

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ



دانشکده مهندسی مکانیک

گروه تبدیل انرژی

مدلسازی عددی انتقال حرارت جریان نانوسیال بین دو صفحه موازی

دانشجو :

رضا عادل‌فر

استاد راهنما:

دکتر محمد محسن شاه مردان

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

اردیبهشت ماه ۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده :

گروه :

پایان نامه کارشناسی ارشد (رساله دکتری) آقای / خانم

تحت عنوان:

(رساله دکتری)

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

مراتب پاس و تقدیر بی پایان خود را به محضر استاد فاضل و ارجمند

جناب آقای دکتر محمد محسن شاه مردان

عرض می نمایم.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد.

ماه و سال

چکیده:

نانوسیال محلولی است از نانوذرات جامد به قطر ۱ تا ۱۰۰ نانومتر که در یک سیال پایه حل می شوند و انتقال حرارت را بهبود می بخشند. در این پایان نامه، جریان نانوسیال آب- مس به عنوان سیال خنک کننده مورد بررسی قرار گرفته است. بدین ترتیب که انتقال حرارت این سیال در یک کانال افقی با طول بینهایت و در حالت دو بعدی شبیه سازی شده است. دیواره های این کانال تحت شرایط متقارن حرارتی شار ثابت و دمای ثابت دیواره قرار می گیرند. معادلات حاکم پیوستگی، ممنتوم و انرژی برای جریان آرام و در حالت بی بعد با استفاده از روش حجم محدود و استفاده از قاعده توانی گسسته سازی می شوند. الگوریتم شناخته شده SIMPLER پاتانکار، برای حل این معادلات با رویه ضمنی و با استفاده از تکرار، به کار گرفته شده است. رسانایی گرمایی نانوسیال نیز تابعی از دماست. همچنین این محاسبات در محدوده وسیعی از اعداد رینولدز ($20 < Re < 1500$) و درصد های حجمی مختلف ($0 \leq \phi \leq 0.05$) انجام شده اند. مشاهده می شود که با افزایش درصد حجمی ذرات جامد، نرخ انتقال حرارت نیز افزایش می یابد. گرمایش توسط مقاومت الکتریکی، تشعشع و انرژی هسته ای در رآکتورهای هسته ای از مصادیق کاربرد عملی شرط مرزی گرمایی شار حرارتی ثابت دیواره و همچنین مواردی از مبدل های حرارتی مانند تبخیر کننده ها و کندانسورها، دمای ثابت سطح را به عنوان شرط مرزی حرارتی دیواره به خود می بینند.

فهرست مطالب

فصل اول

1	مقدمه
3	۱-۱ رسانایی گرمایی نانوسیال
9	۲-۱ افزایش انتقال حرارت جابجایی
10	۳-۱ آنالیز تئوری افزایش انتقال حرارت با استفاده از نانوسیال

فصل دوم

	مقدمه
۲۷	۱-۲ بررسی شرایط کلی مسأله
۲۸	۲-۲ هندسه مساله
۲۹	۳-۲ معادلات حاکم
۳۰	۱-۳-۲ پارامترها و معادلات بی‌بعد
۳۲	۴-۲ شرایط مرزی
۳۲	۱-۴-۲ شرط ورود جریان
۳۳	۲-۴-۲ شرط خروج جریان
۳۵	۳-۴-۲ شرط مرزی عدم لغزش روی دیواره
۳۵	۴-۴-۲ شرایط مرزی گرمایی روی دیواره‌ها
۳۶	۵-۲ ویسکوزیته دینامیکی مؤثر نانوسیال

۳۷	۶-۲	رسانایی گرمایی نانوسیال
۴۰	۷-۲	محاسبه عدد ناسلت بی‌بعد روی صفحه
۴۱	۱-۷-۲	حالت شار ثابت دیواره
۴۱	۲-۷-۲	حالت دمای ثابت دیواره
۴۲	۸-۲	محاسبه تنش برشی بی‌بعد روی سطح
۴۳	۹-۲	سایر خواص ترموفیزیکی نانوسیال

فصل سوم

مقدمه

۴۵	۱-۳	معادلات دیفرانسیل حاکم
۴۶	۱-۱-۳	معادله بقای جرم
۴۶	۲-۱-۳	معادله مقدار حرکت
۴۷	۳-۱-۳	معادله انرژی
۴۸	۲-۳	معادله دیفرانسیل کلی
۴۸	۳-۳	مفهوم انفصال
۴۹	۱-۳-۳	ساختمان معادله انفصال
۵۰	۲-۳-۳	روش های به دست آوردن معادلات انفصال
۵۰	۱-۲-۳-۳	فرمول بندی با استفاده از سری تیلور
۵۰	۲-۲-۳-۳	روش باقیمانده های وزنی
۵۱	۳-۲-۳-۳	فرمول بندی با استفاده از حجم کنترلی
۵۴	۴-۲-۳-۳	رفتار جمله چشمه

۵۵	چهار قاعده اصلی در روش حجم محدود	۵-۲-۳-۳
۵۶	مکان وجوه حجم کنترلی	۶-۲-۳-۳
۵۹	جابجایی و پخش	۴-۳
۶۰	روشهای گسسته سازی مولفه های جابجایی	۱-۴-۳
۶۰	روش بالا دست	۱-۱-۴-۳
۶۱	روش نمایی	۲-۱-۴-۳
۶۳	روش پیوندی	۳-۱-۴-۳
۶۵	روش قاعده توانی	۴-۱-۴-۳
۶۶	جزئیات به دست آوردن معادله انفصال	۵-۳
۶۸	معادله انفصال نهایی	۶-۳
۶۹	محاسبه میدان سرعت و فشار	۷-۳
۷۰	نشان دادن جمله گرادیان	۱-۷-۳
۷۲	نمایش معادله پیوستگی	۲-۷-۳
۷۳	شبکه جابه جا شده	۳-۷-۳
۷۵	معادلات مقدار حرکت	۴-۸-۳
۷۷	تصحیح فشار و سرعت	۵-۷-۳
۷۸	معادله تصحیح فشار	۶-۷-۳
۷۹	الگوریتم سیمپل	۸-۳
۸۰	استفاده از زیر تخفیف و فوق تخفیف در معادلات انفصال	۹-۳
۸۱	الگوریتم اصلاح شده ی سیمپل	۱۰-۳

۸۱	معادله فشار	۱-۱۰-۳
۸۳	الگوریتم سمیپلر	۲-۱۰-۳
۸۴	حل دستگاه معادلات خطی	۱۱-۳
۸۶	اعمال شرایط مرزی در فرم گسسته معادلات	۱۲-۳
۹۰	شرایط مرزی برای معادله تصحیح فشار	۱۳-۳
۹۰	معلوم بودن فشار در رمز	۱-۱۳-۳
۹۰	معلوم بودن سرعت عمود بر رمز	۲-۱۳-۳

فصل چهارم

۹۱	مقدمه	
۹۱	سیال خالص ($\emptyset = 0$)	۱-۴
۹۱	شبکه بندی	۱-۱-۴
۹۳	بررسی نتایج سیال خالص	۲-۱-۴
۱۰۲	نتایج نانوسیال مس-آب	۲-۴
۱۰۲	بررسی رفتارهای هیدرودینامیکی	۱-۲-۴
۱۰۷	شرط مرزی شار حرارتی ثابت دیواره	۲-۲-۴
۱۱۲	شرط مرزی دمای ثابت دیواره	۳-۲-۴
۱۱۸	پیوست الف	
۱۲۱	منابع	

فهرست شکل ها

- 4 (۱-۱) ساختار نانوسیال
- 6 (۲-۱) تغییرات نسبت رسانایی گرمایی با نسبت حجمی ذره برای نانوسیال آب-اکسید آلومینیوم
- ۲۸ (۱-۲) جریان بین دو صفحه تخت موازی
- ۳۴ (۲-۲) انرژی های وارد شده به سیستم
- ۴۰ (۳-۲) نتایج آزمایشات انجام شده توسط "زوان" برای نانوسیال آب-مس
- ۴۵ (۱-۳) موازنه شار روی حجم کنترلی
- ۵۳ (۲-۳) دسته گره استفاده شده برای مسأله یک بعدی
- ۵۳ (۳-۳) دو فرض ساده برای پروفیل (الف) پروفیل پله ای و (ب) پروفیل خطی قطعه به قطعه
- ۵۷ (۴-۳) رویه ی A: وجوه در وسط فاصله بین گره های مختلف
- ۵۸ (۵-۳) رویه ی B: گره های شبکه در مراکز حجم های کنترلی
- ۶۳ (۶-۳) تغییرات ضریب a_E نسبت به عدد پکله
- ۷۰ (۷-۳) دسته گره سه تایی
- ۷۱ (۸-۳) میدان فشار موج دو بعدی
- ۷۳ (۹-۳) میدان سرعت موج
- ۷۴ (۱۰-۳) مکان های جابه جا شده برای u و v
- ۷۵ (۱۱-۳) حجم کنترلی برای u
- ۷۶ (۱۲-۳) حجم کنترلی برای v

- ۷۸ (۱۳-۳) حجم کنترلی برای معادله پیوستگی
- ۸۷ (۱۴-۳) سرعت ها در وجوه حجم کنترل
- ۸۸ (۱۵-۳) شرایط مرزی برای حجم کنترل u
- ۸۹ (۱۶-۳) شرایط مرزی برای حجم کنترل v
- ۸۹ (۱۷-۳) شرایط مرزی برای حجم کنترل T
- ۹۰ (۱۸-۳) حجم کنترلی مرزی برای معادله تصحیح فشار- سرعت معلوم در مرز
- 91 (۱-۴) شبکه بندی بازه مساله، 201×31 گره
- 92 (۲-۴) تغییرات عدد ناسلت محلی روی صفحه در شبکه بندی های مختلف، $Re=500$
- 94 (۳-۴) تغییرات RMS در تکرارهای متوالی برای u, v, p, T ، دقت خطا 10^{-7}
- 95 (۴-۴) مقایسه حل تحلیلی و حل عددی در $Re=500$ و $x^*=85$
- 96 (۵-۴) کانتورها (الف) سرعت u (ب) سرعت v (پ) فشار p (ت) T ، شار حرارتی ثابت دیواره (ث) T ، دمای ثابت دیواره
- 97 (۶-۴) تغییرات عدد ناسلت محلی روی دیوار در اعداد رینولدز مختلف (الف) شار حرارتی ثابت دیواره (ب) دمای ثابت دیواره
- 99 (۷-۴) مقایسه حل عددی و تحلیلی عدد ناسلت محلی روی دیواره (الف) شار حرارتی ثابت دیواره (ب) دمای ثابت دیواره
- 100 (۸-۴) تغییرات دمای دیوار و دمای متوسط در طول کانال، $Re=200$ (الف) شار حرارتی ثابت دیواره (ب) دمای ثابت دیواره
- 101 (۹-۴) تغییرات تنش برشی محلی روی صفحه
- 103 (۱۰-۴) خطوط جریان برای درصدهای حجمی مختلف و $Re=20$

- 103 (۱۱-۴) خطوط جریان برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=100$
- 104 (۱۲-۴) خطوط جریان برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=500$
- 104 (۱۲-۴) خطوط جریان برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=1500$
- 105 (۱۳-۴) تغییرات تنش برشی روی دیوار برای درصد‌های حجمی مختلف الف) $Re=50$
 ب) $Re=200$ پ) $Re=1000$
- 106 (۱۴-۴) تغییرات تنش برشی روی دیوار در اعداد رینولدز مختلف الف) $\phi = 0.02$
 ب) $\phi = 0.04$
- 106 (۱۵-۴) توزیع تنش برشی متوسط روی دیوار در اعداد رینولدز و درصد‌های حجمی مختلف
- 108 (۱۶-۴) خطوط همدمما برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=20$
- 108 (۱۷-۴) خطوط همدمما برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=100$
- 109 (۱۸-۴) خطوط همدمما برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=500$
- 109 (۱۹-۴) خطوط همدمما برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=1500$
- 110 (۲۰-۴) تغییرات عدد ناسلت برای درصد‌های حجمی مختلف الف) $Re=50$ ب) $Re=1000$
- 111 (۲۱-۴) تغییرات عدد ناسلت در اعداد رینولدز مختلف الف) $\phi = 0.02$ ب) $\phi = 0.04$
- 112 (۲۲-۴) توزیع عدد ناسلت متوسط در اعداد رینولدز و درصد‌های حجمی مختلف
- 113 (۲۳-۴) خطوط همدمما برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=20$
- 113 (۲۴-۴) خطوط همدمما برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=100$
- 114 (۲۵-۴) خطوط همدمما برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=500$
- 114 (۲۶-۴) خطوط همدمما برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=1500$

- 115 (۲۷-۴) تغییرات عدد ناسلت برای درصدهای حجمی مختلف الف) $Re=50$ ب) $Re=1000$
- 116 (۲۸-۴) تغییرات عدد ناسلت در اعداد رینولدز مختلف الف) $\phi = 0.02$ ب) $\phi = 0.04$
- 116 (۲۹-۴) توزیع عدد ناسلت متوسط در اعداد رینولدز و درصدهای حجمی مختلف

فهرست جدول ها

شماره	صفحه
(۱-۱)	خلاصه ای از مدل‌های تحلیلی برای رسانایی گرمایی نانوسیال
(۱-۴)	مقایسه طول توسعه یافتگی هیدرودینامیکی بی بعد با نتایج تجربی
(۲-۴)	ثابت‌های روابط ارائه شده برای عدد ناسلت موضعی - شار حرارتی ثابت
(۳-۴)	ثابت‌های روابط ارائه شده برای عدد ناسلت موضعی - دمای ثابت دیوار
(۳-۴)	درصد افزایش عدد ناسلت متوسط روی صفحه نسبت به سیال خالص - شار حرارتی ثابت
(۴-۴)	درصد افزایش عدد ناسلت متوسط روی صفحه نسبت به سیال خالص - دمای ثابت دیوار



فصل اول

مروری بر خواص نانوسیال

مقدمه

نانوسیال محلولی است از نانو ذرات جامد (به قطر ۱۰۰-۱ نانومتر) در یک سیال پایه که برای بهبود انتقال حرارت در آن سیال به کار می روند. سیالات مرسوم برای انتقال حرارت روغن، آب و اتیلن گلیکول هستند که از نظر انتقال حرارت بسیار ضعیف محسوب می شوند. زیرا رسانایی حرارتی این سیالات نقش بسیار مهمی در ضریب انتقال حرارت میان محیط و سطح انتقال حرارت بازی می کند. بنابراین روشهای متعددی برای بهبود رسانایی گرمایی این سیالات با انحلال ذرات در مقیاس نانو- میکرو یا ابعاد بزرگتر در آنها، شکل گرفته است.

وقتی که نانو ذرات جامد با مقیاس طولی بین ۱ تا ۱۰۰ نانومتر و رسانایی گرمایی بالا در سیال پایه حل می شوند (رسانایی گرمایی کم)، سیال پایه افزایش رسانش گرمایی و ضریب انتقال حرارت جابجایی را از خود نشان می دهند. رسانایی گرمایی ذرات از جنس فلزی و غیرفلزی مانند Al_2O_3 ، TiO_2 ، SiO_2 ، Cu ، CUO حتی در غلظت های کم، منجر به افزایش ضریب انتقال حرارت می شود. بنابراین افزایش رسانایی گرمایی مؤثر نانوسیال، افزایش انتقال حرارت را در قیاس با انتقال حرارت سیال معمولی باعث می شود. "چویی" نخستین کسی بود که واژه نانوسیال را برای سیالی که نانو ذرات در آن حل شده اند، به کاربرد. "چویی" و همکاران وی نشان دادند که افزودن مقدار کمی (کمتر از ۱٪ حجمی) از نانو ذرات به یک مایع معمولی، رسانایی گرمایی سیال را تقریباً تا ۲ برابر افزایش می دهد [۱،۲].

محققین زیادی مانند، "ماسودا"، "ژوان" و "لی"، "ژوان" و "روتزل"، اظهار داشتند که با افزودن نانو ذرات به سیال با غلظت کم (۱ تا ۵ درصد حجمی)، رسانایی گرمایی محلول بیش از ۲۰٪ افزایش خواهد یافت. [۳،۴،۵،۶]

"استمن" و همکاران، در لابر اتوار ملی آراگون، با انجام آزمایشات مقدماتی نشان دادند، افزودن حدود ۵٪ حجمی CuO در سیال پایه آب در حدود ۶۰٪ باعث افزایش رسانایی گرمایی می‌شود. ضریب انتقال حرارت به عنوان فاکتور مهم مورد محاسبه در جابجایی‌های اجباری فرآیند سرمایه‌ش و گرمایش در مبدل‌های حرارتی و سسیستم‌های مونو کاربرد دارد. [۷]

چنین افزایشی به طور ویژه‌ای به عواملی چون غلظت حجمی ذرات، جنس ذرات، اندازه ذرات، شکل ذرات، دمای سیال پایه و سایر مکمل‌ها بستگی دارد. نانو ذرات که در نانو سیال‌ها استفاده می‌شوند، از بسیاری متریکال‌ها و مواد گوناگون با سنتزهای شیمیایی و فیزیکی تهیه می‌شوند. روش‌های فیزیکی متداول شامل روش‌های "کوبش مکانیکی"^۱ و تکنیک "چگالش راکد گاز"^۲ می‌باشد. [۸]

روش خاصی دیگری که در حال حاضر برای تهیه نانو ذرات فلزی استفاده می‌شوند، "کوبیدن مکانیکی"، تکنیک "چگالش راکد گاز"، "ته نشینی شیمیایی"^۳، "تجزیه شیمیایی بخار"^۴، "میکرو امولسیون"^۵، "آتشکافت پاششی"^۶ و "پاشش حرارتی"^۷ است. نانو ذرات از متریکال‌هایی عموماً در فرم پودر تولید می‌شوند. در فرم پودری، نانو ذرات می‌توانند در مایع‌های آلی یا آبی حل شوند و نانوسیال را برای کاربردهای خاص به وجود آورند. تاکنون، نانوسیالات با کیفیت‌های مختلف به طور گسترده از طریق حجم‌های کم و توسط تکنیک‌های دو مرحله‌ای و یک مرحله‌ای تولید شده‌اند. این تکنیک‌ها به طور لحظه‌ای پودر را تولید و مستقیماً آن را در سیال پایه حل می‌کند. تولید نانوسیالات کاملاً حل شده، در مقیاس بالا و قیمت پایین، برای مصارف تجاری مورد نیاز است. [۹]

1- Mechanical Grinding
 2- Inert-Gas-Condensation Technique
 3- Chemical Precipitation
 4- Chemical Vapor Deposition
 5- Micro-Emulsions
 6- Spray Pyrolysis
 7- Thermal Spraying

۱-۱) رسانایی گرمایی^۱ نانوسیال

از آنجایی که نانوذراتی با رسانایی گرمایی بالا، درسیال پایه ای با رسانایی گرمایی پایین حل می‌شوند، به طور قابل توجهی رسانایی گرمایی آن سیال را افزایش می‌دهند. محققین مدل‌های زیادی برای محاسبه میزان افزایش رسانایی گرمایی ارائه داده اند و آزمایش‌های زیادی را برای مقایسه نتایج عملی و تئوری انجام گرفته است. اما هنوز تحقیقات زیادی برای پیشگویی رفتار نانوسیال مورد نیاز است. البته اکنون تعدادی رابطه تجربی برای محاسبه رسانایی گرمایی موثر مخلوط‌های دوفازی وجود دارد.

در کتب و نوشته‌های مختلف، نسبت افزایش رسانایی گرمایی، با نسبت رسانایی گرمایی نانو سیال به رسانایی گرمایی سیال پایه معرفی می‌گردد ($\frac{K_{eff}}{k_L}$). محققین، مدل‌های رسانایی گرمایی خود را بر مبنایی تحقیقات کلاسیک ماکسول توسعه داده اند. کسی که انتقال حرارت به روش هدایت را در یک جسم ناهمگن مورد بررسی قرار داد. رسانایی گرمایی موثر برای یک مخلوط دوفازی متشکل از فاز پیوسته و گسسته توسط ماکسول مورد بررسی قرار گرفت و رسانایی گرمایی موثر آن، k_{eff} ، توسط رابطه زیر ارائه شد [۸]:

$$K_{eff,Maxwell} = \frac{2k_2 + k_1 + \varphi(k_2 - k_1)}{2k_2 + k_1 - 2\varphi(k_2 - k_1)} k_1 \quad (1-1)$$

که k_1 و k_2 به ترتیب رسانایی گرمایی مایع و ذرات و φ نسبت حجمی ذرات هستند. ماکسول فرضیه خود را بر مبنای فاز گسسته، شکل کره‌ای ذرات و این که رسانایی حرارتی نانو سیال به ذرات کره‌ای، سیال پایه و نسبت حجمی ذره وابسته باشد، ارائه داد. "همیلتن" و "کروسر"، یافته‌های ماکسول را برای ذرات غیرکره‌ای توسعه دادند و ضریب شکل (n) را معرفی کردند که می‌تواند به صورت تجربی برای مواد گوناگون محاسبه شود. هدف تحقیقات آن‌ها رسیدن به مدلی بود که تابعی از شکل ذره، ترکیب و رسانش

^۱- Thermal Conductivity

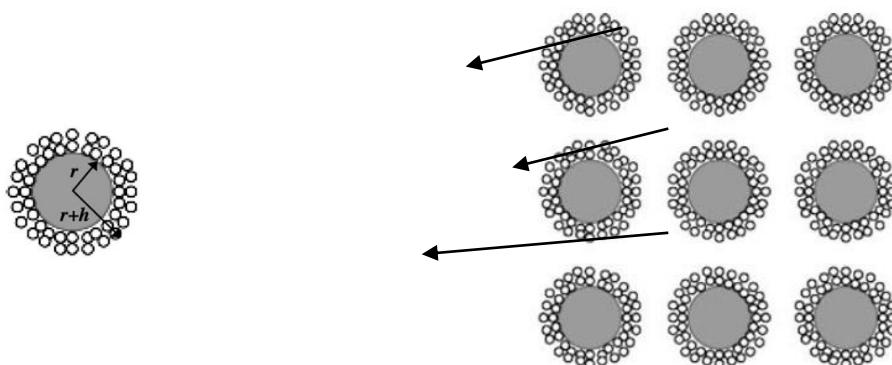
هر دو فاز پیوسته و گسسته باشد. مدل همپلتن و کروسر برای فاز گسسته (ذره) که در یک فاز پیوسته حل شود چنین این است [۸]:

$$k_{eff,Hamilton-crosser} = k_1 \left[\frac{k_2 + (n-1)k_1 - (n-1)\varphi(k_1 - k_2)}{k_2 + (n-1)k_1 + \varphi(k_1 - k_2)} \right] \quad (2-1)$$

که ضریب شکل تجربی n با $n = \frac{3}{\Psi}$ تعریف می شود و Ψ ، کرویت، به عنوان نسبت مساحت کره ای با حجم برابر آن ذره، به سطح آن ذره تعریف می شود. مدل همپلتن-کروسر وقتی که $\Psi = 1$ باشد به مدل ماکسول کاهش می یابد و با نتایج آزمایشی به دست آمده $\varphi < 30\%$ مطابقت دارد. این مدل تا زمانی معتبر است که رسانایی ذره حداقل تا ۱۰۰ بار بیشتر از رسانایی فاز پیوسته باشد. هر چند که آزمایشات نشان می دهند که این مدل در پیش بینی رسانایی گرمایی مناسب است، اما تأثیرات اندازه نانو ذرات در آن نادیده گرفته شده است.

“یو” و “چویی” مدل ماکسول را با این فرض تعمیم دادند که مولکول های سیال که نزدیک به سطح جامد نانوذرات هستند، یک ساختمان لایه ای جامد شکل داشته باشند. بنابراین این نانولایه به عنوان یک پل حرارتی میان سیال مایع پایه و نانوذرات است که باعث افزایش رسانایی گرمایی موثر می شود. همان طور که از شکل (۱-۱) بر می آید، نانو سیال متشکل از سیال مایع پایه، نانوذرات جامد

و نانولایه ها می باشد [۱۰].
نانو ذره



شکل (۱-۱) ساختار نانوسیال

برای به شمار آوردن تأثیر نانولایه در k_{eff} ، “یو” و “چویی” فرض کردند که نانو ذرات کرووی به شعاع (r) توسط نانو لایه به ضخامت (h) احاطه شده است. شکل (۱-۱). علاوه بر این، آن‌ها فرض کردند که رسانایی گرمایی نانولایه (k_{layer}) بیشتر از رسانایی گرمایی مایع (k_1) است. وقتی که نانولایه با نانوذره ترکیب می‌شود، یک نانو ذره معادل با رسانایی گرمایی موثر (k_{eq}) تعریف می‌شود. رسانایی گرمایی معادل می‌تواند با استفاده از تئوری جسم مؤثر به صورت زیر محاسبه شود:

$$k_{eq} = \frac{[2(1-\gamma)+(1+\beta)^3(1+2\gamma)]\gamma}{-(1-\gamma)+(1+\beta)^3(1+2\gamma)} k_2 \quad (3-1)$$

که $\beta = \frac{h}{r}$ نسبت ضخامت نانولایه به شعاع واقعی ذره است و $\gamma = \frac{k_{layer}}{k_2}$ در حالتی که $\gamma = 1$ باشد

$$k_{layer} = k_2 = k_{eq}$$

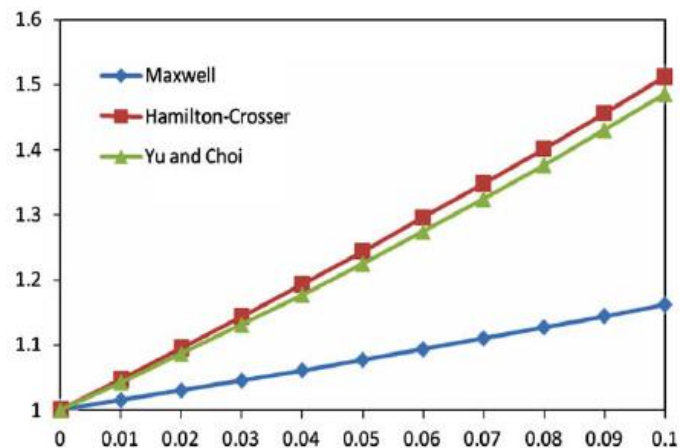
بنابراین “یو” و “چویی” رابطه (۳-۱) را تعمیم بخشیدند و مدل زیر را برای رسانایی گرمایی معادل تولید کردند:

$$k_{Yu-choi} = \frac{k_2 + 2k_1 + 2\varphi(k_2 - k_1)(1 - \beta)^3}{k_2 + 2k_1 - \varphi(k_2 - k_1)(1 + \beta)^3} k_1 \quad (4-1)$$

شایان ذکر است که رسانایی گرمایی مؤثر نانو سیال به رسانایی گرمایی ذرات جامد، سیال پایه، نسبت حجمی ذره، شکل ذره و ضخامت و رسانایی نانو لایه بستگی دارد.

مقایسه این سه مدل مهم می‌تواند از فرض وجود نانولایه و شعاع نانوذرات، ایجاد شود. “یو” و “چویی” مدل رسانایی گرمایی خود را با رسم ضخامت‌های ۱nm و ۲nm نانولایه مشاهده کردند. برای رسانایی گرمایی نانولایه، مقداری بین رسانایی گرمایی سیال پایه و رسانایی گرمایی نانوذره لازم بود. $5 \frac{W}{m.k}$ رسانایی گرمایی نانولایه با ضخامت ۲nm، برای نانوسیال آب و اکسید آلومینیم (Al_2O_3) و اندازه نانو ذرات Al_2O_3 برای مقایسه مدل، ۱۵nm در نظر گرفته شد. نتایج برای این سه مدل در شکل (۲-۱) برای مقادیر مختلف حجمی φ ذرات نشان داده شده‌اند [۱۰].

نسبت رسانایی گرمایی $\frac{k_{eff}}{k}$



شکل (۱-۲) تغییرات نسبت رسانایی گرمایی با نسبت حجمی ذره برای نانوسیال آب-اکسید آلومینیوم

همان گونه که در شکل مشاهده می شود، تمامی مدل‌ها افزایش نسبت رسانایی گرمایی را با افزایش نسبت حجمی ذرات پیش‌بینی می‌کنند. یک رابطه خطی برای تمامی این مدل‌ها وجود دارد. بیش‌ترین مقادیر با استفاده از مدل همیلتون-کروسر به دست آمده است. مدل همیلتون-کروسر و "یو" و "چویی" تقریباً با یکدیگر یکسانند، اما مدل ماکسول نسبت رسانایی گرمایی بسیار پایین‌تری را نسبت به این دو مدل پیش‌بینی می‌کند. اختلاف بین مدل‌ها با افزایش حجمی ذرات، افزایش می‌یابد. مجموعه بسیار مهمی از کارهای تجربی بر روی رسانایی گرمایی مؤثر نانو سیالات و افزایش انتقال حرارت توسط "یو" و همکارانش انجام شده است. برخی از نتایج تجربی موجود در منابع علمی از این آزمایشات استخراج شده‌اند.

"لی" [۴] و "وانگ" [۱۱] تأثیر نسبت حجمی نانوذرات ۲۳ و ۲۴ نانومتری CuO را در سیال پایه آب بررسی کردند و فهمیدند که رسانایی گرمایی به صورت خطی با افزایش حجم ترکیب شده ذره، افزایش می‌یابد. با افزایش ۱۰٪ نسبت حجمی، نسبت رسانایی گرمایی ۳۴٪ افزایش می‌یابد.

تأثیر نسبت حجمی با استفاده از اتیلن گلیکول به عنوان سیال پایه و CuO به عنوان نانو ذره توسط "لی" و همکاران بررسی شد. مشاهده شد که با افزایش ۱۵٪ ترکیب حجمی ذرات CuO، نسبت رسانایی ۵۰٪ افزایش می یابد. محققین زیادی در خصوص میزان افزایش در تست‌هایی با پارامترهای یکسان برای Al_2O_3 در آب، CuO در آب و CuO در اتیلن گلیکول توافق نظر دارند.[۴]

"وانگ" و همکاران، "لی" و همکاران، "ژی" [۱۲،۱۳] و همکاران و "داس" و همکاران [۱۴،۱۵،۱۶] تحقیقات را در خصوص خواص جنس ذره بررسی کردند. آن‌ها خواصی از قبیل اندازه ذره، سیال پایه و دما را تقریباً ثابت نگه داشتند. اما زمانی که موادی با رسانایی بالاتر مانند Al_2O_3 ، CuO، Sic با همان اندازه ذره به کار رفتند، شرایط عوض شد. ذرات فلزی همان افزایش دمایی را داشتند که ذرات اکسید شده ایجاد می کردند، اما با درصد حجمی بسیار پایین تر. از طرف دیگر، تولید نانوسیال با ذرات فلزی، بدون اینکه ذرات آن در طول پروسه تولید اکسید شوند، بسیار مشکل است. اثرات اندازه ذرات توسط "وانگ"، "لی"، "ژی" و "داس" مورد تحقیق و بررسی قرار گرفت. در این تحقیقات ذرات کروی برای ترکیب ذره-آب و از ذراتی در محدوده قطر ۲۰nm تا ۶۰nm استفاده شده است. نتایج کلی نشان می دهند که ذرات با قطر بیشتر، تأثیر بیشتری در افزایش رسانایی گرمایی دارند. از سوی دیگر، برخی از تئوری‌ها پیش‌بینی می کردند که توزیع یکنواخت از ذرات کوچک، انتقال حرارت بهتری را رقم می زنند.

"ژی" در خصوص تأثیرات شکل ذرات بر روی رسانایی گرمایی در نانو سیال مطالعه کرد و نتایج را از لحاظ شکل هندسی ذره با ذرات دیگری از همان جنس مقایسه کردند. نتایج نشان می دهند که ذرات کشیده‌تر، افزایش رسانایی حرارتی بهتری دارند. آن‌ها ذرات کروی شکل ۲۶nm و استوانه ای ۶۰۰nm از جنس Sic را در سیال پایه اتیلن

گلیکول به کار بردند. مشاهده شد که با غلظت ۳٪ حجمی، نسبت رسانایی ۱/۶ و ۱ به ترتیب برای ذرات استوانه ای و کروی به دست می آید.

جدول (۱-۱) خلاصه ای از مدل‌های تحلیلی برای رسانایی گرمایی نانوسیال

Investigator	Formula (k_{eff}/k_b)
Maxwell	$\frac{k_p+2k_b+2(k_p-k_b)\phi}{k_p+2k_b-(k_p-k_b)\phi}$
Hamilton and Crosser	$\frac{k_p+(n-1)k_b-(n-1)(k_b-k_p)\phi}{k_p+(n-1)k_b+(k_b-k_p)\phi}$
Wasp	$\frac{k_p+2k_b-2(k_b-k_p)\phi}{k_p+2k_b+(k_b-k_p)\phi}$
Bruggeman	$\frac{1}{4}[(3\phi-1)\frac{k_p}{k_b}+(2-3\phi)+\frac{1}{4}\sqrt{\Delta}]$
Yu and Choi	$\frac{k_{pe}+2k_b+2(k_{pe}-k_b)(1-\beta)^3\phi}{k_{pe}+2k_b-(k_{pe}-k_b)(1+\beta)^3\phi}, 1+\frac{n\phi_{eff}A}{1-\phi_{eff}A}$
Wang et al.	$\frac{(1-\phi)+3\phi\int_0^\infty k_{cl}(r)n(r)/[k_{cl}(r)+2k_b]dr}{(1-\phi)+3\phi\int_0^\infty k_b(r)n(r)/[k_{cl}(r)+2k_b]dr}$
Xue	$0 = 9(1-\frac{\phi}{\lambda})\frac{k_{eff}-k_b}{2k_{eff}+k_b} + \frac{\phi}{\lambda}[\frac{k_{eff}-k_{c,x}}{k_{eff}+B_{2,x}(k_{c,x}-k_{eff})} + 4\frac{k_{eff}-k_{c,y}}{2k_{eff}+(1-B_{2,x})(k_{c,y}-k_{eff})}]$
Xue and Xu	$0 = (1-\frac{\phi}{\alpha})\frac{k_{eff}-k_b}{2k_{eff}+k_b} + \frac{\phi}{\alpha}\frac{(k_{eff}-k_2)(2k_2+k_1)-\alpha(k_1-k_2)(2k_2+k_{eff})}{(2k_{eff}+k_2)(2k_2+k_1)+2\alpha(k_1-k_2)(k_2-k_{eff})}$
Xie et al.	$1+3\Theta\phi_T + \frac{2\Theta^2\phi_T^2}{1-\Theta\phi_T}$
Xuan et al.	$\frac{k_p+2k_b-2(k_b-k_p)\phi}{k_p+2k_b+(k_b-k_p)\phi} + \frac{\rho_p\phi c_p}{2k_b}\sqrt{\frac{k_B T}{3\pi r_c \eta}}$
Kumar et al.	$1+c\frac{2k_B T}{(\pi\eta d_p^2)}\frac{\epsilon r_b}{k_b(1-\epsilon)r_p}$
Bhattacharya et al.	$\frac{k_p}{k_b}\phi + (1-\phi)$
Jang and Choi	$k_b(1-\phi) + k_p\phi + 3C\frac{d_b}{d_p}k_b Re_{d_p}^2 Pr\phi$
Prasher	$(1+A Re^m Pr^{0.333}\phi)[\frac{k_p+2k_b+2(k_p-k_b)\phi}{k_p+2k_b-(k_p-k_b)\phi}]$
Koo and Kleinstreuer	$\frac{k_{eff,Maxwell}}{k_b} + 5 \times 10^4 \beta\phi\rho_p c_p \sqrt{\frac{\kappa T}{\rho_p D}} \frac{f(T,\phi)}{k_b}$
Xue	$\frac{1-\phi+2\phi\frac{k_p}{k_p-k_b}\ln\frac{k_p+k_b}{2k_b}}{1-\phi+2\phi\frac{k_b}{k_p-k_b}\ln\frac{k_p+k_b}{2k_b}}$

"ژی" و همکارانش، اثرات سیال پایه را روی افزایش رسانایی گرمایی مورد آزمایش قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان داد که رسانش گرمایی در سیالی که رسانایی گرمایی پایین تری دارد، بیش تر است. اهمیت این نتایج از این لحاظ است که می‌تواند در طراحی

تجهیزات مبدل‌های حرارتی که نیاز به انتقال حرارت زیادی می‌باشد، مورد استفاده قرار گیرند. تأثیرات دما بر رسانایی گرمایی توسط "داس" و همکاران، "ون" و "دینگ" [۱۷، ۱۸] و "لی" و "پترسون" [۱۹] بررسی شد. نتایج به وضوح نشان می‌دهند که رسانایی گرمایی با افزایش دما، افزایش می‌یابد.

برای جلوگیری از ته نشینی، برخی افزودنی‌های سیال در طول آزمایشات به آن‌ها اضافه می‌شود. در تحقیقات انجام شده تاکنون، که از افزودنی‌مانند اسید نیوگلیکولیک استفاده شده است، شاهد افزایش رسانایی گرمایی هستیم [۸].

۱-۲ افزایش انتقال حرارت جابجایی

افزایش ضریب انتقال حرارت از افزایش رسانایی گرمایی برای نانوسیالات که در مبدل‌های حرارتی استفاده می‌شوند، شاخص بهتری برای مقایسه می‌باشد. خواص فیزیکی نانو سیال با خواص فیزیکی سیال پایه کاملاً متفاوت است. چگالی، گرمای ویژه، ویسکوزیته تغییر می‌کنند، به طوری که میزان افزایش ضریب انتقال حرارت، از میزان افزایش رسانایی گرمایی گزارش شده از برخی آزمایشات تجاوز می‌کند.

"هریس" و همکارانش آزمایشاتی با نانوذرات CuO و Al_2O_3 در آب و تحت شرایط آرام توربولانس انجام دادند [۲۰].

