





دانشکده مهندسی مکانیک

گروه تبدیل انرژی

# بررسی عددی لایه مرزی و انتقال حرارت فاکنر-اسکن در جریان سیالات ویسکوالاستیک

دانشجو:

مریم باؤ دیز آبادی

اساتید راهنما:

دکتر محمود نوروزی

دکتر علی جباری مقدم

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

زمستان ۱۳۹۳



دانشگاه علمی کاربردی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

### فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای مریم بانو دیزابادی، رشته مکانیک گرایش تبدیل انرژی، تحت عنوان حل عددی لایه مرزی و انتقال حرارت فالكنر-اسکن در جریان سیالات ویسکوالاستیک که در تاریخ ۹۳/۱۱/۲۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول ( با درجه : <u>کافی</u> - امتیاز <u>۲۰</u> )	<input checked="" type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input type="checkbox"/> مردود
---	---	--------------------------------

۱- عالی ( ۲۰ - ۱۹ )

۲- بسیار خوب ( ۱۸/۹۹ - ۱۸ )

۳- خوب ( ۱۶/۹۹ - ۱۶ )

۴- قابل قبول ( ۱۵/۹۹ - ۱۴ )

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	علی حمید صمدی		
۲- استاد مشكور	محمد نوروزی		
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	مصطفی کهنی		
۴- استاد ممتحن	محمد علی کهنی		
۵- استاد ممتحن	عمر غفر		

رئیس دانشکده:

امضاء

ش. مردان



تقدیم به:

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، عشق را

و به کسانی که عشقشان را در وجودم دید؛

مادر بزرگ مهربان و دلسوزم،

پدر و مادرم، ستونهای استوار زندگیم

و تنها خواهرم که همه زندگی من است.

## تشکر و قدردانی

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، به‌ویژه اساتید محترم آقای دکتر محمود نوروزی و آقای دکتر علی جباری که با راهنمایی‌های مدبرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

## تعهد نامه

اینجانب **مریم بائو دیزآبادی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک- گرایش تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه شاهرود نویسنده پایان نامه با عنوان "**بررسی عددی لایه مرزی و انتقال حرارت فالكنر-اسكن در جريان سيالات ويسكوالاستيك**" تحت راهنمائی دکتر **محمود نوروزی و دکتر علی جباری** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### تاریخ

### امضای دانشجو

## مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

## مجوز بهره‌برداری از پایان نامه

بهره‌برداری از این پایان نامه در چارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود، بلامانع است:

- ☐ بهره‌برداری از این پایان نامه/رساله برای همگان بلامانع است.
- ☐ بهره‌برداری از این پایان نامه/رساله با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.
- ☐ بهره‌برداری از این پایان نامه/رساله تا تاریخ ..... ممنوع است.

نام استاد یا اساتید راهنما

تاریخ

امضا

## چکیده

مطالعه جریان لایه‌مرزی یکی از مسائل بنیادی در مکانیک سیالات بشمار می‌رود که از دیرباز مورد توجه پژوهشگران این رشته قرار داشته است. تاکنون تحقیقات بسیار زیادی روی جریان لایه‌مرزی صورت گرفته است که اکثر آن‌ها در خصوص سیالات نیوتنی بوده و تعداد کمی از آن‌ها به سیالات غیرنیوتنی و به‌ویژه سیالات ویسکوالاستیک پرداخته‌اند. هدف اصلی این پژوهش شناخت بهتر اثرات خواص ویسکوالاستیک، بر مشخصه‌های لایه‌مرزی با وجود اثرات گرادیان فشار می‌باشد.

در این تحقیق با رویکرد عددی به انتقال حرارت و لایه‌مرزی ایجادشده توسط جریان سیال ویسکوالاستیک باوجود جمله گرادیان فشار پرداخته‌شده است. در رویکرد عددی، برای شبیه‌سازی این جریان، از دینامیک سیالات محاسباتی به صورت ضمنی با استفاده از نرم افزار متلب استفاده شده است. جریان در دو حالت وابستگی پارامترهای جریان به دما سیال و عدم وابستگی به دما مورد بررسی قرار گرفته است. در واقع، در این تحقیق معادله انرژی به همراه معادلات بقا، برخی خواص سیال از قبیل لزجت، ضریب رسانش و ظرفیت حرارتی ویژه تابعی از دمای نقطه‌ای سیال در نظر گرفته‌شده است؛ زیرا با توجه به اینکه گروه غالبی از سیالات ویسکوالاستیک، مذاب‌های پلیمری می‌باشند و در این حالت تفاوت دمای زیادی مشاهده می‌شود و از طرفی با توجه به حساسیت برخی خواص مواد ویسکوالاستیک به دما، در حل معادله انرژی استفاده از این فرضیه ضروری به نظر می‌رسد. در حل عددی از مدل مرتبه دو، به عنوان مدل ساختاری سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است. جهت اطمینان از پاسخ‌های روش عددی، استقلال نتایج از شبکه محاسباتی بررسی شده و همچنین پاسخ‌ها در حالت نیوتنی با حل بلازیوس و فالکنراسکن مقایسه شده اند. ضخامت لایه‌مرزی هیدرودینامیکی، ضخامت مومنوم، ضخامت جابجایی و ضخامت لایه‌مرزی حرارتی فالکنر- اسکن در سیال ویسکوالاستیک بیشتر از سیال نیوتنی می‌-



باشد. در حل عددی نشان داده شد که با افزایش اختلاف تنش‌های نرمال اول روی دیواره، ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی، ضخامت مومنتوم، ضخامت جابجایی و لایه مرزی حرارتی افزایش می‌یابد. ضریب درگ در اختلاف تنش‌های نرمال اول مختلف و گرادیان فشارهای متفاوت گزارش شده است. تاثیر تغییرات عدد پراتل جریان سیال ویسکوالاستیک بر مشخصه‌های لایه مرزی مطالعه شده است. تغییرات ناسلت محلی در اعداد پراتل مختلف مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته است. عدد ناسلت متوسط در گرادیان فشارهای متفاوت و ضریب اختلاف تنش نرمال اول مورد بررسی قرار گرفته شده است.

**کلمات کلیدی:** لایه مرزی، انتقال حرارت، فالکنراسکن، سیال مرتبه دوم، روش عددی،

ویسکوالاستیک

# فهرست مطالب

## ۱- فصل اول

۱-۱- مقدمه.....	۲
۲-۱- مفهوم لایه مرزی.....	۲
۱-۲-۱- حل های خود متشابه معادلات لایه مرزی فالکنر-اسکن.....	۹
۲-۲-۱- انتقال حرارت برای جریان های فالکنر-اسکن.....	۱۵
۳-۱- طبقه بندی سیالات غیر نیوتنی.....	۱۷
۱-۳-۱- پارامترهای مهم در جریان سیالات ویسکوالاستیک.....	۲۳
۲-۳-۱- معادلات متشکله سیالات ویسکوالاستیک.....	۲۴
۳-۳-۱- مدل های ویسکوالاستیک خطی.....	۲۴
۴-۳-۱- مدل های ویسکوالاستیک غیر خطی.....	۲۷
۴-۱- تاریخچه.....	۳۲
۱-۴-۱- لایه مرزی سیالات نیوتنی.....	۳۲
۲-۴-۱- لایه مرزی در سیالات غیر نیوتنی.....	۳۹
۵-۱- تحقیق حاضر.....	۴۴
۱-۵-۱- معرفی تحقیق حاضر.....	۴۴
۲-۵-۱- ضرورت و کاربرد.....	۴۵
۳-۵-۱- نوآوری تحقیق حاضر.....	۴۶

## ۲- فصل دوم

۱-۲- مقدمه.....	۴۸
۲-۲- تقریب لایه مرزی در سیال نیوتنی.....	۴۸
۳-۲- محاسبه میدان تنش در سیال ویسکوالاستیک.....	۵۱
۴-۲- تقریب لایه مرزی در جریان سیال ویسکوالاستیک.....	۵۵
۵-۲- بی بعد سازی معادلات حاکم بر جریان.....	۵۶
۶-۲- هندسه مسئله.....	۵۸

۶۰ ..... ۷-۲- اعداد بی بعد مسئله.....

۶۱ ..... ۸-۲- فرضیات مسئله.....

### ۳- فصل سوم

۶۴ ..... ۱-۳- مقدمه.....

۶۴ ..... ۲-۳- معرفی نرم افزار متلب.....

۶۵ ..... ۳-۳- گسسته سازی معادلات.....

۷۰ ..... ۴-۳- حل عددی در حالت وابستگی خواص سیال به دما (TD).....

۷۱ ..... ۵-۳- شرایط مرزی حاکم بر مسئله.....

### ۴- فصل چهارم

۷۴ ..... ۱-۴- مقدمه.....

۷۴ ..... ۲-۴- شرایط و الگوی همگرایی.....

۷۵ ..... ۳-۴- بررسی استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی.....

۷۶ ..... ۴-۴- بررسی صحت نتایج حاصل از حل عددی.....

۸۰ ..... ۵-۴- لایه مرزی هیدرودینامیکی.....

۸۰ ..... ۱-۵-۴- بررسی پارامترهای لایه مرزی در جریان سیال نیوتنی.....

۸۱ ..... ۱-۵-۴-۱- بررسی تغییرات عدد رینولدز بر مشخصه های لایه مرزی در سیال نیوتنی.....

۸۵ ..... ۱-۵-۴-۲- بررسی تغییرات گرادیان فشار بر مشخصه های لایه مرزی در سیال نیوتنی.....

۸۷ ..... ۲-۵-۴- مقایسه لایه مرزی در سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک.....

۳-۵-۴- مقایسه لایه مرزی در دو حالت خواص وابسته به دما (TD) و خواص مستقل از دما (TI) در جریان سیال

۹۱ ..... ویسکوالاستیک.....

۹۴ ..... ۴-۵-۴- بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر مشخصات لایه مرزی در جریان سیال ویسکوالاستیک.....

۹۴ ..... ۱-۴-۵-۴- بررسی اثر تغییرات عدد رینولدز بر مشخصه های لایه مرزی.....

۱۰۰ ..... ۲-۴-۵-۴- بررسی تأثیر تغییرات گرادیان فشار بر مشخصه های لایه مرزی.....

۱۰۶ ..... ۳-۴-۵-۴- بررسی تأثیر تغییرات اختلاف تنش نرمال اول بر مشخصه های لایه مرزی.....

۱۱۲ ..... ۶-۴- لایه مرزی گرمایی.....

۱۱۲ ..... ۱-۶-۴- بررسی پارامترهای لایه مرزی گرمایی در جریان سیال نیوتنی.....

۱۱۴ ..... ۲-۶-۴- بررسی پارامترهای مختلف بر مشخصه های لایه مرزی گرمایی در جریان سیال ویسکوالاستیک.....

- ۱۱۵.....۴-۶-۱- بررسی تأثیر تغییرات عدد پرانتل بر مشخصه‌های لایه‌مرزی گرمایی
- ۱۲۵.....۴-۶-۲- بررسی تأثیر اختلاف تنش نرمال اول بر ضخامت لایه‌مرزی گرمایی
- ۱۲۷.....۴-۶-۳- بررسی تأثیر تغییرات گرادیان فشار بر ضخامت لایه‌مرزی گرمایی

## ۵- فصل پنجم

- ۱۳۴.....۵-۱- نتیجه‌گیری
- ۱۳۸.....۵-۲- پیشنهادها

## فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ لایه‌مرزی جریان سیال روی صفحه تخت..... ۳
- شکل ۲-۱ توزیع سرعت در لایه‌مرزی و مشتقات آن (افت فشار) [۲]..... ۶
- شکل ۳-۱ توزیع سرعت در لایه‌مرزی و مشتقات آن (افزایش فشار) [۲]..... ۶
- شکل ۴-۱ نوسانات سرعت در لایه‌مرزی دارای گرادیان فشار [۳]..... ۷
- شکل ۵-۱ منحنی رشد زمانی لایه‌مرزی جریان کند شونده [۶]..... ۹
- شکل ۶-۱ جریان سیال بروی سطوح با زوایای مختلف (گرادیان فشارهای متفاوت) [۸]..... ۱۵
- شکل ۷-۱ منحنی‌های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات مستقل از زمان..... ۲۰
- شکل ۸-۱ پروفیل سرعت در  $\gamma$  های (پارامتر انتقال جرم) مختلف [۲۲]..... ۳۴
- شکل ۹-۱ پروفیل لایه‌مرزی در گرادیان فشارهای مختلف [۲۹]..... ۳۶
- شکل ۱۰-۱ پروفیل دما بی‌بعد در اعداد پرانتل مختلف [۲۹]..... ۳۷
- شکل ۱۱-۱ شماتیک مسئله به همراه جریان سیال [۳۰]..... ۳۸
- شکل ۱۲-۱ تأثیر ضریب الاستیک بر پروفیل دما (دما دیواره ثابت) [۳۷]..... ۴۱
- شکل ۱۳-۱ تأثیر ضریب الاستیک بر پروفیل دما (شار حرارتی ثابت) [۳۷]..... ۴۲
- شکل ۱۴-۱ تأثیر تغییرات عدد اکرت بر پروفیل دما (دما دیواره ثابت) [۳۷]..... ۴۲
- شکل ۱۵-۱ تأثیر تغییرات عدد اکرت بر پروفیل دما (شار حرارتی ثابت) [۳۷]..... ۴۳
- شکل ۱-۲ شماتیک هندسه مسئله..... ۵۹
- ۱-۳ شبکه اختلاف محدود برای یک لایه‌مرزی دوبعدی..... ۶۶
- شکل ۱-۴ مقایسه پروفیل لایه‌مرزی در حل عددی و بلازیوس [۸]..... ۷۸
- شکل ۲-۴ مقایسه ضریب درگ در حل عددی و بلازیوس [۸]..... ۷۸
- شکل ۳-۴ مقایسه تنش برشی در حل عددی و حل بلازیوس [۸]..... ۷۹
- شکل ۴-۴ مقایسه لایه‌مرزی گرمایی در حل عددی و کتاب وایت مرجع [۸]..... ۷۹
- شکل ۵-۴ مقایسه لایه‌مرزی حل عددی و فالکنر-اسکن در مرجع [۷]..... ۸۰
- شکل ۶-۴ مقایسه لایه‌مرزی صفحه تخت و فالکنر-اسکن در مرجع [۷]..... ۸۱
- شکل ۷-۴ مقایسه لایه‌مرزی فالکنر-اسکن در اعداد رینولدز مختلف..... ۸۳

- شکل ۸-۴ مقایسه ضخامت جابجایی فالکنر-اسکن در اعداد رینولدز مختلف ..... ۸۳
- شکل ۹-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم فالکنر-اسکن در اعداد رینولدز مختلف ..... ۸۴
- شکل ۱۰-۴ مقایسه لایه مرزی فالکنر-اسکن در گرادیان فشارهای مختلف ..... ۸۵
- شکل ۱۱-۴ مقایسه ضخامت جابجایی فالکنر-اسکن در گرادیان فشارهای مختلف ..... ۸۶
- شکل ۱۲-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم فالکنر-اسکن در گرادیان فشارهای مختلف ..... ۸۶
- شکل ۱۳-۴ مقایسه تغییرات ضریب درگ برحسب عدد رینولدز در گرادیان فشارهای مختلف ..... ۸۷
- شکل ۱۴-۴ مقایسه لایه مرزی بین سیال نیوتنی و غیرنیوتنی ..... ۸۸
- شکل ۱۵-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم بین سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک ..... ۸۸
- شکل ۱۶-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم بین سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک ..... ۸۹
- شکل ۱۷-۴ مقدار ضریب درگ محلی در طول صفحه در دو حالت نیوتنی و ویسکوالاستیک در  $Re=1000$  ..... ۹۰
- شکل ۱۸-۴ مقایسه ضخامت لایه مرزی در دو حالت  $TI$  و  $TD$  ..... ۹۲
- شکل ۱۹-۴ مقایسه ضخامت جابجایی در دو حالت  $TI$  و  $TD$  ..... ۹۳
- شکل ۲۰-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم در دو حالت  $TI$  و  $TD$  ..... ۹۳
- شکل ۲۱-۴ پروفیل سرعت در اعداد رینولدز مختلف در حالت  $TD$  ..... ۹۵
- شکل ۲۲-۴ پروفیل سرعت در اعداد رینولدز مختلف در حالت  $TI$  ..... ۹۶
- شکل ۲۳-۴ مقایسه لایه مرزی در رینولدزهای مختلف در حالت  $TI$  ..... ۹۶
- شکل ۲۴-۴ مقایسه لایه مرزی در رینولدزهای مختلف در حالت  $TD$  ..... ۹۷
- شکل ۲۵-۴ مقایسه ضخامت جابجایی در رینولدزهای مختلف در حالت  $TI$  ..... ۹۷
- شکل ۲۶-۴ مقایسه ضخامت جابجایی در رینولدزهای مختلف در حالت  $TD$  ..... ۹۸
- شکل ۲۷-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم در رینولدزهای مختلف در حالت  $TI$  ..... ۹۸
- شکل ۲۸-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم در رینولدزهای مختلف در حالت  $TD$  ..... ۹۹
- شکل ۲۹-۴ پروفیل سرعت در گرادیان فشارهای مختلف در حالت  $TD$  ..... ۱۰۲
- شکل ۳۰-۴ پروفیل سرعت در گرادیان فشارهای مختلف در حالت  $TI$  ..... ۱۰۲
- شکل ۳۱-۴ مقایسه ضخامت لایه مرزی در گرادیان فشارهای مختلف در حالت  $TD$  ..... ۱۰۳
- شکل ۳۲-۴ مقایسه لایه مرزی در گرادیان فشارهای مختلف در حالت  $TI$  ..... ۱۰۳
- شکل ۳۳-۴ مقایسه ضخامت جابجایی در گرادیان فشارهای مختلف در حالت  $TD$  ..... ۱۰۴

- شکل ۴-۳۴ مقایسه ضخامت جابجایی در گرادیان فشارهای مختلف در حالت TI ..... ۱۰۴
- شکل ۴-۳۵ مقایسه ضخامت مومنتوم در گرادیان فشارهای مختلف در حالت TD ..... ۱۰۵
- شکل ۴-۳۶ مقایسه ضخامت مومنتوم در گرادیان فشارهای مختلف در حالت TI ..... ۱۰۵
- شکل ۴-۳۷ پروفیل سرعت در اختلاف تنش نرمال مختلف در حالت TD ..... ۱۰۷
- شکل ۴-۳۸ پروفیل سرعت در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TI ..... ۱۰۷
- شکل ۴-۳۹ مقایسه لایه مرزی در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TD ..... ۱۰۸
- شکل ۴-۴۰ مقایسه لایه مرزی در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TI ..... ۱۰۸
- شکل ۴-۴۱ مقایسه ضخامت مومنتوم در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TD ..... ۱۰۹
- شکل ۴-۴۲ مقایسه ضخامت مومنتوم در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TI ..... ۱۰۹
- شکل ۴-۴۳ مقایسه ضخامت جابجایی در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TD ..... ۱۱۰
- شکل ۴-۴۴ مقایسه ضخامت جابجایی در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TI ..... ۱۱۰
- شکل ۴-۴۵ مقایسه تغییرات ضریب درگ بر حسب عدد رینولدز در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت TD ..... ۱۱۱
- شکل ۴-۴۶ تغییرات ضریب درگ بر حسب عدد رینولدز در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت TI ..... ۱۱۲
- شکل ۴-۴۷ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در جریان سیال نیوتنی ..... ۱۱۳
- شکل ۴-۴۸ مقایسه لایه مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در جریان سیال نیوتنی ..... ۱۱۳
- شکل ۴-۴۹ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل ..... ۱۱۴
- شکل ۴-۵۰ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در حالت گرمایش TI ..... ۱۱۶
- شکل ۴-۵۱ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در حالت سرمایش TI ..... ۱۱۶
- شکل ۴-۵۲ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در حالت گرمایش TD ..... ۱۱۷
- شکل ۴-۵۳ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در حالت سرمایش TD ..... ۱۱۷
- شکل ۴-۵۴ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در حالت شار ثابت TI ..... ۱۱۸
- شکل ۴-۵۵ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در حالت شار ثابت TD ..... ۱۱۸
- شکل ۴-۵۶ مقایسه ضخامت لایه مرزی گرمایی در دو حالت TI و TD ..... ۱۱۹
- شکل ۴-۵۷ مقایسه ضخامت لایه مرزی در شار ثابت در دو حالت TI و TD ..... ۱۱۹
- شکل ۴-۵۸ مقایسه لایه مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در حالت گرمایش TI ..... ۱۲۰
- شکل ۴-۵۹ مقایسه لایه مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در حالت گرمایش TD ..... ۱۲۰

- شکل ۴-۶۰ مقایسه لایه‌مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در حالت سرمایش TD ..... ۱۲۱
- شکل ۴-۶۱ مقایسه لایه‌مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در حالت شار ثابت TI ..... ۱۲۱
- شکل ۴-۶۲ مقایسه لایه‌مرزی در پرانتل‌های مختلف در حالت شار ثابت TD ..... ۱۲۲
- شکل ۴-۶۳ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل در حالت گرمایش TI ..... ۱۲۳
- شکل ۴-۶۴ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل در حالت گرمایش TD ..... ۱۲۳
- شکل ۴-۶۵ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل در حالت سرمایش TD ..... ۱۲۴
- شکل ۴-۶۶ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل در حالت شار TD ..... ۱۲۴
- شکل ۴-۶۷ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل در حالت شار TI ..... ۱۲۵
- شکل ۴-۶۸ مقایسه لایه‌مرزی گرمایی در اختلاف تنش نرمال مختلف در حالت گرمایش TD ..... ۱۲۶
- شکل ۴-۶۹ مقایسه لایه‌مرزی گرمایی در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت گرمایش TI ..... ۱۲۶
- شکل ۴-۷۰ مقایسه ضخامت لایه‌مرزی گرمایی در گرادیان فشارهای مختلف در حالت گرمایش TD ..... ۱۲۷
- شکل ۴-۷۱ مقایسه ضخامت لایه‌مرزی گرمایی در حالت سرمایش TD ..... ۱۲۸
- شکل ۴-۷۲ تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب  $\beta$  در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت گرمایش TD ..... ۱۲۹
- شکل ۴-۷۳ تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب  $\beta$  در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت سرمایش TD ..... ۱۳۰
- شکل ۴-۷۴ تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب  $\beta$  در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت TI ..... ۱۳۰
- شکل ۴-۷۵ تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب  $\beta$  در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت شار ثابت TD ..... ۱۳۱
- شکل ۴-۷۶ تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب  $\beta$  در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت شار ثابت TI ..... ۱۳۱



## فهرست جداول

- جدول ۱-۱ مقادیر عددی سرعت جریان  $f'(\eta)$  برای جریانهای متشابه فالکنر-اسکن [۸] ..... ۱۴
- جدول ۲-۱ مقادیر عددی پارامتر انتقال حرارت  $G(\text{Pr}, \beta)$  از معادله (۴۲-۱) [۸] ..... ۱۷
- جدول ۱-۴ مقایسه ضریب درگ در شبکه‌های محاسباتی ..... ۷۶
- جدول ۲-۴ اثر افزایش عدد رینولدز بر ضریب درگ بر جریان سیال ویسکوالاستیک ..... ۱۰۰

## فهرست علائم

ضریب درگ	$C_D$
ضریب انتقال حرارت جابجایی ( $W / m^2.k$ )	$h$
ارتفاع در راستای $y$ ( $m$ )	$h'$
ضریب انتقال حرارت هدایت ( $W / m.k$ )	$k$
طول صفحه ( $m$ )	$L$
فاکتور سرعت	$m$
مرتبه وابستگی توابع ویسکومتریکی به نرخ برش	$n$
اختلاف تنش نرمال اول ( $Pa$ )	$N_1$
اختلاف تنش نرمال دوم ( $Pa$ )	$N_2$
عدد ناسلت محلی	$Nu_x$
عدد ناسلت متوسط	$< Nu >$
فشار استاتیکی ( $Pa$ )	$p$
عدد پرانتل	$Pr$
شار حرارتی ( $W / m^2$ )	$q''$
عدد رینولدز	$Re$
دما سیال ( $k$ )	$T$
دمای بی‌بعد برای حالت دما ثابت	$T^*$
دمای بی‌بعد برای حالت شار ثابت	$T_h^*$
دما سیال ورودی ( $k$ )	$T_c$
دما دیواره ( $k$ )	$T_w$

سرعت در راستای $x$ ( $m / s$ )	$u$
متوسط سرعت محوری ( $m / s$ )	$U_{ref}$
سرعت جریان آزاد ( $m / s$ )	$U_{\infty}$
سرعت در راستای $y$ ( $m / s$ )	$v$
فاصله در امتداد جریان	$x$
فاصله در راستای عمود بر جریان	$y$

## فهرست علائم یونانی

ضریب نفوذ گرمایی	$\alpha$
فاکتور گرادیان فشار	$\beta$
نرخ برش ( $1/s$ )	$\dot{\gamma}$
ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی ( $m$ )	$\delta$
ضخامت لایه مرزی گرمایی ( $m$ )	$\delta_T$
ضخامت جابجایی ( $m$ )	$\delta^*$
ویسکوزیته پلیمری ( $Pa.s$ )	$\eta_p$
ویسکوزیته حلال ( $Pa.s$ )	$\eta_s$
ضخامت مومنتوم ( $m$ )	$\theta$
ثابت زمانی رهایی از تنش ( $s$ )	$\lambda$
لزجت دینامیکی ( $kg.m / s$ )	$\eta$
لزجت سینماتیکی ( $Pa.s$ )	$\nu$

چگالی ( $kg / m^3$ )	$\rho$
ضریب اختلاف تنش نرمال اول ( $Pa.s^2$ )	$\Psi_1$
ضریب اختلاف تنش نرمال دوم ( $Pa.s^2$ )	$\Psi_2$



## ١- فصل

### مقدمه

## ۱-۱- مقدمه

در این فصل، مروری کوتاه بر مفهوم کلی لایه مرزی روی صفحه تخت و سپس لایه مرزی باوجود گرادیان فشار (فالکنر-اسکن) در عموم سیالات صورت می گیرد و سپس به معرفی اجمالی مکانیک سیالات غیرنیوتنی مخصوصاً سیالات ویسکوالاستیک پرداخته می شود. در ادامه مروری بر تحقیقات انجام شده بر روی مسئله لایه مرزی در زمینه سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی و سیالات ویسکوالاستیک انجام شده و در انتها ضرورت تحقیق حاضر بیان می شود.

## ۱-۲- مفهوم لایه مرزی

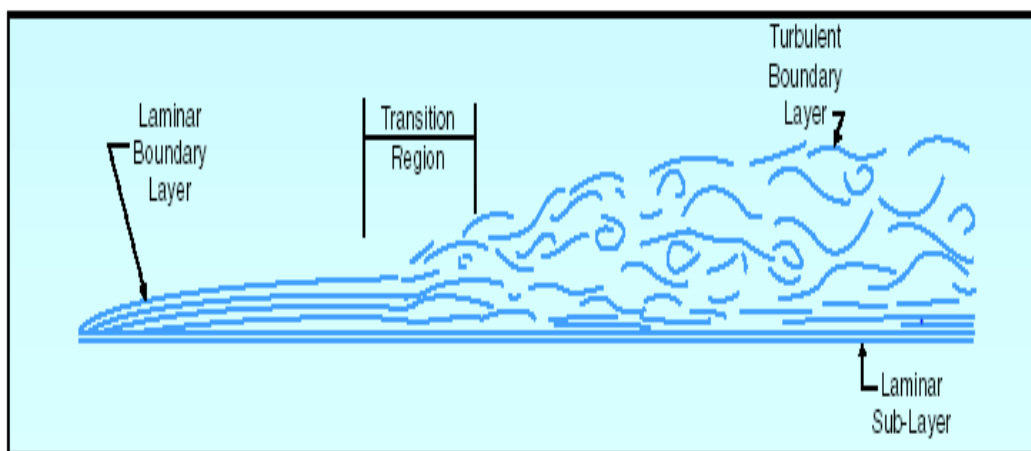
بر اساس قانون لزجت نیوتن، دو پارامتر لزجت سیال و منحنی سرعت با تنش برشی در جریان سیال ارتباط مستقیم دارد. در جریان حرکت سیال با لزجت کم همواره لایه مرزی نازکی پیرامون جسم وجود دارد که در آن ناحیه به علت گرادیان زیاد سرعت، تنش برشی قابل توجهی وجود داشته و از آن مقدار نمی توان صرف نظر نمود. این ناحیه را که اولین بار در سال ۱۹۰۴ توسط پرانتل<sup>۱</sup> بیان گردیده و جدای از جریان اصلی باید مورد مطالعه قرار بگیرد، لایه مرزی گویند. سرعت سیال در این ناحیه تحت تأثیر لزجت و اصطکاک سیال با جدار جسم کاهش یافته و ضخامت آن بسیار کوچک می باشد. در خارج از لایه مرزی اثرات لزجت سیال قابل اغماض بوده و منحنی سرعت سیال همان است که در یک سیال ایده آل و غیرلزج در حال حرکت بر روی جدار جسم انتظار آن می رفت. در این صورت تئوری های کلاسیک موجود با کمک تئوری پتانسیل و معادله برنولی قابل بیان می باشد. نیروی درگ در کشتی ها، بازده کمپرسورها، توربین های گازی، موتور جت و کارایی مقدار مکش هوا در توربوجت همگی به رفتار سیال در لایه مرزی و تأثیر آن بر جریان اصلی بستگی دارد. مطابق با شکل ۱-۱ سیال با سرعت یکنواخت به صفحه صاف نزدیک شده و

---

<sup>۱</sup> Prandtl

در روی صفحه، به واسطه وجود لزجت سیال، سرعت به صفر می‌رسد، در حالی که در مجاورت صفحه، ناحیه-ای به وجود می‌آید که در آن ناحیه، سرعت سیال از سرعت جریان آزاد کمتر می‌باشد.

در این ناحیه گرادیان سرعت زیاد بوده و موجب بروز تنش‌های برشی در سیال شده و رفتار سیال از نوع لزج می‌باشد که همین رفتار لزج سیال نیروی مقاوم بر روی صفحه ایجاد می‌کند. در خارج از این ناحیه گرادیان سرعت صفر بوده، تنش برشی وجود نداشته و رفتار سیال نظیر رفتار سیال ایده‌آل (با لزجت صفر) می‌باشد. اولین بار پранتل پیشنهاد نمود که میدان جریان به دو قسمت تقسیم گردد، یک جریان لزج که در ناحیه بسیار نازکی در مجاورت مرزهای جامد تشکیل گردد و جریان لایه‌مرزی نامیده می‌شود و دیگری جریان ایده‌آل و غیر لزج سیال در خارج از ناحیه لایه‌مرزی که در این صورت می‌توان معادلات حرکت برای هر ناحیه را حل نمود.



شکل ۱-۱ لایه‌مرزی جریان سیال روی صفحه تخت

جریان در لایه‌مرزی ممکن است لایه‌ای و یا درهم بوده و ضخامت لایه‌مرزی و منحنی سرعت در جهت جریان تغییر نماید. اگر جریان را غیرقابل تراکم، یکنواخت و روی صفحه تخت با زاویه حمله صفر در نظر بگیریم، در ابتدای صفحه رژیم جریان آرام بوده و کم‌کم ضخامت لایه‌مرزی زیاد می‌گردد. بعد از



نقطه گذر، جریان از حالت آرام به درهم تبدیل شده و به دنبال آن افزایش ضخامت لایه مرزی را خواهیم داشت. ناحیه گذر در محدوده اعداد رینولدز  $3 \times 10^5$  تا  $10^6$  رخ می‌دهد که این مقدار عدد رینولدز که رینولدز بحرانی نامیده می‌شود، به عواملی نظیر زبری سطح، میزان اغتشاش در جریان آزاد سیال و ارتعاش صفحه بستگی دارد. لایه مرزی ضخامت آن در حال افزایش بوده و تغییرات محسوس نسبت به فاصله نقطه از لبه صفحه دیده می‌شود.

سیال قبل از رسیدن به صفحه دارای سرعت  $U$  بوده و سرعت آن در نقطه تماس با صفحه به دلیل خاصیت عدم لغزش که از مشخصات جریان پیوسته می‌باشد، برابر با سرعت صفحه (معادل صفر) می‌باشد. در نتیجه بین ناحیه آزاد جریان و لایه‌های نزدیک به صفحه تغییرات سرعت وجود داشته و باید شیب سرعت نیز وجود داشته باشد. همراه با این شیب سرعت، نیروی برشی اصطکاکی نیز در صفحه وجود خواهد داشت. به محض اینکه ذرات سیال با لبه صفحه برخورد می‌کنند حرکت سیال در اثر نیروهای برشی اصطکاکی کندتر شده و به تدریج که در طول صفحه پیش می‌رود از سرعت آن کاسته می‌شود. گذشته از آن، این ذرات که خودشان حرکت آهسته‌تری نسبت به ذرات خارج از حوزه تأثیر لزجت دارند موجب می‌شوند که ذرات در حال حرکت در لایه‌های مجاور از سرعتشان کاسته شده و در نتیجه هر مقدار که از ابتدای صفحه دور می‌شویم ضخامت لایه مرزی افزایش خواهد یافت. با توجه به این که سرعت در خارج از لایه مرزی  $U$  و در روی صفحه صفر می‌باشد، اختلاف آن‌ها مقدار ثابتی است. از طرفی ضخامت لایه مرزی از نوک صفحه به طرف راست افزایش یافته و در نتیجه مقدار  $\frac{dU}{dy}$  از نوک صفحه به طرف راست کاهش خواهد یافت و در نتیجه نیروی برشی اصطکاکی کم خواهد شد. این وضع تا زمانی که جریان لایه-ای در اثر بی‌ثباتی و یا غلبه نیروهای اینرسی بر نیروی لزجت در لایه مرزی به جریان درهم تبدیل گردد، ادامه خواهد یافت.

در لایه مرزی با رژیم درهم جریان سیال با سرعت زیاد در حریم لایه های کم سرعت نزدیک به دیواره وارد شده و موجب افزایش سرعت سیال می گردد. در هر حال این پدیده نمی تواند تمامی لایه های آرام را از بین ببرد و لایه ای نسبتاً کم ضخامت در جدار با رژیم آرام باقی خواهد ماند که آن ناحیه را زیر لزج گویند. معادله لایه مرزی به صورت معادله (۱-۱) است. اگر این معادله برای دیوار ( $y=0$ ) بکار برده شود، از آنجاکه  $u(x,0)=0$  و  $v(x,0)=0$  می باشد، شرط سازگاری روی دیواره به صورت معادله (۲-۱) به دست خواهد آمد [۲].

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1-1)$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = \frac{dp}{dx} \quad (2-1)$$

اگر از معادله (۱-۱) نسبت به  $y$  دیفرانسیل جزئی گرفته شود و سپس آن معادله برای دیوار نوشته شود، می توان روابطی هم برای مشتقات مرتبه بالاتر روی دیوار به دست آورد. در این صورت، مشتق مرتبه سوم به صورت رابطه (۳-۱) به دست می آید.

$$\mu \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)_w = 0 \quad (3-1)$$

از معادله (۲-۱) دیده می شود که انحنای پروفیل سرعت در روی دیواره، توسط گرادیان فشار محاسبه می شود و انحنای تغییر علامت گرادیان فشار، تغییر علامت می دهد. شکل ۱-۲ و شکل ۱-۳ پروفیل های سرعت را برای دو حالت افت فشار و افزایش گرادیان فشار نشان می دهد. برای جریان هایی با

افت فشار (جریان های شتاب گیرنده، گرادیان فشار موافق)، معادله (۲-۱) نتیجه می دهد که  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w < 0$

و در نتیجه در تمام ضخامت لایه مرزی داریم  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) < 0$ . برای جریان هایی با افزایش فشار (جریان کند

شونده، جریان با گرادیان فشار مخالف داریم  $(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_w > 0$ . از آنجاکه در فواصل دور از دیواره بدون شک

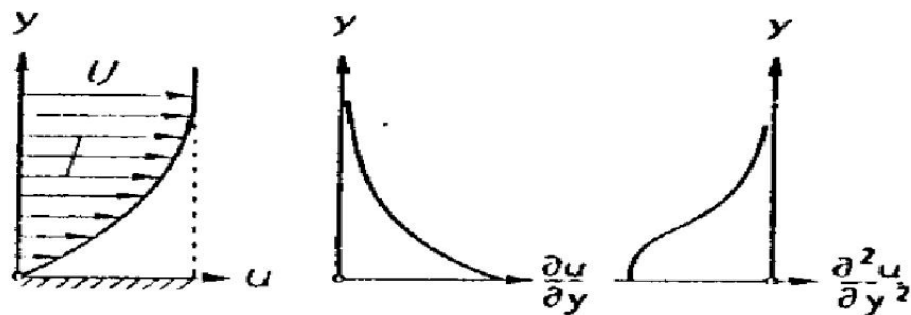
داریم  $(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) > 0$ ، پس در این حالت می‌بایست نقطه‌ای درون لایه مرزی وجود داشته باشد که در آن

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  باشد، به عبارت دیگر پروفیل سرعت یک نقطه عطف خواهد داشت. این اتفاق در جدایی جریان

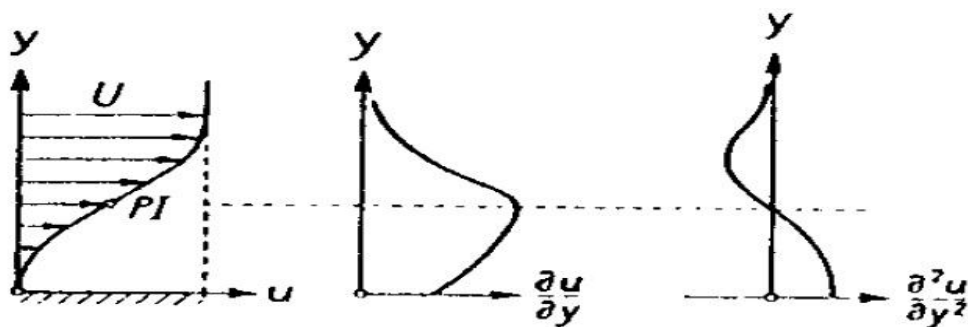
تأثیر بسزایی دارد. از آنجاکه پروفیل سرعت در نقطه جدایی باید دارای دونقطه عطف باشد، به علت مماس

بودن با محور عمودی، نتیجه می‌شود که جدایی تنها می‌تواند در حالتی رخ دهد که جریان خارجی، کند

شونده باشد (افزایش فشار، گرادیان فشار مخالف).

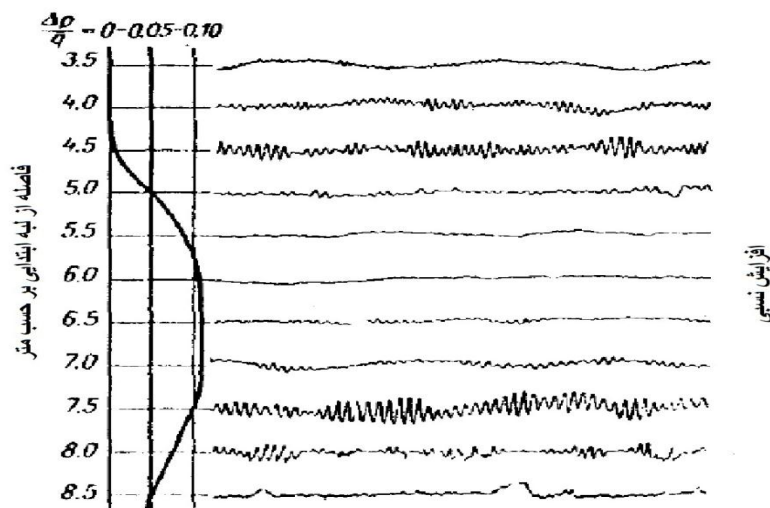


شکل ۲-۱ توزیع سرعت در لایه مرزی و مشتقات آن (افت فشار) [۲]



شکل ۳-۱ توزیع سرعت در لایه مرزی و مشتقات آن (افزایش فشار) [۲]

اثر شدید گرادیان فشار بر روی پایداری و رشد اغتشاشات کوچک که توسط تئوری پیش‌بینی شده بود، در آزمایش‌های شوبایر<sup>۱</sup> و همکاران [۳] تایید شد. شکل ۱-۴ نوسانات سرعت را در لایه مرزی روی یک صفحه مسطح در حالت وجود جمله گرادیان فشار نشان می‌دهد. در نیمه بالایی شکل ۱-۴ دیده می‌شود که یک گرادیان فشار به میزان حدود ۱۰ درصد فشار سکون، به‌طور کامل اغتشاشات را از بین می‌برد، درحالی‌که یک افزایش فشار به میزان ۵ درصد بالای فشار سکون، نه‌تنها نوسانات را تقویت می‌کند بلکه تحول را نیز سریع آغاز می‌کند.



شکل ۱-۴ نوسانات سرعت در لایه مرزی دارای گرادیان فشار [۳]

در تحقیق پایداری لایه مرزی دارای گرادیان فشار، کارآمد است که اثر گرادیان فشار را با فاکتور شکل پروفیل سرعت تفسیر شود آنگاه برای سادگی، خانواده تک متغیری از پروفیل‌های سرعت را بررسی می‌کنیم. یک مثال از چنین خانواده تک متغیری پروفیل‌های که حل‌های دقیق معادلات دیفرانسیل لایه-

<sup>1</sup> Schubauer

مرزی می‌باشند، خانواده‌ای است که توسط هارتری<sup>۱</sup> [۴] برای جریان‌های گوه محاسبه شده است. در معادله (۴-۱)،  $m$ ، فاکتور پروفیل سرعت و رابطه (۵-۱) زاویه گوه است. برای  $m < 0$  (افزایش فشار)، پروفیل سرعت یک نقطه عطف دارند اما برای  $m > 0$  (کاهش فشار) نقطه عطفی وجود ندارد. پرش<sup>۲</sup> [۵] محاسبات پایداری را بر روی یک سری از پروفیل‌های سرعت از این خانواده تک متغیره در سال ۱۹۴۱ انجام داد. این محاسبات توسط ابرمسی<sup>۳</sup> و همکاران [۶] گسترش داده شد. در این مورد، نه تنها عدد رینولدز بی تفاوت (اغتشاشات خنثی) تعیین شده، بلکه نرخ رشد اغتشاشات ناپایدار نیز به دست آمد. روشن شد که عدد رینولدز بی تفاوت به مقدار زیادی به فاکتور شکل  $m$  وابسته است. شکل ۵-۱ نتیجه‌ای از این تحقیقات را نشان می‌دهد که منحنی رشد ثابت برای پروفیل‌های لایه مرزی با جریان خارجی داده شده توسط رابطه (۴-۱) برای  $m = -0.048$  می‌باشد. این عدد معادل با فاکتور شکل (فاکتور جمله گرادیان)  $\beta = -0.1$  است.

$$U_e(x) = a.x^m \quad (۴-۱)$$

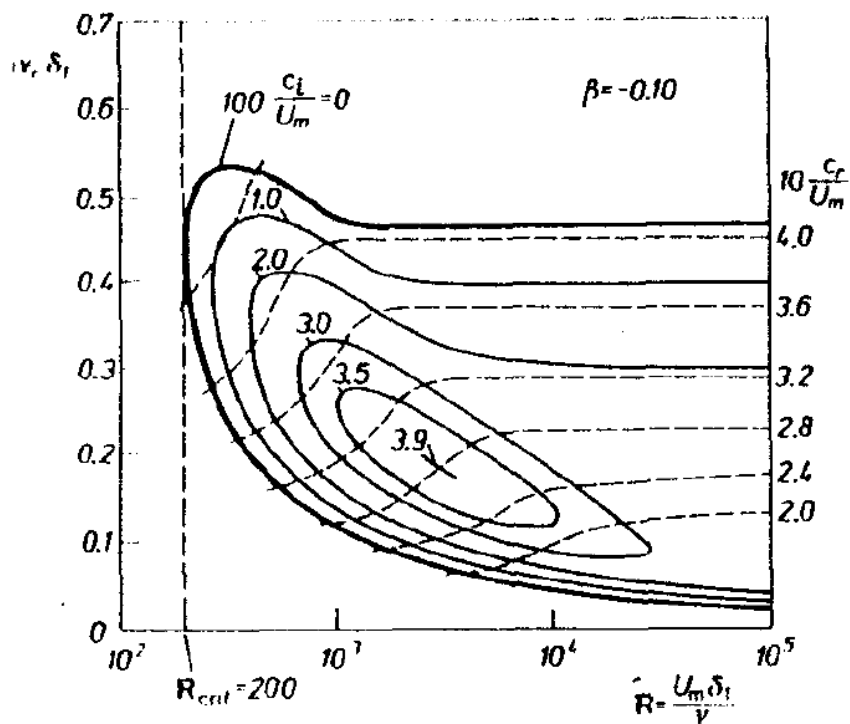
$$\beta = 2m / (m + 1) \quad (۵-۱)$$

---

<sup>1</sup> Hartree

<sup>2</sup> Pretch

<sup>3</sup> Obremski



شکل ۵-۱ منحنی رشد زمانی لایه مرزی جریان کند شونده [۶]

### ۱-۲-۱ - حل های خود متشابه معادلات لایه مرزی فالکنر-اسکن

کار با معادله لایه مرزی برای جریان تراکم ناپذیر دائمی دوبعدی آغاز می شود که به صورت معادله (۶-۱) و (۷-۱) داده شده است. شرایط مرزی به صورت روابط (۸-۱) و (۹-۱) هست. با معرفی تابع جریان  $\psi(x, y)$  می توان از معادله پیوستگی انتگرال گیری کرد. در نتیجه معادله (۷-۱) به صورت (۱۲-۱) درمی آید [۲].

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۶-۱)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (۷-۱)$$

$$y = 0 : u = 0, v = 0 \quad (۸-۱)$$

$$y \rightarrow \infty : u = U \quad (۹-۱)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (۱۰-۱)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۱۱-۱)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (۱۲-۱)$$

حال از یک تبدیل مختصات استفاده کرده و متغیرها را از  $x$  و  $y$  به متغیرهای بدون بعد جدید تغییر داده می‌شود [۲].

