

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

تحلیل ارتعاشی ورق مدور متقارن محوری ویسکوالاستیک به
کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

سعید خادم‌مشیر

استاد راهنما:

دکتر حمیدرضا ایپک چی

استاد مشاور:

فاطمه سوهانی

بهمن ماه ۱۳۹۳



مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سعید خادم‌مشیر رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل ارتعاشی ورق مدور متقارن محوری ویسکوالاستیک به کمک تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول که در تاریخ ۹۳/۱۱/۲۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: بسیار امتیاز (۱۸.۵۲)) دفاع مجدد مردود

- ۱- عالی (۲۰ - ۱۹) ۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)
۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶) ۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر حمیدرضا ایبک‌چی	دانشیار	
۲- استاد مشاور	فاطمه سوهانی	دکتری	
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر حبیب احمدی	استادیار	
۴- استاد ممتحن	دکتر امیر جلالی	استادیار	
۵- استاد ممتحن	دکتر اردشیر کرمی محمدی	استادیار	

رئیس دانشکده:



دانشگاه شاهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سعید خادم‌مشیر

تحت عنوان: تحلیل ارتعاشی ورق مدور متقارن محوری ویسکوالاستیک به کمک تئوری تغییرشکل برشی

مرتبه اول

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم به عزیزترین ما

مادر

مادر

به جبران قطره‌ای از دیای مجتهدان

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بجاوریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، پاس از انسانی است که هدف و خایت آفرینش را تا این می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند را تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب

﴿مَنْ لَمْ يَشْكُرِ الْمُنْعَمَ مِنَ الْمَخْلُوقِينَ لَمْ يَشْكُرِ اللَّهَ عَزَّوَجَلَّ﴾

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوارم که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عکس‌نویسیده‌اند و گریانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی، یار و یاور بی‌چشم داشت برای من بوده‌اند؛

و از استاد ارجمند و شایسته؛ جناب آقای دکتر حمیدرضا ایک‌چی که در کمال سه‌صدرا با حسن خلق و فروتنی، از هیچ‌کلی در این عرصه، بر من دریغ ننمودند و زحمات را به‌مانی این رساله را به‌همه گرفتند.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را پاس گوید.

چکیده

در این پایان‌نامه، به حل ریاضی معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق مدور توپر و حلقوی ویسکوالاستیک تحت بار شعاعی و عرضی با شرایط مرزی مختلف پرداخته شده است. با استفاده از اصل همپلتون و بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول معادلات حاکم بر سیستم شامل چهار معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی کوپل به یکدیگر به دست می‌آیند. رفتار ورق ویسکوالاستیک، به صورت مدل جامد استاندارد خطی در برش و الاستیک در بالک در نظر گرفته شده است. برای تحلیل فرکانسی و پاسخ از تئوری اغتشاشات استفاده شده است. با روند مشابه، تحلیل با استفاده از تئوری کلاسیک نیز انجام شده است. حل عددی مسأله به کمک نرم‌افزار انسیس نیز انجام شده است.

مواردی که در این تحلیل در نظر گرفته شده است عبارتند از: تعیین پاسخ بر حسب مکان و زمان، تعیین فرکانس‌های طبیعی ورق، بررسی تأثیر پارامترهای هندسی بر پاسخ و فرکانس، بررسی دقت تئوری مرتبه اول در تعیین فرکانس و مقایسه نتایج با تئوری کلاسیک ورق‌ها و حل عددی.

کلمات کلیدی:

تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، تئوری کلاسیک، تحلیل فرکانسی، تئوری اغتشاشات، روش اجزای محدود

فهرست مقاله‌های مستخرج از پایان‌نامه

- “Natural frequencies determination of viscoelastic annular plates using first order shear deformation theory”, (journal of ASCE), (under review).
- “Transient response of viscoelastic annular plate using first order shear deformation theory”

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول: تاریخچه و مرور مقالات
۲	۱-۱- مقدمه
۲	۲-۱- مواد ویسکوالاستیک
۳	۳-۱- تاریخچه مواد ویسکوالاستیک
۴	۴-۱- رفتار ویسکوالاستیسیته‌ی خطی
۶	۵-۱- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک
۸	۶-۱- فرضیات متداول در مواد ویسکوالاستیک
۹	۷-۱- مدل‌های رئولوژیک مواد ویسکوالاستیک
۹	۱-۷-۱- مدل ماکسول
۱۰	۲-۷-۱- مدل کلومین-ویت
۱۰	۳-۷-۱- جامد استاندارد خطی (مدل زنر)
۱۲	۸-۱- اجزای سازه‌ای
۱۳	۹-۱- مروری بر تئوری‌های رفتار ورق‌ها
۱۳	۱۰-۱- مرور مقالات
۱۷	۱۱-۱- جمع‌بندی
۱۹	فصل دوم: استخراج معادلات
۲۰	۱-۲- مقدمه
۲۰	۲-۲- تعریف مسأله
۲۱	۳-۲- محاسبه‌ی انرژی کرنشی ورق
۲۲	۴-۲- محاسبه‌ی انرژی جنبشی ورق
۲۲	۵-۲- کار نیروهای خارجی
۲۳	۶-۲- تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همپلتون
۲۴	۷-۲- تعمیم معادلات الاستیک استخراج شده به ورق ویسکوالاستیک
۲۴	۱-۷-۲- اعمال مدل ویسکوالاستیک جامد استاندارد خطی
۲۷	۸-۲- معادله‌ی ورق بر اساس تئوری کلاسیک در حالت ویسکوالاستیک
۲۷	۹-۲- جمع‌بندی

۲۹	فصل سوم: حل تحلیلی
۳۰	۳-۱- مقدمه
۳۰	۳-۲- بی بعد سازی معادلات
۳۲	۳-۳- تحلیل فرکانسی
۳۶	۳-۴- تعیین پاسخ ورق به‌ازای بار عرضی تابع زمان
۳۶	۳-۴-۱- روش بسط توابع ویژه (مدهای نرمال) و مقیاس چندگانه
۴۰	۳-۵- جمع‌بندی
۴۱	فصل چهارم: حل عددی
۴۲	۴-۱- مقدمه
۴۲	۴-۲- تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک بر اساس سری پرونی
۴۳	۴-۳- تعیین مدول رهایش برشی و بالک
۴۳	۴-۳-۱- مدول رهایش برشی
۴۴	۴-۳-۲- مدول بالک
۴۵	۴-۴- معرفی المان‌ها
۴۵	۴-۵- تعیین مش بهینه
۴۷	۴-۶- حل استاتیکی
۴۷	۴-۷- حل مدال
۴۸	۴-۸- حل دینامیکی
۵۰	۴-۹- جمع‌بندی
۵۱	فصل پنجم: بررسی نتایج
۵۲	۵-۱- مقدمه
۵۲	۵-۲- فرکانس طبیعی
۶۴	۵-۳- پاسخ بار دینامیکی
۷۳	۵-۴- جمع‌بندی
۷۵	فصل ششم: نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۷۶	۶-۱- مقدمه
۷۶	۶-۲- نتایج
۷۸	۶-۳- پیشنهادها
۷۹	پیوست‌ها

۸۰	پیوست الف - اصول ویسکوالاستیسیته‌ی خطی
۸۱	الف-۱- مقدمه
۸۱	الف-۲-۱- خزش
۸۳	الف-۲-۲- رهایش تنش
۸۴	الف-۲-۳- پاسخ دینامیکی به بار گذاری سینوسی
۸۵	الف-۳- اصل جمع آثار بولتزمان
۸۷	الف-۴- معرفی مدل‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک
۸۷	الف-۴-۱- مدل ماکسول
۸۹	الف-۴-۲- مدل کلوین-ویت
۹۱	الف-۴-۳- جامد استاندارد خطی (مدل زنر)
۹۳	الف-۴-۴- مدل برگرز
۹۴	الف-۴-۵- مدل ویچرت
۹۶	پیوست ب - تئوری‌های ورق
۹۷	ب-۱- مقدمه
۹۷	ب-۲- دسته‌بندی ورق از نظر ضخامت و تغییرشکل
۹۷	ب-۳- تئوری کلاسیک (کیرشهف) ورق (CPT)
۱۰۰	ب-۴- تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول (FSDT)
۱۰۳	ب-۵- تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم (TSDT)
۱۰۷	پیوست ج - معرفی المان‌ها
۱۰۸	ج-۱- المان ۱۸۱ Shell
۱۰۸	ج-۲- المان ۱۹۰ Solid-Shell
۱۰۹	ج-۳- المان ۱۸۲ Plane و ۱۸۶ Solid
۱۱۱	پیوست د - بررسی کمانش
۱۱۲	د-۱- بار کمانش
۱۱۲	د-۲- بررسی نتایج
۱۱۵	منابع

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۱) منحنی تنش-کرنش ۵
- شکل (۲-۱) مدل ماکسول ۹
- شکل (۳-۱) مدل کلومین-ویت ۱۰
- شکل (۴-۱) اولین مدل جامد استاندارد خطی ۱۱
- شکل (۵-۱) دومین مدل جامد استاندارد خطی ۱۱
- شکل (۱-۲) هندسه و دستگاه مختصات ورق حلقوی ۲۰
- شکل (۳-۴) تغییرات زمانی نیروی گسترده ۴۸
- شکل (۱-۵) اثر G_1 بر فرکانس طبیعی ورق ویسکوالاستیک ۵۸
- شکل (۲-۵) اثر زمان رهاش بر فرکانس طبیعی (مد اول) ۵۹
- شکل (۳-۵) اثر ضخامت بر فرکانس طبیعی ورق گیردار-گیردار ۶۰
- شکل (۴-۵) اثر نسبت r_i/r_0 بر فرکانس طبیعی ورق گیردار-گیردار ۶۰
- شکل (۵-۵) اثر بار شعاعی بر فرکانس‌های طبیعی ورق گیردار-گیردار ۶۱
- شکل (۶-۵) شکل مد اول ورق توپر گیردار و ساده ۶۲
- شکل (۷-۵) شکل مد دوم ورق توپر گیردار و ساده ۶۲
- شکل (۸-۵) شکل مد اول ورق حلقوی گیردار و ساده ۶۳
- شکل (۹-۵) شکل مد دوم ورق حلقوی گیردار و ساده ۶۳
- شکل (۱۰-۵) شکل مد اول ورق حلقوی گیردار ۶۴
- شکل (۱۱-۵) پاسخ عرضی ورق در $r=0.0975$ m به‌ازای گام‌های زمانی مختلف ۶۵

- شکل (۵-۱۲) پاسخ عرضی ورق در $r=0.0975\text{ m}$ در ۶۶
- شکل (۵-۱۳) پاسخ عرضی ورق در $r=0.14\text{ m}$ در ۶۶
- شکل (۵-۱۴) پاسخ عرضی در $r=0.0975\text{ m}$ تئوری برشی مرتبه اول در ۶۷
- شکل (۵-۱۵) پاسخ عرضی در $r=0.0975\text{ m}$ تئوری کلاسیک در ۶۷
- شکل (۵-۱۶) پاسخ عرضی در $r=0.0975\text{ m}$ حل عددی در ۶۸
- شکل (۵-۱۷) خیز عرضی ورق در $t=0.55$ ثانیه در ۶۸
- شکل (۵-۱۸) اثر بار شعاعی کششی بر خیز عرضی ورق در $t=0.5$ ثانیه در ۶۹
- شکل (۵-۱۹) پاسخ عرضی ورق به‌ازای بار کششی در $r=0.0975\text{ m}$ در ۷۰
- شکل (۵-۲۰) پاسخ شعاعی ورق در $r=0.1\text{ m}$ و $z=h/2$ در ۷۰
- شکل (۵-۲۱) خیز شعاعی ورق در $z=h$ و $z=h/4$ در ۷۱
- شکل (۵-۲۲) اثر مدول G_1 بر پاسخ عرضی در $r=0.0975\text{ m}$ در ۷۱
- شکل (۵-۲۳) اثر ضریب ویسکوزیته‌ی η بر پاسخ عرضی در $r=0.0975\text{ m}$ در ۷۲
- شکل (۵-۲۴) پاسخ عرضی ورق الاستیک بر اساس تئوری کلاسیک در $r=0.0975\text{ m}$ در ۷۲
- شکل (۵-۲۵) پاسخ عرضی ورق الاستیک بر اساس تئوری برشی مرتبه اول در $r=0.0975\text{ m}$ در ۷۳
- شکل (الف-۱) تابع کامپلیانس خزشی در ۸۲
- شکل (الف-۲) خزش و بازگشت در ۸۲
- شکل (الف-۳) رهايش تنش و بازگشت در ۸۳
- شکل (الف-۴) تابع مدول رهايش تنش در ۸۴
- شکل (الف-۵) بارگذاري ديناميكي در ۸۵
- شکل (الف-۶) مدل ماکسول در ۸۷
- شکل (الف-۷) رفتار مدل ماکسول در ۸۸

۸۹	شکل (الف-۸) مدل کلوین-ویت
۹۱	شکل (الف-۹) رفتار مدل کلوین
۹۲	شکل (الف-۱۰) مدل جامد استاندارد خطی نوع اول
۹۲	شکل (الف-۱۱) مدل جامد استاندارد خطی نوع دوم
۹۴	شکل (الف-۱۲) مدل برگرز
۹۴	شکل (الف-۱۳) مدل ویچرت
۹۹	شکل (ب-۱) نیروها و ممان‌ها در المان ورق
۱۰۴	شکل (ب-۲) هندسه‌ی اولیه و تغییرشکل یافته‌ی یک لبه‌ی ورق
۱۰۸	شکل (ج-۱) هندسه‌ی المان ۱۸۱ Shell
۱۰۹	شکل (ج-۲) هندسه‌ی المان ۱۹۰ Solid shell
۱۰۹	شکل (ج-۳) هندسه‌ی المان ۱۸۲ Plane
۱۱۰	شکل (ج-۴) هندسه‌ی سازه‌ی جامد همگن المان ۱۸۶ Solid
۱۱۳	شکل (د-۱) اثر نسبت r_0/h بر بار کمانش ورق

علائم و اختصارات

u_0, w_0	مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه میانی	T	انرژی جنبشی
$N_r, N_\theta, N_z, M_r,$ $M_\theta, M_z, Q_r, M_{rz}$	منتجه‌های تنش	U	انرژی کرنشی
U_r, U_θ, U_z	مؤلفه‌های جابه‌جایی	Q	بار گسترده
m_n	مقادیر ویژه	P_r	بار شعاعی
α_i	مدول تناسب	ε	پارامتر بی بعد کوچک
t_i	زمان رهایش	h	ضخامت
$\dot{\varepsilon}$	نرخ کرنش برشی	$t_{rz}, t_{\theta z}, t_{r\theta}$	تنش‌های برشی
G_1, G_2	مدول‌های ویسکوالاستیک	S_r, S_θ, S_z	تنش‌های نرمال
η	ضریب ویسکوزیته	c	کمیت با دیمانسیون سرعت
		u_1, w_1	توابع مجهول با بعد چرخش
		$C_1, C_2, C_3,$ C_4	ثابت‌ها در حل عمومی
		ρ	چگالی
		T^*	چگالی انرژی جنبشی
		U^*	چگالی انرژی کرنشی
		v	ضریب پواسون
		K_s	ضریب تصحیح برشی
		r_i	شعاع داخلی
		r_o	شعاع خارجی
		ω	فرکانس طبیعی
		W_Q	کار انجام شده توسط نیروی گسترده
		W_P	کار انجام شده توسط بار شعاعی
		$\gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z}$	کرنش‌های برشی
		$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$	کرنش‌های نرمال
		r, θ, z	مختصات استوانه‌ای
		E	مدول الاستیسیته
		G	مدول برشی

فصل اول

تاریخچه و مرور مقالات
۴

به منظور انجام هر گونه تحلیل مکانیکی برای هر ماده‌ای، شناخت کافی از ماده‌ی مورد نظر حائز اهمیت است. به همین دلیل در این فصل ابتدا به معرفی مواد ویسکوالاستیک و خواص مکانیکی پرداخته می‌شود. سپس معادلات بنیادین تنش- کرنش، مدل‌های رئولوژیکی مورد استفاده در مدل-سازی مواد ویسکوالاستیک و فرضیات متداول در تحلیل تنش این مواد بیان شده است. در ادامه توضیح مختصری درباره‌ی اجزای سازه‌ای داده شده است. پس از آن به معرفی تئوری ورق‌ها پرداخته می‌شود.

۱-۱- مواد ویسکوالاستیک

دمپینگ (میرایی) پارامتر دینامیکی مهمی برای بررسی ارتعاشات، کنترل صوت، پایداری دینامیکی، دقت موقعیت، خستگی و مقاومت ضربه است. بسیاری از کاربردها از قبیل (سازه‌های بزرگ، پره‌های موتورها، ماشین‌آلات با سرعت‌های بالا) نیازمند وزن سبک و کارایی^۱ دینامیکی بالایی هستند. این ویژگی‌ها و کاربردها در مواد ویسکوالاستیک یافت می‌شود.

ویسکوالاستیک خاصیتی از مواد است که هر دو ویژگی ویسکوز و الاستیک را هنگامی که تحت تغییر شکل قرار می‌گیرند دارا می‌باشند. در مواد ویسکوز، مقاومت جریان برش و کرنش در هنگام اعمال تنش با گذشت زمان به صورت خطی است. در مواد الاستیک با حذف تنش، مقدار کرنش به سرعت به مقدار اولیه باز می‌گردد. مواد ویسکوالاستیک هر دو خاصیت ذکر شده و همچنین کرنش وابسته به زمان را با هم دارند. خاصیت الاستیک نتیجه‌ی کشش مقید صفحات کریستالی ماده است در حالی که ویسکوز نتیجه‌ی پخش شدن اتم‌ها یا مولکول‌های مواد غیر متبلور است. برخی از مواد پلیمری، مواد متشکل از الیافی مانند ابریشم، رایون، سلولز و شیشه‌ها، سرامیک‌ها، بیومتریال‌ها^۲ مانند

¹ Performance

² Bio-Material

پوست و ماهیچه‌ها و هم‌چنین فلزات در دماهای بالا می‌توانند با مدل‌های ویسکوالاستیک خطی مدل شوند [۱].

در محیط واقعی، بسیاری از این مواد، به‌نوعی از رفتارهای ایده‌آل ویسکوالاستیک انحراف دارند. یعنی، رفتار ویسکوالاستیک در اکثر مواد وجود دارد، اما انحراف از حالت الاستیک در برخی از موارد، مانند فلزات، استخوان و سنگ‌ها، ناچیز و در برخی دیگر، مانند پلیمرها چوب‌ها و نسوج بدن، زیاد می‌باشد. در این‌گونه مواد، بر خلاف مواد الاستیک، رابطه تنش-کرنش (خواص ماده) تابع زمان است. حالت میرایی ویسکوالاستیک در بسیاری از مواد پلیمری و شیشه‌ای بروز پیدا می‌کند و مکانیسم دمپینگ داخلی آن، برای افزایش میرایی، به‌منظور کاهش ارتعاشات بسیار حائز اهمیت می‌باشد. میرایی از رهایش و بازگشت شبکه پلیمر بعد از تغییر شکل ناشی می‌شود.

۱-۳- تاریخچه‌ی مواد ویسکوالاستیک

تولید و توسعه‌ی پلیمرهای ترکیبی، تقریباً از هفتاد سال پیش آغاز شده است. موقعیت‌های تجاری محصولات دارای مبنای پلیمری، به‌گونه‌ای بود که ظرف مدت بیست سال، این مواد از محصولات ترکیبی فلزی پیشی گرفته است. دانش پلیمری به‌صورت پنج تکنولوژی جداگانه‌ی زیر، پیشنهاد شده است.

الف) پلاستیک، ب) الاستیک و الاستومر، ج) فیبرها، د) پرداخت‌کاری‌های سطحی ه) پوشش‌های محافظتی.

در سال‌های اخیر، به‌دلیل قیمت پایین، پروسه‌ی ساخت راحت، وزن کم، مقاومت در برابر خوردگی و فواید مهم دیگر، پلیمرها به‌عنوان سازه‌های مهندسی به‌کار گرفته شده‌اند، [۲].

مفاهیم ابتدایی دمپینگ و روش‌های مشخص کردن خصوصیات آن توسط نشیف^۱ و همکاران [۳] توصیف شده است. وی خصوصیات مواد ویسکوالاستیک را، با استفاده از مدول مختلط در حوزه فرکانس بیان کرد. سان^۲ و لو^۳ [۴] مدل‌های دمپینگ سنتی شامل مدل ماکسول، کلوین و زنر را بررسی کردند. کریستن سن^۴ [۵] تئوری ویسکوالاستیک را در حوزه‌ی زمان و با استفاده از تابع رهایش مطرح کرد. این بیان حوزه‌ی زمان، قابل تبدیل به حوزه‌ی فرکانسی می‌باشد و در نتیجه می‌توان به مدول مختلط رسید. بگلی^۵ و توریک^۶ [۶] برای گسترش مدل‌های دمپینگ سنتی کوشیدند و به مدلی دست یافتند که شامل پنج پارامتر بود که باید از انطباق نمودار با داده‌های آزمایشگاهی حاصل می‌شد، که نتیجه‌ی آن یک مدل فرکانسی خیلی پیچیده بود. هم‌چنین به دلیل مجموعه‌ای از ماتریس‌های پیچیده، تبدیل مدل به حوزه‌ی زمان نیز خیلی دشوار بود.

۱-۴- رفتار ویسکوالاستیسیته‌ی خطی

رفتار بسیاری از جامدات، در کرنش‌های کوچک، با استفاده از قانون هوک در الاستیسیته‌ی خطی بیان می‌شود. در این صورت پارامترهای تنش و کرنش با زمان تغییر نمی‌کنند. برای مواد الاستیک در یک بعد، رابطه‌ی تنش با کرنش به صورت زیر است [۷].

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1-1)$$

E مدول یانگ است که عکس کامپلیانس^۷ J است ($E = \frac{1}{J}$).

بر خلاف مواد الاستیک که تغییرشکل آن در اثر اعمال نیروی خارجی، بعد از حذف نیرو قابل برگشت است، یک ماده ویسکوز تحت اعمال بار خارجی جریان می‌یابد و از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند [۷].

¹ Nashif

² Sun

³ Lu

⁴ Christensen

⁵ Bagley

⁶ Torvik

⁷ Compliance

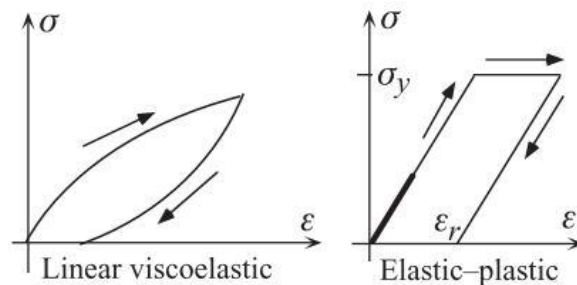
$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2-1)$$

در مواد ویسکوزیته بر اثر اعمال بار خارجی ماده جریان (حرکت) پیدا می‌کند. در حالت جریان پایا، بر اساس تعریف، ویسکوزیته به صورت نسبت تنش برشی به نرخ برش تعریف می‌شود.

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\varepsilon}} \quad (3-1)$$

η ویسکوزیته‌ی برشی^۱ (نیوتنی) سیال می‌باشد که واحد آن Pa.s است. $\dot{\varepsilon}$ و τ به ترتیب نرخ کرنش و تنش برشی هستند.

منحنی تنش-کرنش در یک ماده الاستیک در ناحیه الاستیک به صورت خطی می‌باشد که شیب آن مدول الاستیسیته را بیان می‌کند، (شکل ۱-۱-a) و در یک مقدار خاص تنش، ماده در آستانه‌ی تسلیم قرار می‌گیرد. در یک ماده ویسکو الاستیک خطی، تغییرات تنش-کرنش خطی نبوده و شیب آن نیز در مقایسه با مواد الاستیک کم‌تر است (شکل ۱-۱-b). علت این پدیده در طی اعمال یک نرخ کرنش ثابت، حساس بودن خواص این ماده نسبت به زمان است. در جامد ویسکو الاستیک، کرنش پسماند^۲ سرانجام صفر خواهد شد. مواد الاستیک-پلاستیک نسبت به زمان و تغییرات آن حساس نیستند، اما دارای یک تنش تسلیم می‌باشند که معمولاً اگر تنش از تنش تسلیم فراتر رود، بعد از برداشته شدن بار، یک کرنش پسماند باقی می‌ماند.



(b) (a)

شکل (۱-۱) منحنی تنش-کرنش برای (a) مواد ویسکو الاستیک خطی و (b) مواد الاستیک-پلاستیک ([۳]).

¹ Shear Viscosity

² Residual Strain

برای مطالعه‌ی یک ماده ویسکوالاستیک خطی از ترکیب فنرها و دمپرها استفاده می‌شود. معادلات رفتاری این مدل‌ها به صورت دیفرانسیل خطی می‌باشند.

آزمایش^۱ مواد ویسکوالاستیک، با اعمال یک کرنش یا تنش پله‌ای انجام می‌شود. پاسخ به کرنش پله-ای، رهایش تنش^۲ و پاسخ به تنش پله‌ای، خزش^۳ می‌باشد [۸].

برخی از پدیده‌هایی که در مواد ویسکوالاستیک اتفاق می‌افتد شامل [۹]:

۱- اگر تنش ثابت باقی بماند؛ با گذشت زمان، کرنش افزایش می‌یابد (خزش).

۲- اگر کرنش ثابت باقی بماند؛ با گذشت زمان، تنش کاهش می‌یابد (رهایش).

۱-۵- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک [۱۱و۱۰]

بیان معادلات بنیادین تنش-کرنش در مواد ویسکوالاستیک، به دو شکل کلی انتگرالی و دیفرانسیلی امکان‌پذیر است که در ادامه به بیان روش دیفرانسیلی پرداخته می‌شود.

معادله‌ی ساختاری برای یک ماده‌ی ایزوتروپیک که پاسخ آن به مشتقات تنش و کرنش نیز حساس است، به صورت کلی زیر نوشته می‌شود.

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots) = 0 \quad (۴-۱)$$

که در آن تنش و کرنش به زمان وابسته می‌باشند. شکل اپراتوری معادله‌ی فوق به صورت زیر است.

$$P(D)\sigma_{ij}(t) = Q(D)\varepsilon_{ij}(t) \quad (۵-۱)$$

که $P(D)$ و $Q(D)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$P(D) = \sum_{r=0}^N P_r \frac{\partial^r}{\partial t^r}$$

$$Q(D) = \sum_{r=0}^N Q_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad (۶-۱)$$

¹ Test

² Stress Relaxation

³ Creep

$D=d/dt$ و P_r و Q_r ثابت می‌باشند که به مدل رئولوژیکی انتخابی وابسته‌اند.

جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک یک سیستم تحت کشش محوری، قسمت برشی^۱ و اتساعی^۲ تنش را از هم جدا می‌کنند. این قاعده به دلیل پاسخ متفاوت ماده‌ی ویسکوالاستیک به برش و اتساع (بالک) می‌باشد. با توجه به این نکته، مؤلفه‌های برش و اتساع را می‌توان به صورت زیر جدا کرد.

$$\begin{aligned} P_1 \sigma_{ij}^d &= Q_1 \varepsilon_{ij}^d \\ P_2 \sigma_{ii} &= Q_2 \varepsilon_{ii} \end{aligned} \quad (7-1)$$

بالانویس d معرف بخش برشی و Q_1, P_2, P_1 و Q_2 اپراتورهایی به شکل کلی زیر می‌باشند.

$$P_1 = p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad (8-1)$$

G و K_0 به ترتیب مدول‌های رهایش برش و بالک می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{P_1} \right) \\ K_0 &= \frac{1}{3} \left(\frac{Q_2}{P_2} \right) \end{aligned} \quad (9-1)$$

رابطه‌ی مدول الاستیسیته و ضریب پواسون بر حسب مدول رهایش و برش به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} E &= \frac{9K_0G}{3K_0 + G} \\ \nu &= \frac{3K_0 - 2G}{6K_0 + 2G} \end{aligned} \quad (10-1)$$

با توجه به معادله (۹-۱)، معادله (۱۰-۱) را، برای ماده ویسکوالاستیک، می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$E = \frac{3Q_1Q_2}{P_2Q_1 + 2P_1Q_2} \quad (11-1 \text{ الف})$$

¹ Deviatoric

² Dilatational

$$v = \frac{P_1 Q_2 - P_2 Q_1}{P_2 Q_1 + 2P_1 Q_2} \quad (1-11-ب)$$

۱-۶- فرضیات متداول در مواد ویسکوالاستیک

از آنجا که جمع‌آوری اطلاعات وابسته به زمان برای خصوصیات مواد ویسکوالاستیک مشکل و زمان‌بر است، برای حل مسائل تحلیل تنش در این حوزه، اعمال فرض‌هایی بر روی خصوصیات ماده ضروری است. بنابراین اغلب برای ماده‌ی ویسکوالاستیک، یکی از خصوصیات مدول برش $G(t)$ یا مدول ینگ $E(t)$ تعریف می‌شود و مدول دیگر براساس یکی از فرضیات زیر تعیین می‌شود [۲].

- ۱- تراکم‌ناپذیری: برای تغییرشکل‌های کوچک در حوزه‌ی مسائل الاستیک خطی، در حالت تراکم‌ناپذیری، ضریب پواسون برابر با ۰.۵ یا مدول بالک بی‌نهایت است. تحت شرایط مشابه، برای یک ماده‌ی تراکم‌ناپذیر ویسکوالاستیک، ضریب پواسون برابر با ۰.۵ و مدول بالک بی‌نهایت می‌باشد. بنابراین با وجود این شرط، کرنش‌های اتساعی صفر می‌باشد (تغییر حجم قابل صرف‌نظر باشد).
- ۲- الاستیک در اتساع (بالک): در این حالت مدول بالک، مقدار ثابت k_0 را داشته و $K(t) = k_0 H(t)$ می‌باشد، که $H(t)$ تابع پله‌ای^۱ است. این فرض بر این اساس است که تغییرات مدول بالک نسبت به مدول برشی، با دما و زمان بسیار کم است. در این حالت ضریب پواسون، تابعی از زمان است. بنابراین، فرض رفتار الاستیک، برای ماده‌ی ویسکوالاستیک در اتساع، معمولاً فرض مناسبی است.
- ۳- هم‌زمانی^۲ مدول بالک و برشی: در این حالت فرض می‌شود که نسبت مدول بالک به برشی مقدار ثابتی باشد، به‌طوری که $K(t) = c_1 G(t)$ که c_1 مقداری ثابت است. بنابراین در این حالت وابستگی زمانی این دو یکسان بوده و فقط مقادیر آنها متفاوت می‌باشد. صحت این فرض به‌شدت وابسته به دماست. در این حالت ضریب پواسون مقداری ثابت است [۲].

¹ Heaviside Step Function

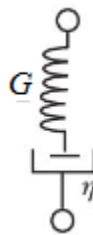
² Synchronous

۷-۱- مدل‌های رئولوژیک مواد ویسکوالاستیک

مدلسازی پاسخ به تحریک مکانیکی مواد ویسکوالاستیک، توسط مواد الاستیک و ویسکوز، از قبیل فنر و دمپر انجام می‌شود استفاده از این مدل‌های مکانیکی خطی، ساده‌ترین حالت جهت تفسیر رفتار ویسکوالاستیسیته مواد می‌باشد. فنر رفتار ناگهانی (الاستیک) پاسخ و دمپر حالت تطبیقی (اتلافی) سیستم را شبیه‌سازی می‌کند [۵].

۱-۷-۱- مدل ماکسول^۱ [۸]

مدل ماکسول شامل فنر و دمپر سری است (شکل (۲-۱)).



شکل (۲-۱) مدل ماکسول [۸].

رابطه کلی تنش و کرنش را برای این مدل، می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{G} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (12-1)$$

دو کمبود در مورد این مدل ساده وجود دارد. اول اینکه در شرایط تنش ثابت، یعنی:

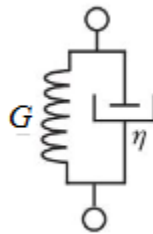
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (13-1)$$

¹ Maxwell Model

جریان نیوتنی مشهود است ($\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$) و این موضوع با توجه به رفتار پیچیده‌ی خزش برای ماده‌ی ویسکوالاستیک درست نیست. دوم اینکه رفتار رهایش تنش را نمی‌توان به‌طور معمول با یک جمله‌نمایی کاهشی بیان کرد، چون لزوماً تنش در زمان بی‌نهایت به صفر میل نمی‌کند [۵].

۱-۷-۲- مدل کلوین-ویت^۱ [۸]

این مدل شامل یک فنر موازی با دمپر است (شکل (۳-۱)) و به خوبی رفتار خزشی را توصیف می‌کند. رابطه‌ی کلی تنش-کرنش در این مدل به‌صورت زیر است.



شکل (۳-۱) مدل کلوین-ویت [۸]

با توجه به اینکه در کرنش ثابت دمپر عمل نمی‌کند، مدل کلوین نمی‌تواند رهایش تنش را تشریح کند.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \rightarrow \sigma = G\varepsilon \quad (۱۴-۱)$$

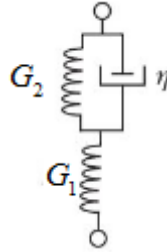
۱-۷-۳- جامد استاندارد خطی (مدل زنر)^۲ [۸]

مدل ماکسول، رفتار رهایش تنش و مدل کلوین نیز فقط رفتار خزشی یک جامد ویسکوالاستیک را توصیف می‌کند، اما هیچ کدام برای ارائه رفتار عمومی جامد ویسکوالاستیک مناسب نیست، زیرا لازم است که مدل، هر دو رفتار رهایش تنش و خزش را با هم توصیف کند. آن چه که به‌طور معمول جامد

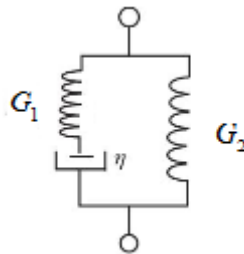
^۱ Kelvin-Voigt Model

^۲ Standard Solid (Zener) Model

استاندارد سه المانی نامیده می‌شود، ترکیبی از المان کلوین-ویت به صورت سری با فنر (شکل (۴-۱)) یا المان ماکسول موازی با فنر (شکل (۴-۱)) است.



