

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک
گروه طراحی کاربردی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

آنالیز تماس دینامیکی برای یک تیر غیرخطی اویلر-برنولی تحت کشش، با یک سیستم
جرم و فنر متحرک

دانشجو:

محمد هروی

استاد راهنما:

اردشیر کرمی محمدی

شهریور ۹۳



مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای محمد هروی رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان آنالیز تماس دینامیکی یک تیر غیر خطی اویلر-برنولی تحت کشش، با یک سیستم جرم و فنر متحرک که در تاریخ ۱۳۹۳/۰۶/۲۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (یا درجه): ممتاز (۱۸,۲۸) امتیاز (۱۸,۲۸) دفاع مجدد مردود

- ۱- عالی (۴۰-۱۹)
 ۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹-۱۸)
 ۳- خوب (۱۶-۱۷/۹۹)
 ۴- قابل قبول (۱۴-۱۵/۹۹)
 ۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	اردشیر کرمی محمدی	استادیار	
۲- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	رضا طاهریان	استادیار	
۳- استاد ممتحن	مهدی یامداد	استادیار	
۴- استاد ممتحن	حبیب احمدی	استادیار	

رئیس دانشکده: محمد محسن شاه مردان
امضاء

تقدیم به:

پیش‌گاه مقدّس امام زمان (عج) و مقام والای شهدای

هشت سال دفاع مقدس که امنیت جامعه در گرو خون

آنهاست.

شهید مهدی هروی پدر عزیزم، مادر گرانقدر و همسر

فداکارم

تشکر و قدر دانی:

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر

اردشیر کرمی محمدی به خاطر راهنمایی های

بی دریغشان.

همسر عزیزم که همواره در این راه یاریم

کرده است.

تعهد نامه

اینجانب **محمد هروی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه

صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **آنالیز تماس دینامیکی برای یک تیر غیرخطی اویلر- برنولی تحت کشش**، با یک

سیستم جرم و فنر متحرک تحت راهنمایی دکتر **اردشیر کرمی محمدی** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (بافتهای آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

در این پایان‌نامه، مسأله ارتعاشات تیر در حال کشش و تماس دینامیکی با سیستم جرم و فنر متحرک مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از تئوری اویلر برنولی، کرنش‌های فن کارمن و اصل همپلتون معادلات حرکت برای حالت خطی و غیرخطی به دست می‌آیند. معادلات حاکم بر مسأله تماس دینامیکی، دو دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشند، که برای زمان تماس، ضرایب معادلات متغیر ولی در زمان جدایش، ضرایب معادله‌ها ثابت هستند. با استفاده از روش گالرکین معادلات با مشتقات معمولی تابع زمان به دست آمده و با در نظر گرفتن جمله اول از روش رانجه کوتاه مرتبه ۴ حل می‌گردد. مقدار نیروی تماسی و خیز برای شرایط مرزی تیر در حال کشش در حالت‌های تکیه‌گاه دو سر ساده، دو سر گیردار و یک‌سر گیردار یک‌سر ساده محاسبه شده است. تأثیر متغیرهای کشش، سرعت و نسبت ضریب فنریت به جرم متحرک، در حالت بی‌بعد بر نیروی تماسی و خیز برای حالت یک‌سر گیردار یک‌سر ساده مورد بررسی قرار می‌گیرد. مفهوم پرش بین تیر و سیستم جرم و فنر بررسی شده و نتیجه مسأله در حالت خطی و غیرخطی مقایسه شده است و دقت روش در حالت خطی با نتایج اجزا محدود بررسی می‌گردد.

کلمات کلیدی:

ارتعاشات تیر، جرم و فنر متحرک، تماس دینامیکی، روش گالرکین، دستگاه معادلات با ضرایب متغیر

فهرست مقاله‌های مستخرج شده از پایان‌نامه

تحلیل ارتعاشات و جدایش در سیستم تیر در حال کشش و جرم و فنر متحرک (فرستاده

شده)

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول : تاریخچه و مرور مقالات	۱
۱-۱- مقدمه	۲
۲-۱- اجزای سازه	۳
۳-۱- غیر خطی	۴
۴-۱- تاریخچه	۶
۵-۱- کاربرد مسأله تماس دینامیکی	۶
۱-۵-۱- پانتوگراف	۷
۱-۵-۱-۱- اجزای پانتوگراف	۸
۱-۵-۱-۲- جاروبک	۸
۱-۵-۱-۳- فنر پانتوگراف	۹
۱-۵-۱-۴- ویژگی های پانتوگراف	۱۰
۶-۱- مروری بر مقاله های بررسی شده	۱۰
۷-۱- جمع بندی	۱۲
فصل دوم: استخراج معادلات حرکت	۱۳
۱-۲- مقدمه	۱۴
۲-۲- تعریف مسأله	۱۴
۳-۲- محاسبه انرژی پتانسیل	۱۶
۴-۲- محاسبه انرژی جنبشی	۱۶
۵-۲- کار نیروهای خارجی	۱۷
۶-۲- تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون	۱۷
۷-۲- قید تماس دینامیکی	۱۸
۸-۲- جمع بندی	۲۰
فصل سوم: معادلات خطی و حل	۲۱
۱-۳- مقدمه	۲۲
۲-۳- معادلات حرکت خطی	۲۲
۳-۳- بی بعد سازی	۲۴
۴-۳- روش گالرکین	۲۶
۵-۳- شرایط اولیه	۲۸
۶-۳- تابع گالرکین	۲۹
۷-۳- محاسبه ضرایب	۲۹
۸-۳- حل معادلات معمولی	۳۰
۱-۸-۳- کاهش مرتبه معادلات	۳۲
۲-۸-۳- حل دستگاه معادله	۳۳
۹-۳- جمع بندی	۳۴

۳۷	فصل چهارم: معادلات غیرخطی و حل آن‌ها
۳۸	۱-۴-مقدمه
۳۸	۲-۴-معادلات حرکت غیرخطی
۳۹	۳-۴-معادلات بی‌بعد غیرخطی
۴۰	۴-۴-روش گالرکین
۴۲	۵-۴-حل معادلات معمولی
۴۳	۱-۵-۴-کاهش مرتبه معادلات
۴۳	۲-۵-۴-حل دستگاه معادله
۴۴	۶-۴-جمع‌بندی
۴۵	فصل پنجم: شبیه‌سازی و نتایج
۴۶	۱-۵-مقدمه
۴۶	۲-۵-مسأله عددی
۴۸	۳-۵-نتایج
۴۹	۱-۳-۵-تحلیل خطی
۵۰	۱-۱-۳-۵-اعتبار سنجی
۵۱	۲-۱-۳-۵-شرایط مرزی
۵۳	۳-۱-۳-۵-پرش
۵۴	۴-۱-۳-۵-تأثیر متغیرها بر حل مسأله تماس دینامیکی خطی
۵۵	۱-۴-۱-۳-۵-تغییرات سرعت
۵۷	۲-۴-۱-۳-۵-تغییرات کشش طولی تیر
۵۹	۳-۴-۱-۳-۵-تغییرات ضریب فنریت پانتوگراف
۶۱	۲-۳-۵-تحلیل غیرخطی
۶۲	۱-۲-۳-۵-شرایط مرزی
۶۴	۲-۲-۳-۵-پرش
۶۵	۳-۲-۳-۵-تأثیر متغیرها بر حل مسأله تماس دینامیکی غیرخطی
۶۵	۱-۳-۲-۳-۵-تغییرات سرعت
۶۷	۲-۳-۲-۳-۵-تغییرات کشش طولی تیر
۶۹	۳-۳-۲-۳-۵-تغییرات ضریب فنریت پانتوگراف
۷۰	۳-۳-۵-مقایسه تحلیل خطی با غیرخطی
۷۲	۴-۵-جمع‌بندی
۷۳	فصل ششم: نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۷۴	۱-۶-مقدمه
۷۴	۲-۶-نتیجه‌گیری
۷۵	۳-۶-پیشنهادها
۷۷	منابع

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۱) الف) پانتوگراف در شبکه بالاسری ب) ریل سوم ۷
- شکل (۲-۱) جاروبک زغالی پانتوگراف ۹
- شکل (۳-۱) قوس الکتریکی در میان شبکه بالاسری و پانتوگراف ۹
- شکل (۴-۱) فنر پانتوگراف ۱۰
- شکل (۱-۲) نمای شماتیک مسأله تماس دینامیکی ۱۴
- شکل (۱-۵) تماس با شبکه بالاسری در خط قطارهای پر سرعت چین همراه با (جنس، سطح مقطع، طول و مقدار حداکثر سرعت) ۴۶
- شکل (۲-۵) مقدار خیز بی‌بعد تیر خطی در حالت یک‌سر گیردار یک‌سر ساده (c-p) و سیستم جرم و فنر بر حسب مکان بی‌بعد ۴۹
- شکل (۳-۵) مقدار پرش بی‌بعد تیر خطی در حالت یک‌سر گیردار یک‌سر ساده (c-p) از سیستم جرم و فنر بر حسب زمان بی‌بعد ۴۹
- شکل (۴-۵) مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بین تیر خطی و سیستم جرم و فنر بر حسب مکان بی‌بعد ۵۰
- شکل (۵-۵) مقایسه خیز تیر با مرجع [۱۹] در حالت یک‌سر درگیر یک‌سر ساده ۵۱
- شکل (۶-۵) مقایسه نیروی تماسی با مرجع [۱۹] در حالت یک‌سر درگیر یک‌سر ساده ۵۱
- شکل (۷-۵) مقایسه خیز تیر بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c) ۵۲
- شکل (۸-۵) مقایسه نیروی تماسی بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c) ۵۲
- شکل (۹-۵) مقایسه مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش بر حسب مکان بی‌بعد در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c) ۵۳
- شکل (۱۰-۵) مقایسه خیز تیر بر حسب مکان بی‌بعد با جدایش در طول تیر و در حالت تماس دائم در طول تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p) ۵۴
- شکل (۱۱-۵) مقایسه نیروی تماسی بر حسب مکان بی‌بعد با جدایش در طول تیر و در حالت تماس دائم در طول تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p) ۵۴
- شکل (۱۳-۵) اثر تغییرات سرعت بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p) ۵۶
- شکل (۱۲-۵) اثر تغییرات سرعت بر خیز تیر بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p) ۵۵
- شکل (۱۴-۵) اثر تغییرات سرعت بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p) ۵۶

- شکل (۵-۱۵) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار خیز بی‌بعد تیر بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)..... ۵۷
- شکل (۵-۱۶) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)..... ۵۸
- شکل (۵-۱۷) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر در حالت (c-p)..... ۵۸
- شکل (۵-۱۸) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار خیز بی‌بعد تیر بر حسب مکان بی‌بعد در حالت (c-p)..... ۵۹
- شکل (۵-۱۹) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر در حالت (c-p)..... ۶۰
- شکل (۵-۲۰) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر در حالت (c-p)..... ۶۰
- شکل (۵-۲۱) مقدار خیز بی‌بعد تیر غیرخطی در حالت یک‌سر گیردار یک‌سر ساده (c-p) و سیستم جرم و فنر بر حسب مکان بی‌بعد ۶۱
- شکل (۵-۲۲) مقدار پرش بی‌بعد تیر غیرخطی در حالت یک‌سر گیردار یک‌سر ساده (c-p) از سیستم جرم و فنر بر حسب زمان بی‌بعد..... ۶۱
- شکل (۵-۲۳) مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بین تیر غیرخطی و سیستم جرم و فنر بر حسب مکان بی‌بعد در حالت یک-سر گیردار یکسر ساده (c-p)..... ۶۲
- شکل (۵-۲۴) مقایسه خیز تیر بر حسب مکان بی‌بعد در در حالت تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c)..... ۶۳
- شکل (۵-۲۵) مقایسه نیروی تماسی بر حسب مکان بی‌بعد در حالت تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c)..... ۶۳
- شکل (۵-۲۶) مقایسه مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش بر حسب مکان بی‌بعد در حالت تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c)..... ۶۴
- شکل (۵-۲۷) مقایسه خیز تیر بر حسب مکان بی‌بعد با جدایش در طول تیر و در حالت تماس دائم در طول تیر غیرخطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)..... ۶۴
- شکل (۵-۲۸) مقایسه نیروی تماسی بر حسب مکان بی‌بعد با جدایش در طول تیر و در حالت تماس دائم در طول تیر غیرخطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)..... ۶۵
- شکل (۵-۲۹) اثر تغییرات سرعت بر مقدار خیز بی‌بعد تیر غیرخطی بر حسب مکان بی‌بعد در حالت یک‌سر درگیر یک-سر ساده (c-p)..... ۶۶
- شکل (۵-۳۰) اثر تغییرات سرعت بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر غیرخطی در حالت (c-p)..... ۶۶
- شکل (۵-۳۱) اثر تغییرات سرعت بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر غیرخطی در حالت یک‌سر درگیر یک‌سر ساده (c-p)..... ۶۷

- شکل (۳۲-۵) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار خیز بی‌بعد تیر بر حسب مکان بی‌بعد در حالت یک‌سر در گیر یک‌سر ساده (c-p)..... ۶۷
- شکل (۳۳-۵) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر غیر خطی در حالت یک‌سر در گیر یک‌سر ساده (c-p)..... ۶۸
- شکل (۳۴-۵) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر غیر خطی در حالت یک‌سر در گیر یک‌سر ساده (c-p)..... ۶۸
- شکل (۳۵-۵) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار خیز بی‌بعد تیر غیر خطی بر حسب مکان بی‌بعد در حالت تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)..... ۶۹
- شکل (۳۶-۵) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر غیر خطی در حالت تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)..... ۶۹
- شکل (۳۷-۵) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر غیر خطی در حالت تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)..... ۷۰
- شکل (۳۸-۵) مقایسه خیز تیر خطی و غیر خطی بر حسب مکان بی‌بعد با شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار-ساده ۷۱
- شکل (۳۹-۵) مقایسه نیروی تماسی خطی و غیر خطی بر حسب مکان بی‌بعد با شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)..... ۷۱
- شکل (۴۰-۵) مقایسه مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش خطی و غیر خطی بر حسب مکان بی‌بعد با شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)..... ۷۱

فهرست جدول‌ها

جدول (۱-۵) اطلاعات شبکه بالاسری و سیستم جرم و فنر محرک.....	۴۷
جدول (۲-۵) مقادیر تقریبی ضرایب بی‌بعد.....	۴۷
جدول (۳-۵) داده‌های مرجع [۱۹].....	۵۰
جدول (۴-۵) تغییرات سرعت.....	۵۵
جدول (۵-۵) تغییرات کشش طولی تیر.....	۵۷
جدول (۶-۵) تغییرات ضریب فنریت پانتوگراف.....	۵۹

فهرست علائم

h	گام مکانی	A	مساحت سطح مقطع
a	نقطه ابتدایی انتگرال	v^*	سرعت جرم و فنر بی بعد
b	نقطه انتهایی انتگرال	K	انرژی جنبشی
y_1, y_2	کاهش مرتبه معادلات معمولی	U	انرژی کرنشی
k_1, k_2, k_3, k_4	ضرایب رانجه کوتا مرتبه ۴	T, L	کشش طولی و طول تیر
W_{nc}	کار نیروی حاصل از جرم تیر و نیروی تماسی	u, w	مؤلفه‌های جابه‌جایی
	علائم یونانی	x, y, z	مختصه‌های کارترین
β	کشش طولی بی بعد	E	مدول الاستیسیته
$\varphi_i(x^*)$	پارامتر جداساز مکانی	U^*	چگالی انرژی کرنشی
ρ	چگالی	m	جرم محرک
α	نسبت سطح مقطع به طول تیر	k	ثابت فنر
ω	نسبت ضریب فنریت بی بعد به جرم محرک بی بعد	Z	فاصله تا خط مرکزی تیر
Φ	نسبت جرم محرک به جرم تیر	F_c, f_c	نیروی تماسی
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	کرنش نرمال	v	سرعت جرم و فنر
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	کرنش برشی	g	گرانش زمین
ξ	جابه‌جایی جرم و فنر	t	مختصه زمان
σ_x	تنش نرمال	$G(x, t)$	فاصله نسبی تیر از سیستم جرم و فنر (قید تماس دینامیکی)
$\delta()$	دلتای دیراک	$[M], [M']$	ماتریس جرم
γ	پارامتر بی بعد وزن تیر	$[K], [K']$	ماتریس سفتی
		$[S], [S']$	ماتریس غیرخطی
		$[C], [C']$	ماتریس شتاب
		$[P], [P']$	ماتریس وزن تیر
		F_c^*	نیروی تماسی بی بعد
		X^*, t^*	مختصه مکان و زمان بی بعد
		$q_i(t^*)$	پارامتر جداساز زمانی

پیشگفتار

در فصل اول، ابتدا به معرفی انواع پیوستارها پرداخته و سپس در مورد تیرها و سازه‌های غیرخطی توضیح داده می‌شود؛ در مورد کاربرد اصلی مسأله تماس دینامیکی در این پایان‌نامه که قطارهای با سرعت‌های بالا می‌باشد؛ توضیح مختصری بیان می‌گردد. در نهایت به مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه پرداخته می‌شود. در فصل دوم، بر اساس کرنش‌های فن کارمن^۱ و تئوری تیر اویلر برنولی^۲ معادلات حاکم بر ارتعاشات تیر برای زمان تماس و جدایش بر حسب منته‌های تنش با استفاده از اصل همیلتون^۳ استخراج و قید تماس دینامیکی به‌دست آورده می‌شود. نیروی تماسی نیز با استفاده از خیز و شتاب سیستم جرم و فنر بیان می‌گردد. این معادلات با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان بوده که تعیین می‌شوند. در فصل سوم و چهارم به ترتیب معادلات خطی و غیرخطی حاکم بر مسأله به‌دست آمده و برای حل این معادلات، از روش گالرکین^۴ استفاده می‌شود. برای این منظور ابتدا معادلات بی‌بعد شده و با استفاده از پارامتر جداساز معادلات دیفرانسیل به حوزه زمان برده شده و این معادلات معمولی بعد از در نظر گرفتن جمله اول روش گالرکین و با به‌دست آوردن تابع گالرکین که همان شکل مد خطی است و تعیین ضرایب، با استفاده از روش (رانجه کوتاه مرتبه ۴)^۵ حل عددی می‌شود. در فصل پنجم، ابتدا الگوریتم حل مسأله بیان شده و به بیان نتیجه‌های مسأله پرداخته می‌شود. اثر پارامترها و شرایط مرزی مختلف همچنین خطی و غیرخطی بودن مسأله بر روند حل، بیان خواهد شد. نتیجه‌ها و پیشنهادها نیز در فصل ششم بیان می‌گردد.

^۱ Von karman strain

^۲ Euler-Bernoulli beam theory

^۳ Hamilton principle

^۴ Galerkin method

^۵ Runge Kutta order 4

فصل اول

تاریخچه و مرور مقالات

۱-۱- مقدمه

تیر یکی از عناصر بنیادی در سازه‌های مهندسی است و در بیشتر سازه‌ها مانند پره‌های بالگرد، آنتن‌های فضاپیما، بال‌های هواپیما، لوله تفنگ، ساختمان‌های بلند، پل‌های عریض و اجزای سازنده قطارهای برقی مانند شبکه بالاسری پانتوگراف^۱ و سازه‌های پیچیده دیگر کاربرد دارد. مطالعه پاسخ دینامیکی و استاتیکی تیرها، تحت بارگذاری‌های مختلف می‌تواند به درک بهتر رفتار سازه‌های واقعی تحت شرایط بارگذاری مشابه کمک کند.

بررسی مدل‌های خطی به‌تنهایی برای درک رفتار سیستم کافی نیست و این مدل‌ها ممکن است نادرست، ناکافی و یا گمراه کننده باشند. زمانی که دامنه نوسان‌ها بزرگ باشد و فرکانس‌های طبیعی افزایش یافته و وابسته به دامنه‌هایشان باشند؛ پاسخ‌های خطی نادرست هستند و مدل‌های خطی می‌تواند گمراه کننده باشند؛ زیرا ممکن است یک حل خطی پیش‌بینی شود که سیستم پایدار است، در حالی که سیستم ناپایدار می‌باشد.

از طرفی پدیده‌های فیزیکی جالبی در سازه‌های غیرخطی اتفاق می‌افتد که به‌وسیله مدل‌های خطی نمی‌توان آن‌ها را توضیح داد. این پدیده‌ها شامل پرش^۲، اشباع^۳، تشدیدهای ساب هارمونیک^۴ و سوپر هارمونیک^۵، ترکیبی^۶، نوسان‌های خود تحریک^۷ و آشوب^۸ هستند. در سیستم‌های پیوسته جمله‌های غیرخطی باعث کوپل شدن مدهای نرمال خطی می‌گردد و این پدیده منجر به انتقال انرژی بین مدها می‌شود. آزمایش‌ها نشان می‌دهند که گاهی انرژی از یک مد با فرکانس بالا به مد با فرکانس پایین منتقل می‌شود که این پدیده می‌تواند به شدت خطرناک باشد زیرا دامنه‌ی پاسخ مدهای فرکانس پایین در مقایسه با دامنه‌ی مدهای فرکانس بالا بسیار بزرگ‌تر است. در واقعیت هیچ سیستم فیزیکی خطی وجود ندارد، همچنین مدل‌های خطی دستگاه‌های فیزیکی دارای محدودیت‌هایی

¹ Pantograph

² Jump

³ Saturation

⁴ Sub harmonic

⁵ Super harmonic

⁶ Combination

⁷ Self-excited oscillations

⁸ Chaos

هستند. به‌طور کلی مدل‌های خطی برای محدوده‌های بسیار کوچک کاربرد دارند؛ زمانی که دامنه‌ی ارتعاشات بسیار کوچک است، برای شناخت و درک دقیق‌تر رفتار دینامیکی سازه تحت شرایط بارگذاری عمومی ضروری است که پارامترهای غیرخطی در مدل‌سازی سیستم در نظر گرفته و بررسی شوند [۱].

در این فصل، در ابتدا توضیح مختصری درباره‌ی عناصر ساختاری و تیرها داده شده است. در قسمت بعد به معرفی سیستم‌های غیرخطی پرداخته و در نهایت به‌مرور مقاله‌های مرتبط با حوزه‌ی پایان‌نامه پرداخته می‌شود.

۱-۲- اجزای سازه

از لحاظ هندسه و شرایط بارگذاری، سازه‌ها را می‌توان به شش گروه تقسیم‌بندی نمود: کابل‌ها، میله‌ها، تیرها، غشاها، ورق‌ها و پوسته‌ها؛ کابل‌ها سازه‌های یک‌بعدی هستند که تنها بار کششی را تحمل می‌کنند. رشته نوعی کابل است که در ابتدا مستقیم بوده و دارای پیش‌کشش می‌باشد. میله‌ها سازه‌های یک‌بعدی هستند که می‌توانند بارهای محوری و پیچشی را تحمل کنند. میله‌ها و ستون‌ها نوعی سازه‌ی دونیروی هستند و خرپا مجموعه‌ای از میله‌ها است. تیرها سازه‌هایی هستند که یکی از ابعاد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از دو بعد دیگر است و در معرض بارهای عرضی قرار دارند که منجر به خمش آن‌ها می‌شود. در حالت کلی تیر قادر به تحمل نیروهای کششی، فشاری، خمشی، برش عرضی و پیچشی است؛ به عبارت دیگر کابل‌ها، رشته‌ها، میله‌ها و ستون‌ها نوع خاصی از تیرها هستند. ورق‌ها سازه‌هایی مستقل هستند که دو بعد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از بعد سوم است و قادرند نیروهای کششی، فشاری، برش صفحه‌ای، خمشی، پیچشی و بارهای برشی عرضی را تحمل کنند. غشا سازه‌ای دو بعدی است که تنها می‌تواند نیروی کشش و برش صفحه‌ای را تحمل کند. پوسته‌ها سازه‌هایی خمیده هستند که دو بعد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از بعد سوم است و قادرند نیروهای خارج صفحه^۱ را با

^۱ Out-of-plane

ایجاد نیروهای صفحه‌ای تحمل کنند. پوسته‌ها عمومی‌ترین سازه‌های مهندسی هستند که ورق‌ها و غشاها نوع خاصی از آنها می‌باشند [۲].