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (۱۳-۱)$$

$$\eta = \frac{y}{l} \frac{\sqrt{\text{Re}}}{\delta(\psi)} \quad (۱۴-۱)$$

از سرعت مرجع  $V$  و طول مرجع  $l$  تشکیل شده است. از آنجا که  $\bar{y} = (\frac{y}{l})\sqrt{\text{Re}}$  فاصله از دیوار بعد

از تبدیل لایه مرزی است،  $\delta(\zeta)$  را می‌توان به عنوان لایه مرزی در این سیستم در نظر گرفت (که با ضخامت

لایه مرزی متناسب است). با استفاده از رابطه (۱۵-۱) برای تابع جریان، نتیجه می‌شود که مؤلفه طولی

سرعت برابر با رابطه (۱۶-۱) می‌باشد (مشتق نسبت به  $\eta$  مدنظر می‌باشد) [۲].

$$\psi(\zeta, \eta) = \frac{l U_N(\zeta)}{\sqrt{\text{Re}}} \delta(\zeta) f(\zeta, \eta) \quad (۱۵-۱)$$

$$\frac{u(\zeta, \eta)}{U_N(\zeta)} = f'(\zeta, \eta) \quad (۱۶-۱)$$

اگر  $U_N(\zeta)$  را سرعت جریان خارجی  $U(\zeta)$  در نظر بگیریم، در خواهیم یافت که زمانی تمامی

حل‌های متشابه برقرار خواهند بود که  $f'(\eta)$  تنها به  $\eta$  وابسته باشد. بجای معادله دیفرانسیل جزئی برای  $f'(\zeta, \eta)$ ، یک معادله دیفرانسیل معمولی برای  $f(\eta)$  خواهیم داشت. در نتیجه مؤلفه عمودی سرعت از معادله (۱۵-۱) به صورت رابطه (۱۷-۱) به دست می‌آید. حال اگر حل‌های انتخابی معادلات (۱۳-۱)، (۱۴-۱) و (۱۵-۱) را در معادله (۱۲-۱) قرار دهیم، معادله دیفرانسیل زیر را برای تابع جریان بدون بعد  $f'(\zeta, \eta)$  به صورت رابطه (۱۸-۱) به دست خواهیم آورد [۲].

$$-v(\zeta, \eta)\sqrt{\text{Re}} = \frac{d}{d\zeta}(U_N \delta)f + U_N \left( \delta \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - \frac{d\delta}{d\zeta} \eta f' \right) \quad (17-1)$$

$$f''' + \alpha_1 f f'' + \alpha_2 - \alpha_3 f'^2 = \delta^2 \frac{U_N}{V} \left( f' \frac{\partial f'}{\partial \zeta} - f'' \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) \quad (18-1)$$

$$\alpha_1 = \frac{\delta}{V} \frac{d}{d\zeta}(U_N \delta) \quad (19-1)$$

$$\alpha_2 = \frac{\delta^2}{V} \frac{U}{U_N} \frac{dU}{d\zeta} \quad (20-1)$$

$$\alpha_3 = \frac{\delta^2}{V} \frac{dU_N}{d\zeta} \quad (21-1)$$

ازاینجا که معادلات (۱۳-۱) و (۱۴-۱) یک تبدیل شکل است، معادله (۱۸-۱) یک معادله دیفرانسیل جزئی برای تابع  $f'(\zeta, \eta)$  باقی می‌ماند. در این شکل جدید، سریعاً دیده می‌شود که در چه صورتی حل‌های متشابه به وجود می‌آیند، به عبارت دیگر در چه صورتی معادله (۱۸-۱) به یک معادله دیفرانسیل معمولی برای تابع  $f(\eta)$  تبدیل می‌شود. اگر کمیت‌های  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  و  $\alpha_3$  ثابت باشند، می‌توان حل‌های برای  $f(\eta)$  یافت که مستقل از  $\zeta$  باشند. در این صورت، طرف راست معادله (۱۸-۱) مساوی با صفر شده و معادلات لایه مرزی به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند [۲]:



$$f''' + \alpha_1 f f'' + \alpha_2 - \alpha_3 f'^2 = 0 \quad (22-1)$$

برای مقادیر تعریف شده ثابت‌های  $\alpha_1$ ،  $\alpha_2$  و  $\alpha_3$  می‌توان معادلاتی برای توابع مجهول باقیمانده  $U(\zeta)$ ،  $U_N(\zeta)$  و  $\delta(\zeta)$  در نظر گرفت. حل‌های این سه معادله دیفرانسیل، توزیع  $U(\zeta)$  جریان خارجی را می‌دهد که حل‌های متشابه برای آن وجود خواهند داشت. اگر  $\alpha_1$  مثبت باشد، بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم  $\alpha_1 = 1$  (جریان‌های گوه)، چراکه در رابطه بین  $\alpha_1$  و  $\delta$ ، مقیاس ضخامت  $\delta$  تنها یک فاکتور عددی خواهد بود. با در نظر گرفتن  $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta$  رابطه (23-1) را خواهیم داشت که شرایط مرزی به صورت معادله (24-1) خواهد بود [2].

$$f''' + f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0 \quad (23-1)$$

$$\eta = 0 : f = 0, f' = 0; \quad (24-1)$$

معادله (23-1) ابتدا توسط فالكنر و اسكن<sup>1</sup> [7] ارائه شد و به این دلیل به نام معادله فالكنر-اسكن شناخته می‌شود. حل‌های این معادله و وابستگی آن‌ها به  $\beta$  بعدها توسط هارتری<sup>2</sup> [4] به دست آمد. به سادگی می‌توان دید که از معادلات (19-1)، (20-1) و (21-1) دو معادله (25-1) و (26-1) دارای حل‌هایی به صورت روابط (27-1) و (28-1) می‌باشد. رابطه بین  $m$  و  $\beta$  بصورت رابطه (29-1) می‌باشد [2].

$$\frac{\delta}{V} \frac{d}{d\zeta} (U \delta) = 1 \quad (25-1)$$

$$\frac{\delta^2}{V} \frac{dU}{d\delta} = \beta \quad (26-1)$$

$$\frac{U}{V} = \beta \zeta^m \quad (27-1)$$

---

<sup>1</sup> Falkner-Skan

<sup>2</sup> Hartree

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\beta(m+1)}} \zeta^{\frac{1-m}{2}} \quad (28-1)$$

$$m = \frac{\beta}{2-\beta} \quad (29-1)$$

اگر معادلات فوق ترکیب شوند، نمایش دارای بعد متغیر متشابه به صورت رابطه (۳۰-۱) می-

باشد [۲].

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U}{vx}} = y \sqrt{\frac{1}{2-\beta} \frac{U}{vx}} \quad (30-1)$$

با انتخاب ثابت  $\beta$  در معادلات (۲۷-۱) و (۲۸-۱)، سرعت مرجع  $V$  را مشخص خواهیم کرد. برای مثال برای  $\beta=1$ ،  $V$  برابر با سرعت  $U$  در موقعیت  $\zeta=1$ ، یعنی  $x=l$  خواهد بود. از آنجاکه مبدأ سیستم مختصات را می‌توان به‌طور دلخواه انتخاب کرد، در معادلات (۲۷-۱) و (۲۸-۱)، بجای  $\zeta$ ،  $\zeta_0 - \zeta$  قرار داده می‌شود. نتیجه این ملاحظات آن است که حل‌های متشابه معادلات لایه مرزی در حالتی به دست می‌آیند که توزیع سرعت  $U(x)$  جریان غیر لزج خارجی، یک رابطه توانی باشد. این جریان‌های پتانسیل درروی اجسامی با اشکالی شبیه به گوه به وجود می‌آیند و در نتیجه آن‌ها را "جریان‌های گوه" می‌نامیم [۲].

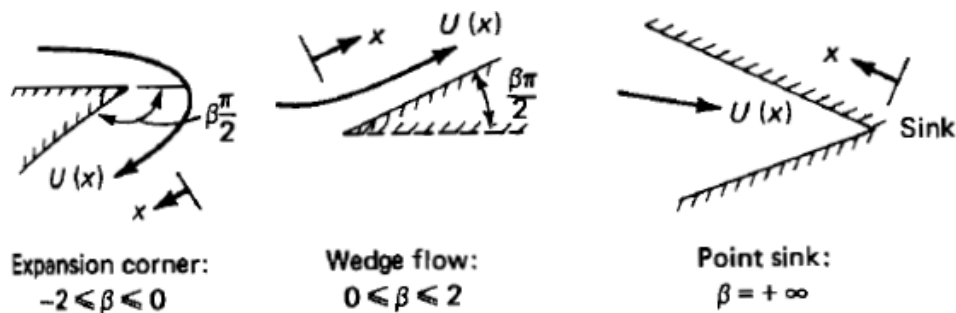
جدول ۱-۱ مقادیر عددی سرعت جریان  $f'(\eta)$  برای جریان‌های متشابه فالکنر-اسکن [۸]

$\beta$	-0.19884	-0.18	0.0	0.3	1.0	2.0
$f_0''$	0.0	0.12864	0.46960	0.77476	1.23259	1.68722
$\eta^*$	2.35885	1.87157	1.21678	0.91099	0.64790	0.49743
$\theta^*$	0.58544	0.56771	0.46960	0.38574	0.29235	0.23079
$\eta$						
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.00099	0.01376	0.04696	0.07597	0.11826	0.15876
0.2	0.00398	0.02933	0.09391	0.14894	0.22661	0.29794
0.3	0.00895	0.04668	0.14081	0.21886	0.32524	0.41854
0.4	0.01591	0.06582	0.18761	0.28569	0.41446	0.52190
0.5	0.02485	0.08673	0.23423	0.34938	0.49465	0.60964
0.6	0.03578	0.10937	0.28058	0.40988	0.56628	0.68343
0.7	0.04868	0.13373	0.32653	0.46713	0.62986	0.74496
0.8	0.06355	0.15975	0.37196	0.52107	0.68594	0.79587
0.9	0.08038	0.18737	0.41672	0.57167	0.73508	0.83767
1.0	0.09913	0.21651	0.46063	0.61890	0.77787	0.87172
1.2	0.14232	0.27899	0.54525	0.70322	0.84667	0.92142
1.4	0.19274	0.34622	0.62439	0.77425	0.89681	0.95308
1.6	0.24982	0.41691	0.69670	0.83254	0.93235	0.97269
1.8	0.31271	0.48946	0.76106	0.87906	0.95683	0.98452
2.0	0.38026	0.56205	0.81669	0.91509	0.97322	0.99146
2.2	0.45097	0.63269	0.86330	0.94211	0.98385	0.99542
2.4	0.52308	0.69942	0.90107	0.96173	0.99055	0.99761
2.6	0.59460	0.76048	0.93060	0.97548	0.99463	0.99879
2.8	0.66348	0.81449	0.95288	0.98480	0.99705	0.99940
3.0	0.72776	0.86061	0.96905	0.99088	0.99842	0.99972

از شکل ۱-۶ دیده می‌شود که می‌بایست، بین توان‌های مثبت و منفی تمایز قائل شویم. حالت‌های خاصی از جریان‌های گوه، جریان عبور کننده از روی یک صفحه مسطح با زاویه حمله صفر (  $m=0, \beta=0$  ) و جریان در نزدیکی نقطه سکون (  $m=1, \beta=1$  ) می‌باشد. در لایه مرزی دوبعدی، معادله فالکنر-اسکن به معادله (۳۱-۱) تقلیل می‌یابد، در جریان نقطه سکون نیز به معادله (۳۲-۱) تبدیل می‌شود [۲].

$$f''' + ff'' = 0 \quad (۳۱-۱)$$

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 = 0 \quad (۳۲-۱)$$



شکل ۶-۱ جریان سیال بروی سطوح با زوایای مختلف (گرادیان فشارهای متفاوت) [۸]

### ۱-۲-۲- انتقال حرارت برای جریان‌های فالکنر-اسکن

اگر  $T_w$  و  $T_c$  ثابت باشد، پروفیل دما نیز در روابط تشابه صدق می‌کند. اختلاف دمای بدون بعد به صورت رابطه (۳۳-۱) تعریف می‌شود.

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_c}{T_w - T_c} \quad (33-1)$$

با فرض مشخص بودن  $u$  و  $u$  از پاسخ بلازیوس معادله (۳۳-۱) را در معادله انرژی لایه مرزی، معادله (۳۴-۱)، جایگذاری کرده و از تابع افت انرژی صرف نظر می‌کنیم، نتیجه برابر است با رابطه (۳۵-۱) می‌باشد.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (34-1)$$

$$\theta'' + \text{Pr} f(\eta) \theta' = 0 \quad (35-1)$$

که شرط‌های زیر را می‌بایست ارضا کند.

$$\theta(0) = 1 \quad (36-1)$$

$$\theta(\infty) = 0 \quad (37-1)$$

پاسخ به صورت رابطه (38-1) خواهد بود [9].

$$\theta = \frac{\int_0^\infty d\eta \exp(-\Pr \int_0^\eta f ds)}{\int_0^\infty d\eta \exp(-\Pr \int_0^\eta f ds)} \quad (38-1)$$

اگر از تابع افت انرژی صرف نظر کرده و دمای دیواره و جریان را ثابت فرض کنیم، تحلیل‌های مربوط به معادله مومنوم دقیقاً تکرار خواهد شد و به معادله (39-1) می‌رسیم. در رابطه (39-1)،  $f(\eta, \beta)$  تابع جریان فالکنر-اسکن می‌باشد. عدد ناسلت محلی طبق رابطه (42-1) قابل محاسبه می‌باشد [8].

$$\theta'' + \Pr f(\eta, \beta) \theta' = 0 \quad (39-1)$$

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_w - T_c} \quad (40-1)$$

$$\varpi(x, y) = f(\eta) \sqrt{\frac{2}{m+1}} \nu x U(x) \quad (41-1)$$

$$Nu_x = \sqrt{\frac{m+1}{2}} G(\Pr, \beta) \text{Re}_x^{0.5} \quad (42-1)$$

جدول ۲-۱ مقادیر عددی پارامتر انتقال حرارت  $G(Pr, \beta)$  از معادله (۴۲-۱) [8]

$Pr$	$\beta$ $f_0''$ $\eta^*$	-0.19884 0.0 2.35885	-0.18 0.12864 1.87157	0.0 0.46960 1.21678	0.3 0.77476 0.91099	1.0 1.23259 0.64790
0.001		0.02383	0.02410	0.02449	0.02467	0.02483
0.003		0.03967	0.04047	0.04154	0.04206	0.04252
0.006		0.05409	0.05555	0.05759	0.05859	0.05947
0.01		0.06745	0.06972	0.07296	0.07455	0.07597
0.03		0.10547	0.11109	0.11935	0.12353	0.12734
0.06		0.13666	0.14619	0.16050	0.16791	0.17480
0.1		0.16339	0.17709	0.19803	0.20908	0.21950
0.3		0.23180	0.25971	0.30371	0.32783	0.35147
0.6		0.28318	0.32498	0.39168	0.42892	0.46633
0.72		0.29777	0.34400	0.41786	0.45929	0.50113
1.0		0.32581	0.38112	0.46960	0.51952	0.57047
2.0		0.39145	0.47090	0.59723	0.66905	0.74372
3.0		0.43478	0.53224	0.68596	0.77344	0.86522
6.0		0.51896	0.65591	0.86728	0.98727	1.1147
10.0		0.59054	0.76545	1.02974	1.1791	1.3388
30.0		0.77839	1.0703	1.4873	1.7198	1.9706
60.0		0.92602	1.3260	1.8746	2.1776	2.5054
100.0		1.0523	1.5550	2.2229	2.5892	2.9863
400.0		1.4885	2.4098	3.5292	4.1331	4.7894
1,000.0		1.8717	3.2319	4.7901	5.6230	6.5291
4,000.0		2.6471	5.0631	7.6039	8.9481	10.4112
10,000.0		3.3285	6.8289	10.3201	12.1577	14.1583

### ۳-۱- طبقه‌بندی سیالات غیرنیوتنی

سیال نیوتنی سیالی است که در آن تنش برشی به صورت خطی با گرادیان سرعت در ارتباط می‌باشد (قانون ویسکوزیته نیوتنی) و همچنین تنش تسلیم در آن برابر صفر باشد. سیال غیرنیوتنی نیز به سیالی گفته می‌شود که از قانون ویسکوزیته نیوتنی پیروی نمی‌کند به عبارت دیگر حداقل یکی از شرایط سیال نیوتنی را نداشته باشد. این سیالات به سه گروه سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان، سیالات غیرنیوتنی وابسته به زمان و سیالات ویسکوالاستیک تقسیم‌بندی می‌شوند.

سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان سیالاتی هستند که در آن‌ها تنش برشی تنها تابعی غیرخطی از

نرخ برش است. به عبارت دیگر در این سیالات ویسکوزیته تابعی از نرخ برش می باشد. خود این سیالات به دو دسته کلی سیالاتی دارا و فاقد تنش تسلیم تقسیم می شوند. در موادی که دارای تنش تسلیم هستند شرط جریان ماده، رسیدن تنش به حد مشخصی برای شروع سیلان آن است. برای مثال خمیردندان مثال بسیار مناسبی برای این مواد است به نحوی که تا زمانی که میزان فشردگی پوسته آن به حد مشخصی نرسد، خمیردندان از آن خارج نمی شود. علت این رفتار فیزیکی معمولاً به ساختمان سه بعدی ماده نسبت داده می شود. ساختمان این مواد قادر است که تنش برشی کمتر از حد تسلیم را بدون ایجاد جریان تحمل نماید ولی پس از آن، ساختمان داخلی شکسته شده و ماده اجازه حرکت برشی را پیدا می کند. تصور می شود که ساختمان داخلی ماده پس از کاهش تنش به مقدار کمتر از تسلیم دوباره ترمیم می شود معروف ترین این دسته از مواد، پلاستیک بینگهام است. در واقع پلاستیک بینگهام یک سیال نیوتنی دارای تنش تسلیم است (ویسکوزیته آن ثابت است). نمونه هایی از سیالات دارای تنش تسلیم عبارتند از: برخی پلاستیک های مذاب، گل حفاری چاه نفت، مخلوط آب و شن، دوغ آب های گچ و ماسه، شکلات مایع، کرم های طبی، خمیردندان، بتن تازه، مارگارین و گریس ها سیالاتی که فاقد تنش تسلیم هستند.

سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان که بدون تنش تسلیم هستند به نام سیالات نیوتنی تعمیم یافته معروف هستند و به دو گروه سیالات شبه پلاستیک و سیالات دایلاتنت تقسیم می شوند.

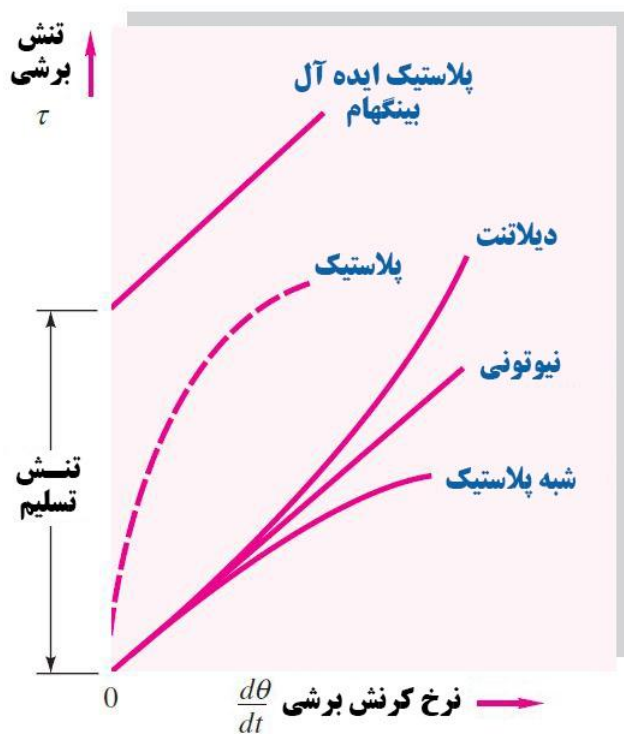
لزجت این مواد به صورت یک تابع از نرخ برش سیال می باشد. مدل های زیادی برای ارائه این رابطه بین لزجت و نرخ برش ارائه شده است. یکی از ساده ترین و پرکاربردترین این مدل ها، مدل توانی است که در آن لزجت به عنوان یک تابع توانی نرخ برش در نظر گرفته می شود [۱۰]. یکی از اشکالات این مدل، این است که لزجت در نرخ برش صفر برابر مقداری نامحدود می شود. البته عکس این قضیه نیز صادق است، یعنی لزجت در نرخ برش های بزرگ بسیار کوچک می شود. مدل های دیگری نیز مانند مدل کراس، مدل کاریو-یاسودا و مدل راینر-فیلیپوف از جمله مدل های نیوتنی تعمیم یافته هستند که مشکل مدل توانی را

ندارند [۱۱]. در این مدل‌ها، لزجت در نرخ برش صفر و لزجت در نرخ برش‌های بالا معمولاً مقداری ثابت به دست می‌آید که آن‌ها را به ترتیب با  $(\eta_0)$  و  $(\eta_\infty)$  نمایش می‌دهند. معمولاً با افزایش ثابت‌های مدل -های غیرنیوتنی، رفتار تنش وابسته به نرخ برش بهتر مدل می‌شود.

سیالات شبه‌پلاستیک، سیالاتی هستند که افزایش نرخ برش باعث کاهش لزجت آن‌ها می‌شود. این سیال رقیق شونده برشی است؛ یعنی با افزایش آهنگ کرنش، مقاومت آن کاهش می‌یابد. سیال بسیار رقیق شونده را پلاستیک می‌گویند. محلول‌های پلیمری، سوسپانسیون‌های کلوئیدی، خمیر آب در کاغذ، رنگ لاتکس، پلاسمای خون، شربت‌ها و شیر قند، از سیالات شبه‌پلاستیک هستند. رنگ یکی از رایج‌ترین سیالات شبه‌پلاستیک است که هنگام خارج از قوطی غلیظ است، اما وقتی با آهنگ کرنش زیاد برش می‌خورد رقیق می‌شود.

سیالات دایلاتنت رفتاری عکس این حالت از خود نشان می‌دهند. در سیالات دایلاتنت با افزایش شدت برش، ویسکوزیته سیال افزایش می‌یابد و چنانچه از مدل پاورلا به عنوان قانون پایه برای آنها استفاده شود، در این صورت  $n$  مقداری بزرگ‌تر از یک خواهد بود. در بین مواد زیر رفتار سیال دایلاتنت مشاهده شده است: برخی سوسپانسیون‌های آبی اکسید تیتانیوم، برخی محلول‌های پودر ذرت -شکر، برخی محلول‌های بوراکس -صمغ عربی، نشاسته، سیلیکات پتاسیوم، شن مرطوب ساحل و بعضی رنگها. اکثر مدل‌های غیرنیوتنی به ازای اندیس توانی کوچکتر از ۱ ( $n < 1$ ) رفتار شبه‌پلاستیک و به ازای اندیس توانی بزرگتر از ۱ ( $n > 1$ ) رفتار دایلاتنت دارند. شایان ذکر است برای  $n = 1$  سیال رفتار نیوتنی از خود نشان می‌دهد. (شکل ۷-۱) رفتار تنش در برابر نرخ برش را برای انواع سیالات نمایش می‌دهد.





شکل ۷-۱ منحنی‌های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات مستقل از زمان

در بعضی از سیالات غیر نیوتنی، علاوه بر اینکه ویسکوزیته تابعی از شدت برش است، تابعی از زمان نیز می باشد. به عبارت دیگر در این سیالات، در حین یک نرخ برش ثابت، ساختمان مولکولی ماده بطور مداوم در حال تغییر است و لذا مقدار ویسکوزیته و تنش برشی نیز تابعی از زمان خواهد بود. از این سیالات می توان به دو نوع سیال تیکسوتروپیک و رئوپکتیک اشاره کرد. سیالات تیکسوتروپیک در تنش برشی ثابت باگذشت زمان رقیق می شوند یا به عبارت دیگر با گذشت زمان برای ثابت نگه داشتن گرادیان سرعت، تنش برشی کمتری نیاز دارند. در سیالات تیکسوتروپیک، چنانچه ماده در معرض یک شدت برش ثابت و دمای معین قرار داده شود، تنش برشی یک کاهش برگشت پذیر نسبت به زمان پیدا می کند. البته در نهایت ویسکوزیته به سمت یک مقدار حدی میل خواهد کرد. از دیدگاه مولکولی چنانچه یک سیال تیکسوتروپیک تحت یک برش ثابت قرار گیرد، به تدریج ساختمان مولکولهای آن شروع به شکستن می کند

و لذا با افزایش زمان ویسکوزیته سیال کاهش می‌یابد. مولکولهای شکسته شده در صورت برخورد در جهت مناسب امکان بازگشت به ساختار اولیه خود را دارند و از آنجاکه باگذشت زمان بر تعداد مولکولهای شکسته شده افزوده می‌شود، بنابراین امکان برخورد مولکولها و فعال تر شدن مکانیزم ترمیم افزایش می‌یابد. به همین دلیل پس از گذشت مدت زمان مشخصی تعادلی بین فرآیندهای شکست و ترمیم به وجود می‌آید و ویسکوزیته به سمت مقدار ثابتی میل می‌کند. به عنوان نمونه برخی پلیمرهای درشت مولکول و محلول‌های مواد غذایی دارای این رفتار هستند.

سیال رئوپکتیک در تنش برشی ثابت باگذشت زمان غلیظ می‌شوند یا به عبارت دیگر با گذشت زمان برای ثابت نگه‌داشتن گرادیان سرعت، تنش برشی بیشتری لازم دارند از دیدگاه مولکولی، این مواد ساختار مولکولی اولیه ای ندارند ولی با ایجاد برش و برخورد مولکولها به یکدیگر شانس تشکیل یک ساختار را پیدا می‌کنند. بنابراین تحت برش ثابت و در شرایط ایزوترمال، یک افزایش برگشت‌پذیر در تنش برشی و ویسکوزیته آن‌ها مشاهده می‌شود. در بعضی سیالات نظیر سوسپانسیونهای رسی بنتونیت، سوسپانسیونهای وانادیوم پنتا اکسید، خمیر گچ و سوسپانسیونهای رقیق اولئات آمونیوم رفتار رئوپکتیک مشاهده شده است.

گروه سوم از سیالات غیرنیوتنی، سیالات ویسکوالاستیک هستند که همزمان خواص ویسکوز سیال و الاستیک جامد را دارا می‌باشند. ساده‌ترین آزمایشی که در مورد رفتار سیال ویسکوالاستیک می‌توان به آن اشاره کرد، آزمایش جریان برشی ساده می‌باشد. جریان سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی را در نظر بگیرید که صفحه بالایی با سرعت  $U$  حرکت می‌کند. اگر صفحه بالایی ناگهان متوقف شود تنش به‌طور آنی صفر نمی‌شود. این در حالی است که برای سیال نیوتنی تنش سریعاً صفر می‌شود [۱۲]. پس از توقف صفحه بالایی در جریان برش سیال ویسکوالاستیک، این صفحه کمی عقب برمی‌گردد. این بازگشت، به خاصیت الاستیک سیال برمی‌گردد. خاصیت دیگر سیالات ویسکوالاستیک این است که این مواد معمولاً

هنگامی که سیلان پیدا کنند، تنش‌های عمودی نابرابر پیدا می‌کنند. در جریان برشی ساده سیال نیوتنی، تنش عمودی همواره مقداری ثابت است که برابر با فشار استاتیکی می‌باشد. این در حالی است که در جریان برشی سیال ویسکوالاستیک، بین تنش‌های عمودی اختلاف وجود دارد. در جریان برش ساده، اگر جهت جریان را جهت  $x$  و راستای تغییرات سرعت را جهت  $y$  بنامیم، اختلاف تنش عمودی به صورت رابط (۴۳-۱) تعریف می‌شود [۱۱].

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \quad (۴۳-۱)$$

حال، اگر جهت راست گرد عمود بر جهت‌های  $x$  و  $y$  را جهت  $z$  بنامیم، می‌توان اختلاف تنش عمودی دوم را نیز بصورت رابطه (۴۴-۱) تعریف کرد [۱۱].

$$N_1 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} \quad (۴۴-۱)$$

ثابت‌های اختلاف تنش عمودی نیز بر اساس روابط (۴۳-۱) و (۴۴-۱) به صورت معادلات (۴۵-۱) و (۴۶-۱) به دست می‌آید [۱۱].

$$\Psi_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2} \quad (۴۵-۱)$$

$$\Psi_2 = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} \quad (۴۶-۱)$$

که در آن،  $\Psi_1$  و  $\Psi_2$  ثابت‌های تنش عمودی اول و دوم و  $\dot{\gamma}$  نرخ برش می‌باشد. همان‌طور که قبلاً اشاره شد لزجت در سیالات غیرنیوتنی تابعی از نرخ برش می‌باشد؛ بنابراین برای سیال ویسکوالاستیک می‌توان بر اساس تنش برشی و نرخ برش، لزجت سیال ویسکوالاستیک را به دست آورد [۱۱].

$$\eta = \frac{\sigma_{xy}}{\dot{\gamma}} \quad (۴۷-۱)$$

بر اساس روابط مذکور، لزجت، اختلاف تنش عمودی اول و دوم در سیال ویسکوالاستیک همگی

تابعی از نرخ برش می‌باشد.

سیالات ویسکوالاستیک دارای خواصی می‌باشد که در زیر به دو مورد از اشاره شده است.

➤ بالا روی از میله: هنگام هم زدن سیال نیوتنی گردابه ای به سمت داخل سیال ایجاد می‌شود و باعث می‌گردد سیال در لبه‌های ظرف بالا و در قسمت مرکزی فرورود این قضیه برای سیالات ویسکوالاستیک معکوس می‌باشد. بدین معنی که هنگام هم زدن سیال از وسیله هم زن بالا می‌رود.

➤ آماسیدگی: هنگامی که سیالات ویسکوالاستیک از دهانه نازل بیرون می‌آیند منبسط می‌شوند.

### ۱-۳-۱- پارامترهای مهم در جریان سیالات ویسکوالاستیک

پارامترهای مهم در جریان سیال ویسکوالاستیک عدد دبورا و عدد وایزنبرگ می‌باشد. عدد دبورا، بر اساس نسبت زمان آسودگی از تنش به زمان مشخصه تعریف می‌شود. نسبت نیروی ناشی از خاصیت الاستیک به نیروی حاصل از لزجت سیال را نیز عدد وایزنبرگ می‌نامند [۱۳].

$$De = \lambda \omega = \lambda / T \quad (48-1)$$

$$Wi = \lambda \dot{\gamma} \quad (49-1)$$

که در آن،  $\lambda$  زمان مشخصه ماده (زمان آسودگی از تنش)،  $T$  زمان مشخصه جریان،  $\omega$  فرکانس مشخصه جریان و  $\dot{\gamma}$  نرخ برش جریان می‌باشد. هر چه اعداد دبورا و وایزنبرگ برای یک ماده کوچکتر باشد ماده شانس جریان یافتن بیشتری پیدا می‌کند.

### ۱-۳-۲- معادلات متشکله سیالات ویسکوالاستیک

منظور از معادله متشکله، معادله‌ای است که قادر به بیان رابطه بین تنش و تغییر شکل یک ماده مشخص باشد. در این بخش مروری اجمالی بر معادلات متشکله سیالات ویسکوالاستیک صورت می‌گیرد. معادله متشکله سیال نیوتنی توسط اسحاق نیوتن بیان شد [۱۴].

$$\tau_{ij} = (-P + \lambda \dot{\epsilon}_{kk}) \delta_{ij} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} \quad (۵۰-۱)$$

در رابطه (۵۰-۱)،  $P$  فشار استاتیکی،  $\dot{\epsilon}$  نرخ برش و  $\lambda$  و  $\eta$  ثابت‌های ویسکوز هستند. می‌توان معادلات متشکله را به دو دسته معادلات خطی و غیر خطی نیز تقسیم نمود. در ادامه در مورد این معادلات بحث شده و تعدادی از معروف‌ترین این معادلات معرفی می‌شوند.

### ۱-۳-۳- مدل‌های ویسکوالاستیک خطی

مدل‌های ویسکوالاستیک خطی بر از ترکیب‌های مختلف مجموعه‌ای از فنرها و دمپرهای خطی حاصل شده‌اند (تلفیق خواص جامدات خطی و سیالات نیوتنی). لذا معادله متشکله هر مدل ویسکوالاستیک خطی به شکل زیر قابل بیان است [۱۵] و [۱۶].

$$(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \lambda_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}) \tau_{ij} = \eta_0 (1 + \xi_1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \xi_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}) \gamma_{ij} \quad (۵۱-۱)$$

در رابطه (۵۱-۱)، مقادیر  $\lambda_i$  و  $\xi_i$  به ترتیب زمان آسودگی از تنش و زمان تاخیر سیال از مرتبه  $i$  بوده و  $\eta_0$  لزجت در نرخ برش صفر،  $\tau_{ij}$  تنش برشی و  $\gamma_{ij}$  نرخ برش است. همچنین مقادیر  $m$  و  $n$  به صورت  $n = m$  یا  $n = m + 1$  باهم رابطه دارند؛ بنابراین با انتخاب اختیاری مقادیر  $n$  و  $m$  می‌توان مدل ویسکوالاستیک جدیدی را برای یک ماده تشکیل داد. در اینجا ثابت‌های زمانی مرتبه پایین از ثابت-های زمانی مرتبه بالا غالب‌تر هستند. همچنین به ازای  $\xi_i = \lambda_i = 0$  مدل مشابه سیالات نیوتنی خواهد

بود. مقدار نرخ برش ( $\gamma_{ij}$ ) نیز به شکل معادله تعریف می‌شود.

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (52-1)$$

در رابطه (۵۲-۱)،  $u$  سرعت و  $x$  جهت مختصات است. مدل‌های ویسکوالاستیک خطی برای شبیه‌سازی جریان محلول‌های رقیق پلیمری و سوسپانسیون‌های رقیق ذرات کروی جامد در سیالات نیوتنی بسیار مناسب هستند. اصولاً پاسخ این مدل‌ها برای تغییر شکل‌های کوچک با فیزیک جریان سازگار بوده اما پاسخ آن برای تغییر شکل‌های بزرگ پر خطا است. استفاده از این مدل‌ها در محاسبات مربوط به تجهیزات رئومتر و برای تغییر شکل‌های کوچک متداول است.

یکی از اولین و معروف‌ترین مدل‌های ویسکوالاستیک خطی مدل ماکسول است. در این مدل قانون پایه بر اساس یک فنر و دمپر سری تعریف می‌شود. مدل ماکسول به شکل رابطه (۵۳-۱) که در آن  $\eta$  لزجت و  $\mu$  مدول برشی ماده است. مطابق مدل ماکسول ماده دارای زمان آسودگی از تنش و فاقد زمان رهایی از تغییر شکل است. در این مدل با توقف برش دهی، نرخ تغییر شکل در سرتاسر ماده به‌طور آنی صفر خواهد شد؛ بنابراین مدل ماکسول برای تغییر شکل‌های کوچک محلول‌های پلیمری رقیق (مواد ویسکوالاستیک دارای خواص ویسکوز و الاستیک تقریباً خطی) که دارای زمان رهایی از تغییر شکل کوچک هستند، مناسب است. در مدل کلون-ویت، رفتار سیال ویسکوالاستیک بر اساس یک فنر و دمپر موازی خطی شبیه‌سازی شده است. رابطه بین تنش و نرخ برش در این مدل به شکل معادله (۵۴-۱) تعریف می‌شود [۱۲].

$$\tau_{ij} + \frac{\eta}{\mu} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \eta \gamma_{ij} \quad (53-1)$$

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \mu (\gamma_{ij} + \frac{\eta}{\mu} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}) \quad (54-1)$$

رفتار این مدل برعکس مدل ماکسول می‌باشد است و هرچند در این مدل یکی از زمان‌های رهایی از تغییر شکل لحاظ شده اما مدل دارای زمان آسودگی از تنش نیست. در مدل برگرز یک المان ماکسول با یک المان کلویین-ویت سری شده است. مدل برگرز به شکل رابطه (۵۵-۱) قابل بیان است.

$$\tau_{ij} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial t^2} = (\eta_1 + \eta_2) \gamma_{ij} + (\lambda_1 \eta_2 + \lambda_2 \eta_1) \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \quad (۵۵-۱)$$

مسلّم است که مدل برگرز رفتار کاملتری را از یک ماده ویسکوالاستیک ارائه می‌کند. در حالت خاصی از مدل برگرز، چنانچه یکی از فنرها یا دمپرها المان ماکسول حذف شود، مدل جدیدی به نام مدل جفریز به دست می‌آید [۱۳].

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i \exp(-t / \lambda_i) \quad (۵۶-۱)$$

مدل جفریز مدل ساده و نسبتاً مناسبی برای بررسی رفتار یک ماده ویسکوالاستیک است زیرا در آن یک زمان آسودگی از تنش و یک زمان رهایی از تغییر شکل لحاظ شده است. مدل ماکسول توسعه یافته از طریق موازی کردن تعداد متناهی از المان‌های ماکسول به دست می‌آید. اصولاً یک ماده پلیمری از تعداد زیادی از مولکول‌های رشته‌ای با طول‌های مختلف و احیاناً ساختارهای فضایی متنوع تشکیل شده که سبب ایجاد زمان‌های مختلف آسودگی از تنش در این مواد می‌شود. به همین دلیل این مدل برای ایجاد زمان‌های متعدد آسودگی از تنش ایجاد شده است. می‌توان نشان داد که در مدل ماکسول توسعه یافته ضریب الاستیک و لزجت معادل (تابعی از زمان هستند) به شکل رابطه قابل بیان می‌باشد [۱۲].

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i \exp(-t / \lambda_i) \quad (۵۷-۱)$$

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i (1 - \exp(-t / \lambda_i)) \quad (۵۸-۱)$$

به‌طور مشابه، مدل کلویین-ویت توسعه یافته نیز از طریق سری کردن المان‌های کلویین-ویت قابل تعریف است (جهت ایجاد زمان‌های رهایی از تغییر شکل مختلف).

### ۱-۳-۴- مدل های ویسکوالاستیک غیر خطی

هرچند که مدل های ویسکوالاستیک خطی روابط دیفرانسیلی ساده ای را بین تنش و نرخ برش پیش بینی می کنند، اما این مدل ها دارای مشکلاتی هستند. یکی از معروفترین مدل های تبیین رفتار سیالات ویسکوالاستیک، خانواده مدل های اولدروید است. مدل های اولدروید نیاز به محاسبه مشتق زمانی همرفتی همبسته و نیز مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته تانسور تنش دارند که این مشتقات به ترتیب در روابط (۱-۵۹) تا (۱-۶۲) آمده اند [۱۱].

$$\tau^{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} + \left\{ (\nabla V) \cdot \tau + \tau \cdot (\nabla V)^T \right\} \quad (۱-۵۹)$$

⋮

$$\tau^{(n)} = \frac{D\tau^{(n-1)}}{Dt} + \left\{ (\nabla V) \cdot \tau^{(n-1)} + \tau^{(n-1)} \cdot (\nabla V)^T \right\} \quad (۱-۶۰)$$

$$\tau_{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} - \left\{ (\nabla V)^T \cdot \tau + \tau \cdot (\nabla V) \right\} \quad (۱-۶۱)$$

⋮

$$\tau_{(n)} = \frac{D\tau_{(n-1)}}{Dt} - \left\{ (\nabla V)^T \cdot \tau_{(n-1)} + \tau_{(n-1)} \cdot (\nabla V) \right\} \quad (۱-۶۲)$$

در روابط بالا،  $\tau$  تانسور تنش،  $V$  بردار سرعت و  $T$  نیز نماد ترانهاده تانسور است. همچنین مشتقات زمانی همرفتی همبسته و مشتقات زمانی همرفتی پاد همبسته نرخ برش نیز به ترتیب به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\gamma^{(1)} = \nabla V + (\nabla V)^T \quad (۱-۶۳)$$

$$\gamma^{(2)} = \frac{D\gamma^{(1)}}{Dt} + \left\{ (\nabla V) \cdot \gamma^{(1)} + \gamma^{(1)} \cdot (\nabla V)^T \right\} \quad (۱-۶۴)$$

⋮



$$\gamma^{(n)} = \frac{D\gamma^{(n-1)}}{Dt} + \{(\nabla V) \cdot \gamma^{(n-1)} + \gamma^{(n-1)} \cdot (\nabla V)^T\} \quad (۶۵-۱)$$

$$\gamma_{(1)} = \nabla V + (\nabla V)^T \quad (۶۶-۱)$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} - \{(\nabla V)^T \cdot \gamma_{(1)} + \gamma_{(1)} \cdot (\nabla V)\} \quad (۶۷-۱)$$

⋮

$$\gamma_{(n)} = \frac{D\gamma_{(n-1)}}{Dt} - \{(\nabla V)^T \cdot \gamma_{(n-1)} + \gamma_{(n-1)} \cdot (\nabla V)\} \quad (۶۸-۱)$$

در میان مدل‌های اولدروید، دو مدل اولدروید-ای و اولدروید-بی از همه معروف‌تر هستند که معادله متشکله این دو مدل به ترتیب در روابط (۶۹-۱) و (۷۰-۱) آمده است.

$$\tau + \lambda_1 \tau^{(1)} = \eta_0 (\gamma^{(1)} + \lambda_2 \gamma^{(2)}) \quad (۶۹-۱)$$

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} = \eta_0 (\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)}) \quad (۷۰-۱)$$

هرچند این دو مدل به‌خوبی اصول مکانیک محیط‌های پیوسته را ارضا می‌کنند اما در زمینه تعیین اختلاف تنش عمودی دوم دارای ضعف‌هایی هستند. رابطه (۶۹-۱)، معادله متشکله مدل اولدروید-ای بوده که در آن ثابت تنش عمودی دوم قرینه ثابت تنش عمودی اول است ( $\Psi_2 = -\Psi_1$ )، درحالی‌که در مدل اولدروید-بی ثابت اختلاف تنش عمودی اول وجود داشته اما ثابت تنش عمودی دوم برابر صفر است ( $\Psi_2 = 0$  و  $\Psi_1 > 0$ ). از آنجاکه در اکثر سیالات ویسکوالاستیک اختلاف تنش عمودی دوم دارای مقداری نسبتاً کوچک و حداکثر ۲۰٪ اختلاف تنش عمودی اول است بنابراین به نظر می‌رسد که پاسخ‌های مدل اولدروید-بی به واقعیت نزدیک است. به‌همین دلیل استفاده از مدل اولدروید-ای چندان رایج نبوده، حال آنکه تحقیقات عددی و تحلیلی فراوانی بر اساس مدل اولدروید-بی انجام‌شده است. مدل اولدروید-بی به مدل همرفتی جفریز نیز معروف است. این مدل در حالت‌های خاصی به مدل‌های دیگری ساده می‌شود:

اگر  $\lambda_2 = 0$  باشد، در این صورت مدل فوق همرفتی ماکسول (UCM) به‌دست می‌آید:

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} = \eta_0 \gamma_{(1)} \quad (71-1)$$

اگر  $\lambda_1 = 0$  شود، مدل اولدروید-بی به مدل سیال مرتبه دو تبدیل می‌گردد:

$$\tau = \eta_0 (\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)}) \quad (72-1)$$

اگر  $\lambda_1 = \lambda_2$  باشد، این مدل به سیال نیوتنی با لزجت  $\eta_0$  ساده می‌شود.

به‌طور کلی صورت عمومی مدل اولدروید، مدل هشت ثابت اولدروید است که در سال ۱۹۵۸ ارائه شده است [۱۷].

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} + \frac{\lambda_3}{2} (\tau \gamma_1 + \gamma_1 \tau) + \frac{\lambda_5}{2} [tr(\tau)] \gamma_1 + \frac{\lambda_6}{2} [tr(\tau \gamma_1)] I = \quad (73-1)$$

$$- \eta_0 \left( \gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)} + \lambda_4 \gamma_{(1)}^2 + \frac{\lambda_7}{2} [tr(\gamma_{(1)}^2)] I \right) \quad (74-1)$$

این مدل قادر به ارائه رفتار بسیار کاملی از یک سیال ویسکوالاستیک است ولی بسیار پیچیده و ناپایداری عددی آن بالا می‌باشد. مدل هشت ثابت اولروید با استفاده از دیدگاه کانتینیومی و توجه به داده های آزمایشگاهی ساخته شده است. از جمله ایرادهای این مدل می توان به زیاد بودن ترمها و همچنین عدم محاسبه ضرایب به‌طور مستقیم از داده های آزمایشگاهی اشاره کرد. در واقع باید با انجام کار اماری روی داده های آزمایشگاهی به ضرایب مناسب دست یافت. مدل راینر-ریولین یکی از مدل های غیرخطی ساده برای بررسی جریان های برشی سیالات ویسکوالاستیک است. معادله متشکله مدل راینر-ریولین در حالت کلی به شکل زیر است [۱۱]:

$$\tau = \eta(II, III) \gamma + \Psi_2(II, III) \gamma \cdot \gamma \quad (75-1)$$

در رابطه (۷۵-۱)،  $\gamma$  تانسور نرخ برش،  $\eta$  لزجت و  $\Psi_2$  ثابت اختلاف تنش های عمودی دوم است. همچنین مقادیر  $II$  و  $III$  ناوردایی های دوم و سوم تانسور نرخ برش هستند. مدل کریمینال اریکسون فیلیپی (CEF) مدل مناسبی برای شبیه سازی جریان های برشی دائمی سیالات ویسکوالاستیک است.

معادله متشکله این مدل به شکل زیر است:

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\gamma_{(1)} - \frac{1}{2}\Psi_1(\dot{\gamma})\gamma_{(2)} + \Psi_2(\dot{\gamma})\{\gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)}\} \quad (76-1)$$

از جمله مزایای این مدل می‌توان به امکان اعمال مستقیم توابع رئولوژیک وابسته به نرخ برش تعمیم‌یافته (شامل لزجت و ثابت‌های اختلاف تنش عمودی اول و دوم) در مدل اشاره نمود. پاسخ‌های این مدل در ناحیه اعداد دبورای کوچک و محدوده وسیعی از اعداد وایزنبرگ دقیق بوده و استفاده از آن جهت محاسبات صنعتی رایج است.

