

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
مَنْ عَمِلَ صَالِحًا مِمَّا كَسَبَ
فَإِنَّمَا يُجِزِيهِمْ بِمَا كَسَبُوا
وَمَا يُلَاقِيهِمْ فِيهَا مِنْ عَذَابٍ
أَلِيمٍ

تقدیم به پدر و مادر

و خواهر کوچکترم که دنیاها

دوستشان دارم.

و با تشکر از دکتر شریعتی و دکتر ایپک چی و

همچنین اساتید محترم آقایان دکتر مغربی و

دکتر قناد که با اینجانب همکاری نمودند.



Faculty of Mechanical Engineering

(MSc) Thesis in Mechanical Engineering

**Analytical-Numerical Investigation of
Buckling for Cylindrical Panel under
Axial Loading with Different Boundary
Conditions**

**Supervised By:
Dr. Mahmoud Shariati
Dr. Hamid Reza Eipakchi**

**By:
Seyed Ebrahim Afkhami**

February 2008



دانشگاه تبریز

دانشکده مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد- طراحی کاربردی

عنوان پایان نامه:

**بررسی تحلیلی - عددی کمانش پانل استوانه‌ای تحت اثر بار محوری
با شرایط مرزی متفاوت**

دانشجو:

سید ابراهیم افخمی

اساتید راهنما:

دکتر محمود شریعتی

دکتر حمید رضا اپیک چی

زمستان ۸۶

ABSTRACT

Boundary conditions are known to have an important influence on the buckling behavior of cylindrical panels. This project is devoted to a circular cylindrical panel with two kind of boundary conditions. In the first kind, two curved edges simply supported and two edges free and in the second kind three edges simply supported and one edge free. In this project, simulation and analysis of steel cylindrical panels with various lengths, thickness, Radius and angles, subjected to axial compression, were systematically carried out using finite element numerical method and analytical method.

In analytical method, the deflection function and the force function-the Airy function are formulated with respect to the boundary conditions. The Donnell equations for linear buckling of shells are reduced to generalized eigenvalue problem with the use of Galerkin method. The results obtained from analytical methods were compared with numerical results. A good accordance was observed between the results obtained from the finite element simulation and the analytical methods. The results of numerical and analytical investigation are presented in figures.

KEYWORDS

Buckling – cylindrical panels – Axial load – Critical stress – Boundary condition – Finite element method – Analytical method

فصل اول

مقدمه

۱-۱- تعریف پوسته‌ها

ورق‌ها و پوسته‌ها سازه‌هایی هستند که شکل اولیه آنها به ترتیب تخت و خمیده می‌باشد و ضخامت آنها نسبت به دو بعد دیگر بسیار کوچکتر است. اگر یک قسمت از پوسته استوانه‌ای بسته جدا شود، در این صورت پوسته استوانه‌ای باز، یا پانل^۱ نامیده می‌شود [۱۱].

پوسته‌ها یکی از بهترین حالت‌های پایداری در برابر بارهای اعمالی را از خود نشان می‌دهند و هم‌چنین دارای استفاده گسترده می‌باشند. به ویژه اگر وزن آنها کم باشد، بیشتر مورد توجه می‌باشند. ایجاد تنش‌هایی با مقدار زیاد در پوسته‌ها، طراحان را وادار کرده است که ضخامت دیواره پوسته‌ها را کاهش دهند تا جایی که نسبت شعاع به ضخامت (R/t) به مقدار ۱۰۰۰ برسد. چنین نسبتی به ندرت ایجاد می‌شود. ظرفیت تحمل بار در پوسته‌های نازک اغلب با مقاومت در برابر کمانش محدود می‌شود. بنابراین ایجاد یک راه قابل اطمینان برای پیش‌بینی گسیختگی در کمانش مخرب^۲، لازم است [۸].

^۱ Panel

^۲ Catastrophic buckling

۲-۱- کاربرد پوسته‌ها

پوسته‌های استوانه‌ای در بسیاری از سازه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به عنوان مثال در زیر دریایی‌ها و سازه‌های فلزی و هوافضایی پیشرفته کاربرد دارد. پوسته‌ها به دلیل وزن کم و مقاومت زیاد کاربرد وسیعی در صنایع دارند. هم‌چنین پوسته‌های استوانه‌ای باز علاوه بر سازه‌های هواپیمایی، در بام‌ها و سقف‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد که به صورت استوانه کامل نمی‌باشند و دو انتهای آن روی پایه‌های صلب قرار گرفته‌اند. با درک ویژگی‌های مهم سازه‌های پوسته‌ای از جمله قدرت تحمل بار، و راحتی ساخت، مهندسين همواره از پوسته‌ها در طراحی و ساخت سازه‌های مختلف استفاده می‌کنند. از وقتی که پانل در هواپیماها و کشتی‌ها و سایر سازه‌های سخت مورد استفاده قرار گرفته است، کمانش کلاسیک در پانل‌های استوانه‌ای یک زمینه با ارزش برای بررسی می‌باشد. این سازه‌ها در طول عمر خود ممکن است تحت بارهای محوری فشاری قرار گرفته و دچار کمانش شوند. برای طراحی یک پوسته استوانه‌ای تحت بار فشاری، لازم است باری که پوسته تحت آن بار کمانش می‌کند، محاسبه شود.

۳-۱- تعریف کمانش

کمانش به مفهوم تغییر شکل ناگهانی سازه در برابر بار وارده به آن است. این بار غالباً به صورت فشاری به سازه اعمال می‌گردد [۳]. وقتی که یک سازه بلند و باریک تحت بار فشاری با مقدار کم قرار می‌گیرد، به سختی تغییر شکل می‌دهد. هر گونه تغییر قابل توجه در هندسه و بار می‌تواند این تغییر شکل را ایجاد کند. برای مثال وقتی یک میله تحت نیروی محوری فشاری قرار گرفته است، در ابتدا اندکی کوتاه می‌شود و در یک بار بحرانی که انحنای پیدا کرده است، دچار کمانش می‌گردد. هم‌چنین در حالتی که یک حلقه دایره‌ای نازک تحت فشار شعاعی قرار می‌گیرد، پیش از آنکه کمانش باعث ایجاد تعدادی موج محیطی در آن شود، حلقه از نظر اندازه اندکی کوچک شده است. برای یک ستون صلیبی شکل که تحت بار فشاری محوری قرار گرفته است، ستون ابتدا کوتاه شده و سپس به شکل پیچشی کمانش پیدا می‌کند.

پیچیده بودن نسبی معادلات دیفرانسیل غیرخطی طی سالها، منجر به توسعه سودمند روش های آنالیز خطی براساس تقریبات نامعین شده است. در نتیجه بسیاری از تحلیل گران تجربی سازه ها، تئوری پایداری الاستیک را به عنوان یک مجموعه منحصر به فرد از قواعد، مورد مطالعه قرار داده اند که فقط به طور حاشیه ای به آنالیز تنش و تغییر مکان معمولی وابسته هستند.

تغییر مکان ها در رفتار خطی اجسام شکل پذیر متناسب با مقدار بار گذاری می باشد. با این حال ما- هیت کمانش عبارت است از افزایش نامتناسب تغییر مکان ها به علت افزایش کوچک بار. در نتیجه آنالیز کمانش بیشتر در قالب مکانیک غیرخطی می گنجد تا مکانیک خطی. رفتار غیرخطی در مکانیک اجسام شکل پذیر یا یک پدیده فیزیکی است یا هندسی. یعنی می تواند از طریق رابطه تنش- کرنش وارد بحث تئوری شود. [۱]

کمانش که به عنوان ناپایداری در سازه ها معرفی شده است، می تواند به دو بخش به شرح زیر تقسیم شود.

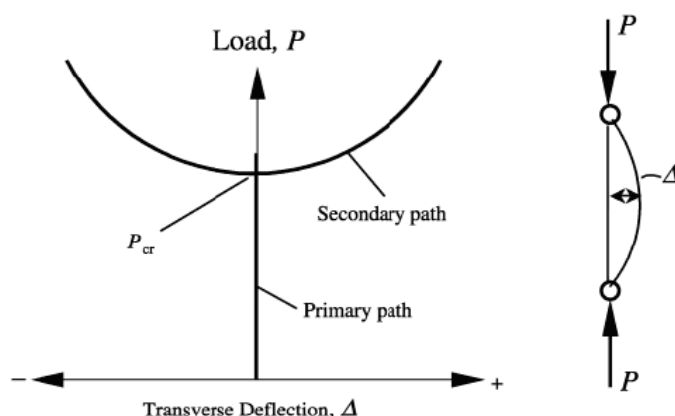
۱-۳-۱- کمانش دو شاخه ای^۱ [گالامبوس - چن - لوی^۲]

در کمانش دو شاخه ای خیز تحت بار فشاری به صورت جانبی تغییر می کند. (تغییرات از کوتاه شدن در جهت محوری به خیز جانبی) [۳].

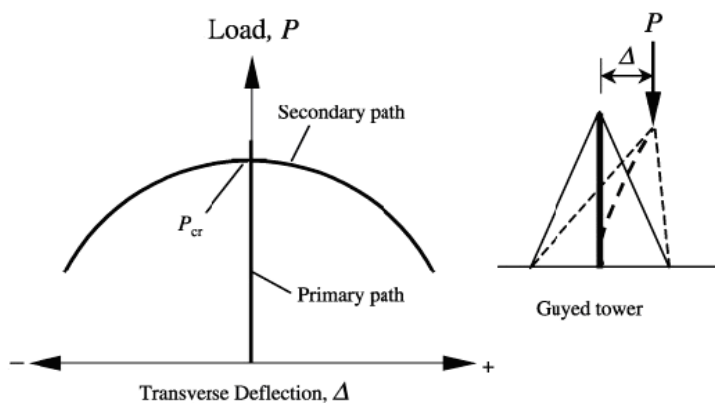
وقتی که کمانش دو شاخه ای رخ می دهد، بار در فاصله بار- خیز (تلاقی مسیر اولیه و ثانویه) به عنوان بار کمانش بحرانی و یا بار کمانش ساده نامیده می شود. مسیری از خیز که قبل از شاخه است به عنوان مسیر اولیه شناخته شده است و مسیری از خیز که بعد از شاخه قرار دارد به عنوان مسیر ثانویه و یا پس کمانش نامیده می شود. بسته به ساختار و بار، مسیر ثانویه می تواند متقارن و یا غیر متقارن باشد. هم چنین این مسیر می تواند بالا رود و یا پایین بیاید. این موضوع در شکل های (۱-۱) تا (۳-۱) نشان داده شده است.

¹ Bifurcation buckling

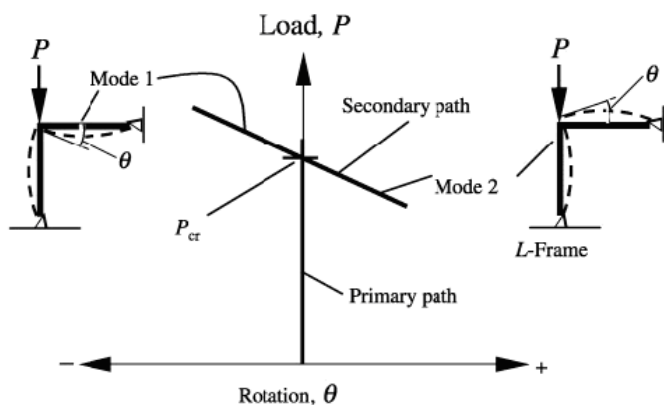
² Galambos-Chen-Lui



شکل ۱-۱- کمانش دو شاخه ای و منحنی کمانش شاخه ای متقارن و پس کمانش پایدار [۳]



شکل ۲-۱- کمانش دو شاخه ای و منحنی کمانش شاخه ای متقارن و پس کمانش ناپایدار [3]



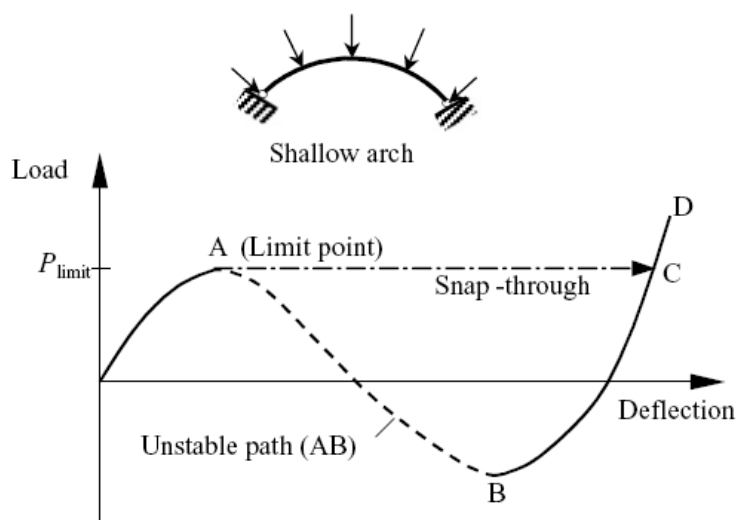
شکل ۳-۱- کمانش دو شاخه ای و کمانش شاخه ای نامتقارن [3]

۱-۳-۲- محدودیت بار کمانش^۱

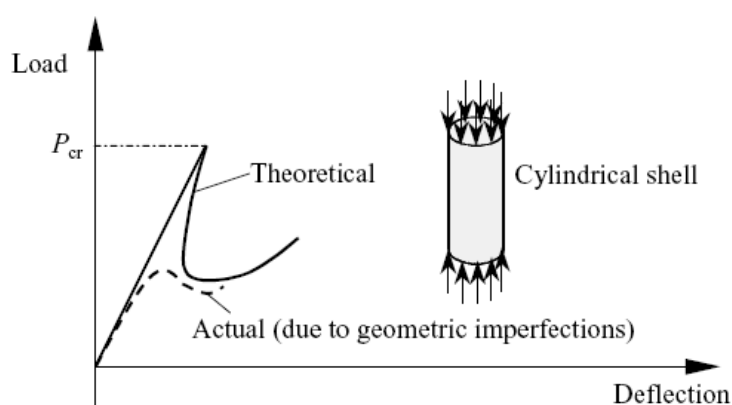
در حالت محدودیت بار کمانش، سازه به یک بار ماکزیمم بدون هیچ گونه کمانش دو شاخه ای قبلی تنها با مود اول مربوط به خیز، رسیده است که در شکل (۱-۴) نشان داده شده است. گسیختگی

^۱ Limit Load Buckling

در مورد کمان های کم عمق^۱ و طاق های کروی^۲ و کمانش به صورت آشفته و محدود (تنها پوسته های منحصر به فرد) نمونه هایی از محدودیت بار کمانش هستند. سایر دسته بندی ها در مورد کمانش بر اساس مقدار جابجایی می باشد که جابجایی کوچک و یا بزرگ می باشد و یا بر اساس کمانش استاتیکی در مقابل کمانش دینامیکی می باشد. حالت دیگر بر اساس رفتار ماده به صورت کمانش الاستیک در مقابل کمانش غیر الاستیک است [۳].



شکل ۱-۴- گسیختگی^۲ در طول کمانش مربوط به محدودیت بار کمانش [۳]



شکل ۱-۵- کمانش به صورت آشفته^۳ مربوط به محدودیت بار کمانش [۳]

¹ Shallow Arches
² Spherical Caps
³ Snap

در فصل دوم به مرور کارهای دیگران که در گذشته صورت گرفته است پرداخته می شود. در فصل سوم بررسی تحلیلی مربوط به کمانش الاستیک در پانل ها و مقایسه نتایج آن با کارهای قبلی توسط دیگران انجام شده است. در فصل چهارم و پنجم هم به ترتیب کارهای عددی مربوط به کمانش الاستیک در پانل ها و مقایسه نتایج تحلیلی و عددی با یکدیگر انجام شده است. و در نهایت در فصل ششم نتیجه گیری صورت گرفته است. در واقع کاری که نسبت به قبل صورت گرفته است این است که بررسی های تحلیلی تا حدی کامل تر بوده و اثر پارامترهای جدیدتری بررسی شده است. هم چنین کارهای عددی نیز اضافه شده است و مقایسه بین آن ها صورت گرفته است که در کارهای قبلی توسط دیگران انجام نشده است.

فصل دوم

مروری بر تئوری ها و روابط موجود در کمانش پوسته ها و پانل های استوانه ای

۲-۱- مروری بر تحقیقات گذشته

مطالعه در کمانش سازه ها دارای اهمیت کاربردی از دهه های گذشته تا کنون بوده است. خیز-های بزرگ، خزش، تاثیرات دینامیکی و نقص های اولیه در بررسی ها مورد اهمیت می باشد. اگرچه برای محاسبه بار کمانش پوسته استوانه ای تحقیقات متعددی انجام شده است، ولی تاکنون رابطه دقیقی برای محاسبه بار بحرانی کمانش ارائه نشده است و روابط موجود با کمک فرضیات ساده کننده حاصل شده اند.

مساله کمانش پوسته های استوانه ای، بیش از یک قرن است که مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفته است. معادلات پایداری پوسته های استوانه ای قبل از سال ۱۸۰۰ موجود بوده است. اولین حل مربوط به استوانه تحت بار محوری به وسیله Lorenz در سال ۱۹۱۱ ارائه شده است [۱]. حل کمانش پوسته های تحت فشار یکنواخت جانبی به وسیله Sawtel در سال ۱۹۱۳ و Von misses در سال ۱۹۱۴ ارائه شده است [۱]. در سال ۱۹۳۲ Flugge رفتار پایداری پوسته های استوانه ای با بارگذاری مرکب و استوانه تحت خمش را ارائه نمود [۱]. نتایج در پوسته استوانه ای تحت بار بوسیله Donnell در سال ۱۹۳۳ ارائه شده است.

تئوری غیر خطی Donnell در سال ۱۹۳۳ برای تحلیل کمانش پیچشی لوله های جدار نازک بنا نهاده شد. به علت سادگی نسبی و دقت عملی، این تئوری به طور گسترده ای برای تحلیل مسائل کمانش و پس کمانش به کار گرفته شده است [۴].

قابلیت های اجرایی این تئوری توسط Kraus در سال ۱۹۳۳ نشان داده شده است [۵].

آقای Marguerre در سال ۱۹۴۲ پوسته های استوانه ای غیر دایره ای باز را آنالیز کرده که دارای تکیه گاه ساده در لبه های طولی بوده و تحت گشتاور و فشار قرار داشتند. پیشنهاد Marguerre با در نظر گرفتن کمانش به صورت حداقل انحنای به صورت قطعی و واضح، به عنوان یک نقطه کلیدی پذیرفته شد. این کار، الگو و نمونه را برای Kempfer و Romano فراهم ساخت که یک پوسته با مقطع غیر دایره ای تحت فشار خارجی را تحلیل تنش کردند [۶].

آقای Batdorf و همکارانش، پانل های استوانه ای دایره ای شکل تحت بارهای متفاوت و با شرایط مرزی گوناگون را مورد بررسی قرار داده اند. پوسته های استوانه ای غیر دایره ای و پانل ها یک حالت کلی تر برای بررسی می باشند به ویژه از آن جهت که دارای اجزای ساختاری مشترک می باشند [۷]. در سال ۱۹۶۷، Chu و Krishnamoorthy یک بررسی در مورد کمانش در پوسته های استوانه ای باز با لبه های طولی آزاد انجام دادند که بر اساس فرضیات خیز های کوچک بود [۸].

در سال ۱۹۷۰، Chu و Turula روشی برای به دست آوردن مقدار بحرانی بار فشاری در جهت محوری برای یک پوسته استوانه ای باز با لبه های طولی آزاد و دارای تکیه گاه ساده در دو انتها بر اساس فرضیه خیز های بزرگ قبل از کمانش پیشنهاد کرد [۸].

این روش برای بیان بار بحرانی شامل دو معادله دیفرانسیل با مرتبه چهار است که به دسته ای از معادلات تفاضلات محدود غیر خطی که برای هر گره نوشته شده تبدیل می شود.

روش های محاسبه بار کمانش در سال ۱۹۷۲ توسط Fung و Sechler و Masur مطرح شد. خلاصه ای از حل های تئوری در مرجع [۸] موجود است.

بیشتر رابطه های تئوری و تجربی که در مقالات دیده می شود مربوط به کمانش پوسته های استوانه ای تحت بار محوری و یا فشار هیدرو استاتیک است. برای پوسته های استوانه ای که تحت بار محوری قرار گرفته اند، بار کمانش از حل های کلاسیک به دست آمده است که بر اساس فرضیه خیز

های کوچک، محاسبه بارهای گسیختگی در مقایسه با نتایج تجربی ضروری به نظر می رسد. یک تطابق بهتر بین نتایج تجربی و نتایج تئوری بر اساس فرضیه خیزهای بزرگ است و یا وقتی که تاثیرات غیر الاستیکی در بارهای کمانش، دیده می شود.

بررسی های تئوری در کمانش مربوط به پوسته های استوانه ای باز قبل از Chu و Krishnamoorthy فقط به پانل های خمیده با تکیه گاه ساده و گیر دار در لبه های طولی آن که تحت بارهای عمودی و برش قرار داشت، مربوط می شد.

مسائل مربوط به پانل ها با دو لبه تکیه گاه ساده به طور مختصر توسط Andreev و Obodan در سال ۲۰۰۴ بررسی شده است [۹].

در سال ۲۰۰۶ آقای Chu و همکارانش یک حل برای پانل استوانه ای با یک لبه آزاد را نشان دادند [۱۰]. هم چنین در سال ۲۰۰۶ Magnucki یک تقریبی از تنش بحرانی پوسته استوانه ای باز با مقطع دایره ای تحت فشار محوری را به دست آوردند [۱۰].

۲-۲- تئوری پایداری در یک پانل استوانه ای

بر اساس این معیار یک سازه فقط و فقط زمانی در حال تعادل پایدار به سر می برد که به ازای هر تغییر مکان به اندازه کافی کوچک، تغییر انرژی پتانسیل کل آن مثبت باشد [۱].

بر اساس معیار دینامیکی از دست دادن پایداری، تعادل فقط و فقط در حالتی پایدار است که به ازای بار اعمالی ثابت، یک اغتشاش کوچک اعمالی بر سازه، باعث نوسانی شود که به تعادل سازه محدود باشد. (یعنی سازه پس از اعمال نوسان به حالت اولیه تعادل خود بر می گردد).

در این فصل پایداری یک پانل استوانه ای ایزوتروپ تحت بار محوری بر اساس معادلات پایداری الاستیک به صورت سه بعدی بررسی شده است. مسئله به یک معادله در ارتباط با تنش بحرانی، خلاصه شده است. یک بسط معادل برای تنش بحرانی در یک پانل استوانه ای با ضخامت کم بدست آمده است. هم چنین یک تحلیل برای درستی فرضیه کیر شهف^۱ نیز انجام شده است.

¹ Krischhoff

۳-۲- معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای

تجزیه و تحلیل پوسته‌ها غالباً مبتنی بر دو نظریه متمایز است که بسیار کاربرد دارد. اولی نظریه غشایی است که معمولاً برای بخش عمده‌ای از پوسته قابل استفاده است و مطابق آن یک غشا^۱ را خواه مسطح و خواه خمیده، جسمی می‌دانند که دارای همان شکل ورق یا پوسته انعطاف پذیر دو بعدی است؛ جز اینکه می‌تواند در برابر فشار نیز مقاومت کند. نظریه دوم نظریه خمشی^۲ است که شامل تأثیرات خمش می‌شود. نظریه خمشی عموماً مشتمل بر یک حل غشایی است که در نواحی دارای تأثیرات انقطاعی برجسته تصحیح شده است. بنابراین هدف این نظریه بهبود حل غشایی نیست، بلکه آنالیز تنشها و کرنش های ناشی از نیروهای لبه‌ای یا بارگذاری‌های متمرکز است که نظریه غشایی محض نمی‌تواند آن را انجام دهد. شایان توجه است که نیروهای غشایی مستقل از خمش می‌باشد و به طور کامل با شرایط تعادل استاتیکی تعریف می‌گردد و چون هیچ گونه خواص ماده در استخراج این نیروها بکار گرفته نمی‌شود، بنابراین نظریه غشایی برای همه پوسته‌ها، از هر ماده‌ای ساخته شده باشد، قابل اعمال است. از تئوری غشایی به تنهایی نمی‌توان برای حل مسائل کمانش پوسته‌ها استفاده کرد و باید روابط حاصل از تئوری خمشی را بکار گرفت [۱۱].

۳-۲-۱- تئوری خمشی در پوسته‌های استوانه‌ای باز^۳ با مقطع دایره‌ای

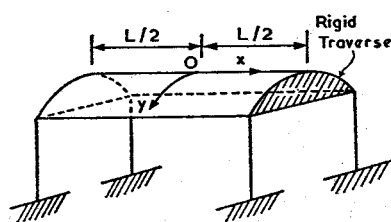
اگر یک پوسته استوانه‌ای با مقطع دایره‌ای طوری قرار گیرد که مولد استوانه موازی محور x باشد و استوانه بسته نباشد، اصطلاحاً پوسته به عنوان یک پوسته استوانه‌ای دایره‌ای باز نامیده می‌شود [۱۱]. به طوری که در شکل (۲-۱) نشان داده شده است. این پوسته‌ها عموماً در سقف سازی و بام‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد و دو انتهای آن روی پایه‌های ثابت^۴ قرار گرفته‌اند.

¹ membrane

² bending theory

³ Open Cylindrical shells

⁴ Clamp



شکل ۲-۱- پوسته استوانه‌ای باز دارای تکیه گاه صلب در دو انتها [۱۱]

در پوسته باز، جابجایی‌های u و v و w در صفحه میانی پوسته وجود دارد، در حالی که نه تنها فقط نیروهای منتج شده N_x و N_ϕ وجود دارد بلکه نیروهای برشی صفحه‌ای $N_{x\phi}$ و $N_{\phi x}$ نیز موجود است. منتجه‌های ممان‌های M_x ، M_ϕ ، $M_{x\phi}$ و منتجه‌های نیروهای برشی عرضی Q_x و Q_ϕ نیز وجود دارد [۱۱].

بدون تامل می‌توان درک کرد که مسائل تحلیلی یک چنین پوسته ای باز، نسبت به حالتی که پوسته استوانه‌ای بسته است، بسیار پیچیده تر است.

اگر چه ایجاد معادلات حاکم به صورت دقیق در این مسئله ساده می‌باشد، ولی در این حالت این معادلات برای حل دارای جواب نیستند و تمامی فرضیات ساده تر در تئوری پیشنهادی برای رسیدن به یک حل می‌باشد.

ساده ترین این تئوری‌ها مربوط به شورر^۲ است که فرضیات زیر را بیان کرده است. ضریب پواسون ناچیز در نظر گرفته شده است.

$$\nu = 0$$

ممان خمشی طولی M_x در مقایسه با خمشی عرضی M_ϕ کوچک است و بنا براین M_x می‌تواند ناچیز در نظر گرفته شود.

$$M_x = 0$$

منتجه‌های $M_{\phi x}$ و $M_{x\phi}$ در مقایسه با M_ϕ کوچک است و می‌تواند ناچیز در نظر گرفته شود.

$$M_{x\phi} = M_{\phi x} = 0$$

¹ In-Plane

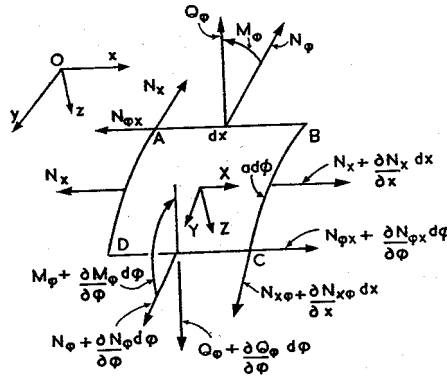
² Schorer

کرنش اصلی در جهت طولی ε_1 بوده و با مقایسه، می توان ε_2 و ε_{12} را ناچیز در نظر گرفت.

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_2 = 0$$

منتجه های N_x ، N_φ ، $N_{\varphi x}$ ، $N_{x\varphi}$ ، M_φ و Q_φ در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. با گرفتن

ممان در جهت محور y چون $M_x = 0$ است در نتیجه Q_x ناچیز در نظر گرفته می شود.



شکل ۲-۲- منتجه های تنش در المان پوسته [۱۱]

فرضیات شورر می تواند با مقادیر عددی در تنش های منتج شده برای پوسته های استوانه ای باز که از تئوری اش به دست آمده است با آن چه که از تئوری های دقیق تر به دست آمده است، مقایسه شود.

۲-۳-۲- معادلات تعادل در پوسته استوانه ای باز

با در نظر گرفتن معادله تعادل استاتیکی در یک المان مربوط به پوسته باز همان طور که در

شکل (۲-۲) نشان داده شد و حل آن در جهت محوری x رابطه زیر به دست می آید [۱۱]:

$$(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx)Rd\varphi - N_x R d\varphi + (N_{\varphi x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi)dx - N_{\varphi x} dx + X R d\varphi dx = 0$$

که با تقسیم رابطه بر $R dx d\varphi$:

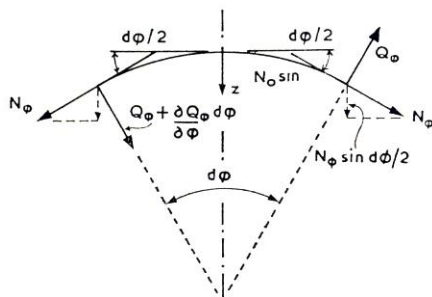
$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{R \partial \varphi} + X = 0 \quad (۱-۲)$$

به طریق مشابه با حل کردن در جهت y برای معادله با مرتبه اول و $(y = R\varphi)$ رابطه زیر به دست می

آید:

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial N_\varphi}{R\partial\varphi} + Y = 0 \quad (2-2)$$

که Z, Y, X اجزای بار خارجی در سه جهت هستند. با حل در جهت محور z مشاهده می شود که اجزای Q_φ و N_φ در این جهت به طور مجزا بررسی شده اند. چنان که در شکل (۳-۲) نشان داده شده است.



شکل ۲-۳- اجزای منتجه های تنش در جهت z [۱۱]

بنا بر این معادلات کامل آن به صورت زیر است:

$$(Q_\varphi + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial\varphi} d\varphi) \cos \frac{d\varphi}{2} dx - Q_\varphi \cos \frac{d\varphi}{2} dx + 2N_\varphi dx \sin \frac{d\varphi}{2} + Z dx R d\varphi = 0$$

چنان چه $d\varphi$ به سمت صفر میل کند معادله بالا به شکل زیر در می آید:

$$\frac{\partial Q_\varphi}{R\partial\varphi} + \frac{N_\varphi}{R} + Z = 0 \quad (3-2)$$

با به کار بردن معادلات در جهت محور x رابطه (۴-۲) به دست می آید:

$$(M_\varphi + \frac{\partial M_\varphi}{\partial\varphi} d\varphi) dx - M_\varphi dx - Q_\varphi R d\varphi dx = 0 \quad (4-2)$$

که به صورت زیر کاهش می یابد:

$$\frac{\partial M_\varphi}{R\partial\varphi} - Q_\varphi = 0 \quad (5-2)$$

ممان تعادلی حول محور y به طور دقیق ارضا شده است و در نهایت ممان حول محور z نتیجه می دهد:

$$N_{\varphi x} = N_{x\varphi} \quad (6-2)$$

بنا بر این پنج معادله تعادل ایجاد شده و این معادلات برای بدست آوردن شش متجه N_φ ، N_x ، $N_{x\varphi}$ ، $N_{\varphi x}$ ، M_φ و Q_φ ناکافی می باشد و معادلات بیشتری شامل کرنش ها، انحناها و جابجایی ها بایستی برای به دست آوردن یک راه حل جستجو شود. ایجاد یک رابطه برای M_φ از بین معادلات (۲-۱) تا (۲-۶) مناسب به نظر می رسد. با حذف کردن Q_φ از بین معادلات (۲-۳) و (۲-۵) می توان داشت:

$$\frac{\partial^2 M_\varphi}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{N_\varphi}{R} + Z = 0 \quad (۲-۷)$$

با حذف کردن $N_{\varphi x}$ و $N_{x\varphi}$ از بین معادلات (۲-۱) و (۲-۲) و (۲-۶) می توان داشت:

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N_\varphi}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{R \partial \varphi} = 0 \quad (۲-۸)$$

در نهایت با خارج کردن N_φ از بین معادلات (۲-۷) و (۲-۸)، معادله منتج شده به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^4 M_\varphi}{R^4 \partial \varphi^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{R \partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 Z}{R^2 \partial \varphi^2} = 0 \quad (۲-۹)$$

با در نظر گرفتن معادلات کرنش، انحنا و جابجایی، نشان داده شده است که M_φ و N_x به عنوان تابعی از جابجایی شعاعی در جهت w است. هم چنین معادله (۲-۹) بر حسب یک معادله دیفرانسیل جزئی از w به دست می آید.

۳-۳-۲ - معادلات کرنش - جابجایی در سطح میانی پوسته استوانه ای باز

هر نقطه روی سطح میانی المان پوسته، جابجایی های u و v و w که به ترتیب در جهات x و y و z می باشند را نشان می دهد. کرنش غشایی ε_1 در سطح میانی در جهت x ، به طور دقیق در روشی که مشابه حالت پوسته استوانه ای بسته بود، بدست آمده است و به صورت زیر بیان می شود:

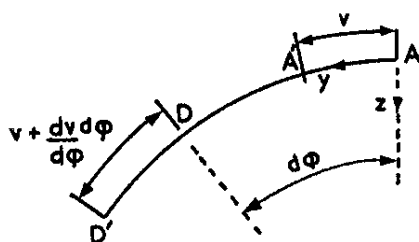
$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (۲-۱۰)$$

کرنش غشایی ε_2 در جهت $y = R\varphi$ می باشد. اگر یک قسمت از المان به صورت $AD = R d\varphi$ ، عمود بر محور x توسط یک مقدار برای v در جهت y جایگزین شود به طوری که نقطه A به نقطه

A' انتقال یابد. هم چنین در شکل (۴-۲) الف، نقطه D با مقدار $v + \left(\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)d\phi$ به نقطه D' منتقل

شده است. بنابراین کرنش المان در جهت y ناشی از جابجایی v به شکل زیر است:

$$(A'D' - AD) / AD = \frac{\partial v}{R \partial \phi}$$

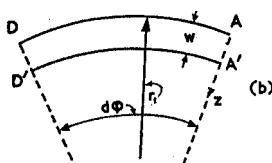


شکل ۴-۲- الف) جابجایی های مربوط به سطح میانی [۱۱]

به علت جابجایی w ، هر چند که کرنش در المان AD در جهت y است، کرنش $-\frac{w}{R}$ نیز

موجود است. این موضوع در شکل (۴-۲) الف آمده است. بنابراین کرنش کلی ϵ_2 در جهت y ناشی

از جابجایی v و w که ترکیبی است، به صورت زیر می باشد:



شکل ۴-۲- ب) جابجایی های مربوط به سطح میانی [۱۱]

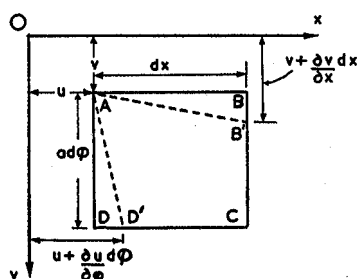
$$\epsilon_2 = \frac{\partial v}{R \partial \phi} - \frac{w}{R} \quad (11-2)$$

شکل (۵-۲) یک المان مربوط به سطح پوسته در نقطه A روی صفحه x, y را نشان می دهد که در

آن زاویه قائم اصلی می باشد. اگر نقطه A جابجایی u داشته باشد، نقطه مجاور D به D' با

مقدار $u + \left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)d\phi$ منتقل شده است و بنابراین تغییر زاویه در نقطه A به صورت زیر است:

$$DD' / AD = \left(u + \frac{\partial u}{\partial \phi} d\phi - u\right) / R d\phi = \frac{\partial u}{R \partial \phi}$$



شکل ۲-۵- جابجایی های منجر به برش [۱۱]

به طور مشابه اگر نقطه A جابجایی v در جهت y داشته باشد، سپس نقطه مجاور B به B' با مقدار $v + (\frac{\partial v}{\partial x})dx$ منتقل می شود و تغییر زاویه در نقطه A به صورت $\frac{\partial v}{\partial x}$ است. تغییر کلی در زاویه A به علت وجود جابجایی های v و u است که یک مقدار از کرنش برشی می باشد. ϵ_{12} عبارت است از:

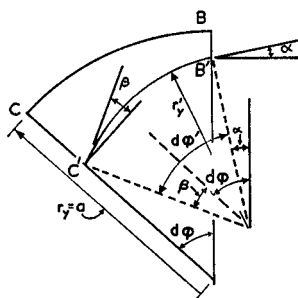
$$\epsilon_{12} = \frac{\partial u}{R \partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (12-2)$$

۲-۳-۴- معادلات انحناء جابجایی در سطح میانی پوسته استوانه ای باز

اکنون می توان تغییر انحناء در سطح میانی در جهت y را محاسبه کرد. یک قسمت از المان (BC) در سطح میانی با طول $Rd\phi$ در نظر گرفته شده است. قبل از این که خمش رخ دهد شعاع انحنای آن $r_y = R$ می باشد. پس از خمش به موقعیت جدید $B'C'$ منتقل می شود به طوری که شعاع انحنای جدید r'_y می باشد و نقاط B' و C' با $d\phi'$ مرتبط هستند. این موضوع در شکل (۲-۶) آمده است.

چرخش زاویه ای در B' ناشی از جابجایی w به صورت $\alpha = \partial w / R \partial \phi$ است و بنابراین چرخش زاویه ای در نقطه مجاور (C') به صورت زیر است:

$$\beta = \frac{\partial w}{R \partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial w}{R \partial \phi} \right) d\phi \quad (13-2)$$



شکل ۲-۶- تغییر انحنا در سطح میانی پوسته استوانه‌ای باز [۱۱]

برای یک هندسه ساده زاویه $d\varphi'$ به صورت $d\varphi' = d\varphi + \beta - \alpha$ و یا مثل زیر است:

$$d\varphi' = d\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\partial w}{R\partial\varphi} \right) d\varphi \quad (14-2)$$

قبل از این که خمش رخ دهد طول المان BC به صورت $dS = R d\varphi$ و هم چنین $1/R = d\varphi/dS$ می باشد. پس از خمش طول المان dS تغییر نکرده است و به صورت $dS = r'_y d\varphi'$ می باشد.

هم چنین $1/r'_y = d\varphi'/dS$ است و تغییر انحنا χ_2 در جهت y به صورت زیر است:

$$\chi_2 = 1/r'_y - 1/r_y = 1/r'_y - 1/R = \frac{d\varphi'}{dS} - \frac{d\varphi}{dS}$$

حال با جایگزینی برای $d\varphi'$ از معادله (۱۴-۲)، خلاصه معادله بالا به صورت زیر می شود:

$$\chi_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\partial w}{R\partial\varphi} \right) \frac{d\varphi}{dS} = \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\partial w}{R\partial\varphi} \right) \frac{1}{R} = \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial\varphi^2} \quad (15-2)$$

$$\chi_1 = 1/r'_x - 1/r_x \quad (16-2)$$

همان طور که شورر فرض کرده بود M_x در مقایسه با M_φ ناچیز است. با درستی این فرضیات می توان به این مطلب اشاره کرد که χ_1 می تواند در مقایسه با χ_2 ناچیز در نظر گرفته شود.

۲-۳-۵- معادلات تنش - کرنش

دو معادله کلی در محاسبه تئوری خمشی در پوسته های استوانه‌ای بسته تحت بار متقارن به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$N_x = Et(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)/(1-\nu^2) \quad (17-2)$$

$$M_{\varphi} = -D(\chi_2 + \nu \chi_1) \quad (18-2)$$

با در نظر گرفتن اولین فرضیه از فرضیات شورر و بکار گیری $\nu = 0$ در دو معادله (2-17) و (2-18) روابط زیر حاصل می شود:

$$N_x = Et \varepsilon_1$$

$$M_{\varphi} = -D \chi_2$$

و صلبیت سختی در این حالت به صورت زیر است:

$$D = Et^3 / 12$$

با جایگزینی برای ε_1 و χ_2 از معادلات (2-10) و (2-15) روابط زیر به دست می آید:

$$N_x = Et \frac{\partial u}{\partial x} \quad (19-2)$$

$$M_{\varphi} = -\frac{Et^3}{12} \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} \quad (20-2)$$

که $I = \frac{t^3}{12}$ است.

۲-۳-۶- معادله سازگاری در پوسته استوانه‌ای باز

با به کار بردن $\varepsilon_2 = \varepsilon_{12} = 0$ در معادلات (2-11) و (2-12) روابط زیر به دست می آید:

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{R \partial \varphi} - \frac{w}{R} = 0 \quad (21-2)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (22-2)$$

با حذف کردن v از بین دو معادله بالا رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \quad (23-2)$$

سپس از معادله (2-15) و استفاده از معادله (2-23) رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{1}{R^3} \frac{\partial^4 N_x}{\partial \varphi^2 \partial x^2} = \frac{Et}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{Et}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(-R \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{Et}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (24-2)$$

بنابراین هم M_{φ} و هم N_x هر دو فقط به عنوان تابعی از w می باشند.

معادله (۲-۹) با دو مرتبه بالاتر به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^6 M_\phi}{R^6 \partial \phi^6} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^4 N_x}{\partial \phi^2 \partial x^2} + \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial^3 X}{\partial x \partial \phi^2} - \frac{\partial^3 Y}{R \partial \phi^3} \right) + \frac{\partial^4 Z}{R^4 \partial \phi^4} = 0 \quad (25-2)$$

با جایگزینی برای M_ϕ و N_x از معادلات (۲-۲۰) و (۲-۲۴)، معادله بالا به صورت زیر خلاصه می شود:

$$\frac{\partial^8 w}{\partial \phi^8} + \frac{t R^6}{I} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{R^4}{EI} \left(\frac{\partial^4 Z}{\partial \phi^4} - \frac{\partial^3 Y}{\partial \phi^3} \right) + \frac{R^5}{EI} \frac{\partial X^3}{\partial x \partial \phi^2} \quad (26-2)$$

این معادله یک فرم تصحیح یافته از معادله شورر است و حل رسمی آن به صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی نسبتاً خسته کننده تر است. هر چند که این معادله برای آنالیز پوسته های استوانه ای باز که در شکل (۲-۱) نشان داده شد، قابل استفاده است. ثابت بودن لبه های پوسته باز در این شکل اشاره به این دارد که انحنا در این دو لبه حذف شده است و می تواند به یک معادله دیفرانسیل معمولی که از نظر حل بسیار ساده تر است، تبدیل شود.

۲-۴- تئوری دانل [۴]

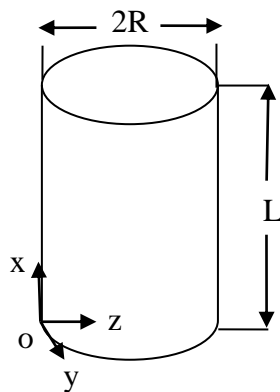
به منظور آشنایی با معادلات حاکم بر کمانش پوسته های استوانه ای، شکل گیری یکی از پر کاربردترین معادلات حاکم بر کمانش پوسته ها (معادلات دانل) ارائه شده است. اگرچه ساده سازی معادلات تا حدی دامنه کاربرد آنها را محدود می کند، ولی معادلات دانل اساس اغلب آنالیزهای پایداری پوسته های استوانه ای در کتب و مقالات را تشکیل می دهد. این معادلات برای پانل های استوانه ای که پیش از تغییر شکل نسبتاً مسطح باشند و برای پوسته های استوانه ای کامل جوابهای خوبی ارائه می کند.

معادلات مشابهی توسط فلوگه و سندر^۱ برای کمانش پوسته ها تحت بارگذاری های مختلف ارائه شده است [۴]. ولی در اینجا، معادلات دانل و روش حل این معادلات برای پوسته های استوانه ای ارائه شده است.

¹ Sander

در ادامه نحوه استخراج معادلات دائل و بکارگیری این معادلات برای مسئله کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ارائه می‌شود.

یک پوسته استوانه‌ای دایره‌ای شکل با شعاع R ، طول L و ضخامت t که از یک ماده همگن، الاستیک و ایزوتروپ تشکیل شده است. مدول یانگ E و ضریب پواسون ν است. دستگاه مختصات در امتداد صفحه میانی پوسته قرار داده شده است (شکل ۲-۷)). جابجایی‌ها با u ، v و w به ترتیب در جهات x ، y و z نشان داده شده‌اند.



شکل ۲-۷- هندسه پوسته و دستگاه مختصات [۴]

تئوری دائل بر پایه فرضیات زیر بنا نهاده شده است:

$$1- \text{پوسته به اندازه کافی نازک است: } \frac{t}{R} \ll 1, \frac{t}{L} \ll 1$$

۲- کرنش ϵ به اندازه کافی کوچک است $\epsilon \ll 1$ و قانون هوک صادق است.

۳- خطوط مستقیم که قبل از تغییر شکل عمود بر صفحه میانی هستند مستقیم و عمود بر صفحه میانی تغییر شکل یافته باقی می‌مانند، بدون اینکه طول آنها تغییر کند.

۴- تنش نرمال عمود بر صفحه میانی در مقایسه با تنشهایی که در صفحه عمل می‌کنند، ناچیز است.

۵- تا وقتی که w از مرتبه ضخامت پوسته است، جابجایی‌های u و v بی‌نهایت کوچکند. بنابراین:

$$|w| = O(t)$$

$$|v| \ll t, |u| \ll t$$

۶- مشتقات w کوچک هستند؛ اما مربعاتشان و منته‌های آنها از مرتبه کرنشی هستند که در اینجا بررسی می‌شود. بنابراین:

$$\left\{ \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \right\} \ll 1, \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \left| \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right|, \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} = o(\varepsilon)$$

۷- تغییر انحنای کوچک است و تاثیر u و v در آن ناچیز است. بنابراین، انحناها را می‌توان با یک تابع خطی از w نشان داد. فرضهای ۳ و ۴، فرضیات Krichhoff را تشکیل می‌دهند. در حالی که فرضیات ۵ تا ۷ به تقریبهای قابل اجرا برای پوسته کم عمق، برای جابجایی‌های تحت تاثیر جابجایی نرمال w مربوط می‌شوند. بر پایه این فرضیات روابط کرنش - جابجایی به صورت زیر است [۴]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + z\kappa_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + z\kappa_y, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy0} + z\kappa_{xy}$$

$$\varepsilon_{x0} = u_{,x} + \frac{1}{2}w^2_{,x}, \quad \varepsilon_{y0} = v_{,y} - R^{-1}w + \frac{1}{2}w^2_{,y}, \quad \gamma_{xy0} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \quad (27-2)$$

$$\kappa_x = -w_{,xx}, \quad \kappa_y = -w_{,yy}, \quad \kappa_{xy} = -2w_{,xy}$$

در زیر نویسه‌ها علامت گاما نشانه مشتقات جزئی است. روابط تنش - کرنش به صورت زیر است:

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y, \quad E\varepsilon_y = \sigma_y - \nu\sigma_x, \quad \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \tau_{xy},$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (28-2)$$

اکنون منته‌های تنش و ممان‌ها بر واحد طول در امتداد مقاطع $x = \text{const.}$ و $y = \text{const.}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(N_x, N_{xy}, Q_x) = \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}) dz$$

$$(N_{yx}, N_y, Q_y) = \int_{-t/2}^{t/2} (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}) dz \quad (29-2)$$

$$(M_x, M_{xy}) = \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x, \tau_{xy}) z dz$$

$$(M_{yx}, M_y) = \int_{-t/2}^{t/2} (\tau_{yx}, \sigma_y) z dz$$

با جایگذاری تنش‌ها نتیجه می‌شود:

$$N_x = J(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0}), \quad N_y = J(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0}), \quad N_{xy} = N_{yx} = J \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy0} \quad (30-2)$$

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y) , M_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x) , M_{xy} = M_{yx} = D\frac{1-\nu}{2}\kappa_{xy} \quad (31-2)$$

J، سختی کششی^۱ و D، سختی خمشی^۲ است، که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$J = \frac{Et}{1-\nu^2} , D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} , \quad (32-2)$$

معادلات پایه براساس قانون تغییرات قابل استخراج است. انرژی کرنشی الاستیک با رابطه زیر محاسبه می شود:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz = \quad (33-2)$$

$$\frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-t/2}^{t/2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2) dx dy dz$$

با فرض نیروهای پایستار انرژی پتانسیل نیروهای خارجی را می توان از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$V_f = - \int_0^L \int_0^{2\pi R} (P_x u + P_y v + P w) dx dy - \int_0^{2\pi R} [P_x^* u + P_y^* v + P_z^* w - M_x^* w_{,x}]_{x=0}^{x=L} dy \quad (34-2)$$

در حالی که P, P_x, P_y به ترتیب مولفه های x, y و z نیروهای گسترده بر واحد سطح پوسته هستند. P_z^*, P_y^*, P_x^* مولفه های نیروهای خارجی و M_x^* ممان خمشی خارجی هر کدام بر واحد طول هستند که در امتداد لبه ها اعمال شده اند. انرژی پتانسیل نهایی $\pi(u, v, w)$ به صورت زیر است:

$$\pi = U_e + V_f \quad (35-2)$$

هنگامی که پوسته در حال تعادل باشد، انرژی پتانسیل نهایی در طی یک جابجایی مجازی سازگار با قید های هندسی توصیف شده در امتداد مرزها یک مقدار ثابت فرض می شود. بنابراین:

$$\delta\pi = \delta U_e + \delta V_f = 0 \quad (36-2)$$

در حالی که:

$$\begin{aligned} \delta U_e &= \int_0^L \int_0^{2\pi R} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy}) dx dy dz = \\ &\int_0^L \int_0^{2\pi R} (N_x \delta\varepsilon_{x0} + N_y \delta\varepsilon_{y0} + N_{xy} \delta\gamma_{xy0} + M_x \delta\kappa_x + M_y \delta\kappa_y + M_{xy} \delta\kappa_{xy}) dx dy \\ \delta V_f &= - \int_0^L \int_0^{2\pi R} (P_x \delta u + P_y \delta v + P \delta w) dx dy - \int_0^{2\pi R} [P_x^* \delta u + P_y^* \delta v + P_z^* \delta w - M_x^* \delta w_{,x}]_{x=0}^{x=L} dy \end{aligned}$$

¹ extensional rigidity

² flexural rigidity

با کمک تئوری گاوس، شرط (۳۶-۲) به فرم معادله زیر تبدیل خواهد شد:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} (L_1 \delta u + L_2 \delta v + L_3 \delta w) dx dy + \int_0^{2\pi R} [B_1 \delta u + B_2 \delta v + B_3 \delta w + B_4 \delta w_{,x}]_{x=0}^{x=L} dy = 0 \quad (37-2)$$

بنابراین با قرار دادن $L_i = 0, (i=1,2,3)$ ، معادلات تعادل به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} + P_x &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} + P_y &= 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + R^{-1}N_y + (N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y})_{,x} + (N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y})_{,y} + P &= 0 \end{aligned} \quad (38-2)$$

معادله آخر را به فرم زیر می توان نوشت:

$$D\nabla^4 w - R^{-1}N_y - N_x w_{,xx} - 2N_{xy} w_{,xy} - N_y w_{,yy} - P_z + P_x w_{,x} + P_y w_{,y} = 0 \quad (39-2)$$

که در آن

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$$

شرایط مرزی طبیعی در امتداد مرز با $B_i = 0, (i=1..4)$ داده خواهد شد. بنابراین شرایط مرزی

مناسب در امتداد $x = L$ و $x = 0$ را می توان با روابط زیر تعیین کرد:

$$\begin{aligned} N_x &= P_x^* \quad or \quad u = u^* \\ N_{xy} &= P_y^* \quad or \quad v = v^* \end{aligned} \quad (40-2)$$

$$M_{x,x} + 2M_{xy,y} + N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y} = P_z^* \quad or \quad w = w^*$$

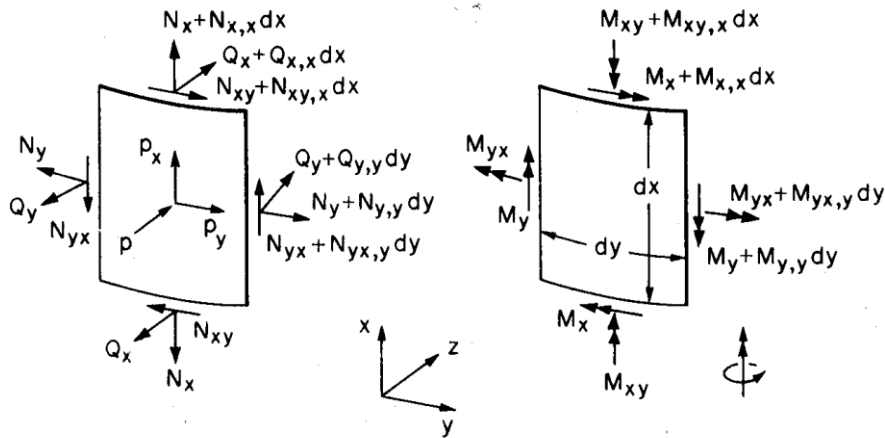
$$M_x = M_x^* \quad or \quad w_{,x} = w_x^*$$

که w_x^*, w^*, v^*, u^* به ترتیب مقادیر مولفه های جابجایی و چرخش در امتداد مرز هستند. شرایط

مرزی مختلف با انتخاب یک شرط از هر جفت از معادلات (۴۰-۲) تشکیل می شود. باید اضافه کرد که

معادلات (۳۸-۲) و (۳۹-۲) را می توان با بررسی تعادل یک المان بی نهایت کوچک بعد از تغییر شکل

بدست آورد. جهت مثبت نیروها و ممان ها مطابق شکل (۸-۲) است.



شکل ۲-۸- نیروها و ممان های عمل کننده روی المان پوسته [۴]

شرط تعادل گشتاورها حول محورهای x و y معادلات زیر را نتیجه می دهد:

$$Q_x = M_{x,x} + M_{y,y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad (41-2)$$

$$Q_y = M_{x,y} + M_{y,x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w,$$

تعادل نیروها در جهت x و y و z همراه با معادلات بالا منجر به همان نتایج قبلی می شود.

معادلات تعادل (۳۸-۲) و شرایط مرزی بدست آمده، معادلات پایه دائل برای تحلیل پوسته های استوانه ای با تغییر شکلهای بزرگ و محدود است.

برای حالتی که $P_x = P_y = 0$ ، دو معادله اول (۳۸-۲) با بکار بردن تابع تنش F به صورت زیر ارضاء می شوند:

$$N_x = F_{,yy} \quad , \quad N_y = F_{,xx} \quad , \quad N_{xy} = -F_{,xy} \quad (42-2)$$

روابط زیر از معادله (۳۰-۲) بدست می آیند:

$$Et[u_{,x} + \frac{1}{2} w^2_{,x}] = N_x - \nu N_y = F_{,yy} - \nu F_{,xx} \quad (43-2)$$

$$Et[v_{,y} - R^{-1} w + \frac{1}{2} w^2_{,y}] = N_y - \nu N_x = F_{,xx} - \nu F_{,yy}$$

$$Et(u_{,y} + \nu_{,x} + w_{,x} w_{,y}) = 2(1 + \nu) N_{xy} = -2(1 + \nu) F_{,xy}$$

با حذف u و v از معادله (۴۳-۲) معادله سازگاری به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla^4 F + Et(R^{-1} w_{,xx} - w^2_{,xy} + w_{,xx} w_{,yy}) = 0 \quad (44-2)$$

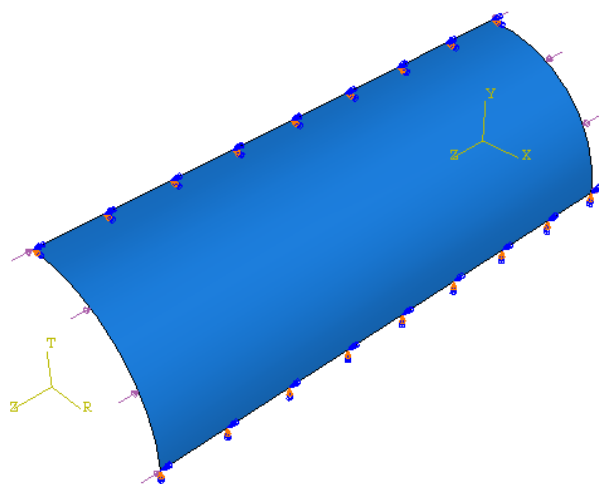
معادله تعادل (۲-۳۹) به صورت زیر نوشته می شود :

$$D\nabla^4 w - R^{-1}F_{,xx} - F_{,yy}w_{,xx} + 2F_{,xy}w_{,xy} - F_{,xx}w_{,yy} - P_z = 0 \quad (۲-۴۵)$$

معادلات (۲-۴۴) و (۲-۴۵) یک شکل دیگر از معادلات پایه دانل با دو تابع مجهول w و F را ارائه می کنند که در مسائل عملی سازگاری بیشتری نسبت به معادلات (۲-۳۸) دارند. در نهایت باید متذکر شد که در حالتی که R بی نهایت شود، این معادلات به معادلات شناخته شده کارمان^۱ برای خیزهای بزرگ ورقهای نازک تبدیل می شوند.

۲-۵- مروری بر پایداری در پانل استوانه ای با شرط مرزی دولبه راست دارای تکیه گاه ساده و دو لبه خمیده آزاد

در این جا فرض شده است که در پانل استوانه ای ایزوتروپ دو لبه پوسته که در راستای مولد پوسته است دارای تکیه گاه ساده بوده و دو لبه خمیده آن که در راستای عمود بر محور پوسته استوانه ای باز می باشد، آزاد می باشد که در شکل (۲-۹) نشان داده شده است و پوسته تحت نیروی محوری با شدت P که در جهت مولد پوسته اعمال شده، قرار گرفته است. برای این حالت R, L و t به ترتیب طول، شعاع و ضخامت پانل است و زاویه تقسیمی^۲ توسط β نشان داده شده است [۱۲].



