(w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r} w_{0,r}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right)$$

با قرار دادن «روابط ۳-۹۱» در «رابطه ۳-۹۰» و انجام ساده‌سازی لازم معادله نهایی به صورت زیر درمی‌آید.

$$D_k \nabla^4 w_0^1 + (N - K_g) \nabla^2 w_0^1 + K_w w_0^1 = 0$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w_0^1 + \frac{(N - K_g)}{D_k} \nabla^2 w_0^1 + \frac{K_w}{D_k} w_0^1 = 0$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{N - K_g}{D_k} \right) + \frac{K_w}{D_k} \right\} w_0^1(r, \theta) = 0 \quad 92-3$$

۲-۸-۳ تحلیل کمانش حرارتی

ورق در لبه داخلی و خارجی مقید و فقط تحت بار حرارتی می‌باشد.

مانند حالت قبل با قرار دادن نیروهای قبل کمانش «رابطه ۳-۵۹» در «رابطه ۳-۸۸» داریم:

$$N_{rr}^0 = N_{\theta\theta}^0 = -N^T, \quad N_{r\theta}^0 = 0$$

$$D_k \left(\begin{array}{l} w_{0,rrr}^1 + \frac{2}{r} w_{0,rr}^1 - \frac{1}{r^2} w_{0,r}^1 + \frac{1}{r^3} w_{0,r}^1 \\ + \frac{2}{r^2} w_{0,rr\theta\theta}^1 - \frac{2}{r^3} w_{0,r\theta\theta}^1 + \frac{4}{r^4} w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{1}{r^4} w_{0,\theta\theta\theta\theta}^1 \end{array} \right) + N^T w_{0,rr}^1 + N^T \left(\frac{1}{r} w_{0,r}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) + K_w w_0^1 - K_g \left(\frac{1}{r} w_{0,r}^1 + w_{0,rr}^1 + \frac{1}{r^2} w_{0,\theta\theta}^1 \right) = 0 \quad 93-3$$

با ساده‌سازی انجام شده معادله نهایی برابر است با:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{N^T - K_g}{D_k} \right) + \frac{K_w}{D_k} \right\} w_0^1(r, \theta) = 0 \quad 94-3$$

برای حل معادله «۳-۹۲» و «۳-۹۴»، بی‌بعد سازی زیر اعمال می‌شود [۳۵].

$$\bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad \delta = \frac{h}{a}, \quad k_g = \frac{K_g a^2}{D_0}$$

$$k_w = \frac{K_w a^4}{D_0}, \quad d = \frac{D_k}{D_0}, \quad n^p = \frac{Na^2}{D_0}, \quad n^T = \frac{N^T a^2}{D_0} \quad 95-3$$

با توجه به اینکه بارگذاری متقارن است ولی ممکن است مدهای کمانش نامتقارن^۱ باشد [۷، ۵۰، ۵۱].

¹ Asymmetric Buckling

شکل کمانش ورق مطابق زیر تعریف می‌شود [۳۱].

$$w^1_0(a\bar{r}, \theta) = W_n(\bar{r}) \cos(n\theta) \quad ۹۶-۳$$

که n بیانگر شماره مد کمانش است. به ازای $n=0$ ، کمانش متقارن و برای $n>0$ کمانش نامتقارن است. حال با قرار دادن «رابطه‌ی ۳-۹۶» در روابط «۳-۹۲» و «۳-۹۴» و استفاده از پارامترهای بی‌بعد «رابطه ۳-۹۵»، معادلات دیفرانسیل معمولی زیر برای حالت‌های کمانش مکانیکی و کمانش حرارتی به‌دست می‌آید:

کمانش مکانیکی:

$$\Rightarrow \left\{ \left(\frac{d}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} \right) \left(\frac{d}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} + \frac{n^p - k_g}{d} \right) + \frac{k_w}{d} \right\} W_n(\bar{r}) \cos(n\theta) = 0$$

$$\left\{ \left(\frac{d}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} \right) \left(\frac{d}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} + \frac{n^p - k_g}{d} \right) + \frac{k_w}{d} \right\} W_n(\bar{r}) = 0$$

۹۷-۳

کمانش حرارتی:

$$\left\{ \left(\frac{d}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} \right) \left(\frac{d}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} + \frac{n^r - k_g}{d} \right) + \frac{k_w}{d} \right\} W_n(\bar{r}) = 0$$

۹۸-۳

برای حل معادله دیفرانسیل روابط «۳-۹۷» و «۳-۹۸»، ابتدا معادلات را به فرم معادله وانگ می‌رسانیم و

با روش اشاره‌شده در مرجع [۳۱] معادلات را حل می‌کنیم.

فرم معادله وانگ به صورت زیر است.

$$L^2W_n(\bar{r}) + (k_1^2 + k_2^2)LW_n(\bar{r}) + k_1^2k_2^2W_n(\bar{r}) = 0$$

$$L^2W_n(\bar{r}) + \lambda^2LW_n(\bar{r}) + \gamma^4W_n(\bar{r}) = 0$$

$$W_n(r) = C_{1n}J_n(k_1\bar{r}) + C_{2n}Y_n(k_1\bar{r}) + C_{3n}J_n(k_2\bar{r}) + C_{4n}Y_n(k_2\bar{r})$$

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4\gamma^4}}{d}}$$

$$(k_1^2 + k_2^2) = \lambda^2, \quad k_1^2k_2^2 = \gamma^4 \quad 99-3$$

«روابط ۹۷-۳ و ۹۸-۳» را با ساده‌سازی زیر به فرم مقاله وانگ تبدیل می‌کنیم.

برای کمانش مکانیکی داریم:

$$\left\{ \left(\frac{d}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} \right) \left(\frac{d}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2} + \frac{n^p - k_g}{d} \right) + \frac{k_w}{d} \right\} W_n(\bar{r}) = 0$$

$$L = \frac{d}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} - \frac{n^2}{\bar{r}^2}$$

$$\left\{ L \left(L + \frac{n^p - k_g}{d} \right) + \frac{k_w}{d} \right\} W_n(\bar{r}) = 0$$

$$L^2W_n(\bar{r}) + \left(\frac{n^p - k_g}{d} \right) LW_n(\bar{r}) + \frac{k_w}{d} W_n(\bar{r}) = 0 \quad 100-3$$

از مقایسه «روابط ۹۹-۳» با رابطه «۱۰۰-۳» می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{n^p - k_g}{d}\right) = (k_1^2 + k_2^2) = \lambda^2, \quad k_1^2 k_2^2 = \frac{k_w}{d} = \gamma^4$$

$$W_n(r) = C_{1n} J_n(k_1 \bar{r}) + C_{2n} Y_n(k_1 \bar{r}) + C_{3n} J_n(k_2 \bar{r}) + C_{4n} Y_n(k_2 \bar{r}) \quad 101-3$$

که مقادیر k_1 و k_2 برابر است با:

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{n^p - k_g \pm \sqrt{(n^p - k_g)^2 - 4dk_w}}{2d}} \quad 102-3$$

برای کماتر حرارتی داریم:

$$W_n(r) = C_{1n} J_n(k'_1 \bar{r}) + C_{2n} Y_n(k'_1 \bar{r}) + C_{3n} J_n(k'_2 \bar{r}) + C_{4n} Y_n(k'_2 \bar{r}) \quad 103-3$$

که مقادیر k'_1 و k'_2 برابر است با:

$$k'_{1,2} = \sqrt{\frac{n^t - k_g \pm \sqrt{(n^t - k_g)^2 - 4dk_w}}{2d}} \quad 104-3$$

۳-۸-۳ شرایط مرزی

در ابتدا شرایط مرزی که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است را بیان می‌کنیم [۷].

۱- شرایط مرزی گیردار (C-C)

در این حالت ورق در لبه داخلی و خارجی دارای شرایط مرزی گیردار هستند و به صورت زیر به دست می‌آید.

$$W_n(1) = \frac{dW_n}{d\bar{r}}(1) = W_n(\beta) = \frac{dW_n}{d\bar{r}}(\beta) = 0 \quad 105-3$$

در رابطه بالا $(\beta = \frac{b}{a})$ بیانگر نسبت شعاع داخلی به خارجی است و $(\beta = 1)$ نشان‌دهنده لبه خارجی ورق است.

۲- شرایط مرزی ساده-گیردار (C-S)

در این حالت ورق در لبه خارجی گیردار و در لبه داخلی تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ثابت^۱ قرار دارد.

$$W_n(1) = \frac{dW_n}{d\bar{r}}(1) = 0$$

$$W_n(\beta) = 0, \quad M_{rr}(\beta) = \frac{\partial^2 W_n(\beta)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\nu}{\beta} \left(\frac{\partial W_n(\beta)}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial W_n(\beta)}{\partial \theta} \right) = 0 \quad 106-3$$

۳- شرایط مرزی گیردار-ساده (S-C)

در این حالت ورق در لبه داخلی گیردار و در لبه خارجی تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ثابت قرار دارد. با قرار دادن رابطه بی‌بعد «۹۲-۳» در «رابطه ۱۰۰-۳ و ۱۰۱-۳» داریم:

$$W_n(\beta) = \frac{dW_n}{d\bar{r}}(\beta) = 0$$

$$W_n(1) = 0, \quad M_{rr}(1) = \frac{\partial^2 W_n(1)}{\partial \bar{r}^2} + \nu \left(\frac{\partial W_n(1)}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial W_n(1)}{\partial \theta} \right) = 0 \quad 107-3$$

۴- شرایط مرزی ساده-ساده (S-S)

در این حالت ورق در لبه داخلی و خارجی دارای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده هستند؛ که با قرار دادن رابطه بی‌بعد «۹۲-۳» در «رابطه ۱۰۱-۳» داریم:

¹ Simply Support

$$W_n(\beta) = 0, \quad M_{rr}(\beta) = \frac{\partial^2 W_n(\beta)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{v}{\beta} \left(\frac{\partial W_n(\beta)}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial W_n(\beta)}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$W_n(1) = 0, \quad M_{rr}(1) = \frac{\partial^2 W_n(1)}{\partial \bar{r}^2} + v \left(\frac{\partial W_n(1)}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial W_n(1)}{\partial \theta} \right) = 0$$

۱۰۸-۳

البته باید توجه داشت که به علت وجود گشتاور اضافی حرارتی در مرحله قبل کمانش امکان وقوع کمانش در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده برای ورق حلقوی FGM وجود ندارد. در این پژوهش برای مواد FG از شرایط مرزی (C-C) استفاده شده است. از سایر شرایط مرزی برای مواد ایزوتروپ استفاده شده است.

