

بسم... الرحمن الرحيم



پایان نامه کارشناسی ارشد

دانشکده مکانیک

تعیین شار حرارتی در دیواره یک جسم کروی با استفاده از روش معکوس

دانشجو :

حمیدرضا نیکزاد جمنانی

استاد راهنما :

محمد محسن شاه مردان

استاد مشاور :

محمد جواد مغربی

ماه و سال انتشار :

پاییز ۸۷

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم که همواره حامی و پشتیبان زندگی من بودند

تقدیم به:

همسر نازنینم که در تمام طول مدت تحصیل در کنار من بود

تقدیم به :

استاد بزرگوار جناب آقای دکتر شاه مردان

و

اساتید گرانقدر دانشکده مکانیک که در طول تحصیل خود افتخار شاگردی آنان را
داشته ام

اینجانب حمیدرضا نیکزاد جمنانی اقرار می نمایم که کلیه مطالب مندرج در این پایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودم میباشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن ذکر شده است.

حمیدرضا نیکزاد جمنانی

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

پاییز ۸۷

چکیده

مسائل هدایت حرارتی را می توان به دو نوع مستقیم و معکوس تقسیم نمود. در مسائل مستقیم که عموماً بیشتر به کار می روند، هندسه، شرایط مرزی، شرایط اولیه و همچنین خواص ترموفیزیکی معلوم و هدف مسئله محاسبه تابع توزیع دما در ناحیه مورد بررسی با استفاده از حل معادلات حاکم می باشد. روش کلی در حل مسائل معکوس، تعریف یک تابع هدف که مجموع مربعات خطا می باشد و رساندن آن به کمترین مقدار با استفاده از یک روش تکراری می باشد. در این پروژه با استفاده از روش گرادیان مزدوج، شار حرارتی روی دیواره کره تخمین زده می شود و داده های آزمایشگاهی با استفاده از افزودن خطا به مقادیر دقیق (روش مستقیم) شبیه سازی می شود. نتایج حاصله از روش مستقیم و معکوس در این پروژه با هم مقایسه و نتایج آن بررسی شده است.

کلمات کلیدی : روش گرادیان مزدوج، مسائل معکوس هدایت حرارتی، شار حرارتی

فصل اول : مقدمه	۱
۱-۱- مقدمه	۲
۲-۱- روش های مجزاسازی مورد استفاده در مسائل هدایت حرارتی معکوس	۲
۳-۱- روش های معکوس هدایت حرارتی	۴
فصل دوم : اصول روش های معکوس هدایت حرارتی	۶
۱-۲- مقدمه	۷
۲-۲- تقسیم بندی مسائل معکوس هدایت حرارتی	۸
۳-۲- مشکلات حل مسائل معکوس هدایت حرارتی	۱۰
۴-۲- معیارهای مقایسه روش های معکوس	۱۲
۵-۲- مفهوم ضریب حساسیت	۱۴
۶-۲- کاربردهای روش های معکوس در مهندسی	۱۶
فصل سوم : روش های معکوس هدایت حرارتی متوالی توابع	۲۰
۱-۳- تنظیم سازی در IHCP	۲۱
۲-۳- انواع تنظیم در IHCP	۲۱
۳-۳- روش تخمین متوالی توابع	۲۲
۴-۳- مسئله معکوس مرزی یک بعدی	۲۳
۵-۳- روش weber در حل مسائل هدایت معکوس	۳۱
۶-۳- ترکیب روشهای FSM و RM	۳۴
فصل چهارم : روش گرادیان مزدوج در حل مسائل معکوس	۴۴
۱-۴- مقدمه	۴۵
۲-۴- مسئله مستقیم	۴۶

۴۶ مسئله معکوس	۳-۴
۴۷ فرآیند تکرار :	۴-۴
۴۹ معیار توقف	۵-۴
۵۰ الگوریتم روش گرادیان مزدوج	۶-۴
۵۱ فصل پنجم : تعیین شار حرارتی روی دیواره کره	
۵۲ مقدمه	۱-۵
۵۲ مسئله مستقیم	۲-۵
۵۲ توصیف فیزیک مسئله	۱-۲-۵
۵۳ توصیف ریاضی مسئله	۲-۲-۵
۵۴ مجزاسازی	۳-۲-۵
۵۶ کد نویسی و اعتبار آن	۴-۲-۵
۵۷ مسئله معکوس	۳-۵
۶۰ فصل ششم : بررسی نتایج	
۶۱ مقدمه	۱-۶
۶۱ فیزیک مسئله	۲-۶
۶۶ شبیه سازی ترموکوپل	۳-۶
۶۷ بررسی نتایج	۴-۶
۷۱ نتیجه گیری و پیشنهادات	۵-۶
۷۳ مراجع	



پایان نامه کارشناسی ارشد

تعیین شار حرارتی در دیواره یک جسم کروی با استفاده از روش معکوس

نگارش :

حمید رضا نیکزاد جمنانی

استاد راهنما :

محمد محسن شاه مردان

استاد مشاور:

محمد جواد مغربی

پاییز ۸۷

چکیده

مسائل هدایت حرارتی را می توان به دو نوع مستقیم و معکوس تقسیم نمود. در مسائل مستقیم که عموماً بیشتر به کار می روند، هندسه، شرایط مرزی، شرایط اولیه و همچنین خواص ترموفیزیکی معلوم و هدف مسئله محاسبه تابع توزیع دما در ناحیه مورد بررسی با استفاده از حل معادلات حاکم

می باشد. روش کلی در حل مسائل معکوس، تعریف یک تابع هدف که مجموع مربعات خطا می باشد و رساندن آن به کمترین مقدار با استفاده از یک روش تکراری می باشد.

در این پروژه با استفاده از روش گرادیان مزدوج، شار حرارتی روی دیواره کره تخمین زده می شود و داده های آزمایشگاهی با استفاده از افزودن خطا به مقادیر دقیق (روش مستقیم) شبیه سازی می شود. نتایج حاصله از روش مستقیم و معکوس در این پروژه با هم مقایسه و نتایج آن بررسی شده است.

کلمات کلیدی: روش گرادیان مزدوج، مسائل معکوس هدایت حرارتی، شار حرارتی

فصل اول : مقدمه	۱
۱-۱- مقدمه	۲
۲-۱- روش های مجزاسازی مورد استفاده در مسائل هدایت حرارتی معکوس	۲
۳-۱- روش های معکوس هدایت حرارتی	۴
فصل دوم : اصول روش های معکوس هدایت حرارتی	۶
۱-۲- مقدمه	۷
۲-۲- تقسیم بندی مسائل معکوس هدایت حرارتی	۸
۳-۲- مشکلات حل مسائل معکوس هدایت حرارتی	۱۰
۴-۲- معیارهای مقایسه روش های معکوس	۱۲
۵-۲- مفهوم ضریب حساسیت	۱۴
۶-۲- کاربردهای روش های معکوس در مهندسی	۱۶
فصل سوم : روش های معکوس هدایت حرارتی متوالی توابع	۲۰
۱-۳- تنظیم سازی در IHCP	۲۱
۲-۳- انواع تنظیم در IHCP	۲۱
۳-۳- روش تخمین متوالی توابع	۲۲
۴-۳- مسئله معکوس مرزی یک بعدی	۲۳
۵-۳- روش weber در حل مسائل هدایت معکوس	۳۱
۶-۳- ترکیب روشهای FSM و RM	۳۴
فصل چهارم : روش گرادیان مزدوج در حل مسائل معکوس	۴۴
۱-۴- مقدمه	۴۵
۲-۴- مسئله مستقیم	۴۶
۳-۴- مسئله معکوس	۴۶

۴۷ فرآیند تکرار :	۴-۴
۴۹ معیار توقف	۵-۴
۵۰ الگوریتم روش گرادیان مزدوج	۶-۴
۵۱ فصل پنجم : تعیین شار حرارتی روی دیواره کره	
۵۲ مقدمه	۱-۵
۵۲ مسئله مستقیم	۲-۵
۵۲ توصیف فیزیک مسئله	۱-۲-۵
۵۳ توصیف ریاضی مسئله	۲-۲-۵
۵۴ مجزاسازی	۳-۲-۵
۵۶ کد نویسی و اعتبار آن	۴-۲-۵
۵۷ مسئله معکوس	۳-۵
۶۰ فصل ششم : بررسی نتایج	
۶۱ مقدمه	۱-۶
۶۱ فیزیک مسئله	۲-۶
۶۶ شبیه سازی ترموکوپل	۳-۶
۶۷ بررسی نتایج	۴-۶
۷۱ نتیجه گیری و پیشنهادات	۵-۶
۷۳ مراجع	

فصل اول : مقدمه

۱-۱- مقدمه

مسائل هدایت حرارتی به دو نوع مستقیم و معکوس تقسیم می شوند. در حل مسائل مستقیم که کاربرد بیشتری یافته اند، هندسه، شرایط مرزی، شرایط اولیه و همچنین خواص ترموفیزیکی معلوم بوده و هدف محاسبه توزیع دما در داخل ناحیه مورد بررسی با استفاده از حل معادلات حاکم می باشد. در مسائل معکوس که اخیراً مورد توجه بیشتر قرار گرفته و کاربردهای زیادی نیز یافته اند، تعدادی از این اطلاعات در نواحی مرزی نامعلوم بوده و هدف از حل معادلات تخمین آنها با استفاده از دماهای اندازه گیری شده در داخل ناحیه حل می باشد. این نوع مسائل از نظر ریاضی بدرفتار بوده و به شدت به خطاهای اندازه گیری حساس می باشند. استراتژی کلی در حل این مسائل، تعریف و مینیمم کردن یک تابع هدف که معمولاً مجموع مربعات خطا انتخاب می شود، با استفاده از یک روش تکراری می باشد.

با توجه به مطالب گفته شده برای حل مسائل معکوس بطور کلی به دو ابزار زیر نیاز می باشد:

۱- یک روش گسسته سازی برای حل مسئله مستقیم

۲- یک روش معکوس، برای پایدار کردن مسئله بد رفتار که معمولاً شامل یک روش تکراری برای مینیمم کردن یک تابع هدف می باشد.

۲-۱- روش های مجزاسازی مورد استفاده در مسائل هدایت حرارتی معکوس

معادلات حاکم بر مسائل هدایت حرارتی را میتوان به روش های عددی و یا تحلیلی حل نمود. روش های تحلیلی بیشتر مناسب برای مسائل با هندسه ساده و رفتار خطی می باشند. در حالیکه این روشها در مورد مسائل پیچیده تر کارایی نداشته و ناگزیر در این گونه مسائل روش های عددی بکار می روند. در ارزیابی یک روش عددی، معیارهای زیر مورد توجه می باشند.

۱- قابلیت اعمال روش به مسائلی با هندسه پیچیده و ابعاد اختیاری

۲- قابلیت اعمال روش به مسائل مرزی بدون محدودیت در انتخاب نوع و تعداد شرایط مرزی

اعمال شده در طول مرز

۳- قابلیت اعمال روش به مسائل غیرخطی

۴- دقت و زمان کامپیوتری مورد نیاز روش

۵- انتخاب استراتژی مناسب جهت گسسته سازی معادلات متناسب با فیزیک مساله

روش های عددی اصلی که در مسائل مختلف انتقال حرارت و مکانیک سیالات، از جمله مسائل هدایت حرارتی معکوس به کار میروند به شرح زیر می باشند.

۱- روش اختلاف محدود (FDM)

۲- روش حجم محدود (FVM)

۳- روش المان های محدود (FEM)

۴- روش المان های مرزی (BEM)

گرچه هر یک از این روشها کاملاً عمومی می باشند و هر یک از آنها را میتوان به عنوان مکمل روش های دیگر در نظر گرفت. در واقع در یک مسئله خاص ممکن است که یکی از این روشها نسبت به روش های دیگر دارای ضعف ها و برتریهایی باشد. به عنوان مثال، گرچه روش المان های مرزی و المان های محدود به مسائل غیرخطی با خواص ترموفیزیکی تابع دما توسعه یافته اند ولی به نظر می رسد که روش اختلاف محدود برای این گونه مسائل مناسب تر می باشد و یا استفاده از روش اختلاف محدود در مسائلی با هندسه نامنظم ممکن است مشکل باشد. در روش حجم محدود که در واقع نسخه ای از روش اختلاف محدود است، نیازی به کنترل معادلات بقاء نبوده و این معادلات به طور خودکار برقرار خواهند بود. این روش می تواند در خصوص حل مسائلی با محیط غیر همگن به سهولت بکار برده شود. در روشهای ذکر شده فوق نیاز به شبکه بندی به منظور حل معادلات حاکم می باشد ولی در روش المان های مرزی این شبکه بندی فقط بر روی مرز صورت

می‌گیرد. این مسئله باعث شده است که روش‌های مان‌های مرزی نسبت به دو روش دیگر دارای امتیازات قابل توجه باشد.

۱-۳- روش‌های معکوس هدایت حرارتی

روش‌های معکوس هدایت حرارتی را می‌توان به دو دسته متوالی و تمام دامنه تقسیم نمود [۱]. در روش‌های تمام دامنه که عمدتاً در کشور روسیه توسعه یافته‌اند، تخمین به صورت همزمان برای تمام فاصله زمانی حل صورت می‌گیرد ولی در روش‌های متوالی، که عمدتاً در آمریکا توسعه پیدا نموده‌اند، تخمین به صورت گام به گام انجام می‌گردد. در خصوص مقایسه روش‌های معکوس مقالات متعددی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به مرجع [۲] اشاره نمود. روش‌های متوالی دارای امتیازات زیر نسبت به روش‌های تمام دامنه هستند. ۱- امکان خطی سازی در مسائلی که خواص ترموفیزیکی تابع مکان هستند. در این نوع مسائل می‌توان با محاسبه خواص ترموفیزیکی در دماهای گام زمانی قبلی مسئله را خطی سازی نمود.

۲- امکان استفاده از روش در مسائلی با زمان حقیقی

این کارایی به خصوص در مورد کاربردهای کنترلی از اهمیت زیادی برخوردار است.

۳- روش‌های متوالی معمولاً نیاز به زمان و حافظه کامپیوتری کمتری دارند.

مهمترین روش معکوس متوالی موجود، روش تخمین توابع متوالی می‌باشد. این روش ابتدا برای مسائل یک بعدی ارائه شد ولی بعداً استفاده از آن به مسائل دوبعدی نیز توسعه یافت [۳]. همچنین از این روش برای مسائل تخمین پارامتر و همچنین مسائل غیرخطی استفاده می‌شود. در

مسائلی که خطاهای اندازه گیری بالا می باشد، میتوان با ترکیب روش با روش تنظیم تیخونو پایداری حل را بهبود بخشید.

روش متوالی دیگری که باید به آن اشاره نمود روش گام مکانی است. این روش دارای ویرایش های متعددی است ولی به اندازه روش تخمین توابع متوالی، کاربرد نیافته است. دو نوع روش تمام دامنه که کاربرد بیشتری یافته اند، روش تنظیم تیخونو و روش های تنظیم تکراری می باشند. این دو روش نسبت به روش تخمین توابع متوالی از پایداری بهتری برخوردار هستند. از میان روش های تنظیم تکراری، روش گرادیان های مزدوج دارای همگرایی سریع تر می باشد [۴]. ویرایش متوالی از این روش نیز ارائه گردیده است ولی نشان داده شده است که ویرایش متوالی این روش بیشتر امتیازاتش را از دست می دهد.

فصل دوم : اصول روش‌های معکوس هدایت حرارتی

۲-۱- مقدمه

توسعه کامپیوترها، رشد روش‌های عددی برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی را تسریع کرده است. برای مدل‌سازی یک پدیده فیزیکی به یک مدل ریاضی و یک روش حل نیاز می‌باشد. فرمولاسیون‌های ریاضی معمولاً به صورت یک سری معادلات دیفرانسیل و یا روابط انتگرالی داده می‌شوند، که با حل آنها می‌توان پدیده فیزیکی را مدل‌سازی نمود. مدل‌سازی مسائل هدایت حرارتی نیز به مانند دیگر پدیده‌های فیزیکی با حل معادلات حاکم بر آن امکان پذیر می‌باشد. برای حل مسائل هدایت حرارتی اطلاعات زیر مورد نیاز است:

۱- هندسه ناحیه حل

۲- شرایط اولیه

۳- شرایط مرزی

۴- خواص ترموفیزیکی

۵- ترمهای منبع به صورت تابعی از زمان و مکان (در صورت وجود)

بعد از حل معادلات حاکم توزیع دما در داخل ناحیه حل به دست می‌آید. این نوع مسائل را مسائل مستقیم می‌گویند. روش‌های حل مسائل مستقیم از سال‌ها پیش توسعه یافته‌اند. این روش‌ها شامل روش‌های حل مسائلی با هندسه پیچیده و همچنین مسائل غیر خطی نیز می‌گردند. علاوه بر این پایداری و یکتائی جواب این روش‌ها نیز بررسی گردیده است. روش‌های اولیه عمدتاً بر

مبنای حل‌های تحلیلی بوده‌اند. این روش‌ها بیشتر برای مسائل خطی و با هندسه‌های ساده قابل استفاده هستند. روش‌های عددی که عمدتاً با توسعه کامپیوترها توسعه یافته‌اند، دارای این محدودیت نبوده و بنابراین برای کاربردهای مهندسی بیشتر مورد توجه هستند. هر چند که این روشها نیز با نکات مهمی نظیر پایداری و سرعت همگرایی روبرو بوده و برای حل مسائل می‌بایست مدنظر قرار گیرد.

دسته‌ای دیگر از مسائل که در سالهای اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند، مسائل معکوس می‌باشند. در این نوع مسائل یک و یا تعدادی از اطلاعات مورد نیاز برای حل مستقیم، موجود نمی‌باشد. در عوض اطلاعات اضافی که معمولاً شامل دماهای اندازه‌گیری شده در داخل ناحیه حل بوده، معلوم هستند. این نوع مسائل را می‌توان به یافتن "علت" از طریق اندازه‌گیری "معلول" بیان کرد. در این فصل مبانی اولیه حل مسائل معکوس هدایت حرارتی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲-۲- تقسیم بندی مسائل معکوس هدایت حرارتی

مسائل معکوس را می‌توان به روش‌های مختلف دسته بندی نمود. در یک روش تقسیم بندی، مسائل معکوس را می‌توان به دو دسته زیر تقسیم کرد:

۱- مسائل تخمین پارامتر

۲- مسائل تخمین تابع

تقسیم بندی بالا یک تقسیم بندی کلی می‌باشد. این تقسیم بندی را برای مسائل معکوس هدایت حرارتی می‌توان به تقسیم بندی زیر توسعه داد:

۱- مسائل تخمین شرط مرزی مجهول

۲- مسائل تخمین پارامتر

۳- مسائل تخمین شرط اولیه

۴- مسائل تخمین هندسه ناحیه حل

۵- سایر مسائل

مسائل تخمین شرط مرزی، معمولا شامل تخمین شار حرارتی مجهول بر حسب دماهای اندازه گیری شده در داخل ناحیه حل هستند. این نوع مسائل به شدت به خطاهای اندازه گیری حساس است. در حقیقت مسائل تخمین شرط مرزی نوعی مسئله تخمین تابع می باشند زیرا در این نوع مسائل شرط مرزی ثابت نبوده و معمولا تابع زمان و یا مکان است.

در توسعه روش های معکوس، عمدتا تخمین شار حرارتی مورد توجه است. زیرا با تخمین شرط مرزی شار حرارتی می توان به راحتی می توان دما و یا ضریب انتقال حرارت را نیز به دست آورد. این کار به وسیله حل مستقیم و با معلوم بودن دمای سیال در تماس با مرز انجام می شود. تعیین شرط مرزی دما، خود می تواند به عنوان یک مسئله معکوس مستقل انجام شود. ولی نشان داده شده است [۵،۶] که تخمین شار حرارتی از روی این دما مشکل بوده و به یک مسئله نیمه معکوس منجر می شود. بنابراین بیشترین توجه در مطالعات انجام شده بر روی تخمین شار حرارتی بوده است. تخمین ضریب جابجائی را می توان به دو روش انجام داد. در روش اول همانطوریکه قبلا گفته شد، این تخمین می تواند از طریق محاسبه شار حرارتی انجام گیرد. راه دوم تخمین ضریب جابجائی به وسیله یک روش مستقل معکوس می باشد. در این روش مسئله، تبدیل به یک مسئله غیر خطی می گردد؛ زیرا می توان نشان داد که در مسائل تخمین ضریب جابجائی، ضریب حساسیت [۳] خود تابعی از جواب مسئله است. استفاده از این روش زمانی قابل توجیه است که بتوان با آن تعداد اجزا مجهول را کاهش داد.