شکل ۲-۹- پانل استوانه ای تحت بار محوری روی دو لبه خمیده و دارای تکیه گاه ساده در دو لبه صاف

¹ Karman

² Sectorial angle

معادلات اصلی به صورت زیر است:

$$\sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3} - (1 - \delta_{i3}) P u_{i,3,3} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (46-2)$$

بر طبق روابط الاستیسیته:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (47-2)$$

شرط مرزی روی لبه های پانل در سیستم مختصات استوانه ای (r, θ, x_3) به صورت زیر می باشد:

$$\sigma_r|_{r=R \pm t/2} = 0$$

$$\tau_{r\theta}|_{r=R \pm t/2} = 0 \quad (48-2)$$

$$\sigma_{r,x_3}|_{r=R \pm t/2} = 0$$

حل کلی معادله معادلات (46-2) به صورت زیر است:

$$\psi_1 = [A_{m,y}^{11} I_y(\gamma \zeta_1 r) + A_{m,y}^{12} K_y(\gamma \zeta_1 r)] \sin(\gamma x_3) \cos(y\theta) \quad (49-2)$$

$$\psi_i = [A_{m,y}^{i1} I_y(\gamma \zeta_i r) + A_{m,y}^{i2} K_y(\gamma \zeta_i r)] \cos(\gamma x_3) \sin(y\theta) \quad (i=2,3) \quad (50-2)$$

در این جا $\gamma = m\pi/L$ و $y = n\pi/\beta$ است و m و n به ترتیب تعداد نیم موج ها در جهت محوری و محیطی می باشد. $A_{m,y}^{ij}$ ثابت دلخواه می باشد و $I_y(\gamma \zeta_i r)$ و $K_y(\gamma \zeta_i r)$ به ترتیب توابع اصلاح شده بسل¹ و مک دونالد² می باشند. $\zeta_i^2 (i=1,2,3)$ ریشه های معادله سه بعدی³ هستند و به صورت زیر می باشد:

$$\zeta_1^2 = 1 - z \quad (51-2)$$

$$\zeta_{2,3}^2 = 1 - \frac{1}{2} z \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \pm \sqrt{z \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} + \left(\frac{1}{2} z \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right)^2} \quad (52-2)$$

در حالی که λ و μ ثابت های لامه هستند و $z = P/\mu$ می باشد.

حل های کلی در نظر گرفته شده (49-2) و (50-2)، شرایط مرزی روی لبه های پانل را ارضا می کند. این حل برای پانل های استوانه ای با ضخامت کم که تمامی لبه های آن دارای تکیه گاه ساده می باشد نیز صادق است. روابط جابجایی بر حسب توابع ψ_1 و ψ_2 و ψ_3 به صورت زیر است:

¹ Bessel

² Macdonald

³ Cubic Equation

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_1 - \frac{\partial^2}{\partial r \partial x_3} (\psi_2 + \psi_3) \quad (53-2)$$

$$u_\theta = -\frac{\partial}{\partial r} \psi_1 - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x_3} (\psi_2 + \psi_3) \quad (54-2)$$

$$u_{x_3} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (1-z) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] (\psi_2 + \psi_3) \quad (55-2)$$

با قرار دادن حل های (۲-۴۹) و (۲-۵۰) در شرایط مرزی (۲-۴۸)، یک سیستم شامل شش معادله جبری برای ثابت های A_{my}^{ij} بدست می آید.

حل غیر صفر این سیستم معادلات از صفر شدن دترمینان زیر به دست می آید:

$$\det \|a_{ij}\| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (56-2)$$

که مقادیر a_{11} تا a_{66} در مرجع [۱۲] آمده است.

معادله غیر جبری^۱ (۲-۵۶) روش به دست آوردن تنش بحرانی P_{cr} برای حالتی که ناپایداری در

پانل استوانه ای رخ می دهد را بیان می کند. معادله توسط روش های عددی قابل حل می باشد.

ریشه های این معادله غیر جبری برای پانل استوانه ای با ضخامت کم در حالتی که تعداد زیادی موج

در راستای مولد پوسته وجود دارد، بررسی شده است. برای این حالت نامساوی های $m\pi t/2L \ll 1$ و

$m\pi R/L \gg 1$ در نظر گرفته شده است. روابط اضافی و بسط معادل برای توابع تصحیح یافته بسل و

مک دونالد استفاده شده است که پس از تغییرات حقیقی با دقت ε_2 و $\frac{1}{x^2}$ ، معادله برای بیان تنش

بحرانی P_{cr} با در نظر گرفتن $x = m\pi R/L$ و $\varepsilon = m\pi t/2L$ به صورت زیر بیان می شود:

$$8z(z-1)\alpha_1 + \varepsilon^2[-z^2(z-1) + 16(z-1)^2\alpha_1^2 + \frac{4}{3}(z-1)\alpha_1(4\alpha_1 - 2z\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} - z^2\frac{\mu}{\lambda+2\mu}) - \frac{8}{3}z\alpha_1 + \frac{1}{3}z^3\frac{\lambda^2}{(\lambda+2\mu)^2} + \frac{1}{3}z^2\frac{7\lambda^2 + 24\mu\lambda + 16\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2} - \frac{16}{3}z(z-1)^2\alpha_1] \quad (57-2)$$

$$+ \frac{1}{x^2}[8(z-1)(1-4\alpha_1) + 8zy^2(1-4\alpha_1) + 2z^2y^2 + 8z\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}y^2] = 0$$

برای بیان ترم اصلی مربوط به تنش بحرانی، بایستی معادله (۲-۵۷) را با در نظر گرفتن z خطی

کرد [۱۲]. با توجه به ثابت های مهندسی E و ν ، عبارت زیر برای تنش بحرانی به دست می آید:

¹ Transcendental

$$\frac{P}{E} = \frac{\frac{1}{x^2} \frac{1+\nu}{1-\nu} + \varepsilon^2 \frac{1}{3(1-\nu^2)}}{\frac{1+\nu}{1-\nu} + \frac{1}{x^2} \left[\frac{2(1+\nu)^2}{1-\nu} + \frac{2y^2(1+\nu)}{1-\nu} \right] + \varepsilon^2 \frac{4}{3} \frac{(2-\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)^2}} \quad (58-2)$$

بررسی ها نشان می دهد که پوسته های استوانه ای تحت بار فشاری معمولا در موج های طولی کوتاه کمانش می کند و بنا براین x^2 یک مقدار بزرگ است.

P_{cr} به صورت یک تابع پیوسته از x می باشد. کمترین مقدار رابطه (58-2) برای شرایط زیر رخ می دهد:

$$x = \sqrt[4]{\frac{4R^2}{t^2} 3(1-\nu^2)} \quad (59-2)$$

از معادلات (58-2) و (59-2) رابطه (60-2) نتیجه می شود:

$$P_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \frac{t}{R} \quad (60-2)$$

رابطه (60-2) که به طور مستقیم از معادله (57-2) به دست آمده است، مقدار ریشه بدست آمده از معادله (57-2) را به صورت زیر خواهد داد:

$$z = \sum_{i=2,4,\dots} [A_i \frac{1}{x^i} + B_i \varepsilon^i + C_i (\frac{\varepsilon}{x})^i] \quad (61-2)$$

با قرار دادن رابطه (61-2) در (57-2)، معادلاتی برای بیان A_2, B_2 و A_4, B_4 و C_2, C_4 بدست می آید. به عنوان یک نتیجه از حل هر یک از معادلات، رابطه زیر به دست می آید:

$$A_2 = 2(1+\nu); \quad B_2 = \frac{2}{3} \frac{1}{1-\nu} \quad (62-2)$$

با در نظر گرفتن دقتی در حدود ε^2 و $\frac{1}{x^2}$ رابطه زیر از معادله (58-2) به دست می آید:

$$\frac{P}{E} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \quad (63-2)$$

با می نیمم کردن (63-2) به رابطه (60-2) می توان دست یافت که با مقدار تنش بحرانی محاسبه شده با استفاده از فرضیه krichhoff منطبق است.

رابطه (۲-۶۰) فقط در مورد پانل هایی صادق است که زاویه مرکزی در آن به طور نسبی بزرگ است. اگر زاویه مرکزی β خیلی کوچک باشد، شرایط کمانش مربوط به یک چنین پانلی بسیار شبیه به شرایط مربوط به ورق های مستطیلی تحت فشار در جهت طولی می باشد.

۲-۶- حل کلاسیک معادلات و استخراج جابجایی ها در پوسته استوانه ای باز با دو تکیه گاه ساده در دو انتها تحت بار متقارن

با استفاده از این تکیه گاه، خیز های شعاعی در دو انتها حذف می شود و تحت بار به کار رفته یکنواخت در دو انتها، یک مقدار ماکزیمم بار در مرکز پوسته باز وجود دارد. با قرار دادن مبدا در مرکز پوسته باز، پیشنهاد شده است که خیز w به عنوان تابعی از $\cos kx$ در نظر گرفته شود که در آن

$$k = \frac{\pi}{L} \text{ و خیز به صورت زیر است [۱۱]:}$$

$$w = W \cos kx \quad (۲-۶۴)$$

که فقط تابعی از φ است. در رابطه بالا شرایط مرزی در جهت x را که ممان و خیز آن صفر می باشد، ارضا می کند و در $x = \pm L/2$ خیز حذف می شود و ماکزیمم خیز در مرکز پوسته به دست می آید.

اکنون فرض می شود که معادله همسانگرد باشد. در معادله (۲-۲۶) با قرار دادن سمت راست آن برابر با صفر، معادله حاکم به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{tR^6}{I} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (۲-۶۵)$$

با قرار دادن معادله (۲-۶۴) در معادله (۲-۶۵)، معادله دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می شود:

$$\frac{d^8 W}{d\varphi^8} + G^8 W = 0 \quad (۲-۶۶)$$

به طوری که $G^8 = tR^6 k^4 / I$ می باشد.

معادله (۲-۶۶) می تواند با فرض زیر حل شود:

$$W = A_M e^{M\varphi} \quad (۲-۶۷)$$

که A_M یک ثابت دلخواه است. با قرار دادن این مقدار برای W در معادله (۲-۹۰) رابطه زیر به دست می آید:

$$M^8 + G^8 = 0 \quad (۲-۶۸)$$

که حل آن به صورت زیر است:

$$M = \sqrt[8]{-1} \cdot G \quad (۲-۶۹)$$

با استفاده از قضیه ریاضی موپور^۱ [11] می توان نشان داد که $i = \sqrt{-1}$ و رابطه زیر به دست می آید:

$$\sqrt[8]{-1} = \pm(0.9238795 \pm i0.3826833) \pm (0.3826833 \pm i0.9238795)$$

بنابراین هشت ریشه معادله (۲-۶۹) به صورت زیر است:

$$M = \pm(\alpha \pm i\beta) \quad , \quad \pm(\beta \pm i\alpha) \quad (۲-۷۰)$$

که در آن:

$$\begin{cases} \alpha = 0.9238795G \\ \beta = 0.3826833G \end{cases} \quad (۲-۷۱)$$

هر کدام از هشت ریشه داده شده توسط معادله (۲-۷۰) بایستی یک ثابت دلخواه وابسته به آن داشته باشد و فرم نهایی داده شده برای W توسط معادله (۲-۶۷) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} W = & A_1 e^{(\alpha+i\beta)\varphi} + A_2 e^{(\alpha-i\beta)\varphi} \\ & + A_3 e^{(\alpha+i\beta)\varphi} + A_4 e^{-(\alpha-i\beta)\varphi} \\ & + A_5 e^{(\beta+i\alpha)\varphi} + A_6 e^{(\beta-i\alpha)\varphi} \\ & + A_7 e^{-(\beta+i\alpha)\varphi} + A_8 e^{-(\beta-i\alpha)\varphi} \end{aligned} \quad (۲-۷۲)$$

که مقادیر A_1 تا A_8 ثابت های حل هستند.

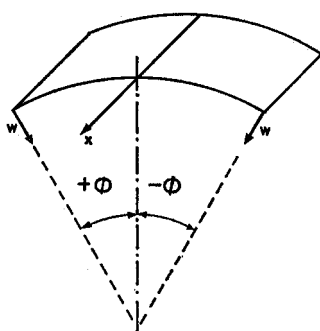
اکنون برای کمانش درحالت بار متقارن با استفاده از روابطی که بین تابع توانی و توابع مثلثاتی و هیپربولیک وجود دارد، معادله (۲-۷۲) به فرم زیر کاهش می یابد:

$$W = 2 \begin{bmatrix} a \cos(\beta\varphi) \cosh(\alpha\varphi) - b \sin(\beta\varphi) \sinh(\alpha\varphi) \\ c \cos(\alpha\varphi) \cosh(\beta\varphi) - d \sin(\alpha\varphi) \sinh(\beta\varphi) \\ e \cos(\beta\varphi) \sinh(\alpha\varphi) - f \sin(\beta\varphi) \cosh(\alpha\varphi) \\ g \cos(\alpha\varphi) \sinh(\beta\varphi) - h \sin(\alpha\varphi) \cosh(\beta\varphi) \end{bmatrix} \quad (۲-۷۳)$$

¹ Moivre

به طوری که ثوابت h, g, f, e, d, c, b, a در اینجا مقادیر حقیقی هستند.

اگر پوسته باز تحت بار متقارن در راستای خط طولی (محور x) باشد، معادله (۷۳-۲) برای W به طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. چنانچه پوسته در راستای محور x ، همان طور که در شکل نشان داده شده است، متقارن باشد و هم چنین بار به کار رفته در این جهت متقارن باشد، خیز شعاعی w بایستی نسبت به محور x متقارن باشد و در نتیجه W حول محور x نیز متقارن است. این موضوع اشاره به این دارد که W دارای مقادیر یکسان در جهت مثبت و منفی φ است.



شکل ۲-۱۰- جابجایی های شعاعی w در جهت مثبت و منفی کمان [۱۱]

به بیان دیگر با جایگزینی φ و یا $-\varphi$ در معادله (۷۴-۲) مقادیر به دست آمده برای W بایستی یکی باشد. این موضوع فقط وقتی حاصل می‌شود که ثابت های دلخواه h, g, f, e برابر با صفر باشند و حل معادله برای W به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$W = 2 \begin{bmatrix} a \cos \beta \varphi \cosh \alpha \varphi - b \sin \beta \varphi \sinh \alpha \varphi \\ c \cos \alpha \varphi \cosh \beta \varphi - d \sin \alpha \varphi \sinh \beta \varphi \end{bmatrix} \quad (74-2)$$

و حل کامل برای خیز شعاعی w ، با به کارگیری (۷۴-۲) در معادله $M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$ به دست می‌آید.

حل بالا فقط برای تابع مکمل^۱ که بایستی به انتگرال خاص اضافه شود، می‌باشد. توابع مکمل مربوط به نتیجه های تنش است و خیز و یا انحنای باقیمانده می‌تواند توسط معادلات دیفرانسیل جزئی به صورت زیر به دست آید. از معادله (۲۰-۲) رابطه زیر نتیجه شده است:

¹ Complementary Function

$$M_{\varphi} = -EI \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} = -EI \frac{d^2 W}{R^2 d\varphi^2} \cos kx \quad (75-2)$$

از معادله (5-2) و با قرار دادن M_{φ} از معادله (75-2) رابطه زیر به دست می آید:

$$Q_{\varphi} = \frac{\partial M_{\varphi}}{R \partial \varphi} = \frac{-EI d^3 W}{R^3 d\varphi^3} \cos kx \quad (76-2)$$

با استفاده از معادله (3-2) رابطه زیر به دست می آید:

$$N_{\varphi} = -\frac{\partial Q_{\varphi}}{\partial \varphi} - [ZR] = \frac{EI d^4 W}{R^3 d\varphi^4} \cos kx \quad (77-2)$$

که تابع مکمل برای N_{φ} مربوط به مولفه بار Z است و در انتگرال گیری خاص صفر در نظر گرفته شده است. با استفاده از معادله (2-2) رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} = -\frac{\partial N_{\varphi}}{R \partial \varphi} - [Y] = -\frac{EI d^5 W}{R^4 d\varphi^5} \cos kx \quad (78-2)$$

که در تابع کامل، Y برابر صفر در نظر گرفته می شود.

با انتگرال گیری از معادله (78-2) نسبت به x رابطه (79-2) به دست می آید:

$$N_{\varphi x} = -\frac{EI d^5 W}{a^4 k d\varphi^5} \sin kx \quad (79-2)$$

ثابت های انتگرال برای ساده سازی برابر با صفر در نظر گرفته شده اند.

با استفاده از معادله (1-2):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = -\frac{\partial N_{\varphi x}}{a \partial \varphi} - [X] = \frac{EI d^6 W}{a^5 k d\varphi^6} \sin kx \quad (80-2)$$

که پس از انتگرال گیری (حذف ثابت ها برای ساده سازی) به صورت زیر نتیجه می دهد:

$$N_x = -\frac{EI d^6 W}{a^5 k^2 d\varphi^6} \cos kx \quad (81-2)$$

تمامی منتهج های تنش در این جا بر حسب W می باشد و جابجایی های u و v نیز به دست

خواهد آمد. از معادله (19-2)، $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{N_x}{Et}$ ، نتیجه می شود و با قرار دادن N_x از معادله (81-2) و

انتگرال گیری از آن، جابجایی در جهت x به صورت زیر حاصل می شود:

$$u = -\frac{I d^6 W}{a^5 k^3 t d\varphi^6} \sin kx \quad (82-2)$$

در نهایت از آخرین فرضیه شورر که توسط معادله (۲-۲۲) بیان شد رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{a \partial \varphi} = \frac{I}{a^6 k^3 t} \frac{d^7 W}{d \varphi^7} \sin kx \quad (۲-۸۳)$$

که پس از انتگرال گیری رابطه (۲-۸۴) به دست می آید:

$$v = -\frac{I}{a^6 k^4 t} \frac{d^7 W}{d \varphi^7} \cos kx \quad (۲-۸۴)$$

در مجموع در این فصل ابتدا مروری بر کارهای دیگران که در قبل انجام شده بود، بیان شد. سپس تئوری خمشی مربوط به پوسته های استوانه ای باز و تئوری دائل و روابط حاکم بر آن به عنوان یکی از پر کاربرد ترین تئوری ها در بحث کمانش پوسته ها بررسی شد. در ادامه یک حالت خاص مربوط به پانل ها که دو لبه راست آن دارای تکیه گاه ساده است و دو لبه خمیده آن که آزاد است، تحت بار محوری قرار گرفته است، بررسی شد. و در آخر حل معادلات مربوط به پوسته استوانه ای باز که دارای تکیه گاه ساده در دو لبه خمیده است، انجام شد. هم چنین حل آن برای حالتی که پوسته باز تحت بار متقارن است (با استفاده از تابع مکمل) انجام شد و جابجایی های مربوط به آن در سه جهت محیطی و محوری و شعاعی به دست آمد.

فصل سوم

بررسی تحلیلی کمانش پوسته استوانه‌ای باز

تحت بار محوری

روش تحلیلی به روشی اطلاق می شود که به واسطه آن حل ریاضی برای معادلات دیفرانسیل حاکم به دست می آید. در واقع یک معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی و اولیه مورد نیاز خود، یک مدل ریاضی کامل از یک پدیده است. برای یافتن توزیع متغیرهای مورد نظر که ارتباط آنها در فرم دیفرانسیلی توسط معادله حاکم بیان می‌گردد، می‌بایست معادله مذکور حل گردد تا بتوان مقادیر عددی هر کمیت مرتبط را در نقاط دلخواه بدست آورد. اما با توجه به اینکه تنها می‌توان اشکال بسیار ساده این معادلات آن هم در ناحیه‌های هندسی بسیار ساده را با روشهای تحلیلی حل نمود، حل اغلب معادلات حاکم به روش تحلیلی بسیار دشوار است.

۳-۱- حالت کلی حل تحلیلی کمانش یک پوسته استوانه‌ای (روابط

جابجایی ها و ممان ها)

یک پوسته استوانه‌ای دایره ای شکل با ضخامت t ، شعاع R و طول L تحت بار خارجی q بر واحد سطح، با مختصات زاویه‌ای φ ، مدول الاستیسیته E و ضریب پواسون در نظر گرفته شده

است. نتیجه های نیروها و ممان ها بر روی المان به صورت شکل (۲-۸) است، با این تفاوت که در این جا مختصات استوانه ای به جای مختصات کارتزین در نظر گرفته شده است. از تعادل نیروها سه رابطه زیر به دست می آید. در این جا یک حالت عمومی با استفاده از معادلات زیر می توان در نظر گرفت [۱۳]:

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \phi} - R Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - R N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right) - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (۱-۳)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial \phi} + R \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + R N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right) + N_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - Q_y \left(1 + \frac{\partial v}{R \partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{R \partial \phi^2} \right) = 0 \quad (۲-۳)$$

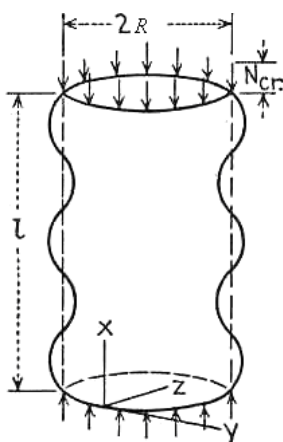
$$R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \phi} + N_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right) + R N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \left(1 + \frac{\partial v}{R \partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{R \partial \phi^2} \right) + N_{yx} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right) + qR = 0 \quad (۳-۳)$$

با فرض اینکه در این نوع پوسته تمامی نتیجه های نیرو به جز N_x خیلی کوچک هستند (شکل ۳-۱)، و حذف مشتقات جابجایی های u و v و w که همچنین کوچک هستند، از سه معادله بالا، سه رابطه زیر حاصل می شود:

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \phi} = 0 \quad (۴-۳)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial \phi} + R \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + R N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_y = 0 \quad (۵-۳)$$

$$R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \phi} + R N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y = 0 \quad (۶-۳)$$



شکل ۳-۱- کمانش پوسته استوانه ای تحت بار محوری [۱۳]

از تعادل ممان ها سه رابطه زیر به دست می آید. حالت عمومی تر مربوط به ممان ها به صورت زیر است:

$$R \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial \varphi} - RM_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + RQ_y = 0 \quad (7-3)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial \varphi} + R \frac{\partial M_x}{\partial x} + RM_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - RQ_x = 0 \quad (8-3)$$

$$M_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) + RM_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_{yx} \left(1 + \frac{\partial v}{R \partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi^2} \right) - M_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) + R(N_{xy} - N_{yx}) = 0 \quad (9-3)$$

از معادلات بالا و بدون در نظر گرفتن منته ممان ها و مشتقات جابجایی های u و v و w ، نیروهای برشی به دست می آید:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{R \partial \varphi} \quad (10-3)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{R \partial \varphi} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (11-3)$$

با جایگزینی مقادیر بالا در معادلات (3-4) تا (3-6)، سه معادله تعادل برای کمانش پوسته استوانه ای تحت فشار محوری به صورت زیر بدست می آید:

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \varphi} = 0 \quad (12-3)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + RN_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{R \partial \varphi} = 0 \quad (13-3)$$

$$RN_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y + R \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_y}{R \partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial \varphi} = 0 \quad (14-3)$$

$$\frac{N_x(1-\nu^2)}{Et} = \zeta \quad (15-3)$$

$$\frac{t^2}{12R^2} = \alpha \quad (16-3)$$

با در نظر گرفتن تنش فشاری به شکل مثبت و روابط (3-15) و (3-16)، در نهایت معادلات زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \varphi^2} = 0 \quad (17-3)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{R(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R \partial \varphi^2} - \frac{\partial w}{R \partial \varphi} + \alpha \left[\frac{\partial^2 v}{R \partial \varphi^2} + \frac{\partial^3 w}{R \partial \varphi^3} + R \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + R(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - R \zeta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (18-3)$$

$$-R \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{R \partial \varphi} - \frac{w}{R} \quad (19-3)$$

$$-\alpha \left[\frac{\partial^3 v}{R \partial \varphi^3} + (2-\nu) R \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} + R^3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{R \partial \varphi^4} + 2R \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} \right] = 0$$

معادلات (۱۷-۳) تا (۱۹-۳) با فرضیات زیر ارضاء می شود.

$$\nu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{w}{R} = const \quad (20-3)$$

$$\nu = 0 \quad (21-3)$$

با در نظر گرفتن مبدا مختصات در یک انتهای استوانه و معلوم بودن R و L ، حل معادلات (۱۷-۳) تا

(۱۹-۳) را به شکل زیر می توان بیان کرد که در آن n تعداد موج ها در جهت محیطی و m تعداد

نیم موج ها در جهت محوری می باشد [۳]:

$$u = A \sin(n\varphi) \cos \frac{m\pi x}{L} \quad (22-3)$$

$$v = B \cos(n\varphi) \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (23-3)$$

$$w = C \sin(n\varphi) \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (24-3)$$

در ادامه حل این معادلات برای پانل استوانه ای دایره ای جهت به دست آوردن بار و تنش بحرانی آورده شده است.

۲-۳- کماتش متقارن در پوسته های استوانه ای دایره ای تحت بار محوری یکنواخت

معادلات حاکم بر کماتش متقارن در یک پوسته استوانه ای دایره ای که تحت بار یکنواخت

محوری N_x (در حالت فشاری مثبت است) قرار گرفته، به صورت زیر است [۳]:

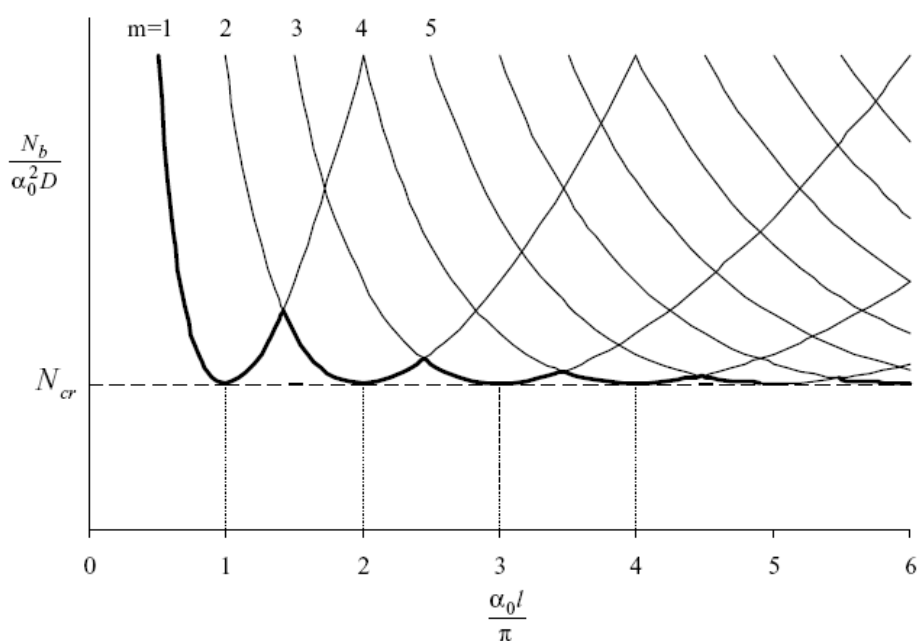
$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + N_x \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Et}{R^2} w = 0 \quad (25-3)$$

که در آن x مختصات محوری و w خیز شعاعی است. معادله (۲۵-۳) شبیه به معادله کماتش برای یک تیر یا ستون بر پی^۱ الاستیک می باشد.

برای پوسته استوانه ای دایره ای دارای تکیه گاه ساده با طول L که شامل m نیم موج در جهت محوری می باشد و یا پوسته استوانه ای بلند که شرایط مرزی برای آن در نظر گرفته نشده باشد، حل دقیق معادله دیفرانسیل مرتبه چهار (۲۵-۳) به صورت زیر در می آید:

$$w = C \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (26-3)$$

که در آن C یک ثابت است.



شکل ۲-۳- بار کماتش بحرانی در پوسته استوانه ای برای نیم موج های محوری متفاوت [۳]

¹ Foundation

با قرار دادن معادله (۲۶-۳) در معادله (۲۵-۳) بار کمانش بحرانی دقیق به صورت زیر حاصل می شود:

$$N_b = D \left[\alpha^2 + \frac{Et}{\alpha^2 R^2 D} \right] \quad (27-3)$$

که به $\alpha = \frac{m\pi}{L}$ بستگی دارد. برای تعیین حداکثر بار بحرانی، با مشتق گیری از معادله (۲۷-۳)، رابطه زیر به دست می آید:

$$\alpha_0 = \left[\frac{Et}{R^2 D} \right]^{1/4} \quad (28-3)$$

و با قرار دادن آن در معادله (۲۷-۳) کوچک ترین مقدار بار کمانش بحرانی را می دهد:

$$N_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{Et^2}{R} \right) \quad (29-3)$$

اگر طول پوسته ی یعنی L هماهنگ با طول نیم موج ها نباشد، بار بحرانی و تعداد نیم موج ها را می توان از شکل (۲-۳) بدست آورد. در این شکل مقادیر متفاوت m به عنوان نیم موج ها در جهت محوری با در نظر گرفتن $\alpha = \frac{m\pi}{L}$ نشان داده شده است.

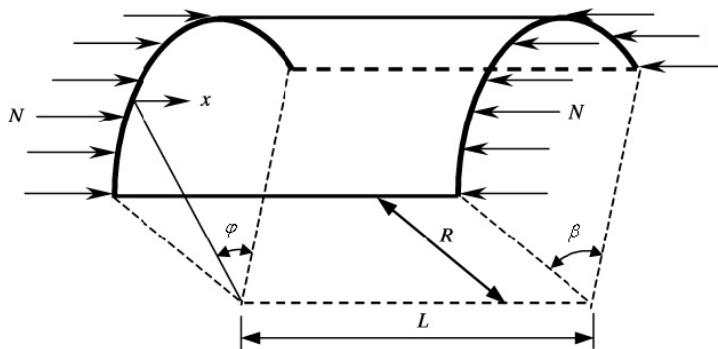
بار کمانش متقارن بحرانی متناسب با $\frac{Et^2}{R}$ است و یک حد بالا برای بار فروپاشی^۱ واقعی را نشان می دهد.

۳-۳- پانل استوانه‌ای دایره‌ای تحت فشار محوری با دو لبه تکیه گاه ساده

۳-۳-۱- محاسبه بار و تنش بحرانی با استفاده از روابط جابجایی

یک پوسته استوانه‌ای دارای دو لبه دایره ای شکل عمود بر محور استوانه بوده و در جهت مولد به طور یکنواخت تحت بار محوری N_x^0 قرار دارد (شکل (۳-۳)). دو لبه خمیده شکل مربوط به پوسته استوانه‌ای باز دارای تکیه گاه ساده هستند در حالی که دو لبه صاف آن آزاد هستند.

^۱ Collapse load



شکل ۳-۳- پانل استوانه‌ای تحت بار محوری [۳]

اگر β زاویه مرکزی پوسته، R شعاع و L طول پوسته در جهت مولد باشد، با استفاده از جهت نشان داده شده محورهای مختصات در شکل بالا، می توان شرایط مرزی را با به کارگیری جابجایی ها در طول کمانش پوسته به صورت زیر ارضا کرد [۳]:

$$u = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{n\pi\rho}{\beta} \cos \frac{m\pi x}{L} \quad (30-3)$$

$$v = \sum_m \sum_n B_{mn} \cos \frac{n\pi\rho}{\beta} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (31-3)$$

$$w = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{n\pi\rho}{\beta} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (32-3)$$

شرط مرزی به گونه‌ای است که جابجایی های شعاعی w و ممان خمشی در طول لبه های پوسته صفر می شود. با قرار دادن روابط (۳۰-۳) تا (۳۲-۳) که حالت خاص آن معادلات (۲۲-۳) تا (۲۴-۳) است، در معادلات (۱۷-۳) تا (۱۹-۳)، معادلات (۳۳-۳) تا (۳۵-۳) بدست می آید. معادلات (۳۳-۳) تا (۳۵-۳) مشابه معادلات کلی در کمانش پوسته های استوانه‌ای است تنها تغییر در آن این است که

n با $\frac{n\pi}{\beta}$ جایگزین شده است.

با در نظر گرفتن $\lambda = \frac{m\pi R}{L}$ روابط زیر حاصل شده است [۱۳]:

$$A(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}(\frac{n\pi}{\beta})^2) + B\frac{\frac{n\pi}{\beta}(1+\nu)\lambda}{2} + C\nu\lambda = 0 \quad (33-3)$$

$$A\frac{\frac{n\pi}{\beta}(1+\nu)\lambda}{2} + B[\frac{(1-\nu)\lambda^2}{2} + (\frac{n\pi}{\beta})^2 + \alpha(1-\nu)\lambda^2 + \alpha(\frac{n\pi}{\beta})^2 - \lambda^2\zeta] \quad (34-3)$$

$$+ C[(\frac{n\pi}{\beta}) + \alpha(\frac{n\pi}{\beta})(\frac{n\pi}{\beta})^2 + \lambda^2] = 0$$

$$A\nu\lambda + B\frac{n\pi}{\beta}\{1 + \alpha[(\frac{n\pi}{\beta})^2 + (2-\nu)\lambda^2]\} + C[1 - \lambda^2\zeta + \alpha(\lambda^2 + (\frac{n\pi}{\beta})^2)^2] = 0 \quad (35-3)$$

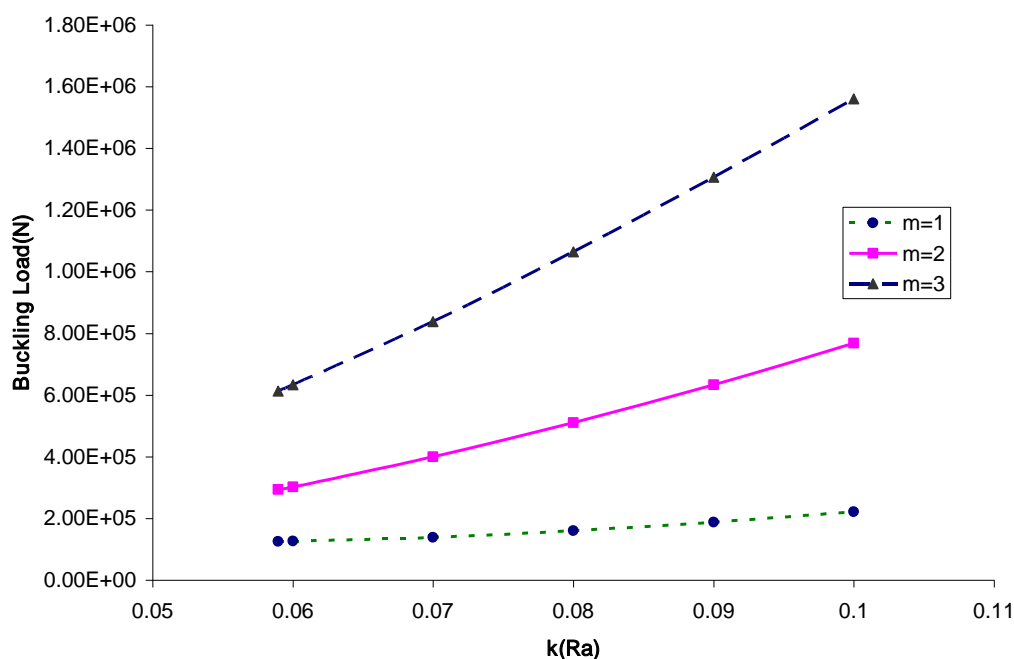
با صفر کردن دترمینان ضرایب و حذف تعدادی از مرتبه های بالا شامل α^2 و ζ^2 بعنوان ضرایب رابطه زیر به دست آمده است:

$$N = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[\frac{t^2}{12R^2} \frac{(\frac{n^2\pi^2}{\beta^2} + \lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{(1-\nu^2)\lambda^2}{(\frac{n^2\pi^2}{\beta^2} + \lambda^2)^2} \right] \quad (36-3)$$

حل معادلات مربوط به این قسمت در بخش (۱) پیوست آمده است. به علت خطای نسبتا بالایی که در این روش در مقایسه با نتایج عددی وجود دارد از نتایج مربوط به آن استفاده نشده است. در این جا برای یک حالت، تاثیر پارامتر k بر حسب رادیان به صورت $k = mR\beta/L$ بر روی بار کمانش بحرانی بر روی پانل از جنس فولاد در شکل (۳-۴) نشان داده شده است. سه مد اول کمانش با تغییر m از یک تا سه به دست آمده است. مشخصات هندسی در جدول (۱-۳) آمده است.

جدول ۱-۳- مشخصات هندسی پانل همراه با تغییرات طول

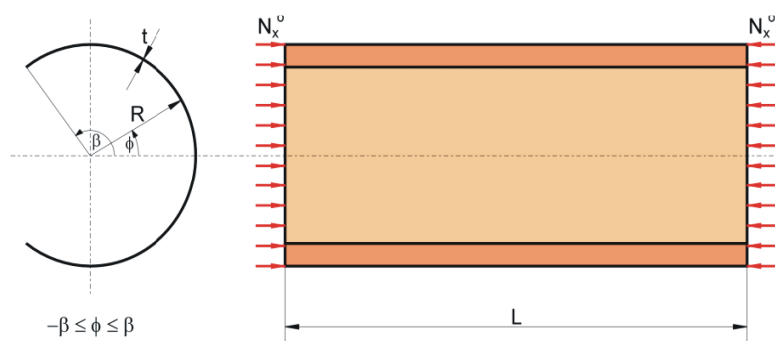
فولاد	جنس پانل
$R = 0.1513m$	شعاع پانل
$t = 0.5 \times 10^{-3}m$	ضخامت پانل
$\beta = \pi/2$	زاویه مرکزی پانل



شکل ۳-۴- تغییرات بار کمانش بحرانی نسبت به پارامتر k با استفاده از روابط جابجایی برای سه مد اول کمانش مربوط به پانلی با دولبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

۳-۳-۲- محاسبه بار و تنش بحرانی با استفاده از توابع خیز و نیرو

در این بررسی پایداری یک پوسته استوانه‌ای باز با مقطع دایره‌ای شکل در حالت الاستیک بررسی شده است. معادلات دائل برای کمانش خطی در پوسته باز در نظر گرفته شده است و شرایط مرزی در آن به گونه ای است که دو لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده است و دو لبه راست آن آزاد می باشد. بار به طور یکنواخت در دو انتهای پوسته در جهت محوری اعمال شده است.



شکل ۳-۵- پانل استوانه‌ای تحت بار محوری یکنواخت [۱۰]

سیستم معادلات پایداری برای این پوسته استوانه‌ای کم عمق به صورت زیر است [۱۰]:

$$\nabla^4 F - \frac{Et}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (37-3)$$

$$D\nabla^4 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (38-3)$$

که $w(\varphi, x)$ تابع خیز^۱ و $F(\varphi, x)$ تابع نیروی ایری^۲ است. N_x^0 بار یکنواخت در جهت محوری است. لاپلاسیان^۳ برای این حالت به صورت زیر است:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \varphi^2}$$

در حالی که $y = R\varphi$ و شرایط مرزی مربوط به حالت دو تکیه گاه ساده و دو لبه راست به صورت آزاد، به شکل زیر است:

۱- دو لبه با تکیه گاه ساده: $(x=0, x=L)$

$$M_{,xx} = w_{,xx} + \frac{\nu w_{,\varphi\varphi}}{R^2} = 0 \quad (39-3)$$

$$w|_{x=0,L} = 0 \quad (40-3)$$

۲- دو لبه آزاد: $(\varphi = \pm\beta)$

$$\nu w_{,xx} + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{R^2} = 0 \quad (41-3)$$

$$F_{,xx} = 0$$

$$F_{x,\varphi} = 0$$

$$\left(\nu w_{,xx} + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{R^2}\right)_{,\varphi} = 0 \quad (42-3)$$

یک فرم متقارن از کمانش در این جا بررسی شده است. دو تابع مجهول خیز و نیرو به شکل زیر در نظر گرفته شده است که در شرایط مرزی بالا صدق می کند:

$$w(\varphi, x) = w_1 \left[\sin\left(\frac{\pi\varphi}{2\beta}\right) + \alpha_3 \sin\left(\frac{3\pi\varphi}{2\beta}\right) \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (43-3)$$

¹ Deflection function

² Airy force function

³ Laplacian

$$F(\varphi, x) = -EtRf_1 \left[\sin\left(\frac{\pi\varphi}{\beta}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi\varphi}{\beta}\right) \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (44-3)$$

دو شرط مرزی (۳۹-۳) و (۴۰-۳)، در رابطه (۴۳-۳) صدق می کند و منجر به حل بدیهی می شود. در صورتی که با استفاده از شرط مرزی های (۴۱-۳) و (۴۲-۳)، و به کارگیری آن ها در رابطه (۴۳-۳)، عبارت زیر به دست می آید:

$$-L^2 + 9L^2\alpha_3 - 4vm^2 R^2 \beta^2 + 4vm^2 R^2 \beta^2 \alpha_3 = 0 \quad (45-3)$$

که با حل آن α_3 به صورت $\alpha_3 = \frac{1+4vk^2}{9+4vk^2}$ به دست می آید که پارامتر $w_1, k = mR\beta/L$ و

f_1 پارامترهای توابع هستند.

اگر تابع خیز یا همان رابطه (۴۳-۳)، به جای داشتن α_3 ، شامل پارامتر کلی α_i باشد، با استفاده از شرط مرزی های (۴۱-۳) و (۴۲-۳)، و به کارگیری آن ها در تابع خیز کلی، عبارت زیر به دست می آید:

$$\alpha_i = -\frac{1+4vk^2}{\sin\left(\frac{i\pi}{2}\right)(i^2+4vk^2)} \quad (46-3)$$

سپس توابع خیز و نیرو با استفاده از روش گالرکین، به روش تقریبی حل شده اند.

$$\int_0^\beta \left(\nabla^4 F - \frac{Et}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left[\sin\left(\frac{\pi\varphi}{\beta}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi\varphi}{\beta}\right) \right] d\varphi = 0 \quad (47-3)$$

$$\int_0^\beta \left(D\nabla^4 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left[\sin\left(\frac{\pi\varphi}{2\beta}\right) + \alpha_3 \sin\left(\frac{3\pi\varphi}{2\beta}\right) \right] d\varphi = 0 \quad (48-3)$$

از حل معادله (۴۷-۳) پارامتر f_1 به صورت زیر به دست می آید:

$$f_1 = \frac{128}{105} \frac{\beta^4 w_1 m^2 R^2 L^2 (9\alpha_3 + 7)}{\pi^3 (20L^4 + 16m^2 \beta^2 R^2 L^2 + 5\beta^4 R^4 m^4)} \quad (49-3)$$

که فرم ساده شده معادله (۴۹-۳) به صورت زیر است:

$$f_1 = \frac{128}{105} \frac{k^2 \beta^2 (9\alpha_3 + 7) w_1}{\pi^3 (20 + 16k^2 + 5k^4)} \quad (50-3)$$

حل این معادلات که از ابتدا توسط نرم افزار Maple صورت گرفته است در قسمت (۲) پیوست ارائه شده است که از حل دو انتگرال (۴۷-۳) و (۴۸-۳)، تابع خیز w بر حسب پارامتر f_1 و مقدار بار بحرانی به دست می آید که حالت کلی بار بحرانی به صورت رابطه (۵۱-۳) است و از روی آن می توان

تنش بحرانی بی بعد ($\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{E}$) را نیز محاسبه کرد. بایستی توجه داشت که چون با یک مسئله مقدار ویژه سرو کار داریم، تنها می توان بار بحرانی را به دست آورد.

$$\tilde{\sigma} = \frac{1.895 t^2 \left[(1.975 \alpha_3^2 + 0.197) k^6 + (15.208 \alpha_3^2 + 7.308) k^4 + (0.163 \alpha_3^2 + 0.254 \alpha_3 + 0.099) k^2 (R/t)^2 \beta^4 + (6.341 \alpha_3^2 + 11.184) k^2 + (38.751 \alpha_3^2 + 4.345) + (39.996 \alpha_3^2 + 0.494) k^{-2} \right]}{R^2 \beta^2 (5 \alpha_3^2 k^4 + 16 \alpha_3^2 k^2 + 5 k^4 + 16 k^2 + 20 \alpha_3^2 + 20)} \quad (51-3)$$

در حالی که بار اعمالی به صورت $N_x = N_x^0 |\sin \varphi|$ باشد، روابط مربوط به بدست آمدن بار بحرانی، فرم بسیار پیچیده‌ای دارد. نتایج بررسی های عددی بر اساس رابطه (51-3) به تنش بحرانی کلاسیک برای یک پوسته استوانه‌ای بسته تحت فشار محوری منجر شده است. در این جا یک رابطه بی بعد برای تنش بحرانی^۱ وجود دارد که به رابطه لورنز- تیموشنکو^۲ معروف است و به صورت زیر بیان شده است:

$$\frac{\sigma_{cr}}{E} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{R} \quad (52-3)$$

بر این اساس رابطه لورنز- تیموشنکو، تنش بحرانی در پوسته استوانه‌ای دایره ای شکل باز به صورت زیر می باشد:

۱- حالت اول: بار به صورت یکنواخت $N_x = N_x^0$:

$$\sigma_{cr}^{(1)} = \alpha_{c1} \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{R} \quad (53-3)$$

که در آن

$$\alpha_{c1} = \frac{1}{8.11} \left(1 - 0.0146 \frac{\beta}{\pi} \right), \quad \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi$$

۲- حالت دوم: بار به صورت $N_x = N_x^0 |\sin \varphi|$:

$$\sigma_{cr}^{(2)} = \alpha_{c2} \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{R} \quad (54-3)$$

¹ Stress Dimensionless

² Lorenz-Timoshenko

که در آن

$$\alpha_{c2} = \frac{1}{8} [1 + 0.8(\beta - \pi/2)^{4.5}] \quad , \quad \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi \quad (55-3)$$

که در این جا حالتی که بار به صورت یکنواخت $N_x = N_x^0$ اعمال شده، بررسی شده است.

۴-۳- نتایج تحلیلی در کمانش الاستیک پانل های استوانه ای دایره ای تحت بار فشاری محوری برای حالت دو تکیه گاه ساده در دو لبه خمیده و دو لبه آزاد

در نمودارهای مربوطه سه پارامتر بار بحرانی (N_{cr}) ، تنش بحرانی $\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{t}$ و تنش بحرانی بی

بعد $(\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{E})$ بر حسب پارامترهای وابسته برای سه حالت که تعداد نیم موج های محوری در آن

$m=1,2,3$ می باشد، بررسی شده است. نتایج مربوط به بخش (۴-۳) بر اساس رابطه (۵۱-۳) به

دست آمده است که با مقدار گذاری برای پارامترهای مختلف، مقادیر بار و تنش بحرانی برای هر حالت

به دست آمده است. تمامی نتایج برای پانل از جنس فولاد با مدول الاستیسیته $E = 207 \times 10^3 \text{ MPa}$

بدست آمده است.

۴-۳-۱- تاثیر پارامتر k بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با دو لبه تکیه گاه ساده

بار بحرانی کمانش (N_x) با شرایط موجود در جدول (۲-۳) نسبت به k که بر حسب رادیان می

باشد، لیست شده است. لازم به ذکر می باشد که چون پارامتر k با طول پوسته رابطه دارد، لذا منحنی

برای طول های متفاوت بررسی شده است که این دو پارامتر یعنی k و L با یکدیگر نسبت عکس

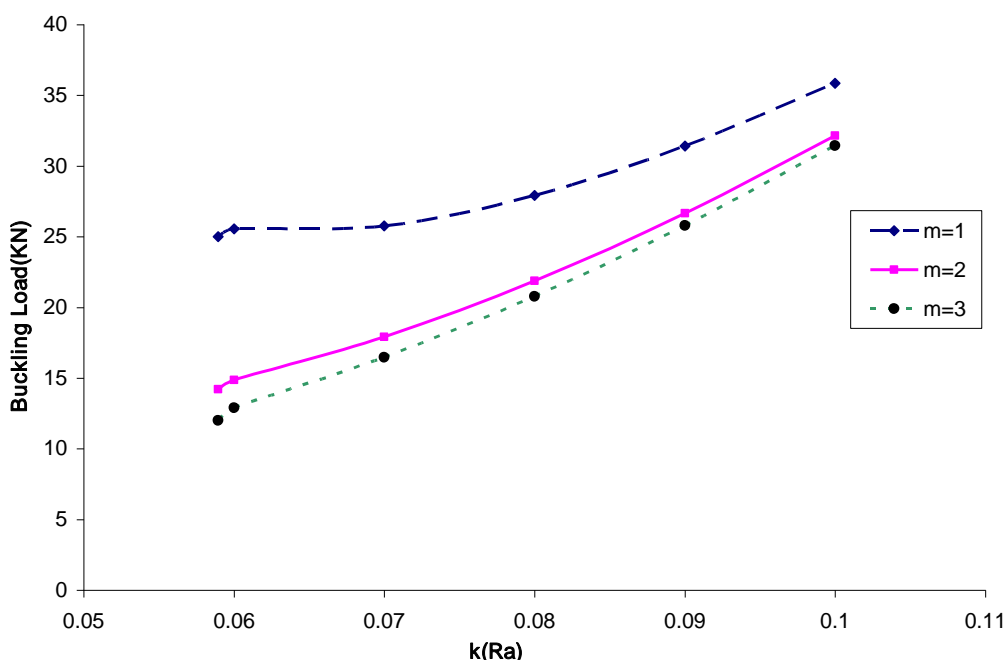
دارند. پارامتر های شعاع، طول، ضخامت، و زاویه مرکزی در بخش دوم پیوست مقدار گذاری شده اند و

با حل معادلات پایداری مربوطه، بار بحرانی و در نهایت تنش بحرانی و تنش بحرانی بی بعد را نتیجه

می دهد. مشخصات هندسی پانل که همراه با تغییرات طول است، در جدول (۱-۳) آمده است.

جدول ۳-۲- نتایج تحلیلی بار کمانش بحرانی در حالت الاستیک تحت تاثیر پارامتر k برای سه مد اول کمانش برای پانلی با دولبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

طول پوسته باز $L(m)$	پارامتر $k(Ra)$	بار کمانش برای مد اول (N)	بار کمانش برای مد دوم (N)	بار کمانش برای مد سوم (N)
۴,۰۳۲	۰,۰۵۸	۲۵۰۰۲,۱۱	۱۴۲۰۱,۴۵	۱۱۹۹۵,۲۲
۳,۹۶۱	۰,۰۶	۲۵۵۴۴,۵۴	۱۴۸۵۸,۳۲	۱۲۸۸۶,۰۱
۳,۳۹۵	۰,۰۷	۲۵۷۶۱,۱۴	۱۷۹۰۲,۱۰	۱۶۴۵۵,۷۷
۲,۹۷۰	۰,۰۸	۲۷۹۰۵,۵۰	۲۱۸۸۲,۴۲	۲۰۷۷۸,۸۱
۲,۶۴۰	۰,۰۹	۳۱۴۲۱,۴۷	۲۶۶۵۷,۸۶	۲۵۷۹۰,۶۰
۲,۳۷۶	۰,۱۰	۳۵۸۴۶,۱۲	۳۲۱۵۲,۰۵	۳۱۴۳۷,۸۷

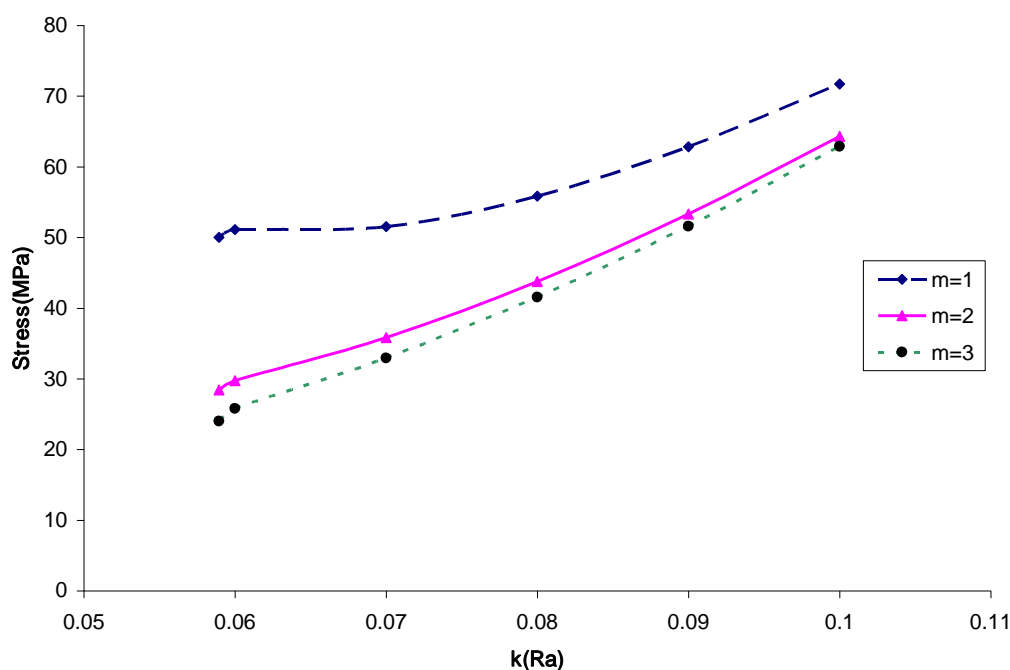


شکل ۳-۶- تغییرات بار کمانش بحرانی بر حسب پارامتر k برای سه مد اول کمانش مربوط به پانلی با دو لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

همان طور که در نمودار هم مشاهده می شود، با افزایش پارامتر k در این محدوده خاص، که با کاهش طول پوسته همراه است، بار بحرانی در جهت محوری افزایش می یابد. با تقسیم بار بحرانی بر ضخامت پوسته، تنش بحرانی به دست می آید. منحنی (۳-۷) مربوط به تنش بحرانی بر حسب پاسکال است که با شرایط مربوط به جدول (۳-۳) بررسی شده است.

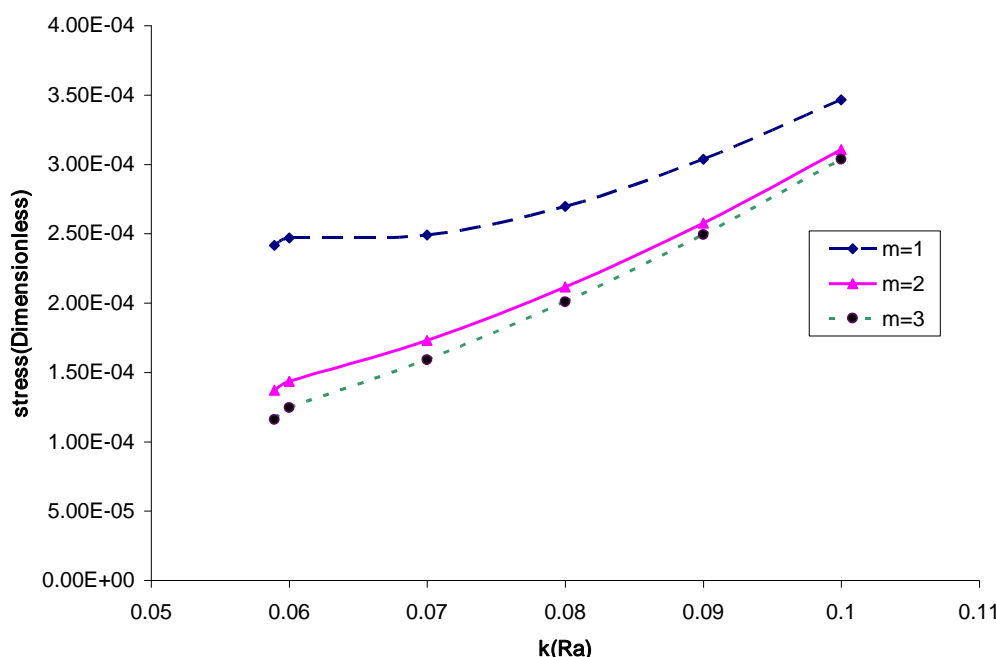
جدول ۳-۳- نتایج تحلیلی تنش های بحرانی در حالت الاستیک تحت تاثیر پارامتر k برای سه مد اول کمانش برای پانل با دولبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

تنش بحرانی بی بعد برای مد سوم	تنش بحرانی بی بعد برای مد دوم	تنش بحرانی بی بعد برای مد اول	تنش بحرانی برای مد سوم (MPa)	تنش بحرانی برای مد دوم (MPa)	تنش بحرانی برای مد اول (MPa)	پارامتر $k(Ra)$
11.6e-5	13.7e-5	24.1e-5	۲۳,۹۹	۲۸,۴۰	۵۰,۰۰	۰,۰۵۸
12.4e-5	14.3e-5	24.6e-5	۲۵,۷۷	۲۹,۷۲	۵۱,۰۹	۰,۰۶
15.9e-5	17.2e-5	24.8e-5	۳۲,۹۱	۳۵,۸۰	۵۱,۵۲	۰,۰۷
20.1e-5	21.1e-5	26.9e-5	۴۱,۵۶	۴۳,۷۶	۵۵,۸۱	۰,۰۸
24.9e-5	25.7e-5	30.3e-5	۵۱,۵۸	۵۳,۳۱	۶۲,۸۴	۰,۰۹
30.3e-5	31.0e-5	34.6e-5	۶۲,۸۷	۶۴,۳۰	۷۱,۶۹	۰,۱۰



شکل ۳-۷- تغییرات تنش بحرانی بر حسب پارامتر k برای سه مد اول کمانش مربوط به پانلی با دو لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

نمودار (۳-۸) تنش بحرانی بی بعد را بر حسب k نشان می دهد که مثل حالت قبل با افزایش پارامتر k مقدار تنش بحرانی بی بعد افزایش می یابد.



