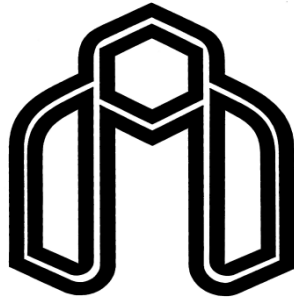


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

تعیین ضرایب شدت تنش مواد پیزوالکتریک تابعی صفحه‌ای  
حاوی ترک با روش المان محدود توسعه یافته

دانشجو:

احسان اوبری دخت

استاد راهنما:

دکتر محمود شریعتی

استاد مشاور:

دکتر محمد باقر نظری

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تابستان ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مکانیک

گروه : طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای احسان اوبری دخت

تحت عنوان: تعیین ضرایب شدت تنش مواد پیزوالکتریک تابعی صفحه ای حاوی ترک با  
روش المان محدود توسعه یافته

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد  
مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی : محمد باقر نظری		نام و نام خانوادگی : محمود شریعتی
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایشار و از خودگذشتگی

به پاس قلب های بزرگشان که فریادس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدنش وجودشان که در این سردترین روزگار ان بهترین پشتیبان است

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را به خانواده عزیزم تقدیم می کنم

## تشکر و قدردانی

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، به‌ویژه اساتید محترم آقای دکتر محمود شریعتی و آقای دکتر محمد باقر نظری که با راهنمایی‌های مدبرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از تمامی دوستان که لحظاتی سرشار از صفا و صمیمیت را در کنار خود برایم به یادگار گذاشتند و همیشه اینجانب را مورد لطف و محبت خود قرار داده و به من درس صداقت و مهرورزی آموختند بسیار سپاسگزارم.

درد فراوان خدمت خانواده بسیار عزیز، دلسوز و فداکارم که پیوسته جرعه نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیت آنها بوده‌ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختی‌ها و مشکلات بوده است، از ایشان تقدیر و تشکر فراوان دارم.

## تعهد نامه

اینجانب احسان اوبری دخت دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک- گرایش طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه با عنوان " تعیین ضرایب شدت تنش مواد پیزوالکتریک تابعی صفحه ای حاوی ترک با روش المان محدود توسعه یافته " تحت راهنمایی دکتر محمود شریعتی و دکتر محمد باقر نظری متعهد می-

شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

در این پژوهش به تعیین ضرایب شدت تنش مکانیکی و شدت جابجایی الکتریکی در مواد پیزوالکتریک ترک‌دار و همچنین مواد پیزوالکتریک تابعی پرداخته شده است.

روش عددی مورد استفاده در این پژوهش، روش المان محدود توسعه یافته می‌باشد. برنامه نوشته شده به وسیله نرم افزار Matlab می‌باشد که شامل یک برنامه اصلی و چندین زیربرنامه می‌باشد. در برنامه پس از بدست آوردن جابجایی‌های مکانیکی و پتانسیل الکتریکی و همچنین تنش‌ها و جابجایی‌های الکتریکی، ضرایب شدت تنش مکانیکی و ضریب شدت جابجایی الکتریکی در صفحات پیزوالکتریک همگن و غیرهمگن با ترک مرکزی، لبه‌ای و مایل مورد بررسی قرار گرفته است. روش مورد استفاده برای محاسبه ضرایب شدت در این پژوهش روش انتگرال برهم‌کنش و انطباق نقطه‌ای می‌باشد که در قسمت نتایج ضرایب شدت با استفاده از این دو روش محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه می‌گردد. با توجه به نتایج، اثر بار مکانیکی بر ضریب شدت جابجایی الکتریکی و اثر بار الکتریکی بر ضریب شدت تنش مکانیکی ناچیز است. همچنین در بررسی تأثیر زاویه، با افزایش زاویه‌ی ترک نسبت به افق، ضرایب شدت تنش مکانیکی مود I و ضریب شدت الکتریکی کاهش می‌یابند و ضریب شدت تنش مکانیکی مود II ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

**کلید واژه:** ترک، مواد پیزوالکتریک تابعی، روش المان محدود توسعه یافته، ضرایب شدت تنش مکانیکی و

ضریب شدت جابجایی الکتریکی.

۵	فهرست علائم و نشانه‌ها.....
۱	<b>فصل ۱. مقدمه</b> .....
۲	۱-۱- مقدمه.....
۲	۲-۱- مواد تابعی.....
۳	۳-۱- ویژگی های مواد تابعی.....
۴	۴-۱- مواد پیزوالکتریک تابعی.....
۵	۵-۱- کاربردهای مواد پیزوالکتریک.....
۶	۶-۱- معادلات اساسی برای مواد پیزوالکتریک.....
۷	۷-۱- روش اجزای محدود توسعه یافته.....
۷	۸-۱- مروری بر تحقیقات انجام شده.....
۱۰	۹-۱- ساختار پایان نامه.....
۱۲	<b>فصل ۲. مکانیک شکست مواد پیزوالکتریک</b> .....
۱۳	۱-۲- مقدمه‌ای بر مکانیک شکست.....
۱۳	۲-۲- مکانیک شکست در مواد پیزوالکتریک.....
۱۴	۳-۲- معیار شکست برای بارگذاری الکترومکانیکی استاتیکی.....
۱۴	۱-۳-۲- معیار شکست برای یک ترک گریفیث.....
۱۶	۲-۳-۲- منحنی‌های مقاومت رشد ترک.....
۱۸	<b>فصل ۳. روش اجزای محدود توسعه یافته</b> .....
۱۹	۱-۳- مقدمه.....
۲۰	۲-۳- روش اجزای محدود توسعه یافته.....
۲۰	۱-۲-۳- روابط پایه.....
۲۱	۲-۲-۳- روابط مربوط به مدل سازی ترک.....
۲۳	۳-۲-۳- محاسبه ضرایب شدت تنش.....
۲۴	۳-۳- روش‌های اجزای محدود توسعه یافته برای مواد پیزوالکتریک.....
۲۵	۱-۳-۳- توصیف هندسه ترک.....
۲۶	۲-۳-۳- غنی‌سازی تقریب.....
۲۸	۳-۳-۳- محاسبه ضریب شدت تنش تحلیلی.....
۲۹	۴-۳-۳- کاربردهای عددی.....
۳۰	<b>فصل ۴. محاسبه ضرایب شدت تنش در صفحه پیزوالکتریک</b> .....
۳۱	۱-۴- مقدمه.....
۳۱	۲-۴- روش همبستگی تغییر مکانها (انطباق نقطه‌ای).....
۳۴	۳-۴- میدانهای نوک ترک در مواد پیزوالکتریک و مواد پیزوالکتریک تابعی.....
۳۷	۴-۴- انتگرال J (حالت دوبعدی).....
۳۷	۱-۴-۴- مواد پیزوالکتریک همگن.....
۴۲	۲-۴-۴- مواد پیزوالکتریک غیرهمگن.....



۴۳	..... ۵-۴-۵- روش انجام پروژه
۴۴	..... ۴-۵-۱- پیش پردازش
۴۵	..... ۴-۵-۲- حل مسئله
۴۶	..... ۴-۵-۳- پس پردازش
۴۸	..... <b>فصل ۵. نتایج</b>
۴۹	..... ۵-۱- بررسی و محاسبه ضرایب شدت تنش در صفحه پیزوالکتریک
۴۹	..... ۵-۱-۱- صفحه بدون ترک پیزوالکتریک همگن
۵۱	..... ۵-۱-۲- بررسی همگرایی المان محدود توسعه یافته
۵۳	..... ۵-۱-۳- ترک داخلی در صفحه پیزوالکتریک همگن
۵۴	..... ۵-۱-۴- ترک داخلی زاویه دار در صفحه پیزوالکتریک
۵۵	..... ۵-۱-۵- ترک داخلی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن
۵۶	..... ۵-۱-۶- صفحه پیزوالکتریک همگن حاوی ترک لبه‌ای
۵۸	..... ۵-۲- نتایج
۵۸	..... ۵-۲-۱- ترک لبه‌ای در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مکانیکی
۵۹	..... ۵-۲-۲- ترک لبه‌ای در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری الکتریکی
۶۰	..... ۵-۲-۳- ترک لبه‌ای در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب
۶۴	..... ۵-۲-۴- ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مکانیکی
۶۵	..... ۵-۲-۵- ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری الکتریکی
۶۶	..... ۵-۲-۶- ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب
۶۸	..... ۵-۲-۷- تأثیر طول ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب
	..... ۵-۲-۸- بررسی خطای ناشی از محدوده شعاع انتگرال ناحیه J در ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن
۷۰	..... تحت بارگذاری مرکب
۷۱	..... ۵-۲-۹- بررسی اثر شبکه بندی صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب
۷۳	..... ۵-۲-۱۰- ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن (پیزوالکتریک تابعی) تحت بارگذاری مکانیکی
۷۵	..... ۵-۲-۱۱- ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن تحت بارگذاری الکتریکی
۷۷	..... ۵-۲-۱۲- ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن تحت بارگذاری مرکب
۸۰	..... ۵-۲-۱۳- تأثیر طول ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن تحت بارگذاری مرکب
	..... ۵-۲-۱۴- تأثیر محدوده شعاع انتگرال ناحیه J در ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن
۸۱	..... تحت بارگذاری مرکب
۸۳	..... ۵-۲-۱۵- بررسی اثر شبکه بندی صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب
۸۴	..... ۵-۲-۱۶- تأثیر زاویه ترک نسبت به افق در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب
۸۶	..... ۵-۲-۱۷- تأثیر زاویه ترک نسبت به افق در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن تحت بارگذاری مرکب
۸۹	..... <b>فصل ۶. نتیجه‌گیری و پیشنهادها</b>
۹۰	..... ۶-۱- نتیجه‌گیری
۹۳	..... ۶-۲- پیشنهادها
۹۴	..... <b>منابع</b>
۹۸	..... <b>واژه نامه فارسی به انگلیسی</b>
۹۹	..... <b>واژه نامه انگلیسی به فارسی</b>

## فهرست علائم و نشانه‌ها

عنوان	علامت اختصاری
ضریب شدت تنش مکانیکی مود I	$K_I$
ضریب شدت تنش مکانیکی مود II	$K_{II}$
ضریب شدت جابجایی الکتریکی	$K_{IV}$
طول ترک	A
تنش دوردست	$\sigma^\infty$
جابجایی الکتریکی	$D^\infty$
رهیافت انرژی	G
میدان الکتریکی	E
جابجایی گره‌ای	$u_i$
پتانسیل الکتریکی	$\Phi_I$
تابع غنی سازی	$\psi(x)$
مجموعه‌ای از گره‌ها	$N^g$
دامنه اثر تابع شکل	$\omega_1$
پارامتر اضافی در غنی‌سازی تقریب	$b_j$
پارامتر اضافی در غنی‌سازی تقریب	$c_l$
چگالی انرژی کرنشی	W
ماتریس سفتی	K
پارامتر اضافی	$d_l$
پارامتر اضافی	$a_i$
نصف عرض صفحه	w
زاویه ترک نسبت به افق	$\delta$

$r$	شعاع انتگرال
$C$	ثابت الاستیک
$e$	ثابت دی الکترونیک
$\kappa$	ثابت پیزوالکترونیک
$f_{ij}^N(\theta)$	تابع زاویه‌ای استاندارد ترک
$g_i^N(\theta)$	تابع زاویه‌ای استاندارد ترک
$d_i^N(\theta)$	تابع زاویه‌ای استاندارد ترک
$v^N(\theta)$	تابع زاویه‌ای استاندارد ترک
$P_\alpha$	مقادیر ویژه
$A_{M\alpha}$	بردار ویژه
$Y$	ماتریس اروین

## فهرست شکل ها

صفحه

عنوان

### فصل دوم

- شکل (۱-۲) ترک گریفیث با قطب عمودی و میدان الکتریک ..... ۱۴  
شکل (۲-۲) نرخ رهاسازی انرژی در مقابل میدان الکتریک برای روابط مختلف نفوذ پذیری  $K_F$  با ترک گریفیث  
در PZT-5H در تنش دوردست ثابت  $\sigma_{zz}$  ..... ۱۶

### فصل سوم

- شکل (۱-۳) ترک بین لایه‌ای بین دو ماده دوسانگرد ..... ۲۰  
شکل (۲-۳) بردارهای یکه عمودی و مماسی در تابع هویساید تعمیم یافته برای نقطه‌ای مانند  $X^*$   
که نزدیکترین نقطه بر روی ترک به نقطه  $X$  است ..... ۲۲  
شکل (۳-۳) انتخاب نقاط برای غنی سازی، نقاطی که با دایره مشخص شده‌اند با تابع تعمیم یافته هویساید  
و نقاطی که با مثلث مشخص شده‌اند با توابع نزدیک نوک ترک غنی سازی می‌شوند ..... ۲۳  
شکل (۴-۳) مجموعه گره‌های انتخابی برای غنی سازی ..... ۲۷

### فصل چهارم

- شکل (۱-۴) برونیایی ضریب شدت تنش در روش همبستگی تغییر مکانها ..... ۳۲  
شکل (۲-۴) کاربرد روش همبستگی تغییر مکان ..... ۳۳  
شکل (۳-۴) پیوستار پیزوالکتریک تابعی با ترک تحت بارهای خارجی مکانیکی و الکتریکی ..... ۳۴  
شکل (۴-۴) مختصات محلی نوک ترک و کانتور برای محاسبه انتگرال  $J$  ..... ۳۷  
شکل (۵-۴) نواحی انتگرالگیری برای محاسبه فرم سطحی انتگرال  $J$  ..... ۳۸  
شکل (۶-۴) شبکه بندی صفحه و انتخاب المان ها و گره های اطراف ترک و تعیین نوع آنها ..... ۴۴  
شکل (۷-۴) تغییر شکل صفحه پیزوالکتریک، الف) همگن، ب) غیر همگن ..... ۴۶  
شکل (۸-۴) فلوجارت برنامه ..... ۴۷

### فصل پنجم

- شکل (۱-۵) صفحه پیزوالکتریک بدون ترک ..... ۴۹  
شکل (۲-۵) جابجایی در جهت  $X$  بر روی قطر اصلی صفحه ساده پیزوالکتریک همگن  
با روش بدون المان گالرکین و روش اجزای محدود توسعه یافته ..... ۵۰  
شکل (۳-۵) جابجایی در جهت  $Y$  بر روی قطر اصلی صفحه ساده پیزوالکتریک همگن  
با روش بدون المان گالرکین و روش اجزای محدود توسعه یافته ..... ۵۰

- شکل (۴-۵) پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی صفحه ساده پیزوالکتریک همگن  
 با روش بدون المان گالرکین و روش اجزای محدود توسعه یافته..... ۵۱
- شکل (۵-۵) صفحه پیزوالکتریک با ترک داخلی تحت بار مکانیکی و الکتریکی ..... ۵۱
- شکل (۶-۵) ضریب شدت تنش مکانیکی در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی با مش بندی متفاوت..... ۵۳
- شکل (۷-۵) ضریب شدت جابجایی الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی با مش بندی متفاوت..... ۵۳
- شکل (۸-۵) صفحه پیزوالکتریک با ترک مایل تحت بارگذاری مرکب ..... ۵۵
- شکل (۹-۵) صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه ای تحت بار مکانیکی و الکتریکی ..... ۵۷
- شکل (۱۰-۵) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دوردست، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب تنش دوردست،  
 در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه ای تحت بارگذاری مکانیکی ..... ۵۹
- شکل (۱۱-۵) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دوردست، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب تنش دوردست،  
 در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه ای تحت بارگذاری الکتریکی ..... ۶۰
- شکل (۱۲-۵) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه ای  
 تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت ..... ۶۱
- شکل (۱۳-۵) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه ای  
 تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت ..... ۶۲
- شکل (۱۴-۵) ضرایب شدت بی بعد شده  $K_I$  و  $K_{IV}$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه ای تحت  
 بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت ..... ۶۲
- شکل (۱۵-۵) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دوردست، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب تنش دوردست،  
 در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه ای تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت ..... ۶۳
- شکل (۱۶-۵) ضرایب شدت بی بعد شده  $K_I$  و  $K_{IV}$  بر حسب تنش دوردست در صفحه پیزوالکتریک  
 با ترک لبه ای تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت ..... ۶۴
- شکل (۱۷-۵) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دوردست، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب تنش دوردست،  
 در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مکانیکی ..... ۶۵
- شکل (۱۸-۵) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب بار الکتریکی، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بار الکتریکی،  
 در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری الکتریکی ..... ۶۶
- شکل (۱۹-۵) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب بار الکتریکی، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بار الکتریکی،  
 در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت ..... ۶۷
- شکل (۲۰-۵) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب بار الکتریکی، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بار الکتریکی،  
 در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت ..... ۶۸
- شکل (۲۱-۵) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب طول ترک، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب طول ترک،  
 در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب ..... ۶۹
- شکل (۲۲-۵) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب نسبت اندازه شبکه بندی، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$   
 بر حسب نسبت اندازه شبکه بندی، در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب ..... ۷۲
- شکل (۲۳-۵) خطای حاصل از ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  بر حسب نسبت اندازه شبکه بندی در صفحه پیزوالکتریک  
 با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب ..... ۷۳
- شکل (۲۴-۵) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دوردست در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 تحت بارگذاری مکانیکی ..... ۷۴

- شکل (۲۵-۵) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب تنش دوردست در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 ۷۵ ..... تحت بارگذاری مکانیکی
- شکل (۲۶-۵) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 ۷۶ ..... تحت بارگذاری الکتریکی
- شکل (۲۷-۵) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 ۷۶ ..... تحت بارگذاری الکتریکی
- شکل (۲۸-۵) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دوردست در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 ۷۷ ..... تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت
- شکل (۲۹-۵) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب تنش دوردست در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 ۷۸ ..... تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت
- شکل (۳۰-۵) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 ۷۹ ..... تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت
- شکل (۳۱-۵) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 ۷۹ ..... تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت
- شکل (۳۲-۵) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب طول ترک در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 ۸۰ ..... تحت بارگذاری مرکب
- شکل (۳۳-۵) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب طول ترک در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 ۸۱ ..... تحت بارگذاری مرکب
- شکل (۳۴-۵) ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_I$  بر حسب شعاع انتگرال در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن  
 ۸۲ ..... با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب
- شکل (۳۵-۵) ضریب شدت بی بعد شده  $K_{IV}$  بر حسب شعاع انتگرال در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن  
 ۸۲ ..... با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب
- شکل (۳۶-۵) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب نسبت اندازه المان در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 ۸۳ ..... تحت بارگذاری مرکب
- شکل (۳۷-۵) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب نسبت اندازه المان در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی  
 ۸۳ ..... تحت بارگذاری مرکب
- شکل (۳۸-۵) ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_I$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی  
 ۸۵ ..... تحت بارگذاری مرکب
- شکل (۳۹-۵) ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_{II}$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی  
 ۸۵ ..... تحت بارگذاری مرکب
- شکل (۴۰-۵) ضریب شدت بی بعد شده  $K_{IV}$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی  
 ۸۶ ..... تحت بارگذاری مرکب
- شکل (۴۱-۵) ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_I$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن  
 ۸۷ ..... با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب
- شکل (۴۲-۵) ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_{II}$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن  
 ۸۸ ..... با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب
- شکل (۴۳-۵) ضریب شدت بی بعد شده  $K_{IV}$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن  
 ۸۸ ..... با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب

## فهرست جداول

- جدول (۱-۴) مقایسه ماتریس اروین در مرجع [۲۹] با کد نوشته شده ..... ۴۱
- جدول (۱-۵) نتایج حاصل از ضرایب شدت صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک داخلی تحت بارگذاری مرکب ..... ۵۴
- جدول (۲-۵) خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت روش انتگرال J و انطباق نقطه ای با نتایج تحلیلی  
در صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک داخلی تحت بارگذاری مرکب ..... ۵۴
- جدول (۳-۵) مقایسه نتایج حاصل از ضرایب شدت  $K_I$ ،  $K_{II}$  و  $K_{IV}$  در صفحه پیزوالکتریک همگن  
با دو روش EDI و DCT با مرجع [۳۱] ..... ۵۵
- جدول (۴-۵) نتایج حاصل از ضرایب شدت صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک داخلی تحت بارگذاری مرکب ..... ۵۶
- جدول (۵-۴) خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت برای کد نوشته شده با نتایج تحلیلی  
در صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مرکب ..... ۵۴
- جدول (۶-۵) خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت بی بعد برای کد نوشته شده با نتایج تحلیلی  
در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با طول های ترک مختلف ..... ۷۰
- جدول (۷-۵) خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت بی بعد برای کد نوشته شده با نتایج تحلیلی  
در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با شعاع های انتگرال گیری مختلف ..... ۷۰
- جدول (۸-۵) نتایج حاصل از ضرایب شدت  $K_I$ ،  $K_{II}$  و  $K_{IV}$  در صفحه پیزوالکتریک همگن  
با روش EDI در زوایای مختلف ترک ..... ۸۱
- جدول (۹-۵) نتایج حاصل از ضرایب شدت  $K_I$ ،  $K_{II}$  و  $K_{IV}$  در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن  
با روش EDI در زوایای مختلف ترک ..... ۸۳

# فصل ۱

## مقدمه



## ۱-۱- مقدمه

در این فصل، ابتدا به معرفی مواد تابعی و ویژگی‌های آن‌ها پرداخته شده است که می‌تواند استحکام مواد را افزایش دهد و از شکست تا حدود زیادی جلوگیری کند. در ادامه در مورد مواد پیزوالکتریک به عنوان یکی از انواع مواد هوشمند توضیح داده شده است که قابلیت تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و یا برعکس را دارد. همچنین کاربردهای گسترده‌ی مواد پیزوالکتریک توضیح داده شده و پس از آن، معادلات اساسی برای مواد پیزوالکتریک گفته شده است. پس از آن به اختصار در مورد کار گذشتگان اشاره و در انتهای فصل به ساختار پایان نامه اشاره شده است.

## ۱-۲- مواد تابعی

مواد تابعی از ترکیب دو ماده مختلف که معمولاً یکی فلز و دیگری سرامیک است، ساخته می‌شوند؛ به طوری که خواص ترکیب حاصل بصورت یکنواخت تغییر کند. در نتیجه در این مواد جزء حجمی مواد تشکیل‌دهنده بصورت تابعی یکنواخت تغییر کرده و باعث ایجاد یک ساختار میکروسکوپی غیر یکنواخت و یک ساختار ماکروسکوپی با تغییرات پیوسته می‌گردد [۱].

با وجود آنکه تحقیق‌های علمی در مورد مواد تابعی سابقه زیادی ندارد؛ ولی تصور کلی و مفهوم مواد تابعی از زمان‌های دور در ساختار سازه‌های فولادی اولیه و حتی در ساختار ارگانسیم‌های زنده طبیعت مانند استخوان و خیزران وجود داشته است. این‌گونه مواد در ساختارشان دارای تغییرات تدریجی هستند تا اجزای قوی‌تر ساختار آن‌ها در مکان‌هایی متمرکز شوند که تنش وارد بر سازه در آن نقاط بیشتر است.

به عنوان مثال در ساختار استخوان بدن که لازم است در سطوح خارجی آن مقاومت مناسبی در مقابل عوامل بیرونی از جمله ضربات شدید و در قسمت‌های داخلی شرایط مناسبی برای جذب مواد غذایی داشته باشد، ساختاری که کاملاً مشابه ساختار مواد تابعی می‌باشد، وجود دارد. به گونه‌ای که استخوان در سطوح خارجی کاملاً سخت و مقاوم می‌باشد؛ ولی در مرکز، ساختاری کاملاً نرم و

اسفنجی را داراست و تغییرات بین این دو ناحیه نیز به صورت کاملاً پیوسته و هموار می‌باشد. البته یک تفاوت اساسی در ساختار تدریجی مواد زنده و مواد مصنوعی وجود دارد. به این دلیل که ارگانسیم‌های زنده قابلیت وفق دادن سازه‌ی خود، با توجه به ظرفیت عناصر مورد نیاز خود را دارند. در ساختار مواد تابعی می‌بایست خواص از یک ترکیب یا ماده به سمت خواص یک ترکیب یا ماده دیگر تغییر کند، یعنی مواد تابعی به طور معمول از دو فاز جداگانه ساخته شده‌اند به گونه‌ای که خواص آن‌ها به صورت پیوسته و مستمر در حالت تغییر از یک فاز به فاز دیگر می‌باشد. معمولاً نوع ترکیب به گونه‌ای است که خواص مواد ترکیبی مکمل یکدیگر می‌باشند و کمبودها و نواقص یکدیگر را جبران می‌کنند.

### ۱-۳- ویژگی‌های مواد تابعی

با توجه به نکاتی که گفته شد و با تحقیق‌های که بر روی مواد تابعی انجام گرفته است، می‌توان ویژگی‌های زیر را برای مواد تابعی نام برد [۲].

۱- مواد تابعی در برابر گرادیان دمایی بالا مقاومت خوبی دارند و با کاهش دادن تنش‌های

حرارتی، اثرات منفی آن را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهند. به کمک این خواص

می‌توان تنش‌ها را در اطراف نقاطی که تنش‌های حرارتی دارای مقدار بیشینه است و در

حقیقت نوعی حالت بحرانی به وجود آمده است، کنترل کرد.

۲- به کمک مواد تابعی می‌توان استحکام مواد را افزایش داد و از ورود اجسام به منطقه‌ی

پلاستیک و حتی شکست تا حدود زیادی جلوگیری کرد.

۳- یکی از مهمترین ویژگی‌هایی که مواد تابعی دارند، قابلیت از بین بردن تمرکز تنش می‌باشد.

در بسیاری از اجسام، تمرکز تنش به علت وجود شکل‌های هندسی خاص، در برخی از نقاط

جسم ایجاد می‌گردد. نقاطی مانند لبه‌های جسم یا در نزدیکی سوراخ‌های درون جسم که به

وسیله مواد تابعی می‌توان اثرهای آن‌ها را کاهش داد.

۴- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد موجب استحکام بین فازهای مختلف می‌گردد. در مواد مرکب تداخل موجود بین ساختارهای زمینه و الیاف تقویت کننده، یک نوع ناهماهنگی در خواص مکانیکی را ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک ابتدا در پهنه‌ی مرزی زمینه و الیاف ایجاد می‌گردد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌گردد.

۵- با استفاده از مواد تابعی و یافتن بهترین ترکیب برای تغییر خواص، نیروهایی که باعث ایجاد و رشد ترک می‌گردند، قابل کنترل می‌باشند.

۶- بسیار ساده‌تر خواهد بود اگر هنگام قرارداد یک روکش سخت و ترد بر روی مواد نرم، از تغییرات پیوسته و تدریجی مواد استفاده شود. در این حالت احتمال جدا شدن لایه‌ها کاهش می‌یابد.

۷- به کمک تغییرات تدریجی خواص مکانیکی در لایه‌های سطحی می‌توان از بریدگی‌های سطحی که باعث ایجاد میدان‌های تکین می‌شوند، جلوگیری کرد و خواص تغییر شکل پلاستیک ماده را در اطراف این بریدگی‌ها تغییر داد.

#### ۱-۴- مواد پیزوالکتریک تابعی<sup>۱</sup>

با توجه به اینکه مواد تابعی، پتانسیل کاهش تمرکز تنش و افزایش چقرمگی شکست را دارا می‌باشند، در نتیجه نوع جدیدی از مواد (پیزوالکتریک تابعی) به منظور بهبود قابلیت اطمینان از مواد پیزوالکتریک و سازه‌ها با گسترش مفهوم مواد شناخته شده تابعی، توسعه داده شد.

پیزوالکتریک‌ها یکی از انواع مواد هوشمند هستند که دارای قابلیت تبدیل انرژی از سطحی به سطح دیگر می‌باشند. رفتار پیزوالکتریک عبارت است از تولید الکتریسیته ایجاد شده توسط پلاریزاسیون توسط یک کریستال در اثر اعمال تنش. اثر پیزوالکتریک، قابلیت برخی از مواد است برای

<sup>۱</sup>Functionally graded piezoelectric materials

تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و برعکس. تولید اختلاف پتانسیل الکتریکی در برخی بلورهای نارسانا مثل کوارتز در اثر کشش یا فشار متداول است. علامت پتانسیل‌های دو وجه بلور در دو حالت فشردگی یا کشیدگی معکوس هم‌ارزند و هرچه میزان فشار و کشش بیشتر باشد، اختلاف پتانسیل تولید شده بیشتر است. زمانی که یک میدان الکتریکی به یک کریستال پیزوالکتریک اعمال شود، تحت کرنش قرار می‌گیرد که اصطلاحاً آنرا رفتار پیزوالکتریک معکوس می‌نامند. شرط ضروری برای پیزوالکتریک بودن یک کریستال، عدم وجود تقارن مرکزی در ساختار کریستال است. حال اگر دو وجه روبرویی در هر یک از این بلورها را به اختلاف پتانسیل متناوب الکتریکی وصل کنیم، تغییر شکل متناوبی در آن رخ داده و به ارتعاش درمی‌آید. ترکیبات سرب، زیرکات و تیتانات مثال‌هایی از مواد پیزوالکتریک هستند.

### ۱-۵- کاربردهای مواد پیزوالکتریک

۱. به عنوان مبدل انرژی نوسانی به انرژی الکتریکی (شتاب سنج و ...)
۲. به عنوان مبدل انرژی صوتی به انرژی الکتریکی (در دیسک‌های صوتی، میکروفن، بلندگو و ...)
۳. در دریافت و انتقال امواج آلتراسونیک (کنترل امواج التراسونیک، سنسورهای AE و ...)
۴. در تولید ولتاژ و جرقه با ولتاژ بالا (جرقه‌زن)
۵. در تولید بیوسنسورهای پزشکی
۶. در تولید میکروروباتهای ریز و موتورهای در مقیاس کوچک
۷. استفاده از نانوذرات پیزوالکتریک (نانوذرات سرامیک‌های خاص) در ایجاد خواص الکتریکی

یک سطح

## ۶-۱- معادلات اساسی برای مواد پیزوالکتریک

بر اساس تئوری الاستیسیته و الکترواستاتیک معادلات حاکم بر مواد پیزوالکتریک به صورت زیر بیان می‌شوند [۱]. توجه شود که معادلات میدان برای مواد پیزوالکتریک در یک دستگاه مختصات مستطیلی<sup>۱</sup> با  $X_j (j = 1, 2, 3)$ ، در معرض بارهای الکترومکانیک در غیاب نیروهای حجمی هستند.

