

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک
گروه مکاترونیک

**تحلیل ارتعاشات غیر خطی بازوی نانوکامپوزیتی یک میکروروبات
تحت تأثیر نیروی الکتروستاتیک و پیزوالکتریک همزمان با در نظر گرفتن کشش
لایه میانی**

دانشجو: فریده چیت‌ساز یزدی

استاد راهنما:
دکتر امیر جلالی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ماه ۱۳۹۲

تقدیم بہ پدر و مادر عزیز، مہربان و خداکارم
کہ پیوستہ جرعہ نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیت آہا بودہ ام
و ہموارہ چراغ وجودشان روشنگر راہ من در سختی ہا و مشکلات بودہ است

تشکر و قدردانی

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. با تشکر از خدای مهربان و عرض ادب به پیشگاه تمامی اساتید محترم که در تمام مراحل تحصیل از دانش ارزشمندشان بهره‌مند شده‌ام.

از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر جلالی که با راهنمایی‌های ارزشمندشان مرا در تمام مراحل انجام این تحقیق یاری نمودند، کمال تشکر را داشته و برای ایشان آرزوی توفیق و عزت روزافزون دارم. همچنین از زحمات پدر و مادر گرامی‌ام و تمامی کسانی که در دوران تحصیل همواره مشوق و پشتیبان اینجانب بوده‌اند، قدردانی می‌کنم.

در این پایان‌نامه به بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی غیرخطی یک بازوی میکروروبات مورد استفاده در پزشکی در حین عمل برش رگ، که به صورت یک میکروتیر مدل شده است، پرداخته می‌شود. برای دستیابی به ویژگی‌های برتری از جمله افزایش فرکانس طبیعی به منظور کوتاه شدن زمان پاسخ برای سیستم، میکروعملگر از پلیمر تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره^۱ (SWCNT) در نظر گرفته شده است. بستر پلیمری میکروتیر، دارای خاصیت ویسکوالاستیک می‌باشد که از مدل کلوین-ویت^۲ برای مدل‌سازی آن استفاده می‌شود. هندسه‌ی میکروتیر یکنواخت و همگن، سطح مقطع آن مستطیلی و شرایط مرزی برای آن دو سر گیردار در نظر گرفته می‌شود. میکروتیر تحت تحریک میدان الکتریکی و لایه پیزوالکتریک^۳ PZT می‌باشد. تحریک الکتریکی با اعمال یک ولتاژ ثابت DC و یک ولتاژ هارمونیک کوچک AC بین الکتروود ثابت و میکروتیر، اعمال می‌شود. تحریک پیزوالکتریک نیز توسط یک ولتاژ ثابت DC بین دو سطح لایه پیزوالکتریک به سیستم اعمال می‌شود. معادلات حاکم بر حرکت، با در نظر گرفتن تئوری تیر اویلر-برنولی غیرخطی، اثر کشیدگی لایه‌ی میانی و نیروی محوری، از اصل هامیلتون^۴ استخراج می‌شوند. تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد سیستم حول موقعیت استاتیکی، توسط روش گالرکین^۵ حاصل می‌شوند. پاسخ دینامیکی غیرخطی میکروتیر ویسکوالاستیک حول موقعیت استاتیکی در حالت تشدید اولیه، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه^۶ در تئوری اغتشاشات و روش گالرکین با تقریب دو شکل متقارن اول به صورت نیمه‌تحلیلی بدست می‌آید. تأثیر پارامترهای مختلف طراحی از جمله ولتاژ الکتروستاتیک، ولتاژ و طول لایه پیزوالکتریک و نسبت ضخامت میکروتیر به لایه پیزوالکتریک بر

¹ Single Walled Carbon Nano-Tube

² Kelvin-Voigt

³ Piezoelectric

⁴ Hamilton Principle

⁵ Galerkin Method

⁶ Multiple Scale Method

روی تغییر شکل استاتیکی، فرکانس طبیعی و میرایی سیستم بررسی شده است. همچنین رفتار دینامیکی سیستم غیرخطی در حالت تشدید اولیه به ازای پارامترهای مختلف سیستم مورد بررسی قرار گرفته و علت تغییر رفتار ارتعاشی میکروتیر بر اثر تغییر پارامترها بیان شده است. در ادامه، محدوده‌ی پایدار و ناپایدار سیستم دینامیکی حول موقعیت استاتیکی برای نقطه‌ی تعادل، با تشکیل ماتریس ژاکوبین مطالعه و تحلیل شده است. افزایش میرایی به ازای افزایش ولتاژ تحریک الکتروستاتیک و لایه پیزوالکتریک، افزایش تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی میکروتیر با افزایش ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک و کاهش دامنه ارتعاشات غیرخطی سیستم بر اثر کاهش دامنه تحریک ولتاژ AC، از جمله نتایج بررسی در این پایان‌نامه می‌باشد.

کلمات کلیدی:

میکروتیر نانو کامپوزیت، روش مقیاس‌های چندگانه، ویسکوالاستیک، لایه پیزوالکتریک، تحریک

الکتروستاتیک.

فهرست مطالب

۱	فصل ۱ مقدمه و مروری بر کارهای انجام شده
۲	۱-۱. مقدمه
۳	۲-۱. میکروتیر در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی
۴	۳-۱. نانو کامپوزیت
۵	۱-۳-۱. نانولوله‌های کربنی
۶	۲-۳-۱. رفتار ویسکوالاستیک
۷	۴-۱. تحریک در سیستم‌های MEMS
۷	۱-۴-۱. تحریک الکتروستاتیک
۸	۲-۴-۱. پیزوالکتریک
۱۰	۵-۱. مروری بر مقالات
۱۰	۱-۵-۱. تحریک سیستم‌های میکروالکترومکانیکی
۱۰	۱-۱-۵-۱. تحریک الکتروستاتیک
۱۳	۲-۱-۵-۱. تحریک با لایه پیزوالکتریک
۱۴	۳-۱-۵-۱. تحریک هم‌زمان الکتروستاتیک و لایه پیزوالکتریک
۱۶	۲-۵-۱. جنبه ساختاری
۱۸	۳-۵-۱. روش حل
۱۸	۱-۳-۵-۱. حل عددی
۲۰	۲-۳-۵-۱. حل تحلیلی
۲۱	۳-۳-۵-۱. حل نیمه‌تحلیلی
۲۲	۶-۱. اهداف و ضرورت انجام تحقیق
۲۲	۷-۱. نوآوری
۲۳	۸-۱. تعریف مسأله
۲۵	فصل ۲ استخراج معادلات حرکت
۲۶	۱-۲. مقدمه
۲۶	۲-۲. استخراج معادلات با استفاده از اصل هامیلتون
۴۹	فصل ۳ تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی
۵۰	۱-۳. تغییر شکل استاتیکی
۵۳	۲-۳. فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی سیستم
۵۵	فصل ۴ پاسخ دینامیکی سیستم تحت تحریک هارمونیک اولیه

۵۶	۱-۴. مقدمه
۵۶	۱-۱-۴. نگاهی بر تئوری اغتشاشات
۵۷	۲-۴. به کارگیری روش مقیاس‌های چندگانه در مسأله مورد بررسی
۶۶	۳-۴. پایداری سیستم

فصل ۵ بررسی نتایج

۷۱	
۷۲	۱-۵. مقدمه
۷۳	۲-۵. بررسی تغییر شکل استاتیکی
۷۹	۳-۵. بررسی فرکانس طبیعی
۸۲	۴-۵. بررسی پاسخ فرکانسی
۸۸	۵-۵. بررسی میرایی
۹۰	۶-۵. بررسی پایداری

فصل ۶ نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادها

۹۳	
۹۴	۱-۶. مقدمه
۹۴	۲-۶. نتیجه‌گیری‌ها
۹۵	۳-۶. پیشنهادها

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱. نمودار انتخاب ماده برای میکروعملگر [۱۱]..... ۶
- شکل ۱-۲. طرح شماتیک مدل کلونین-ویت ۶
- شکل ۱-۳. شماتیک تیر تغییر شکل یافته تحت تحریک الکتروستاتیک ۷
- شکل ۱-۲. جابه‌جایی طولی و عرضی میکروتیر و دستگاه مختصات ثابت و محلی ۲۶
- شکل ۲-۲. میکروتیر تحت تحریک میدان الکتروستاتیک و لایه پیزوالکتریک ۲۷
- شکل ۲-۳. a. سطح مقطع میکروتیر و لایه پیزوالکتریک اصلی، b. سطح مقطع معادل سیستم ۲۹
- شکل ۵-۱. تغییرات خیز استاتیکی نسبت به تغییرات x برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ در تحریک الکتروستاتیک $\eta v_{dc}^2 = 10$ و $\eta v_{dc}^2 = 30$ ۷۳
- شکل ۵-۲. مقایسه ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات ηv_{dc}^2 برای میکروتیر سیستم مورد بررسی، با میکروتیر در [۶۳] همراه با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.8L$ ۷۴
- شکل ۵-۳. تأثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر به ازای ηv_{dc}^2 مختلف ۷۵
- شکل ۵-۴. تأثیر تغییر مقدار $\gamma_1 v_p$ بر تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.5L$ به ازای ηv_{dc}^2 مختلف ۷۶
- شکل ۵-۵. تأثیر تغییر مقدار β_1 بر تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.8L$ به ازای ηv_{dc}^2 مختلف ۷۷
- شکل ۵-۶. تأثیر تغییر ضخامت لایه پیزوالکتریک بر تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ به ازای ηv_{dc}^2 مختلف ۷۷
- شکل ۵-۷. بررسی تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر نسبت به تغییرات $\gamma_1 v_p$ ۷۸
- شکل ۵-۸. بررسی تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر نسبت به تغییرات β_1 ۷۹
- شکل ۵-۹. تأثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی میکروتیر به ازای تغییرات ηv_{dc}^2 ۸۰
- شکل ۵-۱۰. تأثیر تغییر مقدار $\gamma_1 v_p$ بر فرکانس طبیعی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.5L$ به ازای ηv_{dc}^2 مختلف ۸۰
- شکل ۵-۱۱. تأثیر تغییر مقدار β_1 بر فرکانس طبیعی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.8L$ به ازای ηv_{dc}^2 مختلف ۸۱
- شکل ۵-۱۲. تأثیر تغییر ضخامت لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ به ازای ηv_{dc}^2 مختلف ۸۱
- شکل ۵-۱۳. بررسی تغییرات فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات $\gamma_1 v_p$ ۸۲
- شکل ۵-۱۴. بررسی تغییرات فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات β_1 ۸۲
- شکل ۵-۱۵. مقایسه نتایج پاسخ دینامیکی برای میکروتیر مورد بررسی با نتایج در [۳۷] در $\eta v_{dc}^2 = 20$ ۸۳
- شکل ۵-۱۶. تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ ۸۳
- شکل ۵-۱۷. تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر به ازای $\eta v_{dc}^2 = 20$ برای طول‌های مختلف ۸۴
- شکل ۵-۱۸. تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.5L$ ۸۵

- ۸۵ و به ازای $\eta v_{dc}^2 = 20$ برای $\gamma_1 v_p$ های مختلف
- شکل ۵-۱۹.** تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول
- ۸۶ $l_2 - l_1 = 0.8L$ و به ازای $\eta v_{dc}^2 = 20$ برای β_1 های مختلف
- شکل ۵-۲۰.** تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ ، به
- ۸۷ ازای $\eta v_{dc}^2 = 65$ ، برای نسبت ضخامت‌های مختلف لایه پیزوالکتریک به میکروتیر
- شکل ۵-۲۱.** تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$
- ۸۸ و به ازای $\eta v_{dc}^2 = 10$ برای مقادیر مختلف ولتاژ هارمونیک v_{ac}
- شکل ۵-۲۲.** تغییرات مقدار میرایی ویسکوالاستیک نسبت به تغییرات ηv_{dc}^2 به ازای برای میکروتیر با لایه
- ۸۸ پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.8L$ به ازای $C = 0.001$
- شکل ۵-۲۳.** تغییرات مقدار میرایی ویسکوالاستیک نسبت به تغییرات β_1 در $\eta v_{dc}^2 = 20$ به ازای
- ۸۹ $C = 0.001$
- شکل ۵-۲۴.** تغییرات مقدار میرایی ویسکوالاستیک نسبت به تغییرات γ_1 در $\eta v_{dc}^2 = 20$ به ازای
- ۸۹ $C = 0.001$
- شکل ۵-۲۵.** تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول
- ۹۰ $l_2 - l_1 = 0.8L$ و به ازای $\eta v_{dc}^2 = 30$ برای مقادیر مختلف μ
- شکل ۵-۲۶.** بررسی پایداری سیستم به ازای نمودار تغییرات F بر حسب a_0
- ۹۱

فهرست جداول

- جدول ۵-۱. مشخصات ماده و هندسه میکروتیر و لایه پیزوالکتریک ۷۲
- جدول ۵-۲. مقادیر پارامترهای مورد استفاده در شبیه سازی ۷۳

فهرست علائم

$M(s)$	جرم بر واحد طول سیستم
H_{l_i}	تابع پله
ρ_1, ρ_2	به ترتیب چگالی جرمی میکروتیر و لایه پیزوالکتریک
t_1, t_2	به ترتیب ضخامت میکروتیر و لایه پیزوالکتریک
w_c	عرض میکروتیر و لایه پیزوالکتریک
V, W	به ترتیب جابه جایی طولی و عرضی میکروتیر
K	انرژی جنبشی سیستم
U	انرژی پتانسیل سیستم
F_u	کار نیروهای خارجی سیستم
σ_1, σ_2	به ترتیب تنش محوری میکروتیر و لایه پیزوالکتریک
ε_s	کرنش نرمال میکروتیر و لایه پیزوالکتریک
\bar{C}	ضریب ویسکوالاستیک میکروتیر در مدل کلین-ویت
P	فاصله تار خنثی تا مرکز میکروتیر، برای میکروتیر همراه با لایه پیزوالکتریک
d_{31}	ثابت کرنش لایه پیزوالکتریک
v_p	ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک
e	کرنش ناشی از کشش لایه میانی
k	انحنای خمشی میکروتیر تغییر شکل یافته در صفحه SZ
A_1, A_2	به ترتیب سطح مقطع میکروتیر و لایه پیزوالکتریک
A_3	ممان اول سطح برای سطح مقطع لایه پیزوالکتریک حول تار خنثی
I_1	ممان اینرسی سطح مقطع میکروتیر حول تار خنثی برای $s > l_2$ و $s < l_1$
I_2	ممان اینرسی سطح مقطع لایه پیزوالکتریک حول تار خنثی برای $l_1 < s < l_2$
I_3	ممان اینرسی سطح مقطع میکروتیر برای $l_1 < s < l_2$
$B_1(s), B_3(s)$	به ترتیب سختی محوری و خمشی سیستم
$B_2(s), B_4(s)$	به ترتیب نیروی محوری و گشتاور خمشی به علت اثر پیزوالکتریک
$B_5(s), B_6(s)$	به ترتیب ضریب نیروی محوری و گشتاور خمشی در سطح مقطع به خاطر ساختار ویسکوالاستیک
h	فاصله هوایی میکروتیر و صفحه الکترودی
v_{dc}	ولتاژ dc اعمالی بین میکروتیر و صفحه الکترودی
v_{ac}	دامنه ولتاژ تحریک هارمونیک بین میکروتیر و صفحه الکترودی
$\hat{\Omega}$	فرکانس ولتاژ هارمونیک اعمالی بین میکروتیر و صفحه الکترودی
ε_0	ثابت دی الکتریک در خلأ
\hat{f}	جابه جایی محوری ثابت اعمالی به یک انتهای میکروتیر
t	زمان
C	شکل بی بعد ضریب میرایی ویسکوالاستیک در مدل کلین-ویت
T	مقیاس زمانی
τ	زمان در حالت بی بعد
x	مکان در حالت بی بعد
α	ضریب ناشی از بار محوری در معادله حرکت بی بعد

β	ضریب جمله غیرخطی ناشی از کشش لایه میانی در معادله حرکت بی‌بعد
η	ضریب جمله ناشی از تحریک الکتریکی در معادله حرکت بی‌بعد
γ_{P1}, γ_{P2}	به ترتیب ضرایب جملات ناشی از اثر محوری و خمشی پیزوالکتریک در معادله حرکت بی‌بعد
$H_{1n}(x)$	ضریب جمله خطی ناشی از انحنای خمشی در معادله حرکت بی‌بعد
$H_{2n}(x)$	ضریب جمله خطی ناشی از اثر ویسکوالاستیک در معادله حرکت بی‌بعد
$H_{3n}(x)$	ضریب جمله غیر خطی ناشی از اثر ویسکوالاستیک در معادله حرکت بی‌بعد
$M_n(x)$	جرم بر واحد طول سیستم در حالت بی‌بعد
Γ	عملگری که به صورت $\int_0^L \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} dx$ بیان می‌شود
w_s	تغییر شکل استاتیکی سیستم
$u(x, \tau)$	جابه‌جایی دینامیکی سیستم
φ	شکل مودهای ارتعاش سیستم خطی حول موقعیت استاتیکی
ω	فرکانس طبیعی ارتعاش سیستم حول موقعیت استاتیکی
$R_{s[i]}$	ضرایب گالرکین بدست آمده برای توابع مقایسه ای برای بدست آوردن w_s
$R_{d[i]}$	ضرایب گالرکین بدست آمده برای توابع مقایسه ای برای بدست آوردن φ
ε	پارامتر بی‌بعد کوچک bookkeeping
$\phi(x)$	تابع شکل مودهای نرمال شده
$A(T_2), \bar{A}(T_2)$	به ترتیب عبارت مختلط حاوی دامنه و فاز پاسخ سیستم و مختلط آن
δ_{li}	تابع دلتای کرونکر
$\psi_1(x), \psi_2(x)$	توابع ظاهر شده در پاسخ دینامیکی سیستم
$c.c.$	مزدوج مختلط
$N.S.T.$	بیان‌گر جملات غیرسکولار در معادله
χ^v	ضرایب ناشی از میرایی ویسکوالاستیک میکروتیر
F	ضریب جمله حاصل از تحریک AC
S_q^G, S_c^G	به ترتیب ضریب ناشی از جمله‌های غیرخطی هندسی مرتبه ۲ و ۳
S_q^e, S_c^e	به ترتیب ضریب ناشی از جمله‌های غیرخطی الکتریکی مرتبه ۲ و ۳
S	ضرایب ناشی از جملات غیرخطی
a, \mathcal{G}	توابع معرف دامنه و فاز پاسخ سیستم
μ	ضریب ناشی از فاکتور کیفیت ویسکوالاستیک
r_1, r_2	به ترتیب بخش حقیقی و موهومی پاسخ سیستم
a_0	دامنه ارتعاشات پاسخ سیستم حول موقعیت استاتیکی
σ	اختلاف فرکانس تشدید غیرخطی با فرکانس طبیعی سیستم
λ	مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین

فصل ۱

مقدمه و مروری بر کارهای انجام

شده

۱-۱. مقدمه

چندین دهه از کشف و توسعه‌ی سیستم‌های میکروالکترومکانیکال یا MEMS^۱ گذشته است. سیستم‌های میکروالکترومکانیکال، تکنولوژی برجسته‌ای هستند که برای به وجود آوردن دستگاه‌ها و ادوات یکپارچه (مجتمع) با ترکیب مجموعه‌ای از میکروحواسگرها، میکروعملگرها، اجزای مکانیکی و قطعات الکترونیکی به کار می‌روند که به کمک فناوری ساخت تراشه‌های میکرونی تولید شده‌اند. MEMS در سال‌های اخیر انقلابی ایجاد کرده و با جهش غیرقابل تصویری همراه بوده است. سیستم‌های میکروالکترومکانیکی با داشتن ویژگی‌هایی از جمله وزن سبک، اندازه‌ی کوچک، حساسیت بالا، مصرف کم انرژی، سازگاری با مدارهای مجتمع (IC) و کاهش عوامل نویز، تکنولوژی جدیدی را عرضه نمودند که به علت کاربرد گسترده‌ی آنها در انواع بخش‌های صنعتی، از جمله مکانیک، هوا فضا، رباتیک، حمل و نقل و ارتباطات، بررسی عملکرد اینگونه سیستم‌ها مورد توجه بسیاری از مهندسان و پژوهشگران قرار گرفته است. از کاربردهای برجسته‌ی این سیستم‌ها، می‌توان به پرینترهای جوهرافشان، میکروپمپ‌ها، سیستم‌های اندازه‌گیری و تنظیم اتوماتیک و تزریق دارو اشاره کرد. امروزه این تکنولوژی به سطح قابل قبولی رسیده است، به طوری که بشر در این زمینه به تکنولوژی ساخت شتاب‌سنج‌هایی کوچک‌تر از یک میلی‌متر، موتورهایی که تنها به کمک میکروسکوپ دیده می‌شوند، چرخ‌دنده‌هایی کوچکتر از موی انسان و سوزن‌هایی بسیار باریک که می‌توانند ماده‌ی دارویی را تزریق کنند، بدون این‌که به اعصاب آسیبی برسانند و صدها مورد دیگر دست پیدا کرده است. اخیراً MEMS در زمینه‌های مختلفی از جمله زیست‌شناسی، بیوشیمی، پزشکی و رباتیک کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده است.

با توجه به این‌که ربات‌ها توانایی انجام کارهای سخت، تکراری و همچنین امکان حضور در محیط‌های غیرقابل دسترس و یا خطرناک برای انسان را دارند، دامنه‌ی کاربردی بالایی از جمله در پزشکی به خود اختصاص داده‌اند. پیشرفت تکنولوژی، حضور ربات‌ها در مقیاس میکرو به منظور انجام

^۱ Micro Electro Mechanical System

فعالیت‌های متعددی را فراهم کرده است. امکان استفاده از میکروروبات‌ها برای اولین بار در دهه‌ی ۱۹۷۰ توسط دانشمندان مورد بررسی قرار گرفت. تکنولوژی مورد نیاز برای خلق میکروروبات‌ها، سیستم‌های میکروالکترومکانیکی نامیده می‌شود. شتاب‌سنج‌ها، ژيروسکوپ‌ها، نوسان‌سازها به عنوان دستگاه‌های MEMS استفاده شده در میکروروبات‌ها می‌باشند. ربات‌های MEMS پتانسیل و توانایی بالایی در مسیریابی و حرکت در نواحی که دسترسی به آن به سختی صورت می‌گیرد، دارند. از این جمله می‌توان میکروروبات‌های صنعتی به منظور جابه‌جایی و اسمبلی نانوربات‌ها و نانوماشین‌ها، میکروروبات‌های شناگر MEMS که در ارسال دارو به قسمت خاصی از بدن، جراحی، آنژیوپلاستی^۱، تشخیص و بررسی توده‌های سرطانی و به عنوان پروب‌های^۲ بدون درد در معاینات پزشکی استفاده می‌شوند را نام برد. با توجه به این‌که ربات‌ها برای انجام اکثر عملیات خود نیازمند یک عملگر مانند بازو می‌باشند، مشاهده می‌شود که انواع مختلف ربات‌ها از جمله ربات کارتزین، اسکارا، هنرمند و... هرکدام با ترکیب متفاوتی از بازو و نوع مفصل -مفصل آن می‌تواند کشویی و یا لولایی باشد- فضای کاری و عمل خاصی را به خود اختصاص می‌دهند. بازوی ربات توانایی انجام عملیات از پیش برنامه‌ریزی شده‌ی متنوعی را دارد. در انتخاب بازوی مکانیکی، آنچه اهمیت دارد این است که ساده‌ترین نمونه ممکن که بتواند وظیفه محوله را در زمان مطلوب انجام دهد، گزینش گردد.

در بین تمامی مدل‌های مورد استفاده برای میکروادوات، میکروتیرها کاربردهای بیشتر و مناسب‌تری دارند [۱].

۱-۲. میکروتیر در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی

میکروتیرها بخاطر ویژگی‌های برجسته‌شان همچون، ساختار ساده‌ی آن، به سادگی قرار گرفتن در یک مدار مجتمع، توانایی سرد یا گرم شدن در مدت زمان چند میکروثانیه و امکان استفاده از آن در محیط‌های خلأ، هوا یا مایع بسیار مورد توجه می‌باشند [۲]. میکروتیرها بلوک اصلی بسیاری از

^۱ Angioplasty

^۲ Probe

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی موجود از جمله رزوناتورها^۱، سنسورها، عملگرها، فیلترها و میکروسوئیچ‌ها می‌باشند. مسأله‌ی ارتعاشات این میکروتیرها به علت کاربرد وسیع و تطبیق‌پذیری بالای آنها در ساختارهای مختلف، در کاربردهای صنعتی و زیستی مورد توجه فراوان قرار گرفته است. به علت طبیعت میکرومقیاس بودن این سیستم، دامنه‌ی تحریک نقش مهمی را ایفا می‌کند، زیرا ممکن است حتی یک تغییر کم در دامنه‌ی تحریک، ارتعاشات و شیفت فرکانسی قابل ملاحظه‌ای را در بر داشته باشد [۳]. میکروتیرها در اکثر سیستم‌های میکروالکترومکانیکی از جمله میکروروبات‌ها، به عنوان ادوات حسگر و عملگر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

از میکروتیرها به عنوان سنسور در تشخیص یون‌ها، مولکول‌های کوچک، اندازه‌گیری غلظت یا تراکم پروتئین، تشخیص و شناسایی DNA، شناسایی باکتری و پادتن [۴-۶] و تشخیص رفتار بسیاری از تومورهای سرطانی استفاده شده است [۷].

در [۸-۱۰] از میکروتیر به عنوان عملگر در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی استفاده شده است.

۳-۱. نانوکامپوزیت

طراحی میکروعملگرها و میکرو حسگرهای قابل اطمینان و با عملکرد بالا، در توسعه و پیشرفت سیستم‌های میکروالکترومکانیکی از اهمیت بالایی برخوردار است. سختی ساختاری عملگر، تعیین‌کننده‌ی نیروی مورد نیاز برای تغییر شکل مشخص سیستم می‌باشد و فرکانس طبیعی ارتعاشات، معیاری از پاسخ زمانی است [۱۱]. در نتیجه در ارتعاشات سیستم‌های MEMS و از جمله برای میکروعملگرها و میکرو حسگرها، سختی پایین و فرکانس طبیعی یا سرعت موج طولی بالا، مورد نیاز می‌باشد [۱۲]. مطابق با آزمایش‌های انجام شده در [۱۱]، با توجه به شکل (۱-۱) که سرعت موج طولی مواد مختلف را بر حسب مدول یانگ آنها نشان می‌دهد، بهترین ماده برای این منظور، پلیمرهای تقویت شده با الیاف و ایجاد ماده‌ی کامپوزیتی می‌باشند.

¹ Resonator

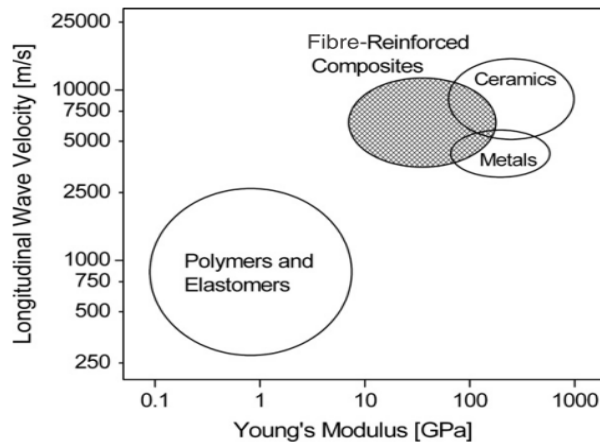
نیازهای تکنولوژی جدید، وجود مواد کامپوزیتی را الزامی کرده است. مواد کامپوزیتی به واسطه داشتن خواص منحصر به فردی مانند نسبت مقاومت مکانیکی به وزن بالا در عین قابلیت انعطاف و شکل پذیری عالی، مقاوم در برابر خوردگی و سایش، طول عمر بالا، دمپینگ بالا، عایق بودن حرارتی و صوتی و ... طی سال‌های اخیر به طور گسترده‌ای در صنایع مختلف مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۳]. با در نظر گرفتن ابعاد میکروسیستم‌ها، می‌توان از نانولوله‌های کربنی که کاملاً مناسب برای کاربرد در مقیاس میکرو می‌باشند، استفاده و نانوکامپوزیت ایجاد کرد. نانوکامپوزیت‌ها گروه جدید پراتیه‌ای از مواد ساختاری برای قطعات مکانیکی در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی می‌باشند. سه نوع متفاوت از کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی وجود دارد: نانولوله‌های کربن تک جداره (SWNT)، نانولوله‌های کربن چند جداره (MWNT) و آرایه‌ای از نانولوله‌های کربن تک جداره.

نانوکامپوزیت‌های پلیمری تقویت شده با نانولوله‌ی کربنی تک جداره، به عنوان بهترین گزینه برای میکروعملگرها و میکورزوناتورها، بخاطر خواص برتر آنها نسبت به سرامیک‌ها و فلزها شناسایی شده‌اند [۱۲].

۱-۳-۱. نانولوله‌های کربنی

کشف نانولوله‌های کربن توسط ایجیما^۱ در سال ۱۹۹۲ نقطه‌ی عطف جدیدی در علم مواد بوجود آورد [۱۴]. نتایج آزمایشگاهی حاکی از این واقعیت هستند که تنها با افزودن ۱٪ وزنی نانولوله‌ی کربن به رزین پلی‌استر، مدول یانگ کامپوزیت حاصل به میزان ۳۵٪ تا ۴۲٪ رشد نشان می‌دهد [۱۵]. با توجه به این که بستر میکروتیر نانوکامپوزیتی، پلیمر می‌باشد، در نتیجه دارای ساختار ویسکوالاستیک خواهد بود.

^۱ Iijima



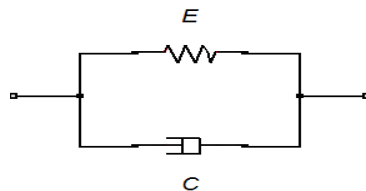
شکل ۱-۱. نمودار انتخاب ماده برای میکروعملگر [۱۱]

۱-۳-۲. رفتار ویسکوالاستیک

در ماده‌ی الاستیک، با حذف نیروی خارجی، تغییر شکل ایجاد شده قابل برگشت است، ولی در سیال ویسکوز، سیال تحت نیروی خارجی جریان پیدا می‌کند. ویسکوالاستیسیته خاصیت برخی از مواد، از جمله پلیمرها است که هر دو خصوصیت شبه جامد و شبه سیال را با هم دارند و رفتار میانی مواد ویسکوزیته و الاستیسیته را در هنگام تغییر شکل، از خود بروز می‌دهند.

از جمله مدل‌های مکانیکی برای توصیف مواد ویسکوالاستیک می‌توان به مدل ماکسول، مدل کلونین-ویت و مدل زنر اشاره کرد.

مدل کلونین-ویت یکی از کامل‌ترین و در عین حال ساده‌ترین مدل‌ها می‌باشد. این مدل شامل یک فنر موازی با دمپر است و به خوبی رفتار خزشی را توصیف می‌کند.



شکل ۱-۲. طرح شماتیک مدل کلونین-ویت

رابطه‌ی کلی تنش-کرنش در این مدل به صورت معادله (۱-۱) می‌باشد:

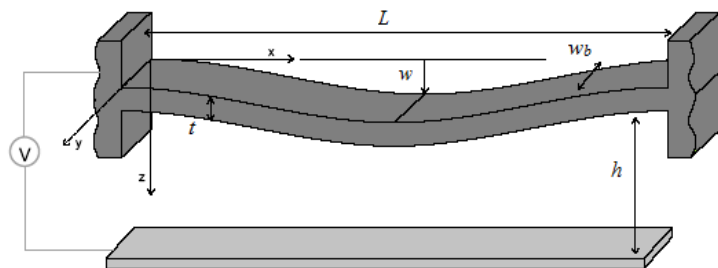
$$\sigma = E\varepsilon + C\dot{\varepsilon} \quad (1-1)$$

۴-۱. تحریک در سیستم‌های MEMS

فیزیک عملکردی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، در حالت کلی ترکیب پیچیده‌ای از پدیده‌های مکانیکی و الکتریکی است که بصورت غیرقابل اجتنابی با یکدیگر کوپل شده‌اند. در نتیجه برای استفاده از آنها، می‌بایست به شناخت دقیقی نسبت به هر دو زمینه دست یافت. همان‌طور که بیان شد، المان اصلی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی معمولاً یک میکروتیر است که به روش‌های مختلف الکتریکی، الکترومغناطیسی، پیزوالکتریک، نوری، حرارتی و ... تحریک می‌شوند. با توجه به اهمیت حسگر و عملگر در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، در این تحقیق از تحریک الکتریکی و پیزوالکتریک بخاطر خصوصیات مناسب‌تر آنها استفاده شده است.

