





دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : تبدیل انرژی

مطالعه عددی جهت کنترل ناپایداری انگشتی لزج در

سیالات غیرنیوتنی

دانشجو : محمد رضا شوقی

استاد راهنما : دکتر محمود نوروزی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود



دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خاتم / آقای محمدرضا شوقی رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی تحت عنوان مطالعه عددی جهت کنترل ناپایداری انگشتی لوزج در سیالات غیرنیوتنی که در تاریخ ۹۴/۱۱/۲۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : عالی - امتیاز ۱۹٫۵) ☒ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹)

۱- عالی (۱۹ - ۲۰)

۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	محمود نوروزی	استادیار	
۲- اسناد مشاور			
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	علی عباس نژاد	استادیار	
۴- استاد امتحن	پوریا اکبرزاده	استادیار	
۵- استاد امتحن	محسن نظری	استادیار	

امضاء
شاهرود

رئیس دانشکده : آقای دکتر محمد محسن شاه مردان

تقديم به:

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

از خداوند متعال سپاسگزارم که توفیق کسب علم و دانش را به من عطا فرمود تا بتوانم این مرحله از علم آموزی را با موفقیت به پایان برسانم. از خانواده عزیزم به خاطر محبت‌های بی‌دریغ که نسبت به من داشته و دارند، کمال تشکر و سپاس را دارم. از استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر محمود نوروزی به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان در کلیه مراحل انجام پایان‌نامه تقدیر و تشکر می‌نمایم.

در انتها از تمامی اساتید محترم دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود که توفیق شاگردیشان را داشتم، سپاس‌گزاری نموده و از خداوند منان آرزوی سلامت و توفیق روزافزون برایشان دارم.

محمد رضا شوقی

بهمن ۱۳۹۲

دانشجو تأیید می‌نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد .

بهمن ۱۳۹۲

تعهد نامه

اینجانب محمد رضا شوقی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته تبدیل انرژی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مطالعه عددی جهت کنترل ناپایداری انگشتی لزج در سیالات غیرنیوتنی تحت راهنمایی دکتر محمود نوروزی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

چکیده

ناپایداری انگشتی لزج یکی از انواع ناپایداری هاست که در سطح مشترک دو سیال که با یکدیگر اختلاف ویسکوزیته دارند، رخ می‌دهد. رشد و شکل‌گیری این انگشتی‌ها نقشی بسیار مهم در فرآیند جابجایی سیالات، به خصوص انتقال نفت از مخازن کشف شده دارد. عمده تحقیقات پیشین متوجه بررسی ناپایداری انگشتی میان دو سیال نیوتنی و یا ترکیبی از سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی بوده است. هدف اصلی از پژوهش حاضر بررسی این ناپایداری در جریان‌هایی مخلوط شدنی از سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی در محیط متخلخلی با خواص ناهمسانگرد و بررسی تاثیرات این ناهمسانگردی بر ناپایداری انگشتی لزج می‌باشد.

در این مطالعه، به منظور بررسی رفتار غیرنیوتنی سیال، از مدل کاریو-یاسودا که مطابقت خوبی با پلیمرهای بکار رفته در صنایع و علوم آزمایشگاهی دارد، استفاده می‌کنیم. در این مدل از دو پارامتر بی‌بعد D_e و n برای بیان رفتار رئولوژیکی سیال استفاده می‌شود. سه نوع جریان در این مطالعه مورد بررسی قرار می‌گیرند که ترکیبی از جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی می‌باشند. این جابجایی‌ها درون محیط متخلخلی با نفوذپذیری و پراکندگی ناهمسانگرد مطالعه می‌شوند و تاثیرات این ناهمسانگردی بر پیدایش و رشد انگشتی‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش تحلیل پایداری خطی با استفاده از تقریب شبه خطی و روش شوتینگ، نرخ رشد اغتشاشات را در طول موج‌های مختلف بر حسب پارامترهای موجود در مسأله مانند نسبت ناهمسانگردی‌ها و پارامترهای موجود در مدل غیرنیوتنی بررسی می‌کنیم. در بخش شبیه‌سازی غیرخطی نیز با استفاده از روش پدقت طیفی و بکارگیری تبدیل سریع هارتلی، این ناپایداری را در بازه‌های زمانی متفاوت شبیه‌سازی کرده و مکانیزم‌های مختلف رشد انگشتی‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطالعه‌ای نیز در زمینه منحنی‌های میانگین غلظت عرضی، طول اختلاط و بازده جاروبی که به فهم بیشتر این ناپایداری کمک می‌کنند، انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: ناپایداری انگشتی لزج، غیرنیوتنی، کاریو-یاسودا، تحلیل پایداری خطی،

تبدیل هارتلی، مکانیزم‌های پیشرفت انگشتی

فهرست مطالب

۱- فصل اول..... ۱

۱-۱ مقدمه..... ۲

۲-۱ سلول هل - شاو..... ۷

۳-۱ مکانیزم ناپایداری انگشتی لزج..... ۹

۴-۱ تاریخچه..... ۱۰

۱-۴-۱ تحلیل پایداری خطی..... ۱۰

۲-۴-۱ شبیه سازی غیرخطی..... ۱۴

۳-۴-۱ مطالعات آزمایشگاهی..... ۱۹

۵-۱ معرفی مطالعه حاضر..... ۲۵

۶-۱ طرح کلی مطالعه..... ۲۷

۲- فصل دوم:..... ۲۹

۱-۲ مقدمه..... ۳۰

۲-۲ فرمول بندی مسأله..... ۳۰

۳-۲ سیالات نیوتنی..... ۳۴

۱-۳-۲ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال نیوتنی..... ۳۵

۲-۳-۲ شرایط مرزی و اولیه..... ۳۶

۳-۳-۲ بی بعد سازی..... ۳۷

۴-۳-۲ تبدیل معادلات به فرم تابع جریان - ورتیسیتی..... ۳۹

۴-۲ سیالات غیرنیوتنی	۴۱
۱-۴-۲ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی	۴۴
۲-۴-۲ جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی	۴۶
۵-۲ جابجایی در محیط متخلخل با خواص ناهمسانگرد	۴۷
۱-۵-۲ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال نیوتنی	۵۲
۲-۵-۲ جابجایی سیالات غیرنیوتنی	۵۳
۶-۲ خلاصه معادلات	۵۴

۳- فصل سوم: ۵۷

۱-۳ مقدمه	۵۸
۲-۳ تحلیل پایداری خطی	۵۸
۳-۳ جابجایی نیوتنی	۶۰
۴-۳ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی	۶۳
۵-۳ جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی	۶۳
۶-۳ جابجایی در محیط متخلخل با خواص ناهمسانگرد	۶۴
۷-۳ حل عددی معادلات	۶۶
۸-۳ نتایج	۶۷
۱-۸-۳ جابجایی سیالات نیوتنی	۶۸
۲-۸-۳ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی	۷۰
۳-۸-۳ جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی	۷۲
۹-۳ جابجایی جریان سیالات در محیط متخلخل با خواص ناهمسانگرد	۷۴
۱۰-۳ خلاصه	۷۷

۴- فصل چهارم: ۷۹

۸۰	۱-۴ مقدمه
۸۰	۲-۴ آشنایی با روش طیفی
۸۲	۱-۲-۴ مقایسه با روش المان محدود
۸۴	۲-۲-۴ مقایسه با روش تفاضل محدود
۸۴	۳-۴ روش حل عددی
۸۴	۱-۳-۴ تبدیل هارتلی
۸۶	۲-۳-۴ اصلاح شرایط مرزی و اولیه
۸۸	۳-۳-۴ چگونگی مراحل شبیه‌سازی
۹۱	۴-۴ شرایط همگرایی

۵- فصل پنجم: ۹۳

۹۴	۱-۵ مقدمه
۹۵	۲-۵ میانگین غلظت عرضی
۹۸	۳-۵ طول اختلاط
۱۰۵	۴-۵ کانتورهای غلظت
۱۰۵	۱-۴-۵ جابجایی‌های سیالات نیوتنی
۱۱۱	۲-۴-۵ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی

۳-۴-۵ جابجایی جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی در محیط متخلخلی با خواص

ناهمسانگرد ۱۱۳

۱۱۶	۵-۵ بازده جاروبی
-----	------------------------

۶- فصل ششم: ۱۲۱

۱۲۲	۱-۶ نتایج
۱۲۲	۱-۱-۶ تحلیل پایداری خطی

۱۲۳ ۲-۱-۶ شبیه سازی غیر خطی

۱۲۴ ۲-۶ پیشنهادات

۱۱۹ مراجع

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱: تصویر (الف) ناپایداری انگشتی لزج و تصویر (ب) ناپایداری رایلی-تیلور ۲
- شکل ۲-۱: ناپایداری انگشتی بوجود آمده در کروماتوگرافی ستونی ۴
- شکل ۳-۱: تصویری شماتیک از یک سلول Hele-Shaw ۸
- شکل ۴-۱: نتایج گزارش شده از شبیه‌سازی غیرخطی تن و هومسی با استفاده از روش طیفی ۱۶
- شکل ۵-۱: ناپایداری انگشتی با لگاریتم نسبت تحرک (الف)- مثبت و (ب)- منفی ۱۹
- شکل ۶-۱: الف- سیستم آزمایشگاهی بکار رفته توسط سقیر و همکاران [۴۶]. ب- فریم‌هایی از نتایج بدست آمده آن‌ها ۲۱
- شکل ۷-۱: یک نمونه از سیستم آزمایشگاهی بکار رفته در بررسی ناپایداری انگشتی [۵۴] ۲۴
- شکل ۱-۲: تصویری شماتیک از یک سلول هل-شاو ۳۲
- شکل ۲-۲: منحنی‌های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان ۴۲
- شکل ۳-۲: نمودار تغییرات μ/μ_0 نسبت به $\lambda\gamma$ برای مدل باریک‌شونده کاریو-یاسودا ۴۴
- شکل ۱-۳: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج برای جابجایی نیوتنی در زمان‌های مختلف و $R = 3$ ۶۷
- شکل ۲-۳: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج برای جابجایی نیوتنی در زمان‌ها و نسبت تحرک‌های مختلف. دایره‌های توخالی نتایج بدست آمده از مطالعه حاضر و منحنی خط چین نتایج گزارش شده توسط تن و هومسی می‌باشد. ۶۹
- شکل ۳-۳: منحنی نرخ رشد بر حسب زمان برای سیال نیوتنی در $R = 3$ ۷۰
- شکل ۴-۳: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و $n = 0.5, R = 3$ ۷۱
- شکل ۵-۳: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و $De = 5, R = 2$ و $to = 5$ ۷۱

- شکل ۳-۶: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج در جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی
 و $R = 2$ ، $n = 0.5$ و $to = 5$ ۷۲
- شکل ۳-۷: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج در جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی
 و $R = 2$ ، $n = 0.5$ و $to = 5$ ۷۳
- شکل ۳-۸: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی
 و $R = 2$ ، $De = 5$ و $to = 5$ ۷۴
- شکل ۳-۹: منحنی نرخ رشد در جابجایی سیالات نیوتنی، بر حسب عدد موج و نسبت
 نفوذپذیری‌های متفاوت αK ، $t0 = 0.2$ ۷۴
- شکل ۳-۱۰: منحنی نرخ رشد در جابجایی سیالات نیوتنی، بر حسب عدد موج و نسبت
 پراکندگی‌های متفاوت αD ، $t0 = 5$ ۷۵
- شکل ۳-۱۱: منحنی نرخ رشد در جابجایی سیالات نیوتنی، بر حسب عدد موج و زوایای نفوذپذیری
 متفاوت βK ، $t0 = 0.2$ ۷۶
- شکل ۳-۱۲: منحنی نرخ رشد در جابجایی سیالات نیوتنی، بر حسب عدد موج و زوایای
 پراکندگی‌های متفاوت βD ، $t0 = 5$ ۷۶
- شکل ۴-۱: تصویری شماتیک از سه راه‌حل موجود در روش المان محدود ۸۳
- شکل ۵-۱: منحنی میانگین غلظت عرضی در جابجایی نیوتنی و $Pe = 1000$ ، $A = 2$ ، $R = 3$ ۹۶
- شکل ۵-۲: منحنی میانگین غلظت عرضی در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی $t =$
 450 (الف) نسبت به تغییرات عدد De ، $n = 0.5$. (ب) نسبت به تغییرات n ، $De = 0.6$ ۹۷
- شکل ۵-۳: منحنی میانگین غلظت عرضی در جابجایی نیوتنی و نسبت نفوذپذیری‌های متفاوت αK
 ، $t = 250$ ۹۸
- شکل ۵-۴: منحنی میانگین غلظت عرضی در جابجایی نیوتنی و نسبت پراکندگی‌های متفاوت αD
 ، $t = 450$ ۹۸
- شکل ۵-۵: منحنی طول اختلاط در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی (الف) نسبت به
 تغییرات عدد De ، $n = 0.5$ (ب) نسبت به تغییرات n ، $De = 0.6$ ۱۰۱
- شکل ۵-۶: منحنی طول اختلاط در جابجایی سیالات نیوتنی و R های متفاوت ۱۰۲
- شکل ۵-۷: منحنی طول اختلاط در جابجایی نیوتنی و نسبت نفوذپذیری‌های متفاوت αK ۱۰۳

- شکل ۸-۵: منحنی طول اختلاط در جابجایی نیوتنی و نسبت پراکندگی‌های متفاوت αD ۱۰۳
- شکل ۹-۵: منحنی طول اختلاط در جابجایی نیوتنی و زاویه ناهمسانگردی‌های متفاوت برای تانسور نفوذپذیری αK ۱۰۴
- شکل ۱۰-۵: منحنی طول اختلاط در جابجایی نیوتنی و زاویه ناهمسانگردی‌های متفاوت برای تانسور پراکندگی αD ۱۰۴
- شکل ۱۱-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی. (الف) $R = 1$ ، (ب) $R = 2$ ، (ج) $R = 3$ ۱۰۶
- شکل ۱۲-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی. $R = 3$ ، $Pe = 1000$ ، $A = 1$ ۱۰۷
- شکل ۱۳-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی $R = 3$ ، $Pe = 1200$ (الف) $A = 1$ ، (ب) $A = 2$ ۱۰۷
- شکل ۱۴-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی $R = 3$ ، $Pe = 1000$ ، $A = 2$ ۱۰۸
- شکل ۱۵-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی $R = 3$ ، $Pe = 1200$ ، $A = 1$ ۱۰۹
- شکل ۱۶-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی $R = 3$ ، $Pe = 800$ ، $A = 2$ ۱۰۹
- شکل ۱۷-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی $R = 3$ ، $Pe = 800$ ، $A = 2$ ۱۱۰
- شکل ۱۸-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی $De = 0.4$ ۱۱۰
- شکل ۱۹-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی $De = 0.6$ ۱۱۰
- شکل ۲۰-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی $De = 0.8$ ۱۱۲
- شکل ۲۱-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی و در محیط متخلخل ناهمسانگرد $\beta K = \pi/6$ ، $\alpha K = 1.2$ ۱۱۴
- شکل ۲۲-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی و در محیط متخلخل ناهمسانگرد $\beta K = \pi/2$ ، $\alpha K = 1.2$ ۱۱۵
- شکل ۲۳-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی و در محیط متخلخل ناهمسانگرد $\beta D = \pi/3$ ، $\alpha D = 3$ ۱۱۵

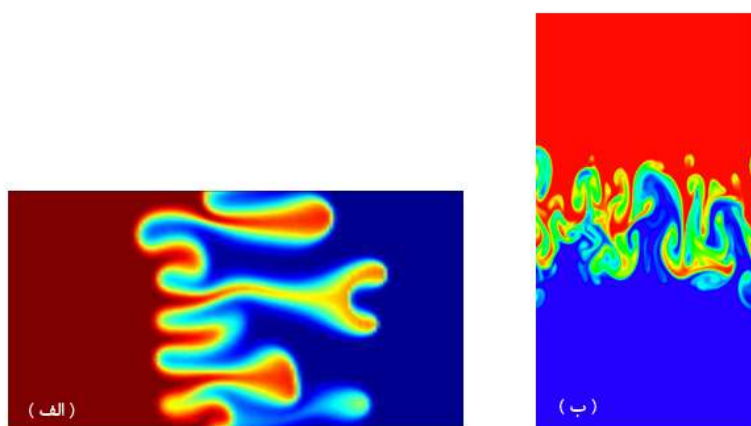
- شکل ۵-۲۴: کانتورهای غلظت در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و در محیط متخلخل ناهمسانگرد $n = 0.4$ ، $De = 0.7$ ، $\beta D = \pi/3$ ، $\alpha D = 3$ ۱۱۶
- شکل ۵-۲۵: بازده جاروبی بر حسب زمان و نسبت تحرک‌های متفاوت ۱۱۸
- شکل ۵-۲۶: بازده جاروبی در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی (الف) نسبت به تغییرات عدد De ، $n = 0.5$ (ب) نسبت به تغییرات n ، $De = 0.6$ ۱۱۸
- شکل ۵-۲۷: بازده جاروبی در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی بر حسب زمان و نسبت نفوذپذیری‌های متفاوت. $n = 0.4$ ، $De = 0.7$ ۱۱۹
- شکل ۵-۲۸: بازده جاروبی در جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی بر حسب زمان و نسبت پراگندگی‌های متفاوت. $n = 0.7$ ، $De = 0.4$ ۱۲۰

فصل اول:

مقدمه

۱-۱ مقدمه

ناپایداری انگشتی لزج^۱ یکی از شناخته شده‌ترین ناپایداری‌های هیدرودینامیکی در محیط متخلخل^۲ می‌باشد. این ناپایداری زمانی اتفاق می‌افتد که سیالی با ویسکوزیته کمتر، دورن محیط متخلخلی که از سیالی با ویسکوزیته بیشتر اشباع شده است، تزریق شود. سطح مشترک بین دو سیال به علت اختلاف ویسکوزیته موجود ناپایدار شده و با گذشت زمان طرح‌هایی شبیه به انگشت در این سطح مشترک ایجاد می‌شوند. این ناپایداری هم در حالت مخلوط‌شدنی^۳ (در نظر نگرفتن نیروهای موئینگی) و هم غیر مخلوط‌شدنی^۴ اتفاق می‌افتد. ناپایداری دیگری شبیه به این ناپایداری بر اساس اختلاف چگالی اتفاق می‌افتد که به آن ناپایداری رایلی-تیلور^۵ گفته می‌شود. در این ناپایداری سیال با چگالی بیشتر به صورت عمودی، سیال با چگالی کمتر را جابجا می‌کند. در شکل ۱-۱ نمایی از این دو ناپایداری به نمایش درآمده‌اند.



شکل ۱-۱: تصویر (الف) ناپایداری انگشتی لزج و تصویر (ب) ناپایداری رایلی-تیلور

¹ Viscous fingering instability

² Porous media

³ Miscible

⁴ Immiscible

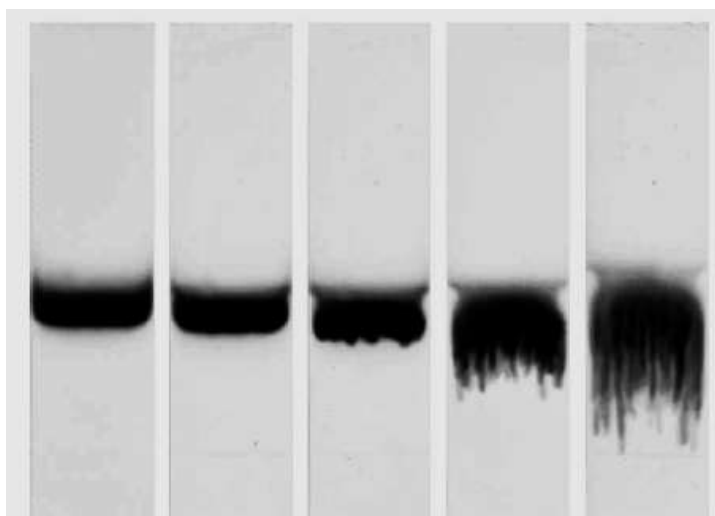
⁵ Rayleigh-Taylor instability

ناپایداری انگشتی لزج توجه بسیاری از محققین را بخصوص در بازیابی مخازن نفت جلب کرده است. در بازیابی مخازن هیدروکربونی، آب از حفره‌های عمیقی که در کنار مخزن اصلی حفر شده‌است به دورن آن پمپاژ می‌شود و نفت باقیمانده در مخازن را به خارج از آن هدایت می‌کند. در این فرایند آب که ویسکوزیته کمتری دارد، نفت با ویسکوزیته بیشتر را جابجا می‌کند که در نتیجه آن این ناپایداری در سطح مشترک دو سیال رخ می‌دهد. علاوه بر این کاربردهای سنتی، ناپایداری انگشتی لزج در بخش گسترده‌ای از صنایع امروزی‌تر نیز کاربرد گسترده‌ای دارد. در علوم مربوط به بررسی پراکندگی آلودگی‌های زیست محیطی ناشی از مواد هیدروکربونی در مخازن و یا حتی سفره‌های آب زیرزمینی از خواص این ناپایداری به طور گسترده‌ای استفاده می‌شود. همچنین در مطالعات مربوط به علوم آزمایشگاهی و شیمی در بررسی آزمایشات مربوط به لوله‌های کروماتوگرافی^۱، ناپایداری انگشتی لزج به طور ویژه مورد مطالعه قرار می‌گیرد. از ستون‌های کروماتوگرافی برای جداسازی اجزای شیمیایی یک محلول استفاده می‌شود. بدین صورت که با عبور محلول از درون لوله‌ای متخلخل، اجزا محلول بر اساس خواص جذب سطحی متفاوتی که دارند، سرعت‌های متفاوتی در مسیر خروج پیدا می‌کنند و بر همین اساس شناسایی می‌شوند. تصویری از این ناپایداری که در یک ستون کروماتوگرافی بوجود آمده در شکل ۱-۲ قابل مشاهده است. علاوه بر موارد ذکر شده این ناپایداری در پروژه‌های آب شناختی، مطالعه جریان آب‌های سطحی و زیرسطحی، فیلتراسیون و حتی امور پزشکی مورد توجه قرار می‌گیرد.

مطالعات مربوط به بررسی ناپایداری انگشتی لزج در جابجایی سیالات نیوتنی در محیط‌های متخلخل هم به صورت عددی و هم آزمایشگاهی به طور گسترده از دهه ۶۰ میلادی شروع شد. در

¹ Chromatography

این دهه برداشت اولیه^۱ از مخازن نفت کشف شده در ایالات متحده آمریکا رو به پایان بود و با شروع برداشت ثانویه^۲ از آن‌ها و بروز پدیده انگشتی در مراحل استخراج، بررسی این ناپایداری اهمیتی مضاعف پیدا کرد.



شکل ۱-۲: ناپایداری انگشتی بوجود آمده در کروماتوگرافی ستونی

در این دهه بررسی ناپایداری انگشتی تنها محدود به بررسی جریان سیالات نیوتنی می‌شد. پس از آن، بدلیل استفاده مهندسين و محققين فعال در زمینه انتقال نفت از پلیمرهای خاص تزریق شده در آب که بازده استخراج نفت را افزایش می‌دادند، بررسی این ناپایداری در سیالات غیرنیوتنی نیز اهمیت ویژه‌ای پیدا کرد. در واقع این پلیمرها در دسته‌ای از سیالات غیرنیوتنی طبقه بندی می‌شدند که در تهیه امولسیون‌ها و فوم‌هایی تزریقی به آب برای افزایش بازده استخراج نفت مورد استفاده قرار می‌گرفتند. پلیمرهای بکار گرفته شده با کاهش پدیده انگشتی روی داده در مخازن نفت، راندمان استخراج را بالا می‌بردند. بنابراین با توجه به دلایل ذکر شده، مطالعه و آشنایی جامع با چگونگی رفتار این پدیده در جریان سیالات غیرنیوتنی در محیط‌های متخلخل، به

¹ Primary oil recovery

² Secondary oil recovery

عنوان یک نیاز اصلی در صنایع و پروژه‌های مهندسی شناخته شد. علاوه بر این، آشنایی و فهم دقیق‌تر چگونگی جریان سیالات غیرنیوتنی، می‌تواند درک دقیق‌تر و جامع‌تری از جابجایی‌های نیوتنی را نیز فراهم سازد. مطالعات مربوط به جریان سیالات غیرنیوتنی در ناپایداری انگشتی بدلیل دشوار بودن شبیه‌سازی آن، عمدتاً به صورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار می‌گیرند. از طرفی نرم‌افزارهای تجاری موجود در صنایع نیز بدلیل استفاده از روش‌هایی که دقت بالایی ندارند، نمی‌توانند این پدیده را بدرستی و با در نظر گرفتن تمام شرایط حاکم بر آن مدل کنند. در برخی از مدلسازی‌های انجام شده توسط این‌گونه ابزارها نیز بازه زمانی، بسیار محدود در نظر گرفته می‌شود و امکان بررسی این پدیده در بازه زمانی گسترده‌تر به دلیل عدم همگرایی وجود ندارد. بنابراین استفاده از روش‌های عددی با دقت بالا که توانایی مدلسازی رفتارهای شدیداً غیرخطی را دارا باشند، نیازی بنیادی در بررسی ناپایداری انگشتی می‌باشد. علاوه بر این‌که با استفاده از این روش‌های عددی می‌توان به بررسی سیالات غیرنیوتنی و یا حتی ویسکوالاستیک نیز پرداخت. همچنین امکان بررسی برخی از ویژگی‌های محیط متخلخل مثل نفوذپذیری یا پراکندگی در حالت‌های ناهمگن یا ناهمسانگرد نیز وجود دارد.

در ادامه این فصل به بیان برخی از مفاهیم و اصطلاحات اولیه بکار رفته در ناپایداری انگشتی می‌پردازیم. تاریخچه‌ای از مطالعات انجام شده در زمینه این ناپایداری ارائه می‌کنیم و اهداف مورد نظر از انجام این مطالعه را مشخص خواهیم کرد.

برخی از اصطلاحات رایج بکار رفته برای جریان سیالات در محیط‌های متخلخل که در این مطالعه از آن‌ها استفاده شده است، به شرح زیر بیان شده‌اند:

تخلخل^۱: این پارامتر معیاری برای تشخیص اندازه‌ی خلل و فرج موجود در محیط متخلخل می‌باشد و به صورت نسبت حجم منافذ و سوراخ‌های موجود در ماده به حجم کل آن می‌باشد. این پارامتر با عنوان تخلخل کامل نیز شناخته می‌شود. عبارت دیگری در همین زمینه به نام تخلخل موثر نیز ارائه شده است که فقط محدود به فضایی از محیط متخلخل می‌شود که در آن جریان وجود دارد. روش‌های بسیار زیادی در مطالعات مربوط به این مبحث برای تعیین مقادیر تخلخل کامل و تخلخل موثر وجود دارد که در بخش تاریخچه به قسمتی از آن‌ها اشاره می‌شود.

نفوذپذیری^۲: این پارامتر خاصیتی از محیط متخلخل می‌باشد که به سیال اجازه می‌دهد، بدون این که تاثیر شیمیایی و یا فیزیکی از محیط بپذیرد، از محیط متخلخل عبور کند. هرچه مقدار این پارامتر برای یک محیط بیشتر باشد، عبور سیال از آن نیز آسان‌تر است. این پارامتر یک خاصیت محیط متخلخل است و از ویسکوزیته یا چگالی سیال مستقل می‌باشد. در بررسی جریان در محیط متخلخل، معمولاً این پارامتر همگن و همسانگرد در نظر گرفته می‌شود. علاوه بر این اکثراً نسبت به زمان نیز ثابت فرض می‌شود.

قابلیت تحرک^۳: قابلیت تحرک یک سیال در محیط متخلخل، به صورت نسبت نفوذپذیری محیط به ویسکوزیته سیال تعریف می‌شود.

$$M = \frac{k}{\mu} \quad (1-1)$$

نسبت تحرک نیز برای دو سیال به صورت زیر تعریف می‌شود:

¹ Porosity

² Permeability

³ Mobility

$$MR = \frac{M_1}{M_2} = \frac{(k/\mu)_1}{(k/\mu)_2} \quad (2-1)$$

در این رابطه زیرنویس ۱ و ۲ به ترتیب مربوط به سیال جابجاکننده و سیال جابجاشونده می‌باشند. اگر این نسبت کوچک‌تر یا مساوی یک باشد، جابجایی پایدار و راندمان جاروبی^۱ ماکزیمم است ولی اگر این پارامتر مقادیری بزرگتر از یک داشته باشد، سیال با قابلیت تحرک بیشتر به صورت انگشتی درون سیال با قابلیت تحرک کمتر، نفوذ می‌کند. به همین علت است که بجای تزریق آب در مخازن نفت برای استخراج آن، از محلول‌های پلیمری استفاده می‌شود. این پلیمرها ویسکوزیته بالا یا به عبارتی قابلیت تحرک کمتری نسبت به آب دارند، بنابراین نسبت تحرک آن‌ها با نفت به عدد یک یا حتی پایین‌تر از آن می‌رسد و جریانی پایدار خواهیم داشت. برای محیط متخلخلی که نفوذپذیری آن ثابت باشد، نسبت تحرک به صورت ساده‌تر، نسبت ویسکوزیته‌ی سیال جابجاشونده به جابجاکننده می‌باشد. در بررسی ناپایداری انگشتی با استفاده از نسبت تحرک، پارامتری را به صورت زیر تعریف می‌شود که برای گزارش نتایج بدست آمده از شبیه سازی‌ها از آن استفاده می‌شود.

$$R = \ln \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (3-1)$$

۲-۱ سلول هل-شاو^۲

به علت پیچیدگی بررسی جریان سیالات در محیط متخلخل، محققین ناپایداری انگشتی لزج را در یک محیط ساده‌تر به نام سلول هل-شاو بررسی می‌کنند. در فصل سوم اثبات می‌کنیم که رفتار

¹ Sweep efficiency

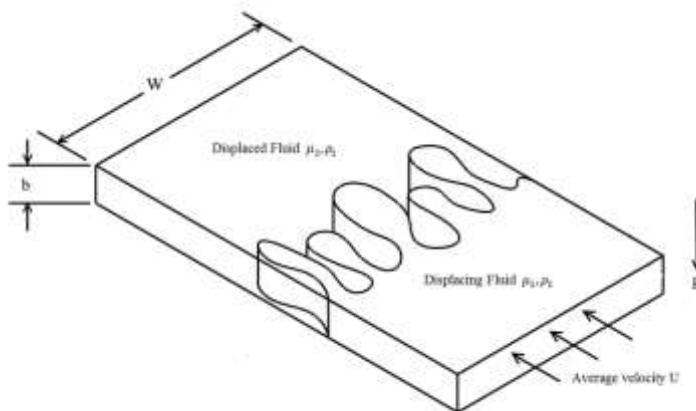
² Hele-Shaw cell

جریان در این سلول همانند با رفتار جریان سیال در یک محیط متخلخل می‌باشد. از این مدل برای توصیف جریان‌های دوبعدی که در عمق سلول میانگیری شده‌اند، استفاده می‌شود. تصویری شماتیک از سلول هل-شاو در شکل ۳-۱ آورده شده است. در این تصویر b ضخامت سلول و W عرض آن را نشان می‌دهند. جریان بین دو صفحه‌ی موازی که از یکدیگر به اندازه‌ی b فاصله دارند با سرعت U جریان می‌یابد. بدین ترتیب معادلات دوبعدی حاکم بر این جریان معادله پیوستگی و دارسی، به صورت زیر می‌باشند:

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (۴-۱)$$

$$\nabla \cdot \bar{p} = -\frac{\mu}{b^2/12} \bar{u} + \rho g \quad (۵-۱)$$

در این معادلات، $\bar{u}$ بردار سرعت ماکروسکوپیک و $\bar{p}$ فشار ماکروسکوپیک می‌باشند. استفاده از این سلول همانند جریان در محیط متخلخل برای جریان‌هایی با رینولدز پایین امکان‌پذیر است. استفاده از سلول هل-شاو یکی از پرکاربردترین روش‌ها در مطالعه جریان سیالات در محیط متخلخل می‌باشد.



شکل ۳-۱: تصویری شماتیک از یک سلول Hele-Shaw

۳-۱ مکانیزم ناپایداری انگشتی لزج

یک جابجایی مخلوط‌شدنی را در یک محیط متخلخل همگن که دارای نفوذ پذیری ثابت k می باشد، در نظر بگیرید. در این جریان، سیالی با خواص ρ_2 و μ_2 توسط سیال دیگری با خواص ρ_1 و μ_1 جابجا می‌شود. نیروی فشار $(p_1 - p_2)$ وارد شده بر سیال جابجاکننده که ناشی از جابجایی سطح مشترک به اندازه‌ی δx می‌باشد به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$(p_1 - p_2) = \left[\frac{(\mu_2 - \mu_1)U}{k} + (\rho_1 - \rho_2)g \right] \delta x \quad (۶-۱)$$

اگر نیروی خالص فشاری مثبت باشد، هر جابجایی کوچکی موجب تقویت ناپایداری می‌شود. بنابراین ترکیبی از اختلاف ویسکوزیته یا چگالی‌ها جریان را ناپایدار می‌کنند. با توجه به مثبت یا منفی بودن اختلاف ویسکوزیته و اختلاف چگالی، هر کدام می‌توانند عامل پایدارکننده یا ناپایدارکننده‌ی جریان باشند. به عنوان مثال جابجایی عمودی و رو به پایینی را در نظر بگیرید که در آن سیالی با ویسکوزیته و چگالی بیشتر توسط سیال دیگری با چگالی و ویسکوزیته کمتر جابجا می‌شود، یعنی داشته باشیم:

$$(p_1 - p_2) < 0 \quad ; \quad (\mu_2 - \mu_1) > 0 \quad (۷-۱)$$

در این حالت ویسکوزیته عامل ناپایداری است در حالی که نیروی گرانش موجب پایداری می‌شود. در نتیجه‌ی این شرایط سرعت بحرانی که در آن جریان ناپایدار می‌شود به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u_c = \frac{(\rho_2 - \rho_1)gk}{(\mu_2 - \mu_1)} \quad (۸-۱)$$

۴-۱ تاریخچه

در این بخش به بررسی مطالعات و تحقیقاتی که در زمینه ناپایداری انگشتی لزج در محیط‌های متخلخل انجام شده است، می‌پردازیم. مطالعات صورت گرفته در این زمینه به چند بخش کلی تقسیم‌بندی می‌شوند که از جمله آن‌ها می‌توان به تحلیل پایداری خطی^۱، شبیه‌سازی غیر خطی^۲ و همچنین مطالعات آزمایشگاهی اشاره کرد. در یک دسته‌بندی کلی‌تر بررسی این ناپایداری به دو بخش مربوط به جریان‌های مخلوط شدنی و مخلوط نشدنی تقسیم‌بندی می‌شوند که هر کدام روابط و اصول کاملاً مجزایی در روند شبیه‌سازی و آزمایش دارند. بررسی این ناپایداری همان‌گونه که ذکر شد، از حدود دهه ۶۰ میلادی شدت بیشتری پیدا کرد و با در نظر گرفتن شرایط متفاوت و حالت‌های خاص، گسترش یافت. هومسی^۳ [۱] مروری بر اطلاعات موجود در زمینه ناپایداری، هم در جریان‌های مخلوط شدنی و هم مخلوط نشدنی ارائه کرد که اطلاعات بسیار جامع و کاملی از این ناپایداری در محیط‌های متخلخل در اختیار علاقه‌مندان قرار می‌دهد. در این قسمت، ابتدا به بررسی مطالعات انجام شده در زمینه تحلیل پایداری خطی جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی می‌پردازیم سپس مطالعات مربوط به شبیه‌سازی غیرخطی را مرور می‌کنیم و در نهایت مطالعات آزمایشگاهی انجام گرفته را مورد بررسی و مقایسه قرار می‌دهیم.

۱-۴-۱ تحلیل پایداری خطی

مطالعات مربوط به تحلیل پایداری خطی با خطی‌سازی معادلات و در نظر گرفتن پارامترهای تاثیر گذار بر ناپایداری انگشتی، به بررسی نرخ رشد ناپایداری در شرایط و زمان‌های متفاوت می‌پردازند.