شکل (۴-۱) اولین مدل جامد استاندارد خطی (۸).



شکل (۵-۱) دومین مدل جامد استاندارد خطی (۸).

معادله‌ی بنیادین برای اولین مدل، به صورت زیر است.

$$\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right)\sigma + \frac{\eta}{G_1 G_2} \dot{\sigma} = \varepsilon + \frac{\eta}{G_2} \dot{\varepsilon} \quad (15-1)$$

با استفاده از آزمایش رهایش تنش، مدول رهایش با معادله‌ی زیر تعیین می‌گردد.

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \left(G_2 + G_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (16-1)$$

که در رابطه‌ی اخیر $\tau = \frac{\eta}{G_2}$ است.

برای دومین مدل، معادله‌ی بنیادین به صورت زیر است.

$$\sigma \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{G_2} \right) = \varepsilon \frac{G_1}{\eta} + \dot{\varepsilon} \left(1 + \frac{G_1}{G_2} \right) \quad (17-1)$$

مدول رهایش نیز به صورت:

$$G(t) = G_1 + G_2 e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \quad (18-1)$$

دیگر مدل‌های ویسکوالاستیک در پیوست الف آورده شده است (۵، ۱۰، ۱۱).

۱-۸- اجزای سازه‌ای

از لحاظ هندسه و شرایط بارگذاری، سازه‌ها را می‌توان به شش گروه تقسیم‌بندی نمود: کابل‌ها^۱، میله‌ها^۲، تیرها، غشاها^۳، ورق‌ها^۴ و پوسته‌ها^۵. کابل‌ها سازه‌هایی یک بعدی هستند که تنها بار کششی را تحمل می‌کنند. رشته نوعی کابل است که در ابتدا مستقیم بوده و دارای پیش‌کشش می‌باشد. میله‌ها سازه‌هایی یک بعدی هستند که می‌توانند بارهای محوری و پیچشی را تحمل کنند. میله‌ها و ستون‌ها نوعی سازه‌ی دو نیرویی هستند و خرپا مجموعه‌ای از میله‌ها است. تیرها سازه‌هایی هستند که یکی از ابعاد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از دو بعد دیگر است و در معرض بارهای عرضی قرار دارند که منجر به خمش آن‌ها می‌شود. در حالت کلی تیر قادر به تحمل نیروهای کششی، فشاری، خمشی، برش عرضی و پیچشی است. به عبارت دیگر کابل‌ها، رشته‌ها، میله‌ها و ستون‌ها نوع خاصی از تیرها هستند [۱۲]. ورق‌ها سازه‌هایی مسطح هستند که دو بعد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از بعد سوم است و قادرند نیروهای کششی، فشاری، برش صفحه‌ای^۶، خمشی، پیچشی و بارهای برشی عرضی را تحمل کنند (۱۲، ۱۳). غشا سازه‌ای دو بعدی است که تنها می‌تواند نیروی کشش و برش صفحه‌ای را تحمل کند. غشا تنها می‌تواند نیروی کشش و برش صفحه‌ای را تحمل کند و قادر به تحمل خمش نمی‌باشد (۱۲، ۱۳، ۱۴). پوسته‌ها سازه‌هایی خمیده هستند که دو بعد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از بعد سوم است و قادرند نیروهای خارج صفحه^۷ را با ایجاد نیروهای صفحه‌ای، تحمل کنند (۱۲، ۱۴). پوسته‌ها عمومی‌ترین سازه‌های مهندسی هستند که ورق‌ها و غشاها نوع خاصی از آن‌ها

¹Cables

²Rods

³Membranes

⁴Plates

⁵Shells

⁶In-plane

⁷Out-of-plane

می‌باشند.

۹-۱- مروری بر تئوری‌های بررسی رفتار ورق‌ها

تئوری‌های ورق دوبعدی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

۱- تئوری ورق کلاسیک که در آن اثر تغییرشکل برشی عرضی صرف‌نظر شده است.

۲- تئوری‌های تغییرشکل برشی ورق.

در این پایان‌نامه از تئوری‌های کلاسیک (CPT) و تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول (FSDT) استفاده شده است. جزییات بیش‌تر در مورد این تئوری‌ها در پیوست ب توضیح داده شده است.

۱۰-۱- مرور مقالات

چو و هرمان^۱ [۱۶]، ارتعاشات آزاد غیرخطی با دامنه‌ی زیاد ورق‌های الاستیک با تئوری فون کارمن را با استفاده از تئوری اغتشاشات حل کردند. لیزا^۲ [۱۷] ارتعاشات آزاد ورق مدور توپر را بر اساس تئوری کلاسیک و به روش تحلیلی ارائه کرد. کایر و وینر^۳ [۱۸] ارتعاشات اجباری ورق مدور ویسکوالاستیک ویسکوالاستیک گیردار را با استفاده از تئوری کلاسیک و مدل کلونین را حل کردند. روبرتسون^۴ [۱۹] ارتعاش اجباری ورق مدور ویسکوالاستیک با به‌کارگیری روش ویلیامز (الگوریتم فاکتورگیری عددی) و با در نظر گرفتن چرخش‌ها و اثر برش را بررسی کرد. سریده‌ها^۵ و همکاران [۲۰] رزنانس‌های غیرخطی ورق‌های مدور را با روش مقیاس چندگانه حل کردند. آلوار^۶ و ناس [۲۱] پاسخ دینامیکی غیرخطی ورق‌های دایروی تحت بارهای گذرا را بررسی نمودند. چند جمله‌ای‌های چپیشف برای حرکت‌های با دامنه‌ی زیاد تحت بارهای گذرا با در نظر گرفتن میرایی و نامیرایی به‌کار گرفته شد.

¹ Chu and Herrman

² Leissa

³ Weiner

⁴ Robertson

⁵ Sridhar

⁶ Alwar

همچنین معادلات غیرخطی به‌وسیله‌ی بسط تیلور خطی شد. ناگایا^۱ [۲۲] ارتعاشات ورق ویسکوالاستیک با مرزهای داخلی دایره‌ای خارج از مرکز با شرایط مرزی مختلف را با روش عددی مطالعه کرد. بسکس^۲ و لئونگ [۲۳] پاسخ دینامیکی ورق‌های مستطیلی نازک و بزرگ را با ترکیب روش تفاضل محدود و المان محدود و تبدیل لاپلاس نسبت به زمان را به‌دست آوردند. بیلی^۳ و چن [۲۴] مدهای طبیعی ورق مدور ویسکوالاستیک خطی با لبه‌های آزاد با گسترش تئوری خمش کلاسیک ورق‌های نازک و در نظر گرفتن اثر اتلاف مکانیکی و چرخش بدون در نظر گرفتن اثر برش را به‌دست آوردند. وانگ^۴ و تی سای [۲۵] تحلیل دینامیکی و نیمه استاتیکی ورق‌های ویسکوالاستیک میندلین، با در نظر گرفتن مدل ماکسول و استاندارد جامد خطی مسائل مختلفی را بررسی کردند. روش حل آن‌ها ترکیبی از روش‌های المان محدود و نیومارک بود. خیدر^۵ و ردی [۲۶] حل دقیق پاسخ گذرای چند لایه‌ی متقارن متعامد با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالا را ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از روش تعامد مدها و تکنیک متغیرهای حالت، به‌بررسی پاسخ دینامیکی چند لایه‌ی متقارن متعامد پرداختند. جواب‌های دقیق حل آن‌ها برای ورق‌های مستطیلی با تکیه‌گاه ساده با بارهای مختلف با حل‌های ریزنز-میندلین و کلاسیک مقایسه شد. وینسل^۶ [۲۷] با مرور کلی، کارهای انجام شده برای ورق توپر و حلقوی الاستیک را براساس تئوری برشی و کلاسیک ارائه کرد، وی اثر شرایط مرزی، خواص مکانیکی و ابعاد هندسی ورق بر فرکانس طبیعی را بررسی نمود. پاسخ دینامیکی ورق‌های چندلایه تحت بار ضربه‌ای توسط سدرباوم و آبودی بررسی شد [۲۸]. آن‌ها با استفاده از مدل ویسکوالاستیک بولتزمن و با استفاده از روش تحلیلی تبدیل فوریه در محدوده‌ی فرکانسی تحلیل را انجام دادند؛ تئوری ورق مورد استفاده‌ی آن‌ها تئوری برشی مرتبه‌ی اول بود. هادیان^۷ و نایفه [۲۹] با استفاده از معادلات فون کارمن در مختصات قطبی و استفاده از روش مقیاس-

¹ Nagaya

² Beskos

³ Baily

⁴ Wang

⁵ Khdeir

⁶ Weintsel

⁷ Hadian

مقیاس‌های چندگانه برای به‌دست آوردن معادلات حرکت، پاسخ مدهای متقارن ورق‌های مدور را با در نظر گرفتن اثرهای میرایی با معرفی جمله‌ی اتلاف بدون این‌که از نتیجه‌ی روابط بنیادین تنش- کرنش مواد ویسکوالاستیک استفاده کنند، بررسی کردند. چن [۳۰] با استفاده از روش عددی المان- محدود، پاسخ‌های نیمه استاتیکی و دینامیکی تیر ویسکوالاستیک خطی را با استفاده از تبدیل لاپلاس چندگانه ارائه کرد. سدرباوم^۱ و دراوشی [۳۱] معادلات مختلفی را در بررسی ورق‌های مدور ویسکوالاستیک غیر خطی با هندسه‌ی غیر خطی ارائه نمودند. لیو^۲ اتال [۳۲] مرور کلی ارتعاشات آزاد ورق مدور الاستیک با استفاده از تئوری کلاسیک و تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول را مطالعه نمود. رومانلی^۳ و همکاران [۳۳] ارتعاشات عرضی ورق حلقوی الاستیک با شرایط مرزی میانی میانی (تکیه‌گاه‌های میانی در ورق) و لبه‌ی خارجی آزاد را بررسی نمودند. آن‌ها با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها و استفاده از روش (DQM) فرکانس‌های بنیادی ورق را به‌دست آوردند. اسماعیل‌زاده^۴ زاده^۴ و جلالی [۳۴] ارتعاشات غیر خطی ورق‌های ویسکوالاستیک با شرط مرزی ساده و با در نظر گرفتن مدل کلونین و تئوری کلاسیک را مطالعه کردند. آن‌ها معادله‌ی به‌دست آمده با اصل همپلتون را که شامل اثر میرایی بر حسب تغییرشکل عرضی و تابع تنش بود به کمک روش بوبنوف-گلرکین حل نمودند. وانگ و چن^۵ [۳۵] ارتعاشات و تحلیل میرایی ورق کامپوزیتی سه لایه‌ی حلقوی با لایه‌ی میانی ویسکوالاستیک را با روش المان محدود حل کردند. صالحی^۶ و آقایی [۳۶] رهایش دینامیکی دینامیکی با تغییرشکل‌های بزرگ ورق‌های مدور ویسکوالاستیک نامتقارن با در نظر گرفتن برش عرضی و تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی سوم و با فرض مدل جامد استاندارد خطی را ارائه کردند، معادلات غیر خطی به‌دست آمده با ترکیب روش DR^۷ و تفاضل محدود حل شدند. فریرا^۸ و فسشار

¹ Cederbaum

² Leiw

³ Romanelli

⁴ Esmailzadeh

⁵ Chen

⁶ Salehi

⁷ Dynamic relaxation

⁸ Ferreira

[۳۷] ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکو و ورق‌های میندلین را بررسی کردند. معادلات حرکت و شرایط مرزی تیرهای تیموشنکو و ورق‌های میندلین برای هندسه‌های مستطیلی و غیر مستطیلی ارائه شده است. برای این منظور از توابع شکل جدیدی به همراه روش شبه طیفی استفاده شده است. آبدون^۱ ات آل [۳۸] پاسخ اجباری سازه‌های ویسکوالاستیک را با روش عددی بررسی نمود. روش المان محدود برای جدا کردن مکان و خواص ویسکوالاستیک خطی با یک ماتریس ره‌ایش پیچیده که تابعی از نوسان بار بود به کار گرفته شد. آسیه و الطاهر [۳۹ و ۴۰] محاسبه‌ی مدل المان محدود با قابلیت شبیه سازی پاسخ ضربه‌ی بدنه‌های ویسکوالاستیک را نشان دادند. روش حساب تغییرات برای نوشتن معادلات حرکت و معادلات بنیادی که به فرم انتگرالی بیان شده بودند؛ به کار گرفته شد. همچنین مدل ویچرت برای شبیه سازی میرایی رفتار ویسکوالاستیک ماده به کار گرفته شد. گوپتا^۲ [۴۱] تحلیل ارتعاشی ورق مستطیلی ویسکوالاستیک با ضخامت متغیر خطی در یک جهت و تغییر شکل پارابولیک در جهت دیگر را با در نظر گرفتن مدل کلونین را ارائه کرد. روش ریلی-ریتز برای به دست آوردن فرکانس‌ها مورد استفاده قرار گرفت. آسیه^۳ و الطاهر در [۴۲] رفتار ورق‌های ویسکوالاستیک کامپوزیتی و ویسکوالاستیک ایزوتروپ را تحت بار گذرا بررسی نمودند. آن‌ها پاسخ را با استفاده از مدل ویچرت و تئوری میندلین، با روش المان محدود تعیین کردند. خلفی^۴ [۴۳] برای به دست آوردن پاسخ گذرای ورق لایه‌ای ویسکوالاستیک، هسته‌ی ویسکوالاستیک را به صورت سری پرونی مدل کرد. او معادله‌ی حرکت را از معادلات لاگرانژ به دست آورد؛ همچنین معادله‌ی حرکت را با استفاده از تبدیل فوریه حل کرد. شریعت^۵ و همکاران [۴۴] ارتعاشات آزاد ورق مدور ویسکوالاستیک ضخامت متغیر از ماده‌ی ناهمگن^۶ با بستر الاستیک در لبه‌ی ورق را بررسی کردند. در این تحقیق فرض شد خواص ویسکوالاستیک ورق در جهت ضخامت و شعاع متغیر است، معادلات به دست آمده

¹ Abdoun

² Gupta

³ Assie

⁴ Khalfi

⁵ Shariat

⁶ Heterogeneous

به وسیله‌ی سری‌های توانی حل شده است. جلالی^۱ و اسماعیل‌زاده خادم [۴۵] ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی یک میکروورق مربعی تحت بار الکترواستاتیکی با تکیه‌گاه‌های ساده‌ی ویسکوالاستیک کامپوزیتی تقویت شده با نانو تیوب کربن را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش اشلیبی-موری-تاناکا برای استخراج خواص مکانیکی مواد استفاده کردند. حرکت غیرخطی میکروورق با استفاده از روش نیوتن و تئوری فون-کارمن استخراج شده و با به‌کارگیری ترکیبی از روش گلرکین و تئوری مقیاس‌های چندگانه معادله‌ها حل شده‌اند.

۱-۱۱- جمع بندی

در این فصل به معرفی مواد ویسکوالاستیک، توصیف رفتار ویسکوالاستیک خطی، بیان معادلات بنیادین تنش-کرنش در شکل دیفرانسیلی، معرفی مدل‌های رئولوژیکی مواد ویسکوالاستیک، به معرفی تئوری‌های متداول در بر بررسی ورق‌ها در پیوست ب پرداخته می‌شود. و همچنین به مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه پرداخته شد. مرور مقالات انجام شده نشان می‌دهد که تاکنون روش تحلیلی برای تعیین فرکانس و شکل مد یک ورق مدور با تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول ارائه نشده است و بیش‌تر تحلیل‌ها با روش عددی و تئوری کلاسیک انجام شده است.

^۱ Jalali

فصل دوم استخراج معادلات

۲-۱- مقدمه

در این فصل به استخراج معادلات حرکت ورق الاستیک با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های کوچک با استفاده از اصل همیلتون پرداخته خواهد شد. سپس با در نظر گرفتن رفتار ماده ویسکوالاستیک در برش و الاستیک در اتساع، معادلات به‌دست آمده برای ماده‌ی ویسکوالاستیک تعمیم داده می‌شود. معادلات به‌دست آمده بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول خواهد بود و دارای فرضیات زیر است.

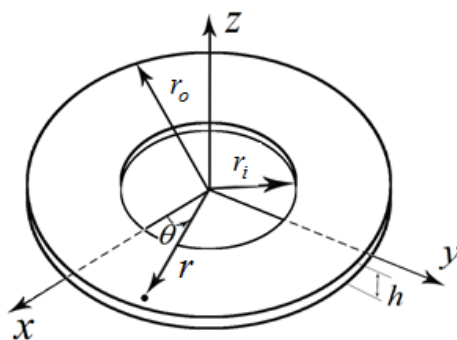
• ورق همگن و همسانگرد است.

• سازه متقارن محوری است.

• خیز و کرنش کوچک است.

۲-۲- تعریف مسأله

مطابق شکل (۱-۲) ورق حلقوی با شعاع داخلی r_i ، شعاع خارجی r_o ، ضخامت h چگالی ρ مفروض است. ورق تحت فشار شعاعی P_r در لبه‌ی خارجی و بار عرضی دینامیکی بر واحد سطح $Q(r,t)$ قرار دارد. فرمول‌بندی مسأله بر اساس دستگاه مختصات قطبی (r,θ,z) بوده که در آن r جهت شعاع، θ زاویه‌ی چرخش حول محور z ، و جهت z نیز در راستای عمود بر سطح ورق و از سطح میانی می‌باشد.



شکل (۱-۲) هندسه و دستگاه مختصات ورق حلقوی.

بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول، میدان جابه‌جایی به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$U_r(r, z, t) = u_0(r, t) + z u_1(r, t); U_z(r, z, t) = w_0(r, t) + z w_1(r, t); U_\theta(r, z, t) = 0 \quad (1-2)$$

که در آن U_r ، U_θ و U_z سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی به‌ترتیب در راستای r ، θ و z می‌باشند. u_0 و w_0 دارای بعد طول بوده و بیانگر جابه‌جایی صفحه‌ی میانی بوده و مجهول هستند و باید تعیین شوند. u_1 و w_1 تابعی بی‌بعد بوده و نیز همانند u_0 و w_0 مجهول می‌باشند. با در نظر گرفتن حرکت به‌صورت متقارن محوری، مؤلفه‌ی جابه‌جایی در جهت θ صفر خواهد بود. رابطه‌ی کرنش-جابه‌جایی به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial U_r}{\partial r} = \frac{\partial u_0}{\partial r} + z \frac{\partial u_1}{\partial r}; \varepsilon_\theta = \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} = \frac{u_0 + z u_1}{r}; \gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} = 0; \gamma_{rz} = \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial r} + u_1 + z \frac{\partial w_1}{\partial r}; \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = w_1 \end{aligned} \quad (2-2)$$

بر اساس میدان کرنش فوق، روابط تنش-کرنش به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (K - \frac{2G}{3})(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G \varepsilon_r; \sigma_\theta = (K - \frac{2G}{3})(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G \varepsilon_\theta \\ \sigma_z &= (K - \frac{2G}{3})(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) + 2G \varepsilon_z; \tau_{rz} = G \gamma_{rz}; \tau_{\theta z} = 0; \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (3-2)$$

که در این روابط K مدول بالک و G مدول برشی می‌باشد.

۲-۳- محاسبه‌ی انرژی کرنشی ورق

چگالی انرژی کرنشی به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۴۶].

$$U^* = \sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \tau_{rz} \gamma_{rz} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z} \quad (4-2)$$

تغییرات^۱ چگالی انرژی کرنشی با جایگذاری مقادیر صفر برخی از مؤلفه‌های تنش، عبارت است از:

$$\delta U^* = \sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{rz} \delta \gamma_{rz} \quad (5-2)$$

با جایگذاری مؤلفه‌های میدان کرنش (۲-۲) در (۵-۲) نتیجه می‌شود.

^۱ Variation

$$\delta U^* = \sigma_r \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + z \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + \sigma_\theta \delta \left(\frac{u_0 + z u_1}{r} \right) + \sigma_z \delta w_1 + \tau_{rz} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} + u_1 + z \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \quad (6-2)$$

انرژی کرنشی ورق با انتگرال گیری چگالی انرژی کرنشی بر روی حجم ورق به دست می آید. المان حجم به صورت $dV = r dr d\theta dz$ بوده و در آن محدوده تغییرات مؤلفه های محورها مختصات به صورت $-h/2 \leq z \leq h/2$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، $r_i \leq r \leq r_o$ است.

$$\delta U = 2\pi \int \left(r N_r \delta \frac{\partial u_0}{\partial r} + r M_r \delta \frac{\partial u_1}{\partial r} + N_\theta \delta u_0 + M_\theta \delta u_1 + r Q_r \delta \frac{\partial w_0}{\partial r} + r M_{rz} \delta \frac{\partial w_1}{\partial r} + r Q_r \delta u_1 + r N_z \delta w_1 \right) dr \quad (7-2)$$

که در رابطه ی اخیر N_r ، N_θ ، N_z ، M_r ، M_θ ، M_{rz} ، Q_r ، M_r ، M_θ ، N_z ، N_θ ، N_r متجه های تنش است که به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} (N_r, N_\theta, N_z) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z) dz; \\ (M_r, M_\theta) &= \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_r, \sigma_\theta) dz; \quad (Q_r, M_{rz}) = K_s \int_{-h/2}^{h/2} (1, z) \tau_{rz} dz \end{aligned} \quad (8-2)$$

K_s ضریب تصحیح برشی است [۱۵].

۲-۴- محاسبه ی انرژی جنبشی ورق

چگالی انرژی جنبشی T^* به صورت زیر است.

$$T^* = \frac{1}{2} \rho \left(\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (9-2)$$

با جایگذاری میدان جابه جایی (۲-۱) در رابطه ی (۲-۹) و انتگرال گیری از آن بر روی حجم ورق، انرژی جنبشی T به صورت زیر به دست می آید.

$$T = \frac{1}{2} \rho \int \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 h + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 h + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 \frac{h^3}{12} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 \frac{h^3}{12} \right) 2\pi r dr \quad (10-2)$$

۲-۵- کار نیروهای خارجی

کار حاصل از نیروهای خارجی شامل دو قسمت، قسمت مربوط به بار شعاعی و قسمت دیگر مربوط به تحریک دینامیکی عرضی است. بار شعاعی P_r به صورت افقی به لبه‌ی خارجی ورق $r=r_0$ وارد می‌شود. کار انجام شده توسط بار شعاعی به صورت زیر است [۴۷].

$$W_p = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \left(P_r \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} \right)^2 + P_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} \right)^2 \right) r \, d\theta dz dr \quad (۱۱-۲)$$

P_θ فشار محیطی است که مقدار آن صفر است. کار ناشی از تحریک عرضی Q که بر روی سطح ورق یعنی $z = \frac{h}{2}$ اعمال می‌شود به صورت زیر است.

$$W_Q = \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} r Q(r, t) U_z(r, z, t) \, dr d\theta \quad (۱۲-۲)$$

۲-۶- تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون

با استفاده از اصل همیلتون در بازه‌ی زمانی (t_1, t_2) نتیجه می‌شود.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0; \quad L = T - V + W_{nc}; \quad W_{nc} = W_p + W_Q \quad (۱۳-۲)$$

با به‌کارگیری روابط (۷-۲) تا (۱۳-۲) معادلات حرکت بر حسب منته‌های تنش ورق الاستیک به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r N_r) - N_\theta - \rho r h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (r M_r) - M_\theta - r Q_r - \frac{\rho r h^3}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (r Q_r) - P_r \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - P_r r \frac{\partial w_0}{\partial r} - \rho r h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - r Q(r, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (r M_{rz}) - r N_z - \frac{\rho r h^3}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \frac{1}{2} r Q(r, t) h &= 0 \end{aligned} \quad (۱۴-۲)$$

با جایگذاری منته‌های تنش (۸-۲) در (۱۴-۲) معادلات حرکت بر حسب جابه‌جایی به صورت زیر است.

$$(K + \frac{4}{3}G) \left(r \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{u_0}{r} \right) + (K - \frac{2}{3}G)r \frac{\partial w_1}{\partial r} - \rho r \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \quad (الف-۱۵-۲)$$

$$(K + \frac{4}{3}G) \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2} \right) - K_s G (u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial r}) - \frac{\rho h^2}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \quad (ب-۱۵-۲)$$

$$(K_s Gh - P_r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial r} \right) + K_s Gh \left(\frac{u_1}{r} + \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - rQ(r, t) = 0 \quad (ج-۱۵-۲)$$

$$K_s G \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \right) - (K - \frac{2}{3}G) \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r} \right) - (K + \frac{4}{3}G)w_1 - \frac{\rho h^2}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \frac{1}{2}Q(r, t) = 0 \quad (د-۱۵-۲)$$

۷-۲- تعمیم معادلات الاستیک استخراج شده به ورق ویسکوالاستیک

همان‌گونه که در فصل اول بیان شد، مرسوم است جهت توصیف رفتار ماده‌ی ویسکوالاستیک یک سیستم، اثر مؤلفه‌ی برشی را از مؤلفه‌ی تغییر حجم خالص جدا کنند. زیرا بخش‌های برشی و حجمی تنش، رفتارهای رهایش متفاوتی را دنبال می‌کنند. در این پایان‌نامه رفتار ماده در بالک (اتساع)، الاستیک و در برش، ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود.

۷-۲-۱- اعمال مدل ویسکوالاستیک مدل جامد استاندارد خطی نوع اول

برای مدل‌سازی ویسکوالاستیک از مدل جامد استاندارد خطی نوع اول استفاده شده است. (شکل ۱-۴) و رابطه‌ی تنش و کرنش آن مطابق رابطه‌ی (۱۵-۱) است. در این حالت اپراتورهای P_1 و Q_1 در رابطه‌ی (۷-۱) (رابطه‌ی بین P_1, Q_1, P_2, Q_2, G و K) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$P_1 = \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) + \frac{\tau}{G_1} D; \quad Q_1 = 2(1 + \tau D) \quad (۱۶-۲)$$

که $\tau = \frac{\eta}{G_2}$ زمان رهایش و D اپراتور مشتق زمانی $(D = \frac{\partial}{\partial t})$ می‌باشند. اپراتورهای P_2 و Q_2 نیز به-

صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$P_2 = 1 \quad (17-2)$$

$$Q_2 = 3K_0$$

بنابراین رابطه‌ی K و G و اپراتورها به صورت زیر است.

$$G = \frac{1}{2} \frac{Q_1}{P_1} = \frac{(1 + \tau D)}{\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right) + \frac{\tau}{G_1} D} \quad (18-2)$$

$$K = \frac{1}{3} \frac{Q_2}{P_2} = K_0$$

متغیرهای G_0^* و G_1^* را به صورت زیر می‌توان تعریف کرد.

$$G_0^* = K \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right); \quad G_1^* = \frac{K}{G_1} \quad (19-2)$$

با اعمال اپراتورهای (17-2) و (18-2) به معادلات (15-2) معادلات حرکت ورق ویسکوالاستیک به-

دست می‌آید.

$$\begin{aligned} eq1: & -r^2 h \rho G_0^* \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + K h r G_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{4}{3} K h r \frac{\partial u_0}{\partial r} - K h G_0^* u_0 - \frac{4}{3} K h u_0 + r^2 h K G_0^* \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \\ & + \frac{4}{3} r^2 h K \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + r^2 h K G_0^* \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{2}{3} r^2 h K \frac{\partial w_1}{\partial r} - r^2 h \rho \tau G_1^* \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^3} + K h r \tau G_1^* \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial t} \\ & + \frac{4}{3} K h r \tau \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial t} - K h \tau G_1^* \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{4}{3} K h \tau \frac{\partial u_0}{\partial t} + r^2 h K \tau G_1^* \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^2 \partial t} + \frac{4}{3} r^2 h K \tau \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^2 \partial t} \\ & + r^2 h K \tau G_1^* \frac{\partial^2 w_1}{\partial r \partial t} - \frac{2}{3} r^2 h K \tau \frac{\partial^2 w_1}{\partial r \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (20-2)$$

$$\begin{aligned} eq2: & -r^2 \rho G_0^* h^3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - K h^3 G_0^* u_1 + \frac{4}{3} h^3 r K \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{4}{3} h^3 K u_1 + h^3 K r G_0^* \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{4}{3} h^3 r^2 K \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} \\ & + h^3 r^2 K G_0^* \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} - 12 r^2 h K_s K \frac{\partial w_0}{\partial r} - 12 r^2 h K_s K u_1 - r^2 \rho h^3 \tau G_1^* \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} - h^3 \tau G_1^* K \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ & + \frac{4}{3} h^3 \tau r K \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial t} - \frac{4}{3} h^3 K \tau \frac{\partial u_1}{\partial t} + K h^3 r \tau G_1^* \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial t} + \frac{4}{3} h^3 r^2 K \tau \frac{\partial^3 u_1}{\partial r^2 \partial t} + h^3 r^2 K \tau G_1^* \frac{\partial^3 u_1}{\partial r^2 \partial t} \\ & - 12 h r^2 K_s K \tau \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial t} - 12 h r^2 K K_s \tau \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (21-2)$$

$$\begin{aligned}
eq3: & \rho rh G_0^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + P_r h G_0^* \frac{\partial w_0}{\partial r} - K_s K h \frac{\partial w_0}{\partial r} - K_s K_0 h u_1 - r K_s K_0 h \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - r K_s K_0 h \frac{\partial u_1}{\partial r} \\
& + r Q G_0^* + P_r r h G_0^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - K_s K \tau h \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial t} - K_s K \tau h \frac{\partial u_1}{\partial t} - r K_s K \tau h \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^2 \partial t} - r K_s K_0 h \tau \frac{\partial^2 u_1}{\partial r \partial t} \\
& + r \tau G_1^* \frac{\partial Q}{\partial t} + P_r r h \tau G_1^* \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^2 \partial t} + \rho r h \tau G_1^* \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^3} + P_r h \tau G_1^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial t} = 0
\end{aligned} \tag{۲۲-۲}$$

$$\begin{aligned}
eq4: & \frac{1}{12} \rho r h^3 G_0^* \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \frac{1}{12} K_s K h^3 \frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{1}{12} r K K_s h^3 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + K h r G_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{2}{3} K h r \frac{\partial u_0}{\partial r} \\
& + K h G_0^* u_0 + K h r G_0^* w_1 + \frac{4}{3} K r h w_1 - \frac{2}{3} K h u_0 + \frac{1}{2} r h G_0^* Q + \frac{1}{12} \rho r h^3 \tau G_1^* \frac{\partial^3 w_1}{\partial t^3} \\
& - \frac{1}{12} K_s K h^3 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r \partial t} - \frac{1}{12} r K_s K h^3 \tau \frac{\partial^3 w_1}{\partial r^2 \partial t} + K h r \tau G_1^* \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial t} - \frac{2}{3} K h \tau r \frac{\partial^2 u_0}{\partial r \partial t} + K h \tau G_1^* \frac{\partial u_0}{\partial t} \\
& + K r h \tau G_1^* \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{4}{3} K r h \tau \frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{2}{3} K h \tau \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \tau G_1^* h \frac{\partial Q}{\partial t} = 0
\end{aligned} \tag{۲۳-۲}$$

معادلات حاضر، شامل دو دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی و ضرایب متغیر هستند که معادلات (۲۰-۲) و (۲۳-۲) به یکدیگر و معادلات (۲۱-۲) و (۲۲-۲) به یکدیگر کوپل می‌باشند. شرایط مرزی به دست آمده با استفاده از اصل همیلتون بر حسب منته‌های تنش برای ورق به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
r N_r \delta u_0 \Big|_{r_i}^{r_o} = 0, r M_r \delta u_1 \Big|_{r_i}^{r_o} = 0, r \left(Q_r - P_r \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \delta w_0 \Big|_{r_i}^{r_o} = 0 \\
r \left(M_{rz} - P_r \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \delta w_1 \Big|_{r_i}^{r_o} = 0
\end{aligned} \tag{۲۴-۲}$$

از رابطه‌ی (۲۴-۲) شرایط مرزی مختلف را می‌توان استخراج نمود.