شکل ۳-۸- تغییرات تنش بحرانی بی بعد بر حسب پارامتر k برای سه مد اول کمانش مربوط به پانلی با دولبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

۳-۴-۲- تاثیر طول پوسته بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه‌ای با دو لبه تکیه گاه ساده

در این جا بررسی تحلیلی تغییرات طول پوسته بر روی بار، تنش و یا تنش بحرانی بی بعد انجام گرفته است که نشان می دهد با افزایش طول پوسته بار، تنش و یا تنش بحرانی بی بعد کاهش می یابد، بر خلاف حالت قبل که با افزایش k مقادیر بحرانی افزایش می یافت. با دانستن این که بین بار و تنش بحرانی و تنش بحرانی بی بعد رابطه مستقیم وجود دارد و با توجه به این که تنش بحرانی بی بعد یک عامل مهم در ارتباط با کمانش الاستیک در پانل های استوانه‌ای است، لذا برای هر قسمت فقط تنش بحرانی بی بعد در نظر گرفته شده است.

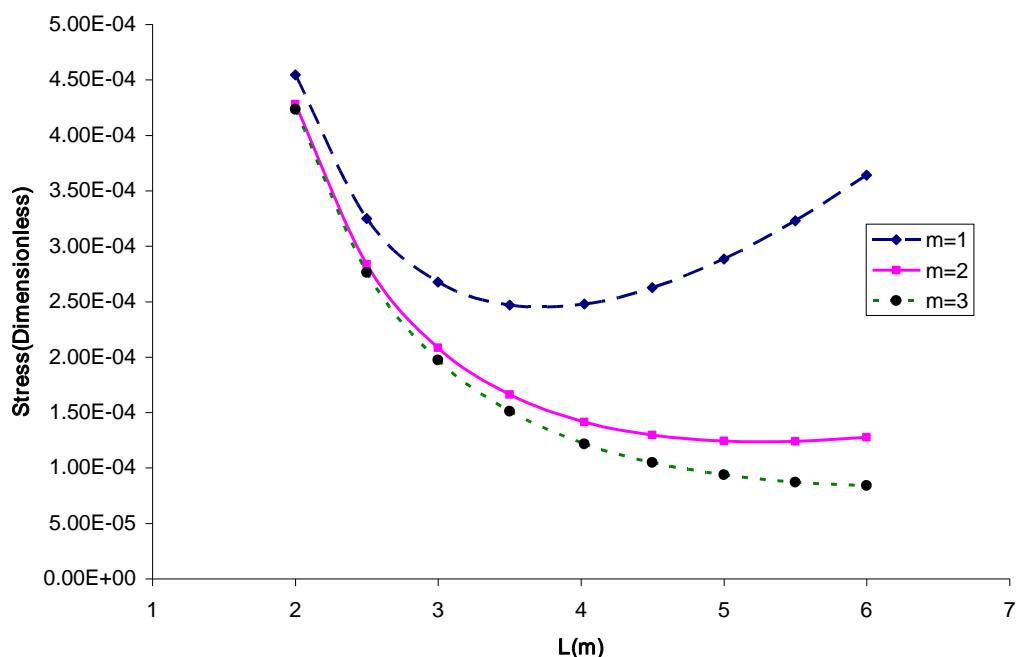
تنش بحرانی بی بعد $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{E}$ ، با شرایط موجود در جدول (۳-۵) نسبت به L ، در شکل (۳-۹) نشان داده شده است. مشخصات هندسی پانل که همراه با تغییرات طول است در جدول (۳-۴) آمده است. با توجه به شکل (۳-۹)، تغییرات در طول پانل با پیشروی در مدهای کمانش تا حدی موجب کاهش بار کمانش و تنش بحرانی بی بعد می شود.

جدول ۳-۴- مشخصات هندسی پانل همراه با تغییرات طول

جنس پانل	فولاد
شعاع پانل	$R = 0.1513m$
ضخامت پانل	$t = 0.5 \times 10^{-3} m$
زاویه مرکزی پانل	$\beta = \pi/2$

جدول ۳-۵- نتایج تحلیلی تنش های بحرانی بی بعد در حالت الاستیک بر حسب طول برای سه مد اول کمانش برای پانل با دو لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

طول پانل $L(m)$	تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد اول	تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد دوم	تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد سوم
۲	45.4e-5	42.8e-5	42.3e-5
۲.۵	32.5e-5	28.4e-5	27.6e-5
۳	26.7e-5	20.8e-5	19.7e-5
۳.۵	24.7e-5	16.6e-5	15.1e-5
۴	24.8e-5	14.1e-5	12.2e-5
۴.۵	26.3e-5	12.9e-5	10.5e-5
۵	28.8e-5	12.4e-5	9.37e-5
۵.۵	32.3e-5	12.5e-5	8.72e-5
۶	36.4e-5	12.8e-5	8.39e-5



شکل ۳-۹- تغییرات تنش بحرانی بر حسب طول برای سه مد اول کمانش مربوط به پانلی با دو لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

هم چنین تاثیر طول پانل در یک محدوده طولی کمتر بر روی تنش بحرانی بی بعد انجام شده

است. تنش بحرانی بی بعد $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{E}$ با شرایط موجود در جدول (۳-۷) نسبت به L ، در شکل (۳-۱۰)

نشان داده شده است. مشخصات هندسی پانل در جدول (۳-۶) آمده است. مثل حالت قبل با افزایش

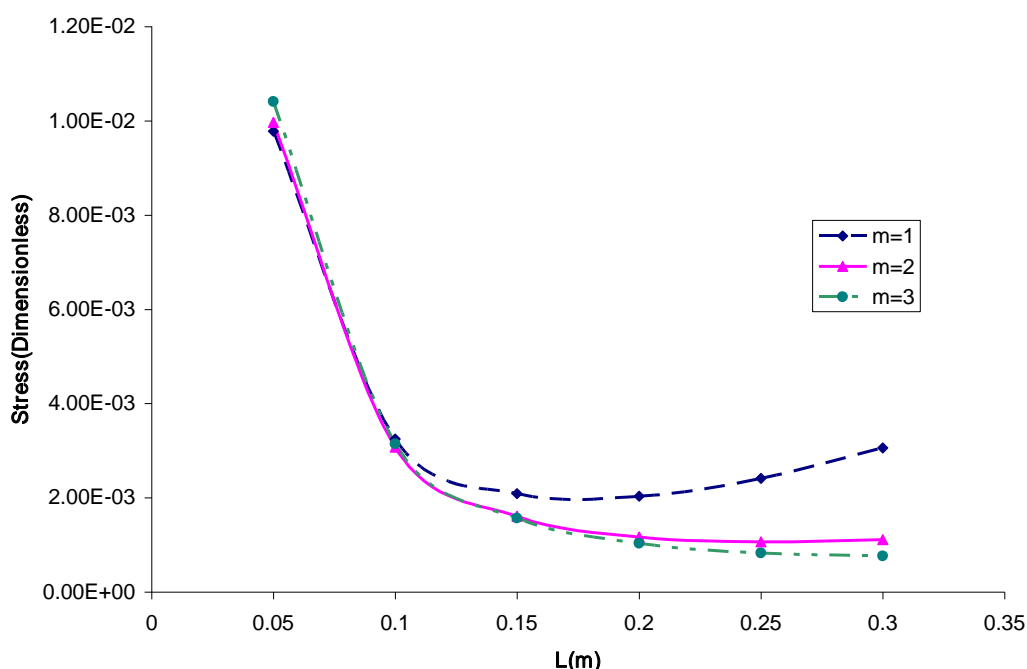
طول پانل در این محدوده طولی، تنش بحرانی بی بعد رو به کاهش است.

جدول ۳-۶- مشخصات هندسی پانل همراه با تغییرات طول

فولاد	جنس پانل
$R = 0.02m$	شعاع پانل
$t = 0.5 \times 10^{-3}m$	ضخامت پانل
$\beta = \pi/2$	زاویه مرکزی پانل

جدول ۳-۷- نتایج تحلیلی تنش های بحرانی بی بعد در حالت الاستیک بر حسب طول برای سه مد اول کمانش برای پانل با دولبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

طول پانل $L(m)$	تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد اول	تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد دوم	تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد سوم
۰,۰۵	$9.77e-3$	$9.77e-3$	$10.40e-3$
۰,۱	$3.24e-3$	$3.07e-3$	$3.14e-3$
۰,۱۵	$2.08e-3$	$1.60e-3$	$1.56e-3$
۰,۲	$2.03e-3$	$1.16e-3$	$1.03e-3$
۰,۲۵	$2.41e-3$	$1.06e-3$	$0.82e-3$
۰,۳	$3.06e-3$	$1.11e-3$	$0.76e-3$



شکل ۳-۱۰- تغییرات تنش بحرانی بر حسب طول برای سه مد اول کمانش مربوط به پانلی با دولبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

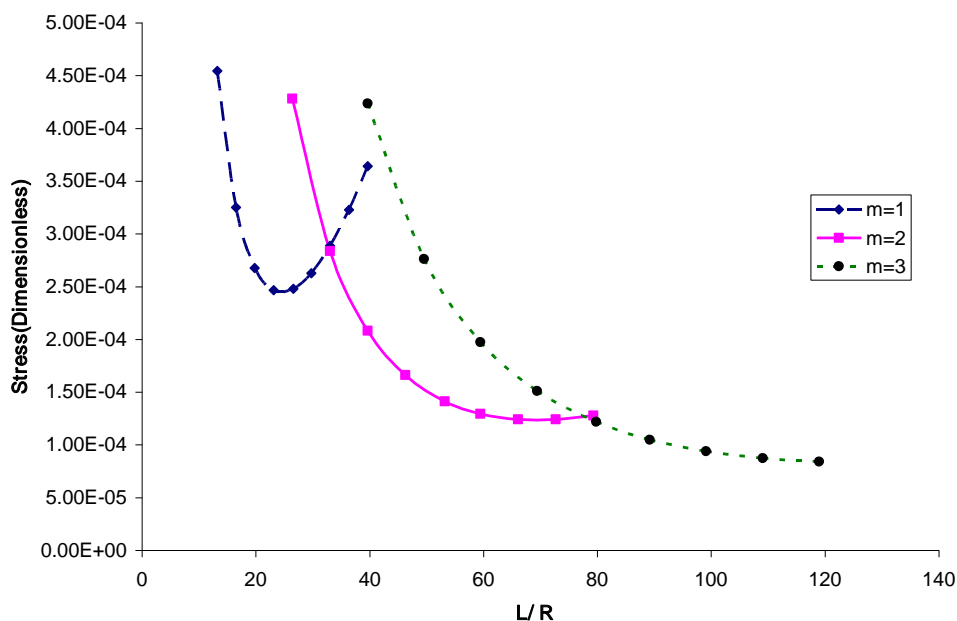
۳-۴-۳- تاثیر نسبت طول پانل به شعاع آن بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه‌ای با دو لبه تکیه گاه ساده

در این حالت بررسی تحلیلی تغییرات نسبت طول پوسته باز به شعاع آن بر روی تنش بحرانی بی بعد انجام گرفته است. تنش بحرانی بی بعد نسبت به L/R که بی بعد می باشد، برای سه حالت که تعداد نیم موج های محوری در آن $m=1,2,3$ می باشد، در شکل (۳-۱۱) نشان داده شده است و

نتایج آن در جدول (۳-۸) آمده است. مشخصات هندسی پانل که همراه با تغییرات طول نسبت به شعاع است در جدول (۳-۴) ذکر شد.

جدول ۳-۸- نتایج تحلیلی تنش های بحرانی بی بعد در حالت الاستیک بر حسب نسبت طول پانل به شعاع برای سه مد اول کماتش در پانل با دولبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

تنش کماتش بحرانی بی بعد برای مد سوم	تنش کماتش بحرانی بی بعد برای مد دوم	تنش کماتش بحرانی بی بعد برای مد اول	نسبت طول پانل به شعاع آن برای مد سوم L / R	نسبت طول پانل به شعاع آن برای مد دوم L / R	نسبت طول پانل به شعاع آن برای مد اول L / R
42.3e-5	42.8e-5	45.4e-5	۳۹,۶۶	۲۶,۴۳	۱۳,۲۱
27.6e-5	28.4e-5	32.5e-5	۴۹,۵۷	۳۳,۰۴۶	۱۶,۵۲
19.7e-5	20.8e-5	26.7e-5	۵۹,۴۸	۳۹,۶۵	۱۹,۸۲
15.1e-5	16.6e-5	24.7e-5	۶۹,۳۹	۴۶,۲۶	۲۳,۱۳
12.2e-5	14.1e-5	24.8e-5	۷۹,۸۰	۵۳,۲۰	۲۶,۶۰
10.5e-5	12.9e-5	26.3e-5	۸۹,۲۳	۵۹,۴۸	۲۹,۷۴
9.37e-5	12.4e-5	28.8e-5	۹۹,۱۴	۶۶,۰۹۴	۳۳,۰۴
8.72e-5	12.5e-5	32.3e-5	۱۰۹,۰۵	۷۲,۷۰	۳۶,۳۵۱
8.39e-5	12.8e-5	36.4e-5	۱۱۸,۹۷	۷۹,۳۱	۳۹,۶۵۶



شکل ۳-۱۱- تغییرات تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت طول پانل به شعاع برای سه مد اول کماتش مربوط به پانلی با دو لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

۳-۴-۴- تاثیر ضخامت پانل بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه‌ای با دو لبه تکیه گاه ساده

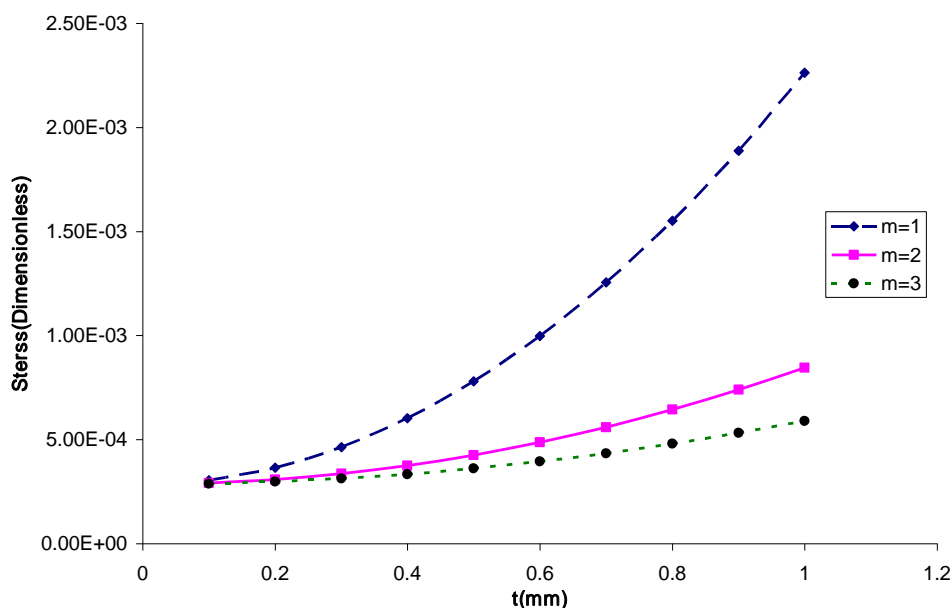
در این جا بررسی تحلیلی تغییرات ضخامت پوسته بر روی تنش بحرانی بی بعد انجام گرفته است که نشان می دهد با افزایش ضخامت پوسته، بار، تنش و یا تنش بحرانی بی بعد افزایش می یابد. تنش بحرانی بی بعد نسبت به تغییرات ضخامت پوسته، برای سه حالت که تعداد نیم موج های محوری در آن $m=1,2,3$ می باشد، در شکل (۳-۱۲) نشان داده شده است و نتایج آن در جدول (۳-۱۰) آمده است. همان طور که در شکل (۳-۱۲) هم مشاهده می شود نرخ تغییرات بار و تنش های بحرانی با افزایش در تعداد نیم موج های محوری کاهش می یابد.

جدول ۳-۹- مقادیر هندسی پانل همراه با تغییرات ضخامت در حالت الاستیک

جنس پانل	فولاد
شعاع پانل	$R = 0.05m$
طول پانل	$L = 0.8m$
زاویه مرکزی	$\beta = \pi/2$
پارامتر k	$k = 0.09817477$

جدول ۳-۱۰- نتایج تحلیلی تنش های بحرانی بی بعد بر حسب ضخامت پانل برای سه مد اول کماتش

ضخامت پانل $t(mm)$	تنش کماتش بحرانی بی بعد برای مد اول	تنش کماتش بحرانی بی بعد برای مد دوم	تنش کماتش بحرانی بی بعد برای مد سوم
0.1	30.5e-5	29.1e-5	28.8e-5
0.2	36.4e-5	30.8e-5	29.7e-5
0.3	46.3e-5	33.6e-5	31.3e-5
0.4	60.2e-5	37.5e-5	33.4e-5
0.5	78.0e-5	42.5e-5	36.1e-5
0.6	99.7e-5	48.7e-5	39.5e-5
0.7	125.4e-5	56.0e-5	43.4e-5
0.8	155.1e-5	64.4e-5	48.0e-5
0.9	188.7e-5	73.9e-5	53.1e-5
1.0	226.3e-5	84.5e-5	58.9e-5



شکل ۳-۱۲- تغییرات تنش بحرانی بی بعد بر حسب ضخامت پانل برای سه مد اول کمانش مربوط به پانلی با دولبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

۳-۴-۵- تاثیر زاویه مرکزی پانل بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه‌ای با دو لبه تکیه گاه ساده

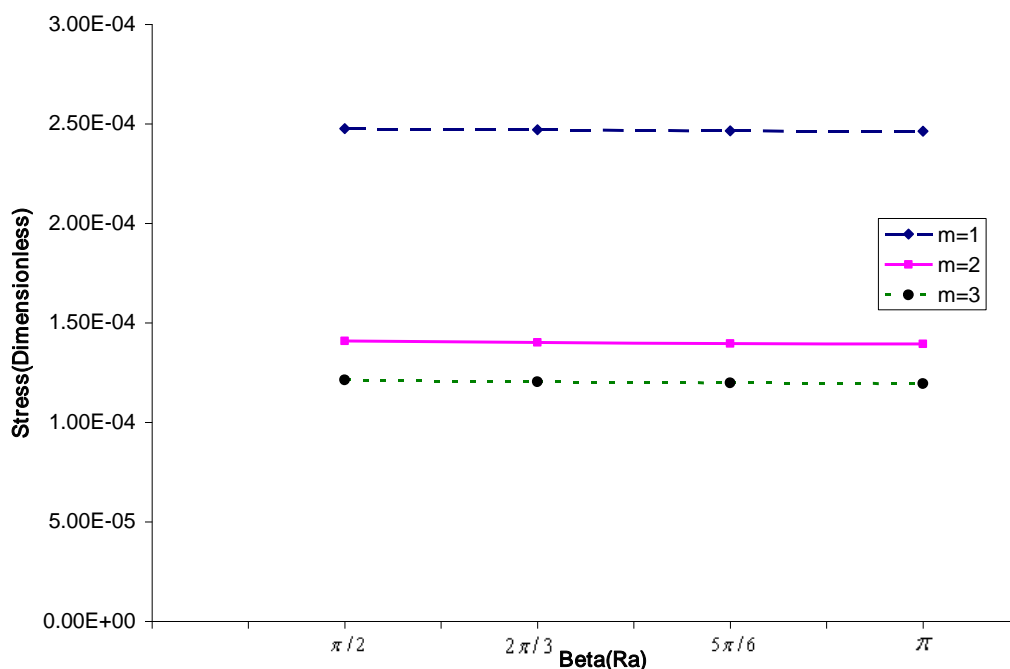
آخرین حالت مورد بررسی برای این حالت شرط مرزی، بررسی تغییرات زاویه مرکزی یا همان β روی بار و تنش بحرانی می باشد که مثل حالات قبل برای سه حالت که تعداد نیم موج های محوری در آن $m=1,2,3$ می باشد، بررسی شده است. تنش بحرانی بی بعد نسبت به β که بر حسب رادیان می باشد، برای سه حالت که تعداد نیم موج های محوری در آن $m=1,2,3$ می باشد، در شکل (۳-۱۳) نشان داده شده است و نتایج آن در جدول (۳-۱۲) آمده است. طول پانل $L=0.8m$ و تغییرات پارامتر k با تغییرات در زاویه مرکزی همراه است. مقادیر پارامترهای هندسی برای این حالت به صورت جدول (۳-۱۱) است.

جدول ۳-۱۱- مشخصات هندسی پانل همراه با تغییرات زاویه مرکزی

فولاد	جنس پانل
$t = 9.9389 \times 10^{-2} mm$	ضخامت پانل
$R = 30.07518 mm$	شعاع پانل

جدول ۳-۱۲- نتایج تحلیلی تنش های بحرانی بی بعد در حالت الاستیک بر حسب زاویه مرکزی پانل برای سه مد اول کمانش در پانل با دولبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد سوم	تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد دوم	تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد اول	زاویه مرکزی $\beta(Ra)$	پارامتر $k(Ra)$
12.12e-5	14.09e-5	24.75e-5	$\pi/2$	۰,۰۵۸۹۴
12.02e-5	14.00e-5	24.70e-5	$2\pi/3$	۰,۰۴۴۱۸
11.97e-5	13.95e-5	24.64e-5	$5\pi/6$	۰,۰۳۵۳۴
11.94e-5	13.92e-5	24.62e-5	π	۰,۰۲۹۴۴

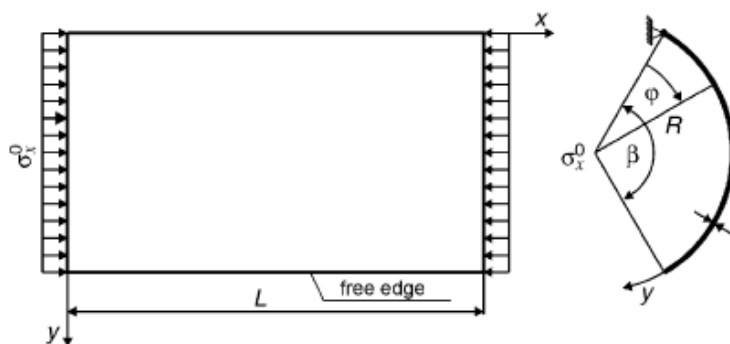


شکل ۳-۱۳- تغییرات تنش بحرانی بی بعد بر حسب زاویه مرکزی پانل برای سه مد اول کمانش مربوط به پانلی با دو لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

همان طور که در شکل (۳-۱۳) دیده می شود تغییرات در زاویه مرکزی β از $\pi/2$ تا π تاثیر بسیار جزئی بر روی بار و تنش بحرانی دارد و نمودار، شیب بسیار کمی دارد منحنی شبیه به یک خط راست شده است.

۳-۵- نتایج تحلیلی در کمانش الاستیک پانل های استوانه‌ای با مقطع دایره ای تحت بار فشاری محوری برای حالت سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد

در این قسمت یک پانل استوانه‌ای با مقطع دایره ای شکل در حالی که سه لبه آن شامل دو لبه خمیده و یک لبه راست دارای تکیه گاه ساده است و لبه راست دیگری آزاد می باشد، مورد بررسی قرار گرفته است. این پانل توسط یک بار یکنواخت که روی دو لبه انتهایی آن توزیع شده است، تحت فشار محوری قرار گرفته است که در شکل (۳-۱۴) نشان داده شده است. در این جا نیز از معادلات دانل برای کمانش خطی استفاده شده است. در نهایت معادلات دانل به یک مسئله مقدار ویژه کلی با استفاده از روش گالرکین که در قبل توضیح داده شد، تبدیل شده است.



شکل ۳-۱۴- پانل استوانه‌ای با یک لبه آزاد تحت بار محوری [10]

سیستم معادلات پایداری برای چنین پوسته استوانه‌ای کم عمق به صورت زیر است:

$$\frac{D}{t} \nabla^4 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \sigma_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3-56)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3-57)$$

این معادلات مثل معادلات (۳-۳۷) و (۳-۳۸) می باشد، فقط $y = R\phi$ مختصات منحنی الخط و

σ_x^0 تنش فشاری در پانلی که تحت بار محوری است، می باشد و عملگر خطی^۱ در آن به صورت زیر است:

¹ Linear Operator

$$\nabla^4 = (\nabla^2)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{R^2 \partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4}{R^4 \partial \varphi^4}$$

ممان های خمشی و پیچشی بر اساس رابطه (۳۱-۲) بیان شده است. هم چنین D صلبیت خمشی است که برای پوسته استوانه ای در رابطه (۳۲-۲) بیان شده است. نیروهای برشی در دو جهت x و y به صورت رابطه (۴۱-۲)، و نیروهای صفحه ای مطابق با رابطه (۴۲-۲) است.

هم چنین شرایط مرزی مربوط به حالت سه تکیه گاه ساده و یک لبه راست به صورت آزاد به صورت زیر است:

$$1- \text{ دو لبه خمیده با تکیه گاه ساده: } x=0, x=L$$

$$w(0) = w(L) = 0$$

$$M_{xx}(0) = M(L) = 0$$

$$2- \text{ یک لبه راست با تکیه گاه ساده: } y=0, \beta=0$$

$$M_{yy} = 0$$

$$w(x,0) = 0$$

$$N_{yy} = 0$$

$$3- \text{ یک لبه راست آزاد: } y=b=R\beta$$

$$M_{yy} = Q_{yz} = 0$$

$$N_{yy} = N_{xy} = 0$$

معادلات پایداری بیان شده در رابطه (۵۶-۳) و (۵۷-۳) به طور تقریبی حل شده است.

دو تابع خیز و نیرو در نظر گرفته شده است که در ابتدا تابع خیز بررسی می شود:

$$w(\varphi, x) = t \left\{ \sum_{i=3,5,7,\dots,N} w_i \left[\sin\left(\frac{i\pi\varphi}{2\beta}\right) - \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi\varphi}{2\beta}\right) \right] \right\} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (58-3)$$

که در آن پارامترها مثل شرط مرزی دو لبه با تکیه گاه ساده تعریف شده است و t ضخامت پانل می باشد. α_i به صورت کلی برای تابع خیز (۵۸-۳) در نظر گرفته شده است و به صورت زیر است:

$$\alpha_i = \frac{i^2 + 4vk^2}{1 + 4vk^2}$$

که در آن w_i پارامتر تابع و v ضریب پواسون است.

تابع نیروی ایری به صورت زیر تعریف شده است:

$$F(\varphi, x) = -Et^2 R f_1 \left[\sin\left(\frac{\pi\varphi}{\beta}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi\varphi}{\beta}\right) \right] \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (59-3)$$

که در آن f_1 پارامتر مجهول تابع نیرو ایری می باشد. دو تابع خیز و نیرو شرایط مرزی تعریف شده را ارضا می کنند.

با ضرب کردن معادلات پایداری در توابع خیز و نیرو و استفاده از شرایط تعامد^۱، دو انتگرال معین بدست می آید که در نهایت با حل دترمینان یک ماتریس متقارن، تنش بحرانی بدست می آید. روند حل تحلیلی از ابتدا که شامل معادلات پایداری است تا پایان که تنش بحرانی را ارائه می دهد، توسط نرم افزار Maple در بخش سوم پیوست انجام شده است.

با استفاده از شرط تعامد برای معادله دومی رابطه زیر وجود دارد:

$$\int_0^{\beta} \left(\frac{1}{E} \nabla^4 F - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left[\sin\left(\frac{\pi\varphi}{\beta}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi\varphi}{\beta}\right) \right] d\varphi = 0 \quad (60-3)$$

از حل انتگرال (60-3)، پارامتر مجهول f_1 به صورت زیر به دست می آید:

$$f_1 = \frac{128}{15\pi} \frac{k^2}{5k^4 + 16k^2 + 20} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^2 \sum_{i=3,5,7\dots N} w_i a_{fi} \quad (61-3)$$

که در آن:

$$a_{fi} = \left[\frac{45}{(i^2 - 4)(i^2 - 16)} - \alpha_i \right] \sin\left(i \frac{\pi}{2}\right) \quad (62-3)$$

اکنون با استفاده از شرط تعامد برای معادله (56-3) رابطه (63-3) به دست می آید:

$$\int_0^{\beta} \left(\frac{D}{t} \nabla^4 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left[\sin\left(\frac{i\pi\varphi}{2\beta}\right) - \alpha_i \sin\left(\frac{i\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi\varphi}{2\beta}\right) \right] d\varphi = 0 \quad (63-3)$$

که حل رابطه بالا در نهایت به یک سیستم معادلات جبری همسانگرد کاهش می یابد که به صورت زیر می باشد:

$$\det \left[a_{ij} - \tilde{\sigma}_x \cdot s_{ij} \right]_{M \times M} = 0 \quad (64-3)$$

¹ Orthogonality

از حل دترمینان ماتریس (۳-۶۴) مقادیر تنش بحرانی بی بعد برای M های متفاوت به دست می آید که با افزایش M و یا سطر و ستون ماتریس (۳-۶۴) همگرایی لازم بین داده ها به دست می آید. برای حالت $i = j$ رابطه زیر به دست می آید:

$$a_{ii} = C_1[(i^2 + 4k^2) + \alpha_i^2(i^2 + 4k^2)^2] + C_2 a_{fi}^2 \quad (۳-۶۵)$$

$$s_{ii} = k^2(i^2 + \alpha_i^2) \quad (۳-۶۶)$$

هم چنین برای حالت $i \neq j$ رابطه زیر به دست می آید:

$$a_{ij} = -C_1(1 + 4k^2)^2 \alpha_i \alpha_j + C_2 a_{fi} a_{fj} \quad (۳-۶۷)$$

$$s_{ij} = k^2 \alpha_i \alpha_j \quad (۳-۶۸)$$

که در آن:

$$C_1 = \frac{\pi^2}{192(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{R\beta}\right)^2 \quad (۳-۶۹)$$

$$C_2 = \frac{k^4}{5k^4 + 16k^2 + 20} \left(\frac{64\beta}{15\pi^2}\right)^2 \quad (۳-۷۰)$$

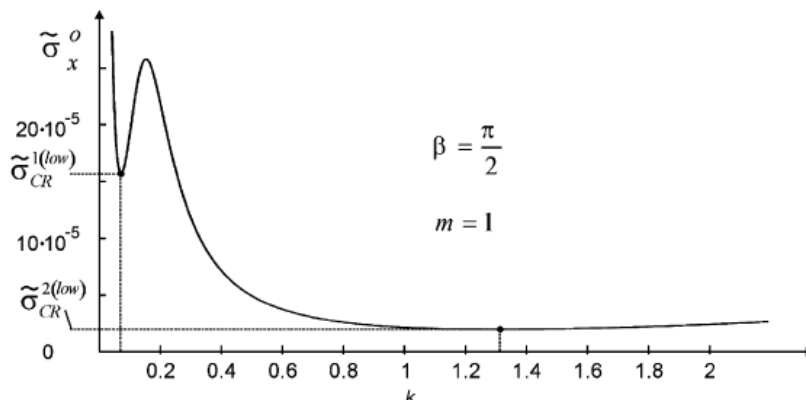
در نهایت تنش بحرانی بی بعد با حل دترمینان مربوط به ماتریس معادله (۳-۶۴) به دست می آید. در این جا یک رابطه ای به نام تنش بحرانی بی بعد Lorenz-Timoshenko-Southwell وجود دارد که برای یک پانل استوانه ای که در چهار طرف آن تکیه گاه ساده قرار دارد، قابل کاربرد است و به صورت رابطه (۳-۵۲) می باشد.

معادلات (۳-۶۴) تا (۳-۷۰) مقدار مربوط به تنش بحرانی بی بعد در پانل استوانه ای با مقطع دایره ای شکل که سه لبه آن تکیه گاه ساده دارد و یک لبه آن آزاد است را می دهد. بایستی توجه داشت که فرضیات مربوط به مقادیر متوالی $M = 3, 5, 7, \dots, M_e$ یک سری جواب تقریبی متوالی برای پانل می دهد.

۳-۵-۱- تاثیر پارامتر k بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد

در این جا تنش بحرانی بی بعد بر حسب پارامتر k برای فولاد با $M = 41$ ، $\beta = \pi/2$ ، $m = 1$ و $R = 302.6t$ [۱۰] در شکل (۳-۱۵) نشان داده شده است. شکل (۳-۱۵) برای $M \geq 5$ دارای دو

مقدار می نیمم می باشد که با مقادیر $\tilde{\sigma}_{cr}^{1(low)} = 15.68 \times 10^{-5}$ و $\tilde{\sigma}_{cr}^{2(low)} = 1.9809 \times 10^{-5}$ به ترتیب برای $k = 0.05$ و $k = 1.4$ نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۵- تاثیر پارامتر k بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کماتش [10]

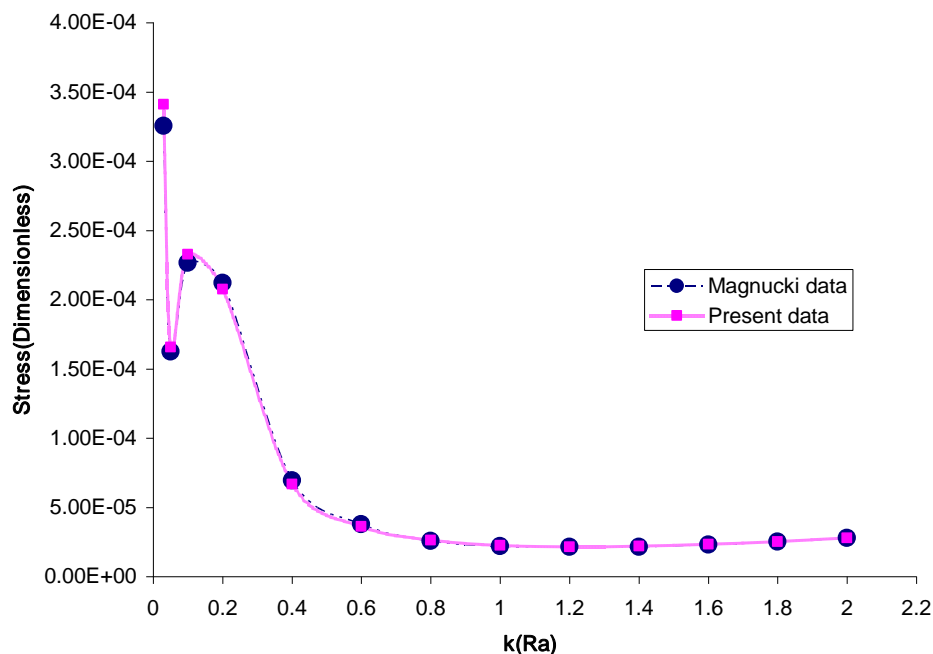
حل معادلاتی که توسط Maple در بخش سوم پیوست ارائه شده است از $M = 3$ تا $M = 41$ با قدر نسبت دو صورت گرفته است که برای $M = 41$ همگرایی لازم بین داده ها ایجاد شده است. برای مقادیر شعاع، زاویه مرکزی، ضخامت و $M = 41$ مربوط به شکل (۳-۱۵) که در بالا بیان شد، مقایسه بین نتایج به دست آمده و نتایج ماگنوکس^۱ برای تنش بحرانی بی بعد مربوط به مد اول یعنی $m = 1$ به صورت شکل (۳-۱۶) نشان داده شده است و داده های نتایج به دست آمده در جدول (۳-۱۳) آورده شده است.

جدول ۳-۱۳- نتایج تحلیلی بار و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک بر حسب پارامتر k برای مد اول کماتش در پانل با سه لبه دارای تکیه گاه ساده و یک لبه راست دیگر آزاد

پارامتر $k(Ra)$	تنش کماتش بحرانی بی بعد در مد اول	بار کماتش بحرانی در مد اول (N)
۰,۰۳	34.09e-5	۳۵۲۹۲,۶۸
۰,۰۵	16.56e-5	۱۷۱۴۵,۹۸
۰,۱	23.26e-5	۲۴۰۷۴,۶۴
۰,۲	20.74e-5	۲۱۴۷۲,۹۰
۰,۴	6.67e-5	۶۹۰۵,۶۶
۰,۶	3.61e-5	۳۷۴۵,۷۰
۰,۸	2.62e-5	۲۷۱۲,۸۰
۱	2.25e-5	۲۳۳۱,۸۲
۱,۲	2.19e-5	۲۲۳۱,۰۲
۱,۴	2.15e-5	۲۲۷۲,۶۲
۱,۶	2.32e-5	۲۴۰۸,۱۱

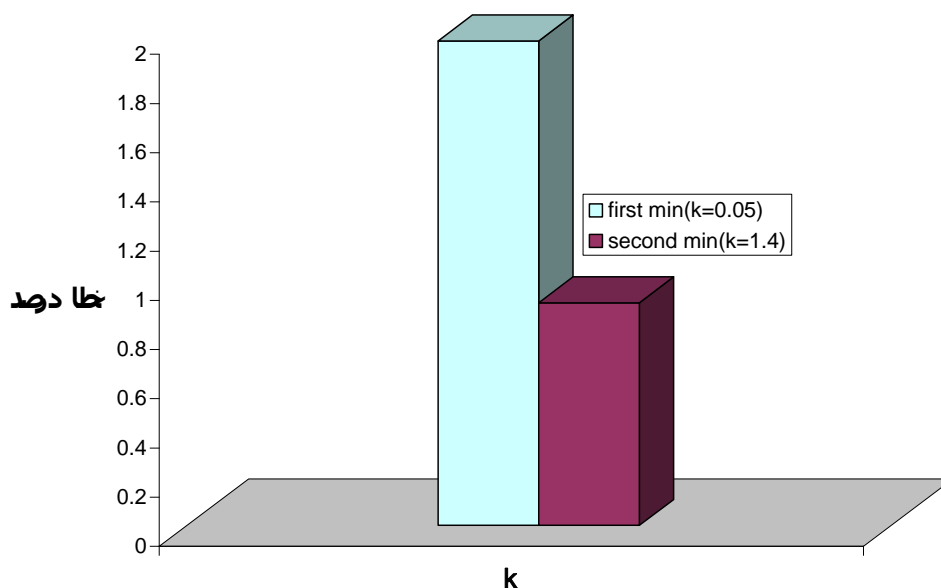
¹ Magnucki

۲۶۱۷,۴۱	2.52e-5	۱,۸
۲۸۸۷,۰۶	2.78e-5	۲



شکل ۳-۱۶- مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج ماگنوکسی مربوط به پارامتر k بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش

بررسی هایی که روی تنش بحرانی بی بعد برای M های متفاوت صورت گرفته است، نشان می دهد که برای $M \geq 5$ ، شکل های (۱۵-۳) و (۱۶-۳) دارای دو مقدار می نیمم می باشد که یکی مربوط به $k = 0.05$ و دیگری مربوط به $k = 1.4$ می باشد. درصد اختلاف برای دو مقدار می نیمم k در پانل یعنی $k = 0.05$ و $k = 1.4$ ، مربوط به شکل (۱۶-۳) بررسی شده است که در شکل (۱۷-۳) نشان داده شده است. محاسبه درصد اختلاف مربوط به مقایسه بین نتایج ماگنوکسی و نتایج موجود در این تحقیق به گونه ای است که تفاضل بین داده های موجود و ماگنوکسی تقسیم بر نتایج موجود، درصد خطا را می دهد.



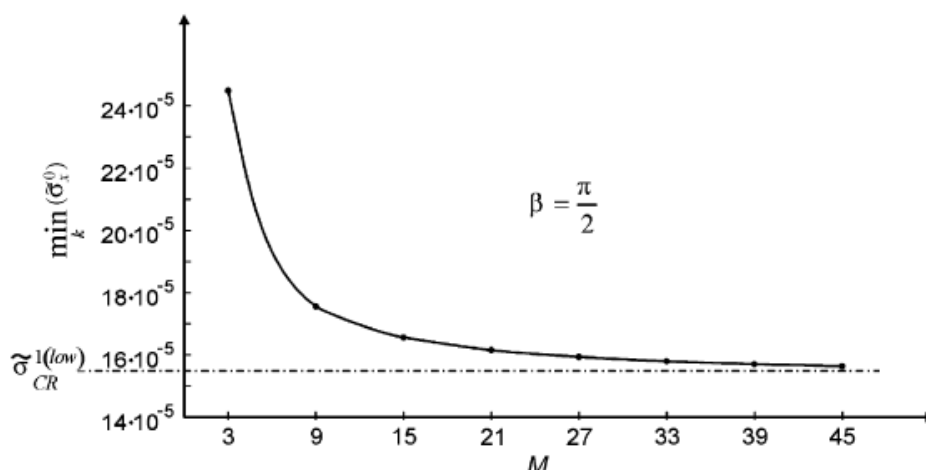
شکل ۳-۱۷- درصد اختلاف بین نتایج بدست آمده با نتایج ماگنوکمی مربوط به پارامتر k بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش

۳-۵-۲- تاثیر پارامتر M بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه‌ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد

در شکل (۳-۱۸) تنش بحرانی بی بعد مربوط به نتایج ماگنوکمی نسبت به M که بیان گر تعداد سطر و ستون ها ماتریس تنش بحرانی یا همان رابطه (۳-۶۴) است، نشان داده شده است که این شکل مربوط به پانل بلندتر می باشد و تفاوت مقدار تنش بحرانی برای $M = 39$ ، $M = 41$ و $M = 43$ تنها در رقم چهارم بعد از اعشار می باشد. با افزایش پارامتر M ، رفته رفته همگرایی بین داده ها بیشتر می شود. داده های مربوط به شکل (۳-۱۸) در جدول (۳-۱۴) آمده است.

جدول ۳-۱۴- نتایج تحلیلی تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک نسبت به پارامتر M برای مد اول کمانش مربوط به پانل بلندتر

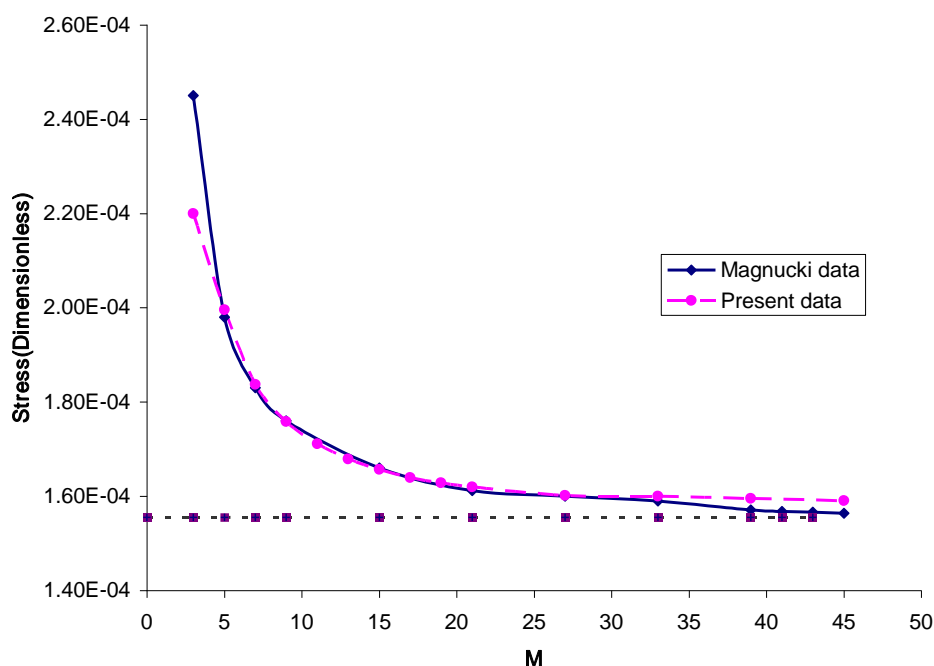
i	3	5	7	9	...	39	41	43	45
k	0.06390	0.06226	0.06125	0.06066	...	0.05897	0.05894	0.05892	0.0589
$\min(\sigma_x^0)$	24.5×10^{-5}	19.8×10^{-5}	18.3×10^{-5}	17.6×10^{-5}	...	15.71×10^{-5}	15.68×10^{-5}	15.66×10^{-5}	15.64×10^{-5}



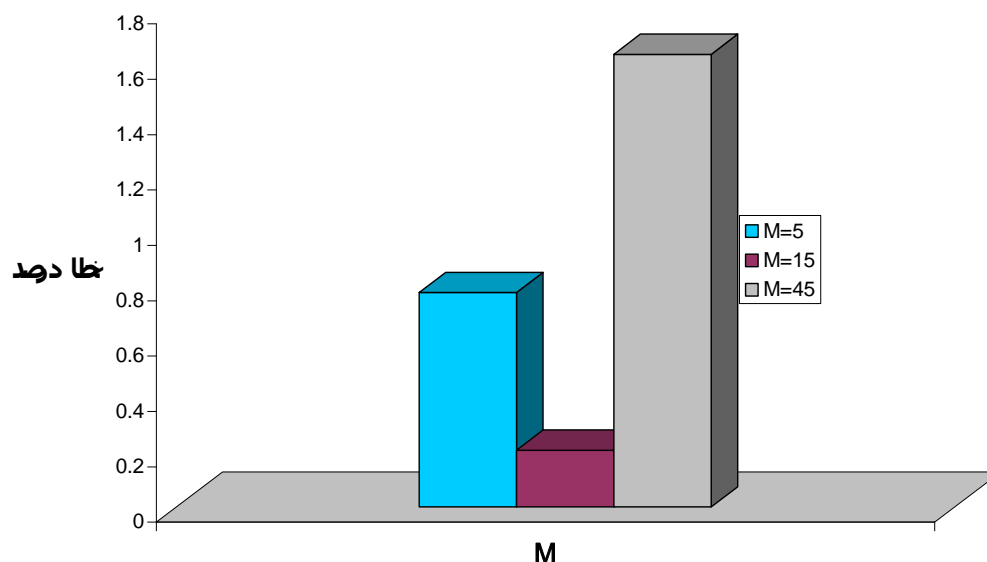
شکل ۳-۱۸- تاثیر پارامتر M بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کماتش مربوط به پانل بلندتر مقایسه بین نتایج به دست آمده در این تحقیق و نتایج ماگنوکمی برای تنش بحرانی بی بعد مربوط به مد اول یعنی $m=1$ برای پانل بلندتر و یا می نیمم بزرگتر به صورت شکل (۳-۱۹) نشان داده شده است و داده های نتایج به دست آمده در این تحقیق در جدول (۳-۱۵) آورده شده است.

جدول ۳-۱۵- نتایج تحلیلی بار و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک بر حسب پارامتر M برای مد اول کماتش در پانل با سه لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و یک لبه دیگر آزاد مربوط به می نیمم بزرگتر

پارامتر M	تنش کماتش بحرانی بی بعد در مد اول برای می نیمم بزرگتر	بار کماتش بحرانی در مد اول برای می نیمم بزرگتر (N)
۳	21.99e-5	۲۲۷۶۳,۴۳
۵	19.95e-5	۲۰۶۵۳,۰۳
۷	18.37e-5	۱۹۰۱۹,۰۵
۹	17.58e-5	۱۸۲۰۰,۶۳
۱۱	17.10e-5	۱۷۷۰۸,۸۰
۱۳	16.79e-5	۱۷۳۸۰,۵۸
۱۵	16.56e-5	۱۷۱۴۵,۹۸
۱۷	16.39e-5	۱۶۹۶۹,۹۵
۱۹	16.28e-5	۱۶۸۵۵,۳۵
۲۱	16.19e-5	۱۶۷۶۶,۶۵
۲۷	16.01e-5	۱۶۵۷۶,۱۹
۳۳	15.99e-5	۱۶۵۵۹,۹۶
۳۹	15.95e-5	۱۶۵۱۵,۱۰
۴۵	15.90e-5	۱۶۴۶۱,۱۸



شکل ۳-۱۹- مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج ماگنوکمی مربوط به پارامتر M بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش و می نیمم بزرگتر درصد اختلاف برای چند مقدار M برای می نیمم بزرگتر در پانل مربوط به شکل (۳-۱۹) بررسی شده است و در شکل (۳-۲۰) نشان داده شده است.

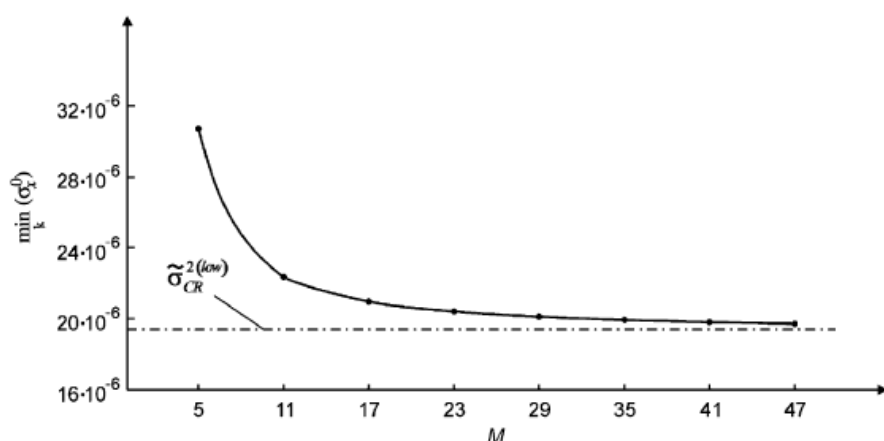


شکل ۳-۲۰- درصد اختلاف بین نتایج بدست آمده با نتایج ماگنوکمی مربوط به پارامتر M و می نیمم بزرگتر بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش

هم چنین در شکل (۳-۲۱) تنش بحرانی بی بعد مربوط به نتایج ماگنوکمی نسبت به M ، نشان داده شده است که این شکل مربوط به پانل کوتاه تر و یا می نیمم کوچکتر است و نتایج آن در جدول (۳-۱۶) آمده است. در این جا نیز با افزایش پارامتر M همگرایی بین داده ها بیشتر شده است. همان طور که مشاهده می شود محدوده تنش های بحرانی بی بعد نسبت به حالت قبلی یعنی وقتی که پانل استوانه ای بلندتر است، بیشتر شده است.

جدول ۳-۱۶- نتایج تحلیلی تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک نسبت به پارامتر M برای مد اول کمانش مربوط به پانل کوتاه تر [۱۰]

i	5	11	17	23	29	35	41	47
k	1.185	1.271	1.292	1.302	1.308	1.312	1.314	1.316
$\min(\sigma_x^0)$	3.073×10^{-5}	2.235×10^{-5}	2.097×10^{-5}	2.041×10^{-5}	2.012×10^{-5}	1.993×10^{-5}	1.981×10^{-5}	1.972×10^{-5}

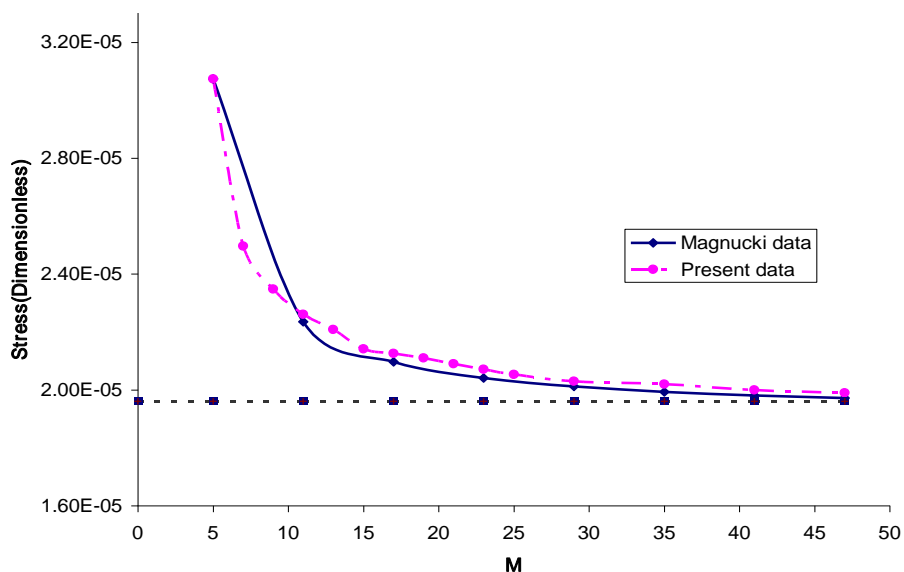


شکل ۳-۲۱- تاثیر پارامتر M بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش مربوط به پانل کوتاه تر

مقایسه بین نتایج به دست آمده و نتایج ماگنوکمی برای تنش بحرانی بی بعد مربوط به مد اول یعنی $m=1$ برای پانل کوتاه تر و یا می نیمم کوچکتر به صورت شکل (۳-۲۲) نشان داده شده است و داده های نتایج به دست آمده در جدول (۳-۱۷) آورده شده است.

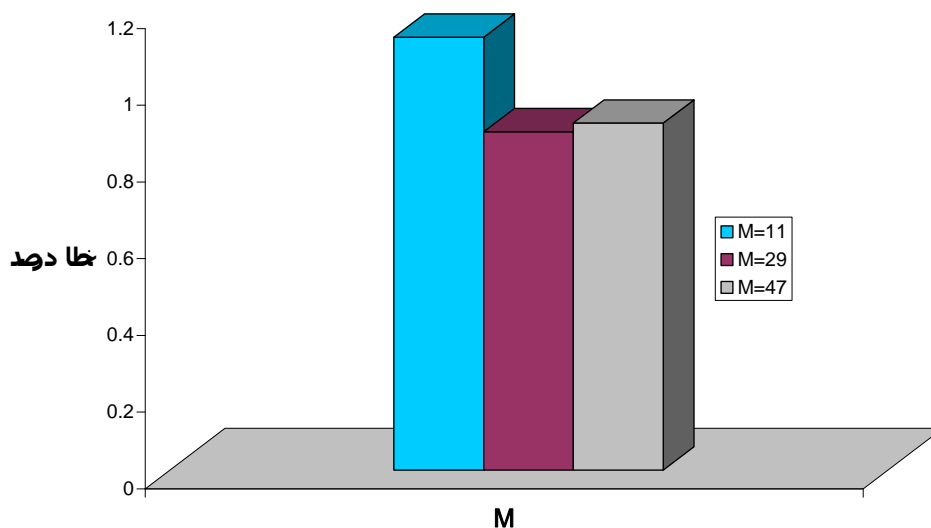
جدول ۳-۱۷- نتایج تحلیلی بار و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک بر حسب پارامتر M برای مد اول کمانش در پانل با سه لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و یک لبه دیگر آزاد مربوط به می نیمم کوچک تر

پارامتر M	تنش کمانش بحرانی بی بعد در مد اول برای می نیمم کوچکتر	بار کمانش بحرانی در مد اول برای می نیمم کوچکتر (N)
۵	3.074e-5	۳۱۸۱,۱۳
۷	2.496e-5	۲۵۸۴,۱۸
۹	2.347e-5	۲۴۲۹,۸۹
۱۱	2.260e-5	۲۳۳۹,۶۹
۱۳	2.208e-5	۲۲۸۶,۱۸
۱۵	2.141e-5	۲۲۱۵,۹۹
۱۷	2.125e-5	۲۲۰۰,۲۴
۱۹	2.109e-5	۲۱۸۳,۴۸
۲۱	2.090e-5	۲۱۶۳,۱۵
۲۳	2.071e-5	۲۱۴۳,۴۹
۲۵	2.053e-5	۲۱۲۴,۸۶
۲۹	2.029e-5	۲۱۰۱,۰۵
۳۵	2.019e-5	۲۰۹۰,۶۹
۴۱	1.999e-5	۲۰۶۹,۹۹
۴۷	1.990e-5	۲۰۵۹,۶۷



شکل ۳-۲۲- مقایسه نتایج با نتایج ماگنوکوی مربوط به پارامتر M روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول

درصد اختلاف برای چند مقدار M برای می نیمم کوچک تر در پانل مربوط به شکل (۳-۲۲)، در شکل (۳-۲۳) نشان داده شده است.



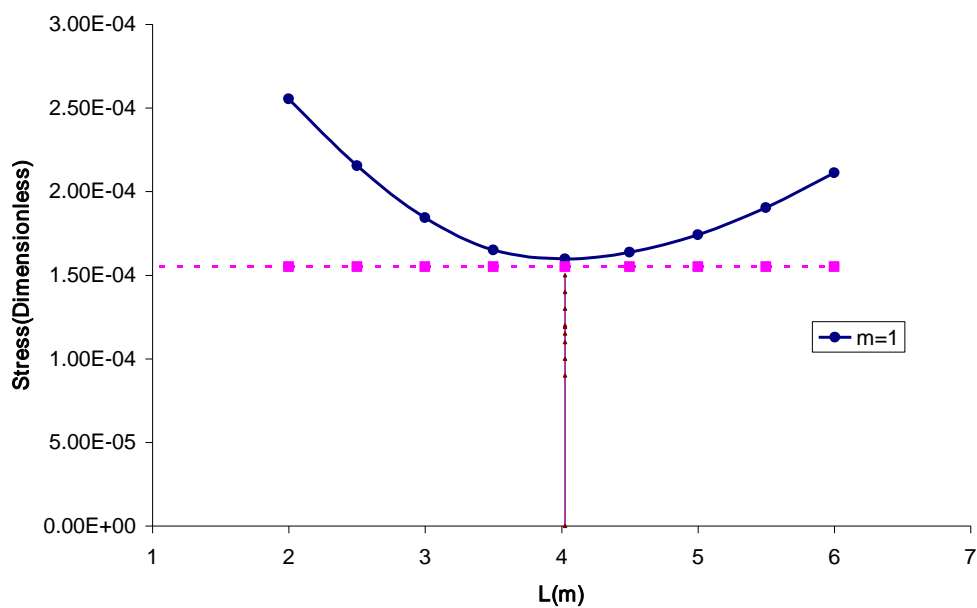
شکل ۳-۲۳- درصد اختلاف بین نتایج بدست آمده با نتایج ماگنوکمی مربوط به پارامتر M و می نیمم کوچک تر بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش

۳-۵-۳- تاثیر طول پوسته بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه‌ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد

در این حالت بررسی تاثیرات طول پانل بر روی تنش ها و بار بحرانی می باشد. این تغییرات برای حالت سه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد در حالت $M = 41$ در نظر گرفته شده است. حداقل مقدار بار بحرانی مربوط به طول $L = 4.0m$ می باشد و با افزایش و کاهش طول پانل مقدار بار بحرانی، اندکی افزایش پیدا می کند. شکل (۳-۲۴) برای حالتی که یک نیم موج در جهت محوری وجود دارد، در نظر گرفته شده است و داده های مربوط به آن در جدول (۳-۱۸) آمده است. ضخامت پانل برای این حالت برابر با $t = 0.5 \times 10^{-3} m$ ، شعاع آن $R = 0.1513m$ و زاویه مرکزی $\beta = \pi/2$ می باشد.