¹ Linear stability analysis

² Non-linear simulation

³ Homsy

تحلیل پایداری خطی برای ناپایداری انگشتی لزج اولین بار توسط چووک و همکاران^۱ [۲] مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها به صورت آزمایشگاهی و تحلیلی به بررسی این ناپایداری در جریان‌های مخلوط‌نشده پرداختند و عدد موج‌هایی را که در آن جریان، ناپایداری شدیدتری داشت، ارائه کردند. این نویسندگان همچنین نتایج تئوری بدست آورده را با نتایج حاصل از آزمایشات انجام شده در سلول‌های هل-شاو مورد مقایسه قرار دادند و به بررسی صحت نتایج بدست آمده پرداختند. در ادامه پرین^۲ [۳] با استفاده از روش پرتوربیشن به بررسی پایداری خطی جابجایی مخلوط‌شدنی نفت و یک محلول با ویسکوزیته کمتر از نفت پرداخت و روش‌ها و مکانیزم‌های پخش یک سیال در سیال دیگر را مورد بررسی قرار داد. وودینگ^۳ [۴] با در نظر گرفتن یک مساله مقدار اولیه و بیان نرخ رشد آشفتگی‌ها به صورت چندجمله‌ای هرمیت، به بررسی پایداری این پدیده پرداخت. در همین زمینه اسچوالتر^۴ [۵] تحلیل پایداری سیستمی که در آن انگشتی‌ها از تغییرات همزمان ویسکوزیته و چگالی ناشی می‌شدند را مورد بررسی قرار داد، او با در نظر گرفتن جریانی در جهت گرانش، به بیان شرایط پایداری و عدم ناپایداری این جریان پرداخت. هلر^۵ [۶] در روند بررسی پایداری یک جابجایی مخلوط‌شدنی، به معادله مقدار ویژه ناهمگن مرتبه دومی رسید که مسیر پیشرفت اغتشاشات را مشخص می‌کرد. او نواحی پایدار را با توجه به نرخ دبی ورودی، تغییرات ویسکوزیته و نیز تغییرات چگالی مورد بررسی قرار داد. تحلیل‌های انجام شده تا این دوره عموماً با ساده سازی‌های گسترده و تحت شرایط خاص، می‌توانستند به نتایج جزئی در مورد ناپایداری انگشتی برسند. در این زمان تن و هومسی^۶ [۷، ۸] به صورت تئوری، تحلیلی جامع

¹ Chouke et al.

² Perrine

³ Wooding

⁴ Schowalter

⁵ Heller

⁶ Tan & Homsy

و کامل در مورد پایداری جابجایی‌های مخلوط‌شدنی در جریان‌های مستقیم‌الخط و شعاعی ارائه کردند. این دو با استفاده از تقریب شبه‌خطی به پیش‌بینی نرخ رشد اغتشاشات و مقایسه آن‌ها با پاسخ تحلیلی بدست آمده برای زمان اولیه پرداختند. مطالعات آن‌ها نشان داد که نتایج بدست آمده جز در زمان‌های ابتدایی که حالت پایه با سرعت زیادی تغییر می‌کند و این تقریب در آن نامعتبر است، مطابقت خوبی با یکدیگر دارند. تحلیل پایداری خطی برای جابجایی‌های اختلاط‌پذیر در جریان‌های شعاعی در محیط متخلخل نیز توسط این دو محقق انجام شد. آن‌ها نرخ رشد اغتشاشات را به عنوان تابعی از نسبت تحرک و عدد پکلت^۱ معرفی کردند. همچنین عدد بحرانی پکله که در آن بیشترین نرخ رشد ناپایداری‌ها مشاهده می‌شود را بدست آوردند. توسعه مطالعه تئوری پایداری خطی برای حالتی که تانسور پراکندگی^۲ ناهمسانگرد^۳ باشد، توسط یورتسوس و زیبک^۴ [۹] انجام گرفت. آن‌ها ضرایب پراکندگی را وابسته به نرخ دبی ورودی در نظر گرفته و طول موج‌های کوتاه ناپایداری را در زمان‌های ابتدایی بدست آوردند. راگرسون و میبورگ^۵ [۱۰، ۱۱] تاثیرات برش مماسی بر پایداری جریان‌های اختلاط‌پذیر را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با در نظر گرفتن جزء مماسی سرعت بر سطح مشترک، به بررسی تغییرات اضافه کردن این عامل و مقایسه آن با حالت‌های مطالعه شده قبلی، پرداختند. آن‌ها نتیجه گرفتند که این عامل، پایداری جریان‌های مخلوط‌شدنی را افزایش می‌دهد، نتیجه‌ای که با نتایج بدست آمده‌ی آن‌ها در شبیه‌سازی غیرخطی همخوانی نداشت. آن‌ها طی شبیه‌سازی غیرخطی به این نتیجه رسیده بودند که برش مماسی عاملی بر ناپایداری بیشتر جریان می‌باشد. علاوه بر این دیویت و هومسی^۶ [۱۲] تحلیل

¹ Peclet number

² Dispersion tensor

³ Anisotropic

⁴ Yortsos & Zeybek

⁵ Rogerson & Meiburg

⁶ De Wit & Homay

خطی را برای محیط‌های متخلخلی با نفوذپذیری نسبی پرودیک مورد مطالعه قرار دادند و نتایج آن را با شبیه سازی غیرخطی مقایسه و تحلیل کردند. از جمله مطالعات جدیدتری که در زمینه تحلیل پایداری خطی این ناپایداری انجام شده است می‌توان به مطالعه انجام شده توسط میسرا و همکاران^۱ [۱۳] اشاره کرد. آن‌ها با در نظر گرفتن جذب سطحی خطی برای محیط متخلخل به بررسی رفتار این ناپایداری در لوله‌های کروماتوگرافی پرداختند و مشاهده کردند که با افزایش این پارامتر، جریانی پایدارتر در جابجایی‌های مخلوط‌شدنی خواهند داشت. همچنین قسمت و همکاران^۲ [۱۴] تحلیل پایداری خطی را در محیطی با تانسور پراکندگی ناهمسانگرد و وابسته به سرعت جریان، انجام دادند و طول موج‌های بحرانی این ناپایداری را در حالت‌های خاص معرفی کرده و مورد بررسی قرار دادند.

مطالعات انجام شده در زمینه‌ی تحلیل پایداری خطی جریان سیالات غیرنیوتنی در مقایسه با سیالات نیوتنی به مراتب کم‌تعدادتر می‌باشند و افراد محدودی به بررسی و تحلیل پایداری خطی این‌گونه از سیالات پرداخته‌اند. در این زمینه، پاسکال^۳ [۱۵] جریانی مخلوط نشدنی را که در آن سیال باریک شونده‌ای توسط سیال باریک‌شونده‌ی^۴ دیگر در محیط متخلخل جابجا می‌شد، در نظر گرفت و به بررسی پارامترهای تاثیرگذار سیالات غیرنیوتنی، بر پایداری یا عدم پایداری جریان مورد نظر پرداخت. البته در مدل این نویسنده، کشش سطحی که نقش مهمی در جریان‌های مخلوط نشدنی بر عهده دارد، در نظر گرفته نشده بود. تحلیلی نیز توسط ویلسون^۵ [۱۶] برای جریان‌های کاملاً الاستیک و کاملاً باریک‌شونده در یک سلول مستقیم الخط هل - شاو انجام گرفت. او نتیجه

¹ Mishra *et al.*

² Ghesmat *et al.*

³ Pascal

⁴ Shear-thinning fluid

⁵ Wilson

گرفت؛ اشکال خود متشابهی^۱ که در جریان‌های مخلوط‌نشدنی از این سیالات بروز می‌کند ناشی از خواص الاستیک و کشش سطحی آن‌ها می‌باشد. پس از او سادر و همکاران^۲ [۱۷] تحلیلی را برای جریانی مخلوط‌نشدنی از دو سیال؛ شامل یک سیال غیرنیوتنی باریک‌شونده و یک سیال نیوتنی با ویسکوزیته کم، در یک سلول هل-شاو شعاعی انجام دادند و به این نتیجه رسیدند که با کاهش شاخص سیال پاور-لو^۳، نرخ رشد آشفته‌گی‌ها نیز کاهش می‌یابد. از جمله مطالعات جدیدتر انجام گرفته در این بخش می‌توان به تحقیق انجام شده توسط پریچارد و پیرسن^۴ [۱۸] اشاره کرد. آن‌ها با استفاده از سیال تیکسوتروپیک^۵ (تیکسوتروپی به پدیده کاهش ویسکوزیته ظاهری سیالات تحت تنش برشی ثابت با گذشت زمان گفته می‌شود. تیکسوتروپی نوعی کار نرمی است که در آن با حذف تنش برشی خارجی، ویسکوزیته به حالت قبل باز می‌گردد) به بررسی تاثیرات بکار بردن این ماده بر پایداری یا ناپایداری این مساله پرداختند و نرخ رشد و طول موج بحرانی را در شرایط مختلف معرفی کردند. اخیراً نیز عزایز و سینق^۶ [۱۹] تحلیل پایداری را با استفاده از تقریب شبه خطی برای سیال باریک‌شونده مورد مطالعه قرار دادند و شرایط بحرانی آن را معرفی کردند.

۲-۴-۱ شبیه سازی غیرخطی

در این قسمت به بررسی مطالعات و تحقیقات انجام شده در زمینه شبیه سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی و گزارشات آن‌ها از این شبیه‌سازی می‌پردازیم.

مدل یک‌بعدی برای مطالعه ناپایداری انگشتی لزج در جابجایی سیالات نیوتنی توسط کووال^۷

¹ Fractal

² Sader *et al.*

³ Power-law

⁴ Pritchard & Pearson

⁵ Thixotropic

⁶ Azaiez & Singh

⁷ Koval

[۲۰] به کار گرفته شد و با نتایج آزمایشگاهی که خود او انجام داده بود، مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج بدست آمده نشان دادند که اگرچه این مدل یک بعدی توانایی به نمایش کشیدن این پدیده را به درستی ندارد ولی با تقریب خوبی با نتایج آزمایشگاهی همخوانی دارد. از دیگر شبیه سازی‌های اولیه‌ای که برای این ناپایداری انجام گرفت، شبیه سازی انجام شده توسط فایرز^۱ [۲۱] بود که در واقع از توسعه‌ی مدل کووال [۲۰] بدست آمده بود. او پارامترهای قابل تنظیمی را به این مدل یک بعدی اضافه کرد و با استفاده از آن‌ها به بررسی ناپایداری انگشتی در حالت دوبعدی پرداخت. در مطالعات اولیه تمام شبیه‌سازی‌ها با استفاده از تکنیک تفاضل محدود انجام می‌شد. پیس‌من و همکاران^۲ [۲۲] با استفاده از این روش به شبیه‌سازی این ناپایداری در جریان‌های مخلوط‌شدنی پرداختند. چریستی و باند^۳ [۲۳] همان روش تفاضل محدود^۴ را با اصلاح گره‌ها برای مقادیر بزرگتری از عدد پکلت و نسبت تحرک بکار بردند. این دو همچنین نتایج بدست آمده را با نتایج آزمایشگاهی دیگر محققین مقایسه کردند. تمام شبیه‌سازی‌های انجام گرفته تا این زمان، با استفاده از روش‌های عددی کم دقت که به خوبی توانایی مدل کردن پدیده‌های غیرخطی را ندارند، شبیه‌سازی می‌شدند. این روش‌ها علاوه بر اینکه رشد انگشتی‌ها را به درستی نشان نمی‌دادند، توانایی شبیه‌سازی آن را در زمان‌های بیشتر نیز نداشتند. تن و هومسی [۲۴] با معرفی و استفاده از روش دقیق طیفی برای اولین بار توانستند به شبیه‌سازی کامل ناپایداری انگشتی بپردازند. این دو، مدل دوبعدی را ارائه کردند که در آن با استفاده از روش طیفی^۵ و تبدیلات فوریه به مطالعه ناپایداری انگشتی پرداختند. آن‌ها پراکندگی همسانگردی را در شبیه‌سازی خود پیاده کرده و به نتایجی مطابق با نتایج آزمایشگاهی رسیدند. در شکل ۱-۴ تصویری از شبیه‌سازی انجام شده توسط

¹ Fayers

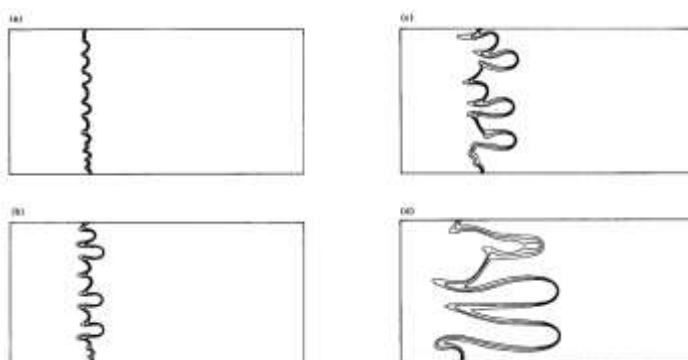
² Peaceman *et al.*

³ Christie & Bond

⁴ Finite Difference Method

⁵ Spectral Method

این دو نشان داده شده است.



شکل ۱-۴: نتایج گزارش شده از شبیه‌سازی غیرخطی تن و هومسی با استفاده از روش طیفی [۲۴]

چریستی^۱ [۲۵] با افزودن قسمتی به الگوریتم تن و هومسی [۸]، این ناپایداری را برای محیط متخلخل خاصی شبیه‌سازی کردند. در مدل شبیه‌سازی شده توسط وی، نفوذپذیری محیط ناهمگن و پراکندگی محیط متخلخل ناهمسانگرد در نظر گرفته شده بود، و همچنین تأثیرات گرانش بر این پدیده را بررسی کرد. در ادامه استفاده از این روش زیمرمن و هومسی^۲ [۲۶] این ناپایداری را برای محیط‌هایی با پراکندگی ناهمسانگرد مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها پراکندگی را وابسته به سرعت در نظر گرفته و به بررسی تأثیرات این ناهمسانگردی در شکل‌گیری انگشتی‌ها پرداختند. این دو همچنین این ناپایداری را در جریان مخلوط شدنی به صورت سه بعدی نیز شبیه‌سازی کرده [۲۷] و با مشاهده نتایج بدست آمده متوجه شدند که هیچ مکانیزم جدیدی در شکل‌گیری انگشتی‌ها در حالت سه بعدی مشاهده نمی‌شود. بنابراین نتیجه گرفتند که برای بررسی رفتار این ناپایداری در شرایط متفاوت، همان حالت دوبعدی کافی و مفید می‌باشد و نیازی به بررسی آن در حالت سه بعدی نمی‌باشد. بررسی این ناپایداری در محیط متخلخلی با نفوذپذیری ناهمگن نیز، توسط تن و هومسی [۲۸] انجام پذیرفت. علاوه بر موارد ذکر شده، بررسی تأثیر

¹ Christie

² Zimmerman & Homsy

تغییرات غیریکنواخت بودن منحنی ویسکوزیته در شبیه سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی توسط منیکام و هومسی^۱ [۲۹] انجام پذیرفت. آن‌ها در این شبیه سازی متوجه شدند که عدم یکنواختی در منحنی ویسکوزیته منجر به بازگشت انگشتی‌ها به سمت سیال جابجاکننده می‌شود. بررسی تاثیرات اضافه کردن سرعت مماسی بر سطح مشترک دو سیال نیز در مطالعات راگرسون و میبورگ [۱۰، ۱۱] مورد توجه قرار گرفت. آن‌ها به بررسی شکل و جهت‌گیری انگشتی‌ها در این حالت پرداختند و مکانیزم‌های جدیدی را برای رشد انگشتی‌ها معرفی کردند. از میان مطالعات جدیدتری که به بررسی این ناپایداری پرداخته‌اند می‌توان به چند مورد اشاره کرد. بررسی ناپایداری انگشتی در محیط متخلخلی با تانسور پراکندگی وابسته به سرعت، توسط غسمت و عزایز [۱۴] صورت پذیرفت که در آن به بررسی مکانیزم‌های مشاهده شده در این شبیه سازی و نیز معرفی پارامتری جدید به نام راندمان جارویی در ناپایداری انگشتی پرداختند. علاوه بر این سجادی و عزایز [۳۰]^۲ به بررسی تاثیرات انتقال حرارت در این ناپایداری زمانی که هر سیال دمای متفاوتی دارد، پرداختند. این دو نیز پارامترهایی مانند راندمان جارویی یا طول اختلاط^۳ تحت شرایط جدید مورد بررسی قرار دادند. همانند تحلیل پایداری خطی، در زمینه شبیه سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی نیز، مطالعات انجام شده در بخش سیالات غیرنیوتنی به مراتب کم‌تر از جریان سیالات نیونی می‌باشد. بیشتر تحقیقات انجام شده در بررسی این ناپایداری در جریان سیالات غیرنیوتنی به صورت آزمایشگاهی صورت گرفته و مطالعات عددی محدودی آن‌ها بسیار محدود می‌باشد. در این قسمت به بخشی از مطالعاتی که مربوط به جریان سیالات غیرنیوتنی در محیط متخلخل می‌باشند می‌پردازیم. یک روش عددی برای شبیه سازی جریان سیال پاور-لو توسط مک‌دونالد^۴ [۳۱] ارائه

¹ Manickam & Homsy

² Sajjadi & Azaiez

³ Mixing length

⁴ McDonald

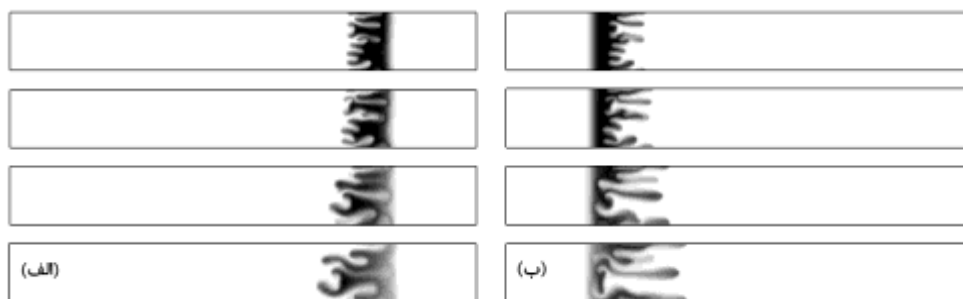
شد که در آن از سلول‌های هل-شاو شعاعی استفاده کرده بود. او در طرح اولیه خود مشاهده کرد، هنگامی که از مشخصات نفت خام در شبیه سازی استفاده می‌کند نتایج، خطای کمتری نسبت به حالتی دارند که از سیالی با خواص پاور-لو استفاده کند. علاوه بر این، مطالعاتی نیز به صورت عددی و تحلیلی توسط ویو و همکاران^۱ [۳۲] در زمینه جریان سیالات پاور-لو و بینگهام^۲ در محیط متخلخل انجام گرفت. آن‌ها نتایج بدست آمده برای سیالات متفاوت را با یکدیگر مقایسه کرده و تفاوت‌های آن‌ها را بیان کردند. روشی تحلیلی برای جریان ناپایداری از سیال پاورلو در محیط متخلخل توسط پاسکال [۳۳] ارائه شد که در آن به ارائه تاثیرات رئولوژیکی سیال بر نرخ جریان و فشار پرداخت. او گروهی از اعداد بی‌بعد جدید را معرفی کرد و به تحلیل رفتار جریان با این گروه‌های بی‌بعد پرداخت. در مطالعه دیگری که در زمینه‌ی جریان سیال باریک‌شونده در لوله‌های موئینی انجام گرفت، هوزارویز و همکاران^۳ [۳۴] گزارش کردند که حاصلضرب ضریب اصطکاک و عدد رینولدز در مقادیر پایین عدد رینولدز، ثابت باقی می‌ماند. از جمله مطالعات دیگر در این زمینه، توسعه‌ی یک شبیه ساز سه بعدی توسط ویو و همکاران [۳۵] است که با روش تفاضل محدود جریان‌های تکفاز یا چندفاز از سیالات غیرنیوتنی را شبیه‌سازی می‌کرد. این نویسندگان نتایج خود را در دو حالت دسته‌بندی کردند. جابجایی یک سیال نیوتنی بوسیله‌ی یک سیال پاور-لو و جابجایی یک سیال بینگهام توسط یک سیال نیوتنی. آن‌ها صحت نتایج خود را در حالت‌های تکفازی و چندفازی با مقایسه‌ی آن‌ها با نتایج تحلیلی سنجیدند. تقریباً در تمام مطالعات انجام گرفته در بررسی ناپایداری انگشتی، R یا همان لگاریتم نسبت تحرک‌ها مثبت فرض می‌شد، میسرا و همکاران [۳۶] برای اولین بار با در نظر گرفتن مقدار منفی برای این پارامتر به

¹ Wu *et al.*

² Bingham fluid

³ Huzarewicz *et al.*

بررسی رفتار انگشتی‌ها در این حالت و مقایسه آن‌ها با یکدیگر پرداختند. این نویسندگان مشاهده کردند که با توجه به اینکه تمام شرایط اولیه و مرزی برای هر دو حالت کاملاً یکسان می‌باشند ولی گسترش و رشد انگشتی تفاوت‌های قابل توجهی با یکدیگر دارند. آن‌ها دلایل خود را با توجه به جهت جریان و طول اختلاط مورد استدلال قرار دادند. در شکل ۵-۱ نتایج این محققین نشان داده شده است.



شکل ۵-۱: ناپایداری انگشتی با لگاریتم نسبت تحرک (الف) - مثبت و (ب) - منفی [۳۶]

۳-۴-۱ مطالعات آزمایشگاهی

در این بخش به بررسی مطالعات آزمایشگاهی انجام شده در جریان‌های مخلوط شدنی و مخلوط نشدنی برای سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی می‌پردازیم.

بررسی ناپایداری انگشتی لزج در جریان‌های مخلوط شدنی اولین بار توسط هیل و همکاران^۱ [۳۷] گزارش شد. او بر پایه نیرویی بر اساس اختلاف فشار و نیز اغتشاشی در سطح مشترک دو سیال مورد آزمایش، به بررسی این ناپایداری پرداخت. پس از او اسلوباد و کوودل^۲ [۳۸] با استفاده از تکنیک پرتو ایکس به اندازه‌گیری راندمان جارویی در این‌گونه جابجایی‌ها پرداختند. آن‌ها

¹ Hill *et al.*

² Slobod & caudle

همچنین با استفاده از این تکنیک توانستند الگوهای متفاوت بدست آمده برای انگشتی‌ها در نسبت ویسکوزیته‌های مختلف را مشاهده و بررسی کنند. در ادامه ون میرس^۱ [۳۹] با بکار بردن مکانیزی به مشاهده و تحلیل جریانی از آب و نفت در یک محیط متخلخل آزمایشگاهی پرداخت. این محیط متخلخل از موادی به صورت پورد شیشه پر شده بود و دیواره‌هایی شیشه‌ای داشت. بررسی سطح مشترک دو سیال مخلوط نشدنی نیز توسط سافمن و تیلور^۲ [۴۰] انجام پذیرفت. آن‌ها با استفاده از یک سلول هل-شاو و یک سیستم جریانی که از هوا و گلیسرین تشکیل شده بود به بررسی آشفستگی‌ها و اغتشاشات بوجود آمده در سطح مشترک دو سیال پرداختند. این دو با تعریف پارامتری به شکل λ که نسبت ضخامت انگشتی به جابجایی آن را نشان می‌دهد به بررسی و تحلیل نتایج بدست آمده از این آزمایش پرداختند. مطالعات آزمایشگاهی متعددی نیز توسط هابرمن^۳ [۴۱] در زمینه تاثیرات نسبت تحرک بر راندمان جابجایی و نیز چگونگی شکل‌گیری ناپایداری انگشتی صورت گرفت. او در مطالعاتش به این نتیجه رسید که نسب تحرک دو سیال نقش بسیار بیشتری از ناهمگنی محیط متخلخل در پیشروی ناپایداری دارد. بنهام و همکاران^۴ [۴۲] با استفاده از محلول سولفات آلومینیوم در جابجایی محلول گلیسرین، رفتار این جریان و چگونگی شکل‌گیری انگشتی‌ها مورد بررسی قرار دادند. در ادامه مطالعات آزمایشگاهی انجام گرفته با پرتو ایکس، اسلوباد و توماس^۵ [۴۳] به بررسی تاثیرات نسبت تحرک، در شکل و اندازه‌ی انگشتی‌ها پرداختند. با استفاده از همین روش پرکینس و همکاران^۶ [۴۴] به بررسی فرایند پخش انگشتی‌ها در یک جابجایی مخلوط شدنی پرداختند. در حالت مخلوط نشدنی نیز پرکینس و جانستون^۷ [۴۵]

¹ Van Meurs

² Saffman & Taylor

³ Habermann

⁴ Benham *et al.*

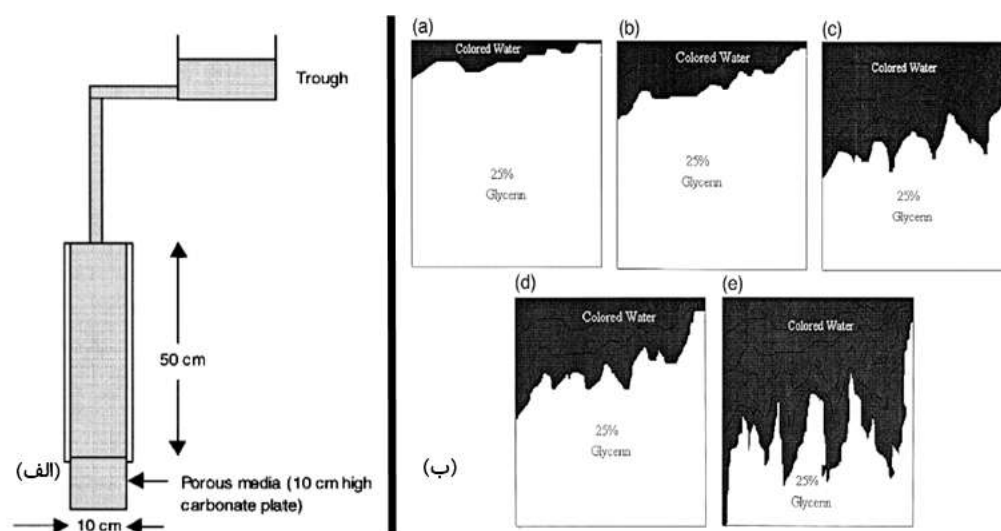
⁵ Slobod & Thomas

⁶ Perkins *et al.*

⁷ Perkins & Johnston

مطالعاتی را با استفاده از همین روش انجام دادند. بررسی تاثیرات نیروی گرانش بر شکل‌گیری و نیز سرعت پیشروی انگشتی‌ها توسط اسلوباد و توماس [۴۳] انجام گرفت. در کنار این مطالعات، سقیر و همکاران^۱ [۴۶] با استفاده از سیستم آزمایشگاهی به صورت شکل ۱-۶، به بررسی ناپایداری انگشتی در حالتی که سیالات به کار رفته با یکدیگر اختلاف دما داشته باشند، پرداختند.

آن‌ها از گلیسرین و آب در این آزمایش استفاده و مشاهده کردند زمانی که آب داغ به سیستم تزریق می‌شود فاصله‌ی نوک تا پایه انگشتی‌ها کمتر از حالتی می‌باشد که آب سرد به سیستم تزریق می‌شود. همچنین مشاهده شد در این حالت، نیروی بایونسی از پیشرفت سریع انگشتی‌ها جلوگیری می‌کند. قسمتی از نتایج بدست آمده از این آزمایش در نشان داده شده است.



شکل ۱-۶: الف- سیستم آزمایشگاهی بکار رفته توسط سقیر و همکاران [۴۶]. ب- فریم‌هایی از نتایج بدست آمده آن‌ها [۴۶]

در بخش سیالات غیرنیوتنی مارشال و همکاران^۲ [۴۷] برای اولین بار به بررسی جریان سیالات ویسکوالاستیک در محیط‌های متخلخل پرداختند. آن‌ها با در نظر گرفتن گرانش، نقش این

¹ Saghir *et al.*

² Marshall *et al.*

عامل را در رشد انگشتی‌ها مورد بررسی قرار دادند. پس از آن لی و همکاران^۱ [۴۸] مطالعات آزمایشگاهی دیگری با استفاده از سیالات شبه‌پلاستیک^۲ در سلول هل-شاو انجام دادند. آن‌ها مشاهده کردند که سیال باریک‌شونده‌ی مورد استفاده در آزمایش، ناپایداری بیشتری نسبت به سیالات نیوتنی ایجاد می‌کند. نتیجه‌ای که با واقعیت‌های تئوری همخوانی ندارد زیرا همان‌طور که می‌دانیم در حالت کلی پلیمرها از سیالات نیوتنی ویسکوزتر هستند و در نتیجه نسبت تحرک کمتری خواهند داشت، پس اساساً ناپایداری در آن‌ها باید با سرعت کندتری پیشروی کند. در این میان بخش عظیمی از مطالعات آزمایشگاهی مربوط به بررسی تفاوت‌های جریان سیالان نیوتنی و غیرنیوتنی با یکدیگر می‌باشند. اولین مطالعه آزمایشگاهی که به بررسی جریان سیالات غیرنیوتنی در سلول‌های شعاعی می‌پرداخت توسط داکرد و همکاران^۳ [۴۹] انجام گرفت. آن‌ها به بررسی و تحلیل جابجایی یک سیال غیرنیوتنی توسط سیالی نیوتنی پرداختند و تشکیل انگشتی‌هایی با شاخه‌های زیاد را گزارش کردند. آن‌ها همچنین مشاهده کردند که در این حالت انگشتی‌ها بیشتر تمایل به شکافته شدن دارند و میل چندانی به ایجاد انگشتی‌های پهن‌تر و عریض‌تر از خود بروز نمی‌دهند. علاوه بر این‌ها، آلن و بوگر^۴ [۵۰] حالت‌های مختلفی را برای سیال نیوتنی، سیال باریک‌شونده و سیال کاملاً الاستیک مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در آزمایشات خود متوجه شدند که در حالت سیالات باریک‌شونده ناپایداری بیشتری در سطح مشترک دو سیال نسبت به حالت‌های دیگر قابل مشاهده است. این دو همچنین گزارش کردند که در شرایط یکسان، شکل‌گیری و فرم انگشتی‌ها در حالت غیرنیوتنی در مقایسه با حالت نیوتنی، کاملاً متفاوت می‌باشد. آن‌ها همچنین مطالعه دیگری به صورت جریان شعاعی در سلول هل-شاو انجام دادند که در آن از

¹ Lee *et al.*

² Pseudo plastic fluid

³ Daccord *et al.*

⁴ Allen & Boger

نوع خاصی از پلی استایرن^۱ به عنوان سیال غیرنیوتنی استفاده شده بود. مطالعه پهنای انگشتی‌ها تحت تابعی از سرعت پیشروی نوک انگشتی‌ها در جابجایی مخلوط نشدنی توسط بان و همکاران^۲ [۵۱] مورد مطالعه قرار گرفت. در این مطالعه نقش ویسکوزیته و کشش سطحی بر ناپایداری انگشتی مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها با استفاده از مواد پلیمری و سورفکتانت^۳ به بررسی تفاوت‌های بوجود آمده‌ی ناشی از استفاده‌ی این مواد پرداختند. این نویسندگان در بخش دیگری از مطالعات خود از یک محلول پلیمری باریکشونده به عنوان سیال جابجاکننده و از هوا به عنوان سیال جابجاشونده استفاده کرده و به مقایسه شکل انگشتی‌های بوجود آمده پرداختند. آن‌ها مشاهده کردند که در سرعت‌های کم، انگشتی‌هایی باریک و نوک‌تیز بوجود می‌آید در حالی که در سرعت‌های بالاتر انگشتی‌هایی پهن‌تر و بدون نوک تیز قابل مشاهده هستند. برای بررسی تاثیرات کشش سطحی بر شکل انگشتی‌ها، آن‌ها با افزودن سورفکتانت‌ها و مقایسه‌ی آن‌ها با حالتی که از محلول‌های پلیمری استفاده کرده بودند، به این نتیجه رسیدند که کشش سطحی تاثیر قابل ذکری بر شکل انگشتی‌ها ندارد. از جمله مطالعات دیگری که با استفاده از مواد شیمیایی خاص به بررسی این ناپایداری پرداخته‌اند می‌توان به آزمایشات کاواگوچی و همکاران^۴ [۵۲] اشاره کرد. آن‌ها از هیدروکسی پروپیل متیل سلولز^۵ به عنوان سیال غیرنیوتنی و از محلولی از گلیسرین به عنوان سیال نیوتنی استفاده کردند. آن‌ها از نتایج بدست آمده از آزمایشات مشاهده کردند؛ در حالتی که هوا، محلول نیوتنی گلیسرین را جابجا می‌کند، انگشتی‌هایی یکنواخت که در آن‌ها فقط مکانیزم شکافتن نوک انگشتی اتفاق می‌افتد، مشاهده می‌شود در حالی که در حالت دیگری که هوا محلول هیدروکسی پروپیل متیل سلولز را جابجا می‌کرد انگشتی‌هایی چند شاخه مشاهده می‌شد. از

¹ Polystyrene

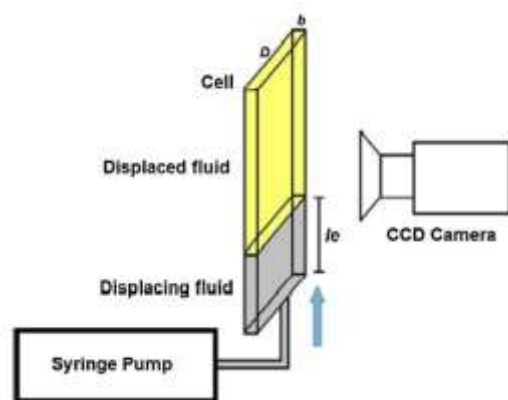
² Bonn *et al.*

³ surfactant

⁴ Kawaguchi *et al.*

⁵ Hydroxyl Propyl Methy Cellulose (HPMC)

مطالعات جدیدتری که در این زمینه انجام گرفته است می‌توان به مطالعه‌ای آزمایشگاهی انجام شده توسط مالسجه و همکاران^۱ [۵۳] اشاره کرد. آن‌ها به جای استفاده از بستر آکنده^۲ به عنوان محیط متخلخل، از صفحه‌ای مشبک استفاده کردند و با دوربینی با کیفیت بسیار بالا به مشاهده انگشتی‌ها پرداختند. آن‌ها با اعمال اختلاف ویسکوزیته‌های متفاوت، چگونگی پیشرفت انگشتی‌ها را مورد مقایسه قرار دادند. اوندانو و همکاران^۳ [۵۴] نیز با استفاده از نظر گرفتن گرانش، جریانی از نفت که توسط سیال نیوتنی، غیرنیوتنی باریک‌شونده و ویسکوالاستیک جابجا می‌شد را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها مشاهده کردند که در حضور نیروهای ویسکوالاستیک، سطح مشترک دو سیال با سرعت کم‌تری حرکت می‌کند.



شکل ۷-۱: یک نمونه از سیستم آزمایشگاهی بکار رفته در بررسی ناپایداری انگشتی [۵۴]

آن‌ها با استفاده از این ویژگی و در نظر گرفتن شرایطی خاص، چگونگی بهترین حالت برای جابجایی نفت را گزارش کردند. در شکل ۷-۱ تصویری از سیستم آزمایشگاهی آن‌ها نشان داده

¹ Malsche *et al.*

² Packed bed

³ Avendano *et al.*

شده است. در اکثر مطالعات آزمایشگاهی در زمینه ناپایداری انگشتی از همین سیستم برای بررسی پارامترهای موثر بر این ناپایداری استفاده می‌شود.

۱-۵ معرفی مطالعه حاضر

در مطالعه حاضر به بررسی ناپایداری انگشتی لزج در محیطی متخلخلی با خواص ناهمسانگرد می‌پردازیم. در نظر داریم این ناپایداری را برای جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی به صورت عددی شبیه‌سازی کنیم. در سیالات غیرنیوتنی باریک شونده، ویسکوزیته با افزایش نرخ برش کاهش می‌یابد ولی به علت اینکه تعیین توزیع نرخ برش در محیط متخلخل میکروسکوپی به راحتی امکان‌پذیر نیست در این مطالعه از میانگین نرخ برش که بر اساس میانگین سرعت ماکروسکوپی جریان بدست می‌آید، استفاده شده است. همچنین مطالعه حاضر بر اساس جابجایی‌های مخلوط شدنی که در آن، ناپایداری بر اساس اختلاف ویسکوزیته بوجود می‌آیند، انجام گرفته است. در جریان‌های مخلوط‌شدنی بر خلاف جریان‌های مخلوط‌نشده، سطح مشترک کاملاً مشخصی بین دو سیال وجود ندارد و تعداد انگشتی‌ها نیز بسیار بیشتر می‌باشد. در جابجایی سیالات نیوتنی، تغییرات ویسکوزیته ناشی از تغییرات در غلظت اجزای شیمیایی موجود در سیال می‌باشد در حالی که در سیالات غیرنیوتنی تغییر ویسکوزیته ناشی از تغییر در غلظت و نرخ برش می‌باشد. این ویژگی وابستگی ویسکوزیته به نرخ برش، تفاوت‌های زیادی بین جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی بوجود می‌آورد که با استفاده از نتایج بدست آمده در فصل شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی به خوبی قابل مشاهده خواهند بود.