۳-۹ استخراج رابطه نهایی کمانش

در این بخش رابطه نهایی بار کمانش مکانیکی و حرارتی ورق حلقوی FG برای شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C) را به دست می‌آوریم.

۳-۹-۱ کمانش مکانیکی

با قرار دادن شرایط مرزی «۳-۱۰۵» در «رابطه ۳-۱۰۲» داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

۱۰۹-۳

در «رابطه ۳-۱۰۹»، A ماتریس ضرایب خیز ورق حلقوی FG می‌باشد که درایه‌های آن عبارت است از:

$$a_{11} = J_n(k_1), \quad a_{12} = Y_n(k_1), \quad a_{13} = J_n(k_2), \quad a_{14} = Y_n(k_2),$$

$$a_{21} = k_1 * \left(-J_{n+1}(k_1) + \frac{nJ_n(k_1)}{k_1} \right), \quad a_{22} = k_1 * \left(-Y_{n+1}(k_1) + \frac{nY_n(k_1)}{k_1} \right),$$

$$a_{23} = k_2 * \left(-J_{n+1}(k_2) + \frac{nJ_n(k_2)}{k_2} \right), \quad a_{24} = k_2 * \left(-Y_{n+1}(k_2) + \frac{nY_n(k_2)}{k_2} \right),$$

$$a_{31} = J_n(k_1 \beta), \quad a_{32} = Y_n(k_1 \beta), \quad a_{33} = J_n(k_2 \beta), \quad a_{34} = Y_n(k_2 \beta),$$

$$a_{41} = k_1 * \left(-J_{n+1}(k_1 \beta) + \frac{nJ_n(k_1 \beta)}{k_1 \beta} \right), \quad a_{42} = k_1 * \left(-Y_{n+1}(k_1 \beta) + \frac{nY_n(k_1 \beta)}{k_1 \beta} \right),$$

$$a_{43} = k_2 \beta * \left(-J_{n+1}(k_2 \beta) + \frac{nJ_n(k_2 \beta)}{k_2 \beta} \right), \quad a_{44} = k_2 * \left(-Y_{n+1}(k_2 \beta) + \frac{nY_n(k_2 \beta)}{k_2 \beta} \right)$$

۱۱۰-۳

برای به دست آوردن جواب غیر بدیهی «رابطه ۳-۱۰۱»، باید دترمینان ماتریس ضرایب A «رابطه ۳-۱۰۹» را برابر صفر قرار دهیم؛ که به یک معادله غیرخطی بر حسب n^p می‌رسیم.

$$\begin{aligned} & J(n, k_1) * k_2 * Y(n+1, k_1) * k_1 * J(n, k_2 * \beta) * Y(n+1, k_2 * \beta) - J(n, k_1) * k_2 * Y(n+1, k_1) * k_1 \\ & * Y(n, k_2 * \beta) * J(n+1, k_2 * \beta) + J(n, k_1) * J(n+1, k_2) * k_1 * Y(n, k_2 * \beta) * Y(n+1, k_1 * \beta) * k_1 \\ & - J(n, k_1) * Y(n+1, k_2) * k_2 * J(n, k_2 * \beta) * Y(n+1, k_1 * \beta) * k_1 - J(n, k_1) * n * Y(n, k_2) * Y(n, k_1 * \beta) \\ & * J(n+1, k_2 * \beta) * k_2 + J(n, k_1) * n * Y(n, k_2) * J(n, k_2 * \beta) * Y(n+1, k_1 * \beta) * k_1 - \\ & Y(n, k_1) * k_2 * J(n+1, k_1) * k_1 * J(n, k_2 * \beta) * Y(n+1, k_2 * \beta) + Y(n, k_1) * k_2 * J(n+1, k_1) \\ & * k_1 * Y(n, k_2 * \beta) * J(n+1, k_2 * \beta) - Y(n, k_1) * J(n+1, k_2) * k_2 * Y(n, k_2 * \beta) * J(n+1, k_1 * \beta) * k_1 \\ & + Y(n, k_1) * Y(n+1, k_2) * k_2 * J(n, k_2 * \beta) * J(n+1, k_1 * \beta) * k_1 + Y(n, k_1) * n * Y(n, k_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& *J(n, k_1 * \beta) * J(n+1, k_2 * \beta) * k_2 - Y(n, k_1) * n * Y(n, k_2) * J(n, k_2 * \beta) * J(n+1, k_1 * \beta) * k_1 \\
& + J(n, k_2) * J(n+1, k_1) * k_1 * Y(n, k_1 * \beta) * Y(n+1, k_2 * \beta) * k_2 - J(n, k_2) * Y(n+1, k_1) * k_1 \\
& * J(n, k_1 * \beta) * Y(n+1, k_2 * \beta) * k_2 + J(n, k_2) * k_1 * Y(n+1, k_2) * k_2 * J(n, k_1 * \beta) \\
& * Y(n+1, k_1 * \beta) - J(n, k_2) * k_1 * Y(n+1, k_2) * k_2 * Y(n, k_1 * \beta) * J(n+1, k_1 * \beta) - J(n, k_2) * k_1 \\
& * n * Y(n, k_2) * J(n, k_1 * \beta) * Y(n+1, k_1 * \beta) + J(n, k_2) * k_1 * n * Y(n, k_2) * Y(n, k_1 * \beta) \\
& * J(n+1, k_1 * \beta) - Y(n, k_2) * J(n+1, k_1) * k_1 * Y(n, k_1 * \beta) * J(n+1, k_2 * \beta) * k_2 + Y(n, k_2) * n \\
& * J(n, k_1) * Y(n, k_1 * \beta) * J(n+1, k_2 * \beta) * k_2 - Y(n, k_2) * n * J(n, k_1) * J(n, k_2 * \beta) * Y(n+1, k_1 * \beta) \\
& * k_1 + Y(n, k_2) * Y(n+1, k_1) * k_1 * J(n, k_1 * \beta) * J(n+1, k_2 * \beta) * k_2 - Y(n, k_2) * n * Y(n, k_1) \\
& * J(n, k_1 * \beta) * J(n+1, k_2 * \beta) * k_2 + Y(n, k_2) * n * Y(n, k_1) * J(n, k_2 * \beta) * J(n+1, k_1 * \beta) * k_1 - \\
& Y(n, k_2) * k_1 * J(n+1, k_2) * k_2 * J(n, k_1 * \beta) * Y(n+1, k_1 * \beta) + Y(n, k_2) * k_1 * J(n+1, k_2) * k_2 \\
& * Y(n, k_1 * \beta) * J(n+1, k_1 * \beta) + Y(n, k_2) * k_1 * n * J(n, k_2) * J(n, k_1 * \beta) * Y(n+1, k_1 * \beta) - Y(n, k_2) \\
& * k_1 * n * J(n, k_2) * Y(n, k_1 * \beta) * J(n+1, k_1 * \beta) - J(n, k_1) * J(n+1, k_2) * k_2^2 * Y(n, k_1 * \beta) \\
& * Y(n+1, k_2 * \beta) + J(n, k_1) * Y(n+1, k_2) * k_2^2 * Y(n, k_1 * \beta) * J(n+1, k_2 * \beta) + Y(n, k_1) \\
& * J(n+1, k_2) * k_2^2 * J(n, k_1 * \beta) * Y(n+1, k_2 * \beta) - Y(n, k_1) * Y(n+1, k_2) * k_2^2 * J(n, k_1 * \beta) \\
& * J(n+1, k_2 * \beta) - J(n, k_2) * J(n+1, k_1) * k_1^2 * Y(n, k_2 * \beta) * Y(n+1, k_1 * \beta) + J(n, k_2) \\
& * Y(n+1, k_1) * k_1^2 * Y(n, k_2 * \beta) * J(n+1, k_1 * \beta) + Y(n, k_2) * J(n+1, k_1) * k_1^2 * J(n, k_2 * \beta) \\
& * Y(n+1, k_1 * \beta) - Y(n, k_2) * Y(n+1, k_1) * k_1^2 * J(n, k_2 * \beta) * J(n+1, k_1 * \beta) = 0
\end{aligned}$$

با محاسبه ریشه مثبت «رابطه ۳-۱۱۱» به ازای n های مختلف و انتخاب کمترین مقدار آن، بار بحرانی کمانش n_{cr}^p به دست می آید.

برای به دست آوردن نیروی بحرانی کمانش (N)، ابتدا باید سفتی خمشی در قسمت سرامیک D_0 را به دست آورد. برای این منظور با قرار دادن «رابطه ۳-۱۶» در «رابطه ۳-۸۹» و ساده سازی لازم داریم:

$$D_k = \frac{E_1 E_3 - E_2^2}{E_1 (1 - \nu^2)}$$

$$D_k = \frac{\left(h \left(E_m(T) + \frac{E_{cm}(T)}{k+1} \right) \right) \left(h^3 \left(\frac{1}{12} E_m(T) + E_{cm}(T) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4k+4} \right) \right) \right) - \left(h^2 E_{cm}(T) \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{2k+2} \right) \right)^2}{\left(h \left(E_m(T) + \frac{E_{cm}(T)}{k+1} \right) \right) (1 - \nu^2)}$$

$$D_0 = \frac{h E_c(T) \left(h^3 E_c(T) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \right) - \left(h^2 E_c(T) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right)^2}{(h E_c(T)) (1 - \nu^2)}$$

$$D_0 = \frac{1}{12} h^3 E_c(T)$$

۱۱۱-۳

اکنون با جایگذاری «رابطه ۳-۱۱۲» در رابطه بی بعد «۳-۹۵» داریم:

$$n^p = \frac{N a^2}{D_0} \Rightarrow N = \frac{D_0}{a^2} n^p$$

$$N = \frac{\frac{1}{12(1-\nu)^2} h^3 E_c(T)}{a^2} n^p = \frac{h}{12(1-\nu)^2} \delta^2 n^p$$

۱۱۲-۳

در نتیجه نیروی بحرانی کمانش مکانیکی ورق حلقوی FG تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت برابر است با:

$$N_{cr} = \frac{h}{12(1-\nu)^2} \delta^2 n_{cr}^p$$

۳-۹-۲ کمانش حرارتی

با قرار دادن شرایط مرزی «۳-۱۰۵» در «رابطه ۳-۱۰۳»، مشابه حالت کمانش مکانیکی بار بحرانی کمانش حرارتی n_{cr}^T به دست می‌آید.