معادلات ساختاری:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ks} - e_{sij} E_s \quad (1-1)$$

$$D_i = e_{iks} \varepsilon_{ks} + \kappa_{is} E_s \quad (2-1)$$

معادلات سینماتیک:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3-1)$$

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (4-1)$$

معادلات تعادل:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (5-1)$$

$$D_{i,i} = 0 \quad (6-1)$$

در معادله‌های ۱-۳ و ۱-۴ و ۱-۵ و ۱-۶، ویرگول نشان‌دهنده مشتق جزئی است.  $u_i$  مؤلفه بردار جابجایی الاستیک  $u$ ،  $\phi$  پتانسیل الکتریکی و  $\sigma_{ij}$ ،  $\varepsilon_{ij}$ ،  $D_i$  و  $E_i$  به ترتیب مؤلفه‌های تنش، کرنش، جابجایی الکتریکی و میدان الکتریکی می‌باشند.  $C_{ijkl}$  و  $e_{sij}$  به ترتیب ثابت‌های الاستیک و پیزوالکتریک هستند.  $\kappa_{is}$  ثابت دی‌الکتریک می‌باشد. روابط بین اندیس‌ها ۱-۱، ۲-۲، ۳-۳، ۱-۲، ۲-۳، ۳-۱، ۱-۳، ۲-۱ و ۳-۲ معادلات سازگاری ۱-۴ و ۱-۵ می‌توانند بر حسب نماد ویت<sup>۲</sup> نوشته شوند، این‌گونه که  $\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_\beta - e_{s\alpha} E_s$  و  $D_i = e_{i\beta\gamma} \varepsilon_\beta - \kappa_{is} E_s$  و در آن  $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$  و  $i, s = 1, 2, 3$  می‌باشند [۳].

<sup>1</sup> Rectangular

<sup>2</sup> Voigt

### ۷-۱- روش اجزای محدود توسعه یافته

در روش اجزای محدود توسعه یافته، شبکه بندی مدل بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی ها انجام می پذیرد و سپس با کمک گرفتن از برخی توابع غنی سازی مناسب، ناپیوستگی ها مدل می گردد. توابع غنی سازی، درجات آزادی گره های اطراف ترک را افزایش داده و از این طریق شرایط ناپیوسته داخل المان را مدل می کنند. با تغییر در نوع تابع غنی سازی، شرایط تکینگی در اطراف نوک ترک نیز فراهم می شود. به همین علت استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته با توجه به ویژگی هایی که داراست، برای تحلیل ترک بین لایه ای در مواد پیزوالکتریک تابعی مفید خواهد بود.

روش المان محدود توسعه یافته در مقایسه با روش استاندارد المان محدود فواید بی نظیری در مدل سازی عددی رشد ترک ایفا می کند. فواید اصلی این است که شبکه بندی المان محدود نیاز به مطابقت با مرزهای ترک برای در نظر گرفتن ناپیوستگی مهندسی ندارد و بعلاوه نیازی به اصلاح و ترمیم شبکه بندی برای رشد ترک نیست. همچنین روش المان محدود توسعه یافته در بسیاری از زمینه های مهندسی استفاده می شود.

### ۸-۱- مروری بر تحقیقات انجام شده

پس از توضیحاتی در مورد مواد پیزوالکتریک و همچنین روش های بدست آوردن ضرایب شدت، به کارهای صورت گرفته در این حوزه پرداخته شده است.

اولین مقاله نظری در مورد مکانیک شکست پیزوالکتریک توسط پارتن<sup>۱</sup> در سال ۱۹۷۶ نوشته شده است [۴]. با استفاده از آثار دیگ<sup>۲</sup>، سوسا<sup>۳</sup>، سو<sup>۴</sup>، پاک<sup>۵</sup>، پارک<sup>۶</sup>، سان<sup>۷</sup>، زو<sup>۸</sup> و رجب پاکسو<sup>۹</sup> روش های

<sup>۱</sup> Parton

<sup>۲</sup> Deeg

<sup>۳</sup> Sosa

<sup>۴</sup> Suo

<sup>۵</sup> Pak

<sup>۶</sup> Park

<sup>۷</sup> Sun

<sup>۸</sup> Xu

<sup>۹</sup> Rajapakse

ریاضی مورد استفاده در مکانیک شکست الاستیک خطی<sup>۱</sup> مانند تئوری تابع مختلط (لخنیتسکی<sup>۲</sup>) تبدیل انتگرال و معادلات انتگرالی ویژه در مسائل پیزوالکتریک استفاده و با استفاده از تقریب خطی بسط پیدا کرده است. بسیاری از پیکربندی‌های ترک دوبعدی (2D) استاندارد در حوزه‌های نامحدود با موفقیت صورت گرفت. چند راه حل دقیق برای پیکربندی ساده سه بعدی (3D) حاوی ترک مدور و یا بیضوی در دسترس است. در مبانی نظری پیزوالکتریک خطی تحلیل ترک در رساله‌ای از کین<sup>۳</sup> به خوبی مستند شده است.

از لحاظ تاریخی، تحقیقات فشرده در زمینه مکانیک شکست پیزوالکتریک در سال ۱۹۸۰ در مورد شکست در دستگاه‌های پیزوالکتریک صورت گرفت. با استفاده از آزمایش دندان‌ه و بکرز<sup>۴</sup>، ناهمسانگردی آشکار در چقرمگی شکست مواد سرامیکی پیزوالکتریک و وابستگی این مواد به میدان الکتریکی کاربردی مشاهده شد. پس از آن، آزمایش‌های مکانیک شکست واقعی توسط محققان مختلف در سه نقطه نظر خمش، تنش فشرده و نمونه پایه دو پرتو تحت بارگذاری مکانیکی و یا الکتریکی انجام شد. به تازگی، اشنایدر این مطالب را خلاصه کرد و در مورد حالت بحرانی با استفاده از دستاوردها در تست شکست مطالبی را بیان کرد [۵].

برای کاربردهای عملی و تحلیلی از نمونه تست شکست، هندسه محدود، شرایط مرزی پیچیده، بارگذاری الکترومکانیکی و مواد غیرخطی نیاز به استفاده از روش‌های عددی می‌باشد. روش‌های عددی به کار رفته در این حوزه شامل المان محدود، المان محدود توسعه یافته، المان مرزی و ... می‌باشند. روش المان محدود یک روش مورد تأیید برای مکانیک شکست الاستیک خطی می‌باشد.

آقایان هایبس<sup>۵</sup> و الک<sup>۶</sup> [۶] اولین کسانی بودند که روش FEM را برای تحقیق ارتعاشات در

<sup>۱</sup> Linear Elastic Fracture Mechanics

<sup>۲</sup> Lekhnitskii

<sup>۳</sup> Qin

<sup>۴</sup> Vickers-indentation experiments

<sup>۵</sup> Huybes

<sup>۶</sup> Allik

سرامیک‌های پیزوالکتریک به کار گرفتند. سینگ<sup>۱</sup> و کومار<sup>۲</sup> [۷] بررسی انتشار ترک و نرخ انرژی آزاد شده تحت بارگذاری مکانیکی و الکتریکی (توأم) را تحقیق کردند. در صورتی که کونا آنالیز FEM را برای پیشرفت انتگرال [الکترومکانیکی و انتگرال دامنه‌ی معادل برای ترک پیزوالکتریک در مسائل دوبعدی و سه بعدی به کار گرفت. این افراد ترک‌ها را به سه دسته نفوذ ناپذیر، نفوذ پذیر و نیمه نفوذ پذیر تقسیم‌بندی کردند [۸].

در سال ۲۰۰۷، اسلگ و همکارانش روش کانتور انتگرال<sup>۳</sup> را برای محاسبه ضرایب شدت تنش (SIFs) و ضریب شدت جابجایی (EDIF) برای ترک‌ها در اجسام پیزوالکتریک غیرهمگن پیوسته که در معرض بارهای دینامیکی گذرا قرار دارند، گسترش داده‌اند [۹].

محاسبه ضرایب شدت تنش در حالت مود ترکیبی در مواد تابعی با استفاده از انتگرال‌های برهم‌کنش بر اساس سه فرمولاسیون تانسورهای ترکیبی ثابت (تانسورهای ترکیبی بدون تغییر) توسط رائو و رحمان در سال ۲۰۰۳ [۱۰]، فرمولاسیون ناسازگاری (بر اساس عدم برقراری معادله سازگاری) توسط دالبو<sup>۴</sup> و گوسن<sup>۵</sup> در سال ۲۰۰۲ [۱۱] و رائو و رحمان در سال ۲۰۰۳ [۱۲] و فرمولاسیون عدم تعادل (بر اساس عدم برقراری معادله تعادل) توسط کیم و پالینو در سال ۲۰۰۴ [۱۳] صورت پذیرفت. در مقاله‌ای که از کونا و رائو در سال ۲۰۰۸ به چاپ رسیده است [۳]، دامنه انتگرال‌های برهم‌کنش بر اساس سه فرمولاسیون مستقل (فرمولاسیون تانسور ترکیبی ثابت، عدم تعادل و ناسازگاری) برای محاسبه ضریب شدت تنش مکانیکی و ضریب شدت جابجایی الکتریکی برای ترک در مواد پیزوالکتریک تابعی انجام شده است. انتگرال‌های پایستار<sup>۶</sup> مدل [ ] بر اساس معادلات حاکم برای میدان پیزوالکتریک و میدان‌های اطراف نوک ترک واسط‌های پیزوالکتریک همگن به عنوان میدان‌های کمکی بدست می‌آیند. هر یک از فرمول بندی‌ها از نظر چگونگی قرار دادن میدان‌های کمکی در

<sup>1</sup> Singh

<sup>2</sup> Kumar

<sup>3</sup> Contour integral

<sup>4</sup> Dolbow

<sup>5</sup> Goszn

<sup>6</sup> Conservation



محاسبه انتگرال‌های برهم کنش متفاوت هستند و هریک از آنها به یک انتگرال برهم کنش سازگار نتیجه می‌شوند و به این معناست که ترم‌های اضافی به طور طبیعی در هنگام بدست آمدن آنها ظاهر شده تا اختلاف در میدان‌های اطراف نوک ترک انتخابی همگن و غیرهمگن (مواد پیزوالکتریک تابعی) جبران شود. عبارت‌های اضافی، نقش مهمی در تضمین دامنه مستقل انتگرال‌های برهم کنش را دارا هستند.

روش X-FEM توسط افرادی چون بلیچکو<sup>۱</sup> و بلک<sup>۲</sup> پیشنهاد شده است و اثبات کرده‌اند که این روش برای مدل‌سازی عددی ترک‌ها در LEFM بسیار مؤثر می‌باشد [۱۴]. روش X-FEM در بسیاری از زمینه‌های مهندسی استفاده می‌شود. بلیچکو و همکارانش [۱۴] از کسانی بودند که برای اولین بار پایه‌های این روش را بنا گذاردند. سپس موئس<sup>۳</sup> و همکارانش [۱۷] اعمال روش را برای ترک‌های خمیده و یا ترک‌هایی که از چند قطعه ناصاف تشکیل می‌گردند، بسیار ساده‌تر نمودند. در طی سال‌ها محققان زیادی روی این روش کار کردند؛ ولی بیشتر تحقیقات آنها در محیط ایزوتروپ بوده است. اخیراً اسدپور و همکارانش [۱۸] و محمدی [۱۹]، توابع غنی‌سازی جدیدی را برای تحلیل ترک در یک محیط دوسانگرد ارائه داده‌اند.

در مقاله اصفهانی و محمدی [۲۰] توابع غنی‌سازی جدید مربوط به ترک بین لایه‌ای بین دو ماده دوسانگرد معرفی شده است.

## ۱-۹- ساختار پایان نامه

در این پایان نامه به تحلیل مکانیک شکست در صفحات پیزوالکتریک دارای خاصیت تابعی با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته پرداخته شده است. همانطور که اشاره شد، در فصل اول به شناسایی مواد پیزوالکتریک تابعی و روابط حاکم بر این مواد پرداخته شد. همچنین مختصری هم در

<sup>1</sup> Belytschko

<sup>2</sup> Black

<sup>3</sup> Moes

مورد کارهای انجام گرفته در این حوزه بحث شد. فصل دوم به مکانیک شکست مواد پیزوالکتریک اختصاص یافته است. در فصل سوم روش عددی استفاده شده به تفصیل توضیح داده شده است. در فصل چهارم، کارهای انجام گرفته در پایان نامه توضیح داده شده و نتایج آن به تفصیل آمده است. فصل پنجم به نتیجه گیری حاصل از فعالیتها پرداخته و در انتها پیشنهاداتی برای ادامه کار ارائه گردیده است.

## فصل ۲

# مکانیک شکست مواد پیزوالکتریک

## ۲-۱- مقدمه‌ای بر مکانیک شکست

در چند دهه‌ی گذشته استفاده از اصول طراحی مکانیک شکست برای جلوگیری از شکست ناگهانی و یا تدریجی سازه‌ها و قطعات ماشین به یک نیاز تبدیل شده است. به طوری که امروزه بیش از ۸۰٪ طراحی‌ها یا مستقیماً با استفاده از این علم انجام می‌شوند و یا طراحی‌های انجام شده با روش‌های دیگر، از نظر ایمنی در مقابل شکست، با این فناوری مورد آزمایش قرار می‌گیرند. وجود و یا ایجاد ترک و ناپیوستگی در سازه‌ها و قطعات دلایل مختلفی دارد. بسیاری از روش‌های تولید مواد و سازه (به عنوان نمونه عملیات جوشکاری) به طور طبیعی ایجاد شکاف و یا ناپیوستگی می‌کنند. ترک‌ها می‌توانند از این شکاف‌ها و ناپیوستگی‌ها شروع به رشد نموده و موجب گسیختگی قطعه و نهایتاً از کار افتادگی سازه شوند. بنابراین مهم‌ترین هدف علم مکانیک شکست، محاسبه میزان حساسیت قطعه به ترک و اندازه بحرانی ترک است که می‌تواند سبب شکست ناگهانی در بارهای اعمالی شود.

## ۲-۲- مکانیک شکست در مواد پیزوالکتریک

وجود نقص‌هایی مانند ترک، بریدگی‌ها، حفره‌های باریک و غیره در مواد واقعی ممکن است در برخی موارد منجر به انتشار سریع ترک و شکست در کل جسم شود. تئوری ریاضی ترک‌ها بر اساس روش انرژی گریفیث<sup>۱</sup> برای روش‌های عملی و مطالعات نظری و جنبه‌های مختلف فرآیند شکست و همچنین توسعه و گسترش شیوه‌های کاربردی آنالیز و تجزیه و تحلیل استحکام عناصر سازه‌ها، بسیار مناسب می‌باشد [۱].

در حال حاضر، پیشرفت قابل توجهی در بررسی شکست مواد تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی بدست آمده است. با این حال، شکست مواد با میدان‌های دوگانه طبیعی مختلف (به عنوان مثال، الاستیک، حرارتی و الکتریکی) بطور کامل تحت مطالعه قرار نگرفته است. همچنین چون پیزوالکتریک‌ها طبیعت ترد دارند و وقوع شکست در آنها احتمال زیادی دارد، تعمیم روش مکانیک

<sup>۱</sup> Griffith

شکست مواد پیزوالکتریک سودمند و مفید می‌باشد.

### ۳-۲- معیار شکست برای بارگذاری الکترومکانیکی استاتیکی

#### ۱-۳-۲- معیار شکست برای یک ترک گریفیث

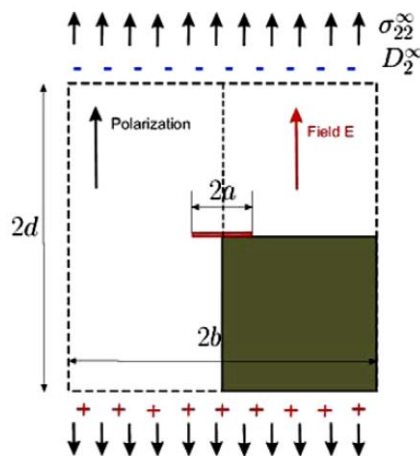
یک معیار شکست برای شروع ترک باید به صورت کلی فرمول‌بندی شود:

$$B(K_I, K_{II}, K_{IV}) \cong B(G_m^I, G_m^{II}, G_e) = B_C(P_i^r, E_i, \Delta a, \dots) \quad (1-2)$$

که  $K_I, K_{II}, K_{IV}$  ضرایب شدت،  $G_m^I, G_m^{II}, G_e$  انرژی رهائش مکانیکی و الکتریکی،  $P_i^r, E_i$  میدان‌های مکانیکی و الکتریکی و  $\Delta a$  اندازه ترک می‌باشد. کمیت‌های سمت چپ، نیروی مناسب برای رشد ترک را بدست می‌آورند در حالیکه کمیت‌های سمت راست مقاومت ماده را نشان می‌دهند [۸]. در هر دو سمت معیار (معادله ۱-۲) میدان الکتریکی بکار گرفته می‌شود. در قسمت انتخاب بارگذاری عبارت‌های انرژی الکتریکی و ضریب شدت جابجایی-الکتریکی ( $K_{IV}$ ) معین شده‌اند. اما سؤال اساسی این است که چقرمگی شکست به چه چیزی بستگی دارد؟ آیا شکست هنوز مثل یک گسیختگی مکانیکی عمل می‌کند یا خیر؟

برای درک اساسی و بهتر، جوابی برای بارگذاری الکترومکانیکی برای ترک گریفیث در نظر

می‌گیریم (شکل ۱-۲).



شکل (۱-۲) ترک گریفیث با قطب عمودی و میدان الکتریکی [۸]

جواب تحلیلی برای ضرایب شدت ( $K_{IV}$  و  $K_I$ ) اینگونه است:

در همه حالات

$$K_I = (\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{22}^C) \sqrt{\pi a} \quad (2-2)$$

حالت نفوذناپذیری الکتریکی

$$K_{IV} = D_2^{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (3-2)$$

حالت نیمه نفوذپذیری الکتریکی

$$K_{IV} = (D_2^{\infty} - D_2^C) \sqrt{\pi a} \quad (4-2)$$

حالت نفوذپذیری الکتریکی

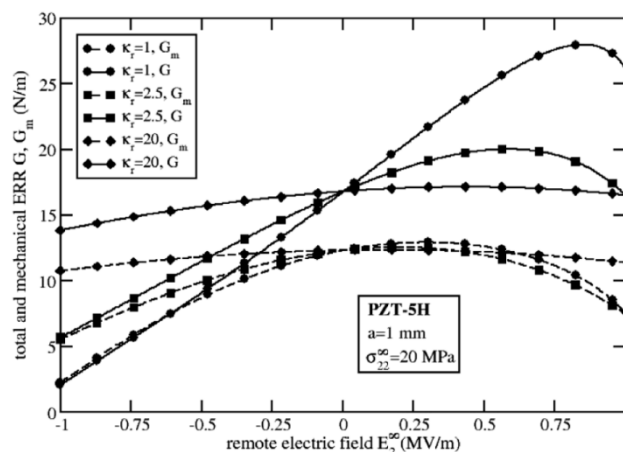
$$K_{IV} = f(K_I) \quad (5-2)$$

در حالت خاص دوبعدی وقتی که ترک به صورت عمودی قرار می‌گیرد؛ معادله بین ضریب شدت تنش و نرخ رهاسازی انرژی در معادله گریفیث (GERR) می‌تواند به صورت زیر با دو ضریب  $K$  بیان شود که در آن  $\kappa$ ،  $e$ ،  $c_T$  ثابت‌های الاستیک، پیزوالکتریک و دی‌الکتریک هستند.

$$G = G_m + G_e = \frac{1}{2} \left( \frac{K_I^2}{c_T} + \frac{K_I K_{IV}}{e} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{K_I K_{IV}}{e} + \frac{K_{IV}^2}{\kappa} \right) \quad (6-2)$$

در صورت علامت منفی در این رابطه، انرژی کلی و دسترس کاهش می‌یابد. اگر ما معیار شکست را بر اساس  $G$  و یا  $G_m$  فرمول‌بندی کنیم، تأثیر میدان انتخابی  $E_2^{\infty}$  (یا  $K_{IV}$ ) می‌تواند به شرح زیر دریافت شود. بزرگی هر دو ضریب شدت از طریق معادلات (2-2 تا 5-2) و بر اساس شرایط مرزی وجوه ترک بدست می‌آید. در حالت نفوذناپذیری با توجه به علامت  $E_2^{\infty}$  رفتار کاملاً متقارن بوده و اثر الکتریکی مقاومی را می‌دهد. بر عکس برای حالت نفوذپذیری،  $G(K_{IV} \approx 0)$  تقریباً به  $E_2^{\infty}$  وابسته است. جواب‌های شبه نفوذپذیری درون این دو محدوده قرار می‌گیرد و از شکل (2-2) قابل مشاهده است. برای ترک که با هوا پر شده  $\kappa_r = 1$ ،  $\kappa_r$  ضریب نفوذپذیری است) با روغن سیلیکون  $\kappa_r = 2.5$  و یا برای محیط تقریباً نفوذپذیر  $\kappa_r = 50$  می‌باشد.

بر اساس اثر غیرخطی شار وجوه ترک و کشش‌ها، رفتار  $G$  ( $E_2^\infty$ ) به صورت نامتقارن درمی‌آید و بیشترین اتصال به مقدار بالا انجام می‌شود. بدون میدان الکتریکی تمام منحنی‌ها در یک نقطه به هم می‌رسند. برای مقایسه قسمت مکانیکی خاص  $G_m$  در ERR معادله (۲-۶) به صورت خطوط ناپیوسته نمایش داده شده است.



شکل (۲-۲) نرخ رهاسازی انرژی در مقابل میدان الکتریکی برای روابط مختلف نفوذ پذیری  $K_I$  با ترک

گرفیفت در PZT-5H در تنش دوردست ثابت  $\sigma_{ZZ}^\infty$  [۸]

### ۲-۳-۲ - منحنی‌های مقاومت رشد ترک

از آنجا که نمونه‌های آزمایش شکست دنداندار<sup>۱</sup> از شرایط بارگذاری پیچیده، سطوح هندسی ترک‌دار نامشخص و تنش‌های پسماند ایجاد می‌شود، آزمایش‌هایی با نمونه‌های آزمایش شکست مورد توجه است. داس سنتوزلوکاتو<sup>۲</sup> [۱۵] و همکارانش از نمونه‌های CT برای بررسی مقاومت شکست (منحنی R) ماده PZT PIC 151 بوسیله بارگذاری مکانیکی به تنهایی استفاده کردند. نتایج آنها از آنجایی که نمونه‌هایی که بطور عمودی قطبی شده‌اند نسبت به جهت ترک، سختی کمتری در مقایسه با حالت غیرقطبی داشتند، نشان می‌دهد که قطبی‌سازی در طول در قسمت جلو ترک منجر به مقاومت بالاتر می‌شود. این رفتار می‌تواند بوسیله تعویض ناحیه در منطقه فرآیند توضیح داده شود که

<sup>۱</sup> Indentation fracture experiments

<sup>۲</sup> dos Santos e Lucato

اگر جهت میدان‌ها تعویض شود، انرژی بیشتری را جذب می‌کند. این کار بوسیله شنایدر<sup>۱</sup> [۵]، کسی که نمونه‌ها را در حرارتی بالاتر از درجه حرارت کوره تابکاری نمود، تأیید شده است که بوسیله آن افزایش مقاومت کاملاً از بین می‌رود. همچنین آنالیز اشعه X مدرک مناسبی است دال بر اینکه تنش‌های القایی خودشان ناحیه جهت رشد ترک را تنظیم می‌کنند.

آزمایش‌های شکست با نمونه‌های DCB و BaTiO<sub>3</sub> توسط فوردیرچر<sup>۲</sup> [۱۶] و همکارانش انجام شده است. همچنین ایشان تأثیر میدان الکتریکی بر روی مقاومت شکست در طی رشد ترک ثابت را بررسی کردند. ضمن اینکه ترک به طور مکانیکی توسط یک گره ایجاد شده است، یک میدان الکتریکی به طور مقدماتی به صورت عمودی برای ترک بکار گرفته شده است. وقتی میدان بکار گرفته می‌شود، تأخیر قابل توجهی در سرعت ترک قابل مشاهده است. پارامترهای شکست مناسب توسط آنالیز FEM برای این نمونه‌های آزمایشی مورد محاسبه قرار گرفته است. تغییر زیاد  $K_{IV}$  در طی عملکرد میدان ایجاد می‌شود. بر اساس معادله (۲-۶) اندوخته انرژی الکترومکانیکی ( $G \triangleq$ )  $G_{em}$  کاهش یافته، که در آن توزیع خالص مکانیکی  $G_m$  غنی می‌شود. افزایش مشخص  $K_I$  با سختی مکانیکی  $(E, K_{IV})K_{IC}$  تعیین می‌شود. از اینرو یافته‌های تجربی فقط می‌توانند اگر تأثیر سختی بوسیله میدان الکتریکی وابسته به تعویض ناحیه و حیطه آن باشد، توضیح داده شوند [۸].

<sup>1</sup> Schneider

<sup>2</sup> Forderreuther



## فصل ۳

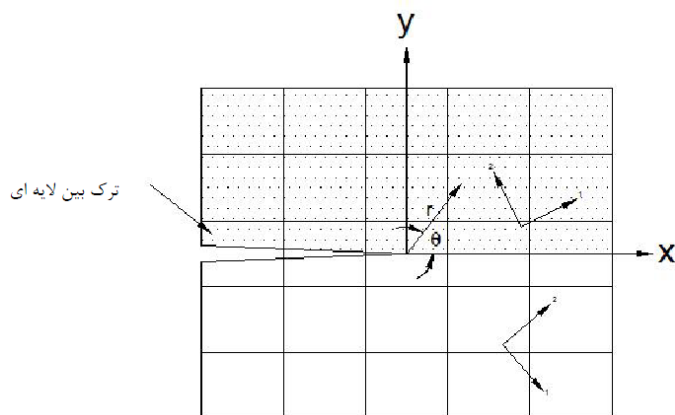
روش اجزای محدود توسعه یافته

## ۳-۱- مقدمه

روش‌های تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی متفاوتی برای مدل‌سازی مسائل حاوی ترک وجود دارد. از جمله روش‌های عددی می‌توان به روش انتگرال مرزی، روش المان مرزی، روش اجزای محدود و اخیراً نیز روش‌های بدون المان اشاره کرد. امروزه روش اجزاء محدود از بین روش‌های عددی متداول، پرکاربردترین ابزار برای تحلیل مسائل مهندسی و فیزیکی شده است. روش اجزاء محدود بصورت ذاتی بر اساس پیوستگی المان‌ها استوار شده است، بنابراین در حل مسائلی که شرایط ناپیوستگی مانند ترک در آنها وجود دارد، تحلیل با این روش به سادگی میسر نخواهد بود. بطور کلی در مدل‌سازی ترک با استفاده از روش اجزاء محدود، المان‌ها در اطراف ناحیه ناپیوسته قرار داده می‌شوند و شبکه باید بطور کامل با ترک تطبیق پیدا کند. بعلاوه برای دستیابی به شرایط تکینگی نوک ترک باید در ساختار المان‌های اطراف نوک ترک تغییراتی ایجاد شود. همچنین در شرایطی که نرخ تغییرات کمیت‌ها در محدوده‌ای زیاد باشد، باید از المان‌های ریز استفاده کرد.

برای غلبه بر مشکلات گفته شده، برخی محققان در سال ۱۹۹۹ میلادی روش اجزای محدود توسعه یافته را پیشنهاد کردند که در آن شبکه‌بندی مدل بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی‌ها انجام می‌پذیرد و سپس با کمک گرفتن از برخی توابع غنی‌سازی مناسب، ناپیوستگی‌ها مدل می‌گردد. توابع غنی‌ساز، درجات آزادی گره‌های اطراف ترک را افزایش داده و از این طریق شرایط ناپیوسته داخل المان را مدل می‌کنند. با تغییر در نوع تابع غنی‌سازی، شرایط تکینگی در اطراف نوک ترک نیز فراهم می‌شود. به همین علت استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته با توجه به ویژگی‌هایی که داراست، برای تحلیل ترک بین لایه‌ای در مواد پیزوالکتریک تابعی مفید خواهد بود.

در مقاله اصفهانی و محمدی [۲۰] مدل مربوطه توسط روش اجزاء محدود توسعه یافته با استفاده از توابع غنی‌سازی جدید مدل شده و ضرایب شدت تنش برای این نوع ترک بصورت عددی و با استفاده از روش انتگرال [ ] برآورد شده است. شکل ۳-۱ نشان دهنده مسأله حل شده در حالت کلی می‌باشد.



شکل (۳-۱) ترک بین لایه‌ای بین دو ماده دوسانگرد [۲۰]

### ۳-۲- روش اجزای محدود توسعه یافته

در روش اجزای محدود توسعه یافته، روند کار به این صورت است که در ابتدا شبکه اجزای محدود بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی، که می‌تواند ترک یا حفره باشد، ساخته می‌شود. سپس برای در نظر گرفتن ناپیوستگی، با استفاده از توابع غنی‌ساز، که از حل تحلیلی تغییر مکان پیرامون ناپیوستگی سرچشمه می‌گیرد، تعدادی درجات آزادی اضافی در محل گره‌های موجود در شبکه که با ناپیوستگی درگیر هستند به مدل اضافه می‌گردد و بدین طریق ناپیوستگی، بدون آنکه در شبکه بطور آشکار در نظر گرفته شده باشد، مدل می‌شود.

#### ۳-۲-۱- روابط پایه

فرض می‌کنیم که یک نقطه مانند  $x$  از فضای  $R^2$  (برای محیط دوبعدی) و یا  $R^3$  (برای محیط سه‌بعدی) درون مدل اجزای محدود داشته باشیم و مجموعه گرهی بصورت  $N$ ، که در آن  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$  تعداد گره‌های یک المان است، باشد. در اینصورت تابع مربوط به محاسبه تقریب تغییر مکانی غنی‌شده مربوط به آن نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود (سوکومار<sup>۱</sup> و همکارانش [۲۱]).

<sup>1</sup> Sukumar

$$u^h(x) = \underbrace{\sum_{n_I \in N} \phi_I(x) u_I}_{\text{قسمت اجزای محدود معمولی}} + \underbrace{\sum_{n_J \in N^g} \phi_J(x) \psi(x) a_J}_{\text{قسمت غنی شده}} \quad (1-3)$$

که در معادله ۱-۳،  $u_I$  درجات آزادی تغییر مکانی در اجزای محدود متداول،  $a_J$  درجات آزادی تغییر مکانی اضافی نسبت به مدل اجزای محدود متداول و مربوط به غنی‌سازی،  $\phi_I$  تابع شکلی مربوط به گره  $I$  در اجزای محدود متداول،  $\psi(x)$  تابع غنی‌ساز و  $N^g$  مجموعه‌ای از گره‌ها با تعریف زیر می‌باشد:

$$N^g = \{n_J : n_J \in N, \omega_J \cap \Omega_g \neq \emptyset\} \quad (2-3)$$

در معادله ۲-۳،  $\omega_J$  دامنه اثر تابع شکلی  $\phi_J$  در گره  $n_J$  و  $\Omega_g$  حوزه وابسته به هندسه ناپیوستگی‌ها همچون سطح و یا نوک ترک می‌باشد. تعیین تابع غنی‌ساز  $\psi(x)$  با توجه به نوع ناپیوستگی و شرایط تحلیلی در دسترس مربوط به آن انجام می‌پذیرد. در واقع به صورت کاملاً کلی و ساده،  $N^g$  مجموعه‌ای از گره‌هاست که به نوعی با ناپیوستگی در ارتباط هستند [۲۰].