همان‌گونه که ذکر شد، در این مطالعه ناپایداری انگشتی در محیط متخلخلی با خواص

ناهمسانگرد مورد بررسی خواهد گرفت. در بیشتر پروژه‌های مهندسی مخازن و نفت، نفوذپذیری و پراکندگی به عنوان مقادیری اسکالر در نظر گرفته می‌شوند که این فرض به اندازه‌ی کافی برای انجام محاسبات مربوطه صحیح نمی‌باشد. در بیشتر فرآیندهای استخراج نفت از مخازن کشف شده، مشاهده می‌شود که با وجود اینکه سیستم‌های اندازه‌گیری خواص زمین شناختی یکسان می‌باشند ولی مقادیر اندازه‌گیری شده از این خواص در جهات مختلف متفاوت می‌باشد. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که انتخاب مقادیر متفاوت برای این خواص در جهات و زوایای مختلف می‌تواند شرایطی واقعی‌تر را برای انجام محاسبات و شبیه‌سازی‌های مورد نیاز، فراهم سازد. در این مطالعه با در نظر گرفتن شرایط ناهمسانگردی برای تانسورهای نفوذپذیری و پراکندگی، سعی در بررسی تأثیر شرایط جدید ایجاد شده بر ناپایداری انگشتی لزج خواهیم داشت.

مطالعات قبلی انجام شده در این زمینه، بیشتر محدود به بررسی ناهمگنی تانسور نفوذپذیری یا وابسته بودن آن به جهتی خاص، بوده‌اند. به عنوان مثال دیویت و هومسی [۱۲] برای نفوذپذیری محیط متخلخل، یک تابع پریودیک تعریف کرده و به بررسی رفتار ناپایداری انگشتی در این شرایط پرداختند. همچنین قسمت و عزایز [۱۴] برای تانسور پراکندگی تابعیت سرعت در جهت x و y در نظر گرفته و به بررسی شکل‌گیری و رشد انگشتی‌ها پرداختند. در مطالعه حاضر برای اولین بار، با در نظر گرفتن خواص ناهمسانگرد برای محیط متخلخل به بررسی این ناپایداری در جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی در جابجایی‌های مخلوط‌شدنی می‌پردازیم.

اهداف مورد نظر در این مطالعه به صورت زیر خلاصه شده‌اند:

- پیاده‌سازی معادلات ریاضی مربوط به ناپایداری انگشتی برای سه نوع جریان متفاوت؛ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال نیوتنی، جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال

غیرنیوتنی و جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی.

- بررسی تحلیل پایداری خطی برای حالت‌های متفاوت ذکر شده در بالا.
- معرفی روش عددی بکار رفته در شبیه‌سازی غیرخطی و بیان الگوریتم بکار گرفته شده.
- بررسی و تحلیل نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی غیرخطی و معرفی مکانیزم‌های رشد انگشتی‌ها.

۱-۶ طرح کلی مطالعه

در فصل دوم، ابتدا معادلات حاکم بر ناپایداری انگشتی برای حالت نیوتنی، به صورت کامل پیاده سازی و معرفی می‌شوند. پس از آن با معرفی مدل کاریو- یاسودا، معادلات را برای حالت غیرنیوتنی بازنویسی می‌کنیم. در این فصل شرایط مرزی و اولیه و همچنین بی‌بعد سازی معادلات نیز مورد بحث قرار می‌گیرند.

در فصل سوم به بررسی تحلیل پایداری خطی مساله می‌پردازیم. چگونگی پیاده سازی معادلات و روند خطی‌سازی آن‌ها به روشنی در این فصل بیان می‌شوند. همچنین بررسی تاثیر تغییرات پارامترهای موجود در جریان بر پایداری و یا عدم پایداری مساله مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرند.

در فصل چهارم به معرفی روش عددی بکار رفته در شبیه سازی غیرخطی می‌پردازیم و به صورت مختصر با تبدیلات فوریه و هارتلی که کاربرد زیادی در این نوع شبیه سازی‌ها دارند، آشنا می‌شویم. روش حل مساله نیز به طور مختصر بیان می‌شود.

در فصل پنجم نتایج حاصل از شبیه سازی غیر خطی به ازای مقادیر متفاوتی از پارامترهای موثر در مسأله، نمایش داده می شوند. مکانیزم های متفاوتی که موجب رشد و پیشروی انگشتی ها در این پدیده می شوند معرفی و در فریم های مشخصی از نتایج بدست آمده، نشان داده می شوند.

نهایتاً در فصل ششم به جمع بندی فعالیت های انجام شده در این مطالعه و بیان کلی نتایج بدست آمده خواهیم پرداخت. برخی از پیشنهادات نیز برای پیشبرد فعالیت های آتی در زمینه این مسأله ارائه خواهد شد.

فصل دوم:

مباحث تئوری

۲-۱ مقدمه

در این بخش به معرفی و پیاده‌سازی معادلات حاکم بر ناپایداری انگشتی لزج می‌پردازیم. در ابتدا این معادلات برای سیال نیوتنی بیان می‌شوند، سپس با معرفی مدل کاریو- یاسودا^۱، معادلات برای این مدل از سیالات غیرنیوتنی بسط داده می‌شوند. در قسمت اول از این بخش معادلات حاکم برای حالتی که یک سیال نیوتنی، سیال نیوتنی دیگری را جابجا می‌کند، بیان می‌شود و پس از آن این معادلات برای دو حالت کلی در بخش غیرنیوتنی مورد بررسی قرار می‌گیرند. همان‌طور که در فصل اول اشاره شد این دو حالت عبارتند از: جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و جابجایی سیال غیرنیوتنی بوسیله‌ی سیال نیوتنی. در ادامه‌ی این بخش برای بررسی تأثیرات ناهمسانگردی نفوذپذیری و پراکندگی محیط متخلخل بر ناپایداری انگشتی، معادلات مربوط به سه نوع حالت جریان مورد بحث بازنویسی می‌کنیم.

۲-۲ فرمول‌بندی مسأله

استفاده از یک محیط متخلخل واقعی همواره با مشکلات و سختی‌های بخصوصی همراه بوده است. این محیط‌ها غالباً کدر و غیر شفاف می‌باشند و در مطالعات آزمایشگاهی شرایط مناسبی برای مشاهده‌ی انواع فرایندها و به صورت خاص تر ناپایداری انگشتی فراهم نمی‌کنند. از طرفی در شبیه‌سازی عددی نیز پیاده‌سازی معادلات برای این‌گونه پدیده‌های پیچیده، با دشواری‌هایی همراه خواهد بود. همچنین استفاده از یک محیط متخلخل واقعی در مقیاس میکروسکوپی جواب قابل قبول و معناداری برای معادلات ناویراستوکس ارائه نمی‌دهند، به همین دلایل با در نظر گرفتن حرکت سیال در مقیاس ماکروسکوپی با فرض حفظ پیوستگی در آن، می‌توان به یک راه ساده و

¹ Carreau-Yasuda

مفید برای حل این مشکل رسید. این دیدگاه ماکروسکوپی به طور گسترده‌ای در تحلیل جریان‌های روی داده در محیط‌های متخلخل، مورد استفاده قرار می‌گیرد. قابل ذکر است که با استفاده از این روش خواص و ویژگی‌های ماکروسکوپی سیال و جریان، از قبیل چگالی، سرعت و فشار هنوز می‌توانند خواصی نقطه‌ای و پیوسته باشند.

یکی از قوانین بسیار معروف و شناخته شده که به بررسی جریان سیالات در محیط متخلخل می‌پردازد، قانون دارسی است که بر اساس همین دیدگاه تبیین شده است. هنری دارسی با انجام آزمایشات متعدد به بررسی چگونگی رفتار جریان آب درون یک محیط متخلخل پرداخت و بر اساس نتایجی که بدست آورد یک معادله‌ی تجربی برای جریان سیالات در محیط متخلخل ارائه کرد. این رابطه که با نام قانون دارسی شناخته می‌شود به صورت زیر بیان می‌گردد:

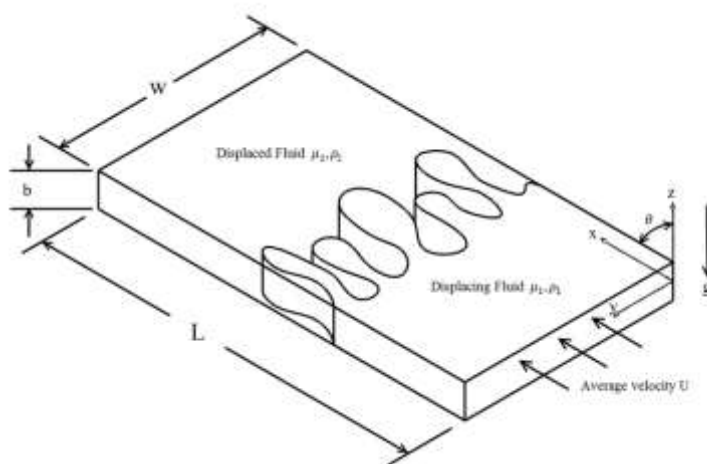
$$v = -\frac{K}{\mu} \nabla(P - \rho g) \quad (1-2)$$

در این رابطه v سرعت جریان سیال در محیط متخلخل، μ ویسکوزیته سیال، K نفوذپذیری محیط متخلخل، P فشار، g شتاب گرانش و ρ چگالی سیال می‌باشد. البته برای این قانون دارای محدودیت‌هایی ذکر شده است که در زیر به آن‌ها اشاره می‌شود:

- این رابطه فقط برای جریان ویسکوز، با سرعت کم قابل استفاده است.
- فقط در مقیاس ماکروسکوپی قابل استفاده است.
- دما در آن ثابت فرض شده است.

با توضیحات داده شده و به منظور بررسی ناپایداری انگشتی در یک محیط متخلخل، معادلات را در یک محیط ساده‌تر به نام سلول هل-شاو پیاده‌سازی کرده و سپس ثابت می‌کنیم که جریان سیال در این سلول بر اساس قانون دارسی که برای بررسی جریان در محیط متخلخل استفاده

می‌شود، قابل بیان خواهد بود. در شکل ۱-۲ تصویری شماتیک از یک سلول هل-شاو که شامل جریان دو بعدی می‌باشد، نشان داده شده است. این سلول از دو صفحه موازی نزدیک بهم به طول L و عرض W تشکیل شده است. فاصله‌ی این دو صفحه از یکدیگر بسیار کم می‌باشد به طوری که شرط $b \ll W$ برای ایجاد شرایط خاص این سلول همیشه باید برقرار باشد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنیم b فاصله بین دو صفحه موازی را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۲: تصویری شماتیک از یک سلول هل-شاو

جابجایی دوبعدی دو سیال تراکم‌ناپذیر و نیوتنی را در نظر بگیرید که ویسکوزیته‌های متفاوتی داشته و توسط سطح مشترکی از یکدیگر جدا شده‌اند. در این مساله طبق شکل، x در جهت جریان و y موازی با سطح مشترک در نظر گرفته شده است. برای این جریان، قانون بقای جرم به صورت معادله پیوستگی به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2-2)$$

همان‌طور که می‌دانیم در جریان‌های بسیار آرام و خزشی مانند جریان‌های موجود در محیط متخلخل، از تاثیر نیروهای اینرسی در مقابل نیروهای ویسکوز صرف‌نظر می‌شود، بنابراین معادله

حرکت به صورت زیر ساده می‌شود:

$$-\nabla \cdot \tau = \nabla P \quad (۳-۲)$$

در این معادلات u بردار سرعت، P فشار و τ تانسور تنش می‌باشد. برای صفحات نزدیک بهم چون برش اصلی در جهت z می‌باشد، می‌توان معادلات بالا را به صورت زیر در جهت x و y بازنویسی کنیم.

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(-\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (۴-۲)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(-\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (۵-۲)$$

با استفاده از معادلات بالا، اگر ویسکوزیته را ثابت فرض کنیم، پس از انتگرال‌گیری به رابطه‌ی زیر برای u می‌رسیم.

$$u = \frac{b^2}{2\mu} \left(\frac{z^2}{b^2} - \frac{1}{4} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \quad (۶-۲)$$

$$u = -6 \left(\frac{z^2}{b^2} - \frac{1}{4} \right) \bar{u} \quad (۷-۲)$$

در این رابطه $\bar{u}$ سرعت انتگرال‌گیری شده در جهت z یعنی ضخامت سلول می‌باشد که اصطلاحاً به آن سرعت میانگین‌گیری شده در عمق گفته می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{u} = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} u dz}{\int_{-b/2}^{b/2} dz} = -\frac{b^2}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (۸-۲)$$

مشابه همین رابطه، برای مولفه سرعت در جهت y نیز رابطه‌ای بدست می‌آید. با مقایسه‌ی معادله (۸-۲) و معادله (۱-۲) یا همان قانون دارسی در حالتی که از تاثیرات نیروی گرانش صرف‌نظر شده است، متوجه می‌شویم معادله‌ی حرکت درون سلول هل-شاو دقیقاً برابر با قانون

دارسی در محیط متخلخلی می‌باشد که دارای نفوذپذیری $b^2/12$ باشد. به عبارت دیگر می‌توان این رابطه را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\bar{u} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad k = \frac{b^2}{12} \quad (9-2)$$

بنابراین اثبات می‌شود که جریان درون سلول هل-شاو، مشابه با جریان دوبعدی تراکم‌ناپذیر در محیط متخلخل می‌باشد.

برای نوشتن معادلات حاکم بر ناپایداری انگشتی طبق شکل ۲-۱، سیال تراکم‌ناپذیری از سمت راست با سرعت ثابت U درون سلول هل-شاو تزریق می‌شود. فاز ۱ سیال جابجاکننده با ویسکوزیته‌ی کمتر و فاز ۲ سیال جابجاشونده با ویسکوزیته‌ی بیشتر می‌باشد. مساله موجود در سلول مستقیم الخط هل-شاو با فرضیات زیر فرمول‌بندی شده است:

- هر دو سیال تراکم‌ناپذیرند.
- محیط متخلخل همگن است و دارای نفوذپذیری ثابتی می‌باشد.
- پراکندگی در سرتاسر محیط متخلخل همسانگرد است.
- از نیروهای اینرسی صرف‌نظر شده است.
- از گرانش صرف‌نظر شده است.

۲-۳ سیالات نیوتنی

سیال نیوتنی، ماده‌ای است که در آن تنش برشی بدون وجود تنش تسلیم (صفر بودن تنش برشی در نرخ برش صفر) تنها تابعی خطی از نرخ برش است. در این بخش با فرض نیوتنی بودن سیالات درگیر در ناپایداری به معرفی معادلات حاکم بر مسأله، بی‌بعد سازی و تبدیل آن‌ها به فرم تابع جریان-ورتیسیتی می‌پردازیم.

۲-۳-۱ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال نیوتنی

در جابجایی دو سیال تراکم‌ناپذیر و نیوتنی در جریانی مخلوط شدنی، معادلات پیوستگی و مومنتوم در محیط متخلخلی با خواص همسانگرد به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2-10)$$

$$\nabla P = -\frac{\mu}{k} u \quad (2-11)$$

معادله‌ی (۲-۱۱) همان معادله داریسی است که در آن u به صورت برداری $u = (u, v)$ تعریف می‌شود. با معرفی این دو معادله مشاهده می‌شود که هنوز رابطه‌ای که در آن بتوان تغییرات ویسکوزیته را اعمال کرد، وجود ندارد. همان‌طور که می‌دانیم در جابجایی‌های مخلوط‌شدنی ویسکوزیته تابعی از غلظت می‌باشد و تغییرات غلظت نیز از معادله‌ی کانوکشن-دیفیوژن^۱ پیروی می‌کند. بنابراین معادله سوم حاکم بر این ناپایداری به صورت معادله (۲-۱۲) در نظر گرفته می‌شود و در نهایت ویسکوزیته را تابعی از غلظت به صورت معادله (۲-۱۳) بیان می‌کنیم:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c = \nabla \cdot D \nabla c \quad (2-12)$$

$$\mu = \mu(c) \quad (2-13)$$

برای تشریح کامل مسأله و مشخص شدن روابط حاکم بر ناپایداری باید رابطه‌ی بین ویسکوزیته و غلظت را نیز تعیین کرد. معمولاً برای راحتی در حل‌های عددی این ارتباط به صورت تغییرات نمایی ویسکوزیته با غلظت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d \ln(\mu/\mu_1)}{d(c/c_1)} = -Cons. \quad (2-14)$$

¹ Convective-diffusion equation

این رابطه اولین بار توسط تن و هومسی [۲۴، ۷] و پس از آن بوسیله‌ی زیمرمن و هومسی [۵۵] به کار گرفته شد. پس از انتخاب چنین رابطه‌ای برای ویسکوزیته و غلظت، در اکثر تحقیقات انجام شده بعدی نیز از همین رابطه استفاده شد. لازم بذکر است که هیچ التزام محدودکننده‌ای برای استفاده از این رابطه وجود ندارد و می‌توان از سایر رابطه‌هایی که رفتاری یکنواخت از خود بروز می‌دهند، استفاده کرد [۵۶-۵۸].

۲-۳-۲ شرایط مرزی و اولیه

شرایط مرزی اعمال شده به معادلات حاکم در جهت جریان و عمود بر جهت جریان بترتیب در معادلات (۱۵-۲) و (۱۶-۲) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} x = 0 & ; & u = U, & v = 0, & c = c_1 \\ x = L & ; & u = U, & v = 0, & c = 0 \end{cases} \quad (15-2)$$

$$(u, c)(x, 0, t) = (u, c)(x, W, t) \quad (16-2)$$

W در این روابط طول سلول در جهت y می‌باشد. با دقت در شرایط مرزی متوجه می‌شویم معادله (۱۶-۲) یک شرط مرزی پریودیک می‌باشد که اولین بار توسط تن و هومسی [۲۴] در شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی مورد استفاده قرار گرفت. این شرط مرزی اگرچه در ابتدا یک شرط محدود کننده نسبت به سایر شرایط مرزی به نظر می‌رسد ولی در ادامه متوجه می‌شویم که برای استفاده از روش طیفی که از روش‌های دقیق و پرکاربرد در شبیه‌سازی و تحلیل مسائل مکانیک سیالات است، به این شرط نیاز پیدا خواهیم کرد، چرا که اصولاً برای استفاده از این روش به شرایط مرزی پریودیک نیازمند خواهیم بود.

شرایط اولیه نیز به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$u = U, \quad v = 0 \quad \forall (x, y) \quad (17-2)$$

$$c = c_0(x, y, t = 0) \quad \forall (x, y) \quad (18-2)$$

بر اساس این شرایط، در لحظه $t = 0$ ، توزیع دو بعدی در جهت x و y برای غلظت و توزیع خطی در جهت x برای سرعت در نظر گرفته می‌شود.

۲-۳-۳ بی بعد سازی

بی بعد سازی معادلات حاکم بر ناپایداری انگشتی به دلیل تعدد پارامترهای درگیر در مسأله تا حدودی متفاوت از بی بعد سازی های معمول در مکانیک سیالات می باشد. به طور معمول در اکثر مطالعات از L برای طول و از L/U برای زمان در بی بعد سازی استفاده می شود در حالی که در این مسأله برای بررسی و مشاهده بهتر فرایند پخش در ناپایداری، طول را با D/U و زمان را بوسیله D/U^2 بی بعد می کنیم. برای بی بعد سازی ویسکوزیته و غلظت از ویسکوزیته و غلظت سیال جابجاکننده یا همان μ_1 و c_1 و برای فشار از $\mu_1 D$ استفاده می کنیم. در مورد بی بعد سازی نفوذپذیری نیز به این علت که این پارامتر در محیط متخلخل مورد بحث ثابت در نظر گرفته شده است، می توان آن را همراه با ویسکوزیته به صورت μ/k بیان کرد به عبارت دیگر در تمام معادلاتی که از این پس مورد مطالعه قرار می گیرند نماد μ نشاندهنده نسبت ویسکوزیته به نفوذپذیری یعنی μ/k می باشد. در نهایت بر اساس روابط ذکر شده پارامترهایی بی بعد مسأله به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$\hat{x} = \frac{(x, y)}{\frac{D}{U}} \quad ; \quad \hat{u} = \frac{u}{U} \quad ; \quad t^* = \frac{t}{\frac{D}{U^2}} \quad (19-2)$$

$$c^* = \frac{c}{c_1} \quad ; \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_1} \quad ; \quad P^* = \frac{P}{(\mu_1 D)/k}$$

برای راحتی کار، سیستم مطالعاتی را به صورت لاگرانژی در نظر می گیریم. بدین صورت که

فرض می‌کنیم کل دامنه مطالعاتی با سرعت ثابت U حرکت می‌کنند، بنابراین معادلات موجود به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$x^* = \hat{x} - it^* \quad ; \quad u^* = \hat{u} - i \quad (20-2)$$

در این رابطه i بردار یکه در جهت x می‌باشد. بدین معنی که کل سیستم، فقط در جهت x با سرعت U حرکت می‌کند. با توضیحات ذکر شده در نهایت معادلات حاکم پس از بی‌بعدسازی به صورت زیر مرتب می‌شوند:

$$\nabla \cdot u^* = 0 \quad (21-2)$$

$$\nabla P^* = -\mu^*(u^* + i) \quad (22-2)$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla c^* = \nabla^2 c^* \quad (23-2)$$

$$\frac{d(\ln \mu^*)}{dc^*} = -R \quad (24-2)$$

شرایط مرزی نیز به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{cases} x^* = -t^* & ; & u^* = 0; & v^* = 0; & c^* = 1 \\ x^* = \frac{LU}{D} - t^* & ; & u^* = 0; & v^* = 0; & c^* = 0 \end{cases} \quad (25-2)$$

$$(u^*, v^*, c^*)(x^*, 0, t^*) = (u^*, v^*, c^*)(x^*, WU/D, t^*) \quad (26-2)$$

رابطه بی‌بعد شده‌ی بین ویسکوزیته و غلظت نیز به صورت زیر گزارش می‌شود:

$$\mu^* = e^{R(1-c^*)} \quad (27-2)$$

در این روابط، دو پارامتر بی‌بعد دیگر که مربوط به هندسه‌ی مسأله می‌باشند و تغییرات آن‌ها به صورت گسترده‌ای در بررسی رفتار انگشتی‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد به صورت $Pe = \frac{LU}{D}$ و $A = \frac{L}{W}$ تعریف می‌شوند. Pe همان عدد پکلت است که در زمینه‌ی نفوذ یا انتقال جرمی مورد بحث

قرار می‌گیرد و A نسبت طول به عرض محیط مورد مطالعه، یک خاصیت کاملاً فیزیکی می‌باشد. در واقع عدد پکلت نسبت نیروهای کانوکتیو^۱ به دیفیوزیو^۲ و A نیز تعداد انگشتی‌ها را در این ناپایداری نشان می‌دهند. شرایط مرزی را با توجه به دو پارامتر جدید تعریف شده، مجدداً به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم. برای راحتی کار نیز، از این به بعد علامت ستاره از روی معادلات بی‌بعد برداشته می‌شود.

$$\begin{cases} x = -t & ; & u = 0 ; & v = 0 ; & c = 1 \\ x = Pe - t & ; & u = 0 ; & v = 0 ; & c = 0 \end{cases} \quad (28-2)$$

$$(u, v, c)(x, 0, t) = (u, v, c)(x, Pe/A, t) \quad (29-2)$$

۲-۳-۴ تبدیل معادلات به فرم تابع جریان - ورتیسیتی^۳

با بررسی مطالعات و تحقیقاتی که به حل جریان در پدیده‌های مختلف روی داده در مکانیک سیالات می‌پردازند، متوجه می‌شویم که فقط بخش کوچکی از این مطالعات، معادلات حاکم بر جریان را به صورت مستقیم مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند. در واقع بخش قابل توجهی از آن‌ها با تبدیل معادلات به فرم تابع جریان - ورتیسیتی و حذف محاسبات مربوط به فشار در معادلات حاکم، با روشی بسیار کوتاه‌تر و آسان‌تر به بررسی و تحلیل مسأله می‌پردازند. به همین دلیل در مطالعه‌ی حاضر نیز ابتدا معادلات را به فرم تابع جریان - ورتیسیتی تبدیل می‌کنیم و سپس با استفاده از همین معادلات به شبیه‌سازی ناپایداری انگشتی می‌پردازیم. روابط اولیه بین این تبدیلات به صورت زیر موجود می‌باشد:

¹ Convective force

² Diffusive force

³ Streamfunction-Vorticity Formulation

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (۳۰-۲)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (۳۱-۲)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (۳۲-۲)$$

با استفاده از این روابط به تبدیل معادلات حاکم می‌پردازیم. معادله‌ی پیوستگی به صورت زیر همیشه برقرار است و از فهرست معادلات حاکم خارج می‌شود.

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (۳۳-۲)$$

با کرل گرفتن از معادله‌ی مومنوم یعنی معادله (۲۲-۲) جمله فشار نیز از معادلات حذف می‌شود (می‌دانیم که کرل گرادیان صفر است).

$$\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (u + 1) \frac{\partial \mu}{\partial y} - v \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad (۳۴-۲)$$

$$\rightarrow \omega = \frac{d\mu}{dc} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

$$\omega = \frac{d \ln \mu}{dc} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (۳۵-۲)$$

$$\rightarrow \omega = -R \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

معادله کانوکشن-دیفیوژن نیز با استفاده از روابط ذکر شده به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} = \nabla^2 c \quad (۳۶-۲)$$

در نهایت به طور خلاصه به سه فرمول نهایی زیر برای حالت نیوتنی می‌رسیم:

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (۳۷-۲)$$

$$\omega = -R \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (۳۸-۲)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} = \nabla^2 c \quad (2-39)$$

۲-۴ سیالات غیرنیوتنی

در بخش سیالات نیوتنی ذکر شد که در سیالات نیوتنی، تنش برشی تنها تابعی از نرخ برش است. بر این اساس سیال غیرنیوتنی را می‌توان به سادگی به صورت سیالی که فاقد رفتار نیوتنی است، تعریف نمود. در سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر، تنش برشی بوسیله معادله زیر به نرخ برش مربوط می‌شود:

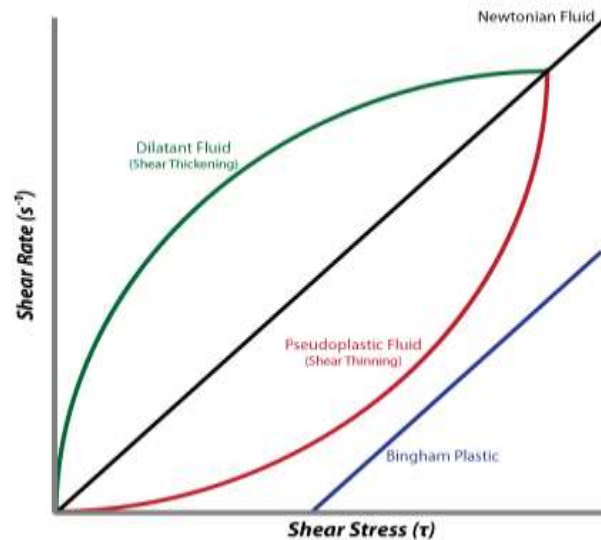
$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2-40)$$

در این رابطه μ ویسکوزیته‌ی سیال و $\dot{\gamma}$ نرخ برش می‌باشد. برای سیال نیوتنی ویسکوزیته در دما و فشار ثابت، مقداری ثابت دارد. برای حالتی که ویسکوزیته به نرخ برش وابسته باشد، این معادله اصلاح شده و رابطه‌ای برای سیال نیوتنی تعمیم‌یافته به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tau = \mu(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (2-41)$$

که در آن μ تابعی از نرخ برش $\dot{\gamma}$ است. با توجه به چگونگی تغییرات ویسکوزیته ظاهری با نرخ برش، سیالات به دو نوع باریک‌شونده و یا ضخیم‌شونده دسته‌بندی می‌شوند. این‌گونه از سیالات جزو سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان هستند که خود به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند؛ سیالاتی دارای تنش تسلیم و سیالاتی فاقد تنش تسلیم. در موادی که دارای تنش تسلیم هستند شرط جریان ماده، رسیدن تنش به حد مشخصی برای شروع سیلان آن است. از جمله این سیالات

می‌توان به سیال هرشل-باکلی و سیال بینگهام اشاره کرد. سیال دایلاتنت^۱ و سیال شبه پلاستیک نیز جزو سیالات فاقد تنش تسلیم می‌باشند.



شکل ۲-۲: منحنی‌های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان

تاکنون مدل‌های متعددی به عنوان پایه برای این مواد ارائه شده است، اما پرکاربردترین و ساده‌ترین مدل حاکم بر آن‌ها مدل توانی^۲ است که در آن تنش برشی تابعی از توان n ام نرخ برش می‌باشد.

$$\mu = K\dot{\gamma}^{n-1} \quad (۲-۴۲)$$

در این رابطه، n شاخص پاور-لو و K فاکتور ثابتی با واحد $Pa.s^n$ می‌باشد. یکی از اشکالات این مدل، پیش‌بینی ویسکوزیته صفر در نرخ برش بی‌نهایت برای سیالات شبه پلاستیک است. از میان مدل‌های دیگری که این مشکل را برطرف می‌کنند می‌توان به مدل کراس، مدل کاریو-یاسودا و راینر-فیلیپوف اشاره نمود. در این مطالعه، از مدل کاریو-یاسودا برای نشان دادن رفتار

^۱ Dilatant fluid

^۲ Power-Law

باریک‌شوندگی سیال غیرنیوتنی، استفاده می‌شود. این مدل تطابق بسیار خوبی با گسترده وسیعی از داده‌های آزمایشگاهی که در آن‌ها ویسکوزیته با نرخ برش تغییر می‌کند، دارد و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = [1 + (\lambda \dot{\gamma})^a]^{(n-1)/a} \quad (43-2)$$

در این معادله μ_0 ویسکوزیته در نرخ برش صفر، μ_∞ ویسکوزیته در نرخ برش نهایی، λ ثابت زمانی و n شاخص توانی است که شیب نمودار تغییرات $\mu(\dot{\gamma})$ را نشان می‌دهد. این نمودار در شکل ۳-۲ به نمایش درآمده است. همچنین در این رابطه، a پارامتر بی‌بعدی است که انتقال از ناحیه‌ی نرخ برش صفر به ناحیه توانی را نشان می‌دهد. برای بسیاری از محلول‌های پلیمری، این معادله به ازای $\mu_\infty = 0$ و $a = 2$ تطابق بسیار خوبی با نتایج آزمایشگاهی بدست آمده دارد. با در نظر گرفتن این مقادیر معادله‌ی بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\mu_1 = \mu_0 [1 + (D_e V)^2]^{(n-1)/2} \quad (44-2)$$

در این معادله مشاهده می‌شود که به ازای $n = 1$ ، معادله موجود تبدیل به معادله حالت نیوتنی می‌شود. از آنجایی که برش اصلی در سلول هل-شاو در جهت عمود بر صفحات اصلی اتفاق می‌افتد، بنابراین میانگین نرخ برش از تقسیم سرعت سیال بر فاصله‌ی دو صفحه به صورت زیر بدست می‌آید:

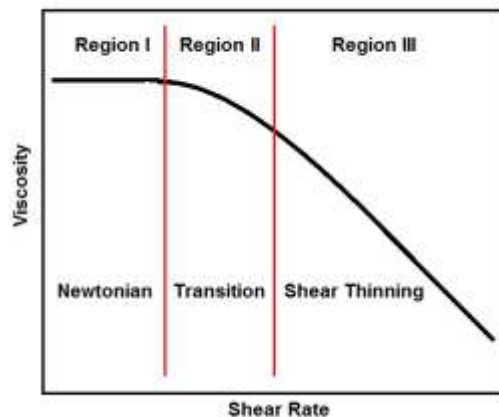
$$\bar{\dot{\gamma}} = \frac{V}{b}, \quad V^2 = u^2 + v^2 \quad (45-2)$$

با این تعاریف ویسکوزیته سیال غیرنیوتنی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mu = \mu_0 [1 + (D_e V)^2]^{(n-1)/2} \quad (46-2)$$

در این رابطه D_e عددی بی‌بعد به نام عدد دبورا می‌باشد که به صورت $D_e = \frac{\lambda U}{b}$ تعریف می‌شود.

پس از آشنایی با سیالات غیرنیوتنی، به بررسی معادلات حاکم بر ناپایداری انگشتی در حالتی که یکی از سیالات درگیر در آن غیرنیوتنی باشد، می‌پردازیم.



شکل ۳-۲: نمودار تغییرات μ/μ_0 نسبت به $\lambda\dot{\gamma}$ برای مدل باریک‌شونده کاریو- یاسودا

۱-۴-۲ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی

در این حالت جابجایی، فرض می‌کنیم که یک سیال غیرنیوتنی با خاصیت باریک‌شوندگی و ویسکوزیته ظاهری $\mu_1(\dot{\gamma})$ ، سیال نیوتنی با ویسکوزیته μ_2 را جابجا می‌کند. همان‌طور که پیش از این ذکر شد، برای سیال غیرنیوتنی، مدل کاریو- یاسودا را انتخاب کردیم. این مدل رفتار یک سیال باریک‌شونده که در آن ویسکوزیته با افزایش نرخ برش کاهش پیدا می‌کند را نشان می‌دهد. ویسکوزیته سیال جابجاکننده غیرنیوتنی با این مدل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mu_1 = \mu_0 [1 + (D_e V)^2]^{(n-1)/2} \quad (۴۷-۲)$$

در این رابطه μ_0 ویسکوزیته در برش صفر سیال باریک‌شونده می‌باشد. ویسکوزیته هر دو سیال با استفاده از ویسکوزیته در برش صفر سیال غیرنیوتنی، بی‌بعد می‌شوند که در نتیجه‌ی آن به معادلات بی‌بعدی به صورت زیر برای ویسکوزیته‌ها می‌رسیم:

$$\mu_1^* = [1 + (D_e V)^2]^{(n-1)/2} \quad ; \quad \mu_2^* = \frac{\mu_2}{\mu_0} \quad (48-2)$$

رابطه‌ی بی‌بعد بین ویسکوزیته و غلظت را نیز به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mu = A \exp\{R_{ST}(1 - c)\} \quad (49-2)$$

با توجه به شرایط مرزی مربوط به غلظت، ثابت‌های موجود در این رابطه یعنی A و R_{ST} را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \mu = A = \mu_1^* = [1 + (D_e V)^2]^{\frac{(n-1)}{2}} & c = 1 \\ \mu = A \exp(R_{ST}) = \mu_2^* = \frac{\mu_2}{\mu_0} & c = 0 \end{cases} \quad (50-2)$$

$$R_{ST} = -\left(\frac{n-1}{2}\right) \ln[1 + (D_e V)^2] + R \quad ; \quad R = \ln\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)$$

با جایگذاری روابط بدست‌آمده برای A و R_{ST} در معادله (49-2)، به رابطه‌ی نهایی زیر می‌رسیم:

$$\mu = e^{R(1-c)} (1 + (D_e V)^2)^{c(n-1)/2} \quad (51-2)$$

قابل ذکر است که اگر در رابطه بالا مقادیر D_e یا n را برابر صفر قرار دهیم به همان رابطه مربوط بین ویسکوزیته و غلظت در حالت نیوتنی خواهیم رسید. در حالت غیرنیوتنی همان طور که مشاهده می‌شود، ویسکوزیته علاوه بر غلظت، تابعی از سرعت $V^2 = u^2 + v^2$ نیز می‌باشد. در این حالت معادله بی‌بعد شده مومنتوم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla p^* = -\mu^*(V^2, c)[u^* + i] \quad (52-2)$$

همانند حالت نیوتنی با کرل گرفتن از معادله (52-2) و استفاده از روابط تابع جریان-

ورتیسیته به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\mu\omega = \frac{d\mu}{dc}N + 2\frac{\partial\mu}{\partial V^2}M \rightarrow \omega = \frac{d\ln\mu}{dc}N + 2\frac{\partial\ln\mu}{\partial V^2}M \quad (53-2)$$

در این رابطه جملات غیر خطی M و N به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$N = -v \frac{\partial c}{\partial x} + u \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y} \quad (54-2)$$

$$M = (u+1)^2 \frac{\partial u}{\partial y} - v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + (u+1)v \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (55-2)$$

با استفاده از معادله‌ی بدست آمده برای ویسکوزیته در حالت غیرنیوتنی یعنی معادله (51-2)،

روابط زیر نیز بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial c} = -R + \left(\frac{n-1}{2} \right) \ln(1 + D_e^2 V^2) \quad (56-2)$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial V^2} = c \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{D_e^2}{1 + D_e^2 V^2} \right) \quad (57-2)$$

با جایگذاری معادلات (56-2) و (57-2) در رابطه‌ی (53-2) معادله‌ی ورتیسیتی به صورت زیر

نمایش داده می‌شود:

$$\omega = c(n-1) \left(\frac{D_e^2}{1 + D_e^2 V^2} \right) M - RN + \left(\frac{n-1}{2} \right) \ln(1 + D_e^2 V^2) N \quad (58-2)$$

در این رابطه نیز اگر مقادیر D_e یا n را برابر صفر قرار دهیم به حالتی که سیال نیوتنی توسط سیال

نیوتنی جابجا می‌شد، خواهیم رسید.