مسائل تخمین پارامتر، شامل تخمین یک پارامتر است که بیانگر خواص فیزیکی یک سیستم حرارتی می باشد. در این نوع مسائل معمولا تعداد پارامترهای تخمینی محدود هستند. حتی در مسائل غیر خطی، مثلا تخمین ضریب هدایت حرارتی به صورت تابعی از دما، معمولا حداکثر سه یا چهار پارامتر تخمین زده می شوند. این نوع مسائل معمولا غیر خطی هستند؛ حتی اگر معادلات

حاکم بر حل مستقیم آنها خطی باشند. پارامترهایی که معمولاً تخمین آنها مورد توجه هستند، ضریب هدایت حرارتی، جرم مخصوص، گرمای ویژه و ضریب نفوذ حرارتی می‌باشند.

مسائل تخمین شرط اولیه به ندرت مورد بررسی قرار گرفته اند زیرا این نوع مسائل کاربرد کمتری نسبت به دیگر مسائل معکوس دارند. در این نوع مسائل، تخمین شرط اولیه با کمک تعدادی دمای اندازه گیری شده مورد نظر می‌باشد. یکی از اولین کارهای گزارش شده در زمینه مسائل معکوس تخمین شرط اولیه بوده است که در آن کار تلاش شد دمای اولیه سطح زمین با استفاده از دمای فعلی آن تخمین زده شود.

زمانیکه هندسه حل کاملاً مشخص نمی‌باشد، مسئله مورد بررسی یک مسئله تخمین هندسه می‌باشد. از این دسته مسائل می‌توان به تخمین محل سطح جامد در یک ماده مذاب در حال انجماد با اندازه گیری دما اشاره کرد. مسئله دیگر می‌تواند تخمین محل یک سوراخ با اعمال شار حرارتی معلوم و اندازه گیری دما در چند نقطه باشد.

دسته دیگر از مسائل معکوس، تعیین تابع ترم منبع در داخل دامنه حل می‌باشد.

۲-۳- مشکلات حل مسائل معکوس هدایت حرارتی

مشکل حل مسائل هدایت حرارتی معکوس بدرفتار بودن آنها به مانند اکثر مسائل معکوس می‌باشد. در این قسمت دلایل بدوضع بودن این مسائل از نظر ریاضی شرح داده خواهد شد و سپس با یک مثال مشکلات حل مسائل معکوس هدایت حرارتی بیان می‌گردد.

مسائل مستقیم هدایت حرارتی خوش رفتار می‌باشند. مفهوم مسائل خوش رفتار اولین بار به وسیله هادامارد بیان گردید. طبق تعریف وی یک مسئله خوش رفتار می‌باشد، اگر حل آن مسئله شرایط زیر را ارضا نماید:

۱- حل وجود داشته باشد.

۲- حل یکتا باشد.

۳- حل در برابر تغییرات کوچک در ورودی های حل پایدار باشد.

در مسائل هدایت حرارتی وجود و یکتائی جواب مسئله با دلایل و تجربیات فیزیکی نشان داده شده است. مشکل موجود در مسائل معکوس عدم پیوستگی حل نسبت به ورودی ها یعنی دما های اندازه گیری شده می باشد. به عبارتی مسائل معکوس دارای سومین شرط از شروط سه گانه بالا نیست؛ بنابراین خطاهای کوچک در اندازه گیری دما می تواند باعث ناپایداری حل مسئله گردد. اهمیت این حساسیت به این علت است که اندازه گیری دما همیشه با خطا همراه است. برای نشان دادن مشکلات حل مسائل معکوس یک جسم نیمه بینهایت با دمای اولیه صفر را در نظر بگیرید شکل (۱-۲). برای زمان $t > 0$ جسم در معرض شار حرارتی پریودیک زیر قرار می گیرد.

$$q(t) = q_0 \cos \omega t, \quad (1-2)$$

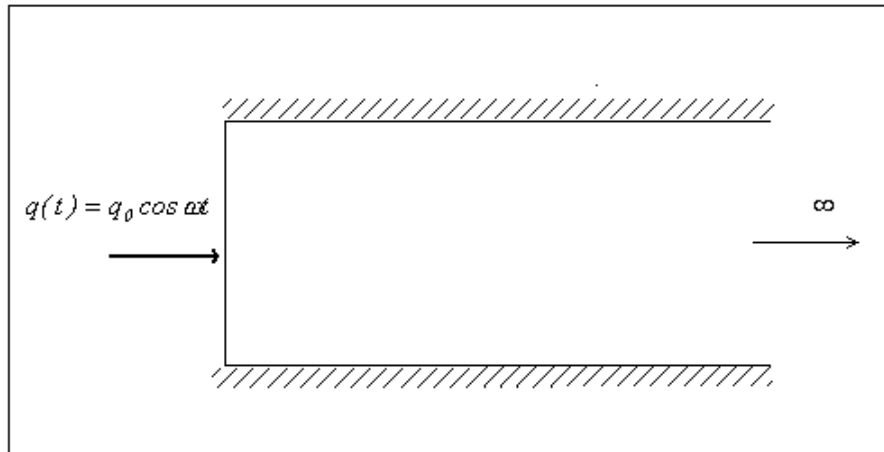
که q_0 و ω به ترتیب دامنه و فرکانس شار حرارتی اعمال شده می باشد. بعد از گذشت شرایط گذرا و رسیدن به شرایط شبه پایا، توزیع دما در جسم به صورت زیر می باشد

$$T(x,t) = \frac{q_0}{k} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2-2)$$

که در رابطه بالا α و k به ترتیب ضریب نفوذ حرارتی و ضریب هدایت حرارتی می باشند. رابطه (۲-۲) نشان می دهد که پاسخ دمائی نسبت به شرط مرزی اعمال شده میرا گردیده و همچنین دارای تاخیر فاز می باشد. به عبارت دیگر پاسخ دمائی با تاخیر دریافت می شود. این دو اثر را به ترتیب تاخیر و میرائی میگویند که هر دو اثر با افزایش x یعنی عمق افزایش می یابند. از بررسی تاثیر تاخیر می توان به این نتیجه رسید که برای تخمین یک شار حرارتی که در زمان t اعمال می شود باید از دماهای زمان های آینده استفاده نمود. به این دلیل است که روش های مستقیمی که در آنها شرط مرزی اعمال شده در زمان x با استفاده از دماهای قرائت شده در همین زمان تخمین زده می شوند، ناپایدار هستند.

برای بررسی اثر میرائی، دامنه نوسانات دما در رابطه (۲-۲) را در نظر بگیرید

$$|\Delta T(x)| = \frac{q_0}{k} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \quad (3-2)$$



شکل (۲-۱) یک جسم نیمه بینهایت که در معرض یک شار حرارتی پریودیک قرار گرفته است.

مشاهده می‌شود که این دامنه نیز با افزایش عمق x و یا فرکانس نوسانات به صورت نمایی کاهش می‌یابد. به صورت معکوس اگر هدف تخمین شار حرارتی با استفاده از دماهای اندازه‌گیری شده باشد، در صورتی که خطائی در دامنه دمای اندازه‌گیری شده باشد، دامنه این خطا به صورت نمایی تشدید می‌گردد. این مسئله را می‌توان با نوشتن دامنه شار حرارتی بر حسب دمای اندازه‌گیری شده مشاهده نمود.

$$q_0 = k |\Delta T(x)| \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \quad (4-2)$$

به عبارتی یک خطای کوچک در اندازه‌گیری می‌تواند به خطاهای بزرگی در شار حرارتی تخمین زده شده منتهی گردد.

۴-۲- معیارهای مقایسه روش‌های معکوس

در دو دهه اخیر تعداد زیادی روش معکوس هدایت حرارتی به وسیله محققین ارائه شده است. برای مقایسه این روش‌ها، بک [۱۸ و ۸] معیارهای زیر را پیشنهاد نمود. نکته اینکه در بسیاری از روش‌های معکوس هدایت حرارتی تمام معیارهای زیر موجود نمی‌باشد. بلکه این معیارها، مقیاسی برای بررسی روش‌های ارائه شده است.

۱- دما و یا شار حرارتی تخمین زده شده با استفاده از دماهایی بدون خطای اندازه‌گیری، دارای دقت بالایی باشند.

۲- روش باید نسبت به خطاهای اندازه‌گیری حساس نباشد.

۳- روش باید برای گامهای زمانی کوچک پایدار باشد. این مسئله این امکان را فراهم می‌نماید که در یک فاصله زمانی مشخص بتوان اطلاعات بیشتری را نسبت به حالتیکه گامهای زمانی بزرگ انتخاب می‌شوند به دست آورد.

۴- روش باید قابلیت استفاده از یک یا تعداد بیشتر دماسنج را داشته باشد.

۵- روش نباید محدودیت پیوسته بودن مشتق اول شار حرارتی را داشته باشد. به عنوان مثال روش باید امکان تخمین یک شار حرارتی پله ای و یا مثلثی را داشته باشد

۶- نباید در روش نیاز به داشتن زمان دقیق اعمال شار حرارتی مجهول را داشت.

۷- روش نباید محدود به هیچ تعداد مشخصی مشاهده باشد.

۸- روش باید قابل اعمال به دیواره‌های مرکب (چند جنسی) باشد.

۹- روش باید قابل اعمال به مسائلی با خواص ترموفیزیکی تابع دما باشد.

۱۰- روش باید قابل اعمال به مسائل با مقاومت تماس باشد.

۱۱- باید بتوان به سهولت روش را کامپیوتری نمود.

۱۲- زمان کامپیوتری مورد نیاز نباید خیلی بالا باشد.

۱۳- استفاده کننده نباید نیازمند اطلاعات بسیار بالا در ریاضی به منظور درک و استفاده از روش را داشته باشد.

۱۴- روش باید قابلیت اعمال به انواع سیستمهای مختصات را داشته باشد.

۱۵- روش باید قابلیت اعمال به مسائلی که در آنها بیش از یک سطح فعال وجود دارد، داشته باشد.

۱۶- روش باید دارای پایه آماری بوده و بتوان انواع فرضیات آماری را بر روی خطاهای اندازه گیری اعمال کرد

۲-۵- مفهوم ضریب حساسیت

ضریب حساسیت اولین بار به وسیله بک معرفی گردید و به عنوان مشتق متغیری که اندازه گیری می شود نسبت به متغیری که تخمین زده می شود، تعریف می گردد. این ضریب اهمیت زیادی در حل مسائل معکوس دارد و باعث ایجاد سهولت در حل مسائل معکوس می شود. علاوه بر این می توان با استفاده از آن مسئله معکوس را قبل از حل تحلیل نمود. دو نوع ضریب حساسیت تعریف می گردد.

۱- ضریب حساسیت نسبت به شرط مرزی که در فاصله زمانی نامحدودی اعمال گردد. که به آن ضریب حساسیت پله ای میگویند.

۲- ضریب حساسیت نسبت به شرط مرزی که در فاصله زمانی محدودی $t_M - t_{M-1}$ اعمال گردد. که به آن ضریب حساسیت پالسی میگویند.

ضریب حساسیت پله ای نسبت به شار حرارتی به صورت زیر تعریف می شود

$$Z_{m,i}^k = \frac{\partial T_{m,i}}{\partial q_k}, \quad (5-2)$$

که در رابطه بالا m و i به ترتیب اندیس های زمان و دماسنج و k اندیس مولفه شار حرارتی است.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < 1 \quad (6-2)$$

$$-k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q_1(t), \quad t > 0 \quad (7-2)$$

$$-k \frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = q_2(t), \quad t > 0 \quad (۸-۲)$$

$$T(x,0) = T_0(x), \quad 0 < x < 1 \quad (۹-۲)$$

روابط حاکم بر ضریب حساسیت نسبت به $\mathbf{q1(t)}$ با مشتق گرفتن از روابط (۹-۲) نسبت به $\mathbf{q1(t)}$

به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad 0 < x < 1 \quad (۱۰-۲)$$

$$-k \frac{\partial Z(0,t)}{\partial x} = 1.0, \quad t > 0 \quad (۱۱-۲)$$

$$-k \frac{\partial Z(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0 \quad (۱۲-۲)$$

$$Z(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (۱۳-۲)$$

ضریب حساسیت پالسی نسبت به شار حرارتی به صورت زیر تعریف می شود

$$X_{m,i}^k = \frac{\partial T_{m,i}}{\partial q_k}, \quad (۱۴-۲)$$

که در رابطه بالا فرض بر این است که q_k شار حرارتی اعمال شده در فاصله زمانی $t_M - t_{M-1}$ می باشد.

در این حالت معادلات حاکم برای محاسبه ضریب حساسیت پالسی با مشتق گرفتن از روابط (۶-۲)

به صورت زیر در می آید

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial X}{\partial t}, \quad 0 < x < l \quad (۱۵-۲)$$

$$-k \frac{\partial X(0,t)}{\partial x} = 1.0, \quad t_{M-1} < t < t_M \quad (۱۶-۲)$$

$$-k \frac{\partial X(0,t)}{\partial x} = 0.0, \quad \text{otherwise} \quad (۱۷-۲)$$

$$-k \frac{\partial X(l,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0 \quad (۱۸-۲)$$

$$X(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (19-2)$$

مشاهده می‌شود که محاسبه هر دو نوع ضریب حساسیت معادل مدل کردن یک شوک حرارتی می‌باشند. در مورد ضریب حساسیت پالسی، معادله حاکم مشابه یک مسئله هدایت حرارتی گذرا است که در آن یک شار حرارتی در فاصله زمانی $t_M - t_{M-1}$ اعمال شده است. این تعبیر اهمیت زیادی دارد زیرا با محاسبه آن می‌توان فهمید شار حرارتی که در این فاصله زمانی اعمال می‌شود در چه فاصله زمانی به دماسنج میرسد. این مسئله می‌تواند به منظور آنالیز پایداری حل معکوس به کار برده شود.

نکته دیگر اینکه روابط بالا برای محاسبه ضریب حساسیت یک مسئله با خواص ترموفیزیکی ثابت می‌باشد. در یک مسئله غیر خطی این ضریب تابع دما می‌باشد. نکته دیگر که در ارتباط با ضریب حساسیت اهمیت دارد اینکه، در بسیاری از روش‌های معکوس از جمله روش تخمین توابع متوالی یک ماتریس $[Z^T Z]^{-1}$ وارد روابط می‌شود. که Z ماتریس ضرایب حساسیت می‌باشد. هر چه مقدار دترمینان $|Z^T Z|$ بزرگتر باشد، ماتریس را آسان‌تر می‌توان معکوس کرد. بنابراین پارامترهای حل باید به نحوی انتخاب گردند که این دترمینان برابر صفر نگردد.

مشاهده می‌شود که در مورد ضریب حساسیت پالسی مقدار ضریب بعد از رسیدن به یک مقدار ماکزیمم، ثابت می‌ماند ولی در مورد ضریب حساسیت پله ای این ضریب به افزایش خود ادامه می‌دهد. مشاهده می‌شود که مقدار دو ضریب بسیار نزدیک به هم می‌باشد. به عبارتی در بیشتر زمان حل دو ضریب وابسته خطی هستند. از لحاظ فیزیکی این به آن مفهوم است که دماسنج قادر به تفکیک دو مولفه از هم نمی‌باشد و یا به عبارتی در صورت تغییر کوچک در هر مولفه، دماسنج قادر نیست تشخیص دهد، این تغییر در کدام مولفه اتفاق افتاده است. این مسئله که در مسائل دوبعدی اتفاق می‌افتد، با افزایش فاصله دماسنج تا سطح فعال و یا ریزتر شدن المان‌ها در سطح فعال افزایش یافته و می‌تواند به عنوان مشکل سوم حل مسائل معکوس مطرح شود گرچه نیاز به مطالعه بیشتر در این مورد است.

۲-۶- کاربردهای روش های معکوس در مهندسی

در سال های اخیر روش های معکوس کاربردهای زیادی در صنایع یافته اند. محققین دانشگاهی و صنعتی مسائل مختلف مدل سازی، آنالیز و ایجاد روش های عددی جدید را مورد توجه قرار داده اند. با توجه به پیشرفت روش های اندازه گیری، کاربرد مسائل معکوس در صنعت و دانشگاه رو به افزایش است. این روش ها علاوه بر مسائل مهندسی در مسائل مربوط به علوم طبیعی نیز کاربرد یافته اند.

کاربردهای روش های معکوس در مسائل حرارتی را به سه دسته زیر می توان تقسیم کرد.

۱- کاربرد در مسائل تعیین و شناخت

۲- کاربرد در مسائل طراحی

۳- کاربردهای کنترلی

متداول ترین کاربرد مسائل معکوس مربوط به دسته اول می باشد. این نوع مسائل شامل تحلیل و آنالیز داده های تجربی می باشد. در این دسته از مسائل هدف تعیین یک تابع و یا ثابت می باشد که اندازه گیری مستقیم آن مشکل و یا غیر عملی است. دسته دوم مسائل که شامل مسائل طراحی می باشد، معمولاً شامل اندازه گیری نمی باشند. بلکه رسیدن به یک طراحی و یا بهینه سازی یک طرح از طریق مینیمم کردن یک تابع، تعریف کننده یک مسئله معکوس می باشد. به عنوان مثال می توان به مسئله استفان اشاره کرد. در بعضی مواقع انجماد با سرعتی خاص مورد نظر می باشد. با تعیین شرط مرزی مجهول می توان سرعت انجماد مورد نظر را تامین کرد. مسائل کنترلی سومین دسته از مسائل معکوس می باشند. در این نوع مسائل هدف تعیین علت (پارامتر کنترل کننده) با اندازه گیری یک متغیر می باشد. در بسیاری از مسائل از این نوع، باید یک مسئله معکوس را حل نمود.

