



تقدیم بہ

خسرو، معلم زندگیم و مستورہ ترین عزیزم،

و برادر بزرگوارم جناب مهندس شہرام مرادی.

## تقدیر و تشکر

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، بویژه استاد محترم جناب آقای دکتر محمد جواد مغربی که با ارائه راهنمایی‌های مدبرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین جای دارد از دوستان گرامی خود، مهندس محمد حسین دیبایی بناب جهت اختصاص وقت فراوان برای راهنمایی اینجانب و اختصاص کامپیوتر شخصی خود برای انجام این پروژه و مهندس محمود نوروزی به خاطر راهنمایی‌های فراوان و همچنین دوست گرامی سرکار خانم الهه نژاد حسین جهت ویرایش چندین بار این پایان‌نامه و اختصاص وقت تشکر نمایم و از درگاه خداوند طلب موفقیت در تمامی مراحل زندگی را برای ایشان خواستارم.

**کامران مرادی**

[Kamran.Moradi@yahoo.com](mailto:Kamran.Moradi@yahoo.com)

زمستان ۱۳۸۶



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

موضوع:

## حل مستقیم عددی جریان لزج داخلی غیر قابل تراکم به روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی

اساتید راهنما:

جناب آقای دکتر محمد جواد مغربی

دکتر محمود فرزانه گرد

استاد مشاور:

دکتر محمد محسن شاهمردان

دانشجو:

کامران مرادی

گرایش تبدیل انرژی

## چکیده

حلهای عددی نه تنها هزینه روشهای آزمایشگاهی و تجربی را ندارند، بلکه در مدت زمان کمتری نیز می توانند نتایج مفید با جزئیات زیادی را بدست آورند. در این پایان نامه نیز سعی شده است تا جریانهای داخلی (بین دو صفحه) بوسیله روش شبیه سازی مستقیم عددی حل شود. مزیت این روش نسبت به سایر روشهای عددی این است که نیاز به مدل خاصی برای مدلسازی توربولانس ندارد ولی یکی از معایب آن این است که حجم محاسبات بالا بوده و در نتیجه حل با استفاده از این روش زمان بر خواهد بود. جریانهای داخلی حالتی از جریان هستند که استفاده صنعتی زیادی دارند و همچنین در مدلسازی مسائل پیچیده نیز به کار می روند؛ لیکن حل دقیق این جریانها می تواند در موارد فوق مشکل گشا باشد.

در این تحقیق فرم چرخشی معادلات ناویر-استوکس برای جریانهای داخلی با استفاده از روشهای عددی و تفاضلات محدود فشرده<sup>۱</sup> در جهت اصلی جریان (x) و تفاضلات فشرده تطبیقی در جهت عمود بر جریان حل شده اند و با انجام آزمایش در آزمایشگاه تونل باد دانشگاه توانستیم بعضی از نتایج را تایید کنیم. دامنه حل مسئله در جهت جریان دارای طول و عمود بر جریان محدود می باشد.

از نگاشتی<sup>۲</sup> یک به یک برای مرتبط نمودن شبکه فیزیکی در جهت (y) با شبکه محاسباتی  $\bar{y}$  به طول واحد استفاده شده است. برای حل ما نیاز به چهار شرط مرز در جهت جریان و چهار شرط مرزی در جهت عمود بر جریان روی دیواره ها داریم. در مرز ورودی شرط مرزی دیریشله

---

<sup>1</sup> Padé compact finite difference

<sup>2</sup> Mapping

برای سرعت و در مرز خروجی شرط مرزی کاملاً توسعه یافتگی اعمال شده است. در مرز خروجی و ورودی علاوه بر شرط فوق، شرط نیومن که  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  و در مرز خروجی شرط نیومن  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  که شرط توسعه یافتگی می باشد اعمال شده است. محاسبات در دامنهٔ زمان با استفاده از روش فشردهٔ رانگ کوتای مرتبهٔ سوم انجام شده است.

نتایج بدست آمده از این تحقیق نشان می دهد وقتی که نرم افزار با پارامترهای مناسب اجرا گردد، نتایج بدست آمده از دقت بسیار خوبی برخوردارند. ضمناً تحلیل جوابها در دستگاه مختصات خودمشابه، خود تشابهی ترمهای سرعت را بخوبی نمایان می نماید.

**کلمات کلیدی:** روش مستقیم عددی، جریان داخلی، روش تفاضلات محدود فشرده، تفاضلات محدود

فشردهٔ تطبیقی، معادلهٔ پواسون، خود تشابهی

## فهرست مطالب

تقدیر و تشکر	ب
چکیده	ث
مقدمه	۱
فصل ۱- مروری بر کارهای گذشته	۳
۱-۱- مقدمه:	۳
۱-۲- روش عددی	۳
۱-۳- مطالعه اجمالی روش های عددی	۶
۱-۴- جریان در لوله و کانال	۹
۱-۵- اهداف	۱۲
فصل ۲- مقدمه ای بر روش مستقیم عددی	۱۴
۲-۱- مقدمه:	۱۴
۲-۲- کاربردهای روش مستقیم عددی	۱۵
۲-۳- دیدگاه عددی :	۱۸
۲-۴- روش طیفی :	۱۹
۲-۵- شرایط مرزی :	۲۰
فصل ۳- روش های تقسیم دامنه	۲۱
۳-۱- مقدمه:	۲۱
۳-۲- شبکه بندی	۲۲
۳-۳- روش تک بلوکی یا تک ناحیه ای	۲۴
۳-۴- روش چند ناحیه ای	۲۵
۳-۵- روش چندبلوکی	۲۶
فصل ۴- محاسبه مشتقات جزئی به روش عددی	۴۰

۴۰	.....	۱-۴-مقدمه
۴۰	.....	۲-۴-روش تفاضلات محدود فشرده برای محاسبه مشتقات
۴۳	.....	۳-۴-نگاشت یک به یک جبری (Algebraic mapping)
۴۵	.....	۴-۴-استخراج اپراتورهای مشتق در حالت استفاده از تابع نگاشت
۴۷	.....	۵-۴-ارزیابی و تست کدهای نوشته شده برای محاسبه مشتقات
۵۳	.....	۶-۴-الگوی پیشروی در زمان
۵۶	.....	فصل ۵-معادلات دیفرانسیل حاکم و الگوریتم حل عددی آنها
۵۶	.....	۱-۵-مقدمه
۵۶	.....	۲-۵-شکل چرخشی معادله ناویر- استوکس
۵۸	.....	۳-۵-روش حل عددی معادلات
۵۹	.....	۴-۵-روش گسسته‌سازی معادله پواسون دو بعدی
۶۰	.....	۵-۵-حل معادله ماتریسی $AX+XB=C$
۶۵	.....	۶-۵-نحوه اعمال شرایط مرزی
۶۶	.....	۷-۵-شرط اولیه
۶۶	.....	۸-۵-الگوریتم حل عددی
۶۹	.....	فصل ۶-نتایج
۶۹	.....	۱-۶-مقدمه
۶۹	.....	۲-۶-معرفی جریان های داخلی
۷۳	.....	۳-۶-نتایج حل عددی
۸۳	.....	ضمیمه الف ( بدست آوردن شکل چرخشی معادله ناویر - استوکس
۸۹	.....	ضمیمه ب ( ماتریس هسنبرگ
۹۰	.....	ضمیمه ج) تحلیل خطا
۹۱	.....	فهرست مراجع:
۹۷	.....	Abstract
	.....	<b>Error! Bookmark not defined.</b> Abstract



## فهرست اشکال

صفحه	موضوع
۲۳	شکل ۱-۳: تولید شبکه روی هندسه‌های پیچیده با استفاده از روش‌های، الف: با سازمان، ب: بی سازمان.
۳۲	شکل ۲-۳: نمایش انواع مختلف شبکه‌های بلوکی.
۳۵	شکل ۳-۳: تولید شبکه سازمان یافته به روش‌های مختلف، الف: شبکه با سازمان، ب: شبکه بلوکی منطبق، ج: شبکه بلوکی وصله‌ای، د: شبکه بلوکی هم‌پوشان.
۳۶	شکل ۴-۳: تقسیم ناحیه ما بین دو ایرفویل به پنج بلوک
۳۷	شکل ۵-۳: انواع مرزهای بلوکی. الف: مرز با پیوستگی شبکه، ب: مرز با پیوستگی متریک، ج: مرز با ناپیوستگی متریک، د: مرز با ناپیوستگی شبکه
۴۲	شکل ۱-۴: توزیع شبکه در یک شبکه بندی کشیده شده جبری با $N_y = 100$ , $L_y = 1.25$ , $y_0 = 1.08$ با استفاده از تابع نگاشت (۴-۱۴)
۴۵	شکل ۲-۴: نمودار تابع $f(x) = x.e^x$
۴۶	شکل ۳-۴: نمودار مشتق اول تابع $f(x) = x.e^x + e^x$ (با ۱۵۰ گره)
۴۶	شکل ۴-۴: نمودار Error در مشتق اول در جهت x (با ۱۵۰ گره)
۴۷	شکل ۵-۴: نمودار مشتق دوم تابع $f(x) = e^{x^2}$ (با ۱۰۰ گره)
۴۸	شکل ۶-۴: نمودار خطای نسبی مشتق دوم تابع $f(x) = e^{x^2}$ (با ۱۰۰ گره)
۴۹	شکل ۷-۴: نمودار مشتق اول تابع $f(y) = e^{y^2}$ با اعمال نگاشت رابطه ۴-۲۵ (با ۱۰۱ گره)
۴۹	شکل ۸-۴: نمودار مشتق دوم تابع $f(y) = e^{y^2}$ با اعمال نگاشت رابطه ۴-۲۵ (با ۱۰۰ گره)
۵۰	شکل ۹-۴: نمودار خطا در مشتق اول تابع $f(y) = e^{y^2}$ با اعمال نگاشت رابطه ۴-۲۵ (با ۱۰۰ گره)

موضوع	صفحه
شکل ۴-۱۰: نمودار خطا در مشتق دوم تابع $f(y) = e^{y^2}$ با اعمال نگاشت رابطه ۴-۲۵ (با ۱۰۰ گره)	۵۰
شکل ۴-۱۲: مرتبه دقت الگوی پیشروی زمان	۵۲
شکل ۶-۱: جریان لایه ای در ورودی بین دو صفحه	۶۸
شکل ۶-۳: پروفیل سرعت $u$ در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه توسعه یافته	۷۱
شکل ۶-۴: پروفیل سرعت $u$ در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه توسعه یافته	۷۲
شکل ۶-۵: پروفیل سرعت $v$ در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه توسعه یافته	۷۳
شکل ۶-۶: پروفیل $\omega$ در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی	۷۳
شکل ۶-۷: سرعت $u$ خط مرکزی برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی	۷۴
شکل ۶-۸: پروفیل سرعت $v$ در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه کاملاً توسعه یافته	۷۵
شکل ۶-۹: پروفیل سرعت $u$	۷۵
شکل ۶-۱۰: پروفیل سرعت $v$	۷۶
شکل ۶-۱۱: توزیع فشار $\frac{dp}{dx}$ در راستای جریان	۷۶



## مقدمه

همانطور که می دانیم برای بررسی جریان یکی از روشهای متداول آزمایش و استفاده از داده های تجربی است. با وجود اینکه داده های تجربی و آزمایشگاهی بسیار کارآمد هستند ولی هزینه بسیار بالا و سرسام آور آن باعث شده است تا دانشمندان به دنبال روشهایی باشند تا بتوانند نتایج یک رخداد فیزیکی را بدون آزمایش و با هزینه کمتر پیش بینی کنند. یکی از این روشها که جدیداً در همه علوم علی الخصوص مهندسی مکانیک استفاده می شود، استفاده از روشهای عددی است. این روشها نه تنها هزینه سخت افزاری کمتری لازم دارد بلکه محدودیت آزمایش را ندارد و می توان برای شرایط مرزی مختلف از آن استفاده کرده و مسئله را تحلیل کرد. یکی از روشهای عددی مرسوم، روش حل مستقیم عددی است؛ در این روش معادلات ناویر-استوکس بدون هیچ مدل توربولانس حل می شوند. چون در این روش معادلات ناویر-استوکس به صورت مستقیم حل می شوند؛ برای داشتن دقت کافی باید تعداد گره ها در دامنه به مقدار قابل توجهی زیاد باشد که در نتیجه برای ارضای عدد CFL باید گام زمانی آن نیز کوچک باشد. به این دلیل هزینه محاسبات در روش مستقیم عددی بالاست.

