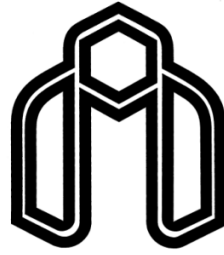


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

# تحلیل تنش در ورق مربعی ساخته‌شده از مواد FG با گشودگی دایروی تحت بارهای درون‌صفحه‌ای

دانشجو: امین عامری

استادان راهنما:

دکتر مهدی قنّاد کهن‌تویی

دکتر محمد جعفری

پایان‌نامه ارشد جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

شهریور ۹۳



مدیریت تحصیلات تکمیلی  
فرم شماره (۶)

### باسمه تعالی

شماره:  
تاریخ:  
ویرایش:

### فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای ..... امین عامری ..... رشته ..... مهندسی مکانیک ..... گرایش ..... طراحی کاربردی ..... تحت عنوان تحلیل تنش در ورق مربعی ساخته شده از مواد FG با گشودگی دایروی تحت بارهای درون صفحه‌ای که در تاریخ ۱۳۹۳/۶/۲۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> قبول ( با درجه : ..... امتیاز ..... )	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input type="checkbox"/> مردود
--	------------------------------------	--------------------------------

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)      ۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)      ۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما			
۲- استاد راهنما			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی			
۵- استاد ممتحن			
۶- استاد ممتحن			

رئیس دانشکده : امضاء

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد امین عامری

تحت عنوان:

تحلیل تنش در ورق ساخته شده از مواد FG با گشودگی دایروی تحت بارهای

درون صفحه ای

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

## تقدیم

---

تقدیم به ریشه‌های زندگی‌ام

**پدرم و مادرم**

که بدون ایشان خشک و بی‌روحم

## تشکر و قدردانی

---

با تشکر فراوان از اساتید محترم آقایان دکتر مهدی فنّاد کهن‌تویی و دکتر محمد جعفری،  
که همچون پدری دلسوز؛ مهربان و شمع‌ی سوزان، من را در این تحقیق یاری کردند.

## تعهدنامه

اینجانب امین عامری دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک-گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی تحلیل تنش در ورق ساخته‌شده از مواد FG با گشودگی دایروی تحت بارهای درون‌صفحه‌ای، تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهن‌تویی و دکتر محمد جعفری متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### تاریخ

### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

تغییرات پیوسته در خواص مکانیکی و حرارتی مواد ناهمگن (FGM) منجر به حذف تنش‌های پسماند و اثر تمرکز تنش و در نتیجه افزایش استحکام این مواد می‌شوند. به‌خاطر همین خواص ویژه، محققان زیادی علاقه‌مند به بررسی رفتار و استفاده از این قبیل مواد در صنایع مختلف هستند. طراحی درست ورق ناهمگن حاوی گشودگی، مستلزم دانستن اطلاعات دقیق در مورد تغییر شکل و توزیع تنش در نقاط مختلف ورق به‌ویژه در اطراف گشودگی است. در این تحقیق سعی می‌شود، به کمک روش توابع پتانسیل مختلط، حلی تحلیلی برای محاسبه توزیع تنش دوبعدی اطراف گشودگی دایروی در ورق بلند ناهمگن ارائه شود. بارگذاری به‌صورت کشش ثابت و یکنواخت تک‌محوری و دومحوری به ورق اعمال می‌شود؛ دور گشودگی نیز بار به‌صورت فشار یکنواخت به گشودگی اعمال می‌شود. بررسی تأثیر مقدار بار فشاری اعمال شده بر مرز گشودگی در توزیع تنش اطراف آن، یکی از اهداف مهم این تحقیق است. جهت ناهمگنی و تغییرات مدول الاستیسیته، در جهت شعاعی و هم‌مرکز با گشودگی در نظر گرفته شده است. برای توصیف تغییر خواص مکانیکی ورق مورد نظر از یک تابع نمایی که دارای شعاع همگرایی مشخصی است، استفاده می‌شود. از روش اجزای محدود برای راستی‌سنجی نتایج حل تحلیلی، در تمام حالات بارگذاری برای ورق همگن و ناهمگن استفاده شده است. باوجود بارگذاری فشاری در داخل گشودگی دایروی علاوه بر تنش محیطی، مقدار تنش شعاعی نیز قابل توجه است؛ از تنش فن میزس برای بررسی تنش در اطراف گشودگی استفاده شده است. با بررسی نتایج تنش محیطی برای حالات مختلف بارگذاری می‌توان نتیجه گرفت، که تأثیر جنس لایه‌های میانی بر روی مقدار تنش محیطی، در حالتی که مرز گشودگی عاری از بار است، بیشتر می‌باشد.

**کلیدواژگان:** ورق FG، مواد ناهمگن، گشودگی دایروی، توابع پتانسیل، تمرکز تنش



## مقالات

---

۱- جعفری م.، قناد م.، عامری ا.، "بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای در ورق FG تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای"، ارسال شده به مجله‌ی مهندسی مکانیک مدرس.

۲- عامری ا.، قناد م.، جعفری م.، (۱۳۹۲)، "تحلیل عددی ورق بلند از مواد تابعی (FGM) با گشودگی دایروی تحت بارگذاری‌های مختلف درون‌صفحه‌ای"، همایش ملی مهندسی مکانیک، ص ۸۴، ملایر.

## فهرست مطالب

---

۱	فصل ۱ تاریخچه‌ی علمی
۱-۱	پیشگفتار
۲-۱	مقدمه‌ای بر ورق‌ها
۳-۱	دسته‌بندی ورق‌ها
۱-۳-۱	دیدگاه هندسی
۲-۳-۱	دیدگاه مادی
۴-۱	تئوریهای تحلیل ورق‌ها
۱-۴-۱	تئوری کلاسیک خیز کوچک ورق نازک
۲-۴-۱	تئوری غشایی ورق‌ها
۳-۴-۱	تئوریهای ورق‌های ضخیم
۵-۱	مقدمه‌ای بر مواد ناهمگن
۱-۵-۱	تاریخچه‌ی مواد ناهمگن
۲-۵-۱	مدل‌سازی ریاضی مواد همگن
۶-۱	پیشینه‌ی تحقیق
۷-۱	جمع‌بندی
۲۳	فصل ۲ ورق همگن با گشودگی دایروی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای
۱-۲	پیش‌گفتار
۲-۲	استخراج معادلات
۳-۲	حل تحلیلی موجود در مراجع

- ۴-۲ تحلیل اجزای محدود ۳۵
- ۵-۲ معرفی نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس ۳۶
- ۶-۲ روند تحلیل عددی ۳۷
- ۱-۶-۲ هندسه ورق ۳۷
- ۲-۶-۲ تعریف خواص مواد ۳۸
- ۳-۶-۲ مش‌بندی و اعمال شرایط حل ۳۹
- ۴-۶-۲ اعمال شرایط مرزی و بارگذاری ۴۱
- ۷-۲ بررسی نتایج ۴۲
- ۱-۷-۲ ورق با نسبت ابعادی ۲۰ ۴۳
- ۲-۷-۲ ورق با نسبت ابعادی ۱۰ ۴۶
- ۸-۲ جمع‌بندی ۴۸
- فصل ۳ ورق ناهمگن با گشودگی دایروی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای ۵۱**
- ۱-۳ پیش‌گفتار ۵۲
- ۲-۳ مدل ریاضی ورق ناهمگن ۵۲
- ۳-۳ استخراج معادلات ۵۶
- ۴-۳ بررسی نتایج ۵۶
- ۱-۴-۳ ورق با نسبت ابعادی ۲۰ ۵۸
- ۲-۴-۳ ورق با نسبت ابعادی ۱۰ ۶۳
- ۳-۴-۳ تأثیر شعاع همگرایی ورق ۶۸
- ۵-۳ جمع‌بندی ۷۵

فصل ۴ ورق همگن و ناهمگن تحت بار فشاری در داخل گشودگی ۷۷

۷۸ ۱-۴ پیش‌گفتار

۷۸ ۲-۴ معادلات حاکم

۸۱ ۳-۴ بررسی نتایج

۸۱ ۱-۳-۴ کشش تک‌محوری

۸۸ ۲-۳-۴ بارگذاری دومحوری  $n=2$

۹۴ ۳-۳-۴ بارگذاری دومحوری  $n=-2$

۱۰۰ ۴-۴ جمع‌بندی

فصل ۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها ۱۰۲

۱۰۳ ۱-۵ نتیجه‌گیری

۱۰۳ ۱-۱-۵ ورق همگن تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای

۱۰۳ ۲-۱-۵ ورق ناهمگن تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای

۱۰۴ ۳-۱-۵ ورق تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای و بارگذاری فشار یکنواخت درون گشودگی

۱۰۴ ۲-۵ پیشنهادها

مراجع ۱۰۶

## فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ شماتیک یک ورق نازک مستطیلی در مختصات کارتزین [۲]..... ۶
- شکل ۲-۱ فرض‌های لایه میانی تئوری رایسنر [۲]..... ۹
- شکل ۳-۱ نیروهای داخلی و خارجی در المانی از لایه میانی [۲]..... ۱۰
- شکل ۴-۱ نمای مقطع استخوان..... ۱۲
- شکل ۵-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف..... ۱۴
- شکل ۱-۲ شماتیک کانتور  $L$ ..... ۲۵
- شکل ۲-۲ شماتیک ورق مورد مطالعه تحت بار دومحوره..... ۲۸
- شکل ۳-۲ هندسه ورق با نسبت ابعادی  $\frac{D}{L} = \frac{1}{20}$  در نرمافزار آباکوس..... ۳۸
- شکل ۴-۲ مش‌بندی کل ورق در نرمافزار آباکوس..... ۳۹
- شکل ۵-۲ نحوه چیدمان و تراکم المانها در اطراف گشودگی..... ۴۰
- شکل ۶-۲ درصد خطای مقادیر تنش محیطی حاصل از تحلیل عددی نسبت به حل تحلیلی موجود در مراجع..... ۴۱
- شکل ۷-۲- اعمال شرایط مرزی متقارن در محل برش یک پهلام ورق در آباکوس..... ۴۲
- شکل ۸-۲ توزیع تنش در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوره..... ۴۴
- شکل ۹-۲ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوره..... ۴۴
- شکل ۱۰-۲ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دومحوره..... ۴۵
- شکل ۱۱-۲ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دومحوره..... ۴۶
- شکل ۱۲-۲ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت کشش تک‌محوره..... ۴۶
- شکل ۱۳-۲ جابه‌جایی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت کشش تک‌محوره..... ۴۷
- شکل ۱۴-۲ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق تحت بارگذاری دومحوره..... ۴۸
- شکل ۱۵-۲ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق تحت بارگذاری دومحوره..... ۴۸
- شکل ۱-۳ تغییرات مدول الاستیسیته در جهت شعاعی برای ورق تحت تابع نمایی پیشنهادی..... ۵۳

- شکل ۲-۳ تغییرات مدول لاستیسیته در جهت شعاعی برای ورق تحت تابع توانی (رابطه‌ی ۲-۳) ..... ۵۵
- شکل ۳-۳ تغییرات مدول لاستیسیته نسبت به فاصله از مرکز ورق تحت تابع کسر حجمی ..... ۵۵
- شکل ۴-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک‌محوره ..... ۵۹
- شکل ۵-۳ مقدار جابه‌جایی شعاعی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک‌محوره ..... ۵۹
- شکل ۶-۳ توزیع تنش محیطی در طرف گشودگی برای ورق نوع اول تحت بارگذاری دومحوره ..... ۶۰
- شکل ۷-۳ توزیع تنش محیطی در طرف گشودگی برای ورق نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره ..... ۶۱
- شکل ۸-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوره ..... ۶۲
- شکل ۹-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره ..... ۶۲
- شکل ۱۰-۳ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت کشش تک‌محوره ..... ۶۴
- شکل ۱۱-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت کشش تک‌محوره ..... ۶۴
- شکل ۱۲-۳ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوره ..... ۶۵
- شکل ۱۳-۳ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره ..... ۶۵
- شکل ۱۴-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوره ..... ۶۶
- شکل ۱۵-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره ..... ۶۷
- شکل ۱۶-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف  $m$  ..... ۶۹
- شکل ۱۷-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف  $m$  ..... ۶۹
- شکل ۱۸-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول ..... ۷۰
- شکل ۱۹-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم ..... ۷۰
- شکل ۲۰-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول مقادیر مختلف  $m$  ..... ۷۲
- شکل ۲۱-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم مقادیر مختلف  $m$  ..... ۷۲
- شکل ۲۲-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول مقادیر مختلف  $m$  ..... ۷۳
- شکل ۲۳-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول مقادیر مختلف  $m$  ..... ۷۳
- شکل ۲۴-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم مقادیر مختلف  $m$  ..... ۷۴
- شکل ۲۵-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف  $m$  ..... ۷۴

- شکل ۳-۲۶ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف  $m$  ..... ۷۵
- شکل ۳-۲۷ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف  $m$  ..... ۷۵
- شکل ۴-۱ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ..... ۸۲
- شکل ۴-۲ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی ..... ۸۳
- شکل ۴-۳ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی ..... ۸۴
- شکل ۴-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوری ..... ۸۵
- شکل ۴-۵ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوره ..... ۸۵
- شکل ۴-۶ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوره ..... ۸۶
- شکل ۴-۷ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوره ..... ۸۷
- شکل ۴-۸ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوره ..... ۸۷
- شکل ۴-۹ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوره ..... ۸۸
- شکل ۴-۱۰ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$  ..... ۸۹
- شکل ۴-۱۱ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوره  
.....  $n=2$  ۸۹
- شکل ۴-۱۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تک‌محوره بارگذاری دوماحوره  
.....  $n=2$  ۹۰
- شکل ۴-۱۳ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$  ..... ۹۱
- شکل ۴-۱۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$   
..... ۹۱
- شکل ۴-۱۵ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$  ..... ۹۲
- شکل ۴-۱۶ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$  ..... ۹۳
- شکل ۴-۱۷ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$   
..... ۹۳
- شکل ۴-۱۸ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$  ..... ۹۴

- شکل ۱۹-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$ .....۹۵
- شکل ۲۰-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$ .....۹۵
- شکل ۲۱-۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$ .....۹۶
- شکل ۲۲-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$ .....۹۷
- شکل ۲۳-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$ .....۹۷
- شکل ۲۴-۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$ .....۹۸
- شکل ۲۵-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی .....۹۹
- شکل ۲۶-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی .....۹۹
- شکل ۲۷-۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی .....۱۰۰



## فهرست جدول‌ها

جدول ۱-۳ شعاع همگرایی ورق ناهمگن نسبت به ضریب m	۵۳
جدول ۲-۳ تغییرات مقدار مدول الاستیسیته در جهت شعاعی برای ورق ناهمگن تحت تابع نمایی (۳-۳) برای مقادیر مختلف n	۵۴
جدول ۳-۳ خواص مکانیکی مواد ورق FG	۵۷
جدول ۴-۳ بیشینه تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری دو محوره	۶۱
جدول ۵-۳ بیشینه جابهجایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن	۶۳
جدول ۶-۳ بیشینه تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری دوماحوره	۶۶
جدول ۷-۳ بیشینه جابهجایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن (واحد $10^{-5}mm$ )	۶۷
جدول ۱-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری	۸۴
جدول ۲-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری	۸۶
جدول ۳-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری	۹۰
جدول ۴-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری	۹۳
جدول ۵-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری	۹۶
جدول ۶-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری	۹۸

## فهرست علائم

تنش نرمال در جهت محور X	$\sigma_x$
تنش نرمال در جهت محور Y	$\sigma_y$
تنش برشی در صفحه‌ی XY	$\tau_{xy}$
ناحیه‌ی احاطه شده از جسم توسط کانتور L	S
نیروی وارد شده بر مرز جسم در جهت محور X	$X_n$
نیروی وارد شده بر مرز جسم در جهت محور Y	$Y_n$
جابه‌جایی نقاط روی کانتور L در جهت محور X	$g_l(s)$
جابه‌جایی نقاط روی کانتور L در جهت محور Y	$g_l(s)$
متغییر مختلط مکان	z
تابع تنش ایری	$U(x, y)$
تابع پتانسیل مختلط	$\phi_1(x, y)$
تابع پتانسیل مختلط	$\psi_1(x, y)$
نسبت پواسون	$\nu$
ضریبی ثابت وابسته به جنس ماده	K
مدول الاستیسیته	E
مدول برشی	G
قسمت حقیقی یک جمله‌ی مختلط	$\text{Re}(\ )$
قسمت حقیقی یک جمله‌ی مختلط	$\text{Im}(\ )$
یک طول مرجع	R
ضریب kام جملات تابع پتانسیل $\phi_1$ در لایه‌ی ام	$a_k^j$
ضریب kام جملات تابع پتانسیل $\psi_1$ در لایه‌ی ام	$b_k^j$
تعداد لایه‌های ورق	N
تعداد جملات مثبت و منفی توابع پتانسیل	M
نیروی وارد بر مرز لایه‌ی ام در جهت محور X	$X_n^j$
نیروی وارد بر مرز لایه‌ی ام در جهت محور Y	$Y_n^j$
مدول برشی در لایه‌ی ام	$G_j$
زاویه‌ی نقاط نسبت به محور l	$\theta$

فاصله‌ی نقاط از مبدأ	$r$
تنش نرمال وارد شده بر سطح مرز در نقطه‌ی $ln$ م	$\sigma_n$
تنش برشی وارد شده بر سطح مرز در نقطه‌ی $ln$ م	$\tau_n$
مربع خطای مقادیر حقیقی و محاسباتی تنش در مرز ورق در نقطه‌ی $ln$ م	$r_n^2$
مجموع مربعات خطای تنش برای نقاط مختلفی در مرز ورق	$\Delta$
قطر گشودگی	$D$
طول ورق	$L$
ضریب همگرایی	$m$
نسبت مدول الاستیسیته‌ی لایه‌ی داخلی به خارجی	$K$
مدول الاستیسیته‌ی لایه‌ی داخلی	$E_i$
مدول الاستیسیته‌ی لایه‌ی خارجی	$E_o$
شعاع گشودگی	$R_o$
خاصیت مکانیکی ماده در لایه‌ی داخلی	$P_i$
ضریب ناهمگنی	$n_p$
تنش فن میزس	$\sigma_{Von}$
تنش نرمال وارد بر مرز خارجی در جهت محور ۱	$\sigma_1$
تنش نرمال وارد بر مرز خارجی در جهت محور ۲	$\sigma_2$
نسبت $\sigma_2$ به $\sigma_1$	$n$



## فصل ۱ تاریخچه علمی

## ۱-۱ پیش‌گفتار

در ابتدای این فصل تعریف و مقدمه‌ای بر ورق‌ها به همراه دسته‌بندی و مروری بر تئوری‌های مربوط به آنها، بیان می‌شود. سپس تعریف مواد ناهمگن و مختصری درباره‌ی تاریخچه‌ی این نوع از مواد بررسی می‌شود و همچنین مروری بر تحقیقات انجام شده، در زمینه‌ی تحلیل تنش در ورق‌های نازک همگن و ناهمگن، انجام خواهد شد. در نهایت موضوع مورد مطالعه در این پایان‌نامه و موضوعات هر فصل به‌صورت خلاصه بیان می‌شوند.

## ۲-۱ مقدمه‌ای بر ورق‌ها

ورق‌ها از نظر هندسی، مسطح، صاف و دوبعدی هستند. یعنی یک بعد آن در برابر دو بعد دیگر کوچک می‌باشد. آنها می‌توانند به مرزهایی در امتداد یک خط صاف یا منحنی، محدود شوند. همچنین قابلیت تحمل بارهای عمودی و درون‌صفحه‌ای، استاتیکی و دینامیکی، گسترده و متمرکز را دارند. این نیروهای خارجی توسط گشتاور خمشی و همچنین نیروی برشی عرضی مهار می‌شوند. ورق‌ها در علم مهندسی بسیار پرکاربرد و از اهمیت بسیاری برخوردار هستند. از جمله کاربرد آنها، استفاده در ساخت انواع مخازن، بدنه‌ی ماشین‌آلات، ساختمان‌سازی، کشتی‌سازی و صنایع دریایی، صنایع نظامی و سازه‌های هوا-فضا را می‌توان نام برد. از این‌رو اشکال متنوعی در ورق‌ها در طی سال‌ها و بر حسب نیاز به‌وجود آمده است. [۱]

## ۳-۱ دسته‌بندی ورق‌ها

### ۱-۳-۱ دیدگاه هندسی

ورق‌ها را از نظر هندسی می‌توان به سه دیدگاه دسته‌بندی کرد [۱]

۱. ورق‌های نازک با خیز کم: به ورق‌هایی گفته می‌شود، که نسبت ضخامت به کوچک‌ترین ضلع

کمتر از  $\frac{1}{20}$  باشد و لایه میانی بدون کرنش باقی بماند. همچنین خیز ورق در برابر ضخامت ورق

قابل صرف نظر کردن، باشد.

۲. ورق نازک با خیز زیاد: به ورق‌هایی گفته می‌شود، که نسبت ضخامت به کوچک‌ترین ضلع آن کمتر از  $\frac{1}{20}$  باشد و از کرنش لایه میانی و همچنین نسبت خیز لایه میانی به ضخامت ورق در مقایسه با یک، قابل توجه است.

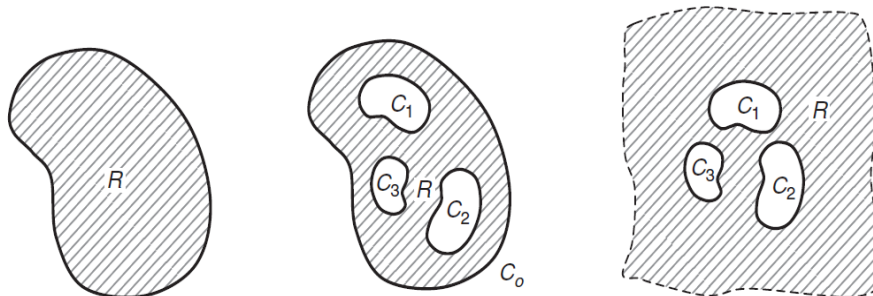
۳. ورق ضخیم: به ورق‌هایی گفته می‌شود، که نسبت ضخامت به کوچک‌ترین ضلع بیشتر از  $\frac{1}{20}$  باشد.

نوع دیگر دسته‌بندی ورق به صورت زیر است. [۲]

۱. ورق محدود یک پارچه: مطابق شکل ۱-۱(آ)، ورق یک پارچه و بدون هیچ مرز داخلی ولی دارای مرزهای خارجی و تنش در نقاط دور از مرزها غیر یکنواخت است.

۲. ورق محدود چندپارچه: مطابق شکل ۱-۱(ب)، ورق علاوه بر مرز خارجی دارای  $k$  مرز داخلی است. و تنش در تمام نقاط ناحیه‌ی خارج از دایره‌ای که همه‌ی  $k$  مرز داخلی ورق را احاطه می‌کند غیر یکنواخت می‌باشد.

۳. ورق نامحدود چندپارچه: مطابق شکل ۱-۱(ج)، ورق دارای مرز خارجی در بی‌نهایت و  $k$  مرز داخلی است و تنش در بی‌نهایت مقداری محدود و یکنواخت باقی می‌ماند.



(آ) ورق محدود

(ب) ورق محدود با چند گشودگی

(ج) ورق بی‌نهایت با چند گشودگی

شکل ۱-۱ دسته‌بندی ورق به صورت ناحیه‌ی محدود و نامحدود [۲]

## ۱-۳-۲ دیدگاه مادی

۱. ورق همگن و همسانگرد: خواص مکانیکی ماده‌ی ورق، در تمام نقاط و در تمام جهتها یکسان می‌باشد.
۲. ورق همگن و ناهمسانگرد: خواص مکانیکی ماده‌ی ورق، در نقاط مختلف یکسان است؛ ولی در هر نقطه از ماده در جهتهای مختلف یکسان نیست.
۳. ورق ناهمگن و همسانگرد: خواص مکانیکی ماده‌ی ورق، در نقاط مختلف یکسان نیست؛ ولی در هر نقطه، در جهتهای مختلف یکسان است.
۴. ورق ناهمگن و ناهمسانگرد: خواص مکانیکی ماده‌ی ورق، در نقاط مختلف و در جهتهای مختلف یکسان نیست [۳].

## ۱-۴-۱ تئوری‌های تحلیل ورق‌ها

### ۱-۴-۱-۱ تئوری کلاسیک خیز کوچک ورق نازک<sup>۱</sup>

در این تئوری برای ساده‌سازی، از فرض‌های پایه‌ای زیر جهت به‌دست آوردن معادلات حاکم بر ورق استفاده می‌شود.

- ۱- جنس ورق همگن و همسانگرد است و مدول الاستیسیته آن از قانون هوک پیروی می‌کند.
- ۲- ورق در حالت اولیه صاف است.
- ۳- صفحه‌ی میانی ورق در هنگام خمش بدون کرنش باقی می‌ماند.
- ۴- ضخامت در کل ورق ثابت و نسبت به دو بعد دیگر کوچک است؛ بدین معنا که بزرگی ابعاد ورق بیش از 20 برابر ضخامت آن است.

---

1 - Classical Theory of Thin Plates with Small-Deflection



۵- تغییر شکل ورق در جهت ضخامت (خیز ورق) در برابر ضخامت آن کوچک است. به طوری که

بزرگ‌ترین مقدار خیز برابر  $\frac{1}{20}$  ضخامت است. در این صورت در محدوده‌ی تئوری تغییر

شکل کوچک شمرده می‌شود.

۶- شیب خیز در صفحه‌ی میانی، در مقایسه با یک کوچک است.

۷- صفحه‌ی عمود بر صفحه‌ی میانی، قبل و بعد از تغییر شکل صفحه‌ی میانی، همچنان صاف و

عمود بر صفحه‌ی میانی باقی می‌ماند. این شرط بدین معناست که مؤلفه‌های کرنشی

$\gamma_{xz}$  و  $\gamma_{yz}$  قابل صرف‌نظر کردن هستند. در نتیجه خیز ورق به‌طور عمده با کرنش‌های

خمشی همراه است. کرنش عمودی  $\epsilon_z$  نیز قابل صرف‌نظر کردن است.

۸- از تنش نرمال در جهت ضخامت می‌توان صرف‌نظر کرد.

اگر ورق‌ی تحت بار عمود بر سطح قرار گیرد، اگرچه در عمل با یک مسأله‌ی سه‌بعدی روبه‌رو هستیم؛

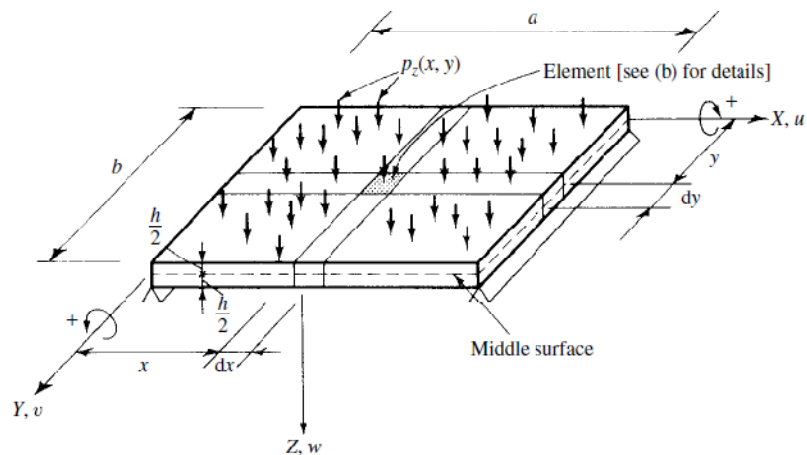
ولی با استفاده از فرض‌های بالا، این مسأله به یک مسأله‌ی دوبعدی تبدیل می‌شود. بسیاری از آزمایش‌ها و

تست‌های انجام شده توسط محققین در گذشته بر روی نمونه‌های کوچک و بزرگ از ورق نازک، درستی

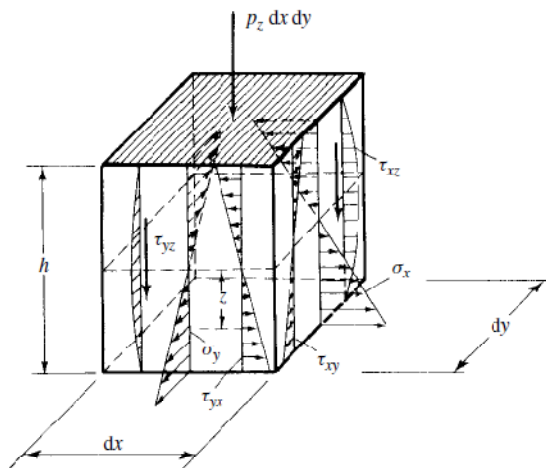
فرض‌های فوق را اثبات می‌کند. در شکل ۱-۲ یک المان مستطیلی از ورق نازک در دستگاه مختصات

کارتزین نشان داده شده است.

برای یک ورق مربعی استفاده از دستگاه مختصات کارتزین مناسب است (شکل ۱-۲).



(a)  
Laterally loaded rectangular plate



(b)  
Stress components on plate element

شکل ۲-۱ شماتیک یک ورق نازک مستطیلی در مختصات کارترین [۳]

نیروهای داخلی و خارجی، تنش‌ها و جابه‌جایی‌های  $u$ ،  $v$  و  $w$  در حالتی که هم جهت با محورهای اصلی دستگاه مختصات باشند، به صورت مثبت فرض می‌شوند. در این تئوری اثبات می‌شود، که معادله‌ی حاکم بر خیز ورق با رابطه‌ی (۱-۱) بیان می‌شود [۳].

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P_z(x, y)}{D} \quad (1-1)$$

که در آن  $P_z$  بارگسترده بر واحد سطح ورق در جهت محور  $z$  است (شکل ۱-۲).  $w$  خیز ورق و  $D$  صلبیت خمشی است که در تیرها برابر  $EI$  می‌باشد.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2-1)$$

در اینجا  $E$  مدول الاستیسیته<sup>۱</sup>،  $\nu$  نسبت پواسون<sup>۲</sup> و  $h$  ضخامت ورق است.

همچنین با استفاده از عملگر دوبعدی لاپلاسین

$$\nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y^2} \quad (3-1)$$

می‌توان معادله‌ی (۱-۱) را به صورت زیر نوشت.

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = P_z(x,y) \quad (4-1)$$

## ۱-۴-۲ تئوری غشایی ورق‌ها

پوسته‌ها ورق‌هایی بسیار نازک هستند، که نسبت ابعادی ضخامت به طول آنها کمتر از  $\frac{1}{50}$  است. تئوری غشایی مورد بحث در ورق‌ها براساس تغییر شکل کوچک لایه‌ی میانی است. به هر حال در بسیاری از مواقع پوسته‌ها تغییر شکل‌هایی به مراتب بزرگتر از ضخامتشان دارند. این یک موضوع بسیار مهم در تحلیل و طراحی پوسته‌ها است. [۳]

## ۱-۴-۳ تئوری‌های ورق‌های ضخیم

اگرچه تئوری کلاسیک ورق برای مسائل مربوط به ورق نازک پاسخ صحیح می‌دهد؛ ولی با افزایش ضخامت ورق از دقت پاسخ آن کاسته می‌شود. حل دقیق سه‌بعدی بعضی از مسائل ورق نشان می‌دهد؛ که

---

1 -Elasticity Modulus

2 - Poisson's Ratio

این مقدار خطا با مرتبه‌ی دوم ضخامت ورق نسبت مستقیم دارد. پس به دلیل محدودیت‌های عمومی تئوری کلاسیک برای ورق‌های نازک می‌بایست، بسط‌ها و بازنویسی‌های لازم در تئوری‌های ورق‌های ضخیم انجام شود؛ تا در این دسته مسائل، نتایج بهتری به دست آید. [۱]

#### ۱-۳-۴-۱ تئوری رایسنر<sup>۱</sup>

در تئوری رایسنر علاوه بر اثر تنش‌ها و کرنش‌های عرضی اثر تنش در جهت ضخامت نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این تئوری توزیع تنش‌های  $\tau_{xy}$ ،  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  مشابه تئوری کلاسیک ورق‌ها به صورت خطی فرض شد؛ ولی تنش‌های  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{yz}$  به کمک معادلات تعادل به صورت تابع درجه دو و تنش  $\sigma_z$  با به دست آمدن تنش‌های برشی  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{yz}$  از معادلات دیفرانسیل تعادل، حاصل می‌شوند. [۳]

#### ۱-۳-۴-۲ تئوری میندلین<sup>۲</sup>

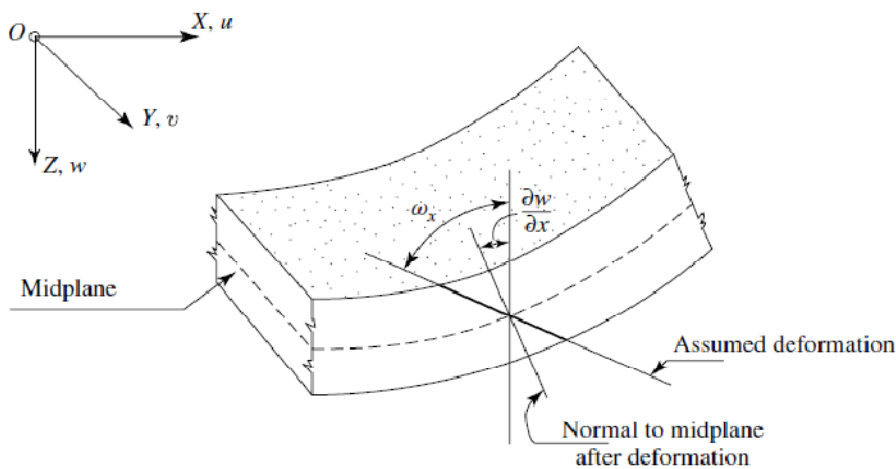
بیشتر مسائل، که در حل آنها از تئورهای مبتنی بر جابه‌جایی در ورق‌های ضخیم استفاده می‌شوند؛ توسط میندلین گسترش یافتند. مبنای اصلی آن، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول است، که از فرضیات سینماتیک برای جابه‌جایی درون صفحه‌ای استفاده می‌کند.

$$u = z\psi_x(x, y), \quad v = z\psi_y(x, y) \quad (5-1)$$

که در آن  $\psi_x(x, y)$  و  $\psi_y(x, y)$  نشان دهنده‌ی چرخش صفحه‌ی میانی هستند. به دلیل مستقل بودن خیز نسبت به  $z$ ، هیچ تغییر ضخامتی در ورق رخ نمی‌دهد. فرض‌های اعمالی نشان داده شده در شکل ۱-۳، در سطح مقطع ورق، در تئوری میندلین و رایسنر یکسان می‌باشد.

---

1- Reissner  
2- Mindlin



شکل ۳-۱ فرض‌های لایه میانی تئوری رایسنر [۳]

در این تئوری  $\omega_x = \psi_x$  و  $\omega_y = \psi_y$  است. از آنجا که توزیع تنش در ورق ضخیم به صورت تابع درجه-ی دو است [۳]، فرض خطی بودن تنش‌ها که از تئوری رایسنر گرفته شده است، نادرست می‌باشد. علاوه بر این مقدار تنش در لبه‌ی بالایی و پایینی ورق با وجود این فرض صفر نمی‌شود. بنابراین لازم است، تا ضریب تصحیح  $K$  که با مقایسه حل دقیق الاستیسیته ارزیابی می‌شود، معرفی گردد. به‌عنوان مثال، با توجه به روش اولیه تیموشنکو، که در لایه‌ی میانی تیرهای ضخیم مورد استفاده قرار می‌گیرد، مقدار  $K = \frac{5}{6}$  انتخاب شد. [۳] با کمک روابط تئوری مینیمم انرژی پتانسیل و محاسبه‌ی معادلات دیفرانسیل تعادل مقادیر منتجه‌های تنش در تئوری ورق میندلینن به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$M_x = D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \quad (۶-۱)$$

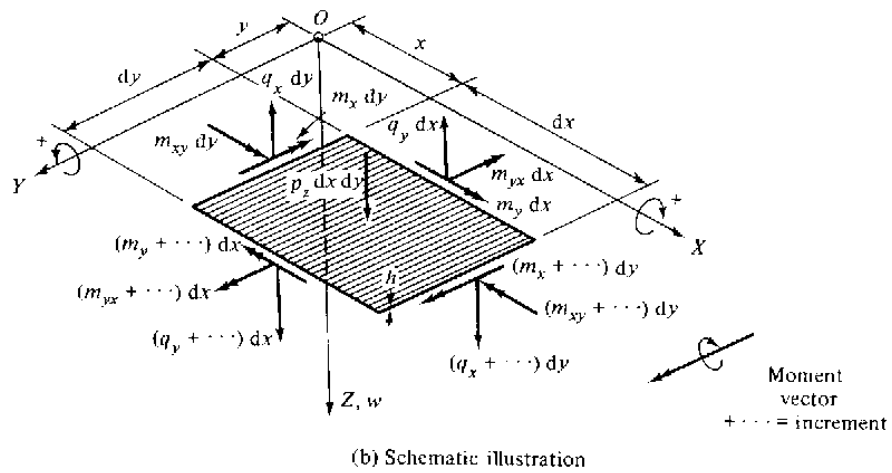
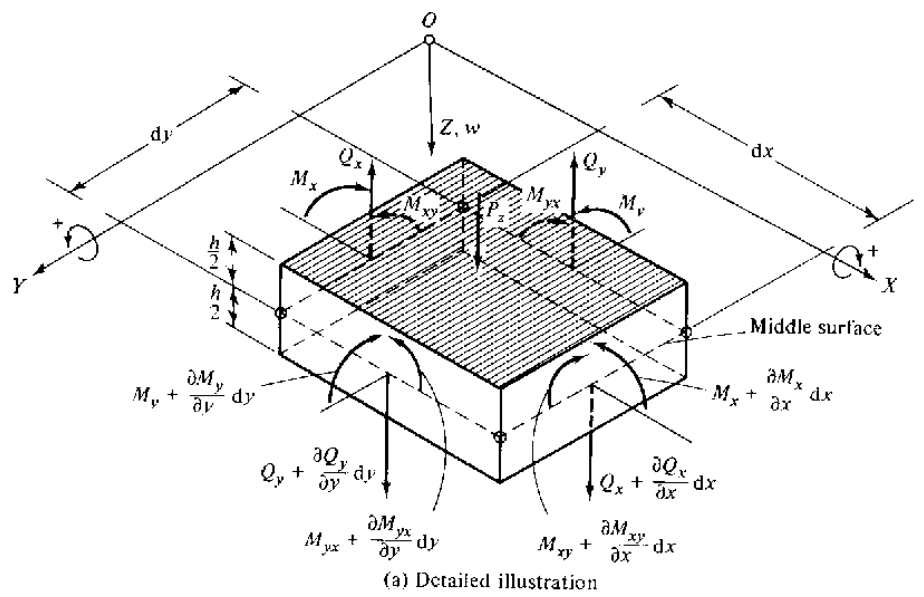
$$M_y = D \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \quad (۷-۱)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{1-\nu}{2} D \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \quad (۸-۱)$$

$$Q_x = K G h \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (۹-۱)$$

$$Q_y = KGh \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (10-1)$$

در روابط (۶-۱) تا (۱۰-۱)،  $D$  از رابطه‌ی (۲-۱) به دست می‌آید.  $M_x$ ،  $M_y$  به ترتیب منتجه‌ی تنش نرمال در جهت  $y$  و  $x$ ،  $M_{xy}$  منتجه‌ی تنش برشی و  $Q_x$  و  $Q_y$  به ترتیب نیروی درونی برش عرضی در جهت‌های  $x$  و  $y$  هستند (شکل ۴-۱). [۳]



شکل ۴-۱ نیروهای داخلی و خارجی در المای از لایه میانی [۳]

## ۱-۵ مقدمه‌ای بر مواد ناهمگن

### ۱-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد ناهمگن

مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوافضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند. بنابراین دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند؛ که از موادی جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها) در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهمسانگرد در دیدگاه ماکروسکوپی به وجود می‌آیند، که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری توأم مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، اما از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد محسوب می‌شوند.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آن‌هاست، که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به‌ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی‌ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص<sup>۱</sup> در ساختار ارگانیک‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به‌عنوان مثال، استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد؛ از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد؛ تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این‌رو تغییرات خواص به‌صورت کاملاً پیوسته و تدریجی

---

1- Functionally Graded Materials (FGM)

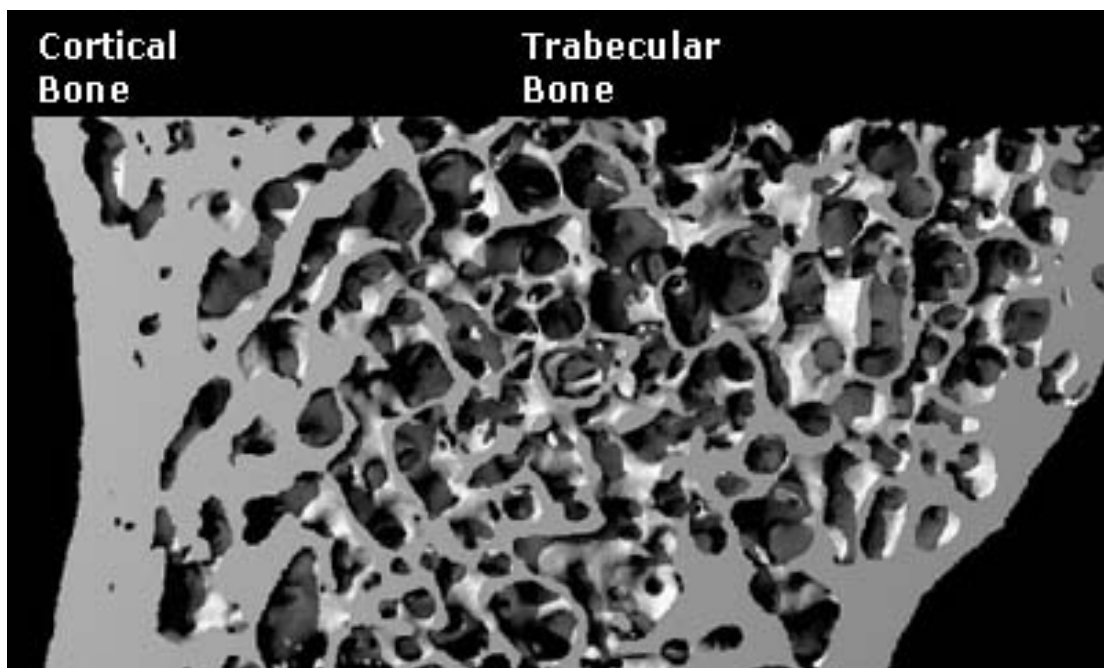
ایجاد می‌شود. این گونه مواد که خصوصیات آن تحت یک تابع ریاضی به صورت تدریجی تغییر می‌کند،

مواد FG یا مواد ناهمگن، نامیده می‌شوند [۴].