برای شرط مرزی لبه‌ی گیردار:

$$at \ r = r_i \text{ and } r = r_o; \ w_0 = 0, \ u_1 = 0 \tag{۲۵-۲}$$

برای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده:

$$at \ r = r_i \text{ and } r = r_o; \ r M_r = 0, \ w_0 = 0 \tag{۲۶-۲}$$

شرط مرزی در مرکز ورق (ورق توپر):

$$at \ r = 0; \ r M_r = 0; \ r Q_r = 0 \tag{۲۷-۲}$$

۸-۲- معادله‌ی ورق براساس تئوری کلاسیک در حالت ویسکوالاستیک

معادله‌ی ورق مدور الاستیک بر اساس تئوری کلاسیک به صورت زیر است [۱۳].

$$\rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + D \nabla^4 w_0 = \frac{1}{r} \left(P_r \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + P_r r \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + Q(r, t) \quad (28-2)$$

که در رابطه‌ی اخیر $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ و ∇ اپراتور لاپلاسین می‌باشد که در مختصات قطبی به صورت

زیر است.

$$\nabla^4(\bullet) = \nabla^2 \nabla^2(\bullet); \quad \nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\bullet)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial \theta^2} \quad (29-2)$$

با جایگذاری روابط (۱۰-۱) در معادله‌ی (۲۸-۲) و به کارگیری روابط (۲-۱۶) تا (۲-۱۹) معادلات ویسکوالاستیک برای تئوری کلاسیک به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} & -(\rho h G_0^{*2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{4}{3} \rho h G_0^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}) + (P_r h G_0^{*2} + \frac{4}{3} P_r h G_0^*) \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - (\frac{1}{3} K h^3 G_0^* - \frac{1}{9} K h^3) \nabla^4 w_0 \\ & + (2h P_r G_0^* G_1^* \tau + \frac{4}{3} P_r h \tau G_0^*) \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^2 \partial t} - \frac{4}{3} \rho h \tau G_0^* \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^3} - (\frac{1}{3} K h^3 \tau (G_0^* + G_1^*) + \frac{2}{9} K h^3 \tau) \\ & \times \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^4 w_0) - (2 \rho h \tau G_0^* G_1^* + \frac{4}{3} \rho h \tau G_1^*) \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^3} + \frac{4}{3} P_r h \tau G_1^* \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^2 \partial t} - \rho h G_1^{*2} \tau^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4} \\ & - (\frac{1}{9} K h^3 \tau^2 + \frac{1}{3} K h^3 \tau^2 G_1^*) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^4 w_0) - \frac{4}{3} \rho h \tau^2 G_1^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4} + \frac{4}{3} P_r h \tau^2 G_1^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial r^2 \partial t^2} \\ & + G_0^{*2} Q + \frac{4}{3} G_0^* Q + (\frac{4}{3} (G_1^* + G_1^*) \tau + 2 G_0^* G_1^* \tau) \frac{\partial Q}{\partial t} + \tau^2 (\frac{4}{3} G_1^* + G_1^{*2}) \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (30-2)$$

۹-۲- جمع بندی

در این فصل، ابتدا معادلات ورق مدور الاستیک براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های کوچک استخراج شد. سپس با اعمال اپراتورهای ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن مدل جامد استاندارد خطی نوع اول، معادلات ورق مدور ویسکوالاستیک به دست می‌آید. معادلات حاضر شامل دو دستگاه معادله دیفرانسیل ضریب متغیر با مشتقات جزئی نسبت به زمان و مکان هستند که دو به دو به یکدیگر کوپل می‌باشند.

فصل سوم
حل تالیلی

۳-۱- مقدمه

در فصل قبل، معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق مدور بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول، استخراج شد. معادلات به صورت یک دستگاه معادله دیفرانسیل، شامل چهار معادله دیفرانسیل ضریب متغیر با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان بوده که به یکدیگر کوپل هستند. برای حل این معادلات، از تئوری اغتشاشات استفاده می‌شود. برای این منظور، ابتدا معادلات بی‌بعد می‌شود. پس از بی‌بعدسازی، فرکانس‌های طبیعی سیستم تعیین شده و سپس پاسخ دینامیکی ورق به دست می‌آید.

۳-۲- بی‌بعد سازی معادلات

پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$r^* = \frac{r}{r_0}; \quad h^* = \frac{h}{h_0}; \quad t^* = \frac{t}{t_0}; \quad u_0^* = \frac{u_0}{h_0}; \quad u_1^* = u_1; \quad w_0^* = \frac{w_0}{h_0}; \quad w_1^* = w_1 \quad (1-3)$$

پارامترهای r^* و t^* به ترتیب شعاع و زمان بی‌بعد هستند، u_0^* و w_0^* جابه‌جایی‌های بی‌بعد مولفه‌ی u_0 و w_0 بوده و مولفه‌های جابه‌جایی u_1 و w_1 نیز بی‌بعد هستند. h_0 و t_0 به ترتیب شاخص‌های ضخامت و زمان هستند که مقادیر آن‌ها به صورت $h = h_0$ و $t_0 = \frac{r_0}{c}$ در نظر گرفته شده است. c کمیتی با

دیمانسیون سرعت است و به صورت $c = \sqrt{\frac{K_0}{\rho}}$ تعریف شده است.

با اعمال پارامترهای بی‌بعد فوق در معادله‌های (۲-۲۰) تا (۲-۲۳) پارامترهای بی‌بعد زیر نیز قابل تعریف است.

$$e = \frac{\rho h_0^2}{K_0 t_0^2}, \quad \beta = \frac{\tau}{t_0}, \quad P_r^* = \frac{P_r}{K_0}, \quad Q^* = \frac{Q}{K_0}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{r_0} \quad (2-3)$$

ε پارامتری کوچک است و به عنوان پارامتر اغتشاش در نظر گرفته می‌شود. با تعریف روابط (۱-۳) و

(۲-۳) در معادلات (۲-۲۰) تا (۲-۲۳) معادله‌های بی‌بعد شده شامل چهار معادله‌ی دیفرانسیل با

مشتقات جزئی با ضرایب متغیر کوپل به هم و مطابق زیر هستند.

$$eq_1: \left(r^* \frac{\partial}{\partial r^*} g_0[u_0^*] + r^{*2} \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} g_0[u_0^*] - g_0[u_0^*] \right) \varepsilon^2 + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r^*} g_1[w_1^*] \varepsilon - r^{*2} e g_{12}[u_0^*] = 0 \quad (3-3)$$

$$eq_2: \left(h^{*2} r^* \frac{\partial}{\partial r^*} g_0[u_1^*] + r^{*2} \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} g_0[u_1^*] - g_0[u_1^*] \right) \varepsilon^2 - 12r^{*2} K_s \frac{\partial}{\partial r^*} g_7[w_0^*] \varepsilon - 12r^{*2} K_s g_7[u_1^*] - r^{*2} h^{*2} e g_{12}[u_1^*] = 0 \quad (4-3)$$

$$eq_3: \left(-r^* K_s h^* \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} g_7[w_0^*] - K_s h^* \frac{\partial}{\partial r^*} g_7[w_0^*] + P_r^* h^* \frac{\partial}{\partial r^*} g_9[w_0^*] + P_r^* h^* \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} g_9[w_0^*] \right) \varepsilon^2 - K_s h^* \left(g_7[u_1^*] + r^* \frac{\partial}{\partial r^*} g_7[u_1^*] \right) \varepsilon + r^* e h^* g_{12}[w_0^*] + r^* g_9[Q^*] = 0 \quad (5-3)$$

$$eq_4: \left(-K_s h^{*2} \frac{\partial}{\partial r^*} g_7[w_1^*] + h^{*2} P_r^* \frac{\partial}{\partial r^*} g_9[w_1^*] - r^* K_s h^{*2} \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} g_7[w_1^*] + r^* h^{*2} P_r^* \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} g_9[w_1^*] \right) \varepsilon^2 + \left(12g_9[u_0^*] - 8g_7[u_0^*] + 12r^* \frac{\partial}{\partial r^*} g_9[u_0^*] - 8r^* \frac{\partial}{\partial r^*} g_7[u_0^*] \right) \varepsilon + 12r^* g_9[w_1^*] + 16r^* g_7[w_1^*] + r^* e h^{*2} g_{12}[w_1^*] + 6r^* g_9[Q^*] = 0 \quad (6-3)$$

که در این روابط:

$$g_0[\bullet] = a_0(\bullet) + \beta a_1 \frac{\partial}{\partial t^*}(\bullet); \quad g_1[\bullet] = b_0(\bullet) + \beta b_1 \frac{\partial}{\partial t^*}(\bullet); \quad g_7[\bullet] = (\bullet) + \beta \frac{\partial}{\partial t^*}(\bullet); \quad (7-3)$$

$$g_9[\bullet] = (G_0^* + \beta G_1^* \frac{\partial}{\partial t^*})(\bullet); \quad g_{12}[\bullet] = (G_0^* \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + \beta G_1^* \frac{\partial^3}{\partial t^{*3}})$$

که در معادلات حاضر G_0^* و G_1^* در فصل قبل تعریف شده‌اند. بار فشاری عمودی Q^* بر روی سطح

ورق اعمال می‌شود. با روش مشابه معادله‌ی بی‌بعد شده برای ورق براساس تئوری کلاسیک به صورت

زیر است.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^3}{\partial X^3} (s_2 + s_3 + 3s_4) X^3 + 12(s_1 + s_5 + s_6 - p_1 - p_2 - p_3) X^3 + (s_2 + s_3 + 3s_4) \right. \\
& \left. + 2X^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} (s_2 + s_3 + 3s_4) - X \frac{\partial}{\partial X} (s_2 + s_3 + 3s_4) \right) \varepsilon^3 + \left(3X^2 \frac{\partial^3}{\partial X^3} (s_2 + s_3 + 3s_4) \right. \\
& \left. + 36X^2 (s_1 + s_5 + s_6 - p_1 - p_2 - p_3) - \frac{\partial}{\partial X} (s_2 + s_3 + 3s_4) + 4X \frac{\partial^2}{\partial X^2} (s_2 + s_3 + 3s_4) \right) \varepsilon^2 \quad (۸-۳) \\
& + \left(3X \frac{\partial^3}{\partial X^3} (s_2 + s_3 + 3s_4) + 36X (s_1 + s_5 + s_6 - p_1 - p_2 - p_3) + 2s_2 + 3 \frac{\partial^2}{\partial X^2} (2s_4 + s_3) \right) \varepsilon \\
& + 12(s_1 + s_5 + s_6 - p_1 - p_2 - p_3) + \frac{\partial^3}{\partial X^3} (s_2 + s_3 + 3s_4) = 0
\end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
a_0 &= G_0^* + \frac{4}{3}; a_1 = G_1^* + \frac{4}{3}; s_1 = \frac{3}{2} (a_0 G_1^* + a_1 G_0^*) h^* e \beta \frac{\partial^3 w_0^*}{\partial t^{*3}}; s_2 = 3(a_0 - 1) h^{*3} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \\
s_3 &= 3(a_1 - 1) h^{*3} \beta^2 \frac{\partial^3 w_0^*}{\partial X \partial t^{*2}}; p_1 = \frac{3}{4} a_0 G_0^* h^* P_r^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2}; p_2 = \frac{3}{2} (a_0 G_1^* + a_1 G_0^*) h^* \beta P_r^* \frac{\partial^3 w_0^*}{\partial X^2 \partial t^*} \quad (۹-۳) \\
p_3 &= \frac{3}{4} a_1 G_1^* h^* \beta^2 P_r^* \frac{\partial^3 w_0^*}{\partial X^2 \partial t^{*2}}; s_4 = (a_0 + b_1) h^{*3} \beta \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X \partial t^*}; s_5 = \frac{3}{4} a_1 G_1^* h^* e \beta^2 \frac{\partial^4 w_0^*}{\partial t^{*4}} \\
s_6 &= \frac{3}{4} a_0 G_0^* h^* e \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^{*2}};
\end{aligned}$$

۳-۳- تحلیل فرکانسی

در تحلیل فرکانسی بار عرضی تأثیری بر فرکانس طبیعی نخواهد داشت. جهت یافتن فرکانس‌های

طبیعی، تغییر متغیر $r^* = 1 + \varepsilon X$ در معادلات (۳-۳) تا (۶-۳) اعمال می‌شود [۴۸].

$$\begin{aligned}
eq1: & \left(X^2 (-eg_1[u_0^*] + g_4[w_1^*] + g_3[u_0^*]) + X g_2[u_0^*] - g_5[u_0^*] \right) \varepsilon^2 + \left(X(2g_3[u_0^*] - 2eg_1[u_0^*] \right. \\
& \left. + 2g_4[w_1^*]) + g_2[u_0^*] \right) \varepsilon + g_3[u_0^*] + g_4[w_1^*] - eg_1[u_0^*] = 0 \quad (۱۰-۳)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
eq2: & \left(h^{*2} X g_2[u_1^*] + X^2 (-12K_s g_{10}[u_1^*] + h^{*2} (g_3[u_1^*] - eg_1[u_1^*]) - 12K_s \frac{\partial g_{10}[w_0^*]}{\partial X}) - h^{*2} g_5[u_1^*] \right) \varepsilon^2 \\
& + \left(2X (h^{*2} g_3[u_1^*] - 12K_s \frac{\partial g_{10}[w_0^*]}{\partial X} - 12K_s g_{10}[u_1^*]) + h^{*2} (g_2[u_1^*] - 2eg_1[u_1^*]) \right) \varepsilon - 12K_s g_{10}[u_1^*] \quad (۱۱-۳) \\
& - 12K_s \frac{\partial g_{10}[w_0^*]}{\partial X} + h^{*2} (g_3[u_1^*] - eg_1[u_1^*]) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
eq3: & \left(c_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + c_1 \beta \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X \partial t^*} - K_s g_{10}[u_1^*] + X(-K_s \frac{\partial g_{10}[u_1^*]}{\partial X} + e g_1[w_0^*] + c_1 \beta \frac{\partial^3 w_0^*}{\partial X^2 \partial t^*} \right. \\
& \left. + c_0 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} + g_{11}[Q_s(X, t^*)] \right) \varepsilon + e g_1[w_0^*] + c_0 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} + \beta c_1 \frac{\partial^3 w_0^*}{\partial X^2 \partial t^*} - K_s \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} - K_s \frac{\partial g_{10}[u_1^*]}{\partial X} \\
& + g_{11}[Q^*(X, t^*)] = 0
\end{aligned} \quad (12-3)$$

$$\begin{aligned}
eq4: & \left(X(-g_4[u_0^*] - g_5[w_1^*] - \frac{K_s h^2}{12} e g_1[w_1^*] + \frac{K_s h^2}{12} \frac{\partial^2 g_{10}[w_1^*]}{\partial X^2} - \frac{c_0 h^2}{12} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} + \frac{c_1 h^2 \beta}{12} \frac{\partial^3 w_1^*}{\partial X^2 \partial t^*} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} g_{11}[Q^*(X, t^*)] - g_6[u_0^*] + \frac{c_0 h^2}{12} \frac{\partial w_1^*}{\partial X} - \frac{c_1 h^2 \beta}{12} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X \partial t^*} + \frac{K_s h^2}{12} \frac{\partial g_{10}[w_1^*]}{\partial X} \right) \varepsilon - g_4[u_0^*] \\
& - \frac{c_0 h^2}{12} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} - \frac{c_1 h^2 \beta}{12} \frac{\partial^3 w_1^*}{\partial X^2 \partial t^*} - g_5[w_1^*] + \frac{h^2}{12} (K_s \frac{\partial^2 g_{10}[w_1^*]}{\partial X^2} - e g_1[w_1^*]) - \frac{1}{2} g_{11}[Q^*(X, t^*)] = 0
\end{aligned} \quad (13-3)$$

که در این روابط:

$$\begin{aligned}
a_0 &= G_0^* + \frac{4}{3}; a_1 = G_1^* + \frac{4}{3}; b_0 = G_0^* - \frac{2}{3}; b_1 = G_1^* - \frac{2}{3}; c_0 = P_r^* G_0^* - K_s; c_1 = P_r^* G_1^* - K_s \\
g_1[\bullet] &= G_0^* \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial t^{*2}} + G_1^* \beta \frac{\partial^3(\bullet)}{\partial t^{*3}}; g_2[\bullet] = a_0 \frac{\partial(\bullet)}{\partial X} + \beta a_1 \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial t^*}; g_3[\bullet] = \frac{\partial g_2[\bullet]}{\partial X}; g_4[\bullet] = b_0 \frac{\partial(\bullet)}{\partial X} \\
& + \beta b_1 \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial t^*}; g_5[\bullet] = a_0(\bullet) + \beta a_1 \frac{\partial(\bullet)}{\partial t^*}; g_6[\bullet] = b_0(\bullet) + \beta b_1 \frac{\partial(\bullet)}{\partial t^*}; g_{10}[\bullet] = \beta \frac{\partial(\bullet)}{\partial t^*} + (\bullet) \\
g_{11}[\bullet] &= (G_0^* + \beta G_1^* \frac{\partial}{\partial X})(\bullet)
\end{aligned} \quad (14-3)$$

برای حل تقریبی معادلات فوق از روش بسط مستقیم¹ در تئوری اغتشاشات استفاده می‌گردد [48].

در ابتدا مؤلفه‌های دامنه‌ی ارتعاشات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
u_0^*(X, t) &= u_{00}^*(X, t) + \varepsilon u_{01}^*(X, t) \quad ; \quad u_1^*(X, t) = u_{10}^*(X, t) + \varepsilon u_{11}^*(X, t) \\
w_0^*(X, t) &= w_{00}^*(X, t) + \varepsilon w_{01}^*(X, t); \quad w_1^*(X, t) = w_{10}^*(X, t) + \varepsilon w_{11}^*(X, t)
\end{aligned} \quad (15-3)$$

با جایگذاری (15-3) در معادلات (3-10) تا (3-13) معادلات بر اساس مرتبه‌های مختلف ε حاصل

می‌شوند. جملات با کوچک‌ترین مرتبه (مرتبه‌ی صفر) عبارتند از:

$$eq_1: f_1[u_{00}^*, w_{10}^*] = 0; \quad eq_4: f_4[u_{00}^*, w_{10}^*] = 0 \quad (الف-16-3)$$

$$eq_2: f_2[u_{10}^*, w_{00}^*] = 0; \quad eq_3: f_3[u_{10}^*, w_{00}^*] = 0 \quad (ب-16-3)$$

¹ Straight forward

که در روابط (۱۶-۳):

$$f_1[u, w] = a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \beta a_1 \frac{\partial^3 u}{\partial X^2 \partial t^*} + b_0 \frac{\partial w}{\partial X} + \beta b_1 \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial t^*} - e g_1[u] \quad (۱۷-۳)$$

$$f_2[u, w] = \frac{h^* a_0}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - K_s u - K_s \beta \frac{\partial u}{\partial t^*} + \frac{\beta h^* a_1}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial X^2 \partial t^*} - K_s \frac{\partial w}{\partial X} - K_s \beta \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial t^*} - \frac{e h^*}{12} g_1[u] \quad (۱۸-۳)$$

$$f_3[u, w] = \beta c_1 \frac{\partial^3 w}{\partial X^2 \partial t^*} + c_0 \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + K_s \beta \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial t^*} + K_s \frac{\partial u}{\partial X} - e g_1[w] + g_{11} [Q^*(X, t^*)] \quad (۱۹-۳)$$

$$f_4[u, w] = -b_0 \frac{\partial u}{\partial X} - \beta b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial t^*} - \beta a_1 \frac{\partial w}{\partial t^*} + \frac{K_s h^*}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\beta K_s h^*}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial X^2 \partial t^*} - a_0 w - \frac{e h^*}{12} g_1[w] - \frac{c_0 h^*}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} - \frac{c_1 h^* \beta}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial X^2 \partial t^*} - \frac{1}{2} g_{11} [Q^*(X, t^*)] \quad (۲۰-۳)$$

معادلات (۱۷-۳) تا (۲۰-۳) شامل دو دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل همگن با ضرایب ثابت دو به دو کویپل شده به یکدیگر می‌باشند. به این ترتیب، تغییر متغیر تعریف شده، توانسته است معادلات مرتبه-۱ صفر را به معادلاتی با ضرایب ثابت تبدیل کند. از حل معادلات (۱۷-۳) و (۲۰-۳) فرکانس‌های شعاعی و از حل معادلات (۱۸-۳) و (۱۹-۳) فرکانس‌های عرضی به دست می‌آیند. معادلات مرتبه‌ی اول نیز به صورت زیر هستند.

$$eq_1: f_1[u_{01}^*, w_{11}^*] = FF_1; \quad eq_4: f_4[u_{01}^*, w_{11}^*] = FF_4 \quad (۲۱-۳ الف)$$

$$eq_2: f_2[u_{11}^*, w_{01}^*] = FF_2; \quad eq_3: f_3[u_{11}^*, w_{01}^*] = FF_3 \quad (۲۱-۳ ب)$$

که در این روابط:

$$FF_1 = 2X (g_3[u_{00}^*] - e g_1[u_{00}^*] + g_4[w_{10}^*]); \quad FF_2 = 2X (h^* g_3[u_{10}^*] - 12K_s \frac{\partial g_{10}[w_{00}^*]}{\partial X} - 12K_s g_{10}[u_{10}^*])$$

$$FF_3 = \left(-K_s \frac{\partial g_{10}[u_{10}^*]}{\partial X} + e g_1[w_{00}^*] + c_1 \beta \frac{\partial^3 w_{00}^*}{\partial X^2 \partial t^*} + c_0 \frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial X^2} + g_{11} [Q^*] \right) X;$$

$$FF_4 = \left(-g_4[u_{00}^*] - g_5[w_{10}^*] + \frac{K_s h^*}{12} \frac{\partial^2 g_{10}[w_{10}^*]}{\partial X^2} - \frac{K_s h^*}{12} e g_1[w_{10}^*] - \frac{c_0 h^*}{12} \frac{\partial^2 w_{10}^*}{\partial X^2} + \frac{c_1 h^* \beta}{12} \frac{\partial^3 w_{10}^*}{\partial X^2 \partial t^*} - \frac{1}{2} g_{11} [Q^*] \right) X \quad (۲۲-۳)$$

حل معادلات (۳-۱۶-ب) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{cases} u_{10}^*(X, t^*) \\ w_{00}^*(X, t^*) \end{cases} = \sum_{n=1}^4 C_n \{V_n\} \exp(m_n X + i\omega t^*); \{V_n\} = \begin{cases} A_1 \\ A_2 \end{cases} \quad (۲۳-۳)$$

که ω فرکانس طبیعی بی‌بعد، m_n مقادیر ویژه و $\{V_n\}$ بردارهای ویژه می‌باشند. با جایگذاری رابطه-ی (۲۳-۳) در (۳-۱۶-ب)، یک دستگاه معادله‌ی جبری به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} A_1 \\ A_2 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}; a_{11} = -K_s m_n (1 + \beta i \omega); a_{12} = \frac{h^* m_n^2}{12} (a_0 + \beta a_1 i \omega) - K_s (1 + \beta i \omega) \\ + \frac{eh^* \omega^2}{12} (G_0^* + G_1^* \beta i \omega); a_{21} = m_n^2 (c_0 + \beta c_1 i \omega) + e\omega^2 (G_0^* + G_1^* \beta i \omega); a_{22} = K_s m_n (1 + \beta i \omega) \quad (۲۴-۳)$$

برای وجود جواب غیر صفر دترمینان ماتریس ضرایب رابطه‌ی (۲۴-۳) باید صفر شود. معادله‌ی به-دست آمده، معادله‌ی تفرق^۱ است و از حل آن چهار مقدار ویژه‌ی m_n ($n=1..4$) برحسب ω به دست می‌آید. بردارهای ویژه نیز از رابطه‌ی (۲۴-۳) به دست می‌آیند. بردارهای $\{V_n\}$ ، بردارهای ویژه‌ی متناظر با m_n ها هستند. پس از یافتن بردارهای ویژه و مقادیر ویژه، حل کلی به صورت رابطه‌ی (۳-۲۳) است.

با اعمال شرایط مرزی، یک دستگاه معادله‌ی جبری همگن به صورت $[ax]\{C\} = \{0\}$ نتیجه می‌شود که بردار $\{C\}$ شامل ثابت‌های C_1, C_2, C_3, C_4 بوده و ماتریس $[ax]$ شامل ضرایب معادله‌ها است. برای به-دست آوردن جواب غیر صفر دترمینان ماتریس ضرایب ماتریس $[ax]$ باید مساوی صفر شود که در نهایت یک معادله‌ی جبری پیچیده برحسب ω به دست می‌آید. ریشه‌های این معادله فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد را می‌دهند که این معادله به وسیله‌ی روش عددی تنصیف فاصله^۲ حل شده است. با اعمال روش ارائه شده برای ورق براساس تئوری کلاسیک، فرکانس‌های طبیعی تئوری کلاسیک نیز به دست می‌آیند.

¹ Dispersion

² Bisection

با دقت در بخش‌های همگن (۳-۱۶-ب) و (۳-۲۱-ب) می‌توان دریافت که بخش‌های همگن این معادلات مشابه هستند و بنابراین فرکانس‌های معادلات مرتبه‌های صفر و یک یکسان است، اما بخش ناهمگن معادلات مرتبه اول سبب می‌شوند تا در شکل مدهای معادلات مرتبه صفر و مرتبه یک تفاوت‌های جزئی مشاهده شود.

۳-۴- تعیین پاسخ ورق به‌ازای بار عرضی تابع زمان

تعیین پاسخ به‌کمک تئوری اغتشاشات و بسط توابع ویژه ارائه می‌گردد.

۳-۴-۱- روش بسط توابع ویژه (مدهای نرمال) و مقیاس‌های چندگانه

برای حل معادلات (۳-۱۰) تا (۳-۱۳) از روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات استفاده شده است. حل معادلات به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} u_0(X, t^*; \varepsilon) &= u_0(X, T_0, T_1) + \varepsilon u_1(X, T_0, T_1) \\ u_1(X, t^*; \varepsilon) &= u_2(X, T_0, T_1) + \varepsilon u_3(X, T_0, T_1) \\ w_0(X, t^*; \varepsilon) &= w_0(X, T_0, T_1) + \varepsilon w_1(X, T_0, T_1) \\ w_1(X, t^*; \varepsilon) &= w_2(X, T_0, T_1) + \varepsilon w_3(X, T_0, T_1) \end{aligned} \quad (۲۵-۳)$$

که $T_0 = t^*$ و $T_1 = \varepsilon t^*$ است؛ با توجه به این تعریف‌ها، اپراتور مشتق زمان به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} \\ \frac{\partial^3}{\partial t^{*3}} &= \frac{\partial^3}{\partial T_0^3} + 3\varepsilon \frac{\partial^3}{\partial T_0^2 \partial T_1} \end{aligned} \quad (۲۶-۳)$$

با جایگذاری روابط (۲۵-۳) و (۲۶-۳) در معادلات (۳-۱۰) تا (۳-۱۳) و جداسازی معادلات بر اساس مرتبه‌های مختلف ε ، معادلات مرتبه صفر به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
eq_1: & \frac{\partial}{\partial X} g_2 [u_0^*] - e g_1 [u_0^*] + g_4 [w_2^*] = 0 \\
eq_2: & h^{*2} g_3 [u_2^*] - 12 K_s g_{10} [u_2^*] - h^{*2} e g_1 [u_2^*] - 12 K_s \frac{\partial}{\partial X} g_{10} [w_0^*] = 0 \\
eq_3: & h^* (-K_s \frac{\partial}{\partial X} g_{10} [u_2^*] + \frac{\partial^2}{\partial X^2} g_{16} [w_0^*] + e g_1 [w_0^*]) + g_{17} [Q^*] = 0 \\
eq_4: & -12 \frac{\partial}{\partial X} g_6 [u_0^*] + h^{*2} K_s \frac{\partial^2}{\partial X^2} g_{10} [w_2^*] - 16 g_{10} [w_2^*] - 12 g_{17} [w_2^*] \\
& - h^{*2} e \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} g_{17} [w_2^*] - 6 g_{17} [Q^*] = 0
\end{aligned} \tag{۲۷-۳}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
a_0 &= G_0^* + \frac{4}{3}; a_1 = G_1^* + \frac{4}{3}; b_0 = G_0^* - \frac{2}{3}; b_1 = G_1^* - \frac{2}{3}; c_0 = P_r^* G_0^* - K_s; c_1 = P_r^* G_1^* - K_s \\
g_1[\bullet] &= G_0^* \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial T_0^2} + G_1^* \beta \frac{\partial^3(\bullet)}{\partial T_0^3}; g_2[\bullet] = a_0 \frac{\partial(\bullet)}{\partial X} + \beta a_1 \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_0}; g_4[\bullet] = b_0 \frac{\partial(\bullet)}{\partial X} \\
&+ \beta b_1 \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial X \partial T_0}; g_3[\bullet] = \frac{\partial g_2[\bullet]}{\partial X}; g_6[\bullet] = b_0(\bullet) + \beta b_1 \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0}; g_{10}[\bullet] = \beta \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0} + (\bullet) \\
g_{13}[\bullet] &= G_0^*(\bullet) + \frac{3}{2} G_1^* \beta \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0}; g_{15}(\bullet) = G_0^*(\bullet) \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{3}{2} G_1^* \beta \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0^2 \partial T_1}; \\
g_{16}[\bullet] &= c_0(\bullet) + c_1 \beta \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0}; g_{17}[\bullet] = G_0^*(\bullet) + G_1^* \beta \frac{\partial(\bullet)}{\partial T_0};
\end{aligned} \tag{۲۸-۳}$$

معادلات حاصل در مرتبه صفر، دو دستگاه مستقل از هم بوده که حل دستگاه اول برای ورق با تکیه‌گاه ساده به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
u_2^*(X, T_0, T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m}(T_0, T_1) \cos(m\pi X/L) \\
w_0^*(X, T_0, T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m}(T_0, T_1) \sin(m\pi X/L)
\end{aligned} \tag{۲۹-۳}$$

و در آن $L = X_{out} - X_{in}$ است. با جایگذاری حل به صورت روابط (۲۹-۳) در معادلات دوم و سوم دستگاه (۲۷-۳) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} P_{1m} \cos(m\pi X/L) &= F_1 \\
\sum_{m=1}^{\infty} P_{2m} \sin(m\pi X/L) &= F_2
\end{aligned} \tag{۳۰-۳}$$

که در آن P_{1m} و P_{2m} عباراتی بر حسب $A_{1m}(T_0, T_1)$ و $A_{2m}(T_0, T_1)$ و مشتقات آنها و $F_1=0$ و $F_2=Q^*$ می‌باشند. براساس بسط نیم دامنه‌ی فوریه از روابط (۳-۳۰) می‌توان مقادیر P_{1m} و P_{2m} را به صورت زیر به دست آورد.

$$P_{1m} = \frac{2}{L} \int_{X_{in}}^{X_{out}} F_1 \cos(m\pi X/L) dX \quad (۳۱-۳)$$

$$P_{2m} = \frac{2}{L} \int_{X_{in}}^{X_{out}} F_2 \sin(m\pi X/L) dX$$

معادلات (۳-۳۱) دو معادله‌ی دیفرانسیل کوپل به هم هستند که حل عمومی آنها به صورت زیر است.

$$A_{1m}(T_0, T_1) = \sum_{j=1}^6 a_j(T_1) e^{i\alpha_j T_0} \quad (۳۲-۳)$$

$$A_{2m}(T_0, T_1) = \sum_{j=1}^6 b_j(T_1) e^{i\alpha_j T_0}$$

که α_j فرکانس‌های طبیعی مربوط به دستگاه اول (معادلات دوم و سوم) می‌باشند. روند حل برای دستگاه دوم (معادلات اول و چهارم) نیز به همین ترتیب است. در ادامه با در نظر گرفتن ضرایب ε معادلات مرتبه اول به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{aligned} eq_1 : & (2g_3[u_0^*] - 2eg_1[u_0^*] + 2g_4[w_2^*])X - 2eg_{15}[u_0^*] + g_2[u_0^*] \\ & + \beta a_1 \frac{\partial^3 u_0^*}{\partial X^2 \partial T_1} + g_3[u_1^*] - eg_1[u_1^*] + b_1 \beta \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X \partial T_1} + g_4[w_3^*] = 0 \\ eq_2 : & (3g_3[u_2^*] - 24K_s \beta g_{10}[u_2^*] - 2eh^{*2} g_1[u_2^*] - 24K_s \frac{\partial}{\partial X} g_{10}[w_0^*])X \\ & + h^{*2} g_2[u_2^*] - 2h^{*2} eg_{15}[u_2^*] - 12K_s \beta \frac{\partial u_2^*}{\partial T_1} + h^{*2} g_3[u_3^*] - h^{*2} eg_1[u_3^*] - \\ & 12K_s g_{10}[u_3^*] - 12K_s \frac{\partial}{\partial X} g_{10}[w_1^*] - 12K_s \beta \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X \partial T_1} = 0 \\ eq_3 : & \left((-K_s \frac{\partial}{\partial X} g_{10}[u_2^*] + \frac{\partial^2}{\partial X^2} g_{16}[w_0^*] + eg_1[w_0^*])h^* + g_{17}[Q^*] \right)X + (-K_s g_{10}[u_2^*] \\ & - K_s \beta \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial X \partial T_1} - K_s \frac{\partial}{\partial X} g_{10}[u_3^*] + \frac{\partial}{\partial X} g_{16}[w_0^*] + 2eg_{15}[w_0^*] + \frac{\partial^2}{\partial X^2} g_{16}[w_1^*] + eg_1[w_1^*] \\ & + \beta c_1 \frac{\partial^3 w_1^*}{\partial X^2 \partial T_1})h^* + G_1^* \beta \frac{\partial Q^*}{\partial T_1} = 0 \end{aligned} \quad (۳۳-۳)$$

$$\begin{aligned}
eq_4 : & (-12 \frac{\partial}{\partial X} g_6 [u_0^*] - 16g_{10} [w_2^*] - 12g_{17} [w_2^*] - h^{*2} eg_1 [w_2^*] + h^{*2} K_s \frac{\partial^2}{\partial X^2} g_{10} [w_2^*] \\
& - 6g_{17} [Q^*]) X - 12g_6 [u_0^*] - 12b_1 \beta \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X \partial T_1} - 12 \frac{\partial}{\partial X} g_6 [u_1^*] + h^{*2} K_s \beta \frac{\partial}{\partial X} g_{10} [w_2^*] \\
& - 12\beta a_1 \frac{\partial w_2^*}{\partial T_1} - 2h^{*2} eg_{17} [w_2^*] + h^{*2} K_s \frac{\partial^2}{\partial X^2} g_{10} [w_3^*] - 12g_{17} [w_3^*] - 16g_{10} [w_3^*] \\
& - h^{*2} eg_1 [w_3^*] - 6G_1^* \beta \frac{\partial Q^*}{\partial T_1} = 0
\end{aligned} \tag{۳۳-۳}$$

برای حل دستگاه معادلات اول شامل معادلات دوم و سوم حل بخش همگن به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
u_3^* (X, T_0, T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{3m} (T_0, T_1) \cos(m\pi X/L) \\
w_1^* (X, T_0, T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{4m} (T_0, T_1) \sin(m\pi X/L)
\end{aligned} \tag{۳۴-۳}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳۴-۳) به عنوان حل بخش همگن و استفاده از روابط (۳-۲۷) در معادلات (۳-۳) معادلات به شکل زیر خواهند بود.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} P_{3m} \cos(m\pi X/L) &= F_3 \\
\sum_{m=1}^{\infty} P_{4m} \sin(m\pi X/L) &= F_4
\end{aligned} \tag{۳۵-۳}$$

که در آن P_{4m} و P_{3m} عباراتی بر حسب $A_{4m}(T_0, T_1)$ و $A_{3m}(T_0, T_1)$ و مشتقات آنها هستند. F_4 و F_3 عبارت‌هایی شامل $e^{i\alpha_j T_0}$ ، $(j=0..6)$ و $\sin(\frac{m\pi X}{L})$ و $\cos(\frac{m\pi X}{L})$ هستند. P_{4m} و P_{3m} از روابط سری فوریه به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
P_{3m} &= \frac{2}{L} \int_{X_{in}}^{X_{out}} F_3 \cos(m\pi X/L) dX \\
P_{4m} &= \frac{2}{L} \int_{X_{in}}^{X_{out}} F_4 \sin(m\pi X/L) dX
\end{aligned} \tag{۳۶-۳}$$

جملات $e^{i\alpha_j T_0}$ ، $(j=0..6)$ برای دستگاه معادلات دوم و سوم جملاتی سکولار محسوب می‌شوند. قبل از تعیین حل خصوصی، سکولاریتی مسأله باید از بین برود. بدین منظور از شرط حل‌پذیری استفاده می‌شود [۴۸]. یک حل خصوصی فاقد جملات سکولار به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\sum_{j=1}^6 d_j(T_1) e^{i\alpha_j T_0} = u_1^*(T_0, T_1)$$

$$\sum_{j=1}^6 g_j(T_1) e^{i\alpha_j T_0} = w_3^*(T_0, T_1)$$
(۳۷-۳)

شده (جملات سکولار)، ضرایب $a_j(T_1)$ و $b_j(T_1)$ به دست می‌آید. سپس می‌توان حل خصوصی این معادلات را به دست آورد.