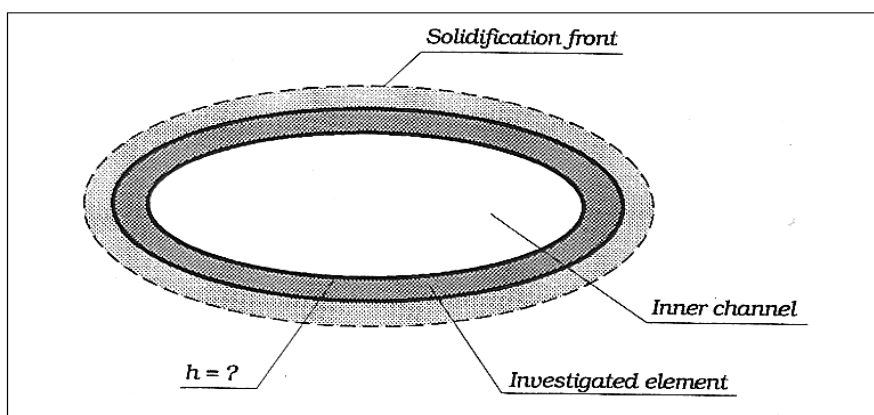
یکی از متداول ترین کاربردهای مسائل معکوس تعیین شرط مرزی مجهول و یا تخمین یک پارامتر می باشد. به عنوان نمونه می توان به تعیین ضریب جابجائی اشاره نمود. تعیین این ضریب نیاز به تعیین دمای سطحی، دمای سیال و شار حرارتی با توجه به رابطه زیر دارد

$$q = h(T_s - T_a), \quad (2-20)$$

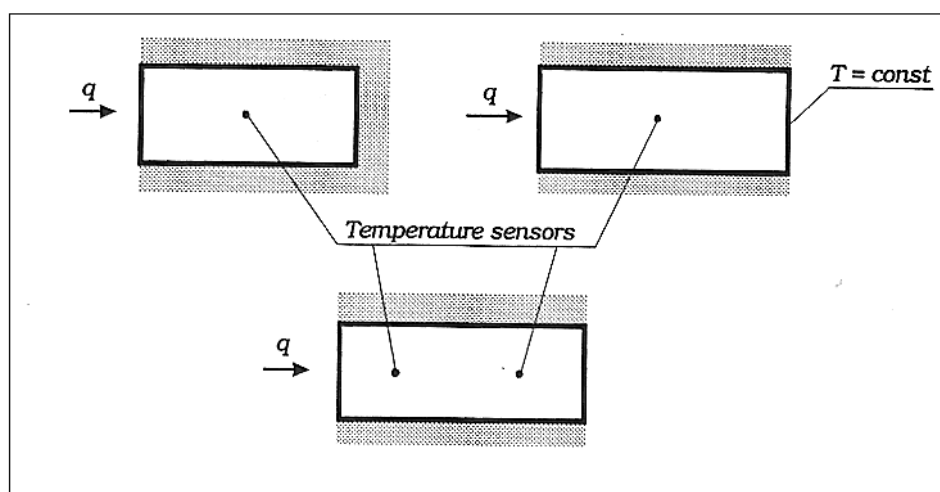
که T_s و T_a به ترتیب دماهای سطحی و سیال بوده و q شار حرارتی می باشد. تعیین ضریب حرارتی با استفاده از رابطه بالا نیاز به اندازه گیری دمای سطح دارد. دماهای اندازه گیری شده به وسیله دماسنجی که بر روی سطح قرار گرفته است، حاوی خطای بالائی است. این خطا در مواردی که سرعت سیال بالا می باشد، افزایش می یابد. راه مناسبتر برای محاسبه " h " استفاده از یک روش معکوس می باشد.

در مرجع [۴] یک روش برای تعیین ضریب انتقال حرارت زمانی که راهی برای قرار دادن دماسنج داخل جسم وجود ندارد ارائه گردیده است. در این روش جسم مورد نظر را در داخل یک فلز مایع با نقطه انجماد پائین غوطه ور میکنند. در نتیجه یک لایه از فلز روی جسم به وجود می آید. ضریب انتقال حرارت مجهول را می توان با حل یک مسئله استفان برای سطح خارجی به دست آورد. این روش برای اجسام بسیار نازک نیز کاربرد دارد. (شکل (۲-۴))

یکی دیگر از کاربردهای روش های معکوس، تخمین شار حرارتی می باشد. این دسته از مسائل بسیار نزدیک به تخمین ضریب انتقال حرارت هستند. در شکل (۲-۵) وسیله ای را که می توان از آن برای تعیین شار حرارتی استفاده کرد، نشان داده شده است. این وسیله از یک سیلندر نازک با دیواره های عایق تشکیل شده است که انتهای آن نیز می تواند عایق باشد. در صورتیکه انتهای آن عایق باشد، حداقل یک دماسنج و در صورتیکه عایق نباشد، دو دماسنج مورد نیاز است.

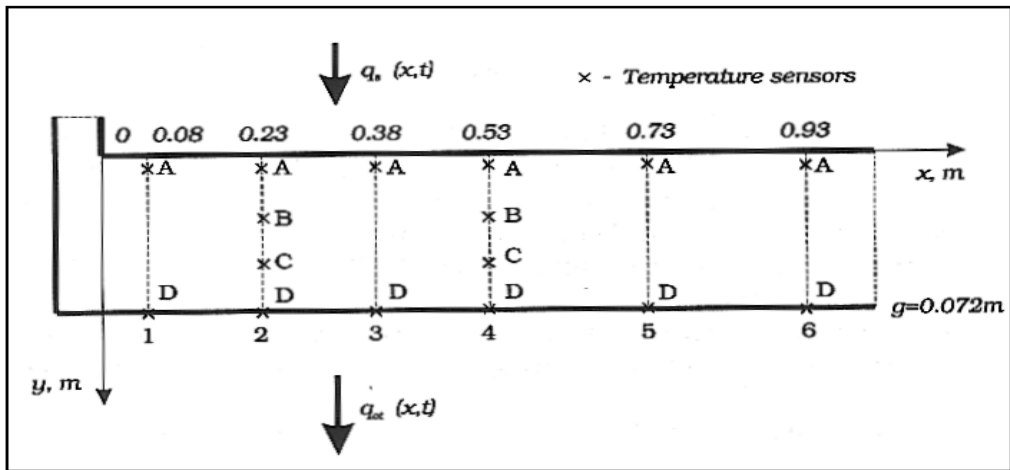


شکل (۴-۲) یک روش تجربی برای تعیین h



شکل (۵-۲) وسیله تخمین شار حرارتی

مثال دیگر این کاربرد، تخمین شار حرارتی بر روی دیواره یک کوره است [۹]. در شکل (۶-۲) محل قرار گیری دماسنج نشان داده شده است. با فرض انتقال حرارت یک بعدی می توان شار حرارتی را به دست آورد. انتقال حرارت در داخل اجسام متخلخل کاربرد دیگر روش های معکوس است. مسائل مورد بررسی در اجسام متخلخل، تعیین شرط مرزی مجهول یا خواص ترموفیزیکی است.



شکل (۲-۶) محفظه احتراق همراه با دماسنج‌ها

فصل سوم : روش های معکوس هدایت حرارتی متوالی توابع

۳-۱- تنظیم سازی در IHCP

به علت بد رفتار بودن، مسئله معکوس منجر به یک جواب ناپایداری شود. برای رفع این مشکل به دنبال راهکاری جهت بهبود در جوابها می باشیم.

تنظیم را بصورت زیر تعریف می کنیم.

U دماهای اندازه گیری شده q شار حرارتی محاسبه شده

$$U \xrightarrow{\ell} q$$

$$U \xrightarrow{\ell^*} q$$

ℓ : اپراتور ناپایدار

ℓ^* : اپراتور پایدار

$$\alpha \longrightarrow 0, \quad |\ell - \ell^*| \longrightarrow 0$$

α : کنترل کننده تفاوت دواپراتور می باشد

۳-۲- انواع تنظیم در IHCP

در مسائل هدایت حرارتی معکوس روشهای گوناگونی برای تنظیم جهت پایدار نمودن معادلات وجود دارد. سه نوع تنظیم که کاربرد بیشتری دارند به شرح می باشند.

۱- تغییر در شرط مرزی

$$q_M = q_{m+1} = q_{m+2} = \dots = q_{m+r-1}$$

۲- تغییر در معادله دیفرانسیل حاکم

در این گونه از مسائل نیز با تغییر در معادله حاکم میتوان تنظیم را انجام دهیم. به طور مثال می توان به هایپربولیک کردن معادلات هدایت حرارتی (روش **weber**) اشاره کرد.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \partial \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \longrightarrow k \frac{\partial T^2}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

parabolic

hyperbolic

۳- تغییر در تابع هدف

نوع دیگر از تنظیم سازی، تنظیم در معادله هدف می باشد که با تغییراتی در معادله هدف به

پایداری مسئله کمک می کنیم. مانند روش تنظیم تیخونو [۱۶]

۳-۳- روش تخمین متوالی توابع

روش تخمین توابع (FSM) عمدتاً برای تخمین شرط مرزی با استفاده از دماهای قرائت شده در داخل ناحیه حل مناسب می باشد. به این منظور برای تغییرات زمانی شرط مرزی مورد بررسی یک تابع در نظر گرفته می شود. تابع در نظر گرفته شده شامل تعدادی ضرایب مجهول بوده که با استفاده از کمینه کردن مجموع مربعات خطاها تخمین زده می شوند. این روش را میتوان برای مسائل تخمین پارامتر نیز به کار برد ولی نتایج به دست آمده زیاد رضایت نمی باشند.

روش تخمین متوالی توابع دارای دو ویرایش می باشد:

۱- ویرایش تمام دامنه که در آن تمام پارامترهای مجهول در کل فاصله زمانی حل به صورت همزمان تخمین زده می‌شوند.

۲- ویرایش متوالی که در آن تخمین به صورت متوالی و یا به عبارتی گام به گام صورت می‌گیرد. روش دوم را روش تخمین متوالی توابع (SFSM) می‌گویند که در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

روش تخمین متوالی توابع در ابتدا به وسیله "بک" [۱۴-۱۰] ارائه گردید. به صورت همزمان فرانک [۱۲] و داویس [۱۳] ویرایش تمام دامنه این روش را ارائه نمودند. بک اولین کسی بود که به اهمیت دماهای آینده برای تخمین یک شرط مرزی پی برد. او و همکارانش، روش خود را به مسائل غیر خطی نیز تعمیم داده و مفهوم ضریب حساسیت که محاسبات را کاهش می‌دهد، ارائه نمودند. این روش بعداً به وسیله محققین دیگر توسعه یافت [۵].

در روش تخمین متوالی توابع تمام روشهای عددی موجود برای حل مستقیم می‌توانند به کار گرفته شوند. در حقیقت هدف از حل مستقیم یافتن رابطه ای بین مجهولات و داده های مسئله می‌باشد. بر طبق روش "بک" به منظور پایدار نمودن نتایج میتوان از دماهای قرائت شده در زمان آینده استفاده نمود. ایده حاکم بر روش این است که دماهای اندازه گیری شده در زمان آینده حاوی اطلاعات در مورد شرط مرزی اعمال شده می‌باشند. این مسئله با بررسی پدیده تاخیر که در فصل (۲) شرح داده شد، قابل درک است.

به منظور بررسی روش فرم یک بعدی روش تخمین متوالی توابع ارائه خواهد شد.

۳-۴- مسئله معکوس مرزی یک بعدی

توزیع دما در یک مسئله یک بعدی از حل معادله زیر حاصل می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial x} [k(T) \frac{\partial T}{\partial x}] = \rho(T) c(T) \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1-3)$$

برای یک مسئله خطی که در آن ضریب هدایت حرارتی تابعی از دما نباشد رابطه (۱-۵) را میتوان به صورت زیر نوشت

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۲-۳)$$

که در یک مسئله مستقیم رابطه (۳-۱) یا (۳-۲) با معلوم بودن شرایط اولیه و مرزی کامل شده و قابل حل می‌باشند. شرط مرزی میتواند از هر نوعی باشد ولی برای سادگی شرط مرزی نیومن و به

صورت زیر را که کاربرد فراوانی دارد در نظر میگیریم

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q(t), \quad x = l \quad (۳-۳-الف)$$

$$+k \frac{\partial T}{\partial x} = f(t), \quad x = 0 \quad (۳-۳-ب)$$

$$T = T_0(x), \quad t = 0 \quad (۳-۳-ج)$$

که در روابط (۳-۳) $q(t)$ و $q(t)$ شار حرارتی و l طول ناحیه حل می‌باشد.

در یک مسئله معکوس یکی از شرایط مرزی (۳-۳) و یا هر دو شرط مرزی مجهول بوده و در عوض تعدادی دما در داخل ناحیه حل معلوم می‌باشند.

دماهای قرائت شده بصورت توابع مکانی و زمانی منفصلی می‌باشند که به صورت زیر می‌توانند داده شده باشند

$$T(x_j, t_i) = Y_{i,j}, \quad j = 1, \dots, J \quad i = 1, \dots, I \quad (۴-۳)$$

که در رابطه بالا \mathbf{Y} دماهای اندازه گیری شده بوده و \mathbf{I} مجموع گامهای زمانی و \mathbf{J} تعداد دماسنجها می‌باشند.

فرض می‌شود که شرط مرزی در رابطه (۳-۳-الف) مجهول می‌باشد. تخمین شار حرارتی مشکل تر از تخمین دما است. علاوه بر این با تخمین شار حرارتی میتوان به راحتی دمای مرزی را تخمین زد و با معلوم بودن دمای سیال ضریب جابجائی را محاسبه نمود. ولی نشان داده شده است که تخمین شار حرارتی با استفاده از مقادیر تخمینی دما میتواند به نتایج ناپایدار منتهی گردد. این مسئله را

یک مسئله نیمه معکوس می‌گویند [۵]. شرط مرزی معلوم (سطح غیر فعال) می‌تواند از هر نوعی انتخاب گردد.

با توجه به اینکه دماهای اندازه‌گیری شده به صورت توابعی منفصل از زمان داده می‌شوند، تابع مجهول نیز به صورت تابعی منفصل تقریب می‌شود. آسانترین راه استفاده از یک تابع پله ای یعنی

$$q_i = q(t_i), \quad (5-3)$$

می‌باشد. فرض می‌شود مقادیر توزیع دما و شار حرارتی تا زمان t_{M-1} معلوم می‌باشند. هدف تخمین q_M یعنی شار حرارتی در زمان t_M می‌باشد. بنابراین شرط مرزی در رابطه (۵-۳) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$q = q_M = const \quad t_{M-1} < t < t_M \quad (3-6-الف)$$

$$q = q(t) = h(t) \quad t > t_M \quad (3-6-ب)$$

نکته اینکه در رابطه (۳-۶) توزیع دما و شار حرارتی در زمان t_M مستقل از تابع $h(t)$ می‌باشند. برای تخمین شرط مرزی مجهول "بک" مفهوم ضریب حساسیت را تعریف کرد. مفهوم ضریب حساسیت در فصل (۲) شرح داده شد. این ضریب به صورت زیر

$$Z_{j,i,M} = \frac{\partial T_{j,i}}{\partial q_M} \quad (7-3)$$

مجهول q_M در زمان t_M تعریف می‌شود.

همانطوری که در فصل (۲) گفته شد، دو نوع ضریب حساسیت تعریف می‌گردد. که در رابطه (۳-۷) از تعریف ضریب حساسیت نسبت به شار پله ای استفاده شده است.

توزیع دما به صورت پیوسته ای وابسته به شار حرارتی می‌باشد. بنابراین دما را می‌توان به ازای شار مجهول با استفاده از بسط تیلور حول یک شار حرارتی معلوم نوشت. یعنی

$$T_{j,Mi} = T_{j,M}^* + \left. \frac{\partial T_{j,Mi}}{\partial q_M} \right|_{q_M=q^*} (q_M - q_M^*) + \dots, \quad (8-3)$$

که در رابطه (۸-۳) $T_{j,Mi}^*$ دما در زمان t_M و مکان x_j با فرض $q_M = q_M^*$ در فاصله $t_{k-1} < t < t_k$ می‌باشد.

مشتق‌های مرتبه بالاتر در رابطه (۸-۳) برای مسائل خطی برابر صفر می‌باشند. برای مسائل غیر خطی از یک روش خطی سازی استفاده می‌شود که در آن در رابطه (۸-۳) از مشتق‌های بالاتر از یک صرف‌نظر می‌شود. در این حالت ضریب حساسیت تابع دما بوده و دما تابع شار حرارتی تخمینی است. بنابراین در حل مسئله نیاز به تعدادی سعی و خطای اضافی می‌باشد.

با معرفی ضریب حساسیت در رابطه (۸-۳) داریم

$$T_{j,M} = T_{j,Mi}^* + Z_{j,M,M}(q_M - q_M^*) \quad (9-3)$$

که تنها مجهول شار حرارتی است. به عبارت دیگر با معلوم بودن دما در داخل ناحیه حل که با دماسنج اندازه گیری شده است میتوان نوشت

$$T_{1,M} = Y_{1,M} \quad (10-3)$$

که مقادیر $Y_{1,M}$ مقادیر اندازه گیری شده دما می‌باشند. با جایگزینی رابطه (۱۰-۳) در رابطه (۹-۳) میتوان شار حرارتی را محاسبه کرد

$$q_M = q_M^* + \frac{Y_{1,M} - T_{1,M}^*}{Z_{j,M,M}} \quad (11-3)$$

با تخمین شار حرارتی میتوان توزیع دما را در گام زمانی t_k محاسبه نمود که خود به عنوان شرط اولیه برای گام زمانی بعد به کار برده می‌شود.

به نظر می‌رسد که مسئله معکوس حل گردیده است ولی در واقع چنین نیست زیرا به علت طبیعت بدخیم مسئله، جواب‌های حاصل از این روش به هیچ وجه رضایت بخش نبوده و به شدت به خطاهای اندازه گیری حساس می‌باشند.

یک راه برای بهبود جوابها، استفاده از تعداد بیشتر دماسنج نسبت به مولفه‌های شار حرارتی می‌باشد. در نتیجه در رابطه (۹-۳) تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر می‌شود. چنین مسئله

ای را میتوان با کمینه کردن مجموع مربعات خطا یعنی تابع زیر حل نمود.

$$S = \sum_{j=1}^J (Y_{j,Mi} - T_{j,Mi})^2 \rightarrow \min, \quad (12-3)$$

با جایگزینی رابطه (3-9) در رابطه (3-12) و کمینه کردن مجموع مربعات خطا نسبت به q_k میتوان

نوشت

$$\sum_{j=1}^J [Y_{j,Mi} - T_{j,Mi}^* - Z_{j,M,Mi}(q_M - q_M^*)] Z_{j,M,Mi} = 0 \quad (13-3)$$

که با ساده کردن آن رابطه به دست می آید.

$$q_M = q_M^* + \frac{\sum_{j=1}^J Z_{j,M,Mi}(Y_{j,M} - T_{j,M}^*)}{\sum_{j=1}^J (Z_{j,M,M})^2} \quad (14-3)$$

ممکن است به نظر آید که هرچه تعداد دماسنج بیشتر باشد، نتایج بهتری حاصل می گردد. ولی در واقع این چنین نمی باشد. زیرا در مسائل معکوس، خطای اندازه گیری از اهمیت زیادی برخوردار است. دماهای اندازه گیری شده به وسیله دماسنج حاوی خطا می باشند و با اضافه کردن تعداد دماسنج ها، مقدار خطای وارد شده در محاسبات بیشتر می شود. علاوه بر این دماسنج هایی که در فاصله دورتری نسبت به سطح فعال قرار دارند، عملاً دارای اطلاعات کمتری هستند. در واقع ضرایب حساسیت مربوط به این دماسنج ها کوچک می باشند، بنابراین اضافه کردن آنها، کمک زیادی به حل مسئله نمی نماید. نکته دیگر اینکه قرار دادن تعداد زیاد دماسنج، در توزیع دما در داخل ناحیه حل اثر گذاشته و از نظر عملی نیز ممکن است امکان پذیر نباشد. نتیجه اینکه این روش توصیه نمی گردد.

یک روش موثر برای پایدار کردن حل، استفاده از دماهای اندازه گیری شده آینده بوده که اولین بار به وسیله بک معرفی شده است. مبنای این روش بر این اساس پایه شده است که، دماهای اندازه گیری شده در زمانهای $t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{k+R-1}$ حاوی اطلاعات در مورد شار حرارتی اعمال شده در زمان t_k می باشد. در نظر گرفتن این دماها در واقع در نظر گرفتن پدیده تاخیر است که در فصل ۲ مورد بررسی قرار گرفت.

مشابه روش قبلی فرض می‌شود که مسئله تا زمان t_{k-1} حل گردیده است. یعنی مقادیر $T_{k-1,i}$ و q_{k-1} معلوم می‌باشند. علاوه بر این دما در r گام زمانی آینده نیز معلوم هستند. یعنی

$$T_{1,M+i-1} = Y_{1,M+i-1,1}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (15-3)$$

که r تعداد گامهای زمانی آینده می‌باشد. به منظور استفاده از این دماها، نیاز به در نظر گرفتن یک تابع برای تغییرات شار حرارتی در این فاصله زمانی است. بک استفاده از فرض لحظه ای ثابت بودن شار حرارتی یعنی

$$q_M = q_{M+1} = \dots = q_{M+r-1}, \quad (16-3)$$

را در این فاصله زمانی را پیشنهاد کرد.