### ۲-۲-۳- روابط مربوط به مدل سازی ترک

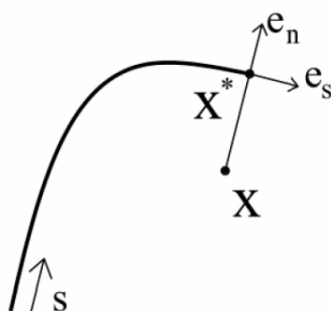
در مدل‌سازی یک ترک دلخواه معادله ۱-۳ به صورت زیر درمی‌آید (مؤس و همکارانش [۱۷]).

$$u^h(x) = \sum_{n_I \in N} \phi_I(x) u_I + \sum_{n_J \in N^g} b_J \phi_J(x) H(x) + \sum_{k \in K^1} \phi_k(x) \left( \sum_I c_k^{11} F_I^1(x) \right) + \sum_{k \in K^2} \phi_k(x) \left( \sum_I c_k^{12} F_I^2(x) \right) \quad (3-3)$$

در معادله ۳-۳، قسمت اول برای گره‌های خارج ترک می‌باشد، همچنین مقادیر  $b_J$  و  $c_k^1$  درجات آزادی گرهی اضافی اطراف ترک،  $F_I^1$  و  $F_I^2$  توابع تغییر مکانی دوبعدی نزدیک نوک ترک می‌باشند که به ترتیب برای مدل کردن ابتدا و انتهای ترک است که برای مواد مرکب ارائه شده است.  $H(x)$  هم تابع تعمیم یافته هویساید است که مثبت است، اگر  $x$  در بالای ترک قرار گیرد؛ در غیر اینصورت منفی است. مطابق شکل ۲-۳، چنانچه  $e_n$  بردار یکه عمود بر امتداد ترک باشد، به‌گونه‌ای که

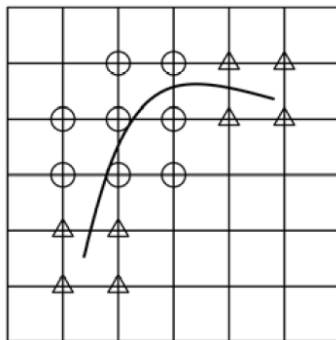
$e_s \times e_n = e_z$  بردار یکه مماسی است) و نزدیکترین نقطه به  $X$  بر روی ترک  $X^*$  باشد، در این صورت معادله ۳-۴ تابع هویساید را تعریف می کند. لازم به ذکر است که از این تابع در شبیه سازی دو لبه ترک و نه نوک آن، استفاده می شود.

$$H(x) = \begin{cases} +1 & ; (x - x^*) \cdot e_n > 0 \\ -1 & ; (x - x^*) \cdot e_n < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{هرگاه} \\ \text{هرگاه} \end{matrix} \quad (4-3)$$



شکل (۳-۲) بردارهای یکه عمودی و مماسی در تابع هویساید تعمیم یافته برای نقطه ای مانند  $X^*$  که نزدیکترین نقطه بر روی ترک به نقطه  $X$  است [۲۰].

نحوه انتخاب گره ها برای غنی سازی با تابع تعمیم یافته هویساید بدین ترتیب است که چنانچه در حوزه تأثیر یک گره، ترکی وجود داشته باشد، آن گره با تابع نامبرده شده غنی سازی می گردد؛ بدین معنی که برای هر درجه آزادی که در آن گره تعریف شده باشد، به همان اندازه و در همان جهات هم درجات آزادی اضافی ناشی از تابع تعمیم یافته هویساید گذارده می شود تا بتوان ناپیوستگی را در تغییر مکان در هر دو جهت مدلسازی کرد (در شکل ۳-۳ این گره ها با دایره مشخص شده اند). لازم به ذکر است که تابع تعمیم یافته هویساید در تمامی محیطها یکسان است و فقط کافی است توابع غنی ساز نزدیک نوک ترک در هر ماده ای تعیین گردد [۲۰].



شکل (۳-۳) انتخاب نقاط برای غنی‌سازی، نقاطی که با دایره مشخص شده‌اند با تابع تعمیم‌یافته هویساید و نقاطی که با مثلث مشخص شده‌اند با توابع نزدیک نوک ترک غنی‌سازی می‌شوند [۲۰].

### ۳-۲-۳ - محاسبه ضرایب شدت تنش

روشی که برای تعیین ضرایب شدت تنش در حالت مود ترکیبی در اینجا استفاده می‌شود، استفاده از انتگرال  $J$  است که مقدار آن از معادله ۳-۵ بدست می‌آید (رایس [۲۲]).

$$J = \int_{\Gamma} \left( W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (۵-۳)$$

که در آن  $\Gamma$  یک مسیر دلخواه در اطراف نوک ترک به نحوی که هیچ ترک یا ناپیوستگی دیگری را شامل نشود،  $W$  چگالی انرژی کرنشی،  $n_j$ ،  $J$  امین مؤلفه از بردار عمود بر  $\Gamma$  به سمت خارج و  $\delta_{1j}$  دلتای کرانیکر می‌باشد. برای سهولت بیشتر به‌جای انتگرال‌گیری روی خط، انتگرال را بر روی سطح محاسبه می‌شود. برای تعیین ضرایب شدت تنش در حالت مود ترکیبی با استفاده از انتگرال  $J$  نیاز است که از یک حالت کمکی هم استفاده شود، زیرا انتگرال  $J$  به تنهایی فقط یک رابطه بین ضرایب شدت تنش در مودهای اول و دوم را تعیین می‌کند و لذا به یک معادله اضافی بین این دو ضریب نیاز می‌باشد. به همین علت فرض می‌شود که دو حالت تنش و تغییر مکان وجود دارد که یکی مربوط به تنش‌ها و تغییر مکان‌های مسأله است و دیگری مربوط به حالت کمکی می‌باشد. بنابراین انتگرال  $J^S$  را زمانی که هر دو حالت با هم بر ماده تأثیر داده شوند، به‌صورت معادله ۳-۶ خواهد شد و بنابراین با استفاده از انتگرال برهم کنش ( $M$ ) می‌توان ضرایب شدت تنش در بین دو محیط دوسانگرد را

محاسبه نمود.

$$J^S = J + J^{aux} + M \quad (3-6)$$

که در آن  $J$  و  $J^{aux}$  به ترتیب مقادیر انتگرال برای حالت‌های واقعی و کمکی می‌باشند.

### ۳-۳- روش‌های المان محدود توسعه یافته برای مواد پیزوالکتریک

برای استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته باید توابع غنی‌سازی مربوط به مدلسازی ترک بین دو ماده اورتوتروپ را معرفی کرد. این توابع غنی‌سازی جدید، از روابط دوبعدی تغییر مکان‌های نزدیک نوک ترک بین لایه‌ای استخراج شده‌اند. با استفاده از این توابع غنی‌سازی، قابلیت روش اجزاء محدود توسعه یافته در آنالیز ترک بین دو لایه با رفتار الاستیک ارتقاء پیدا کرد. همچنین می‌توان گفت که آنالیز ترک بین لایه‌ای تنها با اصلاح درجات آزادی در المان‌های حاوی ترک توسط توابع غنی‌سازی مناسب (روش اجزاء محدود توسعه یافته)، آسان‌تر از روش‌های مرسوم اجزاء محدود متداول می‌باشد.

به تازگی از روش X-FEM برای مطالعه تابع‌های غنی‌سازی و همگرایی آنها برای ترک‌های نیمه بی‌نهایت Griffith-Irwin یک ماده پیزوالکتریک استفاده می‌شود. به تازگی در مقاله ای از بارگارا<sup>۱</sup> و شرما<sup>۲</sup> [۲۳] تأثیر بعد محدود نمونه بر روی ماده پیزوالکتریک ترک خورده، مطالعه شده است. همچنین در این مقاله از توابع غنی‌سازی چهارگانه تحت تنش کشش صفحه‌ای و بارگذاری الکتریکی استفاده شده است. دو مسئله مهم که در مقاله مورد تأکید قرار گرفت، مرکز و لبه ترک بود. در این مقاله ضریب سختی مود تنش سوراخ ( $K_I$ ) و ضریب سختی جابجایی-الکتریکی ( $K_{IV}$ ) با استفاده از تکنیک برهم کنش انتگرالی و رفتار نوک ترک توسط فرمولاسیون لخنیتسکی محاسبه شد. ایشان برای کاهش مقدار محاسبات یک شبکه بندی به اصطلاح موضعی انجام داده و همچنین نتایج  $K_I$  و  $K_{IV}$  را

<sup>1</sup> Bhargara

<sup>2</sup> Sharma

با شبکه بندی ساخت یافته مقایسه کردند.

روش X-FEM، به توابع غنی سازی محلی اجازه می دهد که در تقریب سازی المان محدود به راحتی شرکت کند. بنابراین تقریب استاندارد در ناحیه مورد دلخواه توسط توابع محلی با درجات آزادی اضافی غنی سازی می شود. برای مسائل ترک، توابع غنی سازی، میدان های نزدیک نوک مجانبی هستند و توابع ناپیوسته برای بیان پرش در جابجایی در طول مرز ترک استفاده می شوند.

### ۳-۳-۱- توصیف هندسه ترک

برای بیان ترک، روش آماده سازی سطح، LSM که یک روش عددی است و بوسیله اشرف<sup>۱</sup> و سسیان<sup>۲</sup> بیان شده است، به کار گرفته شده است [۲۴]. قاعده این روش توسط توصیف صفحه ی مشترک با تابع صفر بیان می شود.

در حالت دو بعدی، ترک یک منحنی باز مرزبندی شده بوسیله نوک ترک می باشد و در حالت سه بعدی، یک سطح باز می باشد که توسط جلو ترک مرزبندی شده است. گسترش و توسعه LSM توسط استلارسکا<sup>۳</sup> و همکارانش بیان شده است تا مرزهای باز را با بکارگیری دو دسته تابع نشان دهد [۲۵]:

- یکی از این توابع، تابع سطح مجموع نرمال  $\psi_1$  بوده، که فاصله اتصال ترک و بسط تانژانت از جلوی آن را نشان می دهد.
- و تابع دیگر، تابع سطح مجموع مماسی  $\psi_2$  بوده، که تابع فاصله تا سطحی است که توسط مرز ترک عبور می کند و عمود بر ترک است.

سطح ترک به عنوان زیر مجموعه ای از مجموعه سطوح صفر  $\psi_1$  در حالیکه  $\psi_2$  منفی است، تعریف می شود. جلو ترک به عنوان محل تقاطع دو مجموعه سطح صفر تعریف می شود [۲۳].

<sup>1</sup> Osher

<sup>2</sup> Sethian

<sup>3</sup> Stolarska



## ۲-۳-۳- غنی سازی تقریب

در سطح ترک، تقریب المان محدود توسعه یافته برای جابجایی و پتانسیل الکتریکی می تواند به شکل زیر نوشته شود [۲۳]:

$$u^h(x) = \sum_{I \in N} N_I(x) u_I + \sum_{I \in N^{cr}} N_I(x) (H(f^h(x)) - H(f_I)) a_I + \sum_{I \in N^{TIP}} N_I(x) \sum_{k=1}^4 (F^k(r, \theta) - F^k(x_I)) b_I^k \quad (7-3)$$

$$\phi^h(x) = \sum_{I \in N} N_I(x) \phi_I + \sum_{I \in N^{cr}} N_I(x) (H(f^h(x)) - H(f_I)) c_I + \sum_{I \in N^{TIP}} N_I(x) \sum_{k=1}^4 (F^k(r, \theta) - F^k(x_I)) d_I^k \quad (8-3)$$

که در آن  $H(f(x))$  تابع اصلاح شده توسط تابع پله ای  $H(y)$  می باشد:

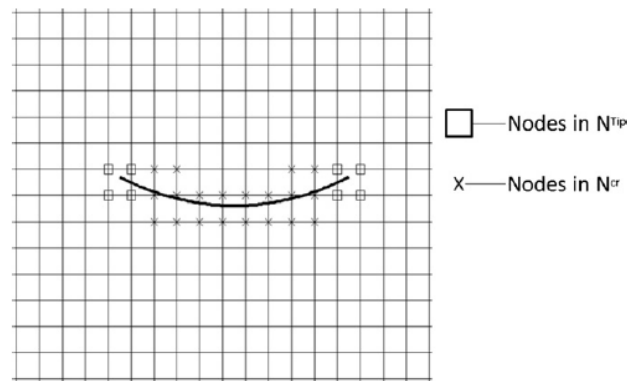
$$H(y) = \begin{cases} -1 & \text{if } y < 0 \\ +1 & \text{if } y > 0 \end{cases} \quad (9-3)$$

توابع شکل،  $N_I(x)$ ، توابع شکل المانی چهار گوش خطی ایزوپارامتریک هستند که جزء پیوستگی را می سازند. ماتریس های ستونی  $u_I$  و  $\phi_I$  به ترتیب جابجایی های گره ای و پتانسیل الکتریکی هستند و  $a_I$ ،  $b_I^k$  و  $c_I$ ،  $d_I^k$  پارامترهای اضافی هستند.  $F^k(r, \theta)$  مبنایی برای میدان وسترگارد<sup>۱</sup> برای نوک ترک است که اینگونه تعریف می شود [۲۲]:

$$F^k(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (10-3)$$

که در آن  $r = \|x - x^{TIP}\|$ ؛  $N$  مجموعه از تمام گره های گسسته شده؛  $N^{TIP}$  مجموعه تمام گره های متصل به المان ها شامل نوک ترک بوده و  $N^{cr}$  مجموعه گره هایی است که متصل به المان حاوی نوک ترک به غیر از  $N^{TIP}$  می باشد.

<sup>1</sup> Westergaard



شکل (۳-۴) مجموعه گره‌های انتخابی برای غنی‌سازی [۲۲]

مجموعه گره‌های انتخابی برای غنی‌سازی در شکل ۳-۴ نشان داده شده است. با جایگزینی جابجایی تقریبی از معادله ۳-۷ و پتانسیل الکتریکی از معادله ۳-۸ در مدل ضعیف شده در سیستم معادلات استاندارد گسسته از رابطه زیر بدست می‌آید [۲۳]:

$$K^s d = f^{ext} \quad (۱۱-۳)$$

که در آن  $f^{ext}$  بردار نیروهای گره‌های خارجی و  $K^s$  ماتریس سفتی است.

ماتریس سفتی مقدماتی برای یک المان غنی‌شده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k_{ij}^e = \begin{bmatrix} k_{ij}^{UU} & k_{ij}^{U\alpha} & k_{ij}^{U\beta} \\ k_{ij}^{\alpha U} & k_{ij}^{\alpha\alpha} & k_{ij}^{\alpha\beta} \\ k_{ij}^{\beta U} & k_{ij}^{\beta\alpha} & k_{ij}^{\beta\beta} \end{bmatrix} \quad (۱۲-۳)$$

و در حالیکه برای المان غیر غنی‌شده داریم:

$$k_{ij}^e = k_{ij}^{UU} \quad (۱۳-۳)$$

در حالی که بردار المانی نیرو  $f^{ext}$  اینگونه است:

$$f_i^e = \begin{cases} \{f_i^U, f_i^{\alpha}, f_i^{\beta}\}^T & \text{برای المان غنی‌شده} \\ f_i^U & \text{برای المان غیر غنی‌شده} \end{cases} \quad (۱۴-۳)$$

از طرفی:

$$U = \{u\phi\}^T, \quad \alpha = \{a_1 c_1\}^T, \quad \beta = \{b_1^k d_1^k\} \quad (۱۵-۳)$$

$$k_{ij}^{rs} = \int_{\Omega_e} (B_i^r)^T C (B_j^s) d\Omega \quad (r, s = U, \alpha, \beta), \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

$$f_i^U = \int_{\partial\Omega_e} N_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega_e} N_i f d\Gamma$$

$$f_i^\alpha = \int_{\partial\Omega_e} N_i \left( H(f^h(x)) - H(f_i) \right) \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega_e} N_i \left( H(f^h(x)) - H(f_i) \right) f d\Gamma \quad (16-3)$$

$$f_i^\beta = \int_{\partial\Omega_e} N_i \left( F^k(x) - F^k(x_i) \right) \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega_e} N_i \left( F^k(x) - F^k(x_i) \right) f d\Gamma$$

$N_i$  تابع شکل استاندارد المان محدود تعریف شده در گره  $i$  و  $B_i^s$  ماتریس گره‌ای تغییرات شکل

می‌باشد.

### ۳-۳-۳ - محاسبه ضریب شدت تنش تحلیلی

برای یک مسئله با دامنه نامحدود در مکانیک شکست پیزوالکتریک تحت تنش کششی  $\sigma_\infty$  و جابجایی

الکتریکی  $D_\infty$  بر روی مرز دور از دسترس، فاکتور شدت تنش مد  $I$  ( $K_I$ ) و فاکتور شدت جابجایی -

الکتریکی (EDIF) یعنی  $K_{IV}$  در نوک ترک به ترتیب  $\sigma_\infty = \sqrt{\pi a}$  و  $D_\infty = \sqrt{\pi a}$  می‌باشد. در حالی

که نمونه‌هایی با ابعاد محدود باشد، ضریب اصلاحی بی‌بعد که به نسبت  $\frac{a}{w}$  وابسته است، برای ضرایب

شدت به شکل زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$K_I = C \sigma_\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{IV} = CD_\infty \sqrt{\pi a} \quad (17-3)$$

که

$$C = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2w}\right)} \left( 1 - 0.025 \left(\frac{a}{w}\right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{w}\right)^4 \right) \quad (18-3)$$

$a$  طول نیمه ترک و  $w$  نصف عرض نمونه برای مسائل با ترک مرکزی است.

$$C = 1.12 - 0.231 \left(\frac{a}{w}\right) + 10.55 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.72 \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{w}\right)^4 \quad (19-3)$$

$a$  طول ترک لبه‌ای و  $w$  عرض نمونه برای مسائل با ترک لبه‌ای است. درصد خطا و مقدار طبیعی

ضرایب شدت به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$IFS = \frac{(IFS_X-FEM - IFS_{Analytically})}{IFS_{Analytically}} \times 100 \quad \text{درصد خطای ضریب شدت} \quad (20-3)$$

و

$$IFS = \frac{IFS_{X-FEM}}{IFS_{Analytically}} \quad \text{مقدار طبیعی ضریب شدت} \quad (21-3)$$

در فصل بعد نتایج عددی برای محاسبه ضرایب شدت در مواد پیزوالکتریک با استفاده از انتگرال برهم‌کنش را نشان می‌شود که با ضرایب شدت که از روش تحلیلی در این قسمت محاسبه شده، مقایسه می‌گردد. روش انتگرال برهم‌کنش یک ابزار مؤثر برای محاسبه ضرایب شدت تنش و ضرایب شدت جابجایی الکتریکی در مواد پیزوالکتریک همگن می‌باشد، که در بخش مواد پیزوالکتریک در قسمت مواد مرکب تابعی مفصلاً توضیح داده شد.

### ۳-۳-۴- کاربردهای عددی

برای بررسی مکانیک شکست در مواد پیزوالکتریک چند مسئله مهم با هدف‌های ذیل در نظر گرفته می‌شود [۲۳] که نتایج این مسائل در فصول بعد به تفصیل آمده است:

- تاثیر نسبت وجه به روی دقت در محاسبه ضرایب شدت
- برای نشان دادن دقت بدست آمده به روی شبکه با اندازه نسبت شبکه
- برای مطالعه استقلال دامنه در محاسبه ضریب شدت تنش
- یافتن تأثیر و تمایل اندازه محدود نمونه در ضریب شدت تنش
- تأثیر زاویه در محاسبه ضریب شدت تنش

## فصل ۴

محاسبه ضرایب شدت تنش

در صفحات پیزوالکتریک

## ۴-۱- مقدمه

در این فصل، با استفاده از میدانهای تنش، کرنش و تغییرمکان درحوزه نوک ترک، ضرایب شدت تنش<sup>۱</sup> مکانیکی و الکتریکی تعیین می‌شوند. هدف این فصل، استخراج دقیق ضریب شدت تنش با استفاده از روشهای عددی در محدوده LEFM است. روشهای متعددی برای تعیین عددی ضریب شدت تنش ارائه شده است که در این فصل، روشهای ذیل بررسی می‌شوند.

۱- روشهای انطباق نقطه‌ای<sup>۲</sup> (همبستگی تغییرمکان‌ها<sup>۳</sup> یا انطباق تغییرمکان)

۲- روش انتگرال J

این روش‌ها بخاطر اهمیت تاریخی، سادگی یا دقت آنها انتخاب شده‌اند. بطور کلی روشهای استخراج ضریب شدت تنش به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- روشهای مستقیم: مقادیر ضریب شدت تنش بطور مستقیم از نتایج عددی استخراج می‌شوند.

۲- رهیافت انرژی: ابتدا نرخ رهایش انرژی و پس از آن، ضریب شدت تنش محاسبه می‌شود.

معمولاً روشهای با مبنای انرژی دقیق‌تر هستند و بر روشهای مستقیم ترجیح داده می‌شوند. اما روشهای مستقیم نیز قابلیت‌هایی دارند و بخصوص برای تأیید نتایج رهیافت انرژی مفید می‌باشند. بیان این روش‌ها ساده است و می‌توان با محاسبات دستی مقادیر ضریب شدت تنش را بدست آورد.

## ۴-۲- روش همبستگی تغییرمکان‌ها (انطباق نقطه‌ای)

روش همبستگی تغییرمکان‌ها یکی از ساده‌ترین و به لحاظ تاریخی، اولین روش‌هایی است که برای استخراج ضریب شدت تنش از نتایج عددی بکار می‌رود و یک روش مستقیم است. در ساده‌ترین فرم این روش، تغییرمکان‌های حاصل از تحلیل عددی برای یک نقطه (نقطه همبستگی<sup>۴</sup>) بطور مستقیم در

<sup>1</sup> Stress Intensity Factor-SIF

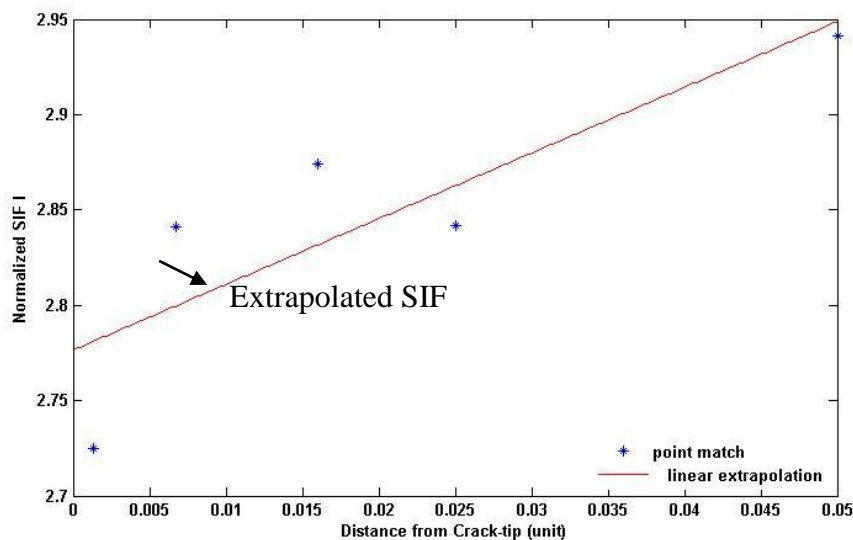
<sup>2</sup> Point Matching Methods

<sup>3</sup> Displacement Correlation Technique- DCT

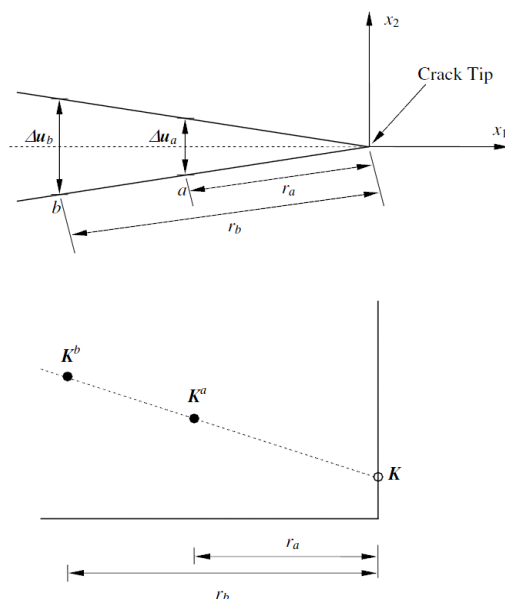
<sup>4</sup> correlation point

عبارت‌های تحلیلی میدان تغییرمکان حوزه نوک ترک جایگزین می‌شود. این روش برای مواد پیزوالکتریک همگن و غیر همگن یکسان است.

معمولا نقطه همبستگی روی سطح ترک و با تغییرمکان حداکثر، انتخاب می‌شود تا خطای نسبی در محاسبه تغییرمکان‌ها به حداقل برسد. نتایج این روش به موقعیت نقطه همبستگی حساسیت زیادی دارد. لذا برای رسیدن به نتایج مطلوب در این روش باید در انتخاب نقطه همبستگی دقت بخرج داده شود؛ تا با وجود قرار داشتن نقطه در ناحیه کنترل ضریب شدت تنش دارای تغییرمکان مناسب نیز باشد. کاربرد این روش برای المان‌های غیرتکین به شبکه‌بندی ریزی در حوزه نوک ترک نیاز دارد. مزیت اصلی این روش سادگی و محاسبه جداگانه ضریب شدت تنش برای هر سه مود شکست است. یکی از روش‌هایی که برای افزایش دقت روش همبستگی تغییر مکان‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد، محاسبه ضریب شدت تنش برای تعدادی از نقاط در ناحیه کنترل ضریب شدت تنش است. سپس یک منحنی بر این نتایج برازش می‌شود و مقادیر ضریب شدت تنش برای حالتی برونپایی می‌شود که فاصله‌ی نوک ترک تا نقطه همبستگی ( $r$ ) به سمت صفر میل می‌کند (مطابق شکل (۴-۱)).



شکل (۴-۱) برونپایی ضریب شدت تنش در روش همبستگی تغییر مکانها [۲۶]



شکل (۲-۴) کاربرد روش همبستگی تغییر مکان [۳]

با بکارگیری روش برون یابی (DEM) ضرایب شدت در مواد پیزوالکتریک در سراسر وجه ترک با

استفاده از فرمول زیر محاسبه می شود:

$$\mathbf{K} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8r}} \mathbf{Y}^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta \varphi \end{Bmatrix} \quad (1-4)$$

برای ترک افقی با توجه به شکل (۲-۴)، نقاط  $a$  و  $b$  نزدیک نوک ترک می باشند. مقادیر  $r_a$  و  $r_b$

فاصله‌ی نقاط  $a$  و  $b$  از نوک ترک می باشند.

در محاسبات، جابجایی و پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه بر روی سطح ترک برای تعیین ضرایب

شدت به کار می رود. برای مثال، از جابجایی مکانیکی و پتانسیل الکتریکی در نقطه  $i$  که بر روی

سطح ترک واقع شده است، در فاصله  $r_i$  از نوک ترک، ضرایب شدت  $K^i$  با استفاده از رابطه زیر

محاسبه می شود [۳]:

$$K^i = \sqrt{\frac{\pi}{8r_i}} \mathbf{Y}^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta \varphi \end{Bmatrix} \quad (2-4)$$





اسکارک [۲۷] نشان داد که برای مواد پیزوالکتریک تابعی میدان‌های نوک ترک همانند اجسام پیزوالکتریک همگن می‌باشند. برای ترک‌ها در میدان پیزوالکتریک همگن کمیت‌های میدان توسط سوسا و پاک ارائه گردید، بدین صورت که در مختصات قطبی با فرض مبدأ در نوک ترک تنش‌های الکترومکانیکی و جابجایی الکتریکی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_N K_N f_{ij}^N(\theta) \quad (۴-۴)$$

$$D_i(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_N K_N g_i^N(\theta) \quad (۵-۴)$$

و همچنین میدان جابجایی در نزدیک نوک ترک و پتانسیل الکتریکی در نزدیک نوک ترک به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$u_i(r, \theta) = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sum_N K_N d_i^N(\theta) \quad (۶-۴)$$

$$\phi_i(r, \theta) = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sum_N K_N v^N(\theta) \quad (۷-۴)$$

که در این روابط  $i, j=1, 2$  و  $N = \{II, I, III, \}$  می‌باشند.

$K_I, K_{II}$  و  $K_{III}$  بیانگر ضرایب شدت (SIF) در موده‌های اول و دوم و سوم بوده و  $K_{IV}$  بیانگر ضریب شدت جابجایی الکتریکی (EDIF) می‌باشد. برای ساختارهای پیزوالکتریک تابعی دو بعدی، مقدار  $K_{III} = 0$  می‌باشد.

توابع زاویه‌ای  $f_{ij}^N(\theta), g_i^N(\theta), d_i^N(\theta)$  و  $v^N(\theta)$  توابع زاویه‌ای استاندارد برای ترک در مواد پیزوالکتریک تابعی هستند که به خواص مواد وابسته بوده و از روش‌های نیمه تحلیلی محاسبه می‌شوند. این توابع می‌توانند به صورت مقادیر ویژه تابعی  $P_\alpha$  بردارهای ویژه  $A_{M\alpha}$  و ماتریس  $M_{M\alpha}$  و  $N_{\alpha N}$  بیان شوند (پارک و سان ۱۹۹۵، ریکوئر و کونا ۲۰۰۳، کونا ۲۰۰۶).

$$f_{i1}^N = - \sum_{\alpha=1}^4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{M_{i\alpha} N_{\alpha N} P_\alpha}{\sqrt{\cos \theta + p_\alpha \sin \theta}} \right\} \quad f_{i2}^N = \sum_{\alpha=1}^4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{M_{i\alpha} N_{\alpha N}}{\sqrt{\cos \theta + p_\alpha \sin \theta}} \right\} \quad (۸-۴)$$

$$g_1^N = -\sum_{\alpha=1}^4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{M_{4\alpha} N_{\alpha N} p_{\alpha}}{\sqrt{\cos \theta + p_{\alpha} \sin \theta}} \right\} \quad g_1^N = \sum_{\alpha=1}^4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{M_{4\alpha} N_{\alpha N}}{\sqrt{\cos \theta + p_{\alpha} \sin \theta}} \right\} \quad (9-4)$$

$$d_i^N = \sum_{\alpha=1}^4 \operatorname{Re} \{ A_{i\alpha} N_{\alpha N} \sqrt{\cos \theta + p_{\alpha} \sin \theta} \} \quad v^N = \sum_{\alpha=1}^4 \operatorname{Re} \{ A_{4\alpha} N_{\alpha N} \sqrt{\cos \theta + p_{\alpha} \sin \theta} \} \quad (10-4)$$

که در آن  $\operatorname{Re}\{\dots\}$  بیانگر قسمت حقیقی و  $\operatorname{Im}\{\dots\}$  قسمت موهومی کمیت‌های نوشته شده می‌باشد. باید توجه داشت که در ساختار دوبعدی  $\alpha$  مقادیر از ۱ تا ۳ را اختیار می‌کند، زیرا مقدار  $K_{III} = 0$  می‌باشد.