مدل چهار ثابت‌ه فان-تین-تنر (PTT) در اصل بر اساس تئوری شبکه برای مذاب‌های پلیمری طراحی شده است. صورت عمومی این مدل به شکل زیر است [۱۸].

$$g\tau + \lambda\tau_{(1)} + \frac{1}{2}\xi\lambda(\gamma \cdot \tau - \tau \cdot \gamma) = \eta_0\gamma \quad (77-1)$$

در رابطه فوق  $g$  تابعی از ناوردایی اول تانسور نرخ برش است:

$$g = \exp[-\varepsilon(\lambda/\eta_0)tr(\tau)] \approx 1 - \varepsilon(\lambda/\eta_0)tr(\tau) \quad (78-1)$$

در نرخ برش کوچک این مدل به رفتار ویسکوالاستیک خطی میل می‌کند. این مدل می‌تواند توابع ویسکومتریکی را به خوبی در جریان‌های دائمی و گذرا برای بسیاری از محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری مدل کند. از صورت اصلاح‌شده مدل فان-تین-تنر (MPTT) می‌توان برای مدل‌سازی رفتار محلول‌های پلیمری استفاده نمود. در مدل MPTT صورت کلی تنش به صورت مجموع تنش ویسکوز ناشی از ماده حلال نیوتنی و تنش ویسکوالاستیک ماده حل‌شونده تعریف می‌شود:

$$\sigma_{total} = -PI + \eta_N \gamma + \tau \quad 79-1$$

در رابطه فوق،  $P$  فشار استاتیکی،  $\eta_N \gamma$  نشان‌دهنده تنش ناشی از ماده حلال نیوتنی و  $\tau$  تنش

ویسکوالاستیک ماده حل شونده بوده و  $\eta_N$  لزجت ماده حلال نیوتنی و  $\gamma$  تانسور نرخ برش است. معادله متشکله مدل MPTT به شکل زیر است [۱۸].

$$g \tau + \lambda \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + V \cdot \nabla \tau - L \tau - \tau L^T \right) = \eta_m \gamma \quad (۸۰-۱)$$

در رابطه (۸۰-۱)، مقادیر  $L$ ،  $g$  و  $\eta_m$  به شکل زیر تعریف می شوند:

$$g = 1 - \frac{\lambda \varepsilon}{\eta_{m0}} \text{tr}(\tau) \quad (۸۱-۱)$$

$$L = \nabla V^T - \xi \gamma / 2 \quad (۸۲-۱)$$

$$\eta_m = \eta_{m0} \frac{1 + \xi(2 - \xi)\lambda^2 \dot{\gamma}^2}{(1 + \Gamma^2 \dot{\gamma}^2)^{(1-n)/2}} \quad (۸۳-۱)$$

در روابط فوق،  $\lambda$  زمان آسودگی از تنش،  $\varepsilon$  عدد وایزنبرگ،  $\xi$  از ثابت های ماده،  $\eta_m$  لزجت ماده حل شونده،  $\eta_{m0}$  لزجت ماده حل شونده در نرخ برش صفر،  $n$  توان نمایی برای ماده حل شونده (جهت مدل سازی لزجت تابع نرخ برش برای ماده حل شونده) و  $\dot{\gamma}$  نرخ برش تعمیم یافته است. همچنین  $\Gamma$  یک پارامتر زمانی است که معمولاً برابر زمان آسودگی از تنش ( $\lambda$ ) فرض می شود. به این ترتیب لزجت برای کل محلول در نرخ برش صفر به شکل  $\eta_0 = \eta_N + \eta_{m0}$  به دست می آید؛ بنابراین با تعریف پارامتر  $\beta = \eta_{m0} / \eta_0$ ، مقدار لزجت حلال را می توان به شکل  $\eta_N = (1 - \beta)\eta_0$  نمایش داد. در این حالت مقدار تنش کل و معادله متشکله مدل MPTT به صورت زیر خواهد بود [۱۸]:

$$\sigma_{total} = -PI + (1 - \beta)\eta_0 \gamma + \tau \quad (۸۴-۱)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla \cdot (V \tau) \right) = \mu \beta \eta_0 \gamma + \lambda (L \tau + \tau L^T) - g \tau \quad (۸۵-۱)$$

که  $\mu$  در رابطه فوق به شکل زیر خواهد بود:

$$\mu = \frac{1 + \xi(2 - \xi)\lambda^2 \dot{\gamma}^2}{(1 + \Gamma^2 \dot{\gamma}^2)^{(1-n)/2}} \quad (۸۶-۱)$$

#### ۴-۱- تاریخچه

در این قسمت، گزارش مختصری از برخی مطالعات قبلی انجام شده در زمینه جریان لایه مرزی که شامل حل های عددی و تحلیلی می شود، ارائه می گردد. این مطالعات، شامل جریان سیال های نیوتنی، غیرنیوتنی و ویسکوالاستیک می باشد.

#### ۴-۱-۱- لایه مرزی سیالات نیوتنی

جریان سیال روی صفحه تخت، به دو ناحیه تقسیم می شود، ناحیه اول ناحیه نزدیک به مرزهای جامد می باشد که در آن اثرات لزجت و تغییرات سرعت مهم هستند و ناحیه دوم که بقیه جریان است، این ناحیه غیر لزج را که در آن گرادیان سرعت تقریباً صفر است می توان جریان ایده آل در نظر گرفت. پранتل [۱]، بخشی از جریان که تحت تأثیر برخورد جسم جامد با سیال قرار گرفته است را تحت عنوان "لایه مرزی" نام گذاری نمود. پранتل نقش مهم ویسکوزیته در جریان های با عدد رینولدز بالا را روشن نمود و نشان داد چگونه معادلات ناویراستوکس را می توان ساده کرد و حل های تقریبی برای این حالت به دست آورد. که معادلات ناویراستوکس از نوع بیضوی بوده، در حالی که معادلات لایه مرزی از نوع سهموی می باشند. به لحاظ تاریخی اولین مسئله ای که اهمیت معادلات لایه مرزی پранتل را پدیدار نمود، جریان لایه مرزی روی صفحه تخت هست. این مسئله توسط بلازیوس<sup>۱</sup> [۱۹] در سال ۱۹۰۸ مورد بحث قرار گرفت. بررسی جریان لایه مرزی روی سطح شیب دار (جریان با گرادیان فشار) نیز از جمله مسائل بسیار مهم و

---

<sup>۱</sup> Blasius

بنیادی در مکانیک سیالات می‌باشد که در صنایع مختلفی که با جریان سیال در ارتباطند، کاربرد دارد. ازجمله اولین تحقیقات انجام‌شده در این زمینه، پژوهش‌های بنیادی فالکنر و اسکنر در سال ۱۹۳۱ می‌باشد. هرتری [۴] مسئله لایه‌مرزی جریان سیال با گرادیان فشار را در زوایای مختلف سطح شیب‌دار (گرادیان فشارهای مختلف) موردبررسی قرارداد. لین و لین<sup>۱</sup> [۲۰] به حل تشابهی لایه‌مرزی حرارتی فالکنر-اسکن در دمای ثابت سطح و در پراوتل‌های مختلف پرداختند. روسیل ورا<sup>۲</sup> و والنسیا<sup>۳</sup> [۲۱] به حل مسئله لایه‌مرزی فالکنر-اسکن همراه با انتقال حرارت توسط سری فوریه پرداختند، درواقع با متحد کردن و پیوستن آنالیز منحنی مجانب در ضرایب سری فوریه به بهبود نتایج پرداختند و به این نتیجه رسیدند که این روش دارای نتایجی با دقت بیشتر و سرعت همگرایی بالاتری نسبت به روش شوتینگ می‌باشند. همچنین برای حل مسائل لایه‌مرزی فالکنر-اسکن همراه با انتقال حرارت، انتقال جرم و مسائل احتراق این روش را پیشنهاد نمودند. فنگ<sup>۴</sup> و ژانگ<sup>۵</sup> [۲۲] با ارائه یک روش تحلیلی به حل دقیق تحلیلی لایه‌مرزی فالکنر-اسکن پرداختند. معادلات پیوستگی و مومنتوم با شرط مرزی دیواره متحرک و انتقال جرم در سیال حل گردیده است. تأثیر حرکت دیواره و انتقال جرم بر پارامترهای مختلف لایه‌مرزی و پروفیل سرعت موردبررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. درواقع با مقایسه نتایج حاصل از کار خود با نتایج فالکنر-اسکن موجود در کتاب وایت [۸] قدرت و اعتبار حل خود را به نمایش گذاشته است. برخی نتایج حاصل از تحقیقات فنگ و همکارش در شکل ۱-۸ آورده شده است.

---

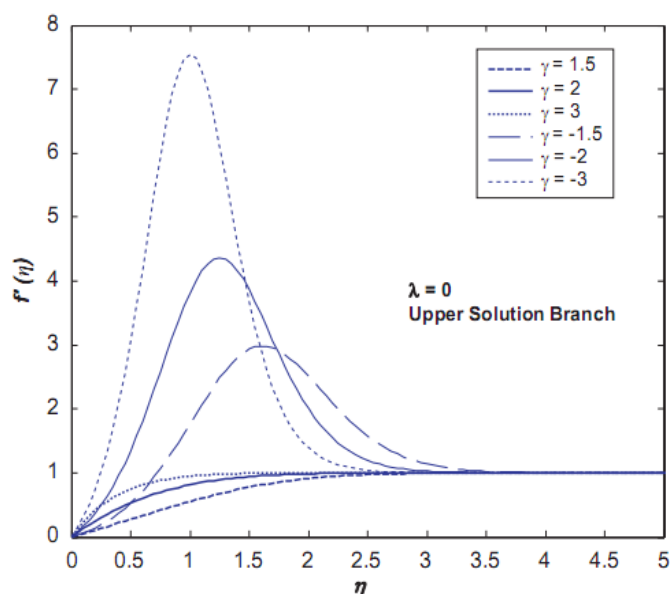
<sup>1</sup> Lin

<sup>2</sup> Rosales-Vera

<sup>3</sup> Valencia

<sup>4</sup> Fang

<sup>5</sup> Zhang



شکل ۸-۱ پروفیل سرعت در  $\gamma$  های (پارامتر انتقال جرم) مختلف [۲۲]

نگانو و همکاران [۲۳] به بررسی و ارزیابی لایه مرزی هیدرودینامیکی در گرادیان فشار متوسط تا قوی پرداختند. آن‌ها این موضوع را بدین صورت بیان کردند، تا زمانی که گرادیان فشار معکوس در بسیاری از ساختارهای سیالاتی به صورت مختلف به وجود می‌آید آن را باید به عنوان یک عامل اصلی در بسیاری از تحقیقات تجربی با توجه به تاثیر شگرفی که بر روی خاصیت‌های توربولانسی دارد در نظر گرفت. نتیجه حاصل از مطالعات نگانو و همکاران بدین شرح است که در گرادیان فشار معکوس، به خصوص در حالت قوی، ضخامت زیر لایه لزج بسیار کاهش می‌یابد. باسکاران و همکاران [۲۴] رفتار لایه مرزی مغشوش هیدرودینامیکی را تحت تاثیر خطوط جریان قوسی و خطوط جریان با گرادیان فشار را مورد مطالعه قرار دادند.

مرونی و برادشا [۲۵] میزان رشد لایه مرزی تحت تاثیر گرادیان فشار را یافتند. آن‌ها مشاهده نمودند که رشد لایه مرزی در دیواره محدب نسبت به حالت دیواره صاف کندتر است. همچنین اسمیت

وسبسی [۲۶] و وندنبزگ [۲۷] هر کدام به صورت مجزا به تحلیل و پژوهش در زمینه لایه مرزی مغشوش تحت تاثیر گرادیان فشار معکوس پرداختند. ایتون و آلبرتین [۲۸] جریان های دو بعدی را تحت تاثیر گرادیان فشار معکوس قرار داشت مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. در جریان مذکور عدد رینولدز بر پایه ضخامت مومنتومی تعریف شده است و هدف اصلی بررسی نحوه گسترش لایه مرزی در جریان های مذکور در مقایسه با جریان در روی صفحه مسطح در مقادیر متفاوت از اعداد رینولدز بوده است. آنچه که واضح است در هر دو نوع جریان پروفیل های سرعت ناحیه لگاریتمی را به خوبی نشان می دهند اما در جریان همراه با گرادیان فشار معکوس میزان اغتشاشات بیشتر شده و این ناهنجاری با حرکت در امتداد جریان بیشتر نیز می گردد. به طوری که در اثر گرادیان فشار معکوس یک نقطه اوج در مورد تنش های عددی دیده خواهد شد.

کو<sup>۱</sup> [۲۹] با استفاده از روش های تبدیل دیفرانسیلی<sup>۲</sup> به حل لایه مرزی حرارتی در مسئله فالکنر-اسکن پرداخته است. روش مذکور موجب تبدیل معادلات غیرخطی به شکل ساده شده توانی و حل آن معادلات بدون نیاز به محاسبات تکرارشونده شده است.

معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی برای جریان سیال باوجود گرادیان فشار به صورت معادلات (۸۷-۱) تا (۸۹-۱) می باشد.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۸۷-۱)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (۸۸-۱)$$

<sup>1</sup> Kuo

<sup>2</sup> Differential transformation method



$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (۸۹-۱)$$

شرایط مرزی حاکم بر مسئله به صورت روابط (۹۰-۱) تا (۹۲-۱) می باشد.

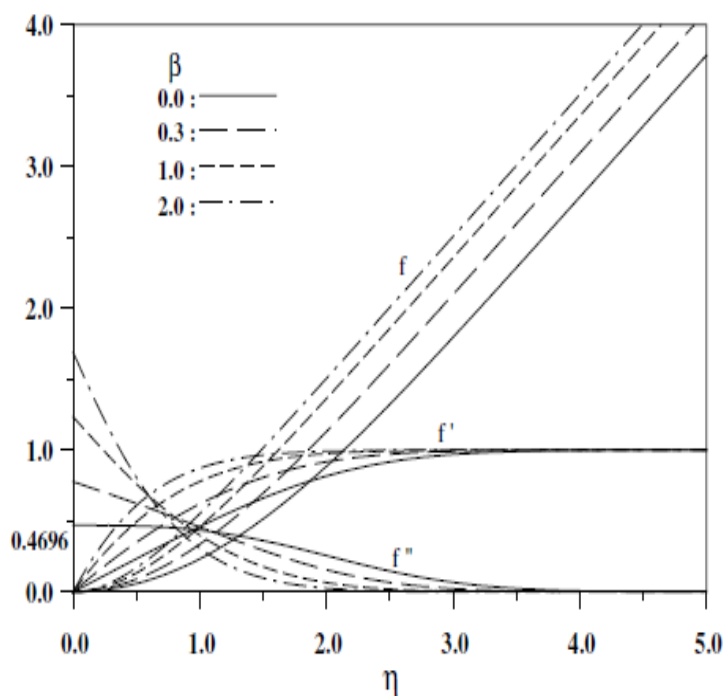
$$y = 0 \rightarrow u = 0, v = 0, T = T_w \quad (۹۰-۱)$$

$$y \rightarrow \infty, u \rightarrow U(x) = U_{\infty} (x/L)^m, T = T_{\infty} \quad (۹۱-۱)$$

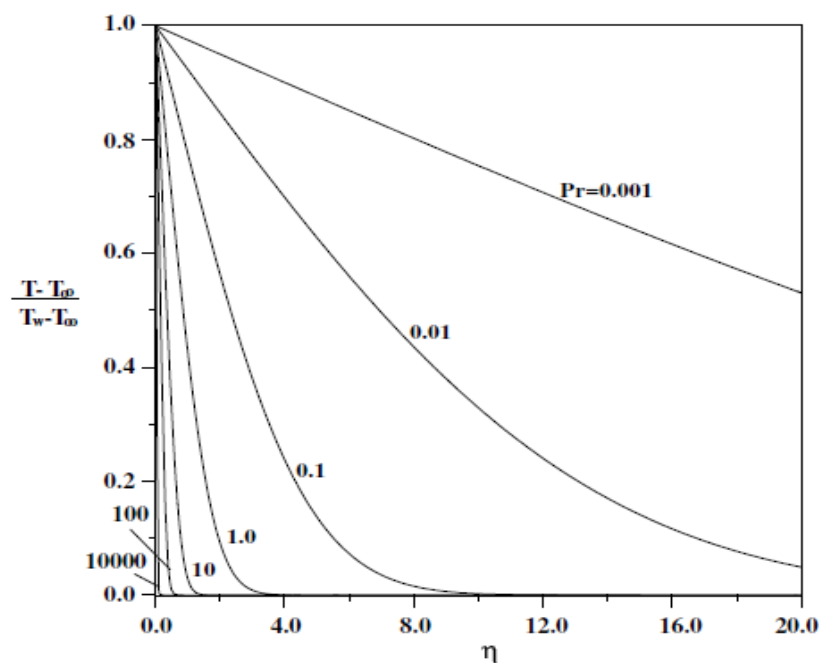
$$x = 0, u = U_{\infty}, T = T_{\infty} \quad (۹۲-۱)$$

نمودارها سرعت و دمای بی بعد در گرادیان فشارها و اعداد پرانتل مختلف در شکل ۹-۱ و

شکل ۱۰-۱ ارائه شده است.



شکل ۹-۱ پروفیل لایه مرزی در گرادیان فشارهای مختلف [۲۹]



شکل ۱-۱۰ پروفیل دما بی بعد در اعداد پرانتل مختلف [۲۹]

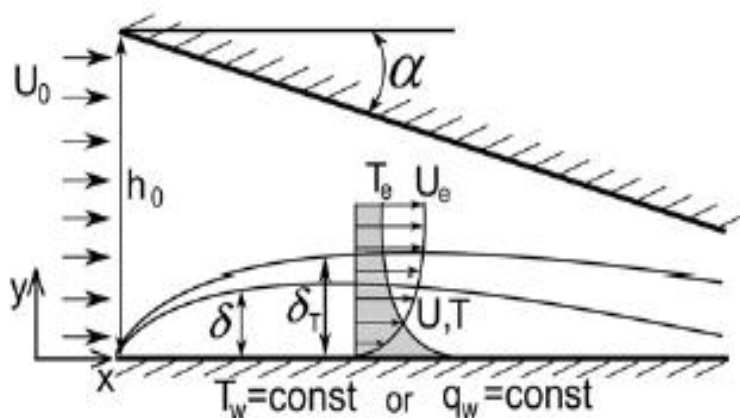
ولچکف<sup>۱</sup> و همکاران [۳۰] با استفاده از روش عددی به حل معادله انرژی در جریان سیال با وجود گرادیان فشار در اعداد پرانتل مختلف پرداختند. لایه مرزی حرارتی و دینامیکی مورد بررسی قرار گرفته شده است. تأثیر گرادیان فشار بر ضریب اصطکاک سطح، ضخامت مومنتوم و ضخامت لایه مرزی حرارتی مورد بررسی قرار گرفته است. در این روش از مدل کوکلی کیو-دبلیو<sup>۲</sup> برای حل معادلات و بررسی تأثیر شتاب خطوط جریان بر ویژگی‌های لایه مرزی حرارتی با وجود جمله گرادیان فشار مطلوب با دو شرط مرزی دما ثابت و شار ثابت استفاده شده است. میزان گرادیان فشار موجود و مؤثر بر جریان با استفاده از پارامتری بنام  $k$  به صورت رابطه (۱-۹۳) مشخص شده است.

<sup>1</sup> Volchkov

<sup>2</sup> Coakly q-w

$$k = \frac{tg \alpha}{Re} \quad (93-1)$$

ضخامت لایه مرزی حرارتی با وجود جمله گرادیان فشار مطلوب کمتر از حالتی است که جمله گرادیان فشار وجود نداشته باشد. برای دقت کار هم لایه مرزی حرارتی در گستره وسیعی از  $k$  با ویژگی‌های لایه مرزی حرارتی در حالت بدون وجود ترم گرادیان فشار (صفحه تخت) مقایسه شده است.



شکل ۱۱-۱ شماتیک مسئله به همراه جریان سیال [۳۰]

نتایج حاصل از این تحقیق به صورت زیر می‌باشد:

➤ وقتی  $k$  بین صفر تا  $۰/۸۵ \times ۱۰^۶$  می‌باشد، گرادیان فشار مطلوب باعث تأخیر در رسیدن لایه مرزی به حالت متلاطم می‌گردد.

➤ وقتی  $k$  بزرگ‌تر از  $۰/۸۵ \times ۱۰^۶$  می‌باشد، لایه مرزی آشفته وجود نخواهد داشت و در  $tg \alpha \geq 1$  یک جریان جانبی هم دیده می‌شود، در این حالت ضریب اصطکاک به عدد رینولدز وابسته نیست و تنها به  $tg \alpha$  وابسته می‌باشد.

## ۱-۴-۲- لایه‌مرزی در سیالات غیرنیوتنی

باوجوداینکه تحقیقات بسیار زیادی در زمینه‌ی لایه‌مرزی روی صفحه تخت و حالت فالتکتر-اسکن انجام شده است؛ اما باید اذعان داشت که این تئوری‌ها برای سیالات نیوتنی کاربرد دارد، درحالی‌که بسیاری از صنایع با محلول‌ها، مذاب‌های پلیمری، رنگ‌ها، سوخت‌ها و... سروکار دارند که جزو سیالات غیر نیوتنی می‌باشد؛ بنابراین نیاز به تحقیقات در مورد سیالات غیر نیوتنی همچنان وجود دارد. یکی از مهم‌ترین گروه از سیالات غیرنیوتنی، سیالات توانی یا پاور-لو<sup>۱</sup> می‌باشند. با توجه به کاربرد وسیع این دسته از سیالات و همچنین سادگی معادلات ساختاری در آن‌ها، اکثر مطالعات بروی لایه‌مرزی سیالات غیرنیوتنی، گروه سیالات توانی را موردبررسی قرار داده‌اند. اولین بار اکریوس<sup>۲</sup> [۳۱] در سال ۱۹۶۰ معادلات لایه‌مرزی سیالات توانی را به‌صورت عددی حل نمود. نتایج حاصل از این حل عددی نشانگر تغییرات در ضخامت لایه‌مرزی و همچنین سایر پارامترهای لایه‌مرزی بر اثر تغییر اندیس توانی بود. از مهم‌ترین نتایج ارائه‌شده می‌توان به کاهش ضخامت لایه‌مرزی بر اثر افزایش اندیس توانی اشاره نمود. در زمینه حل تحلیلی و دقیق معادله لایه‌مرزی سیالات توانی تلاش‌های متعددی توسط محققین صورت پذیرفته است. در اکثر تحقیقات سعی بر ارائه حل‌های تشابهی از معادله لایه‌مرزی سیالات توانی بوده است که از آن جمله می‌توان به تحقیقات انجام‌شده توسط کزالی [۳۲] و ژنگ و همکاران [۳۳] اشاره نمود.

یکی از جامع‌ترین مقالاتی که به بحث، بررسی و مقایسه نتایج حاصل از حل تحلیلی به روش تشابهی و همچنین حل‌های تقریبی در لایه‌مرزی سیالات توانی پرداخته است، مقاله‌ی میرز<sup>۳</sup> [۳۴] می‌باشد. نویسندگان در مرجع مذکور با اعمال تغییراتی در پارامتر تشابهی استفاده‌شده در حل معادله لایه‌مرزی نیوتنی توسط بلازیوس، به یک معادله اصلاح‌شده بلازیوس جهت سیالات توانی دست‌یافته‌اند. همچنین در تحقیق فوق علاوه بر حل تشابهی معادله لایه‌مرزی، معادله مومنتوم نیز به همین روش و

---

<sup>1</sup> Power law

<sup>2</sup> Acrivos

<sup>3</sup> Myers

به وسیله پارامتر تشابهی مشابه حل شده است.

با توجه به غامض بودن و پیچیدگی بسیار زیاد، در اکثر مدل‌های سیالات ویسکوالاستیک، تعداد کارهای تحقیقاتی انجام شده در بروی لایه مرزی این گروه از سیالات بسیار پایین‌تر از انواع دیگر سیالات غیرنیوتنی می‌باشد. نکته‌ی قابل توجه در تحقیقات محدود انجام شده در زمینه، ارائه نتایج بعضاً متناقض با یکدیگر و همچنین عدم تأیید بعضی از نتایج به وسیله‌ی مشاهدات آزمایشگاهی می‌باشد.

والتر و برد<sup>۱</sup> [۳۵]، لایه مرزی یک سیال مرتبه ۲ را مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه غیرمترقبه رسیدند که برای چنین سیالی، سرعت در داخل لایه مرزی باید بیشتر از خارج لایه مرزی گردد. پیش‌بینی آن‌ها در این تحقیق هنوز پس از گذشت سالها از طریق آزمایشگاهی تأیید نشده است.

هریس [۳۶]، با استفاده از انتگرال ممنتوم استدلال نمود که در لایه مرزی یک سیال ویسکوالاستیک، خواص الاستیک موجب افزایش ضخامت لایه مرزی و نیز ضریب اصطکاک نسبت به حالت نیوتنی می‌شود.

صادقی [۳۷]، جریان لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک از نوع مرتبه ۲ را روی صفحه تخت در نظر گرفته و تأثیر الاستیسیته سیال بر روی ضریب اصطکاک پوسته‌ای را بررسی نموده است. در این تحقیق با استفاده از یک متغیر تشابهی، معادلات لایه مرزی از فرم مشتقات جزئی<sup>۲</sup> به یک معادله دیفرانسیل معمولی<sup>۳</sup> ساده شده‌اند. با توجه به پدیدار شدن متغیر مکانی در معادلات، حل از نوع تشابهی موضعی خواهد بود. برای حل معادلات از ترکیبی از روش تفاضل محدود و پرتابه‌ای استفاده شده است. نتایج این تحقیق حاکی از آن است که اگر خاصیت الاستیک سیال به حد کافی بالا باشد، سرعت در داخل لایه مرزی ممکن است از سرعت خارج از آن بالاتر باشد.

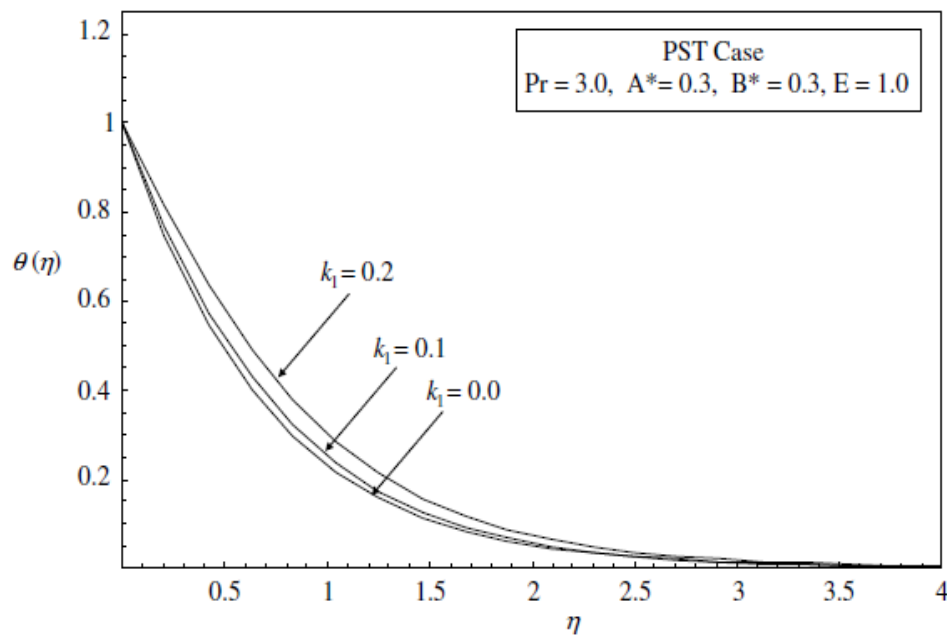
---

<sup>1</sup> Bird and Walters

<sup>2</sup> Partial differential equation

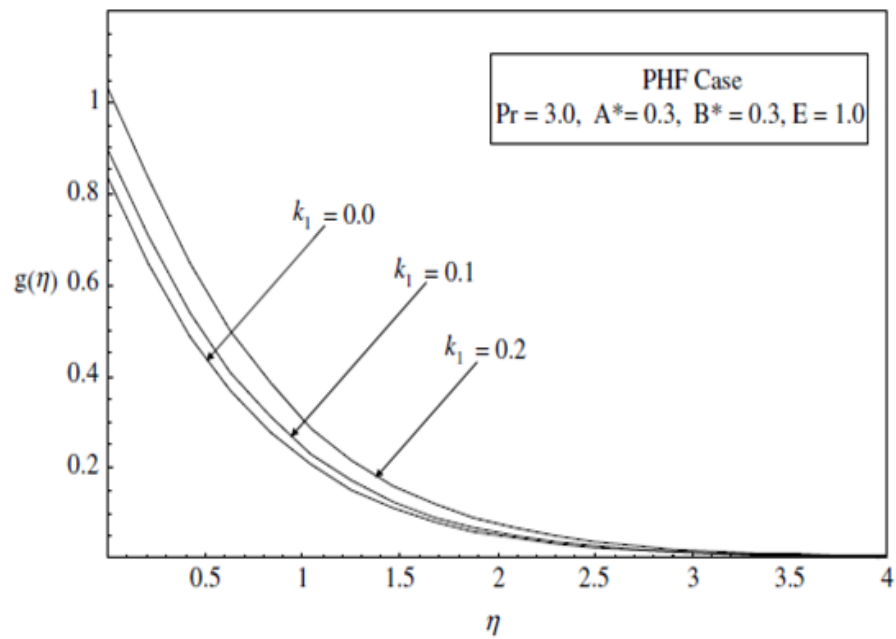
<sup>3</sup> Ordinary differential equation

آبل<sup>۱</sup> [۳۸] به بررسی لایه مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی بر روی صفحه تخت در جریان سیال ویسکوالاستیک پرداخت. برای حل معادلات غیر خطی حاکم بر جریان از روش تحلیلی استفاده نمود. برای حل معادله انرژی از دو نوع شرایط مرزی دما ثابت بر روی دیواره و شار ثابت استفاده نمود. اثر تغییرات پارامترهای گوناگون نظیر خاصیت ویسکوالاستیک، عدد اکرت و عدد پرانتل را بر روی لایه مرزی حرارتی و دینامیکی مورد بررسی قرارداد. برخی نتایج حاصل از مطالعات آبل [۳۸] در نمودارهای شکل ۱-۱۲ تا شکل ۱-۱۵ ارائه شده است.

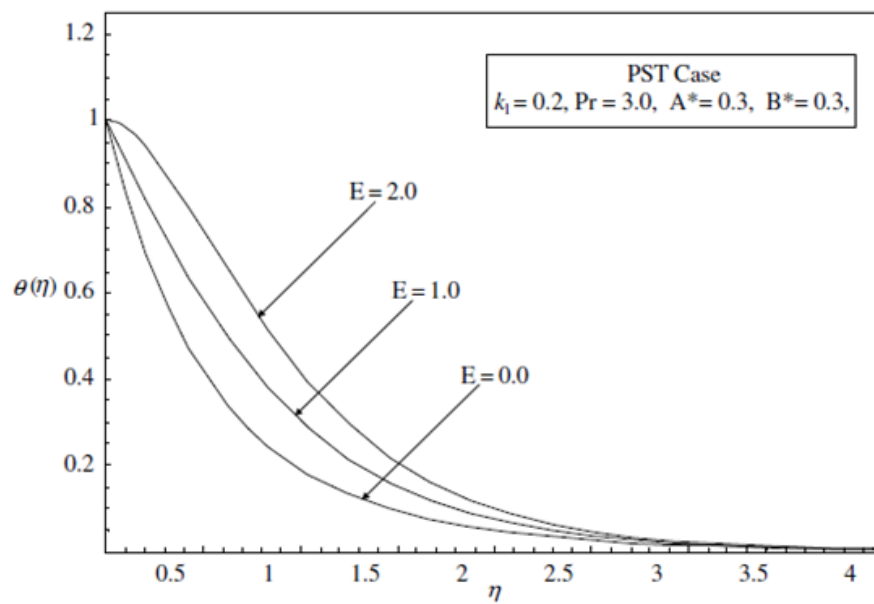


شکل ۱-۱۲ تأثیر ضریب الاستیک بر پروفیل دما (دما دیواره ثابت) [۳۸]

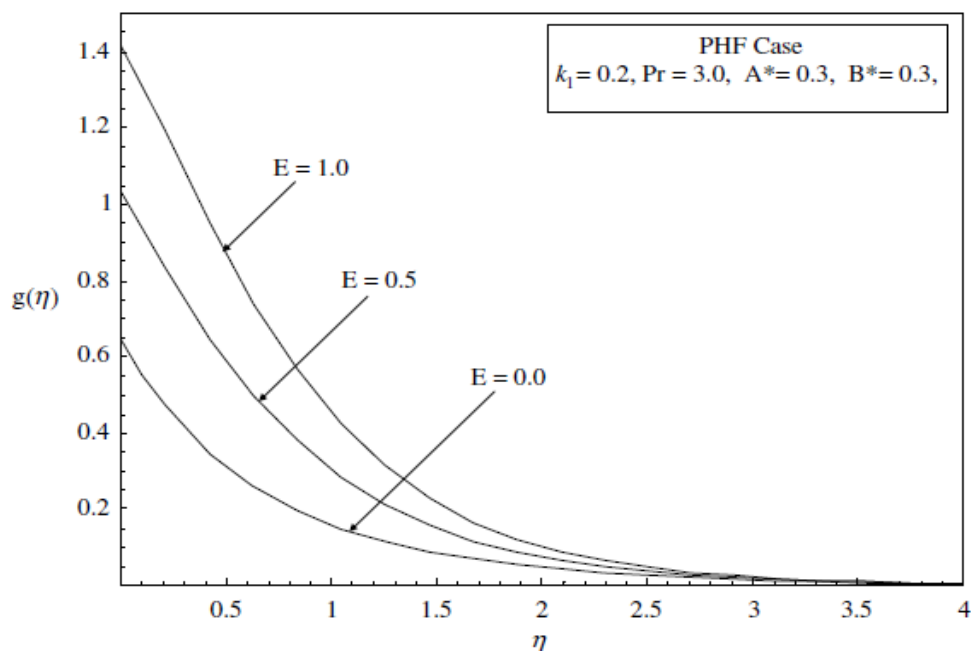
<sup>1</sup> Abel



شکل ۱۳-۱ تأثیر ضریب الاستیک بر پروفیل دما (شار حرارتی ثابت) [۳۸]



شکل ۱۴-۱ تأثیر تغییرات عدد اکرت بر پروفیل دما (دما دیواره ثابت) [۳۸]



شکل ۱-۱۵ تأثیر تغییرات عدد اکرت بر پروفیل دما (شار حرارتی ثابت) [۳۸]

پاستلنیکو<sup>۱</sup> و پاپ<sup>۲</sup> [۳۹] به حل عددی معادله لایه مرزی فالکنر-اسکن در جریان سیال غیرنیوتنی پاورلو پرداختند. در مرجع مذکور، تأثیر گرادیان فشار، زاویه صفحه و خواص مواد بر پروفیل سرعت، ضریب درگ و ضخامت لایه مرزی مورد مطالعه قرار گرفته است. ونجو<sup>۳</sup> [۴۰] به حل تشابهی معادله لایه مرزی فالکنر-اسکن با استفاده از مدل فن<sup>۴</sup> پرداخت. تأثیر اعداد رینولدز بزرگ و گرادیان فشار (  $m = \frac{1}{3}$  ) بر ضریب درگ و اختلاف تنش نرمال اول بررسی شده است.

<sup>1</sup> Postelnicu

<sup>2</sup> Pop

<sup>3</sup> Olagunju

<sup>4</sup> FENE



## ۱-۵- تحقیق حاضر

در این بخش، پژوهش حاضر معرفی شده و مشخصات کلی، اهداف، کاربردها و موارد نوآوری آن مورد بحث قرار می‌گیرد. در پایان مروری اجمالی بر ساختار کلی تحقیق حاضر صورت می‌گیرد.

### ۱-۵-۱ معرفی تحقیق حاضر

در این تحقیق به طور کلی لایه مرزی و انتقال حرارت در جریان سیال ویسکوالاستیک در مسئله فالتکندر-اسکن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. شناخت اثرات ویسکوالاستیک بر پارامترهای لایه مرزی و انتقال حرارت از جمله اهداف این پژوهش می‌باشد. بدین منظور از رویکرد عددی با استفاده از نرم افزار متلب و روش اختلاف محدود استفاده شده است. علاوه بر جریان سیال ویسکوالاستیک، مسئله فوق برای جریان نیوتنی نیز مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. جریان به شکل آرام و دائمی و سیال ویسکوالاستیک به صورت تراکم ناپذیر در نظر گرفته شده است. از مدل مرتبه دوم به عنوان مدل ساختاری سیال ویسکوالاستیک استفاده می‌شود. یکی از موارد جالب توجه تحقیق حاضر، مطالعه تاثیر دمای سیال در حین عبور از روی صفحه، بر خواص سیال نظیر لزجت، ضریب رسانش، ظرفیت گرمایی و اختلاف تنش نرمال اول می‌باشد. کد متلب نوشته شده در این مطالعه، در دو حالت وابستگی خواص سیال به دما و عدم وابستگی خواص به دما می‌باشد. مشخصه‌های لایه مرزی در هر دو حالت گزارش و با یکدیگر مقایسه می‌شوند. به طور کلی در شبیه‌سازی عددی اثر پارامترهایی چون عدد رینولدز، ضریب اختلاف تنش نرمال اول، تغییرات گرادیان فشار، عدد پرانتل و عدد ناسلت محلی و کلی مورد بررسی و بحث قرار خواهد گرفت.

در فصل دوم این پژوهش، معادلات حاکم بر جریان، فرضیات و هندسه مسئله به طور کامل بیان شده است. فصل سوم به تفصیل حل عددی انجام شده در این مطالعه و چگونگی گسسته سازی ترم های مختلف معادلات حاکم را نشان می دهد. گزارش کاملی از نتایج عددی در فصل چهارم ارائه شده

است. نهایتاً در فصل پنجم به جمع‌بندی فعالیت‌های انجام‌شده در این مطالعه و بیان کلی نتایج به دست آمده خواهیم پرداخت. برخی از پیشنهادات نیز برای پیشبرد فعالیت‌های آتی در زمینه این مسأله ارائه خواهد شد.

## ۱-۵-۲- ضرورت و کاربرد

مکانیک سیالات همچون بسیاری از علوم دیگر، رشد و گسترش خود را تا حد زیادی مدیون برخی از ایده‌ها و تئوری‌های انقلابی همچون تئوری لایه‌مرزی و تئوری فیلم نازک می‌باشد. از میان این تئوری‌ها، بی‌تردید تئوری لایه‌مرزی از جایگاه ویژه‌ای در این علم برخوردار است. درواقع این تئوری خیلی سریع کارایی خود را در شاخه‌های مختلف علم مکانیک سیالات به‌ویژه هوانوردی نشان داد. تاکنون تحقیقات آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی بی‌شماری در خصوص لایه‌مرزی روی صفحه تخت و لایه‌مرزی باوجود ترم گرادیان فشار (فالکنر-اسکن) صورت گرفته است که عمده این تحقیقات در مورد سیالات نیوتنی بوده و سهم اندکی از آن‌ها متوجه سیالات غیرنیوتنی و به‌ویژه سیالات ویسکوالاستیک است. به‌طورکلی دلایل اصلی مربوط به تعداد اندک مطالعات مربوط به سیالات غیرنیوتنی در مقابل سیالات نیوتنی عبارت‌اند از:

- یکی از دلایل استقبال گسترده از مطالعات مربوط به سیالات نیوتنی مربوط به رفتار نیوتنی سیالاتی نظیر آب و هوا است. توسعه دانش مکانیک سیالات نیوتنی عمده‌تأمرهون کاربرد این دو سیال در صنعت هوانوردی و کشتی‌سازی است.
- سیالات غیرنیوتنی و به‌ویژه سیالات ویسکوالاستیک بسیار متنوع و دارای رفتارهای پیچیده‌ای هستند که تحلیل و بررسی آن‌ها دشوار می‌باشد (تنوع معادلات اساسی و رفتار پیچیده).
- باید اذعان داشت که بسیاری از صنایع با سیالاتی سروکار دارد که دارای رفتار غیرنیوتنی هستند. محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری، مواد غذایی نیمه جامد، مواد آرایشی و بهداشتی، رنگ‌ها و سوخت‌های

پیشرفته، چسب‌های مایع و انواع امولسیون‌ها و سوسپانسیون‌ها جزو سیالات غیرنیوتنی محسوب می‌شوند. در بسیاری از فرایندها نظیر تولید نوارچسب و یا ساخت انواع قطعات پلاستیکی با استفاده از اکستروژن امکان تشکیل لایه‌مرزی یک سیال غیرنیوتنی بر روی یک سطح جامد نظیر دیواره غالب وجود دارد بنابراین نیاز به یک تئوری اساسی برای این‌گونه سیالات ضروری به نظر می‌رسد. با توجه به خلا موجود، ضرورت مطالعه در این بخش کاملاً آشکار است.

### ۱-۵-۳- نوآوری تحقیق حاضر

تحقیقات نگارنده نشان می‌دهد که اکثر پژوهش‌های صورت گرفته روی جریان لایه‌مرزی سیالات غیرنیوتنی، محدود به سیالات توانی می‌باشد و این مدل قادر به شبیه‌سازی بسیاری از سیالات غیرنیوتنی، من جمله سیالات ویسکوالاستیک نمی‌باشد. تحقیقات صورت گرفته در زمینه سیالات ویسکوالاستیک نیز محدود به مدل‌های خاص و ساده‌تر این سیالات می‌باشد. از جنبه‌های نوآوری تحقیق حاضر استفاده از مدل مرتبه دو در شبیه‌سازی لایه‌مرزی دینامیکی و گرمایی باوجود جمله گرادیان فشار (از نوع فالتکر-اسکن) می‌باشد. همچنین در این تحقیق معادله انرژی به همراه معادلات بقا، برخی خواص سیال از قبیل لزجت، ضریب رسانش و ظرفیت حرارتی ویژه تابعی از دمای نقطه‌ای سیال در نظر گرفته شده است؛ زیرا با توجه به اینکه گروه غالبی از سیالات ویسکوالاستیک، مذاب‌های پلیمری می‌باشند و در این حالت تفاوت دمای زیادی مشاهده می‌شود و از طرفی با توجه به حساسیت برخی خواص مواد ویسکوالاستیک به دما، در حل معادله انرژی استفاده از این فرضیه ضروری به نظر می‌رسد. مقایسه ضخامت لایه‌مرزی هیدرودینامیکی و گرمایی در حالت خواص مستقل از دما و خواص وابسته به دما از جمله نوآوری‌های این تحقیق می‌باشد.

## ۲- فصل دوم

### معادلات حاکم

## ۲-۱- مقدمه

در این بخش معادلات حاکم، هندسه مسئله، اعداد بی‌بعد بکار رفته در حل و همچنین فرضیات لحاظ شده در حل عددی ارائه شده‌اند. شایان ذکر است که در تحقیق حاضر کلیه پارامترهای جریان و انتقال حرارت به صورت بی‌بعد بررسی شده‌اند. معادلات و روابط فیزیکی ارائه شده در این فصل برای مطالعه عددی مسئله فالکنر-اسکن در جریان سیال ویسکوالاستیک به کار گرفته شده‌اند که نتایج حاصل از آن در فصول چهارم و پنجم آمده است.

## ۲-۲- تقریب لایه مرزی در سیال نیوتنی

معادلات حاکم برای جریان آرام تراکم ناپذیر، شامل معادله پیوستگی، معادله بقای مومنتوم و معادله انرژی می‌باشد که به ترتیب در ادامه ارائه شده‌اند.

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (۱-۲)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla (u) \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau \quad (۲-۲)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla (T) = \frac{k}{\rho C_p} (\nabla^2 T) \quad (۳-۲)$$

امکان ساده‌سازی جمله‌های موجود در معادله با توجه به نظریه لایه مرزی وجود خواهد داشت.

فرضیات لازم جهت تعیین معادله پیوستگی و معادلات لایه مرزی سرعت عبارتند از:

- جریان سیال تراکم ناپذیر است.
- جریان پایا است
- خواص ثابت هستند
- مؤلفه‌های سرعت در امتداد سطح خیلی بزرگ‌تر از مؤلفه آن در جهت عمود بر سطح

است.

➤ تنش های عمودی ناچیز هستند.

معادلات حاکم بر جریان در حالت دو بعدی به صورت روابط (۴-۲) و (۶-۲) می باشد [۲].

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۴-۲)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (۵-۲)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (۶-۲)$$

در روش مرتبه بزرگی می توان مرتبه بزرگی ترم ها را به صورت  $u = O(U_\infty)$  ،  $p = O(\rho U_\infty^2)$  در نظر گرفت. به عنوان مثال واضح است که فاصله عمودی ذرات داخل لایه مرزی تا سطح جسم ( $y$ ) همواره بین صفر و  $\delta$  قرار دارد. در نتیجه می توان ادعا کرد که سقف  $y$  برابر با  $\delta$  است که این عبارت به صورت ریاضی  $y = O(\delta)$  نوشته می شود. تنها چیزی که لازم است در مورد آن تصمیم گیری شود مرتبه بزرگی  $v$  است که برای پیدا کردن آن می توان از معادله پیوستگی استفاده کرد. بر اساس این معادله و با معلوم بودن مرتبه بزرگی سایر پارامترها، مرتبه بزرگی  $v$  به صورت رابطه  $v = O(U_\infty \frac{\delta}{L})$  برآورد می شود. در مرحله بعد مرتبه بزرگی چهارترم اینرسی و چهار ترم لزجت در معادلات ناویراستوکس به صورت روابط (۷-۲) تا (۱۴-۲) تعیین می شود [۴۱]:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = O\left(\frac{U_{\infty}^2}{L}\right) \quad (۷-۲)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{U_{\infty}^2}{L}\right) \quad (۸-۲)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O\left(\frac{U_{\infty}}{L^2}\right) \quad (۹-۲)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O\left(\frac{U_{\infty}}{\delta^2}\right) \quad (۱۰-۲)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = O\left(\frac{U_{\infty}^2 \delta}{L L}\right) \quad (۱۱-۲)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = O\left(\frac{U_{\infty}^2 \delta}{L L}\right) \quad (۱۲-۲)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = O\left(\frac{U_{\infty}^2 \delta / L}{L^2}\right) \quad (۱۳-۲)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = O\left(\frac{U_{\infty}^2 \delta / L}{\delta^2}\right) \quad (۱۴-۲)$$

با فرض کوچک بودن  $\frac{\delta}{L}$  می توان نتیجه گرفت که از چهار ترم اینرسی وارد به ذره‌ای از سیال در

داخل لایه مرزی، آن دو ترمی که در معادله مومنتوم در جهت  $y$  وارد می شوند بسیار کوچک اند و

می توان از آن چشم پوشی کرد. به طور مشابه از چهار ترم لزجتی که در آن واحد به ذره‌ای از سیال وارد

می شوند ترم  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  در معادله مومنتوم در جهت  $x$  از ترم های دیگر بزرگتر است و می توان در مقابل آن

از سایر ترم ها صرف نظر کرد. تحت این شرایط معادله مومنتوم در جهت به صورت رابطه  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  ساده

می شود. این رابطه نشان می دهد که می توان در داخل لایه مرزی از تغییرات فشار در راستای صرف نظر

کرد. معادله لایه مرزی در سیال نیوتنی بصورت رابطه (۱۵-۲) ساده می شود:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (15-2)$$

همان طور که دیده می شود، با استفاده از تقریب لایه مرزی معادلات حاکم بر جریان سه معادله و سه مجهول به دو معادله و دو مجهول کاهش می یابند. لازم به ذکر است که در این معادلات، با توجه به اینکه فشار مستقل از  $y$  است، ترم  $\frac{\partial p}{\partial x}$  به صورت  $\frac{dp}{dx}$  نوشته شده است. در ضمن با توجه به اینکه در خارج از لایه مرزی معادله برنولی قابل استفاده است، می توان به جای ترم  $-\frac{dp}{dx}$  از ترم  $+\rho U_{\infty} \left( \frac{dU_{\infty}}{dx} \right)$  استفاده کرد [۴۲].

## ۲-۳- محاسبه میدان تنش در سیال ویسکوالاستیک

در بخش حل عددی این تحقیق سهم ناشی از خاصیت ویسکوالاستیک با استفاده از حل معادله ساختاری سیال مرتبه دوم یعنی رابطه (۲-۱۶) بیان می شود [۴۳].

$$\tau = \eta \gamma_{(1)} - \frac{1}{2} \Psi_1 \gamma_{(2)} + \Psi_2 \left\{ \gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)} \right\} \quad (16-2)$$

معادله ساختاری مدل مرتبه دوم به صورت رابطه (۲-۱۶) می باشد که جمله های آن به صورت روابط (۲-۱۷) و (۲-۱۸) می باشد.

$$\gamma_{(1)} = \nabla V + \nabla V^T \quad (17-2)$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} - \left\{ (\nabla V)^T \cdot \gamma_{(1)} + \gamma_{(1)} \cdot (\nabla V) \right\} \quad (18-2)$$

تانسور گرادیان سرعت به صورت زیر تعریف می شود:



$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (19-2)$$

$$\gamma_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20-2)$$

جهت به دست آوردن میدان تنش باید  $\gamma_{(2)}$  محاسبه شود، جهت این کار باید  $\frac{D\gamma_{(1)}}{Dt}$  را بیابیم که

با توجه به رابطه مشتق مادی برابر است با:

$$\frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} = \frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial t} + u \frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial x} + v \frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial y} + w \frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial z} \quad (21-2)$$

با توجه به فرض پایا بودن جریان را برابر  $\frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial t}$  صفر شده و  $\frac{D\gamma_{(1)}}{Dt}$  به صورت زیر محاسبه می-

شود.

$$\frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} = \begin{pmatrix} 0 & u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & 0 \\ u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} & 0 \\ v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} & 0 \\ u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22-2)$$

برای محاسبه  $\gamma_{(2)}$  احتیاج به دست آوردن جمله‌های  $(\nabla v)^T \cdot \gamma_{(1)}$  و  $\gamma_{(1)} \cdot (\nabla v)$  نیز می‌باشد که

به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$(\nabla v)^T \cdot \gamma_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23-2)$$

$$\gamma_{(1)} \cdot (\nabla v) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (24-2)$$

در نتیجه،  $\gamma_{(2)}$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\Rightarrow \gamma_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} & 0 \\ u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2(\frac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(\frac{\partial u}{\partial y})^2 & u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} & 0 \\ u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (25-2)$$

ترم  $\gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)}$  نیز به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26-2)$$

در نتیجه میدان تنش به صورت زیر به دست می آید.