۲-۴-۲ جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی

در این قسمت نیز همانند حالت قبل، از یک سیال غیرنیوتنی استفاده می‌کنیم با این تفاوت که در

این حالت سیال نیوتنی، سیال غیرنیوتنی را جابجا می‌کند. با این شرایط، ویسکوزیته سیال

غیرنیوتنی که در این جابجایی نقش سیال جابجاشده را دارد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mu_2 = \mu_0 [1 + (D_e V)^2]^{(n-1)/2} \quad (59-2)$$

همانند معادلات بدست آمده در حالت قبل، روابط را بی بعد کرده و ثابت های آن را بدست می آوریم:

$$\mu_1^* = 1 \quad ; \quad \mu_2^* = \frac{\mu_0}{\mu_1} [1 + (D_e V)^2]^{(n-1)/2} \quad (۶۰-۲)$$

$$\begin{cases} \mu = A = 1 & c = 1 \\ \mu = A \exp(R_{ST}) = \frac{\mu_0}{\mu_1} [1 + (D_e V)^2]^{(n-1)/2} & c = 0 \end{cases} \quad (۶۱-۲)$$

$$R_{ST} = \left(\frac{n-1}{2} \right) \ln[1 + (D_e V)^2] + R \quad ; \quad R = \ln \left(\frac{\mu_0}{\mu_1} \right)$$

رابطه ی بین ویسکوزیته و غلظت نیز به صورت زیر بیان می شود:

$$\mu = e^{R(1-c)} (1 + (D_e V)^2)^{(1-c)(n-1)/2} \quad (۶۲-۲)$$

با استفاده از معادله (۶۲-۲) روابط زیر را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial c} = -R - \left(\frac{n-1}{2} \right) \ln(1 + D_e^2 V^2) \quad (۶۳-۲)$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial V^2} = (1-c) \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{D_e^2}{1 + D_e^2 V^2} \right) \quad (۶۴-۲)$$

همانند حالت قبل با جایگذاری روابط، معادله ورتیسیتی به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \omega = (1-c)(n-1) \left(\frac{D_e^2}{1 + D_e^2 V^2} \right) M - RN \\ - \left(\frac{n-1}{2} \right) \ln(1 + D_e^2 V^2) N \end{aligned} \quad (۶۵-۲)$$

در این رابطه M و N جملات غیرخطی هستند که پیش از این در معادلات (۵۴-۲) و (۵۵-۲)

معرفی شده بودند.

۵-۲ جابجایی در محیط متخلخل با خواص ناهمسانگرد

معادله دارسی که به منظور بررسی جریان سیال در محیط متخلخل بکار می رود، رابطه ی بین

سرعت و گرادیان فشار را برای محیط متخلخلی با نفوذپذیری ناهمسانگرد به صورت زیر بیان

می‌کند:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2-66)$$

در این رابطه q دبی، k_{ij} اجزاء تانسور نفوذپذیری، μ ویسکوزیته سیال و p فشار استاتیک می‌باشد. با توجه به قانون تقابل^۱، تانسور نفوذپذیری متقارن بوده و رابطه‌ی زیر در آن برقرار می‌باشد:

$$K_{ij} = K_{ji} \quad (2-67)$$

معمولا در مطالعاتی که بررسی ناهمسانگردی در یک پدیده می‌پردازند، از دو دستگاه مختصات به صورت روشن^۲ و خاموش^۳ استفاده می‌کنند. از جمله این مسائل می‌توان به انتقال حرارت هدایتی، ثابت‌های دی‌الکتریک، نفوذپذیری و پراکندگی مغناطیسی و مدول‌های مکانیکی اشاره کرد. در مطالعه حاضر به بررسی رفتار ناهمسانگردی نفوذپذیری و پراکندگی بر ناپایداری انگشتی می‌پردازیم. بدین منظور مطابق شکل، جهت‌های سیستم مختصات روشن (x_1, x_2, x_3) ، جهت‌هایی می‌باشند که در آن‌ها مقادیر نفوذپذیری و پراکندگی با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی به صورت مستقیم بدست می‌آیند. بنابراین ترم‌های غیر قطری این خواص در سیستم مختصاتی روشن برابر با صفر می‌باشد. به عنوان مثال قانون داری در این سیستم مختصاتی به صورت زیر بیان می‌شود:

¹ Reciprocity law

² On-axis coordinate

³ Off-axis coordinate

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}_{on} = -\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{K}_{22} \end{bmatrix}_{on} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x}_1 \\ \frac{\partial p}{\partial y}_2 \end{Bmatrix} \quad (68-2)$$

با این تعریف، سیستم مختصاتی خاموش، به صورت هر سیستم دلخواهی که با زاویه‌ای نسبت به سیستم مختصات روشن قرار بگیرد، تعیین می‌شود. در واقع این سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[T(-\theta)]q_{off} = -\frac{1}{\mu}K_{on}[T(-\theta)]\nabla p_{off} \quad (69-2)$$

که در آن $[T(\theta)]$ تانسور دوران است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[T(\theta)] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (70-2)$$

با استفاده از معادله (69-2)، معادله داری در سیستم مختصات خاموش به صورت زیر بدست می‌آید:

$$q_{off} = -\frac{1}{\mu}[T(-\theta)]^{-1}K_{on}[T(-\theta)]\nabla p_{off} \quad (71-2)$$

این معادله به صورتی ساده‌تر، به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$q_{off} = -\frac{1}{\mu}K_{off}\nabla p_{off} \quad (72-2)$$

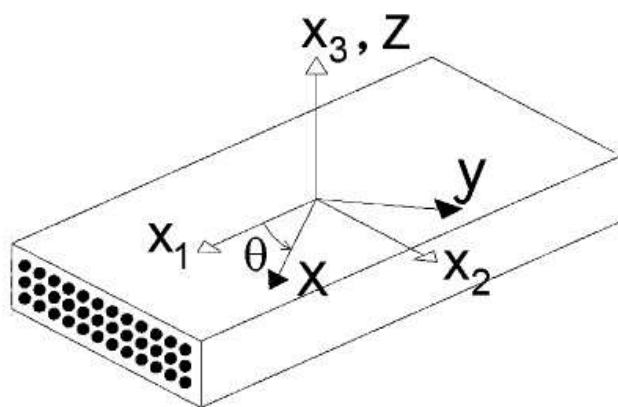
با استفاده از معادلات (71-2) و (72-2) و خواص تعامل در تانسور دوران $[T(\theta)]^{-1} = [T(-\theta)]$ داریم:

$$K_{off} = [T(\theta)]K_{on}[T(-\theta)] \quad (73-2)$$

در نهایت با استفاده از معادلات (70-2) و (73-2)، اجزاء تانسور نفوذپذیری در سیستم خاموش به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}\cos^2\theta + \bar{K}_{22}\sin^2\theta & (\bar{K}_{11} - \bar{K}_{22})\sin\theta\cos\theta \\ (\bar{K}_{11} - \bar{K}_{22})\sin\theta\cos\theta & \bar{K}_{11}\sin^2\theta + \bar{K}_{22}\cos^2\theta \end{bmatrix} \quad (۷۴-۲)$$

که در این رابطه $\bar{K}_{ij}$ و K_{ij} به ترتیب اجزای تانسور نفوذپذیری در جهت‌های روشن و خاموش می‌باشند.



شکل ۲-۴: تصویری شماتیک از سیستم مختصات خاموش و روشن

قانون اول فیک^۱ نیز در مطالعه حاضر برای مدل کردن انتقال جرم در محیط متخلخل بکار می‌رود. این قانون در جهت سیستم روشن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{Bmatrix}_{on} = -\rho \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{D}_{22} \end{bmatrix}_{on} \begin{Bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial c}{\partial y} \end{Bmatrix}_{1,2} \quad (۷۵-۲)$$

که در این رابطه j جریان جرمی ملکولی، ρ چگالی، $\bar{D}$ ضریب تانسور پراکندگی در سیستم مختصات روشن و c کسر جرمی می‌باشد. قانون اول فیک در سیستم مختصات خاموش به صورت زیر بیان می‌شود:

¹ Fick's first law

$$\begin{Bmatrix} j_x \\ j_y \end{Bmatrix}_{off} = -\rho \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}_{off} \begin{Bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial c}{\partial y} \end{Bmatrix}_{off} \quad (۷۶-۲)$$

که در این رابطه D ضریب تانسور پراکندگی در سیستم مختصات خاموش می باشد. بدست آوردن روابط مربوط به تانسور پراکندگی در سیستم مختصات خاموش و روشن، دقیقاً مطابق با روابط مربوط به تانسور نفوذپذیری می باشد. بنابراین مطابق معادله (۷۴-۲)، اجزاء تانسور پراکندگی در سیستم مختصات روشن به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11}\cos^2\theta + \bar{D}_{22}\sin^2\theta & (\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22})\sin\theta\cos\theta \\ (\bar{D}_{11} - \bar{D}_{22})\sin\theta\cos\theta & \bar{D}_{11}\sin^2\theta + \bar{D}_{22}\cos^2\theta \end{bmatrix} \quad (۷۷-۲)$$

در این حالت، بی بعد سازی معادلات حاکم با اندکی تغییر نسبت به حالت همسانگرد و با در نظر گرفتن شرایط ناهمسانگردی صورت می گیرد. در این قسمت، از D_0/U و D_0/U^2 به ترتیب برای بی بعد کردن طول و زمان و از $\mu_1/(D_0K_0)$ برای بی بعد سازی فشار استفاده می شود. همچنین برای خواص نفوذپذیری و پراکندگی روابطی به صورت $K_x = K_0K_1$, $K_y = K_0K_2$ و $D_x = D_0D_1$, $D_y = D_0D_2$ در نظر گرفته می شوند که در آن ها K_0 و D_0 به ترتیب میانگین نفوذپذیری و میانگین پراکندگی می باشند و برای بی بعد سازی روابط از آن ها استفاده می شود. سایر روابط بی بعد سازی نیز همانند حالت همسانگرد می باشد.

با استفاده از روابط بی بعد سازی جدید، معادلات حاکم به صورت زیر بیان می شوند:

$$\nabla \cdot u^* = 0 \quad (۷۸-۲)$$

$$\nabla P^* = -\frac{\mu^*}{K^*}(u^* + i) \quad (۷۹-۲)$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + u^* \cdot \nabla c^* = \nabla \cdot (D^* \nabla c^*) \quad (۸۰-۲)$$

$$K = K_0 \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^* \cos^2 \theta + \bar{K}_{22}^* \sin^2 \theta & (\bar{K}_{11}^* - \bar{K}_{22}^*) \sin \theta \cos \theta \\ (\bar{K}_{11}^* - \bar{K}_{22}^*) \sin \theta \cos \theta & \bar{K}_{11}^* \sin^2 \theta + \bar{K}_{22}^* \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (۸۱-۲)$$

$$= K_0 K^*$$

$$D = D_0 \begin{bmatrix} \bar{D}_{11}^* \cos^2 \theta + \bar{D}_{22}^* \sin^2 \theta & (\bar{D}_{11}^* - \bar{D}_{22}^*) \sin \theta \cos \theta \\ (\bar{D}_{11}^* - \bar{D}_{22}^*) \sin \theta \cos \theta & \bar{D}_{11}^* \sin^2 \theta + \bar{D}_{22}^* \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (۸۲-۲)$$

$$= D_0 D^*$$

۲-۵-۱ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال نیوتنی

در این قسمت معادلات حاکم بر جریان سیالات نیوتنی در حالتی که محیط متخلخل خواصی ناهمسانگرد دارد را به فرم تابع جریان-ورتیسیتی تبدیل می‌کنیم. بدین منظور با استفاده از معادلات (۲-۳۰) تا (۲-۳۲) و روش بکار گرفته شده در قسمت‌های قبلی، معادلات را به صورت خلاصه‌ی زیر بیان می‌کنیم:

$$\omega = \left(\frac{2}{\alpha_K + 1 + (\alpha_K - 1) \cos(2\beta_K)} \right) \left[-F * A - G * B - H * E \right. \\ \left. + (1 - \alpha_K) \cos(2\beta_K) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right] \quad (۸۳-۲)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} = L * \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + M * \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + Q * \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} \quad (۸۴-۲)$$

که در این روابط داریم:

$$A = R \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} \quad ; \quad B = R \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + 1 \right) \frac{\partial c}{\partial y} \quad (۸۵-۲)$$

$$E = R \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + 1 \right) \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} \right] - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \quad (۸۶-۲)$$

$$F = \alpha_K \cos^2 \beta_K + \sin^2 \beta_K \quad ; \quad G = \alpha_K \sin^2 \beta_K + \cos^2 \beta_K \quad (۸۷-۲)$$

$$H = 0.5 * (1 - \alpha_K) \sin(2\beta_K) \quad ; \quad L = D_1 \cos^2 \beta_D + D_2 \sin^2 \beta_D \quad (۸۸-۲)$$

$$G = D_1 \sin^2 \beta_D + D_2 \cos^2 \beta_D \quad ; \quad Q = (D_1 - D_2) \sin(2\beta_D) \quad (۸۹-۲)$$

در این روابط $\alpha_K = \frac{K_1}{K_2}$ و β_K و β_D به ترتیب زوایای موجود در تانسور نفوذپذیری و پراکندگی

را نشان می دهند. در ادامه رابطه‌ای به همین صورت برای تانسور پراکندگی به صورت $\alpha_D = \frac{D_1}{D_2}$

تعریف می شود که نسبت پراکندگی طولی به عرضی را نشان می دهد.

۲-۵-۲ جابجایی سیالات غیرنیوتنی

مانند حالت قبل و با استفاده از روابط تابع جریان- ورتیسیته و همچنین معادله (۴۷-۲) که بر

اساس مدل کاریو- یاسودا نوشته شده است، معادلات مربوط به جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال

غیرنیوتنی به صورت زیر بدست می آیند:

$$\omega = \left(\frac{2}{\alpha_K + 1 + (\alpha_K - 1) \cos(2\beta_K)} \right) \left[-2H * \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + (1 - \alpha_K) \cos(2\beta_K) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + Z'' \right] \quad (۹۰-۲)$$

$$* \left(-H * \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + 1 \right) - F * \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + W \left(G * \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + 1 \right) - H * \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

$$Z'' = \frac{\partial \ln \mu}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \ln \mu}{\partial V^2} \frac{\partial V^2}{\partial x} \quad ; \quad W = \frac{\partial \ln \mu}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial \ln \mu}{\partial V^2} \frac{\partial V^2}{\partial y} \quad (۹۱-۲)$$

از همین روابط برای جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی، نیز می توان استفاده کرد. در

این حالت تنها روابط $\frac{\partial \ln \mu}{\partial c}$ و $\frac{\partial \ln \mu}{\partial V^2}$ متفاوت خواهد بود. معادلات مربوط به جملات موجود در W و

Z'' در معادلات (۵۶-۲) و (۵۷-۲) آورده شده است. معادله کانوکشن- دیفیوژن برای این حالت نیز

دقیقاً برابر با معادله (۸۴-۲) می باشد.

۶-۲ خلاصه معادلات

در این قسمت معادلات بدست آمده برای سه حالت خاص مورد بحث، به صورت خلاصه گردآوری شده‌اند. رابطه‌ی بین تابع جریان و ورتیسیته و همچنین رابطه کانوکشن- دیفیوژن برای هر سه حالت یکسان بوده و به صورت زیر می‌باشند:

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (۹۲-۲)$$

$$Isotropic : \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} = \nabla^2 c \quad (۹۳-۲)$$

$$Anisotropic : \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} \\ = L * \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + M * \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + Q * \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} \quad (۹۴-۲)$$

اما رابطه ورتیستی برای سه حالت بحث شده، متفاوت بوده و برای هر حالت به صورت مشخص شده‌ی زیر می‌باشند. اولین معادله در هر حالت با شرایط همسانگرد و دومین معادله با فرض ناهمسانگردی بدست آمده‌اند.

• جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال نیوتنی:

$$\omega = c(n-1) \left(\frac{D_e^2}{1 + D_e^2 V^2} \right) M - RN + \left(\frac{n-1}{2} \right) \ln(1 + D_e^2 V^2) N \quad (۹۵-۲)$$

$$\omega = \left(\frac{2}{\alpha_K + 1 + (\alpha_K - 1) \cos(2\beta_K)} \right) \left[-F * A - G * B - H * E \right. \\ \left. + (1 - \alpha_K) \cos(2\beta_K) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right] \quad (۹۶-۲)$$

• جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی:

$$\omega = c(n-1) \left(\frac{D_e^2}{1 + D_e^2 V^2} \right) M - RN + \left(\frac{n-1}{2} \right) \ln(1 + D_e^2 V^2) N \quad (۹۷-۲)$$

- جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی:

$$\omega = (1 - c)(n - 1) \left(\frac{D_e^2}{1 + D_e^2 V^2} \right) M - RN$$

$$- \left(\frac{n - 1}{2} \right) \ln(1 + D_e^2 V^2) N \quad (98-2)$$

معادله مربوط به حالت ناهمسانگرد برای دو حالتی که شامل سیال غیرنیوتنی می‌باشد، به

صورت زیر تعریف می‌شود با این توضیح که عبارت Z'' و W برای آن‌ها متفاوت می‌باشد.

$$\omega = \left(\frac{2}{\alpha_K + 1 + (\alpha_K - 1) \cos(2\beta_K)} \right) \left[-2H * \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right.$$

$$+ (1 - \alpha_K) \cos(2\beta_K) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + Z''$$

$$* \left(-H * \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + 1 \right) - F * \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

$$+ W \left(G * \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + 1 \right) - H * \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (99-2)$$

فصل سوم:

تحلیل پایداری خطی

۳-۱ مقدمه

در این بخش به تحلیل پایداری خطی ناپایداری انگشتی لزج در سلول مستقیم الخط هل-شاو می‌پردازیم. در ابتدا معادلات حاکم بر مسأله را به فرم مربوط به تحلیل پایداری خطی تبدیل کرده و با استفاده از یک تقریب شبه خطی به بررسی پایداری آن‌ها می‌پردازیم.

۳-۲ تحلیل پایداری خطی

پایداری هیدرودینامیکی یکی از مسائل اصلی در علم مکانیک سیالات می‌باشد. در حالت کلی می‌توان گفت ناپایداری زمانی اتفاق می‌افتد که یک اغتشاش، تعادل بین نیروهای خارجی، اینرسی و نیروهای ویسکوز سیال را بهم بزند. در حالتی که سیال ویسکوز باشد، ویسکوزیته تاثیری پیچیده بر پراکندگی مومنوم دارد، به طوری که این عامل می‌تواند موجب ناپایداری جریانی شود که در حالت غیرلزج پایدار است. این عوامل ناپایداری پس از ایجاد، در سه حالت به کار خود ادامه می‌دهند، یا با گذشت زمان از بین بروند که به آن حالت پایدار^۱ می‌گویند یا با همان شدت اولیه‌ای که بوجود آمده بودند به کار خود ادامه می‌دهند که به آن پایداری خنثی^۲ می‌گویند یا این که رشد می‌کنند و بزرگتر می‌شوند که به آن ناپایدار^۳ می‌گویند.

در تحلیل پایداری خطی، یک جریان دائمی پایه، برای سیستم در نظر گرفته می‌شود و فرض می‌کنیم که معادلات حاکم بر مسأله به ازای اغتشاشات خیلی کوچک، با تقریب مناسبی از خود رفتاری خطی نشان می‌دهند. بنابراین جملات مرتبه دو و سه موجود در معادلات، در مقایسه با جملات مرتبه اول نادیده گرفته می‌شوند. بدین ترتیب یک دستگاه معادلات خطی همگن از

¹ Stable

² Neutrally stable

³ Unstable

معادلات مشتق جزئی به همراه شرایط مرزی آن‌ها بدست می‌آوریم. این معادلات خطی شده ضرایبی دارند که ممکن است با مکان تغییرکنند ولی تا زمانی که جریان پایه پایدار باشد، با زمان تغییر نمی‌کنند. به صورت کلی‌تر می‌توان گفت که جواب سیستم مجموعه‌ای از مولفه‌هایی خواهد بود که هر مولفه به صورت نمایی با زمان به صورت $e^{\sigma t}$ تغییر می‌کنند که در این رابطه، بخش حقیقی σ نرخ رشد آشفستگی‌ها را نشان می‌دهد. اگر این مقدار مثبت باشد ($\sigma > 0$) ناپایداری به طور نمایی با زمان رشد می‌کند و منجر به ناپایداری خطی می‌شود، اگر صفر باشد ($\sigma = 0$) در حالت پایداری خنثی باقی می‌ماند و اگر منفی باشد ($\sigma < 0$) در حالت پایداری قرار خواهد داشت. به عبارت ساده‌تر هدف از تحلیل پایداری خطی این موضوع می‌باشد که تحت چه شرایطی جریان در آستانه ناپایداری قرار می‌گیرد.

مراحل تحلیل پایداری خطی به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

- ۱- فرض می‌شود که یک حل مشخص مانند Q_0 برای معادلات حاکم بر مسأله وجود دارد.
- ۲- یک نوسان کوچک مانند Q' در نظر گرفته و کمیت $Q_0 + Q'$ را در معادلات حاکم قرار می‌دهیم.
- ۳- رابطه‌ای برای نوسانات Q' بدست خواهد آمد. با حل این معادله و مشاهده رفتار تغییرات Q' (افزایش یا کاهش دامنه نوسانات) نوع پایداری مشخص می‌شود. در معادله نوسانات از ترم‌های مرتبه دو به بالای Q' با فرض دامنه کوچک نوسانات Q' صرف‌نظر شده و یک معادله خطی بدست می‌آید.
- ۴- معادله خطی شده برای نوسانات، هنوز هم ممکن است که دارای حل نباشد. لذا با فرض تغییرات حل فقط در یک جهت مانند x ، معادله را ساده‌تر نموده تا قابل حل شود.

۳-۳ جابجایی نیوتنی

جریانی دوبعدی از سیالات نیوتنی را در یک سلول دوبعدی مستقیم الخط هل-شاو با خواص همسانگرد در نظر بگیرید. معادلات حاکم بی بعد شده در این حالت مطابق فصل قبل به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\mu(u + 1) \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\mu v \quad (3-3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (4-3)$$

$$\mu = \mu(c) = \exp R(1 - c) \quad (5-3)$$

این سیستم معادلات، جواب مشخصی برای حالت پایه به صورت زیر دارند:

$$u_o(x, t) = 0 \quad ; \quad v_o(x, t) = 0 \quad (6-3)$$

$$c_o(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right] \rightarrow \frac{\partial c_o}{\partial t} = \frac{\partial^2 c_o}{\partial x^2} \quad (7-3)$$

$$\mu_o(x, t) = \mu_o(c_o) \quad (8-3)$$

$$\frac{\partial P_o}{\partial x} = -\mu_o \quad (9-3)$$

در معادله (۷-۳) عبارت erf بیانگر تابع خطاست که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\theta^2} d\theta \quad (10-3)$$

برای بررسی تحلیل خطی مساله، اغتشاشاتی کوچک به صورت زیر به پاسخ حالت پایه اضافه می شوند:

$$u(x, y, t) = u_o + u'(x, y, t) \quad (۱۱-۳)$$

$$v(x, y, t) = v_o + v'(x, y, t) \quad (۱۲-۳)$$

$$c(x, y, t) = c_o + c'(x, y, t) \quad (۱۳-۳)$$

$$\mu(x, y, t) = \mu_o + \mu'(x, y, t) \quad (۱۴-۳)$$

$$P(x, y, t) = P_o + P'(x, y, t) \quad (۱۵-۳)$$

در این روابط کمیت‌های پرایم‌دار مربوط به اغتشاشات و کمیت‌هایی که با زیرنویس صفر مشخص شده‌اند مربوط به پاسخ حالت پایه می‌باشند. روابط بدست آمده‌ی بالا را در معادلات حاکم برسیستم، جایگذاری می‌کنیم تا معادلاتی بر حسب اغتشاشات بدست آید.

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (۱۶-۳)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\mu' - \mu_o u' \quad (۱۷-۳)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = -\mu_o v' \quad (۱۸-۳)$$

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + u' \frac{\partial c_o}{\partial x} = \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} \quad (۱۹-۳)$$

$$\frac{1}{\mu_o} \frac{d\mu_o}{dx} = -R \frac{dc_o}{dx} \quad ; \quad \frac{1}{\mu_o} \frac{d\mu'}{dc'} = -R \quad ; \quad \mu' = -\mu_o R c' \quad (۲۰-۳)$$

این معادلات را می‌توان فقط بر حسب u' و c' مرتب کرد. بدین منظور از معادله (۱۷-۳) نسبت به y و از معادله (۱۸-۳) نسبت به x مشتق می‌گیریم، سپس آن‌ها از یکدیگر کم می‌کنیم. بدین ترتیب فشار از روابط حذف شده و به رابطه‌ی به صورت زیر می‌رسیم:

$$\mu_o \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) - \frac{\partial \mu'}{\partial y} + v' \frac{\partial \mu_o}{\partial x} = 0 \quad (۲۱-۳)$$

با مشتق گرفتن از معادله (۲۱-۳) نسبت به y و استفاده از معادله (۱۶-۳)، پارامتر v' را نیز از

معادلات حذف کرده و به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial^2 \mu'}{\partial y^2} = 0 \quad (22-3)$$

پس از این تبدیلات، حال با استفاده از معادلات (۱۹-۳) و (۲۲-۳) می‌توانیم به تحلیل پایداری خطی مسأله بپردازیم. بدین منظور، چون پاسخ حالت پایه فقط وابسته به x و زمان می‌باشد از آنالیز مود نرمال استفاده کرده و اغتشاشات را به صورت مولفه فوریه در جهت y به صورت معادله (۲۳-۳) می‌نویسیم. در این روش با پیروی از مطالعاتی که برای اولین بار تن و هومسی [۷] در این زمینه انجام دادند، از تقریب شبه خطی استفاده می‌شود. با استفاده از این تقریب، فرض می‌کنیم که اغتشاش کوچک ایجاد شده در زمان، نسبت به حالت پایه تغییرات سریع‌تری دارد یا به عبارتی، پاسخ حالت پایه‌ی مسأله در زمان t_0 ثابت نگه داشته شده و حالتی پایدار دارد.

$$(c', u')(x, y, t) = (C, U)(x) e^{\sigma(t_0)t} e^{iky} \quad (23-3)$$

در این رابطه، σ نرخ رشد اغتشاشات و k عدد موج این اغتشاشات در جهت y می‌باشند. با جایگذاری معادله (۲۳-۳) در معادلات (۱۹-۳) و (۲۲-۳) به سیستم معادلات نهایی زیر می‌رسیم:

$$\left(\sigma(t_0) - \frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) C = -\frac{dc_o}{dx}(x, t_0) U \quad (24-3)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - R \frac{dc_o}{dx} \frac{d}{dx} - k^2\right) U = -R k^2 C \quad (25-3)$$

همان طور که مشاهده می‌شود با استفاده از این روش معادلات مشتق جزئی، به معادلات دیفرانسیل معمولی به شکل مقادیر ویژه تبدیل می‌شوند. براساس این معادلات نرخ رشد σ به عدد موج k وابسته است که در زمان ثابت t_0 برای مقادیر مختلف k تغییر می‌کند.

۳-۴ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی

مراحل تبدیل و ساده سازی معادلات حاکم بر مسأله در این حالت نیز دقیقاً شبیه به حالت جابجایی نیوتنی می باشد با این تفاوت که رابطه ی بین ویسکوزیته و غلظت به صورت زیر می باشد:

$$\mu = e^{R(1-c)}(1 + (D_e V)^2)^{c(n-1)/2} \quad (۲۶-۳)$$

تغییر بوجود آمده در رابطه ی بین ویسکوزیته و غلظت تنها منجر به تغییر در معادله (۲۵-۳) می شود و معادله (۲۴-۳) عیناً تکرار می شود. همانند جابجایی نیوتنی با اضافه کردن اغتشاش به معادلات حاکم بر سیستم در این حالت از جابجایی، روابط زیر بدست می آیند:

$$\mu_o = e^{R(1-c_o)}(1 + D_e^2)^{(n-1)c_o/2} \quad (۲۷-۳)$$

$$\frac{1}{\mu_o} \frac{d\mu_o}{dx} = - \left[R - \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right] \frac{dc_o}{dx} \quad (۲۸-۳)$$

$$\mu' = -\mu_o \left[R - \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right] c' + \mu_o c_o u' Z \quad (۲۹-۳)$$

که در معادله (۲۹-۳)، $Z = (n-1) \left(\frac{D_e^2}{1+D_e^2} \right)$ می باشد. با استفاده از این روابط، معادله (۲۵-۳) در حالت نیوتنی به معادله زیر برای این حالت از جابجایی غیرنیوتنی تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(R - \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right) \frac{dc_o}{dx} \frac{d}{dx} - k^2(1 + Zc_o) \right] U \\ & = - \left[R - \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right] k^2 C \end{aligned} \quad (۳۰-۳)$$

۳-۵ جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی

مشابه با حالت قبل، رابطه بین ویسکوزیته و غلظت به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu = e^{R(1-c)}(1 + (D_e V)^2)^{(1-c)(n-1)/2} \quad (31-3)$$

معادلات اغتشاشی برای این حالت نیز به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\mu_o = e^{R(1-c_o)}(1 + D_e^2)^{(n-1)(1-c_o)/2} \quad (32-3)$$

$$\frac{1}{\mu_o} \frac{d\mu_o}{dx} = - \left[R + \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right] \frac{dc_o}{dx} \quad (33-3)$$

$$\mu' = -\mu_o \left[R + \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right] c' + \mu_o(1 - c_o)u' Z \quad (34-3)$$

با استفاده از این روابط، معادله (۳۵-۳) برای این حالت از جابجایی غیرنیوتنی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(R + \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right) \frac{dc_o}{dx} \frac{d}{dx} \right. \\ & \quad \left. - k^2(1 + Z(1 - c_o)) \right] U \\ & = - \left[R + \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right] k^2 C \end{aligned} \quad (35-3)$$

۳-۶ جابجایی در محیط متخلخل با خواص ناهمسانگرد

در این بخش با استفاده از روابط ارائه شده برای تانسور نفوذپذیری و پراکندگی در معادلات (۷۴-۲) و (۷۷-۲) و روش خطی‌سازی مشخص‌شده در این فصل، معادلات را به شکل مورد نظر در تحلیل پایداری خطی تبدیل می‌کنیم. در این قسمت برخلاف حالت‌های قبل که فقط در معادله (۲۵-۳) تغییر ایجاد می‌شد در معادله (۲۴-۳) نیز تغییراتی بوجود می‌آید. این تغییرات در معادله (۲۴-۳) برای هر سه حالت یکسان بوده و به صورت معادله (۳۶-۳) بیان می‌شود ولی معادله (۲۵-۳) در جابجایی‌های مختلف مورد بحث، متفاوت می‌باشد.

$$\begin{aligned} & \left(\sigma(t_o) - L * \frac{d^2}{dx^2} + M * k^2 - Q * ik \frac{d}{dx} \right) C \\ & = -\frac{dc_o}{dx} U + (L - 1) \frac{d^2 c_o}{dx^2} \end{aligned} \quad (36-3)$$

• جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال نیوتنی:

$$\begin{aligned} & \left[-F * \frac{d^2}{dx^2} + \left(G * k^2 - H * R(ik) \frac{dc_o}{dx} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(2H * ik + F * R \frac{dc_o}{dx} \right) \frac{d}{dx} \right] U \\ & = \left[H * R(ik) \frac{d}{dx} + N * Rk^2 \right] C \end{aligned} \quad (37-3)$$

• جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی:

$$\begin{aligned} & \left[-F * \frac{d^2}{dx^2} - \left(2H * (ik) + F * \left(Z' \frac{dc_o}{dx} \right) \right) \frac{d}{dx} \right. \\ & \quad \left. + \left(G * k^2 - H * ik \left(Z' \frac{dc_o}{dx} \right) \right) + G * Zc_o k^2 \right] U \\ & = G * k^2 Z' C \end{aligned} \quad (38-3)$$

• جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی:

$$\begin{aligned} & \left[-F * \frac{d^2}{dx^2} - \left(2H * (ik) + F * \left(Z' \frac{dc_o}{dx} \right) \right) \frac{d}{dx} \right. \\ & \quad \left. + \left(G * k^2 - H * ik \left(Z' \frac{dc_o}{dx} \right) \right) + G * Zc_o k^2 \right] U \\ & = G * k^2 Z' C \end{aligned} \quad (39-3)$$

در این رابطه $Z = (n - 1) \left(\frac{D_e^2}{1 + D_e^2} \right)$ و $Z' = R - \frac{n-1}{2} \ln(1 + D_e^2)$ می‌باشند. روابط

مربوط F, G و H نیز در معادلات (۸۷-۲) تا (۸۹-۲) آمده است.

۷-۳ حل عددی معادلات

ابتدا معادلات مربوط به تحلیل پایداری خطی برای سه حالت ذکر شده در حالت همسانگرد را به صورت خلاصه و کلی بیان می‌کنیم. اولین معادله برای تمام سه حالت یکسان است:

$$\left(\sigma(t_o) - \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) C = - \frac{dc_o}{dx}(x, t_o) U \quad (40-3)$$

دومین معادله برای حالت‌های مختلف به صورت زیر بیان می‌شوند:

جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال نیوتنی:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - R \frac{dc_o}{dx} \frac{d}{dx} - k^2 \right) U = -R k^2 C \quad (41-3)$$

جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(R - \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right) \frac{dc_o}{dx} \frac{d}{dx} - k^2(1 + Zc_o) \right] U \\ = - \left[R - \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right] k^2 C \end{aligned} \quad (42-3)$$

جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(R + \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right) \frac{dc_o}{dx} \frac{d}{dx} \right. \\ \left. - k^2(1 + Z(1 - c_o)) \right] U \\ = - \left[R + \frac{(n-1)}{2} \ln(1 + D_e^2) \right] k^2 C \end{aligned} \quad (43-3)$$

دستگاه معادله ایجاد شده که شامل معادله (۴۰-۳) و یکی از معادلات (۴۱-۳) تا (۴۳-۳) می‌باشد،

با استفاده از دستور bvp4c نرم‌افزار متلب حل می‌شوند. این دستور از روش شوتینگ با دقت بالا

برای حل معادلات دیفرانسیلی استفاده می‌کند. شرط مرزی این معادلات به صورت زیر تعریف

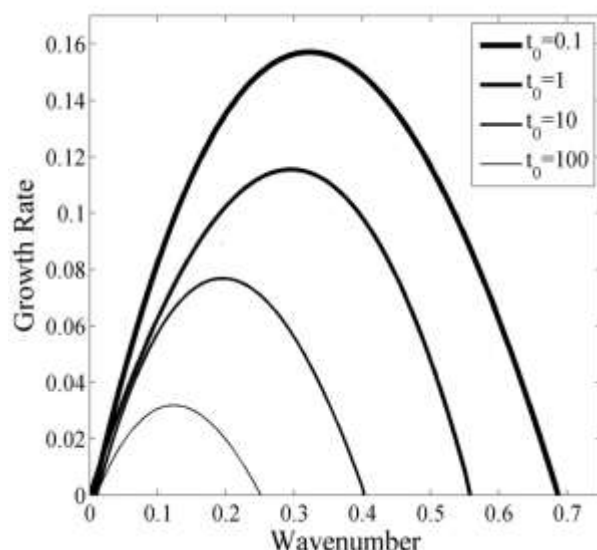
می‌شود:

$$x \rightarrow \pm\infty \rightarrow (C, U) \rightarrow 0 \quad (۴۴-۳)$$

معادلات مربوط به حالت ناهمسانگرد نیز دقیقاً با استفاده از همین روش و با به کارگیری معادلات (۳۶-۳) تا (۳۹-۳) قابل تحلیل می‌باشند.

۳-۸ نتایج

در این قسمت به بررسی نتایج بدست آمده از تحلیل پایداری خطی معادلات حاکم بر مسأله می‌پردازیم. ابتدا نتایج بدست آمده از این تحلیل را برای محیط متخلخلی با خواص همسانگرد مورد بررسی قرار می‌دهیم. جابجایی سیالات نیوتنی و غیر نیوتنی در حالت‌های مورد بحث، تحلیل می‌شوند و پس از آن، نتایج بدست آمده برای جابجایی‌های نیوتنی و غیرنیوتنی در محیط متخلخل با خواص ناهمسانگرد مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرند. همچنین به منظور اطمینان از صحت نتایج، آن‌ها را با مطالعات قبلی انجام گرفته در این زمینه، مورد مقایسه قرار خواهیم داد.