مقادیر ویژه  $P_{\alpha}$  که در حالت سه بعدی ۴ جفت مزدوج داشته و بردار ویژه  $A_{M\alpha}$  که ماتریس  $4 \times 4$  بوده، تنها بستگی به خواص مواد داشته و به مقادیر مرزی مسئله بستگی نداشته و از حل معادله درجه دوم زیر بدست می‌آید [۲۸].

$$\left[ \begin{pmatrix} C_{i1k1} & e_{i11} \\ e_{1k1} & -K_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{i2k1} + C_{i1k2} & e_{i21} + e_{i12} \\ e_{2k1} + e_{1k2} & -k_{12} - k_{21} \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} C_{i2k2} & e_{i22} \\ e_{2k2} & -K_{22} \end{pmatrix} p^2 \right] \begin{bmatrix} A_i \\ A_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (11-4)$$

معادله‌ی ۱۱-۴ در حالت دوبعدی و با نماد *voigt* به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} c_{11} + (c_{15} + c_{51})p + c_{55}p^2 & c_{15} + (c_{55} + c_{13})p + c_{53}p^2 & e_{11} + (e_{15} + e_{31})p + e_{35}p^2 \\ c_{51} + (c_{31} + c_{55})p + c_{35}p^2 & c_{55} + (c_{35} + c_{53})p + c_{33}p^2 & e_{15} + (e_{13} + e_{35})p + e_{33}p^2 \\ e_{11} + (e_{15} + e_{31})p + e_{35}p^2 & e_{15} + (e_{13} + e_{35})p + e_{33}p^2 & -\kappa_{11} - (\kappa_{13} + \kappa_{31})p - \kappa_{33}p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (12-4)$$

فقط چهار مقدار ویژه مثبت را از بین چهار جفت مزدوج اختیار کرده و پس از بدست آوردن این چهار مقدار ویژه مثبت آنها را در معادله‌ی ۱۲-۴ جایگزین کرده و بعد از آن مقادیر بردارهای ویژه که یک ماتریس  $4 \times 4$  می‌باشد، محاسبه شده است. برای ماده PZT-5H مقادیر ویژه زیر از کد بدست آمده است که مشابه نتایج در مرجع [۲۹] می‌باشد.

$$p_1 = 1.0028i, \quad p_2 = 1.0710i, \quad p_3 = -0.1932 + 1.0373i, \quad p_4 = 0.1932 + 1.0373i$$

ماتریس‌های  $N_{\alpha N}$  و  $M_{M\alpha}$  توسط معادله زیر بدست می‌آیند:

$$N_{\alpha N}^{-1} = M_{M\alpha} = \begin{bmatrix} (C_{i2k1} + C_{i2k2}p_{\alpha})A_{k\alpha} & (e_{i12} + e_{2i2}p_{\alpha})A_{4\alpha} \\ (e_{2k1} + e_{2k2}p_{\alpha})A_{k\alpha} & (-\kappa_{21} - \kappa_{22}p_{\alpha})A_{4\alpha} \end{bmatrix} \quad (13-4)$$

اگرچه گرادیان مواد تأثیری بر روی مربع ریشه‌های یکتایی یا تنش‌های یکتا و توزیع جابجایی الکتریکی ندارند، گرادیان مواد بر روی ضرایب شدت تنش و ضرایب شدت جابجایی الکتریکی تأثیر می‌گذارد. از این رو، پارامترهای شکست تابع گرادیان مواد، بارهای خارجی و هندسه می‌باشند.

۴-۴- انتگرال  $J$  (حالت دوبعدی)

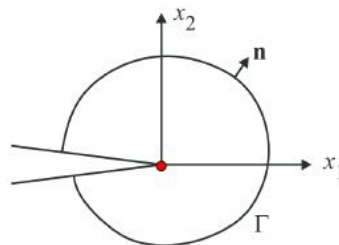
انتگرال  $J$  یکی از پارامترهایی است که در مکانیک شکست غیرخطی بسیار مورد توجه است. با فرض رفتار خطی ماده می‌توان انتگرال  $J$  را معادل نرخ رهائش انرژی در نظر گرفت.

## ۴-۴-۱- مواد پیزوالکتریک همگن

در فرم ابتدایی، انتگرال  $J$  بصورت انتگرال خطی روی کانتور و نرخ رهائش انرژی یک جسم دوبعدی محصور به این کانتور بحث شد. با استفاده از دستگاه مختصات محلی نوک ترک با محور  $x_1$  مماس به لبه ترک و محور  $x_2$  عمود بر آن، انتگرال  $J$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (Wn_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j) d\Gamma \quad (4-14)$$

که در آن،  $w$  چگالی انرژی کرنشی،  $\sigma$  تانسور تنش،  $\mathbf{n}$  بردار یکه و عمود رو به خارج کانتور و  $\mathbf{u}$  بردار تغییر مکان است (مطابق شکل (۴-۴)).



شکل (۴-۴) مختصات محلی نوک ترک و کانتور برای محاسبه انتگرال  $J$

ثابت می‌شود؛ انتگرال خطی (۴-۱۴) با برقراری شرایط زیر مستقل از مسیر است.

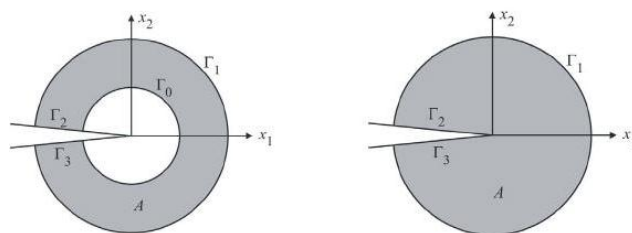
۱. نیروهای کالبدی به سطح محصور به کانتور اعمال نشود.
  ۲. سطوح ترک عاری از تنش باشد (نیروی سطحی به آنها وارد نشود).
  ۳. مواد ایزوتروپیک و رفتار الاستیک (خطی یا غیرخطی) داشته باشند.
- خاصیت استقلال از مسیر انتگرال  $J$  در حالت‌های وجود نیروهای کالبدی یا نیروهای سطحی ترک در صورتی حفظ می‌شود که عبارتهایی به رابطه (۴-۱۴) اضافه شود.

کاربرد اولیه انتگرال  $J$  در روش المان محدود، ارزیابی مستقیم رابطه (۴-۱۴) در طول کانتوری در شبکه ناحیه حل بود. معمولاً این کانتور طوری انتخاب می‌شد که از نقاط گوسی انتگرالگیری بگذرد. چون در این نقاط تنش‌ها بطور دقیق‌تری محاسبه می‌شوند. متأسفانه کاربرد فرم خطی انتگرال  $J$  در روش‌های عددی با خطا همراه است و بندرت خاصیت استقلال از مسیر را نشان می‌دهد. برای رفع این مشکل، فرآیندهایی اتخاذ می‌شود تا محاسبات عددی به مقادیر صحیح  $J$  نزدیک‌تر شود.

لی<sup>۱</sup> و همکارانش نشان دادند؛ چگونه می‌توان انتگرال خطی  $J$  را به یک انتگرال سطحی معادل<sup>۲</sup> تبدیل نمود [۲۷]. کاربرد فرم سطحی انتگرال  $J$  در روش المان محدود بسیار ساده‌تر و با نتایج دقیق‌تری همراه است. بنک‌سیلز<sup>۳</sup> ثابت کرد؛ این فرم انتگرال  $J$  نیز خاصیت استقلال از سطح را دارا می‌باشد [۲۸]. فرم سطحی انتگرال  $J$  بصورت زیر است.

$$\bar{J} = \int_A (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) \frac{\partial q_1}{\partial x_j} dA \quad (۱۵-۴)$$

که در آن  $\delta$ ، تابع دلتای کرونکر و  $q$ ، تابع وزنی است که روی سطح انتگرال‌گیری تعریف می‌شود. بطور فیزیکی تابع  $q$  را می‌توان به عنوان میدان تغییرمکان در اثرگسترش مجازی ترک در نظر گرفت. ناحیه انتگرال‌گیری به دو روش تعریف می‌شود. ناحیه دایره‌ای توخالی که ناحیه نوک ترک را احاطه کرده است (مطابق شکل (۴-۵) - چپ) و یا منقبض شدن کانتور داخلی تا نوک ترک (مطابق شکل (۴-۵) - راست).



شکل (۴-۵) نواحی انتگرالگیری برای محاسبه فرم سطحی انتگرال  $J$

<sup>۱</sup> Li

<sup>۲</sup> Equivalent Domain Integral- EDI

<sup>۳</sup> Bank-Sills

حالت دوم که المان‌های نوک ترک در انتگرال‌گیری بکار می‌رود؛ در برنامه‌های المان محدود بسیار پرکاربرد است. این دو حالت بطور مفهومی شبیه به شکل (۳-۴) هستند. ولی در اینجا هیچ تغییر مکان فیزیکی اعمال نمی‌شود. تابع  $q$  بوسیله مقادیر گرهی تعریف می‌شود و روی المان‌هایی که داخل ناحیه انتگرال‌گیری هستند؛ با استفاده از فرم استاندارد توابع شکل میانمایی می‌شود.

$$q = \sum_i N_i q_i \quad (۱۶-۴)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x_j} q_i \quad (۱۷-۴)$$

بقیه کمیت‌های معادله (۱۵-۴) در روش‌های عددی براحتی محاسبه می‌شوند. تابع  $q$  باید روی کانتور داخلی در شکل (۵-۴) -چپ یا در نوک ترک در شکل (۵-۴) -راست، دارای مقدار یک و روی کانتور خارجی ناحیه دارای مقدار صفر باشد. در فضای بین دو کانتور نیز بطور معمول یک تغییر خطی برای آن در نظر گرفته می‌شود. برای مثال، اگر ناحیه ارزیابی فقط المان‌های نوک ترک باشد و از المانهای  $1/4$  استفاده شده باشد؛ آنگاه باید مقادیر گرهی برای  $q$  در گره نوک ترک، یک و در گره‌های  $1/4$ ،  $0.75$  و در تمام گره‌های دیگر المان، صفر باشد.

اگر نیروهای سطحی به ترک وارد شود (تنش به سطوح ترک اعمال شود)؛ باید ترم‌های اضافی در عبارت انتگرال  $J$  در نظر گرفته شود. برای اعمال نیروهای سطحی ترک  $t_i$  (مطابق شکل (۵-۴) -چپ) داریم:

$$\bar{J} = \bar{J}_A + \bar{J}_T = \bar{J}_A + \int_{\Gamma_3 + \Gamma_2} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} q d\Gamma \quad (۱۸-۴)$$

که در آن  $\bar{J}_A$  با معادله (۱۵-۴) بیان شده است.

پس از بدست آوردن معادله‌ی ۱۸-۴ برای بدست آوردن ضرایب شدت، باید دو حالت برای تعادل مستقل اجسام ترک‌دار در نظر گرفته شود. ابتدا یک حالت واقعی برای شرایط مرزی داده شده فرض کرده و سپس برای حالت دوم، یک حالت کمکی که می‌تواند در نزدیکی نوک ترک میدان

الکترومکانیکی برای هریک از حالات بازشدگی شکست I، II، III و IV باشند، در نظر گرفته می‌شود. برآیند این دو حالت منجر به یک حالت تعادل (حالت S) می‌شوند.

$$J^{(s)} = \int \left( (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial(u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} + (D_j^{(1)} + D_j^{(2)}) \frac{\partial(\phi^{(1)} + \phi^{(2)})}{\partial x_1} - H^{(s)} \delta_{ij} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (19-4)$$

که در آن اندیس ۱ و ۲ و S میدان‌ها و کمیت‌های وابسته به حالت i را نشان می‌دهد. همچنین داریم:

$$H^s = ((\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)})(\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) - (D_j^{(1)} + D_j^{(2)})(E_j^{(1)} + E_j^{(2)}))/2 \quad (20-4)$$

با بسط معادله ۱۹-۴ خواهیم داشت:

$$J^{(s)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \quad (21-4)$$

که:

$$J^{(1)} = \int (\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} + D_j^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_1} - H^{(1)} \delta_{ij}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (22-4)$$

و

$$J^{(2)} = \int (\sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + D_j^{(2)} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_1} - H^{(2)} \delta_{ij}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (23-4)$$

انتگرال J الکترومکانیکی به ترتیب برای حالت ۱ و ۲ می‌باشند. از بر هم کنش این دو حالت

انتگرال برهم کنش زیر بدست می‌آید که یک انتگرال مستقل است.

$$M^{(1,2)} = \int (\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + D_j^{(1)} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} + D_j^{(2)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_1} - H^{(1,2)} \delta_{ij}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (24-4)$$

در معادله‌های ۲۲-۴ تا ۲۴-۴،  $H^{(1)} = (\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} - D_j^{(1)} E_j^{(1)})/2$ ،  $H^{(2)} = (\sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} - D_j^{(2)} E_j^{(2)})/2$ ،

$H^{(1,2)} = (\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} - D_j^{(1)} E_j^{(2)} - D_j^{(2)} E_j^{(1)})/2$  متغیر دانسیته آنتالپی الکتریکی را نمایش

می‌دهد و معادله ۲۵-۴ را ارضا می‌کند.

$$H^{(s)} = H^{(1)} + H^{(2)} + H^{(1,2)} \quad (25-4)$$

برای مواد پیزوالکتریک خطی تحت شرایط بارگذاری حالت ترکیبی، انتگرال J الکترومکانیکی

تقریباً مساوی با نرخ انرژی آزاد شده بوده و از این رو انتگرال  $J$  الکترومکانیکی به صورت زیر محاسبه می‌شود (کونا ۲۰۰۶).

$$J = \frac{1}{2} K^T Y K \quad (۲۶-۴)$$

که در آن  $K = \{K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV}\}$  بردار چهار میدان ضریب شدت است و  $Y$  ماتریس اروین عمومی  $(4 \times 4)$  است که وابسته به الاستیک، پیزوالکتریک و ثابت‌های الکتریکی مواد داده شده است که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$Y_{MN} = -\text{Im}\{A_{M\alpha} N_{\alpha N}\} \quad (۲۷-۴)$$

لازم به ذکر است که ماتریس اروین  $Y$  که از رابطه بالا بدست می‌آید، پس از بررسی و بدست آوردن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه و بدست آوردن ماتریس  $N$  محاسبه می‌گردد که بدین منظور برای بررسی صحت کد نوشته شده، از مقاله کونا (۲۰۰۹) و استفاده از خواص مواد مشابه در این مقاله، پی به صحت آن برده و همانگونه که در مقاله کونا آمده است، ثابت‌های ماتریس اروین بدست آمد. در این مقاله ماتریس اروین برای ماده PZT-5H بدست آمده است.

در جدول (۱-۴)، مقادیر بدست آمده برای ماتریس اروین در مرجع [۳۱] با مقادیر بدست آمده برای ماتریس اروین برای کد نوشته شده مقایسه گردیده است.

جدول (۱-۴) مقایسه ماتریس اروین در مرجع [۳۱] با کد نوشته شده

	$Y_{22} (m^2/N)$	$Y_{24} = Y_{42} (m^2/N)$	$Y_{44} (m^2/N)$
کد نوشته شده	$1.6065537 \times 10^{-11}$	$1.277529 \times 10^{-2}$	$-4.577935 \times 10^7$
مرجع [۲۹]	$1.607 \times 10^{-11}$	$1.278 \times 10^{-2}$	$-4.578 \times 10^7$

همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر حاصل از کد نوشته شده مشابه مقادیر مرجع بوده و صحت کد نوشته شده را تأیید می‌کند. پس از صحت کد، ماتریس اروین برای چند ماده دیگر آورده شد که خود می‌تواند مرجعی برای سایر مواد باشد. حال برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش برای حالت



دوبعدی، سه حالت در نظر گرفته می‌شود. حالت اول  $K_I = 1$ ،  $K_{II} = 0$  و  $K_{IV} = 0$ ، حالت دوم  $K_I = 0$ ،  $K_{II} = 1$  و  $K_{IV} = 0$  و حالت سوم  $K_I = 0$ ،  $K_{II} = 0$  و  $K_{IV} = 1$  می‌باشد و سپس سه مقدار انتگرال  $J$  را بدست آورده و در معادله ۴-۲۴ گذاشته و مقادیر ضرایب شدت بدست می‌آیند [۲۳].

$$\begin{pmatrix} M^{(1,II)} \\ M^{(1,I)} \\ M^{(1,IV)} \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} K_{II}^{(1)} \\ K_I^{(1)} \\ K_{IV}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (۲۸-۴)$$

پس از توضیح روند محاسبه ضرایب شدت با استفاده از روش انتگرال  $J$  برای مواد پیزوالکتریک همگن به توضیح حل مسئله پیزوالکتریک غیرهمگن با استفاده از روش انتگرال  $J$  پرداخته شده است.

#### ۴-۴-۲ مواد پیزوالکتریک غیرهمگن

در ادامه برای تبدیل صفحه‌ی پیزوالکتریک به صفحه‌ی پیزوالکتریک غیرهمگن بایستی یک تابع نوشته شود که شرایط مواد تابعی را به ماده‌ی مورد نظر اعمال کند. با توجه به مقالات نوشته شده و تحقیقات انجام شده در این زمینه، معمولاً توابع نمایی در جهت تابعی نمودن مواد به کار می‌رود [۳]. بر این اساس ماتریس‌های سه گانه خواص پیزوالکتریک که در مورد آن صحبت گردید، در عدد  $e^{\beta x}$  ضرب گردیده است. در اینجا  $X$  برای هر گره متفاوت است، بدین صورت که بر اساس فاصله هر گره از محور عمودی، مقدار  $X$  تغییر می‌کند. مقدار  $X$  از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$X = \frac{x - X_0}{X_L - X_0} \quad (۲۹-۴)$$

$x$  در اینجا فاصله‌ی گره از محور عمودی مختصات بوده و  $X_0$  کمترین مقدار افقی و  $X_L$  بیشترین مقدار آن می‌باشد.

حال ماتریس‌های خواص به صورت نمایی به حالت مواد تابعی درآمده‌اند. بنابراین داریم:

$$[C] = [C_0]e^{\beta x} \quad (۳۰-۴)$$

$$[e] = [e_0]e^{\beta x} \quad (۳۱-۴)$$

$$[\kappa] = [\kappa_0]e^{\beta x} \quad (32-4)$$

همانگونه که می‌دانیم ماتریس‌های  $[C_0]$ ،  $[e_0]$  و  $[\kappa_0]$  به ترتیب ماتریس‌های الاستیک، دی‌الکتریک و پیزوالکتریک برای ماده پایه می‌باشند.

برای بدست آوردن ضرایب شدت در مواد پیزوالکتریک غیرهمگن علاوه بر تغییر در خواص مواد، تغییراتی در قسمت حل مسئله با استفاده از روش انتگرال برهم کنش اعمال می‌شود. برای این منظور، چند جمله‌ی دیگر به رابطه‌ی (۴-۲۵) اضافه می‌شود که در زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \bar{M}^{(1,2)} = & \int (\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + D_j^{(1)} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} + D_j^{(2)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_1} - H^{(1,2)} \delta_{ij}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \\ & + \int \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_j^{(2)}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_1} - \varepsilon_{ij}^{(1)} \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_1} \varepsilon_{kl}^{(2)} \right. \\ & \left. + \left( E_n^{(1)} \frac{\partial e_{nkl}}{\partial x_1} \varepsilon_{kl}^{(2)} + E_n^{(2)} \frac{\partial e_{nkl}}{\partial x_1} \varepsilon_{kl}^{(1)} \right) + E_n^{(1)} \frac{\partial \kappa_{nm}}{\partial x_1} E_m^{(2)} \right) q dA \end{aligned} \quad (33-4)$$

پارامترهای اضافه برای مواد پیزوالکتریک تابعی از مرجع [۱۳] استخراج شده است. برای محاسبه‌ی

مقادیر پارامترهای اضافه برای مواد تابعی داریم:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} = \beta \sigma_{ij}^{(2)} \delta_{1j} \quad (34-4)$$

$$\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_1} = \beta C_{ijkl}(x_1) \quad (35-4)$$

$$\frac{\partial e_{nkl}}{\partial x_1} = \beta e_{nkl}(x_1) \quad (36-4)$$

$$\frac{\partial \kappa_{nm}}{\partial x_1} = \beta \kappa_{nm}(x_1) \quad (37-4)$$

$$\frac{\partial D_j^{(2)}}{\partial x_j} = \beta \sigma_j^{(2)} \delta_{1j} \quad (38-4)$$

#### ۴-۵- روش انجام پروژه

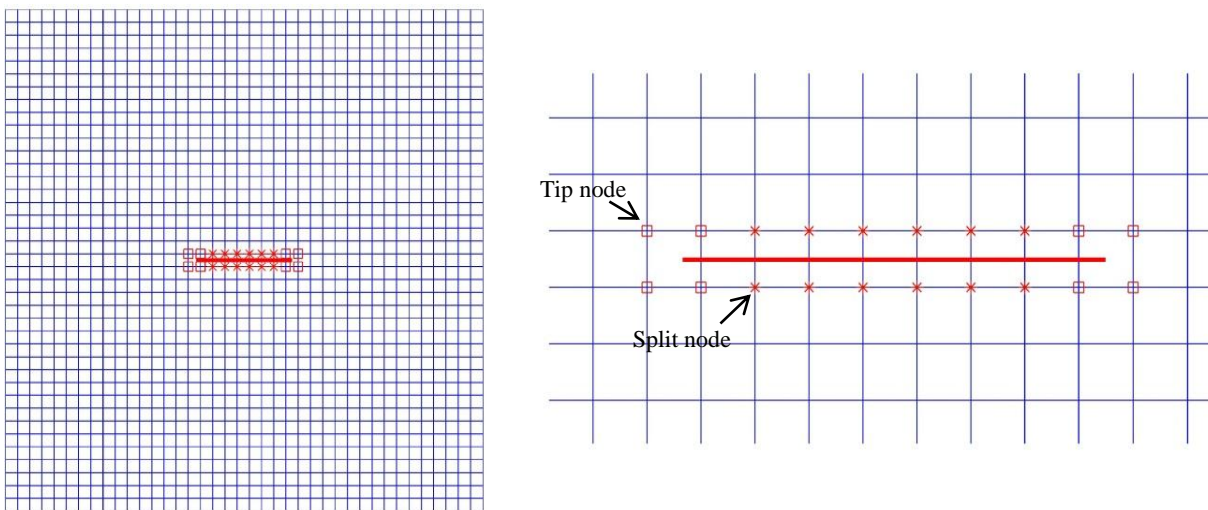
کد نوشته شده در برنامه Matlab از چندین زیر برنامه و یک برنامه اصلی تشکیل گردیده است.

برنامه نوشته شده را می‌توان به سه قسمت پیش پردازش، حل مسئله و پس پردازش تقسیم نمود.

## ۴-۵-۱- پیش پردازش

ابتدا ورودی‌های مسئله نظیر ابعاد، تعداد گره‌ها، خواص مواد و ... در یک زیر برنامه قرار داده شده است. در ادامه به کمک یک زیر برنامه، گره‌ها بر روی سطح مورد نظر پخش گردیده است. گره‌ها می‌تواند منظم و یا به صورت نامنظم (با توجه به شرایط مسئله) توزیع شود. در این مسائل گره‌ها منظم و با فواصل ثابت در نظر گرفته شده است. ت

با استفاده از روش Level set نواحی دارای ناپیوستگی ترک بدست می‌آیند. در این روش المان‌ها و گره‌های اطراف ترک تعیین و همچنین نوع آنها مشخص می‌شود (شکل (۴-۶)). سپس طی یک زیر برنامه برای گره‌های پخش شده در سطح، سلول‌های انتگرال گیری تعریف شده و موقعیت نقاط گوسی مشخص می‌شود. همچنین خواص این نقاط نظیر وزن و ژاکوبین برای هر یک محاسبه شده است.



شکل (۴-۶) شبکه بندی صفحه و انتخاب المان‌ها و گره‌های اطراف ترک و تعیین نوع آنها

پس از این مرحله تابع وزن هر گره نیز بررسی گردیده و در نهایت در یک زیر برنامه مقدار تابع شکل هر گره بر اساس روابط موجود بدست آمده است. لازم به ذکر است که تابع شکل ماده پیزوالکتریک از مرجع [۳۳] استخراج شده است که به صورت رابطه‌ی (۴-۳۹) است.

$$B_i^S = \begin{bmatrix} S_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{i,y} & 0 \\ \tilde{S}_{i,y} & \tilde{S}_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}_{i,x} \\ 0 & 0 & \tilde{S}_{i,y} \end{bmatrix} \quad (4-39)$$

با بدست آمدن توابع شکل مرحله پیش پردازش تقریباً به اتمام می‌رسد.

#### ۴-۵-۲- حل مسئله

سپس در برنامه اصلی-که با برنامه نویسی Matlab نوشته شده است- مرحله گسسته سازی معادلات و ساخت ماتریس‌های سفتی انجام می‌شود. با استفاده از حلقه‌های تکرار بر روی تک تک سلول‌ها مقادیر ماتریس سفتی جزء برای هر گره به دست آمده است.

در واقع تا اینجا توانسته‌ایم توابع شکل جزئی را برای هر گره به دست آوریم، این توابع را ماتریس سفتی جزء هر گره نیز می‌توان نامید. در ادامه به مانند روش‌های المان محدود بایستی ماتریس‌های سفتی جزء را با یکدیگر ترکیب کرده و ماتریس سفتی کل را بدست آورد.

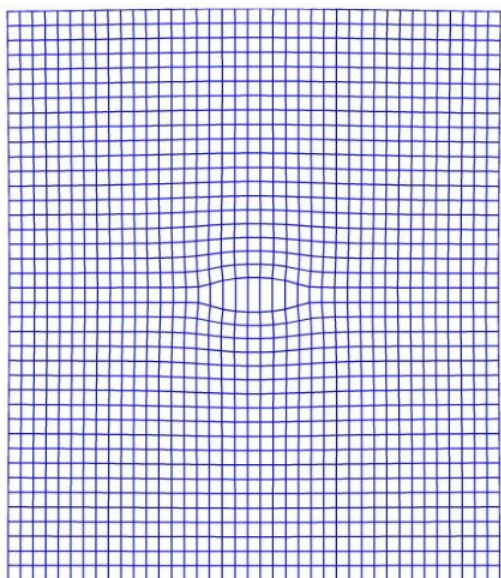
بنابراین عملیات مونتاژ ماتریس سفتی نهایی در برنامه اصلی انجام می‌شود. با ساخت ماتریس سفتی نهایی که با  $[K]$  نمایش داده می‌شود، بخش مهمی از مسیر برنامه طی گردیده است. حال بایستی ماتریس  $[F]$  که نماینده نیروهای مرزی می‌باشد را تشکیل دهیم. برای انجام این کار نوشتن دو زیر برنامه ضروری می‌باشد. طی زیر برنامه اول گره‌های محل اعمال نیرو و میزان نیرو مشخص شده و ماتریس ستونی نیرو بر اساس روابط پیش گفته شده تشکیل گردیده است. در ادامه تحت زیر برنامه دوم جهت اعمال شرط اساسی مرزی (اعمال قیدهای  $U_X$  و  $U_Y$ ) تغییرات در ماتریس سفتی و بردار ستونی نیرو اعمال گردیده است [۳۴].

سپس به کمک دستور `linsolve` معادله  $[K]\{U\} = \{F\}$  حل شده و مقادیر جابجایی به دست آمده

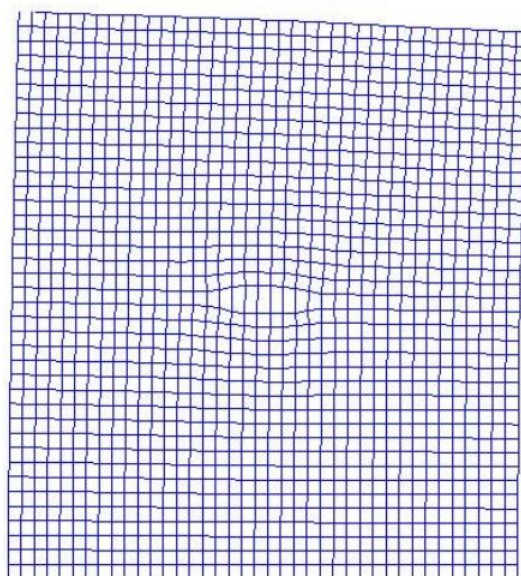
است. در اینجا قسمت دوم برنامه نیز به پایان می‌رسد.

## ۴-۵-۳- پس پردازش

با مشخص شدن مقادیر جابجایی در تمامی گره‌ها، طی یک زیر برنامه پس پردازش مسئله شامل مقادیر تنش و کرنش برای هر کدام از گره‌ها محاسبه گردیده است و پس از آن ضرایب شدت بدست می‌آید. در شکل (۷-۴)، صفحه تغییرشکل یافته برای ماده پیزوالکتریک همگن و غیرهمگن نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که تغییرشکل صفحه‌ی پیزوالکتریک همگن نسبت به خط عمود، به صورت متقارن است؛ اما تغییرشکل صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن نامتقارن می‌باشد. در ادامه فلوچارت حل مسئله با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته آورده شده است.



(الف)



(ب)

شکل (۷-۴) تغییر شکل صفحه پیزوالکتریک، الف) همگن، ب) غیرهمگن



شکل (۸-۴) فلوچارت برنامه

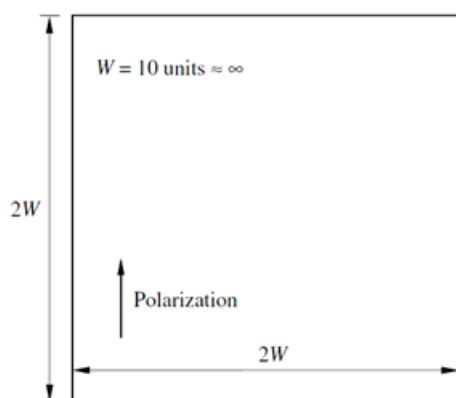
## فصل ۵

## نتایج

## ۵-۱- بررسی درستی نتایج

### ۵-۱-۱- صفحه بدون ترک پیزوالکتریک همگن

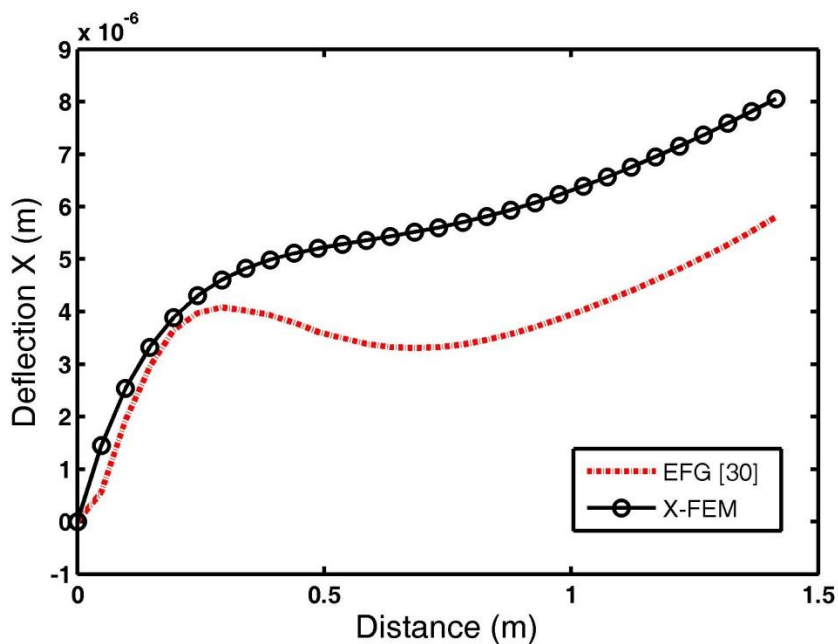
در این قسمت، جابجایی‌های صفحه ساده پیزوالکتریک همگن با نتایج جابجایی در مرجع [۳۰] مقایسه شده است. مطابق مرجع [۳۰]، خواص نمونه PZT-5H و ابعاد نمونه  $2W=1$  انتخاب شده است (شکل ۵-۱). شرایط مرزی صفحه مورد نظر به صورتی است که در لبه بالایی مقدار تنش به آن وارد شده و در لبه سمت راست به میزان دو واحد شارالکتریکی به آن اعمال شده است. در حالیکه گره‌های لبه پایینی در راستای Y مقید شده و گره‌های لبه سمت چپ دارای پتانسیل مقدار واحد می‌باشند.