۳-۵- جمع بندی

در این فصل، نخست به بی‌بعدسازی معادلات پرداخته شد. سپس، روش تعیین فرکانس‌های طبیعی بیان شد. با استفاده از بسط مدهای نرمال و روش مقیاس‌های چندگانه، حل تحلیلی به دست آمد. در فصل پنجم نتایج حاصل از این فصل ارائه خواهد شد.

فصل چہارم

حل عددی

۴-۱- مقدمه

در این فصل حل عددی مسأله، شامل حل استاتیکی، مدال، کمانش و حل دینامیکی یا گذرا با استفاده از المان‌های دو بعدی و سه بعدی ارائه خواهد شد. برای حل اجزای محدود مسأله از نرم‌افزار انسیس^۱ و استفاده شده است. در ابتدای فصل به معرفی المان‌های به کار رفته در تحلیل پرداخته شده است. در بخش بعد آنالیز حساسیت مش انجام شده و اندازه مش بهینه در دو مدل‌سازی یک بعدی و سه بعدی تعیین می‌گردد. سپس به بیان مراحل حل استاتیکی مسأله، مراحل حل مدال و تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها، حل کمانش و در نهایت به تعیین پاسخ به کمک حل دینامیکی پرداخته شده است.

۴-۲- تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک براساس سری پرونی [۴۹]

برای تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک ماده، از مدول رهایش بالک و برشی استفاده می‌شود. در نرم-افزار انسیس این توابع را می‌توان برحسب جملاتی از سری پرونی به صورت زیر بیان کرد.

$$G = G_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^G}\right)}, \quad K = K_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^K}\right)} \quad (1-4)$$

G_i ، G_{∞} مدول الاستیک برشی، K_i و K_{∞} مدول الاستیک بالک، τ_i^G و τ_i^K زمان رهایش برای هر کدام از اجزای سری پرونی است. مدول‌های تناسبی^۲ به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$\alpha_i^G = \frac{G_i}{G_0}, \quad \alpha_i^K = \frac{K_i}{K_0} \quad (2-4)$$

که در آن:

^۱ Ansys

^۲ Relative moduli

$$G_0 = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i, K_0 = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \quad (4-3)$$

توابع رهایش و بالک را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$G = G_0 \left(\alpha_\infty^G + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i^G e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^G}\right)} \right), K = K_0 \left(\alpha_\infty^K + \sum_{i=1}^{n_K} \alpha_i^K e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^K}\right)} \right) \quad (4-4)$$

در این جا G_0 و K_0 به ترتیب مدول برشی و مدول بالک در بارگذاری سریع یا مدول آنی و G_∞ و K_∞ مدول مربوط به بارگذاری‌های کند یا مدول نهایی می‌باشد. تعداد جملات سری پرونی برای برش η_G و برای بالک η_K است که لازم نیست این دو مشابه باشند. این مطلب در مورد زمان‌های رهایش τ_i^G و τ_i^K نیز صادق است.

۳-۴- تعیین مدول رهایش برشی و بالک

بر اساس فرضیات فصل دوم، رفتار ماده در برش ویسکوالاستیک بوده و برای مدل‌سازی این رفتار از اولین مدل جامد استاندارد خطی استفاده می‌شود و مدول رهایش G به صورت تابعی از زمان تعیین می‌شود. همچنین رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته شده و به این ترتیب مدول بالک K عددی ثابت و بدون وابستگی به زمان است.

۳-۴-۱- مدول رهایش برشی

یکی از بهترین روش‌های تعیین خصوصیات مواد ویسکوالاستیک در انسیس استفاده از سری پرونی است. روش‌های مختلفی برای تعیین این سری در انسیس وجود دارد. در اولین روش داده‌های مدول رهایش برشی نسبت به زمان را که از آزمایش رهایش به دست آمده است را به طور مستقیم وارد انسیس کرد. در این صورت نرم‌افزار سری پرونی را بر این داده‌ها منطبق می‌کند. انسیس در هنگام انطباق تابع نمایی داده‌ها، G_0 و G_∞ را به ترتیب اولین و آخرین داده در نظر می‌گیرد و مقدار α_i و τ_i

را محاسبه می‌کند اما بعد از آن، G_0 و G_∞ را در حافظه نگه نمی‌دارد. از این رو G_0 مدول آنی با تعیین مدول الاستیک E و ضریب پواسون ν ، انسیس آن را براساس فرمول زیر محاسبه می‌کند.

$$G_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5-4)$$

نکته دیگر این است که در داده‌های آزمایشگاهی، در صورتی که آخرین داده صفر باشد، مدول رهاش المان ماکسول به دست می‌آید.

با توجه به این که در حل تحلیلی مسأله از مدل جامد استاندارد برای شبیه‌سازی رفتار برشی ماده استفاده شده است، ضرایب سری پرونی به صورت زیر تعیین گردیده است.

$$G(t) = G_\infty + G_i e^{\left(\frac{t}{\tau_i^G}\right)} \quad (6-4)$$

که در آن:

$$G_i = \frac{G_1^2}{G_1 + G_2}, \quad \tau_i^G = \frac{\eta}{G_1 + G_2}, \quad G_\infty = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \quad (7-4)$$

مقدار مدول برشی آنی G_0 نیز با قرار دادن $t=0$ در رابطه‌ی (۴-۴) به صورت زیر تعیین شده است.

$$G_0 = G_1 \quad (8-4)$$

در نتیجه ضرایب سری پرونی رابطه‌ی (۴-۴) از روابط (۷-۴)، (۸-۴) و (۲-۴) تعیین می‌شود.

بنابراین ضرایب سری پرونی مورد نظر α_i و τ_i به طور مستقیم وارد انسیس می‌شود ولی G_0 را نمی‌توان وارد انسیس کرد و همان طور که قبلاً اشاره شد، انسیس این مقدار را بر حسب مدول الاستیک E و ضریب پواسون ν محاسبه می‌کند.

۴-۳-۲- مدول بالک

با توجه به این که رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته می‌شود، برای حالت بالک سری پرونی تعریف نمی‌شود و با وارد کردن مدول الاستیک و ضریب پواسون، انسیس مقدار مدول بالک را بر اساس رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کند.

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (9-4)$$

۴-۴- معرفی المان‌ها [۴۹]

در این پایان‌نامه در تحلیل دوبعدی از المان ۱۸۱ shell و در تحلیل سه‌بعدی از المان ۱۹۰ solid shell استفاده شده است، همچنین در تحلیل سه‌بعدی از المان ۱۸۲ plane و ۱۸۶ solid استفاده شده است. مشخصات این المان‌ها در پیوست ج آورده شده است.

۴-۵- تعیین مش بهینه

در این پایان‌نامه ورق‌ی با ابعاد و خواص مکانیکی مطابق جدول (۴-۱)، [۵۰] ارائه شده است. برای مدل‌سازی دو بعدی، ورق‌ی حلقوی با لبه‌های داخلی و خارجی گیردار مد نظر قرار گرفته است. پس از تعریف خواص مکانیکی و ابعاد ورق، مش بندی صورت می‌گیرد.

جدول (۴-۱) مشخصات هندسی و مکانیکی ورق

$r_o=0.15$	شعاع خارجی (m)
$r_i=0.045$	شعاع داخلی (m)
$h=0.003$	ضخامت (m)
$E_1=5.354e9, E_2=4.504e9$	مدول‌های ویسکوالاستیک (Pa)
$\eta=26.729e9$	ضریب ویسکوالاستیک (Pa.s)
$\nu=0.25$	ضریب پواسون
$\rho=0.22$	چگالی (kg/m^3)

به این نکته باید توجه شود چگالی ذکر شده در جدول چگالی سطحی است که برای مدل‌سازی باید به ضخامت تقسیم شود.

در تحلیل دوبعدی برای المان ۱۸۱ Shell به منظور افزایش دقت محاسبات مش‌بندی به صورت دستی انجام شد. آنالیز مدال به ازای تعداد المان‌های مختلف انجام و فرکانس‌های طبیعی عرضی دوم در جدول (۲-۴) گزارش شده است. بر اساس این جدول مش بهینه به ازای ۵۷۶۰ المان حاصل می‌شود.

جدول (۲-۴) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی دوم به ازای مش‌های مختلف در مدل‌سازی دوبعدی برحسب (Hz)

تعداد المان	۴۰۰	۸۰۰	۱۲۰۰	۱۶۰۰	۲۴۰۰	۴۰۰۰	۴۸۰۰	۵۷۶۰	۶۰۰۰
فرکانس	۱۱۵۲۳	۱۰۶۲۹	۱۰۶۷۳	۱۰۷۹۶	۱۰۶۲۸	۱۰۶۰۷	۱۰۵۹۷	۱۰۵۹۶	۱۰۵۹۶

در تحلیل سه‌بعدی با المان‌های ۱۸۲ Plane و ۱۸۶ Solid فرکانس‌های طبیعی عرضی دوم برای تعداد المان‌های مختلف در جدول (۳-۴) گزارش شده است. بر اساس این جدول مش بهینه به ازای تقریباً ۳۶۰۰ المان حاصل می‌شود.

جدول (۳-۴) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی دوم به ازای مش‌های مختلف در مدل‌سازی سه‌بعدی برحسب (Hz)

تعداد المان	۶۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰	۱۸۰۰	۲۴۰۰	۲۷۰۰	۳۰۰۰	۳۳۰۰	۳۶۰۰
فرکانس	۱۰۶۲۹	۱۰۶۱۸	۱۰۶۱۰	۱۰۶۰۵	۱۰۵۹۸	۱۰۵۹۶	۱۰۵۹۵	۱۰۵۹۴	۱۰۵۹۳

در تحلیل سه‌بعدی با المان ۱۹۰ Solid-shell فرکانس‌های طبیعی عرضی دوم در جدول (۴-۴) به ازای تعداد المان‌های مختلف گزارش شده است. بر اساس این جدول مش بهینه به ازای اندازه‌ی لبه‌ی المان ۰.۰۰۲ متر مکعب حاصل می‌شود.

جدول (۴-۴) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی دوم به‌ازای مش‌های مختلف در مدل‌سازی سه‌بعدی برحسب (Hz)

سایز المان	۰.۰۱۲	۰.۰۱	۰.۰۰۸	۰.۰۰۷	۰.۰۰۶	۰.۰۰۵	۰.۰۰۴	۰.۰۰۳	۰.۰۰۲
فرکانس	۱۱۵۸۹	۱۱۲۰۹	۱۰۹۷۷	۱۰۸۸۸	۱۰۸۰۹	۱۰۷۴۴	۱۰۶۸۱	۱۰۶۴۳	۱۰۶۳۶

۴-۶- حل استاتیکی

از این روش، برای تحلیل مدل‌های ساکن و مستقل از زمان استفاده می‌شود. در مدل‌سازی دوبعدی پس از مش‌بندی، در بخش بارگذاری ابتدا شرایط مرزی تعیین شد. بارگذاری در این مسأله شامل دو قسمت می‌باشد. تحریک اول به صورت بار شعاعی و در لبه‌های بیرونی وارد می‌شود و تحریک دوم بار گسترده عرضی است که به صورت فشار بر روی سطح ورق قابل مدل‌سازی است. پس از پایان مدل‌سازی تنظیمات مربوط به حل استاتیکی انجام می‌گیرد.

در مدل‌سازی سه‌بعدی، در ابتدا سطح مقطع اولیه مدل شده و مش‌بندی می‌شود. سپس سطح ایجاد شده گسترش یافته و مدل نهایی ایجاد می‌گردد. شرایط مرزی بر روی دو سطح مقطع (لبه‌های ورق) در طرفین اعمال شده و هر دو سطح برای تکیه‌گاه ساده در راستای محور Z مقید شده‌اند. برای شرط مرزی گیردار در همه‌ی جهت‌ها مقید می‌شوند. بارگذاری شعاعی و عرضی نیز به صورت فشاری بر روی سطوح اعمال شده است. در مدل‌سازی سه‌بعدی تنظیمات حل مشابه دوبعدی است.

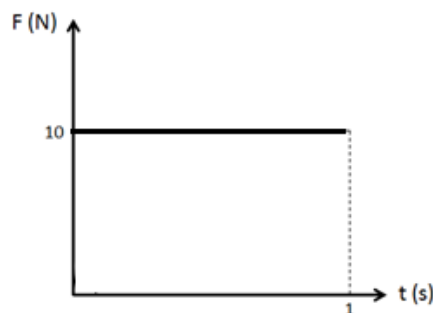
۴-۷- حل مدال

از آنالیز مدال جهت تعیین مقدار فرکانس‌های طبیعی و شکل مد آن، در فرکانس مزبور استفاده می‌گردد. مقدار فرکانس طبیعی هر سازه بستگی به شکل آن سازه، جنس و تکیه‌گاه‌های آن سازه دارد. در عین حال، مقدار بارگذاری‌ها و نوع بارگذاری نیز می‌تواند در مقدار فرکانس طبیعی موثر باشد. به همین دلیل نرم افزار دو نوع آنالیز مدال (بدون تنش و پیش‌تنش) را ارائه کرده است. در این

پایان نامه به منظور بررسی تأثیر بار شعاعی بر مقدار فرکانس‌های طبیعی سیستم از روش پیش‌تنش استفاده می‌گردد و در تنظیمات مربوط به حل گزینه پیش‌تنش فعال می‌شود.

۴-۸- حل دینامیکی

به کمک این آنالیز می‌توان به محاسبه‌ی پاسخ دینامیکی یک سازه تحت تأثیر بارگذاری‌های وابسته به زمان پرداخت. در آنالیز دینامیک گذرا سه روش برای نحوه انجام محاسبات ماتریسی موجود است. در روش کامل^۱، ماتریس کامل سیستم تشکیل شده و پاسخ آن محاسبه می‌شود این روش قدرتمندترین روش بین سه روش موجود است زیرا قادر است خواص غیرخطی نظیر پلاستیسیته تغییرشکل بزرگ را منظور کند. در این تحلیل از روش کامل استفاده شده و نمودار نیرو بر حسب زمان مطابق شکل می‌باشد.



شکل (۴-۳) تغییرات زمانی نیروی گسترده

تغییرات نیرو بر حسب زمان را می‌توان به دو قسمت مجزا تقسیم نمود. هر یک از این قسمت‌ها یک مرحله‌ی بارگذاری^۲ نامیده می‌شود. هنگام تحلیل المان محدود، هر یک از مراحل بارگذاری، به بخش‌های کوچک‌تر تقسیم می‌شوند تا دقت حاصل از تحلیل افزایش یابد. به این بخش‌های کوچکتر، گام‌های بارگذاری^۳ گفته می‌شود. در تحلیل دینامیکی شیوه‌های تغییر نیرو به دو صورت خطی^۴ و نوع

^۱Full method

^۲Load step

^۳Loading substeps

^۴Ramped

پله‌ای^۱ است. برای تحلیل یک مدل وابسته به زمان، پیش از هر چیز باید تحلیل المان محدود از نوع تحلیل گذرا^۲ انتخاب شود.

هر یک از مراحل بارگذاری باید جداگانه تعریف و در فایل‌های مستقل ذخیره شوند. از نخستین مرحله بارگذاری شروع کرده و مقادیر کلیه نیروها، قیدها و ... مشابه حالت استاتیکی تعریف می‌شوند. پس از اتمام تعریف بارگذاری، باید لحظه‌ی پایان این مرحله از بارگذاری مشخص شود.

طول بازه‌ی زمانی، گام زمانی^۳ نامیده می‌شود. بدیهی است با افزایش تعداد گام‌های بارگذاری، دقت تحلیل افزایش می‌یابد؛ اما از آنجا که این افزایش دقت، منجر به افزایش زمان تحلیل مدل نیز می‌گردد؛ افزایش تعداد گام‌ها به هر مقدار دلخواه منطقی نیست. در واقع با توجه به دقت قابل قبول، برای تعداد گام‌های تحلیل، عدد بهینه‌ای وجود دارد. در یک تحریک ایده‌آل که همه مدهای سازه تحریک می‌شوند؛ پاسخ ورق شامل همه فرکانس‌ها می‌باشد. هر چند تولید تحریک ایده‌آل به صورت عددی ممکن نیست؛ اندازه‌ی گام‌های زمانی بر اساس بالاترین فرکانس طبیعی سازه به صورت زیر تعیین می‌گردد [۴۹].

$$\text{time_step}=1/20f$$

که در آن f بزرگترین فرکانس طبیعی سازه است. گام‌های زمانی باید به گونه‌ای انتخاب شوند که ۲۰ نقطه‌ی مجزا در هر دوره‌ی بزرگترین فرکانس طبیعی ایجاد شود. لازم به تذکر است که پیش از تحلیل دینامیکی، باید تحلیل مدال به منظور شناخت رفتار دینامیکی سازه و تعیین فرکانس‌های آن صورت گیرد.

^۱ Stepped

^۲ Transient

^۳ Time step

۴-۹- جمع بندی

در این فصل روند حل عددی دوبعدی و سه بعدی مسأله، شامل حل استاتیکی، مدال و حل دینامیکی یا گذرا ارائه شد. در ابتدای فصل به معرفی المان‌های به کار رفته در تحلیل پرداخته شد. در بخش بعد به آنالیز حساسیت مش پرداخته شد و اندازه‌ی مش بهینه در دو مدل سازی دوبعدی و سه بعدی تعیین گردید. سپس به بیان مراحل حل استاتیکی مسأله، مراحل حل مدال و تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها و در نهایت به تعیین پاسخ به کمک حل دینامیکی پرداخته شد. در فصل پنجم نتایج حاصل از این فصل، ارائه خواهد شد.

فصل پنجم

بررسی نتایج

۵-۱- مقدمه

در این فصل به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل‌های سوم و چهارم پرداخته خواهد شد. محاسبات ریاضی در محیط Maple 15 انجام شده است. ابتدا نتایج مربوط به فرکانس طبیعی بی‌بعد به صورت $(\omega^* = 2\pi\omega t_0)$ ، (که ω بر حسب هرتز) ارائه شده و تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی بررسی شده است و مقایسه‌ی نتایج با حل ارائه شده‌ی تئوری کلاسیک و حل دقیق برای ورق الاستیک و حل عددی توسط دیگر مراجع مقایسه می‌شود. در نهایت به بیان نتایج پاسخ پرداخته می‌شود.

۵-۲- فرکانس طبیعی

برای تحلیل فرکانسی از ورقی با مشخصات هندسی و خواص مکانیکی زیر استفاده شده است.

جدول (۵-۱) مشخصات هندسی و مکانیکی ورق

$r_0=0.15$	شعاع خارجی ورق حلقوی (m)
$r_0=0.15$	شعاع ورق توپر (m)
$E_1=5.354e9, E_2=4.504e9$	مدول‌های ویسکوالاستیک (Pa)
$\eta=26.729e9$	ضریب ویسکوالاستیک (Pa.s)
$\nu=0.25$	ضریب پواسون
$\rho=0.22$	چگالی (kg/m^2)

نتایج به دست آمده برای ورق ویسکوالاستیک می‌تواند برای ورق الاستیک نیز با قرار دادن $\tau \rightarrow 0$ به دست آید. نتایج به دست آمده بر اساس تئوری برشی با روش‌های عددی، نتایجی که توسط مرجع [۵۱] با استفاده از تئوری کلاسیک و روش المان محدود برای ورق الاستیک ارائه شده و حل دقیق برای ورق الاستیک توسط مرجع [۱۳] مقایسه شده است. در جدول (۵-۲) فرکانس‌های متقارن-محوری برای ورق توپر ویسکوالاستیک (V. e) و الاستیک (E.) با شرط مرزی لبه‌ی گیردار برای نسبت‌های مختلف r_0/h و در جدول (۵-۴) نتایج برای لبه‌ی تکیه‌گاه ساده ارائه شده است.

درصد اختلاف به صورت $100 * ((A_{FE} - A_I) / A_{FE})$ که A_{FE} نتایج المان محدود و A_I نتایج حل ارائه شده را بیان می‌دارند. این نتایج در جدول (۳-۵) برای ورق گیردار و در جدول (۵-۵) برای ورق با تکیه‌گاه ساده ارائه شده است. با افزایش ضخامت ورق گیردار ویسکوالاستیک درصد اختلاف تئوری برشی در مد اول بیش‌تر و در مد دوم کم‌تر از تئوری کلاسیک است و در حالت الاستیک درصد اختلاف تئوری برشی در مد اول و دوم کم‌تر از تئوری کلاسیک، مرجع [۵۱] و مرجع [۱۳] است.

جدول (۲-۵). فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق توپر با لبه‌ی گیردار (*۱۰۰۰)

	r/h	مد اول				مد دوم			
		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰
ویسکوالاستیک	FSDT (V. e)	۶۱۳.۰۵	۳۴۵.۷۸	۱۷۹.۰۸	۷۲.۳۸	۱۹۸۸.۲۷	۱۲۸۳.۸۶	۷۰۳.۴۴	۲۸۹.۶۶
	CPT (V. e)	۷۲۰.۶۶	۳۶۰.۳۳	۱۸۰.۱۸	۷۲.۰۷	۲۸۸۳.۴۵	۱۴۴۱.۳۳	۷۲۰.۷۹	۲۸۸.۳۲
	FE (V. e)	۶۸۴.۴۸	۳۶۵.۱۳	۱۸۵.۸۳	۷۴.۵۶	۲۲۷۴.۲۱	۱۳۵۰.۹۰	۷۱۵.۱۲	۲۸۹.۹۸
	FSDT (E.)	۶۵۷.۳۱	۳۶۶.۴۱	۱۸۹.۰۶	۷۶.۳۱	۲۱۵۵.۰۳	۱۳۶۴.۶۹	۷۴۱.۰۸	۳۰۴.۲۴
الاستیک	CPT (E.)	۷۲۰.۶۷	۳۶۰.۳۳	۱۸۰.۱۹	۷۲.۰۶	۲۸۸۳.۴۵	۱۴۴۱.۳۳	۷۲۰.۷۹	۲۸۸.۲۶
	مرجع [۱۳]	۷۴۶.۰۱	۳۷۲.۹۹	۱۸۶.۵۰	۷۴.۵۹	۲۹۰۴.۲۱	۱۴۵۲.۱۱	۷۲۶.۰۵	۲۹۰.۴۲
	مرجع [۵۱]	۶۹۸.۳۸	۳۶۸.۴۷	۱۸۶.۴۴	۷۴.۷۰	۲۳۲۳.۹۵	۱۳۶۲.۸۸	۷۱۵.۸۵	۲۹۰.۱۵
	FE (E.)	۶۸۴.۶۲	۳۶۵.۶۳	۱۸۵.۹۴	۷۴.۶۱	۲۲۷۴.۷۳	۱۳۵۶.۰۲	۷۱۶.۷۴	۲۹۰.۸۴

جدول (۳-۵) درصد اختلاف فرکانس‌های طبیعی ورق توپر با لبه‌ی گیردار

	r/h	مد اول				مد دوم			
		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰
ویسکوالاستیک	FSDT (V. e)	۱۰.۴۳	۵.۲۹	۳.۶۳	۲.۹۲	۱۲.۵۷	۴.۹۶	۱.۶۳	۰.۱۱
	CPT (V. e)	-۵.۲۸	۱.۳۱	۳.۰۳	۳.۳۳	-۲۶.۷۸	-۶.۷۰	-۰.۷۹	۰.۵۹
	FE (V. e)	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
	FSDT (E.)	۳.۹۸	-۰.۲۱	-۱.۶۷	-۲.۲۹	۵.۲۶	-۰.۶۳	-۳.۳۹	۴.۶۰
الاستیک	CPT (E.)	-۵.۲۶	۱.۳۱	۳.۰۴	۳.۴۱	-۲۶.۷۶	-۶.۲۹	-۰.۵۶	۰.۸۸
	مرجع [۱۳]	-۸.۹۶	-۲.۱۵	-۰.۳۵	۰.۰۱	-۲۷.۶۷	-۷.۰۸	-۱.۳۰	۰.۱۴
	مرجع [۵۱]	-۲.۰۱	-۰.۹۱	-۰.۳۲	-۰.۱۲	-۲.۱۶	-۰.۵	۰.۱۲	۰.۲۳

برای ورق ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه ساده نیز برای ضخامت‌های زیاد درصد اختلاف‌های تئوری برشی نسبت به تئوری کلاسیک کم‌تر است. در حالت الاستیک نیز برای ضخامت‌های زیاد ورق درصد اختلاف تئوری برشی از مرجع [۵۱] و [۱۳] کم‌تر است.

جدول (۴-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق توپر با لبه‌ی تکیه‌گاه ساده (*۱۰۰۰)

	r_0/h	مد اول				مد دوم			
		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰
ویسکوالاستیک	FSDT (V. e)	۳۷۸.۵۱	۲۰۱.۰۸	۱۰۲.۲۱	۴۱.۰۷	۱۷۰۶.۶۷	۱۰۲۶.۸۱	۵۴۵.۵۲	۲۲۲.۲۸
	CPT (V. e)	۴۰۸.۵۱	۲۰۴.۲۵	۱۰۲.۱۳	۴۰.۸۵	۲۲۰۷.۱۹	۱۱۰۳.۵۹	۵۵۱.۷۹	۲۲۰.۷۷
	FE (V. e)	۳۴۵.۲۱	۱۷۶.۲۶	۸۸.۶۲	۳۵.۴۹	۱۸۵۶.۲۹	۱۰۳۷.۰۹	۵۳۶.۵۸	۲۱۶.۵۰
	FSDT (E.)	۴۰۲.۳۳	۲۱۲.۴۲	۱۰۷.۷۸	۴۳.۲۸	۱۸۳۴.۵۳	۱۰۸۶.۴۸	۵۷۳.۸۱	۲۳۳.۳۶
الاستیک	CPT (E.)	۴۰۸.۴۹	۲۰۴.۲۴	۱۰۲.۱۲	۴۰.۸۴	۲۲۰۷.۱۰	۱۱۰۳.۵۵	۵۵۱.۷۷	۲۲۰.۷۶
	مرجع [۱۳]	۳۵۴.۹۰	۱۷۷.۴۵	۸۸.۷۲	۳۵.۴۹	۲۱۶۶.۳۱	۱۰۸۳.۱۶	۵۴۱.۵۸	۲۱۶.۶۳
	مرجع [۵۱]	۳۵۰.۶۹	۱۷۸.۹۶	۸۹.۹۳	۳۶.۰۳	۱۷۵۵.۵۱	۱۰۳۸.۹۲	۵۳۶.۴۶	۲۱۶.۶۴
	FE (E.)	۳۴۵.۲۹	۱۷۶.۳۷	۸۸.۶۷	۳۵.۵۱	۱۸۵۶.۷۲	۱۰۳۹.۵۷	۵۳۷.۳۴	۲۱۶.۹۳

جدول (۵-۵) درصد اختلاف فرکانس‌های طبیعی ورق توپر با لبه‌ی تکیه‌گاه ساده

	r_0/h	مد اول				مد دوم			
		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۵	۱۰	۲۰	۵۰
ویسکوالاستیک	FSDT (V. e)	-۹.۶۴	-۱۴.۰۶	-۱۵.۳۳	-۱۵.۷۲	۸.۰۶	۰.۹۹	-۱.۶۶	-۲.۶۷
	CPT (V. e)	-۱۸.۳۳	-۱۵.۸۸	-۱۵.۲۴	-۱۳.۱۲	-۱۸.۹۰	-۶.۴۱	-۲.۸۳	-۱.۹۶
	FE (V. e)
	FSDT (E.)	-۱۶.۵۲	-۲۰.۴۳	-۲۱.۵۴	۲۱.۹۱	۱.۱۹	-۴.۵۱	-۶.۷۸	-۷.۵۷
الاستیک	CPT (E.)	-۱۸.۳۰	-۱۵.۸۰	-۱۵.۱۶	-۱۵.۰۴	-۱۸.۸۷	-۶.۱۵	-۲.۶۸	-۱.۷۶
	مرجع [۱۳]	-۲.۷۰	-۰.۶۰	-۰.۰۵	۰.۰۴	-۱۶.۶۷	-۴.۱۹	-۰.۷۸	۰.۱۳
	مرجع [۵۱]	-۱.۵۶	-۱.۴۶	-۱.۴۲	-۱.۴۸	۵.۴۵	۰.۰۶	۰.۱۶	۰.۱۳
	FE (E.)

در جدول (۵-۶) تا (۵-۱۱) فرکانس‌های طبیعی ورق حلقوی با لبه‌های گیردار با $r_i/r_o = 0.1, 0.3, 0.5$ و نسبت‌های r_o/h مختلف و درصد اختلاف‌های آن‌ها با تئوری کلاسیک، المان محدود برای ویسکوالاستیک و حل دقیق تئوری کلاسیک [۱۳] و مرجع [۵۱] در حالت الاستیک ارائه شده است، با توجه به این جدول‌ها می‌توان دریافت که پارامتر ویسکوالاستیک تأثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی ندارد. همچنین برای مقادیر زیاد r_o/h درصد اختلاف تئوری کلاسیک کوچک‌تر از تئوری برشی است (در مقایسه با حل المان محدود). برای مقادیر کوچک r_o/h نتایج ویسکوالاستیک تئوری برشی از نتایج تئوری کلاسیک آن به خصوص در مد دوم دقیق‌تر هستند. همچنین نتایج تئوری کلاسیک برای ورق الاستیک نسبت به مرجع [۵۱] دقیق‌تر است. با کاهش r_i/r_o دقت تئوری کلاسیک برای ورق‌های ضخیم کاهش و دقت تئوری برشی برای ورق‌های نازک کم می‌شود.