در این پایان نامه سعی شده است تا جریان داخلی لزج غیر قابل تراکم به وسیله یکی از روشهای مستقیم حل شود. در این حل مشتقات مکانی در جهت  $x$  و  $y$  به ترتیب به روش تفاضلات محدود فشرده و تفاضلات فشرده تطبیقی محاسبه شده است در جهت عمود بر جریان از یک نگاشت یک به یک برای مرتبط نمودن توزیع گره ها در مختصات فیزیکی و مختصات محاسباتی استفاده شده است.

در فصل اول مطالعات انجام شده قبلی بر روی جریانهای داخلی بررسی خواهد شد. این فصل بیشتر شامل حل تحلیلی و دقیقی است که به روش تشابه ارائه شده است.



در فصل دوم ، مختصری راجع به روش مستقیم عددی بحث خواهیم کرد. در فصل بعد راجع به روشهای تقسیم دامنه بحث خواهد شد. در این فصل انواع مختلف تقسیم دامنه و همچنین مزایا و معایب هر کدام بحث خواهد شد. در فصل چهارم روش محاسبه مشتقات جزئی مکانی و زمانی بحث خواهد شد. مشتقات مکانی به روش تفاضلات محدود فشرده محاسبه شده است این روش دقت بالایی دارد و برای حل به روش مستقیم عددی یک روش مناسب است. مشتقات زمانی به روش رانگ - کوتای مرتبه سوم محاسبه شده است در این روش برای حل معادله دیفرانسیل شامل زمان در یک پیشروی به اندازه  $\Delta t$ ، مسئله در سه زیر بازه زمانی حل خواهد شد که این روش نیز از دقت مناسبی برخوردار است. در فصل پنجم معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیال که همان معادلات ناویر-استوکس هست بررسی خواهد شد. ابتدا معادله مومنتوم را به فرمی تبدیل خواهیم کرد که ترم فشار از معادله مومنتوم حذف شود با اعمال این تغییرات فشار از معادله مومنتوم حذف می شود ولی مرتبه مشتقات جزئی بیشتر می شود که این به نوبه خود باعث می شود که هزینه محاسبات بیشتر شده و اعمال شرایط مرزی سخت تر شود. در ادامه نحوه گسسته سازی معادلات را بررسی خواهیم کرد که در نتیجه گسسته سازی معادله پواسون به معادله ماتریسی  $AX+XB=C$  می رسیم که نحوه حل آن نیز بررسی خواهد شد. در نهایت نتایج حاصل از حل عددی ارائه شده است و نتایج مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

## فصل ۱- مروری بر کارهای گذشته

### ۱-۱- مقدمه:

در این فصل مروری از روشهای عددی بررسی شده در جریان های داخلی مانند بین دو صفحه و لوله آورده می شود. برخی بحث های ویژه در خصوص اهمیت بررسی جریانهای داخلی نیز آورده خواهد شد. اهمیت بررسی این موضوع به صورت اجمالی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

### ۱-۲- روش عددی

از اوایل قرن هفدهم، بررسی های عددی جریان سیالات تبدیل به یک وسیله بسیار گرانبها در مطالعه جریان آشفته شده است. شبیه سازی های عددی مستقیم (DNS)<sup>۱</sup> یا شبیه سازی جریانات سیال بدون استفاده از هیچ مدلی برای مشخص کردن کوچکترین ابعاد حرکت یک سیال، به وسیله ای تبدیل شده اند که کاربرد این موضوع را زمانی که جزئیات فیزیکی جزئیات فیزیکی جریانات کاملاً آشفته از اهمیت اولیه ای برخوردارند برای ما آسان می کند که خو و همکاران (۵۷) نتایج این روش را با نتایج تجربی و آزمایشگاهی مقایسه کرده اند و پاتریک و

---

<sup>۱</sup> Direct Numerical Simulations



همکارانش (۵۹) در مورد جریان های داخلی انجام داده اند..

محققان حرفه ای و محاسباتی در چند سال اخیر رشد زیادی داشته اند، بطوریکه شبیه سازی های عددی بیشتر به عنوان مکملی برای تحقیقات تجربی به شمار می رفت، ولی امروزه به طور مستقل می توانند وسیله ای برای مشخصات کردن فیزیک جریان های بسیار بغرنج استفاده شوند. جریانات، اکثرا غیر قابل تراکم ها، با یک مسیر غیر همگن متداول هستند، مسیر های همگن اکثرا دوره ای<sup>۲</sup> فرض می شوند که باعث کاهش بغرنج بودن محاسبات می شوند. هر دوی جریانات آزاد<sup>۳</sup> یا بدون برشی<sup>۴</sup> و جریانات دارای مرز<sup>۵</sup> با استفاده از روش DNS شبیه سازی شده اند، که از کارهای انجام شده عبارتند از: موزر و معین (۳۴) که یک کانال انحنادار را توسط DNS کار کرده اند، معین و کیم (۳۳) و کیم، معین و موزر (۲۷) یک کانال مستقیم، راجرز و موزر (۴۵) یک جریان اختلاطی آشفته کاملا توسعه یافته، دیبایی و مغربی (۷) شبیه سازی جریان ویک، اختلاطی و جت را در حالت لایه ای، ضرغامی و مغربی (۸) یک جریان اختلاطی و پایداری خطی آن، سولیوان و برور (۳۹) رشد ناآرامی ها در جریان لوله را مورد مطالعه قرار داده اند و سوندراگوارو (۴۹) تاثیرات شرایط اولیه را در رشد یک صفحه ویک را مورد بررسی قرار داده اند. برای دیدن ادی ها در سیال روش های ریاضیاتی مختلفی وجود دارد که جیانگ و حسینی (۲۵) و یا چانگ و همکاران (۲۰) در دسته بندی جریان های سه بعدی و خواص آنها و یا حرکت این ادی ها توسط پری و همکاران (۴۲) به صورت تفصیلی مورد بررسی و توضیح قرار گرفته است. این بررسی ها را

<sup>2</sup> Periodic

<sup>3</sup> Unbounded

<sup>4</sup> Free Shear

<sup>5</sup> Bounded



که توسط روش DNS انجام می شوند عمدتاً به دو نوع می توان تقسیم بندی کرد: الف) شبیه سازی منطقه گذرا که اهمیت عمده آن به شرایط اولیه و تغییرات آن اختصاص می یابد که در نهایت امر تبدیل گذرا به آشفته این جریان هدف نهایی این نوع تحقیقات می باشد. ب) شبیه سازی جریان آشفته کاملاً توسعه یافته که بسیار معمول است و موقعیت نهایی همیشه مد نظر می باشد، لذا توجه کمی به منطقه گذرا می شود با اصلاً در نظر گرفته نمی شوند.

هنوز به خاطر هزینه های بالای استفاده از روش DNS در کاربرد های مهندسی معمولاً مورد استفاده قرار نمی گیرد (و در دهه های آتی نیز بعید به نظر می رسد). از آنجایی که ابعاد بسیار کوچک با افزایش عدد رینولدز کوچکتر نیز در نظر گرفته می شود، لذا فقط جریاناتی با عدد رینولدز پایین در اشکال آسان با کامپیوتر های امروزی قابل بررسی هستند. این بیانگر آن نیست که DNS استفاده کاربردی ندارد، به عنوان مثال برای کاربرد های DNS می توان بیان کرد که بیشتر بررسی های جریان های آشفته با استفاده از مدل های آشفته موجود توسط نتایج DNS مقایسه و ارزیابی می شوند. به عنوان مثال می توان اشاره به تحقیقات رودی و منصور (۴۴) و منصور، کیم و معین (۳۱) کرد.

همانند روش شبیه سازی (LES) [نتایج منصور و همکارانش (۳۰)] و اکثراً معادلات ناویر استوکس رینولدز میانگین (RANS)<sup>۷</sup>، مدل ابعادی زیر شبکه ای<sup>۸</sup> برای تعیین یک شکل بهتری برای حرکت در معادلات (LES) و یک مدل آشفته برای مشخص کردن بیشتر غیر

<sup>۶</sup> Large Eddy Simulations

<sup>۷</sup> Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations

<sup>۸</sup> Subgrid eddy Model





یکنواختی ها در مورد RANS مورد استفاده قرار می گیرند.

### ۳-۱- مطالعه اجمالی روش های عددی

روش اختلاف محدود فشرده<sup>۹</sup> را برای بررسی انتخاب کردیم، به علت اینکه دقت بالای این روش ما را در به دست یافتن به ابعاد بسیار کوچک حرکت سیال می کند، مشتقات پارامترهای جریان، همانند چرخش، به صورت دقیق آورده شده است. این روش در میدان های پیوسته بیشتر کاربرد دارد، همانند جریانات آشفته غیر قابل تراکم.

موفقیت در استفاده از این روش در مختصات استوانه ای منوط به اثبات دو اصل می باشد: اولی - ارضا کردن معادله پیوستگی با دقت بالا و دومی - بدست آوردن مقادیر مناسب و یکتا در قسمت مرکزی لوله ( $r=0$ ). حل کردن مساله در مختصات استوانه ای به صورت عددی دشواری بسیاری دارد. با اعمال مساله معادله پیوستگی زمانی روشن می شود که معادله غیر قابل تراکم ناویر استوکس را می خواهیم حل کنیم. از آنجایی که معادله پیوستگی به عنوان یک قید سینماتیکی در میدان سرعت مطرح می گردد، لذا تحمیل مساله قید معادله پیوستگی به خوبی تا کنون بیان شده است و خواننده می تواند به نتایج کانتو و همکاران (۱۹)، هوگز (۲۴) یا جانسون (۲۶) برای کسب اطلاعات بیشتر مراجعه کند.

روش های مختلفی تا کنون برای مطالعه جریان های آشفته کاملاً توسعه یافته در مختصات

<sup>9</sup> Compact Finite Difference



استوانه ای انجام گرفته است. تمامی این روش ها از توابع انتقالی فوریه در هر دو جهت جریان<sup>۱۰</sup> و بعضی شکل های دیگر بسط ها در جهت شعاعی استفاده کرده اند.

برای حل آنها در جریان گذرا در لوله، لئونارد و ری (۲۹) (و همچنین لئونارد به تنهایی (۲۸)) از توابع بسط دیورژانس آزاد<sup>۱۱</sup> با استفاده از روش باقیمانده های وزنی (نه از روش گالرکین) استفاده کرده اند. با استفاده از توابع بسط دیورژانس آزاد کار ما در حل صریح معادله پیوستگی را راحت می کند. با اعمال شرط عدم لغزش و بسط جملات و استفاده از انتگرال گیری جزئی. جمله فشار از معادله خارج می شود و فقط دو مولفه مجهول سرعت در حالت سه بعدی باقی می ماند. برای جهت شعاعی آنها از چند جمله ای های ژاکوبی انتقال داده شده استفاده کردند. با تغییرات اندکی. موزر و همکاران (۳۵) از چند جمله ای های چبیشف<sup>۱۲</sup> به جای چند جمله ای های ژاکوبی برای حل جریان در کانال های انحنادار استفاده کردند. از نقطه نظر عددی این جریان از جهاتی آسانتر از جریان داخل لوله برای حل است (پاتریک و همکاران ۸۲).

در آنالیز رشد ناآرامی های هم خطی و هم غیر خطی در جریان داخل لوله اسولیوان و برور (۳۹) و اخیرا اورسزاق و پاترا (۳۸) از یک روش کولاکوسیون<sup>۱۳</sup> با توابع بسط داده شده اسکالر به جای بسط های برداری استفاده کردند. که نتیجتا هر یک از مولفه های سرعت و فشار به طور جداگانه نمایان می گردند. چند جمله ای های چبیشف در جهت شعاعی مورد استفاده قرار گرفته اند.

<sup>10</sup> Azimuthal

<sup>11</sup> Divergence-free expansion functions

<sup>12</sup> TChebyshev Polynominals

<sup>13</sup> Collocation



پیشروی در زمان توسط جزء جزء<sup>۱۴</sup> اورساق و کلز (۳۷) انجام گرفته است که در آن گرادیان فشار و جملات لزجت در سه مرحله انتگرال گیری می شوند. جمله غیر خطی از روش مرتبه دوم آدامز-باش فورس<sup>۱۵</sup> انتیگرال گیری شده اند. در حالی که روش لئونارد و ری (۲۹) اطلاعات کمتری از سرعت و فشار در منطقه بسط داده شده به ما می داد.

ژاک و همکاران (۵۸) از روش طیفی برای شبیه سازی خود در جریان کاملاً توسعه یافته داخل لوله استفاده کرد. همانند لئونارد و ری (۲۹) آنها نیز از چند جمله ای های ژاکوبی استفاده کرده اند. حرکت در زمان را نیز از روش مرحله ای کسری<sup>۱۶</sup> به صورت ترکیبی با روش صریح مرتبه دوم انجام دادند. در روش آنها امکان تعیین مرزهای ورودی جریان و خروجی جریان یا پیشروی مکانی سیال و شرایط مرزی مورد نظر به صورت مشخص نشده تعیین نشده و هیچ گزارشی از کار آنها پخش نشده است.