۱-۳- غیرخطی^۱

از نظر ریاضی سیستمی غیرخطی است که ضرب متغیرهای وابسته و مشتقات آنها در معادلات حرکت، شرایط مرزی و یا روابط سازگاری داشته باشد. علاوه بر این، وجود هرگونه پرش و یا ناپیوستگی در سیستم می‌تواند سبب غیرخطی شدن معادلات گردد. در طبیعت دستگاه‌های غیرخطی فراوان وجود دارد. در حقیقت دستگاه‌های غیرخطی نه تنها استثنا نیستند بلکه جزء قانون و قاعده طبیعت می‌باشند. سیستم‌های غیرخطی اصل جمع آثار در مورد آنها صادق نیست. ایوان ایوانوسکی [۳]، نایفه و موک [۴] و مون [۵] انواع غیرخطی‌ها را با جزئیات و به وسیله‌ی مثال‌های مختلف توضیح داده‌اند. منشا رفتار غیرخطی در سیستم می‌تواند جنس ماده، هندسه، اینرسی و میرایی باشد؛ که هر یک در ادامه توضیح داده خواهد شد.

میرایی: میرایی یک پدیده غیرخطی است؛ زیرا نیروی میرا تابع غیرخطی، از جابه‌جایی و سرعت است. میرایی ویسکوز خطی نوعی ایده آل سازی سیستم است که اصطکاک خشک و استهلاک هیستریزیس^۲ نمونه‌هایی از میرایی غیرخطی هستند.

هندسه: در سامانه‌هایی که تحت تغییر شکل‌ها و یا جابه‌جایی‌های بزرگ قرار دارد؛ غیرخطی هندسی وجود دارد. این غیرخطی در انرژی پتانسیل سیستم ظاهر می‌شود. در سازه‌ها تغییر شکل‌های بزرگ معمولاً منجر به رابطه‌های غیرخطی کرنش جابه‌جایی می‌شود؛ به‌عنوان مثال می‌توان به حرکت یک پاندول ساده با در نظر گرفتن زاویه‌های بزرگ و یا یک تیر یک‌سر گیردار با انحنای بزرگ اشاره نمود.

¹Nonlinearity

² Hysteretic damping

اینرسی: غیرخطی اینرسی ناشی از جمله‌های غیرخطی سرعت و شتاب در معادلات حرکت است. انرژی جنبشی سیستم منشأ ایجاد غیرخطی‌های اینرسی است به‌عنوان مثال می‌توان به جمله‌های شتاب کوریولیس و مرکز گرا اشاره نمود. همچنین در معادلات توصیف، حرکت یک پاندول الاستیک و یا در حرکت عرضی یک تیر تحت کشش، غیرخطی‌های اینرسی وجود دارد.

جنس: این نوع غیرخطی زمانی که روابط تنش کرنش غیرخطی باشند، ایجاد می‌شود. لاستیک یک مثال معمولی از این دسته هست.

شرایط مرزی و تحریک خارجی: شامل جمله‌های غیرخطی هست که ممکن است؛ در شرایط مرزی مسأله ظاهر شوند.

جمله‌های غیرخطی ممکن است؛ در استخراج معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی و یا هر دو ظاهر شوند. در سال‌های اخیر گسترش سریع تحقیق‌های فضایی سبب انجام تحقیق‌های گسترده در دینامیک کنترل سازه‌های فضایی منعطف بزرگ مانند: کنترل‌کننده‌های خورشیدی، آنتن‌ها، رادارها، خرپاهای بزرگ، تلسکوپ‌های فضایی و ایستگاه‌های فضایی شده است. برای طراحی روند مناسب برای کنترل ارتعاشات سازه‌ها با دامنه‌های بزرگ نیاز به درک رفتارهای غیرخطی دینامیکی و استاتیکی دستگاه‌ها شامل کوپلینگ مدال (انتقال انرژی میان مدهای سازه) و ناپایداری دینامیکی و استاتیکی است و این‌ها نیازمند مدل‌سازی سیستم‌های غیرخطی است.

مدل‌سازی دستگاه‌ها را می‌توان به سه گروه تقسیم کرد؛ مدل‌سازی خطی و مدل‌سازی غیرخطی؛ در مدل‌سازی خطی رفتارهای دینامیکی و استاتیکی به‌وسیله مدل‌های خطی توصیف می‌شود. که دارای پاسخ‌های دینامیکی و استاتیکی منحصر به‌فرد هستند. یکی از انشعاب‌های استاتیکی به‌وسیله یک مدل غیرخطی توصیف می‌شود. اما رفتار دینامیکی به کمک مدل خطی توصیف می‌گردد. یک مدل استاتیکی غیرخطی مقدار جابه‌جایی و کمانش سازه‌ها را می‌تواند پیش‌بینی کند؛ سپس تحلیل پایداری دینامیکی حول نقطه‌ی تعادل استاتیکی به‌وسیله‌ی مد دینامیکی خطی صورت خواهد گرفت.

۱-۴-تاریخچه

مهم‌ترین تئوری‌های تیر که در الاستیسیته کاربرد دارد عبارت‌اند از: معادلات دقیق الاستیسیته، تئوری تیر اویلر برنولی^۱ و تئوری تیر تیموشنکو^۲. مشکل اساسی در تئوری الاستیسیته این است که تنها برای تعداد کمی از مسائل می‌تواند حل دقیق ارائه دهد؛ از همین رو این تئوری پر کاربرد نیست. در تئوری تیر اویلر برنولی [۶] فرض شده است که صفحه‌های سطح مقطع که پیش از تغییر شکل عمود بر تار خنثی هستند، پس از تغییر شکل نیز همچنان مسطح و عمود بر تار خنثی باقی خواهند ماند و هیچ کرنشی در این صفحه‌ها رخ نخواهد داد؛ به عبارت دیگر از تأثیرات اعوجاج و تغییر شکل برشی و همین‌طور از کرنش‌های عمودی عرضی چشم‌پوشی شده است. این فرض‌ها برای تیرهای بلند و باریک معتبر است؛ بنابراین این تئوری برای مدل کردن تماس دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض عدم وجود برش عرضی بدین معناست که چرخش در سطح مقطع تنها به دلیل خمش ایجاد می‌شود؛ اما برای تیرهای ضخیم، مدهای فرکانس بالا و یا در تیرهای کامپوزیتی برش عرضی قابل چشم‌پوشی نیست.

۱-۵-کاربرد مسأله تماس دینامیکی

در مسأله تماس دینامیکی می‌توان به کاربرد آن در جرثقیل‌های ثقیفی، پل‌های رو گذر، قطارهای با سرعت بالا و... را بیان کرد. مسأله‌ای که در این پایان‌نامه مورد بحث قرار می‌گیرد مربوط به قطارهای برقی با سرعت بالا می‌باشد و اهمیت مقدار نیروی تماسی و جدایش بین پانتوگراف و شبکه بالاسری را نشان می‌دهد.

با توجه به توضیح‌های بیان شده در بخش ۱-۴ می‌توان برای مدل کردن مسأله از تئوری تیر اویلر برنولی برای شبکه بالاسری بهره برد و پانتوگراف را با یک سیستم جرم و فنر مدل نمود. در ادامه به معرفی پانتوگراف و اهمیت بررسی نیروی تماسی و جدایش پرداخته می‌شود.

¹ Euler-Bernoulli beam theory

² Timoshenko beam theory

۱-۵-۱- پانتوگراف

پانتوگراف نامی است که به بازوهای جمع کننده جریان از شبکه بالاسری داده شده است، این اصطلاح با دستگاه‌هایی که شکلی مشابه با دستگاه فتوکپی دارد گرفته شده است. قطارهای برقی، واگن‌های خود کشش مترو، اتوبوس برقی و یا ترامواها همگی دارای پانتوگراف می‌باشند. انرژی الکتریکی به وسیله پانتوگراف از شبکه بالاسری دریافت و به مصرف ترکشن موتورها می‌رسد. کیفیت حرکت پانتوگراف در زیر شبکه بالاسری به ساختمان، نوع پانتوگراف و سیستم شبکه بالاسری بستگی دارد [۷].

پانتوگراف بایستی در هر سرعتی، حتی امکان بدون قوس الکتریکی و قطعی از سیم تماس، انرژی الکتریکی را به وسیله نقلیه کشنده انتقال دهد. اکثر وسایل نقلیه، به طور معمول دارای دو پانتوگراف بوده که پانتوگراف عقبی به کار گرفته شده؛ و پانتوگراف جلویی به عنوان جانشین به خدمت گرفته می‌شود.

برحسب اینکه تغذیه از طریق شبکه بالاسری یا ریل سوم انجام شود؛ ساختمان و محل نصب پانتوگراف متفاوت است. شکل (۱-۱) الف و ب به ترتیب پانتوگراف در شبکه بالاسری و ریل سوم را نشان می‌دهد. قابل توضیح است ریل سوم وسیله‌ای است شبیه جاروبک و یا کفشک که برق مورد نیاز قطار را از کنار ریل تأمین می‌کند.



ب



الف

شکل (۱-۱) الف) پانتوگراف در شبکه بالاسری ب) ریل سوم

معمولاً در دستگاه با ولتاژ کم از ریل سوم استفاده می‌شود و از شبکه بالاسری در دستگاه‌های متناوب و مستقیم با ولتاژ زیاد استفاده می‌شود.

۱-۵-۱-۱- اجزای پانتوگراف

پانتوگراف از چهار قسمت اساسی تشکیل شده است:

- ساختمان اصلی پانتوگراف که در روی سقف قرار دارد.
- سیستم محرکه پانتوگراف که از آلیاژ سبک تهیه می‌شود.
- بلبرینگ و بازوهای متحرک و سیستم تغذیه پانتوگراف
- جاروبک پانتوگراف که از یک یا دو صفحه گرافیتی یا آلیاژهای خاص تشکیل شده است و به وسیله سیم‌های افشان به سیستم تغذیه متصل می‌گردد.

۱-۵-۱-۲- جاروبک

جاروبک از جنس‌های گوناگونی تهیه می‌شود که عبارت‌اند از: مس، طلا، پلاتین، زغال، جاروبک‌های مسی و پلاتینی دارای مقاومت الکتریکی کمتری هستند و فقط در محل تماس با سیستم شبکه بالاسری ایجاد سوختگی می‌کنند ولی جاروبک زغالی یا گرافیتی به علت مقاومت بیشتر نمی‌توانند به راحتی جریان مورد نیاز قطار را از خود عبور بدهند و باعث تولید حرارت شده و سوختگی در سیم تماس به وجود می‌آید. بدین جهت از این جاروبک‌ها در خطوطی که دارای جریان کمتر و در شبکه‌های با جریان متناوب استفاده می‌شود ولی در شبکه‌های با جریان مستقیم که دارای جریان بیشتر از ۱۵۰۰ آمپر هست استفاده از این جاروبک‌ها غیر منطقی می‌باشد.

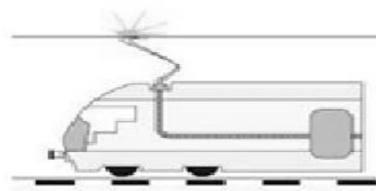
جاروبک زغالی از کربن یا از پودر گرافیت و یا از قیر پیوندی (ضخیم و سفت) تهیه می‌شود، در بعضی موارد پودر کربن نیز به آن اضافه می‌شود. جاروبک زغالی به‌طور معمول از سه پهلو به قاب فلزی بسته می‌شود و تشک جاروبک زغالی با فلزات حامل جریان آب‌کاری می‌شود و برای تشک و آب‌کاری آن به‌طور معمول از آلومینیوم استفاده می‌شود که نرم‌تر از سیم شبکه هست تا در موقع

تماس هادی تماس با این تشک (قاب فلزی) به راحتی ساییده شود و تخریبی در هادی تماس به وجود نیاید. شکل (۲-۱) نمونه‌ای از این جاروبک را نشان می‌دهد.



شکل (۲-۱) جاروبک زغالی پانتوگراف

تماس بین شبکه بالاسری و پانتوگراف باید بدون وقفه برقرار باشد. فاصله هوایی موجب ایجاد یک قوس الکتریکی در میان شبکه بالاسری و پانتوگراف می‌شود. نمونه‌ای از قوس الکتریکی در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. این نقطه جوش‌ها مانع لغزش پانتوگراف روی هادی می‌شود. این امر سطح تماس جاروبک و هادی تماس را کم و بر نوسان‌ها و فاصله‌های هوایی در طول حرکت می‌افزاید. در اثر ایجاد قوس الکتریکی مداوم بین هادی تماس و پانتوگراف گرم شده و هادی تماس در اثر گرم شدن شکل خود را از دست می‌دهد.



شکل (۳-۱) قوس الکتریکی در میان شبکه بالاسری و پانتوگراف

۱-۵-۳-۱-۳-۱ فنر پانتوگراف

از آن‌جا که پانتوگراف باید در سطح یکنواخت از ریل قرار گرفته باشد تا با نیروی ثابت در تماس دائم با شبکه برق بالاسری باشد، استفاده از فنرهای با صلبیت یکنواخت اهمیت پیدا می‌کند. مدول

صلبیت فنر پانتوگراف و صلبیت خمشی آن باید برای تمام بازوها یکسان باشد. شکل (۴-۱) فنر پانتوگراف را نشان می‌دهد.



شکل (۴-۱) فنر پانتوگراف

۴-۱-۵-۱- ویژگی‌های پانتوگراف

با توجه به توضیح‌های بیان شده در قسمت‌های قبل ویژگی‌های یک پانتوگراف به صورت زیر بیان می‌گردد.

- در تماس دائم با شبکه بالاسری باشد تا انرژی الکتریکی مورد نیاز لکوموتیو را به صورت یکنواخت تأمین کند.
- باید کمترین ارتعاش را در حرکت داشته باشد.
- نباید سیم تماس را خراش دهد و همچنین سایش بیش از حد ایجاد کند.
- باید مقاومت آیرودینامیکی پایینی داشته باشد.

۴-۱-۶-۱- مروری بر مقاله‌های بررسی شده

آنالیز دینامیکی تماسی برای تیرهای در حال کشش انعطاف‌پذیر تحت حرکت یک جرم یا بار کاربردهای گوناگونی دارد؛ که می‌توان به طناب اتصال؛ در سرعت‌های بالای راه‌آهن (پانتوگراف)، حرکت جرم روی پل‌های روگذر، جرثقیل‌های سقفی روی تیر مهار کننده را نام برد؛ اما مطالعه‌های زیادی در سطح گسترده موضوع تیر در حال کشش انعطاف‌پذیر تحت حرکت جرم محرک یا بار بوده است؛ که مربوط به سامانه‌های راه‌آهن (مکانیسم پانتوگراف) با سرعت‌های بالا می‌باشد.

جی آر ریکر و همکارانش^۱ [۸،۹] آنالیز دینامیکی تیری که در تماس با جرم متحرک است را بررسی کرده‌اند و معادلات استخراج شده را با استفاده از اجزا محدود حل نموده که ائتلاف تماس و نیروهای تماسی نشان داده نشده است. یو لی^۲ [۱۰] و دی استانکو و همکارانش^۳ [۱۱] جدایی بین تیر و جرم محرک را از هم نشان می‌دهند؛ که در مورد نتیجه‌های آزمایشگاهی که مربوط به نیروهای تماسی بین تیر و جرم محرک است بحث و پاسخ بسته‌ای ارائه کرده‌اند. اچ پی لی^۴ [۱۲] آنالیز نیروهای محوری بر تیر را برای زمانی که جرم محرک شروع به جدا شدن از آن می‌کند، بررسی کرده و جرم محرک را مرتبط به سرعت‌های بالای راه‌آهن و سامانه‌های ریلی می‌داند، ایشان جدایی بین جرم و تیر و اثرگذاری نیروی محوری را بر این مسأله بررسی می‌کند؛ که معادلات گاورنر^۵ برای تیر در حال کشش را به دست آورده است. وای اچ چو و همکارانش^۶ [۱۳] معادلات گاورنر را برای یک پانتوگراف که به دانه‌های زنجیر تشبیه کرده‌اند، بررسی کرده و در حالت خطی و استاتیک معادلات آن‌ها را برای یک خیز بهینه با استفاده از اجزا محدود حل کرده‌اند. کی لی^۷ [۱۴] تماس دینامیکی را بین یک سیستم محرک و کابل در حال کشش را نشان می‌دهد که معادلات خود را با روش اجزا محدود حل کرده است. وای اچ چو^۸ [۱۵] تماس دینامیکی بین پانتوگراف و کابل را مورد بررسی قرار داده است؛ که حل معادلات حاکم با استفاده از روش پنالتی صورت گرفته است، روش پنالتی قیده‌های تماسی را به‌طور دقیق حساب نمی‌کند. کی لی و همکارانش^۹ [۱۶] یک تیر در حال کشش را بدون در نظر گرفتن وزن تیر که تحت حرکت جرم و فنر بوده بررسی کرده و ارتعاشات طولی را ناچیز دانسته‌اند. معادلات به‌دست آورده را با استفاده از اجزا محدود تفکیک کرده و با چند جمله‌ای‌های لاگرانژ حل نموده و نیروی تماسی را محاسبه کرده است. کی لی و جی چانگ^{۱۰} [۱۷] همان تیر قبلی را این بار

¹ J.R. Rieker, Y.H. Lin, M.W. Trethewey

² U. Lee

³ D. Stancioiu, H. Ouyang, J.E. Mottershead

⁴ H.P. Lee

⁵ Gaver Equation

⁶ Y.H. Cho, K. Lee, Y. Park, B. Kang, K. Kim

⁷ K. Lee

⁸ Y. H. Cho

⁹ K. Lee

¹⁰ K. Lee, J. Chung

آویزان شده تحت حرکت یک نوسان‌گر مورد بررسی قرار داده اند. معادلات حرکت را برای زمانی که آویزان باشد به دست آورده و بعد از خطی سازی معادلات و نوشتن شتاب برای نوسان‌گر با استفاده از اجزا محدود محاسبه کرده اند.

۷-۱- جمع‌بندی

در این فصل، در ابتدا به معرفی انواع پیوستارها پرداخته شد، سپس در مورد تیرها و انواع غیر-خطی‌ها توضیح داده شد. در قسمت بعد تاریخچه مختصری در مورد تئوری‌های تیر بیان گردید و در مورد تئوری اویلر برنولی که شبکه بالاسری را با استفاده از آن مدل کرده توضیحاتی بیان شد. در مورد پانتوگراف و اجزا سازنده‌ی آن و کاربرد مسأله تماس برای نیروی تماسی و زمان جدایش نیز توضیحاتی بیان گردید و در نهایت به مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه پرداخته شد. با توجه به مقالات مرور شده بیش‌تر شبکه بالاسری را با استفاده از کابل مدل کرده‌اند و تحت حرکت جرم یا بار محرک قرار داده‌اند. در چند مقاله اخیر این شبکه با استفاده از تیر اویلر برنولی مدل شده اما در حالت خطی، معادلات را با استفاده از اجزا محدود و روش آلفا تایم^۱ حل نموده‌اند؛ اما به دلیل اینکه فرم مستطیلی بودن مقطع کابل انرژی الکتریکی از شبکه بالاسری به موتور محرک قطار با کیفیت بهتری منتقل می‌کند، در این پایان‌نامه، تیر اویلر برنولی در حالت غیرخطی که نسبت به حالت خطی دقیق‌تر بوده، در نظر گرفته شده است. برای سیستم پانتوگراف در کارهای اخیر از جرم محرک استفاده شده که در این پایان‌نامه با سیستم جرم و فنر مدل نموده که دقت مدل را بالاتر می‌برد. روش حل یک روش جدید برای این مدل مسأله‌ها است که در قسمت مکانی دقیقاً منطبق با تمام شرایط مرزی مسأله است؛ اما در روش‌ها اجزا محدود قسمت مکانی با دقت کمتری محاسبه می‌شود. در حل معادلات تابع زمان هم روش رانجه کوتاه مرتبه ۴ دقت بالایی در حل‌های عددی برای حل مسایل دارد.

¹ Alfa time method

فصل دوم

استخراج معادلات حرکت

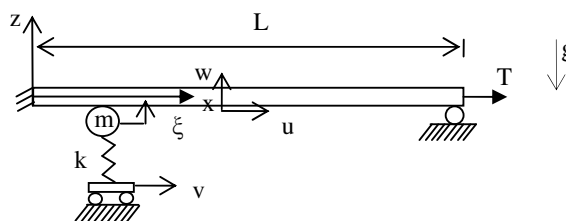
۲-۱-مقدمه

در ارتعاشات غیرخطی تیرها معادلات حرکت و شرایط مرزی را می‌توان به کمک قانون دوم نیوتون و یا اصل همیلتون تعیین نمود. در این فصل معادلات حاکم بر ارتعاشات خطی و غیرخطی تیر تحت حرکت یک سیستم جرم و فنر، به کمک اصل همیلتون استخراج شده است. میدان جابه‌جایی مطابق تئوری اویلر برنولی بوده و برای استخراج معادلات حرکت فرض‌های زیر، در نظر گرفته می‌شود.

- تیر همگن و همسان‌گرد است.
- ثابت فنر خطی است.
- جابه‌جایی‌ها نسبتاً بزرگ و رابطه‌های کرنش-جابه‌جایی غیرخطی هستند.
- ارتعاشات عرضی تیر و ارتعاشات عرضی سیستم جرم و فنر بررسی گردیده است.
- از اتلاف تماس و ضربه در هنگام بازگشت جرم و فنر صرف‌نظر می‌شود.
- سطح مقطع تیر نسبت به طول آن کوچک در نظر گرفته می‌شود.

۲-۲-تعریف مسأله

شکل (۱-۲) تیر در حال کشش تحت سیستم جرم و فنر محرک نشان داده است؛ که طول تیر L ، مساحت جانبی A ، مدول الاستیسیته E ، چگالی ρ ، کشش در تیر T ، سرعت v ، جرم m و ثابت فنر k در نظر گرفته شده است.