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \\ \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\Psi_1 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & \frac{1}{2} \Psi_{1\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \Psi_{1\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \Psi_{1\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \Psi_{1\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (27-2)$$

با توجه به معادله (۲۷-۲) مؤلفه‌های میدان تنش به صورت روابط زیر قابل محاسبه است.

$$\tau_{xx} = \Psi_1 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \Psi_2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (28-2)$$

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \Psi_{1\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \Psi_{1\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} \quad (29-2)$$

$$\tau_{yy} = \Psi_2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (30-2)$$

## ۲-۴- تقریب لایه مرزی در جریان سیال ویسکوالاستیک

در جریان سیال ویسکوالاستیک، معادله در جهت ط به صورت رابطه (۳۱-۲) تعریف می گردد.

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad 31-2$$

برای  $\tau_{xx}$  و  $\tau_{xy}$  در روش مرتبه بزرگی می توان مرتبه بزرگی ترم های تنش را به صورت روابط

(۳۲-۲) و (۳۳-۲) در نظر گرفت؛ بنابراین از جمله  $\tau_{xx}$  صرف نظر می شود [۴۴]. بنابراین معادله مومنوم برای جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت کلی بصورت رابطه (۳۴-۲) می باشد.

$$\tau_{xy} = O\left(\frac{U_{\infty}^2}{\delta L}\right) \quad ۳۲-۲$$

$$\tau_{xx} = O\left(\frac{U_{\infty}^2}{\delta^2}\right) \quad ۳۳-۲$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad ۳۴-۲$$

## ۲-۵- بی بعد سازی معادلات حاکم بر جریان

تحلیل ابعادی به کمک نوعی فشرده کردن، به رفع پیچیدگی و کاستن از تعداد متغیرهای تجربی موثر روی یک پدیده فیزیکی منجر می شود. در این بخش به بعد سازی معادلات حاکم بر جریان به کمک متغیرهای روابط (۳۵-۲) تا (۴۵-۲) پرداخته شده است.

$$v^* = \frac{v}{U_{ref}} \quad (۳۵-۲)$$

$$u^* = \frac{u}{U_{ref}} \quad (۳۶-۲)$$

$$x^* = \frac{x}{L} \quad (۳۷-۲)$$

$$y^* = \frac{y}{L} \quad (۳۸-۲)$$

$$p^* = \frac{p}{\eta \frac{U_{ref}}{L}} \quad (۳۹-۲)$$

$$\tau^* = \frac{\tau}{\eta \frac{U_{ref}}{L}} \quad (40-2)$$

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (41-2)$$

$$T_h^* = \frac{T - T_c}{q''L / k} \quad (42-2)$$

معادله (۱-۲) با استفاده از روابط (۳۵-۲) تا (۳۸-۲) به صورت رابطه (۴۴-۲) بی بعد خواهد شد.

$$\frac{U_{ref}}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{U_{ref}}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (43-2)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (44-2)$$

بنابراین معادله (۴۵-۲) طبق روابط و متغیرهای فوق به صورت معادله (۴۸-۲) نوشته شده است.

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot \tau \quad (45-2)$$

$$\rho u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{U_{ref}}{L} + \rho v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \frac{U_{ref}}{L} = \left( -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nabla^* \cdot \tau^* \right) \frac{\eta \frac{U_{ref}}{L}}{L} \quad (46-2)$$

$$\rho u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \left( -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nabla^* \cdot \tau^* \right) \frac{1}{Re} \quad (47-2)$$

$$v^* \cdot \nabla^* v^* = \frac{1}{Re} (-\nabla^* p + \nabla^* \cdot \tau^*) \quad (48-2)$$

تنش در سیال مرتبه دوم بصورت رابطه زیر تعریف می شود. برای تحلیل ابعادی و بی بعد سازی

تنش نیز متغیرهای فوق استفاده می شود.

$$\tau = \eta \dot{\gamma} - \frac{1}{2} \Psi_1 \dot{\gamma}_{(2)} \quad (49-2)$$

$$\nabla \cdot \tau = \eta \nabla^2 v - \frac{1}{2} \Psi_1 \nabla \cdot \gamma_{(2)} \quad (50-2)$$

$$\nabla^* \cdot \tau^* \frac{\eta U_{ref}}{L^2} = \nabla^{*2} v^* \frac{U}{L^2} - \frac{1}{2} \Psi_1 \nabla^* \cdot \gamma^*_{(2)} \frac{U_{ref}^2}{L^3} \quad (51-2)$$

$$\nabla^* \cdot \tau^* = \nabla^{*2} v^* - \frac{1}{2} \Psi_1^* \nabla^* \cdot \gamma^*_{(2)} \quad (52-2)$$

$$\Psi_1^* = \frac{\Psi_1 U_{ref}}{\eta L} \quad (53-2)$$

با قرار دادن رابطه (52-2) در معادله (48-2) به رابطه (54-2) تبدیل می‌گردد.

$$v^* \cdot \nabla^* v^* = \frac{1}{Re} (-\nabla^* p + \nabla^* v^* - \frac{1}{2} \Psi_1^* \nabla^* \cdot \gamma^*_{(2)}) \quad (54-2)$$

معادله انرژی که به صورت رابطه (3-2) تعریف شده است بصورت رابطه (55-2) برای جریان

دوبعدی و تراکم ناپذیر ساده خواهد شد.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (55-2)$$

با قرار دادن متغیرهای (35-2) تا (41-2)، معادله (55-2) به صورت رابطه (56-2) بی‌بعد خواهد

شد.

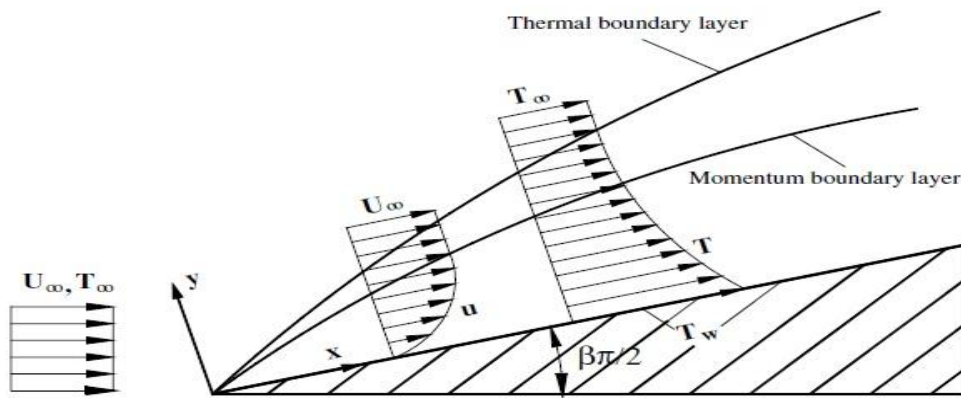
$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (56-2)$$

## ۲-۶- هندسه مسئله

هندسه بکار رفته در این تحقیق مطابق شکل ۱-۲ شماتیک هندسه مسئله می‌باشد. در شکل ۱-۲

مشخص است که طول صفحه برابر با L و سرعت جریان آزاد،  $U_\infty$  می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود

جریان به صورت کاملاً یکنواخت به صفحه برخورد می‌کند، همچنین لایه مرزی دینامیکی و حرارتی ایجاد شده روی صفحه و پروفیل سرعت به صورت فرضی و شماتیک نمایش داده شده است.



شکل ۱-۲ شماتیک هندسه مسئله

برای جریان‌های گوه (جریان با وجود جمله گرادیان فشار) سرعت طبق رابطه (۵۷-۲) تعریف می‌شود.  $m$  فاکتور پروفیل سرعت می‌باشد.  $\beta$  که مطابق شکل ۱-۲ همان زاویه سطح شیب‌دار در گوه می‌باشد، مقیاسی برای گرادیان فشار  $\frac{dp}{dx}$  است. اگر  $\beta$  مثبت باشد، گرادیان فشار منفی و یا موافق است و  $\beta$  منفی به معنای یک گرادیان فشار مثبت و یا مخالف است. به‌طور طبیعی  $\beta = 0$  صفحه مسطح را نشان می‌دهد.  $-2 \leq \beta \leq 0$  دهنده جریان روی یک گوشه باز شو نده با زاویه چرخش و  $0 \leq \beta \leq +2$  نشان‌دهنده جریان روی یک گوشه با نیم زاویه می‌باشد.

$$U(x) = U_\infty x^m \quad (۵۷-۲)$$

$$m = \frac{\beta}{2 - \beta} \quad (۵۸-۲)$$



## ۲-۷- اعداد بی بعد مسئله

در این پژوهش جهت تعیین تأثیر پارامتر سرعت جریان ورودی بر ضخامت لایه مرزی و سایر پارامترها از عدد بی بعد رینولدز استفاده شده است. عدد رینولدز نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت می باشد. برای بررسی تأثیر خواص ویسکوالاستیک بر مشخصه های لایه مرزی از عدد بی بعد سای (ضریب اختلاف تنش نرمال اول)، استفاده شده است. پارامتر بی بعد  $\beta$  برای قیاس گرادیان فشار می باشد. همچنین تأثیر مشخصات گرمایی سیال بر ضخامت لایه مرزی گرمایی از عدد بی بعد پرانتل و ناسلت استفاده شده است. عدد پرانتل بیانگر نسبت نفوذ اندازه حرکت (ویسکوزیته سینماتیکی) به نفوذ گرمایی که در واقع همان نسبت ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی به ضخامت لایه مرزی گرمایی است، می باشد. عدد ناسلت نیز مبین نسبت گرمای انتقال یافته از طریق جابجایی به گرمای انتقال یافته از طریق هدایت در مرز سیستم می باشد. جهت ارزیابی میزان مقاومت اصطکاکی ایجاد شده در سیال در اثر تماس با دیواره از ضریب اصطکاک که نسبت تنش برشی به فشار دینامیکی است، استفاده شده است.

$$Re = \frac{\rho U(x)L}{\eta} \quad (۵۹-۲)$$

$$\Psi_1^* = \frac{\Psi_1 U_{ref}}{\eta L} \quad (۶۰-۲)$$

$$\beta = \theta \frac{2}{\pi} = \frac{2m}{m+1} \quad (۶۱-۲)$$

$$Pr = \frac{k}{\rho C_p} \quad (۶۲-۲)$$

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} \quad (۶۳-۲)$$

$$\langle Nu \rangle = \frac{\bar{h}_x L}{k} \quad (۶۴-۲)$$

$$C_D = \frac{\tau_w}{0.5 \rho u^2} \quad (۶۵-۲)$$

## ۲-۸- فرضیات مسئله

به منظور حل عددی جریان لایه مرزی، تعدادی فرضیات به منظور ساده سازی حل ضروری می باشد. به طور کلی می توان فرضیات اصلی در نظر گرفته شده در این پژوهش را به شرح زیر بیان نمود:

۱- جریان دوبعدی و آرام است.

۲- سیال ویسکوالاستیک و تراکم ناپذیر می باشد.

۳- از اثرات شتاب جاذبه و نیروهای حجمی صرفه نظر شده است.

۴- دما صفحه (دیواره) در دو حالت دما ثابت و شار ثابت می باشد.



### ۳- فصل سوم

#### حل عددی

### ۳-۱- مقدمه

در این فصل روش عددی به کار گرفته شده در تحقیق حاضر معرفی شده و صورت گسسته معادلات حاکم، نحوه اعمال شرایط مرزی و الگوریتم مربوط به برنامه CFD ارائه شده است. در حل عددی از نرم افزار MATLAB استفاده شده است، در این فصل معرفی این نرم افزار و همچنین توضیح چگونگی مدل سازی و حل عددی جریان لایه مرزی به تفصیل بیان می شود. دو روش مختلف، صریح و ضمنی برای مدل سازی عددی لایه مرزی جریان سیال وجود دارد. در روش های صریح، پروفیل های پایین دست به طور مستقیم از پروفیل های بالادست با به کارگیری مستقیم مدل های جبری معادلات به دست می آیند. مدل های صریح ساده هستند، اما از لحاظ عددی ناپایدار می شوند، مگر آنکه اندازه گام های بکار رفته شده به اندازه کافی کوچک باشند که در این صورت نیازمند کامپیوترهای قدرتمند و زمان زیاد، جهت حل می باشد.

یک روش ضمنی نیز یک مدل جبری از معادلات است، اما پروفیل های پایین دست می بایست به طور همزمان با معکوس کردن ماتریس یا روش های تکراری به دست آیند. زمان محاسبه برای هر گام از روش های صریح بیشتر است، اما ناپایداری عددی وجود ندارد. اندازه گام ها را می توان به هر اندازه دلخواه بزرگ انتخاب کرد، این کار تنها سبب می شود خطاهای معمول کوتاه سازی تقریب ها تغییر کند که آن هم سبب واگرایی و یا نوسانی شدن پاسخ نخواهد شد. روش هایی که معرفی شده است، روش های اختلاف محدود، روش هایی هستند که مشتقات در آن ها بر حسب نقاطی از شبکه که در یک مستطیل در اطراف نقطه مورد نظر قرار می گیرند، مدل می شوند.

### ۳-۲- معرفی نرم افزار متلب

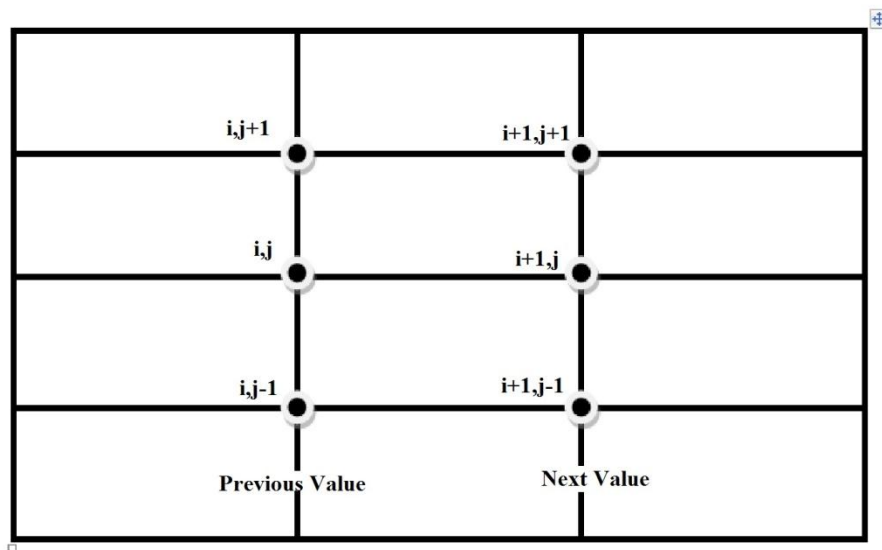
دینامیک سیالات محاسباتی به عنوان یکی از قسمت های مهم و ضروری در زمینه ابزارهای مهندسی به منظور مدل سازی فرایندهای مختلف، خود را به اثبات رسانیده و در حال حاضر، برای اهداف گوناگونی

هم در صنعت و هم در محیط‌های دانشگاهی مورد استفاده قرار می‌گیرد. مدل‌سازی پدیده‌های جریان سیالات به مهندسان و محققان این اجازه را می‌دهد که فرایندهای گوناگونی را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و درصدد رفع نواقص احتمالی آن برآیند.

متلب یک زبان سطح بالا و با محیطی جذاب می‌باشد که در ابتدا بر اساس زبان برنامه‌نویسی C توسعه داده شد. واژه متلب هم به معنی محیط محاسبات رقمی و هم به معنی خود زبان برنامه‌نویسی مربوطه است که از ترکیب دو واژه ماتریس و آزمایشگاه ایجاد شده است. این نام حاکی از رویکرد ماتریس محور برنامه است که در آن حتی اعداد منفرد هم به عنوان ماتریس در نظر گرفته می‌شوند. کار کردن با ماتریس‌ها در متلب بسیار ساده است.

### ۳-۳- گسسته سازی معادلات

برای این روش از شبکه مستطیلی نشان داده شده در شکل ۳-۱ استفاده شده است. زیرنویس‌ها به صورت مناسب اختیار شده‌اند:  $u_{i,j}$  به معنای سرعت  $u$  در نقطه  $(i, j)$  شبکه است که در موقعیت  $(x, y) = [(i-1)\Delta x, (j-1)\Delta y]$  قرار گرفته است. پس درواقع  $(i, j) = (1, 1)$  مبدأ  $(x, y) = (0, 0)$  را نشان می‌دهد. لزومی ندارد که اندازه گام‌ها  $\Delta x$  و  $\Delta y$  باهم برابر باشند. سرعت عمودی  $v_{i,j}$  و (بعدا) دما  $T_{i,j}$  را نیز به همین ترتیب نام‌گذاری خواهند شد. همه مقادیر در  $i$  (گام قبلی) معلوم فرض شده‌اند و از این مقادیر استفاده خواهد شد تا به سمت پایین دست حرکت کرده و مقادیر گام بعدی در  $(j+1)$  محاسبه خواهد شد. فرض شده است اندازه شبکه اصلی  $I \times J$  باشد که  $i = I$  خروجی،  $j = J$  جریان آزاد،  $i = 1$  ورودی و  $j = 1$  دیوار را نشان می‌دهند.



۱-۳ شبکه اختلاف محدود برای یک لایه مرزی دوبعدی

در یک مدل ضمنی، برای تقریب زدن مشتقات، از جمله‌های بیشتری از گام بعدی استفاده خواهد شد، در نتیجه می‌بایست برای به دست آوردن مقادیر در گام بعدی، یک دستگاه معادلات جبری را حل کرد. مشتقات در این مدل به صورت معادلات (۱-۳) تا (۳-۳) بیان می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(i, j+1) - u(i, j-1)}{2dy} \quad (۱-۳)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(i+1, j) - u(i, j)}{dx} \quad (۲-۳)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(i+1, j+1) - 2u(i+1, j) + u(i+1, j-1)}{dy^2} \quad (۳-۳)$$

هنگامی که این روابط در معادلات (۲-۴) و (۲-۱۵) جایگزین شوند، برای معادله پیوستگی و مومنوم در جریان سیال نیوتنی با وجود جمله گرادیان فشار روابط (۳-۴) و (۳-۵) را به ترتیب خواهیم

داشت.

$$v(i+1, j) = v(i+1, j-1) - \frac{\Delta y}{2\Delta x} [u(i+1, j) - u(i, j) + u(i+1, j-1) - u(i, j-1)] \quad (4-3)$$

$$M'_1 u(i+1, j+1) + M'_2 u(i+1, j) + M'_3 u(i+1, j-1) = u(i, j) - \beta' (u(i, j+1) - u(i, j-1)) + \frac{U^2(i+1) - U^2(i)}{2u(i, j)} \quad (5-3)$$

$$\beta' = \frac{v(i, j) dx}{2u(i, j) dy} \quad (6-3)$$

$$\lambda' = \frac{\eta dx}{u(i, j) dy^2} \quad (7-3)$$

$$M'_1 = -\lambda' \quad (8-3)$$

$$M'_2 = 1 + \lambda' \quad (9-3)$$

$$M'_3 = -\lambda' \quad (10-3)$$

مزیت این روش در این است که نتایج بدون هیچ گونه شرطی پایدار می باشند (بدون توجه به اندازه های  $dx$  و  $dy$ ).  $dy$  را می بایست به اندازه ای انتخاب کنیم که حداقل بیست نقطه در درون لایه مرزی قرار گیرند و می بایست به اندازه ای کوچک باشد که تغییر در از یک گام به گام بعدی کوچک باشد.

روش تفاضل محدود ذکر شده در فوق را می توان به سادگی برای محاسبات دما به صورت رابطه (۱۱-۳) نیز بسط داد. در واقع با به کارگیری یک مدل اختلاف مرکزی برای جمله هدایت، یک مدل ضمنی مشابه معادله (۵-۳) به وجود آورد.



$$-\gamma' T(i+1, j+1) + (1+2\gamma') T(i+1, j) - \gamma' T(i+1, j-1) = T(i, j) - \beta' (T(i, j+1) - T(i, j-1)) \quad (11-3)$$

$$\gamma' = \frac{k \Delta x}{\rho C_p u(i, j) \Delta y^2} \quad (12-3)$$

در معادله (۱۱-۳)،  $\beta'$  طبق رابطه (۶-۳) محاسبه می‌گردد.

طبق معادلات (۱۶-۲) و (۳۴-۲)، جمله‌های موجود در معادله مومنتوم لایه‌مرزی سیال ویسکوالاستیک بیشتر از جریان سیال نیوتنی می‌باشد که هرکدام از جمله‌ها نیاز به گسسته سازی بر اساس متد تفاضل محدود دارند. برای این منظور از روابط زیر استفاده شده است [۴۵].

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{dx dy^2} (u(i+1, j+1) - 2u(i+1, j) + u(i+1, j-1) - u(i, j+1) + 2u(i, j) - u(i, j-1)) \quad (13-3)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{1}{2dy^3} (u(i, j+2) - 2u(i, j+1) + 2u(i, j-1) + u(i, j-2)) \quad (14-3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{1}{dx dy} (u(i+1, j+1) - u(i+1, j) - u(i, j+1) + u(i, j)) \quad (15-3)$$

بنابراین معادله مومنتوم طبق روابط فوق، به صورت رابطه (۱۶-۳) خواهد شد.

$$M_1 u(i+1, j+1) + M_2 u(i+1, j) + M_3 u(i+1, j-1) = u(i, j) - \beta' (u(i, j+1) - u(i, j-1)) + \frac{U^2(i+1) - U^2(i)}{2u(i, j)} - N_1 - N_2 - N_3 + N_4 \quad (16-3)$$

$$M_1 = -\lambda' + \frac{k_0}{dy^2} + \frac{k_0}{u(i, j) dx dy} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (17-3)$$

$$M_2 = 1 + 2\lambda' - 2 \frac{k_0}{dy^2} - \frac{k_0}{u(i, j)dy} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k_0}{u(i, j)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (18-3)$$

$$M_3 = -\lambda' + \frac{k_0}{dy^2} \quad (19-3)$$

$$k_0 = \frac{\Psi_1}{2\rho} \quad (20-3)$$

$$N_1 = \frac{k_0}{dy^2} (-u(i, j+1) + 2u(i, j) - u(i, j-1)) \quad (21-3)$$

$$N_2 = \frac{k_0 y(i, j) dx}{2u(i, j) dy^3} (-u(i, j+2) + 2u(i, j+1) - 2u(i, j-1) - u(i, j-2)) \quad (22-3)$$

$$N_3 = \frac{k_0}{u(i, j) dy} \frac{\partial u}{\partial y} (u(i, j) - u(i, j+1)) \quad (23-3)$$

$$N_4 = \frac{k_0}{dx} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (24-3)$$

معادله انرژی ، به صورت رابطه (۲۵-۳) می باشد.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (25-3)$$

$$-\gamma' T(i+1, j+1) + (1+2\gamma') T(i+1, j) - \gamma' T(i+1, j-1) = \\ T(i, j) - \beta' (T(i, j+1) - T(i, j-1)) \quad (26-3)$$

در روابط فوق  $\beta'$  و  $\gamma'$  به ترتیب طبق معادلات (۶-۳) و (۱۲-۳) محاسبه می شوند.

در روش خطی سازی ضمنی، مقدار مجهول یک متغیر در هر سلول محاسباتی با استفاده از مقادیر معلوم و مجهول همین متغیر در سلول های همسایه محاسبه می گردد. بنابراین هر متغیر مجهول در بیشتر از یک معادله از دستگاه معادلات ظاهر می گردد و این معادلات بایستی به صورت هم زمان حل شوند تا مقادیر مجهولات به دست آیند. خطی سازی معادلات به این روش منجر به تشکیل یک دستگاه

معادلات خطی با N معادله برای هر سلول می گردد که در آن N بیانگر تعداد معادلات کوپل<sup>۱</sup> شده می باشد. برای حل دستگاه معادلات ایجادشده از روش ماتریس معکوس در این مطالعه استفاده شده است.

### ۳-۴- حل عددی در حالت وابستگی خواص سیال به دما (TD)<sup>۲</sup>

در این تحقیق معادله انرژی به همراه معادلات بقا، برخی خواص سیال از قبیل لزجت، ضریب رسانش و ظرفیت حرارتی ویژه تابعی از دمای نقطه‌ای سیال در نظر گرفته شده است [۴۶]. زیرا با توجه به اینکه گروه غالبی از سیالات ویسکوالاستیک، مذاب‌های پلیمری می‌باشند و در این حالت تفاوت دمای زیادی مشاهده می‌شود و از طرفی با توجه به حساسیت برخی خواص مواد ویسکوالاستیک به دما، در حل معادله انرژی این فرضیه ضروری به نظر می‌رسد. بدین منظور از توابع پیشنهادی توسط مارک [۴۷] به شرح زیر استفاده شده است.

$$\eta(T) = \eta a(T) \quad (۲۷-۳)$$

$$a(T) = \exp\left(\alpha \left(\frac{1}{T + 273.15} - \frac{1}{T_{in} + 273.15}\right)\right) \quad (۲۸-۳)$$

$$k(T) = k(k^* + k_s^* T) \quad (۲۹-۳)$$

$$C_p(T) = C_{p0}(C_{p0}^* + C_{ps}^* T) \quad (۳۰-۳)$$

$$k_0(T) = k_0 \frac{T_{in}}{(\alpha(T))^2 T} \quad (۳۱-۳)$$

با این فرضیات، کمیات مذکور بعد از هر مرحله با دماهای جدید به دست آمده، دوباره مورد محاسبه قرار می‌گیرند. همان‌طور که گفته شد در این تحقیق شرایط دمای ثابت و شار ثابت به عنوان شرایط مرزی

<sup>۱</sup> Coupled

<sup>۲</sup> Temperature Depended

حرارتی در نظر گرفته شده است. در این حالت سیال در ابتدای صفحه با دمای یکنواخت وارد صفحه شده و بعد از تماس با صفحه و تشکیل لایه مرزی، رفته رفته دمای آن به دمای صفحه نزدیک می شود. مقادیر فرض شده کمیت ها در این تحقیق به صورت زیر می باشد [۴۶].

$$C_{p0} = 0.4$$

$$C_{p0}^* = 1.2122$$

$$C_{ps}^* = -0.00112$$

$$k^* = 0.08$$

$$k_s^* = 0.0018$$

### ۳-۵- شرایط مرزی حاکم بر مسئله

شرایط مرزی اعمال شده بر روی هر کدام از صفحات ناحیه محاسباتی به شرح زیر می باشد:

شرط مرزی روی صفحه (Plate)

بروی صفحه تخت از شرط عدم لغزش استفاده شده است و همچنین دما صفحه ثابت در نظر

گرفته شده است.

دما ثابت

$$u = 0; T = T_w; v = 0 \quad (32-3)$$

شار ثابت

$$u = 0; q'' = -k \frac{dT}{dy}; v = 0 \quad 33-3$$

شرط مرزی در صفحه ورودی (Inlet)

$$u = U(x) = U_{\infty} (x/L)^m; T = T_{\infty}; v = 0 \quad (34-3)$$

شرط مرزی در صفحه فوقانی (Top)

در صفحه فوقانی سرعت برابر با سرعت در ورودی می‌باشد، همچنین گرادیان فشار و تنش بر روی آن صفر در نظر گرفته شده است. دلایل اعمال چنین شرایط مرزی روی صفحه بالایی را می‌توان این گونه بیان کرد که هدف مدل کردن جریانی با مرزهای بینهایت می‌باشد و این شرایط باعث کاهش تأثیرگذاری مرز بالایی روی جریان و همچنین جلوگیری از تشکیل لایه مرزی روی صفحه بالایی می‌شود.

$$y \rightarrow \infty, u \rightarrow u = U(x) = U_{\infty} (x/L)^m, T = T_{\infty}; \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3-35)$$

## ۴- فصل چهارم

### بررسی نتایج

#### ۴-۱- مقدمه

در ابتدای این فصل، شرایط و الگوی همگرایی معادلات حاکم بر جریان بررسی می‌شود، سپس استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی بررسی شده و صحت نتایج حاصل از حل عددی ارزیابی می‌گردد. بر اساس اطلاعات نگارنده، جریان لایه مرزی باوجود ترم گرادیان فشار در جریان سیال ویسکوالاستیک تاکنون با هیچ کدام از روش‌های عددی و آزمایشگاهی موردبررسی قرار نگرفته است. لذا جهت بررسی صحت نتایج، به مقایسه پاسخ‌های حاصل از حل عددی با نتایج تحلیلی سیال نیوتنی، یعنی حل بلازیوس و همچنین حل فالکنر-اسکن نیوتنی اکتفا شده است. در ادامه اثر پارامترهای مختلفی نظیر عدد رینولدز، تغییرات گرادیان فشار، ضریب اختلاف تنش نرمال اول، عدد پرانتل و عدد ناسلت محلی و متوسط بر مشخصه‌های لایه مرزی موردبررسی و ارزیابی قرار می‌گیرد.

#### ۴-۲- شرایط و الگوی همگرایی

در این بخش، شرایط و الگوی همگرایی معادلات حاکم بر جریان بررسی می‌شود. در تحقیق حاضر باقیمانده معادلات پیوستگی، مومنتوم و معادله انرژی به شکل زیر تعریف می‌گردد.

$$R_{M,i} = \max \left\{ \left| \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} \right| \right\} \quad (۱-۴)$$

$$R_C = \max \left\{ \left| \frac{P^{n+1} - P^n}{C^2 \Delta t} \right| \right\} \quad (۲-۴)$$

$$R_T = \max \left\{ \left| \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} \right| \right\} \quad (۳-۴)$$

در روابط فوق  $R_{M,i}$  باقیمانده معادله مومنتوم در جهت  $i$ ،  $R_C$  باقیمانده معادله پیوستگی و  $R_T$  باقیمانده معادله انرژی می باشد. همچنین بالانویس هر پارامتر (مقادیر  $n$  و  $n+1$ ) نیز معرف شماره گام

زمانی است.

مسلم است که پس از گذشت تعداد گام محاسباتی کافی، مقادیر باقیمانده معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی به سمت مقدار ثابت بسیار کوچکی میل می کند. پس از ثابت شدن باقیمانده‌ها در مقادیر گام های زمانی بسیار بزرگ، مقدار حداکثر باقیمانده معادلات حاکم از مرتبه  $10^{-7}$  است.

#### ۳-۴- بررسی استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی

استقلال و عدم وابستگی حل به شبکه محاسباتی جهت مطالعه جریان لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک، در این قسمت مورد بررسی قرار می گیرد. به منظور تعیین میزان حساسیت و همچنین دستیابی به شبکه‌ای مطلوب برای حل، پنج شبکه محاسباتی به کار گرفته شده و نتایج حاصل از حل هر یک از آن‌ها با یکدیگر مقایسه شده است. جهت مدل سازی جریان سیال نیوتنی روی صفحه تخت، کافی است که در کد CFD تهیه شده، مقادیر  $\Psi_1^*$  برابر صفر لحاظ شوند. نتایج به دست آمده برای ضریب درگ، به همراه مشخصات شبکه محاسباتی، مقایسه آن‌ها و بررسی صحت نتایج حاصل از حل عددی و خطای محاسباتی در

جدول ۴-۱ آورده شده است. ضریب درگ از رابطه  $C_D = \frac{F_D}{0.5\rho U^2 A}$  قابل دستیابی است.



جدول ۴-۱ مقایسه ضریب درگ در شبکه‌های محاسباتی

نام شبکه محاسباتی	تعداد شبکه‌های محاسباتی	افزایش تعداد سلول نسبت به حالت قبل	ضریب درگ	میزان تغییرات ضریب درگ (خطا/%)
M1	$4 \times 10^4$	۰	۰/۰۷۷۹	۰
M2	$1/6 \times 10^5$	$1/2 \times 10^4$	۰/۰۷۹۲	۱/۶٪
M3	$6/4 \times 10^5$	$4/8 \times 10^4$	۰/۰۷۹۷	۱/۶۳٪
M4	$1 \times 10^6$	$3/6 \times 10^4$	۰/۰۷۹۸۶	۱۲/۰٪
M5	$1/44 \times 10^6$	$4/4 \times 10^4$	۰/۰۷۹۹۳	۸/۰٪

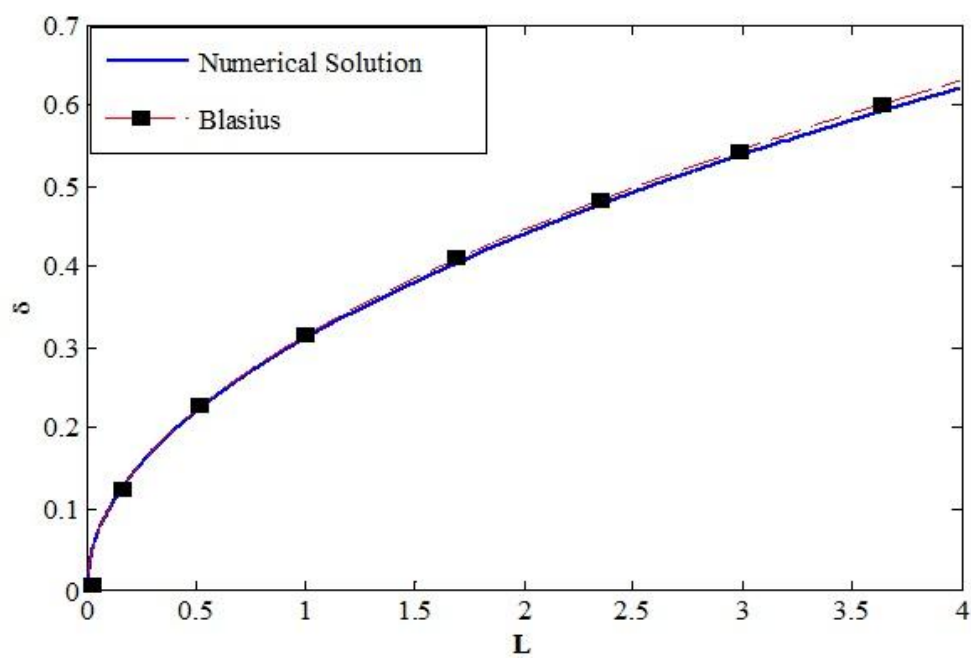
بدیهی است که با افزایش تعداد سلول‌ها در شبکه محاسباتی، میزان دقت در پاسخ‌های روش عددی بیشتر شده و مقدار خطای آن‌ها نسبت به حل تحلیلی کاهش می‌یابد. مقادیر جدول فوق نیز مبین همین موضوع است؛ اما باید به این موضوع نیز توجه داشت که افزایش تعداد سلول‌ها در شبکه محاسباتی، منجر به بالا رفتن شدید زمان و حجم محاسبات خواهد شد. در این تحقیق با توجه به قابل قبول بودن دقت پاسخ در هر پنج شبکه محاسباتی، شبکه M4، مبنای محاسبات آتی قرار گرفته است.

#### ۴-۴- بررسی صحت نتایج حاصل از حل عددی

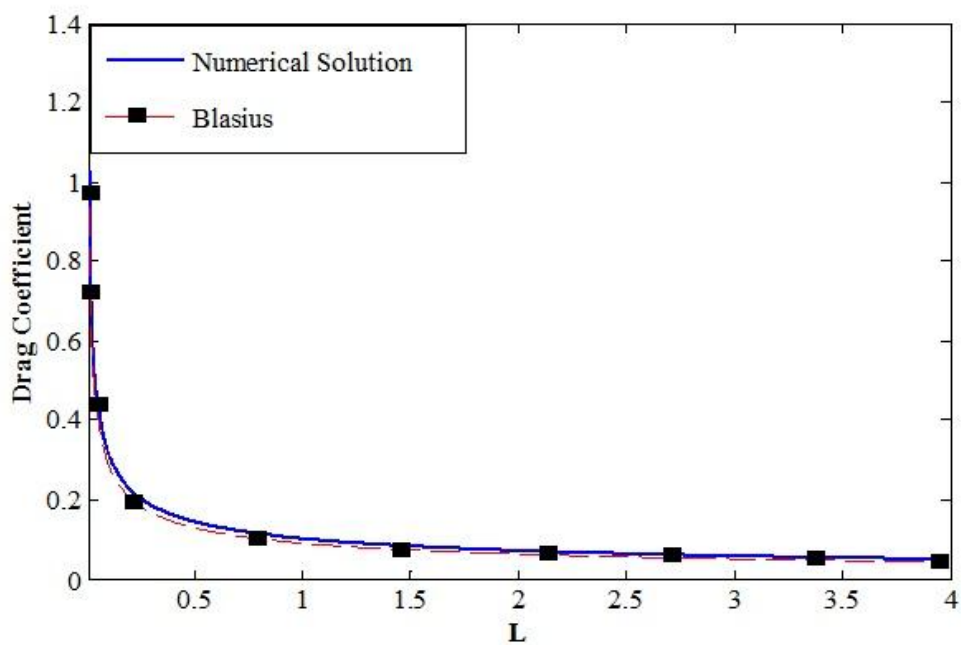
جهت اطمینان بیشتر از صحت نتایج، بعضی از نتایج به دست آمده از حل عددی با نتایج تحلیلی بلازیوس و فالکنر-اسکن در جریان سیال نیوتنی مقایسه می‌شود. جهت مدل سازی جریان سیال نیوتنی روی صفحه تخت، کافی است که در کد CFD تهیه شده، مقادیر  $\Psi_1^*$  برابر صفر لحاظ شده‌اند. پارامتری که جهت

اطمینان از صحت نتایج، استفاده خواهد شد، ضخامت لایه مرزی دینامیکی و حرارتی می‌باشد. ضخامت لایه مرزی دینامیکی که با  $\delta$  نمایش داده می‌شود، عبارت است از مکان هندسی نقاطی که در آن‌ها سرعت سیال به ۹۹ درصد مقدار سرعت جریان آزاد می‌رسد. نمودار پاسخ بلازیوس از طریق رابطه معروف  $\delta = 4.98 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$  که از حل بلازیوس به دست می‌آید، رسم شده است. نمودار پاسخ فالتکر-اسکن نیز از طریق رابطه (۱-۳۰) وقتی  $\beta = 0.3$  می‌باشد، به دست آمده است. نمودار روش عددی نیز از طریق استخراج اطلاعات سرعت در مقاطع متعدد از صفحه و سپس یافتن نقطه‌ای در هر مقطع است که در آن سرعت با ۹۹ درصد مقدار سرعت جریان آزاد برابر می‌شود. با به هم پیوستن نقاط مذکور نمودار لایه مرزی، حاصل از حل عددی رسم خواهد شد.

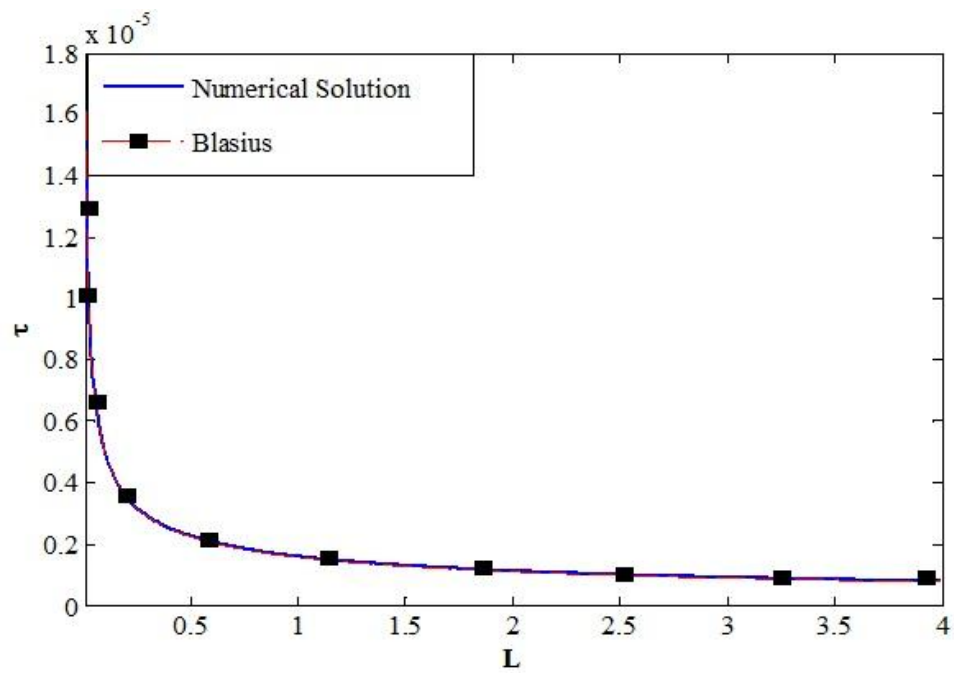
دو پارامتر مهم دیگری که جهت حصول اطمینان از صحت پاسخ‌های روش عددی به آن‌ها پرداخته خواهد شد، عبارت‌اند از ضریب درگ و تنش برشی بر روی صفحه. در شکل مشهود است که حل عددی با حل تحلیل بلازیوس و فالتکر-اسکن هماهنگی قابل قبولی یکدیگر دارند. محاسبه تنش برشی نیز با موجود بودن اطلاعات سرعت حاصل از حل عددی، از طریق رابطه  $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  میسر می‌شود. برای محاسبه ضخامت لایه مرزی گرمایی از رابطه  $\delta_T = \delta \text{Pr}^{-0.4}$  [۸] استفاده می‌شود.



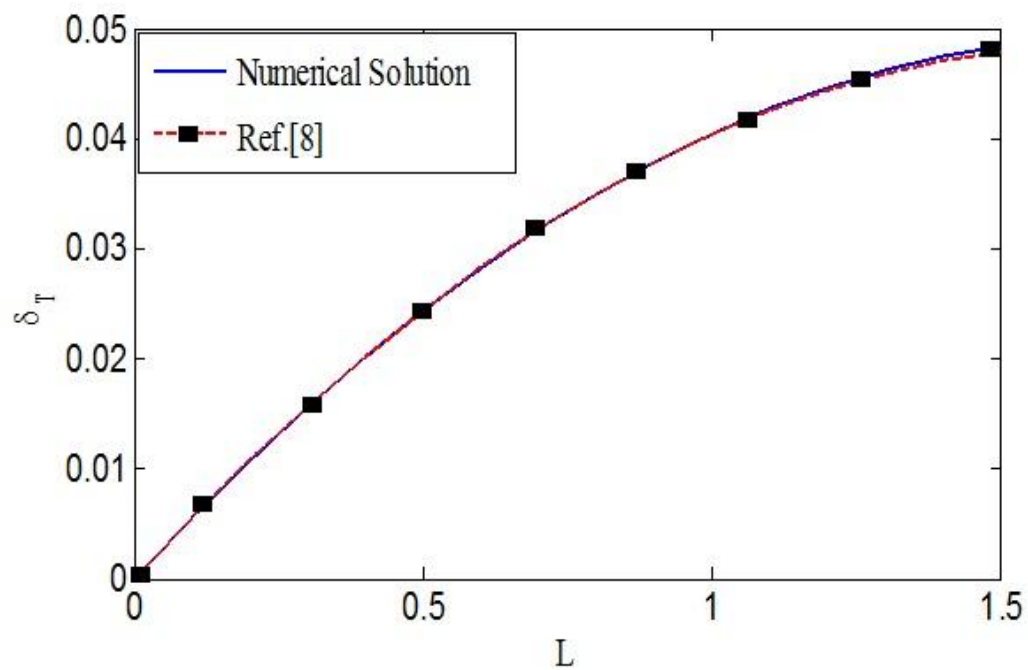
شکل ۴-۱ مقایسه پروفیل لایه مرزی در حل عددی و بلازیوس [۸]



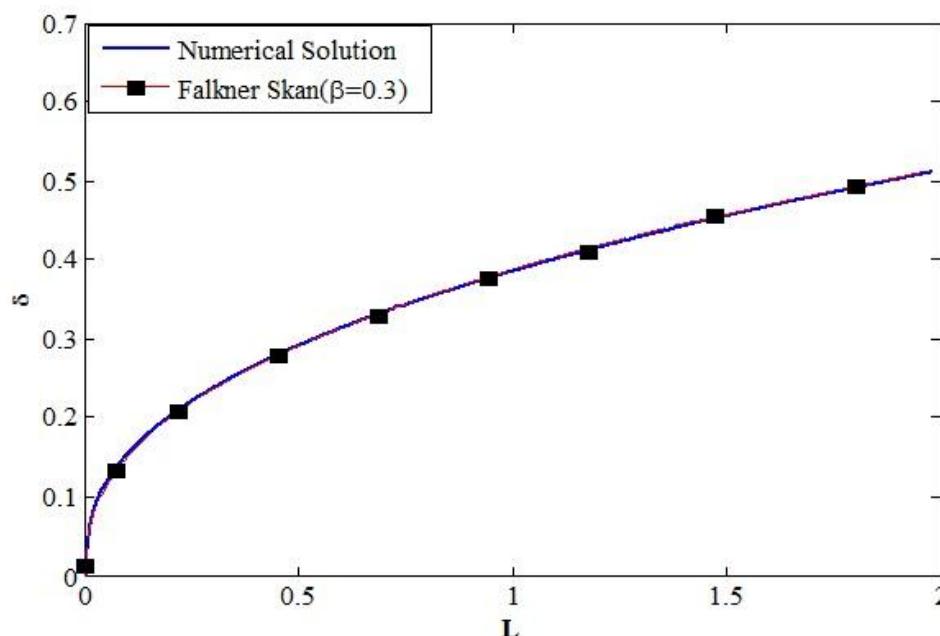
شکل ۴-۲ مقایسه ضریب درگ در حل عددی و بلازیوس [۸]



شکل ۳-۴ مقایسه تنش برشی در حل عددی و حل بلازیوس [۸]



شکل ۴-۴ مقایسه لایه مرزی گرمایی در حل عددی و کتاب وایت مرجع [۸]



شکل ۴-۵ مقایسه لایه مرزی حل عددی و فالتکر-اسکن در مرجع [۷]

## ۴-۵- لایه مرزی هیدرودینامیکی

### ۴-۵-۱- بررسی پارامترهای لایه مرزی در جریان سیال نیوتنی

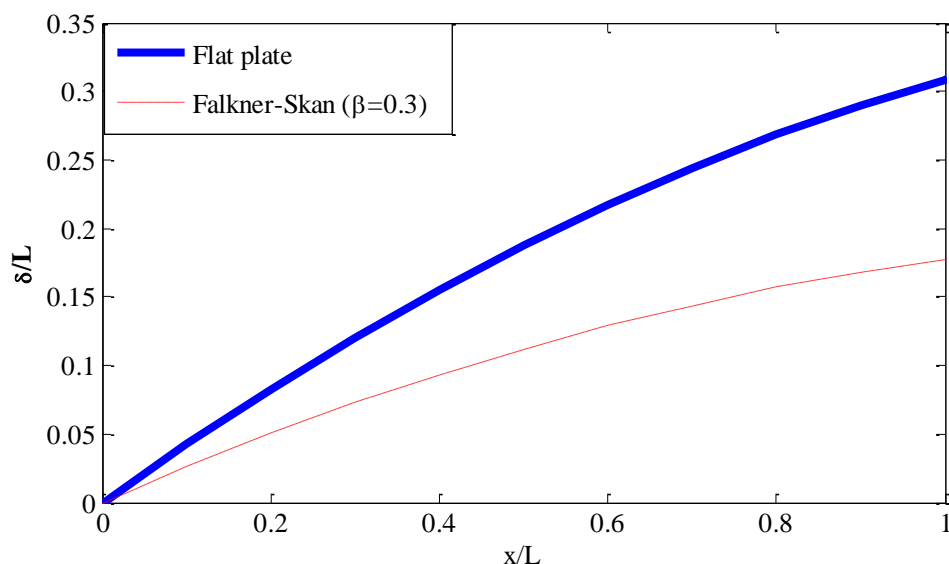
در این بخش به بررسی چگونگی تأثیرگذاری پارامترهای مختلف، همچون اختلاف تنش نرمال اول، عدد رینولدز و تغییرات گرادیان فشار، بر مشخصه‌های لایه مرزی نیوتنی پرداخته می‌شود. در بررسی تأثیرگذاری هر یک از این پارامترها، سایر پارامترها ثابت نگه‌داشته شده است.