مفهوم اولیه‌ی مواد ناهمگن توسط نینو<sup>۱</sup> و همکارانش در سال ۱۹۸۴ در سازمان هوافضای ژاپن مطرح

گردید و از سال ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید آن، در این کشور شروع شد. مرحله‌ی اول پروژه ملی

(فناوری گسترش مواد متغیر تابع) طی سال‌های ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد [۴].



شکل ۱-۵ نمای مقطع استخوان

در این پروژه، سه گروه: ساخت، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و

---

2- Niino

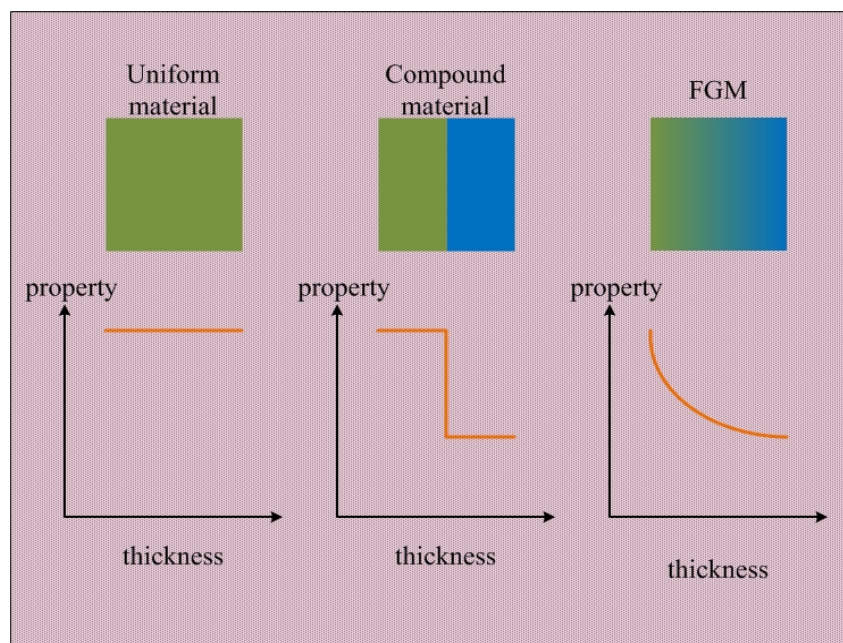


جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء شود. پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلی‌متر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در سال ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند.

مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در سال ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد، که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلی‌متر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلی‌متر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد. دومین سمپوزیوم جهانی مواد متغیر تابعی در سال ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به‌ویژه تحلیل سازه‌هایی از این جنس، فراگیر شد. مواد ناهمگن در مقایسه با مواد همگن (ایزوتروپ‌ها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها) دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر می‌باشند:

- ۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا.
- ۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا.
- ۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد ناهمگن، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود، که به کمک مواد ناهمگن می‌توان آثار نامطلوب تمرکز تنش را به‌صورت چشم‌گیری کاهش داد.
- ۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد ناهمگن است.
- ۵- اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به‌صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد ناهمگن، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.
- ۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد ناهمگن، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی‌که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی

در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به‌عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد ناهمگن، به‌دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادین آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند؛ که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل ۶-۱ مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و ناهمگن را نشان می‌دهد [۴].



شکل ۶-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف

## ۱-۵-۲ مدل‌سازی ریاضی مواد ناهمگن

مطابق توضیحات داده شده، خواص مکانیکی در مواد ناهمگن به‌صورت تدریجی و پیوسته تغییر می‌کند.

این توابع به‌صورت عمده از این قرارند [۴].

الف) توزیع توانی

$$Pr(r) = Pr_i \left( \frac{r}{r_i} \right)^{n_{Pr}} = Pr_i \bar{r}^{n_{Pr}} \quad (11-1)$$

ب) توزیع نمایی

$$Pr(r) = Pr_i e^{n_{Pr} \left( \frac{r}{r_i} - 1 \right)} = Pr_i e^{n_{Pr} (\bar{r} - 1)} \quad (12-1)$$

ج) توزیع کسر حجمی<sup>۱</sup>

$$r(r) = (Pr_o - Pr_i) \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^{n_{Pr}} + Pr_i = (Pr_o - Pr_i) \left( \frac{\bar{r} - 1}{k - 1} \right)^{n_{Pr}} + Pr_i \quad (13-1)$$

در روابط فوق  $r_o$ ،  $r_i$  به ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و  $Pr_o$ ،  $Pr_i$  خاصیت ماده به ترتیب در لایه‌ی داخلی و خارجی جسم می‌باشد، که می‌توانند خاصیت مکانیکی، حرارتی و الکتریکی از قبیل: نسبت پواسون، مدول الاستیسیته، چگالی<sup>۲</sup>، ضریب هدایت حرارتی<sup>۳</sup>، ضریب انبساط خطی حرارتی<sup>۴</sup> باشند.  $n_{Pr}$  در روابط فوق ثابت ناهمگنی خاصیت است؛ جز رابطه‌ی (۱۱-۱) که ثابت ناهمگنی فقط می‌تواند مقادیر حقیقی مثبت را اختیار کند؛ در سایر روابط (۱۲-۱) و (۱۳-۱) مقادیر حقیقی منفی را نیز می‌تواند اختیار کند.  $n_{Pr} = 0$  در کلیه‌ی توابع، نشان‌دهنده‌ی مواد همگن است، همچنین  $\bar{r}$  نسبت شعاع به شعاع داخلی و  $k$  نسبت شعاع خارجی به داخلی می‌باشد.

## ۶-۱ پیشینه‌ی تحقیق

ورق‌ها به دلیل کاربرد وسیع در صنایع مختلف از اهمیت بسیاری برخوردار هستند. تنوع کاربرد، بسته به نیاز، وجود انواع شیارها و گشودگی‌ها با ابعاد و اشکال مختلف را در ورق‌ها می‌طلبد. از جمله این موارد، می‌توان به گشودگی درها و پنجره‌ها در بدنه‌ی هواپیماها و زیردریایی‌ها، محل اتصال فشارسنج‌ها و

---

3. Volume Fraction  
5. Density  
7. Heat Conduction Coefficient  
8. Thermal Linear Expansion Coefficient

دماسنج‌ها در بدنه‌ی کوره‌ها، محل اتصال دو ورق به همدیگر توسط پیچ‌ها و پرچ‌ها، وجود سوراخ‌هایی در پره‌های توربین‌ها جهت جریان یافتن سیال خنک‌کننده در آنها و... را اشاره کرد. وجود گشودگی‌ها در جسم، باعث به‌وجود آمدن تمرکز تنش در اطراف گشودگی می‌شود. با کمک طراحی صحیح جنس و هندسه قطعه می‌توان مقدار تمرکز تنش را کاهش داد، که دستیابی به طرحی بهینه و توانایی مقابله با شکست‌های مکانیکی نیازمند دانستن اطلاعات دقیق در مورد نحوه‌ی توزیع تنش در اطراف گشودگی است. از این‌رو بررسی و محاسبه‌ی مقدار و نحوه‌ی توزیع تنش در اطراف گشودگی‌ها، برای طراحی و بهینه‌سازی ورق بسیار مهم است.

در مورد بررسی تنش صفحات همسانگرد و ناهمسانگرد دارای گشودگی از روش‌های گوناگون اعم از تجربی، عددی و تحلیلی استفاده شده است. به‌کارگیری روش متغیر مختلط در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته دوبعدی، اولین بار توسط موشخلی‌شویلی [۵] برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه شد. کاربردهایی از روش ارائه شده توسط وی در مطالعات ساوین [۶] بر روی ورق‌های همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف و تحت کشش دیده می‌شود. همچنین ساوین برای ورق‌های ناهمسانگرد با گشودگی بیضوی و دایروی، مطالعاتی را انجام داد. توسعه کامل روش موشخلی‌شویلی به مسائل الاستیسیته دوبعدی مواد ناهمسانگرد توسط اشلبای [۷]، اشترو [۸] و لخنیتسکی [۹] انجام شد. بعدها پژوهشگران متعددی با استفاده از روابط ارائه شده توسط آنها به مطالعه‌ی صفحات نامحدود ناهمسانگرد دارای گشودگی پرداختند [۱۰-۱۴]. یکی از کاربردهای عمده تمرکز تنش در اتصالات ورق‌های مختلف به یکدیگر می‌باشد؛ در اتصالات ورق‌ها به‌وسیله پیچ‌ها و پین‌ها، غالباً از طرف پیچ یا پین نیرویی به مرز گشودگی وارد می‌شود. تحلیل این‌گونه مسائل با استفاده از توابع پتانسیل مختلط در تحقیقات متعددی انجام شده است [۱۵-۱۷]. در مورد ورق‌های محدود حاوی گشودگی تحقیقات کمی صورت گرفته است. در این زمینه، پین و همکارانش [۱۸] ورق محدود مربعی همگن و همسانگرد دارای گشودگی به شکل

مربع در مرکز را مورد بررسی قرار دادند. آنها با استفاده از تابع نگاشت، ورق مذکور را به ورق مربعی با گشودگی دایروی تبدیل کردند و به کمک معادلات به دست آمده توسط موشخلی شولی، به حل این ورق پرداختند. ورق تحت بار کششی تک محوره قرار داشت. آنها معادلات لازم را از شرایط مرزی ورق با کمک روش حداقل مربعات خطا در نقاطی با تقسیم بندی منظم در مرز<sup>۱</sup>، به دست آوردند.

از سال ۱۹۹۲ به بعد، حضور تحقیقات مختلف و سمینارها و کنفرانس‌هایی با محوریت این مواد ناهمگن هر ساله بیشتر می‌شد. تحقیق بر روی این نوع از ورق‌ها در زمینه‌های مختلف صورت گرفته است. ژانگ و همکارانش [۱۹] به حل دقیق برای محاسبه‌ی تنش حرارتی در یک ورق نامحدود ناهمگن دارای گشودگی دایروی پرداختند. در تحقیق آنها، خواص مواد و دمای اعمالی در جهت شعاعی تغییر می‌کرد. در مقاله‌ای یانگ و همکارانش [۲۰] به تحلیل تنش دینامیکی یک ورق از جنس مواد ناهمگن با گشودگی دایروی پرداختند. آنها از روش متغیرهای مختلط، توزیع تنش دینامیکی ورق ناهمگن را که خواص ماده در جهت شعاعی تغییر می‌کرد؛ به دست آوردند. آنها دریافتند، که توزیع تنش دینامیکی اطراف گشودگی دایروی به طور چشمگیری به انتخاب تابع مناسب برای تغییر خواص مواد وابسته است. رددی [۲۱] خیز ورق را تحت بار مکانیکی به شیوه‌ی ناویر برای ورق مربعی با تکیه‌گاه ساده بررسی کرد. یانگ<sup>۲</sup> و همکارانش [۲۲] برای اولین بار حل نیمه تحلیلی را برای ورق‌ها با مواد تابعی تحت بار جانبی و در ورق ارائه کردند. قناد و قارونی [۲۳] کمانش ورق با مواد تابعی را با کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه ۳ مورد بررسی قرار دادند.

در مورد تمرکز تنش ورق‌های ناهمگن حاوی گشودگی، تحقیقات بسیار کمی صورت گرفته است. کوبایر و همکارانش [۲۴] با استفاده از شکلول بندی اجزای محدود ایزوپارامتریک، تأثیر ناهمگنی خواص

---

1 - Least Square Boundary Collocation Technique

2 - Yang

مواد را بر روی ضریب تمرکز تنش در ورق‌های ناهمگن حاوی گشودگی دایروی بررسی کردند. ورق مورد بحث آنها تحت کشش تک‌محوره بود. نتایج تحقیقات آنها نشان داد؛ وقتی که مدول یانگ با دور شدن از مرکز گشودگی افزایش می‌یابد؛ تمرکز تنش کاهش می‌یابد. در تحقیق مذکور تابع مورد استفاده برای نشان دادن تغییر خواص، تابعی توانی بود. کاو و همکارانش [۲۵] از روش اجزای محدود، ورق تابعی با هندسه‌های مختلف از قبیل ورق بیضوی، دایروی و چندضلعی دارای گشودگی‌هایی به شکل‌های گوناگون را مورد بررسی قرار دادند. حسینی [۲۶] به بررسی نحوه توزیع و گسترش ترک در ورق با مواد تابعی تحت بارگذاری حرارتی-مکانیکی پرداخت. وی از روش اجزای محدود توسعه‌یافته<sup>۱</sup> برای محاسبه و تحلیل شکست مواد تابعی ایزوتروپیک و اورتوتروپیک تحت بارگذاری مکانیکی و حالت دمایی پایدار استفاده کرد. با توجه به کاربرد مواد ناهمگن به‌عنوان موادی مقاوم در برابر تغییرات زیاد دما، تحلیل تنش حرارتی ورق‌های حاوی گشودگی مورد توجه محققان بوده است.

محمدی [۲۷] ضریب تمرکز تنش در اطراف گشودگی دایروی در ورق نامحدود ناهمگن را مورد مطالعه قرار داد. تغییر خواص مکانیکی ورق از قبیل مدول الاستیسیته و نسبت پواسون، در جهت شعاعی در نظر گرفته شد. وی حلی تحلیلی را برای محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش در ورقی تحت کشش یکنواخت دومحوره و بارگذاری برشی خالص ارائه کرد. همچنین تأثیر تغییر خواص مکانیکی بر تمرکز تنش در این مقاله مورد بررسی قرار گرفت. چارون سوک<sup>۲</sup> و همکارانش [۲۸] در بخشی از مقاله خود به توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی در ورقی از جنس مواد ناهمگن و تحت بارگذاری مکانیکی پرداختند. یانگ و همکارانش [۲۹ و ۳۰] به بررسی تنش دوبعدی یک ورق ناهمگن محدود حاوی گشودگی دایروی و تحت بارگذاری یکنواخت، پرداختند. آنها از روش متغیر مختلط و استفاده از تابع تنش ایری برای حل خود

---

1 - Extended Finite Element Method  
2- Chareonsuk

کمک گرفتند. نتایج برای شرایط مختلف بارگذاری، خواص مواد و اندازه‌های مختلف ورق ارائه شد. آنها نشان دادند، که تمرکز تنش در ورق محدود در مقایسه با ورق نامحدود در شرایط یکسان افزایش می‌یابد و با انتخاب صحیح تابع خواص ماده، از قبیل مدول الاستیک در مواد ناهمگن، می‌توان کاهش چشم‌گیری را در تمرکز تنش شاهد بود اشرفی و همکاران [۳۱]، پاسخ ورق ناهمگن با گشودگی دایروی را به بارگذاری دومحوره، در حالت سه‌بعدی از روش المان مرزی مدرج<sup>۱</sup> مورد مطالعه قرار دادند. خواص مکانیکی در جهت طولی و در امتداد ضخامت به‌صورت تابعی توانی تغییر می‌کرد. از نقاط قوت این مقاله بررسی اثر کوپلینگ خمش-کشش در نتیجه‌ی توزیع نامتقارن خواص مواد، تحت بارگذاری دومحوره بود. در این تحقیق، تأثیر فاصله گشودگی از مرز و نسبت بار، بر توزیع تنش مورد بررسی قرار گرفت. در زمینه-ی تحلیل ترک در ورق ناهمگن نیز تحقیقات مختصری انجام شده است. برای مواد ناهمگن ضرایب شدت تنش به گرادیان ماده وابسته است. در این‌گونه مواد، عموماً هر دو مود برشی و عمودی در جلوی نوک ترک به‌خاطر نامتقارن بودن خواص ماده وجود خواهد داشت. برای مشخص کردن پاسخ این مواد، نیاز به اطلاعات لازم در مورد چقرمگی شکست است؛ که برای دستیابی به این هدف، نیاز به محاسبه‌ی ضرایب شدت تنش برای نمونه‌ها، تحت بارگذاری‌های متغیر است. دلاله<sup>۲</sup> و همکارانش [۳۲] و نودا<sup>۳</sup> و همکارانش [۳۳] ترک محدود در ورق ناهمگن تحت بارهای مکانیکی و حرارتی را تحلیل کردند. پی<sup>۴</sup> [۳۴] در تحقیقی طبیعت میدان نوک ترک را مورد بررسی قرار داد. او نتیجه گرفت، که ضریب شدت تنش مود دو نقش مهمی در شکست ورق‌های ناهمگن دارد. ژانگ<sup>۵</sup> و همکارانش [۳۵] به تحلیل مسأله ترک در ورق

---

1- Graded Boundary Element

2 - Delale

3 - Noda

4 - Pei

5 - Zhong

ناهمگن با توزیع دلخواه خواص مواد پرداختند. آیهان<sup>۱</sup> [۳۶] ضرایب شدت تنش در موده‌های ترکیبی را در حالت سه‌بعدی در مواد ناهمگن، با استفاده از روش اجزای محدود، مورد بررسی قرار داد. با توجه به کاربرد مواد ناهمگن به‌عنوان موادی مقاوم، در برابر تغییرات زیاد دما، تحلیل تنش حرارتی این نوع ورق‌ها حاوی گشودگی، مورد توجه محققان بوده است. کاردناس‌گارسیا<sup>۲</sup> و همکارانش [۳۷] به محاسبه‌ی کرنش‌ها و تنش‌های محیطی و شعاعی و جابجایی شعاعی اطراف گشودگی دایروی برای ورق از جنس مواد ناهمگن و تحت بارگذاری حرارتی پرداختند. کوبایر [۳۸] ضریب تمرکز تنش در نتیجه حضور گشودگی دایروی در یک ورق ناهمگن تحت بار برشی خارج‌صفحه‌ای را مورد بررسی قرار داد. خواص مواد در جهت شعاعی و با فرض اینکه مبدأ در مرکز ورق قرار دارد، تغییر کرد. در این تحقیق، تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها برای ورق، با و بدون گشودگی به‌صورت تابعی تحلیلی به‌دست آورده شد. وی نتیجه گرفت، که وقتی مدول الاستیسیته با فاصله از مرکز گشودگی کاهش پیدا کند؛ وجود گشودگی دایروی باعث افزایش تمرکز تنش می‌شود. کاهش مؤثر تمرکز تنش در حالتی که مدول الاستیسیته با فاصله از مرکز گشودگی، افزایش پیدا می‌کند؛ نتیجه مفیدی در طراحی به حساب می‌آید.

## ۷-۱ جمع‌بندی

در این فصل به‌صورت مختصر تئوری‌های مختلف در زمینه‌ی ورق‌ها مرور شد. با بیان تعریف و خصوصیات مواد ناهمگن و بررسی پیشینه‌ی تحقیقات علمی بر روی ورق‌های ناهمگن این نتیجه حاصل شد، که در زمینه‌ی تمرکز تنش ورق‌های ناهمگن حاوی گشودگی که در آن گشودگی فاقد بار است؛ تحقیقات بسیار کمی انجام شده است. در اتصالات ورق‌های مختلف از طریق پیچ و پرچ معمولاً گشودگی تحت فشار خارجی قرار می‌گیرد. تأثیر بار خارجی در مرکز گشودگی بر تحلیل تنش ورق‌های ناهمگن

---

1 - Ayhanhdkni

2 - Cardenas-Garcia



تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. در این تحقیق سعی می‌شود، نحوه توزیع تنش و جابه‌جایی در نقاط اطراف گشودگی دایروی، در یک ورق نازک و بلند همسانگرد و ناهمگن با گشودگی دایروی، تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای در مرزهای بیرونی و فشار یکنواخت در اطراف گشودگی، تحلیل شود. تأثیر نسبت بار و روند تغییرات خواص مکانیکی از دیگر پارامترهای مورد بررسی می‌باشند. در این تحقیق از توابع پتانسیل مختلط و روش حداقل مربعات خطا در نقاطی با تقسیم‌بندی منظم در مرز برای تحلیل استفاده می‌شود.

در فصل دوم، روابط و معادلات حاکم بر ورق استخراج می‌شوند. همچنین توزیع تنش در اطراف گشودگی در ورق همگن، تحت بار درون‌صفحه‌ای با استفاده از حل پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل سوم نتایج حاصل از تحلیل ورق ناهمگن تحت بار درون‌صفحه‌ای مطالعه خواهد شد. فصل چهارم برای ورق همگن و ناهمگن علاوه بر بارگذاری درون‌صفحه‌ای، تأثیر فشار در داخل گشودگی بر توزیع تنش در نقاط اطراف گشودگی بررسی می‌شود و نتایج مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در نهایت در فصل پنجم به نتیجه‌گیری و ارائه‌ی پیشنهادها برای تحقیقات آینده پرداخته می‌شود.



فصل ۲ ورق همگن با گشودگی دایروی تحت

بارگذاری درون صفحه‌ای

## ۱-۲ پیش‌گفتار

در بخش اول این فصل، معادلات حاکم بر ورق بلند همگن با استفاده از روش متغیرهای مختلط در تئوری الاستیسیته استخراج می‌گردند. سپس با توجه به شرایط مرزی ورق و با کمک روش حداقل مربعات خطا در مرز منظم، معادلات مربوط به شرایط مرزی ورق مشخص و تعیین می‌شوند. در بخش بعد، روند تحلیل عددی با کمک نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس<sup>۱</sup> بیان و با تعریف یک مسأله، نتایج حاصل از حل تحلیلی انجام شده و تحلیل عددی مربوط به مسأله مقایسه و بررسی خواهند شد.

## ۲-۲ استخراج معادلات

مسأله بر پایه‌ی تئوری الاستیسیته یک ورق همسانگرد تحلیل و بررسی خواهد شد. ماتریس تنش در هر نقطه از ماده‌ی الاستیک در مسأله‌های دوبعدی همانند ورق نازک، تحت بار درون‌صفحه‌ای، دارای سه تنش  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  می‌باشد. معادلات تعادل برای مسأله‌ی دوبعدی با دو معادله بیان می‌شود، که سه تنش بیان شده باید این دو معادله را ارضا کنند.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1-2)$$

همچنین معادلات سازگاری بر حسب تنش به صورت زیر ساده می‌شوند.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2-2)$$

ساده‌سازی مسأله، با یک پارچه کردن این معادلات، با کمک روابط حاکم بین آنها امکان‌پذیر است.

---

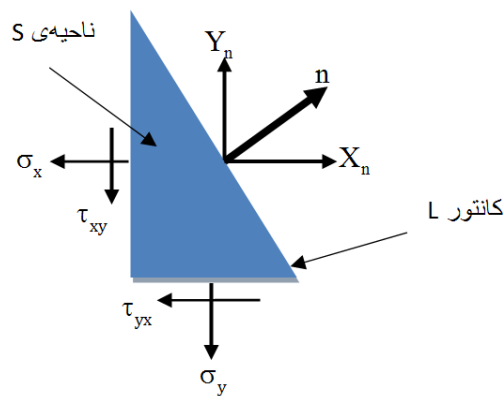
1 - ABAQUS

ناحیه S که توسط کانتور L از جسم محدود شده است (شکل ۱-۲)، به صورت دو مسأله‌ی اساسی و تفکیک شده از هم تجزیه می‌شوند. این دو مسأله به ترتیب ارضای شرط مرزی نیرویی و جابه‌جایی در مرز هستند.

برای اولین مسأله اساسی نام برده شده، زمانی که نیروهای خارجی  $X_n$  و  $Y_n$  به مرزهای خارجی ناحیه‌ی S از جسم وارد می‌شوند. می‌توان روابط تعادل را به صورت زیر نوشت (شکل ۱-۲). [۶]

$$\begin{aligned}\sigma_x \cos(n,x) + \tau_{xy} \cos(n,y) &= X_n \\ \tau_{yx} \cos(n,x) + \sigma_y \cos(n,y) &= Y_n\end{aligned}\quad (۳-۲)$$

که در اینجا n بردار یکه‌ی عمود بر سطح کانتور L است.



شکل ۱-۲ شماتیک کانتور L

برای مسأله‌ی اساسی دوم، در حالتی که جابه‌جایی برای کانتور L از ناحیه S در نظر گرفته شده باشد. شرایط مرزی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$u = g_1(s), \quad v = g_2(s) \quad (۴-۲)$$

که در اینجا  $g_1(s)$  و  $g_2(s)$  توابعی هستند، که جابه‌جایی مربوط به نقاط واقع در کانتور L از ناحیه‌ی S از جسم را بیان می‌کنند.

با تعریف تابع تنش  $U(x,y)$  به صورت زیر:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (5-2)$$

و با ترکیب معادلات (۱-۲)، (۲-۲) و (۵-۲) به معادله‌ی بای‌هارمونیک یکتای زیر برخورد می‌کنیم.

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (6-2)$$

می‌توان نشان داد که تابع  $U(x,y)$  در مرز کانتور برای مسأله‌ی اساسی نوع اول از رابطه‌ی (۷-۲) به-

دست می‌آید [۶].

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_0^s X_n ds + c_1, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\int_0^s Y_n ds + c_2 \quad (7-2)$$

در اینجا  $c_1$  و  $c_2$  دو ثابت حقیقی دلخواه هستند؛ که برای یک جسم یک‌پارچه می‌توانند صفر فرض

شوند. بنابراین مسائل صفحه‌ای تئوری الاستیسیته، به تعریف و تعیین تابع بای‌هارمونیک  $U(x,y)$  که

شرایط مرزی کانتور را ارضا می‌کند (روابط (۲-۴) و (۲-۷))، خلاصه می‌شود. موشخلی شیولی [۵] نشان

داد، که معادله‌ی (۲-۶) را می‌توان به صورت زیر حل کرد. [۶]

$$U(x,y) = \text{Re}[\bar{z}\varphi_1(z) + \chi_1(z)] \quad (8-2)$$

در اینجا  $\text{Re}$  نشان‌دهنده‌ی قسمت حقیقی یک عبارت مختلط است.  $\varphi_1(z)$  و  $\chi_1(z)$  توابعی تحلیلی از

متغیر مختلط  $z = x + iy$  است. بنابراین حل مسائل تنش صفحه‌ای به تعیین دو تابع بای‌هارمونیک  $\varphi_1(z)$

و  $\psi_1(z) = \frac{d\chi_1}{dz}$  که بر روی کانتور  $L$  شرایط مرزی تعیین شده را ارضا می‌کنند، محدود می‌شود. با ارائه‌ی

حل معادله‌ی (۲-۶) به شکل رابطه‌ی (۲-۸)، بسط شرایط مرزی به صورت دو تابع  $\varphi_1(z)$  و  $\psi_1(z)$

امکان‌پذیر است. برای مسأله‌ی اساسی نوع اول یا همان رابطه‌ی (۲-۷)، شکل زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi_1(z) + z\bar{\varphi}'_1(z) + \bar{\psi}_1(z) = \quad (9-2)$$

$$\int_0^s (X_n + iY_n) ds + c = f_1 + if_2 + \text{const}$$

اگر مقادیر جابه‌جایی معلوم باشد؛ می‌توان به همین روش شرایط مرزی جابه‌جایی را تعیین نمود.

$$2G(u+iv) = K\varphi_1(z) - z\bar{\varphi}'_1(z) - \bar{\psi}_1(z) = 2(g_1 + ig_2) \quad \text{on } L. \quad (10-2)$$

که در اینجا  $K$  تابعی از نسبت پواسون می‌باشد، که در شرایط تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای مقدارش متفاوت است.

$$K = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{تنش صفحه‌ای} \\ \frac{3-4\nu}{1+\nu} & \text{کرنش صفحه‌ای} \end{cases} \quad (11-2)$$

که در آن  $\nu$  نسبت پواسون است. همچنین  $G$  مدول برشی و  $E$  مدول الاستیسیته می‌باشد.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (12-2)$$

با ترکیب روابط (۹-۲) و (۱۰-۲) شکل جدیدی برای شرایط مرزی به دست می‌آید.

$$x_1\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}'_1(z) + \bar{\psi}_1(z) = F(z) \quad \text{on } L \quad (13-2)$$

که در آن برای مسأله‌ی اساسی نوع اول

$$x_1 = 1, \quad F = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \text{const}$$

و برای مسأله‌ی اساسی نوع دوم

$$x_1 = -K \quad F = -2G(g_1 + ig_2)$$

در نظر گرفته می‌شود.

در صورتی که توابع  $\varphi_1(z)$  و  $\psi_1(z)$  معلوم باشند، با کمک شکلول‌های موشخلی شیولی (۱۴-۲) امکان

محاسبه تنش‌های نرمال  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  و تنش برشی  $\tau_{xy}$  وجود دارد. [۶]

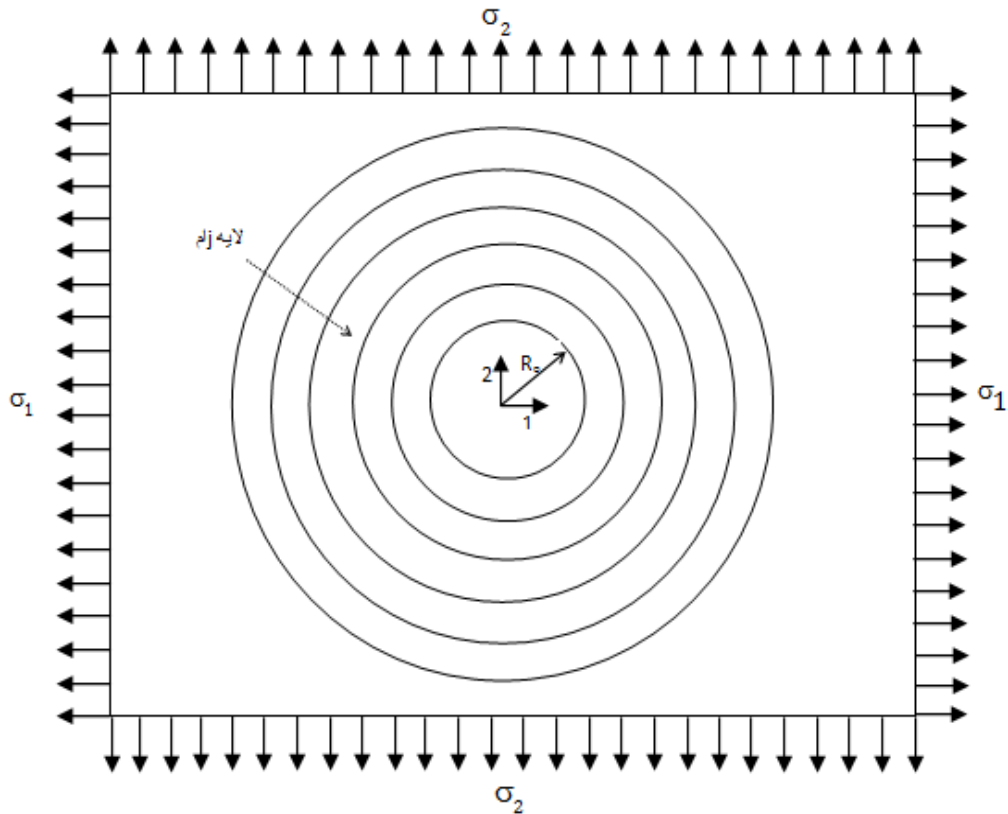
$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'_1(z) + \bar{\varphi}'_1(z)] = 4\text{Re}(\varphi'_1(z)) \quad (14-2)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''_1(z) + \psi'_1(z)]$$

در این پایان‌نامه مسأله‌ی مورد مطالعه یک ورق بلند با گشودگی دایروی در مرکز آن می‌باشد. تغییرات

خواص مکانیکی (مدول الاستیسیته) در اینجا به صورت شعاعی در نظر گرفته شده است. برای حل این

مسأله همانند شکل ۲-۲، ورق به دیسک‌هایی دایروی با ضخامت یکسان و هم‌مرکز با یکدیگر تقسیم می‌شود.



شکل ۲-۲ شماتیک ورق مورد مطالعه تحت بار دوماحوره

با در نظر گرفتن این نوع تقسیم‌بندی ورق، امکان همگن گرفتن هر یک از دیسک‌ها وجود دارد. پس برای هر دیسک می‌توان روابط حاکم بر ورق را بر طبق شکل‌بندی رابطه‌ی (۲-۸) نوشت. روند حل به تعیین تابع تنش ابری طبق تعریف موشخلی‌شویلی به صورت یک سری مختلط با تعداد جملات نامحدود می‌انجامد.

$$\varphi_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^j \left(\frac{z}{R}\right)^k \quad j=1,2,\dots,N \quad (15-2)$$

$$\psi_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^j \left(\frac{z}{R}\right)^k \quad j=1,2,\dots,N \quad (16-2)$$



در اینجا  $a_k^j$  و  $b_k^j$  ضرایب مجهول جملات توابع پتانسیل در لایه  $j$ ام می‌باشد. همچنین  $R$  یک طول مرجع و  $z$  متغیر مکان است. به‌طور کلی برای حل این مسأله، باید ضرایب مجهول  $a_k^j$  و  $b_k^j$  به‌دست آورده شوند. برای انجام حلّ تحلیلی جملات سری را باید محدود فرض کرد؛ تا تعداد معادلات و مجهولات عددی محدود و معلوم شوند. برای این منظور از  $M$  تعداد جمله مثبت و منفی در سری برای حل استفاده خواهد شد.

$$\varphi_j(z) = \sum_{k=-M}^M a_k^j \left(\frac{z}{R}\right)^k \quad j=1,2,\dots,N \quad (17-2)$$

$$\psi_j(z) = \sum_{k=-M}^M b_k^j \left(\frac{z}{R}\right)^k \quad j=1,2,\dots,N \quad (18-2)$$

هدف نهایی به‌دست آوردن مؤلفه‌های تنش با کمک توابع پتانسیل می‌باشد. برای رسیدن به این هدف نیاز به مشتق مرتبه اول و دوم این دو تابع پتانسیل می‌باشد و خود تابع کاربردی ندارد. به همین دلیل، چون جمله صشکل هر سری عددی ثابت است، نیاز به محاسبه‌ی آن نمی‌باشد. از این روی در هر تابع  $2M$  جمله و مجهول وجود دارد. در هر لایه دو تابع مستقل وجود دارد  $(\varphi(z), \psi(z))$  پس در هر لایه  $4M$  مجهول مستقل وجود دارد. همان‌طور که پیشتر بیان شد ورق به  $N$  لایه مجزا و دیسکی شکل تقسیم شده است؛ پس در کلّ ورق،  $4MN$  مجهول مستقل وجود دارد؛ که برای تشکیل دستگاه معادلات خطی جهت محاسبه‌ی مجهولات، باید به همین تعداد، معادله‌ی مستقل تشکیل داد.

معادلات لازم از دو روش کلی به‌دست آورده خواهند شد. روش اول بر پایه‌ی ارضای شرایط مرزی ورق است. چون در مرکز ورق گشودگی دایروی وجود دارد پس مرز ورق به دو دسته تقسیم می‌شود.

۱- مرزهای خارجی که تحت بارگذاری درون صفحه‌ای قرار دارد.

۲- مرز داخلی یا مرز گشودگی دایروی ورق که آزاد از بار است؛ یا تحت بارگذاری فشار یکنواخت قرار

دارد.