ایگلز و همکارانش (۲۳) از تکنیک اختلاف محدود مرتبه دوم در جهت شعاعی برای شبیه سازی یک جریان داخل لوله کاملاً توسعه یافته آشفته استفاده کردند. اگر چه استفاده از روش اختلاف محدود از روش های دیگر از جمله روش های طیفی ساده تر برای بررسی می باشد. بسته به دقت خواسته شده. نقاط زیادی برای مش بندی در مقایسه با روش طیفی لازم می باشد. به علت اینکه سخت افزار لازم برای دقت های بالا نیست و این باعث می شود که عدد رینولدز را کاهش دهیم.

<sup>14</sup> Splitting

<sup>15</sup> Adams-Bashforth Scheme

<sup>16</sup> Fractional Step Method



اس-پی-لاین یک روش عددی بسیار دقیقی است که روش های استفاده از آنرا بور (۲۱) در کتابش آورده است. برای تحلیل توربولانس در نزدیک دیواره منصور و همکاران (۳۲) مدل جالبی را بررسی کرده اند که نتایج آن در نوع خود بینظیر است. ورزاکو و اورلاندو (۵۴) همچنین یک روش اختلاف محدود از مرتبه دوم را برای مختصات استوانه ای توسعه دادند. آنها با مساله یکتا بودن مختصات<sup>۱۷</sup> با معرفی یک شار شعاعی ( $r u_r$ ) روی شبکه تناوبی شده برخوردار کردند که نتیجتاً فقط شار شعاعی در آن ناحیه مد نظر قرار می گیرد. سپس معادلات توسط یک روش کسری و روش های کسری تقریبی حل می شود. البته با استفاده از روش مرتبه دوم هم در مکان و هم در زمان. این روش توسط اورلاندو و فاتیكا (۳۶) در شبیه سازی جریان آشفته کاملاً توسعه یافته در یک لوله با دیواره های چرخان مورد استفاده قرار گرفت و همچنین ورزیکو و اورلاندو (۵۳) نیز از همین روش برای شبیه سازی جریان جت گرد گذرا استفاده کردند.

در کل برخلاف ایگل و همکارانش هیچ اقدامی برای کاهش تاثیر قید حرکت در زمان انجام نداده اند.

### ۱-۴- جریان در لوله و کانال

جریان لوله ای بدون شک از جمله جریانهایی می باشد که بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است. و یکی از پر کاربردترین مسائل مهندسی است. رینولدز به تنهایی (۴۳) پارامتر معروف خود را (با نام عدد رینولدز). توسط آزمایشات تجربی روی جریان لوله ای توسعه داد. جریان لوله ای

<sup>17</sup> Coordinate Singularity



یکی از جریان هایی است که بهترین گزینه برای اعمال روش های عددی می باشد. از آنجایی که نتایج تجربی به مقدار وفور موجود است. لذا به آسانی می توان با این نتایج مقایسه و نتایج خود را تایید کرد. در این مقدمه سعی شده می شود به تمام کارهایی که در مورد جریان لوله ای صورت گرفته اشاره شود و تفاوت این نوع جریان را با یکی دیگر از جریان های معروف مورد مطالعه قرار گرفته. آورده شود که عبارت است از جریان در کانالها<sup>۱۸</sup>.

جریان داخل لوله از جهات متفاوتی با جریان در داخل کانال فرق می کند (جریان بین دو صفحه). اولین تفاوت توسط پاتل و هد (۴۱) دیده شد که در رینولدز های پایین (Re) که در این تحقیق نیز روی این محدوده از عدد رینولدز بحث خواهد شد. جریان لوله ای کاملاً توسعه یافته با قانون لگاریتمی<sup>۱۹</sup> تطابق نمی کند. آنها به این نتیجه رسیدند که عدد رینولدز بایستی به  $Re=10000$  (بر اساس سرعت بالک و قطر لوله) برسد قبل از اینکه سرعت میانگین از قانون لگاریتمی تبعیت کند. در حالی که در یک عدد رینولدز پایین مثل  $Re=3000$  برای جریان داخل کانال (بر اساس فاصله بین دو صفحه) این اتفاق می افتد.

به هر حال جدیدترین مطالعه روی جریان لوله ای توسط دورست و همکاران (۲۲) صورت گرفته که با استفاده از دقت بالای تکنیک LDA<sup>۲۰</sup> به این نتیجه رسیدند که در عدد رینولدز ۷۴۴۲. جریان آشفته کاملاً توسعه یافته داخل لوله از قانون لگاریتمی تبعیت می کند. دومین تفاوت بین این دو جریان زمانی روشن می شود که جریان از آرام به آشفته تبدیل می شود و

<sup>18</sup> Ducts

<sup>19</sup> Log-Law

<sup>20</sup> Laser Doppler Anemometry



در حالت گذرا قرار دارد. پاتل و هد (۴۱) به این نتیجه رسیدند که جریان داخل لوله تا عدد  $Re=2000$  به صورت خالص آرام می باشد. سپس وارد ناحیه گذرا می شود. ناحیه گذرا تقریباً تا عدد رینولدز  $Re=3000$  باقی می ماند که پس از آن به طور ناگهانی تبدیل به جریان کاملاً آشفته می شود. برای جریان کانال آنها مشاهده کردند که ایجاد گذرش در رینولدز  $Re=1350$  اتفاق می افتد و جریان در  $Re$  بیشتر از ۱۸۰۰ تبدیل به کاملاً آشفته می شود. رژیم گذرا برای جریان داخل لوله با جزئیات کامل نیز توسط ویکناسکی و چامپاگن (۵۵) و ویگنناسکی و همکاران (۵۶) (مرجع کانت ول (۱۸) را نیز ببینید) مورد مطالعه قرار گرفته است. آنها دریافتند که منطقه گذرا یک فرآیند بسیار پیچیده می باشد که دو نوع جریان مختلف متناوباً بوجود می آیند: پفی<sup>۲۱</sup> و ضربه ای<sup>۲۲</sup>.

جریان پفی در رینولدز های بین ۲۰۰۰ تا ۲۷۰۰ دیده می شود. آنها دلیلی ایجاد این حالت را نوساناتی با شدت زیاد در ورودی لوله یافتند. جریان ضربه ای در رینولدز های بالاتر از ۳۲۰۰ دیده می شوند و توسط نوسانات کوچک لایه مرزی در ورودی لوله ایجاد می شوند. جریان همراه با ضربه بسیار مشابه آشفتگی کاملاً توسعه یافته می باشد و می تواند در طول کلی لوله توسعه یابد. لئونارد و ری (۲۹) و لئونارد (۲۸) توانستند جریان پفی را در رینولدز ۲۲۰۰ شبیه سازی کنند.

در نهایت. جریان داخل لوله را می توان گفت به صورت خطی نسبت به ناآرامی های کوچک پایدار است. محققان متعددی سعی کرده اند که تحقیق خود را روی پیدا کردن مدهای خطی

<sup>21</sup> Puff

<sup>22</sup> Slug

ناپایدار در جریان لوله ای متمرکز کنند. (به عنوان مثال سالیوان و بروور (۳۹)). در تحلیل به روش های عددی همانند طیفی (اسپالارت و همکاران (۵۰) و استاناوی و همکاران (۵۱) و FEM (استرانگ با فیکس (۵۲)) تا کنون می توان گفت هیچ مد خطی غیر پایداری پیدا نشده است. جریان داخل کانال به صورت خطی نسبت به ناآرامی های بسیار کوچک ناپایدار است. در این نوع جریان عدد رینولدز بحرانی ۱۱۵۴۴ می باشد که بالاتر از این مقدار جریان ناپایدار می شود. برای جریان داخل لوله یا کانال تنها فرآیندی که رشد ناآرامی ها را باعث می شود. و باعث تقویت آنها می شود فعل و انفعالات غیر خطی است (۵۹). نتایج پایداری در داخل لوله یا کانال را می توان در منابع سالوان و همکاران (۴۶) و سالوان و گروه (۴۷) و شریف و موزر (۴۸) پیدا کرد که نتایج بسیار ارزشمند و در عین حال کارا پیدا کرد. این تحلیل را می توان طبق فرمول بندی که مغربی (۱۲) برای جریان ویک از معادله اوور-سامرفیلد انجام داده است در جریان های داخلی نیز پیاده سازی کرد.

## ۱-۵- اهداف

اهداف این پروژه در سه گروه تقسیم بندی می شوند:

- توسعه یک روش عددی بر اساس روش اختلاف محدود فشرده که در مقایسه با روش های دیگر دارای دقت و سهولت استفاده خاصی می باشد.
- مطالعه رفتار اساسی سیال در مختصات های کارتزین. همانند جریان داخل دو



• یک شبیه سازی توسط روش DNS و داشتن معادلات پایه برای جریان داخلی

برای مطالعات آتی.

در ضمن مقایسه های خوبی برای تایید نتایج این تحقیق آورده شده است که با روش های

مختلف DNS یا تجربی مقایسه شده است.



## فصل ۲-مقدمه ای بر روش مستقیم عددی

### ۲-۱-مقدمه:

حل جریان توربولانس، بعلت پیچیدگی ماهیت جریان و نبود امکانات کافی در گذشته چندان مورد توجه نبوده است، زیرا یک حل تحلیلی، حتی برای ساده‌ترین جریانهای توربولانس وجود ندارد. یک توصیف کامل از جریان توربولانس که در آن متغیرهای جریان (یعنی سرعت و فشار)، بعنوان توابعی از زمان یا مکان شناخته شوند، تنها با حل عددی معادله ناویر \_ استوکس ممکن می‌باشد. حل عددی استفاده شده در این تحقیق، شبیه‌سازی مستقیم عددی<sup>۱</sup> یا به اختصار **D.N.S** می‌باشد.

هدف اصلی **D.N.S** حل معادلات برای جریان توربولانس بدون استفاده از هیچگونه مدل توربولانسی می‌باشد و برای این منظور می‌بایستی معادلات ناویر \_ استوکس بدون هیچگونه ساده سازی مورد استفاده قرار گیرند.

در حال حاضر با ظهور ابر کامپیوترها می‌توان جریانهای توربولانس کاملاً توسعه یافته را به کمک روشهای **D.N.S** بطور دقیق تحلیل کنیم و خواص آنرا بدست آوریم. جهت گسسته سازی یک

---

<sup>1</sup> - Direct Numerical Simulation



شبکه‌بندی دقیق و کامل مورد احتیاج است. بنابراین، اجرای هر برنامه D.N.S احتیاج به مدت زمان طولانی دارد. بنابراین، تا امروز محاسبات D.N.S فقط تا رینولدزهای متوسط امکان‌پذیر بوده‌است.

## ۲-۲- کاربردهای روش مستقیم عددی

استفاده از D.N.S برای اولین بار توسط اورزاگ و پترسون<sup>۲</sup> (۱۹۷۲) در مرکز تحقیقات اتمسفریک آمریکا صورت‌گرفت. این اشخاص از روش طیفی<sup>۳</sup> برای انجام 32<sup>3</sup> محاسبه جریان توربولانس ایزوتروپیک در  $Re = 35$  (بر اساس مقیاسهای تیلور)، استفاده کردند.

گام مهم بعدی در این زمینه توسط روگالو<sup>۴</sup> (۱۹۸۱) برداشته شد. تحقیقات بعدی توسط اسپالارت<sup>۵</sup> (۱۹۸۸) انجام گرفت. او با استفاده از یک روش ابتکاری، جریان لایه مرزی توربولانس را بر روی یک صفحه تخت، تحت گرادیان فشارهای مختلف حل کرد.

جریانات محدود به دیواره مانند جریان تراکم‌پذیر در کانال و لایه مرزی توربولانس در دهه اخیر مورد توجه قرار گرفته است. به تازگی از D.N.S جهت بررسی لایه اختلاطی توربولانس با سرعت زیاد و عمل متقابل بین موجهای شوک و توربولانس استفاده می‌شود.

شبیه‌سازی مستقیم عددی برای مطالعه فیزیک آشفستگی، توسعه مدلها و تئوریهای آن و در موارد خاص، برای پیش‌بینی و تحلیل جریان‌های مورد علاقه در مهندسی استفاده می‌گردد همچنین

<sup>2</sup> - Orszag & Patterson

<sup>3</sup> - Spectral Method

<sup>4</sup> - Rogallo

<sup>5</sup> - Spalart



شبهه سازی مستقیم عددی در بررسی ساختار آشفتگی و مقایسه داده های تجربی استفاده می شود. اطلاعات بدست آمده از حل مستقیم عددی در مدلسازی ( به خصوص در اعداد رینولدز پایین) و کالیبره کردن وسایل اندازه گیری به کار گرفته می شود.