"پاک" و "چو" [۲۱] آزمایشاتی بر روی دو نوع نانوسیال که ترکیب‌های Al_2O_3 و Tio_2 در آب بودند، انجام دادند. هدف از این آزمایشات بررسی بازده انتقال حرارت توربولانس و اصطکاک توربولانس بود. "ژوان" و "لی" در مورد جریان تک فازی در جریان توربولانس مطالعه کردند و فرمول انتقال حرارت زیر را با استفاده از داده‌های تجربی به دست آوردند [۲۲]:

$$Nu_{nf} = \frac{h_{nf}d}{k_{nf}} \quad (5-1)$$

$$= 0.0059(1.0 + 7.6286 \varphi^{0.6886} Pe_d^{0.001}) Re_{nf}^{0.9238} Pr_{nf}^{0.4}$$

همچنین، "ژوان" و "لی" برای جریان آرام نیز رابطه ای بدست آوردند:

$$Nu_{nf} = \frac{h_{nf}d}{k_{nf}} \quad (6-1)$$

$$= 0.4328(1.0 + 11.285 \varphi^{0.754} Pe_d^{0.218}) Re_{nf}^{0.333} Pr_{nf}^{0.4}$$

عدد پکله (Pe)، انتشار گرمایی توسط جابجایی در مقیاس میکرو و پخش در مقیاس میکرو ذرات معلق را توضیح می‌دهد. عدد پکله ذره، عدد رینولدز و عدد پرانتل برای نانوسیال به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Pe_d = \frac{u_m d_p}{\alpha_{nf}} \quad (7-1)$$

$$Re_{nf} = \frac{u_m d}{v_{nf}} \quad (8-1)$$

$$Pr_{nf} = \frac{v_m d}{\alpha_{nf}} \quad (9-1)$$

و پخش گرمایی:

$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho c p)_{nf}} = \frac{k_{nf}}{(1 - \varphi)(\rho c p)_f + \varphi(\rho c p)_p} \quad (10-1)$$

۳-۱ آنالیز تئوری افزایش انتقال حرارت با استفاده از نانوسیال:

اقدامات مقدماتی انجام شده توسط "چویی" مفهوم نانوسیال را گزارش کردند و بدین ترتیب علاقه به این رشته گسترش یافت و شبیه سازی های محدود کامپیوتری از خواص گرمایی و انتقال حرارت نانوسیال انجام شد. برخی از این شبیه سازی ها با رسانایی گرمایی مؤثر نانوسیال یا ویسکوزیته مؤثر در ارتباط بودند و برخی دیگر به انتقال حرارت در نانوسیال توجه داشتند. درک کاملی از افزایش انتقال حرارت در جابجایی اجباری جریان آرام و توربولانس نانوسیال نیاز است تا بتوان در

کاربردهای عملی افزایش انتقال حرارت از آن استفاده کنند. نانو سیالها در اصل، سیالات چند جزئی هستند.

بنابراین در تحقیقات موجود، گاه می بینیم که با نانوسیالها به عنوان سیالات دو فازی همگن که بین ذرات سیال و نانوذرات لغزشی وجود ندارند و در تعادل گرمایی هستند، رفتار می شود و گاه نیز لغزش بین ذرات سیال و نانو ذرات و وجود تعادل گرمایی در نظر گرفته می شود.

بیش تر جابجایی های اجباری هم به عدد رینولدز و هم به عدد پرانتل بستگی دارند اما زمانی که با نانو سیال مواجه هستیم، پارامترهای اضافی ایجاد می شود که بتوانند خواص گرمایی همه اجزا را شامل شوند. از مطالبی که در بالا به آن پرداخته شد انتظار می رود که ضریب انتقال حرارت نانوسیال به رسانایی گرمایی و ظرفیت حرارتی سیال پایه و نانو ذرات، خصوصیات جریان، اعداد رینولدز و پرانتل، دما، نسبت حجمی ذرات محلول، ابعاد و شکل ذرات بستگی داشته باشد.

"ژوان" و "روتزل" تابع کلی عدد ناسلت را ارائه کردند [۶]:

$$Nu_{nf} = f \left[Re, Pr, \frac{k_n (\rho cp)_n}{k_f (\rho cp)_f}, \varphi, \text{شکل ذره} \right] \quad (11-1)$$

که f و n به ترتیب نشان دهنده سیال پایه و نانوذرات هستند. روش ممکن دیگری که برای فرمول بندی توسط "ژوان" و "روتزل" پیشنهاد شده این است که نسبت ضریب انتقال حرارت نانوسیال به سیال پایه، متناسب است به نسبت رسانایی گرمایی نانوسیال به رسانایی سیال پایه به توان عددی مانند m،

$$h_{nf} \approx h_f \left(\frac{k_{nf}}{k_f} \right)^m \quad (12-1)$$

توان در این رابطه به نوع جریان بستگی دارد و $m = \frac{2}{3}$ برای جریان توربولانس پیشنهاد می گردد.

روش هایی که در بالا به آن پرداخته شد فرمول بندی است که نانو سیال را به عنوان یک سیال تک فازی در نظر می گیرد در حالی که در حقیقت یک سیال دو فازی و مخلوط مایع-جامد است. سایز ذرات جامد، آنالیز فعل و انفعالات میان سیال و ذرات جامد را در طول انتقال انرژی کمی دشوار می کند. بسیاری از محققین معتقدند که حرکت براونی، یکی از فاکتورهای بسیار مهم در بالا بردن انتقال حرارت است. این حرکت تصادفی ذرات بسیار ریز بین ذرات جامد و سیال، ایجاد لغزش می کند. "ژوان" و "روتزل" هم چنین پیشنهاد کردند که تغییرات کمی در فرمول های سرعت و دما به خاطر حرکت براونی در نظر گرفته شود.

نتایج آزمایشات حاکی از افزایش قابل توجهی در انتقال حرارت با توجه به غلظت ذرات و عدد رینولدز جریان است. آنالیزهای مشابهی با سیال پایه اتیلن گلیکول انجام شده و نتایج، همین موارد را نشان می دادند. هر چند مخلوط اتیلن گلیکول تغییرات بیش تری را با توجه به غلظت ذرات و عدد رینولدز جریان نشان می دهد.

همان طور که در بالا به آن اشاره شد، دو نوع خط مشی برای پیدا کردن ضریب انتقال حرارت سیال نانو در جریان مجرا وجود دارد.

یکی این که از روش ها یک روش قراردادی برای به کار بردن خواص گرمایی و انتقالی نانوسیال در روابط موجود برای محاسبه ضریب انتقال حرارت سیال خالص است. بنابراین معادلات زیر برای خواص نانو سیال استفاده خواهند شد:

$$\rho_{eff} = (1 - \varphi)\rho_f + \varphi\rho_n \quad (14-1)$$

$$C_{p,eff} = (1 - \varphi)C_{p,f} + \varphi C_{p,n} \quad (15-1)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho C_p)_f + \varphi(\rho C_p)_n$$

"دریو" و "پاسمن" [۲۳] فرمول کاملاً شناخته شده انیشتین را برای محاسبه ویسکوزیته مؤثر معرفی کردند:

$$\mu_{eff} = \mu_f(1 + 2.5\varphi) , \quad \varphi < 0.05 \quad (16-1)$$

معادله انیشتین توسط "برینکمن" تعمیم پیدا کرد [۲۴]:

$$\mu_{eff} = \mu_f \frac{1}{(1 - \varphi)^{2.5}} \quad (17-1)$$

برای $\varphi < 0.05$ این معادلات برای ذرات کروی شکل می‌تواند به کار رود:

$$\mu_{eff} = \mu_f(1 + 2.5\varphi) \quad (18-1)$$

رسانایی گرمایی مؤثر، می‌تواند از یکی از مدل‌های رسانایی گرمایی معادلات (۱-۱) و

(۲-۱) به دست آید:

$$K_{eff,Maxwell} = K_1 \frac{k_2 + 2k_1 + 2(k_2 - k_1)\varphi}{k_2 + 2k_1 - 2(k_2 - k_1)\varphi}$$

$$K_{eff,Hamilton} = K_1 \frac{k_2 + (n-1)k_1 - (n-1)(k_1 - k_2)\varphi}{k_2 + (n-1)k_1 + (k_1 - k_2)\varphi}$$

که n ، ضریب شکل است (ذرات کروی $n=3$ و ذرات استوانه ای $n=6$) و φ نسبت حجمی نانوذرات

هستند. هم چنین:

$$Pr = \frac{\mu_{eff} C_{p,eff}}{k_{eff}} \quad (19-1)$$

$$Re = \frac{\rho_{eff} u_d}{\mu_{eff}} \quad (20-1)$$

$$Nu = \frac{hd}{k_{eff}} \quad (21-1)$$

به عنوان مثال، برای جریان آرام کاملاً توسعه یافته، تحت شرایط مرزی دمایی دیواره ثابت:

$$Nu_T = \frac{hd}{k_{eff}} = 3.657$$

و برای جریان توربولانس معادله "پتوخرف-کریلوف":

$$Nu = \frac{hd}{k_{eff}} = \frac{(f/8) Re \cdot Pr}{1.07 + 12.4 (f/8)^{1/2} (Pr^{2/3} - 1)} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^n \quad (22-1)$$

که $n=0.11$ برای $T_w > T_b$ و $n=0.25$ برای $T_w < T_b$ و $n=0$ برای خواص ثابت گازها:

$$f = (1.82 \log_{10}^{Re} - 1.64)^{-2} \quad (24-1)$$

این معادلات می توانند برای محاسبه ضریب انتقال حرارت نانوسیال در جریان داخل مجراها و برای حالت توربولانس و آرام و با استفاده از خواص مناسب آن مورد استفاده قرار گیرند. یکی از مهم ترین مشکلات، انتخاب مناسب خواص انتقالی و گرمایی است. نتایج می توانند با یافته های تجربی تحت شرایط یکسان مقایسه شوند.

در روش دیگر، معادلات حاکم تحت شرایط مرزی خاص می توانند حل شوند. در این حالت، معادلات بقا (جرم، ممنتوم، انرژی) که برای جریان تک فازی کاملاً شناخته شده هستند، می توانند بسط یابند. اگر از جابجایی و پخش در مقیاس نانو صرف نظر شود، این دو روش به ضریب انتقال حرارتی کمتر از یافته های تجربی منجر می شوند.

راه حل معادلات حاکم می توانند با فرض تراکم ناپذیری نانوسیال و عدم وجود لغزش میان ذرات و سیال یافت شود، اما این ذرات باید در تعادل گرمایی باشند. تحت چنین شرایطی، معادلات بقا در فرم برداری می توانند به صورت زیر نوشته شوند [۲۵]:

معادله بقای جرم:
(25-1)

$$\text{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

بقای ممنتوم:
(26-1)

$$\text{div}(\rho \vec{U} \vec{U}) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{U}$$

بقای انرژی:
(27-1)

$$\text{div}(\rho C_p \vec{U} T) = \text{div}(k \nabla T)$$

این معادلات می توانند بسته به نوع مساله، ساده سازی شوند.

بواسطه وجود اثرات متعدد، سرعت لغزشی میان ذرات بسیار ریز نانو و سیال نمی تواند صفر باشد. ابتدا بایستی مدل پراکندگی ذرات به کار رود. مدلی که باعث می شود حرکات تصادفی ذرات در محاسبات لحاظ شوند و دیگر این که رسانایی گرمایی، باید

رسانایی گرمایی ظاهری در نظر گرفته شود. برای جریان کاملاً توسعه یافته نانوسیال در یک تیوب گرم شده، معادله انرژی با در نظر گرفتن اتلافات گرمایی، به صورت زیر نوشته می شود:

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \left(\alpha_{eff} + \frac{D_x}{(\rho C_p)_{eff}} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\alpha_{eff} + \frac{D_r}{(\rho C_p)_{eff}} \right) r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \left(\frac{\mu}{\rho C_p} \right)_{eff} \left(\frac{du}{dr} \right)^2 \quad (28-1)$$

به طوری که α_{eff} پخش مؤثر نانوسیال، D_x و D_r ضرایب پراکندگی گرمایی در جهات محوری و شعاعی هستند که بایستی برای لحاظ شدن پراکندگی هیدرودینامیکی و جابجایی های نامنظم نانو سیالات، محاسبه شوند. اگر خواص سیال را در همه جهات یکسان در نظر بگیریم به طوی که $D_x=D_r=D$ ، پخش گرمایی ظاهری مؤثر می شود:

$$\bar{D} = \alpha_{eff}'' = \alpha_{eff} + \frac{D}{(\rho C_p)_{eff}} \quad (29-1)$$

و رسانایی گرمایی ظاهری:

$$\bar{k} = k_{eff} + D \quad (30-1)$$

برای جریان کاملاً توسعه یافته، پروفیل سرعت سهموی است:

$$\frac{u}{\bar{u}} = 2 \left(1 - \frac{r^2}{r_o^2} \right) \quad (31-1)$$

که \bar{u} سرعت متوسط در جهت محوری است. اگر رسانایی گرمایی در جهت محوری در نظر گرفته شود، معادله (۲۸-۱) می تواند به صورت جریان کاملاً توسعه یافته نوشته شود:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\bar{D} r \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (32-1)$$

معادله انرژی به هر شکلی که باشد برای جابجایی اجباری نانو سیال با شرایط مرزی دمای دیواره ثابت یا شار حرارتی ثابت دیواره و دمای ورودی ثابت، حل می شود.

محققین که در زمینه بالا بردن نرخ انتقال حرارت فعالیت می کنند، تکنیک های متعددی را برای

این منظور استفاده می کنند. در سال های اخیر همان طور که توضیح داده شد، بسیاری از مقالات

منتشر شده، به روی اندازه‌گیری و محاسبه خواص نانو سیال به خصوص مدلسازی و اندازه‌گیری رسانایی گرمایی نانو سیال و ضریب انتقال حرارت، تاکید داشته‌اند.

"ژوان" و "لی" [۷] راه حل کلاسیک "گراتز" را برای حل معادله شماره (۱-۳۲) با شرایط u ثابت و دمای دیواره ثابت حل کردند.

$$Nu_x = \frac{h_x d}{k} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} e^{-4\lambda_m^2 (\frac{x}{d}) / Pe}}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} e^{-4\lambda_m^2 (\frac{x}{d}) / Pe}}, \quad Pe = \frac{U_m d}{\alpha_{eff}^*} \quad (33-1)$$

مسأله کلاسیک "گراتز" می‌تواند برای شار حرارتی ثابت دمای دیواره ثابت و دمای دیواره خطی همراه با پروفیل سرعت سهموی بسط داده شود. با به کار بردن پروفیل سرعت سهموی، عدد ناسلت محلی می‌تواند از معادلات زیر به دست آید:

$$Nu_x = \frac{h_x d}{K_{eff}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \xi}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2 \xi}}$$

$$Nu_x = \frac{h_x d}{K_{eff}} = \left[\frac{11}{48} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n^2 \xi}}{A_n \beta_n^4} \right]^{-1}$$

$$Nu_x = \frac{h_x d}{K_{eff}} = \frac{\frac{1}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{2} \frac{R_n'(1)}{\lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 \xi}}{\frac{88}{768} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{2} \frac{R_n'(1)}{\lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 \xi}}$$

که $\xi = \frac{x}{Pe}$ و $Pe = \frac{U_m d}{\alpha_{eff}}$ و مقادیر ویژه و ضرایب در مقاله "کاکاچ" و "نیر" [۲۵] یافت شوند. از

معادلات (۱-۳۳) تا (۱-۳۶)، مقادیر اعداد ناسلت به دست می‌آید. سپس با استفاده از رابطه

"همیلتون" و "کروسر" برای رسانایی گرمایی مؤثر ترکیب نانوسیال Al_2O_3 و آب، ضرایب انتقال

حرارت جابجایی برای جریان کاملاً توسعه یافته و افزایش رسانایی گرمایی به دست می‌آیند. توجه

داشته باشید که ضریب پراکندگی D_r ، نادیده

گرفته شده است. همچنین باید توجه داشت که نسبت افزایش برای ضریب انتقال حرارت جابجایی و رسانایی گرمایی یکسان است. اگر نسبت حجمی ذره تا ۸٪ افزایش یابد، ضریب انتقال حرارت تا ۴۰٪ افزایش می یابد.

در بخش‌های بعدی، خلاصه ای از تحقیقات تئوری در مورد انتقال حرارت نانو سیال در جابجایی اجباری که اخیراً انجام و منتشر شده است، ارائه خواهد شد.

تحقیقات و مطالعات مقدماتی درباره چگونگی مکانیزم انتقال حرارت انجام شده است، اما فهم مناسب در مقیاس‌های اتمی و میکرو از این که حرارت چگونه در نانوسیال انتقال می یابد، مساله بزرگی است که باید بر آن فائق آمد تا بتوان توانایی‌های کامل این سبک جدید انتقال حرارت در سیال را شناخت. چهار مکانیزم خاص که در تحقیقات انجام شده به دست آمده است، می‌تواند تا حدودی پاسخگوی افزایش غیر متعارف رسانایی گرمایی نانو سیال باشد.

"اپین" و همکارانش [۲۶] یک شبیه‌سازی دینامیکی مولکولی ارائه کردند. آن‌ها نشان دادند که همه ضرایب انتقال مانند رسانایی گرمایی برای انتقال حرارت و ویسکوزیته و ضریب پخش برای ممنوم و انتقال جرم می‌توانند با استفاده از تئوری پاسخ خطی محاسبه شود و مکانیزم انتقال افزایش یافته در سیستم کوانتوم بعد کوچک مانند نانوتیوب‌ها قابل بحث است.

"مایگا" و همکارانش [۲۷]، حلی را برای جابجایی نانوسیالات های Al_2O_3 - آب و اتیلن گلیکول- آب که در یک لوله تحت شرایط شار حرارتی ثابت دیواره قرار دارند و نوع جریان های آرام و توربولانس و صرفنظر از سرعت لغزشی بین فازها، ارائه دادند. معادلات حاکم در مختصات استوانه ای (r, θ, z) نوشته شده اند و این معادلات می‌توانند برای محاسبه خواص گرمایی و فیزیکی نانوسیال های مورد نظر به کار روند.

(37-1)

$$\rho_{nf} = (1 - \varphi)\rho_{bf} + \varphi\rho_p$$

$$(C_p)_{nf} = (1 - \varphi)(C_p)_{bf} + \varphi(C_p)_p \quad (38-1)$$

برای Al_2O_3 و آب

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}} = 123\varphi^2 + 7.3\varphi + 1 \quad (39-1)$$

برای اتیلن گلیکول و آب

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}} = 306\varphi^2 + 0.19\varphi + 1 \quad (40-1)$$

برای آب و Al_2O_3

$$\frac{k_{nf}}{k_{bf}} = 4.97\varphi^2 + 2.72\varphi + 1 \quad (41-1)$$

برای آب و Al_2O_3

$$\frac{k_{nf}}{k_{bf}} = 28.905\varphi^2 + 2.82\varphi + 1 \quad (42-1)$$

که p و bf و nf به ترتیب نشان دهنده ذره، سیال پایه و نانوسیال هستند.

در جریان توربولانس، معادلات ناویر-استوکس در حالت متوسط زمانی با مدل توربولانسی $k - \varepsilon$ حل می‌شوند. نتایج حل معادلات حاکم با یافته‌های تجربی مطابقت دارد. همچنین نشان می‌دهد که وجود ذرات، روی اصطکاک دیواره مؤثر بوده و وجود نسبت حجمی ذرات، باعث افزایش آن می‌شود. افزایش قابلیت های انتقال حرارت در سیستم‌های سرمایشی شعاعی، توسط "روی" مورد بررسی قرار گرفت [۲۸]. او جریان آرام و انتقال حرارت را در یک جریان شعاعی که بین دو دیسک هم مرکز و موازی و با سیال نانو ایجاد شده بود، مورد بررسی قرار داد. معادلات حاکم در مختصات استوانه‌ای نوشته شدند و به صورت عددی برای میدان‌های حرارتی و هیدرودینامیکی نانو سیال Al_2O_3 و آب در جریان آرام شعاعی و با استفاده از خواص گرمایی فیزیکی نانوسیال، حل شدند. همچنین نانوسیال مورد نظر به

عنوان یک مخلوط دو فازی کلاسیک همانند آن چه که "مایگا" روی آن مطالعه کرده بود، در نظر گرفته شد.

"بونگیورنو" یک مدل دو جزئی و چهار معادله‌ای را در تعادل غیرهمگن برای جرم، ممنتوم و انتقال حرارت در نانوسیال توسعه داد. [۲۹] او هفت نوع مکانیزم لغزش را که می‌تواند یک سرعت نسبی را بین سیال پایه و نانو ذرات ایجاد کند، در نظر گرفت. همچنین فقط پخش براونی که حاصل برخورد پیوسته میان نانو ذرات و مولکول‌های سیال پایه هستند و (Thermo-phoresis) پخش نانوذرات تحت تأثیر گرادیان دما، مکانیزم‌های لغزشی مهمی در نانوسیال هستند و انتقال انرژی با پراکندگی نانوذرات نادیده گرفته می‌شود. در تحقیقات گذشته، بالا بردن انتقال حرارت عموماً به پراکندگی نانو ذرات نسبت داده می‌شد.

"مایگا" و همکارانش [۳۰] روشی عددی را برای مطالعه افزایش نرخ انتقال حرارت در انتقال حرارت به روش جابجایی با استفاده از نانوسیال ارائه دادند. او بر روی مسائلی از جابجایی اجباری آرام برای دو هندسه متفاوت خاص مانند یک تیوب گرم شده و سیستمی از دیسک‌های تحت گرمایش هم مرکز و موازی و با استفاده از نانو سیالات Al_2O_3 و آب و اتیلن گلیکول-آب، تحقیقات و محاسباتی انجام داد. برای دو شرط مرزی مورد نظر، روابط به دست آمده بر حسب عدد ناسلت نانوسیال بودند. نتیجه این بود که ترکیب اتیلن گلیکول-آب افزایش انتقال حرارت بهتری نسبت به ترکیب Al_2O_3 - آب دارد. اما وجود نانوذرات به افزایش تنش برشی تا حدود ۷ برابر سیال پایه منجر می‌شد. این امری کاملاً معقول است، زیرا نانو ذرات، ویسکوزیته مخلوط را نیز افزایش می‌دهد. او همچنین تأثیر غلظت ذرات و عدد رینولدز جریان را بر روی ضریب انتقال حرارت متوسط در تیوب با جریان سیال پایه آب، مشاهده کرد. به عنوان نتایجی از کار عددی، دو رابطه برای محاسبه عدد ناسلت متوسط برای جریان تیوب به عنوان تابعی از اعداد

رینولدز و پرانتل ارائه شد که تحت تأثیر شرایط مرزی شار حرارتی ثابت دیواره و دمای ثابت دیواره بودند. روابط این گونه هستند:

برای شار حرارتی ثابت دیواره

$$\overline{Nu} = 0.086Re^{0.55}Pr^{0.5} \quad (43-1)$$

برای دمای ثابت دیواره

$$\overline{Nu} = 0.28Re^{0.35}Pr^{0.36} \quad (44-1)$$

روابط بالا برای $Re < 1000$ و $6 \leq Pr \leq 753$ و $\phi \leq 10\%$ صادق هستند.

"کو" و "کلینستریر" [۳۱] جریان آرام را در یک میکروچاه حرارتی و با استفاده از دو نوع نانوسیال شبیه سازی و تحلیل کردند. نانو کره های CuO با غلظت پایین در آب یا اتیلن گلیکول، مسائل پیچیده جابجایی اجباری در میکروچاه های حرارتی هستند که با در نظر گرفتن جریان آرام پایدار نانوسیال تحت شرایط مرزی شار حرارتی ثابت، معادلات حاکم حل خواهند شد. اما رسانایی گرمایی بایستی به همان میزان بخش استاتیکی آن، k_{static} برای بخش دینامیکی، $k_{Brownian}$ ، که به حرکت براونی مربوط می شود، در نظر گرفته شود. برای بخش استاتیکی، مدل ماکسول که در معادله (۱-۱) نشان داده شد، به کار می رود و معادله برای $k_{Brownian}$ نیز قبلاً به دست آمده بود. برای این دو جریان که در یک میکروکانال جریان دارند، پروفیل دما و عدد ناسلت محاسبه شده اند. نشان داده شده است که اگر نانو ذرات را به سیالات با عدد پرانتل بالا و با درصد حجمی ۴٪ اضافه کنیم، افزایش قابل توجهی در بازده میکروچاه حرارتی ایجاد خواهد شد.

"خالد" و "وفایی" [۳۲] افزایش انتقال حرارت برای جریان آرام کاملاً توسعه یافته را در یک کانال دو بعدی ارائه و اثرات پراکندگی گرمایی را در داخل سیال کنترل کردند. در این پژوهش، معادله انرژی برای رژیم های مختلف جریان با شرایط مرزی شار حرارتی ثابت به صورت تحلیلی و عددی و بدون در نظر گرفتن رسانایی گرمایی در جهت محوری و تلفات گرمایی، حل شدند. خواص متوسط نانوسیال به جز رسانایی گرمایی برای

محاسبه اثرات پراکندگی گرمایی لحاظ شدند. نانوسیال، نیوتنی در نظر گرفته شده بود. توزیع های متعددی برای المان های قابل پراکنده شدن مانند نانوذرات در نظر گرفته شدند و نشان داده شد که توزیع این المان ها که انتقال حرارت را به ماکزیمم مقدار خود می رسانند، توسط شرایط گرمایی و جریان و همچنین خواص المان های قابل پراکنده شدن، کنترل می گردد.

"پالم" و همکارانش [۳۳]، مطالعه روی جریان سرمایشی شعاعی همراه با خواص وابسته به دما را ادامه دادند. به خصوص ویسکوزیته دینامیکی و مانند رسانایی گرمایی توزیعی، وابسته به دما داشتند و نسبت حجمی ترکیب ۱٪ تا ۴٪ بود. نتایج مجدداً تایید می کردند که کاربرد نانو ذرات قابلیت های انتقال حرارت را در سیستم جریان سرمایش شعاعی افزایش می دهد. چنین افزایشی نیز برای تنش برشی دیواره مشاهده شد. مقایسه با حالت خواص ثابت نشان می داد که وابستگی خواص به دما نرخ انتقال حرارت را افزایش می دهد. هر چند دوباره باید اشاره شود که تحقیقات بیش تری نیاز است تا بتوان فهم کاملی از رفتار و نحوه عمل این رشته جدید در سرمایش داشت.

"مایگا" و همکارانش [۳۴]، مفهوم افزایش انتقال حرارت را ارائه دادند و بر روی رفتارهای حرارتی و هیدرودینامیکی جریان توربولانس در یک تیوب و حل عددی برای ذرات Al_2O_3 با درصدهای حجمی مختلف و تحت شرایط مرزی شار حرارتی ثابت تحقیق کردند. دستگاه های غیرخطی و کوپله از معادلات حاکم با روش های عددی کنترل حجم حل شدند. مدل $k-\varepsilon$ کلاسیک "لاندر" و "اسپالدینگ" برای مدلسازی توربولانس به کار گرفته شد [۸]. رابطه جدید:

$$Nu_{fd} = 0.85Re^{0.71}Pr^{0.35} \quad (45-1)$$

برای محاسبه ضریب انتقال حرارت در جریان کاملاً توسعه یافته و برای مخلوط تک فازی Al_2O_3 و آب و در محدوده $10^4 \leq Re \leq 5 \times 10^5$ ، $6.6 \leq Pr \leq 13.9$ و

$0 < \varphi < 10\%$ پیشنهاد شد. تغییرات تنش برشی دیوار برحسب عدد رینولدز و درصد حجمی نیز مورد امتحان قرار گرفتند. نسبت تنش برشی دیوار در نانوسیال به تنش برشی در سیال پایه با افزایش درصد حجمی، افزایش نشان داد. هر چند اشاره شده بود این نسبت تقریباً از عدد رینولدز مستقل است اما با محاسبه مقدار مطلق تنش برشی دیواره مشاهده شد که این مقدار هم با نسبت حجمی و هم با عدد رینولدز افزایش می یابد.

همانطور که قبلاً به آن پرداخته شد، مدلسازی رفتار نانوسیال می تواند با روش تک فازی یا دوفازی انجام شود. مدل تک فازی فرض می کند که فاز سیال و ذره در تعادل گرمایی هستند و با سرعت یکسان حرکت می کنند. این مدل در مطالعات متعددی از انتقال حرارت جابجایی با استفاده از نانوسیال، به کار رفته است.

"میرمعصومی" و "بهزادمهر" جابجایی ترکیبی آرام نانوسیال متشکل از Al_2O_3 و آب را در حالت دو فازی و در یک تیوب آنالیز کردند. توزیع سرعت و اعداد ناسلت در محدوده وسیعی از اعداد رینولدز و گراشف به دست آمدند. با به کار بردن روش دو فازی، تأثیر جابجایی ذرات بر ضریب انتقال حرارت به طور واضح قابل فهم می شود [۳۵].

"هریس" راه حلی را بالا بردن انتقال حرارت جابجایی اجباری در جریان آرام نانوسیال در یک تیوب ارائه کرد که شرایط مرزی دمای ثابت دیواره بر آن حاکم و از مدل همگن استفاده شده بود و فرض می کرد که معادلات انرژی و جریان سیال پایه، تحت تأثیر حضور ذرات معلق قرار نمی گیرد. [۳۶] برای جریان کاملاً توسعه یافته جابجایی اجباری آرام، معادله انرژی برای سیال خالص با رسانایی شعاعی و محوری به صورت زیر نوشته شد:

$$u \frac{\partial T}{\partial z} = \left(\frac{k}{\rho C_p} \right)_{nf} \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{k}{\rho C_p} \right)_{nf} r \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (46-1)$$

پارامتر $(\rho C_p)_{nf}$ در معادله بالا نیز، برای نانوذرات به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho C_p)_f + \varphi(\rho C_p)_n \quad (47-1)$$

رابطه "یو" و "چویی" که در معادله (۴-۱) که به آن پرداخته شد، برای محاسبه رسانایی گرمایی نانوسیالی با $\beta = 0.1$ استفاده می‌شود. رسانایی گرمایی مؤثر نانوسیال یک پارامتر بسیار مهم در بالا بردن انتقال حرارت با استفاده از نانو ذرات محسوب می‌شود. مدل پراکندگی همچنین یک همپوشانی از پراکندگی هیدرودینامیکی و حرکات تصادفی نانو ذرات را در جهات شعاعی و محوری به کار می‌برد. معادله انرژی می‌شود:

$$u \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} + \frac{k_{d,r}}{(\rho C_p)_{nf}} \right) r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} + \frac{k_{d,z}}{(\rho C_p)_{nf}} \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (48-1)$$

و رسانایی مؤثر:

$$k_{eff} = k_{nf} + k_d \quad (49-1)$$

که k_d رسانایی گرمایی پراکندگی و k_{nf} رسانایی گرمایی نانوسیال است. با صرفنظر از پخش در جهت محوری و پراکندگی، معادله انرژی برای جریان آرام کاملاً توسعه یافته در یک تیوب دایره ای با نانوسیال‌های Al_2O_3 - آب و cu - آب و cuo - آب و در اعداد پلکه مختلف حل شده است که نتایج به دست آمده با یافته های تجربی مطابقت دارند.

"بهزاد مهر" و همکاران [۳۷] راه حلی را برای پیش‌بینی رفتار جریان نانوسیال در جابجایی اجباری توربولانت همراه با شار حرارتی ثابت دیواره و با استفاده از مدل دو فازی که هر فاز سرعت خودش را داراست، ارائه دادند. نانو سیال متشکل از آب به عنوان سیال پایه و ۱٪ حجمی cu بود. معادلات پیوستگی، ممنتوم و انرژی برحسب مقادیر متوسط، نسبت حجمی (φ) و دانسیته مخلوط (ρ_m) نوشته شدند:

$$\rho_m = \sum_{k=1}^n \varphi_k \rho_k \quad (50-1)$$

و μ_m ویسکوزیته مخلوط است.

$$\mu_m = \sum_{k=1}^n \varphi_k \rho_k \quad (51-1)$$

که k نمایانگر فاز دوم، نانو ذرات، است. سرعت لغزشی، سرعت ذره نسبت به سرعت فاز سیال پایه

معرفی می‌گردد:

$$u_{pf} = u_p - u_f \quad (52-1)$$

سرعت شناوری با سرعت نسبی رابطه دارد:

$$u_{dr,p} = u_{pf} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k \rho_k}{\rho_m} u_{fk} \quad (53-1)$$

سرعت لغزشی نیز از معادله زیر به دست می‌آید:

$$u_{pf} = \frac{\rho_p d_p^2 (\rho_p - \rho_m)}{18 \mu_f f_{drag} \rho_p} \quad (54-1)$$

که f_{drag} توسط "شیلر" و "ناومن" داده شده است:

$$f_{drag} = \begin{cases} 1 + 0.15 Re_p^{0.687} & \text{برای } Re_p \leq 1000 \\ 0.0183 Re_p & \text{برای } Re_p > 1000 \end{cases} \quad (55-1)$$

و شتاب

$$a = q - (u_m \cdot \nabla) u_m \quad (56-1)$$

ویسکوزیته مؤثر جامد برحسب نسبت حجمی جامد داده شده است. توربولانس نیز توسط مدل $k - \varepsilon$

"لاندر" و "اسپالدینگ" برای مخلوط شبیه‌سازی شده است. در این پژوهش، مدل تک فازی نیز به

کار رفته است و معادلات حاکم نیز با همان مدل توربولانسی حل شده‌اند. از مقایسه با نتایج تجربی به

این نتیجه می‌رسیم که مدل دو فازی بسیار دقیق تر از مدل تک فازی است.

"میرمعصومی" و "بهزادمهر" [۳۸] تأثیر سایز نانو ذرات را در جریان آرام و جابجایی ترکیبی نانو

سیال در یک تیوب افقی به صورت عددی مطالعه کردند. مدل مخلوط دو فازی برای محاسبه و شبیه

سازی جریان جابجایی ترکیبی کاملاً توسعه یافته نانوسیال

Al_2O_3 - آب، استفاده شد. معادلات پیوستگی، ممنتوم و انرژی برای مخلوط در حضور شار حرارتی یکنواخت در دیواره به کار گرفته شدند. روش های مشابه دیگری نیز در این مورد توسط وی امتحان شدند.



فصل دوم

معادلات فیزیکی

مقدمه

نانوسیال ترکیبی است از نانو ذرات جامد به قطر ۱ تا ۱۰۰ نانومتر در یک مایع قراردادی مانند آب، روغن یا اتیلن گلیکول. بسته به شکل، اندازه و خواص گرمایی نانو ذرات جامد، رسانایی گرمایی می‌تواند در درصدهای پایین حجمی (بین ۱٪ تا ۵٪) تا حدود ۴۰٪ افزایش یابد. نانو سیال پایدار است و افت فشار کمی ایجاد می‌کند و می‌تواند از نانو کانال‌ها عبور کند. گاهی نیز تثبیت کننده‌هایی مانند اسید اولئیک برای پایدار کردن نانوذرات جامد به سیال اضافه می‌شوند. "ژوان" و همکارانش، با استفاده از آزمایش‌های متعدد رسانایی گرمایی نانوسیال آب-مس را تا درصد حجمی ۷/۵٪ و قطر ذرات مس ۱۰۰ نانومتر، مورد بررسی قرار دادند [۵]. آنها، همچنین متوجه شدند که نانوسیال تا ۵٪ حجمی تا حدود ۳۰ ساعت بدون تغییر و پایدار باقی می‌ماند. "ژاوان" و همکارانش خواص انتقالی نانوسیال را امتحان کردند و به این نتیجه رسیدند که پراکندگی گرمایی، که در اثر جابجایی تصادفی ذرات ایجاد می‌شود، نقش بسیار مهمی را در افزایش انتقال حرارت بین سیال و دیواره بازی می‌کند [۶]. این پدیده نیازمند یک ضریب پراکندگی گرمایی است که هنوز ناشناخته مانده است. حرکت براونی ذرات، پدیده انتقال پرتابه‌ای میان ذرات و نانو ذرات می‌تواند همچنان به عنوان یک دلیل ممکن برای این افزایش مطرح باشند. "داس" و همکارانش مشاهده کردند که رسانایی گرمایی نانو سیال با افزایش دما، افزایش می‌یابد [۱۴]. آنها همچنین پایداری نانوسیال‌های آب-مس و آب Al_2O_3 را بررسی کردند. به علت فقدان یک تئوری معتبر و قوی در زمینه پیش‌بینی رسانایی گرمایی موثر نانو سیال، محققین زیادی، روابط مختلفی را برای پیش‌بینی رسانایی گرمایی ظاهری مخلوط دو فازی، ارائه کرده‌اند. مدل‌هایی که توسط "همیلتون و کروسر" "ماکسول"، "بروگمن" و "وانگ" ارائه شد، نتوانست در

پیش‌بینی دقیق رسانایی گرمایی مؤثر، موفق باشد. نتایج تجربی و آزمایشگاهی موجود، رسانایی گرمایی بسیار بیشتری را نسبت به یافته‌های تئوری آن‌ها، نشان می‌دهند. "یو" و "چویی" مدل ماکسول را با در نظر گرفتن ضخامت لایه مایع تعمیم دادند. اما به علت وابستگی رسانایی گرمایی به دما این مدل نیز با شکست مواجه شد [۴۱]. "کومار" و همکاران مدلی را ارائه دادند که رسانایی گرمایی تابعی از قطر ذرات و دما می‌باشد [۴۲]. "پراشر" و همکارانش نشان دادند که بالا بردن رسانایی گرمایی مؤثر (k_{eff}) نانو سیال، به طور مؤثری به جابه‌جایی براونی محلی ذرات وابسته است [۴۳]. "پاتل" و همکارانش مدلی را ایجاد کردند که طبق آن تأثیرات میکرو جابه‌جایی ناشی از جابه‌جایی ذرات، لحاظ می‌شد [۴۴]. تأثیرات دما این‌گونه توجیح می‌شد که افزایش حرکت براونی با افزایش دما ایجاد می‌شود که این نیز، خود عوامل دیگری را در جابه‌جایی دخیل می‌کرد. مدل بالا برای ترکیبات با درصد حجمی پایین قابل کاربرد می‌باشد. همچنین این مدل اثرات سایز ذرات را نیز در نظر می‌گیرد. در اینجا یک ثابت تجربی "C" وجود دارد که وابستگی دمایی رسانایی مؤثر گرمایی را به حرکت براونی ذرات مربوط می‌سازد. از مقایسه نتایج تجربی بدست آمده، ثابت C از مرتبه 10^4 محاسبه می‌شود. توضیحات مربوط به این ثابت مهم در بخش بعدی ارائه خواهد شد. همچنین شرایط مرزی مختلفی از شار حرارتی و دمای ثابت دیواره در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرد. شرط مرزی دمای ثابت دیواره، صرفاً جهت مقایسه و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

2-1 بررسی شرایط کلی مسأله

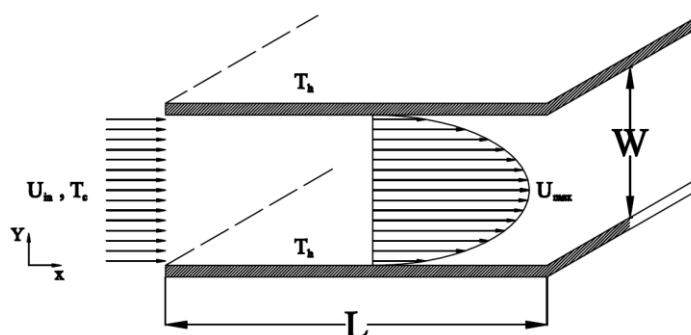
همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، قصد داریم تا انتقال حرارت جریان آرام نانو سیال آب-مس را در یک کانال دو بُعدی و تحت شرایط مختلف مرزی مانند شار دیواره ثابت و دمای دیواره ثابت مورد بررسی قرار دهیم. چنین هندسه و شرایط مرزی کاربرد بسیار

زیادی در جریان‌های میکروکانال دارد. جائیکه نتایج تجربی و تئوری کمی درخصوص آنها مشاهده می‌شود. همچنین این هندسه کاربرد وسیعی در زمینه مبدل‌های حرارتی و افزایش میزان انتقال حرارت آنها دارد.

