



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک - گرایش تبدیل انرژی

عنوان:

**تحلیل عددی انتقال حرارت توأم (اجباری - طبیعی) سیال
ویسکوالاستیک در کانال مستطیلی برای جریان آرام و توسعه یافته**

استاد راهنما: دکتر محمد حسن کیهانی

استاد مشاور: دکتر فرهاد طالبی

ارائه دهنده: مهدی اسدی

تیر ۱۳۸۵

تقدیم به پدر و مادرم که

همیشه پشتیبانم در تمام مراحل

زندگی و تحصیلم بوده اند.

تشکر و قدردانی:

با تشکر از استاد گرامی آقای دکتر محمد حسن کیهانی که در دوران تحصیل و انجام پروژه مرا یاری نمودند و قدردانی از زحمات جناب آقای دکتر فرهاد طالبی که با راهنماییهای ایشان انجام این پروژه مقدور گردید. از زحمات و همفکریهای دوست عزیز جناب مهندس محمود نوروزی نیز تشکر می نمایم.

چکیده:

تحلیل انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانالهای غیر مدور به دلیل غیر خطی بودن معادله متشکله سیال و هندسه کانال، از پیچیدگی خاصی برخوردار است. این مساله منجر به بروز پدیده های خاص در جریان مستقیم الخط می شود. به عبارت دیگر یک جریان ثانویه ضعیف در مقطع کانال تشکیل می شود که می تواند تاثیر زیادی در افزایش ضریب انتقال حرارت داشته باشد. در این پروژه ابتدا به این جریانهای ثانویه با استفاده از مدل رئولوژیکی مناسب که مدل غیر خطی تعمیم یافته CEF (Criminale Ericksen Filbey) می باشد، دست می یابیم و میزان بزرگی این جریان ثانویه و وابستگی آن به مشخصه های سیال و جریان و هندسه کانال را مورد بررسی قرار می دهیم.

در بخش بعد تاثیر این اثر بر ضریب انتقال حرارت در جابجایی اجباری مورد تحلیل قرار گرفته و پروفیلهای دما در هر سه صفحه را بدست می آوریم. تاثیر خواص رئولوژیکی نیز بر انتقال حرارت در حالت اجباری بررسی گردیده اند.

در انتها به اثر جابجایی آزاد بر جریان ثانویه و انتقال حرارت پرداخته که این موضوع تا به حال در مطالعات قبلی مشاهده نگردیده است. پارامترهای مؤثر بر جابجایی آزاد نیز مورد بررسی قرار گرفته اند.

کلمات کلیدی:

انتقال حرارت توأم - سیال ویسکوالاستیک - کانال مستطیلی - جریانهای ثانویه - مدل رئولوژیکی

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل اول

- مقدمه ۲
- ۱-۱- تاریخچه ۲
- ۲-۱- معرفی و اهمیت موضوع تحقیق ۶
- ۳-۱- محدوده و اهداف این پژوهش ۷

فصل دوم

- سیالات ویسکو الاستیک ۱۰
- ۱-۲- معرفی سیالات ویسکو الاستیک ۱۰
- ۲-۲- بررسی پدیده های مربوط به سیالات ویسکو الاستیک ۱۴
- ۳-۲- مدل های سیال غیر نیوتنی ۳۰
- ۴-۲- معادلات اساسی ۴۱

فصل سوم

- ۱-۳- الگوریتم های تحلیل مسائل پایدار ۴۷
- ۲-۳- نحوه تولید مش ۵۰
- ۳-۳- نحوه گسسته سازی ۵۲
- ۴-۳- نحوه اعمال شرایط مرزی ۵۸
- ۵-۳- نحوه اجرای روش علامت گذاری و سلول ۶۱

فصل چهارم

نتیجه گیری و بحث	۶۳
۱-۴- بررسی آنالیز دقت	۶۳
۲-۴- معرفی مسئله	۶۴
۳-۴- پروفیل های سرعت در کانال	۶۷
۴-۴- پروفیل های دما در حالت توسعه یافته در کل کانال	۷۲
۵-۴- بررسی اثر طول به عرض کانال در قطر هیدرولیکی ثابت	۷۴
۶-۴- تاثیر ثابت رئولوژیک C_{N21} بر روی سرعت جریانهای گردابه ای	۷۶
۷-۴- نتایج انتقال حرارت در حالت اجباری	۷۷
۸-۴- نتایج انتقال حرارت در حالت جابجایی آزاد	۸۱
۹-۴- بررسی تغییرات دبی بر اثر تغییر در اختلاف دما و ضریب β	۸۸
۱۰-۴- محدودیتهای روش استفاده شده	۹۰
مراجع و ماخذ	۹۱
ضمائم	۹۴

فصل اول

مقدمه

۱-۱- تاریخچه

سیصد سال پیش همه چیز برای هوک و نیوتن سادگی فریبنده‌ای داشت و برای دو قرن حقیقتاً مدل خطی هوک در جامدات و مدل خطی نیوتنی در سیالات مورد پذیرش همگان بود. مدل نیوتنی برای اغلب سیالات مناسب بود و احتمالاً مردم می‌پنداشتند که این قانون مثل قوانین مشهور نیوتن درباره جاذبه و حرکت عمومیت دارد.

شک دانشمندان در قرن نوزدهم آغاز شد. ویلهلم وبر در آزمایش با نخ ابریشم دریافت که این ماده کاملاً الاستیک نیست. او نوشت: یک بارگذاری طولی در نخ باعث افزایش ناگهانی طول می‌شود و با گذشت زمان افزایش تدریجی طول مشاهده می‌شود. با حذف بارگذاری نیز انقباض ناگهانی دیده می‌شود و سپس کاهش تدریجی طول تا رسیدن به طول اصلی رخ می‌دهد. در اینجا جسم جامدی است که رفتارش با قانون هوک توجیه نمی‌شود. نوعی جریان در این تغییر شکل وجود دارد که بیشتر به جریان مایعات شباهت دارد.

در سیالات نیز، نوشتهٔ جیمز ماکسول در دائره‌المعارف بریتانیکا با عنوان تئوری دینامیک گازها تحول‌شگرفی ایجاد کرد. در این مقاله مدل ریاضی برای سیالاتی که دارای رفتار الاستیک هستند، پیشنهاد شد که بعدها مدل ماکسول نامیده شد. رفتار الاستیک مایعات و رفتار لزج جامدات با عبارت ویسکوالاستیک بهتر بیان می‌شود. به این ترتیب شاید بهتر باشد که مرز تقسیم‌کننده کیفی بین مایع و جامد قائل نباشیم. تنها یک اختلاف کمی در ویسکوزیته یا الاستیسیته

که می‌تواند در حد چند ده برابر متفاوت باشد ، آنها را از هم جدا می‌کند . همان طور که واژه سیال برای گازها و مایعات که لزجت بسیار متفاوتی دارند ، به کار برده می‌شود .

اما در تقسیم‌بندی متداول علوم ، مکانیک جامدات عموماً حرکت و تغییر شکل جامدات هوکی و مکانیک سیالات حرکت و تغییر شکل سیال نیوتنی بر پایه معادلات ناویر – استوکس را شامل می‌شود . بررسی حرکت و تغییر شکل موادی که بین دو حد کلاسیک قرار دارند با عنوان رئولوژی انجام می‌شود .

تا دهه اول قرن بیستم تنها مطالعات پراکنده‌ای در موضوع رئولوژی انجام شد . در جنگ جهانی اول موادی که برای شعله‌افکن‌ها استفاده شد ، ویسکوالاستیک بودند و این باعث انجام تحقیقات اساسی در این زمینه شد . از آن پس با اهمیت یافتن صنایع فیبر مصنوعی و فرایند پلاستیک و همچنین ظهور مایعات شوینده ، روغن‌های چند درجه‌ای ، رنگ‌های چکه‌نکننده و چسب‌ها ، رئولوژی اهمیت روزافزونی یافت . تحولات مهمی در صنایع غذایی ، مواد شیمیایی و تحقیقات دارویی جدید وجود دارد که در ارتباط با بیورئولوژی است . در حقیقت ساخت مواد با روش‌های بیوتکنولوژی نیاز به فهم کاملی از رئولوژی دارد و ارتباط این شاخه از علوم با زندگی در نیمه دوم قرن بیستم آشکار شده است .

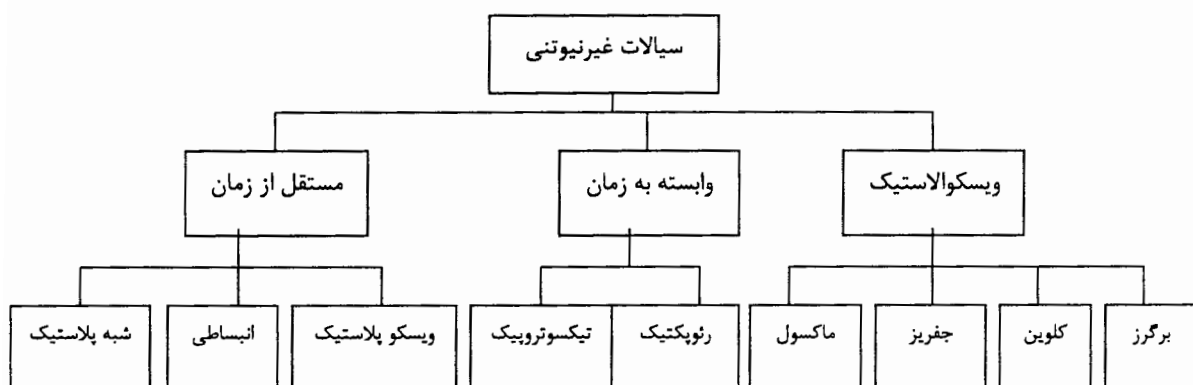
اما در رئولوژی سیال غیرنیوتنی چند نکته مهم وجود دارد که وجه تمایز این مواد با سیال نیوتنی را مشخص می‌کند . در اینجا یکی از مشخصه‌ها ، که عموماً در منابع و مراجع به عنوان وجه تمایز اصلی شناخته شده است ، به طور کیفی عنوان می‌شود و آن رابطه بین تنش برشی و نرخ تغییر شکل است .

در سیال نیوتنی تنش برشی متناسب با نرخ تغییر شکل است و ضریب تناسب ، لزجت یا ویسکوزیته نامیده می‌شود که در دما و فشار مشخص ، مقدار ثابتی است . در سیال غیرنیوتنی نسبت تنش برشی به نرخ برش ثابت نیست و می‌تواند تابعی از نرخ تغییر شکل و مدت زمان اعمال

آن باشد و این تابع را لزجت ظاهری می‌گویند. اگر با افزایش نرخ تغییر شکل ویسکوزیته سیال کاهش یابد، که عموماً این گونه است، سیال را شبه پلاستیک و اگر ویسکوزیته افزایش یابد، سیال را انبساطی نامند.

حتی موادی که با اعمال تنش کم، تا حد تنشی مشخص به نام تنش تسلیم، جاری نمی‌شوند، اما با زیاد شدن تنش مانند سیال به حرکت درمی‌آیند، در گروه سیالات غیرنیوتنی قرار می‌گیرند. این مواد را ویسکوپلاستیک نامیده‌اند.

ویسکوزیته سیالات وابسته زمانی تابعی از مدت زمان اعمال تنش یا نرخ تغییر شکل است. در جریان این مواد: اگر با گذشت زمان ویسکوزیته کاهش یابد، سیال را تیکسوتروپیک و اگر افزایش یابد، سیال را رئوپکتیک نامیده‌اند.



شکل ۱-۱ تقسیم‌بندی سیالات غیرنیوتنی

عامل اصلی رفتارهای فوق را باید در ساختار مولکولی مواد جستجو کرد. سیالات نیوتنی عموماً مواد میکرومولکولی و سیالات غیرنیوتنی ماکرومولکولی هستند. از نظر شیمیایی یک ماکرومولکول یا پلیمر از تعداد زیادی واحدهای ساده و کوچک که واحد ساختمانی نامیده شده، تشکیل می‌شود. در بعضی از پلیمرها هر واحد ساختمانی به دو واحد دیگر مربوط شده و زنجیره حاصل،

ماکرومولکول خطی نامیده می‌شود. در پلیمرهای دیگر اگر چه اغلب واحدهای ساختمانی به دو واحد متصل شده‌اند، بعضی واحدها سه یا چهار یا تعداد بیشتری از واحدها را به یکدیگر مرتبط می‌کنند. این پلیمرها را شاخه‌ای می‌نامند. در بعضی دیگر تمام واحدهای ساختمانی به هم مرتبط بوده و یک ساختمان شبکه‌ای با وابستگی محوری سه بعدی ایجاد می‌شود. اما چنین موادی غالباً دارای فاز مایع نیستند.

بسیاری از پلیمرها به طور مصنوعی و در فرآیند پلیمریزاسیون ایجاد می‌شوند. این پلیمرها اگر از یک نوع واحد ساختمانی تشکیل شده باشند، مانند پلی‌اتیلن یا پلی‌استیرن و پلی‌وینیل کلراید، هموپلیمر و اگر از نوع انواع مختلف واحدهای ساختمانی تشکیل شده باشند، کوپلیمر نامیده می‌شوند. هدف از تولید کوپلیمرها دستیابی به موادی است که خواص مکانیکی مناسب‌تری نسبت به هموپلیمرها داشته باشند. مثلاً لاستیک SBR کوپلیمری از استیرن و بوتادین است که به لحاظ مقاومت در برابر لغزش، مشخصه‌های بهتری نسبت به عوامل تشکیل دهنده‌اش دارد و برای لاستیک اتومبیل مناسب است.

ماکرومولکول‌های طبیعی یا بیولوژیکی، برخلاف ماکرومولکول‌های صنعتی، عموماً از تعداد زیادی واحدهای ساختمانی تشکیل شده‌اند. برای مثال پلی‌پپتاید که پروتئین را می‌سازد شامل حدود بیست واحد ساختمانی مختلف است. از دیگر ماکرومولکول‌های بیولوژیکی، ویروس‌ها و مولکول‌های جالب DNA هستند که در ساختمان خود کلیدی برای مشخصه‌های وراثتی ارگانیزم‌ها را حمل می‌کنند.

عموماً پلیمرها با جذب حلال خود به صورت ژله‌ای درآمده و سپس در حلال خود جاری می‌شوند. از موارد خاص و مهم در هیدرودینامیک ماکرومولکول‌ها، گسیختگی زنجیره پلیمرهاست که به واسطه نرخ کرنش زیاد رخ می‌دهد. این پدیده توزیع وزن مولکولی پلیمر را تغییر داده و باعث

کاهش مداوم لزجت می‌شود. به‌علاوه کاهش طول زنجیره می‌تواند اثرات عمیقی در کاربردهای پلیمر داشته باشد.

به‌طور خلاصه، چندین ویژگی برجسته در ساختمان ماکرومولکول‌ها وجود دارد که رفتار رئولوژیکی آنها را تحت تأثیر قرار می‌دهد:

- وزن مولکولی آنها خیلی زیاد است، محدوده 10^4 تا 10^9 معمول است.
- به ندرت با ماکرومولکولی سروکار داریم که تمام مولکول‌های آن وزن مولکولی یکسانی داشته باشند، بلکه مخلوطی داریم که در آن توزیع وزن مولکولی وجود دارد.
- به لحاظ وضعیت مولکولی در ماکرومولکول‌ها تنوع زیادی وجود دارد (حتی در حال تعادل). توزیع وضعیت ماده در میدان جریان می‌تواند تغییر یابد و گسترش یا جهت‌گیری خاص مولکول‌ها می‌تواند باعث تغییر خواص شود.
- در محلول‌های غلیظ یا خمیری، مولکول‌ها می‌توانند شبکه‌های درهم فرورفته موقتی تشکیل دهند. وضعیت و تعداد گره‌های این شبکه‌ها در طی زمان با وضعیت جریان تغییر می‌یابد.
- مجموعه مطالب فوق از پیچیدگی و در عین حال جاذبه تحقیقات در زمینه سیال غیرنیوتنی حکایت دارد. علوم ریاضی، فیزیک، شیمی، مهندسی مکانیک یا شیمی و علم مواد از جمله دانش‌هایی است که برای تحلیل نسبتاً جامع رئولوژی و مباحث مرتبط با آن مورد نیاز است.

۱-۲ - معرفی و اهمیت موضوع تحقیق

جریان و انتقال حرارت سیال در مجرای مستطیلی کاربردهای وسیعی در مبدل‌های حرارتی دارد. از طرفی صنایع مختلف مانند: رنگسازی، مواد غذایی، بیوشیمی، پتروشیمی و صنایع پلاستیک با موادی سروکار دارند که رفتارشان متفاوت با سیال نیوتنی است و غیرنیوتنی نامیده شده‌اند. از آنجا که این صنایع اغلب با فرآیندهای حرارتی همراه هستند، درک رفتار

هیدرودینامیکی و حرارتی مواد غیرنیوتنی با مشخصه رئولوژیکی پیچیده، لازمه طراحی و تحلیل صحیح عملکرد چنین سیستم‌هایی است.

بررسی‌های تئوریک و تجربی در تعیین پروفیل سرعت، ضریب اصطکاک و انتقال حرارت سیال نیوتنی در جریان آرام داخل کانال و شرایط حرارتی مختلف به میزان زیادی انجام شده است و نتایج مربوطه در مقالات دیده می‌شود. اما چنین بررسی‌هایی در مورد سیال غیرنیوتنی تنها در جریان داخل لوله، جریان بین صفحات موازی و تعداد معدودی از مجاری مستطیلی گزارش شده است.

در دهه اخیر به واسطه توسعه صنایع پلاستیک و مواد پلیمری، پژوهش‌های تجربی زیادی در مورد انتقال حرارت سیال غیرنیوتنی انجام شده است. اگرچه در این پژوهش‌ها از مواد و هندسه خاص استفاده شده است، اما پدیده‌های جالبی را در جریان آرام سیال ویسکوالاستیک نشان می‌دهد. به ویژه افزایش محسوس ضریب انتقال حرارت در مجاری غیرمدور حائز اهمیت است.

۱-۳ - محدوده و اهداف این پژوهش

هدف اصلی این تحقیق دستیابی به جریان ثانویه در جریان آرام و توسعه یافته سیال ویسکوالاستیک و بررسی اثر آن بر انتقال حرارت جابجایی اجباری و آزاد است. نسبت‌های طول به عرض مختلف و شرایط حرارتی دمای ثابت در دیواره‌ها بررسی شده است. اگر تغییرات دمای سیال در حین گرمایش زیاد نباشد، می‌توان خواص ترموفیزیکی و رئولوژیکی را ثابت فرض کرد. انتخاب معادله متشکله سیال ویسکوالاستیک اهمیت زیادی در پیش‌بینی رفتار آن دارد. معادله انتخابی علاوه بر اینکه بر اساس نتایج تجربی برای سیال واقعی حاصل می‌شود، می‌بایست:

اولاً - قابلیت پیش‌بینی اثرات الاستیسیته سیال در ایجاد جریان ثانویه را دارا باشد.

ثانیاً - از سادگی کافی در رسیدن به حل عددی برخوردار باشد.

اهداف پروژه به شرح ذیل می باشد:

- تعیین معادله متشکله و توابع رئولوژیکی مناسب
- دستیابی به جریان ثانویه و بررسی اثر پارامترهای جریان و سیال بر آن
- تحلیل انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال با شرط مرزی مورد نظر
- اثر جابجایی اجباری بر جریان ثانویه و انتقال حرارت
- اثر جابجایی آزاد بر جریان ثانویه و انتقال حرارت

فصل دوم

سیالات ویسکوالاستیک

۱-۲- معرفی سیالات ویسکوالاستیک

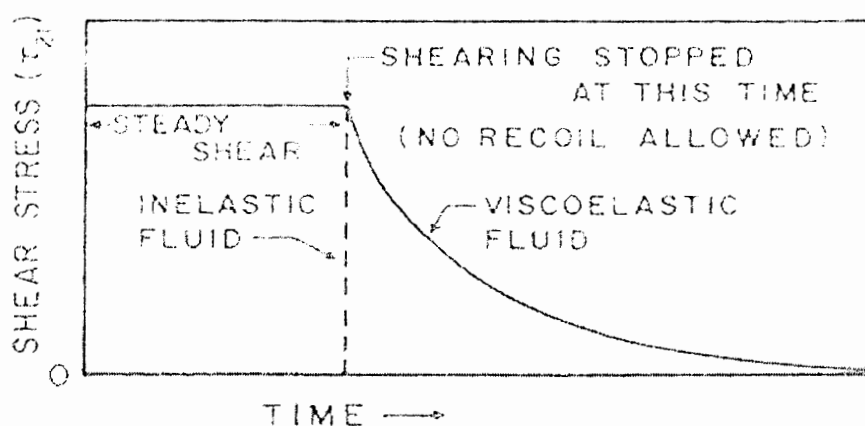
این مواد هم خاصیت ویسکوز هم خاصیت الاستیک را توأمأ دارا می باشند . در یک جامد الاستیک ایده آل رابطه بین تنش و کرنش مستقل از زمان است ولی در یک ماده الاستیک تنش لازم جهت حفظ یک کرنش ثابت به مرور زمان کاهش می یابد . از طرف دیگر ، بر خلاف سیالات مستقل از زمان پس از قطع تنشی که موجب جریان یافتن یک سیال ویسکو الاستیک شده است بخشی از تغییر شکل به تدریج باز خواهد گشت. مثالهایی از سیال ویسکو الاستیک عبارتند از: قیرها، خمیر نان، اغلب محلولها و مذابهای پلیمری مثل نایلون، محلول ژلاتین، ناپالم، بسیاری از محلولهای پلیمری . تعلق اکثر مواد پلیمری به این گروه سبب کسب اهمیت فراوان آن گشته است. در مواد تیکسو تروپیک و رئوپکتیک ساختمان (و در نتیجه ویسکوزیته) تابع آخرین شرایط برش دهی است ولی در مواد ویسکوالاستیک ماده دارای یک حافظه Memory جهت دار از آخرین تغییر شکلهای است. این موضوع سبب بروز پدیده هایی چون آسودگی از تنش Stress Relaxation و بازگشت الاستیک Elastic Recoil می شود. حال برای درک مفهوم این سیالات دو آزمایش بنیادی و مفید را بیان می کنیم [۱].

۱-۱-۲- آزمایش ۱

آزمایشی را در نظر می گیریم که طی آن ماده در معرض برش دهی ساده قرار می گیرد و بعد به طور ناگهانی عمل برش دهی قطع می شود و ضخامت مرزی همچنان در موقعیت اولیه خود نگه داشته می شوند. اگر ماده مورد بحث یک سیال نیوتنی یا هر سیال غیر الاستیک دیگری بود

در آن صورت پس از قطع عملیات برش دهی هیچ تنش برای نگه داشتن صفحات در وضعیت اولیه خود لازم نمی بود.

بنابراین می توان گفت که پس از قطع برش مداوم آسودگی در تنش در مواد غیر الاستیک آنی است . اما اگر ماده مورد مطالعه ویسکوالاستیک بوده باشد تنش نمی تواند به طور آنی به صفر برسد و یک منحنی برای آسودگی از تنش بدست می آید . همانگونه که در شکل (۱-۲) نشان داده شده است [۱].

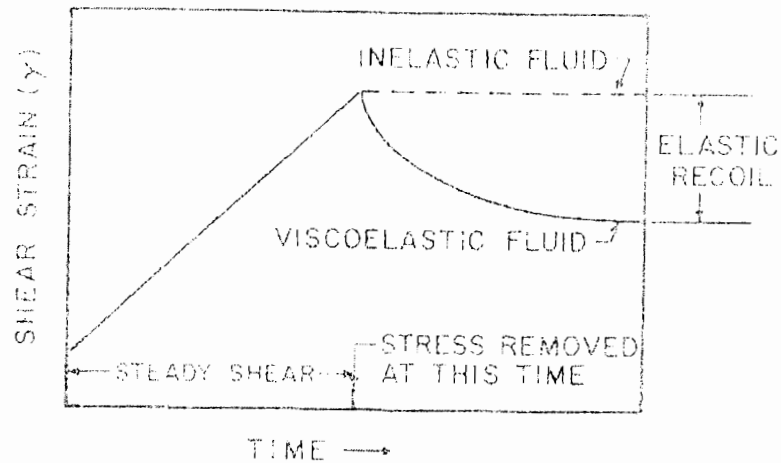


شکل ۱-۲- آسودگی از تنش بعد از قطع برش مداوم [۱]

۲-۱-۲- آزمایش ۲

اکنون آزمایش دیگری را در نظر بگیرید که طی آن یک عمل برش دهی مداوم مثل آنچه که در شکل قبل نمایش داده شده است. با برداشته شدن تنش برشی از صفحه بالایی (یعنی صفحه متحرک) به طور ناگهانی قطع می شود . اگر ماده بین صفحات یک سیال نیوتنی یا هر نوع سیال غیر الاستیک دیگری بوده باشد صفحه بالایی پس از قطع نیروی وارده بر آن بسادگی متوقف می شود. اما اگر ماده مورد نظر یک سیال ویسکو الاستیک بوده باشد صفحه بالایی تا حدی به عقب باز خواهد گشت اما این برگشت الاستیک Elastic Recoil آنی نخواهد بود زیرا مکانیزم ویسکوز سبب کند شدن حرکت خواهد گشت .

شکل (۲-۲) نشان دهنده منحنی کرنش در مقابل زمان برای یک ماده ویسکوالاستیک است که بازگشت الاستیک را نمایش می دهد [۱].



شکل ۲-۲- بازگشت کرنش (بازگشت پس از قطع تنش مداوم) [۱]

از بحثهای به عمل آمده مشخص است که خواص رئولوژیکی مواد ویسکو الاستیک در هر لحظه تابع وضعیت پیشین آن می باشند و نمی توانند صرفاً با رابطه بین تنش برشی و شدت برش بیان گردند . بدین منظور استفاده از مشخصات زمانی این دو کمیت نیز ضروری است . در تئوریهای مختلف ویسکوالاستیسیته ، عکس العمل الاستیک ماده به شکلهای گوناگونی در مدل‌های رئولوژیکی وارد گردیده است . بطور مثال اولدروید (Oldroyd) اولین کسی بود [۱] که در سال ۱۹۰۵ فرمولی برای سیالات ویسکوالاستیک پیشنهاد نموده است و اظهار داشت که این فرمول برای تغییر شکلهای بزرگ معتبر است. هر چند فرمول اولدروید یکی از بهترین معادلات عمومی موجود برای توضیح رفتار سیستمهای پلیمری ، که متحمل تغییر شکلهای بزرگ می گردند ، می باشد . ولی بسیار ساده تر از آن است که مبنایی جهت روشهای طراحی مهندسی گردد. معادلات مختلف دیگری برای توضیح ویسکوالاستیسیته پیشنهاد شده اند که هنوز نتوانسته اند توسط آزمایشات تجربی مورد حمایت قرار گیرند و لذا باندازه معادله اولدروید موفقیت کسب نکرده اند . این معادله به این صورت بیان می شود:

$$\tau + \lambda_1 \frac{d\tau}{dt} = \frac{\mu^*}{g_c} \left(\frac{d\delta}{dt} + \lambda_2 \frac{d^2\delta}{dt^2} \right) \quad (1-2)$$

توسط معادله فوق تنش برشی و شدت برش سیالات ویسکوالاستیک به یکدیگر مربوط می شوند. در واقع معادله فوق یک رابطه خطی بین این دو کمیت و مشتقهای آنها نسبت به زمان است. در این رابطه سه ثابت وجود دارند، یکی ویسکوزیته یا μ^* است و دو ثابت دیگر زمانهای آسودگی Relaxation Times هستند. بدیهی است که زمانهای آسودگی دارای اهمیت فیزیکی می باشند. در واقع اگر حرکت به طور ناگهانی متوقف شود تنش برشی بصورت یک تابع نمایی از $(-t/\lambda_1)$ کاهش می یابد و اگر تنش برداشته شود شدت کرنش بصورت یک تابع نمایی از $(-t/\lambda_2)$ کاهش پیدا می کند. کمیت μ^* ویسکوزیته نیوتنی است که تحت شدتهای برش خیلی پایین در سیال مشاهده می شود. اگر $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$ شوند معادله اولدروید به یک معادله نیوتنی تبدیل خواهد گشت و اگر $\lambda_2 = 0$ گردد معادله ماکسول بدست خواهد آمد که شکل ساده تری از این معادله است. لازم به تذکر است که معادله اولدروید برای شدت های برش پایین به دست می آید. با توجه به کارایی معادله اولدروید صرفا در شدتهای برش پایین، طبیعی است که یافتن رابطه ای عمومی بین تنش و گرادیان سرعت که تمام شرایط برش دهی صادق باشد از اهمیت فراوانی برخوردار است. اولدروید در ادامه کارهای خود مشاهده کرد که معادلات عمومی مشابه زیادی می توانند بنحوی ساخته شوند که اگر گرادیانهای سرعت و تنشها به اندازه کافی کوچک باشند تا مربعات آنها و یا حاصلضرب آنها قابل صرفنظر کردن باشند این معادلات به رابطه اولدروید خلاصه گردند. هیچکدام از شکلهای احتمالی این معادلات نمی توانند بین تنش و گرادیان سرعت یک رابطه ای خطی برقرار نمایند. یکی از ساده ترین شکلهای این معادلات عمومی توسط اولدروید مورد بحث قرار گرفته است [۱].

۲-۲- بررسی پدیده های مربوط به سیالات ویسکوالاستیک

با توجه به اهمیت یکسری از پدیده های جریان در سیالات غیر نیوتنی ابتدا به توضیح مختصری در مورد اختلافات تنش نرمال در سیالات غیر نیوتنی می پردازیم و سپس به معرفی تک تک پدیده ها با جزئیات لازمه می پردازیم.

۲-۲-۱- اختلاف تنشهای نرمال

بطور کلی در سیالات نیوتنی هیچ اختلاف و تفاوتی بین تنشهای نرمال نداریم یعنی دو تانسور تنش اعضای قطر اصلی همگی یک مقدار را نشان می دهند.

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} \quad (۲-۲)$$

اما در یک سیال غیر نیوتنی یک اختلاف و تفاوتی بین تنشهای نرمال وجود دارد که در اصل منشأ اکثر پدیده ها در سیالات غیر نیوتنی و ویسکوالاستیک به این اختلاف تنشهای نرمال برمی گردند. برای سه جزء تنشهای نرمال ما می توانیم فرم دوتایی زیر را داشته باشیم.

$$N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} \quad (۱-۳-۲)$$

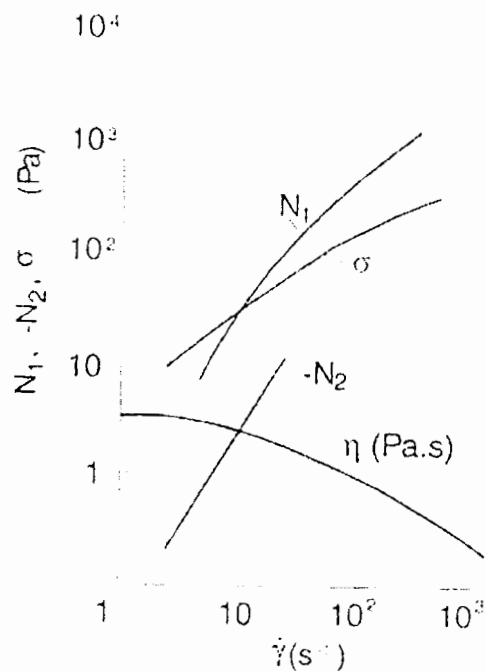
$$N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} \quad (۲-۳-۲)$$

که N_1 اختلاف تنشهای نرمال اول و N_2 اختلاف تنشهای نرمال دوم نامیده می شود. این اختلاف تنشهای نرمال نیز تابعی از نرخ برش $\dot{\delta}$ می باشند که می توان ضریب تنش نرمال اول و دوم را به صورت زیر تعریف کرد:

$$V_1 = \frac{N_1}{\dot{\delta}} \quad (۱-۴-۲)$$

$$V_2 = \frac{N_2}{\dot{\delta}} \quad (۲-۴-۲)$$

اختلاف تنش نرمال و ویسکوزیته برشی جزء توابع ویسکومتریکی می باشند. در شکل (۳-۲) اندازه گیری های مربوط به یک مایع مشخص با مشخصات ویسکومتریکی مربوطه نشان داده شده است.



شکل ۲-۳- توابع ویسکومتریکی برای یک نمونه سیال ویسکوالاستیک [۴]

N_1 اختلاف تنش نرمال اول و N_2 اختلاف تنش نرمال دوم است و σ تنش برشی می باشد. محلول مورد نظر ما پلیزوباتیلین می باشد. بدلیل کوچکی مقدار اختلاف تنش نرمال دوم معمولا اندازه گیری آن انجام نمی شود. چون مقدار N_2 منفی است در شکل $-N_2$ نمایش داده شده است و بزرگی آن حدود ۱۰٪ مقدار N_1 می باشد.

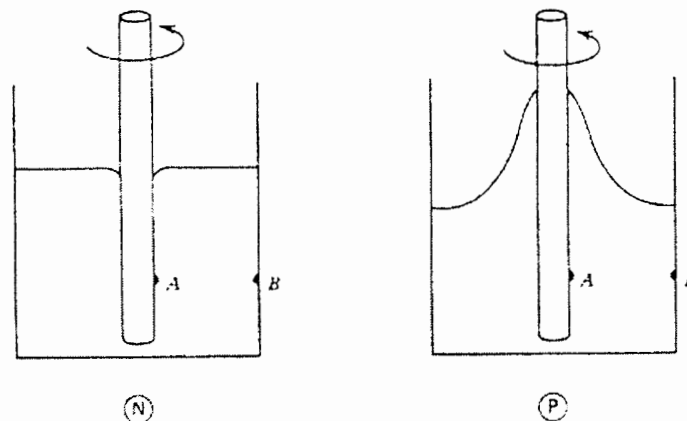
بطور کلی در سیالات غیر نیوتنی، تنشهای غیر عادی به وجود آمده سبب بروز یکسری اثرات و پدیده ها می باشد. اساسا توضیح رفتار سیالات غیر نیوتنی با تصحیح مقدار کمی در رفتار سیالات نیوتنی امکان پذیر است. حال با بیان این مطالب به معرفی تک تک پدیده های معروف در سیالات ویسکوالاستیک می پردازیم [۴].

۲-۲-۲- میله بالا رونده (Rod-Climbing)

این پدیده گاهی وقتها با نام اثر Weissenberg ذکر می شود، چرا که شخصی به نام وایزنبرگ اولین بار این اثر را در ترمهای تنش سیالات تحت تحمل برشی پایدار نشان داد.