جدول ۳-۱۸- نتایج تحلیلی بار و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک بر حسب طول پانل برای مد اول کماتش در پانل با سه لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و یک لبه دیگر آزاد

طول پانل $L(m)$	نسبت طول پانل به شعاع آن L/R	تنش کماتش بحرانی بی بعد برای مد اول	بار کماتش بحرانی برای مد اول (N)
۲	۱۳,۲۲	25.54e-5	۲۶۴۴۱,۶۰
۲,۵	۱۶,۵۲	21.53e-5	۲۲۲۹۰,۷۶
۳	۱۹,۸۳	18.42e-5	۱۹۰۷۳,۲۰
۳,۵	۲۳,۱۳	16.49e-5	۱۷۰۶۸,۶۴
۴	۲۶,۶۰	15.97e-5	۱۶۵۲۹,۵۷
۴,۵	۲۹,۷۴	16.36e-5	۱۶۹۴۲,۹۱
۵	۳۳,۰۴۷	17.41e-5	۱۸۰۱۶,۷۵
۵,۵	۳۶,۳۵	19.03e-5	۱۹۷۰۵,۸۱
۶	۳۹,۶۶	21.12e-5	۲۱۸۶۳,۲۰

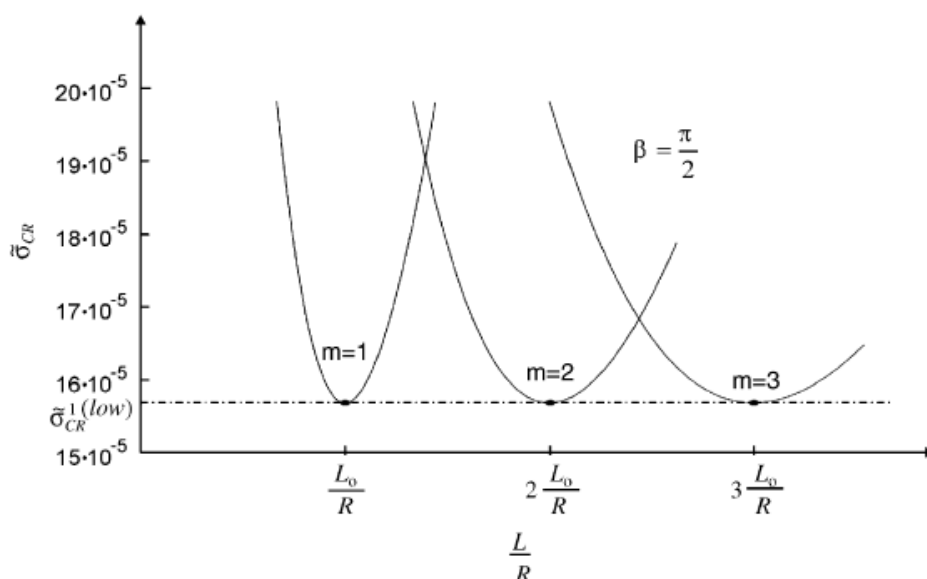


شکل ۳-۲۴- تاثیر طول پانل بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کماتش

۳-۵-۴- تاثیر نسبت طول پوسته به شعاع آن بر روی بار و تنش

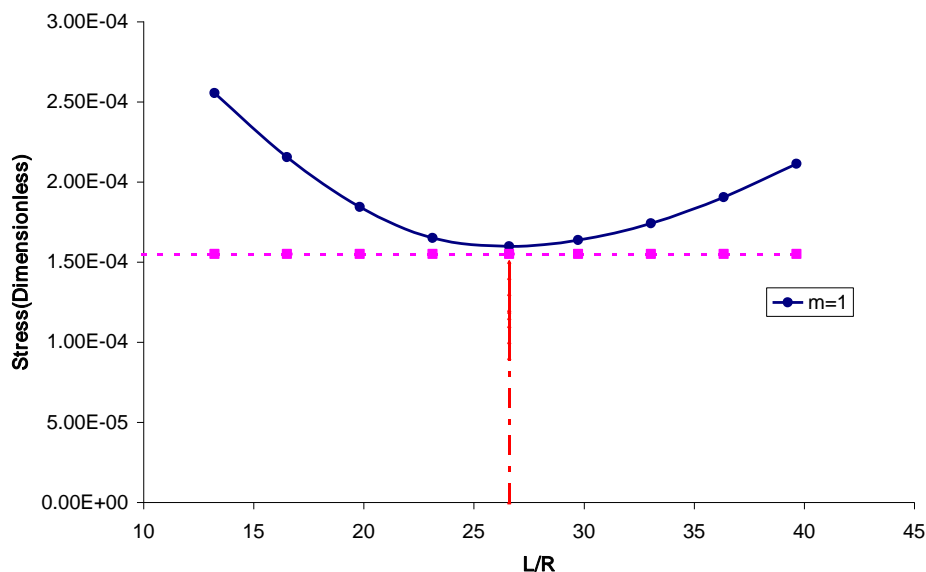
بحرانی برای پانل استوانه‌ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد

در این قسمت تاثیر پارامتر L/R بر روی تنش بحرانی بررسی شده است که این تاثیر ناشی از همان تغییر طول پانل مربوط به قسمت (۳-۵-۳) می باشد و در شکل (۳-۲۵) این تاثیر برای پانلی که در آن $L/R = \beta/k = 26.6$ می باشد، توسط ماگنوکوی برای سه مد اول کمانش نشان داده شده است.

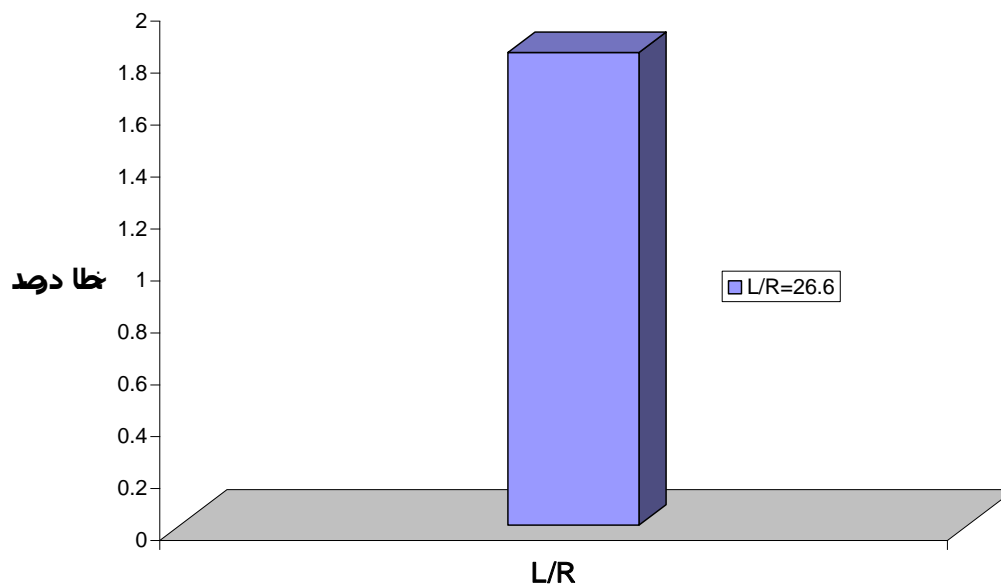


شکل ۳-۲۵- تاثیر L/R بر روی تنش بحرانی بی بعد برای سه مد اول کمانش [۱۰]

برای مقایسه با شکل (۳-۲۵) بررسی تاثیر پارامتر L/R بر روی تنش بحرانی در شکل (۳-۲۶) برای مد اول کمانش نشان داده شده است. دست آمده در جدول (۳-۱۸) آورده شده است.



شکل ۳-۲۶- تاثیر طول پانل به شعاع آن بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کماتش درصد اختلاف برای مقدار $L/R = \beta/k = 26.6$ در پانل مربوط به شکل های (۳-۲۵) و (۳-۲۶) برای مد اول کماتش بین نتایج بدست آمده و نتایج ماگنوکمی بررسی شده است و در شکل (۳-۲۷) نشان داده شده است.



شکل ۳-۲۷- درصد اختلاف بین نتایج بدست آمده با نتایج ماگنوکمی مربوط به می نیمم نسبت طول به شعاع بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کماتش

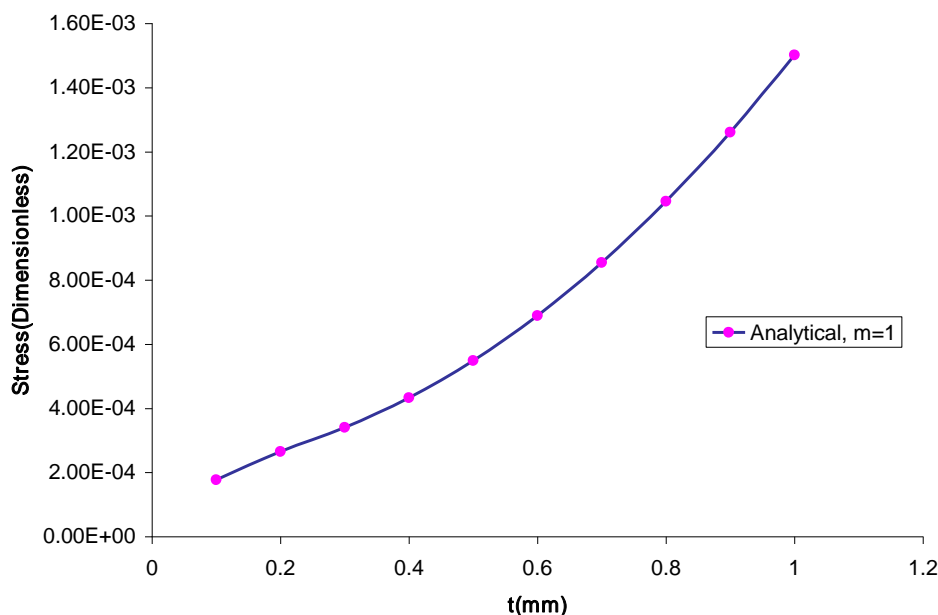
۳-۵-۵- تاثیر ضخامت بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه‌ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد

در این حالت بررسی تحلیلی تغییرات ضخامت پوسته بر روی بار، تنش و یا تنش بحرانی بی بعد انجام گرفته است که نشان می دهد که با افزایش ضخامت پوسته، بار، تنش و یا تنش بحرانی بی بعد، افزایش می یابد.

تنش بحرانی کمانش بی بعد با شرایط موجود در جدول (۳-۱۹) نسبت به t ، در شکل (۳-۲۸) نشان داده شده است. تعداد نیم موج های محوری برابر با $m=1$ می باشد. شعاع پانل $R=0.05m$ ، طول آن $L=0.8m$ ، پارامتر $k=0.09817477$ و اندازه زاویه مرکزی $\beta=\pi/2$ است.

جدول ۳-۱۹- نتایج تحلیلی بار و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک بر حسب ضخامت پانل برای مد اول کمانش در پانل با سه لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و یک لبه دیگر آزاد

ضخامت پانل $t(mm)$	تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد اول	بار کمانش بحرانی برای مد اول (N)
0.1	$17,72e-5$	۳۶۶۷,۸
0.2	$26,57e-5$	۱۰۹۹۹,۰
0.3	$34,02e-5$	۲۱۱۲۸,۱
0.4	$43,29e-5$	۳۵۸۴۸,۶
0.5	$54,89e-5$	۵۶۸۱۰,۲
0.6	$68,93e-5$	۸۵۶۱۳,۷
0.7	$85,47e-5$	۱۲۳۸۴۴,۵
0.8	$104,52e-5$	۱۷۳۰۸۱,۸
0.9	$126,09e-5$	۲۳۴۹۰۴,۸
1.0	$150,19e-5$	۳۱۰۸۸۷,۸



شکل ۳-۲۸- تاثیر ضخامت بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش

۳-۵-۶- تاثیر زاویه مرکزی بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه‌ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد

تنش بحرانی بی بعد مربوط به نتایج ماگنوکوی نسبت به β بررسی شده است که این نتایج مربوط به پانل بلندتر و یا اولین مقدار می نیمم $\tilde{\sigma}_{cr}^{1(low)}$ (می نیمم بزرگتر) می باشد که در جدول (۳-۲۰) آمده است.

جدول ۳-۲۰- نتایج تحلیلی تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک نسبت به زاویه مرکزی پانل برای مد

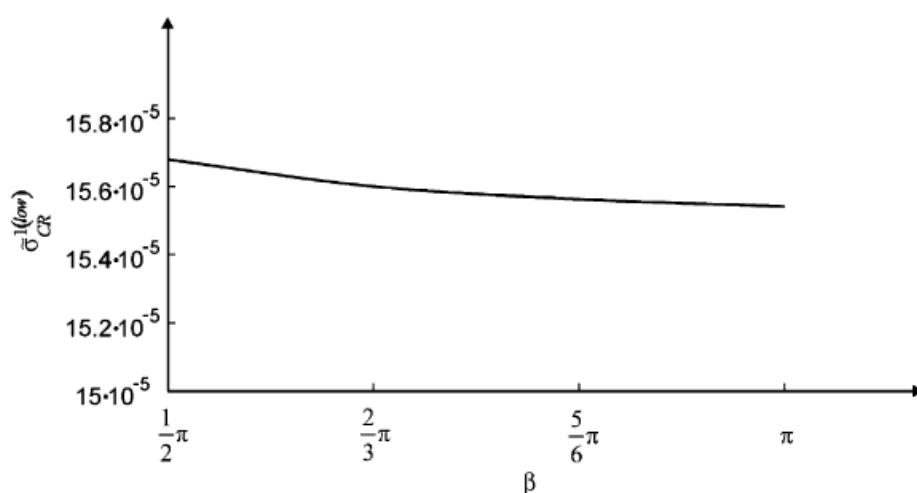
اول کمانش [۱۰]

β	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
K	0.05894	0.04418	0.03534	0.02944
$\tilde{\sigma}_{CR}^{1(low)}$	15.68×10^{-5}	15.60×10^{-5}	15.56×10^{-5}	15.54×10^{-5}
α_{CSC}^1	12.67	12.82	12.85	12.87

با استفاده از فرمول (۳-۵۲) و مطالعات قبلی یک رابطه برای تنش بحرانی بی بعد به صورت رابطه (۳-۷) در می آید.

$$\tilde{\sigma}_{cr}^{(panel-3)} = \frac{1}{\alpha^{1.2} \sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{R} \quad (71-3)$$

که پارامتر α_{CSC} به عنوان ضریب تنش بحرانی در آن به کار رفته است. این ضریب برای اولین مقدار می نیمم تنش بحرانی به صورت $\alpha_{CSC}^1 = 12.7$ و برای دومین مقدار می نیمم به صورت $\alpha_{CSC}^2 = 101$ است که α_{CSC}^1 و α_{CSC}^2 به ترتیب ضریب تنش بحرانی اول و دوم می باشد. مقادیر تنش بحرانی بی بعد مربوط به نتایج ماگنوکوی که در جدول (۳-۲۰) آمده است، نسبت به β در شکل (۳-۲۹) نشان داده شده است.

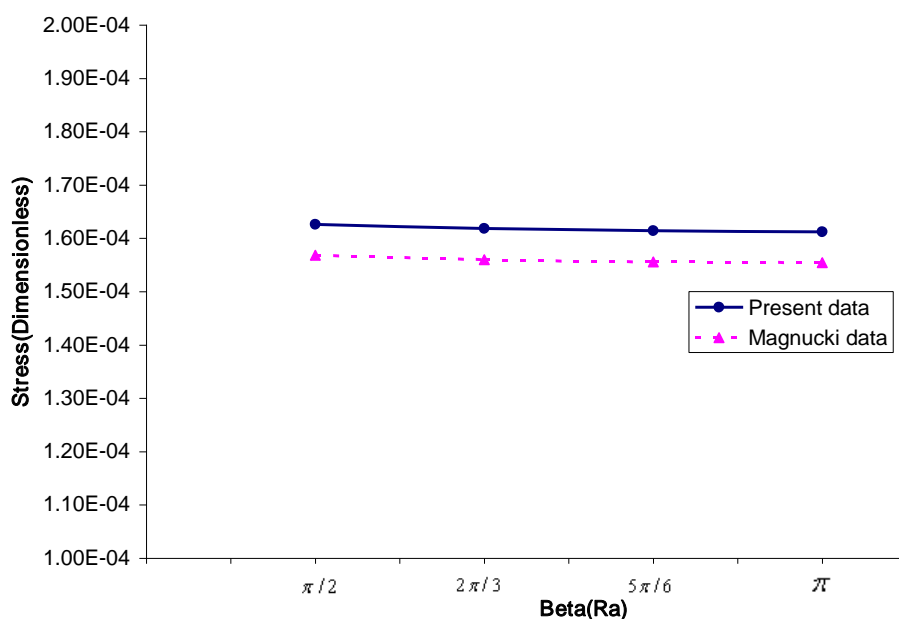


شکل ۳-۲۹- تاثیر زاویه مرکزی بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش [10]

برای مقایسه با نتایج ماگنوکوی در این جا بررسی تغییرات زاویه مرکزی β روی بار و تنش بحرانی انجام گرفته است که این دو نمودار تحت شرایط مرزی سه لبه با تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد، دارای تطابق خوبی می باشند. ضخامت پانل برای این حالت $t = 9.9389 \times 10^{-2} mm$ شعاع پانل $R = 30.07518 mm$ می باشد. در این حالت پارامتر k بر حسب زاویه مرکزی پانل تغییر کرده است. این مقایسه برای مد اول در شکل (۳-۳۰) و نتایج مربوط به داده های به دست آمده در جدول (۳-۲۱) آمده است.

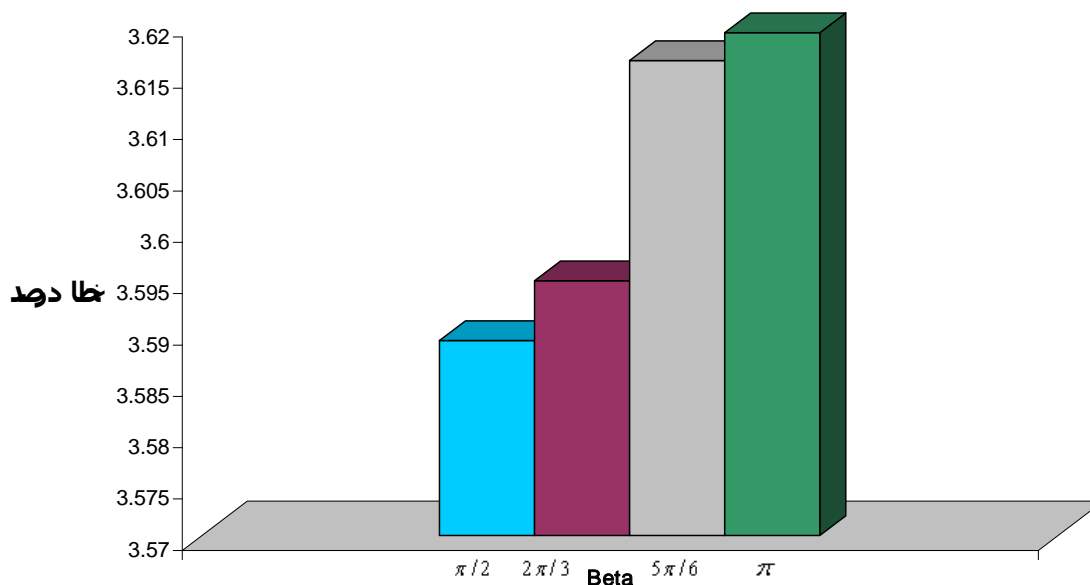
جدول ۳-۲۱- نتایج تحلیلی بار و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک نسبت به زاویه مرکزی پانل برای مد اول کمانش در پانل با سه لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و یک لبه دیگر آزاد

زاویه مرکزی پانل $\beta(Ra)$	تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد اول	بار کمانش برای مد اول (N)
$\pi/2$	16.26e-5	۳۳۴۶,۰۳
$2\pi/3$	16.18e-5	۳۳۲۹,۱۶
$5\pi/6$	16.14e-5	۳۳۲۱,۳۷
π	16.12e-5	۳۳۱۷,۱۸



شکل ۳-۳۰- مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج ماگنوکمی مربوط به زاویه مرکزی بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش

درصد اختلاف برای زوایای مرکزی پانل از $\pi/2$ تا π مربوط به شکل (۳-۳۰) بررسی شده است و در شکل (۳-۳۱) نشان داده شده است.



شکل ۳-۳۱- درصد اختلاف بین نتایج بدست آمده با نتایج ماگنوکمی مربوط به زوایای مرکزی بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش همان طور که در شکل (۳-۳۰) مشاهده می شود تغییرات در زاویه مرکزی پانل تاثیر بسیار ناچیزی بر روی تنش بحرانی بی بعد دارد. این موضوع در مورد تنش و بار بحرانی هم صدق می کند.

۳-۶- به کارگیری حل پیشنهادی جدید برای به دست آوردن بار کمانش بحرانی با شرط مرزی دو لبه خمیده پانل دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

در راستای استفاده از روش موجود در بخش (۳-۳-۲)، اکنون یک حل دیگر برای به دست آوردن بار کمانش بحرانی در نظر گرفته شده است. در این حل معادلات پایداری در نظر گرفته شده مشابه روابط (۳-۵۶) و (۳-۵۷)، و شرایط مرزی به کار گرفته شده مشابه روابط (۳-۳۹) تا (۳-۴۲) می باشد. سپس با نتیجه گیری و الگو برداری از توابع خیزی که در روابط (۳-۴۳) و (۳-۵۸) بررسی شد، در نهایت تابع جدیدی به صورت رابطه (۳-۷۲) در نظر گرفته شده است.

$$w(\varphi, x) = \left(A_j \sin\left(\frac{j\pi\varphi}{2\beta}\right) + B_i \sin\left(\frac{i\pi\varphi}{2\beta}\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) t \quad (3-72)$$

که در آن A_j, B_i پارامترهای تابع هستند و تابع نیروی ابری در نظر گرفته شده، مشابه رابطه (۳-۳) (۵۹) است. با قرار دادن رابطه (۳-۷۲) در شرایط مرزی مربوط به لبه آزاد یا روابط (۳-۴۱) و (۳-۴۲)، پارامتر B_i بر حسب A_j به صورت رابطه (۳-۷۳) به دست می آید:

$$B_i = - \frac{A_j \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)(L^2 j^2 + 4\nu m^2 R^2 \beta^2)}{\sin\left(\frac{i\pi}{2}\right)(L^2 i^2 + 4\nu m^2 R^2 \beta^2)} \quad (۳-۷۳)$$

با قرار دادن (۳-۷۳) در رابطه (۳-۷۲)، تابع خیز به صورت زیر به دست می آید:

$$w(\varphi, x) = A_j \left(\sin\left(\frac{j\pi\varphi}{2\beta}\right) - \frac{\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)(L^2 j^2 + 4\nu m^2 R^2 \beta^2) \sin\left(\frac{i\pi\varphi}{2\beta}\right)}{\sin\left(\frac{i\pi}{2}\right)(L^2 i^2 + 4\nu m^2 R^2 \beta^2)} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)t \quad (۳-۷۴)$$

به ازای جمیع مقادیر i رابطه (۳-۷۴) شرایط مرزی را ارضا می کند. نتایج به دست آمده برای مقدار $i = 3$ به دست آمده است.

شرط تعامد مثل قبل، با حاصل ضرب معادلات پایداری در توابع خیز و نیرو ارضاء می شود و در نهایت یک سیستم معادلات جبری به صورت رابطه (۳-۶۴) نتیجه می شود. در این ماتریس حالت $i = j$ داده های روی قطر اصلی را می دهد و $i \neq j$ مربوط به سایر داده های ماتریس است. تمامی نتایج مثل بخش (۳-۵) برای $M = 41$ محاسبه شده است. نتایج مربوطه پس از مقایسه با نتایج عددی در فصل پنجم بررسی شده است.

در این فصل در ابتدا کمانش پوسته استوانه ای در حالت کلی بررسی شد و روابط جابجایی و ممان ها مربوط به آن ذکر شد. سپس کمانش متقارن در پوسته استوانه ای تحت بار محوری بررسی شد. در ادامه محاسبه بار و تنش بحرانی با استفاده از روابط جابجایی در پانل استوانه ای دارای تکیه گاه ساده در دولبه خمیده که تحت بار محوری است انجام شد. سپس بار و تنش بحرانی با استفاده از توابع خیز و نیرو در پانل استوانه ای دارای تکیه گاه ساده در دو لبه خمیده که تحت بار محوری است، بر حسب پارامترهای هندسی متفاوت به دست آمد. در ادامه محاسبه بار و تنش بحرانی با استفاده از توابع خیز و نیرو در پانل استوانه ای دارای تکیه گاه ساده در دو لبه خمیده و یک لبه راست، و لبه

راست دیگر آزاد که تحت بار محوری است، بر حسب پارامتر های هندسی متفاوت انجام شد و با نتایج ماگنوکمی مقایسه شد و درصد اختلاف بین داده های موجود با نتایج ماگنوکمی محاسبه شد. در آخر یک تابع خیز کلی بر حسب پارامتر i برای شرط مرزی تکیه گاه ساده در دو لبه خمیده و دو لبه دیگر آزاد، پیشنهاد شد که پس از حل و به دست آوردن بار کمانش، به این نتیجه می توان رسید که در بهبود دقت نتایج مفید است.

فصل چهارم

بررسی عددی در کمانش پانل استوانه ای تحت بار

محوری

۴-۱- مقدمه:

بسیاری از مسائل پایداری ورق ها و پوسته ها، همانند مسائل عملی مطرح در مهندسی را نمی توان به صورت تحلیلی حل نمود که در نتیجه بایستی از روش های عددی استفاده نمود. فرق بین دو عبارت تحلیلی و عددی گاهی مشخص نمی باشد. حل های عددی دارای این نقطه اشتراک هستند که آنها یک محیط پیوسته را به وسیله تعداد محدودی درجه آزادی تقریب می زنند.

در اغلب موارد، نیاز به طراحی و تحلیل قطعات با هندسه و خواص پیچیده تحت بارگذاری های عمومی می باشد و به کارگیری روش های کلاسیک موجود (به عنوان مثال تئوری الاستیسیته برای توزیع تنش) منجر به معادلات پیچیده، با شرایط مرزی و اولیه متفاوت، می شود که عملاً حل این معادلات از روش تحلیلی را غیر ممکن می سازد.

برای مقابله با مشکلات حل تحلیلی و نیز جهت استفاده از قدرتمند ترین وسیله موجود در قرن حاضر یعنی کامپیوتر، ضروری است که مساله مورد نظر در یک قالب کاملاً جبری ریخته شود تا حل آنها تنها نیازمند عملیات جبری باشد. برای دستیابی به چنین هدفی می توان از انواع مختلف روشهای گسسته سازی یک مساله پیوسته تعریف شده به وسیله معادلات دیفرانسیل استفاده نمود. در این روشها تابع و یا توابع مجهول که می توان آنها را با مجموعه ای نامتناهی از اعداد نشان داد، بوسیله تعداد متناهی از پارامترهای مجهول جایگزین می گردند که طبیعتاً در حالت کلی نوعی تقریب را در بر دارد. برای این منظور روشهای عددی متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم ها ایجاد و امروزه به طور وسیعی مورد استفاده قرار می گیرند. سه روش عمده در حل عددی یک معادله دیفرانسیل به شرح زیرند:

۱- روش تفاضل محدود^۱

۲- روش تغییرات^۲

۳- روشهای باقیمانده وزنی^۳

بسته به نوع روش عددی مورد استفاده و نوع المان بندی، روشهای مختلفی نظیر حجم محدود^۱، اجزای محدود^۲، تفاضل محدود و ... حاصل شده است. هر کدام از روشهای فوق، در قالب نرم

^۱ Finite Difference

^۲ Variational Method

^۳ Weighted Residual Methods

افزارهای متنوع به کاربران عرضه شده‌اند. تاکید ویژه بر روش های تفاضل محدود و اجزا محدود می باشد. زیرا این نکته مشخص شده است که این روش ها برای حل کامپیوتری مسائل مبتنی بر معادلات دیفرانسیل جزئی بسیار مناسب هستند. البته برای چنین معادلاتی، متغیر های وابسته تابعی از دو متغیر فضایی هستند. روش های مرکب مانند استفاده از بسط سری فوریه نسبت به یک متغیر فضایی و انتگرال گیری عددی مستقیم نسبت به متغیر دیگر به طور موفقیت آمیزی برای هندسه های خاصی به کار برده شده است [۱]. روشی که در اغلب مسائل مکانیک جامدات مورد استفاده قرار می - گیرد روش اجزای محدود است که در قالب نرم افزارهایی چون ANSYS، ABAQUS و ... قابل استفاده است.

۴-۲- معرفی روش عددی اجزای محدود

روش قدرتمند اجزای محدود از دهه ۱۹۵۰ آغاز و با گسترش کامپیوترهای عددی رو به توسعه گذاشت. البته در گسترش این روش نمی توان از توانایی های آن در مقایسه با سایر روشها چشم پوشی نمود. روش اجزای محدود را می توان ترکیبی از روش تقریبی ریتز^۳ و اصل تغییرات^۴ که در مکانیک محیط های پیوسته به کار می رود تصور نمود [۲].

روش اجزای محدود یک دستورالعمل عددی جهت حل مسایل فیزیکی می باشد که توسط معادلات دیفرانسیل توصیف می شوند. این روش دارای دو ویژگی است که آن را از سایر روشهای عددی متمایز می سازد :

۱- در این روش از یک فرمول بندی انتگرالی جهت ایجاد یک دستگاه معادلات جبری استفاده می شود.

۲- در این روش از توابع هموار و قطعه ای پیوسته جهت تقریب کمیات مجهول استفاده می شود. مشخصه دوم، روش اجزای محدود را از سایر روشهای عددی که فرمول بندی انتگرالی دارند، متمایز می کند. روش اجزای محدود را می توان به پنج مرحله اصلی تقسیم کرد:

¹ Finite Volume

² Finite Elements

³ Approximate Ritz method

⁴ Variational principle

- ۱- تقسیم ناحیه مورد بحث به تعداد زیادی زیر ناحیه کوچک موسوم به المان^۱. نقاط اتصال المان ها به یکدیگر، گره^۲ نامیده می شود.
 - ۲- تعیین تقریب اولیه برای حل به صورت یک چند جمله ای با ضرایب ثابت مجهول مثلا خطی^۳ یا درجه دوم^۴. پس از تعیین شدن مرتبه تقریب اولیه، معادله حاکم برای هر المان نوشته می شود.
 - ۳- استخراج دستگاه معادلات جبری. در صورت استفاده از روش گالرکین، تابع وزنی برای هر گره مشخص شده و سپس انتگرال باقیمانده وزنی تشکیل می گردد. با انتگرال گیری، برای هر گره یک معادله جبری ایجاد می گردد و پس از استخراج معادلات همه گره ها، دستگاه معادلات بوجود می آید.
 - ۴- حل دستگاه معادلات ایجاد شده.
 - ۵- محاسبه سایر کمیات از روی مقادیر گرهی.
- به مجموعه یک المان با گره هایش یک مش^۵ گفته می شود. المان ها می توانند یک، دو و یا سه بعدی باشند. همچنین بسته به بعد المان، اشکال مختلف برای یک المان قابل تصور است. یک المان دو بعدی می تواند به شکل مثلث، مربع و یا شکل دلخواه دیگری باشد. از طرفی یک المان سه بعدی نیز می تواند اشکالی مانند چهار وجهی، هرم، منشور و یا مکعب داشته باشد. مش بندی هندسه مساله از مراحل مهم مدل سازی می باشد که مستلزم دقت و مهارت مناسب می باشد.

۴-۳- روش گالرکین

روشی مبتنی بر بسط سری ها در سال ۱۹۱۵ به وسیله گالرکین بیان شده است. این روش در اصل توسط بابنو پیشنهاد شده و گاهی نیز به روش بابنو- گالرکین [۱] خوانده می شود. برای بیان روش گالرکین ابتدا به طور مختصر روشهای باقیمانده وزنی بیان می شود. روشهای باقیمانده وزنی نیز شامل یک انتگرال می باشند. در این روشها ابتدا یک تخمین برای جواب در نظر گرفته شده و در

¹ Element

² Node

³ Linear

⁴ Quadratic

⁵ Mesh

معادله دیفرانسیل مربوطه قرار می‌گیرد. از آنجایی که تقریب اولیه در معادله صدق نمی‌کند، باقیمانده یا خطایی مانند R حاصل می‌شود. به عنوان مثال اگر تابعی مانند $y = h(x)$ در ابتدا به عنوان تقریب برای معادله دیفرانسیل زیر بکار رود:

$$D \frac{d^2 y}{dx^2} + Q = 0 \quad (1-4)$$

با قرار دادن تابع در معادله (1-4) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$D \frac{d^2 h}{dx^2} + Q = R(x) \neq 0 \quad (2-4)$$

در روشهای باقیمانده وزنی می‌بایست رابطه زیر برقرار باشد:

$$\int_0^H W_i(x) R(x) dx = 0 \quad (3-4)$$

باقیمانده معادله در یک تابع وزنی ضرب شده است و انتگرال حاصلضرب باید صفر باشد. تعداد توابع وزنی مورد نیاز برابر است با تعداد ضرایب مجهول در حل تقریبی است. توابع وزنی مختلفی را می‌توان برای حل انتخاب نمود که در زیر به چند نوع مشهورتر آنها اشاره می‌شود:

۱- روش ترتیب^۱: در این روش توابع ضربه به عنوان تابع وزنی انتخاب می‌شوند. این نوع انتخاب بیانگر این است که باید در نقاط خاصی مقدار باقیمانده صفر باشد. تعداد این نقاط برابر تعداد ضرایب مجهول در حل تقریبی است.

۲- روش زیر دامنه^۲: هر تابع وزنی برابر واحد $W_i(x) = 1$ ، در یک ناحیه خاص انتخاب می‌شود، این نوع انتخاب بیانگر این است که می‌بایست در طول فاصله‌ای از یک ناحیه، مجموع (انتگرال) باقیمانده‌ها برابر صفر گردد. تعداد فواصل انتگرال‌گیری برابر تعداد ضرایب نامعین در حل تقریبی است.

۳- روش گالرکین^۳: در روش گالرکین همان تابعی که به عنوان حل تقریبی استفاده می‌شود، به عنوان تابع وزنی نیز استفاده می‌شود. این رهیافت، مبنای روش اجزای محدود برای بسیاری از مسایل است.

۴- روش حداقل مربعات^۱: در این روش مقدار خطای R به عنوان تابع وزنی استفاده می‌شود. بنابراین انتگرال زیر حاصل می‌شود:

¹ Collocation Method

² Subdomain Method

³ Galerkin's Method

$$Er = \int_0^H [R(x)]^2 dx \quad (4-4)$$

این میزان خطا نسبت به ضرایب نامعلوم موجود در حل تقریبی، می نیمم می شود. از روش حداقل مربعات نیز جهت فرموله کردن حل اجزای محدود استفاده می شود اما این روش به اندازه روش تغییرات و روش گالرکین مورد استفاده قرار نمی گیرد.

اکنون می توان روش گالرکین را بیشتر مورد بررسی قرار داد. ابتدا یک تخمین (به طور مثال $u = c_1x + c_2$ در خصوص توزیع تغییر مکان در المان یک بعدی) برای معادله حاکم فرض می شود. سپس با انتخاب تابع وزنی مناسب و به تعداد مجهولات موجود در تخمین اولیه، انتگرال حاصلضرب تابع وزنی و باقیمانده محاسبه می گردد که عبارتی بر حسب ضرایب نامعلوم تابع تقریب خواهد بود. در روش گالرکین، توابع وزنی همان توابع شکل می باشند. به طور مثال در یک المان خطی انتگرال حاصلضرب هر یک از توابع شکل در باقیمانده، محاسبه می گردد و در نهایت دو معادله با مجهولات ϕ_j و ϕ_j بدست می آید. (قبلا اشاره گردید که ضرایب a_1 و a_2 بر حسب مقادیر گرهی نوشته می شوند.) به عبارت دیگر به ازای هر گره یک معادله بدست می آید. به دلیل اینکه هر معادله شامل بیش از یک مجهول است، به تنهایی قابل حل نخواهد بود و می بایست ابتدا به تعداد درجات آزادی معادله استخراج شود تا آنگاه تمامی معادلات به صورت یک جا حل گردند. پس از استخراج معادلات باید آن ها را حل کرد که روش های متنوعی برای حل موجود است. پس از مشخص شدن مقادیر گرهی، با توجه به ابعاد اولیه و خواص هندسی ماده تعریف شده، سایر کمیات نظیر کرنش، تنش، نیرو و گشتاور محاسبه می شوند.

4-4- معرفی نرم افزار ABAQUS/CAE

ABAQUS [۱۴] یک مجموعه از برنامه های مدل سازی بسیار توانمند می باشد که مبتنی بر روش اجزای محدود بوده که قابلیت حل مسایل از یک تحلیل خطی ساده تا پیچیده ترین مدل سازی غیر خطی را دارا می باشد. این نرم افزار دارای مجموعه المان های بسیار گسترده ای می باشد که هر نوع هندسه ای را می توان به صورت مجازی توسط این المان ها مدل کرد. همچنین دارای مدل های مواد

¹ Least Squares Method

مهندسی بسیار زیادی است که در مدل سازی انواع مواد با خواص و رفتار گوناگون نظیر فلزات، لاستیکها، پلیمرها، کامپوزیتها، قابلیت بالایی را ممکن می سازد.

نظر به اینکه ABAQUS یک ابزار مدلسازی عمومی و گسترده می باشد، استفاده از آن تنها محدود به تحلیل های مکانیک جامدات و سازه (تنش - تغییر مکان) نمی شود استفاده از نرم افزار ABAQUS با وجود اینکه مجموعه قابلیت های بسیار گسترده ای را در اختیار کاربر قرار می دهد، کار نسبتا ساده ای می باشد. پیچیده ترین مسایل را می توان به آسانی مدل کرد. به عنوان مثال مسایل شامل بیش از یک جزء را می توان با ایجاد مدل هندسی هر جزء و سپس نسبت دادن رفتار ماده مربوطه به هر جزء و سپس مونتاژ اجزاء مختلف مدل کرد. در اغلب مدلسازی ها، حتی مدل های با درجه غیر خطی بالا، کاربر می بایست تنها داده های مهندسی نظیر هندسه مساله، رفتار ماده مربوط به آن، شرایط مرزی و بارگذاری آن مساله را تعیین کند .

هنگامی که مدلسازی به اتمام رسید، ABAQUS/CAE یک فایل ورودی^۱ ایجاد می کند که ساختاری شبیه به یک کد برنامه نویسی شده دارد و توسط یکی از دو روش ضمنی و یا صریح مورد تحلیل قرار می گیرد. حل گر نرم افزار، فایل ورودی را خوانده و طی فرآیند حل اطلاعاتی را به CAE می فرستد که قابلیت مانیتور کردن پروسه حل به طور همزمان را ممکن می سازد. همچنین نتایج تحلیل در یک فایل خروجی^۲ ذخیره می گردد. در این جا چون فقط حالت الاستیک در نظر گرفته شده است خروجی نرم افزار یک مقدار ویژه خطی می باشد که از روی آن می توان بار بحرانی کمانش را به دست آورد [۱۴].

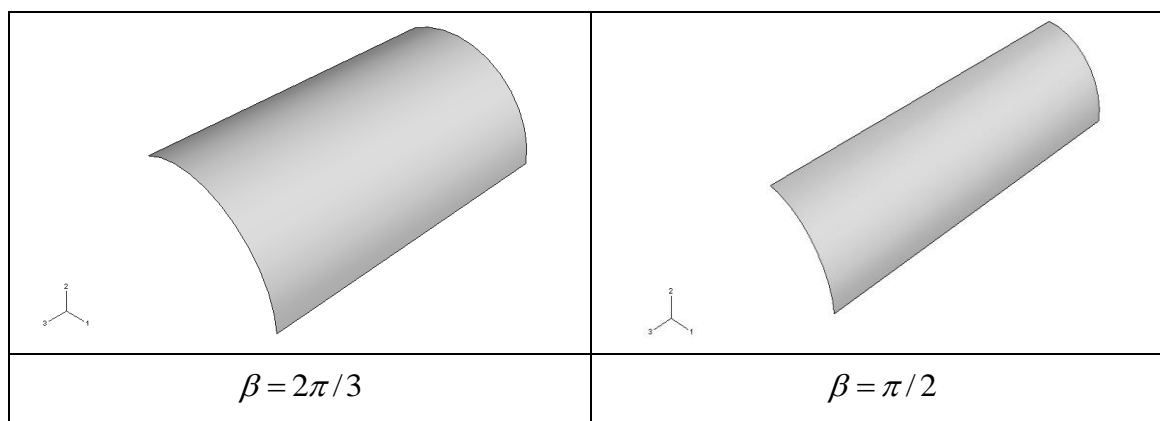
در این تحقیق از نسخه 6-6-3 ABAQUS/CAE برای تحلیل های عددی استفاده شده است.

۴-۵- مدل سازی

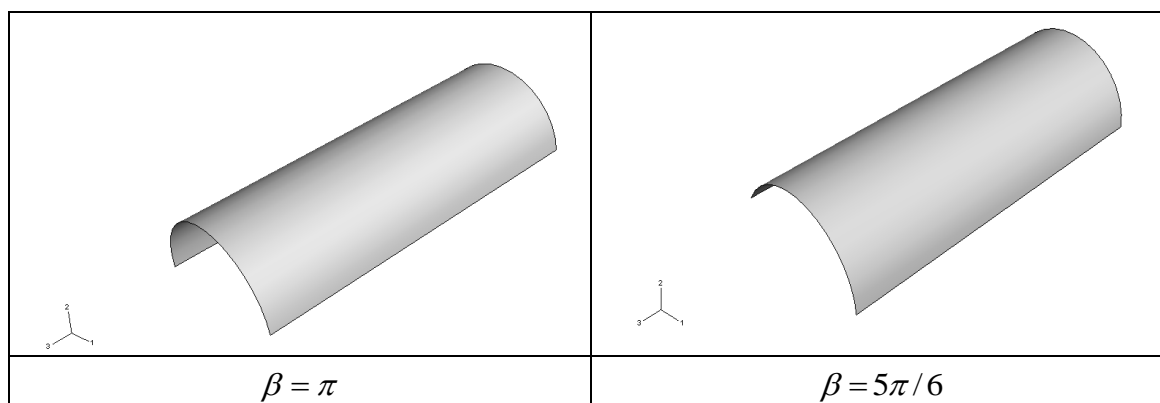
در بررسی انجام شده، از پوسته های استوانه ای جدار نازک با طول ها، قطر ها و ضخامت های متفاوت استفاده شده است. هندسه پانل استوانه ای برای چهار زاویه مرکزی $\beta = \pi/2$ ، $\beta = 2\pi/3$ ، $\beta = \pi$ و $\beta = 5\pi/6$ مطابق شکل های (۴-۱) و (۴-۲) می باشد.

¹ Input file

² Output database



شکل ۴-۱- مدل سازی اولیه پانل استوانه‌ای با دو زاویه متفاوت مرکزی



شکل ۴-۲- مدل سازی اولیه پانل استوانه‌ای با دو زاویه متفاوت مرکزی

۴-۶- خواص مکانیکی ماده

خواص مکانیکی ماده ایزوتروپ تشکیل دهنده پانل های استوانه‌ای از جنس فولاد در حالت الاستیک به صورت جدول (۴-۱) است.

جدول ۴-۱- خواص مکانیکی مربوط به حالت الاستیک

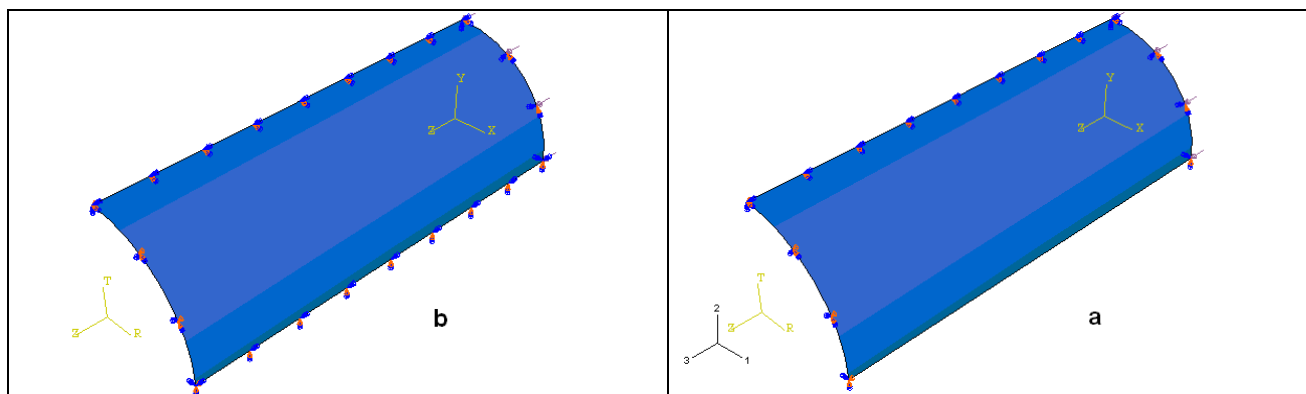
فولاد	جنس پانل
$E = 207GPa$	مدول الاستیسیته
$\nu = 0.3$	ضریب پواسون

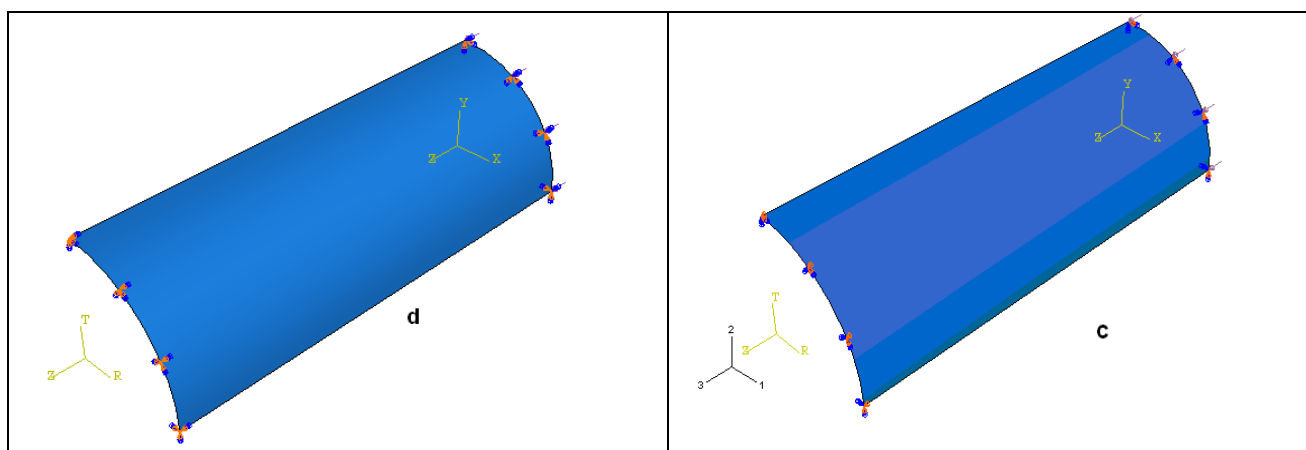
۷-۴- بارگذاری و شرایط مرزی

شرایط مرزی همواره به عنوان یک عامل تاثیر گذار بر روی بار کمانش در پوسته های استوانه ای شناخته شده است. این تاثیر هم بر روی بار کمانش خطی در حوزه الاستیک و هم بر روی بار گسیختگی غیر خطی می باشد [۱۵]. اعمال شرایط بارگذاری در نرم افزار Abaqus 6-6-3 نسبت به Abaqus 6-4 راحت تر شده است. به این علت که می توان بار را به صورت لبه ای با استفاده از گزینه shell edge load به عنوان نوع بار بر روی لبه پانل اعمال کرد. برای اعمال بار در راستای مولد، یک طرف پانل را در این جهت بسته و بار بر روی لبه دیگر پانل اعمال می شود. در این صورت بار به صورت محوری بر دو لبه خمیده پانل اعمال می شود.

شرایط مرزی به کار گرفته شده در این بخش چهار حالت می باشد که 3ss – 1free بیان کننده (سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد)، 2ss – 2free (دولبه خمیده با تکیه گاه ساده و دولبه دیگر آزاد)، 2c- 2free (دو لبه خمیده با تکیه گاه گیردار و دولبه دیگر آزاد) و 4ss (چهار طرف پانل دارای تکیه گاه ساده می باشد)، است.

شرایط مرزی 2c-2free، 4ss، 3ss-1free و 2ss-2free در نرم افزار Abaqus به ترتیب در قسمت های a، b، c و d شکل (۳-۴) نشان داده شده است.





شکل ۴-۳- چهار حالت شرط مرزی به کار گرفته شده بر روی لبه های پانل استوانه‌ای

۴-۸- المان بندی نمونه‌ها

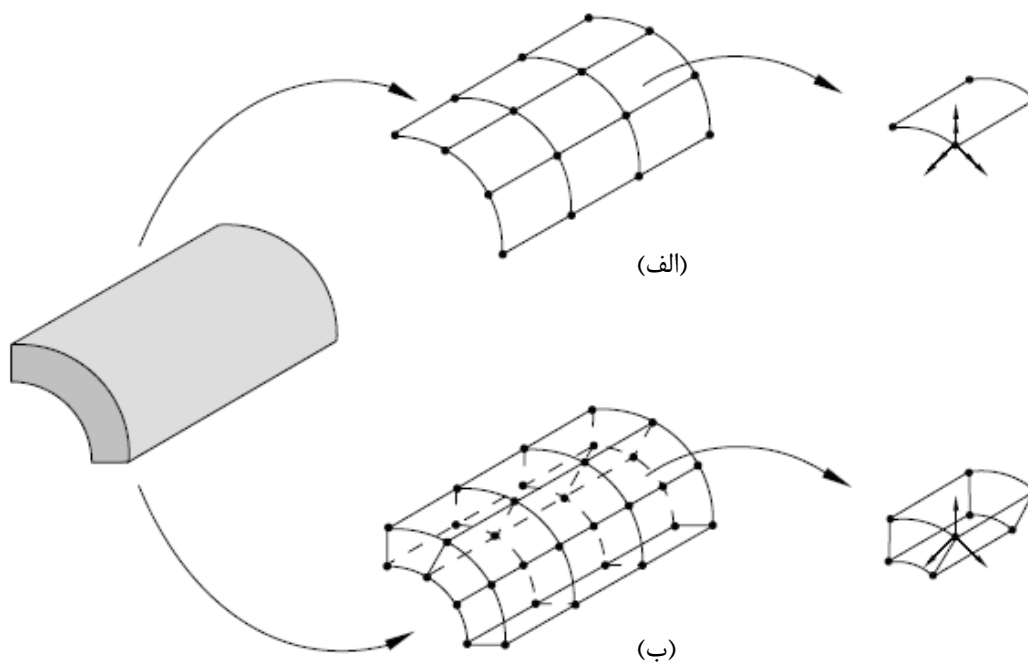
المان های پوسته برای ساختار هایی کاربرد دارد که یک بعدی هستند و یا ضخامت آن به طور قابل توجه ای کوچکتر از دو بعد دیگر است. دو نوع المان پوسته در نرم افزار Abaqus وجود دارد [۱۴].

۱- المان های مرسوم^۱ در پوسته ها برای جداسازی یک جسم به صورت یک هندسه تعریف شده در یک سطح مرجع استفاده می شود. در این حالت ضخامت در قسمت خواص تعریف شده آمده است. المان های مرسوم در پوسته ها شامل جابجایی ها و ممان ها به صورت درجات آزادی است.

۲- المان های پیوسته^۲ در پوسته ها برای جداسازی یک جسم سه بعدی کامل استفاده می شود. ضخامت از هندسه گره ای المان نشان داده شده است. المان های پیوسته در پوسته ها فقط شامل جابجایی ها به عنوان درجات آزادی هستند. از دیدگاه مدل سازی المان های پیوسته در پوسته ها شبیه جامدات پیوسته سه بعدی هستند، اما از نظر رفتار حرکت و بنیادی شبیه به المان های مرسوم هستند. شکل (۴-۴) تفاوت های بین یک المان مرسوم و المان پیوسته در پوسته را نشان می دهد.

¹ Conventional

² Continuum

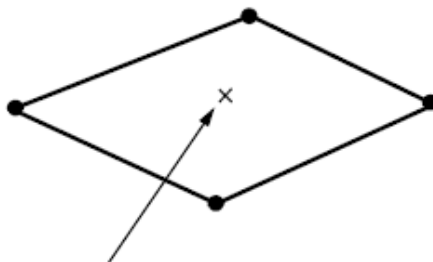


شکل ۴-۴- المان مدل سازی شده (الف) المان مرسوم و (ب) المان پیوسته در پوسته [۱۴]

۴-۸-۱ انتخاب المان در پوسته ها

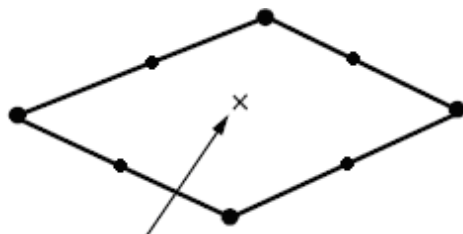
برای المان بندی دو نوع المان خطی و غیر خطی وجود دارد. المان خطی S4R، و المان های غیر خطی که در این جا استفاده شده است S8R و S8R5 هستند.

المان S4R: این المان یک المان چهار گره ای به شکل مربع است که گره ها بر روی چهار گوش مربع قرار گرفته است. این المان هم برای پوسته های با ضخامت زیاد و هم برای پوسته های نازک مورد استفاده قرار می گیرد و این قابلیت را دارد که با افزایش ضخامت، تغییر شکلهای برشی را محاسبه کند. همچنین این المان در مواردی استفاده می شود که کرنش های غشایی محدود است و چرخش ها می توانند تا حد دلخواهی بزرگ باشند. بنابراین برای تحلیل تنش های بزرگ مناسب می باشد.



شکل ۴-۵- یک نمونه المان S4R [۱۴]

المان S8R5: این المان یک المان هشت گره‌ای، با پنج درجه آزادی که شامل سه جابجایی در سه جهت محورهای مختصات و دو چرخش برای هر گره است. هشت گره طوری است که چهار گره آن روی راس‌های چهار گوش، و چهار گره دیگر در وسط اضلاع چهار گوش قرار گرفته است به صورتی که در شکل (۴-۶) نشان داده شده است. این المان برای المان بندی پوسته‌های نازک بسیار مناسب می‌باشد. لذا تمامی تحلیل‌ها با این المان انجام شده است.

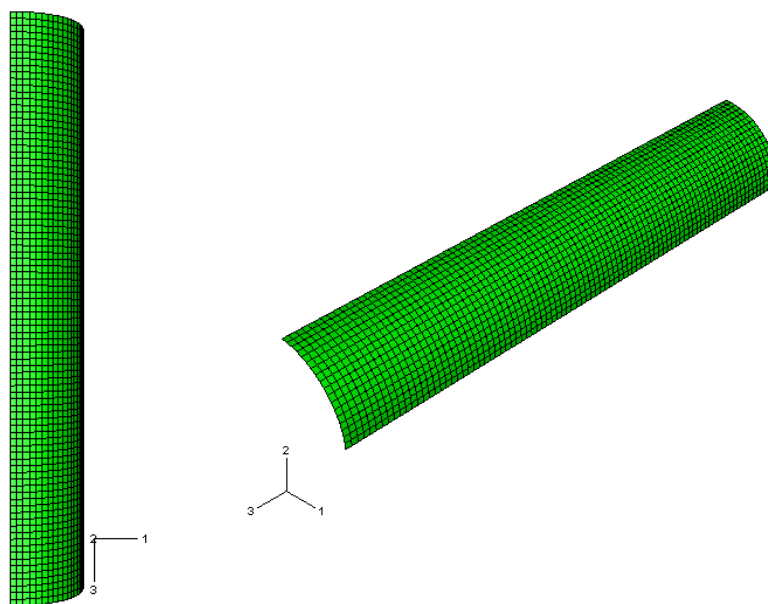


شکل ۴-۶- یک نمونه المان S8R5 [۱۴]

المان S8R: این المان یک المان هشت گره‌ای، با شش درجه آزادی که سه جابجایی و سه چرخش برای هر گره است. این المان برای المان بندی پوسته‌های نسبتاً ضخیم استفاده می‌شود. در این المان اثر تنش برشی در نظر گرفته شده است.

۴-۹- تعیین نوع تحلیل

تعریف حلگر مسئله در محیط Step انجام می‌شود. برای تحلیل مسئله کمانش در نرم افزار ABAQUS باید یک نوع تحلیل انجام شود. این تحلیل Buckle نامیده شده است. در شکل (۴-۷) یک نمونه المان بندی شده دیده می‌شود که به خاطر عدم وجود سوراخ در پانل استوانه‌ای کل پانل به طور یکدست المان بندی شده است و تعداد المان‌ها تاثیر خیلی زیادی بر روی نتایج ندارد. برای تمامی تحلیل‌ها تعداد المان‌ها بین ۱۵۰۰ تا ۲۵۰۰ در نظر گرفته شده است.