روش دوم ارضای شرایط تعادل نیرویی و پیوستگی جابه‌جایی در فصل مشترک هر دو لایه مجاور به یکدیگر است. با توجه به این‌که هر لایه به صورت مستقل از دیگری شکل‌بندی شده است؛ ارضای این شرطها برای یک پارچه بودن ورق بسیار مهم هستند. شرط پیوستگی جابه‌جایی و تعادل نیرویی به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$X_n^j = X_n^{j+1}, Y_n^j = Y_n^{j+1} \quad (۱۹-۲)$$

$$u_j = u_{j+1}, v_j = v_{j+1} \quad (۲۰-۲)$$

با قرار دادن روابط (۲-۹) و (۲-۱۰) در روابط (۲-۱۹) و (۲-۲۰) روابط بر حسب توابع پتانسیل نوشته

می‌شوند.

$$\varphi_j(z) + z\bar{\varphi}'_j(z) + \bar{\psi}_j(z) = \varphi_{j+1}(z) + z\bar{\varphi}'_{j+1}(z) + \bar{\psi}_{j+1}(z) \quad (۲۱-۲)$$

$$\frac{1}{G_j} (K\varphi_j(z) - z\bar{\varphi}'_j(z) - \bar{\psi}_j(z)) = \frac{1}{G_{j+1}} (K\varphi_{j+1}(z) - z\bar{\varphi}'_{j+1}(z) - \bar{\psi}_{j+1}(z)) \quad (۲۲-۲)$$

هر طرف از روابط (۲-۲۱) و (۲-۲۲) را با کمک فرض (۲-۱۷) و (۲-۱۸) بر حسب ضرایب مجهول

سری‌ها نوشته می‌شوند.

$$\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(z) + \bar{\psi}(z) =$$

$$\sum_{k=1}^M \left( a_{-k} \left( \frac{R}{z} \right)^k + a_k \left( \frac{z}{R} \right)^k - \frac{z.k.\bar{a}_{-k}}{z} \left( \frac{R}{z} \right)^k + z.k.\bar{a}_k \left( \frac{\bar{z}}{R^k} \right) + \bar{b}_{-k} \left( \frac{R}{z} \right)^k + \bar{b}_k \left( \frac{\bar{z}}{R} \right)^k \right) \quad (۲۳-۲)$$

با توجه به تعداد زیاد جملات حاضر در رابطه بالا نیاز به ساده‌سازی و مرتب‌سازی آن وجود دارد. به

این دلیل با در نظر گرفتن  $z = re^{i\theta}$  و جایگزینی آن در رابطه‌ی (۲-۲۳) به دنبال ساده‌سازی این رابطه و

تجزیه آن به معادلاتی ساده و مستقل از  $\theta$  هستیم.

$$\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(z) + \bar{\psi}(z) = \sum_{k=1}^M \left( a_{-k} \left( \frac{R}{re^{i\theta}} \right)^k + a_k \left( \frac{re^{i\theta}}{R} \right)^k - \frac{re^{i\theta}k\bar{a}_{-k}}{re^{-i\theta}} \left( \frac{R}{re^{-i\theta}} \right)^k + re^{i\theta}k\bar{a}_k \left( \frac{(re^{-i\theta})^{k-1}}{R^k} \right) + \bar{b}_{-k} \left( \frac{R}{re^{-i\theta}} \right)^k + \bar{b}_k \left( \frac{re^{-i\theta}}{R} \right)^k \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^M \left( a_{-k} r^{-k} R^k e^{-i\theta} + a_k r^k R^{-k} e^{i\theta} - k \bar{a}_{-k} r^{-k} R^k e^{(k+2)i\theta} \right. \\
&\quad \left. + k \bar{a}_k r^k R^{-k} e^{-(k+2)i\theta} + \bar{b}_{-k} r^{-k} R^k e^{+ki\theta} + \bar{b}_k r^k R^k e^{-ki\theta} \right) \\
&= \sum_{k=1}^M \left( a_{-k} r^{-k} R^k e^{-i\theta} + a_k r^k R^{-k} e^{i\theta} - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)} r^{-(k-2)} R^{(k-2)} e^{ki\theta} \right. \\
&\quad \left. + (k+2) \bar{a}_{k+2} r^{k+2} R^{-(k+2)} e^{-ki\theta} + \bar{b}_{-k} r^{-k} R^k e^{+ki\theta} + \bar{b}_k r^k R^k e^{-ki\theta} \right) \\
\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(z) + \bar{\psi}(z) &= \sum_{k=1}^M \left( \left( a_{-k} r^{-k} R^k + (k+2) \bar{a}_{k+2} r^{k+2} R^{-(k+2)} + \bar{b}_k r^k R^k \right) e^{-ik\theta} \right. \\
&\quad \left. + \left( a_k r^k R^{-k} - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)} r^{-(k-2)} R^{(k-2)} + \bar{b}_{-k} r^{-k} R^k \right) e^{ik\theta} \right) \tag{۲۴-۲}
\end{aligned}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۴-۲) در (۲۱-۲)، امکان تشکیل معادلاتی مستقل به‌وجود می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^M \left( \left( a_{-k}^j r^{-k} R^k + (k+2) \bar{a}_{k+2}^j r^{k+2} R^{-(k+2)} + \bar{b}_k^j r^k R^k \right) e^{-ik\theta} \right. \\
&\quad \left. + \left( a_k^j r^k R^{-k} - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)}^j r^{-(k-2)} R^{(k-2)} + \bar{b}_{-k}^j r^{-k} R^k \right) e^{ik\theta} \right) = \tag{۲۵-۲} \\
&\sum_{k=1}^M \left( \left( a_{-k}^{j+1} r^{-k} R^k + (k+2) \bar{a}_{k+2}^{j+1} r^{k+2} R^{-(k+2)} + \bar{b}_k^{j+1} r^k R^k \right) e^{-ik\theta} \right. \\
&\quad \left. + \left( a_k^{j+1} r^k R^{-k} - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)}^{j+1} r^{-(k-2)} R^{(k-2)} + \bar{b}_{-k}^{j+1} r^{-k} R^k \right) e^{ik\theta} \right)
\end{aligned}$$

با برابر قرار دادن ضرایب جملات نمایی از دو طرف معادله‌ی (۲۵.۲) تعداد ۲M معادله‌ی مستقل

نسبت به یکدیگر و بر حسب ضرایب مجهول  $a_k^j, b_k^j, a_k^{j+1}, b_k^{j+1}$  به‌دست خواهند آمد.

$$a_{-k}^j \left( \frac{R}{r} \right)^k + (k+2) \bar{a}_{k+2}^j \left( \frac{r}{R} \right)^{k+2} + \bar{b}_k^j \left( \frac{r}{R} \right)^k = \tag{۲۶-۲}$$

$$\begin{aligned}
&a_{-k}^{j+1} \left( \frac{R}{r} \right)^k + (k+2) \bar{a}_{k+2}^{j+1} \left( \frac{r}{R} \right)^{k+2} + \bar{b}_k^{j+1} \left( \frac{r}{R} \right)^k \\
&a_k^j \left( \frac{r}{R} \right)^k - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)}^j \left( \frac{R}{r} \right)^{(k-2)} + \bar{b}_{-k}^j \left( \frac{R}{r} \right)^k = \tag{۲۷-۲}
\end{aligned}$$

$$a_k^{j+1} \left( \frac{r}{R} \right)^k - (k-2) \bar{a}_{-(k-2)}^{j+1} \left( \frac{R}{r} \right)^{(k-2)} + \bar{b}_{-k}^{j+1} \left( \frac{R}{r} \right)^k$$

که در معادلات بالا  $k=1,2,\dots,M$  است.

با تکرار روند استخراج معادلات (۲۶-۲) و (۲۷-۲) از رابطه‌ی (۲۱-۲)، برای رابطه‌ی (۲۲-۲) معادلاتی

مشابه برای ارضای شرط پیوستگی جابه‌جایی در فصل مشترک هر دو لایه قابل استخراج است.

$$\frac{1}{G_j} \left( K_j \left( \frac{R}{r} \right)^k a_{-k}^j - (k+2) \left( \frac{r}{R} \right)^{k+2} \bar{a}_{k+2}^j - \left( \frac{r}{R} \right)^k \bar{b}_k^j \right) = \quad (28-2)$$

$$\frac{1}{G_{j+1}} \left( K_{j+1} \left( \frac{R}{r} \right)^k a_{-k}^{j+1} - (k+2) \left( \frac{r}{R} \right)^{k+2} \bar{a}_{k+2}^{j+1} - \left( \frac{r}{R} \right)^k \bar{b}_k^{j+1} \right)$$

$$\frac{1}{G_j} \left[ K_j \left( \frac{r}{R} \right)^k a_k^j + (k-2) \left( \frac{R}{r} \right)^{(k-2)} \bar{a}_{-(k-2)}^j - \bar{b}_{-k}^j \left( \frac{R}{r} \right)^k \right] = \quad (29-2)$$

$$\frac{1}{G_{j+1}} \left[ K_{j+1} \left( \frac{r}{R} \right)^k a_k^{j+1} + (k-2) \left( \frac{R}{r} \right)^{(k-2)} \bar{a}_{-(k-2)}^{j+1} - \bar{b}_{-k}^{j+1} \left( \frac{R}{r} \right)^k \right]$$

که در اینجا  $k=1,2,\dots,M$  است. همان‌طور که گفته شد، روابط (۲۱-۲) و (۲۲-۲) برای فصل مشترک

هر دو لایه از ورق تعریف شده است. بنابراین معادلات (۲۶-۲)، (۲۷-۲)، (۲۸-۲) و (۲۹-۲) نیز برای

فصل مشترک دو لایه‌ی  $i$ ام و  $(i+1)$ ام تعریف شده است. پس برای  $N$  لایه  $(N-1)$  فصل مشترک وجود دارد

و در مجموع  $4M(N-1)$  معادله‌ی مستقل از این روش حاصل می‌شود. با توجه با تعداد کل مجهول‌ها که از

قبل به تعداد  $4MN$  محاسبه شد؛ به  $4M$  معادله‌ی دیگر جهت تشکیل دستگاه معادلات خطی نیاز هست.

این تعداد از معادلات از روش اول، که استفاده از شرایط مرزی ورق است، استخراج خواهند شد. با توجه به

مرزهای ورق که در قبل بررسی شد، لایه‌ی اول و لایه‌ی آخر می‌بایست شرایط مرزی را ارضا کنند. روش

مورد استفاده در این مرحله روش حداقل مربعات خطا در نقاطی با تقسیم‌بندی منظم در مرز است. در این

روش ابتدا تعدادی نقطه در فواصل مساوی در کل مرزهای ورق فرض می‌شوند. برای بهبود در دقت جواب

بهتر است، تعداد نقاط از تعداد مجهولات کمتر نباشد. سپس با توجه به نوع بارگذاری، مقادیر تنش در

مرزها بررسی می‌شوند. با استفاده از رابطه‌های (۱۴-۲) تنش‌های نرمال و برشی بر حسب توابع پتانسیل و

ضرایب مجهول آن محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \operatorname{Re} [2\phi'(z) - \bar{z}\phi''(z) - \psi'(z)] \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} [2\phi'(z) + \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]\end{aligned}\quad (30-2)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \operatorname{Im} [\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \\ \sigma_x &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^M \left[ a_{-k} \left( -2R^k k z^{-(k+1)} - R^k \bar{z} k(k+1) z^{-(k+2)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_k \left( 2R^k k z^{-(k+1)} - R^{-k} \bar{z} k(k-1) z^{(k-2)} \right) + b_{-k} R^k k z^{-(k+1)} - b_k R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right]\end{aligned}\quad (31-2)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^M \left[ a_{-k} \left( -2R^k k z^{-(k+1)} + R^k \bar{z} k(k+1) z^{-(k+2)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_k \left( 2R^k k z^{-(k+1)} + R^{-k} \bar{z} k(k-1) z^{(k-2)} \right) - b_{-k} R^k k z^{-(k+1)} + b_k R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right]\end{aligned}\quad (32-2)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=1}^M \left[ a_{-k} R^k \bar{z} k(k+1) z^{-(k+2)} + a_k R^{-k} \bar{z} k(k-1) z^{(k-2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b_{-k} R^k k z^{-(k+1)} + b_k R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right]\end{aligned}\quad (33-2)$$

برای مرز گشودگی، تنش‌ها باید به صورت قطبی بررسی شوند. با کمک صورت قطبی رابطه‌ی (۲-۱۴)

از کتاب ساوین [۶] داریم

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= 4 \operatorname{Re} [\phi'(z)] \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2e^{2i\alpha} [\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]\end{aligned}\quad (34-2)$$

که در آن  $z = re^{i\alpha}$  است. با تکرار روند صورت گرفته از رابطه‌ی (۲-۱۴) برای استخراج تنش‌ها در

مختصات دکارتی، از رابطه‌ی (۲-۳۴) تنش‌های شعاعی، محیطی و برشی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^M \left[ a_{-k} \left( -2R^k k z^{-(k+1)} - e^{2i\theta} R^k \bar{z} k(k+1) z^{-(k+2)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_k \left( 2R^k k z^{-(k+1)} - e^{2i\theta} R^{-k} \bar{z} k(k-1) z^{(k-2)} \right) + b_{-k} e^{2i\theta} R^k k z^{-(k+1)} - b_k e^{2i\theta} R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right]\end{aligned}\quad (35-2)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^M \left[ a_{-k} \left( -2R^k k z^{-(k+1)} + e^{2i\theta} R^k \bar{z} k(k+1) z^{-(k+2)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_k \left( 2R^k k z^{-(k+1)} + e^{2i\theta} R^{-k} \bar{z} k(k-1) z^{(k-2)} \right) - b_{-k} e^{2i\theta} R^k k z^{-(k+1)} + b_k e^{2i\theta} R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right]\end{aligned}\quad (36-2)$$

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta} &= \operatorname{Im} \left[ e^{2i\theta} \sum_{k=1}^M \left[ a_{-k} R^k \bar{z} k(k+1) z^{-(k+2)} + a_k R^{-k} \bar{z} k(k-1) z^{(k-2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b_{-k} R^k k z^{-(k+1)} + b_k R^{-k} k z^{(k-1)} \right] \right]\end{aligned}\quad (37-2)$$

اگر فرض شود، تنش نرمال وارد شده در مرز  $y = \pm \frac{L}{2}$  برابر  $\sigma_n$  و تنش برشی در آن مرز برابر  $\tau_n$

باشد.  $\Gamma_n^2$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$r_n^2 = (\sigma_x - \sigma_n)^2 + (\tau_{xy} - \tau_n)^2 \quad (38-2)$$

در هر مرز نقاطی با فواصل یکسان در نظر گرفته شده است، که با قرار دادن مختصات این نقاط در روابط (۳۵-۲) تا (۳۷-۲) و تکمیل رابطه‌ی (۳۸.۲) عبارت  $\Delta$  تشکیل داده خواهد شد.

$$\Delta = \sum_{n=1}^P r_n^2 \quad n=1,2,\dots,P \quad (39-2)$$

که در آن مقادیر  $\sigma_x$  و  $\tau_{xy}$  از معادلات (۳۱-۲) و (۳۳-۲) جایگزین خواهند شد.  $n$  شماره‌ی نقطه‌ی مورد بررسی از مرز و  $P$  تعداد کل نقاط مورد بررسی در این روش است. به‌طور مشابه برای مرزهای  $r=a$  و  $x=\pm\frac{L}{2}$  عباراتی همانند عبارت (۳۹-۲) تشکیل داده می‌شود.

$$r_n^2 = (\sigma_y - \sigma_n)^2 + (\tau_{xy} - \tau_n)^2 \quad (40-2)$$

$$r_n^2 = (\sigma_r - \sigma_n)^2 + (\tau_{r\theta} - \tau_n)^2 \quad (41-2)$$

نقاط واقع در مرزهای خارجی ورق با توابع پتانسیل لایه‌ی آخر و نقاط واقع در مرز داخلی ورق یا همان گشودگی دایروی با توابع پتانسیل لایه اول ورق در ارتباط هستند. از این رو با تشکیل عبارت  $\Delta$  رابطه‌ی (۳۸-۲) این عبارت تابعی ضمنی از ضرایب مجهول توابع پتانسیل لایه اول و آخر ورق خواهد شد. با گرفتن مشتق ضمنی از  $\Delta$  بر حسب هر یک از ضرایب مجهول، معادلات لازم برای به‌دست آوردن این ضرایب حاصل خواهند شد.

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_k^j} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial b_k^j} = 0 \quad j=1,2 \quad \& \quad k=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm M \quad (42-2)$$

همان‌طور که در قبل بیان شد، تعداد  $4M$  معادله از شرایط مرزی ورق لازم است، که از معادلات (۴۲-۲)، استخراج می‌شوند. با انتخاب دسته متغیرهای  $a_k^j$  و  $b_k^j$  مختلف برای تشکیل معادلات متفاوت این نتیجه حاصل شد که، پاسخ حاصل از حل این معادلات مستقل از انتخاب متغیرها است. در نهایت با داشتن این تعداد معادله امکان محاسبه‌ی ضرایب مجهول توابع پتانسیل امکان‌پذیر می‌شوند.

## ۲-۳ حلّ تحلیلی موجود در مراجع

برای ورق بلند همگن با گشودگی دایروی حلّ دقیق وجود دارد، که بسیاری از دانشمندان مانند والتر دی. پیلکی [۳۹] و مارتین اچ. ساد [۲] در کتاب‌های خود به آن اشاره کرده‌اند.

$$\sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2}\right) \cos(2\theta) \quad (۴۳-۲)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1) \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right) \cos(2\theta) \quad (۴۴-۲)$$

در اینجا  $a$  شعاع گشودگی و  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  به ترتیب تنش در مرزهای  $x = \pm \frac{L}{2}$  و  $y = \pm \frac{L}{2}$  شکل می-

باشند.

## ۲-۴ تحلیل اجزای محدود

در حقیقت تمامی عناصر و پدیده‌های موجود در جهان را می‌توان با قوانین فیزیک اثبات و با کمک علم ریاضی شامل معادلات جبری، معادلات دیفرانسیلی یا انتگرالی برای آنها شکل‌بندی بر پایه‌ی ریاضی پیدا کرد. در علم مکانیک می‌توان میزان و نحوه توزیع تنش در یک جسم با هندسه‌های مختلف و انواع بارگذاری، میزان توزیع دما در ماده با شرایط مرزی مختلف، ارتعاشات جسم بر اثر بارهای دینامیکی و ضربه‌ای و... را با استفاده از شکل‌بندی ریاضی به‌دست آورد. برخی از مسائل با شرایط مرزی و هندسه‌ی خاص دارای حلّ دقیق می‌باشند. ولی واقعیت این است، که بسیاری از مسائل فاقد راه‌حلّ تحلیلی و دقیق می‌باشند؛ که در این شرایط روش حلّ عددی راه مناسبی برای به‌دست آوردن یک شکل‌بندی ریاضی برای این دسته مسائل است. روش اجزای محدود نیز یک روش حلّ عددی است. ویژگی آن نسبت به دیگر روش‌ها در دسته‌بندی دامنه‌ی جسم به دامنه‌های ساده‌تر به نام المان‌های محدود، است. این عمل باعث می‌شود، که هندسه‌های سخت و پیچیده به یک مجموعه هندسه‌های ساده‌تر که حلّ آن آسان می-

باشد، تبدیل شود. هر المان از نقاطی که متعلق به کلّ جسم است، تشکیل می‌شود و هر نقطه بین چند المان مشترک است؛ که در معادلات تعادل تمام آن المان‌ها شرکت می‌کنند. این امر باعث برقراری شرط پیوستگی بین المان‌های کل جسم در هنگام حل دستگاه معادلات سفتی می‌شود. المان‌های مختلفی برای شرایط هندسی و بارگذاری متفاوت در تحلیل‌ها استفاده می‌شوند، که برای مثال می‌توان به دو دسته زیر که در این تحلیل کاربرد دارند، اشاره کرد. [۴۰]

۱. المان تنش‌صفحه‌ای و کرنش‌صفحه‌ای: برای حالتی که مسأله مورد نظر دارای هندسه دوبعدی بوده که بارگذاری درون‌صفحه‌ای داشته باشد. این المان جابه‌جایی درون‌صفحه‌ای جسم را بررسی می‌کند.

۲. المان خمش صفحه‌ای: این المان برای حالتی که ورق تحت بارگذاری خارج صفحه است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این المان برای پوسته‌ها و ورق‌های فضایی مناسب است، که علاوه بر خیز، شیب در دو جهت محورهای اصلی ورق را محاسبه می‌کند.

پس همان‌طور که گفته شد، روش اجزای محدود یک روش حلّ عددی می‌باشد. این روش برای مسائل پیچیده، که امکان به‌دست آوردن حل دقیق یا حل تحلیلی در آن امکان‌پذیر نیست، گزینه مناسبی است. در این تحقیق از روش اجزای محدود برای راستی‌سنجی حلّ تحلیلی استفاده شده است؛ ولی در شرایطی که حلّ دقیق یا حل تحلیلی مورد تأیید در مراجع، برای مسأله وجود دارد؛ مانند کشش ساده‌ی ورق بلند همگن با گشودگی دایروی، مقایسه‌ی حلّ تحلیلی و اجزای محدود می‌تواند معیاری برای درستی تحلیل عددی باشد. این مقایسه، در این تحقیق انجام شده که با دقت قابل قبولی روند حل اجزای محدود مورد تأیید قرار گرفت.

## ۵-۲ معرفی نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس

در این پایان‌نامه برای راستی‌سنجی حلّ تحلیلی پیشنهادی از نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس استفاده می‌شود. از نظر قدرت مانور، نرم‌افزار آباکوس جزء گروه نرم‌افزارهای CAE بوده که توانایی تحلیل مکانیکی در



زمینه‌های تحلیل تنش، تحلیل حرارتی، دینامیکی، ارتعاشاتی، همچنین تحلیل سازه‌ها را دارا می‌باشد. شرکت سازنده آباکوس شرکت داسو سیستمز<sup>۱</sup> است که نرم‌افزارهای کتیا<sup>۲</sup> و سالیدورکس<sup>۳</sup> نیز از محصولات همین شرکت می‌باشند. قدرت و دقت تحلیلی آباکوس باعث شده، که در چند سال گذشته این نرم‌افزار با استقبال خوبی از طرف مهندسين مکانیک، عمران و... روبه‌رو شود.

## ۲-۶ روند تحلیل عددی

### ۲-۶-۱ هندسه ورق

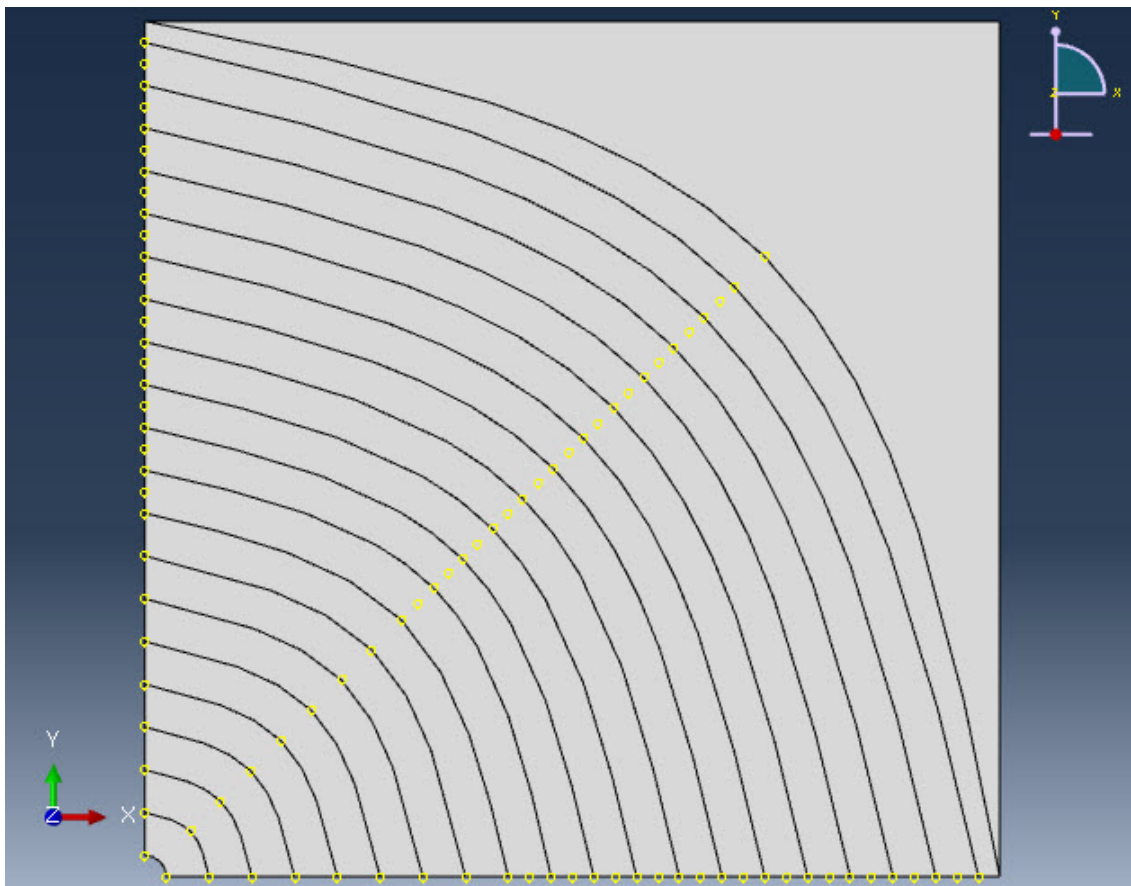
همان‌طور که در فصل قبل بیان شد، در این تحلیل از ورق مربعی با دو نسبت ابعادی  $\frac{D}{L} = \frac{1}{10}$  و  $\frac{D}{L} = \frac{1}{20}$  استفاده شد. در نرم‌افزار آباکوس هندسه‌ی مسأله تحت فضای دو بعدی، به‌صورت تغییر شکل-پذیر و با شکل ظاهری پوسته طراحی شد. این نوع فضا، باعث در نظر گرفتن پیش فرض‌های حاکم بر مسأله می‌شود. بنابراین انتخاب صحیح محیط تحلیل نقشی زیاد در درستی نتایج حاصل از آن می‌شود. جهت کم کردن حجم محاسبات از یک چهارم ورق برای تحلیل در آباکوس استفاده شد. وجود تقارن در هندسه، خصوصیات مکانیکی و بارگذاری ورق امکان این ساده سازی را فراهم می‌کند. همان‌طور که بیان شد، ورق همگن به‌صورت رینگ‌هایی هم مرکز گشودگی، در نظر گرفته شده است. از این‌رو با توجه به شکل ۲-۳، در هنگام مدل‌سازی در نرم‌افزار نیز ورق به همین صورت با رینگ‌هایی به ضخامت ۲ واحد طراحی شد. قطر گشودگی دایروی ورق نیز ۲ واحد فرض شده است.

---

1 -Dassault Systemes

2 - CATIA

3- SOLIDWORKS



شکل ۳-۲ هندسه ورق با نسبت ابعادی  $\frac{D}{L} = \frac{1}{20}$  در نرم افزار آباکوس

## ۲-۶-۲ تعریف خواص مواد

در این مرحله خواص مکانیکی ماده تعریف می‌شود. سپس برای هر ماده یک قسمت<sup>۱</sup> ایجاد می‌شود؛ که دارای خواص ماده‌ی تعریفی است و سپس این قسمت، به ناحیه‌ی (رینگ) مورد نظر از هندسه‌ی ورق که باید این خواص را داشته باشد، نسبت داده می‌شود. واضح است که تحلیل نرم‌افزاری جهت راستی سنجی حل پیشنهادی برای ورق می‌باشد؛ از این رو از نظر هندسی و خواص مکانیکی در هر نقطه می-

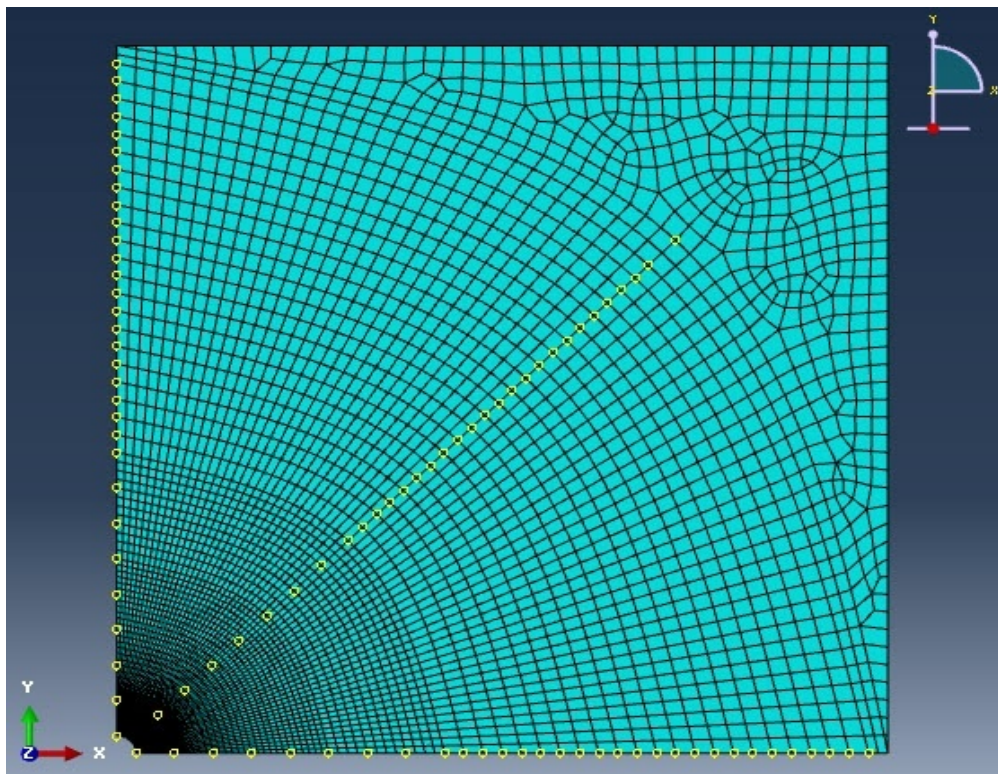
---

1- Section

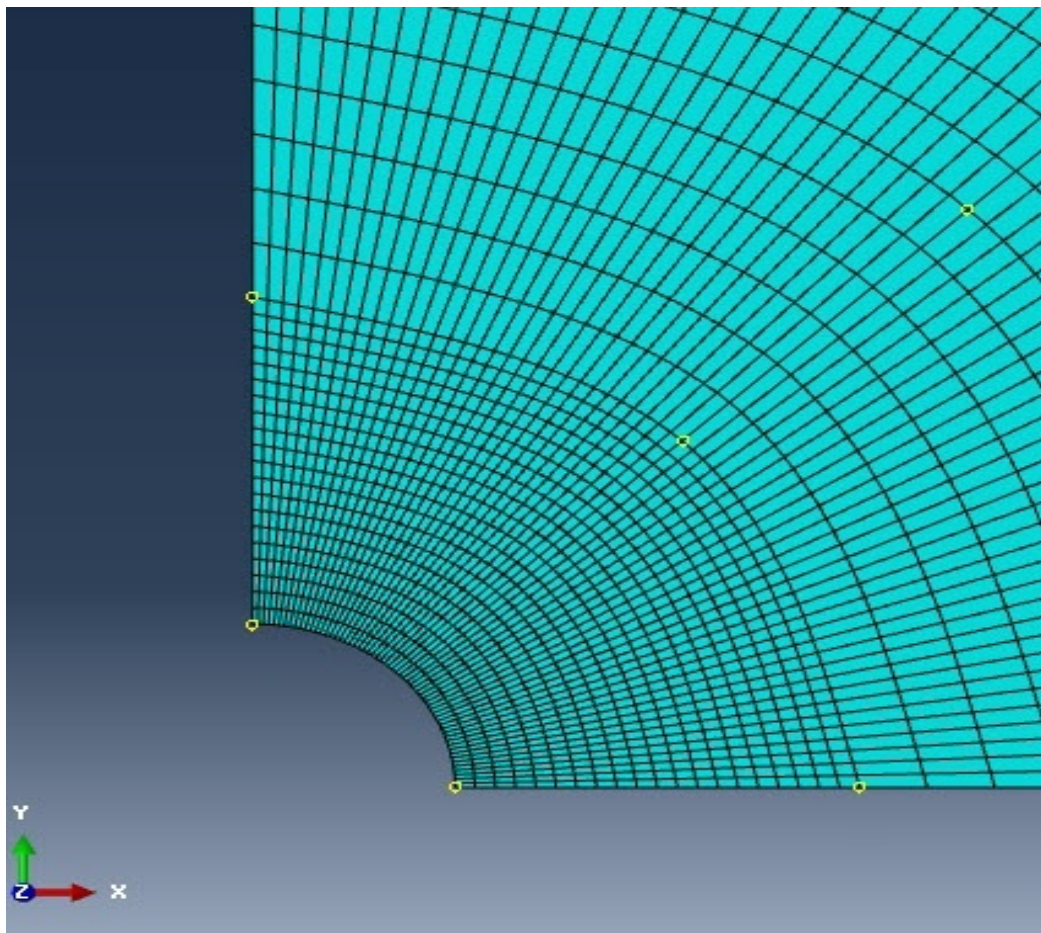
بایست بیشترین انطباق را با حل پیشنهادی داشته باشد. بنابراین خواص لایه‌ها وابسته به شرایط جنس ورق مورد تحلیل، از حل تحلیلی گرفته شد.

## ۲-۶-۳ مش‌بندی و اعمال شرایط حل

با توجه به هندسه انتخابی از مش CPS8R استفاده شد. این مش یک المان تنش‌صفحه‌ای مربعی هشت نقطه‌ای ( تغییرات هندسی غیرخطی) می‌باشد. با توجه به ساختار کلی هندسه ورق و حضور رینگ-های هم‌مرکز نوع مش‌بندی استاندارد و منظم در نظر گرفته شد، تا علاوه بر پوشش مناسب تمام سطح از ایجاد مش‌های غیر یکنواخت جلوگیری شود. این امر دقت محاسبات در نرم‌افزار را افزایش می‌دهد.



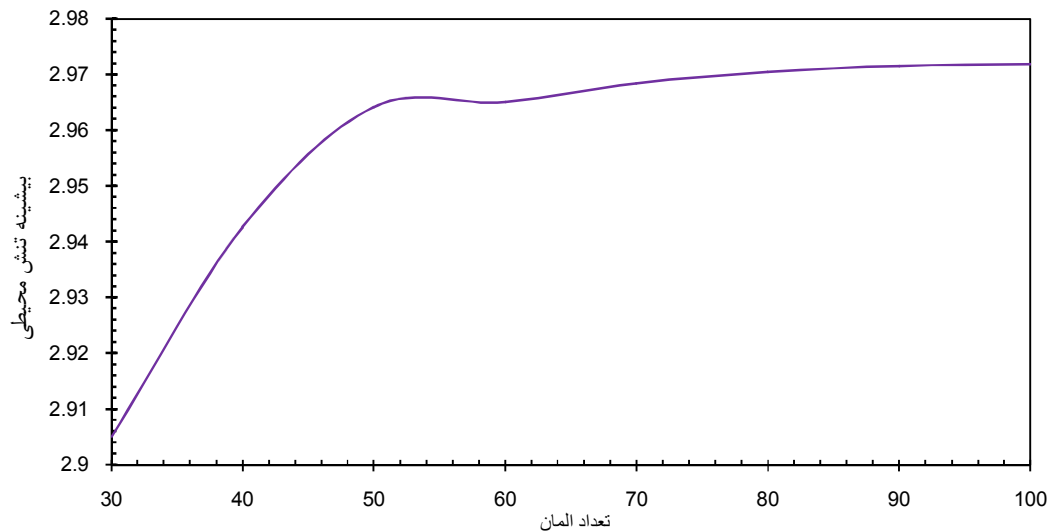
شکل ۲-۴ مش‌بندی کل ورق در نرم‌افزار آباکوس



شکل ۲-۵ نحوه چیدمان و تراکم المان‌ها در اطراف گشودگی

همان‌طور که در شکل ۲-۵ مشخص است، ابعاد مش در اطراف گشودگی بسیار کوچکتر از مش‌ها در مرزهای خارجی است. با این حالت علاوه بر دقت حل در اطراف گشودگی، که برای تحلیل مهم است، از تولید و حل معادلات بی‌هوده در نقاط دور از گشودگی و اطراف مرزهای خارجی جلوگیری می‌شود. با این روند، سرعت حل در نرم‌افزار بالا می‌رود. برای یافتن بهینه‌ترین اندازه‌ی مش در ناحیه‌ی اطراف گشودگی یک ورق همگن با گشودگی دایروی، تحت بارگذاری تک‌محوره، مورد بررسی قرار گرفت. در نرم‌افزار آباکوس، این ورق با اندازه‌های مختلف مش در ناحیه‌ی اطراف گشودگی مورد تحلیل قرار گرفت و نتایج حاصل شده از تحلیل برای تنش محیطی با حل تحلیلی (۲-۴۴)، مقایسه و در شکل ۲-۶ بیشینه مقدار تنش محیطی در تحلیل عددی برای ورق همگن تحت کشش تک‌محوره آورده شد. همان‌طور که مشاهده

می‌شود، بیشترین مقدار تنش برای تعداد ۷۰ مش در اطراف گشودگی است. که با توجه به این نتیجه، در تمام تحلیل‌ها از این تعداد مش استفاده خواهد شد.



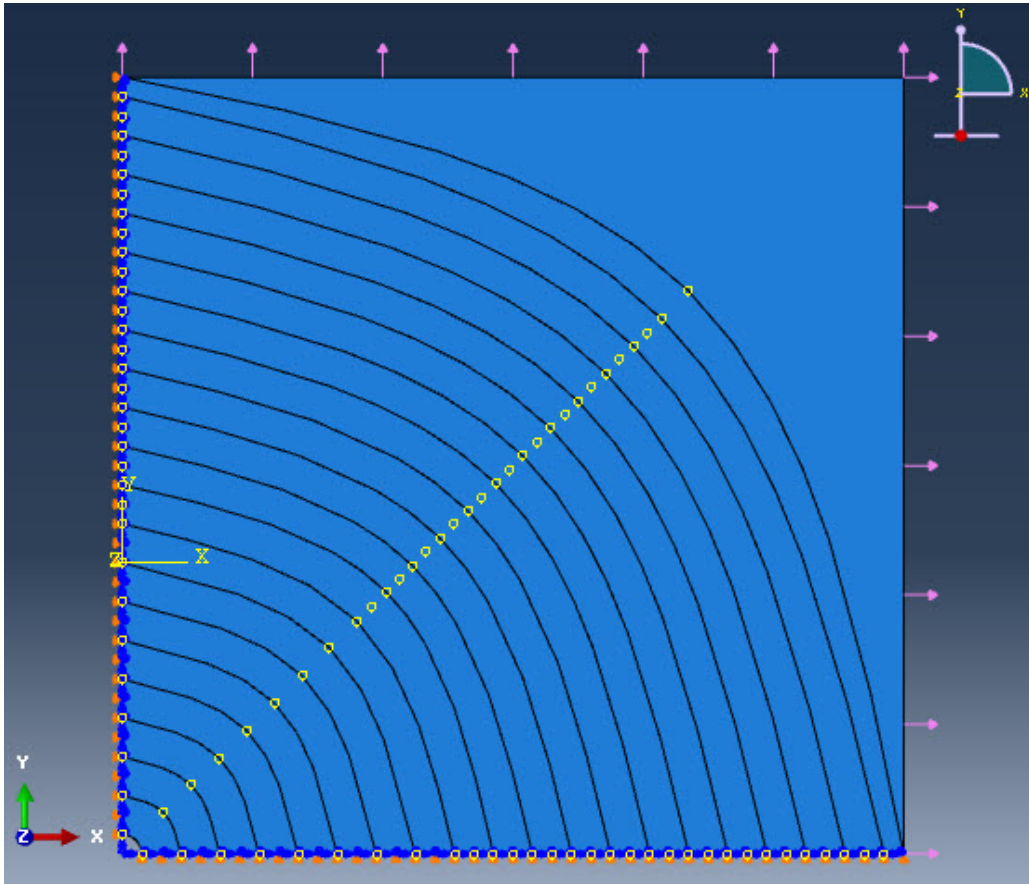
شکل ۲-۶ بیشینه مقدار تنش محیطی حاصل از تحلیل عددی نسبت به حل تحلیلی موجود در مراجع

به دلیل شرایط بارگذاری و هندسه استاتیکی در مسأله نوع تحلیل مورد استفاده در نرم‌افزار نیز استاتیکی در نظر گرفته شد.

## ۲-۶-۴ اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

در این مرحله شرایط مرزی و بارگذاری ورق تعریف می‌شود. به علت تقارن بارگذاری و هندسه‌ی ورق نسبت به محورهای اصلی ورق، می‌توان برای کاهش حجم محاسبات از یک‌چهارم ورق برای تحلیل در نرم‌افزار آباکوس استفاده و در این صورت می‌بایست شرط متقارن بودن را در محل برش ورق اعمال کرد. شکل ۲-۷ ورق را تحت شرایط مرزی اعمال شده نشان می‌دهد.