جدول (۵-۶) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o = 0.3$ (*۱۰۰۰)

	r_o/h	مد اول			مد دوم		
		۱۰	۲۰	۵۰	۱۰	۲۰	۵۰
ویسکوالاستیک	FSDT (V. e)	۱۵۳۶.۴۸	۸۵۰.۰۹	۳۵۱.۳۹	۳۶۹۸.۹۷	۲۲۳۷.۳۱	۹۶۰.۵۹
	CPT (V. e)	۱۶۶۷.۳۲	۸۳۳.۶۶	۳۳۳.۴۵	۴۵۹۶.۰۹	۲۲۹۸.۲۹	۹۱۹.۲۲
	FE (V.e)	۱۴۷۳.۱۷	۸۰۶.۹۳	۳۳۳.۶۴	۳۶۲۹.۵۴	۲۱۶۱.۲۵	۹۱۲.۵۸
الاستیک	FSDT (E.)	۱۵۳۶.۵۲	۸۵۰.۱۸	۳۵۴۱.۴۰	۳۶۹۸.۷۳	۲۲۳۷.۲۷	۹۶۰.۶۰
	مرجع [۱۳]	۱۶۵۵.۷۷	۸۲۷.۸۸	۳۳۱.۱۵	۴۵۷۷.۱۹	۲۲۸۸.۶۹	۹۱۵.۴۸
	مرجع [۵۱]	۱۵۱۱.۸۹	۸۱۳.۸۹	۳۳۱.۴۹	۳۷۰۶.۹۹	۲۱۶۴.۱۴	۹۱۰.۲۷
	FE (E.)	۱۴۸۰.۹۳	۸۰۹.۴۱	۳۳۱.۱۶	۳۶۶۳.۳۲	۲۱۷۴.۳۳	۹۱۷.۹۶

جدول (۵-۷) درصد اختلاف فرکانس‌های طبیعی ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o = 0.3$

ویسکوالاستیک	ν	r_o/h	مد اول			مد دوم		
			۱۰	۲۰	۵۰	۱۰	۲۰	۵۰

الاستیک	FSDT (V. e)	-۴.۳۰	-۵.۳۴	-۵.۳۲	-۱.۹۱	-۳.۵۱	-۵.۲۶
	CPT (V. e)	-۱۳.۱۸	-۳.۳۱	۰.۰۵	-۲۶.۶۳	-۶.۳۴	-۰.۷۲
	FE (V.e)	۰	۰	۰	۰	۰	۰
	FSDT (E.)	-۳.۷۵	-۵.۰۳	-۶.۱۱	-۰.۹۶	-۲.۸۹	-۴.۶۴
	مرجع [۱۳]	-۱۱.۸۰	-۲.۲۸	۰.۰۰۲	-۲۴.۹۴	-۵.۲۵	-۰.۲۷
	مرجع [۵۱]	-۲.۰۹	-۰.۵۵	-۰.۱	-۱.۱۹	۰.۴۶	۰.۸۴
	FE (E.)	۰	۰	۰	۰	۰	۰

جدول (۸-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار (*۱۰۰۰) با $r_i/r_o=0.1$

r_o/h	مد اول			مد دوم		
	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰	۲۰	۵۰
FSDT (V. e)	۹۷۷.۸۱	۵۲۲.۱۲	۲۱۳.۱۲	۲۴۴۹.۹۵	۱۳۹۷.۲۸	۵۸۴.۴۴
CPT (V. e)	۱۰۰۸.۵۰	۵۰۴.۲۵	۲۰۱.۷۰	۲۷۸۰.۴۰	۱۳۹۰.۲۰	۵۵۶.۰۹
FE (V.e)	۹۱۵.۵۸	۴۸۹.۱۴	۱۹۸.۷۳	۲۳۳۶.۴۵	۱۳۲۴.۲۸	۵۴۷.۹۲

جدول (۹-۵) درصد اختلاف فرکانس‌های طبیعی ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o=0.1$

r_o/h	مد اول			مد دوم		
	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰	۲۰	۵۰
FSDT (V. e)	-۶.۷۹	-۶.۷۴	-۷.۲۴	-۴.۸۶	-۵.۵۱	-۶.۶۶
CPT (V. e)	-۱۰.۱۵	-۳.۰۹	-۱.۴۹	-۱۹.۰۰	-۴.۹۸	-۱.۴۹
FE (V.e)	۰	۰	۰	۰	۰	۰

جدول (۱۰-۵) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار (*۱۰۰۰) با $r_i/r_o=0.5$

r_o/h	مد اول			مد دوم		
	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰	۲۰	۵۰

FSDT (V. e)	۲۷۱۲.۶۵	۱۶۰۹.۱۸	۶۸۴.۵۲	۶۱۲۷.۹۱	۴۰۹۰.۱۹	۱۸۵۶.۸۸
CPT (V. e)	۳۲۶۸.۰۸	۱۶۳۴.۰۴	۶۵۳.۵۳	۹۰۰۷.۵۰	۴۵۰۳.۷۵	۱۸۰۱.۶۷
FE (V.e)	۲۶۸۲.۰۹	۱۵۵۲.۹۶	۶۴۹.۲۵	۶۲۵۰.۷۷	۴۰۴۸.۶۴	۱۷۸۹.۰۲

جدول (۵-۱۱) درصد اختلاف فرکانس‌های طبیعی ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o=0.5$

r_o/h	مد اول			مد دوم		
	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰	۲۰	۵۰
FSDT (V. e)	-۱.۱۴	-۳.۸۵	-۵.۴۳	۱.۹۶	-۱.۰۳	-۳.۲۴
CPT (V. e)	-۲۱.۸۴	-۵.۲۲	-۰.۶۶	-۴۴.۱۰	-۱۱.۲۴	-۰.۷۰۷
FE (V.e)

دو فرکانس متقارن محوری اول ورق با تکیه‌گاه‌های گیردار-گیردار (C-C)، تکیه‌گاه‌های ساده-ساده (S-S)، و لبه‌ی داخلی گیردار و لبه‌ی خارجی تکیه‌گاه ساده (C-S) در جدول‌های (۵-۱۲) و (۵-۱۳) ارائه شده است. با مقایسه‌ی این نتایج، مشاهده می‌شود که اگر یک لبه‌ی ورق گیردار باشد، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. این افزایش می‌تواند به دلیل افزایش سفتی ورق باشد. همچنین، درصد اختلاف‌های تئوری کلاسیک برای تکیه‌گاه (S-S) کم‌تر است.

جدول (۵-۱۲) فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی با شرایط مرزی مختلف (۱۰۰۰*) با $r_i/r_o=0.3$ و $r_o/h=10$

Support	مد اول			مد دوم		
	C-C	S-S	C-S	C-C	S-S	C-S
FSDT (V. e)	۱۵۳۶.۴۸	۷۵۱.۷۱	۱۱۱۸.۵۹	۳۳۹۸.۹۸	۲۷۳۷.۵۵	۳۲۲۷.۴۷
CPT (V. e)	۱۶۶۷.۳۲	۷۳۵.۵۰	۱۱۴۹.۱۴	۴۵۹۶.۰۹	۲۹۴۲.۰۰	۳۷۲۳.۸۸
FE	۱۴۷۳.۱۷	۷۴۴.۷۸	۱۰۲۴.۷۸	۳۶۲۹.۵۴	۲۶۷۰.۵۹	۳۰۸۶.۲۷

جدول (۵-۱۳) درصد اختلاف فرکانس‌های طبیعی ورق حلقوی با شرایط مرزی مختلف با $r_i/r_o=0.3$ و $r_o/h=10$

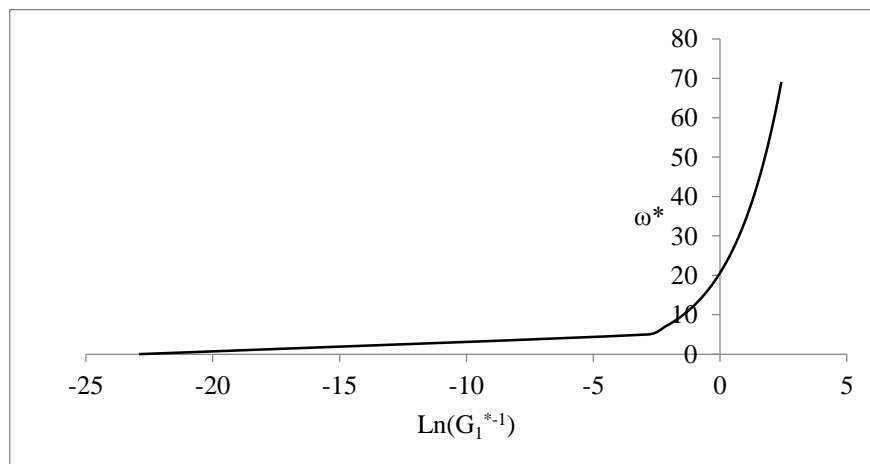
Support	مد اول			مد دوم		
	C-C	S-S	C-S	C-C	S-S	C-S
FSDT (V. e)	-۴.۳۰	-۰.۹۳	-۹.۱۵	-۱.۹۱	-۲.۵۱	-۴.۵۷
CPT (V. e)	-۱۳.۱۸	-۱.۲۵	-۱۲.۱۳	-۲۶.۶۳	-۱۰.۱۶	-۲۰.۶۵
FE

در تئوری کلاسیک امکان محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی شعاعی ورق وجود ندارد؛ در حالی که با استفاده از معادلات استخراج شده بر اساس تئوری برشی مرتبه‌ی اول، امکان محاسبه‌ی فرکانس‌های شعاعی نیز وجود دارد. جدول (۵-۱۴) دو فرکانس اول شعاعی ورق را ارائه کرده است.

جدول (۵-۱۴) فرکانس‌های طبیعی شعاعی بی‌بعد ورق حلقوی گیردار-گیردار با $r_i/r_o=0.3$ و $r_o/h=10$

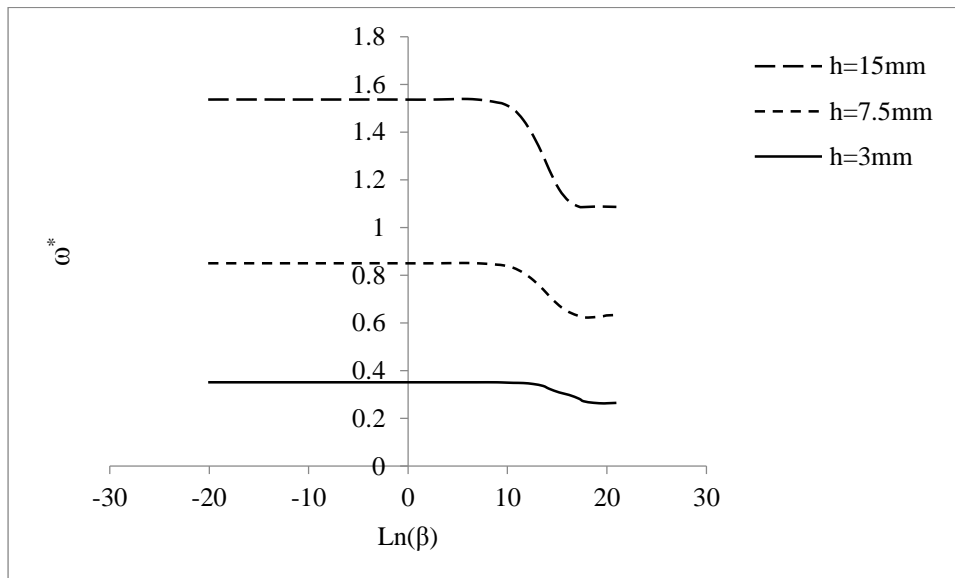
Support	مد اول		مد دوم	
	ω*	ω*	ω*	ω*
FSDT (V. e)	۵.۷۰۲۴۷	۱۱.۳۸۴۱۸		

شکل (۵-۱) تغییرات فرکانس با مدول الاستیسیته‌ی G_1 را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای مقادیر بزرگ G_1 ، یک افزایش ناگهانی در فرکانس طبیعی رخ می‌دهد؛ در حالی که در مقادیر کوچک G_1 ، تغییرات فرکانس قابل توجه نیست.



شکل (۵-۱) اثر G_1^* بر فرکانس طبیعی ورق ویسکوالاستیک.

شکل (۲-۵) اثر زمان رهایش را بر فرکانس طبیعی ورق گیردار-گیردار با ضخامت‌های مختلف نشان می‌دهد. با افزایش زمان رهایش فرکانس‌های طبیعی تقریباً ثابت می‌ماند و سپس یک تغییر ناگهانی ملاحظه می‌شود، هنگامی که زمان رهایش خیلی کوچک است رفتار ماده به الاستیک نزدیک می‌شود.

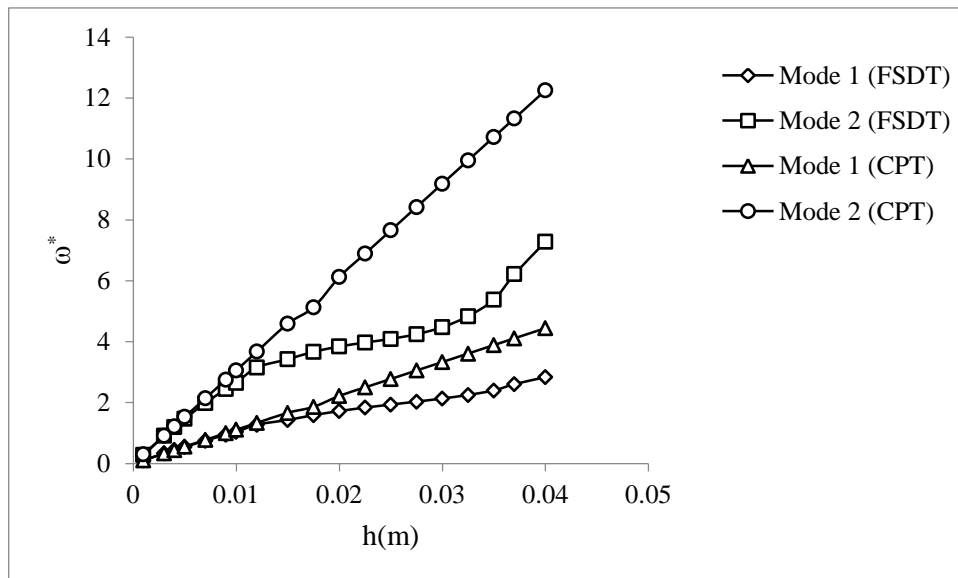


شکل (۲-۵) اثر زمان رهایش بر فرکانس طبیعی (مد اول)

شکل (۳-۵) اثر ضخامت بر فرکانس طبیعی ورق گیردار-گیردار را بیان می‌کند. با توجه به این نمودار با افزایش ضخامت فرکانس‌های طبیعی ورق افزایش می‌یابند و شیب این تغییر در مد دوم بیشتر می‌شود. در ضخامت‌های کم مقادیر فرکانس‌های تئوری برشی و کلاسیک در هر دو مد تقریباً یکسان است، اما در ضخامت‌های زیاد، تئوری کلاسیک فرکانس‌ها را بیش‌تر پیش‌بینی می‌کند. همچنین شیب نمودار برای مد دوم تئوری کلاسیک در مقایسه با تئوری برشی مقدار بیش‌تری است. این اختلاف در ضخامت‌های زیاد می‌تواند به دلیل عدم در نظر گرفتن اثر برش در تئوری کلاسیک باشد.

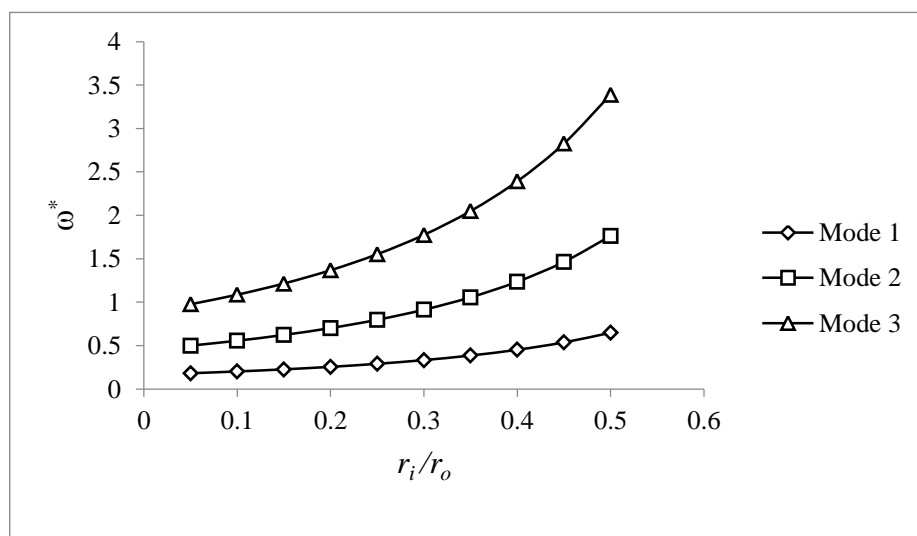
شکل (۴-۵) اثر نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق گیردار-گیردار را نشان می‌دهد. با افزایش شعاع داخلی فرکانس طبیعی ورق افزایش یافته و شیب این تغییر در مد دوم بیش‌تر است. در شکل (۵-۵) اثر بار شعاعی بر روی ورق گیردار-گیردار بر اساس تئوری برشی مرتبه اول ارائه شده است.

برای مقادیر منفی بار فشاری و برای مقادیر مثبت بار کششی است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تغییرات فرکانس با بار در محدوده‌ی مطالعه شده به صورت خطی است.



شکل (۳-۵) اثر ضخامت بر فرکانس طبیعی ورق گیردار-گیردار

در جدول‌های (۱۵-۵) و (۱۶-۵)، اثر بار شعاعی وارده بر روی لبه‌ی خارجی ورق با تکیه‌گاه‌های ساده ارائه شده است. بار شعاعی فشاری فرکانس‌های طبیعی ورق را کاهش، و بار کششی فرکانس‌های طبیعی ورق را افزایش می‌دهند.



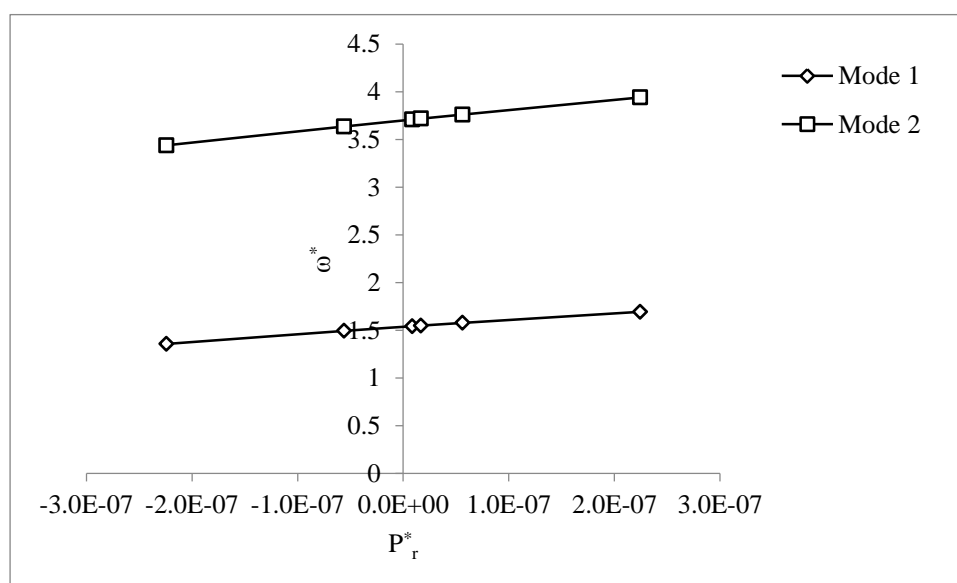
شکل (۴-۵) اثر نسبت r_i/r_o بر فرکانس طبیعی ورق گیردار-گیردار

جدول (۵-۱۵) اثر بار کششی بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق با تکیه‌گاه‌های ساده-ساده با $r_i/r_o = 0.3$ ، $r_o/h=10$

Radial tension load (MPa)	مد اول		مد دوم	
	۲.۵	۵	۲.۵	۵
FSDT (V. e)	۷۵۲.۰۹	۷۵۲.۴۲	۲۷۳۷.۶۲	۲۷۳۸.۱۶
CPT (V. e)	۷۵۲.۶۱	۷۵۶.۰۷	۲۹۵۳.۹۸	۲۹۵۹.۲۴
FE	۷۴۳.۷۰	۷۴۵.۸۷	۲۶۶۱.۳۱	۲۶۶۳.۵۹

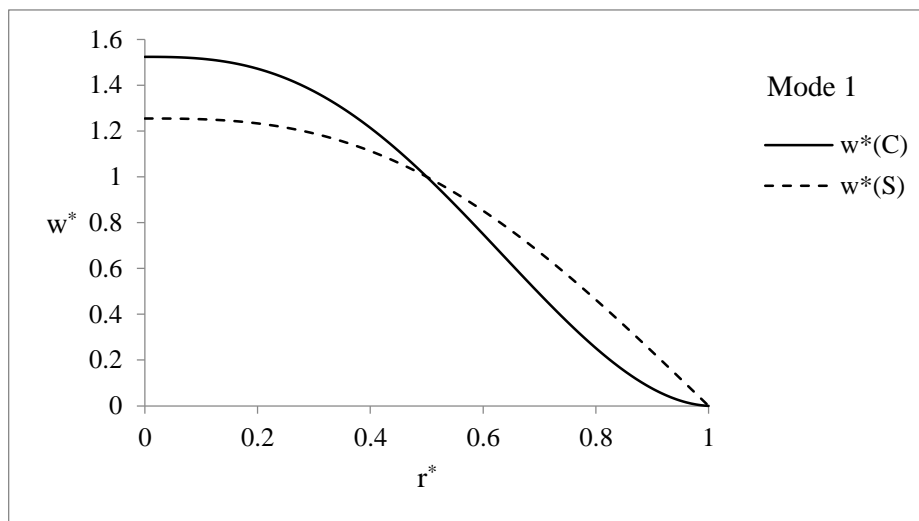
جدول (۵-۱۶) اثر بار فشاری بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق با تکیه‌گاه‌های ساده-ساده با $r_i/r_o = 0.3$ ، $r_o/h=10$

Radial pressure (MPa)	مد اول		مد دوم	
	-۲.۵	-۵	-۲.۵	-۵
FSDT (V. e)	۷۵۱.۳۲	۷۵۰.۸۸	۲۷۳۷.۰۹	۲۷۳۶.۵۵
CPT (V. e)	۷۱۸.۰۴	۷۱۰.۶۳	۲۹۲۹.۶۱	۲۹۲۴.۸۰
FE	۷۴۵.۹۰	۷۴۳.۶۷	۲۶۸۰.۱۴	۲۶۷۷.۸۸

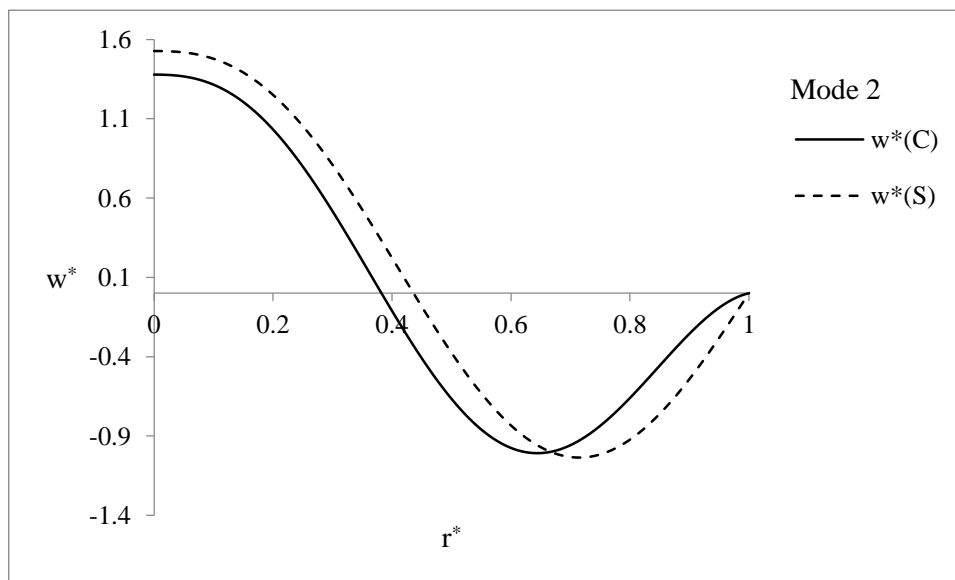


شکل (۵-۵) اثر بار شعاعی بر فرکانس‌های طبیعی ورق گیردار-گیردار

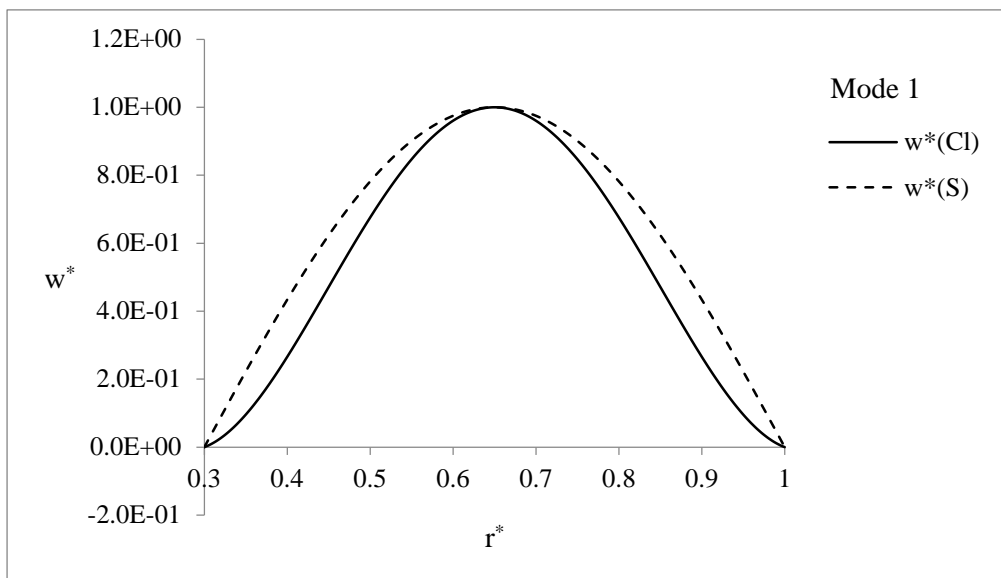
در شکل (۶-۵) و (۷-۵) به ترتیب شکل‌های مد اول و دوم ورق توپر با تکیه‌گاه‌های گیردار $w^*(C)$ و ساده $w^*(S)$ را نشان می‌دهد. شکل‌های (۸-۵) و (۹-۵) به ترتیب شکل‌های مد اول و دوم ورق حلقوی با تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار را بر اساس تئوری برشی مرتبه اول نشان می‌دهند.



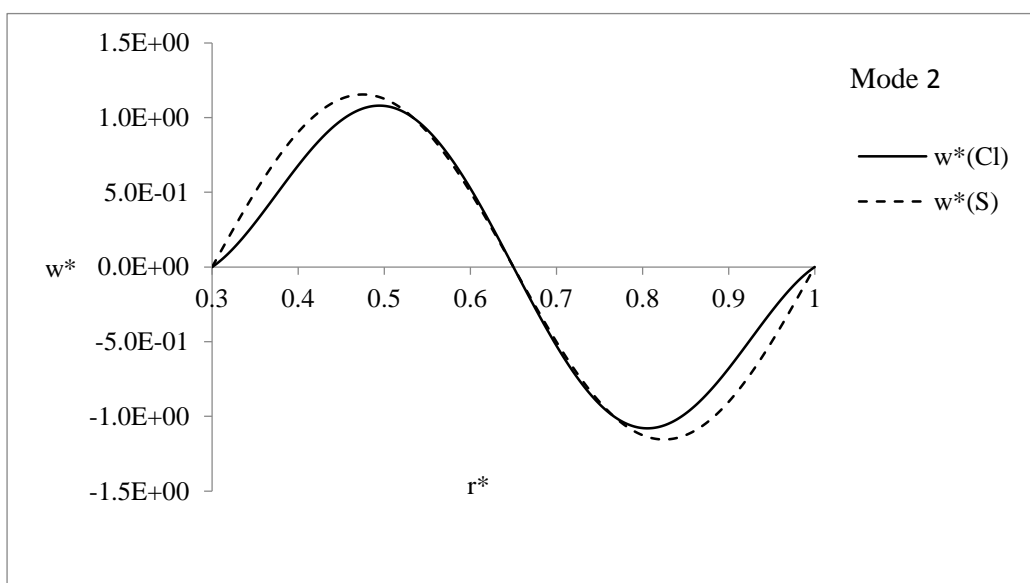
شکل (۶-۵) شکل مد اول ورق توپر گیردار و ساده



شکل (۷-۵) شکل مد دوم ورق توپر گیردار و ساده

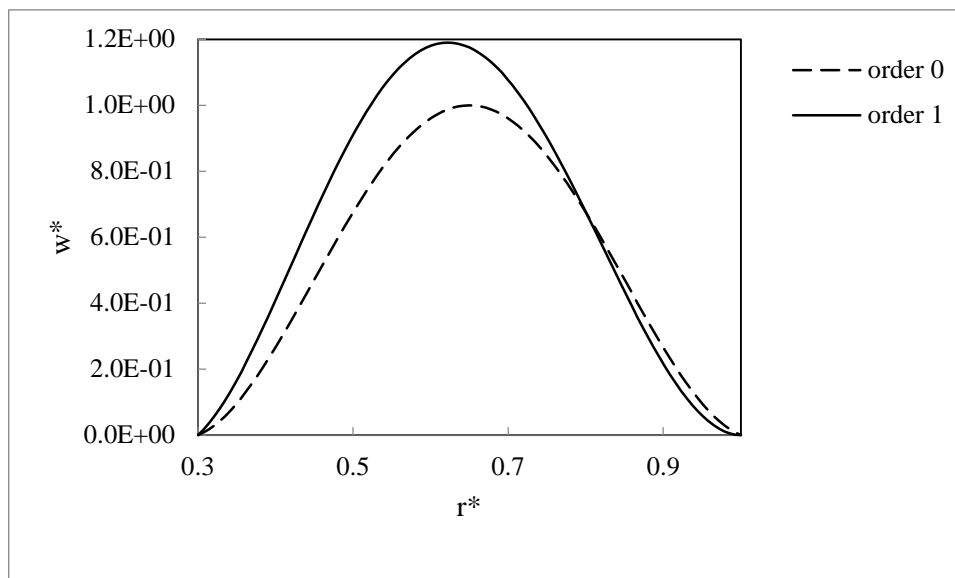


شکل (۸-۵) شکل مد اول ورق حلقوی گیردار و ساده



شکل (۹-۵) شکل مد دوم ورق حلقوی گیردار و ساده

در شکل (۱۰-۵) شکل مد اول ورق حلقوی گیردار با در نظر گرفتن حل معادلات مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم ε ارائه شده است.



شکل (۵-۱۰) شکل مد اول ورق حلقوی گیردار

۵-۳- پاسخ بار دینامیکی

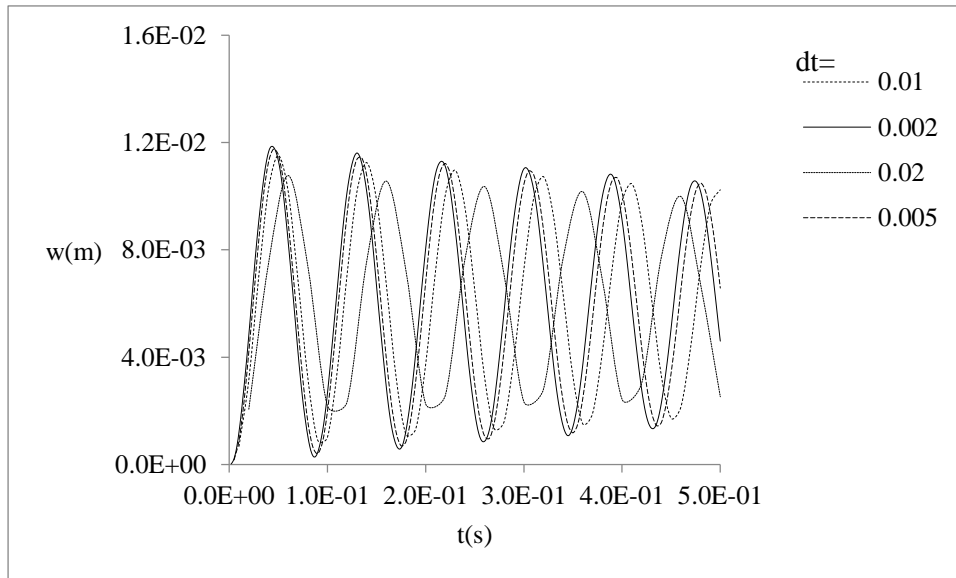
در این بخش به بررسی پاسخ ورق به بار عرضی تابع زمان پرداخته می‌شود. بار عرضی تعریف شده، یک بار فشاری گسترده به مقدار ۳ KPa است که به مدت یک ثانیه به ورق وارد می‌شود. در تحلیل پاسخ مشخصات هندسی و خواص مکانیکی ورق به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

جدول (۵-۱۷) مشخصات هندسی و مکانیکی ورق

$r_o=0.15$	شعاع خارجی (m)
$r_i=0.045$	شعاع داخلی (m)
$h=0.015$	ضخامت (m)
$G_1=9.8e5, G_2=2.45e7$	مدول‌های ویسکوالاستیک (Pa)
$\eta=2.744e5$	ضریب ویسکوزیته (Pa.s)
$\nu=0.3$	ضریب پواسون
$\rho=7800$	چگالی (kg/m^3)

شکل (۵-۱۱)، پاسخ عرضی ورق به روش عددی به ازای گام‌های زمانی مختلف را نشان می‌دهد. در این تحلیل از المان ۱۸۲ Plane استفاده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود به ازای گام زمانی

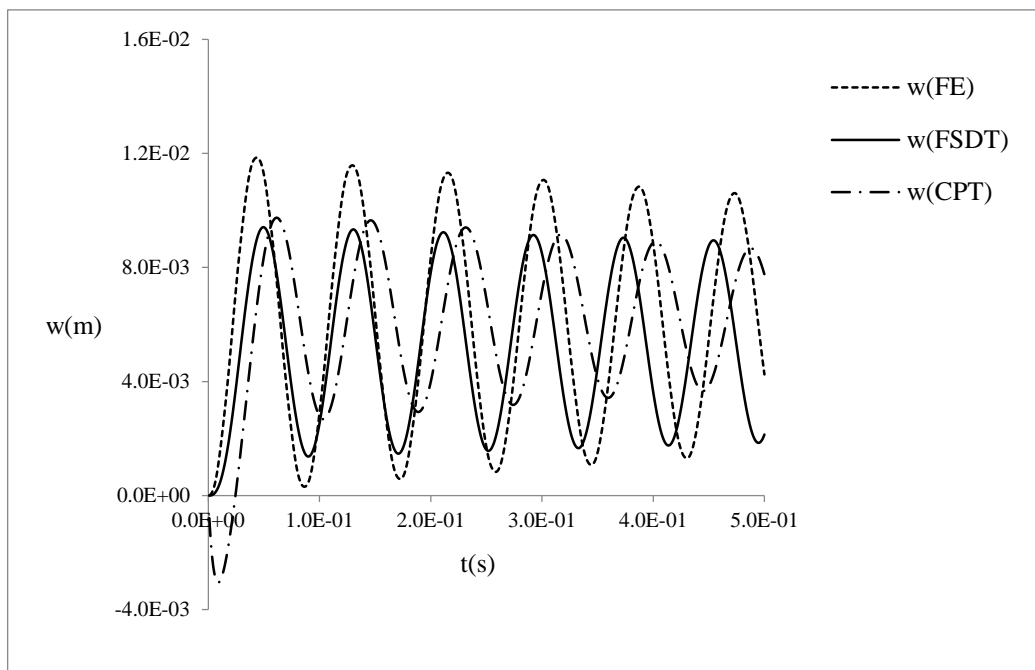
۰.۰۰۲ ثانیه تغییر قابل ملاحظه‌ای در نتایج ایجاد نمی‌شود، از این رو گام زمانی ۰.۰۰۲ به‌عنوان گام زمانی بهینه استفاده شده است.