شکل ۴-۷- یک نمونه المان بندی شده

۴-۱۰- تحلیل Buckle

این فرایند حل، یک تحلیل خطی مقدار ویژه است و برای بدست آوردن مقادیر ویژه کمانش برای سازه‌های الاستیک و سفت^۱ مورد استفاده قرار می‌گیرد و می‌تواند بار بحرانی، و شکل مدهای کمانش را بدست می‌دهد [۱۴].

در یک مسئله مقدار ویژه کمانش هدف محاسبه بارهایی است که در این بارها ماتریس سفتی مدل تکین شود. بنابراین عبارت:

$$K^{MN} v^M = 0 \quad (۵-۴)$$

حلهای غیر صفر خواهد داشت. وقتی بار اعمال می‌شود، K^{MN} ماتریس سفتی مماسی است و v^M جابجایی‌های مخالف صفر هستند. بارهای اعمال شده می‌توانند شامل فشار، نیروهای متمرکز، جابجایی‌های غیر صفر معین و یا بارگذاری حرارتی باشند. فرمول بندی مسئله مقدار ویژه به صورت زیر است:

$$(K_0^{NM} + \lambda_i K_{\Delta}^{NM}) v_i^M = 0 \quad (۶-۴)$$

^۱ Stiff

که در این رابطه K_0^{NM} ماتریس سفتی مربوط به حالت اولیه و شامل تاثیرات پیش بارها است. K_{Δ}^{NM} ماتریس سفتی دیفرانسیلی بار و تنش اولیه ناشی از الگوی بارگذاری افزایشی است. λ_i مقادیر ویژه هستند و v_i^M شکل مدهای کمانش (بردارهای ویژه) هستند. M و N مربوط به درجات آزادی کل مدل و i مشخص کننده مد کمانش i ام است.

بنابراین یک تحلیل خطی (مقدار ویژه) انجام شد تا شکل مدهای ابتدایی که مقدار ویژه کمتری دارند بدست آیند؛ زیرا کمانش معمولاً در این مدها اتفاق می‌افتد. برای این منظور از روش حل گر Subspace در مقایسه با حل گر Lancsoz استفاده شد. زیرا حل گر Lancsoz نمی‌تواند برای آنالیزهای کمانش که در آن‌ها از المان‌های تماسی^۱، المان‌های هیبریدی، المان‌های کوپل شده و یا المان‌هایی که تحت پیش بار^۲ قرار دارند، استفاده شود.

مقدار بار اعمالی در قسمت Load که در بخش (۷-۴) بیان شد، در تمامی حالات برابر با یک در نظر گرفته شده است که در نهایت به عنوان یک ضریب در مقدار ویژه خطی ضرب می‌شود و بار کمانش بحرانی را می‌دهد. نیروی اعمالی بر روی لبه پانل استوانه‌ای از ضرب کردن محیط لبه خمیده پانل P که بار بر روی آن اعمال شده و در شکل (۳-۴) نشان داده شده است، در بار بحرانی به دست می‌آید.

$$F = N_x \times P \quad (7-4)$$

که محیط لبه خمیده پانل در حالت $\beta = \pi/2$ برابر با $P = \pi/2 \times R$ است. هم‌چنین تنش بحرانی از تقسیم بار بحرانی N_x در جهت محوری بر ضخامت پوسته جدار نازک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{N_x}{t} \quad (8-4)$$

در نهایت تنش بحرانی بی بعد از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{E} \quad (9-4)$$

¹ Contact Elements

² Preload

۴-۱۱- نتایج تحلیل عددی پانل های استوانه‌ای با مقطع دایره ای تحت بار فشاری محوری

در این بخش نتایج تحلیل کمانش پانل های استوانه‌ای تحت بار فشاری محوری برای نمونه‌های مختلف ارائه شده است. هدف از انجام این تحلیل ها بررسی تاثیر پارامترهای طول، ضخامت، و زاویه تقسیمی پانل بر روی رفتار کمانش الاستیک پانل استوانه‌ای جدار نازک است. ابتدا با ترتیبی که در قسمت تحلیلی بیان شد تاثیر پارامتر k بر روی تنش های بحرانی بی بعد و بار بحرانی برای سه مود اول کمانش بررسی شده است.

۴-۱۱-۱- تاثیر تغییرات شعاع بر روی بار و تنش بحرانی برای دو حالت ۳ss-1free و ۲ss-2free

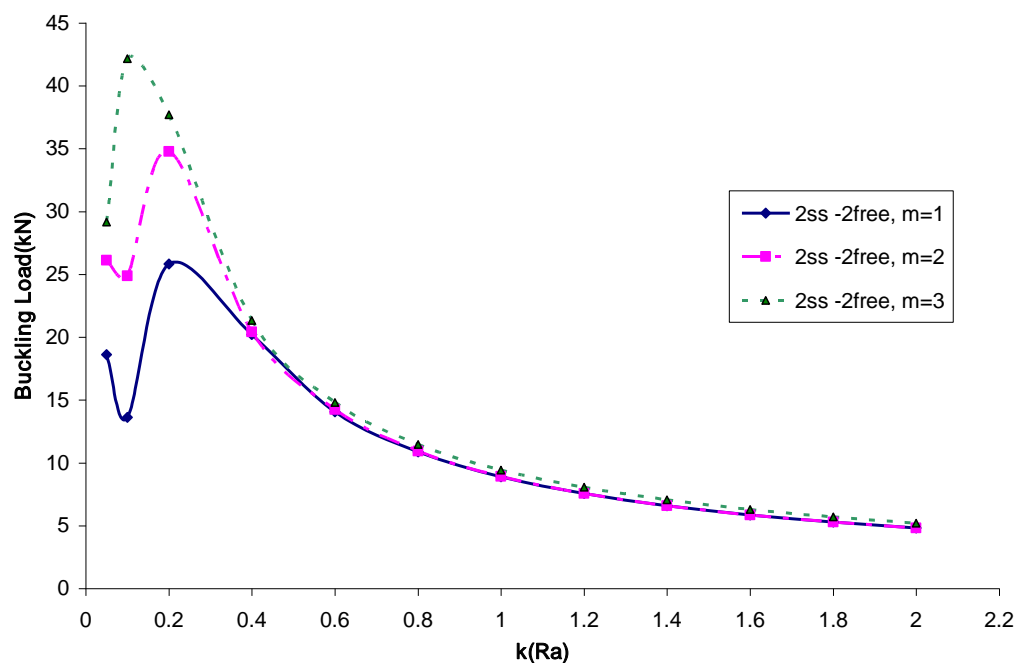
بررسی عددی اثر k بر روی بار کمانش در حالت دو لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد برای سه مود اول کمانش، بررسی شده است. مشخصات هندسی پانل که همراه با تغییرات شعاع است در جدول (۲-۴) آمده است. در این حالت تغییرات پارامتر k متناسب با تغییرات شعاع پانل برای یک طول ثابت می باشد. برای شعاع های کوچک تر در یک محدوده خاص بار بحرانی کمانش رو به افزایش است اما با افزایش پارامتر k و یا شعاع پانل، بار بحرانی رو به کاهش است. نتایج مربوط به این حالت در جدول (۳-۴) آمده است.

جدول ۲-۴- مشخصات هندسی پانل همراه با تغییرات شعاع

جنس پانل	فولاد
طول پانل	$L = 0.8m$
ضخامت پانل	$t = 0.5 \times 10^{-3} m$
زاویه مرکزی پانل	$\beta = \pi/2$

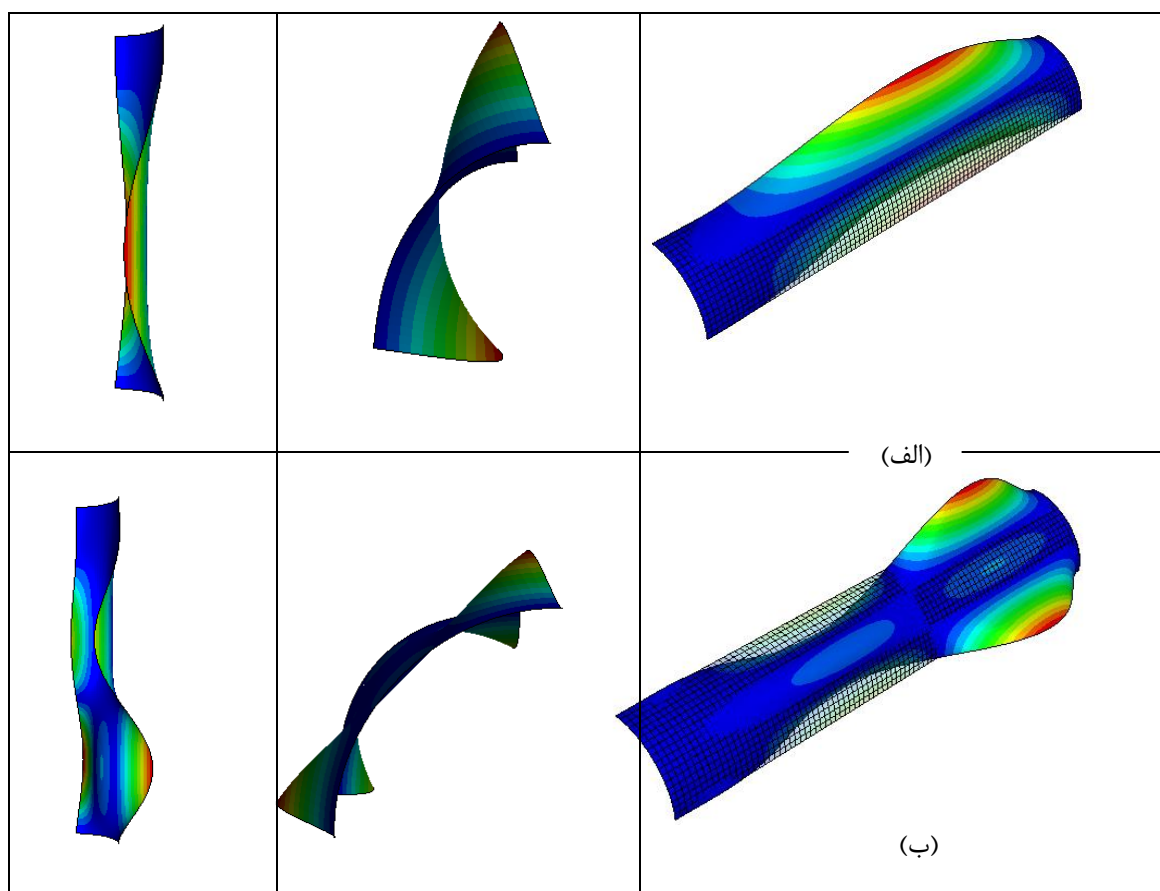
جدول ۴-۳- نتایج عددی بار کمانش بحرانی در حالت الاستیک تحت تاثیر پارامتر k برای سه مد اول کمانش برای پانل با دولبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

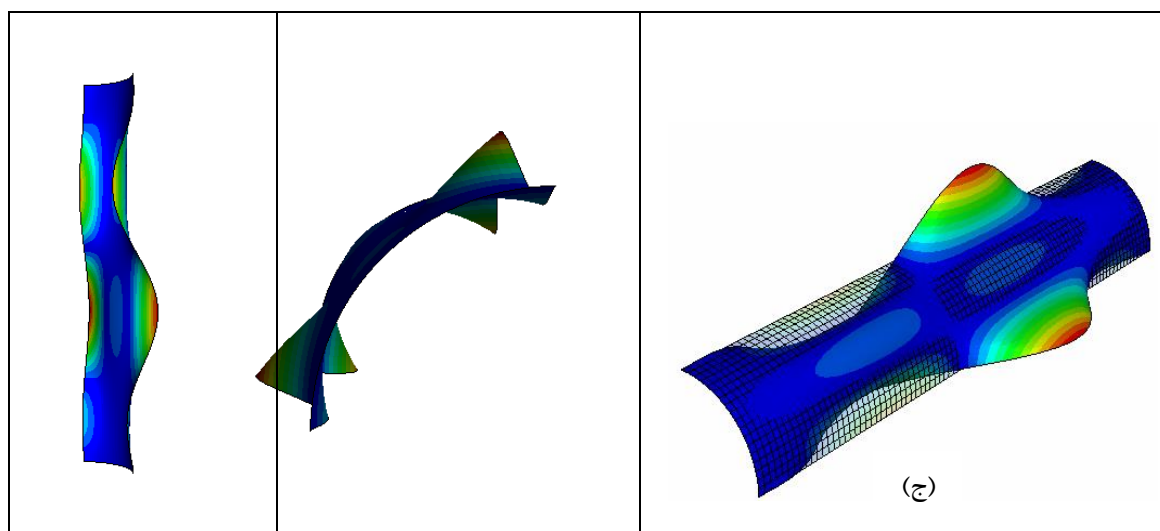
پارامتر $k(Ra)$	بار کمانش برای مد اول (N)	بار کمانش برای مد دوم (N)	بار کمانش برای مد سوم (N)
-----	2ss-2free	2ss-2free	2ss-2free
0.05	18618	26119	29157
0.1	13609	24864	42151
0.2	25828	34764	37692
0.4	20197	20425	21332
0.6	14079	14251	14803
0.8	10866	10938	11475
1	8899.1	8922.9	9434.6
1.2	7564.1	7569.5	8052.4
1.4	6595.7	6595.8	7050.2
1.6	5860	5860.7	6289
1.8	5283.2	5283.5	5690.2
2	4818.2	4818.2	5206.7



شکل ۴-۸- تغییرات بار کمانش بحرانی نسبت به پارامتر k برای سه مد اول کمانش پانلی با دو لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد

می توان نتیجه گرفت که با افزایش شعاع پانل برای یک طول ثابت، بار کمانش بحرانی در محدوده شعاع های کوچک افزایش پیدا می کند اما رفته رفته با افزایش شعاع بار بحرانی رو به کاهش است. مد های اول تا سوم کمانش مربوط به پانلی با دولبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد در شکل (۴-۸) نشان داده شده است. شکل (۴-۹-الف) مد اول کمانش الاستیک، شکل (۴-۹-ب) مد دوم کمانش الاستیک، شکل (۴-۹-ج) مد سوم کمانش الاستیک مربوط به نتایج جدول (۴-۳) می باشد.





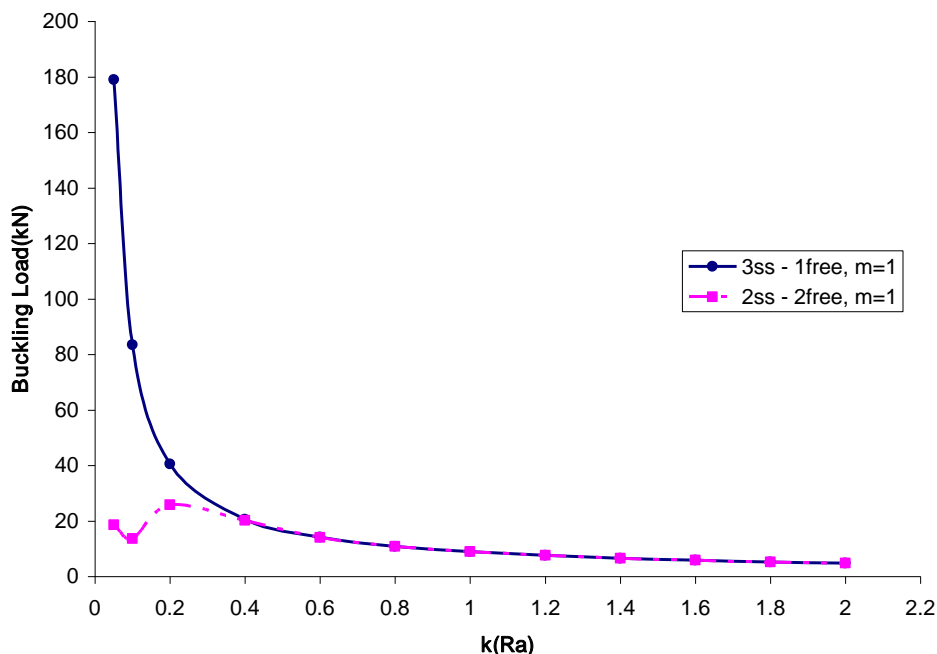
شکل ۴-۹- الف) و ب) و ج) سه مد اول کمانش الاستیک در پانل استوانه ای با دو لبه تکیه گاه ساده و دو لبه آزاد

نتایج مربوط به بار بحرانی بر حسب پارامتر k برای دو حالت شرط مرزی 2ss-2free و 3ss-1free در شکل (۴-۱۰) و داده های مربوط به آن در جدول (۴-۴) آمده است. مشخصات هندسی مربوط به این حالت مطابق با جدول (۴-۲) است. تغییرات پارامتر k بر حسب رادیان با تغییرات شعاع پانل نسبت مستقیم دارند. نتایج مربوط به مد اول کمانش است.

جدول ۴-۴- نتایج عددی بار کمانش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل های استوانه ای بر حسب پارامتر k برای مد اول

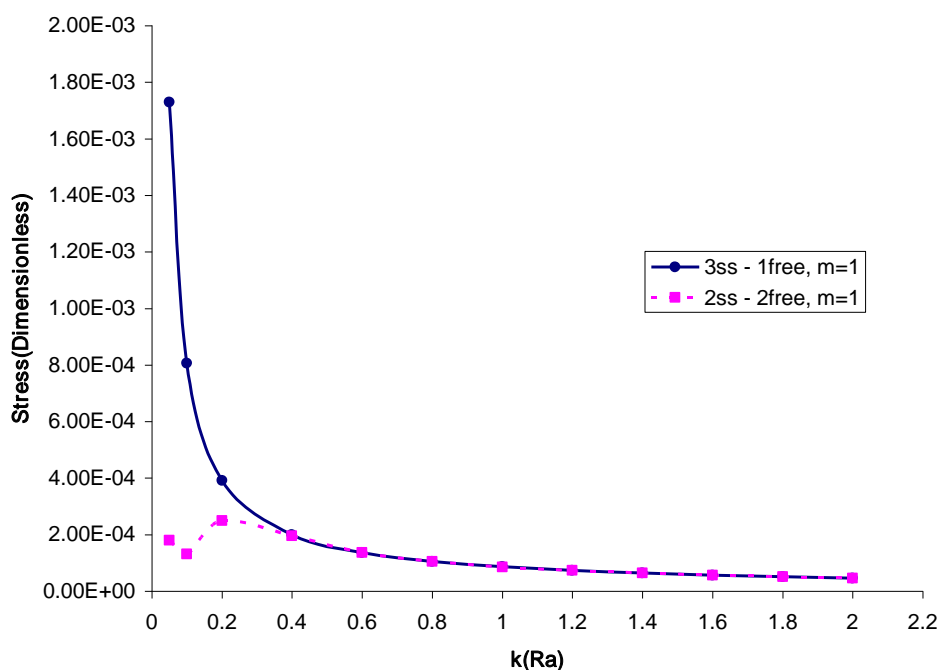
بار کمانش بحرانی در مد اول (N)		تنش بحرانی بی بعد در مد اول		پارامتر $k(Ra)$
2ss-free	3ss-1free	2ss-2free	3ss-1free	
18618	178962	180e-6	1729e-6	0.05
13609	83479	131e-6	807e-6	0.1
25828	40474	250e-6	391e-6	0.2
20197	20646	195.5e-6	199.4e-6	0.4
14079	14179	136.9e-6	136.9e-6	0.6
10866	10903	105.3e-6	105.3e-6	0.8
8899.1	8911.1	86e-6	86.0e-6	1
7564.1	7566.8	73.1e-6	73.1e-6	1.2
6595.7	6595.7	63.7e-6	63.7e-6	1.4

5860	5860.4	56.6e-6	56.6e-6	1.6
5283.2	5283.3	51.0e-6	51.0e-6	1.8
4818.2	4818.2	46.6e-6	46.5e-6	2



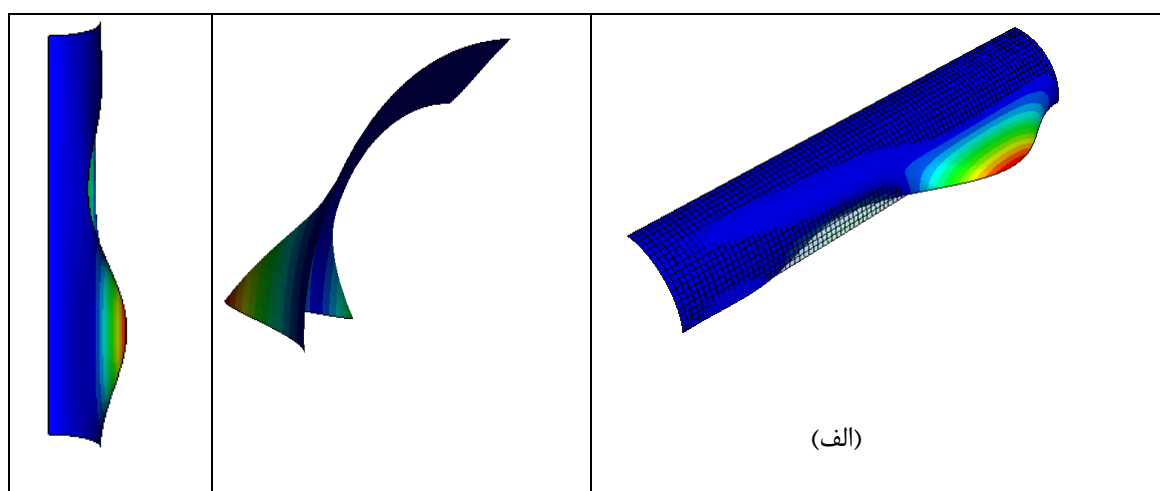
شکل ۴-۱۰- تغییرات بار کمانش بحرانی نسبت به پارامتر k برای مد اول کمانش مربوط به هر دو حالت شرط مرزی

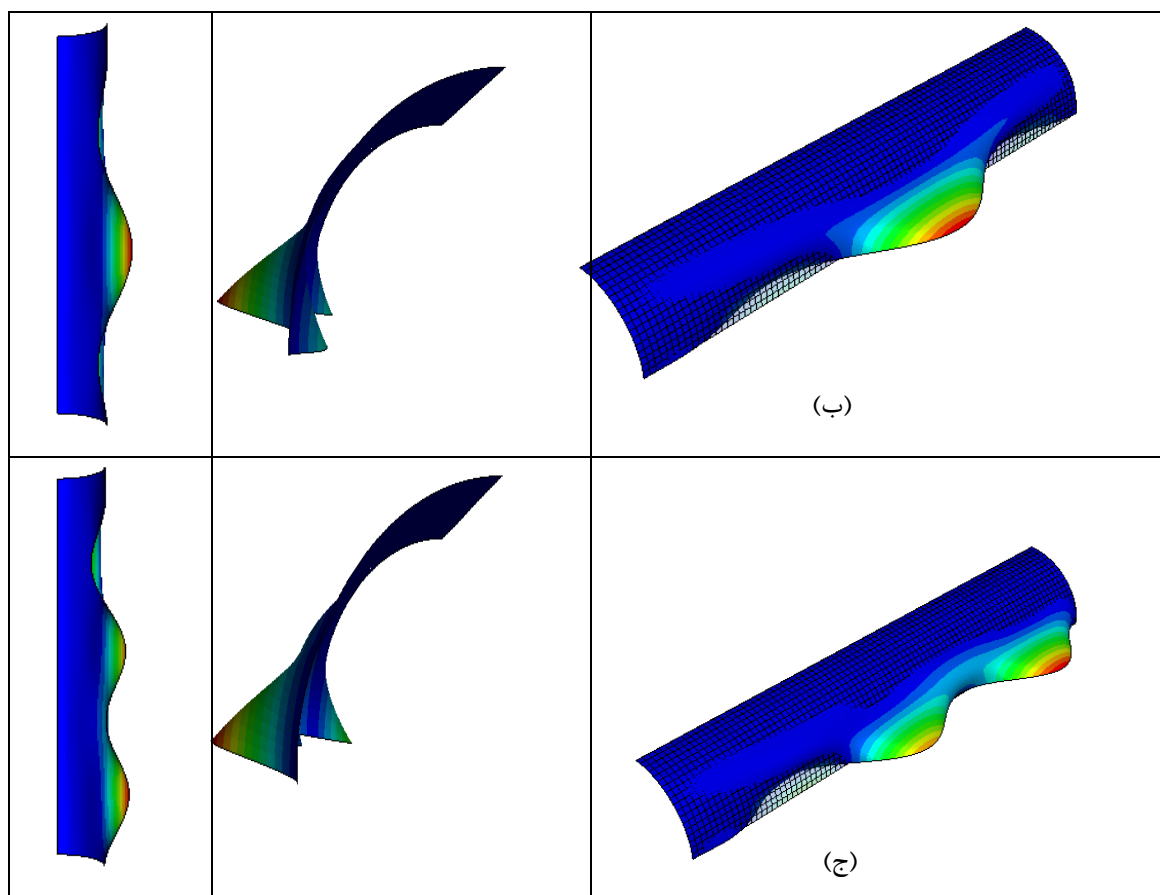
برای مقادیر کم k تا حدود $k = 0.4$ بین مقادیر بار و تنش بحرانی بی بعد برای مدهای اول تا سوم در دو حالت شرط مرزی اختلاف دیده می شود که رفته رفته با افزایش پارامتر k و یا افزایش شعاع پانل این تفاوت بسیار کاهش پیدا می کند تا حدی که در دو حالت شرط مرزی، نتایج بر هم منطبق شده است. در حقیقت برای شرط مرزی سه لبه دارای تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد مثل شرط مرزی قبلی با افزایش شعاع برای یک طول ثابت بار کمانش بحرانی رفته رفته کم می شود. نتایج عددی مربوط به تنش بحرانی بی بعد بر حسب پارامتر k برای دو حالت شرط مرزی در شکل (۴-۱۱) و جدول (۴-۴) آمده است.



شکل ۴-۱۱- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به پارامتر k برای مد اول کمانش مربوط به دو حالت شرط مرزی

مد های اول تا سوم کمانش، مربوط به پانلی با سه لبه دارای تکیه گاه ساده و یک لبه دیگر آزاد در حالت الاستیک در شکل (۴-۱۲) نشان داده شده است. شکل (۴-۱۲-الف) مد اول کمانش الاستیک، شکل (۴-۱۲-ب) مد دوم کمانش الاستیک، شکل (۴-۱۲-ج) مد سوم کمانش الاستیک مربوط به نتایج جدول (۴-۴) می باشد.





شکل ۴-۱۲- الف) و (ب) و (ج) سه مد اول کمانش الاستیک مربوط به پانل استوانه ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد

۴-۱۱-۲- تاثیر طول پوسته بر روی بار و تنش بحرانی برای دو حالت ۱free-۳ss و ۲free-۲ss

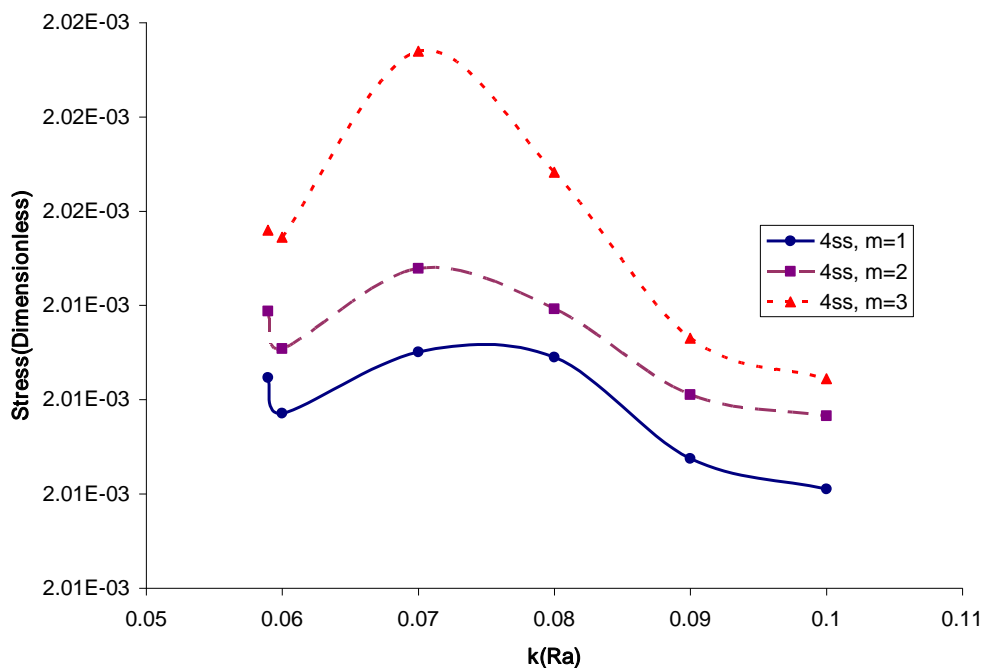
در این حالت تاثیر پارامتر k متناسب با تغییرات طول پانل، برای یک حالت شرط مرزی بررسی شده است که در آن چهار طرف پانل دارای تکیه گاه ساده است و شکل آن در قسمت (b) مربوط به شکل (۳-۴) آمده است. نتایج بدست آمده برای بار کمانش بحرانی در حدود ده برابر بیشتر از شرط مرزی سه لبه دارای تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد است. نتایج برای سه مد اول کمانش به دست آمده است. ضخامت پانل برابر با $0.5 \times 10^{-3} m$ می باشد. هم چنین مقادیر زاویه مرکزی پانل و شعاع در جدول (۴-۵) آمده است. نتایج تنش بحرانی بی بعد بر حسب پارامتر محدود k که با تغییر طول همراه است در شکل (۴-۱۳) و جدول (۴-۶) نشان داده شده است.

جدول ۴-۵- مشخصات هندسی پانل در حالت الاستیک

جنس پانل	فولاد
شعاع پانل	$R = 0.1513m$
ضخامت پانل	$t = 0.5 \times 10^{-3}m$
زاویه مرکزی پانل	$\beta = \pi/2$

جدول ۴-۶- نتایج تحلیل عددی بار کمانش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل های استوانه-ای با چهار لبه تکیه گاه ساده بر حسب پارامتر k برای مد اول

بار کمانش برای مد اول (N)	تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش	طول پانل $L(m)$	پارامتر $k(Ra)$
4ss	4ss	-----	-----
208290	20.12e-4	4.032	0.058
208212	20.12e-4	3.961	0.06
208347	20.13e-4	3.395	0.07
208335	20.13e-4	2.970	0.08
208113	20.11e-4	2.640	0.09
208046	20.10e-4	2.376	0.1



شکل ۴-۱۳- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به پارامتر k برای سه مد اول کمانش مربوط به پانلی با چهار لبه تکیه گاه ساده

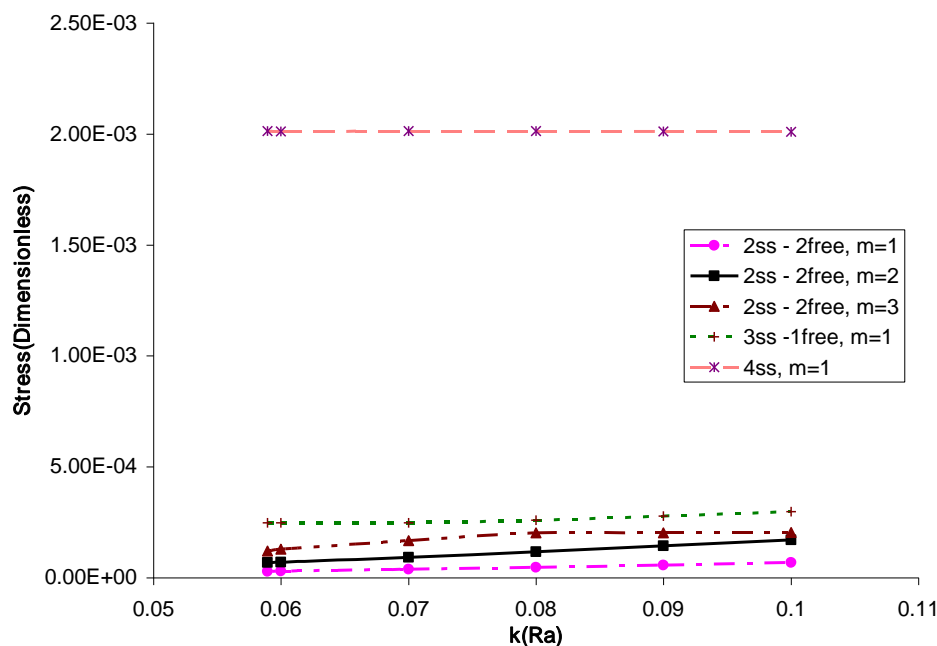
نتایج بار بحرانی بر حسب پارامتر k با محدوده کمتر، برای سه حالت شرط مرزی در شکل (۴-۴) (۱۴) و داده های مربوط به آن در جدول های (۴-۶) و (۴-۸) آمده است. تغییرات پارامتر k با تغییرات طول پانل نسبت عکس دارند. به علت تشابه نتایج مد های دوم و سوم در شرط مرزی سه لبه با تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد، فقط نتایج مربوط به مد اول کمانش بررسی شده است. مقادیر پارامترهای هندسی برای این حالت به صورت جدول (۴-۷) است. در این وضعیت با افزایش k یا همان کاهش طول پانل، بار کمانش بحرانی در این محدوده طولی، رو به افزایش است.

جدول ۴-۷- مشخصات هندسی پانل در حالت الاستیک

جنس پانل	فولاد
شعاع پانل	$R = 0.1513m$
ضخامت پانل	$t = 0.5 \times 10^{-3} m$
زاویه مرکزی پانل	$\beta = \pi / 2$

جدول ۴-۸- نتایج تحلیل عددی بار کمانش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل های استوانه-ای با دو و سه لبه تکیه گاه ساده بر حسب پارامتر k برای مد اول

بار کمانش برای مد اول (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش		طول پانل $L(m)$	پارامتر $k(Ra)$
3ss -1free	2ss-2free	3ss -1free	2ss-2free	-----	-----
25616	2922.1	24.7e-5	28.2e-6	4.032	0.058
25586	3089.3	24.7e-5	29.8e-6	3.961	0.06
25653	3926,0	24.8e-5	37.9e-6	3.395	0.07
26791	4877.6	25.9e-5	47.1e-6	2.970	0.08
28711	5948.5	27.7e-5	57.4e-6	2.640	0.09
30761	7133.6	29.7e-5	68.9e-6	2.376	0.10



شکل ۴-۱۴- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به پارامتر k برای سه مد اول کمانش مربوط به پانلی با دو، سه و چهار لبه تکیه گاه ساده

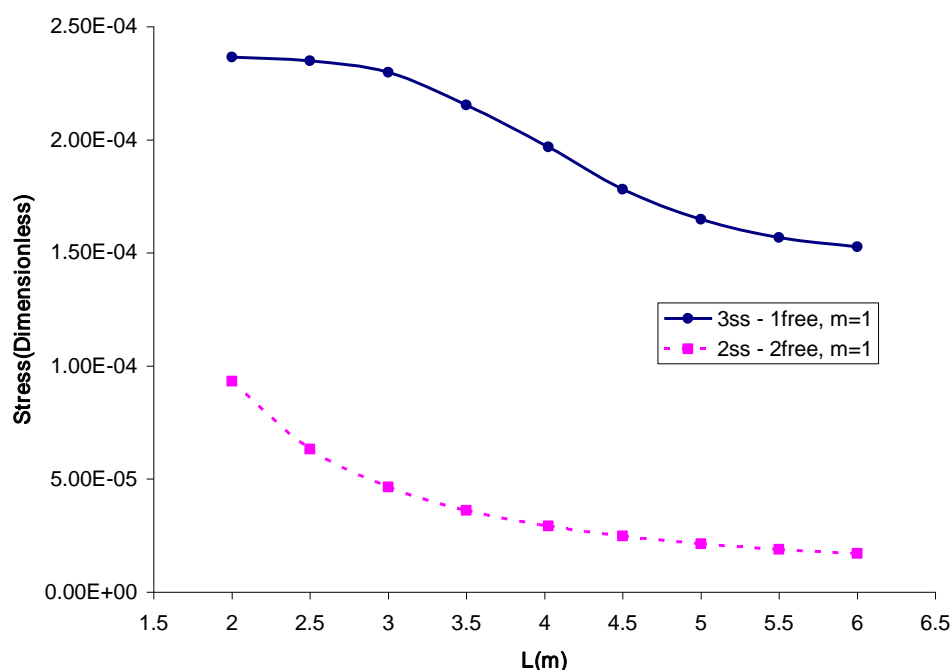
شکل (۴-۱۴) نشان می دهد که با افزایش قید لبه ها از حالت سه لبه به چهار لبه با تکیه گاه ساده، تنش بحرانی بی بعد در حدود ده برابر افزایش می یابد.

حالت بعدی، بررسی عددی تاثیرات طول پانل به صورت پارامتر L بر روی تنش های بحرانی بی بعد می باشد. تنش بحرانی بی بعد بر حسب طول پانل استوانه ای با مقادیر مربوط به جدول (۴-۹) در شکل (۴-۱۵) با دو حالت شرط مرزی، یعنی دو تکیه گاه ساده در دو انتهای پانل و دو لبه آزاد و سه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد بررسی شده است. شکل های (۴-۱۵) و (۴-۱۶) و (۴-۱۷)، برای سه مد اول کمانش در نظر گرفته شده است. با پیشروی در مد های کمانش، سطح تنش بحرانی بی بعد افزایش می یابد. از آن جا که طبق روابط (۴-۷) تا (۴-۹) بار، تنش بحرانی، تنش بحرانی بی بعد و نیروی اعمالی بر لبه پوسته با یکدیگر رابطه مستقیم دارد، در این جا فقط تنش بحرانی بی بعد برای سه مد اول بررسی شده است. نتایج مربوط به حالت دو لبه خمیده گیردار و دو لبه دیگر آزاد بسیار به حالت دو لبه خمیده دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد نزدیک است که در شکل نشان داده نشده است. مقادیر پارامترهای هندسی برای این حالت به صورت جدول (۴-۷) است. تاثیر طول پانل

بر روی بار کمانش بحرانی در مقایسه با تاثیرات شعاع و ضخامت کمتر می باشد و با افزایش آن مثل قبل، بار کمانش رو به کاهش است.

جدول ۴-۹- نتایج تحلیل عددی بار کمانش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل های استوانه- ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب طول پانل برای مد اول کمانش

بار کمانش برای مد اول (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد اول		طول پانل $L(m)$	نسبت طول به شعاع (L_0 / R)
2SS-2free	3SS-1free	2SS-2free	3SS-1free	-----	
9643.4	24487	93.2e-6	23.7e-5	2	13.21
6534.5	24306	63.1e-6	23.5e-5	2.5	16.52
4803.5	23791	46.4e-6	23.0e-5	3	19.82
3741.4	22296	36.1e-6	21.5e-5	3.5	23.13
3016.7	20378	29.1e-6	19.7e-5	4	26.60
2560.3	18427	24.7e-6	17.8e-5	4.5	29.74
2216.3	17054	21.4e-6	16.5e-5	5	33.04
1960.1	16221	18.9e-6	15.7e-5	5.5	36.35
1764	15801	17.0e-6	15.3e-5	6	39.65

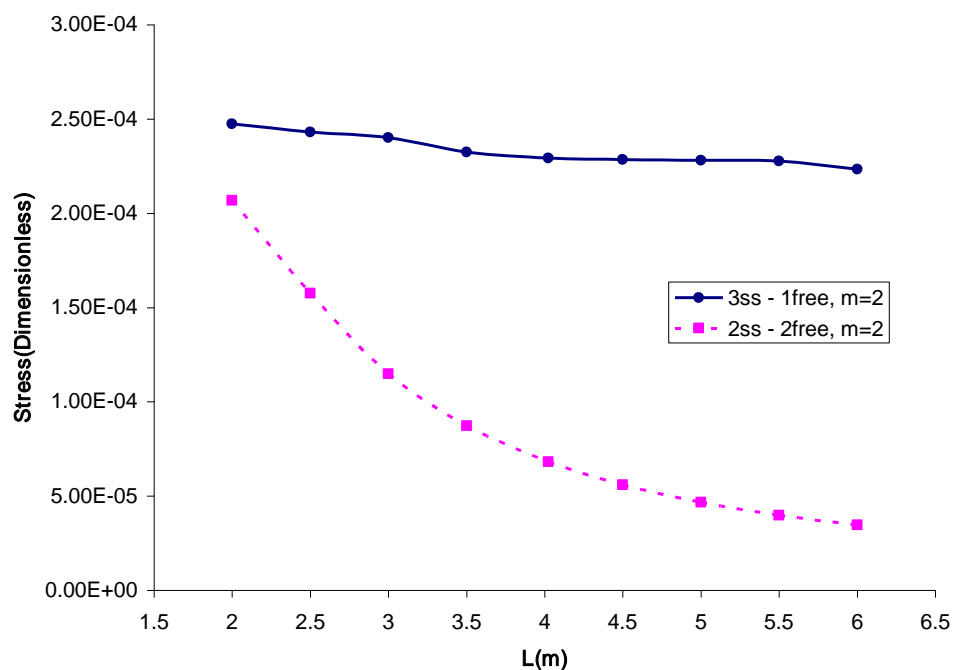


شکل ۴-۱۵- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد اول کمانش

تاثیر طول پانل بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد دوم کماتش در شکل (۴-۱۶) و نتایج آن در جدول (۴-۱۰) آمده است.

جدول ۴-۱۰- نتایج تحلیل عددی بار کماتش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل‌های استوانه-ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب طول پانل برای مد دوم کماتش

بار کماتش برای مد دوم (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد دوم		طول پانل $L(m)$	نسبت طول به شعاع (L_0 / R)
2ss-2free	3ss-1free	2ss-2free	3ss-1free	-----	
21406	25602	207e-6	247e-6	2	26.43
16303	25157	158e-6	243e-6	2.5	33.04
11892	24858	115e-6	240e-6	3	39.65
9038.8	24053	87.3e-6	232e-6	3.5	46.26
7050.7	23728	68.1e-6	229e-6	4	53.20
5789.3	23657	55.9e-6	229e-6	4.5	59.48
4834.8	23612	46.0e-6	228e-6	5	66.09
4124.1	23570	39.8e-6	228e-6	5.5	72.70
3581.1	23117	34.6e-6	223e-6	6	79.31

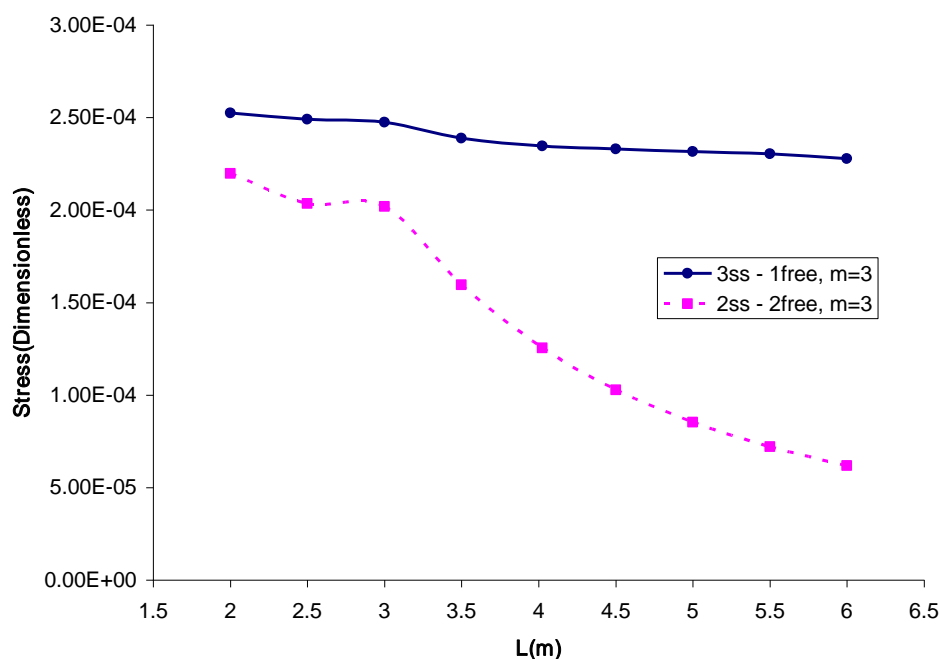


شکل ۴-۱۶- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد دوم کماتش

تاثیر طول پانل بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد سوم کمانش در شکل (۴-۱۷) و نتایج آن در جدول (۴-۱۱) آمده است.

جدول ۴-۱۱- نتایج تحلیل عددی بار کمانش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل‌های استوانه-ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب طول پانل برای مد سوم کمانش

بار کمانش برای مد سوم (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد سوم		طول پانل $L(m)$	نسبت طول به شعاع (L_0 / R)
2SS-2free	3SS-1free	2SS-2free	3SS-1free	-----	
22737	2613	22.0e-5	25.0e-5	2	39.65
21063	2577	20.4e-5	24.0e-5	2.5	49.57
20896	2560	20.2e-5	24.0e-5	3	59.48
16513	24725	16.0e-5	23.9e-5	3.5	69.39
12984	24285	12.5e-5	23.5e-5	4	79.80
10641	24107	10.3e-5	23.3e-5	4.5	89.22
8826.7	23965	8.5e-5	23.2e-5	5	99.14
7456.9	23841	7.2e-5	23.0e-5	5.5	109.05
6401.4	23583	6.1e-5	22.8e-5	6	118.96

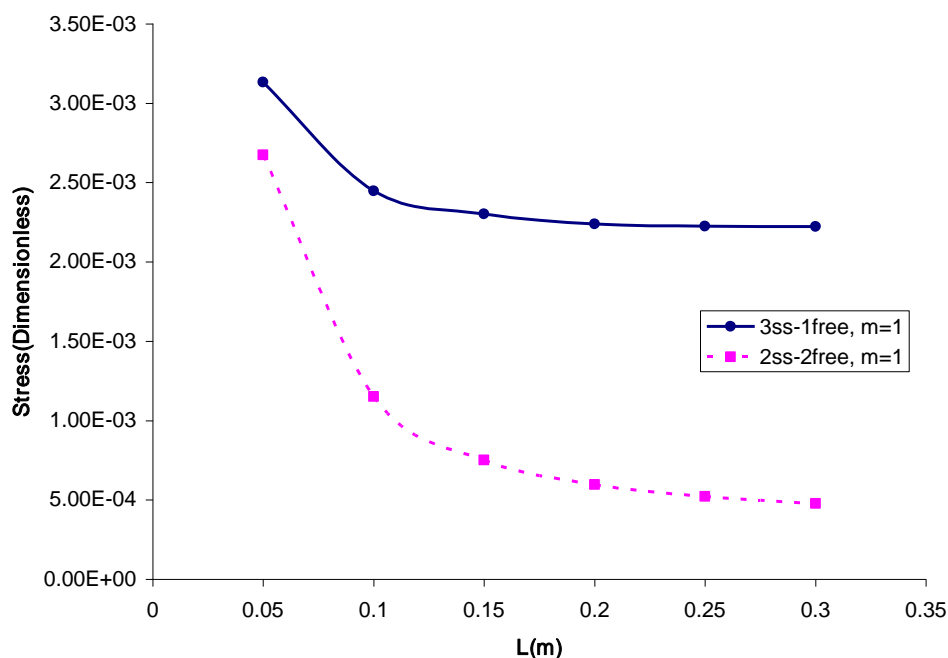


شکل ۴-۱۷- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد سوم کمانش

هم چنین تاثیر طول پانل در یک محدوده طولی کمتر بر روی تنش بحرانی بی بعد، برای سه مد اول کمانش انجام شده است. ابتدا تنش بحرانی بی بعد $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{E}$ با شرایط موجود در جدول (۴-۱۲) نسبت به L ، در شکل (۴-۱۸) نشان داده شده است. مشخصات هندسی پانل مانند جدول (۳-۶) است. مثل حالت قبل با افزایش طول پانل در این محدوده طولی، تنش بحرانی بی بعد رو به کاهش است.

جدول ۴-۱۲- نتایج تحلیل عددی بار کمانش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل های استوانه-ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب طول پانل برای مد اول کمانش

بار کمانش برای مد اول (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد اول		طول پانل $L(m)$	نسبت طول به شعاع (L_0 / R)
2ss-2free	3ss-1free	2ss-2free	3ss-1free	-----	-----
276665	۳۲۴۳۱۶,۲	2.67e-3	3.13e-3	۰,۰۵	۲,۵
119134	۲۵۳۲۳۰,۳	1.15e-3	2.44e-3	۰,۱	۵
77824	۲۳۸۲۸۴,۹	0.75e-3	2.30e-3	۰,۱۵	۷,۵
61828	۲۳۱۶۲۹,۹	0.60e-3	2.24e-3	۰,۲	۱۰
53949	۲۳۰۳۵۴,۸	0.52e-3	2.23e-3	۰,۲۵	۱۲,۵
49459	۲۳۰۰۲۰,۵	0.47e-3	2.22e-3	۰,۳	۱۵

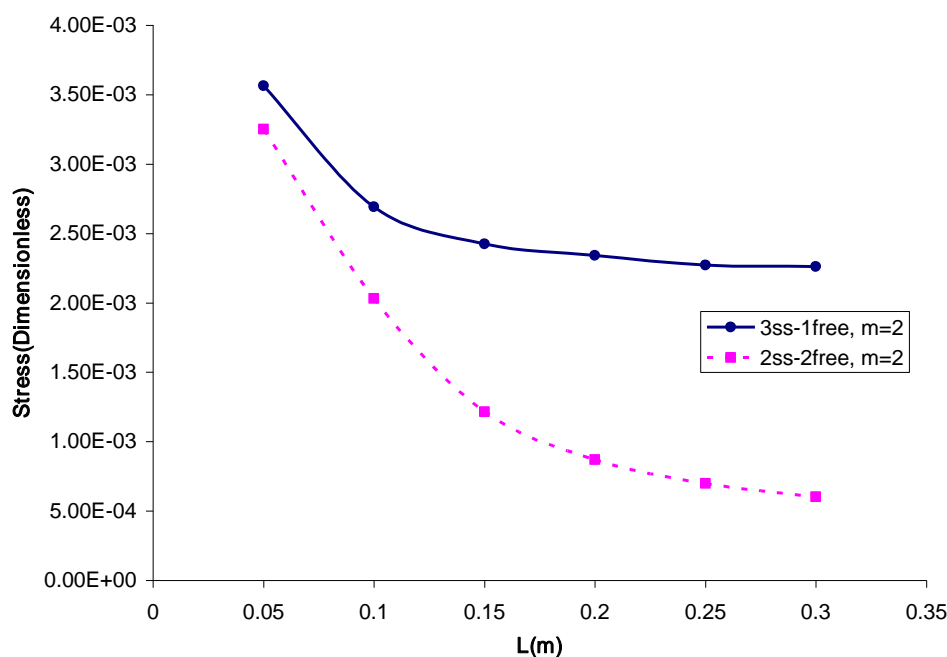


شکل ۴-۱۸- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل با محدوده طولی کمتر برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد اول کمانش

تأثیر طول پانل بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد دوم کمانش در شکل (۴-۱۹) و نتایج آن در جدول (۴-۱۳) آمده است. مشخصات هندسی برای این حالت مشابه جدول (۳-۶) می باشد.

جدول ۴-۱۳- نتایج تحلیل عددی بار کمانش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل‌های استوانه‌ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب طول پانل برای مد دوم کمانش

بار کمانش برای مد دوم (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد دوم		طول پانل $L(m)$	نسبت طول به شعاع (L_0 / R)
2ss-2free	3ss-1free	2ss-2free	3ss-1free	-----	-----
336488	۳۶۸۷۹۹,۵	3.25e-3	3.56e-3	۰,۰۵	۲,۵
210074	۲۷۸۷۱۱,۰	2.03e-3	2.69e-3	۰,۱	۵
125674	۲۵۰۸۰۵,۳	1.21e-3	2.42e-3	۰,۱۵	۷,۵
90021	۲۴۲۲۶۰,۴	0.87e-3	2.34e-3	۰,۲	۱۰
72379	۲۳۵۱۰۲,۳	0.69e-3	2.27e-3	۰,۲۵	۱۲,۵
62445	۲۳۴۱۱۱,۸	0.60e-3	2.26e-3	۰,۳	۱۵

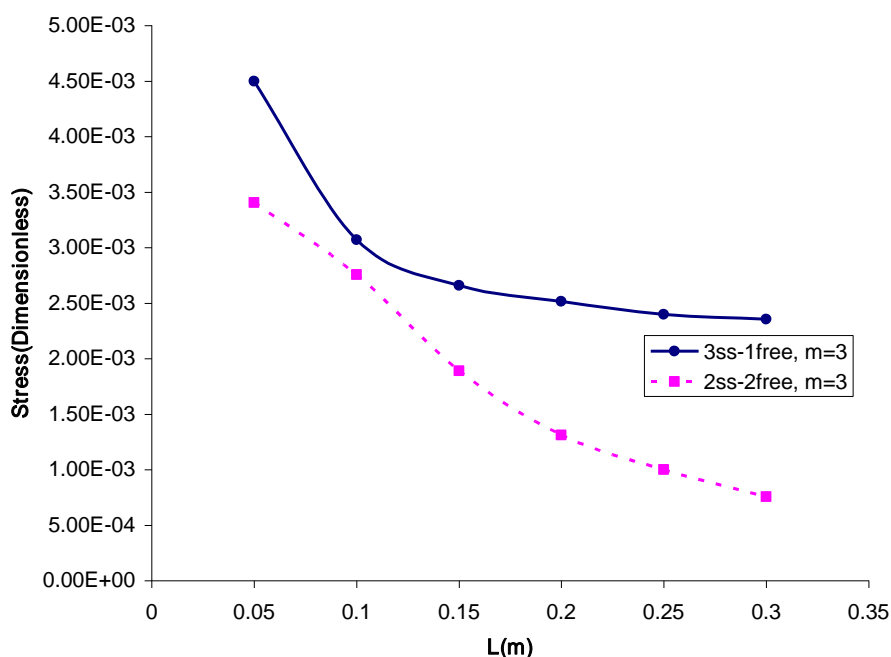


شکل ۴-۱۹- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل با محدوده طولی کمتر برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد دوم کمانش

تاثیر طول پانل بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد سوم کمانش در شکل (۴-۲۰) و نتایج آن در جدول (۴-۱۴) آمده است. مشخصات هندسی برای این حالت نیز مشابه جدول (۳-۶) می باشد.

جدول ۴-۱۴- نتایج تحلیل عددی بار کمانش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل های استوانه ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب طول پانل برای مد سوم کمانش

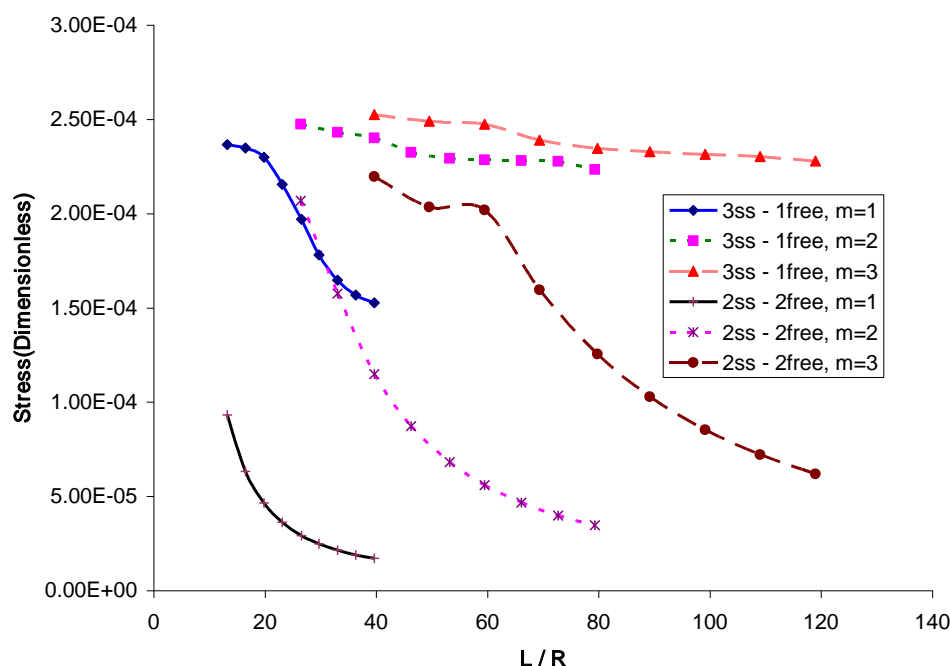
بار کمانش برای مد دوم (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد دوم		طول پانل $L(m)$	نسبت طول به شعاع (L_0 / R)
2ss-2free	3ss-1free	2ss-2free	3ss-1free	-----	-----
352402	۴۶۵۶۳۲,۰	3.40e-3	4.49e-3	۰,۰۵	۲,۵
285223	۳۱۷۸۶۰,۹	2.76e-3	3.07e-3	۰,۱	۵
195510	۲۷۵۰۴۲,۹	1.89e-3	2.65e-3	۰,۱۵	۷,۵
135615	۲۶۰۱۴۶,۹	1.31e-3	2.51e-3	۰,۲	۱۰
103498	۲۴۸۳۳۵,۹	1.00e-3	2.40e-3	۰,۲۵	۱۲,۵
78223	۲۴۳۸۴۷,۹	0.76e-3	2.36e-3	۰,۳	۱۵



شکل ۴-۲۰- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل با محدوده طولی کمتر برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد سوم کمانش

۳-۱۱-۴- تاثیر نسبت طول پانل به شعاع بر بار و تنش بحرانی برای دو حالت ۲ss-۲free و ۳ss-۱free

در این حالت بررسی عددی تغییرات نسبت طول پانل استوانه‌ای به شعاع آن بر روی تنش بحرانی بی بعد انجام گرفته است. تنش بحرانی بی بعد نسبت به L/R که بی بعد می باشد، برای سه مد اول کمانش، در شکل (۴-۲۱) نشان داده شده است. نتایج مربوط به آن در جدول های (۴-۹) تا (۴-۱۱) آمده است. مقادیر پارامترهای هندسی برای این حالت به صورت جدول (۴-۷) است.