با توجه به محیط طراحی و مش انتخابی، بارگذاری اعمالی بر روی مرزهای خارجی به صورت فشار بر واحد طول ورق، انتخاب شد. این بارگذاری اثر یکنواختی تنش در مرزهای ورق، بر طبق فرض مسأله را ارضا می‌کند.



شکل ۷-۲- اعمال شرایط مرزی متقارن در محل برش یک چهارم ورق در آبکوس

## ۷-۲ بررسی نتایج

ورق مورد بررسی به عنوان مطالعه‌ی موردی، دو ورق با نسبت ابعاد  $\frac{L}{D} = 10$  و  $\frac{L}{D} = 20$  می‌باشد. مشخصات ابعادی برای نسبت ابعادی ۲۰، یک ورق نازک ۱۰ لایه با طول ۴۰ میلی‌متر و قطر گشودگی دایروی ۲ میلی‌متر و ضخامت یکنواخت ۱ میلی‌متر می‌باشد. در این فصل هیچ بارگذاری در داخل گشودگی وجود ندارد؛ از این رو در اطراف گشودگی تنش شعاعی و تنش برشی نیز، حضور ندارند.

$$\sigma_r = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (۴۵-۲)$$

بار اعمالی به ورق، در مرزهای خارجی به صورت تک‌محوره و دومحوره و در مرز داخلی گشودگی بدون حضور فشار است. جهت بی‌بعد سازی محور قائم در شکل‌ها، از نسبت تنش  $\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$  استفاده شده است. در اینجا  $\sigma_1$  تنش اعمالی در مرز ورق در جهت محور ۱ (شکل ۲-۲) و  $\sigma_0$  تنش محیطی است.

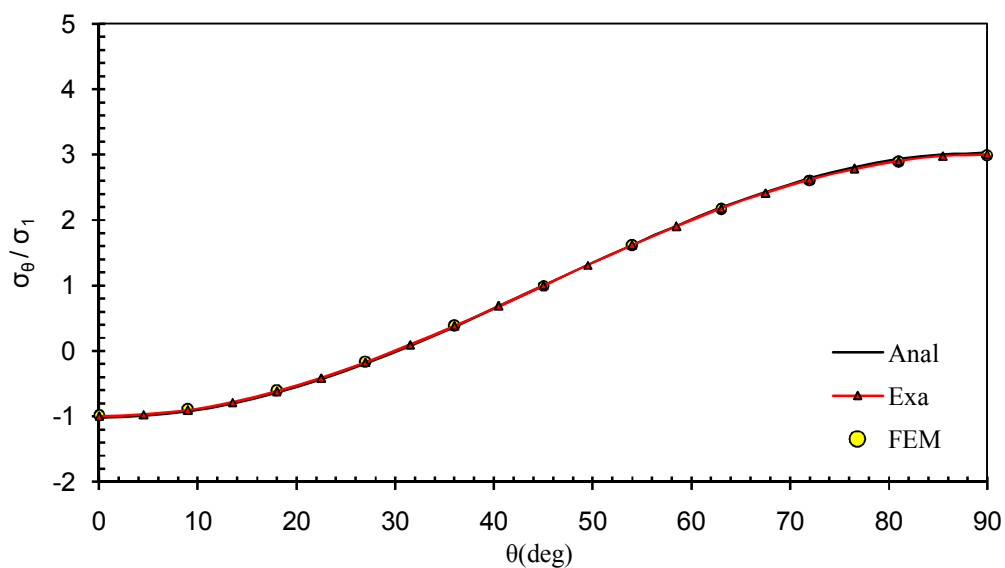
بارگذاری مورد مطالعه در این تحقیق به صورت بارگذاری تک‌محوره و دومحوره است؛ که در حالت تک‌محوره به صورت کششی به اندازه‌ی  $\sigma_1 = \sigma = 1 \text{ MPa}$  و در حالت دومحوره، بارگذاری در جهت محور ۱ به حالت کششی و مقدار  $\sigma_1 = \sigma = 1 \text{ MPa}$  و در جهت محور ۲ به مقدار  $n\sigma$  وارد می‌شود.

$n = \{-1, -2, 0, 1, 2\}$

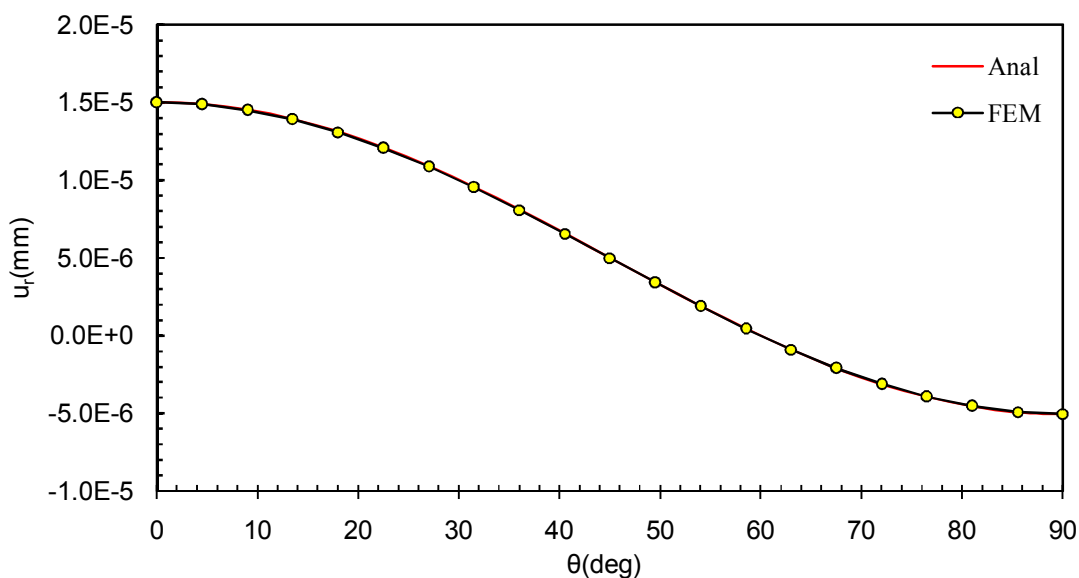
## ۲-۷-۱ ورق با نسبت ابعادی ۲۰

### ۱-۷-۲-۱ کشش تک‌محوره

شکل‌های ۲-۸ و ۲-۹ به ترتیب تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را، در نقاط اطراف گشودگی دایروی، تحت بارگذاری کشش تک‌محوره، نشان می‌دهند. علاوه بر مقایسه‌ی حلّ تحلیلی مورد بررسی و روش FEM نتایج حاصل از حلّ تحلیلی موجود در مراجع (رابطه‌ی (۲-۴۴)) نیز در نمودارهای مربوط به تنش محیطی در ورق همگن آورده شده است (نمودار Exa). همان‌طور که در شکل ۲-۸ مشاهده می‌شود، تنش حاصل از حلّ تحلیلی پیشنهادی با کمک توابع پتانسیل برای ورق همگن تحت بارگذاری اشاره شده، نسبت به حلّ تحلیلی موجود در مراجع دارای دقت قابل قبولی است. همچنین مقادیر به دست آمده برای جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی، از هر دو روش تحلیل عددی و حلّ تحلیلی مورد بررسی به یکدیگر بسیار نزدیک می‌باشند. این خطای کم نشان‌دهنده‌ی دقت بالای حلّ پیشنهادی است.



شکل ۸-۲ توزیع تنش در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوره



شکل ۹-۲ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری تک‌محوره

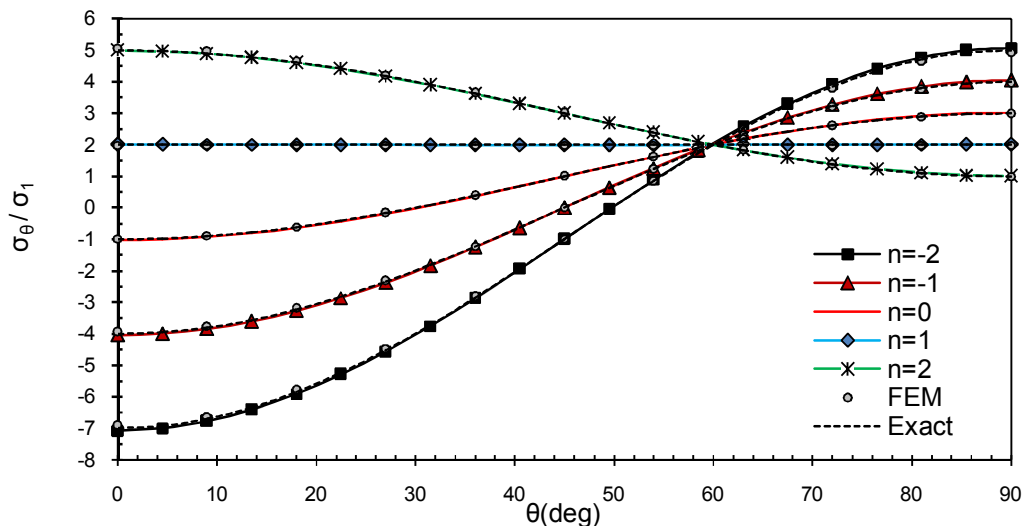
## ۲-۱-۷-۲ بارگذاری دومحوره

شکل‌های ۱۰-۲ و ۱۱-۲ به ترتیب تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را در نقاط اطراف گشودگی

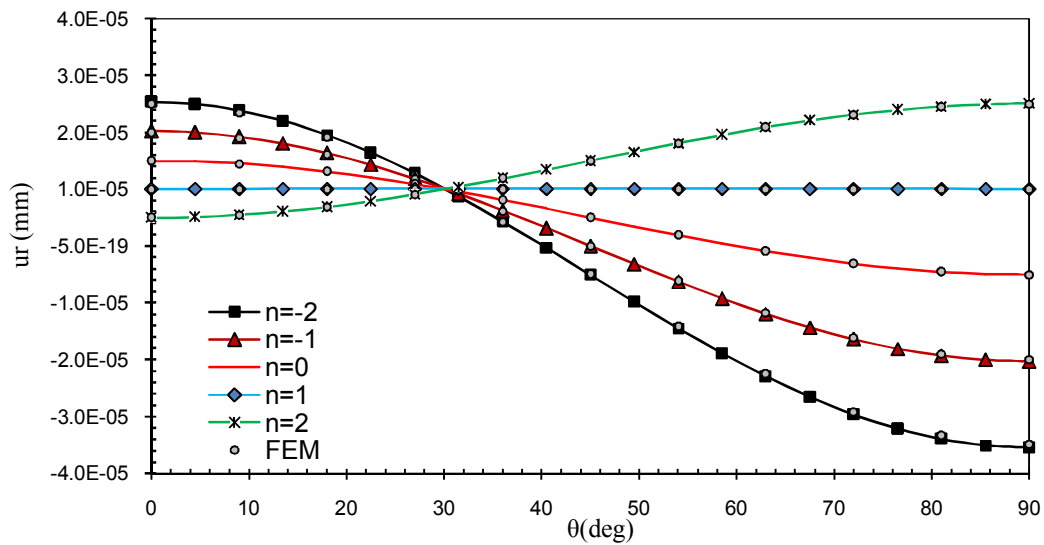
دایروی، تحت بارگذاری دومحوره نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۱۰-۲ مشاهده می‌شود، همانند



کشش تک‌محوره، تنش حاصل از حلّ پیشنهادی با کمک توابع پتانسیل برای ورق همگن تحت بارگذاری اشاره شده، دارای دقت قابل قبولی است. در این شکل، با افزایش مقدار  $n$  از  $-2$  تا  $2$ ، اختلاف میان مقدار تنش محیطی بی‌بعد بیشینه و کمینه در اطراف گشودگی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد، به طوری که در  $n=1$  در تمام نقاط اطراف گشودگی، این تنش دارای مقداری ثابت می‌باشد. علت این امر رابطه‌ی مستقیم تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به بارگذاری درون صفحه‌ای در مرزهای خارجی می‌باشد. در شکل ۱۱-۲ جابه‌جایی شعاعی در اطراف گشودگی نشان داده می‌شود. با کاهش بار فشاری درون-صفحه‌ای در مرزهای خارجی در جهت محور دوم ابتدا تغییر شکل گشودگی دایروی ورق، از بیضوی شکل به سمت دایروی شکل میل می‌کند. در  $n=1$  با توجه به یکنواختی مقدار تنش محیطی در اطراف گشودگی دایروی بعد از تغییر شکل، همچنان دایروی باقی می‌ماند. برای مقادیر بیشتر از  $n=1$  با افزایش مقدار  $n$ ، گشودگی بعد از بارگذاری، بیضوی شکل می‌شود.



شکل ۱۰-۲ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دومحوره



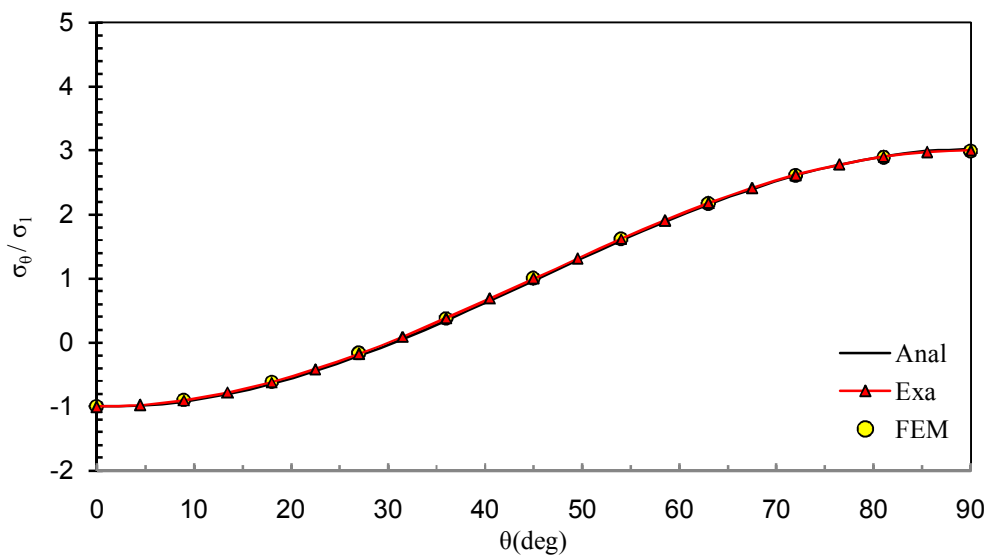
شکل ۱۱-۲ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوره

## ۲-۷-۲ ورق با نسبت ابعادی ۱۰

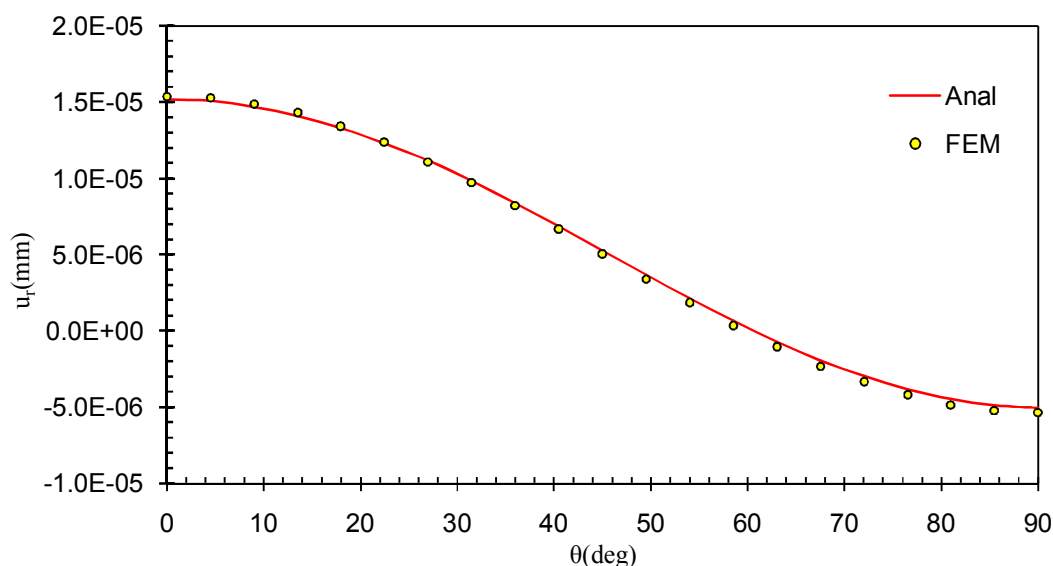
### ۱-۲-۷-۲ کشش تک‌محوره

با توجه به شکل‌های ۱۲-۲ و ۱۳-۲ دقت حل پیشنهادی و تحلیل نرم‌افزاری، برای ورق با نسبت

ابعادی ۱۰ در مقایسه با حل تحلیل (۲-۴۴) در حد قابل قبولی می‌باشند.



شکل ۱۲-۲ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت کشش تک‌محوره

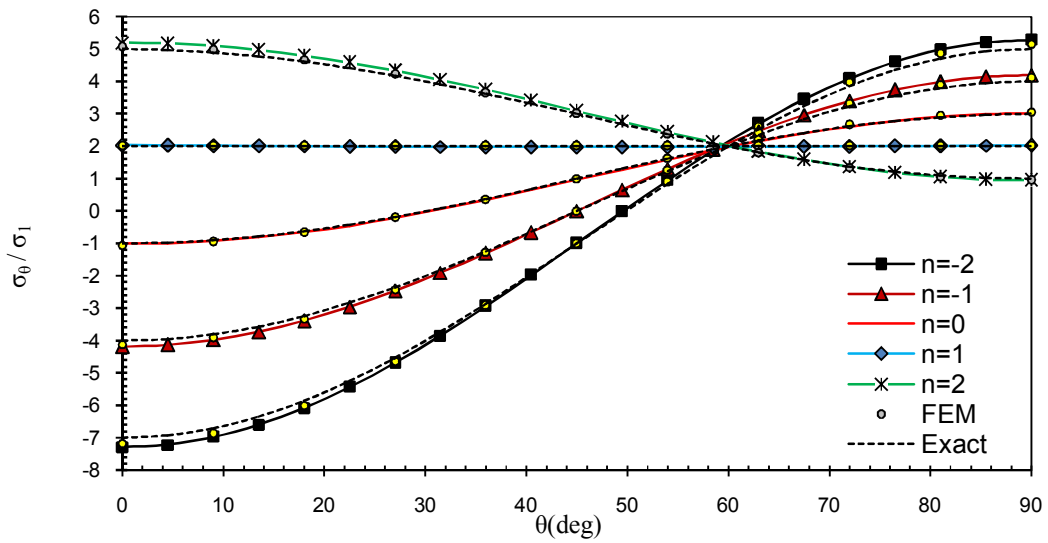


شکل ۲-۱۳ جابه‌جایی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت کشش تک‌محوره

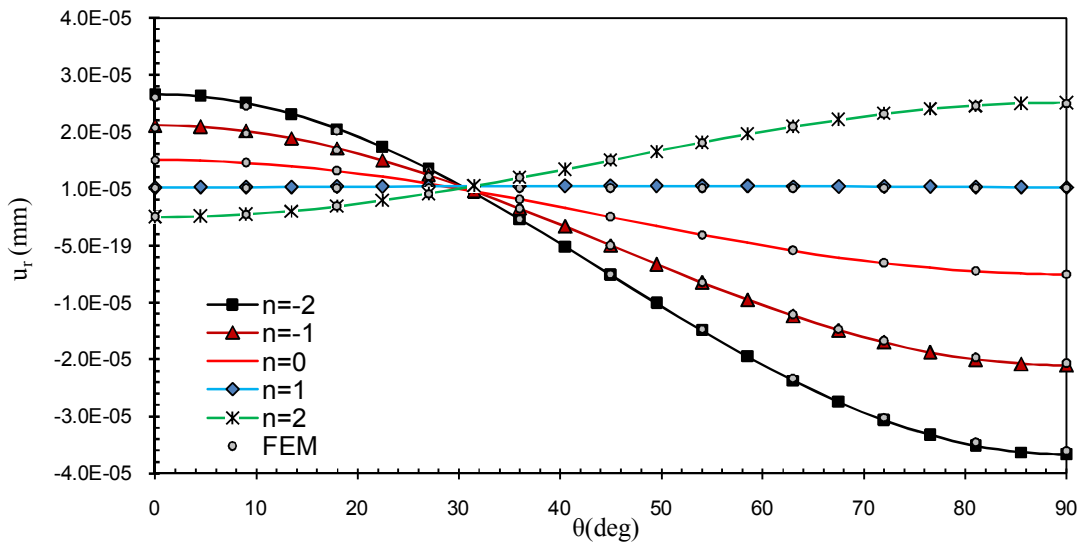
در شکل ۲-۱۳ درصد خطای میان حل پیشنهادی و تحلیل نرم‌افزاری بسیار کم و قابل چشم‌پوشی است؛ که نشان‌دهنده درستی روند حل برای ورق همگن است.

#### ۲-۲-۷-۲ بارگذاری دومحوره

با توجه به شکل ۲-۱۴ با کوچک شدن نسبت ابعادی طول ورق نسبت به قطر گشودگی از دقت حل پیشنهادی کاسته می‌شود. در این نوع بارگذاری برای ورق همگن در بارهای مختلف این انحراف از جواب معادله‌ی (۲-۴۴) متفاوت است؛ به طوری که درصد خطا در  $n=0$  یعنی در حالت کشش تک‌محوره بسیار ناچیز است ولی در حالت  $n = \pm 2$  در بیشترین حالت  $2/3$  درصد خطا وجود دارد. در شکل ۲-۱۵ برای جابه‌جایی شعاعی نیز، با افزایش مقدار ضریب  $n$  درصد خطا افزایش می‌یابد؛ در اینجا نیز برای  $n = \pm 2$ ، خطا بیشترین مقدار را دارد.



شکل ۱۴-۲ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق تحت بارگذاری دومحوره



شکل ۱۵-۲ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق تحت بارگذاری دومحوره

## ۸-۲ جمع‌بندی

در این فصل با کمک روابط الاستیسیته، توابع تنش ایری، توابع پتانسیل و روش حداقل مربعات خطا در نقاطی با تقسیم‌بندی منظم در مرز، معادلات حاکم بر ورق بلند، استخراج شد. بارگذاری به صورت درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی و بدون فشار در داخل گشودگی اعمال گردید. همچنین شبیه‌سازی

ورق در نرم افزار اجزای محدود آباکوس همانند روش تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از حلّ تحلیل ورق بلند و تحلیل نرم افزاری، با حلّ موجود در مراجع مقایسه و دقت قابل قبول حلّ مورد بررسی، برای ورق همگن مورد تأیید قرار گرفت.



فصل ۳ ورق ناهمگن با گشودگی دایروی تحت

بارگذاری درون صفحه‌ای

### ۱-۳ پیش‌گفتار

در این فصل، تابع ناهمگنی مورد استفاده در ورق ناهمگن معرفی می‌شود. همچنین توزیع تنش و مقدار جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن با روند صعودی و نزولی مدول الاستیسیته مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج آنها با ورق همگن مقایسه خواهند شد. همچنین تأثیر ضریب همگرایی بر شدت مقدار تنش و جابه‌جایی مطالعه می‌شود.

### ۲-۳ مدل ریاضی ورق ناهمگن

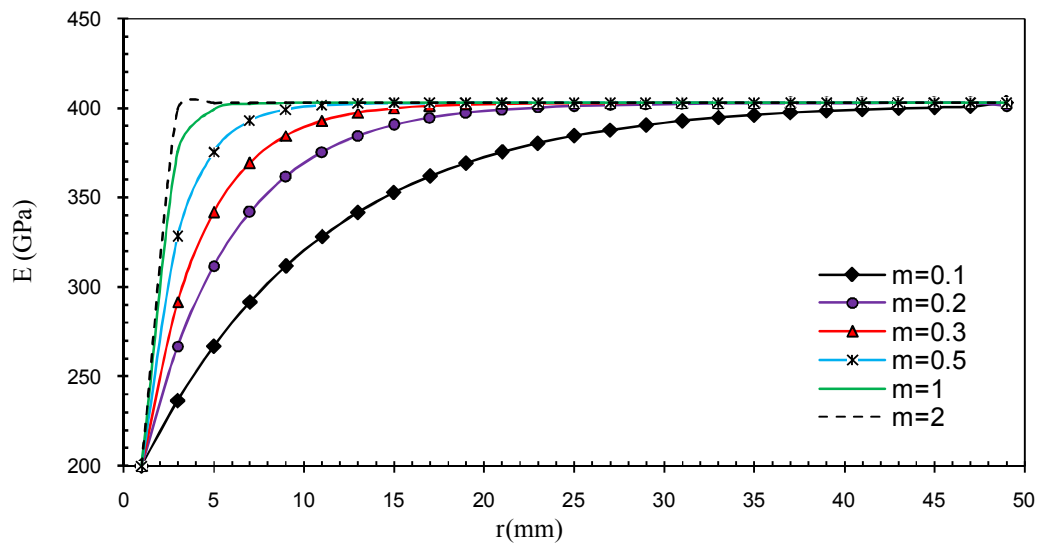
همان‌طور که در فصل دوم بیان شد، ورق به صورت حلقه‌هایی هم‌مرکز و با ضخامت و اندازه‌ی یکسان فرض و تقسیم‌بندی شد. علت این فرض امکان در نظر گرفتن ورق ناهمگن به صورت ورقی با حلقه‌های همگن ولی خواص مکانیکی متفاوت با یکدیگر می‌باشد. در این صورت می‌توان با کمک روابط استخراج شده در فصل دوم ورق ناهمگن را تحلیل کرد. به دلیل آنکه ورق مورد بررسی یک ورق بلند است؛ می‌بایست مدول الاستیسیته در نقاط دور معین و معلوم باشد. از این‌رو برای تابع ناهمگنی در این مسأله، تابع نمایی انتخاب شد، که دارای شعاع همگرایی مشخص و قابل تنظیمی است.

$$E(r) = E_0 \left[ 1 + (k-1) \exp\left(m \left(1 - \frac{r}{R_0}\right)\right) \right] \quad (1-3)3$$

که در آن  $k = \frac{E_i}{E_0}$  و  $m$  ضریب همگرایی برای کنترل دامنه‌ی ناحیه‌ی ناهمگن در ورق می‌باشد.

همان‌طور که در شکل ۱-۳ مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار  $m$  از ۰/۱ تا ۲ شیب تغییرات مدول الاستیسیته نسبت به فاصله از مرکز ورق، تندتر می‌شود. در نتیجه همگرایی زودتر رخ می‌دهد.





شکل ۳-۱ تغییرات مدول الاستیسیته در جهت شعاعی برای ورق تحت تابع نمایی پیشنهادی

جدول ۳-۱ شعاع همگرایی ورق ناهمگن نسبت به ضریب m

شعاع همگرایی (mm)	ضریب m	شعاع همگرایی (mm)	ضریب m
۱۱	۰/۵	۴۳	۰/۱
۷	۱	۲۹	۰/۲
۴	۲	۱۷	۰/۳

در ورق‌های محدود و یا استوانه‌ها و کره‌ها در اکثر موارد تابع ناهمگنی مورد استفاده، فاقد مجانب افقی می‌باشد. موارد اشاره شده در زیر از جمله این توابع هستند.

تابع توانی:

$$P(r) = P_i \left( \frac{r}{r_i} \right)^n = P_i \bar{r}^n \sum_{i=1}^n X_i \quad (2-3)$$

تابع نمایی:

$$P(r) = P_i e^{n \left( \frac{r}{r_i} - 1 \right)} = P_i e^{n(\bar{r} - 1)} \quad (3-3)$$

کسر حجمی:

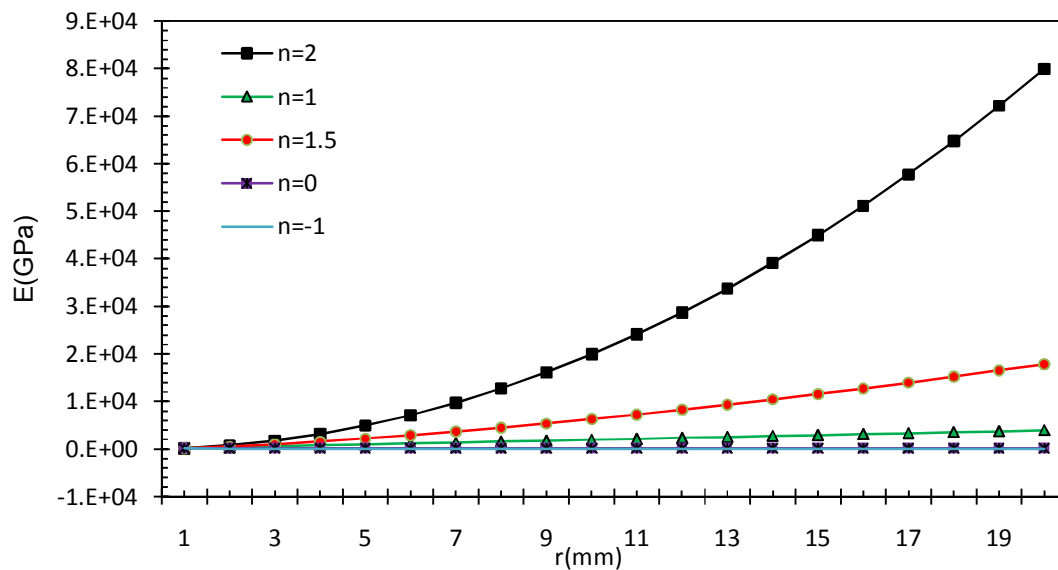
$$P(r) = (P_o - P_i) \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^n + P_i = (P_o - P_i) \left( \frac{\bar{r} - 1}{k - 1} \right)^n + P_i \quad (4-3)$$

که در اینجا P یک خاصیت مکانیکی ماده و n ضریب ناهمگنی توابع است. با توجه به شکل ۲-۳، با افزایش ضخامت جسم و یا تغییر ضریب ناهمگنی n در تابع (۲-۳)، مقدار تابع در لایه‌ی خارجی جسم تغییر می‌کند؛ به این دلیل، استفاده از این توابع در ورق و یا هر جسم بلند یا نامحدود امکان‌پذیر نیست. تابع (۳-۳) نیز همانند تابع توانی مناسب یک جسم بلند نمی‌باشد. شیب تغییرات این تابع بسیار تندتر از تابع توانی می‌باشد. این روند تند، در جدول ۲-۳ هم برای مقادیر مثبت و هم منفی n قابل مشاهده است. ثابت بودن مقدار نهایی تابع (۱-۳) به ازای مقادیر مختلف ضریب همگرایی m، این تابع را برای اجسام بلند و یا نامحدود، قابل استفاده می‌کند. همچنین از تابع کسر حجمی (۴-۳) نیز می‌توان به‌عنوان یک تابع ناهمگنی برای ورق بلند استفاده کرد. در اینجا  $k = \frac{r_o}{r_i}$  و  $\bar{r} = \frac{r}{r_i}$  است؛ که در یک ورق بلند می‌توان با تغییر آن همگرایی محدوده‌ی ناهمگنی را تغییر داد. در شکل ۳-۳ تغییرات مدول الاستیسیته به ازای مقادیر مختلف n نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تغییر مقدار ضریب ناهمگنی سبب تغییر شعاع همگرایی و شیب خواص نسبت به مکان می‌شود و حد نهایی تابع در محدوده‌ی ناهمگنی ثابت باقی می‌ماند.

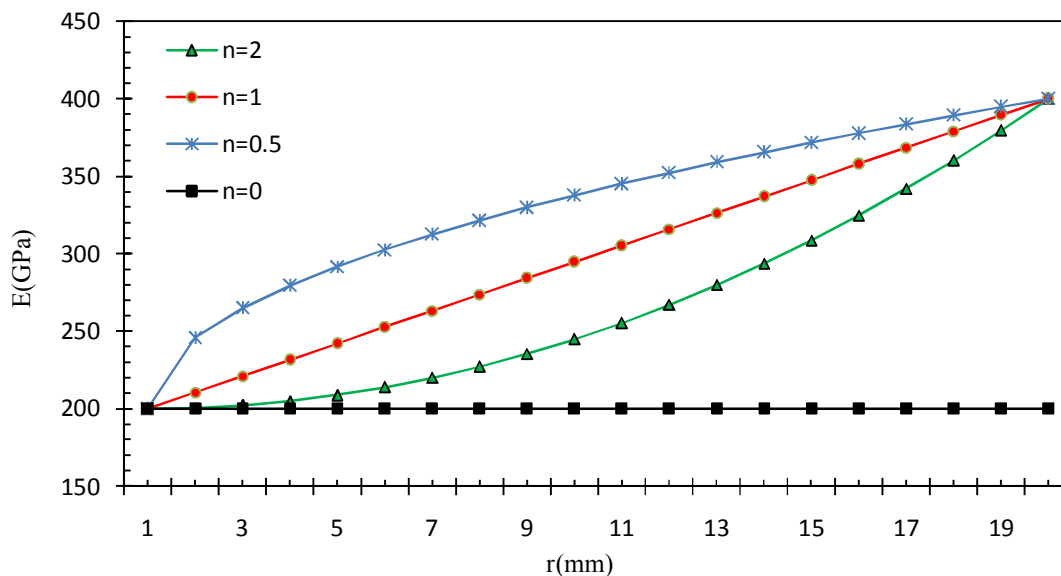
جدول ۲-۳ تغییرات مقدار مدول الاستیسیته در جهت شعاعی برای ورق ناهمگن تحت تابع نمایی (۳-۳) برای مقادیر

مختلف  $n_p$

$n_p = 2$	$n_p = 1$	$n_p = 0$	$n_p = -1$	$n_p = -2$	$\bar{r}$
۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۱
۰/۰۶۷	۳/۶۶۳	۲۰۰	۱۰۹۱۹	۵۹۶۱۹۱	۵
$۰/۰۵ \times 10^{-6}$	۰/۰۲۴	۲۰۰	$۱/۶۲ \times 10^6$	$۱/۳۱ \times 10^{10}$	۱۰
$۱/۰۲ \times 10^{-10}$	$۱/۶۶ \times 10^{-4}$	۲۰۰	$۲/۴۱ \times 10^8$	$۲/۸۹ \times 10^{14}$	۱۵
$۶/۲۸ \times 10^{-15}$	$۱/۱۲ \times 10^{-6}$	۲۰۰	$۳/۵۷ \times 10^{10}$	$۶/۳۷ \times 10^{18}$	۲۰



شکل ۲-۳ تغییرات مدول الاستیسیته در جهت شعاعی برای ورق تحت تابع توانی (رابطه‌ی (۲-۳))



شکل ۳-۳ تغییرات مدول الاستیسیته نسبت به فاصله از مرکز ورق تحت تابع کسر حجمی

با توجه به تغییرات کم نسبت پواسون به مدول الاستیسیته این ضریب در تمامی مراحل کدنویسی و

تحلیل به روش اجزای محدود، به صورت ثابت فرض می شود.

### ۳-۳ استخراج معادلات

معادلات استخراج شده در فصل دوم به صورتی به دست آمد، که هم برای ورق همگن و هم ورق ناهمگن قابل استفاده باشند. از این رو تغییری در معادلات و کد نوشته شده از آن داده نخواهد شد؛ به جز معادلات مربوط به شرطهای پیوستگی که جنس ماده‌ی هر لایه در آن‌ها وارد می‌شود. در ورق همگن به دلیل یکسان بودن خواص مکانیکی در تمام نقاط ورق، ضریب  $G_j$  در معادلات (۲۲-۲)، (۲۸-۲) و (۲۹-۲) در تمام لایه‌ها مقداری یکسان داشت. در ورق ناهمگن، لایه‌های آن دارای خواص مکانیکی متفاوتی نسبت به یکدیگر هستند؛ اما هر لایه به تنهایی همگن فرض شده است. پس با توجه به مطالب ذکر شده در بالا، در حل مورد بررسی مقدار ضریب  $G_j$  در هر لایه با توجه به شعاع میانی آن لایه، تعیین می‌شود.

### ۳-۴ بررسی نتایج

همانند فصل دوم، ورق مورد بررسی با دو نسبت ابعادی  $\frac{D}{L} = \frac{1}{10}$ ،  $\frac{D}{L} = \frac{1}{20}$ ، تحت بارگذاری درون صفحه‌ای به صورت بار خارجی تک‌محوره و دومحوره مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به رابطه‌ی (۲-۴۳) و (۲-۴۴) از کتاب آقای پیلکی [۳۹] برای ورق همگن تحت کشش تک‌محوره در جهت محور ۱، در  $r=10R_0$  مقدار تنش شعاعی در راستای محور ۱ و تنش محیطی در راستای محور ۲، در حدود ۹۷٪ بار اعمالی در مرز ورق می‌باشد؛ که در اینجا  $R_0$  شعاع گشودگی دایروی است. از این رو برای بررسی اثرات بار خارجی بر روی ورق، ناحیه‌ی ناهمگنی هم اندازه با ناحیه‌ای که توزیع تنش به صورت غیر یکنواخت می‌باشد، در نظر گرفته و از ضریب همگرایی  $m=0.65$  استفاده شد. با وجود مقدار در نظر گرفته شده برای  $m$ ، شعاع همگرایی ده برابر شعاع گشودگی دایروی می‌شود. همچنین می‌توان تأثیر مقدار ضریب همگرایی  $m$  بر مقدار تنش و جابه‌جایی در نقاط اطراف گشودگی را مورد مطالعه قرار داد. ماده در اطراف گشودگی در

هر دو حالتی که ورق همگن و ناهمگن در نظر گرفته می‌شود، دارای خواص مکانیکی فولاد ساختمانی است.

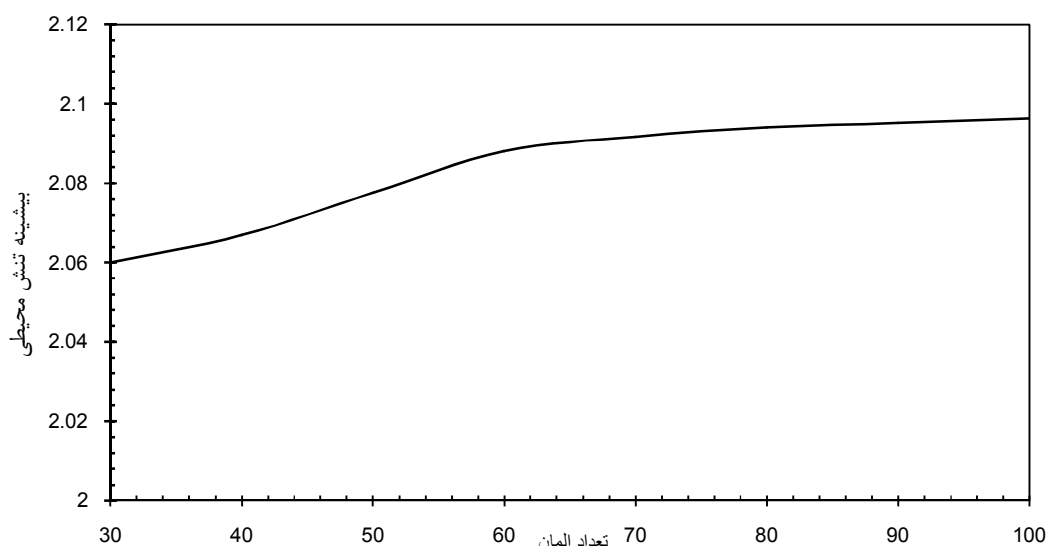
برای ورق ناهمگن نوع دوم از آلیاژ TA-2024 آلومینیوم و برای ورق ناهمگن با روند افزایشی مدول الاستیسیته از سرامیک آلومینا به‌عنوان ماده در مرزهای بیرونی استفاده می‌شود. جدول ۲ خصوصیات مکانیکی این سه ماده را نشان می‌دهد [۴۱].