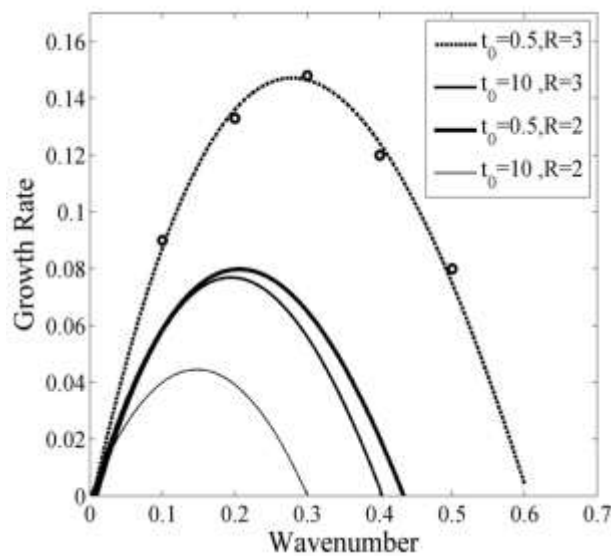


شکل ۳-۱: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج برای جابجایی نیوتنی در زمان‌های مختلف و $R = 3$

۳-۸-۱ جابجایی سیالات نیوتنی

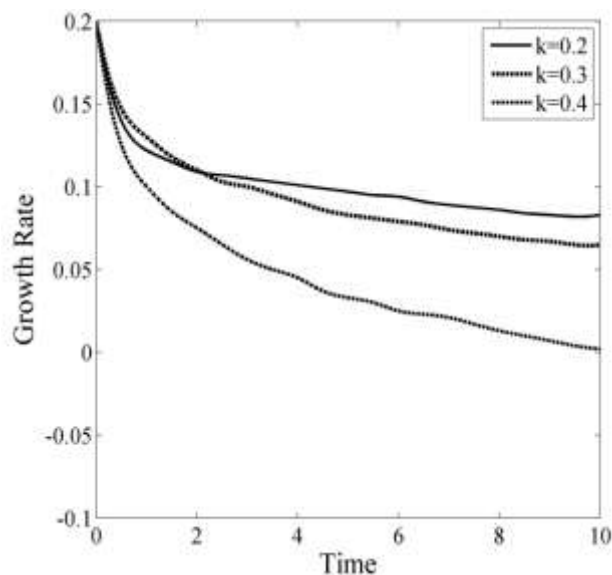
در شکل ۳-۱، نرخ رشد اغتشاشات برحسب عدد موج در زمان‌های مختلف t_o ، رسم شده اند. عموماً عدد موجی که در آن بیشترین نرخ رشد بدست می‌آید را با k_m نشان می‌دهند و آن را با عنوان بحرانی ترین عدد موج معرفی می‌کنند. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش t_o ، نرخ رشد اغتشاشات کاهش می‌یابد و k_m یا همان عدد موج بحرانی نیز به سمت مقادیر کمتر سوق داده می‌شود.

در شکل ۳-۲ به بررسی تاثیرات نسبت تحرک بر تغییرات نرخ رشد اغتشاشات پرداخته‌ایم. با دقت در نمودار متوجه می‌شویم که برای یک زمان یکسان، نرخ رشد با افزایش نسبت تحرک، افزایش پیدا می‌کند. به عبارت دیگر در نسبت تحرک‌های بالاتر، جریانی ناپایدارتر خواهیم داشت. تمام نتایج بدست آمده در این دو نمودار همخوانی بسیار خوبی با مطالعات انجام شده توسط تن و هومسی [۷] در جابجایی سیالات نیوتنی دارند. در نقاط مشخص شده با دایره‌های توپر، نتایج بدست آمده از مطالعه‌ی حاضر و منحنی خط‌چین نتایج بدست آمده توسط این دو محقق را نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارند.



شکل ۲-۳: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج برای جابجایی نیوتنی در زمان‌ها و نسبت تحرک‌های مختلف. دایره‌های توخالی نتایج بدست آمده از مطالعه حاضر و منحنی خط‌چین نتایج گزارش شده توسط تن و هومسی می‌باشد.

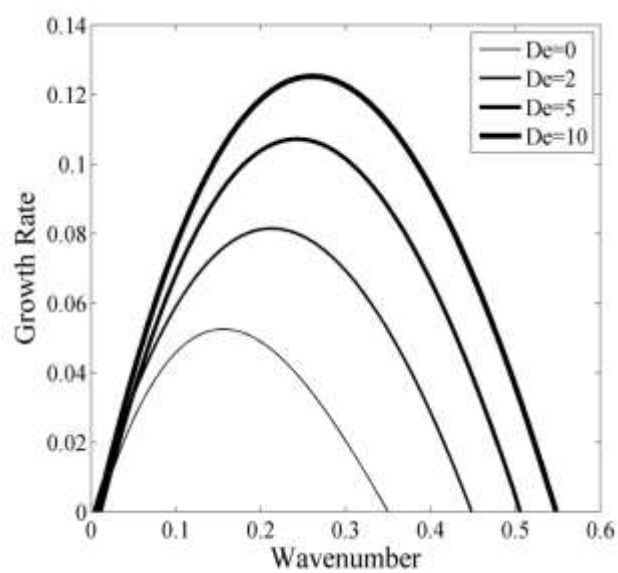
در شکل ۳-۳ تغییرات نرخ رشد بر حسب زمان در عدد موج‌های متفاوت رسم شده‌اند. مشاهده می‌شود که نرخ رشد در زمان‌های ابتدایی بیشترین مقدار خود را داراست و پس از آن با افزایش زمان، این مقادیر کاهش می‌یابند. همچنین با افزایش عدد موج، نرخ رشد اغتشاشات نیز کاهش می‌یابند. البته باید توجه داشت که تمام عدد موج‌هایی که در این نمودار مورد بررسی قرار گرفته‌اند، بزرگتر از عدد موج بحرانی می‌باشند. به همین ترتیب اگر عدد موج‌های انتخابی، کوچکتر از عدد موج بحرانی باشند، رفتاری عکس این تغییرات خواهیم داشت. این رویداد در شکل ۱-۳ و شکل ۲-۳ نیز به درستی قابل مشاهده می‌باشد.



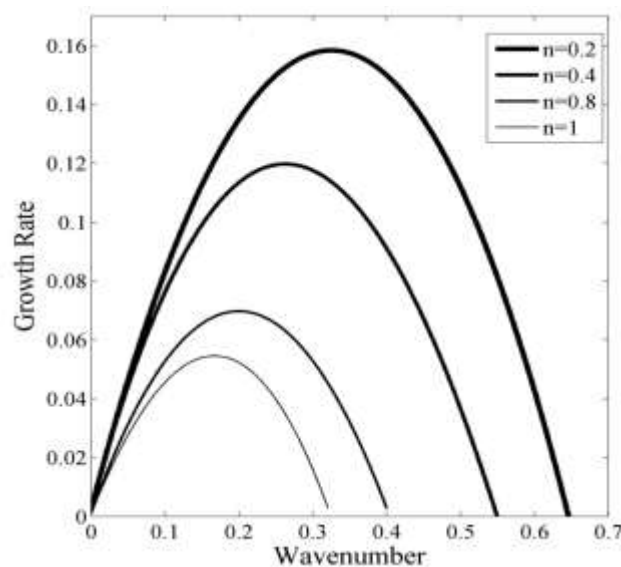
شکل ۳-۳: منحنی نرخ رشد بر حسب زمان برای سیال نیوتنی در $R = 3$

۲-۸-۳ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی

در این قسمت نتایج مربوط به تحلیل پایداری خطی برای حالتی که یک سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی جابجا می‌شود، می‌پردازیم. بدین منظور، نتایج بدست‌آمده به ازای مقادیر متفاوت از پارامترهای رئولوژیک موجود در مدل را با حالت نیوتنی مقایسه می‌کنیم. شکل ۳-۴ تاثیر تغییرات پارامتر D_e را بر نرخ رشد اغتشاشات نشان می‌دهد. همان طور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش D_e ، نرخ رشد افزایش پیدا می‌کند و در نتیجه آن جریان ناپایدارتر می‌شود. همچنین عدد موج بحرانی به سمت مقادیر کمتر میل پیدا می‌کند. علاوه بر این با قرار دادن $D_e = 0$ ، منحنی نرخ رشد منطبق بر منحنی حالت نیوتنی می‌شود. رفتاری که از بررسی معادلات حاکم بر مسأله در فصل دو قابل پیش‌بینی بود.



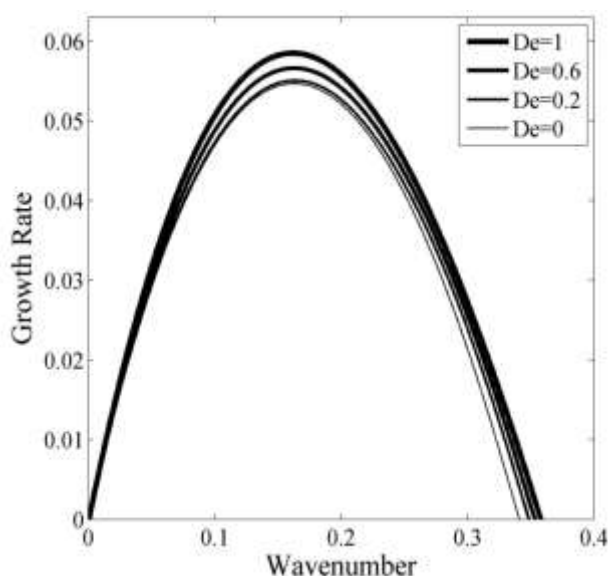
شکل ۳-۴: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و $R = 3$ ، $n = 0.5$ ،



شکل ۳-۵: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و $R = 2$ ، $t_o = 5$ و $D_e = 5$

شکل ۳-۵ تاثیر تغییرات شاخص پاور- لو n را در نرخ رشد اغتشاشات نشان می‌دهد. مشاهده میکنیم که با کاهش این پارامتر، جریان ناپایدارتر شده و عدد موج بحرانی بزرگ‌تر می‌شود. مجدداً مشاهده می‌شود که به ازای $n = 1$ منحنی نرخ رشد، منطبق بر منحنی نیوتنی

می‌شود.

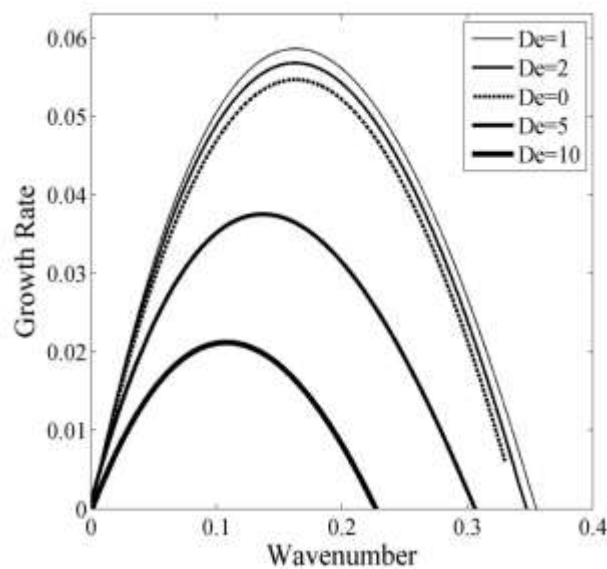


شکل ۳-۶: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج در جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی و $R = 2$ ، $n = 0.5$ و $t_o = 5$

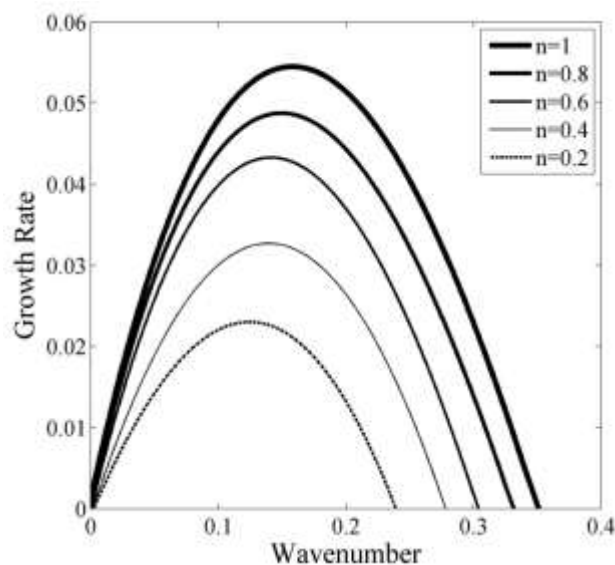
۳-۸-۳ جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی

بخش دیگری از جابجایی سیالات غیرنیوتنی در این قسمت مورد مطالعه قرار می‌گیرند. شکل ۳-۶ نمودار تغییرات نرخ رشد اغتشاشات را بر حسب De و عدد موج نشان می‌دهد. همانند حالت قبل، مشاهده می‌شود که نرخ رشد با افزایش De ، افزایش می‌یابد و جریان را ناپایدارتر می‌کند. در شکل ۳-۷ نیز مشاهده می‌کنیم که نرخ رشد با افزایش De ، در ابتدا کاهش یافته و پس از یک عدد خاص بحرانی از حالت نیوتنی نیز کمتر می‌شود. این رفتار را می‌توان بر اساس نسبت ویسکوزیته‌ها مورد بحث قرار داد. در ابتدای فرایند جابجایی، ویسکوزیته‌ی سیال غیرنیوتنی از ویسکوزیته سیال نیوتنی که آن را جابجا می‌کند بیشتر است (همان شرط بوجود آمدن ناپایداری انگشتی)، بنابراین جریان ناپایدار بوده و افزایش اندک De تاثیری در کاهش ویسکوزیته سیال غیرنیوتنی ندارد. در

نتیجه نرخ رشد اغتشاشات با افزایش De ، افزایش می‌یابد ولی در ادامه با افزایش بیشتر De ، ویسکوزیته سیال غیرنیوتنی با سرعت بیشتری کاهش می‌یابد تا جایی که از ویسکوزیته سیال نیوتنی کمتر شده و نمی‌تواند شرط اصلی ناپایداری که همان اختلاف ویسکوزیته‌هاست را ارضا کند. به همین دلیل جریانی پایدار بوجود خواهد آمد.



شکل ۳-۷: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج در جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی و $R = 2$ ،
 $t_0 = 5$ و $n = 0.5$

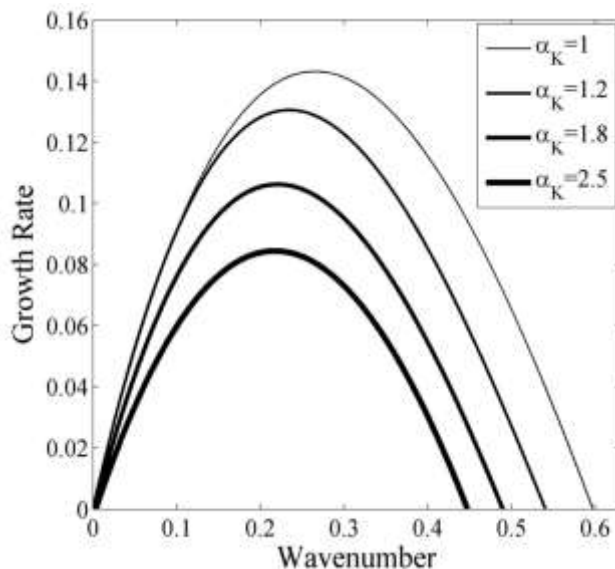


شکل ۸-۳: منحنی نرخ رشد بر حسب عدد موج در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و $R = 2$ ،
 $t_0 = 5$ و $D_e = 5$

شکل ۸-۳ تاثیر تغییرات پارامتر n بر نرخ رشد اغتشاشات را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با کاهش n ، نرخ رشد آشفتگی‌ها افزایش می‌یابد و جریان ناپایدارتر می‌شود ولی تغییر چندانی در جابجایی عدد موج بحرانی نمی‌بینیم.

۹-۳ جابجایی جریان سیالات در محیط متخلخل با خواص ناهمسانگرد

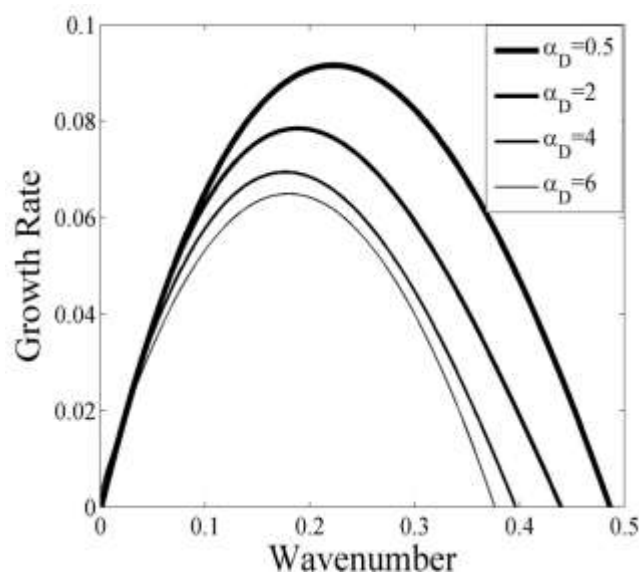
در این قسمت به بررسی تحلیل پایداری خطی جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی در محیط متخلخلی که تانسور نفوذپذیری و پراکندگی آن ناهمسانگرد می‌باشد، می‌پردازیم. بدین منظور معادلات مربوط به این بخش را در نسبت‌های متفاوتی از α_K و α_D و همچنین زوایای متفاوتی از β_D و β_K مورد بررسی قرار خواهیم داد و عوامل پایداری و ناپایداری جریان را معرفی خواهیم کرد.



شکل ۹-۳: منحنی نرخ رشد در جابجایی سیالات نیوتنی، بر حسب عدد موج و نسبت نفوذپذیری‌های متفاوت
 $t_0 = 0.2$ ، α_K

شکل ۹-۳ تغییرات نرخ رشد اغتشاشات را بر حسب عدد موج در α_K های متفاوت نشان

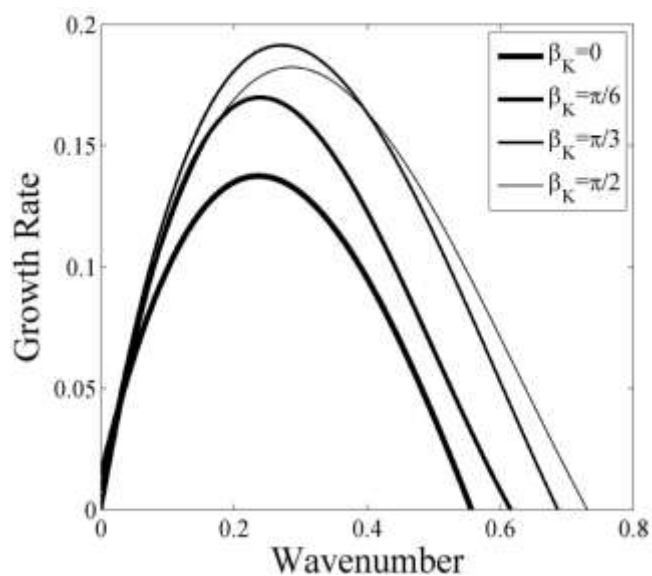
می‌دهد. از نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که هر چه مقدار این نسبت بیشتر شود جریانی پایدارتر خواهیم داشت. به عبارت دیگر با افزایش نفوذپذیری در جهت جریان نسبت به نفوذپذیری در جهت عمود بر جریان، نرخ رشد کمتر و عدد موج بحرانی کوچکتری خواهیم داشت. همین نتیجه دقیقاً برای محیط متخلخلی با پراکندگی ناهمسانگرد نیز بدست می‌آید. بدین صورت که در این حالت نیز با افزایش α_D ، جریانی پایدارتر خواهیم داشت. این رفتار به خوبی در شکل ۳-۱۰ قابل مشاهده است.



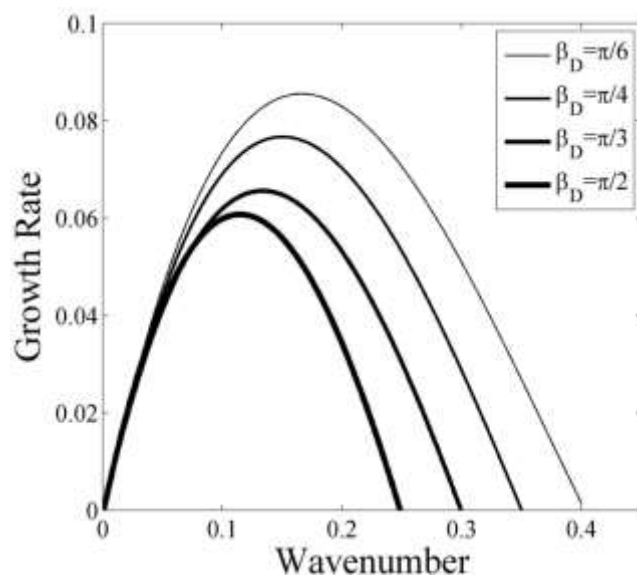
شکل ۳-۱۰: منحنی نرخ رشد در جابجایی سیالات نیوتنی، بر حسب عدد موج و نسبت پراکندگی‌های متفاوت α_D ، $t_0 = 5$

با در نظر گرفتن زاویه ناهمسانگردی برای تانسور نفوذپذیری و بررسی معادلات خطی شده در این حالت، مقادیر نرخ رشد بر حسب عدد موج در زاویه‌های متفاوت بدست می‌آید. این منحنی‌ها برای زوایای متفاوت در شکل ۳-۱۱ نشان داده شده‌اند. با توجه در این شکل، مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه ناهمسانگردی در تانسور نفوذپذیری، جریانی ناپایدارتر خواهیم داشت. همین حالت را برای تانسور پراکندگی نیز در نظر می‌گیریم و نرخ رشد اغتشاشات را بر حسب عدد موج و زوایای

متفاوت در تانسور پراکندگی بدست می‌آوریم. همانند حالت قبل منحنی‌های نرخ رشد را برای زوایای متفاوت در شکل ۳-۱۲ نشان داده شده‌اند. از نتایج بدست‌آمده متوجه می‌شویم که با افزایش این زاویه جریانی پایدارتر خواهیم داشت.



شکل ۳-۱۱: منحنی نرخ رشد در جابجایی سیالات نیوتنی، بر حسب عدد موج و زوایای نفوذپذیری متفاوت $t_0 = 0.2$ ، β_K



شکل ۳-۱۲: منحنی نرخ رشد در جابجایی سیالات نیوتنی، بر حسب عدد موج و زوایای پراکندگی‌های متفاوت $t_0 = 5$ ، β_D

۳-۱۰ خلاصه

در این فصل پس از ارائه معادلات بکار رفته در تحلیل پایداری خطی مساله مورد مطالعه، به تحلیل نتایج بدست آمده در حالت‌های مختلف جابجایی پرداختیم و آن‌ها را با نتایج بدست آمده از مطالعات تن و هومسی [۷] مورد مقایسه قرار دادیم. نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که هرگونه جابجایی که در آن اختلاف ویسکوزیته ($\mu_1 < \mu_2$) وجود داشته باشد، ناپایدار است. در این فصل همچنین به بررسی تاثیرات پارامترهای D_e و شاخص پاورلو n در جابجایی سیالات غیریوتنی پرداختیم. نتایج این قسمت نشان دادند که نرخ رشد اغتشاشات با کاهش شاخص پاورلو n و افزایش D_e ، افزایش می‌یابند. در بخش آخر، تاثیرات ناهمسانگردی نفوذپذیری و پراکندگی را بر پایداری جریان مورد بررسی قرار دادیم. از نتایج بدست آمده متوجه شدیم که با افزایش نسبت ناهمسانگردی در هر دو حالت، جریانی پایدارتر خواهیم داشت. همچنین مشاهده شد که با افزایش زاویه ناهمسانگردی در تانسور نفوذپذیری جریانی ناپایدارتر خواهیم داشت، در حالی که در تانسور پراکندگی به جریانی پایدارتر دست خواهیم یافت.

فصل چهارم:

شبیه‌سازی غیرخطی

۴-۱ مقدمه

در این بخش به معرفی و بررسی حل عددی معادلات غیر خطی حاکم بر ناپایداری انگشتی لزج می‌پردازیم. این معادلات بر اساس یک جابجایی مخلوط‌شدنی در یک سلول مستقیم الخط هل - شاو نوشته شده‌اند. روش عددی بکار رفته در این شبیه‌سازی ترکیبی از روش بسیار دقیق طیفی^۱ به همراه روش تفاضل محدود می‌باشد. روش طیفی به طور گسترده‌ای در پدیده‌های مورد بررسی در مکانیک سیالات و سایر علوم به کار گرفته می‌شود. توضیحاتی کامل برای استفاده از این روش در مکانیک سیالات در کتابی که توسط کانوتو و همکاران^۲ [۵۹] نوشته شده است، قابل دسترس می‌باشد. علاوه بر این محققین بسیاری از جمله هوساینی و زانگ^۳ [۶۰] نیز از این روش در مطالعات خود استفاده کرده‌اند. در ادامه، ابتدا به معرفی اجمالی روش طیفی و بیان تفاوت‌های آن با سایر روش‌های عددی مرسوم در مکانیک سیالات پرداخته و پس از آن مراحل شبیه‌سازی در مطالعه حاضر را تشریح می‌کنیم.

۴-۲ آشنایی با روش طیفی

به منظور آشنایی با مفاهیم اولیه این روش، تابع مجهول $u(x)$ را با شرایط زیر در نظر می‌گیریم.

$$Lu = f(x) \quad u(x), x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1-4)$$

در این رابطه L عملگر مشتق یا انتگرال و $f(x)$ تابعی مشخص می‌باشد. حال با استفاده از روش طیفی می‌خواهیم به تقریبی برای این تابع مجهول برسیم. بدین منظور تابع $u(x)$ را به صورت

¹ Spectral method

² Canuto *et al.*

³ Hussaini & Zang

مجموع $N + 1$ تابع $\phi_n(x)$ که به آن‌ها توابع پایه^۱ گفته می‌شود، در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x) \quad (۲-۴)$$

در این رابطه a_n ضریب مجهولی است که با استفاده از روش‌های مختلف موجود در روش طیفی، محاسبه خواهد شد. اگر تقریب در نظر گرفته شده یعنی معادله (۲-۴) را در معادله (۱-۴) جایگذاری کنیم، باقیمانده یعنی تفاوت بین جواب دقیق و تقریب آن به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$R = Lu - f(x) \quad (۳-۴)$$

از آنجایی که با نزدیک شدن مقدار R به صفر، به جواب‌هایی با دقت بیشتر خواهیم رسید، انتخاب ضرایبی برای این سری که بتواند خطا را به حداقل ممکن برساند هدف مورد نظر در روش‌های مختلف عددی می‌باشد. به عبارتی دیگر تفاوت روش‌های مختلف بکار رفته در حل عددی معادلات به انتخاب توابع پایه و همچنین روش‌های حداقل‌سازی باقیمانده در آن‌ها باز می‌گردد. در روش طیفی از سری‌های فوریه و چندجمله‌ای‌های چبیشف^۲ به عنوان توابع پایه استفاده می‌شود که با توجه به شرایط مرزی حاکم بر مسأله یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم. در مسایل با شرایط متناوب از سری‌های سینوسی و کسینوسی فوریه که خود نیز به طور ذاتی متناوب هستند استفاده می‌شود در حالی که برای مسایل غیرمتناوب از چندجمله‌ای‌های چبیشف یا لژاندر^۳ استفاده می‌کنند. سری چبیشف در واقع همان بسط کسینوسی سری فوریه می‌باشد که متغیر آن تغییر کرده است. در مطالعات جدیدتر انجام گرفته با استفاده از این روش، معمولاً بجای تبدیلات فوریه از

^۱ Basis functions

^۲ Chebyshev polynomial

^۳ Legendre polynomial

تبدیلات سریع تر آن به فرم FFT استفاده می شود. روش طیفی تفاوت هایی با سایر روش های حل عددی بکار گرفته شده در مکانیک سیالات دارد که در این جا به برخی از آنها اشاره می کنیم:

۴-۲-۱ مقایسه با روش المان محدود^۱

روش المان محدود از نظر اصول کلی حاکم بر این روش بسیار شبیه به روش طیفی می باشد. مهمترین تفاوت این دو روش در این نکته موجود می باشد که در روش المان محدود، توابع $\phi_n(x)$ به صورت موضعی^۲ انتخاب می شوند یعنی این توابع چندجمله ای هایی با درجه ثابت هستند که فقط در دو زیر فاصله^۳ غیر صفر می باشند. در حالی که در روش طیفی این توابع به صورت سراسری^۴ در نظر گرفته می شوند و چندجمله ای هایی با مرتبه بالا می باشند که جز در نقاط ایزوله در سرتاسر دامنه محاسباتی غیر صفر می باشند. در روش المان محدود، سه راه حل برای زمانی که به دقت بیشتری در محاسبات نیاز داریم، ارائه می شود. اولین راه حل این است که هر المان به المان های کوچکتر تقسیم شود بنابراین دقت حل در کل دامین افزایش می یابد. این روش معمولاً به نام تصحیح گام مکانی^۵ معرفی می شود به این دلیل که معمولاً h به عنوان نمادی مرسوم برای اندازه گام ها به کار گرفته می شود. راه حل دوم بدین صورت است که فقط در نواحی که مقادیر شیب بیشتری دارند و نیاز به دقت بالاتری داریم از گام های کوچکتری استفاده شود. این راه حل نیز به روش تصحیح^۶ r شناخته می شود.

و در نهایت راه حل سوم، افزایش p یا همان درجه چندجمله ای های مورد استفاده در هر زیر

^۱ Finite element method

^۲ Local

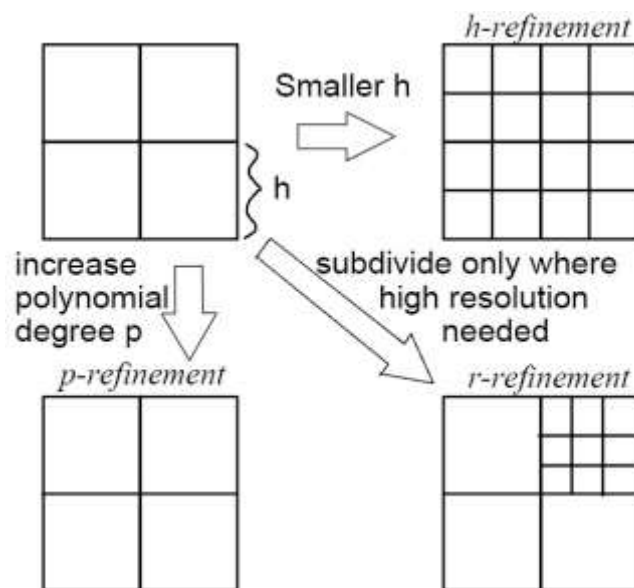
^۳ Sub interval

^۴ Global

^۵ h-refinement

^۶ r-refinement

دامنه می‌باشد در حالیکه اندازه گام‌ها ثابت نگه‌داشته شده‌اند. این راه حل نیز با عنوان تصحیح^۱ p شناخته می‌شود. از روش سوم دقیقا در روش طیفی نیز استفاده می‌شود. روش المان محدود دو مزیت کلی دارد. اول این که در این روش معادلات دیفرانسیلی به فرم معادلات ماتریسی تبدیل می‌شوند که حالت ماتریس خلوت دارند که موجب افزایش سرعت آن‌ها می‌شود. دومین مزیت این روش این موضوع می‌باشد که می‌توان از این روش در مسایلی با هندسه‌های پیچیده استفاده کرد. علاوه بر مزایای یاد شده برای این روش، دقت پایین یکی از مهم‌ترین معایب روش المان محدود می‌باشد. در طرف مقابل در روش طیفی معادلات به صورت ماتریس کامل بدست می‌آیند ولی دقت روش بسیار بالا می‌باشد. بنابراین می‌توان گفت که برای مسایلی با هندسه‌هایی ساده که نیاز به دقت بالا در حل آن‌ها می‌باشد روش طیفی نتایجی به مراتب دقیق‌تر نسبت به روش المان محدود ارائه خواهد کرد.



شکل ۴-۱: تصویری شماتیک از سه راه‌حل موجود در روش المان محدود

^۱ p-refinement

۲-۲-۴ مقایسه با روش تفاضل محدود

در روش تفاضل محدود با استفاده از یکسری درونیابی و مراحتلی که با یکدیگر همپوشانی دارند، به تقریبی از تابع مجهول $u(x)$ در مجموعه‌ای از گره‌ها دست پیدا می‌کنیم. در این روش مشتق توابع با تفاضلات آن‌ها تقریب زده می‌شود. اساس این روش برای حل معادلات استفاده از تقریب تابع با روش تیلور است. با دقت‌ترین حالت‌هایی که در این روش برای مشتق‌گیری به کار گرفته می‌شوند، استفاده از مشتق‌گیری مرکزی با دقت مرتبه دو (استفاده از سه نقطه میانی) و یا دقت مرتبه چهار (استفاده از پنج نقطه میانی)، می‌باشد. این روش نسبت به روش طیفی بسیار کندتر و پرخاطرتر می‌باشد. همچنین برای ذخیره‌ی اطلاعات حجم بیشتری نیاز خواهد داشت. علاوه بر این، روش تفاضل محدود در برخورد با ترم‌های غیرخطی همواره با مشکل روبرو بوده و برای رفع آن نیازمند به استفاده از روش‌های کاملاً ضمنی می‌باشد.

۳-۴ روش حل عددی

در این قسمت به تشریح حل عددی بکار رفته در شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی لزج می‌پردازیم. شرایط مرزی و روش بکار رفته برای پیش‌برد مسأله در زمان را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱-۳-۴ تبدیل هارتلی^۱

همان طور که می‌دانیم تبدیلات فوریه یکی از پرکاربردترین ابزارهای ریاضی در علوم مهندسی می‌باشد که به طور گسترده در حل معادلات مشتق جزئی مورد استفاده قرار می‌گیرند. تا قبل از سال ۱۹۹۱ تمام مطالعاتی که با استفاده از روش طیفی به بررسی ناپایداری انگشتی می‌پرداختند،

¹ Hartley transform

از تبدیلات فوریه در حل معادلات مشتق جزئی استفاده می‌کردند. در این سال زیمرمن و هومسی [۵۵] با معرفی تبدیلات هارتلی به بررسی ناپایداری انگشتی در محیط متخلخلی با پراکندگی ناهمسانگرد پرداختند. این تبدیل اگرچه شباهت‌های بسیاری با تبدیل فوریه دارد ولی تفاوت‌هایی نیز با آن دارد که آن را به مراتب سریع‌تر از تبدیل فوریه می‌کند. در اینجا به بخشی از این تفاوت‌ها اشاره می‌کنیم:

تبدیل فوریه تابع $g(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود که در آن یک تابع حقیقی به تابعی مختلط تبدیل می‌شود.

$$F(s) = \int g(t) [\cos(2\pi st) + i\sin(2\pi st)] dt \quad (۴-۴)$$

رابطه‌ای شبیه به همین معادله برای تبدیل هارتلی نیز تعریف می‌شود با این تفاوت که در آن تابع حقیقی به تابعی حقیقی تبدیل می‌شود.

$$H(s) = \int g(t) [\cos(2\pi st) + \sin(2\pi st)] dt \quad (۵-۴)$$

بسیاری از خواص تبدیل هارتلی همانند تبدیل فوریه می‌باشد ولی این تبدیل چندین مزیت نسبت به تبدیل فوریه دارد. تبدیل هارتلی به این علت که تنها با اعداد حقیقی کار می‌کند، فقط نصف عملیات مشابه در تبدیل فوریه را انجام می‌دهد. به همین دلیل محاسبات مربوطه را با سرعت بیشتری انجام می‌دهد. از طرفی به علت حالت خاص تبدیل هارتلی در همان مقدار محاسبات انجام شده نیز عملیات ضرب و تقسیم کمتری انجام می‌دهد که سرعت آن را مجدداً افزایش می‌دهد. با این تعاریف تبدیل گسسته‌ساز دوبعدی هارتلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H\langle g(x, y) \rangle = \hat{G}(k_x, k_y) \\ = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_x \sum_y g(x, y) \text{cas} \left(\frac{2\pi x k_x}{N_x} + \frac{2\pi x k_y}{N_y} \right) \quad (6-4)$$

در این رابطه N_x و N_y تعداد گره‌های بکار رفته در مش‌بندی محیط محاسباتی و k_x و k_y به ترتیب عدد موج‌های در جهت x و y می‌باشد. cas نیز به صورت مجموع کسینوس و سینوس تعریف می‌شود. مثلاً برای شناسه x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{cas}(x) = \sin(x) + \cos(x) \quad (7-4)$$

در این فصل توابعی که از آن‌ها تبدیل هارتلی گرفته شده است با کلاه نشان داده می‌شوند. مشتق‌گیری از توابع با استفاده از این روش به آسانی صورت می‌پذیرد:

$$H \left\langle \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \right\rangle = -2 \pi k_x \hat{G}(-k_x, -k_y) \quad (8-4)$$

$$H \left\langle \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \right\rangle = -2 \pi k_y \hat{G}(-k_x, -k_y) \quad (9-4)$$

$$H \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) \right\rangle = -4 \pi^2 k_x^2 \hat{G}(-k_x, -k_y) \quad (10-4)$$

$$H \left\langle \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x, y) \right\rangle = -4 \pi^2 k_y^2 \hat{G}(-k_x, -k_y) \quad (11-4)$$

$$H \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(x, y) \right\rangle = -4 \pi^2 k_x k_y \hat{G}(-k_x, -k_y) \quad (12-4)$$

۲-۳-۴ اصلاح شرایط مرزی و اولیه

همان‌طور که در بخش‌های قبلی ذکر شد، در استفاده از تبدیلات فوریه و یا هارتلی مجبور به استفاده از شرایط مرزی متناوب هستیم. همان‌طور که در فصل ۲-، بخش شرایط مرزی معادلات (۱۵-۲) و (۱۶-۲) مشاهده کردیم، در جهت عرضی یا همان جهت عمود بر جریان، شرط مرزی متناوب هم برای سرعت و هم برای غلظت برقرار است ولی در جهت جریان این شرط برای غلظت

برقرار نمی‌باشد. برای رفع این مشکل راه‌حل‌هایی ارائه شد. تن و هومسی [۲۴] برای ایجاد تناوب، طول محیط محاسباتی را دوبرابر کردند و با استفاده از انعکاس شرایط در $x = L$ به رفع این مشکل پرداختند. این روش هزینه محاسباتی مسئله را افزایش می‌داد بهمین دلیل مورد استقبال چندانی قرار نگرفت. پس از آن منیکام و هومسی [۲۹] روش دیگری را ارائه کردند که نسبت به روش قبلی بسیار کارآمد و سریع بود. در این روش غلظت کلی را در هر مکان و هر زمان طبق رابطه زیر فرض می‌کنیم:

$$c(x, y, t) = \bar{c}(x, t) + c'(x, y, t) \quad (۱۳-۴)$$

در این رابطه، $c'(x, y, t)$ یک ترم اغتشاشی برای غلظت و $\bar{c}(x, t_0)$ جواب معادله یکبعدی معادله کانوکشن-دیفیوژن می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{c}(x, t) = \frac{1}{2} [1 - \text{erf}(x/\sqrt{4t})] \quad (۱۴-۴)$$

بنابراین در روند شبیه‌سازی به جای استفاده از غلظت کل، فقط جمله اغتشاشی غلظت را محاسبه کرده و برای بدست آوردن غلظت اصلی در مسئله از معادله (۱۳-۴) استفاده می‌کنیم. این جمله اغتشاشی در دو مرز موجود در جهت جریان صفر بوده، بنابراین شرط مرزی متناوب برای این جهت بدون تحمیل محاسبات اضافی فراهم می‌شود. با در نظر گرفتن این شرایط، تغییراتی نیز برای شرط اولیه‌ی غلظت بوجود می‌آید. بدین منظور برای حالت پایه از همان معادله (۱۴-۴) استفاده می‌کنیم ولی برای جمله اغتشاشی، از یک سری اغتشاشات بسیار کوچک که به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند، بهره می‌گیریم. بنابراین شرط اولیه غلظت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$c(x, y, t = t_0) = \bar{c}(x, t_0) + \delta * \text{rand}(y) * \exp(-x^2/\sigma^2) \quad (۱۵-۴)$$

در این رابطه δ ضریبی است که شدت مقادیر تصادفی را مشخص می‌کند و معمولاً از مرتبه

10^{-2} انتخاب می‌شود. $rand$ مجموعه‌ای از اعداد تصادفی است که بین ۱ و ۱- انتخاب می‌شوند و σ پارامتری است که شدت نفوذ پراکندگی‌ها را از مرز جلویی نشان می‌دهد.