نکته اینکه این فرض فقط برای محاسبه q_M به کار گرفته می‌شود. مجدداً با استفاده از فرض کمینه کردن مجموع مربعات خطا میتوان نوشت.

$$S = \sum_{i=1}^r (Y_{1,M+i-1} - T_{1,M+i-1})^2 \rightarrow \min \quad (17-3)$$

با قرار دادن رابطه (3-9) در رابطه (3-17) و کمینه کردن مجموع مربعات خطا نسبت به q_M رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\sum_{i=1}^r [Y_{1,M+i-1} - T_{1,M+i-1}^* - Z_{j,M,M} (q_M - q_M^*)] Z_{j,M,Mi} = 0 \quad (18-3)$$

که بعد از مرتب کردن، رابطه

$$q_M = q_M^* + \frac{\sum_{i=1}^r Z_{1,M,M} (Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}^*)}{\sum_{i=1}^r (Z_{j,M,M})^2} \quad (19-3)$$

حاصل می‌گردد. این روش حل برای هرگام زمانی تکرار می‌شود. اگر مسئله خطی باشد رابطه (3-19) جواب نهائی برای مسئله است. برای مسائل غیر خطی ضریب حساسیت تابعی از دما بوده و برای حل مسئله نیاز به تکرار می‌باشد. در این حالت در هر تکرار تا رسیدن به همگرایی رابطه (3-19) محاسبه می‌شود.

این روش را به راحتی میتوان برای مسائلی با تعداد دماسنج بیشتر تعمیم داد. برای این نوع مسائل میتوان نوشت

$$S = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^r (Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}^*)^2 \rightarrow \min, \quad (20-3)$$

که با مشتق گرفتن و برابر صفر قرار دادن رابطه زیر حاصل می‌گردد

$$q_M = q_M^* + \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^r (Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1}^*) Z_{j,M,M}}{\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^r (Z_{j,M,M})^2}. \quad (21-3)$$

از این رابطه برای حل معکوس استفاده می‌شود. همانطوریکه گفته شد در انتخاب تعداد دماسنج باید بسیار دقت نمود. زیرا دماهای اندازه گیری شده حاوی خطا بوده و استفاده از تعداد زیاد دماسنج میتواند مشکلاتی را در دقت و پایداری حل ایجاد نماید.

روند حل برای یک مسئله یک بعدی که روابط آن به دست آمد به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{قرار دادن } M=1 \text{ و فرض } q_M^* = 0 \text{ در فاصله زمانی } 0 < t < t_1$$

محاسبه $T_{j,M+i-1}^*$ برای $i=1, \dots, r$ و $j=1, \dots, J$ این کار میتواند با استفاده از هر روش حل

مستقیمی انجام شود. برای این کار مراحل زیر صورت میگیرد:

۱. گسسته سازی روابط (۳-۳)
۲. استفاده از شرط مرزی q_M^* به جای $q(t)$
۳. استفاده از شرط مرزی (۳-۳-ب)
۴. استفاده از شرط اولیه $T_{M-1}^* = T_{M-1}$ که T_{k-1} در گام زمانی قبل محاسبه شده است.
۵. محاسبه q_M از روابط (۱۹-۳) یا (۲۱-۳)
۶. محاسبه توزیع دما در ناحیه حل با استفاده از رابطه (۹-۳) و یا انجام حل مستقیم با استفاده از فرم گسسته سازی شده روابط (۳-۳).
۷. جایگزینی $M \rightarrow M+1$ و رفتن به مرحله بعد محاسبات

نکته اینکه در مسائل غیرخطی نیاز به تکرار مرحله دوم و سوم محاسبات می‌باشد. همانطوریکه در شرح داده شد اختلاف بین محاسبات ضریب حساسیت و دما در شرایط مرزی و شرایط اولیه می‌باشد. شرایط اولیه و مرزی برای محاسبه ضریب حساسیت شرایط همگن هستند. سمت راست رابطه (۳-۳-ج) که بیانگر شرط مرزی مجهول است برای محاسبه ضریب حساسیت برابر یک قرار داده می‌شود. بنابراین روابط زیر برای محاسبه ضریب حساسیت حاصل می‌گردد

$$k \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad (۳-۲۱-الف)$$

$$-k \frac{\partial Z}{\partial x} = 1.0, \quad x = l \quad (۳-۲۱-ب)$$

$$+k \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad x = 0 \quad (۳-۲۱-ج)$$

$$Z(x, t) = 0 \quad t = 0 \quad (۳-۲۱-د)$$

مسئله مرزی که در روابط (۳-۲۱) بیان گردیده است را میتوان با روش مشابه مسئله مرزی (۳-۵) مجزاسازی نمود. وقتی یک مسئله معکوس با یک روش متوالی حل می‌شود روابط حاکم و شرایط اولیه و مرزی که برای محاسبه ضریب حساسیت به کار می‌روند، برای گام‌های زمانی مختلف یکسان باقی می‌مانند. در نتیجه ضریب حساسیت فقط یک بار و برای r گام زمانی محاسبه می‌شود. در واقع وقتی ضریب حساسیت یک بار محاسبه شد برای تمام گام‌های زمانی به کار گرفته می‌شود. در مسائل غیرخطی اینچنین نیست. در این نوع مسائل چون ضریب حساسیت تابع خواص ترموفیزیکی بوده و این ضرایب تابع دما هستند باید در هر گام زمانی مجدداً محاسبه گردند. سوال دیگری که باید پاسخ داده شود نحوه محاسبه تعداد گام‌های زمانی آینده می‌باشد. متأسفانه جواب عمومی برای این سوال وجود ندارد. بسیاری از محققین روش سعی و خطا را برای این انتخاب پیشنهاد نموده‌اند. نکته ای که در این ارتباط باید اشاره شود این است که مطالعات بک نشان داده است که به علت خصوصیات مسائل معکوس گذرا به ازای زمانهای طولانی تاثیر دو مولفه

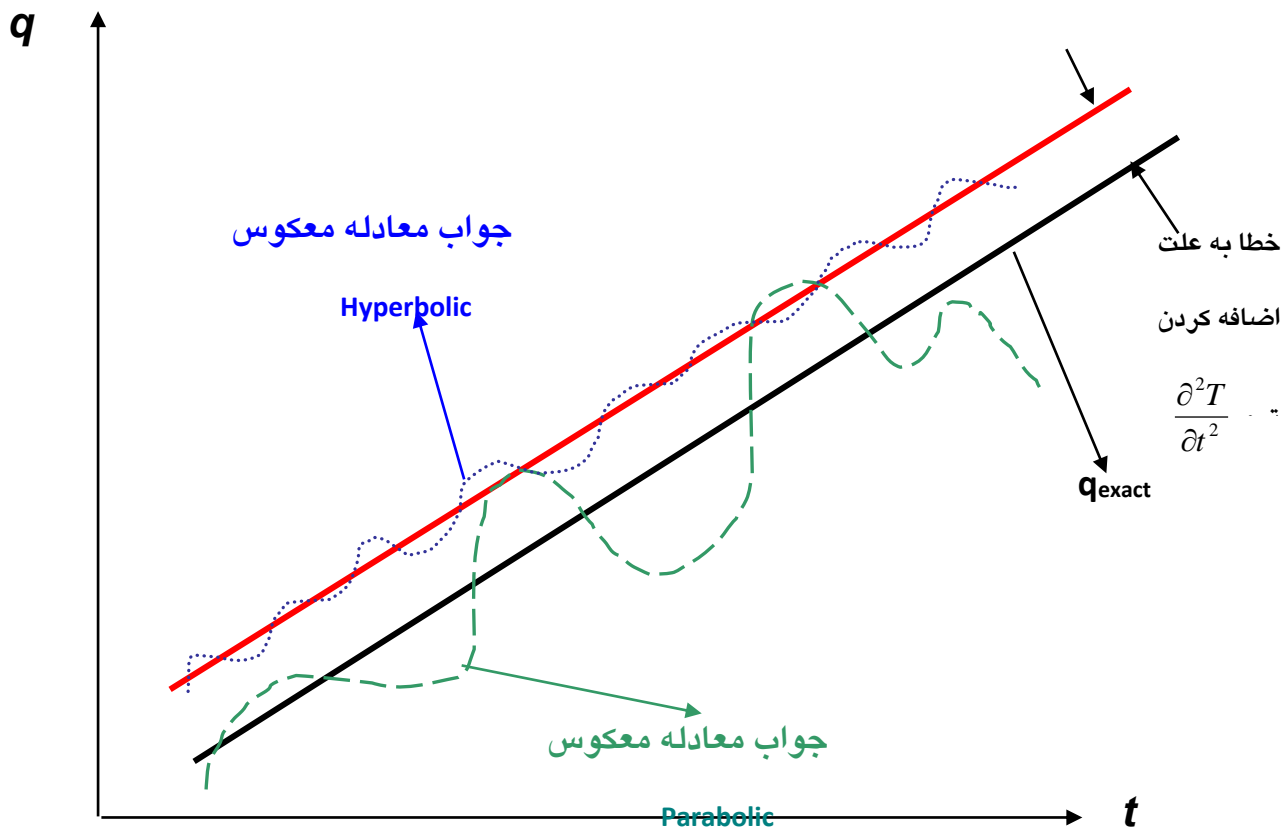
متوالی قابل تشخیص نمی‌باشد. بنابراین برای تخمین یک شرط مرزی مجهول باید از دماهایی استفاده کرد که در فاصله نزدیک زمانی قرار گرفته‌اند.

در روابط به دست آمده از تابع ثابت برای شار حرارتی استفاده گردید. ممکن است این تصور به وجود آید که استفاده از توابع پیچیده تر باعث بهبود نتایج می‌گردد. ولی بررسی‌های صورت گرفته به وسیله بک نشان داده است که استفاده از یک تابع خطی به جای ثابت باعث می‌گردد که حد پایداری گامهای زمانی افزایش یابد. این مسئله به نوبه خود باعث می‌گردد که دقت حل کاهش یابد. اخیراً سومچارت چانتاسیروان ویرایش جدیدی از روش تخمین متوالی توابع را ارائه نمود که در آن نشان داده شده است با استفاده از یک تابع خطی میتوان دقت را بهبود داد. او روش خود را برای مسائل یک بعدی ارائه داد ولی بعداً آنرا برای مسائل دوبعدی نیز گسترش داد. نکته اینکه در مقاله او برای شبیه سازی دماهای اندازه گیری شده از یک شار حرارتی خطی استفاده شده است و سپس این شار با یک تابع خطی تخمین زده شده است. این امکان وجود دارد که بهبود حاصل در نتایج به این علت بوده است. نکته دیگر در ارتباط با روش او اینکه دارای پیچیدگی بیشتری نسبت به روش بک است. که این مسئله خود به عنوان یک نقطه منفی برای روش می‌تواند در نظر گرفته شود.

۳-۵- روش weber در حل مسائل هدایت معکوس

برای حل مسائل پارابولیک معکوس در انتقال حرارت راههای گوناگونی پیشنهاد شده است. *Weber* روش حل معادلات غیر خطی را در یک بعدی در مسائل معکوس توسعه داد او به جای حل معادله پارابولیک در انتقال حرارت به حل معادله هایپربولیک پرداخت. [۱۱۵]

در مسائل معکوس به علت وجود خطای مسئله راههای گوناگونی برای کاهش این خطا پیشنهاد شده است. یک روش به این صورت است که می‌توان با انتخاب یک خطای کوچک در معادله حاکم و تغییراتی در معادله حاکم به یک جواب پایدار برسیم این روشی بود که *Weber* به آن پرداخت.



شکل (۱-۳) کارکرد روش وبر در حل معادلات

به جای معادله پارابولیک انتقال حرارت $\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ ، *Weber* ترم $k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ به معادله

فوق اضافه نمود . اضافه نمودن ترم فوق نه تنها به فیزیک مسئله خدشه ای وارد نکرد بلکه حتی آن را به فیزیک نزدیکتر نمود .

دیدگاه کلاسیک فوریه - کیرشهف محدود بودن سرعت موج گرما در جسم را ندیده گرفته است و این حقیقت در بسیاری از مسائل مهندسی نیز از آن چشم پوشی می شود. در معادله پارابولیک گرما با سرعت بی نهایت در جسم منتقل می شود که این فرض با فیزیک مسئله در ارتباط نمی باشد ما در معادله هایپربولیک گرما ، گرما با سرعت محدود به صورت موج وار در جسم منتشر می شود بنابراین به فیزیک مسئله نیز نزدیکتر می شویم .

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (22-3)$$

شرایط مرزی

$$T(0, x) = T_0(x) \quad (23-3)$$

$$T(t, L) = u(t) \quad (24-3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(t, L) = f(t) \quad (25-3)$$

$$T(t_i, x) = T_i(x) \quad (26-3)$$

شرط (26-3) که فقط سهمی کوچکی را در معادله هایپربولیک دارد و تأثیر چندانی بر حل مسئله وارد نمی کند و اگر مقدار k به قدر کافی کوچک باشد در نتیجه می توان تابع $T_i(x)$ را یک تابع دلخواه از متغیرها انتخاب نمود. همچنین مسئله مرزی هایپربولیک یعنی معادلات (22-3) تا (26-3) مسئله پایدار خوش وضع هستند و تست حل آنها نیز خوش امتحان می باشد علاوه بر این روش عددی نیز برای مسائل هایپربولیک نیز بسیار مؤثر و کارآمد و دقت بالایی دارند.

راههای گوناگونی را برای گسسته سازی معادلات هایپربولیک وجود دارد. با انتخاب جداسازی مرکزی برای هر دو متغیر مکان و زمان می توان بدست آورد که

$$\frac{K}{\Delta t^2} (T_{k-1,i} - 2T_{k,i} + T_{k+1,i}) + \frac{1}{2\Delta t} (T_{k+1,i} - T_{k-1,i}) = \quad (27-3)$$

$$\frac{a}{\Delta x^2} (T_{k,i+1} - 2T_{k,i} + T_{k,i-1})$$

$$\alpha = \frac{K}{a} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 \leq 1 \quad (28-3)$$

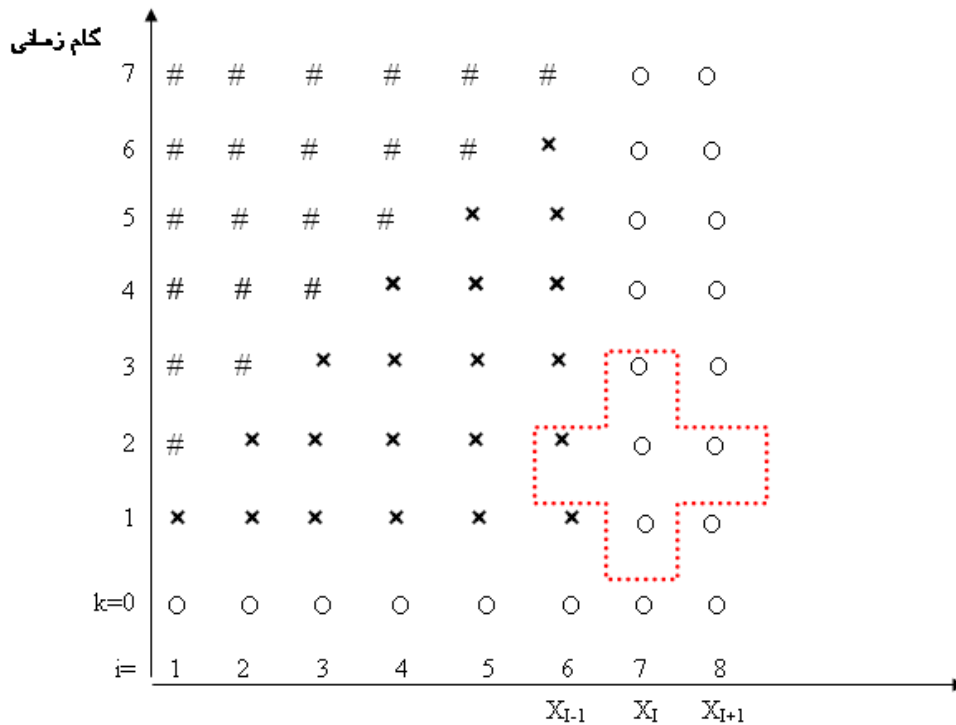
می باشد. بنابراین اگر مقدار K خیلی کوچک انتخاب شود مطمئناً شرط فوق نیز صادق خواهد بود. معادله (27-3) را بر حسب $T_{k,i-1}$ مرتب می کنیم.

$$T_{k,i-1} = -\left(\frac{1}{2\beta} - \alpha\right)T_{k-1,i} + 2(1-\alpha)T_{k,i} + \left(\frac{1}{2\beta} + \alpha\right)T_{k+1,i} - T_{k,i+1} \quad (29-3)$$

$$\beta = \frac{a \Delta t}{\Delta x^2} \text{ که}$$

مقدار $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ مربوط به شرایط اولیه ، $\mathbf{i} = \mathbf{I}$ مربوط به نورهای مرزی ناحیه حل می باشد . محاسبات خود را می توانیم از نور $\mathbf{i} = \mathbf{I}$ و در زمانهای $\mathbf{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{k} - \mathbf{1}$ شروع کنیم .

نمودار زمان و مکان روش فوق اولین بار توسط Beck نشان داده شد .



شکل (۲-۳) شبکه مکان و زمان برای روش weber : $I = 7$ نقاط گره و $k = 7$ گام زمانی O : دمای معلوم

X : دمای در حال محاسبه و $\#$ دمای غیر قابل محاسبه

۳-۶- ترکیب روشهای FSM و RM

در روش **(RM) Regularization** تعدادی شرایط مشخص شده را اعمال می کنیم

که این شرایط ، مقادیری نامعلوم از شار حرارتی و مشتقات اول و دوم آنها که این مشتقات مرتبه

روش را تعیین می کند، از طرف دیگر با انتخاب روش **(FSM) Function Specification Method** که با فرض شار حرارتی در هر گام برابر و ثابت در نظر گرفته می شود. بنابراین فقط **RM** مرتبه صفر می تواند با روش **FSM** ترکیب شود در صورت انتخاب مرتبه های بالای **RM** ترکیب کردن آنها با **FSM** باید شار حرارتی بصورت خطی انتخاب شوند و یا توابع پارابولیک و یاغیر ثابت [۵].

این روشها توسط **Beck** و **Murio** به کار گرفته شد و یک مسئله مرزی معکوس یک بعدی را مورد بررسی قرار دادند، این مسئله یک ورق نیمه بی نهایت بود که آنها مقدار شار حرارتی را روی سطوح خارجی بدست آوردند .

فرم تابعی به شکل زیر انتخاب شد :

$$q_{k+r-1} = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots + A_p r^p \quad (30-3)$$

که $A_0 = q_k$, $r=1,2,\dots,R$ اگر $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ قرار دهیم یک شار حرارتی ثابت و اگر $\mathbf{p} = \mathbf{1}$ یک شار حرارتی خطی بدست می آید . روش تنظیمی مرتبه صفر نیز در اینجا به کار گرفته می شود .

$$S = \sum_{r=1}^R (T_{k+r-1,1} - U_{k+r-1,1})^2 + \lambda \sum_{r=1}^R q_{k+r-1}^2 \quad (31-3)$$

که عبارت $U_{k,i}$ مقادیر دمای معلوم و λ پارامتر تنظیم است ضریب $\mathbf{A0}$ و $\mathbf{A1}$ و مقادیر مجهول هستند .

در این مرتبه **R** تعداد گلهای زمانی بعدی برای حل مسائل باید کوچکترین مساوی $\mathbf{n} + \mathbf{1}$ یا عدد زوج بزرگتر از $\mathbf{n} + \mathbf{1}$ انتخاب شود تا بتوان روش کاهش مربعات را به کار برد. معمولاً در این روش فرض می شود که مقادیر مؤلفه های فشار حرارتی $\mathbf{q}_{k,j}$ مقادیری معلوم در زمان \mathbf{t}_{k-1} و هدف تقریب زدن مجهولات در زمان \mathbf{t}_k می باشد. در مرتبه های بالاتر **RM** مؤلفه شار حرارتی به صورت زیر بیان می شود

(۳۲-۳)

$$q_{K+r-i,j} = \left[\beta_0 + \beta_1(r-1) + \beta_2 \frac{r(r-1)}{2} \right] q_{k,j} + \beta_2 \frac{q_{k-2,j} - 2q_{k-1,j}}{2} r(r-1) - \beta_1(r-1)q_{k-1,j}$$

$$r = 1, 2, \dots, R$$

که \mathbf{R} تعداد گامهای زمانی بعدی است اگر $\beta_1 = \beta_2 = 0, \beta_0 = 1$ مقادیر شار ثابت فرض شده است
 اگر $\beta_1 = 1$ خطی فرض شده و اگر $\beta_2 = 1$ یک مقدار پارابولیک نیز به معادله شار اضافه می گردد
 در حالت کلی هر ترکیبی از β_p امکان پذیر است.