جدول ۳-۳ خواص مکانیکی مواد ورق FG

نسبت پواسون	مدول الاستیسیته (GPa)	
۰/۳۴	۲۰۰	فولاد
۰/۳۳	۷۳	آلیاژ آلومینیوم TA-2024
۰/۲۴	۴۰۳	آلومینا ARP

برای سهولت در کار، ورق با روند صعودی مدول الاستیسیته، ورق ناهمگن نوع اول و ورق با روند نزولی مدول الاستیسیته، ورق ناهمگن نوع دوم نام‌گذاری می‌شود.

شکل ۳-۴ مقادیر بیشینه تنش محیطی را در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوره با  $n=2$  نشان می‌دهد. این نتایج از تحلیل عددی استخراج شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد مش در اطراف گشودگی مقدار تنش محیطی بیشینه افزایش می‌یابد ولی مقدار این افزایش برای تعداد مش بالای عدد ۸۰ قابل صرف‌نظر کردن است. به همین دلیل برای کاهش حجم محاسبات همراه با حفظ دقت تحلیل عددی، از تعداد ۸۰ مش در اطراف ورق ناهمگن در این فصل استفاده خواهد شد.



شکل ۳-۴-۱: نسبت الاستیسیته به انرژی تعداد المان نسبت به اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم (E-) در بارگذاری دو محوره با  $n=2$

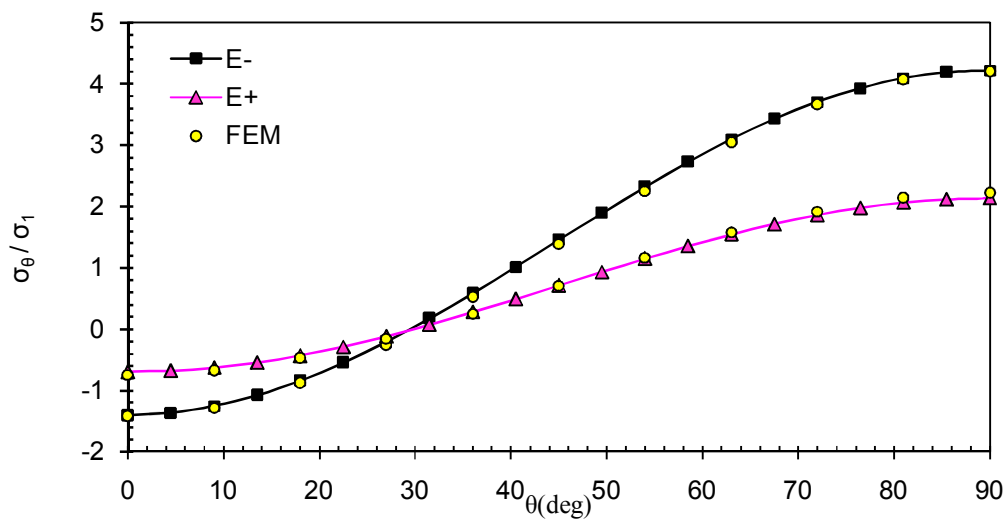
### ۳-۴-۱ ورق با نسبت ابعادی ۲۰

#### ۳-۴-۱-۱ کشش تک محوره

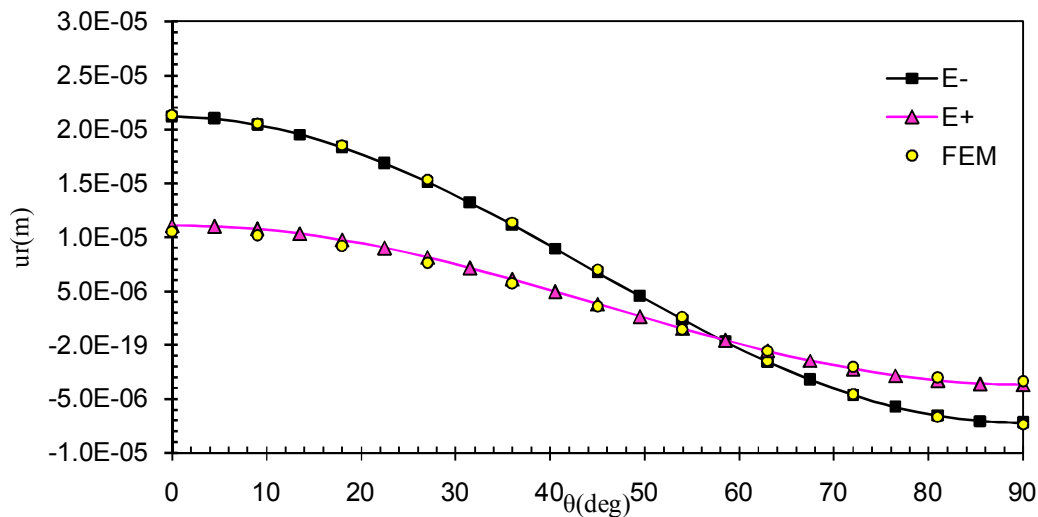
با توجه به شکل ۳-۵ مقدار تنش در اطراف گشودگی دایروی در ورق ناهمگن نوع دوم (E-) از ورق ناهمگن نوع اول (E+) بیشتر می‌باشد. با مقایسه این شکل با شکل ۲-۷ می‌توان دریافت، که مقدار تنش محیطی در ورق همگن، نسبت به ورق ناهمگن نوع اول بیشتر و نسبت به ورق ناهمگن نوع دوم کمتر می‌باشد. در ورق ناهمگن نوع اول لایه‌های میانی سفتی بیشتری نسبت به لایه‌های میانی ورق همگن دارند؛ به همین دلیل انرژی کرنش این لایه‌ها بیشتر از ورق همگن بوده و مقدار کمتری از انرژی حاصل از بارگذاری در مرزهای خارجی ورق، به نقاط اطراف گشودگی وارد می‌شود. واضح است، که با کاهش انرژی در اطراف گشودگی از مقدار تنش در این نقاط کاسته می‌شود. این روند برای ورق با روند کاهش مدول الاستیسیته به صورت معکوس می‌باشد. با کاهش مدول الاستیسیته در این نوع ورق مقدار جذب انرژی حاصل از بارگذاری در لایه‌های میانی کاهش می‌یابد؛ به عبارت دیگر کسر بیشتری از انرژی حاصل از

بارگذاری به نقاط اطراف گشودگی اعمال می‌شود. با افزایش انرژی کرنش، شدت تنش در این نقاط افزایش می‌یابد.

در شکل ۳-۶ مشاهده می‌شود، که جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق ناهمگن نوع اول کمتر از ورق ناهمگن نوع دوم می‌باشد و گشودگی دایروی پس از تغییر شکل، کمتر از شکل دایروی خارج می‌شود؛ علت این اتفاق، کاهش شدت تنش در اطراف گشودگی است.

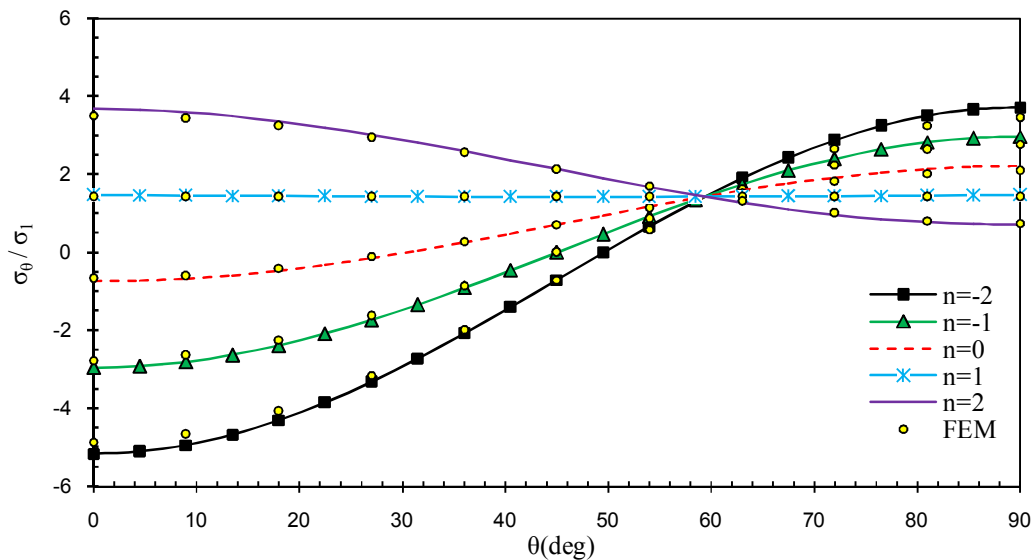


شکل ۳-۵ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک‌محوره



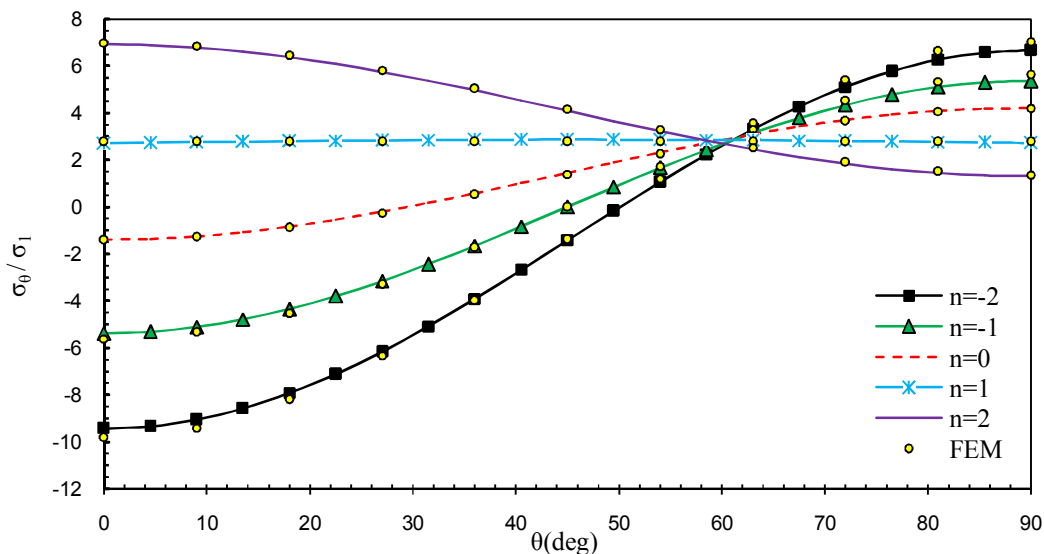
شکل ۳-۶ مقدار جابه‌جایی شعاعی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت بارگذاری تک‌محوره

همان‌طور که در شکل‌های ۷-۳ و ۸-۳ مشاهده می‌شود، در ورق ناهمگن نوع اول و دوم، با افزایش مقدار  $n$  از ۲- تا ۲ اختلاف میان مقدار تنش محیطی بیشینه و کمینه در اطراف گشودگی، مشابه ورق همگن (شکل ۲-۱۰) رفتار می‌کنند. همانند بارگذاری تک‌محوره، در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوره، کاهش شدید مقدار تنش در اطراف گشودگی قابل مشاهده است. با مقایسه‌ی شکل‌های ۷-۳ و ۸-۳ دریافته می‌شود، که مقدار تنش در ورق ناهمگن نوع دوم تا حدود دوبرابر ورق ناهمگن نوع اول افزایش پیدا می‌کند. با توجه به جدول ۴-۳ در تمام حالت‌های بارگذاری، به ترتیب درصد کاهش و افزایش مقدار تنش بیشینه در ورق ناهمگن نوع اول و نوع دوم نسبت به ورق همگن به صورت تقریبی ثابت می‌ماند. پس می‌توان نتیجه گرفت نوع و شدت بارگذاری درون صفحه‌ای، تأثیری بر درصد کاهش و یا افزایش تنش محیطی بیشینه در اطراف گشودگی ندارد.



شکل ۷-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق نوع اول تحت بارگذاری دومحوره



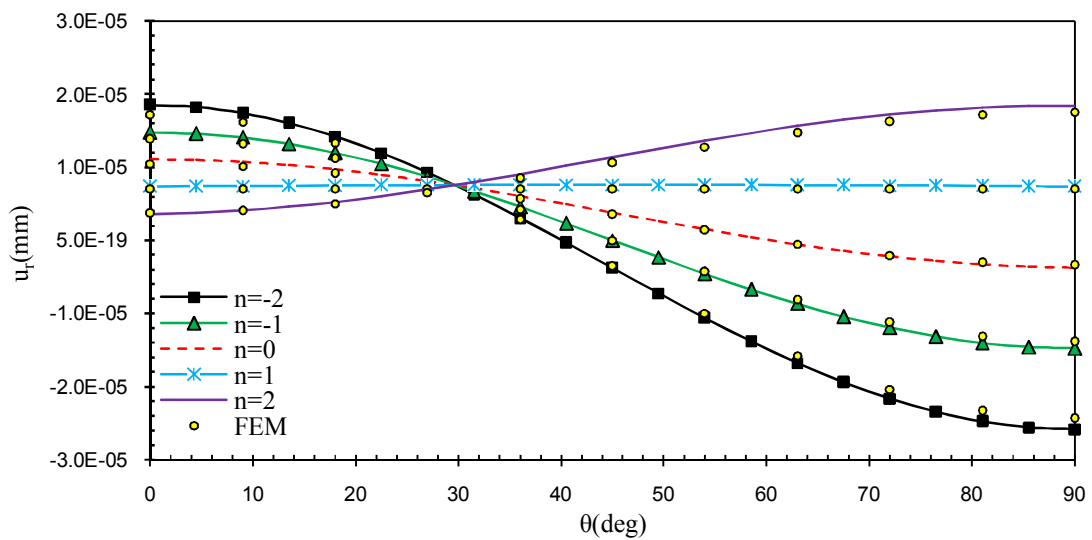


شکل ۳-۸ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوره

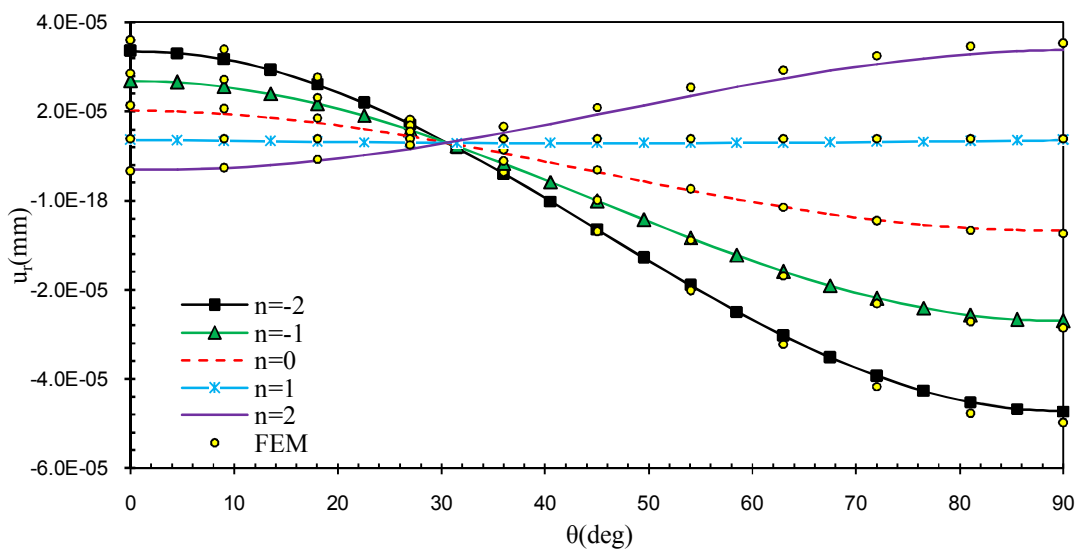
جدول ۳-۴ بیشینه تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری دوماحوره

n	همگن	ناهمگن نوع اول	ناهمگن نوع دوم	درصد کاهش در ورق نوع اول	درصد افزایش در ورق نوع دوم
۲	۵	۳/۶۸	۶/۹۳	۲۶/۴	۳۸/۶
۱	۲/۰۱	۱/۴۷	۲/۷۲	۲۶/۹	۳۸/۳
۰	۳/۰۲	۲/۲۱	۴/۲	۲۶/۵	۳۹/۵
-۱	۴/۰۵	-۲/۹۵	-۵/۶۲	۲۷/۲	۳۸/۸
-۲	-۷/۰۷	-۵/۱۷	-۹/۸۲	۲۶/۹	۳۸/۹

شکل‌های ۳-۹ و ۳-۱۰ به ترتیب مربوط به جابه‌جایی شعاعی ورق ناهمگن نوع اول و دوم می‌باشند. در ورق ناهمگن نوع اول، کاهش مقدار جابه‌جایی نقاط در اطراف گشودگی از شدت بیضوی شدن گشودگی دایروی تحت بارگذاری‌های مختلف درون صفحه‌ای می‌کاهد. در ورق ناهمگن نوع دوم این روند معکوس می‌باشد و تغییر شکل گشودگی شدت بیشتری می‌یابد. گذشته از جنس ورق‌ها و تأثیر آن بر شدت تغییر شکل، همانند ورق همگن، در ورق ناهمگن نوع اول و دوم با افزایش مقدار ضریب  $n$  از -۲ به ۲ بعد از تغییر شکل، گشودگی ابتدا به سمت دایروی شکل و سپس به سمت بیضوی شکل پیش می‌رود.



شکل ۳-۹ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره



شکل ۳-۱۰ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوره

جدول ۳-۵ تغییرات بیشینه جابه‌جایی شعاعی را برای سه ورق همگن و ناهمگن مقایسه می‌کند. همانند تنش محیطی، کاهش و افزایش درصد جابه‌جایی شعاعی ورق‌های ناهمگن نسبت به ورق همگن مستقل از نوع بارگذاری درون‌صفحه‌ای می‌باشد. به‌علت صرف‌نظر کردن از تنش شعاعی نسبت به تنش

محیطی در نقاط اطراف گشودگی، جابه‌جایی شعاعی تنها تابعی از تنش محیطی و جنس ورق می‌باشد؛ بنابراین درصد کاهش و افزایش این دو متغیر به یکدیگر نزدیک می‌باشد.

جدول ۳-۵ بیشینه جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن (واحد  $10^{-5} \text{mm}$ )

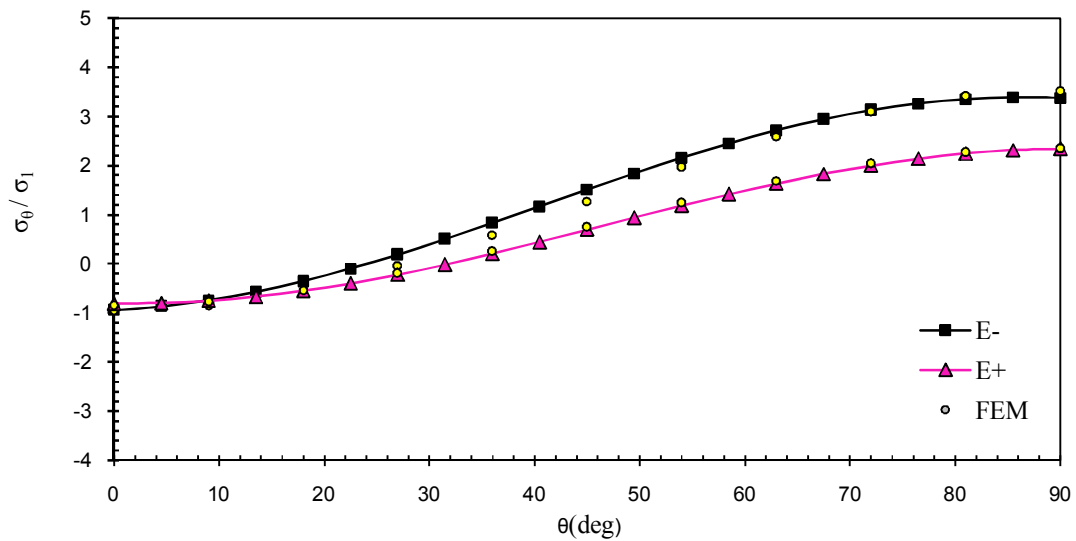
n	همگن	ناهمگن نوع اول	ناهمگن نوع دوم	درصد کاهش در ورق نوع اول	درصد افزایش در ورق نوع دوم
۲	۲/۵۱	۱/۸۴	۳/۳۸	۲۶/۷	۳۴/۷
۱	۱/۰۱	۰/۷۴	۱/۳۶	۲۶/۷	۳۵
۰	۱/۵	۱/۱	۲/۱۲	۲۶/۶	۳۴/۶
-۱	-۲/۰۲	-۱/۴۸	-۲/۶۹	۲۶/۷	۳۳/۲
-۲	-۳/۵۴	-۲/۵۸	-۴/۷۲	۲۷/۱	۳۳/۳

با توجه به شکل‌های ۳-۷ تا ۳-۱۰ و مقایسه نتایج حاصل از حل پیشنهادی و حل نرم‌افزاری اجزای محدود می‌توان نتیجه گرفت، که همانند کشش تک‌محوره حل مورد بررسی برای بارگذاری دومحوره دقت قابل قبولی دارد.

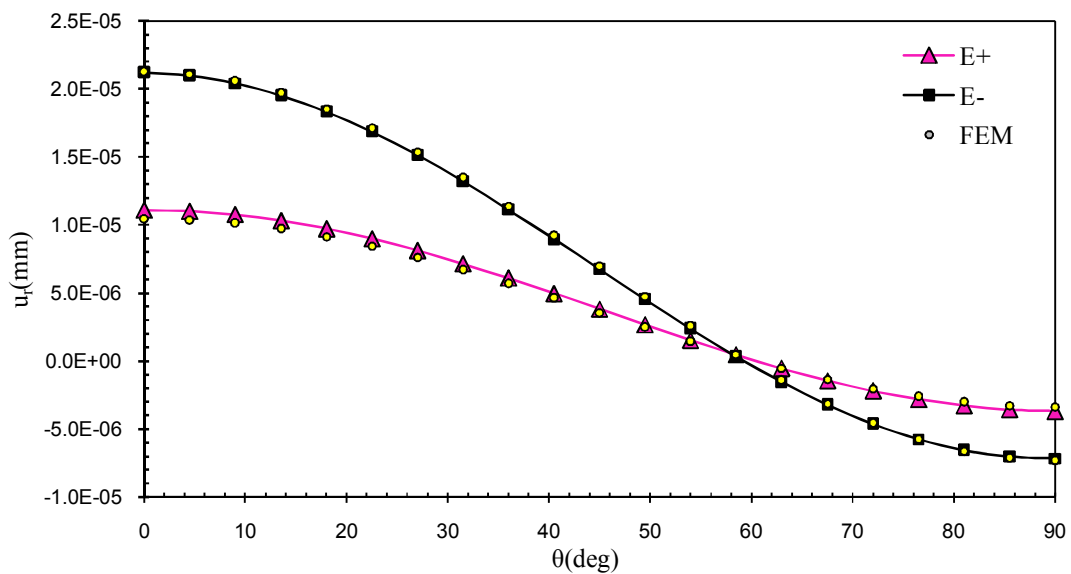
### ۳-۴-۲ ورق با نسبت ابعادی ۱۰

#### ۳-۴-۲-۱ کشش تک‌محوره

با توجه به شکل‌های ۳-۱۱ و ۳-۵ مشاهده می‌شود، که مقدار تنش برای ورق ناهمگن نوع اول، با نسبت ابعادی ۱۰ بیشتر از ورق با نسبت ابعادی ۲۰ می‌باشد. علت این امر، تأثیر کمتر لایه‌های میانی بر مقدار انرژی وارد شده بر نقاط اطراف گشودگی است. با کوتاه شدن ورق، تأثیر بارگذاری درون‌صفحه‌ای وارد شده بر مرزهای خارجی بیشتر می‌شود. این اتفاق برای ورق ناهمگن نوع دوم باعث کاهش شدت انرژی می‌شود. در شکل ۳-۱۲ مقدار جابه‌جایی شعاعی برای ورق ناهمگن نوع اول نسبت به ورق ناهمگن نوع اول با نسبت ابعادی ۲۰، بیشتر می‌باشد و برای ورق ناهمگن نوع دوم این پدیده برعکس رخ می‌دهد. با توجه به تغییرات تنش محیطی در این نسبت ابعادی این تغییرات جابه‌جایی شعاعی قابل پیش‌بینی و توجیه می‌باشد.



شکل ۱۱-۳ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت کشش تک محوره

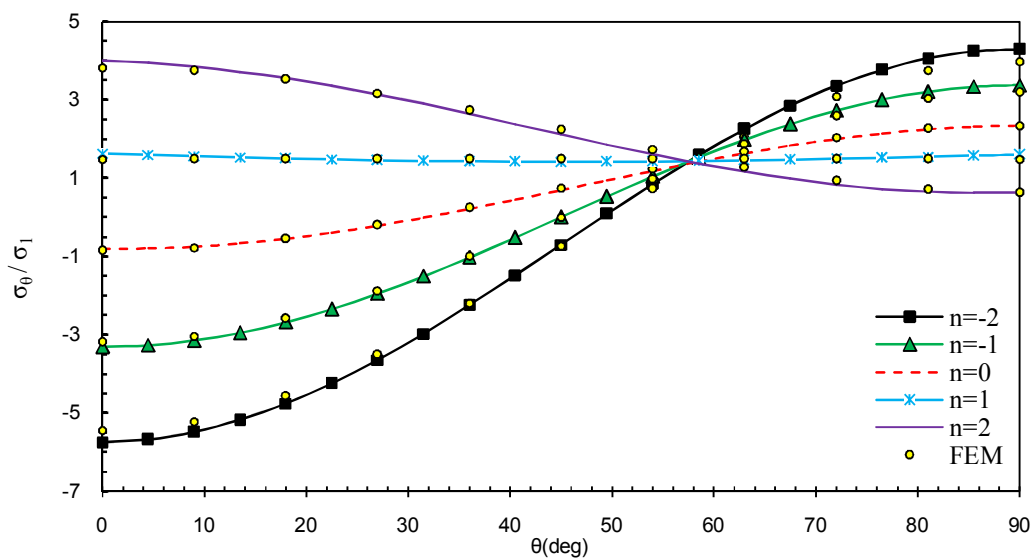


شکل ۱۲-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول و دوم تحت کشش تک محوره

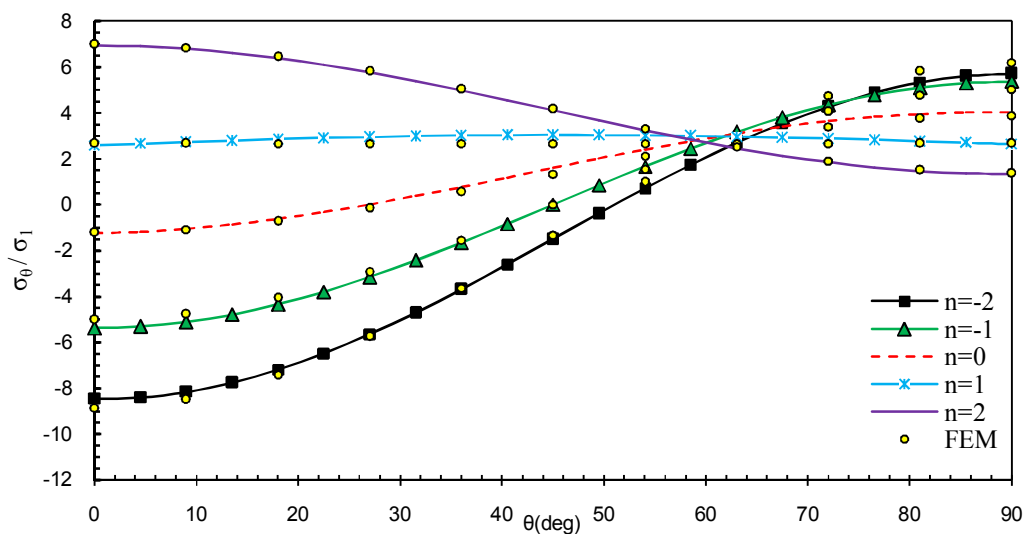
### ۲-۲-۴-۳ بارگذاری دوماحوره

همان‌طور که در شکل‌های ۱۳-۳ و ۱۴-۳ مشاهده می‌شود؛ حلّ مورد بررسی برای بارگذاری دوماحوره دارای دقت قابل قبول می‌باشد و بیشترین درصد خطا در حدود ۳ درصد است. با مقایسه‌ی این دو شکل،

با شکل‌های ۳-۷ و ۳-۸ می‌توان نتیجه گرفت، که رفتار ورق در هر دو حالت یکسان بوده و روند تغییرات تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به شدت بارگذاری دومحوره، مشابه یکدیگر می‌باشد؛ ولی مقدار تنش‌ها در دو حالت نسبت ابعادی، تحت شرایط یکسان متفاوت می‌باشد. علت این اختلاف، کوتاه شدن ورق با نسبت ابعادی ۱۰، تا مرز ورق کوتاه است؛ که در جذب انرژی حاصل از بارگذاری خارجی توسط لایه‌های میانی تأثیر می‌گذارد.



شکل ۳-۱۳ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوره



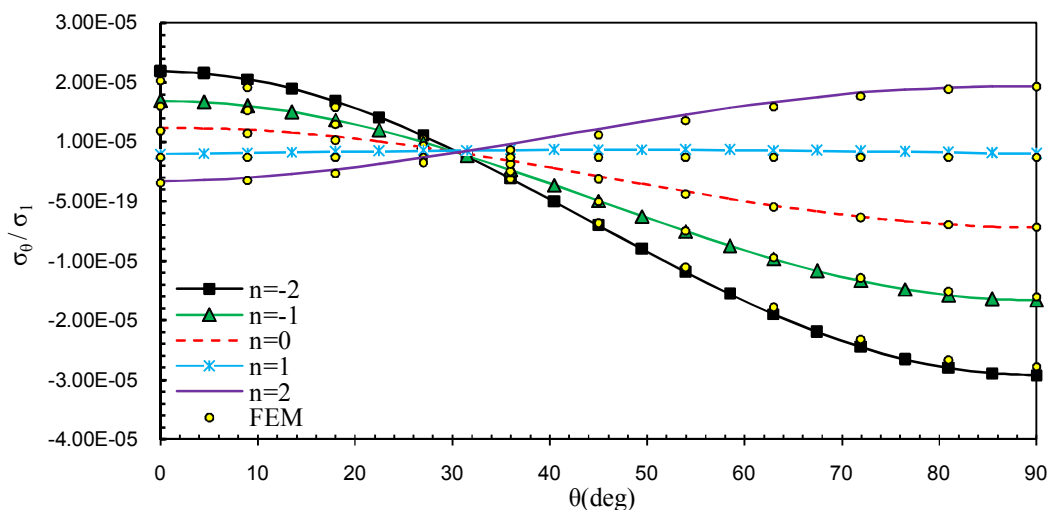
شکل ۳-۱۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره

نتیجه به دست آمده از مقایسه‌ی شکل‌ها را نیز می‌توان با توجه به جدول ۳-۶ و مقایسه آن با جدول ۳-۴ دریافت کرد. در جدول ۳-۶ درصد تغییرات تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق با نسبت ابعادی ۱۰ کمتر از ورق با نسبت ابعادی ۲۰ است.

جدول ۳-۶ بیشینه تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری دومحوره

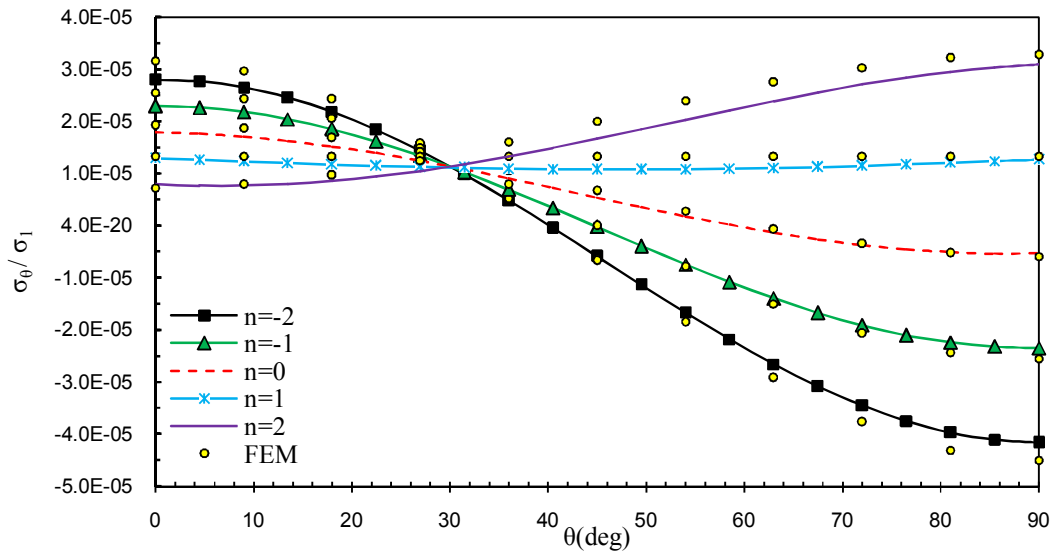
n	همگن	ناهمگن نوع اول	ناهمگن نوع دوم	درصد کاهش در ورق نوع اول	درصد افزایش در ورق نوع دوم
۲	۵/۱۹	۳/۸	۶/۹۳	۲۲/۹۳	۳۳/۵۲
۱	۲/۰۴	۱/۶۲	۲/۶۷	۲۱/۵۷	۳۰/۸۹
۰	۳/۰۲	۲/۳۴	۴/۰۲	۲۲/۵	۳۳/۱۱
-۱	۴/۱۷	۳/۶	۵/۳۸	۱۹/۶	۲۹
-۲	-۷/۲۸	-۵/۷	۸/۴۷	۲۱/۷	۱۸/۶۱

در مورد جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی با توجه به شکل‌های ۳-۱۵ و ۳-۱۶ و مقایسه‌ی آنها با شکل‌های ۳-۹ و ۳-۱۰ برای ورق با نسبت ابعادی ۲۰، می‌توان نتیجه گرفت، که در ورق ناهمگن نوع اول جابه‌جایی شعاعی با کوتاه شدن ورق افزایش می‌یابد.



شکل ۳-۱۵ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوره

برای ورق ناهمگن نوع دوم با کوتاه شدن ورق، مقدار جابه‌جایی شعاعی کاهش می‌یابد. دلیل این رفتار آن است که تغییرات جابه‌جایی تابعی از تنش محیطی می‌باشد.



شکل ۳-۱۶ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره

در جدول ۳-۷ نیز می‌توان تغییرات درصد افزایش و کاهش تنش محیطی را در ورق ناهمگن نوع دوم مشاهده کرد. درصد تغییرات جابه‌جایی در ورق نوع دوم یکسان نمی‌باشد. علت این خطا، کاهش نسبت ابعادی ورق، تا مرز ورق کوتاه است.

جدول ۳-۷ بیشینه جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق همگن و ناهمگن (واحد  $10^{-5} \text{ mm}$ )

n	همگن	ناهمگن نوع اول	ناهمگن نوع دوم	درصد کاهش	درصد افزایش
۲	۲/۵۱	۱/۹۳	۳/۰۶	۲۳/۱	۲۱/۹
۱	۱/۰۲	۰/۷۹	۱/۲۹	۲۳/۴	۲۶/۴۷
۰	۱/۵۴	۱/۲۳	۱/۸	۲۰/۱	۱۶/۸۹
-۱	۲/۱۲	۱/۷۲	۲/۳۴	۲۰/۳	۱۳
-۲	۳/۶۷	۲/۹۲	۴/۱۶	۲۰/۴	۱۳

### ۳-۴-۳ تأثیر شعاع همگرایی ورق

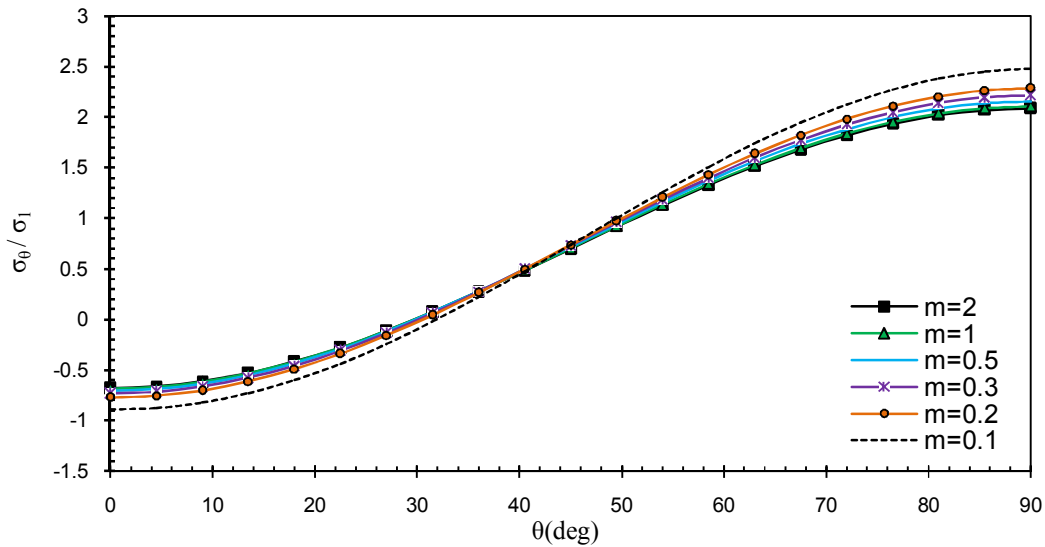
همان‌طور که در بخش ۲-۳ بیان شد، تغییر ضریب  $m$  در رابطه‌ی (۱-۳)، مربوط به تابع ناهمگنی، باعث تغییر شعاع همگرایی تابع و ناحیه‌ی ناهمگنی ورق می‌شود. در این بخش، تأثیر این ضریب بر مقدار تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی، بررسی می‌شود.