با استفاده از معادله (۴-۱۳)، معادله کانوکشن-دیفیوژن را مجدداً بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial c'}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial c'}{\partial y} = \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} \quad (۴-۱۶)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۴-۱۴) نسبت به x و t متوجه می‌شویم دو رابطه‌ی زیر با هم برابرند و از معادله (۴-۱۶) حذف می‌شوند.

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad (۴-۱۷)$$

معادله (۴-۱۶) را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\frac{\partial c'}{\partial t} = -J + \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} \quad ; \quad J = \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial c'}{\partial y} \quad (۴-۱۸)$$

معادله ورتیسیتی را نیز به‌همین ترتیب مرتب می‌کنیم:

$$\omega = -R * N \quad ; \quad N = \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial c'}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial y} \quad (۴-۱۹)$$

۳-۳-۴ چگونگی مراحل شبیه‌سازی

با توجه به اینکه معادلات به شکل تابع جریان- ورتیسیتی نوشته شده‌اند، در روند شبیه‌سازی

باید سه پارامتر c ، ψ و ω را بدست بیاوریم. بدین منظور ابتدا تمام معادلات را با استفاده از تبدیل

هارتلی گسسته‌سازی می‌کنیم. برخی از پارامترهای تعریف شده در مسأله به صورت زیر تعریف

می‌شوند:

$$L_x = Pe \quad ; \quad L_y = \frac{Pe}{A} \quad (20-4)$$

$$x_m = \left(\frac{m}{N_x}\right) L_x \quad m = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (21-4)$$

$$y_n = \left(\frac{n}{N_y}\right) L_y \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (22-4)$$

$$k_m = \frac{2 \pi m}{L_x} \quad ; \quad k_n = \frac{2 \pi n}{L_y} \quad (23-4)$$

با استفاده از تبدیل هارتلی و معادلات (۸-۴) تا (۱۲-۴) که روابط مربوط به مشتق گیری با استفاده از این تبدیل می باشند، معادله (۱۸-۴) به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\frac{dc_{m,n}}{dt} = -\hat{f}_{m,n} - (k_m^2 + k_n^2) \hat{c}_{m,n} \quad (24-4)$$

رابطه بین تابع جریان و ورتیسیتی نیز که به صورت $\nabla^2 \Psi = -\omega$ تعریف می شود به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$(k_m^2 + k_n^2) \hat{\psi}_{m,n} = \hat{\omega}_{m,n} \quad (25-4)$$

معادله ورتیسیتی برای جریان های مختلف نیوتنی و غیرنیوتنی متفاوت بوده و به صورت زیر مشخص می شوند:

❖ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال نیوتنی

$$\hat{\omega}_{m,n} = -R \hat{N}_{m,n} \quad (26-4)$$

❖ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی

$$\hat{\omega}_{m,n} = \hat{O}_{m,n} + \hat{M}_{m,n} - R \hat{N}_{m,n} \quad (27-4)$$

❖ جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی

$$\hat{\omega}_{m,n} = \hat{L}_{m,n} - \hat{O}_{m,n} - \hat{M}_{m,n} - R\hat{N}_{m,n} \quad (28-4)$$

علاوه بر J و N که در معادلات (4-18) و (4-19) تعریف شده‌اند. جملات غیرخطی جدید موجود در این روابط نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$P = \left(\frac{n-1}{2}\right) \ln(1 + D_e^2 V^2) \quad (29-4)$$

$$L = \frac{(n-1)D_e^2}{1 + D_e^2 V^2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + 1\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + 1\right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right] \quad (30-4)$$

$$M = PN \quad ; \quad O = c_T L \quad ; \quad V^2 = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} + 1 \quad (31-4)$$

در این رابطه c_T غلظت کل می‌باشد که از حاصل جمع غلظت پایه و غلظت اغتشاشی در زمان مورد محاسبه بدست می‌آید. این روابط برای حالتی که محیط متخلخل ناهمسانگرد باشد در معادلات (2-83) و (2-90) آورده شده است. معادله (4-25) و معادلات (4-26) تا (4-28) معادلاتی جبری می‌باشند در حالیکه (4-26) معادله دیفرانسیل زمانی مرتبه اول می‌باشد. به منظور حل این معادله دیفرانسیل معمولی و بدست آوردن مقادیر پارامترهای مختلف در گام‌های زمانی بعدی از تکنیک حدس-اصلاح آدامز-بشفورث استفاده می‌کنیم. در این تکنیک از الگوریتمی که معادله (4-24) را به دو قسمت تبدیل می‌کند استفاده می‌شود. ابتدا با استفاده از ترم غیرخطی معادله یا همان، یک مقدار اولیه برای غلظت بدست می‌آوریم و سپس با کمک گرفتن از ترم خطی معادله، مقادیر بدست آمده اصلاح می‌شوند. بدین ترتیب مراحل شبیه‌سازی عددی به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

افزودن تکنیک آدامز-بشفورث¹ به جملات همرفتی معادله (4-25):

¹ Adams-Bashforth

$$\frac{\tilde{c}_{m,n}(t + \Delta t) - \hat{c}(t)}{\Delta t} = \frac{3}{2} \hat{f}_{m,n}(t) - \frac{1}{2} \hat{f}_{m,n}(t - \Delta t) \quad (32-4)$$

و بدست آوردن حدس اولیه برای غلظت با استفاده از روابط زیر:

$$\bar{c}_{m,n}(t + \Delta t) = \tilde{c}_{m,n}(t + \Delta t) e^{-(k_m^2 + k_n^2) \Delta t} \quad (33-4)$$

سپس با استفاده از مقادیر پیش‌بینی شده‌ی غلظت مقدار جدید ورتیسیتی و تابع جریان را به ترتیب با استفاده از معادلات (۲۶-۴) تا (۲۸-۴) و (۲۵-۴) در گام زمانی جدید بدست می‌آوریم. با استفاده از مقادیر جدید مقدار J از معادله (۱۸-۴) بروز می‌شود و در رابطه‌ی زیر برای اصلاح مقادیر غلظت بکار می‌رود.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{c}_{m,n}(t + \Delta t) - \hat{c}_{m,n}(t)}{\Delta t} = & \left(\frac{\bar{f}_{m,n}(t + \Delta t) + \hat{f}_{m,n}(t)}{2} \right) \\ & - (k_m^2 + k_n^2) \left(\frac{\bar{c}_{m,n}(t + \Delta t) - \hat{c}_{m,n}(t)}{2} \right) \end{aligned} \quad (34-4)$$

مراحل پیش‌بینی و اصلاح تا زمانی که به مقدار خطای مطلوب برسیم، ادامه می‌دهیم هرچند که معمولاً با تکرار ۳ تا ۵ بار این حلقه جواب موردنظر بدست می‌آید. پس از بدست آمدن مقدار نهایی در گام زمانی مشخص، همین مراحل برای گام‌های بعدی نیز تکرار می‌شوند.

۴-۴ شرایط همگرایی

مش‌بندی استفاده شده در این روش عددی به علت استفاده از تبدیل هارتلی، باید در هر راستا فاکتوری از عدد ۲ باشد. معمولاً این مقدار در شبیه‌سازی‌ها $128 * 128$ یا $256 * 256$ در نظر گرفته می‌شود. این روش حل عددی برای عدد پکلت تا ۱۳۰۰ همگرا خواهد بود. گام‌های زمانی معمولاً از مرتبه 10^{-2} انتخاب می‌شوند. همچنین برای پارامتر نسبت وجه‌ها یا همان A نیز به ازای مقادیری

از ۱ تا ۶ ، حلی همگرا خواهیم داشت. تعداد تکرار روش آدامز- بشفورس همان گونه که ذکر شد

بین ۳ تا ۵ می باشد که مرسوم ترین آن ۵ مرتبه تکرار می باشد.

فصل پنجم:

نتایج شبیه‌سازی

غیر خطی

۵-۱ مقدمه

در تمام شبیه سازی های غیرخطی انجام گرفته برای ناپایداری انگشتی، با اعمال اغتشاشاتی کوچک، که به صورت تصادفی انتخاب می شوند، تحریک اولیه ی لازم برای شروع ناپایداری را ایجاد می کنند. همان طور که در فصل های پیشین نیز ذکر شد، شدت این اغتشاش توسط δ اعمال می گردد که در شبیه سازی انجام شده در این مطالعه مقدار آن برابر 0.01 در نظر گرفته شده است. این اغتشاشات همان طور که در نتایج حاصل از شبیه سازی در قسمت های بعدی نمایش داده خواهند شد به سرعت با گذشت زمان رشد کرده و کل دامنه محیط متخلخل را در بر می گیرند. این رشد با توجه به مکانیزم های مختلفی که برای رشد انگشتی ها معرفی شده اند، انجام خواهد شد. این مکانیزم ها در شرایط متفاوت جریان و یا هندسه متفاوت می باشند. در مطالعه ی حاضر به برخی از این مکانیزم ها که در شبیه سازی انجام گرفته، مشاهده شده اند، اشاره خواهیم کرد. در این فصل، ابتدا به بررسی نمودارهای مربوط به میانگین غلظت عرضی در حالت های مختلف شبیه سازی می پردازیم. پس از آن به معرفی طول اختلاط و چگونگی تغییرات آن بوسیله پارامترهای موجود در مسأله خواهیم پرداخت. در ادامه به بررسی کانتورهای غلظت که به خوبی رشد انگشتی ها را در زمان های مختلف شبیه سازی نشان می دهد، می پردازیم و در نهایت به بررسی پارامتری به نام راندمان جابجایی خواهیم پرداخت که کاربرد بسیار گسترده ای در صنایع مربوط به انتقال مواد هیدروکربونی دارد. در تمام نمودارها و کانتورهای نمایش داده شده در این فصل $Pe = 1000$ ، $R = 3$ ، $A = 2$ ، $\alpha_K = \alpha_D = 1$ و $\beta_K = \beta_D = 0^\circ$ می باشند مگر این که خلاف آن ذکر شود.

۵-۲ میانگین غلظت عرضی^۱

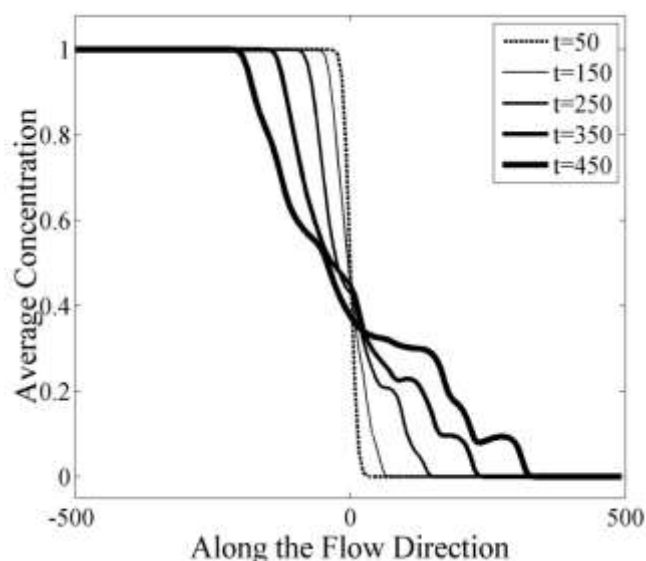
بررسی منحنی‌های بدست آمده از مقادیر میانگین غلظت عرضی، یکی از متداول‌ترین مطالعات آزمایشگاهی و عددی در بررسی ناپایداری انگشتی می‌باشد. در حقیقت مطالعه نتایج بدست آمده از اندازه‌گیری پارامترهای متفاوت در یک بعد، راهی مناسب برای پی بردن به رفتار جریان در محیط‌های مختلف می‌باشد. علاوه بر این معمولاً از اطلاعات بدست آمده از این روش برای بدست آوردن پارامترهایی که برای محاسبه‌ی آن‌ها به مقادیر میانگین نیاز است، استفاده می‌شود. به عنوان نمونه در ناپایداری انگشتی از میانگین غلظت عرضی برای بدست آوردن طول اختلاط استفاده می‌شود که در بخش بعدی به طور کامل مورد بررسی قرار خواهد گرفت. زیرمن و هومسی [۵۵] در بررسی ناپایداری انگشتی در محیط متخلخلی که پراکندگی ناهمسانگردی داشت، منحنی‌های میانگین عرضی و طولی^۲ غلظت را رسم کردند. آن‌ها همچنین به بررسی تغییرات عدد پکلت بر جابجایی این منحنی‌ها پرداختند. در مطالعه حاضر این منحنی‌ها در حالت جابجایی نیوتنی و نیز غیرنیوتنی در محیط متخلخل همسانگرد و ناهمسانگرد مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. در شکل ۵-۱ منحنی‌های میانگین غلظت عرضی برای جابجایی نیوتنی و در زمان‌های مختلف رسم شده است. همان طور که مشاهده می‌شود در زمان‌های ابتدایی شروع ناپایداری، منحنی به صورت خطی بدون پستی و بلندی می‌باشد. با افزایش زمان و رشد انگشتی‌ها، پستی و بلندی‌های موجود بر منحنی‌ها نیز افزایش پیدا می‌کنند. این فرایند در منحنی‌های بدست آمده برای جابجایی غیرنیوتنی نیز به خوبی قابل مشاهده است.

منحنی‌های میانگین غلظت عرضی برای جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی بر

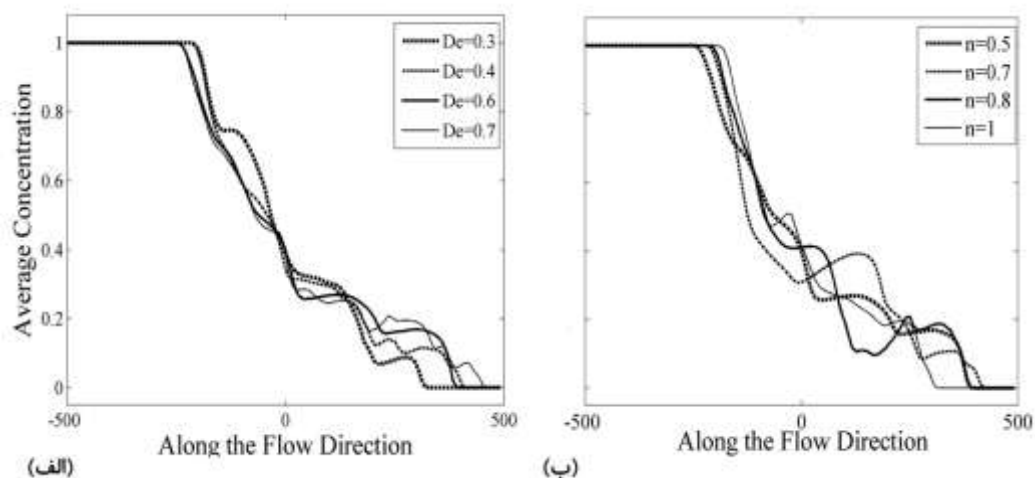
¹ Transversely Average Concentration

² Longitudinal Average Concentration

حسب تغییرات عدد D_e و n در شکل ۲-۵ نشان داده شده است. همان گونه که مشاهده می کنیم با گذشت زمان در این حالت نیز، پستی و بلندی در منحنی ها بوجود آمده است. همچنین می دانیم شدت و ارتفاع این پستی و بلندی ها نشان دهنده جریانی ناپایدارتر می باشد. در فصل تحلیل پایداری خطی مشاهده کردیم، در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی، جریان با افزایش D_e و کاهش n ناپایدارتر می شود. با توجه به شکل ۲-۵، همین نتایج قابل مشاهده می باشد. در قسمت الف و ب از این منحنی ها، مشاهده می شود که با افزایش عدد D_e و کاهش n پستی و بلندی ها، ارتفاع و عمق بیشتری پیدا می کنند.

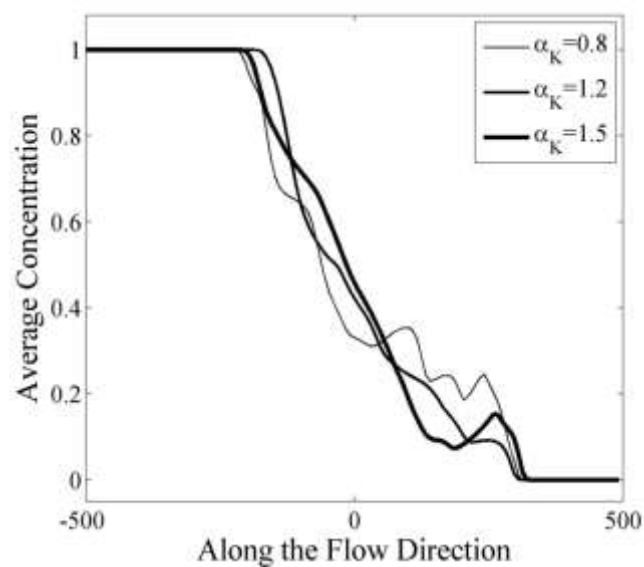


شکل ۲-۵: منحنی میانگین غلظت عرضی در جابجایی نیوتنی و $R = 3$ ، $A = 2$ ، $Pe = 1000$

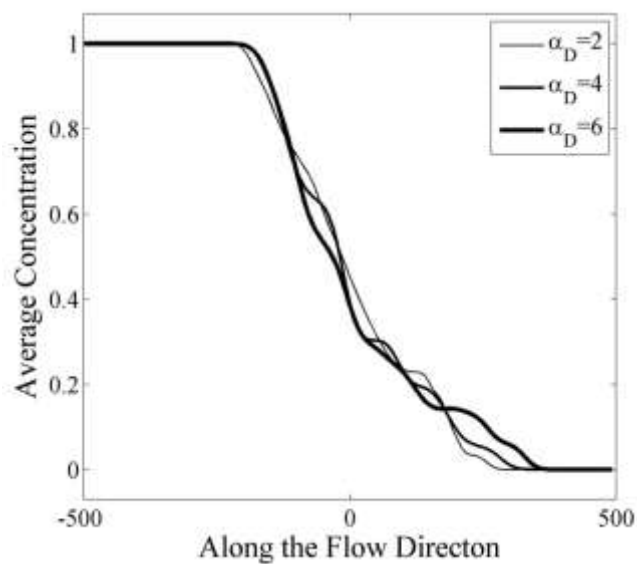


شکل ۳-۵: منحنی میانگین غلظت عرضی در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی $t = 450$ (الف) نسبت به تغییرات عدد $D_e = 0.6$ ، $n = 0.5$ (ب) نسبت به تغییرات n

شکل ۳-۵ منحنی‌های میانگین غلظت عرضی را برای جریان سیالات نیوتنی و در محیط متخلخلی با نفوذپذیری ناهمسانگرد نشان می‌دهد. با توجه در منحنی‌های بدست‌آمده متوجه می‌شویم که برای مقادیر کوچکتر α_K ، این منحنی‌ها پستی و بلندی بیشتر داشته و در نتیجه جریانی ناپایدارتر خواهیم داشت. نتیجه‌ای که در فصل تحلیل پایداری خطی نیز بدست آمد. از نتایج بدست آمده در تحلیل پایداری خطی نتیجه گرفتیم که هرچه مقدار نسبت α_K کاهش پیدا کند، جریانی ناپایدارتر خواهیم داشت. این نتایج دقیقاً برای محیط متخلخلی با پراکندگی ناهمسانگرد نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. شکل ۴-۵ منحنی‌های میانگین غلظت عرضی را برای جریان سیالات نیوتنی و α_D متفاوت نشان می‌دهد. در این نمودار نیز مشاهده می‌کنیم که با افزایش α_D ، پستی و بلندی‌های موجود در منحنی کاهش یافته و در واقع جریانی پایدارتر خواهیم داشت که این نتیجه نیز از نتایج بدست آمده در تحلیل پایداری خطی، بدست آمد.



شکل ۳-۵: منحنی میانگین غلظت عرضی در جابجایی نیوتنی و نسبت نفوذپذیری‌های متفاوت α_K ،
 $t = 250$



شکل ۴-۵: منحنی میانگین غلظت عرضی در جابجایی نیوتنی و نسبت پراکندگی‌های متفاوت α_D ، $t = 450$

۳-۵ طول اختلاط

همان‌گونه که در قسمت قبل ذکر شد، با استفاده از مقادیر بدست آمده برای میانگین غلظت

عرضی، به نتایج مهم‌تری مانند طول اختلاط خواهیم رسید. به بیان کلی میزان ناحیه مخلوط شدن دو سیال در گیر در جابجایی مخلوط‌شدنی را طول اختلاط می‌گویند. به عبارتی ساده‌تر طول اختلاط را می‌توان میزان پیشرفت سیال با ویسکوزیته کمتر درون سیال با ویسکوزیته بیشتر، تعریف کرد. از این کمیت در ناپایداری انگشتی برای بیان مقدار پیشرفت و حرکت انگشتی‌ها در محیط متخلخل استفاده می‌شود. برای بدست آوردن این طول، روش‌های زیادی معرفی شده است که در مطالعه حاضر با استفاده از روش زیرمن و هومسی [۵۵] این کمیت اندازه‌گیری می‌شود. در این روش فاصله بین $\bar{c} = 1 - \delta$ و $\bar{c} = \delta$ که در قسمت میانگین غلظت عرضی بدست آمده بودند، محاسبه شده و به صورت زیر به عنوان طول اختلاط در نظر گرفته می‌شود:

$$L_{\delta} = x|_{\bar{c}=\delta} - x|_{\bar{c}=1-\delta} \quad (۱-۵)$$

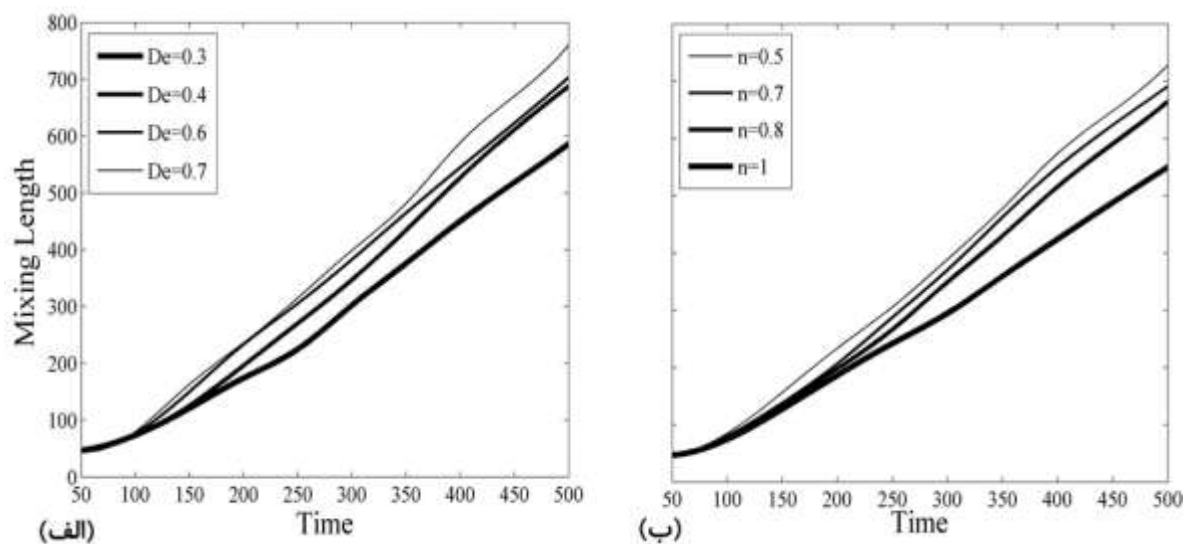
در این معادله، δ یک عدد مثبت کوچک می‌باشد که مقدار آن را ۰/۰۱ در نظر می‌گیریم و $\bar{c}$ میانگین غلظت عرضی است که از محاسبات انجام شده در بخش قبلی بدست می‌آید. بدست آوردن طول اختلاط یک ایده‌ی بسیار خوب به محققین برای پیدا کردن نقطه‌ی حمله انگشتی‌ها ارائه می‌دهد. در حقیقت بیشترین طول اختلاط بدست آمده، نشان‌دهنده بزرگ‌ترین طول انگشتی در ناحیه متخلخل مورد نظر می‌باشد. برای یک جابجایی پایدار این طول متناسب با $t^{1/2}$ می‌باشد. در جابجایی‌های ناپایدار نیز در زمان‌های اولیه شروع جریان که هنوز اغتشاشات کم‌توان هستند، این طول متناسب با $t^{1/2}$ می‌باشد ولی با گذشت زمان و رشد انگشتی‌ها، طول اختلاط تابعی پیچیده بر حسب زمان می‌شود. بر همین اساس مطالعاتی زیادی در مورد چگونگی رفتار این کمیت بر حسب زمان در حالت‌های متفاوت انجام گرفته و معادلات گوناگونی برای آن گزارش شده است. کوال و همکاران [۲۰] در مدل یک‌بعدی خود، برای این کمیت یک رابطه خطی با زمان در نظر گرفتند و نتایج بدست آمده از این فرض را با نتایج آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار دادند. همچنین

پرکینس [۴۴] با استفاده از نتایج آزمایشگاهی توانست رابطه‌ای را بر نتایج بدست آمده منطبق کند و در حالت‌های متفاوت بعدی که امکان مدل‌سازی آزمایشگاهی وجود نداشت، از آن استفاده کند. علاوه بر این، تن و هومسی [۲۴] نیز طول اختلاط را در جابجایی‌های نیوتنی برای حالت‌های متفاوت بدست آورده و نتیجه گرفتند که به ازای مقادیر بسیار بزرگ از عدد پکلت این طول وابستگی خود را به عدد پکلت از دست می‌دهد. این دو همچنین مشاهده کردند که اگر اغتشاشات اولیه کوچک باشند، طول اختلاط ابتدا با $t^{1/2}$ تغییر می‌کند ولی پس از آن با رشد انگشتی‌ها رابطه‌ای خطی با t پیدا خواهد کرد. مطالعات انجام شده توسط این دو نویسنده با تحقیقات زیمرمن و هومسی [۵۵] ادامه یافت. این دو متوجه شدند که رفتار این کمیت برای بخش زیادی از حالت‌های جابجایی مورد آزمایش، تا زمان ۱۵۰ ثانیه تقریباً یکسان می‌باشد و پس از آن تغییرات در مقادیر بدست آمده محسوس خواهد شد. پس از این دو نیز، راگرسون و میبورگ [۱۱] پی بردند که اگرچه در تحقیقات خود برش‌های مماسی متفاوتی به سیستم اعمال می‌کنند ولی تغییرات طول اختلاط همانند نتایج بدست آمده زیمرمن و هومسی [۵۵]، تا زمان ۱۵۰ ثانیه تقریباً یکسان می‌باشد.

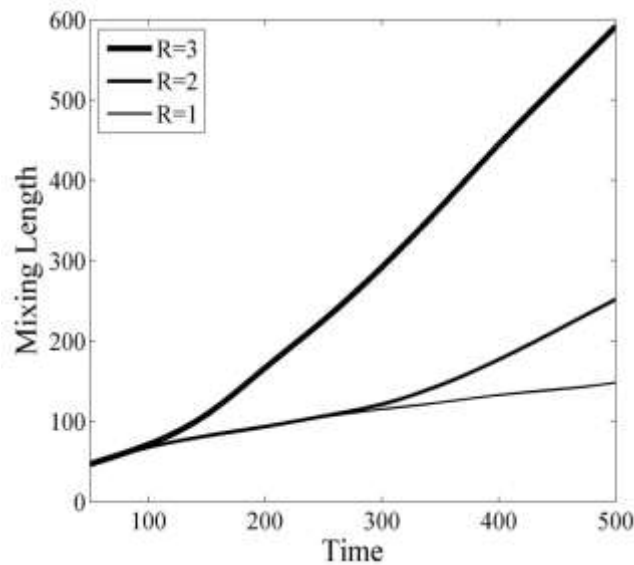
شکل ۵-۵ تغییرات طول اختلاط را بر حسب زمان برای حالت‌های متفاوت نشان می‌دهد. همان طور که در نمودارها قابل مشاهده است، می‌توان دو بخش که دارای نرخ رشد‌های یکسان می‌باشند را از هم مجزا کرد. طول اختلاط برای زمان‌های کمتر از ۱۵۰ ثانیه که در آن فرایند پخش سیال با ویسکوزیته کمتر در سیال با ویسکوزیته بیشتر حاکم است و طول اختلاط برای زمان‌های بعد از ۱۵۰ ثانیه که در آن رشد انگشتی‌ها موجب افزایش طول اختلاط می‌شود. میزان تفاوت افزایش در رشد طول اختلاط در این دو ناحیه بر اساس مطالعاتی که تن و هومسی [۲۴] انجام دادند ۱/۵ برابر می‌باشد. علاوه بر این نتایج، مشاهده می‌شود در حالتی که سیال غیرنیوتنی،

سیال نیوتنی را جابجا می کند طول اختلاط کمتر از جابجایی نیوتنی می باشد در حالی که در حالت عکس آن، این مقدار بیشتر از حالت جابجایی نیوتنی است. این رخداد به صورت زیر قابل شرح است: در حالتی که یک سیال غیرنیوتنی سیال نیوتنی را جابجا می کند، ویسکوزیته سیال باریک شونده جابجا کننده، با زمان کاهش می یابد که در نتیجه آن نسبت تحرک افزایش می یابد. این افزایش در نسبت تحرک موجب افزایش نرخ رشد انگشتی ها و به تبع آن افزایش طول اختلاط خواهد شد.

همان گونه در بخش میانگین غلظت عرضی مشاهده شد، با افزایش De و کاهش n ، در این نوع از جابجایی، جریانی ناپایدارتر خواهیم داشت که در نتیجه آن، طول اختلاطی بزرگ تر بدست خواهد آمد. این موضوع به روشنی در شکل ۵-۵ قابل مشاهده است.



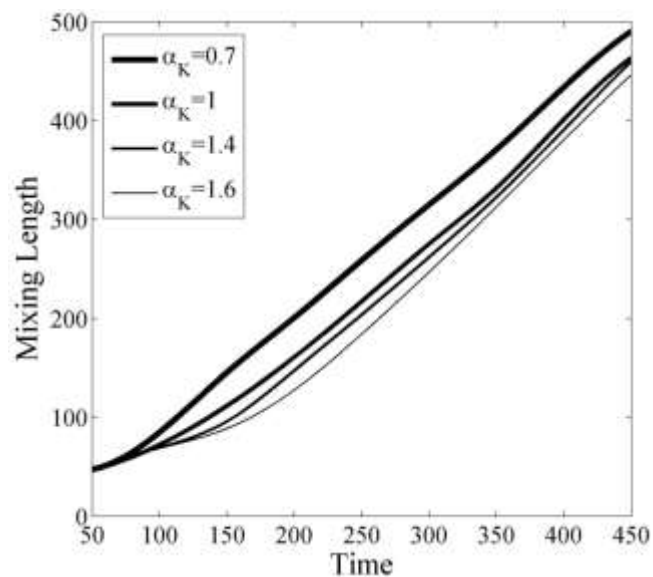
شکل ۵-۵: منحنی طول اختلاط در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی (الف) نسبت به تغییرات عدد $De = 0.6$ ، $n = 0.5$ (ب) نسبت به تغییرات n



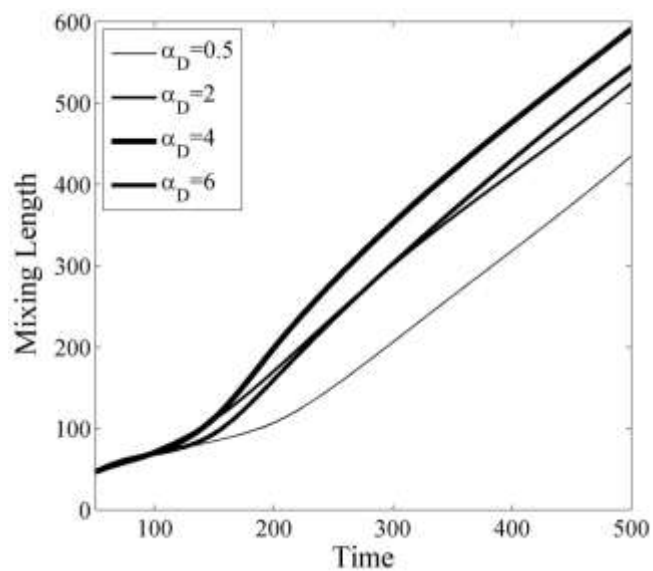
شکل ۵-۶: منحنی طول اختلاط در جابجایی سیالات نیوتنی و R های متفاوت

بررسی طول اختلاط علاوه بر موارد ذکر شده، بر اساس تغییرات لگاریتم نسبت تحرک R نیز مورد توجه قرار می گیرد. همان طور که می دانیم هر چه R بزرگ تر باشد، ناپایداری انگشتی سریع تر شروع شده و با سرعت بیشتری به رشد خود ادامه می دهد. با توجه به همین علت، طول اختلاط نیز در R بزرگتر، بیشتر خواهد بود. تغییرات طول اختلاط بر حسب R در شکل ۵-۶ آورده شده است.

شکل ۵-۷ طول اختلاط را در محیط متخلخلی با نفوذپذیری ناهمسانگرد نشان می دهد. در بخش تحلیل پایداری خطی و میانگین غلظت عرضی مشاهده کردیم که با افزایش α_K جریانی پایدارتر خواهیم داشت. به عبارت دیگر با افزایش این نسبت، انگشتی ها با سرعت کندتری رشد کرده و آهسته تر از حالت همسانگرد درون سیال با ویسکوزیته بیشتر نفوذ می کنند. بنابراین باید برای مقادیر بزرگ تر α_K طول اختلاط نیز کمتر باشد. این نتیجه گیری به خوبی در شکل ۵-۷ نشان داده شده است. شکل ۵-۸ نیز همین نتیجه گیری را برای محیط متخلخلی با پراکندگی ناهمسانگرد نشان می دهد. در این نمودار نیز با افزایش α_D جریان پایدارتر شده و طول اختلاط کاهش می یابد.