نانوسیال را به عنوان یک سیال نیوتنی در نظر می‌گیریم. برای محاسبه k_{eff} مدل "پاتل" به کار گرفته شده و ثابت C که در مورد آن بحث شد، با استفاده از نتایج تجربی "ژوان" بدست آمده است [۵]. از آنجایی که سایر مدل‌های موجود برای محاسبه k_{eff} نمی‌توانند به تنهایی تمامی موارد کلیدی مانند سایز، شکل، حرکت براونی، خواص ترموفیزیکی و ... را در خود جای دهند، مدل به کار گرفته شده فوق بهترین انتخاب در میان مدل‌های موجود می‌باشد. هر چند که در ادامه نتایج چند مدل معروف نیز با یکدیگر مقایسه خواهند شد. ویسکوزیته نانو سیال نیز با استفاده از مدل معروف "برینکمن" محاسبه شده است.

۲-۲ هندسه مساله

هندسه مورد بحث در شکل (۱-۲) نشان داده شده است. این هندسه متشکل از دو صفحه تخت موازی به عرض بینهایت است که ایجاد یک کانال افقی مستطیلی می‌کنند. ارتفاع کانال W و طول آن L است. عرض کانال نیز در مقایسه با ارتفاع آن بسیار بزرگ است. بدین ترتیب تقریب دو بُعدی بودن جریان، مناسب می‌باشد.



شکل (۱-۲) جریان بین دو صفحه تخت موازی

در هندسه فوق تمامی ابعاد و معادلات به فرم بی بعد می‌باشند و معادلات نیز در فرم بی‌بعد خود حل می‌شوند.

ارتفاع بی‌بعد کانال $W = \frac{w}{w}$ و همیشه برابر ۱ خواهد بود. طول بی‌بعد کانال نیز $L = \frac{l}{w}$ و ۱۰۰ برابر ارتفاع بی‌بعد کانال است. سیال با سرعت u_{in} به فضای بین دو صفحه وارد می‌شود. نانوسیال مورد بررسی مخلوطی از آب و نانو ذرات مس به قطر ۱۰۰nm است. فرض می‌شود که نانوذرات شکل و اندازه یکسان دارند و نانوسیال نیز همگن است. جریان نانوسیال آرام و تراکم ناپذیر در نظر گرفته می‌شود. همچنین معادلات با این فرض حل می‌شوند که مایع و جامد در تعادل گرمایی هستند و خواص ترموفیزیکی سیال و ذرات مس نیز ثابت هستند.

۲-۳ معادلات حاکم

معادلات حاکم این مسأله پیوستگی، ممنوم و انرژی هستند که در حالت دو بُعدی، پایدار و جریان آرام حل می‌شوند. معادلات حاکم به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1-2)$$

$$\rho_{nf} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right] \quad (2-2)$$

$$\rho_{nf} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right] \quad (3-2)$$

$$(\rho C_p)_{nf} \text{div}(T\vec{V}) = \text{div}(k_{nf} \text{grad}(T)) \quad (4-2)$$

برای سیال نیوتنی تراکم ناپذیر روابط میان تنش برشی و نرخ برش در حالت دو بُعدی و در مختصات کارتزین [۴۵]:

$$\tau_{xx} = -2\mu_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (5-2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6-2)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu_{nf} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (7-2)$$

با قرار دادن روابط بالا در معادلات (۲-۲) و (۳-۲) داریم:

$$\rho_{nf} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-2\mu_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\mu_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \quad (8-2)$$

$$\rho_{nf} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu_{nf} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-2\mu_{nf} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \quad (9-2)$$

پس از ساده سازی دو معادله فوق و فرض $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ از معادله پیوستگی:

$$\rho_{nf} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{nf} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (10-2)$$

$$\rho_{nf} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{nf} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (11-2)$$

۱-۳-۲ پارامترها و معادلات بی‌بعد

معادلات حاکم توسط پارامترهای بی‌بعد، بی‌بعد شده و سپس گسسته سازی خواهند شد.

پارامترهای بی‌بعد مورد استفاده بدین صورت در نظر گرفته شده‌اند:

$$x^* = \frac{x}{w} , \quad y^* = \frac{y}{w} , \quad u^* = \frac{u}{u_{in}} , \quad v^* = \frac{v}{u_{in}} , \quad p^* = \frac{p}{\rho_{nf} \cdot u_{in}^2} \quad (12-2)$$

برای حالت دمای ثابت دیواره:

$$T^* = \frac{T - T_c}{T_h - T_c} \quad (13-2)$$

و برای حالت شار ثابت دیواره:

$$T^* = \frac{T - T_c}{\frac{wq''}{k_f}} \quad (14-2)$$

در پارامترهای بالا، T_c دمای سیال ورودی به کانال، T_h دمای هر یک از صفحات و q'' شار ثابت در دیواره‌ها می‌باشد. با قرار دادن معادلات (۲-۱۲) تا (۲-۱۳) در معادلات حاکم بر جریان سیال داریم:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (15-2)$$

$$\rho_{nf} \frac{u_{in}^2}{w} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\rho_{nf} u_{in}^{*2}}{w} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu_{nf} \frac{u_{in}}{w^2} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] \quad (16-2)$$

$$\rho_{nf} \frac{u_{in}^2}{w} \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\rho_{nf} u_{in}^{*2}}{w} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu_{nf} \frac{u_{in}}{w^2} \left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right] \quad (17-2)$$

$$(\rho C_p)_{nf} \frac{u_{in}(T_h - T_c)}{w} \left(u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) = \text{div} \left[\frac{k_{nf}(T_h - T_c)}{w^2} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) \right] \quad (18-2)$$

$$(\rho C_p)_{nf} \frac{u_{in} q''}{K_f} \left(u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) = \text{div} \left[\frac{k_{nf} q''}{k_f} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) \right] \quad (19-2)$$

اعداد بی‌بعد رینولدز و پرانتل برای جریان سیال با درصد حجمی 0٪:

$$Re = \frac{\rho_f u_{in} w}{\mu_f}, \quad Pr = \frac{v_f}{\alpha_f}, \quad a_f = \frac{k_f}{(\rho C_p)_f} \quad (20-2)$$

هستند. با استفاده از این اعداد و معادلات (۲-۱۵) تا (۲-۱۹) و این فرض که برخی از خواص نانوسیال

مانند $(\rho C_p)_{nf}$ و μ_{nf} نسبت به دما یا مکان ثابت هستند و k_{nf} طبق رابطه معرفی شده در

بخش (۲-۶) با دما متغیر است، فرم نهایی معادلات به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (21-2)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] \quad (22-2)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right] \quad (23-2)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \text{div} \left[\frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho C_p)_f}{(\rho C_p)_{nf}} \frac{1}{Pr \cdot Re} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \right] \quad (24-2)$$

۴-۲ شرایط مرزی

با توجه به هندسه مسأله و موارد مطرح شده در قسمت‌های قبل، بررسی شرایط مرزی مسأله را در دو بخش بررسی می‌کنیم. ابتدا این شرایط را به صورت تحلیلی بررسی کرده و سپس نحوه اعمال آنها را در معادلات گسسته شده به روش حجم محدود مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴-۲-۱ شرط ورود جریان

سیال با دمای T_c و با سرعت در راستای جریان u_{in} و عمود بر راستای جریان، $v = 0$ وارد

کانال می‌شود.

$$\text{ورود} \begin{cases} u = u_{in} \\ v = 0 \\ T = T_{in} \end{cases} \xrightarrow{x=0, 0 \leq y \leq w} \begin{cases} u^* = \frac{u_{in}}{u_{in}} = 1 \\ v^* = \frac{v}{u_{in}} = 0 \\ T^* = \frac{T - T_c}{T_h - T_c} = 0 \\ T^* = \frac{T - T_c}{\frac{wq''}{k_f}} = 0 \end{cases} \quad (25-2)$$

۲-۴-۲ شرط خروج جریان

طول بی بعد کانال ۱۰۰ برابر ارتفاع بی بعد کانال در نظر گرفته شده است. بدین معنی که از توسعه یافتگی جریان اطمینان حاصل شده است. در حالت توسعه یافته و برای جریان کانال $v = 0$ و تغییرات سرعت نیز برابر صفر خواهند بود. بنابراین:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \xrightarrow{x^*=100, 0 \leq y^* \leq 1} \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = 0 \quad (26-2)$$

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \xrightarrow{x^*=100, 0 \leq y^* \leq 1} \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} = 0 \quad (27-2)$$

در خصوص شرایط مرزی خروجی جریان برای معادله انرژی به گونه دیگری رفتار خواهد شد. دو روش برای این کار وجود دارد. ابتدا روشی را که در مقالات علمی ارائه شده با هندسه های مشابه وجود دارند بررسی کرده و سپس به روش دوم که از موازنه انرژی بدست آورده ایم، می پردازیم. در روش اول فرض بر این است که جریان در طول کانال از لحاظ حرارتی توسعه یافته باشد. پس اگر دمای ثابت در دیواره داشته باشیم، در نهایت دمای سیال با دمای دیواره یکسان خواهد شد [۴۶]:

$$T_{exit} = T_{wall}$$

و اگر شار ثابت حرارتی در دیوار برقرار باشد، در ناحیه توسعه یافته [۴۶]:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{dT_h}{dx} = cte$$

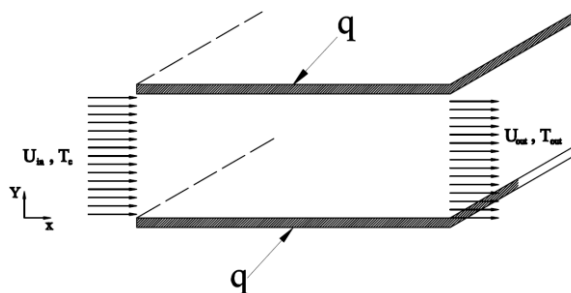
در روش دوم انرژی را که وارد کانال می شود، با انرژی که از کانال خارج می شود، موازنه می کنیم. اختلاف انرژی های ورودی و خروجی، مقداری است که باید به انرژی خروجی افزوده شود تا موازنه برقرار گردد. کل انرژی که از کانال خارج می شود برابر است با:

$$q_{out} = \dot{m}C_p T_{out} = (\rho C_p)_{nf} w u_{out} T_{out}$$

با توجه به اینکه سرعت در خروجی از معادله ممنتوم بدست آمده است و اطلاعات مربوط به انرژیهای ورودی از شرایط مرزی در دست است، می توان اختلاف انرژی را در خروجی بدست آورد.

$$\Delta q = q_{out} - q_{in} = (\rho C_p)_{nf} w u_{out} T_{inc}$$

در رابطه بالا T_{inc} دمای تصحیحی ایست که به دمای گره ها در خروجی اضافه می شود تا موازنه را برقرار کند. محاسبات مربوط به هریک از شرایط را در ادامه بررسی می کنیم. انرژی های ورودی و خروجی را در شکل می بینید.



شکل (۲-۲) انرژی های وارد شده به سیستم

با استفاده از روش فوق شرط خروج جریان برای هریک از حالات شار حرارتی ثابت روی دیواره و دمای ثابت دیواره به ترتیب به صورت زیر بدست می آیند. اثبات روابط زیر در پیوست (الف) ارائه شده است.

شار حرارتی ثابت :

$$T_{inc}^* = \frac{\sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1,j)(\theta + T^*) \Delta y^*(j) - 2 \frac{(\rho C_p)_f}{(\rho C_p)_{nf}} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} l^*}{\sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1,j) \Delta y^*(j)} - \theta \quad (29-2)$$

دمای ثابت دیواره:

$$\Rightarrow T_{inc}^* =$$

$$\frac{\sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1,j)(T^* + \theta) \Delta y^*(j) + 2 \sum_{i=1}^{ni} \left(\frac{K_{nf}(l,2)}{K_f} \frac{(\rho C_p)_f}{(\rho C_p)_{nf}} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \Delta x_i^* \frac{dT^*}{dy^*} \Big|_{wall} \right)}{\sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1,j) \Delta y^*(j)} - \theta$$

$$(30-2)$$

۳-۴-۲ شرط مرزی عدم لغزش روی دیواره

بر روی دیواره‌های کانال لغزش نداریم و سرعت نانوسیال به صفر می‌رسد. بنابراین در بازه $0 \leq$

$$x \leq l, y = 0 \text{ و } y = w \text{ سرعت‌های } u \text{ و } v \text{ صفر هستند، } u = v = 0.$$

پس برای $0 \leq x^* \leq 100$ و $y^* = 0$ و $y^* = 1$ نیز داریم:

$$u^* = v^* = 0$$

۴-۴-۲ شرایط مرزی گرمایی روی دیواره‌ها

اگر شار حرارتی ثابت و برابر روی دیواره، q'' ، وجود داشته باشد، با استفاده از پارامتر بی‌بعد

معرفی شده برای دما در حالت شار ثابت حرارتی :

$$T^* = \frac{T - T_c}{\frac{wq''}{k_f}} \Rightarrow T = \frac{T^*wq''}{k_f} + T_c \quad (31-2)$$

از معادله (۳۱-۲) نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0, w} &= \frac{wq''}{k_f} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y} \right|_{y=0, w} = \frac{wq''}{wk_f} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0, 1} \\ &= \frac{q''}{k_f} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0, 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0, w} = \frac{q''}{k_f} \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0, 1}$$

اگر طرفین رابطه بالا را در $-k_{nf}$ ضرب کنیم، سمت چپ رابطه بالا برابر با شار حرارتی q'' خواهد

بود که با ساده سازی به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0, 1} = -\frac{k_f}{k_{nf}} \quad (32-2)$$

شرط مرزی بالا با این فرض محاسبه شده است که سیال با عبور از کانال گرم شود.

اگر روی دیواره‌ها شرط مرزی دمای ثابت و برابر T_h حاکم باشد، با توجه به پارامتر بی‌بعد تعریف

شده برای حالت دمای ثابت دیواره، خواهیم داشت:

$$T_w = T_H \xrightarrow{0 \leq x^* \leq 100, y^* = 0, y^* = 1} T^* = \frac{T_H - T_c}{T_H - T_c} = 1 \quad (33-2)$$

۵-۲ ویسکوزیته دینامیکی مؤثر نانوسیال

نانوسیال به صورت تک فازی و دو فازی قابل بررسی می‌باشد. اما بررسی خواص نانوسیال به صورت دو فازی بسیار مشکل و پیچیده خواهد بود. اغلب بسیار مفید است اگر مخلوط را به عنوان یک سیستم تک فازی در نظر بگیریم. با این تفاوت که قانون ویسکوزیته نیوتن در دو بخش تعمیم پیدا می‌کند، نخست ویسکوزیته مؤثر μ_{eff} جایگزین ویسکوزیته سیال پایه می‌شود و دیگر این که مؤلفه‌های سرعت و تنش به عنوان کمیت‌های قابل قیاسی تعریف می‌شوند که بر روی حجمی که در قیاس با فاصله ذرات نانو، بزرگ و در مقیاس با ابعاد کوچک است، متوسط گیری می‌شود.

اولین تئوری مهم در خصوص ویسکوزیته محلول با ذرات معلق کروی، توسط انیشتین ارائه شد [۴۷]. او محلولی را با استفاده از کره‌های صلب در نظر گرفت، به طوری که جابجایی یک کره، جریان سیال را در نزدیکی هر یک از کره‌ها تحت تأثیر قرار ندهد. سپس مناسب این بود که حرکت سیال را اطراف یک کره به تنهایی تحلیل شود. معادله انیشتین:

$$\mu_{eff} = \mu_{bf}(1 + 2.5\varphi) \quad (34-2)$$

است. اما این فرمول فقط برای درصد‌های حجمی پایین ($\varphi \cong 0.02$) قابل استفاده بود. برای محلول‌هایی که شکل ظاهری ذرات معلق آن‌ها کروی نیست، ضریب 2.5 با اعداد مناسب دیگر جایگزین می‌شوند. "برینکمن" رابطه انیشتین را برای درصد‌های حجمی بالاتر به صورت زیر تعمیم داد [۴۷]:

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_{bf}}{(1-\varphi)^{2.5}} \quad (35-2)$$

"فرانکل" و "آکریوس" رابطه زیر را در سال ۱۹۶۷ پیشنهاد دادند [۴۷]:

$$\mu_{eff} = \mu_{bf} \frac{9}{8} \left[\frac{\left(\frac{\varphi}{\varphi_m}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_m}\right)^{\frac{1}{3}}} \right]$$

"بچلر" در سال ۱۹۷۷ اثر حرکت براونی یک ذره صلب و کروی را نیز در نظر گرفت و فرمول زیر را ارائه داد [۴۷]:

$$\mu_{eff} = \mu_{bf}(1 + 2.5\varphi + 6.5\varphi^2)$$

"گراهام" فرمول "فرانکل" را در سال ۱۹۸۱ تعمیم داد [۴۷]:

$$\frac{\mu_{eff}}{\mu_{bf}} = 1 + 2.5\varphi + 4.5 \left[\frac{1}{\left(\frac{h}{d_p}\right) \left(2 + \frac{h}{d_p}\right) \left(1 + \frac{h}{d_p}\right)^2} \right]$$

با توجه به روابط ارائه شده در بالا، ویسکوزیته مؤثر نانوسیال به ویسکوزیته سیال پایه و به نسبت حجمی ترکیب وابسته است. در عوض، مطالعات مبتنی بر آزمایشات نشان می‌دهند که دما، قطر ذره و نوع نانو ذره نیز می‌توانند روی ویسکوزیته نانوسیال مؤثر باشند. در این تحقیق برای ویسکوزیته مؤثر نانوسیال از رابطه "برینکمن" استفاده شده است. ویسکوزیته مؤثر نانوسیال در حل معادلات حاکم حرکت و نیز محاسبه تنش برشی قابل استفاده خواهد بود.

۲-۶ رسانایی گرمایی نانوسیال

همانطور که در فصلهای پیشین نیز اشاره شد، برای رسانایی گرمایی نانوسیال روش‌های گوناگونی توسط محققین مختلف تاکنون پیشنهاد شده است. اما این فرمول‌ها و روش‌ها از لحاظ دقت با یکدیگر تفاوت دارند. یکی از روش‌هایی که رسانایی گرمایی نانوسیال آب - مس را با دقت بسیار خوبی محاسبه می‌کند، روشی است که توسط "پاتل" و همکارانش به دست آمده است [۴۴]. این روش بر مبنای بهبود بخشیدن به مدل "همانث" به دست آمده است. فرض می‌کنیم در انتقال حرارت نانوسیال، سه مؤلفه

مهم داشته باشیم. رسانایی هدایت در داخل مایع، رسانایی هدایت داخل نانوذرات جامد و انتقال حرارت به روش همرفت که ناشی از حرکت براونی ذرات است. هم چنین نانوسیال کاملاً همگن و ذرات سیال و جامد کاملاً پیوسته هستند. انتقال حرارت کل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$q_{total} = q_f + q_p + a_{adv} \quad (36-2)$$

$$= \left(-k_f A_f \left(\frac{dT}{dx} \right)_m \right) + \left(-k_p A_p \left(\frac{dT}{dx} \right)_p \right) + \left(\frac{1}{3} h A_p \Delta T \right)$$

در اینجا، A ، k ، T ، $\frac{dT}{dx}$ به ترتیب نشان دهنده سطح عبور کننده حرارت، رسانایی گرمایی، دما و گرادیان دما هستند. h نیز ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی است.

فرض می‌کنیم ذرات سیال و نانو ذرات جامد در تعادل گرمایی باشند و گرادیان دما در ذرات جامد و درون سیال یکسان باشد. تنها یک جهت برای انتقال حرارت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین حرکت ذره در یک جهت می‌تواند به افزایش نرخ انتقال حرارت کمک کند. توجه داشته باشید که در معادله بالا h بر عدد ۳ تقسیم شده است. سرعت براونی ذره که باعث ایجاد جابجایی می‌شود، از معادله ضریب پخش استوکس-انیشتین به دست آمده است. به طوری که قطر d_p ذرات به عنوان طول مشخصه در نظر گرفته شده است. بنابراین اختلاف دما موثر در انتقال حرارت جابه‌جایی می‌تواند به عنوان حاصلضرب گرادیان دما در مایع و d_p در نظر گرفته شود. بنابراین نرخ افزایش انتقال حرارت در نانوسیال به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{q}{\left(-k_f A_f \left(\frac{dT}{dx} \right) \right)} = 1 + \frac{k_p A_p}{k_f A_f} + \frac{1}{3} h d_p \frac{A_p}{k_m A_m} \quad (37-2)$$

و عدد ناسلت برای جریان عبوری از روی کره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Nu = 2 + 0.56Pe + o(Pe^2) \quad (38-2)$$

که عدد پلکه (Pe) با رابطه:

$$Pe = \frac{u_p d_p}{a_p}$$

تعریف می‌شود. a_p ضریب پخش گرمایی سیال، u_p سرعت براونی نانوذرات است و با فرمول زیر به دست می‌آید:

$$u_p = \frac{2k_B T}{\pi \mu_f d_p^2} \quad (39-2)$$

در رابطه بالا، k_B ثابت بولتزمن و برابر $\frac{j}{k} 1.3807 \times 10^{-23}$ است.

سایز ذرات از مرتبه 10^{-8} و 10^{-7} است و بنابراین سرعت براونی بسیار کوچک می‌باشد. در نتیجه Pe^2 نسبت به Pe از مرتبه بسیار کمتری برخوردار بوده و قابل صرفنظر کردن است. از آنجایی که هدایت داخل سیال و در ذرات به طور جداگانه توسط q_p و q_f محاسبه شده اند، فقط مؤلفه همرفت برای ما قابل ملاحظه خواهد بود. پس معادله (۲-۳۸) به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$Nu = 0.5Pe$$

حال اگر رسانایی گرمایی سیال را با رسانایی گرمایی جامد ضریب c' جایگزین کنیم،

خواهیم داشت:

$$Nu = \frac{hd_p}{c'k_p} \quad (41-2)$$

از مقایسه روابط (۲-۴۰) و (۲-۴۱) داریم:

$$hd_p = c'k_p \frac{Pe}{2} \quad (42-2)$$

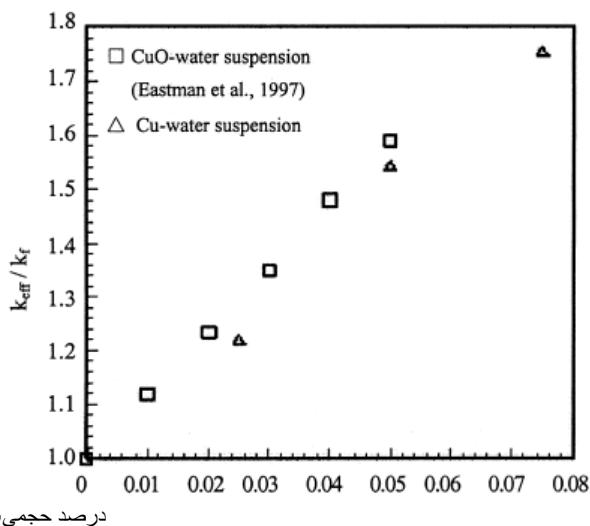
با قرار دادن رابطه (۲-۴۲) در معادله (۲-۳۷):

$$\begin{aligned} \frac{q}{(-k_f A_f \frac{dT}{dx})} &= 1 + \frac{k_p A_p}{k_f A_f} + ck_p Pe \frac{A_p}{k_f A_f} \\ \Rightarrow \frac{k_{eff}}{k_f} &= 1 + \frac{k_p A_p}{k_f A_f} + ck_p Pe \frac{A_p}{k_f A_f} \end{aligned} \quad (43-2)$$

که در آن:

$$\frac{A_p}{A_f} = \frac{d_f}{d_p} \frac{\phi}{1 - \phi}$$

و d_p قطر ذره جامد، d_f قطر ذرات مایع و ϕ نسبت حجمی ترکیب است. ثابت C توسط آزمایشات تجربی قابل محاسبه خواهد بود. این آزمایشات برای ترکیبات نانوسیال آب-مس در سال ۱۹۹۷ توسط "ژوان" انجام گرفته است. نتایج را در شکل (۲-۳) می‌بینید. این آزمایشات برای نانوذرات مس به قطر ۱۰۰ نانومتر انجام شده است [۴۵]. با توجه به نتایج تجربی موجود و معادله (۲-۴۳) به ازای مقادیر معلوم، ضریب "c" در حدود 3.7×10^4 به دست می‌آید.



شکل (۲-۳) نتایج آزمایشات انجام شده توسط "ژوان" برای نانوسیال آب-مس

۲-۷ محاسبه عدد ناسلت بی‌بعد روی صفحه

طبق تعریف عدد ناسلت محلی برای جریان کانال [۴۶]:

$$Nu_x = \frac{h_x D_h}{k_f} \quad (44-2)$$

که h_x ضریب انتقال حرارت جابه جایی محلی نانوسیال است و در حالتی که گرمایش داشته باشیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q'' = h_x (T_s - T_m) \quad (45-2)$$

T_s دمای سطح و T_m دمای میانگین مقطع است و با فرمول زیر که از روش موازنه انرژی بدست می آید:

$$T_m = \frac{1}{A_c u_{in}} \int_{A_c} u T dA_c$$

که A_c سطح مقطع جریان عبوری است. همچنین D_h ، قطر هیدرولیکی است که برای جریان بین دو صفحه تخت موازی، $2w$ است.

۲-۷-۱ حالت شار ثابت دیواره

در قسمت قبل دمای بی‌بعد برای حالت شار حرارتی ثابت روی دیواره به شکل زیر تعریف شد:

$$T^* = \frac{T - T_c}{\frac{wq''}{k_f}} \Big|_{wall} = \frac{T_s - T_c}{\frac{wq''}{k_f}}$$

پس

$$q'' = \frac{T_s - T_c}{T^* w} k_f$$

اگر مقدار بالا را در رابطه (۲-۴۵) قرار دهیم:

$$h_x = 2 \left(\frac{k_f}{T^* w} \right) \left(\frac{T_s - T_c}{T_s - T_m} \right) \quad (46-2)$$

با قرار دادن رابطه (۲-۴۶) در (۲-۴۴) داریم:

$$Nu_x = 2 \left(\frac{T_s - T_c}{T_s - T_m} \right) \frac{1}{T^* \Big|_{wall}} \quad (47-2)$$

۲-۷-۲ حالت دمای ثابت دیواره

در بخش‌های قبل دمای بی‌بعد را به شکل زیر تعریف کردیم:

$$T^* = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$$

از طرفین رابطه بالا نسبت به y مشتق میگیریم:

$$\frac{dT}{dy} = (T_h - T_c) \frac{dT^*}{dy} = \frac{(T_h - T_c)}{w} \frac{dT^*}{dy^*}$$

بنابراین:

$$q'' = -k_{nf} \frac{dT}{dy} = -k_{nf} \frac{(T_h - T_c)}{w} \frac{dT^*}{dy^*}$$

حال با استفاده از روابط (۲-۴۴) و (۲-۴۵) و پارامترهای بی‌بعد برای دما داریم:

$$Nu_x = -2 \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(T_h - T_c)}{(T_h - T_m)} \frac{dT^*}{dy^*} \Big|_{y^* = 0, w} \quad (48-2)$$

دقت شود که در محاسبات بالا T_s دمای صفحه بود که با مقدار واقعی خود، یعنی T_h جایگزین شده است. عدد ناسلت متوسط نیز از انتگرال گیری روی کل بازه تعریف مساله بدست می آید:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_x dx \quad (49-2)$$

۸-۲ محاسبه تنش برشی بی‌بعد روی سطح

برای محاسبه تنش برشی نانوسیال روی سطح، مقادیر تنش برشی را که در رابطه (۲-۵) تا (۲-۷) ارائه شد، در معادلات حرکت سیال (۲-۲) و (۲-۴) قرار می دهیم. چون هدف به دست آوردن تنش برشی روی سطح است، تنها معادله در راستای X ممنوم مورد استفاده خواهد بود.

$$\rho_{nf} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-2\mu_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\mu_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \quad (50-2)$$

پس از بی‌بعد کردن معادله بالا با استفاده از پارامترهای بی‌بعد و ساده سازی و این فرض که خواص سیال بدون تغییر و ثابت هستند، داریم:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} =$$

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} - \frac{1}{Re} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(-2 \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\underbrace{-\frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) - \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)}_{\tau_{xwall}} \right) \right]$$

مؤلفه‌ای که در سمت راست معادله بالا قرار دارد، معادل با همان تنش برشی است که روی دیواره عمل می‌کند:

$$\tau_{xwall} = \frac{\mu_{nf}}{\mu_f} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \Big|_{y^* = 0,1} \quad (51-2)$$

در معادله تنش برشی بالا، μ_{nf} همان μ_{eff} نانوسیال است که با روش‌های گوناگونی که قبلاً توضیح داده شد، به دست می‌آید. تنش برشی متوسط نیز از انتگرال گیری روی کل بازه مساله بدست می‌آید:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{L} \int_0^L \tau_{xwall} dx \quad (52-2)$$

۹-۲ سایر خواص ترموفیزیکی نانوسیال

ضریب پخش حرارتی نانوسیال و چگالی موثر آن توسط رابطه ای زیر محاسبه می‌شوند [۶]:

$$(53-2)$$

$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}}$$

$$(54-2)$$

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_p$$

ظرفیت حرارتی نانوسیال نیز از رابطه ارائه شده توسط "ژوان" محاسبه می‌گردد [۶].

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \phi)(\rho C_p)_{nf} + \phi(\rho C_p)_p \quad (55-2)$$



فصل سوم

گسسته سازی معادلات حاکم به روش حجم محدود

مقدمه :

حل عددی انتقال حرارت ، جریان سیال و سایر فرآیندهای مربوط به آنها وقتی می تواند انجام گیرد که قوانین حاکم بر این فرآیندها به زبان ریاضی ، معمولاً بر حسب معادلات دیفرانسیل ، بیان شده باشند . هدف ما در این فصل آشنایی با شکل و محتوای معادلات به کار رفته در حل مساله و همچنین سایر معادلات و روشهایی است که می توانند در حل معادلات موجود بکار روند. اما به دلیل دقت پایین تر و گاه به علت کاهش سرعت همگرایی مورد استفاده قرار نگرفته اند. نشان داده خواهد شد که تمام معادلات مربوط به فرآیندهای مورد نظر دارای شکل مشترک می باشند . تشخیص این موضوع اولین گام در جهت ساختن یک روش حل کلی می باشد . عموم مطالبی که در این فصل در مورد آنها بحث می شود، از مراجع [۳۹،۴۰] استخراج شده اند.

۳-۱ معادلات دیفرانسیل حاکم

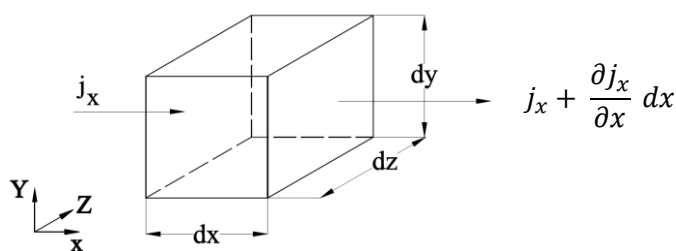
معادلات دیفرانسیلی که با آن مواجه هستیم بیان کننده یک اصل بقاء معین می باشند. هر معادله یک کمیت فیزیکی معین را به عنوان متغیر وابسته خود به کار برده و یک موازنه بین عوامل مختلف اثر کننده بر متغیر مذکور را بیان می کند.

فرض کنید J دلالت بر شار کند که بر یک متغیر مانند ϕ اثر می گذارد. حجم کنترلی را در نظر بگیرید که دارای ابعاد dx, dy, dz باشد. شار J_x از یک وجه با مساحت $dydz$ وارد می شود، در حالی که شار ترک کننده از وجه مقابل به صورت $J_x + (\partial J_x / \partial x) dx$ خارج می شود. بنابراین، جریان خالص در امتداد x برابر است با: $(\partial J_x / \partial x) dx dy dz$.

با در نظر گرفتن امتدادهای z, y به همان طریق و توجه به این که $dx dy dz$ حجم المان در نظر گرفته شده می باشد، داریم:

$$\text{جریان خالص برای واحد حجم} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \text{div} J \quad (1-3)$$

این تعبیر J بسیار مفید خواهد بود زیرا، همان گونه که خواهیم دید روش عددی ما توسط برقراری موازنه روی یک حجم کنترل ساخته می شود.



یک معادله دیفرانسیل مجموعه ای است از جملاتی که هر کدام نشان دهنده تأثیری خاص بر واحد حجم می باشد و مجموع آنها دلالت بر موازنه یا بقاء یک کمیت می کنند. حال ما به عنوان مثال بعضی از معادلات دیفرانسیل را مورد بررسی قرار می دهیم و بعد شکل کلی آن را بیان میکنیم.

۳-۱-۱ معادله بقای جرم

فرض کنید m_1 دلالت بر کسر جرمی یک گونه شیمیایی کند . در حضور میدان سرعت u ، بقاء m_1 به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_1) + \text{div}(\rho u m_1 + J_1) = R_1 \quad (2-3)$$

در اینجا دلالت بر نرخ تغییر در واحد زمان دارد . کمیت $\rho u m_1$ شار جابه جایی گونه است یعنی شاری که توسط میدان جریان عمومی ρu حمل می شود . علامت J_1 نماینده شار پخش است ، که معمولاً به وسیله گرادیان های m_1 حاصل می شود . دیورژانس دو شار (جابه جایی و پخش) جمله دوم معادله دیفرانسیل را تشکیل می دهد . کمیت R_1 در طرف راست نشان دهنده نرخ تولید بر واحد حجم است .

اگر شار پخش J_1 با استفاده از قانون فیک برای پخش بیان شود ، می توان نوشت:

$$J_1 = -\Gamma_1 \text{grad} m_1 \quad (3-3)$$

که در آن Γ_1 ضریب پخش است . با جانشین کردن از معادله (۲-۳) در (۳-۳) خواهیم داشت :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_1) + \text{div}(\rho u m_1) = \text{div}(\Gamma_1 \text{grad} m_1) + R_1 \quad (4-3)$$

۳-۱-۲ معادله مقدار حرکت

معادله دیفرانسیل حاکم بر بقای مقدار حرکت در یک امتداد معلوم و برای یک سیال نیوتونی می تواند مشابه معادلات قبلی نوشته شود، اما با پیچیدگی بیشتر . زیرا اولاً تنش های برشی و تنش های عمودی هر دو باید مورد توجه قرار گیرند ، ثانیاً قانون گرانروی استوکس پیچیده تر از قانون فیک یا قانون فوریه است . اگر u مؤلفه سرعت در امتداد x باشد ، معادله مقدار حرکت به صورت زیر نوشته می شود :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \text{div}(\rho u v) = \text{div}(\mu \text{grad} u) - \frac{\partial p}{\partial x} + B_x + V_x \quad (5-3)$$

که در رابطه فوق μ ، لزجت دینامیکی ، P ، فشار ، B_x نشان دهنده مؤلفه x نیروی جرمی بر واحد حجم و V_x نمایانگر جمله های ناشی از لزجت می باشد . این مولفه ها علاوه بر آنهایی است که توسط $div(\mu grad u)$ بیان شدند .

۳-۱-۳ معادله انرژی

معادله انرژی در کلی ترین شکلش شامل مولفه های زیادی است . برای یک جریان پایا با سرعت کم که اتلافات ناشی از حرکت در آن ناچیز باشد ، معادله انرژی می تواند به صورت زیر نوشته شود :

$$div(\rho h) = div(k grad T) + S_h \quad (۳-۶)$$

ه در آن h ، آنتالپی مخصوص ، k ، ضریب هدایت حرارت ، T ، نشان دهنده دما ، و S_h نمایانگر آهنگ حجمی تولید حرارت می باشد . جمله $div(k grad T)$ نیز نشان دهنده انتقال حرارت از طریق هدایت در داخل سیال است .

برای گازهای ایده آل و نیز برای جامدات و مایعات ، می توان نوشت :

$$c grad T = grad h \quad (۳-۷)$$

که در آن c گرمای ویژه در فشار ثابت است . با جاگذاری این ، معادله انرژی داریم :

$$div(\rho h) = div\left(\frac{k}{c} grad h\right) + S_h \quad (۳-۸)$$

اگر c ثابت باشد ، رابطه h بر حسب T به صورت زیر ساده می شود :

$$h = cT \quad (۳-۹)$$

$$div(\rho h) = div\left(\frac{k}{c} grad T\right) + \frac{S_h}{c} \quad (۳-۱۰)$$

بدین طریق آنتالپی و دما می توانند به عنوان متغیر وابسته انتخاب شوند . وقتی سرعت u صفر باشد حالت هدایت حرارت پایا به دست می آید .

$$div(k grad T) + S_h = 0 \quad (۳-۱۱)$$

۲-۳ معادله دیفرانسیل کلی

از بررسی مختصر بعضی معادلات دیفرانسیل در بخشهای قبل به نظر می رسد تمام متغیرهای وابسته مورد نظر اینجا از یک اصل بقاء کلی تبعیت می کنند. اگر متغیر وابسته به وسیله ϕ نشان داده شود، معادله دیفرانسیل کلی چنین می شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho u\phi) = \text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi) + S \quad (۱۲-۳)$$

که در آن Γ ضریب پخش و S جمله چشمه می باشد.

چهارجمله موجود در معادله دیفرانسیل عمومی عبارتند از جمله وابسته به زمان، جمله جابه جایی، جمله پخش و جمله چشمه. متغیر وابسته ϕ می تواند به جای انواع مختلفی از کمیت ها مانند کسر جرمی گونه شیمیایی، آنتالپی یا دما و مؤلفه سرعت، ظاهر شود. هر بار که متغیر ϕ به عنوان یکی از این کمیت ها استفاده شود، باید معنایی مناسب با کمیت مذکور به ضریب پخش Γ و جمله چشمه S داده شود.

تمام شارهای پخش، از گرادیان متغیر مربوطه تبعیت نمی کنند. به هر حال، به کار بردن $\text{div}(\Gamma \text{ grad } \phi)$ به عنوان جمله پخش موجب محدود شدن معادله عمومی ϕ به فرآیندهای پخش ایجاد شده توسط گرادیان متغیر، نمی شود. هر جمله ای که مناسب قرار گرفتن در جمله پخش نباشد همواره می تواند به عنوان یک قسمت از جمله چشمه بیان شود (در صورت تمایل می توانیم ضریب پخش Γ را مساوی صفر قرار دهیم). مانند شرایط مرزی مساله که در مؤلفه های چشمه S ظاهر می شوند.

۳-۳ مفهوم انفصال

جواب عددی برای یک معادله دیفرانسیل عبارت است از یک سری اعداد که با استفاده از آنها، توزیع متغیر وابسته ϕ بدست می آید. دامنه پیوسته مساله به نقاطی با فواصل معین (گره ها) یا المان هایی با حجم معین تقسیم میگردد. با تمرکز روی مقادیر موجود در گره ها، اطلاعات پیوسته ای که

در حل دقیق معادله دیفرانسیل وجود دارد، با مقادیر جدا از هم جایگزین شده است. بنابراین توزیع ϕ را ناپیوسته کرده ایم و مناسب است که این دسته از روش های عددی به عنوان روش های انفصال یا گسسته سازی نامیده شوند.