اکنون برای به دست آوردن دمای بحرانی کمانش ($\Delta T_{cr}(K)$) باید توزیع دما در ورق را بررسی کنیم.

ورق حلقوی FG در دمای اولیه T_0 قرار دارد. زمانی که به واسطه شرایط مرزی، از انبساط شعاعی ورق جلوگیری شود و دمای آن به طور یکنواخت و به میزان $T = T_0 + \Delta T$ افزایش یابد، کمانش حرارتی پدید می‌آید. با قرار دادن $T = T_0 + \Delta T$ در «روابط ۳-۱۵ و ۳-۱۶» داریم.

$$N^T = \frac{1}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E(z,T) \alpha(z,T) (T - T_0) dz$$

$$N^T = \frac{1}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(E_m(T) + E_{cm}(T) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \right) \left(\alpha_m(T) + \alpha_{cm}(T) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \right) (T - T_0) dz$$

$$N^T = \frac{\Delta T}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\begin{array}{l} E_m(T) \alpha_m(T) + E_m(T) \alpha_{cm}(T) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \\ + \alpha_m(T) E_{cm}(T) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k + \alpha_{cm}(T) E_{cm}(T) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{2k} \end{array} \right) dz$$

با محاسبه انتگرال «رابطه ۳-۱۱۵» منتهی نیروی حرارتی برابر است با:

$$N^T = \frac{\Delta T * h}{1-\nu} \left(E_m \alpha_m + \frac{E_{cm} \alpha_m + E_m \alpha_{cm}}{k+1} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm}}{2k+1} \right)$$

اکنون با قرار دادن «رابطه ۳-۱۱۶» در ضرایب بی بعد «۳-۹۵» و ساده‌سازی لازم داریم.

$$N^T = \frac{D_0}{a^2} n^T \quad , \quad P = E_m \alpha_m + \frac{E_{cm} \alpha_m + E_m \alpha_{cm}}{k+1} + \frac{E_{cm} \alpha_{cm}}{2k+1}$$

$$\frac{D_0}{a^2} \eta^T = \frac{\Delta T \cdot h}{(1-\nu)} P \Rightarrow \Delta T = \frac{D_0 (1-\nu)}{a^2 h P}$$

$$D_0 = \frac{1}{12(1-\nu)^2} h^3 E_c(T) \quad , \quad \delta = \frac{h}{a}$$

$$\Delta T = \frac{\frac{1}{12} h^3 E_c(T) (1-\nu)}{a^2 h (1-\nu)^2 P} = \frac{1}{12(1+\nu)} \frac{h^2 E_c(T)}{a^2 P}$$

۱۱۶-۳

در نتیجه اختلاف دمای بحرانی کمانش حرارتی ورق حلقوی FG تحت افزایش دمای یکنواخت برابر است با:

$$\Delta T_{cr} = \frac{\delta^2}{12(1+\nu)} \times \frac{E_c(T)}{P} n_{cr}^T \quad ۱۱۷-۳$$

فصل ۴

تحليل و بررسی نتایج

۱-۴ مقدمه

در این پژوهش به بررسی کمانش ورق حلقوی ساخته شده از مواد هدفمند با تغییرات خواص یک-بعدی در راستای ضخامت پرداخته شده است و با استفاده از تئوری کلاسیک و روابط غیرخطی ساندرز و تحلیل پایداری روابط، جواب نهایی برای تعیین دما و نیروی بحرانی ارائه شده است. این تحقیق به دو قسمت تقسیم می‌شود. در ابتدا ورق تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت قرار گرفته است. در بخش دوم کمانش حرارتی ورق تحت افزایش دمای یکنواخت مورد بررسی قرار گرفته است. در این فصل نتایج به دست آمده را با نتایج تحقیقات دیگر مقایسه کرده و درستی نتایج را نشان می‌دهیم. سپس نتایج به دست آمده را مورد تحلیل قرار داده و پیشنهادهایی جهت ادامه مطالعات در زمینه‌های مرتبط ارائه گردیده است.

۲-۴ خواص وابسته به دما

برای به دست آوردن نتایج حاصل از تحقیق حاضر از ماده ترکیبی فولاد ضدزنگ^۱ و نیتريد سيليكون^۲ استفاده شده است. به منظور مدل کردن تأثیر خواص مواد FG، خواص باید وابسته به دما باشد. ضریب پواسن ثابت و برابر ۰/۳ است. خصوصیات ماده مورد استفاده در تحلیل در «جدول ۱-۴» آمده است.

جدول ۱-۴- ضرایب خواص وابسته به دما برای دو ماده SUS304 و Si_3N_4 [۵۲].

ماده	خاصیت مکانیکی	p_{-1}	p_0	p_1	p_2	p_3
SUS304	$\alpha(K^{-1})$.	$12/33 \times 10^{-6}$	$8/08 \times 10^{-4}$.	.
	$E(Pa)$.	$201/04 \times 10^9$	$3/079 \times 10^{-4}$	$-6/53 \times 10^{-7}$.
Si_3N_4	$\alpha(K^{-1})$.	$5/87 \times 10^{-6}$	$9/095 \times 10^{-4}$.	.
	$E(Pa)$.	$348/43 \times 10^9$	$-3/07 \times 10^{-4}$	$2/16 \times 10^{-7}$	$-8/94 \times 10^{-11}$

¹ Stainless Steel

² Silicon Nitride

۳-۴ مقایسه نتایج با تحقیقات گذشته

برای نشان دادن درستی روش مورد مطالعه در این پژوهش، نتایج به دست آمده از کمانش مکانیکی و حرارتی با تحقیقات انجام شده در گذشته را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴-۳-۱ کمانش مکانیکی

مقدار پارامتر بی بعد بار بحرانی کمانش^۱ ($\sqrt{n_{cr}}$) ورق همگن ایزوتروپیک با مقدار آن در مرجع [۷] مقایسه شده است. همان‌طور که در «جدول ۲-۴» نشان داده شده است مقدار بار بحرانی کمانش برای شرایط مرزی گوناگون متفاوت است. با توجه به «جدول ۲-۴» مشاهده می‌شود بین نتایج به دست آمده از کار حاضر و مطالعات گزارش شده توسط وانگ و همکاران [۷] توافق کامل وجود دارد. در این مقایسه ماده مورد نظر ترکیبی از فلز آلومینیوم ($E_m = 70GPa$) و ماده سرامیکی آلومینا^۲ ($E_c = 380GPa$) است. نسبت پواسن ثابت و برابر ۰/۳ است.

جدول ۲-۴- مقایسه پارامتر بی بعد بحرانی کمانش ورق همگن ایزوتروپیک با مرجع [۷].

β			شرط مرزی	
۰/۵	۰/۳	۰/۱		
۱۲/۱۵(۴)	۸/۶۳(۲)	۶/۶۸(۲)*	مرجع [۷]	
۱۲/۱۵(۴)	۸/۶۳(۲)	۶/۷۱(۱)	نتایج حاضر	(C-C)
۹/۴۲(۰)	۷/۰۵(۰)	۶/۰۲(۱)	مرجع [۷]	
۹/۴۱(۰)	۷/۰۶(۰)	۵/۹۹(۱)	نتایج حاضر	(C-S)
۸/۷۳(۰)	۶/۱۵(۰)	۴/۷۱(۱)	مرجع [۷]	
۸/۷۳(۰)	۶/۱۶(۰)	۴/۶۹(۱)	نتایج حاضر	(S-C)
۶/۴۰(۰)	۴/۷۴(۰)	۴/۲۰(۰)	مرجع [۷]	
۶/۴۰(۰)	۴/۷۵(۰)	۴/۲۱(۰)	نتایج حاضر	(S-S)

* عدد داخل پرانتز بیان گر شماره مد کمانش است.

¹ Non-Dimensional critical buckling parameter

² Alumina

۴-۳-۲ کمانش حرارتی

برای نشان دادن درستی روش مورد مطالعه در این حالت، در «جدول ۴-۳» اختلاف دمای بحرانی کمانش ورق حلقوی ($\Delta T_{cr}(K)$) با نتایج گزارش شده در مرجع [۳۶] مقایسه شده است. همان طور که مشاهده می‌کنید اختلاف اندکی بین نتایج حاضر و مرجع [۳۶] مشاهده می‌شود و دلیل این اختلاف اندک به تفاوت تئوری CPT و FSDT مربوط می‌شود.

در نتایج مربوط به کمانش حرارتی، خواص مواد در دو حالت TID^1 و TD^2 بررسی شده است؛ که به ترتیب بیان‌گر خواص مستقل از دما و خواص وابسته به دما می‌باشد. البته باید توجه داشت که TID همان خواص وابسته به دمای محیط است و با قرار دادن $T=300K$ در «رابطه ۳-۳» به دست می‌آید.

جدول ۴-۳- مقایسه بین نتایج حاضر و نتایج مرجع [۳۶] برای ورق حلقوی ایزوتروپ ($k=0$) تحت افزایش دمای یکنواخت.