البته مشاهده این اثر قبلا توسط Nisson , Garner انجام گرفته بود. در طراحی وسایل مخلوط کن این اثر حتما باید مد نظر گرفته شود. بطور کلی هنگامی که یک میله در سیال ویسکوالاستیک می چرخد سیال از میله شروع به بالا آمدن می کند. این بالا آمدگی از سطح آزاد مایع نزدیک به میله بیشتر است. این پدیده بدون میله در حال گردش هم می تواند به وقوع بپیوندد. اگر یک دیسک گردان در پایین ظرف موجود باشد یک برآمدگی در بالای سطح آزاد سیال بوجود می آید. به منظور توضیح بیشتر به شکل (۲-۴) توجه کنید. نقاط A و B در یک ارتفاع از بشر قرار دارند. در یک سیال نیوتنی فشار سیال در نقطه B بیشتر از فشار سیال در نقطه A است. این نتایج همان نتایجی است که در نیروی گریز از مرکز حاصل می گردند.

اما برای یک سیال ویسکوالاستیک (پلیمری) فشار در نقطه A بزرگتر از فشار در نقطه B است. این اختلاف فشاری می تواند راهی برای اندازه گیری نیروهایی که در یک محلول پلیمری می باشند و با نیروی گریز از مرکز مخالفت می کنند را به ما بدهند.



شکل ۲-۴- مقایسه اختلاف فشاری در سیال نیوتنی و سیال ویسکوالاستیک (پلیمری) [۳]

توضیح جریان حلقوی مماسی

سیالی در بین دو سیلندر هم محور عمودی قرار گرفته است. سیلندر داخلی با سرعت زاویه ای ثابت در حال گردش است. این روش ساده سازی جریان در نزدیکی نقاط A و B را بهمراه دارد. اگر ما معادلات را در سیستم مختصات استوانه ای توضیح دهیم، می توانیم ثابت کنیم در سیال نیوتنی فشار در نقطه B بیشتر از نقطه A است.

با توجه به اینکه جریان آرام و پایدار است، یک ذره سیال مسیر دایره در مرکز استوانه را می‌پیماید. در مختصات استوانه‌ای تنها مقدار سرعتی که غیر صفر است سرعت در جهت θ است. به عبارتی $V_\theta \neq 0$ فرض ما بر این بود که V_θ تنها به موقعیت شعاعی r وابسته است. با چنین فرضیاتی براحتی معادله پیوستگی ارضاء می‌گردد.

یعنی :

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1-5-2)$$

و داریم :

$$V_\theta = rw \Rightarrow \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2-5-2)$$

پس هر سه ترم در معادله (2-5) در جریان تراکم ناپذیر دارای مقداری برابر صفر می‌باشند. معادله پیوستگی عبارت است از :

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (3-5-2)$$

پس از فرضیات در نظر گرفته شده و ساده‌سازیهای انجام شده در معادله مومنتم داریم:

$$\Gamma \text{ مؤلفه } r: \quad -\frac{fV_\theta^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right) \quad (4-5-2)$$

چون تغییرات در جهت θ و z نداریم و فقط تغییرات در جهت r داریم؛ پس:

$$\theta \text{ مؤلفه } : \quad 0 = \frac{-1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \tau_{r\theta}) \quad (5-5-2)$$

$$z \text{ مؤلفه } : \quad 0 = \frac{-1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) - \delta g_z \quad (6-5-2)$$

برای یک سیال نیوتنی، مولفه‌های تنشهای نرمال صفر می‌باشند.

$$\tau_{rr} = \tau_{\theta\theta} = \tau_{zz} = 0 \quad (7-5-2)$$

اما برای یک سیال غیر نیوتنی ما درباره مولفه‌های تانسور تنش چیزی نمی‌دانیم. پس مولفه‌های تنشهای نرمال وجود خواهند داشت.

با مرتب کردن جملات معادله (2-5-4) بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d}{dr}(p + \tau_{rr}) = f \frac{v_{\theta}^2}{r} + \frac{\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}}{r} \quad (۸-۵-۲)$$

با انتگرال گیری از نقطه A تا B داریم:

$$(p + \tau_{rr})_B - (p + \tau_{rr})_A = \int_{r_A}^{r_B} \left(f \frac{v_{\theta}^2}{r} + \frac{\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}}{r} \right) dr \quad (۹-۵-۲)$$

نیروی نهایی وارد شده به سطح توسط نقاط فشاری در B, A اندازه گیری می شوند.

$$\pi_{rr} = P + \tau_{rr} \quad (۱۰-۵-۲)$$

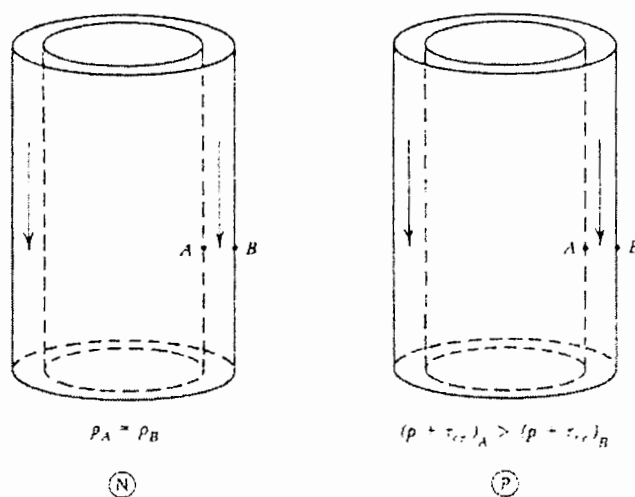
این نیرو به طور عمودی بر سطح سیلندر وارد می گردد. برای یک سیال نیوتنی انتگرال فوق تنها به یک نیروی گریز از مرکز خلاصه می شود. معادله (۹-۵-۲) بیان می کند که $P_B - P_A > 0$ به عبارتی همان نتیجه که برای یک سیال نیوتنی حاصل شد را داریم.

اما در سیال غیر نیوتنی مقدار $\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}$ یک مقدار منفی است و به اندازه ای بزرگ است که بر مقدار نیروی گریز از مرکز غلبه می کند. پس ما به یک نتیجه مهم در مورد سیالات پلیمری می رسیم که تنشهای نرمال غیر صفر می باشند و همچنین اختلاف تنشهای نرمال داریم . در اینجا ما به بیان یک سری از اصطلاحات و قراردادهای می پردازیم که در ادامه بحث می تواند مفید باشند.

اگر سیال در طول یک جهت مختصاتی در حال حرکت باشد و سرعت آن فقط در یک جهت دیگر مختصاتی تغییر کند ، آنگاه ما جهت اول حرکت را جهت ۱ می نامیم و جهت تغییر سرعت را جهت ۲ می نامیم و جهت خنثی را جهت ۳ می نامیم . $\tau_{11} - \tau_{22}$ را اختلاف تنش نرمال اولیه می نامیم و $\tau_{22} - \tau_{33}$ را اختلاف تنش نرمال ثانویه می نامیم . در مثال قبلی ، z, r, θ به ترتیب با ۱ و ۲ و ۳ مربوط می باشند . به طور کلی مهمترین اختلاف تنش نرمال در جریان حلقوی مماسی اختلاف تنش نرمال اولیه $\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}$ می باشد به طور مشابه اختلاف تنش نرمال ثانویه $\tau_{rr} - \tau_{zz}$ می باشد . هرچند این اختلاف تنش نرمال دوم در فرضیات ما در نظر گرفته نمی شود. مقدار منفی $(\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr})$ در مثال قبل متناسب با یک کشش در طول خط جریان سیال است. می توان این فرض را داشت که تنشهای حلقه ای در حال تلاش برای کشیدن سیال به سمت بالای میله هستند [۳].

۲-۲-۳- جریان حلقوی محوری

در این بخش جریانی آرام و محوری در ناحیه فاصله ای بین دو استوانه هم مرکز را در نظر می گیریم. اندازه گیریهایی که انجام می گیرند نشان می دهند که در یک ارتفاع خاص از استوانه اختلاف فشارهایی در بین فاصله دو استوانه وجود دارند. این اختلاف فشارها در سیالات نیوتنی مقدار صفر دارد. اما برای سیالات پلیمری و غیر نیوتنی اختلاف فشارها مخالف صفر است و فشار در استوانه داخلی (نقطه A) بیشتر از فشار در استوانه خارجی (نقطه B) است (مطابق شکل ۲-۵). این اختلاف فشاری در اثر اختلاف تنش های نرمال ثانویه است.



شکل ۲-۵- فشارهای اندازه گیری شده در یک جریان محوری [۳]

توضیح جریان حلقوی محوری:

در این نوع جریان مؤلفه های سرعت به صورت زیر است.

$$V_r = 0 \quad \text{و} \quad V_\theta = 0 \quad \text{و} \quad V_x = V_z(r) \quad (۲-۶-۱)$$

و اینکه:

$$P + \delta g_z = p(r, z) \quad (۲-۶-۲)$$

از قبل می دانیم که τ_{rr} فقط به r بستگی دارد پس معادله پیوستگی ارضاء می شود. مؤلفه های معادله حرکت به شکل زیر است.

$$\text{مؤلفه } r: \quad 0 = \frac{-\partial P}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] \quad (3-6-2)$$

$$\text{مؤلفه } \theta: \quad 0 = \frac{-1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \tau_{r\theta}) \quad (4-6-2)$$

$$\text{مؤلفه } z: \quad 0 = \frac{-\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) \quad (5-6-2)$$

با انتگرال گیری افقی از A تا B برای معادله (3-6-2) داریم:

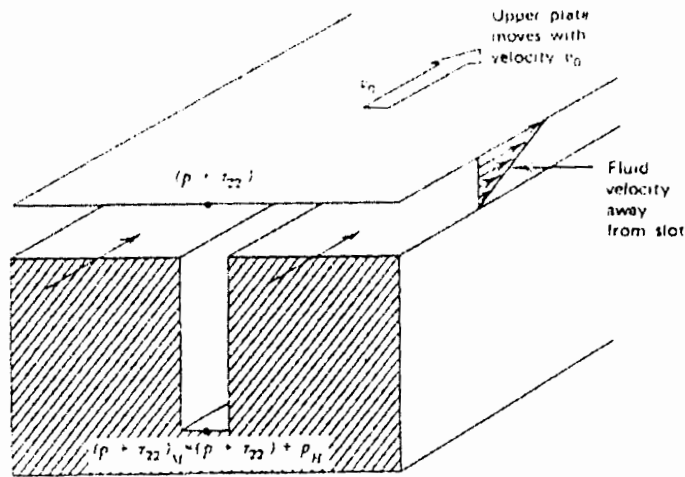
$$(P + \tau_{rr})_B - (P + \tau_{rr})_A = - \int_{r_A}^{r_B} \left(\frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \right) dr \quad (6-6-2)$$

برای یک سیال نیوتنی تنشهای نرمال $\tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}$ مقداری صفر دارند. پس نتیجه بدیهی $P_A = P_B$ به دست می آید. در یک سیال پلیمری اگر فشار در نقطه A بیشتر از نقطه B باشد می توان گفت که:

$\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}$ مقداری مثبت است یا اینکه $\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}$ به قدر کافی در ناحیه انتگرال گیری مقداری مثبت دارد [3].

۲-۲-۴- خطای فشاری سوراخ

به طور کلی تلاشهایی که برای اندازه گیری اختلاف تنشهای نرمال ثانویه به کار می روند در اثر بودن خطاهای فشاری سوراخ بی نتیجه می مانند. در شکل (۲-۶) هندسه جریانی که مورد توجه است را نشان می دهیم. مبداهای فشاری یا دیگر دستگاه های دریافت کننده را در انتهای دیواره ای که خوب مته شده است قرار می دهیم.



شکل ۲-۶- جریان محوری در طول یک صفحه با یک سوراخ [۳]

برای یک سیال نیوتنی فشار سیال اندازه گیری شده در پایین سوراخ فشار یعنی P_M با فشار در دیواره یعنی P یکسان است اما برای بسیاری از سیالات ویسکوالاستیک فشار سیال اندازه گیری شده در پایین سوراخ $(P + \tau_{22})_M$ کمتر از فشار در دیواره یعنی $P + \tau_{22}$ است. اختلاف بین این دو فشار را خطای فشاری سوراخ می نامیم.

$$P_H = (P + \tau_{22})_M - (P + \tau_{22}) \quad (1-7-2)$$

به طور کلی هرگاه یک محلول پلیمری بر روی هر دو رفتگی در دیواره کانال جریان یابد این اختلاف های فشاری رخ خواهد داد. این تو رفتگی ها و شکافها می توانند در جهت جریان یا عمود بر آن باشند.

خطای فشاری سوراخ (P_H) با اختلاف تنشهای نرمال متناسب است که برای سه حالت مختلف سوراخ دایره ای، شکاف متقاطع و شکاف محوری به صورت فرمولهای زیر بیان شده اند.

$$\text{سوراخ دایره ای: } P_H = \frac{1}{3} \int_{\tau_{21}^w} \frac{(\tau_{11} - \tau_{22}) - (\tau_{22} - \tau_{33})}{\tau_{21}} d\tau_{21} \quad (2-7-2)$$

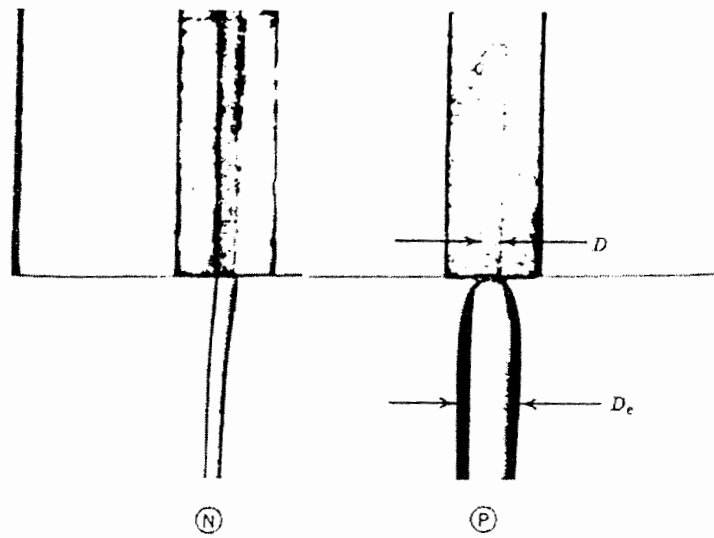
$$\text{شکاف متقاطع: } P_H = \frac{1}{2} \int_{\tau_{21}^w} \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\tau_{21}} d\tau_{21} \quad (3-7-2)$$

$$\text{شکاف محوری: } P_H = - \int_{\tau_{21}^w} \frac{\tau_{22} - \tau_{33}}{\tau_{21}} d\tau_{21} \quad (4-7-2)$$

τ_w تنش برشی دیواره است و فرض می شود که پهنای شکاف یا قطر سوراخ در مقایسه با ابعاد کانال کوچک باشد [۱۳].

۲-۲-۵- پدیده Die swell

این پدیده با نام Extruded Swell یا تورم در حال خروج سیال نیز به کار می رود. به طور کلی هنگامیکه یک سیال ویسکوالاستیک از یک لوله مویی به قطر D خارج می شود میل به متورم شدن قابل ملاحظه ای نسبت به یک سیال نیوتنی دارد. قطر سیال در حال خروج را D_e می نامیم. برای سیال نیوتنی با ویسکوزیته بالا نسبت تورم $\frac{DE}{D}$ اغلب در حدود ۱۳ درصد است. اما برای یک محلول پلیمری این نسبت حتی به ۳ یا ۴ برابر می رسد. مکانیزم مسلط بر این پدیده که سبب پیدایش آن می شود، اختلاف در تنشهای نرمال اول می باشد [۱۴].



شکل ۲-۷- نمایش خروجی سیال از یک لوله مویی در سیال نیوتنی و سیال پلیمری [۱۳]

در توضیح مفهومی این پدیده می توان اشاره به حافظه یک سیال ویسکوالاستیک کنیم. به طور کلی سیالی که از داخل یک لوله مویی یا نازک خارج می گردد از یک مخزن عریض و کوتاه آمده است پس در هنگام خروج سیال موقعیت قبلی خود را به یاد می آورد و شروع به تورم می کند.

می توان با استفاده از یک لوله بسیار طویل نسبت $\frac{DE}{D}$ را به سمت عدد یک نزدیک کنیم که این خود دلیل واضحی برای توضیح این پدیده است [۵].

اما این توضیح به وسیله یک آزمایش جالب که توسط lodge انجام گرفت مورد نقض قرار گرفت. او یک لوله را از نمونه سیلیکون بنام Silly Potty (گل پلاستیکی: ماده ای گل مانند از سیلیکون و الکل که بچه ها برای بازی آن را به شکلهای مختلف در می آورند) پر نمود و مدتی صبر نمود تا این ماده درون لوله قرار گیرد.

به وسیله یک پیستون به Silly Potty که درون لوله بود، نیرو وارد گردید. در این فرآیند به طور مشابه افزایش قطر را داریم. این آزمایش نشان می دهد که حافظه جریان ورودی نمی تواند این افزایش قطر در سیال خروجی را توجیه کند. به دلیل وجود لوله طویل و زمان زیادی که سیال در لوله باقی مانده است توضیحی که در مورد تورم در خروج سیال داریم مربوط به جریان سیال درون لوله است. سیال درون لوله در معرض کشش در طول یک خط جریان قرار دارد. هنگام خروج سیال از لوله سیال می خواهد از کشش هایی که در طول خط جریان است آسوده گردد و این آسودگی میسر نخواهد گردید جز در حالتی که انقباض در جهت طولی صورت گیرد. برای مواد غیر قابل تراکم این آسودگی از کشش سبب انبساط جانبی می گردد.

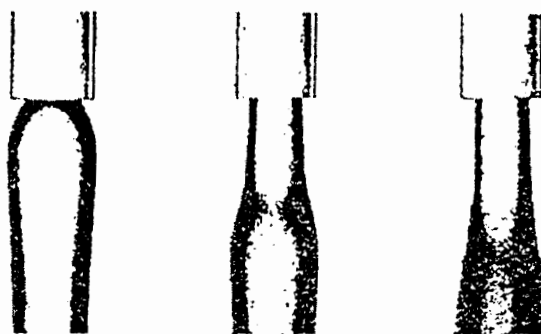
بعد از آزمایش lodge یک محقق دیگر به نام Tanner یک تئوری تقریبی برای تورم خروجی یک سیال را به صورت زیر پیشنهاد داد.

$$\frac{DE}{D} = 0.1 + \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{2\tau_{21}} \right)_w^2 \right]^{1/6} \quad (8-2)$$

که زیر نویس W مشخص می کند که تنشها در جریان لوله همگی باید در دیواره مورد اندازه گیری قرار گیرند. به منظور تخمین در تورم خروجی سیال معادله بالا کمک زیادی می کند. معادله بالا یک معادله شبه تجربی است.

اهمیت این پدیده در صنعت پلاستیک و پارچه بافی بسیار مهم است. در عملیات ریسندگی برای الیاف ریون با ۱۰ درصد افزایش در قطر مواجه ایم. در صنعت پلیمر و در قالب ریزی محلولهای

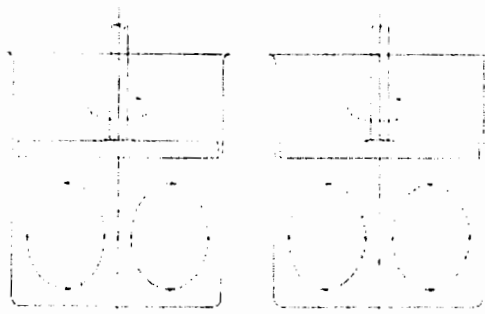
پلیمری این پدیده بسیار تجربه می گردد. به طور کلی این افزایش در قطر علاوه بر نوع سیال ویسکوالاستیک به دما و نوع جریان بستگی دارد. ذکر یک نکته در این پدیده برای استفاده در صنایع مفید می باشد. بطور کلی اینرسی تورم ایجاد شده در سیال خروجی را کاهش می دهد و آن را به تاخیر می اندازد [۴]. در شکل زیر تاثیر عدد رینولدز در تاخیر برآمدگی و تورم سیال نشان داده شده است. به ترتیب از چپ به راست عدد رینولدز افزایش یافته است [۵].



شکل ۲-۸- تاخیر در تورم در اثر افزایش عدد نیولدز از چپ به راست [۳]

۲-۲-۶- وارونگی جریان ثانویه در سیالات ویسکوالاستیک

در این بخش توجه خود را به آزمایشی جلب می کنیم که در این آزمایش یک دیسک چرخان روی یک بشر پر از سیال در حال گردش است. سیالی که در بالای ظرف قرار دارد با سرعت زاویه ای بیشتری نسبت به سیال پایین ظرف در حال حرکت است در نتیجه نیروی گریز از مرکز سیال در بالای ظرف بیشتر است. بطور کلی جهت جریانهای ثانویه ای که در سیالات نیوتنی و غیر نیوتنی (پلیمری) ایجاد می شوند با همدیگر در تضاد هستند. جریانهای ثانویه ایجاد شده دارای سرعتی حدود ۱۰ درصد سرعت جریانهای اولیه را دارا هستند. جهتهای جریان ثانویه در شکل (۲-۹) نشان داده شده است.

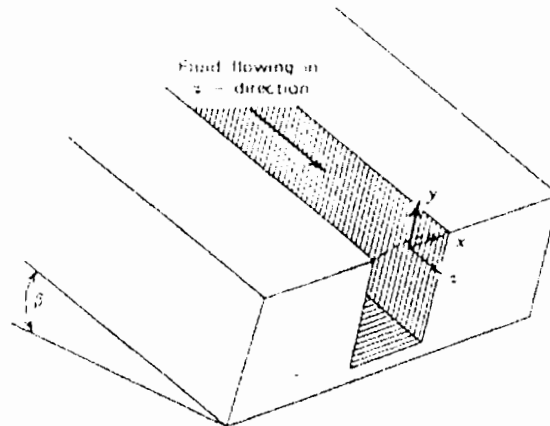


شکل ۲-۹- وارونگی جریان ثانویه (سمت راست سیال ویسکوالاستیک) [۳]

دلیل وجود جریانهای ثانویه به وجود اختلاف فشار در مرکز ظرف با دیواره ظرف است. همانطور که در پدیده Rod-Climbing بحث گردید، در سیالات غیر نیوتنی اختلاف فشارها بر عکس می گردد و همین دلیل اصلی وارونگی جریان ثانویه در این نوع سیالات است. این نکته می بایست مورد توجه قرار گیرد که جهت جریان ثانویه از محل کم فشار به محل پر فشار است. در سیال نیوتنی محل کم فشار در مرکز بشر است و در سیال غیر نیوتنی در دیواره بشر است [۳].

۲-۲-۷- تحذب سطح آزاد یک سیال ویسکوالاستیک داخل یک ناودانی کج شده

در این پدیده به سیال اجازه داده می شود تا در اثر نیروی گرانشی به سمت پایین و قسمت باز ناودان شیب دار حرکت کند. این پدیده توسط Tanner مورد بررسی قرار گرفت. علت اصلی این پدیده وجود اختلاف تنشهای نرمال ثانویه است. مطابق شکل (۲-۱۰) مشاهده می گردد که در سیال ویسکوالاستیک سطح آزاد سیال دارای تحذب است. در مقایسه با اثر تورم خروجی یا Die-Swell این اثر بسیار ناچیز است اما در مواردی که طول ناودان کج شده زیاد باشد برآمدگی شروع به افزایش می کند [۳].



شکل ۱۰-۲- تحذب سطح سیال در حال پایین آوردن از یک ناودان کج [۱۳]

توضیح پدیده ناودان کج :

در این پدیده فرض می گردد که ناودان به قدر کافی عمیق باشد و از وجود سطح پایینی صرفنظر می گردد. ناودان دارای شیبی با زاویه β نسبت به افق دارد و عرض آن به اندازه w است. اگر ناودان به قدر کافی عمیق باشد. ما میدان سرعت به شکل زیر را پیش بینی می کنیم:

$$V_z = v_z(x) \quad , \quad v_x = 0 \quad , \quad v_y = 0 \quad (9-2)$$

دستگاه مختصات مانند شکل (۱۰-۲) در نظر گرفته شده است. پیشتر توقع داشتیم که τ_{ij} تنها وابسته به x است و $p = f(x, y, z)$ که سطح لزوماً صاف نبود.

با انجام عملیاتهای ریاضی و یکسری فرضیات داریم:

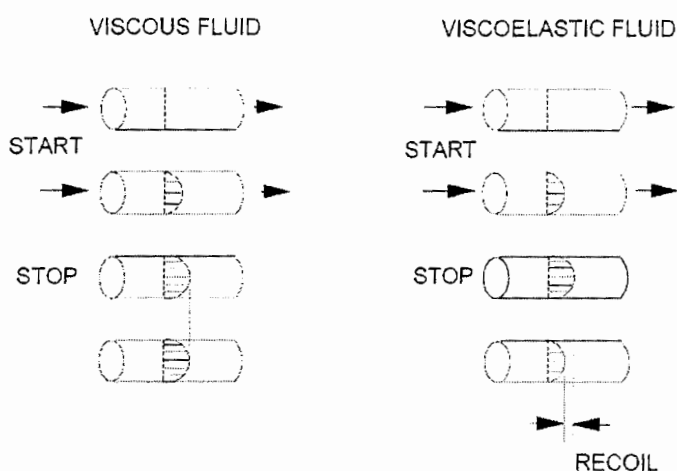
$$y = \frac{(\tau_{xx} - \tau_{yy})|_x + C - P_a}{\rho g \cos \beta} \quad (10-2)$$

P_a فشار اتمسفر است و C یک ثابت است و y ارتفاع سطح آزاد سیال است. در $x=0$ همه گرادیانهای سرعت صرفنظر می گردند آنقدر که همه عناصر و اعضای تانسور تنش صفر می گردند. برای $x > 0$ اگر $(\tau_{xx} - \tau_{yy})$ مثبت باشد، سطح آزاد پایین تر از قسمتی است که $x=0$ است، پس نتیجه می گیریم که $\tau_{xx} - \tau_{yy}$ مقداری منفی است که در نهایت سطح سیال بالاتر از محل $x=0$ است. به طور واضح برای یک سیال نیوتنی چون $(\tau_{xx} - \tau_{yy}) = 0$ است پس سطح آزاد سیال

به صورت صاف است. باید توجه کرد که در این تحلیل از کشش سطحی سیال صرفنظر شده است [۳].

۲-۲-۸- پدیده Recoil

شخصی به نام Kapoor با انجام آزمایشاتی در خصوص پدیده Recoil بر روی سیالات ماکرومولکول و سیالات نیوتنی دریافت که بین رفتار گرانروی سیالات ماکرومولکول و رفتار گرانروی سیالات نیوتنی تفاوت های بسیار زیادی وجود دارد. این نتایج در شکل (۲-۱۱) نشان داده شده است. کاپور در این آزمایش یک رگه محلول زغال چوب به عنوان خط نشان را در ۲٪ محلول کربکسی متیل سلولوز قرار داد و سپس این محلول را به وسیله یک سرنگ به داخل آب ریخت. در مرحله بعد او با اعمال گرادیان فشار به محلول تغییر شکل خط نشان را به وسیله عکس های متوالی ثبت نمود. کاپور پس از گذشت مدت زمان کوتاه اعمال گرادیان فشار را بر محلول متوقف کرد. تصاویر گرفته شده از محلول پس از این زمان نشان می دهد که خط اثر زغال به همراه برگشت سیال نیز عقب کشیده شده است. پدیده پسرفت برای سیالات نیوتنی مشاهده نشده است.



شکل ۲-۱۱- نمایش پدیده Recoil توسط آزمایش کاپور [۱۵]

از نتایج به دست آمده از این آزمایش می توان گفت سیالات ماکرومولکولی دارای دو خاصیت عمده ذیل هستند:

۱- خاصیت ارتجاعی (کشسانی)

۲- تضعیف حافظه

خاصیت ارتجاعی سیالات به کیفیت توانایی سیال برای بازگشت به حالت اولیه پس از حذف نیروی خارجی اطلاق می شود و منظور از تضعیف حافظه این است که مواد ویسکوالاستیک می دانند که از کجا آمده اند اما با گذشت زمان این حافظه در پلیمرها پس از جذب نیروی خارجی ضعیف می شود.

پدیده Recoil را می توان در سایر آزمایشات نیز مشاهده کرد. به عنوان مثال پدیده Recoil را میتوان در آزمایش میله بالارونده مشاهده کرد. در این آزمایش هنگامی که گشتاور از روی میله برداشته می شود، این پدیده روی می دهد. در نمونه ای دیگر یک بشر آزمایشگاهی را در نظر بگیرید که حاوی محلول پلیمر است. اگر این بشر در حال چرخش باشد و به طور ناگهانی متوقف شود، در این صورت حبابهای هوای به دام افتاده در محلول با آغاز پدیده برگشت سیال به طور جزئی به حرکت خود ادامه می دهند.

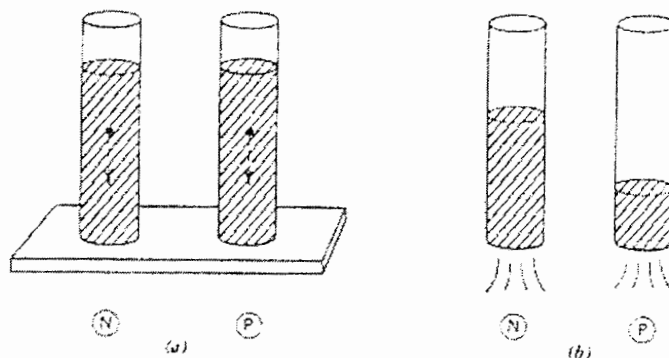
Lodge برای بررسی بیشتر و نیز نشان دادن پدیده Recoil از Silly Potty استفاده نمود. او در آزمایشات خود، به سرعت خمیر را به دو طرف کشید و آن را برای مدت کوتاهی در همان حالت نگه داشت و سپس آنرا رها کرد تا خمیر به حالت اولیه اش باز گردد. او پس از انجام این آزمایشات دریافت، هرچه خمیر را بیشتر در حالت کشیده نگه داریم در اینصورت میزان بازگشت خمیر به حالت اولیه اش به طور قابل توجهی کاهش می یابد. و در صورتیکه به مدت چند ثانیه خمیر را در حالت کشیده نگه داریم پدیده Recoil در خمیر قابل مشاهده نخواهد بود. وقوع این پدیده یعنی کاهش میزان برگشت خمیر و با افزایش زمان کشیدگی پدیده تضعیف حافظه را در خمیر نشان می دهد. ما این مدت زمان را زمان مشخصه می نامیم. بر این اساس زمان مشخصه برای خمیر تنبل در حدود چند ثانیه است. این زمان برای آب در حدود 10^{-12} ثانیه و برای کوهها در حدود 10^{12} ثانیه است.

Meissner در چندین آزمایش کمی دریافت اگر فیلمان پلی اتیلن با چگالی کم در ۴۲۳ کلوین را به سرعت از یک تا ۳۰ سانتیمتر بکشیم و پس از کشیدن فیلمان ، آنرا به سرعت رها کنیم . در این صورت طول فیلمان پس از پدیده پیشرفت به ۳ سانتیمتر خواهد رسید . حافظه یک سیال نیوتنی بسیار ناچیز است .

در لحظه ای که بارگیری برداشته می شود حرکت سیال نیوتنی به طور ناگهانی متوقف می گردد. اما یک جامد الاستیک حافظه ای کامل دارد و در هنگام قطع بارگذاری ذرات جامد به حالت قبل باز می گردند [۳].

۹-۲-۲- پدیده جریان درون لوله یا Shear Thinning

در این پدیده همانطور که مطابق شکل (۲-۱۲) داریم دو لوله پر از دو سیال یکی سیال نیوتنی و دیگری پلیمری (ویسکوالاستیک) موجود است . انتهای دو لوله توسط یک سطح صاف مهار گردیده است . فقط باید دقت کرد ویسکوزیته دو سیال یکسان باشد . برای یکسان کردن ویسکوزیته های دو سیال ابتدا سیال نیوتنی با ویسکوزیته ثابت را انتخاب می کنیم . سپس سیال ویسکوالاستیک را که شامل محلول گلیسرین آبی می باشد را در لوله دوم می ریزیم . با کم و زیاد کردن آب محلول می توان ویسکوزیته های متفاوت از این محلول در حدود $0.001002 - 1/490 N \cdot s/m^2$ در دمای ۲۹۳ K داشته باشیم . البته به طور تجربی می توان با انداختن دو گلوله در داخل هر سیال و اینکه دو گلوله در یک زمان به انتهای لوله برسند به ویسکوزیته های برابر رسید.



شکل ۲-۱۲- مقایسه خروج سیال نیوتنی و غیر نیوتنی از نظر زمانی با یک ویسکوزیته یکسان [۴]

همانطور که در شکل (۲-۱۲) مشاهده می گردد سیال ویسکوالاستیک با سرعت بیشتری از سیال نیوتنی به محض برداشتن سطح صاف خارج می گردد.

عبارت $\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}$ اختلاف تنشهای نرمال اول نامیده می شود و با $\tau_{11} - \tau_{22}$ بیان شده است ، که ۱ جهت سرعت جریان اصلی است و ۲ جهت تغییرات سرعت است. به طور مشابه عبارت $\tau_{rr} - \tau_{zz}$ و یا $\tau_{22} - \tau_{33}$ اختلاف تنشهای نرمال دوم نامیده می شود و در جریان های خاص از جمله جریان ثانویه در کانال های غیر مدور عامل اصلی است. وجود اختلاف تنشهای نرمال غیر صفر از ویژگیهای مهم سیالات ویسکوالاستیک است [۱۳].

۳-۲- مدل‌های سیال غیر نیوتنی

در سال ۱۹۵۶ مترنر طبقه بندی جدیدی از سیالات ارائه و در ۱۹۶۵ تکمیل نمود که تاکنون پذیرفته شده است. بر اساس این طبقه بندی مطابق جدول (۲-۱) سه گروه عمده پیش بینی شده است.