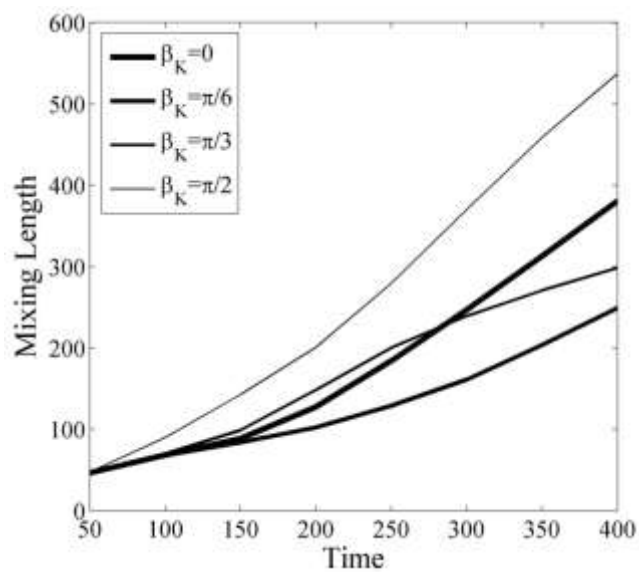
شکل ۵-۷: منحنی طول اختلاط در جابجایی نیوتنی و نسبت نفوذپذیری‌های متفاوت α_K



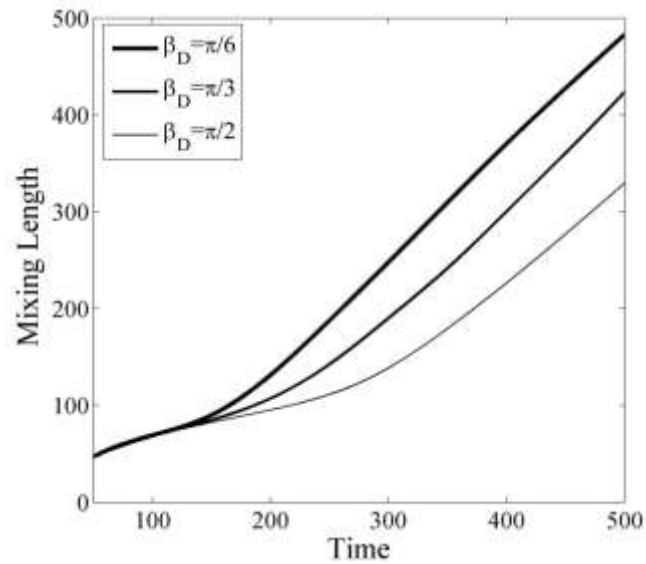
شکل ۵-۸: منحنی طول اختلاط در جابجایی نیوتنی و نسبت پراکندگی‌های متفاوت α_D

شکل ۵-۹ و شکل ۵-۱۰ نیز به ترتیب طول اختلاط را برای زوایای ناهمسانگردی متفاوتی از نفوذپذیری و پراکندگی نشان می‌دهند. از نتایج بدست آمده از تحلیل پایداری خطی مشاهده شد که با افزایش زاویه ناهمسانگردی در تانسور نفوذپذیری جریانی ناپایدارتر خواهیم داشت، بنابراین طول اختلاط نیز افزایش می‌یابد در حالی که افزایش زاویه ناهمسانگردی در تانسور پراکندگی

جریانی پایدارتر و در نتیجه طول اختلاط کمتری خواهیم داشت.



شکل ۵-۹: منحنی طول اختلاط در جابجایی نیوتنی و زاویه ناهمسانگردی‌های متفاوت برای تانسور نفوذپذیری α_K



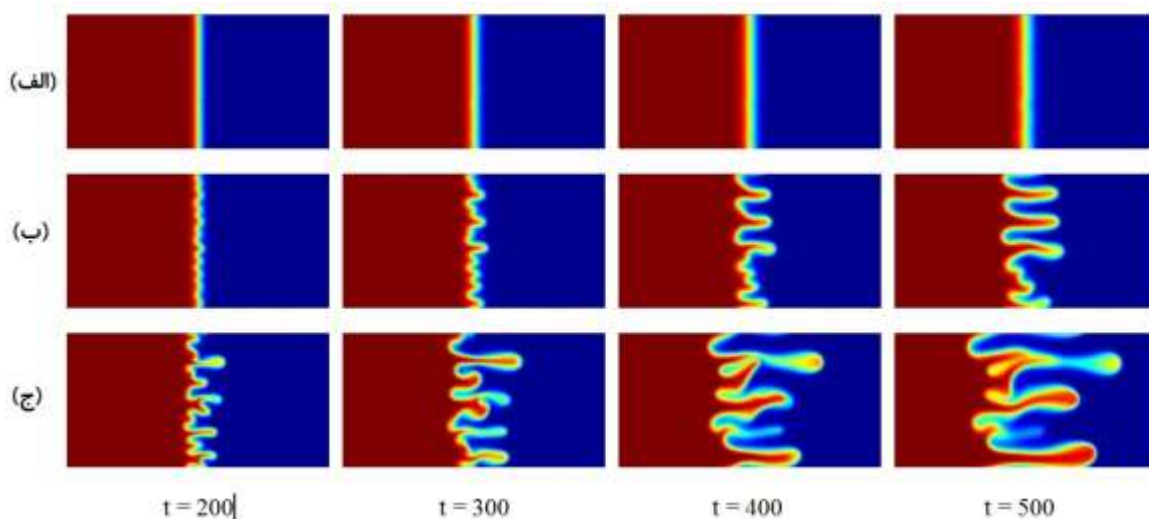
شکل ۵-۱۰: منحنی طول اختلاط در جابجایی نیوتنی و زاویه ناهمسانگردی‌های متفاوت برای تانسور پراکندگی α_D

۴-۵ کانتورهای غلظت

در این قسمت کانتورهای غلظت در زمان‌های مختلف شبیه‌سازی، نمایش داده می‌شوند و مکانیزم‌های مختلف رشد انگشتی‌ها در حالت‌های مختلف جابجایی نیوتنی و غیرنیوتنی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱-۴-۵ جابجایی‌های سیالات نیوتنی

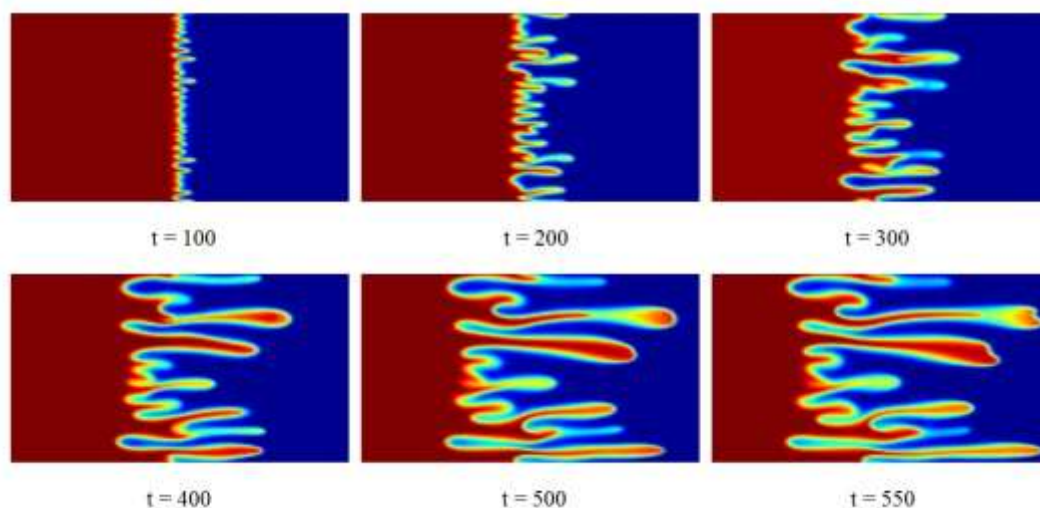
در ابتدا به بررسی نقش تغییرات نسبت تحرک در پیدایش و رشد انگشتی‌ها می‌پردازیم. بدین منظور نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی غیرخطی در سه حالت متفاوت R را در شکل ۵-۱۱ نشان داده‌ایم. همان‌طور که از نتایج تحلیل پایداری خطی نیز انتظار داشتیم، با افزایش نسبت تحرک یا به عبارت ساده‌تر افزایش اختلاف ویسکوزیته، ناپایداری‌ها نیز شدت بیشتری پیدا می‌کند. این فرایند به خوبی در نتایج بدست آمده قابل مشاهده است. علاوه بر این در بخش طول اختلاط نیز مشاهده کردیم که با افزایش پارامتر R ، طول اختلاط یا همان میزان رشد انگشتی‌ها نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۵-۱۱: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی. (الف) $R = 1$ ، (ب) $R = 2$ ، (ج) $R = 3$

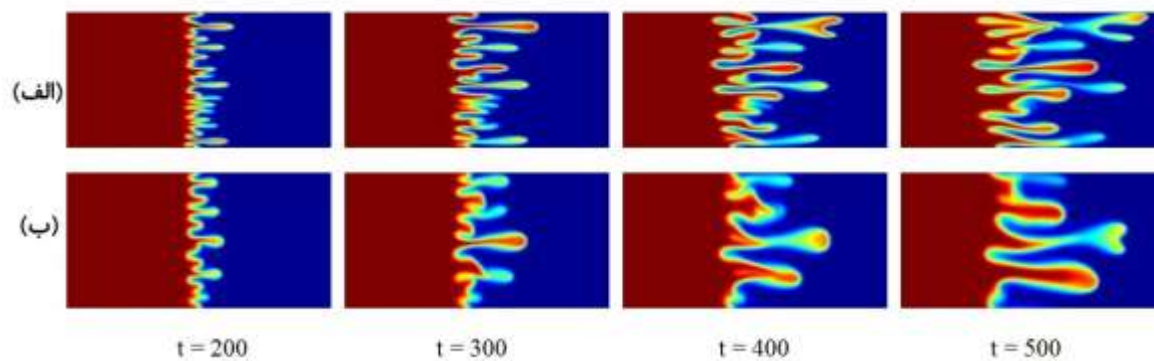
شکل ۵-۱۲ رشد انگشتی‌ها را بر حسب زمان برای حالتی که هر دو سیال نیوتنی هستند نشان می‌دهند. با دقت در تصاویر متوجه می‌شویم که در فریم‌های ابتدایی تعداد انگشتی‌ها زیاده‌تر و البته بسیار باریک و ریز هستند در حالی که با گذشت زمان در فریم‌های بعدی از تعداد آن‌ها کاسته شده ولی در عوض انگشتی‌هایی پهن‌تر و بزرگ‌تر بوجود می‌آیند. همان‌طور که ذکر شد فرایند پیچیده رشد انگشتی‌ها توسط مکانیزم‌هایی معرفی می‌شوند. انواع مختلفی از این مکانیزم‌ها در مطالعات پیشین توسط محققین بسیاری مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این جا مروری کوتاه بر تحقیقات انجام گرفته توسط این افراد خواهیم داشت. تن و هومسی [۲۴] برای اولین بار به طور جامع، به معرفی و بررسی مکانیزم‌های موجود در رشد انگشتی‌ها در جابجایی‌های مخلوط‌شدنی و در محیط متخلخلی با پراکندگی همسانگرد پرداختند. پس از آن زیمرمن و هومسی [۵۵] مطالعات مربوطه را در محیط متخلخلی با پراکندگی ناهمسانگرد ادامه دادند. قسمت و عزایز [۱۴] به بررسی مکانیزم‌های بوجود آمده در محیط متخلخلی که پراکندگی آن وابسته به سرعت جریان می‌بود، پرداختند. علاوه بر این، عزایز و سینق [۱۹] در مطالعه‌ای که در زمینه جریان سیالات باریک شونده انجام دادند، مکانیزم‌های جدید بوجود آمده در آن را مورد بررسی قرار دادند. در کنار این مطالعات، برخی نیز با استفاده از روش‌های جدیدتر شبیه‌سازی، به بررسی مکانیزم‌های ایجاد شده در شرایطی که قبلاً امکان شبیه‌سازی آن‌ها وجود نداشت، پرداختند. به عنوان نمونه، اسلام و عزایز^۱ [۶۱] با استفاده از یک روش طیفی اصلاح شده، توانستند این ناپایداری را در نسبت تحرک‌های بالاتر شبیه‌سازی کرده و مکانیزم‌های جدید بوجود آمده در آن را مشاهده کنند.

¹ Islam, M. N. ; Azaiez, j.



شکل ۱۲-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی. $R = 3$ ، $Pe = 1000$ ، $A = 1$

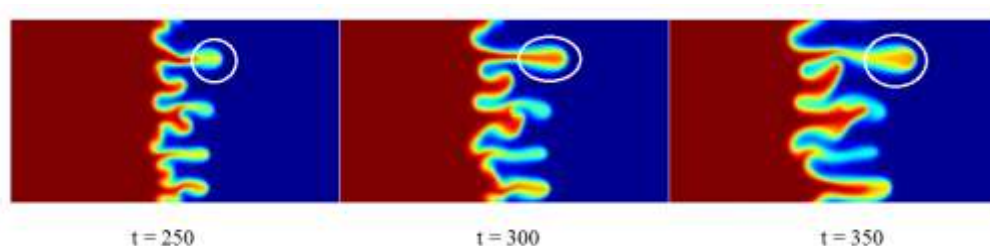
برای مشاهده تاثیر تغییرات پارامتر A که نسبت وجهین را نشان می‌دهد، شبیه‌سازی‌های غیرخطی متفاوتی با A متغیر و Pe و R ثابت انجام شده است. نتایج بدست آمده از این شبیه‌سازی در شکل ۱۳-۵ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تعداد انگشتی‌ها به ازای A بزرگ‌تر، کم‌تر می‌باشند. در واقع می‌توان گفت؛ در مقادیر بزرگ‌تر این پارامتر، یک بزرگ‌نمایی در محیط محاسباتی انجام شده است که نتیجه آن مشاهده‌ی فقط جزئی از کل دامنه محاسباتی می‌باشد. بهمین دلیل نیز تعداد انگشتی‌های کم‌تری دیده می‌شوند.



شکل ۱۳-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی $Pe = 1200$ ، $R = 3$ ، (الف) $A = 1$ ، (ب) $A = 2$

در ادامه بخشی از مهم‌ترین مکانیزم‌های معرفی شده در مطالعات پیشین را تشریح کرده و آن‌ها را در فریم‌های مختلف شبیه‌سازی، نشان می‌دهیم.

انتشار^۱: در تصاویر بدست آمده از شبیه‌سازی غیرخطی در شکل ۵-۱۴ مشاهده می‌شود که انگشتی‌ها فرم افقی خود را از دست می‌دهند و پهن‌تر می‌شوند. این پهن‌شدگی به علت حرکت‌های بسیار کوچک عمود بر جهت جریان ناشی می‌شود. این فرایند با نام فرایند انتشار در مطالعات مربوط به ناپایداری انگشتی معرفی می‌شود.

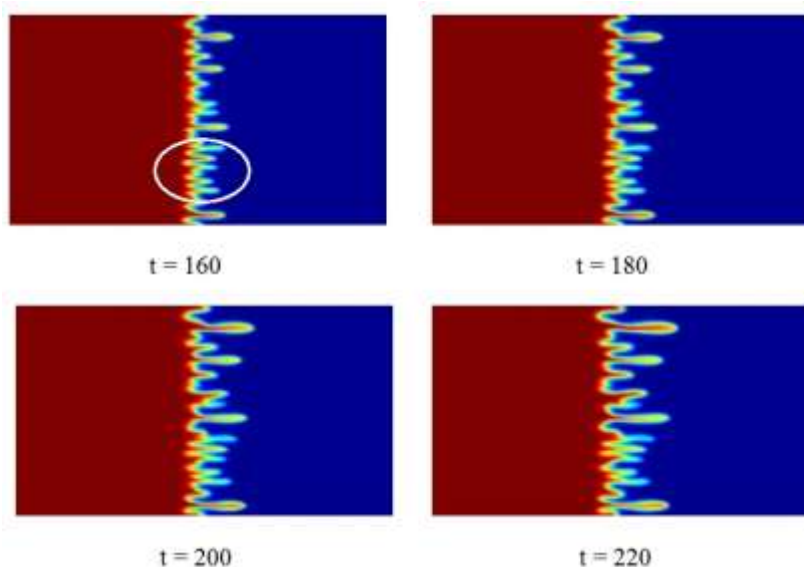


شکل ۵-۱۴: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی $R = 3$ ، $Pe = 1000$ ، $A = 2$

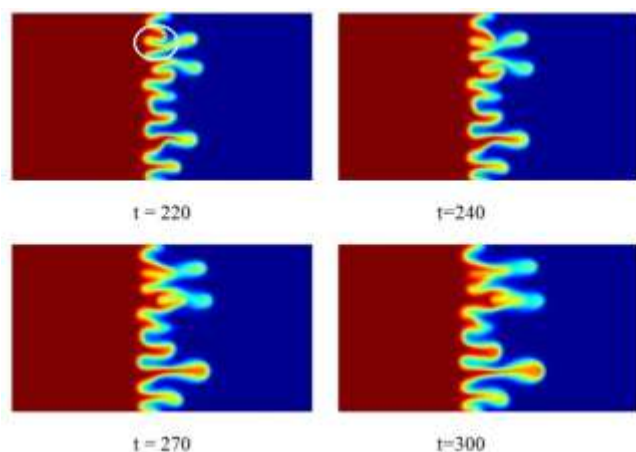
اثر پوششی^۲: در زمان‌های اولیه رشد انگشتی‌ها، نوک یک انگشتی درون انگشتی در حال رشد کناری نفوذ می‌کند. انگشتی پوشش داده شده رشد کرده و گرادیان غلظت بین انگشتی و سیال ویسکوز اطراف آن بیشتر می‌شود. در نتیجه این فرایند انگشتی بزرگتر و پهن‌تری بدست می‌آید. این مکانیزم که به نام اثر پوششی شناخته می‌شود، در شکل ۵-۱۵ نشان داده شده است.

¹ Spreading

² Shielding



شکل ۵-۱۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی $R = 3$ ، $Pe = 1200$ ، $A = 1$

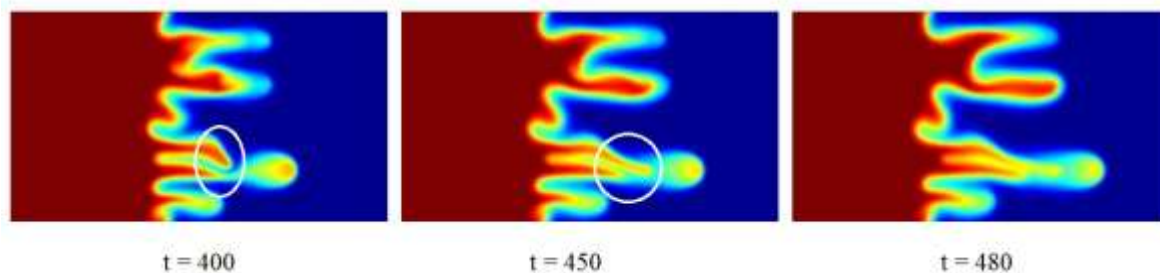


شکل ۵-۱۶: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی $R = 3$ ، $Pe = 800$ ، $A = 2$

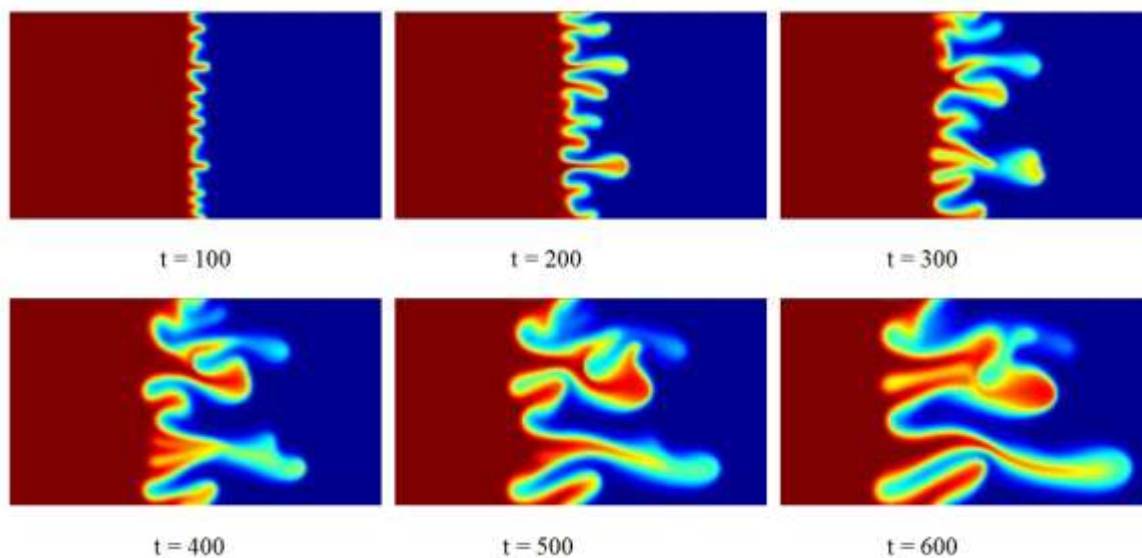
محوشدگی^۱: این مکانیزم اولین بار توسط زیمرمن و هومسی [۵۵] در شبیه سازی غیرخطی که در محیط با پراکندگی ناهمسانگرد انجام دادند، معرفی شد. البته پس از این دو، تن و هومسی [۲۴] نیز در بررسی ناپایداری انگشتی در محیطهای همسانگرد، این مکانیزم را مشاهده کردند. در این مکانیزم، یک انگشتی درون انگشتی کناری خود نفوذ کرده و با آن درون سیال ویسکوزتر نفوذ

¹ Fading

می‌کند. این مکانیزم در شکل ۱۶-۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۷-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی $R = 3$ ، $Pe = 800$ ، $A = 2$



شکل ۱۸-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی $n = 0.7$ ، $D_e = 0.4$

به هم پیوستگی^۱: این مکانیزم اولین بار توسط زیمرمن و هومسی [۵۵] در شبیه سازی انجام گرفته شده در محیط متخلخل ناهمسانگرد معرفی شد. این دو در شبیه سازی‌های بعدی خود در شرایط همسانگرد نیز توانستند این مکانیزم را مشاهده کنند. در این فرآیند نوک یک انگشتی درون بدنه‌ی انگشتی همسایه ترکیب می‌شود. در نتیجه این ترکیب انگشتی بزرگتر و با ضخامت بیشتر بوجود می‌آید. همچنین با شکل‌گیری این مکانیزم جابجایی سیال ویسکوزتر توسط سیال دیگر با

¹ Coalescence

سرعت بیشتری انجام می‌گیرد. مکانیزم بهم پیوستگی در شکل ۵-۱۷ قابل مشاهده است.

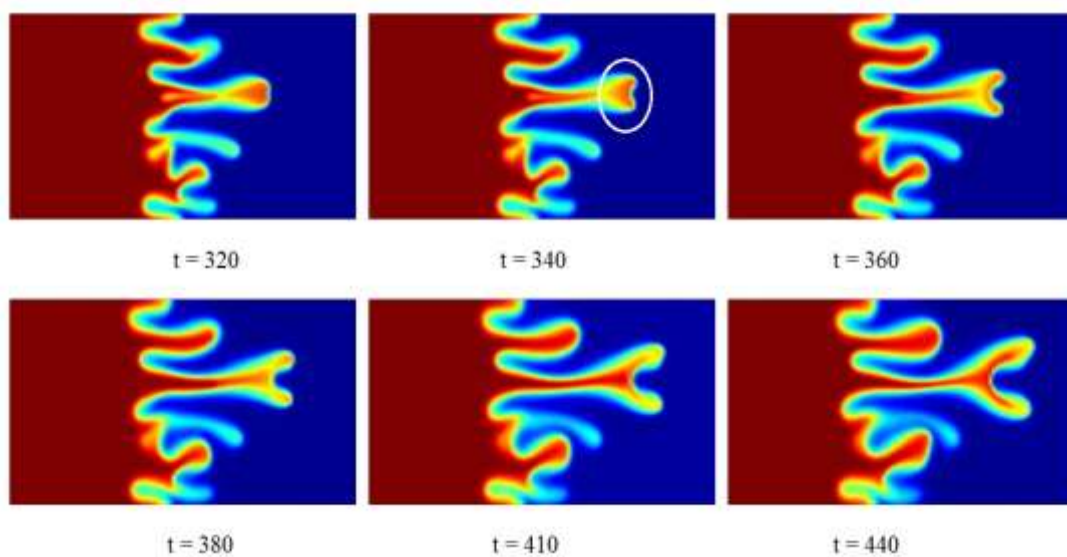
۵-۴-۲ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی

در این قسمت نتایج حاصل از شبیه سازی غیرخطی برای حالت جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و به ازای مقادیر متفاوتی از D_e و n مورد بررسی قرار می‌گیرند. فریم‌های موجود در شکل ۵-۱۸ رشد انگشتی‌ها را باگذشت زمان نشان می‌دهند. همان طور که مشاهده می‌شود در این حالت نیز در زمان‌های ابتدایی تعداد انگشتی‌ها در سطح مشترک زیاد می‌باشد که با گذشت زمان از تعداد آن‌ها کاسته شده و بر ضخامت و طول آن‌ها افزوده می‌شود. علاوه بر مکانیزم‌های مشاهده شده در جابجایی نیوتنی، مکانیزم‌های خاص دیگری در این نوع از جابجایی‌ها قابل مشاهده هستند. یکی از معروفترین این مکانیزم‌ها، مکانیزم شکافتن نوک انگشتی^۱ می‌باشد. این فرایند اولین بار توسط تن و هومسی [۲۴] گزارش شد و بعد از آن در مطالعات بسیاری از محققین در شبیه‌سازی‌های عددی مورد بررسی قرار گرفت. در مطالعات آزمایشگاهی نیز، وودینگ [۴] توانست این مکانیزم را در جابجایی سیالات مخلوط شدنی مشاهده کند. از جمله افراد دیگری که در مطالعات عددی و آزمایشگاهی خود به بررسی این مکانیزم پرداختند می‌توان به پارک و هومسی [۶۲] و نیز کاواگوچی [۵۲] اشاره کرد. این مکانیزم به صورت زیر تعریف می‌شود:

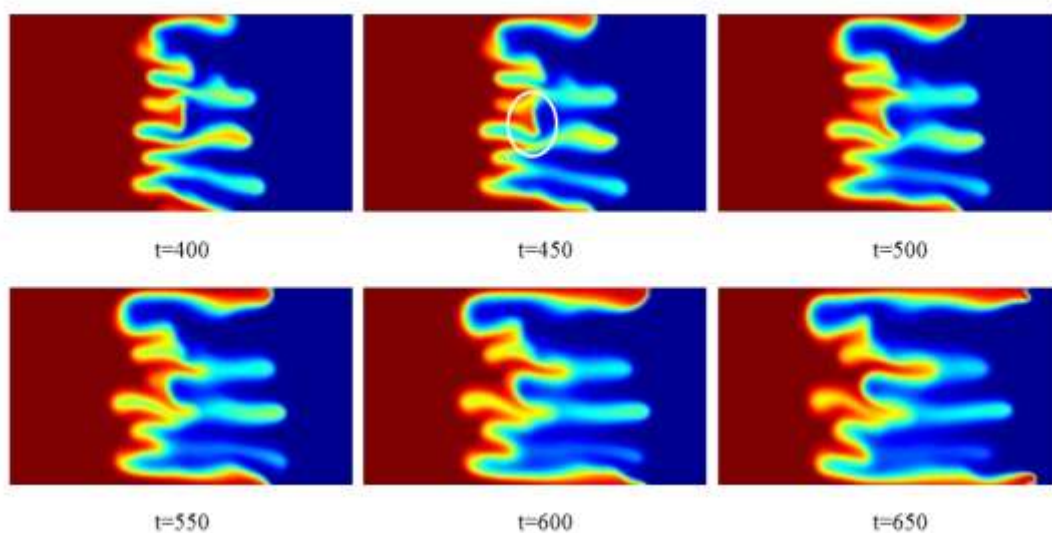
شکافتگی نوک انگشتی: در این مکانیزم، نوک انگشتی پس از رشد به حدی پهن می‌شود که در آن یک موج ایجاد می‌شود. به علت وجود جریان، گرادیان غلظت در این موج پر شیب‌تر می‌شود و در نتیجه آن، با گذشت زمان و رشد موج‌ها، نوک انگشتی شکافته و دو انگشتی جدید از آن

¹ Tip-splitting

بوجود می‌آید. این مکانیزم در شکل ۱۹-۵ به نمایش در آمده است.



شکل ۱۹-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی $n = 0.8$ ، $D_e = 0.6$



شکل ۲۰-۵: کانتورهای غلظت در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی $n = 0.5$ ، $D_e = 0.8$

نوع خاصی از مکانیزم بهم پیوستگی در شکل ۲۰-۵ دیده می‌شود که در آن نوک انگشتی به سمت بدنه‌ی انگشتی همسایه خم شده ولی مانند حالت نیوتنی به طور کامل در آن غرق نشده و به یک انگشتی کامل از ترکیب هر دو تبدیل نمی‌شود. در این فرایند جدید، بعد از پیوستن نوک

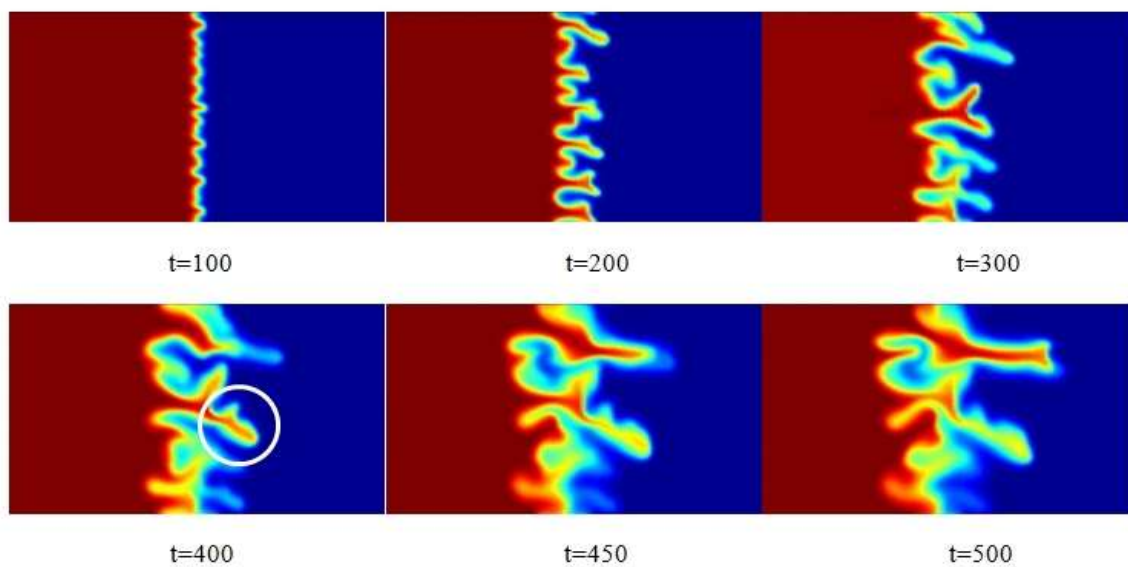
انگشتی به بدنه انگشتی دیگر، قسمت باقیمانده انگشتی پهن تر شده و به صورت جداگانه به رشدش ادامه می‌دهد.

۵-۴-۳ جابجایی جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی در محیط

متخلخلی با خواص ناهمسانگرد

در شبیه‌سازی‌های غیرخطی انجام گرفته در محیط متخلخلی با نفوذپذیری و پراکندگی ناهمسانگرد، علاوه بر مکانیزم‌های تشریح شده در بخش‌های قبلی، مکانیزم‌های جدیدی که قبلاً با این شرایط در حالت نیوتنی و غیرنیوتنی قابل مشاهده نبودند، رویت شدند. در شکل کانتورهای بدست آمده از شبیه‌سازی غیرخطی در محیط متخلخلی با نفوذپذیری ناهمسانگرد نشان داده شده است. در این حالت مشاهده می‌شود که ناپایداری در فریم ۲۰۰ شروع به رشد کرده و انگشتی‌هایی کوچک در سطح مشترک دو سیال ایجاد می‌شوند. این انگشتی‌ها توسط مکانیزم‌های گوناگون ذکر شده به رشد خود ادامه می‌دهند تا زمانی که در فریم ۵۰۰ انگشتی افقی بزرگی بوجود می‌آید. با گذشت زمان و پیشرفت انگشتی‌ها، در فریم ۳۰۰ مشاهده می‌شود که جلوی یکی از انگشتی‌ها پهن‌تر شده و به علت افزایش گرادیان غلظت، شکافتگی نوک انگشتی برای این انگشتی افقی بوجود می‌آید. در این میان با توجه به تصویر متوجه می‌شویم که این شکافتگی همانند موارد قبل به انگشتی‌هایی افقی و متقارن با هم تبدیل نمی‌شوند، بلکه اندکی تمایل به سمت پایین پیدا می‌کنند. در نتیجه‌ی شرایط بوجود آمده گرادیان غلظت در قسمت بالایی انگشتی بیشتر شده و همراه با جریان در همان جهت کشیده شده و ناپایدارتر می‌شود. این وضع شرایطی را بوجود می‌آورد که به موج‌های اغتشاشی ایجاد شده در لبه بالایی انگشتی اجازه حرکت سریع‌تر و در نهایت چند شاخه

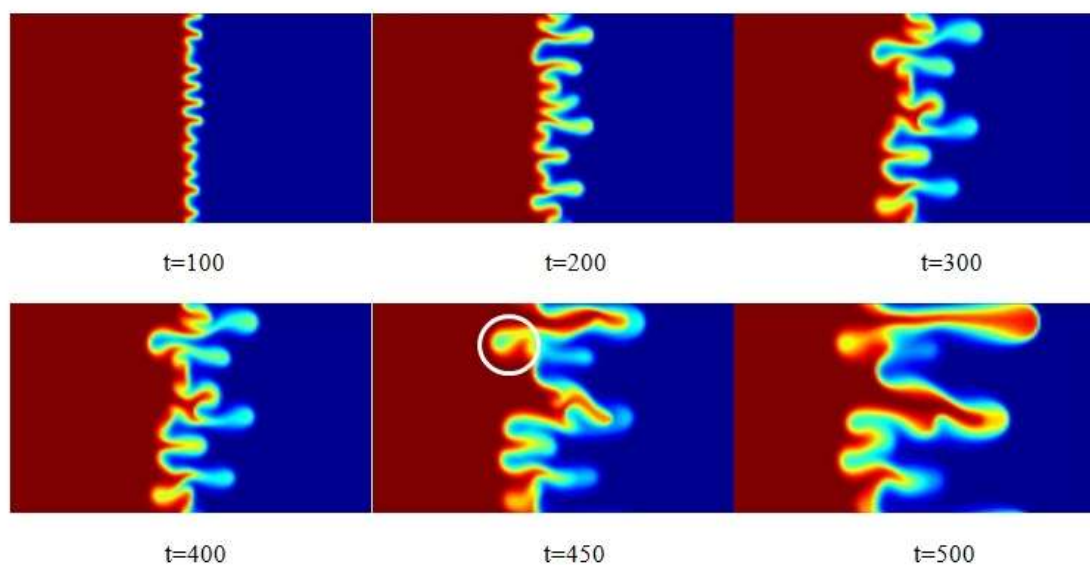
شدن را می‌دهد. این فرایند با عنوان مکانیزم چند شاخه‌ای شدن انگشتی^۱ از کناره، شناخته شده و در مطالعات زیادی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این موارد، مکانیزم دیگری نیز در این حالت خاص از شبیه‌سازی بوجود می‌آید که در آن بخشی از سیال با ویسکوزیته بیشتر، بین دو انگشتی ناشی از سیال با ویسکوزیته کمتر، محبوس می‌شود. با گذشت زمان و رشد انگشتی‌ها، سیال محبوس شده، در سیال جابجاکننده حل شده و اثری از آن مشاهده نمی‌شود. این مکانیزم نیز با نام قسمت گمشده^۲ در شبیه‌سازی‌های غیرخطی شناخته می‌شود.