β				
<hr/>				
β				
<hr/>				
	۰/۵	۰/۳	۰/۱	
<hr/>				
TID	مرجع [۱۶]	۳۴۲/۳۶(۲)	۴۳۱/۱۱(۲)	۷۲۲/۸۸(۴)
	نتایج حاضر	۳۴۷/۴۵(۱)	۴۳۸/۲۱(۲)	۷۴۴/۱۲(۴)
TD	مرجع [۱۶]	۲۷۱/۲۹(۲)	۵۶۴/۱۷(۲)	۱۰۹۶/۵۵(۴)
	نتایج حاضر	۲۸۷/۹۸ (۱)	۵۷۵/۶۷(۲)	۱۱۴۰/۲۳(۴)

۴-۴ ارائه و بررسی نتایج

در این قسمت نتایج به دست آمده از کار حاضر در دو حالت مکانیکی و حرارتی ارائه شده است و تأثیر پارامترهایی از جمله نسبت ضخامت ورق به شعاع بیرونی، نسبت شعاع داخلی به خارجی، شاخص تابع

¹ Temperature InDepended

² Temperature Depended

نمایی، ضرایب محیط الاستیک و محیط حرارتی بر بار بحرانی کمانش ورق FGM مورد مطالعه قرار گرفته است.

۴-۴-۱ کمانش مکانیکی

در گذشته مطالعاتی در زمینه کمانش متقارن ورق حلقوی/مدور روی محیط الاستیک انجام گرفته است [۵۳،۵۴]. آنها در مطالعاتشان جابه‌جایی نامتقارن را نادیده گرفته‌اند. اهمیت محاسبه جابه‌جایی نامتقارن در کمانش و مقایسه آن با الگوی متقارن کمانش در «جدول ۴-۴» نشان داده شده است. شاخص تابع نمایی برابر با $(k=1)$ و ورق تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت فرض می‌شود. با توجه به «جدول ۴-۴» زمانی که ضریب وینکلر (K_w) زیاد شود به دلیل افزایش شماره مد کمانش، میزان خطا نیز افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش ضریب پسترناک محیط الاستیک (K_g) میزان خطا کاهش می‌یابد. چون (K_g) تأثیری بر مد کمانش ندارد.

جدول ۴-۴- بار بحرانی کمانش $N_{cr}(MN/m)$ ورق حلقوی FGM $(k=1, \delta=0.015)$ تحت شرایط مرزی گیردار روی محیط الاستیک در حالت متقارن $(n=0)$ و نامتقارن.

(K_w, K_g)					
$(600, 20)$	$(600, 0)$	$(200, 20)$	$(0, 20)$	$(0, 0)$	β
۶/۴۹	۶/۱۸	۶/۲۴	۵/۴۷	۳/۹۱	متقارن
۷/۷۴(۳)	۴/۹۳(۳)	۵/۵۶(۲)	۵/۰۷(۲)	۳/۵۱(۲)	نامتقارن ۰/۲
۱۹/۲۰	۲۰/۲۰	۱۲/۲۳	۷/۰۲	۱۱/۰۳	درصد خطا
۸/۳۷	۶/۸۱	۷/۲۱	۶/۶۲	۵/۰۶	متقارن
۷/۲۸(۳)	۵/۷۳(۳)	۶/۶۴(۲)	۶/۱۲(۲)	۴/۶۵(۲)	نامتقارن ۰/۳
۱۴/۹۷	۱۸/۸۵	۸/۵۸	۶/۷۷	۸/۸۲	درصد خطا

در «جدول ۴-۵» بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM (N_{cr}) برای محیط الاستیک و غیر الاستیک (ضرایب محیط الاستیک برابر صفر باشد). و در دماهای مختلف نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود با افزایش نسبت ضخامت به شعاع بیرونی (δ)، بار بحرانی کمانش افزایش می یابد ولی تأثیری بر مد کمانش نمی گذارد. افزایش ضرایب محیط الاستیک (K_w, K_g) باعث افزایش N_{cr} می شود. همچنین تغییر ضریب محیط وینکلر (K_w)، می تواند شماره مد کمانش را تغییر دهد. به عنوان مثال برای ورق با نسبت شعاع داخلی به بیرونی $0/2$ و نسبت ضخامت به شعاع بیرونی $0/01$ ، محیط وینکلر با ($K_w = 600$) باعث افزایش مد کمانش از 2 به 3 می شود. همچنین با افزایش دما مقدار بار بحرانی کمانش کاهش می یابد.

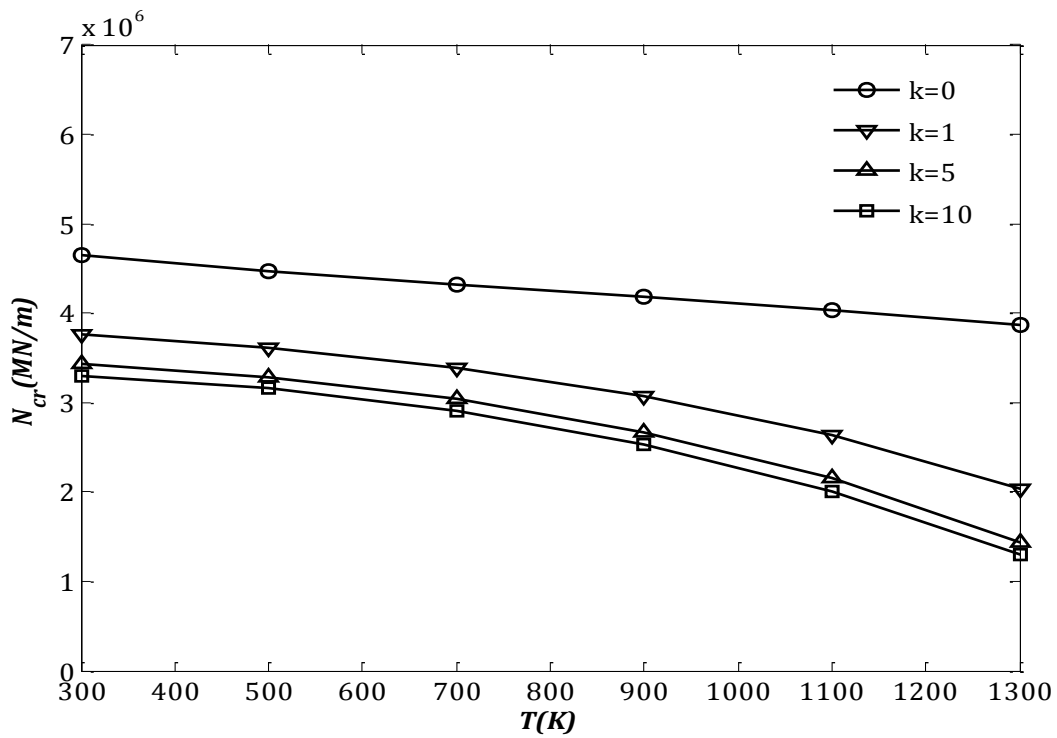
جدول ۴-۵- بررسی اثر ضرایب محیط الاستیک و δ بر بار بحرانی کمانش N_{cr} (MN/m) ورق حلقوی FGM تحت فشار شعاعی یکنواخت به ازای دماهای مختلف ($\beta = 0.2, k = 1$)

(K_w, K_g)					δ
$(600, 20)$	$(600, 0)$	$(200, 20)$	$(0, 20)$	$(0, 0)$	
۲/۰۵۳۴(۳)	۱/۵۶۲۳(۳)	۱/۷۶۲۳(۲)	۱/۶۰۱۳(۲)	۱/۱۱۴۶(۲)	T=۳۰۰
۱/۹۴۱۱(۳)	۱/۴۶۳۵(۳)	۱/۶۵۴۲(۲)	۱/۵۰۱۲(۲)	۱/۰۴۳۵(۲)	T=۶۰۰ ۰/۰۱
۱/۷۴۲۴(۳)	۱/۳۰۴۲(۳)	۱/۴۹۲۳(۲)	۱/۳۵۴۲(۲)	۰/۹۰۹۲(۲)	T=۹۰۰
۱۶/۴۱۲(۳)	۱۲/۵۲۰(۳)	۱۴/۰۷۱(۲)	۱۲/۸۳۰(۲)	۸/۹۰۶۴(۲)	T=۳۰۰
۱۵/۰۱۰(۳)	۱۱/۶۸۱(۳)	۱۳/۱۹۴(۲)	۱۲/۰۰۵(۲)	۸/۳۰۶۸(۲)	T=۶۰۰ ۰/۰۲
۱۴/۰۳۶(۳)	۱۰/۴۰۳(۳)	۱۱/۹۰۸(۲)	۱۰/۸۱۲(۲)	۷/۲۸۹۶(۲)	T=۹۰۰
۵۵/۵۱۳(۳)	۴۲/۳۶۴(۳)	۴۷/۴۶۳(۲)	۴۳/۲۳۶(۲)	۳۰/۰۰۴(۲)	T=۳۰۰
۵۱/۹۴۱(۳)	۳۹/۳۲۵(۳)	۴۴/۴۷۸(۲)	۴۰/۵۷۲(۲)	۲۸/۰۶۳(۲)	T=۶۰۰ ۰/۰۳
۴۷/۱۰۵(۳)	۳۵/۱۲۸(۳)	۴۰/۱۷۸(۲)	۳۶/۴۰۸(۲)	۲۴/۵۵۰(۲)	T=۹۰۰