از این پس معادلات جبری شامل مقادیر مجهول ϕ در گره های انتخابی را که از معادلات دیفرانسیل حاکم بر ϕ به دست می آیند، معادلات انفصال می نامیم. برای به دست آوردن این معادلات، بعضی فرض ها در مورد این که ϕ چگونه بین گره ها تغییر می کند، لازم است. اگر چه « پروفیل » ϕ می تواند طوری انتخاب شود که برای همه حوزه محاسباتی تنها یک عبارت جبری کافی باشد، اما اغلب علمی تر است که از پروفیل های قطعه به قطعه استفاده شود، به طوری که هر قطعه تغییر ϕ را روی فقط منطقه کوچکی بر حسب مقادیر ϕ در گره های اطراف آن منطقه تشریح کند. لذا معمولاً میدان محاسباتی را به تعدادی میدان های کوچک یا اجزاء تقسیم می کنند به طوری که بتوان برای هر میدان کوچک یک پروفیل جداگانه فرض کرد. این نوع انفصال، امکان جایگزین کردن معادلات دیفرانسیل را با معادلات ساده جبری، که تقریباً به راحتی حل می شوند، فراهم می کند.

۳-۳-۱ ساختمان معادله انفصال

یک معادله انفصال عبارت است از یک رابطه جبری که مقادیر ϕ مربوط به دسته ای از گره ها را به هم ارتباط می دهد. چون این معادله از معادله دیفرانسیل حاکم بر ϕ به دست می آید بنابراین می تواند همان اطلاعات فیزیکی را ارائه کند که معادله دیفرانسیل دارد. این که فقط تعداد کمی از گره ها در یک معادله انفصال شرکت می کنند یک نتیجه از قطعه به قطعه بودن ماهیت پروفیل های انتخابی می باشد. با معادله انفصال، مقدار ϕ یک گره فقط بر توزیع ϕ روی گره های بسیار نزدیک به آن اثر می گذارد. وقتی تعداد گره ها خیلی زیاد می شود، انتظار می رود جواب معادله انفصال به جواب دقیق معادله دیفرانسیل نزدیک شود. زیرا وقتی گره ها به هم نزدیکتر می شوند، تغییر ϕ بین گره های همسایه کوچکتر شده، و در نتیجه جزئیات پروفیل فرضی بی اهمیت می شود.

علت اختلاف در معادلات انفصال استفاده از پروفیل های فرضی مختلف و نیز تفاوت در روش های به دست آوردن آنها می باشد .

۲-۳-۳ روش های به دست آوردن معادلات انفصال

برای یک معادله دیفرانسیل معین ، معادلات انفصال لازم از طرق بسیاری می توانند به دست آیند . که در اینجا فقط به ذکر نام و توضیحی اجمالی درباره آنها بسنده می کنیم .

۱-۲-۳-۳ فرمول بندی با استفاده از سری تیلور

روش معمول برای به دست آوردن معادلات تفاضل محدود عبارت است از نزدیک شدن به مشتقات موجود در معادله دیفرانسیل از طریق یک سری تیلور برش داده شده .

$$\phi_1 = \phi_2 - \Delta x \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)_2 - \dots \quad (13-3)$$

$$\phi_3 = \phi_2 - \Delta x \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)_2 + \dots \quad (14-3)$$

با جمع سوم به بعد و ساده سازی معادله خواهیم داشت:

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_2 = \frac{\phi_3 - \phi_1}{2\Delta x} \quad (15-3)$$

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)_2 = \frac{\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_2}{(\Delta x)^2} \quad (16-3)$$

۲-۲-۳-۳ روش باقیمانده های وزنی^۱

یک روش قوی برای حل معادلات دیفرانسیل روش باقیمانده های وزنی است ، که جزئیات آن توسط "فینلی سون" شرح داده شده است . اگر معادله دیفرانسیل را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$L(\phi) = 0 \quad (17-3)$$

و جواب سریبی را به صورت زیر فرض کنیم:

$$\bar{\phi} = a_0 + a_1 + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (18-3)$$

-- سریب پارامترها می باشند. اگر مقداری اولیه برای Φ در نظر می گیریم و در رابطه (۱۷-۲) قرار می دهیم:

1- Weighted Residual Method

(۱۹-۳)

نامیده می شود. هدف کوچک تر کردن مقدار باقیمانده می باشد. بنابراین پیشنهاد می شود که از روش زیر استفاده شود:

$$\int WR dx = 0 \quad (۲۰-۳)$$

که در آن W نمایانگر یک تابع وزنی بوده و انتگرال روی حوزه مورد نظر محاسبه می شود. با انتخاب یک رشته توابع وزنی، تعداد معادلاتی که جهت پارامترها لازم است تولید می شود. این معادلات جبری که حاوی پارامترها به عنوان مجهولات می باشند، حل می شوند تا جواب تقریبی برای معادله دیفرانسیل به دست آید. شاخه های مختلف این شیوه (که به نام های خاصی شناخته می شوند) از انتخاب مختلف توابع وزنی حاصل می شوند.

۳-۲-۳-۳ فرمول بندی با استفاده از حجم کنترلی

در این روش که روش اصلی و اساسی به کار گرفته شده در حل معادلات حرکت نانوسیال در این پروژه است، میدان محاسباتی به تعدادی حجم کنترلی به گونه ای تقسیم می شود که هر گره را یک حجم کنترل احاطه کرده و حجم ها کنترلی دارای حجم های مشترک با یکدیگر نباشند. معادله دیفرانسیل روی هر یک از حجم های کنترلی انتگرال گرفته می شود. پروفیل های قطعه به قطعه که تغییر ϕ را بین گره ها بیان می کنند برای محاسبه انتگرال ها استفاده می شوند.

معادله ای انفصال به دست آمده اصل بقاء ϕ را برای حجم کنترلی محدود بیان می دارد، درست همان گونه که معادله دیفرانسیل آن را برای یک حجم کنترلی بی اندازه کوچک بیان می کند. (در واقع، به دست آوردن معادله انفصال حجم کنترلی از طریق انتگرال گرفتن معادله دیفرانسیل روی یک حجم کنترلی محدود یک فرآیند نسبتاً غیرمستقیم است).

مهمترین مزیت فرمول بندی با استفاده از روش حجم کنترلی این است که بقاء کامل کمیت هایی مانند جرم، مقدار حرکت و انرژی را برای همه حجم های کنترلی و البته برای کل حوزه محاسباتی برقرار می باشد. یکی از دلایل بسیار مهم در انتخاب این روش به عنوان روشی برای شبیه سازی

حرکت نانوسیال همین مورد است. این خاصیت برای هر تعداد از گره‌ها و حتی برای وقتی که تعداد گره‌ها کم شود، صادق است. بنابراین، حتی جواب مربوط به شبکه خشن هم (تعداد گره‌ها کم) موازنه دقیقی را نشان خواهد داد.

وقتی معادلات انفصال حل می‌شوند که مقادیر متغیر وابسته در گره‌ها به دست آید. نتیجه به دو طریق مختلف می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. در روش اجزاء محدود و در بیشتر روش‌های باقیمانده وزنی، تغییر فرض شده برای ϕ که شامل مقادیر گره‌ای و توابع درون‌یابی (یا پروفیل‌های) بین گره‌هاست، به عنوان جواب تقریبی در نظر گرفته می‌شود. اما، در تفاضل محدود فقط مقادیر گره‌ای ϕ به عنوان جواب مورد ملاحظه قرار می‌گیرد. ما نیز در تقریب خود با استفاده از روش حجم کنترلی، این نظریه را می‌پذیریم و جواب را فقط در شکل مقادیر گره‌ای جستجو خواهیم کرد. فرمول‌های درون‌یابی یا پروفیل‌ها به عنوان روابط کمکی برای محاسبه انتگرال‌ها لازمند و در خلال محاسبات به کار خواهند رفت. وقتی معادلات انفصال به دست آمدند، پروفیل فرضی می‌تواند فراموش شود. این نقطه نظر آزادی کامل را در اتخاذ فرض‌های مختلف پروفیل برای انتگرال گرفتن جملات مختلف معادله‌ی دیفرانسیل، فراهم می‌کند.

برای این که بحث فوق را عملی تر نشان دهیم، در ادامه معادله انفصال را با استفاده از روش حجم کنترلی برای یک وضعیت ساده به دست می‌آوریم.

به عنوان مثال هدایت حرارت یک بعدی پایا را که معادله دیفرانسیل زیر بر آن حاکم است مورد بررسی قرار می‌دهیم:

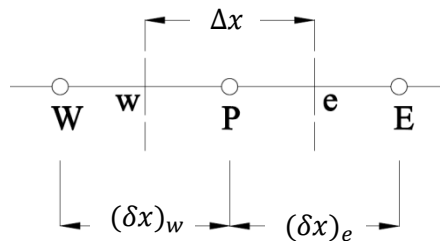
$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (21-3)$$

که در آن k ، ضریب هدایت، T ، دما و S نشان دهنده نرخ تولید حرارت بر واحد حجم است.

برای بدست آوردن معادله انفصال، گره‌های نشان داده شده در شکل (۲-۳) را به کار می‌بریم.

توجه را روی گره P ، که گره‌های E و W را به عنوان همسایه هایش داراست، متمرکز می‌کنیم. خط

چین ها وجوه حجم کنترلی را نشان می دهند ، که مکان دقیق آنها در این مرحله از بحث مهم نیست، حروف w,e دلالت بر چین وجوهی دارند .

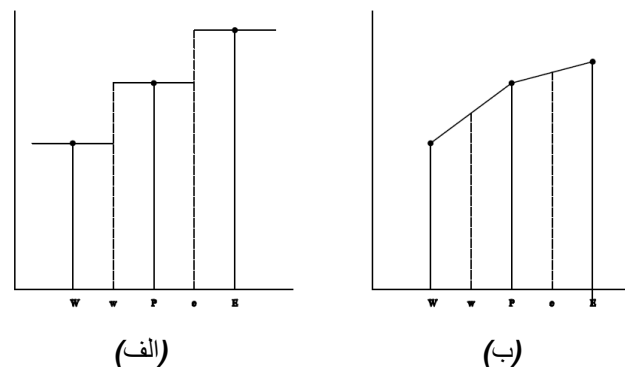


شکل (۳-۲) دسته گره استفاده شده برای مسأله یک بعدی

اگر از معادله (۳-۲۱) روی حجم کنترلی انتگرال بگیریم ، خواهیم داشت :

$$\left(k \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k \frac{dT}{dx}\right)_w + \int_w^e S dx = 0 \quad (۳-۲۲)$$

برای پیشبرد کار نیاز به فرض یک پروفیل یا یک تابع درون یابی داریم . در شکل (۳-۳) دو پروفیل ساده فرضی نشان داده شده است . ساده ترین امکان این است که فرض کنیم مقدار T در یک گره بر حجم کنترلی که آن را احاطه کرده است، حاکم می باشد . این پروفیل پله ای نشان داده شده در شکل (۳-۳الف) را می دهد . برای این پروفیل شیب $\frac{dT}{dx}$ در وجوه کنترلی (یعنی در w یا e) تعریف نمی شود . پروفیلی که این مشکل را ندارد پروفیل خطی قطعه به قطعه شکل (۳-۳ب) می باشد. اینجا، بین گره ها از توابع درون یابی خطی استفاده می شود .



شکل (۳-۳) دو فرض ساده برای پروفیل (الف) پروفیل پله ای و (ب) پروفیل خطی قطعه به قطعه

اگر مشتقات $\frac{dT}{dx}$ ظاهر شده در معادله (۲۲-۳) را از پروفیل خطی قطعه به قطعه محاسبه نماییم ،

معادله زیر به دست خواهد آمد :

$$\frac{k_e(T_E - T_p)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w(T_p - T_w)}{(\delta x)_e} + \bar{S}\Delta x = 0 \quad (23-3)$$

که در آن \bar{S} ، متوسط S در حجم کنترلی است. حال معادله انفصال (۲۳-۳) را به فرم زیر می نویسیم:

$$a_p T_p = a_E T_E + a_w T_w + b \quad (24-3)$$

که در آن :

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \quad (25-3)$$

$$a_w = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \quad (26-3)$$

$$a_p = a_E + a_w \quad (27-3)$$

$$b = \bar{S}\Delta x \quad (28-3)$$

۳-۲-۴ رفتار جمله چشمه :

قبل از این که قواعد اصلی را بیان کنیم ، جمله چشمه S در معادله (۲۱-۲) را قدری مورد توجه قرار می دهیم . اغلب ، جمله چشمه ، تابعی از خود متغیر وابسته T می باشد و بنابراین در ساختن معادله انفصال مطلوب خواهد بود این وابستگی را بشناسیم . ما بعداً خواهیم دید که معادلات انفصال فقط به وسیله روش های مربوط به معادلات جبری خطی حل می شوند ، پس عملاً می توانیم فقط یک ارتباط خطی برای وابستگی مذکور به حساب آوریم . در اینجا کافی است مقدار متوسط S را به صورت زیر بیان کنیم .

$$\bar{S} = S_C + S_p T_p \quad (29-3)$$

S نمایانگر قسمت ثابت \bar{S} و S_p ضریب T_p می باشد . بدیهی است ، S_p نمایانگر S محاسبه شده در نقطه P نیست .

در بیان مقدار متوسط \bar{S} ، حضور T_p در معادله (۳-۲۹) نشان می‌دهد که فرض کرده ایم مقدار T_p بر حجم کنترل حاکم است، به عبارت دیگر، از پروفیل پله‌ای نشان داده شده در شکل (۳-۳ الف) استفاده شده است. باید توجه داشت در حالی که برای جمله $\frac{dT}{dx}$ از پروفیل خطی قطعه به قطعه استفاده می‌کنیم، می‌توان برای جمله چشمه از پروفیل پله‌ای استفاده کرد.

با ساده سازی و مرتب کردن معادلات فوق خواهیم داشت:

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (۳۰-۳)$$

که در آن:

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_w} \quad (۳۱-۳)$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \quad (۳۲-۳)$$

$$a_p = a_E + a_W - S_p \Delta x \quad (۳۳-۳)$$

$$b = S_c \Delta x \quad (۳۴-۳)$$

بحث مقدماتی فوق، زمینه لازم را برای فومول بندی معادلات انفصال فراهم می‌کند.

۳-۲-۳-۵ چهار قاعده اصلی در روش حجم محدود

قاعده ۱: سازگاری در وجوه حجم کنترلی: وقتی یک وجه بین دو حجم کنترلی مجاور مشترک است، شار عبور کننده از آن در معادلات انفصال مربوط به دو حجم کنترلی، با عبارت یکسان نشان داده می‌شود.

قاعده ۲: کلیه ضرایب به کار رفته (a) در معادله (۳۰-۳) باید مثبت باشند.

قاعده ۳: وقتی جمله چشمه به صورت $\bar{S} = S_c + S_p T_p$ خطی می‌شود، ضریب S_p همیشه باید کمتر یا مساوی صفر باشد.

این قاعده آن گونه که به نظر می‌رسد اختیاری نیست. بیشتر فرآیندهای فیزیک حتماً دارای یک رابطه با شیب منفی بین جمله چشمه و متغیر وابسته می‌باشند. در واقع اگر S_p مثبت بود، وضعیت فیزیکی می‌توانست بی‌ثبات باشد. یک S_p مثبت دلالت بر این موضوع دارد که هر وقت T_p افزایش پیدا کند جمله چشمه زیاد می‌شود، یعنی اگر ساز و کار برداشت حرارت موجود نباشد، ممکن است

این خود منتهی به افزایش در T_p شده و این عمل تکرار شود. از نظر محاسباتی، منفی نگهداشتن S_p جهت جلوگیری از ظاهر شدن بی ثباتی‌ها و جواب‌های فیزیکی غیرمنطقی، ضروری است.

قاعده ۴ : مجموع ضرایب همسایه : اغلب معادلات دیفرانسیل حاکم شامل فقط مشتقات متغیر وابسته ی باشند . بنابراین ، اگر T نمایانگر متغیر وابسته باشد ، توابع T ، و $T+C$ (که C یک ثابت اختیاری است) هر دو در معادله دیفرانسیل صدق می کنند . این خاصیت معادله دیفرانسیل باید به وسیله معادله انفصال نیز منعکس شود . بنابراین ، معادله (۳-۳۰) نیز وقتی که T_p و تمام T_{nb} ها به یک اندازه افزایش پیدا می کنند ، باید معتبر باقی بماند .

بنابراین رابطه زیر حتما باید ارضا شود :

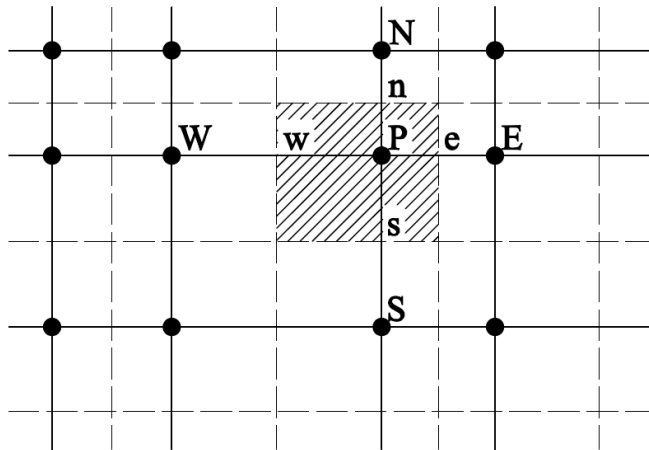
$$a_p = \sum a_{nb} \quad (3-35)$$

۳-۳-۲-۶ مکان وجوه حجم کنترلی

تاکنون، هیچ گونه بحثی در مورد این که وجوه حجم کنترلی نسبت به گره‌های شبکه در کجا قرار می گیرند، نشده است. معادله انفصال به گونه‌ای به دست آمده که جملات آن کلی و قابل اجرا بر هر مکانی که وجوه حجم کنترلی قرار دارند، باشد. از میان رویه‌های ممکن و بسیار، ما دو حالت مختلف را مدنظر قرار داده و در مورد آن‌ها بحث می کنیم. این دو حالت را رویه‌ی A و رویه‌ی B می‌نامیم. برای سادگی، وضعیت دو بُعدی را تشریح خواهیم کرد، هر چند مفاهیم حاصل از آن، در وضعیت‌های یک و سه بُعدی نیز قابل اجرا خواهد بود.

رویه‌ی A : وجوه در وسط فاصله بین گره‌های مختلف

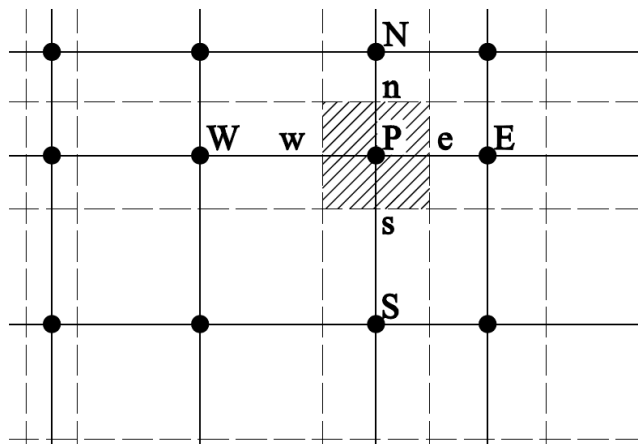
بدیهی‌ترین روش ساختن حجم‌های کنترلی این است که وجوه آن‌ها را در «وسط» فاصله‌ی بین گره‌های همسایه قرار دهیم. شبکه فوق را در شکل (۳-۴) مشاهده می کنید. خط چین‌ها مشخص کننده وجوه حجم‌های کنترلی می باشند. شبکه با دقت ترسیم شده تا کاملاً غیر یکنواخت باشد، نتیجه این که هر گرهی مانند P از شبکه، که در شکل نشان داده شده است، در مرکز هندسی حجم کنترلی که آن را احاطه کرده است قرار ندارد.



شکل (۳-۴) رویه‌ی A: وجوه در وسط فاصله بین گره‌های مختلف

رویه‌ی B: گره‌های شبکه در مراکز حجم‌های کنترلی

رویه دیگر (در شکل (۳-۵) نشان داده شده) این است که ابتدا مرزهای حجم‌های کنترلی را رسم کرده سپس در مراکز هندسی هر حجم کنترلی یک گره قرار دهیم. در این طرح وقتی اندازه‌های حجم‌های کنترلی غیر یکنواخت باشد، وجوه آن‌ها در وسط فاصلی بین نقاط شبکه قرار نمی‌گیرد. باید توجه داشت برای شبکه‌های یکنواخت (یا اندازه‌های یکنواخت حجم‌های کنترلی) دو رویه‌ی فوق مشابه می‌شوند. بنابراین، مقایسه دو رویه فقط وقتی معنا دارد که شبکه‌ها غیر یکنواخت باشند. در رویه‌ی A که وجوه در وسط فاصله‌ی گره‌ها قرار داده می‌شود، دقت بیشتری در محاسبه شار حرارت عبور کننده از وجوه حاصل می‌شود. همان گونه که در بخش ۳-۲-۳-۳ ذکر شد، شبیه پروفیل خطی قطعه به قطعه دما به طور اتفاقی با شیب هر پروفیل سهمی شکل که در وسط فاصله بین گره‌ها محاسبه شود یکسان است. بنابراین اگر چه از پروفیل خطی استفاده می‌شود اما نتایج آن بسیار شبیه نتایج پروفیل دقیق‌تر، یعنی سهموی می‌باشد.



شکل (۳-۵) رویه ی B: گره های شبکه در مراکز حجم های کنترلی

از طرف دیگر، این حقیقت که امکان ندارد گره P در شکل (۳-۴) در مرکز هندسی حجم کنترلی قرار گیرد، مبین یک نقص است. زیرا در این صورت دما T_p نمی تواند به عنوان یک نماینده مناسب حجم کنترلی در محاسبه جمله چشمه، ضریب هدایت، و سایر کمیت های دیگر باشد. حتی در محاسبه شارهای حرارت از وجوه حجم های کنترلی، رویه A بدون اشکال نیست. زیرا به عنوان مثال نقطه e در شکل (۳-۴) در مرکز وجهی که بر آن واقع شده، قرار ندارد. بنابراین، فرض این که شار e بر سراسر وجه غالب است، باعث ایجاد خطا می شود.

رویه B این نارسایی ها را ندارد، چون طبق تعریف، نقطه P در مرکز حجم کنترلی قرار دارد، و نقاطی مانند e در مرکز وجوه مربوط به خودشان قرار دارند (شکل (۳-۵) را ببینید).

به هر حال، وجوه در وسط فاصله بین گره های شبکه قرار نمی گیرند و بنابراین، بر خلاف رویه A، رویه B، از خاصیت پروفیل اتفاقی سهموی، سود نمی برد.

در رویه ی A، تنظیم وجوه حجم کنترلی به گونه ای که در مکان های مطلوب قرار گیرند مشکل تر خواهد بود، زیرا ابتدا باید وضعیت نقاط شبکه را مشخص نمود.

ایجاد حجم های کنترلی مجاور با مرزهای سیستم، نیاز به توجه بیشتری دارد. رویه A منتهی به حجم های کنترلی «نیمه» حول گره های مرزی می شود. در رویه B، مناسب است حوزه محاسبه را به وسیله حجم های کنترلی معمولی کاملاً پر کرده و گره های مرزی را روی وجوه حجم های کنترلی

مجاور قرار دهیم. در گسسته سازی معادلات جریان نانوسیال نیز به علت نیاز به دقت بالاتر در محاسبه شار عبوری از وجوه حجم کنترل، از رویه A استفاده شده است.

۴-۳ جابجایی و پخش

جابه جایی توسط جریان سیال به وجود می آید. در این فصل روشهای موجود بدست آوردن جوابی برای ϕ در حضور میدان جریان (یعنی مؤلفه های سرعت و جرم مخصوص) را بررسی میکنیم.

باید به خاطر داشت کلمه پخش اینجا در یک معنای عمومی مورد استفاده قرار می گیرد که فقط منحصر به پخش گونه های شیمیایی (که در اثر تغییرات غلظت حاصل می شود) نیست. شار پخش حاصل از گرادیان متغیر عمومی ϕ به صورت $-\Gamma \partial \phi / \partial x$ می باشد، که برای معانی خاص ϕ ، شار پخش گونه های شیمیایی، شار حرارت، تنش ناشی از لزجت و غیره را نشان می دهد. معادله دیفرانسیل کلی (۳۷-۳) شامل جمله $(\Gamma \partial \phi / \partial x_j)$ $(\partial / \partial x_j)$ می باشد، که به عنوان جمله پخش معرفی می شود.

در اینجا سیمایی از وضعیت جابه جایی - پخش مورد بررسی قرار می گیرد. از آنجایی که میدان جریان داده شده باید در معادله پیوستگی صدق نماید:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (36-3)$$

و معادله دیفرانسیل کلی:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S \quad (37-3)$$

بنابراین:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S \quad (38-3)$$

از این معادله چنین نتیجه گرفته می شود که برای یک توزیع معلوم S, Γ, u_j, ρ هر جواب ϕ و تغییر آن (ϕ به علاوه یک ثابت)، هر دو در معادله (۳-۳۸) صدق می کنند. تحت این شرایط، قاعده اصلی مربوط به مجموع ضرایب (قاعده ۴) قابل اجرا می باشد.

حال یک وضعیت یک بعدی پایا را که در آن فقط جملات جابه جایی و پخش حضور دارند در نظر می گیریم. معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (3-39)$$

که در آن u نمایانگر سرعت در امتداد x می باشد. همچنین، معادله پیوستگی برای ρu ثابت، می شود:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (3-40)$$

برای بدست آوردن معادله انفصال، دسته گره سه تایی نشان داده شده در شکل (۳-۲) را مورد استفاده قرار خواهیم داد. گرچه مکان عملی وجوه e و w از حجم کنترلی بر فرمول بندی نهایی تأثیر نخواهد داشت، اما بهتر است فرض کنیم e در وسط فاصله بین E, P و w در وسط فاصله بین P, W قرار داده شده اند.

۳-۴-۱ روشهای گسسته سازی مولفه های جابجایی

حال به بررسی طرح های موجود برای گسسته کردن مولفه های جابجایی در معادلات حاکم و انتخاب طرح مناسب برای انجام این پروژه می پردازیم.

۳-۴-۱-۱ روش بالا دست^۱

یک امکان خوب شناخته شده برای گسسته سازی مولفه های جابجایی معادلات حاکم جریان، طرح آپ ویند یا بالادست می باشد، که به عنوان طرح های Upwind-Difference و Upstream-Difference و روش Donor-Cell و غیره شناخته می شود. این طرح ابتدا توسط کورانت و همکارانش ارائه شده و مرتباً به وسیله جن بری و همکارانش، باراکات و کلارک و رانشال و ولفشتین اصلاح و

مورد استفاده مجدد قرار گرفت. در طرح بالادست مشخص می‌شود. نقطه ضعف در فرمول‌بندی اولیه این است که خاصیت جابجایی ϕ_e در وجه مشترک مساوی متوسط ϕ_E و ϕ_P فرض شده است و لذا روش بهتری را پیشنهاد می‌کند. فرمول‌بندی جمله پخش بدون تغییر باقی می‌ماند، اما جمله جابجایی از فرض زیر محاسبه می‌شود:

مقدار Φ در یک وجه مشترک مساوی با مقدار Φ در گره بالادست (آپ ویند) آن وجه می‌باشد، بنابراین:

$$\phi_e = \phi_P \quad \text{اگر } F_e > 0 \quad (41-3)$$

$$\phi_e = \phi_E \quad \text{اگر } F_e < 0 \quad (42-3)$$

مقدار ϕ_W به صورت مشابه تعریف شود.

با تعریف یک عملگر جدید، روابط شرطی (41-3) و (42-3) می‌توانند خلاصه‌تر شوند. ما را

[[A, B]] تعریف می‌کنیم که نشان دهنده بر مقدار بزرگتر A و B است. بنابر طرح بالادست داریم:

$$F_e \phi_e = \alpha_P [[F_e, 0]] - \phi_E [[-F_E, 0]] \quad (43-3)$$

وقتی معادله‌ی (43-3) با این مفهوم تعویض شود، معادله‌ی انفصال به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\alpha_P \phi_P = \alpha_e \phi_e + \alpha_W \phi_W \quad (44-3)$$

به طوریکه:

$$\alpha_E = D_e + [[-F_e, 0]] \quad (45-3)$$

$$\alpha_W = D_W + [[-F_W, 0]] \quad (46-3)$$

$$\alpha_P = D_e + [[-F_e, 0]] + D_W + [[-F_W, 0]] = \alpha_E + \alpha_W + (F_e - F_W) \quad (47-3)$$

بدیهی است، از معادلات (45-3) تا (47-3) هیچ ضریب منفی حاصل نخواهد شد. بنابراین، جواب‌ها از نظر فیزیکی همواره واقعی خواهند بود.

۳-۴-۱-۲ روش نمایی^۱

اگر شار کلی J که ترکیبی از شار جابه‌جایی $\rho u \phi$ و شار پخش $-\Gamma d\phi/dx$ می‌باشد را به

صورت زیر در نظر بگیریم :

1- Exponential Scheme

$$J = \rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \quad (48-3)$$

با این تعریف ، معادله (3-39) می شود :

$$\frac{dJ}{dx} = 0 \quad (49-3)$$

که اگر روی حجم کنترلی نشان داده شده در شکل (3-2) انتگرال گرفته شود، به معادله زیر میرسیم :

$$J_e - J_w = 0 \quad (50-3)$$

- س می توان از پروفیل بین نقاط E,P استفاده می کنیم. وارد کردن این پروفیل در معادله (3-48)

رابطهٔ مربوط به J_e را می دهد .

$$J_e = F_e \left(\phi_p + \frac{\phi_p - \phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right) \quad (51-3)$$

که در آن :

$$P_e = \frac{(\rho u)_e (\delta x)_e}{\Gamma_e} = \frac{F_e}{D_e} \quad (52-3)$$

$$F_e = (\rho u)_e \quad (53-3)$$

$$D_e = \frac{\Gamma}{(\delta x)_e} \quad (54-3)$$

سرانجام ، با جایگزینی از معادله (3-51) و به کار بردن عبارت مشابهی برای J_w در معادله (3-50)

خواهیم داشت :

$$F_e = \left(\phi_p + \frac{\phi_p - \phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right) - F_w = \left(\phi_w + \frac{\phi_w - \phi_p}{\exp(P_w) - 1} \right) = 0 \quad (55-3)$$

و آن را می توان به شکل معمولی نوشت :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_w \phi_w \quad (56-3)$$

که:

$$a_E = \frac{F_e}{\exp(F_e / D_e) - 1} \quad (57-3)$$

$$a_w = \frac{F_w \exp(F_w / D_w)}{\exp(F_e / D_e) - 1} \quad (58-3)$$

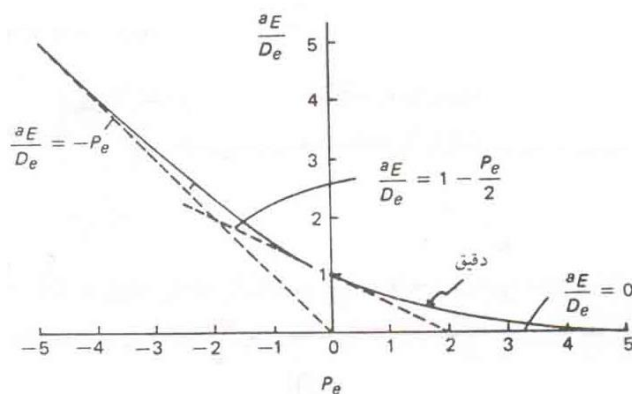
$$a_p = a_E + a_w + (F_e - F_w) \quad (59-3)$$

این عبارات ضرایب طرح نمایی را تعریف می کنند . وقتی این طرح برای مسأله یک بعدی پایا استفاده شود ، جواب دقیق را برای هر مقدار عدد پکله و برای هر تعداد از گره های شبکه تضمین می کند . این طرح علی رغم رفتار بسیار مطلوب ، کاربرد زیادی ندارد زیرا محاسبه نماها گران تمام می شود و چون طرح برای وضعیت های دو و سه بعدی چشمه های غیر صفر دقیق نیست ، هزینه اضافی جهت محاسبه نماها موجه به نظر نمی رسد .

۳-۴-۱-۳ روش پیوندی^۱

از معادله (۳۷-۳) داریم :

$$\frac{a_E}{D_e} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1} \quad (60-3)$$



شکل (۳-۶) تغییرات ضریب a_E نسبت به عدد پکله

تغییرات a_E/D_e نسبت به P_e در شکل نشان داده شده است . برای مقادیر مثبت P_e ، گره E همسایه پایین دست بوده و دیده می شود که اثرش با افزایش P_e کاهش پیدا می کند . وقتی P_e منفی است ، E همسایه بالا دست می باشد و اثر زیادی دارد . ویژگی های معینی از تغییر دقیق a_E/D_e را (که در شکل با خط پر نشان داده شده است) می توان به صورت زیر بیان کرد :

1- Hybrid Scheme

(۱) برای $P_e \rightarrow \infty$

$$\frac{a_E}{D_e} \rightarrow 0; \quad (۶۱-۳)$$

(۲) برای $P_e \rightarrow -\infty$

$$\frac{a_E}{D_e} \rightarrow -P_e; \quad (۶۲-۳)$$

۳- در $P_e \rightarrow 0$ با ساده کردن داریم

$$(۶۳-۳)$$

پس با بررسی ترسیمی شکل به سه حالت زیر می‌رسیم:

برای $P_e < -۲$

$$(۶۴-۳)$$

برای $-۲ \leq P_e < ۲$

$$\frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{P_e}{2} \quad (۶۵-۳)$$

۳- برای $P_e > ۲$

$$\frac{a_E}{D_e} = 0 \quad (۶۶-۳)$$

روابط فوق را می‌توان به شکل خلاصه‌ای درآورد:

$$a_E = D_e \left[\left[-P_e, 1 - \frac{P_e}{2}, 2 \right] \right] \quad (۶۷-۳)$$

$$a_E = \left[\left[-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right] \right] \quad (۶۸-۲)$$

که در آنها علامت $[[]]$ به معنی بزرگترین مقدار است.

اکنون معادله انفصال جابه‌جایی - پخش می‌تواند برای طرح پیوندی به صورت زیر نوشته شود:

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_w \phi_w \quad (69-3)$$

به طوریکه :

$$a_E = \left[[-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0] \right] \quad (70-3)$$

$$a_w = \left[[-F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0] \right] \quad (71-3)$$

$$a_p = a_E + a_w + (F_e - F_w) \quad (72-3)$$

باید به خاطر داشت این فرمول بندی برای هر مکان اختیاری وجوه مشترک بین نقاط شبکه معتبر بوده و به وجوه مشترکی که در وسط قرار گرفته اند، محدود نمی باشد .

۳-۴-۱-۴ روش قاعده توانی^۱

انحراف طرح پیوندی از جواب دقیق در $P_e = +2$ نسبتاً زیاد است ، همچنین به نظر می رسد مناسب نیست به محض این که $|P_e|$ از ۲ بیشتر شد آثار پخش را مساوی صفر قرار دهیم .
 گرچه روابط طرح قاعده توانی تا اندازه ای پیچیده تر از طرح پیوندی می باشد ، اما محاسبه آنها (به ویژه) گران نیست، به علاوه نمایش بسیار خوبی از رفتار طرح نمایی را ارائه می دهند.
 روابط قاعده توانی برای a_E را می توان چنین نوشت .

برای $P_e < -10$

$$\frac{a_E}{D_e} = -P_e \quad (73-3)$$

برای $-10 \leq P_e < 0$ ،

$$\frac{a_E}{D_e} = (1 + 0.1P_e)^5 - P_e \quad (74-3)$$

برای $0 \leq P_e \leq 10$ ،

$$\frac{a_E}{D_e} = (1 - 0.1P_e)^5 \quad (75-3)$$

2- Power-Law Scheme

برای $P_e > 10$

$$\frac{a_E}{D_e} = 0 \quad (76-3)$$

از مقایسه این روابط با معادله (۶۶-۳) مشاهده می کنیم ، که برای $|P_e| > 10$ ، طرح قاعده توانی مشابه طرح پیوندی می شود . شکل خلاصه شده ای از معادلات (۷۳-۳) تا (۷۶-۳) می تواند به صورت زیر نوشته شود :

$$a_E = D_e \left[\left[0.1 - \frac{0.1F_e}{D_e} \right] + \left[[0, -F_e] \right] \right] \quad (77-3)$$

که ما نیز در گسسته سازی معادلاتمان از این روش استفاده کرده ایم. به طوری که اگر منحنی جوابهای طرح های مختلف را رسم کنیم ، جوابهای بدست آمده با روش توانی مطابقت بیش تری با پاسخ های تحلیلی نسبت به سایر روشها دارند.

۵-۳ جزئیات به دست آوردن معادله انفصال

فرم دو بعدی و پایای معادله (۲-۳) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \quad (78-3)$$

که در آن J_x و J_y شارهای کلی (جابه جایی و پخش) هستند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$J_x = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (79-3)$$

و :

$$J_y = \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (80-3)$$

به طوریکه u و v دلالت بر مؤلفه های سرعت در امتدادهای y, x می کنند . محاسبه انتگرال معادله

(۴۰-۳) روی حجم کنترلی:

$$J_e - J_w + J_n - J_s = (S_C + S_p \phi_p) \Delta x \Delta y \quad (81-3)$$

که جمله چشمه با روش معمولی خطی شده است . به طریق مشابه ، می توانیم انتگرال معادله

پیوستگی (۳-۱) را روی حجم کنترلی محاسبه نماییم و خواهیم داشت :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (۳-۸۲)$$

که در آن F_s, F_n, F_w, F_e مقادیر جریان جرم از وجوه حجم کنترلی می باشند و می توان نوشت :

$$(۳-۸۳)$$

و به طور مشابه ،

$$F_w = (\rho u)_w \Delta y \quad (۳-۸۴)$$

$$F_n = (\rho u)_n \Delta x \quad (۳-۸۵)$$

$$F_s = (\rho u)_s \Delta x \quad (۳-۸۶)$$

حال چنانچه معادلات (۳-۸۴) تا (۳-۸۶) را در ϕ_p ضرب کرده و آن را از معادله (۳-۸۱) کسر نماییم،

خواهیم داشت :

$$(J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_p) + (J_n - F_n \phi_p) - (J_s - F_s \phi_p) = (S_C + S_P \phi_p) \Delta x \Delta y \quad (۳-۸۷)$$

فرض یکنواختی بر روی هر وجه از حجم کنترلی ما را قادر می سازد تا رویه های یک بعدی را

برای وضعیت دو بعدی به کار ببریم . حال برای بیان جملاتی مانند $J_e - F_e \phi_p$ و $J_w - F_w \phi_p$ از

روشهایی که در بخشهای قبلی به آن پرداخته شد، استفاده می کنیم :

$$J_e - F_e \phi_p = a_E (\phi_p - \phi_E) \quad (۳-۸۸)$$

$$J_w - F_w \phi_p = a_w (\phi_w - \phi_p) \quad (۳-۸۹)$$

$$a_E = D_e A(|P|) + [[-F_e, 0]] \quad (۳-۹۰)$$

$$a_w = D_w A(|P|) + [[F_w, 0]] \quad (۳-۹۱)$$

در اینجا D_w و D_e مانند F_w و F_e حاوی سطح Δy مربوط به وجوه e و w می باشند . با عبارات مشابه برای $J_n - F_n \phi_p$, $J_s - F_s \phi_p$ در موقعیتی قرار داریم تا شکل نهایی معادله انفصال را بنویسیم .