۱-۴-۱. تحریک الکتروستاتیک

تحریک الکتروستاتیک به دلیل سرعت بالا، امکان ساخت و تحقق راحت‌تر در کنار المان‌های کوچک، قابلیت تغییر شکل زیاد خصوصاً در مقابل تغییرات محیطی و دمایی، مصرف توان بسیار کم - در حد صفر- و تکیه بر انرژی ذخیره شده برای حفظ حالت دلخواه المان، به عنوان رایج‌ترین روش تحریک مطرح می‌گردد.



شکل ۱-۳. شماتیک تیر تغییر شکل یافته تحت تحریک الکتروستاتیک

تحریک الکتریکی در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی مشابه با اثر خازنی می‌باشد. ساخت یک خازن با قرار دادن دو صفحه موازی در مجاورت هم و اعمال اختلاف پتانسیل بین آنها انجام می‌شود. با اعمال ولتاژ الکتریکی بین میکروتیر و الکتروود ثابتی که در سمت مقابل آن قرار دارد، میدان الکتریکی بوجود می‌آید که منجر به جابه‌جایی نسبی دو صفحه می‌گردد. چون موقعیت صفحه‌ی الکتروود ثابت

است، جابه‌جایی باعث تغییر شکل میکروتیر می‌شود، که از این خاصیت می‌توان به عنوان محرک ادوات استفاده کرد. امروزه از این خاصیت خازنی در ساخت رزوناتورها، شتاب‌سنج‌ها، سوئیچ‌های اپتیکی، میکروگریپرها^۱، میکرونیروسنجه‌ها، میکروپمپ‌ها و میکروسکوپ‌ها استفاده می‌گردد. در این پایان‌نامه هدف از طراحی میکروتیر، استفاده از آن به عنوان یک عملگر می‌باشد که نیروی الکتریکی یک تحریک مناسب برای آن خواهد بود. بسته به طبیعت سیستم مورد نظر، ولتاژ الکتریکی می‌تواند متشکل از یک قسمت DC برای اعمال جابه‌جایی ثابت و یک قسمت AC به منظور تحریک هارمونیک میکروتیر باشد. بر اساس پژوهش‌های انجام شده تاکنون، با اعمال تحریک الکتروستاتیک به میکروتیر، سیستم‌های میکروالکترومکانیکی رفتارهای دینامیکی غیرخطی از خود نشان می‌دهند [۱۶]. از جمله پدیده‌ها در تحریک الکتریکی، پولین^۲ می‌باشد که باعث ناپایداری سیستم می‌شود. این پدیده، حاصل برهم‌کنش نیروهای الاستیک و الکتروستاتیک است. رشد نیروی الکتروستاتیک در برابر رشد نیروی الاستیک نسبت به افزایش جابه‌جایی بخش متحرک -در اینجا میکروتیر- بیشتر می‌باشد. در نتیجه با افزایش ولتاژ الکتریکی، ناگهان نیروی الکتروستاتیک از نیروی الاستیک تجاوز کرده و به ازای آن ولتاژ، نیروی مکانیکی سیستم، توانایی غلبه بر نیروی الکتریکی بین میکروتیر و الکتروود را نخواهد داشت. نیروی الکتریکی منجر به افزایش پیوسته تغییر شکل در میکروتیر، اتصال ناگهانی آن به الکتروود مقابل و از دست دادن پایداری شده و باعث از کارافتادگی سیستم می‌شود. این پدیده‌ی ناپایدار را پولین و ولتاژ بحرانی متناسب با آن را ولتاژ پولین می‌نامند.

ناپایداری پولین یک پدیده‌ی شایع در سیستم‌های غیرخطی می‌باشد. اگر چه ناپایداری پولین در اکثر سیستم‌های میکروالکترومکانیکی نامطلوب است، اما در بعضی ساختارها مانند میکروسوئیچ‌ها، به خاطر تعیین کردن حساسیت سیستم بسیار بااهمیت می‌باشد [۱۷].

۱-۴-۲. پیزوالکتریک

اولین اثبات قضیه و اثر پیزوالکتریک در سال ۱۸۸۰ توسط دو برادر به نام‌های پپیر کوری و

^۱ Micro gripper

^۲ Pull-in

جکوز کوری^۱ صورت گرفت [۱۸]. اثر پیزوالکتریک، قابلیت برخی از مواد و کریستال‌ها برای تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و بالعکس می‌باشد. تولید اختلاف پتانسیل الکتریکی در برخی بلورهای نارسانا مثل کوارتز تحت کشش یا فشار همان اثر پیزوالکتریک است. وقتی ماده پیزوالکتریک تحت تأثیر مکانیکی - به صورت انبساط یا انقباض - قرار گیرد، مقداری بار الکتریکی در سطح آن ظاهر می‌شود. این بار الکتریکی در اثر نامتقارن بودن سلول یکه واحد کریستال، به تولید میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی منجر می‌شود که به این اثر پیزوالکتریک مستقیم گویند. حال اگر در پی اعمال میدان الکتریکی، ساختار ماده دچار تغییرات مکانیکی شود، به این اثر پیزوالکتریک معکوس گویند. هر دو اثر، کاربردهای متفاوت و فراوان دارند. حساسیت بسیار بالای این مواد به دما، ناحیه عملکرد غیرخطی آنها و پدیده هیستریزس در این مواد، از استفاده همه‌گیر آنها جلوگیری کرده است. از جمله مواد پیزوالکتریک رایج مورد استفاده، ZnO، PVDF و PZT می‌باشند. به عنوان نمونه‌ای از کاربرد مواد پیزوالکتریک می‌توان به کاربرد آنها در سنسورها و عملگرهایی که پایه اصلی آنها رفتار میکروتیرهاست اشاره کرد. در این سیستم‌ها تحریک پیزوالکتریک با اعمال ولتاژ الکتریکی بین دو سطح بالا و پایین لایه پیزوالکتریک اعمال می‌شود. همان‌طور که بیان شد، مواد پیزوالکتریک در اثر اعمال ولتاژ الکتریکی تغییر طول می‌دهند. اگر یک لایه از ماده پیزوالکتریک بر روی ماده‌ی دیگر به عنوان مثال میکروتیر قرار گیرد و بین دو سطح آن ولتاژ الکتریکی اعمال شود، به علت اثر پیزوالکتریک، لایه پیزوالکتریک تمایل به کاهش یا افزایش طول خواهد داشت، ولی چون به میکروتیر متصل است، باعث خمیده شدن میکروتیر می‌شود. با توجه به ویژگی‌های ماده‌ی پیزوالکتریک، می‌توان از آن برای کنترل ارتعاشات و ناپایداری پولین، تغییر و خطی‌سازی رفتار سیستم و پایداری آن استفاده کرد. بسته به کاربرد، ولتاژ اعمالی بین میکروتیر و الکتروود و یا بین سطوح لایه پیزوالکتریک به صورت DC، AC و یا ترکیبی از آنها می‌باشد.

مبحث ارتعاشات و پایداری در میکروروبات‌های مورد استفاده در پزشکی به خاطر حساسیت

¹ Pierre Curie and Jacques Curie

محیط کار، از اهمیت بالایی برخوردار است.

۱-۵. مروری بر مقالات

تحقیقات انجام شده مرتبط با این پایان نامه را می توان در بخش های زیر بررسی کرد.

-تحریک سیستم های میکروالکترومکانیکی

-جنبه های ساختاری سیستم های میکروالکترومکانیکی

-روش حل

۱-۵-۱. تحریک سیستم های میکروالکترومکانیکی

با توجه به دامنه فعالیت گسترده در مبحث سیستم های میکروالکترومکانیکی، بسته به شرایط متفاوت تحریک در میکروتیرها، کاربرد، پاسخ و نتایج متفاوتی برای آنها حاصل می شود.

۱-۵-۱-۱. تحریک الکتروستاتیک

تیلمان و ایجنتما^۱ [۱۹] پاسخ استاتیکی و دینامیکی میکروتیر را تحت تحریک الکتریکی و با صرف نظر از کشش لایه میانی بررسی کردند. آنها تغییر شکل استاتیکی ناشی از اعمال ولتاژ DC را بدست آورده و سپس با استفاده از روش عددی ریلی^۲، به محاسبه فرکانس های طبیعی سیستم خطی شده حول موقعیت استاتیکی پرداختند.

آیلا و فورنیر^۳ [۲۰] میکروتیر با شکل های هندسی متفاوت را در یک پژوهش آزمایشگاهی تحت تحریک الکتریکی حاصل از ترکیب ولتاژهای DC و AC قرار دادند و وابستگی پاسخ فرکانسی سیستم به دامنه ی تحریک الکتریکی را مورد بررسی قرار دادند.

مجاهدی و همکاران [۲۱] تغییر شکل استاتیکی و ناپایداری پولین را برای یک ژيروسکوپ که به عنوان یک میکروتیر یک سر گیردار با جرم متمرکز در انتهای آزاد آن مدل شده است، مورد مطالعه

¹ Tilman and Ijntema

² Rayleigh

³ Ayla and Fournier

قرار دادند. جرم متمرکز در این سیستم، تحت تحریک دو ولتاژ الکتریکی DC قرار گرفته و تأثیر جملات غیرخطی به علت هندسه سیستم، نیروهای الکتریکی، نیروهای سطحی درون مولکولی و اینرسی بررسی شده است.

وانگ^۱ و همکاران [۲۲] رفتار ارتعاشی و ناپایداری پولین را برای یک میکروتیر چند لایه تحت تحریک میدان الکتروستاتیک، مورد بررسی قرار دادند. سیستم برپایه‌ی تئوری تیر اوایلر-برنولی استوار بوده و معادلات حرکت با محاسبه‌ی تار خنثی جدید، مشابه با تئوری تیر تک لایه استخراج شده است. در این سیستم، معادلات حرکت به مسائل مقدار مرزی دو نقطه، تبدیل می‌شوند. در محاسبه‌ی تغییر شکل استاتیکی جمله‌ی غیرخطی هندسی دخیل می‌باشد. آنها ولتاژ اعمالی در تحریک الکتروستاتیک را به عنوان پارامتر متغیر و تغییر شکل مرکزی را به عنوان پارامتر معلوم در نظر گرفتند.

شن^۲ و همکاران [۲۳] با مدل‌سازی میکروسنسور نانولوله کربنی تشخیص جرم به صورت یک میکروتیر نانوکامپوزیتی یک سر گیردار که جرم متمرکز در انتهای آزاد آن قرار گرفته است، با استفاده از تئوری تیموشینکو^۳ غیرمحلی، به تحلیل ارتعاشات عرضی این سیستم پرداختند. در این تحقیق، فرکانس طبیعی سیستم با استفاده از روش تابع انتقال بدست آمده و تأثیر جرم متمرکز و اینرسی دورانی بر روی فرکانس طبیعی بحث شده است. آنها همچنین نشان دادند مدل تیر تیموشینکو غیرمحلی، برای میکروسنسورهای نانوکامپوزیتی کوتاه، بسیار مناسب‌تر از مدل تیر اوایلر-برنولی می‌باشد.

جیا^۴ و همکاران [۲۴] به مطالعه‌ی پاسخ فرکانسی تشدید میکروسوئیچ همگن و غیرهمگن که به صورت یک میکروتیر دو سر گیردار مدل شده است، پرداختند. میکروتیر تحت اعمال یک ولتاژ متغیر با زمان که تشکیل شده از یک بخش DC و یک بخش کوچک AC می‌باشد، نوسان می‌کند. سیستم تحت تحریک الکتروستاتیک، در نزدیکی ناحیه‌ی تشدید، با در نظر گرفتن نیروی درون مولکولی، تنش

¹ Wang

² Shen

³ Timoshinko

⁴ Jia

پسماند محوری و غیرخطی‌های هندسی به علت کشیدگی لایه‌ی میانی، با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی مورد مطالعه قرار گرفت. آنها تأثیر پارامترهای مختلف سیستم را بر روی پاسخ فرکانسی غیرخطی سیستم بررسی کردند.

عبدالرحمان^۱ و همکاران [۲۵] مقدار تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی ارتعاشات میکروتیر دو سر گیردار تحت تحریک الکتروستاتیک را حول موقعیت استاتیکی بررسی کردند. آنها با در نظر گرفتن کشیدگی لایه‌ی میانی و بار محوری، اثر پارامترهای مختلف مانند نیروی محوری و مقدار ولتاژ DC را بر روی فرکانس طبیعی و ولتاژ پولین بررسی کردند. آنها به اهمیت و درجه تأثیر کشش لایه‌ی میانی بر روی تغییر شکل‌های بزرگ و فرکانس طبیعی میکروتیر دو سر گیردار تأکید کردند. در ادامه تحقیقات، ایشان نشان دادند که در پاسخ دینامیکی سیستم، افزایش نیروی الکتروستاتیک منجر به ایجاد رفتار نرم‌شوندگی و افزایش کشش لایه‌ی میانی منجر به ایجاد رفتار سخت‌شوندگی می‌شود.

یونس و نایفه^۲ [۲۶] به بررسی تغییر شکل اولیه یک میکروتیر غیرخطی تحت تحریک الکتروستاتیک با در نظر گرفتن کشیدگی لایه‌ی میانی و اعمال یک بار محوری پرداختند. آنها در این مدل از تأثیر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی صرف‌نظر کردند و تغییر شکل استاتیکی و فرکانس‌های طبیعی خطی و شکل مودهای میکروتیر را تحت تحریک نیروی الکتروستاتیک DC تحلیل کردند.

اوکاد^۳ و یونس [۲۷] به بررسی دینامیک غیرخطی یک نانولوله‌ی کربنی دو سر گیردار و یک سر گیردار تحت تحریک الکتریکی AC و DC پرداختند. آنها با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی ابتدا با اعمال ولتاژ DC، ولتاژ پولین در سیستم را مورد بررسی قرار دادند و سپس با اضافه کردن ولتاژ AC به بخش DC، تشدیدهای اولیه و ثانویه را تحلیل کردند.

¹ Abdel-Rahman

² Younis and Nayfeh

³ Ouakad

۱-۵-۲. تحریک با لایه پیزوالکتریک

دادفرنیا و همکاران [۲۸] به تحلیل ارتعاش خطی حاکم بر میکروتیرها با تحریک پیزوالکتریک پرداختند.

چو^۱ [۲۹] تغییر شکل استاتیکی میکروعملگرهایی که تحت تحریک پیزوالکتریک قرار گرفته‌اند را با استفاده از تئوری تیموشینکو مدل‌سازی و برای تیرهای دو لایه محاسبه کرد. در این بررسی از اصل سازگاری تغییر شکل بین لایه الاستیک و لایه پیزوالکتریک متصل شده به هم، استفاده شد. غزوی و همکاران [۳۰] به تحلیل پایداری ارتعاشات عرضی میکروتیر یک سر گیردار تحت تحریک دو لایه پیزوالکتریک پرداختند. کاربرد ولتاژ DC و AC برای پیزوالکتریک، باعث ایجاد یک نیروی محوری با دو بخش پایدار و متغیر با زمان شده است. بخش متغیر با زمان باعث ایجاد سختی متغیر با زمان برای میکروتیر شده که تشدید پارامتریک در سیستم ایجاد می‌کند. آنها با بکار بردن بسط تابع ویژه، معادله پارامتریک نوع متیو^۲ را بدست آورده و با استفاده کردن از تئوری Floquet برای سیستم تک درجه آزادی، محدوده پایدار و ناپایدار را مشخص کردند.

جلیلی و محمودی [۳] ارتعاشات غیرخطی یک میکروتیر یک سر گیردار که لایه پیزوالکتریک ZnO بر روی قسمتی از طول آن قرار گرفته است را با فرض عدم کشیدگی لایه میانی میکروتیر تحلیل کردند. معادلات حرکت تیر از اصل هامیلتون، با در نظر گرفتن تئوری تیر اویلر-برنولی استخراج شده است. جمله‌های غیرخطی به خاطر حضور لایه پیزوالکتریک در شکل درجه دو و به خاطر اثر غیرخطی‌های هندسی در شکل درجه سه در معادلات ظاهر می‌شوند. به منظور گسسته‌سازی معادلات حرکت، از تقریب گالرکین استفاده شد. آنها با انجام تحقیقات آزمایشی برای شرایط در نظر گرفته شده، مطابقت خوبی بین نتایج آزمایشگاهی و یافته‌های تئوری پیدا کردند.

آنها در تحقیق دیگری [۳۱]، ارتعاشات غیرخطی یک میکروتیر یک سر گیردار تحت تحریک لایه

¹ Chu

² Mathieu

پیزوالکتریک، در حضور یک لایه بیولوژیکی جاذب تک لایه را بررسی کردند. قسمتی از سطح میکروتیر توسط لایه پیزوالکتریک پوشانده شده است که در اینجا لایه پیزوالکتریک به عنوان عملگر، عمل میکند. لایه بیولوژیکی قرار گرفته بر روی میکروتیر به صورت تک لایه بوده و تنش صفحه‌ای القایی جذب سطحی آن، از دیدگاه مولکولی فرمول‌بندی شده است.

رضازاده و همکاران [۳۲] میکروتیر یک سر گیردار و دو سر گیردار را تحت تحریک لایه پیزوالکتریک قرار داده و ولتاژ بحرانی پیزوالکتریک را برای جلوگیری از ناپایداری سیستم از روش عددی بدست آوردند.

۱-۵-۱-۳. تحریک همزمان الکتروستاتیک و لایه پیزوالکتریک

پیزا^۱ و همکاران [۳۳] به تحلیل غیرخطی بودن معادلات حرکت میکروتیری که لایه پیزوالکتریک روی کل آن قرار گرفته است و تحت تحریک میدان الکتروستاتیک می‌باشد، پرداختند. در این تحقیق الکتروود تنها بخشی از طول میکروتیر را می‌پوشاند. آنها میکروتیر را در راستای طولی به سه بخش تقسیم‌بندی و معادلات را بدست آوردند.

چن^۲ و همکاران [۳۴] براساس تئوری پیزوالکتریک، فرضیه‌ی تیر اویلر-برنولی، و روش دوره-نسبت^۳ (P-R)، به تحلیل و تشریح پاسخ فرکانسی میکروتیر یک سر گیردار تحت تحریک همزمان میدان الکتروستاتیک و لایه پیزوالکتریک با ولتاژ تحریک ترکیبی DC و AC پرداختند. معادلات حاکم بر حرکت این سیستم با در نظر گرفتن مومنتوم، تنش برشی، استهلاک، نیروی محوری و تحریک‌های غیرخطی خارجی مربوط به ولتاژ اعمالی بین میکروتیر و الکتروود استخراج شده است. آنها همچنین در تحقیق دیگری [۳۵] یک نانوتیر ویسکوالاستیک پیزوالکتریک را تحت تحریک دو میدان الکتروستاتیک قرار دادند و تأثیر بار الکتروستاتیک، نیروی وان در والز^۴، خزش، دمپینگ داخلی و

¹ Pizza

² Chen

³ Periodicity-ratio

⁴ Van der waals

غیرخطی‌های هندسی را روی رفتار پساکمانش و ناحیه‌ی ناپایداری سیستم دینامیکی بررسی کردند. رضازاده و همکاران [۸]، رفتار میکروتیرهای یک سر گیردار و دو سر گیردار که دو لایه پیزوالکتریک در وجه بالایی و پایینی آن قرار گرفته، تحت تحریک الکتروستاتیک مطالعه کردند. آنها نشان دادند که می‌توان از تحریک پیزوالکتریک به عنوان عاملی برای حذف تنش‌های پسماند و کنترل ولتاژ پولین استفاده کرد.

حسین‌زاده و احمدیان [۱۷] یک میکروتیر ساخته شده از FGM^1 را به عنوان یک میکروسوئیچ، تحت تحریک دو لایه پیزوالکتریک و میدان الکتروستاتیک قرار دادند. آنها از لایه‌های پیزوالکتریک به عنوان حسگر و عملگر برای کنترل ارتعاشات میکروتیر و جلوگیری از ایجاد ناپایداری پولین استفاده کردند و به مطالعه‌ی ناپایداری استاتیکی و دینامیکی این سیستم به خاطر اهمیت آن در میکروسوئیچ‌ها پرداختند.

رئیس‌فرد و همکاران [۳۶] یک میکروسوئیچ را تحت تحریک میدان الکتروستاتیک و لایه پیزوالکتریک قرار دادند. آنها سیستم را به صورت یک میکروتیر یک سر گیردار مدل کرده و از فرض عدم کشیدگی لایه‌ی میانی و تئوری تیر اوپلر-برنولی برای استخراج معادلات استفاده کردند. معادلات حرکت توسط روش لاگرانژ استخراج و با استفاده از روش عددی گالرکین با تقریب پنج مود، حل شده است. آنها تغییر شکل استاتیکی و ولتاژ پولین را با در نظر گرفتن تأثیر تمام جمله‌های غیرخطی اینرسی، هندسی، الکتریکی و پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار دادند.

زمانیان و خادم [۳۷] به مطالعه‌ی رفتار دینامیکی یک میکروتیر دو سر گیردار به عنوان یک میکروزوناتور تحت تحریک نیروی الکتریکی و لایه پیزوالکتریک پرداختند. نیروی الکتریکی متشکل از بخش DC و یک بخش کوچک AC بوده و ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک DC می‌باشد. با فرض کشیدگی لایه‌ی میانی، معادلات حاکم بر حرکت از قانون دوم نیوتون استخراج گردید.

¹ Functionally Graded Material

۱-۵-۲. جنبه ساختاری

از لحاظ ساختاری نیز می‌توان میکروادوات را به دو دسته الاستیک و ویسکوالاستیک تقسیم‌بندی کرد.

تحقیقات بیان شده تا کنون، همگی بر روی سیستم‌ها با ساختار الاستیک انجام شده است. در حالی که، اخیراً استفاده از مواد پلیمری و یا نانوکامپوزیت‌ها با بستر پلیمری در MEMS افزایش یافته است که این مواد دارای میرایی ساختاری ویسکوالاستیک می‌باشند. تاکنون تحقیقات زیادی برای مدل‌سازی میرایی ساختاری در میکروسیستم‌ها صورت گرفته است. تحقیقاتی با ساختار ویسکوالاستیک در زیر آورده شده است:

دوفور^۱ و همکاران [۳۸] فاکتور کیفیت دمپینگ در میکروتیر یک سرگرداری که بر روی آن یک لایه از مواد پلیمری ویسکوالاستیک قرار داده شده است را بررسی کردند. این ترکیب‌بندی یک سنسور شیمیایی بوده که در آن مواد مولکولی جذب شده توسط لایه‌ی پلیمری، باعث جابه‌جایی در فرکانس تشدید مکانیکی سیستم شده و این تغییر بیانگر مقدار ماده جذب شده می‌باشد.

دوبورگ^۲ و همکاران [۳۹] به توصیف یک روش نویدبخش برای بهبود بخشیدن به عملیات تشدید در میکروتیرهای اورگانیک پرداختند. این روش که برای ساختارهای ویسکوالاستیک می‌باشد، بر اساس میزان خاصیت ویسکوالاستیک مواد، با کنترل دمای درونی ساختار ماده، به بررسی آن می‌پردازد. آنها با در نظر گرفتن یک میکروتیر تحت تحریک الکترومغناطیسی، رفتار دینامیکی و استاتیکی میکروتیرهای ویسکوالاستیک را مورد بررسی قرار دادند.

آنکور^۳ و همکاران [۴۰] با استفاده از مدل کلون-ویت آثار خطی میرایی یک میکروتیر ویسکوالاستیک که تحت تحریک ولتاژ الکتروستاتیک قرار گرفته است را با شرایط مرزی یک سرگردار و دو سرگردار مطالعه کردند.

¹ Dufour

² Dubourg

³ Uncuer

ونزل^۱ و همکاران [۴۱] به بررسی حساسیت و پاسخ میکروتیر ویسکوالاستیک یک سر گیردار که یک لایه کششی روی آن قرار داده شده بود، پرداختند.

فو و ژانگ^۲ [۴۲] براساس تئوری ون کارمن^۳، به کنترل فعال پاسخ دینامیکی و استاتیکی غیرخطی برای یک میکروصفحه ویسکوالاستیک با شرایط مرزی گیردار، تحت تحریک توأم لایه پیزوالکتریک و میدان الکتروستاتیک، پرداختند. در این سیستم ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک با به کارگیری جریان مستقیم یک ولتاژ DC و ولتاژ اعمالی بین میکروصفحه و الکتروود با به کارگیری جریان متناوب، ولتاژ ترکیبی DC و AC است.

آنها در تحقیق دیگری [۴۳] بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی و روش گالرکین، به تحلیل پایداری غیرخطی برای یک میکروتیر ویسکوالاستیک با شرایط مرزی یک سر گیردار-یک سر کشویی پرداختند. در این مدل سازی از آثار کشش لایه میانی و نیروی محوری صرف نظر شده است. به این سیستم یک بار محوری پریودیک اعمال شده و تحت تحریک ولتاژ الکتریکی DC و AC قرار گرفته است.

جلالی و خادم [۴۴] به مطالعه تغییر شکل استاتیکی، فرکانس طبیعی و فاکتور کیفیت یک میکروصفحه‌ی نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربن با ساختار ویسکوالاستیک، تحت تحریک الکتروستاتیک پرداختند. معادله حاکم بر حرکت غیرخطی توسط تئوری ون کارمن و مدل کلونین-ویت استخراج شده است.

زمانیان و همکاران [۴۵] به محاسبه تغییر شکل استاتیکی، فرکانس طبیعی و فاکتور کیفیت دمپینگ ساختاری یک میکروعملگر تقویت شده با پلیمر نانولوله‌ی کربن تک لایه پرداختند. میکروعملگر در نظر گرفته شده، یک میکروتیر دو سر گیردار تحت بار الکتریکی می‌باشد. آنها در این مدل سازی فرض کردند وقتی میکروتیر جابه‌جا شود، کشیدگی لایه میانی در آن اتفاق می‌افتد. به

¹ Wenzel

² Fu and Zhang

³ Von Karman

علت ساختار پلیمری این میکروتیر، سیستم دارای دمپینگ ویسکوالاستیک می‌باشد.

۱-۵-۳. روش حل

با تقسیم‌بندی سیستم‌های مکانیکی به دو دسته‌ی سیستم‌های گسسته و پیوسته، به منظور دستیابی به پاسخ سیستم، فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها، بررسی پایداری و ... روش‌های حل متفاوتی وجود دارد. تا کنون بر روی سیستم‌های گسسته تحقیقات متنوعی انجام شده است.

ژانگ و منگ^۱ [۴۶] با استفاده از مدل جرم و فنر، رفتار دینامیکی یک میکروتیر یک سر گیردار را بر اساس معادله متیو استخراج کردند. آنها از روش بالانس هارمونیک‌ها برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی، تحت تحریک پارامتریک و تحریک خارجی استفاده کردند. در این تحقیق اثر پارامترهایی مانند فاصله بین میکروتیر و الکتروود، میرایی خطی و فنریت غیرخطی بررسی شده است. آنها نشان دادند که وقتی پارامترهای مناسبی برای سیستم انتخاب شود، دینامیک غیرخطی پایدار خواهد بود.

پراتیهر^۲ [۴۷] با مدل‌سازی یک میکروتیر یک سر گیردار به صورت یک سیستم جرم-فنر-دمپر با در نظر گرفتن تأثیرات خطی و غیرخطی فنریت و استهلاک، به مطالعه پایداری آن پرداخت. این ساختار تحت تحریک الکتریکی DC و AC قرار گرفته و از روش مقیاس‌های چندگانه برای بدست آوردن معادلات و حل آنها به صورت تقریبی استفاده شد.

با توجه به تحقیقات گسترده انجام شده بر روی سیستم‌های پیوسته، روش حل آنها را می‌توان به سه دسته حل عددی، حل تحلیلی و حل نیمه‌تحلیلی تقسیم کرد.

۱-۵-۳-۱. حل عددی

چیو و لوول^۳ [۴۸] تغییر شکل استاتیکی میکروتیر را با استفاده از روش عددی شوتینگ^۴ بدست آوردند. در این مدل‌سازی هم ولتاژ DC و هم کشش لایه‌ی میانی در نظر گرفته شد.

¹ Zhang and Meng

² Pratiher

³ Choi and Lovell

⁴ Shooting Method

رضازاده و همکاران [۴۹] ولتاژ پولین را برای یک میکروتیر چند لایه با استفاده از روش عددی تفاضل محدود محاسبه کردند.

وانگ و همکاران [۲۲] ولتاژ پولین یک میکروتیر چند لایه را با در نظر گرفتن ولتاژ اعمالی در تحریک الکتروستاتیک به عنوان یک پارامتر متغیر، با استفاده از روش شوتینگ استخراج کردند. آنها تأثیر پارامترهای کلیدی از جمله: طول، ضخامت و تنش پسماند میکروتیر بر روی رفتار ناپایداری پولین و فرکانس طبیعی سیستم را بررسی کردند. آنها نشان دادند که روش شوتینگ یک شیوهی مناسب تحلیل رفتار ارتعاش غیرخطی برای MEMS می‌باشد.

مجاهدی و همکاران [۵۰] برای بررسی تغییر شکل استاتیکی و ناپایداری پولین استاتیکی یک میکروتیر دو سر گیردار، با در نظر گرفتن کشیدگی لایه میانی و تأثیر جملات غیرخطی، از روش اغتشاشات هموتوبی^۱ استفاده کردند.

یونس و همکاران [۵۱] به محاسبه تغییر شکل استاتیکی میکروتیر، به روش کاهش مرتبه ترکیب‌شده با روش عددی شوتینگ پرداختند. آنها ابتدا با استفاده از بسط تیلور، نیروی الکتروستاتیک را به صورت یک چند جمله‌ای نوشته و با استفاده از روش گالرکین به حل معادله پرداختند. آنها از شکل مودهای خطی و متقارن میکروتیر مستقیم بدون نیروی الکتریکی به عنوان توابع پایه برای روش گالرکین استفاده کردند و این توابع را از حل به روش عددی شوتینگ استخراج کردند.

نایفه و یونس [۵۲] دینامیک میکروتیرهای دو سر گیردار تحت تحریکات مادون هارمونیک و مافوق هارمونیک را به روش عددی بررسی و نتایج آن را با نتایج حل به روش تئوری اغتشاشات مقایسه کردند. در این بررسی آنها به کمک روش گالرکین به جدایی متغیرها پرداخته و سپس با استفاده از روش عددی آن را حل نمودند. آنها نتیجه گرفتند که با تغییر فرکانس تحریک به عنوان پارامتر کنترلی، تمام تحریکات مادون هارمونیک بدون توجه به اندازه‌ی نیروی AC به پولین منجر می‌شوند و بنابراین میرایی دارای تأثیر ناچیزی بر روی پاسخ فرکانسی می‌باشد.

¹ Homotopy Perturbation Method

۱-۵-۳-۲. حل تحلیلی

ژانگ و ژائو^۱ [۵۳] به مطالعه‌ی ناپایداری پولین برای میکروساختارهای تحت تحریک الکتروستاتیک پرداختند. آنها از روش تحلیل تک مود، برای دستیابی به حل تحلیلی سیستم استفاده کردند.

بقانی [۵۴] پاسخ میکروتیر یک سر گیردار را تحت تحریک الکتروستاتیک از روش تکرار و ریشنال تعدیل یافته^۲ (MVIM) به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار داد. ایشان با استفاده از تئوری تنش کوپل تعدیل یافته، تأثیر وابستگی مقیاس و ولتاژ اعمالی روی پاسخ غیرخطی میکروتیر را بررسی کرد. مقایسه‌ی نتایج بدست آمده با نتایج آزمایشگاهی موجود، مطابقت خوبی را نشان داد. رضازاده و همکاران [۵۵] ارتعاشات غیرخطی یک میکروتیر دو سر گیردار تحت تحریک دو میدان الکتروستاتیک در طرفین میکروتیر را با استفاده از روش تکرار و ریشنال به صورت تحلیلی بررسی کردند.

رکنی و همکاران [۵۶] با استفاده از معادله‌ی انتگرال فردهلْم^۳، رفتار پولین استاتیکی یک میکروعملگر مدل شده به صورت یک میکروتیر یک سر گیردار و دو سر گیردار را با استفاده از روش حل تحلیلی نتیجه‌گیری کردند.

محمودی و جلیلی [۳] از روش مقیاس‌های چندگانه به منظور بدست آوردن فرکانس طبیعی سیستم استفاده کردند. آنها با انجام تحقیقات آزمایشگاهی برای شرایط در نظر گرفته شده، مطابقت خوبی بین نتایج عملی و یافته‌های تئوری پیدا کردند. به علت طبیعت میکرومقیاس بودن این سیستم، دامنه‌ی تحریک نقش مهمی را ایفا می‌کند، زیرا ممکن است حتی یک تغییر کم در دامنه‌ی تحریک، ارتعاشات و شیفت فرکانسی قابل ملاحظه‌ای را در برداشته باشد.