#### ۱-۳-۴-۳ ورق تحت کشش تک‌محوره

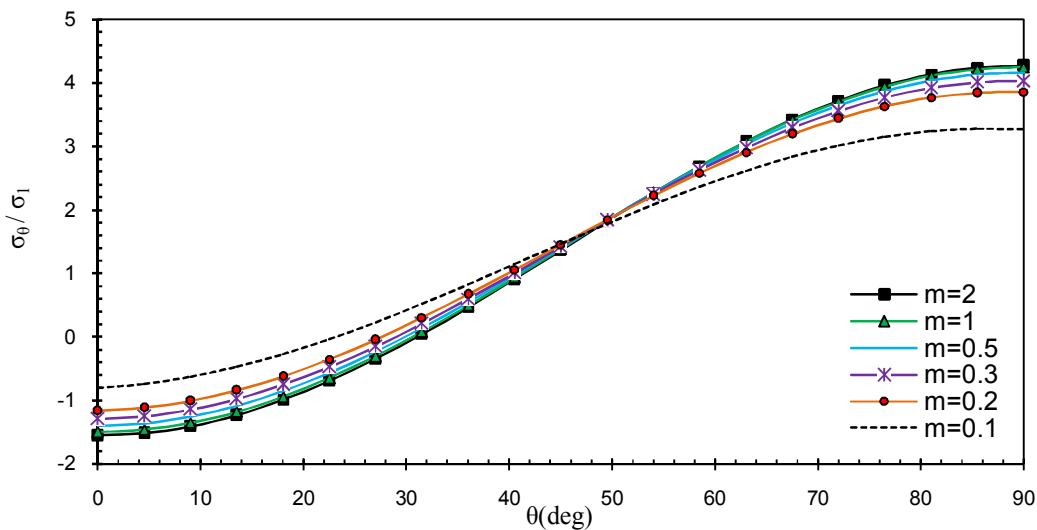
شکل‌های ۱۷-۳ و ۱۸-۳ به ترتیب تأثیر مقدار  $m$  را بر توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی، برای ورق ناهمگن نوع اول و دوم، نشان می‌دهند. همان‌گونه که در شکل ۱۷-۳ مشاهده می‌شود، این افزایش مقدار  $m$  باعث کاهش مقدار تنش محیطی در اطراف گشودگی، در ورق ناهمگن نوع اول می‌شود؛ زیرا در حالتی که  $m=2$  است، لایه‌های بیشتری از ورق دارای خواص مکانیکی قوی‌تری بوده و در نتیجه جذب انرژی بیشتری در لایه‌های میانی ورق صورت می‌پذیرد. این پدیده در ورق ناهمگن نوع دوم، به صورت معکوس رخ می‌دهد. در شکل ۱۸-۳، در حالتی که  $m=2$  است، به دلیل ضعیف‌تر بودن خواص مکانیکی در لایه‌های بیشتری از ورق ناهمگن و در نتیجه جذب کمتری از انرژی کرنش توسط لایه‌های میانی، تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی دایروی مقدار بیشتری می‌یابد.

با توجه به دو شکل ۱۷-۳ و ۱۸-۳ می‌توان دریافت، که شدت تغییرات تنش محیطی نسبت به افزایش مقدار  $m$ ، کاسته می‌شود؛ به طوری که تغییرات تنش محیطی برای  $m=1$  و  $m=2$  بسیار کم و قابل صرف-نظر کردن است. این پدیده به علت کاهش شدت تغییرات خواص مکانیکی و نسبت به ضریب  $m$  است.





شکل ۳-۱۷ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف  $m$

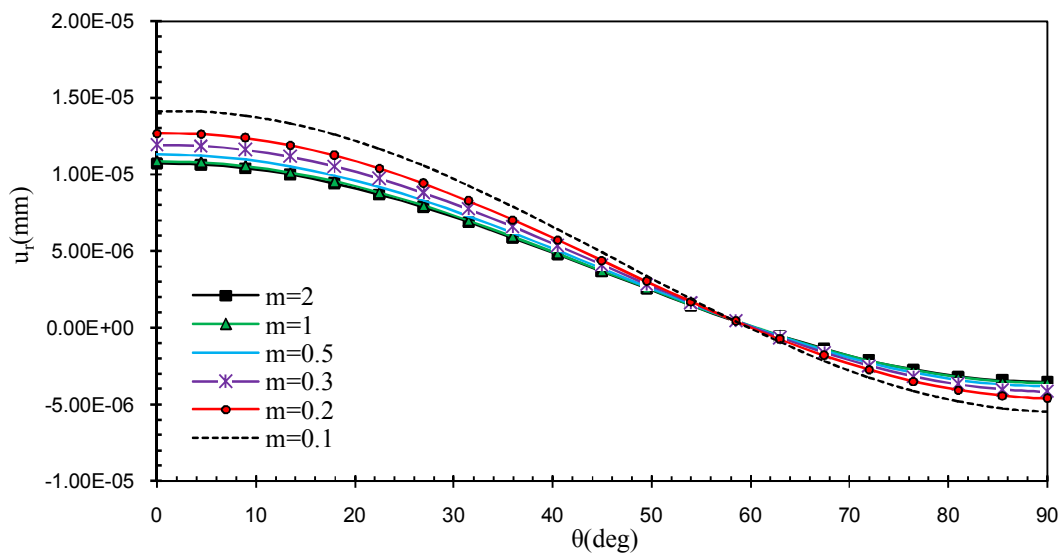


شکل ۳-۱۸ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف  $m$

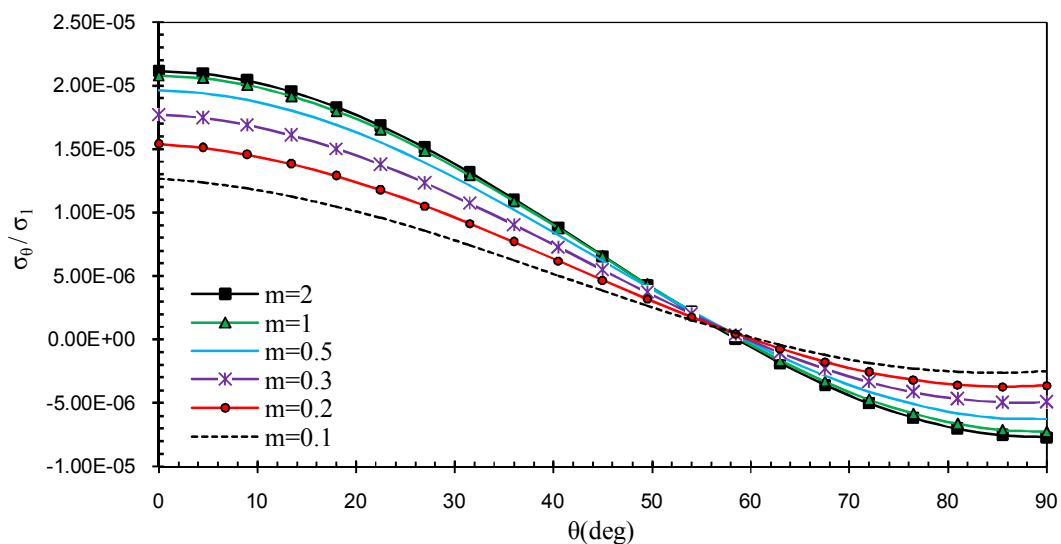
با مراجعه به ابتدای این فصل در جدول ۳-۱ مشاهده کرد، که نرخ تغییرات شعاع همگرایی تابع ناهمگنی با میل کردن مقدار  $m$  به سمت صفر، کاهش می‌یابد. این اطلاعات مطالب ذکر شده درباره‌ی شکل‌های ۳-۱۷ و ۳-۱۸ را تأیید می‌نماید.

در شکل ۳-۱۹، نرخ تغییرات جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی برای ورق ناهمگن نوع اول نسبت به ورق ناهمگن نوع دوم کمتر می‌باشد. به‌طوری‌که برای ورق ناهمگن نوع اول، می‌توان از تغییرات

جابه‌جایی شعاعی برای  $m=1$  و  $m=0.5$  صرف‌نظر کرد. ولی اختلاف مقدار جابه‌جایی شعاعی برای دو مقدار  $m$  در ورق ناهمگن نوع دوم، زیاد می‌باشد. علت این امر وجود لایه‌هایی با خواص مکانیکی ضعیف‌تر در ورق ناهمگن نوع دوم، نسبت به ورق ناهمگن نوع اول است. با این خصوصیت و افزایش مقدار تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم، جابه‌جایی شعاعی نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۳-۱۹ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول



شکل ۳-۲۰ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم

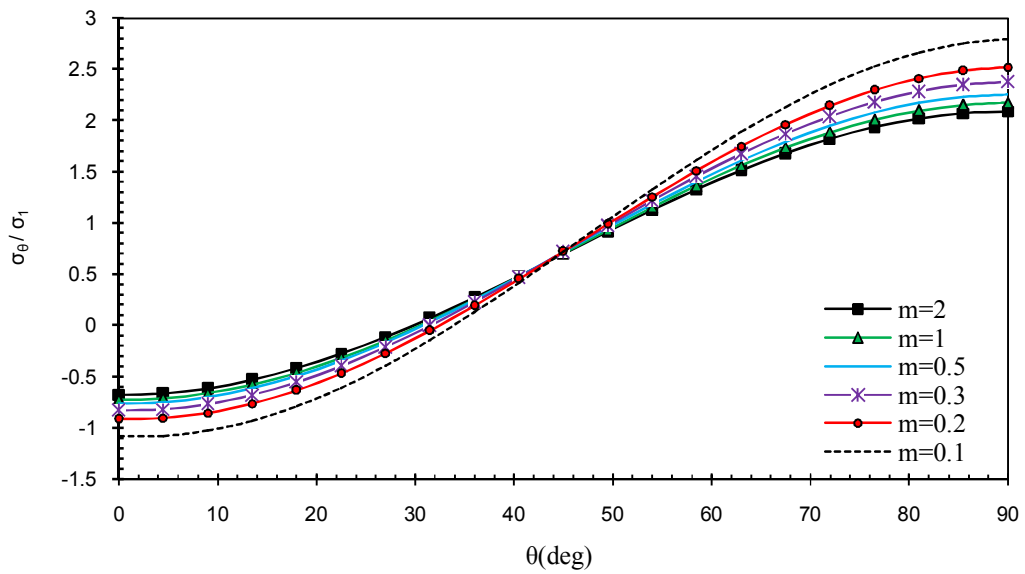
با این وجود، همانند تنش‌های محیطی در هر دو حالت ورق ناهمگن، با افزایش مقدار  $m$  از نرخ تغییرات جابه‌جایی کاسته می‌شود؛ تا جایی، که تغییرات جابه‌جایی شعاعی برای  $m=1$  و  $m=2$  بسیار کم و قابل صرف‌نظر کردن است.

### ۳-۴-۲ ورق تحت بارگذاری دومحوره

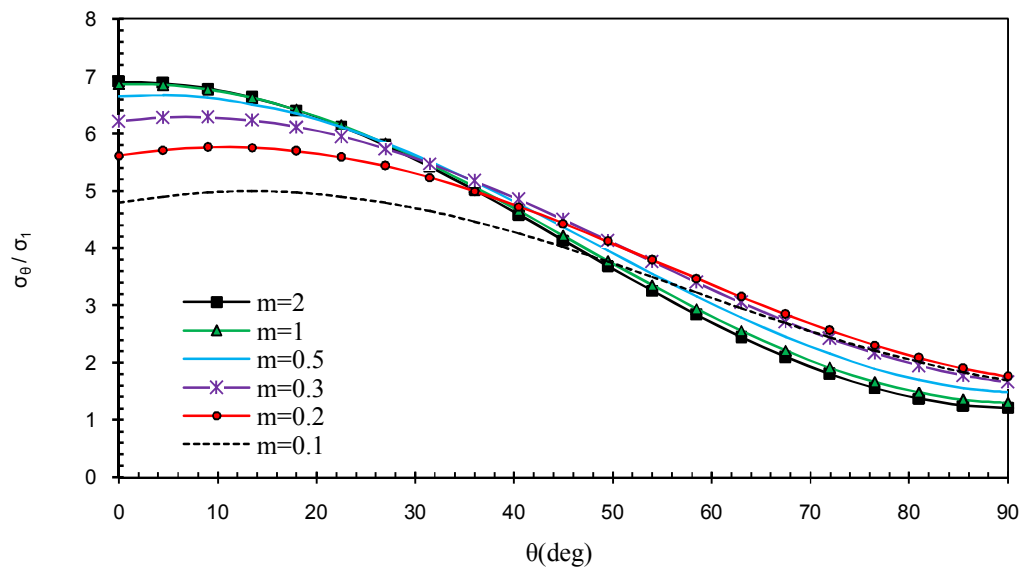
در بارگذاری دومحوره با توجه به تنوع در ترکیب بارهای فشاری و کششی در مرزهای خارجی ورق برای جلوگیری از زیاده‌نویسی و شلوغ شدن شکل خروجی‌ها تنها دو حالت بارگذاری دومحوره بررسی خواهد شد.

### ۳-۴-۱-۲ بارگذاری با $n=2$

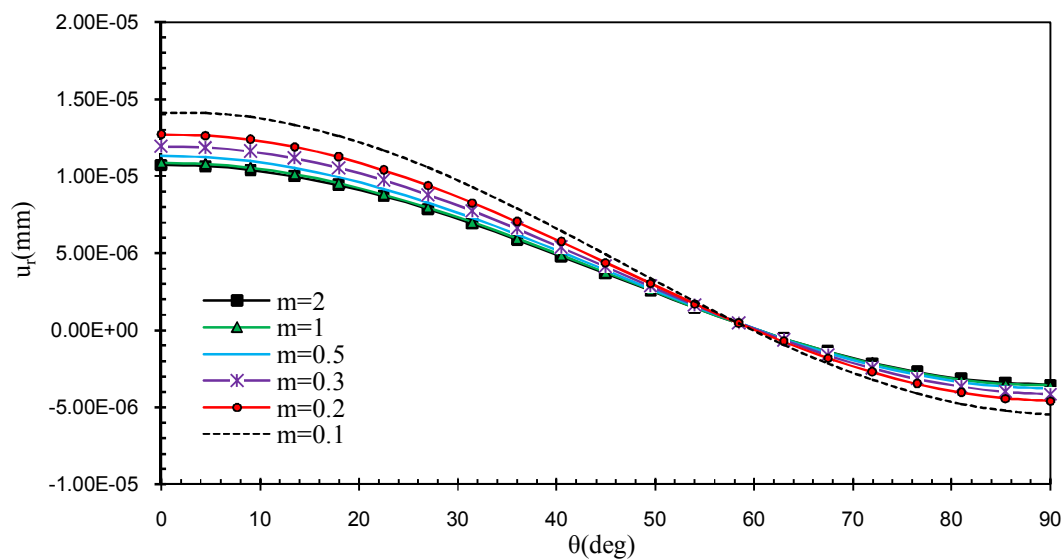
همانند بارگذاری تک‌محوره، در بارگذاری دومحوره با  $n=2$  نیز با افزایش مقدار  $m$  می‌توان از تغییرات تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی صرف‌نظر کرد. از مقایسه دوبه‌دوی شکل‌های ۳-۲۱ و ۳-۱۷، ۳-۲۲ و ۳-۱۸، ۳-۲۳ و ۳-۱۹، ۳-۲۴ و ۳-۲۰ دریافت می‌شود، که اختلاف میان مقادیر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی در بارگذاری دومحوره افزایش یافته است. با افزایش انرژی بارگذاری در مرزهای ورق و با ثابت بودن خواص مکانیکی لایه‌های میانی، تغییرات تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی به‌مراتب بیشتر می‌شود. مقایسه‌ی شکل‌های ۳-۲۱ و ۳-۲۲ و همچنین ۳-۲۳ و ۳-۲۴ نشان می‌دهد؛ که همانند بارگذاری تک‌محوره تغییرات تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی برای ورق ناهمگن نوع دوم بیشتر از ورق ناهمگن نوع اول است.



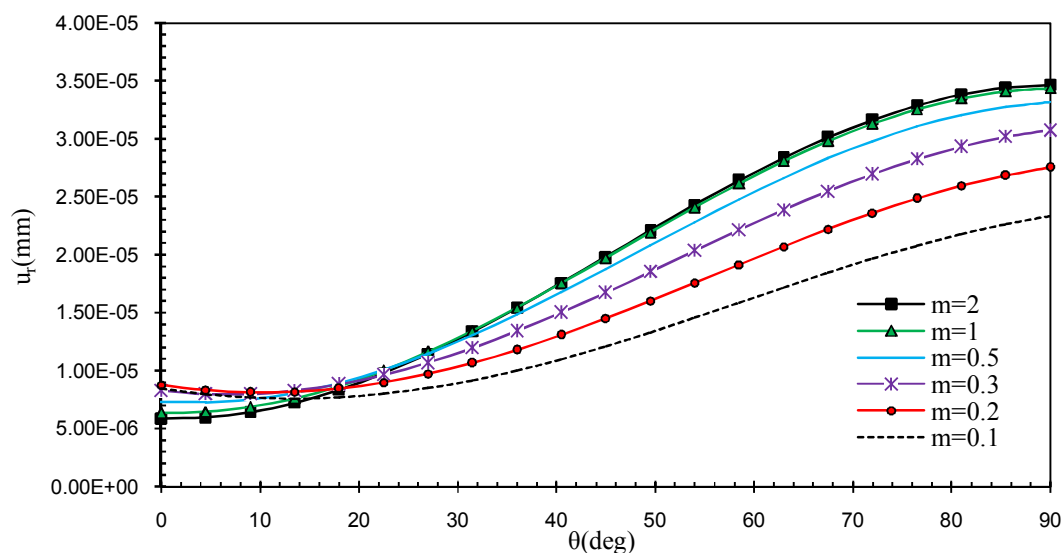
شکل ۳-۲۱ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول مقادیر مختلف  $m$



شکل ۳-۲۲ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم مقادیر مختلف  $m$



شکل ۲۳-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول مقادیر مختلف  $m$

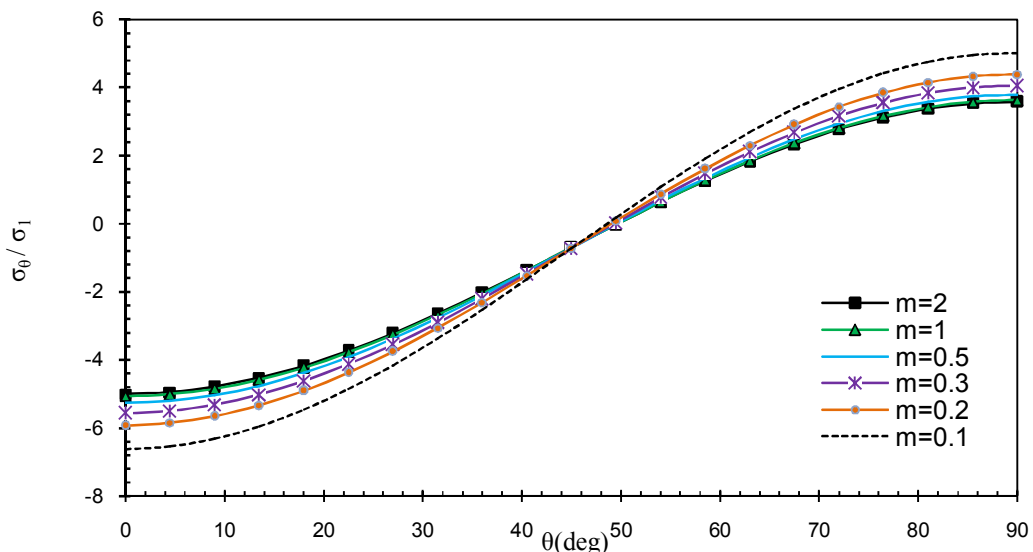


شکل ۲۴-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول مقادیر مختلف  $m$

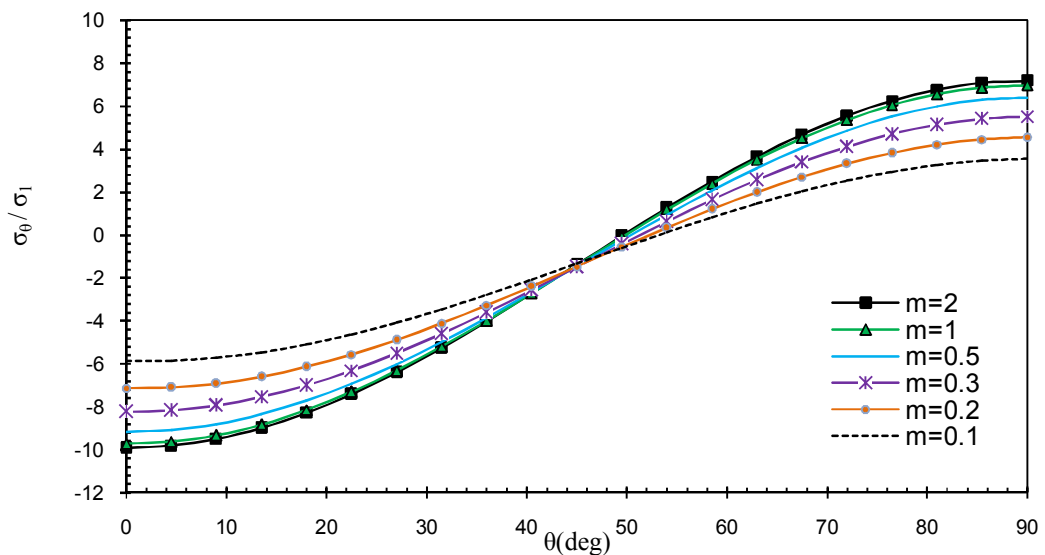
بارگذاری با  $n=2$  ۲-۲-۳-۴-۳

رفتار ورق ناهمگن نوع اول و دوم در این بارگذاری همانند بارگذاری دومحوره با  $n=2$  است. این نشان دهنده‌ی مستقل بودن رفتار ورق در مقادیر مختلف ضریب همگرایی  $m$  نسبت به نوع بارگذاری در مرزهای خارجی ورق است.

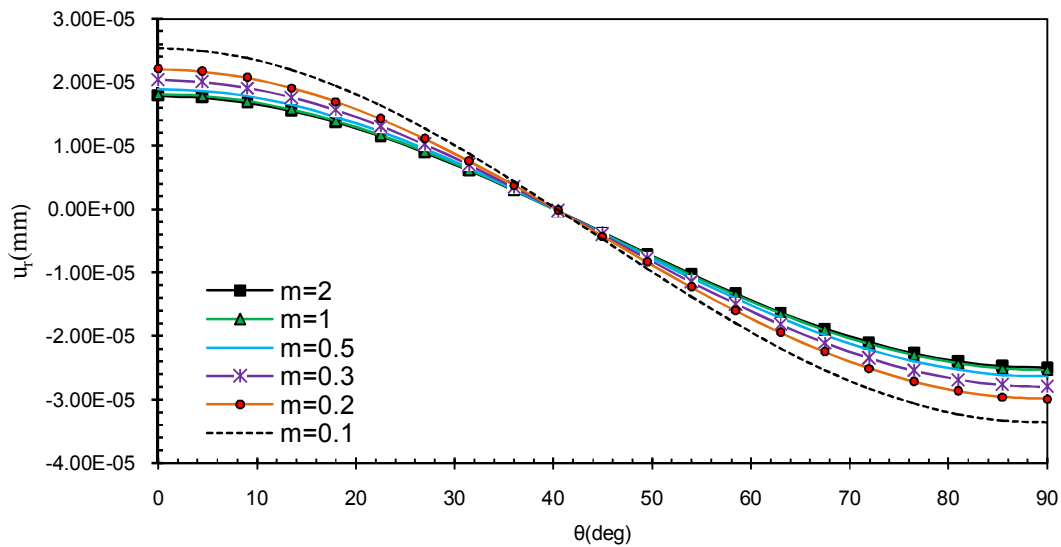
با توجه به بررسی‌های انجام شده برای ورق بلند ناهمگن نوع اول و دوم برای مقادیر مختلف  $m$  تحت بارگذاری‌های تک‌محوره و دوماحوره، پیشنهاد می‌شود، که برای تحقیق‌های آینده، ضریب همگرایی در بازه‌ی  $m \leq 0.5$  انتخاب شود. با توجه به این پیشنهاد و جدول ۱-۳ شعاع همگرایی و یا شعاع ناهمگنی ورق در بازه‌ی  $11 \leq \bar{r}$  قرار می‌گیرد.



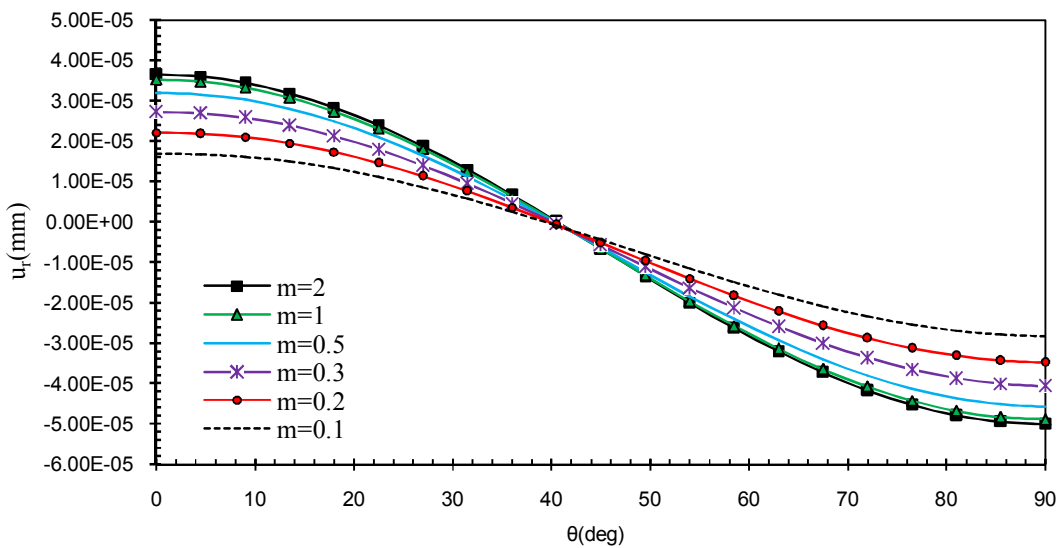
شکل ۲۵-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم مقادیر مختلف  $m$



شکل ۲۶-۳ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم برای مقادیر مختلف  $m$



شکل ۲۷-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف  $m$



شکل ۲۸-۳ جابه‌جایی شعاعی نقاط اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول برای مقادیر مختلف  $m$

### ۵-۳ جمع‌بندی

در این فصل، تابع ناهمگنی مورد استفاده در این تحقیق معرفی و مزایا و خصوصیات آن بررسی شد. مجانب افقی تابع و شعاع همگرایی این تابع و مستقل بودن مقدار حد بالا و پایین آن به شعاع همگرایی

از جمله خصوصیات هستند، که این تابع را برای ورق بلند ناهمگن مناسب ساختند. همچنین با بررسی ورق بلند ناهمگن و همگن مشخص شد، ورق ناهمگن نوع اول با خصوصیات مکانیکی تعریف شده در جدول ۱-۳، باعث کاهش مقدار تنش در حدود ۲۰-۳۵ درصد با توجه به نوع بارگذاری می‌شود. این امر برای ورق ناهمگن نوع دوم معکوس می‌باشد و مقدار تنش افزایش می‌یابد. علاوه بر این با تغییر ضریب همگرایی  $m$  مشخص شد؛ که تغییرات تنش محیطی و جابه‌جای شعاعی در هر نقطه، با افزایش ضریب همگرایی به مقدار ثابتی میل می‌کنند. به همین دلیل ضریب همگرایی برای ورق ناهمگن در بازه‌ی  $m \geq 0.5$  پیشنهاد شد. از نظر هزینه‌ی ساخت بهتر است، مقدار ضریب همگرایی بزرگ در نظر گرفته شود.



فصل ۴ ورق همگن و ناهمگن تحت بار فشاری در

داخل گشودگی

## ۱-۴ پیش‌گفتار

در این فصل علاوه بر بارگذاری درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی، فشار یکنواخت درون گشودگی دایروی ورق همگن و ناهمگن وارد می‌شود. هدف این فصل، بررسی تأثیر بارگذاری مورد نظر بر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی است. در ابتدا تعمیم حل تحلیلی (۲-۴۴) موجود مراجع در هنگام حضور بارگذاری درون گشودگی بررسی می‌شود. سپس نتایج حاصل از ورق همگن و ناهمگن تحت کشش تک-محوره و دومحوره به همراه بارگذاری فشاری یکنواخت استخراج و مطالعه می‌شوند.

## ۲-۴ معادلات حاکم

در این فصل علاوه بر بارگذاری در مرزهای خارجی، برای ورق همگن و ناهمگن، فشار در داخل گشودگی نیز وارد محاسبات خواهد شد. بار فشاری به صورت یکنواخت به تمام نقاط اطراف گشودگی دایروی وارد می‌شود. برای حل این مسأله نیاز به تغییرات زیادی در روند حل پیشنهادی نیست؛ تنها کافیست که در رابطه‌ی (۲-۳۹) مربوط به مرز داخل گشودگی مقدار عددی تنش شعاعی با مقدار فشار وارد بر گشودگی برابر شود.

همانند فصل‌های گذشته، در این فصل نیز برای اطمینان از درستی حل تحلیلی پیشنهادی، از حل موجود در مراجع استفاده می‌شود. در فصل دوم رابطه‌ی (۲-۴۳) و (۲-۴۴)، که توسط دانشمندی همچون ردی و پیلکی برای ورق همگن تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای بیان شده بود؛ مطرح گردید. در این دو رابطه، تأثیر بارگذاری فشار یکنواخت در داخل گشودگی دایروی دیده نشده است. برای تعمیم این حل تحلیلی برای بارگذاری مورد نظر در این فصل، از رابطه‌ی تابع تنش ایری، به دست آمده از معادله‌ی دوهمسازه استفاده می‌شود.

$$\nabla^4 U = 0$$

(۱-۴)

حل پیشنهادی برای تابع تنش ایری [۴۰] به صورت زیر می‌باشد:

$$U = [c_1 \ln(r) + c_2]r^2 + [c_3 \ln(r) + c_4] + \left[ (c_5 r^2 + c_6)r^2 + \left( \frac{c_7}{r^2} \right) + c_8 \right] \cos(2\theta) \quad (2-4)$$

رابطه‌ی تابع تنش ایری با تنش‌های نرمال و برشی در مختصات قطبی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (3-4)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۲-۴) در (۳-۴) مقادیر تنش برحسب ضرایب مجهول حل پیشنهادی به دست

می‌آیند.

$$\begin{cases} \sigma_r = c_1 (1 + 2 \ln(r)) + 2c_2 + \frac{c_3}{r^2} - \left( 2c_6 + \frac{6c_7}{r^4} + \frac{4c_8}{r^2} \right) \cos(2\theta) \\ \sigma_\theta = c_1 (3 + 2 \ln(r)) + 2c_2 - \frac{c_3}{r^2} + \left( 2c_6 + 2c_5 r^2 + \frac{6c_7}{r^4} \right) \cos(2\theta) \\ \tau_{r\theta} = \left( 6c_5 r^2 + 2c_6 - \frac{6c_7}{r^4} - \frac{2c_6}{r^2} \right) \sin(2\theta) \end{cases} \quad (4-4)$$

شریط مرزی ورق در بی‌نهایت برابر  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $\tau_{12}$  می‌باشد. با استفاده از روابط تبدیل تنش، این

مقادیر در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) + \tau_{12} \sin(2\theta) \quad (5-4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) - \tau_{12} \sin(2\theta) \quad (6-4)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\theta) + \tau_{12} \cos(2\theta) \quad (7-4)$$

با قرار دادن  $r = \pm\infty$  در رابطه‌ی (۴-۴) داریم:

$$r = \infty \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = 2c_2 - 2c_6 \cos(2\theta) \\ \sigma_\theta = +2c_2 + (2c_6 + 2c_5 r^2) \cos(2\theta) \\ \tau_{r\theta} = (6c_5 r^2 + 2c_6) \sin(2\theta) \end{cases} \quad (۸-۴)$$

باتوجه به معین بودن مقدار تنش محیطی و برشی در نقاط دور از گشودگی در بی‌نهایت، مقدار ضرایب

$c_1$  و  $c_5$  برابر صفر هستند. با برابر قرار دادن روابط (۵-۴) تا (۷-۴) با رابطه‌ی (۸-۴) داریم:

$$c_6 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4}, \quad c_2 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{4}, \quad c_5 = 0, \quad c_1 = 0$$

با قرار دادن شرایط مرزی در اطراف گشودگی در رابطه‌ی (۳-۴) روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$r = a \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = -P \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -P = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{c_3}{a^2} - \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} + 6\frac{c_7}{a^4} + \frac{4c_8}{a^2} \right) \cos(2\theta) \\ 0 = \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} - 6\frac{c_7}{a^4} - \frac{2c_8}{a^2} \right) \sin(2\theta) \end{cases} \quad (۹-۴)$$

با مرتب سازی و تجزیه‌ی روابط (۸-۴) ضرایب مجهول به‌صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$c_3 = \left( -P - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) a^2, \quad c_8 = a^2 \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right), \quad c_7 = a^4 \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right)$$

با توجه به مقادیر به‌دست آمده برای ضرایب، روابط (۳-۴) به‌صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + -P \frac{a^2}{r^2} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left( 1 + 3 \left( \frac{a}{r} \right)^4 - 4 \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right) \cos(2\theta) \quad (۱۰-۴)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + P \frac{a^2}{r^2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left( 1 + 3 \left( \frac{a}{r} \right)^4 \right) \cos(2\theta) \quad (۱۱-۴)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin(2\theta) \quad (۱۲-۴)$$

با به‌دست آمدن این روابط، امکان مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل تحلیلی پیشنهادی و روابط بالا وجود

دارد.

## ۳-۴ بررسی نتایج

درحالتی که ورق تحت بارگذاری درون صفحه‌ای در مرزهای خارجی بوده و فشار در داخل گشودگی صفر باشد (گشودگی عاری از بار است)؛ تنش‌های شعاعی و برشی در مرز گشودگی صفر هستند؛ ولی در صورت اعمال بار فشاری در مرز گشودگی دایروی، مقدار عددی تنش شعاعی در اطراف گشودگی، برابر مقدار بار فشاری وارد شده بر آن است. به همین دلیل علاوه بر بررسی مجزای تنش محیطی در اطراف گشودگی دایروی، از شکلول بندی معیار تسلیم فن میزس<sup>۱</sup>، که در رابطه‌ی (۴-۱۳) نمایش داده شده است، برای محاسبه‌ی تنش معادل در این نقاط استفاده می‌شود؛ تا علاوه بر تنش محیطی در صورت حضور تنش شعاعی در اطراف گشودگی بتوان به صورت کلی تنش را در نقاط مختلف، مورد بررسی قرار داد.

$$\sigma_{Von} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + (\sigma_r \sigma_\theta)} \quad (۴-۱۳)$$

در این بخش نتایج حاصل از بارگذاری درون صفحه‌ای در مرزهای خارجی و فشار یکنواخت در مرز گشودگی، برای ورق بلند با نسبت ابعادی ۲۰ بررسی می‌شود.

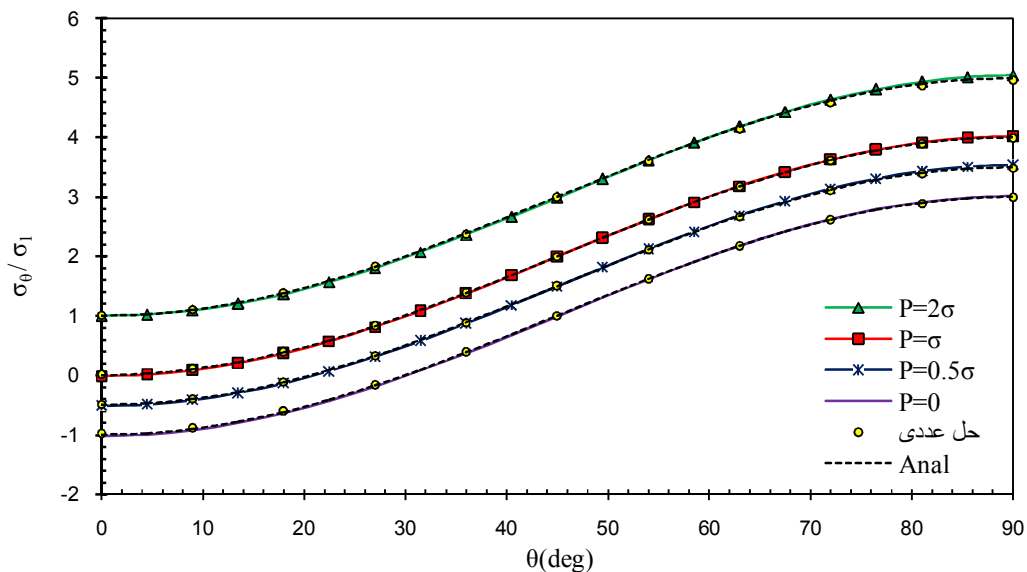
### ۴-۳-۱ کشش تک محوری

۴-۳-۱-۱ ورق همگن

با توجه به شکل ۴-۱ می‌توان دریافت، که حضور فشار یکنواخت در داخل گشودگی دایروی ورق، باعث افزایش یکنواخت تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی می‌شود. این مقدار افزایش برابر مقدار فشار یکنواخت وارد شده به داخل گشودگی است. با مقایسه‌ی حل<sup>۱</sup> پیشنهادی و حل تحلیلی استخراج شده از مراجع، برای هر کدام از بارگذاری‌ها، می‌توان دقت بالای حل<sup>۱</sup> تحلیلی پیشنهادی و تحلیل نرم‌افزاری انجام شده را تأیید نمود.

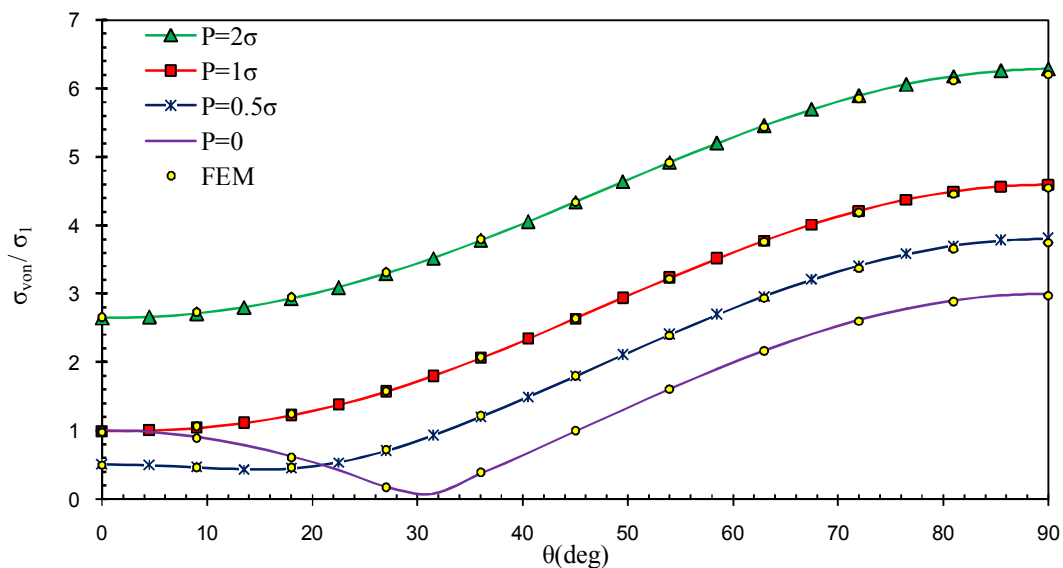
---

1 . Von Mises Yielding Criterion



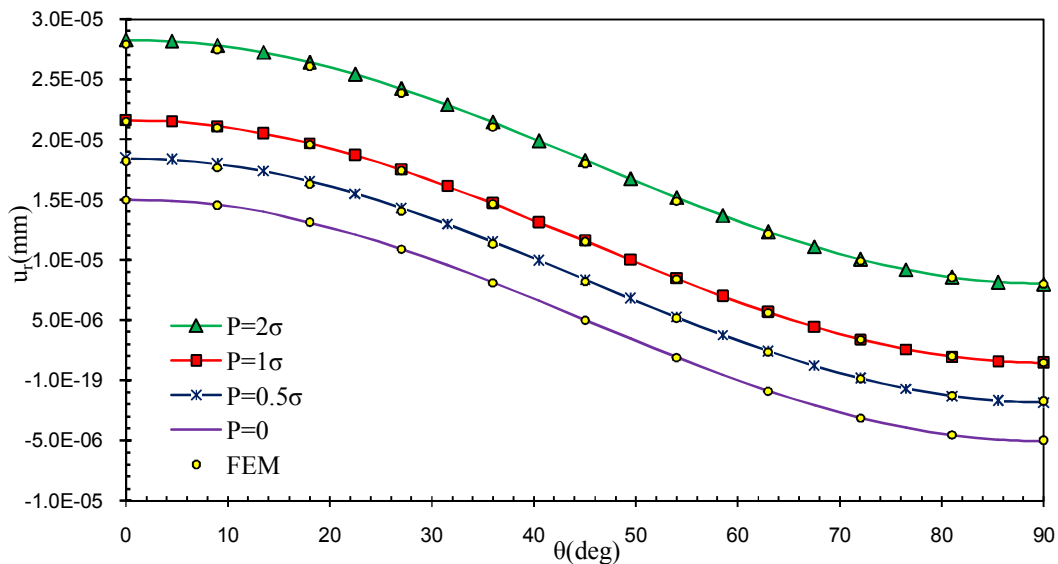
شکل ۴-۱ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک‌محوره

با توجه به حضور تنش شعاعی در اطراف گشودگی همان‌طور که گفته شد، از معیار فن میزس برای به‌دست آوردن مقدار تنشی واحد در نقاط اطراف گشودگی استفاده می‌شود. با توجه به شکل ۴-۲ افزایش مقدار تنش فن میزس نسبت به تنش محیطی به‌طور کامل مشهود می‌باشد. حفظ شکل کلی نمودار تنش معادل نسبت به تنش محیطی نشان‌دهنده‌ی ثابت بودن مقدار تنش شعاعی در تمام زوایای گشودگی است. نزدیکی جواب تحلیل عددی و حل پیشنهادی، دقت خوب حل مورد بررسی را نشان می‌دهد. در نمودار  $P=0$  و  $P=0.5\sigma$  تفاوتی در رفتار تنش مشاهده می‌شود. در حالت  $P=0$  به علت ذات تنش معادل فن میزس، که نمی‌تواند مقدار منفی بپذیرد، در نقاطی که تنش محیطی مقادیر منفی می‌پذیرد، تنش معادل فن میزس به‌صورت قدر مطلق، خود را نشان می‌دهد. در مورد  $P=0.5\sigma$  در نقاطی که تنش محیطی دارای مقادیر نزدیک به صفر است؛ از جملاتی که این تنش در آن حضور دارند، می‌توان صرف نظر کرد؛ زیرا تنش شعاعی در تمام نقاط اطراف گشودگی، دارای یکنواخت  $0.5\sigma$  و در نتیجه نمودار تنش معادل نیز در این نقاط تقریباً یکنواخت و برابر  $0.5\sigma$  است.