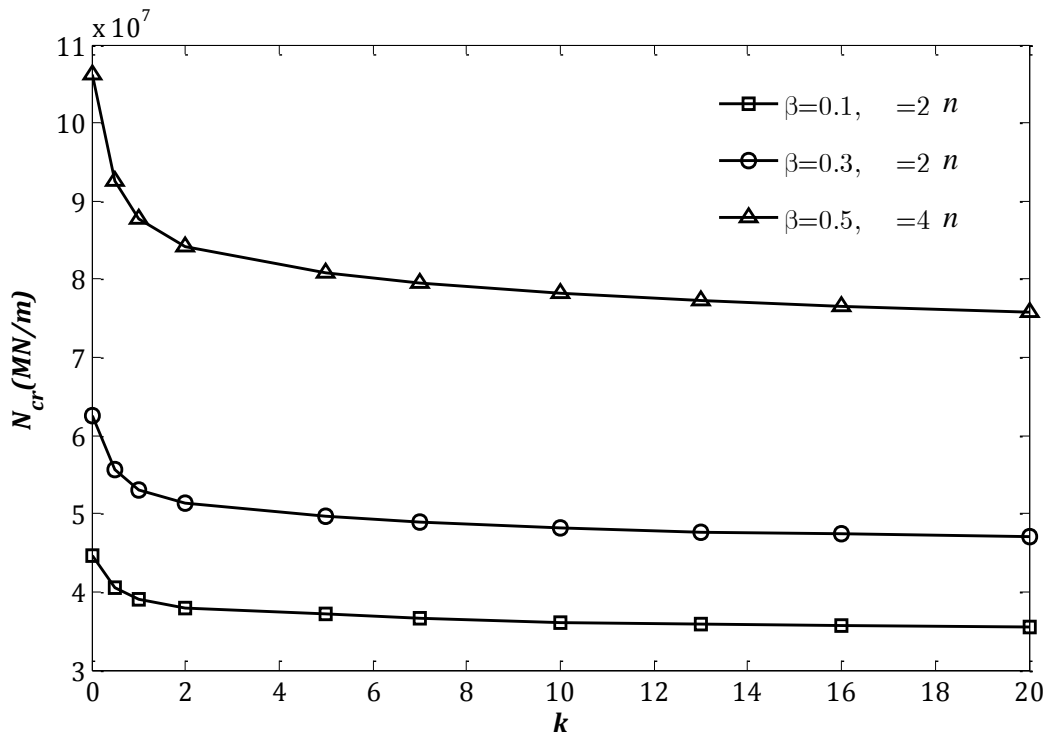
در «شکل ۴-۱» تأثیر دما بر بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM با $(\delta = 0.15, \beta = 0.2)$ تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت در شرایط مرزی گیردار روی محیط الاستیک (K_w, K_g) نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است با افزایش دما به علت کاهش مدول یانگ، بار بحرانی کاهش می‌یابد. دلیل این امر تأثیر دما بر خواص مواد FG است. افزایش دما باعث کاهش نیروی بین مولکولی ذرات ماده و در نتیجه کاهش ضریب الاستیسیته (E) شده و مقاومت ورق در برابر کمانش را کاهش می‌دهد؛ اما در نتایج مورد بررسی دما تأثیری بر مد کمانش ندارد و کمانش در مد دوم اتفاق می‌افتد. همچنین برای ورق ایزوتروپ ($k = 0$) به دلیل بالا بودن مدول یانگ و نیروی بین اتم‌ها، تأثیر دما بر بار بحرانی کمتر است.

در «شکل ۴-۲» تأثیر توان تابع نمایی (k) بر بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM تحت فشار شعاعی یکنواخت و حرارت، روی محیط الاستیک $(K_g, K_w) = (20, 200)$ نشان داده شده است. با افزایش k به دلیل تغییر خواص از سرامیک به فلز و کاهش مدول الاستیسیته بار بحرانی کاهش پیدا می‌کند. برای حالت $(0 \leq k \leq 2)$ کاهش بار بحرانی شدید و برای $(2 \leq k \leq 20)$ کاهش بار بحرانی کمانش با روند کندتری همراه است.

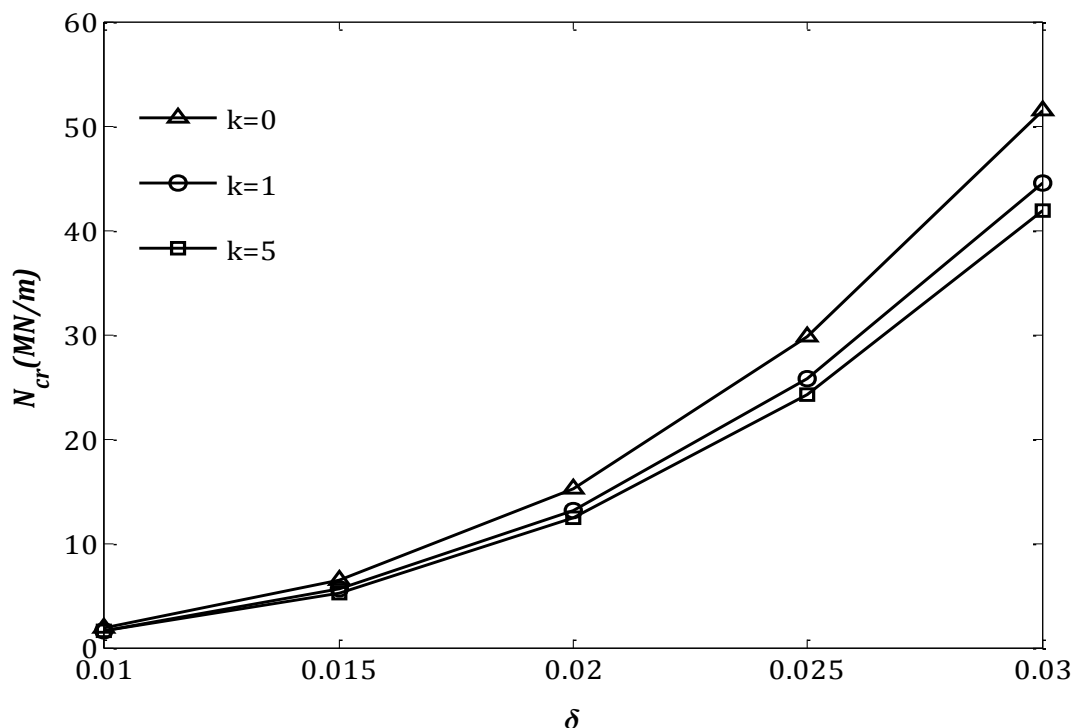
در «شکل ۴-۳» تأثیر نسبت ضخامت به شعاع بیرونی (δ) به ازای شاخص تابع نمایی مختلف k روی محیط الاستیک نشان داده شده است $(T = 600K, \beta = 0.2)$. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش δ باعث افزایش مدول یانگ و در نتیجه افزایش دمای بحرانی کمانش می‌شود. ولی تأثیری بر مد کمانش ندارد و کمانش در مد دوم اتفاق می‌افتد.



شکل ۴-۱- تأثیر دما بر بار بحرانی کمانش ورق FGM، فاقد محیط الاستیک و تحت شرایط مرزی گیردار.



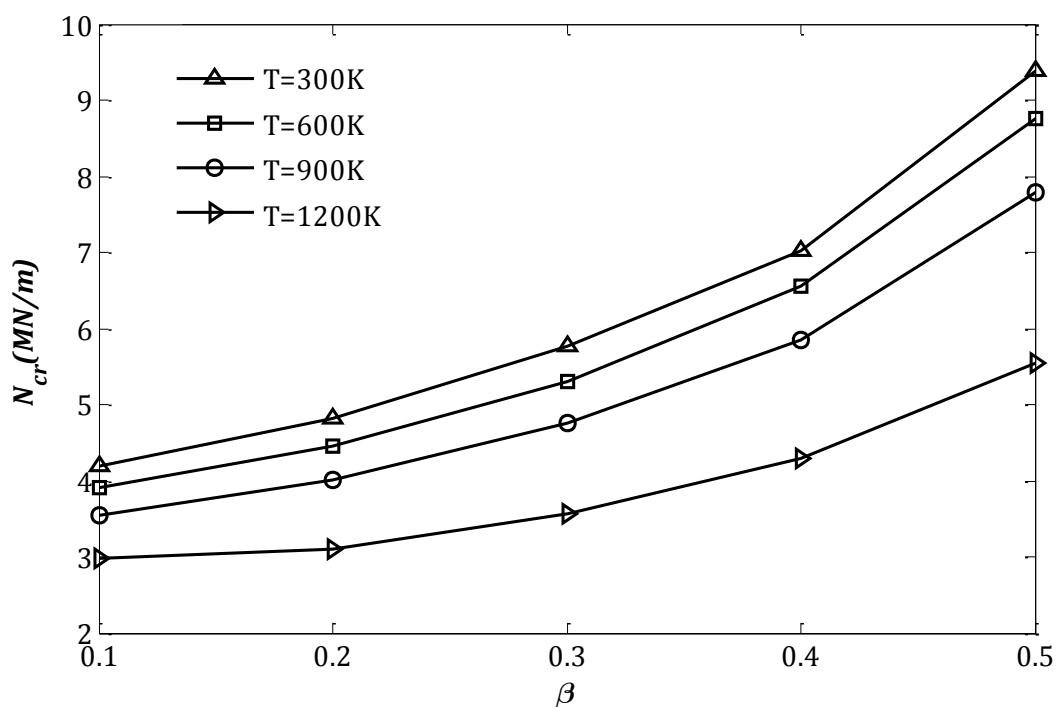
شکل ۴-۲- تأثیر توان تابع نمایی (k) بر بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM، بر روی محیط الاستیک $(K_g, K_w) = (20, 200)$ و تحت شرایط مرزی گیردار.



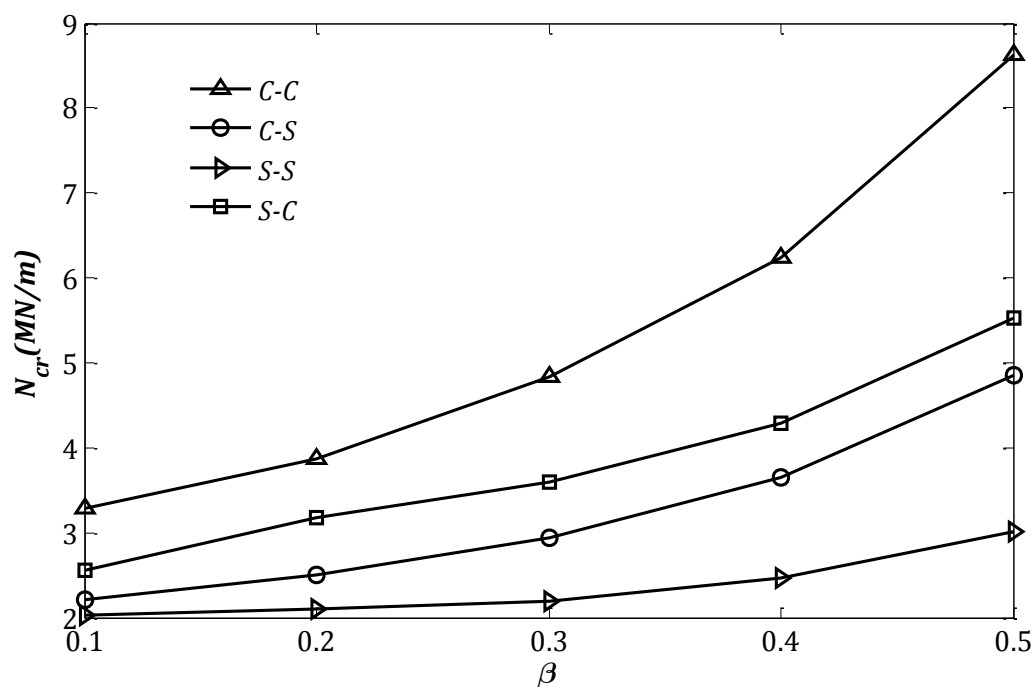
شکل ۳-۴- تأثیر δ بر بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM با $(\beta = 0.2)$ ، به ازای ضرایب شاخص تابع نمایی مختلف.