شکل (۵-۱) صفحه پیزوالکتریک بدون ترک

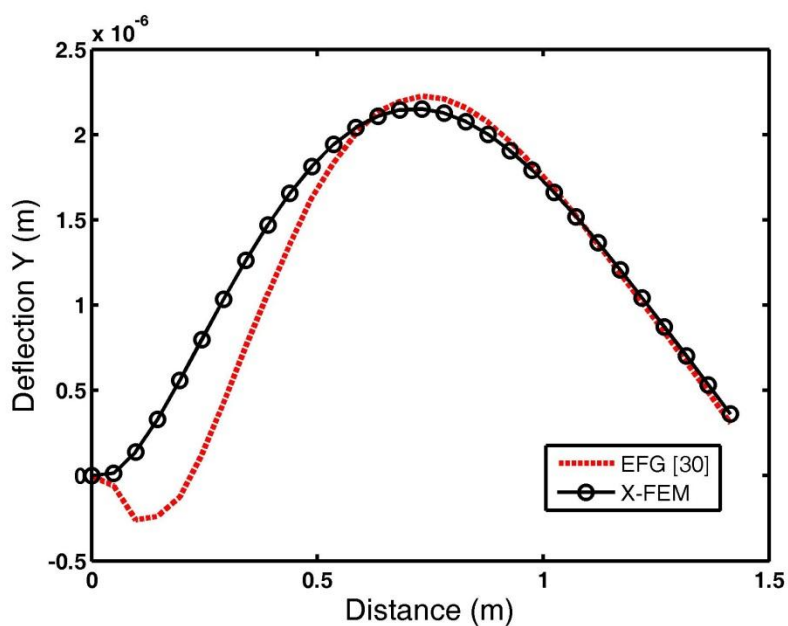
در شکل‌های (۲-۵)، (۳-۵) و (۴-۵)، به ترتیب جابجایی در جهت X و Y و پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی صفحه با نتایج در مرجع [۳۰]، مقایسه شده است. در مرجع [۳۰]، جابجایی‌ها به روش بدون المان گالرکین بدست آمده است که با نتایج در این تحقیق که از روش اجزای محدود توسعه یافته استخراج شده است، مقایسه شده است. لازم به ذکر است برای کد نوشته شده همانند مرجع [۳۰] در هر راستا ۳۰ گره در نظر گرفته و تعداد المان‌ها ۸۴۱ عدد فرض شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در جابجایی‌ها اختلافاتی دیده می‌شود که ناشی از اعمال شرایط مرزی در دو روش و همچنین ناشی از توابع غنی‌ساز می‌باشد.





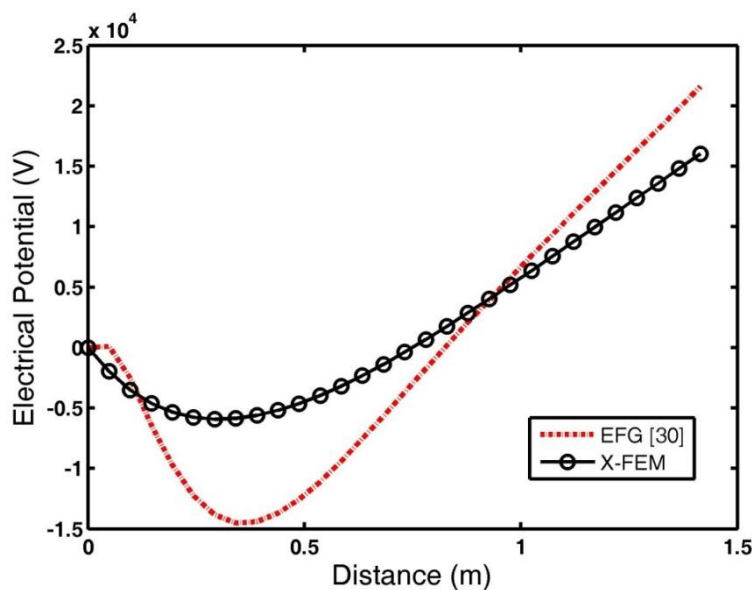
شکل (۲-۵) جابجایی در جهت X بر روی قطر اصلی صفحه ساده پیزوالکتریک همگن با روش بدون

المان گالرکین و روش اجزای محدود توسعه یافته



شکل (۳-۵) جابجایی در جهت Y بر روی قطر اصلی صفحه ساده پیزوالکتریک همگن با روش

بدون المان گالرکین و روش اجزای محدود توسعه یافته



شکل (۴-۵) پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی صفحه ساده پیزوالکتریک همگن با روش بدون

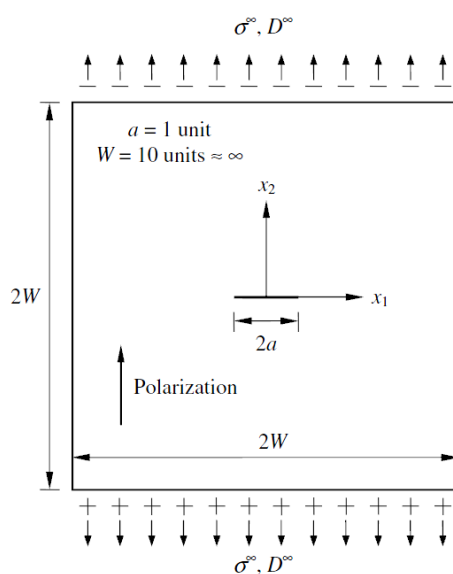
المان گالرکین و روش اجزای محدود توسعه یافته

### ۵-۱-۲- بررسی همگرایی المان محدود توسعه یافته

پس از بررسی کد نوشته شده برای صفحه بدون ترک، کد برای صفحه پیزوالکتریک ترک‌دار توسعه

یافته است. در ابتدا برای درستی از صحت کد همگرایی کد نوشته شده بررسی می‌گردد. برای این

منظور صفحه مربعی حاوی یک ترک مرکزی مطابق شکل (۵-۵) در نظر گرفته می‌شود.



شکل (۵-۵) صفحه پیزوالکتریک با ترک داخلی تحت بار مکانیکی و الکتریکی

ابعاد نمونه و شرایط مرزی مطابق مرجع [۳۵] در نظر گرفته شده است. برای این منظور یک صفحه دوبعدی با طول و عرض مشابه،  $2W=10$ ، طول ترک  $2a=2$  و بارگذاری به صورت مکانیکی و الکتریکی بصورت زیر اعمال می شود:

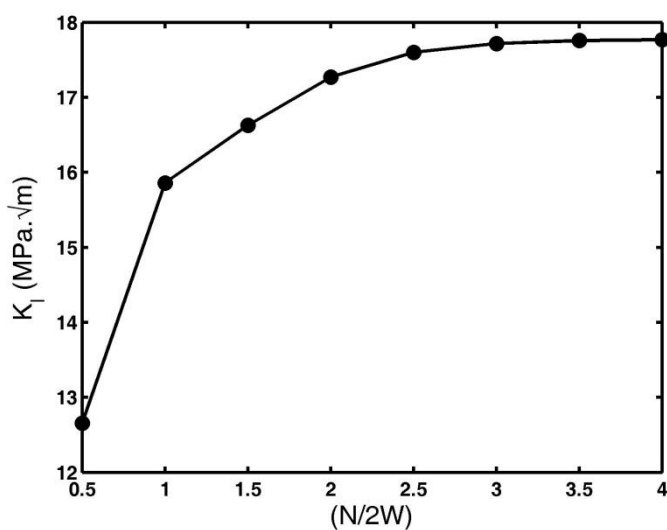
$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{\infty} &= 1 \text{ MPa} & D_y^{\infty} &= 10^{-3} \text{ C/m}^2 \\ \sigma_{xx}^{\infty} &= 0 & D_x^{\infty} &= 0 \\ \sigma_{xy}^{\infty} &= 0\end{aligned}$$

همچنین خواص مواد به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}c_{11} &= 14.02 \text{ GPa} & c_{12} &= 7.892 \text{ GPa} \\ c_{33} &= 11.58 \text{ GPa} & c_{13} &= 7.565 \text{ GPa} \\ c_{44} &= 2.527 \text{ GPa} \\ e_{15} &= 12.0 \text{ N/GVm} \\ e_{31} &= -5.268 \text{ N/GVm} \\ e_{33} &= 15.44 \text{ N/GVm} \\ \kappa_{11} &= 6.368 \text{ N/(GV)}^2 \\ \kappa_{33} &= 5.523 \text{ N/(GV)}^2\end{aligned}$$

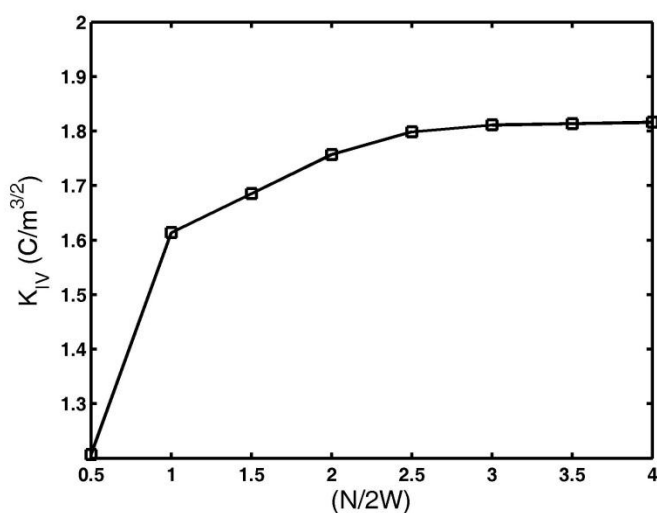
برای بررسی همگرایی، نسبت تعداد مش به عرض صفحه تغییر داده شده است. بدین این منظور N تعداد مش در عرض صفحه در نظر گرفته می شود.

همانطور که در شکل های ۵-۶ و ۵-۷ مشاهده می شود در ابتدا ضرایب شدت تنش با واقعیت تفاوت زیادی داشته اما با افزایش نسبت مش بندی ضریب شدت تنش مکانیکی و ضریب شدت جابجایی الکتریکی به واقعیت نزدیک می شود. همچنین مشاهده می شود با افزایش نسبت مش بندی ضرایب شدت همگرا می گردد. همگرایی ضرایب نشان دهنده صحت کد نوشته شده می باشد. با توجه به نتایج این قسمت تعداد مش با نسبت ۲/۵ در نظر گرفته می شود.



شکل (۵-۶) ضریب شدت تنش مکانیکی  $K_I$  در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی با

مش بندی متفاوت



شکل (۵-۷) ضریب شدت جابجایی الکتریکی  $K_{IV}$  در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی با

مش بندی متفاوت

### ۵-۱-۳- ترک داخلی در صفحه پیزوالکتریک همگن

یک صفحه مربعی حاوی یک ترک مرکزی مطابق شکل (۵-۵) در نظر گرفته می‌شود. جهت قطبی شدن صفحه بر محور عمود منطبق است.

برای اطمینان از صحت کد نوشته شده، نتایج آن با نتایج گزارش شده در مرجع [۳۵] و معادلات

(۱۷-۳) تا (۲۰-۳) مقایسه می‌شود. ابعاد نمونه و شرایط مرزی مشابه حالت قبل در نظر گرفته می‌شود.

در جدول (۱-۵)، نتایج حاصل از ضرایب شدت نمونه ترک‌دار با ترک داخلی با شرایط مرزی فوق با استفاده از دو روش انتگرال برهم کنش و روش انطباق نقطه‌ای و نتایج مرجع [۳۵] و همچنین نتایج تحلیلی از معادلات ۱۷-۳ و ۱۸-۳ نشان داده شده است. لازم به ذکر است در حل تحلیلی ابعاد صفحه بی‌نهایت فرض شده است.

جدول (۱-۵) نتایج حاصل از ضرایب شدت صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک داخلی تحت بارگذاری مرکب (واحدها در SI)

	مقاله [۳۵]	انتگرال برهم کنش	انطباق نقطه‌ای	تحلیلی [۲۳]
$K_I$	$1.772454 \times 10^7$	$1.776599 \times 10^7$	$1.452388 \times 10^7$	$1.815845 \times 10^7$
$K_{IV}$	$1.772454 \times 10^{-3}$	$1.8159979 \times 10^{-3}$	$1.023977 \times 10^{-3}$	$1.815845 \times 10^{-3}$

در جدول (۲-۵)، خطای حاصل از مقایسه نتایج ضرایب شدت با استفاده از روش انتگرال  $J$  و انطباق نقطه‌ای برای کد نوشته شده با نتایج تحلیلی نشان داده شده است. خطای روش انتگرال  $J$  کمتر از روش انطباق نقطه‌ای است.

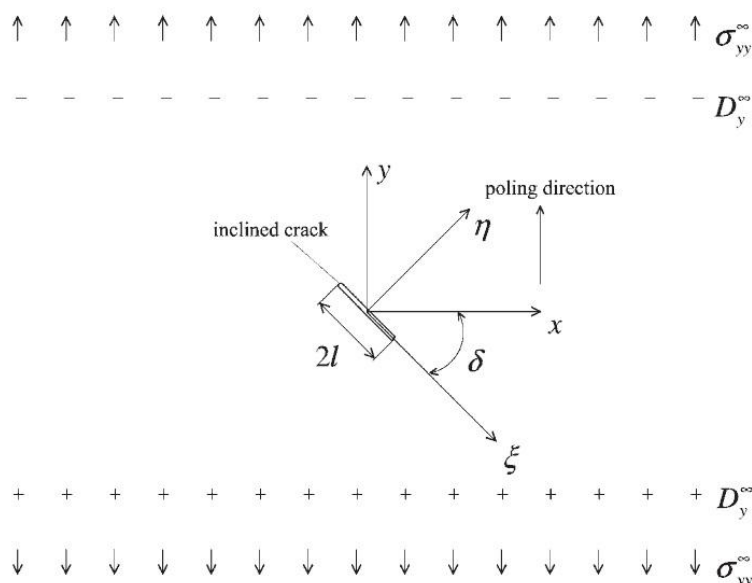
جدول (۲-۵) خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت روش انتگرال  $J$  و انطباق نقطه‌ای با نتایج تحلیلی در صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک داخلی تحت بارگذاری مرکب

	خطای روش انتگرال $J$ (%)	خطای روش انطباق نقطه‌ای (%)
$K_I$	2.3144	3.0159
$K_{IV}$	2.9655	4.6089

#### ۵-۱-۴ - ترک داخلی زاویه دار در صفحه پیزوالکتریک

در بررسی ترک مایل در صفحه‌ی پیزوالکتریک همگن در شکل (۵-۸)، خواص نمونه PZT-5H و ابعاد نمونه  $2W=10$  و  $2a=2$  مشابه مرجع [۳۲] می‌باشد. با تغییر در کد نوشته شده و همچنین اعمال اثر زاویه در خواص ماده با توجه به مرجع [۳۲]، نتایج حاصل از دو روش انطباق نقطه‌ای و انتگرال  $J$  در

زاویه‌ی ترک  $\delta = 0.1\pi$  با نتایج مرجع [۳۲] در جدول (۳-۵) مقایسه شده است.



شکل (۵-۸) صفحه پیزوالکتریک با ترک مایل تحت بارگذاری مرکب

جدول (۳-۵) مقایسه نتایج حاصل از ضرایب شدت  $K_I$ ،  $K_{II}$  و  $K_{IV}$  در صفحه پیزوالکتریک همگن با دو روش EDI و DCT

با مرجع [۳۲]

	$\frac{K_I}{\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{l} \cos \delta^2}$	$\frac{K_{II}}{\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{l} \cos \delta \sin \delta}$	$\frac{K_{IV}}{D_y^{\infty} \sqrt{l} \cos \delta}$
مرجع [۳۲]	1.603199	-0.5209111	1.685704
EDI	1.61480645	-0.48693201	1.6907079
DCT	1.5688472	-0.43602579	1.6531578

### ۵-۱-۵- ترک داخلی در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن

در این قسمت نمونه ترک‌دار با ترک داخلی مطابق شکل (۵-۵) مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای

اطمینان از صحت کد، نتایج کد نوشته شده با نتایج ضرایب شدت در مرجع [۳] مقایسه گردیده است.

مطابق مرجع [۳] یک صفحه دوبعدی با طول و عرض مشابه،  $2W=10$  و اندازه طول ترک  $2a=2$

در نظر گرفته و خواص مواد به صورت زیر می‌باشد.

$$c_{11} = 12.6 \times 10^{10} \text{Pa}$$

$$c_{22} = 11.7 \times 10^{10} \text{Pa}$$

$$c_{12} = 5.3 \times 10^{10} \text{Pa}$$

$$\begin{aligned}
 c_{13} &= 5.5 \times 10^{10} \text{Pa} & c_{44} &= 3.53 \times 10^{10} \text{Pa} \\
 e_{21} &= -6.5 \times 10^9 \text{N/GVm} & e_{22} &= 23.3 \times 10^9 \text{N/GVm} & e_{16} &= 17 \times 10^9 \text{N/GVm} \\
 \kappa_{11} &= 15.1 \times 10^9 \text{N/(GV)}^2 & \kappa_{22} &= 13 \times 10^9 \text{N/(GV)}^2 \\
 [C] &= [C_0]e^{\beta x} \\
 [e] &= [e_0]e^{\beta x} \\
 [k] &= [k_0]e^{\beta x}
 \end{aligned}$$

در این حالت بارگذاری به صورت مرکب می‌باشد و در جدول (۴-۵) ضرایب شدت بدست آمده با

نتایج مرجع [۳] مقایسه شده است. مقدار  $\beta = 0.5$  فرض شده است.

جدول (۴-۵) نتایج حاصل از ضرایب شدت صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک داخلی تحت بارگذاری مرکب

	مرجع [۳]	انتگرال برهم کنش	انطباق نقطه‌ای
$\frac{K_I}{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}$	1.582647	1.3762	1.2778
$\frac{K_{IV}}{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}$	0.545325	0.6749	0.5498

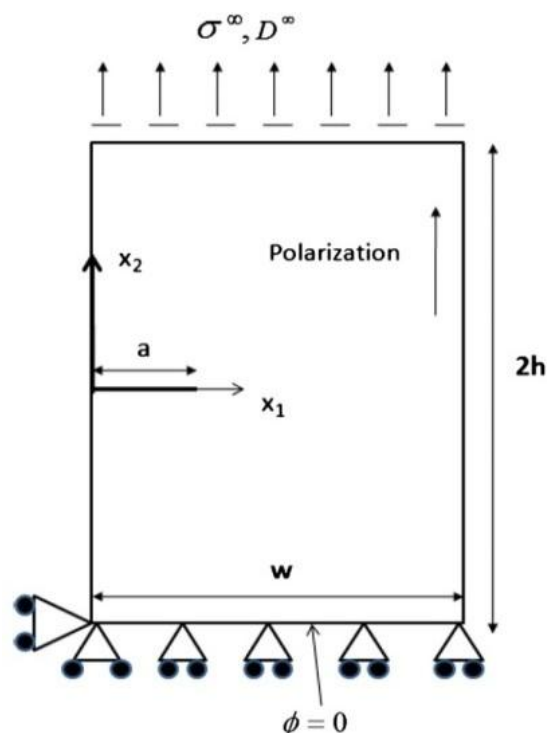
#### ۵-۱-۶- صفحه پیزوالکتریک همگن حاوی ترک لبه‌ای

در این بخش، نمونه ترک‌دار با ترک لبه‌ای مطابق شکل (۵-۹) مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشابه

مرجع [۲۳] طول صفحه برابر  $L = 4$ ، عرض صفحه  $W = 2$ ، طول ترک  $a = 0.4$  و بارگذاری به

صورت مرکب فرض می‌شود بطوریکه شامل بار مکانیکی  $\sigma = 10^7 \text{Pa}$  و بار الکتریکی  $D = 10^{-3} \text{C/m}^2$

است. تعداد شبکه مطابق مرجع [۲۳]،  $20 \times 40$  از المان‌های ۴ گره‌ای در نظر گرفته شده است.



شکل (۵-۹) صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای تحت بار مکانیکی و الکتریکی

در جدول (۵-۵)، نتایج حاصل از ضرایب شدت نمونه ترک‌دار با ترک لبه‌ای با شرایط فوق با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته حاضر، روش المان محدود (مرجع [۲۳]) و نتایج تحلیلی آورده شده است. همچنین در این جدول خطای نتایج حاصل از ضرایب شدت در مرجع [۲۳] و کد نوشته شده با نتایج تحلیلی بررسی گردیده است و نتایج بدست آمده برای  $K_{IV}$  نیز مانند مرجع [۲۳] خطای قابل توجهی دارد که می‌تواند ناشی از کاربرد توابع غنی‌سازی مواد همسانگرد باشد.

جدول (۵-۵) خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت برای کد نوشته شده با نتایج تحلیلی در صفحه پیزوالکتریک همگن با

ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مرکب

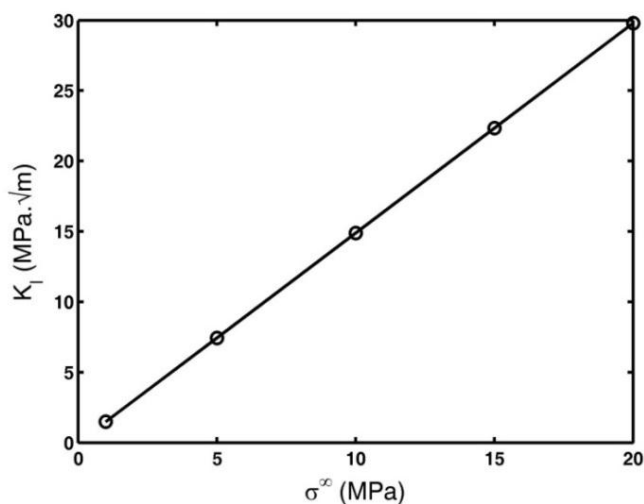
	تحلیلی	مرجع [۲۲]	کد نوشته شده	خطای مرجع [۲۲] (%)	خطای کد نوشته شده (%)
$K_I$	0.9999	0.9871	0.9788	1.29	2.1229
$K_{IV}$	0.9999	1.4293	1.4394	42.93	43.9383



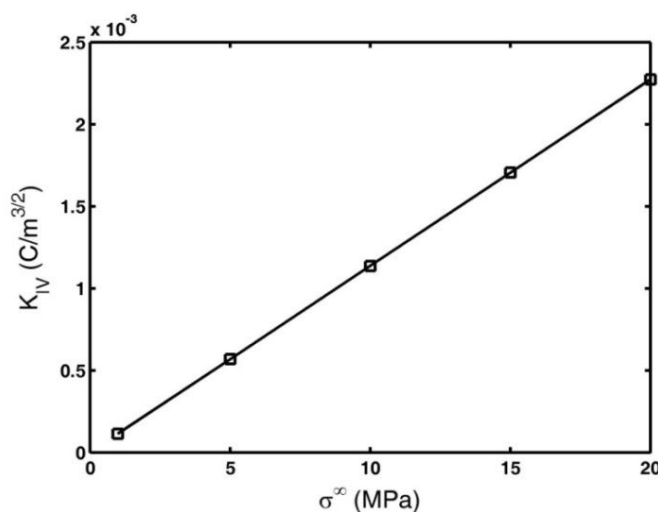
## ۵-۲- نتایج

## ۵-۲-۱- ترک لبه‌ای در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مکانیکی

در این قسمت صفحه دوبعدی پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای فقط تحت بارگذاری مکانیکی مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت از خواص ماده PZT-5H استفاده گردید. همچنین طول و عرض صفحه  $L=4$ ،  $W=2$  و طول ترک  $a=0.4$  فرض گردید. همانطور که در شکل (۵-۱۰ الف)) مشاهده می‌شود بر اثر افزایش مقدار تنش دوردست در صفحه پیزوالکتریک مقدار ضریب شدت تنش  $K_I$  افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌گردد بر اثر افزایش تنش مقدار  $K_{IV}$  (ضریب شدت الکتریکی) هم افزایش می‌یابد (شکل (۵-۱۰ ب)) و این نشان دهنده آنست که در صفحه‌ی پیزوالکتریک افزایش تنها تنش مکانیکی بر روی جابجایی الکتریکی هم اثر گذاشته و باعث افزایش آن می‌شود.



(الف)



(ب)

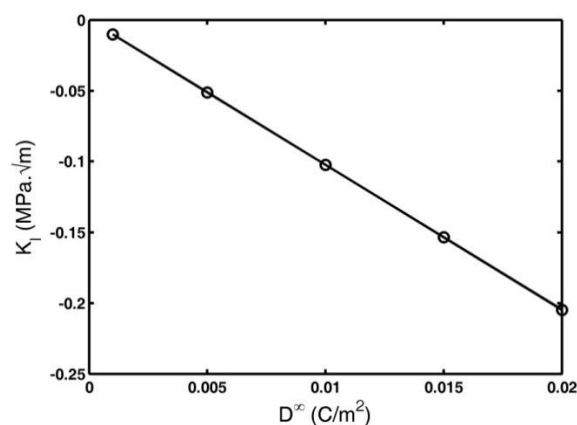
شکل (۵-۱۰) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دور دست، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب

تنش دور دست، در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه ای تحت بارگذاری مکانیکی

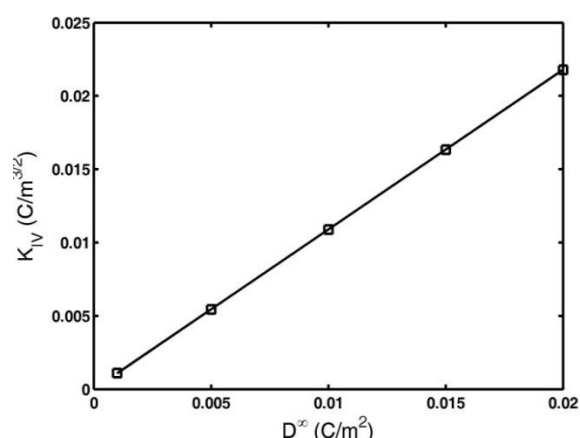
### ۵-۲-۲- ترک لبه ای در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری الکتریکی

در این قسمت صفحه دوبعدی پیزوالکتریک با ترک لبه ای فقط تحت بارگذاری الکتریکی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این حالت از شرایط مرزی و ابعاد حالت قبل استفاده شده است. همانطور که از شکل (۵-۱۱) الف) مشاهده می شود، بر اثر افزایش مقدار جابجایی الکتریکی ( $D^\infty$ )، مقدار ضریب

شدت تنش  $K_I$  از لحاظ مقداری در حال افزایش است و همچنین به طور طبیعی مشاهده می‌شود که مقدار ضریب شدت الکتریکی افزایش می‌یابد (شکل ۵-۱۱ (ب)). از نتایج این قسمت مشاهده می‌شود که افزایش جابجایی الکتریکی نه تنها بر روی ضریب شدت الکتریکی، بلکه بر روی ضریب شدت تنش هم اثر گذاشته و باعث افزایش آن می‌گردد.



(الف)



(ب)

شکل (۵-۱۱) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دوردست، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب

تنش دوردست، در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه ای تحت بارگذاری الکتریکی

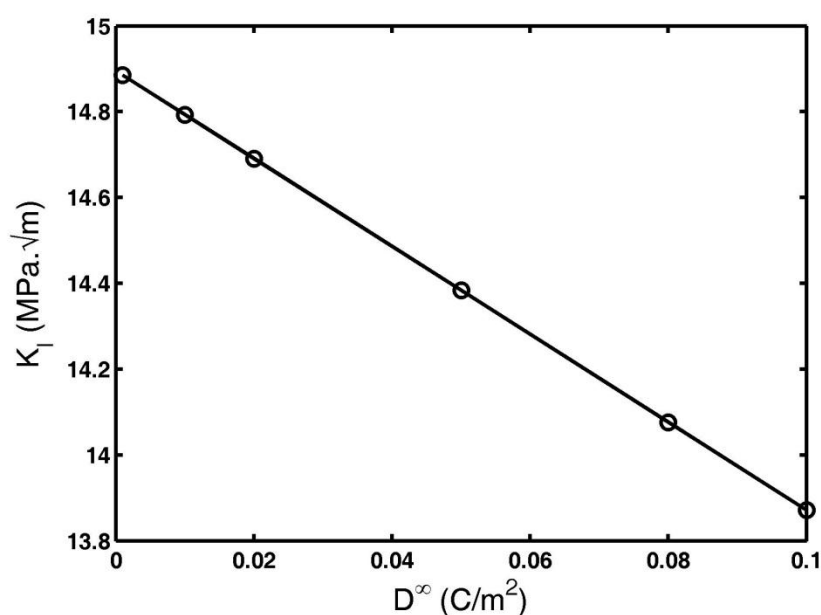
### ۵-۲-۳- ترک لبه‌ای در صفحات پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب

در این قسمت صفحه‌ی پیزوالکتریک با مشخصات حالت‌های قبل فرض شده و دو حالت برای آن در نظر گرفته شده است.

## الف) بار مکانیکی ثابت

برای این منظور در کد نوشته شده، مقدار تنش دوردست را برابر 10 MPa ( $\sigma^\infty = 10 \text{ MPa}$ ) و بارهای الکتریکی مختلفی به صفحه وارد می‌شود.

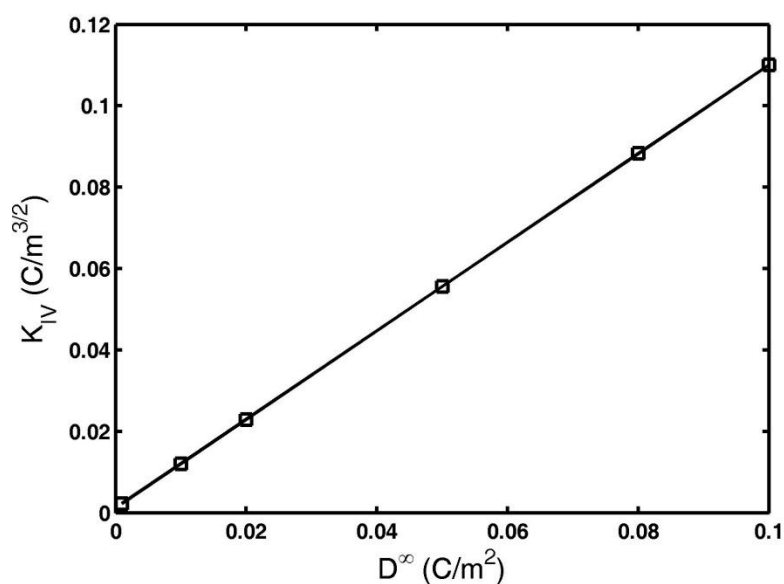
شکل (۵-۱۲) نشان دهنده‌ی مقدار ضریب شدت تنش  $K_I$  بوده که دیده می‌شود در صفحه‌ی پیزوالکتریک با اعمال بار مکانیکی ثابت و افزایش بار الکتریکی مقدار ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد که علت آن به خواص مواد پیزوالکتریک مربوط می‌شود.