شکل ۴-۶ مقایسه ضخامت لایه مرزی روی صفحه تخت (فاقد ترم گرادیان فشار) و لایه مرزی در مسئله فالتکر-اسکن (وجود ترم گرادیان فشار) را نشان می‌دهد. فاکتور ترم گرادیان فشار ( $\beta > 0$ ) برابر با  $\frac{0.3}{Re=1000}$  و  $\Psi_1^* = 0$  در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، وجود ترم گرادیان فشار مساعد موجب کاهش ضخامت لایه مرزی می‌شود. در واقع در حالت گرادیان فشار مساعد، فشار نقاط

در طول صفحه کاهش می‌یابد که افزایش سرعت در راستای صفحه را به دنبال دارد که این خود دلیلی بر

این موضوع است که سرعت سیال در راستای عمود بر جریان، زوتر به سرعت جریان آزاد برسد ( $\frac{\partial u}{\partial y}$ )

بزرگ‌تر)، بنابراین منطقی است که ضخامت لایه مرزی نیز نسبت به حالتی که ترم گرادیان فشار وجود ندارد، کمتر باشد.



شکل ۴-۶ مقایسه لایه مرزی صفحه تخت و فالکنر-اسکن در مرجع [۷]

#### ۴-۵-۱-۱- بررسی تغییرات عدد رینولدز بر مشخصه‌های لایه مرزی در سیال نیوتنی

در این قسمت، به بررسی تأثیر تغییرات عدد رینولدز بر ضخامت لایه مرزی، ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتوم در  $\beta$  ثابت و برابر  $0/3$  پرداخته شده است. در این تحقیق، علاوه بر ضخامت لایه مرزی، ضخامت مومنتوم و ضخامت جابجایی نیز مورد ارزیابی قرار گرفته است. ضخامت جابجایی فاصله‌ای است که باید مرز جامد در یک جریان بدون اصطکاک را تغییر داد تا همان کاهش دبی جرمی را در حالتیکه مرز جامد در لایه مرزی بود، دهد. شاخصی متناسب با دبی جریان از دست رفته در اثر وجود لایه مرزی است و از

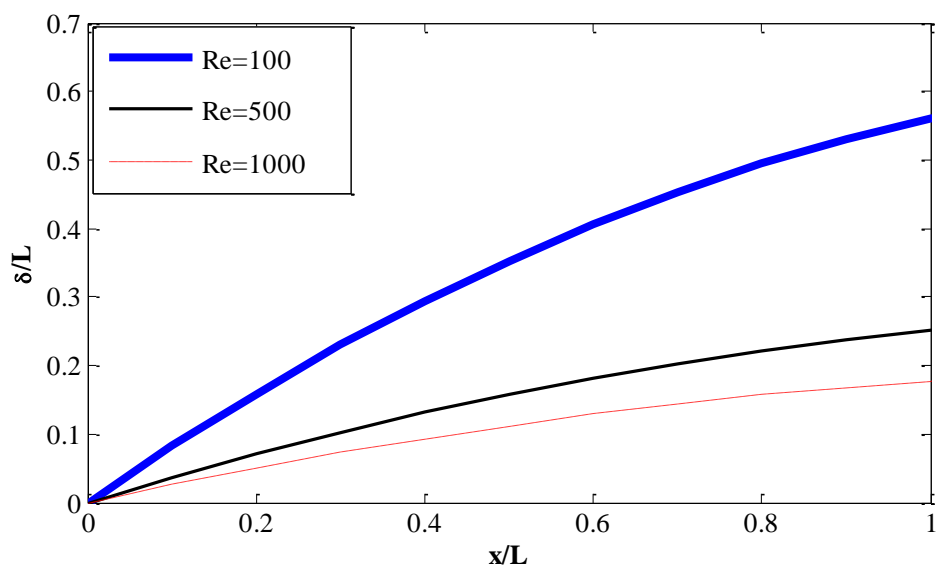
لحاظ فیزیکی فاصله‌ای است که جریان غیر لزج خارجی در اثر حضور لایه مرزی انحراف پیدا می‌کند. ضخامت جابجایی از رابطه (۴-۴) به دست می‌آید.

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (۴-۴)$$

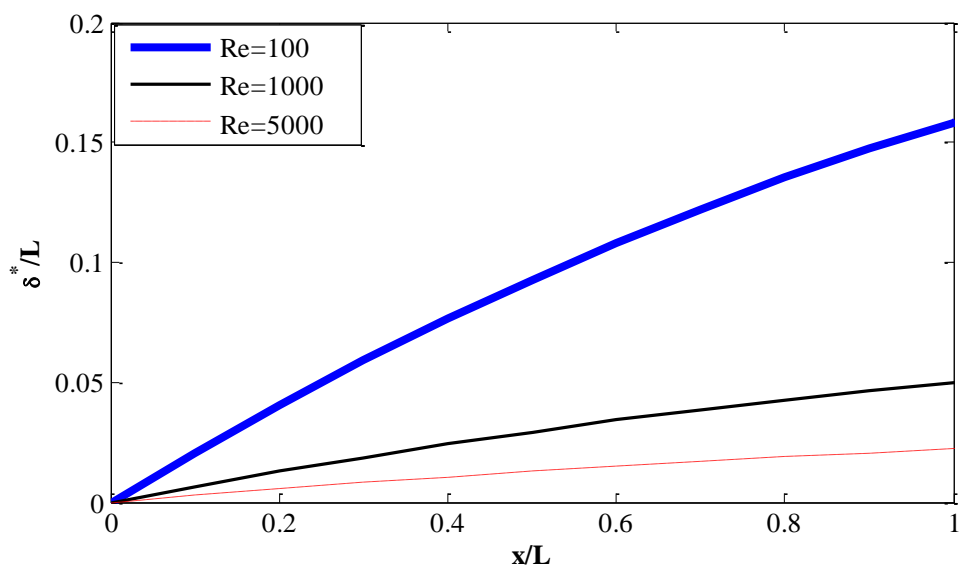
ضخامت مومنتوم نیز به عنوان ضخامتی از لایه سیال با سرعت تعریف می‌گردد که به ازای آن شار مومنتوم برابر با شار مومنتوم در لایه مرزی است. ضخامت مومنتوم طبق رابطه (۵-۴) محاسبه می‌گردد.

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (۵-۴)$$

در نمودارهای این بخش تغییرات ضخامت لایه مرزی، ضخامت مومنتوم و ضخامت جابجایی با تغییرات عدد رینولدز جالب توجه است. عدد رینولدز نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت می‌باشد، با افزایش رینولدز تاثیر نیروی اینرسی نسبت به نیروی ویسکوز بیشتر می‌شود بنابراین با افزایش عدد رینولدز سرعت جریان افزایش می‌یابد و جریان سیال زوتر به سرعت جریان آزاد می‌رسد و ضخامت لایه مرزی نیز مقدار کمتری را خواهد داشت. این مهم، به خوبی در شکل ۷-۴ تا شکل ۹-۴ مشاهده می‌شود. با دقت در شکل‌ها دیده می‌شود که در اعداد رینولدز بالا، خط جریان خارج از لایه مرزی تقریباً موازی با صفحه است. در واقع حضور صفحه اثر خیلی کمی روی خطوط جریان خارج از لایه مرزی دارد.

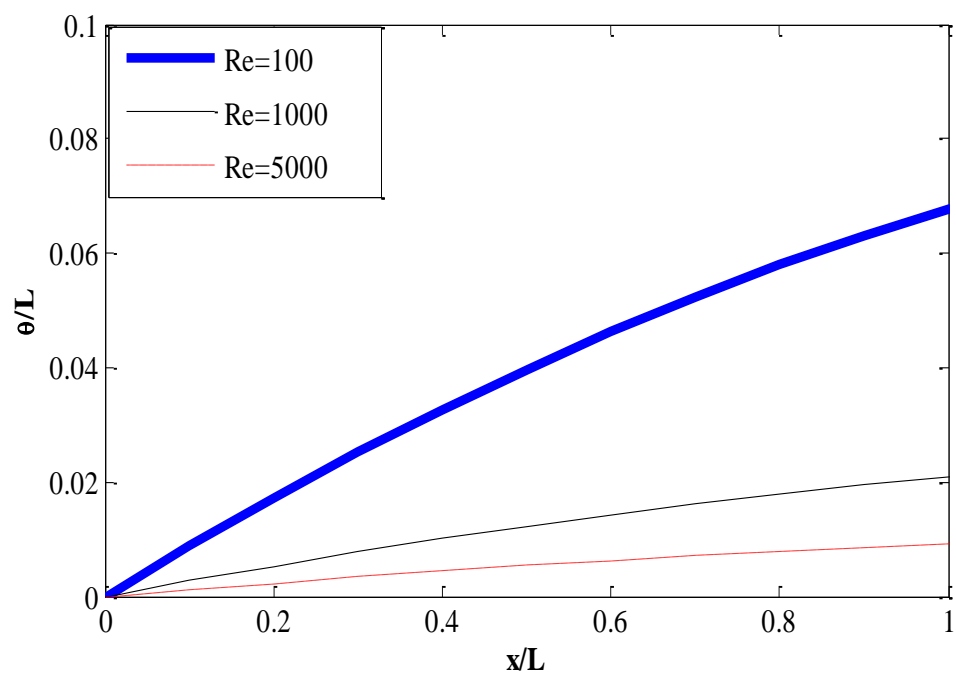


شکل ۴-۷ مقایسه لایه مرزی فالکنر-اسکن در اعداد رینولدز مختلف



شکل ۴-۸ مقایسه ضخامت جابجایی فالکنر-اسکن در اعداد رینولدز مختلف

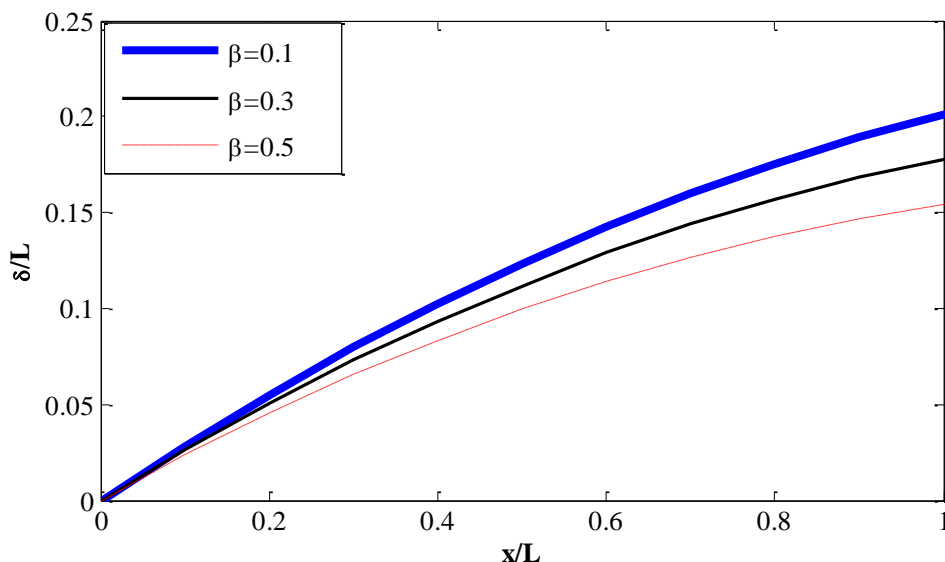




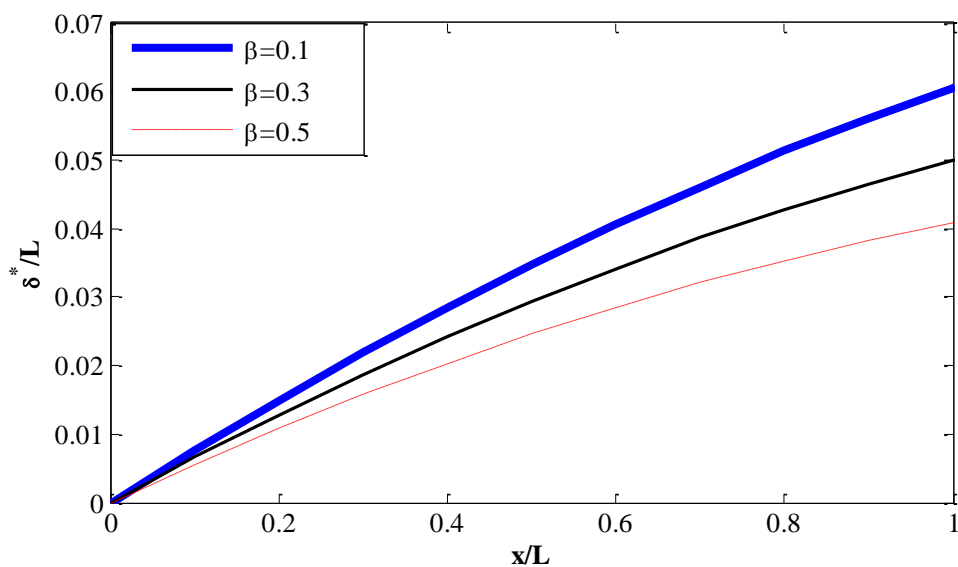
شکل ۹-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم فالکنر-اسکن در اعداد رینولدز مختلف

#### ۴-۵-۱-۲- بررسی تغییرات گرادیان فشار بر مشخصه‌های لایه مرزی در سیال نیوتنی

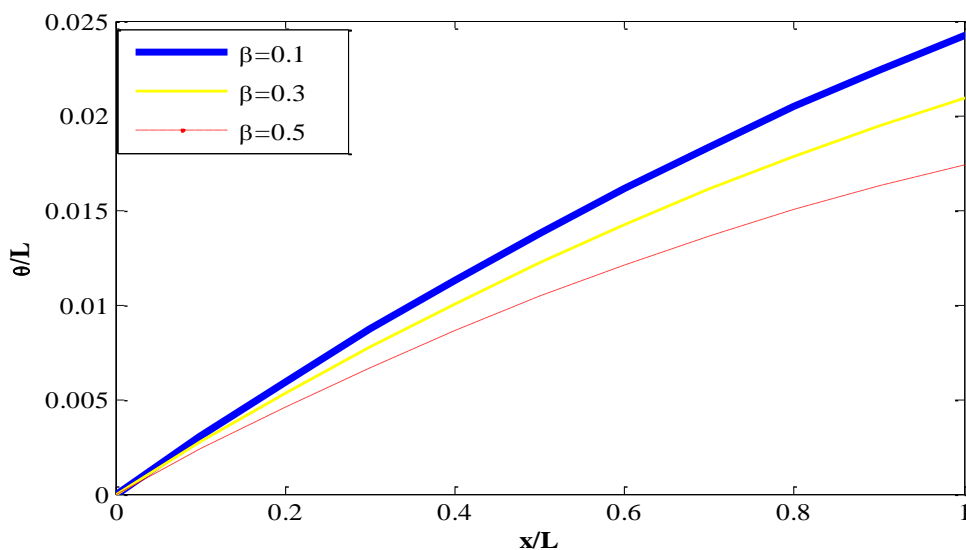
در این بخش، تأثیر تغییرات گرادیان فشار ( $\beta$ ) بر ضخامت لایه مرزی، ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتوم مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌گیرد. باید توجه شود،  $\Psi_1^*$  در همه شکل‌های این بخش ثابت و برابر صفر (سیال نیوتنی) در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در شکل ۴-۱۰ تا شکل ۴-۱۲ مشاهده می‌شوند، در گرادیان فشار مساعد ( $\beta > 0$ )، با افزایش  $\beta$ ،  $\frac{\partial u}{\partial x}$  افزایش می‌یابد، این بدین معناست که سرعت نقاط در طول صفحه افزایش می‌یابد بنابراین افزایش  $\beta$ ، کاهش ضخامت لایه مرزی، ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتوم را به دنبال دارد.



شکل ۴-۱۰ مقایسه لایه مرزی فالکنر-اسکن در گرادیان فشارهای مختلف



شکل ۴-۱۱ مقایسه ضخامت جابجایی فالکنر-اسکن در گرادیان فشارهای مختلف

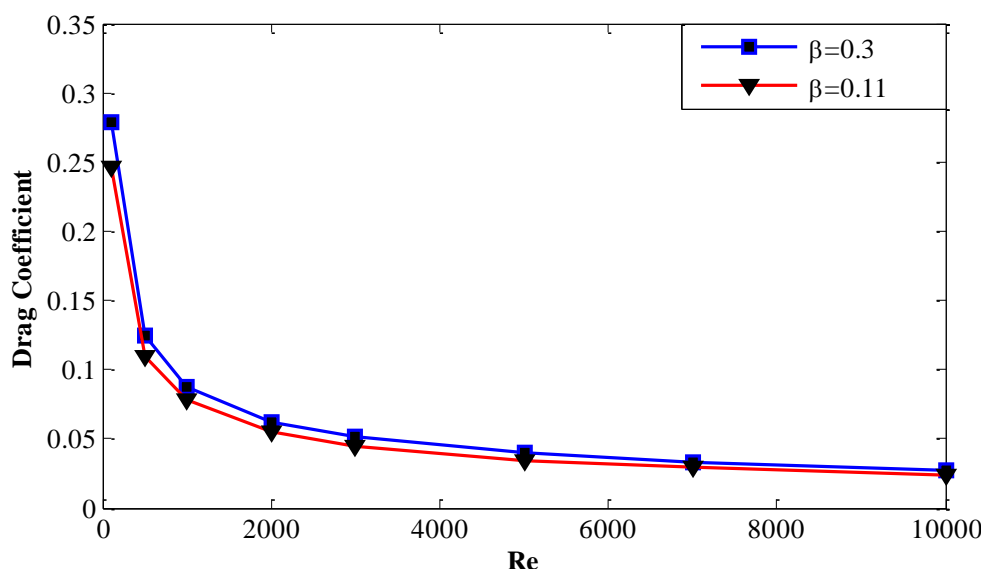


شکل ۴-۱۲ مقایسه ضخامت مومنتوم فالکنر-اسکن در گرادیان فشارهای مختلف

در شکل ۴-۱۳ تغییرات ضریب درگ برحسب عدد رینولدز در گرادیان فشارهای مختلف

گزارش شده است. در یک  $\beta$  ثابت، با افزایش عدد رینولدز،  $\frac{\partial u}{\partial y}$  افزایش می‌یابد بنابراین تنش برشی در

با افزایش رینولدز کاهش می‌یابد پس ضریب درگ نیز کاهش می‌یابد، همچنین هرچه ترم  $y = 0$  گرادیان فشار ( $\beta$ ) بزرگ‌تر باشد، ضریب درگ مقدار بیشتری را خواهد داشت.

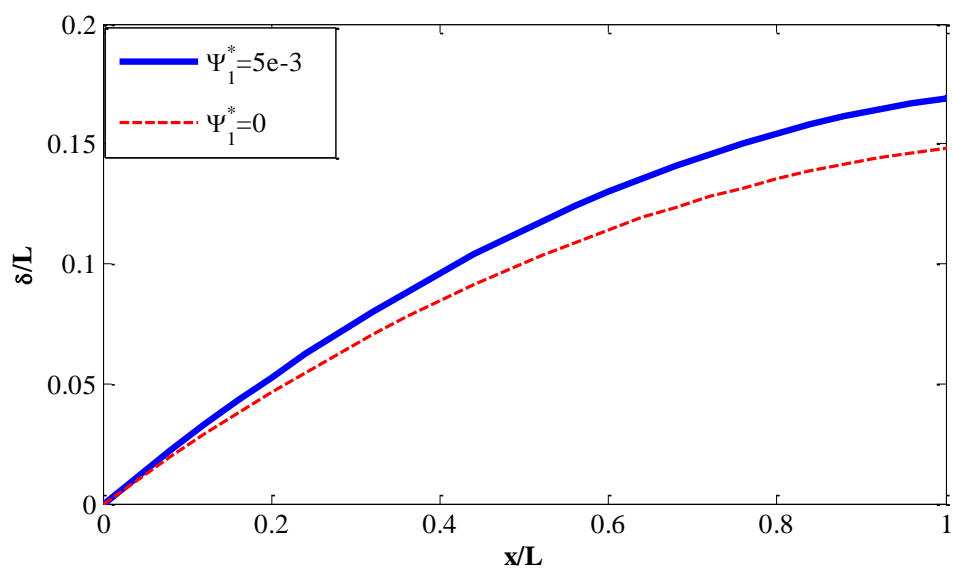


شکل ۴-۱۳ مقایسه تغییرات ضریب درگ برحسب عدد رینولدز در گرادیان فشارهای مختلف

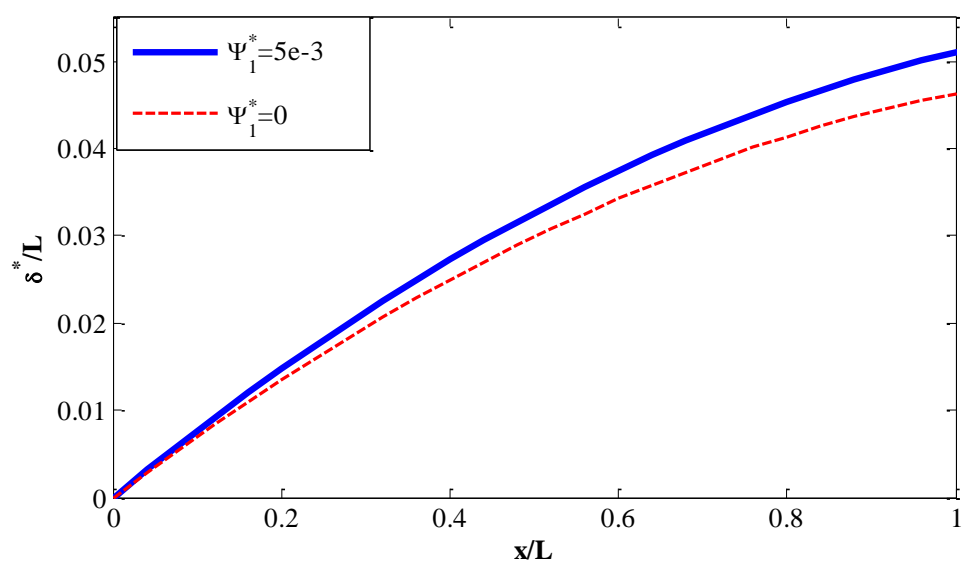
#### ۴-۵-۲- مقایسه لایه مرزی در سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک

در این بخش، پارامترهای گوناگون لایه مرزی بین سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک با استفاده از روش TD، با یکدیگر مقایسه خواهند شد. جهت مقایسه بین دو سیال از جریان سیال در گرادیان فشار برابر  $\beta = 0.3$ ، عدد پرانتل  $Pr = 100$ ، دمای دیوار ثابت و برابر ۱۰۰ درجه سانتی گراد و دمای سیال ورودی ۵ درجه سانتی گراد (حالت گرمایش) استفاده شده است. تفاوت دو سیال در ضریب اختلاف تنش نرمال اول آن‌ها می‌باشد. در سیال نیوتنی  $\Psi_1^*$  برابر با صفر در نظر گرفته شده است و در سیال ویسکوالاستیک برابر  $5e-3$  لحاظ شده است. در شکل ۴-۱۴ ضخامت لایه مرزی در دو حالت جریان سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک و در شکل ۴-۱۵ و شکل ۴-۱۶ به ترتیب ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتوم

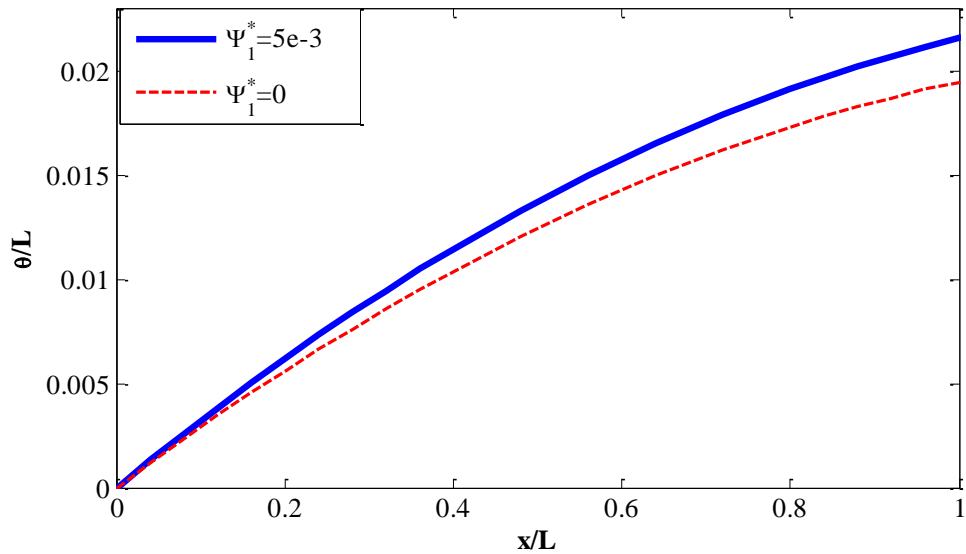
مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۴-۱۴ مقایسه لایه مرزی بین سیال نیوتنی و غیرنیوتنی

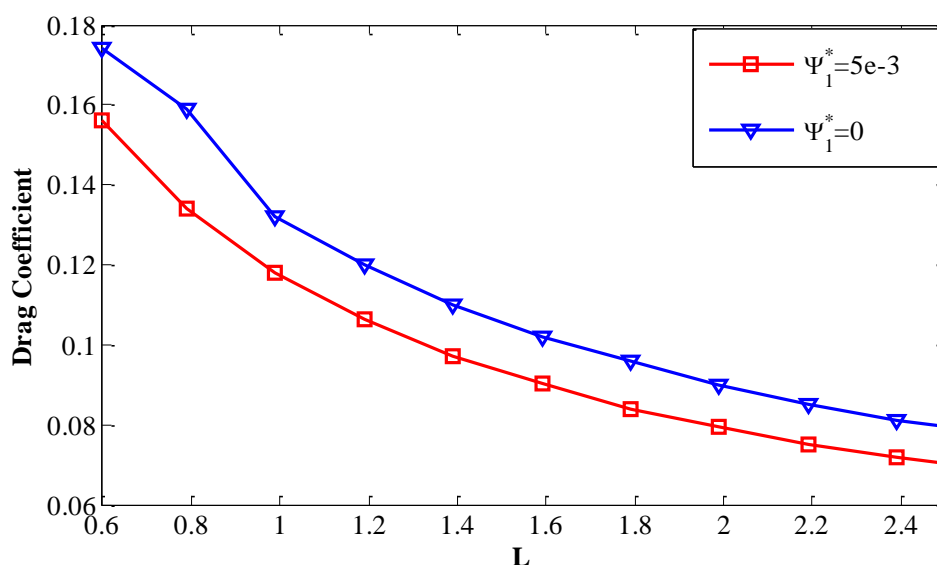


شکل ۴-۱۵ مقایسه ضخامت مومنتوم بین سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک



شکل ۴-۱۶ مقایسه ضخامت مومنوم بین سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک

در شکل ۴-۱۴ تا شکل ۴-۱۶ مشهود است که افزایش اختلاف تنش نرمال اول در سیال موجب شده سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی، دیرتر به مقدار بیشینه سرعت خود که همان سرعت جریان آزاد است، برسد، در نتیجه ضخامت لایه مرزی، ضخامت جابجایی و ضخامت مومنوم در سیال ویسکوالاستیک بیشتر از حالت نیوتنی می باشد. در سیال ویسکوالاستیک وجود ترم اختلاف تنش نرمال اول موجب ایجاد نیروی عمود بر جریان می گردد، بنابراین بر خاستگی در جریان سیال ویسکوالاستیک در راستای عمود بر جریان رخ خواهد داد. این پدیده موجب افزایش ضخامت  $\delta^*$ ،  $\delta$  و  $\theta$  می شود.



شکل ۴-۱۷ مقدار ضریب درگ محلی در طول صفحه در دو حالت نیوتنی و ویسکوالاستیک در  $Re=1000$

در شکل ۴-۱۷ میزان ضریب درگ محلی در طول صفحه نشان داده شده است. همان طور که قابل پیش بینی است در این شکل میزان ضریب درگ در اوایل صفحه که گرادیان سرعت در لایه مرزی بالاتر است، مقدار بیشتری دارد.

همان طور که در شکل ۴-۱۷ قابل مشاهده است ضریب درگ در حالت نیوتنی نسبت به حالت ویسکوالاستیک بیشتر می باشد. دلیل این موضوع را می توان در تغییر ایجاد شده در پروفیل سرعت، به دلیل وجود اختلاف تنش نرمال اول دانست. درواقع وجود تنش نرمال اول موجب می شود سرعت دیرتر به سرعت جریان آزاد برسد، در نتیجه گرادیان سرعت ( $\frac{\partial u}{\partial y}$ ) کمتر بوده، بنابراین تنش برشی و در راستای آن ضریب درگ نیز مقدار کمتری نسبت به حالت نیوتنی خواهد داشت.

#### ۴-۵-۳- مقایسه لایه مرزی در دو حالت خواص وابسته به دما (TD) و خواص مستقل

##### از دما (TI)<sup>۱</sup> در جریان سیال ویسکوالاستیک

در این تحقیق برای حل معادلات ناویراستوکس از دو حالت خواص وابسته به دما (TD) و خواص مستقل از دما (TI) استفاده شده است. در حالت TD به حل همزمان معادله انرژی به همراه معادلات بقا پرداخته شده است. همچنین خواص سیال از قبیل لزجت، ضریب رسانش و ظرفیت حرارتی ویژه تابعی از دمای نقطه‌ای سیال در نظر گرفته شده است. بدین منظور از توابع پیشنهادی مارک [۴۷] که به صورت معادلات (۲۷-۳) تا (۳۱-۳) بوده است، استفاده شده است. کمیت‌های مذکور بعد از هر مرحله با دماهای جدید به دست آمده دوباره مورد محاسبه قرار می‌گیرند. در روش TI ابتدا معادلات بقا به صورت کاملاً مستقل حل شده، سپس از مقادیر به دست آمده برای  $u$  و  $v$ ، در معادله انرژی استفاده شده و دمای سیال و سایر پارامترهای مربوط به انتقال حرارت مورد محاسبه قرار می‌گیرد.

در این بخش، پارامترهای گوناگون لایه مرزی در سیال ویسکوالاستیک با استفاده از هر دو روش TD و TI با یکدیگر مقایسه خواهند شد. جهت مقایسه بین دو حالت از جریان سیال در گرادیان فشار مساعد با فاکتور ترم گرادیان فشار برابر  $\beta = 0.3$  و اختلاف تنش نرمال اول برابر  $\Psi_1^* = 5e - 3$  استفاده شده است. در حالت TD، دمای جریان سیال برابر ۲۷۸ کلوین، دمای دیواره ثابت و برابر ۳۷۳ کلوین (شرط مرزی دما ثابت) و عدد پرانتل برابر ۱۰۰ در نظر گرفته شده است. در این حالت سیال در ابتدای صفحه با دمای یکنواخت وارد شده و بعد از تماس با دیواره‌ها و تشکیل لایه مرزی حرارتی، رفته رفته دمای آن به دمای دیواره‌ها نزدیک می‌شود.

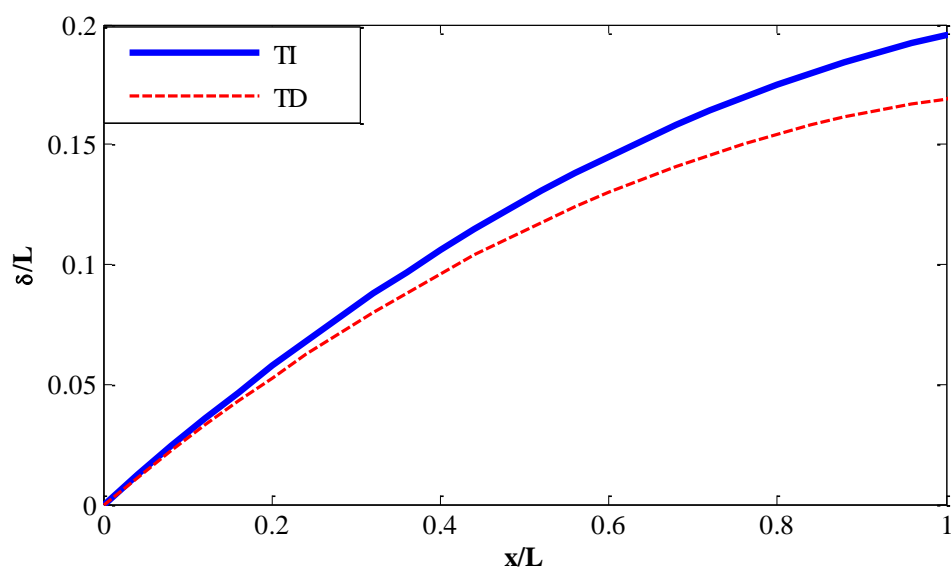
در شکل ۴-۱۸ تا شکل ۴-۲۰ به ترتیب ضخامت لایه مرزی، ضخامت جابجایی و ضخامت مومنوم

---

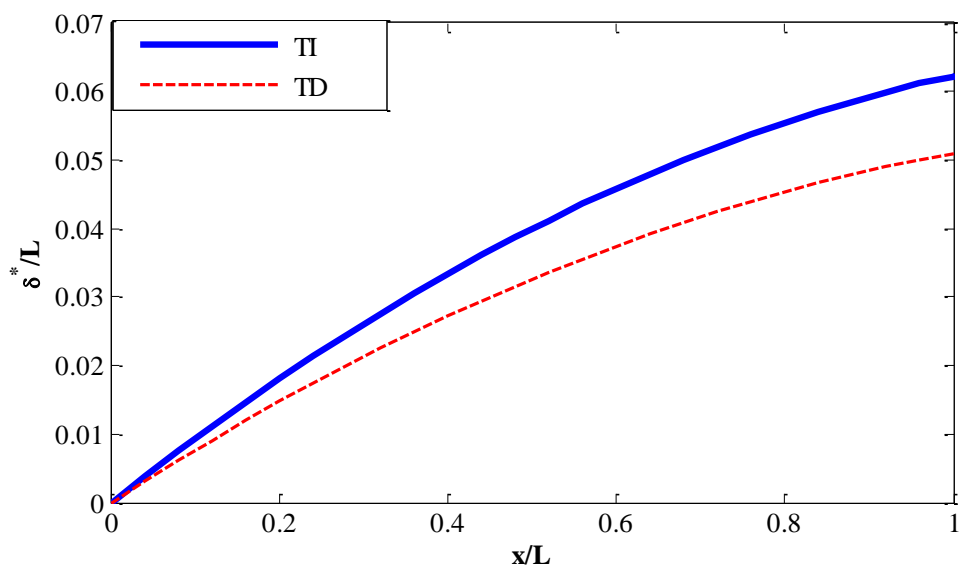
<sup>1</sup> Temperature independent



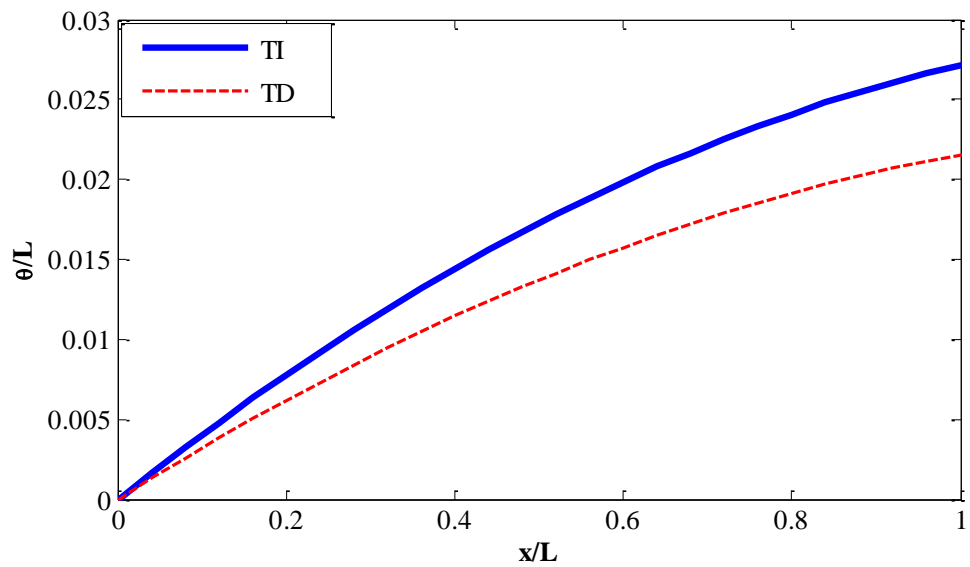
در دو حالت مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. همان طور که مشاهده می شود در حالت TD نسبت به حالت TI ضخامت لایه مرزی، ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتوم کمتر می باشد. در واقع با در نظر گرفتن تأثیرات دما بر روی مشخصه های سیال، موجب می شود سرعت سیال زوتر به سرعت جریان آزاد رسیده و کاهش ضخامت را در پی خواهد داشت.



شکل ۴-۱۸ مقایسه ضخامت لایه مرزی در دو حالت TD و TI



شکل ۱۹-۴ مقایسه ضخامت جابجایی در دو حالت TI و TD



شکل ۲۰-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم در دو حالت TI و TD

#### ۴-۵-۴- بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر مشخصات لایه مرزی در جریان سیال

##### ویسکوالاستیک

در این بخش به بررسی چگونگی تأثیرگذاری پارامترهای مختلف، همچون عدد رینولدز، اختلاف تنش نرمال اول و تغییرات گرادیان فشار، بر مشخصه‌های لایه مرزی پرداخته می‌شود. در بررسی تأثیرگذاری هر یک از این پارامترها، سایر پارامترها ثابت نگه‌داشته شده است.

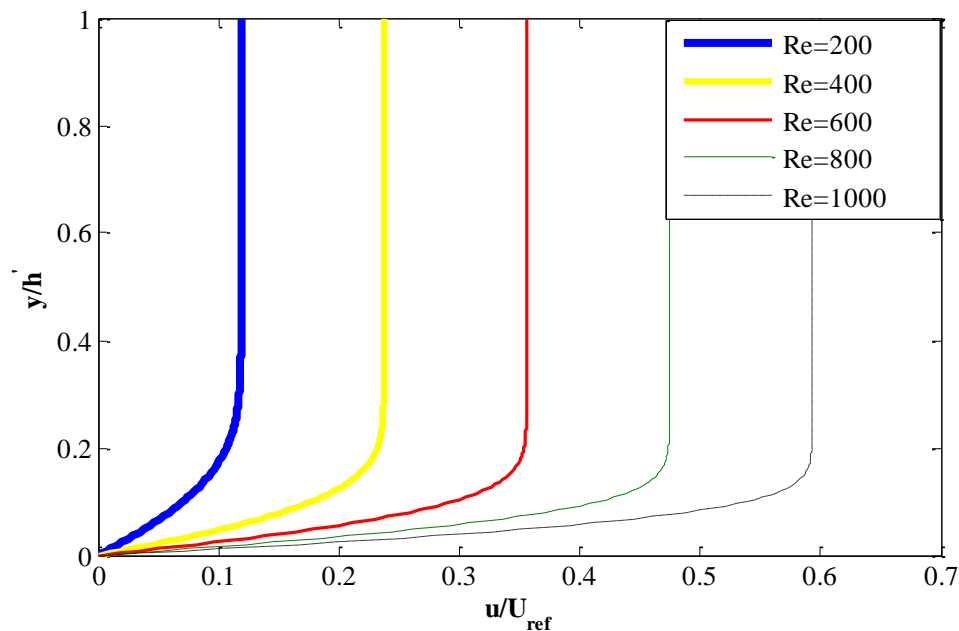
#### ۴-۵-۴-۱- بررسی اثر تغییرات عدد رینولدز بر مشخصه‌های لایه مرزی

در این بخش به تأثیر تغییرات میزان عدد رینولدز بر مشخصه‌های لایه مرزی پرداخته می‌شود. جهت دستیابی به هدف مذکور، اختلاف تنش نرمال اول ثابت و برابر با  $0.015$  در نظر گرفته شده و میزان گرادیان فشار در  $\beta = 0.3$  در نظر گرفته شده است و نتایج به دست آمده در اثر اعمال تغییرات در عدد رینولدز در دو حالت TD و TI گزارش شده‌اند.

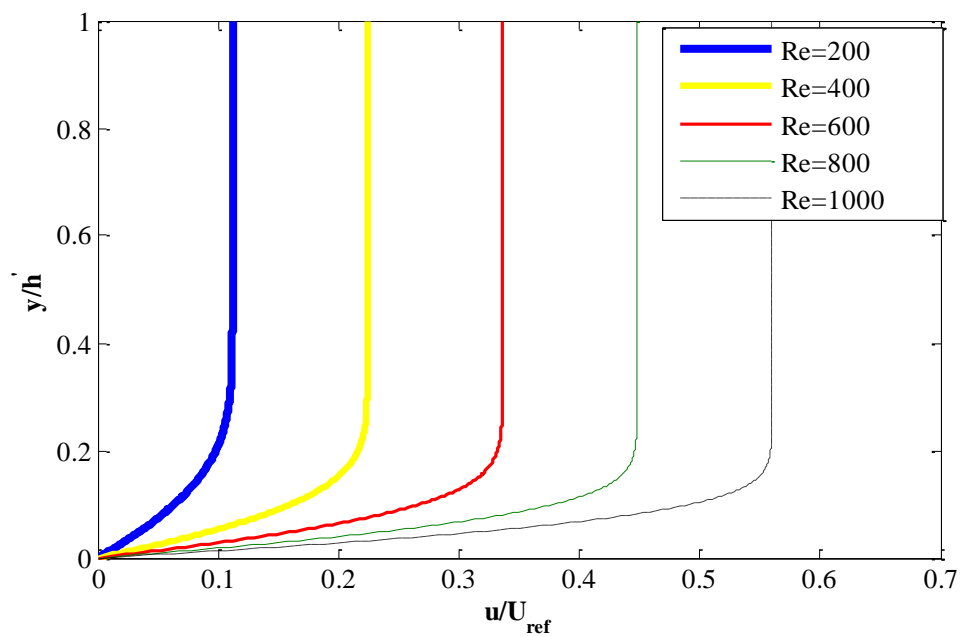
در ابتدا، به بررسی تأثیرگذاری تغییر عدد رینولدز بر روی پروفیل سرعت در یک مقطع از صفحه  $(x/L=0.5)$  و سپس به چگونگی تغییرات ضخامت لایه مرزی، در قالب شکل ۴-۲۳ و شکل ۴-۲۴ پرداخته می‌شود. در شکل‌های شکل ۴-۲۵ تا ۴-۲۸ به ترتیب تغییرات ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتوم بر اثر تغییرات عدد رینولدز نمایش داده شده‌اند. در نمودارهای مربوط به سرعت، محور افقی برای سرعت بی‌بعد شده می‌باشد که در ابتدا مقدار آن به دلیل شرط عدم لغزش در دیواره، صفر می‌باشد.  $U_{ref}$  طبق رابطه (۴-۶) قابل محاسبه می‌باشد. با حرکت در راستای عمود بر جریان سرعت جریان سیال افزایش می‌یابد تا در نهایت به مقداری ثابت که همان سرعت جریان آزاد می‌باشد، برسد. هرچه عدد  $Re$  بزرگ‌تر باشد سرعت جریان بیشتر،  $\frac{\partial u}{\partial y}$  بیشتر و در نتیجه ضخامت لایه مرزی کمتر خواهد بود. در شکل ۴-۲۳ و

شکل ۴-۲۴ قابل مشاهده است که مشابه با سیال نیوتنی، در سیال ویسکو الاستیک هم با افزایش عدد رینولدز لایه مرزی کاهش می یابد. در یک رینولدز یکسان در جریان سیال بر روی صفحه، ضخامت لایه مرزی تابعی از  $x$  می باشد اما اگر چند جریان داشته باشیم که سرعت آزاد آنها متفاوت باشد آن جریانی که سرعت بیشتری دارد ضخامت لایه مرزی کمتری خواهد داشت. در واقع هرچه عدد رینولدز جریانی بیشتر باشد ضخامت لایه مرزی تشکیل شده بر روی سطح، در آن حالت کمتر خواهد بود. همین شرایط برای ضخامت مومنتوم و ضخامت جابجایی نیز برقرار است.