شکل معادله (۳۲-۳) یک ترکیب اصلی در روش **FSM** است مجهولات فقط در زمان \mathbf{tk} به یکدیگر وابسته اند هر اطلاعات اضافی از دما و در زمانهای بعدی می تواند به طور مستقیم در معادله به کار گرفته شود که این کار به کمک **Smoothing** کردن انجام می گیرد. تعداد مجهولات در روش **Beck** و **Murio** بستگی به تعداد ضریب $\mathbf{A0}$ و $\mathbf{A1}$ و . . . دارد.

در حقیقت معادله (۳۲-۳) مؤلفه های شار حرارتی هستند که مقادیری مجهولند و اگر از مرتبه های بالای تنظیم سازی استفاده می شود مقادیری $\mathbf{q_{k-1}, z}$ و $\mathbf{q_{k-2}, z}$ نیز باید محاسبه شوند. به مثال زیر توجه کنید.

معادله دیفرانسیل حاکم

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = a \nabla^2 T(r,t) \quad (۳۳-۳)$$

که بردار \mathbf{r} متغیر مکانی است و \mathbf{a} ضریب نفوذ

شرایط مرزی

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q(r,t) \quad \begin{cases} r \rightarrow r_A \\ r_A \in S_A \end{cases} \quad (۳۴-۳)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_B(r,t) \quad \begin{cases} r \rightarrow r_B \\ r_B \in S_B \end{cases} \quad (۳۵-۳)$$

که بردار \mathbf{n} بردار نرمال خارجی روی مرز است و $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ مقدار شار مجهول $\mathbf{q}_B(\mathbf{r}, t)$ مقدار شار معلوم بر روی مرز \mathbf{S}_A و \mathbf{S}_B می باشد و $S_A \cap S_B$ مجموع سطح خارجی را تشکیل می دهد .
شرط اولیه و دماهای معلوم در داخل ناحیه حل بصورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} U_{k,i} &= T(t_k, r_i) \\ k &= 1, 2, \dots, K \\ i &= 1, 2, \dots, I \\ T(r, t) &= T_0(t) \\ t &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (36-3)$$

(37-3)

که مقدار \mathbf{I} تعداد گره های داخلی ناحیه حل است و \mathbf{K} مکان زمانهای مورد بررسی در بازه زمانی حل می باشد همانطور که از قبل می دانیم زمان و مکان متغیرهایی هستند که باید جداسازی شوند و از نتایج این جداسازی می توانیم مقادیر $\mathbf{U}_{k,i}$ و $\mathbf{T}_{k,i}$ و مؤلفه های شار $\mathbf{q}_{k,j}$ را بدست آوریم .

$$q(r_j, t) = \begin{cases} q_{k,j} = \text{const} & \text{For } t_{k-1} < t < t_k \\ \varphi_i(t) & \text{For } t > t_k \end{cases} \quad (38-3)$$

که بیان کننده مؤلفه های شار حرارتی است که به کمک معادله (32-3) بیان شده اند زیرا سطح

به \mathbf{J} المان مرزی تقسیم شده است

تعداد دماهای اندازه گیری شده \mathbf{I} باید بزرگتر مساوی از \mathbf{J} باشد .

$$I \geq j \quad (39-3)$$

همچنین ضریب حساسیت به صورت زیر تعریف می شود .

$$Z_{m,i}^{k,j} = \frac{\partial T_{m,i}}{\partial q_{k,j}} \quad (40-3)$$

که اندیسهای **k** و **j** مربوط به زمان و تعداد گره های مرزی مرتبط با شار حرارتی و **m** و **i** مربوط به زمان و گره های ناحیه داخلی حل که سنسور دما در آنها قرار گرفته می باشند .

در مسائل مرزی برای تعیین مقدار ضریب حساسیت مشابه معادله زیر به کار گرفته می شود .

$$\frac{\partial Z^{k,j}(t,r)}{\partial t} = a \nabla^2 Z^{k,j}(t,r) \quad (41-3)$$

$$-\lambda \frac{\partial Z^{k,j}(t,r)}{\partial n} = \begin{cases} 1 & \text{if } r \in S_{Aj} \text{ and } t_{k-1} < t \leq t_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (42-3)$$

$$\text{برای } t = 0 \quad (43-3)$$

$$Z^{k,j}(t,r) = 0$$

بعد از اینکه ضرائب حساسیت محاسبه شده اند می توان آنها را بصورت یک ماتریس که **J** ستون **I** سطر دارد نوشت .

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1^1 & \dots & Z_1^j & \dots & Z_1^J \\ Z_i^1 & \dots & Z_i^j & \dots & Z_i^J \\ Z_l^1 & \dots & Z_l^j & \dots & Z_l^J \end{bmatrix} \quad (44-3)$$

که هر زیر ماتریس Z_i^j از **R** سطر و **R** ستون تشکیل شده است .

$$Z_i^j = \begin{bmatrix} Z_{i,1}^{1,i} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Z_{2,i}^{1,j} & Z_{2,i}^{2,j} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ Z_{R,i}^{i,j} & Z_{R,i}^{2,j} & \dots & \dots & Z_{R,i}^{R,j} \end{bmatrix} \quad (45-3)$$

طبق شرط اولیه (۳-۴۳) هر ضریب برای $m < k$ برابر با صفر است در نتیجه زیر ماتریس Z_i^j تبدیل به یک ماتریس پایین مثلثی که همه مؤلفه های قطر اصلی آن برابر با صفر هستند .

حال به بررسی یک مسئله معکوس که رابط خطی بین مؤلفه های فشار حرارتی آن وجود دارد می پردازیم .

$$T = T^* + Z[q - q^*] \quad (46-3)$$

که $I \times R$ بردار **I** شامل **T** زیر بردار

$$T = [T_1, T_2, \dots, T_I]^T \quad (47-3)$$

با هر \mathbf{T}_i که

$$T_i = [T_{k,i}, T_{k-1,j}, \dots, T_{k+r-1,j}, \dots, T_{k+R-i,j}]^T \quad (48-3)$$

و $\mathbf{R} \times \mathbf{I}$ بردار که \mathbf{q} شامل \mathbf{J} زیر بردار

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_J]^T \quad (49-3)$$

و

$$q_j = [q_{k,j}, q_{k+1,j}, \dots, q_{k+r-1,j}, \dots, q_{k+R-1,j}]^T \quad (50-3)$$

که \mathbf{q}^* یک فشار حرارتی دلخواه و اختیاری و \mathbf{T}^* نیز توزیع دمای متناظر با $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ می باشد.

اگر به توزیع دما و دماهای دیگر احتیاج بود در آن نقطه یک سنسوره دما می گذاریم.

معادله (46-3) می توان بصورت اندیسی نیز نوشت :

$$T_{k+r-1,i} = T_{K+r-1,i}^* + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^r Z_{r,i}^{r,j} (q_{K+m-1,j} - q_{K+m-1,j}^*)$$

$$i = 1, 2, \dots, I$$

$$r = 1, 2, \dots, R \quad (51-3)$$

زیر نویس \mathbf{k} مربوط به گام زمانی برای مؤلفه های شار حرارتی است و مؤلفه های شار حرارتی از

$$t = t_{K+1} \text{ تا } t_{k+2} \text{ و } \dots \text{ و } t_{k+R-1} \text{ می توان تعیین کرد (32-3)}$$

$$q_{k+r-1,j} = k_r q_{k,j} + \eta_{r,j} \quad (52-3)$$

$$k_r = \beta_0 + \beta_1 (r-1) + \beta_2 \frac{r(r-1)}{2} \quad (53-3)$$

$$\eta_{r,j} = \beta_2 \frac{q_{k-2,j} - 2q_{k-1,j}}{2} + r(r-1) - \beta_1 (r-1) q_{k-1,j} \quad (54-3)$$

با جانشینی معادله های (52-3) و (53-3) و (54-3) در (46-3) داریم

$$T = T^* + XQ + Y - Zq^* \quad (55-3)$$

که بردار \mathbf{Q} شامل \mathbf{j} مقدار مؤلفه شار حرارتی مجهول در زمان $\mathbf{t} = \mathbf{t}_k$

$$Q = [q_{k,1}, q_{k,2}, \dots, q_{k,j}]^T \quad (56-3)$$

و ماتریس \mathbf{X} را می توان با \mathbf{j} بردار نوشت \mathbf{x}^j یعنی

$$X = [X^1, X^2, \dots, X^J] \quad (57-3)$$

که هر \mathbf{x}^j شامل $\mathbf{R} \times \mathbf{I}$ ورودی است .

$$X^j = [X_{1,1}^j, X_{2,1}^j, X_{R,1}^j, \dots, X_{r,i}^j, \dots, X_{R,1}^j]^T \quad (58-3)$$

و بردار \mathbf{Y} شامل $\mathbf{R} \times \mathbf{I}$ ورودی

$$Y = [Y_{1,1}, Y_{2,1}, \dots, Y_{R,1}, \dots, Y_{i,1}, \dots, Y_{R,1}]^T \quad (59-3)$$

$X_{r,i}^j$ و $Y_{r,i}^j$ مؤلفه های هستند که می توان از رابطه زیر محاسبه کرد .

$$X_{r,i}^j = \sum_{m=1}^r Z_{r,i}^{m,j} k_m \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots, R \\ i = 1, 2, \dots, I \\ j = 1, 2, \dots, J \end{matrix} \quad (60-3)$$

$$Y_{r,i} = \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^r Z_{r,i}^{m,j} \eta_{m,j} \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots, R \\ i = 1, 2, \dots, I \end{matrix} \quad (61-3)$$

در مسائل معکوس باید مسئله در $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{k-1}$ حل شود و از این حل در زمان $\mathbf{t} = \mathbf{t}_k$ استفاده شود

با \mathbf{R} گام زمانی بعد $t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}, \dots, t_{k+R-1}$

تابع \mathbf{S} باید مینیمم شود پس می توان نوشت :

(62-3)

$$S = (U-T)^T (U-T) + \gamma \left[\alpha \cdot (H \cdot q)^T (H \cdot q) + \frac{\alpha_1}{\Delta t^2} (H_1 q)^T (H_1 q) + \frac{\alpha_2}{\Delta t^4} (H_2 q)^T (H_2 q) \right] \longrightarrow \min$$

ماتریسهای \mathbf{H}_0 و \mathbf{H}_1 و \mathbf{H}_2 یا \mathbf{H}_p ($\mathbf{p} = 0, 1, 2$) که مربوط به مرتبه تنظیم سازی است)

ماتریسهای تنظیم سازی شامل $\mathbf{J} \times \mathbf{j}$ زیر ماتریس .

$$H_p = \begin{bmatrix} H_p^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_p^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H_p^j \end{bmatrix}$$

که $\mathbf{0}$ یک ماتریس صفر است هر زیر ماتریس H_p^j ($j = 1, 2, \dots, J$) شامل \mathbf{R} ردیف و \mathbf{R} ستون است

برای همه \mathbf{p} می توان نوشت :

$$\text{for } P=0 \quad H_0^j = \mathbf{I}$$

که \mathbf{I} ماتریس واحد است

$$H_1^j = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{برای } \mathbf{p} = 1$$

برای $\mathbf{p} = 2$

$$H_2^j = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

می توان دید گام زمانهایی که به کار برده می شود باید به طور همزمان ارضا شود .

برای $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ (تنظیم مرتبه صفر) $1 \leq R \leq k$

برای $\mathbf{P} = \mathbf{1}$ (تنظیم مرتبه یک) $2 \leq R \leq k-1$

برای $\mathbf{P} = \mathbf{3}$ (تنظیم مرتبه دو) $3 \leq R \leq k-2$

که \mathbf{K} تعداد گامهای زمانی است .

با جانشینی معادله (۳-۵۵) در معادله (۳-۶۲) سر انجام بدست می آوریم .

$$\left\{ X^T X + \gamma \left[\alpha_0 X_{H_0}^T X_{H_0} + \frac{\alpha_1}{\Delta t^2} X_{H_1}^T X_{H_1} + \frac{\alpha_2}{\Delta t^4} X_{H_2}^T X_{H_2} \right] \right\} Q = X^T (U - T^* - Y) \\ + X^T Z q^* - \gamma \left[\alpha_0 X_{H_0}^T Y_{H_0} + \frac{\alpha_1}{\Delta t^2} X_{H_1}^T Y_{H_1} + \frac{\alpha_2}{\Delta t^4} X_{H_2}^T Y_{H_2} \right] \quad (۳-۶۳)$$

برای تنظیم سازی مرتبه صفر باید مقادیر β_1 و β_2 برابر با صفر و $R_{\min} = 1$ و مرتبه ۱ باید

$$\beta_1 \text{ و } \beta_2 \text{ برابر با یک و } R_{\min} = 2 \text{ و برای مرتبه دوم } \beta_2 = 1 \text{ و } R_{\min} = 3$$

ماتریس جدید \mathbf{X}_{HP} و مقادیر بردار \mathbf{Y}_{HP} ($\mathbf{P} = 0, 1, 2$) که در معادله (۳-۶۳) مشاهده

میشوند بصورت یک ساختار عمومی از \mathbf{X}_{HP} ($\mathbf{P} = 0, 1, 2$) می باشند که

$$X_{HP} = \begin{bmatrix} X_{HP}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_{HP}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X_{HP}^j \end{bmatrix} \quad (۳-۶۴)$$

که $\mathbf{0}$ یک بردار صفر است و بردار X_{HP}^j شامل مؤلفه های زیر می باشد .

$$X_{HPr}^j = [X_{HP1}^j, X_{HP2}^j, \dots, X_{HPr}^j, \dots, X_{HP}^j R]^T \quad (۳-۶۵)$$

که می توان از معادله زیر بدست آورد

$$X_{HPr}^j = \sum_{m=1}^r H_{pr,m}^j k_m \quad (۳-۶۶)$$

همچنین بردار \mathbf{Y}_{HP} را میتوان بصورت زیر ماتریسهایی به شکل زیر تعریف نمود .

$$Y_{HP}^j = [Y_{HP}^1, Y_{HP}^2, \dots, Y_{HP}^j]^T \quad (۳-۶۷)$$

$$Y_{HP}^j = [Y_{HP}^j, Y_{HP2}^j, \dots, Y_{HP}^j, \dots, Y_{HPR}^j]^T \quad (۳-۶۸)$$

$$Y_{HPr}^j = \sum_{m=1}^r H_{pr,m}^j \eta_{m,j} \quad (۳-۶۹)$$

مقادیر بردار \mathbf{q} را می توان از راههای ساده ای بدست آورد یعنی از مقادیر $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{k-1}$ در **FSM** با تخمین مؤلفه شار حرارتی می توان بین بازده $t_{k-1} < t \leq t_k$ رسید و برای هر زمان بعدی نیز در این فاصله می توان این مؤلفه ها را محاسبه کرد.

الگوریتم حل برای حل مسائل مرزی شامل مراحل زیر است.

۱- فرض مرتبه تنظیم سازی در **RM** یعنی انتخاب عدد α_P و تقریب فرم توابع شار حرارتی یعنی انتخاب عدد β_P

۲- ایجاد ماتریس **Hp** طبق مرتبه تنظیم سازی و محاسبه ضرائب حساسیت **Z**

۳- جایگزینی $\mathbf{K} = \mathbf{1}$ و $q_{k+r-1}^* = 0$ برای $\mathbf{r} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{R}$ و $\mathbf{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{J}$ برای فاصله زمانی $0 < t \leq t_1$

۴- برای $\mathbf{r} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{R}$ محاسبه \mathbf{K}_r (معادله (۵۳-۳)) و فرض اینکه اگر $\mathbf{K} = \mathbf{1}$ پس $\mathbf{K} = \mathbf{2}$ ، $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ، $\beta_2 = 0$ و با وجود اینکه فرم توابع شار حرارتی انتخاب شده است .

۵- محاسبه ماتریس **X** (معادله (۵۷-۳)) و (۵۸-۳) و (۶۰-۳) **X_{HP}** (معادله (۶۴-۳)) و (۶۵-۳) و (۶۶-۳)

۶- محاسبه $\eta_{r,i}$ برای $\mathbf{r} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{R}$ و $\mathbf{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{J}$ (معادله (۵۴-۳))

۷- محاسبه بردار **Y** (معادله (۵۹-۳)) و (۶۱-۳) و **Y_{HP}** (معادله (۶۷-۳)) و (۶۸-۳) و (۶۹)

۸- محاسبه $\mathbf{T}_{k+r-1-i}^*$ برای $\mathbf{r} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{R}$ و $\mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{I}$ از مسائل مرزی

*معادله دیفرانسیل (۳۳-۳)

$$q \xrightarrow{*} q(t, r)_{k+r-1, j}$$

* شرایط مرزی (۳۴-۳) با

* شرایط مرزی (۳۵-۳)

* شرایط اولیه $T_{k-1,j}^* = T_{k-1,j}$ وقتی که $T_{k-1,j}$ تخمین زده شده در فاصله زمانی $t_{k-2} < t \leq t_{k-1}$ یا شرط (۳-۳۶)

۹- محاسبه q_k برای $j = 1, 2, \dots, J$ (معادله (۳-۵۶) از معادله (۳-۵۳) برای مقادیر متفاوت از پارامتر تنظیم سازی λ

۱۰- محاسبه $q_{k,r-1,j}$ برای $r = 1, 2, \dots, R$ از معادله (۳-۵۲)

۱۱- تعیین تمام توزیع دماها از معادله (۳-۴۶) یا (۳-۵۱)

۱۲- جایگزینی $q_{k,r-1,j}^* = q_{k+r-2,j}$ و $k \rightarrow k+1$

۱۳- اگر $k = 2$ و $k = 3$ سپس تکرار کنید محاسبه مقادیر را از مرحله (۴) و گرنه بروید و به مرحله (۶)

اگر مسائل غیر خطی باشند، باید تکرارهایی از مرحله ۸ تا ۱۱ انجام دهیم.

فصل چهارم : روش گرادیان مزدوج در حل مسائل معکوس

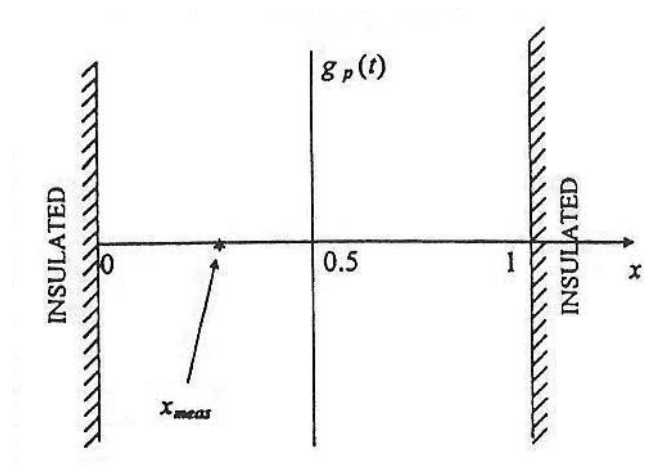
۴-۱- مقدمه

در این فصل یک روش برای تخمین پارامتر مجهول ارائه شده است. گرادیان مزدوج^۱ یک روش تکرار قوی و ساده برای حل مسائل معکوس خطی و غیر خطی می باشد. در فرآیند تکرار در هر مرحله، اندازه گام مناسب در امتداد جهت شیب به منظور کمینه کردن تابع هدف محاسبه می شود. این روش شامل مراحل زیر است:

- مسئله مستقیم
- مسئله معکوس
- فرآیند تکرار
- ملاک توقف
- الگوریتم محاسبه

^۱ . Conjugate Gradient Method

در زیر به شرح هر یک از مراحل نام برده با استفاده از یک مسئله نمونه می پردازیم.
 هدایت حرارت غیر دائم خطی در صفحه ای با ضخامت واحد بی بعد مفروض است. دمای اولیه
 صفحه صفر و مرزهای آن در $x=0$ و $x=1$ عایق می باشد. در زمان $t > 0$ ، یک منبع حرارتی با
 توان $g_p(t)$ بر واحد سطح، که در نقطه میانی $x=0.5$ ، انرژی پخش می کند. (شکل ۴-۱)



شکل (۴-۱) - هندسه و مختصات صفحه با منبع حرارتی

مدل ریاضی مسئله به شکل بی بعد بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + g_p(t)\delta(x-0.5) = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (\text{الف-۱-۴})$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (\text{ب-۱-۴})$$

$$\frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 1, \quad t > 0 \quad (\text{ج-۱-۴})$$

$$T(x,0) = 0 \quad t = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (\text{د-۱-۴})$$

که $\delta(\cdot)$ تابع دلتای دیراک می باشد.