جدول ۲-۱- طبقه بندی سیالات

$\tau_{ij} = 2\eta d_{ij}$ $\eta = \eta_{ij}(I, II, III)$	گروه ۱ - سیالات کاملاً ویسکوز
<p style="text-align: center;">مدت زمان اعمال تنش : θ</p> $\tau_{ij} = 2\mu d_{ij}$ $\mu = \mu(I, II, III, \theta)$	گروه ۲ - سیالات وابسته به زمان
$\tau_{ij} = \mathfrak{S}_{ij} \begin{bmatrix} t = 0 \\ \dot{\gamma}_{pq}(t) \\ t = -\infty \end{bmatrix}$	گروه ۳ - سیالات ویسکوالاستیک

در جدول (۲-۱) d_{ij} مؤلفه های تانسور نرخ تغییر شکل است که در مختصات دکارتی چنین تعریف شده اند :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-11-1)$$

$\dot{\gamma}_{12}$ مؤلفه های این تانسور در مختصات همرفتی است. همچنین I, II و III ناوردهای^۱ تانسور نرخ تغییر شکل عبارتند از [۷]:

$$\begin{cases} I = d_{ii} \\ II = d_{ij}d_{ji} \\ III = d_{ij}d_{jk}d_{ki} \end{cases} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2-11-2)$$

و قرارداد جمع روی اندیس مکرر رعایت شده است [۲].

۲-۳-۱- مدل‌های کاملاً ویسکوز

این مدل‌ها تنش برشی را تعیین می‌کنند. در جریان برشی ساده مثل جریان بین دو صفحه موازی میدان سرعت به شکل زیر است.

$$v_1 = \dot{\gamma} x_2 \quad v_2 = 0 \quad v_3 = 0 \quad (1-12-2)$$

و داریم:

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-12-2)$$

$$\begin{cases} I = d_{ii} = 0 \\ II = d_{ij}d_{ji} = 2\dot{\gamma}^2 \\ III = d_{ij}d_{jk}d_{ki} = 0 \end{cases} \quad (3-12-2)$$

و نتیجه می‌شود:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} II} \quad (4-12-2)$$

بنابراین مدل‌های کاملاً ویسکوز بر اساس $\dot{\gamma}$ معرفی شده‌اند. این مدل‌ها را مدل‌های تعمیم یافته نیوتنی نامیده‌اند. بعضی از مهمترین آنها در جدول (۲-۲) آمده است.

^۱ - Invariants

معرفی زمان مشخصه در بعضی از این مدلها کوششی است برای مدل کردن رفتار واقعی سیالات غیر نیوتنی در جریان غیر دائم که اعمال تنش یا حذف ناگهانی آن باعث تغییر شکل یا توقف ناگهانی نمی شود [۲].

جدول ۲-۲- مدلهای تعمیم یافته نیوتنی

عنوان مدل	ویسکوزیته ظاهری	زمان مشخصه
توانی	$\eta = k(\dot{\gamma})^{n-1}$	ندارد
پلاستیک بینگهام	$n \geq \tau_0$ $\tau \leq \tau_0$	$\eta = \eta_0 + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}}$ $\dot{\gamma} = 0$
الیس	$\tau_{1/2}$: مقدار تنش برای $\eta = \eta_0/2$	$\frac{\eta_0}{\tau_{1/2}}$ $\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_0} \left[1 + \left(\frac{\tau}{\tau_{1/2}} \right)^{\frac{1}{n}-1} \right]$
پاول - ایرینگ	$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) \frac{\text{Sinh}^{-1}}{t_p \dot{\gamma}}$	t_p
سوتربای	$\eta = \eta_0 \left(\frac{\text{Sinh}^{-1}(t\dot{\gamma})}{t\dot{\gamma}} \right)^a$	t
کارو A	$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) [1 + (t\dot{\gamma})^2]^{\frac{1}{n-2}}$	t

۲-۳-۲- مدلهای ویسکوالاستیک خطی

کلمه ویسکوالاستیک بر وجود همزمان خواص ویسکوز و الاستیک در یک ماده دلالت میکند. ساده ترین مدلهای ویسکوالاستیک با فرض ترکیب دلخواه از یک یا چند المان ویسکوز

(نیوتنی) با یک یا چند المان الاستیک (هوکی) تحت عنوان ویسکوالاستیک خطی ارائه شد. این بخش از چند جنبه اهمیت دارد [۷]:

۱. ارتباط بین ساختمان مولکولی و پاسخ مدل‌های ویسکوالاستیک خطی در بسیاری از آزمایشها قابل مشاهده است.

۲. در بسیاری از فرآیندهای کنترل کیفیت پارامترها و توابعی که بر اساس تئوری ویسکوالاستیسیته خطی تعیین می‌شوند، اندازه‌گیری و استفاده شده‌اند.

۳. اطلاع از ویسکوالاستیسیته خطی کمک مؤثری در تحلیل ویسکوالاستیسیته غیرخطی می‌کند.

تئوری ویسکوالاستیسیته خطی بر این مبناست که پاسخ در هر لحظه متناسب با تحریک در همان لحظه می‌باشد. به این ترتیب معادلات دیفرانسیلی که مدل‌های خطی را بیان می‌کنند، خطی با ضرائب ثابت و نوع مشتقات، مشتقات پاره‌ای متداولند. این محدودیت‌ها باعث میشوند که تئوری تنها برای تغییرات به قدر کافی کوچک کاربرد داشته باشند. از این مدلها در موارد زیر استفاده شده است [۷]:

- تحلیل خزش
 - تعیین تنش ناشی از اعمال تغییر شکل ناگهانی
 - تحلیل جریان برشی نوسانی با دامنه کم
 - تحلیل جریان داخل لوله تحت اعمال فشار نوسانی
 - تعیین تنش در آغاز حرکت برشی با نرخ تغییر شکل ثابت
 - تحلیل برگشت سیال در اثر قطع ناگهانی جریان برشی دائم (پدیده ری کوئل)
- شکل کلی دیفرانسیلی این مدلها چنین است:

$$(1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}) \tau_{ij} = 2\eta_0 (1 + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \beta_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}) d_{ij} \quad (۲-۱۳)$$

$n=m$ یا $n=m+1$

تعدادی از مدل‌های معروف و معادل مکانیکی آنها در جدول (۲-۳) آمده است. بعضی از آنها به روش تحلیلی حاصل شده‌اند. مثلاً مدل جفریز ابتدا برای سوسپانسیون رقیق ذرات کروی جامد در

سیال نیوتنی به دست آمد. سپس الدرئود مشابه آن را برای محلول امولسیون از دو سیال نیوتنی نتیجه گرفت .


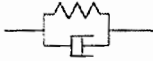
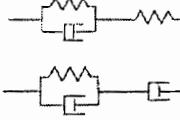
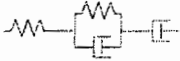
مدلهای ویسکوالاستیک خطی علاوه بر محدودیت های فوق الذکر دو اشکال عمده دارند :

۱. اصل عدم تغییر تحت حرکت صلب الحاقی ، یکی از اصول اساسی مکانیک محیط های پیوسته، بر آنها حاکم نیست. مثلاً اگر جریان برشی ساده روی صفحه دوار با این مدلها تحلیل شود ، پاسخ تنش از دید ناظر ساکن به سرعت دورانی بستگی دارد [۷] .

۲. پدیده های مهم ناشی از غیر خطی بودن سیال با این مدلها تبیین نمی شود. برای مثال در جریان برشی ساده اختلاف تنش های نرمال ایجاد نمی شود.

به منظور رفع این نقایص مدلهایی بررسی می شوند که بر اساس مبانی و اصول مکانیک محیط های پیوسته بنا شده اند.

جدول ۲-۳- برخی از مدل‌های ویسکوالاستیک خطی

عنوان مدل	معادله دیفرانسیل متشکله	معادل مکانیکی
ماکسول	$\tau_{ij} + \lambda_0 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = 2\eta_0 d_{ij}$	
کلوین	$\tau_{ij} + \lambda_0 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial d_{ij}}{\partial t}$	
جفریز	$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = 2\eta_0 \left(d_{ij} + \lambda_2 \frac{\partial d_{ij}}{\partial t} \right)$	
برگرز	$\tau_{ij} + (\lambda_3 + \lambda_4) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \lambda_3 \lambda_4 \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial t^2} = 2(\eta_3 + \eta_4) d_{ij} + 2(\lambda_4 \eta_3 + \lambda_3 \eta_4) \frac{\partial d_{ij}}{\partial t}$	

۲-۳-۳- معادلات متشکله سیال ویسکوالاستیک

از حدود ۴۰ سال پیش دو روش به ظاهر متفاوت در تعیین شکل کلی معادلات متشکله دنبال شده است. نامهای دروید و لدج در یک سو و کولمن ، نول ، ریولین ، اریکسن ، گرین و تروزدل در سوی دیگر قرار دارند. اگرچه در دهه ۶۰ تصور می شد این دو روش اساساً متفاوتند ، بعدها همسازی این دو نوع فرموله بندی مشخص شد و ناوردایی اصول مکانیکی محیط های پیوسته نسبت به نحوه عمل آشکار شد .

تئوری مکانیکی معادلات متشکله در محیط های پیوسته بر چهار اصل بنا شده است :

۱. اصل قطعیت تنش : تنش در یک جزء توسط تاریخچه حرکت آن جزء تعیین می شود. یعنی تنش انحرافی ، τ_{ik} در لحظه t با در نظر گرفتن وابستگی آن به حرکت جسم در $t' \leq t$ تعیین می شود.

۲. اصل اثر موضعی : در تعیین تنش یک نقطه مادی تنها حرکت در همسایگی کوچک و دلخواه آن اهمیت دارد و حرکت جزء ها خارج از این همسایگی تأثیری بر آن ندارد.

۳. اصل ناوردایی مختصات : بر اساس تئوری فیزیکی رابطه تانسور تنش و تاریخچه حرکت جسم نمی تواند به انتخاب دستگاه مختصات (وضعیت ناظر) بستگی داشته باشد. لذا معادلات متشکله باید به شکل ناوردای تانسوری نوشته شوند.

۴. اصل عدم تغییر تحت حرکت صلب /الحاقی : معادله متشکله باید مستقل از حرکت مطلق در فضا باشد. یعنی افزودن حرکت صلب به تاریخچه حرکت نباید اثری بر میدان تنش داشته باشد (به جز تغییر جهت ناشی از حرکت دورانی) .

سیالی که اصول فوق در معادله متشکله اش ملحوظ شده باشد سیال ساده نامیده شده است. حرکت یک محیط پیوسته در مختصات دکارتی با بردار موقعیت x'_i در لحظه t' نشان داده شده است :

$$x'_i = x'_i(X, t) \quad (۱۴-۲)$$

X مشخصه نقطه مادی است و t زمان حاضر که موقعیت ذره X در آن با x_i مشخص شده است :

$$x_i = x_i(X, t) \quad (۱۵-۲)$$

بنابراین موقعیت ذره X در $t' \leq t$ چنین است :

$$x'_i = x'_i(x_j, t, t') \quad (۱۶-۲)$$

حال سؤال این است: اگر حرکت ماده در $t' \leq t$ مطابق رابطه فوق معلوم باشد، معادله متشکله که ارتباط τ_{ik} را با حرکت تعیین می کند چگونه است؟ در اینجا دو روش فوق الذکر از یکدیگر جدا می شوند:

اولدروید با استفاده از دستگاه مختصاتی ویژه دو اصل ناوردایی را ارضاء نمود. او می گوید: نیازی نداریم در فرموله کردن معادلات متشکله متغیرهایی را وارد کنیم که نشانگر موقعیت یا حرکت دورانی یا انتقالی یک جزء مادی در فضا هستند. همچنین نیازی به استفاده از پارامترهای مشخص کننده جزء های مجاور یا وضعیت آن جزء در آینده (بعد از t) نیست. وقتی مختصات مرجع جزء مادی مطرح نیست، ساده ترین روش تعیین ذرات مادی، استفاده از سیستم مختصات منحنی الخطی است که بر ماده سوار بوده و همراه با آن در جریان حرکت کرده و تغییر شکل یابد. در این دستگاه مختصات اگر ξ^i ($i=1,2,3$) مختصات یک ذره مادی در $t' \leq t$ باشد، این ذره همواره در مختصات ξ^i باقی می ماند. بنابراین هر معادله که توصیف کننده رفتار المان واقع شده در ξ^i در لحظه t باشد را می توان به صورت رابطه ای از توابع ξ^1, ξ^2, ξ^3 و t' ($-\infty \leq t' \leq t$) بیان کرد. از میان متغیرهای سینماتیکی مربوط به ماده واقع در ξ^i و لحظه t' ، آنهایی که اشاره به حرکت مطلق در فضا دارند حذف شده و تنها آنچه معرف حرکت نسبی بین ذرات یک جزء (و نحوه تغییرات زمانی آن) است، مجاز هستند. بنابراین آگاهی از فاصله $ds(t')$ بین دو ذره دلخواه در همسایگی $d\xi^i$ در لحظه t' ، تمام اطلاعات لازم از سینماتیک حرکت را فراهم می کند و این اطلاعات توسط تانسور متریک سیستم مختصات داده می شود:

$$[ds(t')]^2 = \gamma_{ij}(\xi, t') d\xi^j d\xi^i, \quad \xi: (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (۱۷-۲)$$

از آنجا که در سیستم مختصات دکارتی $[ds(t')]^2 = dx^i dx^i$ است، داریم:

$$\gamma_{ij}(\xi, t') = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \quad (۱۸-۲)$$

و حرکت در t' و t به این شکل است:

$$x''^i = x''^i(\xi, t') \quad (۱۹-۲-۱)$$

$$x^i = x^i(\xi, t) \quad (۱۹-۲-۲)$$

در سیستم مختصات جدید که مختصات همرفتی نامیده شده است ، تانسور تنش با Π_{ik} نشان داده شده است و ارتباط آن با مؤلفه های دکارتی تنش P_{ik} از قانون تبدیلات تانسوری تعیین میشود :

$$\Pi_{ik} = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^l} P_{jl} \quad (1-20-2)$$

$$\Pi^{ik} = \frac{\alpha \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} P^{jl} \quad (2-20-2)$$

با توجه به ملاحظات بالا انتظار می رود کلیه کمیت‌های سینماتیکی تعیین کننده Π_{ik} از تابع تانسوری $\gamma_{ij}(\hat{\xi}, t')$ و $t' \leq t$ دستیابی شوند. مخصوصاً مقادیر کوچک $\gamma_{ij}(\hat{\xi}, t) - \gamma_{ij}(\hat{\xi}, t')$ نشانگر تغییر شکل کوچک هستند و از حرکت صلب در فضا تأثیر نمی گیرند. بنابراین معادلات رئولوژیکی سیال ایزوتروپیک و تراکم ناپذیر با معرفی فشار ایزوتروپیک اینگونه بیان می شود :

$$\Pi_{ik} = -p\gamma_{ik} + T_{ik} \quad (21-2)$$

$$T_{ik} = \mathfrak{S}_{ik} [\gamma_{jl}(\hat{\xi}, t') - \gamma_{jl}(\hat{\xi}, t), -\infty < t' \leq t]$$

T_{ik} مؤلفه های هموردای تانسور انحرافی ($tr \tilde{T} = 0$) در مختصات همرفت در لحظه t بوده و \mathfrak{S}_{ik} یک فانکشنال تانسوری است [۲].

اما در حل مسائلی که توأم با اعمال قوانین حرکت و شرایط مرزی است ، استفاده از مختصات ثابت مطلوب تر است. لذا مؤلفه های دکارتی پارامترهای فوق معرفی می شوند. اگر $G_{ik}(\hat{x}, t, t')$ مؤلفه دکارتی آرگومان فانکشنال فوق و \hat{x} مختصات دکارتی نقطه مادی در لحظه t باشد ، داریم :

$$G_{ik}(\hat{x}, t, t') = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} [\gamma_{jl}(\hat{\xi}, t') - \gamma_{jl}(\hat{\xi}, t)] \quad (22-2)$$

و معادله متشکله در مختصات دکارتی چنین است :

$$P_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik} \quad (23-2)$$

$$\tau_{ik} = \mathfrak{S}_{ik} [G_{jl}(\hat{x}, t, t'), -\infty < t' \leq t]$$

اما برای تانسور متریک مختصات دکارتی δ_{ik} در t و t' داریم :

$$\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} \gamma_{jl}(\hat{\xi}, t) = \delta_{ik} \quad (1-24-2)$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x'^m} \frac{\partial \xi'}{\partial x'^p} \gamma_{jl}(\hat{\xi}, t') = \delta_{mp} \quad (2-24-2)$$

از ضرب طرفین رابطه اخیر در $\frac{\partial x'^m}{\partial x'} \frac{\partial x'^p}{\partial x'}$ و استفاده از مشتق گیری زنجیره ای داریم :

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x'} \frac{\partial \xi'}{\partial x'} \gamma_{jl}(\hat{\xi}, t') = \frac{\partial x'^m}{\partial x'} \frac{\partial x'^p}{\partial x'} \delta_{mp} = \frac{\partial x'^m}{\partial x'} \frac{\partial x'^m}{\partial x'} = C_{ik}(\hat{x}, t, t') \quad (2-25)$$

که C_{ik} تانسور کرنش نسبی کوشی- گرین است. بنابراین شکل کلی معادلات متشکله سیال ساده چنین است :

$$\begin{cases} P_{ik} = -P \delta_{ik} + \tau_{ik} \\ \tau_{ik} = \mathfrak{S}_{ik} \{ [C_{jl}(\hat{x}, t, t') - \delta_{jl}] - \infty < t' \leq t \} \end{cases} \quad (2-26)$$

رابطه (2-26) علی رغم داشتن کلیت ، فاقد کارایی لازم در کاربردها و پیش بینی هاست. لذا معادلات ساده تر با ایجاد محدودیت های خاص ارائه شده اند. این کار به سه روش انجام شده است:

(۱) کاهش کلیت بر اساس شرایط کاربرد - برای مثال مدل سیال راینر - ریولین چنین بیان شده است :

$$\tau_{ik} = 2\eta(\text{II, III})d_{ik} + 4\zeta(\text{II, III})d'_i d'_{ik} \quad (2-27)$$

که مدل عمومی برای سیالات غیرالاستیک است. رفتار آن در جریان دائم برشی ساده به سهولت تعیین می شود. علی رغم غیرالاستیک بودن ، اختلاف تنشهای نرمال دوم را نشان می دهد اما اختلاف تنشهای نرمال اول را صفر پیش بینی می کند و این حالت در هیچ سیال واقعی مشاهده نشده است. مدل های تعمیم یافته نیوتنی شکل خاصی از این مدل محسوب می شوند.

(۲) تقریب بر اساس شکل تابع $G_{ij}(\hat{x}, t, t')$ با اعمال اصل حافظه میراثونده و تقریب فانکشنال $\hat{\xi}$ در دو حالت جریان نوسانی با دامنه کم .

(۳) تقریب در انتخاب فانکشنال $\hat{\xi}$ - دسته مهمی از این نوع ، مدل های دیفرانسیلی الدرود هستند که از نوشتن مدل های دیفرانسیلی ویسکوالاستیک خطی بر اساس مؤلفه های تانسور تنش و تانسور تغییر شکل در مختصات همرفت ایجاد شده اند. الدرود به طور خاص مدل جفریز را انتخاب کرد. این مدل بر اساس مدل های ساختمان مولکولی برای محلول های کلوئیدی به دست آمده است و هرگاه $\lambda_1 = \lambda_2$ باشد ، دقیقاً سیال نیوتنی با ویسکوزیته μ حاصل می شود.

پس به طور کلی مدل‌های مختلفی با توجه به شرایط و محدودیت‌های اعمال شده قابل دسترسی اند. مدل گودارد - میلر ، مدل چرخشی جفریز، معدل تعمیم یافته ZFD ، مدل الدرید هشت مولفه ای ، مدل CEF ، مدل رایبر - ریولین ، که هر یک از این مدل ها بنا به شرایط تعریف مساله ، شرایط سیال ویسکوالاستیک و برخی از محدودیت‌های دیگر می توانند به کار گرفته شوند. در اینجا ما با مساله ای روبرو هستیم که سیال ویسکوالاستیک ما در یک محفظه مستطیلی در حال حرکت است. جریان ما آرام ، دائم و مستقیم الخط در طول کانال می باشد.

با توجه به این توضیحات مدل مورد استفاده ، ما مدل تعمیم یافته CEF (Criminale Ericksen Filbey) می باشد که تنش های برشی آن به صورت ذیل مدل شده است.

$$\tau_{ik} = 2\eta(q)e_{ik}^{(1)} - N_1(q)e_{ik}^{(2)} + 4[N_1(q) + N_2(q)]e_{ij}^{(1)}e_{jk}^{(1)} \quad (2-28)$$

که $e_{ik}^{(n)}$ ، n امین نرخ کرنش است. q نرخ برش می باشد که به طور مفصل در فصل بعدی مورد بحث قرار می گیرند. این مدل همچنین به دلیل ایجاد اختلاف تنشهای نرمال دوم غیر صفر می تواند جریانهای ثانویه را ایجاد نماید. تحلیل جریان ثانویه اولین بار توسط گرین و ریولین انجام شد. آنها مدل سیال رایبر ریولین را استفاده کردند. در این مدل اگرچه اختلاف تنشهای نرمال دوم در جریان برشی ساده پیش بینی شده ، اما اختلاف تنشهای نرمال اول صفر فرض شده است. این حالت در هیچ یک از سیالات غیرنیوتنی دیده نشده است. بعلاوه آنها ویسکوزیته سیال را ثابت فرض کردند. در حالیکه عموماً تغییرات η با نرخ تغییر شکل قابل صرف نظر کردن نیست. ویلرو ویزلر از همین مدل با ویسکوزیته متغیر (مدل توانی) استفاده کرد و به روش عددی اختلاف محدود جریان ثانویه را در مقطع مربع نشان دادند.

در سال ۱۹۷۳ در تحقیقی تئوریک - تجربی توسط دادسن و همکاران جریان ثانویه بررسی شد . آنها مدل تعمیم یافته CEF معادله (2-28) با N_2 ثابت را برای سیال درکانال مستطیلی به کار بردند. از این روش اغتشاشات کوچک با پارامتر N_2 استفاده شد و معادلات تا مرتبه دوم به روش عددی SLOR حل شد. همچنین آزمایش با کانالهای شیشه ای و شفاف و مقطع مستطیل انجام گرفت. محلول آبی پلی آکریل آمید و محلول صابونی با اجزاء ستیل آمونیم بروماید ، تولوئن ۴ سولونید و نمک اسید سدیم آزمایش شد. اختلاف فشار و دبی اندازه گیری و با نتایج حل عددی

مقایسه شد و روند کلی نتایج مشابهت دارد. اما جریان ثانویه که در آزمایش رویت شد با نتایج تئوریک و مقادیر مثبت N_2 هم جهت است. در حالیکه مقدار آن عموماً منفی گزارش شده است. با این حال هشت جریان گردابه ای که در مقطع مربع متقارن و در مستطیل چهار تای آنها ضعیف ترند حاصل شد.

در سال ۱۹۷۵ ادامه پژوهش فوق توسط تاونسند و همکاران گزارش شد که در آن بر جهت و قدرت جریان ثانویه به منظور تعیین مقدار N_2 تاکید شده است. آنها مدل و روش دادسن و همکاران را با انتخاب پارامتر کوچک ε به عنوان پارامتر اغتشاشات کوچک دنبال کردند و N_2 نیز به صورت تابعی از γ در معادلات تا مرتبه ε ظاهر شد. دو معادله دیفرانسیل وابسته به هم که تابع خط جریان ثانویه و اثر آن بر سرعت جریان اصلی را تعیین می کنند با روش نیمه ضمنی در یک جهت حل شدند. بنا به گزارش به دلیل ناپایداری و طول مدت حل تنها مقطع مربع بررسی شده و نتایج کمی چندانی نیز ارائه نشده است. آزمایش با ۶ نمونه مختلف نشان داد که علی رغم امکان اختلاف علامت N_2 در آنها، جهت جریان ثانویه یکسان است. وجود مشتقات غیر صفر N_2 در معادلات باعث شد بدون توجه به علامت آن جهت جریان صحیح حاصل شود [۱۱].

در سال ۱۹۹۱ ژورانگ و لارسن از مدل فوق استفاده کرده و به روش حجم محدود معادلات حل شده و جریان ثانویه به طور کیفی نشان داده شده است. اثر جریان ثانویه بر افت فشار در سرعت‌های متداول ناچیز است [۲].

در سال ۱۹۹۶ دکتر طالبی و دکتر رستمی با استفاده از مدل تعمیم یافته CEF و همچنین به روش اختلاف محدود گسسته سازی و باروش ADI (خطی سازی ضمنی متناوب) توانستند جریان ثانویه در مقطع مربعی و مستطیلی را به دست آورند، که حاصل آن هشت گردابه در مقطع مربعی که با افزایش نسبت طول به عرض ۴ تای آن ضعیف می شدند [۲].

۲-۴- معادلات اساسی

معادلات حل عددی پیوستگی، مومنتم و انرژی برای جریان تراکم ناپذیر بدون در نظر گرفتن جابجایی آزاد، منبع حرارتی و اتلاف حرارتی لزج و با فرض خواص ثابت عبارتند از:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (29-2)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \quad (30-2)$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla^2 T \quad (31-2)$$

معادلات فوق برای جریان دائم و به لحاظ هیدرو دینامیکی توسعه یافته، با صرف نظر کردن از هدایت حرارتی در امتداد جریان اصلی و $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ می باشد مگر $\frac{\partial p}{\partial z}$ که برابر مقدار ثابتی می باشد. از این رو معادله بقای جرم و معادلات حاکم مومنتم به صورت ذیل است.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (32-2) \text{ معادله پیوستگی}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad \text{X- مومنتم (2-33-1)}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad \text{Y- مومنتم (2-33-2)}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \quad \text{Z- مومنتم (2-33-3)}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{K}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (34-2) \text{ معادله بقای انرژی}$$

همانطور که بیان شد با توجه به شرایط خاص سیال مدل شده، از مدل زیر برای تنش های برشی استفاده شده است:

$$\tau_{ik} = 2\eta(q) e_{ik}^{(1)} - N_1(q) e_{ik}^{(2)} + 4[N_1(q) + N_2(q)] e_{ij}^{(1)} e_{jk}^{(1)} \quad (35-2)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot I_2} = \sqrt{\frac{1}{2} d_{ij} d_{ji}} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right]} \quad (1-36-2)$$

$$\eta(\varphi) = \eta_0 \frac{1 + \sigma_2 \varphi^2}{1 + \sigma_1 \varphi^2} \quad (2-36-2)$$

$$N_1(\varphi) = C_{N1} \left[\eta \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 \sigma_2 - \lambda_2 \sigma_1) \varphi^2}{1 + \sigma_1 \varphi^2} \right] \quad (3-36-2)$$

$$N_2(\varphi) = C_{N21} - C_{N22} \eta(\varphi) \quad (4-36-2)$$

$$e_{ik}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (5-36-2)$$

$$e_{ik}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(v_m \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_m} + v_m \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + 2 \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \frac{\partial v_m}{\partial x_j} \right) \quad (6-36-2)$$

در این روابط $\eta, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2, C_{N1}, C_{N21}$ و C_{N22} ثوابت رئولوژیکی مدل می باشند. با توجه به این روابط، تنشهای برشی موجود در روابط ناویر استوکس به صورت زیر مدل می شوند:

ترمهای تنش معادله مومنتم در جهت X:

$$\tau_{xx} = 2\eta(\varphi)e_{xx}^{(1)} - N_1(\varphi)e_{xx}^{(2)} + 4[N_1(\varphi) + N_2(\varphi)](e_{xx}^{(1)}e_{xx}^{(1)} + e_{xy}^{(1)}e_{yx}^{(1)} + e_{xz}^{(1)}e_{zx}^{(1)}) \quad (1-37-2)$$

$$\tau_{xy} = 2\eta(\varphi)e_{xy}^{(1)} - N_1(\varphi)e_{xy}^{(2)} + 4[N_1(\varphi) + N_2(\varphi)](e_{xx}^{(1)}e_{xy}^{(1)} + e_{xy}^{(1)}e_{yy}^{(1)} + e_{xz}^{(1)}e_{zy}^{(1)}) \quad (2-37-2)$$

$$e_{xx}^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3-37-2)$$

$$e_{xy}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4-37-2)$$

$$e_{xz}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5-37-2)$$

$$e_{yy}^{(1)} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6-37-2)$$

$$e_{zy}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7-37-2)$$

$$e_{xx}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (8-37-2)$$

$$e_{xy}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (9-37-2)$$

ترمهای تنش معادله مومنتم در جهت Y :

$$\tau_{xy} = 2\eta(\varphi) e_{xy}^{(1)} - N_1(\varphi) e_{xy}^{(2)} + 4[N_1(\varphi) + N_2(\varphi)] \left[e_{xx}^{(1)} e_{xy}^{(1)} + e_{xy}^{(1)} e_{yy}^{(1)} + e_{xz}^{(1)} e_{xy}^{(1)} \right] \quad (1-38-2)$$

$$\tau_{yy} = 2\eta(\varphi) e_{yy}^{(1)} - N_1(\varphi) e_{yy}^{(2)} + 4[N_1(\varphi) + N_2(\varphi)] \left[e_{xy}^{(1)} e_{xy}^{(1)} + e_{yy}^{(1)} e_{yy}^{(1)} + e_{yz}^{(1)} e_{xy}^{(1)} \right] \quad (2-38-2)$$

$$e_{xx}^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3-38-2)$$

$$e_{xy}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4-38-2)$$

$$e_{yy}^{(1)} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5-38-2)$$

$$e_{xz}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6-38-2)$$

$$e_{xy}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7-38-2)$$

$$e_{xy}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (8-38-2)$$

$$e_{yy}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[2u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (9-38-2)$$

ترمهای تنش معادله مومنتم در جهت Z :

$$\tau_{xz} = 2\eta(\varphi) e_{xz}^{(1)} - N_1(\varphi) e_{xz}^{(2)} + 4[N_1(\varphi) + N_2(\varphi)] \left[e_{xx}^{(1)} e_{xz}^{(1)} + e_{xy}^{(1)} e_{yz}^{(1)} \right] \quad (1-39-2)$$

$$\tau_{yz} = 2\eta(\varphi) e_{yz}^{(2)} + N_1(\varphi) e_{yz}^{(2)} + 4[N_1(\varphi) + N_2(\varphi)] \left[e_{yx}^{(1)} e_{xz}^{(1)} + e_{yy}^{(1)} e_{yz}^{(1)} \right] \quad (2-39-2)$$

$$e_{xz}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3-39-2)$$

$$e_{xx}^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4-39-2)$$

$$e_{xy}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (5-39-2)$$

$$e_{yy}^{(1)} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6-39-2)$$

$$e_{yz}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7-39-2)$$

$$e_{xx}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (8-39-2)$$

$$e_{yz}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (9-39-2)$$

برای بدون بعد سازی از متغیرهای زیر استفاده شده است.

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{a} & y^* &= \frac{y}{a} & \eta^* &= \frac{\eta}{\eta_0} & p^* &= \frac{p}{\bar{a}p} \\ \bar{p} &= -\frac{\partial p}{\partial z} & u^* &= \frac{u\eta_0}{\bar{p}a^2} & \text{Re} &= \frac{\bar{p}\bar{p}a^3}{\eta_0^2} & \tau_{ij}^* &= \frac{\tau_{ij}}{\bar{p}a} \\ T^* &= \frac{T-T_0}{T_m-T_0} & N^* &= N \frac{\bar{p}a}{\eta_0^2} & t^* &= t \frac{\bar{p}a}{\eta_0} & a &= D_h \text{ (قطر هیدرولیکی)} \end{aligned}$$

۲-۴-۱- معادلات مومنتم و انرژی برای جابجایی آزاد

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2-40-2) \text{ - معادله پیوستگی}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \quad (2-41-1) \text{ - مومنتم X}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (2-41-2) \text{ - مومنتم Y}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \quad (2-41-3) \text{ - مومنتم Z}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{K}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2-42-2) \text{ - معادله انرژی}$$

در اینجا چگالی تابعی از دما فرض شده است بنابراین توزیع خطی برای حجم نسبت به ΔT لحاظ شده است.

$$\Delta T = T - T_0 \quad (1-43-2)$$

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \quad (2-43-2)$$

V_0 حجم مینا و T_0 دمای مینا است. مینا در این پروژه ۳۰۰ K است.

$$V - V_0 = \beta V_0 \Delta T \quad (1-44-2)$$

$$V = V_0 (1 + \beta \Delta T) \quad (2-44-2)$$

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (3-44-2)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} (1 + \beta \Delta T) \quad (4-44-2)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)} \quad (5-44-2)$$

از آنجا که Re بصورت $Re = \frac{\rho \bar{P} D_h^3}{\eta_0^2}$ معرفی شده بنابراین Re بصورت موضعی متفاوت خواهد بود. (چون چگالی بصورت موضعی متفاوت است). رینولدز مینا در دمای ۳۰۰ K:

$$Re_0 = \frac{\rho_0 \bar{P} D_h^3}{\eta_0^2} \quad (45-2)$$

پس صورت کلی معادله مومنتم بدون بعد (از گذاشتن علامت * صرفنظر شده است) به شکل زیر می باشد.

$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (1-46-2) \text{ X-مومنتم}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) + F \quad (2-46-2) \text{ Y-مومنتم}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left(1 + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \quad (3-46-2) \text{ Z-مومنتم}$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \mathcal{N}^2 T \quad (47-2)$$

F=Free Convection Term

$$F = \frac{-g \eta_0^2}{\bar{P}^2 D_h^3} \quad (48-2)$$

فصل سوم

۳-۱- الگوریتمهای تحلیل مسائل پایدار

تحلیل عددی مسائل جریان پایدار بصورت شبه گذرا صورت می‌گیرد و پس از انتخاب یک شرط اولیه مناسب، معادلات حاکم در حالت غیردائم حل می‌شوند تا جوابها به سمت جوابهای، جریان پایدار همگرا شوند.

پیش از پرداختن به روشهای عددی، لازم است که به مشکلی که در رابطه با حل معادلات ناویراستوکس غیردائم وجود دارد، اشاره کنیم. با توجه به معادلات حاکم مشاهده می‌کنیم که معادلات مومنتوم و معادله انرژی دارای ترم تابع زمان برای مؤلفه‌های سرعت و دما هستند. بنابراین پارامترهای u ، v ، w و T بصورت غیردائم موجود می‌باشند ولی متأسفانه فشار در این معادلات دارای ترم تابع زمان نیست. برای غلبه بر این مشکل باید تغییراتی در معادله پیوستگی ایجاد کنیم تا فشار نیز قابل محاسبه شود.