شکل ۲-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک محوره

در مورد شکل ۳-۴ با مقایسه‌ی نمودارهای مربوط به بارگذاری‌های فشاری  $P=0$  می‌توان نتیجه گرفت، که همانند نمودارهای تنش محیطی مقدار افزایش جابه‌جایی در تمام نقاط به صورت یکسان رخ داده است. این رفتار به علت حضور تنش شعاعی یکنواخت در اطراف گشودگی است.



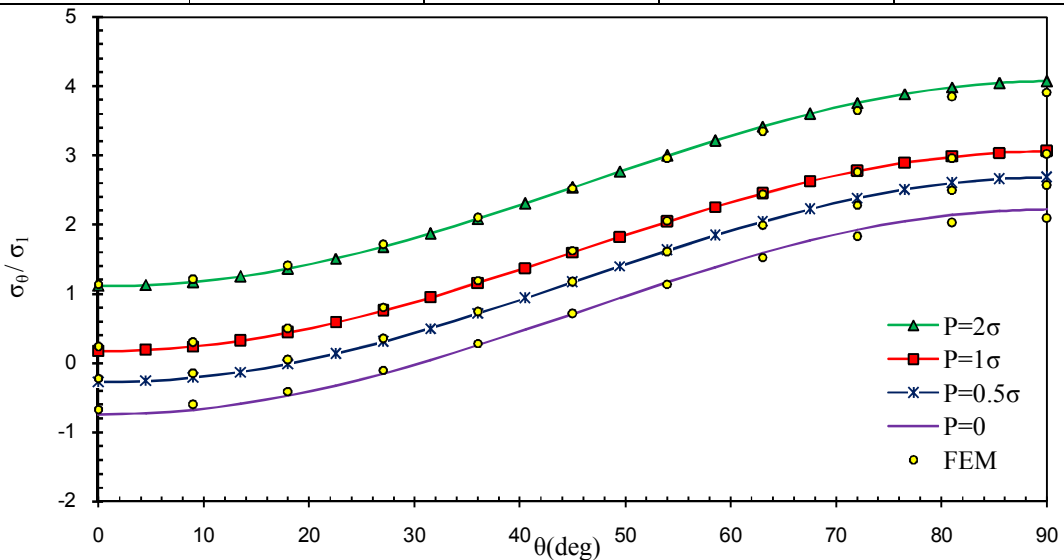
شکل ۳-۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت کشش تک محوره

ورق ناهمگن نوع اول ۲-۱-۳-۴

در شکل ۴-۴ توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی دایروی در ورق ناهمگن نوع دوم، همانند ورق همگن با افزایش مقدار فشار درون گشودگی افزایش می‌یابد؛ ولی این مقدار افزایش برابر با مقدار بار فشاری نیست. با توجه به جدول ۴-۱ در تمامی مقادیر بار فشاری در داخل گشودگی، تنش محیطی حدود  $0/91-0/93$  مقدار بار فشاری افزایش می‌یابد. به علت آنکه فشار وارد شده در گشودگی به‌طور مستقیم به نقاط اطراف گشودگی وارد می‌شود، افزایش سفتی لایه‌های میانی در ورق ناهمگن نوع اول، تأثیر چندانی بر مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر بارگذاری فشاری ندارد.

جدول ۴-۱ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری

درصد افزایش	$\sigma_{\theta_{P=0}} - \sigma_{\theta}$	$\sigma_{\theta_{P=0}}$	$\sigma_{\theta}$	P
۹۲/۸	۰/۴۶۴	-۰/۷۴۲	-۰/۲۷۸	۰/۵
۹۱	۰/۹۱	-۰/۷۴۲	۰/۱۶۷	۱
۹۲/۶	۱/۸۵۳	-۰/۷۴۲	۱/۱۱۱	۲

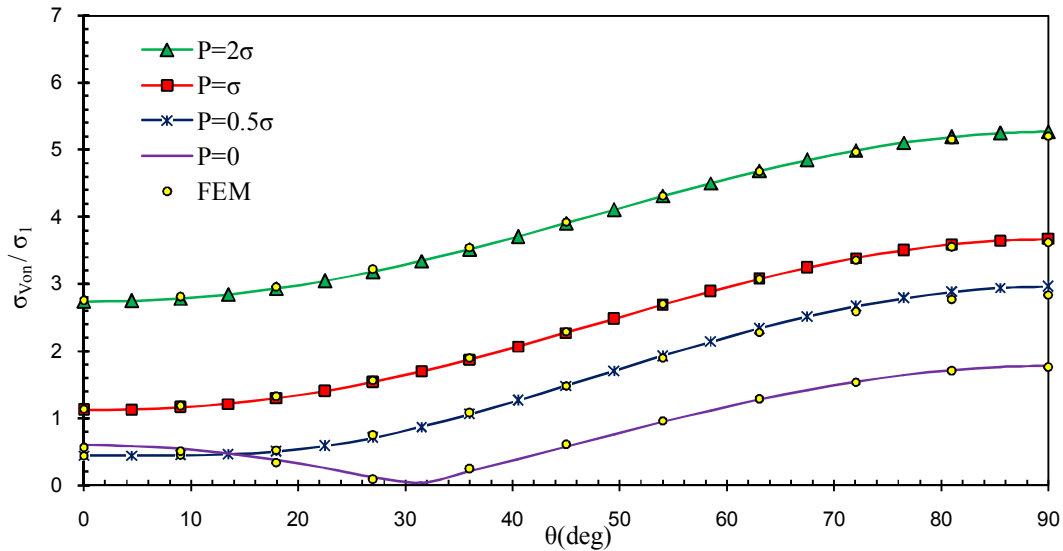


شکل ۴-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوره

رفتار تنش معادل فن میزس برای ورق ناهمگن نوع اول در شکل ۴-۵، همانند ورق همگن می‌باشد. هرچند تفاوت‌های بیان شده در توزیع تنش محیطی برای هر دو نوع از ورق ناهمگن، در تنش معادل فن-

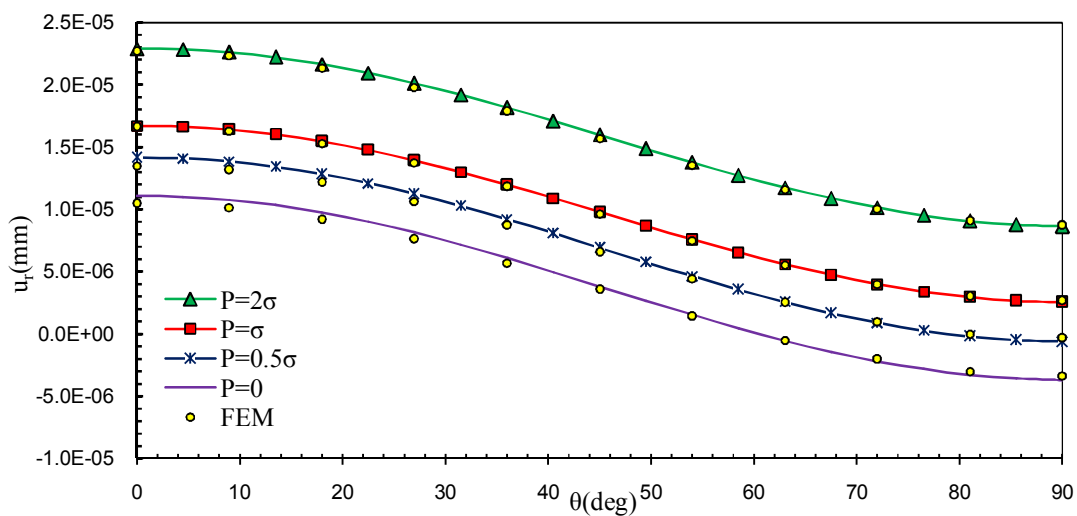


میزس نیز مشاهده می‌شود. مقدار تنش شعاعی در اطراف گشودگی ورق مستقل از جنس ورق و وابسته به بارگذاری فشاری می‌باشد. علت این رفتار، ارضای معادله‌ی تعادل در نقاط اطراف گشودگی می‌باشد.



شکل ۴-۵ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوره

شکل ۴-۶ نشان می‌دهد، که جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی این ورق نسبت به افزایش بارگذاری فشار یکنواخت، همانند ورق همگن با نرخ افزایشی همراه است. ولی مقدار این افزایش همانند تنش محیطی کمتر از ورق همگن می‌باشد.



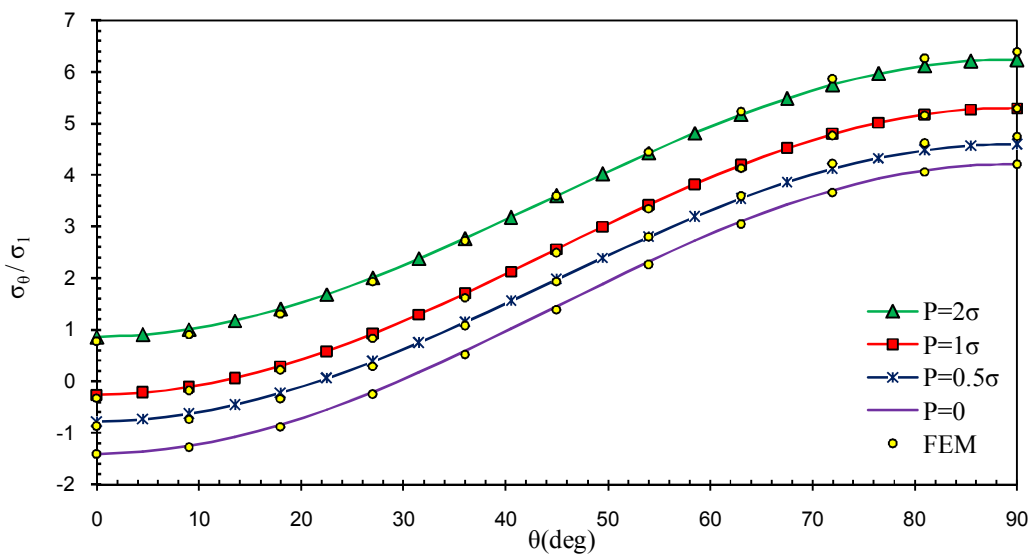
شکل ۴-۶ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت کشش تک‌محوره

ورق ناهمگن نوع دوم ۳-۱-۳-۴

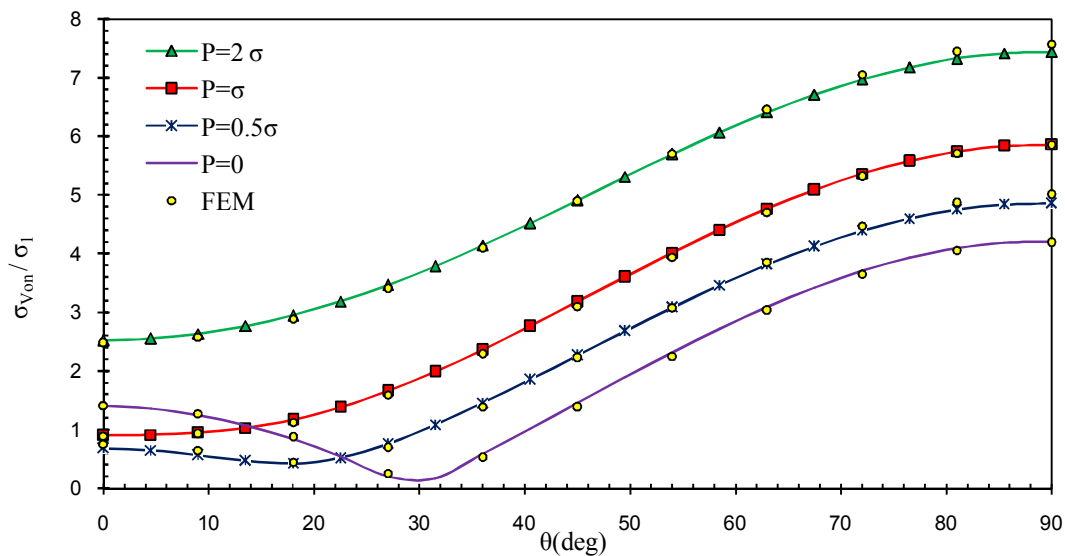
در شکل ۷-۴ و ۸-۴ مربوط به ورق ناهمگن نوع دوم، مانند ورق همگن، با افزایش مقدار فشار داخلی مقدار تنش محیطی و تنش معادل فن میزس افزایش می‌یابد. برخلاف ورق ناهمگن نوع اول، در این نوع ورق مقدار افزایش تنش محیطی و به سبب آن تنش معادل فن میزس، بر اثر بارگذاری فشاری در درون گشودگی، بیشتر از مقدار بار فشاری می‌باشد. در جدول ۲-۴ مشاهده می‌شود، که این مقدار افزایش تنش محیطی نسبت به مقدار بار فشاری، برابر ۱۳ تا ۲۳ درصد می‌باشد.

جدول ۲-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری

درصد افزایش $\sigma_\theta$	$\sigma_{\theta_{P=0}} - \sigma_\theta$	$\sigma_{\theta_{P=0}}$	$\sigma_\theta$	P
۱۲۳	۰/۶۱۸	-۱/۴۰۵	-۰/۷۸۷	۰/۵
۱۱۴	۱/۱۴۵	-۱/۴۰۵	-۰/۲۶۰	۱
۱۱۳	۲/۲۶۴	-۱/۴۰۵	۰/۸۵۹	۲

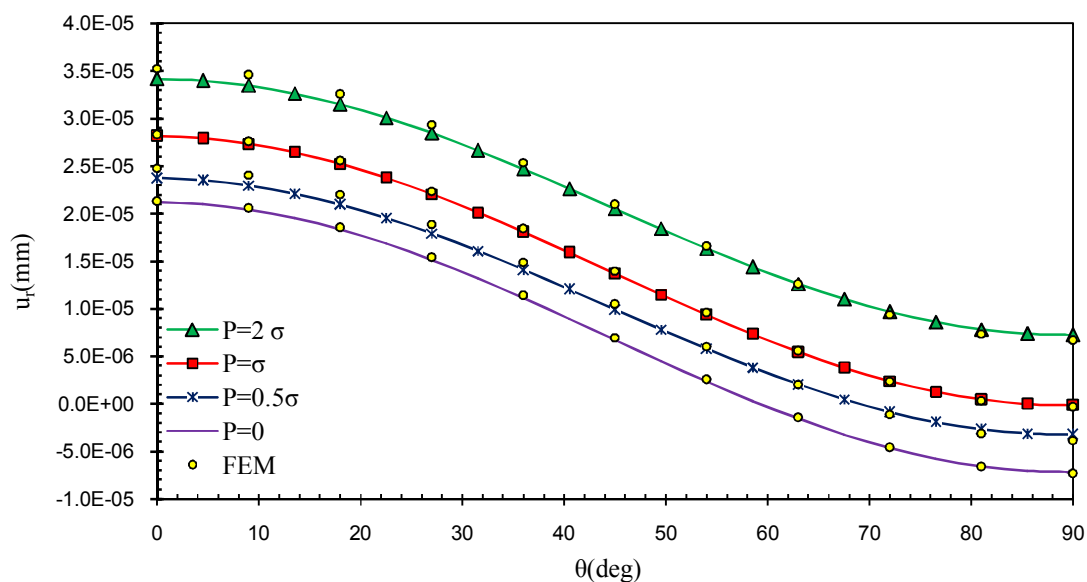


شکل ۷-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوره



شکل ۴-۸ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوره

شکل ۴-۹ جابه‌جایی شعاعی در ورق ناهمگن نوع دوم را نشان می‌دهد؛ که در مقایسه با ورق ناهمگن نوع اول می‌توان دریافت، که مقدار بیضوی شکل شدن گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم بیشتر از ورق نوع اول است؛ ولی حضور بار فشاری تغییری در اختلاف جابه‌جایی نقاط نسبت به هم در هر دو نوع ورق ایجاد نمی‌کند. علت این امر حضور مؤلفه‌ی تنش شعاعی و مستقل بودن آن نسبت به زاویه ( $\theta$ ) است.

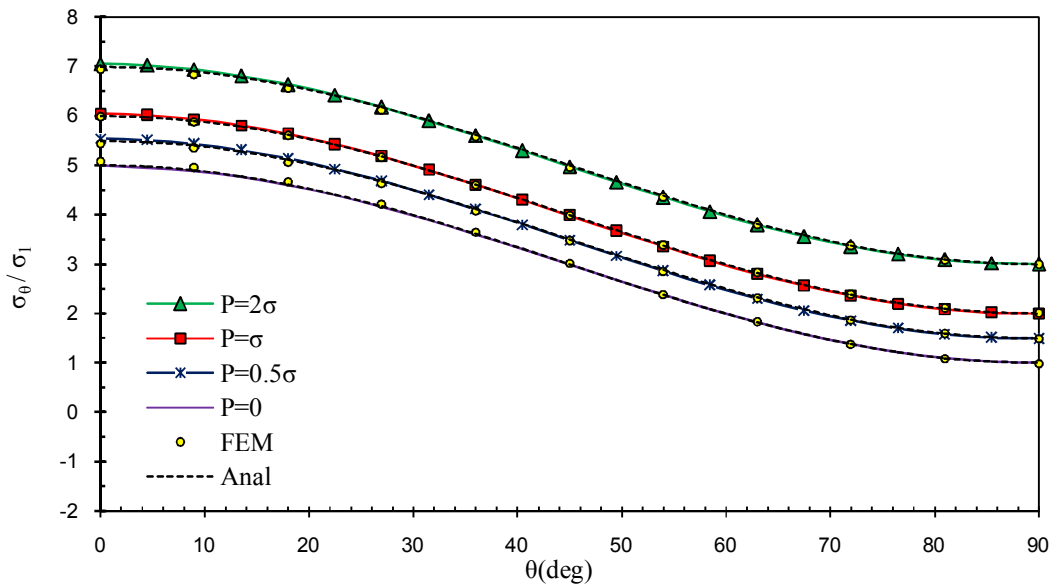


شکل ۴-۹ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوره

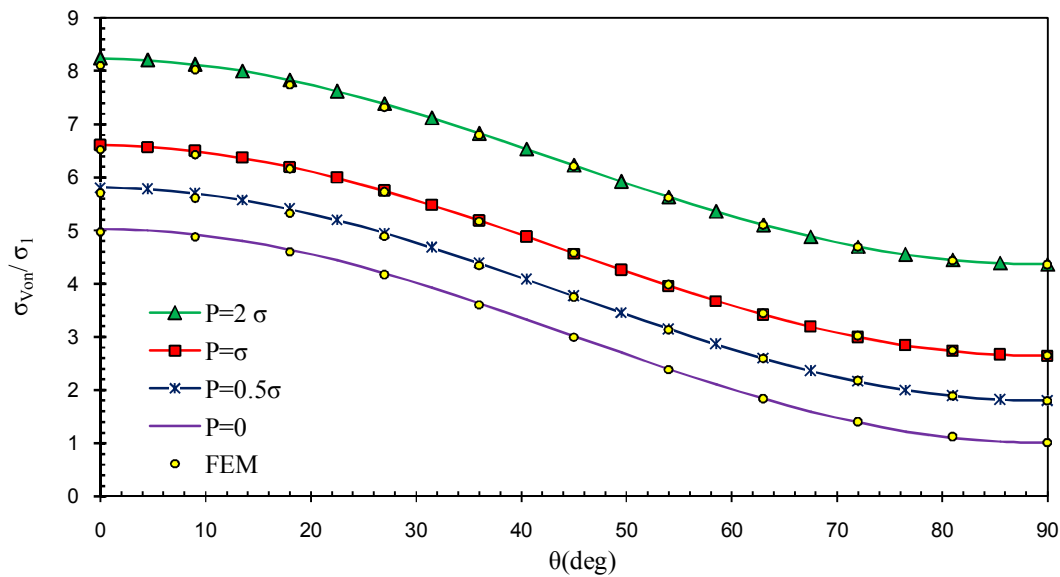
### ۲-۳-۴ بارگذاری دوماحوری $n=2$

۱-۲-۳-۴ ورق همگن

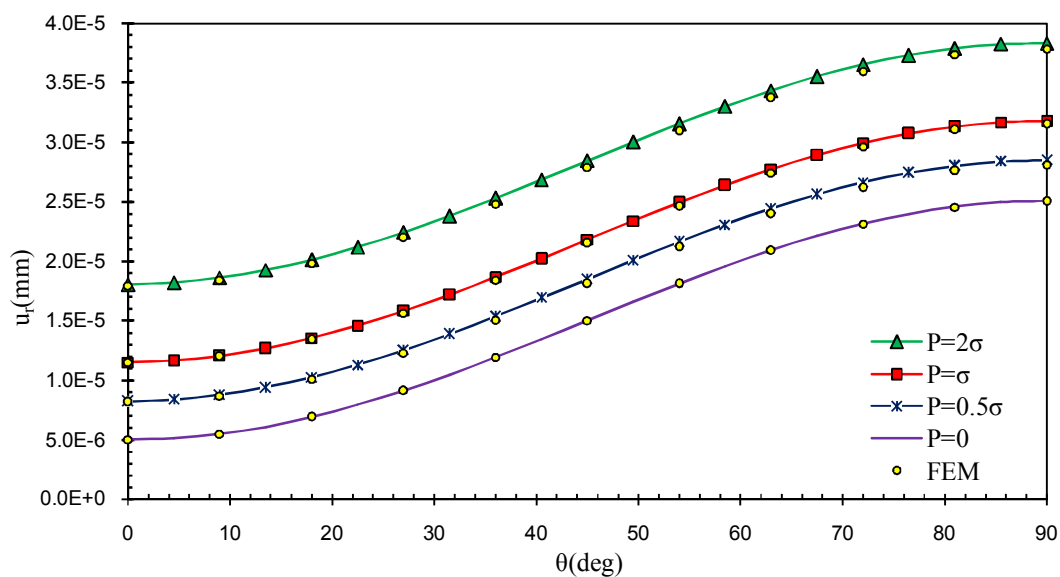
در شکل ۱۰-۴ دقت بالای حل تحلیلی پیشنهادی برای ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوری با  $n=2$  و بار فشاری داخل گشودگی، به نسبت حل تحلیلی استخراج شده از مراجع، مشاهده می‌شود. شکل‌های ۲-۴ و ۱۱-۴ مربوط به تنش معادل فن میزس دارای روند و نتایج مشابهی هستند؛ به‌غیر از شکل مربوط به  $P=0$  و  $P=0.5$ ، که به دلیل مثبت بودن مقادیر تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی، در شکل ۱۱-۴ تنش معادل فن میزس بر خلاف بارگذاری کشش تک‌محوره در تمام مقادیر فشار داخل گشودگی روندی مشابه دارد. شکل‌های ۱۲-۴ و ۳-۴ نیز نتایجی یکسان را برای جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری‌های فشاری مشابه، به همراه دارند.



شکل ۱۰-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$



شکل ۱۱-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$



شکل ۱۲-۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$

#### ۲-۲-۳-۴ ورق ناهمگن نوع اول

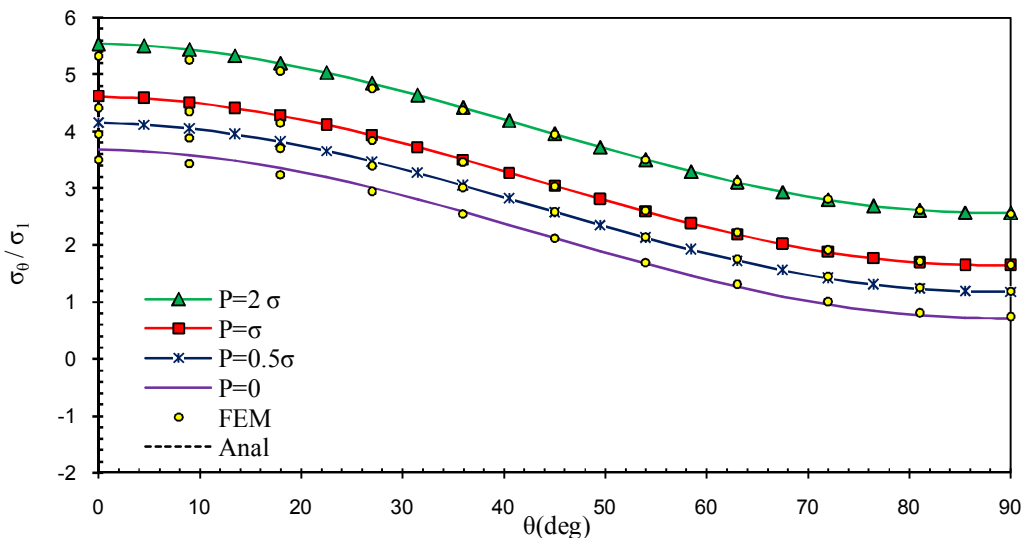
ورق ناهمگن نوع اول، همانند بار کشش تک‌محوره، در بارگذاری دوماحوره  $n=2$  نیز رفتاری مشابه

نسبت به بارگذاری فشاری نشان می‌دهد. در شکل ۱۳-۴ این رفتار مشهود است. با توجه به جدول ۳-۴

مقدار افزایش تنش محیطی در ورق ناهمگن نوع اول تحت این بارگذاری، حدود ۰/۹۲ مقدار بار فشاری وارد شده بر گشودگی افزایش می‌یابد.

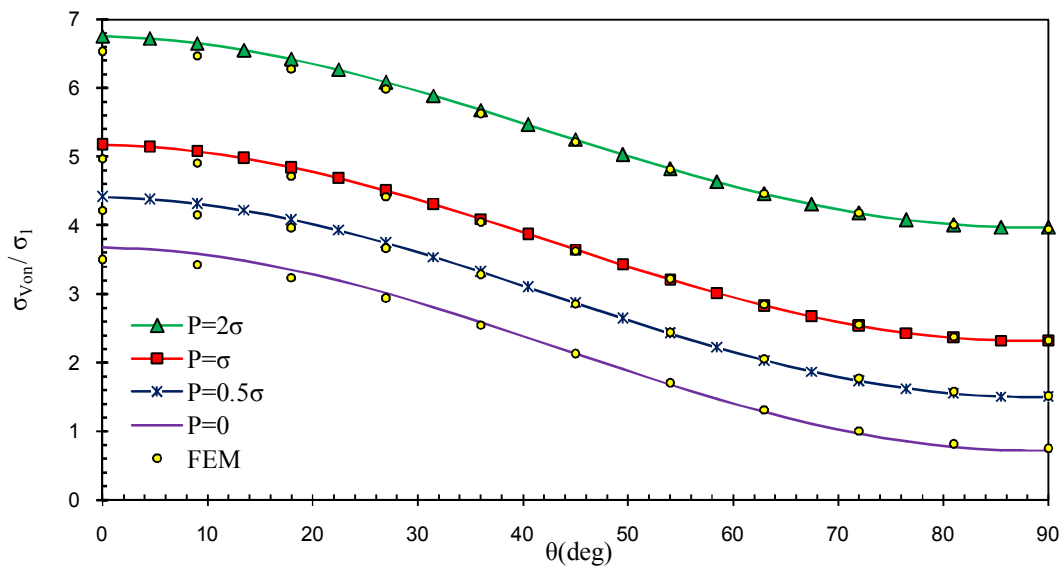
جدول ۳-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری

درصد افزایش $\sigma_{\theta}$	$\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta_{P=0}}$	$\sigma_{\theta_{P=0}}$	$\sigma_{\theta}$	P
۹۲/۴	۰/۴۶۲	۳/۶۸۴	۴/۱۴۷	۰/۵
۹۲/۷	۰/۹۲۷	۳/۶۸۴	۴/۶۱۱	۱
۹۲/۸	۱/۸۵۶	۳/۶۸۴	۵/۵۳۹	۲

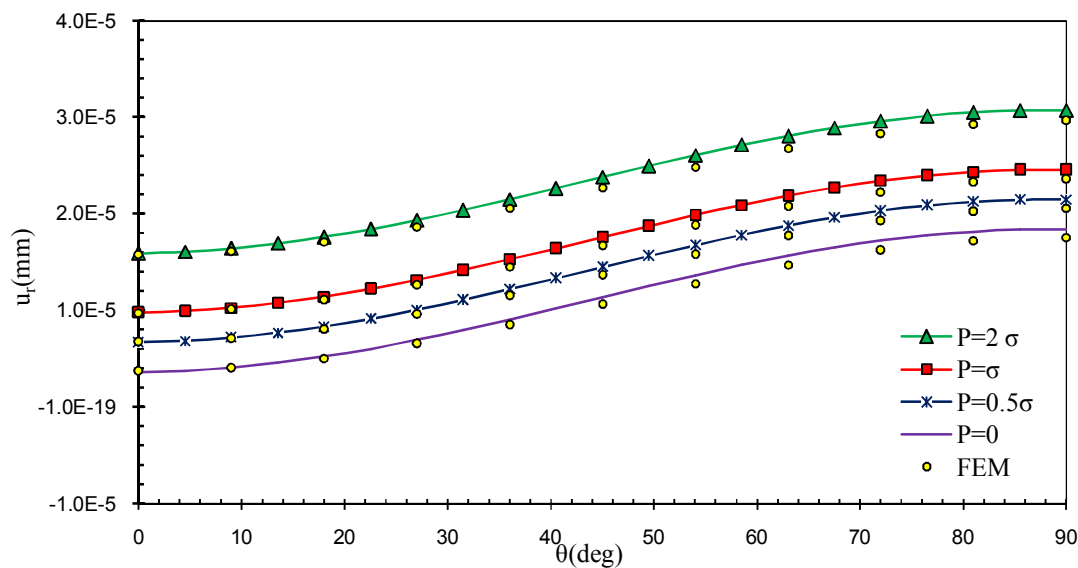


شکل ۴-۱۳ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$

شکل ۴-۱۴ و ۴-۱۵ به ترتیب توزیع تنش معادل فن میزس و جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی ورق تحت بارگذاری مورد بررسی هستند. در این نوع بارگذاری در ورق ناهمگن نوع اول، تنش معادل فن میزس رفتاری مشابه به ورق همگن را از خود نشان می‌دهد. افزایش یکنواخت تنش‌ها و جابه‌جایی شعاعی، نشان‌دهنده‌ی مستقل بودن تنش محیطی و شعاعی حاصل از بار فشاری است.



شکل ۴-۱۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$



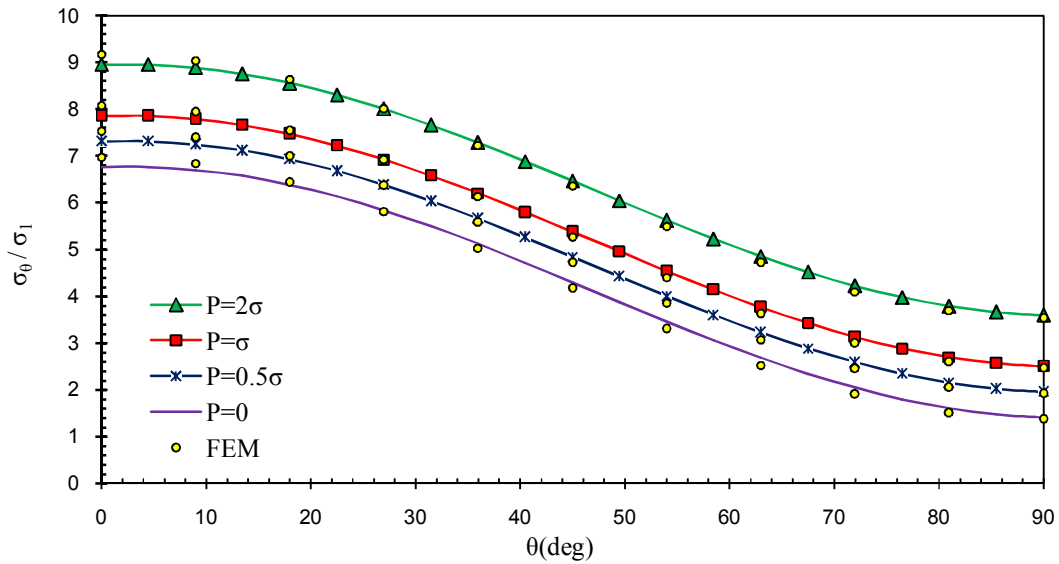
شکل ۴-۱۵ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$

### ۳-۲-۳-۴ ورق ناهمگن نوع دوم

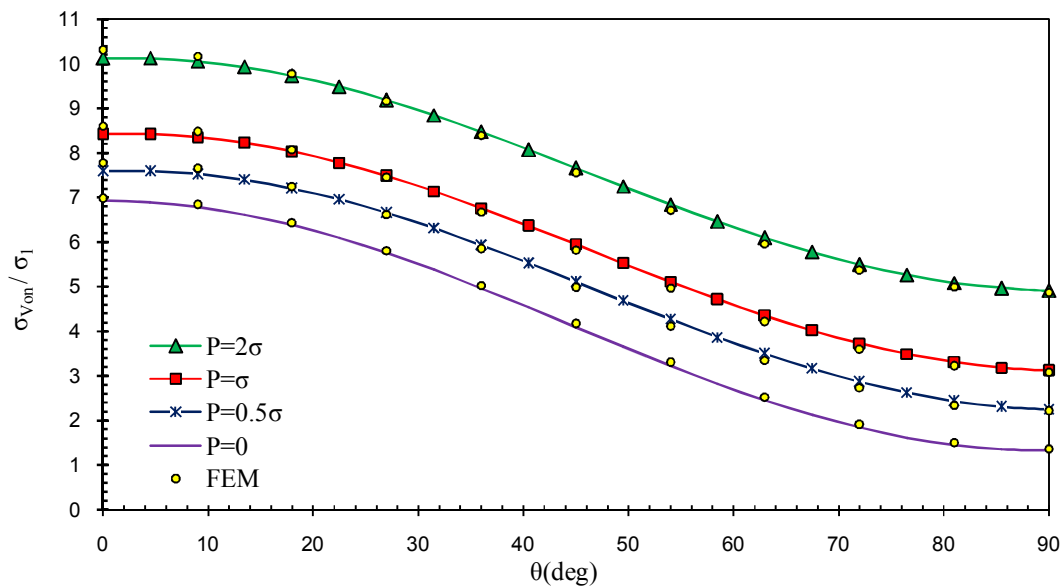
با توجه به شکل‌های ۴-۱۶، ۴-۱۷ و ۴-۱۸ مشاهده می‌شود، که روند افزایش مقادیر تنش و جابه‌جایی، مشابه ورق ناهمگن نوع دوم تحت کشش تک‌محوره و بار فشاری درون گشودگی، است. با این

تفاوت که در بارگذاری دومحوره  $n=2$ ، مقدار افزایش تنش محیطی کمتر از ۱۰ درصد بیشتر از مقدار فشار

یکنواخت وارد شده به گشودگی می باشد (جدول ۴-۴).