شبهه سازی مستقیم عددی در حال حاضر یکی از کاربردهای ابر کامپیوترها می باشد. مشکلات موجود در انجام این محاسبات به دلیل وجود محدوده بسیار وسیع مقیاسهای طولی وزمانی در جریان آشفته است که باید در محاسبات در نظر گرفته شوند.

برای بدست آوردن نتایج دقیق در دینامیک جریان آشفته، لازم است تغییرات جریان در مقیاسهای بسیار کوچک محاسبه شوند. بسیاری از پدیده هایی که در یک جریان آشفته اتفاق می افتد، فرکانسهای در حدود ۴ تا ۱۰ کیلو هرتز دارند و مقیاس مکانی این تغییرات در محدوده بسیار کوچکی در حدود ۱۰ تا ۱۰۰ میکرومتر می باشد.

با در نظر گرفتن این تغییرات نیاز به شبکه محاسباتی بسیار ریز و گامهای زمانی بسیار کوتاه می باشد، که به این ترتیب احتیاج به انجام محاسبات طولانی برای این امر مشخص می شود.

انجام آزمایشات فیزیکی یکی از روشهای معمول در بدست آوردن اطلاعات لازم برای مطالعه جریان سیال است. در این میان استفاده از شبهه سازی مستقیم عددی مزیت های بسیاری نسبت به انجام این نوع آزمایشات دارد. یکی از مهمترین مزیتها در این میان بدست آوردن اطلاعات برای مطالعه جریان در نزدیکی دیواره است. در حالیکه انجام آزمایشات و اندازه گیری پارامترهای جریان در این ناحیه بسیار مشکل و با خطا همراه است. نتایج مستقیم عددی می تواند اطلاعات کاملی از این پارامترها بدست آورد، از طرف دیگر در مدلسازی آشفتگی نیاز است که اطلاعات



مختلفی از جریان در یک نقطه و در یک زمان مشخص در دست باشد، که در آزمایشات نمی توان در یک لحظه و در یک نقطه همه پارامترهای مختلف جریان را اندازه گیری کرد. مشکل دیگر عدم امکان اندازه گیری بعضی از پارامترهای موجود در مدلهاست که نمی توان برای آن، کمیت فیزیکی قابل اندازه گیری در نظر گرفت که جملات اتلاف تنش و توزیع مجدد از این دسته می باشند.

با این وجود به دلیل محدودیتهای موجود در توان محاسباتی کامپیوترهای امروزی، محاسبات به روش مستقیم عددی تنها منحصر به بعضی جریانهای با هندسه ساده و اعداد رینولدز پایین است و بنابراین استفاده از روش مستقیم عددی در جریان آشفتنه منحصر به مطالعه بنیادی و کاربرد در مدلسازی می باشد.

به عنوان مثال برای انجام محاسبات در شبیه سازی مستقیم عددی برای یک جریان ساده در کانال به ابعاد  $1/10 * 1/10 * 1/10$  متر و در رینولدز بالا گردابه های به ابعاد  $10 - 100$  میکرومتر تشکیل خواهند شد و بنابراین به شبکه محاسباتی با  $106$  تا  $1012$  گره احتیاج است که بتواند همه فرآیند آشفتگی جریان را مشخص کند، از طرف دیگر سریعترین تغییرات در چنین جریانی فرکانسی در مرتبه  $10$  کیلو هرتز دارد که نیاز است معادلات در بستر زمان با استفاده از قدمهای زمانی  $100$  میکروثانیه گسسته سازی شوند. همچنین برای محاسبه شبیه سازی مستقیم عددی داخل لوله در عدد رینولدز  $500000$  به کامپیوتری احتیاج است که توان محاسباتی  $10$  میلیون بار بیشتر از سریعترین کامپیوترهای Cray موجود داشته باشد به این ترتیب احتیاج به مدلسازی جریان آشفتنه و استفاده از کامپیوتر در انجام محاسبات تا سالها ادامه خواهد داشت و نیاز به تصحیح و طراحی مدلها بهتر همچنان احساس می شود.



## ۲-۳- دیدگاه عددی :

جهت تحلیل جریانهای پیچیده تر به کمک **D.N.S** احتیاج به کامپیوترهایی با حافظه و سرعت بیشتر و همچنین استفاده از برنامه های هوشمندتر و الگوریتم های سریعتر می باشد.

برای جریانهای پرپویک از روش **FFT**<sup>۶</sup> در جهت شبیه سازی زمانی<sup>۷</sup> استفاده می شود، در حالیکه برای استفاده از شبیه سازی مکانی<sup>۸</sup> استفاده از روشهای تفاضل محدود مرتبه بالا<sup>۹</sup>، معمول می باشد.

اخیراً از روش تفاضل محدود فشرده مرتبه بالا **Lele** (۱۰) در بسیاری از روشهای **D.N.S** استفاده شده است. المانهای طیفی<sup>۱۰</sup> و روشهای جمعی<sup>۱۱</sup>، جهت گسسته سازی مکانی در هندسه های پیچیده بکار می رود. از چندجمله ایهای چبیشف در جریانهای غیر پرپویک، لایه مرزی و کانال استفاده می شود.

در گام زمانی از روشهایی همچون رانج \_ کوتا<sup>۱۲</sup>، کرانک \_ نیکلسون<sup>۱۳</sup>، آدامز \_ بشفورد<sup>۱۴</sup> و .. (۳) استفاده می شود. معمولاً معادلات پواسون یا هلمهولتز ( شرایط مرزی دیریشله و نیومن ) در طی

<sup>6</sup> - Fast Fourier Transformation

<sup>7</sup> - Temporal

<sup>8</sup> - Spatial

<sup>9</sup> - High order finite difference

<sup>10</sup> - Spectral elements

<sup>11</sup> - Collocation method

<sup>12</sup> - Runge - Kutta

<sup>13</sup> - Crank - Nicolson

<sup>14</sup> - Adams - Bashford



استفاده از D.N.S بایستی حل شوند. الگوریتم‌های مختلفی تاکنون برای حل معادلات پواسون و هلمهولتز آزمایش و استفاده شده است.

## ۲-۴- روش طیفی<sup>۱۵</sup>:

مساله اصلی در هر روش عددی، محاسبه دقیق مشتق‌ها می‌باشد و این علت اصلی استفاده تقریباً تمام D.N.S های انجام شده اخیر در زمینه توربولانس، از روش طیفی می‌باشد. زیرا این روش، یک روش بسیار دقیق و یک ابزار مناسب جهت محاسبه مشتق‌های عبارات گسسته شده می‌باشد. روش طیفی یک فضای واقعی با استفاده از سریهای توابع متعامد برای شبیه سازی فراهم می‌آورد.

$$f(x_j) = \sum_{n=0}^{N-1} Q_{n,j} \hat{f}_n \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-2)$$

انتخاب معمول برای توابع متعامد استفاده از سریهای فوریه<sup>۱۶</sup> است. ممکن است این انتخاب کمی پیچیده به نظر برسد، اما با این انتخاب مشتق‌های مکانی  $f$  به راحتی محاسبه می‌شوند.

$$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}_n e^{i\omega_n t} \quad \& \quad f_j = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}_n e^{-i\omega_n j} \quad (2-2)$$

عبارت بالا به ترتیب تبدیل معکوس فوریه و تبدیل فوریه می‌باشد. حال با مشتق گیری  $f$  داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{n=0}^{N-1} i\omega_n \hat{f}_n e^{i\omega_n j} \quad (3-2)$$

بنابراین برای محاسبه مشتق‌های  $f$  رابطه (۱-۲) تبدیل فوریه را محاسبه می‌کند، رابطه (۲-۲)

محاسبه ضرایب جدید فوریه و رابطه (۳-۲) محاسبه تبدیل معکوس فوریه سریهای جدید را انجام

می‌دهد.

<sup>15</sup>- Spectral Method

<sup>16</sup>- Fourier Series

۲-۵- شرایط مرزی<sup>۱۷</sup>:

در **D.N.S**، انتخاب شرایط مرزی یک انتخاب مهم و حساس می‌باشد. برای جریانهای داخلی انتخاب شرایط مرزی در مرزهای خروجی یک برآورد مشکل می‌باشد. برای جریانات تراکم‌ناپذیر که دارای جهات آماری هموزن می‌باشند، مانند جهت عرضی لایه مرزی دو بعدی، معمولاً شرایط مرزی پرپودیک اعمال می‌شوند. اما بسیاری از جریانات پیچیده توسعه یافته، در جهت جریان غیرهموزن بوده، که بنابراین احتیاج به انتخاب شرایط مرزی مناسب دارند. همچنین تراکم پذیر بودن جریان، واکنش پذیری سیال و تولید حرارت در سیال منجر به اعمال شرایط مرزی اضافی می‌شوند.

---

<sup>17</sup> - Boundary condition

## فصل ۳- روش‌های تقسیم دامنه

### ۳-۱- مقدمه:

امروزه با پیشرفت کامپیوترها، توسعه الگوریتم‌های عددی برای حل معادلات حاکم بر حرکت سیال با استقبال زیادی روبرو گردیده است. بی شک تولید شبکه مهمترین مبحث در حل معادلات دیفرانسیل جزئی می‌باشد. بدون داشتن یک شبکه مناسب رسیدن به یک حل قابل قبول امکان‌پذیر نخواهد بود. بنابراین اولین قدم در حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر فیزیک مسئله، این است که هندسه مورد نظر به درستی شبکه‌بندی گردد. معادلات کلی حاکم بر حرکت سیال، معادلات ناویر-استوکس می‌باشند. از نقطه نظر ریاضی، این معادلات جزء معادلات غیر خطی طبقه‌بندی می‌شوند که حل تحلیلی آنها موجود نمی‌باشد. یکی از راه‌های حل این معادلات استفاده از روش‌های عددی می‌باشد. به منظور حل عددی میدان جریان در هندسه‌های پیچیده، هم می‌توان از شبکه‌های محاسباتی بی‌سازمان<sup>۱</sup> و هم از شبکه‌های باسازمان<sup>۲</sup> با تمهیدات خاص استفاده نمود. (۳) چنانچه بتوان با استفاده از روش‌های شبکه‌بندی باسازمان شبکه عددی مناسب

---

<sup>1</sup> Unstructured Grid

<sup>2</sup> Structured Grid



را تولید کرد، استفاده از آنها به جای روش‌های بی‌سازمان ترجیح داده می‌شود. در شبکه‌های باسازمان معمولاً از سه روش زیر جهت تولید شبکه محاسباتی در دامنه هندسی استفاده می‌شود که هر کدام از این روش‌ها معایب و مزایای خاص خود را دارا می‌باشند:

روش تک بلوکی یا تک ناحیه‌ای<sup>۳</sup>

روش چند ناحیه‌ای<sup>۴</sup>

روش چند بلوکی<sup>۵</sup>

که در ادامه به توضیح هر یک پرداخته می‌شود.

### ۳-۲- شبکه بندی

برای آن که بتوانیم یک میدان فیزیکی مورد نظر را به درستی مدل کنیم باید یک شبکه مناسب روی میدان تولید کنیم. روش‌های مختلفی برای تولید شبکه وجود دارد:

شبکه‌های باسازمان یا منظم

شبکه‌های بی‌سازمان یا نامنظم

شبکه‌های ترکیبی<sup>۶</sup>

هر کدام از این شبکه‌ها دارای معایب و محاسن خاص خود بوده و انتخاب هر کدام از آنها حل جریان را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

<sup>3</sup> Single-Block/Zone

<sup>4</sup> Multi-Zone

<sup>5</sup> Multi-Block

<sup>6</sup> Hybrid Grid



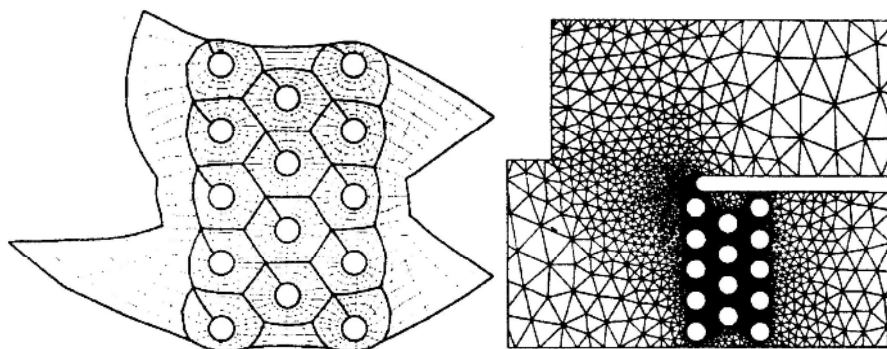
تولید شبکه باسازمان تک بلوکی باعث می‌شود تا الگوریتم حل جریان بسیار راحت گردد. اما این روش از مشکلات خاصی برخوردار است. به‌عنوان مثال اگر قرار باشد قسمتی از حل با شبکه ریز انجام دهیم ناگزیریم تا تمام میدان را با شبکه ریز مدل کنیم در حالی که ممکن است نیاز به چنین شبکه ریزی در سراسر میدان نداشته باشیم. همچنین در حالتی که هندسه جسم پیچیده می‌گردد، تولید شبکه باسازمان به سختی صورت می‌گیرد و حتی گاهی عملاً تولید شبکه باسازمان امکان‌پذیر نخواهد بود.