برای انجام این کار، دو روش پیشنهاد شده است یکی از روشها افزودن جمله فشار تابع زمان به معادله پیوستگی است که به آن روش تراکم‌پذیر مصنوعی^۱ می‌گویند [۱۶]. روش دیگر ایجاد تغییراتی در معادلات مومنتوم و پیوستگی است که حاصل آن معادله پواسون برای فشار است.

^۱. Artificial Compressibility

۳-۱-۱: روش تراکم‌پذیری مصنوعی

کاربرد این روش برای معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر بوده و از سوی چورین^۲ [۱۶] معرفی شده است. در این روش، معادله پیوستگی با درج یک عبارت تابع زمان برای فشار به فرم زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \nabla \cdot V = 0 \quad (۱-۳)$$

در رابطه فوق^۳، تراکم‌پذیری مصنوعی سیال است. با توجه به معادله حالت، تراکم‌پذیری را به صورت شبه سرعت صوت و جرم مخصوص مصنوعی را با استفاده از روابط زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau = \frac{l}{c^2} \quad (۱-۲-۳)$$

$$c^2 = \frac{P}{\rho} \quad (۲-۲-۳)$$

در روابط فوق همه متغیرها به صورت بی‌بعد تعریف شده‌اند.

با توجه به روابط ۱-۳ و ۲-۳ معادله پیوستگی به فرم نهایی زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot V = 0 \quad (۳-۳)$$

گفتنی است که در حالت حدی، وقتی که به حالت دائم می‌رسیم ($t \rightarrow \infty$) معادله ۳-۳ به

صورت معادله پیوستگی تراکم‌ناپذیر ساده در می‌آید (چون در حالت دائم $\frac{\partial P}{\partial t}$ برابر صفر شده

است) [۷].

۳-۱-۲: روش معادله پواسون برای فشار

^۲. Chorin

یکی دیگر از روشهای CFD برای ایجاد ارتباط بین معادلات پیوستگی و مومنتوم، به کارگیری معادله پواسون برای فشار است. هرچند در این تحقیق از روش تراکم‌پذیری مصنوعی استفاده شده ولی بیان این روش خالی از لطف نیست. در این بخش، این روش برای جریانهای دوبعدی بررسی شده است. فرم بقای معادلات ناویراستوکس در حالت بی‌بعد و در جهات X و Y بصورت زیر است. برای سادگی علامت * از بالای معادلات حذف شده است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u \quad (1-4-3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v \quad (2-4-3)$$

اگر از معادلات فوق به ترتیب نسبت به X و Y مشتق بگیریم و نتیجه را با هم جمع کنیم، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(uv) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(v^2) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 u) + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 v) \right] \quad (5-3)$$

سمت راست معادله 5-3 بصورت زیر قابل ساده شدن است.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 u) + \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 v) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6-3)$$

در نهایت معادله 5-3 به فرم زیر قابل ساده شدن است:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{-\partial D}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(uv) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(v^2) + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(D) \right] \quad (7-3)$$

در رابطه فوق D، اتساع $(D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})$ است.

روشن است که در یک جریان تراکم‌ناپذیر، از معادله پیوستگی، عبارت D صفر است. ولی به دلایل عمدی این عبارت را در معادله 7-3 برابر صفر قرار نمی‌دهیم. در واقع باید آنرا در معادله

۷-۳ نکه داریم تا از انباشته شدن خطا در طی عملیات تکرار و همچنین از ناپایداری غیرخطی جلوگیری کند [۷].

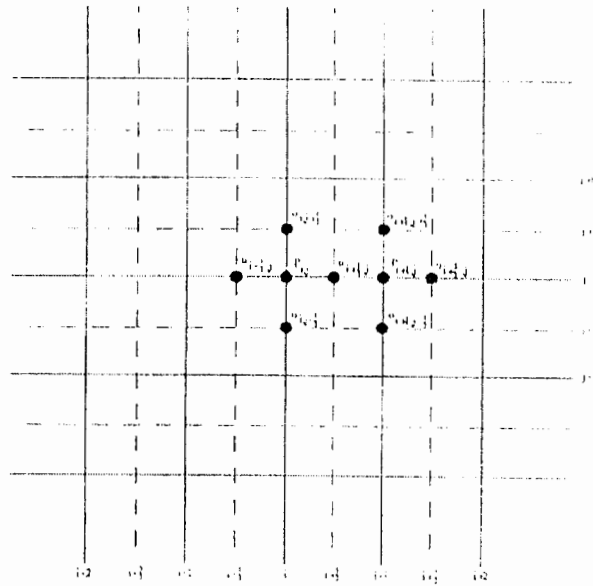
۲-۳ - نحوه تولید مش

در مسائلی که در آنها قوانین حاکم را به ترتیب حل می‌کنیم، بهتر است فرمولبندیهای تفاضل محدود را به صورتی بنویسیم که برای شبکه‌بندی موسوم به شبکه جابجا شده مناسب باشد. این روش، امکان به هم جفت شدن متغیرها را فراهم کرده و پایداری را بهبود می‌بخشد. شبکه جابجا شده را به روشهای مختلفی می‌توان تولید کرد. مثلاً شبکه را می‌توان در امتداد یکی از خطوط مختصات به اندازه نصف فاصله دو نقطه و یا در امتداد قطر و به اندازه نصف قطر جابجا کرد.

در شکل (۱-۳) نمونه‌ای از شبکه جابجا شده (در حالت دو بعدی) نشان داده شده است. با توجه به شکل، از آنجا که از دو شبکه منطبق بر هم استفاده می‌شود، آنها را شبکه‌های اولیه و ثانویه می‌نامیم. نقاط شبکه اولیه را با i و j که برای شبکه‌های استاندارد به کار می‌رود نشان می‌دهیم، در حالیکه شبکه ثانویه را با فواصل نصف مشخص می‌کنیم.

شبکه اولیه با خطوط u و v و شبکه ثانویه با خطوط خطچین نشان داده شده است. مؤلفه‌های u و v سرعت و فشار P مجهولهای مسأله هستند. نمونه‌ای از تخصیص متغیرها به نقاط مختلف شبکه به صورت زیر است. فشار را در گره‌های شبکه اولیه تعریف می‌کنیم و مؤلفه‌های سرعت را روی سطوح شبکه ثانویه انتخاب می‌کنیم.

به عبارت دقیقتر، مؤلفه X سرعت (u) را در فاصله میانی بین دو گره $(i + \frac{1}{2})$ و در جهت y مشابه به شبکه اولیه (j) انتخاب می‌کنیم. مؤلفه y سرعت (v) را نیز در گره‌های $i, j + \frac{1}{2}$ تعریف می‌کنیم.



شکل ۳-۱- نمونه شبکه جابجا شده و متغیرهای جریان

از آنجا که مرزها بر روی شبکه ثانویه تعریف می‌شوند و فشار بر روی شبکه اولیه تعریف شده و در معادلات حاکم فاقد مشتق مرتبه دوم است، لذا نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار نیست [۷]. در جدول زیر شماره گره‌های تخصیص یافته برای پارامترهای جریان در حالت سه بعدی آمده است :

جدول ۳-۱- شماره گره های اختصاص یافته برای پارامترهای جریان در حالت سه بعدی

پارامتر	جهت x	جهت y	جهت z
u	$i + \frac{1}{2}$	j	k
v	i	$j + \frac{1}{2}$	k
w	i	j	$k + \frac{1}{2}$
P	i	j	k
T	i	j	k

۳-۳ - نحوه گسسته سازی

فرم کلی و ساده شده معادلات حاکم بصورت ذیل و فرمهای گسسته آنها ، در ادامه بیان می شوند.

معادلات حاکم :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (1-8-3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (2-8-3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (3-8-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \quad (4-8-3)$$

فرم گسسته معادله پیوستگی:

$$\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} + c^2 \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x} \right) + c^2 \left(\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta y} \right) = 0 \quad (9-3)$$

معادلات میبایست تجزیه سازی (گسسته سازی) شوند. برای حل مساله ، از شبکه جابه جا شده

استفاده شده است و u و معادله مومنتم در جهت X در نقطه $(i+\frac{1}{2}, j)$ و معادله مومنتم در

جهت Y در نقطه $(i, j+\frac{1}{2})$ و P و W ، T و معادلات مومنتم در جهت Z و پیوستگی در نقطه

(i, j) تجزیه شده اند.

معادله X مومنتم:

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} + \frac{(u^2)_{i+1,j}^n - (u^2)_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\tau_{xx_{i+\frac{3}{2},j}}^n - \tau_{xx_{i-\frac{1}{2},j}}^n}{2\Delta x} + \frac{\tau_{xy_{i+\frac{1}{2},j+1}}^n - \tau_{xy_{i+\frac{1}{2},j-1}}^n}{2\Delta y} \right) \quad (10-3)$$

در رابطه ۳-۱۰ مقادیر τ_{ij} از روابط زیر به دست می آیند:

$$\tau_{xx} = 2\eta(q)e_{xx}^{(1)} - N_1(q)e_{xx}^{(2)} + 4[N_1(q) + N_2(q)](e_{xx}^{(1)}e_{xx}^{(1)} + e_{xy}^{(1)}e_{yx}^{(1)} + e_{xz}^{(1)}e_{zx}^{(1)}) \quad (1-11-3)$$

$$\tau_{xy} = 2\eta(q)e_{xy}^{(1)} - N_1(q)e_{xy}^{(2)} + 4[N_1(q) + N_2(q)](e_{xx}^{(1)}e_{xy}^{(1)} + e_{xy}^{(1)}e_{yy}^{(1)} + e_{xz}^{(1)}e_{zy}^{(1)}) \quad (2-11-3)$$

مقادیر مشتقات تنش برای معادله X مومنتم از روابط زیر به دست می آید.

- ترمهای معادله مومنتم در جهت X: گسسته سازی حول $(i + \frac{1}{2}, j)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{2\Delta x} \quad (1-12-3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{2\Delta y} \quad (2-12-3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x^2} \quad (3-12-3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\Delta y^2} \quad (4-12-3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\left(u_{i+\frac{3}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j-1}\right) - \left(u_{i+\frac{3}{2},j-1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1}\right)}{4\Delta x \Delta y} \quad (5-12-3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\left(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}}\right) - \left(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}\right)}{2\Delta x} \quad (6-12-3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\left(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}}\right) - \left(v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}\right)}{2\Delta y} \quad (7-12-3)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{4\Delta x^2} \left[\left(v_{i+2,j+\frac{1}{2}} + v_{i+2,j-\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j-\frac{1}{2}} \right) - \left(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (8-12-3)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{4\Delta y^2} \left[\left(v_{i+1,j+\frac{3}{2}} + v_{i,j+\frac{3}{2}} + v_{i+1,j-\frac{3}{2}} + v_{i,j-\frac{3}{2}} \right) - \left(v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (9-12-3)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\left(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} \right) - \left(v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}} \right)}{\Delta x \Delta y} \quad (10-12-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{\Delta x} \quad (11-12-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{(w_{i,j+1} + w_{i+1,j+1}) - (w_{i,j-1} + w_{i+1,j-1})}{4\Delta y} \quad (12-12-3)$$

معادله γ مومنتم :

$$\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} + \frac{(v^2)_{i,j+1}^n - (v^2)_{i,j}^n}{\Delta y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\tau_{xy_{i+1,j+\frac{1}{2}}}^n - \tau_{xy_{i-1,j+\frac{1}{2}}}^n}{2\Delta x} + \frac{\tau_{yy_{i,j+\frac{3}{2}}}^n - \tau_{yy_{i,j-\frac{1}{2}}}^n}{2\Delta y} \right) \quad (13-3)$$

در رابطه (3-13) مقادیر τ_{ij} از روابط زیر به دست می آیند:

$$\tau_{xy} = 2\eta(q)e_{xy}^{(1)} - N_1(q)e_{xy}^{(2)} + 4[N_1(q) + N_2(q)](e_{xz}^{(1)}e_{xy}^{(1)} + e_{xy}^{(1)}e_{yy}^{(1)} + e_{xz}^{(1)}e_{xy}^{(1)}) \quad (1-14-3)$$

$$\tau_{yy} = 2\eta(q)e_{yy}^{(1)} - N_1(q)e_{yy}^{(2)} + 4[N_1(q) + N_2(q)](e_{xy}^{(1)}e_{xy}^{(1)} + e_{yy}^{(1)}e_{yy}^{(1)} + e_{yz}^{(1)}e_{xy}^{(1)}) \quad (2-14-3)$$

مقادیر مشتقات تنش برای معادله γ مومنتم از روابط زیر بدست می آید.

- ترمهای معادله مومنتم در جهت y : گسسته سازی حول $(i, j + \frac{1}{2})$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_{i+1, j+\frac{1}{2}} - v_{i-1, j+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \quad (1-15-3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_{i, j+\frac{3}{2}} - v_{i, j-\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \quad (2-15-3)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_{i+1, j+\frac{1}{2}} - 2v_{i, j+\frac{1}{2}} + v_{i-1, j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \quad (3-15-3)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{v_{i, j+\frac{3}{2}} - 2v_{i, j+\frac{1}{2}} + v_{i, j-\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \quad (4-15-3)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\left(v_{i+1, j+\frac{3}{2}} + v_{i-1, j-\frac{1}{2}} \right) - \left(v_{i+1, j-\frac{1}{2}} + v_{i-1, j+\frac{3}{2}} \right)}{4\Delta x \Delta y} \quad (5-15-3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\left(u_{i+\frac{1}{2}, j+1} + u_{i+\frac{1}{2}, j} \right) - \left(u_{i-\frac{1}{2}, j+1} + u_{i-\frac{1}{2}, j} \right)}{2\Delta x} \quad (6-15-3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\left(u_{i+\frac{1}{2}, j+1} + u_{i-\frac{1}{2}, j+1} \right) - \left(u_{i+\frac{1}{2}, j} + u_{i-\frac{1}{2}, j} \right)}{2\Delta y} \quad (7-15-3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{4\Delta y^2} \left[\left(u_{i+\frac{1}{2}, j+2} + u_{i-\frac{1}{2}, j+2} + u_{i+\frac{1}{2}, j-1} + u_{i-\frac{1}{2}, j-1} \right) - \left(u_{i+\frac{1}{2}, j} + u_{i-\frac{1}{2}, j} + u_{i+\frac{1}{2}, j+1} + u_{i-\frac{1}{2}, j+1} \right) \right] \quad (8-15-3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left[\left(u_{i+\frac{1}{2}, j+1} + u_{i-\frac{1}{2}, j} \right) - \left(u_{i+\frac{1}{2}, j} + u_{i-\frac{1}{2}, j+1} \right) \right] \quad (9-15-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(w_{i+1, j+1} + w_{i+1, j}) - (w_{i-1, j+1} + w_{i-1, j})}{4\Delta x} \quad (10-15-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_{i, j+1} - w_{i, j}}{\Delta y} \quad (11-15-3)$$

معادله Z مومنتم :

$$\frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{(uw)_{i+\frac{1}{2},j}^n - (uw)_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + \frac{(vw)_{i,j+\frac{1}{2}}^n - (vw)_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} = \frac{1}{R_s} \left(1 + \frac{\tau_{xx,i,j}^n - \tau_{xx,i,j}^n}{2\Delta x} + \frac{\tau_{yy,i,j}^n - \tau_{yy,i,j}^n}{2\Delta y} \right) \quad (۱۶-۳)$$

در رابطه (۱۶-۳) مقادیر τ_{ij} از روابط زیر به دست می آیند.

$$\tau_{xx} = 2\eta(q)e_{xx}^{(1)} - N_1(q)e_{xx}^{(2)} + 4[N_1(q) + N_2(q)](e_{xx}^{(1)}e_{xx}^{(1)} + e_{xy}^{(1)}e_{yz}^{(1)}) \quad (۱-۱۷-۳)$$

$$\tau_{yz} = 2\eta(q)e_{yz}^{(2)} + N_1(q)e_{yz}^{(2)} + 4[N_1(q) + N_2(q)](e_{yx}^{(1)}e_{xx}^{(1)} + e_{yy}^{(1)}e_{yz}^{(1)}) \quad (۲-۱۷-۳)$$

مقادیر مشتقات تنش ها هم از روابط زیر به دست می آید:

-ترمهای معادله مومنتم در جهت Z : گسسته سازی حول (i, j) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} \quad (۱-۱۸-۳)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\left(u_{i-\frac{1}{2},j+1} + u_{i+\frac{1}{2},j+1} \right) - \left(u_{i-\frac{1}{2},j-1} + u_{i+\frac{1}{2},j-1} \right)}{4\Delta y} \quad (۲-۱۸-۳)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\left(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} \right) - \left(v_{i-1,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j-\frac{1}{2}} \right)}{4\Delta x} \quad (۳-۱۸-۳)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \quad (۴-۱۸-۳)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (۵-۱۸-۳)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (۶-۱۸-۳)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (۷-۱۸-۳)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (۸-۱۸-۳)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} [(w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j-1}) - (w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1})] \quad (۹-۱۸-۳)$$

در معادلات ۳-۱۰ تا ۳-۱۸ با توجه به نحوه استقرار پارامترها روی شبکه جابجا شده، لازم است

که برخی ترمهای معادلات به فرم زیر محاسبه شوند:

$$(u^2)_{i+1,j,k} = \frac{1}{4} (u_{i+\frac{3}{2},j,k} + u_{i+\frac{1}{2},j,k})^2 \quad (۱-۱۸-۳)$$

$$(u^2)_{i,j,k} = \frac{1}{4} (u_{i+\frac{1}{2},j,k} + u_{i-\frac{1}{2},j,k})^2 \quad (۲-۱۸-۳)$$

$$(v^2)_{i,j+1,k} = \frac{1}{4} (v_{i,j+\frac{3}{2},k} + v_{i,j+\frac{1}{2},k})^2 \quad (۳-۱۸-۳)$$

$$(v^2)_{i,j,k} = \frac{1}{4} (v_{i,j+\frac{1}{2},k} + v_{i,j-\frac{1}{2},k})^2 \quad (۴-۱۸-۳)$$

$$(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4} (u_{i+\frac{1}{2},j,k} + u_{i+\frac{1}{2},j+1,k}) (v_{i,j+\frac{1}{2},k} + v_{i+1,j+\frac{1}{2},k}) \quad (۵-۱۸-۳)$$

$$(uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4} (u_{i+\frac{1}{2},j,k} + u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}) (v_{i,j-\frac{1}{2},k} + v_{i+1,j-\frac{1}{2},k}) \quad (۶-۱۸-۳)$$

$$(uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4} (u_{i-\frac{1}{2},j,k} + u_{i-\frac{1}{2},j+1,k}) (v_{i,j+\frac{1}{2},k} + v_{i-1,j+\frac{1}{2},k}) \quad (۷-۱۸-۳)$$

$$(uw)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (u_{i+\frac{1}{2},j,k} + u_{i+\frac{1}{2},j,k+1}) (w_{i,j,k+\frac{1}{2}} + w_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}) \quad (۸-۱۸-۳)$$

$$(uw)_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (u_{i-\frac{1}{2},j,k} + u_{i-\frac{1}{2},j,k+1}) (w_{i-1,j,k+\frac{1}{2}} + w_{i,j,k+\frac{1}{2}}) \quad (۱۰-۱۸-۳)$$

$$(vw)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (v_{i,j+\frac{1}{2},k} + v_{i,j+\frac{1}{2},k+1}) (w_{i,j,k+\frac{1}{2}} + w_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}) \quad (۱۱-۱۸-۳)$$

$$(vw)_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (v_{i,j-\frac{1}{2},k} + v_{i,j-\frac{1}{2},k+1}) (w_{i,j-1,k+\frac{1}{2}} + w_{i,j,k+\frac{1}{2}}) \quad (۱۲-۱۸-۳)$$

معادله انرژی :

$$\frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \left(U_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + U_{i-\frac{1}{2},j,k}^n \right) \times \left(\frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{4\Delta x} \right) + \left(V_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + V_{i,j-\frac{1}{2},k}^n \right) \times \left(\frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{4\Delta y} \right) + \left(W_{i,j}^n \times \left(\frac{T_{i,j,k}^n - T_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} \right) \right) = \frac{1}{\text{Re.Pr}} \left(\frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (19-3)$$

۳-۴ - نحوه اعمال شرایط مرزی

به علت مشخص نبودن شرط مرزی فشار در بیشتر مسائل، استفاده از شبکه جابجا شده و فرمولبندی به روش علامتگذاری و سلول مفید است. بدین ترتیب که می‌توان شبکه ثانویه را بر روی مرزهای قلمرو که در آنها شرط مرزی سرعت و نه فشار، لازم است منطبق کرد. در هر حال این فایده با ضرری نیز همراه است و آن ناشی از نیاز به مقادیری از سرعت در خارج قلمروست. این مقادیر را سرانجام با بیرونیابی مقادیر داخل قلمرو و یا تقریب مشتقها در مرزها حساب می‌کنیم. برای اعمال شرایط مرزی، شبکه جابجا شده، شکل ۳-۲ را در حالت جریان دوبعدی در نظر می‌گیریم.

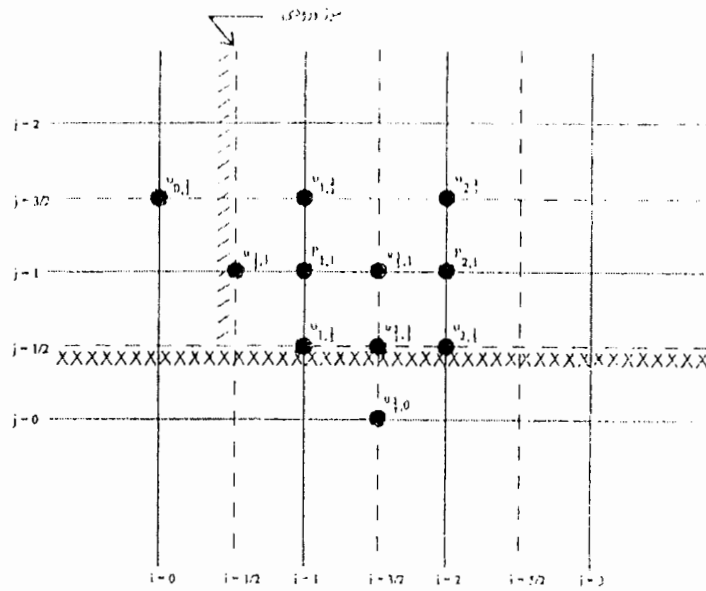
سطح جامد را در امتداد $\mathbf{j} = \frac{1}{2}$ و مرز ورودی را در امتداد $\mathbf{i} = \frac{1}{2}$ فرض می‌کنیم چون سطح جامد فرض شده است، شرط عدم لغزش را می‌توان به کار برد، در نتیجه :

$$v_{1,\frac{1}{2}} = v_{2,\frac{1}{2}} = \dots = v_{i,\frac{1}{2}} = 0 \quad (20-3)$$

به همین ترتیب $u_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = 0$ است که از آن $u_{\frac{3}{2},0}$ بصورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$u_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{\frac{3}{2},0} + u_{\frac{3}{2},1}) = 0 \quad (1-21-3)$$

$$u_{\frac{3}{2},0} = -u_{\frac{3}{2},1} \quad (2-21-3)$$



شکل ۳-۲- شرایط مرزی در یک شبکه جابجا شده

در مرز ورودی مؤلفه u سرعت مستقیماً مشخص می شود ($u_{\frac{1}{2},j} = U$) در حالیکه مؤلفه v

سرعت را با برونابی چنین تقریب می زنیم :

$$v_{0,\frac{3}{2}} = 2v_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}} - v_{1,\frac{3}{2}} \quad (۲۲-۳)$$

که $v_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}$ در شرط مرزی ورودی داده شده است.

فرض کنیم که گره های $\mathbf{i} = \mathbf{m} + \frac{1}{2}$ مرز خروجی باشند، در خروجی داریم :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \& \quad v = 0 \quad (۲۳-۳)$$

بنابراین در این مرز داریم :

$$u_{\mathbf{m}+\frac{1}{2},j} = u_{\mathbf{m}-\frac{1}{2},j} \quad (۱-۲۴-۳)$$

(۲-۲۴-۳)

$$\mathbf{v}_{m+1,j+\frac{1}{2}} = -\mathbf{v}_{m-1,j+\frac{1}{2}}$$

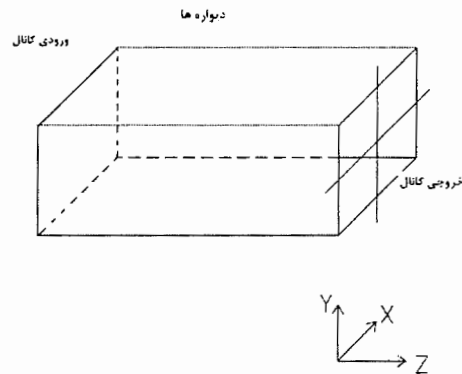
با توجه به اینکه ترم فشار بر روی شبکه اولیه اعمال می‌شود و نیز به دلیل اینکه در معادلات حاکم ترم فشار فقط دارای مشتقات مرتبه اول نسبت به مکان است، دیگر نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار نیست. هرچند دما نیز مانند فشار بر روی شبکه اولیه تحلیل می‌شود. ولی معادله انرژی دارای مشتقات مرتبه دوم دما نسبت به مکان است، لذا برای دما نیاز به اعمال شرایط مرزی است. ولی برای شرط مرزی دما، نیاز به نقاط خارج از شبکه نیز هست. در ورودی دما برابر با یک پروفیل ثابت $T = T_{in}$ است. لذا برای دما در خارج از شبکه در مرز ورودی داریم:

$$T_{0,j} = 2T_{in} - T_{1,j} \quad (۱-۲۵-۳)$$

بر روی دیواره $z = \frac{1}{2}$ نیز شرط دیواره دما ثابت $T = T_w$ را اعمال می‌کنیم پس:

$$T_{i,0} = 2T_w - T_{i,1} \quad (۲-۲۵-۳)$$

اعمال سایر شرایط مرزی نیز به همین شکل خواهد بود.



شکل ۳-۳- شرایط مرزی اعمال شده در کانال

۳-۵- نحوه اجرای روش علامتگذاری و سلول

برای حل CFD معادلات حاکم بایستی ابتدا مش را تولید کنیم و پس از تولید مش شرایط اولیه را اعمال کنیم (برای جریانهای دائم، شرایط اولیه بایستی با فیزیک مسأله سازگار باشند و شرایط مرزی را ارضا نمایند). با توجه به اینکه معادلات مومنتوم مستقل از معادلات انرژی هستند ابتدا معادلات مومنتوم را بایستی حل کنیم و سپس جوابهای آنرا در معادله انرژی قرار دهیم و معادله انرژی را حل نماییم. با توجه به اینکه معادلات حاکم به شکل صریح گسسته شده‌اند کفایت در هر گام زمانی مقادیر جدید پارامترهای معادلات حاکم را از حل صریح جبری معادلات گسسته شده، بدست آوریم.

با توجه به نحوه گسسته شدن معادلات حاکم در می‌یابیم که در این روش ابتدا بایستی در هر گام از معادلات مومنتوم مقدار جدید مؤلفه‌های سرعت را بدست آوریم و سپس از معادله اصلاح شده پیوستگی، مقدار فشار جدید را تعیین کنیم و در هر گام تحلیل لازم است که شرایط مرزی را اعمال نماییم تا پاسخها به سمت پاسخهای حالت دائم همگرا شوند. همچنین برای ایجاد پایداری تحلیل لازم است که گام زمانی Δt ، گام مکانی (کوچکترین گام مکانی) Δx ، عدد رینولدز (Re) و سرعت صوت مجازی (C) رابه نحوی انتخاب کنیم که پاسخها همگرا شوند [۷] .

فصل چہارم

نتیجه گیری و بحث

۱-۴- بررسی آنالیز دقت

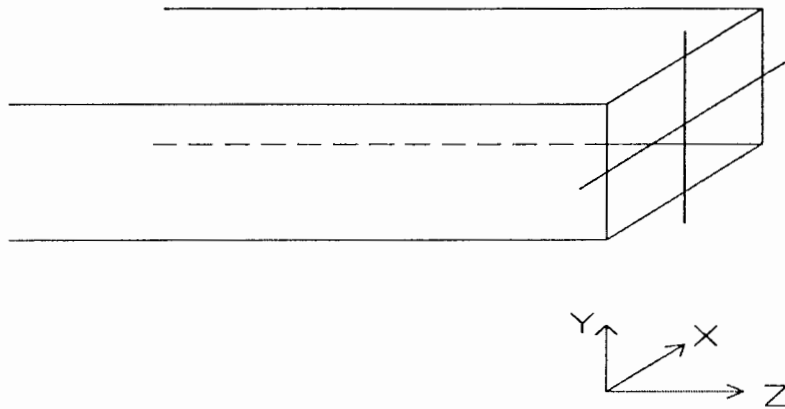
ابتدا می بایست یک شبکه بندی مناسب و بهینه از جهت تعداد مش و دقت محاسبه بدست آوریم. بدین منظور می بایست مرجعی برای صحیح ترین شبکه بندی از جهت تعداد بدست آوریم. شبکه 80×80 را بعنوان مرجع جوابها منظور می کنیم. مطابق جدول (۱-۴) به این نتیجه رسیده که شبکه 30×30 بهینه ترین می باشد، و با افزایش تعداد گره ها تاثیر چندانی در بهبود خطا ملاحظه نمی شود.

جدول ۱-۴- مقایسه مقادیر خطا در شبکه های مختلف

تعداد مش	همگرایی (Error)	CPU Time(HH:MM)
10×10	۱۰ %	۱:۱۷
20×20	۳ %	۲:۴۵
30×30	۱ %	۴:۳۲
40×40	۰/۵%	۸:۴۲
50×50	۰/۳%	۱۴:۲۱
80×80	۰	۲۴:۵۲

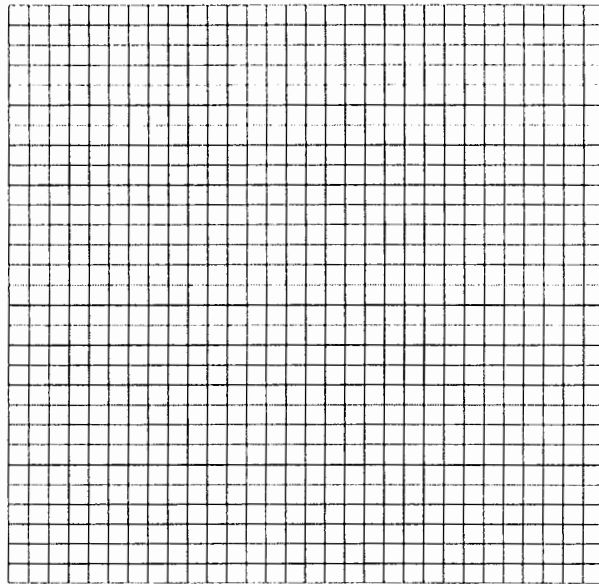
۲-۴- معرفی مساله

همانطوریکه در شکل (۱-۴) نشان داده شده است مساله ما عبارت است از عبور یک سیال ویسکوالاستیک از داخل یک کانال مستطیلی که جهت‌های مفروض در دستگاه مختصات کارتزین مشخص شده است.



شکل ۱-۴- کانال سیال مربوطه و وضعیت دستگاه مختصات

جریان ما آرام و کاملاً توسعه یافته است. حل ما در ابتدا برای کل مساحت مستطیل انجام می شود، و در مراحل بعدی بدلیل شرایط تقارن برای $1/4$ کل مقطع تحلیل صورت می گیرد. در شکل (۲-۴) شبکه بندی در نظر گرفته شده برای $1/4$ مقطع مورد نظر نشان داده شده است .



شکل ۴-۲- شبکه بندی مورد استفاده ۳۰×۳۰ در ۱/۴ کانال

هندسه و مشخصات کلی جریان در کل کانال از قرار زیر است :

۱- سیال : سیال ویسکوالاستیک با مشخصات ذیل:

$$\text{- چگالی } \rho : 4756 \text{ Kg/m}^3$$

$$\text{- لزجت در نرخ برش صفر } \eta_0 : 0.115 \text{ N.s/m}^2$$

$$\text{- ثابت رئولوژیکی } \sigma_1 : 1/25 \times 10^{-4} \text{ s}^2$$

$$\text{- ثابت رئولوژیکی } \sigma_2 : 6/25 \times 10^{-5} \text{ s}^2$$

$$\text{- ثابت رئولوژیکی } \lambda_1 : 0.1 \text{ s}$$

$$\text{- ثابت رئولوژیکی } \lambda_2 : 0.005 \text{ s}$$

$$\text{- ثابت رئولوژیکی اختلاف تنشهای نرمال اول } C_{N1} : 10$$

$$\text{- ثابت رئولوژیکی اختلاف تنشهای نرمال دوم } C_{N21} : 0.0001 \text{ N.s}^2/\text{m}^2$$

- ثابت رئولوژیکی اختلاف تنشهای نرمال دوم C_{N22} : $0.0015 \frac{N \cdot s^2}{m^2}$

۲- مشخصات هندسی :

- مقطع مربعی : 0.03 m

- قطر هیدرولیکی : 0.03 m

۳- عدد رینولدز بر مبنای لزجت ظاهری Re : ۱۲

۴- دمای جریان ورودی : 300 K

۵- دمای دیواره‌ها : 400 K

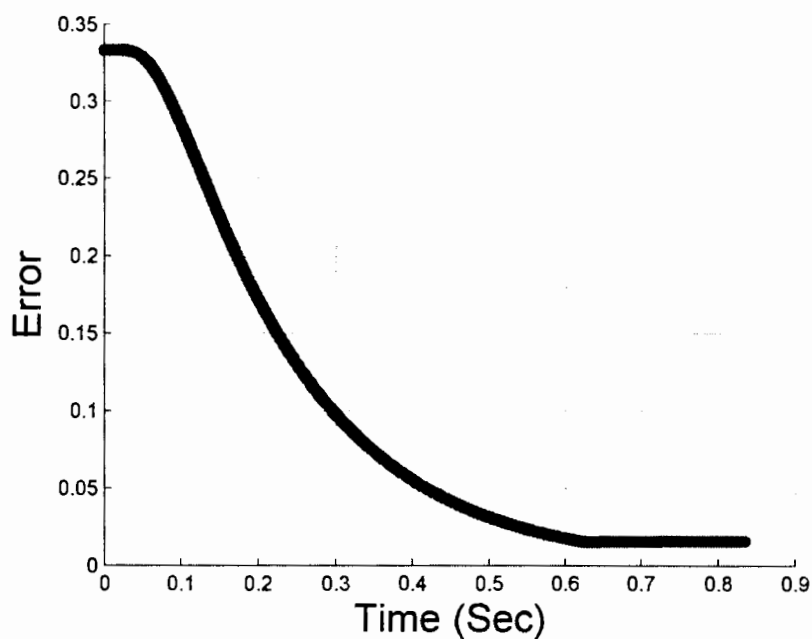
۶- عدد پرانتل Pr : ۳

۷- طول کانال در جهت Z : 12 m

۸- فشار : $2103 \frac{N}{m^2}$

همانطور که در فصل قبل بیان شد با توجه به اینکه معادلات مومنتوم مستقل از معادلات انرژی هستند ابتدا معادلات مومنتوم را بایستی حل کنیم و سپس جوابهای آنرا در معادله انرژی قرار دهیم و معادله انرژی را حل نماییم.