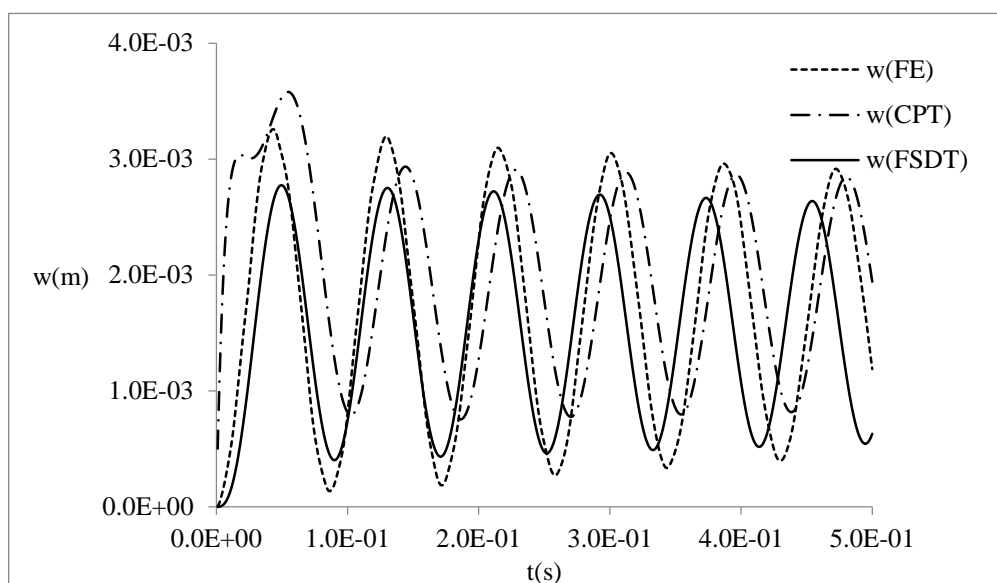
شکل (۵-۱۱) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ به‌ازای گام‌های زمانی مختلف

شکل (۵-۱۲)، پاسخ عرضی در وسط شعاع داخلی و شعاع خارجی $(r=0.0975 \text{ m})$ و شکل (۵-۱۳) پاسخ عرضی در نزدیک لبه‌ی خارجی $(r=0.14 \text{ m})$ با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌ی اول و تئوری کلاسیک و حل عددی را نشان می‌دهند. به‌منظور مقایسه‌ی بهتر نتایج ۰.۵ ثانیه از زمان بارگذاری نشان داده شده است. مقدار دامنه‌ی نوسانات در تئوری برشی نسبت به تئوری کلاسیک به حل عددی نزدیک‌تر است. همچنین حل عددی خیز را بیش‌تر از حل برشی و کلاسیک نشان می‌دهد.

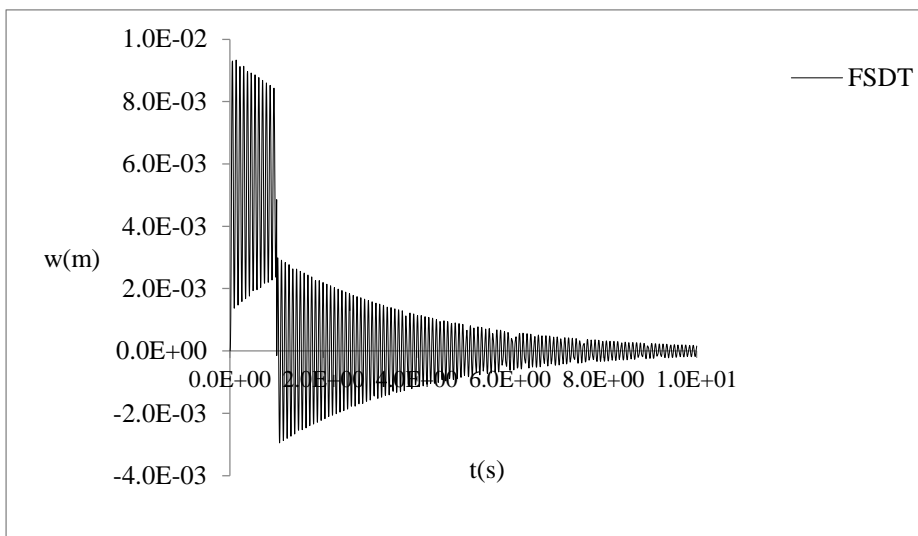
شکل (۵-۱۴)، (۵-۱۵) و (۵-۱۶) پاسخ عرضی ورق در $(r=0.0975 \text{ m})$ به‌ترتیب با حل تحلیلی تئوری برشی مرتبه‌ی اول، حل تحلیلی تئوری کلاسیک و حل عددی به‌مدت ۱۰ ثانیه را نشان می‌دهند. به دلیل محدودیت سخت‌افزاری برای انجام محاسبات عددی، در اینجا مقدار گام زمانی ۰.۰۲ ثانیه در نظر گرفته شده است. در زمان اعمال بار ورق حول خیز استاتیکی خود نوسان کرده و پس از حذف بار، خیز نوسانی ورق حول صفر ادامه می‌یابد.



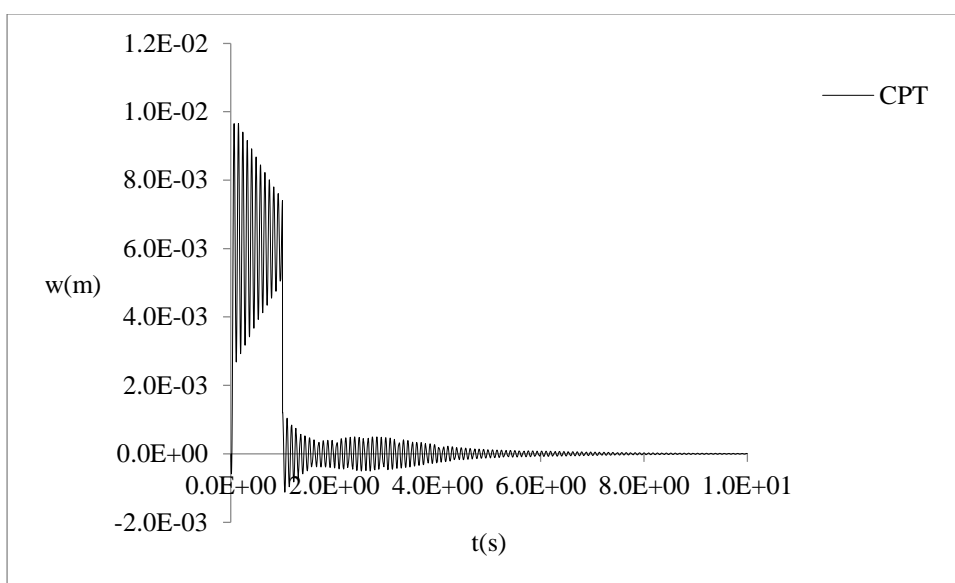
شکل (۱۲-۵) پاسخ عرضی ورق در ($r=0.0975$ m)



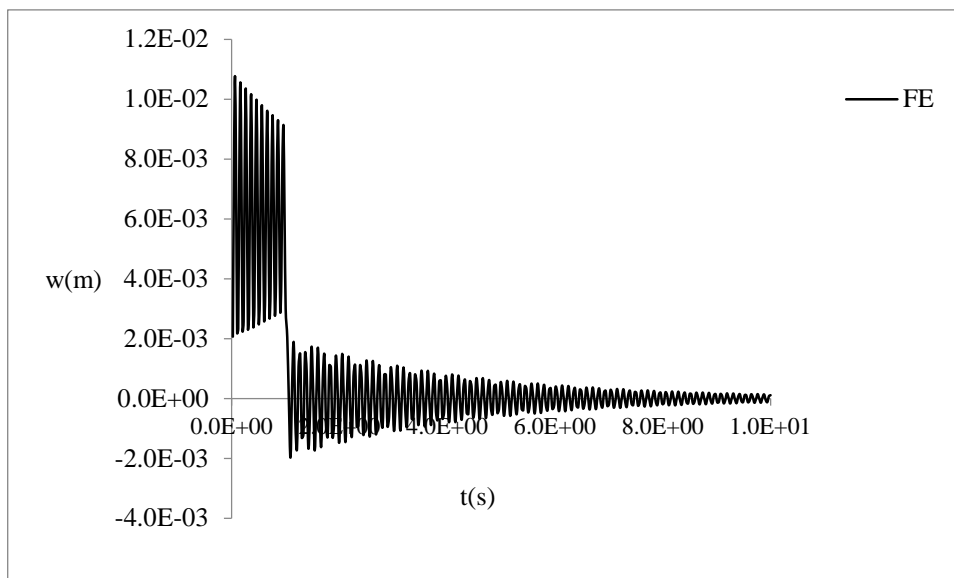
شکل (۱۳-۵) پاسخ عرضی ورق در ($r=0.14$ m)



شکل (۵-۱۴) پاسخ عرضی در $(r=0.0975 \text{ m})$ تئوری برشی مرتبه اول

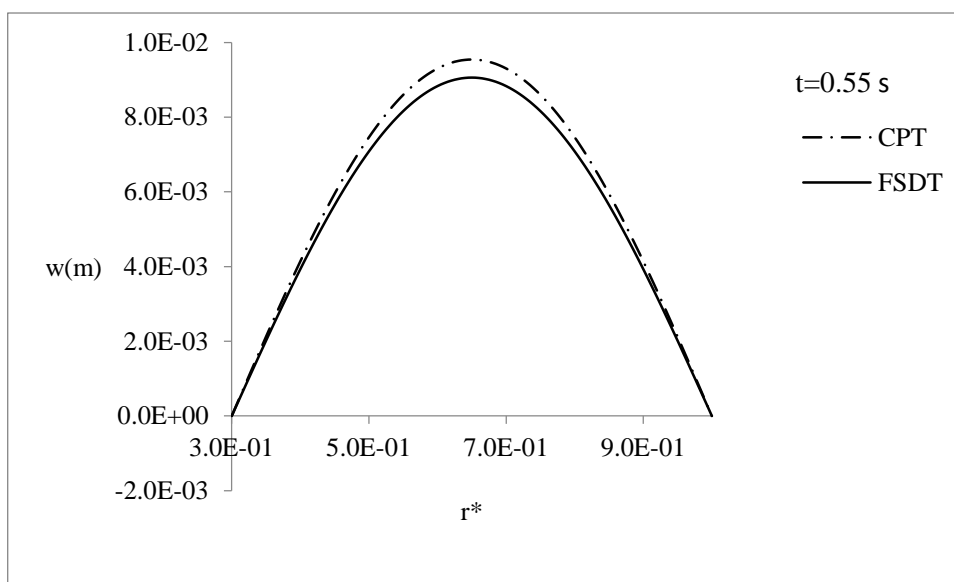


شکل (۵-۱۵) پاسخ عرضی در $(r=0.0975 \text{ m})$ تئوری کلاسیک



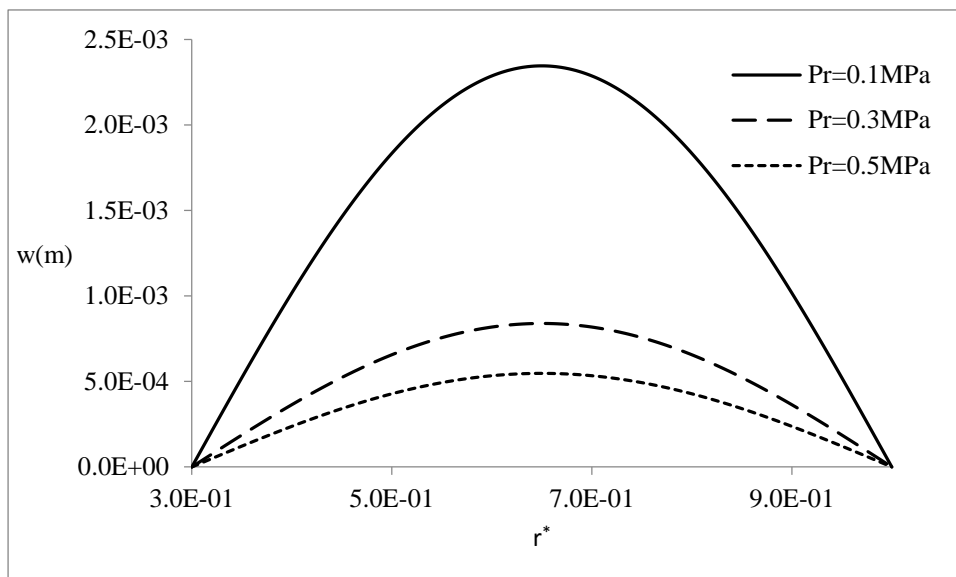
شکل (۱۶-۵) پاسخ عرضی در $(r=0.0975 \text{ m})$ حل عددی

شکل (۱۷-۵) خیز عرضی ورق بر اساس تئوری برشی و تئوری کلاسیک در زمان 0.55 ثانیه را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود حل کلاسیک خیز را بیش‌تر از تئوری برشی نشان می‌دهد.



شکل (۱۷-۵) خیز عرضی ورق در $t=0.55$ ثانیه

شکل (۵-۱۸) خیز عرضی ورق را به‌ازای بارهای شعاعی کششی مختلف در زمان ۰.۵ ثانیه بر اساس تئوری برشی نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش بار شعاعی کششی خیز ورق کاهش می‌یابد.

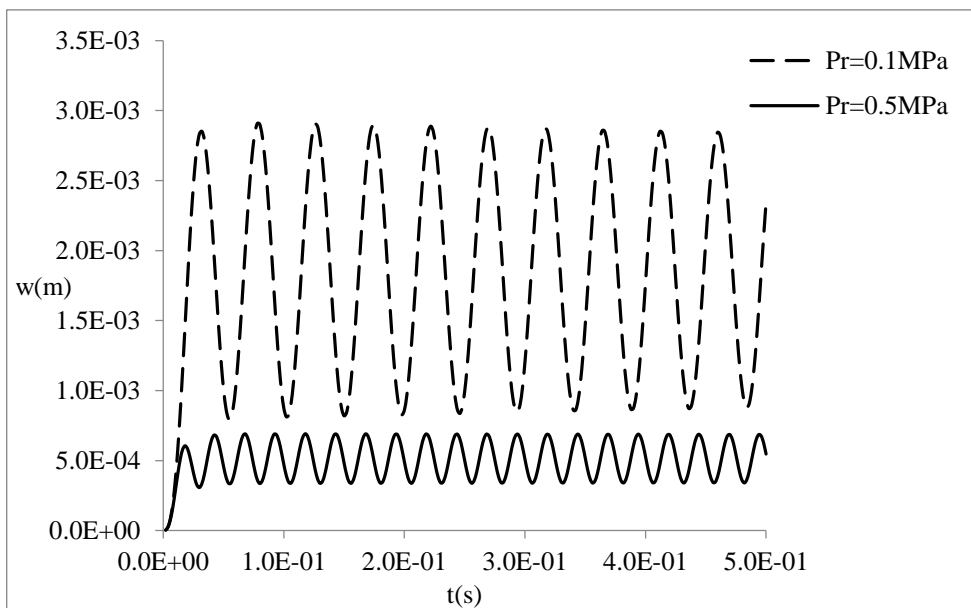


شکل (۵-۱۸) اثر بار شعاعی کششی بر خیز عرضی ورق در $t=0.5$ ثانیه

در شکل (۵-۱۹) پاسخ عرضی ورق به‌ازای دو بار شعاعی کششی مختلف نشان داده شده است. با افزایش بار شعاعی پاسخ عرضی ورق کاهش می‌یابد.

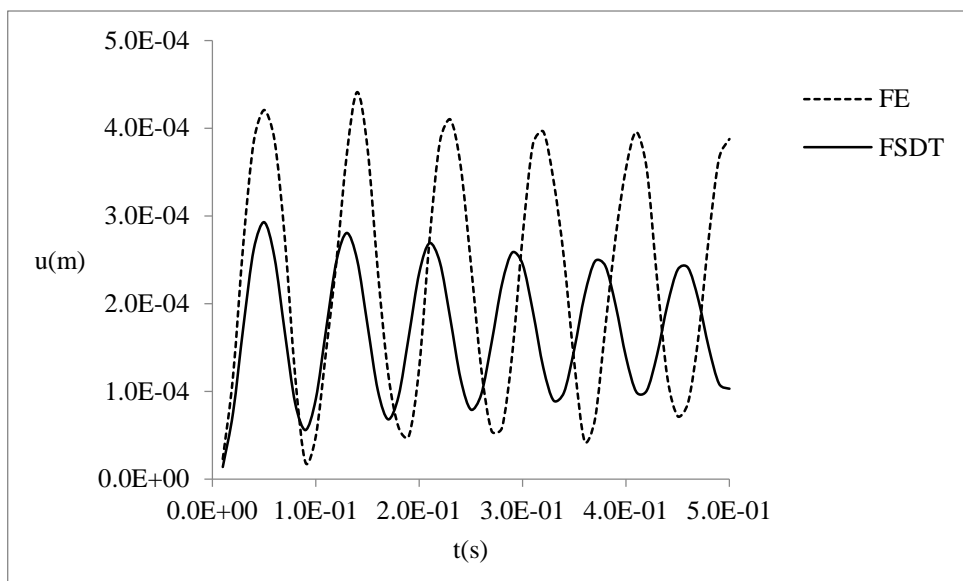
شکل (۵-۲۰) پاسخ شعاعی ورق در $(r=0.1\text{m})$ و $(z=h/2)$ را نشان می‌دهد. یکی از مزیت‌های تئوری برشی مرتبه‌ی اول تعیین پاسخ شعاعی ورق است.

شکل (۵-۲۱) خیز شعاعی ورق در $z=h/2$ و $z=h/4$ را نشان می‌دهد. با تغییر ضخامت از لایه‌ی میانی به سطوح بالاتر ورق خیز شعاعی افزایش می‌یابد.

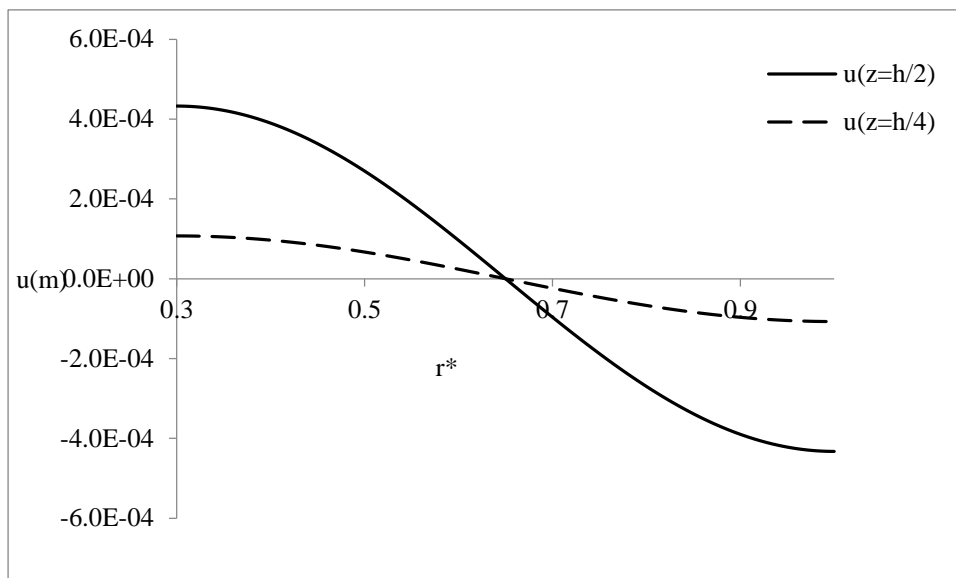


شکل (۱۹-۵) پاسخ عرضی ورق به‌ازای بار کششی در ($r=0.0975$ m)

شکل (۲۲-۵) اثر مدول G_1 را بر پاسخ عرضی ورق نشان می‌دهد. با افزایش G_1 خیز عرضی ورق و همچنین مقدار متوسط یعنی خیز استاتیکی به شدت کاهش یافته و فرکانس پاسخ افزایش می‌یابد.

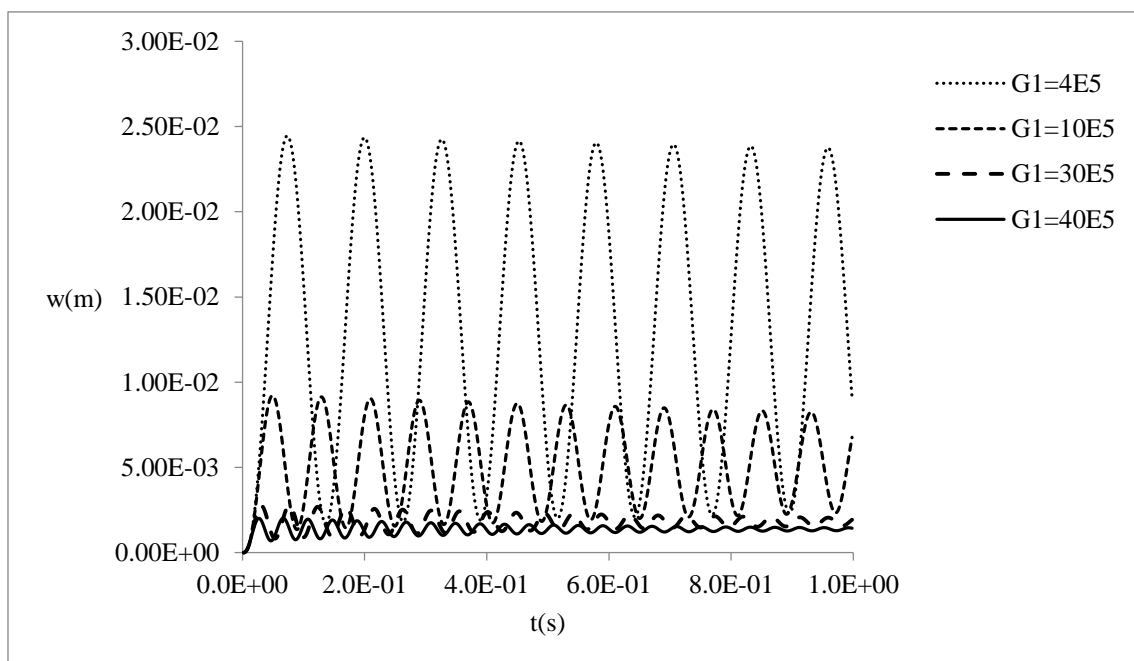


شکل (۲۰-۵) پاسخ شعاعی ورق در ($r=0.1$ m) و ($z=h/2$)

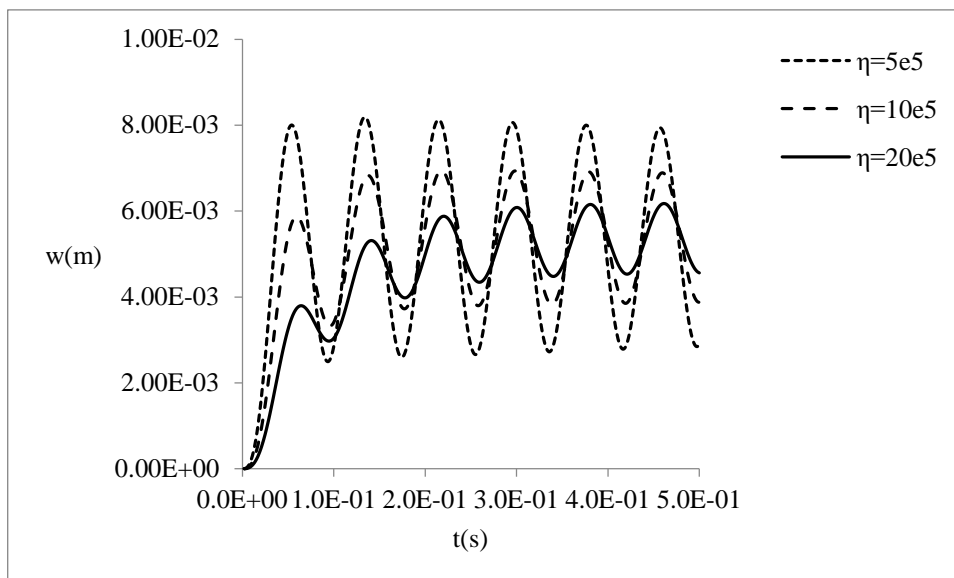


شکل (۵-۲۱) خیز شعاعی ورق در $z=h/4$ و $z=h/2$

شکل (۵-۲۳) اثر ضریب ویسکوزیته η را بر پاسخ عرضی ورق نشان می‌دهد. با افزایش مقدار ضریب ویسکوزیته، خیز نوسانات افزایش یافته اما مقدار متوسط ثابت باقی می‌ماند. همچنین فرکانس نوسانات ثابت باقی می‌ماند.

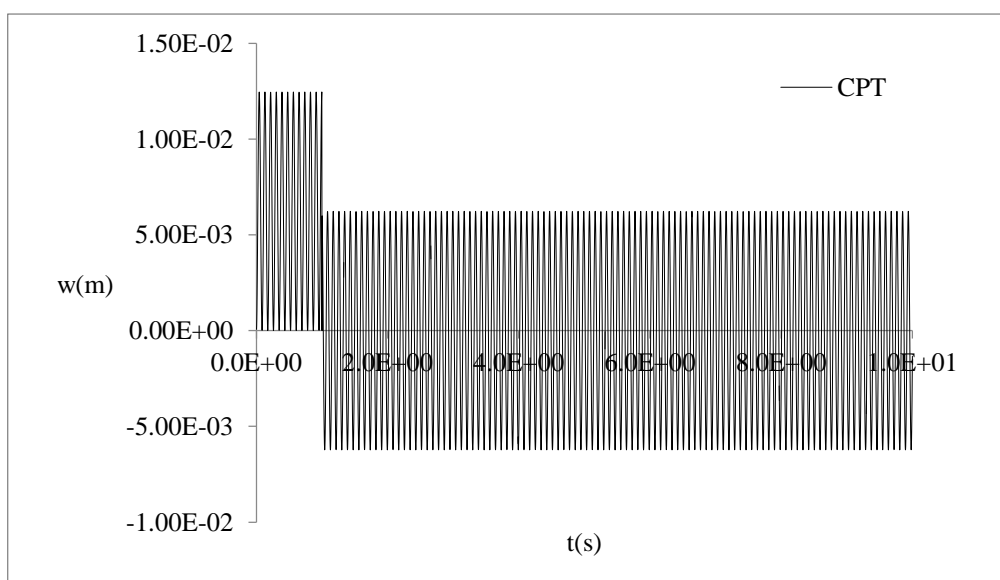


شکل (۵-۲۲) اثر مدول G_1 بر پاسخ عرضی در $(r=0.0975 \text{ m})$

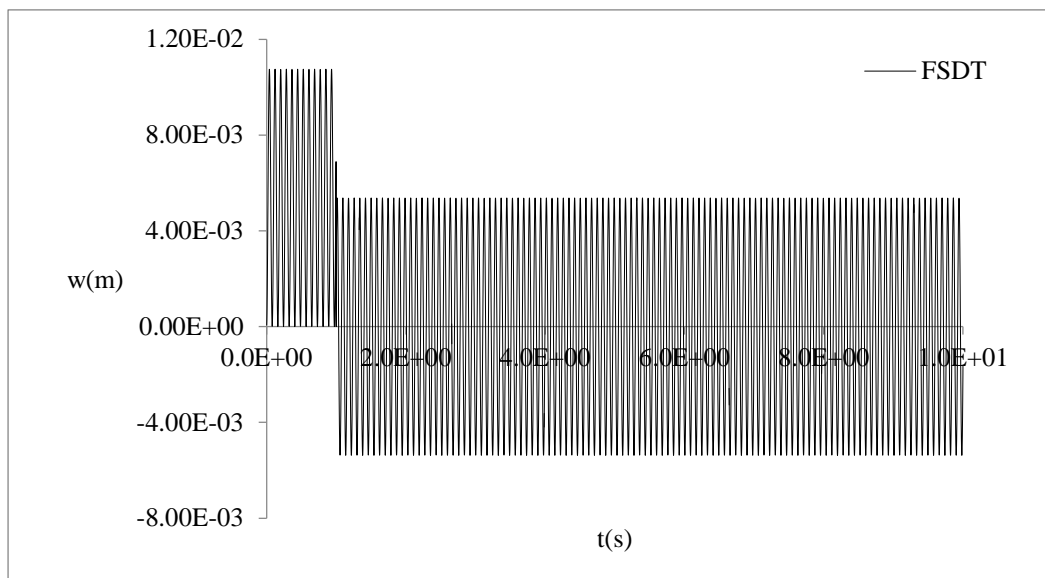


شکل (۲۳-۵) اثر ضریب ویسکوزیته η بر پاسخ عرضی در $(r=0.0975 \text{ m})$

پاسخ عرضی ورق الاستیک با قرار دادن $\tau \rightarrow 0$ برای تئوری کلاسیک و تئوری برشی به دست می آید. در شکل (۲۴-۵) این نتایج برای تئوری کلاسیک و در شکل (۲۵-۵) برای ورق با تئوری برشی ارائه شده است. همانطور که مشاهده می شود مقدار خیز نواسانها در تئوری کلاسیک از تئوری برشی بیشتر است.



شکل (۲۴-۵) پاسخ عرضی ورق الاستیک بر اساس تئوری کلاسیک در $(r=0.0975 \text{ m})$



شکل (۵-۲۵) پاسخ عرضی ورق الاستیک بر اساس تئوری برشی در ($r=0.0975 \text{ m}$)

۴-۵- جمع بندی

در این فصل به بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل‌های سوم و چهارم پرداخته شد. نتایج مربوط به فرکانس طبیعی بدون در نظر گرفتن بار شعاعی ارائه و تأثیر پارامترهای مختلف بر روی آن بررسی شد. همچنین تأثیر بار شعاعی بر فرکانس طبیعی نشان داده شد؛ در نهایت پاسخ دینامیکی سازه بر حسب مکان و زمان تعیین شد. در اکثر نتایج، نتایج حاصل از حل تحلیلی تئوری برشی مرتبه‌ی اول، حل تحلیلی تئوری کلاسیک و در نهایت حل عددی با یکدیگر مقایسه شدند.

فصل ششم
نتیجہ گیری و پیشہ ادا

۶-۱- مقدمه

در این پایان‌نامه ارتعاشات آزاد ورق مدور و حلقوی ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن مدل جامد استاندارد خطی نوع اول و بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول و همچنین تئوری کلاسیک ارائه شد. در ابتدا معادلات دیفرانسیل حرکت ورق که معادلاتی با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان با ضرایب متغیر است به کمک اصل همیلتون تعیین شدند. در تعیین حل این معادله از تئوری اغتشاشات استفاده شد. در نهایت فرکانس‌های طبیعی ورق با شرایط مرزی مختلف و همچنین تحت بار شعاعی تعیین شد.

در قسمت دیگر به حل ریاضی ورق حلقوی تحت بار دینامیکی عرضی پرداخته شد. پاسخ سیستم از روش مدهای نرمال به دست آمد. حل مشابهی برای ورق حلقوی با استفاده از تئوری کلاسیک به دست آمد. نتایجی برای ورق الاستیک نیز ارائه شد. در پایان، حل عددی شامل حل مدال و حل دینامیکی مسأله به کمک نرم افزار Ansys ارائه شد.

۶-۲- نتایج

- با استفاده از معادلات استخراج شده بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، امکان تعیین فرکانس‌های شعاعی علاوه بر فرکانس‌های عرضی وجود دارد.
- برای ورق ویسکوالاستیک مورد بررسی، فرکانس‌های طبیعی به دست آمده با تئوری اغتشاشات تطابق قابل قبولی با حل عددی المان محدود و نتایج مرجع‌های [۵۱] و [۱۳] دارند.
- با استفاده از تغییر متغیر مناسب، معادلات حرکت که دارای ضرایب متغیر بودند به معادلاتی با ضرایب ثابت (در مرتبه صفر) تبدیل شدند.
- پارامتر ویسکوالاستیک تأثیر قابل توجهی بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق ندارد.