شکل ۵-۲۱: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی و در محیط متخلخل ناهمسانگرد $\alpha_K = 1.2$ ،
 $\beta_K = \pi/6$

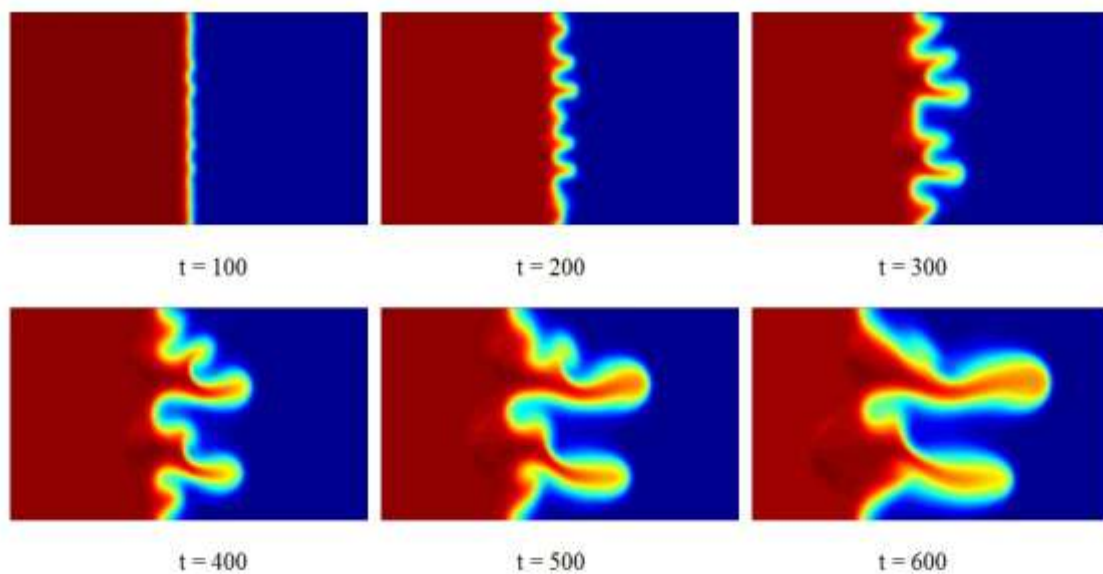
¹ Side-branching

² Trailing lobe



شکل ۵-۲۲: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی و در محیط متخلخل ناهمسانگرد $\alpha_K = 1.2$ ،
 $\beta_K = \pi/2$

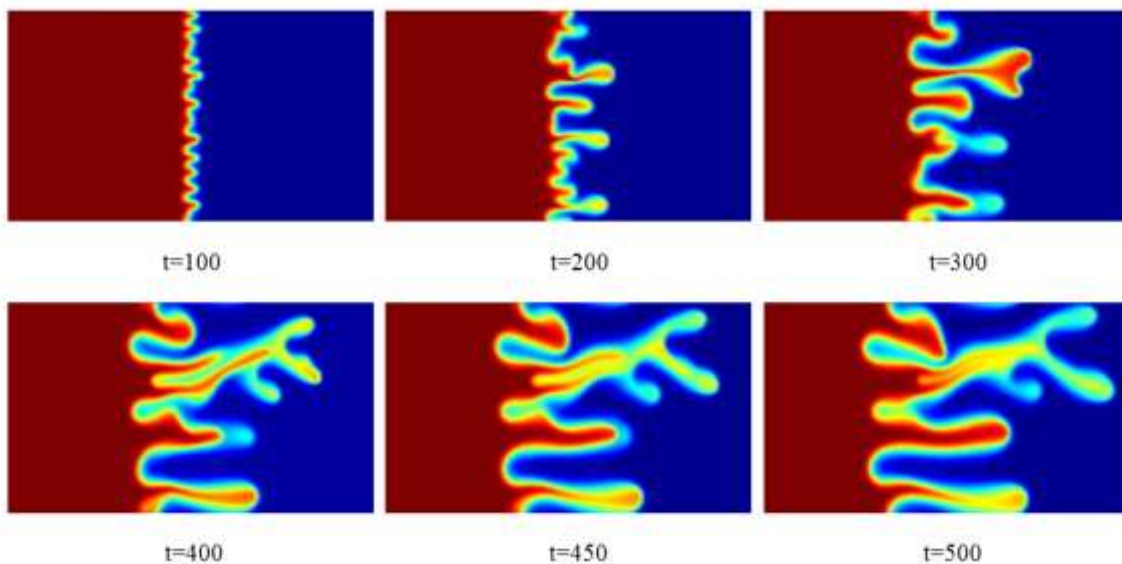
بر خلاف حالتی که نفوذپذیری محیط متخلخل ناهمسانگرد بود، در حالت ناهمسانگردی پراکندگی، انگشتی‌ها تعداد کم‌تری دارند و به صورت ساده‌تری به رشد خود ادامه می‌دهند. شکل ۵-۲۳ رشد انگشتی‌ها را در محیط مخلخلی با پراکندگی ناهمسانگرد نشان می‌دهد.



شکل ۵-۲۳: کانتورهای غلظت در جابجایی سیالات نیوتنی و در محیط متخلخل ناهمسانگرد $\alpha_D = 3$ ،

$$\beta_D = \pi/3$$

مکانیزم دیگری شبیه به مکانیزم چندشاخه‌ای شدن، در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و در محیط متخلخلی با پراکندگی ناهمسانگرد اتفاق می‌افتد. تنها تفاوت موجود در این مکانیزم، تمایل انگشتی شکافته شده به حرکت به سمت بالا در این حالت، بر خلاف حالت قبلی که تمایل به پایین آمدن داشت، می‌باشد.



شکل ۵-۲۴: کانتورهای غلظت در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و در محیط متخلخل ناهمسانگرد $\alpha_D = 3$ ، $\beta_D = \pi/3$ ، $D_e = 0.7$ ، $n = 0.4$

۵-۵ بازده جاروبی

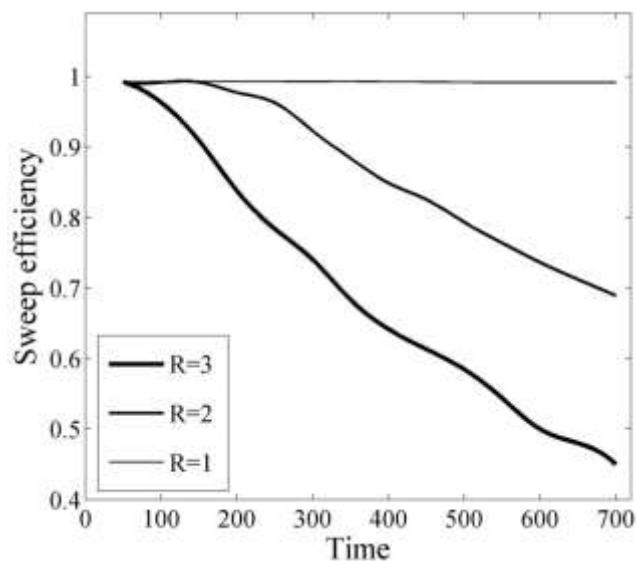
حجم سیال جابجا شده در یک محیط متخلخل نسبت به حجم کل موجود از آن سیال در محیط متخلخل را بازده جاروبی می‌گویند. این بازده بنا به کاربردهای متفاوتی که دارد در چند نوع مختلف تعریف می‌شود که از جمله آن‌ها می‌توان به بازده جاروبی عمودی، بازده جاروبی سطحی و بازده جاروبی واقعی اشاره کرد. در صنایع مربوط به نفت و استخراج آن، این بازده به صورت نسبت

حجم کل مواد هیدروکربنی موجود در مخزن به حجم جاروب شده از این مواد هیدروکربنی توسط یک سیال تزریقی، تعریف می‌شود و معمولاً از آن به عنوان پارامتری که میزان بهره‌وری روش استخراجی را تعیین می‌کند، استفاده می‌شود. این پارامتر در بررسی ناپایداری انگشتی، نشان‌دهنده رشد انگشتی‌ها در محیط متخلخل می‌باشد.

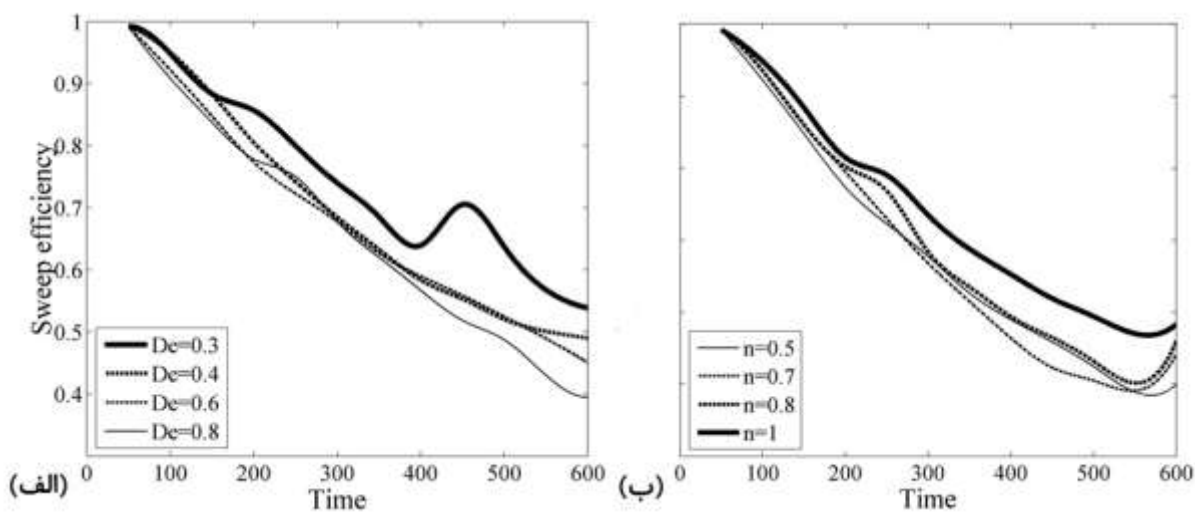
برای بدست آوردن این بازده، در مطالعه حاضر از روش استفاده شده توسط قسمت و عزیز[۱۴] استفاده می‌کنیم. این دو محقق در بررسی ناپایداری انگشتی در محیط متخلخلی که پراکندگی آن وابسته به سرعت جریان بود، منحنی‌های این بازده را در پارامترهای مختلف تاثیرگذار بر پراکندگی محیط متخلخل مورد بررسی قرار دادند. در این روش آن‌ها برای تعریف این بازده، تعداد گره‌هایی را که غلظت آن‌ها مساوی یا بزرگتر از 0.5 بود بر تعداد کل گره‌های موجود در محیط محاسباتی تقسیم کردند. در مطالعه حاضر با استفاده از همین روش به بررسی تاثیر پارامترهای رئولوژیکی موجود در مدل مورد استفاده بر این بازده می‌پردازیم. همچنین تاثیرات نسبت ناهمسانگردی و زاویه ناهمسانگردی نفوذپذیری محیط متخلخل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در شکل ۵-۲۵ منحنی‌های بدست آمده برای بازده جاروبی در حالت جابجایی نیوتنی و نسبت تحرک‌های متفاوت آورده شده‌اند. همان‌گونه که بحث شد، با افزایش نسبت تحرک، ناپایداری انگشتی شدت بیشتری پیدا می‌کند و با نفوذ بیشتر انگشتی‌ها بازده جاروبی کاهش پیدا می‌کند. تاثیر این پارامتر و نقش بسیار مهم آن در کاهش بازده جاروبی در شکل ۵-۲۵ به خوبی دیده می‌شود.

منحنی‌های این بازده برای جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی در شکل ۵-۲۶ به نمایش در آمده‌اند. در بخش تحلیل پایداری خطی مشاهده کردیم که با افزایش عدد De و کاهش شاخص پاور- n ، جریانی ناپایدارتر خواهیم داشت. جریان ناپایدارتر یعنی جریانی که در آن

انگشتی‌ها رشد بیشتری داشته و با سرعت بیشتری درون سیال با ویسکوزیته بیشتر نفوذ کرده‌اند که با توجه به مباحث ذکر شده باید بازده جاروبی کم‌تری داشته باشیم. این رفتار از نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی غیرخطی در شکل ۵-۲۶ به خوبی مشاهده می‌شود.

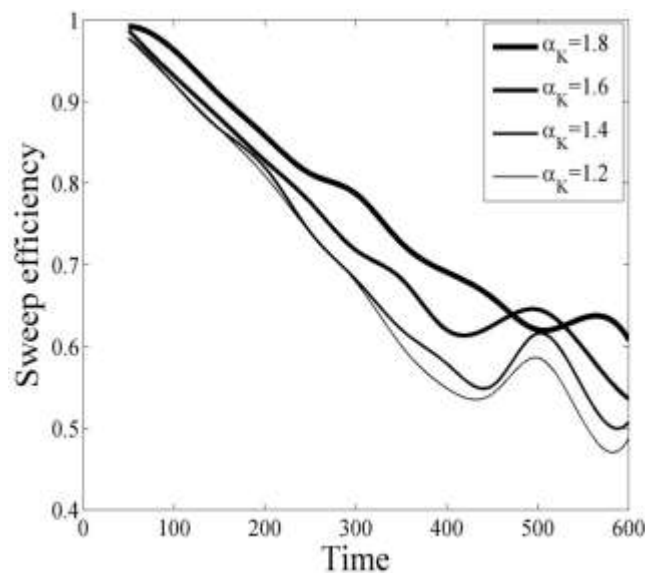


شکل ۵-۲۵: بازده جاروبی بر حسب زمان و نسبت تحرک‌های متفاوت

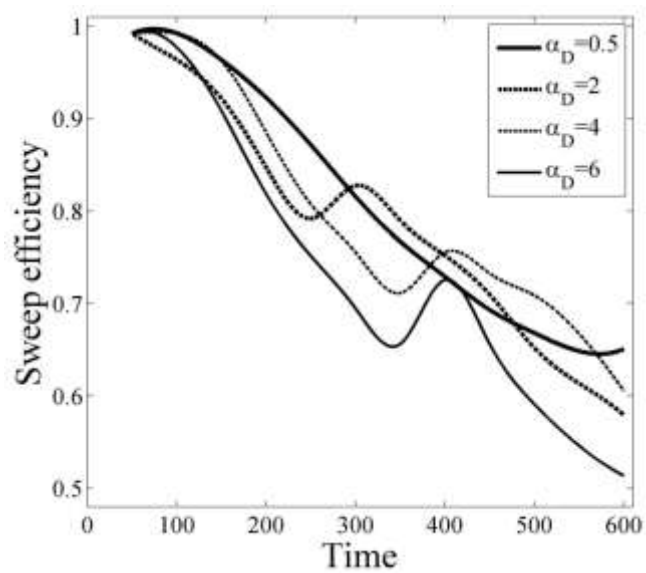


شکل ۵-۲۶: بازده جاروبی در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی (الف) نسبت به تغییرات عدد $D_e = 0.6$ (ب) نسبت به تغییرات $n = 0.5$ (الف) نسبت به تغییرات عدد

شکل ۲۷-۵ منحنی‌های بازده جاروبی را برای محیط متخلخل با نفوذپذیری ناهمسانگرد در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی نشان می‌دهد. با دقت در این نمودار مشاهده می‌کنیم که با افزایش α_K ، بازده جاروبی با افزایش زمان افت کم‌تری از خود نشان می‌دهد. همان‌گونه که ذکر شد، می‌دانیم که برای مقادیر بیشتر α_K جریانی پایدارتر خواهیم داشت و به علت همان دلایل ذکر شده بازده جاروبی نیز افزایش پیدا خواهد کرد. این نتیجه برای محیط متخلخل با پراکندگی ناهمسانگرد و در جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی در شکل ۲۸-۵ قابل مشاهده است.



شکل ۲۷-۵: بازده جاروبی در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی بر حسب زمان و نسبت نفوذپذیری‌های متفاوت. $n = 0.4$ ، $D_e = 0.7$



شکل ۵-۲۸: بازده جارویی در جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی بر حسب زمان و نسبت پراگندگی‌های متفاوت. $n = 0.7, D_e = 0.4$

فصل ششم:

نتیجه گیری

در این فصل، به نتیجه گیری از موارد بحث شده در این مطالعه و ارائه پیشنهاداتی برای مطالعات بعدی انجام گرفته در زمینه ناپایداری انگشتی لزج می پردازیم.

۶-۱ نتایج

در این مطالعه به بررسی جابجایی مخلوط شدنی سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی در یک سلول هل-شاو مستقیم الخط پرداختیم. سه حالت مختلف جابجایی در هر بخش مورد بررسی قرار گرفتند؛ جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال نیوتنی، جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی و جابجایی سیال غیرنیوتنی توسط سیال نیوتنی. خواص محیط متخلخل مانند نفوذپذیری و پراکندگی نیز در این مطالعه به صورت همسانگرد و ناهمسانگرد مورد بررسی قرار گرفتند. در مطالعات مربوط به جریان سیالات غیرنیوتنی از مدل کاریو- یاسودا برای شبیه سازی عددی استفاده کردیم و به بررسی تاثیرات دو پارامتر رئولوژیکی موجود در این مدل، بر ناپایداری انگشتی پرداختیم.

۶-۱-۱ تحلیل پایداری خطی

در این فصل با استفاده از تقریب شبه خطی به تبدیل معادلات حاکم بر مسأله پرداختیم و انواع جریان های مخلوط شدنی از سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی را مورد تحلیل پایداری خطی قرار دادیم.

با استفاده از نتایج بدست آمده در این فصل متوجه شدیم هرگونه جابجایی که در آن نسبت تحرک بیشتر از یک باشد، ناپایدار است. در واقع با بیشتر شدن نسبت تحرک، نرخ رشد آشفتگی ها نیز در جریان افزایش می یابند. همچنین مشاهده کردیم که با افزایش زمان، نرخ رشد اغتشاشات در یک نسبت تحرک ثابت کاهش می یابد. در قسمت جابجایی های غیرنیوتنی، در حالتی که سیال غیرنیوتنی سیال نیوتنی را جابجا می کرد، مشاهده شد که با افزایش پارامتر De ، نرخ رشد

اغتشاشات نیز افزایش می‌یابد و جریانی ناپایدارتر خواهیم داشت. در حالیکه در همین حالت با افزایش شاخص پاور- n ، نرخ رشد آشفته‌گی‌ها با کاهش روبرو می‌شدند و جریانی پایدارتر داشتیم. به طور کلی‌تر با استفاده از نتایج این بخش می‌توان گفت که با افزایش D_e و کاهش n ، جریانی ناپایدارتر خواهیم داشت. برای حالتی که سیال غیرنیوتنی سیال نیوتنی را جابجا می‌کرد نیز نتایج قابل قبولی بدست آمد. مشاهده کردیم که در این حالت جابجایی تغییرات D_e دو نوع تاثیر بر پایداری جریان دارد. اگر این پارامتر به مقدار کمی افزایش یابد، نرخ رشد اغتشاشات نیز افزایش می‌یابد ولی برای مقادیر افزایش بیشتر این پارامتر، نرخ رشد آشفته‌گی‌ها کاهش می‌یابند. در بخش جابجایی سیالات نیوتنی، مطالعات بدست آمده را با نتایج تن و هومسی مورد مقایسه قرار دادیم و مشاهده کردیم که نتایج با تقریب مناسبی بر یکدیگر منطبق هستند. در بخش پایانی تحلیل پایداری خطی، به بررسی تاثیر ناهمسانگردی نفوذپذیری و پراکندگی محیط متخلخل بر پایداری یا عدم ناپایداری پدیده انگشتی پرداختیم. از نتایج بدست آمده، مشاهده کردیم که با افزایش نفوذپذیری و پراکندگی در جهت جریان نسبت به جهت عمود بر جریان، جریانی پایدارتر خواهیم داشت. همچنین با اعمال زاویه ناهمسانگردی در تانسور نفوذپذیری، مشاهده کردیم که با افزایش این زاویه جریان ناپایدارتر می‌شود در حالی که با اعمال همین زاویه به تانسور پراکندگی و افزایش آن جریانی پایدارتر خواهیم داشت.

۶-۱-۲ شبیه سازی غیر خطی

در شبیه سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی از روش طیفی که توانایی بالایی در حل معادلات غیرخطی دارد، استفاده کردیم. همچنین به جای استفاده از تبدیلات فوریه، از تبدیل هارتلی استفاده شد که نقش عمده‌ای در بهبود سرعت و دقت روش مورد استفاده داشت. با استفاده از شبیه‌سازی غیرخطی این ناپایداری توانستیم رفتار انگشتی‌ها را در شرایط مختلف جریان مشاهده

کنیم. رشد و پیشرفت انگشتی‌ها برای جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی مورد بررسی قرار دادیم. در جریان سیالات نیوتنی، مشاهده شد که با افزایش نسبت تحرک، رشد انگشتی‌ها با سرعت بیشتری انجام می‌گیرد. در جابجایی سیالات غیر نیوتنی متوجه شدیم که تغییرات پارامترهای رئولوژیکی مدل کاریو- یاسودا تاثیر زیادی در شکل‌گیری و رشد انگشتی‌ها خواهد داشت. در این قسمت مشاهده شد که برای نسبت تحرک‌های کوچکتر از $20/9$ در جابجایی یک سیال غیرنیوتنی بوسیله یک سیال نیوتنی با گذشت زمان، از شدت رشد انگشتی‌ها کاسته می‌شود در حالی با همین نسبت تحرک و در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال غیرنیوتنی، با گذشت زمان بر شدت رشد آن‌ها افزوده می‌شود.

شبیه‌سازی ناپایداری انگشتی با شرایط مختلف هندسی و رئولوژیکی برای پی بردن به تاثیرات آن‌ها مورد بررسی قرار گرفتند. همچنین مکانیزم‌های متفاوت رشد انگشتی‌ها در جابجایی‌های مختلف سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی شرح داده شد و آن‌ها در فریم‌های مختلف زمانی نمایش دادیم.

در این قسمت همچنین با استفاده از نتایج بدست آمده در شبیه‌سازی غیرخطی، به بررسی عناوینی مانند میانگین غلظت عرضی، طول اختلاط و بازده جاروبی پرداختیم و تاثیر پارامترهای موجود در مسأله بر تغییرات آن‌ها مورد بررسی و تحلیل قرار دادیم.

۶-۲ پیشنهادات

در مطالعه حاضر از یک رابطه‌ی نمایی برای بیان ارتباط بین ویسکوزیته و غلظت استفاده کردیم. استفاده از رابطه‌هایی متفاوت‌تر و بررسی تغییرات ایجاد شده در اثر آن، می‌تواند یک به عنوان یک پیشنهاد ساده برای شروع کار در زمینه ناپایداری انگشتی باشد.

استفاده از مدل‌های متفاوت‌تر سیالات غیرنیوتنی و یا حتی سیالات ویسکوالاستیک و بررسی تاثیرات پارامترهای رئولوژیکی موجود در این گونه سیالات بر تشدید یا سرکوب این ناپایداری، می‌تواند یک پیشنهاد بسیار جالب و در عین حال بسیار مشکل برای ادامه کار در این زمینه باشد.

علاوه بر این موارد، بررسی تاثیرات انتقال حرارت در این گونه جابجایی‌ها نیز می‌تواند موضوعی بسیار جالب و کاربردی در علوم مهندسی و صنایع استخراج و انتقال نفت باشد. در نظر گرفتن تاثیرات گرانش و وابستگی خواص ناهمسانگرد به پارامترهایی از قبیل سرعت نیز می‌تواند یکی دیگر از پیشنهادات ارائه شده در این زمینه باشد. شبیه‌سازی سه‌بعدی این ناپایداری در محیط متخلخل با خواص ناهمسانگرد و انجام مطالعات آزمایشگاهی برای مقایسه نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی عددی با نتایج آزمایشگاهی نیز می‌توانند موارد بسیار جالب و کاربردی برای ادامه مطالعه در زمینه ناپایداری انگشتی باشند.

- [١] Homsy, G.M.,(1987), “Viscous Fingering in Porous Media” **Annual Review of Fluid Mechanics** **19, 1**, 271-311
- [٢] Chuoke, R.L., P.v. Meurs, and C.v.d. Poel, 1959,“The Instability of Slow, Immiscible, Viscous Liquid-Liquid Displacements in Permeable Media.”
- [٣] Perrine, R.L., 1961,“The Development of Stability Theory for Miscible Liquid-Liquid Displacement.”
- [٤] Wooding, R.,(1962), “The stability of an interface between miscible fluids in a porous medium” **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP** **13, 3**, 255-266
- [٥] Schowalter, W.R.,(1965), “Stability criteria for miscible displacement of fluids from a porous medium” **AIChE Journal** **11, 1**, 99-105
- [٦] Heller, J.P.,(1966), “Onset of Instability Patterns between Miscible Fluids in Porous Media” **Journal of Applied Physics** **37, 4**, 1566-1579
- [٧] Tan, C. and G. Homsy,(1986), “Stability of miscible displacements in porous media: Rectilinear flow” **Physics of Fluids** **29**, 3549
- [٨] Tan, C. and G. Homsy,(1987), “Stability of miscible displacements in porous media: Radial source flow” **Physics of Fluids** **30**, 1239
- [٩] Yortsos, Y.C. and M. Zeybek,(1988), “Dispersion driven instability in miscible displacement in porous media” **Physics of Fluids (1958-1988)** **31, 12**, 3511-3518
- [١٠] Rogerson, A. and E. Meiburg,(1993“,(Shear stabilization of miscible displacement processes in porous media” **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)** **5, 6**, 1344-1355
- [١١] Rogerson, A. and E. Meiburg,(1993), “Numerical simulation of miscible displacement processes in porous media flows under gravity” **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)** **5, 11**, 2644-2660
- [١٢] De Wit, A. and G.M. Homsy,(1997), “Viscous fingering in periodically heterogeneous porous media. I. Formulation and linear instability” **The Journal of Chemical Physics** **107, 22**, 9609-9618
- [١٣] Mishra, M., M. Martin, and A. De Wit,(2007), “Miscible viscous fingering with linear adsorption on the porous matrix” **Physics of Fluids (1994-present)** **19, 7-** ,
- [١٤] Ghesmat, K. and J. Azaiez,(2008), “Viscous Fingering Instability in Porous Media: Effect of Anisotropic Velocity-Dependent Dispersion Tensor” **Transport in Porous Media** **73, 3**, 297-318
- [١٥] Pascal, H.,(1988), “Stability of non-newtonian fluid interfaces in a porous medium and its applications in an oil displacement mechanism” **Journal of Colloid and Interface Science** **123, 1**, 14-23

- [١٦] Wilson, S.D.R.,(1990), “The Taylor–Saffman problem for a non-Newtonian liquid” **Journal of Fluid Mechanics** **220**, 413-425
- [١٧] Sader, J.E., D.Y.C. Chan, and B.D. Hughes,(1994), “Non-Newtonian effects on immiscible viscous fingering in a radial Hele-Shaw cell” **Physical Review E** **49**, 1, 420-432
- [١٨] Pritchard, D. and J.R.A. Pearson,(2006), “Viscous fingering of a thixotropic fluid in a porous medium or a narrow fracture” **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** **135**, 2–3, 117-127
- [١٩] Azaiez, J. and B. Singh,(2002), “Stability of miscible displacements of shear thinning fluids in a Hele-Shaw cell” **Physics of Fluids (1994-present)** **14**, 5, 1557-1571
- [٢٠] KOVAL, E.J., 1963,“A Method for Predicting the Performance of Unstable Miscible Displacement in Heterogeneous Media.”
- [٢١] Fayers, F.J.,(1988), “An Approximate Model With Physically Interpretable Parameters for Representing Miscible Viscous Fingering” **SPE Reservoir Engineering** **3**, 2, 551-5٥٨
- [٢٢] PEACEMAN, D.W. and H.H. RACHFORD JR., 1962,“Numerical Calculation of Multidimensional Miscible Displacement.”
- [٢٣] Christie, M.A. and D.J. Bond,(1987), “Detailed Simulation of Unstable Processes in Miscible Flooding” **SPE Reservoir Engineering** **2**-٥١٤ ,٤ , ٥٢٢
- [٢٤] Tan, C.T. and G.M. Homsy,(1988), “Simulation of nonlinear viscous fingering in miscible displacement” **Physics of Fluids (1958-1988)** **31**, 6, 1330-1338
- [٢٥] Christie, M.A.,1989, *High-Resolution Simulation of Unstable Flows in Porous Media*.
- [٢٦] Zimmerman, W.B. and G.M. Homsy,(1992), “Viscous fingering in miscible displacements: Unification of effects of viscosity contrast, anisotropic dispersion, and velocity dependence of dispersion on nonlinear finger propagation” **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)** **4**, 11, 2348-2359
- [٢٧] Zimmerman, W.B. and G.M. Homsy,(1992), “Three-dimensional viscous fingering: A numerical study” **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)** **4**, 9, 1901-1914
- [٢٨] Tan, C.T. and G.M. Homsy,(1992), “Viscous fingering with permeability heterogeneity” **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)** **4**, 6, 1099-1101
- [٢٩] Manickam, O. and G.M. Homsy,(1993), “Stability of miscible displacements in porous media with nonmonotonic viscosity profiles” **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)** **5**, 6, 1356-1367
- [٣٠] Sajjadi, M. and J. Azaiez,(2013), “Dynamics of fluid flow and heat transfer in homogeneous porous media” **The Canadian Journal of Chemical**

Engineering 91, 4, 687-697

- [٣١] McDonald, A.E.,1979, *APPROXIMATE SOLUTIONS FOR FLOW ON NON-NEWTONIAN POWER LAWS FLUIDS THROUGH POROUS MEDIA*, in *SPE Reservoir Simulation Symposium*, 1979 Copyright 1979, American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers, Inc. Petroleum Engineers, Inc. This paper was presented at the 1979 Society of Petroleum Engineers at AIME Fifth Symposium on Reservoir Simulation held in Denver, Colorado, February, 1-2, The material is subject to correction by the author. Permission to copy is restricted to an abstract of not more than 300 words. Write 6200 N. Central Expy., Dallas, Tx. 75206.: Denver, Colorado.
- [٣٢] **!!!INVALID CITATION ,!!!**
- [٣٣] Pascal, H.,**(1983)**, “Nonsteady flow of non-Newtonian fluids through a porous medium” **International Journal of Engineering Science 21**١٠-١٩٩,٣,
- [٣٤] Huzarewicz, S., R.K. Gupta, and R.P. Chhabra,**(1991)**, “Elastic effects in flow of fluids through sinuous tubes” **Journal of Rheology (1978-present) 35, 2,** 221-235
- [٣٥] Wu, Y.-S. and K. Pruess,**(1998)**, “A numerical method for simulating non-Newtonian fluid flow and displacement in porous media” **Advances in Water Resources 21, 5,** 351-362
- [٣٦] Mishra, M., M. Martin, and A. De Wit,**(2010)**, “Influence of miscible viscous fingering with negative log-mobility ratio on spreading of adsorbed analytes” **Chemical Engineering Science 65, 7,** 2392-2398
- [٣٧] Hill, S. and F.I. P.,**(1952)**, “Channeling in packed columns” **Chemical Engineering Science 1, 6,** 247-253
- [٣٨] Slobod, R.L. and B.H. Caudle,1952, *X-Ray Shadowgraph Studies of Areal Sweepout Efficiencies*.
- [٣٩] Van Meurs, P.,1957, *The Use of Transparent Three-Dimensional Models for Studying the Mechanism of Flow Processes in Oil Reservoirs*.
- [٤٠] Saffman, P.G. and G. Taylor,**(1958)**, “The Penetration of a Fluid into a Porous Medium or Hele-Shaw Cell Containing a More Viscous Liquid” **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences 245, 1242,** 312-329
- [٤١] Habermann, B.,1960, *The Efficiency of Miscible Displacement as a Function of Mobility Ratio*.
- [٤٢] Benham, A.L. and R.W. Olson,1963, *A Model Study of Viscous Fingering*.
- [٤٣] Slobod, R.L. and R.A. Thomas,1963, *Effect of Transverse Diffusion on Fingering In Miscible-Phase Displacement*.
- [٤٤] Perkins, T.K., O.C. Johnston, and R.N. Hoffman,1965, *Mechanics of Viscous Fingering in Miscible Systems*.
- [٤٥] Perkins, T.K. and O.C. Johnston,1969, *A Study of Immiscible Fingering in Linear Models*.
- [٤٦] Saghir, M.Z., O. Chaalal, and M.R. Islam,**(2000)**, “Numerical and

- experimental modeling of viscous fingering during liquid–liquid miscible displacement” Journal of Petroleum Science and Engineering* **26**, 1–4, 253-262
- [٤٧] Marshall, R.J. and A.B. Metzner,(1967), “Flow of Viscoelastic Fluids through Porous Media” **Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals** **6**, 3, 393-400
- [٤٨] Lee, K.S. and E.L. Claridge,1968, *Areal Sweep Efficiency of Pseudoplastic Fluids in a Five-Spot Hele-Shaw Model*.
- [٤٩] Daccord, G., J. Nittmann, and H.E. Stanley,(1986), “Radial viscous fingers and diffusion-limited aggregation: Fractal dimension and growth sites” **Physical Review Letters** **56**, 4, 336-339
- [٥٠] Allen, E. and D.V. Boger,1988, *The Influence of Rheological Properties on Mobility Control in Polymer-Augmented Waterflooding*.
- [٥١] Bonn, D., H. Kellay, M. Bräunlich, M.B. Amar, and J. Meunier,(1995), “Viscous fingering in complex fluids” **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications** **220**, 1–2, 60-73
- [٥٢] Kawaguchi, M., K. Makino, and T. Kato,(1997), “Comparison of viscous fingering patterns in polymer and newtonian solutions” **Physica D: Nonlinear Phenomena** **105**, 1–3, 121-129
- [٥٣] De Malsche, W., J. Op De Beeck, H. Gardeniers, and G. Desmet,(2009), “Visualization and quantification of the onset and the extent of viscous fingering in micro-pillar array columns” **Journal of Chromatography A** **1216**, 29, 5511-5٥١٧
- [٥٤] Avendano, J., N. Pannacci, B. Herzhaft, P. Gateau, and P. Coussot,(2013), “Enhanced displacement of a liquid pushed by a viscoelastic fluid” **Journal of Colloid and Interface Science** **410**, 0, 172-180
- [٥٥] Zimmerman, W.B. and G.M. Homsy,(1991), “Nonlinear viscous fingering in miscible displacement with anisotropic dispersion” **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)** **3**, 8, 1859-1872
- [٥٦] Manickam, O. and G.M. Homsy,(1995), “Fingering instabilities in vertical miscible displacement flows in porous media” **Journal of Fluid Mechanics** **288**, 75-102
- [٥٧] Moissis, D.E., C.A. Miller, and M.F. Wheeler,1988, *A parametric study of viscous fingering in miscible displacement by numerical simulation*, in *Proceedings of the Symposium on Numerical Simulation in Oil Recovery on Numerical simulation in oil recovery*, Springer-Verlag New York, Inc.: Minneapolis, Minnesota, USA. p. 227-247.
- [٥٨] Tchepeli, H.A., (1994), “Viscous fingering, gravity segregation and permeability heterogeneity in two-dimensional and three dimensional flows .”
- [٥٩] Canuto, C., M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang,(1988), “Spectral methods in fluid dynamics ”
- [٦٠] Hussaini, M.Y. and T.A. Zang,(1987), “Spectral Methods in Fluid Dynamics”

Annual Review of Fluid Mechanics 19, 1, 3367-39

- [٦١] Islam, M.N. and J. Azaiez,(2005), “*Fully implicit finite difference pseudo-spectral method for simulating high mobility-ratio miscible displacements*” **International Journal for Numerical Methods in Fluids 47, 2**, 161-183
- [٦٢] Park, C.W. and G.M .Homsy,(1985), “*The instability of long fingers in Hele–Shaw flows*” **Physics of Fluids (1958-1988) 28, 6**, 1583-1585

Abstract

Viscous fingering instability is a well-known instability that occurs between the interfaces of two fluids with different viscosities. Creation and propagation of these fingers are playing an important role in displacement of fluids and especially on oil transformation from discovered oil reservoirs. A grab attention effort in this field is allocated to analysis of instability between two Newtonian fluids or a combination of Newtonian and non-Newtonian. Main objective of the current study is to analyze the instability in miscible flows of Newtonian and non-Newtonian fluids in porous media with anisotropic properties.

In this investigation, an exploration on miscible Newtonian and non-Newtonian fluids in a two-dimensional Hele-Shaw cell is carried out. In order to analyze the effects of non-Newtonian fluid, a Carreau-Yasuda model that shows a suitable agreement with the polymeric fluids is used. In this model two dimensionless parameters of D_e and n are used to simulate the rheological behavior of non-Newtonian fluids. Three different flows are investigated here; Newtonian displaced by Newtonian fluids, Newtonian fluids displaced by non-Newtonian fluids and non-Newtonian fluids displaced by Newtonian fluids. These displacements in porous media with an-isotropic permeability, and dispersion tensor are studied to investigate the creation and propagation of the fingers. Also linear stability analyze and non-linear simulation are investigated in this study. In linear stability analyze with the quasi-steady state approximation and shooting method, growth rate in different wave numbers with presented parameters is investigated. In non-linear simulation section with accurate spectral method and taking advantages of Hartley transform, some mechanisms of propagations of fingers are analyzed in different time sequence. Furthermore, an investigation on transversely average concentration, mixing length and sweep efficiency field is carried out.

Keywords: viscous fingering instability, non-Newtonian, carreau-Yasuda, linear stability analyze, Hartley transform, fingering mechanism.



Shahrood University of Technology

Engineering Department

**Numerical Investigation for Control of Viscous Fingering
Instability in non-Newtonian Fluids**

**A Thesis submitted in partial Fulfillment of the Requirement for
the Degree of master Science**

By:

Mohammad Reza Shoghi

Supervisor:

Dr. Mahmood Norouzi

Jan 2014