با توجه به نحوه گسسته شدن معادلات حاکم در می‌یابیم که در این روش ابتدا بایستی در هرگام از معادلات مومنتوم مقدار جدید مؤلفه‌های سرعت را بدست آوریم و سپس از معادله اصلاح شده پیوستگی، مقدار فشار جدید را تعیین کنیم و در هرگام تحلیل لازم است که شرایط مرزی را اعمال نماییم تا پاسخها به سمت پاسخهای حالت دائم همگرا شوند. یعنی مقدار خطای ما مقداری ناچیز و ثابت گردد. مقدار خطای حاصله از اجرای برنامه بصورت شکل (۳-۴) می باشد.

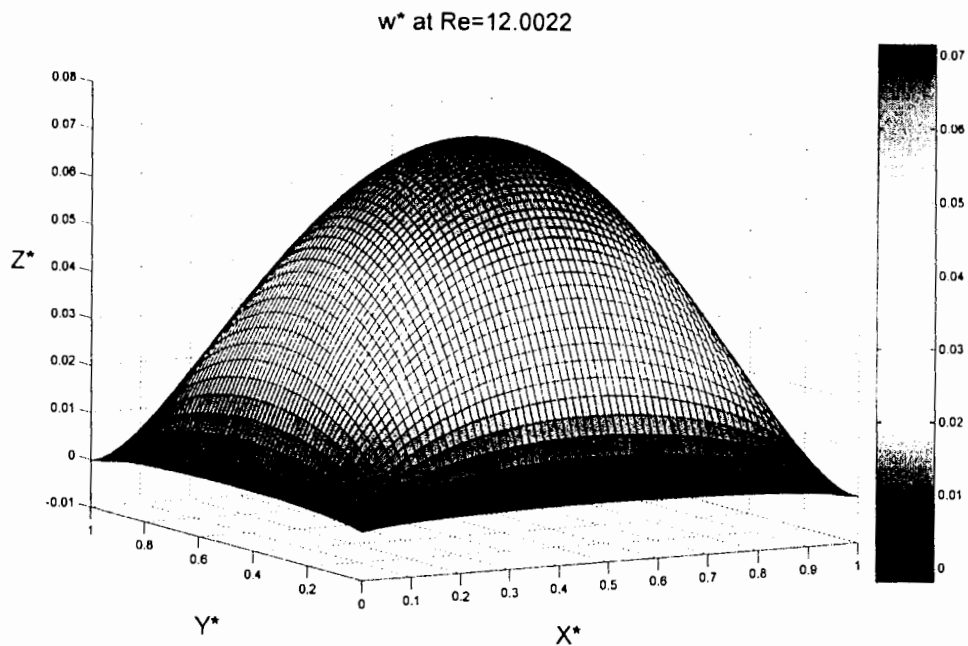


شکل ۴-۳- نمایش مقدار خطا بعد از اجرای برنامه

شبکه بندی ما برای کل کانال یک شبکه 70×70 می باشد. در این مرحله است که معادله مومنتم بدست می آید و می توانیم نتایج کلی مربوط به سرعت اصلی و سرعتهای گردابه ای را داشته باشیم.

۴-۳- پروفیلهای سرعت در کانال

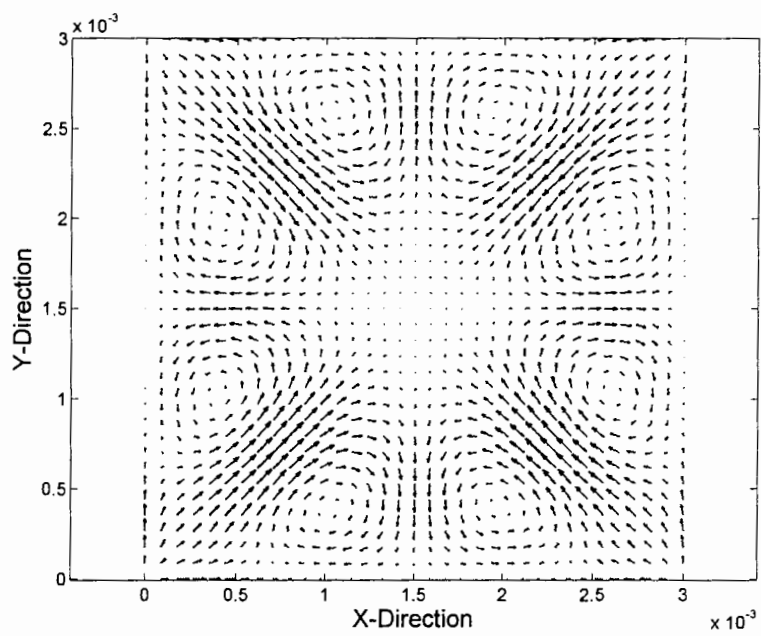
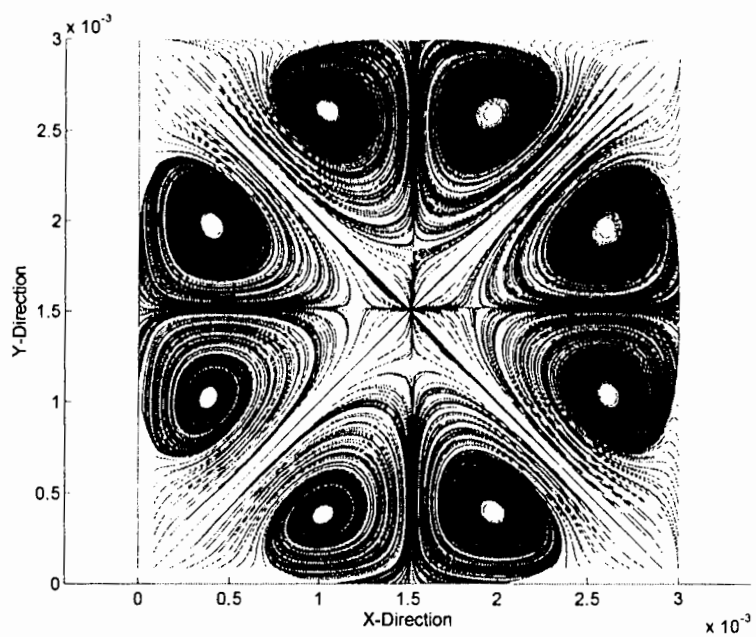
همانطوریکه بیان شد با اجرای برنامه می توان در حالت همگرایی مقادیر مربوط به سرعتها را داشته باشیم. در شکل (۴-۴) توزیع سرعت محوری بی بعد بصورت سه بعدی نشان داده شده است.



شکل ۴-۴- نمایش پروفیل سرعت محوری بدون بعد در داخل کانال

همچنین در شکل (۴-۵) نمایش جریانهای ثانویه (Secondary Flow) که همان مولفه های u و v سرعت می باشند در کل کانال نشان داده شده اند. البته باید در نظر داشت که این سرعتهای گردابه ای از نظر اندازه در برابر سرعت اصلی (Main Flow) مغلوب می باشند.

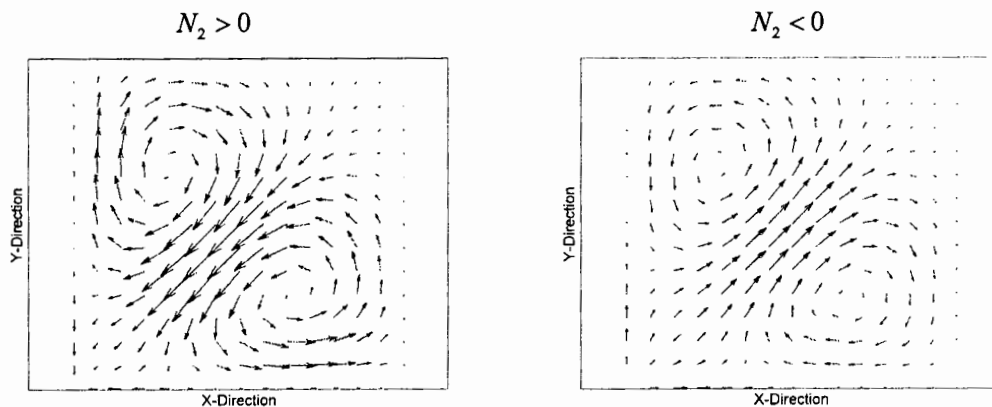
همانگونه که در شکل (۴-۵) نشان داده شده است در کل مقطع مربعی ما دارای هشت گردابه می باشیم که دقیقاً با نتایج حاصله از تحقیقات قبل مطابقت دارد. جهت و مقدار برداری جریانهای ثانویه نیز نشان داده شده است. جریانهای ثانویه در روی خطوط تقارن مربع باعث تقویت هم می گردند که بیشترین سرعتها مربوط به اقطار مربع می باشد. ذکر یک نکته در اینجا مفید می باشد که از این قسمت به بعد صرفاً جریانهایی که داخل مرز و به اندازه $1/2$ مش داخل مرز می باشند، رسم شده اند.



شکل ۴-۵- نمایش گردابه های موجود در کانال در اثر اختلاف تنشهای نرمال

۱-۳-۴- بررسی جهت جریانهای ثانویه

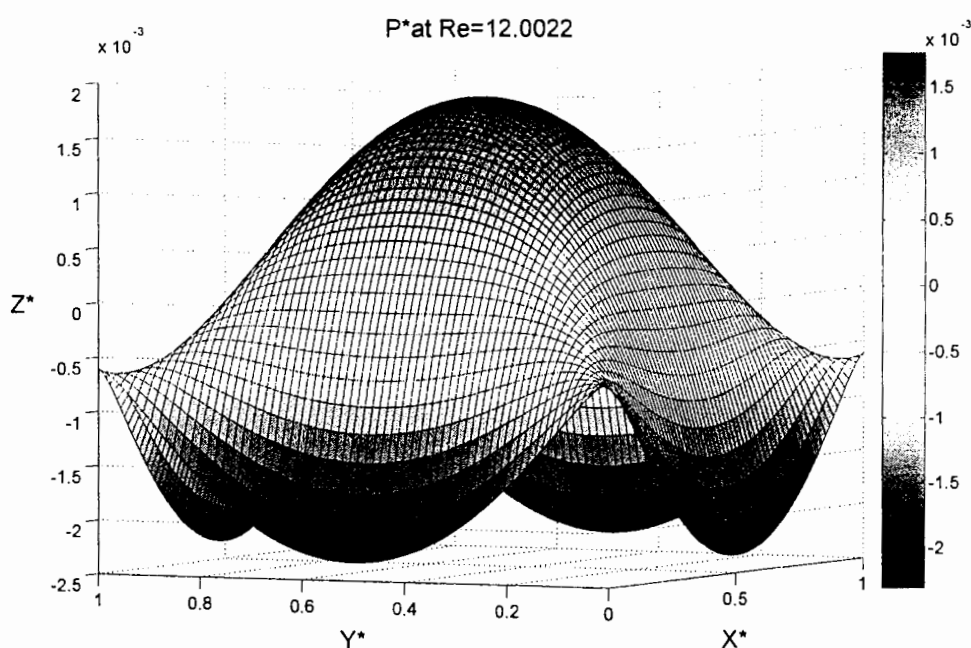
همانطوریکه در فصل ۲ بیان گردید اختلاف تنشهای نرمال اول و دوم سبب ایجاد جریانهای ثانویه می شوند و اختلاف تنشهای نرمال اول بر خلاف اختلاف تنشهای نرمال دوم مقداری مثبت دارد و بزرگی آن حدود ۱۰ برابر اختلاف تنشهای نرمال دوم می باشد. در حقیقت این اختلاف تنشهای نرمال اول است که سبب ایجاد جریانهای ثانویه می شود. اختلاف تنشهای نرمال دوم جهت این گردابه ها را مشخص می کنند. جهت گردابه های ایجاد شده در سیالات ویسکوالاستیک بر خلاف جهت گردابه های موجود در جریانهای مغشوش نیوتنی می باشد. حال با مثبت کردن اختلاف تنشهای نرمال دوم مشاهده می شود که جهت جریانهای ثانویه بالعکس می گردد. نتایج مربوط به این بررسی در شکل (۴-۶) نشان داده شده است.



شکل ۴-۶- عوض شدن جهت جریان ثانویه با تغییر جهت N_2

۴-۳-۲- فشار استاتیکی در داخل کانال

مقادیر بدست آمده برای فشار استاتیکی در کل مقطع به صورت شکل (۴-۶) می باشد. همانطوریکه در پروفیل فشار مشاهده می شود در وسط هر یک از اضلاع مربع ما کمترین مقدار فشار را داشته و در مرکز کانال در جایی که جریان ثانویه نداریم ما بیشترین فشار استاتیکی را داریم.

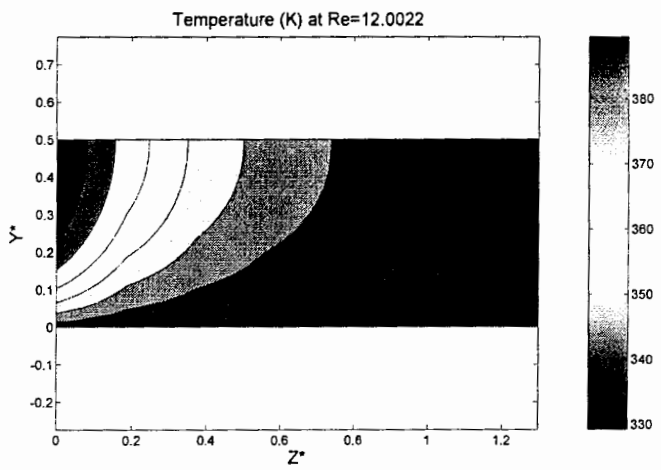
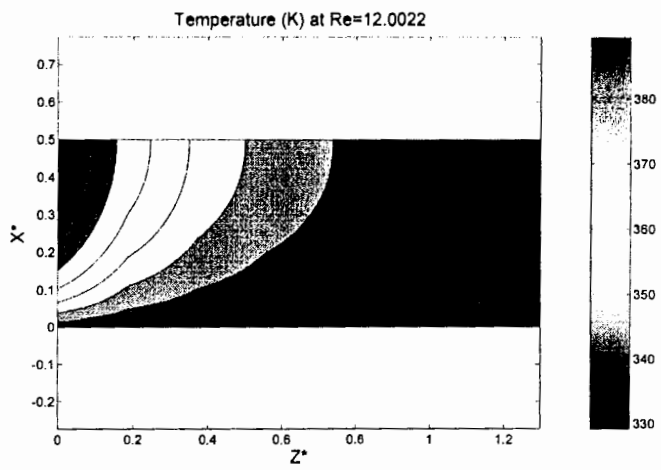
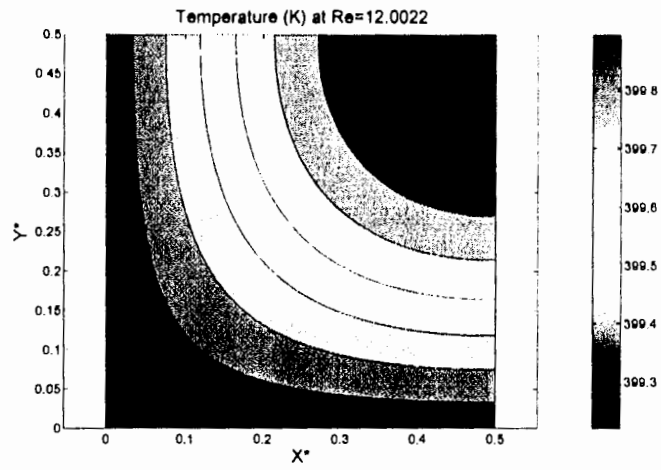


شکل ۴-۶- کانتورهای فشار استاتیکی در جهت محوری کانال

روشی که در این پروژه به منظور حل معادلات بکار گرفته شده است اینست که معادلات بصورت مستقیم و بدون خطی سازی حل شده اند. بنا براین می توان در هر نقطه فشار را بدست آوریم که این خود یکی از مواردی است که کاملا جدید می باشد و در سایر تحقیقات گذشته انجام نگرفته است.

۴-۴- پروفیل‌های دما در حالت توسعه یافته در کل کانال

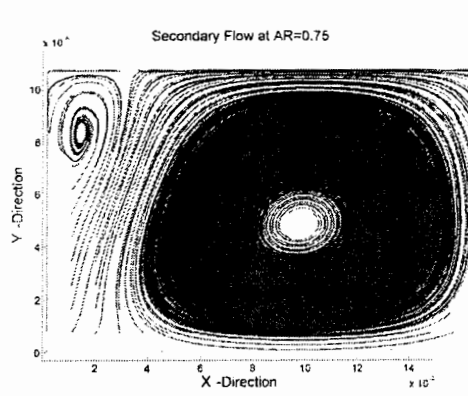
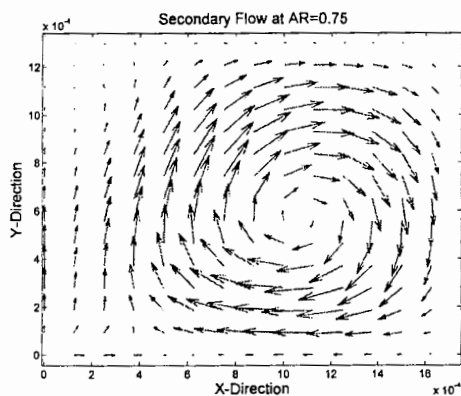
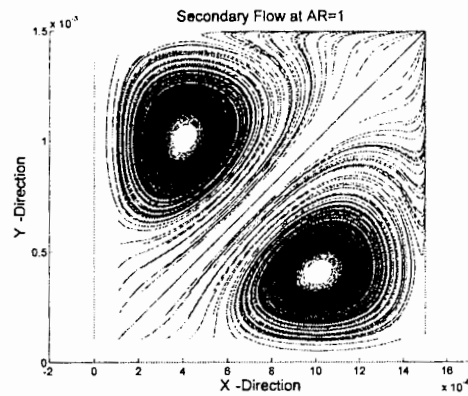
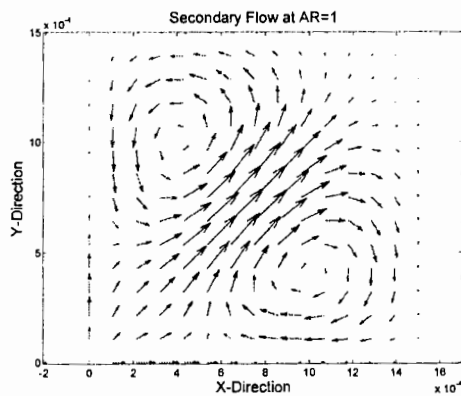
مفروضات کلی عبارت است از یک سیال ویسکو الاستیک که دارای دمای 300 K می باشد و دمای دیواره ها ثابت و 400 K است. پس از اجرای معادله مومنتم مقادیر مربوط به این اجرا را ذخیره کرده و با استفاده از برنامه مربوط به معادله انرژی می توانیم مقادیر مربوط به دما و پروفیل‌های مربوطه را در ناحیه کاملاً توسعه یافته و در هر مقطع از کانال که توسط جابجایی اجباری بوجود می آیند را بدست آوریم.

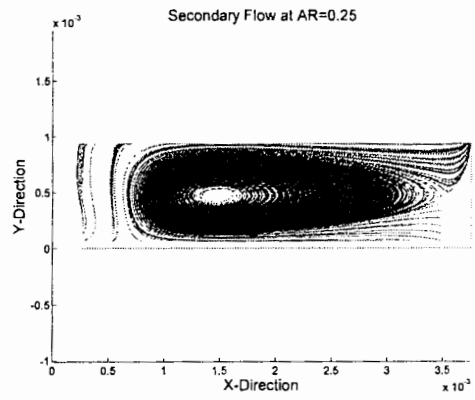
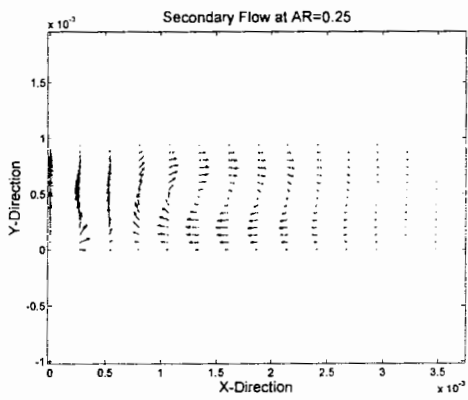
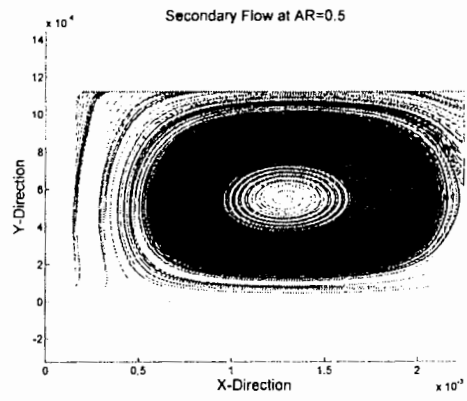
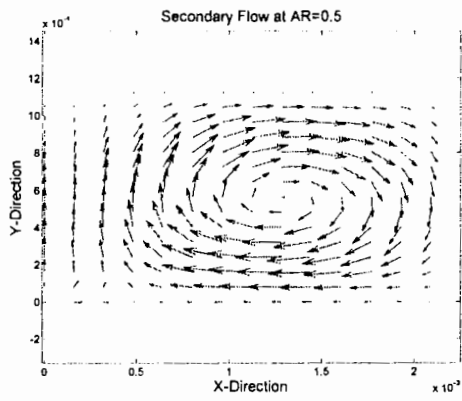
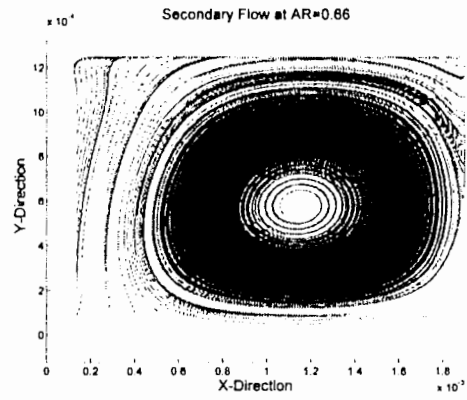
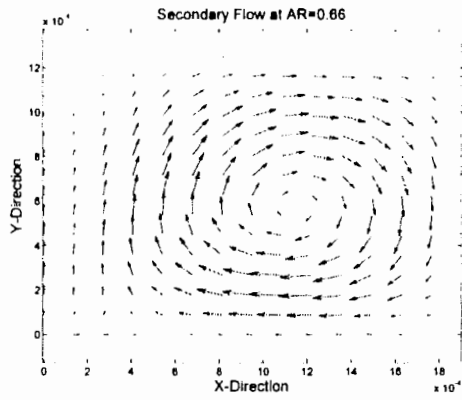


شکل ۴-۷- نمایش توزیع دما در هر سه صفحه از کانال

۴-۵- بررسی اثر طول به عرض کانال در قطر هیدرولیکی ثابت

در این مرحله هدف اینست که بدانیم اثر نسبت Aspect Ratio در تولید و یا تغییر جریانهای ثانویه چه می باشد. همانطور که بیان گردید در یک مقطع کاملاً مربعی هشت گردابه با اندازه های یکسان داریم. بی بعد سازه های ما بر اساس قطر هیدرولیکی و سرعت محوری بوده است پس ابتدا برای بررسی این اثر این دو پارامتر را ثابت نگه می داریم. پس از اجرای برنامه برای AR های مختلف به نتایج شکل (۴-۸) می رسیم. باید توجه داشت که از این مرحله به بعد به دلیل شرایط تقارن در مقطع و صرف زمان کمتر در اجرای برنامه، تحلیل ما برای $\frac{1}{4}$ مقطع انجام گرفته است. طول مقطع در حالت مربعی ۳ mm فرض شده است و به ترتیب با ثابت نگه داشتن قطر هیدرولیکی ابعاد کانال دچار تغییرات می شود.

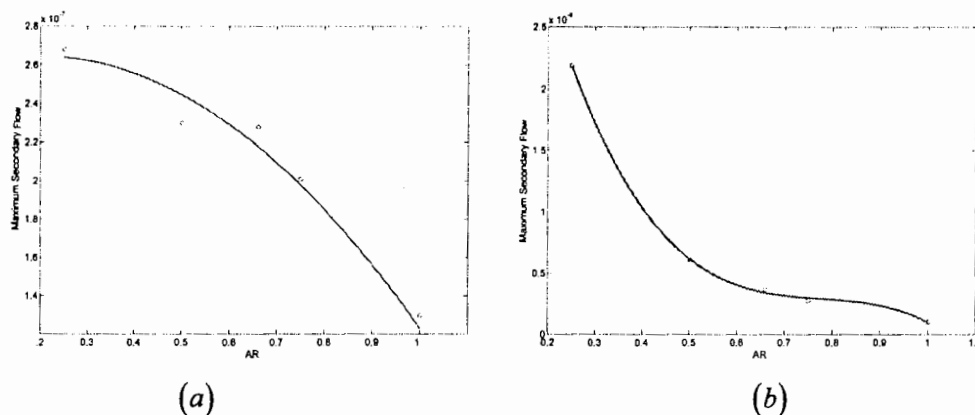




شکل ۴-۸- تغییر تدریجی جریانهای ثانویه در اثر تغییر نسبت طول به عرض در قطر هیدرولیکی ثابت

بطور کلی با کاهش نسبت Aspect Ratio گردابه های ما دچار تغییر می شوند. بدین ترتیب که با کم شدن AR تعداد گردابه ها به تدریج از هشت گردابه به چهار گردابه تقلیل می یابد. با کاهش نسبت طول به عرض اندازه سرعت جریانهای ثانویه تقریباً در یک حد باقی می ماند چون قطر هیدرولیکی و سرعت محوری در هر اجرا ثابت فرض شده است.

البته در حالت دیگری عدد Re را ثابت فرض کرده و با ثابت نگه داشتن طول و کم کردن عرض، قطر هیدرولیکی کاهش یافته و اندازه سرعت جریانهای ثانویه قاعدتاً زیاد می شود، که این همان چیزی است که مورد انتظار است. در شکل (۹-۴) نمودارهای مربوط به این دو حالت نمایش داده شده است.



شکل ۹-۴ (a): تغییرات سرعت جریانهای ثانویه در حالت قطر هیدرولیکی ثابت

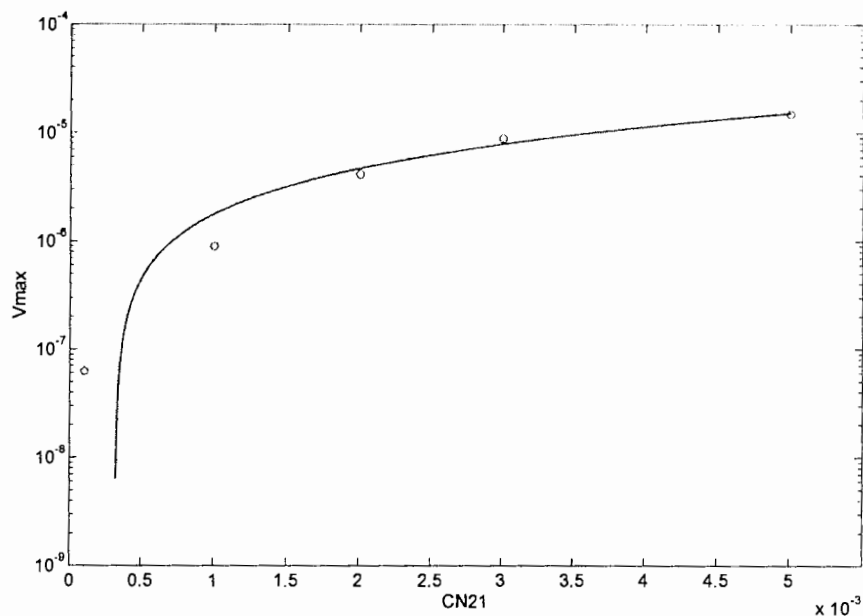
(b): تغییرات سرعت جریانهای ثانویه در حالت قطر هیدرولیکی متغیر

۴-۶- تاثیر ثابت رئولوژیک C_{N21} بر روی سرعت جریانهای گردابه ای

همانطور که در مباحث قبلی بیان شد این پارامتر بر روی قدرت جریان ثانویه تاثیر می گذارد.

با افزایش این پارامتر سرعت ماکزیمم هم افزایش می یابد و جریانهای گردابه ای قویتری حاصل

می گردد. البته به دلیل یک سری محدودیتها و عدم خطی سازی برای C_{N21} های بزرگتر شرط همگرایی مساله ارضا نمی شود. در شکل (۴-۱۰) این تاثیر نشان داده شده است. همانطوریکه مشاهده شده است با افزایش این پارامتر سرعتهای گردابه‌های تا حدود ۲۵۰ برابر افزایش می یابند. البته این سرعتها همچنان در برابر سرعت اصلی کانال ضعیف می باشند.



شکل ۴-۱۰- تاثیر پارامتر C_{N21} بر ماکزیمم سرعت گردابه ها

۴-۷- نتایج انتقال حرارت در حالت اجباری

در این قسمت به بررسی حرارتی در این کانال می پردازیم. در مرحله اول انتقال حرارت بصورت جابجایی اجباری در کانال را بررسی می کنیم. پس از حل معادلات حرکت و دستیابی به جریان ثانویه معادله انرژی را با اجرای برنامه و شرایط مرزی مربوطه حل می کنیم. داده های ورودی بخش دما را نیز در نظر می گیریم. پس از حل این معادله می توانیم به روشی که توضیح داده می

شود، مقادیر ناسلت را بدست آوریم. تحلیل در حالتی در نظر گرفته شده است که هر ۴ دیواره دمای ثابت دارند. در این مرحله تاثیر عدد Re بر عدد ناسلت و تاثیر ثابت رئولوژیک C_{N21} بر این عدد را بررسی می کنیم.

۴-۷-۱- نحوه بدست آوردن ناسلت

عدد ناسلت سرتاسری بصورت زیر تعریف شده است:

$$Nu_m = \frac{h_m D_h}{k} \quad (1-4)$$

در رابطه فوق، h_m ضریب جابجایی سرتاسری بوده و برای دیواره دما ثابت از رابطه زیر تعیین می شود:

$$h_m = \frac{Q}{A \Delta T_{im}} \quad (2-4)$$

که در رابطه فوق، A سطح جانبی کانال و ΔT_{im} اختلاف دمای متوسط لگاریمتی است:

$$\Delta T_{im} = \frac{(T_s - T_o) - (T_s - T_i)}{\ln \frac{T_s - T_o}{T_s - T_i}} \quad (3-4)$$

که در آن T_s دمای سطح، T_i متوسط دمای ورودی و T_o متوسط دمای خروجی است. بطور کلی برای محاسبه Q (کل انتقال حرارت) دو راه وجود دارد:

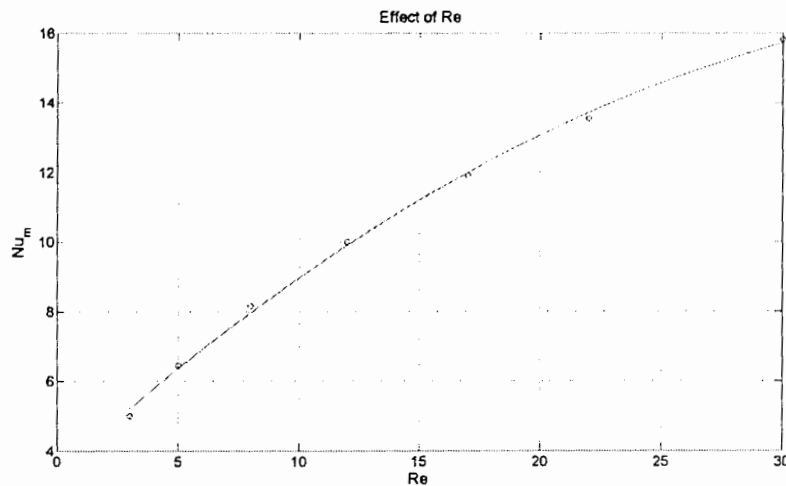
۱ - با اندازه گیری شار حرارتی روی دیواره ها و انتگرال گیری از این شار بر روی سطح دیواره ها، می توان کل انتقال حرارت را تعیین کرد.

۲ - می توان انتقال حرارت کلی را براساس دبی جریان و دمای ورودی و خروجی آن از رابطه ساده زیر تعیین کرد:

$$Q = \dot{m} c_p (T_o - T_i) \quad (4-4)$$

۴-۷-۲- تاثیر عدد رینولدز بر عدد ناسلت

همانطوریکه در شکل (۴-۱۱) مشاهده می شود اثر جریانهای ثانویه با افزایش عدد رینولدز بر انتقال حرارت نشان داده شده است. با افزایش عدد رینولدز سرعت جریان اصلی افزایش می یابد و همچنین گردابه ها سعی در جابجایی عرضی سیال دارند، که این دو عامل سبب افزایش عدد ناسلت با افزایش عدد رینولدز می گردد. طول ورودی حرارتی نیز کاهش می یابد.