¹ Zhang and Zhao

² Modified Variational Iteration Method

³ Fredholm

۱-۵-۳-۳. حل نیمه تحلیلی

سیوالک^۱ و همکاران [۵۷]، به مطالعه‌ی پاسخ ارتعاشات میکروتیر یک سر گیردار غیرهمگن و غیریکنواخت بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی و تئوری تنش کوپل تعدیل یافته پرداختند. در این سیستم خواص ماده و سطح مقطع میکروتیر به طور پیوسته در جهت طولی تغییر می‌کند. آنها از روش ریلی-ریتز^۲ برای بدست آوردن حل تقریبی ارتعاشات عرضی آزاد مسأله استفاده کردند.

کیم^۳ و همکاران [۵۸] رفتارهای غیرخطی تشدید اولیه، مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک را برای یک میکروتیر یک سرگیردار که جرم متمرکز در انتهای آزاد آن قرار داده شده و تحت تحریک میدان الکتروستاتیک می‌باشد، به صورت نیمه تحلیلی بررسی کردند. آنها از تئوری اغتشاشات با تقریب تک مود برای بررسی ارتعاشات غیرخطی سیستم استفاده کردند.

یونس و نایفه [۲۶] دامنه و فاز پاسخ میکروتیر تحت تحریک تشدید اولیه را با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات بدست آوردند. در تحقیق یاد شده، بار محوری، کشش لایه میانی و میرایی ویسکوز تأثیر داده شد و معادلات مرزی بدست آمده در فرایند حل، به روش عددی شوتینگ حل شدند. نتایج نشان داد که با افزایش نیروی محوری و ضرایب میرایی ویسکوز، فرکانس تشدید غیرخطی به فرکانس تشدید خطی نزدیک می‌شود.

لی^۴ و همکاران [۵۹] به مطالعه رفتار استاتیکی غیرخطی یک میکروتیر دو سر گیردار تحت تحریک الکتروستاتیک به روش نیمه تحلیلی پرداختند. آنها مطابقت خوبی بین نتایج تحقیقات خود با نتایج بدست آمده از روش عددی شوتینگ پیدا کردند.

زمانیان و خادم [۳۷] یک میکروتیر دو سر گیردار تحت تحریک میدان الکتروستاتیک و لایه پیزوالکتریک را مورد مطالعه قرار دادند. آنها با استفاده از روش گالرکین و روش مقیاس‌های چندگانه

¹ Civalek

² Rayleigh-Ritz

³ Kim

⁴ Li

در تئوری اغتشاشات با تقریب سه شکل مود متقارن اول، به بررسی رفتار دینامیکی سیستم به ازای تأثیر پارامترهای مختلف طراحی پرداختند.

در این پایان‌نامه به بررسی رفتار غیرخطی و پایداری یک ربات جراح MEMS فرستاده شده درون جریان خون که به منظور برش یک بافت مورد استفاده قرار گرفته است، پرداخته می‌شود. در این سیستم، بازوی میکروروبات که نقش اصلی در عمل جراحی را انجام می‌دهد به عنوان یک عملگر سیستم میکروالکترومکانیکی در نظر گرفته می‌شود.

۶-۱. اهداف و ضرورت انجام تحقیق

در این پایان‌نامه به تحلیل ارتعاشات غیرخطی، پایداری دینامیکی و مدل‌سازی میرایی ساختاری ویسکوالاستیک، برای یک میکروتیر دو سر گیردار پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، تحت تحریک ولتاژ DC-AC الکتریکی و DC پیزوالکتریک، با اهداف زیر پرداخته شده است:

- بدست آوردن تغییر شکل استاتیکی و محدوده‌ی ناپایداری پولین میکروتیر ویسکوالاستیک.

- بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی سیستم.

- مطالعه تشدید اولیه سیستم و بررسی رفتار دینامیکی سیستم غیرخطی به ازای تغییرات

پارامترها.

- بررسی تأثیر پارامترهای طراحی بر روی میرایی ویسکوالاستیک سیستم.

- بررسی پایداری سیستم.

۷-۱. نوآوری

با توجه به مطالعات انجام شده تاکنون، میکروتیر با ساختار ویسکوالاستیک تحت تحریک هم‌زمان الکتریکی و پیزوالکتریک، بررسی نشده است. در این پایان‌نامه با در نظر گرفتن میکروتیر نانوکامپوزیتی دو سر گیردار، به بررسی تأثیرات میرایی میکروتیر ویسکوالاستیک، بر روی رفتار

غیرخطی استاتیکی، دینامیکی، فرکانس طبیعی و همچنین اثر پارامترهای مختلف بر میرایی سیستم پرداخته می‌شود.

۱-۸. تعریف مسأله

سیستم مورد بررسی یک بازوی میکروروبات است که به صورت میکروتیری با طول L و سطح مقطع مستطیلی، تحت تحریک هم‌زمان میدان الکتریکی و لایه پیزوالکتریک مدل شده است. میکروتیر از پلیمر تقویت‌شده با نانولوله‌ی کربن تک لایه و لایه پیزوالکتریک از PZT ساخته شده است. میکروتیر دو سر گیردار در نظر گرفته شده و به منظور افزایش فرکانس طبیعی، یک بار محوری کششی با مقدار \hat{f} که در حالت فیزیکی معادل با نیروی اعمالی از بازوی مجاور می‌باشد، به یک انتهای میکروتیر اعمال می‌شود [۶۰]. برای ایجاد تحریک الکتروستاتیک، صفحه‌ی الکتروود ثابتی در فاصله‌ی h از میکروتیر قرار گرفته که ولتاژ ثابت با مقدار v_{dc} و ولتاژ هارمونیک کوچک با دامنه v_{ac} بین میکروتیر و صفحه‌ی الکتروود اعمال می‌کند. به منظور برقراری خطوط موازی نیرو، طول میکروتیر در مقایسه با فاصله‌اش با صفحه‌ی الکتروود، خیلی بزرگتر فرض شده است. بر روی این میکروتیر لایه پیزوالکتریک با عرضی برابر عرض میکروتیر چسبانده می‌شود و ولتاژ DC اعمالی به دو سطح لایه پیزوالکتریک برابر با v_p می‌باشد.

با توجه به این که در یک سمت بازوی میکروروبات، مفصل و میکروموتور قرار دارد و سمت دیگر آن حین عمل برش رگ مورد بررسی قرار گرفته است، شرایط مرزی برای ارتعاشات عرضی دو سر گیردار فرض می‌شود. در استخراج معادلات با در نظر گرفتن اثر کشیدگی لایه‌ی میانی، از تئوری اویلر-برنولی غیرخطی استفاده شده است. معادله‌ی حاکم بر حرکت از اصل هامیلتون استخراج و به کمک روش‌های گالرکین و مقیاس‌های چندگانه حل می‌شود.

فصل ۲

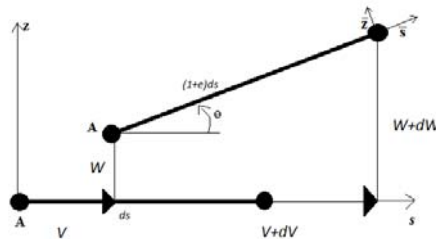
استخراج معادلات حرکت

۱-۲. مقدمه

در این فصل بازوی میکروروبات را به صورت یک میکروتیر دو سر گیردار تحت تحریک نیروی الکتروستاتیک و لایه پیزوالکتریک مدل کرده و با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی برای نشان دادن اثر کشش لایه‌ی میانی و مدل کلپین-ویت برای اعمال کردن اثر میرایی ویسکوالاستیک، به استخراج معادلات حرکت پرداخته می‌شود. در ادامه، معادله‌ی حرکت به منظور سهولت در تحلیل سیستم، بی‌بعدسازی می‌شود. در روند دستیابی به معادلات و حل آن، خواص میکروتیر یعنی E ، ρ ، A و I یکنواخت و ثابت فرض شده و از تأثیر اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی صرف‌نظر شده است.

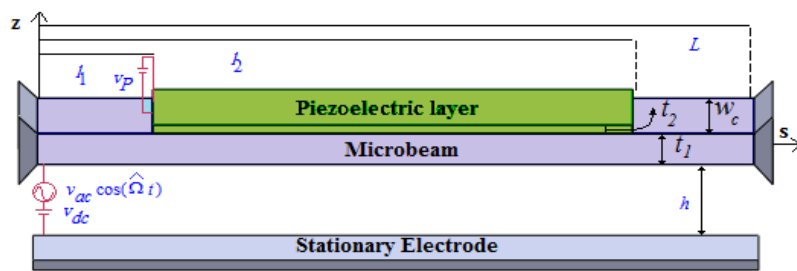
۲-۲. استخراج معادلات با استفاده از اصل هامیلتون

شکل (۱-۲) نشان‌دهنده‌ی سیستم‌های مختصات و المان برای میکروتیر می‌باشد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، دو دستگاه مختصات یکی دستگاه ثابت (s, z) و دیگری دستگاه مختصات محلی (\bar{s}, \bar{z}) در محل سطح مقطع میکروتیر تغییر شکل یافته، در نظر گرفته شده است.



شکل ۱-۲. جابه‌جایی طولی و عرضی میکروتیر و دستگاه مختصات ثابت و محلی

شکل (۲-۲) ساختار و موقعیت اجزای سیستم را نشان می‌دهد. مطابق با شکل (۲-۲) میکروتیر و لایه پیزوالکتریک به ترتیب دارای سطح مقطع مستطیلی $A_1 = w_c t_1$ و $A_2 = w_c t_2$ می‌باشند. همچنین l_1 فاصله‌ی ابتدای میکروتیر تا ابتدای لایه پیزوالکتریک و l_2 فاصله تا انتهای لایه پیزوالکتریک می‌باشد. $\hat{\Omega}$ فرکانس تحریک خارجی است که در اثر تحریک هارمونیک به میکروتیر اعمال می‌شود.



شکل ۲-۲. میکروتیر تحت تحریک میدان الکتروستاتیک و لایه پیزوالکتریک

جابه‌جایی یک تیر با استفاده از تئوری اویلر-برنولی برای تیرهای نازک [۶۰] از دو جمله اصلی

تشکیل شده است:

- انرژی پتانسیل تولید شده حین جابه‌جایی تیر

- انرژی جنبشی ناشی از جابه‌جایی تیر

در استخراج معادلات از اصل هامیلتون استفاده می‌شود. مطابق با شکل (۱-۲) جابه‌جایی اولیه‌ی

میکروتیر V و W است که به ترتیب جابه‌جایی طولی و جابه‌جایی عرضی سیستم می‌باشند. در

نتیجه انرژی جنبشی سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L M(s) (\dot{V}^2 + \dot{W}^2) ds \quad (1-2)$$

در رابطه (۱-۲)، $M(s)$ جرم بر واحد طول سیستم می‌باشد که با توجه به وجود لایه

پیزوالکتریک بر روی میکروتیر، جرم سیستم مجموعی از این دو المان است. در نتیجه $M(s)$ به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M(s) = w_c \rho_1 t_1 + (H_{l_1} - H_{l_2}) w_c \rho_2 t_2 \quad (2-2)$$

در این رابطه، w_c عرض میکروتیر و لایه پیزوالکتریک، t_1 و t_2 به ترتیب ضخامت میکروتیر و

پیزوالکتریک و ρ_1 و ρ_2 به ترتیب نشان‌دهنده‌ی چگالی جرمی میکروتیر و پیزوالکتریک می‌باشند. به

علت این که پیزوالکتریک تنها بر روی قسمتی از میکروتیر نصب شده، از تابع پله‌ای^۱ که با H_{l_i} نشان

^۱ Heaviside Function

داده شده است، استفاده می‌شود.

$$H_{l_i} = \text{Heaviside function } (s - l_i) = \begin{cases} 1, & s > l_i \\ 0, & s < l_i \end{cases} \quad (3-2)$$

رابطه کلی انرژی پتانسیل به صورت $U = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$ می‌باشد که به علت وجود لایه پیزوالکتریک، انرژی پتانسیل روی حجم کل سیستم مورد بررسی، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U = \int \int_0^{\varepsilon_s} \sigma_1 d\varepsilon_s dv_1 + \int \int_0^{\varepsilon_s} \sigma_2 d\varepsilon_s dv_2 \quad (4-2)$$

که در این رابطه σ_1 و σ_2 به ترتیب تنش‌های نرمال میکروتیر و پیزوالکتریک، ε_s کرنش در سطح مقطع سیستم و dv_1 و dv_2 به ترتیب دیفرانسیل حجمی میکروتیر و لایه پیزوالکتریک می‌باشند.

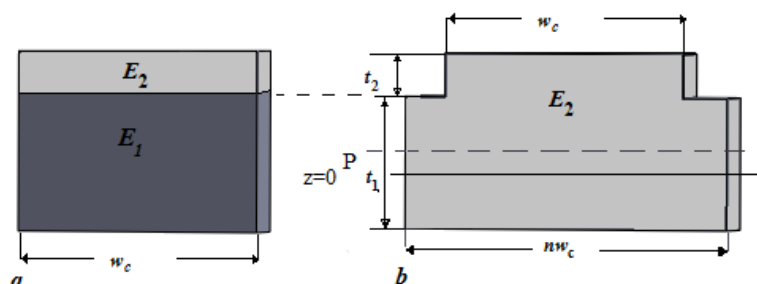
با توجه به ویژگی ساختارهای چند لایه، وقتی که مواد با مدول الاستیسیته متفاوت بر روی یکدیگر قرار می‌گیرند، موقعیت تار خنثی ثابت نمی‌ماند. به عبارتی، به علت این که لایه پیزوالکتریک تنها بر روی قسمتی از طول میکروتیر نصب شده است، تار خنثی برای هر بخش از تیر تغییر می‌کند. برای $s < l_1$ و $s > l_2$ جایی که پیزوالکتریک بر روی میکروتیر نصب نشده است، تار خنثی در مرکز هندسی تیر می‌باشد یعنی در $z = 0$ و برای بخشی که لایه پیزوالکتریک بر روی میکروتیر قرار دارد، تار خنثی در فاصله P از مرکز هندسی تیر واقع می‌شود. مطابق با [۶۱] مقدار P در ادامه بدست می‌آید. با توجه به این که جنس ماده‌ی دو لایه متفاوت می‌باشد با تعریف

$$n = \frac{E_1}{E_2} \quad (5-2)$$

که E_1 و E_2 به ترتیب مدول الاستیسیته میکروتیر و لایه پیزوالکتریک می‌باشند و بعداً معرفی می‌گردند. با ضرب کردن عرض میکروتیر در n که باعث تغییر آن به nw_c می‌شود و بدون تغییر نگه داشتن عرض لایه پیزوالکتریک، مطابق با شکل (۳-۲)، با استفاده از معادله (۶-۲) می‌توان P را که موقعیت تار خنثی برای سیستم معادل در این حالت می‌باشد، بدست آورد:

$$P \sum_i A_i = \sum_i Y_i A_i \quad i=1,2 \quad (6-2)$$

که در این رابطه Y_i و A_i به ترتیب تار خنثی و سطح مقطع هر لایه است و i مشخص کننده شماره لایه می باشد.



شکل ۲-۳. a- سطح مقطع میکروتیر و لایه پیزوالکتریک اصلی، b- سطح مقطع معادل سیستم

$$P(t_1 n w_c + t_2 w_c) = \left(\frac{t_1}{2}\right) t_1 n w_c + \left(\frac{t_2}{2} + t_1\right) t_2 w_c \Rightarrow \quad (7-2)$$

$$P = \frac{\left(\frac{t_1}{2}\right) t_1 n + \left(\frac{t_2}{2} + t_1\right) t_2}{t_1 n + t_2}$$

با جایگزینی n از معادله (۵-۲) در معادله (۷-۲)، P به صورت زیر بدست می آید:

$$P = \frac{E_2 t_2 (t_1 + t_2)}{2(E_1 t_1 + E_2 t_2)} \quad (8-2)$$

بسط رابطه (۴-۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$U = (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \int_0^{\epsilon_s} \sigma_1 w_c d\epsilon_s d\bar{z} ds + (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P}{2}} \int_0^{\epsilon_s} \sigma_1 w_c d\epsilon_s d\bar{z} ds \quad (9-2)$$

$$+ (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P}{2}+t_2} \int_0^{\epsilon_s} \sigma_2 w_c d\epsilon_s d\bar{z} ds + H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \int_0^{\epsilon_s} \sigma_1 w_c d\epsilon_s d\bar{z} ds$$

برای بدست آوردن انرژی پتانسیل سیستم، روابط تنش- کرنش مورد نیاز می باشد. بستر میکروتیر

نانوکامپوزیتی در سیستم مورد بررسی، پلیمر بوده که دارای ساختار ویسکوالاستیک می باشد. در این

پایان نامه از مدل کلوین-ویت برای مدل سازی اثر ویسکوالاستیک استفاده می شود. بنابراین معادله

تنش-کرنش در میکروتیر به صورت زیر بیان می شود:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_s + \bar{C} \dot{\varepsilon}_s \quad (10-2)$$

که \bar{C} ضریب ویسکوالاستیک میکروتیر می‌باشد.

مقدار مدول الاستیسیته و چگالی جرمی برای میکروتیر نانوکامپوزیتی از روابط (۱۱-۲) محاسبه می‌شود [۶۲]:

$$\begin{aligned} E_1 &= (g_0 f_0 Y_f - Y_m) V_f + Y_m \\ \rho_1 &= (1 - v_f) \rho_m + v_f \rho_f \end{aligned} \quad (11-2)$$

در این معادله Y_f و Y_m به ترتیب مدول الاستیسیته بستر پلیمری و نانولوله‌های کربنی تک جداره و ρ_f و ρ_m به ترتیب چگالی جرمی بستر پلیمری و نانولوله‌های کربنی تک جداره می‌باشند. V_f درصد حجمی نانولوله‌های کربنی در ساختار میکروتیر کامپوزیتی می‌باشد. g_0 و f_0 به ترتیب فاکتور جهت و فاکتور طول، مربوط به ماده‌ی کامپوزیتی همراه با SWCNT می‌باشند.

خاصیت پیزوالکتریکی مواد در ساده‌ترین حالت، به صورت دو معادله در (۱۲-۲) نمایش داده می‌شود [۶۱]:

$$\begin{aligned} \{S\} &= [S]^E \{T\} + [d]\{E\} \\ \{D\} &= [d]\{T\} + [\varepsilon]^T \{E\} \end{aligned} \quad (12-2)$$

در این معادله، $\{S\}$ بردار مؤلفه‌های کرنش، $[S]^E$ ماتریس نرمی، $\{T\}$ بردار مؤلفه‌های تنش، $[d]$ ماتریس کوپلینگ پیزوالکتریک، $\{E\}$ بردار شدت میدان الکتریکی، $[D]$ بردار جابه‌جایی الکتریکی و $[\varepsilon]^T$ ماتریس نفوذپذیری الکتریکی می‌باشد.

در معادله (۱۲-۲) رابطه‌ی تنش-کرنش برای لایه پیزوالکتریک، با توجه به کوپل بودن خواص مکانیکی و الکتریکی در این مواد و در نظر گرفتن جابه‌جایی الکتریکی یک بعدی برای لایه پیزوالکتریک، مطابق با [۱۸]، به صورت (۱۳-۲) بدست می‌آید:

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_s - E_2 d_{31} \frac{v_P}{t_2} \quad (13-2)$$

در این معادله d_{31} ثابت کرنش لایه پیزوالکتریک است که معمولاً مقادیر منفی را به خود

اختصاص می‌دهد و ولتاژ DC اعمالی به دو سطح لایه پیزوالکتریک می‌باشد. به علت در نظر گرفتن تئوری تیر اویلر-برنولی غیرخطی، مطابق با [۶۰]، کرنش در سطح مقطع میکروتیر به صورت (۱۴-۲) بیان می‌شود:

$$\varepsilon_s = e - k\bar{z} \quad (14-2)$$

که در این معادله e کرنش ناشی از کشش لایه میانی و k انحنای خمشی میکروتیر تغییر شکل یافته در صفحه sz می‌باشد و براساس [۶۰] به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{(1+V')^2 + W'^2} - 1 \\ k &= \theta' \end{aligned} \quad (15-2)$$

در رابطه (۱۵-۲) θ زاویه چرخش میکروتیر است. به منظور سهولت در محاسبات، از بسط سری تیلور معادلات (۱۵-۲)، به صورت معادله (۱۶-۲) استفاده می‌شود [۶۰]:

$$e = V' + \frac{1}{2}W'^2 - \frac{1}{2}V'W'^2 + \dots \quad (16-2)$$

$$k = (W' - V'W' + V'^2W' - \frac{1}{3}W'^3)'$$

به منظور محاسبه انرژی پتانسیل سیستم، روابط (۱۰-۲) و (۱۳-۲) در معادله (۹-۲) جایگزین می‌شوند:

$$\begin{aligned} U &= (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} (E_1 \varepsilon_s + \bar{C} \dot{\varepsilon}_s) w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds \\ &+ (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-p}{2}}^{\frac{t_1-p}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} (E_1 \varepsilon_s + \bar{C} \dot{\varepsilon}_s) w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds \\ &+ (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-p}{2}}^{\frac{t_1-p+t_2}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} (E_2 \varepsilon_s - E_2 d_{31} \frac{v_p}{t_2}) w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds \\ &+ H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} (E_1 \varepsilon_s + \bar{C} \dot{\varepsilon}_s) w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds \end{aligned} \quad (17-2)$$

با جداسازی جملات ترکیبی در معادله (۱۷-۲)، معادله (۱۸-۲) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
U &= (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} E_1 \varepsilon_s w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds + (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} \bar{C} \dot{\varepsilon}_s w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds & (18-2) \\
&+ (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} E_1 \varepsilon_s w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds + (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} \bar{C} \dot{\varepsilon}_s w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds \\
&+ (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P+t_2}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} E_2 \varepsilon_s w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds \\
&- (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P+t_2}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} \frac{v_P}{t_2} E_2 d_{31} w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds \\
&+ H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} E_1 \varepsilon_s w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds + H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \int_0^{\varepsilon_s} \bar{C} \dot{\varepsilon}_s w_c d\varepsilon_s d\bar{z} ds
\end{aligned}$$

به منظور دستیابی به رابطه‌ی انرژی پتانسیل، لازم است که معادله (۱۸-۲) از درونی‌ترین

انتگرال به ترتیب محاسبه گردد:

$$\begin{aligned}
U &= (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \frac{\varepsilon_s^2}{2} E_1 w_c d\bar{z} ds + (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} \dot{\varepsilon}_s \varepsilon_s w_c d\bar{z} ds & (19-2) \\
&+ (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P}{2}} \frac{\varepsilon_s^2}{2} E_1 w_c d\bar{z} ds + (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P}{2}} \bar{C} \dot{\varepsilon}_s \varepsilon_s w_c d\bar{z} ds \\
&+ (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P+t_2}{2}} \frac{\varepsilon_s^2}{2} E_2 w_c d\bar{z} ds - (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P+t_2}{2}} \frac{v_P}{t_2} \varepsilon_s E_2 d_{31} w_c d\bar{z} ds \\
&+ H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \frac{\varepsilon_s^2}{2} E_1 w_c d\bar{z} ds + H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} \dot{\varepsilon}_s \varepsilon_s w_c d\bar{z} ds
\end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۱۴-۲) برای کرنش در سطح مقطع سیستم، مشتق آن را می‌توان به صورت

زیر در نظر گرفت:

$$\dot{\varepsilon}_s = \dot{e} - \dot{k}\bar{z} \quad (20-2)$$

حال با جایگزینی روابط (۱۴-۲) و (۲۰-۲) در معادله (۱۹-۲):

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} (e - k\bar{z})^2 E_1 w_c d\bar{z} ds + (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} (\dot{e} - \dot{k}\bar{z})(e - k\bar{z}) \times & (21-2) \\
&w_c d\bar{z} ds + \frac{1}{2} (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P}{2}} (e - k\bar{z})^2 E_1 w_c d\bar{z} ds \\
&+ (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P}{2}} \bar{C} (\dot{e} - \dot{k}\bar{z})(e - k\bar{z}) w_c d\bar{z} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P+t_2}{2}} (e - k\bar{z})^2 E_2 w_c d\bar{z} ds \\
& - (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P+t_2}{2}} \frac{v_P}{t_2} (e - k\bar{z}) E_2 d_{31} w_c d\bar{z} ds \\
& + \frac{1}{2} H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} (e - k\bar{z})^2 E_1 w_c d\bar{z} ds + H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} (\dot{e} - \dot{k}\bar{z}) (e - k\bar{z}) w_c d\bar{z} ds
\end{aligned}$$

با باز کردن اتحاد جملات و به دنبال آن جداسازی آنها، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2}(1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} e^2 E_1 w_c d\bar{z} ds - (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} ek E_1 w_c d\bar{z} ds \quad (22-2) \\
& + \frac{1}{2}(1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} k^2 E_1 w_c d\bar{z} ds + (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} \dot{e} w_c d\bar{z} ds \\
& - (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} \dot{e} k w_c d\bar{z} ds - (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} \dot{e} k w_c d\bar{z} ds \\
& + (1 - H_{l_1}) \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} \dot{k} k w_c d\bar{z} ds + \frac{1}{2}(H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P}{2}} e^2 E_1 w_c d\bar{z} ds \\
& - (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P}{2}} ek E_1 w_c d\bar{z} ds + \frac{1}{2}(H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P}{2}} k^2 E_1 w_c d\bar{z} ds \\
& + \frac{1}{2}(H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P+t_2}{2}} e^2 E_2 w_c d\bar{z} ds - (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P+t_2}{2}} ek E_2 w_c d\bar{z} ds \\
& + \frac{1}{2}(H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P+t_2}{2}} k^2 E_2 w_c d\bar{z} ds - (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P+t_2}{2}} \frac{v_P}{t_2} e E_2 d_{31} w_c d\bar{z} ds \\
& + (H_{l_1} - H_{l_2}) \int_0^L \int_{\frac{t_1-P}{2}}^{\frac{t_1-P+t_2}{2}} \frac{v_P}{t_2} k P E_2 d_{31} w_c d\bar{z} ds + \frac{1}{2} H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} e^2 E_1 w_c d\bar{z} ds \\
& - H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} ek E_1 w_c d\bar{z} ds + \frac{1}{2} H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} k^2 E_1 w_c d\bar{z} ds \\
& + H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} \dot{e} w_c d\bar{z} ds - H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} \dot{e} k w_c d\bar{z} ds \\
& - H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} \dot{e} k w_c d\bar{z} ds + H_{l_2} \int_0^L \int_{\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \bar{C} \dot{k} k w_c d\bar{z} ds
\end{aligned}$$

با اعمال دومین انتگرال و حذف جمله‌هایی که حاصل صفر دارند، رابطه‌ی (23-2) برای انرژی

پتانسیل استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}(1-H_{l_1})E_1w_c \int_0^L e^2 t_1 ds + \frac{1}{24}(1-H_{l_1})E_1w_c \int_0^L k^2 t_1^3 ds \\
&+ (1-H_{l_1})\bar{C}w_c \int_0^L \dot{e}et_1 ds + \frac{1}{12}(1-H_{l_1})\bar{C}w_c \int_0^L \dot{k}kt_1^3 ds \\
&+ \frac{1}{2}(H_{l_1}-H_{l_2})E_1w_c \int_0^L e^2 t_1 ds + \frac{1}{24}(H_{l_1}-H_{l_2})E_1w_c \int_0^L k^2 t_1^3 ds \\
&+ \frac{1}{2}(H_{l_1}-H_{l_2})E_1w_c \int_0^L k^2 P^2 t_1 ds + (H_{l_1}-H_{l_2})\bar{C}w_c \int_0^L \dot{e}et_1 ds \\
&+ \frac{1}{12}(H_{l_1}-H_{l_2})\bar{C}w_c \int_0^L \dot{k}kt_1^3 ds + \frac{1}{2}(H_{l_1}-H_{l_2})E_2 \times 2w_c \int_0^L e^2 t_2 ds \\
&+ \frac{1}{6}(H_{l_1}-H_{l_2})E_2w_c \int_0^L (t_2^3 + \frac{3}{2}t_2^2 t_1 + \frac{3}{4}t_1^2 t_2 + 3t_2 P^2 - 3(t_2^2 + t_1 t_2)P)k^2 ds \\
&- (H_{l_1}-H_{l_2}) \int_0^L E_2 d_{31} w_c v_P eds \\
&- \frac{1}{2}(H_{l_1}-H_{l_2}) \int_0^L E_2 d_{31} w_c (t_2^2 + t_1 t_2 - 2t_1 P) v_P k ds + \frac{1}{2} H_{l_2} E_1 w_c \int_0^L t_1 e^2 ds \\
&+ \frac{1}{24} H_{l_2} E_1 w_c \int_0^L t_1^3 k^2 ds + H_{l_2} \bar{C} w_c \int_0^L t_1 \dot{e} eds + \frac{1}{12} H_{l_2} \bar{C} w_c \int_0^L t_1^3 \dot{k} k ds
\end{aligned} \tag{۲۳-۲}$$

با در نظر گرفتن معادله (۲۳-۲) و جدا کردن جملات با ضرایب مشابه، انرژی پتانسیل به صورت

زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_0^L B_1(s) e^2 ds - \int_0^L B_2(s) v_P eds + \frac{1}{2} \int_0^L B_3(s) k^2 ds + \int_0^L B_4(s) v_P k ds \\
&+ \int_0^L B_5(s) e \dot{e} ds + \int_0^L B_6(s) k \dot{k} ds
\end{aligned} \tag{۲۴-۲}$$

که

$$\begin{aligned}
B_1(s) &= (1-H_{l_1})E_1A_1 + (H_{l_1}-H_{l_2})(E_1A_1 + E_2A_2) + H_{l_2}E_1A_1 \\
B_2(s) &= (H_{l_1}-H_{l_2}) \frac{E_2A_2d_{31}}{t_2} \\
B_3(s) &= (1-H_{l_1})E_1I_1 + (H_{l_1}-H_{l_2})(E_1I_3 + E_2I_2) + H_{l_2}E_1I_1 \\
B_4(s) &= (H_{l_1}-H_{l_2}) \frac{E_2A_3d_{31}}{t_2} \\
B_5(s) &= (1-H_{l_1})\bar{C}I_1 + (H_{l_1}-H_{l_2})\bar{C}I_3 + H_{l_2}E_1\bar{C}I_1 \\
B_6(s) &= \bar{C}A_1
\end{aligned} \tag{۲۵-۲}$$

و پارامترها در معادله‌ی بالا، در (۲۶-۲) آمده است.

$$A_1 = w_c t_1, \quad A_2 = w_c t_2, \quad A_3 = \frac{w_c}{2} (t_1 t_2 + t_2^2 - 2t_2 P), \quad (26-2)$$

$$I_1 = \frac{w_c}{12} t_1^3, \quad I_3 = \frac{w_c}{12} t_1^3 + t_1 w_c P^2$$

$$I_2 = w_c \left(\left(\frac{1}{3} t_2^3 \right) + \left(\frac{1}{2} t_1 t_2^2 \right) + \left(\frac{1}{4} t_2 t_1^2 \right) + t_2 P^2 - (t_2^2 + t_1 t_2) P \right)$$

در این معادله، A_3 ممان اول سطح برای سطح مقطع لایه پیزوالکتریک حول تار خنثی می‌باشد. نیروی الکتروستاتیک حاصل از تحریک الکتریکی، یک نیروی خارجی است که منجر به ایجاد کار ناپایستار به صورت زیر می‌شود:

$$F_u = \int_0^L Q W ds \quad (27-2)$$

در معادله (27-2)، F_u کار حاصل از نیروی الکتروستاتیکی و Q نیروی الکتروستاتیکی می‌باشند. اگر طول میکروتیر در مقایسه با فاصله آن با صفحه‌ی الکترودی مقابلش خیلی بزرگتر باشد، می‌توان از آثار لبه‌ای صرف‌نظر کرد. در این حالت، ظرفیت خازنی سیستم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C(W) = \frac{\epsilon_0 A}{h+W} \quad (28-2)$$

در این معادله، ϵ_0 ثابت خلأ بوده و مقدار آن برابر با $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ است. همچنین A مساحت صفحه‌ی الکترودی، h فاصله بین الکتروود و میکروتیر و W تغییر شکل عرضی میکروتیر نسبت به حالت ساکن می‌باشد.