شکل ۴-۲۱- تغییرات تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت طول پانل به شعاع آن برای دو حالت شرط مرزی مربوط به سه مد اول کمانش

۴-۱۱-۴- تاثیر ضخامت پانل بر روی بار و تنش بحرانی برای دو حالت ۲ss-۲free و ۳ss-۱free

در این جا بررسی تحلیلی تغییرات ضخامت پوسته بر روی تنش بحرانی بی بعد انجام گرفته است که نشان می دهد با افزایش ضخامت پوسته، بار، تنش بحرانی بر حسب پاسکال و یا تنش بحرانی بی بعد افزایش می یابد. این نتایج برای سه مد اول کمانش در دو حالت شرط مرزی نشان داده شده است. افزایش در ضخامت پانل تاثیر چشمگیری در تنش های بحرانی بی بعد، دارد. این تاثیر برای شرط مرزی سه لبه پانل با تکیه گاه ساده، نسبت به حالت دو لبه با تکیه گاه ساده بیشتر است.

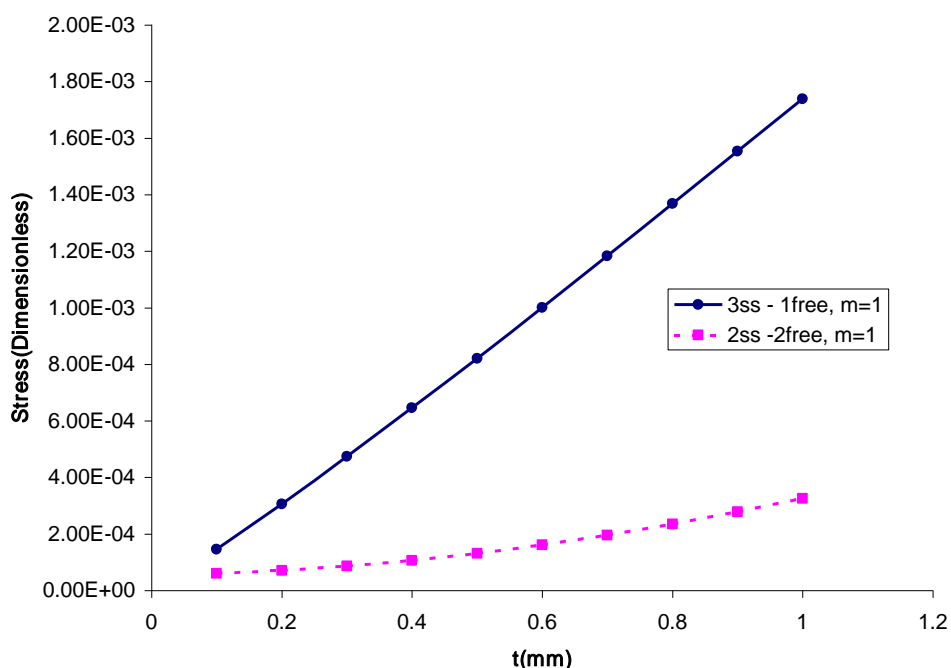
مقادیر پارامترهای هندسی برای این حالت به صورت جدول (۴-۱۵) است. تاثیر ضخامت پانل بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کماتش در شکل (۴-۲۲) و نتایج آن در جدول (۴-۱۶) آمده است.

جدول ۴-۱۵- مقادیر هندسی پانل در حالت الاستیک

جنس پانل	فولاد
شعاع پانل	$R = 0.05m$
طول پانل	$L = 0.8m$
زاویه مرکزی	$\beta = \pi/2$

جدول ۴-۱۶- نتایج تحلیل عددی بار کماتش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل‌های استوانه‌ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب ضخامت پانل برای مد اول کماتش

بار کماتش برای مد اول (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد اول		ضخامت پانل $t(mm)$
3ss-1free	2ss-2free	3ss-1free	2ss-2free	-----
3028.8	1246.4	14.6e-5	6.02e-5	0.1
12652	2937.1	30.6e-5	7.09e-5	0.2
29438	5357.7	47.4e-5	8.63e-5	0.3
53470	8818.5	6.46e-5	10.7e-5	0.4
85005	13613	82.1e-5	13.2e-5	0.5
124305	20027	100.1e-5	16.1e-5	0.6
171490	28341	118.4e-5	19.6e-5	0.7
226542	38833	136.8e-5	23.4e-5	0.8
289346	51779	155.3e-5	27.8e-5	0.9
359775	67459	173.8e-5	32.6e-5	1.0

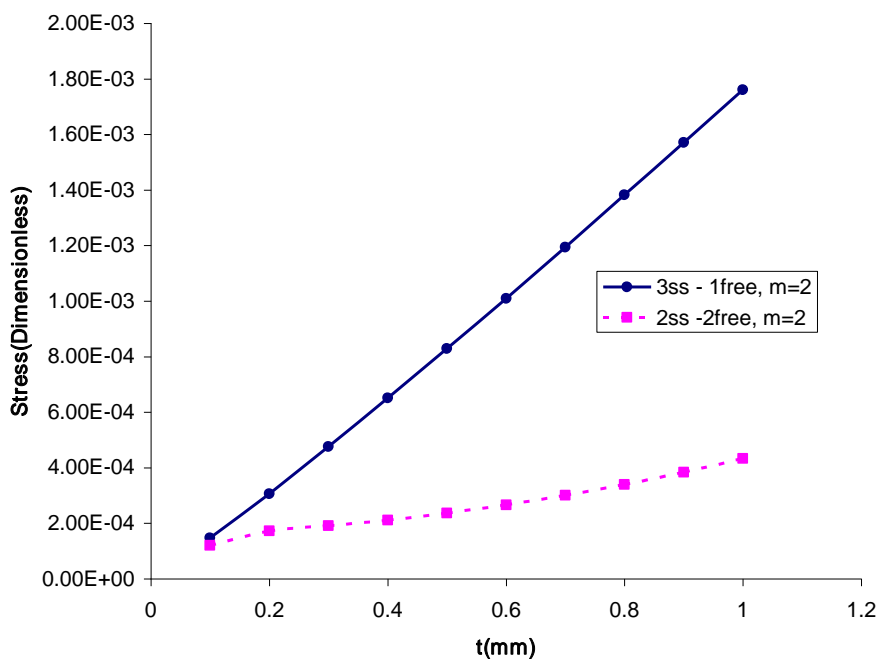


شکل ۴-۲۲- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به ضخامت پانل برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد اول کماتش

تاثیر ضخامت پانل بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد دوم کماتش در شکل (۴-۲۳) و نتایج آن در جدول (۴-۱۷) آمده است. مقادیر پارامترهای هندسی برای این حالت به صورت جدول (۴-۱۵) است.

جدول ۴-۱۷- نتایج تحلیل عددی بار کماتش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل‌های استوانه‌ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب ضخامت پانل برای مد دوم کماتش

بار کماتش برای مد دوم (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد دوم		ضخامت پانل t(mm)
3SS-1free	2SS-2free	3SS-1free	2SS-2free	-----
3044.6	2486	14.7e-5	12.0e-5	0.1
12700	7166.1	30.7e-5	17.3e-5	0.2
29587	11859	47.6e-5	19.1e-5	0.3
53904	17515	65.1e-5	21.2e-5	0.4
85762	24475	82.9e-5	23.6e-5	0.5
125418	33057	101.0e-5	26.6e-5	0.6
173070	43568	119.4e-5	30.1e-5	0.7
228821	56309	138.2e-5	34.0e-5	0.8
292679	71576	157.1e-5	38.4e-5	0.9
364589	89664	176.1e-5	43.3e-5	1.0

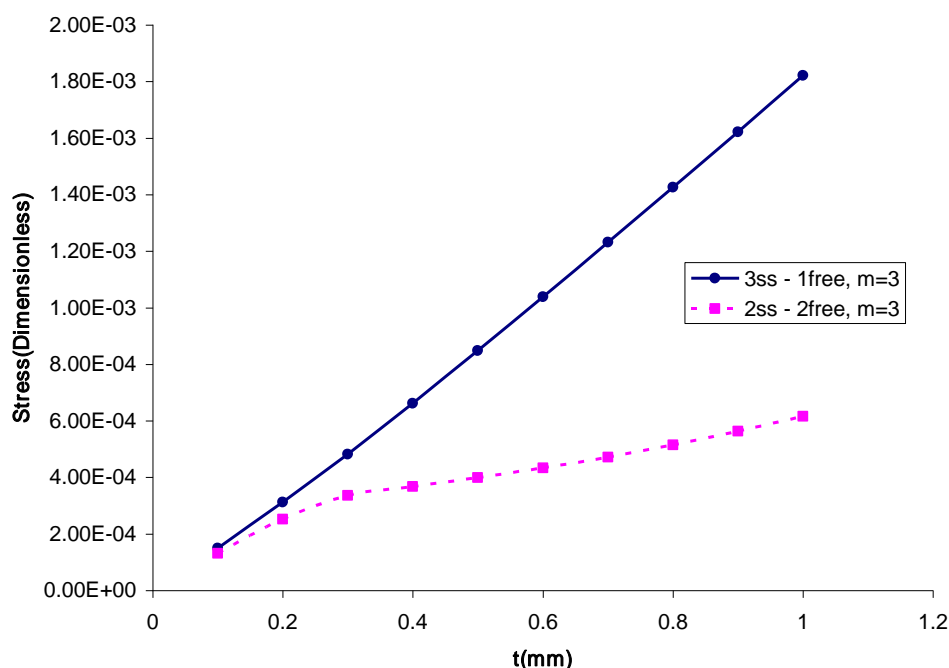


شکل ۴-۲۳- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به ضخامت پانل برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد دوم کماتش

هم چنین تاثیر ضخامت پانل بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد سوم کماتش در شکل (۴-۲۴) و نتایج آن در جدول (۴-۱۸) آمده است. مقادیر پارامترهای هندسی برای این حالت به صورت جدول (۴-۱۵) است.

جدول ۴-۱۸- نتایج تحلیل عددی بار کماتش و تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل‌های استوانه‌ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب ضخامت پانل برای مد سوم کماتش

بار کماتش برای مد سوم (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد سوم		ضخامت پانل t(mm)
3SS-1free	2SS-2free	3SS-1free	2SS-2free	-----
3095.1	2711.4	15.0e-5	13.1e-5	0.1
12917	10418	31.2e-5	25.2e-5	0.2
29912	20898	48.2e-5	33.7e-5	0.3
54798	30451	66.2e-5	36.8e-5	0.4
87841	41290	84.9e-5	39.9e-5	0.5
129066	53811	103.9e-5	43.3e-5	0.6
178473	68363	123.2e-5	47.2e-5	0.7
236142	85275	142.6e-5	51.5e-5	0.8
302261	104863	162.2e-5	56.3e-5	0.9
377076	127436	182.2e-5	61.6e-5	1.0



شکل ۴-۲۴- تغییرات تنش بحرانی بی بعد نسبت به ضخامت پانل برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد سوم کمانش

۴-۱۱-۵- تاثیر زاویه مرکزی پانل بر روی بار و تنش بحرانی برای دو حالت ۳ss-۱free و ۲ss-۲free

در این قسمت به بررسی تغییرات زاویه مرکزی β روی بار و تنش بحرانی پرداخته شده است. این تغییرات برای شرط مرزی سه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد و هم چنین دو تکیه گاه ساده در دو لبه خمیده و دو لبه دیگر آزاد، بررسی شده است. به دلیل تطابق زیاد در نتایج تنش بحرانی مربوط به شرط مرزی سه لبه با تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد برای سه مد اول کمانش، فقط مد اول کمانش نشان داده شده است. تفاوت در سه مد اول کمانش برای حالت دو تکیه گاه ساده در دو لبه خمیده و دو لبه دیگر آزاد، مشخص تر می باشد. اثر زاویه مرکزی پانل بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد های اول تا سوم کمانش در شکل (۴-۲۵) و نتایج آن در جدول های (۴-۲۰) و (۴-۲۱) آمده است. مقادیر پارامترهای هندسی برای این حالت به صورت جدول (۴-۱۹) است. در این حالت پارامتر k بر حسب زاویه مرکزی پانل تغییر کرده است.

جدول ۴-۱۹- مشخصات هندسی مربوط به تغییرات زاویه مرکزی

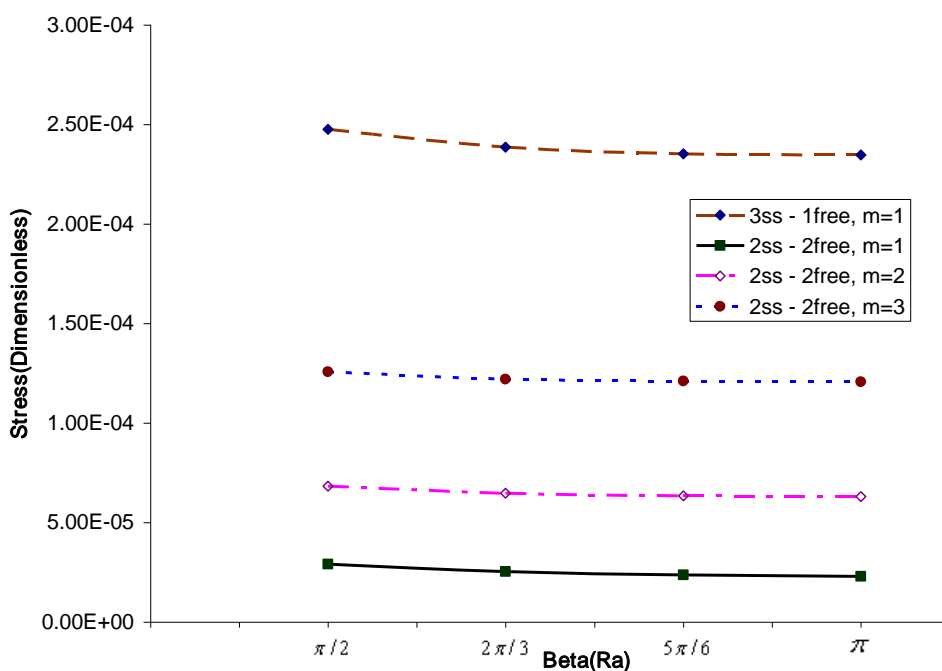
جنس پانل	فولاد
ضخامت پانل	$t = 9.9389 \times 10^{-2} mm$
شعاع پانل	$R = 30.07518 mm$

جدول ۴-۲۰- نتایج تحلیل عددی تنش بحرانی بی بعد در حالت الاستیک در پانل‌های استوانه‌ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب زاویه مرکزی پانل برای سه مد اول کمانش

تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد سوم		تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد دوم		تنش کمانش بحرانی بی بعد برای مد اول		زاویه مرکزی پانل $\beta(Ra)$
3SS-1free	2SS-2free	3SS-1free	2SS-2free	3SS-1free	2SS-2free	-----
25.0e-5	12.6e-5	24.8e-5	6.82e-5	24.8e-5	2.92e-5	$\pi / 2$
24.0e-5	12.2e-5	23.9e-5	6.47e-5	23.9e-5	2.53e-5	$2\pi / 3$
23.6e-5	12.1e-5	23.5e-5	6.34e-5	23.5e-5	2.36e-5	$5\pi / 6$
23.5e-5	12.1e-5	23.5e-5	6.30e-5	23.5e-5	2.29e-5	π

جدول ۴-۲۱- نتایج تحلیل عددی بار کمانش بحرانی در حالت الاستیک در پانل‌های استوانه‌ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب زاویه مرکزی پانل برای سه مد اول کمانش

بار کمانش برای مد سوم (N)		بار کمانش برای مد دوم (N)		بار کمانش برای مد اول (N)		پارامتر k	زاویه مرکزی پانل $\beta(Ra)$
3SS-1free	2SS-2free	3SS-1free	2SS-2free	3SS-1free	2SS-2free	-----	-----
5151	2585.8	5104	1404	5094.9	600.64	0.05894	$\pi / 2$
4943.8	2510	4916.2	1330.3	4908	520.34	0.04418	$2\pi / 3$
4861.4	2493	4843.9	1304.6	4838.5	485.64	0.03534	$5\pi / 6$
4830.8	2485	4830.4	1297	4828.1	470.2	0.02944	π



شکل ۴-۲۵- تغییرات تنش بحرانی بی بعد بر حسب زاویه مرکزی پانل برای دو حالت شرط مرزی مربوط به سه مد اول کماتش

۴-۱۱-۶- تاثیر نسبت شعاع به ضخامت پانل بر روی بار و تنش بحرانی

برای دو حالت ۳ss-۱free و ۲ss-۲free

آخرین حالت مورد بررسی، تاثیر نسبت شعاع به ضخامت (R/t) بر تنش بحرانی بی بعد می باشد که نشان می دهد با افزایش آن، بار و تنش های بحرانی برای هر دو حالت شرط مرزی، رو به کاهش است. تاثیر نسبت شعاع به ضخامت (R/t) بر تنش بحرانی بی بعد، در شکل (۴-۲۶) و داده های آن در جدول (۴-۲۳) نشان داده شده است که مربوط به مد اول کماتش است. مشخصات هندسی مربوط به این حالت در جدول (۴-۲۲) آمده است.

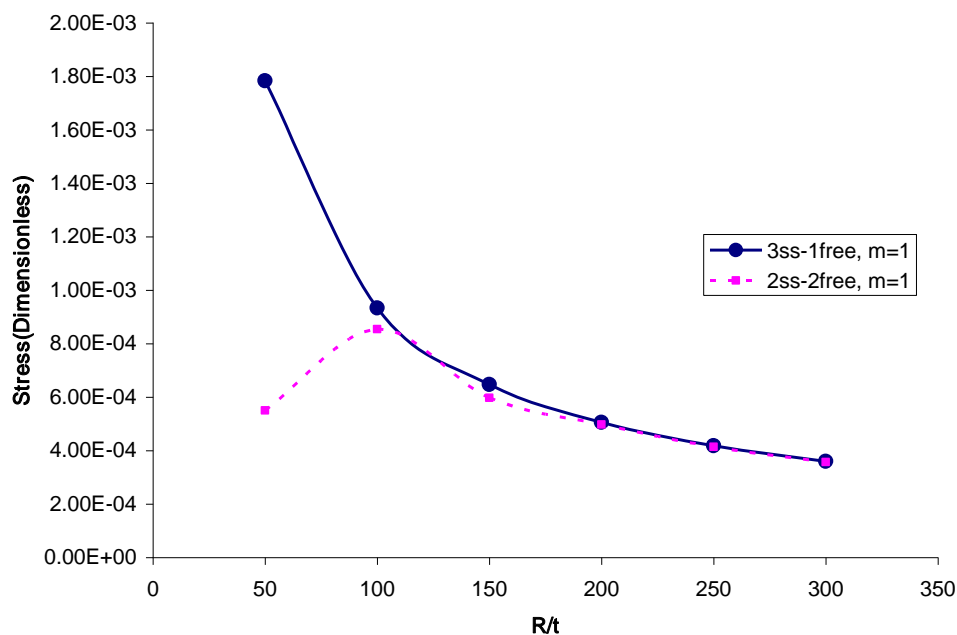
جدول ۴-۲۲- مشخصات هندسی پانل همراه با تغییرات نسبت شعاع به ضخامت

فولاد	جنس پانل
$t = 0.001m$	ضخامت پانل
$L = 0.4m$	طول پانل

$\beta = \pi/2$	زاویه مرکزی
-----------------	-------------

جدول ۴-۲۳- نتایج تحلیل عددی بار کمانش بحرانی در حالت الاستیک در پانل‌های استوانه‌ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب نسبت شعاع به ضخامت پانل برای مد اول کمانش

بار کمانش برای مد اول (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد اول		نسبت شعاع به ضخامت پانل R/t
2ss-2free	3ss-1free	2ss-2free	3ss-1free	-----
۱۱۳۸۰۲	369220	0.55e-3	1.78e-3	۵۰
۱۷۶۸۰۸	193066	0.85e-3	0.93e-3	۱۰۰
۱۲۳۶۲۴	133895	0.60e-3	0.65e-3	۱۵۰
۱۰۲۸۲۱	104521	0.50e-3	0.50e-3	۲۰۰
۸۵۵۴۰	86557	0.41e-3	0.42e-3	۲۵۰
۷۳۹۹۵	74354	0.36e-3	0.36e-3	۳۰۰

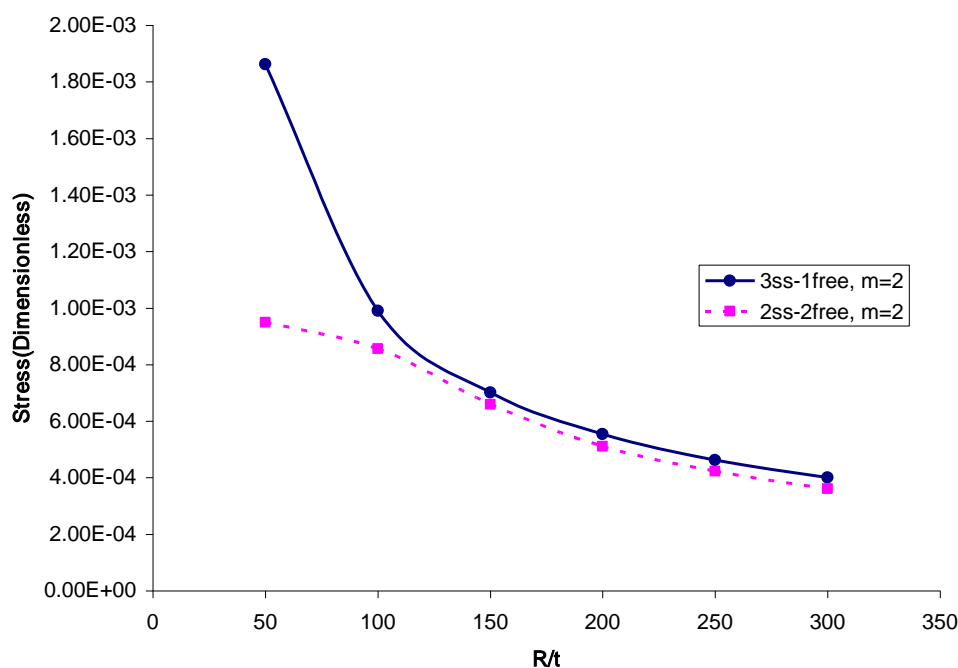


شکل ۴-۲۶- تغییرات تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت شعاع به ضخامت پانل برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد اول کمانش

تأثیر نسبت شعاع به ضخامت پانل بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد دوم کمانش در شکل (۴-۲۷) و نتایج آن در جدول (۴-۲۴) آمده است.

جدول ۴-۲۴- نتایج تحلیل عددی بار کمانش بحرانی در حالت الاستیک در پانل‌های استوانه‌ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب نسبت شعاع به ضخامت پانل برای مد دوم کمانش

بار کمانش برای مد دوم (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد دوم		نسبت شعاع به ضخامت پانل R/t
2ss-2free	3ss-1free	2ss-2free	3ss-1free	-----
۱۹۶۴۷۷	385348	0.95e-3	1.86e-3	۵۰
۱۷۷۱۴۲	204907	0.86e-3	0.99e-3	۱۰۰
۱۳۶۴۰۳	145186	0.66e-3	0.70e-3	۱۵۰
۱۰۵۸۵۰	114593	0.51e-3	0.55e-3	۲۰۰
۸۷۴۵۶	95708	0.42e-3	0.46e-3	۲۵۰
۷۴۶۹۸	82809	0.36e-3	0.40e-3	۳۰۰

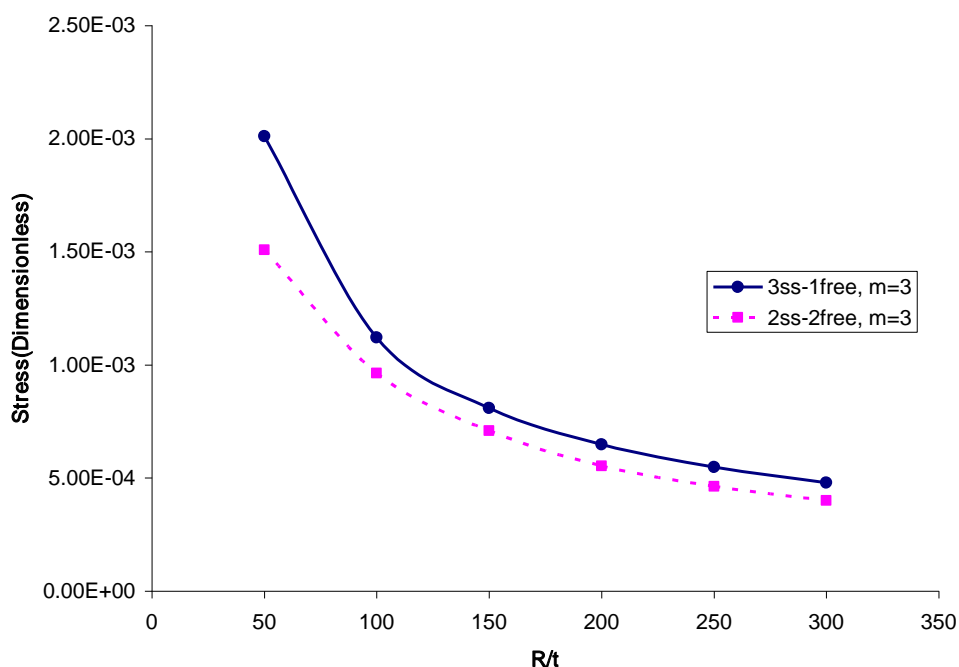


شکل ۴-۲۷- تغییرات تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت شعاع به ضخامت پانل برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد دوم کمانش

تاثیر نسبت شعاع به ضخامت پانل بر روی تنش بحرانی بی بعد برای مد سوم کمانش در شکل (۴-۲۸) و نتایج آن در جدول (۴-۲۵) آمده است.

جدول ۴-۲۵- نتایج تحلیل عددی بار کمانش بحرانی در حالت الاستیک در پانل‌های استوانه‌ای با دو حالت شرط مرزی بر حسب نسبت شعاع به ضخامت پانل برای مد سوم کمانش

بار کمانش برای مد سوم (N)		تنش بحرانی بی بعد برای مد سوم		نسبت شعاع به ضخامت پانل R/t
2ss-2free	3ss-1free	2ss-2free	3ss-1free	-----
۳۱۲۳۷۸	416114	1.51e-3	2.01e-3	۵۰
۱۹۹۴۲۵	232082	0.96e-3	1.12e-3	۱۰۰
۱۴۶۶۳۰	167622	0.71e-3	0.81e-3	۱۵۰
۱۱۴۵۲۹	134352	0.55e-3	0.65e-3	۲۰۰
۹۵۶۶۸	113605	0.46e-3	0.55e-3	۲۵۰
۸۲۷۸۸	99335	0.40e-3	0.48e-3	۳۰۰



شکل ۴-۲۸- تغییرات تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت شعاع به ضخامت پانل برای دو حالت شرط مرزی مربوط به مد سوم کمانش

در این فصل تاثیر پارامترهای مختلف مثل k ، طول، شعاع، ضخامت، و زاویه مرکزی روی بار و تنش بحرانی بی بعد بررسی شد. تاثیر پارامتر k به گونه ای بود که برای محدوده کوچک آن با افزایش k که متناسب با افزایش شعاع است، بار بحرانی افزایش می یابد اما رفته رفته با افزایش شعاع بار یا تنش بحرانی بی بعد کاهش می یابد. تاثیر طول پانل بر روی بار کمانش بحرانی نسبت به سایر

پارامترها از قبیل ضخامت بسیار کمتر می باشد. اثر ضخامت طوری است که با افزایش ضخامت بار و تنش بحرانی به طور چشم گیری افزایش پیدا می کند. تاثیر زاویه مرکزی بسیار ناچیز است به طوری که با افزایش آن از $\pi/2$ تا π بار و تنش بحرانی بی بعد تغییر چندانی نمی کند. و در آخر اثر نسبت شعاع به ضخامت پانل روی تنش بحرانی بررسی شد، به گونه ای که با افزایش آن، تنش بحرانی رو به کاهش است.

فصل پنجم

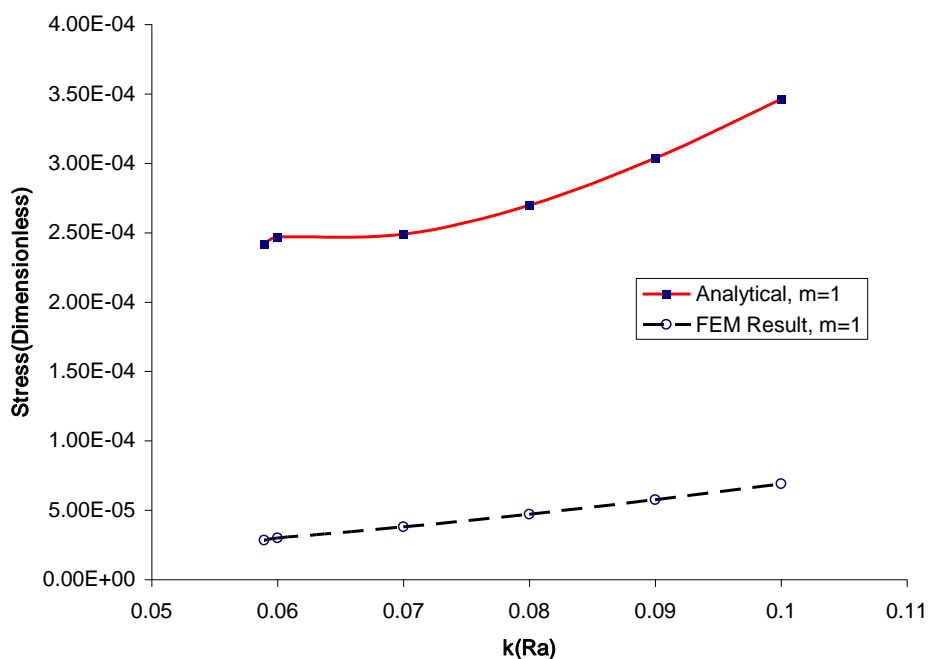
مقایسه نتایج تحلیلی و عددی

۵-۱- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به پانل استوانه‌ای دارای تکیه گاه ساده در دو انتها و دو لبه دیگر آزاد

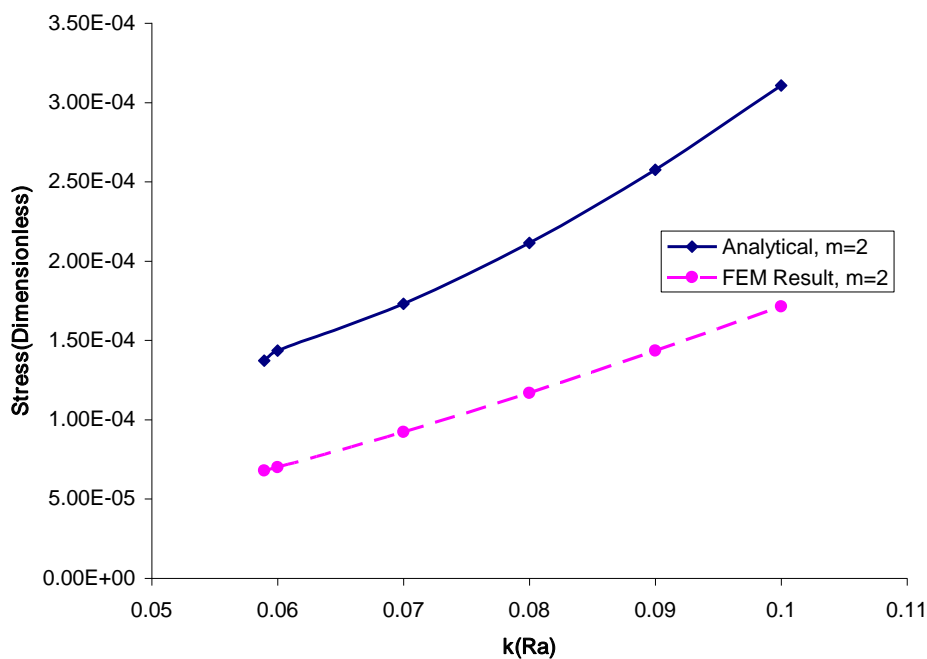
در این فصل نتایج تحلیلی کمانش پانل های استوانه‌ای با مقطع دایره ای در حالت الاستیک، با نتایج حاصل از روش عددی مقایسه شده و دقت و صحت نتایج تحلیلی- عددی مورد بحث قرار گرفته است. در این فصل تنش های بحرانی بی بعد $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{E}$ برای فولاد با $E = 207 \times 10^3 \text{ Mpa}$ در نظر گرفته شده است.

۵-۱-۱- اثر پارامتر k روی بار و تنش بحرانی بی بعد در پانل استوانه‌ای

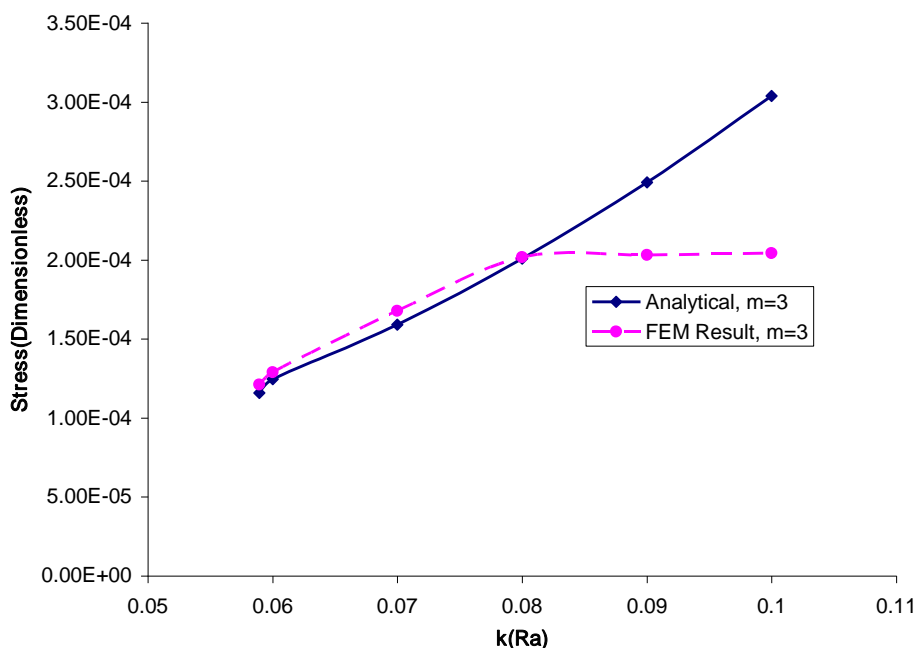
در این قسمت تنش های بحرانی بی بعد، نسبت به پارامتر k که بر حسب رادیان می باشد، نشان داده شده است. در این حالت پارامتر k بر حسب طول پانل تغییر می کند. در این حالت تغییرات پارامتر k متناسب با تغییرات طول پانل می باشد به طوری که شعاع پانل $R = 0.1513 \text{ m}$ ، ضخامت آن $t = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ و زاویه مرکزی پانل $\beta = \pi/2$ است و با افزایش پارامتر k ، طول پانل کوتاه تر می شود. شکل های (۵-۱)، (۵-۲) و (۵-۳) مقایسه تحلیلی و عددی را به ترتیب برای مد اول، دوم و سوم کمانش، نشان می دهد.



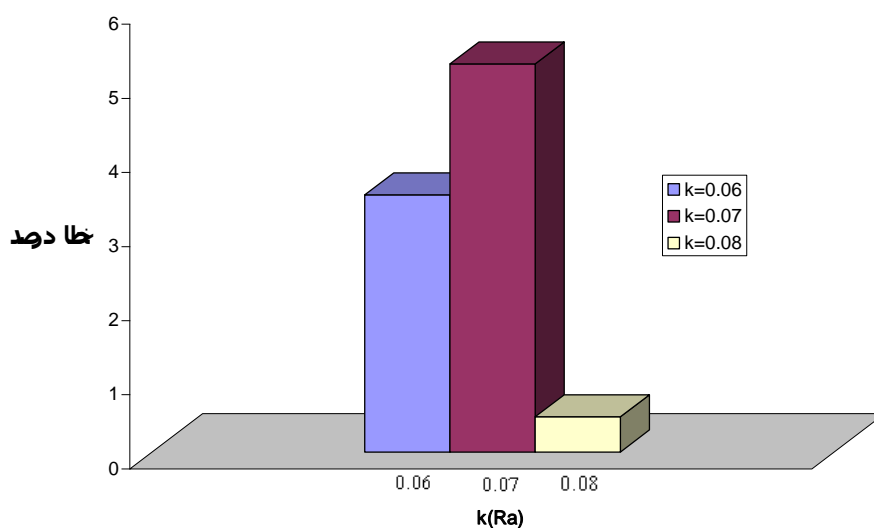
شکل ۵-۱- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب پارامتر k برای پانل دارای تکیه گاه ساده در دو انتها و دو لبه دیگر آزاد در مد اول کماتش



شکل ۵-۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب پارامتر k برای پانل دارای تکیه گاه ساده در دو انتها و دو لبه دیگر آزاد در مد دوم کماتش



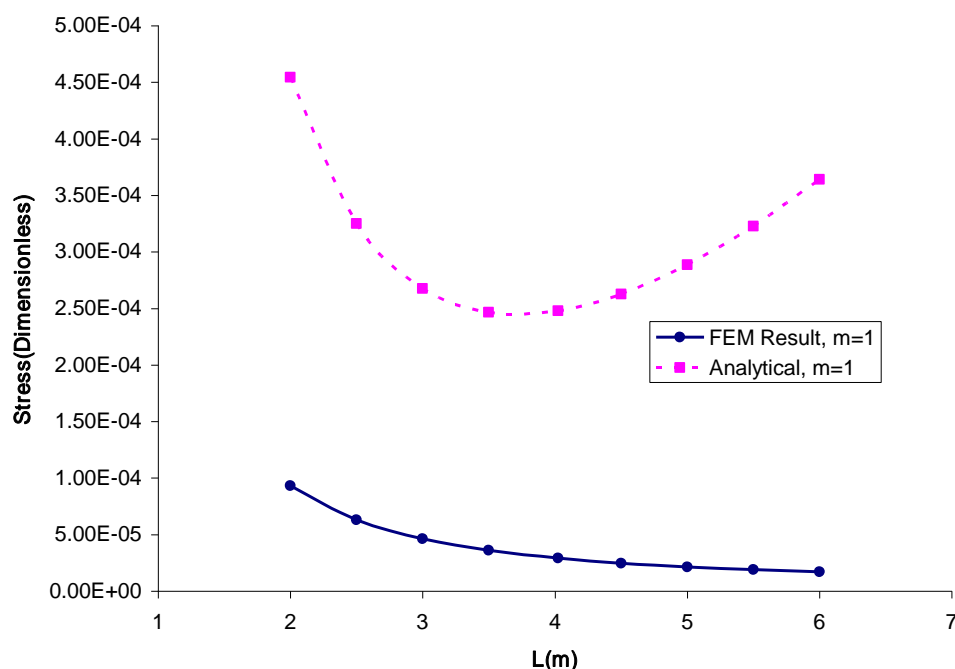
شکل ۵-۳- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب پارامتر k برای پانل دارای تکیه گاه ساده در دو انتها و دو لبه دیگر آزاد در مد سوم کماتش محاسبه درصد خطا به گونه ای است که اختلاف مقدار تنش بحرانی تحلیل و عددی، بر مقدار تحلیلی تنش تقسیم شده و حاصل آن در ۱۰۰ ضرب می شود. درصد خطا در مد سوم کماتش مربوط به پانل استوانه ای نسبت به دو مد اول کمتر می باشد. درصد خطا مربوط به شکل (۵-۳) در شکل (۵-۴) آمده است.



شکل ۵-۴- درصد اختلاف نتایج عددی و نتایج تحلیلی نسبت به پارامتر k برای پانل دارای تکیه گاه ساده در دو انتها و دو لبه دیگر آزاد مربوط به مد سوم کمانش

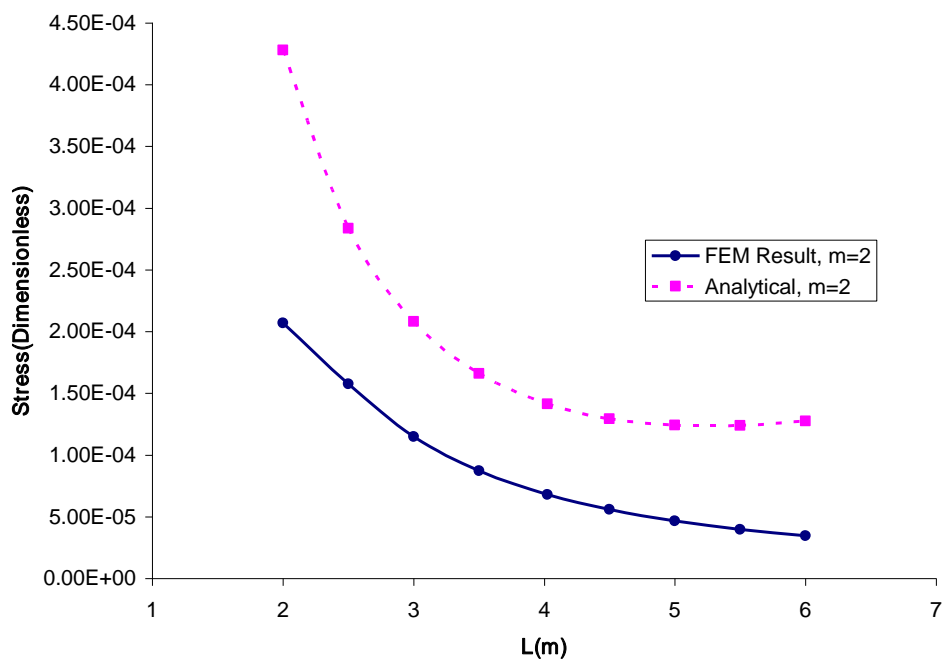
۵-۱-۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی اثر طول پانل استوانه‌ای بر روی تنش بحرانی بی بعد

ابتدا مقایسه تحلیلی - عددی تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل برای مد اول کمانش در شکل (۵-۵) نشان داده شده است. در این حالت محدوده طولی بزرگ یعنی طول های بین ۲ تا ۶ متر بررسی شده است. همان طور که مشاهده می شود درصد خطا برای مد اول بالا است. مشخصات هندسی مربوط به این حالت در جدول (۴-۷) بیان شد.

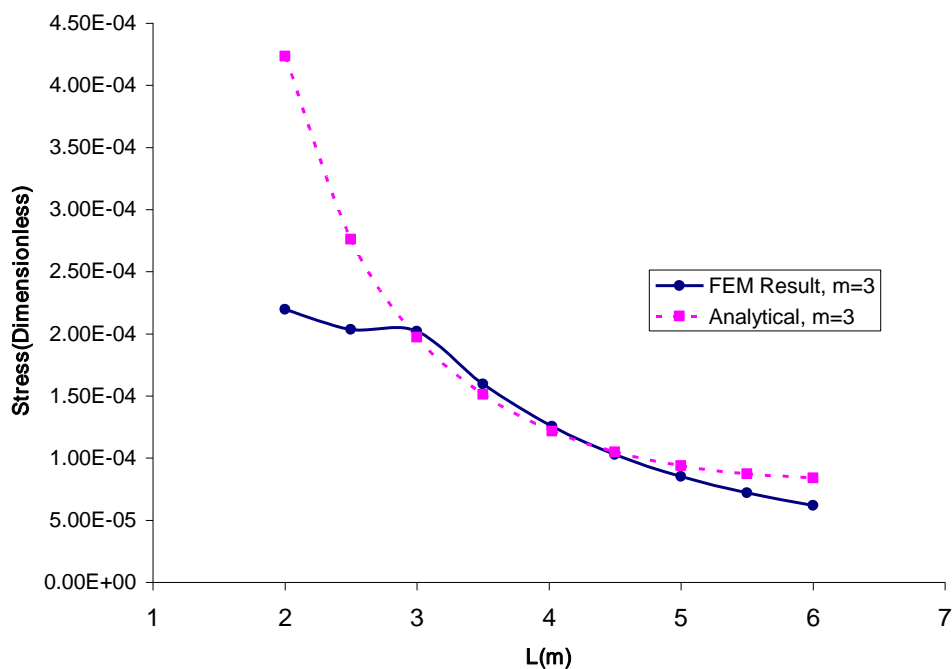


شکل ۵-۵- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل مربوط به مد اول کمانش

مقایسه نتایج تحلیلی - عددی تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل به ترتیب برای مدهای دوم و سوم کمانش در شکل های (۵-۶) و (۵-۷) نشان داده شده است.

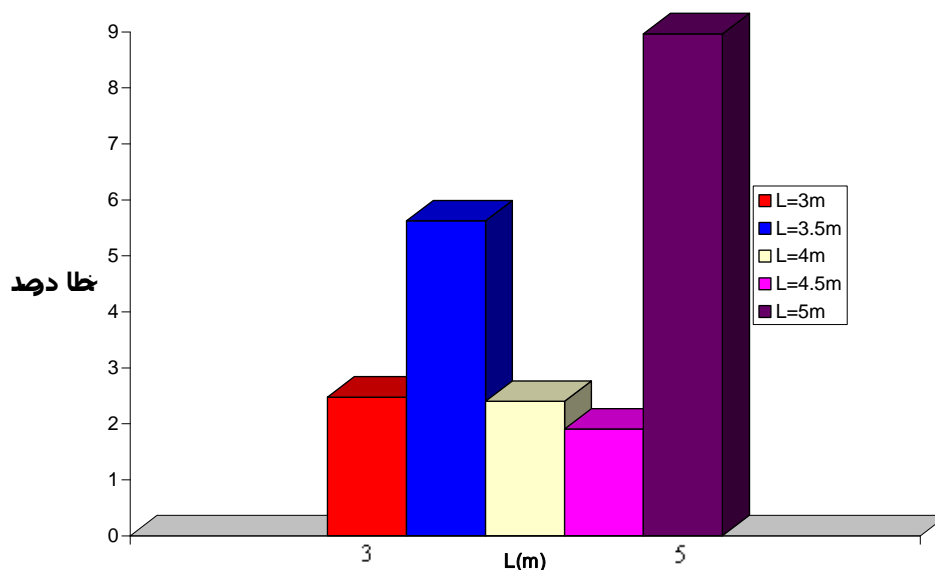


شکل ۵-۶- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل مربوط به مد دوم کمانش



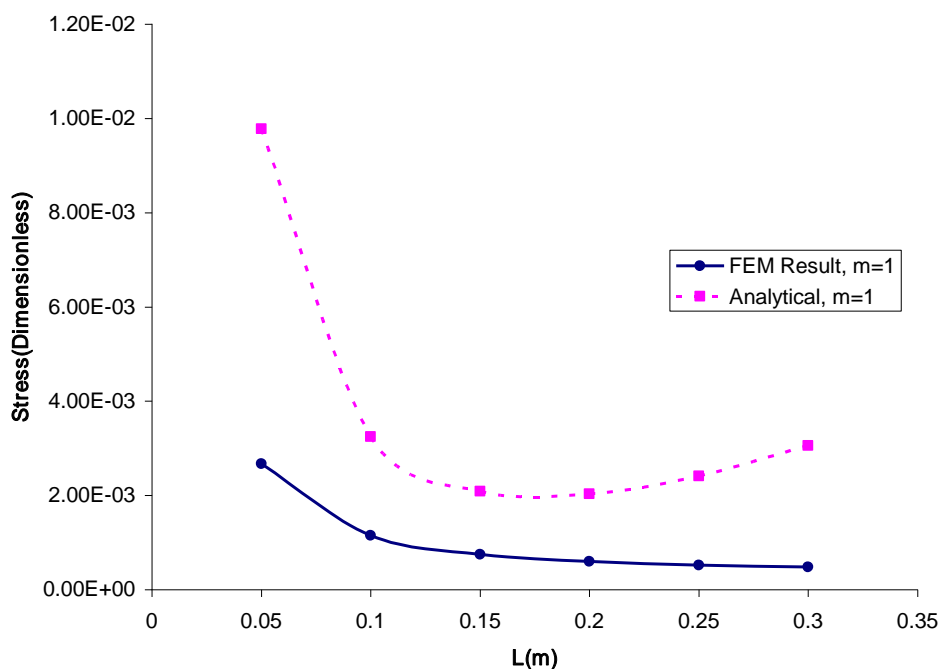
شکل ۵-۷- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل مربوط به مد سوم کمانش

با افزایش طول پانل برای یک شعاع و ضخامت ثابت، مقدار بار کمانش و تنش بحرانی بی بعد رفته رفته کاهش پیدا می کند. همان طور که در شکل (۷-۵) نشان داده شد نتایج برای مد سوم کمانش تا حد نسبتاً خوبی تطابق پیدا کرده و درصد خطا مربوط به داده های شکل (۷-۵) ، در شکل (۸-۵) نشان داده شده است که مقادیر آن بین ۱ تا ۹ درصد است.



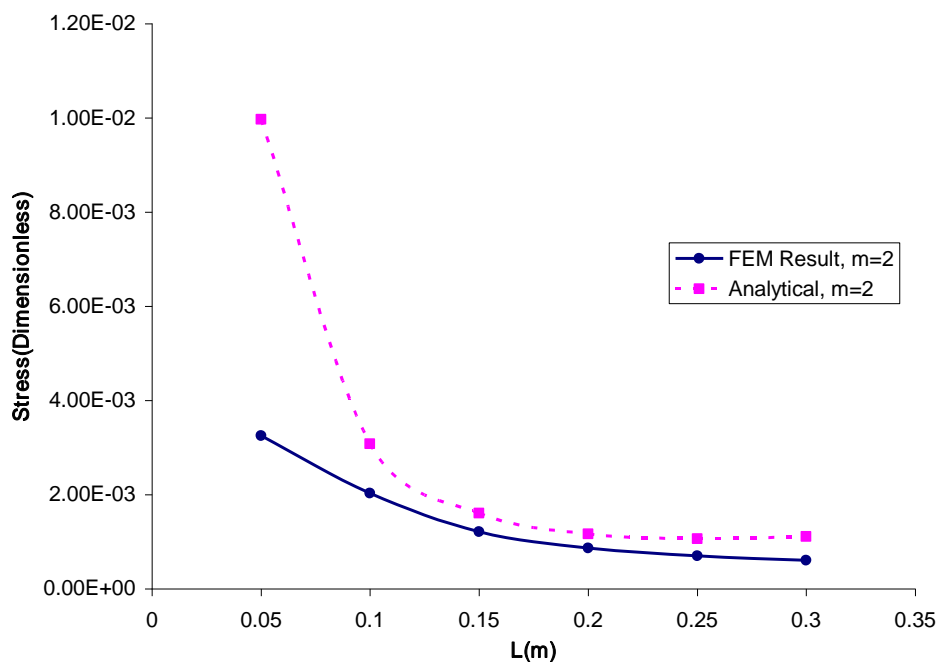
شکل ۵-۸- درصد اختلاف نتایج عددی و تحلیلی بر حسب طول پانل دارای تکیه گاه ساده در دو انتها و دو لبه دیگر آزاد مربوط به مد سوم کمانش

هم چنین مقایسه تحلیلی - عددی تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل در یک محدوده طولی کوچکتر، برای مد اول کمانش در شکل (۹-۵) نشان داده شده است. در محدوده طولی کوچک، طول ها بین ۰,۰۵ تا ۰,۳ متر می باشد. مشخصات هندسی مربوط به این حالت در جدول (۳-۶) بیان شد. مثل حالت قبل با افزایش طول پانل در این محدوده طولی، تنش بحرانی بی بعد رو به کاهش است.

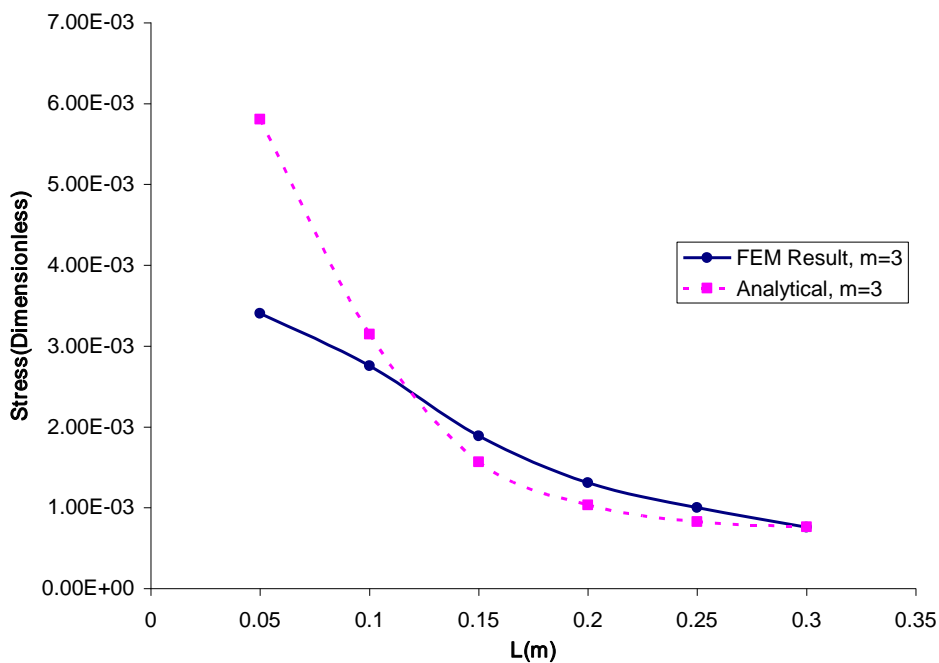


شکل ۵-۹- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل در محدوده طولی کوچکتر مربوط به مد اول کماتش

مقایسه نتایج تحلیلی - عددی تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل در محدوده طولی کوچکتر، به ترتیب برای مدهای دوم و سوم کماتش در شکل های (۵-۱۰) و (۵-۱۱) آمده است.

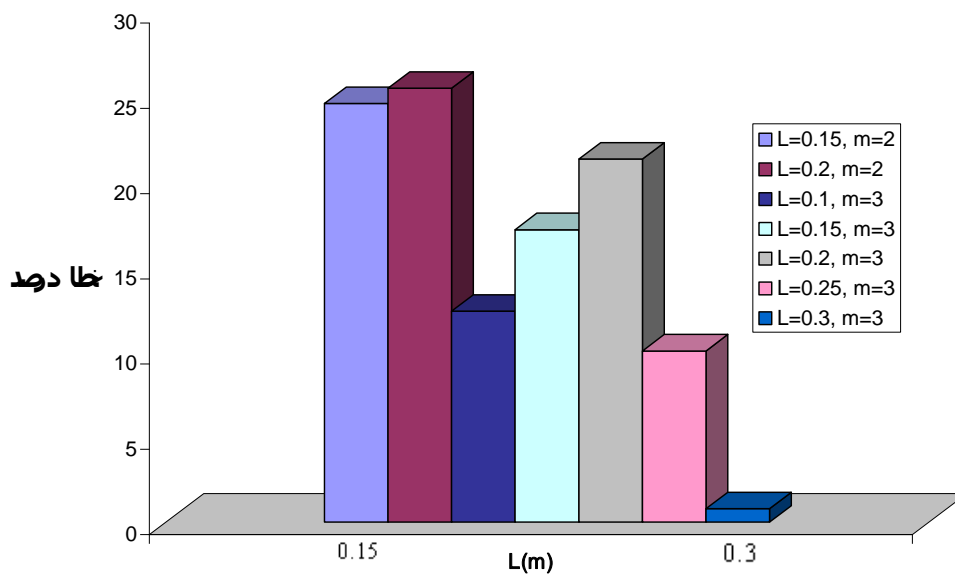


شکل ۵-۱۰- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل در محدوده طولی کوچکتر مربوط به مد دوم کماتش



شکل ۵-۱۱- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل در محدوده طولی کوچکتر مربوط به مد سوم کمانش

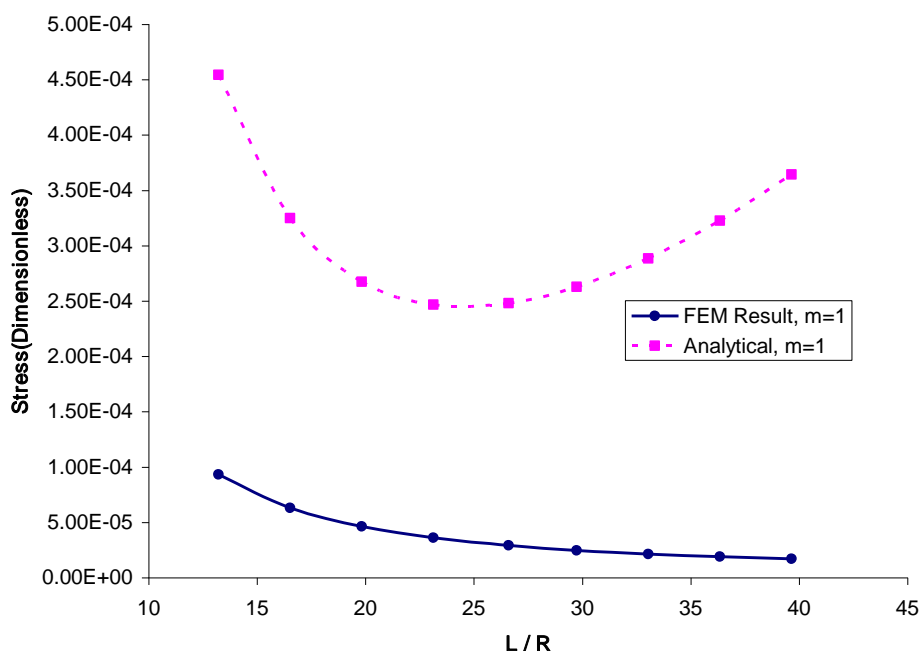
درصد خطا مربوط به داده های شکل های (۵-۱۰) و (۵-۱۱) ، در شکل (۵-۱۲) نشان داده شده است که مقادیر آن از کمتر از ۱ درصد تا ۲۶ درصد می باشد.