شکل ۴-۱۶ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره  $n=2$

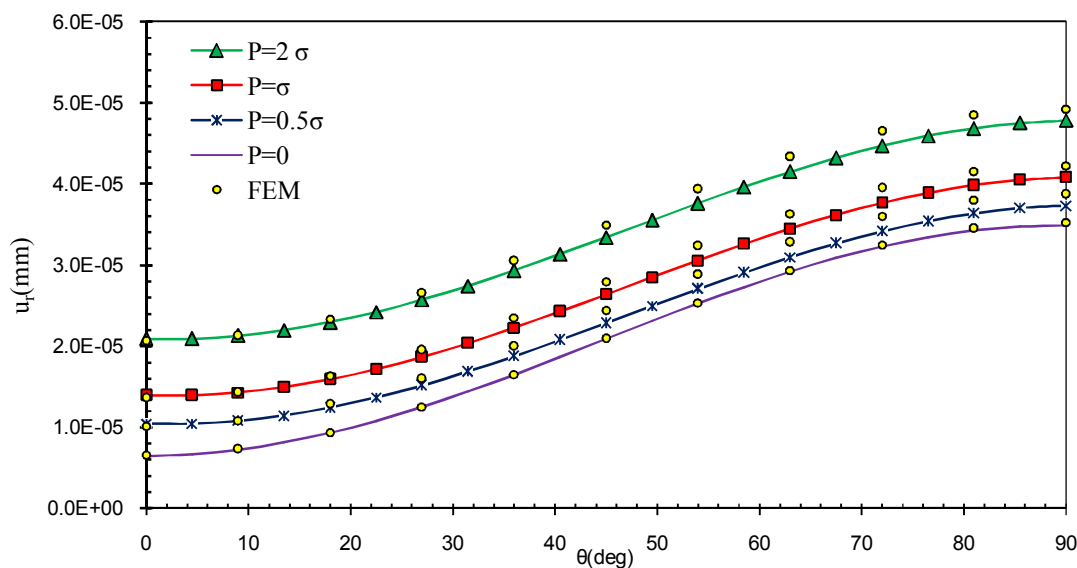


شکل ۴-۱۷ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره  $n=2$



جدول ۴-۴ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری

درصد افزایش $\sigma_{\theta}$	$\sigma_{\theta} - \sigma_{\theta P=0}$	$\sigma_{\theta P=0}$	$\sigma_{\theta}$	P
۱۰۸	۰/۵۴	۶/۷۷	۷/۳۱	۰/۵
۱۰۹	۱/۰۹	۶/۷۷	۷/۸۶	۱
۱۰۹/۵	۲/۱۹	۶/۷۷	۸/۹۶	۲



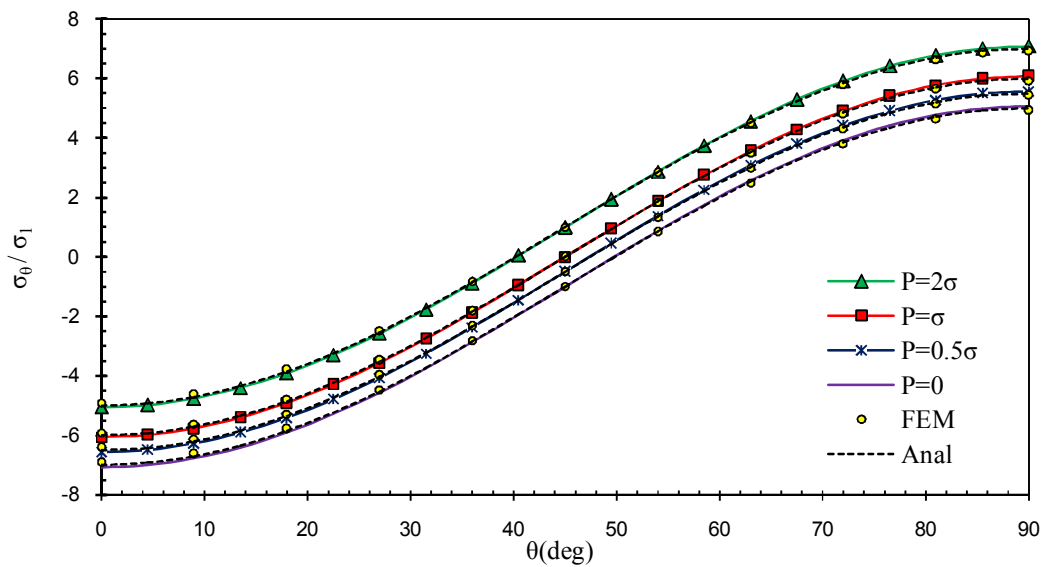
شکل ۴-۱۸ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$

### ۴-۳-۳ بارگذاری دوماحوری $n=-2$

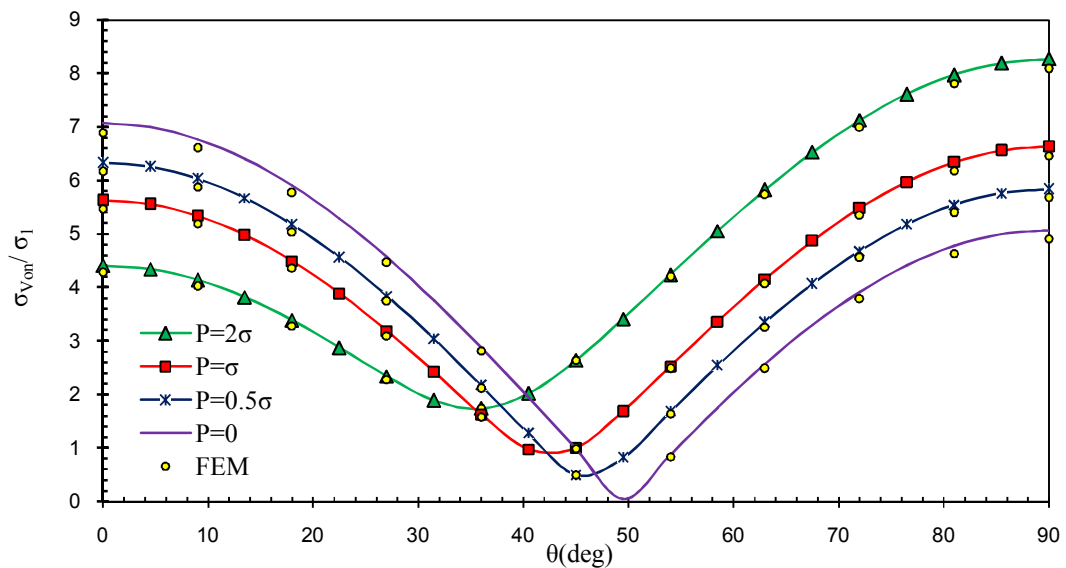
#### ۴-۳-۳-۱ ورق همگن

همانند ورق همگن تحت بار تک‌محوره و دوماحوره با  $n=2$ ، در شکل ۴-۱۹ برای ورق همگن تحت بارگذاری دوماحوره با  $n=-2$  و بار فشاری داخل گشودگی، مقدار تنش محیطی به‌دست آمده از حلّ تحلیل پیشنهادی و حلّ تحلیلی استخراج شده در مراجع، بسیار نزدیک به هم و مقدار خطای حلّ پیشنهادی ناچیز است. در شکل ۴-۲۰ مربوط به تنش معادل فن میزس، دو نکته قابل بیان است. نکته‌ی اول؛ به‌دلیل منفی بودن مقادیر تنش محیطی در نقاطی از اطراف گشودگی در زوایایی خاص، نمودار تنش معادل فن

میزس به صورت ۷ شکل می‌شود. نکته‌ی دوم به‌علت حضور تنش شعاعی در تنش معادل فن میزس، متناسب با مقدار فشار وارد شده در داخل گشودگی، کل نمودار با افزایش، مواجه می‌شود. این پدیده در تمام حالات ورق با بارگذاری‌های مختلف به‌همراه فشار یکنواخت در داخل گشودگی، مشاهده شد؛ ولی به‌علت شکل خاص نمودار در این نوع بارگذاری، مشاهده‌ی این پدیده قابل فهم‌تر و ملموس‌تر شده است.

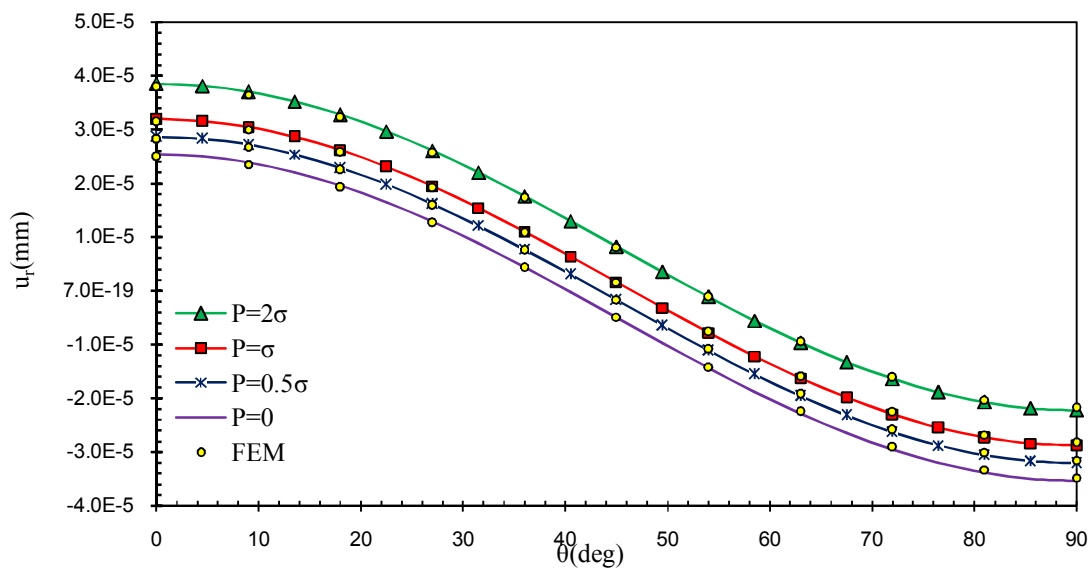


شکل ۴-۱۹ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دومحوره  $n=2$



شکل ۴-۲۰ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دومحوره  $n=2$

شکل ۴-۲۱ مربوط به جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی، دارای نتایجی یکسان با شکل ۴-۱۲ مربوط به ورق همگن تحت بارگذاری دومحوره با  $n=2$  است. علت این شباهت مستقل بودن تأثیر بارگذاری فشاری بر مقدار جابه‌جایی شعاعی، نسبت به نوع بارگذاری می‌باشد.



شکل ۴-۲۱ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق همگن تحت بارگذاری دومحوره  $n=2$

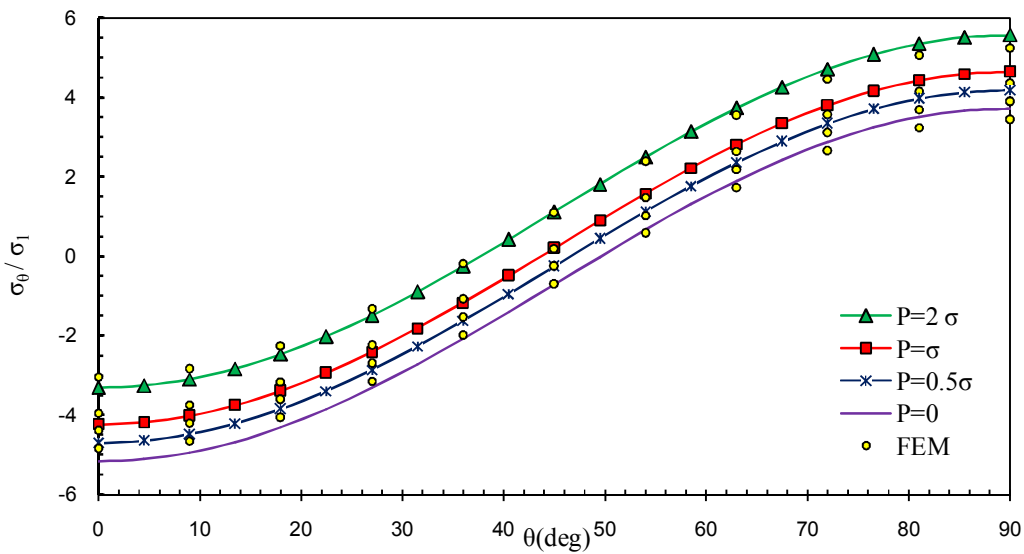
#### ۴-۳-۳ ورق ناهمگن نوع اول

با توجه به شکل ۴-۲۲ تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی دایروی همانند ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومحوره با  $n=2$  و فشار یکنواخت در داخل گشودگی، است. بدان معنا که مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر بار فشاری کمتر از مقدار بار فشاری می‌باشد. با توجه به جدول ۴-۵ و مقایسه‌ی آن با جدول ۴-۳ می‌توان نتیجه گرفت، که مقدار بار وارد شده در مرز خارجی چه به صورت فشاری و چه کششی تغییری در میزان افزایش تنش محیطی نسبت به افزایش بار فشاری در داخل گشودگی ندارد.

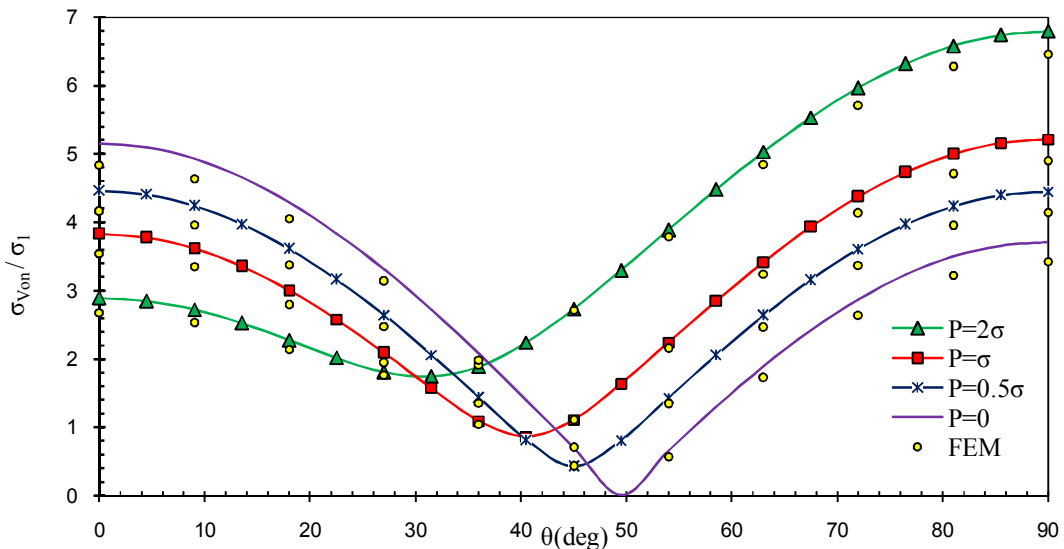
نتایج حاصل شده از شکل‌های ۴-۲۳ و ۴-۲۴ به ترتیب برای تنش معادل فن میزس و جابه‌جایی شعاعی برای این نوع ورق با ورق همگن با بارگذاری مورد بررسی مشابه می‌باشد.

جدول ۴-۵ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع اول تحت بارهای مختلف فشاری

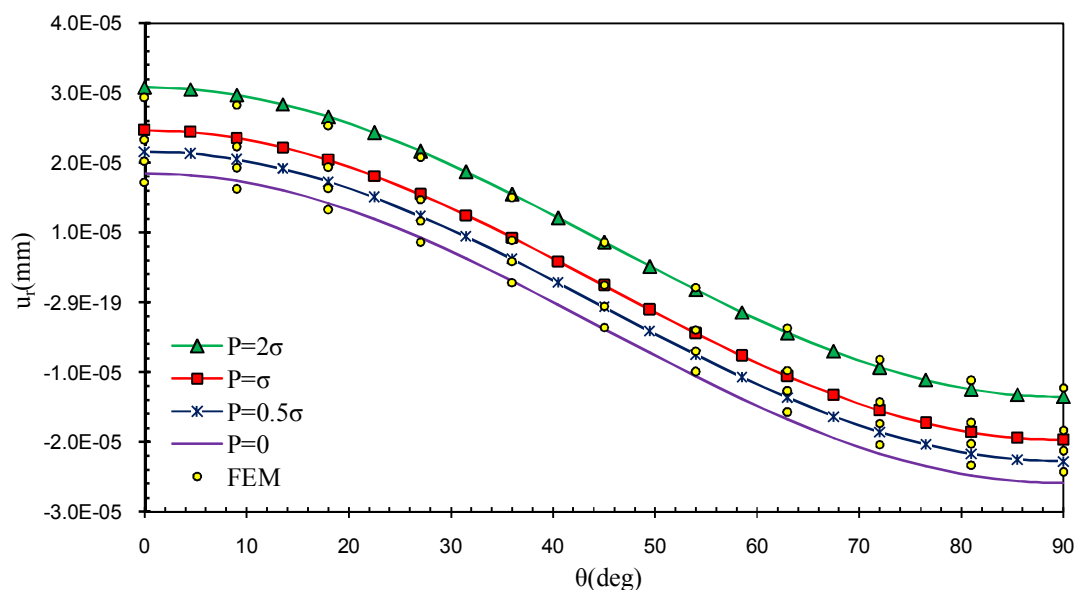
درصد افزایش $\sigma_\theta$	$\sigma_\theta - \sigma_{\theta_{P=0}}$	$\sigma_{\theta_{P=0}}$	$\sigma_\theta$	P
۹۲/۸	۰/۴۶۴	-۵/۱۶۸	-۴/۷۰۴	۰/۵
۹۲/۸	۰/۹۲۸	-۵/۱۶۸	-۴/۲۴۰	۱
۹۲/۷	۱/۸۵۵	-۵/۱۶۸	-۳/۳۱۳	۲



شکل ۲۲-۴ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومیحوره n=۲



شکل ۲۳-۴ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دومیحوره n=۲



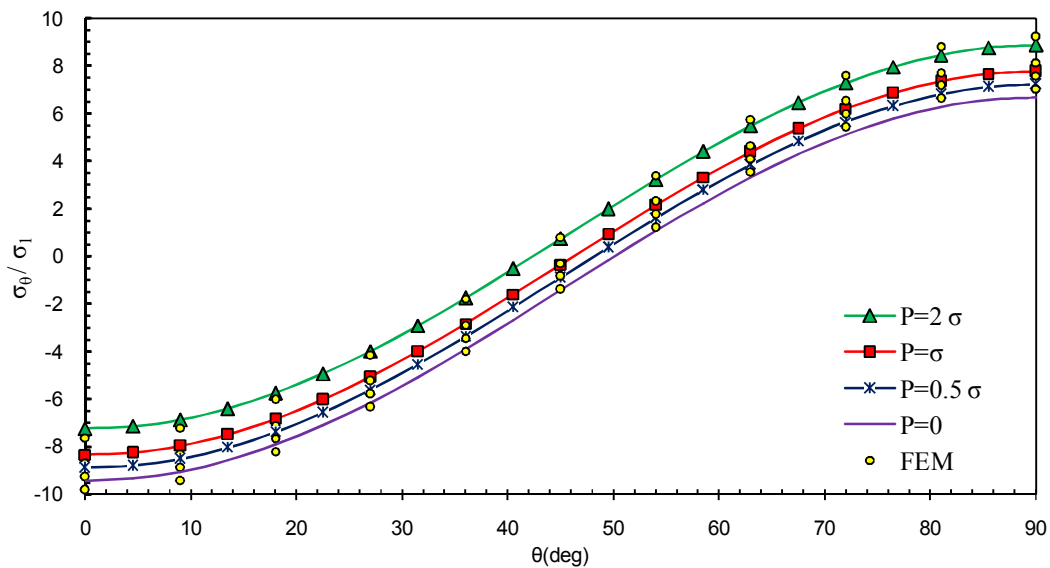
شکل ۴-۲۴ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع اول تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$

#### ۳-۳-۳-۴ ورق ناهمگن نوع دوم

با بررسی شکل ۴-۲۵ می‌توان دریافت، که رفتار تنش محیطی در نقاط اطراف ورق ناهمگن نوع دوم، همانند ورق ناهمگن نوع اول مستقل از فشاری یا کششی بودن بارگذاری در مرز خارجی ورق است. جدول ۴-۶ نیز این نتیجه را نشان می‌دهد. به‌طوری‌که هم در جدول ۴-۴ و ۴-۶ مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر حضور بارگذاری یکنواخت فشاری در داخل گشودگی، در حدود  $1/0.9$  بار فشاری است.

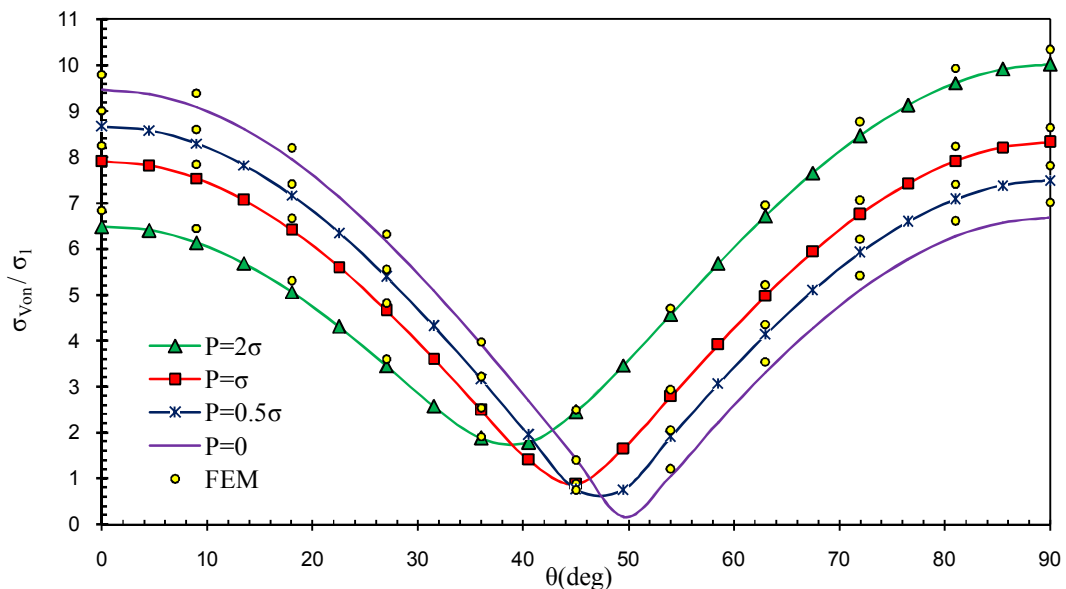
جدول ۴-۶ درصد افزایش تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارهای مختلف فشاری

درصد افزایش $\sigma_\theta$	$\sigma_\theta - \sigma_{\theta P=0}$	$\sigma_{\theta P=0}$	$\sigma_\theta$	P
۱۰۹/۶	۰/۵۴۸	-۹/۴۳۳	-۸/۸۸۵	۰/۵
۱۰۹/۶	۱/۰۹۶	-۹/۴۳۳	-۸/۳۳۷	۱
۱۰۹/۶	۲/۱۹۳	-۹/۴۳۳	-۷/۲۴۰	۲

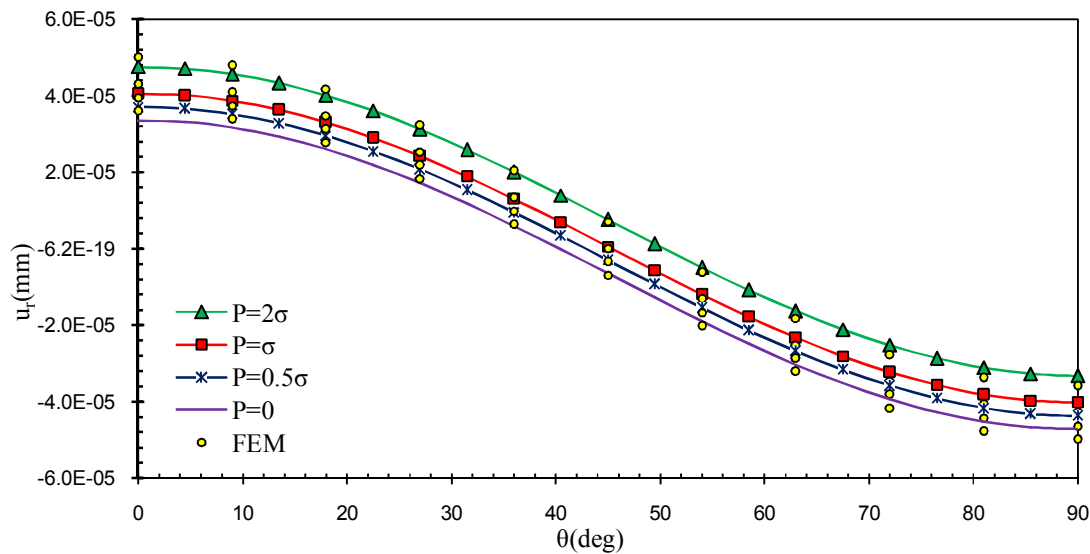


شکل ۴-۲۵ توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره  $n=2$

با توجه به توضیحات بیان شده برای نمودار تنش محیطی و همچنین مستقل بودن مقدار تنش شعاعی از جنس ورق، نمودار تنش معادل فن میزس و جابه‌جایی شعاعی رفتاری مشابه را با بارگذاری دومحوره با  $n=2$  را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲۶ توزیع تنش معادل فن میزس در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دومحوره  $n=2$



شکل ۴-۲۷ جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در ورق ناهمگن نوع دوم تحت بارگذاری دوماحوره  $n=2$

#### ۴-۴ جمع‌بندی

در این فصل، مقدار تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی در ورق همگن و ناهمگن تحت بارگذاری درون-صفحه‌ای در مرزهای خارجی و فشار یکنواخت داخل گشودگی، بررسی شد. با توجه به نتایج تنش محیطی در ورق همگن دقت بالای حلّ تحلیلی پیشنهادی نسبت به حلّ استخراج شده از منابع مورد تأیید قرار گرفت. به‌علت حضور تنش شعاعی در نقاط اطراف گشودگی در بارگذاری مورد مطالعه در این فصل، پیشنهاد شد، که به‌جای بررسی تنش محیطی تنش معادل حاصل از معیار فن میزس مورد بررسی قرار گیرد. با مقایسه‌ی نتایج این دو تنش در بارگذاری‌های متفاوت مشخص شد، که تنش شعاعی کاملاً مستقل از جنس ماده و بارگذاری در مرزهای خارجی ورق است؛ درحالی‌که تنش محیطی در برابر بارگذاری فشار یکنواخت در داخل گشودگی به جنس ماده ورق وابسته می‌باشد. در ورق ناهمگن نوع اول، مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر بارگذاری فشار یکنواخت داخل گشودگی حدود  $0/9 - 0/92$  و برای ورق ناهمگن نوع دوم این مقدار برابر  $1/09 - 1/13$  مقدار فشار وارد شده می‌باشد.





## فصل ۵ نتیجه گیری و پیشنهادها

## ۵-۱ نتیجه‌گیری

### ۵-۱-۱ ورق همگن تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

در اولین قدم حلّ تحلیل پیشنهادی و تحلیل عددی صورت گرفته با نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس، برای ورق همگن تحت بارگذاری درون صفحه‌ای در مرزهای خارجی، با حلّ تحلیلی موجود در مراجع مقایسه شد. دقت بالای حلّ پیشنهادی و تحلیل عددی نشان دهنده‌ی درستی روند حل برای ورق همگن می‌باشد. با کوچک شدن نسبت ابعادی ورق، حلّ پیشنهادی دچار اندکی خطا شد. علت این خطا نزدیک شدن ابعاد ورق به ورق کوتاه است.

### ۵-۱-۲ ورق ناهمگن تحت بارگذاری درون صفحه‌ای

حلّ تحلیلی پیشنهادی طوری به دست آمد، که هم برای ورق همگن و هم ناهمگن قابل استفاده می‌باشد. نتایج حاصل از حلّ تحلیلی پیشنهادی و تحلیل عددی انجام شده با نرم‌افزار آباکوس، انحراف بسیار کمی از یکدیگر داشتند؛ که نشان دهنده‌ی درستی روند حلّ پیشنهادی برای ورق ناهمگن است. جنس ورق ناهمگن نوع اول در مقایسه با ورق همگن باعث کاهش مقدار تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی در نقاط اطراف گشودگی شد. برای ورق بلند با نسبت ابعادی ۲۰ این کاهش مستقل از نوع و مقدار بارگذاری دومی، در حدود ۲۶ درصد می‌باشد. در ورق ناهمگن نوع دوم، به علت سفتی کم لایه‌های میانی نسبت به ورق همگن، مقدار تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی افزایش یافت. این درصد افزایش همانند ورق ناهمگن نوع اول، مستقل از نوع و مقدار بارگذاری در مرزها، در حدود ۳۴ درصد است. به علت آنکه جابه‌جایی شعاعی در این نوع بارگذاری تنها وابسته به تنش محیطی می‌باشد؛ درصد افزایش و کاهش این دو کمیت به هم نزدیک می‌باشند. با کوتاه شدن نسبت ابعادی ورق، از درصد افزایش و کاهش تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی به ترتیب برای ورق ناهمگن نوع دوم و اول، کاسته می‌شود. همچنین، همانند ورق همگن با کاهش نسبت ابعادی ورق، درصد خطای حلّ پیشنهادی افزایش می‌یابد.

## ۵-۱-۳ ورق تحت بارگذاری درون صفحه‌ای و بارگذاری فشار یکنواخت درون گشودگی

با وجود بار فشاری یکنواخت درون گشودگی، تنش شعاعی مقدار قابل توجهی در نقاط اطراف گشودگی پیدا می‌کند. به همین دلیل، پیشنهاد می‌شود، که برای مطالعه‌ی تنش در نقاط اطراف گشودگی از تنش معادل فن میزس به جای تنش محیطی استفاده شود. با مقایسه‌ی تنش محیطی و تنش معادل فن میزس دریافته شد، که تنش شعاعی کاملاً مستقل از جنس ماده و بارگذاری در مرزهای خارجی ورق است؛ درحالی‌که تنش محیطی در برابر بار فشاری یکنواخت در داخل گشودگی به جنس ماده ورق وابسته می‌باشد. در ورق ناهمگن نوع اول، مقدار افزایش تنش محیطی بر اثر بارگذاری فشار یکنواخت داخل گشودگی حدود  $0/9-0/92$  و برای ورق ناهمگن نوع دوم این مقدار برابر  $1/09-1/13$  مقدار فشار وارد شده می‌باشد. همان‌طور که از مقادیر افزایش تنش محیطی مشخص می‌شود؛ تأثیر جنس ورق بر شدت مقدار افزایش تنش محیطی کم می‌باشد. به دلیل آنکه، فشار یکنواخت به صورت مستقیم به مرز داخلی گشودگی وارد می‌شود، لایه‌های داخلی ورق تأثیر چندانی بر مقدار تنش محیطی ندارند.

## ۵-۲ پیشنهادها

با توجه به روند حل برای ادامه‌ی این تحقیق پیشنهادهایی در زیر مطرح می‌گردد.

۱. بررسی تنش و جابه‌جایی ورق نازک و بلند ناهمگن با گشودگی دایروی، تحت بارگذاری درون صفحه‌ای و فشار در داخل گشودگی، با توابع ناهمگنی دیگر و مقایسه‌ی آن با نتایج این تحقیق و در نهایت پیشنهاد یک تابع ناهمگنی بهینه برای این مسأله.
۲. بررسی تنش و جابه‌جایی ورق نازک و بلند ناهمگن با گشودگی چندضلعی، تحت بارگذاری درون صفحه‌ای. همچنین بررسی تأثیر چرخش گشودگی بر مقادیر تنش و مکان بیشینه تنش.

۳. بررسی تنش و جابه‌جایی ورق نازک و بلند ناهمگن با گشودگی دایروی، تحت بارگذاری حرارتی و بار درون‌صفحه‌ای و فشار داخل گشودگی. بررسی تنش در اثر شار حرارتی در داخل گشودگی و یا مرزهای خارجی می‌تواند، پاسخی به بسیاری از کاربردهای ورق‌های ناهمگنی باشد.
۴. بررسی تنش و جابه‌جایی ورق نازک و بلند ناهمگن با گشودگی چندضلعی، تحت بارگذاری حرارتی و بار درون‌صفحه‌ای و فشار داخل گشودگی. تعیین بهینه‌ی شکل گشودگی ورق برای کاهش تنش در نقاط اطراف گشودگی بر اثر بارگذاری‌های ترکیبی مکانیکی و حرارتی.
۵. بررسی ورق ناهمگن تحت بار خمشی در مرزهای خارجی و داخلی و ترکیب آن با بارگذاری درون‌صفحه‌ای. همچنین به‌دست آوردن یک شعاع همگرایی مناسب برای این نوع بارگذاری.

## مراجع

- [1]. Ugral A.C. (1981), "**Stresses in Plates and Shells**", McGraw-Hill Book Company, New York.
- [۲]. ساد ام. اچ، (۱۳۸۹)، "الاتیسیته: نظری، کاربردی و محاسباتی"، علی اصغر عطائی، ویراست دوم، انتشارات علمی و فنی، تهران.
- [3]. Szilard R., (2003), "**Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Method**", John Wiley & Sons, New Jersey.
- [۴]. پرهیزکار یعقوبی م، (۱۳۹۲)، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، "تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدارضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با توزیع توانی خواص"، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [5]. Muskhelishvili N. I., (1962), "**Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity**", 2<sup>nd</sup> English ed., P. Noordhoff Ltd., the Netherlands.
- [6]. Savin G. N., (1961), "**Stress Concentration around Holes**", Pergamon Press, New York.
- [7]. Eshelby J.D., Read W.T., Shockley W., (1953), "Anisotropic Elasticity With Applications to Dislocation Theory", **Acta Metallurgica**, 1, pp. 251–259.
- [8]. Stroh, A.N., (1958) "Dislocations and Cracks in Anisotropic Elasticity". **Philosophical Magazine**, 7, pp. 625–646.
- [9]. Lekhnitskii S. G., (1986), "**Anisotropic Plates**", 2<sup>nd</sup> ed., Gordon and Breach Science Publishers, New York.
- [10]. Hwu C., (1990), "Anisotropic Plates with Various Openings under Uniform Loading or Pure Bending", **J. Appl. Mech.**, 57, pp. 700-706.
- [11]. Hufenbach W., Schaffer M., Herrmann.,(1990), "Calculation of the Stress and Displacement Field of Anisotropic Plates with Elliptical Hole", **Ingenieur Arch**, 60, 507–517.
- [12]. Daoust J., Hoa S.V., (1991), "An Analytical Solution for Anisotropic Plates Containing Triangular Holes", **Compos. Struct.**, 19, pp. 107–130.
- [13]. Rezaeepazhand J. and Jafari M., (2005), "Stress Analysis of Perforated Composite Plates", **Compos. Struct.**, 71, pp. 463-468.
- [14]. Rezaeepazhand J. and Jafari M., (2010), "Stress Analysis of Composite Plates with Quasi-Square Cutout Subjected to Uniaxial Tension", **J. of Reinforced Plastics and Compos.**, 29, pp. 2015-2026.
- [15]. Rangavittal H. K., Naidu A. C. B., Dattagurub B., Ramamurthy T. S., (1995), "Analytical Solutions for Load Transfer Through Smooth Elastic Pin in an Infinite Orthotropic Plate", **Compos. Struct.**, 30, pp. 329-339.
- [16]. Madenci E. and Ileri L., (1995), "Analysis of Pin-Loaded Holes in Composite Laminates Under Combined Bearing- Bypass and Shear", **Int. J. Solids Struct.**, 32, pp. 2053-2062.
- [17]. Okutan B. B., (2006), "Behavior of Pin-loaded Laminated Composites", **Experimental Mech.**, 46, pp. 589–600.

- [18]. Pen Z., Yuansheng C. and Liu J., (2013), "Stress Analysis of a Finite Plate with a Rectangular Hole Subjected to Uniaxial Tension Using Modified Stress Functions", **Int. J. Mech. Sciences**, 75, pp. 265–277.
- [19]. Zhang X. Z., Kitipornchai S., Liew KM., (2003), "Thermal Stresses around a Circular Hole in a Functionally Graded Plate" **J. Therm Stresses**, 26, pp. 379-390.
- [20]. Yang Q., Gao C. F., (2013)," Dynamic Stress Analysis of a Functionally Graded Material Plate with a Circular Hole", **Meccanica**, 48, pp. 91–101.
- [21]. Reddy J. N., (2000), "Analysis of Functionally Graded Plates", **Int. J. Numer. Enging**, pp. 663-684.
- [22]. Yang J., Shen H. S., (2003), "Non-linear Analysis of Functionally Graded Plates Under Transverse and in-Plane Loads", **Int. J. Non-linear Mech**, pp. 467-82.
- [۲۳]. قتاد م، قارونی ح، (۱۳۹۰)، "کمانش ورق مستطیلی FGM با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه"، نوزدهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک، بیرجند.
- [24]. Kubair D.V., Bhanu–Chandar B., (2008), "Stress Concentration Factor Due to a Circular Hole in Functionally Graded Panels Under Uniaxial Tension" **Int. J. of Mech. Sciences**, 50, pp. 732–742.
- [25]. Cao Z. Y., Tang S. G. and Cheng G. H., ( 2009), "3D Analysis of Functionally Graded Material Plates with Complex Shapes and Various Holes" **Appl. Mathematics and Mech. (English Edition)**", 30, 1, pp. 13-18.
- [26]. Hosseini S., Bayesteh H. and Mohammadi S., (2013), "Thermo-Mechanical XFEM Crack Propagation Analysis of Functionally Graded Materials", **Materials Science & Enging. A**, 561, pp. 285–302.
- [27]. Mohammadi M., Dryden J.R., Jiang L.Y., (2011), "Stress Concentration around a Hole in a Radially Inhomogeneous Plate", **Int. J. Solids Struct.**, 48, pp. 483-491.
- [28]. Chareonsuk J., Passakorn V., (2011), "Numerical Solutions for Functionally Graded Solids under Thermal and Mechanical Loads Using a High-Order Control Volume Finite Element Method", **Appl. Thermal Enging.**, 31, pp. 213-227.
- [29]. Yang Q., Gao C. F., Chen W. T., (2012), "Stress Concentration in a Finite Functionally Graded Material Plate", **Science China Physics, Mechanics and Astronomy**, 7, 55, pp. 1263–1271.
- [30]. Yang Q., Gao C. F., Chen W., (2010), "Stress Analysis of a Functionally Graded Material Plate with a Circular Hole", *Archive of Applied Mechanics*, 80, 895–907.
- [31]. Ashrafi H., Asemi K., Shariyat M., (2013), "A three-Dimensional Boundary Element Stress and Bending Analysis of Transversely/Longitudinally Graded Plates with Circular Cutouts Under Biaxial Loading", **European J. of Mechanics/A Solids**.
- [32]. Delale F. and Erdogan F., (1993), "The Crack problem for a Nonhomogeneous Plane", **J. Appl. Mech.**, 50, pp.609-614.
- [33]. Noda N. and Jin Z., (1993), "Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in a Strip of a Functionally Gradient Material", **Int. J. Solids Struct.**, 30, pp. 1039-1056.
- [34]. Pei G. and Asaro R. J., ( 1997), " Cracks in Functionally Graded Materials", **Int. J. Solids Struct.**, 1, 34 , pp. 1-17.

- [35]. Zhong Z. , Cheng Z. Q., (2008), “Fracture Analysis of a Functionally Graded Strip With Arbitrary Distributed Material Properties”. **Int J Solids Struct**, 45, pp. 3711–3725.
- [36]. Ayhan A. O., (2009), "Three-Dimensional Mixed-Mode Stress Intensity Factors for Cracks in Functionally Graded Materials Using Enriched Finite Elements", **Int. J. Solids Struct**, 46, pp. 796–810.
- [37]. Cardenas-Garcia J.F., Shabana Y. M. and Medina R. A., "Thermal Loading and Material Property Characterization of a Functionally Graded Plate With a Hole Using an Inverse Problem Methodology", **J. Therm Stresses**, 29, pp. 1-20.
- [38]. Kubair, D.V., (2014), "Stress Concentration Factor in Functionally Graded Plates With Circular Holes Subjected to Anti-plane Shear Loading", **Journal of Elasticity**, pp. 179-196.
- [39]. Pilkey W.D., (1977), "**Peterson's Stress Concentration Factors**", 2<sup>nd</sup> ed, A Wiley-Interscience Publication, New York.
- [40]. Reddy J. N., (1993), "**an Introduction yo The Finite Element Method**", 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, New York.
- [41]. Material characteristics of Alumina, Zirconia, Sic and more, Accessed 24 June 2014; <http://www.asuzac.jp/en/ceramics/material/material1.htm>.







## **Abstract**

The continuous changes of the mechanical and thermal properties of functionally graded materials lead to elimination of the residual stress and effect of the stress concentration, which make increase the strength of this material. For the correct design of perforated inhomogeneous plate is needed to know the accurate information about the deformation and stress distribution in different points of the plate especially around the hole. In this paper, is tried to present the analytical solution to calculate the stress distribution around the circular hole in finite FG plate, by using the complex potential functions method. The plate subjected to constant uniaxial or biaxial stress; In addition, the boundary of hole is subjected to uniform pressure loading. One of the most important goal of this research is to study the effect of compression stress applied to the hole boundary on stress distribution around the hole. The variation of Material properties, especially Young's modulus, is in a radial direction and concentric to the hole. The special exponential function, with specific convergence radius, is used to describe the variation of mechanical properties. The finite element method has been used to check the accuracy of analytical results for homogeneous and inhomogeneous plates, also for all loading cases. In the presence of applied load at the boundary of circular hole, amount of radial stress in addition to hoop stress is considerable. Therefore the Von Mises stress is used to study the stress around the hole.

**Keywords** FG Plate, Inhomogeneous Materials, Circular Hole, Potential Functions, Stress Concentration.





**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mechanical Engineering**

Stress analysis of functionally graded plates with circular  
hole subjected to inplane loads

**Amin Ameri**

**Supervisors:**

**Dr. Mehdi Ghannad**

**Dr. Mohammad Jafari**

Septambr 2014