شکل (۱-۲) نمای شماتیک مسأله تماس دینامیکی

برای فرمول‌بندی از سیستم مختصات کارتزین، (x, y, z) استفاده شده است. x جهت محوری تیر، y در جهت عمق تیر و z در راستای عرضی بوده که از صفحه میانی اندازه‌گیری می‌شود. برای جابه‌جایی جرم محرک نسبت به زمان t و نیروی تماسی زمانی که جرم با تیر تماس دارد، f_c در نظر گرفته

شده است. بر طبق این تئوری جابه‌جایی‌ها در جهت‌های x, y, z به ترتیب $u_0(x,y,z,t)$ ، $v_0(x,y,z,t)$ و $w_0(x,y,z,t)$ بیان می‌شود، با در نظر گرفتن حرکت به صورت صفحه‌ای، مؤلفه جابه‌جایی در راستای y صفر خواهد بود.

$$\begin{aligned} u_x &= u_0(x, z, t) = u(x, t) - Z \frac{dw(x, t)}{dx} \\ u_y &= v_0(x, z, t) = 0 \\ u_z &= w_0(x, z, t) = w(x, t) \end{aligned} \quad (1-2)$$

در معادلات (۱-۲) پارامتر Z فاصله تا خط مرکزی تیر می‌باشد؛ با تعیین انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروهای خارجی به کمک این میدان جابه‌جایی و با بهره گرفتن از اصل همیلتون رابطه‌های حاکم بر مسأله استخراج می‌شود. بر اساس روابط کرنش-جابه‌جایی فن-کارمن مؤلفه‌های کرنش عبارت‌اند از [۱۸]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 & \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 & \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w_0}{\partial z} & \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (2-2)$$

جمله‌های غیرخطی موجود در رابطه فن-کارمن در نهایت باعث غیرخطی شدن معادله‌ها خواهد شد. به این ترتیب با استفاده از میدان جابه‌جایی (۱-۲) رابطه‌های (۲-۲) مؤلفه‌های میدان کرنش تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 & \gamma_{xy} &= 0 \\ \varepsilon_y &= 0 & \gamma_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= 0 & \gamma_{xz} &= 0 \end{aligned} \quad (3-2)$$

مؤلفه میدان تنش به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (4-2)$$

۲-۳- محاسبه انرژی پتانسیل

چگالی انرژی کرنشی تیر به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$U^* = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \quad (5-2)$$

تغییرات انرژی کرنشی U^* با جایگزینی مقادیر صفر یکی از مؤلفه‌های تنش باقی می‌ماند که

عبارت‌اند از:

$$\delta U^* = \sigma_x \delta \varepsilon_x \quad (6-2)$$

با جایگزینی مؤلفه‌های کرنش (۳-۲) در (۶-۲) و انرژی پتانسیل جرم و فنر، تغییرات انرژی

پتانسیل سیستم به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\delta U = \int_0^L \iiint_A \sigma_x \left[\delta \frac{\partial u}{\partial x} - Z \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dA dx + k \xi \delta \xi \quad (7-2)$$

انرژی کرنشی تیر در حال کشش تحت حرکت سیستم جرم و فنر که برای تیر، با انتگرال‌گیری

چگالی انرژی کرنشی بر روی حجم به دست می‌آید. المان حجم به صورت $(dA dx)$ در نظر گرفته شده

است که در آن محدوده تغییرات مؤلفه‌های محورهای مختصات، به صورت $0 \leq x \leq L$ ، $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$

و $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ می‌باشد.

منتجه‌های تنش به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$N_x = \iint_A \sigma_x dA \quad M_x = \iint_A \sigma_x Z dA \quad (8-2)$$

با توجه به نتیجه‌های تنش، انرژی پتانسیل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta U = \int_0^L \left[N_x \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) - M_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dx + k \xi \delta \xi \quad (9-2)$$

۲-۴- محاسبه انرژی جنبشی

انرژی جنبشی تیر در حال کشش تحت حرکت سیستم جرم و فنر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} m (\xi^2 + v^2) \quad (10-2)$$

تغییرات انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می شود:

$$\delta K = \rho A \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] dx + m (\xi \delta \xi) \quad (11-2)$$

۲-۵- کار نیروهای خارجی

کار حاصل از نیروی خارجی بر روی تیر در حال کشش تحت حرکت سیستم جرم و فنر از دو بخش شامل؛ کار انجام شده توسط نیروی محوری (کشش) و کار انجام شده عرضی که حاصل از نیروی تماسی بین تیر و سیستم جرم و فنر و وزن تیر است.

با جایگزینی رابطه (۱-۲) تغییرات کار نیروی خارجی به صورت زیر تعیین می گردد.

$$\delta W_{nc} = \int_0^L \{ [-\rho g A + f_c \delta(x - vt)] \delta w + T \delta(x - L) \delta u \} dx - f_c \delta \xi \quad (12-2)$$

۲-۶- تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون

معادلات حاکم بر حرکت تیر در حال کشش تحت حرکت جرم و فنر محرک در بازه زمانی

$[t_1, t_2]$ باید اصل همیلتون را ارضا کند.

بر اساس اصل همیلتون [۱۸]:

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} [\delta K - \delta U + \delta W_{nc}] dt = 0 \quad (13-2)$$

δK تغییرات انرژی جنبشی، δU تغییرات انرژی کرنشی و δW_{nc} تغییرات کار نیروهای خارجی را

نشان می دهد. با به کار گیری رابطه های (۲-۹)، (۲-۱۱) و (۲-۱۲) در اصل همیلتون و محاسبه

انتگرال جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta H = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\left(\frac{dN_x}{dx} - \rho A \frac{d^2 u}{dt^2} + T \delta(x-L) \right) \delta u \right. \\ & + \left(\left(\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(N_x \frac{dw}{dx} \right) \right) - \rho A \frac{d^2 w}{dt^2} - \rho g A + f_c \delta(x-vt) \right) \delta w \Big] dx \\ & + (-m \ddot{\xi} - k \xi - f_c) \delta \xi \Big] dt = 0 \end{aligned} \quad (14-2)$$

طبق اصل اساسی حساب تغییرات معادله‌های حرکت بر اساس منته‌های تنش به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\delta u : \quad \rho A \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{dN_x}{dx} = 0 \quad (15-2)$$

$$\delta w : \quad \rho A \frac{d^2 w}{dt^2} - \left(\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(N_x \frac{dw}{dx} \right) \right) = -\rho g A + f_c \delta(x-vt) \quad (16-2)$$

$$\delta \xi : \quad m \ddot{\xi} + k \xi = -f_c \quad (17-2)$$

معادله‌های (۱۵-۲)، (۱۶-۲) به ترتیب مربوط به ارتعاشات طولی و ارتعاشات عرضی تیر و معادله (۱۷-۲) مربوط به سیستم جرم و فنر می‌باشد؛ شرایط مرزی مسأله نیز برای حالت تکیه‌گاه گیر دار-تکیه‌گاه ساده بر اساس منته‌های تنش به صورت زیر بیان خواهد شد.

$$\begin{aligned} u = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad N_x = T \quad \text{at} \quad x = L \\ w = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad w = 0 \quad \text{at} \quad x = L \\ \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{at} \quad x = L \end{aligned} \quad (18-2)$$

۲-۷- قید تماس دینامیکی

فاصله نسبی بین تیر در حال کشش و سیستم جرم و فنر محرک مسأله بسیار مهمی است که می‌تواند بر رفتارهای دینامیکی مسأله تأثیر بگذارد و قید معادله‌ها برای زمان تماس و هم برای زمان جدایش در نظر گرفته شود، جابه‌جایی‌های جرم محرک و تیر را با یک فاصله بین جرم و تیر G نشان داده می‌شود.

$$G(x, t) = w(x, t)_{x=vt} - \xi(t) \quad (19-2)$$

زمانی که $G(x,t)$ بزرگتر از صفر باشد تماس اتفاق خواهد افتاد زیرا تیر در موقعیتی از $x=vt$ قرار داد؛ که بلندتر از موقعیت جرم محرک است و زمانی که $G(x,t)$ مساوی صفر است تماس بین تیر و جرم محرک اتفاق خواهد افتاد زیرا جابه‌جایی نسبی بین تیر و جرم محرک صفر خواهد شد و نیروی تماسی به صورت تابع زیر بیان می‌گردد.

$$f_c = \begin{cases} F_c & G(x,t) = 0 \\ 0 & G(x,t) > 0 \end{cases} \quad (20-2)$$

با بیان معادله (۲۰-۲) معادله‌های حرکت به صورت دو دسته معادله تعریف می‌شود:

$$1. \text{ زمانی که } G(x,t)=0:$$

$$G(x,t) = 0 \rightarrow \xi(t) = w(x,t)_{x=vt} \quad (21-2)$$

با استفاده از معادله (۱۹-۲) می‌توان شتاب جرم و فنر را بر حسب W به دست آورد:

$$\ddot{\xi}(t) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=vt} \quad (22-2)$$

با جایگذاری (۲۱-۲) و (۲۲-۲) در معادله (۱۷-۲):

$$\left(m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + kw \right)_{x=vt} = -F_c \quad (23-2)$$

معادله (۲۳-۲) نیروی تماسی را در زمان تماس محاسبه می‌کند.

$$2. \text{ زمانی که } G(x,t) > 0:$$

اگر نیروهای تماسی به صفر میل کند بین تیر و سیستم جرم و فنر فاصله ایجاد شده و معادله

(۱۷-۲) به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$m\ddot{\xi} + k\xi = 0 \quad (24-2)$$

در زمان جدایش چون تیر و سیستم جرم و فنر از هم جدا هستند هر کدام به صورت مجزا ارتعاش

کرده و معادلات آنها نیز به صورت مجزا بررسی می‌شود. در الگوریتم (۵-۱) روش حل مسأله تماس

بیان شده است.

۲-۸- جمع‌بندی

در این فصل، بر اساس تئوری اویلر برنولی معادله‌های حاکم بر مسأله تماس دینامیکی برای تیر تحت کشش با یک سیستم جرم و فنر متحرک بر اساس منته‌های تنش استخراج گردیده است. با در نظر گرفتن رابطه‌های کرنش-جاب‌جایی فن کارمن معادله‌ها به صورت دو دستگاه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان محاسبه می‌شود. نیروی تماسی نیز با استفاده از قید تماس محاسبه گردیده است. در فصل بعد، معادلات خطی به دست آمده، و پس از بی‌بعد سازی معادلات حاکم بر مسأله تماس دینامیکی، از روش گالرکین تفکیک متغیرها انجام می‌شود. معادله‌ها با مشتقات معمولی تابع زمان با ضرایب متغیر به دست آمده نیز با روش (رانجه کوتاه مرتبه ۴)^۱ حل خواهند شد.

^۱ Runge kutta order 4

فصل سوم

معادلات خطی و حل

۳-۱-مقدمه

در فصل قبل، معادلات حاکم بر ارتعاشات تیر تحت کشش با یک سیستم جرم و فنر متحرک بر اساس تئوری اویلر برنولی بر حسب منتهجهای تنش استخراج گردید. در این فصل، با استفاده از منتهجهای، معادلات خطی به دست آمده، که این معادلات به صورت دو دستگاه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان هستند. یک دستگاه برای زمان تماس سیستم جرم و فنر با تیر و دستگاه بعدی برای زمان جدایش بیان شده است. با توجه به اینکه روش‌های حل تحلیلی روش‌های دقیق‌تری هستند، اما در سال‌های اخیر روش‌های عددی راه‌حل‌های خوبی برای معادلات با مشتقات جزئی ارائه داده‌اند. بعد از بی‌بعد کردن معادلات، متغیرها با استفاده از روش گالرکین تفکیک شده و معادلات زمانی با ضرایب متغیر به دست آمده با روش (رانجه کوتاه مرتبه ۴)^۱ حل گردیده است. برای حل انتگرال‌های حاصل از روش گالرکین^۲ از روش عددی (سیمپسون^۳) که از دقت مرتبه ۴ برخوردار است، استفاده شده است.

۳-۲- معادلات حرکت خطی

برای معادلات خطی منتهجهای تنش به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$N_x = \iint_A \sigma_x dA = \iint_A E \varepsilon_x dA = EA \left(\frac{du}{dx} \right)$$
$$M_x = \iint_A \sigma_x Z dA = \iint_A E z \varepsilon_x dA = -EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (1-3)$$

با جای‌گذاری رابطه‌های (۱-۳) در (۲-۱۵) و (۲-۱۶) معادلات خطی حاکم بر مسأله به دست

خواهد آمد.

^۱ Runge kutta order 4

^۲ Galerkin method

^۳ Simpson rule³/₈

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2-3)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - EA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\rho g A + f_c \delta(x - vt) \quad (3-3)$$

معادله‌های (۲-۳) و (۳-۳) به ترتیب مربوط به ارتعاشات طولی و ارتعاشات عرضی تیر خطی

می‌باشد؛ شرایط مرزی مسأله نیز برای حالت تکیه‌گاه گیردار-تکیه‌گاه ساده بر اساس خیز طولی و

عرضی تیر به صورت زیر بیان خواهند شد.

$$\begin{aligned} u = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad EA \frac{du}{dx} = T \quad \text{at} \quad x = L \\ w = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad w = 0 \quad \text{at} \quad x = L \\ \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{at} \quad x = L \end{aligned} \quad (4-3)$$

اگر مقدار $EA \frac{du}{dx} = T$ (کشش طولی تیر) در طول تیر ثابت فرض شود و با جای‌گذاری کشش

طولی تیر در (۳-۳) معادله حرکت سیستم به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\rho A \frac{d^2 w}{dt^2} + EI \frac{d^4 w}{dx^4} - T \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -\rho g A + f_c \delta(x - vt) \quad (5-3)$$

معادله (۵-۳) نشان‌دهنده ارتعاشات تیر در زمان تماس است که با جای‌گذاری معادله (۲-۲) در

آن به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + [m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ + kw] \delta(x - vt) = -\rho g A \end{aligned} \quad (6-3)$$

با محاسبه مقدار خیز تیر خطی از (۶-۳) و جای‌گذاری آن در (۲-۲) مقدار نیروی تماسی و خیز

در زمان تماس محاسبه خواهد شد؛ اما در زمان جدایش سیستم جرم و فنر از تیر بر اساس فرمول

(۲-۲) به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\rho g A \quad (7-3)$$

با حل دستگاه معادله (۷-۳) و (۲۴-۲) مقدار خیز تیر خطی و سیستم جرم و فنر به صورت مجزا محاسبه شده و اگر اختلاف آن خیلی کم شد، نشانه تماس مجدد سیستم جرم و فنر با تیر می باشد. شرایط مرزی مسأله به صورت زیر بازنویسی می گردد.

$$\begin{aligned} w=0 \quad \text{at } x=0 \quad w=0 \quad \text{at } x=L \\ \frac{dw}{dx}=0 \quad \text{at } x=0 \quad \frac{d^2w}{dx^2}=0 \quad \text{at } x=L \end{aligned} \quad (۸-۳)$$

۳-۳- بی بعد سازی

از آن جا که در تعیین حل این دستگاه معادلات برای زمان جدایش و تماس، بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش از روش گالرکین و رانجه کوتا استفاده شده است. در ابتدا پارامترهای بی بعد زیر معرفی می گردد [۱۹].

$$x^* = \frac{x}{L}; t^* = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; w^* = \frac{w}{L}; \xi^* = \frac{\xi}{L}; \delta^*(\cdot) = L\delta(\cdot); v^* = vL \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (۹-۳)$$

x^* و t^* به ترتیب مکان و زمان بی بعد، w^* جابه جایی عرضی بی بعد تیر که مربوط به w بوده و ξ^* جابه جایی بی بعد سیستم جرم و فنر است. $\delta^*(\cdot)$ بی بعد تابع دلتای دیراک و v^* سرعت حرکت سیستم جرم و فنر بی بعد شده را نشان می دهد؛ برای بی بعد کردن زمان و سرعت حرکت سیستم جرم و فنر محرک از فرکانس طبیعی اول تیر خطی اوپلر برنولی استفاده شده است؛ که به صورت $\omega_1^{EB} = \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$ با توجه به پارامترهای بی بعد فوق، اپراتورهای مشتق بی بعد شده به صورت زیر تعیین می گردد.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*}; \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}; \frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{1}{L^4} \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}}; \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = L \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \frac{\partial^2}{\partial x^* \partial t^*} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\rho AL^4}{EI} \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \end{aligned} \quad (۱۰-۳)$$

با اعمال پارامترها و اپراتورهای بی‌بعد فوق در معادلات (۶-۳) و (۷-۳) پارامترهای بی‌بعد زیر نیز

تعریف می‌گردد.

$$\omega = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}}; \phi = \frac{\rho AL}{m}; \alpha = \sqrt{\frac{AL^2}{I}}; \gamma = \frac{\rho g AL^3}{EI}; \beta = \sqrt{\frac{TL^2}{EI}}; F_c^* = \frac{FL^2}{EI} \quad (11-3)$$

ω نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد، ϕ نسبت جرم تیر به جرم سیستم جرم و فنر، α نسبت طول به سطح مقطع تیر، γ جرم تیر، β کشش طولی و F_c^* نیروی تماسی بی‌بعد را نشان می‌دهد. با جای‌گذاری معادله‌های (۹-۳)-(۱۱-۳) در معادله (۶-۳) در زمان تماس تیر خطی با سیستم جرم و فنر می‌توان آن‌ها را به‌صورت بی‌بعد بیان کرد.

$$\phi \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} - \beta^2 \phi \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \phi \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + 2v^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial t^*} + v^{*2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \omega^2 w^* \right] \delta(x^* - v^* t^*) = -\gamma \phi \quad (12-3)$$

با جای‌گذاری معادله‌های (۹-۳)-(۱۱-۳) در معادله (۲۳-۲) نیروی تماسی به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$-F_c^* \phi = \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + 2v^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial t^*} + v^{*2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \omega^2 w^* \right)_{x^*=v^* t^*} \quad (13-3)$$

با جای‌گذاری معادله‌های (۹-۳)-(۱۱-۳) در معادله (۷-۳) برای تیر خطی در زمان جدایش می‌توان مدل بی‌بعد را به‌صورت زیر بیان نمود.

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} - \beta^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} = -\gamma \quad (14-3)$$

با جای‌گذاری معادله‌های (۹-۳)-(۱۱-۳) در معادله (۲۴-۲) ارتعاش سیستم جرم و فنر به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\ddot{\xi}^* + \omega^2 \xi^* = 0 \quad (15-3)$$

با حل معادلات به‌طور همزمان، زمان جدایش، مقدار خیز تیر و مقدار نیروی تماسی محاسبه خواهد شد.

۳-۴-روش گالرکین^۱

روش گالرکین از معادله‌های حرکت برای حل استفاده کرده و تابع گالرکین نیز باید تمام شرایط مرزی مسأله را ارضا نماید. در ابتدا متغیرهای زمان و مکان از هم تفکیک می‌گردد [۲۰].

$$w^*(x^*, t^*) = \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i(x^*) \quad (۱۶-۳)$$

در (۱۶-۳)، $\varphi_i(x^*)$ تابع شکل و $q_i(t^*)$ به‌عنوان پارامتر تابع زمان تعریف می‌گردد. با قرار دادن معادله (۱۶-۳) در معادله (۱۲-۳) برای زمان تماس دینامیکی بین سیستم جرم و فنر و تیر به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} & \phi \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t^*) \varphi_i(x^*) - \beta^2 \phi \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i''(x^*) + \phi \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i^{(4)}(x^*) \\ & + \left[\sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t^*) \varphi_i(x^*) + 2v^* \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t^*) \varphi_i'(x^*) + v^{*2} \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i''(x^*) \right. \\ & \left. + \omega^2 \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i(x^*) \right] \delta(x^* - v^* t^*) = -\gamma \phi \end{aligned} \quad (۱۷-۳)$$

با ضرب کردن معادله (۱۷-۳) در تابع $\varphi_j(x)$ ($j=1, 2, \dots, N$) و انتگرال‌گیری در بازه $x^* = [0, 1]$ به‌صورت زیر بیان خواهد شد.

^۱ Galerkin method

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 [\phi \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t^*) \varphi_i(x^*) \varphi_j(x^*)] dx^* - \int_0^1 [\beta^2 \phi \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i''(x^*) \varphi_j(x^*)] dx^* \\
& + \int_0^1 [\phi \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i^{(4)}(x^*) \varphi_j(x^*)] dx^* + \int_0^1 [\sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t^*) \varphi_i(x^*) \\
& + 2v^* \sum_{i,j=1}^n \dot{q}_i(t^*) \varphi_i'(x^*) + v^{*2} \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i''(x^*) \\
& + \omega^2 \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i(x^*)] \varphi_j(x^*) \delta^*(x^* - v^* t^*) dx^* \\
& = \int_0^1 [-\gamma \phi \varphi_j(x^*)] dx^*
\end{aligned} \tag{۱۸-۳}$$

انتگرال گیری از تابع دلتای دیراک به صورت زیر بیان می گردد.

$$\int_0^1 [\varphi_i(x^*) \delta^*(x^* - v^* t^*)] dx^* = \varphi_i(v^* t^*) \tag{۱۹-۳}$$

با توجه به (۱۹-۳) معادله حرکت برای زمان تماس به صورت زیر بیان می شود.

$$\sum_{i=1}^n M_i \ddot{q}_i(t^*) + \sum_{i=1}^n C_i \dot{q}_i(t^*) + \sum_{i=1}^n K_i q_i(t^*) = P \tag{۲۰-۳}$$

در (۲۰-۳) ضرایب متغیر معادله تماس دینامیکی تابع زمان، به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$M_i = \delta_{ij} \int_0^1 \phi [\varphi_i(x^*) \varphi_i(x^*)] dx^* + \varphi_i(v^* t^*) \varphi_j(v^* t^*)$$

$$C_i = 2v^* \varphi_i'(v^* t^*) \varphi_j(v^* t^*)$$

$$\begin{aligned}
K_i = & \int_0^1 \phi [\beta^2 \varphi_i'(x^*) \varphi_j'(x^*) + \varphi_i''(x^*) \varphi_j''(x^*)] dx^* \\
& + v^{*2} \varphi_i''(v^* t^*) \varphi_j(v^* t^*) + \omega^2 \varphi_i(v^* t^*) \varphi_j(v^* t^*)
\end{aligned}$$

$$P = \int_0^1 [-\gamma \phi \varphi_j(x^*)] dx^* \tag{۲۱-۳}$$

برای زمان جدایش؛ اگر در معادله (۲۰-۳) اثر حرکت جرم و فنر در نظر گرفته نشود، به صورت زیر

خواهد شد.

$$\sum_{i=1}^n M_i' \ddot{q}_i(t^*) + \sum_{i=1}^n K_i' q_i(t^*) = P' \tag{۲۲-۳}$$

ضریب های ثابت معادله (۲۲-۳) به صورت زیر معرفی می گردد.

$$M'_i = \delta_{ij} \int_0^1 \phi[\varphi_i(x^*)\varphi_j(x^*)]dx^*$$

$$K'_i = \int_0^1 \phi[\beta^2 \varphi'_i(x^*)\varphi'_j(x^*) + \varphi''_i(x^*)\varphi''_j(x^*)]dx^*$$

$$P' = \int_0^1 [-\gamma\varphi_j(x^*)]dx^*$$

(۲۳-۳)

۳-۵- شرایط اولیه

برای حل معادله‌های (۲۰-۳) و (۲۲-۳) نیاز به داشتن شرایط اولیه مسأله در خیز و سرعت می‌باشد؛ شرایط اولیه مسأله تماس در لحظه تماس و جدایش قابل تغییر است. برای لحظه اولیه در $t^* = 0$ به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$w^*(x^*, 0) = \sum_{i=1}^n q_i(0)\varphi_i(x^*)$$

(۲۴-۳)

$$\dot{w}^*(x^*, 0) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(0)\varphi_i(x^*)$$

(۲۵-۳)

معادله‌های (۲۴-۳) و (۲۵-۳) به ترتیب ناشی از خیز و سرعت در نقطه صفر می‌باشد. با ضرب کردن این معادله‌ها در تابع $\varphi_j(x)$ ($j=1, 2, \dots, N$) و انتگرال‌گیری در بازه $x^* = [0, 1]$ مقدار $q_i(0)$ و $\dot{q}_i(0)$ به صورت زیر بیان خواهد شد.

$$q_i(0) = \frac{\int_0^1 w^*(x^*, 0)\varphi_j(x^*)dx^*}{\int_0^1 \varphi_j^2(x^*)dx^*}$$

(۲۶-۳)

$$\dot{q}_i(0) = \frac{\int_0^1 \dot{w}^*(x^*, 0)\varphi_j(x^*)dx^*}{\int_0^1 \varphi_j^2(x^*)dx^*}$$

(۲۷-۳)

شرایط اولیه به دست آمده را می‌توان برای حل مسأله تماس و پرش استفاده نمود [۲۰].