شکل ۵-۱۲- درصد اختلاف نتایج عددی و تحلیلی بر حسب طول پانل دارای تکیه گاه ساده در دو انتها و دو لبه دیگر آزاد مربوط به مد های دوم و سوم کمانش

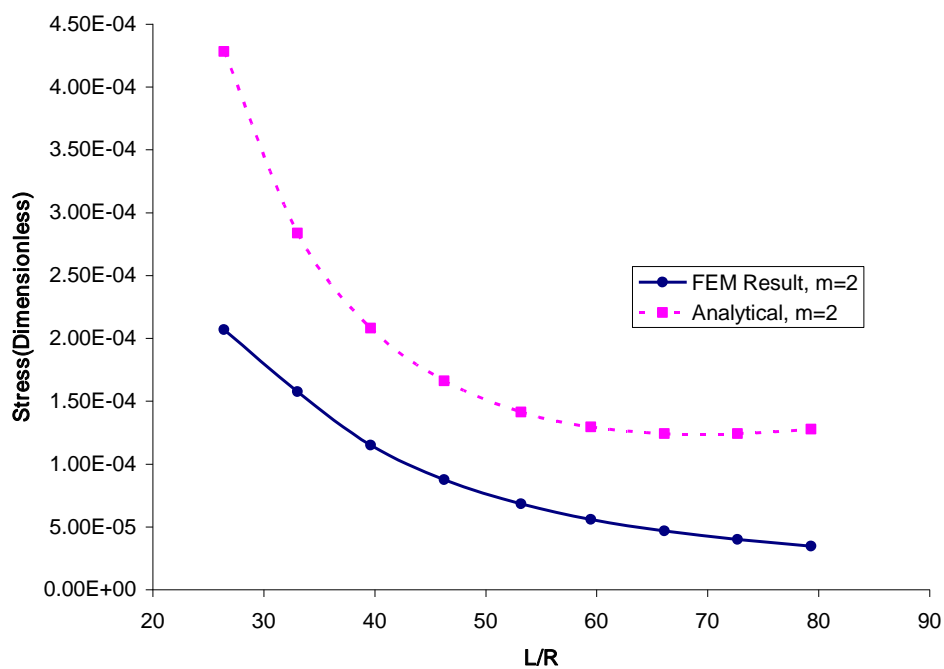
۵-۱-۳- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی اثر نسبت طول پانل استوانه‌ای به شعاع آن بر تنش بحرانی بی بعد

در این حالت مقایسه تغییرات نسبت طول پانل استوانه‌ای به شعاع آن بر تنش بحرانی بی بعد در دو حالت تحلیلی و عددی برای سه مد اول کمانش انجام گرفته است. شکل (۵-۱۳) این مقایسه را برای مد اول نشان می‌دهد. برای این قسمت شعاع پانل $R = 0.1513m$ ، ضخامت آن $t = 0.5 \times 10^{-3} m$ و زاویه مرکزی پانل $\beta = \pi/2$ است.

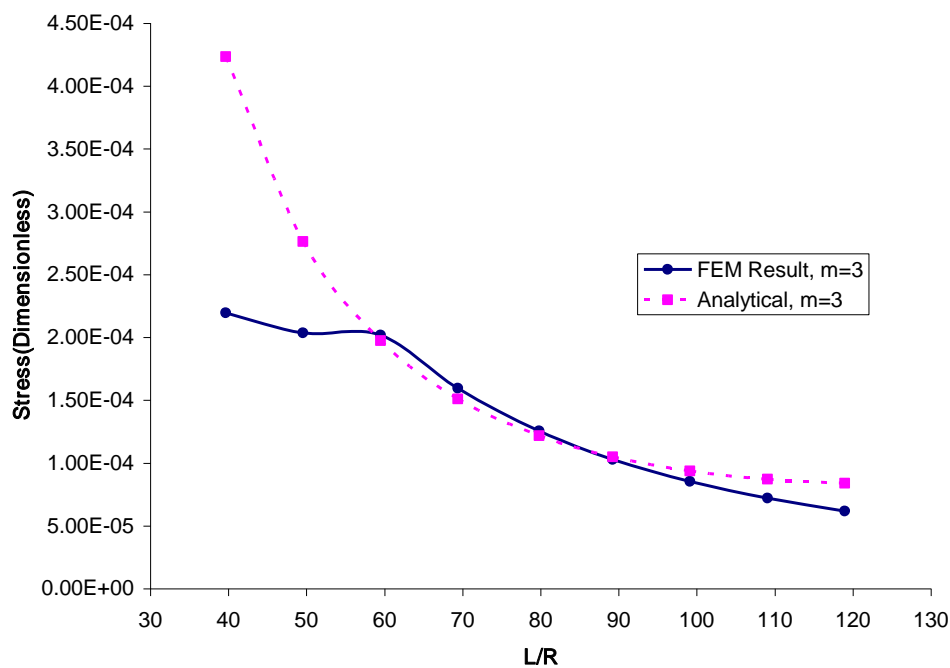


شکل ۵-۱۳- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت طول پانل به شعاع مربوط به مد اول کمانش

سپس مقایسه تحلیلی - عددی بر حسب نسبت طول پانل به شعاع آن بر تنش بحرانی بی بعد به ترتیب برای مدهای دوم و سوم کمانش در شکل های (۵-۱۴) و (۵-۱۵) نشان داده شده است.



شکل ۵-۱۴- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت طول پانل به شعاع مربوط به مد دوم کمانش



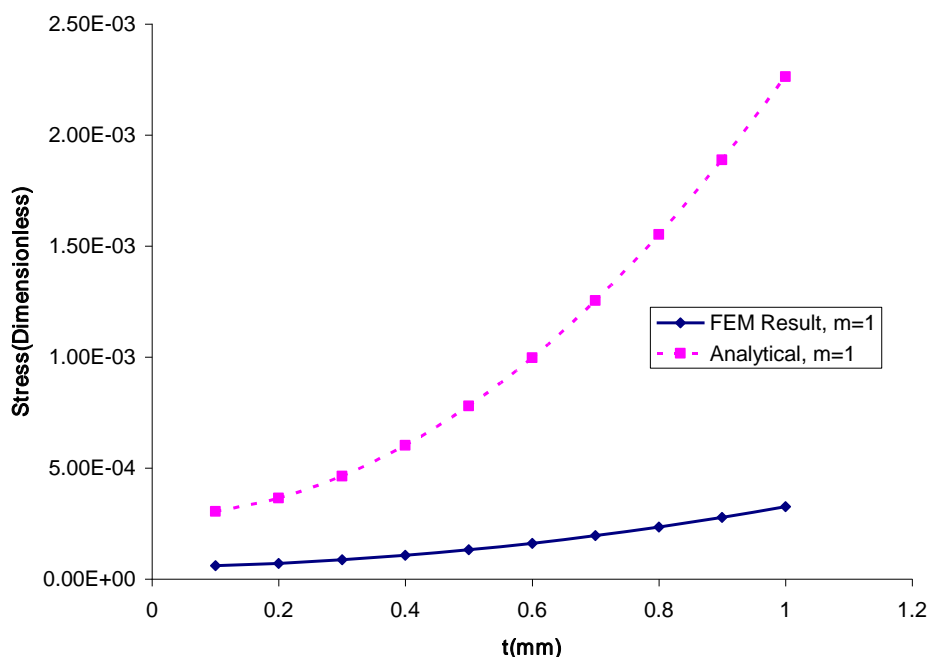
شکل ۵-۱۵- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت طول پانل به شعاع مربوط به مد سوم کمانش

با افزایش نسبت طول پانل به شعاع آن برای یک شعاع و ضخامت ثابت، مقدار بار کمانش و تنش بحرانی بی بعد رفته رفته کاهش پیدا می کند. درصد اختلاف مربوط به شکل (۵-۱۵) با داده های شکل (۵-۸) یکی می باشد فقط متغیر آن از طول پانل به نسبت طول به شعاع پانل تغییر کرده است.

۵-۱-۴- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی اثر ضخامت پانل استوانه‌ای بر

تنش بحرانی بی بعد

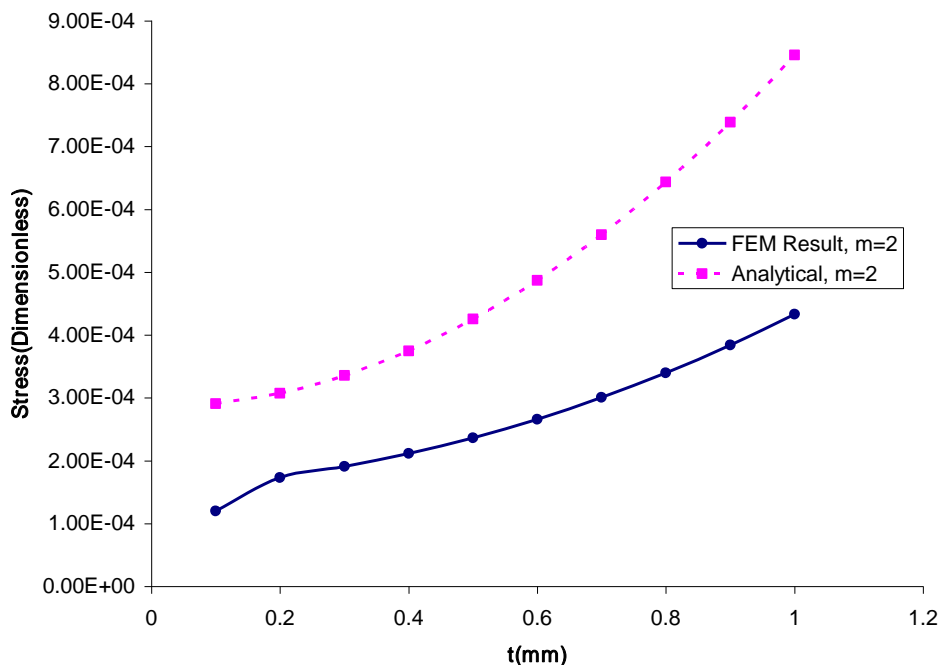
در این جا مقایسه تحلیلی- عددی تغییرات ضخامت پوسته بر حسب متر بر روی تنش بحرانی بی بعد انجام گرفته است که نشان می دهد که با افزایش ضخامت پوسته بر حسب متر، بار، تنش و یا تنش بحرانی بی بعد، افزایش می یابد. این مقایسه برای مد اول کمانش در شکل (۵-۱۶) نشان داده شده است.



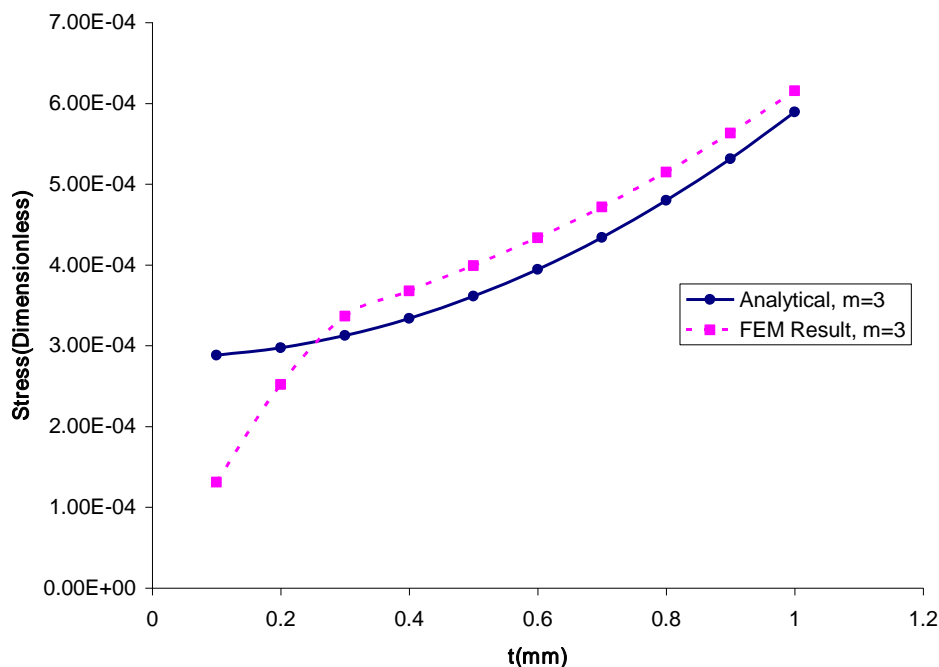
شکل ۵-۱۶- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب ضخامت پانل در مد اول کمانش

به طور مشابه شکل های (۵-۱۷) و (۵-۱۸) تاثیر ضخامت روی تنش بحرانی بی بعد را به ترتیب برای مدهای دوم و سوم کمانش نشان می دهد. درصد خطا برای مد سوم کمانش بسیار کاهش یافته است و برای مد سوم کمانش در برخی ضخامت ها تطابق نسبتاً خوبی بین داده ها به چشم می خورد.

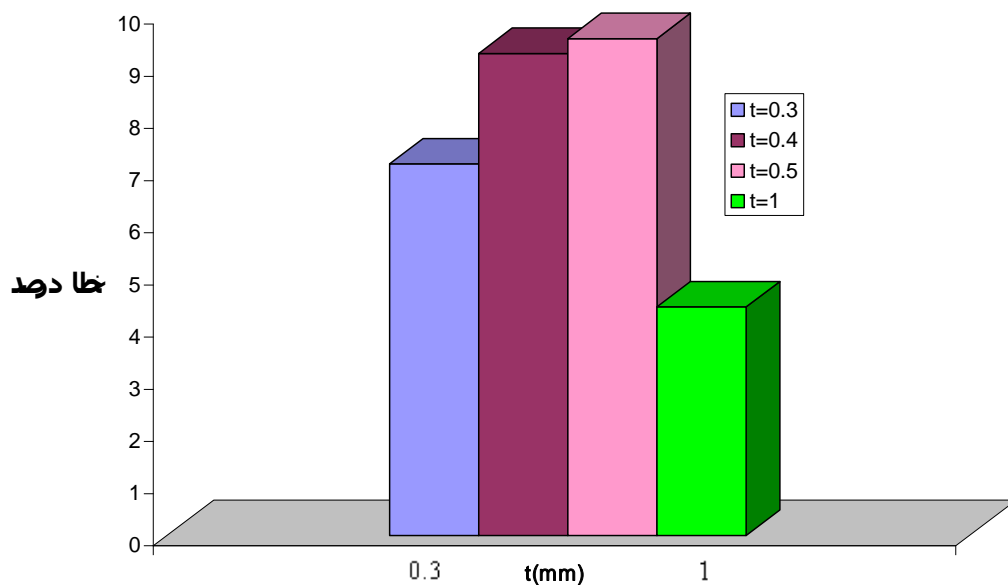
درصد خطا برای مد سوم کماتش در شکل (۵-۱۹) نشان داده شده است که بین ۴ تا ۱۰ درصد می باشد.



شکل ۵-۱۷- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب ضخامت پانل در مد دوم کماتش



شکل ۵-۱۸- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب ضخامت پانل مربوط به مد سوم کماتش

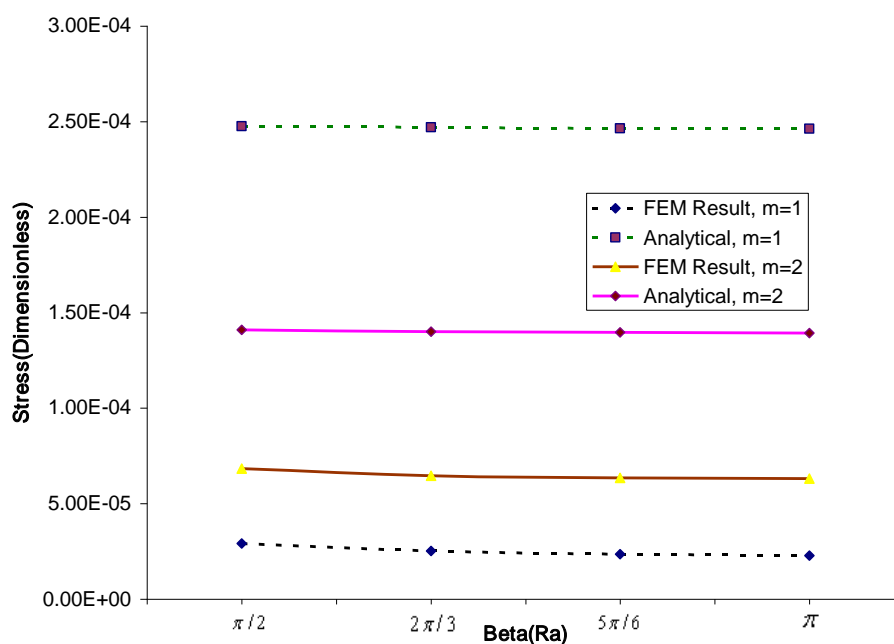


شکل ۵-۱۹- درصد اختلاف نتایج عددی و نتایج تحلیلی بر حسب ضخامت پانلی دارای تکیه گاه ساده در دو انتها و دو لبه دیگر آزاد مربوط به مد سوم کمانش

۵-۱-۵- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی اثر زاویه مرکزی پانل استوانه-

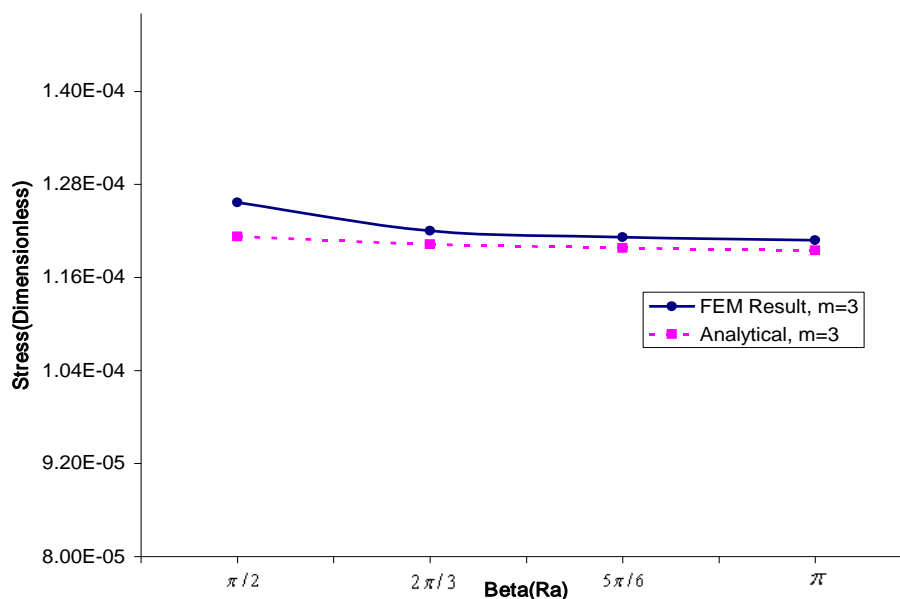
ای بر تنش بحرانی بی بعد

آخرین حالت، بررسی مقایسه تغییرات زاویه مرکزی β روی تنش بحرانی بی بعد می باشد که برای مد اول و دوم کمانش در شکل (۵-۲۰) نشان داده شده است.

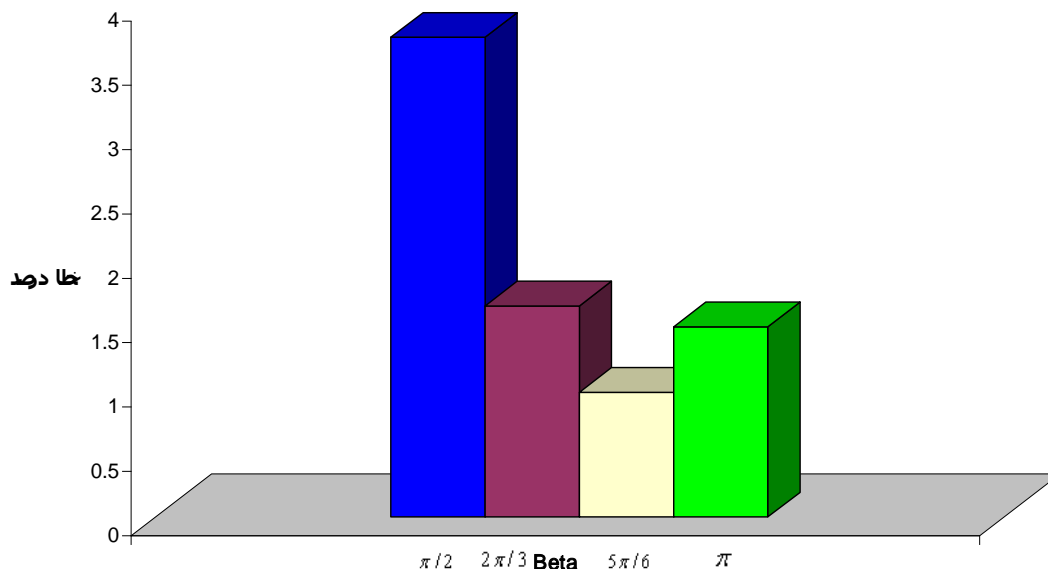


شکل ۵-۲۰- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب زاویه مرکزی در مد های اول و دوم کماتش

هم چنین مقایسه تغییرات زاویه مرکزی β روی تنش بحرانی بی بعد برای مد سوم کماتش در شکل (۵-۲۱) نشان داده شده است. تغییرات در زاویه مرکزی پانل تاثیر بسیار کمی بر روی بار، تنش بحرانی و تنش بحرانی بی بعد دارد. بررسی خطا های مربوط به شکل (۵-۲۱) در شکل (۵-۲۲) برای مد سوم کماتش نشان داده شده است.



شکل ۵-۲۱- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب زاویه مرکزی پانل مربوط به مد سوم کماتش



شکل ۵-۲۲- درصد اختلاف نتایج عددی و نتایج تحلیلی بر حسب زاویه مرکزی پانل دارای تکیه گاه ساده در دو انتها و دو لبه دیگر آزاد مربوط به مد سوم کماتش

۵-۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به پانل دارای تکیه گاه ساده در سه لبه و یک لبه دیگر آزاد

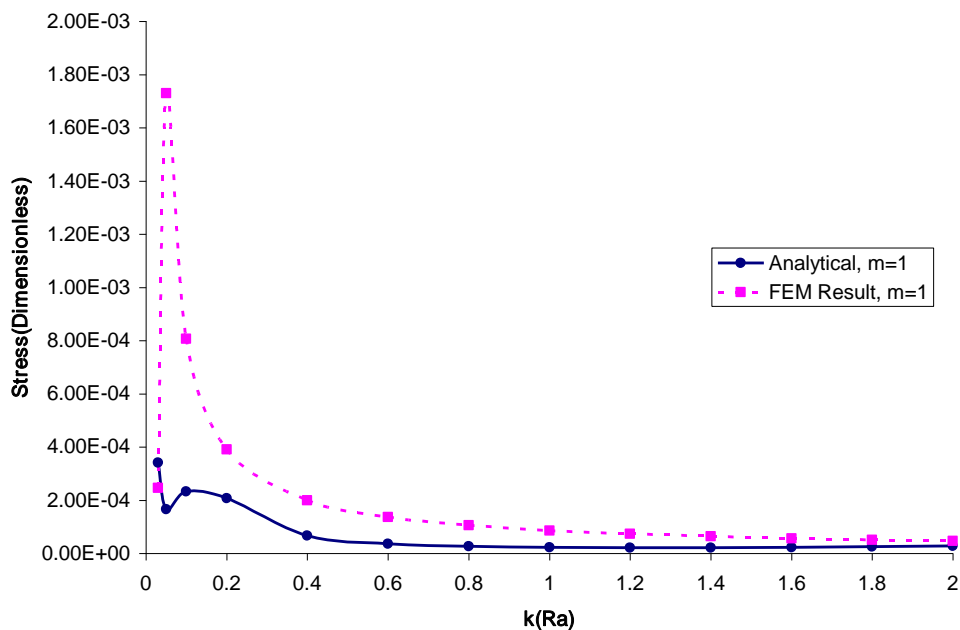
۵-۲-۱- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر پارامتر k بر تنش بحرانی بی بعد در پانل استوانه‌ای

مقایسه بین نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد ($\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{E}$) با شرایط موجود در جدول (۵-۲۳) نشان داده شده است. با توجه به آن که نتایج برای مد های دوم و سوم کماتش بسیار نزدیک به نتایج مد اول است، بنابراین فقط مد اول کماتش بررسی شده است. شعاع پانل $R = 0.1513m$ و ضخامت پانل برابر با $0.5 \times 10^{-3}m$ می باشد. هم چنین زاویه مرکزی پانل در این حالت $\beta = \pi/2$ است. تغییرات پارامتر k با تغییرات طول پانل همراه است.

جدول ۵-۱- مقادیر تحلیلی و عددی بار و تنش بحرانی بر حسب پارامتر k برای پانل با سه لبه تکیه گاه

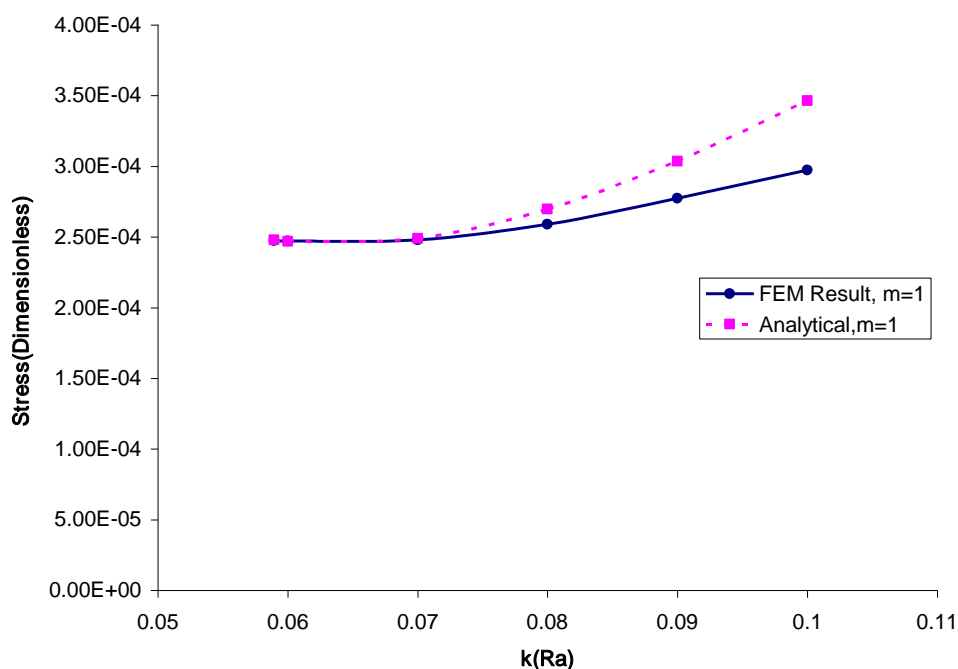
ساده مربوط به مد اول کمانش

مقدار عددی تنش بحرانی بی بعد مد اول	مقدار تحلیلی تنش بحرانی بی بعد مد اول	مقدار عددی بار کمانش برای مد اول (N)	مقدار تحلیلی بار کمانش برای مد اول (N)	پارامتر $k(Ra)$
24.61e-5	34.1e-5	25477	35292.68	0.03
172.9e-5	16.6e-5	178962	17145.98	0.05
80.65e-5	23.3e-5	83479	24074.64	0.1
39.10e-5	20.7e-5	40474	21472.9	0.2
19.94e-5	6.67e-5	20646	6905.66	0.4
13.69e-5	3.62e-5	14179	3745.709	0.6
10.53e-5	2.62e-5	10903	2712.807	0.8
8.600e-5	2.25e-5	8911.1	2331.82	1
7.310e-5	2.16e-5	7566.8	2231.027	1.2
6.37e-5	2.20e-5	6595.7	2272.621	1.4
5.66e-5	2.33e-5	5860.4	2408.111	1.6
5.10e-5	2.53e-5	5283.3	2617.418	1.8
4.65e-5	2.79e-5	4818.2	2887.068	2

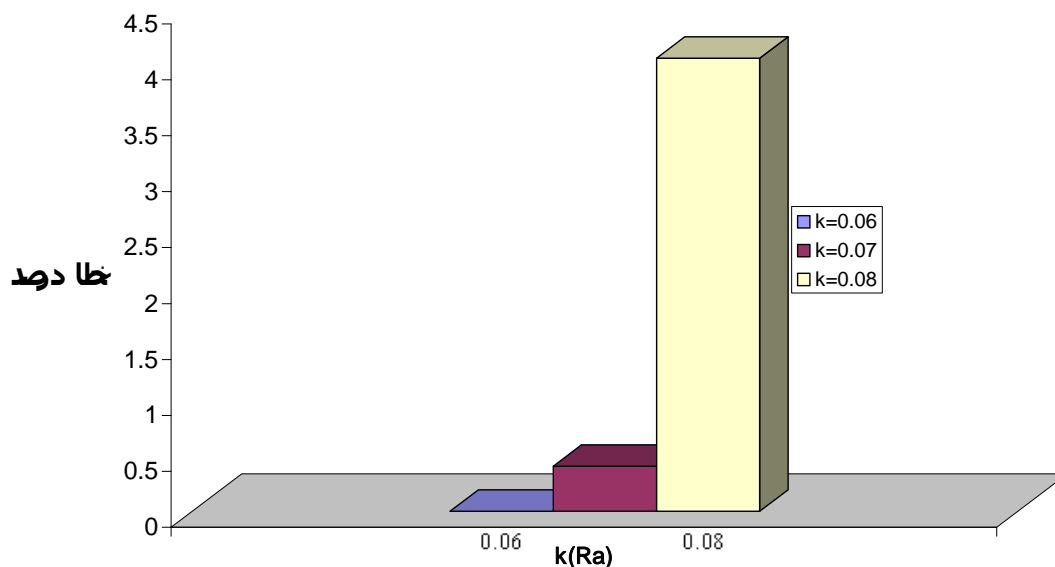


شکل ۵-۲۳- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب پارامتر k مربوط به مد اول کمانش

به علت تغییرات زیاد تنش بحرانی در مقادیر کم k ، یک بررسی مشابه، به صورت شکل (۵-۲۴) برای مقادیر محدود تر k ، بر روی تنش بحرانی بی بعد صورت گرفته است. برای حالت تحلیلی، $M = 41$ می باشد. شعاع پانل $R = 0.1513m$ و ضخامت پانل برابر با $0.5 \times 10^{-3}m$ می باشد. هم چنین زاویه مرکزی پانل در این حالت $\beta = \pi/2$ است. درصد اختلاف برای مد اول کمانش مربوط به پانل استوانه‌ای در شکل (۵-۲۵) نشان داده شده است.



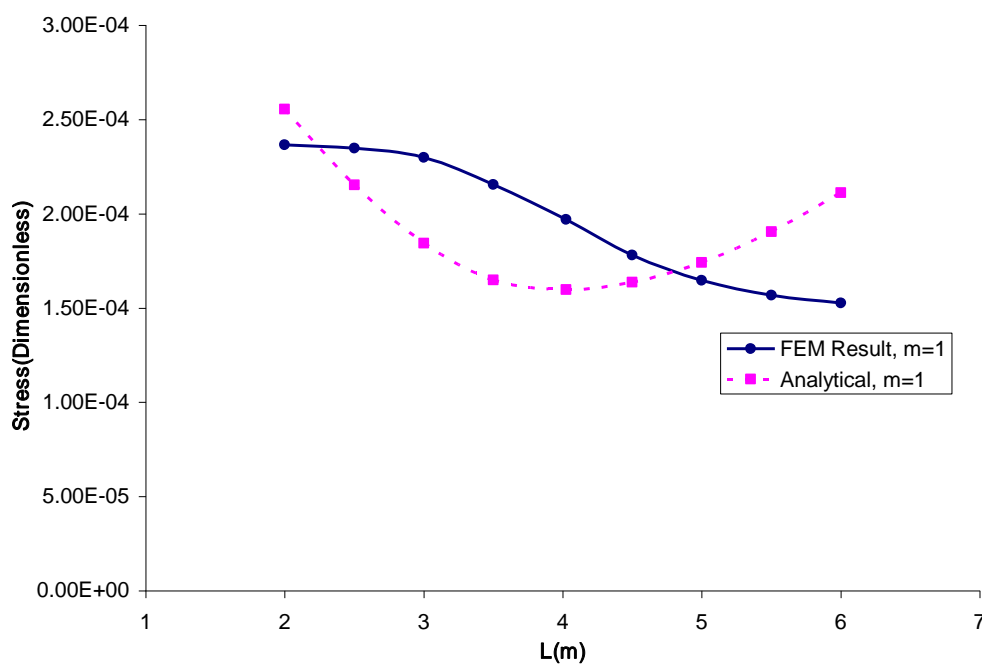
شکل ۵-۲۴- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب پارامتر k مربوط به مد اول کمانش



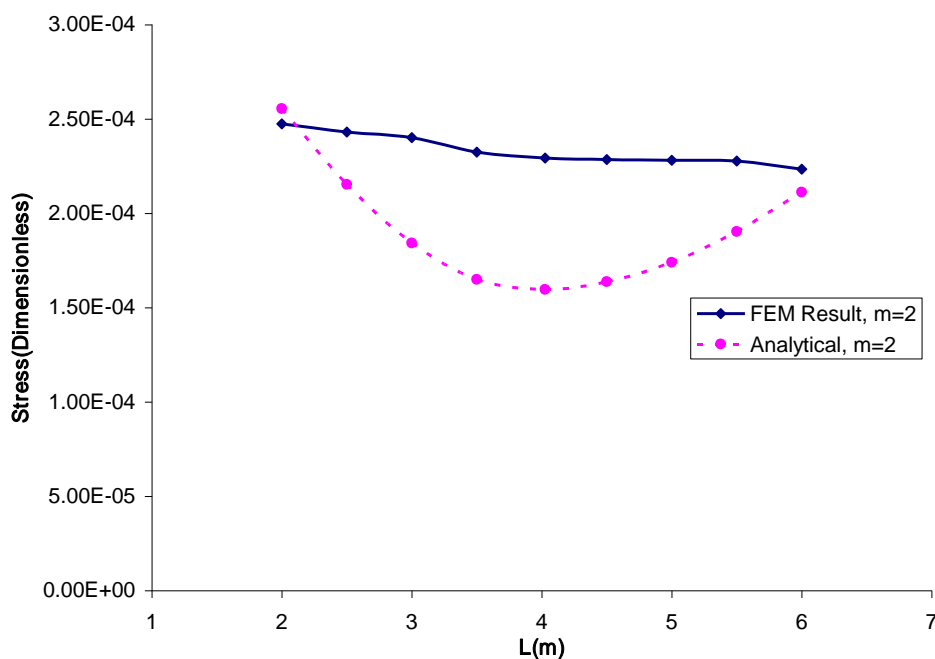
شکل ۵-۲۵- درصد اختلاف نتایج عددی و تحلیلی بر حسب پارامتر k در پانل دارای تکیه گاه ساده در سه لبه و یک لبه دیگر آزاد مربوط به مد اول کمانش

۵-۲-۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر طول پانل استوانه‌ای بر روی تنش بحرانی بی بعد

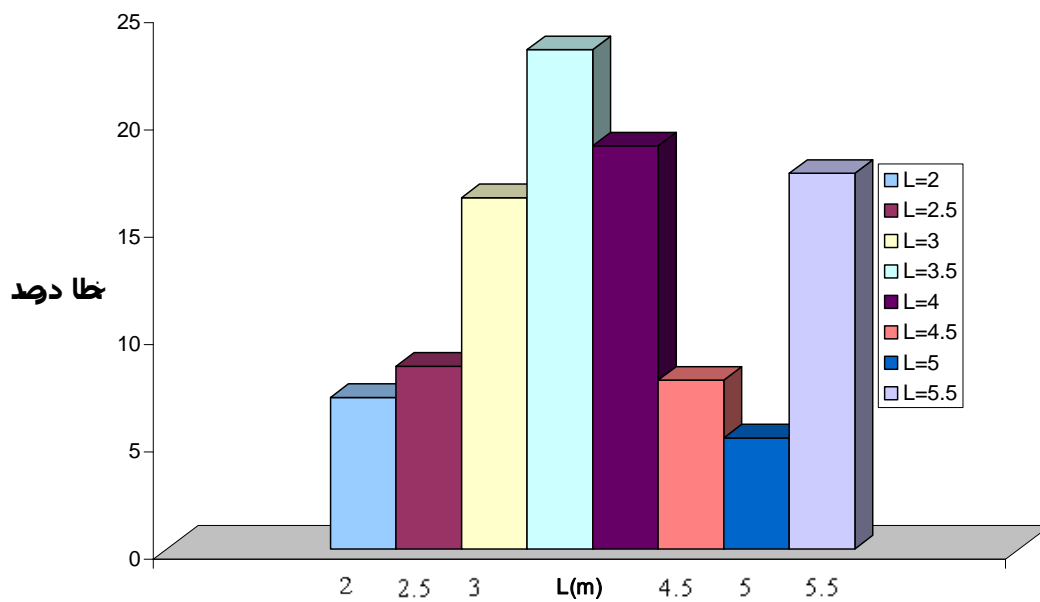
مقایسه تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب طول پانل برای مد های اول و دوم کمانش در شکل های (۵-۲۶) و (۵-۲۷) نشان داده شده است. شعاع پانل $R = 0.1513m$ و ضخامت پانل برابر با $0.5 \times 10^{-3}m$ می باشد. هم چنین زاویه مرکزی پانل در این حالت $\beta = \pi/2$ است. درصد اختلاف برای مد های اول و دوم کمانش مربوط به این پانل استوانه‌ای در شکل های (۵-۲۸) و (۵-۲۹) نشان داده شده است.



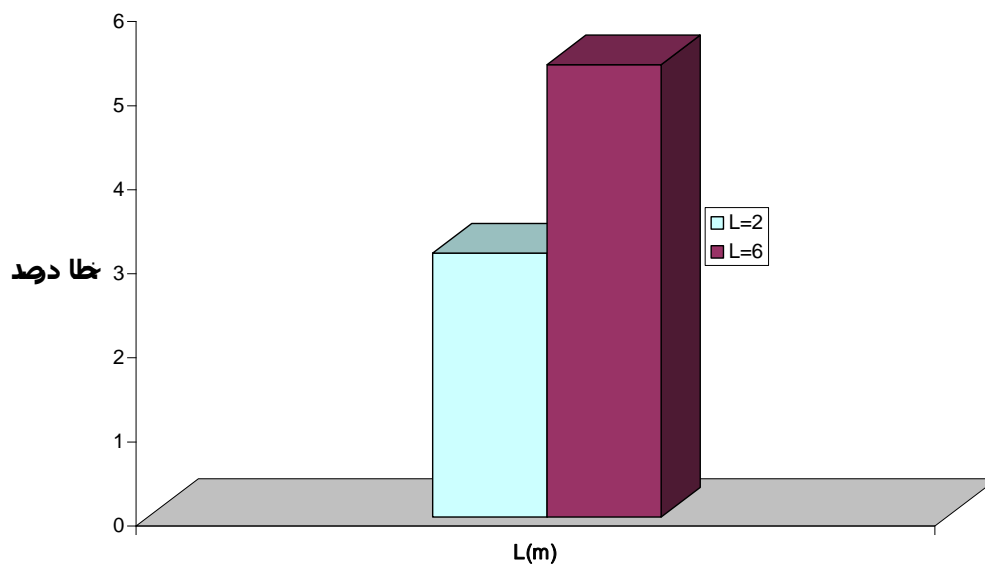
شکل ۵-۲۶- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب طول پانل مربوط به مد اول کمانش



شکل ۵-۲۷- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب طول پانل مربوط به مد دوم کمانش

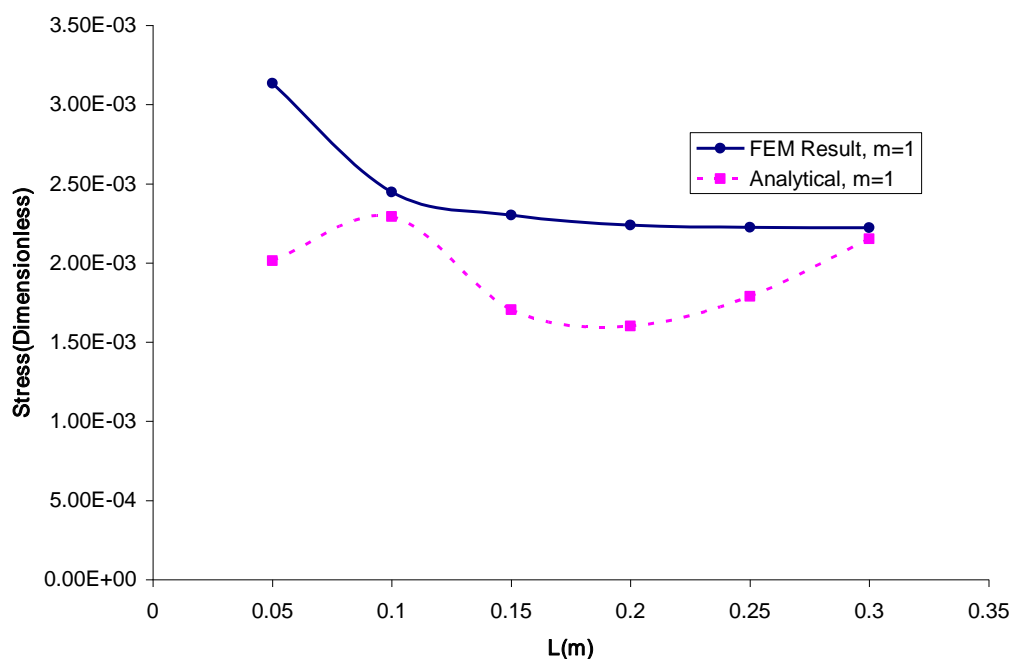


شکل ۵-۲۸- درصد اختلاف نتایج عددی و تحلیلی بر حسب طول در پانل دارای تکیه گاه ساده در سه لبه و یک لبه دیگر آزاد مربوط به مد اول کمانش



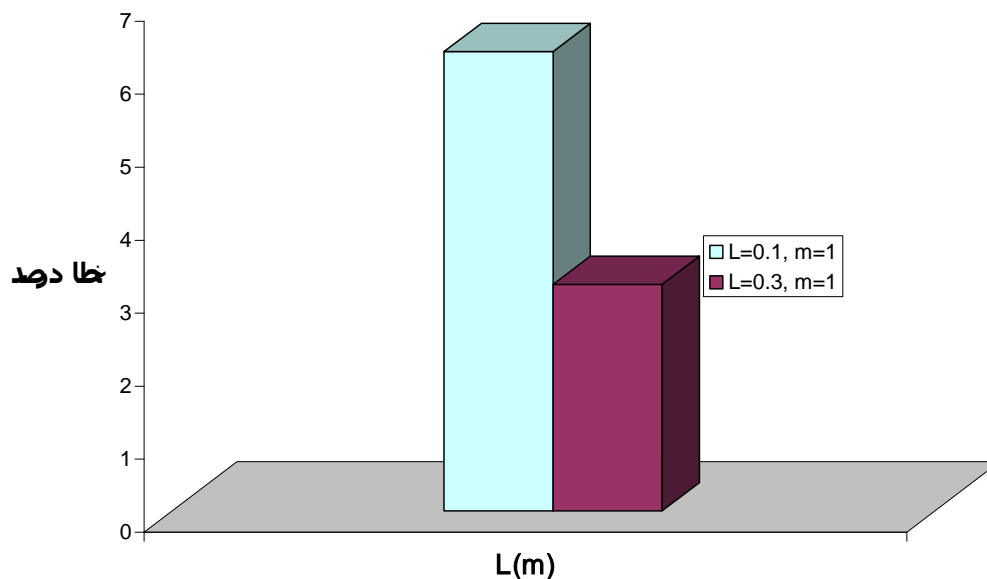
شکل ۵-۲۹- درصد اختلاف نتایج عددی و تحلیلی بر حسب طول در پانل دارای تکیه گاه ساده در سه لبه و یک لبه دیگر آزاد مربوط به مد دوم کمانش

هم چنین مقایسه تحلیلی - عددی تنش بحرانی بی بعد نسبت به طول پانل در یک محدوده طولی کمتر، برای مد اول کمانش در شکل (۳۰-۵) نشان داده شده است. مشخصات هندسی مربوط به این حالت در جدول (۳-۶) بیان شد. مثل حالت قبل با افزایش طول پانل در این محدوده طولی، تنش بحرانی بی بعد رو به کاهش است.



شکل ۳۰-۵- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب طول پانل مربوط به مد اول کمانش

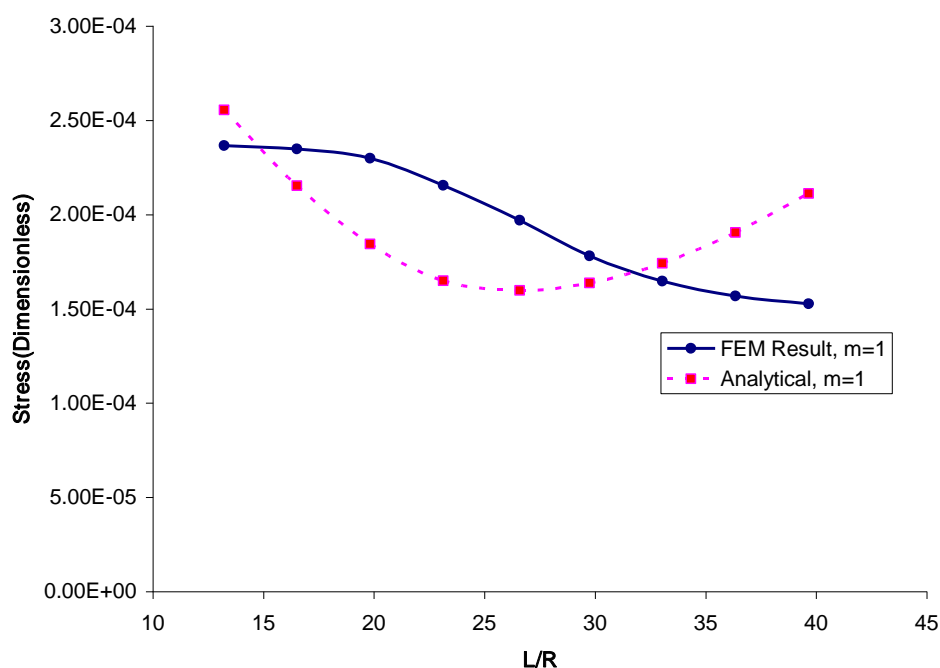
درصد اختلاف برای مد اول کمانش مربوط به شکل های (۳۰-۵)، در شکل (۳۱-۵) نشان داده شده است.



شکل ۵-۳۱- درصد اختلاف نتایج عددی و تحلیلی بر حسب طول در پانل دارای تکیه گاه ساده در سه لبه و یک لبه دیگر آزاد مربوط به مد اول کمانش

۵-۲-۳- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر نسبت طول پانل استوانه‌ای به شعاع آن بر تنش بحرانی بی بعد

مقایسه تحلیلی - عددی بر حسب نسبت طول پانل به شعاع آن بر تنش بحرانی بی بعد برای مد اول کمانش در شکل (۵-۳۲) نشان داده شده است. درصد اختلاف مربوط به شکل (۵-۳۲) مشابه شکل (۵-۲۸) می باشد فقط متغیر آن از طول پانل به نسبت طول به شعاع پانل تغییر کرده است.



شکل ۵-۳۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت طول پانل به شعاع مربوط به مد اول کمانش

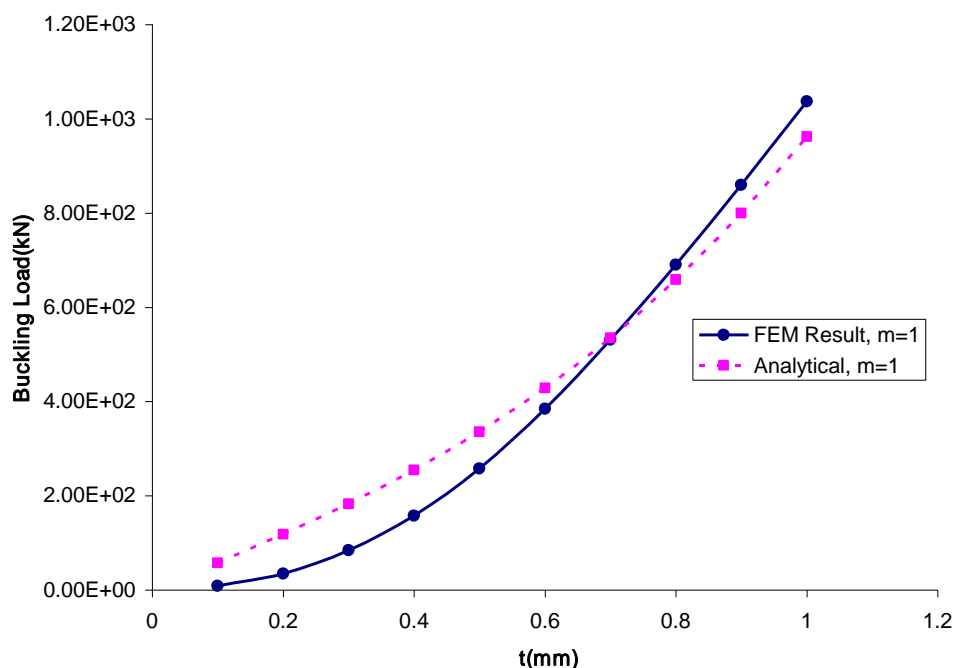
۵-۲-۴- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر ضخامت پانل استوانه‌ای بر روی تنش بحرانی بی بعد

مقایسه تحلیلی- عددی تغییرات ضخامت پوسته بر بار کمانش بحرانی انجام گرفته است که مثل قبل نشان می دهد که با افزایش ضخامت پوسته، بار، تنش و یا تنش بحرانی بی بعد، افزایش می یابد. این مقایسه برای مد اول کمانش با داده های مربوط به جدول (۵-۲) در شکل (۵-۳۳) نشان داده شده است که طول و شعاع پانل برای این حالت به ترتیب $L = 0.1m$ و $R = 0.02m$ می باشد.

جدول ۵-۲- مقادیر تحلیلی و عددی بار و تنش بحرانی بر حسب ضخامت برای پانل با سه لبه تکیه

گاه ساده مربوط به مد اول کمانش

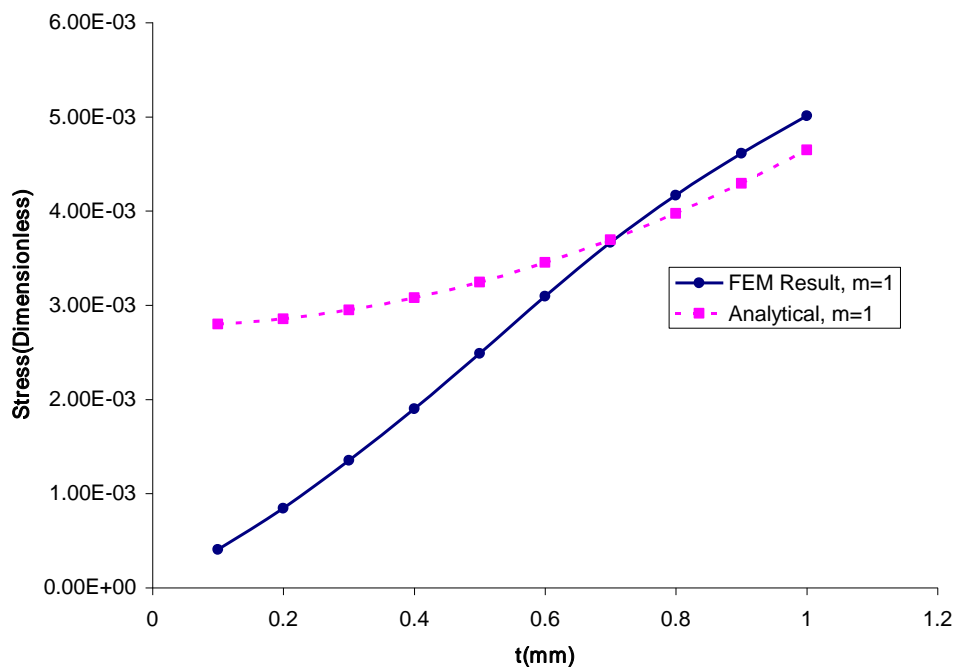
مقدار عددی تنش بحرانی بی بعد مد اول	مقدار تحلیلی تنش بحرانی بی بعد مد اول	مقدار عددی بار کمانش برای مد اول (N)	مقدار تحلیلی بار کمانش برای مد اول (N)	ضخامت پانل $t(mm)$
40.69e-5	279.7e-5	8423.6	57902.28	0.1
84.54e-5	285.3e-5	35002	118127.2	0.2
135.17e-5	294.7e-5	83944	182997.2	0.3
190.16e-5	307.8e-5	157460	254835.3	0.4
248.93e-5	324.6e-5	257645	335963.8	0.5
309.44e-5	345.2e-5	384327	428705.5	0.6
366.45e-5	369.5e-5	530986	535382.8	0.7
416.87e-5	397.5e-5	690342	658318.5	0.8
461.20e-5	429.3e-5	859229	799835.2	0.9
501.06e-5	464.9e-5	1037210	962255.5	1.0



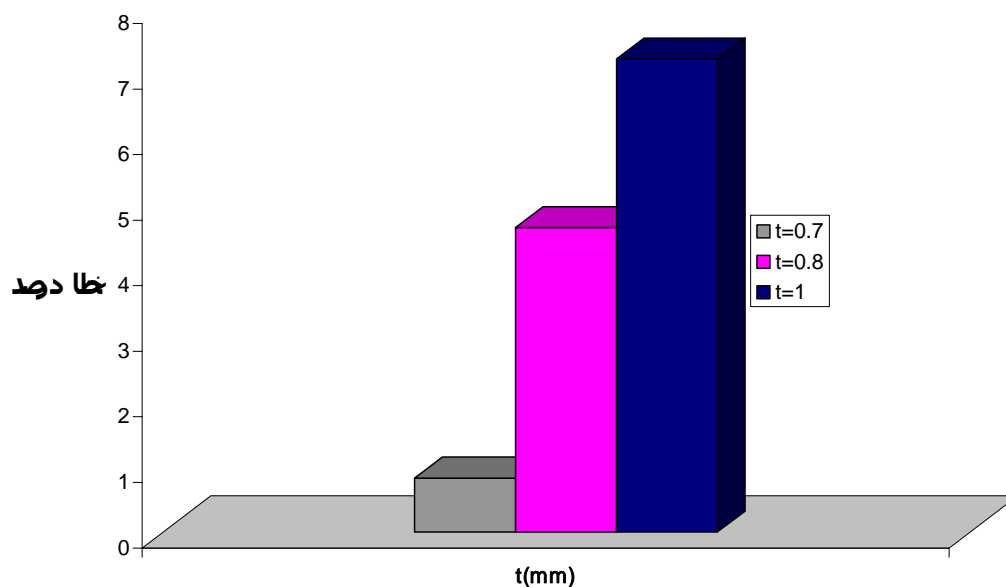
شکل ۵-۳۳- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی بار بحرانی بر حسب ضخامت پانل استوانه‌ای مربوط به مد اول کمانش

هم چنین مقایسه تحلیلی و عددی تغییرات ضخامت پوسته بر روی تنش بی بعد انجام گرفته است که با داده های مربوط به جدول (۵-۲) در شکل (۵-۳۴) نشان داده شده است. هم چنین زاویه

مرکزی پانل در این حالت $\beta = \pi/2$ است. درصد اختلاف برای مد اول کمانش مربوط به نتایج شکل (۳۴-۵) در شکل (۳۵-۵) نشان داده شده است.