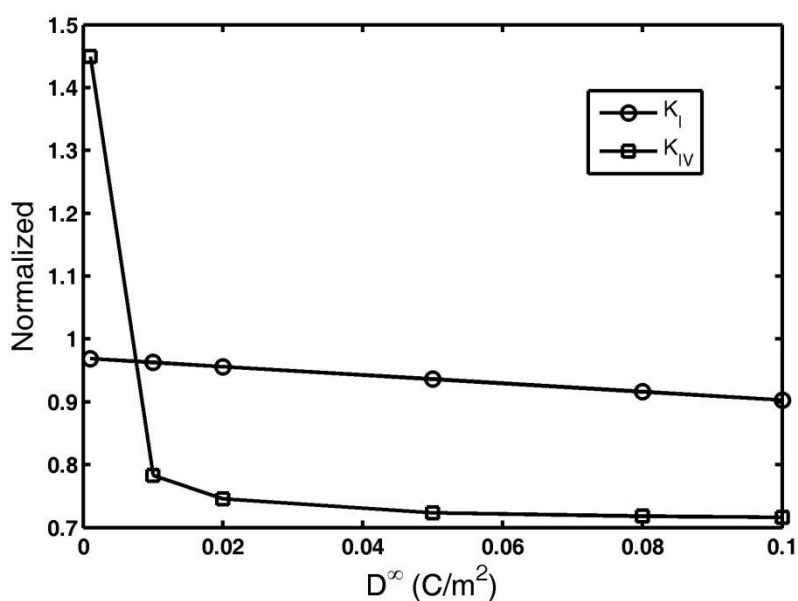
شکل (۵-۱۲) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای تحت

بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت

در شکل (۵-۱۳)، ضریب شدت الکتریکی با افزایش بار الکتریکی افزایش می‌یابد. همچنین برای مقایسه بهتر، ضرایب شدت را بی بعد کرده و در شکل (۵-۱۴) نشان داده شده است. با توجه به شکل (۵-۱۴)، مقدار  $K_I$  بر اثر افزایش بار الکتریکی کاهش یافته و این کاهش به صورتی بوده که در مقدار  $K_{IV}$  تغییرات بیشتری دیده می‌شود.



شکل (۵-۱۳) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بارالکتريکی در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت

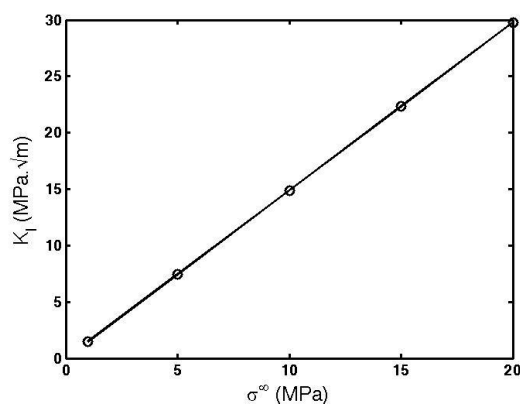


شکل (۵-۱۴) ضرایب شدت بی بعد شده  $K_I$  و  $K_{IV}$  بر حسب بارالکتریک در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه ای تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت

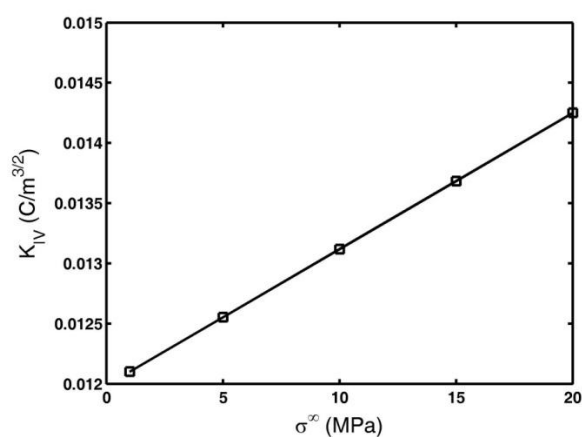
### ب) بار الکتریک ثابت

برای این منظور در کد نوشته شده، مقدار جابجایی الکتریک را برابر  $10^{-3}$  ( $D^{\infty} = 10^{-3}$ ) و بارهای مکانیکی مختلفی به صفحه اعمال می‌شود.

همانطور که در شکل‌های (۵-۱۵) (الف) و (ب) دیده می‌شود در اثر افزایش مقدار تنش دوردست، مقدار ضریب شدت تنش مکانیکی و همچنین مقدار ضریب شدت الکتریکی افزایش می‌یابد. برای درک بهتر، در شکل (۵-۱۶) ضرایب شدت بی‌بعد شده و همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر ضرایب شدت با افزایش تنش دوردست رو به افزایش می‌باشد.

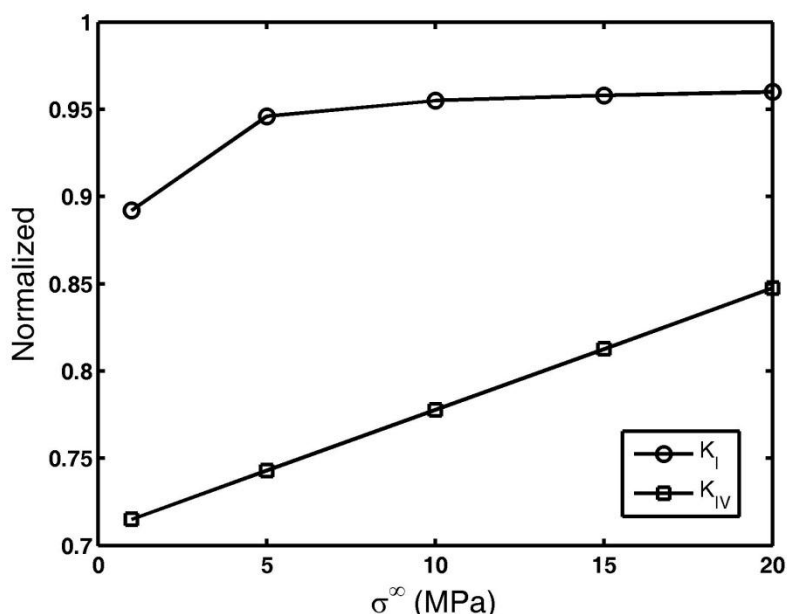


(الف)



(ب)

شکل (۵-۱۵) (الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دوردست، (ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب تنش دوردست، در صفحه پیزوالکتریک با ترک لبه ای تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت



شکل (۵-۱۶) ضرایب شدت بی بعد شده  $K_I$  و  $K_{IV}$  بر حسب تنش دور دست در صفحه پیزوالکتریک

با ترک لبه ای تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت

#### ۵-۲-۴ - ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مکانیکی

برای این حالت یک صفحه‌ی پیزوالکتریک PZT-5H با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است:

$$2L = 2W = 10$$

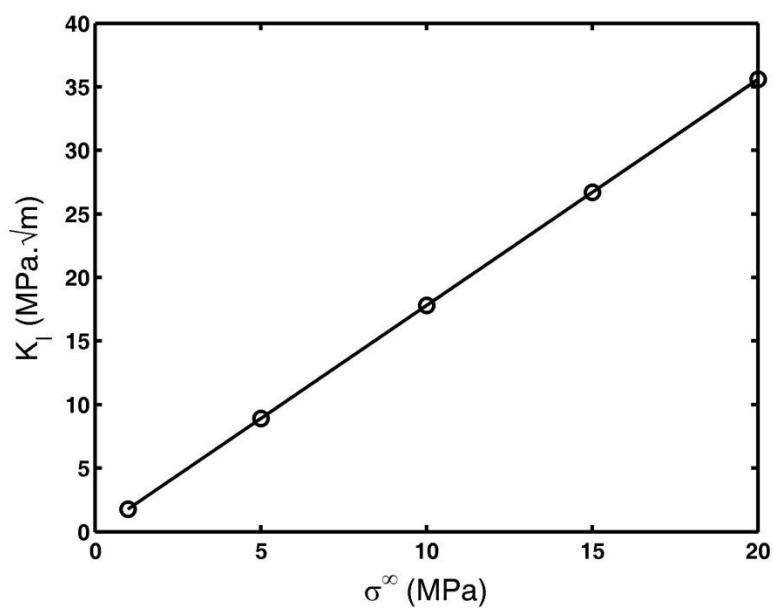
$$2a = 2$$

بدین منظور پس از اعمال تنها تنش دور دست و اعمال شرایط مرزی مکانیکی، بارگذاری مکانیکی

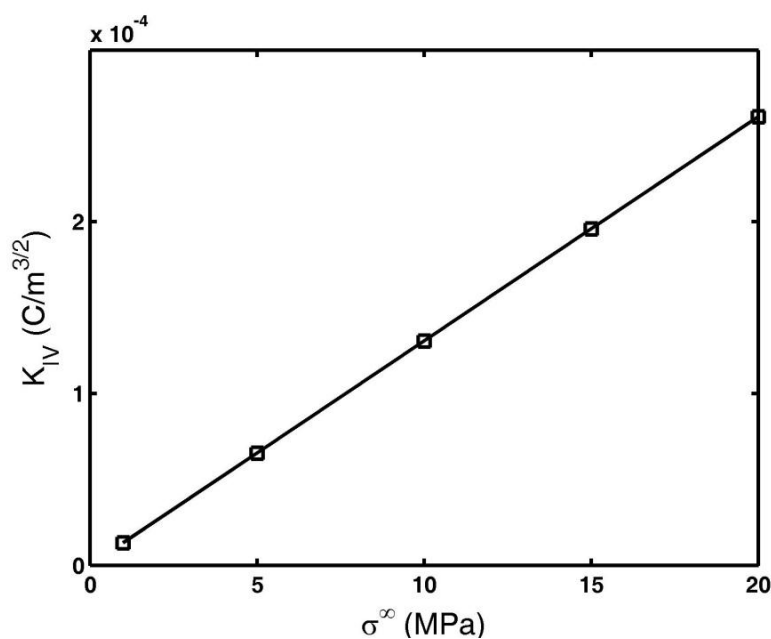
افزایش یافته و مشاهده می‌شود که در ترک مرکزی هم بر اثر افزایش بار مکانیکی مقدار ضریب شدت

تنش  $K_I$  و ضریب شدت الکتریکی  $K_{IV}$  افزایش می‌یابد (شکل (۵-۱۷)) و در نتیجه با حضور تنها بار

مکانیکی ضرایب شدت تغییر پیدا کرده و به صورت خطی افزایش می‌یابند.



(الف)



(ب)

شکل (۱۷-۵) (الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دوردست، (ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب

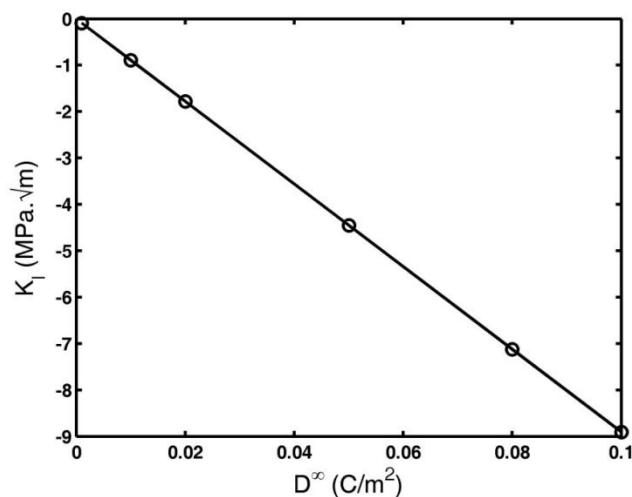
تنش دوردست، در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مکانیکی

### ۵-۲-۵ - ترک مرکزی در صفحات پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری الکتریکی

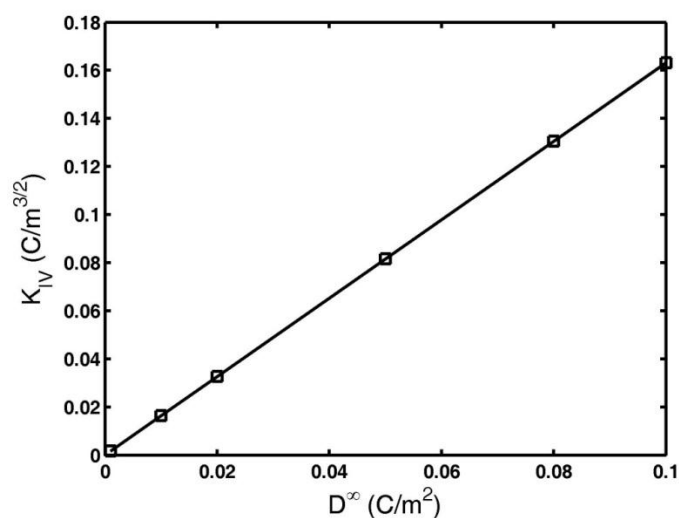
در این قسمت صفحه را با مشخصات بخش قبل در نظر گرفته و بار اعمالی به صفحه بار الکتریکی



است. مشاهده می‌شود با افزایش بار الکتریکی، ضریب شدت تنش از لحاظ مقداری افزایش می‌یابد (شکل (۵-۱۸) الف)). همچنین مقدار ضریب شدت الکتریکی همانطور که انتظار می‌رود، با افزایش بار الکتریکی افزایش می‌یابد (شکل (۵-۱۸) ب)). نتایج ترک مرکزی همانند نتایج ترک لبه‌ای می‌باشد.



(الف)



(ب)

شکل (۵-۱۸) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب بار الکتریکی، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بار

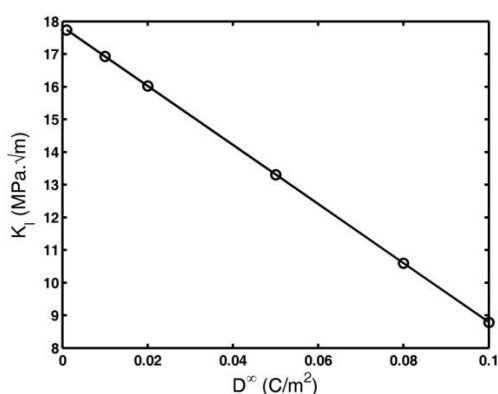
الکتریکی، در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری الکتریکی

### ۵-۲-۶- ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب

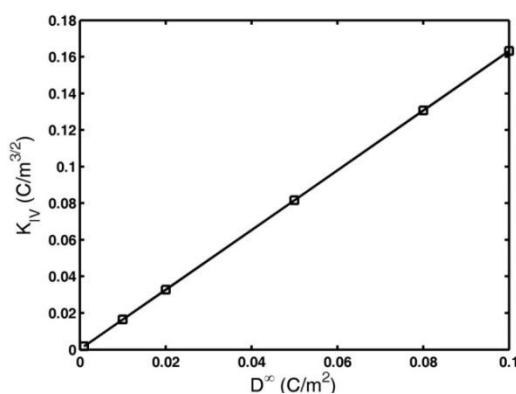
در این بخش نیز برای بارگذاری مرکب دو حالت در نظر گرفته شده است.

## الف) بار مکانیکی ثابت

در این حالت بار مکانیکی را ثابت فرض کرده ( $\sigma^\infty = 10 \text{ MPa}$ ) و بار الکتریکی تغییر می‌یابد. مشاهده می‌شود بر اثر افزایش بار الکتریکی، مقدار ضریب شدت تنش ( $K_{I1}$ ) کاهش یافته (شکل (۵-۱۹) الف)) و مقدار ضریب شدت الکتریکی افزایش می‌یابد (شکل (۵-۱۹) ب)). پس از بررسی، نتایج در صفحه پیزوالکتریک تحت بارگذاری مرکب با ترک مرکزی همانند ترک لبه‌ای می‌باشد. علت کاهش ضریب شدت تنش همانطور که گفته شده خواص مواد پیزوالکتریک می‌باشد.



(الف)



(ب)

شکل (۵-۱۹) الف) ضریب شدت تنش  $K_{I1}$  بر حسب بار الکتریکی، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بار

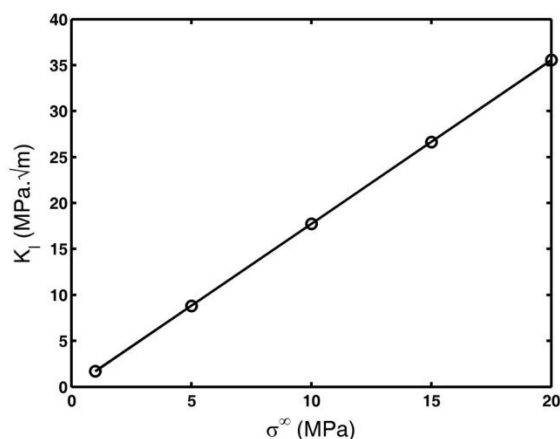
الکتریکی، در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت

## ب) بار الکتریکی ثابت

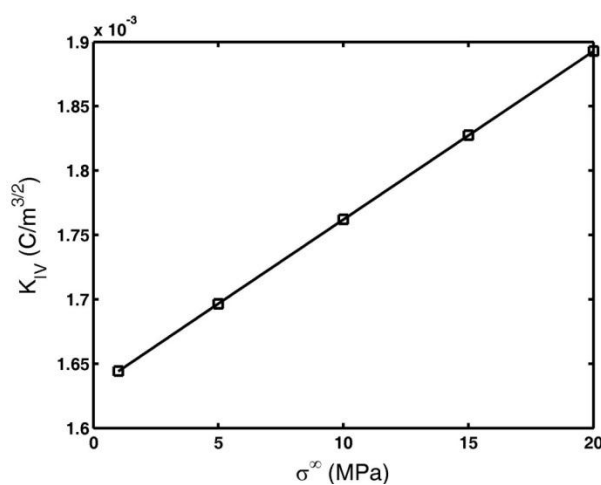
با توجه به شکل (۵-۲۰)، همانطور که انتظار می‌رود مقادیر ضریب شدت تنش و ضریب شدت

الکتریکی با افزایش تنش دوردست، افزایش می‌یابد.

نتیجه کلی که در این قسمت می‌توان گرفت آنست که همواره با افزایش بار مکانیکی، مقادیر ضرایب شدت افزایش یافته است در صورتی که با افزایش بار الکتریکی مقادیر ضریب شدت تنش کاهش و مقادیر ضریب شدت الکتریکی افزایش می‌یابد.



(الف)



(ب)

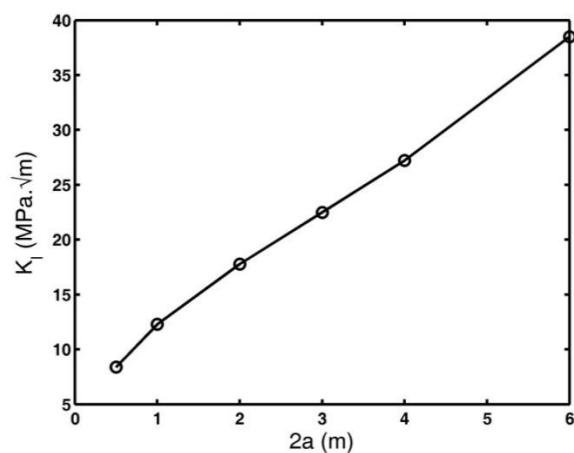
شکل (۵-۲۰) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب بار الکتریکی، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بار

الکتریکی، در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت

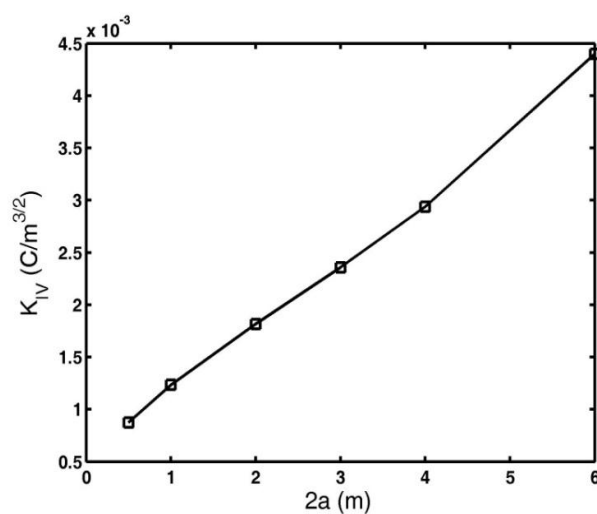
### ۵-۲-۷- تأثیر طول ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب

در این قسمت، یک صفحه دوبعدی با طول و عرض مشابه،  $2W=10$ ، طول ترک  $2a=2$  و بارگذاری به

صورت مکانیکی و الکتریکی مانند بخش ۵-۱-۲ در نظر گرفته شده است. همچنین جهت قطبی شدن صفحه بر محور عمود منطبق است. همانطور که انتظار می‌رود با افزایش طول ترک مقادیر ضرایب شدت روند افزایشی دارند (شکل (۵-۲۱)).



(الف)



(ب)

شکل (۵-۲۱) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب طول ترک، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب

طول ترک، در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب

پس از بی‌بعد کردن ضرایب شدت با مقادیر ضرایب شدت تحلیلی و بدست آوردن خطای ضرایب

شدت نسبت به مقدار تحلیلی آن، نتایج در جدول (۵-۶) آمده است.

جدول (۶-۵) خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت بی بعد برای کد نوشته شده با نتایج تحلیلی در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با طول های ترک مختلف

2a(m)	0.5	1	2	3	4	6
$K_I$ خطا در (%)	2.6165	2.4895	2.3149	2.3704	2.7006	2.8310
$K_{IV}$ خطا در (%)	2.9372	2.8333	2.5655	2.1920	2.6286	2.8021

با توجه به جدول (۶-۵)، خطاهای ضرایب شدت در محدوده بین ۲/۳۰٪ تا ۲/۹۳٪ می باشد. با افزایش طول ترک تا محدوده ای، خطاهای ضریب شدت روندی کاهشی داشته و برای طول ترک  $2a=2$  برای ضریب شدت مکانیکی و  $2a=3$  برای ضریب شدت الکتریکی مینیمم رسیده و پس از آن روندی افزایشی دارد.

### ۵-۲-۸- بررسی خطای ناشی از محدوده شعاع انتگرال ناحیه J در ترک مرکزی در صفحات پیزوالکتریک همگن تحت بارگذاری مرکب

در این قسمت به بررسی تأثیر محدوده شعاع انتگرال J پرداخته شده است. برای این منظور مقادیر شعاع ناحیه انتگرال گیری که شامل المان نوک ترک است را تغییر داده و با نتایج تحلیلی مقایسه شده که خطای حاصل در جدول (۷-۵) آورده شده است.

جدول (۷-۵) خطای حاصل از مقایسه ضرایب شدت بی بعد برای کد نوشته شده با نتایج تحلیلی در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با شعاع های انتگرال گیری مختلف

$r_d/a$ (m)	0.5	0.6	0.7	0.8
$K_I$ خطا در (%)	2.3149	2.3149	2.8832	2.1557
$K_{IV}$ خطا در (%)	2.9655	2.9655	2.8041	2.8874

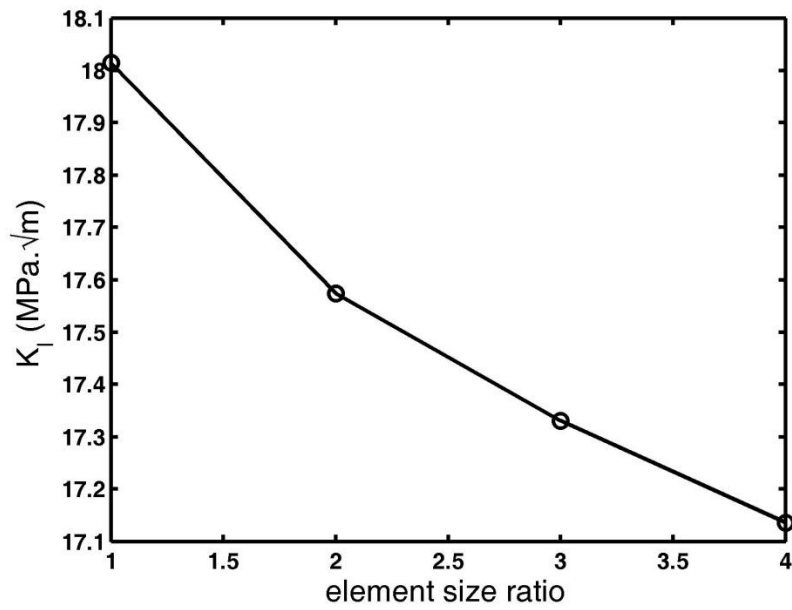
با توجه به جدول (۷-۵)، خطا در مقادیر ضرایب شدت تنش  $K_I$  در مقادیر کوچک ناحیه ای انتگرال گیری تقریباً یکسان بوده و پس از آن به مرزی می رسد که خطا ماکزیمم می شود و پس از آن

خطا روندی کاهشی دارد. همچنین خطا در مقادیر ضریب شدت الکتریکی  $K_{IV}$  در مقادیر کوچکتر ناحیه انتگرال گیری همانند ضریب شدت تنش یکسان بوده و پس از آن به مرزی می‌رسد که خطا بر عکس ضریب شدت تنش دارای مقدار مینیمم می‌باشد و پس از آن دوباره خطای شدت جابجایی الکتریکی روندی افزایشی دارد. با توجه به نتایج بهترین ناحیه انتگرال گیری برای محاسبه ضرایب شدت بین  $0/7$  و  $0/8$  می‌باشد.

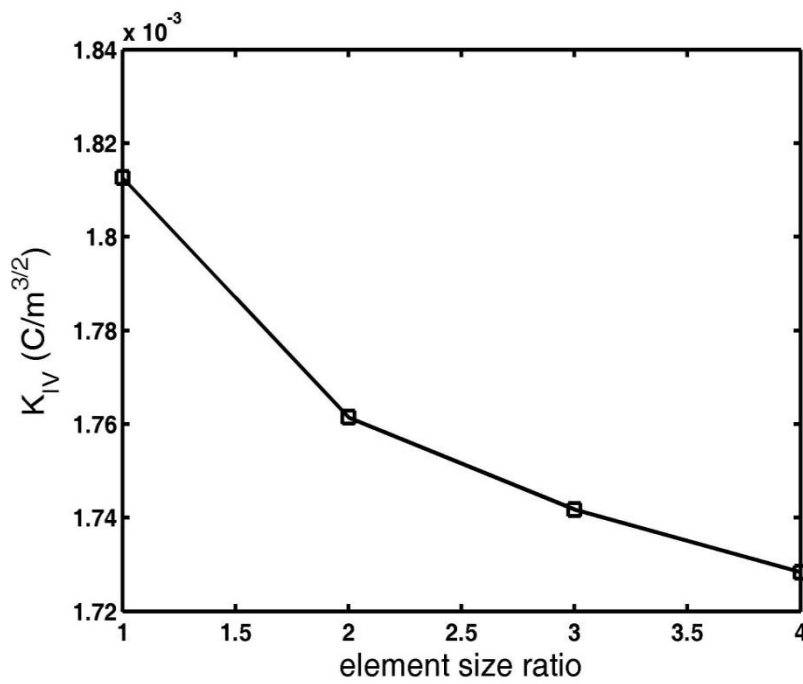
### ۵-۲-۹- بررسی اثر شبکه بندی صفحه پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی تحت

#### بارگذاری مرکب

در این قسمت شرایط مرزی و ابعاد نمونه مانند بخش ۵-۱-۲ در نظر گرفته شده است. همانطور که در شکل‌های (۵-۲۲) مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت شبکه بندی صفحه، مقادیر ضرایب شدت کاهش می‌یابد، که همگرایی روش X-FEM در بررسی مسائل مکانیک شکست را نشان می‌دهد. منظور از افزایش نسبت اندازه شبکه بندی، ریزتر شدن شبکه بندی از مرز صفحه به سمت ترک با نسبتی خاص می‌باشد.



(الف)

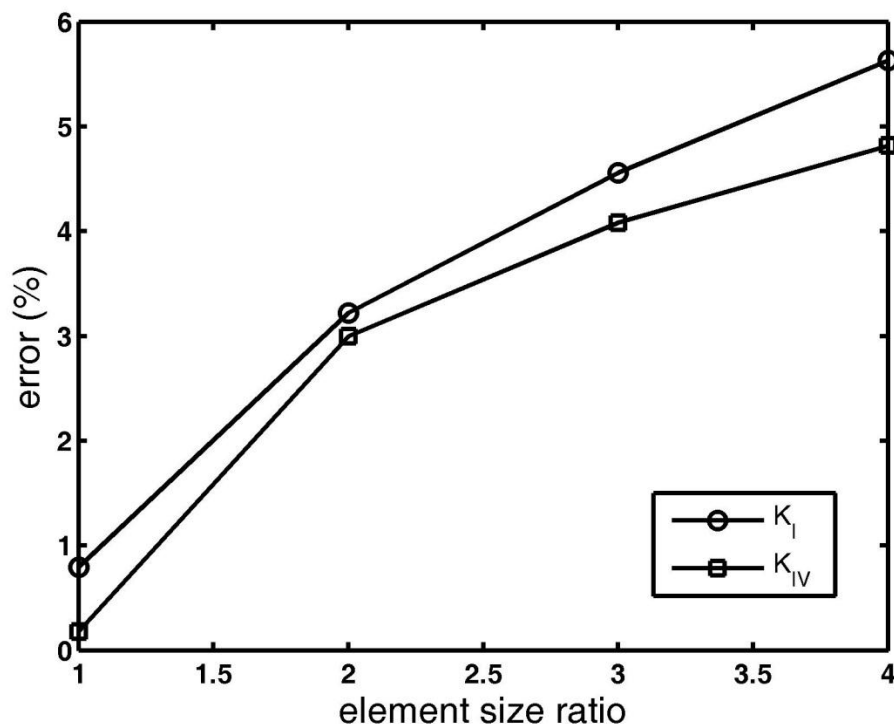


(ب)

شکل (۵-۲۲) الف) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب نسبت اندازه شبکه بندی، ب) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب

نسبت اندازه شبکه بندی، در صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب

همچنین در شکل (۵-۲۳)، مقدار خطای بدست آمده با توجه به مقدار نسبت شبکه بندی روندی افزایشی داشته ولی در نهایت مشاهده می‌شود خطا با افزایش نسبت شبکه بندی در هر دو ضریب شدت تنش مکانیکی و الکتریکی همگرا می‌شود.