شکل ۴-۱۱- تاثیر افزایش عدد رینولدز در عدد ناسلت متوسط

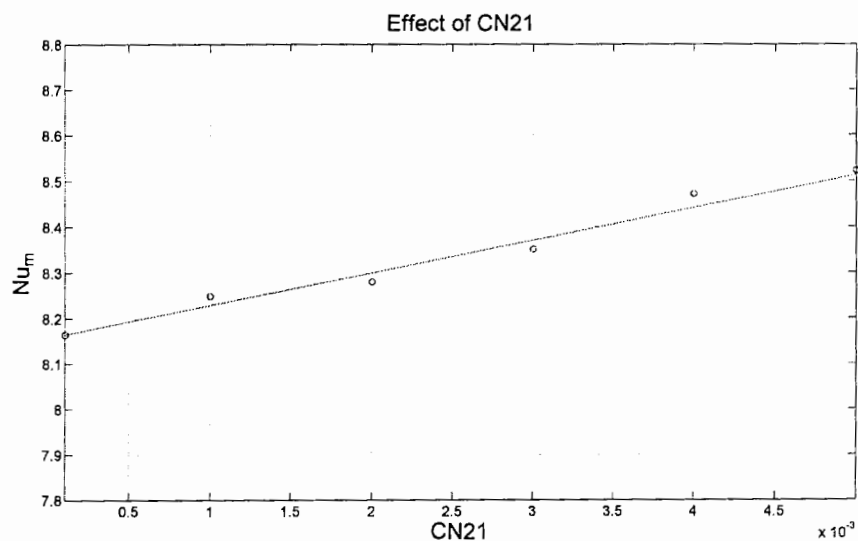
۴-۷-۳- تاثیر پارامتر C_{N21} بر عدد ناسلت

در این مرحله به بررسی تاثیر این پارامتر می پردازیم. همانطور که در مباحث قبل بیان شد با افزایش این عدد جریانهای گردابه ای قویتر خواهند شد.

در شکل (۴-۱۲) نشان داده شده است که با افزایش پارامتر C_{N21} در یک عدد رینولدز خاص عدد ناسلت افزایش می یابد که این افزایش آنچنان زیاد نیست و چیزی در حدود ۵٪ در یک بازه از پارامتر مورد نظر می باشد.

انتقال حرارت به سیال بستگی به پروفیل سرعت در مجاورت سطوح حرارتی دارد. یعنی هر چه گرادیان سرعت یا نرخ برش در مجاورت سطوح حرارتی بیشتر باشد ، جابجایی حرارت بیشتر و عدد ناسلت بیشتر است.

در انتقال حرارت این سیالات یک نکته مهم می باشد و آن ایجاد جریانهای ثانویه است. وجود همین جریانها سبب افزایش میزان انتقال حرارت می گردد. همین نکته باعث گردیده محققان در بحث انرژی در پی افزودن محلولهای پلیمری به مایعات خنک کننده یا گرم کننده از قبیل آب و... باشند تا بتوانند ماهیت سیال را عوض کرده و باعث راندمان بیشتر در بخش انرژی شوند.



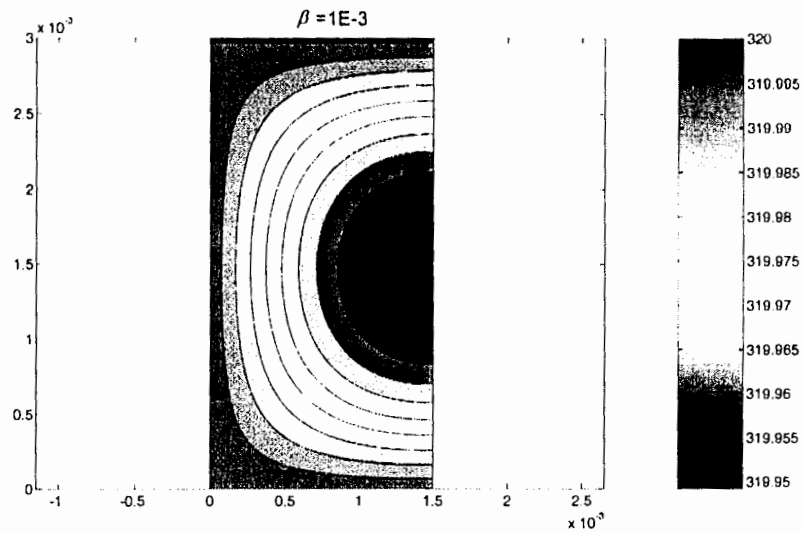
شکل ۴-۱۲- تاثیر ثابت رئولوژیکی C_{N21} بر عدد ناسلت متوسط

۴-۸- نتایج انتقال حرارت در حالت جابجایی آزاد

در فصل ۲ معادلات حاکم برای شامل روابط (۲-۴۴) و (۲-۴۵) در حالت جابجایی آزاد بیان گردید. کلیه معادلات می بایست بطور مستقیم و بدون هیچ ساده سازی حل گردند. چگالی سیال بصورت تابعی از دما می باشد و در نتیجه عدد رینولدز طبق رابطه (۲-۴۳) نیز بصورت موضعی تعریف می گردد و در هر بار اجرای برنامه عدد رینولدز جدید در معادلات قرار می گیرد. در این بخش اثر جابجایی آزاد در حالت‌های مختلفی از قبیل دمای دیواره ها متغیر و دمای سیال ثابت، ضریب انبساط حجمی (β) متغیر و تغییر دبی حجمی در هر دو حالت بررسی گردیده است.

۴-۸-۱- بررسی اثر ضریب انبساط حجمی β

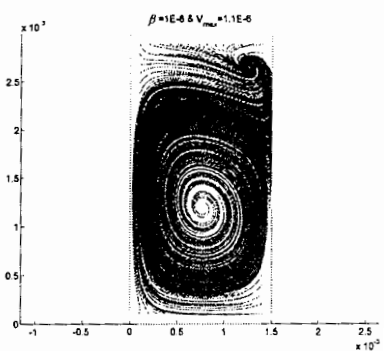
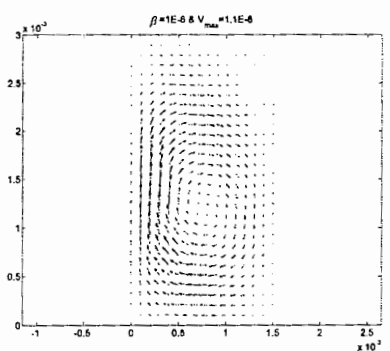
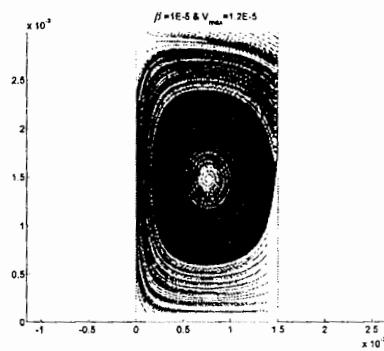
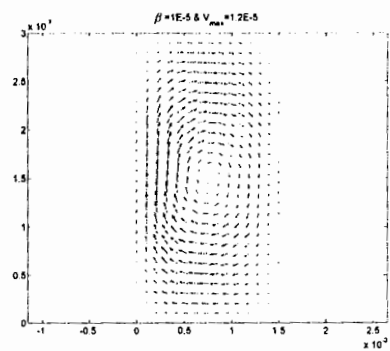
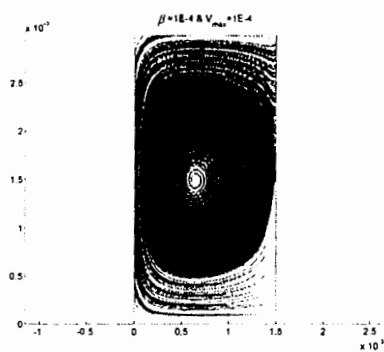
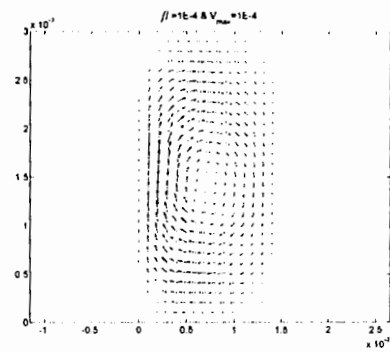
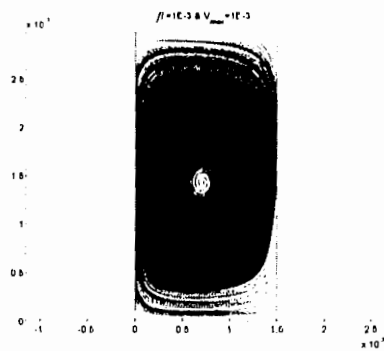
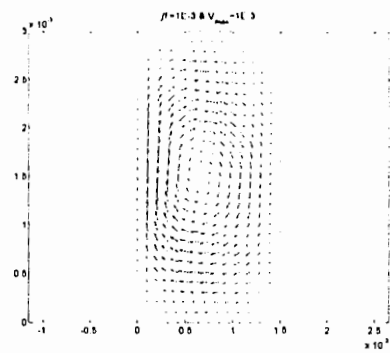
این ضریب با بالا رفتن دما سبب افزایش حجم سیال و در نتیجه تغییر چگالی سیال می شود. این تغییر چگالی عامل ایجاد Free Convection در کانال می باشد. به دلیل شرط تقارن محاسبات برنامه برای نیمی از کانال صورت می گیرد (محور طولی نصف گردیده و عرض ثابت می ماند). در شکل زیر توزیع دمای مربوط به نیمی از کانال نشان داده شده است. دمای سیال ورودی 300 k و دمای دیواره ها 320 k می باشد و ضریب β برابر $\frac{1}{T} 10^{-3}$ می باشد. بقیه شرایط فیزیکی و ابعاد هندسی به مانند تحلیل حالت جابجایی اجباری تعیین شده است.



شکل ۴-۱۳- توزیع دما در حالت جابجایی آزاد

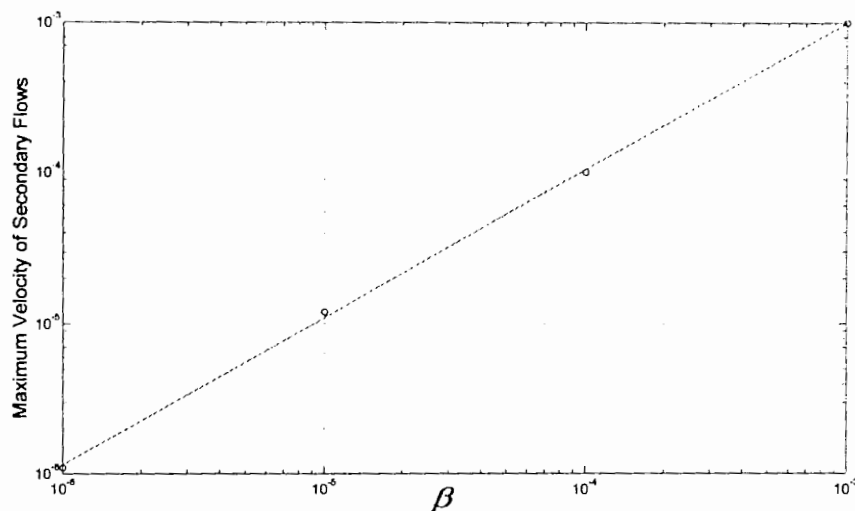
همانگونه که در شکل (۴-۱۴) نشان داده شده است با کاهش ضریب β ماکزیمم سرعت جریانهای گردابه ای نیز کاهش می یابند.

در حالتی که این ضریب β برابر 10^{-6} باشد گردابه های عرضی دارای شکل متفاوتی می گردند. اینطور می توان توضیح داد که با کم شدن این ضریب در قسمتهای فوقانی کانال به دلیل گرم شدن سیال اثر Free Convection تضعیف می گردد و در نتیجه ، تقابل آنها که هم اثر Free و هم اثر Force می باشد ، قابل مشاهده است.



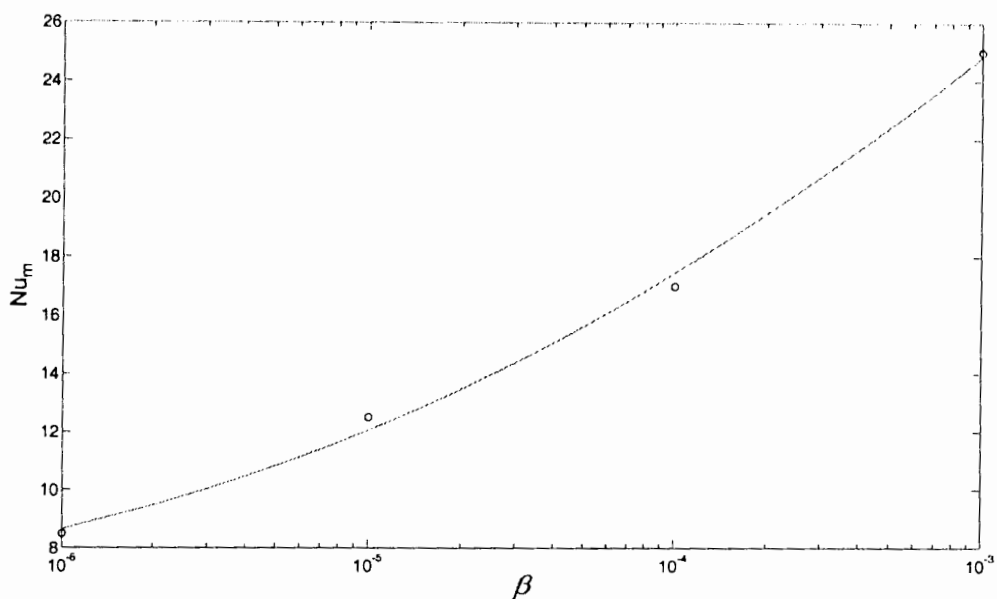
۱۴-۴ - خطوط جریانهای گردابه ای و اثر ضریب β بر جریانهای ثانویه جابجایی آزاد

در شکل (۱۵-۴) تغییرات ضریب β و اثر آن بر روی ماکزیمم سرعت گردابه ها در دستگاه لگاریتمی نشان داده شده است. رابطه آنها در این دستگاه یک رابطه خطی می باشد و می توان با بدست آوردن هر یک از این دو پارامتر ، دیگر پارامتر را بدست آوریم.



شکل ۱۵-۴- اثر ضریب β بر ماکزیمم سرعت جریانهای گردابه ای

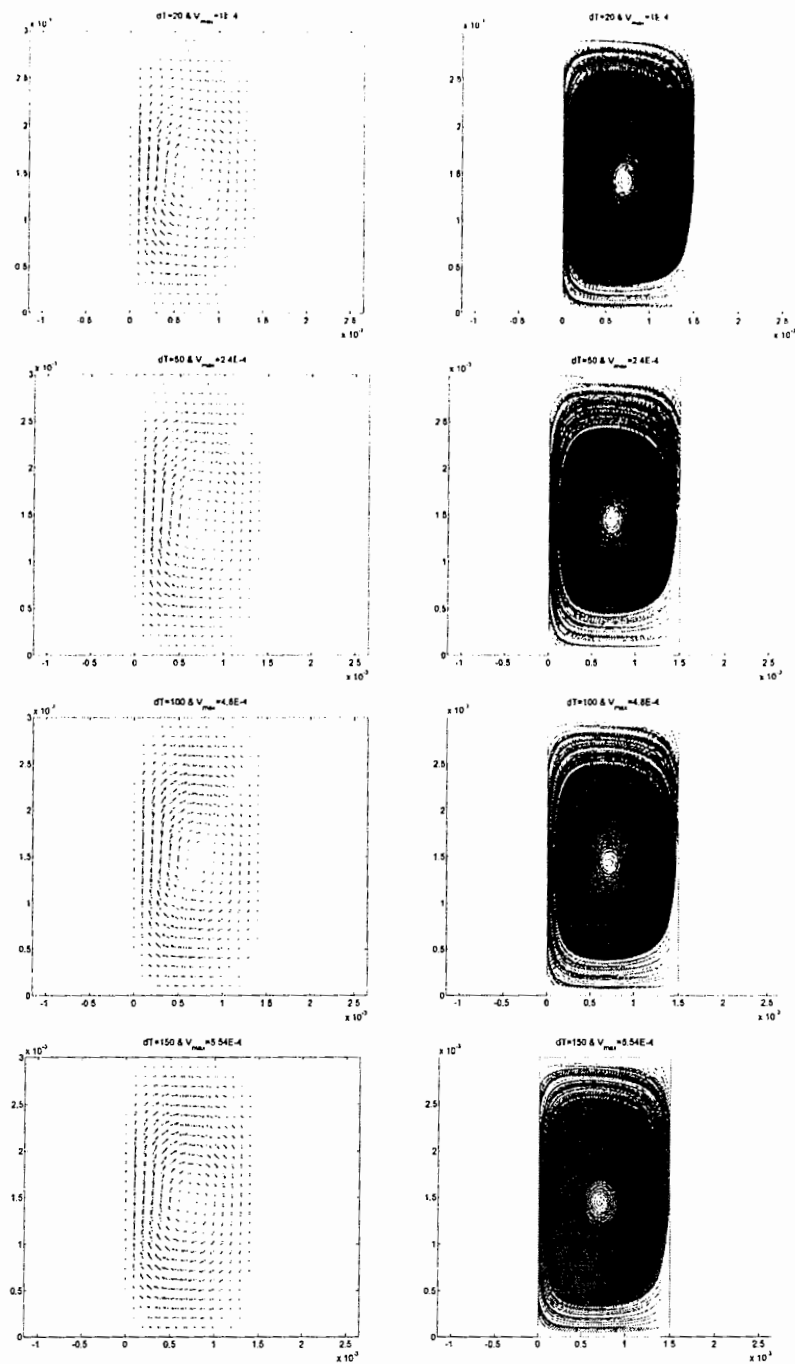
حال عدد ناسلت را مطابق روش قبل در جابجایی اجباری بدست می آوریم. در شکل (۱۶-۴) تاثیر ضریب β بر روی ناسلت بدست آمده و در دستگاه نیمه لگاریتمی نشان داده شده است. به عبارتی با افزایش این ضریب در یک رینولدز ثابت ، عدد ناسلت افزایش می یابد. یعنی سرعتهای گردابه ای افزایش می یابند و این باعث می گردد که انتقال حرارت بین دیواره و سیال بیشتر گردد. این نتیجه ای است که می بایست در انتقال حرارت به روش آزاد در نظر گرفته شود. پس می توان در مبدلهای حرارتی با افزایش این ضریب به وسیله مواد افزودنی نرخ انتقال حرارت را چندین برابر کرد.



شکل ۴-۱۶- تاثیر افزایش ضریب β بر روی انتقال حرارت در حالت جابجایی آزاد

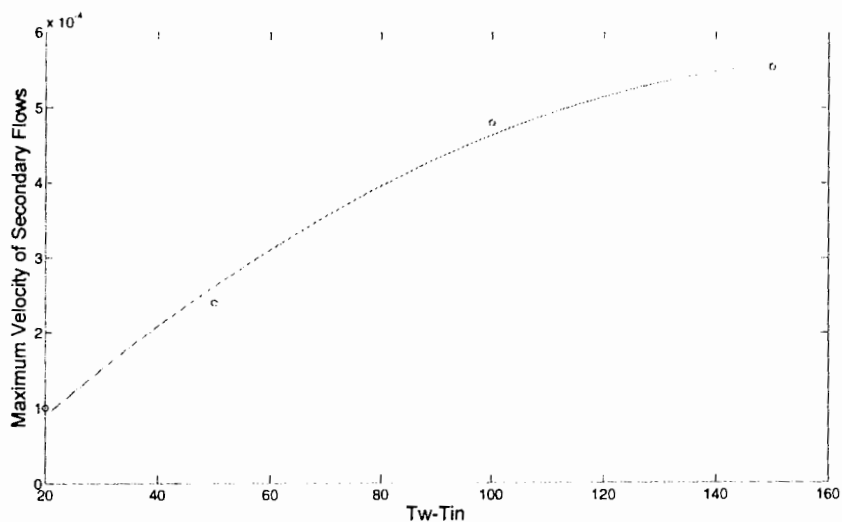
۴-۸-۲- بررسی اثر اختلاف دمای دیواره ها و سیال

در این قسمت حالتی را در نظر می گیریم که دمای بین دیواره های کانال افزایش و دمای سیال ورودی ثابت می ماند و تاثیر این افزایش را در اندازه سرعت های گردابه ای بررسی می کنیم و نتایج مربوط به این اثر را در مقدار ناسلت متوسط سیال را بدست می آوریم. همانطور که در شکل (۴-۱۷) نشان داده شده است با افزایش اختلاف دمای دیواره و سیال ورودی ، ماکزیمم سرعت های جریان های گردابه ای افزایش می یابد . برنامه مربوط به این قسمت برای اختلاف دماهای ۲۰ و ۵۰ و ۱۰۰ و ۱۵۰ اجرا شده و خطوط مربوط به جریان های ثانویه مطابق شکل ذیل می باشد.



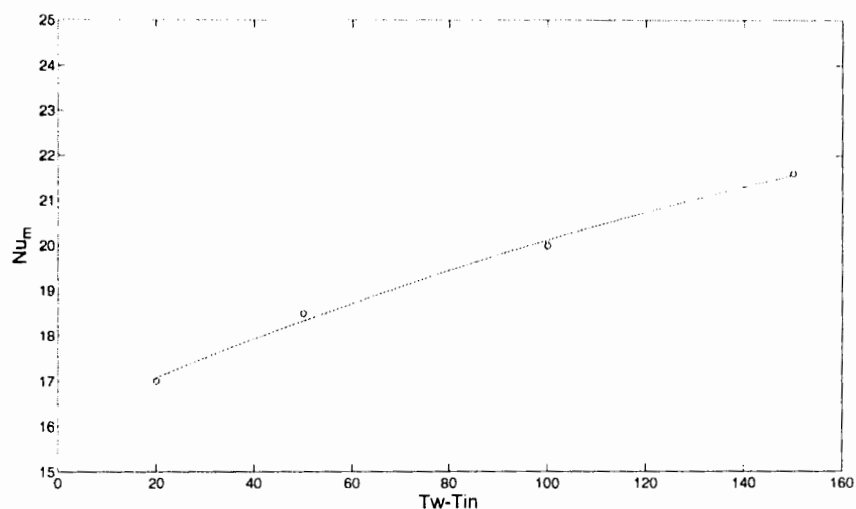
شکل ۴-۱۷- خطوط جریانهای گردابه ای و اثر اختلاف دما بر جریانهای ثانویه جابجایی آزاد

همانگونه که در شکل قبل نشان داده شد با افزایش اختلاف دما، جریانهای ثانویه نیز سریعتر می گردد و این به این علت است که سیال تا حدودی رقیق تر می گردد. نمودار مربوط به این تغییرات به صورت شکل زیر می باشد.



شکل ۴-۱۸- اثر اختلاف دما بر ماکزیمم سرعت جریانهای گردابه ای

از نمودار فوق میتوان برای بدست آوردن V_{max} در اختلاف دماهای بالاتر استفاده کرد. در این نمودار ضریب β ثابت و برابر 10^{-4} در نظر گرفته شده است. مطابق روشهای قبل برای بدست آوردن ناسلت اقدام نموده و رابطه ناسلت و اختلاف دمای دیواره ها را بدست می آوریم. شکل (۴-۱۹) ارتباط این دو پارامتر را نشان می دهد.

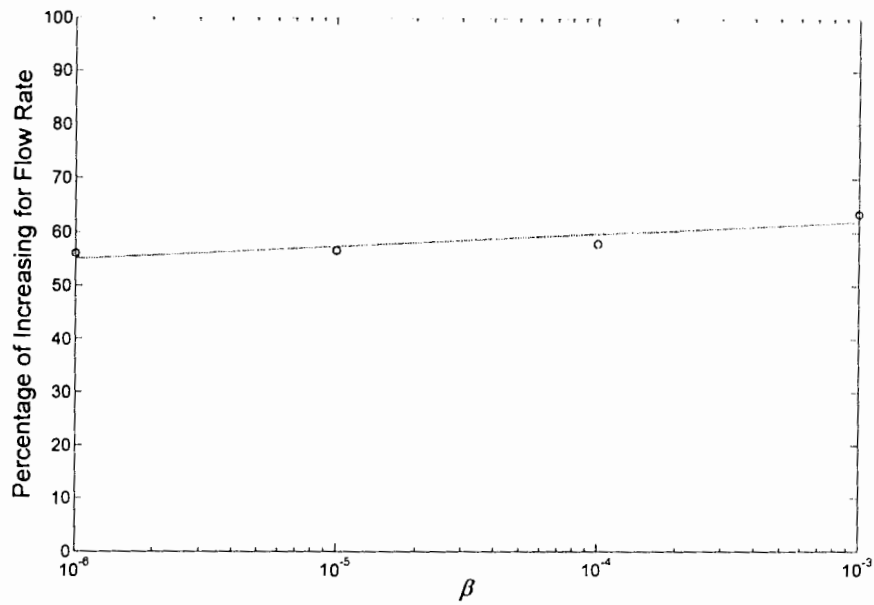


شکل ۴-۱۹- تاثیر افزایش اختلاف دمای دیواره و سیال بر روی انتقال حرارت در حالت جابجایی آزاد

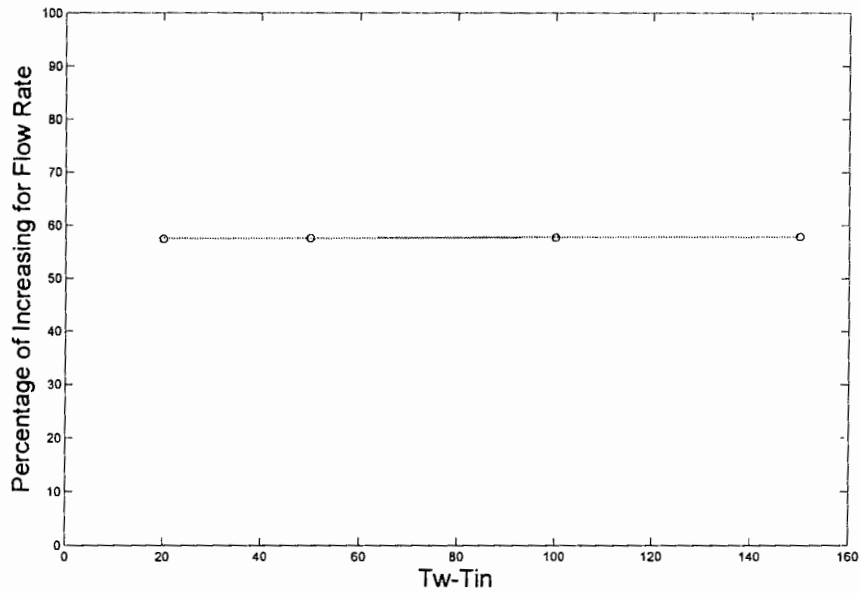
به نظر می رسد برای دستیابی به اعداد ناسلت بیشتر ابتدا ضریب β را تغییر داده تا به محدوده دلخواه خود برسیم و سپس با در نظر گرفتن اختلاف دماهای شرایط کاری مورد نظر اقدام به بهینه سازی عدد ناسلت می کنیم .

۴-۹- بررسی تغییرات دبی در اثر تغییر در اختلاف دما و ضریب β

با اندازه گیری دبی و اثر دو پارامتر ΔT و β بر روی آن به نتایجی مطابق شکل (۴-۲۰) و (۴-۲۱) دست پیدا می کنیم . محور عمودی بیانگر درصد نسبی تغییرات دبی است. همانگونه که مشاهده می گردد با افزایش ضریب β دبی تا حدودی افزایش می یابد ولی با تغییر در ΔT دبی تغییری نمی کند و تقریباً ثابت می ماند.



شکل ۴-۲۰- تغییرات دبی نسبی در اثر تغییر ضریب β



شکل ۴-۲۱- تغییرات دبی نسبی در اثر تغییر ضریب ΔT

۴-۱۰- محدودیتهای روش استفاده شده

۱- روش چورین فقط قادر به حل مسائل Steady State است و قادر به حل مسائل Un Steady نیست.

۲- پایداری این روش نسبت به روشهای Implicit نسبتاً کمتر است و بسته به نوع مساله و شرایط این امر متفاوت است.

۳- مدل ویسکوالاستیک استفاده شده به شدت غیر خطی است و به همین دلیل به کار بردن مستقیم معادلات سبب محدود شدن امکان همگرایی در بازه های خاصی از ثوابت رئولوژیکی می شود. در صورت خطی سازی امکان حل معادلات در بازه های بزرگتری از ثوابت ، امکان پذیر است.

۴- در انجام این پروژه کلیه معادلات بدون کوچکترین ساده سازی و بصورت کامل حل شده اند. این معادلات شامل مدل سیال ویسکوالاستیک و نیز روابط مربوط به جابجایی آزاد است .

مراجع و ماخذ

- [۱] شیخی نارانی، مجید. ۱۳۷۱. "رئولوژی، بررسی خواص، جریان، انتقال حرارت و اختلاط سیالات غیرنیوتنی". انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر.
- [۲] طالبی، فرهاد. رستمی، علی اصغر. ۱۳۷۶. "تحلیل جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانالهای غیر مدور". پایان نامه دکترا، دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [3] Bird, R.B, Armstrong, R.C, 1977, "Dynamics of Polymeric Liquids," Vol.I, NewYork, John Wiley.
- [4] Nhan, P.T., 2002, "Understanding Viscoelasticity Basics of Rheology," First Edition, Springer.
- [5] Brandt, L., Duwing, Ch., 2004, "Delayed die swell," Fluid Mechanics for graduate students Non-Newtonian fluid mechanics,
- [6] Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," First Edition, John Benjamin's Publishing Co.
- [7] Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T., 1989, "Computational Fluid Dynamics for Engineers," First Edition, two volumes, Austin, Texas: EES.
- [8] Chorin, A.j., 1967, "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," Journal Computational Physics, Vol. 2, pp.12-26.
- [9] Chhabra, R.P., Richardson, J.F., 1999, "Non-Newtonian Flow in the Process Industries," First Edition, Butterworth-Heinemann.
- [10] Hartnett, J.P., Kostic M., 1989, "Heat Transfer to Newtonian and Non-Newtonian Fluids in Rectangular Ducts," Advances in Heat Transfer, Vol.19, 247-366.
- [11] Dodson, A.G., Townsend, P., and Walters, K., 1974, "Non-Newtonian Flow in Pipes of Non-Circular Cross Section," Computers and Fluids, Vol.2, 317-338.

- [12] Townsend, P., Walters, K., and Waterhouse, W.M., 1976, "Secondary Flow in Pipes of Square Cross Section and the Measurement of the Second Normal Stress Difference," J. of Non-Newtonian Fluid Mech, Vol.1, 107-123.
- [13] Chandrupatla, A.R., Sastri, V.M, 1977, "Laminar Forced Convection Heat Transfer of a Non-Newtonian Fluid in a Squar Duct," J. of Heat Mass Transfer, Vol.20, 1315-1324.
- [14] Letelier, M.F., Siginer, D.A., 1999, "Secondary Flows in Tubes of Arbitrary Shape ," Advances in the Flow and Rheologyo of Non-Newtonian Fluids, Part A, Elsevier, 178-209.
- [15] James, F.S., 1992, "Rheological Methods in Food Process Engineering ," Second Edition, Michigan State University.
- [16] Harlow, F.H. and Welch, J.E., 1965, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," Vol. 8, pp.2182-2189.