۴-۲- مسئله مستقیم

موضوع مسئله مستقیم که در بالا شرح داده شد، تعیین توزیع دما $T(x,t)$ با مشخص بودن منبع حرارتی $g_p(t)$ می باشد.

۳-۴- مسئله معکوس

در مسئله معکوس، منبع حرارتی $g_p(t)$ بعنوان مجهول و دماهای اندازه گیری شده در نقطه $x = x_{mean}$ ، در زمان های $t_i, i=1,2,\dots,I$ ، بعنوان معلوم در نظر گرفته می شوند. برای حل چنین مسئله ای تابع مجهول $g_p(t)$ با استفاده از رابطه (۲-۴) خطی می شود:

$$g_p(t) = \sum_{j=1}^N P_j C_j(t) \quad (2-4)$$

که در آن C_j ، توابع معلوم و P_j ، پارامترهای مجهول هستند.

با توجه به رابطه (۲-۴) تخمین تابع $g_p(t)$ با تخمین N پارامتر مجهول P_j معادل است. چنین تخمین پارامتری با کمینه کردن نرم حداقل مربعات^۲ حل می شود:

$$S(P) = [Y - T(P)]^T [Y - T(P)] \quad (3-4)$$

۴-۴- فرآیند تکرار :

روند تکرار در روش گرادیان مزدوج برای کمینه کردن $S(P)$ طبق رابطه زیر است :

$$P^{k+1} = P^k - \beta^k d^k \quad (4-4)$$

در رابطه فوق β^k ، اندازه گام جستجو^۳ و d^k ، جهت شیب^۴ می باشد و بالا نویس k عدد تکرار است. جهت شیب از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$d^k = \nabla S(P^k) + \gamma^k d^k \quad (5-4)$$

^۲. Least Squares Norm

^۳. Search Step Size

^۴. Direction Of Descent

عبارات متفاوتی برای ضریب γ موجود می باشد که از بین آنها رابطه **Polak-Ribiere** بصورت زیر:

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N \{[\nabla S(P^k)]_j [\nabla S(P^k) - \nabla S(P^{k-1})]_j\}}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{k-1})]_j^2} \quad k=1,2,\dots \gamma^0 = 0 \quad (6-4)$$

و رابطه **Fletcher-Reeves** بصورت زیر می باشد.

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^k)]_j^2}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{k-1})]_j^2} \quad k=1,2,\dots \gamma^0 = 0 \quad (7-4)$$

در روابط (6-4) و (7-4)، عبارت $[\nabla S(P^k)]_j$ ، مولفه j ام گرادیان مسیری⁵ در تکرار k ام است. گرادیان مسیر با مشتق گیری از رابطه (3-4) نسبت به پارامترهای مجهول P_j محاسبه می شود.

$$\nabla S(P^k) = -2(J^k)^T [Y - T(P^k)] \quad (8-4)$$

J^k ، ماتریس حساسیت⁶ است که توسط رابطه زیر تعریف می شود:

$$J(P) = \left[\frac{\partial T^T(P)}{\partial P} \right]^T \quad (9-4)$$

بنابر این مولفه j ام گرادیان مسیر با رابطه صریح زیر قابل محاسبه است:

$$[\nabla S(P^k)]_j = -2 \sum_{i=1}^I \frac{\partial T_i^k}{\partial P_j} [Y_i - T_i(P^k)] \quad j=1,\dots,N \quad (10-4)$$

روابط (6-4) و (7-4) برای مسائل خطی معادل یکدیگر می باشند، اما شواهد نشان می دهد که رابطه (6-4) برای مسائل غیر خطی همگرایی بهتری دارند.

اندازه گام جستجو β^k که در رابطه (4-4) ظاهر می شود با کمینه کردن تابع $S(P^{k+1})$ نسبت به β^k تعیین می شود:

⁵ . Gradient Direction

⁶ . Sensitivity Matrix

$$\min_{\beta^k} S(P^{k+1}) = \min_{\beta^k} [Y - T(P^{k+1})]^T [Y - T(P^{k+1})] \quad (11-4)$$

با جایگزین کردن P^{k+1} از رابطه (4-4) در رابطه (11-4) :

$$\min_{\beta^k} S(P^{k+1}) = \min_{\beta^k} [Y - T(P^k - \beta^k d^k)]^T [Y - T(P^k - \beta^k d^k)] \quad (12-4)$$

بردار دمای $T(P^k - \beta^k d^k)$ را با بسط سری تیلور خطی کرده و سپس نسبت به β^k کمینه می کنیم:

$$\beta^k = \frac{\sum_{i=1}^I \left[\left(\frac{\partial T_i}{\partial P^k} \right)^T d^k \right] [T_i(P^k) - Y_i]}{\sum_{i=1}^I \left[\left(\frac{\partial T_i}{\partial P^k} \right)^T d^k \right]^2} \quad (13-4 \text{ الف})$$

که

$$\left(\frac{\partial T_i}{\partial P^k} \right)^T = \left[\frac{\partial T_i}{\partial P_1^k}, \frac{\partial T_i}{\partial P_2^k}, \dots, \frac{\partial T_i}{\partial P_N^k} \right] \quad (13-4 \text{ ب})$$

توجه کنید که بردار معادله (13-4 ب) سطر i ام ماتریس حساسیت است. بنابراین، رابطه (4-4) 13-الف) به شکل ماتریسی بصورت زیر است:

$$\beta^k = \frac{[J^k d^k]^T [T(P^k) - Y]}{[J^k d^k]^T [J^k d^k]} \quad (13-4 \text{ ج})$$

بعد از محاسبه ماتریس حساسیت J^k ، گرادیان مسیر $\nabla S(P^k)$ ، ضریب مزدوج γ^k و اندازه گام جستجو β^k ، فرآیند تکرار توسط رابطه (4-4) تا برقراری شرط توقف که بر اساس اصل اختلاف است، انجام می شود.

4-5- معیار توقف

فرآیند تکرار داده شده توسط روابط (4-4) تا (7-4)، با اندازه گام جستجو β^k ، بدست آمده از رابطه (13-4) لزوماً روش گرادیان مزدوج پایداری را جهت کمینه کردن تابع هدف فراهم نمی کنند. زیرا دمای اندازه گیری شده ذاتاً شامل خطاهای تصادفی می باشد.

بخاطر خصیصه بد وضع بودن مسائل معکوس، ممکن است در طول فرآیند کمینه کردن تابع هدف نوسانات بزرگی را در جواب ها مشاهده کنیم. به هر حال، با بکار بردن "اصل اختلاف"^۷ در تعیین معیار توقف، ممکن است روش گرادیان خوش وضع شود.

بر اساس "اصل اختلاف"، فرآیند تکرار وقتی متوقف می شود که شرط زیر برقرار باشد:

$$S(P^{k+1}) < \varepsilon \quad (14-4)$$

که مقدار تیرانس ε بگونه ای انتخاب می شود که منجر به حل پایدار گردد. در اینجا، وقتی باقیمانده بین مقادیر اندازه گیری شده و مقادیر تخمین زده شده هم مرتبه با بزرگی خطاهای اندازه گیری باشد، تکرار متوقف خواهد شد:

$$|Y(t_i) - T(x_{mean}, t_i)| \approx \sigma_i \quad (15-4)$$

که در رابطه فوق، σ_i انحراف استاندارد^۸ خطای اندازه گیری در زمان t_i است. برای انحراف استاندارد ثابت، $\sigma_i = \sigma = constant$ ، با قرار دادن رابطه (۱۵-۴) در رابطه (۳-۴) داریم:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^I \sigma_i^2 = I\sigma^2 \quad (16-4)$$

۴-۶- الگوریتم روش گرادیان مزدوج

دماهای اندازه گیری شده $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_I)$ ، در زمانهای t_i ، $i = 1, \dots, I$ مفروض است. P^0 ، حدس اولیه برای بردار مجهول P می باشد. $k = 0$ قرار داده و سپس:

حل مسئله مستقیم (۱-۴) با استفاده از P^k موجود و تعیین بردار دمای $T(P^k) = (T_1, T_2, \dots, T_I)$

بررسی صحت معیار توقف از رابطه (۱۴-۴) و ادامه در صورت عدم مصداق.

محاسبه ماتریس حساسیت J^k ، از رابطه (۹-۴).

⁷ . Discrepancy Principle

⁸ . Standard Deviation

محاسبه گرادیان مسیر $\nabla S(P^k)$ ، از رابطه (۴-۸) با استفاده از J^k ، Y و $T(P^k)$. سپس محاسبه

ضریب مزدوج γ^k از رابطه (۴-۶) یا (۴-۷).

محاسبه جهت شیب d^k با استفاده از رابطه (۴-۵).

محاسبه گام جستجو β^k با استفاده از رابطه (۴-۱۳) و مقادیر J^k ، Y و $T(P^k)$ و d^k . محاسبه

P^{k+1} با استفاده از رابطه (۴-۴).

جایگزین کردن $k+1$ به جای k و رفتن به گام اول.

فصل پنجم : تعیین شار حرارتی روی دیواره کره

۵-۱- مقدمه

در این فصل به توصیف یک مسئله فیزیکی و شبیه سازی ریاضی آن با استفاده از معادلات دیفرانسیل و در نهایت حل آن با یک روش عددی می پردازیم

۵-۲- مسئله مستقیم

از آنجاییکه حل مسئله مستقیم جزء لاینفک هر مسئله معکوس می باشد، لذا دقت این بخش بسیار حائز اهمیت است. دقت مسئله مستقیم خود به دو عامل وابسته است. یکی ایده آل سازی مسئله فیزیکی است که در نهایت منجر به یک معادله ریاضی قابل حل می شود، دوم روشی است که برای حل آن معادله مورد استفاده قرار می گیرد.

۵-۲-۱- توصیف فیزیک مسئله

فرض کنید کره ای به شعاع R و با دمای اولیه T_0 طی یک عملیات حرارتی از لحظه $t = 0$ در یک بازه زمانی محدود و با شار ثابت q حرارت داده می شود. هدف مسئله مستقیم محاسبه توزیع دما در داخل میله و در هر لحظه می باشد.

توصیف فیزیکی یک مسئله، بیان یک رویداد با شرایط واقعی است. برای آنکه مسئله با زبان ریاضیات توصیف شود، نیاز به ساده سازی و فرضیات ایده آل سازی می باشد. اینکه دمای اولیه جسم بطور یکنواخت توزیع شده است و یا جسم با شار حرارتی ثابت حرارت داده می شود فرض هایی از این قبیل هستند.

۵-۲-۲- توصیف ریاضی مسئله

با توجه به توصیف فیزیکی مسئله می توان دریافت که با یک مسئله در زمینه انتقال حرارت مواجه هستیم. و از آنجاییکه قطعه یک کره است، دستگاه مختصات کروی برای توصیف ریاضی بسیار مناسب می باشد.

صورت کلی معادله انتقال حرارت در دستگاه مختصات کروی به شکل زیر است :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2 \sin 2\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-5)$$

که در معادله فوق T دما، k ضریب هدایت حرارت، α ضریب پخش حرارت، \dot{q} نرخ تولید یا جذب حرارت، t پارامتر مربوط به بعد زمان و r, θ, φ پارامترهای مربوط به بعد مکان در دستگاه کروی می باشند.

معادله (۱-۵) با اعمال فرض های ایده آل سازی به شکل ساده تری در خواهد آمد. فرض های مسئله از این قرار است :

تولید یا جذب حرارت در جسم وجود ندارد

پارامترهای فیزیکی k, α ثابت و در کل جسم یکنواخت می باشند.

هندسه و شرایط مرزی جسم دارای تقارن محوری است

با اعمال فرضیات فوق معادله کلی، به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-5)$$

معادله (2-5) یک معادله مرتبه دو و غیر دائم است که برای حل آن احتیاج به دو شرط مرزی در

راستای شعاعی و یک شرط اولیه می باشد.

شرایط مرزی و شرط اولیه بصورت زیر است:

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3-5 \text{ آ})$$

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = q_s \quad (3-5 \text{ ب})$$

$$T(r,0) = T_0 \quad (4-5)$$

5-2-3- مجزاسازی

برای حل هر مسئله شرط مرزی به روش عددی، احتیاج به یک روش مجزاسازی است تا با استفاده

از آن معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی آن به یک معادله جبری تبدیل شود. سپس با مشبندی

کردن ناحیه مجهول، فضای پیوسته مجهول تبدیل به یک فضای گسسته می شود. با بازنویسی

معادله دیفرانسیل مجزا شده به ازای هر مجهول، به یک دستگاه معادلات جبری می رسیم. که با

حل آن تابع دیفرانسیل در ناحیه حل بصورت گسسته بدست می آید.

در اینجا از روش تفاضل محدود مرتبه دو برای گسسته سازی معادله دیفرانسیل استفاده می شود.

عبارات $\frac{\partial T}{\partial t}$ ، $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ ، $\frac{\partial T}{\partial r}$ را که در معادله دیفرانسیل ظاهر می شوند با روابط زیر جایگزین می

کنیم.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta r^2} \quad (5-5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta r} \quad (6-5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^{k+1} - T^k}{\Delta t} \quad (7-5)$$

لازم به ذکر است که در روابط فوق مشتق مکانی با تفاضل مرکزی مرتبه دو، $O(h^2)$ ، و مشتق زمانی با تفاضل پیشروی مرتبه دو، $O(h)$ ، مجزا می شوند.

با محاسبه تمامی مشتقات مکانی در زمان $k+1$ با استفاده از روابط (5-5) تا (7-5) و جایگذاری آنها در معادله (2-5) و مرتب سازی به رابطه زیر می رسیم:

$$AT_{i+1}^{k+1} + BT_{i-1}^{k+1} + CT_i^{k+1} = DT_i^k \quad (8-5)$$

$$A = \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i \Delta r} \quad (9-5)$$

$$B = \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{r_i \Delta r} \quad (10-5)$$

$$C = -\left(\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{1}{\alpha \Delta t}\right) \quad (11-5)$$

$$D = -\frac{1}{\alpha \Delta t} \quad (12-5)$$

برای مجزا سازی شرایط مرزی باید مرتبه عبارت $\frac{\partial T}{\partial r}$ از مرتبه دو، $O(h^2)$ ، باشد. زیرا تمامی معادلات و جملات آنها باید هم مرتبه باشند. از آنجاییکه در روی مرزها به علت عدم تقارن در اطلاعات گره ها، نمی توان از تفاضل مرکزی استفاده کرد، باید از تفاضل پیشرو و پسروی مرتبه دو استفاده کرد. تعریف اپراتور D بر اساس اپراتور تفاضل پیشرو، Δ ، و اپراتور تفاضل پسرو، ∇ ، بصورت زیر است:

$$D = \frac{1}{h} \left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \dots \right] \quad (13-5)$$

$$D = \frac{1}{h} \left[\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \dots \right] \quad (14-5)$$

با احتساب دو جمله از بسط فوق خطای مرتبه دو بدست می آید. با اعمال این اپراتور بر تابع T :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{4}{2h_r} [T_{i+1} - 3T_i - T_{i+2}] \quad (15-5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{2h_r} [3T_i + 4T_{i-1} + T_{i-2}] \quad (16-5)$$

رابطه (15-5) تفاضل پیشرو و (16-5) تفاضل پسرو می باشد.

با قرار دادن روابط (15-5) تا (16-5) در عبارت (3-5) :

$$T_0 = \frac{4}{3}T_1 - \frac{1}{3}T_2 \quad (17-5 \text{ الف})$$

$$T_M = \frac{4}{3}T_{M-1} - \frac{1}{3}T_{M-2} + \frac{2q\Delta r}{3k} \quad (18-5 \text{ ب})$$

فرم رابطه (18-5) بصورت ضمنی می باشد. بعد از شبکه بندی ناحیه حل و نوشتن رابطه (18-5) برای

هر گره یک دستگاه با ماتریس ضرائب سه قطری به دست می آید. با حل دستگاه توزیع تابع T بصورت گسسته و در نقاط گره بدست می آید.

5-2-4- کد نویسی و اعتبار آن

در این قسمت با کمک یک تابع ریاضی که در معادله انتقال حرارت دو بعدی، در دستگاه مختصات

استوانه ای و با فرض همگن بودن نمونه صدق کند و همچنین کلیه شرایط اولیه و مرزی را ارضا

نماید به شبیه سازی مسئله می پردازیم.

همانطور که ذکر شد معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله ، شرایط مرزی و شرایط اولیه مطابق رابطه (۲-۵) و (۳-۵) است. بنابر این نیازمند تابع ریاضی هستیم که این معادلات را ارضا نماید. برای این منظور تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$T(r,t) = \beta r^2 + 6\beta t + C \quad (۱۹-۵)$$

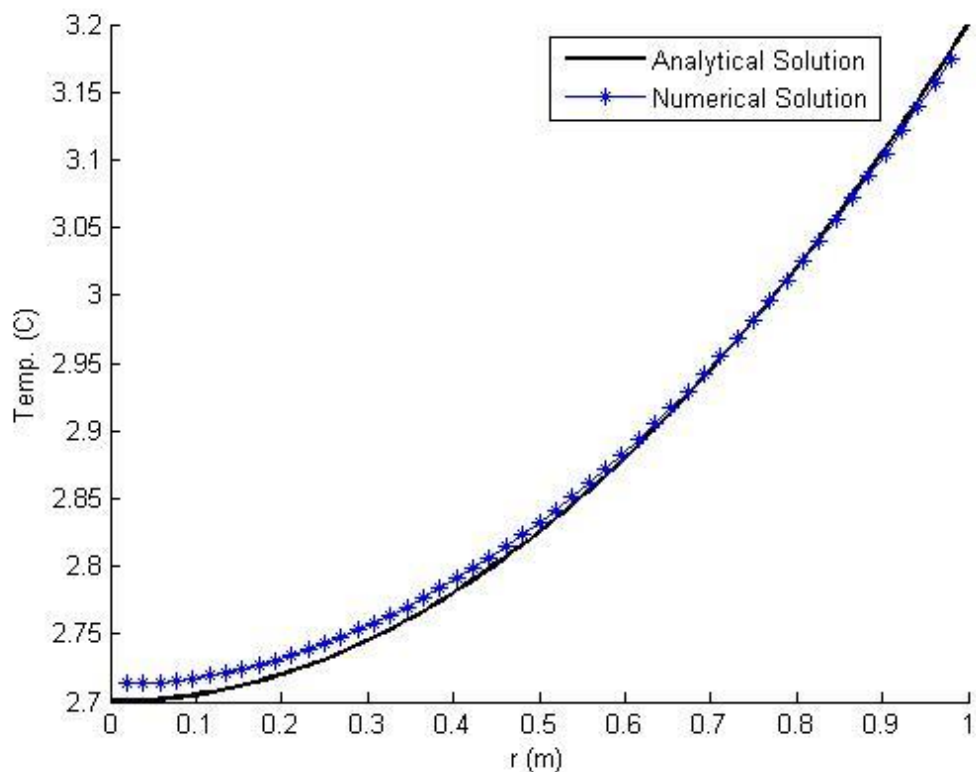
با فرض $k = 1, \alpha = 1$, معادله (۱۹-۵) معادله (۲-۵) را ارضا می کند. با اعمال شرایط مرزی بر معادله (۱۹-۵) داریم:

$$\beta = \frac{q_s}{2R} \quad (۲۰-۵)$$

$$C = 0.3 \quad (۲۱-۵)$$

C و β مقادیر ثابت هستند ، بطوریکه با مقدار دهی به ثابت C در واقع دمای گره ها در لحظه شروع و با مقدار دهی مثبت یا منفی به ثابت β ، شاهد افزایش یا کاهش دما با گذشت زمان خواهیم بود.