- برای ضخامت‌های کم ورق تئوری کلاسیک به تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول ترجیح داده می‌شود.
- برای مقادیر کوچک r_o/h ، تئوری تغییرشکل برشی در مد دوم دقیق‌تر از تئوری کلاسیک است.
- با کاهش r_i/r_o ، دقت تئوری کلاسیک برای ورق‌های ضخیم کاهش و تئوری برشی برای ورق‌های نازک کاهش می‌یابد.
- با افزایش ضخامت فرکانس‌های طبیعی ورق افزایش می‌یابند و به‌خصوص این افزایش در مد دوم بیش‌تر ملاحظه می‌شود.
- افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی، فرکانس‌های طبیعی ورق را افزایش می‌دهد.
- در محدوده‌ی مورد بررسی، تغییرات فرکانس طبیعی با بار شعاعی خطی است.
- افزایش بار شعاعی فشاری فرکانس طبیعی ورق را کاهش داده و افزایش بار کششی شعاعی فرکانس طبیعی ورق را افزایش می‌دهد.
- تئوری کلاسیک مقدار پاسخ عرضی را از تئوری برشی بیش‌تر پیش‌بینی می‌کند و حل عددی بیش‌تر از هر دوی آن‌ها و حل برشی به عددی نزدیک‌تر است.
- بار کششی شعاعی مقدار خیز نوسانات و مقدار متوسط را کاهش می‌دهد.
- افزایش مدول G_1 مقدار دامنه‌ی نوسانات و مقدار متوسط را کاهش می‌دهد.
- افزایش ضریب ویسکوزیته مقدار دامنه‌ی نوسانات را کاهش اما مقدار متوسط را تغییر نمی‌دهد.
- امکان محاسبه‌ی پاسخ شعاعی ورق به‌کمک تئوری تغییر شکل برشی وجود دارد.

۳-۶- پیشنهادها

جهت انجام مطالعه‌ی جامع‌تر در موضوع، موارد زیر قابل بررسی هستند.

- استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه‌ی بالاتر؛
- بررسی پاسخ سیستم تحت بار محوری وابسته به زمان؛
- بررسی پاسخ سیستم تحت بار عرضی متغیر با مکان؛
- در نظر گرفتن ماده به صورت FG؛
- بررسی ورق ضخامت متغیر (فرکانس - پاسخ)؛
- در نظر گرفتن ماده به صورت کامپوزیتی؛
- تحلیل ورق مدور ویسکوالاستیک به صورت چرخان؛
- تحلیل ورق مدور واقع بر بستر الاستیک و ویسکوالاستیک؛

پوستها

پوست الف

اصول ویسکوالا سٹیسیتھی خطی

الف-۱- مقدمه

به طور معمول با انجام آزمایش‌های ساده‌ی آزمایشگاهی می‌توان ویژگی‌های مواد را مشخص کرد. تعیین خصوصیات مکانیکی مواد ویسکوالاستیک مشابه مواد الاستیک، اغلب شامل آزمایش کشش محوری می‌باشد. اگرچه آزمایش‌های کشش ویسکوالاستیک زیادی وجود دارد، اما معمولاً فقط سه حالت خزش، رهایش و پاسخ دینامیکی به بارگذاری سینوسی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۵].

الف-۲-۱- خزش

خزش یک تغییر شکل پیش‌رونده، در ماده‌ای تحت تنش ثابت می‌باشد. آزمایش خزش شامل اندازه‌گیری کرنش وابسته به زمان $\varepsilon(t) = \delta(t)/L_0$ ، ناشی از تنش محوری ثابت می‌باشد. به عبارت دیگر، تنش σ را به صورت یک تابع پله با مقدار اولیه σ_0 فرض کنید که به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) \quad (\text{الف-۱})$$

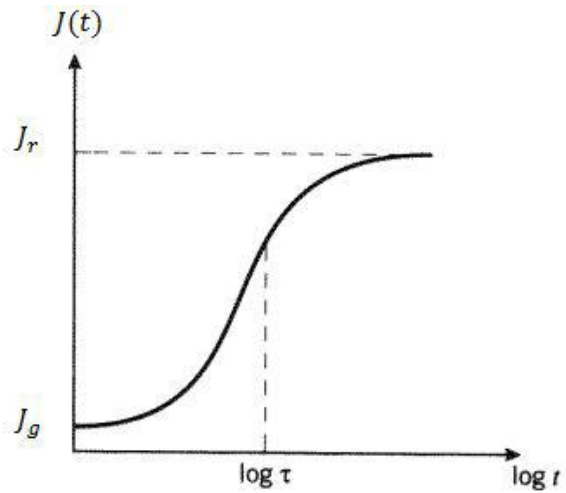
$H(t)$ ، تابع پله‌ی واحد هوی‌ساید^۱ است. در این حالت اگر تنش m برابر شود، کرنش نیز m برابر می‌شود. نسبت کرنش به مقدار تنش σ_0 کامپلیانس^۲ خزش نامیده شده و به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (\text{الف-۲})$$

در مواد ویسکوالاستیک خطی، کامپلیانس خزش مستقل از سطح تنش می‌باشد.

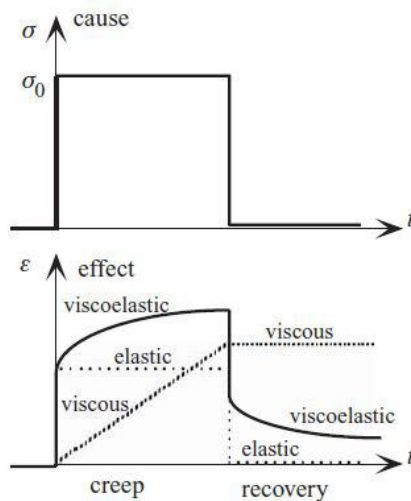
^۱ Heaviside

^۲ Compliance



شکل (الف-۱) تابع کامپلیانس خزشی

در شکل (الف-۱) تابع کامپلیانس خزش- لگاریتم زمان رسم شده است. نمودار از J_g (کامپلیانس شیشه) شروع شده و در حالت تعادل به J_r (کامپلیانس لاستیک) می‌رسد. در نمودار فوق نقطه‌ای که با $\log(\tau)$ نشان داده شده است، نقطه‌ی عطف نمودار می‌باشد. τ زمان رهائش در فرآیند خزش است.

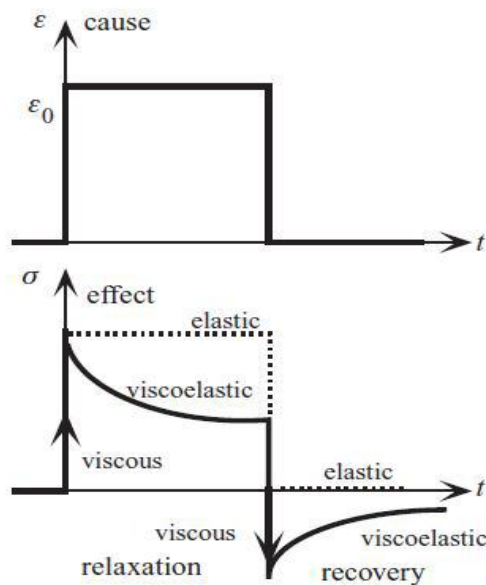


شکل (الف-۲) خزش و بازگشت

همان طور که در شکل (الف-۲) نمایش داده شده است، با برداشتن بار، کرنش به تدریج کاهش می یابد و به یک مقدار حدی می رسد که به آن پدیده ی بازگشت^۱ گفته می شود.

الف-۲-۲- رهایش تنش^۲

رهایش تنش، به معنای کاهش تدریجی تنش برای ماده ای تحت کرنش ثابت می باشد، اگر کرنش را به صورت یک تابع پله ای واحد به صورت $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ فرض کنیم، تنش $\sigma(t)$ در موارد ویسکوالاستیک به صورت نشان داده شده در شکل (الف-۳) کاهش می یابد.



شکل (الف-۳) رهایش تنش و بازگشت

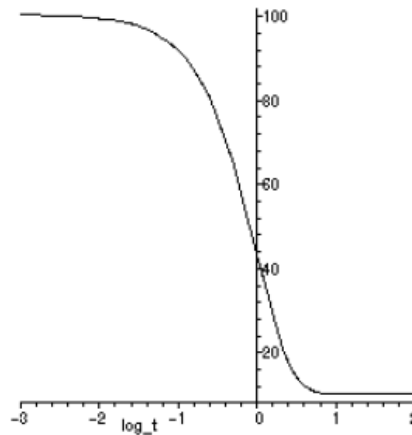
نسبت تنش به کرنش ε_0 ، مدول رهایش نامیده شده و به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad \text{(الف-۳)}$$

^۱ Recovery

^۲ Stress Relaxation

در مواد خطی مدول رهایش مستقل از سطح کرنش بوده و $E(t)$ تنها تابعی از زمان می‌باشد. خزش و رهایش می‌توانند در تغییرشکل‌های برشی و یا بالک رخ دهند. تابع رهایش برای تنش برشی با $G(t)$ نشان داده می‌شود. برای تغییرشکل بالک، مدول الاستیک بالک B (یا K) نامیده می‌شود. تابع رهایش متناظر در بالک همانند مدول الاستیک بالک، $B(t)$ نامیده می‌شود. اما در اینجا تنش لزوماً از نوع تنش هیدرواستاتیکی می‌باشد. فرق مشابهی نیز در بین کامپلیانس‌های خزش وجود دارد. $J_G(t)$ برای خزش در برش، $J_E(t)$ برای خزش در کشش و $J_B(t)$ برای خزش در تغییرشکل بالک تعریف می‌شود.



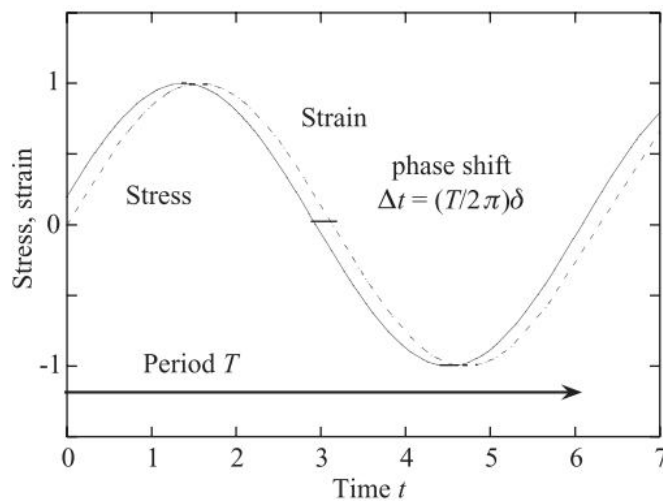
شکل (الف-۴) تابع مدول رهایش تنش

شکل (الف-۴) مدول رهایش را در قابل لگاریتم زمان نشان می‌دهد. در این شکل $E_r=10$, $E_g=100$ و $t=1$ می‌باشند.

خزش و رهایش هر دو مظهر یک مکانیسم مولکولی‌اند و انتظار می‌رود $E(t)$ و $J(t)$ به هم مرتبط باشند. اما اگرچه در حالت کلی $E_r = \frac{1}{J_r}$ و $E_g = \frac{1}{J_g}$ است، اما از آن $E(t) = \frac{1}{J(t)}$ را نتیجه گرفت. به‌ویژه حرکت به‌سوی حالت تعادل در پاسخ رهایش سریعتر از خزش می‌باشد.

الف-۲-۳- پاسخ دینامیکی به بارگذاری سینوسی

تست‌های خزش و رهایش تنش برای مطالعه‌ی پاسخ مواد در زمان‌های طولانی (از چند دقیقه تا چند روز) مناسب می‌باشند، اما برای زمان‌های کوتاه‌تر (ثانیه یا کمتر)، پاسخ دقیقی ارائه نمی‌دهند. تست دینامیکی که در آن تنش (یا کرنش) حاصله از کرنش (یا تنش) سینوسی اندازه‌گیری می‌شود، اغلب برای یافتن پاسخ پلیمرها در بازه‌های کوتاه مدت مناسب می‌باشد. هنگامی که یک ماده‌ی ویسکوالاستیک تحت تنش متغیر سینوسی قرار می‌گیرد، سرانجام به یک حالت پایا می‌رسد که در آن کرنش حاصله نیز سینوسی، با همان فرکانس زاویه ای، اما با تاخیر فاز به اندازه‌ی زاویه‌ی δ می‌باشد. این تاخیر فاز مشابه تاخیر کرنش مشاهده شده در آزمایش خزش می‌باشد. همواره کرنش با فاز δ از تنش عقب می‌ماند، حتی اگر کرنش نسبت به تنش متغیر کنترل شده باشد (شکل (الف-۵)). در بارگذاری سیکلی پدیده هیسترسیس رخ می‌دهد که منجر به اتلاف انرژی می‌شود. تفاوت رفتار ماده در حالت استاتیک و دینامیک نیز با این تست مشخص می‌شود.



شکل (الف-۵) بارگذاری دینامیکی

الف-۳- اصل جمع آثار بولتزمن

در یک سیستم ویسکوالاستیک که تحت بار قرار گرفته است، به علت تغییرات آنتروپی، پس از توقف اعمال بار، پاسخ سیستم متوقف نمی‌شود. یعنی تغییرشکل چنین ماده‌ای فقط به تنش اعمالی واقعی وابسته نمی‌باشد، بلکه به سابقه‌ی تنش تحمل شده توسط آن نیز مرتبط می‌باشد.

در حالت تنش ثابت، افزایش کرنش و در حالت کرنش ثابت، کاهش تنش مشاهده می‌شود، حال اگر تنش یا کرنش دارای سابقه زمانی عمومی باشند و یا تنش و کرنش با هم تغییر کنند، پاسخ‌های مربوط به اغتشاشات خطی مختلف را می‌توان با هم جمع کرد. این روش به اصل جمع آثار بولتزمن معروف است. بولتزمن این اصل را به صورت زیر بیان می‌کنند.

تنشی که در فاصله‌ی زمانی t در جسم ایجاد می‌شود، کاملاً به سابقه‌ی کرنش در فاصله‌ی $[0, t]$ بستگی دارد. همین مطلب برای کرنش نیز صادق است. بنابراین، پس از تقسیم سابقه‌ی بارگذاری به مجموعه‌ای از بارگذاری‌های پله‌ای و تعیین پاسخ برای هر بخش، برای به دست آوردن پاسخ کلی، تک تک پاسخ‌ها با هم جمع می‌شوند.

برای آزمایش رهایش، نمو تنش در زمان τ که $0 < \tau < t$ ، از نمو کرنش به صورت زیر به دست می‌آید.

$$d\sigma(\tau) = E(t - \tau)d\varepsilon(\tau) \quad (\text{الف-۴})$$

تنش در زمان t با جمع کردن نمونه‌های تنش زمان‌های قبلی، به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\sigma(\tau) = \int_0^1 E(t - \tau)d\varepsilon(\tau) = \int_0^1 E(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (\text{الف-۵})$$

مشابه این مطلب برای کرنش نیز برقرار است. برای آزمایش خزش، نمو کرنش در زمان τ برابر است با:

$$d\varepsilon(\tau) = D(t - \tau)d\sigma(\tau) \quad (\text{الف-۶})$$

در رابطه فوق D کامپلیانس خزش می‌باشد. بنابراین با کمک اصل فوق، اگر پاسخ سیستم به ورودی پله باشد، می‌توان پاسخ به هر ورودی دلخواه را نیز به دست آورد.

الف-۴- معرفی مدل های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک

الف-۴-۱- مدل ماکسول

مدل ماسکول، شامل یک فنر و دمپر است که به صورت سری به یکدیگر متصل هستند.



شکل (الف-۶) مدل ماکسول

رابطه ی کلی تنش و کرنش را برای این مدل، می توان به صورت زیر نوشت.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (\text{الف-۷})$$

که نرخ کرنش از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول، نرخ کرنش فنر، متناسب با مقدار تنش، هم-فاز و وابسته به نرخ تنش می باشد و بخش دوم، نرخ کرنش دمپر که فقط به مقدار لحظه ای تنش پاسخ می دهد. حال با استفاده از معادله ی (الف-۷) می توان پاسخ ماده را به تنش و کرنش پله ای ارزیابی کرد. به منظور حل این معادله، می توان آن را به صورت زیر به فضای لاپلاس منتقل نمود.

$$s\bar{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0) = \frac{1}{E} [s\bar{\sigma}(s) - \sigma(0)] + \frac{1}{\eta} \bar{\sigma}(s) \quad (\text{الف-۸})$$

حال با استفاده از این رابطه و بر اساس تست های خزش و رهایش، کامپلیانس خزش و مدول رهایش برشی به صورت زیر تعیین می شوند.

برای محاسبه‌ی تابع کامپلیانس خزش پاسخ این مدل به تابع ورودی پله‌ای $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ (شکل الف-۷) با شرایط اولیه‌ی $\sigma(0) = \sigma_0$ و $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ به‌دست می‌آید.

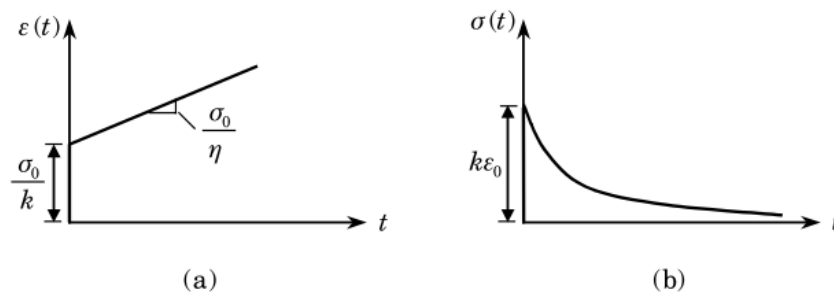
$$\bar{\varepsilon}(s) = \frac{\varepsilon_0}{s} + \frac{\sigma_0}{\eta s^2} \quad (\text{الف-۹})$$

لاپلاس معکوس معادله‌ی فوق را به‌صورت زیر خواهیم داشت.

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right), E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad (\text{الف-۱۰})$$

چون در لحظه‌ی صفر فقط فنر عکس‌العمل دارد و دمپر تاثیری ندارد، در نتیجه تابع کامپلیانس خزش به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (\text{الف-۱۱})$$



شکل (الف-۷) رفتار مدل ماکسول در آزمایش (a) خزش، (b) رهایش تنش

پاسخ این مدل به کرنش ورودی پله‌ای $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$ مطابق با شکل (الف-۷) (b) و در فضای لاپلاس به‌صورت زیر است.

$$\bar{\sigma}(S) = \frac{\eta}{E + \eta s} \sigma(0) \quad \text{inverse} \rightarrow \sigma(t) = \sigma(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau = \frac{\eta}{E} \quad (\text{الف-۱۲})$$

این معادله نشان می‌دهد که تنش به صورت نمایی و با مشخصه‌ی زمانی ثابت $\tau = \frac{\eta}{E}$ کاهش می‌یابد

که τ ثابت و از خواص ماده می‌باشد و زمان رهاش است. بنابراین مدول رهاش به صورت زیر است.

$$E = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma(0)}{\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{الف-۱۳})$$

در مدل ماکسول دو کمبود مشاهده می‌شود:

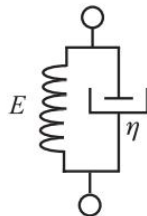
۱- تحت شرایط ثابت، $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ ، جریان نیوتنی مشهود است ($\sigma = E \frac{d\varepsilon}{dt}$). این موضوع با توجه به

رفتار پیچیده‌ی خزش برای ماده‌ی ویسکوالاستیک صحیح نمی‌باشد.

۲- رفتار رهاش را نمی‌توان به طور معمول با یک ترم نمایی کاهش‌ی بیان کرد. زیرا لزوماً تنش در زمان بی‌نهایت به صفر میل نمی‌کند.

الف-۴-۲- مدل کلوین-ویت

مدلی دیگر با درجه پیچیدگی مشابه با مدل ماکسول، مدل کلوین-ویت می‌باشد این مدل شامل فنری الاستیک موازی با دمپری ویسکوز است.



شکل (الف-۸) مدل کلوین-ویت

در این مدل برخلاف مدل ماکسول، تنش های فنر و دمپر با هم جمع می شوند و اما کرنش ها برای فنر و دمپر با هم برابرند. برخلاف مدل ماکسول، در مدل کلوین بر اثر اعمال تنش ناگهانی، به دلیل موازی بودن فنر با دمپر، کرنش ناگهانی در همان لحظه مشاهده نمی شود. در حالیکه در مدل ماکسول به دلیل آزاد بودن، به صورت می توانست کرنشی متناسب با تنش اعمال شده ی ناگهانی از خود بروز دهد. رابطه ی کلی تنش-کرنش در این مدل به صورت زیر است.

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (\text{الف-۱۴})$$

که بخش اول تنش مربوط به فنر و بخش دوم تنشی متناسب با نرخ کرنش و مربوط به المان دمپر می باشد.

در آزمایش خزش برای بررسی پاسخ مدل به تنش ورودی پله ای (شکل (الف-۹)(a)) با انتقال معادله ی (الف-۱۴) به فضای لاپلاس با شرط اولیه ی $\varepsilon(0) = 0$ خواهیم داشت.

$$\frac{\sigma_0}{s} = E\bar{\varepsilon}(s) + \eta[s\bar{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0)] \rightarrow \bar{\varepsilon}(s) = \frac{\sigma_0}{s(E + \eta s)} \xrightarrow{\text{inverse}} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (\text{الف-۱۵})$$

که $\tau = \frac{\eta}{E}$ زمان تاخیر^۱ است و بیان کننده ی شدت تغییرات در جایی است که تغییر شکل رخ می-

دهد. در آزمایش خزش، جایگزین کردن E با $\frac{1}{J}$ که J کامپلیانس فنر است، مناسب تر است.

$$\varepsilon(t) = J\sigma_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (\text{الف-۱۶})$$

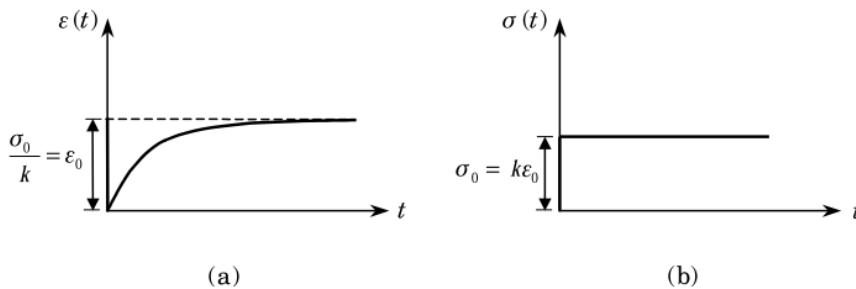
بر اساس رابطه ی فوق، تابع کامپلیانس خزش به صورت زیر به دست می آید.

$$J(t) = J \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (\text{الف-۱۷})$$

^۱ Retardation time

با توجه به این که در کرنش ثابت دمپر عمل نمی‌کند، مدل کلویین نمی‌تواند رهایش تنش را تشریح کند.

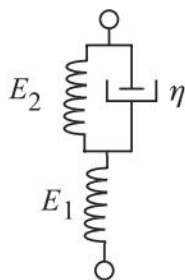
$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = 0 \rightarrow \sigma = E\varepsilon_0 \quad (\text{الف-۱۸})$$



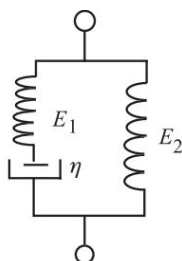
شکل (الف-۹) رفتار مدل کلویین در آزمایش (a) خزش، (b) رهایش تنش

الف - ۴-۳ - جامد استاندارد خطی (مدل زنر)

مدل ماکسول رهایش تنش و مدل کلویین نیز فقط رفتار خزشی یک جامد ویسکوالاستیک را توصیف می‌کند. اما هیچ‌کدام برای ارائه‌ی رفتار جامد ویسکوالاستیک مناسب نیستند. زیرا لازم است که مدل هر دو رفتار رهایش تنش و خزش را با هم بیان کند. آنچه که به‌طور معمول جامد استاندارد سه المانی نامیده می‌شود، ترکیبی از المان کلویین-ویت به‌صورت سری با فنر (شکل الف-۱۰) و یا المان ماکسول موازی با فنر (شکل الف-۱۱) می‌باشد. یکی از ویژگی‌های بارز این مدل، تقسیم‌بندی مشخص انواع کرنش در آن است. به‌طوری که کرنش الاستیک با المان الاستیک و کرنش ویسکوالاستیک با المان کلویین-ویت نشان داده می‌شود. در این مدل کرنش کل برابر با مجموع کرنش دو قسمت فنر و کلویین-ویت است.



شکل (الف-۱۰) مدل جامد استاندارد خطی نوع اول



شکل (الف-۱۱) مدل جامد استاندارد خطی نوع دوم

معادله‌ی کلی تنش-کرنش برای مدل به صورت زیر می باشد.

$$\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\sigma + \frac{\eta}{E_1 E_2} \dot{\sigma} = \varepsilon + \frac{\eta}{E_2} \dot{\varepsilon} \quad (\text{الف-۱۹})$$

پاسخ مدل جامد استاندارد خطی نوع اول به تنش ورودی پله‌ای $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ در فضای لاپلاس به صورت زیر است.

$$\bar{\varepsilon}(s) = \frac{\varepsilon(0)}{s + \tau^{-1}} + \frac{\sigma_0}{\eta} \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \left(\frac{1}{s(s + \tau^{-1})}\right) \xrightarrow{\text{inverse}} \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad (\text{الف-۲۰})$$

که $\tau = \frac{\eta}{E_2}$ می باشد. بنابراین تابع کامپلیانس خزش به صورت زیر تعریف می شود.

$$J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] = J_g + J_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right], J_g = \frac{1}{E_1}, J_1 = \frac{1}{E_2} \quad (\text{الف-۲۱})$$

پاسخ مدل جامد استاندارد خطی نوع اول به کرنش ورودی پله‌ای با شرط اولیه $\sigma(0) = \sigma_0$ را به فضای لاپلاس منتقل کرده و در نهایت مدول رهايش را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{E_2}{1 + E_2 E_1} + \frac{E_1}{1 + E_2 E_1} \exp\left[-\frac{E_1}{\eta} \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) t\right] \quad (\text{الف-۲۲})$$

$$= \frac{E_1 E_2}{1 + E_1 E_2} + \frac{E_1^2}{E_1 + E_2} \exp\left[-\left(\frac{E_1 + E_2}{\eta}\right) t\right]$$

برای دومین مدل جامد استاندارد خطی رابطه‌ی کلی تنش - کرنش به صورت زیر است.

$$\sigma + \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma} = E_2 \varepsilon + \frac{\eta}{E_1} (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon} \quad (\text{الف-۲۳})$$

بررسی پاسخ این مدل به تنش ورودی پله ای (آزمایش خزش):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2} \left[1 + \frac{E_1}{E_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right] \quad (\text{الف-۲۴})$$

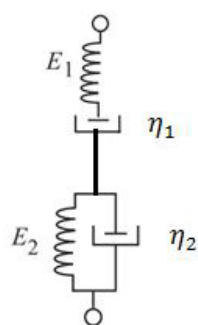
بررسی پاسخ این مدل به کرنش ورودی پله (آزمایش رهايش):

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left[E_2 + E_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (\text{الف-۲۵})$$

که در آن $\tau = \frac{\eta}{E_1}$ زمان رهايش می‌باشد.

الف-۴-۴- مدل برگرز

این مدل از ترکیب مدل ماکسول با کلویین-ویت (شکل (الف-۱۲)) به دست می‌آید. در این مدل، برای تنش ورودی، کرنش کل به صورت مجموع کرنش‌های هر قسمت می‌باشد.

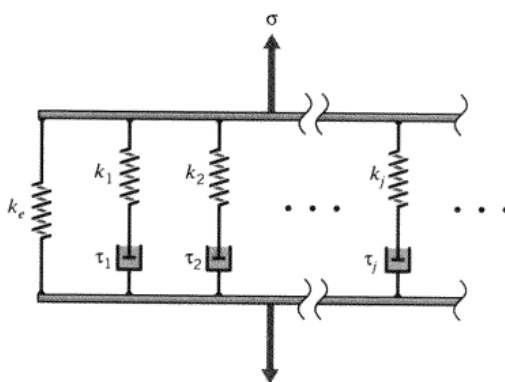


شکل (الف-۱۲) مدل برگرز

معادله‌ی بنیادین این مدل به صورت زیر است.

$$\sigma + \left[\frac{\eta_2}{E_2} + \eta_1 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right] \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \sigma = \eta_1 \varepsilon + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2} \dot{\varepsilon} \quad (\text{الف-۲۶})$$

الف-۴-۵- مدل ویچرت



شکل (الف-۱۳) مدل ویچرت

معمولاً پلیمرهای واقعی در زمان رهایش، با یک زمان رهایش که توسط مدل‌های بیان شده پیش‌بینی شده، رها نمی‌شوند؛ بلکه طول‌های مختلفی از بخش‌های مولکولی در رهایش شرکت می‌کنند و بخش‌های ساده‌تر و کوتاه‌تر خیلی سریع‌تر از بخش‌های با طول بیشتر رها می‌شوند که این منجر به

توزیعی در زمان رهایش می‌شود. برای رفع این مشکل، مهندسان مدل ویچرت را که مطابق شکل (الف-۱۳) دارای تعداد زیادی مدل ماکسول موازی با یک فنر می باشد، پیشنهاد کرده‌اند. در این مدل، تنش کل برابر با مجموع تنش تک تک قسمت‌های موازی است. با استفاده از رابطه ی تنش- کرنش مربوط به مدل ماکسول، رابطه ی تنش-کرنش این مدل در فضای لاپلاس به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\bar{\sigma}(s) = \bar{\sigma}_e + \sum_j \bar{\sigma}_j = [E_e + \sum_j \frac{E_j s}{(s + \frac{E_j}{\eta_j})}] \quad \text{(الف-۲۷)}$$

پوست ب

تئوری های ورق

ب-۱- مقدمه

در این قسمت پس از بیان طبقه‌بندی ورق‌ها از نظر ضخامت و تغییرشکل، تئوری‌های مختلف ورق، شامل تئوری کیرشهف^۱ (کلاسیک) ورق، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول میندلین^۲ و در نهایت تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی سوم (ردی^۳) ورق‌ها مطرح می‌گردند. در تئوری‌های تغییرشکل برشی، اثر تغییرشکل برشی عرضی که در تئوری کیرشهف صرف‌نظر شده، لحاظ شده است. با استفاده از اصل جابه‌جایی‌ها و بر مبنای فرضیات سینماتیکی مطرح شده در تئوری‌های مورد مطالعه، معادله-ی حاکم و شرایط مرزی، برای ورق با ضخامت یکنواخت استخراج شده است.

ب-۲- دسته‌بندی ورق از نظر ضخامت و تغییرشکل

خواص خمشی ورق، در مقایسه با ابعاد دیگر، عمدتاً به ضخامت وابسته است. بر اساس نسبت a/h که a کوچکترین بعد صفحه‌ی ورق و h ضخامت آن می‌باشد، ورق‌ها را می‌توان به سه دسته‌ی ورق ضخیم، غشاء و ورق نازک تقسیم‌بندی کرد.

ب-۳- تئوری کلاسیک (کیرشهف) ورق (CPT)

تئوری ورق کلاسیک کیرشهف (CPT) برای حالت خمش خالص، بر مبنای میدان جابه‌جایی زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{ب-۱}$$

که در آن (u, v, w) به ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای (x, y, z) و w_0 خیز صفحه‌ی میانی (یعنی $z=0$) می‌باشد. میدان جابه‌جایی مذکور دلالت بر آن دارد که خط مستقیم عمود بر صفحه‌ی xy پس

¹ Kirchhoff

² Mindlin

³ Reddy

از تغییرشکل، مستقیم و عمود باقی می‌ماند. در فرض کیرشهف هر دو اثر برش عرضی و نرمال عرضی، یعنی تغییرشکل حاصل از خمش و کشیدگی درون صفحه‌ای، صرف نظر شده است.

کرنش خطی وابسته به میدان جابه‌جایی معادله‌ی (ب-۱) برابر است با:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{ب-۲}$$

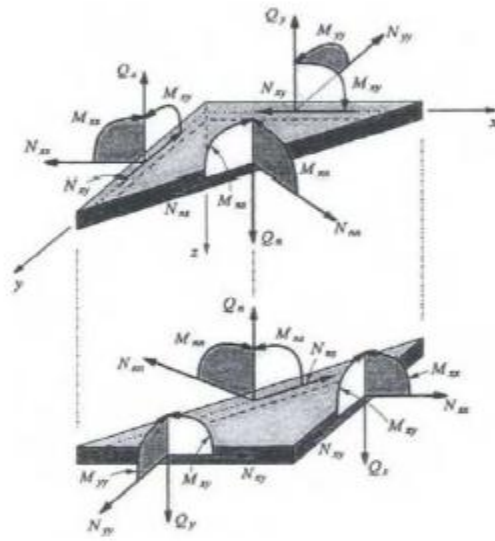
که در آن ε_{xx} و ε_{yy} کرنش‌های عمودی و γ_{xy} کرنش برشی می‌باشند. انرژی کرنشی U برای ورق کیرشهف نیز برابر است با:

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_{\Omega_0} \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega_0} \left(M_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + M_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \sigma_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) dx dy\end{aligned}\tag{ب-۳}$$

که در آن Ω_0 محدوده اشغال شده توسط صفحه‌ی میانی ورق، h ضخامت ورق، σ_{xx} ، σ_{yy} تنش‌های عمودی، σ_{xy} تنش برشی و M_{xx} ، M_{yy} ، M_{xy} منته‌های تنش می‌باشند (شکل (ب-۱)). ممان‌ها نیز به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz\tag{ب-۴}$$

از آنجا که در تئوری ورق کیرشهف $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ، انرژی کرنشی مربوط به کرنش‌های برشی عرضی صفر است.