شبکه بی‌سازمان بهترین روش برای تولید نقاط در دامنه محاسباتی می‌باشد. این روش بسیار انعطاف‌پذیر بوده و به راحتی می‌توان در جایی که نیاز است از شبکه ریز و در جایی که نیاز نیست از شبکه درشت استفاده کرد. اما تولید شبکه بی‌سازمان باعث می‌شود تا در جایی که جریان غیرهمگن داریم مانند لایه مرزی، حل از دقت کافی برخوردار نباشد. درثانی توسعه روش‌های مرتبه بالا روی شبکه‌های بی‌سازمان کار دشواری می‌باشد. همچنین شبکه بی‌سازمان به معنی بالا رفتن حافظه مورد نیاز، بالا رفتن پیچیدگی ساختار داده‌ای و مشکلات دیگری از قبیل سخت بودن اعمال روش‌هایی مانند چند شبکه‌ای و دیگر الگوریتم‌های پیشرفته می‌باشد. در حال حاضر، روش ترکیبی که از مزایای هر دو روش باسازمان و بی‌سازمان به طور هم زمان سود می‌برد مورد توجه محققان قرار گرفته است.

شبکه‌های بلوکی می‌توانند ترکیبی از شبکه‌های باسازمان و بی‌سازمان باشند. بدین صورت که در هر بلوک به صورت محلی از شبکه باسازمان یا بی‌سازمان استفاده می‌شود، اما خود بلوک‌ها می‌توانند به صورت بی‌سازمان در کل میدان پخش شده و آن را بپوشانند. این خاصیت باعث

افزایش کاربرد و توانایی روش شبکه‌های بلوکی شده و استفاده از آنها را مورد توجه محققان قرار داده است.

در شکل (۱-۳) تولید شبکه بی‌سازمان و باسازمان بلوکی روی تعدادی استوانه نمایش داده شده است. این اشکال نشان می‌دهند که هر دو روش قادر به تولید شبکه روی مرزهای پیچیده می‌باشند و می‌توان از آنها برای تولید هندسه‌های پیچیده استفاده کرد.



ب

الف

شکل ۱-۳: تولید شبکه روی هندسه‌های پیچیده با استفاده از روش‌های، الف: باسازمان، ب: بی‌سازمان.

### ۳-۳- روش تک بلوکی یا تک ناحیه‌ای

اولین قدم برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر فیزیک مسئله، شبکه‌بندی درست هندسه می‌باشد. بنابراین اگر هندسه کمی پیچیده‌تر شود یکی از روش‌های شبکه‌بندی دامنه هندسی جهت حل عددی معادلات حاکم بر حرکت سیال و تحلیل عددی جریان، روش تک بلوکی یا تک ناحیه‌ای است. از مزایای این روش، ساده بودن الگوریتم برنامه‌نویسی آن برای هندسه‌های ساده می‌باشد، با توجه به دشوار بودن تولید شبکه به صورت تک بلوکی برای هندسه‌های پیچیده، این



روش مناسب نبوده و هندسه به خوبی مدل نمی‌شود. برای حل عددی از دو روش صریح<sup>۷</sup> و ضمنی<sup>۸</sup> استفاده می‌شود. دقت و پایداری حل روش‌های ضمنی نسبت به روش‌های صریح که روش حل آن نقطه به نقطه و پیشروی به جلو است، بیشتر می‌باشد.

### ۳-۴- روش چند ناحیه‌ای

یکی دیگر از روش‌های تقسیم دامنه هندسی به منظور حل عددی معادلات حاکم بر حرکت سیال و تحلیل عددی جریان، روش چند ناحیه‌ای است. در روش چند ناحیه‌ای با توجه به این که هندسه به نواحی ساده تقسیم‌بندی شده و در هر ناحیه به طور مستقل و با روش دلخواه شبکه‌بندی صورت می‌گیرد. همچنین چون حل معادلات حاکم در هر ناحیه به طور مستقل صورت می‌گیرد، بنابراین این روش فقط برای جریان‌های مافوق صوت کاربرد دارد که سیال از وجود اطلاعات پایین دست جریان بی‌اطلاع می‌باشد.

شبکه‌های چند ناحیه‌ای، فرآیند تولید شبکه با سازمان و تحلیل عددی جریان حول هندسه‌های پیچیده را میسر و روان می‌سازد. در این نوع شبکه‌بندی مرزهای جدیدی بین نواحی همسایه بنام مرز ناحیه‌ای<sup>۹</sup> به وجود می‌آید. حل مرز ناحیه‌ای محتاج یک روش درونیایی پردقت، پایدار و قابل تعمیم به سیستم‌های مختصات منحنی‌الخط است. روشی مطلوب با خواص فوق توسط رأی (۱۷) برای هندسه‌های دوبعدی ابداع شده است. بکارگیری ایده‌های چند ناحیه‌ای موجب تقویت و

<sup>7</sup> Explicit

<sup>8</sup> Implicit

<sup>9</sup> Zone Boundary



توسعه کاربرد شبکه‌های باسازمان شده است. شبکه‌های چند ناحیه‌ای اغلب به دو دسته شبکه‌های انطباقی و شبکه‌های وصله‌ای تقسیم می‌شوند که دسته اول نیاز به درون‌یابی ندارد ولی برای دسته دوم می‌توان اگر تعداد نقاط مرزی یکی نباشد از درون‌یابی استفاده کرد که در ادامه به توضیح هر یک از این دو دسته پرداخته می‌شود.

### ۳-۵- روش چندبلوکی

تاکنون الگوریتم‌های متعددی به منظور تولید شبکه و تقسیم میدان حل برای تحلیل جریان به صورت عددی ارائه و به انجام رسیده است که هر کدام از آنها دارای قابلیت‌های مخصوص خود و همچنین معایب خاص خود می‌باشند. از میان تمام این الگوریتم‌ها، بی‌شک یکی از کاربردی‌ترین آنها، روش چندبلوکی می‌باشد. این روش که امروزه با استقبال بسیار زیادی روبرو شده است، از انعطاف‌پذیرترین الگوریتم‌ها بوده و با اعمال آن، قابلیت برنامه‌هایی که به منظور شبیه‌سازی میدان جریان به کار می‌روند به نحو چشمگیری افزایش می‌یابد تا به این حد که اعمال روش چندبلوکی، باعث می‌شود تا این برنامه‌ها از حالت تحقیقاتی صرف به یک برنامه کاملاً کاربردی و صنعتی تبدیل گردد. مشاهده مقالات ارائه شده، مشخص می‌سازد که تمام محققان درصدد دستیابی به الگوریتم‌های چند بلوکی می‌باشند، به‌خصوص مقالاتی که در آنها تحلیل جریان روی هندسه‌های حقیقی و صنعتی صورت گرفته، بدون شک دارای الگوریتم چند بلوکی می‌باشند. در این روش، هندسه به چندین بلوک کوچک‌تر و ساده تقسیم می‌گردد. این نواحی طوری انتخاب می‌گردند که حتی‌المقدور ساده‌ترین شکل هندسی را داشته باشند. انتخاب این بلوک‌ها دست برنامه‌نویس است.



بعد از تقسیم دامنه هندسه به قسمت‌های ساده، تولید شبکه سطحی روی این بلوک‌های ساده صورت می‌گیرد و حل میدان جریان ساده در هر بلوک به طور جداگانه انجام می‌گردد. از آنجا که هندسه کل، از مجموعه تمام این بلوک‌ها تشکیل شده است، لازم است تا تبادل اطلاعات هر بلوک با بلوک‌های مجاور صورت گیرد. به طور کلی می‌توان جسم را به بلوک‌های عرضی و طولی تقسیم نمود و این تقسیم‌بندی کاملاً دلخواه می‌باشد. استقبال از روش‌های چند بلوکی از جهات مختلفی قابل بررسی می‌باشد که در ذیل به ذکر برخی از این دلایل پرداخته می‌شود.

### ۳-۵-۱- نیاز به حافظه کافی برای جریان روی هندسه کاربردی

در تحلیل جریان روی هندسه حقیقی و کاربردی، می‌بایست شبکه‌ای با ابعاد بزرگ و نقاط بسیار ریز تولید شود. این موضوع سبب می‌شود تا شبکه تولیدی بسیار بزرگ بوده به طوری که برای حل جریان در آن با کمبود حافظه مواجه خواهیم شد. جهت تحلیل جریان حول هندسه‌های پیچیده، عملاً حافظه کافی برای محاسبات کامپیوتر در دسترس نخواهد بود. اولین انگیزه که باعث شد روش‌های چند بلوکی مورد مطالعه قرار گیرد، غلبه بر مشکل فوق بود. بدین‌گونه که با تجزیه هندسه به بلوک‌های مناسب، در هر لحظه تنها به حل یک بلوک پرداخته شده و اطلاعات مربوط به بلوک‌های دیگر در حافظه جانبی ذخیره می‌شود. گرچه این موضوع باعث می‌شود تا سرعت اجرای برنامه کم شده، ولی به عنوان تنها راه غلبه بر مشکل حافظه، بسیار سودمند می‌باشد.



### ۳-۵-۲- تولید شبکه روی هندسه‌های پیچیده

از لحاظ تاریخی می‌توان گفت که اولین الگوریتم‌های عددی برای حل جریان به کمک روش‌های تفاضل محدود صورت گرفته است. برای این که به روش تفاضل محدود بتوان جریان درون یک دامنه هندسی را مدل کرد، نیاز است تا یک شبکه منظم روی بدنه و حول جسم تولید نمود. همین مسئله یکی از بزرگترین مشکلات موجود برای حل جریان می‌باشد. هنگامی که هندسه پیچیده می‌شود، مخصوصاً در حالت‌هایی که جسم سه بعدی می‌باشد، تولید شبکه منظم یا باسازمان روی بدنه و همچنین تولید شبکه سه بعدی روی میدان به سختی صورت می‌گیرد.

بر خلاف شبکه‌های منظم، شبکه‌های نامنظم یا بی‌سازمان پاسخ‌گوی این مسئله می‌باشند. شبکه‌های نامنظم دارای این خاصیت هستند که به کمک آنها می‌توان هر گونه هندسه سه‌بعدی را توسط آنها شبکه‌بندی کرد. مشکل اصلی این است که باکمک این شبکه‌ها دیگر نمی‌توان از الگوریتم‌های تفاضل محدود استفاده کرد. برای این منظور الگوریتم‌های حل معادلات سیال به کمک روش‌های المان محدود و حجم محدود تدوین و توسعه یافته‌اند. به کمک این الگوریتم‌ها و شبکه نامنظم می‌توان هر هندسه‌ای را شبکه‌بندی و حل نمود، ولی در عمل مشاهده شده است که استفاده از شبکه‌های منظم حتی هنگامی که از الگوریتم‌های حجم محدود و المان محدود استفاده می‌شود، از دقت بیشتری برخوردارند. لذا همچنان سعی می‌گردد تا بتوان روش‌های مناسبی با تولید شبکه منظم روی هندسه‌های پیچیده و سه بعدی به دست آورد. بی‌شک تنها راه غلبه بر مشکل موجود، استفاده از روش چند بلوکی می‌باشد.



### ۳-۵-۳- حل حاصل از اندرکنش جریان خارجی با جریان داخلی

در حالاتی که بخواهیم تاثیر جریان داخلی را روی جریان خارجی حساب کنیم، ناگزیریم تا از روش چندبلوکی استفاده کنیم. به عنوان مثال جریان روی هواپیما را در نظر بگیرید. برای آنکه تاثیر نیروی ناشی از موتور جت را روی ضرایب آیرودینامیکی هواپیما به دست بیاوریم، ناگزیریم تا جریان داخل نازل موتور را که یک جریان داخلی است را با یک بلوک حل کرده و نتایج آن را به شبکه حول هواپیما داده و تاثیر آن را روی ضرایب هواپیما به دست بیاوریم. (۲)

### ۳-۵-۴- حل جریان در مسائلی که دارای مقیاسهای طولی متفاوت می باشند

در بسیاری از مسائل فیزیکی حقیقی، به مقیاسهای طولی متفاوتی برخورد می کنیم که از جمله آنها می توان به جریانهای با سرعت زیاد، با گرادیان بالا و وجود گردابهها اشاره کرد. (۶) در چنین مسائلی لازم است تا در هر کجا که مقیاسها عوض می شوند شبکه محاسباتی را فشرده یا در صورت نیاز از شبکه درشتتری استفاده کرد. تولید چنین شبکه ای به وسیله شبکه با سازمان تک بلوکی کاری بسیار سخت و پرهزینه می باشد و اغلب با تقریبهای زیادی همراه است. این دلیل نیز اهمیت روش چندبلوکی را بالا می برد و کارهای متعددی توسط محققان مختلف روی آن انجام شد. همانطور که گفته شد در این روش، هندسه مورد نظر به چندین بلوک تقسیم می گردد به گونه ای که مجموع بلوکها، کل هندسه را تشکیل می دهند و در هر بلوک به طور جداگانه





می‌توان شبکه‌بندی مورد نیاز را انجام داد به طوری که بسته به نیاز هر ناحیه بتوان مقیاس‌های طولی مورد نیاز را ارضا کرد.