شکل (۵-۲۳) خطای حاصل از ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  بر حسب نسبت اندازه شبکه بندی در

صفحه پیزوالکتریک با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب

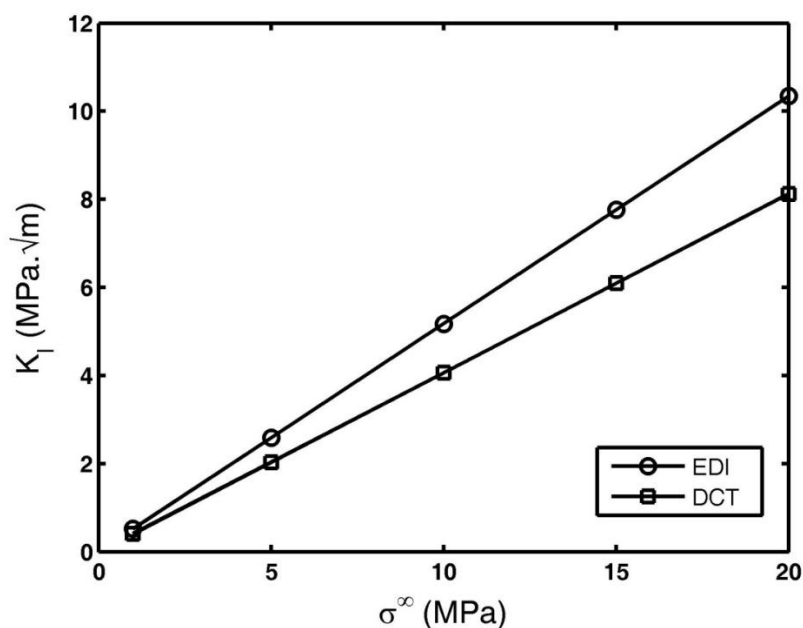
## ۵-۲-۱- ترک مرکزی در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن (پیزوالکتریک تابعی)

### تحت بارگذاری مکانیکی

در این قسمت صفحه‌ی پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مکانیکی مورد بررسی قرار گرفته است و خواص ماده PZT-5H می‌باشد. ابعاد نمونه مطابق بخش ۵-۱-۳،  $w=10$  و نصف طول ترک مرکزی  $a=1$  فرض شده است. با توجه به شکل‌های (۵-۲۴) و (۵-۲۵)، ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  با افزایش تنش مکانیکی، افزایش می‌یابند و در تنش‌های مکانیکی زیاد، نمودارهای دو روش

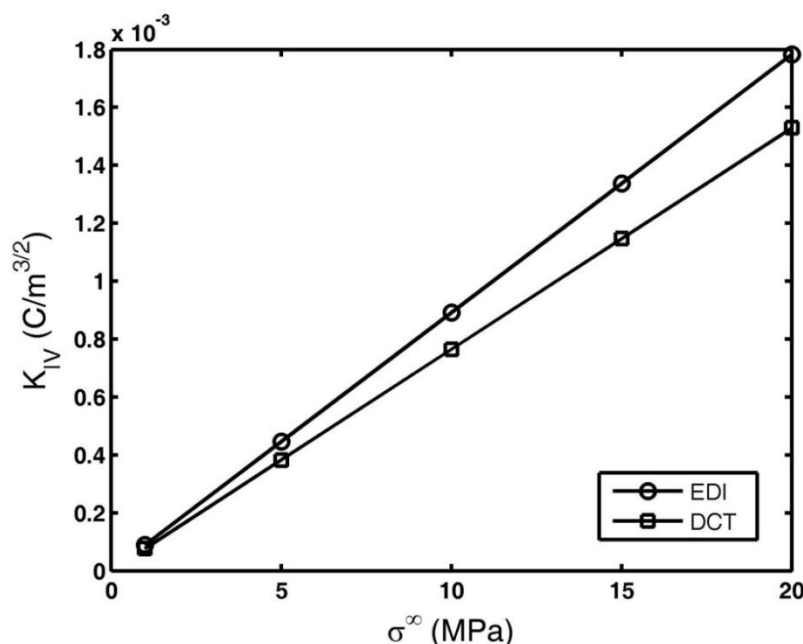


انطباق نقطه‌ای و انتگرال  $J$  از هم دور می‌شوند. با توجه به اینکه هرچه بار مکانیکی افزایش می‌یابد نقطه انتخابی از نوک ترک دورتر می‌شود و با توجه به واگرایی دو روش انطباق نقطه‌ای و انتگرال  $J$ ، هرچه نقطه انتخابی به نوک ترک نزدیک‌تر باشد، نتایج روش انطباق نقطه‌ای به نتایج روش انتگرال  $J$  نزدیک‌تر است (شکل‌های ۲۴-۵ و ۲۵-۵).



شکل (۲۴-۵) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دوردست در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با

ترک مرکزی تحت بارگذاری مکانیکی



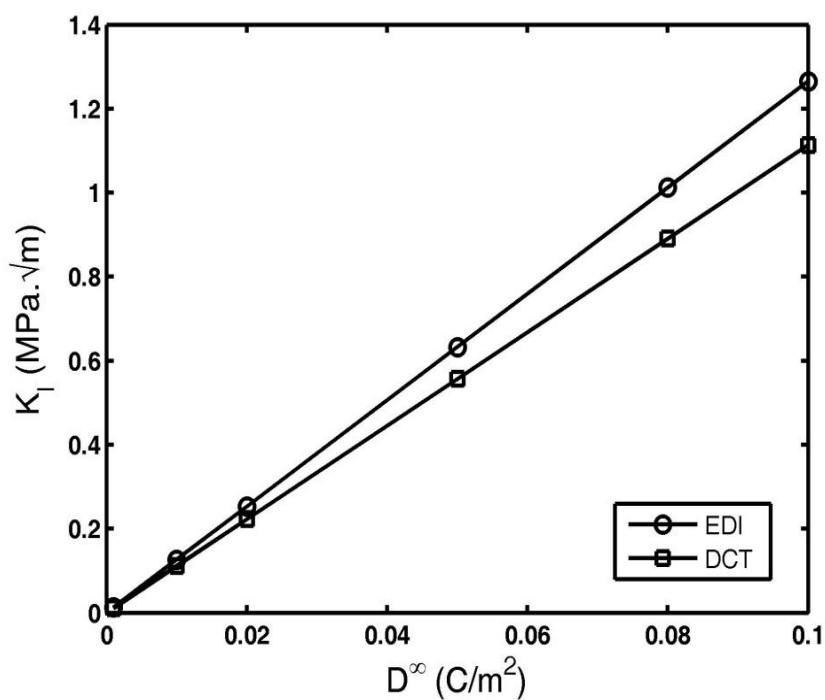
شکل (۵-۲۵) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب تنش دور دست در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مکانیکی

## ۵-۲-۱۱- ترک مرکزی در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن (مواد پیزوالکتریک تابعی)

### تحت بارگذاری الکتریکی

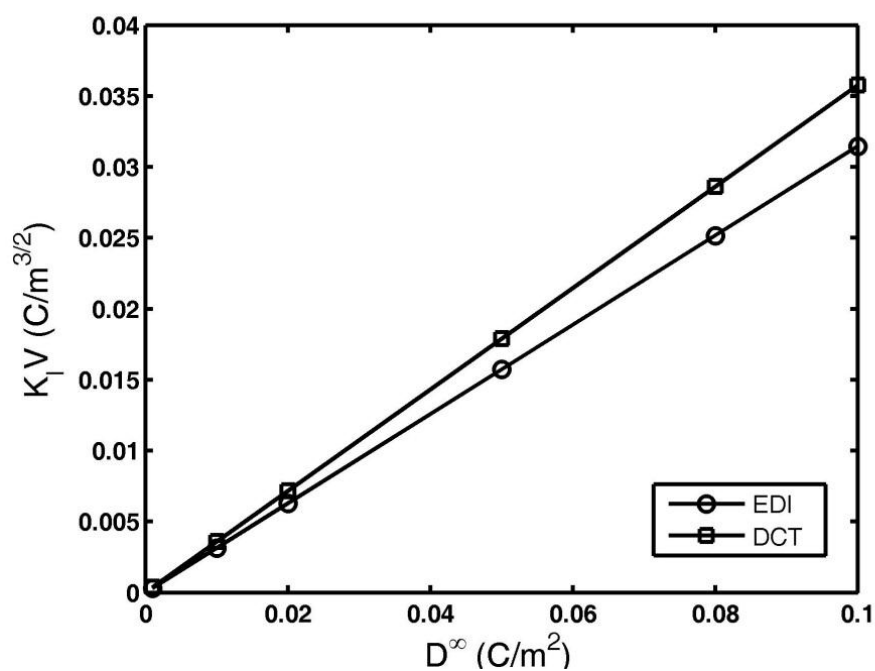
در بررسی ترک مرکزی در صفحات پیزوالکتریک، خواص و ابعاد نمونه همانند بخش قبل در نظر گرفته شده است. در شکل‌های (۵-۲۶) و (۵-۲۷)، با افزایش بار الکتریکی، ضرایب شدت  $K_{IV}$  و  $K_I$  افزایش می‌یابند؛ همچنین مشابه بخش قبل به دلیل افزایش جابجایی‌ها در اطراف نوک ترک با افزایش بار الکتریکی، اختلاف روش انطباق نقطه‌ای نسبت به روش انتگرال  $\int$  افزایش می‌یابد.

همچنین با مقایسه شکل‌های (۵-۲۴) و (۵-۲۶) مشاهده می‌شود که محدوده تغییرات ضریب شدت تنش در نمونه‌های تحت بارگذاری الکتریکی بسیار کمتر از نمونه‌های تحت بارگذاری مکانیکی می‌باشد و همچنین با مقایسه شکل‌های (۵-۲۵) و (۵-۲۷) مشاهده می‌شود که ضریب شدت الکتریکی در نمونه‌های تحت بارگذاری الکتریکی بیشتر از نمونه‌های تحت بارگذاری مکانیکی می‌باشد. بنابراین اثر بار مکانیکی بر ضریب شدت الکتریکی و اثر بار الکتریکی بر ضریب شدت تنش ناچیز است.



شکل (۵-۲۶) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با

ترک مرکزی تحت بارگذاری الکتریکی



شکل (۵-۲۷) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک

مرکزی تحت بارگذاری الکتریکی

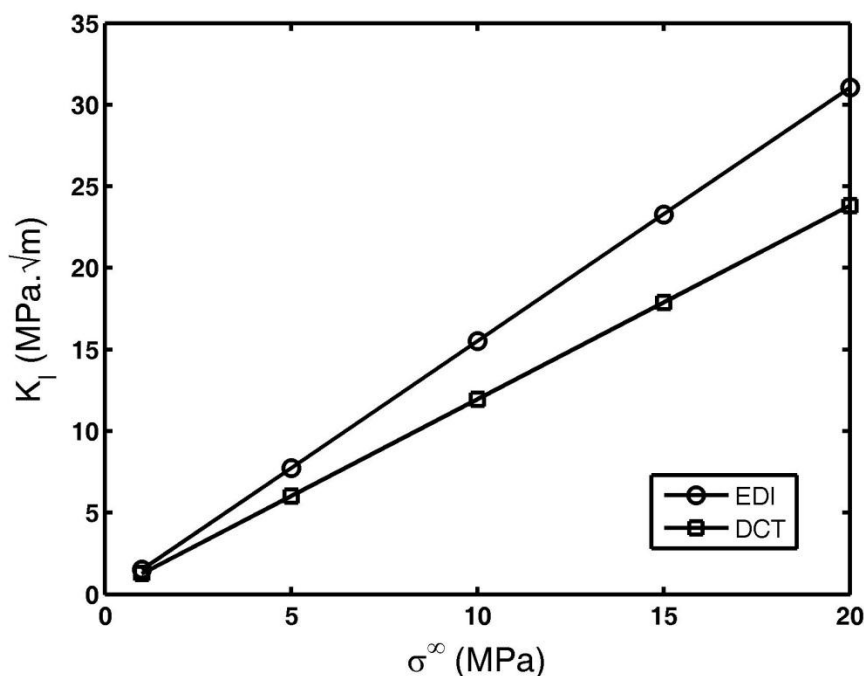
## ۵-۲-۱۲- ترک مرکزی در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن (مواد پیزوالکتریک تابعی)

### تحت بارگذاری مرکب

در این قسمت نیز خواص و ابعاد نمونه مشابه بخش ۵-۱-۳ می‌باشد.

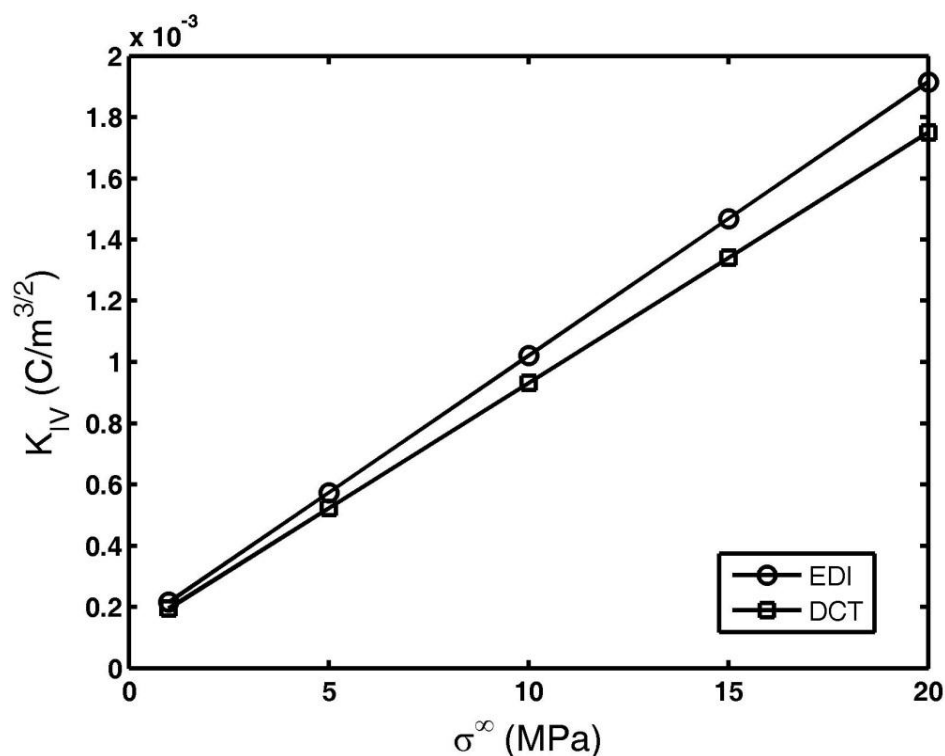
### الف) بار الکتریکی ثابت

در این حالت نمونه تحت بار الکتریکی ثابت  $D^\infty = 1 \times 10^{-3}$  و بار مکانیکی متغیر قرار گرفته است. با توجه به شکل‌های (۲۸-۵) و (۲۹-۵)، با افزایش تنش مکانیکی، ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  در هر دو روش انتگرال  $J$  و انطباق نقطه‌ای افزایش می‌یابد. در تنش‌های مکانیکی زیاد و بار الکتریکی ثابت، نتایج حاصل از روش انتگرال  $J$  و انطباق نقطه‌ای نسبت به هم واگرا می‌شوند. علت این امر، افزایش جابجایی‌های گره‌های اطراف نوک ترک با افزایش بار مکانیکی است که موجب خطا و واگرایی در روش انطباق نقطه‌ای نسبت به روش انتگرال  $J$  می‌شود. همچنین اختلاف  $K_{IV}$  کمتر از اختلاف  $K_I$  است.



شکل (۲۸-۵) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب تنش دور دست در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با

ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت

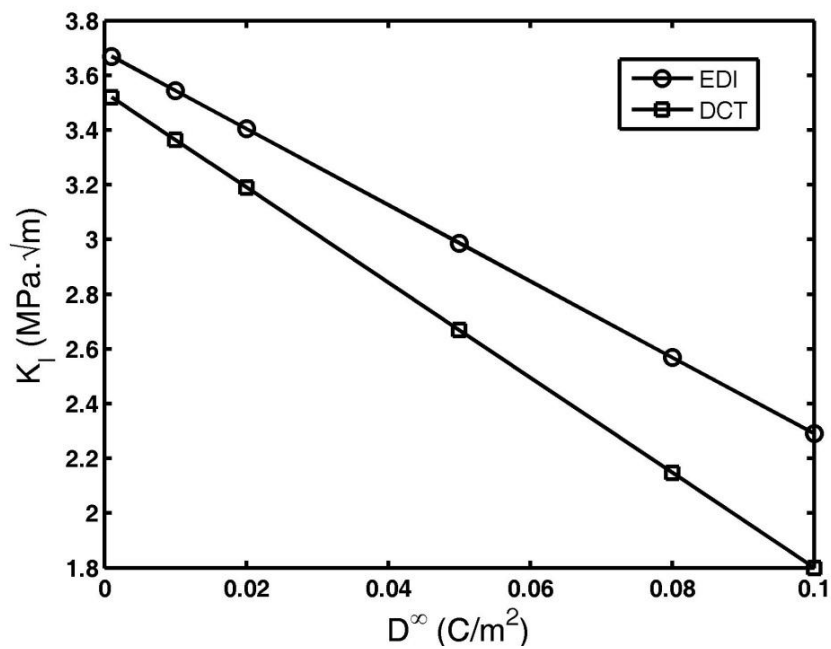


شکل (۵-۲۹) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب تنش دور دست در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با

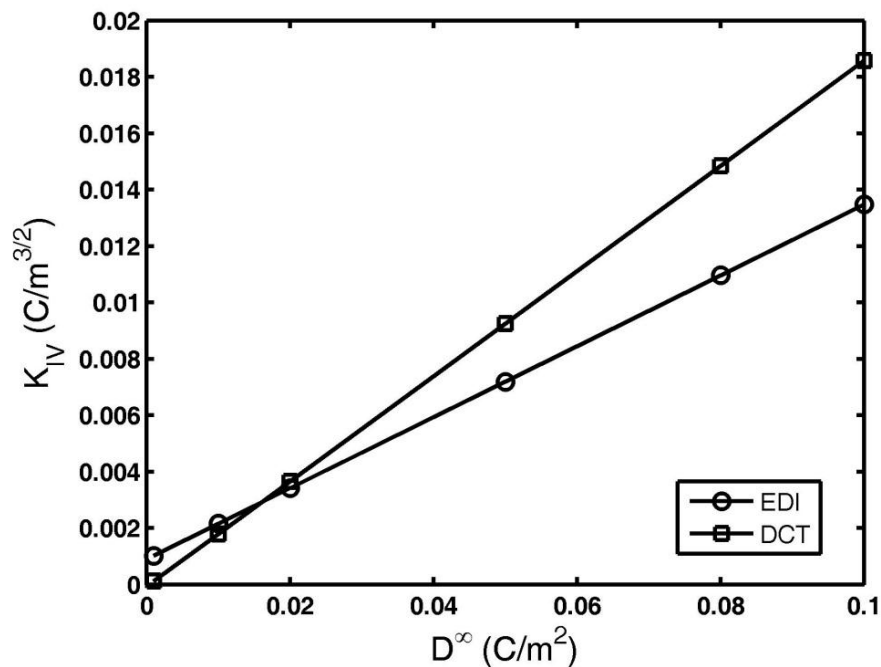
ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت

### ب) بار مکانیکی ثابت

در این حالت نمونه تحت بار مکانیکی ثابت  $\sigma^\infty = 10 \text{ MPa}$  و بار الکتریکی متغیر قرار گرفته است. در شکل (۵-۳۰)، با افزایش بار الکتریکی ضریب شدت تنش  $K_I$  برای هر دو روش انطباق نقطه‌ای و انتگرال  $J$  کاهش یافته است؛ اما در شکل (۵-۳۱)، ضریب شدت الکتریکی برای هر دو روش در حال افزایش است. نتایج ضریب شدت الکتریکی در روش انتگرال  $J$  در بارهای الکتریکی کم، بیشتر از نتایج ضریب شدت الکتریکی در روش انطباق نقطه‌ای است؛ اما با افزایش بار الکتریکی، نتایج ضریب شدت الکتریکی در روش انطباق نقطه‌ای بیشتر از نتایج ضریب شدت الکتریکی در روش انتگرال  $J$  می‌شود.



شکل (۳۰-۵) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت

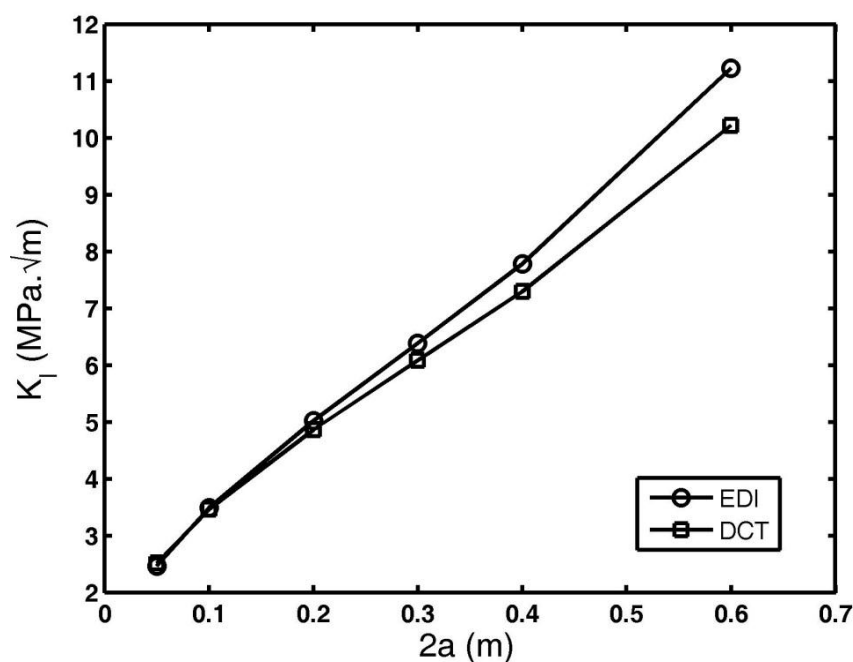


شکل (۳۱-۵) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب بار الکتریکی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت

### ۵-۲-۱۳- تأثیر طول ترک مرکزی در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن (FGPM)

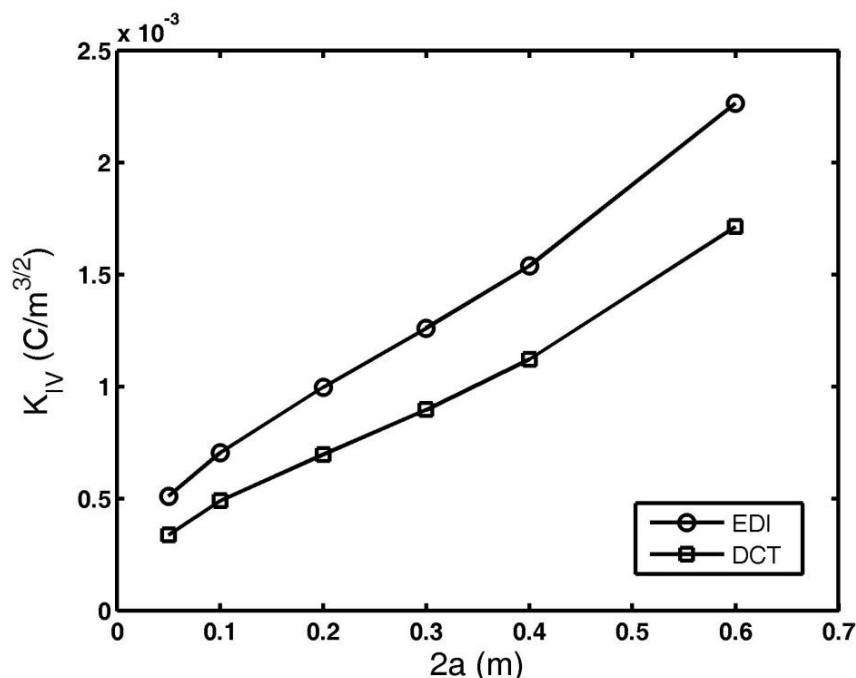
#### تحت بارگذاری مرکب

در بررسی تأثیر طول ترک مرکزی، خواص نمونه PZT-5H و ابعاد نمونه  $2W=1$  در نظر گرفته شده است. در شکل‌های (۵-۳۲) و (۵-۳۳)، منحنی ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  بر حسب طول ترک مرکزی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش طول ترک مرکزی، ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  برای هر دو روش انطباق نقطه‌ای و انتگرال  $J$  افزایش می‌یابند. در طول‌های ترک کم، دو روش مخصوصاً در مقدار  $K_I$  انطباق خوبی نسبت به هم دارند و با افزایش طول ترک اختلاف نتایج این دو روش افزایش می‌یابد.



شکل (۵-۳۲) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب طول ترک در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک

مرکزی تحت بارگذاری مرکب



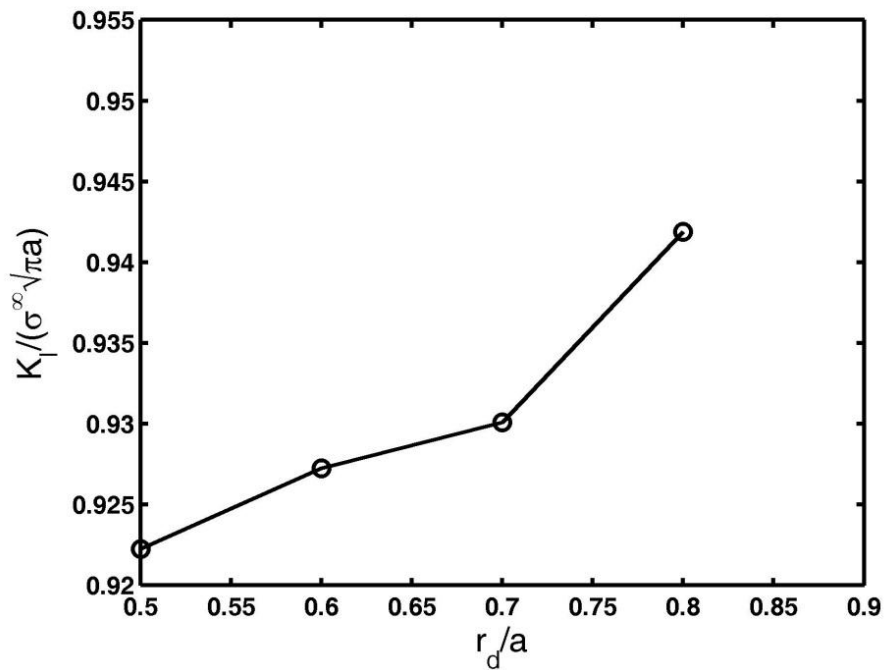
شکل (۳۳-۵) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب طول ترک در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی

تحت بارگذاری مرکب

### ۵-۲-۱۴- تأثیر محدوده شعاع انتگرال ناحیه $J$ در ترک مرکزی در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن تحت بارگذاری مرکب

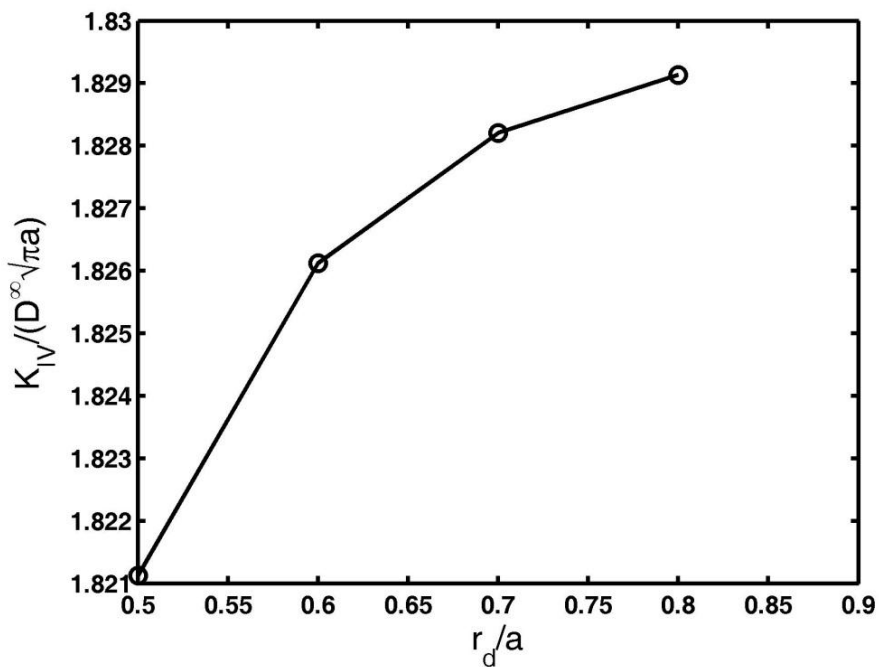
در این بخش، خواص نمونه PZT-5H و ابعاد آن  $2W=1$  و  $2a=0.2$  می‌باشد. در شکل‌های (۳۴-۵) و (۳۵-۵)، ضرایب شدت بی‌بعد بر حسب شعاع انتگرال  $J$  نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش شعاع انتگرال، ضرایب شدت بی‌بعد شده  $K_I$  و  $K_{IV}$  نیز افزایش می‌یابند. با افزایش شعاع انتگرال، محدوده‌ی تغییرات  $K_I$  بسیار کمتر از محدوده‌ی تغییرات  $K_{IV}$  بوده است. همچنین ضریب شدت بی‌بعد شده الکتریکی با افزایش شعاع انتگرال، به سمت عدد خاصی در حال همگرا شدن می‌باشد، در صورتیکه  $K_I$  همگرا نمی‌شود، لذا می‌توان گفت ضریب شدت تنش  $K_I$  مستقل از مسیر است.





شکل (۵-۳۴) ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_I$  بر حسب شعاع انتگرال در صفحه پیزوالکتریک

غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب



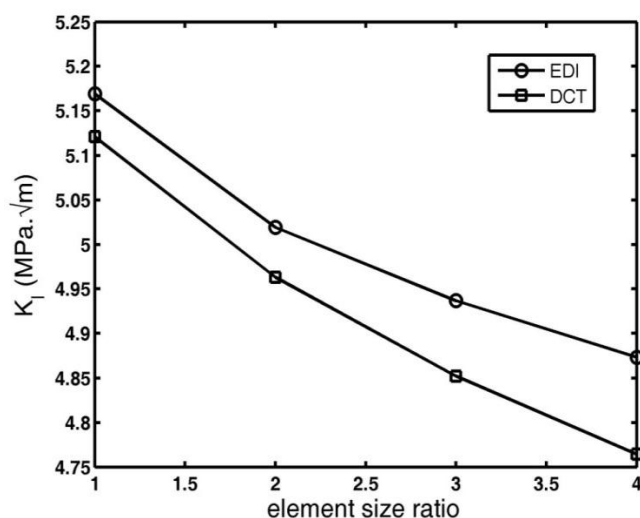
شکل (۵-۳۵) ضریب شدت بی بعد شده  $K_{IV}$  بر حسب شعاع انتگرال در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک

مرکزی تحت بارگذاری مرکب

### ۵-۲-۱۵- بررسی اثر شبکه بندی صفحه‌ی پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی

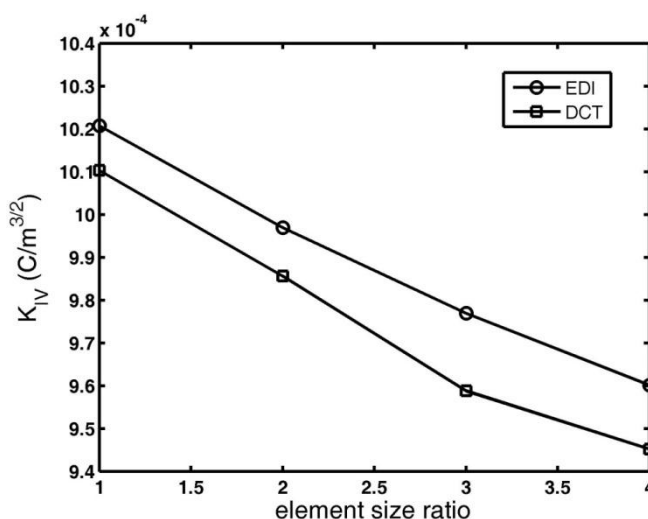
#### تحت بارگذاری مرکب

در این قسمت نیز خواص و ابعاد نمونه مطابق بخش قبل در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل‌های (۳۶-۵) و (۳۷-۵)، با افزایش تعداد المان‌ها یا ریزتر شدن شبکه‌بندی در اطراف نوک ترک، ضرایب شدت  $K_{IV}$  و  $K_I$  برای هر دو روش انطباق نقطه‌ای و انتگرال  $J$  کاهش می‌یابد.