۳-۶- تابع گالرکین

تابع گالرکین باید تمام شرایط مرزی معادله (۳-۸) را ارضا نماید. با توجه به شکل مد خطی مسأله؛

تابع گالرکین به صورت زیر بیان می‌گردد [۲۱].

- حالت تکیه‌گاه گیردار- ساده

$$B_i = \frac{(4i+1)}{4} \pi$$

$$\varphi_i(x^*) = \cosh(B_i x^*) - \cos(B_i x^*) - \cot(B_i) (\sinh(B_i x^*) - \sin(B_i x^*))$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (28-3)$$

- حالت تکیه‌گاه ساده- ساده

$$\varphi_i(x^*) = \sin(i\pi x^*)$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (29-3)$$

- حالت تکیه‌گاه گیردار- گیردار

$$B_i = \frac{(2i+1)}{2} \pi$$

$$\varphi_i(x^*) = (\cosh(B_i x^*) - \cos(B_i x^*))$$

$$- \left[\frac{\sinh(B_i) - \sin(B_i)}{\cosh(B_i) - \cos(B_i)} \right] (\sinh(B_i x^*) - \sin(B_i x^*))$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (30-3)$$

با توجه به معادلات (۳-۲۸)-(۳-۳۰) تابع گالرکین مورد نظر به دست آمده است؛ در ادامه این تابعها

در ضرایب (۳-۲۱) و (۳-۲۳) قرار می‌گیرد تا مقدار انتگرالها محاسبه گردد.

۳-۷- محاسبه ضرایب

در بخش قبل تابع گالرکین محاسبه شد؛ انتگرال گیری از این توابع به صورت عددی انجام می‌شود

که روش مورد نظر در این پایان‌نامه (سیمپسون^۳)^۱ می‌باشد.

برای بیان حل به صورت زیر استفاده شده است [۲۲].

^۱ Simpson rule^۳/_۸

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (31-3)$$

برای محاسبه انتگرال (31-3) از روش سیمپسون گام و تابع به صورت زیر به دست می آید.

$$h = \frac{b-a}{3}$$

$$F(x) = f(x) \quad (32-3)$$

برای محاسبه انتگرال به صورت زیر بیان می گردد.

$$I \approx \frac{3h}{8} [F(a) + 3F(a+h) + 3F(a+2h) + F(b)] \quad (33-3)$$

مقدار خطا در این روش به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$\text{error} = \frac{-3}{80} h^5 \frac{F'''(b) - F'''(a)}{b-a} \quad (34-3)$$

چون خطا در این روش از (مرتبه 4)¹ بوده و بازه حل انتگرال کوچک است؛ لذا دقت خوبی برای

حل عددی انتگرالهای ضرایب دارد. برای به دست آوردن انتگرالهای عددی (31-3)، (33-3)،

(36-3) و (37-3) باید ابتدا مقدار (32-3) محاسبه گردد و در ادامه جواب در (33-3) قرار گیرد تا

مقدار عددی انتگرال محاسبه گردد.

3-8- حل معادلات معمولی

برای ساده سازی فرم ماتریسی معادلات حرکت می توان در معادلات حرکت، ضرایب، شرایط اولیه و

تابع شکل به دست آمده مقدار i و z را مساوی 1 قرار داد؛ که به صورت زیر بیان می گردد [19].

معادله حرکت سیستم در زمان تماس برای تیر خطی:

$$M_1 \ddot{q}_1(t^*) + C_1 \dot{q}_1(t^*) + K_1 q_1(t^*) = P \quad (35-3)$$

ضرایب متغیر تابع زمان معادله (35-3)، به صورت زیر بیان می گردد.

¹ Order 4

$$M_1 = \phi + \phi_1^2(v^* t^*)$$

$$C_1 = 2v^* \phi_1'(v^* t^*) \phi_1(v^* t^*)$$

$$K_1 = \int_0^1 \phi [\beta^2 \phi_1'^2(x^*) + \phi_1''^2(x^*)] dx^* + v^{*2} \phi_1''(v^* t^*) \phi_1(v^* t^*) + \omega^2 \phi_1^2(v^* t^*)$$

$$P = \int_0^1 [-\gamma \phi \phi_1(x^*)] dx^*$$

(۳۶-۳)

معادله حرکت سیستم در حالت جدایش برای تیر خطی:

$$M_1' \ddot{q}_1(t^*) + K_1' q_1(t^*) = P'$$

(۳۷-۳)

ضرایب ثابت معادله (۳۷-۳)، به صورت زیر بیان می‌شود.

$$M_1' = \phi$$

$$K_1' = \int_0^1 \phi [\beta^2 \phi_1'^2(x^*) + \phi_1''^2(x^*)] dx^*$$

$$P' = \int_0^1 [-\gamma \phi \phi_1(x^*)] dx^*$$

(۳۸-۳)

شرایط اولیه:

$$q_1(0) = \frac{\int_0^1 w^*(x^*, 0) \phi_1(x^*) dx^*}{\int_0^1 \phi_1^2(x^*) dx^*}$$

(۳۹-۳)

$$\dot{q}_1(0) = \frac{\int_0^1 \dot{w}^*(x^*, 0) \phi_1(x^*) dx^*}{\int_0^1 \phi_1^2(x^*) dx^*}$$

(۴۰-۳)

تابع به دست آمده گالرکین:

• حالت تکیه‌گاه گیردار-ساده

$$B_1 = \frac{5}{4} \pi \approx 3.927 \quad \cot(B_1) \approx 1.001$$

$$\phi_1(x^*) = \cosh(B_1 x^*) - \cos(B_1 x^*) - \cot(B_1) (\sinh(B_1 x^*) - \sin(B_1 x^*))$$

(۴۱-۳)

• حالت تکیه‌گاه ساده-ساده

$$\varphi_1(x^*) = \sin(\pi x^*) \quad (42-3)$$

• حالت تکیه‌گاه گیردار-گیردار

$$B_1 = \frac{3}{2}\pi \approx 4.73 \quad \frac{\sinh(B_1) - \sin(B_1)}{\cosh(B_1) - \cos(B_1)} \approx 0.983$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x^*) &= (\cosh(B_1 x^*) - \cos(B_1 x^*)) \\ &- \left[\frac{\sinh(B_1) - \sin(B_1)}{\cosh(B_1) - \cos(B_1)} \right] (\sinh(B_1 x^*) - \sin(B_1 x^*)) \end{aligned} \quad (43-3)$$

۳-۸-۱- کاهش مرتبه معادلات

در روش رانجه کوتاه مرتبه ۴ معادله‌های مرتبه بالاتر (۳-۳۵) و (۳-۳۷) به مرتبه ۱ تبدیل می‌شود، برای این منظور می‌توان از رابطه‌های زیر استفاده کرد [۲۲].

$$y_1 = q_1; y_2 = \dot{q}_1 \quad (44-3)$$

با جای‌گذاری رابطه (۳-۴۴) در (۳-۳۵) و (۳-۳۷) دستگاه معادلات تیر خطی و سیستم جرم و فنر محرک به صورت زیر به دست خواهد آمد.

تماس:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{1}{M_1} [P - (C_1 y_2 + K_1 y_1)] \end{aligned} \quad (45-3)$$

پرش:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{1}{M'_1} [P' - (K'_1 y_1)] \end{aligned} \quad (46-3)$$

دستگاه معادلات (۳-۴۵) برای زمان تماس، با ضرایب متغیر و دستگاه (۳-۴۶) برای زمان پرش، با ضرایب ثابت است؛ که باید به‌طور همزمان حل گردند.

۳-۸-۲-حل دستگاه معادله

برای حل معادلات ابتدا گام زمانی مشخص می‌شود؛ بنابراین موقعیت حرکت سیستم جرم و فنر

به صورت $t^* = \frac{x^*}{v^*}$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. نقطه ابتدایی و انتهای بازه مورد نظر نیز به صورت زیر

بیان می‌شود.

با توجه به رابطه (۳-۴۷) گام زمانی به صورت زیر مشخص می‌گردد.

$$a = 0; b = \frac{1}{v^*} \quad (۳-۴۷)$$

$$h = \frac{b - a}{n} \quad (۳-۴۸)$$

مقدار n در معادله (۳-۴۸) در دست کاربر می‌باشد، با افزایش و کاهش آن می‌توان مقدار بازه را تغییر

داد تا نقطه بهینه به دست آید. مقدار $F'(t^*)$ و $g'(t^*)$ برای دستگاه معادله (۳-۴۵) به صورت زیر بیان

می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= F'(t^*) = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= g'(t^*) = \frac{1}{M_1} [P - (C_1 y_2 + K_1 y_1)] \end{aligned} \quad (۳-۴۹)$$

با محاسبه مقدار گام زمانی و تابع‌های (۳-۴۹)، مقدار ضرایب روش رانجه کوتاه به صورت زیر بیان

می‌شود.

$$\begin{aligned}
& k_1 \left\{ \begin{aligned} F'_1 &= hF'(t^*_m, y_{1m}, y_{2m}) \\ g'_1 &= hg'(t^*_m, y_{1m}, y_{2m}) \end{aligned} \right\} \\
& k_2 \left\{ \begin{aligned} F'_2 &= hF'(t^*_m + \frac{h}{2}, y_{1m} + \frac{F'_1}{2}, y_{2m} + \frac{g'_1}{2}) \\ g'_2 &= hg'(t^*_m + \frac{h}{2}, y_{1m} + \frac{F'_1}{2}, y_{2m} + \frac{g'_1}{2}) \end{aligned} \right\} \\
& k_3 \left\{ \begin{aligned} F'_3 &= hF'(t^*_m + \frac{h}{2}, y_{1m} + \frac{F'_2}{2}, y_{2m} + \frac{g'_2}{2}) \\ g'_3 &= hg'(t^*_m + \frac{h}{2}, y_{1m} + \frac{F'_2}{2}, y_{2m} + \frac{g'_2}{2}) \end{aligned} \right\} \\
& k_4 \left\{ \begin{aligned} F'_4 &= hF'(t^*_m + h, y_{1m} + F'_3, y_{2m} + g'_3) \\ g'_4 &= hg'(t^*_m + h, y_{1m} + F'_3, y_{2m} + g'_3) \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{۵۰-۳}$$

با محاسبه ضرایب و قرار دادن در معادله زیر یک گام زمانی معادله به سمت جلو حرکت می‌کند تا زمانی این کار ادامه پیدا می‌کند که نقطه انتهایی بازه به دست آید [۲۲].

$$\begin{aligned}
y_{1m+1} &= y_{1m} + \frac{1}{6}(F'_1 + 2F'_2 + 2F'_3 + F'_4) \\
y_{2m+1} &= y_{2m} + \frac{1}{6}(g'_1 + 2g'_2 + 2g'_3 + g'_4)
\end{aligned} \tag{۵۱-۳}$$

در مقدارهای y_{1m} و y_{2m} با استفاده از شرایط اولیه مسأله محاسبه می‌گردد. برای حل دستگاه معادله (۴۶-۳) که برای زمان جدایش است؛ همه مراحل (۳-۴۷)–(۳-۵۱) تکرار می‌شود. البته در این پایان-نامه از دستور ode45 برای حل استفاده شده که این دستور با استفاده از روش رانجه کوتاه معادلات را حل می‌کند.

۳-۹- جمع‌بندی

در این فصل، ابتدا معادلات حاکم بر مسأله تماس دینامیکی، تیر خطی اوپلر برنولی تحت کشش، با سیستم جرم و فنر محرک به‌دست آمد و بعد از بی‌بعد شدن با استفاده از عبارت در نظر گرفته شده متغیرهای مکان و زمان معادله از هم جدا گردید. تابع گالرکین به‌دست آمده شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضا نمود. شرایط اولیه مسأله تماس دینامیکی به‌دست آورده شد که در زمان تماس و

جدایش منطبق بر آن لحظه می‌باشد. معادله‌ها با مشتق مرتبه دوم زمانی به مرتبه اول تبدیل گردید.
برای حل از روش رانجه کوتاه مرتبه ۴ استفاده شد و نمونه حلی با استفاده از این روش برای مسأله
تماس تیر تحت کشش با سیستم جرم و فنر متحرک بیان گردید. در فصل آینده معادلات غیرخطی
حاکم بر مسأله به دست خواهد آمد و آن‌ها را حل خواهد نمود.

((این صفحه خالی گذاشته شده است.))

فصل چهارم

معادلات غیر خطی و حل آنها

۴-۱-مقدمه

در فصل قبل، معادلات حاکم بر ارتعاشات خطی تیر تحت کشش با یک سیستم جرم و فنر متحرک استخراج گردید. در این فصل، با استفاده از منته‌های تنش، معادلات غیرخطی به‌دست آمده، که این معادلات به‌صورت دو دستگاه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان هستند. یک دستگاه برای زمان تماس سیستم جرم و فنر با تیر و دستگاه بعدی برای زمان جدایش بیان شده است. با توجه به اینکه روش‌های حل تحلیلی روش‌های دقیق‌تری هستند، اما در سال‌های اخیر روش‌های عددی راه‌حل‌های خوبی برای معادلات با مشتقات جزئی ارائه داده‌اند. بعد از بی‌بعد کردن معادلات، متغیرها با استفاده از روش گالرکین تفکیک‌شده و معادلات زمانی با ضرایب متغیر به‌دست آمده، به روش رانجه کوتاه مرتبه ۴ حل گردیده است. برای حل انتگرال‌های حاصل از روش گالرکین^۱ از روش عددی (سیمپسون^۳) که دقت مرتبه ۴ برخوردار است، استفاده شده است.

۴-۲- معادلات حرکت غیرخطی

برای معادلات غیرخطی منته‌های تنش به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$N_x = \iint_A \sigma_x dA = \iint_A E \varepsilon_x dA = EA \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right)$$

$$M_x = \iint_A \sigma_x Z dA = \iint_A E Z \varepsilon_x dA = -EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (1-4)$$

با جای‌گذاری رابطه‌های (۱-۴) در (۱۵-۲) و (۱۶-۲) معادلات غیرخطی حاکم بر مسأله به‌دست خواهد آمد.

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) = 0 \quad (2-4)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - EA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right) = -\rho g A + f_c \delta(x - vt) \quad (3-4)$$

^۱ Galerkin method

^۲ Simpson rule^۳

معادله‌های (۲-۴) و (۳-۴) به ترتیب مربوط به ارتعاشات طولی و ارتعاشات عرضی تیر غیرخطی

هستند؛ شرایط مرزی مسأله به صورت معادله (۴-۳) بیان می‌شود. مقدار $EA \frac{du}{dx} = T$ (کشش طولی

تیر) در طول تیر ثابت فرض می‌شود و با جای‌گذاری کشش طولی تیر در (۳-۴) معادله حرکت تیر غیرخطی به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\rho A \frac{d^2 w}{dt^2} + EI \frac{d^4 w}{dx^4} - T \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{3}{2} EA \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = -\rho g A + f_c \delta(x - vt) \quad (۴-۴)$$

در معادله (۴-۴) جمله $\frac{3}{2} EA \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$ معادلات را در زمان تماس به حالت غیرخطی بیان

می‌کند، با جای‌گذاری معادله (۲۳-۲) در آن به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\rho A \frac{d^2 w}{dt^2} + EI \frac{d^4 w}{dx^4} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{3}{2} EA \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + [m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + kw] \delta(x - vt) = -\rho g A \quad (۵-۴)$$

با محاسبه مقدار خیز تیر غیرخطی از (۵-۴) و جای‌گذاری آن در (۲۳-۲) مقدار نیروی تماسی و خیز

در زمان تماس محاسبه خواهد شد؛ اما در زمان پرش سیستم جرم و فنر از تیر بر اساس فرمول

(۲۰-۲) به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\rho A \frac{d^2 w}{dt^2} + EI \frac{d^4 w}{dx^4} - T \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{3}{2} EA \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = -\rho g A \quad (۶-۴)$$

با حل دستگاه معادله (۶-۴) و (۲۴-۲) مقدار خیز تیر غیرخطی و سیستم جرم و فنر به صورت مجزا

محاسبه شده و اگر اختلاف آن خیلی کم شد نشانه تماس مجدد سیستم جرم و فنر با تیر می‌باشد؛

شرایط مرزی مسأله مانند (۸-۳) بیان می‌گردد.

۴-۳- معادلات بی‌بعد غیرخطی

با جای‌گذاری معادله‌های (۹-۳)-(۱۱-۳) در معادله (۵-۴) در زمان تماس تیر غیرخطی با سیستم

جرم و فنر می‌توان آن‌ها را به صورت بی‌بعد بیان کرد.

$$\begin{aligned} & \phi \frac{d^2 w^*}{dt^{*2}} + \phi \frac{d^4 w^*}{dx^{*4}} - \alpha^2 \phi \left(\frac{3}{2} \left(\frac{d^2 w^*}{dx^{*2}} \right) \left(\frac{dw^*}{dx^*} \right)^2 \right) - \beta^2 \phi \frac{d^2 w^*}{dx^{*2}} \\ & + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + 2v^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial t^*} + v^{*2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \omega^2 w^* \right) \delta^*(x^* - v^* t^*) = -\gamma \phi \end{aligned} \quad (7-4)$$

معادله نیروی تماسی (۳-۱۳) است و با جای‌گذاری معادله‌های (۳-۹)-(۳-۱۱) در معادله (۴-۶) برای

تیر غیرخطی در زمان جدایش می‌توان مدل بی‌بعد را به‌صورت زیر بیان نمود.

$$\frac{d^2 w^*}{dt^{*2}} + \frac{d^4 w^*}{dx^{*4}} - \beta^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} - \alpha^2 \left(\frac{3}{2} \left(\frac{d^2 w^*}{dx^{*2}} \right) \left(\frac{dw^*}{dx^*} \right)^2 \right) = -\gamma \quad (8-4)$$

معادله (۳-۱۵) ارتعاش سیستم جرم و فنر می‌باشد؛ با حل معادلات به‌طور هم‌زمان، زمان جدایش،

مقدار خیز تیر و مقدار نیروی تماسی محاسبه خواهد شد.

۴-۴-روش گالرکین^۱

روش گالرکین از معادله‌های حرکت برای حل استفاده کرده و تابع گالرکین نیز باید تمام شرایط

مرزی مسأله را ارضا نماید. با قرار دادن معادله (۳-۱۶) در معادله (۴-۷) برای زمان تماس، بین

سیستم جرم و فنر و تیر به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} & \phi \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t^*) \varphi_i(x^*) - \beta^2 \phi \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i''(x^*) + \phi \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i^{(4)}(x^*) \\ & + \alpha^2 \phi \left(\frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{m=1}^{n_m} q_i(t^*) q_k(t^*) q_m(t^*) \varphi_i'(x^*) \varphi_k'(x^*) \varphi_m'(x^*) \right) \\ & + \left[\sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t^*) \varphi_i(x^*) + 2v^* \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t^*) \varphi_i'(x^*) + v^{*2} \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i''(x^*) \right. \\ & \left. + \omega^2 \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i(x^*) \right] \delta^*(x^* - v^* t^*) = -\gamma \phi \end{aligned} \quad (9-4)$$

با ضرب کردن معادله (۴-۹) در تابع $\varphi_j(x)$ ($j=1,2,\dots,N$) و انتگرال‌گیری در بازه $x^* = [0,1]$

به‌صورت زیر بیان خواهد شد.

¹ Galerkin method

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 [\phi \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t^*) \varphi_i(x^*) \varphi_j(x^*)] dx^* - \int_0^1 [\beta^2 \phi \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i''(x^*) \varphi_j(x^*)] dx^* \\
& + \int_0^1 [\phi \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i^{(4)}(x^*) \varphi_j(x^*)] dx^* \\
& + \int_0^1 [\alpha^2 \phi (\frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{m=1}^{n_m} q_i(t^*) q_k(t^*) q_m(t^*) \varphi_i''(x^*) \varphi_k'(x^*) \varphi_m'(x^*)) \varphi_j(x^*)] dx^* \\
& + \int_0^1 [\sum_{i=1}^n \ddot{q}_i(t^*) \varphi_i(x^*) + 2v^* \sum_{i,j=1}^n \dot{q}_i(t^*) \varphi_i'(x^*) + v^{*2} \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i''(x^*) \\
& + \omega^2 \sum_{i=1}^n q_i(t^*) \varphi_i(x^*)] \varphi_j(x^*) \delta^*(x^* - v^* t^*) dx^* = \int_0^1 [-\gamma \phi \varphi_j(x^*)] dx^* \quad (10-4)
\end{aligned}$$

انتگ رال گیری از تابع دلتای دیراک به صورت (۳-۱۹) بیان می گردد. با توجه به (۴-۱۰) معادله حرکت برای زمان تماس به صورت زیر بیان می شود.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n M_i \ddot{q}_i(t^*) + \sum_{i=1}^n C_i \dot{q}_i(t^*) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{m=1}^{n_m} S_{ikm} q_i(t^*) q_k(t^*) q_m(t^*) \\
& + \sum_{i=1}^n K_i q_i(t^*) = P \quad (11-4)
\end{aligned}$$

در (۴-۱۱) ضرایب متغیر تابع زمان معادله زمانی مانند معادله (۳-۲۱) بیان شده و ضریب غیر-خطی، به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$S_{ikm} = \int_0^1 [\alpha^2 \phi (\frac{3}{2} \varphi_i''(x^*) \varphi_k'(x^*) \varphi_m'(x^*)) \varphi_j(x^*)] dx^* \quad (12-4)$$

برای زمان جدایش در (۴-۱۱) اثر حرکت جرم و فنر در نظر گرفته نمی شود؛ که به صورت زیر بیان خواهد شد.

$$\sum_{i=1}^n M_i' \ddot{q}_i(t^*) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{m=1}^{n_m} S'_{ijm} q_i(t^*) q_k(t^*) q_m(t^*) + \sum_{i=1}^n K_i' q_i(t^*) = P' \quad (13-4)$$

ضریب های ثابت معادله (۴-۱۳) مانند (۳-۲۳) بیان شده و ضریب غیرخطی پرش به صورت زیر معرفی می گردد.

$$S'_{ikm} = \int_0^1 [\alpha^2 \phi (\frac{3}{2} \phi_i''(x^*) \phi_k'(x^*) \phi_m'(x^*)) \phi_j(x^*)] dx^* \quad (14-4)$$

شرایط اولیه، تابع گالرکین و محاسبه ضرایب به ترتیب مانند بخش‌های ۳-۵، ۳-۶ و ۳-۷ به دست می‌آید.