شکل (ب-۱) نیروها و ممان‌ها در المان ورق [۱۵]

انرژی پتانسیل ناشی از بارگذاری عرضی $q(x,y)$ برابر است با:

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} q(x,y) \delta w_0 dx dy \quad (ب-۵)$$

اگر نیروها یا مومنت‌های غیر صفر لبه‌ای موجود باشند، انرژی پتانسیل آن‌ها نیز باید به معادله‌ی فوق اضافه شود. بر اساس اصل جابه‌جایی:

$$\delta W = \delta U + \delta V = 0 \quad (ب-۶)$$

و با استفاده از آن، معادله تعادل حاکم بر تئوری ورق کیرشلف برابر است با:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = 0 \quad (ب-۷)$$

با فرض این‌که ماده‌ی ورق ایزوتروپیک باشد و از قانون هوک پیروی می‌کند، معادله‌ی تنش-کرنش به‌صورت:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \quad (8-ب)$$

$$\sigma_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

با استفاده از روابط فوق و (ب-۴) و انتگرال گیری از روابط در راستای ضخامت نتیجه می شود.

$$M_{xx} = -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{yy} = -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (9-ب)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

که در آن $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ، سفتی خمشی ورق نامیده می شود. با جایگذاری منته‌های تنش معادله-

ی (ب-۹) در معادله ی (ب-۷) معادله ی بی هارمونیک حاکم بر خمش ورق حاصل می شود.

$$D \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) = q \quad (10-ب)$$

ب-۴- تئوری تغییرشکل برشی مرتبه ی اول (FSDT)

از ساده ترین تئوری های تغییرشکل برشی تئوری تغییرشکل برشی مرتبه ی اول (FSDT) است که همچنین به تئوری میندلین (۱۹۵۱) معروف است. این تئوری بر مبنای میدان جابه جایی زیر می باشد.

$$u(x, y, z) = z \varphi_x(x, y)$$

$$v(x, y, z) = z \varphi_y(x, y) \quad (11-ب)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

که در آن φ_x و φ_y به ترتیب چرخش حول محورهای x و y می باشند. با در نظر گرفتن تغییرشکل عرضی در فرضیات سینماتیکی اش (یعنی کرنش برشی عرضی ثابت نسبت به ضخامت)،

CPT را توسعه داده است. در FSDT، فاکتورهای تصحیح برشی معرفی می‌شوند که اختلاف بین نیروی برشی عرضی واقعی و آنچه که با استفاده از روابط سینماتیکی FSDT به دست می‌آیند را تصحیح می‌کنند. که این پارامترها علاوه بر هندسه‌ی سازه، به بارگذاری و شرایط مرزی ورق نیز وابسته می‌باشد.

در هر دو تئوری FSDT و CPT، حالت تنش را صفحه‌ای در نظر گرفته و از شکل تنش صفحه‌ای کاهش یافته معادله رفتاری استفاده شده است.

در تئوری‌های مرتبه دو و بالاتر، از چند جمله‌ای بالاتر در بسط مربوط به مؤلفه‌های جابه‌جایی استفاده می‌شود. تئوری‌های مرتبه‌ی بالاتر پارامترهای جدیدی معرفی می‌کنند که اغلب تعبیر فیزیکی آن‌ها مشکل می‌باشد.

با توجه به میدان جابه‌جایی داده شده در معادله‌ی (ب-۱۱) مؤلفه‌های کرنش خطی برابر است با:

$$\varepsilon_{xx} = z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \quad (\text{ب-۱۲})$$

$$\gamma_{xz} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \gamma_{yz} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، واضح است که کرنش‌های $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy})$ در راستای ضخامت ورق خطی می‌-

باشند، در حالی که کرنش‌های برشی عرضی γ_{xz}, γ_{yz} ثابت‌اند. با استفاده از اصل جابه‌جایی

$$\delta W = \delta V + \delta U \quad \text{که در آن:}$$

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz \right] dx dy \quad (\text{ب-۱۳})$$

$$\delta V = \int_{\Omega_0} q(x, y) \delta w_0 dx dy$$

با معرفی $(\delta w_0, \delta \varphi_x, \delta \varphi_y)$ ، به‌عنوان جابه‌جایی‌های و انتگرال‌گیری از معادله‌ی مربوط به اصل جابه‌جایی، سه معادله‌ی به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \delta w_0 : -\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) &= q \\ \delta \varphi_x : -\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right) + Q_x &= 0 \\ \delta \varphi_y : -\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\right) + Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (14-ب)$$

که در آن:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (15-ب)$$

و K_s ضریب تصحیح برشی است.

بر اساس پیشنهاد میندلین، با مساوی قرار دادن فرکانس زاویه‌ای مد اول نامتقارن ارتعاش برش-ضخامت ورق با آنچه فرکانس دقیق سه‌بعدی ورق به‌دست آمده به رابطه‌ی زیر برای ضریب تصحیح برشی رسید.

$$K_s^3 - 8K_s^2 + \frac{8(2-\nu)K_s}{1-\nu} - \frac{8}{1-\nu} = 0 \quad (16-ب)$$

معادلات رفتاری به‌صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = D \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \\ M_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz = D \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (17-ب)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)$$

$$Q_x = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (17-ب)$$

$$Q_y = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz = \frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

از جایگذاری منته‌های تنش (ب-17) در معادلات تعادل (ب-14)، می‌توان معادلات را بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی بیان کرد.

$$\delta w_0 : -\frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) = q(x, y)$$

$$\delta \varphi_x : -\frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \right) - \frac{D(1+\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \quad (18-ب)$$

$$\delta \varphi_y : -\frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \right) - \frac{D(1+\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0$$

ب-5- تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم (TSDT)

در تئوری مرتبه سوم ردی (TSDT) نیز میدان جابه‌جایی به شکل زیر فرض می‌شود.

$$u(x, y, z) = z \varphi_x(x, y) - \alpha z^3 \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)$$

$$v(x, y, z) = z \varphi_y(x, y) - \alpha z^3 \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (19-ب)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

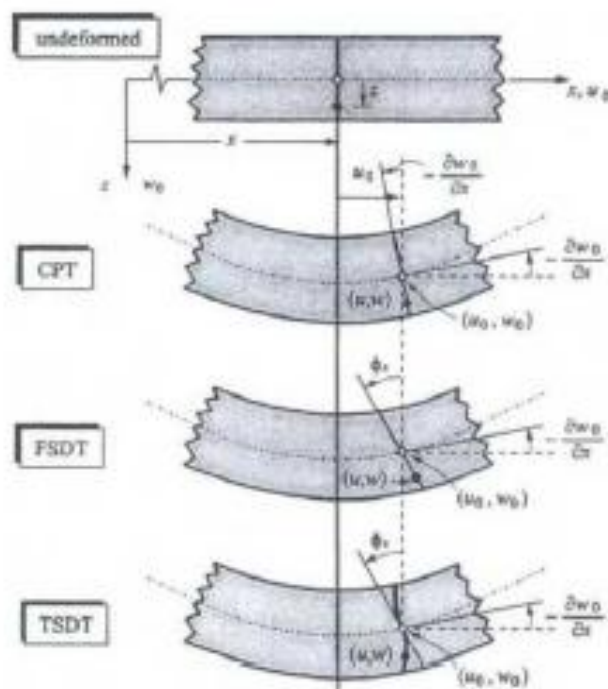
که $\alpha = \frac{4}{3h^2}$ می‌باشد و با صفر قرار دادن آن، به تئوری اول می‌رسیم. میدان جابه‌جایی با تغییرات

مرتبه دوم کرنش برشی عرضی در راستای ضخامت و مقدار صفر تنش‌های برشی در سطوح بالا و پایین ورق، منطبق می‌باشد.

بر خلاف FSDT، TSDT نیاز به فاکتور تصحیح برشی ندارد. در (شکل (ب-2))، هندسه‌ی اولیه و تغییرشکل یافته یک ورق از دیدگاه تئوری‌های مختلف نشان داده شده است.

علاوه بر سادگی ذاتی و هزینه‌ی محاسباتی پایین، تئوری ورق مرتبه اول اغلب یک توصیف با دقت کافی از پاسخ‌های عمومی (مانند خیز، بار کمانش و فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات) برای ورق‌های نازک یا ضخیم متوسط، فراهم می‌آورد. از این رو از این روش برای تعیین پاسخ‌های عمومی استفاده می‌شود.

تئوری مرتبه‌ی سوم، نسبت به FSDT، علی‌رغم افزایش زیاد هزینه محاسباتی، دقت نسبی را به میزان کمی افزایش می‌دهد.



شکل (ب-۲) هندسه‌ی اولیه و تغییرشکل یافته‌ی یک لبه‌ی ورق از دیدگاه تئوری‌های مختلف [۱۵].

در این تئوری با استفاده از میدان جابه‌جایی (ب-۱۹)، به میدان کرنشی زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \alpha z^3 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \alpha z^3 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (ب-۲۰)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= z\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\right) - \alpha z^3\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right) \\ \gamma_{xz} &= (1 - \beta z^2)\left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ \gamma_{yz} &= (1 - \beta z^2)\left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (ب-۲۰)$$

که در آن $\alpha = 4/(3h^2)$ و $\beta = 4/h^2$. به کمک اصل جابه‌جایی‌های، سه معادله زیر برای سه مولفه جابه‌جایی حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} \delta w_0 : -\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) - \alpha\left(\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2}\right) &= q \\ \delta\varphi_x : -\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right) + Q_x &= 0 \\ \delta\varphi_y : -\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\right) + Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (ب-۲۱)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz \\ \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} z^2 dz \end{aligned} \quad (ب-۲۲)$$

در نهایت معادلات رفتاری ورق به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \frac{4D}{5}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right) - \frac{D}{5}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \\ P_{xx} &= \frac{4h^2 D}{35}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right) - \frac{h^2 D}{28}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \\ M_{yy} &= \frac{4D}{5}\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right) - \frac{D}{5}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \\ P_{yy} &= \frac{4h^2 D}{35}\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right) - \frac{h^2 D}{28}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \end{aligned} \quad (ب-۲۳)$$

$$M_{xy} = \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \left(\frac{4D}{5} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) - \frac{2D}{5} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)$$

$$P_{xy} = \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \left(\frac{4h^2 D}{35} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) - \frac{h^2 D}{14} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)$$

$$Q_x = \frac{2hG}{3} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right); Q_y = \frac{2hG}{3} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

$$R_x = \frac{h^3 G}{30} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right); R_y = \frac{h^3 G}{30} \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

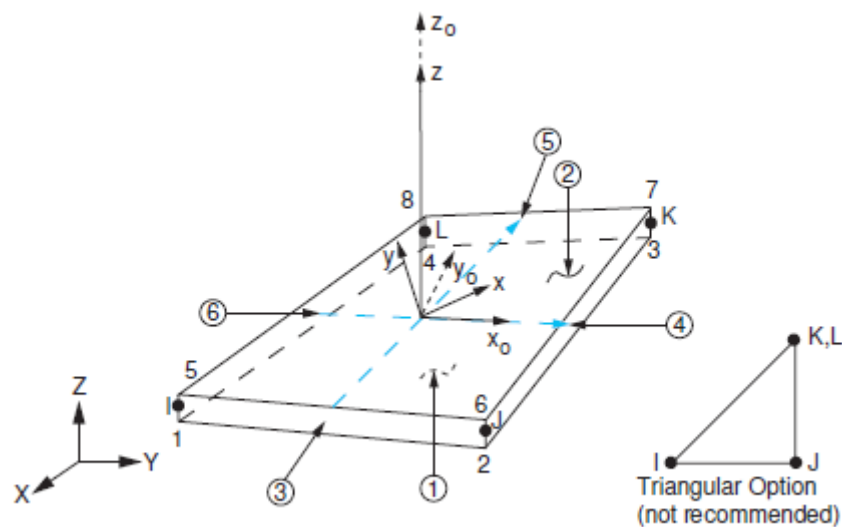
(۲۳-ب)

پوستج

معرفی المان ها

ج-۱- المان ۱۸۱ Shell

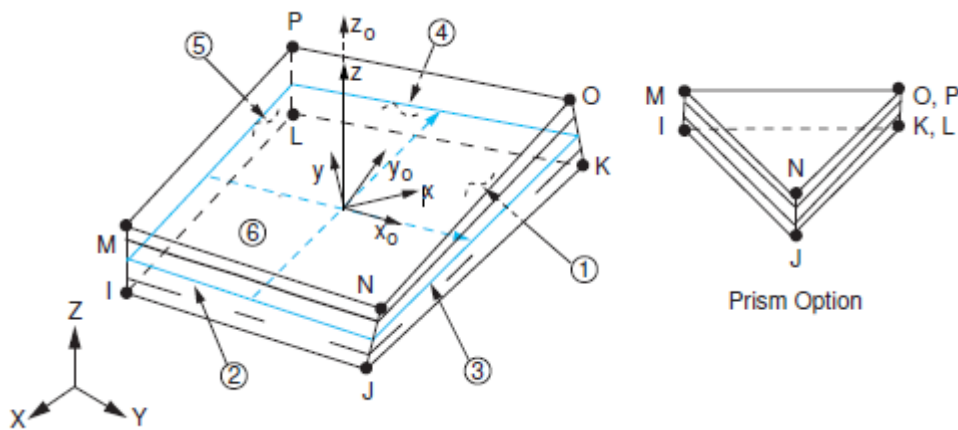
این المان برای تحلیل پوسته‌های نازک تا نسبتاً ضخیم مناسب است. این المان دارای چهار گره با شش درجه آزادی در هر گره می‌باشد، جابه‌جایی در جهت‌های X ، Y و Z و چرخش حول محورهای X ، Y و Z می‌باشد. این المان برای مسأله‌های خطی، چرخش‌های بزرگ و یا کرنش‌های بزرگ غیرخطی مناسب است. همچنین برای اثرهای بار گسترده‌ی فشاری مناسب است. این المان قابلیت تحلیل مدال و تحلیل ویسکوالاستیک سری پرونی را دارد. شکل ج-۱ هندسه‌ی این المان را نشان می‌دهد.



شکل ج-۱- هندسه‌ی المان ۱۸۱ Shell

ج-۲- المان ۱۹۰ Solid-shell

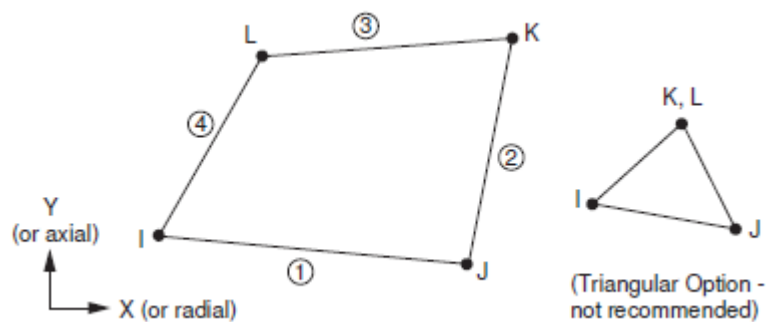
این المان برای پوسته‌ها با محدوده‌ی ضخامت زیاد استفاده می‌شود (نازک تا نسبتاً ضخیم). در این المان تحلیل به صورت هشت گره‌ی متصل با سه درجه‌ی آزادی در هر گره (جابه‌جایی گره در جهت-های X ، Y و Z) می‌باشد. این المان دارای قابلیت‌های تحلیل مدال، ویسکوالاستیک پرونی، پلاستیک، هایپرلاستیک، خزش، تغییرشکل‌های بزرگ و کرنش‌های بزرگ را دارد. شکل ۲-۴ هندسه‌ی این المان را نشان می‌دهد.



شکل ج-۲- هندسه‌ی المان ۱۹۰ Solid shell

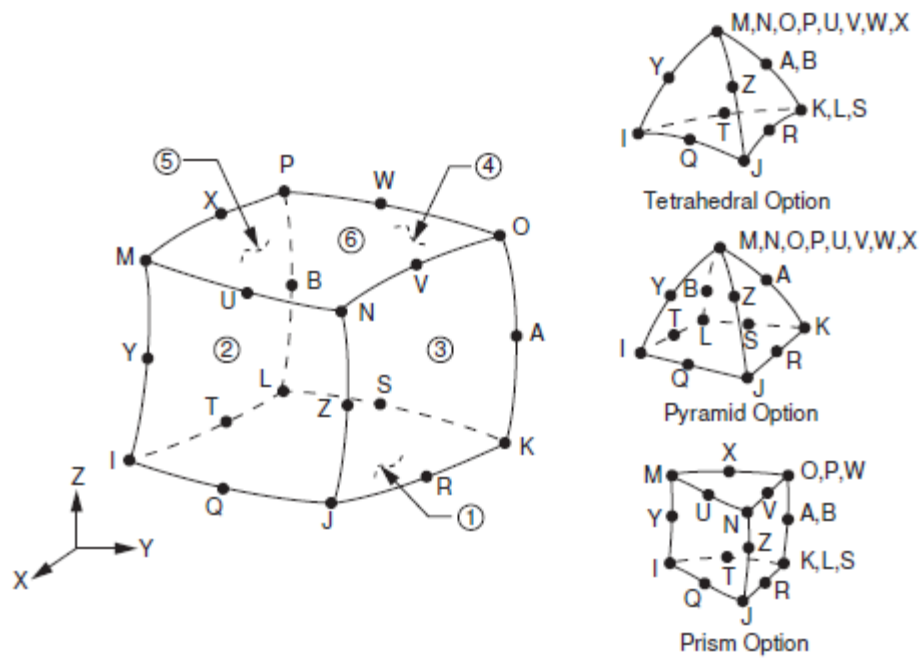
ج-۳- المان ۱۸۲ Plane و Solid ۱۸۶

المان ۱۸۲ Plane برای مدل سازی سازه‌های دوبعدی استفاده می‌شود. این المان می‌تواند به‌عنوان المان صفحه‌ای (تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای) یا المان متقارن محوری استفاده شود. این المان با چهار گره دارای دو درجه‌ی آزادی در هر گره تعریف می‌شود، همچنین دارای قابلیت تحلیل پلاستیک، ویسکوالاستیک، هایپر الاستیک، تغییرشکل‌های بزرگ و کرنش‌های بزرگ می‌باشد. شکل (ج-۳) هندسه‌ی این المان را نمایش می‌دهد.



شکل ج-۳- هندسه‌ی المان ۱۸۲ Plane

المان ۱۸۶ Solid، یک المان مرتبه‌ی بالای سه‌بعدی که رفتار تغییر مکان مربعی را نشان می‌دهد. این المان دارای بیست گره با سه درجه‌ی آزادی در هر گره می‌باشد، جابه‌جایی در جهت‌های x ، y و z می‌باشد. این المان توانایی تحلیل‌های پلاستیک، ویسکوالاستیک (سری پرونی)، هایپرالاستیک، خزش، تغییرشکل‌های بزرگ، کرنش‌های بزرگ را دارد. شکل (ج-۴) هندسه‌ی این المان را نشان می‌دهد.



شکل ج-۴- هندسه‌ی سازه‌ی جامد همگن المان ۱۸۶ Solid

پوست د

بررسی کمانش

د-۱- بار کمانش

جهت یافتن بار کمانش ورق حلقوی، پاسخ همگن دستگاه معادلات (۳-۱۶-ب) به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\begin{cases} u_{10}^*(X, t^*) \\ w_{00}^*(X, t^*) \end{cases} = \sum_{n=1}^4 C_n \{V_n\} \exp(m_n X); \{V_n\} = \begin{cases} A_1 \\ A_2 \end{cases} \quad (1-د)$$

با جایگذاری (۱-د) در معادلات مرتبه صفر (۳-۱۶-ب) معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم به دست می آید. از حل این معادله، m_n برحسب P_r^* به دست آمده و سپس بردارهای ویژه سیستم به دست می آید. با اعمال شرایط مرزی دو لبه‌ی تکیه‌گاه ساده و با در نظر گرفتن شرط غیر صفر بودن حل، بار کمانش ورق به دست می آید.

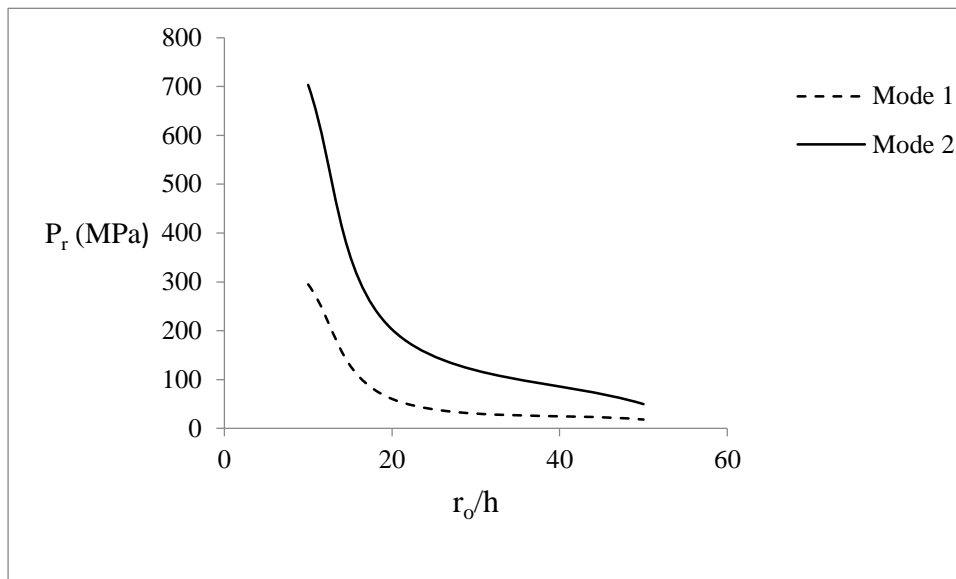
د-۲- بررسی نتایج

در جدول (۱-د) مقادیر دو مد اول بار کمانش برای ورق با مشخصات هندسی و خواص مکانیکی ارائه شده در جدول (۴-۱) با مقادیر مختلف r_0/h بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و حل عددی ارائه شده است.

جدول (۱-د) مقادیر بار کمانش ورق با تکیه‌گاه‌های ساده با $r_i/r_0=0.3$ برحسب MPa

r_0/h	مد اول			مد دوم		
	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰	۲۰	۵۰
FSDT (V. e)	۲۹۴.۹	۶۰.۴	۱۸.۲	۷۰۳.۳	۲۰۲.۷	۴۹.۸
FE (V.e)	۲۶۶.۳	۶۹.۴	۱۱.۱	۹۱۳.۰	۲۵۳.۰	۴۱.۶
درصد اختلاف	-۱۰.۳۷	۱۲.۹۶	-۶۳.۹۶	۲۲.۹۶	۱۹.۸۸	-۱۹.۷۱

شکل (۱-د) اثر نسبت r_0/h (شعاع خارجی به ضخامت) را بر بار کمانش ورق نشان می دهد. با افزایش ضخامت ورق مقدار بار کمانش ورق افزایش می یابد.



شکل (د-۱) اثر نسبت r_0/h بر بار کمانش ورق

منابع

- [1] Montgomery T.Sh., William J.M., (2005), "**Introduction to polymer viscoelasticity**", John Wiley & Sons, New York.
- [2] Brinson H.F., Brinson C.L., (2008). "**Polymer Engineering Science and Viscoelasticity; an Introduction**". Springer. New York.
- [3] Nashif A.D., Jones D. and Henderson J.P., (1985), "**Vibration Damping**". John Wiley & Sons, New York.
- [4] Sun C.T., and Lu Y.P., (1995), "**Vibration Damping of Structural Elements**", Prentice Hall PTR, New Jersey.
- [5] Christensen R. M., (1982), "**Theory of Viscoelasticity: An Introduction**", Academic Press, New York.
- [6] Bagley R. L. and Torvik P. J., (1983), "**Fractional Calculus- A Different Approach to Analysis of Viscoelastically Damped Structures**". AIAA Journal, Vol. 21, No. 5, pp.741-748.
- [7] Nhan P.T., (1956), "**Understanding viscoelasticity; basic of rheology**", Springer, Berlin.
- [8] Lakes R., (2009), "**Viscoelastic materials**", Cambridge university press, New York.
- [9] Roylance D., (2001), "**Engineering viscoelasticity**", Cambridge University.
- [10] Riande E., Diaz-Calleja R., Prolongo M.G., Masegosa R.M., Salom C., (2000), "**Polymer viscoelasticity; stress and strain in practice**", Marcel Dekker INC., NewYork.
- [11] Roderic S.L., (2000), "**Viscoelastic solids**", University of Washington.
- [12] Nayfeh A.H., Pai P.F., (2004), "**Linear and nonlinear structural mechanics**", John Willy & Sons, Hoboken, New Jersey.
- [13] Hagedorn P., DasGupta A., (2007), "**Vibrations and waves in continous mechanical systems**", John Willy & Sons, Hoboken, New Jersey.
- [14] Ventsel E., Krauthammer T., (2001), "**Thin plates and shells: Theory, analysis, and applications**", New York.

- [15] Wang C.M., Reddy J.N. and Lee K.H., (2000), "**Shear Deformable Beams And Plates, Relationships with Classical Solutions**". Elsevier, Amsterdam- Lausanne- New York- oxford- Shannon - Singapore- Tokyo.
- [16] Chu H-N, Herrmann G., (1956), "**Influence of large amplitude on free flexural vibrations of rectangular elastic plates.**" J Appl Mech, 23: pp. 532-40.
- [17] Leissa, A. W., (1969), "**Vibration of plates.**" NASA SP-160, Office of Technology Utilization, National Aeronautics and Space Administration (NASA), Washington, DC.
- [18] CYR W. W. ST. and Weiner R. S., (1969), "**Free and forced axisymmetric motion of clamped viscoelastic circular plates**", *Development_mechanics*. 5, 469.
- [19] Robertson, S. R., (1971), "**Forced axisymmetric motion of circular, viscoelastic plates.**" *Journal of Sound and Vibration*, 17(3), pp. 363-381.
- [20] Sridhar S, Mook DT, Nayfeh AH., (1975), "**Non-Linear resonances in the forced responses of plates, Part I: symmetric responses of circular plates.**" *Sound Vib.*: 41, pp. 359-73.
- [21] Alwar, R. S., and Nath, Y., (1977), "**Non-linear dynamic response of circular plates subjected to transient loads.**" *Journal of the Franklin Institute*, 303(6), pp. 527-542.
- [22] Nagaya, K., (1979), "**Vibration of a viscoelastic plate having a circular outer boundary and an eccentric circular inner boundary for various edge conditions.**" *Journal of Sound and Vibration*, 63(1), pp. 73-85.
- [23] Beskos, D. E., and Leung, K. L., (1984), "**Dynamic response of plate systems by combining finite differences, finite elements and laplace transform.**" *Computers & Structures*, 19(5-6), pp. 763-775.
- [24] Bailey, P. B., and chen, P. J., (1987), "**Natural modes of vibration of linear viscoelastic circular plates with free edges.**" *International Journal of Solids and Structures*, 23(6), pp. 785-795.

- [25] Wang, Y. Z., and Tsai, T. J., (1988), "**Static and dynamic analysis of a viscoelastic plate by the finite element method.**" *Applied Acoustics*, 25(2), pp. 77-94.
- [26] Khdeir, A. A., and Reddy, J. N., (1989), "**Exact solutions for the transient response of symmetric cross-ply laminates using a higher-order plate theory.**" *Composites Science and Technology*, 34(3), pp. 205-224.
- [27] Weisensel, G. N., (1989), "**Natural frequency information for circular and annular plates.**" *Journal of Sound and Vibration*, 133(1), pp. 129-137.
- [28] G. Cederbaum and J. Aboudi, (1989), "**Dynamic response of viscoelastic laminated plates**", *Journal of Sound and Vibration*, 133, pp. 55-64.
- [29] Hadian, J., and Nayfeh, A. H., (1990), "**Modal interaction in circular plates.**" *Journal of Sound and Vibration*, 142(2), pp. 279-292.
- [30] T. M. Chen, (1990), "**The hybrid Laplace transform/ finite element method applied to quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams.**", *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 38, pp. 509-522.
- [31] Cederbaum, G., and Drawshi, M., (1994), "**Multiple equilibrium states in the analysis of viscoelastic nonlinear circular plates.**" *International Journal of Mechanical Sciences*, 36(2), pp. 149-155.
- [32] K. M. Liew, Y. Xiang, S. Kitipornchai, (1995), "**Research on thick plate vibration: a literature survey**", *Journal of Sound and Vibration* 180 (1), pp. 163-176.
- [33] Romanelli, E., Rossi, R. E., Laura, P. A. A., and Gutierrez, R. H. (1998). "**Transverse vibrations of a circular annular plate with an intermediate circular support and a free inner edge.**" *Journal of Sound and Vibration*, 212(3), pp. 564-571.
- [34] Esmailzadeh, E., Jalali M. A., (1999), "**Nonlinear oscillations of viscoelastic rectangular plates.**" *Journal of Nonlinear Dynamics*, 18(4), 311-319.

- [35] Wang, H.-J., and Chen, L.-W., (2002), "**Vibration and damping analysis of a three-layered composite annular plate with a viscoelastic mid-layer.**" *Composite Structures*, 58(4), 563-570.
- [36] Salehi, M., and Aghaei, H., (2005), "**Dynamic relaxation large deflection analysis of non-axisymmetric circular viscoelastic plates.**" *Computers & Structures*, 83(23–24), 1878-1890.
- [37] Ferreira A.J.M., Fasshauer G.E., (2006), "**Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an RBF-pseudo spectral method.**", *Journal Of Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 196, pp.134-146.
- [38] Abdoun, F., Azrar, L., Daya, E. M., and Potier-Ferry, M. (2009), "**Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method.**" *Computers & Structures*, 87(1–2), pp. 91-100.
- [39] A. E. Assie, M. A. Eltaher and F. F. Mahmoud, (2010), "**The Response of Viscoelastic-Frictionless Bodies under Normal Impact.**", *International Journal of Mechanical Sciences*, 52 (3), pp. 446-454.
- [40] A. E. Assie, M. A. Eltaher and F. F. Mahmoud, (2010), "**Modeling of viscoelastic contact-impact problems**", *Applied Mathematical Modeling*, 34, pp. 2336-2352.
- [41] Gupta A. K., (2010), "**Vibration Analysis of Visco-Elastic Rectangular Plate with Thickness Varies Linearly in One and Parabolically in Other Direction.**" *Adv. Studies Theor. Phys.* 4(15), 743-758.
- [42] Assie, A. E., Eltaher, M. A., and Mahmoud, F. F., (2011), "**Behavior of a viscoelastic composite plates under transient load.**" *J Mech Sci Technol*, 25(5), pp. 1129-1140.
- [43] Khalfi, B., and Ross, A., (2013), "**Transient response of a plate with partial constrained viscoelastic layer damping.**" *International Journal of Mechanical Sciences*, 68(0), pp. 304-312.

[44] Shariyat, M., Jafari, A. A., and Alipour, M. M., (2013), "**Investigation of the thickness variability and material heterogeneity effects on free vibration of the viscoelastic circular plates.**" *Acta Mechanica Solida Sinica*, 26(1), 83-98.

[۴۵] جلالی ا. اسماعیل‌زاده خادم س.، "تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی میکروورق ویسکوالاستیک نانو کامپوزیتی تحت میدان الکترواستاتیک."، فصلنامه مکانیک هوافضا (دینامیک، ارتعاشات و کنترل)، جلد ۸، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۱، ص.ص. ۵۱-۶۸.

[46] Boresi A.P., Chong K.P., (2000), "**Elasticity in engineering mechanics**", Second Edition, John Willy & Sons, New York.

[47] Lee, H. P., and Ng, T. Y., (1995), "**Axisymmetric dynamic stability of an annular plate subject to pulsating conservative radial loads.**" *Applied Acoustics*, 45(2), pp. 167-179.

[48] Nayfeh, A. H., (1993), "**Introduction to perturbation techniques.**" John Wiley, New York.

[49] Ansys user manual, (2009).

[50] Marynowski K., (2005), "**Dynamics of the axially moving orthotropic web.**" first ed., Springer, 38, Berlin.

[51] Liu, C.-F., and Chen, G.-T., (1995), "**A simple finite element analysis of axisymmetric vibration of annular and circular plates.**" *International Journal of Mechanical Sciences*, 37(8), pp. 861-871.

Abstract

In this research, The mathematical solution for vibration of viscoelastic circular and annular plates under radial and transverse load with various boundary conditions has been taken. Four coupled partial differential equations are obtained by using Hamilton's principle and based on first order shear deformation theory. The viscoelastic behavior is assumed standard linear solid in shear and elastic in bulk. The perturbations technique has been used for frequency analysis and transient response. By the same procedure, analysis has been performed by classical plate theory. The Numerical analysis has been done by using ANSYS FE package.

Contents that are considered in this analysis are such as:

Determination of response in terms of displacement and time, calculation of the natural frequencies, investigation of the geometrical parameters effect on the response and natural frequencies, suveying accuracy of the first order shear deformation theory with respect to the classical plate theory and numerical solution.

Key words: First order shear deformation theory, Classical plate theory, Frequency analysis, Perturbation theory, Finite element method.



University of Shahrood
Faculty of Mechanical Engineering

**Vibrations analysis of an axisymmetric circular viscoelastic
plate using first order shear deformation theory**

Saeid Khadem Moshir

Supervisor:

Dr. Hamid Reza Eipakchi

Advisor:

Fatemeh Sohani

February 2015