کد نویسی برای حل معادله مجزا شده با استفاده از نرم افزار **MATLAB** انجام شد که متن کد در پیوست آورده شده است.



شکل (۵-۵) مقایسه حل عددی و حل تحلیلی

۵-۳- مسئله معکوس

هدف مسئله معکوس تخمین شار حرارتی مجهول روی دیواره جسم با استفاده از دیگر پارامترهای معلوم مسئله مستقیم، با استفاده از روش گرادیان مزدوج که در فصل سوم توضیح داده شد.

فرض می کنیم که برای تخمین بردار مجهول $P^T = [q]$ دماهای اندازه گیری شده توسط یک ترموکوپل که در داخل جسم و روی مرکز کره قرار دارد موجود می باشد. از فصل سوم مشخص است که تعداد دماهای اندازه گیری شده در هر لحظه (I) باید بزرگتر یا مساوی با تعداد پارامترهای مجهول (N) باشد یعنی $I \geq N$. از آنجائیکه تنها پارامتر مجهول مسئله q می باشد بنابراین $N = 1$ خواهد بود و پارامترهای مسئله بصورت زیر تعریف می شوند :

$P = [q]$ بردار مجهول، $Y = [y_1]$ بردار دماهای اندازه گیری شده، $T = [T_1]$ بردار دماهای محاسبه

شده.

تخمین پارامتر مجهول با کمینه کردن نرم حداقل مربعات حل انجام می شود. برای این منظور روش های گوناگونی در محاسبات عددی وجود دارد که هر کدام از آنها مزیتها و معایب خاص خود را دارند که با شرایط مسئله متغیر هستند. همانطور که در فصل دوم ذکر شد، روش گرادیان مزدوج جزو روش های تنظیم تکراری است و دارای همگرایی سریع تر می باشد به همین خاطر در اینجا از آن استفاده شده است.

با قرار دادن بردار T, Y در رابطه (۴-۳) داریم:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{l=2} (Y_i - T_i)^2 \quad (۲۲-۵)$$

روند تکرار در روش گرادیان مزدوج برای کمینه کردن $S(P)$ طبق رابطه (۴-۴) است.

$$P^{k+1} = P^k - \beta^k d^k \quad (۴-۴)$$

در رابطه فوق β^k ، اندازه گام جستجو و d^k ، جهت شیب از روابط (۴-۱۳) و (۴-۵) محاسبه می شوند.

$$d^k = \nabla S(P^k) + \gamma^k d^{k-1} \quad (۵-۴)$$

برای محاسبه ضریب γ طبق روابط (۴-۷) و (۴-۸) احتیاج به محاسبه ماتریس حساسیت می باشد. ماتریس حساسیت طبق رابطه (۴-۹) بصورت زیر تعریف می شود:

$$J^T(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial P_1} \end{bmatrix} \quad (۲۳-۵)$$

از آنجاییکه بردار مجهولات یک بعدی و $P = [k]$ می باشد:

$$J^T(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial q} \end{bmatrix} \quad (۲۳-۵)$$

با قرار دادن رابطه (۵-۱۹) در رابطه (۴-۸) داریم:

$$\nabla S(P^k) = -2 \left(\frac{\partial T_1}{\partial q} [y_1 - T_1] \right) \quad (24-5)$$

با قرار دادن رابطه (24-4) در رابطه (24-4) :

$$\gamma^k = \frac{\left(\frac{\partial T_1^k}{\partial} [y_1 - T_1(P^k)] \right)^2}{\left(\frac{\partial T_1^k}{\partial k} [y_1 - T_1(P^k)] \right)^2} \quad \begin{array}{l} k=1,2,\dots \\ \gamma^0=0 \end{array} \quad (25-5)$$

با قرار دادن بردار T, Y در رابطه (3-13-الف) داریم :

$$\beta^k = \frac{\left[\left(\frac{\partial T_1}{\partial q} \right) d^k \right] [T_1(P^k) - Y_1]}{\left[\left(\frac{\partial T_1}{\partial q} \right) d^k \right]^2} \quad (26-5)$$

بعد از محاسبه روابط فوق، فرآیند تکرار توسط رابطه (4-4) تا برقراری شرط توقف، انجام می شود.

فصل ششم : بررسی نتایج

۶-۱- مقدمه

در این فصل با استفاده از الگوریتم ارائه شده در فصل قبل، حل یک مسئله با استفاده از داده های واقعی و بررسی نتایج آن ارائه شده است.

۶-۲- فیزیک مسئله

قطعه ای کروی به شعاع $R = 1\text{cm}$ و مشخصات ترموفیزیکی $\rho = 7870 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ، $C = 449 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}}$ ،

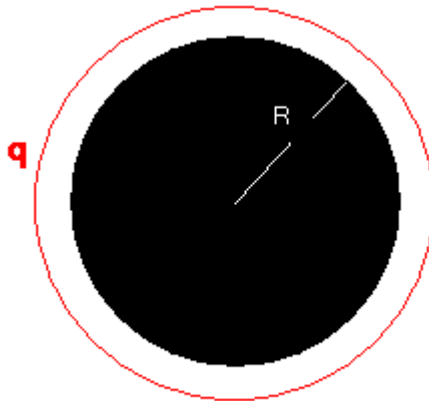
و با دمای اولیه $T_0 = 0^\circ\text{C}$ طی عملیات حرارتی از لحظه $t = 0$ در یک بازه زمانی $k = 80.2 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$

$[0, t_f = 60]$ ثانیه و به ترتیب با شار ثابت $q = 1 \times 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ، $q = 5 \times 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ و $q = 1 \times 10^4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

گرم می شود. یک ترموکوپل به نام $TC1$ به ترتیب در مختصات $r = 0$ و $r = 1$ و $r = 0.5$ قرار دارند.

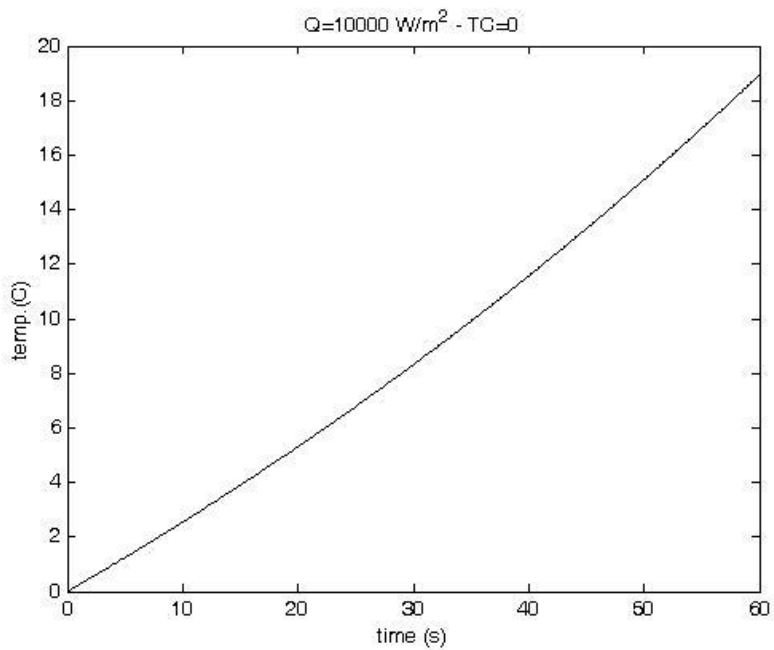
داده های دقیق ، Y_{exact} ، با استفاده از حل مسئله مستقیم و به روش تفاضل محدود ضمنی که در

فصل چهار توضیح داده شد بر مبنای $\Delta r = 0.2$ و $\Delta t = 0.1$ محاسبه می شوند.

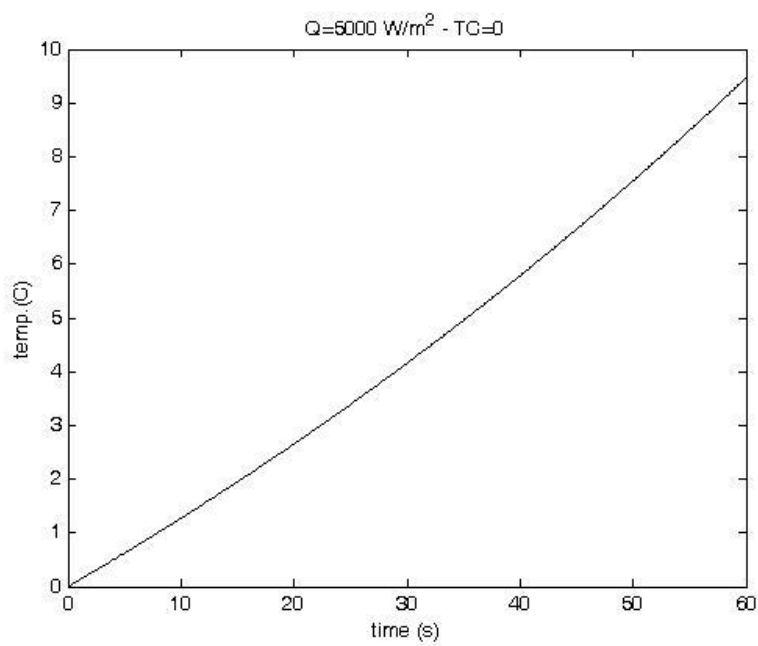


شکل (۱-۶) شماتیک فیزیک مسئله

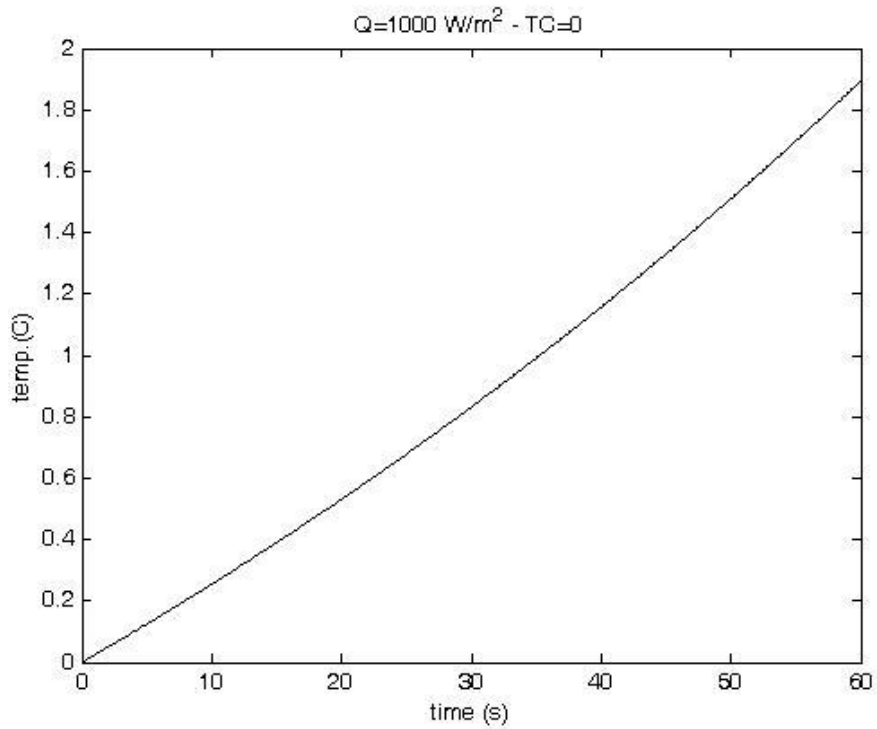
شکل (۲-۶) تا (۱۰-۶) تغییرات دما با زمان را برای حالات فوق نشان می دهد.



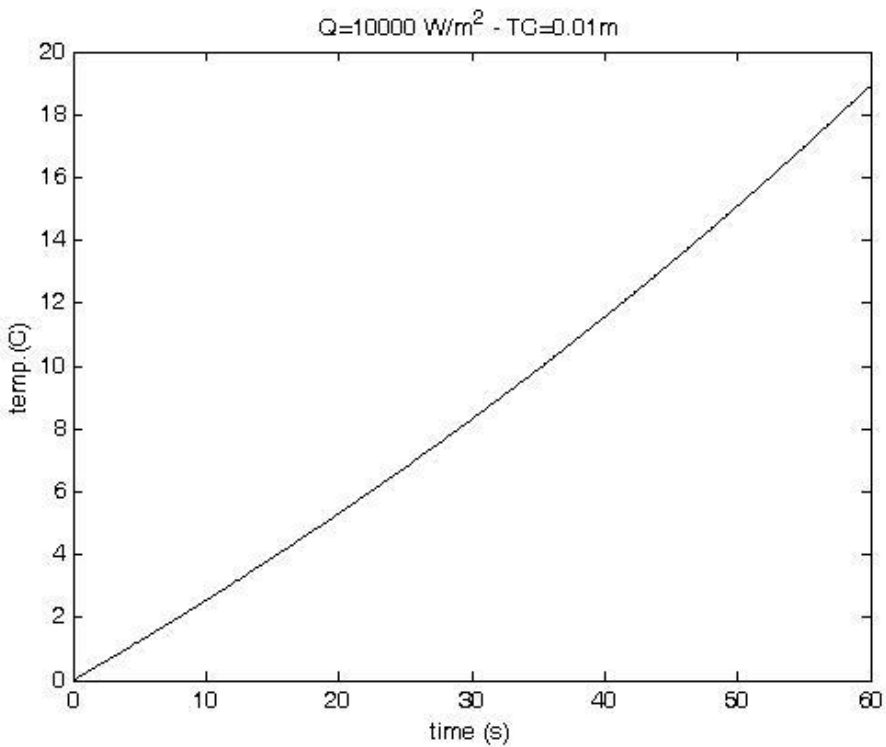
شکل (۲-۶) تغییرات دمای ترموکوپل در $r = 0$ و به ازای $q = 1 \times 10^4 \frac{W}{m^2}$ از حل دقیق



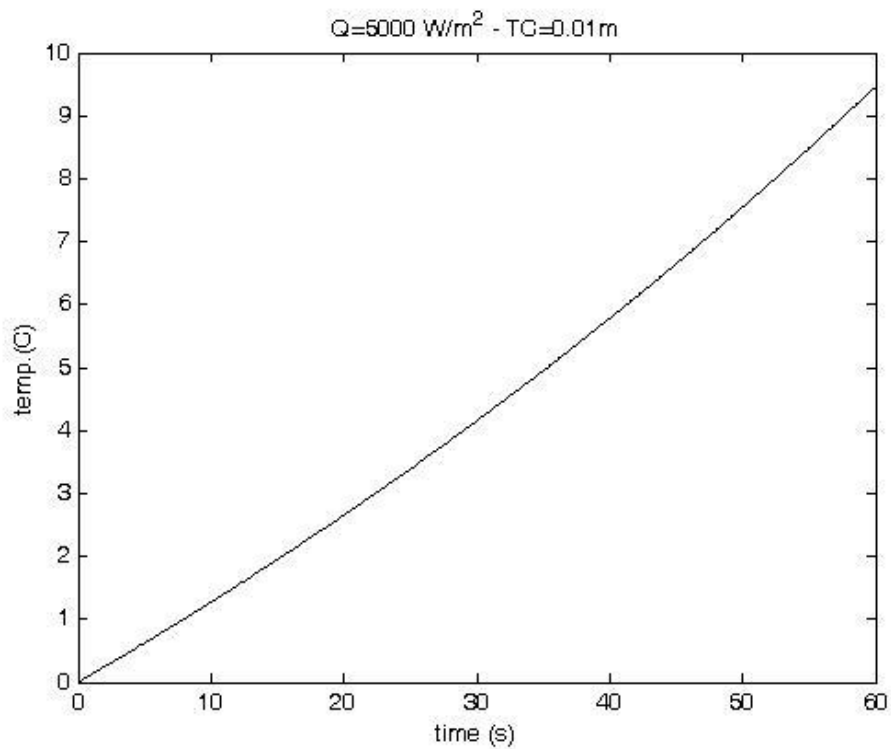
شکل (۳-۶) تغییرات دمای ترموکوپل در $r = 0$ و به ازای $q = 5 \times 10^3 \frac{W}{m^2}$ از حل دقیق



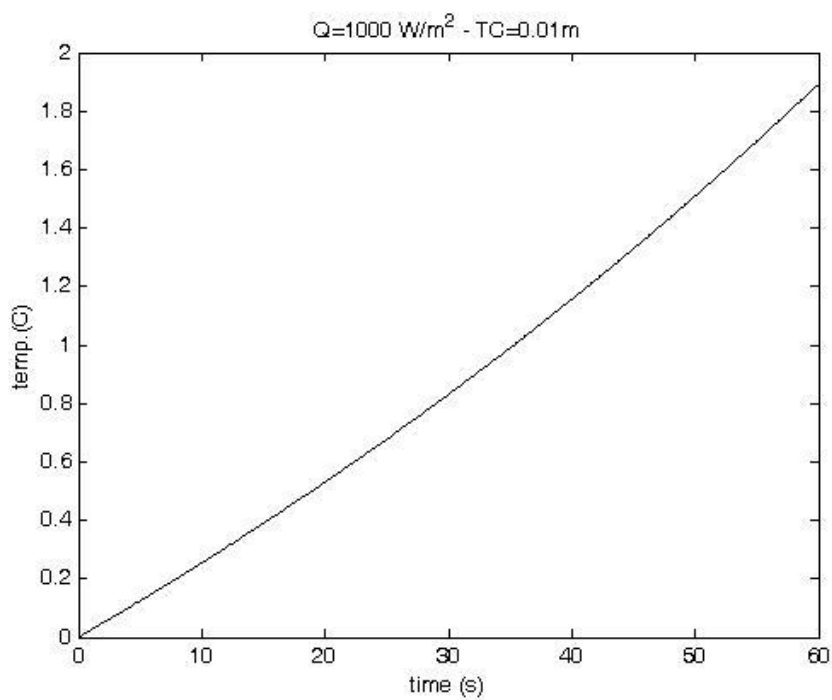
شکل (۴-۶) تغییرات دمای ترموکوپل در $r = 0$ و به ازای $q = 1 \times 10^3 \frac{W}{m^2}$ از حل دقیق



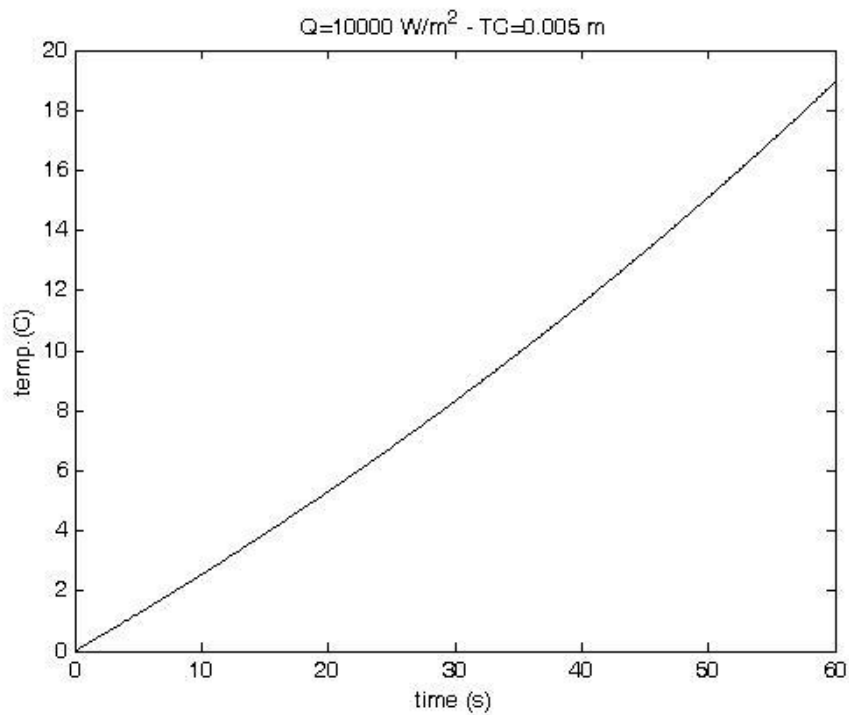
شکل (۵-۶) تغییرات دمای ترموکوپل در $r = 1cm$ و به ازای $q = 1 \times 10^4 \frac{W}{m^2}$ از حل دقیق