در «شکل ۴-۴» تأثیر β بر بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM روی محیط الاستیک ($K_w = 200, K_g = 20$) نشان داده شده است. با توجه به شکل با افزایش β ، بار بحرانی کمانش افزایش و در بعضی حالت‌ها تغییر مد کمانش را در پی دارد. به عنوان مثال با افزایش β از $0/3$ به $0/5$ مد کمانش از ۲ به ۴ افزایش می‌یابد؛ یعنی هر چقدر سوراخ ورق بزرگ‌تر شود مقاومت ورق در برابر کمانش بیشتر می‌شود و N_{cr} افزایش می‌یابد. در این حالت نیز افزایش دما باعث کاهش ظرفیت بار بحرانی کمانش می‌گردد.

در «شکل ۴-۵» تأثیر شرایط مرزی لبه‌ی داخلی و خارجی ورق حلقوی ایزوتروپیک بر بار بحرانی کمانش بررسی شده است. ورق با شرایط مرزی دو لبه گیردار (C-C)، مقاومت بیشتری در برابر کمانش دارد و بار بحرانی بالاتری نسبت سایر شرایط مرزی تحمل می‌کند.



شکل ۴-۴- تأثیر β بر بار بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM به ازای دماهای مختلف
 (. $k = 1, \delta = 0.015$)



شکل ۴-۵- تأثیر شرایط مرزی لبه‌های داخلی و خارجی ورق حلقوی ایزوتروپیک تحت فشار شعاعی
 یکنواخت روی محیط الاستیک.

۴-۴-۲ کمانش حرارتی

همان‌طور که در «جدول ۴-۶» مشاهده می‌شود با افزایش نسبت ضخامت به شعاع بیرونی (δ)، دمای بحرانی کمانش ($\Delta T_{cr}(K)$) افزایش می‌یابد ولی تأثیری بر مد کمانش نمی‌گذارد. افزایش ضرایب محیط الاستیک باعث افزایش ΔT_{cr} می‌شود. زیاد شدن ضریب محیط وینکلر (K_w)، علاوه بر افزایش تحمل بار حرارتی، می‌تواند تغییر در مد کمانش را نیز به دنبال داشته باشد. ولی ضریب برشی (K_g) تأثیری بر مد کمانش ندارد. لازم به ذکر است که خصوصیات ماده مورد استفاده در این بخش مشابه «جدول ۴-۱» می‌باشد.

در «شکل ۴-۶» تأثیر توان تابع نمایی (k) بر دمای بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM تحت فشار افزایش دمای یکنواخت، روی محیط الاستیک $(K_g, K_w) = (10, 100)$ نشان داده شده است. با افزایش k به دلیل تغییر خواص از سرامیک به فلز و کاهش مدول الاستیسیته بار بحرانی کاهش پیدا می‌کند.

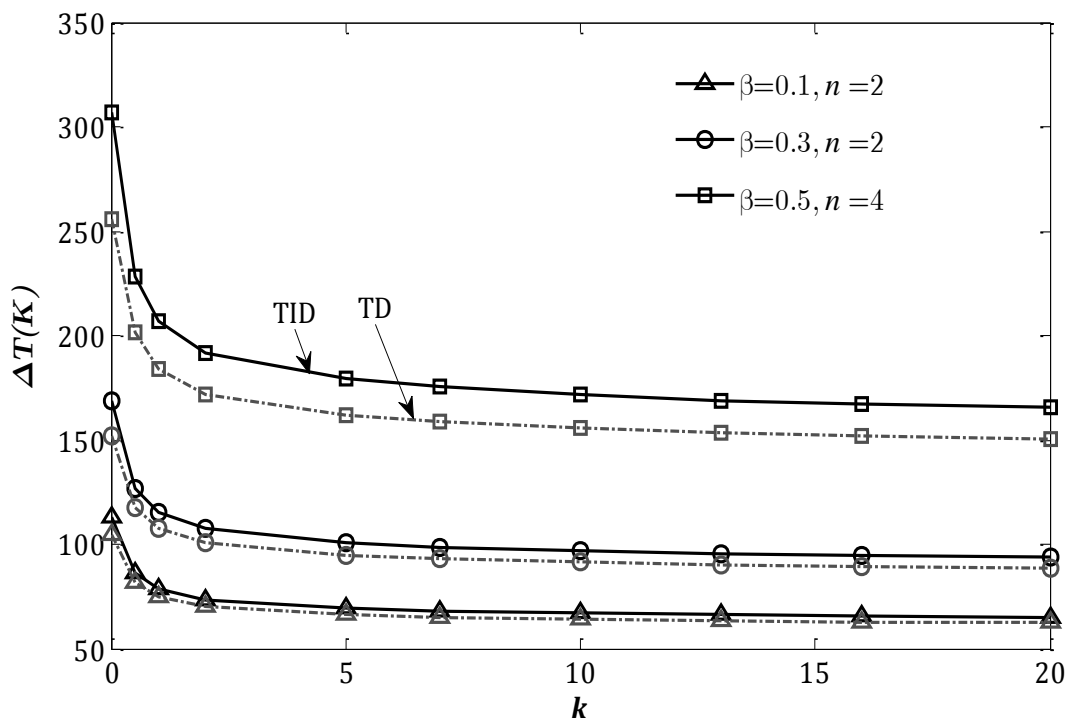
جدول ۴-۶- دمای بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM با $(\beta = 0.3, k = 1)$ تحت افزایش دمای یکنواخت و ضرایب مختلف محیط الاستیک.

(K_g, K_w)				δ
(۳)	(۳)	(۲)	(۲)*	
(۱۰،۵۰۰)	(۰،۵۰۰)	(۱۰،۰)	(۰،۰)	
۵۷/۶۸	۵۰/۶۸	۴۹/۳۶	۴۲/۳۵	TID ۰/۰۱
۵۵/۵۵	۴۹/۰۱	۴۷/۸۱	۴۱/۱۸	TD
۱۲۹/۷۸	۱۱۴/۰۲	۱۱۱/۰۷	۹۵/۲۹	TID ۰/۰۱۵
۱۱۹/۹۴	۱۰۶/۳۱	۱۰۳/۰۶	۸۹/۸۵	TD
۲۳۰/۷۳	۲۰۲/۶۷	۱۹۷/۴۶	۱۶۹/۴۱	TID ۰/۰۲
۲۰۲/۹۴	۱۸۰/۶۵	۱۷۶/۴۳	۱۵۳/۴۹	TD
۵۱۹/۱۳	۴۵۶/۰۱	۴۴۴/۲۹	۳۸۱/۱۴	TID ۰/۰۳
۴۰۹/۷۴	۳۶۶/۵۹	۳۵۸/۸۳	۳۱۴/۲۶	TD

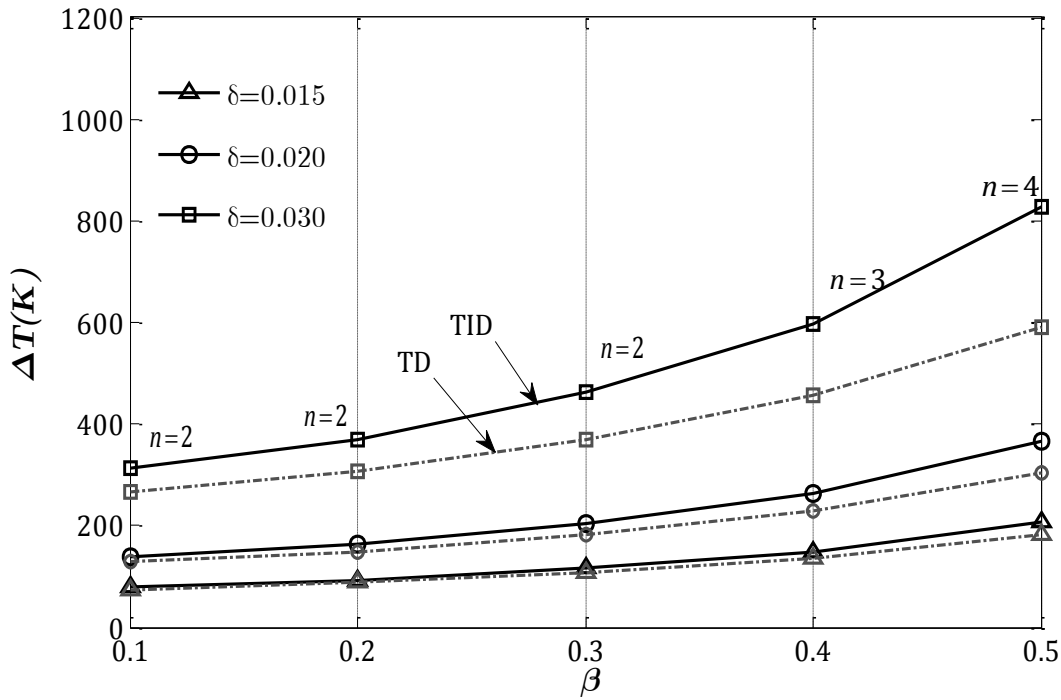
* عدد داخل پرانتز به شماره مد اشاره دارد.

در «شکل ۴-۷» تأثیر نسبت شعاع داخلی به بیرونی (β) به ازای ضخامت‌های مختلف روی محیط الاستیک نشان داده شده است. با توجه به «شکل ۴-۷» با افزایش β دمای بحرانی کمانش افزایش می‌یابد و در بعضی حالت‌ها منجر به تغییر مد کمانش می‌شود.