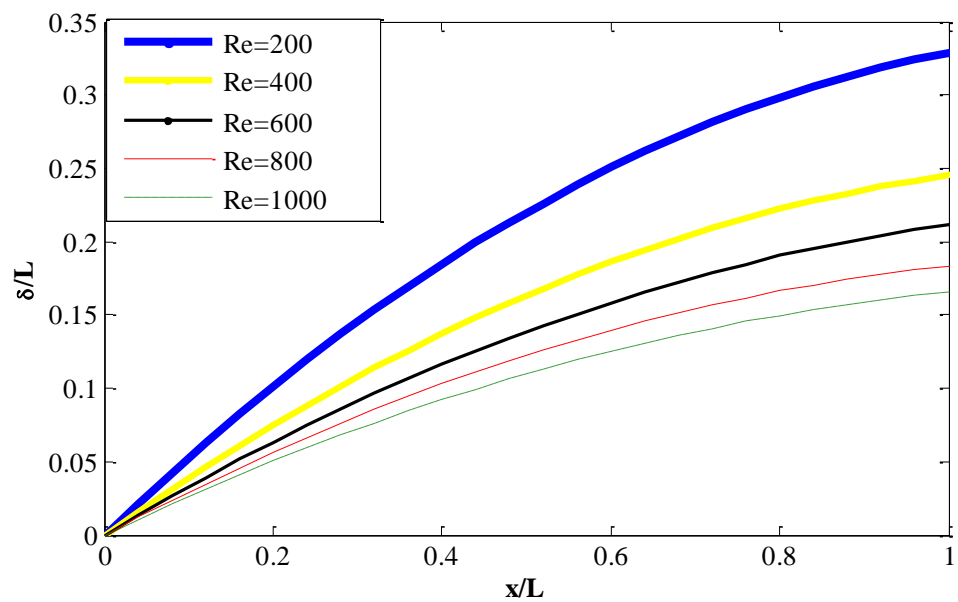
$$U_{ref} = \frac{1}{L} \int_0^L U(x) dx \quad (۴-۶)$$



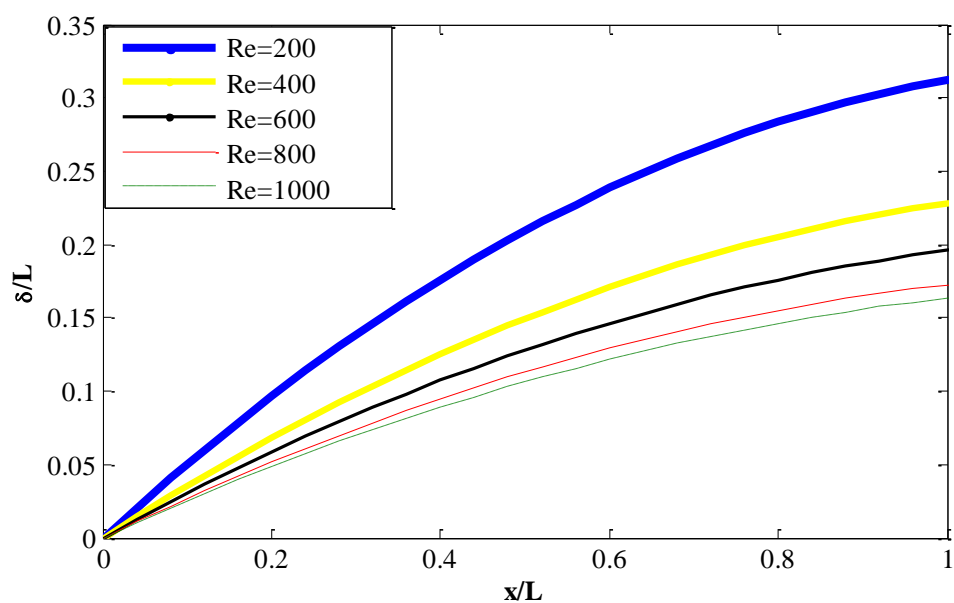
شکل ۴-۲۱ پروفیل سرعت در اعداد رینولدز مختلف در حالت TD



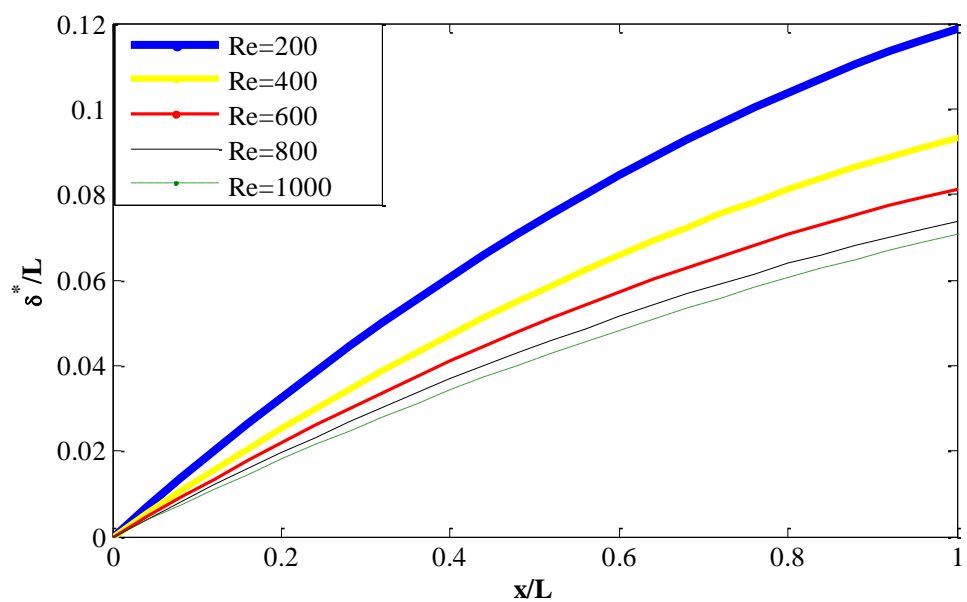
شکل ۲۲-۴ پروفیل سرعت در اعداد رینولدز مختلف در حالت TI



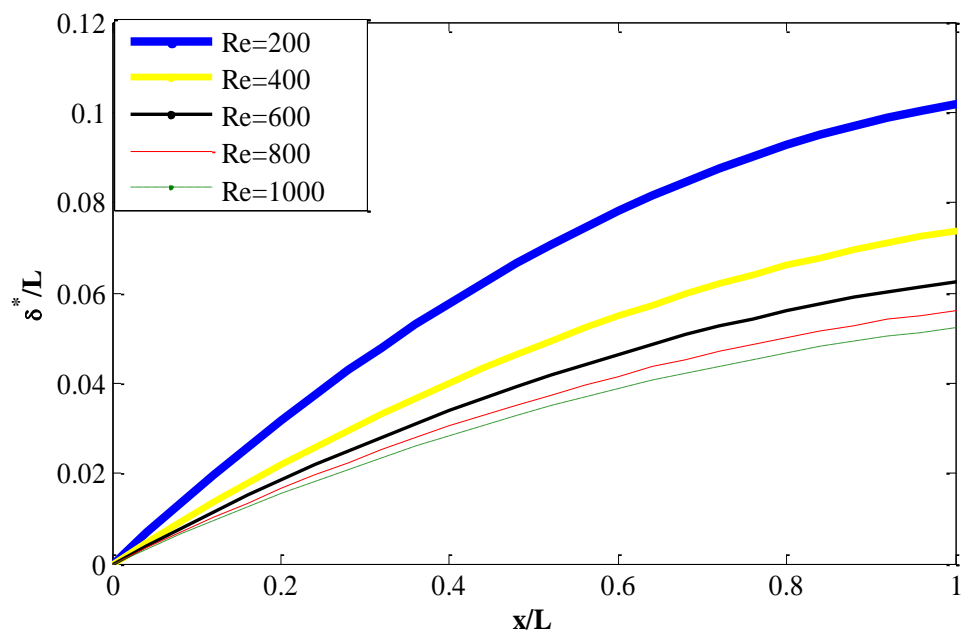
شکل ۲۳-۴ مقایسه لایه مرزی در رینولدزهای مختلف در حالت TI



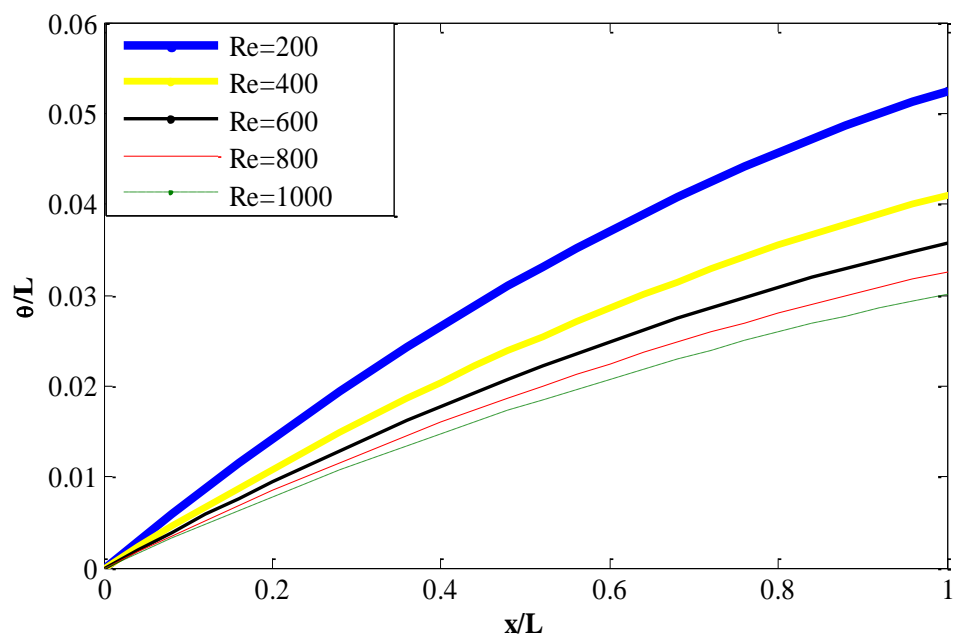
شکل ۴-۲۴ مقایسه لایه مرزی در رینولدزهای مختلف در حالت TD



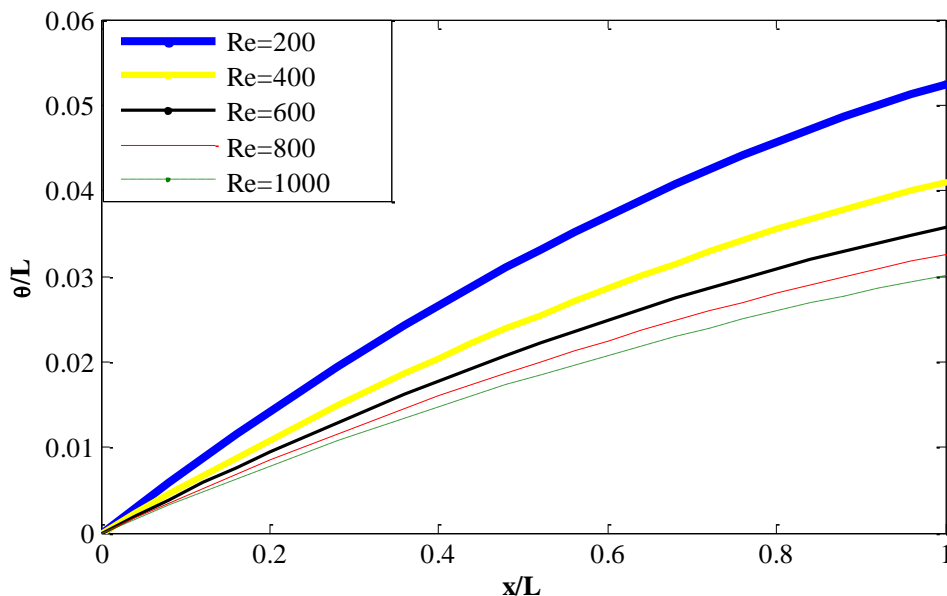
شکل ۴-۲۵ مقایسه ضخامت جابجایی در رینولدزهای مختلف در حالت TI



شکل ۴-۲۶ مقایسه ضخامت جابجایی در رینولدزهای مختلف در حالت TD



شکل ۴-۲۷ مقایسه ضخامت مومنتوم در رینولدزهای مختلف در حالت TI



۲۸-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم در رینولدزهای مختلف در حالت TD

تغییرات ضریب درگ سیال ویسکوالاستیک با افزایش عدد رینولدز، روندی مشابه سیال نیوتنی را نشان می‌دهد. در جدول ۴-۱ اثر تغییرات عدد رینولدز بر ضریب درگ نشان داده شده است. همان‌طور که پیداست، با افزایش عدد رینولدز ضریب درگ کاهش می‌یابد.

در جدول ۴-۲ فوق سطر اول داده‌ها مربوط به حالت وابسته به دما (TD) و سطر دوم مربوط به حالت مستقل از دما (TI) می‌باشد. در حالت وابسته به دما (TD)، شرایط دما ثابت و عدد پرانتل برابر ۱۰۰ می‌باشد.



جدول ۴-۲ اثر افزایش عدد رینولدز بر ضریب درگ بر جریان سیال ویسکوالاستیک

Re=۲۰۰	Re=۴۰۰	Re=۶۰۰	Re=۸۰۰	Re=۱۰۰۰	x
۰/۴۶۱	۰/۳۲۱	۰/۲۸	۰/۲۲	۰/۱۲۴	۰/۵
۰/۴۲۹	۰/۲۹۵	۰/۲۴	۰/۲۰۴	۰/۱۸۱	
۰/۳۰۱	۰/۲۰۲	۰/۱۶۶	۰/۱۴۳	۰/۱۳۱	۱
۰/۲۹۱	۰/۱۹۹	۰/۱۶۱	۰/۱۳۷	۰/۱۲	
۰/۲۸	۰/۱۹	۰/۲	۰/۱۵۱	۰/۱۱	۱/۵
۰/۲۳۲	۰/۱۵۸	۰/۱۲۷	۰/۱۱	۰/۰۹۶	
۰/۲۱	۰/۱۳۷	۰/۱۱۲	۰/۰۹۷	۰/۰۸۶	۲
۰/۱۹۵	۰/۱۳۶	۰/۱۰۹	۰/۰۹۳	۰/۰۸۲	
۰/۱۸	۰/۱۲۵	۰/۰۸	۰/۰۸۴	۰/۰۷۴	۲/۵
۰/۱۷۳	۰/۱۱۸	۰/۰۹۵	۰/۰۸۱	۰/۰۷۱	

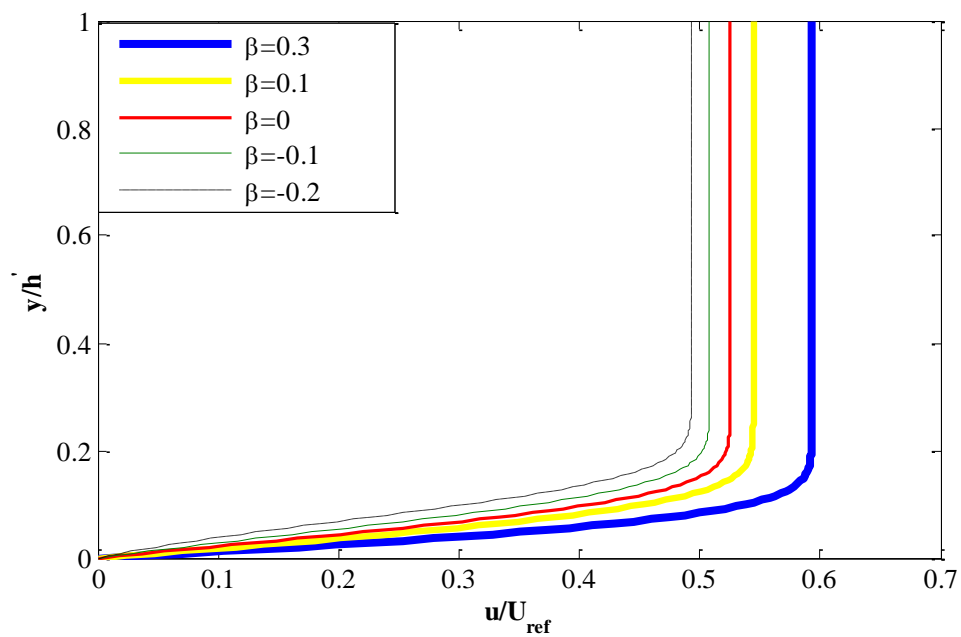
#### ۴-۵-۴-۲ بررسی تأثیر تغییرات گرادیان فشار بر مشخصه‌های لایه مرزی

در این بخش چگونگی اثرگذاری تغییرات گرادیان فشار بر ضخامت لایه مرزی، ضخامت جابجایی، ضخامت مومنتوم و ضریب درگ سیال ویسکوالاستیک بررسی خواهد شد. در این بخش  $\Psi_1^* = 1.5e - 3$  در نظر گرفته شده است.

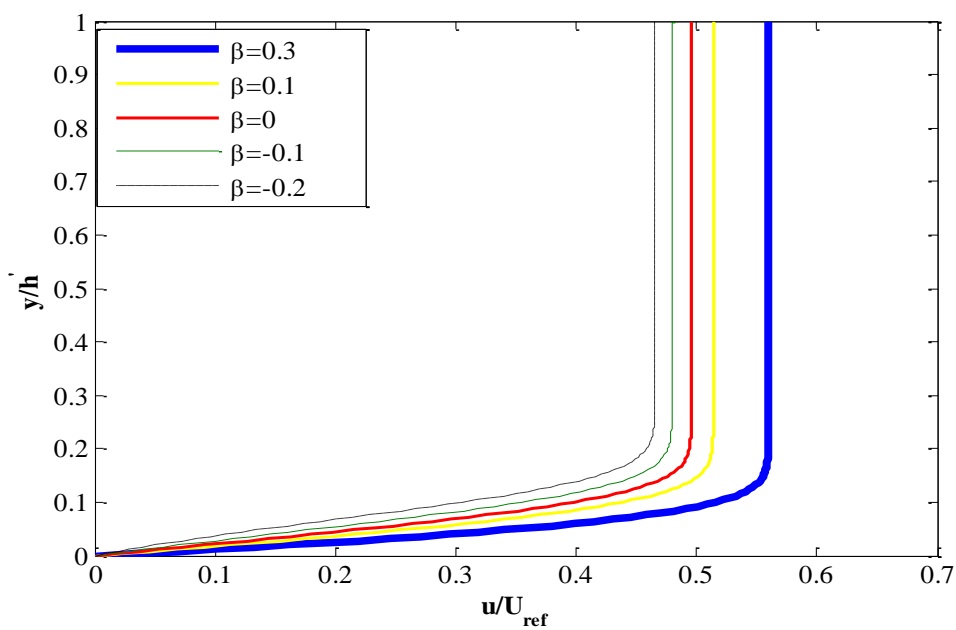
در شکل ۴-۲۹ و شکل ۴-۳۰ تغییرات سرعت در راستای عمود بر جریان، در مقطعی خاص از صفحه که در اینجا  $x/L=0/5$  در نظر گرفته شده است، در دو حالت TD و TI نشان داده شده است. در این بخش علاوه بر  $\beta$  های مثبت، از مورد منفی هم استفاده شده است. در اینجا نیز همانند سیال نیوتنی، افزایش ترم

گرادیان فشار در هردو حالت TD و TI، کاهش ضخامت لایه مرزی، ضخامت مومنتوم و ضخامت جابجایی را در پی خواهد داشت. در واقع مقایسه اثرات گرادیان فشار معکوس بر لایه مرزی زمانی قابل درک است که با شرایط مشابه بر روی صفحه مسطح مورد تجزیه و تحلیل قرار بگیرد. از مقایسه پروفیل های به دست آمده برای حالت های مختلف می توان گفت که در اثر گرادیان فشار معکوس ( $\beta < 0$ ) ضخامت لایه مرزی افزایش بیشتری نسبت به موقعیت مشابه بر روی صفحه مسطح دارد. از طرفی هر چه میزان گرادیان فشار معکوس شدیدتر باشد ضخامت لایه مرزی افزایش چشمگیرتری خواهد داشت. همانند صفحه مسطح مقدار  $\frac{\partial u}{\partial y}$  دچار سیر نزولی شده و حداکثر مقدار آن بر روی دیواره تشکیل می شود همچنین  $\frac{\partial u}{\partial y}$  در مقایسه با سطوح صاف میزان کمتری در موقعیت مشابه دارد. در گرادیان فشار معکوس مقدار  $\frac{\partial u}{\partial y}$  مثبت و مقدار  $\frac{\partial u}{\partial x}$  منفی است و در عین حال از لحاظ قدر مطلق نیز از مقدار آن در شرایط مشابه با سطح مسطح بیشتر است یعنی منفی تر است.

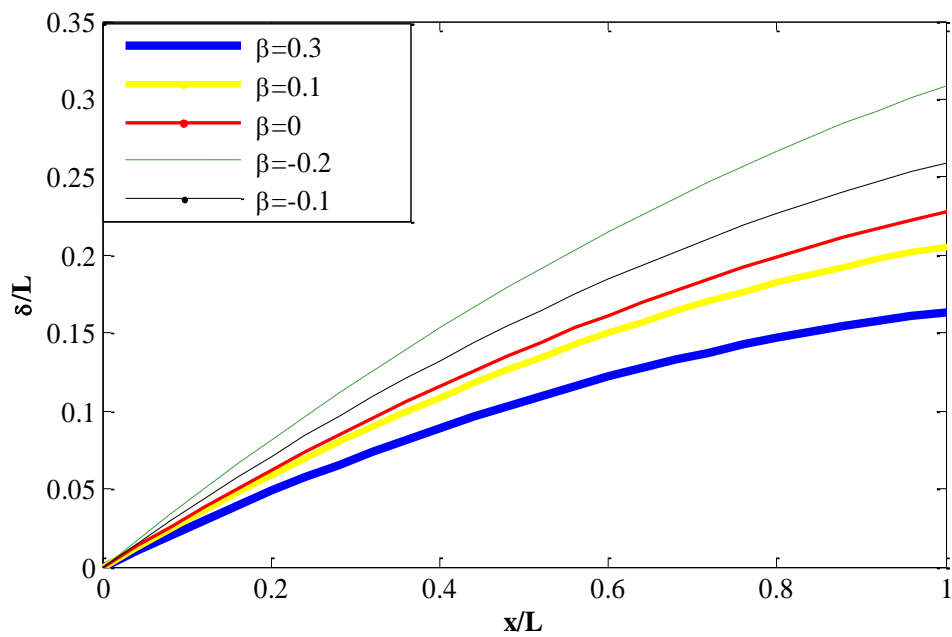
مقادیر  $\delta^*$ ،  $\delta$  و  $\theta$  در حالت گرادیان فشار معکوس دارای سرعت رشد بیشتری هستند هر چه میزان  $\beta$  به عنوان پارامتری که نماینده گرادیان فشار محسوب می شود بیشتر شود در این حالت این مقادیر هم بزرگ تر خواهند بود و هم دارای سرعت رشد بیشتری نسبت به حالت های دیگر خواهد بود که به دلیل کاهش شدید مومنتوم ناشی از سرعت متوسط این شرایط قابل توجیه می باشد.



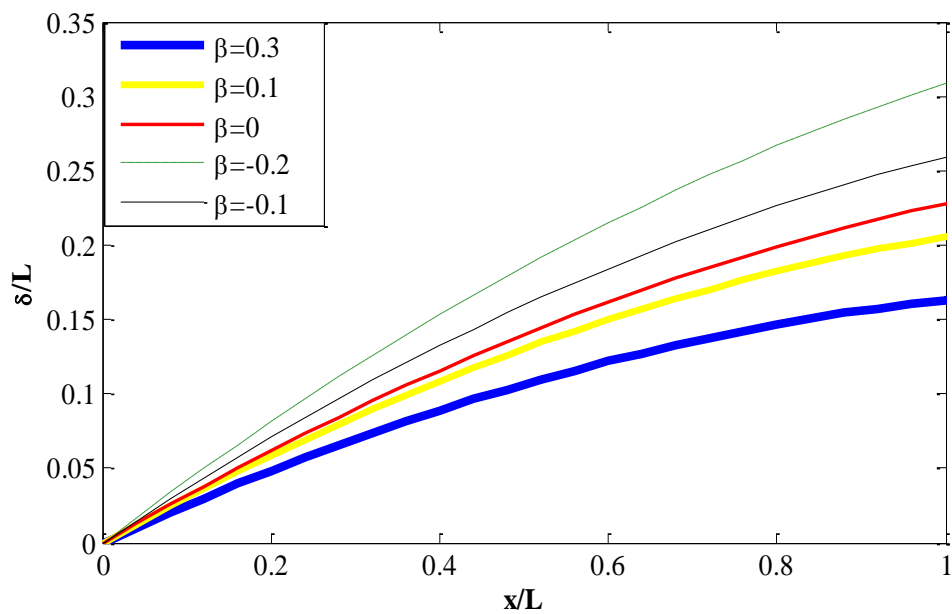
شکل ۲۹-۴ پروفیل سرعت در گرادیان فشارهای مختلف در حالت TD



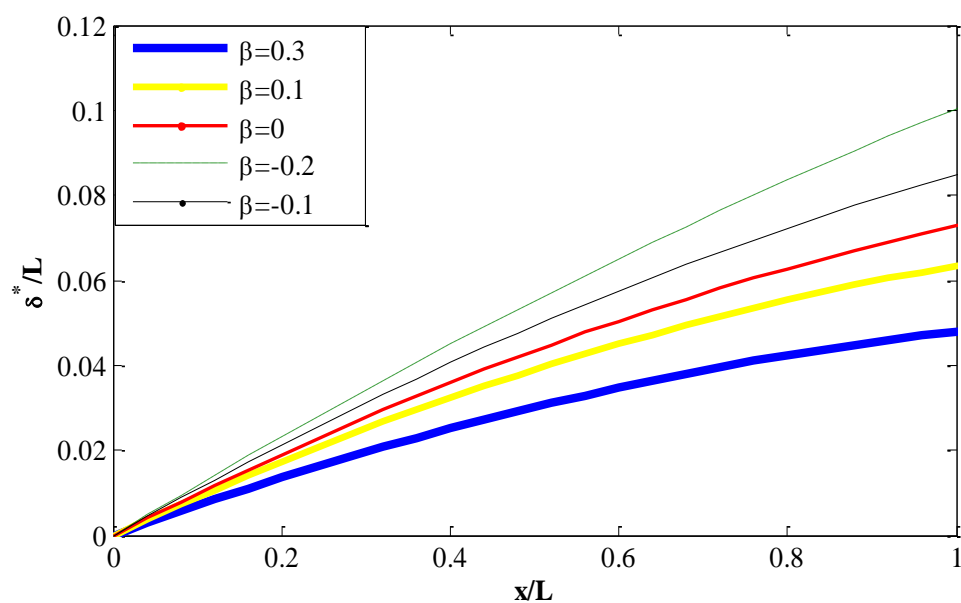
شکل ۳۰-۴ پروفیل سرعت در گرادیان فشارهای مختلف در حالت TI



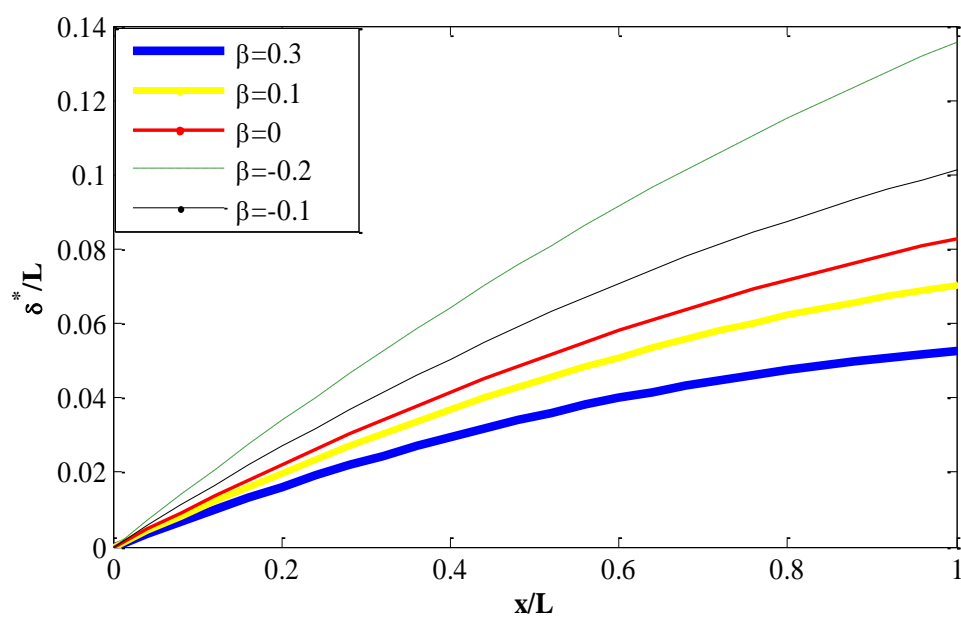
شکل ۳۱-۴ مقایسه ضخامت لایه مرزی در گرادیان فشارهای مختلف در حالت TD



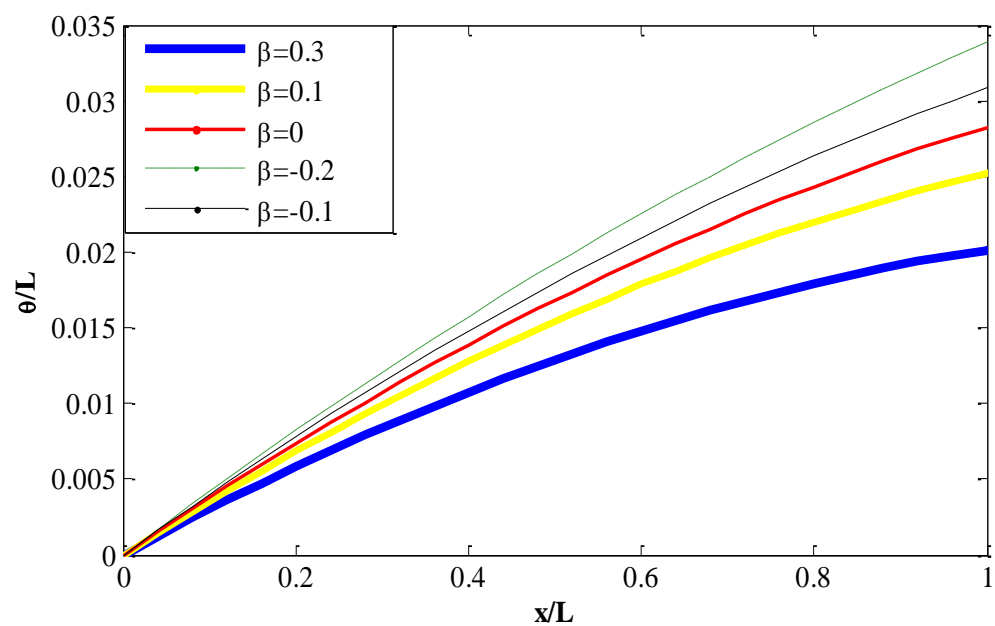
شکل ۳۲-۴ مقایسه لایه مرزی در گرادیان فشارهای مختلف در حالت TI



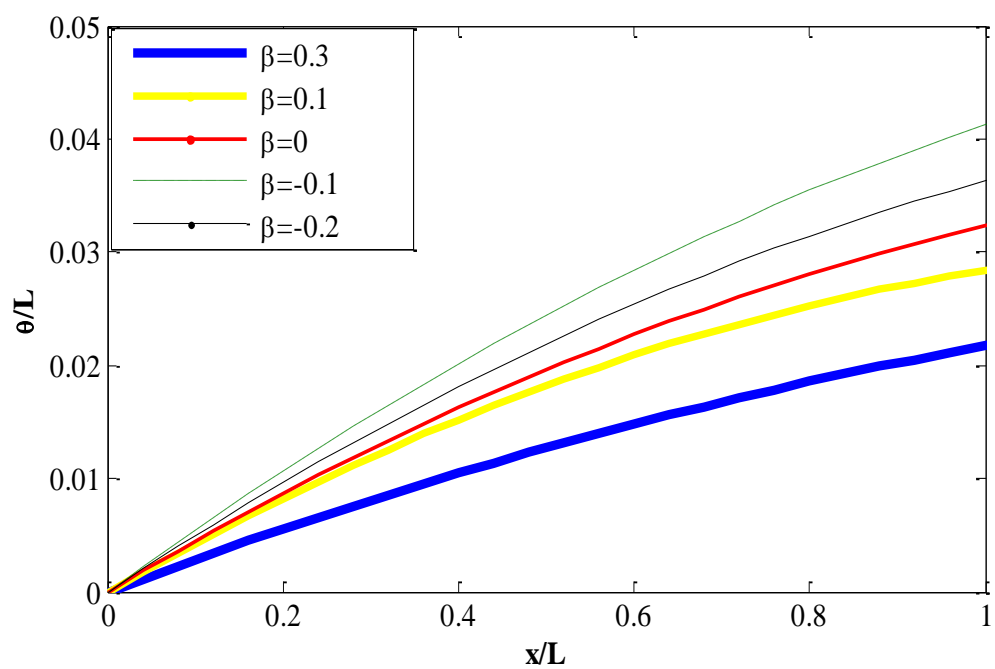
شکل ۳۳-۴ مقایسه ضخامت جابجایی در گرادیان فشارهای مختلف در حالت TD



شکل ۳۴-۴ مقایسه ضخامت جابجایی در گرادیان فشارهای مختلف در حالت TI



شکل ۳۵-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم در گرادیان فشارهای مختلف در حالت TD

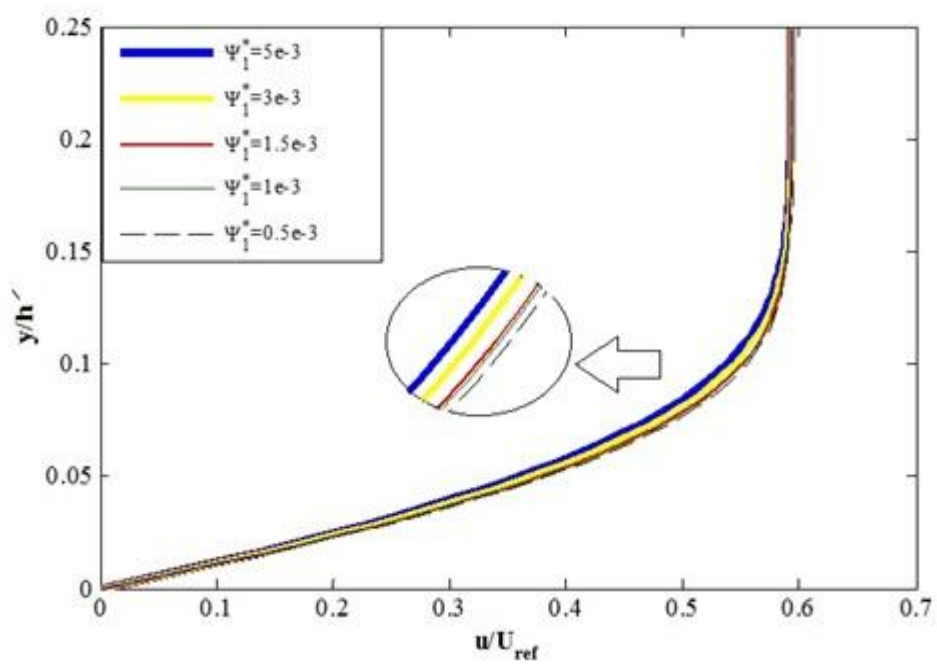


شکل ۳۶-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم در گرادیان فشارهای مختلف در حالت TI

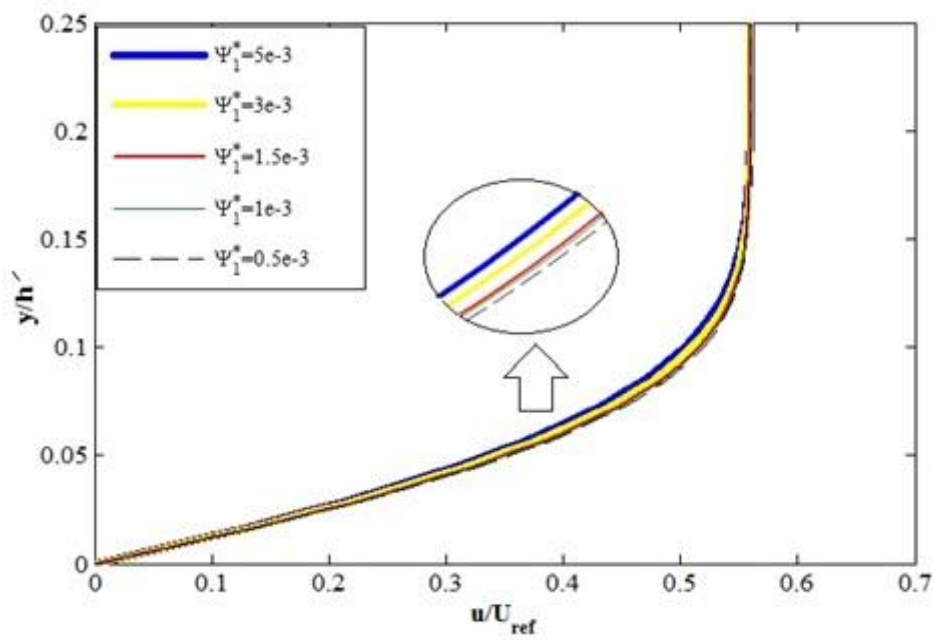
#### ۴-۵-۳- بررسی تأثیر تغییرات اختلاف تنش نرمال اول بر مشخصه‌های لایه‌مرزی

در این قسمت تأثیر تغییرات اختلاف تنش نرمال اول بر مشخصه‌های لایه‌مرزی مورد ارزیابی و بررسی قرار گرفته است. همانطور که در شکل‌های زیر مشاهده می‌شود با افزایش اختلاف تنش نرمال اول، نیروی عمود بر جریان افزایش می‌یابد بنابراین بر خاستگی در جریان سیال رخ می‌دهد که به معنای افزایش ضخامت لایه‌مرزی، ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتوم می‌باشد.

با دقت در شکل‌های مربوط به حالت TD در این بخش مشاهده می‌شود تغییرات سرعت، ضخامت لایه‌مرزی، ضخامت مومنتوم و ضخامت مومنتوم با تغییر ضریب اختلاف تنش نرمال اول بسیار کمتر از حالت TI می‌باشد. با توجه به اینکه گروه غالبی از سیالات ویسکوالاستیک، مذاب‌های پلیمری هستند و در این حالت تفاوت دمای زیادی مشاهده می‌شود، بنابراین استفاده از حالت TD که به‌خوبی تغییرات دمایی را بر خواص سیال لحاظ می‌کند، به واقعیت نزدیک‌تر است، پس کم بودن تأثیر ضریب اختلاف تنش نرمال اول بر مشخصه‌های سرعت و لایه‌مرزی در صنایع مرتبط با مواد پلیمری باید مدنظر قرار گرفته شود. علت این است که طبق رابطه (۳-۳۱)،  $k \rightarrow 0$  در حالت TD تابع شدید دما می‌باشد و به صورت لگاریتمی با آن تغییر می‌کند و این بدین معناست که با تغییر  $k \rightarrow 0$ ، تغییرات  $\Psi_1^*$  در حالت TD به اندازه TI چشم‌گیر نمی‌باشد.

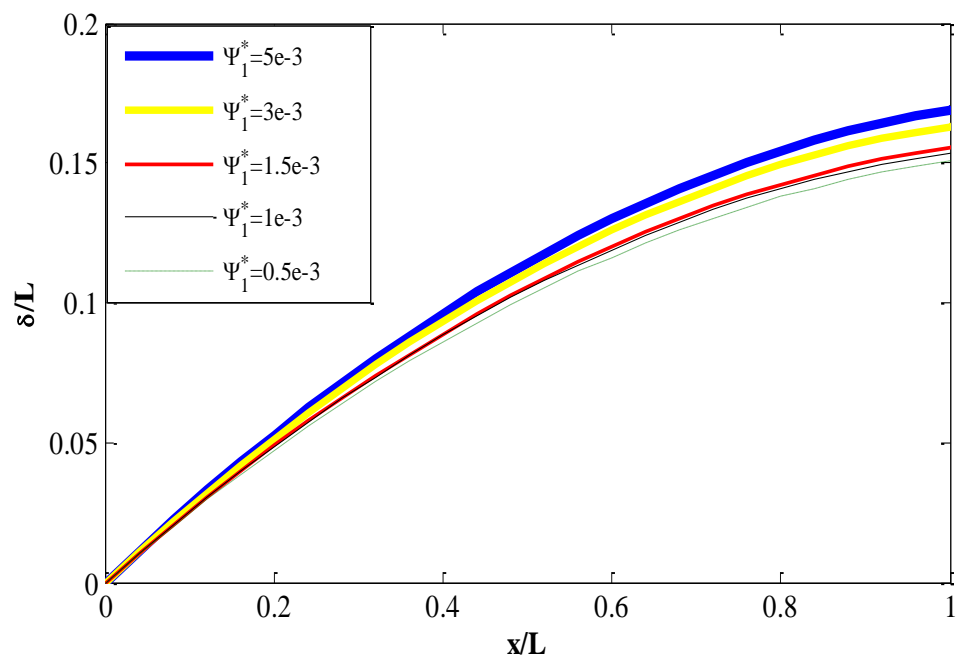


شکل ۳۷-۴ پروفیل سرعت در اختلاف تنش نرمال مختلف در حالت TD

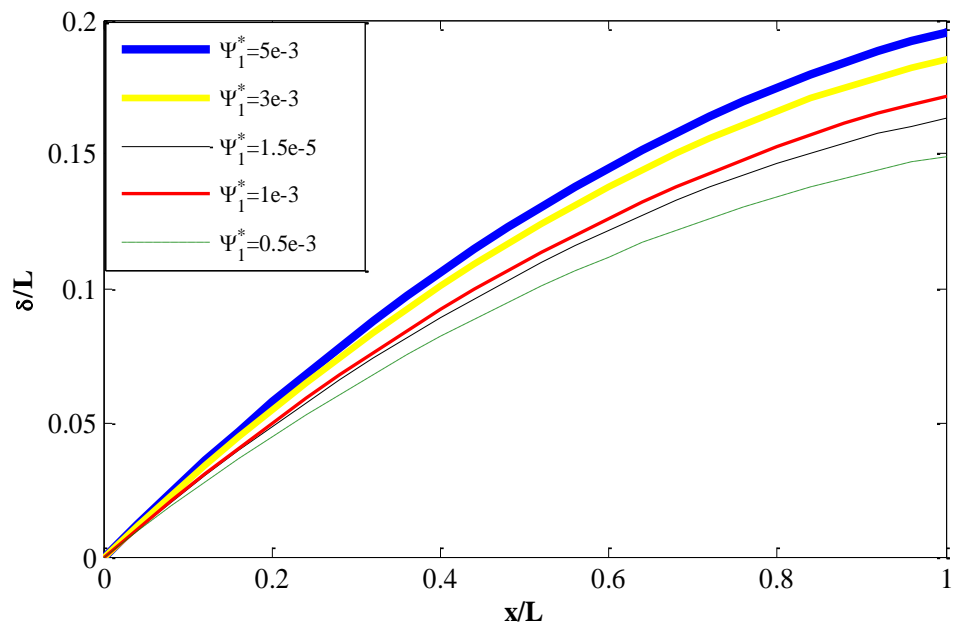


شکل ۳۸-۴ پروفیل سرعت در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TI

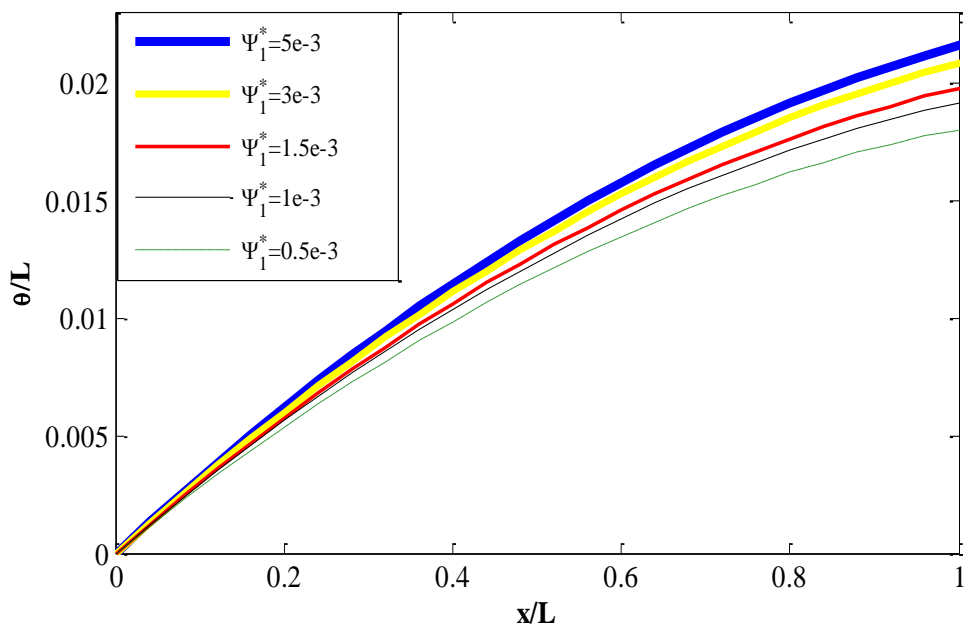




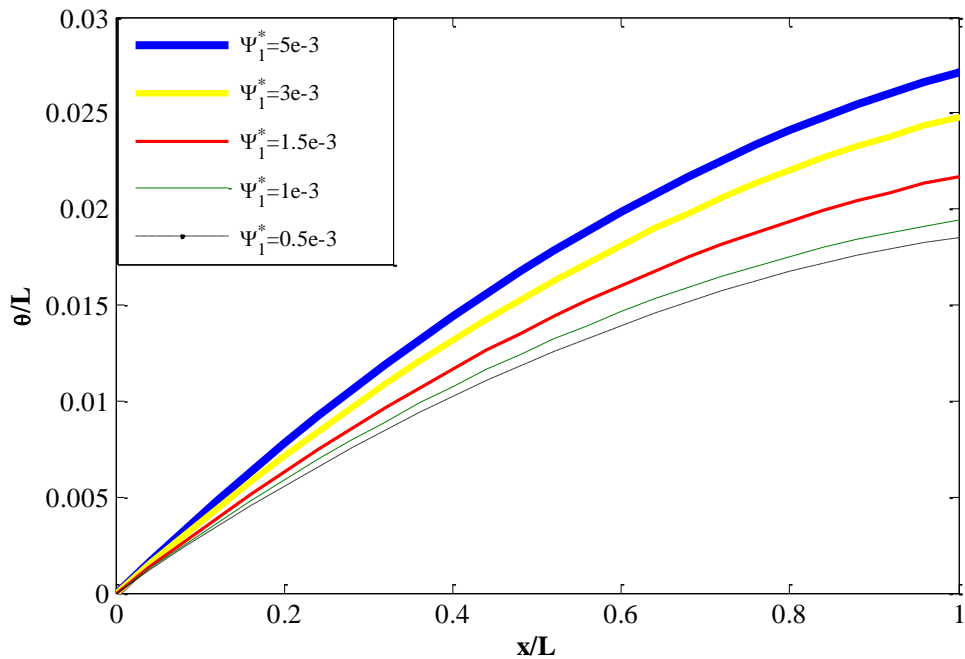
شکل ۴-۳۹ مقایسه لایه مرزی در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TD