شکل (۳۶-۵) ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب نسبت اندازه المان در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با

ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب



شکل (۳۷-۵) ضریب شدت  $K_{IV}$  بر حسب نسبت اندازه المان در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک

مرکزی تحت بارگذاری مرکب

## ۵-۲-۱۶- تأثیر زاویه ترک نسبت به افق در صفحات پیزوالکتریک همگن تحت

## بارگذاری مرکب

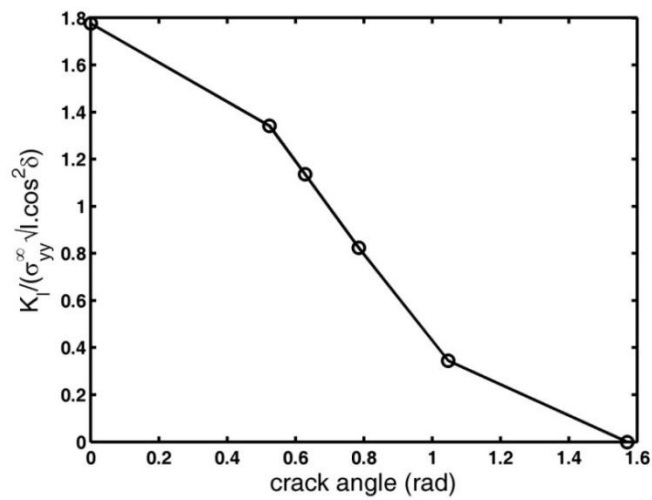
در بررسی ترک مایل در صفحه‌ی پیزوالکتریک همگن در شکل (۵-۸)، خواص نمونه PZT-5H و ابعاد نمونه  $2W=10$  و  $2a=2$  مشابه مرجع [۳۲] می‌باشد. با تغییر در کد نوشته شده و همچنین اعمال اثر زاویه در خواص ماده با توجه به مرجع [۳۲]، نتایج ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{II}$  و  $K_{IV}$  برای زوایای  $0$ ،  $\frac{\pi}{6}$ ،  $\frac{\pi}{5}$ ،  $\frac{\pi}{4}$ ،  $\frac{\pi}{3}$  و  $\frac{\pi}{2}$  در جدول (۵-۸) آورده شده است.

جدول (۵-۸) نتایج حاصل از ضرایب شدت  $K_I$ ،  $K_{II}$  و  $K_{IV}$  در صفحه پیزوالکتریک همگن با روش EDI در

زوایای مختلف ترک

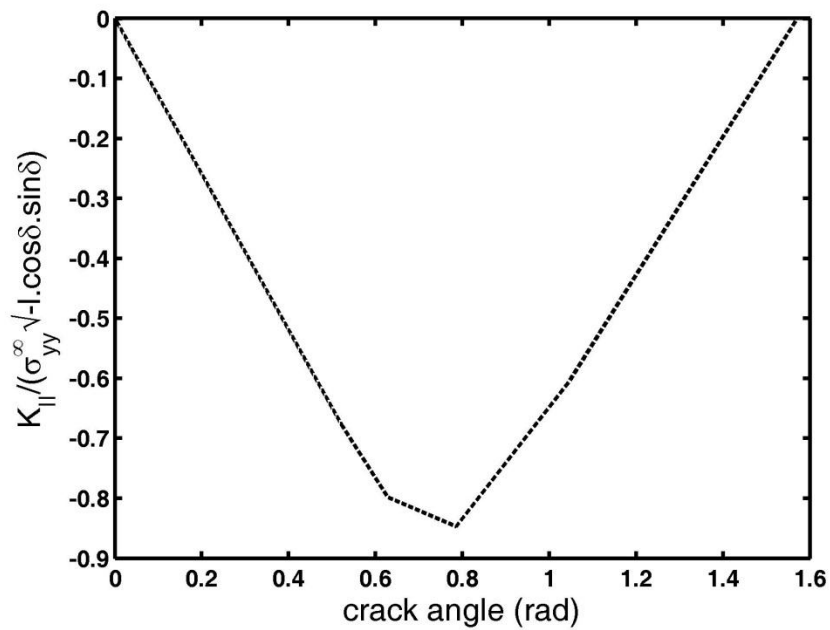
$\delta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{K_I}{\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{l} (\cos \delta)^2}$	1.77659995	1.34243031	1.13594290	0.82367943	0.34436940	0
$\frac{K_{II}}{\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{l} \cos \delta \sin \delta}$	0	-0.6801755	-0.7984808	-0.8471125	-0.60356107	0
$\frac{K_{IV}}{D_{yy}^{\infty} \sqrt{l} \cos \delta}$	1.8159979	1.54389840	1.47088023	1.1568941	0.893641132	0

با توجه به شکل‌های (۵-۳۸)، (۵-۳۹) و (۵-۴۰)، مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه‌ی ترک نسبت به افق، ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  کاهش می‌یابند؛ اما ضریب شدت  $K_{II}$  در بازه صفر تا  $\frac{\pi}{2}$ ، ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر منحنی  $K_{II}$  بر حسب زاویه ترک دارای رفتار تقریباً متقارن می‌باشد و در میانه‌ی آن، منحنی دارای مینیمم می‌باشد.



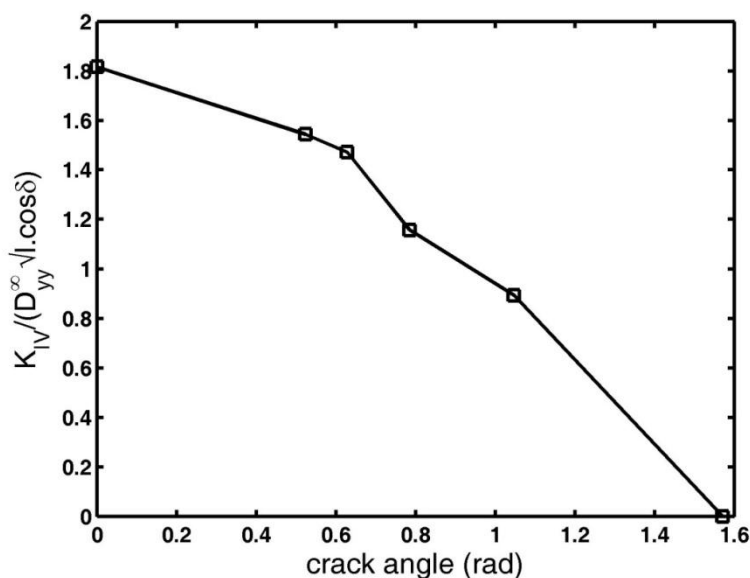
شکل (۵-۳۸) ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_I$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک همگن

با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب



شکل (۵-۳۹) ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_{II}$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک همگن

با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب



شکل (۴۰-۵) ضریب شدت بی بعد شده  $K_{IV}$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک همگن با

ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب

### ۵-۲-۱۷- تأثیر زاویه ترک نسبت به افق در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن تحت

#### بارگذاری مرکب

در این بخش نیز خواص نمونه، PZT-5H و ابعاد نمونه  $2l=2W=1$  و  $2a=0.2$  در نظر گرفته شده

است. اثر تغییر زاویه به خواص ماده پیزوالکتریک غیرهمگن اعمال شده و نتایج ضرایب شدت  $K_I$  و

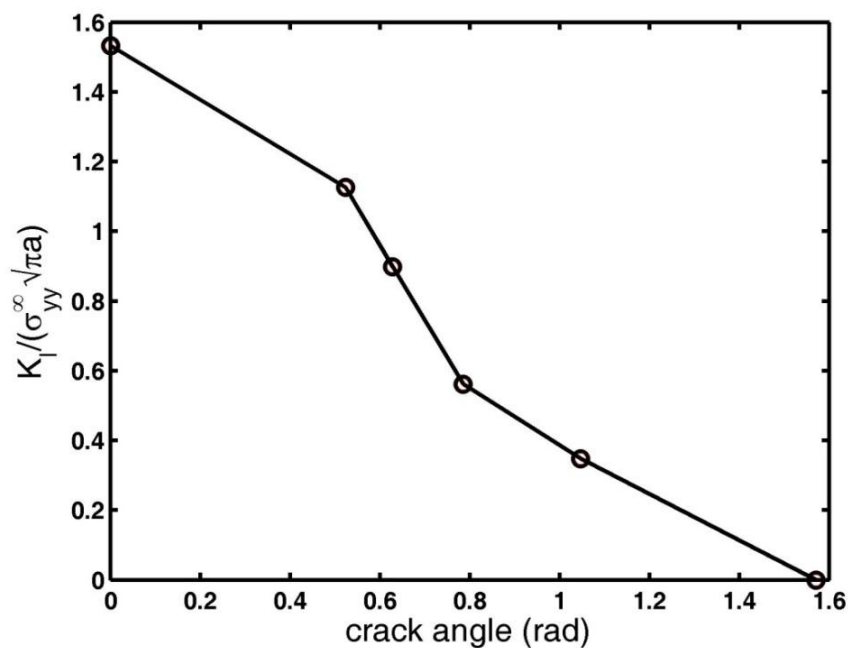
$K_{II}$  و  $K_{IV}$  برای زوایای مختلف در جدول (۹-۵) نشان داده شده است.

جدول (۹-۵) نتایج حاصل از ضرایب شدت  $K_I$ ،  $K_{II}$  و  $K_{IV}$  در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با روش EDI در زوایای

مختلف ترک

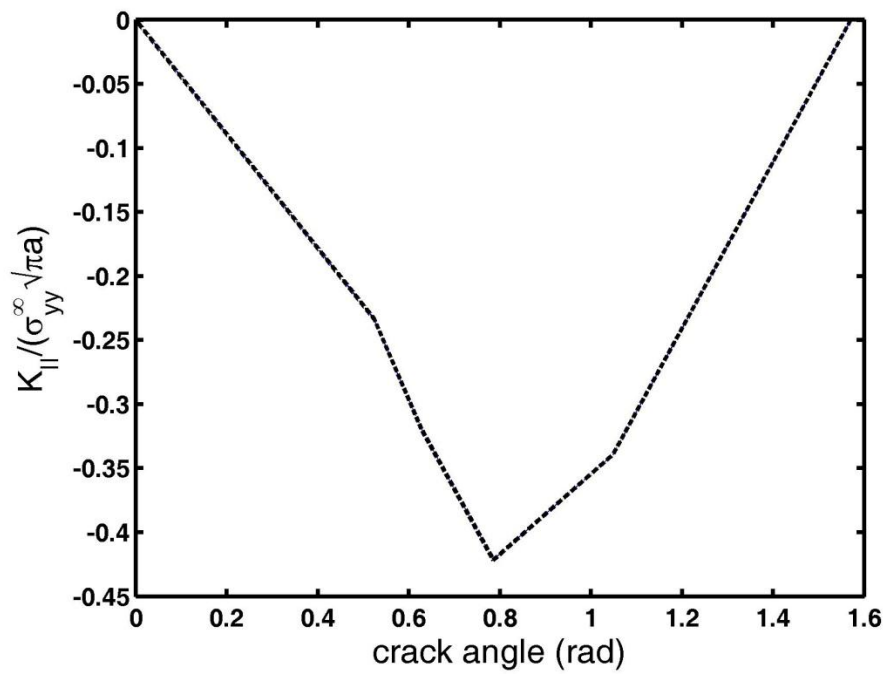
$\delta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{K_I}{\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi a}}$	1.5327488	1.12577037	0.89866426	0.56197210	0.34801383	0
$\frac{K_{II}}{\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi a}}$	0	-0.2333838	-0.320115	-0.421584	-0.339818	0
$\frac{K_{IV}}{D_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi a}}$	1.8402769	1.7786548	1.647692	1.26131	0.5991722	0

در شکل‌های (۴۱-۵) و (۴۳-۵) مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه ترک نسبت به افق، ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  کاهش می‌یابند تا اینکه در زاویه  $\frac{\pi}{2}$  صفر شوند. همچنین در شکل (۴۲-۵) مشابه بخش قبل، منحنی  $K_{II}$  بر حسب زاویه ترک، نسبت به زاویه  $\frac{\pi}{2}$  تقریباً متقارن و دارای مقدار مینیمم می‌باشد.



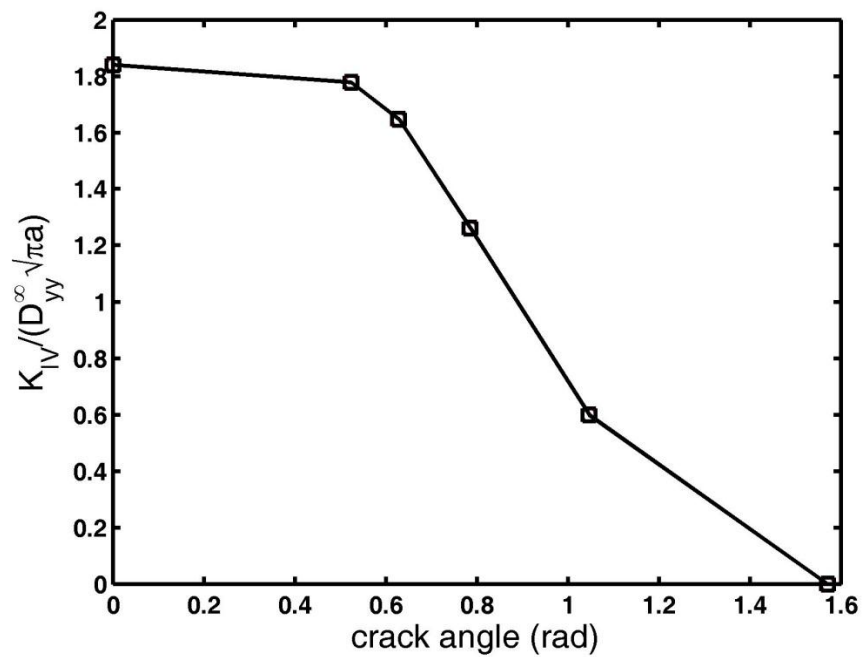
شکل (۴۱-۵) ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_I$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک

غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب



شکل (۴۲-۵) ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_{II}$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک

غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب



شکل (۴۳-۵) ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_{IV}$  بر حسب زاویه ترک در صفحه پیزوالکتریک غیرهمگن با

ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب

## فصل ۶

# نتیجه گیری و پیشنهادها



## ۶-۱- نتیجه گیری

با توجه به کد نوشته شده از روش اجزای محدود توسعه یافته جهت تعیین ضرایب شدت مکانیکی و الکتریکی در صفحات پیزوالکتریک همگن و غیرهمگن تحت بارگذاری الکتریکی، مکانیکی و مرکب نتایج زیر بدست آمده است:

۱. با مقایسه نتایج تحلیلی و روش‌های انتگرال  $J$  و انطباق نقطه‌ای، خطای روش انتگرال  $J$  بسیار کمتر از روش انطباق نقطه‌ای است و در نتیجه روش انتگرال  $J$  دقیق‌تر است با این وجود روش انطباق نقطه‌ای روش قابل کاربردی می‌باشد.
۲. در صفحات پیزوالکتریک همگن با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت، با افزایش بار الکتریکی مقدار ضریب شدت تنش  $K_I$  کاهش و ضریب شدت الکتریکی  $K_{IV}$  افزایش می‌یابد که علت آن به خواص مواد پیزوالکتریک مربوط می‌شود. همچنین دامنه‌ی تغییرات ضریب شدت بی بعد شده  $K_{IV}$  بیشتر از ضریب شدت تنش بی بعد شده  $K_I$  است.
۳. در صفحات پیزوالکتریک همگن با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت، با افزایش مقدار تنش دوردست مقدار ضریب شدت تنش  $K_I$  و ضریب شدت الکتریکی  $K_{IV}$  افزایش می‌یابند.
۴. در صفحات پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری الکتریکی، با افزایش بار الکتریکی اندازه ضریب شدت تنش و همچنین مقدار ضریب شدت الکتریکی افزایش می‌یابد.
۵. در صفحات پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت، با افزایش بار الکتریکی مقدار ضریب شدت تنش  $K_I$  کاهش و ضریب شدت الکتریکی  $K_{IV}$  افزایش می‌یابد.
۶. در صفحات پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت، همواره با افزایش بار مکانیکی، مقادیر ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  افزایش می‌یابند.

۷. در صفحات پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با افزایش طول ترک، با مقایسه نسبت به مقدار تحلیلی، خطاهای ضرایب شدت ابتدا به مقدار مینیمم رسیده و سپس افزایش می‌یابد و نشانه آنست که خطا در اندازه طول ترک‌های کم و یا زیاد مقدارش افزایش می‌یابد.
۸. در صفحات پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب، با افزایش شعاع ناحیه انتگرال و با مقایسه با نتایج تحلیلی، خطا در مقدار ضریب شدت تنش  $K_I$  ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد؛ اما مقدار ضریب شدت الکتریکی  $K_{IV}$  ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد و بعلاوه اینکه در خطاها تغییر جزئی دارد می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد و به این نتیجه رسید که انتگرال  $J$  مستقل از مسیر است.
۹. در صفحات پیزوالکتریک همگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب، با افزایش نسبت شبکه بندی صفحه، مقادیر ضرایب شدت کاهش می‌یابند، که نشان دهنده همگرایی روش المان محدود توسعه یافته می‌باشد.
۱۰. در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مکانیکی، با افزایش بار مکانیکی ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  افزایش می‌یابند و در تنش‌های مکانیکی زیاد، اختلاف نمودارهای دو روش انطباق نقطه‌ای و انتگرال  $J$  افزایش پیدا می‌کند که علت آن به خواص مواد برمی‌گردد.
۱۱. در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری الکتریکی، با افزایش بار الکتریکی ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  و همچنین اختلاف روش انطباق نقطه‌ای نسبت به روش انتگرال  $J$  به دلیل افزایش جابجایی‌ها در اطراف نوک ترک، افزایش می‌یابد.
۱۲. در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار الکتریکی ثابت، با افزایش تنش مکانیکی ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  در هر دو روش انطباق نقطه‌ای و

انتگرال  $J$  افزایش می‌یابد و به دلیل افزایش جابجایی‌ها در اطراف نوک ترک با افزایش بار مکانیکی، نتایج حاصل از روش انتگرال  $J$  و انطباق نقطه‌ای نسبت به هم واگرا می‌شوند که نشان‌دهنده دقت کم در روش انطباق نقطه‌ای است.

۱۳. در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی، محدوده‌ی تغییرات ضریب شدت تنش در نمونه‌های تحت بارگذاری الکتریکی بسیار کمتر از نمونه‌های تحت بارگذاری مکانیکی می‌باشد و همچنین ضریب شدت الکتریکی در نمونه‌های تحت بارگذاری الکتریکی بیشتر از نمونه‌های تحت بارگذاری مکانیکی می‌باشد.

۱۴. در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب با بار مکانیکی ثابت، با افزایش بار الکتریکی ضریب شدت تنش  $K_I$  در حال کاهش می‌باشد؛ اما ضریب شدت الکتریکی  $K_{IV}$  افزایش می‌یابد.

۱۵. در بررسی تأثیر طول ترک مرکزی در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن تحت بارگذاری مرکب، مشاهده می‌شود که با افزایش طول ترک مرکزی، ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  در هر دو روش انطباق نقطه‌ای و انتگرال  $J$  افزایش می‌یابند. نتایج  $K_I$  حاصل از دو روش انطباق نقطه‌ای و انتگرال  $J$  در طول‌های ترک کم، انطباق خوبی دارند.

۱۶. در صفحات پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب، با افزایش شعاع انتگرال، ضرایب شدت بی بعد شده  $K_I$  و  $K_{IV}$  افزایش می‌یابند و محدوده‌ی تغییرات  $K_I$  بسیار کمتر از محدوده‌ی تغییرات  $K_{IV}$  می‌باشد. همچنین ضریب شدت بی بعد شده الکتریکی با افزایش شعاع انتگرال به سمت عدد خاصی در حال همگرا شدن می‌باشد.

۱۷. در بررسی اثر شبکه بندی صفحه‌ی پیزوالکتریک غیرهمگن با ترک مرکزی تحت بارگذاری مرکب، با افزایش تعداد المان‌ها یا ریزتر شدن شبکه بندی در اطراف نوک ترک، ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  برای هر دو روش انطباق نقطه‌ای و انتگرال  $J$  کاهش می‌یابند.

۱۸. در صفحات پیزوالکتریک همگن و غیرهمگن با ترک مرکزی مایل تحت بارگذاری مرکب، با افزایش زاویه ی ترک نسبت به افق، ضرایب شدت  $K_I$  و  $K_{IV}$  کاهش می یابند؛ اما ضریب شدت  $K_{II}$  ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد.

## ۲-۶- پیشنهادها

- با تعیین ضرایب شدت تنش مکانیکی و الکتریکی در صفحات پیزوالکتریک و پیزوالکتریک تابعی و با توجه به کد نوشته شده، می توان برای ادامه این تحقیق پیشنهادهایی به شرح زیر ارائه نمود:
۱. برای حل دقیق تر مواد پیزوالکتریک و پیزوالکتریک تابعی با روش اجزای محدود توسعه یافته، می توان از توابع غنی سازی جدیدتری استفاده کرد.
  ۲. با توجه به عدم وجود تحلیل های آزمایشگاهی در مورد ترک در مواد تابعی و مواد پیزوالکتریک تابعی و نیز کمبود تحلیل های دقیق در این زمینه، انجام چنین تحقیقاتی به رشد علم در این رشته کمک خواهد کرد.
  ۳. با توجه به رفتار ترد گونه مواد پیزوالکتریک و پیزوالکتریک تابعی، می توان تحلیل های رشد ترک را بر روی این مواد بررسی کرد.
  ۴. از آنجایی که روش المان محدود توسعه یافته جامع بوده، می توان به مطالعه ترک های منحنی وار و به صورت تابع تعریف شده پرداخت.
  ۵. در بررسی انواع بارها، می توان بار دینامیکی و حرارتی را به صفحات پیزوالکتریک و پیزوالکتریک تابعی اعمال نمود.

- [1] Koizumi, M., (1993), "The concept of FGM", *Ceram Trans Func Grad Mater*, vol. 34, pp. 3-10.
- [2] Suresh, S., Mortensen, A., (1998), "Fundamentals of Functionally Graded Materials", *Combridge Publication*, London.
- [3] Rao, B.N., Kuna, M., (2008), "Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded piezoelectric materials", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, pp. 5237-5257.
- [4] Parton, V.Z., (1976), "Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials", *Acta Aeronautica*, vol. 3, pp. 671-683.
- [5] Schneider, G.A., (2007), "Influence of electric field and mechanical stresses on the fracture of ferroelectrics", *Annual Review of Materials Research*, vol. 37, pp. 491-538.
- [6] Allik, H., Hughes, T.J.R., (1970), "Finite element method for piezoelectric vibration", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol, 2, pp. 151–157.
- [7] Kumar, S., Singh, R.N., (1997), "Energy release rate and crack propagation in piezoelectric materials", *Acta Materialia*, vol, 45, pp. 849–868.
- [8] Kuna, M., (2010), "Fracture mechanics of piezoelectric materials – Where are we right now?", *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 77, pp. 309-326.
- [9] Sladek, J., Sladek, V., Zhang, C., Solec, P., Pan, E., (2007), "Evaluation of fracture parameters in continuously nonhomogeneous piezoelectric solids", *International Journal of Fracture*, vol, 145, pp. 313–326.
- [10] Rao, B.N., Rahman, S., (2003a), "Meshfree analysis of cracks in isotropic functionally graded materials", *Engineering Fracture Mechanics*, vol, 70, pp. 1–27.
- [11] Dolbow, J., Gosz, M., (2002), "On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, pp. 2557-2574.
- [12] Rao, B.N., Rahman, S., (2003b), "An interaction integral method for analysis of cracks in orthotropic functionally graded materials", *Computational Mechanics*, vol, 32, pp. 40–51.

- [13] Paulino, G.H., Kim, J.H., (2004), "A new approach to compute T-stress in functionally graded materials by means of the interaction integral method", *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 71, pp. 1907-1950.
- [14] Belytschko, T., Black, T., (1999), "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, pp. 601-620.
- [15] Dos Santos e Lucato, S.L., Lupascu, D.C., Rödel, J., (2000), "Effect of poling direction on R-curve behavior in lead zirconate", *Journal American Ceramic Society*, vol. 83, pp. 424-426.
- [16] Förderreuther, A., Thurn, G., (2002), "R-curve effect, influence of electric field and process zone in BaTiO<sub>3</sub> ceramics", *Journal of the European Ceramic Society*, vol. 22, pp. 2023-2031.
- [17] Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T., (1999), "A finite element method for crack growth without remeshing", *International Journal for Numerical*, vol. 45, pp. 5237-5257.
- [18] Asadpoure, A., Mohammadi, S., (2007), "A new approach to simulate the crack with the extended finite element method in orthotropic media", *International Journal for Numerical Methods in engineering*, vol. 69, pp. 2150–2172.
- [19] Mohammadi, S., (2002), "Eextended finite element method", *Wiley/Blackwell Publishing*, UK.
- [۲۰] اصفهانی، ش و محمدی، س؛ اردیبهشت ۱۳۸۹، "تحلیل ترک بین لایه‌ای در مواد کامپوزیت با استفاده از روش اجزا محدود توسعه یافته (X-FEM)"، پنجمین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد، ایران.
- [21] Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., Belytschko, T., (2000), "Extended finite element method for threedimensional crack modeling", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, pp. 1549-1570.
- [22] Rice, J.R., (1968), "Path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *Journal of Applied Mechanics (Transactions ASME)*, vol. 35, pp. 379-386.
- [23] Bhargava, R.R., Sharma, K., (2011), "A study of finite size effects on cracked 2-D piezoelectric media using extended finite element method", *Computational Material Science*, vol. 50, pp. 1834-1845.

- [24] Osher, S., Sethian, J.A., (1988), "Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations", *Journal of Computational Physics*, vol. 79, pp. 12-49.
- [25] Stolarska, M., Chopp, D.L., Moës, N., Belytschko, T., (2001), "Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, pp. 943-960.
- [26] Shih, C.F., de Lorenzi, H.G., German, M.D., (1976), "Crack extension modeling with singular quadratic isoparametric elements", *International Journal of Fracture* vol. 12, pp. 647-658.
- [27] Eischen, J.W., (1987), "Fracture of nonhomogeneous materials", *International Journal of Fracture*, vol. 34, pp. 3-22.
- [28] Suo, Z., Kuo, C.M., Barnett, D.M., Willis, J.R., (1992), "Fracture mechanics for piezoelectric ceramics", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, vol. 40, pp. 739-765.
- [29] Ou, Z.C., Chen, Y.H., (2003), "Explicit expressions of eigenvalues and eigenvectors for transversely isotropic piezoelectric materials", *Acta Mechanica*, vol. 162, pp. 213-219.
- [۳۰] عابدزاده، هاشم؛ پایان نامه کارشناسی ارشد، تابستان ۱۳۸۹ تعیین تابع رهایی انرژی کرنشی در صفحات FGPM  
ترکدار به کمک روش بدون المان گالرکین، دانشگاه صنعتی شاهرود
- [31] Ricoeur, A., Kuna, M., (2009), "Electrostatic tractions at crack faces and their influence on the fracture mechanics of piezoelectrics", *International Journal of Fracture*, vol. 157, pp. 3-12.
- [32] Chessa, J., (2002), "Programing the Finite Element Method with Matlab", *Northwestern University*.
- [33] Bui, T.Q., Zhang, C., (2012), "Extended finite element simulation of stationary dynamic cracks in piezoelectric solids under impact loading", *Computational Materials Science*, vol. 62, pp. 243-257.

[۳۴] شریعتی، محمد رضا و فرزین، محمود؛ بهار ۱۳۷۹، *تحلیل اجزای محدود کاربردی*، انتشارات دانشگاه صنعتی

اصفهان

- [35] Béchet, E., Scherzer, M., Kuna, M., (2009), "Application of the X-FEM to the fracture of piezoelectric materials", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, pp. 1535-1565.



## واژه نامه فارسی به انگلیسی

Rectangular Coordinate	مختصات استوانه‌ای	Extended Finite Element	المان محدود توسعه یافته
Indentation Fracture Experiment	آزمایش شکست دندان‌دار	Conservation	پایستار
Singular	تکینگی	Stress Intensity Factor	ضریب شدت تنش
Point Matching Method	روش انطباق نقطه‌ای	Displacement Correlation Technique	روش همبستگی تغییر مکان
Crack	ترک	Crack Angle	زاویه ترک
Node	گره	Equivalent Domain Integral	انتگرال سطحی معادل

## واژه نامه انگلیسی به فارسی

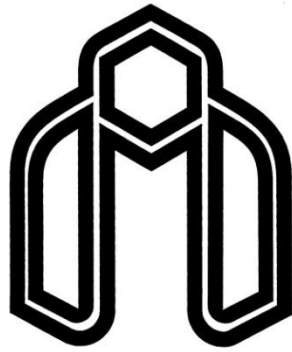
Node	گره	Displacement Correlation Technique	روش همبستگی تغییر مکان
Crack	ترک	Equivalent Domain Integral	انتگرال سطحی معادل
Point Matching Method	روش انطباق نقطه‌ای	Conservation	پایستار
Stress Intensity Factor	ضریب شدت تنش	Indentation Fracture Experiment	آزمایش شکست دندان‌دار
Extended Finite Element	المان محدود توسعه یافته	Singular	تکینگی
Crack Angle	زاویه ترک	Rectangular Coordinate	مختصات استوانه‌ای

## **Abstract**

In this research, the determination of mechanical stress intensity factor and electrical intensity factor in cracked piezoelectric materials and cracked FGP materials is studied. The numerical method used in this research is extended finite element method (X-FEM). The computer program is written in MATLAB that contain main program and some subprograms. Mechanical and electrical intensity factors in FG and FGP plates with central, edge and oblique crack are investigated after computational of mechanical displacements, electrical potential, also stresses and electrical siplacements.

Based on results, the effect of mechanical load on electrical intensity factor and the effect of electrical load on stress intensity factor are inconsiderable. Also, analyzing the effect of crack angle, mechanical stress intensity factor mode I and electrical intensity factor decrease and mechanical stress intensity factor mode II decreases, first and finally increases with increasing of crack angle.

**Keywords:** Crack, FGPM, X-FEM, Electrical and Mechanical Intensity Factor.



**Shahrood University of Technology**  
**Faculty of Mechanical Engineering**

**Determination of stress intensity factors in  
cracked functionally graded piezoelectric  
material plates by extended finite element  
method**

Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of  
Master of Science (M.Sc)

**Ehsan Obridokht**

Supervisors

**Dr. M. Shariati**

**Dr. M. B. Nazari**

**Date: September 2013**