اگر تقریب صفحات موازی برای سیستم اتخاذ شود، با اعمال ولتاژ $V(t) = v_{dc} + v_{ac} \cos(\hat{\Omega}t)$ بین میکروتیر و صفحه‌ی الکترودی ثابت، نیروی کششی الکتروستاتیک به صورت زیر بدست می‌آید:

$$Q = \frac{d}{dW} \left[\frac{1}{2} C(W) V^2(t) \right] \quad (29-2)$$

با جایگزین کردن معادله (28-2) در معادله (29-2) و استفاده از $V(t)$ ، نیروی الکتروستاتیک به صورت (30-2) خواهد بود:

$$Q = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 w_c \frac{(v_{dc} + v_{ac} \cos(\hat{\Omega}t))^2}{(h+W)^2} \quad (30-2)$$

در نتیجه کار نیروی ناپایستار معادله (۲۷-۲)، به صورت (۳۱-۲) بیان می‌شود:

$$F_u = -\frac{1}{2} \int_0^L \varepsilon_0 w_c \frac{(v_{dc} + v_{ac} \cos(\hat{\Omega}t))^2}{(h+W)^2} W ds \quad (31-2)$$

روابط (۱-۲)، (۲۴-۲) و (۳۱-۲) در رابطه‌ی اصل هامیلتون قرار داده می‌شوند.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \delta F_u) dt = 0 \quad (32-2)$$

به منظور انجام عملیات و ریشنال‌گیری در اصل هامیلتون برای معادله (۳۲-۲)، برای هر قسمت به صورت جداگانه عمل می‌شود. برای انرژی جنبشی انتگرال‌گیری ابتدا نسبت به زمان انجام می‌شود. روند محاسبات در ادامه آورده شده است: (در معادلات (۳۳-۲) تا (۴۲-۲) به منظور طولانی نشدن روابط و محاسبات، ثابت‌های هر انتگرال‌گیری نوشته نشده است)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta K dt &= \int_0^L \left[\int_{t_1}^{t_2} M(s) \dot{V} \delta \dot{V} dt + \int_{t_1}^{t_2} M(s) \dot{W} \delta \dot{W} dt \right] ds \\ &= \int_0^L \left[- \int_{t_1}^{t_2} M(s) \ddot{V} \delta V dt - \int_{t_1}^{t_2} M(s) \ddot{W} \delta W dt \right] ds \end{aligned} \quad (33-2)$$

برای مشخص بودن و ریشنال‌گیری؛ کرنشی، با تقسیم‌بندی جملات، به صورت زیر عمل می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = \int_{t_1}^{t_2} [\delta U_1(s) + \delta U_2(s) + \delta U_3(s) + \delta U_4(s) + \delta U_5(s) + \delta U_6(s)] dt \quad (34-2)$$

برای بخش‌های معادله (۳۴-۲)، با جایگذاری مقادیر e و k از معادله (۱۶-۲) و نگه داشتن

جملات غیرخطی حاصل تا مرتبه‌ی ۳، به ترتیب به صورت زیر اقدام می‌شود:

جمله اول به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta U_1(s) &= \int_0^L B_1(s) V' \delta V' ds + \frac{1}{2} \int_0^L B_1(s) W'^2 \delta V' ds + \int_0^L B_1(s) W V' \delta W' ds \\ &= - \int_0^L (B_1(s) V')' \delta V ds - \frac{1}{2} \int_0^L (B_1(s) W'^2)' \delta V ds - \int_0^L (B_1(s) W V')' \delta W ds \end{aligned} \quad (35-2)$$

برای جمله دوم رابطه‌ی (۳۶-۲) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\delta U_2(s) &= \int_0^L B_2(s) v_p \delta V ds + \int_0^L B_2(s) v_p W' \delta W ds - \int_0^L B_2(s) v_p V W' \delta W ds \\
&\quad (36-2) \\
&- \frac{1}{2} \int_0^L B_2(s) v_p W'^2 \delta V ds = - \int_0^L (B_2(s) v_p)' \delta V ds - \int_0^L (B_2(s) v_p W')' \delta W ds \\
&+ \int_0^L (B_2(s) v_p V W')' \delta W ds + \frac{1}{2} \int_0^L (B_2(s) v_p W'^2)' \delta V ds
\end{aligned}$$

با توجه به معادله (۱۶-۲) برای انحنای خمشی k ، ضریب k^2 موجود در جمله‌ی سوم را

می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$k^2 = (W' - V W')'^2 + (V'^2 W' - \frac{1}{3} W'^3)'^2 + 2(W' - V W')'(V'^2 W' - \frac{1}{3} W'^3)' \quad (37-2)$$

برای جمله سوم معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\delta U_3(s) = \int_0^L B_3(s) (W' - V W')' \delta (W' - V W')' ds + \int_0^L B_3(s) (V'^2 W' - \frac{1}{3} W'^3)' \quad (38-2)$$

$$\delta (V'^2 W' - \frac{1}{3} W'^3)' ds + \int_0^L B_3(s) (W' - V W')' \delta (V'^2 W' - \frac{1}{3} W'^3)' ds$$

$$+ \int_0^L B_3(s) (V'^2 W' - \frac{1}{3} W'^3)' \delta (W' - V W')' ds =$$

$$- \int_0^L (B_3(s) (W' - V W')')' \delta W ds + \int_0^L (B_3(s) (W' - V W')')' V' \delta W ds$$

$$+ \int_0^L (B_3(s) (W' - V W')')' W' \delta V ds - 2 \int_0^L (B_3(s) W'')' V W' \delta V ds$$

$$- \int_0^L (B_3(s) W'')' V'^2 \delta W ds + \int_0^L (B_3(s) W'')' W'^2 \delta W ds$$

$$- \int_0^L (B_3(s) (V'^2 W' - \frac{1}{3} W'^3)')' \delta W ds$$

$$\Rightarrow \delta U_3(s) = \int_0^L ((B_3(s) (W' - V W')')' W')' \delta V ds - 2 \int_0^L ((B_3(s) W'')' V W') \delta V ds$$

$$- \int_0^L (B_3(s) W'')'' \delta W ds - \int_0^L ((B_3(s) (V W'))' (1 - V'))' \delta W ds$$

$$- \int_0^L ((B_3(s) W'')' V')' \delta W ds + \int_0^L ((B_3(s) W'')' V'^2)' \delta W ds - \int_0^L ((B_3(s) W'')' W'^2)' \delta W ds$$

$$+ \int_0^L (B_3(s) (V'^2 W' - \frac{1}{3} W'^3)')'' \delta W ds$$

برای جمله چهارم نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\delta U_4(s) = \int_0^L B_4'(s) v_p (\delta W' - V' \delta W' - W' \delta V' + 2V W' \delta V' + V'^2 \delta W' - W'^2 \delta W') ds \quad (39-2)$$

$$= - \int_0^L (B_4'(s) v_p)' \delta W ds + \int_0^L (B_4'(s) v_p V')' \delta W ds + \int_0^L (B_4'(s) v_p W')' \delta V ds$$

$$-\int_0^L (B'_4(s)v_p 2V'W')' \delta V ds - \int_0^L (B'_4(s)v_p V'^2)' \delta W ds + \int_0^L (B'_4(s)v_p W'^2)' \delta W ds$$

برای جمله پنجم، با توجه به رابطه (۲-۱۶)، برای \dot{e} و ضریب $e\dot{e}$ روابط زیر نتیجه گیری می شود:

$$\dot{e} = \dot{V}' + 2W'\dot{W}' - V'W'\dot{W}' - \frac{1}{2}W'^2\dot{V}' \quad (۴۰-۲)$$

$$e\dot{e} = V'\dot{V}' + \frac{1}{2}W'^2\dot{V}' - \frac{1}{2}V'W'^2\dot{V}' + W'\dot{W}'V' + \frac{1}{2}W'^3\dot{W}' - \frac{1}{2}V'W'^3\dot{W}' - \frac{1}{2}\dot{V}'W'^2V'$$

$$- \frac{1}{4}\dot{V}'W'^4 + \frac{1}{4}V'\dot{V}'W'^4 - W'\dot{W}'V'^2 - \frac{1}{2}W'^3\dot{W}'V' + \frac{1}{2}V'^2W'^3\dot{W}'$$

به منظور وریشنال گیری برای جملات غیرخطی تا مرتبه ی ۳، به صورت زیر عمل می شود:

$$\delta U_5(s) = \int_0^L (B_5(s)\dot{V}')' \delta V ds + \int_0^L (B_5(s)W'\dot{V}')' \delta W ds - \frac{1}{2} \int_0^L (B_5(s)W'^2\dot{V}')' \delta V ds \quad (۴۱-۲)$$

$$- \int_0^L (B_5(s)W'\dot{V}'V')' \delta W ds + \int_0^L (B_5(s)W'\dot{W}')' \delta V ds + \int_0^L (B_5(s)\dot{W}'V')' \delta W ds$$

$$+ \frac{3}{2} \int_0^L (B_5(s)W'^2\dot{W}')' \delta W ds - \frac{1}{2} \int_0^L (B_5(s)\dot{V}'W'^2)' \delta V ds - \int_0^L (B_5(s)\dot{V}'V'W')' \delta W ds$$

$$- 2 \int_0^L (B_5(s)W'\dot{W}'V')' \delta V ds$$

برای جمله ششم، با توجه به معادله ی k ، برای \dot{k} رابطه ی زیر نوشته می شود:

$$\dot{k} = (\dot{W}' - \dot{V}'W' - V'\dot{W}')' + (2V'\dot{V}'W' + V'^2\dot{W}' - W'^2\dot{W}')' \quad (۴۲-۲)$$

در نتیجه با تشکیل kk برای وریشنال جمله ششم، معادله زیر بدست می آید:

$$\delta U_6(s) = \int_0^L B_6(s)(\dot{W}' - \dot{V}'W' - V'\dot{W}')' \delta(W' - V'W')' ds \quad (۴۳-۲)$$

$$+ \int_0^L B_6(s)(2V'\dot{V}'W' + V'^2\dot{W}' - W'^2\dot{W}')' \delta(W' - V'W')' ds$$

$$+ \int_0^L B_6(s)(\dot{W}' - \dot{V}'W' - V'\dot{W}')' \delta(V'^2W' - \frac{1}{3}W'^3)' ds$$

$$+ \int_0^L B_6(s)(2V'\dot{V}'W' + V'^2\dot{W}' - W'^2\dot{W}')' \delta(V'^2W' - \frac{1}{3}W'^3)' ds$$

$$= - \int_0^L (B_6(s)(\dot{W}' - \dot{V}'W' - V'\dot{W}')')' \delta(W' - V'W') ds$$

$$- \int_0^L (B_6(s)(2V'\dot{V}'W' + V'^2\dot{W}' - W'^2\dot{W}')')' \delta(W' - V'W') ds$$

$$- \int_0^L (B_6(s)(\dot{W}' - \dot{V}'W' - V'\dot{W}')')' \delta(V'^2W' - \frac{1}{3}W'^3) ds$$

$$- \int_0^L (B_6(s)(2V\dot{V}'W' + V'^2\dot{W}' - W'^2\dot{W}'))' \delta(V'^2W' - \frac{1}{3}W'^3) ds$$

با نکه داشتن جملات تا مرتبه ۳، نتیجه بصورت به صورت معادله (۴۴-۲) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \delta U_6(s) = & \int_0^L (B_6(s)\dot{W}'')'' \delta W ds - \int_0^L ((B_6(s)(\dot{V}'W' + V'\dot{W}'))'(1-V'))' \delta W ds & (44-2) \\ & - \int_0^L ((B_6(s)(\dot{W}' - \dot{V}'W' - V'\dot{W}'))'W')' \delta V ds - \int_0^L ((B_6(s)\dot{W}'')'V')' \delta W ds \\ & + \int_0^L ((B_6(s)(\dot{W}' - \dot{V}'W' - V'\dot{W}'))'(-V'^2 + W'^2))' \delta W ds \\ & + \int_0^L ((B_6(s)\dot{W}'')'2V'W')' \delta V ds \\ & - \int_0^L ((B_6(s)\dot{W}'')'V'^2)' \delta W ds + \int_0^L ((B_6(s)\dot{W}'')'W'^2)' \delta W ds \\ & - \int_0^L (B_6(s)[V'^2\dot{W}' + 2V\dot{V}'W' - W'^2\dot{W}'])' \delta W ds \end{aligned}$$

با استفاده از معادلات (۳۳-۲) تا (۴۴-۲)، جداسازی جملات با ضرایب $\delta W ds dt$ و $\delta V ds dt$ و

مساوی با صفر قرار دادن هرکدام، معادلات حرکت کوپل طولی و عرضی میکروتیر که با نکه داشتن

جملات غیرخطی تا مرتبه ۳ محاسبه گردید، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} M(s)\ddot{V} - (B_1(s)V')' - (B_5(s)\dot{V}')' &= (B_1(s)[\frac{1}{2}W'^2 - V'W'^2])' & (45-2) \\ - (B_2(s)v_p[1 - \frac{1}{2}W'^2 + V'W'^2])' &+ (W'(B_3(s)[W' - V'W'])' - 2V'W'(B_3(s)W''))' \\ + (B_4'(s)v_p[W' + 2V'^2W' - 2V'W' - W'^3 - V'^3W'])' & \\ + (B_5(s)[W'\dot{W}' - \dot{V}'W'^2 - V'W'\dot{W}'])' &+ (W'(B_6(s)[\dot{W}' - \dot{V}'W' - \dot{V}'\dot{W}'])' \\ - 2V'W'(B_6(s)\dot{W}'')' & \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} (B_3(s)W'')'' + M(s)\ddot{W} + (B_6(s)\dot{W}'')'' &= (B_1(s)[V'W' + \frac{1}{2}W'^3 - W'V'^2])' & (46-2) \\ + B_5(s)(W'^2\dot{W}' + \dot{V}'W' - \dot{V}'W'V') &+ ((B_3(s)(W'V'))'(1-V')) \\ + (W'^2 + V' - V'^2)(B_3(s)W'')' &- (B_3(s)[V'^2W' - \frac{1}{3}W'^3])' \\ - (B_2(s)v_p(W' - W'V'))' &- ((B_4'(s)v_p(1 - V' - W'^2 - 3V'W'^2))' \\ + (B_6(s)[V'\dot{W}' + \dot{V}'W'])'(1-V') &+ (B_3(s)\dot{W}'')[V' - V'^2 + W'^2] \\ - (B_3(s)[V'^2\dot{W}' + 2V\dot{V}'W' - W'^2\dot{W}'])' &- \frac{1}{2} \varepsilon_0 W_c \frac{(v_{dc} + v_{ac} \cos(\hat{\Omega}t))^2}{(h+W)^2} \end{aligned}$$

صحت معادلات (۲-۴۵) و (۲-۴۶) را می‌توان با حذف اثر ویسکوالاستیک از معادلات و مقایسه‌ی نتایج با معادلات حرکت استخراجی در [۳۷] بررسی کرد.

با توجه به این‌که تیر مورد بررسی در این پایان‌نامه بسیار نازک فرض شده است، فرکانس طبیعی محوری سیستم خیلی بزرگتر از فرکانس طبیعی عرضی آن می‌باشد. در نتیجه جمله‌ی اینرسی در راستای طولی، قابل چشم‌پوشی می‌باشد [۶۰]. بر اساس [۴۵] میرایی از مرتبه ضعیفی نسبت به سختی در راستای طولی برخوردار است. همچنین به علت خصوصیات و ابعاد پارامترهای سیستم با استفاده از معادله (۲-۲۵)، از جملات با ضرایب $B_3(s)$ و $B_4(s)$ به علت کوچک بودن نسبت به سایر جملات، می‌توان صرف‌نظر کرد. با فرضیات و ساده‌سازی‌های بیان شده در بالا، معادله حرکت طولی سیستم در (۲-۴۵) به معادله (۲-۴۷) کاهش می‌یابد. به منظور تسهیل در استخراج معادله حرکت و با توجه به تأثیر اندک جملات با مرتبه‌ی بالاتر از ۳ در پاسخ سیستم [۳۷]، از آنها صرف‌نظر شده است.

$$(V'B_1(s) + \frac{1}{2}W'^2 B_1(s))' - B_3'(s)v_p = 0 \quad (۲-۴۷)$$

از معادله بالا نسبت به s انتگرال‌گیری می‌شود:

$$V' = -\frac{1}{2}W'^2 + \frac{B_3(s)}{B_1(s)}v_p + \frac{B_c(t)}{B_1(s)} \quad (۲-۴۸)$$

که، $B_c(t)$ ثابت انتگرال‌گیری است و تنها ممکن است تابعی از زمان باشد. به منظور دستیابی به مقدار $B_c(t)$ شرایط مرزی حرکت محوری میکروتیر موردنیاز می‌باشد. با انتگرال‌گیری از معادله (۲-۴۸) معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$V \Big|_0^L = -\frac{1}{2} \int_0^L W'^2 ds + \int_0^L \frac{B_3(s)}{B_1(s)} v_p ds + \int_0^L \frac{B_c(t)}{B_1(s)} ds + B_{c1}(t) \quad (۲-۴۹)$$

با در نظر گرفتن ثابت انتگرال‌گیری دوم یعنی $B_{c1}(t)$ برابر صفر و جایگزینی شرایط مرزی طولی

$$\text{به صورت } V(L) = \hat{f} \text{ و } V(0) = 0$$

$$\hat{f} = -\frac{1}{2} \int_0^L W'^2 ds + \int_0^L \frac{B_3(s)}{B_1(s)} v_p ds + \int_0^L \frac{B_c(t)}{B_1(s)} ds \quad (50-2)$$

در ادامه، با جایگزینی $B_1(s)$ و $B_3(s)$ از معادله (۲۵-۲) در معادله (۵۰-۲)، ثابت انتگرال گیری به صورت (۵۱-۲) بدست می آید:

$$B_c(t) = \frac{\hat{f} + \frac{1}{2} \int_0^L W'^2 dx - \frac{E_2 d_{31} A_2}{t_2 (E_1 A_1 + E_2 A_2)} v_p (l_2 - l_1)}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l - l_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} + \frac{L - l_1}{E_1 A_1}} \quad (51-2)$$

با استفاده از معادله (۵۱-۲) و جایگزینی V' از معادله (۴۸-۲) در (۴۶-۲) با اعمال

ساده سازی های ذکر شده، معادله حرکت ارتعاشات عرضی سیستم به صورت زیر بدست می آید:

$$(B_3(s)W'')'' + (B_6(s)\dot{W}'')'' + M(s)\ddot{W} - B_5(s) \left(\frac{W' \int_0^L W' \dot{W}' ds}{B_1(s) \left(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2 - l_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} + \frac{L - l_1}{E_1 A_1} \right)} \right) \quad (52-2)$$

$$+ \left(\frac{\hat{f} + \frac{1}{2} \int_0^L W'^2 dx - v_p \frac{E_2 d_{31} A_2}{t_2 (E_1 A_1 + E_2 A_2)} (l_2 - l_1)}{\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2 - l_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} + \frac{L - l_1}{E_1 A_1}} W' \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 w_c \frac{(v_{dc} + v_{ac} \cos(\hat{\Omega}t))^2}{(h + W)^2}$$

با توجه به این که میکروتیر مورد بررسی، با شرایط مرزی دو سر گیردار فرض شده است، شرایط

مرزی به صورت زیر بیان می باشد:

$$W \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad W \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (53-2)$$

به منظور سهولت در بررسی و تحلیل سیستم و یکنواختی معادله حرکت با سایر معادلات، از

معادله بی بعد شده استفاده می شود. برای بی بعدسازی معادله (۵۲-۲) از تغییر متغیرهای زیر

استفاده می شود:

$$w = -\frac{W}{h}, \quad x = \frac{s}{L}, \quad \tau = \frac{t}{T} \quad (54-2)$$

در این معادله T مقیاس زمانی است که به صورت $T = \sqrt{\frac{\rho_1 t_1 w_c L^4}{E_1 I_1}}$ مشخص می شود. با

جایگذاری متغیرهای موجود در رابطه (۵۴-۲) در معادله (۵۲-۲)، معادله حاکم بر حرکت بی بعد شده

سیستم، به معادله (۵۵-۲) تبدیل می شود:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 (H_{n1}(x) \frac{d^2 w}{dx^2})}{\partial x^2} + M_n(x) \frac{d^2 w}{d\tau^2} + C \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \tau} (H_{n2}(x) \frac{d^2 w}{dx^2}) & (۵۵-۲) \\
 & - (\beta \Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1} v_P) \frac{d^2 w}{dx^2} - 2\beta C \Gamma\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}, w\right) \frac{\partial}{\partial x} (H_{n3}(x) \frac{\partial w}{\partial x}) \\
 & = \frac{\eta(v_{dc} + v_{ac} \cos(\Omega \tau))^2}{(1-w)^2} - \gamma_{P2} v_P \left(\frac{d^2 H_{l1/L}}{dx^2} - \frac{d^2 H_{l2/L}}{dx^2} \right), \\
 & w \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, w \Big|_{x=1} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0
 \end{aligned}$$

پارامترهایی که در معادله (۵۵-۲) ظاهر شده اند با مقادیر زیر تعریف می شوند:

$$\Gamma(a, b) = \int_0^L \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} dx \quad (56-2)$$

$$M_n(x) = 1 + \frac{\rho_2 t_2}{\rho_1 t_1} (H_{l_1/L} - H_{l_2/L})$$

$$H_{n1}(x) = (1 - H_{l_1/L}) + \left(\frac{I_3}{I_1} + \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1}\right) (H_{l_1/L} - H_{l_2/L}) + H_{l_2/L}$$

$$H_{n2}(x) = (1 - H_{l_1/L}) + \frac{I_3}{I_1} (H_{l_1/L} - H_{l_2/L}) + H_{l_2/L}$$

$$H_{n3}(x) = (1 - H_{l_1/L}) + \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} (H_{l_1/L} - H_{l_2/L}) + H_{l_2/L}$$

$$\alpha = \alpha_1 \left(\frac{1 + \frac{E_2 t_2}{E_1 t_1}}{\left(1 + \frac{E_2 t_2}{E_1 t_1}\right) \left(1 - \frac{l_2 - l_1}{L}\right) + \frac{l_2 - l_1}{L}} \right), \quad \alpha_1 = \frac{\hat{f} A_1 L}{I_1}, \quad \Omega = \hat{\Omega} T$$

$$\beta = \beta_1 \left(\frac{1 + \frac{E_2 t_2}{E_1 t_1}}{\left(1 + \frac{E_2 t_2}{E_1 t_1}\right) \left(1 - \frac{l_2 - l_1}{L}\right) + \frac{l_2 - l_1}{L}} \right), \quad \beta_1 = 6 \left(\frac{h}{t_1}\right)^2,$$

$$\eta = \frac{6 \varepsilon_0 L^4}{E_1 t_1^3 h^3}, \quad C = \frac{\bar{C}}{T E_1}$$

$$\gamma_{p1} = \gamma_1 \left(\frac{6 \left(\frac{l_2 - l_1}{L}\right) \frac{E_2}{E_1}}{\left(1 + \frac{E_2 t_2}{E_1 t_1}\right) \left(1 - \frac{l_2 - l_1}{L}\right) + \frac{l_2 - l_1}{L}} \right), \quad \gamma_1 = \frac{2 L^2 d_{31}}{t_1^3}$$

$$\gamma_{p2} = \gamma_2 \left(\frac{E_2 t_2}{E_1 t_1} + \frac{E_2}{E_1} - \frac{\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2 \frac{t_2}{t_1} \left(1 + \frac{t_2}{t_1}\right)}{1 + \frac{E_2 t_2}{E_1 t_1}} \right), \quad \gamma_2 = 3 \gamma_1 \sqrt{\frac{6}{\alpha_1}}$$

معادله (55-2) معادله‌ی بی‌بعدی است که تمام پارامترهای آن در محدوده‌ی مشخصی امکان

تغییر دارند. در روابط بالا $\eta(v_{dc} + v_{ac} \cos(\Omega\tau))^2$ عبارت بی‌بعدی است که بیانگر مقدار تحریک

الکتریکی برای میکروتیر بدون تغییر شکل می‌باشد. γ_{p1} و γ_{p2} عبارات بی‌بعدی برای بیان تأثیرات

تحریک پیزوالکتریک، با اعمال ولتاژ DC به آن می‌باشند.

β مقدار بی‌بعدی برای جمله‌ی غیرخطی می‌باشد که از فرض کشیده شدن تار خنثی حاصل

می‌شود. کشیدگی لایه‌ی میانی مهمترین منبع غیرخطی هندسی در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی می‌باشد. از معادله (۵۶-۲) نشان داده می‌شود زمانی که طول لایه پیزوالکتریک برابر صفر باشد، β برابر با مقدار β_1 خواهد بود.

مقدار α اندازه‌ی بی‌بعد بار محوری است که برای کشیده شدن انتهای تیر نیاز می‌باشد و α_1 مقدار α است وقتی ضخامت لایه پیزوالکتریک برابر صفر باشد.

با قرار دادن جمله‌های حاوی مشتق‌های زمانی در معادله (۵۴-۲) برابر با صفر، معادله دیفرانسیل حاکم بر موقعیت تعادلی سیستم که به آن موقعیت استاتیکی گفته می‌شود، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 (H_{n1}(x) \frac{d^2 w_s}{dx^2})}{\partial x^2} - (\beta \Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1} v_P) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \\ & = \frac{\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^2} - \gamma_{P2} v_P \left(\frac{d^2 H_{l1/L}}{dx^2} - \frac{d^2 H_{l2/L}}{dx^2} \right), \\ & w_s \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial w_s}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, w_s \Big|_{x=1} = 0, \frac{\partial w_s}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \end{aligned} \quad (57-2)$$

این معادله نشان می‌دهد که جرم ماده، تأثیری در تغییر شکل استاتیکی سیستم نداشته و تنها هندسه سیستم و مدول یانگ آن تعیین‌کننده‌ی مقدار تغییر شکل استاتیکی سیستم است. در سیستم مورد بررسی، میکروتیر با اعمال یک ولتاژ ثابت v_{dc} تغییر شکل استاتیکی پیدا می‌کند و سپس توسط ولتاژ تحریک کوچک AC یعنی v_{ac} ، سیستم حول موقعیت تعادلی ناشی از تحریکات DC که از حل معادله (۵۷-۲) بدست می‌آید، ارتعاش خواهد کرد. در این صورت جابه‌جایی کلی سیستم از دو بخش تغییر شکل استاتیکی w_s و تغییر شکل دینامیکی $u(x, \tau)$ تشکیل می‌شود:

$$w(x, \tau) = w_s + u(x, \tau) \quad (58-2)$$

با جایگذاری معادله (۵۸-۲) در معادله (۵۵-۲) و با در نظر گرفتن جابه‌جایی کوچک برای میکروتیر، می‌توان از بسط سری تیلور نیروی الکتریکی حول موقعیت استاتیکی استفاده کرد. معادله

(۵۹-۲) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2(H_{n1}(x)\frac{\partial^2(u+w_s)}{\partial x^2})}{\partial x^2} + M_n(x)\frac{\partial^2(u+w_s)}{\partial \tau^2} + C\frac{\partial^3(H_{n2}(x)\frac{\partial^2(u+w_s)}{\partial x^2})}{\partial x^2\partial \tau} = \quad (59-2) \\ & [\beta\Gamma((u+w_s), (u+w_s)) + \alpha - \gamma_{P1}v_P]\frac{\partial^2(u+w_s)}{\partial x^2} \\ & + 2\beta C\Gamma(\frac{\partial(u+w_s)}{\partial \tau}, w_s)\frac{\partial}{\partial x}(H_{n3}(x)\frac{d^2(u+w_s)}{dx^2}) + \frac{2\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^3}u \\ & + \frac{3\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4}u^2 + \frac{4\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^5}u^3 + \frac{2\eta v_{dc}v_{ac}\cos(\Omega\tau)}{(1-w_s)^2} + \frac{4\eta v_{dc}v_{ac}\cos(\Omega\tau)}{(1-w_s)^3} \\ & + \frac{\eta(v_{ac}\cos(\Omega\tau))^2}{(1-w_s)^2} \end{aligned}$$

با بسط دادن جملات در معادله (۵۹-۲) و استفاده از معادله (۵۷-۲) برای حذف جمله‌هایی که

موقعیت استاتیکی را توصیف می کنند، معادله حرکت دینامیکی سیستم به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2(H_{n1}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\partial x^2} + M_n(x)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + C\frac{\partial^3(H_{n2}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\partial x^2\partial \tau} = \quad (60-2) \\ & (\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1}v_P)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta\Gamma(w_s, u)\frac{d^2 w_s}{dx^2} + \beta\Gamma(u, u)\frac{d^2 w_s}{dx^2} \\ & + 2\beta\Gamma(w_s, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\Gamma(u, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta C\Gamma(\frac{\partial u}{\partial \tau}, w_s)\frac{\partial}{\partial x}(H_{n3}(x)\frac{d^2 w_s}{dx^2}) \\ & + 2\beta C\Gamma(\frac{\partial u}{\partial \tau}, u)\frac{\partial}{\partial x}(H_{n3}(x)\frac{d^2 w_s}{dx^2}) + 2\beta C\Gamma(\frac{\partial u}{\partial \tau}, w_s)\frac{\partial}{\partial x}(H_{n3}(x)\frac{\partial u}{\partial x}) \\ & + 2\beta C\Gamma(\frac{\partial u}{\partial \tau}, u)\frac{\partial}{\partial x}(H_{n3}(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{2\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^3}u + \frac{3\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4}u^2 + \frac{4\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^5}u^3 \\ & + \frac{2\eta v_{dc}v_{ac}\cos(\Omega\tau)}{(1-w_s)^2} + \frac{4\eta v_{dc}v_{ac}\cos(\Omega\tau)}{(1-w_s)^3} + \frac{\eta(v_{ac}\cos(\Omega\tau))^2}{(1-w_s)^2} \\ & u\Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, u\Big|_{x=1} = 0, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0 \end{aligned}$$

به منظور دستیابی به شکل موده‌های خطی میکروتیر و فرکانس‌های طبیعی متناظر با آن،

براساس تئوری تیر اوپلر-برنولی، لازم است سیستم در نزدیکی موقعیت تعادل استاتیکی، خطی سازی

گردد. در نتیجه با صفر قرار دادن جمله‌های حاوی میرایی و تحریک AC در معادله (۶۰-۲)، معادله‌ی

ارتعاش آزاد سیستم بدون میرایی حول موقعیت استاتیکی به صورت معادله (۶۱-۲) ایجاد خواهد شد:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 (H_{n1}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\partial x^2} + M_n(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = (\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1} v_P) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& + 2\beta\Gamma(w_s, u) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + \beta\Gamma(u, u) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + 2\beta\Gamma(w_s, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\Gamma(u, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& + \frac{2\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^3} u + \frac{3\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4} u^2 + \frac{4\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^5} u^3 \\
& u \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, u \Big|_{x=1} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0
\end{aligned} \tag{۶۱-۲}$$

با استفاده از روش مودال، معادله ارتعاش سیستم را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$u(x, \tau) = \varphi(x) e^{i\omega\tau} \tag{۶۲-۲}$$

در این معادله، φ شکل مود خطی و ω فرکانس طبیعی میکروتیر تغییر شکل یافته حول موقعیت استاتیکی می‌باشد. با جایگذاری معادله (۶۲-۲) در معادله (۶۱-۲)، نتیجه به صورت معادله (۶۳-۲) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2} (H_{n1}(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2}) e^{i\omega\tau} + (i\omega)^2 M_n(x) \varphi(x) e^{i\omega\tau} = \\
& (\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1} v_P) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} e^{i\omega\tau} + 2\beta\Gamma(w_s, \varphi) \frac{d^2 w_s}{dx^2} e^{i\omega\tau} \\
& + \beta\Gamma(\varphi, \varphi) \frac{d^2 w_s}{dx^2} (e^{i\omega\tau})^2 + 2\beta\Gamma(w_s, \varphi) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} (e^{i\omega\tau})^2 + \beta\Gamma(\varphi, \varphi) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} (e^{i\omega\tau})^3 \\
& + \left(\frac{2\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^3}\right) \varphi e^{i\omega\tau} + \left(\frac{3\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4}\right) \varphi^2 (e^{i\omega\tau})^2 + \left(\frac{4\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^5}\right) \varphi^3 (e^{i\omega\tau})^3 = 0
\end{aligned} \tag{۶۳-۲}$$

با جداسازی جملات خطی، آن دسته از جملاتی که ضرایب مرتبه ۲ و بیشتر از $e^{i\omega\tau}$ دارند، از معادله (۶۳-۲) حذف می‌شوند. در نتیجه معادله دیفرانسیل شکل مودها برای سیستم خطی حول موقعیت تعادل استاتیکی به صورت صفحه بعد بدست می‌آید:

$$\frac{d^2}{dx^2} (H_{n1}(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2}) - (\beta \Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1} \nu_P) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - 2\beta \Gamma(w_s, \varphi) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (64-2)$$

$$- \left(\frac{2\eta \nu_{dc}^2}{(1-w_s)^3} + M_n(x) \omega^2 \right) \varphi = 0$$

$$\varphi \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \varphi \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0$$

فصل ۳

تغییر شکل استاتیکی و فرکانس

طبیعی

۳-۱. تغییر شکل استاتیکی

برای حل معادله‌ی استاتیکی (۲-۵۷)، به علت طبیعت غیرخطی بودن آن، نمی‌توان از روش‌های تحلیلی استفاده کرد و برای دستیابی به حل استاتیکی، باید از روش‌های تقریبی بهره جست. با در نظر گرفتن این فرض که پاسخ سیستم از ترکیب بینهایت مود ارتعاشی تشکیل شده است، از روش گالرکین از جمله روش‌های عددی که بر مبنای مدل کاهش مرتبه استوار است، استفاده می‌شود. بنابراین w_s می‌تواند به صورت تقریبی زیر در نظر گرفته شود:

$$w_s = \sum_{i=1}^n R_{s[i]} w_{s[i]} \quad (۱-۳)$$

در این معادله، $w_{s[i]}$ تابع مقایسه‌ای^۱ مورد نیاز در حل گالرکین است که به عنوان i مین شکل مود از میکروتیر ساده بدون خمیدگی، لایه پیزوالکتریک و میدان الکتروستاتیک بدست می‌آید و $R_{s[i]}$ ضرایبی هستند که از روش گالرکین حاصل می‌شوند. i تعداد جملات در نظر گرفته شده برای تقریب پاسخ می‌باشد.