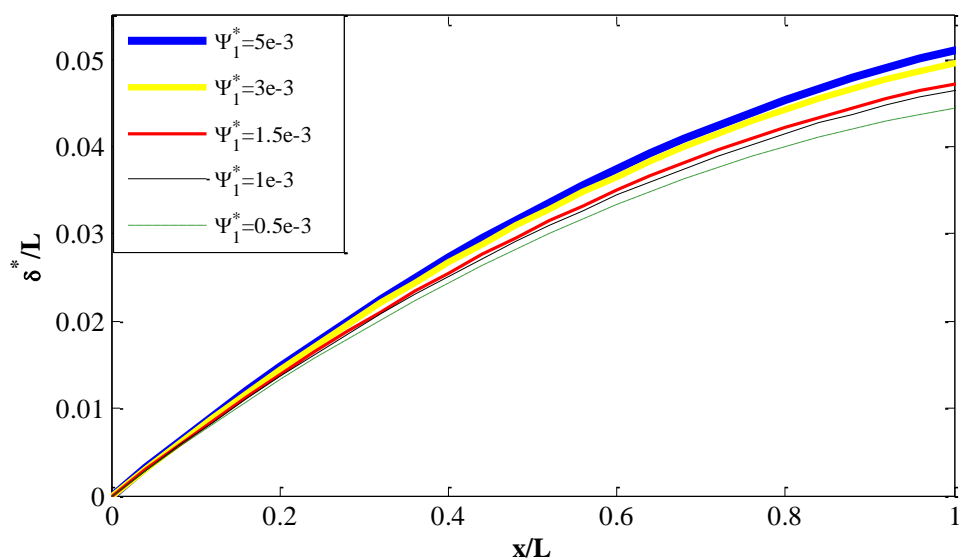
شکل ۴-۴۰ مقایسه لایه مرزی در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TI



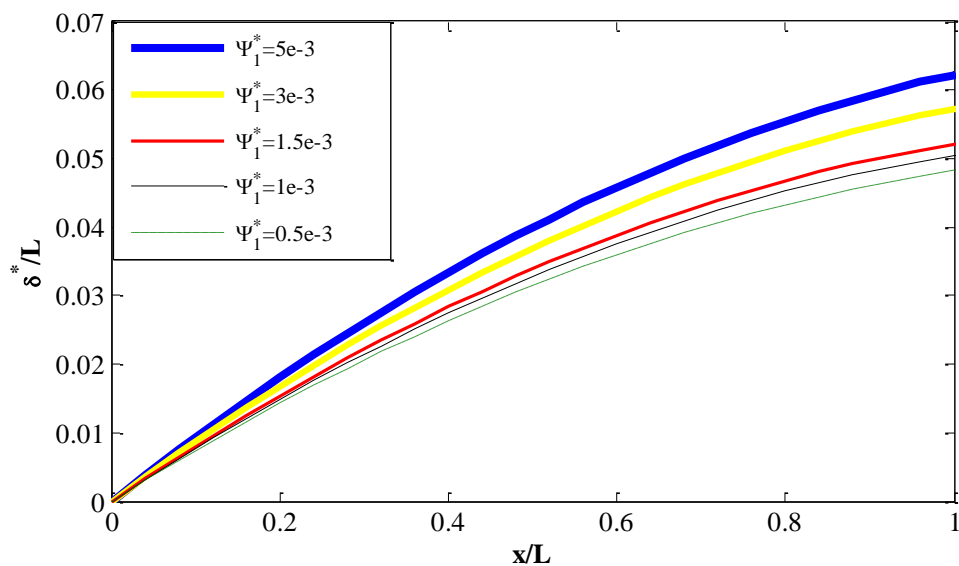
شکل ۴۱-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TD



شکل ۴۲-۴ مقایسه ضخامت مومنتوم در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TI



شکل ۴-۴۳ مقایسه ضخامت جابجایی در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TD

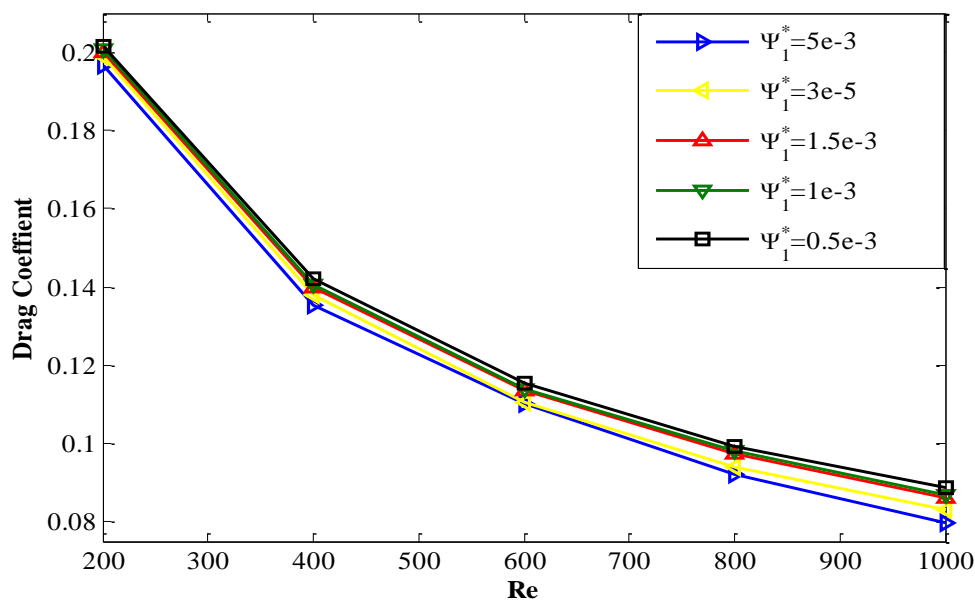


شکل ۴-۴۴ مقایسه ضخامت جابجایی در اختلاف تنش نرمال اول مختلف در حالت TI

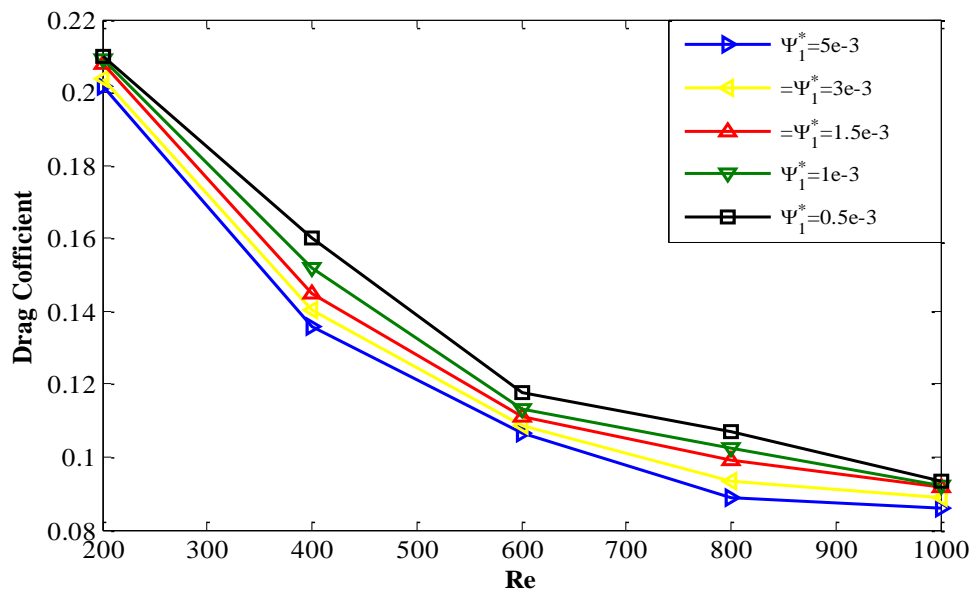
در شکل ۴-۴۵ و شکل ۴-۴۶ به مقایسه تغییرات ضریب درگ بر حسب عدد رینولدز در اختلاف

تنش نرمال اول متفاوت پرداخته شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش عدد رینولدز ضریب

درگ کاهش می‌یابد. مقدار  $C_f$  در جریان سیال بر روی صفحه با توجه به کاهش تنش برشی ناشی از لزجت در روی دیواره کاهش خواهد یافت. با دقت در شکل های زیر می‌توان فهمید تغییرات تاثیر تغییرات ضریب اختلاف تنش نرمال اول بر ضریب درگ در حالت TD نیز کمتر از حالت TI می‌باشد و نمودارها در ضرایب اختلاف تنش نرمال اول متفاوت به یکدیگر نزدیک‌ترند.



شکل ۴-۴۵ مقایسه تغییرات ضریب درگ بر حسب عدد رینولدز در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت TD



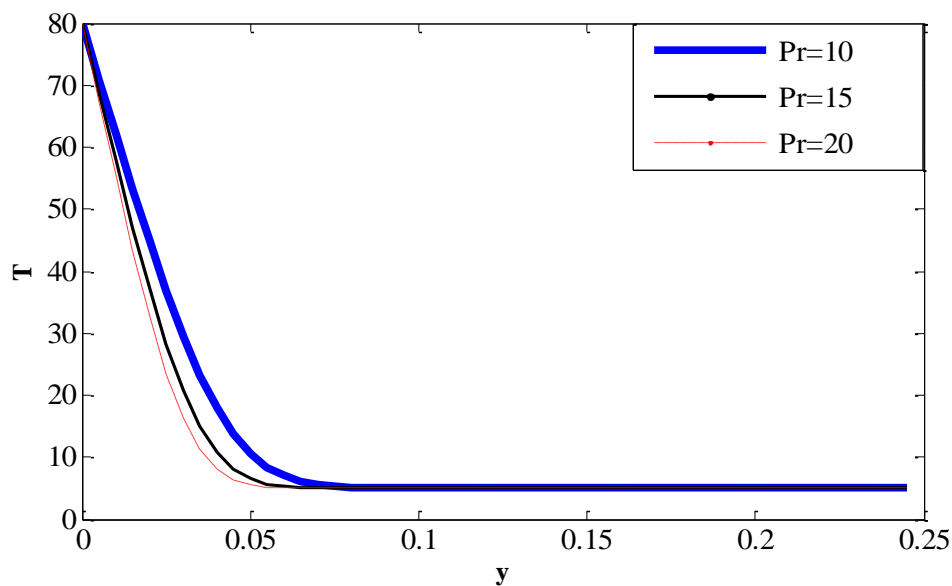
شکل ۴-۴ تغییرات ضریب درگ بر حسب عدد رینولدز در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت TI

## ۴-۶- لایه مرزی گرمایی

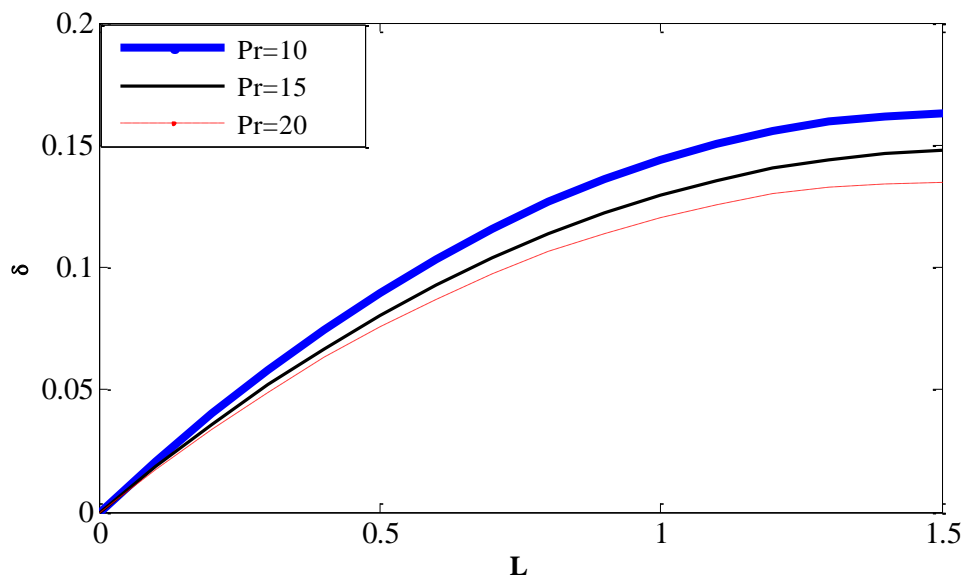
### ۴-۶-۱- بررسی پارامترهای لایه مرزی گرمایی در جریان سیال نیوتنی

در این بخش به بررسی مشخصه‌های لایه مرزی گرمایی در جریان سیال نیوتنی پرداخته می‌شود. تأثیر تغییرات عدد پرانتل بر پروفیل سرعت، ضخامت لایه مرزی گرمایی و ناسلت محلی مورد مطالعه قرار گرفته است. دمای دیواره  $353\text{K}$  و دمای سیال  $278\text{K}$  در نظر گرفته شده است. در واقع در این بخش گرمایش سیال مدنظر می‌باشد. با افزایش فاصله از لبه ابتدایی سطح، به علت تبادل حرارت و نفوذ حرارت بیشتر به داخل جریان، ضخامت لایه مرزی رشد می‌کند. همان‌طور که در نمودار دیده می‌شود، افزایش عدد پرانتل موجب می‌شود سیال زوتر به دمای سیال ورودی برسد؛ بنابراین طبق شکل کاهش ضخامت لایه مرزی گرمایی را در پی خواهد داشت. در شکل تغییرات ناسلت محلی در طول صفحه به ازای تغییرات عدد

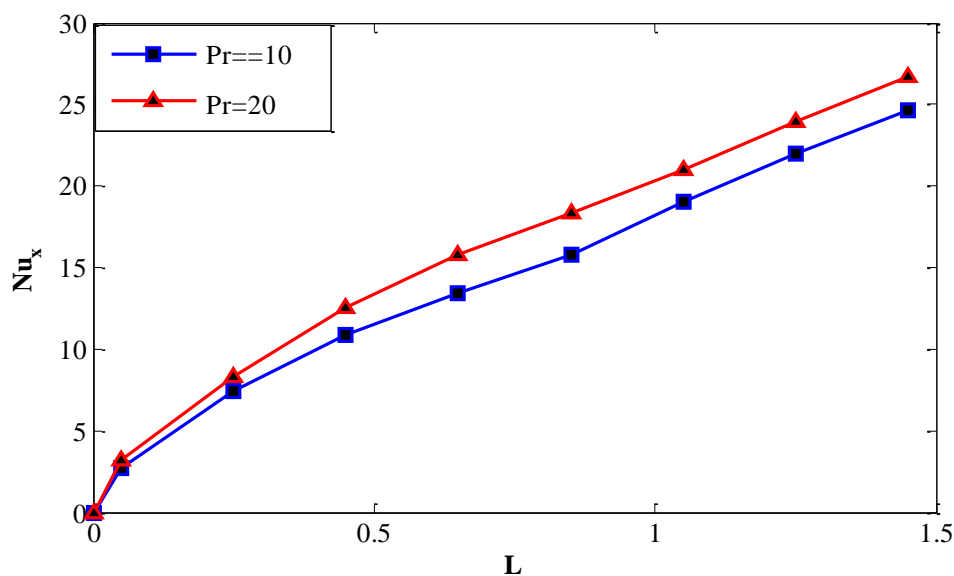
پرانتل گزارش شده است. مشاهده می‌شود ناسلت در طول صفحه به افزایش می‌یابد و به ازای پرانتل‌های بزرگ‌تر، ناسلت بزرگ‌تری خواهیم داشت.



شکل ۴-۴۷ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در جریان سیال نیوتنی



شکل ۴-۴۸ مقایسه لایه مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در جریان سیال نیوتنی



شکل ۴-۴۹ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل

#### ۴-۶-۲- بررسی پارامترهای مختلف بر مشخصه‌های لایه مرزی گرمایی در جریان سیال

##### ویسکوالاستیک

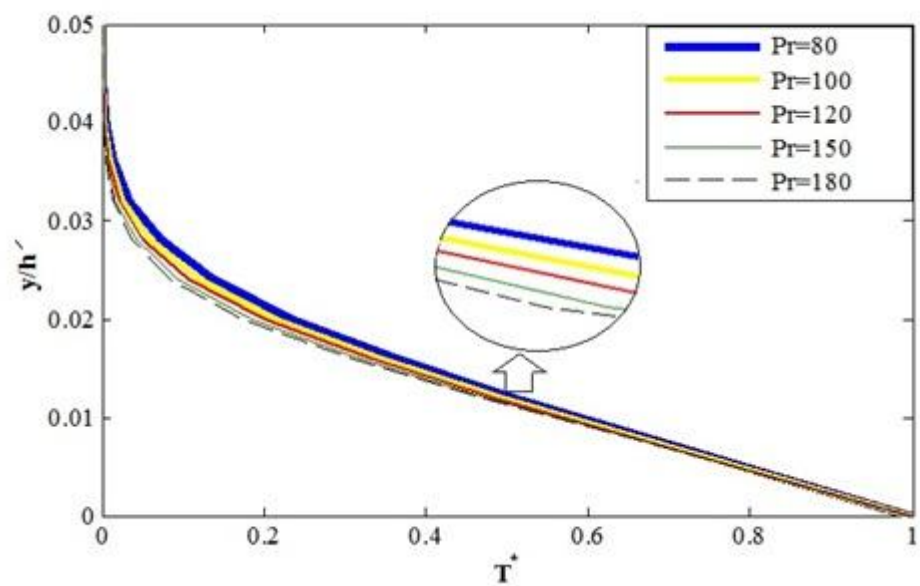
در این بخش تأثیر تغییرات پارامترهای مختلف بر مشخصه‌های لایه مرزی گرمایی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل از حل عددی در سه بخش گرمایش (دما دیواره ثابت)، سرمایش (دما دیواره ثابت) و شار ثابت گزارش شده است. در حالت گرمایش دمای دیواره برابر ۳۷۳ K و دمای سیال ورودی برابر ۲۷۸ K است. بدین ترتیب سیال سرد با حرکت بر روی صفحه داغ، گرم خواهد شد. در حالت سرمایش دمای دیواره برابر ۲۷۸ K و دمای سیال ورودی برابر ۳۷۳ K می‌باشد؛ بنابراین سیال گرم با حرکت بر روی صفحه سرد، دمای آن کاهش یافته و سرد خواهد شد. در حالت شار ثابت نیز شار ثابتی بر روی دیوار تابیده شده است.

#### ۴-۶-۲-۱- بررسی تأثیر تغییرات عدد پراتل بر مشخصه‌های لایه‌مرزی گرمایی

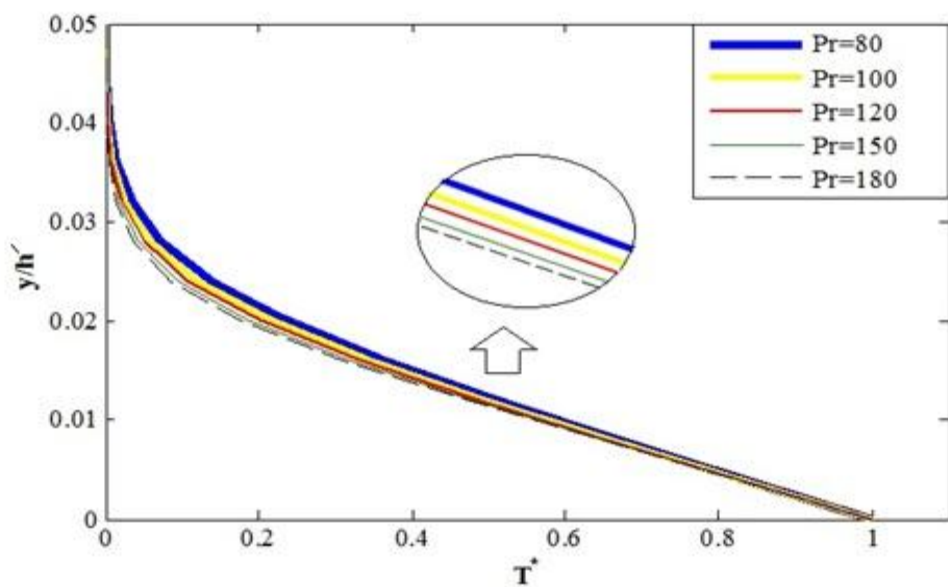
به منظور بررسی تأثیر تغییرات عدد پراتل بر مشخصه‌های لایه‌مرزی، در این بخش در اختلاف تنش برابر ۰/۰۰۱۵ و گرادیان فشار برابر ۰/۳، به مطالعه نمودارهای دما، لایه‌مرزی گرمایی و ناسلت محلی پرداخته شده است. رده پراتل‌های بررسی شده در این تحقیق نسبت به سیال نیوتنی بسیار بزرگ‌تر می‌باشد، علت این است که اکثر سیالات غیر نیوتنی نظیر مواد پلیمری، دارای ضریب نفوذ حرارتی ( $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ ) بسیار کوچکی هستند، به طوری که بسیاری از آن‌ها جز عایق‌های حرارتی محسوب می‌شوند؛ بنابراین این گونه سیالات ضریب انتقال حرارت ( $k$ ) بسیار کوچکی دارند، پس بزرگ بودن عدد پراتل با توجه به رابطه (۲-۶۲) منطقی به نظر می‌رسد.

در ابتدا در شکل ۴-۵۶ ضخامت لایه‌مرزی گرمایی در دو حالت TD و TI مقایسه شده است. همانند لایه‌مرزی سرعت، ضخامت لایه‌مرزی گرمایی نیز در حالت TI ضخیم‌تر از حالت TD می‌باشد. دمای بی بعد سیال نیز همانطور که در شکل ۴-۵۰ تا شکل ۴-۵۵ نشان داده شده است که در ابتدا از یک شروع شده و در راستای عمود بر جریان کاهش پیدا کرده است تا در نهایت به مقدار ثابتی می‌رسد که این مقدار ثابت همان دمای سیال ورودی می‌باشد. لازم به ذکر است که به ازای عدد پراتل بزرگ‌تر، تغییرات دما کمتر،  $\frac{\partial T^*}{\partial y}$  کوچک‌تر، می‌باشد. تغییرات عدد پراتل تأثیر بسزایی بر ضخامت لایه‌مرزی گرمایی دارد که در شکل ۴-۵۸ تا شکل ۴-۶۱ گزارش شده است. همانطور که در نمودارها مشهود است با افزایش عدد پراتل ضخامت لایه‌مرزی گرمایی کاهش می‌یابد، علت این امر این است که با افزایش عدد پراتل پخش هیدرودینامیکی به پخش حرارتی بیشتر شده بنابراین نفوذ گرمایی در جریان سیال کمتر می‌شود. همچنین تغییرات عدد ناسلت در در طول صفحه در پراتل‌های مختلف در شکل ۴-۶۳ تا شکل ۴-۶۵ گزارش شده است. افزایش عدد ناسلت در طول صفحه مشاهده می‌شود.

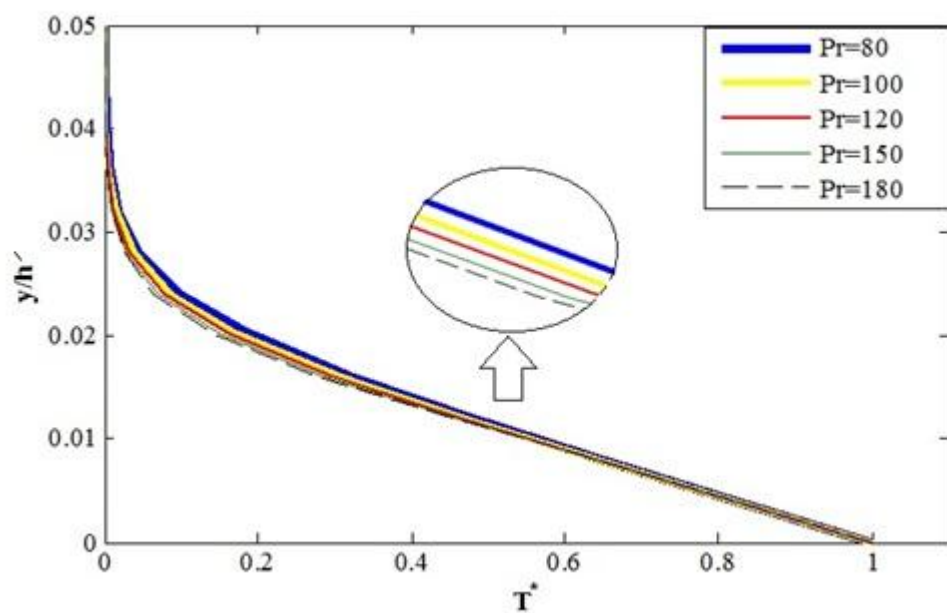




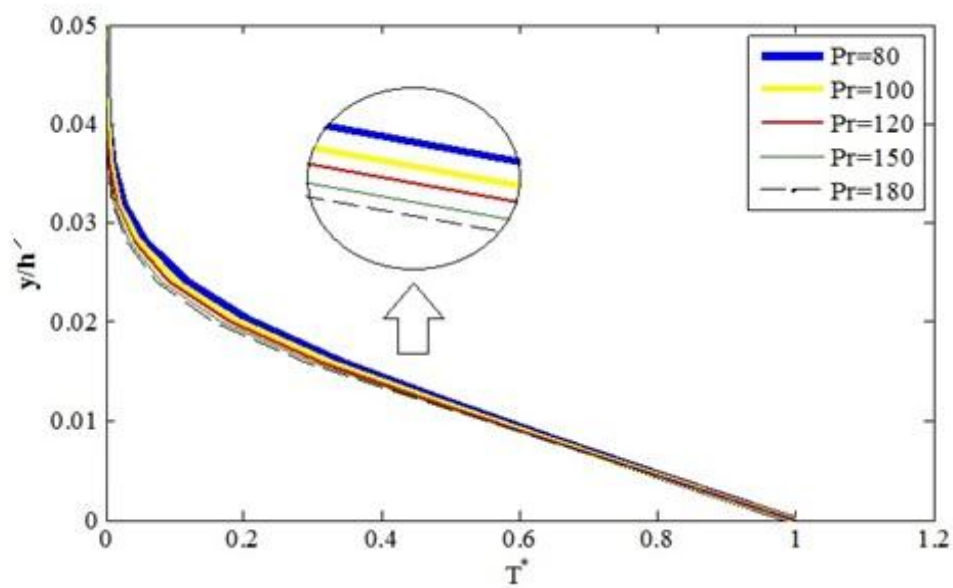
شکل ۴-۵۰ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در حالت گرمایش TI



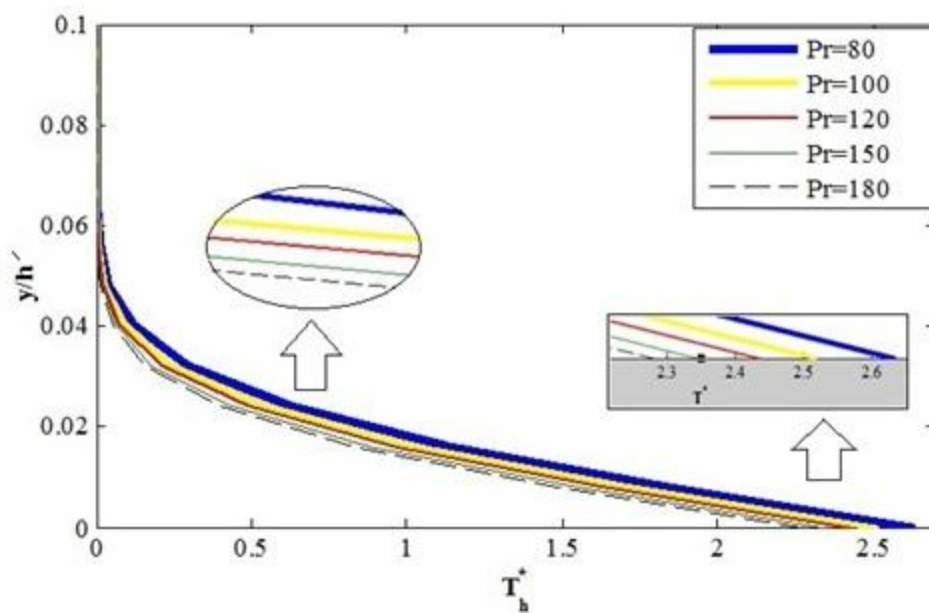
شکل ۴-۵۱ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در حالت سرمایش TI



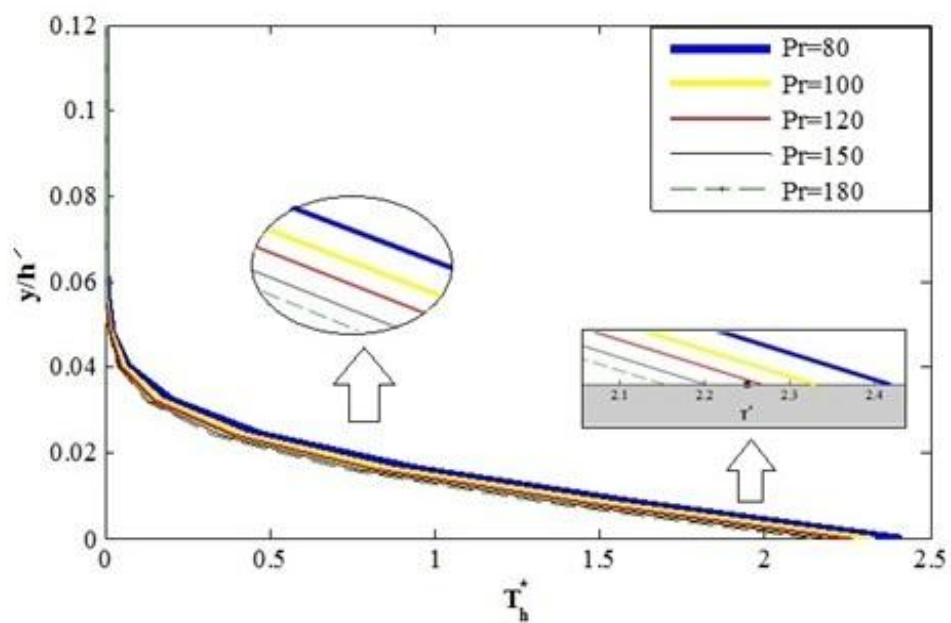
شکل ۴-۵۲ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در حالت گرمایش TD



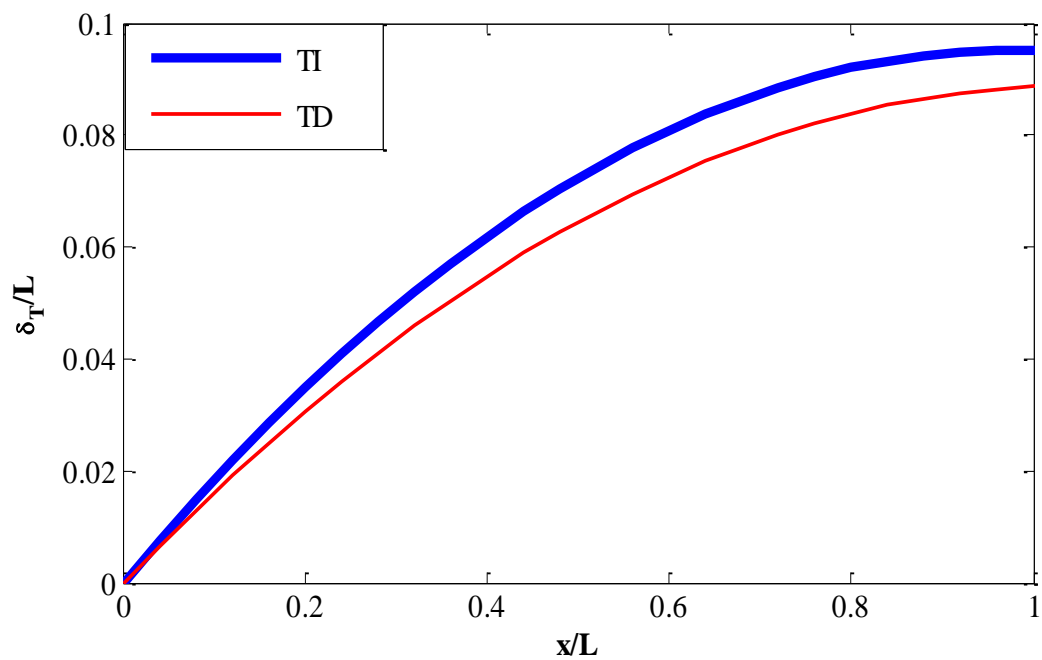
شکل ۴-۵۳ پروفیل دما در پرانتل‌های مختلف در حالت سرمایش TD



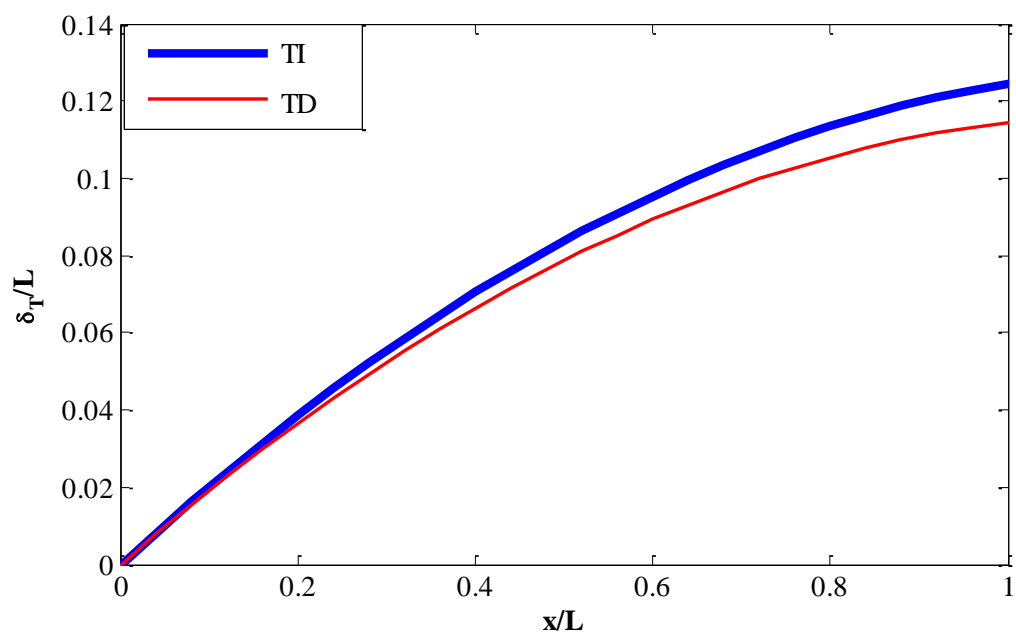
شکل ۴-۵۴ پروفیل دما در پیرانتل‌های مختلف در حالت شار ثابت TI



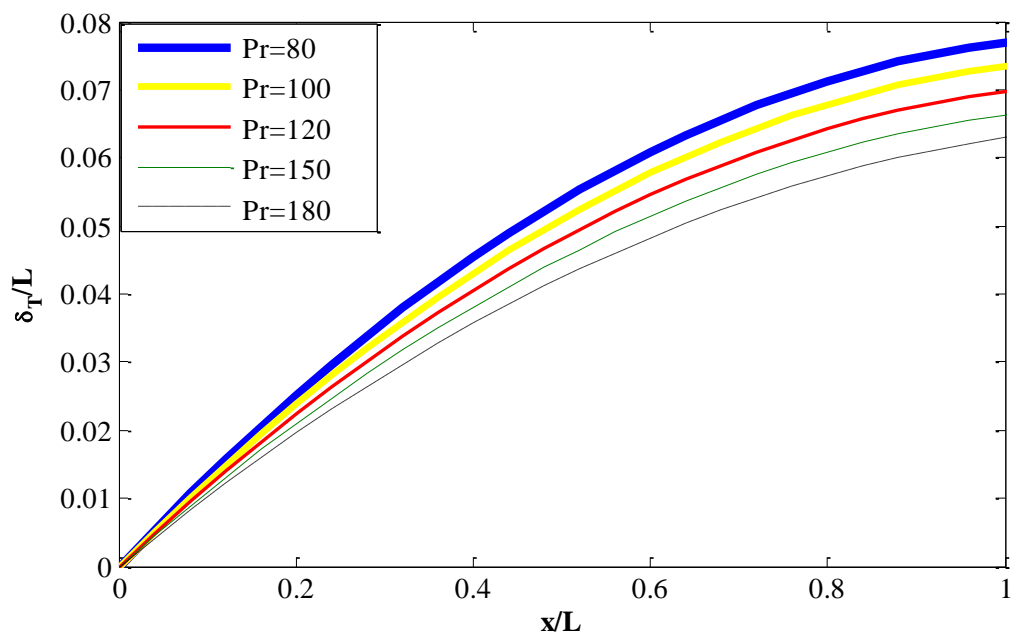
شکل ۴-۵۵ پروفیل دما در پیرانتل‌های مختلف در حالت شار ثابت TD



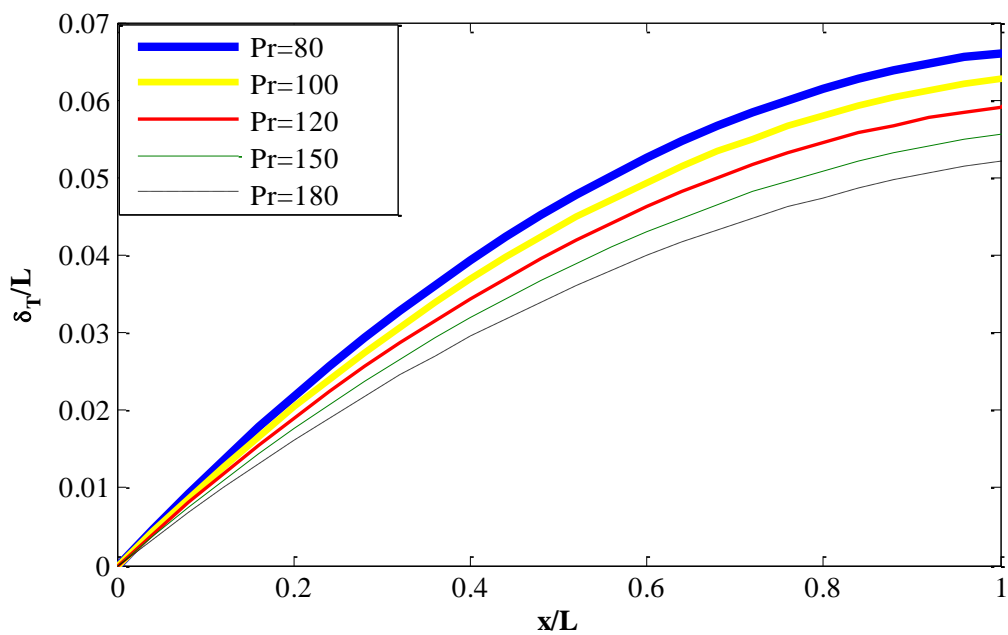
شکل ۴-۵۶ مقایسه ضخامت لایه مرزی گرمایی در دو حالت TI و TD



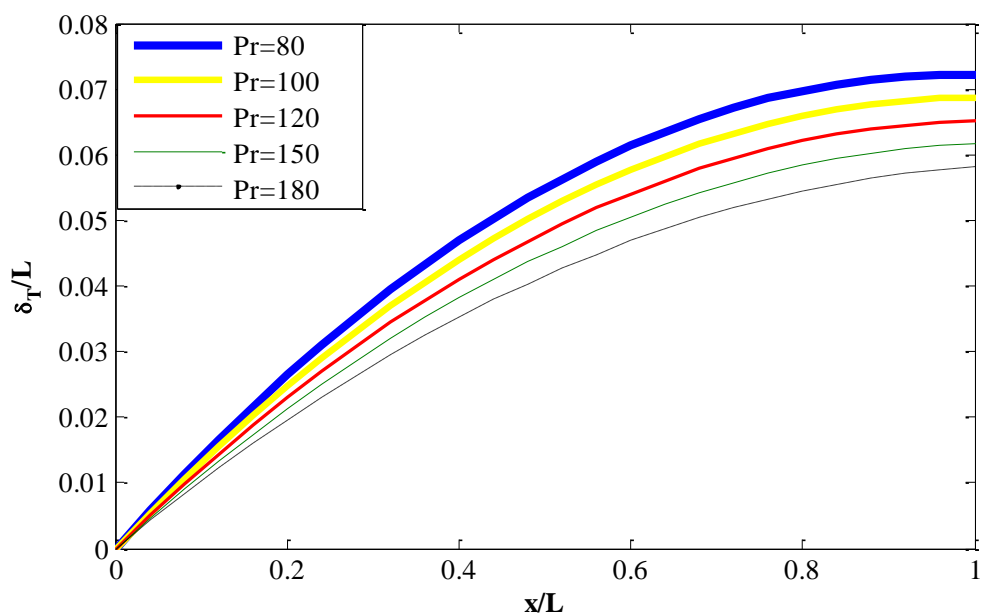
شکل ۴-۵۷ مقایسه ضخامت لایه مرزی در شار ثابت در دو حالت TI و TD



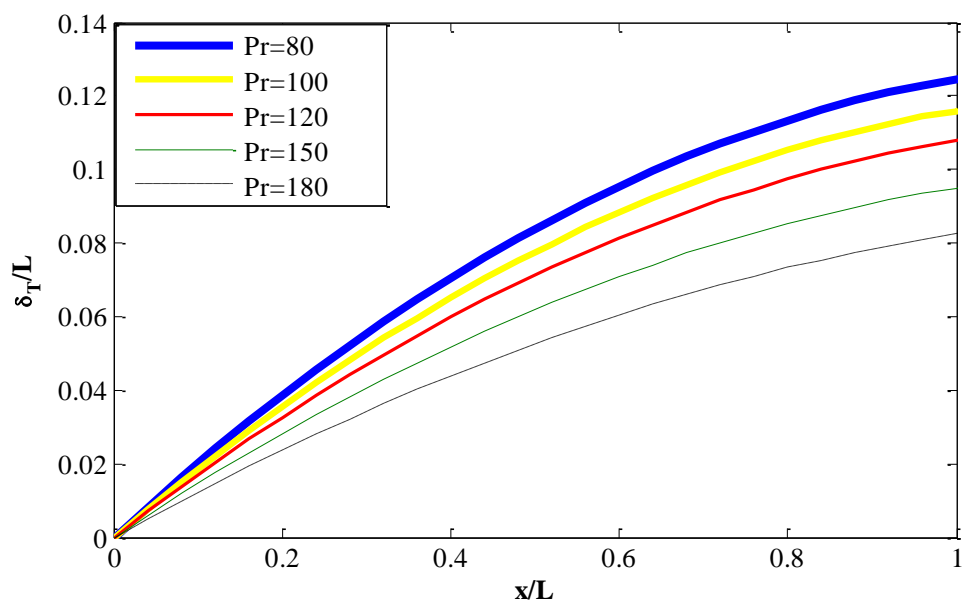
شکل ۴-۵۸ مقایسه لایه مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در حالت گرمایش TI



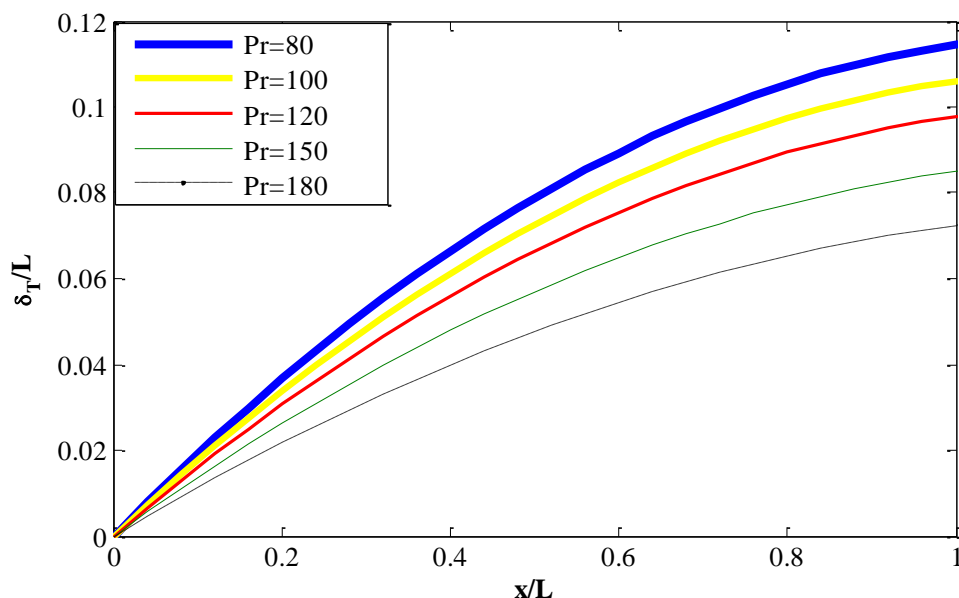
شکل ۴-۵۹ مقایسه لایه مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در حالت گرمایش TD



شکل ۴-۶ مقایسه لایه مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در حالت سرمایش TD



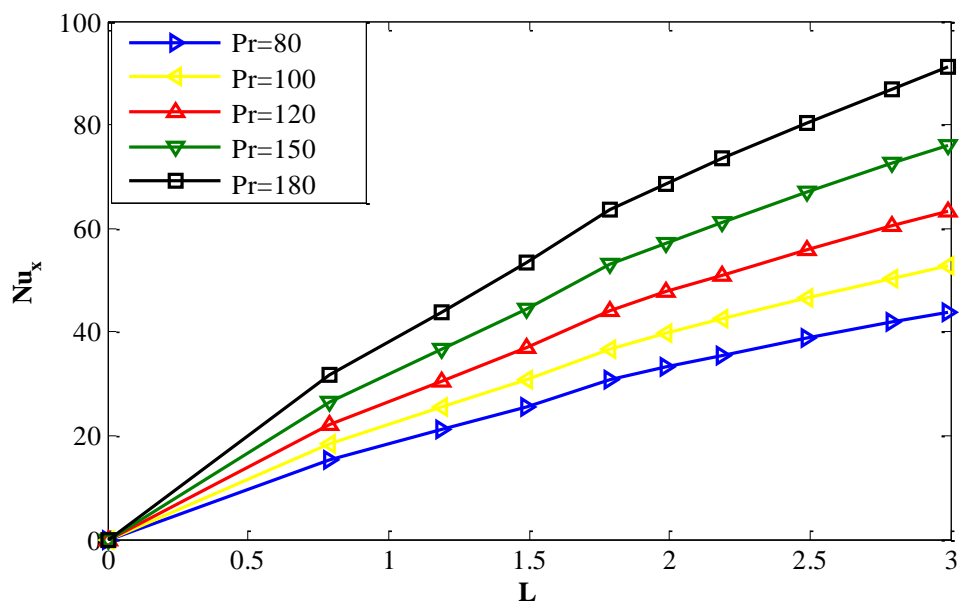
شکل ۴-۶ مقایسه لایه مرزی گرمایی در پرانتل‌های مختلف در حالت شار ثابت TI



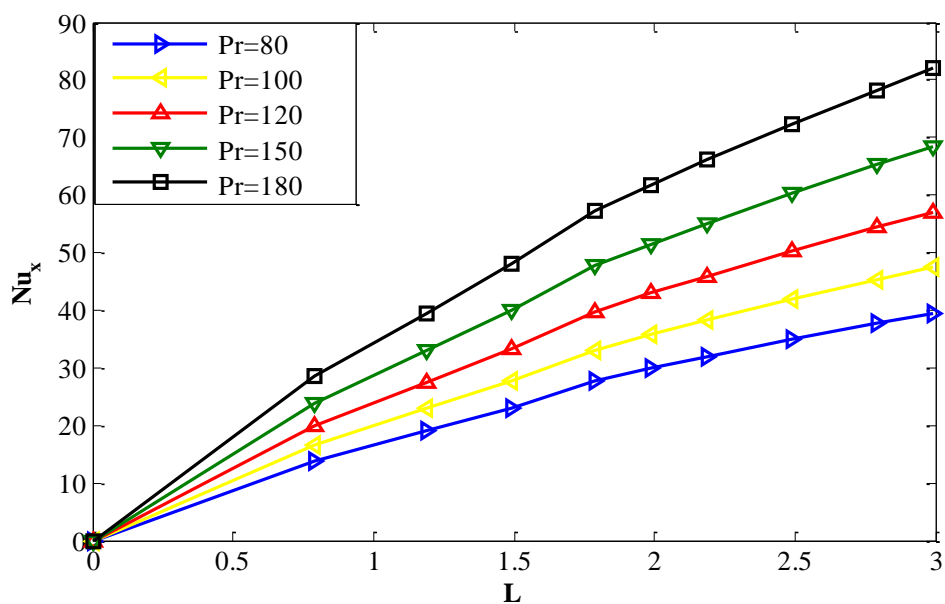
شکل ۴-۶۲ مقایسه لایه مرزی در پیرانتل‌های مختلف در حالت شار ثابت TD

در شکل ۴-۶۳ تا شکل ۴-۶۷ دیده می‌شود که با حرکت در طول صفحه ناسلت محلی افزایش می‌یابد علت افزایش عدد ناسلت اینست که حرکت سیال عامل انتقال حرارت جابجایی آزاد است، در طول صفحه بیشتر می‌شود. در ابتدا صفحه که سیال حرکت ندارد، میزان انتقال حرارت هم کم است، با حرکت در راستای صفحه، رینولدز محلی افزایش می‌یابد بنابراین سرعت نیز افزایش دارد که خود موجب افزایش چشمگیر عدد ناسلت می‌شود.