### ۳-۵-۵- امکان پردازش موازی

در دهه گذشته محاسبات زیاد و طولانی تنها روی ابر کامپیوترها امکان‌پذیر بود. که این به نوبه خود مساله بسیار بزرگی محسوب می‌گردد زیرا ابر کامپیوترها دارای هزینه‌های بسیار زیادی می‌باشند. امروزه پردازش موازی به عنوان یکی از مهمترین ابزارها برای تحلیل جریان مطرح شده است، تا چندی پیش به علت ضعف کامپیوترها و وسایل ارتباط اطلاعات، امکان موازی‌سازی کامپیوترهای شخصی فراهم نبود. این مشکل با توسعه سخت افزارها و امکان تبادل سریع اطلاعات بین کامپیوترهای شخصی مرتفع گردیده است. یکی دیگر از مزایای اصلی روش چندبلوکی، قابلیت ذاتی این روش برای پردازش موازی می‌باشد. بدین‌گونه کافی است که هر کدام از بلوک‌های ایجاد شده، روی یک کامپیوتر جداگانه تحلیل شوند و اطلاعات مورد نیاز در روی مرزها بین کامپیوترها منتقل شوند.

### ۳-۵-۶- مشکلات موجود در زمینه روش چند بلوکی

۱. پیچیده‌تر شدن الگوریتم حل عددی.
۲. تبادل اطلاعات بین بلوک‌ها، بزرگترین مساله در روش چند بلوکی می‌باشد. روش‌های موجود در تبادل اطلاعات به شرح زیر می‌باشد:

الف- در بلوکهای منطبق: این کار با جایگزینی مقادیر نقاط مرزی از بلوک همسایه به بلوک حاضر امکان پذیر است (عدم نیاز به میان یابی).

ب- استفاده از میان یابی خطی: در جاهایی که گرادیان متغیرهای جریان کم است و ناپیوستگی‌هایی نظیر موج ضربه‌ای، برگشت جریان و ... وجود ندارد.

ج- استفاده از روش میان یابی با دقت بالاتر: در جاهایی که گرادیان متغیرهای جریان زیاد است، نظیر لایه مرزی و موج ضربه‌ای، کارآمد می‌باشد.

د- استفاده از میان یابی ابقایی ۱۰ در جاهایی که ناپیوستگی‌هایی نظیر موج ضربه‌ای، برگشت جریان و ... داریم: میان یابی بقایی به منظور ارضاء کردن معادلات بقاء در مرزها می‌باشند. مثلاً با مساوی قرار دادن جرم، اندازه حرکت و انرژی عبوری از یک بلوک به بلوک دیگر مقادیر متغیرهای جریان روی مرزها به دست می‌آید.

### ۳-۵-۷- بلوک بندی

بلوک بندی مناسب میدان جریان از اهمیت بسیاری برخوردار می‌باشد و بیشترین زمان لازم برای تحلیل عددی جریان حول اجسام پیچیده، صرف ایجاد شبکه می‌شود. در یکی از روشهای خودکار، ابتدا میدان جریان را به صورت بی‌سازمان ۱۱ بلوک بندی کرده سپس در هر بلوک شبکه با سازمان ایجاد می‌نمایند. هر چند که روش موثر برای حل میدان جریان روی هندسه‌های پیچیده، استفاده از شبکه بی‌سازمان تک‌بلوکی است، ولی ترکیب بلوک بندی جریان با استفاده از شبکه‌های

<sup>10</sup> Conservative Interpolation

<sup>11</sup> Unstructured



باسازمان جانشین مناسبتری برای شبکه‌های بی‌سازمان می‌باشد. در دهه اخیر تحقیقات گسترده‌ای در زمینه تولید و استفاده از شبکه‌های چندبلوکی، روش‌های تولید شبکه، روش‌های دسته‌بندی اطلاعات و همچنین تهیه نرم‌افزارهای تولید شبکه، برای کاهش نقش کاربر و زمان تولید شبکه بویژه برای شکل‌های پیچیده هندسی انجام گرفته‌است.

به طور کلی دو نوع شبکه بلوکی وجود دارد:

شبکه‌های منطبق<sup>۱۲</sup>

شبکه‌های غیرمنطبق<sup>۱۳</sup> که خود به سه دسته زیر تقسیم می‌شود:

شبکه‌های وصله‌ای<sup>۱۴</sup>

شبکه‌های هم‌پوشان<sup>۱۵</sup>

شبکه‌های وصله‌ای-هم‌پوشان<sup>۱۶</sup>

شکل (۲-۳) انواع مختلف شبکه‌های بلوکی را نشان می‌دهد.

---

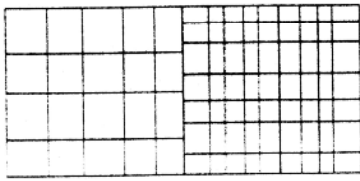
<sup>12</sup> Matched Grids

<sup>13</sup> Unmatched Grids

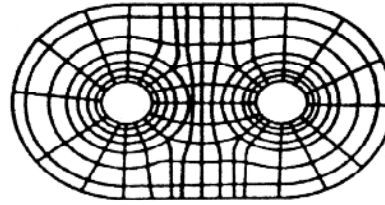
<sup>14</sup> Patched Grids

<sup>15</sup> Chimera Grids

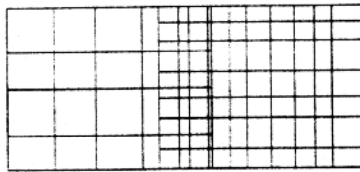
<sup>16</sup> Patched- Chimera Grids



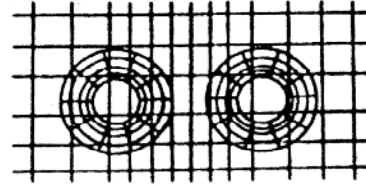
ب) شبکه بلوکی وصله‌ای



الف) شبکه بلوکی منطبق



د) شبکه بلوکی وصله‌ای-هم‌پوشان



ج) شبکه بلوکی هم‌پوشان

شکل ۲-۳: نمایش انواع مختلف شبکه‌های بلوکی.

### ۳-۵-۷-۱- روش انطباقی

در شبکه‌های منطبق بلوک‌های مجاور در مرز و نقاط مرزی با یکدیگر مشترک می‌باشند و هیچ‌گونه هم‌پوشانی ندارند. این نوع شبکه‌ها در مسائل هوافضایی و توربوماشین بسیار سودمند می‌باشند. در این روش در مقایسه با روش‌های شبکه‌بندی با سازمان و شبکه‌بندی بی‌سازمان، هندسه براحتی مدل می‌گردد و قوانین بقایی را در مرزها براحتی می‌توان اعمال کرد. اما این روش دارای معایب زیر می‌باشد:

از آنجا که بلوک‌ها در مرز و نقاط مرزی با یکدیگر مشترک می‌باشند، انعطاف‌پذیری این روش در تولید هندسه‌های پیچیده کم می‌شود. این قید باعث می‌شود تا بلوک‌ها هم در تعداد نقاط به



یکدیگر وابسته بوده و هم در مکان نقاط روی مرز دارای قید باشند. این قید ممکن است به پایین آمدن کیفیت شبکه منتهی شود و حتی در مرزها شرط تعامد شبکه را نتوان به درستی اعمال کرد. از آنجا که تعداد بلوکها به بلوکهای مجاور وابسته می‌باشد، باید از الگوریتم مناسبی جهت تعیین تعداد نقاط مناسب در هر بلوک تعیین گردد تا در مناطق مورد نیاز فشردگی شبکه رعایت شود.

### ۳-۵-۷-۲- روش غیر انطباقی

برخلاف شبکه‌های منطبق، شبکه‌های غیرمنطبق از انعطاف‌پذیری بیشتری برخوردارند. شبکه‌های غیرمنطبق را عموماً به دو دسته تقسیم‌بندی می‌کنند:

#### شبکه‌های وصله‌ای

شبکه‌های وصله‌ای شبکه‌های هستند که در آنها دو بلوک مجاور تنها در یک مرز با یکدیگر مشترک هستند و نقاط مرزی آنها لزوماً روی یکدیگر قرار ندارند.

#### شبکه‌های هم‌پوشان

شبکه‌های هم‌پوشان شبکه‌هایی هستند که در آنها دو بلوک مجاور هم، با یکدیگر هیچ ارتباط هندسی ندارند و کاملاً آزادانه می‌توانند روی یکدیگر حرکت کنند. بنا به این خاصیت، با استفاده از شبکه‌های هم‌پوشان می‌توان به راحتی هرگونه هندسه را شبکه‌بندی کرده و جریان را روی آنها حل نمود. اما انتقال اطلاعات بین بلوکها به سختی صورت می‌گیرد و ارضای شارها در نقاط مرزی بسیار مشکل خواهد بود.

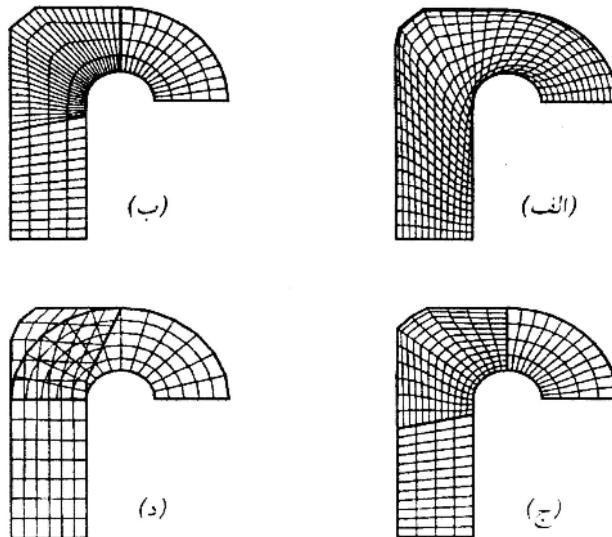


اگرچه فعالیت‌های زیادی روی شبکه‌های غیر منطبق صورت گرفته‌است، اما همچنان مشکلات زیادی وجود دارد که از جمله می‌توان به انتقال اطلاعات بین بلوک‌ها، تولید شبکه به صورت اتوماتیک و مسائل با مرز متحرک اشاره کرد. در شکل (۳-۳-الف) تا (۳-۳-د) انواع شبکه‌های تولید شده توسط روش‌های مختلف مشاهده می‌شود. شکل (۳-۳-الف) میدان حل را به وسیله یک بلوک با سازمان شبکه‌بندی کرده است. همانطور که ملاحظه می‌شود این شبکه از کیفیت مناسب برخوردار نمی‌باشد. شکل (۳-۳-ب) همان میدان را به وسیله بلوک‌های منطبق شبکه‌بندی کرده‌است. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود، بلوک‌ها هم در مرز و هم در نقاط مرزی با یکدیگر مشترک هستند. شکل (۳-۳-ج) همان میدان را به وسیله بلوک‌های وصله‌ای شبکه‌بندی کرده‌است. در این حالت بلوک‌ها تنها در مرزها با یکدیگر در اشتراکند و نقاط مرزی به صورت دلخواه روی مرزها تقسیم شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود تعداد نقاط در هر بلوک را می‌توان به طور دلخواه تعیین کرد و محدودیت حالت قبلی وجود ندارد. شکل (۳-۳-د) همان میدان را به وسیله بلوک‌های هم‌پوشان شبکه‌بندی کرده است. در این شکل ملاحظه می‌شود که بلوک‌ها به دلخواه یکدیگر قرار گرفته‌اند و هیچ‌گونه محدودیتی ندارند. هر بلوک به طور دلخواه شبکه‌بندی شده و حتی می‌توان هر بلوک را در دستگاه مختصات مناسب شبکه‌بندی و حل نمود. در حالت کلی، بلوک‌های هم‌پوشان از انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به بلوک‌های وصله‌ای برخوردارند. گرچه این بلوک‌ها نیز دارای معایبی نسبت به بلوک‌های وصله‌ای می‌باشند. بعضی از معایب بلوک‌های هم‌پوشان عبارتند از:

در یک مساله  $n$  بعدی برای انتقال اطلاعات از یک بلوک به بلوک دیگر نیازمند درون‌یابی  $n$  بعدی هستیم در حالی که در حالت بلوک‌های وصله‌ای نیازمند درون‌یابی  $(n-1)$  بعدی خواهیم بود. این مساله هم در سرعت و هم در دقت شرایط مرزی بلوکی تاثیر می‌گذارد.