۳-۶ معادله انفصال نهایی

اکنون می توان معادله انفصال دو بعدی را به صورت زیر نوشت :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (۹۲-۳)$$

به ترتیب :

$$a_E = D_e A(|P|) + [[-F_e, 0]] \quad (۹۳-۳)$$

$$a_W = D_w A(|P|) + [[F_w, 0]] \quad (۹۴-۳)$$

$$a_N = D_n A(|P|) + [[-F_n, 0]] \quad (۹۵-۳)$$

$$a_S = D_s A(|P|) + [[F_s, 0]] \quad (۹۶-۳)$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y \quad (۹۷-۳)$$

$$a_p = a_E + a_N + a_W + a_S - S_p \Delta x \Delta y \quad (۹۸-۳)$$

مقادیر جریان F_e , F_w , F_n , F_s در معادلات (۳-۸۴) تا (۳-۸۶) تعریف شده اند . ضریب رسانش مربوط به آنها توسط روابط زیر تعریف می شوند :

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e}, \quad (۹۹-۳)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w}, \quad (۱۰۰-۳)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta x)_n}, \quad (۱۰۱-۳)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta x)_s}, \quad (۱۰۲-۳)$$

و اعداد پکله مربوط از روابط زیر به صورت زیر بدست می آیند :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (103-3)$$

طبق قاعده ای توانی داریم :

$$A(|P|) = [[0, (1 - 0.1|P|)^5]] \quad (104-3)$$

ملاحظه می شود حتی در این مرحله اهمیت فیزیکی ضرایب مختلف در معادله (3-92) به سادگی بیان می گردد. ضرایب a_F , a_w , a_n و a_n اثر جابه جایی و پخش را در چهار وجه حجم کنترلی (حالت دو بعدی) بر حسب نرخ جریان F و ضریب هدایت کلی D نشان می دهند.

3-7 محاسبه میدان سرعت و فشار

در بخش های پیشین روشی برای حل معادله دیفرانسیل کلی برای ϕ در حضور یک میدان جریان معلوم ارائه شد. اما به جز در شرایطی بسیار خاص، مشخص کردن میدان جریان امکان ندارد، بلکه باید مؤلفه های سرعت محلی و میدان جرم مخصوص را از معادلات مناسب حاکم بر جریان محاسبه نمود. مؤلفه های سرعت از معادلات مقدار حرکت، که حالت های خاصی از معادله دیفرانسیل کلی جهت ϕ می باشند (با $u = \phi$ ، $\Gamma = \mu$) تبعیت می کنند.

اما مشکل واقعی در محاسبه میدان سرعت، مجهول بودن میدان فشار می باشد. گرادیان فشار قسمتی از جمله چشمه را در هر معادله مقدار حرکت تشکیل می دهد. اما، هیچ معادله مشخصی برای به دست آوردن فشار وجود ندارد. درست است که اگر میدان فشار معلوم باشد هیچ مشکل خاصی در حل معادلات مقدار حرکت وجود ندارد اما نحوه معلوم شدن میدان فشار نسبتاً مبهم به نظر می رسد.

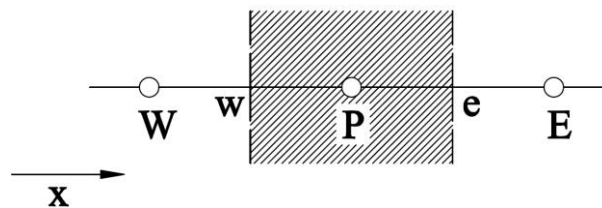
میدان فشار به طور غیر مستقیم از معادله پیوستگی بدست می آید. هنگامی که میدان فشار صحیح در معادلات مقدار حرکت استفاده شود، میدان سرعت حاصل در معادله پیوستگی صدق می کند. اما مشخص کردن غیر مستقیم برای اهداف ما زیاد مفید نیست مگر این که جواب مستقیمی از

دستگاه معادلات انفصال مربوط به معادلات مقدار حرکت و پیوستگی به دست آوریم . از آن جا که برای حل معادلات انفصال روش تکرار را انتخاب کرده ایم. پس ، حل مستقیم برای تمامی مؤلفه های سرعت و فشار موضوعیت ندارد .

۳-۷-۱ نشان دادن جمله گرادیان

اگر شروع به ساختن شکل گسسته معادله مقدار حرکت در امتداد x در وضعیت یک بُعدی نشان داده شده در شکل (۷-۳) کنیم، تنها نکته جدید نشان دادن جمله dp/dx پس از انتگرال گرفتن روی حجم کنترلی می باشد. سهم حاصل برای معادله انفصال، افت فشار $P_W - P_e$ می باشد، که این برآیند نیروی فشاری وارد بر حجم کنترلی با سطح مقطع واحد می باشد. برای بیان $P_W - P_e$ برحسب فشارهای گره، می توان پروفیل خطی را قطعه به قطعه فرض کرد. به علاوه، چنانچه وجوه w و e از حجم کنترلی طوری انتخاب شوند که در وسط فاصله بین گره های مربوط به خود قرار گیرند، این فرض در اینجا فقط برای ساده شدن محاسبات جبری اتخاذ شد. وقتی وجوه حجم کنترلی در وسط نباشد، مشکلات مورد بحث اینجا برطرف نشده، بلکه با وضوح کمتری ظاهر می شود. بنابراین فرض در وسط بودن وجوه عامل بروز مشکلات نبوده، بلکه دنبال کردن بحث را ساده می کند [داریم:

$$P_W - P_e = \frac{P_W + P_P}{2} - \frac{P_P + P_E}{2} = \frac{P_W - P_E}{2}$$



شکل (۷-۳) دسته گره سه تایی

این بدان معناست که معادله ی مقدار حرکت حاوی اختلاف فشار بین دو گره متناوب خواهد بود و نه بین دو گره مجاور. یعنی در واقع فشار از شبکه ای گرفته می شود که خشن تر از شبکه ای است که عملاً اتخاذ شده است؛ این موجب می شود که از دقت جواب کم شود. چنین میدان فشاری با تغییر

بسیار تند نمی‌تواند به عنوان واقعیت مورد ملاحظه قرار گیرد، اما چون مقادیر فشار در گره‌های متناوب همه جا یکسان است، برای هر گره P مقدار $P_W - P_E$ مربوط به آن مساوی صفر است. بنابراین، نتیجه مخرب این است که چنین میدان فشار مواجی توسط معادله مقدار حرکت مانند میدان فشار یکنواخت احساس خواهد شد.

می‌توان دید که مشکل در وضعیت دو بُعدی وخیم تر است. درست همان گونه که معادله مقدار حرکت در امتداد x به وسیله $P_W - P_E$ تحت تأثیر قرار می‌گیرد، معادله مقدار حرکت در امتداد y تحت اثر $P_S - P_N$ واقع می‌شود. بدین ترتیب فشار P_p نقشی در محاسبات ندارد. با در نظر گرفتن این موضوع، می‌توان نتیجه گرفت میدان فشار نشان داده شده در شکل (۸-۳)، که از چهار مقدار اختیاری فشار بوجود آمده است، هیچ نیروی فشاری در امتداد x یا y تولید نخواهد کرد.

	100	300	100	300	100	300
	5	27	5	27	5	27
	100	300	100	300	100	300
	5	27	5	27	5	27
	100	300	100	300	100	300
	5	27	5	27	5	27

شکل (۸-۳) میدان فشار مواج دو بُعدی

بنابراین، شکل انفصالی معادلات مقدار حرکت با میدان فشار بسیار غیریکنواخت مانند میدان فشار یکنواخت رفتار خواهد کرد. اگر چنین میدان فشاری در خلال حل به طریق تکرار ظاهر

شود، چیزی وجود نخواهد داشت تا از باقی ماندن آن‌ها تا همگرایی نهایی جلوگیری نماید، زیرا معادلات مقدار حرکت از حضور آن‌ها آگاه نخواهد شد.

باید توجه داشت اعداد استفاده شده در شکل (۳-۸) دارای معنی خاصی نبوده بلکه فقط طرحی را مشخص می‌کنند که از اعداد اختیاری ساخته می‌شوند. به سادگی می‌توان تصور کرد طرح مربوط به وضعیت سه بُعدی حتی پیچیده‌تر خواهد بود، در حالی که معادلات مقدار حرکت آن را نیز به عنوان میدان فشار یکنواخت تعبیر خواهند کرد.

۳-۷-۲ نمایش معادله پیوستگی

یک نوع مشکل مشابه وقتی پدیدار می‌شود که شکل گسسته معادله پیوستگی را به دست آوریم. برای حالت یک بُعدی پایا با جرم مخصوص ثابت، معادله پیوستگی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$(۳-۱۰۵)$$

ا در از این معادله روی حجم کنترلی نشان داده شده در شکل (۳-۷) انتگرال بگیریم، داریم:

$$u_e - u_w = 0 \quad (۳-۱۰۶)$$

ر بر ر فیل خطی قطعه به قطعه برای u و در وسط قرار دادن وجوه حجم کنترلی داریم:

$$\frac{u_p + u_E}{2} - \frac{u_W + u_p}{2} = 0 \quad (۳-۱۰۷)$$

یا:

$$u_E - u_W = 0 \quad (۳-۱۰۸)$$

بدین ترتیب، شکل منفصل معادله پیوستگی تساوی سرعت‌ها را در گره‌های متناوب و نه در گره‌های مجاور ایجاد می‌کند. نتیجه این است که میدان‌های سرعت از نوع نشان داده شده در شکل (۳-۹) که به هیچ وجه واقعی نمی‌باشند، حتماً در معادله انفصال حاصل از معادله پیوستگی (۳-۱۰۸) صدق می‌کنند. در وضعیت‌های دو و سه بُعدی می‌توان طرح‌های مشابه برای تمام مؤلفه‌های سرعت ایجاد کرد که هر چند در معادله پیوستگی صدق می‌کنند اما به سختی می‌توان آن‌ها را به عنوان جواب‌های منطقی پذیرفت.

$$u = \begin{array}{cccccc} 100 & & 400 & & 100 & & 400 & & 100 & & 400 \end{array}$$

شکل (۳-۹) میدان سرعت موج

قبل از این که روش عددی که مؤلفه‌های سرعت و فشار را محاسبه می‌کند، بتوان فرمول‌بندی کرد، این مشکلات باید برطرف شوند. در منابع موجود، روش‌هایی می‌توان یافت که توجه خاصی به این مشکلات نمی‌کنند. آن‌ها، از جواب‌های غیرواقعی احتمالی توسط بعضی رفتارهای خاص در مرزها، با بیشتر مشخص کردن شرایط مرزی، به وسیله به کار بردن زیر تخفیف نسبت به یک حدس اولیه مناسب یا برخورد مناسب دیگر، جلوگیری می‌کنند. اما بیشتر این روش‌ها میدان‌های فشار و سرعت از نوع نشان داده شده در شکل‌های (۳-۸)، (۳-۹) را به عنوان جواب‌های رضایت‌بخش می‌پذیرند و در غیاب راه‌حل‌های خاص، همواره خطر رسیدن به چنین جواب‌هایی وجود دارد.

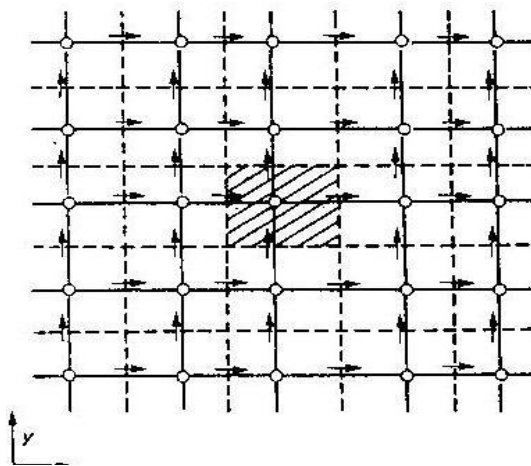
پیش از این که گامی در جهت برطرف نمودن این مشکلات برداریم، توجه شود موانع سخت در تحلیل عددی ناشی از مشتقات درجه اول می‌باشند. رفتار مشتق دوم همواره درست بوده و هیچ مشکلی را به وجود نمی‌آورد. از طرف دیگر، می‌توان تمام پیچیدگی‌های معادلات حاکم را به مشتق درجه اولی که نماینده جمله جابه‌جایی است نسبت داد و بنابراین مشتقات درجه اول فشار (در معادلات مقدار حرکت) و سرعت (در معادلات پیوستگی) زحمت زیادی را ایجاد کرده‌اند.

۳-۷-۳ شبکه جابه‌جا شده

مشکل در محاسبه‌ی میدان‌های فشار و سرعت با این تشخیص که الزامی به محاسبه تمام متغیرها برای گره‌های یکسان نیست، بر طرف می‌شود. این امکان وجود دارد تا برای هر متغیر وابسته یک شبکه متفاوت با شبکه‌های دیگر استفاده کنیم. البته، در صورتی از این انتخاب آزادانه استفاده خواهیم کرد که مفید باشد.

در شبکه جابه‌جا شده، مؤلفه‌های سرعت برای نقاطی که روی وجوه حجم‌های کنترلی قرار دارند محاسبه می‌شود. بنابراین مؤلفه در امتداد x سرعت، u ، در وجوهی که عمود بر امتداد x می‌

باشند ، محاسبه می شود . مکان های مربوط به u در شکل (۳-۱۰) با بردارهای کوتاه نشان داده شده، در حالی که گره ها (که از این به بعد آنها را گره های اصلی می نامیم) به وسیله دایره های کوچک مشخص شده اند . خطوطی که به صورت خط چین ترسیم شده اند، مشخص کننده وجوه حجم کنترلی می باشند. توجه شود ، نسبت به گره های اصلی ، مکان های u فقط در امتداد x جابه جا شده اند به عبارت دیگر ، مکان u روی خطی در امتداد x که دو گره اصلی مجاور را به هم متصل می کند، قرار دارد. این که آیا محل u دقیقاً در وسط فاصله بین گره ها قرار دارد یا خیر بستگی به چگونگی تعریف حجم های کنترلی دارد . مکان u باید روی وجه حجم کنترلی قرار داشته باشد ، این که آیا وجه مذکور به طور اتفاقی در وسط فاصله بین گره ها قرار گرفته یا خیر ، مهم نیست .

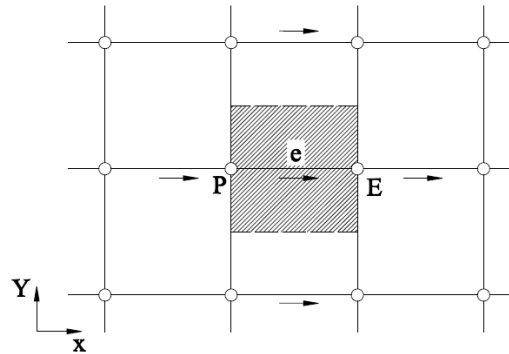


u و v شکل (۳-۱۰) مکان های جابه جا شده برای

در شکل (۳-۱۰) یک طرح شبه دو بعدی نشان داده شده است ، که در آن مکان های u و v روی وجوه حجم کنترلی مشخص شده است . اولین نتیجه ای که از شبکه جابه جا شده به دست می آید این است که نرخ جریان جرم از وجوه حجم کنترلی بدون هرگونه میانمایی برای مؤلفه سرعت ، محاسبه می شود . هر چند این سیمای شبکه جابه جا شده امکان مناسبی را جهت به دست آوردن معادله انفصال برای ϕ فراهم می کند ، اما مزیت مهم شبکه جابه جا شده نیست .

در واقع دو مزیت مهم وجود دارد ، اول اینکه برای یک حجم کنترلی نمونه که در شکل (۳-۱۱) هاشور مشخص شده است، به آسانی می توان دید که شکل انفصال معادله پیوستگی حاوی تفاضل مؤلفه های سرعت مجاور می باشد ، که این، خود از صدق کردن یک میدان سرعت موج در معادله

پیوستگی جلوگیری خواهد کرد. در شبکه جابه جا شده، فقط میدان های سرعت « منطقی » امکان پذیرفته شدن جهت معادله پیوستگی را خواهند داشت. مزیت مهم دوم شبکه جابه جا شده آن است که تفاضل فشار بین دو گره مجاور، نیروی محرک عادی برای مؤلفه سرعت واقع بین این گره ها را ایجاد می کند.



شکل (۱۱-۳) حجم کنترلی برای u

۳-۷-۴ معادلات مقدار حرکت

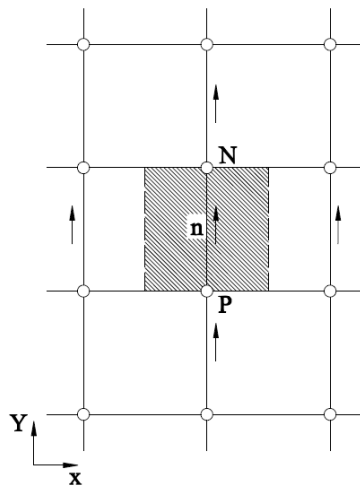
همانطور که در شکل (۱۱-۳) مشاهده شد، اگر توجه فقط روی مکان های u متمرکز شود، هیچ چیز غیر عادی در مورد این حجم کنترلی وجود نخواهد داشت. وجوه آن بین نقطه e و مکان های مربوط به u های همسایه قرار دارند. بنابراین، حجم کنترلی نسبت به حجم کنترلی معمولی احاطه کننده گره P ، جابه جا شده است. جابه جایی فقط در امتداد x می باشد، به طوری که وجوه عمود بر امتداد مذکور از گره های اصلی P و E عبور می کنند. این طرح یکی از مزیت های اصلی شبکه جابه جا شده را مشخص می کند: تفاضل $P_P - P_E$ می تواند جهت محاسبه نیروی فشار وارد شونده بر حجم کنترلی مربوط به u استفاده می شود.

معادله انفصال حاصل به صورت زیر نوشته می شود:

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (P_p - P_E) A_e \quad (۱۰۹-۳)$$

در اینجا تعداد جمله های همسایه بستگی به چند بعدی بودن مسأله خواهد داشت. برای وضعیت دو بعدی نشان داده شده در شکل (۱۰-۳)، در خارج از حجم کنترلی چهار همسایه u مشخص

شده است . برای حالت سه بعدی ، شش همسایه u وارد خواهد شد . ضرایب همسایه a_{nb} اثر ترکیب جابجایی - پخش در وجوه حجم کنترل را وارد محاسبات می کنند . جمله b طبق معادلات (۳-۹۷) تعریف می شود ، اما گرادیان فشار در کمیت های جمله چشمه یعنی S_c و S_p گنجانده نمی شود . گرادیان فشار موجب ظاهر شدن آخرین جمله در معادله (۳-۱۰۹) شده است . با توجه به این که قرار است نهایتاً میدان فشار نیز محاسبه شود ، قرار دادن فشار در جمله چشمه معادله حرکت ، کار درستی نخواهد بود . جمله $(P_p - P_E)A_n$ نیروی فشار مؤثر بر حجم کنترلی u را نشان می دهد. A_e سطحی است که اختلاف فشار بر آن وارد می شود .



شکل (۳-۱۲) حجم کنترلی برای v

با معادلات مقدار حرکت سایر امتدادها نیز به طور مشابه رفتار می شود . شکل (۳-۱۲) حجم کنترلی را برای معادله مقدار حرکت در امتداد y نشان می دهد ، که در امتداد y جابه جا شده است . به طور مشابه معادله انفصال برای V_n (معادله ی سرعت در جهت y) به صورت زیر نوشته می شود:

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + (P_p - P_N) A_n \quad (۳-۱۱۰)$$

نیروی فشاری مربوطه می باشد .

معادلات مقدار حرکت فقط وقتی می توانند حل شوند که میدان فشار معلوم و یا به طریقی برآورد شود . میدان سرعت حاصل از حل معادلات مقدار حرکت ، زمانی در معادله پیوستگی صدق می کند که میدان فشار استفاده شده صحیح باشد . بنابراین برای هر میدان فشار حدسی P^* یک

میدان سرعت غیر کامل به دست می آید که به وسیله u^* و v^* نشان داده خواهد شد. این میدان سرعت « ستاره دار » از حل معادلات انفصال زیر حاصل می شود :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + (P_p^* - P_E^*) A_e \quad (111-3)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + (P_p^* - P_N^*) A_n \quad (112-3)$$

۳-۷-۵ تصحیح فشار و سرعت

هدف ما پیدا کردن راهی جهت اصلاح فشار حدسی p^* است. به طوری که میدان سرعت ستاره دار حاصل از آن، همواره به سمت صدق کردن در معادله پیوستگی پیش رود. پیشنهاد می شود میدان فشار صحیح از رابطه زیر به دست آید :

$$p = p^* + p' \quad (113-3)$$

که در آن p' « تصحیح فشار » نامیده می شود. تصحیحات سرعت مربوطه یعنی u' و v' می توانند به روش مشابه معرفی شوند :

$$u = u^* + u' \quad v = v^* + v' \quad (114-3)$$

اگر معادله (۱۱۱-۳) از معادله (۱۰۹-۳) کسر شود، داریم :

$$a_e u_e' = \sum a_{nb} u_{nb}' + (P_p' - P_E') A_e \quad (115-3)$$

در اینجا، جمله $\sum a_{nb} u_{nb}'$ را از معادله حذف می کنیم. پس داریم :

$$a_e u_e' = (P_p' - P_E') A_e \quad (116-3)$$

یا:

$$u_e' = d_e (P_p' - P_E') \quad (117-3)$$

که در آن :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \quad (118-3)$$

معادله (۱۱۷-۳) فرمول تصحیح سرعت نامیده می شود، که آن را می توان چنین نوشت :

$$u_e = u_e^* + d_e (P_p' - P_E') \quad (119-3)$$

رابطه بالا نشان می دهد سرعت ستاره دار u_e^* در پاسخ به تصحیحات فشار چگونه باید تصحیح گردد تا u_e به دست آید .

فرمولهای تصحیح برای مؤلفه های سرعت در سایر جهت ها نیز به طور مشابه بدست می آیند :

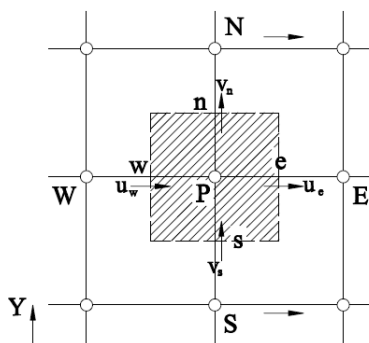
$$v_n = v_n^* + d_n (P'_p - P'_N) \quad (120-3)$$

۲-۷-۳ معادله تصحیح فشار

در اینجا معادله پیوستگی را به معادله ای برای تصحیح فشار تبدیل می کنیم . ابتدا فرض می کنیم جرم مخصوص ρ مستقیماً به فشار بستگی ندارد آنچه در اینجا به دست می آوریم برای وضعیت دو بعدی می باشد ، معادله پیوستگی برای حالت پایا به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (121-3)$$

انترگرال این معادله روی حجم کنترلی که در شکل (۱۳-۳) با هاشور مشخص شده محاسبه می کنیم. یادآوری می شود همین حجم کنترلی نیز برای به دست آوردن معادله انفصال مربوط به متغیر کلی ϕ مورد استفاده قرار گرفت .



شکل (۱۳-۳) حجم کنترلی برای معادله پیوستگی

داریم :

$$[(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta x = 0 \quad (122-3)$$

حسب عبارات داده شده توسط فرمول تصحیح سرعت برای تمام مؤلفه های سرعت، مقدار بگذاریم، پس از منظم کردن ، معادله انفصال زیر را برای p' به دست خواهیم آورد :

$$a_p p'_p = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (123-3)$$

که در آن :

$$a_E = \rho_e d_e \Delta y \quad (124-3)$$

$$a_W = \rho_w d_w \Delta y \quad (125-3)$$

$$(126-3)$$

$$a_S = \rho_s d_s \Delta x \quad (127-3)$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (128-3)$$

$$b = [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y + [(\rho u^*)_s - (\rho u^*)_n] \Delta x \quad (129-3)$$

چون مقادیر جرم مخصوص ρ معمولاً فقط در گره های اصلی قابل محاسبه می باشند ، جرم مخصوص های وجوه مشترک مانند ρ_e می توانند با میانبایی مناسبی به دست آیند. روش میانبایی هر چه باشد ، مقدار ρ_e باید برای هر دو حجم کنترلی که وجه مشترک به آنها متعلق است، یکسان باشد جمله b یک « چشمه جرم » را نشان می دهد که آن را تصحیح های فشار (از طریق تصحیح های سرعت مربوطه) باید از بین برند .

۳-۸ الگوریتم سیمپل

الگوریتم سیمپل روشی است که برای حل معادلات گسسته شده حرکت سیال به کار می رود . سیمپل نمایانگر روش نیمه ضمنی برای معادلاتی است که توسط فشار به هم مرتبط می باشند .

مراحل این الگوریتم بررسی می کنیم :

۱- ابتدا میدان فشار p^* را حدس می زنیم .

۲- معادلات مقدار حرکت ، مانند معادلات (۱۱۱-۳) و (۱۱۲-۳) را حل می کنیم تا u^*, v^* را از

مقادیر ستاره دار آنها محاسبه کنیم .

۳- معادله p' را حل می کنیم .

۴- P را از معادله (۱۱۳-۳) با اضافه کردن p' به p^* محاسبه می کنیم .

۵- با استفاده از فرمول های تصحیح سرعت (۱۱۹-۳) و (۱۲۰-۳) مقادیر v, u را از مقادیر ستاره دار آنها محاسبه می کنیم .

۶- معادله انفصال مربوط به سایر ϕ ها را حل می کنیم .

۷- فشار تصحیح شده p را به عنوان فشار حدسی جدید p^* استفاده کرده ، به گام ۲ برمی گردیم و تمام روش را تکرار می کنیم تا جواب همگرا شده به دست آید .

۹-۲ استفاده از زیر تخفیف و فوق تخفیف در معادلات انفصال

در حل به شیوه تکرار معادلات جبری و یا در طرح تکرار کلی که جهت رفتار با غیر خطی ها اتخاذ می شود ، اغلب مطلوب است که تغییر مقادیر متغیر وابسته از تکراری به تکرار دیگر تسریع و یا کند شود . این فرآیند را بسته به این که تغییرات متغیر ، شتاب داده شود و یا کند گردد به ترتیب فوق تخفیف یا زیر تخفیف می نامند . برای مسائل غیر خطی زیر تخفیف یک وسیله بسیار مفید می باشد که معمولاً در حل به طریق تکرار معادلاتی که شدیداً غیر خطی می باشند به کار می روند تا از واگرایی جلوگیری شود .

راه های زیادی جهت وارد کردن فوق تخفیف یا زیر تخفیف به معادلات ، وجود دارد که بعضی از آنها را در اینجا شرح می دهیم. فرم گسسته معادلات به صورت زیر معرفی می شوند:

$$a_p T_p = \sum a_{nb} T_{nb} + b \quad (130-3)$$

همچنین ، T_p^* به عنوان مقدار T_p از تکرار قبلی در نظر گرفته می شود .

با استفاده از ضریب تخفیف معادله (۱۳۰-۳) می تواند به صورت زیر نوشته شود :

$$T_p = \frac{\sum a_{nb} T_{nb} + b}{a_p} \quad (131-3)$$

اگر به طرف راست معادله بالا ، T_p^* اضافه و کم کنیم ، داریم .

$$T_p = T_p^* + \left(\frac{\sum a_{nb} T_{nb} + b}{a_p} - T_p^* \right) \quad (132-3)$$

مقدار داخل پرانتز ، تغییر در T_p را نشان می دهد که در جریان عمل تکرار حاصل شده است این تغییر می تواند توسط وارد کردن ضریب تخفیف α اصلاح شود ، به طوری که :

$$T_p = T_p^* + \alpha \left(\frac{\sum a_{nb} T_{nb} + b}{a_p} - T_p^* \right) \quad (۱۳۳-۳)$$

ابتدا باید توجه داشت وقتی تکرار ها همگرا می شوند که T_p مساوی T_p^* شود ، معادله (۳-۱۳۳) مبین این موضوع است که مقادیر همگرا شده T حتماً در معادله اصلی (۳-۱۳۰) صدق می کند . البته ، هر طرح تخفیف باید این خاصیت را داشته باشد یعنی جواب همگرا شده نهایی ، هر چند از طریق به کار بردن ضرایب تخفیف اختیاری یا ابزار مشابه به دست آمده باشد ، باز هم باید در معادله انفصال اصلی صدق نماید .

وقتی ضریب تخفیف α در معادله (۳-۱۳۳) بین صفر و یک باشد اثر آن ، زیر تخفیف است یعنی مقادیر T_p با اختلاف کمتری نسبت به T_p^* محاسبه می شوند . برای یک مقدار کوچک α ، تغییر T_p از تکراری به تکرار دیگر بسیار آهسته می شود . وقتی α از یک بزرگتر باشد ، فوق تخفیف حاصل می شود.

نیازی نیست در تمام محاسبات مقدار α یکسان نگهداشته شود . مقدار آن می تواند از تکراری به تکرار دیگر تغییر کند . در واقع ، گرچه آسان نیست ولی مجازیم برای گره های مختلف شبکه مقادیر متفاوتی برای α انتخاب نماییم .

۳-۱۰- الگوریتم اصلاح شده ی سیمپل

الگوریتم سیمپل بسیار استفاده شده و وظیفه خود را به خوبی انجام داده است. اما ، در کوشش های انجام شده جهت اصلاح نرخ همگرایی آن ، حالتی به دست آمده که سیمپلر نامیده می شد و نمایانگر سیمپل اصلاح شده است .

۳-۱۰-۱ معادله فشار

برای به دست آوردن میدان فشار ، معادله مقدار حرکت (۳-۱۰۹) را به صورت زیر می نویسیم :

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b}{a_e} + d_e (p_p - p_E) \quad (134-3)$$

که در آن d_e در معادله (۱۱۸-۳) تعریف شده است. حال سرعت کاذب \hat{u}_e را توسط رابطه زیر تعریف می کنیم:

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b}{a_e} \quad (135-3)$$

به همین ترتیب نیز سرعت کاذب \hat{v}_n بدست می آید. می بینیم که \hat{u}_e ترکیبی است از سرعت های همسایه u_{nb} و شامل هیچ فشاری نمی باشد. حال معادله (۱۳۴-۳) می شود:

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (p_p - p_E) \quad (136-3)$$

به طور مشابه می توان نوشت:

$$v_n = \hat{v}_n + d_n (p_p - p_N) \quad (137-3)$$

به سادگی می توان تشابه بین این سه معادله و معادلات (۱۱۹-۳) و (۱۲۰-۳) را مشاهده کرد. در اینجا، \hat{v}, \hat{u} به جای u^*, v^* ظاهر می شوند و فشار p ، جای p' را می گیرد. اگر عملیاتی که در بخش ۳-۸-۶ برای بدست آوردن معادلات تصحیح فشار صورت گرفت با روابط جدید سرعت - فشار که حاوی \hat{v}, \hat{u} می باشند انجام گیرد، معادله ای برای فشار بدست می آید. این معادله به صورت زیر نوشته می شود:

$$a_p p_p = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + b \quad (138-3)$$

که در آن ضرایب a_E, a_W, a_N, a_S توسط معادلات (۱۲۴-۳) تا (۱۲۸-۳) داده می شوند و b از رابطه زیر به دست می آید:

$$b = [(\rho \hat{u})_w - (\rho \hat{u})_e] \Delta y + [(\rho \hat{u})_s - (\rho \hat{u})_n] \Delta x \quad (139-3)$$

باید توجه داشت که تنها اختلاف بین معادله فشار (۱۳۸-۳) و معادله تصحیح فشار (۱۲۳-۳)، در عبارت مربوط به b می باشد. عبارت (۱۳۸-۳) برای b ، از سرعت های کاذب \hat{v}, \hat{u} استفاده می کند، در حالی که برای معادله تصحیح فشار، b بر حسب سرعت های ستاره دار محاسبه شد.

گرچه معادله فشار و معادله تصحیح فشار تقریباً مشابه می باشند، اما یک اختلاف مهم وجود دارد. در محاسبه معادله فشار هیچ تقریبی وارد نشده است. بنابراین، اگر برای محاسبه سرعت های کاذب از یک میدان سرعت صحیح استفاده شود، معادله فشار فوراً مقدار فشار صحیح را می دهد.

۳-۱۰-۲ الگوریتم سمیپلر

الگوریتم اصلاح شده سمیپل شامل حل معادله فشار، جهت به دست آوردن میدان فشار و حل معادله تصحیح فشار، فقط برای تصحیح سرعت ها می باشد. رشته عملیات مربوطه را می توان به صورت زیر بیان کرد:

- ۱- با حدس میدان سرعت شروع می کنیم.
 - ۲- ضرایب را برای معادلات مقدار حرکت محاسبه کرده و با توجه به آنها \hat{u}, \hat{v} را از معادلاتی مانند معادله (۳-۱۳۵) با به کار بردن مقادیر سرعت های همسایه u_{nb} ، محاسبه می نماییم.
 - ۳- ضرایب معادله فشار (۳-۱۳۸) را محاسبه کرده و از حل آن میدان فشار را به دست می آوریم.
 - ۴- با به کار بردن این میدان فشار به عنوان p^* ، معادلات مقدار حرکت را حل می کنیم تا u^*, v^* به دست آید.
 - ۵- چشمه جرم b را محاسبه کرده [معادله (۳-۱۲۹)] و با استفاده از آن معادله تصحیح فشار را حل می کنیم.
 - ۶- با به کار بردن معادلات (۳-۱۱۹) تا (۳-۱۲۰) میدان سرعت را تصحیح می کنیم، ولی فشار را تصحیح نمی کنیم.
 - ۷- در صورت لزوم معادلات انفصال سایر ϕ ها را حل می کنیم.
 - ۸- بر گردیم به گام ۲ و عمل را تکرار می کنیم تا همگرایی حاصل شود.
- معادله تصحیح فشار به دست آمده در این بخش نیز مستعد واگرایی است، مگر این که از روشهای زیر تخفیف استفاده شود.

۳-۱۱ حل دستگاه معادلات خطی

در فصل های قبل در خصوص روش های گسسته سازی معادلات بحث شد. این روش ها منجر به دستگاهی از معادلات خطی می شود که نیاز به حل دارند. پیچیدگی و اندازه معادلات به ابعاد مسأله بستگی دارد. دو تکنیک کلی برای حل این دستگاه های خطی وجود دارند. دسته اول روش های حل مستقیم و دسته دیگر روش حل غیرمستقیم یا روش های غیر مستقیم یا روش های تکرار شونده است. مثال های ساده از روش های حل مستقیم دستور کرامر و روش حذفی گاوس است.

روش های تکرار شونده روش هایی هستند که بر مبنای تکرار دسته ای از معادلات حاکم بر مسأله قرار دارند. معروف ترین این روش ها روش ژاکوبی و روش تکرار نقطه به نقطه گاوس-سایدل است. این روش ها با برنامه های ساده کامپیوتری قابل اجرا هستند. اما زمانی که دستگاه معادلات حاکم بزرگ باشد، سرعت همگرایی پایینی دارند. توماس در سال ۱۹۴۹ روشی را برای همگرایی بسیار سریع تر دستگاه های سه قطری پیشنهاد کرد که اکنون به نام TDMA شناخته می شود. این روش در واقع برای سیستم های یک بعدی است، اما با استفاده از روش خط به خط می تواند با استفاده از تکرار برای سیستم های دو یا سه بعدی نیز تعمیم پیدا کند. مزیت این روش سرعت و حجم کم حافظه اشغال شده است. معادلات حاکم بر حرکت نانوسیال نیز پس از گسسته سازی توسط روش TDMA حل شده اند. سیستم معادلات را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= C_1 \\
 -\beta_2\varphi_1 + D_2\varphi_2 - \alpha_2\varphi_3 &= C_1 \\
 -\beta_3\varphi_2 + D_3\varphi_3 - \alpha_3\varphi_4 &= C_1 \\
 &\dots \\
 -\beta_4\varphi_3 + D_4\varphi_4 - \alpha_3\varphi_5 &= C_1 \\
 &\dots \\
 -\beta_n\varphi_{n-1} + D_n\varphi_n - \alpha_n\varphi_{n+1} &= C_n \\
 \varphi_{n+1} &= C_{n+1}
 \end{aligned}$$

در مجموعه معادلات بالا φ_1 و φ_{n+1} مقادیر معلوم در مرزها هستند. فرم کلی هر یک از معادلات به

تنهایی:

$$-\beta_j \varphi_{j-1} + D_j \varphi_j - a_j \varphi_{j+1} = c_j \quad (140-3)$$

مجموعه معادلات بالا به فرم زیر ساده می شوند:

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{D_2} \varphi_3 + \frac{\beta_2}{D_2} \varphi_1 + \frac{C_2}{D_2} \quad (141-3)$$

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{D_3} \varphi_4 + \frac{\beta_3}{D_3} \varphi_2 + \frac{C_3}{D_3} \quad (142-3)$$

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{D_4} \varphi_5 + \frac{\beta_4}{D_4} \varphi_3 + \frac{C_4}{D_4} \quad (143-3)$$

.....

$$\varphi_n = \frac{a_n}{D_n} \varphi_{n+1} + \frac{\beta_n}{D_n} \varphi_{n-1} + \frac{C_n}{D_n}$$

این معادلات می توانند با حذف پیشرو و جانشینی پسرو، حذف پیشرو با برداشتن φ_2 از معادله

(142-3) و جانشینی از معادله (141-3) شروع می شود:

$$\varphi_3 = \left(\frac{a_3}{D_3 - \beta_3 \frac{a_2}{D_2}} \right) \varphi_4 + \left(\frac{\beta_4 \left(\frac{\beta_2}{D_2} \varphi_1 + \frac{C_2}{D_2} \right) + C_3}{D_3 + \beta_3 \frac{a_2}{D_2}} \right)$$

(144-3)

اگر نامگذاری زیر را لحاظ کنیم:

$$A_2 = \frac{a_2}{D_2}, \quad c'_2 = \frac{\beta_2}{D_2} \varphi_1 + \frac{C_2}{D_2}$$

معادله (144-3) می تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\varphi_3 = \left(\frac{a_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right) \varphi_4 + \left(\frac{\beta_3 c'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2} \right)$$

(145-3)

اگر فرار دهیم

$$A_3 = \frac{a_3}{D_3 - \beta_3 A_2}, \quad c'_3 = \frac{\beta_3 c'_2 + C_3}{D_3 - \beta_3 A_2}$$

معادله (145-3) می تواند به صورت زیر درآید:

(۱۴۶-۳)

فرمول (۱۴۶-۳) اکنون می تواند برای حذف φ_3 از به کار رود. این روش می تواند تا معادله آخر ادامه یابد. این همان مرحله حذف پیشرف است.