همچنین دیده می‌شود که هرچه عدد پیرانتل بزرگ‌تر است، ناسلت محلی نیز مقدار بزرگ‌تری را به خود می‌گیرد. عدد پیرانتل نسبت ضخامت لایه مرزی سرعت به لایه مرزی گرمایی می‌باشد بنابراین هرچه پیرانتل جریانی کوچک‌تر باشد، ضخامت لایه مرزی آن بزرگ‌تر است ( $\frac{\partial T^*}{\partial y}$  کوچک‌تر) پس  $h_x$  جریان کوچک‌تر و در نتیجه عدد پیرانتل آن جریان نیز کمتر است.

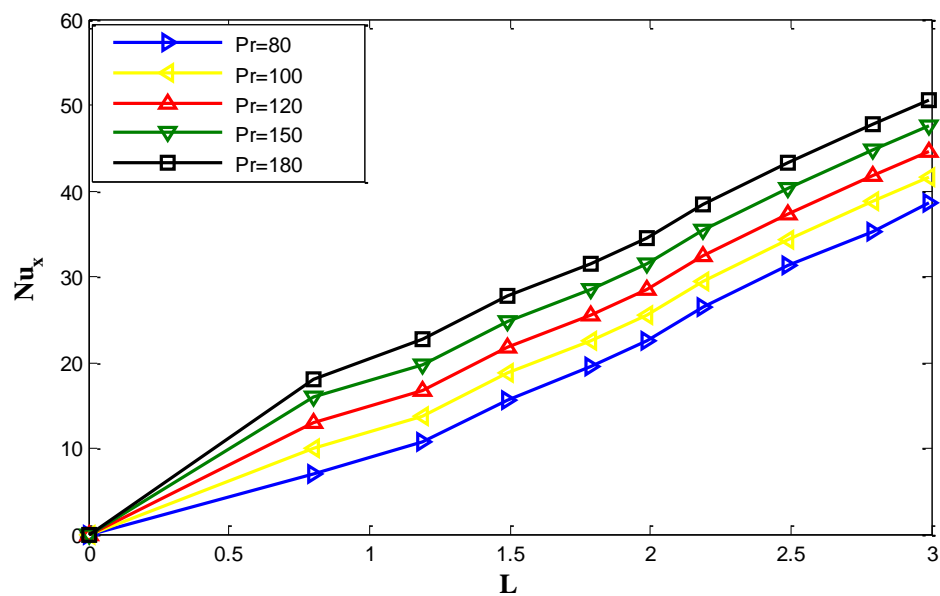


شکل ۴-۶۳ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل در حالت گرمایش TI

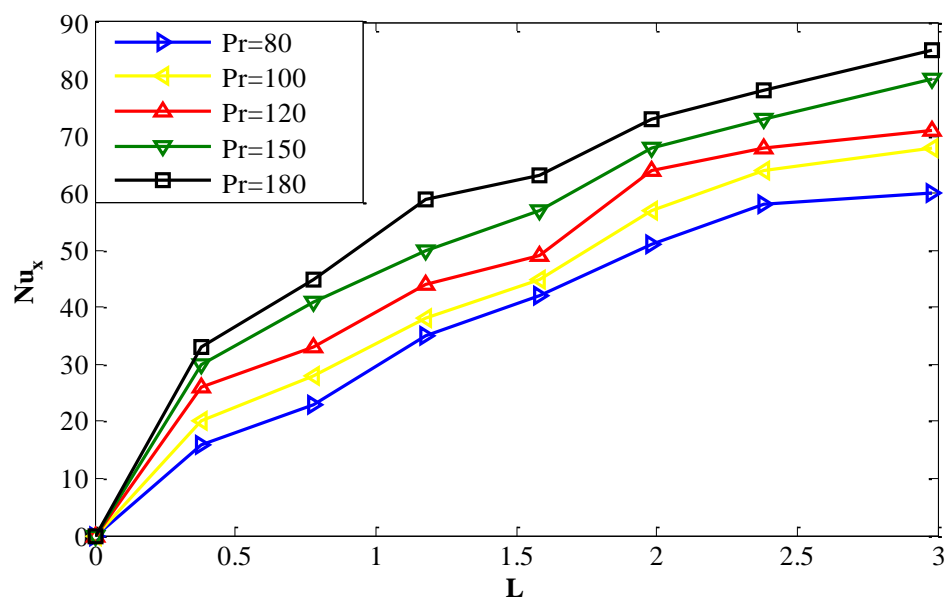


شکل ۴-۶۴ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل در حالت گرمایش TD

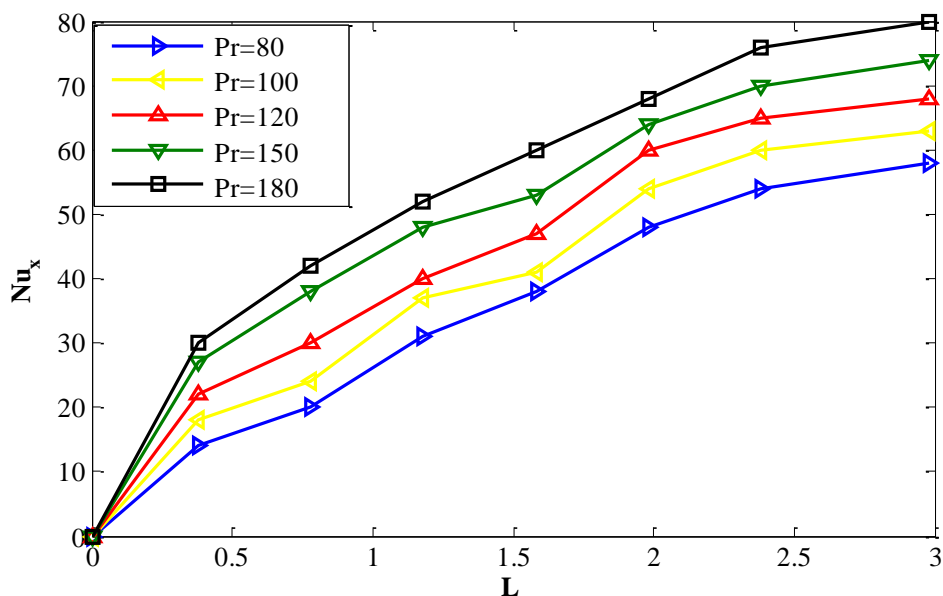




شکل ۴-۶۵ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پیرانتل در حالت سرمایش TD



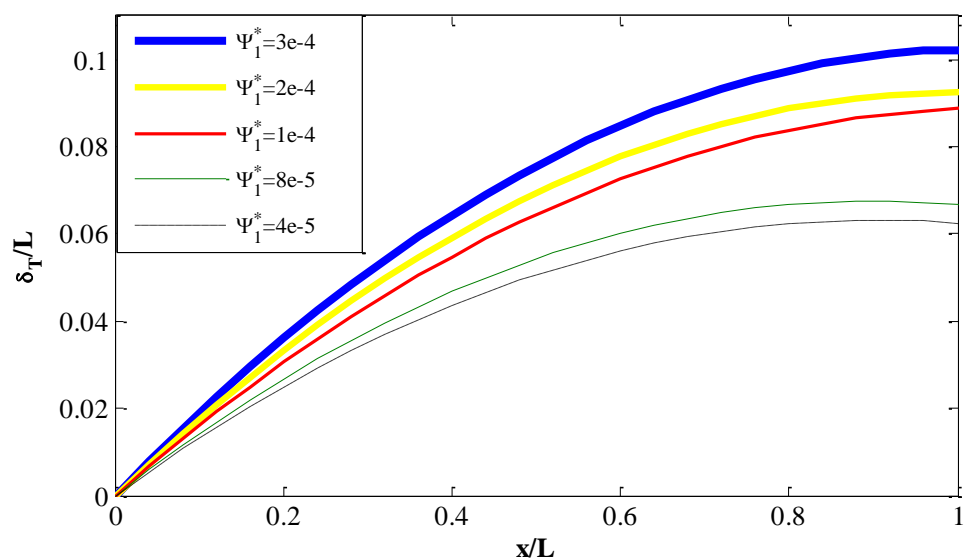
شکل ۴-۶۶ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پیرانتل در حالت شار TD



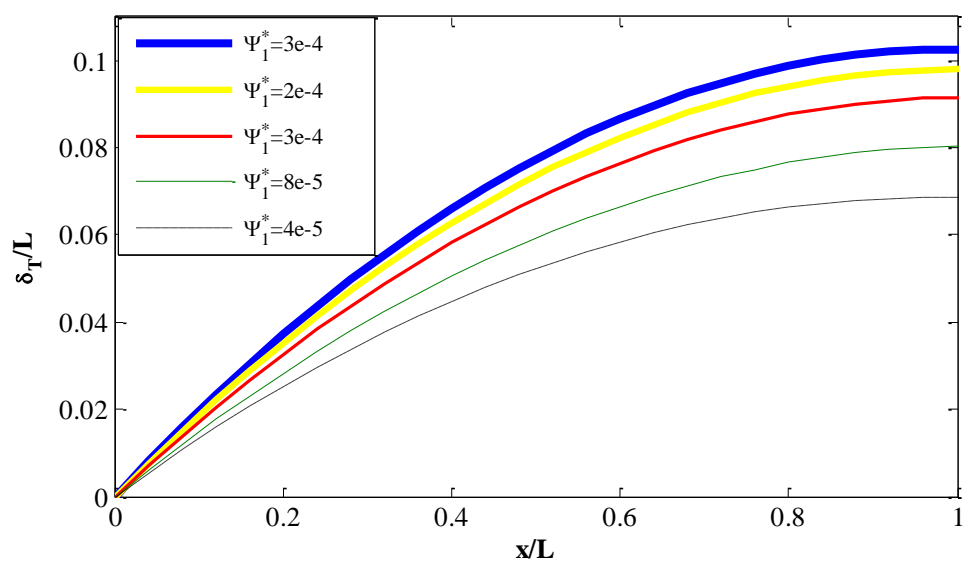
شکل ۴-۶۷ تغییرات عدد ناسلت محلی در راستای صفحه به ازای تغییرات پرانتل در حالت شار TI

#### ۴-۶-۲- بررسی تاثیر اختلاف تنش نرمال اول بر ضخامت لایه مرزی گرمایی

در ادامه تاثیر تغییرات اختلاف تنش نرمال اول بر ضخامت لایه مرزی گرمایی مورد مطالعه قرار گرفته است. همانطور که دیده می شود با افزایش اختلاف تنش نرمال اول، همانند لایه مرزی هیدرودینامیکی افزایش ضخامت را خواهیم داشت. در واقع ایجاد نیروی عمود بر جریان و برانگیختگی سیال، علاوه بر لایه مرزی هیدرودینامیکی، لایه مرزی گرمایی را نیز دست خوش تغییرات میکند.



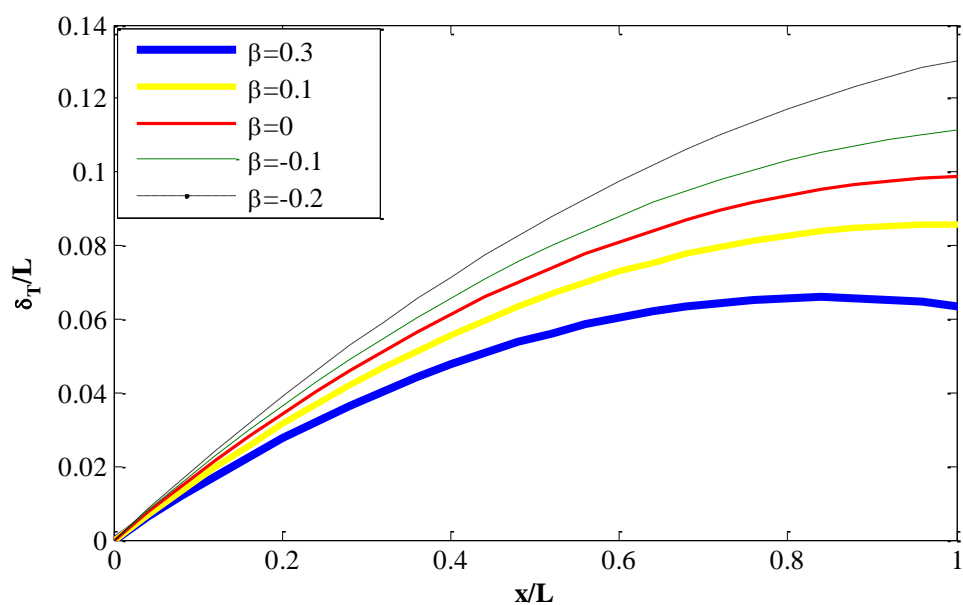
شکل ۴-۶۸ مقایسه لایه مرزی گرمایی در اختلاف تنش نرمال مختلف در حالت گرمایش TD



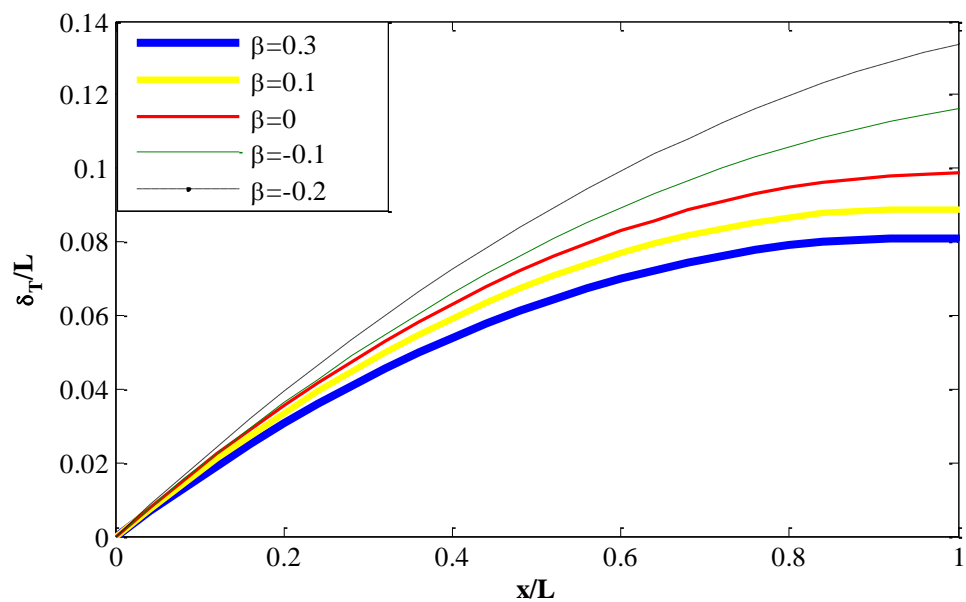
شکل ۴-۶۹ مقایسه لایه مرزی گرمایی در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت گرمایش TI

#### ۴-۶-۲-۳- بررسی تاثیر تغییرات گرادیان فشار بر ضخامت لایه مرزی گرمایی

همانند لایه مرزی هیدرو دینامیکی، تاثیر تغییرات گرادیان فشار بر ضخامت لایه مرزی گرمایی نیز مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. در اینجا نیز با افزایش گرادیان فشار (کاهش  $\beta$ ) ضخامت لایه مرزی گرمایی افزایش می یابد.

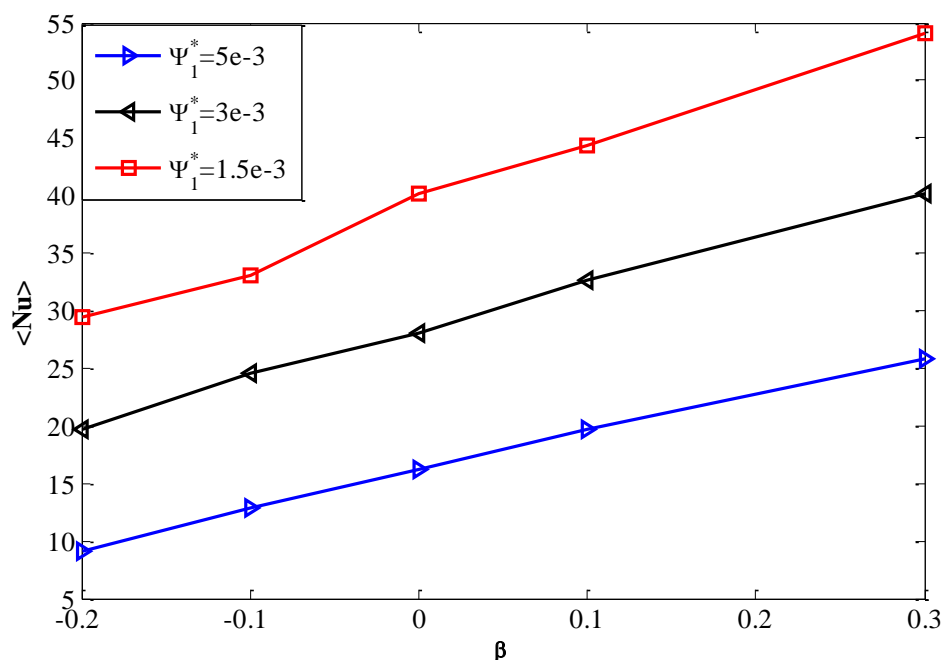


شکل ۴-۷۰ مقایسه ضخامت لایه مرزی گرمایی در گرادیان فشارهای مختلف در حالت گرمایش TD

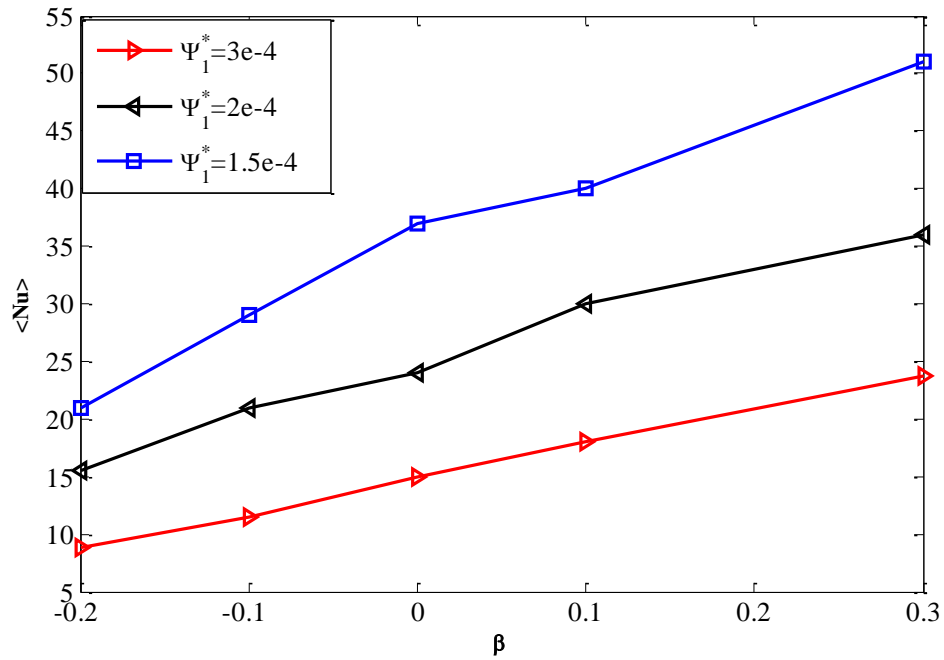


شکل ۷۱-۴ مقایسه ضخامت لایه مرزی گرمایی در حالت سرمایش TD

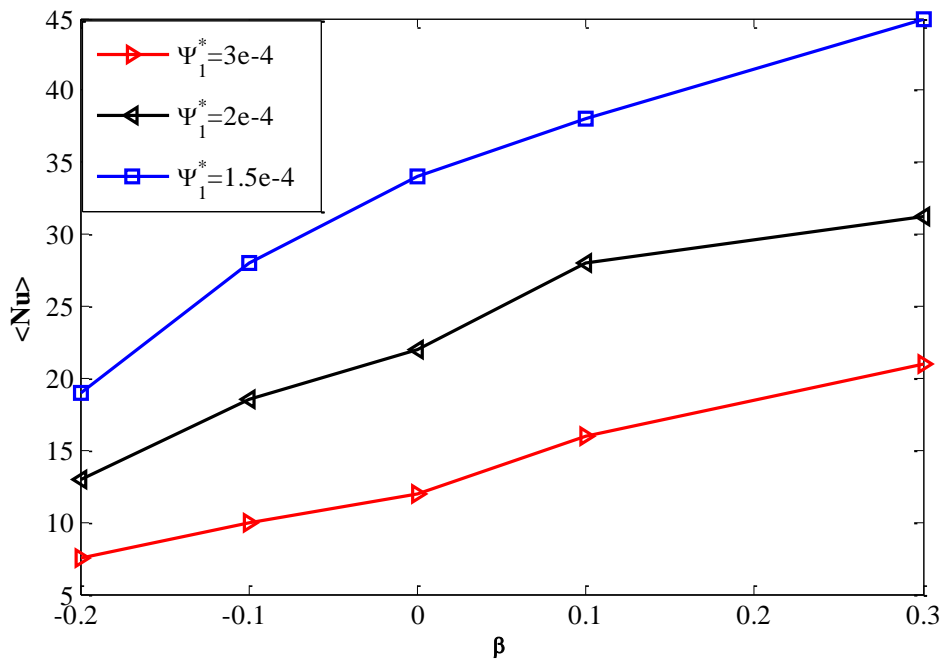
در این قسمت به بررسی تغییرات عدد ناسلت متوسط در گرادیان فشارهای مختلف و ضریب اختلاف تنش نرمال متفاوت پرداخته می‌شود. با دقت در شکل‌ها دیده می‌شود که با افزایش  $\beta$ ، ناسلت متوسط افزایش می‌یابد. علت این است که با افزایش  $\beta$  سرعت حرکت سیال افزایش می‌یابد، بنابراین سیال زوتر به دما جریان آزاد می‌رسد و  $\frac{dT}{dy}$  بزرگ‌تری را دارد، بنابراین  $\bar{h}_x$  جریان افزایش می‌یابد و به دنبال آن افزایش ناسلت متوسط را خواهیم داشت. همچنین مشاهده می‌شود، با افزایش ضریب اختلاف تنش نرمال اول، ناسلت متوسط کاهش می‌یابد. همانطور که در بخش قبل دیده شد، افزایش ضریب اختلاف تنش نرمال اول، افزایش ضخامت لایه مرزی گرمایی را به دنبال دارد، پس  $\frac{dT}{dy}$  در یک مقطع خاص از صفحه ( $\frac{x}{L} = 0.5$ ) مقدار کمتری خواهد داشت؛ بنابراین ناسلت کلی نیز کاهش خواهد یافت.



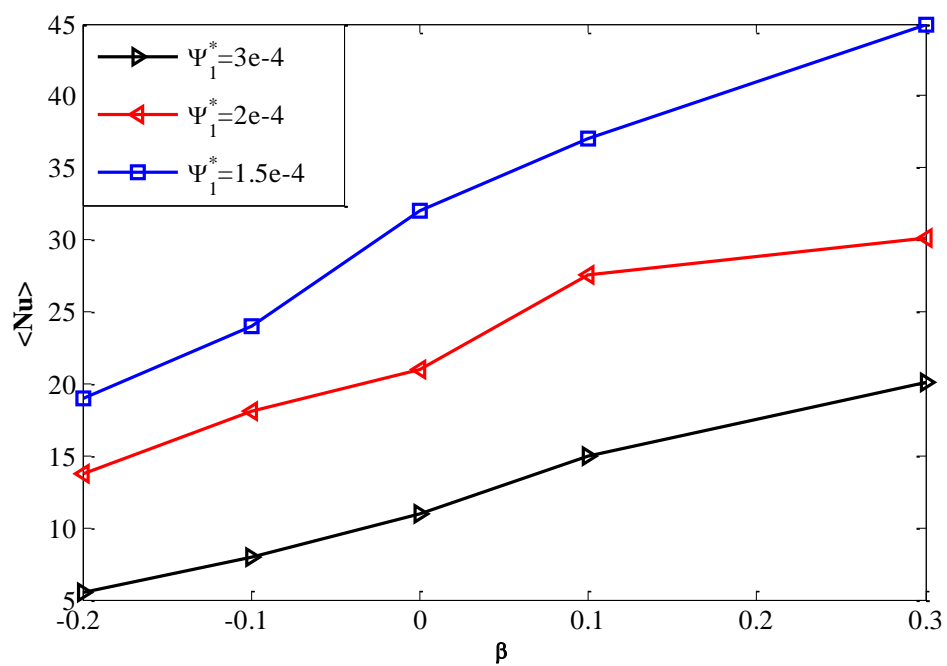
شکل ۴-۷۲ تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب  $\beta$  در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت گرمایش TD



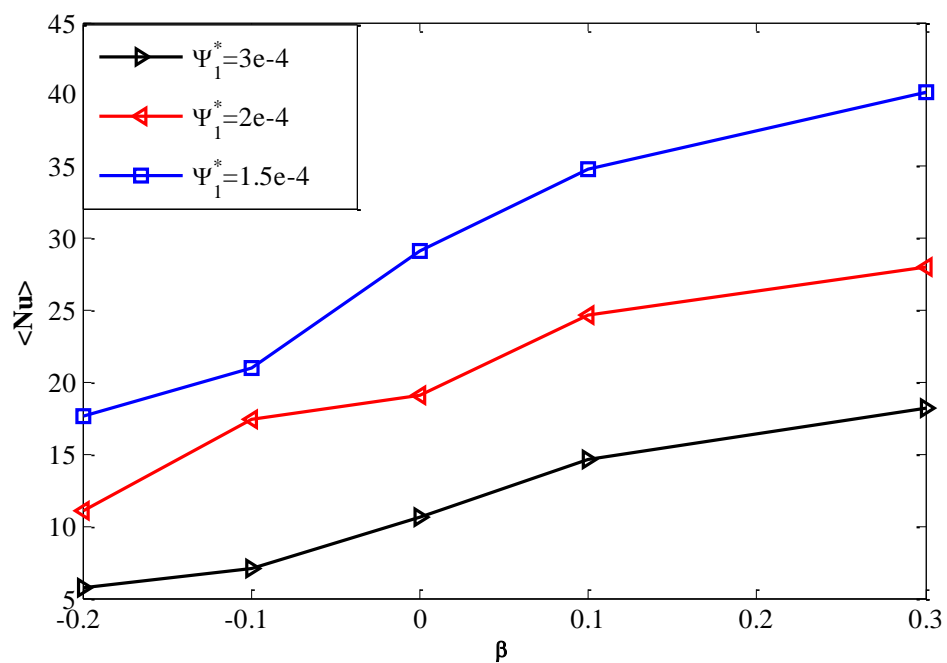
شکل ۷۳-۴ تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب  $\beta$  در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت سرمایش TD



شکل ۷۴-۴ تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب  $\beta$  در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت TI



شکل ۴-۷۵ تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب  $\beta$  در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت شار ثابت TD



شکل ۴-۷۶ تغییرات عدد ناسلت متوسط بر حسب  $\beta$  در اختلاف تنش نرمال اول متفاوت در حالت شار ثابت TI





## ۵- فصل پنجم

### نتیجه‌گیری و پیشنهادها

## ۵-۱- نتیجه‌گیری

در این بخش به‌مرور کلی نتایج حاصل از تحقیق حاضر برای جریان لایه‌مرزی و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک باوجود ترم گرادیان فشار (فالکنر-اسکن) پرداخته‌شده است. همانطور که پیش‌تر نیز اشاره گردید، مطالعه جریان لایه‌مرزی ازجمله مسائل کلاسیک و پایه‌ای در مکانیک سیالات محسوب می‌شود که دارای کاربردهای عملی بسیار مهمی می‌باشد. تاکنون تحقیقات جامع و متنوعی در این زمینه بر روی سیالات نیوتنی صورت پذیرفته است، اما کمبود این تحقیقات در زمینه سیالات غیرنیوتنی و به‌طریق‌اولی سیالات ویسکوالاستیک غیرقابل کتمان است. هدف اصلی این پژوهش، شناخت اثرات ویسکوالاستیک بر روی پارامترهای لایه‌مرزی و انتقال حرارت در مسئله فالکنر-اسکن می‌باشد.

به این منظور از رویکرد عددی استفاده گردید، در رویکرد عددی از نرم‌افزار متلب استفاده گردید. در این تحقیق برای نخستین بار جهت بررسی جریان لایه‌مرزی و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در مسئله فالکنر-اسکن، از مدل مرتبه دوم به‌عنوان معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک به همراه وابستگی برخی خواص سیال از قبیل لزجت، ضریب رسانش و ظرفیت حرارتی ویژه تابعی از دمای نقطه‌ای سیال استفاده‌شده است. صحت نتایج شبیه‌سازی عددی از طریق بررسی استقلال پاسخ‌ها از شبکه و همچنین مقایسه نتایج در حالت نیوتنی با حل تحلیلی ارزیابی گردید. در شبیه‌سازی عددی اثر پارامترهای عدد رینولدز، اختلاف تنش نرمال اول و همچنین ترم گرادیان فشار بر مشخصه‌های لایه‌مرزی هیدرودینامیکی موردبررسی قرار گرفت و نشان داده شد که افزایش گرادیان فشار و همچنین افزایش اختلاف تنش نرمال اول هر یک به‌طور مجزا موجب افزایش ضخامت لایه‌مرزی و میزان ضریب درگ خواهد شد. در مبحث مربوط به انتقال حرارت لایه‌مرزی گرمایی در اعداد پرانتل مختلف همچنین در گرادیان فشار و اختلاف تنش نرمال اول متعدد پرداخته‌شده است

به‌طور کلی نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر را می‌توان به‌طور خلاصه به‌صورت زیر بیان نمود:

۱- در حل عددی نشان داده شد که افزایش اختلاف تنش نرمال اول موجب افزایش ضخامت لایه‌مرزی هیدرودینامیکی خواهد شد. در سیال ویسکوالاستیک وجود ترم اختلاف تنش نرمال اول موجب ایجاد نیروی عمود بر جریان می‌گردد، بنابراین بر خاستگی در جریان سیال ویسکوالاستیک در راستای عمود بر جریان رخ خواهد داد. افزایش اختلاف تنش نرمال اول در سیال موجب شده سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی، دیرتر به مقدار بیشینه سرعت خود که همان سرعت جریان آزاد است، برسد، در نتیجه ضخامت لایه‌مرزی، ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتوم در سیال ویسکوالاستیک بیشتر از حالت نیوتنی می‌باشد. این قضیه در لایه‌مرزی گرمایی سیال ویسکوالاستیک نیز برقرار است، یعنی با افزایش ضریب اختلاف تنش نرمال اول ضخامت لایه مرزی گرمایی نیز افزایش می‌یابد.

۲- گرادیان فشار تاثیر بسیار واضح و مهمی را بر روی تمامی خصوصیات لایه‌مرزی سیال ویسکوالاستیک خواهد گذاشت آنچه که بیشتر از همه در مورد این گونه جریانات خودنمایی می‌کند افزایش ضخامت لایه‌مرزی در گرادیان فشار معکوس ( $\beta < 0$ ) است که نمی‌توان به‌سادگی از کنار آن گذشت. ما در این تحقیق، شاهد افزایش چشمگیر این پارامتر ( $\delta$ ) به ازای مقادیر مختلف  $\beta$  نسبت به صفحه تخت بوده ایم. از طرفی این افزایش در ضخامت لایه‌مرزی سبب می‌شود که شاهد افزایش پارامترهای دیگری از جمله ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتوم باشیم. تاثیر گرادیان فشار بر ضخامت لایه‌مرزی گرمایی نیز دارای روندی مشابه لایه‌مرزی هیدرودینامیکی می‌باشد.

۳- در یک  $\Psi_1^*$  ثابت، با افزایش گرادیان فشار مساعد، از انجایی که ضخامت لایه مرزی گرمایی کاهش می‌یابد، ناسلت متوسط نیز افزایش می‌یابد. در رواقع کاهش ضخامت لایه مرزی افزایش انتقال حرارت جابجایی و افزایش ناسلت متوسط را به دنبال دارد. به بیان دیگر با افزایش  $\beta$ ، سرعت حرکت

سیال افزایش می‌یابد، بنابراین سیال زوتر به دما جریان آزاد می‌رسد و  $\frac{dT}{dy}$  بزرگ‌تری را دارد، بنابراین  $\bar{h}_x$  جریان افزایش می‌یابد و به دنبال آن افزایش ناسلت متوسط را خواهیم داشت.

۴- در جریان سیال ویسکوالاستیک، در اختلاف تنش نرمال اول ثابت، با گذر از گرادیان فشار نامساعد به مساعد، ضخامت لایه مرزی کاهش می‌یابد، بنابراین تنش برشی بر روی سطح افزایش یافته و ضریب درگ مقدار بیشتری خواهد داشت.

۵- در جریان سیال ویسکوالاستیک در یک  $\beta$  ثابت، با افزایش اختلاف تنش نرمال اول تنش برشی روی صفحه کاهش می‌یابد بنابراین ضریب درگ کاهش می‌یابد.

۶- در این تحقیق نشان داده شده است که بسیاری از پدیده‌هایی که در لایه مرزی جریان سیال نیوتنی در مسئله فالکنر-اسکن وجود دارد، برای جریان سیال ویسکوالاستیک نیز صادق است. در اینجا به چند مورد اشاره می‌شود

- روند تغییرات ضخامت لایه مرزی و ضریب درگ بر اثر افزایش عدد رینولدز، روندی مشابه با سیال نیوتنی می‌باشد. با افزایش عدد رینولدز، ضخامت لایه مرزی کاهش می‌یابد؛ که در اعداد رینولدز بالا، خط جریان خارج از لایه مرزی تقریباً موازی با صفحه است. در واقع حضور صفحه اثر خیلی کمی روی خطوط جریان خارج از لایه مرزی دارد.

- با افزایش عدد پرانتل ضخامت لایه مرزی گرمایی در سیال ویسکوالاستیک کاهش می‌یابد

- با افزایش عدد پرانتل در طول صفحه، عدد ناسلت محلی در سیال ویسکوالاستیک افزایش می‌یابد.

۷- در یک گرادیان فشار ثابت، با افزایش ضریب اختلاف تنش نرمال اول ناسلت متوسط در طول

صفحه، کاهش می یابد. از انجایی که با افزایش  $\Psi_1^*$  ضخامت لایه مرزی گرمایی افزایش می یابد و لایه مرزی همانند عایق گرمایی برای انتقال حرارت جابجایی عمو می کند، بنابراین کاهش ناسلت متوسط منطقی بنظر می رسد.

۸- کدهای CFD نوشته شده برای بررسی انتقال حرارت جریان سیالات ویسکوالاستیک عموما در اعداد پرانتل بزرگ (معمولا بزرگتر از ۵۰) نتیجه می دهد، علت این است که اکثر سیالات غیر نیوتنی نظیر مواد پلیمری، دارای ضریب نفوذ حرارتی بسیار کوچکی هستند، به طوری که بسیاری از آنها جز عایق های حرارتی محسوب می شوند. بنابراین این گونه سیالات ضریب انتقال حرارت ( $k$ ) بسیار کوچکی دارند، پس بزرگ بودن عدد پرانتل منطقی به نظر می رسد.

۹- با ارزیابی نتایج و نمودارهای مربوط به مشخصه های لایه مرزی در دو حالت وابستگی خواص سیال ویسکوالاستیک به دما و عدم وابستگی خواص سیال به دما می توان به این نتیجه رسید که در حالت TD ضخامت لایه مرزی گرمایی و هیدرودینامیکی، ضخامت مومنتوم و ضخامت جابجایی کمتر از حالت TI می باشد. دلیل این موضوع این است که وقتی دما سیال بر خواص آن تاثیر قوی بگذارد، ویسکوزیته سیال نسبت به حالتی که تاثیر دما وجود نداشته باشد، مقدار کمتری را خواهد داشت.

۱۰- در شکل های مربوط به حالت TD در این بخش مشاهده شد که تغییرات سرعت، ضخامت لایه مرزی، ضخامت مومنتوم و ضخامت مومنتوم با تغییر ضریب اختلاف تنش نرمال اول بسیار کمتر از حالت TI می باشد. با توجه به اینکه گروه غالبی از سیالات ویسکوالاستیک، مذاب های پلیمری هستند و در این حالت تفاوت دمای زیادی مشاهده می شود، بنابراین استفاده از حالت TD که به خوبی تغییرات دمایی را بر خواص سیال لحاظ می کند، به واقعیت نزدیک تر است، پس کم بودن تاثیر ضریب اختلاف تنش نرمال اول بر مشخصه های سرعت و لایه مرزی در صنایع مرتبط با مواد پلیمری باید مدنظر قرار گرفته شود. علت

این است که  $k=0$  در حالت TD تابع شدید دما می باشد و به صورت لگاریتمی با آن تغییر می کند و این بدین معناست که با تغییر  $k=0$ ، تغییرات  $\Psi_1^*$  در حالت TD به اندازه TI چشم گیر نمی باشد.

## ۵-۲- پیشنهادها

موارد زیر جهت ادامه تحقیقات بر روی لایه مرزی سیالات غیرنیوتنی پیشنهاد می گردد:

- ۱- مطالعه جریان آشفته در مسئله لایه مرزی فاکنر-اسکن در جریان سیال ویسکوالاستیک.
- ۲- بررسی جریان سیال سه بعدی در مسئله لایه مرزی فاکنر-اسکن در سیال ویسکوالاستیک.
- ۳- انجام تحقیقات آزمایشگاهی در مسئله لایه مرزی فاکنر-اسکن در جریان سیال ویسکوالاستیک.
- ۴- حل مسئله فوق برای صفحات قابل نفوذ متخلخل

## مراجع

- [1]. Prandtl, L.(1904), "Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Heidelberg".
- [2]. Schlichting, H., Klaus Gerstner, (2000), "**Boundary layer theory**", Springer science and Business media, New York.
- [3]. Schubauer, S., Galen, B. and Klebanoff, P. ( 1956), "**Contributions on the mechanics of boundary-layer transition**". National Advisory Committee for Aeronautics.
- [4]. Hartree, D. (1937), "**On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer**". Cambridge Univ Press.
- [5]. Pretsch, J. (1941) "Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg", **Advisory group for aerospace research(France)**, pp. 58-75
- [6]. Obrenski, H. J., Morkovin, M. V., Landahl, M., Wazzan, A. R., & Okamura, T. T. (1969). "**A portfolio of stability characteristics of incompressible boundary layers**".
- [7]. Falkner, V. and Skan, S.W. (1931). "Solutions of the boundary-layer equations", **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and J. of Science**, 12, 80, pp. 865-896.
- [8]. White, F.M. and Isla Corfield, (2006), "**Viscous fluid flow**", Vol. 3, New York: McGraw-Hill.
- [9]. Pohlhausen, E. (1921), "Der Wärmeaustausch zwischen fester Körpern und Flüssigkeiten", **Z,Angew. Math. Mech.**, 1, pp. 115-121.
- [۱۰]. شیخی نارانی م (۱۳۷۱)، " بررسی خواص، جریان و انتقال حرارت و اختلاط سیالات غیرنیوتنی ". جهاد دانشگاهی امیر کبیر، تهران.
- [11]. Bird, B.R., Armstrong, R.C, and Hassager, O. (1977), "**Dynamics of polymeric liquids**". Vol. 2, New York.
- [12]. Phan-Thien, N. (2002), "**Understanding Viscoelasticity**". Vol. 3.



[13]. Malkin, A.I (1994) "**Rheology Fundamentals**", First Eddition. Chem. Tech. Publishing.

[۱۴]. نوروژی. م. پایان نامه دکتری (۱۳۸۸)، "بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده دارای مقطع مستطیلی ایستا و چرخان". دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده مکانیک.

[۱۵]. لی م، رابین د و کرمپل ا، مترجم، شعرفاف غ ر (۱۳۷۸) "مقدمه ای بر مکانیک محیط های پیوسته"، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، تهران.

[16]. Larson, R.G., (1988) "**Constitutive equations for polymer melts and solutions**". pp. 364, Butterworths.

[17]. Oldroyd, J. G. (1958), "Non-Newtonian effects in steady motion of some idealized elasticoviscous fluids", **Proc. Roy.Soc.**, London Ser A 245, pp. 278-297.

[18]. Phan-Thien, N and Tanner, R. I. (1977), "A new constitutive equation derived from network theory", **J. Non-Newton. Fluid**, 2, pp. 353-365.

[19]. Blasius, H. (1908) "**Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung**".

[20]. Lin, H.-T. and L.-K. Lin, (1987) ,"Similarity solutions for laminar forced convection heat transfer from wedges to fluids of any Prandtl number". **Int. J. of Heat Mass Tran.**, 6 , 30, pp. 1111-1118.

[21]. Rosales-Vera, M. and Valencia, A. (2010) ,"Solutions of Falkner–Skan equation with heat transfer by Fourier series". **Int . Comm. Heat Mass Trans.**, 7, 37, pp. 761-765.

[22]. Fang, T. and J. Zhang, (2008) "An exact analytical solution of the Falkner-Skan equation with mass transfer and wall stretching", **Int. J. of Non. Lin. Mech.**, 9, 43, pp.1000-1006.

[23]. Nagano, Y., Tagawa M. and Tsuji T. (1993), " Efect of adverse Pressure gradients on mean flow and turbulence statistics in a boundary layer" ,**Turbulent shear flows**.

[24]. Baskaran, v., A.J.Smits and p.n.Joubert (1987), A turbulent flow over a urved,hill,Part 1. Growth of an internal boundarylayer,**j.Fluid Mech**, 182, pp. 47-83.

[25]. Meroney, R.N. and Bradshaw, P. (1975),"Turbulent boundary layer growth over a longitudinally curved surface", **AIAA J**, 11, 13, pp. 1448-1453.

- [26]. Cebeci, T. and Smith, A.M.O. (1974), "**Analysis of turbulent boundary layers**", Academic press, New YORK.
- [27]. Van den Berg, B. (1979) , "Boundary layer measurements on a two-dimensional wing with flap", **NRL TR79009 U**.
- [28]. Carolyn D. Aubertine, John K. Eaton (2006), "Reynolds number scaling in a non-equilibrium turbulent boundary layer with mild adverse pressure gradient", **Int. J. Heat Fluid Flow**, **4**, **4**, pp. 575-566.
- [29]. Kuo, B.-L. (2005), "Heat transfer analysis for the Falkner–Skan wedge flow by the differential transformation method", **Int. J. of Heat Mass Tran.**, **23**, **48**, pp.5036-5046.
- [30]. Volchkov, Makarov, E., and Sakhnov, A.Y. (2012) , "Heat transfer in the boundary layer with asymptotic favorable pressure gradient". **Int. J. of Heat Mass Tran.**, **4** , **55**, pp. 1126-1132.
- [31]. Acrivos, A., Shah, M.J. and Peterson, E.E. (1960) , "Momentum and heat transfer in laminar boundary layer flow of Non-Newtonian fluid past external surface", **A. I. C. H. J.**, **6**, pp. 312.
- [32]. Cossali, G. (2006) , "Similarity solutions of energy and momentum boundary layer equations for a power-law shear driven flow over a semi-infinite flat plate". **Eur. J. Mech. B Fluids**, **1**, **25**, pp. 18-32.
- [33]. Zheng, L. and X. Zhang (2002), "Skin friction and heat transfer in power-law fluid laminar boundary layer along a moving surface", **Int. J. of Heat Mass Tran.**, **45**, **13**, pp. 2667-2672.
- [34]. Myers, T. (2010), "An approximate solution method for boundary layer flow of a power law fluid over a flat plate". **Int. J. of Heat Mass Tran.**, **11**, **53**, pp. 2337-2346.
- [35]. Berad, D.W. and Walters, K. (1964), "Elastico-viscous boundary layer flows", **proc. Camb. Phil. Soc.**, **60**, pp. 667.
- [36]. Harris, (1977), "**Rheology and non-newtonian flow**", Logman

[۳۷]. صادقی ک ، شریفی م (۱۳۸۲) ، "حل دقیق معادلات لایه مرزی برای یک سیال

ویسکوالاستیک مرتبه دوم در جریان بالای یک صفحه ساکن"، نشریه دانشکده فنی ، صفحه ۱۳۲-

- [38]. Abel, M.S., Siddheshwar, P. and Nandeppanavar, M.M (2007), "Heat transfer in a viscoelastic boundary layer flow over a stretching sheet with viscous dissipation and non-uniform heat source", **Int. J. of Heat Mass Tran.**, **5**, **50**, pp. 960-966.
- [39]. Postelnicu, A. and Pop, I (2011), "Falkner–Skan boundary layer flow of a power-law fluid past a stretching wedge", **Appl. Math. Comput**, **9**, 217, pp. 4359-4368.
- [40]. Olagunju, D.O. (2006), "The Falkner–Skan flow of a viscoelastic fluid", **Int. J. Non. Lin. Mech.**, **41**, 6, pp. 825-829.
- [41]. Cengel Yunus A., Robert H. Turner and John M. Cimbala (2004), **"Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences"**, McGraw Hill, 2. nd. Edition, 2004.
- [ ۴۲ ]. شلیختینگ، مترجم، مظفر علی مهربابیان، (۱۳۸۴)، انتشارات دانشگاه باهنر کرمان.
- [43]. Giesekus, H. (1982), "A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility", **J. Non-Newton. Fluid**, **11**, pp. 69-109.
- [44]. Olagunju, D.O. (2006), "Local similarity solutions for boundary layer flow of a FENE-P fluid", **Appl. Math. Comput.**, **1**, **173**, pp. 593-602.
- [45]. K. A., Hoffmann, Chiang, S. T. (1989), **"Computational Fluid Dynamics for Engineers"**, First Eddition, EES, Texas.
- [۴۶]. جلالی ع، کیهانی م، نوروزی م، (۱۳۹۰) "مدل سازی جریان آرام و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در یک کانال مستطیلی به همراه اثرات ناحیه ورودی"، مجله علمی پژوهشیمکانیک سازه ها و شاره ها.
- [47]. Mark, J.E. (2007), **"Physical properties of polymers handbook"**. Vol.1076, Springer.