۴-۵- حل معادلات معمولی

برای ساده‌سازی فرم ماتریسی معادلات حرکت می‌توان در معادلات حرکت، ضرایب، شرایط اولیه و در تابع شکل به دست آمده مقدار j, k, i و m را مساوی ۱ قرار داد؛ که به صورت زیر بیان می‌گردد [۱۹].

معادله حرکت تماس برای تیر غیرخطی:

$$M_1 \ddot{q}_1(t^*) + C_1 \dot{q}_1(t^*) + S_1 q_1^3(t^*) + K_1 q_1(t^*) = P \quad (15-4)$$

ضرایب متغیر تابع زمان معادله (۱۵-۴) مانند (۳-۳۶) بوده و ضریب غیرخطی، به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$S_1 = \int_0^1 [\alpha^2 \phi (\frac{3}{2} \phi_1''(x^*) \phi_1'(x^*)) \phi_1(x^*)] dx^* \quad (16-4)$$

معادله حرکت جدایش برای تیر غیرخطی:

$$M_1' \ddot{q}_1(t^*) + S_1' q_1^3(t^*) + K_1' q_1(t^*) = P' \quad (17-4)$$

ضرایب ثابت معادله (۱۷-۴) مانند (۳-۳۸) بیان شده و ضریب غیرخطی، به صورت زیر بیان می‌شود.

$$S_1' = \int_0^1 [\alpha^2 \phi (\frac{3}{2} \phi_1''(x^*) \phi_1'(x^*)) \phi_1(x^*)] dx^* \quad (18-4)$$

شرایط اولیه به صورت فرمول‌های (۳-۳۹) و (۳-۴۰) بیان شده و تابع گالرکین مانند (۳-۴۱)-(۳-۴۳) به دست می‌آید.

۴-۵-۱- کاهش مرتبه معادلات

در روش رانجه کوتاه مرتبه ۴ معادله‌های مرتبه بالاتر (۴-۱۵) و (۴-۱۷) به مرتبه تبدیل می‌شود، برای این منظور می‌توان با جای‌گذاری رابطه (۳-۴۴) در (۴-۱۵) و (۴-۱۷) دستگاه معادلات بین تیر غیرخطی و سیستم جرم و فنر محرک به صورت زیر به دست خواهد آمد.

تماس:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{M_1} [P - (C_1 y_2 + S_1 y_1^3 + K_1 y_1)]$$

(۴-۱۹)

پرش (جدایش):

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{M'_1} [P' - (K'_1 y_1 + S'_1 y_1^3)]$$

(۴-۲۰)

دستگاه معادلات (۴-۱۹) و (۴-۲۰) باید به طور هم‌زمان حل گردد.

۴-۵-۲- حل دستگاه معادله

برای حل معادلات گام زمانی با فرمول (۳-۴۸) مشخص می‌شود و مقدار $F'(t^*)$ و $g'(t^*)$ برای دستگاه معادله (۴-۱۹) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{dy_1}{dt} = F'(t^*) = y_2$$
$$\frac{dy_2}{dt} = g'(t^*) = \frac{1}{M_1} [P - (C_1 y_2 + S_1 y_1^3 + K_1 y_1)]$$

(۴-۲۱)

با محاسبه مقدار گام زمانی و تابع‌های (۴-۲۱) مقدار ضرایب روش رانجه کوتاه مرتبه ۴ به صورت (۳-۵۰) بیان می‌شود. با محاسبه ضرایب و قرار دادن در معادله (۳-۵۱) یک گام زمانی معادله به سمت جلو حرکت می‌کند. آن قدر این کار ادامه پیدا می‌کند که تا نقطه انتهای بازه به دست آید. برای

حل دستگاه معادله (۴-۲۰) که برای زمان جدایش می‌باشد، همه مراحل بیان شده در قسمت بالا، تکرار می‌شود.

۴-۶- جمع‌بندی

در این فصل، ابتدا معادلات حاکم بر مسأله تماس دینامیکی، تیر غیرخطی اویلر برنولی تحت کشش، با سیستم جرم و فنر محرک به‌دست آمد و بعد از بی‌بعد شدن با استفاده از عبارت در نظر گرفته شده متغیرهای مکان و زمان معادله از هم جدا گردید. تابع گالرکین به‌دست آمده شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضا نمود. شرایط اولیه مسأله تماس دینامیکی به‌دست آورده شد؛ که در زمان تماس و جدایش منطبق بر آن لحظه می‌باشد. معادله‌ها با مشتق مرتبه دوم زمانی به مرتبه اول تبدیل گردید. برای حل از روش رانجه کوتاه مرتبه ۴ استفاده گردید. نمونه حلی با استفاده از این روش برای مسأله تماس تیر تحت کشش با سیستم جرم و فنر متحرک بیان گردید. در فصل آینده، ابتدا مسأله عددی بیان شده و در ادامه در حالت خطی و غیر خطی الگوریتم، راه‌حل بیان می‌شود. نتایج حاصل از این تحقیق مانند مقایسه نیروی تماسی، خیز و جدایش معادلات حرکت در حالت خطی و غیرخطی و تأثیر متغیرهای کشش، سرعت و نسبت ضریب فنریت بی‌بعد شده نسبت به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار جدایش و حداکثری نیروی تماسی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل پنجم

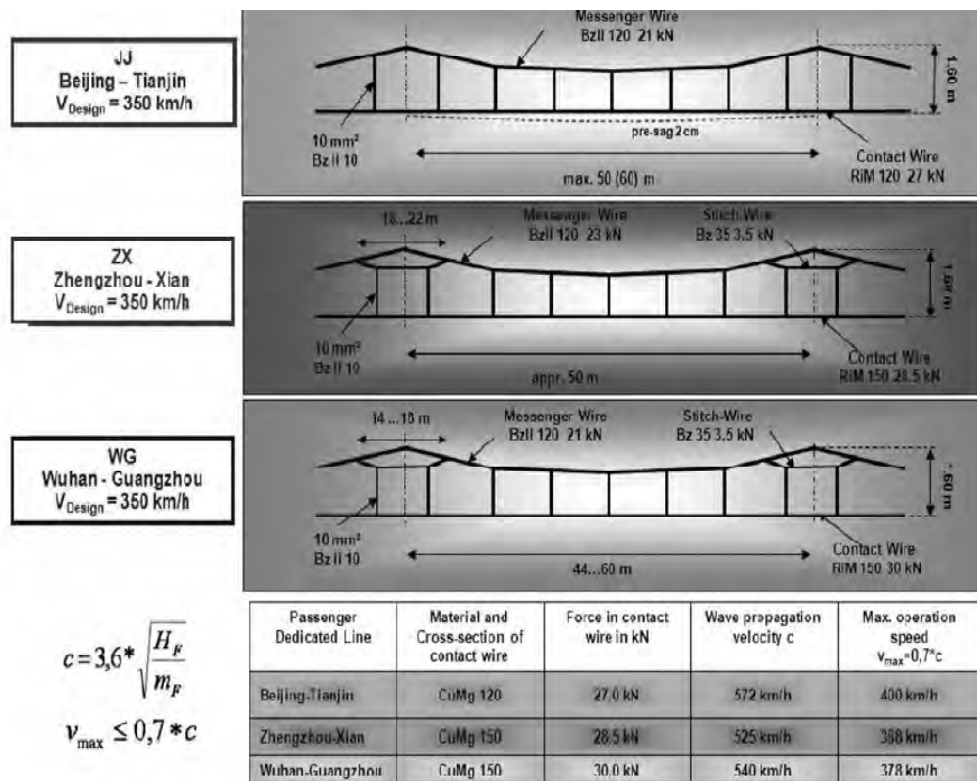
شبیه‌سازی و نتایج

۵-۱- مقدمه

در دو فصل قبل، معادلات حاکم بر ارتعاشات خطی و غیرخطی تیر تحت کشش، با سیستم جرم و فنر متحرک به دست آمد و بعد از بی‌بعد سازی با استفاده از روش رانجه کوتاه حل گردید. در این فصل، ابتدا مقادیر پارامتری سیستم بیان می‌گردد. در حالت خطی الگوریتم، حل مسأله تماس دینامیکی با در نظر گرفتن شرط پرش و تماس بین تیر و سیستم جرم و فنر بیان می‌شود. مسأله تماس دینامیکی برای حالت خطی و غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته و در ادامه با هم مقایسه خواهد شد.

۵-۲- مسأله عددی

با توجه به شکل (۵-۱) مشخصات شبکه بالاسری را می‌توان استخراج نمود [۲۳].



$$c = 3,6 * \sqrt{\frac{H_F}{m_F}}$$

$$v_{max} \leq 0,7 * c$$

شکل (۵-۱) تماس با شبکه بالاسری در خط قطارهای پر سرعت چین با جنس، سطح مقطع، طول و مقدار حداکثر سرعت

اطلاعات پانتوگرافی (DSA 350s) که سرعت مورد نظر را تأمین می‌کند. همچنین وزن، سختی فنر و سرعت جرم محرک با استفاده از گزارش‌های سی ان جنسن^۱ [۲۴] برای سیستم جرم و فنر محرک به همراه اطلاعات شبکه بالاسری در قالب جدول بیان می‌گردد.

جدول (۱-۵) اطلاعات شبکه بالاسری و سیستم جرم و فنر محرک

مرجع	اندازه	نوع پارامتر
۲۳	۵۰ (m)	طول تیر L
۲۳	$۱.۵ \times 10^{-۴} (m^2)$	سطح مقطع جانبی تیر A
۲۳	$۹.۶۴ \times 10^{-۱۰} (m^4)$	ممان اینرسی سطح مقطع I
۲۳	$۲.۸ \times 10^۴ (N)$	کشش طولی تیر T
۱۷	۸۹۰۰ (kgm^{-3})	چگالی ρ
۱۷	$۱.۳۴ \times 10^{۱۱} (Nm^{-2})$	مدول الاستیسیته E
۲۴	۱ (kg)	جرم محرک m
۲۴	$۹۶۳ (Nm^{-1})$	سختی فنر k
۲۴	$۵۰.۸ (ms^{-1})$	سرعت v
-	$۹.۸۱ (ms^{-2})$	شتاب جاذبه زمین g

داده‌های ذکر شده در جدول (۱-۵) اطلاعات مربوط به حل مسأله تماس دینامیکی را بیان می‌کند. با استفاده از این داده‌ها و جای‌گذاری در معادله‌های (۳-۹) - (۳-۱۱) مقادیر ضرایب بی‌بعد معادلات با تقریب به‌صورت زیر بیان می‌گردد.

جدول (۲-۵) مقادیر تقریبی ضرایب بی‌بعد

اندازه	نام ضریب
۶۷	نسبت وزن تیر به جرم محرک ϕ
۱۹۷۲۳	نسبت طول تیر به سطح مقطع آن α
۱۲۶۷۳	نسبت بی‌بعد شده جرم تیر γ
۷۳۶	کشش بی‌بعد β
۲۵۸	سرعت جرم و فنر بی‌بعد v^*
۷۸۸۶	نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد ω

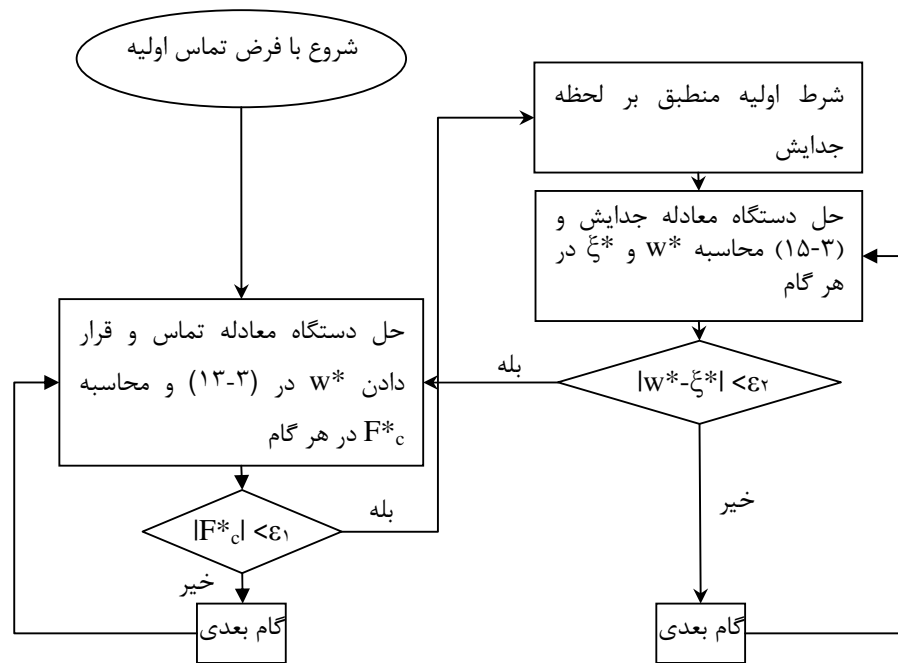
¹ Carston Nordston Jensen

در جدول (۲-۵) مقادیر بی‌بعد شده با توجه به داده‌های جدول (۱-۵) بیان گردیده است. با در نظر گرفتن مقادیر این ضرایب در مسأله تماس دینامیکی، برای معادلات خطی و غیرخطی نتایجی به دست خواهد آمد.

۳-۵- نتایج

برای حل مسأله به صورت عددی ابتدا نیاز به نوشتن الگوریتمی برای آن است؛ که به صورت زیر بیان می‌گردد.

الگوریتم (۱-۵) روش حل مسأله تماس دینامیکی با در نظر گرفتن جدایش

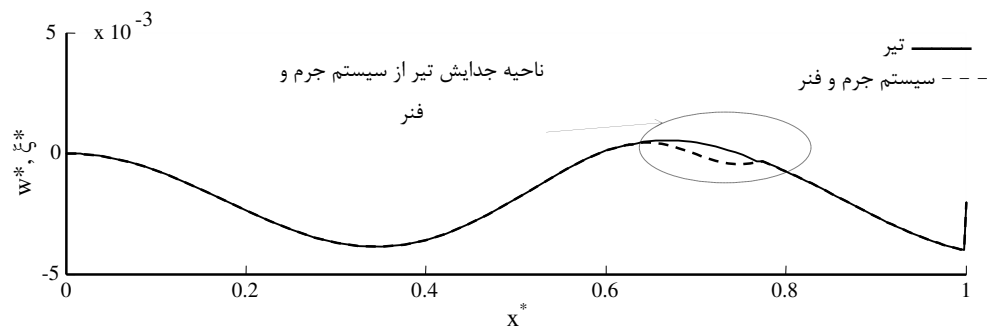


برای زمان جدایش و تماس مجدد در الگوریتم (۱-۵) عبارت شرط اولیه منطبق بر لحظه جدایش و تماس مجدد، بیان شده است.

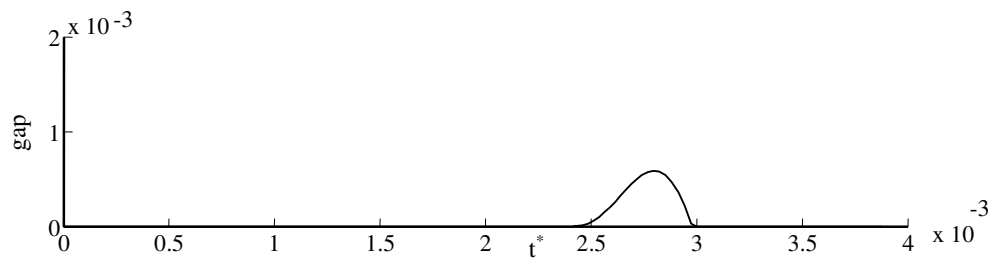
۵-۳-۱- تحلیل خطی

برای حل معادلات خطی باید در الگوریتم (۵-۱) برای زمان تماس از دستگاه (۳-۴۵) و زمان جدایش از دستگاه (۳-۴۶) استفاده نمود. با توجه به جدول (۵-۲) نتایج برای خیز، پرش، نیروی تماس بین تیر خطی در حالت یکسر درگیر یکسر ساده و سیستم جرم و فنر به صورت زیر نشان داده می شود.

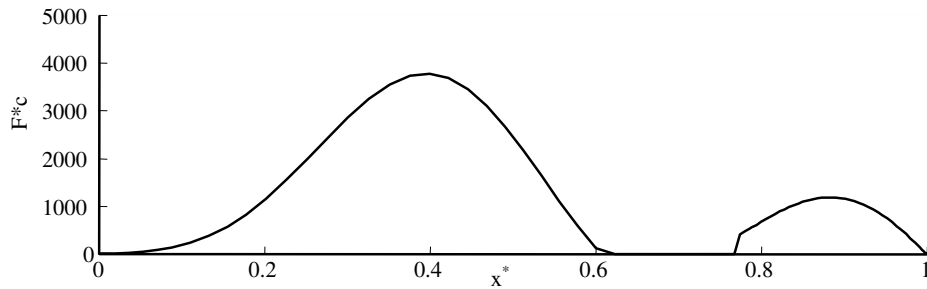
شکل (۵-۲) مقدار خیز تیر خطی و سیستم جرم و فنر را نشان می دهد که در طول تیر سیستم جرم و فنر از هم جدا شده و دوباره به آن باز می گردد. شکل (۵-۳) مقدار و زمان جدایش (پرش) تیر از سیستم جرم و فنر را نشان می دهد.



شکل (۵-۲) مقدار خیز بی بعد تیر خطی در حالت یکسر گیردار یکسر ساده (c-p) و سیستم جرم و فنر بر حسب مکان بی بعد



شکل (۵-۳) مقدار پرش بی بعد تیر خطی در حالت یکسر گیردار یکسر ساده (c-p) از سیستم جرم و فنر بر حسب زمان بی بعد



شکل (۴-۵) مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بین تیر خطی و سیستم جرم و فنر بر حسب مکان بی‌بعد در حالت یکسر یکسره ساده (c-p)

با توجه به شکل (۴-۵) مقدار نیروی تماسی بین تیر خطی و سیستم جرم و فنر در حالت یکسر درگیر یکسر ساده محاسبه گردیده است.

۵-۳-۱-۱-۱-۱-۱ اعتبار سنجی

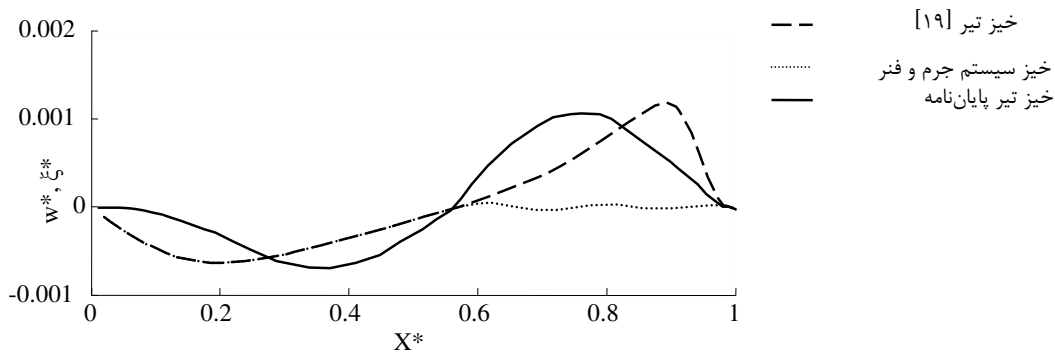
حل معادلات برای یک تیر خطی در حالت یکسر درگیر یکسر ساده با سیستم جرم و فنر محرک، ابتدا معادلات (۳-۵) و (۳-۷) بی‌بعد شده، سپس از روش اجزا محدود تفکیک گردیده و از روش آلفا تایم^۱ معادلات زمانی به دست آمده راه، حل کرده است. داده‌های به‌صورت جدول زیر بیان می‌گردد [۱۹].

جدول (۳-۵) داده‌های مرجع [۱۹]

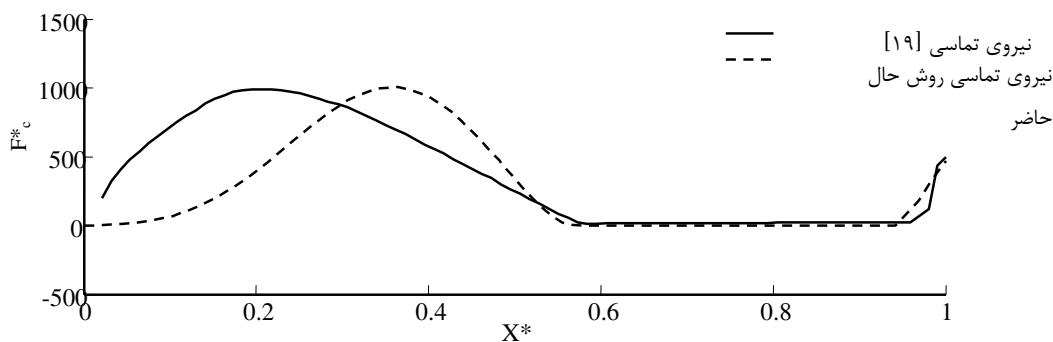
نام ضریب	اندازه
نسبت وزن تیر به جرم محرک ϕ	۵۰
نسبت طول تیر به سطح مقطع آن α	۵۲۷۰
نسبت بی‌بعد شده جرم تیر γ	۳۷.۲۷
کشش بی‌بعد β	3×10^{-3}
سرعت جرم و فنر بی‌بعد v^*	۲۵۰
نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد ω	۹۰۰۰

نتایج به‌صورت نموداری برای مقدار خیز و نیروی تماسی مورد بررسی قرار گرفته که به‌صورت زیر با روش موجود مقایسه می‌گردد.

^۱ Alfa time method



شکل (۵-۵) مقایسه خیز تیر با خیز تیر مرجع [۱۹] در حالت یکسر درگیر یکسر ساده



شکل (۶-۵) مقایسه نیروی تماسی با نیروی تماسی مرجع [۱۹] در حالت یکسر درگیر یکسر ساده

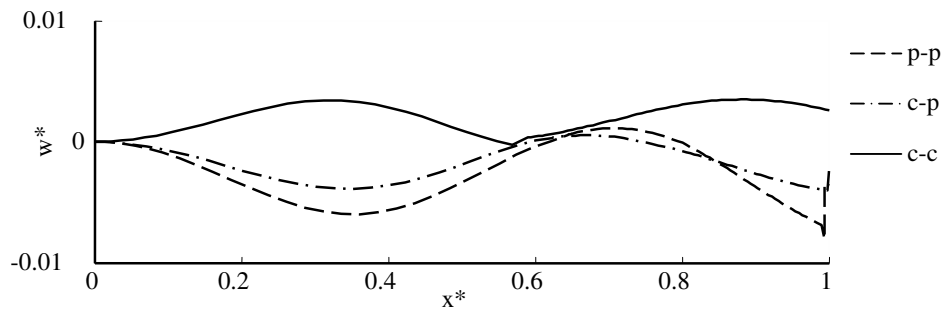
شکل (۵-۵) و شکل (۶-۵) نتایج این پایان نامه و مرجع [۱۹] را نشان می‌دهد، در مسأله تماس دینامیکی مقدار بیشینه و کمینه خیز و همچنین جدایش بسیار مهم است که در حل پایان نامه حاضر، به این مهم دست پیدا شده است و از ویژگی‌های روش حل، رسیدن سریع به جواب با دقت خوب است.