برای جانشانی پسرو، فرم کلی معادله (۱۴۶-۳) را استفاده می کنیم:

$$\varphi_j = A_j \varphi_{j+1} + c'_j \quad (147-3)$$

$$A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad (148-3)$$

$$c_j = \frac{\beta_j c'_{j-1} + c_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \quad (149-3)$$

این فرمول برای اعمال نقاط مرزی $z = 1$ و $z = n + 1$ با قرار دادن مقادیر زیر برای A و c' ساخته می شود:

$$A_1 = 0, c'_1 = \varphi_1$$

$$A_{n+1} = 0, c'_{n+1} = \varphi_{n+1}$$

برای حل سیستمی از معادلات، ابتدا آن را به فرم معادله (۱۴۰-۳) مرتب می کنیم. $D_j, c'_j, \alpha_j, \beta_j$ به وجود می آیند. مقادیر A_j و c'_j متعاقباً با شروع از $z = 2$ و ادامه دادن تا $z = n$ با استفاده از معادلات (۱۴۸-۳) و (۱۴۹-۳) محاسبه می شوند. از آنجایی که مقدار φ در مرز شبکه، $(n + 1)$ ، مشخص است، مقادیر φ_j ها توسط فرمول بازگشتی (۱۴۷-۳) محاسبه می شود. در روش TDMA بالا، فرض بر این است که مقادیر مرزی φ_1 و φ_{n+1} داده شده اند. اگر گرادیان ثابت مانند شار در شرط مرزی وجود داشته باشد، ضریب β_2 در معادله سطر دوم دستگاه معادلات خطی بالا صفر در نظر گرفته شده و شار عبور کننده از دیواره در مؤلفه c_2 اضافه و محاسبه می گردد.

۱۲-۳ اعمال شرایط مرزی در فرم گسسته معادلات:

در بخشهای گذشته در خصوص روشهای موجود برای گسسته سازی معادلات حاکم بر جریان

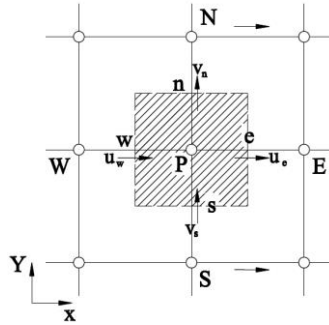
سیال بحث شد. اما چگونگی اعمال شرایط مرزی در این معادلات بررسی نشد.

همانطور که دیدیم معادله حرکت سیال در حالت دوبعدی برای یک متغیر φ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \varphi) + \frac{d}{dy}(\rho v \varphi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\Gamma \frac{d\varphi}{dy}\right) - \nabla p$$

از معادله بالا روی حجم کنترل نشان داده شده در شکل (۳-۳) انتگرال می گیریم:

$$\begin{aligned} (\rho u A \varphi)_e - (\rho u A \varphi)_w + (\rho v A \varphi)_n - (\rho v A \varphi)_s &= \left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_w \right] \\ &+ \left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_s \right] + \bar{s} \Delta V \end{aligned}$$



شکل (۳-۱۴) سرعت ها در وجوه حجم کنترل

شار پخش عبوری از هر یک از وجوه حجم کنترلی از انتگرال گیری مجدد هریک از مولفه های سمت راست معادله بالا بدست می آید:

$$\Gamma_w A_w \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_w = \Gamma_w A_w \frac{(\varphi_p - \varphi_w)}{\Delta x_{pw}} \quad \text{شار عبور از وجه غربی}$$

$$\Gamma_e A_e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_e = \Gamma_e A_e \frac{(\varphi_E - \varphi_p)}{\Delta x_{ep}} \quad \text{شار عبوری از وجه شرقی}$$

$$\Gamma_s A_s \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_s = \Gamma_s A_s \frac{(\varphi_p - \varphi_s)}{\Delta y_{ps}} \quad \text{شار عبوری از وجه جنوبی}$$

$$\Gamma_n A_n \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_n = \Gamma_n A_n \frac{(\varphi_N - \varphi_p)}{\Delta y_{np}} \quad \text{شار عبوری از وجه شمالی}$$

در معادله ممنتوم فرض بر این بود که روی دیواره ها لغزش نداریم. پس $\phi = 0$ که به ترتیب روی وجوه پایینی و بالایی:

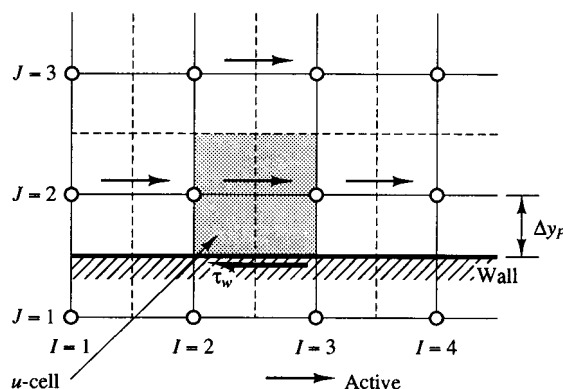
$$\Gamma_s A_s \frac{(\varphi_p - \varphi_s)}{\partial y_{ps}} = 2 \frac{\Gamma_s A_s}{\partial y_{ps}} \varphi_p$$

$$\Gamma_n A_n \frac{(\varphi_N - \varphi_p)}{\partial y_{np}} = 2 \frac{\Gamma_n A_n}{\partial y_{ps}} \varphi_p$$

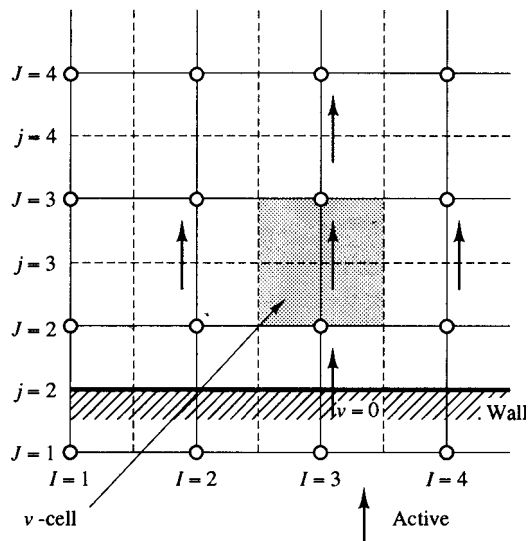
در معادلات بالا باید به این نکته توجه داشت که ضریب ۲ به این دلیل ظاهر شده است که فاصله در حقیقت فاصله نقطه P تا مرکز حجم پایینی، S، است. اما چون روی وجه پایینی حجم کنترلی، سرعت صفر است و وجوه حجم کنترلی در وسط فاصله بین دو حجم کنترلی مجاور قرار دارد، مقدار ∂y_{ps} بر عدد ۲ تقسیم می شود. شکل (۱۵-۳) به خوبی نشان دهنده این موضوع است. همچنین در معادله انرژی که دمای دیوار T_h است، شرط مرزی به صورت زیر اعمال می شود:

$$\Gamma_s A_s \frac{(\varphi_p - \varphi_s)}{\partial y_{ps}} = \Gamma_s A_s \frac{(\varphi_p - T_c)}{\partial y_{ps}/2} = 2 \frac{\Gamma_s A_s}{\partial y_{ps}} (\varphi_p - T_c)$$

اما باید دقت داشت که برای محاسبه شرایط مرزی V، این کار صحیح نمی باشد و کل فاصله تا مرکز حجم بالایی یا پایینی لحاظ می گردد. شرط مرزی برای معادله حرکت در جهت Y را در شکل (۱۶-۳) مشاهده می کنید. محاسبه شرایط مرزی در صفحه بالایی نیز به همین صورت انجام می شود.



شکل (۱۵-۳) شرایط مرزی برای حجم کنترلی u



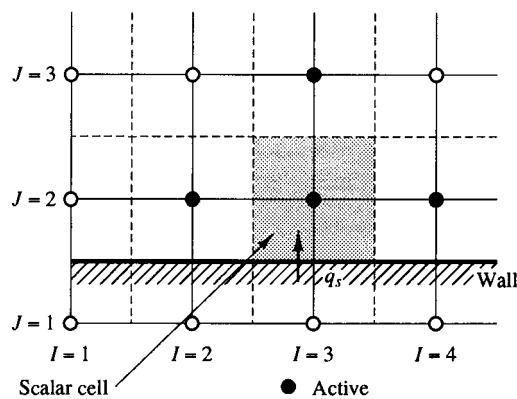
شکل (۱۶-۳) شرایط مرزی برای حجم کنترل V

حال اگر روی مرز شار ثابتی داشته باشیم، مقدارش را در معادله قرار می دهیم.

$$\frac{d\phi}{dy}\Big|_{wall} = \pm C$$

که C شار ثابت متغییر ϕ روی مرز می باشد. بنابراین مولفه پخش در وجه جنوبی به شکل زیر ساده می شود:

$$\Gamma_s A_s \frac{\partial \phi}{\partial y}\Big|_s = \pm \Gamma_s A_s C$$



شکل (۱۷-۳) شرایط مرزی برای حجم کنترل T

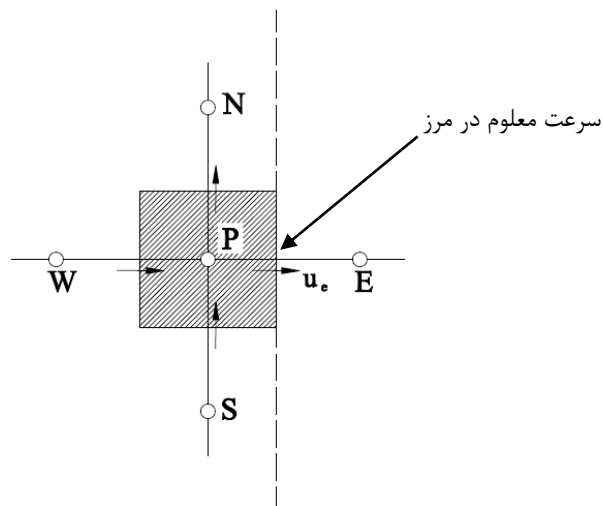
اگر با عبور جریان، سیال گرم شود، علامت منفی و اگر سیال سرد شود، علامت مثبت استفاده می شود.

۱۳-۳ شرایط مرزی برای معادله تصحیح فشار

معمولاً شرایط موجود در مرزها، دو نوع می باشند. یا فشار در مرز معلوم است (و سرعت مجهول می باشد) یا مؤلفه عمود بر مرز سرعت مشخص است.

۱-۱۳-۳ معلوم بودن فشار در مرز: اگر میدان فشار حدسی p^* طوری تنظیم شود که در مرز معلوم، $p^*=p$ باشد، در این صورت مقدار p' در مرز صفر خواهد بود.

۲-۱۳-۳ معلوم بودن سرعت عمود بر مرز: اگر شبکه طوری طراحی شده که مرز، منطبق بر یک وجه حجم کنترلی شود، وضعیت مانند آنچه در شکل (۳-۱۸) نشان داده شده است، می گردد. در مرز حجم کنترلی، سرعت u_e معلوم است. در به دست آوردن معادله p' برای حجم کنترلی نشان داده شده، نرخ جریان از وجه مرزی نباید بر حسب u_e^* و تصحیح مربوط به آن بیان شود، بلکه باید بر حسب خود u_e بیان گردد. بنابراین، p'_E ظاهر نخواهد شد، به عبارت دیگر a_E در معادله p' صفر خواهد بود



شکل (۳-۱۸) حجم کنترلی مرزی برای معادله تصحیح فشار- سرعت معلوم در مرز



فصل چهارم

بررسی و تحلیل نتایج

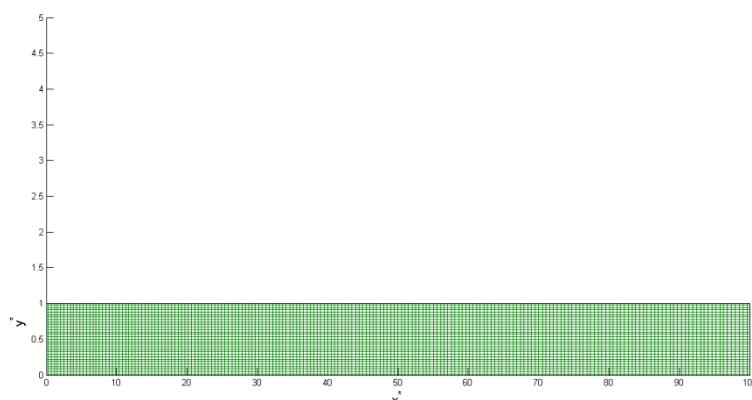
مقدمه

در فصل های گذشته به طور مفصل به نانوسیال، خواص فیزیکی، روابط ریاضی و چگونگی حل معادلات حاکم پرداخته شد. در این فصل به ارائه نتایج بدست آمده از حل معادلات می پردازیم. همچنین در خصوص صحت نتایج بدست آمده و مقایسه آنها با نتایج تحلیلی و تجربی موجود بحث و نتیجه گیری خواهد شد. ذکر این نکته ضروریست که به علت ازدیاد تعداد حالت های مورد بررسی و مقایسه آنها، تعداد نمودارها نیز بسیار زیاد می باشد که سعی شده است در انتخاب آنها، مهمترین و بهترین نمودارها به جهت مقایسه دقیق تر انتخاب شوند. همچنین از نرم افزار MATLAB برای برنامه نویسی و تهیه نتایج و نمودارها استفاده شده است. معادلات ممنوم و انرژی نیز کوپله می باشند.

۱-۴ سیال خالص ($\Phi=0\%$)

۱-۱-۴ شبکه بندی

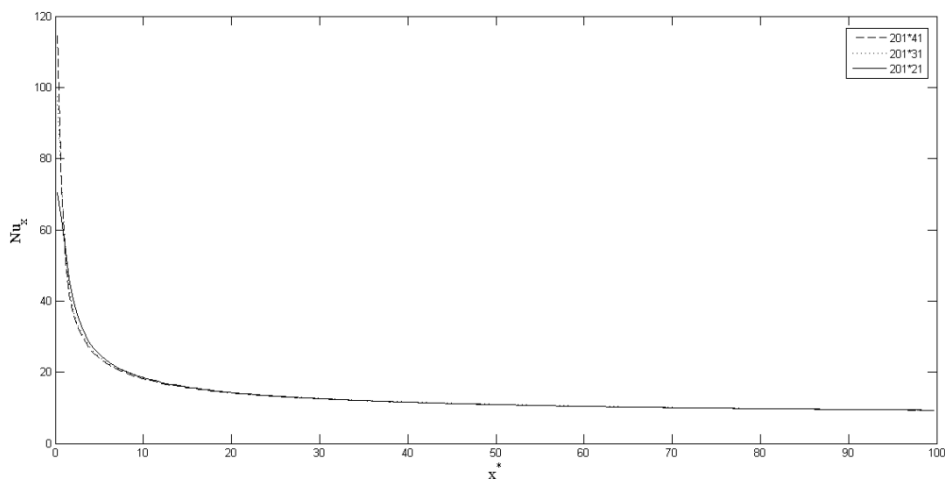
در شبکه بندی بازه مساله مورد بحث، از حجم های کنترل مستطیلی استفاده شده است. شبکه طراحی شده را در شکل (۱-۴) می بینید.



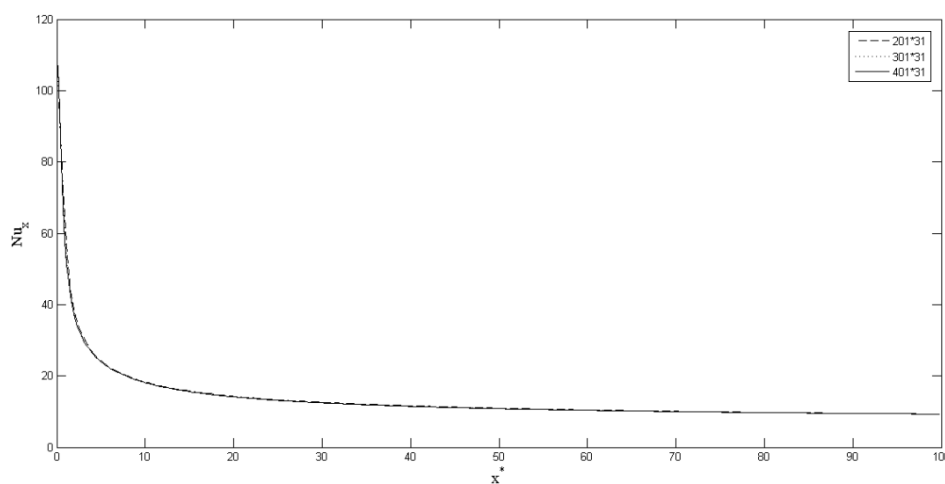
شکل (۱-۴) شبکه بندی بازه مساله، 201×31 گره

شبهه بندی با تعداد گره های مختلفی مانند 201×31 ، 301×31 ، 401×31 ، 201×41 ، 201×21

مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می دهند که نمودارهای عدد ناسلت



(الف)



(ب)

شکل (۲-۴) تغییرات عدد ناسلت محلی روی صفحه در شبهه بندی های مختلف، $Re=500$

موضعی روی دیواره در شبهه های مختلف و شرایط یکسان مساله تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند.

بنابراین مساله مستقل از نوع شبهه بندی است و به دلیل سهولت در محاسبات، بازه مساله به 201

گره در جهت x و 31 گره در جهت y تقسیم بندی شده است. همچنین شبهه غیریکنواخت است.

فاصله بین گره ها طوری تنظیم شده است که

در نزدیکی دیواره ها و در ناحیه ورودی به یکدیگر نزدیکتر هستند. زیرا، گرادیان های دما و سرعت در این نواحی بیشتر است و نیاز به دقت بیشتری می باشد. ضریب انبساط شبکه برای گره ها در جهات x و y ، $1/0.01$ در نظر گرفته شده است. در جهت y به علت تقارن مساله، فاصله گره ها از هریک از دیواره های کانال تا خط مرکز بین صفحه با ضریب $1/0.01$ بیش تر می شود.

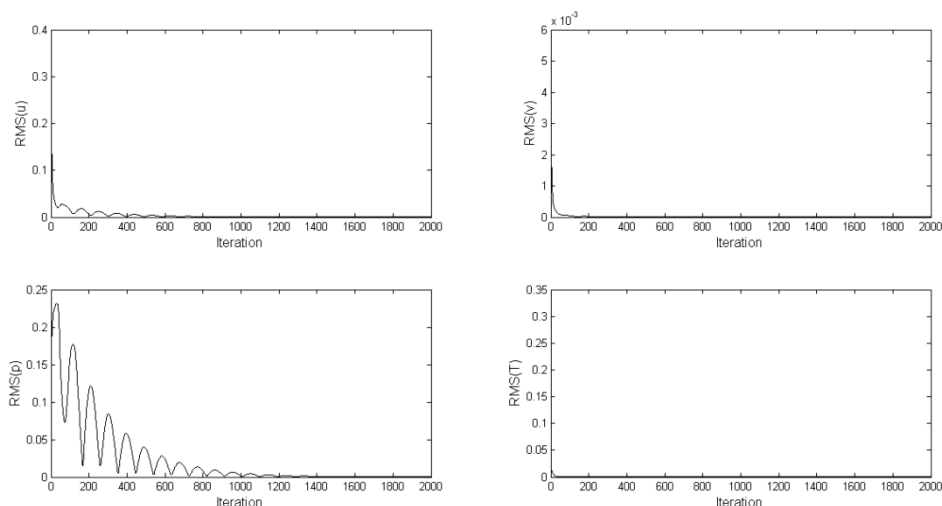
۴-۱-۲ بررسی نتایج سیال خالص

پس از شبکه بندی مساله اکنون به حل معادلات بی بعد حاکم بر مساله می پردازیم. اعداد بی بعدی که در معادلات حاکم (۳-۲۱) تا (۳-۲۴) دخالت دارند، Re و Pr می باشند که قبل از شروع حل باید به برنامه داده شوند. اعداد رینولدز در محدوده وسیعی از ۲۰ تا ۱۵۰۰ برای برنامه تعریف می شوند و عدد پرانتل سیال نیز در تمام فرآیند حل برای سیال خاص و نانو سیال $7/0.2$ در نظر گرفته شده است. شرط همگرایی و توقف فرآیند تکرار 10^{-7} $RMS <$ است که RMS برای یک ماتریس فرضی $A_{n \times m}$ به صورت زیر تعریف می شود [۵۲]:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |A_{i,j} - A^p_{i,j}|}{n \times m}}$$

که در رابطه بالا A و A^p به ترتیب نشان دهنده ماتریس نتایج در مرحله کنونی و مرحله قبلی تکرار هستند. همگرایی برای هریک از ماتریس های u و v و ρ و T بررسی می شوند و تا زمانی که تمام ماتریس ها به شرط 10^{-7} $RMS <$ برسند، برنامه به تکرارهای خود ادامه خواهد داد. نتایج را در شکل های زیر ملاحظه می کنید.

هنگامی که در ماتریس سرعت u ، RMS به سمت 10^{-7} میل کند، تغییرات u نسبت به مراحل قبلی کمتر می شود و با توجه به $\dot{m} = \rho u A_s$ که شار جرم عبوری از هر حجم کنترل در جهت x است، اختلاف میان شارهای عبوری در مراحل تکرار نیز

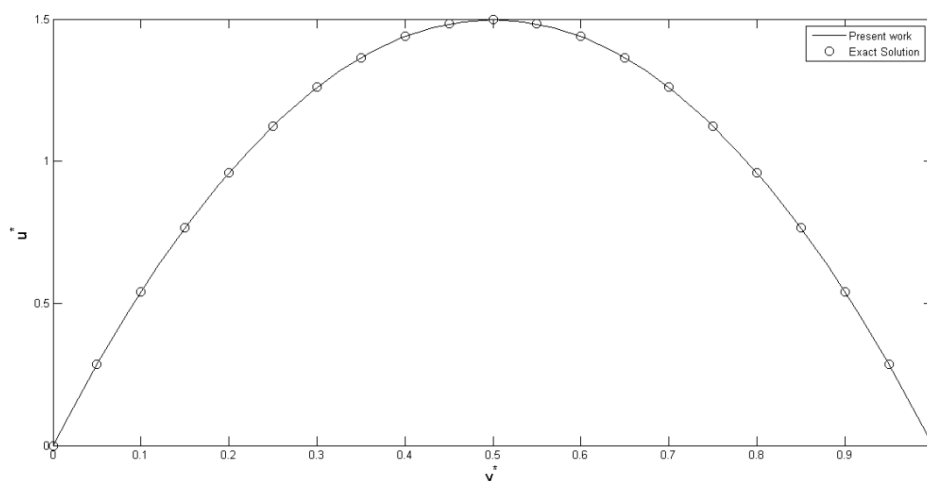


شکل (۳-۴) تغییرات RMS در تکرارهای متوالی برای u, v, p, T ، دقت خطا 10^{-7}

کمر شده و بنابراین جرم باقیمانده در هر حجم کنترل به سمت صفر میل می کند. در ناحیه توسعه یافته، تغییرات فشار نسبت به x ثابت است و از آنجایی که برای جریان آرام بین دو صفحه تخت موازی $u_{\max} = \frac{2}{3}u_{in}$ و با توجه به هندسه شکل (۱-۳) رابطه تحلیلی زیر برای پروفیل سرعت در ناحیه توسعه یافته بدست می آید [۴۸]:

$$u = \frac{-6u_{in}y^2}{w} \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{y} \right)$$

مقایسه نتایج حل عددی و حل تحلیلی جریان را در شکل (۴-۴) ملاحظه می کنید. از طرفی معیار توسعه یافتگی هیدرودینامیکی جریان نتایج تجربی است که توسط "دورست" ارائه شده است [۴۹]. جدول (۱-۴) طول توسعه یافتگی را که توسط نتایج تجربی بدست آمده با نتایج عددی در اعداد رینولدز مختلف مقایسه می کنند. همچنین سایر نمودارهای تغییرات مربوط به کانتورهای u و v و p و T در جهات x و y در شکل (۵-۴) نشان داده شده اند. برای بررسی صحت حل معادله انرژی عدد ناسلت را بررسی کرده ایم.



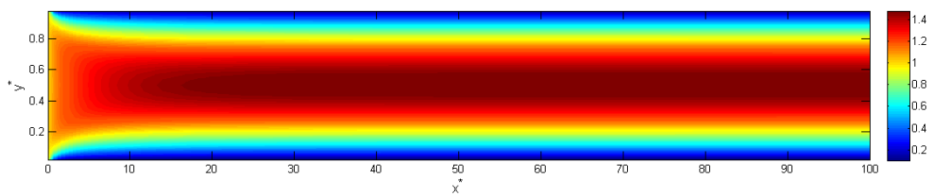
شکل (۴-۴) مقایسه حل تحلیلی و حل عددی در $Re=500$ و $x^*=85$

جدول (۴-۱) مقایسه طول توسعه یافتگی هیدرودینامیکی بی بعد با نتایج تجربی

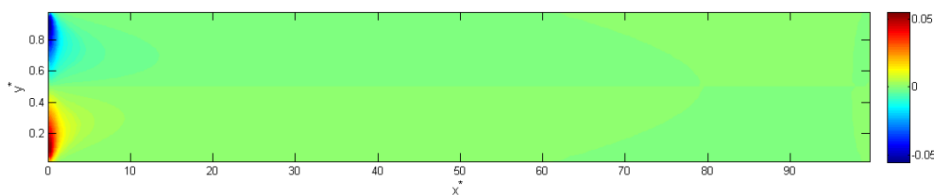
درصد خطا	نتایج آزمایشگاهی	حل عددی	Re
۷,۸	۱,۱۷۷۹۸۷	۱,۲۷۱	۲۰
۴,۶	۲,۳۹۱۴۸۲	۲,۵۰۳	۵۰
۵,۴	۴,۵۴۱۶۵۱	۴,۷۹	۱۰۰
۵,۲	۸,۹۲۰۶۹۹	۹,۳۹	۲۰۰
۳,۰۹	۲۲,۱۴۶۶۷	۲۳,۰۳	۵۰۰
۲,۸	۴۴,۲۳۰۸	۴۵,۴۷	۱۰۰۰
۳,۸	۶۶,۳۲۴۱۵	۶۸,۹۷	۱۵۰۰

طبق روابط معرفی شده عدد ناسلت در فصل گذشته، برای سیال خالص $K_{nf} = K_f$ در رابطه قرار می گیرد. در اعداد رینولدز مختلف نمودارهای عدد ناسلت محلی به صورت تابعی از x در شکل نشان داده شده است. حل تحلیلی برای بدست آوردن عدد ناسلت در ناحیه توسعه یافته در کانال، همراه با شار حرارتی ثابت و دمای ثابت دیواره به ترتیب به اعداد $۸/۲۳۵$ و $۷/۵۴$ همگرا می شود [۴۶]. همان طور که ملاحظه می کنید، در اعداد رینولدز پایین که توسعه یافتگی حرارتی در طول بازه مساله اتفاق افتاده است، نمودار عدد ناسلت در نهایت به سمت عدد مذکور میل می کند. اما در اعداد رینولدز بالاتر، جریان در طول کانال به توسعه یافتگی حرارتی نرسیده است. در مراجع موجود سری

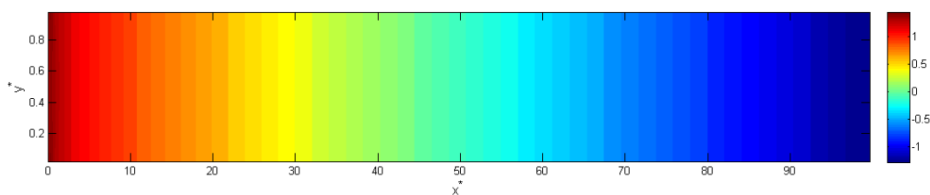
هایی برای حل تحلیلی عدد ناسلت موضعی در ناحیه در حال توسعه ارائه شده اند. اما تنها جملات



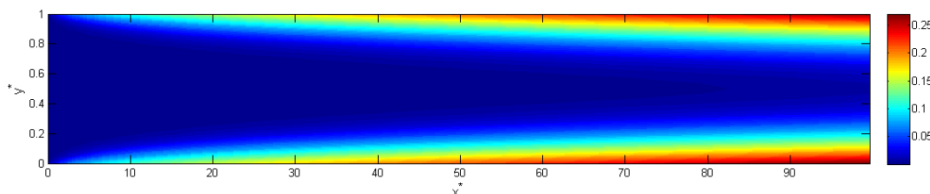
(الف)



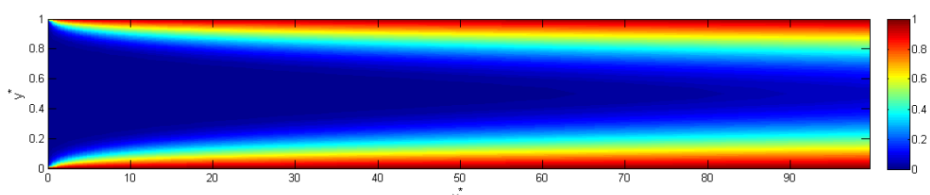
(ب)



(پ)



(ت)

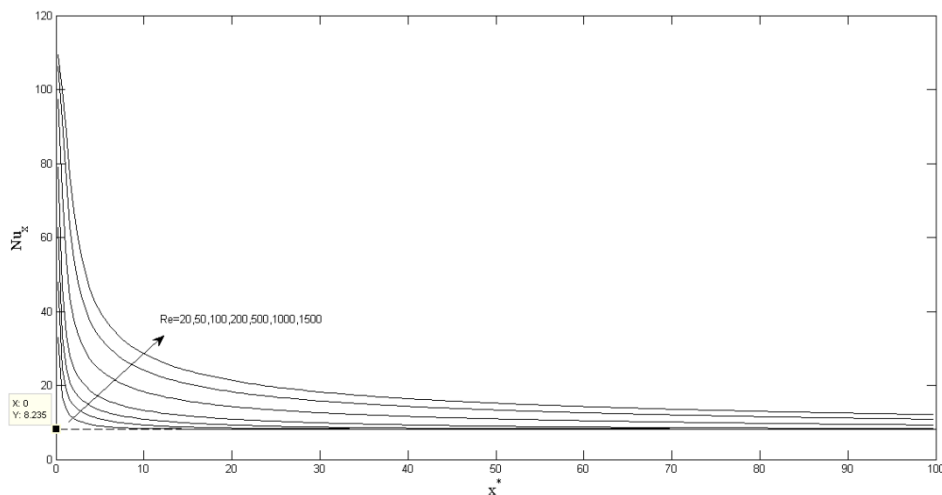


(ث)

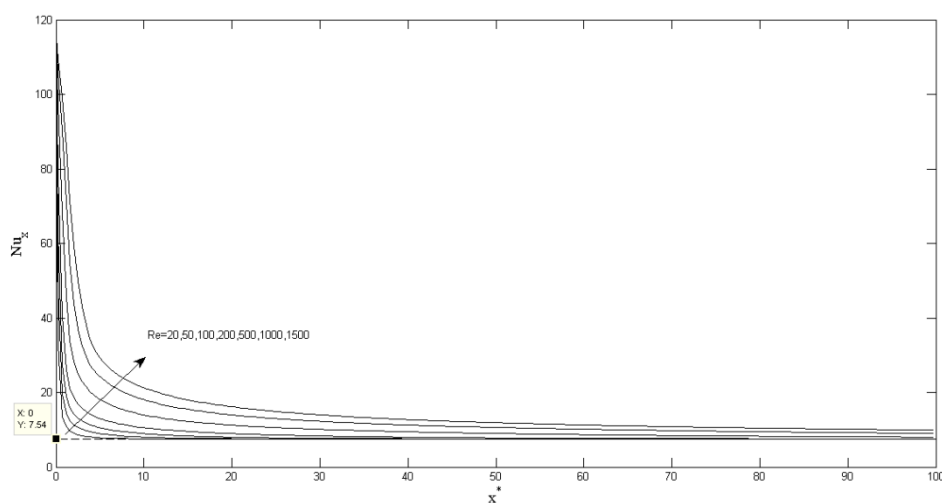
شکل (۴-۵) کانتورها (الف) سرعت u (ب) سرعت v (پ) فشار p (ت) دما T ، شار حرارتی ثابت دیواره

(ث) دما T ، دمای ثابت دیواره

محدودی از این سری ها در دست می باشند و برای محدوده خاصی از طول ناحیه در حال توسعه صادق می باشند [۴۶]. روابط زیر برای عدد ناسلت روی دیواره های کانال ارائه شده اند.



(الف)



(ب)

شکل (۴-۶) تغییرات عدد ناسلت محلی روی دیوار در اعداد رینولدز مختلف (الف) شار حرارتی ثابت دیواره

(ب) دمای ثابت دیواره

(الف) شار حرارتی ثابت:

$$Nu_{up} = \frac{Nu_{ii}}{1 - \left(\frac{q''_{down}}{q''_{up}}\right)\theta^*_i}$$

$$Nu_{down} = \frac{Nu_{oo}}{1 - \left(\frac{q''_{up}}{q''_{down}}\right)\theta^*_o}$$

که q''_{down} و q''_{up} به ترتیب نشان دهنده شار حرارتی روی صفحه بالایی و پایینی

کانال می باشند. اگر در هر دو صفحه شارهای حرارتی برابر داشته باشیم، نسبت دو شار به یکدیگر

برابر یک خواهد بود. مقادیر Nu_{oo} و Nu_{ii} و θ^*_i و θ^*_o در جدول (۲-۴) آمده اند. همچنین در روابط

بالا

$$x^+ = \frac{2\left(\frac{x^*}{D_h}\right)}{Re.Pr}$$

جدول (۲-۴) ثابتهای روابط ارائه شده برای عدد ناسلت موضعی - شار حرارتی ثابت

θ^*_o	θ^*_i	Nu_{oo}	Nu_{ii}	x^+
۰,۰۱۱۷۵	۰,۰۱۱۷۵	۲۳,۵	۲۳,۵	۰,۰۰۰۵
۰,۰۵۶	۰,۰۵۶	۱۱,۲	۱۱,۲	۰,۰۰۵
۰,۱۴۹۱	۰,۱۴۹۱	۷,۴۹	۷,۴۹	۰,۰۲
۰,۳۲۷	۰,۳۲۷	۵,۵۵	۵,۵۵	۰,۱
۰,۳۴۶	۰,۳۴۶	۵,۳۹	۵,۳۹	۰,۲۵
۰,۳۴۶	۰,۳۴۶	۵,۳۸	۵,۳۸	∞

ب) دمای ثابت دیواره:

سری زیر برای حالتی که دیواره های کانال در دمای ثابت نگه داشته شوند، ارائه شده است. حل

های طول ورودی حرارتی به وسیله انتگرال گیری عددی برای سطح دما ثابت به دست آمده اند.

$$Nu_x = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n \exp(-\lambda_n^2 x^+)}{2 \sum_{n=0}^{\infty} (G_n / \lambda_n^2) \exp(-\lambda_n^2 x^+)}$$

که ثابت ها از جدول زیر محاسبه می شوند:

جدول (۳-۴) ثابتهای روابط ارائه شده برای عدد ناسلت موضعی - دمای ثابت دیوار

G_n	λ_n^2	n
۱,۷۱۷	۱۵,۰۹	۰
۱,۱۳۹	۱۷۱,۳	۱
۰,۹۵۲	۴۹۸	۲

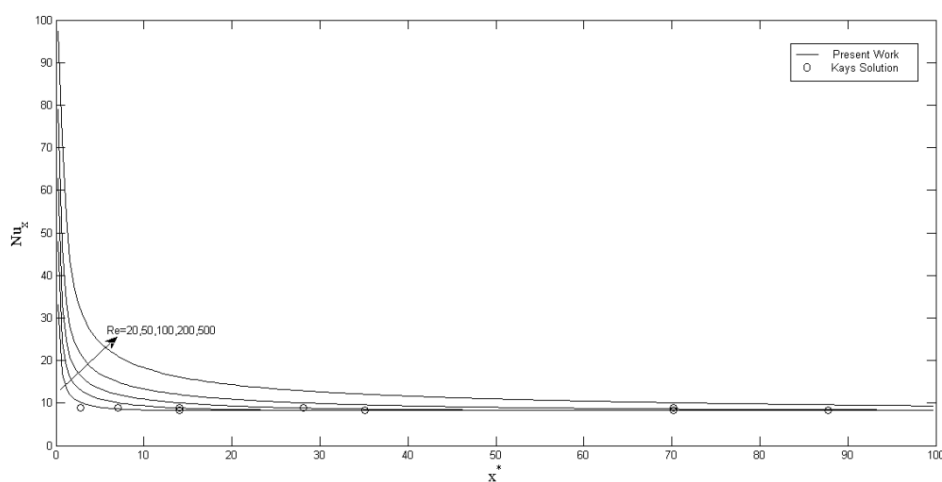
و برای n های بزرگتر

$$\lambda_n = 14 \sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{20}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

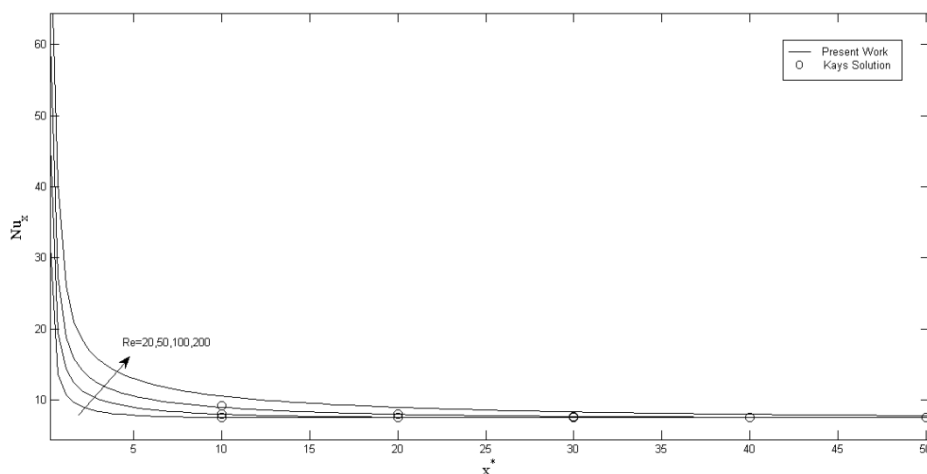
$$G_n = 2.68 \lambda_n^{-\frac{1}{3}}$$

روابط بالا تنها برای $x^+ > 0.1$ صادق می باشند. مطابقت های بی را که در دامنه تعریف روابط بالا بوده

اند، در شکل (۷-۴) ارائه شده اند.