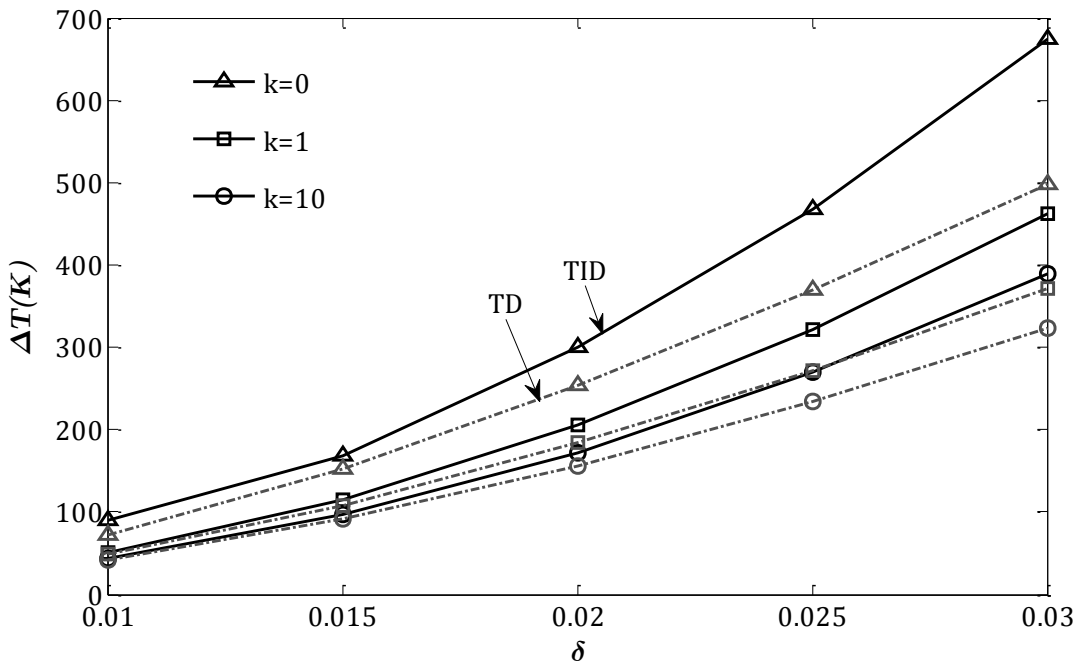
در «شکل ۴-۸» تأثیر نسبت ضخامت به شعاع بیرونی (δ) به ازای شاخص تابع نمایی مختلف k روی محیط الاستیک نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش δ باعث افزایش مدول یانگ و در نتیجه افزایش دمای بحرانی کمانش می‌شود ولی تأثیری بر مد کمانش ندارد و کمانش در مد دوم اتفاق می‌افتد.



شکل ۴-۶- تأثیر توان تابع نمایی بر دمای بحرانی کمانش ورق حلقوی FGM، تحت شرایط مرزی گیردار.



شکل ۴-۷- تأثیر β بر دمای بحرانی کمانش حرارتی ورق حلقوی FGM ($k = 1$) روی محیط الاستیک با $(K_g, K_w) = (10, 100)$ و شرایط مرزی گیردار.



شکل ۴-۸- تأثیر δ بر دمای بحرانی کمانش حرارتی ورق حلقوی FGM روی محیط الاستیک با $(K_g, K_w) = (10, 100)$ و شرایط مرزی گیردار.

۴-۵ جمع‌بندی نتایج

با تعیین تأثیر ضخامت، شعاع داخلی، ضریب تابع نمایی، ضرایب محیط الاستیک و اثر دما بر خواص، یک راه‌حل تحلیلی برای محاسبه بار بحرانی کمانش ارائه شده است. در این تحقیق برای محاسبه معادلات تعادل و پایداری از تئوری کلاسیک استفاده شده است. همچنین خواص مواد طبق رابطه تابع نمایی تغییر می‌کند و وابسته به ضخامت و دما است. ورق در محیط حرارتی قرار دارد و لبه‌های داخلی و خارجی تحت فشار شعاعی یکنواخت می‌باشد. با محاسبه مقدار ویژه‌ی معادلات پایداری و حل دقیق آن بار بحرانی کمانش مکانیکی و حرارتی به‌دست آمده است. برخی نتایج حاصل از کار حاضر به شرح زیر می‌باشد.

۱. وابستگی خواص به دما، نقش مهمی در تخمین بار بحرانی ورق بر عهده دارد. هنگامی که خواص به صورت تابعی از دما در نظر گرفته شوند، رفتار دقیق‌تر مواد توجیه می‌شود. در این حالت، نیروها و دماهای بحرانی به‌دست آمده، نسبت به حالتی که خواص ثابت فرض شوند، دقیق‌تر و البته دارای مقدار کمتری هستند.

۲. رفتار ورق‌ها در معرض بار فشاری لزوماً منجر به وقوع پدیده کمانش نخواهد شد. تحلیل سازه در مرحله پیش‌کمانش نوع رفتار سازه را مشخص خواهد کرد. برای ورق‌های ساخته شده از مواد هدفمند با تغییر خواص غیرمتقارن نسبت به صفحه میانی، کمانش حرارتی و مکانیکی تنها در حالتی رخ می‌دهد که شرایط مرزی سرتاسر از نوع گیردار باشد. این در حالی است که برای مابقی شرایط مرزی، رفتار ورق به صورت خمش غیرخطی می‌باشد. در حالت دیگر که ورق نسبت به صفحه میانی دارای تقارن خواص است، به دلیل حذف گشتاور اضافی در ورق، کمانش حرارتی و مکانیکی در حالات بارگذاری یکنواخت در کلیه شرایط مرزی رخ می‌دهد.

۳. بستر الاستیک نقش تعیین‌کننده‌ای را در مقدار دمای بحرانی و البته شکل مد کمانش یافته ورق بر عهده دارد. بالاتر رفتن هر یک از ضرایب بستر الاستیک، موجب بالاتر رفتن دمای بحرانی یا نیروی بحرانی می‌شود. همچنین هر یک از ضرایب بستر، نقش تعیین‌کننده‌ای را در شکل کمانش سازه به عهده دارند. تغییر ضریب بستر

وینکلر (K_w)، می‌تواند باعث تغییر شماره مد کمانش سازه گردد. ولی ضریب برشی بستر (K_g) باعث تغییر مدهای کمانش نخواهد شد.

۴. اگر ورق در محیط حرارتی با لبه‌های داخلی و خارجی تحت فشار شعاعی یکنواخت باشد به علت آزاد بودن جابه‌جایی در راستای شعاع ($u_0(r, \theta)$)، اثر بار حرارتی (N^T) حذف می‌شود و فقط کمانش مکانیکی رخ می‌دهد و حرارت تنها بر خواص مواد تأثیر می‌گذارد.

۵. علی‌رغم اینکه بارگذاری متقارن است ولی ممکن است مدهای کمانش نامتقارن باشد. حل متقارن معادله پایداری بار بحرانی کمانش را بیشتر از مقدار واقعی پیش‌بینی می‌کند. در حل نامتقارن اثر جابه‌جایی در راستای θ حذف نمی‌شود و خیز ورق وابسته به دو پارامتر r و θ می‌باشد.

۶. ورق با شرایط مرزی دو لبه گیردار (C-C)، مقاومت بیشتری در برابر کمانش دارد و بار بحرانی بالاتری نسبت سایر شرایط مرزی دارد. همچنین شرایط مرزی (S-S) کمترین بار بحرانی کمانش را در شرایط مرزی مورد بررسی تحمل می‌کند.

۶-۴ پیشنهادها

به منظور ادامه تحقیق حاضر موارد زیر پیشنهاد می‌گردد:

۱. در این پروژه دو حالت کمانش مکانیکی تحت فشار شعاعی یکنواخت با لحاظ کردن اثر دمایی و کمانش حرارتی مورد بررسی قرار گرفت و می‌توان کمانش ترمومکانیکی «بخش ۳-۶-۴» با شرط مرزی «رابطه ۳-۵۷» را مورد بررسی قرار داد.
۲. در بسیاری از کاربردهای مهندسی، بارهای اعمالی به صورت یکنواخت نمی‌باشند. به عنوان مثال کمانش ورق در معرض گشتاورهای لبه‌ای و یا بارهای سهموی شکل می‌تواند در ادامه کار حاضر مورد بررسی قرار گیرد.
۳. در این تحقیق برای ورق‌های نازک از تئوری کلاسیک استفاده شده است ولی برای تحلیل کمانش ورق‌های ضخیم استفاده از تئوری کلاسیک با خطای زیادی همراه است. به همین

دلیل می‌توان از تئوری مرتبه اول یا سوم برشی برای محاسبه کمانش ورق‌های ضخیم استفاده شود.

۴. در حالتی که ورق نسبت به صفحه میانی دارای تقارن خواص است، به دلیل حذف گشتاور اضافی در ورق، کمانش حرارتی و مکانیکی در حالات بارگذاری یکنواخت در کلیه شرایط مرزی رخ می‌دهد. می‌توان در ادامه کار حاضر با در نظر گرفتن ماده هدفمند دوطرفه کمانش را برای شرایط مرزی گوناگون به دست آورد.