شکل ۳۴-۵- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب ضخامت پانل استوانه‌ای مربوط به مد اول کمانش

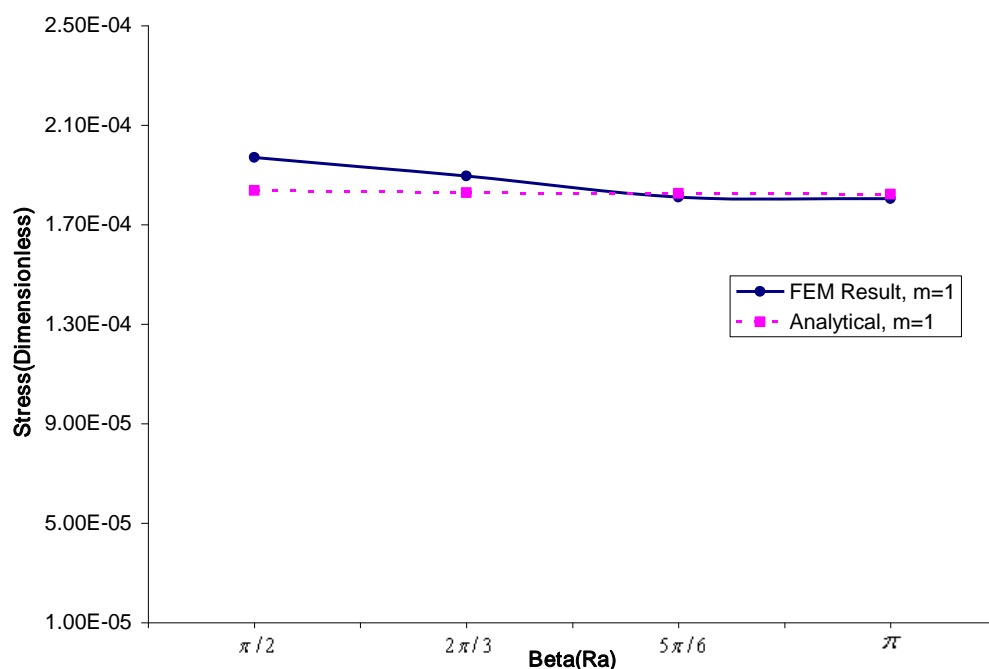


شکل ۳۵-۵- درصد اختلاف نتایج عددی و نتایج تحلیلی بر حسب ضخامت در پانل دارای تکیه گاه ساده در سه لبه و یک لبه دیگر آزاد مربوط به مد اول کمانش

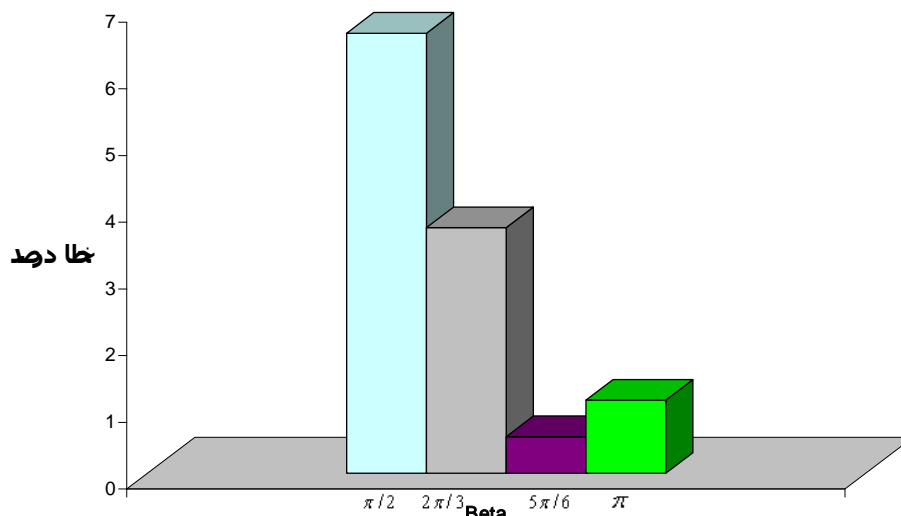
۵-۲-۵- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر زاویه مرکزی

پانل استوانه‌ای بر تنش بحرانی بی بعد

یک حالت دیگر مورد بررسی، مقایسه تغییرات زاویه مرکزی β روی تنش بحرانی بی بعد می باشد که برای مد اول کمانش در شکل (۳۶-۵) نشان داده شده است. برای تطابق بیشتر با نتایج عددی، نتایج تحلیلی مربوط به این حالت برای $M = 41$ در نظر گرفته شده است. شعاع پانل $R = 0.03007518m$ و ضخامت پانل برابر با $9.93 \times 10^{-5}m$ می باشد. درصد اختلاف برای مد اول کمانش مربوط به نتایج شکل (۳۶-۵) در شکل (۳۷-۵) نشان داده شده است که برای هر چهار زاویه مرکزی، کمتر از ۷ درصد می باشد.



شکل ۳۶-۵- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب زاویه مرکزی پانل استوانه‌ای مربوط به مد اول کمانش



شکل ۵-۳۷- درصد اختلاف نتایج عددی و نتایج تحلیلی بر حسب زاویه مرکزی پانل دارای تکیه گاه ساده در سه لبه و یک لبه دیگر آزاد مربوط به مد اول کمانش

۵-۲-۶- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر نسبت شعاع به

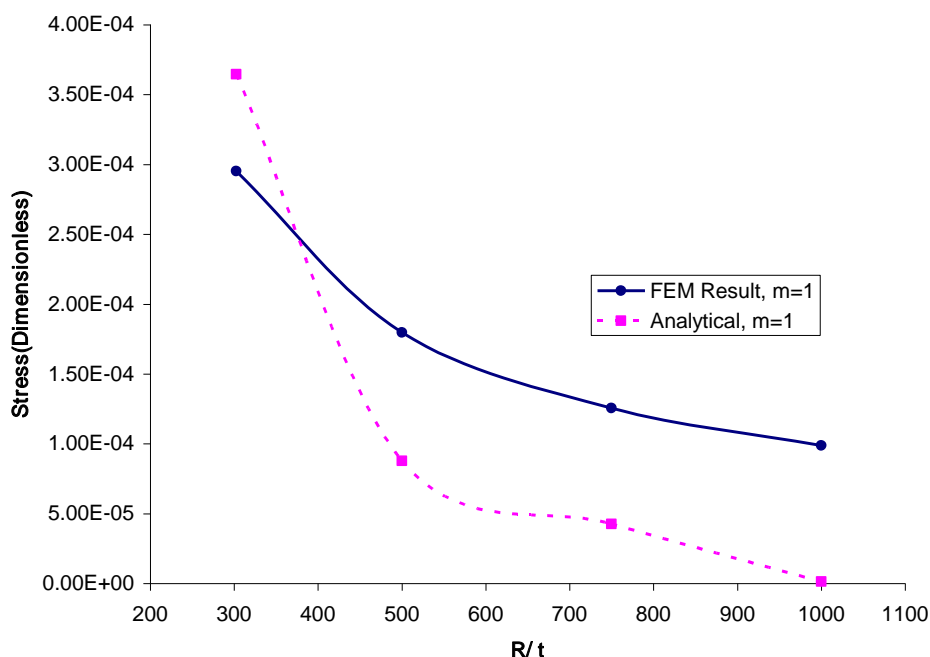
ضخامت پانل استوانه‌ای بر تنش بحرانی بی بعد

آخرین حالت مقایسه نتایج تحلیلی و عددی، بررسی اثر نسبت شعاع به ضخامت (R/t) بر تنش بحرانی بی بعد می باشد که نشان می دهد با افزایش این پارامتر بی بعد برای یک ضخامت ثابت، بار و تنش های بحرانی رو به کاهش است. این مطلب در شکل (۵-۳۸) و داده های آن در جدول (۵-۳) نشان داده شده است و مربوط به مد اول کمانش است. طول پانل برای این حالت $L=1m$ در نظر گرفته شده است.

جدول ۵-۳- مقادیر تحلیلی و عددی بار و تنش بحرانی بر حسب نسبت شعاع به ضخامت برای پانل با

سه لبه تکیه گاه ساده مربوط به مد اول کمانش

نسبت شعاع به ضخامت (R/t)	مقدار تحلیلی تنش بحرانی بی بعد در مد اول کمانش	مقدار عددی تنش بحرانی بی بعد در مد اول کمانش
302.6	$3.64e-4$	$2.95e-4$
500	$.87e-4$	$1.80e-4$
750	$.42e-4$	$1.26e-4$
1000	$.01e-4$	$.98e-4$



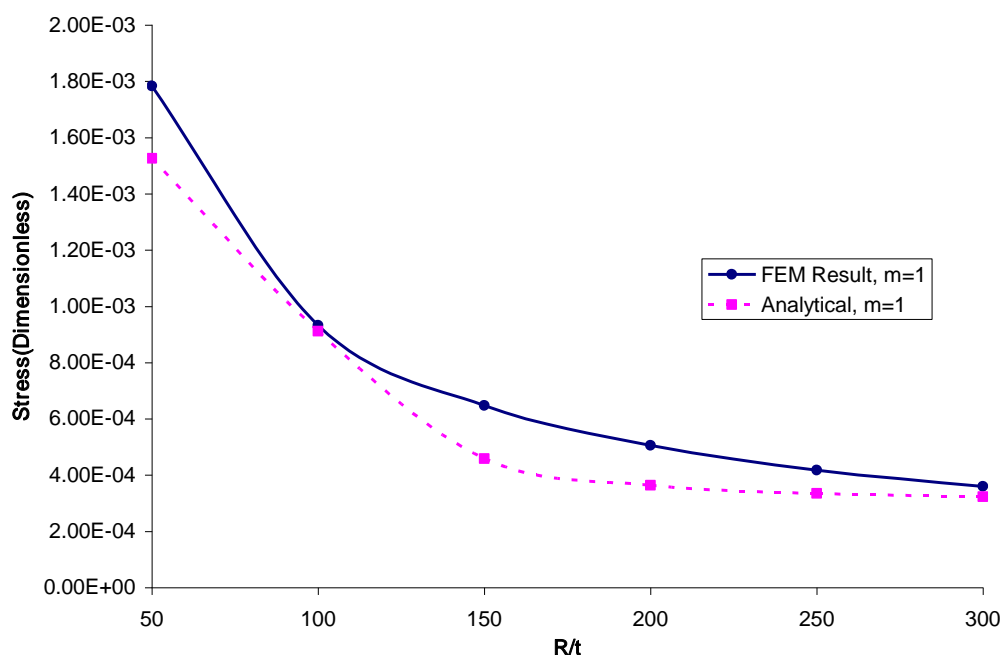
شکل ۵-۳۸- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت شعاع به ضخامت پانل استوانه‌ای مربوط به مد اول کمانش

بررسی اثر نسبت شعاع به ضخامت (R/t) بر تنش بحرانی بی بعد برای مقادیر کوچکتر این نسبت بررسی شده است. این مقایسه تحلیلی - عددی برای مد اول کمانش در شکل (۵-۳۹) و داده های آن در جدول (۵-۴) نشان داده شده است.

جدول ۵-۴- مقادیر تحلیلی و عددی بار و تنش بحرانی بر حسب نسبت شعاع به ضخامت با محدوده

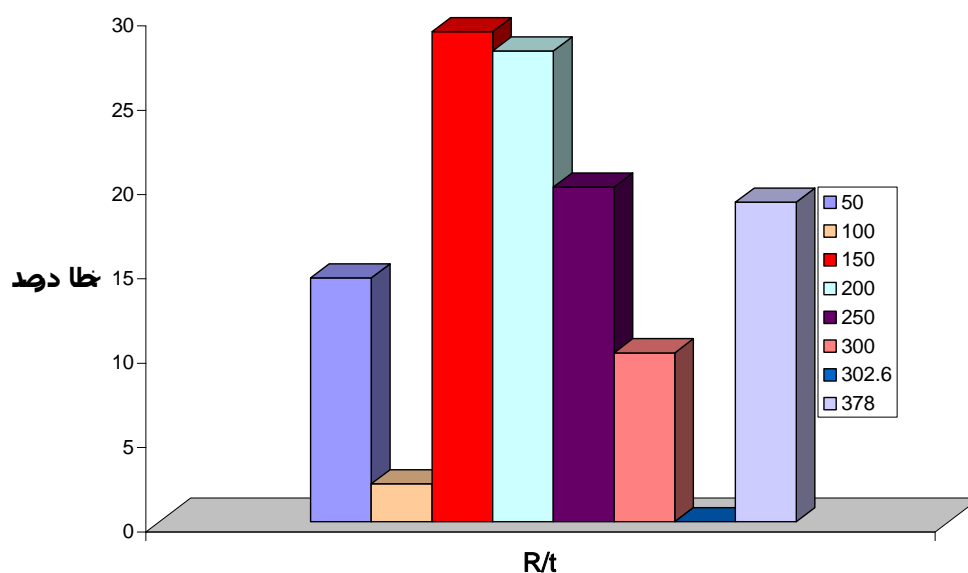
کوچکتر برای پانل با سه لبه تکیه گاه ساده مربوط به مد اول کمانش

نسبت شعاع به ضخامت (R/t)	مقدار تحلیلی تنش بحرانی بی بعد در مد اول کمانش	مقدار عددی تنش بحرانی بی بعد در مد اول کمانش
۵۰	15.26e-4	17.84e-4
۱۰۰	9.12e-4	9.33e-4
۱۵۰	4.59e-4	6.47e-4
۲۰۰	3.64e-4	5.05e-4
۲۵۰	3.35e-4	4.18e-4
۳۰۰	3.23e-4	3.59e-4



شکل ۵-۳۹- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت شعاع به ضخامت با محدوده کوچکتر در پانل استوانه‌ای مربوط به مد اول کمانش

درصد اختلاف برای مد اول کمانش مربوط به نتایج نمودارهای (۵-۳۸) و (۵-۳۹) در شکل (۵-۴۰) نشان داده شده است. درصد اختلاف از صفر تا کمتر از ۳۰ درصد می باشد.



شکل ۵-۴۰- درصد اختلاف نتایج عددی و نتایج تحلیلی بر حسب نسبت شعاع به ضخامت پانل دارای تکیه گاه ساده در سه لبه و یک لبه دیگر آزاد مربوط به مد اول کمانش

۵-۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به پانل با دو لبه دارای

تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد با تابع خیز جدید

در ابتدا مقایسه ای بین نتایج تحلیلی و عددی برای پانل هایی که مقادیر هندسی آن در جدول (۵-۵) آمده است صورت گرفته است. نتایج تحلیلی مربوط به بخش (۳-۶)، در جدول (۵-۵) آمده است که در مقایسه با نتایج بخش (۳-۴) برای مقادیر هندسی مشخص شده در زیر، دارای دقت بیشتری می باشد و تطابق بهتری با نتایج عددی دارد. با افزایش در طول پانل تا حدی از دقت نتایج کاسته شده است.

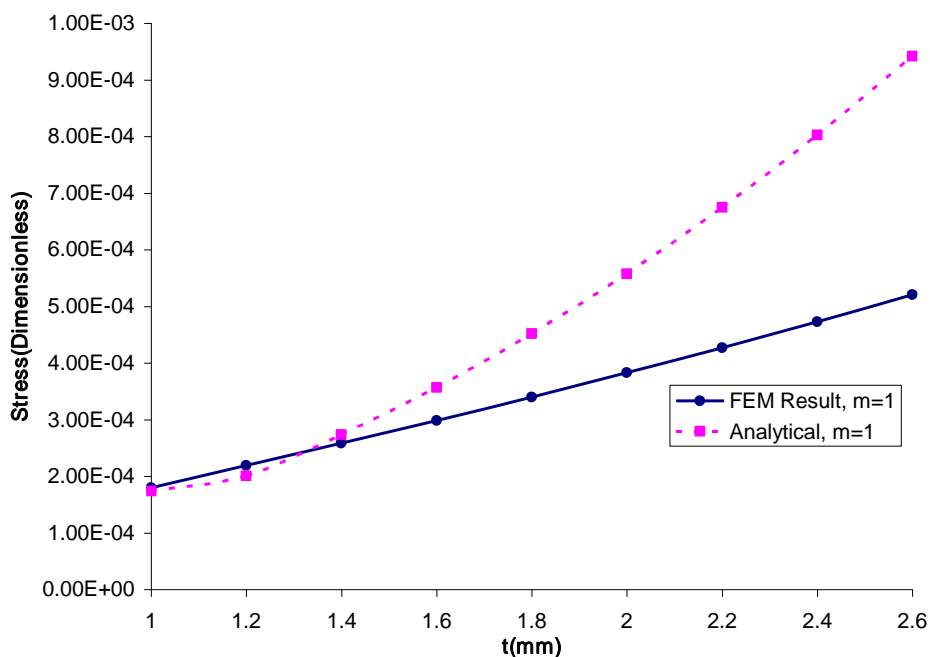
جدول ۵-۵- مقادیر هندسی، مقادیر تحلیلی و عددی تنش بی بعد و درصد اختلاف بین آنها برای پانل با دو لبه تکیه گاه ساده با استفاده از حل پیشنهادی جدید

۰.۵	۰.۵	۰.۲۵	شعاع پانل $R(m)$
۱.۶۵	۱.۶۵	۱	ضخامت $t(mm)$
۰.۶۳	۰.۷۸	۱	پارامتر $k(Ra)$
۱.۲۵	۱	۰.۳۹	طول $L(m)$
$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	زاویه مرکزی β
۱	۱	۱	مد کمانش
۵.۵۹e-4	3.79e-4	3.79e-4	مقدار تحلیلی تنش بحرانی بی بعد
۳.۱۸	۳.۰۹	۴.۱۶e-4	مقدار عددی تنش بحرانی بی بعد
۴۳.۱۱	۱۸.۴۶	۸.۸۹	درصد اختلاف

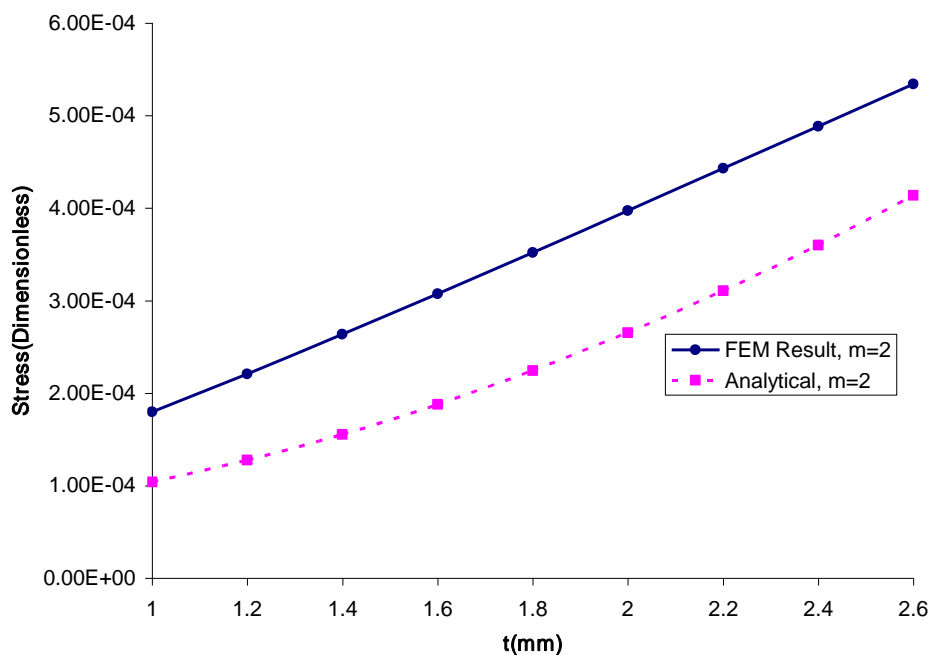
سپس مقایسه تحلیلی- عددی تغییرات ضخامت پوسته بر تنش بحرانی بی بعد صورت گرفته است که مطابق با قبل نشان می دهد که با افزایش ضخامت پوسته، بار، تنش و یا تنش بحرانی بی بعد، افزایش می یابد. این مقایسه برای سه مد اول کمانش با داده های مربوط به جدول (۵-۶) به ترتیب در شکل های (۵-۴۱)، (۵-۴۲) و (۵-۴۳) نشان داده شده است که طول و شعاع پانل برای این حالت به ترتیب $L=1m$ و $R=0.5m$ می باشد و از روابط مربوط به بخش (۳-۶) نتیجه شده است. لازم به ذکر است که محدوده ضخامت پانل نسبت به حالت های مورد بررسی در قبل افزایش یافته است.

جدول ۵-۶- مقادیر تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب ضخامت برای پانل با دو لبه تکیه گاه ساده مربوط به سه مد اول کمانش با استفاده از حل پیشنهادی جدید

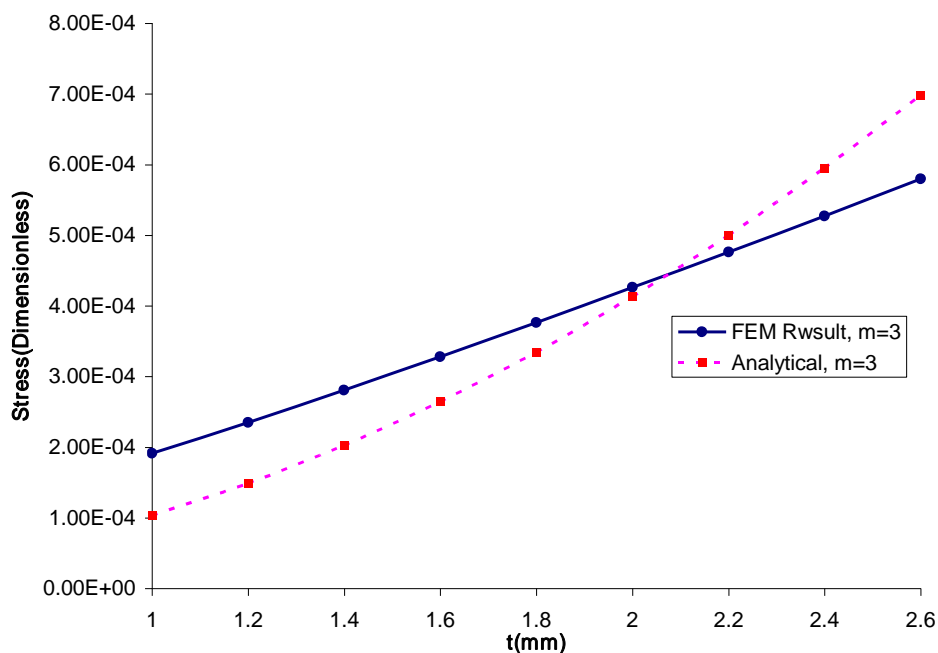
مقدار عددی تنش بحرانی بی بعد در مد سوم	مقدار عددی تنش بحرانی بی بعد در مد دوم	مقدار عددی تنش بحرانی بی بعد در مد اول	مقدار تحلیلی تنش بحرانی بی بعد در مد سوم	مقدار تحلیلی تنش بحرانی بی بعد در مد دوم	مقدار تحلیلی تنش بحرانی بی بعد در مد اول	ضخامت پانل $t(mm)$
1.91e-4	1.80e-4	1.79e-4	1.04e-4	1.04e-4	1.74e-4	۱
2.35e-4	2.21e-4	2.19e-4	1.49e-4	1.28e-4	2.01e-4	۱,۲
2.81e-4	2.64e-4	2.58e-4	2.02e-4	1.56e-4	2.73e-4	۱,۴
3.28e-4	3.07e-4	2.99e-4	2.64e-4	1.88e-4	3.57e-4	۱,۶
3.76e-4	3.52e-4	3.40e-4	3.35e-4	2.24e-4	4.52e-4	۱,۸
4.26e-4	3.97e-4	3.83e-4	4.13e-4	2.65e-4	5.57e-4	۲
4.76e-4	4.43e-4	4.27e-4	5.00e-4	3.11e-4	6.74e-4	۲,۲
5.27e-4	4.89e-4	4.73e-4	5.95e-4	3.60e-4	8.03e-4	۲,۴
5.80e-4	5.34e-4	5.21e-4	6.98e-4	4.14e-4	9.42e-4	۲,۶



شکل ۵-۴۱- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب ضخامت پانل استوانه‌ای مربوط به مد اول کمانش

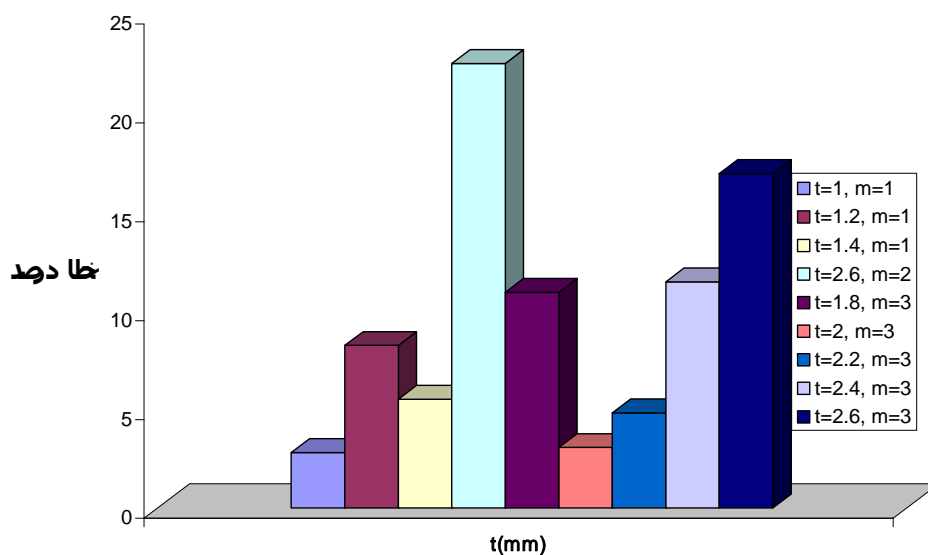


شکل ۵-۴۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب ضخامت پانل استوانه‌ای مربوط به مد دوم کمانش



شکل ۵-۴۳- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب ضخامت پانل استوانه‌ای مربوط به مد سوم کمانش

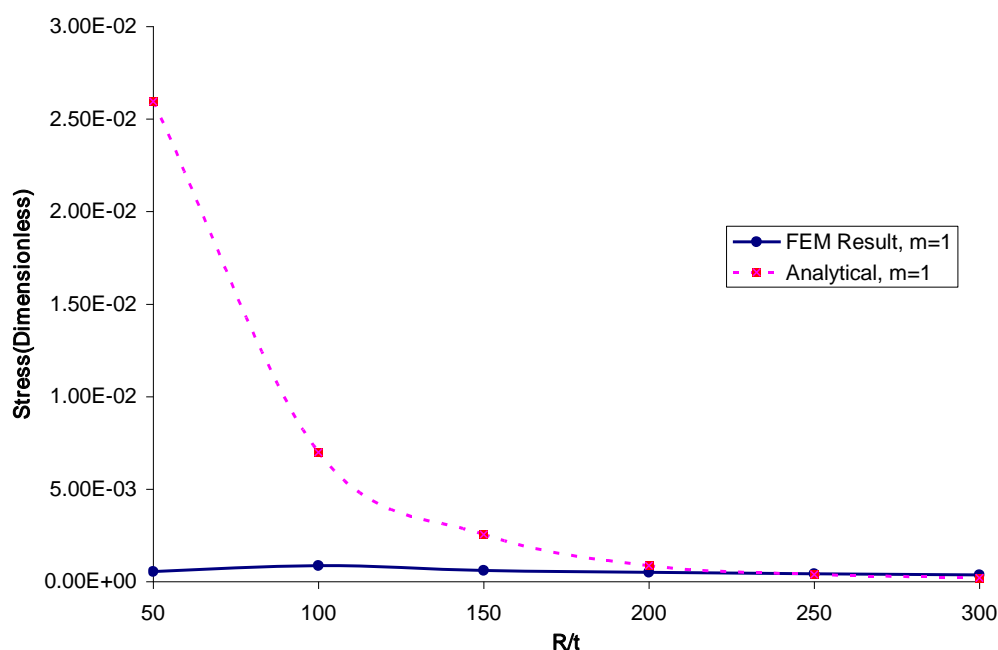
درصد اختلاف برای سه نمودار (۵-۴۱) تا (۵-۴۳) در شکل (۵-۴۴) نشان داده شده است. حداقل این اختلاف ۲,۷۹٪ برای $t = 1mm$ در مد اول کمانش و حداکثر آن برابر ۲۲,۴٪ برای $t = 2.6mm$ در مد دوم کمانش می باشد.



شکل ۵-۴۴- درصد اختلاف نتایج عددی و نتایج تحلیلی بر حسب ضخامت پانل دارای تکیه گاه ساده در دو لبه و دو لبه دیگر آزاد مربوط به سه مد اول کمانش در آخر بررسی اثر نسبت شعاع به ضخامت (R/t) بر تنش بحرانی بی بعد بررسی شده است که از روابط مربوط به بخش (۳-۶) نتیجه شده است. این مقایسه تحلیلی - عددی برای مد اول کمانش در شکل (۵-۴۵) با طول $L=0.4m$ ، ضخامت $t=1mm$ و داده های آن در جدول (۵-۷) نشان داده شده است. همان طور که در نمودار (۵-۴۵) نشان داده شده است این مقایسه برای مقادیر کوچک (R/t) دارای دقت کمی بوده که با افزایش این نسبت و یا شعاع پانل، تطابق بهتری بین نتایج حاصل می شود.

جدول ۵-۷- مقادیر تحلیلی و عددی بار و تنش بحرانی بر حسب نسبت شعاع به ضخامت برای پانل با دو لبه تکیه گاه ساده مربوط به مد اول کمانش با استفاده از حل پیشنهادی جدید

نسبت شعاع به ضخامت (R/t)	مقدار تحلیلی تنش بحرانی بی بعد در مد اول کمانش	مقدار عددی تنش بحرانی بی بعد در مد اول کمانش
۵۰	25.9e-3	0.55e-3
۱۰۰	6.97e-3	0.85e-3
۱۵۰	2.56e-3	0.60e-3
۲۰۰	0.87e-3	0.50e-3
۲۵۰	0.39e-3	0.41e-3
۳۰۰	0.21e-3	0.36e-3



شکل ۵-۴۵- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی تنش بحرانی بی بعد بر حسب نسبت شعاع به ضخامت پانل استوانه‌ای مربوط به مد اول کمانش

فصل ششم

بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق، کمانش پانل های استوانه‌ای جدار نازک با ابعاد و زوایای مختلف، تحت بارگذاری محوری با روش های تحلیلی و عددی مورد مطالعه قرار گرفت. در این بخش نتایج بدست آمده به طور خلاصه بیان شده است.

۱- با توجه به فرضیات مورد استفاده در بحث تحلیلی مسئله، عدم استفاده از روش تجربی به علت شرایط خاص تکیه گاهی و هم چنین کلاسیک بودن معادلات پایداری، در برخی موارد خطاهای نسبتاً بیشتری بین مقایسه تحلیلی - عددی نسبت به مقایسه تجربی - عددی ایجاد کرده است.

۲- استفاده از نرم افزار Abaqus برای تحلیل های عددی و هم چنین استفاده از المان S8R5 که مناسب برای پانل ها با ضخامت کم می باشد در دقت بیشتر مربوط به نتایج کمک می کند.

- ۳- به دلیل این که پارامتر k نسبت عکس با طول پانل دارد، تغییرات پارامتر k برای یک ضخامت و شعاع ثابت، به گونه ای روی بار و تنش بحرانی کمانش تاثیر گذار است که محدوده تغییرات تنش بحرانی برای طول های بزرگ طوری است که تنش بحرانی زیاد و کم می شود، اما با کاهش طول پانل این مقدار رفته رفته کم شده است تا به یک حدی می رسد که تغییرات آن بسیار کم می شود. در نتیجه نمودار بار بحرانی کمانش نسبت به پارامتر k ، دارای دو مقدار می نیمم می باشد که یکی از آن ها مربوط به پانل با طول کوچک تر و دیگری مربوط به پانل با طول بزرگ تر می باشد.
- ۴- به دلیل این که پارامتر k نسبت مستقیم با شعاع پانل دارد تغییرات پارامتر k برای یک ضخامت و طول ثابت، به گونه ای روی بار و تنش بحرانی کمانش تاثیر گذار است که برای شعاع های کوچک، بار بحرانی کمانش رو به افزایش است اما برای شعاع های بزرگتر این مقدار رفته رفته کم شده است تا به یک حدی می رسد که تغییرات آن بسیار کم می شود. در نتیجه نمودار بار بحرانی کمانش نسبت به پارامتر k ، دارای دو مقدار می نیمم می باشد که یکی از آن ها مربوط به پانل با شعاع کوچک تر و دیگری مربوط به پانل با شعاع بزرگ تر می باشد.
- ۵- برای مقادیر محدود تر k ، یعنی $0.1 < k < 0.05$ با افزایش k ، تنش بحرانی کمانش رو به افزایش است.
- ۶- اگر زاویه مرکزی β خیلی کوچک باشد، شرایط کمانش مربوط به یک چنین پانلی بسیار شبیه به شرایط مربوط به ورق های مستطیلی تحت فشار در جهت طولی می باشد.
- ۷- افزایش در پارامتر M باعث کاهش در بار و تنش بحرانی بی بعد می شود. یعنی با افزایش تعداد سطر و ستون های ماتریس تنش باعث همگرایی بیشتر بین نتایج می شود.
- ۸- می توان نتیجه گرفت که افزایش قید ها در لبه های پانل باعث افزایش در بار و تنش کمانش بحرانی می شود. شدت افزایش این تنش بحرانی از سه به چهار لبه تکیه گاه ساده در پانل استوانه ای شکل بسیار قابل ملاحظه است ولی برای برخی حالات خاص، تنش های بحرانی بی بعد در پانل با دو و سه لبه تکیه گاه ساده تفاوت چندانی ندارد.

- 9- بار کمانش بحرانی در حالتی که چهار طرف پانل تکیه گاه ساده قرار گرفته است، نسبت به حالتی که در سه لبه آن تکیه گاه ساده قرار گرفته و یک لبه آزاد است، حدود ده برابر بیشتر است. این موضوع را رابطه $lorenz$ نیز بیان می کند.
- 10- تاثیر طول پانل بر روی بار کمانش بحرانی در مقایسه با تاثیرات شعاع کمتر می باشد.
- 11- تاثیر ضخامت پانل بر روی بار کمانش بحرانی در مقایسه با تاثیرات شعاع بیشتر می باشد.
- 12- با افزایش ضخامت پوسته، بار، تنش و یا تنش بحرانی بی بعد، افزایش می یابد.
- 13- افزایش در نسبت طول پانل به شعاع آن L/R برای یک شعاع ثابت، و یا افزایش در طول پانل، باعث کاهش در بار کمانش بحرانی و تنش بحرانی می شود.
- 14- تاثیر افزایش نسبت شعاع به ضخامت به گونه ای است که با افزایش آن بار کمانش بحرانی تا حدی کاهش می یابد.
- 15- بررسی هایی که بر روی زاویه مرکزی در پانل استوانه ای انجام شد نشان داد که تغییرات در زاویه مرکزی پانل تاثیر چندانی بر روی بار کمانش بحرانی ندارد. به همین خاطر یک حالت پانل با زاویه مرکزی $\beta = \pi/2$ بررسی شده است.
- 16- استفاده از حل پیشنهادی جدید مربوط به شرط مرزی دو لبه خمیده در پانل دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد، که در آن تابع خیز به صورت کلی در نظر گرفته شده است در دقت و مقایسه با نتایج عددی مفید واقع شده است. فقط در مواردی که نسبت R/t برای یک ضخامت ثابت کوچک می باشد و یا مواقعی که طول پانل بزرگ در نظر گرفته می شود، از دقت نتایج تا حدی کم می شود.

پیوست

بخش اول (بررسی حل معادلات مربوط به شرط مرزی دو لبه با تکیه گاه ساده و دو لبه آزاد با استفاده از معادلات جابجایی)

*****First Program*****

```
> restart;
> with(linalg);
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> lambda:=m*pi*R/L;
> alpha:=(t^2)/(12*R^2);

m13:=nu*lambda:
> m12:=((1+nu)/2)*n*(pi*lambda/beta):
> m11:=(lambda^2)+((1-nu)/2)*(n*pi/beta)^2:
> m21:=((1+nu)/2)*n*(pi*lambda/beta):
> m22:=((1-nu)/2)*(lambda^2)+((n*pi/beta)^2)+(alpha*(1-
nu)*(lambda^2)+(alpha*(n*pi/beta)^2)-(psi*(lambda^2)):
> m23:=(n*pi/beta)+(alpha*n*pi/beta)*((n*pi/beta)^2+lambda^2):
> m31:=nu*lambda:
> m32:=(n*pi/beta)*(1+alpha*((n*pi/beta)^2+((2-nu)*lambda^2))):
> m33:=1-((lambda^2)*psi)+alpha*(lambda^2+(n*pi/beta)^2)^2:
> M:=matrix([[m11,m12,m13],[m21,m22,m23],[m31,m32,m33]]);

>N:=det(M);
>beta:=pi/2:
>R:=0.1513:#Radius of panel
>L:=4.032: #Length of panel
> t:=0.5e-3:#thickness of panel
```

>m:=1:#number of half wave in axial direction

> n:=1:#number of wave in circumfrential direction

>nu:=0.3:

> s:=solve(N,psi);

s := .1595022919e-1, 12.01054749

که s همان s در رابطه (۳-۱۵) می باشد که از روی آن بار و تنش بحرانی در جهت محوری به دست

می آید.

بخش دوم (بررسی حل معادلات منجر به تنش بحرانی مربوط به شرط مرزی دو لبه با تکیه گاه ساده و دو لبه آزاد با استفاده از توابع خیز و نیرو)

*****Second Program*****

```
> restart;
> F:=-E*t*R*f[1]*(sin(Pi*phi/beta)+1/2*sin(2*Pi*phi/beta))*sin(m*Pi*x/L);
> y:=R*phi;
> nabl4F:=1/R^4*diff(F,phi$4)+2*diff(F,x$2,phi$2)/R^2+diff(F,x$4);#:nabl4F:=collect(",{sin(m*Pi*x/L),f[1]}");
> W:=w[1]*(sin(Pi*phi/beta/2)+alpha[3]*sin(3*Pi*phi/beta/2))*sin(m*Pi*x/L);
>(nabl4F-
E*t/R*diff(W,x,x))*(sin(Pi*phi/beta)+1/2*sin(2*Pi*phi/beta)):aa_0:=expand("");
>aa_0:=collect(",{sin(m*Pi*x/L),t,f[1]}");
>aa1:=simplify(int(aa_0,phi=0..beta));
>collect(aa1,f1):solve(",f[1]);
```

$$\frac{128}{105} \frac{\beta^4 w_1 m^2 R^2 L^2 (9\alpha_3 + 7)}{\pi^3 (20L^4 + 16m^2 \beta^2 R^2 L^2 + 5\beta^4 R^4 m^4)}$$

```
> normal("):collect(",{w[1],alpha[3]}");
>subs(L=m*R*beta/k,");
>ff1:=collect(",{m,R,beta,k,t,Pi,w[1],alpha[3]}):ff1:=normal(");
```

$$ff1 := \frac{128}{105} \frac{k^2 \beta^2 (9\alpha_3 + 7) w_1}{\pi^3 (20 + 16k^2 + 5k^4)}$$

```
>aa_2:=D*(1/R^4*diff(W,phi$4)+2*diff(W,x$2,phi$2)/R^2+diff(W,x$4))+(1/R)*diff(F,x$2)+N[0]*diff(W,x$2):collect(aa_2,sin(m*Pi*x/L)):aa2:=remove(has,"sin(m*Pi*x/L)");
```

```
>aa2*(sin(Pi*phi/beta/2)+alpha[3]*sin(3*Pi*phi/beta/2));aa3:=int(",phi=0..beta);
```

```
>aa4:=subs(f[1]=ff1,aa3);

>eq1:=subs({L=2.640683158,m=1,E=207e9,R=0.1513,beta=pi/2,t=0.5e-
3,nu=0.3,k=0.09,alpha[3]=(1+4*k^2*nu)/(9+4*k^2*nu)},aa1);
>eq2:=subs({L=2.640683158,m=1,E=207e9,R=0.1513,beta=pi/2,t=0.5e-
3,nu=0.3,k=0.09,alpha[3]=(1+4*k^2*nu)/(9+4*k^2*nu)},aa4);
>eq2:=subs(D=E*t^3/(12*(1-nu^2)),");
>equ1:=evalf(eq1);
>equ2:=evalf(eq2);
>solve({equ1,equ2},{w[1],N[0]});
>evalf("");
>simplify("");
```

$$\{w[1] = 815.3432711*f[1], N[0] = 26657.85586\}$$

در نهایت بار بحرانی کمانش در جهت محوری محاسبه شده است که با استفاده از آن تنش بحرانی بی بعد که در رابطه (۳-۵) آمده است، محاسبه می شود. محاسبه بار کمانش بحرانی در حالت پارامتری به صورت زیر است:

$$N[0] = .2842052555e-10 * E * t * (.8696104703e13 * k^2 * beta^6 * m^2 * R^4 * L^2 + .3577647310e15 * t^2 * m^2 * R^2 * beta^2 * L^2 + .7377108755e14 * t^2 * L^4 * k^6 + .6519268435e15 * t^2 * m^4 * R^4 * beta^4 + .1466835398e14 * t^2 * L^4 * k^8 + .7123493315e15 * t^2 * m^4 * R^4 * beta^4 * k^2 + .8049706450e14 * t^2 * L^4 + .1646612175e15 * t^2 * L^4 * k^4 + .1717270709e15 * t^2 * L^4 * k^2 + .6183896676e12 * k^6 * beta^6 * m^2 * R^4 * L^2 + .4637922508e13 * k^4 * beta^6 * m^2 * R^4 * L^2 + .5724235699e13 * t^2 * m^4 * R^4 * beta^4 * k^8 + .6601951840e14 * t^2 * m^4 * R^4 * beta^4 * k^6 + .3385249390e15 * t^2 * m^4 * R^4 * beta^4 * k^4 + .4579388557e15 * t^2 * m^2 * R^2 * beta^2 * L^2 * k^2 + .2840651964e15 * t^2 * m^2 * R^2 * beta^2 * L^2 * k^4 + .8872565329e14 * t^2 * m^2 * R^2 * beta^2 * L^2 * k^6 + .1431058924e14 * t^2 * m^2 * R^2 * beta^2 * L^2 * k^8) / m^2 / R^4 / beta^4 / L^2 / (20500. + 10645. * k^4 + 22400. * k^2 + 2076. * k^6 + 180. * k^8)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1.895 t^2 \left[(1.975 \alpha_3^2 + 0.197) k^6 + (15.208 \alpha_3^2 + 7.308) k^4 + (0.163 \alpha_3^2 + 0.254 \alpha_3 + 0.099) k^2 (R/t)^2 \beta^4 + (6.341 \alpha_3^2 + 11.184) k^2 + (38.751 \alpha_3^2 + 4.345) + (39.996 \alpha_3^2 + 0.494) k^{-2} \right]}{R^2 \beta^2 (5 \alpha_3^2 k^4 + 16 \alpha_3^2 k^2 + 5 k^4 + 16 k^2 + 20 \alpha_3^2 + 20)}$$

بخش سوم (بررسی حل معادلات منجر به تنش بحرانی مربوط به شرط مرزی سه لبه با تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد با استفاده از توابع خیز و نیرو)

*****Third Program*****

```
>restart;
>with(linalg);
>F:=-E*t^2*R*f[1]*(sin(Pi*phi/beta)+1/2*sin(2*Pi*phi/beta))*sin(m*Pi*x/L);
>y:=R*phi;
>nabla4F:=1/R^4*diff(F,phi$4)+2*diff(F,x$2,phi$2)/R^2+diff(F,x$4);#:nabla4F:=collect(",{sin(m*Pi*x/L),f[1]}");
>w[j]*(sin(j*Pi*phi/beta/2)-
alpha[j]*sin(j*Pi/2)*sin(Pi*phi/beta/2))*sin(m*Pi*x/L):W:="*t;
>(1/E*nabla4F-
1/R*diff(W,x,x))*(sin(Pi*phi/beta)+1/2*sin(2*Pi*phi/beta)):aa_0:=expand("");
>aa_0:=collect(",{sin(m*Pi*x/L),t,f[1]}");
>aa1:=simplify(int(aa_0,phi=0..beta));
>collect(aa1,f1):solve(",f[1]);
>normal("):collect(",{w[j],alpha[j]}");
>subs(L=m*R*beta/k,");
>ff1:=collect(",{m,R,beta,k,t,Pi,w[j],alpha[j]}):ff1:=normal(");

>##### for i<>j
> # we defined: b=(i^2-16)*(i^2-4), k=m*R*beta/
>ff1_i:=select(has,ff1,i):af[i]:=remove(has,"w[i]"):af[j]:=subs(i=j,af[i]);
>ff1_Noi:=remove(has,ff1,i);
>ff1_exact:=ff1_Noi*afi*w[i];
```

$$ff1_exact := -\frac{128}{15} \frac{\beta^2 k^2 a_{\beta} w_i}{\pi^3 (5k^4 + 16k^2 + 20)t}$$

```
>#=====for i<>j
```

```

>nabla4w:=1/R^4*diff(W,phi$4)+2*diff(W,x$2,phi$2)/R^2+diff(W,x$4):
> aa2:=D1/t*nabla4w+1/R*diff(F,x$2)+ sigma
[0]*diff(W,x$2):collect(aa2,sin(m*Pi*x/L)):
> aa2*(sin(i*Pi*phi/beta/2)-
alpha[i]*sin(i*Pi/2)*sin(Pi*phi/beta/2)):aa3:=int(",phi=0..beta):
>aa3:=subs(f[1]=ff1,aa3):
>eq2:=subs(L=m*R*beta/k,m=1,R=302.6*t,beta=Pi/2,alpha[i]=(i^2+4*k^2*nu)/(1+4*k
^2*nu),alpha[j]=(j^2+4*k^2*nu)/(1+4*k^2*nu),D1=E*t^3/(12*(1-nu^2)), sigma [0]=
sigma0*E,nu=0.3,aa3):
>remove(has,eq2,x):collect(",{w[j],t,E}):remove(has,"",{t,w[j],E}):
>pp=":
> #indets(pp,string);
> expand((pp)):pp:=collect(",sigma0):
#select(has,pp, sigma0):aa:=remove(has," , sigma0):
#ss:=remove(has,pp, sigma0):
> #ss+sigma0*aa-pp:expand(");

>#=====for i=j
>W1:=subs(j=i,W);fff1:=subs(j=i,ff1);

>nabla4w:=1/R^4*diff(W1,phi$4)+2*diff(W1,x$2,phi$2)/R^2+diff(W1,x$4):
>
aa2:=D1/t*nabla4w+1/R*diff(F,x$2)+sigma[0]*diff(W1,x$2):collect(aa2,sin(m*Pi*x/L
)):
> aa2*(sin(i*Pi*phi/beta/2)-
alpha[i]*sin(i*Pi/2)*sin(Pi*phi/beta/2)):aa3:=int(",phi=0..beta):

>aa3:=subs(f[1]=fff1,aa3):
>eq2:=subs(L=m*R*beta/k,m=1,R=302.6*t,beta=Pi/2,alpha[i]=(i^2+4*k^2*nu)/(1+4*k
^2*nu),D1=E*t^3/(12*(1-nu^2)),sigma[0]=sigma0*E,nu=0.3,aa3):
>remove(has,eq2,x):collect(",{w[i],t,E}):remove(has,"",{t,w[i],E}):
>qq=":
#indets(pp,string);
> expand((qq)):qq:=collect(",sigma0):
>#select(has,qq,sigma0):aa:=remove(has," ,sigma0):
#ss:=remove(has,qq,sigma0):
> #ss+sigma0*aa-qq:expand(");

```

```
>M:=41:
S:=array(sparse,1..(M-1)/2,1..(M-1)/2):
> A:=array(sparse,1..(M-1)/2,1..(M-1)/2):
> for ii from 3 to M by 2 do for jj from 3 to M by 2 do if (ii=jj) then A[(ii-1)/2,(jj-1)/2]:=A[(ii-1)/2,(jj-1)/2]+subs(i=ii,qq):S[(ii-1)/2,(jj-1)/2]:=S[(ii-1)/2,(jj-1)/2]+subs(i=ii,qq): else A[(ii-1)/2,(jj-1)/2]:=A[(ii-1)/2,(jj-1)/2]+subs({i=ii,j=jj},pp):S[(ii-1)/2,(jj-1)/2]:=S[(ii-1)/2,(jj-1)/2]+subs({i=ii,j=jj},pp) fi:
od: od:
>h:=evalm(A-sigma0*S):
>evalf("):
>det("):;
>sol:=solve(",sigma0):
>dd:=subs(k=.05,sol):
>sigma:=simplify(dd):
```

$$\sigma := 0.00016566$$

مراجع

- [۱] بی او. المروث، دان. بروش، کمانش میله‌ها، ورق‌ها و پوسته‌ها. ترجمه قمری زاده، مجتبی و رحیمی، غلامحسین. انتشارات دانشگاه امام حسین (ع). ۱۳۸۳.
- [۲] سورگی، حسین. راه اندازی و تهیه دستورات عمل کاربردی نرم افزار ABAQUS/CAE. پروژه کارشناسی. دانشگاه فردوسی مشهد ۱۳۸۴.
- [3] Wang C.M, Reddy J.N. : Exact solution for buckling of structural members, *Computational Mechanics, Texas A&M University*, 2005.
- [4] Yamaki N. :Elastic stability of circular cylindrical shells, *North Holland*, 1984.
- [5] Donnell L. :Stability of thin walled-tubes under torsion, *NACA Report No.479*, 1933.
- [6] Batdorf S. :A simplified method of elastic stability analysis for thin cylindrical shells, *NACA Report No.874*, 1947.
- [7] Jack W. :Classical buckling of cylindrical panels, *Graduate college of oklahoma university*, 1970.
- [8] Tung H. : Buckling of axially loaded open shells, *Journal of the engineering mechanics division*, 1976
- [9] Magnucka E, Magnucki K. :Elastic buckling of an axially compressed open circular cylindrical shell, *proc appl math mech, pamm* 2004, 546-7.
- [10] Magnucki K, Mackiewicz M. :Elastic buckling of an axially compressed cylindrical panel with three edges simply supported and one edge free, *Thin-walled structures*, 2006, 387-392.
- [11] Gibson J.E. :Thin shells, *Structures and solid body mechanics series*, 1980
- [12] Babich Yu. :Stability of a cylindrical panel, *Vol.4, No.12*, 1968.
- [13] Timoshenko S.P, Gere J.M.:Theory of elastic stability, 2nd ed, *McGraw-Hill, New York*, 1961.
- [14] ABAQUS 6.6, Documentation.
- [15] Rdoney P. :Buckling and collapse of cylinders with one end open and one end simply supported with varying axial restraint, *International journal of mechanical series*, 2004.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

- ۱-۱- تعریف پوسته ها ۱
- ۲-۱- کاربردهای پوسته ها ۲
- ۳-۱- تعریف کمانش ۲
- ۱-۳-۱- کمانش دو شاخه ای [گلامبوس - چن - لوی] ۳
- ۲-۳-۱- محدودیت بار کمانش ۴

فصل دوم

مروری بر تئوری ها و روابط موجود در کمانش پوسته ها و پانل های استوانه ای

- ۱-۲- مروری بر تحقیقات گذشته ۷
- ۲-۲- تئوری پایداری در یک پانل استوانه ای ۹
- ۳-۲- معادلات حاکم بر پوسته های استوانه ای ۱۰
- ۱-۳-۲- تئوری خمشی در پوسته های استوانه ای باز با مقطع دایره ای ۱۰
- ۲-۳-۲- معادلات تعادل در پوسته استوانه ای باز ۱۲
- ۳-۳-۲- معادلات کرنش - جابجایی در سطح میانی پوسته استوانه ای باز ۱۴
- ۴-۳-۲- معادلات انحناء جابجایی در سطح میانی پوسته استوانه ای باز ۱۶
- ۵-۳-۲- معادلات تنش - کرنش ۱۷
- ۶-۳-۲- معادله سازگاری در پوسته استوانه ای باز ۱۸
- ۴-۲- تئوری دائل [۴] ۱۹
- ۵-۲- مروری بر پایداری در پانل استوانه ای با شرط مرزی دولبه راست دارای تکیه گاه ساده و دو لبه خمیده آزاد ۲۵
- ۶-۲- حل کلاسیک معادلات و استخراج جابجایی ها در پوسته استوانه ای باز با دو تکیه گاه ساده در دو انتها تحت بار متقارن ۲۹

فصل سوم

بررسی تحلیلی کمانش پوسته استوانه ای باز تحت بار محوری

- ۱-۳- حالت کلی حل تحلیلی کمانش یک پوسته استوانه ای (روابط جابجایی ها و ممان ها). ۳۴
- ۲-۳- کمانش متقارن در پوسته های استوانه ای دایره ای تحت بار محوری یکنواخت ۳۸
- ۳-۳- پانل استوانه ای دایره ای تحت فشار محوری با دو لبه تکیه گاه ساده ۳۹
- ۱-۳-۳- محاسبه بار و تنش بحرانی با استفاده از روابط جابجایی ۳۹

- ۳-۳-۲- محاسبه بار و تنش بحرانی با استفاده از توابع خیز و نیرو ۴۲
- ۳-۴-۴- نتایج تحلیلی در کمانش الاستیک پانل های استوانه ای دایره ای تحت بار فشاری محوری برای حالت دو تکیه گاه ساده در دو لبه خمیده و دو لبه آزاد ۴۶
- ۳-۴-۱- تاثیر پارامتر k بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با دو لبه تکیه گاه ساده ۴۶
- ۳-۴-۲- تاثیر طول پوسته بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با دو لبه تکیه گاه ساده ۴۹
- ۳-۴-۳- تاثیر نسبت طول پانل به شعاع آن بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با دو لبه تکیه گاه ساده ۵۲
- ۳-۴-۴- تاثیر ضخامت پانل بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با دو لبه تکیه گاه ساده ۵۴
- ۳-۴-۵- تاثیر زاویه مرکزی پانل بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با دو لبه تکیه گاه ساده ۵۵
- ۳-۵-۵- نتایج تحلیلی در کمانش الاستیک پانل های استوانه ای با مقطع دایره ای تحت بار فشاری محوری برای حالت سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد ۵۷
- ۳-۵-۱- تاثیر پارامتر k بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد ۶۰
- ۳-۵-۲- تاثیر پارامتر M بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد ۶۳
- ۳-۵-۳- تاثیر طول پوسته بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد ۶۸
- ۳-۵-۴- تاثیر نسبت طول پوسته به شعاع آن بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد ۷۰
- ۳-۵-۵- تاثیر ضخامت بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد ۷۲
- ۳-۵-۶- تاثیر زاویه مرکزی بر روی بار و تنش بحرانی برای پانل استوانه ای با سه لبه تکیه گاه ساده و یک لبه آزاد ۷۳
- ۳-۶-۶- به کارگیری حل پیشنهادی جدید برای به دست آوردن بار کمانش بحرانی با شرط مرزی دو لبه خمیده پانل دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزاد ۷۶

فصل چهارم

بررسی عددی در کمانش پانل استوانه ای تحت بار محوری

۷۹	۱-۴ - مقدمه:
۸۰	۲-۴ - معرفی روش عددی اجزای محدود
۸۱	۳-۴ - روش گالرکین
۸۳	۴-۴ - معرفی نرم افزار ABAQUS/CAE
۸۴	۵-۴ - مدل سازی
۸۵	۶-۴ - خواص مکانیکی ماده
۸۶	۷-۴ - بارگذاری و شرایط مرزی
۸۷	۸-۴ - المان بندی نمونه ها
۸۸	۱-۸-۴ - انتخاب المان در پوسته ها
۸۹	۹-۴ - تعیین نوع تحلیل
۹۰	۱۰-۴ - تحلیل Buckle
۹۲	۱۱-۴ - نتایج تحلیل عددی پانل های استوانه ای با مقطع دایره ای تحت بار فشاری محوری
۹۲	۱-۱۱-۴ - تاثیر تغییرات شعاع بر روی بار و تنش بحرانی برای دو حالت 3ss-1free و 2ss-2free
۹۲	۲-۱۱-۴ - تاثیر طول پوسته بر روی بار و تنش بحرانی برای دو حالت 3ss-1free و 2ss-2free
۹۸	۳-۱۱-۴ - تاثیر نسبت طول پانل به شعاع بر بار و تنش بحرانی برای دو حالت 3ss-1free و 2ss-2free
۱۰۸	۴-۱۱-۴ - تاثیر ضخامت پانل بر روی بار و تنش بحرانی برای دو حالت 3ss-1free و 2ss-2free
۱۰۸	۵-۱۱-۴ - تاثیر زاویه مرکزی پانل بر روی بار و تنش بحرانی برای دو حالت 3ss-1free و 2ss-2free
۱۱۲	۶-۱۱-۴ - تاثیر نسبت شعاع به ضخامت پانل بر روی بار و تنش بحرانی برای دو حالت 3ss-1free و 2ss-2free
۱۱۴	۱-1free و 2ss-2free

فصل پنجم

مقایسه نتایج تحلیلی و عددی

۱۱۹	۱-۵ - مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به پانل استوانه ای دارای تکیه گاه ساده در دو انتها و دو لبه دیگر آزاد
۱۱۹	۱-۱-۵ - اثر پارامتر k روی بار و تنش بحرانی بی بعد در پانل استوانه ای

- ۵-۱-۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی اثر طول پانل استوانه ای بر روی تنش بحرانی بی بعد
 ۱۲۲
- ۵-۱-۳- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی اثر نسبت طول پانل استوانه ای به شعاع آن بر تنش
 بحرانی بی بعد ۱۲۷
- ۵-۱-۴- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی اثر ضخامت پانل استوانه ای بر تنش بحرانی بی بعد ۱۲۹
- ۵-۱-۵- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی اثر زاویه مرکزی پانل استوانه ای بر تنش بحرانی بی بعد
 ۱۳۱
- ۵-۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به پانل دارای تکیه گاه ساده در سه لبه و یک لبه
 دیگر آزاد ۱۳۳
- ۵-۲-۱- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر پارامتر k بر تنش بحرانی بی بعد در پانل
 استوانه ای ۱۳۳
- ۵-۲-۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر طول پانل استوانه ای بر روی تنش بحرانی
 بی بعد ۱۳۶
- ۵-۲-۳- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر نسبت طول پانل استوانه ای به شعاع آن بر
 تنش بحرانی بی بعد ۱۴۰
- ۵-۲-۴- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر ضخامت پانل استوانه ای بر روی تنش
 بحرانی بی بعد ۱۴۱
- ۵-۲-۵- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر زاویه مرکزی پانل استوانه ای بر تنش
 بحرانی بی بعد ۱۴۴
- ۵-۲-۶- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به اثر نسبت شعاع به ضخامت پانل استوانه ای بر
 تنش بحرانی بی بعد ۱۴۵
- ۵-۲- مقایسه نتایج تحلیلی و عددی مربوط به پانل با دو لبه دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر
 آزاد با تابع خیز جدید ۱۴۸

فصل ششم

بحث و نتیجه گیری. ۱۵۳

پیوست ۱۵۶

- بخش اول (بررسی حل معادلات مربوط به شرط مرزی دو لبه با تکیه گاه ساده و دو لبه آزاد با
 استفاده از معادلات جابجایی) ۱۵۶
- بخش دوم (بررسی حل معادلات منجر به تنش بحرانی مربوط به شرط مرزی دو لبه با تکیه گاه
 ساده و دو لبه آزاد با استفاده از توابع خیز و نیرو) ۱۵۸

بخش سوم (بررسی حل معادلات منجر به تنش بحرانی مربوط به شرط مرزی سه لبه با تکیه	
گاه ساده و یک لبه آزاد با استفاده از توابع خیز و نیرو)	۱۶۰
مراجع	۱۶۳
فهرست مطالب	۱۶۴