برای مسائل مکانیک ساختاری، شکل مودهای سیستم خطی بدون دمپینگ ساختاری، انتخاب مناسبی برای توابع مقایسه‌ای می‌باشند. با در نظر گرفتن معادله (۲-۶۲)، معادله‌ی خطی این میکروتیر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d^4 w_{s[i]}}{dx^4} - (\alpha - \gamma_{P1} \nu_P) \frac{d^2 w_{s[i]}}{dx^2} - (\Omega_{[i]})^2 w_{s[i]} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (۲-۳)$$

$$w_{s[i]} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{dw_{s[i]}}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad w_{s[i]} \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{dw_{s[i]}}{dx} \Big|_{x=1} = 0,$$

در این معادله، میکروتیر تحت بار محوری $(\alpha - \gamma_{P1} \nu_P)$ قرار گرفته است و $\Omega_{[i]}$ ، i مین فرکانس طبیعی سیستم خطی می‌باشد. معادله (۲-۳) یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت می‌باشد. اگر g نشان‌دهنده ریشه‌های معادله مشخصه‌ی آن باشد، آنگاه معادله مشخصه به صورت (۳-۳)

^۱ Comparison function

(۳) خواهد شد:

$$g^4 - (\alpha - \gamma_{P1} v_P) g^2 - (\Omega_{[i]})^2 = 0, \quad (3-3)$$

ریشه‌های این معادله، قرینه بوده و به صورت زیر می‌باشند:

$$g_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{(\alpha - \gamma_{P1} v_P) + \sqrt{(\alpha - \gamma_{P1} v_P)^2 + 4(\Omega_{[i]})^2}}{2}}, \quad (4-3)$$

$$g_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-(\alpha - \gamma_{P1} v_P) + \sqrt{(\alpha - \gamma_{P1} v_P)^2 + 4(\Omega_{[i]})^2}}{2}} i,$$

با استفاده از ریشه‌های مثبت در معادله (۴-۳) و اصل برهم‌نهی، حل معادله (۲-۳) که معرف

شکل موده‌های آن می‌باشد، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$w_{s[i]} = Ae^{g_1 x} + Be^{-ig_1 x} + Ce^{g_3 x} + De^{-ig_3 x} \quad (5-3)$$

برای راحتی محاسبات، معادله‌ی بالا قابل تبدیل به شکل زیر است:

$$w_{s[i]} = A \cosh(g_1 x) + B \sinh(g_1 x) + C \sin(g_r x) + D \cos(g_r x) \quad (6-3)$$

A ، B ، C و D ضرایب مجهولی می‌باشند که با اعمال شرایط مرزی از معادله (۲-۳)، با

تشکیل دستگاه معادلات جبری بدست می‌آیند و g_r قسمت حقیقی $g_3 = ig_r$ می‌باشد. برای دستگاه

معادله‌ی حاصل، تنها به ازای زمانی که دترمینان ضرایب سیستم جبری برابر صفر قرار داده شود، حل

غیرصفر حاصل می‌شود. با مساوی با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، فرکانس‌های طبیعی

سیستم خطی و سپس با استفاده از معادلات (۴-۳) و (۶-۳)، شکل موده‌های میکروتیر مستقیم بدون

لایه پیزوالکتریک و میدان الکتریکی که به عنوان تابع مقایسه‌ای استفاده می‌شوند، بدست می‌آیند.

با جایگزینی معادله (۶-۳) درون معادله (۱-۳)، به منظور ساده‌سازی محاسبات عددی، مخرج

جمله‌ی الکتروستاتیک یعنی $(1 - w_s)^2$ در عبارت حاصل، ضرب شده و معادله‌ی جبری بر حسب

بدست می‌آید. با ضرب این معادله در $w_{s[n]}$ به عنوان توابع وزن‌دار در روش گالرکین که

$n = 1, 2, \dots, M$ تعداد جملات مورد استفاده به عنوان توابع مقایسه‌ای می‌باشد و سپس انتگرال‌گیری

عبارت حاصل در بازه‌ی ۰ تا ۱، معادله‌ی نهایی به صورت دستگاه معادلات جبری در (۷-۳) بدست آمده است:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^M R_{s[i]} \int_0^L w_{s[n]} \frac{d^2}{dx^2} (H_{n1}(x) \frac{d^2 w_{s[i]}}{dx^2}) dx + \int_0^L \sum_{i,j,h=1}^M R_{s[i]} R_{s[j]} R_{s[h]} \frac{d^2}{dx^2} (H_{n1}(x) \frac{d^2 w_{s[i]}}{dx^2}) \times \\
 & w_{s[j]} w_{s[h]} w_{s[n]} dx - 2 \int_0^L \sum_{i,j=1}^M R_{s[i]} R_{s[j]} \frac{d^2}{dx^2} (H_{n1}(x) \frac{d^2 w_{s[i]}}{dx^2}) w_{s[j]} w_{s[n]} dx - \beta \sum_{i,j,h=1}^M R_{s[i]} \times \\
 & R_{s[j]} R_{s[h]} \Gamma(w_{s[i]}, w_{s[j]}) \int_0^L \frac{d^2 w_{s[i]}}{dx^2} w_{s[n]} dx - \beta \sum_{i,j,h,k,l=1}^M R_{s[i]} R_{s[j]} R_{s[h]} R_{s[k]} R_{s[l]} \Gamma(w_{s[i]}, w_{s[j]}) \times \\
 & \int_0^L \frac{d^2 w_{s[h]}}{dx^2} w_{s[k]} w_{s[l]} w_{s[n]} dx + 2\beta \sum_{i,j,h,k=1}^M R_{s[i]} a_{[j]} R_{s[h]} R_{s[k]} \Gamma(w_{s[i]}, w_{s[j]}) \int_0^L \frac{d^2 w_{s[h]}}{dx^2} \times \\
 & w_{s[l]} w_{s[n]} dx - (\alpha - \gamma_{P1} \nu_P) \sum_{i=1}^M \int_0^L R_{s[i]} \frac{d^2 w_{s[i]}}{dx^2} w_{s[n]} dx - (\alpha - \gamma_{P1} \nu_P) \int_0^L \sum_{i,j,h=1}^M R_{s[i]} R_{s[j]} R_{s[h]} \times \\
 & \frac{d^2 w_{s[i]}}{dx^2} w_{s[j]} w_{s[h]} w_{s[n]} dx + 2(\alpha - \gamma_{P1} \nu_P) \int_0^L \sum_{i,j=1}^M R_{s[i]} R_{s[j]} \frac{d^2 w_{s[i]}}{dx^2} w_{s[j]} w_{s[n]} dx \\
 & - \eta \nu_{dc}^2 \int_0^L w_{s[n]} dx + \gamma_{P2} \nu_P \left(\frac{dw_{s[n]}}{dx} \Big|_{x=\frac{l_1}{L}} - \frac{dw_{s[n]}}{dx} \Big|_{x=\frac{l_2}{L}} \right) + \gamma_{P2} \nu_P \sum_{i,j=1}^M R_{s[i]} R_{s[j]} \times \\
 & \left(\frac{d(w_{s[n]} w_{s[i]} w_{s[j]})}{dx} \Big|_{x=\frac{l_1}{L}} - \frac{d(w_{s[n]} w_{s[i]} w_{s[j]})}{dx} \Big|_{x=\frac{l_2}{L}} \right) - 2\gamma_{P2} \nu_P \sum_{i,j=1}^M R_{s[i]} \times \\
 & \left(\frac{d(w_{s[n]} w_{s[i]})}{dx} \Big|_{x=\frac{l_1}{L}} - \frac{d(w_{s[n]} w_{s[i]})}{dx} \Big|_{x=\frac{l_2}{L}} \right) = 0
 \end{aligned}
 \tag{۷-۳}$$

معادله (۷-۳)، دستگاه معادلاتی می‌باشد که با حل آن به روش عددی، ضرایب $R_{s[i]}$ بدست می‌آیند. با جایگذاری (۶-۳) در رابطه (۱-۳) و استفاده از ضرایب $R_{s[i]}$ رابطه‌ی تغییر شکل استاتیکی بر حسب طول میکروتیر حاصل می‌شود.

بر اساس [۵۲]، زمانی که لایه پیزوالکتریک در فاصله‌ی یکسان از دو طرف میکروتیر بر روی آن قرار گیرد، سیستم عملکرد بهتری خواهد داشت. با قرار دادن لایه پیزوالکتریک به صورت متقارن، شرایط استاتیکی و دینامیکی برای دو طرف میکروتیر یکسان می‌باشد. در نتیجه تغییر شکل استاتیکی

میکروتیر نسبت به نقطه‌ی میانی آن متقارن بوده و رابطه‌ی $w_s(s) = w_s(s + \frac{L}{2})$ برای سیستم برقرار است. با در نظر گرفتن این موضوع، بهتر است توابع مقایسه‌ای نسبت به نقطه‌ی میانی میکروتیر متقارن باشند که در نتیجه باید از شکل مودهای متقارن سیستم میکروتیر مستقیم بدون لایه پیزوالکتریک و نیروی الکتریکی استفاده کرد.

۲-۳. فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی سیستم

به منظور دستیابی به فرکانس‌های طبیعی و بدنبال آن رسیدن به شکل مودهای ارتعاشی سیستم، از روش حل گالرکین برای معادله (۲-۶۴) استفاده می‌شود.

مشابه با معادله‌ی در نظر گرفته شده به عنوان میکروتیر مستقیم برای تغییر شکل استاتیکی، در این بخش معادله (۳-۸) که تحت بار محوری $(\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1}v_P)$ و ضریب فنری $2\eta v_{dc}^2$ قرار دارد و شرایط مرزی در آن ارضا می‌شود، به عنوان تابع مقایسه‌ای در روش گالرکین استفاده می‌شود.

$$\frac{d^4 \varphi_{d[i]}}{dx^4} - (\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1}v_P) \frac{d^2 \varphi_{d[i]}}{dx^2} - (2\eta v_{dc}^2 + \Omega_{d[i]}^2) \varphi_{d[i]} = 0, \quad (۳-۸)$$

$$\varphi_{d[i]} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d\varphi_{d[i]}}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \varphi_{d[i]} \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{d\varphi_{d[i]}}{dx} \Big|_{x=1} = 0$$

که در این رابطه $\varphi_{d[i]}$ نشان‌دهنده‌ی i مین شکل مود و $\Omega_{d[i]}$ i مین فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد. مشابه با قسمت قبل، معادله مشخصه به صورت زیر خواهد بود:

$$R^4 - (\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1}v_P)R^2 - (2\eta v_{dc}^2 + \Omega_{d[i]}^2) = 0, \quad (۳-۹)$$

ریشه‌های معادله مشخصه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$R_{1,2} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{(\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1}v_P) + \sqrt{(\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1}v_P)^2 + 4(\Omega^2_{d[i]} + 2\eta v_{dc}^2)}} \quad (10-3)$$

$$R_{3,4} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{-(\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1}v_P) + \sqrt{(\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1}v_P)^2 + 4(\Omega^2_{d[i]} + 2\eta v_{dc}^2)}} \quad i$$

بنابراین با استفاده از ریشه‌های مثبت، حل معادله بالا به صورت معادله (۱۱-۳) بیان می‌شود:

$$\varphi_{d[i]} = X \cosh(R_1 x) + Y \sinh(R_1 x) + Z \sin(R_r x) + E \cos(R_r x) \quad (11-3)$$

X ، Y ، Z و E ضرایبی هستند که با اعمال شرایط مرزی معادله (۳-۸) در معادله‌ی بالا

بدست می‌آیند و R_r قسمت حقیقی R_3 می‌باشند. حل معادله (۲-۶۴) به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\varphi = \sum_{i=1}^M R_{d[i]} \varphi_{d[i]} \quad (12-3)$$

در این رابطه، $R_{d[i]}$ ضرایبی هستند که از روش گالرکین با تشکیل دستگاه معادلات جبری

بدست می‌آیند. با جایگذاری معادله (۳-۱۲) در معادله (۳-۸) و ضرب نتیجه در تابع وزن‌دار $\varphi_{d[n]}$ که

$n = 1, 2, 3, \dots, M$ می‌باشد و سپس انتگرال‌گیری عبارت حاصل در بازه‌ی $x = 0$ تا $x = 1$ ، معادله‌ی

نهایی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\int_0^L \sum_{i=1}^M R_{d[i]} (1-w_s)^3 \frac{d^2}{dx^2} (H_1(x) \frac{d^2 \varphi_{d[i]}}{dx^2}) \varphi_{d[n]} dx - \int_0^L \sum_{i=1}^M R_{d[i]} (1-w_s)^3 (\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1}v_P) \frac{d^2 \varphi_{d[i]}}{dx^2} \varphi_{d[n]} dx - 2\beta \int_0^L \sum_{i=1}^M R_{d[i]} \Gamma(\varphi_{d[i]}, w_s) \varphi_{d[n]} \frac{d^2 w_s}{dx^2} (1-w_s)^3 dx - \omega^2 \int_0^L \sum_{i=1}^M R_{d[i]} M(x) (1-w_s)^3 \varphi_{d[i]} \varphi_{d[n]} dx - 2\eta v_{dc}^2 \int_0^L \sum_{i=1}^M R_{d[i]} \varphi_{d[i]} \varphi_{d[n]} dx = 0 \quad (13-3)$$

معادله (۳-۱۳) تنها زمانی دارای جواب غیرصفر می‌باشد که دترمینان ضرایب $R_{d[i]}$ در معادله‌ی

جبری حاصل، برابر صفر باشد. با مساوی صفر قرار دادن دترمینان این ماتریس، فرکانس‌های طبیعی

سیستم بدست می‌آیند. با جایگذاری فرکانس‌های طبیعی حاصل در دستگاه معادلات بدست آمده از

معادله (۳-۱۳)، $R_{d[i]}$ و به دنبال آن با جایگذاری ضرایب $R_{d[i]}$ در معادله (۳-۱۱) شکل موده‌های

ارتعاشی سیستم بدست می‌آیند.

فصل ۴

پاسخ دینامیکی سیستم تحت

تحریک هارمونیک اولیه

۴-۱. مقدمه

معادله‌ی دینامیکی حرکت (۲-۶۰) یک معادله غیرخطی از u -جابه‌جایی دینامیکی عرضی میکروتیر- می‌باشد. برای بدست آوردن حل معادلات و سیستم‌های غیرخطی نمی‌توان از روش‌های خطی بهره جست، زیرا مباحثی از جمله هیستریزیس، پرش، داشتن چند نقطه‌ی تعادل و ... تنها برای سیستم‌های غیرخطی معنا پیدا می‌کند. به منظور بررسی سیستم‌های غیرخطی و بدست آوردن پاسخ دینامیکی روش‌های زیادی وجود دارد. روش‌های پیشنهادی حل سیستم‌های غیرخطی و از جمله MEMS می‌تواند به دو دسته‌ی کیفی و کمی تقسیم‌بندی شود. روش کیفی توسط هنری پوانکاره^۱ ارائه شده است. روش‌های کمی با در نظر گرفتن اغتشاشات کوچک، به خطی‌سازی و بررسی سیستم در همسایگی نزدیک نقطه‌ی تعادل می‌پردازند. به ازای غیرخطی‌های کوچک، روش‌های تئوری اغتشاشات و مجانبی استفاده می‌شود. برای غیرخطی‌های بزرگ نیاز به روش‌های عددی می‌باشد که از این جمله می‌توان به روش‌های اجزا محدود، اختلاف محدود و شوتینگ اشاره کرد.

۴-۱-۱. نگاهی بر تئوری اغتشاشات

بسیاری از معادلات مورد بررسی غیرخطی می‌باشند که نمی‌توان برای آنها حل دقیق بدست آورد. در نتیجه پاسخ معادله به کمک روش‌های تحلیلی، عددی و یا ترکیبی از این دو حاصل می‌شود. روش تئوری اغتشاشات این امکان را به وجود می‌آورد که بتوان میزان تأثیر قسمت‌های غیرخطی معادلات را مورد بررسی قرار داد. تئوری اغتشاشات، با در نظر گرفتن مرتبه کوچک برای جمله‌ی غیرخطی، به تحلیل آن می‌پردازد. حل کامل معادله، با استفاده از چند جمله‌ی اول یک سری، بر حسب این پارامتر کوچک یا بزرگ بیان می‌شود.

روش‌های مختلفی در تئوری اغتشاشات وجود دارد که از آن جمله می‌توان به روش مقیاس‌های چندگانه، هموتوبی، اغتشاشات کرنشی و... اشاره کرد. در این پایان‌نامه از روش مقیاس‌های چندگانه به

^۱ Henry Poincare

کمک روش گالرکین به صورت نیمه تحلیلی، برای بدست آوردن پاسخ دینامیکی غیرخطی میکروتیر مورد بررسی، استفاده می شود.

۴-۲. به کارگیری روش مقیاس های چندگانه در مسأله مورد بررسی

سه مقیاس زمانی $T_0 = \tau$ ، $T_1 = \varepsilon\tau$ و $T_2 = \varepsilon^2\tau$ که T_0 مقیاس زمانی سریع و T_2 مقیاس زمانی کند می باشند، برای حل در نظر گرفته می شود. همچنین ε پارامتر بی بعد کوچک bookkeeping می باشد که نشان می دهد جمله های غیرخطی از مرتبه ی ضعیف تری نسبت به جمله های خطی برخوردار هستند. حل معادله دیفرانسیل دینامیکی میکروتیر ویسکوالاستیک همراه با لایه پیزوالکتریک را می توان به صورت تقریبی زیر در نظر گرفت:

$$u(x, T_0, T_1, T_2) = \varepsilon u_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 u_3(x, T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (1-4)$$

با توجه به عملیات مورد بررسی، مشتقات زنجیره ای به صورت زیر معرفی می شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial T_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} + \dots, \quad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial T_2} + \dots \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} + \varepsilon \left(\frac{2\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_1} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{2\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial T_1^2} \right) + \dots$$

به منظور برقراری تعادل بین جملات غیرخطی، میرایی و ولتاژ هارمونیک، می توان مرتبه ی

میرایی ویسکوالاستیک را برابر ε^2 و مرتبه ی تحریک AC را برابر ε^3 در نظر گرفت [۶۰]. در نتیجه

برای معادله (۲-۶۰)، معادله (۳-۴) بازنویسی می شود:

$$\frac{\partial^2 (H_{n1}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\partial x^2} + M_n(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \varepsilon^2 C \frac{\partial^3 (H_{n2}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\partial x^2 \partial \tau} = \quad (3-4)$$

$$\begin{aligned} & (\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1} \nu_P) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta\Gamma(w_s, u) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + \beta\Gamma(u, u) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \\ & + 2\beta\Gamma(w_s, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\Gamma(u, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\varepsilon^2 \beta C \Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}, w_s\right) \frac{\partial}{\partial x} (H_{n3}(x) \frac{d^2 w_s}{dx^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\varepsilon^2 \beta \Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}, u \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(H_{n3}(x) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) + 2\varepsilon^2 \beta \Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}, w_s \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(H_{n3}(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
& + 2\varepsilon^2 \beta \Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}, u \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(H_{n3}(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{2\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^3} u + \frac{3\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4} u^2 + \frac{4\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^5} u^3 \\
& + \varepsilon^3 \frac{2\eta v_{dc} v_{ac} \cos(\Omega \tau)}{(1-w_s)^2} + \varepsilon^3 \frac{4\eta v_{dc} v_{ac} \cos(\Omega \tau)}{(1-w_s)^3} u + \varepsilon^3 \frac{\eta (v_{ac} \cos(\Omega \tau))^2}{(1-w_s)^2}
\end{aligned}$$

با جایگزینی رابطه (۴-۱) در معادله (۴-۳) و با در نظر گرفتن حل سیستم تا تقریب مرتبه ۳،

محاسبه‌ی جملات با نکه داشتن قسمت‌ها تا مرتبه‌ی ε^3 از آنها، به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 (H_{n1}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\partial x^2} &= \varepsilon \frac{\partial^2 (H_{n1}(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2})}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 (H_{n1}(x) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2})}{\partial x^2} \tag{۴-۴} \\
& + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 (H_{n1}(x) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2})}{\partial x^2} \\
M_n(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} &= \varepsilon M_n(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + \varepsilon^2 M_n(x) \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon^2 M_n(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} \\
& + \varepsilon^3 M_n(x) \frac{\partial^2 u_3}{\partial T_0^2} \\
& + 2\varepsilon^3 M_n(x) \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^3 M_n(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} + \varepsilon^3 M_n(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} + \dots \\
\varepsilon^2 C \frac{\partial^3 (H_{n2}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\partial x^2 \partial \tau} &= \varepsilon^3 C \frac{\partial^3 (H_{n2}(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2})}{\partial x^2 \partial \tau} + \dots \\
(\beta \Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1} v_P) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \varepsilon (\beta \Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1} v_P) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\
& + \varepsilon^2 (\beta \Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1} v_P) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon^3 (\beta \Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1} v_P) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \\
2\beta \Gamma(w_s, u) \frac{d^2 w_s}{dx^2} &= 2\varepsilon \beta \Gamma(w_s, u_1) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + 2\varepsilon^2 \beta \Gamma(w_s, u_2) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \\
& + 2\varepsilon^3 \beta \Gamma(w_s, u_3) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \\
\beta \Gamma(u, u) \frac{d^2 w_s}{dx^2} &= \varepsilon^2 \beta \Gamma(u_1, u_1) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + 2\varepsilon^3 \beta \Gamma(u_1, u_2) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + \dots \\
2\beta \Gamma(w_s, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2\varepsilon^2 \beta \Gamma(w_s, u_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2\varepsilon^3 \beta \Gamma(w_s, u_1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \\
& + 2\varepsilon^3 \beta \Gamma(w_s, u_2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dots
\end{aligned}$$

$$\beta\Gamma(u, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon^3 \beta\Gamma(u_1, u_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dots$$

$$\frac{3\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4} u^2 = \varepsilon^2 \frac{3\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4} u_1^2 + 2\varepsilon^3 \frac{3\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4} u_1 u_2 + \dots$$

$$\frac{4\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^5} u^3 = \varepsilon^3 \frac{4\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^5} u_1^3 + \dots$$

$$\varepsilon^3 \frac{2\eta v_{dc} v_{ac} \cos(\Omega\tau)}{(1-w_s)^2} = \varepsilon^3 \frac{2\eta v_{dc} v_{ac} \cos(\Omega\tau)}{(1-w_s)^2}$$

جملاتی که از معادله (۳-۴) در معادله (۴-۴) بیان نشده‌اند، حاوی ضریبی کمتر از ε^3 نبوده‌اند.

جملات با مرتبه‌های یکسان ε از معادله (۴-۴) مساوی با صفر قرار داده می‌شوند:

مرتبه ε^1

$$L(u_1) = M_n(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H_{n1}(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}) - (\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1} v_P) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (۵-۴)$$

$$- 2\beta\Gamma(w_s, u_1) \frac{d^2 w_s}{dx^2} - \frac{2\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^3} u_1 = 0$$

$$u_1 \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad u_1 \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=1} = 0$$

مرتبه ε^2

$$L(u_2) = \beta\Gamma(u_1, u_1) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + 2\beta\Gamma(w_s, u_1) \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{3\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4} u_1^2 - 2M_n(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (۶-۴)$$

$$u_2 \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{du_2}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad u_2 \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{du_2}{dx} \Big|_{x=1} = 0$$

مرتبه ε^3

$$L(u_3) = -2M_n(x) \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} - M_n(x) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} \right) - C \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial T_0} (H_{n2}(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}) \quad (۷-۴)$$

$$+ 2\beta C \Gamma \left(\frac{\partial u_1}{\partial T_0}, w_s \right) \frac{\partial}{\partial x} (H_{n3}(x) \frac{dw_s}{dx}) + 2\beta\Gamma(u_1, u_2) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + 2\beta\Gamma(w_s, u_2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

$$+ 2\beta\Gamma(w_s, u_1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \beta\Gamma(u_1, u_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{6\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4} u_1 u_2 + \frac{4\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^5} u_1^3$$

$$+ \frac{2\eta v_{dc} v_{ac} \cos(\Omega T_0)}{(1-w_s)^4}$$

$$u_3 \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{du_3}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad u_3 \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{du_3}{dx} \Big|_{x=1} = 0$$

با استفاده از شکل مودهای نرمال سیستم، یعنی شکل مودهایی با $\int_0^L \phi^2 dx = 1$ و معرفی $\phi(x)$

به عنوان تابع شکل مودهایی نرمال شده، حل معادله (۴-۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$u_1(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} \phi(x) + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega T_0} \phi(x) \quad (۸-۴)$$

در این رابطه $A(T_1, T_2)$ تابع مختلط و $\bar{A}(T_1, T_2)$ مزدوج مختلط آن می باشد که با اعمال

شرایط حل پذیری به مسأله، بدست می آیند. به منظور دستیابی به رابطه ی u_1 با جایگذاری معادله

(۸-۴) در معادله (۴-۶)، حاصل به صورت زیر بیان می شود:

$$L(u_2) = (A^2 e^{2i\omega T_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}) h(x) - 2M_n(x) \omega i \left(\frac{\partial A(T_1, T_2)}{\partial T_1} e^{i\omega T_0} - \right. \quad (۹-۴)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{A}(T_1, T_2)}{\partial T_1} e^{-i\omega T_0} \right) \phi(x)$$

در حالی که

$$h(x) = \beta \Gamma(\phi, \phi) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + 2\beta \Gamma(w_s, \phi) \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{3\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4} \phi^2 \quad (۱۰-۴)$$

به منظور این که در معادله (۹-۴) جمله ی سکولار ظاهر نشود، جمله ی

$$A \quad 2M_n(x) \omega i \left(\frac{\partial A(T_1, T_2)}{\partial T_1} e^{i\omega T_0} - \frac{\partial \bar{A}(T_1, T_2)}{\partial T_1} e^{-i\omega T_0} \right)$$

باید تنها تابعی از T_2 باشد. با این نتیجه گیری، حل خصوصی معادله (۹-۴) به صورت زیر می باشد:

$$u_2(T_0, T_2) = \psi_1(x) A^2 e^{2i\omega T_0} + 2\psi_2(x) A\bar{A} + \psi_1(x) \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0} \quad (۱۱-۴)$$

در معادله ی (۴-۱۱)، $\psi_2(x)$ و $\psi_1(x)$ توابعی هستند که از حل مسأله ی مقدار مرزی (۴-۱۲)

بدست می آیند:

$$\frac{d^2}{dx^2}(H_{n1}(x)\frac{d^2\psi_i}{dx^2}) - 4\omega^2\delta_{li}M_n(x)\psi_i - (\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1}v_P)\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2} \quad (12-4)$$

$$- 2\beta\Gamma(w_s, \psi_i)\frac{d^2w_s}{dx^2} - \frac{2\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^3}\psi_i = h(x)$$

$$\psi_i \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial\psi_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \psi_i \Big|_{x=1} = 0, \frac{\partial\psi_i}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0$$

δ_{li} ، تابع دلتای کرونگر¹ است که برای $i=1$ برابر یک و برای $i=2$ برابر صفر می‌باشد. برای دستیابی به حل معادله (12-4) می‌توان از روش گالرکین بهره جست. در این حالت از شکل موده‌های متقارن ارتعاش سیستم حول موقعیت استاتیکی به عنوان توابع مقایسه‌ای استفاده می‌شود.

$$\psi_i = \sum_{j=1}^M c_{[j]}\phi_{[j]} \quad i=1,2 \quad (13-4)$$

در این معادله $\phi_{[j]}$ نشان‌دهنده‌ی j مین شکل مود متقارن خطی میکروتیر تغییر شکل یافته حول موقعیت استاتیکی است و $c_{[j]}$ ضرایبی هستند که از روش گالرکین بدست می‌آیند. با جایگذاری معادله (13-4) در معادله (12-4) و ضرب نتیجه در $\phi_{[n]}$ به عنوان توابع وزن دار و سپس انتگرال گیری آن از $x=0$ تا $x=1$ سیستم جبری به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_0^L \sum_{j=1}^M c_{[j]} \frac{d^2}{dx^2} (H_{n1}(x) \frac{d^2\phi_{[j]}}{dx^2}) \phi_{[n]} dx - 4\omega^2 \delta_{li} \int_0^L \sum_{j=1}^M c_{[j]} M_n(x) \phi_{[j]} \phi_{[n]} dx \quad (14-4)$$

$$- \int_0^L \sum_{j=1}^M c_{[j]} (\beta\Gamma(w_s, w_s) + \alpha - \gamma_{P1}v_P) \frac{d^2\phi_{[j]}}{dx^2} \phi_{[n]} dx$$

$$- 2\beta \int_0^L \sum_{j=1}^M c_{[j]} \Gamma(\phi_{[j]}, w_s) \phi_{[n]} \frac{d^2w_s}{dx^2} dx - 2\eta v_{dc}^2 \int_0^L \sum_{j=1}^M c_{[j]} \frac{\phi_{[j]} \phi_{[n]}}{(1-w_s)^3} dx$$

$$= \int_0^L h(x) \phi_{[n]} dx \quad i=1,2$$

$c_{[j]}$ ها از حل عددی دستگاه معادلات جبری (14-4) بدست می‌آیند. در نتیجه با جایگذاری ضرایب $c_{[j]}$ در معادله‌ی (13-4) و سپس قرار دادن نتیجه در معادله (11-4)، حل u_2 حاصل می‌شود. با جایگذاری u_1 و u_2 از معادله‌های (4-8) و (4-11) در معادله (4-7) و نگه داشتن جملات سکولار نتیجه به صورت معادله (4-15) بدست می‌آید:

¹ Kronecker Delta

$$\begin{aligned}
L(u_3) = & -2M_n(x)(i\omega) \frac{dA(T_2)}{dT_2} \phi(x) e^{i\omega T_0} - CA(T_2)(i\omega) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H_{n_2}(x) \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2}) e^{i\omega T_0} \quad (15-4) \\
& + 2\beta CA(T_2)(i\omega) \Gamma(\phi(x), w_s) \frac{\partial}{\partial x} (H_{n_3}(x) \frac{dw_s}{dx}) e^{i\omega T_0} \\
& + 2\beta A^2(T_2) \bar{A}(T_2) (2\Gamma(\phi(x), \psi_2) + \Gamma(\phi(x), \psi_1)) \frac{d^2 w_s}{dx^2} e^{i\omega T_0} \\
& + 2\beta A^2(T_2) \bar{A}(T_2) (2\Gamma(w_s, \psi_2) + \Gamma(w_s, \psi_1)) \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} e^{i\omega T_0} \\
& + 2\beta A^2(T_2) \bar{A}(T_2) \Gamma(w_s, \phi(x)) (2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}) e^{i\omega T_0} \\
& + 3\beta A^2(T_2) \bar{A}(T_2) \Gamma(\phi(x), \phi(x)) \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} e^{i\omega T_0} \\
& + \frac{6\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4} A^2(T_2) \bar{A}(T_2) (2\psi_2 + \psi_1) \phi(x) e^{i\omega T_0} \\
& + 3 \frac{4\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^5} A^2(T_2) \bar{A}(T_2) \phi^3(x) e^{i\omega T_0} + \frac{2\eta v_{dc} v_{ac} \cos(\Omega T_0)}{(1-w_s)^4} + c.c.
\end{aligned}$$

در این معادله $c.c.$ بیانگر مزدوج مختلط جملات موجود است. در معادله (۱۵-۴) می‌توان از

رابطه‌ی $\cos(\Omega T_0) = \frac{1}{2} e^{i\Omega T_0}$ برای جمله‌ی آخر استفاده کرد. همچنین به منظور بررسی فرکانس

تشدید اولیه سیستم، فرکانس طبیعی به صورت $\omega = \Omega - \varepsilon^2 \sigma$ در نظر گرفته می‌شود که σ پارامتر

تنظیم است و بیانگر اختلاف فرکانس تشدید و فرکانس طبیعی سیستم خطی می‌باشد. با مرتب‌سازی

و تجزیه جملات موجود در معادله (۱۵-۴)، نتیجه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
L(u_3) = & [-2\omega i \frac{dA}{dT_2} M_n(x) \phi(x) - i\omega AC \chi^v + \chi(x) A^2 \bar{A} + \bar{F}(x) e^{i\sigma T_2}] e^{i\omega T_0} + c.c. \quad (16-4) \\
& + N.S.T.
\end{aligned}$$

در حالی که $N.S.T.$ نشان‌دهنده‌ی تمام جملات غیرسکولار می‌باشد. جملات پارامتری موجود در

معادله‌ی بالا به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\chi^v = \frac{d^2}{dx^2} (H_{n_2}(x) \frac{d^2 \phi}{dx^2}) - 2\beta \Gamma(\phi, w_s) \frac{d}{dx} (H_{n_3}(x) \frac{dw_s}{dx}) \quad (17-4)$$

و

$$\bar{F}(x) = \frac{\eta v_{dc} V_{ac}}{(1-w_s)^2} \quad (18-4)$$

و

$$\chi(x) = \chi_q^g + \chi_c^g + \chi_q^e + \chi_c^e \quad (19-4)$$

هر کدام از جمله‌ها در معادله (۱۹-۴) در معادله (۲۰-۴) بیان شده‌اند:

$$\chi_q^g = (2\alpha_1 \Gamma(\psi_1, \phi) + 4\alpha_1 \Gamma(\psi_2, \phi)) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + (2\alpha_1 \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + 4\alpha_1 \frac{d^2 \psi_2}{dx^2}) \Gamma(w_s, \phi) + \quad (20-4)$$

$$(2\alpha_1 \Gamma(\psi_1, w_s) + 4\alpha_1 \Gamma(\psi_2, w_s)) \frac{d^2 \phi}{dx^2},$$

$$\chi_q^e = \frac{6\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^4} (2\phi\psi_2 + \phi\psi_1),$$

$$\chi_c^g = 3\beta \Gamma(\phi, \phi) \frac{d^2 \phi}{dx^2},$$

$$\chi_c^e = \frac{12\eta v_{dc}^2}{(1-w_s)^5} \phi^3$$

عبارات موجود در معادله (۲۰-۴)، ضرایب جملات غیرخطی الکتریکی و هندسی در سیستم

می‌باشد. در این معادله، χ_q^g و χ_c^g به ترتیب جملات غیرخطی هندسی مرتبه ۲ و مرتبه ۳ و χ_q^e و

χ_c^e به ترتیب جملات غیرخطی الکتریکی مرتبه ۲ و مرتبه ۳ هستند.