ضمائم

الف : برنامه مربوط به حل جریان درون کانال و خطوط جریان ثانویه

```
ButtonName=questdlg('Do you want to have a new run?', ...
    'Question', ...
    'Yes','No','Yes');
```

```
if strcmp(ButtonName,'Yes')==1
```

```
    clear
    % Data
    dPdz=-۳۱۰۳ / ۳۱۰۸ % pa/m
    %Wg=۱;
    %۰,۰۰۱۷۷
    bxReal=۰,۰۰۳; %۰,۰۰۱۷۷ % m
    byReal=۰,۰۰۳; %۰,۰۰۱۷۷ % m
    nxR=۳۰;
    nyR=۳۰;
    PerfectError=۱E-۲;
    DhReal=۲*bxReal*byReal/(bxReal+byReal);
    nt=۱۲۰۰۰۰; %۱۲۰۰۰

    dt=۰,۰۰۰۰۰; %۰,۰۰۰۰۰
    nc=۱۰;
    c = sqrt(۱/dt)/nc;

    % Properties
    rou=۴۷۰۶; % kg/m^۳
    eta=۰,۱۰; %۰,۱۰ % Ns/m^۲
    sigma۱=۰,۰۰۰۱۲۰; %۰,۰۰۰۱۲۰ % s^۲
    sigma۲=۰,۰۰۰۰۶۲۰; %۰,۰۰۰۰۶۲۰ % s^۲
    landa۱=۰,۰۱; %۰,۰۱ % s
    landa۲=۰,۰۰۰; %۰,۰۰۰ % s
    CN۱=۲۸; %۱۰
    CN۲۱=۰,۰۲; %۰,۰۰۰۱ % Ns^۲/m^۲
    CN۲۲=۰,۱۰; %۰,۰۰۱۰ % s
    Pb=-dPdz;
    Wref=abs(dPdz*DhReal^۲/eta);

    % Non_Dimension
    Rf= rou*Pb*DhReal^۲/eta۰^۲;
    bx=bxReal/DhReal;
    by=byReal/DhReal;
    x=linspace(۰,bx/۲,nxR-۲);
    y=linspace(۰,by/۲,nyR-۲);
    dx=x(۲)-x(۱);
    dy=y(۲)-y(۱);
    nx=۲*nxR-۱;
    ny=۲*nyR-۱;

    % Initial Value
```

```

u=zeros(nx,ny+1);
v=zeros(nx+1,ny);
w=zeros(nx+1,ny+1);
P=zeros(nx,ny);
u'=zeros(nx,1);
v'=zeros(1,ny);
w'x=zeros(nx+1,1);
w'y=zeros(1,ny+1);
w'xy=w(1,1);

txxX=zeros(nx,ny);
txyX=zeros(nx,ny);
txyY=zeros(nx,ny);
tyyY=zeros(nx,ny);
txzZ=zeros(nx,ny);
tyzZ=zeros(nx,ny);

unew=u;
vnew=v;
wnew=w;
Pnew=P;

Resu=u;
Resv=v;
Resw=w;
ResP=P;
ResVu=[];
ResVv=[];
ResVw=[];
ResVP=[];

else

ResVu=[];
ResVv=[];
ResVw=[];
ResVP=[];

prompt={'nt','dt','rou','eta','dp/dz','sigma','sigma','landa','landa',...
'CN','CN','CN','coeff c:'};
name='Inputs';
numlines=1;
defaultanswer={numstr(nt),numstr(dt),numstr(rou),numstr(eta),numstr(dp/dz),...
numstr(sigma),numstr(sigma),numstr(landa),numstr(landa),...
numstr(CN),numstr(CN),numstr(CN),numstr(nc)};

answer=inputdlg(prompt,name,numlines,defaultanswer);

nt=str2num(answer{1,1});
dt=str2num(answer{2,1});
rou=str2num(answer{3,1});

```

```

eta = str2num(answer{t});
dPdZ = str2num(answer{0});
sigma1 = str2num(answer{1});
sigmaY = str2num(answer{Y});
landa1 = str2num(answer{A});
landaY = str2num(answer{A});
CN1 = str2num(answer{1});
CN1Y = str2num(answer{1});
CN1Y = str2num(answer{1});
nc = str2num(answer{1});

c = sqrt(1/dt)/nc;

Pb = -dPdZ;
Wref = abs(dPdZ*DhReal^Y/eta);
Re = rou*Pb*DhReal^Y/eta^Y;
end

handle = waitbar(0, 'Please wait...');

figure;
hold on

xlabel('\fontname{areal} \fontsize{14} Time (Sec)');
ylabel('\fontname{areal} \fontsize{14} Error');
grid;
for tT = 1:nt
    % Shear X
    for i = 1:nxR-Y
        for j = 1:nyR-1

            % Calculate Derivations
            dudx = (u(Y*i+Y,j)-u(Y*i-1,j))/(Y*dx);
            if j == 1
                dudy = (u(Y*i+1,j+Y)-u(Y*i+1,j-Y))/(Y*dy);
            else
                dudy = (u(Y*i+1,j+Y)-u(Y*i+1,j))/(Y*dy);
            end
            dYudxY = (u(Y*i+Y,j)-Y*u(Y*i+1,j)+u(Y*i-1,j)))/dx^Y;
            if i == 1
                dYvdxY = ((v(Y*i+1,j+1)+v(Y*i+1,j-1)+v(Y*i-1,j+1)+v(Y*i-1,j-1))-...
                    (v(Y*i,j+1)+v(Y*i,j-1)+v(Y*i+Y,j+1)+v(Y*i+Y,j-1)))/(1*dx^Y);
            else
                dYvdxY = ((v(Y*i+1,j+1)+v(Y*i+1,j-1)+v(Y*j+1)+v(Y*j-1))-...
                    (v(Y*i,j+1)+v(Y*i,j-1)+v(Y*i+Y,j+1)+v(Y*i+Y,j-1)))/(1*dx^Y);
            end
            if j == 1
                dYudyY = (u(Y*i+1,j+Y)-Y*u(Y*i+1,j)+u(Y*i+1,j-Y))/dy^Y;
            end
        end
    end
end

```

```

dYudxdy=((u(Y*i+Y, Y*j+Y)+u(Y*i-1, Y*j-Y))-...
(u(Y*i+Y, Y*j-Y)+u(Y*i-1, Y*j+Y)))/(xi*dx*dy);
dwdy=((w(Y*i, Y*j+Y)+w(Y*i+Y, Y*j+Y))-(w(Y*i, Y*j-Y)+w(Y*i+Y, Y*j-Y)))/(xi*dy);
else
dYudyY=(u(Y*i+1, Y*j+Y)-Y*u(Y*i+1, Y*j)+u*(Y*i+1))/dy^Y;
dYudxdy=((u(Y*i+Y, Y*j+Y)+u*(Y*i-1))-...
(u*(Y*i+Y)+u(Y*i-1, Y*j+Y)))/(xi*dx*dy);
dwdy=((w(Y*i, Y*j+Y)+w(Y*i+Y, Y*j+Y))-(w*x(Y*i)+w*x(Y*i+Y)))/(xi*dy);
end
dvdX=((v(Y*i+Y, Y*j+1)+v(Y*i+Y, Y*j-1))-(v(Y*i, Y*j+1)+v(Y*i, Y*j-1)))/(Y*dx);
dvdY=((v(Y*i+Y, Y*j+1)+v(Y*i, Y*j+1))-(v(Y*i+Y, Y*j-1)+v(Y*i, Y*j-1)))/(Y*dy);
dYvdxdy=((v(Y*i+Y, Y*j+1)+v(Y*i, Y*j-1))-(v(Y*i+Y, Y*j-1)+v(Y*i, Y*j+1)))/(dx*dy);
dwdX=(w(Y*i+Y, Y*j)-w(Y*i, Y*j))/dx;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
q=0.0*sqrt(abs(dwdX^Y+dwdY^Y+(dudy+dvdX)^Y+Y*(dudX+dvdY)^Y-...
xi*dudX*dvdY))*(Pb*DhReal/eta^Y);
%end

etaReal=eta*(1+sigma^Y*q^Y)/(1+sigma^1*q^Y);
N^1Real=CN^1*eta*(lambda^1-landa^Y)+(landa^1*sigma^Y-landa^Y*sigma^1)*q^Y)/(1+sigma^1*q^Y);
N^YReal=CN^Y^1-CN^Y^Y*etaReal;
% non-dimension function
eta=etaReal/eta^Y;
N^1=N^1Real*Pb*DhReal/eta^Y;
N^Y=N^YReal*Pb*DhReal/eta^Y;

unode=u(Y*i+1, Y*j);
vnode=(v(Y*i, Y*j+1)+v(Y*i+Y, Y*j+1)+v(Y*i, Y*j-1)+v(Y*i+Y, Y*j-1))/xi;

% Calculate Invariants
exx^1=dudX;
exx^Y=unode*dYudX^Y+vnode*dYudXdY+Y*dudX^Y+dvdX^Y+dwdX^Y+dvdX*dudy;
exy^1=(dvdX+dudy)/Y;

exy^Y=(unode*dYvdX^Y+vnode*dYvdXdY+unode*dYudXdY+vnode*dYudy^Y+...
Y*dudX*dudy+dudy*dvdY+Y*dvdX*dvdY+Y*dwdX*dwdY+dudX*dvdX)/Y;

eyy^1=dvdY;
exz^1=dwdX/Y;
ezy^1=dwdY/Y;

%Calculate Shear Stress
%tXX(X(Y*i+1, Y*j))=Y*eta*exx^1-N^1*exx^Y+xi*(N^1-N^Y)*(exx^1^Y+exy^1^Y+exz^1^Y);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tXX(X(Y*i+1, Y*j))=Y*eta*exx^1-N^1*exx^Y+xi*(N^1+N^Y)*(exx^1^Y+exy^1^Y+exz^1^Y);
%end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```



```

    txyX(Y*i+1,Y*j)=Y*eta*exy^1-N^1*exy^Y+xi*(N^1+N^Y)*(exx^1*exy^1+exy^1*exy^1+exz^1*exy^1);
%uend

    end
    end

                                %Unew

    for i=1:nxR-Y
        for j=1:nyR-1

            PTermX=(P(Y*i+1,Y*j)-P(Y*i,Y*j))/dx;

            CTerm^1X=((u(Y*i+1,Y*j)+u(Y*i+1,Y*j))^Y/xi-(u(Y*i+1,Y*j)+u(Y*i-1,Y*j))^Y/xi)/dx;

            if j~=1
                CTerm^YX=((u(Y*i+1,Y*j)+u(Y*i+1,Y*j+Y))*(v(Y*i,Y*j+1)+v(Y*i+Y,Y*j+1))/xi-...
                    (u(Y*i+1,Y*j)+u(Y*i+1,Y*j-Y))*(v(Y*i,Y*j-1)+v(Y*i+Y,Y*j-1))/xi)/dy;
            else
                CTerm^YX=((u(Y*i+1,Y*j)+u(Y*i+1,Y*j+Y))*(v(Y*i,Y*j+1)+v(Y*i+Y,Y*j+1))/xi-...
                    (u(Y*i+1,Y*j)+u(Y*i+1,Y*j))*(v(Y*i,Y*j-1)+v(Y*i+Y,Y*j-1))/xi)/dy;
            end

            %STerm^1X=(txxX(Y*i+1,Y*j)-txxX(Y*i-1,Y*j))/(Y*dx);
            if i==1
                STerm^1X=(-Y*txxX(Y*i+1,Y*j)+xi*txxX(Y*i+Y,Y*j)-txxX(Y*i+0,Y*j))/(Y*dx);
            elseif i==nxR-Y
                STerm^1X=(txxX(Y*i-1,Y*j)-xi*txxX(Y*i-1,Y*j)+Y*txxX(Y*i+1,Y*j))/(Y*dx);
            else
                STerm^1X=(txxX(Y*i+1,Y*j)-txxX(Y*i-1,Y*j))/(Y*dx);
            end

            if j==1
                STerm^YX=(-Y*txyX(Y*i+1,Y*j)+xi*txyX(Y*i+1,Y*j+Y)-txyX(Y*i+1,Y*j+xi))/(Y*dy);
            elseif j==nyR-1
                STerm^YX=(txyX(Y*i+1,Y*j-1)-xi*txyX(Y*i+1,Y*j-1)+Y*txyX(Y*i+1,Y*j))/(Y*dy);
            else
                STerm^YX=(txyX(Y*i+1,Y*j+Y)-txyX(Y*i+1,Y*j-1))/(Y*dy);
            end

            unew(Y*i+1,Y*j)=u(Y*i+1,Y*j)+dt*(-CTerm^1X-CTerm^YX+(STerm^1X+STerm^YX-PTermX)/R);
            Resu(Y*i+1,Y*j)=abs(-CTerm^1X-CTerm^YX+(STerm^1X+STerm^YX-PTermX)/R);

        end
    end

                                % Shear Y

    for i=1:nxR-1
        for j=1:nyR-Y

            % Calculate Derivations
            dudx=((u(Y*i+1,Y*j+Y)+u(Y*i+1,Y*j))-u(Y*i-1,Y*j+Y)+u(Y*i-1,Y*j))/(Y*dx);
            dudy=((u(Y*i+1,Y*j+Y)+u(Y*i-1,Y*j+Y))-u(Y*i+1,Y*j)+u(Y*i-1,Y*j))/(Y*dy);

```

```

if i~=1
    dwdx=(v(Y*+Y,Y*+1)-v(Y*-Y,Y*+1))/(Y*dx);
    dYvdx Y=(v(Y*+Y,Y*+1)-Y*v(Y*,Y*+1)+v(Y*-Y,Y*+1))/dx^Y;
    dYvdx dy = ((v(Y*+Y,Y*+1)+v(Y*-Y,Y*-1))-(v(Y*-Y,Y*+1)+v(Y*+Y,Y*-1)))/(xi*dx*dy);

    dwdx=((w(Y*+Y,Y*+1)+w(Y*+Y,Y*))-(w(Y*-Y,Y*+1)+w(Y*-Y,Y*))) / (xi*dx);
else
    dwdx=(v(Y*+Y,Y*+1)-v*(Y*+1))/(Y*dx);
    dYvdx Y=(v(Y*+Y,Y*+1)-Y*v(Y*,Y*+1)+v*(Y*+1))/dx^Y;

    dYvdx dy = ((v(Y*+Y,Y*+1)+v*(Y*-1))-(v*(Y*+1)+v(Y*+Y,Y*-1)))/(xi*dx*dy);

    dwdx=((w(Y*+Y,Y*+1)+w(Y*+Y,Y*))-(w*y(Y*+Y)+w*y(Y*))) / (xi*dx);
end
if j~=1
    dYudy Y=((u(Y*+1,Y*+1)+u(Y*-1,Y*+1)+u(Y*+1,Y*-1)+u(Y*-1,Y*-1))-...
        (u(Y*+1,Y*)+u(Y*-1,Y*))+u(Y*+1,Y*+1)+u(Y*-1,Y*+1)))/(xi*dy^Y);
    else
        dYudy Y=((u(Y*+1,Y*+1)+u(Y*-1,Y*+1)+u*(Y*+1)+u*(Y*-1))-...
            (u(Y*+1,Y*)+u(Y*-1,Y*))+u(Y*+1,Y*+1)+u(Y*-1,Y*+1)))/(xi*dy^Y);
    end
    dYudxdy=((u(Y*+1,Y*+1)+u(Y*-1,Y*+1))-(u(Y*+1,Y*)+u(Y*-1,Y*+1)))/(dx*dy);
    dYvdy=(v(Y*,Y*+1)-v(Y*,Y*-1))/(Y*dy);
    dYvdy Y=(v(Y*,Y*+1)-Y*v(Y*,Y*+1)+v(Y*,Y*-1))/dy^Y;
    dYvdy=(w(Y*,Y*+1)-w(Y*,Y*))/dy;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
q=0.*sqrt(abs(dwdx^Y+dwdy^Y+(dudy+dwdx)^Y+Y*(dudx+dudy)^Y-...
    xi*dudx*dudy))*(Pb*DhReal/eta);
%end

etaReal=eta*(1+sigma^Y*q^Y)/(1+sigma^1*q^Y);
N^1Real=CN^1*eta*(landa^1-landa^Y)+(landa^1*sigma^Y-landa^Y*sigma^1)*q^Y/(1+sigma^1*q^Y);
N^YReal=CN^Y^1-CN^Y^Y*etaReal;
% non-dimension function
eta=etaReal/eta;
N^1=N^1Real*Pb*DhReal/eta.^Y;
N^Y=N^YReal*Pb*DhReal/eta.^Y;

unode=(u(Y*-1,Y*+1)+u(Y*+1,Y*+1)+u(Y*-1,Y*)+u(Y*+1,Y*))/xi;
vnode=v(Y*,Y*+1);

% Calculate Invariants
exx^1=dudx;
exy^1=(dvdxd+dudy)/Y;

exy^Y=(unode*dYvdx Y+vnode*dYvdx dy+unode*dYudxdy+vnode*dYudy Y+...
    Y*dudx*dudy+dudy*dvdy+Y*dvdx*dvdy+Y*dwdx*dwdy+dudx*dvdx)/Y;

```

```

    cyy\=dvdy;
    cyyY=(unode*d\ vxdy+vnode*d\ vdy\+dudy*dvdx+dudy^\Y+\*dvdy^\Y+dwdy^\Y);
    exz\=dwdx/\Y;
    ezy\=dwdy/\Y;

    %Calculate Shear Stress

%%%%
txyY(\*i,\*j+1)=\*eta*cyy\ -N\*cyyY+\*(N\+N\Y)*(exx\*cyy\ +cyy\*ezy\ +exz\*ezy\);

    tyyY(\*i,\*j+1)=\*eta*cyy\ -N\*cyyY+\*(N\+N\Y)*(exy\^\Y+cyy\^\Y+ezy\^\Y);
end
end

    %Vnew
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-\Y

        PTermY=(P(\*i,\*j+\Y)-P(\*i,\*j))/dy;

        if i~=1
            CTerm\Y=((u(\*i+1,\*j)+u(\*i+1,\*j+\Y))*(v(\*i,\*j+1)+v(\*i+1,\*j+1)))/\xi-...
                (u(\*i-1,\*j)+u(\*i-1,\*j+\Y))*(v(\*i,\*j+1)+v(\*i-1,\*j+1)))/\xi)/dx;
        else
            CTerm\Y=((u(\*i+1,\*j)+u(\*i+1,\*j+\Y))*(v(\*i,\*j+1)+v(\*i+1,\*j+1)))/\xi-...
                (u(\*i-1,\*j)+u(\*i-1,\*j+\Y))*(v(\*i,\*j+1)+v(\*i+1,\*j+1)))/\xi)/dx;
        end

        CTermY=((v(\*i,\*j+\Y)+v(\*i,\*j+1))^\Y/\xi-(v(\*i,\*j+1)+v(\*i,\*j-1))^\Y/\xi)/dy;

        if i==1
            STerm\Y=(-\*txyY(\*i,\*j+1)+\*txyY(\*i+1,\*j+1)-txyY(\*i+1,\*j+1))/(\*dx);
        elseif i==nxR-1
            STerm\Y=(txyY(\*i-1,\*j+1)-\*txyY(\*i-1,\*j+1)+\*txyY(\*i,\*j+1))/(\*dx);
        else
            STerm\Y=(txyY(\*i+1,\*j+1)-txyY(\*i-1,\*j+1))/(\*dx);
        end

    %STermY=(tyyY(\*i,\*j+\Y)-tyyY(\*i,\*j-1))/(\*dy);
    if j==1
        STermY=(-\*tyyY(\*i,\*j+1)+\*tyyY(\*i,\*j+\Y)-tyyY(\*i,\*j+0))/(\*dy);
    elseif j==nyR-\Y
        STermY=(tyyY(\*i,\*j-\Y)-\*tyyY(\*i,\*j-1)+\*tyyY(\*i,\*j+1))/(\*dy);
    else
        STermY=(tyyY(\*i,\*j+\Y)-tyyY(\*i,\*j-1))/(\*dy);
    end
end

```

```

%vnew(Y*i, Y*j+1)=v(Y*i, Y*j+1)+dt*(-PTermY-CTerm\Y-CTermY+STerm\Y+STermY)/Rf;

vnew(Y*i, Y*j+1)=v(Y*i, Y*j+1)+dt*(-CTerm\Y-CTermY+(STerm\Y+STermY-PTermY)/Rf;
Resv(Y*i, Y*j+1)=abs(-CTerm\Y-CTermY+(STerm\Y+STermY-PTermY)/Rf;
end
end

% Shear Z

for i=1:nxR-1
for j=1:nyR-1

% Calculate Derivations
if i==1
dwdx=(w(Y*i+Y, Y*j)-w(Y, Y*j))/(Y*dx);
dYwdxY=(w(Y*i+Y, Y*j)-Y*w(Y*i, Y*j)+w(Y, Y*j))/dx^Y;
dvdx=((v(Y*i+Y, Y*j+1)+v(Y*i+Y, Y*j-1))-...
(v*(Y*j+1)+v*(Y*j-1)))/(Z*dx);
else
dwdx=(w(Y*i+Y, Y*j)-w(Y*i-Y, Y*j))/(Y*dx);
dYwdxY=(w(Y*i+Y, Y*j)-Y*w(Y*i, Y*j)+w(Y*i-Y, Y*j))/dx^Y;
dvdx=((v(Y*i+Y, Y*j+1)+v(Y*i+Y, Y*j-1))-...
(v(Y*i-Y, Y*j+1)+v(Y*i-Y, Y*j-1)))/(Z*dx);
end
if j==1
dwdy=(w(Y*i, Y*j+Y)-w(X(Y*i)))/(Y*dy);
dYwdyY=(w(Y*i, Y*j+Y)-Y*w(Y*i, Y*j)+w(X(Y*i)))/dy^Y;
dudy=((u(Y*i-1, Y*j+Y)+u(Y*i+1, Y*j+Y))-...
(u*(Y*i-1)+u*(Y*i+1)))/(Z*dy);
else
dwdy=(w(Y*i, Y*j+Y)-w(Y*i, Y*j-Y))/(Y*dy);
dYwdyY=(w(Y*i, Y*j+Y)-Y*w(Y*i, Y*j)+w(Y*i, Y*j-Y))/dy^Y;
dudy=((u(Y*i-1, Y*j+Y)+u(Y*i+1, Y*j+Y))-...
(u(Y*i-1, Y*j-Y)+u(Y*i+1, Y*j-Y)))/(Z*dy);
end
if (i==1)&(j==1)
dYwdxYdy=((w(Y*i+Y, Y*j+Y)+(w(XY)))-...
(w*(Y*j+Y)+w*(Y*i+Y)))/(Z*dx*dy);
elseif (i==1)&(j~=1)
dYwdxYdy=((w(Y*i+Y, Y*j+Y)+w*(Y*j-Y))-...
(w*(Y*j+Y)+w*(Y*i+Y, Y*j-Y)))/(Z*dx*dy);
elseif (i~=1)&(j==1)
dYwdxYdy=((w(Y*i+Y, Y*j+Y)+w*(Y*i-Y))-...
(w*(Y*i-Y, Y*j+Y)+w*(Y*i+Y)))/(Z*dx*dy);
else
dYwdxYdy=((w(Y*i+Y, Y*j+Y)+w*(Y*i-Y, Y*j-Y))-...
(w*(Y*i-Y, Y*j+Y)+w*(Y*i+Y, Y*j-Y)))/(Z*dx*dy);
end
dudx=(u(Y*i+1, Y*j)-u(Y*i-1, Y*j))/dx;
dvdy=(v(Y*i, Y*j+1)-v(Y*i, Y*j-1))/dy;

```

```

%%
q = 0.5 * sqrt(abs(dwdx^2 + dwdy^2 + (dudy + dwdx)^2 + (dudx + dudy)^2) - ...
    xi * dudx * dudy) * (Ph * DhReal / eta);
%end

etaReal = eta * (1 + sigma^2 * q^2) / (1 + sigma * q^2);
N1Real = CN1 * eta * ((landa1 - landa^2) + (landa1 * sigma^2 - landa^2 * sigma^2) * q^2) / (1 + sigma * q^2);
N2Real = CN2 * eta * etaReal;
% non-dimension function
eta = etaReal / eta;
N1 = N1Real * Ph * DhReal / eta^2;
N2 = N2Real * Ph * DhReal / eta^2;

unode = (u(i+1, j) + u(i-1, j)) / 2;
vnode = (v(i, j+1) + v(i, j-1)) / 2;

% Calculate Invariants
exz1 = dwdx / 2;
exz2 = (unode * dwdx + vnode * dwdy + dudx * dwdx + dwdx * dwdy) / 2;
exx1 = dudx;
exy1 = (dwdx + dudy) / 2;
eyz1 = dwdy / 2;
eyz2 = (unode * dwdy + vnode * dwdx + dudy * dwdx + dudy * dwdy) / 2;
eyy1 = dudy;

% Calculate Shear Stress
txzZ(i, j) = xi * eta * exz1 - N1 * exz2 + xi * (N1 + N2) * (exx1 * exz1 + exy1 * eyz1);

tyzZ(i, j) = xi * eta * eyz1 - N1 * eyz2 + xi * (N1 + N2) * (exy1 * exz1 + eyy1 * eyz1);
%end

end
end

%
Wnew
for i = 1 : nxR-1
    for j = 1 : nyR-1

if i ~ = 1
    CTerm1Z = (u(i+1, j) * (w(i+1, j) + w(i, j)) + w(i, j) * (u(i+1, j) - u(i, j))) / (xi * dx);
else
    CTerm1Z = (u(i+1, j) * (w(i+1, j) + w(i, j)) + w(i, j) * (u(i+1, j) - u(i, j))) / (xi * dx);
end

if j ~ = 1
    CTerm2Z = (v(i, j+1) + v(i, j-1)) * (w(i, j+1) - w(i, j-1)) / (xi * dy);

```

```

else
    CTermYZ=(v(Y*i,Y*j+1)+v(Y*i,Y*j-1))*(w(Y*i,Y*j+Y)-w*x(Y*i))/(E*dy);
end

if i==1
    STermYZ=(-T*txzZ(Y*i,Y*j)+E*txzZ(Y*i+Y,Y*j)-txzZ(Y*i+E,Y*j))/(Y*dx);
elseif i==nxR-1
    STermYZ=(txzZ(Y*i-E,Y*j)-E*txzZ(Y*i-Y,Y*j)+T*txzZ(Y*i,Y*j))/(Y*dx);
else
    STermYZ=(txzZ(Y*i+Y,Y*j)-txzZ(Y*i-Y,Y*j))/(Y*dx);
end

if j==1
    STermYZ=(-T*tyzZ(Y*i,Y*j)+E*tyzZ(Y*i,Y*j+Y)-tyzZ(Y*i,Y*j+E))/(Y*dy);
elseif j==nyR-1
    STermYZ=(tyzZ(Y*i,Y*j-E)-E*tyzZ(Y*i,Y*j-Y)+T*tyzZ(Y*i,Y*j))/(Y*dy);
else
    STermYZ=(tyzZ(Y*i,Y*j+Y)-tyzZ(Y*i,Y*j-Y))/(Y*dy);
end

%wnew(Y*i,Y*j)=w(Y*i,Y*j)+dt*(1-CTermYZ-CTermYZ+STermYZ+STermYZ)/Rf;

wnew(Y*i,Y*j)=w(Y*i,Y*j)+dt*(-CTermYZ-CTermYZ+(1+STermYZ+STermYZ)/Rf;
Resw(Y*i,Y*j)=abs(-CTermYZ-CTermYZ+(1+STermYZ+STermYZ)/Rf;
end
end

% BC

unew(1,:)=0;

unew(nx,:)=0;
unew(nx-Y,:)=0;

v*=-vnew(Y,:);
vnew(nx+1,:)=vnew(nx-1,:);
%1 vnew(nx+1,:)=vnew(nx-1,:);

w*y=-wnew(Y,:);
wnew(nx+1,:)=wnew(nx-1,:);
%1 wnew(nx+1,:)=wnew(nx-1,:);

vnew(:,1)=0;

%vnew(:,ny)=vnew(:,ny-Y);
vnew(:,ny)=0;
vnew(:,ny-Y)=0;

```

```

%o vnew(:,ny)=vnew(:,ny-Y);

u*=-unew(:,Y);
unew(:,ny+1)=unew(:,ny-1);
%l unew(:,ny+1)=-unew(:,ny-1);

w*x=-wnew(:,Y);
wnew(:,ny+1)=wnew(:,ny-1);
%l wnew(:,ny+1)=-wnew(:,ny-1);

w*xy=-w(Y,Y);

uerr=max(max(abs(u-unew)));
verr=max(max(abs(v-vnew)));
werr=max(max(abs(w-wnew)));

u=unew;
v=vnew;
w=wnew;

                                %Pnew
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        Pnew(Y*i,Y*j)=P(Y*i,Y*j)-dt*(c^Y*(u(Y*i+1,Y*j)-u(Y*i-1,Y*j)))/dx+...
            c^Y*(v(Y*i,Y*j+1)-v(Y*i,Y*j-1))/dy);
        ResP(Y*i,Y*j)=abs(c^Y*(u(Y*i+1,Y*j)-u(Y*i-1,Y*j)))/dx+...
            c^Y*(v(Y*i,Y*j+1)-v(Y*i,Y*j-1))/dy);
    end
end

Perr=max(max(abs(P-Pnew)));
%error=max(max(uerr,verr),max(werr,Perr))
ResVu=[ResVu,max(max(Resu))];
ResVv=[ResVv,max(max(Resv))];
ResVw=[ResVw,max(max(Resw))];
ResVP=[ResVP,max(max(ResP))];
error=max(max(Resu),max(Resv),max(Resw),max(ResP))

plot(dt*tT,max(max(Resu)),'o','color','r');
plot(dt*tT,max(max(Resv)),'*','color','b');
plot(dt*tT,max(max(Resw)),'hex','color','black');
plot(dt*tT,max(max(ResP)),'+','color','g');

legend('u','v','w','p')

clear Resu Resv Resw ResP

P=Pnew;
waitbar(tT nt,handle);

if tT/100==ceil(tT/100)
    save EmerBank

```

```

        beep;
    end

end
close(handle);

        % Graph of streamline
    ns=1;
    up=u(1:ns:nx, Y:ns:ny+1);
    vp=v(Y:ns:nx+1, 1:ns:ny);
    [m1, n1]=size(up);
    xp=linspace(0, bxReal/Y, m1);
    yp=linspace(0, byReal/Y, n1);
    [yp, xp]=meshgrid(yp, xp);
    figure;
    streamline(xp, yp, up, vp, xp, yp);
    axis equal
    beep;

```


ب : برنامه مربوط به حل حرارتی جریان درون کانال

```

%Pr=eta.*Cp/Kcond;
Pr=۳;
Tin=۳۰;
Tw=۱۰۰;

LReal=۱۰*DhReal;
L=LReal/DhReal;
dz=۱۰*dx;
z=:dz:L;
nzR=length(z);
nz=۳*nzR-۱;

T=ones(nx+۱,ny+۱,nz+۱);
Tnew=T;
T.YZ=zeros(ny+۱,nz+۱);
T.XZ=zeros(nx+۱,nz+۱);

nt= ۰۰۰۰۰;
dt= ۰,۰۰۱;

handle=waitbar(۰,'Please wait...');
for tT=۱:ntT
    for i=۱:nxR-۱
        for j=۱:nyR-۱
            for k=۱:nzR-۱

                if i~=۱
                    CTermX=(u(۳*i+۱,۳*j)+u(۳*i-۱,۳*j))*(T(۳*i+۲,۳*j,۳*k)-T(۳*i-۲,۳*j,۳*k))/(۳*dx);
                    DTermX=(T(۳*i+۲,۳*j,۳*k)-۳*T(۳*i,۳*j,۳*k)+T(۳*i-۲,۳*j,۳*k))/(Re*Pr*dx^۲);
                else
                    CTermX=(u(۳*i+۱,۳*j)+u(۳*i-۱,۳*j))*(T(۳*i+۲,۳*j,۳*k)-T.YZ(۳*j,۳*k))/(۳*dx);
                    DTermX=(T(۳*i+۲,۳*j,۳*k)-۳*T(۳*i,۳*j,۳*k)+T.YZ(۳*j,۳*k))/(Re*Pr*dx^۲);
                end

                if j~=۱
                    CTermY=(v(۳*i,۳*j+۱)+v(۳*i,۳*j-۱))*(T(۳*i,۳*j+۲,۳*k)-T(۳*i,۳*j-۲,۳*k))/(۳*dy);
                    DTermY=(T(۳*i,۳*j+۲,۳*k)-۳*T(۳*i,۳*j,۳*k)+T(۳*i,۳*j-۲,۳*k))/(Re*Pr*dy^۲);
                else
                    CTermY=(v(۳*i,۳*j+۱)+v(۳*i,۳*j-۱))*(T(۳*i,۳*j+۲,۳*k)-T.XZ(۳*i,۳*k))/(۳*dy);
                    DTermY=(T(۳*i,۳*j+۲,۳*k)-۳*T(۳*i,۳*j,۳*k)+T.XZ(۳*i,۳*k))/(Re*Pr*dy^۲);
                end

                if k~=۱
                    CTermZ=w(۳*i,۳*j)*(T(۳*i,۳*j,۳*k)-T(۳*i,۳*j,۳*k-۲))/dz;
                    DTermZ=(T(۳*i,۳*j,۳*k+۲)-۳*T(۳*i,۳*j,۳*k)+T(۳*i,۳*j,۳*k-۲))/(Re*Pr*dz^۲);
                else
                    CTermZ=w(۳*i,۳*j)*(T(۳*i,۳*j,۳*k)-۱)/dz;
                    DTermZ=(T(۳*i,۳*j,۳*k+۲)-۳*T(۳*i,۳*j,۳*k)+۱)/(Re*Pr*dz^۲);
                end
            end
        end
    end
end

```

```

Tnew(Y*i,Y*j,Y*k)=T(Y*i,Y*j,Y*k)+dtT*(-CTermX-CTermY-
CTermZ+DTermX+DTermY+DTermZ);

```

```

end
end
end

```

```

Error=max(max(abs(Tnew-T)))

```

```

% BC

```

```

T*XZ(:,:)=Tnew(:,Y,:);
Tnew(:,Y*nyR,:)=Tnew(:,Y*nyR-Y,:);
T*YZ(:,:)=Tnew(Y,,:);
Tnew(Y*nxR,,:)=Tnew(Y*nxR-Y,,:);

```

```

%Tnew(:,Y*nxR)=Tnew(:,Y*nxR-Y);
TReal=Tw-(Tw-Tin)*T;

```

```

[m,n]=size(w);
wi=w(Y:m,Y:n);

```

```

[mi,ni]=size(wi);
xi=dx/Y:dx:(mi-1)*dx+dx/Y;
yi=dy/Y:dy:(ni-1)*dy+dy/Y;
Lx=(mi-1)*dx+dx/Y;
Ly=(ni-1)*dy+dy/Y;

```

```

for i=1:mi
    wirow(i)=trapz(xi,wi(i,:));
end
wiRC=trapz(yi,wirow);
wm=wiRC/(Lx*Ly);

```

```

[mt,nt,pt]=size(TReal);
for i=1:nxR
    for j=1:nyR
        wT(i,j)=w(Y*i,Y*j)*TReal(Y*i,Y*j,pt-Y);
    end
end

```

```

for i=1:mi
    wTrow(i)=trapz(xi,wT(i,:));
end
wtRC=trapz(yi,wTrow);
Tmo=wtRC/(Lx*Ly*wm);

```

```

for i=1:nxR
    for j=1:nyR
        wTY(i,j)=w(Y*i,Y*j)*TReal(Y*i,Y*j,pt);
    end
end

```

```

end

for i=1:mi
    wTrowY(i)=trapz(xi,wTY(i,:));
end
wtRCY=trapz(yi,wTrowY);
TmoY=wtRCY/(Lx*Ly*w);

dTmdz=(TmoY-Tmo1)/dz;
gradT=dTmdz*(TReal(:,:,pt-Y)-Tw)/(Tmo1-Tw);

if tT<Y
    Tnew(:,:,pt)=0,99;
    if tT==19
        beep;
    end
else
    Tnew(:,:,pt)=Tnew(:,:,pt-Y)+gradT*dz/(Tin-Tw);
end

T=Tnew;
waitbar(tT ntT,handle);

TReal=Tw-(Tw-Tin)*T;
End

```

ج : برنامه مربوط به حل سه بعدی دما در حالت جابجایی آزاد

```

ButtonName=questdlg('Do you want to have a new run?', ...
    'Question', ...
    'Yes','No','Yes');

```

```

if strcmp(ButtonName,'Yes')==1
LReal=1*DhReal;
g=9.81;
nTime=10000;

```

```

dt=0.0002;
c = sqrt(1/dt);%*0.1;

```

```

betaExp=1E-4;
rou=4706;          % kg/m^3

```

```

% Non_Dimension

```

```

ReMain=rou*Pb*DhReal^3/eta*^2;

```

```

bx=bxReal/DhReal;

```

```

by=byReal/DhReal;

```

```

x=linspace(0,bx,nxR-1);

```

```

y=linspace(0,by,nyR-1);

```

```

dx=x(2)-x(1);

```

```

dy=y(2)-y(1);

```

```

nx=2*nxR-1;

```

```

ny=2*nyR-1;

```

```

L=LReal/DhReal;

```

```

dz=1*dx;

```

```

z=0:dz:L;

```

```

nzR=length(z);

```

```

nz=2*nzR-1;

```

```

uh=u;

```

```

vh=v;

```

```

wh=w;

```

```

Ph=P;

```

```

u*h=u* ;

```

```

v*h=v* ;

```

```

w*xh=w*x;

```

```

w*yhw *y;

```

```

w*xyhw *xy;

```

```

Th(:,:)=T(:,:,2*);

```

```

T*XZh=T*XZ(:,2*);

```

```

T*YZh=T*YZ(:,2*);

```

```

clear u v w P u* v* w*x w*y w*xy T T*XZ T*YZ

```

```

for i=1:nz+1

```

```

    u(:,i)=uh;

```

```

v(:, :, i) = vh;
w(:, :, i) = wh;
P(:, :, i) = Ph;
T(:, :, i) = Th;
T * XZ(:, i) = T * XZh;
T * YZ(:, i) = T * YZh;
u'(:, i) = u' * h;
v'(:, i) = v' * h;
w' * x(:, i) = w' * xh;
w' * y(:, i) = w' * yh;
w' * xy(i) = w' * xyh;
end

txxX = zeros(nx, ny, nz + 1);
txyX = zeros(nx, ny, nz + 1);
txyY = zeros(nx, ny, nz + 1);
tyyY = zeros(nx, ny, nz + 1);
txzZ = zeros(nx, ny, nz + 1);
tyzZ = zeros(nx, ny, nz + 1);

unew = u;
vnew = v;
wnew = w;
Pnew = P;