۵-۳-۱-۲-شرایط مرزی

تیر در حال کشش در حالت خطی می‌تواند در شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گیرد، تأثیر شرایط مرزی بر مقدار حداکثری نیروی تماسی، جدایش و خیز مورد بررسی قرار داده شود. در این

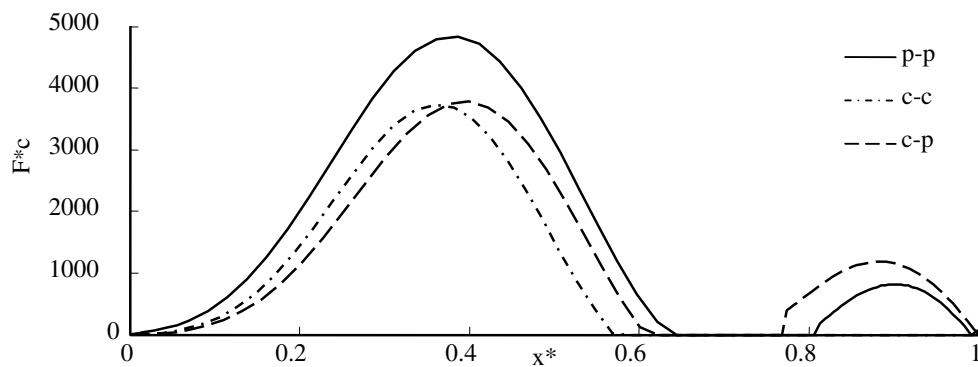
قسمت تیر در حالت‌های تکیه‌گاه گیردار-ساده، تکیه‌گاه ساده-ساده و تکیه‌گاه گیردار-گیردار که به ترتیب تابع گالرکین این شرایط مرزی در معادلات (۳-۴۱)-(۳-۴۳) به دست آورده شده است. مقادیر عددی با استفاده از جدول (۵-۲) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مقدار خیز در شکل (۵-۷) برای شرایط مرزی مختلف نشان می‌دهد. در حالت تکیه‌گاه گیردار-ساده نسبت به دو سر ساده و دو سر گیردار؛ مقدار بیشینه خیز کمتر نشان داده شده است.



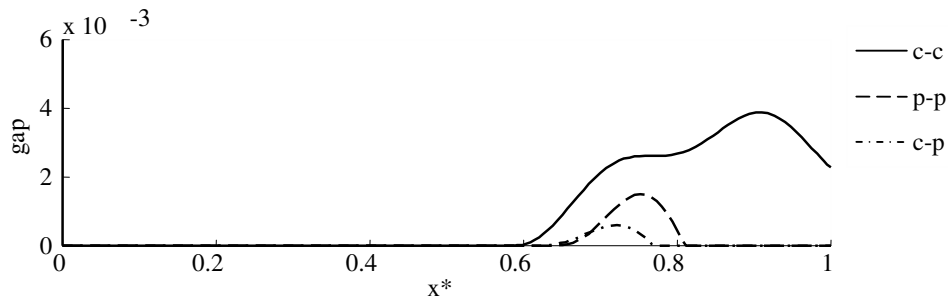
شکل (۵-۷) مقایسه خیز تیر بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c)

مقدار نیروی تماسی در شکل (۵-۸) مقدار متوسطی شرط تکیه‌گاه گیردار در ابتدای تیر و تکیه‌گاه ساده در انتهای تیر نسبت به دو شرط مرزی دیگر را نشان می‌دهد و این مقدار نیرو با توجه به گیردار بودن تیر در ابتدای آن اتفاق افتاده است.



شکل (۵-۸) مقایسه نیروی تماسی بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c)

با توجه به مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش که با شکل (۹-۵) نشان داده شده است. مقدار جدایش تیر در حالت تکیه‌گاه گیردار در ابتدای تیر و تکیه‌گاه ساده در انتهای تیر نسبت به دو شرط مرزی دیگر کمتر و به مقدار واقعی نزدیک‌تر هست.

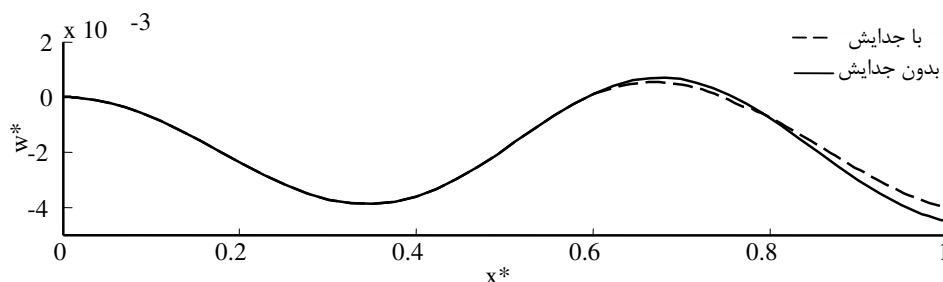


شکل (۹-۵) مقایسه مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش بر حسب مکان بی‌بعد در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار- ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c)

با توجه به نتیجه‌های به‌دست‌آمده در شکل (۷-۵) - شکل (۹-۵) شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار در ابتدای تیر و تکیه‌گاه ساده در انتهای تیر برای آنالیز مسأله تماس دینامیکی بهتر بوده و در ادامه برای آنالیز مسأله تماس از این شرط مرزی استفاده می‌شود.

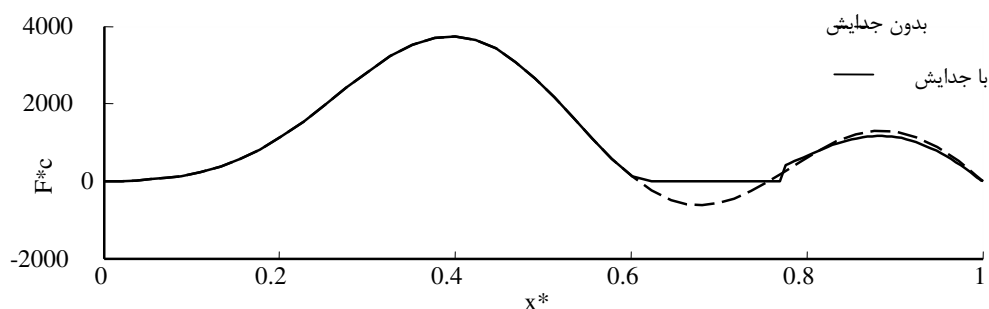
۵-۳-۱-۳-پریش

با توجه به الگوریتم (۱-۵) مسأله با جدایش و تماس مجدد توضیح داده شده است. در این قسمت خیز و نیروی تماسی تیر و سیستم جرم و فنر در تمام طول حرکت با هم تماس داشته با زمانی که جدایش بین سیستم باشد، مقایسه خواهد شد. برای زمان تماس باید دستگاه معادله (۳-۴۵) حل گردد، اما زمانی که جدایش باشد باید دستگاه معادله (۳-۴۵) و (۳-۴۶) به‌طور هم‌زمان بر طبق الگوریتم (۱-۵) حل شوند؛ نمودار خیز تیر خطی به‌صورت زیر بیان می‌شود.



شکل (۱۰-۵) مقایسه خیز تیر بر حسب مکان بی‌بعد با جدایش در طول تیر و در حالت تماس دائم در طول تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

در شکل (۱۰-۵) خیز تیر در حالت تماس دائم با طول تیر و وجود جدایش در طول تیر را نشان می‌دهد. در زمانی که جدایش، بیشینه خیز کم‌تر از تماس دائم هست. نمودار نیروی تماسی در حالت تماس دائم و با جدایش به صورت زیر بیان می‌گردد.



شکل (۱۱-۵) مقایسه نیروی تماسی بر حسب مکان بی‌بعد با جدایش در طول تیر و در حالت تماس دائم در طول تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

با توجه به شکل (۱۱-۵) نیروی تماسی برای زمانی که تیر با سیستم جرم و فنر در تماس دائم باشد، منفی شده و در ادامه مثبت می‌شود. این همان زمان جدایش بین تیر و سیستم جرم و فنر می‌باشد.

۵-۳-۱-۴- تأثیر متغیرها بر حل مسأله تماس دینامیکی خطی

با در نظر گرفتن پانتوگراف مدل (DSA 350s) مقدار کشش طولی تیر با افزایش سرعت افزایش پیدا می‌کند. مقدارهای در نظر گرفته شده برای حداکثر تغییرات سرعت و کشش طولی تیر بر اساس [۲۳] به ترتیب تا ۹۷ متر بر ثانیه و از ۴۰ KN - ۱۵ KN در نظر گرفته می‌شود. تغییرات ضریب فنریت پانتوگراف را با استفاده از [۲۴] بین ۹۷۵Nm^{-1} - ۶۷۵Nm^{-1} قابل تغییر می‌باشد. حال با توجه

به داده‌های در نظر گرفته شده و جدول (۲-۵)، به تحلیل متغیرهای مسأله تماس دینامیکی پرداخته می‌شود.

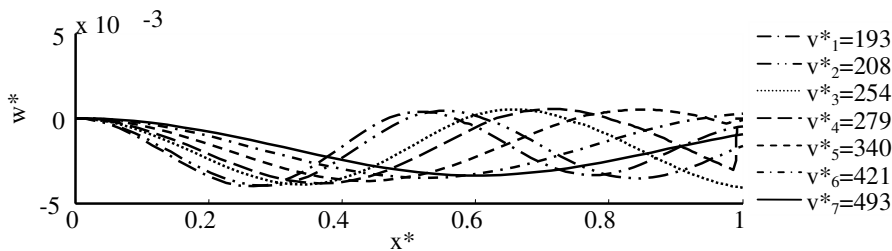
۵-۳-۱-۴-۱- تغییرات سرعت

در قطارهای با سرعت بالا مقدار جدایش بین پانتوگراف و شبکه بالاسری و حداکثر نیروی تماسی بسیار مهم می‌باشد، پس به همین دلیل تغییرات سرعت به صورت جدول زیر بیان می‌شود.

جدول (۴-۵) تغییرات سرعت

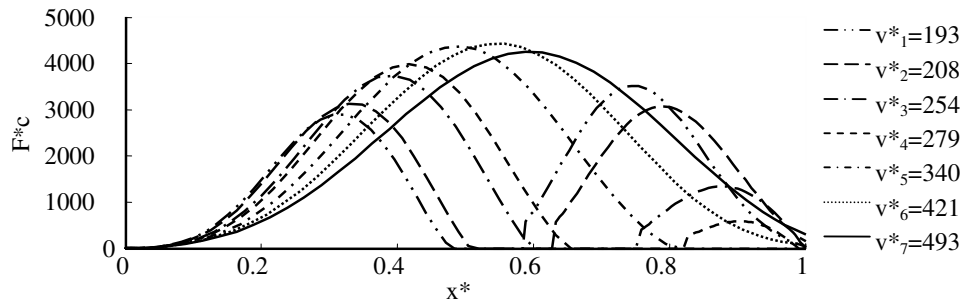
حالت	v مقدار سرعت با بعد (ms^{-1})	سرعت جرم و فنر بی بعد v^*
۱	۳۸	۱۹۳
۲	۴۱	۲۰۸
۳	۵۰	۲۵۴
۴	۵۵	۲۷۹
۵	۶۷	۳۴۰
۶	۸۳	۴۲۱
۷	۹۷	۴۹۳

پارامترهای دیگر مانند جدول (۲-۵) بیان می‌گردد. با توجه به جدول (۴-۵) در ادامه اثر تغییرات سرعت بر بیشینه خیز، نیروی تماسی و مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر محرک بر حسب مکان بی‌بعد بیان می‌گردد. با بررسی شکل (۱۲-۵) مقدار بیشینه خیز تیر در حال کشش با افزایش سرعت تغییر زیادی نمی‌کند و فقط موجب به وجود آمدن جدایش کم‌تر در طول تیر می‌شود. از سرعت ۴۲۱ که معادل (83 ms^{-1}) به بالاتر می‌رود سیستم جرم و فنر از تیر در حال کشش جدا نمی‌گردد.



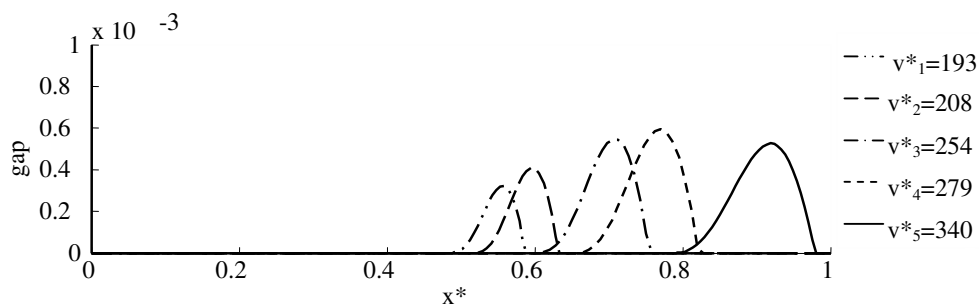
شکل (۱۲-۵) اثر تغییرات سرعت بر خیز تیر بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

بر اساس شکل (۵-۱۳) مقدار بیشینه‌ی نیروی تماسی با افزایش سرعت، افزایش پیدا می‌کند. سرعت برای زمانی که مقدارش از ۴۲۱ که معادل (83 ms^{-1}) به بالاتر می‌رود سیستم جرم و فنر از تیر در حال کشش جدا نمی‌گردد.



شکل (۵-۱۳) اثر تغییرات سرعت بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

زمان و مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش با شکل (۵-۱۴) نشان داده شده است. با افزایش سرعت، مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر به انتهای تیر نزدیک‌تر خواهد شد. از سرعت ۴۲۱ که معادل (83 ms^{-1}) هست؛ سیستم جرم و فنر در طول تیر جدایش نخواهد داشت.



شکل (۵-۱۴) اثر تغییرات سرعت بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

بنابراین بر اساس شکل (۵-۱۲)-شکل (۵-۱۴) مسأله جدایش در سرعت‌های پایین‌تر از ۴۲۱ مطرح شده ولی نیروی تماسی در سرعت‌های بالا افزایش زیادی داشته است.

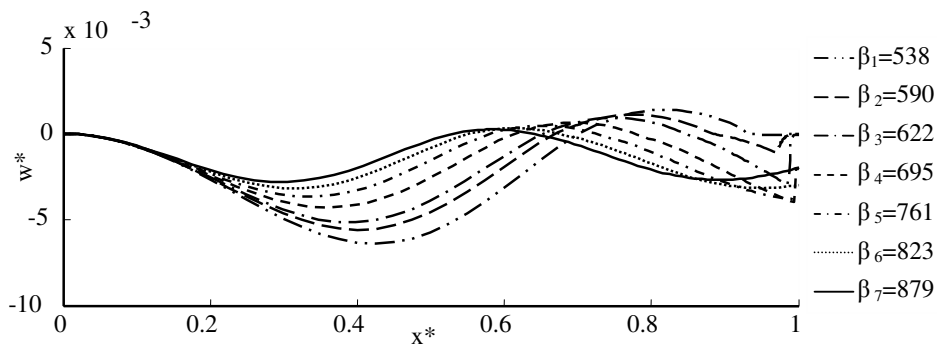
۵-۳-۱-۴-۲- تغییرات کشش طولی تیر

کابل اتصال پانتوگراف در شبکه بالاسری که با استفاده از فاصله‌هایی از یکدیگر قرار گرفته‌اند. با قرار دادن وزنه‌هایی که به آن‌ها آویزان می‌شود، مقدار کشش طولی را در کابل ایجاد می‌شود. مقدار کشش طولی در کابل یک مقدار بسیار مهم است؛ که برای مقدارهایی از کشش طولی در سیم اتصال که بیشتر مورد استفاده قرار گرفته بر طبق جدول زیر بیان می‌شود.

جدول (۵-۵) تغییرات کشش طولی تیر

حالت	T مقدار کشش طولی (KN)	کشش بی‌بعد β
۱	۱۵	۵۳۸
۲	۱۸	۵۹۰
۳	۲۰	۶۲۲
۴	۲۵	۶۹۵
۵	۳۰	۷۶۱
۶	۳۵	۸۲۳
۷	۴۰	۸۷۹

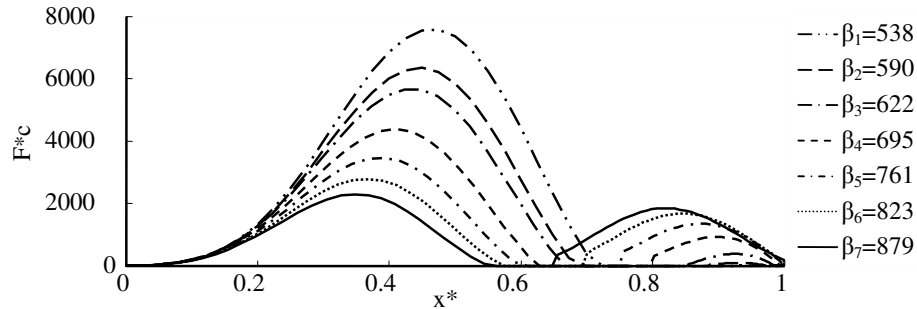
ولی پارامترهای دیگر مانند جدول (۲-۵) بیان شده و با توجه به جدول (۵-۵) در ادامه اثر کشش طولی تیر بر خیز تیر، نیروی تماسی و مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر محرک بر حسب مکان بی‌بعد بررسی می‌شود.



شکل (۱۵-۵) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار خیز بی‌بعد تیر بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

با توجه به شکل (۵-۱۵) کشش طولی بر مقدار خیز تیر تأثیر بسزایی دارد به طوری که با افزایش

کشش مقدار خیز کاهش می‌یابد.

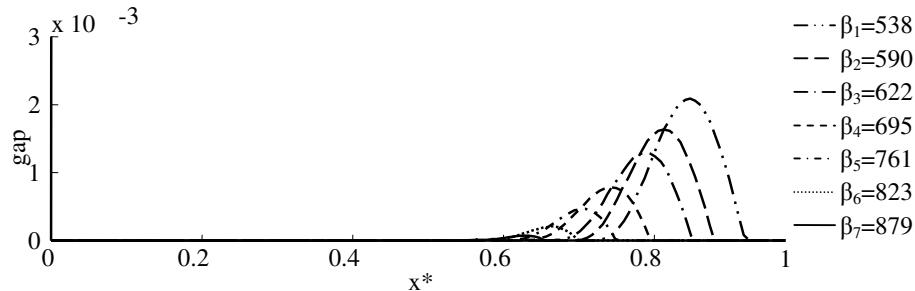


شکل (۵-۱۶) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

بر اساس شکل (۵-۱۶) مقدار نیروی تماسی بین تیر در حال کشش و سیستم جرم و فنر با افزایش

کشش طولی مقدار نیروی تماسی کمتر می‌شود. این عامل بسیار خوب برای کنترل حداکثری نیروی

تماسی می‌باشد. شکل (۵-۱۷) مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر خطی را نشان می‌دهد.



شکل (۵-۱۷) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر در حالت (c-p)

شکل (۵-۱۷) مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر محرک و تیر را نشان می‌دهد. با توجه به

مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر محرک و تیر تحت کشش با افزایش کشش، مقدار جدایش

کاهش می‌یابد؛ بنابراین متغیر کشش بر مقدار جدایش و مقدار بیشینه‌ی نیروی تماسی اثر می‌گذارد و

می‌تواند به‌عنوان یک متغیر تأثیر گذار از آن استفاده نمود.

۵-۳-۱-۳-۳- تغییرات ضریب فنریت پانتوگراف

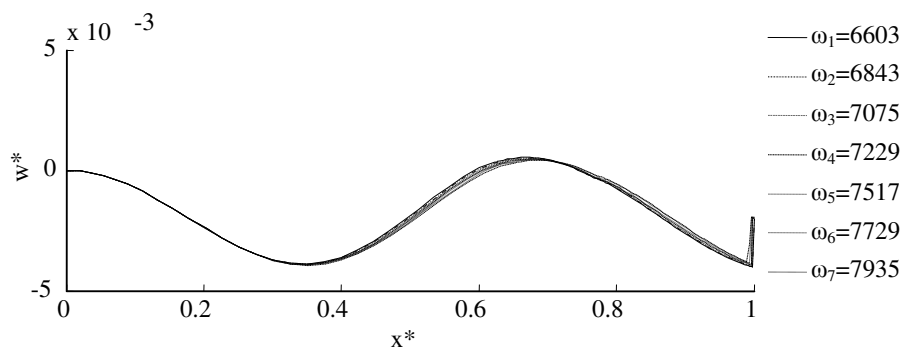
مقدار ضریب فنریت پانتوگراف با توجه به نوع آن می‌تواند تغییر کند؛ با استفاده از این ضریب فنریت‌ها و قرار دادن مقادیر دیگر از جدول (۵-۲) اثر این ضریب بر روی بیشینه نیروی تماسی و مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در جدولی بررسی می‌گردد.

جدول (۵-۶) تغییرات ضریب فنریت پانتوگراف

حالت	k ثابت فنر (Nm^{-1})	نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد ω
۱	۶۷۵	۶۶۰۳
۲	۷۲۵	۶۸۴۳
۳	۷۷۵	۷۰۷۵
۴	۸۲۵	۷۲۹۹
۵	۸۷۵	۷۵۱۷
۶	۹۲۵	۷۷۲۹
۷	۹۷۵	۷۹۳۵

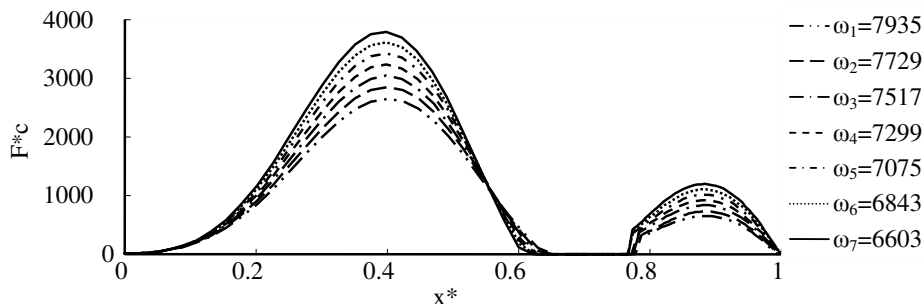
بر اساس جدول (۵-۶) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر روی خیز

بر اساس شکل (۵-۱۸) بسیار ناچیز می‌باشد.



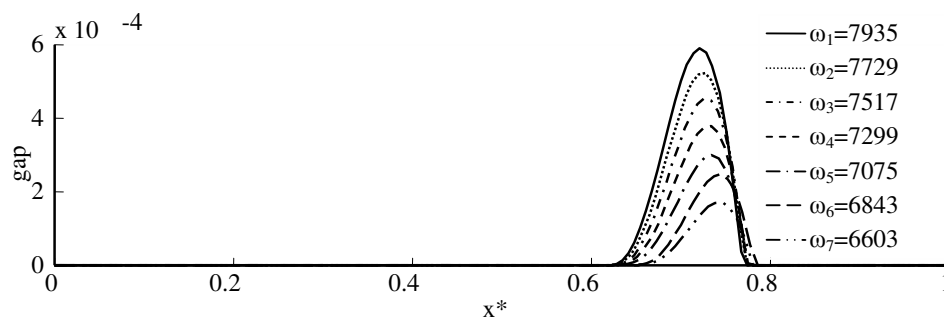
شکل (۵-۱۸) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار خیز بی‌بعد تیر بر حسب مکان بی‌بعد در حالت (c-p)

نیروی تماسی مطابق شکل (۵-۱۹) نشان داده شده است. با توجه به وجود این نسبت در معادله (۳-۱۳) نیروی تماسی بی‌بعد، بنابراین با افزایش آن مقدار بیشینه نیروی تماسی افزایش پیدا می‌کند.