ارضای معادلات بقایی در حالت بلوک‌های هم‌پوشان بسیار سخت می‌باشد. دقت و سرعت همگرایی محاسبات در این حالت بستگی به میزان هم‌پوشانی دارد. اندازه نسبی بلوک‌ها نیز در دقت و سرعت همگرایی موثر است.

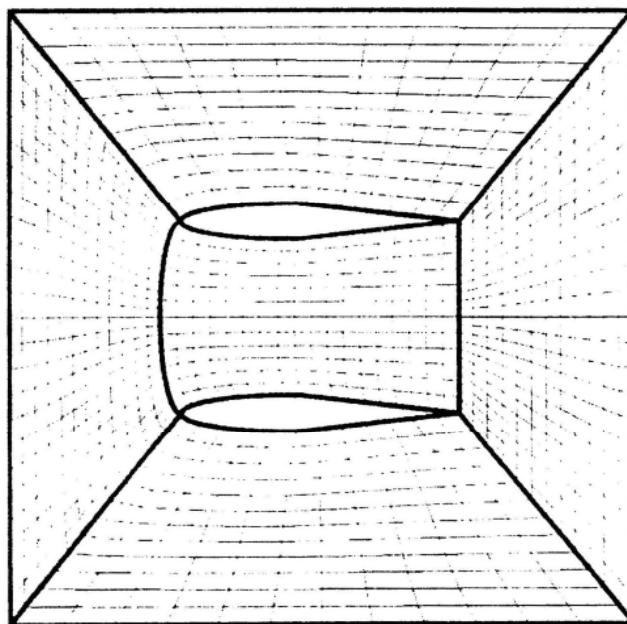
اما به هر حال انعطاف‌پذیری روش هم‌پوشان در تولید شبکه بویژه در حالت سه بعدی باعث شده است تا این بلوک‌ها مورد توجه قرار گیرند. همچنین در مسائلی مانند جریان غیر دایم و یا جریانی که در آن حرکت نسبی بین هندسه‌های مختلف وجود دارد و مرز متحرک است، کارآیی بلوک‌های هم‌پوشان بیشتر است.



شکل ۳-۳: تولید شبکه سازمان یافته به روش‌های مختلف، الف: شبکه با سازمان، ب: شبکه بلوکی منطبق، ج: شبکه بلوکی وصله‌ای، د: شبکه بلوکی هم‌پوشان.

## ۳-۵-۸- مرزهای بلوکی

اولین قدم در حل به روش چند بلوکی، شکستن میدان حل به بلوک‌های مختلف می‌باشد. این تقسیم‌بندی باعث می‌شود که در میدان حل مرزهایی به وجود بیاید که به نام مرزهای بلوکی معروفند. شکل (۳-۴) میدان حل بین دو ایرفویل را نشان می‌دهد که به بلوک‌های مختلف تقسیم شده است. تولید شبکه تک بلوکی در این ناحیه که یک ناحیه همبند چند گانه است بسیار مشکل می‌باشد. به همین منظور، ناحیه مورد نظر را به پنج بلوک تقسیم شده است. ملاحظه می‌شود که هر کدام از این نواحی یک ناحیه همبند ساده با چهار مرز ساده می‌باشند و به راحتی می‌توان هر بلوک را شبکه‌بندی کرد. در این شکل، مرزهای بلوکی به طور مشخص می‌باشند که در فصل مشترک دو بلوک ایجاد شده‌اند. این مرزها باعث می‌شوند تا حل جریان به راحتی هنگامی که با یک بلوک سروکار داریم، نباشد.



شکل ۳-۴: تقسیم ناحیه ما بین دو ایرفویل به پنج بلوک.



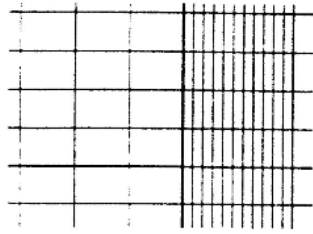


محاسبه مقادیر روی مرزهای بلوکی باید طوری صورت گیرد که: (۵)

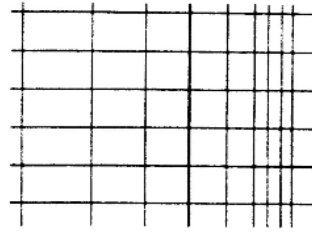
حل پایدار باشد.

روی مختصات منحنی الخط قابل اعمال باشد.

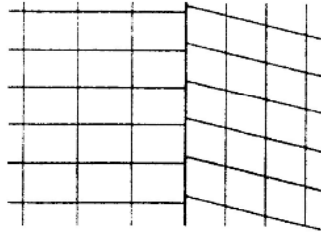
از آنجا که هر بلوک به طور جداگانه شبکه بندی می شود، خطوط شبکه در دو بلوک مجاور می توانند در یک راستا باشند (شبکه های منطبق) یا اینکه این خطوط در یک راستا نباشند (شبکه های غیر منطبق). حتی در شبکه های منطبق نیز تغییر ناگهانی در فواصل شبکه بین دو بلوک مجاور می تواند باعث پرش در متریک ها شود (شبکه های با متریک ناپیوسته). در شکل (۳-۵) انواع مختلف این شبکه ها دیده می شود. برای آن که اطلاعات از یک بلوک به بلوک دیگر به خوبی و با دقت منتقل شود، لازم است تا تبادل اطلاعات روی مرزها با دقت صورت گیرد. برای این عمل نیاز به روش های بادقت بالای درونیابی احساس می گردد.



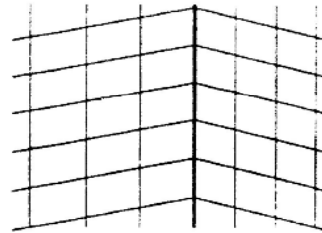
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۳-۵: انواع مرزهای بلوکی. الف: مرز با پیوستگی شبکه، ب: مرز با پیوستگی متریک، ج: مرز با ناپیوستگی متریک، د: مرز با ناپیوستگی شبکه

## فصل ۴- محاسبه مشتقات جزئی به روش عددی

### ۴-۱- مقدمه

در این فصل نحوه محاسبه مشتقات جزئی به روش عددی بحث خواهد شد. روش محاسبه این مشتقات در مختصات مکانی روش تفاضلات محدود فشرده است که در همین فصل نحوه محاسبه آنها توضیح داده می‌شود. این روش از دقت بالایی برخوردار است و می‌توان برای محاسبه مشتقات از هر مرتبه‌ای از آن استفاده کرد. برای محاسبه مشتق زمانی از روش رانگ - کوتا استفاده می‌شود. در انتهای فصل مشتق چند تابع ریاضی به روش تفاضلات محدود فشرده و به صورت عددی محاسبه شده است و نتایج آن با روش تحلیلی مقایسه شده است.

### ۴-۲- روش تفاضلات محدود فشرده برای محاسبه مشتقات

مشتقات جزئی هم در جهت جریان و هم عمود بر جهت جریان از روش تفاضلات محدود فشرده محاسبه شده است این روش توسط Lele (۱۰) ارائه شده است. در این روش مشتق اول تابعی دلخواه مانند  $f(x)$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha + 2}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha - 1}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (۱-۴)$$

که در رابطه بالا علامت پریم نمایانگر مشتق مرتبه اول می‌باشد و  $J$  نشان‌دهنده شماره شبکه مورد نظر می‌باشد ( $1 \leq j \leq J$ ) و  $\Delta x = L_x / (J - 1)$ . با جاگذاری  $\alpha = 1/3$  و  $\alpha = 1/4$  به ترتیب دقت



مرتبه شش و چهاربه دست می آید. هنگامی که  $\alpha = 1/4$  و یا  $\alpha = 1/3$  باشد قطر اصلی در طرف راست معادله بالا چهار یا سه برابر کوچکتر از دو قسمت دیگر هستند، که این موضوع بیانگر این است که معادله بالا شرایط ناهنجاری دارد. یک راه حل برای رفع این مشکل این است که دو طرف رابطه (۱-۴) را در  $1/\alpha$  ضرب کنیم. این کار باعث می شود رابطه (۱-۴) به صورت رابطه (۲-۴) تغییر یابد:

$$f'_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f'_j + f'_{j+1} = \frac{1 + \frac{2}{\alpha}}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4 - \frac{1}{\alpha}}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (2-4)$$

در مرزهای جریان (یعنی در جاییکه  $j=1$  و  $j=J$ ) باشد، روش ضمنی یک طرفه درجه سه برای تقریب مشتق اول به کار برده می شود که به صورت زیر است:

$$f'_1 + 2f'_2 = \frac{1}{2\Delta x} (-5f_0 + 4f_1 + f_2) \quad (3-4)$$

و

$$f'_j + 2f'_{j-1} = \frac{1}{2\Delta x} (5f_j - 4f_{j-1} - f_{j-2}) \quad (4-4)$$

در نزدیکی مرزها (یعنی  $j=2$  و  $j=J-1$ ) شکل کلی معادله به کار برده می شود با این تفاوت که  $\alpha = 1/4$ . Lele پیشنهادی مطرح می کند مبنی بر اینکه در  $j=3$  و  $j=J-3$  تغییراتی را انجام دهیم به طوریکه  $\alpha$  را با  $\alpha'$  جاگذاری کنیم که  $\alpha'$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$\alpha' = (16\alpha + 32) / (40\alpha - 1) \quad (5-4)$$

این عمل به این دلیل است که این جاگذاری پایداری حل عددی را در مواردی که معادله به صورت  $(\partial/\partial t)u = (\partial/\partial x)f(u)$  است، بیشتر می کند.

معادله زیر نمایانگر مشتق مرتبه دوم تابعی دلخواه مانند  $f(x)$  است که در آن از مرتبه

چهارم شکل تفاضلات محدود فشرده استفاده شده است:

$$f''_{j-1} + f''_j + \alpha f''_{j+1} = \frac{4(1-\alpha)}{3\Delta x^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10\alpha - 1}{12\Delta x^2} (f_{j-2} - 2f_j + f_{j-2}) \quad (6-4)$$



که در آن  $\alpha = \frac{1}{4}$ . در اینجا نیز برای غلبه بر شرایط ناهنجار هر دو طرف رابطه (۴-۶) را در  $1/\alpha$  ضرب می‌کنیم که در نتیجه رابطه (۴-۷) حاصل خواهد شد.

$$f_{j-1}'' + \frac{1}{\alpha} f_j'' + f_{j+1}'' = \frac{4(\frac{1}{\alpha} - 1)}{3\Delta x^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10 - \frac{1}{\alpha}}{12\Delta x^2} (f_{j-2} - 2f_j + f_{j+2}) \quad (۴-۷)$$

در مرزهای جریان، حالت مرتبه سوم یک طرفه به کار برده می‌شود که به صورت زیر است:

$$f_1'' + 11f_2'' = \frac{1}{\Delta x^2} (13f_1 - 27f_2 + 15f_3 - f_4) \quad (۴-۸)$$

و

$$f_j'' + 11f_{j-1}'' = \frac{1}{\Delta x^2} (13f_j - 27f_{j-1} + 15f_{j-2} - f_{j-3}) \quad (۴-۹)$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۴-۳) داریم:

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{1}{2\Delta x} (-5f_1' + 4f_2' + f_3') \quad (۴-۱۰)$$

که به راحتی می‌توان نشان داد معادل رابطه زیر است:

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{-3}{\Delta x} f_1' + \frac{1}{2\Delta x} (f_1' + 4f_2' + f_3') \quad (۴-۱۱)$$

با جاگذاری طرف چپ رابطه (۴-۳) (با فرض  $\alpha = 1/4$ ) برای ترمهای داخل پارانتز در رابطه (۴-۱۱) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{-3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{(x=0)} - \frac{3}{2\Delta x^2} (f_1 - f_3) \quad (۴-۱۲)$$

معادله (۴-۱۲) زمانی در داخل مرزها به کار برده می‌شود که مقادیر تابع و مشتق آنها موجود باشند. مشابه این روابط را می‌توان برای جریان خروجی از مرز، هنگامی که تابع و مشتق آن در دسترس است به کار برد یعنی:

$$f_j'' + 2f_{j-1}'' = \frac{3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{(x=L_x)} - \frac{3}{2\Delta x^2} (f_j - f_{j-2}) \quad (۴-۱۳)$$



در نزدیکی مرزهای جریان (در جهت جریان) (در  $j=2$  و  $j=J-1$ ) مرتبه دوم از معادلات تفاضلات محدود فشرده استفاده می شود یعنی رابطه (۷-۴) با  $\alpha = 1/10$ . یک ارزیابی از مشتق مرتبه چهار، مورد استفاده در روابط این است که مشتقات مرتبه دوم را دوبار بر روی معادلات اعمال کنیم.