- [۱] بابایی، محمد حسن، تحلیل ترموالاسیسیته کوپل برای تیر اوپلر برنولی FGM، پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۴.
- [۲] عباسی، مصطفی، تحلیل ترموالاسیسیته کوپل برای تیر تیموشنکو FGM، پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۶.
- [۳] M. Koizumi, The Concept of FGM. Ceramic Transaction, Functionally Graded Materials, 34(1984) 3-10.
- [۴] M. Koizumi, FGM activities in japan, Composites Part B: Engineering, 28(1997), 1-4.
- [۵] عباس زاده بیدختی، علی، کنترل تغییر مکان ناشی از بار حرارتی در تیر Piezo FGM، پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۶.
- [۶] بیلاقی تمیجانی، علی، ارتعاشات حرارتی تیر FGM با سنسور و محرک پیزوالکتریک، پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۴.
- [۷] C.M. Wang, C.Y. Wang, J.N. Reddy, Exact Solutions for Buckling of Structural Members, CRC Press, Boca Raton, 2004.
- [۸] H. S. Shen, J. Yang, Postbuckling of internal pressure loaded FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium, Europe Journal of Mech, 29(2010), 448-460.
- [۹] J.N. Reddy, Mechanics of Laminated Composite Plates and shells theory and analysis, CRC, Press, New York, 2004.
- [۱۰] I.B. Teodoru, EBBEF2p –A Computer Code for Analysing Beams on Elastic Foundations, Intersections, 6 (2009) 301-312.
- [۱۱] S.C. Dutta and R. Roy, A Critical Review on Idealization and Modeling for interaction among Soil-Foundation-Structure System, Computers and structures, 80 (2002) 1579-1594.
- [۱۲] A. Daloglu and C. Vallabhan, Values of k for Slab on Winkler Foundation, J. Geotech and Geoenviron. Engineering, 126 (2000) 463-471.
- [۱۳] G.H. Brayan, On the Stability of a Plane Plate under Thrust in Its Own Plane with Application to the Buckling of the Side of a Ship, In Proce London Mathematical Society, 22 (1891) 54-67.
- [۱۴] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, Theory of Elastic Stability, 2nd ed. McGraw-Hill, New York 1961.

- [۱۵] D.O. Brush, B.O. Almroth, Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [۱۶] R. Javaheri and M.R. Eslami, Thermal Buckling of Functionally Graded Plates, AIAA journal, 40 (2002) 162-184.
- [۱۷] R. Javaheri and M.R. Eslami, Buckling of Functionally Graded Plates under in-plane Compressive Loadings, ZAMM journal of Applied Mathematics and Mechanics, 82 (2002) 277-283.
- [۱۸] R. Javaheri and M.R. Eslami, Thermal Buckling of Functionally Graded Plates based on Higher Order Theory, Journal of Thermal Stresses, 25 (2002) 603-625.
- [۱۹] B. Samsam Shariat, R. Javaheri, M.R. Eslami, Buckling of Imperfect Functionally Graded Plates under in-plane Compressive Loading, International Journal of Solids and Structures, 43 (2005) 1020-1036.
- [۲۰] B. Samsam Shariat, M.R. Eslami, Buckling of Imperfect Functionally Graded Plates under in-plane Compressive Loading, International Journal of Solids and Structures, 43 (2006) 4082-4096.
- [۲۱] B. Samsam Shariat, M.R. Eslami, Buckling of Imperfect Functionally Graded Plates under in-plane Compressive Loading, Journal of Thermal Stresses, 28 (2006) 1183-1198.
- [۲۲] B. Samsam Shariat, M.R. Eslami, Buckling of Thick Functionally Graded Plates under Mechanical and Thermal loads, Composite Structures, 78 (2007) 433-439.
- [۲۳] B. Samsam Shariat, M.R. Eslami, Thermomechanical Stability Of Imperfect Functionally Graded Plates Based on Third Order Theory, AIAA Journal, 44 (2006) 2929-2936.
- [۲۴] N. Yamaki, Buckling of a Thin Annular Plates under Uniform compression, Journal of Applied Mechanics, 25 (1958) 267-273.
- [۲۵] M.M. Najafizadeh and M.R.Eslami, Buckling analysis of circular Plates of Functionally Graded Materials under uniform radial Compression, International Journal of Mechanical Science, 44 (2012) 2479-249.
- [۲۶] M.M. Najafizadeh and M.R.Eslami, First Order Theory based thermo elastic stability of functionally graded material circular plates, AIAA Journal, 40 (2002) 1444-50.
- [۲۷] A. Naderi, A.R. Saidi, Thermal buckling analysis of moderately thick functionally graded annular sector plates, Compos Structure, 92 (2010) 1744-52.
- [۲۸] A. Naderi, A.R. Saidi, Exact solution for stability analysis of moderately thick functionally graded sector plates on elastic foundation, Compos Structure, 93 (2011) 629-38.
- [۲۹] A. Naderi, A.R. Said, An Analytical Solution for Buckling of Moderately Thick Functionally Graded Annular and Solid Sectorial Plates, Archive of Applied Mechanics, 81(2011) 809-828.

- [۳۰] B. Bremec and F. Kosel, Thickness optimization of circular annular plate at buckling, *Thin-Walled Structures*, 44 (2006) 74–81.
- [۳۱] C.Y. Wang, On the buckling of a circular plate on an elastic foundation, *Journal of Applied Mechanics*, 72 (2005) 795–6.
- [۳۲] M.M. Alipour, M. Shariyat, Semi-analytical buckling analysis of heterogeneous variable thickness viscoelastic circular plates on elastic foundations, *Mechanics Research Communications*, 38 (2011) 594-601.
- [۳۳] S.H. Shen, S.R. Li, Postbuckling of Sandwich Plates With FGM Face Sheets and Temperature Dependent Properties, *Composites Part B: Engineering*, 35 (2004) 429-437.
- [۳۴] K.M. Liew, J. Yang, S. Kitipornchai, Thermal Post Buckling of laminated Plates Comprising Functionally Graded Materials With Temperature Dependent Properties, *Journal of Applied Mechanics*, 71 (2004) 839-850.
- [۳۵] Y. Kiani, M.R. Eslami, An Exact Solution for Thermal Buckling of Annular Plate on an Elastic Medium, *Composites Part B*, 45 (2013) 101–10.
- [۳۶] Y. Kiani, M.R. Eslami, Thermal buckling of shear deformable temperature dependent circular/annular FGM plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 81 (2014) 137–148.
- [۳۷] M. Bateni, Y. Kiani, M.R. Eslami, A Comprehensive Study on Stability of FGM Plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 75 (2013) 134-144.
- [۳۸] H. Tsukamoto, Analytical method of inelastic thermal stresses in a functionally graded material plate by a combination of micro-and macromechanical approaches, *Composites Part B: Engineering*, 34 (2003) 561-568.
- [۳۹] L. Chen and, T. Goto, *Functionally Graded Materials*, in *Handbook of Advanced Ceramics*, Oxford: Academic Press, 2003.
- [۴۰] N. Cherradi, A. Kawasaki, M. Gasik, Worldwide Trends in Functional Gradient Materials Research and Development, *Composites Engineering*, 4 (1994) 883-894.
- [۴۱] J.R. Cho, J.T. Oden, Functionally Graded Material: a parametric study on thermal-stress characteristics using the Crank–Nicolson–Galerkin scheme, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188 (2000) 17-38.
- [۴۲] G.N. Praveen, J.N. Reddy, Nonlinear Transient Thermo elastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates, *International Journal of Solids and Structure* 35(1998) 4457-4476.
- [۴۳] Y. Tanigawa, H. Morishita, S. Ogaki, Thermoelastic Field With Nonhomogeneous Material Properties, *Journal of Thermal Stress*, 22 (1999) 689-711.
- [۴۴] M.H. Babaei, M. Abbasi, M.R. Eslami, Coupled Thermoelasticity of Functionally Graded Beams, *Journal of Thermal Stress*, 31 (2008) 1-18.

- [۴۵] Y.S. Touloukian, Thermo physical properties of high temperature solid materials, McMillan, New York, 1967.
- [۴۶] R.B. Hetnarski, M.R. Eslami, Thermal Stresses advanced theory and applications, Berlin: Springer Springer, 2009.
- [۴۷] A.R. Saidi, A. Hasani Baferani, Thermal Buckling Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Annular Sector Plates, *Composite Structure*, 92 (2002) 1744–52.
- [۴۸] M.M. Najafizadeh, H.R. Heydari, An exact solution for buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression, *International Journal of Mechanical Sciences*, 50 (2008) 603–12.
- [۴۹] M.M. Najafizadeh, H.R. Heydari, Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory, *Euroupean Journal Mechanical A/Solids*, 23 (2004) 1085–100.
- [۵۰] R. Seifi, N. Khodayari, H. Hosseini, Study of critical buckling loads and modes of cross-ply laminated annular plates, *Compos Part B: Engineering*, 43(2002) 422–30.
- [۵۱] C.Y. Wang, T.M. Aung, Buckling of Circular Mindlin plates with an internal ring support and elastically restrained edge, *Journal Engineering Mechanical*, 131(2005) 359–66.
- [۵۲] H.S. Shen, Thermal postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells with temperature-dependent properties, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14 (2007) 439–52.
- [۵۳] L.S. Ma, T.J. Wang, Buckling of functionally graded circular/annular plates based on the first-order shear deformation plate theory, *Key Engineering Materials*, 2004.
- [۵۴] O. Sepahi, M.R. Forouzan, P. Malekzadeh, Thermal buckling and postbuckling analysis of functionally graded annular plate with temperature-dependent material properties, *Materials Design*, 32 (2011) 4030–41.

Abstract

Stability analysis and buckling behavior of plates, always as one of the most important matters in the structural analysis has been emphasized. In this paper, Asymmetric buckling of functionally graded (FG) annular plates on an elastic foundation under uniform radial compression and thermal loading is studied analytically. The equilibrium equations of an annular-shaped plate are obtained based on the classical plate theory (CPT). Each thermo-mechanical property of the plate is assumed to be graded across the thickness direction of plate based on the power law form, while Poisson's ratio is kept constant. Temperature-dependency of the material properties is also taken into account. Existence of bifurcation buckling for various edge supports is examined and stability equations are obtained by means of the adjacent equilibrium criterion. An exact Asymmetrical solution is presented to calculate the Asymmetric buckling load by obtaining the eigenvalues of the stability equation. In this study, inner and outer edges of plate subject uniform radial compression. The effects of thickness to outer radii, inner to outer radii, power law index, elastic foundation coefficient, and temperature-dependency of the material properties on critical buckling load of FG plates are presented.

Keywords

Annular Plates, Asymmetric Buckling, Functionally Graded Materials, Temperature-dependency.



University of Shahrood

Faculty of mechanic

**Thermomechanical buckling analysis of thin annular FGM plate under
uniform radial compression and thermal loading**

Aflatoon Shahabi

Supervisor:

Dr. Alireza Shaterzadeh

February 2015