شکل (۵-۱۹) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریّت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر در حالت (c-p)

بر اساس شکل (۵-۲۰) مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر محرک و تیر خطی، افزایش نسبت ضریب فنریّت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد باعث افزایش بیشینه جدایش در این مسأله می‌گردد.

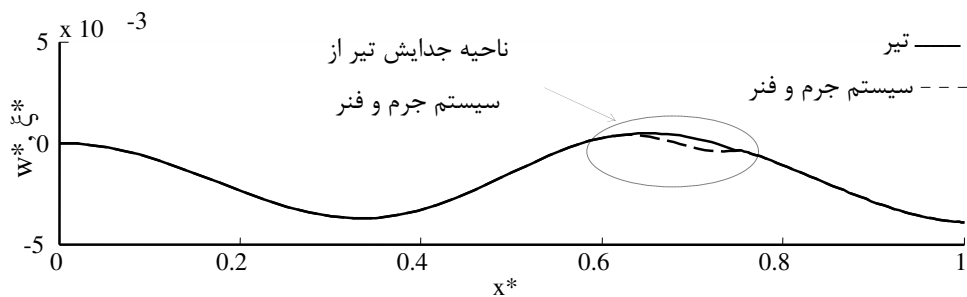


شکل (۵-۲۰) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریّت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر در حالت (c-p)

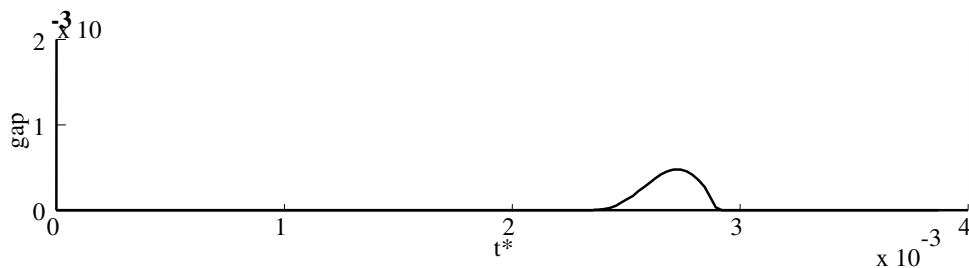
با توجه به شکل (۵-۱۸)-شکل (۵-۲۰) که به ترتیب برای خیز تیر، نیروی تماسی و جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش تحت اثر ضریب فنریّت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد رسم گردیده است. مقدار افزایش این نسبت باعث افزایش نیروی تماسی و جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر می‌گردد.

۵-۳-۲- تحلیل غیرخطی

برای حل معادلات غیرخطی باید در الگوریتم (۵-۱) برای زمان تماس از دستگاه (۴-۱۹) و زمان جدایش از دستگاه (۴-۲۰) استفاده نمود. با توجه به جدول (۵-۲) نتایج برای خیز، پرش و نیروی تماس بین تیر غیرخطی در حالت یکسر درگیر یکسر ساده و سیستم جرم و فنر به صورت زیر نشان داده می شود.

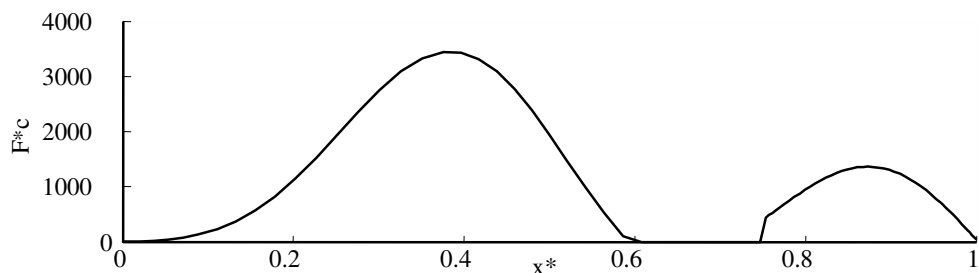


شکل (۵-۲۱) مقدار خیز بی بعد تیر غیرخطی در حالت یکسر گیردار یکسر ساده (c-p) و سیستم جرم و فنر بر حسب مکان بی بعد



شکل (۵-۲۲) مقدار پرش بی بعد تیر غیرخطی در حالت یکسر گیردار یکسر ساده (c-p) از سیستم جرم و فنر بر حسب زمان بی بعد

شکل (۵-۲۱) مقدار خیز تیر غیرخطی و سیستم جرم و فنر را نشان می دهد که در طول تیر سیستم جرم و فنر از هم جدا شده و دوباره به آن باز می گردد. در شکل (۵-۲۲) مقدار و زمان جدایش (پرش) تیر را از سیستم جرم و فنر را نشان می دهد.

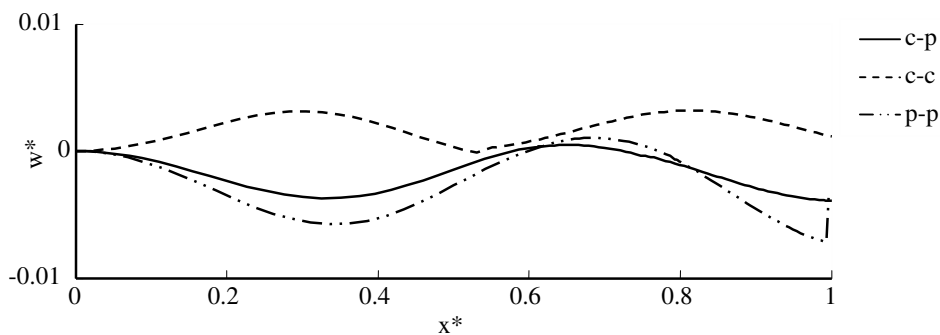


شکل (۲۳-۵) مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بین تیر غیرخطی و سیستم جرم و فنر بر حسب مکان بی‌بعد در حالت یک‌سر گیردار یک‌سر ساده (c-p)

با توجه به شکل (۲۳-۵) مقدار نیروی تماسی بین تیر غیرخطی و سیستم جرم و فنر در حالت یک‌سر درگیر یک‌سر ساده محاسبه گردیده است. به دلیل کار نشدن مسأله در حالت غیرخطی نموداری برای اعتبار سنجی ارائه نگردیده است.

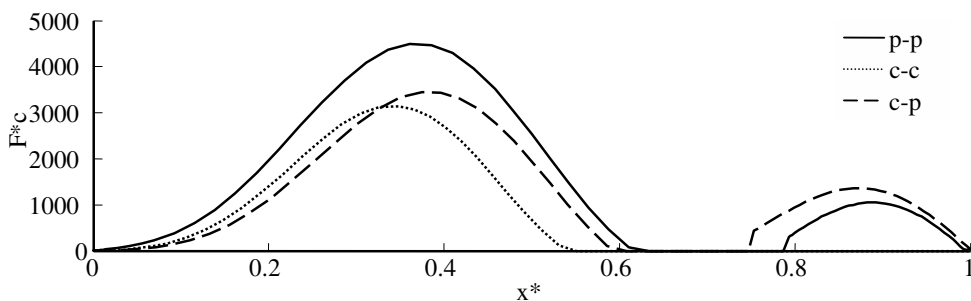
۵-۳-۲-۱- شرایط مرزی

تیر در حال کشش در حالت غیرخطی می‌تواند در شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گیرد. تأثیر شرایط مرزی بر مقدار حداکثری نیروی تماسی، جدایش و خیز مورد بررسی قرار داده شود. در این قسمت تیر در حالت‌های تکیه‌گاه گیردار-ساده، تکیه‌گاه ساده-ساده و تکیه‌گاه گیردار-گیردار که به ترتیب تابع گالرکین این شرایط مرزی در معادلات (۳-۴۱)-(۳-۴۳) به دست آورده شده است. مقدارهای عددی با استفاده از جدول (۲-۵) مورد بررسی قرار می‌گیرد. مقدار خیز در شکل (۲۴-۵) برای شرایط مرزی مختلف نشان می‌دهد. مقدار بیشینه خیز تیر در حالت یک‌سر درگیر یک‌سر ساده نسبت به دو سر ساده و دو سر گیردار کم‌تر است.

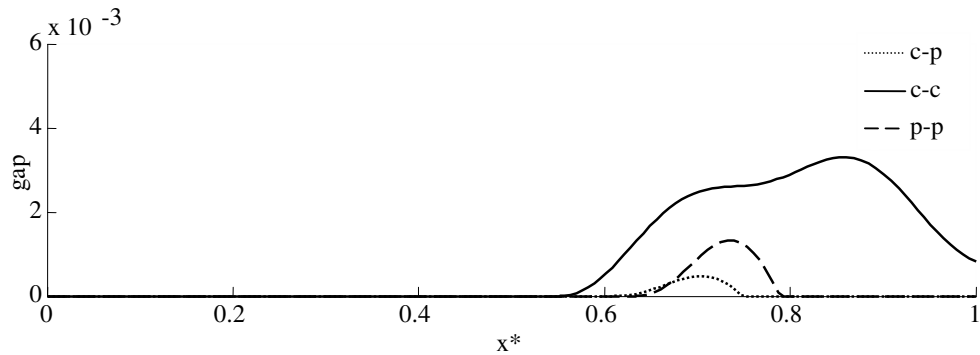


شکل (۲۴-۵) مقایسه خیز تیر بر حسب مکان بی‌بعد در حالت تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c)

مقدار نیروی تماسی در شکل (۲۵-۵) برای تیر در حالت یک‌سر درگیر یک‌سر ساده نسبت به دو سر ساده و دوسر گیردار مقدار متوسطی دارد؛ با توجه به مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش که با شکل (۲۶-۵) نشان داده شده است. مقدار جدایش تیر در حالت تکیه‌گاه گیردار در ابتدای تیر و تکیه‌گاه ساده در انتهای تیر نسبت به دو سر ساده و دو سر گیردار کمتر می‌باشد.



شکل (۲۵-۵) مقایسه نیروی تماسی بر حسب مکان بی‌بعد در حالت تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c)

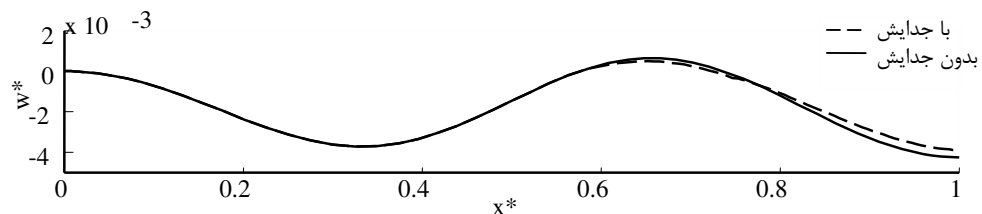


شکل (۵-۲۶) مقایسه مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش بر حسب مکان بی بعد در حالت تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)، تکیه‌گاه ساده-ساده (p-p) و تکیه‌گاه گیردار-گیردار (c-c)

با توجه به نتیجه‌های به دست آمده در شکل (۵-۲۴) - شکل (۵-۲۶) تیر یک‌سر گیردار یک‌سر ساده مانند حالت خطی برای آنالیز مسأله تماس دینامیکی به دلیل جدایش متناسب و نیروی تماسی متوسط بهتر بوده و در ادامه برای آنالیز مسأله تماس از این شرط مرزی استفاده می‌شود.

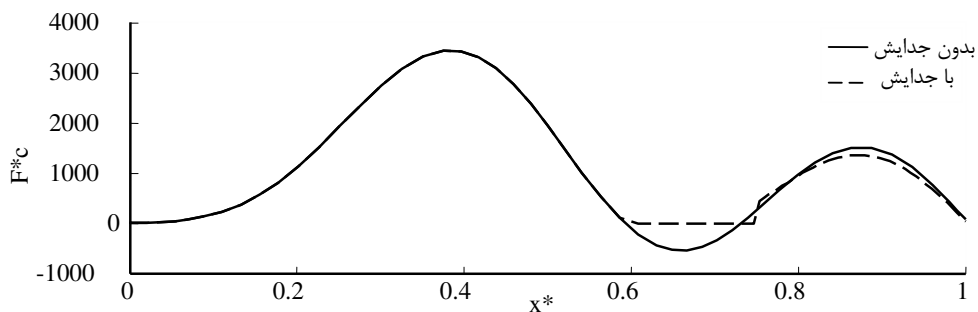
۵-۳-۲-۲-پریش

با توجه به الگوریتم (۵-۱) مسأله با جدایش و تماس مجدد توضیح داده شده است. در این قسمت خیز و نیروی تماسی تیر و سیستم جرم و فنر در تمام طول حرکت با هم تماس داشته با زمانی که جدایش بین سیستم باشد، مقایسه خواهد شد. برای زمان تماس باید دستگاه معادله (۴-۱۹) حل گردد اما زمانی که جدایش باشد؛ باید دستگاه معادله (۴-۱۹) و (۴-۲۰) به‌طور هم‌زمان بر طبق الگوریتم (۵-۱) حل شوند، نمودار خیز تیر غیرخطی برای یک‌سر درگیر یک‌سر ساده، به‌صورت زیر بیان می‌شود.



شکل (۵-۲۷) مقایسه خیز تیر بر حسب مکان بی بعد با جدایش در طول تیر و در حالت تماس دائم در طول تیر غیر-خطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

شکل (۵-۲۷) خیز تیر در حالت تماس دائم و با وجود جدایش در طول تیر را با هم مقایسه می‌کند. زمانی که جدایش باشد، بیشینه خیز کم‌تر از تماس دائم می‌باشد. نمودار نیروی تماسی در حالت تماس دائم و با جدایش به صورت زیر بیان می‌گردد.



شکل (۵-۲۸) مقایسه نیروی تماسی بر حسب مکان بی‌بعد با جدایش در طول تیر و در حالت تماس دائم در طول تیر غیرخطی با تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

با توجه به شکل (۵-۲۸) نیروی تماسی برای زمانی که تیر تحت کشش با سیستم جرم و فنر در تماس دائم باشد، منفی شده و در ادامه مثبت می‌شود. این همان زمان جدایش بین تیر و سیستم جرم و فنر می‌باشد.

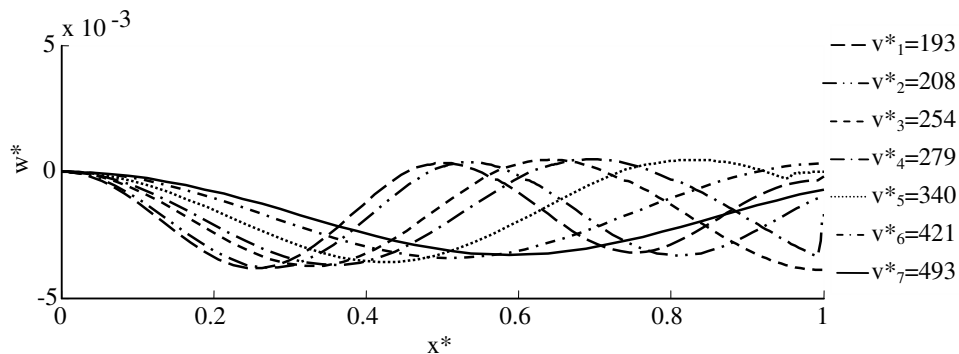
۵-۳-۲-۳- تأثیر متغیرها بر حل مسأله تماس دینامیکی غیرخطی

با در نظر گرفتن پانتوگراف مدل (DSA 350S) مقدار کشش طولی تیر با افزایش سرعت افزایش پیدا می‌کند. مقدارهای در نظر گرفته شده برای حداکثر تغییرات سرعت و کشش طولی تیر بر اساس قسمت ۴-۴-۵ و جدول (۲-۵) بیان می‌گردد. در ضمن تیر در حالت یک‌سر گیردار یک‌سر ساده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۵-۳-۲-۱- تغییرات سرعت

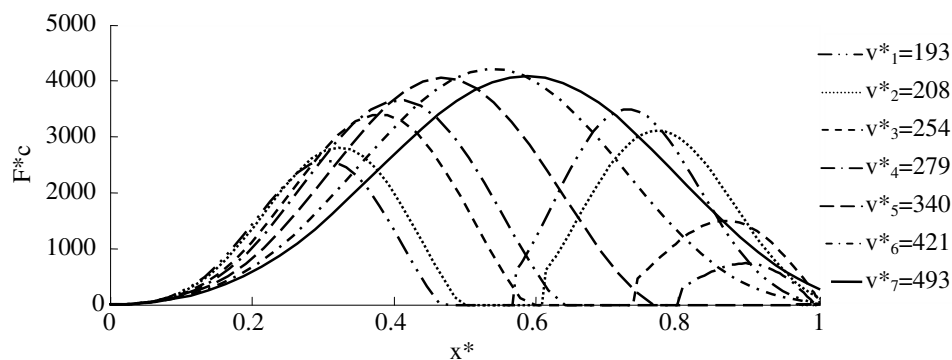
در قطارهای با سرعت بالا مقدار جدایش بین پانتوگراف و شبکه بالا سری و حداکثر نیروی تماسی بسیار مهم می‌باشد. با توجه به جدول (۴-۵) و جدول (۲-۵) در ادامه اثر تغییرات سرعت بر بیشینه خیز، نیروی تماسی و مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر محرک بر حسب مکان بی‌بعد بیان

می‌گردد. با بررسی شکل (۲۹-۵) مقدار بیشینه خیز تیر با افزایش سرعت تغییر زیادی نمی‌کند؛ فقط موجب به وجود آمدن جدایش کم‌تر در طول تیر می‌شود. از سرعت ۴۲۱ که معادل (83 ms^{-1}) به بالاتر می‌رود سیستم جرم و فنر از تیر تحت کشش جدا نمی‌گردد؛ به دلیل جدا نشدن سیستم جرم و فنر از تیر نوسانات خیز کم‌تر است.



شکل (۲۹-۵) اثر تغییرات سرعت بر مقدار خیز بی‌بعد تیر غیرخطی بر حسب مکان بی‌بعد در حالت یک‌سر درگیر یک‌سر ساده (c-p)

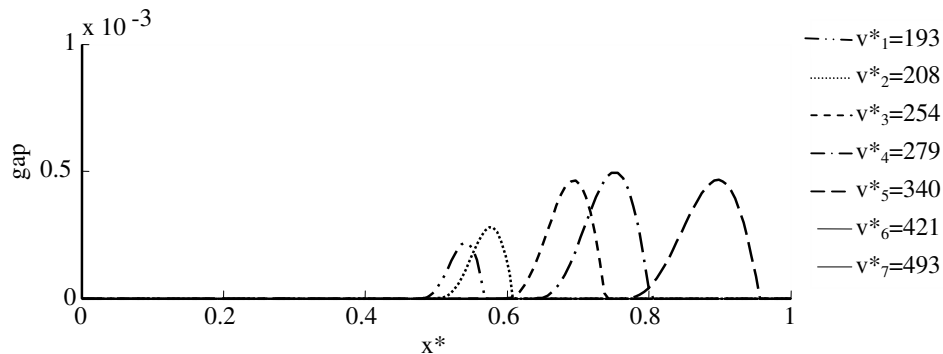
بر اساس شکل (۳۰-۵) مقدار بیشینه نیروی تماسی با افزایش سرعت، افزایش پیدا می‌کند. سرعت برای زمانی که مقدارش از ۴۲۱ که معادل (83 ms^{-1}) به بالاتر می‌رود، سیستم جرم و فنر از تیر در حال کشش جدا نمی‌گردد. مقدار بیشینه نیروی تماسی نیز به تقریب در طول تیر ثابت باقی می‌ماند.



شکل (۳۰-۵) اثر تغییرات سرعت بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر غیرخطی در حالت (c-p)

زمان و مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر با شکل (۳۱-۵) نشان داده شده است. با افزایش

سرعت؛ مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر به انتهای تیر نزدیکتر خواهد شد ولی از سرعت ۴۲۱ که معادل (83 ms^{-1}) دیگر سیستم جرم و فنر در طول تیر جدایش نخواهد داشت.

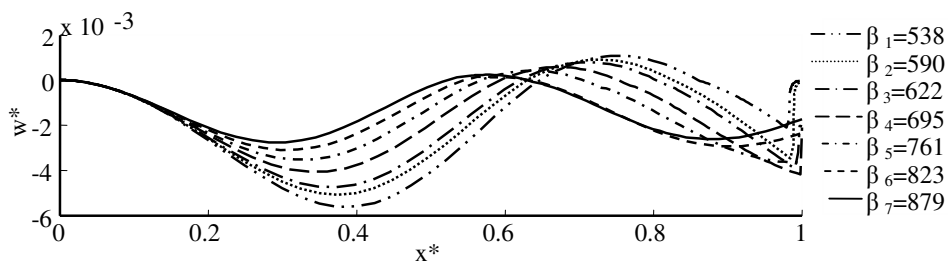


شکل (۵-۳۱) اثر تغییرات سرعت بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر در حالت (c-p)

بنابراین بر اساس شکل (۵-۲۹)-شکل (۵-۳۱) مسأله جدایش در سرعت‌های پایین‌تر از ۴۲۱ مطرح شده ولی نیروی تماسی در سرعت‌های بالا افزایش داشته است.

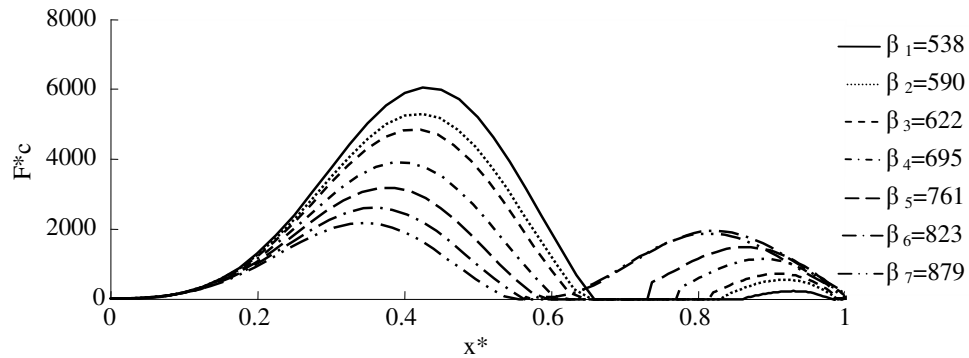
۵-۳-۲- تغییرات کشش طولی تیر

کابل اتصال پانتوگراف در شبکه بالاسری که با استفاده از فاصله‌هایی از یکدیگر قرار گرفته‌اند؛ با قرار دادن وزنه‌هایی که به آن‌ها آویزان می‌شود مقدار کشش طولی را در کابل ایجاد می‌شود. مقدار کشش طولی در کابل یک مقدار بسیار مهم است. با توجه به جدول (۵-۵) و جدول (۵-۲) در ادامه اثر کشش طولی تیر بر خیز تیر غیرخطی، نیروی تماسی و مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر محرک بر حسب مکان بی‌بعد بررسی می‌شود.