(الف)



(ب)

شکل (۷-۴) مقایسه حل عددی و تحلیلی عدد ناسلت محلی روی دیواره الف) شار حرارتی ثابت دیواره ب)دمای ثابت

دیواره

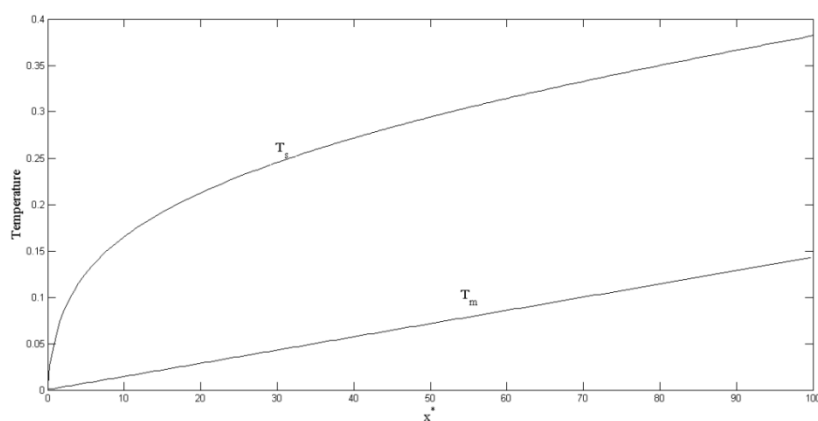
حال، اگر شار حرارتی ثابت روی دیواره های کانال برقرار باشد، در ناحیه توسعه یافته حرارتی که عدد ناسلت و ضریب انتقال حرارت جایجایی اعداد ثابتی هستند، داریم [۴۶]:

$$q'' = h_x(T_m - T_s)$$

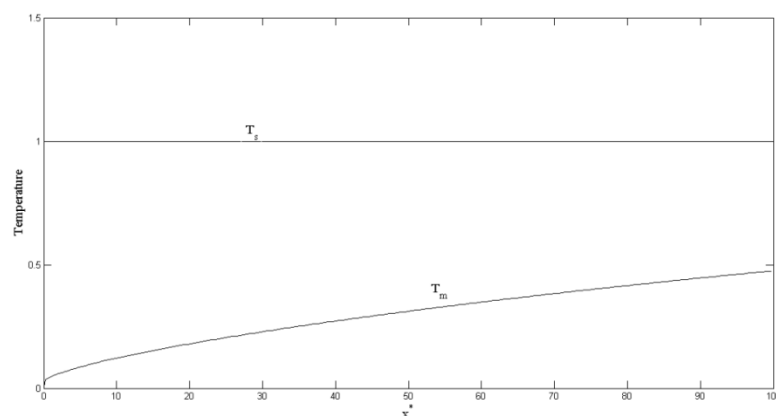
$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{q''}{h_x} \right) = \frac{\partial T_m^*}{\partial x^*} - \frac{\partial T_s^*}{\partial x^*}$$

$$\rightarrow \frac{\partial T_m^*}{\partial x^*} = \frac{\partial T_s^*}{\partial x^*}$$

پس گرادیان های دمای میانگین و دمای صفحه در ناحیه توسعه یافته حرارتی با یکدیگر برابرند. این امر به وضوح در شکل (۸-۴) قابل مشاهده است. تنش برشی محلی بی بعد روی صفحه نیز در ناحیه توسعه یافته طبق نتایج موجود در منابع برابر با ۶ می باشد [۵۰].



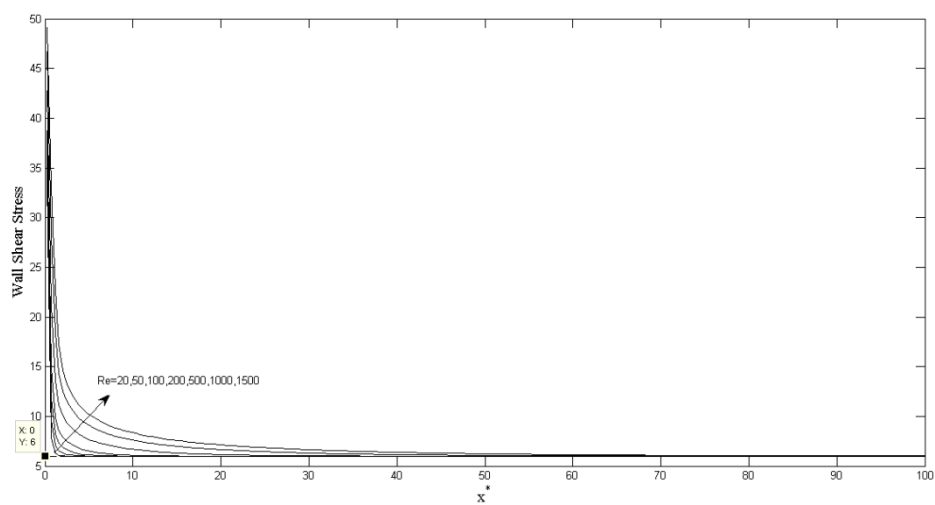
(الف)



(ب)

شکل (۸-۴) تغییرات دمای دیوار و دمای منوسه در طول کانال، $Re=200$ (الف) شار حرارتی ثابت

دیواره (ب) دمای ثابت دیواره



شکل (۴-۹) تغییرات تنش برشی محلی روی صفحه

4-2 نتایج نانوسیال مس-آب

از آنجایی که پارامترها و خواص نانو سیال که در معادلات ممنوم حاکم دخیل هستند، وابستگی به دما ندارند، لذا در طول فرآیند حل و تحت هریک از شرایط مرزی شار حرارتی ثابت یا دمای ثابت دیواره و شرایط هیدرودینامیکی یکسان، رفتارهای یکسان هیدرودینامیکی را از نانو سیال شاهد خواهیم بود. بنابراین ابتدا به بررسی هیدرودینامیکی نانوسیال و تغییرات آن نسبت به سیال خالص پرداخته و سپس معادلات انرژی را در شرایط مرزی مختلف بررسی خواهیم کرد.

4-2-1 بررسی رفتارهای هیدرودینامیکی

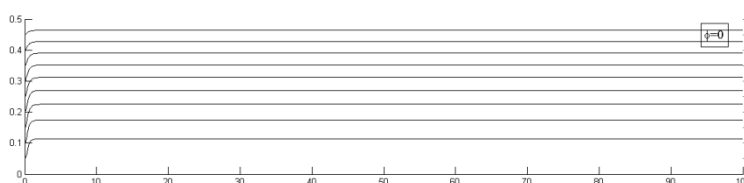
خطوط جریان در اعداد رینولدز ۵۰۰، ۱۰۰، ۲۰، و ۱۵۰۰ با درصدهای حجمی ۰، ۱، ۳، ۵، رسم شده اند. چنانچه مشاهده می شود، خطوط جریان نسبت به حالت سیال خالص تفاوت چندانی را نشان نمی دهند و نهایتاً در همان فاصله ارائه شده در جدول (۴-۱) به توسعه یافتگی می رسند. بنابراین با اضافه کردن نانوذرات فلزی مس به سیال پایه آب خطوط جریان که از معادله زیر بدست آمده اند، تغییر نکرده و ثابت باقی خواهند ماند.

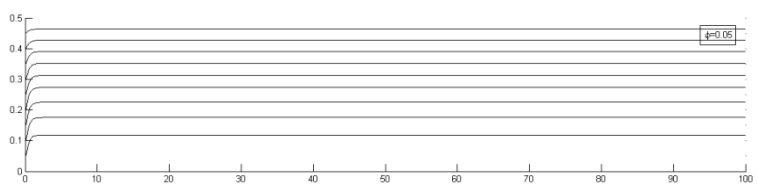
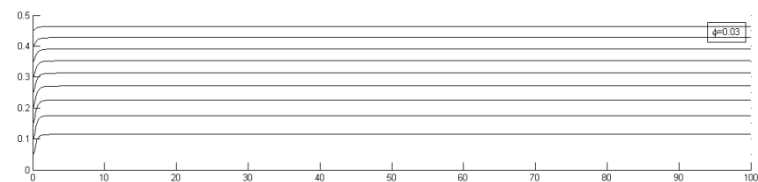
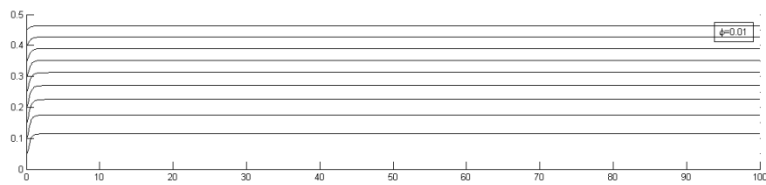
$$u^* = \frac{\partial \psi}{\partial y^*}, \quad v^* = -\frac{\partial \psi}{\partial x^*}$$

$$\psi(x^*, y^*) = \int_{y_0^*}^{y^*} u^* \partial y^* + \psi(x^*, y_0^*)$$

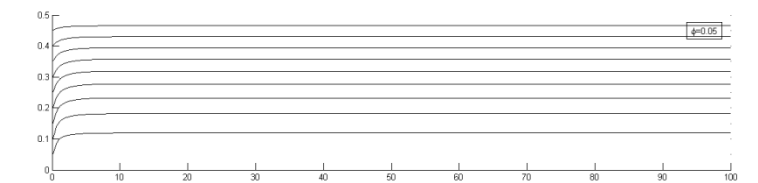
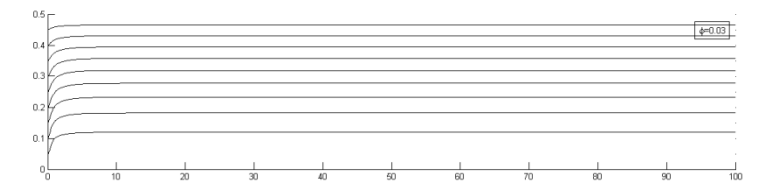
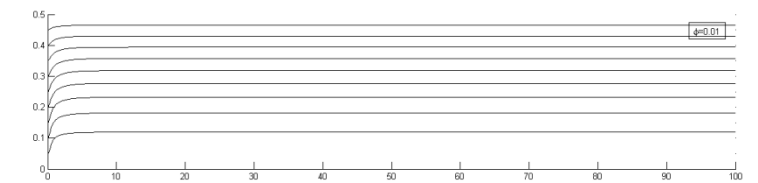
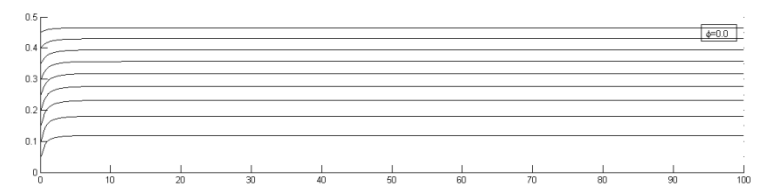
در مرزهای جامد خطوط جریان صفر در نظر گرفته می شوند.

نمودارهای تنش برشی روی دیواره کانال در محدوده گسترده ای از اعداد رینولدز و درصدهای حجمی ترکیب مورد بررسی قرار گرفته اند. شکل‌های (۴-۱۳) نشان می دهند که در جریان آرام داخل کانال با افزایش درصد حجمی نانوذرات جامد، تنش برشی به مقدار اندکی افزایش نشان می دهد که این امر با یافته های "مایگا" مطابقت دارد [۲۷].

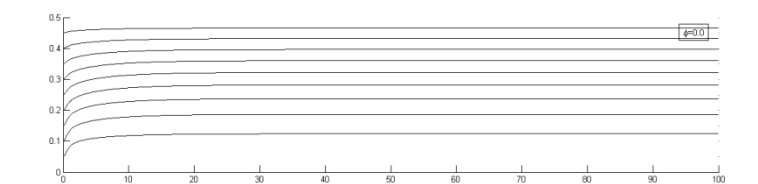


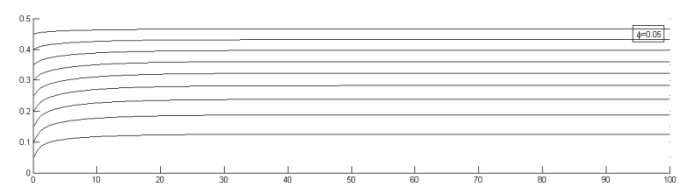
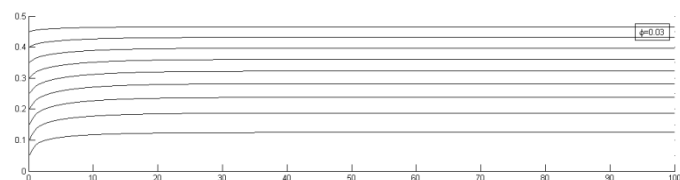
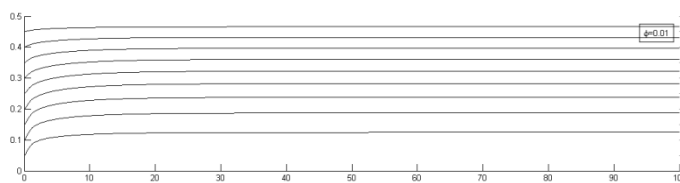


شکل (۴-۱۰) خطوط جریان برای درصدهای حجمی مختلف و $Re=20$

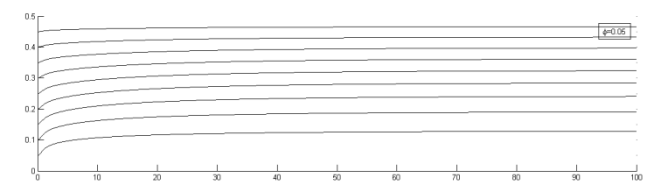
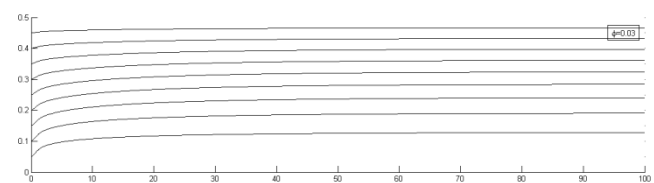
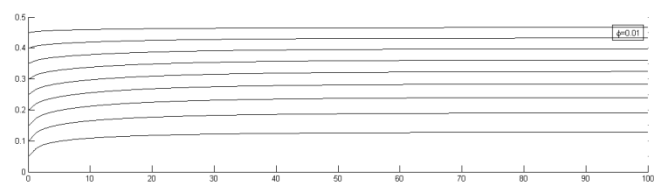
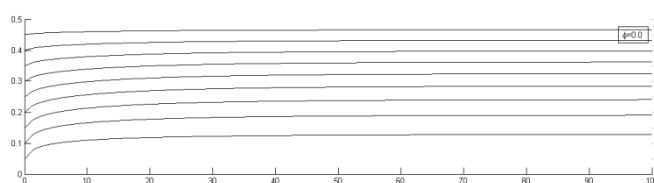


شکل (۴-۱۱) خطوط جریان برای درصدهای حجمی مختلف و $Re=100$

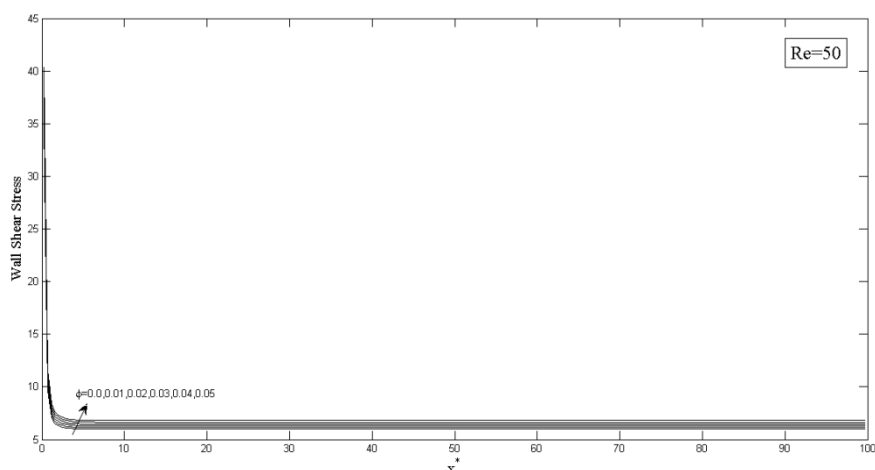




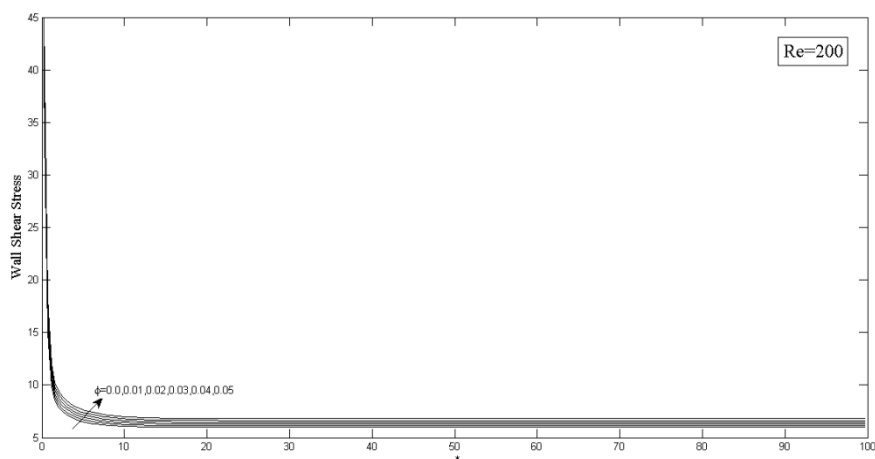
شکل (۴-۱۲) خطوط جریان برای درصدهای حجمی مختلف و $Re=500$



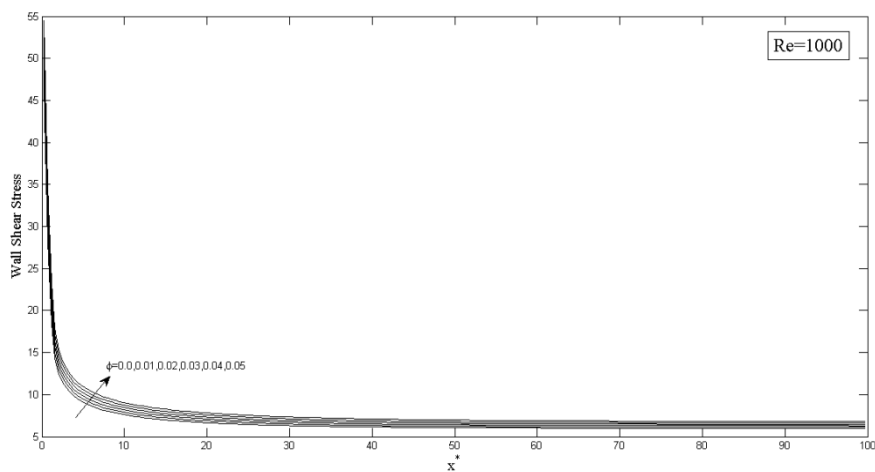
شکل (۴-۱۲) خطوط جریان برای درصدهای حجمی مختلف و $Re=1500$



(الف)



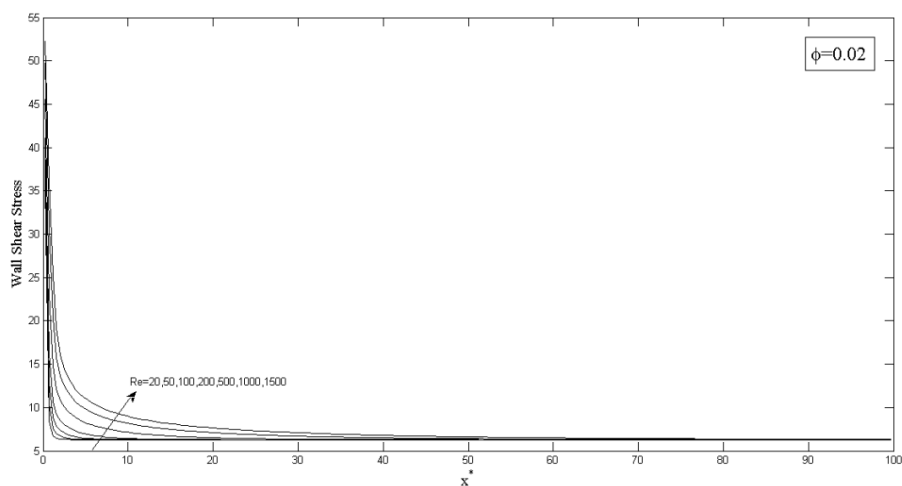
(ب)



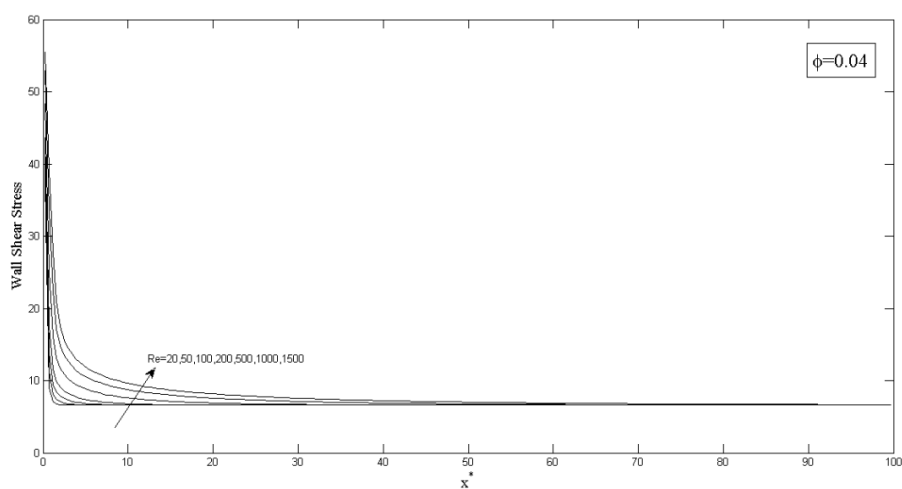
(پ)

شکل (۴-۱۳) تغییرات تنش برشی روی دیوار برای درصدهای حجمی مختلف (الف) $Re=50$

(ب) $Re=200$ (پ) $Re=1000$

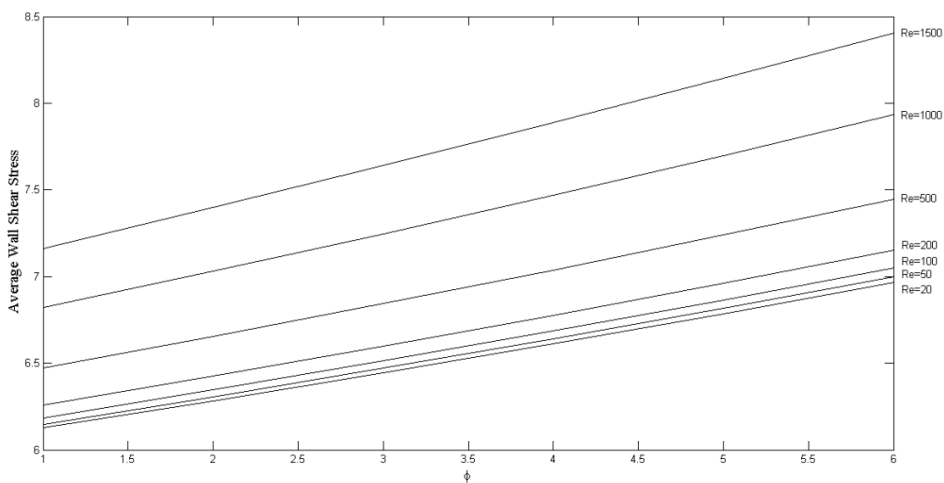


الف



ب

شکل (۴-۱۴) تغییرات تنش برشی روی دیوار در اعداد رینولدز مختلف الف) $\phi = 0.02$ ب) $\phi = 0.04$

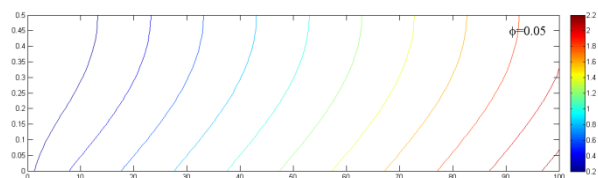
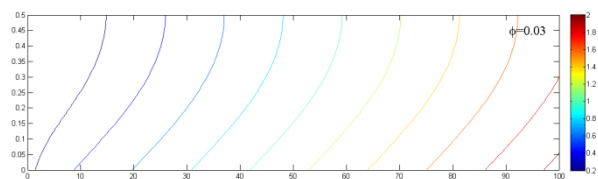
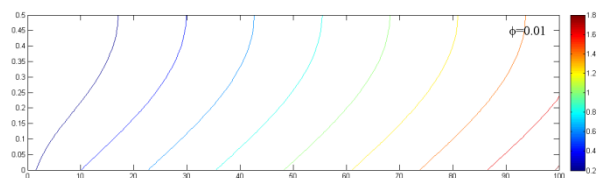
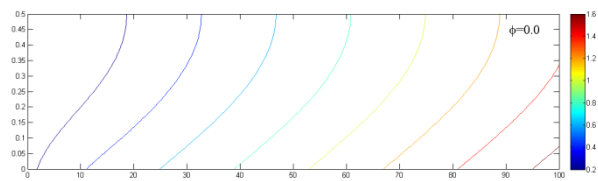


شکل (۴-۱۵) توزیع تنش برشی متوسط روی دیوار در اعداد رینولدز و درصدهای حجمی مختلف

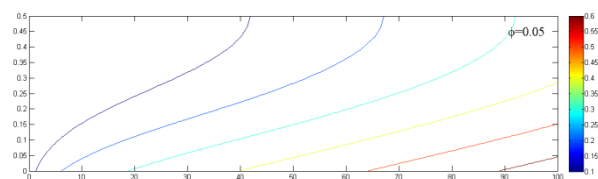
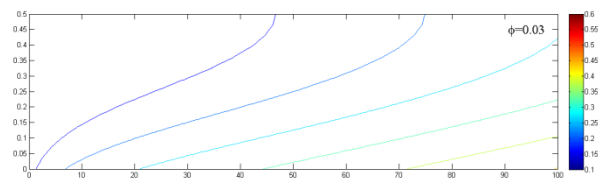
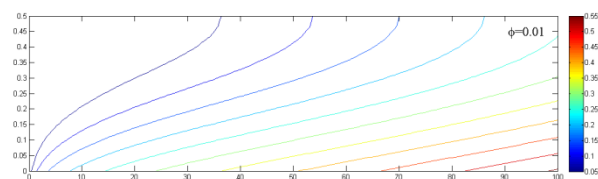
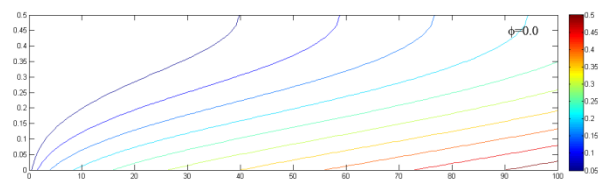
مشاهده می شود که در ناحیه توسعه یافته تنش برشی روی سطح همچنان در طول کانال بدون تغییر باقی می ماند. یکی از دلایل افزایش تنش برشی با افزایش درصد حجمی نانو ذرات جامد، افزایش ویسکوزیته موثر نانو سیال است. طبق رابطه (۳-۳۴) با افزایش درصد حجمی، ویسکوزیته موثر نانوسیال نیز افزایش می یابد و افزایش ویسکوزیته موثر، منجر به بیشتر شدن تنش برشی روی سطح می شود. اما در یک درصد حجمی ثابت، با تغییر عدد رینولدز، تغییری در نمودار تنش برشی در ناحیه توسعه یافته هیدرودینامیکی ایجاد نمی شود. در رینولدزهای بالاتر، حتی شاهد کاهش تنش برشی محلی در ناحیه توسعه یافته و در یک ϕ ثابت هستیم. این نتایج با نتایج بدست آمده توسط "سانترا" برای نانو سیال نیوتنی مطابقت دارد [۵۱]. تغییرات تنش برشی متوسط در طول کانال را در اعداد رینولدز مختلف و درصد های حجمی 0.0 و تا 0.05 در شکل نشان داده شده اند. ملاحظه می کنید که در اعداد رینولدز بالاتر، با بالا رفتن مقدار ϕ نمودار با سرعت بیشتری رشد می کند.

۲-۲-۴ شرط مرزی شار حرارتی ثابت دیواره

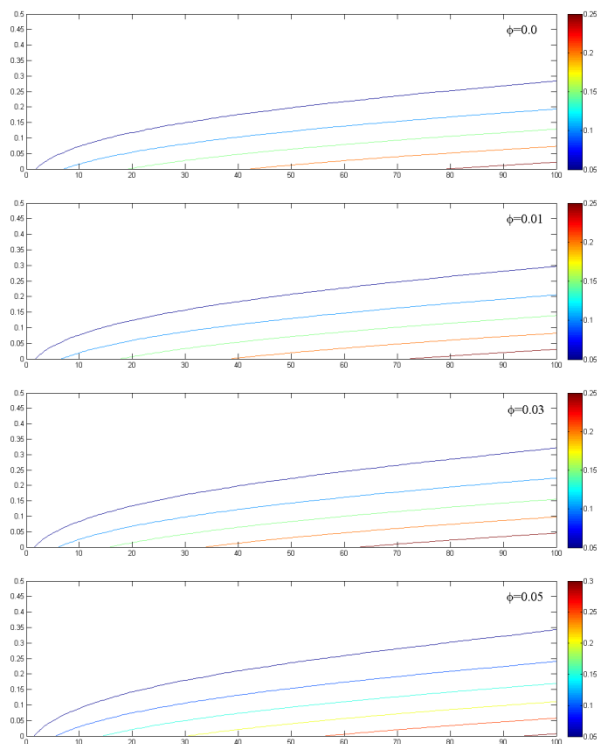
بررسی معادله انرژی در محدوده گسترده ای از اعداد رینولدز و درصد های حجمی مخلوط انجام شده است. پس از بررسی خطوط همدمای که در شکل های (۴-۱۶) تا (۴-۱۹) ترسیم شده اند، ملاحظه می شود که با افزایش درصد حجمی نانوذرات به سیال پایه، این خطوط تغییرات قابل ملاحظه ای از خود نشان می دهند. خطوط همدمای به سمت خط مرکزی کانال تغییر مکان داده اند. بنابراین ضخامت لایه مرزی حرارتی در یک فاصله یکسان از ورودی کانال، با افزایش درصد حجمی نانوذرات، افزایش داشته است. همانطور که از آزمایشات مختلف توسط محققین بدست آمده بود، افزودن نانوذرات به سیال های پایه مانند آب، رسانایی گرمایی این سیالات را به میزان قابل توجهی بالا می برد. بنابراین انتقال حرارت از دیواره به سیال عبورکننده از کانال افزایش یافته و باعث



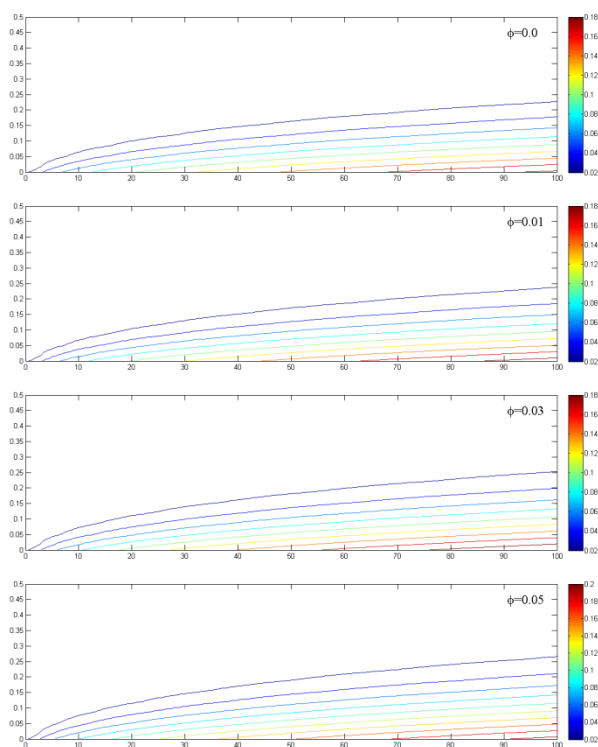
شکل (۴-۱۶) خطوط همدمای برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=20$



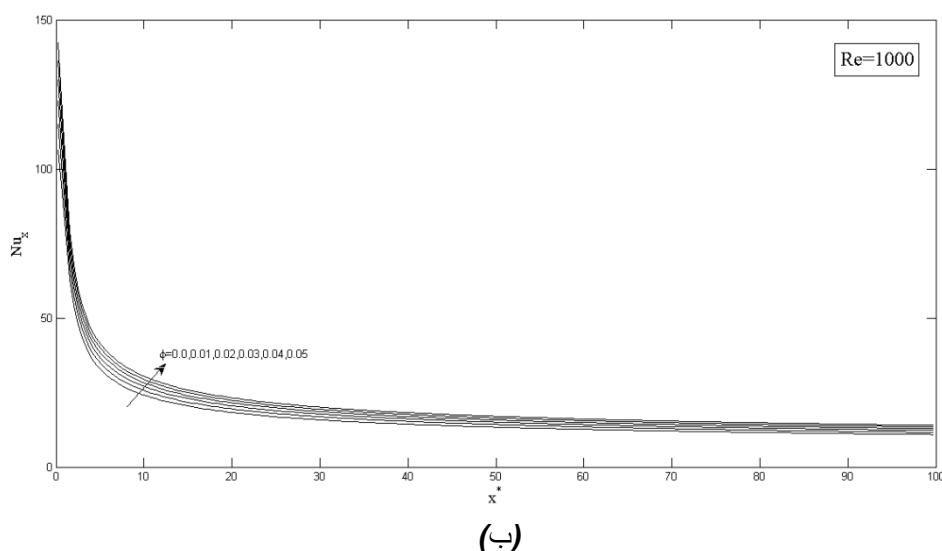
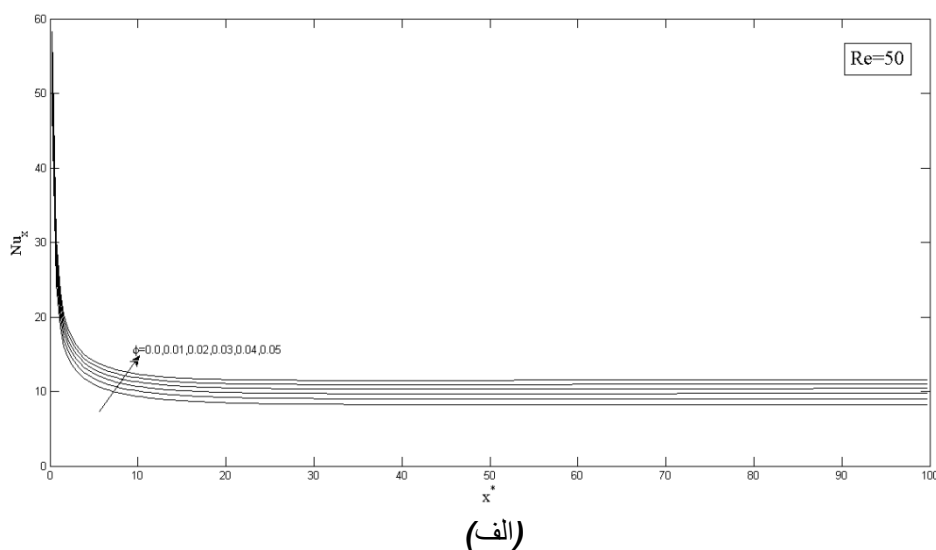
(۴-۱۷) خطوط همدمای برای درصد‌های حجمی مختلف و $Re=100$



(۱۸-۴) خطوط همدمما برای درصدهای حجمی مختلف و $Re=500$

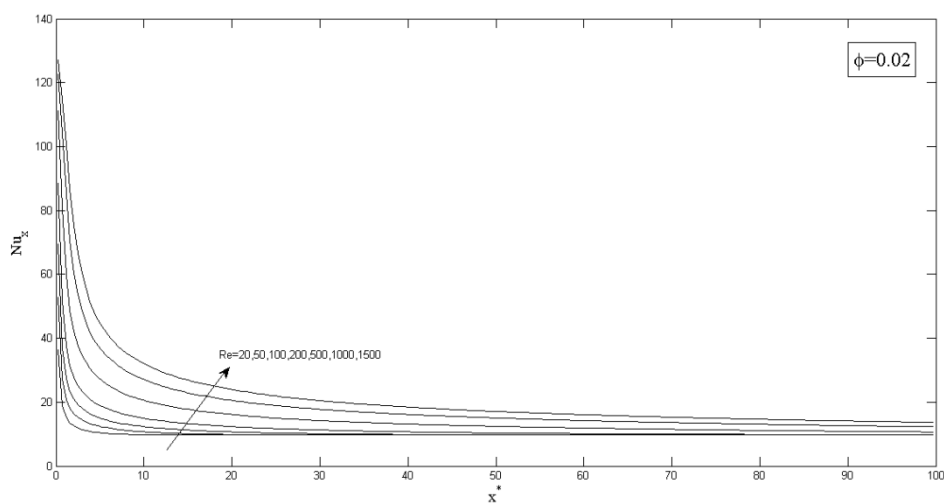


(۱۹-۴) خطوط همدمما برای درصدهای حجمی مختلف و $Re=1500$

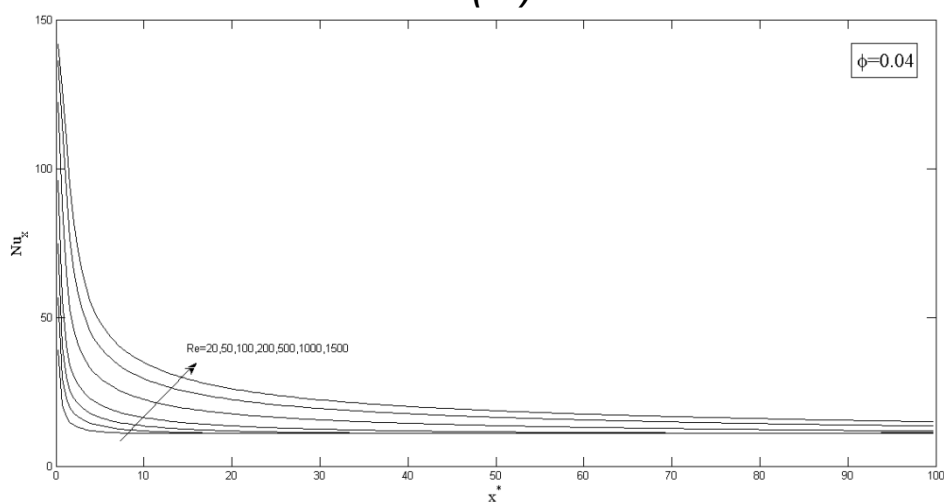


شکل (۴-۲۰) تغییرات عدد ناسلت برای درصدهای حجمی مختلف الف) $Re=50$ ب) $Re=1000$

افزایش ضخامت لایه مرزی شده و طول توسعه یافتگی حرارتی کاهش می یابد. از طرفی عدد ناسلت موضعی نیز در طول کانال با افزایش درصد حجمی نانوذرات، تغییرات زیادی از خود نشان می دهد. این تغییرات برای $Re=50, 1000$ در شکل (۴-۲۰) رسم شده اند. مشاهده می شود که این تغییرات در اعداد رینولدز بالاتر کمتر می باشد. همچنین در یک درصد حجمی ثابت، افزایش عدد رینولدز باعث افزایش عدد ناسلت موضعی شده است. درصد تغییرات عدد ناسلت متوسط روی صفحه در اعداد رینولدز مختلف و محدوده وسیعی از درصدهای حجمی نانوذرات در جدول (۴-۳) موجود می باشد. با توجه به توضیحات بالا و نتایج جدول می توان نتیجه گرفت که تغییرات عدد ناسلت متوسط در اعداد رینولدز بالاتر، با افزایش درصد حجمی نانوذرات کمتر است.