سمت چپ معادله (۱۶-۴) خودالحاق است، بنابراین حل معادله‌ی الحاقی آن، شبیه حل همگن

معادله (۱۱-۴) است. معادله‌ی غیرهمگن (۱۶-۴) تنها زمانی که سمت راست آن عمود بر هر حل

همگن معادله‌ی خودالحاق یعنی $\phi(x)e^{i\omega T_0}$ باشد دارای جواب است. در این حالت با ضرب کردن

سمت راست معادله (۱۶-۴) در $\phi(x)e^{-i\omega T_0}$ و انتگرال‌گیری از نتایج در بازه‌ی $x=0$ تا $x=1$ ، شرایط

حل‌پذیری به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$2i\omega(\bar{M} \frac{dA}{dT_2} + \frac{\mu A}{2}) + 8SA^2 \bar{A} - Fe^{i\sigma T_2} = 0 \quad (21-4)$$

در حالی که:

$$S = S_q^g + S_c^g + S_q^e + S_c^e \quad (22-4)$$

$$S_q^g = -\frac{1}{8} \int_0^L \chi_q^g \phi \, dx,$$

$$S_c^g = -\frac{1}{8} \int_0^L \chi_c^g \phi \, dx,$$

$$S_q^e = -\frac{1}{8} \int_0^L \chi_q^e \phi \, dx,$$

$$S_c^e = -\frac{1}{8} \int_0^L \chi_c^e \phi \, dx,$$

$$\mu = C \int_0^L \chi^v \phi \, dx,$$

$$\bar{M} = \int_0^L M_n(x) \phi^2 \, dx$$

$$F = \int_0^L \bar{F} \phi \, dx = \int_0^L \frac{\eta v_{dc} v_{ac}}{(1-w_s)^2} \phi \, dx$$

در معادله (۲۲-۴) مشاهده می‌شود که \bar{M} پارامتری همواره مثبت است و μ بیان‌گر میرایی ویسکوالاستیک میکروتیر می‌باشد. به منظور دستیابی به شرایط حل‌پذیری مسأله، تابع مختلط A در فرم قطبی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\vartheta} \quad (23-4)$$

در این معادله a و ϑ توابعی هستند که به ترتیب معرف دامنه و فاز پاسخ سیستم می‌باشند.

اکنون معادله (۲۳-۴) در (۲۱-۴) جایگزین می‌شود:

$$2i\omega \left(\frac{1}{2} \bar{M} \frac{da}{dT_2} e^{i\vartheta} + i \frac{1}{2} \bar{M} a \frac{d\vartheta}{dT_2} e^{i\vartheta} + \frac{\mu}{4} a e^{i\vartheta} \right) + 8S \times \left(\frac{1}{8} a^2 e^{2i\vartheta} a e^{-i\vartheta} \right) - F e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (24-4)$$

با در نظر گرفتن $\vartheta = \sigma T_2 - \hat{\theta}$ ، جایگزین کردن آن در معادله (۲۴-۴) و جدا کردن بخش

حقیقی و بخش موهومی، معادله‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\bar{M} \frac{da}{dT_2} = -\frac{\mu}{2} a + \frac{F}{\omega} \sin \hat{\theta} = r_1(a, \hat{\theta}) \quad (25-4)$$

$$\bar{M} \frac{d\hat{\theta}}{dT_2} = \sigma \bar{M} - \frac{S a^2}{\omega} + \frac{F}{a \omega} \cos \hat{\theta} = r_2(a, \hat{\theta})$$

با جایگذاری معادلات (۸-۴) و (۱۱-۴) درون معادله (۱-۴) و جایگذاری $\varepsilon = 1$ ، حل معادله (۴-۴)

(۱) به صورت زیر بدست می آید:

$$u(x,t) = a \cos(\Omega \tau - \hat{\theta})\phi(x) + \frac{1}{2} a^2 [\psi_2(x) + \cos 2(\Omega \tau - \hat{\theta})\psi_1(x)] \quad (۲۶-۴)$$

در معادله (۲۵-۴) نقطه‌ای که $\frac{d\hat{\theta}}{dT_2} = 0$ و $\frac{da}{dT_2} = 0$ برقرار باشد، نقطه‌ی تکین -نقطه تعادل-

سیستم است که حالت پایدار سیستم را نشان می‌دهد. در نتیجه معادله حاکم بر نقطه‌ی تعادل

سیستم به صورت زیر بدست می آید:

$$a_0^2 \left(\left(\frac{\mu}{2} \right)^2 + \left(\sigma \bar{M} - \frac{S a_0^2}{\omega} \right)^2 \right) = \frac{F^2}{\omega^2} \quad (۲۷-۴)$$

از معادله (۲۷-۴) مشخص می‌شود برای دستیابی به ماکزیمم مقدار برای دامنه‌ی ارتعاشات a_0 ،

باید عبارت $\left(\sigma \bar{M} - \frac{S a_0^2}{\omega} \right)^2$ برابر صفر باشد. با در نظر گرفتن این حالت، پارامتر تنظیم به صورت زیر

بدست می آید:

$$\sigma = \frac{S a_0^2}{\omega \bar{M}} \quad (۲۸-۴)$$

همچنین ماکزیمم مقدار برای a_0 ، به صورت معادله (۲۹-۴) خواهد بود:

$$a_0 = \frac{2F}{\omega \mu} \quad (۲۹-۴)$$

از طرفی با استفاده از $\Omega = \omega + \varepsilon^2 \sigma$ و معادله‌های (۲۸-۴) و (۲۹-۴)، فرکانس تشدید غیرخطی

به صورت زیر بدست می آید:

$$\Omega = \omega + \frac{4SF^2}{\bar{M}\omega^3\mu^2} \quad (۳۰-۴)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، ماکزیمم دامنه‌ی پاسخ در نزدیکی فرکانس طبیعی سیستم نبوده

و در حدود فرکانس ارتعاشات غیرخطی سیستم است.

۳-۴. پایداری سیستم

مبحث پایداری برای سیستم‌های دینامیکی بسیار بااهمیت می‌باشد. برخلاف سیستم‌های خطی که پایداری برای کل سیستم مطرح می‌شود، برای سیستم‌های غیرخطی پایداری نقاط تعادل و به صورت محلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به این که سیستم‌های غیرخطی شامل چندین نقطه‌ی تعادل می‌باشند، بررسی این که کدام یک از این نقاط تعادل، پایدار می‌باشند موضوع مهمی است. در همسایگی نقطه‌ی تعادل برای سیستم غیرخطی، می‌توان آن را با یک سیستم خطی تقریب زد و در نتیجه می‌توان پایداری دینامیکی سیستم را در همسایگی کوچک نقطه‌ی تعادل بررسی کرد. از جمله روش‌ها برای بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی، می‌توان به روش‌های پایداری لیاپانوف، پایداری مجانبی و پایداری نمایی اشاره کرد.

در سیستم غیرخطی، با خطی‌سازی در نزدیکی نقطه‌ی تعادل و بدست آوردن مقادیر ویژه با تشکیل ماتریس ژاکوبین، بسته به مقادیر ویژه‌ی حاصل، نقطه‌ی تعادل می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد. اگر مقادیر ویژه‌ی حاصل همگی دارای مؤلفه‌ی حقیقی منفی باشند، نقطه‌ی تعادل، پایدار مجانبی خواهد بود. چنانچه بعضی از مقادیر ویژه دارای بخش حقیقی مثبت باشند نقطه‌ی تعادل ناپایدار است. ماتریس ژاکوبین، ماتریس مشتقات جزئی مرتبه اول برای معادله‌ی نقطه‌ی تعادل سیستم می‌باشد که به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (۳۱-۴)$$

با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین ثابت \hat{A} ، اطلاعات مهمی در رابطه با پایداری محلی

نقطه‌ی تعادل بدست می‌آید. با در نظر گرفتن این که در نقطه‌ی تعادل $\frac{da}{dT_2}$ و $\frac{d\hat{\theta}}{dT_2}$ صفر می‌باشند،

معادله برای این نقطه، از معادله (۲۵-۴) بدست می‌آید:

$$\frac{F}{a_0\omega} \sin \hat{\theta}_0 = \frac{\mu}{2} \quad (۳۲-۴)$$

$$\frac{F}{a_0\omega} \cos \hat{\theta}_0 = \frac{Sa_0^2}{\omega} - \sigma\bar{M}$$

در نتیجه توابع r_1 و r_2 ، برای نقطه‌ی تعادل بصورت زیر خواهد بود:

$$r_1(a_0, \hat{\theta}_0) = \frac{F}{a_0\omega} \sin \hat{\theta}_0 - \frac{\mu}{2} \quad (۳۳-۴)$$

$$r_2(a_0, \hat{\theta}_0) = \frac{F}{a_0\omega} \cos \hat{\theta}_0 - \frac{Sa_0^2}{\omega} - \sigma\bar{M}$$

با توجه به تعریف ماتریس ژاکوبین، از آن برای معادله نقطه‌ی تعادل (۳۳-۴) استفاده می‌شود:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial a} & \frac{\partial r_1}{\partial \hat{\theta}} \\ \frac{\partial r_2}{\partial a} & \frac{\partial r_2}{\partial \hat{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{2} & \frac{F}{\omega} \cos \hat{\theta}_0 \\ \frac{F \cos \hat{\theta}_0}{a_0^2\omega} - \frac{2Sa_0}{\omega} & -\frac{F}{a_0\omega} \sin \hat{\theta}_0 \end{bmatrix} \quad (۳۴-۴)$$

$$\Rightarrow |\hat{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\frac{\mu}{2} - \lambda & \frac{F}{\omega} \cos \hat{\theta}_0 \\ \frac{F \cos \hat{\theta}_0}{a_0^2\omega} - \frac{2Sa_0}{\omega} & -\frac{F}{a_0\omega} \sin \hat{\theta}_0 - \lambda \end{vmatrix}$$

مطابق با معادله (۳۴-۴)، به منظور دستیابی به معادله مشخصه سیستم، دترمینان حاصل از

$[\hat{A} - \lambda I]$ برابر صفر قرار داده می‌شود. در حالی که λ مقادیر ویژه و I ماتریس یکه می‌باشد.

$$\lambda^2 + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{F}{a_0\omega} \sin \hat{\theta}_0\right)\lambda + \frac{2a_0FS \cos \hat{\theta}_0}{\omega^2} + \frac{F\mu \sin \hat{\theta}_0}{2a_0\omega} + \frac{F^2 (\cos \hat{\theta}_0)^2}{a_0^2\omega^2} = 0 \quad (۳۵-۴)$$

با جایگذاری معادله (۳۲-۴) در معادله (۳۵-۴)، معادله مشخصه به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\lambda^2 + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2}\right)\lambda + \frac{2 - (Sa_0^2 + \sigma\bar{M})a_0FS \cos \hat{\theta}_0}{\omega^2} + \frac{F\mu \sin \hat{\theta}_0}{2a_0\omega} + \frac{F^2(\cos \hat{\theta}_0)^2}{a_0^2\omega^2} = 0 \quad (36-4)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \mu\lambda + \frac{\mu^2}{4} + (\sigma\bar{M} - 3\frac{Sa_0^2}{\omega})(\sigma\bar{M} - \frac{Sa_0^2}{\omega}) = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه، در رابطه‌ی (۳۷-۴) بدست آمده است:

$$\lambda_1 = \frac{-\mu + \sqrt{-4(\sigma\bar{M} - 3\frac{Sa_0^2}{\omega})(\sigma\bar{M} - \frac{Sa_0^2}{\omega})}}{2} \quad (37-4)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\mu - \sqrt{-4(\sigma\bar{M} - 3\frac{Sa_0^2}{\omega})(\sigma\bar{M} - \frac{Sa_0^2}{\omega})}}{2}$$

وقتی تمامی مقادیر ویژه بدست آمده از ماتریس \hat{A} دارای بخش حقیقی غیرصفر باشند، نقطه‌ی تعادل متناظر با آن، نقطه‌ی ثابت هایپربولیکی نامیده می‌شود. مطابق با معادله (۳۷-۴) مقادیر ویژه بدست آمده برای نقطه‌ی تعادل (a_0, θ_0) ، به علت این که $\mu \neq 0$ ، غالباً دارای بخش حقیقی غیرصفر می‌باشند. در نتیجه این نقطه‌ی تعادل، هایپربولیکی می‌باشد. از طرفی، از معادله (۲۷-۴) نتیجه‌گیری می‌شود، متغیر σ دارای ۲ مقدار است که بصورت معادله (۳۸-۴) بیان می‌شود:

$$\sigma_{1a_0} = \frac{Sa_0^2}{\omega} + \frac{1}{Ma_0} \sqrt{\left(\frac{F^2}{\omega^2} - \frac{\mu^2}{4} a_0^2\right)} \quad (38-4)$$

$$\sigma_{2a_0} = \frac{Sa_0^2}{\omega} - \frac{1}{Ma_0} \sqrt{\left(\frac{F^2}{\omega^2} - \frac{\mu^2}{4} a_0^2\right)}$$

با جایگزینی مقادیر σ_{1a_0} و σ_{2a_0} بدست آمده از معادله (۳۸-۴) در معادله (۳۷-۴)، به ترتیب

مقادیر ویژه به صورت زیر خواهند بود:

$$\lambda_{1\sigma_{1a_0}} = \frac{-\mu + \sqrt{-4\left(\frac{F^2}{a_0^2\omega^2} - \frac{\mu}{4}\right) - \frac{2Sa_0}{\omega} \sqrt{\left(\frac{F^2}{\omega^2} - \frac{\mu}{4} a_0^2\right)}}{2} \quad (39-4)$$

$$\lambda_{2\sigma_{1a_0}} = \frac{-\mu - \sqrt{-4\left(\frac{F^2}{a_0^2\omega^2} - \frac{\mu}{4}\right) - \frac{2Sa_0}{\omega} \sqrt{\left(\frac{F^2}{\omega^2} - \frac{\mu}{4} a_0^2\right)}}{2}$$

$$\lambda_{1\sigma_{2a_0}} = \frac{-\mu + \sqrt{-4\left(\frac{F^2}{a_0^2\omega^2} - \frac{\mu}{4}\right) + \frac{2Sa_0}{\omega} \sqrt{\left(\frac{F^2}{\omega^2} - \frac{\mu}{4}a_0^2\right)}}{2} \quad (40-4)$$

$$\lambda_{2\sigma_{2a_0}} = \frac{-\mu - \sqrt{-4\left(\frac{F^2}{a_0^2\omega^2} - \frac{\mu}{4}\right) + \frac{2Sa_0}{\omega} \sqrt{\left(\frac{F^2}{\omega^2} - \frac{\mu}{4}a_0^2\right)}}{2}$$

با توجه به مباحث گفته شده برای بررسی پایداری سیستم با استفاده از معادله مشخصه، سیستم مورد بررسی زمانی ناپایدار است که ریشه‌های معادله مشخصه آن، دارای بخش حقیقی مثبت باشد. با در نظر گرفتن ویژگی پارامترهای موجود در معادلات (39-4) و (40-4)، ناپایداری سیستم زمانی رخ می‌دهد که مقدار ویژه مختلط نبوده و یک مقدار حقیقی مثبت باشد. $\lambda_{2\sigma}$ نمی‌تواند دارای بخش حقیقی مثبت باشد. در نتیجه این حالت ناپایداری برای $\lambda_{1\sigma}$ ، به ازای شرط زیر برقرار خواهد بود:

$$\lambda_{1\sigma} = -\mu + \sqrt{-4\left(\sigma - \frac{3Sa_0^2}{\omega}\right)\left(\sigma - \frac{Sa_0^2}{\omega}\right)} > 0 \quad (41-4)$$

با اعمال این شرط در معادلات (39-4) و (40-4)، محدوده‌ی ناپایداری سیستم به صورت معادله

(41-4) محاسبه می‌گردد:

$$\frac{-\mu + \sqrt{-4\left(\frac{F^2}{a_0^2\omega^2} - \frac{\mu}{4}\right) + \frac{2Sa_0}{\omega} \sqrt{\left(\frac{F^2}{\omega^2} - \frac{\mu}{4}a_0^2\right)}}{2} > 0 \quad (42-4)$$

$$= \mu < \sqrt{-4\left(\frac{F^2}{a_0^2\omega^2} - \frac{\mu}{4}\right) + \frac{2Sa_0}{\omega} \sqrt{\left(\frac{F^2}{\omega^2} - \frac{\mu}{4}a_0^2\right)}}$$

$$= \mu^2 < -4\left(\frac{F^2}{a_0^2\omega^2} - \frac{\mu}{4}\right) + \frac{2Sa_0}{\omega} \sqrt{\left(\frac{F^2}{\omega^2} - \frac{\mu}{4}a_0^2\right)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{F^2}{\omega^2} - \frac{\mu}{4}a_0^2\right)} > \frac{F^2}{2|Sa_0^3|}$$

فصل ۵

بررسی نتایج

۱-۵. مقدمه

در این فصل به نمایش، اعتبارسنجی و بررسی نتایج حاصل از تحلیل‌ها پرداخته می‌شود. نتایج به ترتیب در مبحث تغییر شکل استاتیکی، فرکانس طبیعی سیستم، رفتار دینامیکی، تأثیرات میرایی و پایداری ارائه می‌شوند. در تمامی قسمت‌ها، روش گالرکین با تقریب دو شکل مود متقارن اول در نظر گرفته شده است. مقایسه‌ی نتایج این پایان‌نامه در حالت نادیده گرفتن اثر ویسکوالاستیک، مطابقت خوبی با نتایج [۳۷،۶۳] داشته است. این مقایسه برای قسمت‌های مرتبط نشان داده می‌شود.

جدول ۱-۵. مشخصات ماده و هندسه میکروتیر و لایه پیزوالکتریک

لایه پیزوالکتریک	میکروتیر	
200 μm	200 μm	طول
20 μm	20 μm	عرض
0.15 μm	1.5 μm	ضخامت
78.6 Gpa	166 Gpa	مدول الاستیسیته
7500 kg m^{-3}	2331 kg m^{-3}	چگالی جرمی
-9.29 C m^{-2}	----	ضریب پیزوالکتریک
----	1.18 μm	فاصله هوایی
----	0.001 $\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$	ضریب میرایی

جدول (۱-۵)، خصوصیات مکانیکی و هندسی میکروتیر و لایه پیزوالکتریک را بیان می‌کند. در شبیه‌سازی‌ها و نتیجه‌گیری‌ها فرض شده است که با تغییر پارامتر مورد بررسی، سایر پارامترها ثابت و مقادیرشان مطابق جدول (۲-۵) که بر اساس [۶۳] در نظر گرفته شده‌اند، خواهد بود. در شبیه‌سازی‌ها تغییرات ηv_{dc}^2 معرف تغییرات ولتاژ الکتروستاتیکی می‌باشد که بین میکروتیر و صفحه‌ی الکترودی اعمال می‌شود.

جدول ۵-۲. مقادیر پارامترهای مورد استفاده در شبیه‌سازی

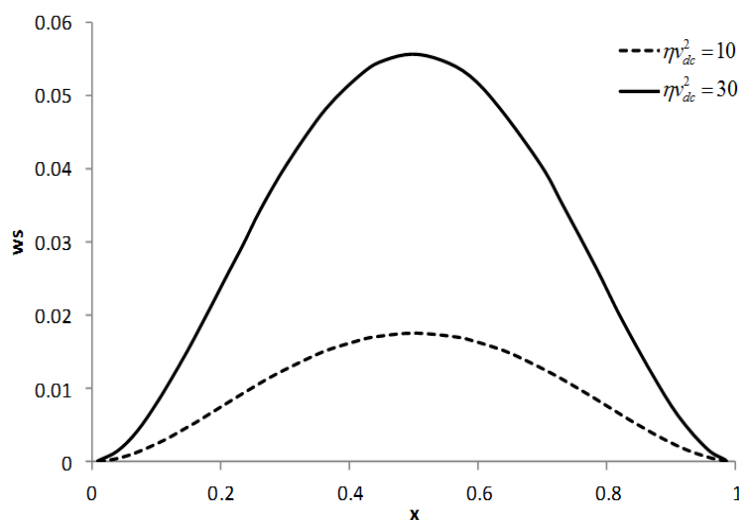
$\beta_1 = 3.7$	$\gamma_1 = -2$	$t_2 = 0.1t_1$	$\alpha_1 = 8.7$
$\eta = 2.95$	$l_2 - l_1 = L$	$v_{ac} = 0.02$	

۲-۵. بررسی تغییر شکل استاتیکی

همان‌طور که بیان شد، تعداد جملات مورد استفاده‌ی توابع مقایسه‌ای، برای همگرایی پاسخ استاتیکی معادله (۲-۵۷) در شبیه‌سازی، ۲ شکل مود متقارن اول می‌باشد. در نتیجه، حل عددی معادله (۲-۵۷) با در نظر گرفتن معادلات (۳-۶) و (۳-۷) حاصل می‌شود و می‌توان تغییر شکل استاتیکی سیستم نسبت به پارامترهای مختلف را رسم نمود.

با توجه به شرایط مرزی، ساختار میکروتیر و قرار دادن لایه پیزوالکتریک به صورت متقارن بر روی میکروتیر، بدیهی است مطابق شکل (۵-۱)، ماکزیمم تغییر شکل سیستم به ازای نقطه‌ی میانی

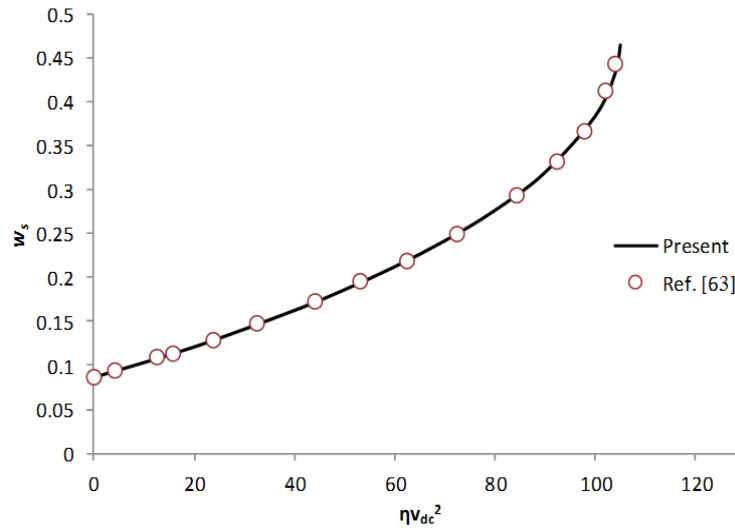
میکروتیر یعنی $x = \frac{1}{2}$ رخ می‌دهد.



شکل ۵-۱. تغییرات خیز استاتیکی نسبت به تغییرات x برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ در تحریک الکتروستاتیک $\eta v_{dc}^2 = 10$ و $\eta v_{dc}^2 = 30$

شکل (۲-۵) تغییرات استاتیکی میکروتیر نانوکامپوزیتی مورد بررسی در این تحقیق، با تقریب دو شکل مود و حذف اثر ویسکوالاستیک، در مقایسه با میکروتیر در [۶۳] که با تقریب سه شکل مود با سایر شرایط مشابه بررسی شده است را نشان می‌دهد. بر اساس این شکل، مطابقت خوبی بین نتایج

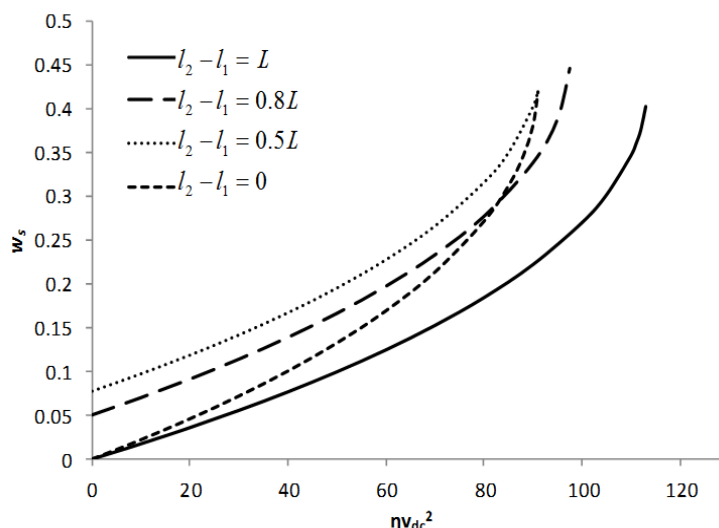
مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده‌ی صحت معادلات و شبیه‌سازی‌های بدست آمده برای میکروتیر ویسکوالاستیک می‌باشد.



شکل ۵-۲. مقایسه ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات ηv_{dc}^2 برای میکروتیر سیستم مورد بررسی، با میکروتیر در [۶۳] همراه با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.8L$

شکل (۵-۳) ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی یک میکروتیر به ازای طول‌های مختلف از لایه پیزوالکتریک را نسبت به تغییرات ولتاژ الکتروستاتیک یعنی ηv_{dc}^2 ، نمایش می‌دهد.

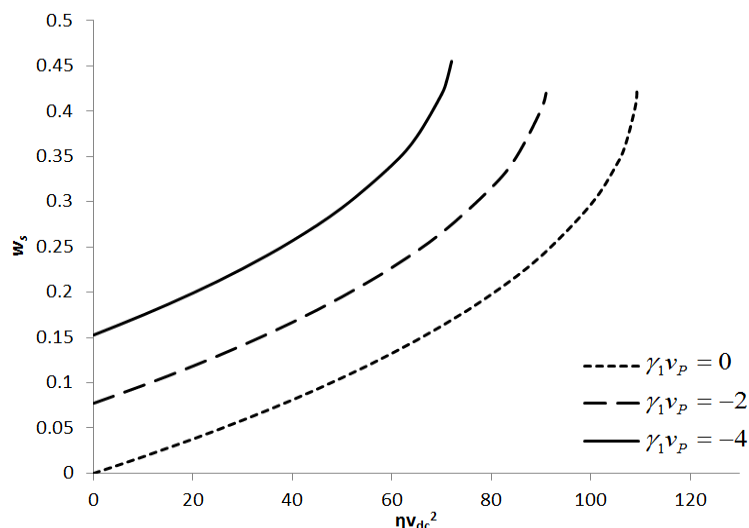
این شکل نشان می‌دهد، به ازای یک طول خاص از لایه پیزوالکتریک با افزایش ولتاژ الکتروستاتیک، مقدار تغییر شکل استاتیکی نیز افزایش می‌یابد. همچنین برای یک مقدار خاص از ηv_{dc}^2 ، با افزایش طول لایه پیزوالکتریک از 0 تا $0.5L$ تغییر شکل استاتیکی میکروتیر افزایش می‌یابد. در حالی که به ازای افزایش طول لایه پیزوالکتریک از $0.5L$ تا L مقدار تغییر شکل استاتیکی کاهش پیدا می‌کند. این رفتار استاتیکی سیستم، ناشی از تأثیر لایه پیزوالکتریک در معادله استاتیکی (۲-۵۷) می‌باشد. جملات با ضریب γ_{P1} و γ_{P2} به ترتیب مربوط به بخش ممان خمشی و نیروی محوری پیزوالکتریک می‌باشند. همان‌طور که در معادله (۲-۵۶) نشان داده شده است، مقدار γ_{P1} با افزایش طول لایه پیزوالکتریک افزایش می‌یابد. از طرفی مشاهده می‌شود، جمله با ضریب γ_{P2} در معادله (۲-۵۷)، به ازای زمانی که پیزوالکتریک کل سطح میکروتیر را پوشانده و زمانی که طول لایه پیزوالکتریک برابر صفر باشد، مقدار صفر را به خود اختصاص می‌دهد.



شکل ۳-۵. تأثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر به ازای ηV_{dc}^2 مختلف

همچنین افزایش طول لایه پیزوالکتریک، باعث افزایش سختی سیستم می‌شود و می‌تواند تغییر شکل استاتیکی را کاهش دهد. با در نظر گرفتن این شرایط، رفتار استاتیکی میکروتیر در شکل (۳-۵) قابل استنتاج می‌باشد. مشاهده می‌شود ولتاژ پولین که باعث ناپایداری سیستم می‌شود در ماکزیمم ηV_{dc}^2 رخ می‌دهد که به ازای طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک مقدار این ولتاژ متفاوت بوده، اما برای حالات مختلف، ناپایداری پولین به ازای تغییر شکل استاتیکی در محدوده‌ی 4 تا 4.5 فاصله‌ی هوایی رخ می‌دهد.

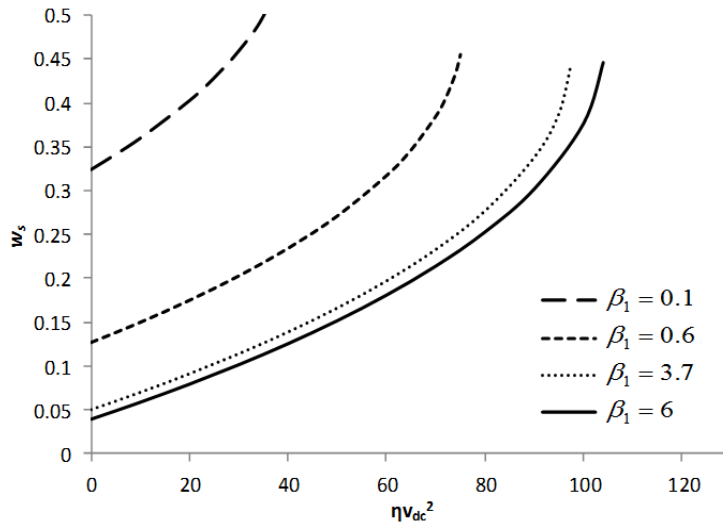
شکل (۴-۵) ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی میکروتیر به ازای $\gamma_1 v_p$ ‌های مختلف که ناشی از اعمال ولتاژهای مختلف به لایه پیزوالکتریک می‌باشد، برای زمانیکه لایه پیزوالکتریک با طول $l_2 - l_1 = 0.5L$ بر روی میکروتیر قرار گرفته است، نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش مقدار قدر مطلق $\gamma_1 v_p$ از 0 به -4، به ازای کمترین مقادیر ηV_{dc}^2 تا بیشترین آن، تغییر شکل استاتیکی دستخوش تغییر بوده و افزایش می‌یابد. علت افزایش تغییر شکل استاتیکی به وجود جملات با ضریب $\gamma_1 v_p$ در معادله (۲-۵۷) مربوط می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود ولتاژ پولین به ازای سه حالت رسم شده در شکل (۴-۵) کاملاً متفاوت می‌باشد و با افزایش مقدار $\gamma_1 v_p$ ، ناپایداری میکروتیر زودتر اتفاق می‌افتد.