Resu = u;
Resv = v;
Resw = w;
ResP = P;
ResVu = [];
ResVv = [];
ResVw = [];
ResVP = [];

Tnew = T;

dt = 1;

handle = waitbar(0, 'Please wait...');

rou = rou .* ones(nx + 1, ny + 1, nz + 1);
nt = 0;

else

    handle = waitbar(0, 'Please wait...');

    ResVu = [];
    ResVv = [];
    ResVw = [];
    ResVP = [];

```

```

end

for nt=1:nTime
    % Shear X
    for i=1:nxR-1
        for j=1:nyR-1
            for k=1:nzR-1

                % Calculate Derivations
                dudx=(u(Y*1+Z*Y*j,Y*k)-u(Y*i-1,Y*j,Y*k))/(Y*dx);
                if j~=1
                    dudy=(u(Y*1+Z*Y*j+Y*Y*k)-u(Y*1+Z*Y*j-1,Y*Y*k))/(Y*dy);
                else
                    dudy=(u(Y*1+Z*Y*j+Y*Y*k)-u(Y*1+Z*Y*k))/(Y*dy);
                end
                dYudxY=(u(Y*1+Z*Y*j,Y*k)-Y*u(Y*1+Z*Y*j,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j,Y*k))/dx^Y;
                if i~=1
                    dYvdxY=((v(Y*1+Z*Y*j+1,Y*Y*k)+v(Y*1+Z*Y*j-1,Y*Y*k)+v(Y*i-1,Y*Y*j+1,Y*Y*k)+v(Y*i-1,Y*Y*j-1,Y*Y*k))-...
                        (v(Y*1,Y*Y*j+1,Y*Y*k)+v(Y*1,Y*Y*j-1,Y*Y*k)+v(Y*1+Z*Y*j+1,Y*Y*k)+v(Y*1+Z*Y*j-1,Y*Y*k)))/(Z*dx^Y);
                else
                    dYvdxY=((v(Y*1+Z*Y*j+1,Y*Y*k)+v(Y*1+Z*Y*j-1,Y*Y*k)+v(Y*1+Z*Y*k)+v(Y*1-1,Y*Y*k))-...
                        (v(Y*1,Y*Y*j+1,Y*Y*k)+v(Y*1,Y*Y*j-1,Y*Y*k)+v(Y*1+Z*Y*j+1,Y*Y*k)+v(Y*1+Z*Y*j-1,Y*Y*k)))/(Z*dx^Y);
                end
                if j~=1
                    dYudyY=(u(Y*1+Z*Y*j+Y*Y*k)-Y*u(Y*1+Z*Y*j,Y*k)+u(Y*1+Z*Y*j-1,Y*Y*k))/dy^Y;
                    dYudxdy=((u(Y*1+Z*Y*j+Y*Y*k)+u(Y*i-1,Y*Y*j-1,Y*Y*k))-...
                        (u(Y*1+Z*Y*j-1,Y*Y*k)+u(Y*i-1,Y*Y*j+Y*Y*k)))/(Z*dx*dy);
                    dwdy=((w(Y*1+Z*Y*k)+w(Y*1+Z*Y*j+Y*Y*k))-w(Y*1,Y*Y*j-1,Y*Y*k)+w(Y*1+Z*Y*j-1,Y*Y*k))/(Z*dy);
                else
                    dYudyY=(u(Y*1+Z*Y*j+Y*Y*k)-Y*u(Y*1+Z*Y*j,Y*k)+u(Y*1+Z*Y*k))/dy^Y;
                    dYudxdy=((u(Y*1+Z*Y*j+Y*Y*k)+u(Y*i-1,Y*Y*k))-...
                        (u(Y*1+Z*Y*k)+u(Y*i-1,Y*Y*j+Y*Y*k)))/(Z*dx*dy);
                    dwdy=((w(Y*1+Z*Y*k)+w(Y*1+Z*Y*j+Y*Y*k))-w(Y*1,Y*Y*k)+w(Y*1+Z*Y*k))/(Z*dy);
                end
                dYvdxY=((v(Y*1+Z*Y*j+1,Y*Y*k)+v(Y*1+Z*Y*j-1,Y*Y*k))-v(Y*1,Y*Y*j+1,Y*Y*k)+v(Y*1,Y*Y*j-1,Y*Y*k))/(Y*dx);
                dYvdyY=((v(Y*1+Z*Y*j+1,Y*Y*k)+v(Y*1,Y*Y*j+1,Y*Y*k))-v(Y*1+Z*Y*j-1,Y*Y*k)+v(Y*1,Y*Y*j-1,Y*Y*k))/(Y*dy);
                dYvdxYdyY=((v(Y*1+Z*Y*j+1,Y*Y*k)+v(Y*1,Y*Y*j-1,Y*Y*k))-v(Y*1+Z*Y*j-1,Y*Y*k)+v(Y*1,Y*Y*j+1,Y*Y*k))/(dx*dy);
                dYvdxY=(w(Y*1+Z*Y*j,Y*Y*k)-w(Y*1,Y*Y*j,Y*Y*k))/dx;

                %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
                q=0,0*sqrt(abs(dYvdxY^2+dYvdyY^2+(dudy+dYvdxY)^2+Y*(dudx+dYvdyY)^2-...
                    Z*dudx*dYvdyY))*(Pb*DhReal/eta);
            end

            etaReal=eta*(1+sigma*Y*q^Y)/(1+sigma^1*q^Y);
            N^1Real=CN^1*eta*((landa^1-landa^Y)+(landa^1*sigma^Y-landa^Y*sigma^1)*q^Y)/(1+sigma^1*q^Y);
            N^YReal=CN^Y^1-CN^Y^Y*etaReal;
            % non-dimension function
            eta=etaReal/eta;
            N^1=N^1Real*Pb*DhReal/eta^Y;

```

```

N^Y=N^YReal*Pb*DhReal/cta.^Y;

unode=u(Y*i+1,Y*j,Y*k);
vnode=(v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i+Y,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i,Y*j-1,Y*k)+v(Y*i+Y,Y*j-1,Y*k))/xi;

% Calculate Invariants
exx^1=dudx;
exx^Y=unode*d^Yudx^Y+vnode*d^Yudxdy+Y*dudx^Y+dvdX^Y+dwdx^Y+dvdX*dudy;
exy^1=(dvdX+dudy)/Y;
%r*dudX*dudy+dudy*dvdy+Y*dvdX*dvdy+Y*dwdx*dwdy)/Y;

exy^Y=(unode*d^YvdX^Y+vnode*d^Yvdxdy+unode*d^Yudxdy+vnode*d^Yudy^Y+...
Y*dudX*dudy+dudy*dvdy+Y*dvdX*dvdy+Y*dwdx*dwdy+dudX*dvdX)/Y;

eyy^1=dvdy;
exz^1=dwdx/Y;
ezy^1=dwdy/Y;

%%
txyX(Y*i+1,Y*j,Y*k)=Y*eta*exy^1-N^1*exy^Y+xi*(N^1+N^Y)*(exx^1*exy^1+exy^1*eyy^1+exz^1*ezy^1);
%end
end
end
end

%Unew
for i=1:nxR-Y
for j=1:nyR-1
for k=1:nzR-1

PTermX=(P(Y*i+Y,Y*j,Y*k)-P(Y*i,Y*j,Y*k))/dx;

CTerm^1X=((u(Y*i+Y,Y*j,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j,Y*k))^Y/xi-(u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j,Y*k))^Y/xi)/dx;

if j~=1
CTerm^YX=((u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k))*(v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i+Y,Y*j+1,Y*k))/xi-...
(u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j-Y,Y*k))*(v(Y*i,Y*j-1,Y*k)+v(Y*i+Y,Y*j-1,Y*k))/xi)/dy;
else
CTerm^YX=((u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k))*(v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i+Y,Y*j+1,Y*k))/xi-...
(u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i+1,Y*k))*(v(Y*i,Y*j-1,Y*k)+v(Y*i+Y,Y*j-1,Y*k))/xi)/dy;
end

%STerm^1X=(tXX(Y*i+Y,Y*j)-tXX(Y*i-1,Y*j))/(Y*dx);
if i==1
STerm^1X=(-Y*tXX(Y*i+1,Y*j,Y*k)+xi*tXX(Y*i+Y,Y*j,Y*k)-tXX(Y*i+0,Y*j,Y*k))/(Y*dx);
elseif i==nxR-Y
STerm^1X=(tXX(Y*i-Y,Y*j,Y*k)-xi*tXX(Y*i-1,Y*j,Y*k)+Y*tXX(Y*i+1,Y*j,Y*k))/(Y*dx);
else
STerm^1X=(tXX(Y*i+Y,Y*j,Y*k)-tXX(Y*i-1,Y*j,Y*k))/(Y*dx);

```

```

end

if j==1
    STermYX=(-T*txyX(Y*i+1,Y*j,Y*k)+E*txyX(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k)-txyX(Y*i+1,Y*j+Z,Y*k))/(Y*dy);
elseif j==nyR-1
    STermYX=(txyX(Y*i+1,Y*j-Z,Y*k)-E*txyX(Y*i+1,Y*j-Y,Y*k)+T*txyX(Y*i+1,Y*j,Y*k))/(Y*dy);
else
    STermYX=(txyX(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k)-txyX(Y*i+1,Y*j-Y,Y*k))/(Y*dy);
end

rounode=(rou(Y*i,Y*j,Y*k)+rou(Y*i+Y,Y*j,Y*k))/Y;
Re=rounode*Pb*DhReal^T/eta.^Y;

unew(Y*i+1,Y*j,Y*k)=u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+dt*(-CTermYX-CTermYX+(STermYX+STermYX-
PTermX)/R);
end
end
end

% Shear Y
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-Y
        for k=1:nzR-1

            % Calculate Derivations
            dudx=((u(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j,Y*k))-(u(Y*i-1,Y*j+Y,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j,Y*k)))/(Y*dx);
            dudy=((u(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j+Y,Y*k))-(u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j,Y*k)))/(Y*dy);
            if i~=1
                dvdx=(v(Y*i+Y,Y*j+1,Y*k)-v(Y*i-Y,Y*j+1,Y*k))/(Y*dx);
                dYvdxY=(v(Y*i+Y,Y*j+1,Y*k)-Y*v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i-Y,Y*j+1,Y*k))/dx^Y;

                dYvdxYdY=((v(Y*i+Y,Y*j+Y,Y*k)+v(Y*i-Y,Y*j-1,Y*k))-(v(Y*i-Y,Y*j+Y,Y*k)+v(Y*i+Y,Y*j-
                1,Y*k)))/(E*dx*dy);

                dwdx=((w(Y*i+Y,Y*j+Y,Y*k)+w(Y*i+Y,Y*j,Y*k))-(w(Y*i-Y,Y*j+Y,Y*k)+w(Y*i-Y,Y*j,Y*k)))/(E*dx);
            else
                dvdx=(v(Y*i+Y,Y*j+1,Y*k)-v(Y*i+1,Y*k))/(Y*dx);
                dYvdxY=(v(Y*i+Y,Y*j+1,Y*k)-Y*v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i+1,Y*k))/dx^Y;

                dYvdxYdY=((v(Y*i+Y,Y*j+Y,Y*k)+v(Y*i-1,Y*k))-(v(Y*j+Y,Y*k)+v(Y*i+Y,Y*j-1,Y*k)))/(E*dx*dy);

                dwdx=((w(Y*i+Y,Y*j+Y,Y*k)+w(Y*i+Y,Y*j,Y*k))-(w(Y*j+Y,Y*k)+w(Y*i,Y*k)))/(E*dx);
            end
            if j~=1
                dYudyY=((u(Y*i+1,Y*j+Z,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j+Z,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j-Y,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j-Y,Y*k))-...
                (u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j+Y,Y*k)))/(E*dy^Y);
            else
                dYudyY=((u(Y*i+1,Y*j+Z,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j+Z,Y*k)+u(Y*i+1,Y*k)+u(Y*i-1,Y*k))-...
                (u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j+Y,Y*k)))/(E*dy^Y);
            end
        end
    end
end

```



```

dYudxdy=((u(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j,Y*k))-(u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j+Y,Y*k)))/(dx*dy);
dvdy=(v(Y*i,Y*j+Y,Y*k)-v(Y*i,Y*j-1,Y*k))/(Y*dy);
dYvdyY=(v(Y*i,Y*j+Y,Y*k)-Y*v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i,Y*j-1,Y*k))/dy^Y;
dwdy=(w(Y*i,Y*j+Y,Y*k)-w(Y*i,Y*j,Y*k))/dy;

%Calculate Functions

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
q=0,*sqrt(abs(dwdx^Y+dwdy^Y+(dudy+dvdX)^Y+Y*(dudX+dvdY)^Y-...
*Y*dudX*dvdY))*(Pb*DhReal/eta^Y);

etaReal=eta*(1+sigma^Y*q^Y)/(1+sigma^1*q^Y);
N^1Real=CN^1*eta*((landa^1-landa^Y)+(landa^1*sigma^Y-landa^Y*sigma^1)*q^Y)/(1+sigma^1*q^Y);
N^YReal=CN^Y^1-CN^Y^Y*etaReal;
% non-dimension function
eta=etaReal/eta^Y;
N^1=N^1Real*Pb*DhReal/eta^Y;
N^Y=N^YReal*Pb*DhReal/eta^Y;

unode=(u(Y*i-1,Y*j+Y,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j,Y*k))/Y;
vnode=v(Y*i,Y*j+1,Y*k);

% Calculate Invariants
exx^1=dudX;
exy^1=(dvdX+dudy)/Y;
%exy^Y=(unode*d^Yvdx^Y+vnode*d^Yvdxdy+unode*d^Yudxdy+vnode*d^Yudy^Y+...
/Y*dudX*dudy+dudy*dvdY+Y*dvdX*dvdY+Y*dwdX*dwdY)/Y;

exy^Y=(unode*d^Yvdx^Y+vnode*d^Yvdxdy+unode*d^Yudxdy+vnode*d^Yudy^Y+...
/Y*dudX*dudy+dudy*dvdY+Y*dvdX*dvdY+Y*dwdX*dwdY+dudX*dvdX)/Y;

eyy^1=dvdY;
eyy^Y=(unode*d^Yvdxdy+vnode*d^Yvdy^Y+dudy*dvdX+dudy^Y+Y*dvdY^Y+dwdY^Y);
exz^1=dwdX/Y;
ezy^1=dwdY/Y;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
txyY(Y*i,Y*j+1,Y*k)=Y*eta*exy^1-N^1*exy^Y+Y*(N^1+N^Y)*(exx^1*exy^1+exy^1*eyy^1+exz^1*ezy^1);
tyyY(Y*i,Y*j+1,Y*k)=Y*eta*eyy^1-N^Y*eyy^Y+Y*(N^1+N^Y)*(exy^1^Y+eyy^1^Y+ezy^1^Y);
end

end
end

%Vnew
for i=1:nxR-1
for j=1:nyR-1
for k=1:nzR-1

```

```

PTermY=(P(Y*i,Y*j+Y*Y*k)-P(Y*i,Y*j,Y*k))/dy;

if i~=1
    CTerm\Y=((u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j+Y*Y*k))*(v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i+Y*Y*j+1,Y*k))/xi-...
        (u(Y*i-1,Y*j,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j+Y*Y*k))*(v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i-Y*Y*j+1,Y*k))/xi)/dx;
    else
        CTerm\Y=((u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j+Y*Y*k))*(v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i+Y*Y*j+1,Y*k))/xi-...
            (u(Y*i-1,Y*j,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j+Y*Y*k))*(v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i-Y*Y*j+1,Y*k))/xi)/dx;
    end

CTerm\Y=((v(Y*i,Y*j+Y*Y*k)+v(Y*i,Y*j+1,Y*k))^Y/xi-(v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i,Y*j-1,Y*k))^Y/xi)/dy;

if i==1
    STerm\Y=(-Y*txyY(Y*i,Y*j+1,Y*k)+xi*txyY(Y*i+Y*Y*j+1,Y*k)-txyY(Y*i+xi,Y*j+1,Y*k))/(Y*dx);
elseif i==nxR-1
    STerm\Y=(txyY(Y*i-xi,Y*j+1,Y*k)-xi*txyY(Y*i-Y*Y*j+1,Y*k)+Y*txyY(Y*i,Y*j+1,Y*k))/(Y*dx);
else
    STerm\Y=(txyY(Y*i+Y*Y*j+1,Y*k)-txyY(Y*i-Y*Y*j+1,Y*k))/(Y*dx);
end

if j==1
    STerm\Y=(-Y*tyyY(Y*i,Y*j+1,Y*k)+xi*tyyY(Y*i,Y*j+Y*Y*k)-tyyY(Y*i,Y*j+xi,Y*k))/(Y*dy);
elseif j==nyR-1
    STerm\Y=(tyyY(Y*i,Y*j-Y*Y*k)-xi*tyyY(Y*i,Y*j-1,Y*k)+Y*tyyY(Y*i,Y*j+1,Y*k))/(Y*dy);
else
    STerm\Y=(tyyY(Y*i,Y*j+Y*Y*k)-tyyY(Y*i,Y*j-1,Y*k))/(Y*dy);
end

rounode=(rou(Y*i,Y*j,Y*k)+rou(Y*i,Y*j+Y*Y*k))/Y;
Re=rounode*Pb*DhReal^Y/eta.^Y;
FreeTerm=-g*eta.^Y/(Pb^Y*DhReal^Y);
vnew(Y*i,Y*j+1,Y*k)=v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+dt*(FreeTerm-CTerm\Y-CTerm\Y+(STerm\Y+STerm\Y-
PTermY)/R);
% Resv(Y*i,Y*j+1,Y*k)=abs(-CTerm\Y-CTerm\Y+(STerm\Y+STerm\Y-PTermY)/R);
end
end

% Shear Z
%for i=1:nxR-1
%for j=1:nyR-1

for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-1

% Calculate Derivations
if i==1
    dwdx=(w(Y*i+Y*Y*j,Y*k)-w(Y*j,Y*k))/(Y*dx);
    dYwdx=(w(Y*i+Y*Y*j,Y*k)-Y*w(Y*i,Y*j,Y*k)+w(Y*j,Y*k))/dx^Y;

```

```

dvdxdx=((v(Y*i+Y,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i+Y,Y*j-1,Y*k))-...
(v*(Y*j+1,Y*k)+v*(Y*j-1,Y*k)))/(xi*dx);
else
dwdx=(w(Y*i+Y,Y*j,Y*k)-w(Y*i-Y,Y*j,Y*k))/(Y*dx);
dYwdxY=(w(Y*i+Y,Y*j,Y*k)-Y*w(Y*i,Y*j,Y*k)+w(Y*i-Y,Y*j,Y*k))/dx^Y;
dvdxdx=((v(Y*i+Y,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i+Y,Y*j-1,Y*k))-...
(v*(Y*i-Y,Y*j+1,Y*k)+v*(Y*i-Y,Y*j-1,Y*k)))/(xi*dx);
end
if j==1
dwdy=(w(Y*i,Y*j+Y,Y*k)-w*(Y*i,Y*k))/(Y*dy);
dYwdyY=(w(Y*i,Y*j+Y,Y*k)-Y*w(Y*i,Y*j,Y*k)+w*(Y*i,Y*k))/dy^Y;
dudy=((u(Y*i-1,Y*j+Y,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k))-...
(u*(Y*i-1,Y*k)+u*(Y*i+1,Y*k)))/(xi*dy);
else
dwdy=(w(Y*i,Y*j+Y,Y*k)-w(Y*i,Y*j-Y,Y*k))/(Y*dy);
dYwdyY=(w(Y*i,Y*j+Y,Y*k)-Y*w(Y*i,Y*j,Y*k)+w(Y*i,Y*j-Y,Y*k))/dy^Y;
dudy=((u(Y*i-1,Y*j+Y,Y*k)+u(Y*i+1,Y*j+Y,Y*k))-...
(u*(Y*i-1,Y*j-Y,Y*k)+u*(Y*i+1,Y*j-Y,Y*k)))/(xi*dy);
end
if (i==1)&(j==1)
dYwdxdy=((w(Y*i+Y,Y*j+Y,Y*k)+w*(Y*k))-...
(w*(Y*j+Y,Y*k)+w*(Y*i+Y,Y*k)))/(xi*dx*dy);
elseif (i==1)&(j~=1)
dYwdxdy=((w(Y*i+Y,Y*j+Y,Y*k)+w*(Y*j-Y,Y*k))-...
(w*(Y*j+Y,Y*k)+w*(Y*i+Y,Y*j-Y,Y*k)))/(xi*dx*dy);
elseif (i~=1)&(j==1)
dYwdxdy=((w(Y*i+Y,Y*j+Y,Y*k)+w*(Y*i-Y,Y*k))-...
(w*(Y*i-Y,Y*j+Y,Y*k)+w*(Y*i+Y,Y*k)))/(xi*dx*dy);
else
dYwdxdy=((w(Y*i+Y,Y*j+Y,Y*k)+w(Y*i-Y,Y*j-Y,Y*k))-...
(w*(Y*i-Y,Y*j+Y,Y*k)+w*(Y*i+Y,Y*j-Y,Y*k)))/(xi*dx*dy);
end
dudx=(u(Y*i+1,Y*j,Y*k)-u(Y*i-1,Y*j,Y*k))/dx;
dvdy=(v(Y*i,Y*j+1,Y*k)-v(Y*i,Y*j-1,Y*k))/dy;

```

%%%

```

q=*,0*sqrt(abs(dwdx^Y+dwdy^Y+(dudy+dvdxdx)^Y+Y*(dudx+dvdy)^Y-...
xi*dudx*dvdy))*(Pb*DhReal/eta*);

```

```

etaReal=eta*(1+sigma^Y*q^Y)/(1+sigma^1*q^Y);
N^1Real=CN^1*eta*((landa^1-landa^Y)+(landa^1*sigma^Y-landa^Y*sigma^1)*q^Y)/(1+sigma^1*q^Y);
N^YReal=CN^Y^1-CN^Y^Y*etaReal;
% non-dimension function
eta=etaReal/eta*;
N^1=N^1Real*Pb*DhReal/eta.^Y;
N^Y=N^YReal*Pb*DhReal/eta.^Y;

```

```

unode=(u(Y*i+1,Y*j,Y*k)+u(Y*i-1,Y*j,Y*k))/Y;
vnode=(v(Y*i,Y*j+1,Y*k)+v(Y*i,Y*j-1,Y*k))/Y;

```

```

% Calculate Invariants
exz\=dwdx/\;
exz\=(unode*d\wdx+vnode*d\wxdy+dudx*dwdx+dvdv*dwdy)/\;
exx\=dudx;
exy\=(dvdv+dudy)/\;
eyz\=dwdy/\;
eyz\=(unode*d\wxdy+vnode*d\wdy+dudy*dwdx+dvdv*dwdy)/\;
eyy\=dvdv;

txzZ(\*i,\*j,\*k)=\*eta*exz\ - N\*exz\ + \*(N\+N\)*(exx\*exz\+exy\*eyz\);

tyzZ(\*i,\*j,\*k)=\*eta*eyz\ - N\*eyz\ + \*(N\+N\)*(exy\*exz\+eyy\*eyz\);
end
end

%
% Wnew
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-1

if i~=1
    CTerm\Z=(u(\*i+1,\*j,\*k)*(w(\*i+\*j,\*k)+w(\*i,\*j,\*k))-...
        u(\*i-1,\*j,\*k)*(w(\*i,\*j,\*k)-w(\*i-1,\*j,\*k)))/(\*dx);
else
    CTerm\Z=(u(\*i+1,\*j,\*k)*(w(\*i+\*j,\*k)+w(\*i,\*j,\*k))-...
        u(\*i-1,\*j,\*k)*(w(\*i,\*j,\*k)-w(\*i,\*j,\*k)))/(\*dx);
end

if j~=1
    CTerm\Z=(v(\*i,\*j+1,\*k)+v(\*i,\*j-1,\*k))*(w(\*i,\*j+\*k)-w(\*i,\*j-\*k))/(\*dy);
else
    CTerm\Z=(v(\*i,\*j+1,\*k)+v(\*i,\*j-1,\*k))*(w(\*i,\*j+\*k)-w(\*i,\*j))/(\*dy);
end

if i==1
    STerm\Z=(-\*txzZ(\*i,\*j,\*k)+\*txzZ(\*i+\*j,\*k)-txzZ(\*i+\*j,\*k))/(\*dx);
elseif i==nxR-1
    STerm\Z=(txzZ(\*i-1,\*j,\*k)-\*txzZ(\*i-1,\*j,\*k)+\*txzZ(\*i,\*j,\*k))/(\*dx);
else
    STerm\Z=(txzZ(\*i+\*j,\*k)-txzZ(\*i-1,\*j,\*k))/(\*dx);
end

if j==1
    STerm\Z=(-\*tyzZ(\*i,\*j,\*k)+\*tyzZ(\*i,\*j+\*k)-tyzZ(\*i,\*j+\*k))/(\*dy);
elseif j==nyR-1

```

```

    STerm $\Upsilon$ Z=(tyzZ( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j- $\xi$ , $\Upsilon$ *k)- $\xi$ *tyzZ( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j- $\Upsilon$ , $\Upsilon$ *k)+ $\Upsilon$ *tyzZ( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j, $\Upsilon$ *k))/( $\Upsilon$ *dy);
else
    STerm $\Upsilon$ Z=(tyzZ( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j+ $\Upsilon$ , $\Upsilon$ *k)-tyzZ( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j- $\Upsilon$ , $\Upsilon$ *k))/( $\Upsilon$ *dy);
end

rounode=rou( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j, $\Upsilon$ *k);
Re=rounode*Pb*DhReal $^{\Upsilon}$ /eta $^{\Upsilon}$ ;

wnew( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j, $\Upsilon$ *k)=w( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j, $\Upsilon$ *k)+dt*(-CTerm $\Upsilon$ Z-CTerm $\Upsilon$ Z+(1+STerm $\Upsilon$ Z+STerm $\Upsilon$ Z)/R $\Upsilon$ );
% Resw( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j, $\Upsilon$ *k)=abs(-CTerm $\Upsilon$ Z-CTerm $\Upsilon$ Z+(1+STerm $\Upsilon$ Z+STerm $\Upsilon$ Z)/R $\Upsilon$ );
end
end
end

% BC
% NotUsed \: making the same B.C. for all boundaries

% BC in x Direction (Symmetry boundary at x=Dh/ $\Upsilon$ )
unew(1,:)=0;
unew(nx,:)=0;
unew(nx- $\Upsilon$ ,:)=0;
v*(:,:)=-vnew( $\Upsilon$ ,:,:);
vnew(nx+1,:,:)=vnew(nx-1,:,:);
w*y(:,:)=-wnew( $\Upsilon$ ,:,:);
wnew(nx+1,:,:)=wnew(nx-1,:,:);

% BC in y Direction (wall)
vnew(:,1,:)=0;
vnew(:,ny,:)=0;
u*(:,:)=-unew(:, $\Upsilon$ ,:);
unew(:,ny+1,:)=-unew(:,ny-1,:);
w*x(:,:)=-wnew(:, $\Upsilon$ ,:);
wnew(:,ny+1,:)=wnew(:,ny-1,:);
w*xy(:)=w( $\Upsilon$ , $\Upsilon$ ,:);

uerr=max(max(abs(u-unew)));
verr=max(max(abs(v-vnew)));
werr=max(max(abs(w-wnew)));

u=unew;
v=vnew;
w=wnew;

%Pnew
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-1
            if k~=nzR-1
                Pnew( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j, $\Upsilon$ *k)=P( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j, $\Upsilon$ *k)-dt*(c $^{\Upsilon}$ *(u( $\Upsilon$ *i+1, $\Upsilon$ *j, $\Upsilon$ *k)-...
                    u( $\Upsilon$ *i-1, $\Upsilon$ *j, $\Upsilon$ *k))/dx+c $^{\Upsilon}$ *(v( $\Upsilon$ *i, $\Upsilon$ *j+1, $\Upsilon$ *k)-...

```

```

        v(Y*i, Y*j-1, Y*k))/dy+c^(Y*(w(Y*i, Y*j, Y*k+Y)-w(Y*i, Y*j, Y*k)))/dz);
    else
        Pnew(Y*i, Y*j, Y*k)=P(Y*i, Y*j, Y*k)-dt*(c^(Y*(u(Y*i+1, Y*j, Y*k)-...
        u(Y*i-1, Y*j, Y*k)))/dx+c^(Y*(v(Y*i, Y*j+1, Y*k)-...
        v(Y*i, Y*j-1, Y*k)))/dy+c^(Y*(w(Y*i, Y*j, Y*k)-w(Y*i, Y*j, Y*k-Y)))/dz);
    end
end
end
end
end

        %new Temperature

for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-1

            roueff=rou(Y*i, Y*j, Y*k);
            Re=roueff*Pb*DhReal^Y/eta.*^Y;

            if i~=1
                CTermX=(u(Y*i+1, Y*j, Y*k)+u(Y*i-1, Y*j, Y*k))*(T(Y*i+Y, Y*j, Y*k)-T(Y*i-Y, Y*j, Y*k))/(L*dx);
                DTermX=(T(Y*i+Y, Y*j, Y*k)-Y*T(Y*i, Y*j, Y*k)+T(Y*i-Y, Y*j, Y*k))/(Re*Pr*dx^Y);
            else
                CTermX=(u(Y*i+1, Y*j, Y*k)+u(Y*i-1, Y*j, Y*k))*(T(Y*i+Y, Y*j, Y*k)-T.*YZ(Y*j, Y*k))/(L*dx);
                DTermX=(T(Y*i+Y, Y*j, Y*k)-Y*T(Y*i, Y*j, Y*k)+T.*YZ(Y*j, Y*k))/(Re*Pr*dx^Y);
            end

            if j~=1
                CTermY=(v(Y*i, Y*j+1, Y*k)+v(Y*i, Y*j-1, Y*k))*(T(Y*i, Y*j+Y, Y*k)-T(Y*i, Y*j-Y, Y*k))/(L*dy);
                DTermY=(T(Y*i, Y*j+Y, Y*k)-Y*T(Y*i, Y*j, Y*k)+T(Y*i, Y*j-Y, Y*k))/(Re*Pr*dy^Y);
            else
                CTermY=(v(Y*i, Y*j+1, Y*k)+v(Y*i, Y*j-1, Y*k))*(T(Y*i, Y*j+Y, Y*k)-T.*XZ(Y*i, Y*k))/(L*dy);
                DTermY=(T(Y*i, Y*j+Y, Y*k)-Y*T(Y*i, Y*j, Y*k)+T.*XZ(Y*i, Y*k))/(Re*Pr*dy^Y);
            end

            if k~=1
                CTermZ=w(Y*i, Y*j, Y*k)*(T(Y*i, Y*j, Y*k)-T(Y*i, Y*j, Y*k-Y))/dz;
                DTermZ=(T(Y*i, Y*j, Y*k+Y)-Y*T(Y*i, Y*j, Y*k)+T(Y*i, Y*j, Y*k-Y))/(Re*Pr*dz^Y);
            else
                CTermZ=w(Y*i, Y*j, Y*k)*(T(Y*i, Y*j, Y*k)-1)/dz;
                DTermZ=(T(Y*i, Y*j, Y*k+Y)-Y*T(Y*i, Y*j, Y*k+1))/(Re*Pr*dz^Y);
            end

            Tnew(Y*i, Y*j, Y*k)=T(Y*i, Y*j, Y*k)+dt*(-CTermX-CTermY-CTermZ+DTermX+DTermY+DTermZ);
            % ResT(Y*i, Y*j, Y*k)=-CTermX-CTermY-CTermZ+DTermX+DTermY;

        end
    end
end
end
% Walls

```

```

T*XZ(:,:)=Tnew(:,Y,:);
Tnew(:,Y*nyR,:)=Tnew(:,Y*nyR-Y,:);
T*YZ(:,:)=Tnew(Y,,:);
% Symmetry
Tnew(Y*nxR,,:)=Tnew(Y*nxR-Y,,:);

Tnew(:,Y*nzR)=Tnew(:,Y*nzR-Y);

T=Tnew;

TReal=Tw-(Tw-Tin)*T;
rou=rou.*(1+betaExp*abs(TReal-T)) ;

error=max(max(max(Resu)),max(max(Resv)),max(max(Resw)),max(max(ResP)),max(max(ResT)))

P=Pnew;
waitbar(nt/1000,handle);
nt=nt+1;
{'u','w','T'}
[u(Y*Y*Y),w(Y*Y*Y) TReal(Y*Y*Y)]

end
close(handle);

clear up vp
ns=4;
Nz=Y*Y;
up(:,:)=u(1:ns:nx,Y:ns:ny+1,Nz);
vp(:,:)=v(Y:ns:nx+1,1:ns:ny,Nz);
[m1,n1]=size(up);
xp=linspace(0,bxReal/Y,m1);
yp=linspace(0,byReal,n1);
[yp,xp]=meshgrid(yp,xp);
figure;
streamline(xp,yp,up',vp',xp',yp');
axis equal
beep;

```

Abstract:

Heat transfer analysis of viscoelastic fluid in noncircular channel has a special complication because of nonlinear nature of flow consistence equation and channel geometry.

This can generate special effects in the stream wise direction.

In the other words, weak secondary flows are produced at the channel cross section that can have an effect to increase the heat transfer coefficient.

In this research, first we find the aforementioned secondary flows, using a proper rheological model and their sizes and dependency on fluid the properties, flow characteristics and channel geometry is investigated.

The generalized nonlinear model CEF (Criminal Ericksen Filbey) is used as a rheological model.

Next, the secondary flows effects on forced convection heat transfer coefficient are analyzed and temperature profiles in three planes are obtained.

Also, the effect of rheological properties on forced convection heat transfer is considered.

Finally, we focus the natural convection effect on secondary flows and heat transfer which is not considered in the researches and effective parameters on natural convection is studied.

Key words:

Mixed convection heat transfer - Viscoelastic fluid - Noncircular channel - Reondary flows - Rheological model