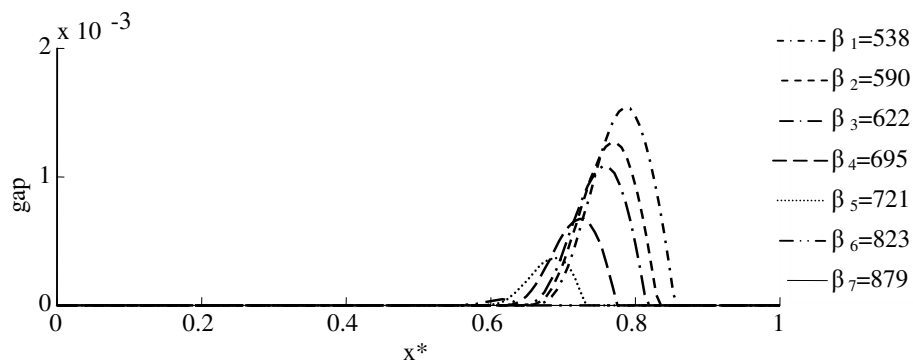
شکل (۵-۳۲) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار خیز بی‌بعد تیر بر حسب مکان بی‌بعد در حالت یک‌سر در گیر یک‌سر ساده (c-p)

با توجه به شکل (۳۲-۵) کشش طولی بر مقدار خیز تیر تأثیر بسزایی دارد به طوری که با افزایش کشش مقدار خیز تیر غیرخطی کاهش می‌یابد.



شکل (۳۳-۵) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر در حالت یکسر درگیر یکسر ساده (c-p)

بر اساس شکل (۳۳-۵) مقدار نیروی تماسی بین تیر در غیر خطی و سیستم جرم و فنر با افزایش کشش طولی مقدار نیروی تماسی کمتر می‌شود. شکل (۳۴-۵) مقدار جدایش (پرش)، بین سیستم جرم و فنر و تیر را نشان می‌دهد.

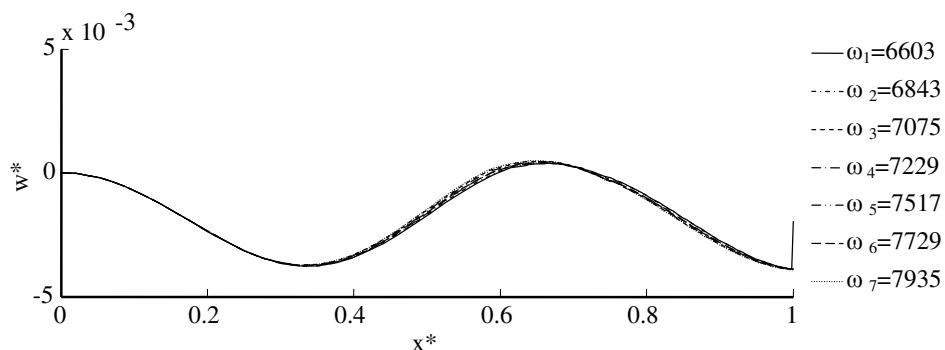


شکل (۳۴-۵) اثر تغییرات کشش طولی بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر غیر خطی در حالت یکسر درگیر یکسر ساده (c-p)

شکل (۳۴-۵) مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر محرک و تیر غیرخطی نشان داده شده است؛ با توجه به مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر محرک و تیر؛ با افزایش کشش، مقدار جدایش کاهش می‌یابد؛ بنابراین متغیر کشش بر مقدار جدایش و مقدار نیروی تماسی اثر می‌گذارد.

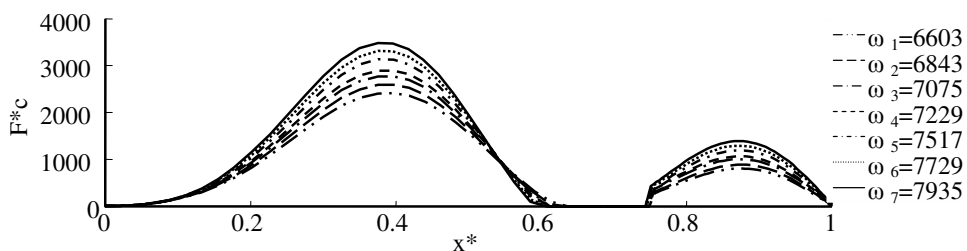
۵-۳-۲-۳-۳- تغییرات ضریب فنریت پانتوگراف

مقدار ضریب فنریت پانتوگراف با توجه به نوع آن می‌تواند تغییر کند؛ با توجه به جدول (۵-۶) و جدول (۵-۲) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر روی خیز بر اساس شکل (۵-۳۵)، با افزایش این ضریب بر روی خیز تیر در حالت یکسر درگیر یکسر ساده تأثیر نمی‌گذارد.



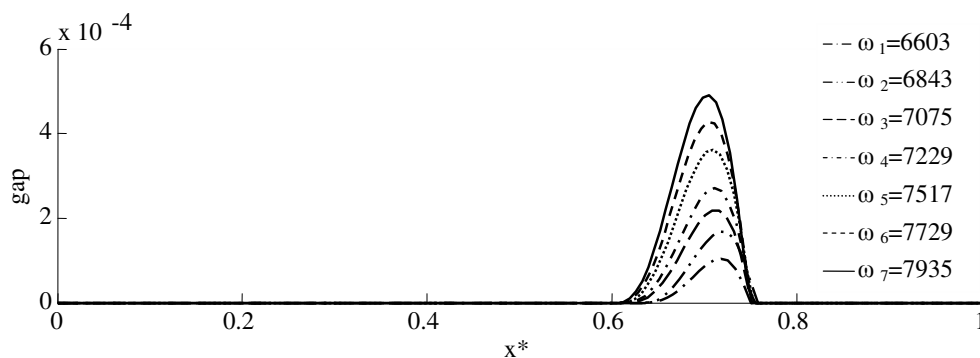
شکل (۵-۳۵) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار خیز بی‌بعد تیر غیر خطی بر حسب مکان بی‌بعد در حالت تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

نیروی تماسی مطابق شکل (۵-۳۶) نشان داده شده است. با توجه به وجود این ضریب در نیروی تماسی، با افزایش آن مقدار نیروی تماسی افزایش پیدا می‌کند.



شکل (۵-۳۶) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار نیروی تماسی بی‌بعد بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر غیر خطی در حالت تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

بر اساس شکل (۵-۳۷) مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر محرک و تیر در حال کشش، افزایش ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد باعث افزایش بیشینه جدایش در این سیستم می‌گردد.

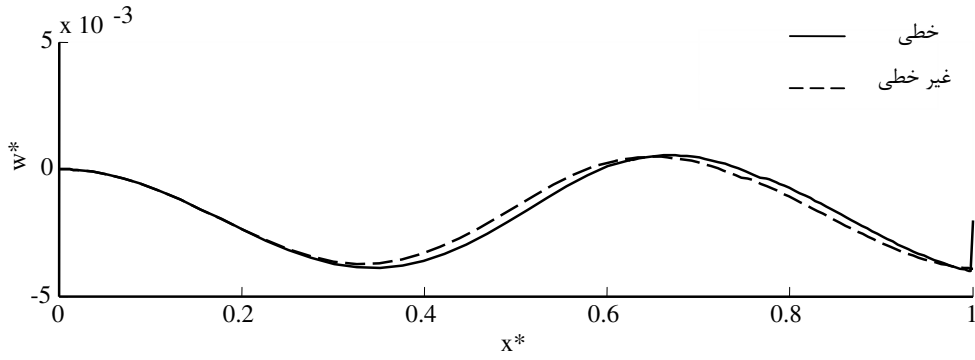


شکل (۳۷-۵) اثر تغییرات نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر مقدار جدایش بر حسب مکان بی‌بعد برای تیر غیر خطی در حالت تکیه‌گاه گیردار-ساده (c-p)

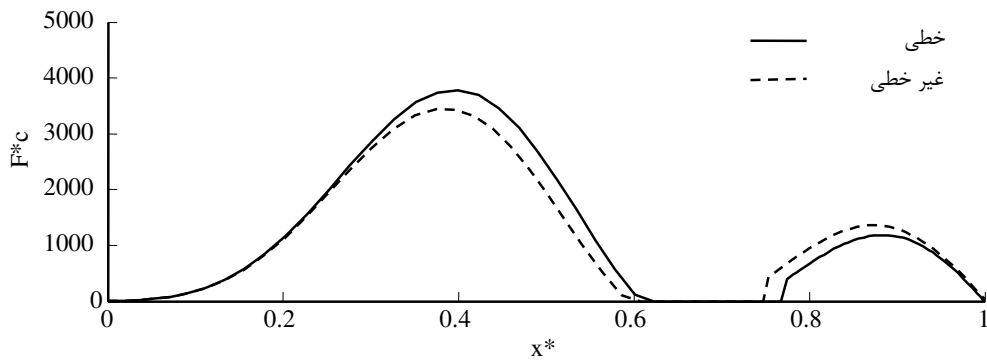
با توجه به شکل (۳۵-۵) - شکل (۳۷-۵) که به ترتیب برای خیز تیر، نیروی تماسی و جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر که برای تغییرات ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد رسم گردیده است. مقدار افزایش این ضریب باعث افزایش نیروی تماسی و جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر تحت کشش می‌گردد؛ مقدار جدایش زیاد و نیروی تماسی بالا با کاهش نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد قابل کنترل می‌باشد.

۵-۳-۳- مقایسه تحلیل خطی با غیر خطی

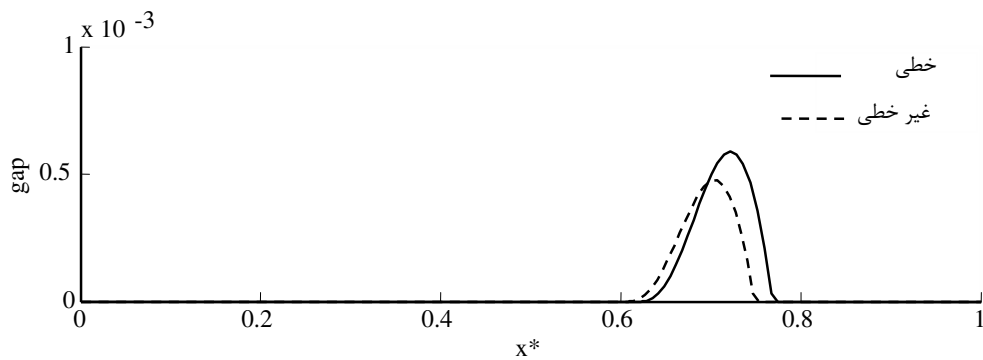
برای بررسی تأثیر غیرخطی شدن مسأله بر روند حل آن می‌توان با حل‌های ارائه شده بین حالت خطی و غیرخطی مقدار خیز تیر، نیروی تماسی و جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش، مورد بررسی قرار گیرد؛ در شکل (۳۸-۵) و شکل (۳۹-۵) به ترتیب مقدار خیز و نیروی تماسی برای حالت غیرخطی و خطی مقایسه گردیده است. به دلیل وجود جمله غیرخطی کننده مسأله تماس دینامیکی مقدار خیز کمتر بوده ولی مقدار بیشینه نیروی تماسی در ابتدای تیر تا قبل از جدایش کمتر ولی در انتهای تیر و بعد از تماس مجدد مقدار بیشینه نیروی تماسی نسبت به حالت خطی افزایش می‌یابد.



شکل (۳۸-۵) مقایسه خیز تیر خطی و غیر خطی بر حسب مکان بی‌بعد با شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)



شکل (۳۹-۵) مقایسه نیروی تماسی خطی و غیر خطی بر حسب مکان بی‌بعد با شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)



شکل (۴۰-۵) مقایسه مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش خطی و غیر خطی بر حسب مکان بی‌بعد با شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار - ساده (c-p)

مقدار جدایش که در شکل (۵-۴۰) نشان داده شده در حالت غیرخطی نسبت به خطی در مکان زودتر و با بیشینه کم‌تر اتفاق می‌افتد. با توجه به شکل (۵-۳۸)-شکل (۵-۴۰) نشان داده شده در حالت غیرخطی نسبت به خطی مقادیر عددی به تقریب کم‌تر بوده است.

۵-۴-جمع‌بندی

در این فصل، ابتدا الگوریتم حل مسأله تماس دینامیکی بیان گردید. در ادامه نتایج تیر خطی اعتبار سنجی شده و نتیجه‌ی قابل قبولی از نظر بیشینه و کمینه خیز و نیروی تماسی ارائه گردیده است. شرط مرزی‌های مختلف برای تیر خطی و غیرخطی مورد بررسی قرار گرفت؛ که شرط مرزی تکیه‌گاه گیردار-ساده نسبت به شرط مرزی‌های تکیه‌گاه گیردار-گیردار و تکیه‌گاه ساده-ساده نتایجی ارائه کرده است. مسأله جدایش را زمانی که تماس دائم باشد مقایسه گردید. معادلات خطی و غیرخطی مسأله تماس دینامیکی تحلیل پارامتری شد. اثر سرعت، کشش تیر و نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد بر رفتار مسأله مشخص شد. در نهایت مسأله در حالت خطی و غیرخطی با هم مقایسه گردید.

فصل ششم

نتیجه گیری و پیشنهادها

۶-۱-مقدمه

در این پایان‌نامه به حل عددی معادلات تماس دینامیکی برای یک تیر غیرخطی اوپلر برنولی تحت کشش با سیستم جرم و فنر محرک پرداخته شد. در ابتدا، بر اساس کرنش‌های فن کارمن برای تغییر شکل‌های بزرگ، معادلات حاکم مسأله بر حسن منته‌های تنش استخراج شد. در ادامه معادلات خطی و غیرخطی به‌دست آمد که این معادلات با مشتقات جزئی شامل متغیرهای زمان و مکان بوده که به کمک اصل همپلتون تعیین شدند. معادلات حاکم بر مسأله برای زمان تماس و جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حال کشش به‌صورت دو دستگاه معادله جدا از هم تعیین گردیدند که با توجه به این‌که ارتعاشات طولی ناچیز بود از آن صرف نظر شد و مقدار کشش طولی تیر در ارتعاشات عرضی جای‌گزین گردید. در تعیین حل این دو دستگاه معادله، از روش گالرکین و رانجه کوتاه مرتبه ۴ استفاده شد. برای این منظور ابتدا معادلات بی‌بعد شده و سپس با استفاده از پارامتر جداساز متغیرها از هم تفکیک گردیدند؛ که با استفاده از این کار معادلات با مشتقات جزئی به معادلات معمولی با متغیر زمان تبدیل شدند. در ادامه با توجه به این‌که مسأله شرط اولیه بود، با استفاده از روش رانجه کوتاه مرتبه ۴ در متلب ۲۰۱۲ کد نویسی شد. پاسخ مسأله با توجه به الگوریتم در نظر گرفته شده برای زمان تماس و جدایش حل گردید. ضمناً متغیر مکان با استفاده از تابع گالرکین در شکل مد خطی در نظر گرفته شد؛ که هم شرایط مرزی هندسی و هم شرایط طبیعی را ارضا می‌نمود. در پایان حل معادلات حرکت در حالت خطی و غیرخطی مورد بررسی قرار گرفت و اثر پارامترهای تأثیرگذار بر آن‌ها بررسی شد.

۶-۲-نتیجه‌گیری

نتیجه‌های این پایان‌نامه به‌صورت زیر بیان می‌گردد.

- نتایج به‌دست آمده در این پایان‌نامه از لحاظ مقدار بیشینه خیز و نیروی تماسی و مقدار جدایش به حل اجزا محدود نزدیک می‌باشد.
- مقدار خیز تیر در شرایط یکسان برای حالت غیرخطی کم‌تر از حالت خطی است.

- مقدار نیروی تماسی از ابتدا تا قبل از جدایش در حالت غیرخطی کم‌تر بوده، اما بعد از تماس مجدد از حالت خطی بیش‌تر می‌شود؛ ولی در کل مقدار بیشینه نیروی تماسی در حالت غیر-خطی از خطی کم‌تر می‌باشد.
- مقدار جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر در حالت غیرخطی نسبت به خطی در مکانی عقب‌تر از انتهای تیر و با بیشینه‌ی کم‌تری اتفاق می‌افتد.
- با افزایش کشش در تیر می‌توان خیز تیر، نیروی تماسی و جدایش بین تیر و سیستم جرم و فنر را کم نمود.
- افزایش سرعت بر مقدار کمینه و بیشینه‌ی خیز اثر ندارد؛ ولی نوسانات کم می‌شود.
- با افزایش سرعت مقدار نیروی تماسی افزایش می‌یابد.
- با افزایش مقدار سرعت زمان جدایش در طول تیر بیشتر شده و به انتهای تیر نزدیک‌تر می‌گردد. ولی در سرعت بی‌بعد ۴۲۱ به بالا به دلیل طی کردن طول تیر در زمان کم دیگر جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر به وجود نمی‌آید.
- با افزایش نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد، اثر مهمی بر مقدار خیز تیر ندارد.
- با افزایش نسبت ضریب فنریت بی‌بعد به جرم محرک بی‌بعد، مقدار نیروی تماسی و فاصله جدایش زیاد می‌شود.
- جدایش بین سیستم جرم و فنر و تیر زمانی به وجود می‌آید که نیروی تماسی منفی شود.

۳-۶- پیشنهادها

جهت مطالعه کامل‌تر در مورد تماس دینامیکی موارد زیر قابل بررسی هستند:

- استفاده از معادلات غیرخطی برای سیستم جرم و فنر؛
- در نظر گرفتن ضربه در هنگام بازگشت جرم و فنر؛
- مدل کردن پانتوگراف با جرم، فنر و دمپر؛
- بررسی تیر با ضخامت متغیر (خیز- نیروی تماسی - جدایش)؛

- تعیین حل با در نظر گرفتن چند جمله از تابع گالرکین؛
- در نظر گرفتن ماده به صورت ویسکوالاستیک؛
- در نظر گرفتن ماده به صورت FG؛
- در نظر گرفتن زمانی که نیروی تماسی عرضی عمود باقی نمی ماند.
- استفاده از کنترل گر در مسأله؛

منابع

- [1] **Malatkar P., (2003), PhD. thesis, “Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates”, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.**
- [2] Nayfeh A.H., Pai P.F., (2004), **“Linear and Nonlinear Structural Mechanics”,** John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- [3] Evan-Iwanowski R.M., (1976), **“Resonance Oscillations in Mechanical Systems”,** {Volume, Edition}, {Press}, {City}, pp. {page(s)}
- [4] Nayfeh A.H., Mook D.T., (1979), **“Nonlinear Oscillations”,** John Wiley & Sons, New York.
- [5] Moon F.C., (1987), **“Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers”,** John Wiley & Sons, New York.
- [6] Meirovitch L., (1970), **“Analytical Methods in Dynamics”,** McGraw-Hill, New York
- [7] Nazare J., (2012), **“Types Pantograph”,** Tabriz Urban Railway Organization, Code: 128. (In Persian)
- [8] Rieker J. R. and Lin Y. H. and Trethewey M. W. (1996) **“Discretization considerations in moving load finite element beam models”, F.M.E. in Analysis and Design, 21, pp. 129–144.**
- [9] Rieker J. R. and Trethewey M. W., (1999) **“Finite element analysis of an elastic beam structure subjected to a moving distributed mass train”, Mechanical Systems and Signal Processing, 13, pp. 31–51.**
- [10] Lee U., (1998) **“Separation between the flexible structure and the moving mass sliding on it”, J. Sound and Vibration, 209, pp. 867–877.**
- [11] Stancioiu D. and Ouyang H. and Mottershead J. E., (2008) **“Dynamics of a beam and a moving two-axle system with separation”, J. Mechanical Science, 222, pp. 1947–1956.**
- [12] Lee H. P., (1995) **“On the separation of a mass travelling on a beam with axial forces”, Mechanics Research Communications, 22, 4, pp. 371-376.**
- [13] Cho Y. H. and Lee K. and Park Y. and Kang B. and Kim K., (2010) **“Influence of contact wire pre-sag on the dynamics of pantograph-railway catenary”, I. J. of Mechanical Science, 52, pp. 1471–1490.**
- [14] Lee K., (2007) **“Analysis of dynamic contact between overhead wire and pantograph of a high-speed electric train”, J. of Rail and Rapid Transit, 221, pp. 157–166.**
- [15] Cho Y. H., (2008) **“Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph”, J. of Sound and Vibration, 315, pp. 433–454.**
- [16] Lee K. and Cho Y. and Chung J., (2012) **“Dynamic contact analysis of a tensioned beam with a moving mass-spring system”, J. of Sound and Vibration, 331, pp. 2520–2531.**
- [17] Lee K. and Chung J., (2013) **“Dynamic analysis of a hanger-supported beam with a moving oscillator”, J. of Sound and Vibration, 332, pp. 3177–3189.**

- [18] Reddy J. N., (1999), **“Energy principles and variational method in applied mechanics”**, Department mechanic and engineering, Texas am university.
- [19] Lee K. and Chung J., (2013) **“Dynamic models for the contact analysis of a tensioned beam with a moving oscilator”**, **Proc. of the Ins. of Mech. Enginers PartC: Journal of Mechanical Engineering Science published**, pp.1-14.
- [20] Wang L. and Hu Z. and Zhong Z., (2013) **“Non-linear dynamical analysis for an axially moving beam with finite deformation”**,**International Journal of Non-Linear Mechanics**, **54**, pp. 5–21.
- [21] Fryba L., (1996), **“Dynamics of Railway Bridges”**, Academi Apaha,czech Republic.
- [22] Burden R. L. and Faires J. D., (2011), **“Numerical Analysis”**, Ninth Edition, Boston, USA, ISBN-13: 978-0-538-73351-9.
- [23] G. Zimmert, (2011) **“Overview of HSR in China with a Focus on the OverheadContact Line System for the Wuhan Guangzhou HSR, the Fastest Railwayin the World”**, **A technical journal by Parsons Brinckerhof employes and coleagues**, **73**, pp. 37-41.
- [24] **Jensen C. N., (1997), PhD. Thesis, “Nonlinear systems with discrete and continuous elements”**, Technical University, IMM, Denmark.

Abstract

At the research, vibration and dynamic contact between tensioned beam under moving mass-spring system have been studied. beam is flexible, homogeneous, isotropic and the length greater the cross-sectional area. Using Euler Bernoulli theory, von Karman strain and Hamilton principle equations of motion linear and nonlinear of the system have been obtained. equations of motion, the two sets of differential equations for the contact coefficients of the variable time, but the time separation are set equations coefficients constant. Using Galerkin method, ordinary differential equations have been obtained and have been solved by the fourth order Runge kutta method. The contact force and deflection for tensioned beam in the case of simply supported ends, clamped ends and clamped- simply supported ends is calculated and influence of tension, speed, and spring to mass ratio, in dimensionless form for beam clamped- simply supported ends have been studied. checking for separation of a beam and mass-spring and comparison problem for linear and nonlinear obtained; endorse linear problem with F.E.M.

Keywords: Beam vibration, moving mass-spring system, Dynamic contact, Galerkin procedure



Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering

**Dynamic contact analysis of a tensioned non linear Euler
Bernoulli beam subject to a moving mass–spring system**

Mohammad Heravi

Supervisor:

Dr. Ardeshir Karami Mohammady

2014