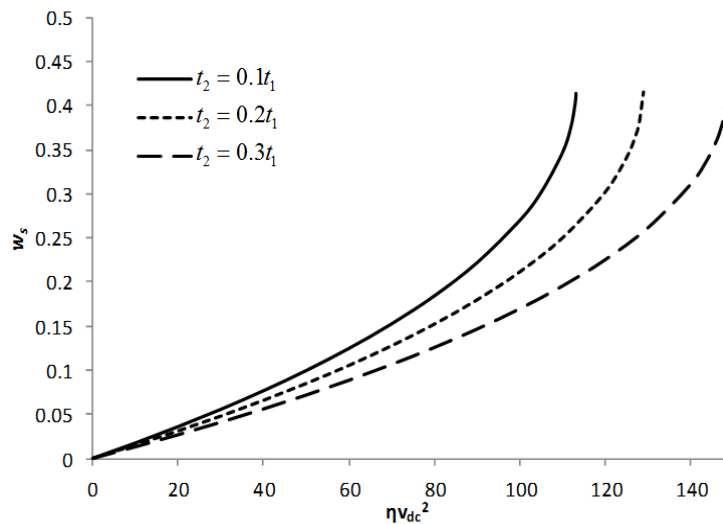
شکل ۵-۴. تأثیر تغییر مقدار $\gamma_1 v_p$ بر تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.5L$ به ازای ηv_{dc}^2 مختلف

β_1 ضریب بی‌بعدی است که به علت اثر کشیدگی لایه‌ی میانی در معادلات ظاهر شده و منجر به ایجاد جملات غیرخطی خواهد شد. در شکل (۵-۵) به بررسی تغییرات β_1 برای سیستم میکروالکترومکانیکی مورد نظر پرداخته می‌شود.

با رسم نمودار تغییر شکل استاتیکی نسبت به ηv_{dc}^2 برای چهار مقدار متفاوت از β_1 ، مشاهده می‌شود که با افزایش این پارامتر به ازای یک ηv_{dc}^2 مشخص، تغییر شکل استاتیکی میکروتیر کاهش می‌یابد. این تغییرات برای β_1 های کوچک‌تر، بیشتر بوده و با افزایش مقدار آن، نرخ تغییرات کاهش می‌یابد. مطابق با معادله (۲-۵۶)، افزایش β_1 منجر به افزایش کشش لایه‌ی میانی شده و رفتار سخت‌شوندگی را در سیستم افزایش می‌دهد. در نتیجه تغییر شکل استاتیکی میکروتیر کاهش می‌یابد. همچنین می‌توان بیان کرد که به ازای یک β_1 مشخص، هرچه مقدار آن کم‌تر باشد، ناپایداری استاتیکی میکروتیر به ازای ولتاژ الکتروستاتیک کمتری رخ می‌دهد. در این حالت نیز اختلاف مقادیر ولتاژ پولین برای حالات مختلف مشهود می‌باشد که بسته به شرایط، در طراحی میکروسیستم در نظر گرفته می‌شوند.



شکل ۵-۵. تأثیر تغییر مقدار β_1 بر تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.8L$ به ازای ηv_{dc}^2 مختلف

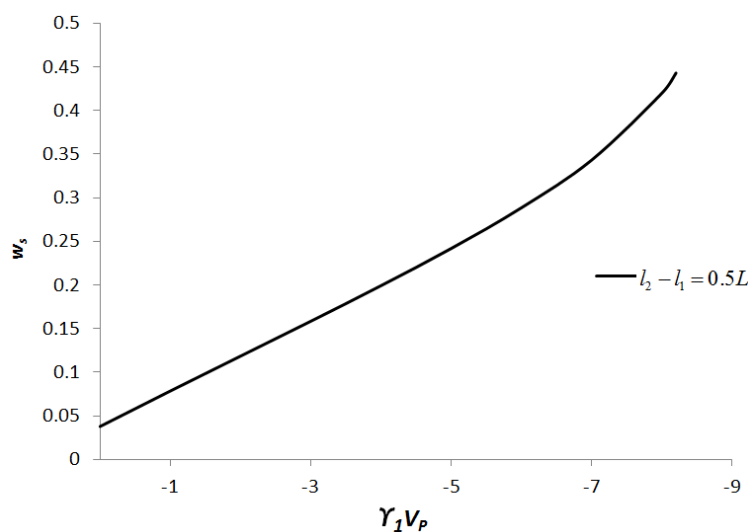


شکل ۵-۶. تأثیر تغییر ضخامت لایه پیزوالکتریک بر تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ به ازای ηv_{dc}^2 مختلف

لایه پیزوالکتریک قرار گرفته بر روی میکروتیر، می‌تواند در ضخامت‌های مختلفی استفاده شود. در شکل (۵-۶) مشاهده می‌شود، برای یک میکروتیر که لایه پیزوالکتریک کل سطح آن را پوشانده است، با تغییر ضخامت لایه پیزوالکتریک رفتار استاتیکی آن تغییر می‌کند. با افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک از $0.1t_1$ تا $0.3t_1$ به ازای یک مقدار مشخص ηv_{dc}^2 ، تغییر شکل استاتیکی کاهش می‌یابد. افزایش ضخامت میکروتیر باعث افزایش سختی و بدنبال آن کاهش تغییر شکل استاتیکی سیستم می‌شود. تغییر شکل اولیه سیستم به علت صفر بودن ضریب جمله‌ی $\gamma_2 v_p$ در معادله (۲-۵۹)، برای

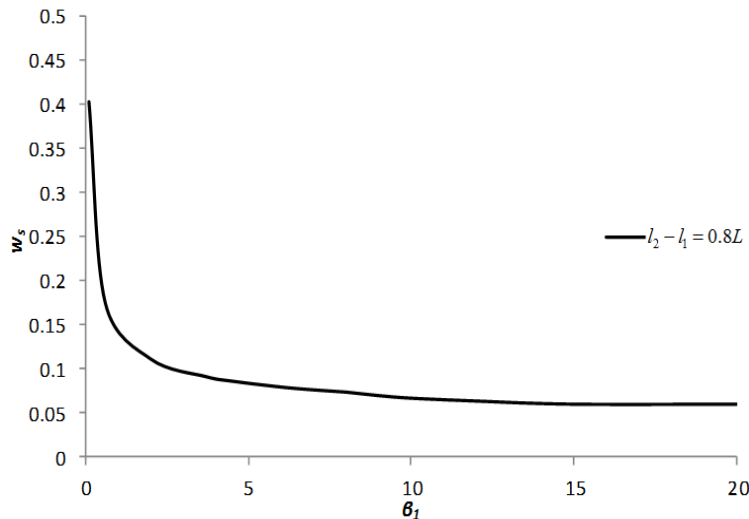
سه مقدار مختلف ضخامت لایه پیزوالکتریک، ثابت و برابر صفر می باشد.

d_{31} معمولاً مقادیر منفی را به خود اختصاص می دهد. در نتیجه بنا به معادله (۲-۵۶) $\gamma_1 v_p$ نیز منفی می باشد. در شکل (۵-۷) نشان داده شده است که تغییر شکل استاتیکی میکروتیر با افزایش مقدار قدر مطلق $\gamma_1 v_p$ که معرف افزایش مقدار ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک می باشد، برای یک میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.5L$ ، افزایش می یابد که علت آن، افزایش جمله‌ی $\gamma_1 v_p$ در معادله (۲-۵۹) می باشد.



شکل ۵-۷. بررسی تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر نسبت به تغییرات $\gamma_1 v_p$

شکل (۵-۸) تغییر شکل استاتیکی یک میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.8L$ را نشان می دهد که تأثیر تغییرات β_1 بر تغییر شکل استاتیکی سیستم در آن بررسی شده است. دامنه تغییرات این پارامتر به صورت تقریبی 0.1 تا 10 می باشد. با افزایش مقدار β_1 که معرف کشش لایه‌ی میانی می باشد، در ابتدا کاهش عمده‌ای پیدا می کند. با افزایش مقدار β_1 از حد مشخص، تغییر شکل استاتیکی به کمترین مقدار خود رسیده و دیگر تأثیری بر روی رفتار استاتیکی سیستم دیده نمی شود. علت این کاهش، خاصیت سخت کننده‌ای جمله‌ی غیرخطی ناشی از کشش لایه‌ی میانی می باشد.



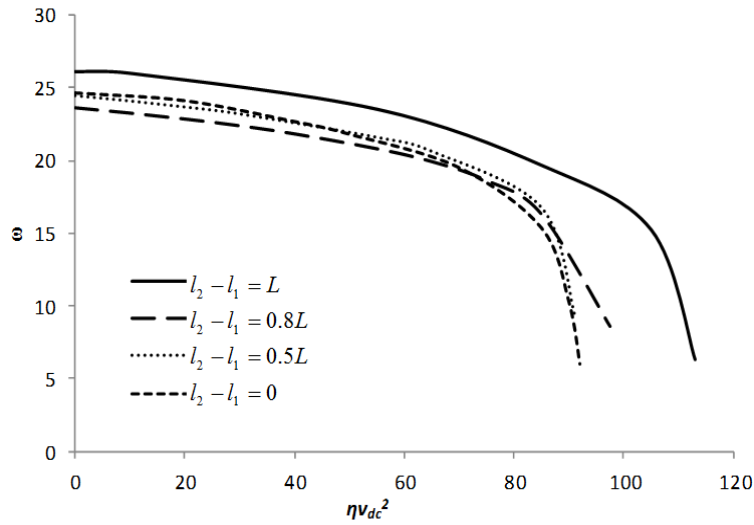
شکل ۵-۸. بررسی تغییر شکل استاتیکی مرکزی میکروتیر نسبت به تغییرات β_1

۳-۵. بررسی فرکانس طبیعی

از آنجا که تعیین فرکانس طبیعی میکروتیر در کاربردهایی از جمله رزوناتورها، فیلترها، عملگرها و سنسورهای تشدید، اهمیت فراوانی دارد، فرکانس طبیعی میکروسیستم مورد نظر، بررسی می‌گردد. همان‌طور که در نتایج قسمت قبل مشاهده شد نیروی الکتروستاتیک تمایل به کاهش سختی سیستم دارد. بنابراین لازم است تأثیر تحریک الکتروستاتیک و دیگر پارامترها بر روی فرکانس طبیعی میکروتیر تعیین شود.

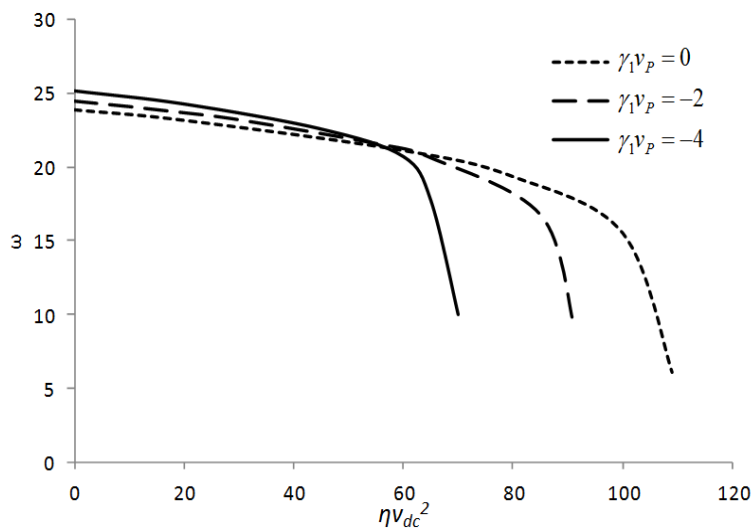
شکل (۵-۹) به بررسی تغییرات فرکانس طبیعی سیستم به ازای طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک می‌پردازد. این شکل نشان می‌دهد با افزایش طول لایه پیزوالکتریک از صفر تا $0.8L$ ، فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد و با افزایش طول لایه پیزوالکتریک از $0.8L$ تا L ، فرکانس طبیعی افزایش پیدا کرده است. دلیل این رفتار به تغییرات سختی نسبت به وزن سیستم مربوط می‌شود.

شکل (۵-۱۰) تأثیر ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک را بر روی فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات ηv_{dc}^2 نشان می‌دهد. افزایش مقدار قدر مطلق $\gamma_1 v_p$ باعث افزایش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.

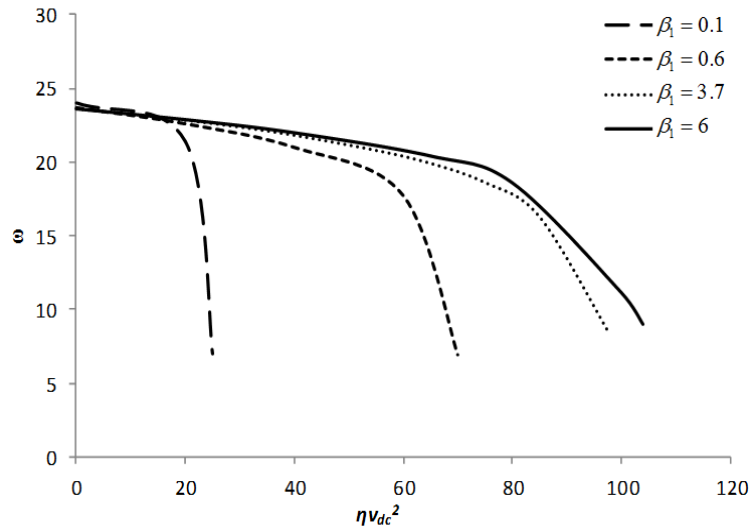


شکل ۵-۹. تأثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی میکروتیر به ازای تغییرات ηV_{dc}^2

علت این رفتار به تأثیر افزایش $\gamma_1 v_p$ در معادله (۶۴-۲) مربوط می‌شود که منجر به افزایش فرکانس طبیعی سیستم در $\eta V_{dc}^2 = 0$ می‌شود. با افزایش ηV_{dc}^2 رفتار سیستم تحت تأثیر سایر جملات غیرخطی نیز قرار گرفته و متناسب با برآیند تمام جملات تغییر می‌کند. مشاهده می‌شود در نزدیکی ولتاژ پولین، روابط عکس شده و با افزایش مقدار قدر مطلق $\gamma_1 v_p$ ، فرکانس طبیعی کاهش پیدا کرده و ناپایداری سیستم زودتر اتفاق می‌افتد.



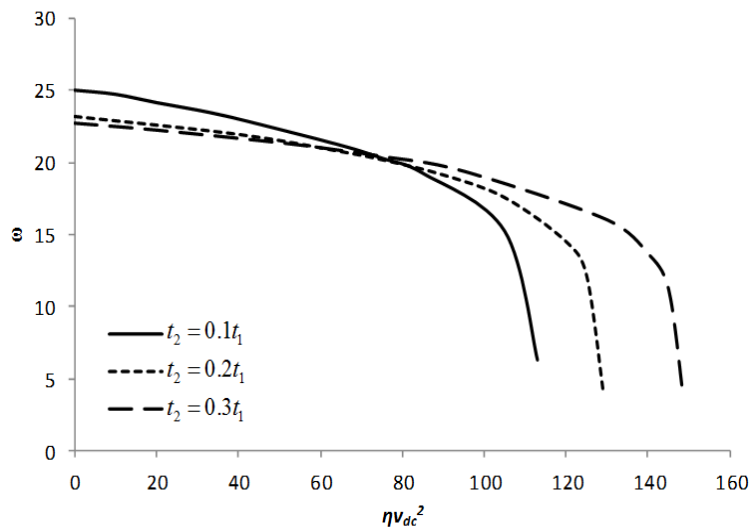
شکل ۵-۱۰. تأثیر تغییر مقدار $\gamma_1 v_p$ بر فرکانس طبیعی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.5L$ به ازای ηV_{dc}^2 مختلف



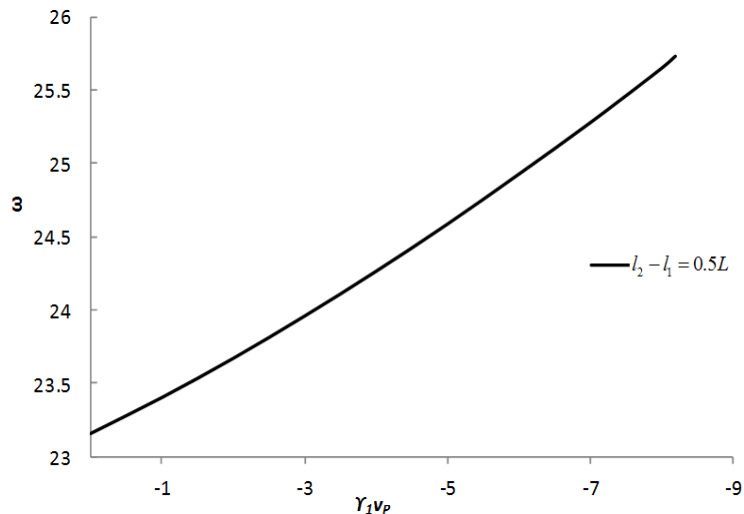
شکل ۵-۱۱. تأثیر تغییر مقدار β_1 بر فرکانس طبیعی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.8L$ به ازای ηv_{dc}^2 مختلف

شکل (۵-۱۱) نمودار تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات ولتاژ تحریک الکتروستاتیک را برای مقادیر مختلف β_1 نشان می‌دهد. افزایش این پارامتر که رفتار سخت‌شوندگی را در سیستم افزایش می‌دهد، باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.

شکل (۵-۱۲) کاهش فرکانس طبیعی میکروتیر همراه با لایه پیزوالکتریک را با افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک نشان می‌دهد. این رفتار فرکانس طبیعی برای سیستم، بر اساس تغییر شکل استاتیکی آن، قابل توجیه می‌باشد.

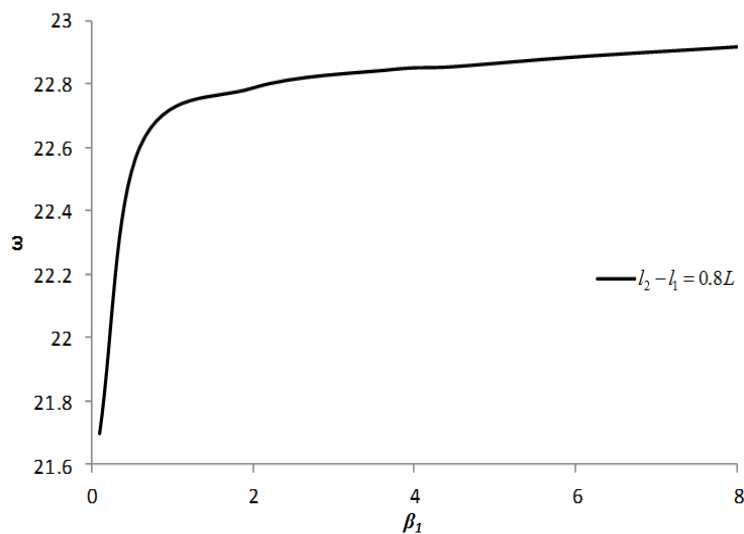


شکل ۵-۱۲. تأثیر تغییر ضخامت لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ به ازای ηv_{dc}^2 مختلف



شکل ۵-۱۳. بررسی تغییرات فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات $\gamma_1 v_p$

شکل (۵-۱۳) تأثیر افزایش قدر مطلق $\gamma_1 v_p$ را بر روی سیستم نشان می‌دهد که باعث افزایش پیوسته فرکانس طبیعی به علت افزایش جمله‌ی $\gamma_1 v_p$ در معادله (۲-۶۴) می‌باشد.



شکل ۵-۱۴. بررسی تغییرات فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات β_1

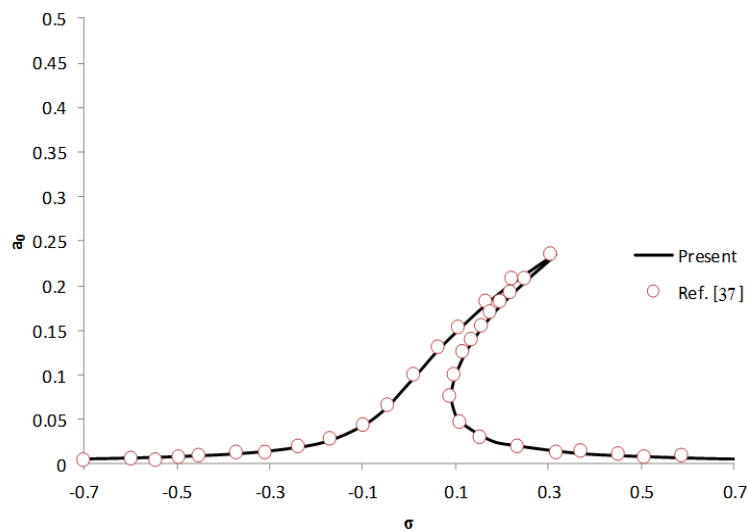
شکل (۵-۱۴) نشان‌دهنده‌ی افزایش فرکانس طبیعی با افزایش کشش لایه‌ی میانی می‌باشد.

۵-۴. بررسی پاسخ فرکانسی

با توجه به رفتار دینامیکی غیرخطی سیستم مورد بررسی، بر اساس معادله (۴-۳۰) مشاهده می‌شود که فرکانس تشدید غیرخطی به ازای مقداری متفاوت با فرکانس تحریک اتفاق می‌افتد. دامنه

ارتعاشات میکروتیر نیز وابسته به پارامترهای طراحی سیستم، تغییر می‌کند. برای دستیابی به پاسخ دینامیکی، با استفاده از معادله (۴-۲۷) به بررسی تغییرات دامنه ارتعاشات غیرخطی بر حسب پارامتر تنظیم σ پرداخته می‌شود.

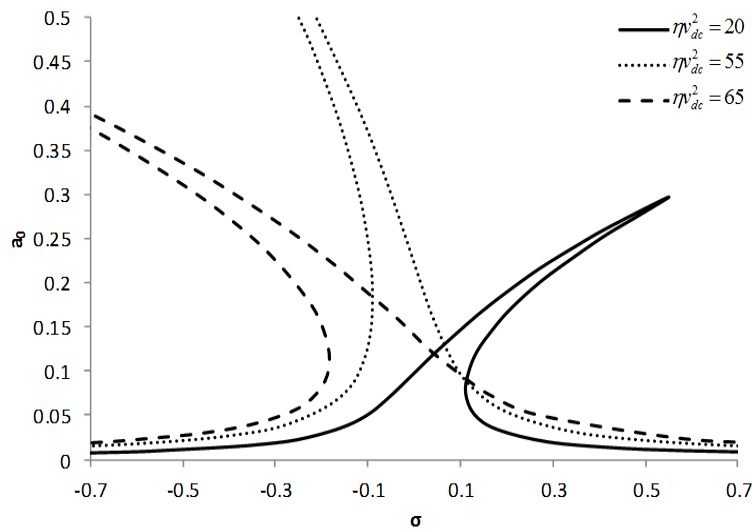
در شکل (۵-۱۵) به اعتبارسنجی و مقایسه‌ی حل دینامیکی غیرخطی انجام شده در این پایان‌نامه، با نتایج بدست آمده از [۳۷] با حذف اثر ویسکوالاستیک برای یک میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول L به ازای $\eta v_{dc}^2 = 20$ پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج، مطابقت خوبی را نشان می‌دهند.



شکل ۵-۱۵. مقایسه نتایج پاسخ دینامیکی برای میکروتیر مورد بررسی با نتایج در [۳۷] در $\eta v_{dc}^2 = 20$

در شکل (۵-۱۶) پاسخ دینامیکی سیستم به ازای سه مقدار مختلف ηv_{dc}^2 رسم شده است. این شکل نشان‌دهنده‌ی تغییرات دامنه ارتعاش سیستم نسبت به تغییرات σ برای مقادیر مختلف ηv_{dc}^2 می‌باشد. از معادله (۴-۳۰) نتیجه‌گیری می‌شود همه‌ی جملات بجز k ، همواره مقادیر مثبت را به خود اختصاص می‌دهند. k معرف جملات غیرخطی هندسی، پیزوالکتریک و الکتروستاتیک بوده و به ازای پارامترهای طراحی مختلف، می‌تواند مقدار مثبت یا منفی شود. با افزایش ولتاژ الکتروستاتیک برای یک میکروتیر که لایه پیزوالکتریک به طول L بر روی آن قرار گرفته است، تنها جمله‌ی غیرخطی الکتروستاتیک در حال تغییر بوده و مشاهده می‌شود که با افزایش ولتاژ الکتروستاتیک از

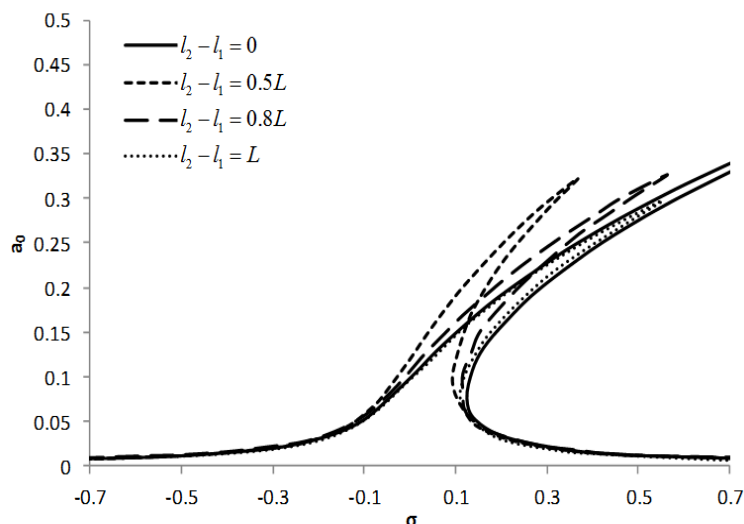
20 به 65، از مقدار مثبت S کاسته می‌شود و بتدریج مقادیر منفی را بخود اختصاص می‌دهد. مطابق با معادله (۴-۳۰) زمانی که $S < 0$ باشد $\frac{\Omega}{\omega}$ کوچکتر از ۱ خواهد بود که نشان می‌دهد فرکانس تشدید ارتعاشات غیرخطی کمتر از فرکانس ارتعاشات خطی سیستم می‌باشد. در نتیجه مقدار $S < 0$ باعث ایجاد رفتار نرم‌شوندگی در پاسخ دینامیکی سیستم غیرخطی می‌شود. در مقابل برای $S > 0$ ، $\frac{\Omega}{\omega}$ بزرگتر از ۱ خواهد بود و سخت‌شوندگی در رفتار سیستم ایجاد می‌شود. از این رو می‌توان به این نتیجه رسید که تحریک الکتروستاتیک باعث رفتار نرم‌شوندگی در سیستم خواهد شد. شکل (۵-۱۶) نشان‌دهنده‌ی افزایش دامنه‌ی a_0 با افزایش مقدار ηv_{dc}^2 می‌شود که علت این امر، افزایش مقدار F در رابطه (۴-۲۲) با افزایش ولتاژ تحریک الکتروستاتیکی می‌باشد که تأثیر بسزایی در تغییر دامنه ارتعاشات سیستم دارد.



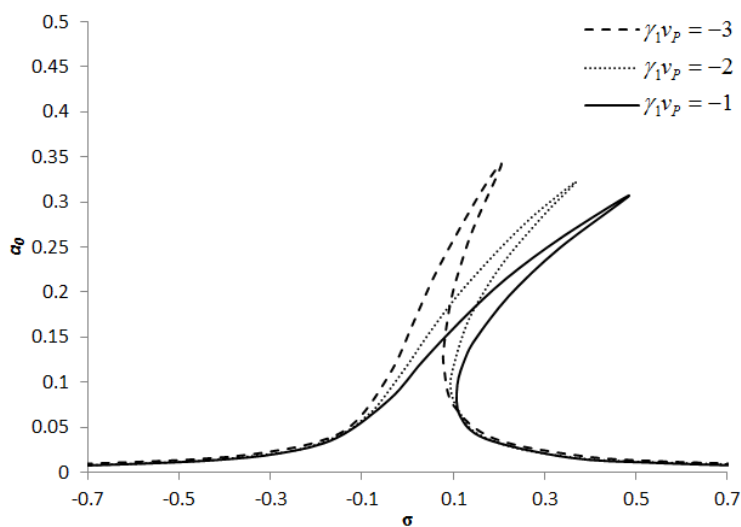
شکل ۵-۱۶. تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ ، برای مقادیر مختلف ηv_{dc}^2

شکل (۵-۱۷) تأثیر طول لایه پیزوالکتریک را بر روی رفتار دینامیکی سیستم نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود برای یک ηv_{dc}^2 مشخص که در اینجا مقدار S مرتبط با آن مثبت بوده و سخت‌شوندگی را در سیستم نشان می‌دهد، با افزایش طول لایه پیزوالکتریک از 0 تا $0.8L$ ، با تغییر اندکی در جملات غیرخطی، دامنه‌ی ارتعاش میکروتیر به مقدار اندکی افزایش می‌یابد. این تغییرات با

افزایش طول لایه پیزوالکتریک از $0.5L$ تا L عکس شده و باعث کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود. این رفتار سیستم بر اساس معادله (۴-۲۹) به دلیل تغییرات فرکانس طبیعی به ازای طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک رخ می‌دهد.



شکل ۵-۱۷. تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر به ازای $\eta v_{dc}^2 = 20$ برای طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک

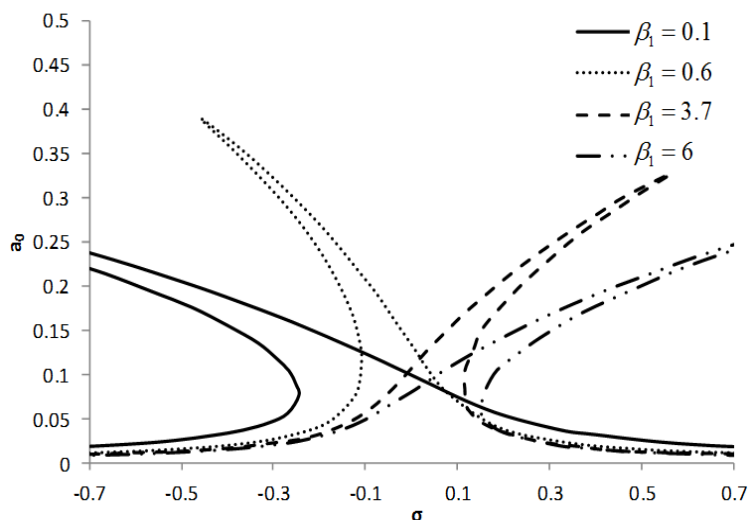


شکل ۵-۱۸. تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.5L$ و به ازای $\eta v_{dc}^2 = 20$ برای $\gamma_1 v_p$ های مختلف

ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک مطابق با شکل (۵-۱۸) رفتار نرم‌شوندگی در سیستم ایجاد می‌کند. با افزایش مقدار ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک که هم‌ارز افزایش قدر مطلق مقدار $\gamma_1 v_p$ می‌باشد، رفتار دینامیکی غیرخطی سیستم به سمت رفتار خطی تغییر می‌کند. تغییرات رفتاری

سیستم به علت تغییر مقادیر جملات S می‌باشد که با افزایش پارامتر S ، از یک مقدار بزرگ مثبت به مقادیر کوچکتر مثبت و بتدریج مقادیر منفی تغییر می‌کند و رفتار نرم‌شوندگی را به سیستم القا می‌کند. مشاهده می‌شود دامنه‌ی ارتعاشات غیرخطی با افزایش قدر مطلق $\gamma_1 v_p$ افزایش می‌یابد که علت آن کاهش مقدار قدر مطلق S می‌باشد.

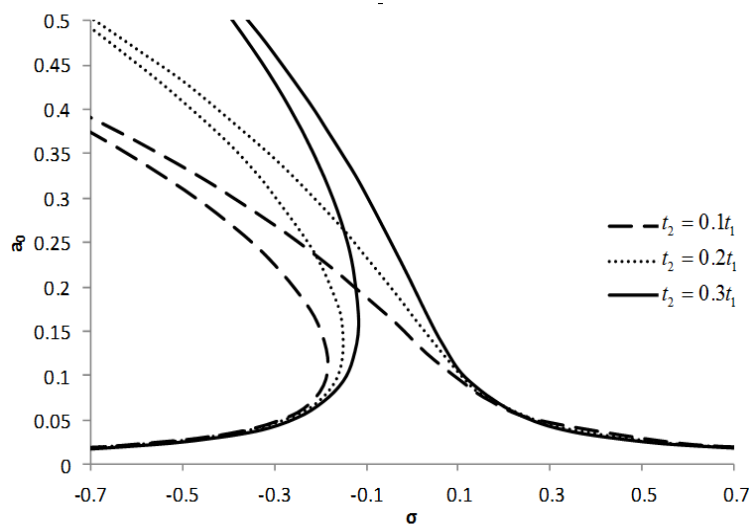
با توجه به این که β_1 معرف جمله غیرخطی هندسی می‌باشد، شکل (۵-۱۹) نشان می‌دهد کشیدگی لایه‌ی میانی تأثیر قابل توجهی بر رفتار دینامیکی سیستم ایجاد می‌کند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش تدریجی β_1 فرکانس تشدید غیرخطی به فرکانس تشدید خطی سیستم و میکروتیر غیرخطی به حالت خطی نزدیک می‌شود. در ادامه با افزایش مقدار β_1 رفتار سیستم سخت‌شونده می‌شود و اختلاف فرکانس تشدید غیرخطی با فرکانس تشدید خطی سیستم زیاد خواهد شد. مطابق با این شکل، افزایش β_1 رفتار سیستم را سخت‌شونده کرده است که علت آن به سمت مثبت میل کردن حاصل جملات غیرخطی یعنی S ، تحت تأثیر جمله‌ی غیرخطی هندسی در معادله (۴-۲۰) می‌باشد.