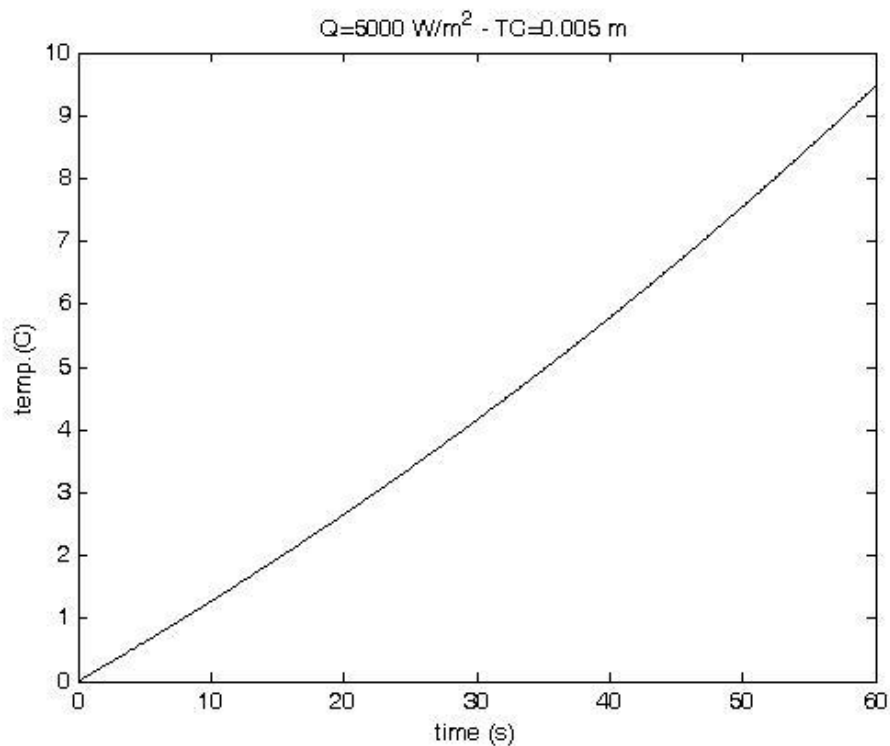
شکل (۶-۶) تغییرات دمای ترموکوپل در $r = 1\text{cm}$ و به ازای $q = 5 \times 10^3 \frac{W}{m^2}$ از حل دقیق



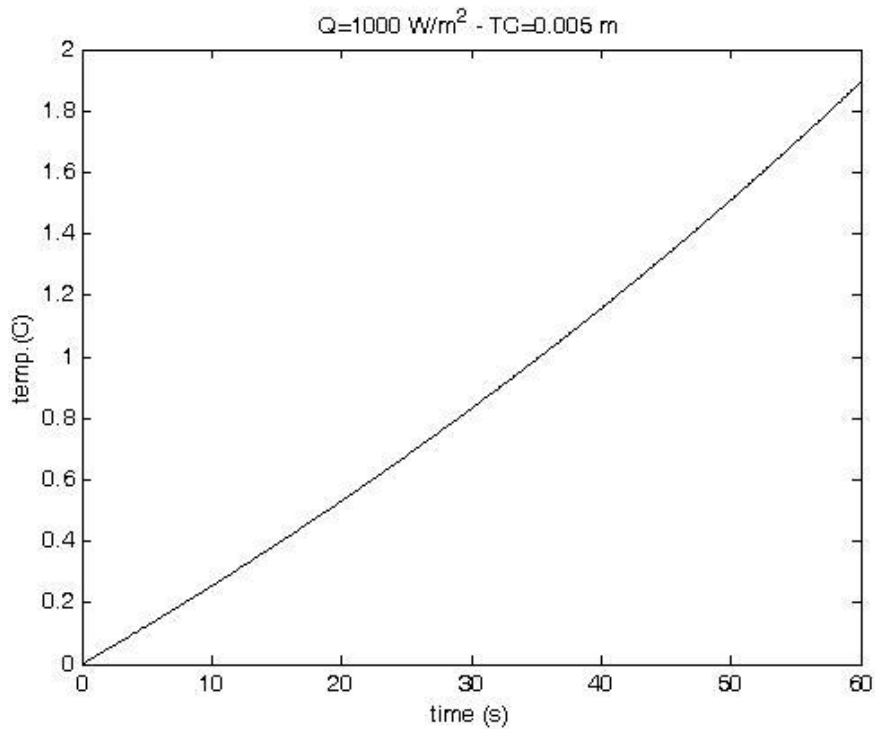
شکل (۷-۶) تغییرات دمای ترموکوپل در $r = 1\text{cm}$ و به ازای $q = 1 \times 10^3 \frac{W}{m^2}$ از حل دقیق



شکل (۸-۶) تغییرات دمای ترموکوپل در $r = 0.5\text{cm}$ و به ازای $q = 1 \times 10^4 \frac{W}{m^2}$ از حل دقیق



شکل (۹-۶) تغییرات دمای ترموکوپل در $r = 0.5\text{cm}$ و به ازای $q = 5 \times 10^3 \frac{W}{m^2}$ از حل دقیق



شکل (۶-۱۰) تغییرات دمای ترموکوپل در $r = 0.5\text{cm}$ و به ازای $q = 1 \times 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ از حل دقیق

۶-۳- شبیه سازی ترموکوپل

دمای ترموکوپل با اضافه کردن ترم خطا، $\omega\sigma$ ، به مقدار دقیق، Y_{exact} ، شبیه سازی می شود.

$$Y_{measured} = Y_{exact} + \omega\sigma \quad (۶-۱)$$

که σ ، انحراف استاندارد و ω یک عدد تصادفی است. برای توزیع خطای نرمال، ω در بازه

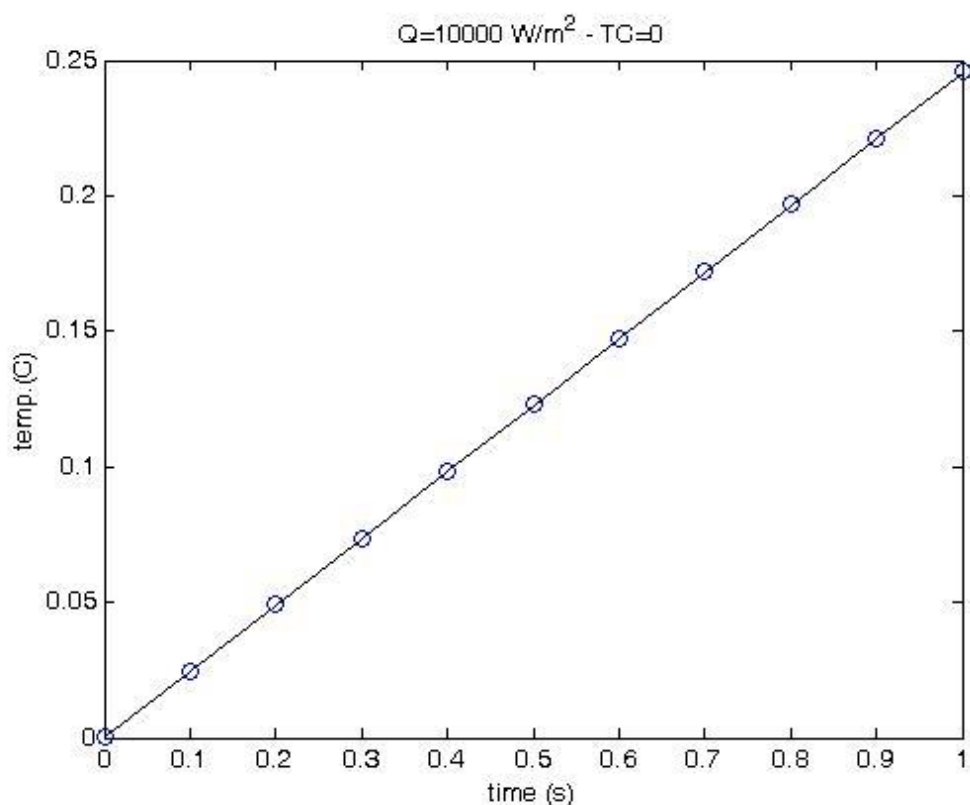
$-2.576 < \omega < 2.576$ قرار دارد. برای ایجاد اعداد تصادفی می توان از رویه *DRNNOR* از توابع

کتابخانه ای *IMSL* استفاده کرد.

شکل (۶-۱۱) دما شبیه سازی شده ترموکوپل با روش فوق را برای بازه زمانی $[0,1]$ ثانیه نمایش

می دهد. ما از این مقادیر بعنوان داده های اندازه گیری شده استفاده خواهیم کرد. این کار برای

تمامی حالات تکرار می شود.



شکل (۶-۱۱) دمای شبیه سازی شده در نقاط ترموکوپل

۶-۴- بررسی نتایج

داده های شبیه سازی شده در بخش قبل به منزله دماهای آزمایشگاهی خوانده شده توسط ترموکوپل می باشد. بنابراین در هر لحظه یک مقدار برای بردار Y وجود خواهد داشت. با استفاده از این مقدار باید مقدار ضریب هدایت حرارتی در هر لحظه از زمان تخمین زده شود.

جدول (۶-۱) خروجی برنامه کامپیوتری را برای تخمین شار حرارتی در زمان $t_f = 60\text{sec}$ و برای حدس اولیه کوچکتر و بزرگتر از مقدار دقیق نشان می دهد.

برنامه برای چهار حالت متفاوت اجرا شد. در حالت A و B ، مقدار $\sigma = 0$ و در حالت C و D مقدار $\sigma = 1$ است. $\sigma = 0$ به منزله عدم وجود خطا در مقادیر خوانده شده از ترموکوپل می باشد ولی در حالت $\sigma = 1$ با توجه به رابطه (۶-۱) خطایی به اندازه ω به مقادیر دقیق وارد می شود.

حالت A برای حدس اولیه کوچکتر از مقدار دقیق و حالت B برای حدس اولیه بزرگتر از مقدار دقیق آورده شده است.

جدول (۱-۶) خروجی برنامه برای یک ترموکوپل در $r = 0$ (مقدار دقیق $q = 1e^4$)

	Initial Guess	σ	Iteration#	S	q
A	q=5000	0	1	0.3299	5245.16
			5	0.065142	6345.52
			10	0.039598	7456.23
			15	8.7793e-5	9456.48
			20	1.4329e-6	9986.46
			23	1.3859e-9	10000.49
B	q=15000	0	1	0.30733	14053.84
			5	0.054768	13145.98
			10	0.038228	12159.84
			15	0.00024901	11607.48
			20	4.6276e-8	10598.46
			25	9.624e-9	10000.48
C	q=5000	1	1	0.4189	5456.46
			5	0.075141	6184.23
			10	0.019598	8165.45
			15	6.7293e-5	9486.32
			20	1.5328e-6	9194.55
			27	1.1128e-9	9865.51
D	q=15000	1	1	0.30733	14053.84
			5	0.054768	13145.98
			10	0.038228	12159.84
			15	0.00024901	11607.48
			20	4.6276e-8	10598.46
			24	9.624e-9	10042.18

روند فوق برای هر ۹ حالت فوق انجام شد که نتایج آن در جدول زیر مشاهده می شود.

جدول (۲-۶) خروجی برنامه برای یک ترموکوپل در $r = 0$ (مقدار دقیق $q = 5e^3$)

	Initial Guess	σ	Iteration#	S	q
A	q=1000	0	12	1.1459e-9	4999.75
B	q=9000	0	11	8.645e-9	5000.24
C	q=1000	1	14	1.2456e-9	4906.49
D	q=9000	1	13	9.664e-9	5078.16

جدول (۳-۶) خروجی برنامه برای یک ترموکوپل در $r = 0$ (مقدار دقیق $q = 1e^3$)

	Initial Guess	σ	Iteration#	S	q
A	q=500	0	9	1.1459e-9	1000.25
B	q=1500	0	9	8.645e-9	1000.25
C	q=500	1	10	1.2456e-9	975.49
D	q=1500	1	11	9.664e-9	1056.26

جدول (۴-۶) خروجی برنامه برای یک ترموکوپل در $r = 0.5cm$ (مقدار دقیق $q = 1e^4$)

	Initial Guess	σ	Iteration#	S	q
A	q=5000	0	23	1.051e-9	9999.45
B	q=15000	0	23	8.165e-9	10000.24
C	q=5000	1	25	1.9846e-9	9954.49
D	q=15000	1	26	9.456e-9	10055.16

جدول (۵-۶) خروجی برنامه برای یک ترموکوپل در $r = 0.5cm$ (مقدار دقیق $q = 5e^3$)

	Initial Guess	σ	Iteration#	S	q
A	q=1000	0	12	1.495e-9	4999.15
B	q=9000	0	11	7.156e-9	5000.21
C	q=1000	1	14	1.485e-9	4916.49
D	q=9000	1	13	9.987e-9	5088.16

جدول (۶-۶) خروجی برنامه برای یک ترموکوپل در $r = 0.5cm$ (مقدار دقیق $q = 1e^3$)

	Initial Guess	σ	Iteration#	S	q
A	q=500	0	9	1.456e-9	998.98
B	q=1500	0	9	6.984e-9	1000.24
C	q=500	1	10	1.1645e-9	950.46
D	q=1500	1	11	9.948e-9	1056.47

جدول (۷-۶) خروجی برنامه برای یک ترموکوپل در $r = 1cm$ (مقدار دقیق $q = 1e^4$)

	Initial Guess	σ	Iteration#	S	q
A	q=5000	0	23	1.154e-9	9998.98
B	q=15000	0	24	4.415e-9	10000.24
C	q=5000	1	26	1.670e-9	9959.41
D	q=15000	1	27	9.545e-9	10023.16

جدول (۸-۶) خروجی برنامه برای یک ترموکوپل در $r = 1cm$ (مقدار دقیق $q = 5e^3$)

	Initial Guess	σ	Iteration#	S	q
A	q=1000	0	12	1.165e-9	4999.08
B	q=9000	0	11	9.147e-9	5000.78
C	q=1000	1	14	1.165e-9	4951.49
D	q=9000	1	13	9.481e-9	5056.21

جدول (۹-۶) خروجی برنامه برای یک ترموکوپل در $r = 1cm$ (مقدار دقیق $q = 1e^3$)

	Initial Guess	σ	Iteration#	S	q
A	q=500	0	9	1.1459e-9	999.54
B	q=1500	0	9	8.645e-9	1001.01
C	q=500	1	11	1.2456e-9	961.23
D	q=1500	1	10	9.664e-9	1049.52

۶-۵- نتیجه گیری و پیشنهادات

با توجه به داده ها در می یابیم که حدس اولیه بزرگتر همگرایی را سریع می کند ولی حدس کوچکتر همگرایی دقیق تری دارد. از نتایج مشاهده می شود که برای $\sigma = 0$ درصد خطا تقریباً برابر صفر است. این بدین معنی است که اگر ترموکوپل ها هیچ خطایی در اندازه گیری نداشته باشند، مقدار تخمینی برابر با مقدار دقیق خواهد بود. اما برای $\sigma = 1$ مقدار خطا برابر 0.2 درصد است.

تعداد ترموکوپل ها همواره باید بزرگتر یا مساوی با تعداد مجهولات مسئله باشد. بر خلاف انتظار افزایش تعداد ترموکوپل ها منجر به تخمین دقیق تر نخواهد شد. برای $\sigma = 0$ ، افزایش تعداد ترموکوپل در دقت مسئله تاثیر قابل توجهی ندارد ولی همگرایی را تسریع خواهد کرد. برای $\sigma = 1$ ، افزایش تعداد ترموکوپل دقت را کاهش می دهد زیرا با این کار خطای بیشتری وارد محاسبات می شود.

مسئله ای که در این پایان نامه بررسی شد محدود به یک شکل هندسی و شرایط مرزی خاص بود.

می توان همین مسئله را برای مواد مختلف با خواص و رفتار متفاوت بررسی کرد. تخمین ضریب پخش ، چگالی و ظرفیت گرمایی جزو مسائلی هستند که می توانند برای یک شرایط حرارتی خاص مورد بررسی قرار گیرند.

مراجع

- (1) Ozisik M., Orlande H. R. B., Inverse Heat Transfer, Taylor & Francis (2000).
- (2) Beck J. V., Blackwell B., Haji – Sheikh, Comparison Of Some Inverse Heat Conduction Methods Using Experimental Data, International Journal Of Heat and Mass Transfer, Vol. 39, No. 1, 3649 – 3657 (1996).
- (3) Beck J. V., Likouhi B., Clair St., Inverse Heat Conduction : III – Posed problems, Wiley Interscience, New York (1985).
- (4) Alifanov, O. M., Inverse Heat Transfer Problems, Springer – Verlag, New York (1994).
- (5) Kurpisz K., Nowak A.J., Inverse Thermal Problems, Computational Mechanics Publication, USA (1995).
- (6) Kozdoba, L. A. Krukivsky, P. G., Methods for Solving Inverse Heat Transfer problems, Naukova Dumka, Kiev 1982.
- (7) Chantasiriwan S., An Algorithm for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction Problem, International Journal of Heat and Mass Transfer, 44 – 3823 – 3832 (2001).
- (8) Beck J. V., Criteria for Comparison of Methods of Inverse Heat Conduction Problems, Nuclear Engineering Vol. 53, 11 – 22 (1979).
- (9) Skorek J., Applying the Least Squares Adjustment Technique for Solving Inverse Boundary Heat Conduction Problems, in Lewis, R.W et. Al., (eds): Numerical Methods in Thermal Problems, Pineridge Press Limited, London (1993).
- (10) Beck, J. V. Calculation of Surface Heat Flux From an Internal Temperature History, ASME Paper 62 – HT 46 (1962).
- (11) Nahad Al – Khalidy, On the Solution of Parabolic and Hyperbolic Inverse Heat Conduction Problems, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 41, 3731 – 3740 (1998).
- (12) Frank, I., An Application of Least Square Methods to the Solution of Inverse Problem of Heat Conduction, ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 85, 378 – 379 (1963).
- (13) Davies, J. M., Input Power Determination From Temperature in Simulated Skin Protected Against Thermal Radiation, ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 88, 154 – 160 (1966).
- (14) Beck, J. V., Surface Heat Determination Using an Integral Method Nuclear Engineering Des. 7, 170 – 178 (1968).
- (15) Pasquetti R., Niliot C. Le., Boundary Element Method for Solving Inverse Heat Conduction Problems : Application to a Bidimensional Transient Numerical Experiment Numerical Heat Transfer Part B : Fundamental, Vol. 20, 169 – 189 (1991).

- (16) Honerkamp, J. and Weese, J., Tikhonov's Regularization Method for Ill-Posed Problems, A Comparison of Different Methods for the Determination of the Regularization Parameter, *Cont. Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 2, 17 – 30 (1990).
- (17) Frank, I., An Application of Least Square Methods to the Solution of Inverse Problem of Heat Conduction, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 85, 378 – 379 (1963).
- (18) Beck J. V., Likouhi B. Clair St., *Inverse Heat Conduction: Ill-posed Problems*, Wiley, New York (1985).