(الف)

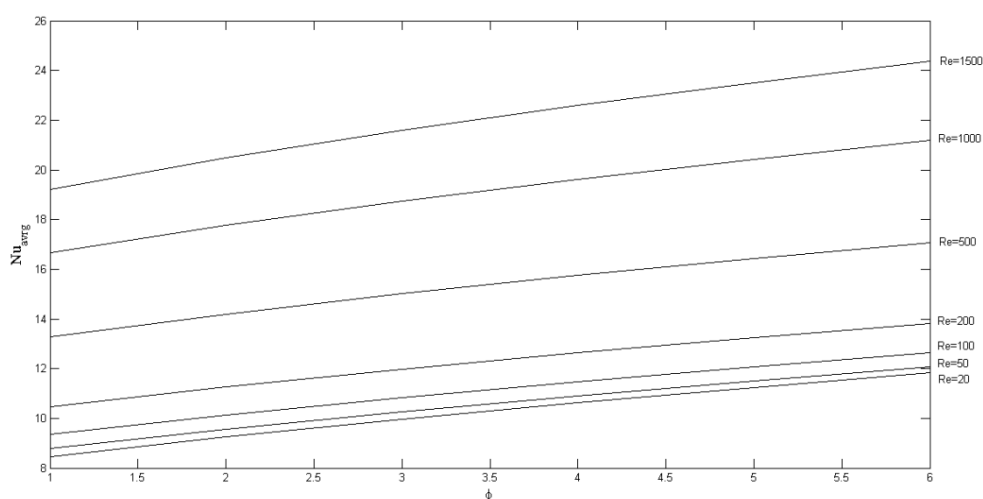


(ب)

شکل (۴-۲۱) تغییرات عدد ناسلت در اعداد رینولدز مختلف الف) $\phi = 0.02$ ب) $\phi = 0.04$

جدول (۴-۴) درصد افزایش عدد ناسلت متوسط روی صفحه نسبت به سیال خالص - شار حرارتی ثابت

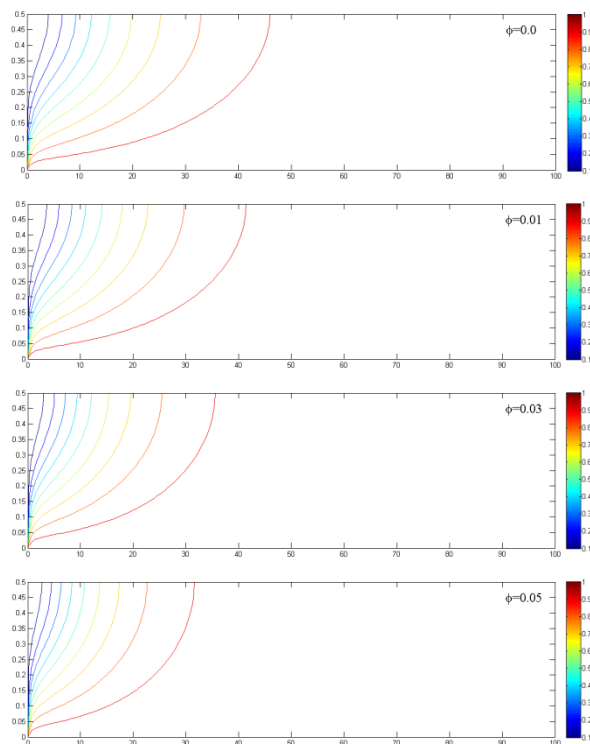
	Re						
ϕ	20	50	100	200	500	1000	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0.01	9.594372	8.922051	8.332477972	7.602959	6.887971	6.651622	6.570746
0.02	18.10855	16.87733	15.77481802	14.38191	12.97184	12.4984	12.33248
0.03	25.9045	24.18291	22.61733019	20.60682	18.5117	17.79635	17.53987
0.04	33.18495	31.01916	29.02572052	26.43138	23.65583	22.69162	22.33858
0.05	40.07714	37.50038	35.10521303	31.95285	28.49822	27.27689	26.82119



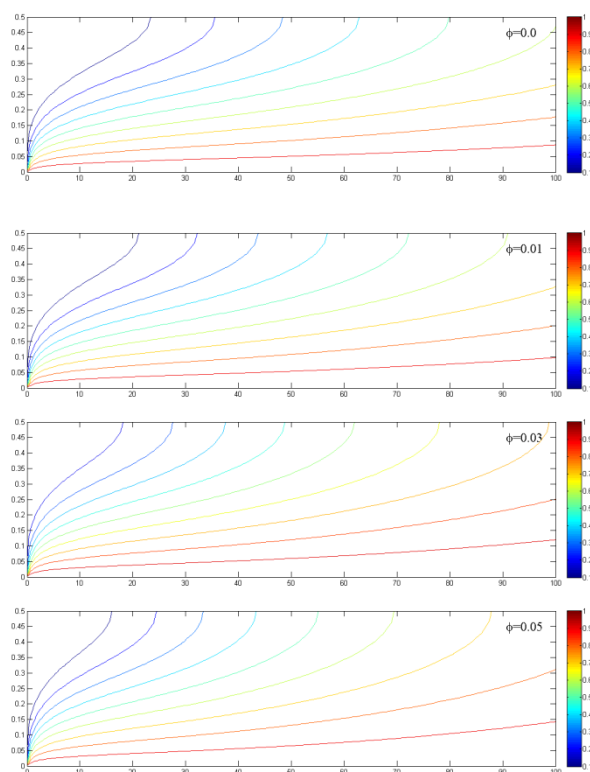
شکل (۴-۲۲) توزیع عدد ناسلت متوسط در اعداد رینولدز و درصد های حجمی مختلف

۴-۲-۳ شرط مرزی دمای ثابت دیواره

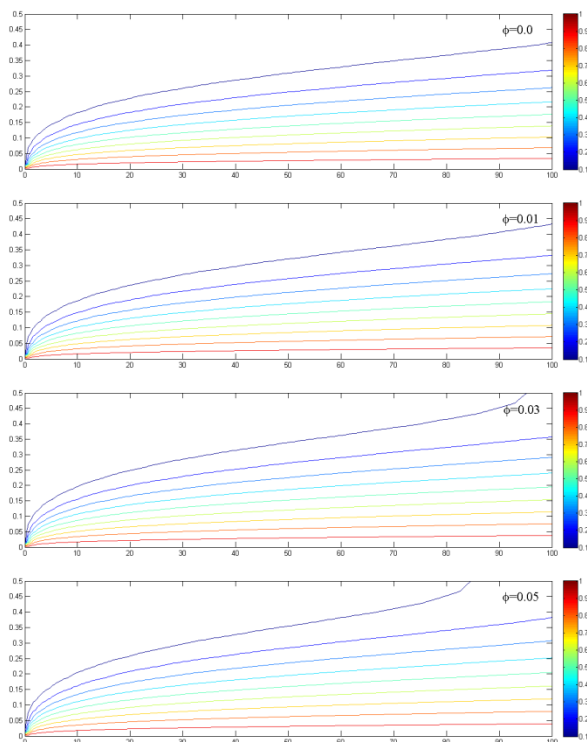
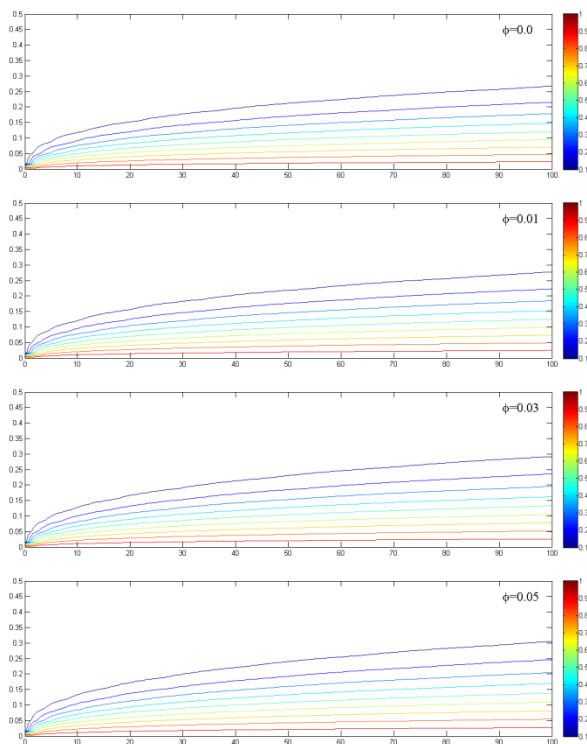
در این قسمت هم شاهد افزایش انتقال حرارت و عدد ناسلت با افزایش درصد حجمی نانوذرات هستیم. تمامی دلایل مربوط به این تغییرات همانند قسمت قبل می باشند. تفاوت تنها در مقدار و درصد افزایش انتقال حرارت می باشد. درصد های افزایش عدد ناسلت متوسط در اعداد رینولدز و درصد های حجمی مختلف در جدول (۴-۴) آورده شده اند.

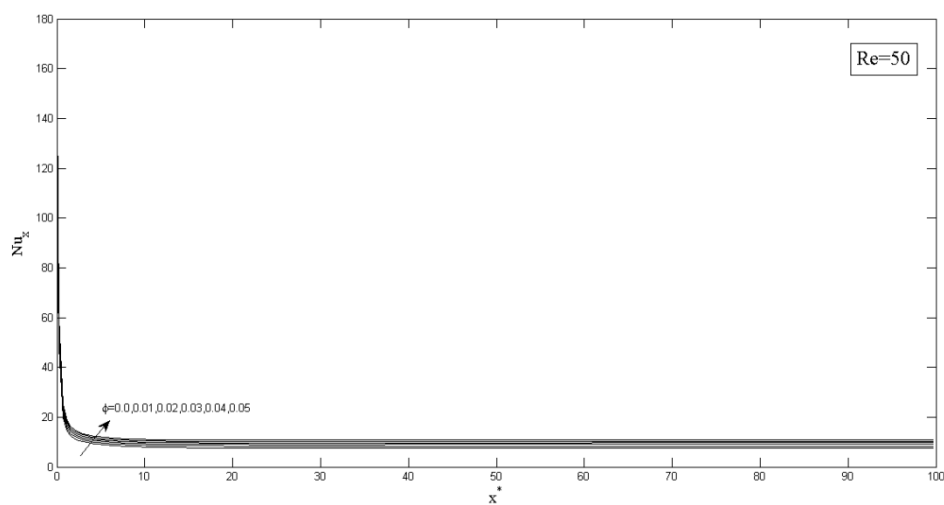


شکل (۴-۲۳) خطوط همدمما برای درصدهای حجمی مختلف و $Re=20$

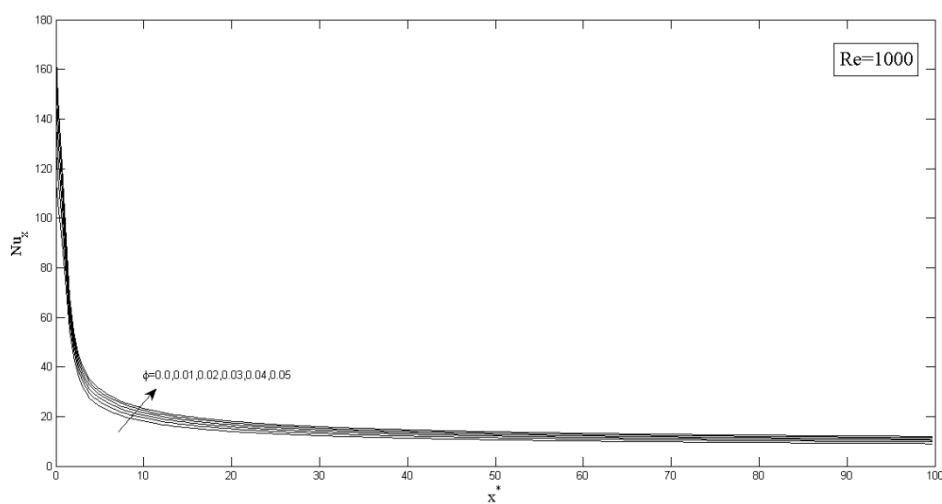


شکل (۴-۲۴) خطوط همدمما برای درصدهای حجمی مختلف و $Re=100$

شکل (۴-۲۵) خطوط همدمای برای درصدهای حجمی مختلف و $Re=500$ شکل (۴-۲۶) خطوط همدمای برای درصدهای حجمی مختلف و $Re=1500$



(الف)

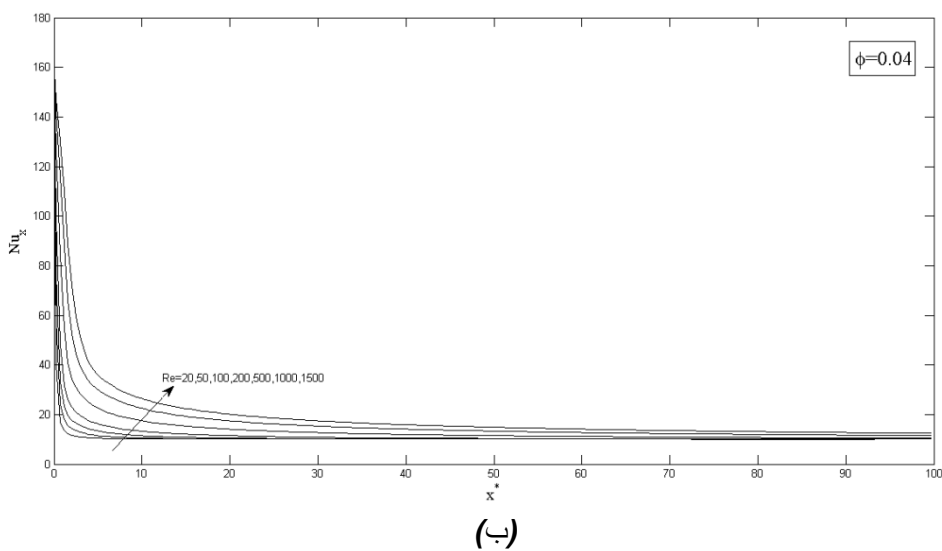
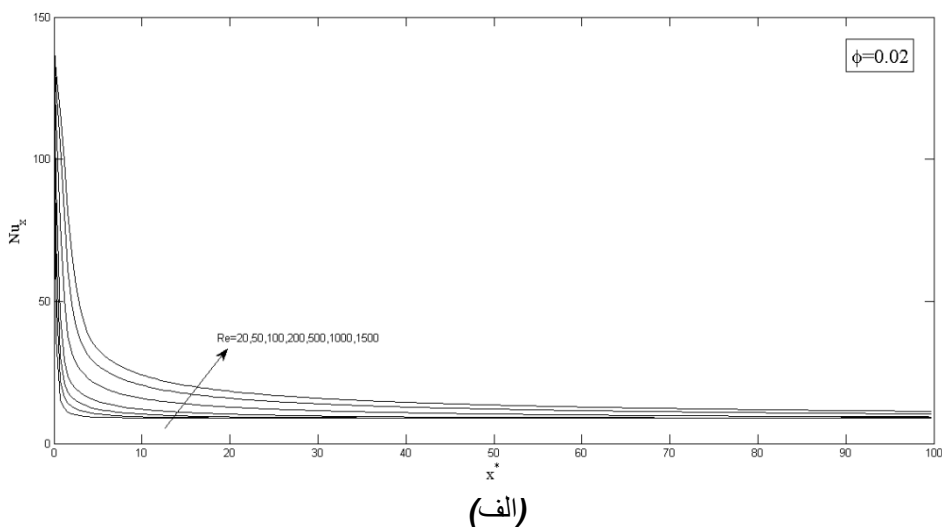


(ب)

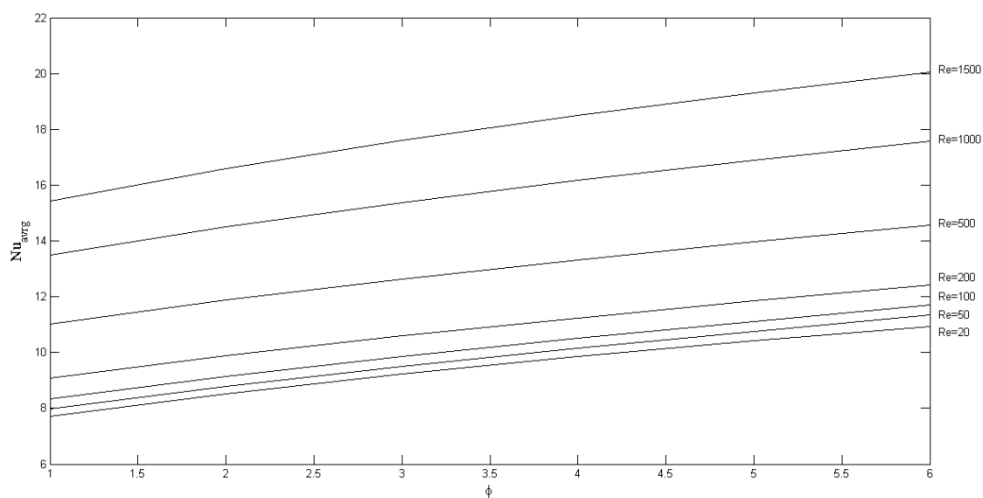
شکل (۴-۲۷) تغییرات عدد ناسلت برای درصد‌های حجمی مختلف الف) $Re=50$ ب) $Re=1000$

جدول (۴-۵) درصد افزایش عدد ناسلت متوسط روی صفحه نسبت به سیال خالص - دمای ثابت دیوار

	Re						
ϕ	20	50	100	200	500	1000	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0.01	10.46805	10.21389	9.680835604	8.935598	7.952148	7.606396	7.541251
0.02	19.54491	19.20876	18.21529406	16.79604	14.85842	14.1526	14.01289
0.03	27.65847	27.40781	26.00191923	23.95878	21.09174	20.01459	19.79306
0.04	35.01929	35.04134	33.25761187	30.62789	26.85167	25.39249	25.08232
0.05	41.73397	42.25134	40.11608619	36.92852	32.25957	30.40762	30.00196



شکل (۴-۲۸) تغییرات عدد ناسلت در اعداد رینولدز مختلف الف) $\phi = 0.02$ ب) $\phi = 0.04$



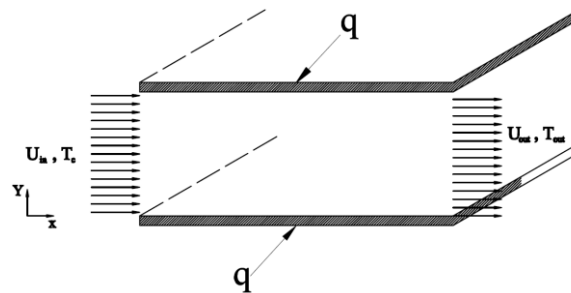
شکل (۴-۲۹) توزیع عدد ناسلت متوسط در اعداد رینولدز و درصد های حجمی مختلف

آنچه که از آزمایشات و نتایج عددی مختلف برمی آید این است که، تکنولوژی استفاده از نانوذرات می تواند تا حد زیادی به بالابردن نرخ انتقال حرارت در سیالات با رسانایی گرمایی اندک، کمک کند. بسته به نوع کاربری و هندسه مورد نیاز، انتقال حرارت تا ۴۰٪ می تواند افزایش داشته باشد. گرمایش توسط مقاومت الکتریکی، تشعشع و انرژی هسته ای در رآکتورهای هسته ای از مصادیق کاربرد عملی شرط مرزی گرمایی شار حرارتی ثابت دیواره و همچنین مواردی از مبدلهای حرارتی مانند تبخیر کننده ها و کندانسورها، دمای ثابت سطح را به عنوان شرط مرزی حرارتی دیواره به خود می بینند. اما همچنان نیاز به مطالعات و تحلیل های زیادی است تا بتوان به درستی و با دقت بالا در مورد رفتارهای نانوسیالات در شرایط گوناگون اظهارنظر کرد. از آن جمله می توان به بحث پایداری نانوسیال اشاره کرد که باید در عمل هم نانوسیالاتی با پایداری بالا تولید کرد تا بتوان در سیستم های انتقال حرارت از آنها استفاده کرد.

پیوست الف

محاسبه شرط مرزی خروج جریان برای معادله انرژی

همانطور که گفته شد در این روش از موازنه انرژی های ورودی و خروجی استفاده شده است.



انرژی های وارد شده به سیستم

شار حرارتی ثابت روی دیواره:

$$q_{in} = \dot{m}C_p T_{in} + 2q''l = (\rho C_p)_{nf} w u_{in} T_{in} + 2q''l$$

$$q_{out} = (\rho C_p)_{nf} \sum_{j=2}^{nj-1} u(ni-1, j) T(ni-1, j) \Delta y(j)$$

$$\Delta q = (\rho C_p)_{nf} T_{inc} \sum_{j=2}^{nj-1} u(ni-1, j) \Delta y(j)$$

$$\Rightarrow T_{inc} = \frac{(\rho C_p)_{nf} \sum_{j=2}^{nj-1} u(ni-1, j) T(ni-1, j) \Delta y(j) - 2q''l - (\rho C_p)_{nf} w u_{in} T_{in}}{(\rho C_p)_{nf} \sum_{j=2}^{nj-1} u(ni-1, j) \Delta y(j)}$$

$$T = T_{in} + \frac{wq''}{K_f} T^*$$

$$T_{inc} = T_{in} + \frac{wq''}{K_f} T_{inc}^* \quad \rightarrow \quad T_{inc} = \frac{wq''}{K_f} \left(\frac{T_{in}}{\frac{wq''}{K_f}} + T_{inc}^* \right) \quad \text{if } \theta = \frac{T_{in}}{\frac{wq''}{K_f}} \quad \rightarrow \quad T_{inc} =$$

$$\frac{wq''}{K_f} (\theta + T_{inc}^*)$$

$$\begin{aligned}
(\rho C_p)_{nf} \sum_{j=2}^{nj-1} u(ni-1, j) T(ni-1, j) \Delta y(j) \\
= (\rho C_p)_{nf} w u_{in} \left(\frac{wq''}{K_f} \right) \sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) (\theta + T^*) \Delta y^*(j)
\end{aligned}$$

$$(\rho C_p)_{nf} w u_{in} T_{in} = (\rho C_p)_{nf} w^2 u^* \frac{T_{in} - T_{in}}{\frac{wq''}{K_f}} = 0$$

$$2q''l = 2q''wl^* = (\rho C_p)_{nf} w u_{in} \left(\frac{wq''}{K_f} \right) \left[\frac{2q''l^*}{\frac{q''}{K_f} (\rho C_p)_{nf} w u_{in}} \right]$$

$$= (\rho C_p)_{nf} w u_{in} \left(\frac{wq''}{K_f} \right) \left[\frac{2K_f l^*}{(\rho C_p)_{nf} w u_{in}} \right]$$

$$\Rightarrow 2q''l = (\rho C_p)_{nf} w u_{in} \left(\frac{wq''}{K_f} \right) \left[2 \frac{K_f}{(\rho C_p)_{nf}} \times \frac{(\rho C_p)_f}{(\rho C_p)_f} \times \frac{\rho_f}{\rho_f} \times \frac{\mu_f}{\mu_f} \times \frac{l^*}{w u_{in}} \right]$$

$$= (\rho C_p)_{nf} w u_{in} \left(\frac{wq''}{K_f} \right) \left[2 \frac{(\rho C_p)_f}{(\rho C_p)_{nf}} \times \frac{1}{Pr} \times \frac{1}{Re} \times l^* \right]$$

$$(\rho C_p)_{nf} \sum_{j=2}^{nj-1} u(ni-1, j) \Delta y(j) = (\rho C_p)_{nf} w u_{in} \sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) \Delta y^*(j)$$

$$\Rightarrow \theta + T_{inc}^*$$

$$= \frac{(\rho C_p)_{nf} w u_{in} \left(\frac{wq''}{K_f} \right) \left[\sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) (\theta + T^*) \Delta y^*(j) - 2 \frac{(\rho C_p)_f}{(\rho C_p)_{nf}} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} l^* \right]}{(\rho C_p)_{nf} w u_{in} \left(\frac{wq''}{K_f} \right) \sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) \Delta y^*(j)}$$

$$T_{inc}^* = \frac{\sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) (\theta + T^*) \Delta y^*(j) - 2 \frac{(\rho C_p)_f}{(\rho C_p)_{nf}} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} l^*}{\sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) \Delta y^*(j)} - \theta$$

دمای ثابت دیواره

$$T^* = \frac{T - T_{in}}{T_h - T_{in}} \rightarrow T = T^*(T_h - T_{in}) + T_{in}$$

$$q = -K_{nf} l \left. \frac{dT}{dy} \right|_{wall}$$

T_{inc}

$$= \frac{(\rho C_p)_{nf} \sum_{j=2}^{nj-1} u(ni-1, j) T(ni-1, j) \Delta y(j) + 2 l K_{nf} \left. \frac{dT}{dy} \right|_{wall} - (\rho C_p)_{nf} w u_{in} T_{in}}{(\rho C_p)_{nf} \sum_{j=2}^{nj-1} u(ni-1, j) \Delta y(j)}$$

$$\Rightarrow T_{inc}^* (T_h - T_{in}) + T_{in}$$

$$= \frac{(\rho C_p)_{nf} w u_{in} \sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) (T^* (T_h - T_{in}) + T_{in}) \Delta y^*(j) + 2 (T_h - T_{in}) \sum_{i=1}^{ni} (K_{nf}(i, 2) \Delta x_i^* \left. \frac{dT^*}{dy^*} \right|_{wall})}{(\rho C_p)_{nf} w u_{in} \left(\frac{w q''}{K_f} \right) \sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) \Delta y^*(j)}$$

$$\text{if } \theta = \frac{T_{in}}{(T_h - T_{in})}$$

$$\Rightarrow T_{inc}^* + \theta$$

$$= \frac{(\rho C_p)_{nf} w u_{in} \left[\sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) (T^* + \theta) \Delta y^*(j) + 2 \sum_{i=1}^{ni} \left(\frac{K_{nf}(i, 2)}{(\rho C_p)_{nf} w u_{in}} \Delta x_i^* \left. \frac{dT^*}{dy^*} \right|_{wall} \right) \right]}{(\rho C_p)_{nf} w u_{in} \left(\frac{w q''}{K_f} \right) \sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) \Delta y^*(j)}$$

$$\Rightarrow T_{inc}^* =$$

$$\frac{\sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) (T^* + \theta) \Delta y^*(j) + 2 \sum_{i=1}^{ni} \left(\frac{K_{nf}(i, 2)}{K_f} \frac{(\rho C_p)_f}{(\rho C_p)_{nf}} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \Delta x_i^* \left. \frac{dT^*}{dy^*} \right|_{wall} \right)}{\sum_{j=2}^{nj-1} u^*(ni-1, j) \Delta y^*(j)} - \theta$$

منابع

- [1] S.U.S. Choi, Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles, in: The Proceedings of the 1995 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, San Francisco, USA, ASME, FED 231/MD 66, 1995, pp.99–105.
- [2] S.U.S. Choi, Z.G. Zhang, W. Yu, F.E. Lockwood, E.A. Grulke, Anomalous thermal conductivity enhancement in nanotube suspensions, *Appl. Phys. Lett.* 79 (2001) 2252–2254.
- [3] H. Masuda, A. Ebata, K. Teramae, N. Hishinuma, Alteration of thermal conductivity and viscosity of liquid by dispersing ultra-fine particles (Dispersion of γ -Al₂O₃, SiO₂, and TiO₂ ultra-fine particles), *Netsu Bussei* 7 (1993) 227–233.
- [4] S. Lee, S.U.S. Choi, S. Li, J.A. Eastman, Measuring thermal conductivity of fluids containing oxide nanoparticles, *Trans. ASME, J. Heat Transfer* 121 (1999) 280–289.
- [5] Y. Xuan, Q. Li, Heat transfer enhancement of nanofluids, *Int. J. Heat Fluid Flow* 21 (2000) 58–64.
- [6] Y. Xuan, W. Roetzel, Conceptions for heat transfer correlation of nanofluids, *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 (2000) 3701–3707.
- [7] J.A. Eastman, S.U.S. Choi, S. Li, L.J. Thompson, S. Lee, Enhancement thermal conductivity through the development of nanofluids, in: 1996 Fall meeting of the Materials Research Society (MRS), Boston, USA, 1997.
- [8] S.Kakaç, A.Pramuanjaroenkij, Review of convective heat transfer enhancement with nanofluids, *Int. J. Heat Mass Transfer* 52 (2009) 3187–3196.
- [9] W. Yu, D.M. France, S.U.S. Choi, J.L. Routbort, Review and Assessment of Nanofluid Technology for Transportation and Other Applications, ANL/ESD/07–9, Argonne National Laboratory, Argonne, IL, 2007.
- [10] W. Yu, S.U.S. Choi, The role of interfacial layers in the enhanced thermal conductivity of nanofluids: a renovated Maxwell model, *J. Nanoparticle Res.* 5 (2003) 167–171.
- [11] X. Wang, X. Xu, S.U.S. Choi, Thermal conductivity of nanoparticle-fluid mixture, *J. Thermophys. Heat Transfer* 13 (1999) 474–480.
- [12] H. Xie, J. Wang, T. Xi, Y. Liu, Thermal conductivity of suspensions containing nanosized SiC particles, *Int. J. Thermophys.* 23 (2002) 571–580.
- [13] H. Xie, J. Wang, T. Xi, F. Ai, Thermal conductivity enhancement of suspensions containing nanosized alumina particles, *J. Appl. Phys.* 91 (2002) 4568–4572.

- [14] S.K. Das, N. Putra, P. Thiesen, W. Roetzel, Temperature dependence of thermal conductivity enhancement of nanofluids, *Trans. ASME, J. Heat Transfer* 125 (2003) 567–574.
- [15] S.K. Das, N. Putra, W. Roetzel, Pool boiling characteristics of nano-fluids, *Int. J. Heat Mass Transfer* 46 (2003) 851–862.
- [16] S.K. Das, N. Putra, W. Roetzel, Pool boiling of nano-fluids on horizontal narrow tubes, *Int. J. Multiphase Flow* 29 (2003) 1237–1247.
- [17] D. Wen, Y. Ding, Experimental investigation into convective heat transfer of nanofluids at the entrance region under laminar flow conditions, *Int. J. Heat Mass Transfer* 47 (2004) 5181–5188.
- [18] D. Wen, Y. Ding, Effective thermal conductivity of aqueous suspensions of carbon nanotubes (carbon nanotube nanofluids), *J. Thermophys. Heat Transfer* 18 (2004) 481–485.
- [19] C.H. Li, G.P. Peterson, Experimental investigation of temperature and volume fraction variations on the effective thermal conductivity of nanoparticle suspensions (nanofluids), *J. Appl. Phys.* 99 (2006) 084314.
- [20] S.Z. Heris, G. Etemad, M.N. Esfahany, Experimental investigation of oxide nanofluids laminar flow convection heat transfer, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 33 (2006) 529–535.
- [21] B.C. Pak, Y.I. Cho, Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles, *Exp. Heat Transfer* 11 (1998) 151–170.
- [22] Y. Xuan, Q. Li, Investigation convective heat transfer and flow features of nanofluids, *J. Heat Transfer* 125 (2002) 151–155.
- [23] D.A. Drew, S.L. Passman, *Theory of Multicomponent Fluids*, Springer, Berlin, 1999.
- [24] H.C. Brinkman, The viscosity of concentrated suspensions and solutions, *J. Chem. Phys.* 20 (1952) 571–581.
- [25] S. Kakaç, Y. Yener, *Convective Heat Transfer*, second ed., CRC Press, Boca Raton, 1995 (pp. 23–45).
- [26] J. Eapen, J. Li, S. Yip, Probing transport mechanisms in nanofluids by molecular dynamics simulations, in: *Proceeding of the 18th National and 7th ISHMT– ASME Heat and Mass Transfer Conference*, IIT Guwahati, India, 2006.
- [27] S.E.B. Ma, C.T. Nguyen, N. Galanis, G. Roy, Heat transfer behaviours of nanofluids in a uniformly heated tube, *Superlattices Microstruct.* 35 (2004) 543–557.

- [28] G. Roy, C.T. Nguyen, P.R. Lajoie, Numerical investigation of laminar flow and heat transfer in a radial flow cooling system with the use of nanofluids, *Superlattices Microstruct.* 35 (2004) 497–511.
- [29] J. Buongiorno, A non-homogeneous equilibrium model for convective transport in flowing nanofluids, in: *The Proceedings of HT2005*, San Francisco, CA, 2005.
- [30] S.E.B. Ma, S.J. Palm, C.T. Nguyen, G. Roy, N. Galanis, Heat transfer enhancement by using nanofluids in forced convection flows, *Int. J. Heat Fluid Flow* 26 (2005) 530–546.
- [31] J. Koo, C. Kleinstreuer, Laminar nanofluid flow in microheat-sinks, *Int. J. Heat Mass Transfer* 48 (2005) 2652–2661.
- [32] A.R.A. Khaled, K. Vafai, Heat transfer enhancement through control of thermal dispersion effects, *Int. J. Heat Mass Transfer* 48 (2005) 2172–2185.
- [33] S.J. Palm, G. Roy, C.T. Nguyen, Heat transfer enhancement with the use of nanofluids in radial flow cooling system with the use of nanofluids, *Superlattices Microstruct.* 35 (2004) 497–511.
- [34] S.E.B. Ma, C.T. Nguyen, N. Galanis, G. Roy, T. Maré, M. Coqueux, Heat transfer enhancement in turbulent tube flow using Al₂O₃ nanoparticle suspension, *Int. J. Num. Methods Heat Fluid Flow* 16 (2006) 275–292.
- [35] S. Mirmasoumi, A. Behzadmehr, Numerical study of laminar mixed convection of a nanofluid in a horizontal tube using two-phase mixture model, *Appl. Thermal Eng.* 28 (2008) 717–727.
- [36] S.Z. Heris, M.N. Esfahany, G. Etemad, Numerical investigation of nanofluid laminar convection heat transfer through a circular tube, *Num. Heat Transfer A* 52 (11) (2007) 1043–1058.
- [37] A. Behzadmehr, M. Saffar-Avval, N. Galanis, Prediction of turbulent forced convection of a nanofluid in a tube with uniform heat flux using a two phase approach, *Int. J. Heat Fluid Flow* 28 (2007) 211–219.
- [38] S. Mirmasoumi, A. Behzadmehr, Effect of nanoparticles mean diameter on mixed convection heat transfer of a nanofluid in a horizontal tube, *Int. J. Heat Fluid Flow* 29 (2008) 557–566.
- [39] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington D.C., 1980.

- [40] H. K. VERSTEEG, W. MALALASEKERA, An introduction to computational fluid dynamics, The finite volume method, John Wiley & Sons Inc., 1995.
- [41] W. Yu, S.U.S. Choi, The role of interfacial layer in the enhanced thermal conductivity of nanofluids: A renovated Maxwell model, *J. Nanoparticles Res.* (2003) 167–171.
- [42] D.H. Kumar, H.E. Patel, V.R.R. Kumar, T. Sundararajan, T. Pradeep, S.K. Das, Model for conduction in nanofluids, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 144301-1– 144301-4.
- [43] R. Prasher, P. Bhattacharya, P.E. Phelan, Brownian-motion-based convective - conductive model for the effective thermal conductivity of nanofluid, *ASME J. Heat Transfer* 128 (2006) 588–595.
- [44] H.E. Patel, T. Pradeep, T. Sundararajan, A. Dasgupta, N. Dasgupta, S.K. Das, A micro-convection model for thermal conductivity of nanofluid, *Pramana–J. Phys.* 65 (2005) 863–869.
- [45] W. M.L.A1, D.RUBIN, E.KREMPLE, Introduction to continuum Mechanics, 3rd Edition, Butterworth-Heinemann Ltd, 1993.
- [46] W. Kays, M. Crawford, B. Weigand, Convective Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, 2004.
- [47] R. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, Transport Phenomena, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc, 2002.
- [48] F.M. White Viscous Fluid Flow, 2nd Edition, John McGraw-Hill, 1991.
- [49] F. Durst, S. Ray, B. Unsal, O.A. Bayoumi, The development lengths of laminar pipe and channel flows, *ASME J. Fluids Engrg.* 127 (2005) 1154–1160.
- [50] L.C. Burmeister, Convective Heat Transfer, John Wiley & Sons, USA, 1983.
- [51] A.K. Santra, S. Sen, N. Chakraborty, Study of heat transfer due to laminar flow of copper–water nanofluid through two isothermally heated parallel plates, *International Journal of Thermal Sciences* 48 (2009) 391–400.
- [52] K.M. Hoffmann, S.T. Chiang, Computational Fluid Dynamics, EES Pub., USA, 2000.

Abstract

Nanofluid is a suspension of nanoparticles (10-100 nm) in a conventional basic fluid such as water, oil and ethylene glycol and enhances the heat transfer. In this paper, Cu-water nanofluid flow in a horizontal channel with infinite depth was investigated. Equal, non-equal constant flux and constant temperature as boundary conditions on the channel walls were considered. The governing equations, continuity, momentum and energy for laminar flow in non-dimensional form are being discretized using finite volume approach using power-law profile approximation. Well-Known SIMPLER algorithm by “Patankar” is employed to solving the equations in implicit scheme using iterative method. Thermal conductivity of Nanofluid is a function of temperature. Results are presented for wide range of Reynolds numbers, $20 < Re < 1500$, and different volume fractions of nanoparticles, $0 < \phi < 0.05$. It has been observed that increasing the volume fraction of nanoparticles causes to increase the heat transfer rate. Heating by electrical resistant, radiation and nuclear activities in nuclear reactors are important applications of constant heat flux boundary conditions. Also kinds of heat exchangers like evaporators and condensers are examples of constant temperature boundary conditions.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Numerical investigation of heat transfer of nanofluid flow
between parallel plates

Reza Adelifar

Supervisor:

Dr. Mohammad Mohsen Shahmardan

May 2011