شکل ۵-۱۹. تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.8L$ و به ازای $\eta v_{dc}^2 = 20$ برای β_1 های مختلف

نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت میکروتیر یک پارامتر کنترلی است که بر روی پاسخ دینامیکی سیستم تأثیر می‌گذارد. همان‌طور که از شکل (۵-۲۰) مشاهده می‌شود، برای یک میکروتیر

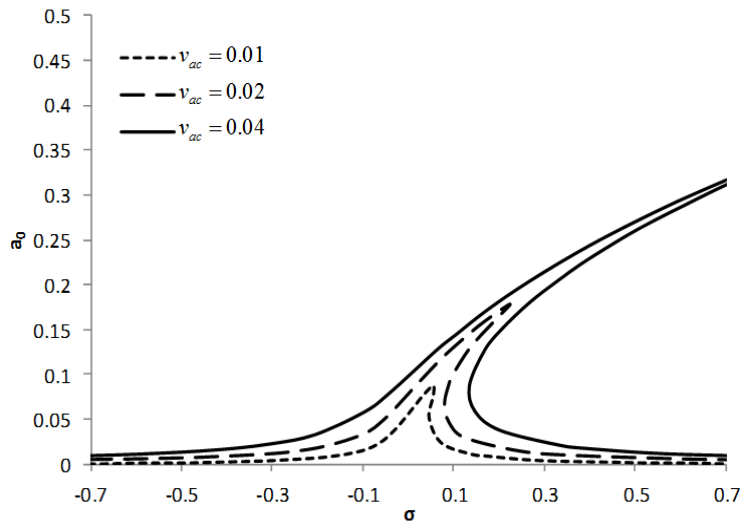
که لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ بر روی آن قرار گرفته است، افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک رفتار سیستم غیرخطی را به سمت سیستم خطی سوق می‌دهد و باعث کاهش فرکانس تشدید غیرخطی و نزدیکی آن به فرکانس تشدید خطی می‌شود. در نتیجه افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک، رفتار سخت‌شوندگی را در سیستم تقویت می‌کند. میکروتیر در ولتاژ الکتروستاتیک $\eta v_{dc}^2 = 65$ به ازای سه ضخامت مختلف مورد بررسی قرار گرفته که تغییرات فرکانسی آن مشاهده می‌شود.



شکل ۵-۲۰. تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ ، به ازای $\eta v_{dc}^2 = 65$ ، برای نسبت ضخامت‌های مختلف لایه پیزوالکتریک به میکروتیر

شکل (۵-۲۱) به بررسی تغییرات ولتاژ هارمونیک AC بر روی رفتار دینامیکی میکروتیر می‌پردازد. برای یک ولتاژ DC ثابت که در اینجا $\eta v_{dc}^2 = 10$ در نظر گرفته شده است، مشاهده می‌شود با کاهش دامنه‌ی ولتاژ تحریک AC، دامنه‌ی ارتعاشات غیرخطی کاهش محسوسی پیدا می‌کند. همچنین می‌توان به این نتیجه دست یافت مقدار ولتاژ AC بر روی رفتار جملات غیرخطی سیستم تأثیری ایجاد نمی‌کند، بلکه با کاهش آن، فرکانس تشدید غیرخطی نیز کاهش یافته و به فرکانس تشدید خطی نزدیک می‌شود.

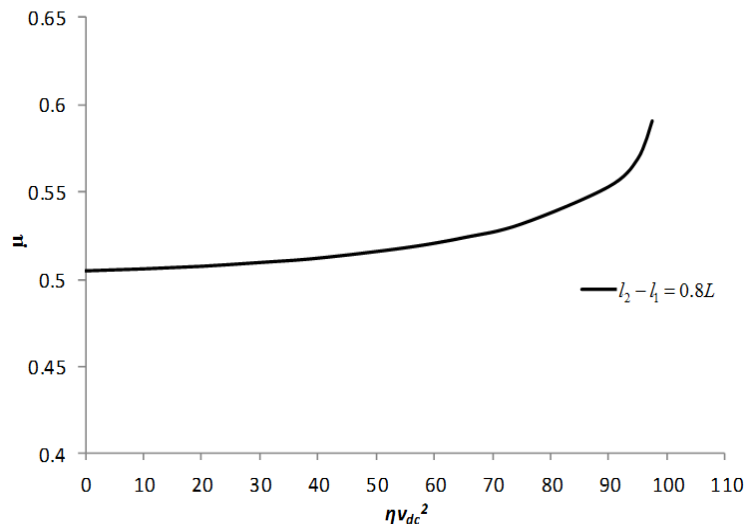
علت کاهش دامنه ارتعاشات غیرخطی، تأثیر مستقیم ولتاژ تحریک AC می‌باشد که مطابق با معادلات (۴-۲۲) و (۴-۲۷) کاهش ولتاژ تحریک AC منجر به کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود.



شکل ۵-۲۱. تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = L$ و به ازای $\eta v_{dc}^2 = 10$ برای مقادیر مختلف ولتاژ هارمونیک v_{ac}

۵-۵. بررسی میرایی

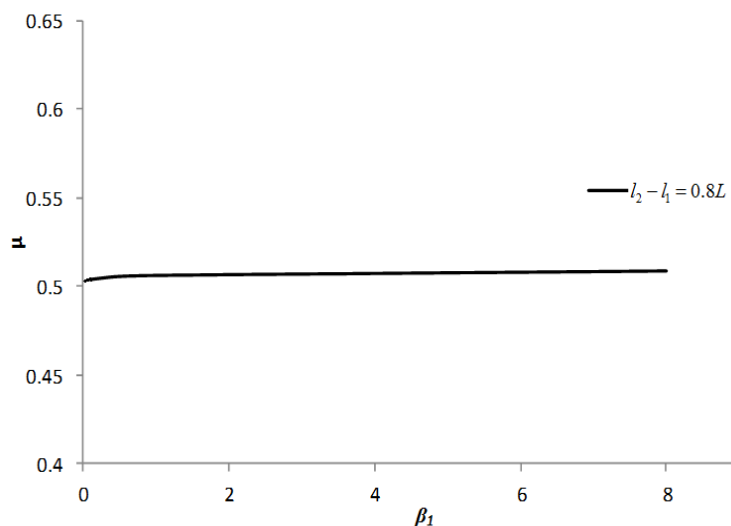
با توجه به ساختار ویسکوالاستیک سیستم، رفتار دینامیکی و تغییرات میرایی نسبت به پارامترهای مختلف سیستم طراحی شده، قابل بررسی بوده و می‌توان به ضعف و شدت اهمیت پارامترهای مختلف بر روی میرایی میکروتیر، آگاهی کسب نمود.



شکل ۵-۲۲. تغییرات مقدار میرایی ویسکوالاستیک نسبت به تغییرات ηv_{dc}^2 به ازای برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.8L$ به ازای $C = 0.001$

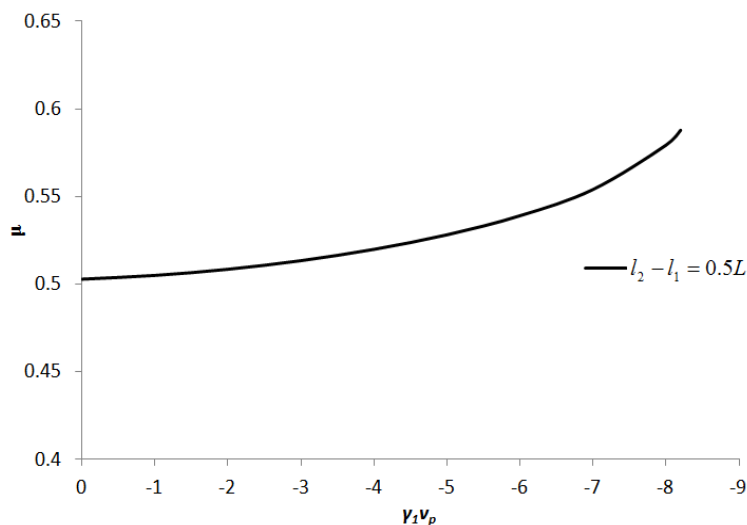
شکل (۵-۲۲) مقدار دمپینگ میکروتیر را برای مقادیر ηv_{dc}^2 مختلف نشان می‌دهد. مشاهده

می‌شود در نزدیکی ولتاژ پولین، میرایی میکروتیر افزایش قابل توجهی نسبت به سایر مقادیر ولتاژ الکتروستاتیک داشته است. در شکل (۲۳-۵) تأثیر کشش لایه‌ی میانی بر روی میرایی میکروتیر بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، β_1 تأثیری بر میرایی سیستم نداشته و تغییرات آن در رفتار μ تغییری ایجاد نمی‌کند.

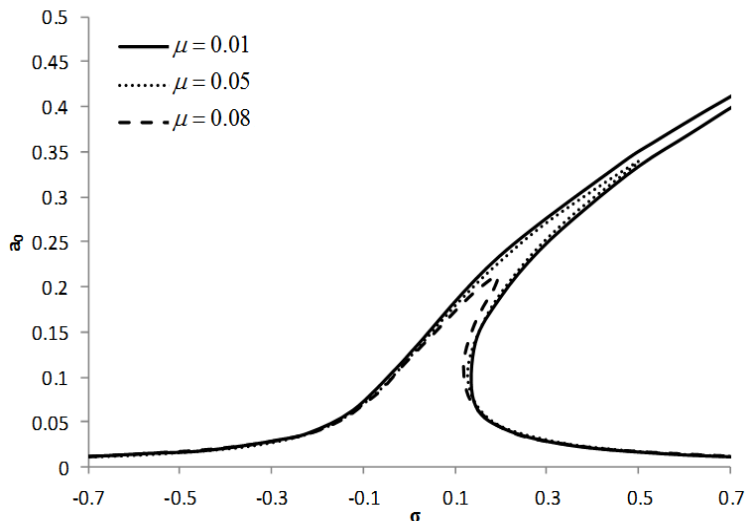


شکل ۲۳-۵. تغییرات مقدار میرایی ویسکوالاستیک نسبت به تغییرات β_1 در $\eta v_{dc}^2 = 20$ به ازای $C = 0.001$

شکل (۲۴-۵) به بررسی تأثیر ولتاژ لایه پیزوالکتریک روی میرایی می‌پردازد. مشاهده می‌شود، افزایش قدر مطلق $\gamma_1 v_p$ باعث افزایش میرایی سیستم می‌شود. این رفتار به علت افزایش تغییر شکل استاتیکی و کاهش فرکانس طبیعی به ازای افزایش مقادیر $\gamma_1 v_p$ ایجاد شده است.



شکل ۲۴-۵. تغییرات مقدار میرایی ویسکوالاستیک نسبت به تغییرات γ_1 در $\eta v_{dc}^2 = 20$ به ازای $C = 0.001$

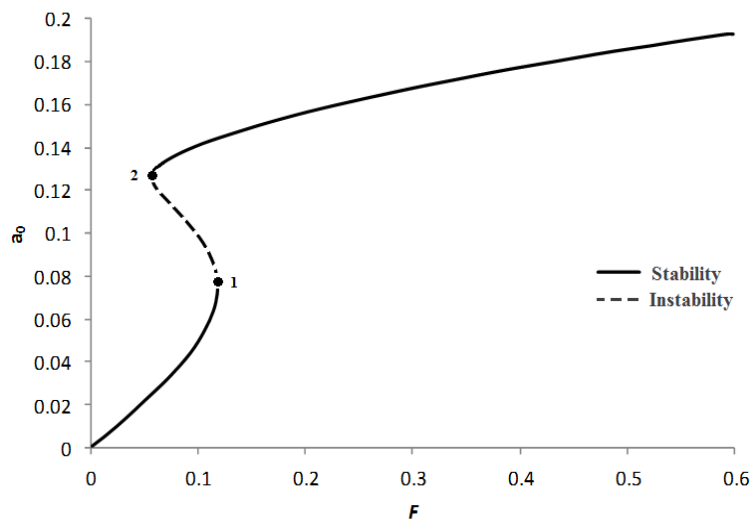


شکل ۵-۲۵. تغییرات a_0 نسبت به تغییرات σ برای میکروتیر با لایه پیزوالکتریک به طول $l_2 - l_1 = 0.8L$ و به ازای $\eta v_{dc}^2 = 30$ برای مقادیر مختلف μ

شکل (۵-۲۵) تغییرات دامنه ارتعاشات میکروتیر را نسبت به تغییرات σ به ازای مقادیر مختلف میرایی نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مطابق با معادله (۴-۲۷) افزایش میرایی باعث کاهش ماکزیمم ارتعاشات دینامیکی می‌شود.

۶-۵. بررسی پایداری

شکل (۵-۲۶) منحنی تغییرات a_0 بر حسب F را به ازای پارامترهای $\mu = 0.04$ ، $S = 145$ و $\sigma = 0.1$ نمایش می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود به ازای بعضی مقادیر F ، سه مقدار مختلف برای a_0 بدست می‌آید. تا هنگامی که $F < F_1$ ، پاسخ سیستم بر روی شاخه پایینی قرار می‌گیرد. با افزایش مقدار F تا رسیدن به F_1 ، مقدار دامنه ارتعاشات پیوسته افزایش می‌یابد. با افزایش بیشتر F از این مقدار، دامنه‌ی پاسخ روی شاخه بالایی جهش پیدا می‌کند. در این حالت با کاهش مقدار F تا زمانی که $F = F_2$ دامنه‌ی ارتعاش پاسخ، مرتب کاهش می‌یابد. با کاهش بیشتر F از F_2 پاسخ سیستم مجدداً بر روی شاخه پایینی جهش پیدا می‌کند. این شکل نشان‌دهنده‌ی ناپایداری شاخه‌ی میانی می‌باشد. مطابق با این شکل، مقدار $\frac{dF}{da_0}$ برای نقاط ۱ و ۲ برابر صفر می‌باشد.



شکل ۵-۲۶. بررسی پایداری سیستم به ازای نمودار تغییرات F بر حسب a_0

فصل ۶

نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادها

۶-۱. مقدمه

در این فصل به نتیجه‌گیری از فصل‌های قبلی و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله طول و ضخامت لایه پیزوالکتریک و جملات غیرخطی هندسی، تحریک پیزوالکتریک و الکتروستاتیک بر روی تغییر شکل استاتیکی، فرکانس طبیعی، ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی یک سیستم میکروالکترومکانیکی پرداخته می‌شود.

۶-۲. نتیجه‌گیری‌ها

- ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی میکروتیر در سیستم مورد بررسی در وسط آن اتفاق می‌افتد.
- با در نظر گرفتن روش‌های گالرکین و مقیاس‌های چندگانه با تقریب دو شکل مود متقارن اول، مطابقت خوبی با نتایج بدست آمده در قبل حاصل شد.
- مهمترین مسأله در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی الکتروستاتیکی، ولتاژ پولین می‌باشد. با استفاده از به کار بردن لایه پیزوالکتریک با طول، ضخامت و ولتاژ مناسب، می‌توان ولتاژ پولین را کنترل کرد.
- با انتخاب ولتاژ تحریک الکتروستاتیک مناسب، می‌توان از ناپایداری قطعی سیستم جلوگیری کرد.
- تغییر طول لایه پیزوالکتریک تأثیر قابل توجه و متفاوتی بر رفتار استاتیکی، فرکانس طبیعی و پاسخ دینامیکی ایجاد می‌کند.
- کشش لایه میانی، از جمله جملات غیرخطی می‌باشد که بر روی رفتار استاتیکی و دینامیکی سیستم تأثیر فراوانی می‌گذارد، در نتیجه در طراحی سیستم باید توجه

خاصی به آن شود. این در حالی است که کشش لایه‌ی میانی تغییری در میرایی سیستم ایجاد نخواهد کرد.

- به منظور کاهش دامنه‌ی ارتعاشات میکروتیر، انتخاب دامنه‌ی تحریک کوچک ولتاژ AC نقش به‌سزایی خواهد داشت.
- در بین جملات غیرخطی، ولتاژ تحریک الکتروستاتیک و پیزوالکتریک رفتار نرم‌شوندگی و کشش لایه‌ی میانی رفتار سخت‌شوندگی در پاسخ دینامیکی سیستم ایجاد می‌کنند.
- با انتخاب مناسب پارامترهای طراحی، می‌توان تأثیر جملات غیرخطی را با تغییر رفتار غیرخطی به رفتار خطی و نزدیکی فرکانس تشدید غیرخطی به فرکانس تشدید خطی کنترل کرد.
- در ولتاژ تحریک الکتروستاتیک و پیزوالکتریک بالاتر، در میرایی ساختاری سیستم، افزایش قابل توجهی ایجاد می‌شود.

۶-۳. پیشنهادها

برای مطالعه جامع‌تر مسأله، بررسی موارد زیر پیشنهاد می‌شود:

۱- استفاده از تئوری تیموشینکو با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی در

استخراج معادلات حرکت

۲- استفاده از مدل ماکسول یا زرنر در معادلات برای ساختار ویسکو الاستیک ماده

۳- در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف از جمله گیردار-کشویی برای میکروتیر

- [1]-M. H. Ghayesh, M. Amabili, H. Farokhi, (2013), "Nonlinear forced vibrations of a microbeam based on the strain gradient elasticity theory", **Int. J. of Engineering science**, Vol. 63, pp-52-60.
- [2]-S. N. Mahmoodi, (2007), PhD. thesis, "Nonlinear vibration and frequency response analysis of nanomechanical cantilever beams", **Mechanical Engineering Department, Clemson University**.
- [3]-S. N. Mahmoodi, N. Jalili, (2007), "Non-linear vibrations and frequency response analysis of piezoelectrically driven microcantilevers", **Int. J. of Non-linear Mechanics**, Vol. 42, pp-577-587.
- [4]-Y. Tseng, J. Chang, S. Lin, Sh. D. Chao, C. Liu, (2012), "3,4-Methylenedioxymethylamphetamine detection using a microcantilever-based biosensor", **Sensor and actuator A: Physical**, vol. 182, pp-163-167.
- [5]-J. A. Capobianco, W. Y. Shih, G. P. Adams, W Shih, (2011), "Label-free Her2 detection and dissociation constant assessment in diluted human serum using a longitudinal extension mode of a piezoelectric microcantilever sensor", **sensor and actuator B: Chemical**, Vol. 160, pp-349-356.
- [6]-Z. H. Yong, P. H. Qing, Z. B. Lin, T. J. Lin, (2012), "Microcantilever Sensors for Chemical and Biological Applications in Liquid", **Chinese Journal Of Analytical Chemistry**, Vol. 40(5), pp-801-808.
- [7]-M. L. F. Lerch, M. Petasecca, A. Cullen, A. Hamad, H. Requardt, E. B. Krisch, A. Bravin, V. L. Perevertaylo, A. B. Rosenfeld, (2011), "Dosimetry of intensive synchrotron microbeams", **Radiation Measurements**, Vol. 46, pp-1560-1565.
- [8]-G. Rezazadeh, A. Tahmasebi, M. Zubstov, (2006), "Application of piezoelectric layers in electrostatic MEM actuators: controlling of pull-in voltage", **Microsyst. Technol.**, Vol. 12, pp-1163-1170.
- [9]-J. W. L. Zhou, (2004) "Polymer MEMS actuators for underwater micromanipulators", **Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on**, Vol. 9, pp-334-342.
- [10]-H. Rokni, R. J. Seethaler, A. S. Milani, S. Hosseini-Hashemi, X. F. Li, (2013), "Analytical closed-form solutions for size-dependent static pull-in behavior in electrostatic micro-actuators via Fredholm integral equation", **Sensors and Actuators A: Physical**, Vol. 190, pp-32-43.
- [11]-B. Ashrafi, P. Hubert, S. Vengallatore, (2006), "Carbon nanotube-reinforced composites as structural materials for microactuators in microelectromechanical systems", **Nanotechnology**, Vol. 17, pp-4895-4903.
- [12]-S. D. Senturia, (2001), "**Microsystem Design**", Norwell, MA: Kluwer-Academic.
- [13]-A. Kelarakis, K. Yoon, R. Soani, I. Sics, X. Chen, B. S. Hsiao, B. Chu, (2006), "Relationship between structure and dynamic mechanical properties of a carbon nanofiber reinforced elastomeric nanocomposite", **Polymer**, Vol. 47, pp-6797-6807.
- [14]-S. Iijima, (1991), "**Nature**" pp-354-356.
- [15]-K. T. Lau, C. Gu, D. Hui, (2006), "A Critical Review on Nanotube and Nanotube/Nanoclay Related Polymer Composite Materials", **Composite Part B: Engineering**, Vol. 37, pp-425-436.
- [16]-H. G. Craighead, (2000), "Nanoelectromechanical system", **Science**, Vol. 290, pp-1532-1535.

- [17]-A. Hosseinzadeh, M. T. Ahmadian, (2010), "Application of Piezoelectric and Functionally Graded Materials in Designing Electrostatically Actuated Micro Switches", **Journal of Solid Mechanics**, Vol. 2, No. 2, pp-179-189.
- [18]-A. Preumont, (1997), "**Vibration Control of Active Structure**", Kluwer Academic Publishers.
- [19]-D. J. Ijntema, H. A. Tilmans, (1992), "Static and dynamic aspects of an air-gap capacitor", **Sensors Actuators A**, Vol. 35, pp-121-128.
- [20]-F. Ayla, T. Fournier, (1998), "An experimental study of anharmonic micromachined silicon resonators", **Measurement, Science and Technology**, Vol. 9, pp-1821-1830.
- [21]-M. Mojahedi, M. T. Ahmadian, K. Firoozbaksh, (2014), "The influence of the intermolecular surface forces on the static deflection and pull-in instability of the micro/nano cantilever gyroscopes", **Composites:Part B**, Vol. 56, pp-336-343.
- [22]-Y. G. Wang, W. H. Lin, Z. J. Feng, X. M. Li, (2012), "Characterization of extensional multi-layer microbeams in pull-in phenomenon and vibrations", **Int J of Mechanical Sciences**, Vol. 54, pp-225-233.
- [23]-Zh. B. Shen, X. F. Li, L. P. Sheng, G. J. Tang, (2012), "Transverse vibration of nanotube-based micro-mass sensor via nonlocal Timoshenko beam theory", **Computational Materials Science**, Vol. 53, pp- 340,346.
- [24]-X. L. Jia, J. Yang, S. Kitipornchai, C. W. Lim, (2012), "Resonance frequency response of geometrically nonlinear micro-switches under electrical actuation", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 331, pp-3397-3411.
- [25]-E. M. Abdel-Rahman, M. L. Younis, A. H. Nayfeh, (2002), "Characterization of the mechanical behavior of an electrically actuated microbeam", **J. Micromech. Microeng.**, Vol. 12, pp-759-766.
- [26]-M. I. Younis, A. H. Nayfeh, (2003), "A study of the Nonlinear Response of a Resonant Microbeam to an Electric Actuation", **Nonlinear Dynamics**, Vol. 31, pp-91-117.
- [27]-H. M. Ouakad, M. I. Younis, (2011), "Natural frequencies and mode shapes of initially curved carbon nanotube resonators under electric excitation", **Journal of Sound and vibration**, Vol. 330, pp-3182-3195.
- [28]-M. Dadfarnia, N. Jalili, B. Xian, D. Dawson, (2004), "A Lyapunov-Based Piezoelectric Controller for Flexible Cartesian Robot Manipulators", **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and control**, Vol. 126, pp-347-358.
- [29]-W. H. Chu, M. Mehregany, R. L. Mullen, (1993), "Analysis of tip deflection and force of a bimetallic cantilever microactuator", **J. Micromech. Microeng.**, Vol. 3, pp-4-7.
- [30]-M. R. Ghazavi, G. Rezazadeh, S. Azizi, (2010), "Pure parametric excitation of a micro cantilever beam actuated by piezoelectric layers", **Applied Mathematical Modelling**, Vol. 34, 4196-4207.
- [31]-S. N. Mahmoodi, M. Afshari, N. Jalili, (2008), "Nonlinear vibrations of piezoelectric microcantilevers for biologically-induced surface stress sensing", **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Vol. 13, pp-1964-1977.
- [32]-G. Rezazadeh, M. Fathalilou, R. Shabani, (2009), "Static and dynamic stabilities of a microbeam actuated by a piezoelectric voltage", **Microsyst. Technol.** Vol. 15, pp-1785-1791.

- [33]-G. Pizza, R. Abdolvand, F. Ayazi, (2004), "Voltage-tunable piezoelectrically transduced single-crystal silicon micromechanical resonators", **Sensors and Actuators A**, Vol. 111, pp-71-78.
- [34]-C. Chen, H. Hu, L. Dai, (2013), "Nonlinear behavior and characterization of a piezoelectric laminated microbeam system", **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, Vol. 18, pp-1304-1315.
- [35]-C. Chen, S. Li, L. Dai, C. Qian, (2013), "Buckling and Stability Analysis of a Piezoelectric Viscoelastic Nanobeam Subjected to Van Der Waals Forces", **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**
- [36]-H. Raeisifard, M. N. Bahrami, A. Yousefi, H. Raeisifard, (2014), "Static characterization and pull-in voltage of a micro-switch under both electrostatic and piezoelectric excitations", **European Journal of Mechanics / A Solids**, Vol. 44, pp-116-124.
- [37]-M. Zamanian, S. E. Khadem, (2010), "Nonlinear vibration of an electrically actuated microresonator tuned by combined DC piezoelectric and electric actuations", **Smart Mater. Struct.**, Vol. 19, (12pp).
- [38]-I. Dufour, F. Lochon, S. M. Heinrich, F. Josse, (2007), "Effect of Coating Viscoelasticity on Quality Factor and Limit of Detection of Microcantilever Chemical Sensors", **IEEE sensor Journal**, Vol. 7, 230-236.
- [39]-G. Dubourg, I. Dufour, C. Pellet, C. Ayla, (2012), "Optimization of the performances of SU-8 organic microcantilever resonators by tuning the viscoelastic properties of the polymer", **Sensors and Actuators B**, Vol. 169, pp-320-326.
- [40]-M. Uncuer, Br. Marinkovic, H. Koser, (2007), "Simulation of Clamped-Free and Clamped-Clamped Microbeams Dynamics for Nonlinear Mechanical Switch Applications", **Proceedings of the COMSOL Conference**, Boston.
- [41]-M. J. Wenzel, F. Josse, S. M. Heinrich, (2009), "Deflection of a viscoelastic cantilever under a uniform surface stress: Applications to Static-mode microcantilever sensors undergoing adsorption", **J. Appl. Phys.**, Vol. 105.
- [42]-Y. Fu, J. Zhang, (2009), "Active control of the nonlinear static and dynamic responses for piezoelectric viscoelastic microplates", **Smart Mater. Struct.**, Vol. 18, (9pp).
- [43]-Y. M. Fu, J. Zhang, R. G. Bi, (2009), "Analysis of the nonlinear dynamic stability for an electrically actuated viscoelastic microbeam", **Microsyst Technol.**, Vol. 15, pp-763-769.
- [44]-A. Jalali, S. E. Khadem, (2010), "Pull-In Analysis of a Nonlinear Viscoelastic Nanocomposite Microplate Under an Electrostatic Actuation", **Journal of Mechanics**, Vol. 28, pp-179-189.
- [45]-M. Zamanian, S. E. Khadem, S. N. Mahmoodi, (2010), "Nonlinear response of a resonant viscoelastic microbeam under an electrical actuation", **Structure Engineering and Mechanics**, Vol. 35, No. 4, pp-387-407.
- [46]-W. Zhang, G. Meng, (2005), "Nonlinear dynamical system of micro-cantilever under combined parametric and forcing excitations in MEMS", **Sensors and Actuators. A**, Vol. 119, pp-291-299.
- [47]-B. Pratiher, (2012), "Tuning the Nonlinear Behavior of Resonant MEMS Sensors Actuated Electrically", **Procedia Engineering**, Vol. 47, pp-9-12.
- [48]-B. Choi, E. G. Lovell, (1997), "Improved analysis of microbeams under mechanical and electrostatic loads", **J. Micromech. Microeng.**, Vol. 7, pp-24-29.

- [49]-G. Rezazadeh, H. Sadeghian, E. Abbaspour, (2007), "A comprehensive model to study nonlinear behavior of multilayered micro beam switches", **Microsyst. Technol.**, Vol. 14, pp-135-141
- [50]-M. Mojahedi, M. Moghimi Zand, M. T. Ahmadian, (2010), "Static pull-in analysis of electrostatically actuated microbeams using homotopy perturbation method", **Applied Mathematical Modelling**, Vol. 34, pp-1032-1041.
- [51]-M. I. Younis, E. M. Abdel-Rahman, A. H. Nayfeh, (2003), "A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS", **Journal of microelectromechanical system**, Vol. 12, pp-672-680
- [52]-A. H. Nayfeh, M. I. Younis, (2005), "Dynamics of MEMS resonators under superharmonic and subharmonic excitations", **J. Micromech. Microeng.**, Vol. 15, pp-1840-1847
- [53]-Y. Zhang, Y. P. Zhao, (2006), "Numerical and analytical study on the pull-in instability of micro-structure under electrostatic loading", **Sensors and Actuators A: Physical**, Vol.127, pp-366–380
- [54]-M. Baghani, (2012), "Analytical study on size-dependent static pull-in voltage of microcantilevers using the modified couple stress theory", **International Journal of Engineering Science**, Vol. 54, pp-99-105
- [55]-G. Rezazadeh, H. Madinei, R. Shabani, (2012), "Study of parametric oscillation of an electrostatically actuated microbeam using variational iteration method", **Applied Mathematical Modelling**, Vol. 36, pp-430-446
- [56]-M. Zamanian, S. E. Khadem, (2010), "Analysis of deflection, natural frequency and damping of microactuators reinforced by SWCNT under electric actuation", **Physica E**, Vol. 43, pp-487-493.
- [57]-Ö. Civalek, B. Akgöz, (2013), "Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli-Euler microbeams based on the modified couple stress theory", **Composite Structures**, Vol. 98, pp-314-322.
- [58]-P. Kim, S. Bae, J. Seok, (2012), "Resonant behaviors of a nonlinear cantilever beam with tip mass subject to an axial force and electrostatic excitation", **International Journal of Mechanical Sciences**, Vol. 64, pp-232-257
- [59]-B. S. Wu, Y. P. Yu, Z. G. Li, Z. H. Xu, (2013), "An analytical approximation method for predicting static responses of electrostatically actuated microbeams", **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Vol. 54, pp-99-104.
- [60]-A. H. Nayfeh, P. F. Pai, (2004), "**Linear and nonlinear structural mechanics**", New York: John Wiley & Sons.
- [61]-M. I. Younis, (2011), "**MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics**", New York: Springer, pp-276.
- [62]- J.N. Coleman, U. Khan, W.J. Blau, Y.K. Gunko, (2006), **Carbon** 44, 1624.
- [63]-M. Zamanian, S. E. Khadem, (2008), "The effect of a piezoelectric layer on the mechanical behavior of an electrostatic actuated microbeam", **Smart Mater. Struct.**, Vol. 17, (15pp).

Abstract:

In this thesis, the static and dynamic response of a clamped-clamped nanocomposite microbeam under combined electrostatic and piezoelectric actuations is analyzed. To deriving equations of motion are used the Euler-Bernoulli beam theory and Kelvin-Voigt model due to viscoelastic structure of microbeam.

The nonlinear model for the system is studied by considering stretch of mid-plane, a harmonic force and the piezoelectric effect. Then the *AC* electrostatic force, an *DC* between the upper and v_p voltage equal to *DC* piezoelectric actuation is applied with lower sides of the piezoelectric layer. After that the equation of motion has been derived by using the Hamilton principle, then for static deflection and natural frequency Galerkin method is used. The dynamic response of the system was obtained using the Galerkin method and the multiple scale perturbation method.

In this paper, the effect of the design parameters on the static and dynamic response is discussed and a softening or hardening behavior has been obtained. Also the effect of structure damping on static and dynamic behavior is investigated.

Key words: nanocomposite microbeam, multiple scale method, viscoelastic, piezoelectric layer, electrostatic.



Shahrood University of Technology

Department of Mechanic Engineering

**Vibration Analysis of a microrobot nanocomposite arm
covered by a piezoelectric patch under electrostatic actuation,
considering stretching effects**

Farideh chitsaz Yazdi

Supervisor:
Dr. Amir Jalali

Feb 2014