#### ۳-۴- نگاشت یک به یک جبری (Algebraic mapping)

در روش عددی برای حل مسائل لایه مرزی توربولانت، باید این توانایی را داشته باشیم که یک ساختار در جریان به گونه ای شبیه سازی کنیم که یک مقیاس فاصله بندی شده خاصی نزدیک دیواره داشته باشیم. این شبیه سازی نیازمند این است که فاصله گره ها نزدیک دیواره خیلی ریز باشد. این عمل باعث صرفه جویی در هزینه محاسبات خواهد شد. این عمل در مورد جریان داخلی نیز صادق است که در همین فصل بحث خواهد شد.

#### -تابع نگاشت برای جریان بین دو صفحه

تابع نگاشت زیر مفروض است (۳)

$$\eta(y) = \frac{\ln\left(\frac{l_y y_0 + y}{l_y y_0 - y}\right)}{\ln\left(\frac{y_0 + 1}{y_0 - 1}\right)} \quad (14-4)$$

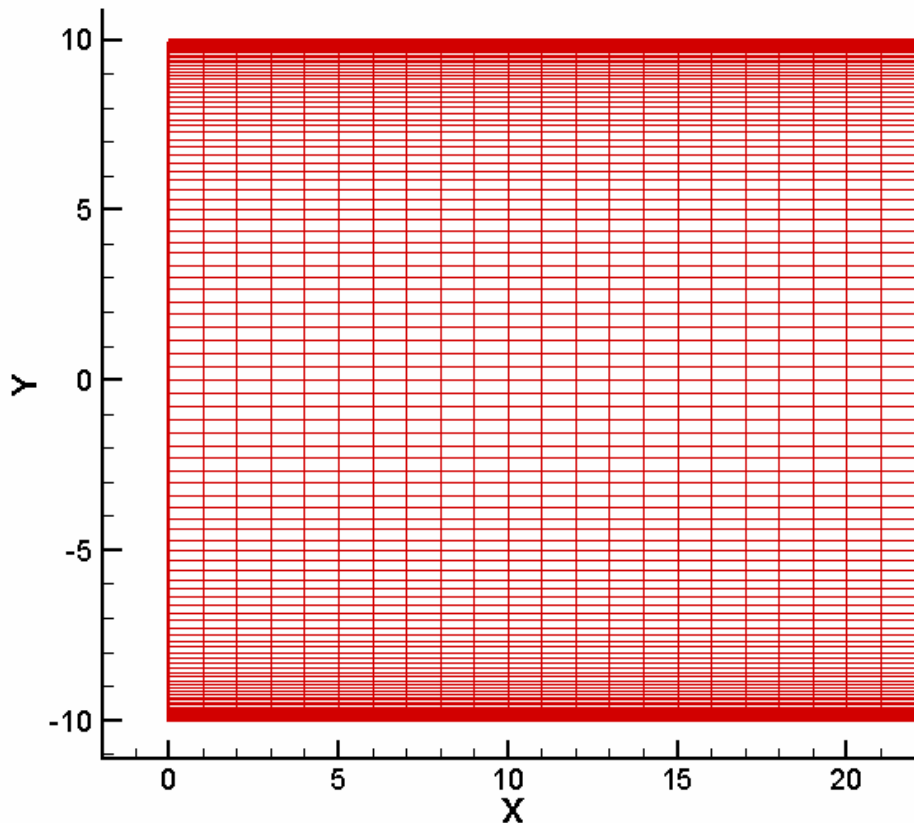
این نگاشت جبری ناحیه محاسباتی را به صورت زیر نگاشت می کند.  $\eta \in [0,1]$  to  $y \in [0, l_y]$ . در رابطه (۱۴-۴) پارامتر نگاشت است و میزان کشیدگی را تعیین می کند. که یک شبکه بندی منظم را ارائه می دهد. معکوس رابطه بالا به صورت زیر است:

$$y(\eta) = \frac{l_y \left( y_0 \left( \frac{y_0 + 1}{y_0 - 1} \right)^\eta - y_0 \right)}{1 + \left( \frac{y_0 + 1}{y_0 - 1} \right)^\eta} \quad (15-4)$$



یک شبکه بندی منظم در فواصل  $\eta$  ،  $\Delta\eta = \frac{1}{N_y}$  ،  $i = 0, N_y$  ،  $\eta_i = i\Delta\eta$  باعث ایجاد یک شبکه

کشیده شده در  $y$  می شود . شکل (۴-۱) توزیع گره‌ها را بر روی یک شبکه کشیده شده (Stretched) با  $N_y = 100$  ،  $L_y = 1.25$  ،  $y_0 = 1.08$  را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱: توزیع شبکه در یک شبکه بندی کشیده شده جبری با  $N_y = 100$  ،  $L_y = 1.25$  ،  $y_0 = 1.08$  با استفاده از تابع نگاشت (۴-۱۴)

مشتقات جزئی به صورت زیر هستند:

$$\eta_y = -2 \frac{l_y y_0}{\ln\left(\frac{y_0 + 1}{y_0 - 1}\right) \left(-l_y^2 y_0^2 + y^2\right)} \quad (۴-۱۶)$$

$$\eta_{yy} = 4 \frac{l_y y_0 y}{\ln\left(\frac{y_0 + 1}{y_0 - 1}\right) \left(-l_y^2 y_0^2 + y^2\right)^2}$$



$$\eta_{yyy} = -4 \frac{l_y y_0 (l_y^2 y_0^2 + 3y^2)}{\ln\left(\frac{y_0 + 1}{y_0 - 1}\right) (-l_y^2 y_0^2 + y^2)^3} \quad (۱۷-۴)$$

$$\eta_{yyy} = 48 \frac{l_y y_0 y (l_y^2 y_0^2 + y^2)}{\ln\left(\frac{y_0 + 1}{y_0 - 1}\right) (-l_y^2 y_0^2 + y^2)^4}$$

مشتقات در فواصل فیزیکی به وسیله قانون زنجیری<sup>۱</sup> به هم مرتبط می‌شوند. عبارتهای مشتق اول، دوم و چهارم در فواصل فیزیکی تابعی از مشتقات در دامنه محاسباتی به صورت رابطه (۱۸-۴) است:

$$\frac{d}{dy} = \eta_y \frac{d}{d\eta}$$

$$\frac{d^2}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{d}{dy} \right) = \frac{d}{dy} (\eta_y) \frac{d}{d\eta} + \eta_y \cdot \frac{d}{dy} \left( \frac{d}{d\eta} \right) = \eta_{yy} \cdot \frac{d}{d\eta} + \eta_y \cdot \frac{d\eta}{dy} \cdot \frac{d}{d\eta} \left( \frac{d}{d\eta} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dy^2} = \eta_{yy} \frac{d}{d\eta} + \eta_y^2 \frac{d^2}{d\eta^2} \quad (۱۸-۴)$$

$$\frac{d^4}{dy^4} = \eta_{yyyy} \frac{d}{d\eta} + (4\eta_y \eta_{yyy} + 3\eta_{yy}^2) \frac{d^2}{dy^2} + 6\eta_y^2 \eta_{yy} \frac{d^3}{d\eta^3} \eta_y^4 \frac{d^4}{d\eta^4}$$

#### ۴-۴- استخراج اپراتورهای مشتق در حالت استفاده از تابع نگاشت

مشتقات جزئی که در قسمت قبل برای محاسبه مشتقات در جهت جریان به کار برده شد در این قسمت نیز می‌تواند برای محاسبه مشتقات به کار رود اگر معادلات بسط یافته را در نظر بگیریم مشتقات به صورت زیر است:

<sup>1</sup> Chain





$$f'_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f'_j + f'_{j+1} = \frac{1+\frac{2}{\alpha}}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4-\frac{1}{\alpha}}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (20-4)$$

و

$$\alpha f''_{j-1} + f''_j + \alpha f''_{j+1} = \frac{4(1-\alpha)}{3\Delta x^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10\alpha-1}{12\Delta x^2} (f_{j-2} - 2f_j + f_{j+2}) \quad (21-4)$$

حال اگر این معادلات را به صورت ماتریسی بنویسیم داریم :

$$A_1 \frac{df}{d\eta} = B_1 f \quad (22-4)$$

و

$$A_2 \frac{d^2 f}{d\eta^2} = B_2 f \quad (23-4)$$

که در این معادلات ماتریس‌های  $A_1, B_1, A_2, B_2$  از رابطه (20-4) و (21-4) بدست می‌آیند در جهت عمود بر جریان نیز می‌توانیم معادلات مشابه را ارائه کنیم که به صورت زیر است:

$$D = \Lambda_1 A_1^{-1} B_1 \quad (24-4)$$

$$D^2 = \Lambda_2 A_2^{-1} B_2 + \Lambda_3 A_1^{-1} B_1$$

که در این معادلات  $\Lambda_1, \Lambda_2$  و  $\Lambda_3$  ماتریس‌های قطری با ترتیب با مقادیر  $\frac{\eta y_0}{y(y+y_0)}$  ،

و  $\left( \frac{\eta y_0}{y(y+y_0)} \right)^2$  و  $-2 \frac{\eta y_0}{y(y+y_0)^2}$  برای جریان داخل کانال است . باید دقت داشت که شرایط

مرزی به صورت پیش فرض ارضا می‌شوند چرا که اولین و آخرین عضو در ماتریس‌های قطری  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  برابر صفر است.



#### ۴-۵- ارزیابی و تست کدهای نوشته شده برای محاسبه مشتقات

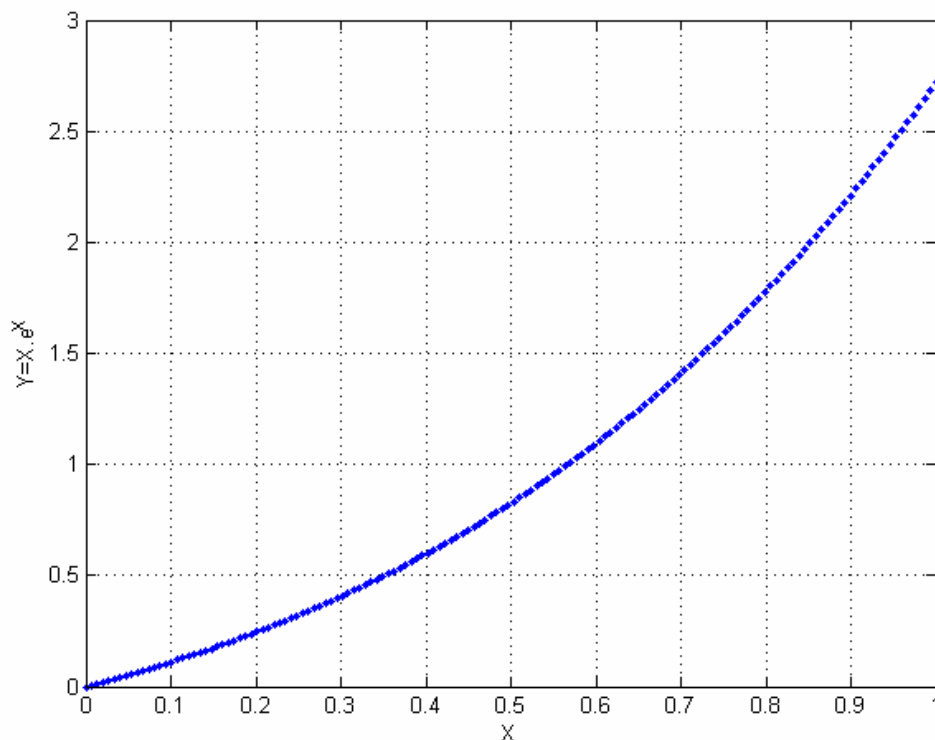
برای تست کدهای نوشته شده برای محاسبه مشتقات، مشتق توابع ریاضی زیر را حساب

کرده‌ایم و با مشتق تحلیلی مقایسه کرده‌ایم که نتایج به صورت زیر است

##### ۱- محاسبه مشتق اول تابع

به عنوان اولین تست تابع  $f(x) = x.e^x$  در نظر گرفته شده است که نمودار تابع و رفتار آن

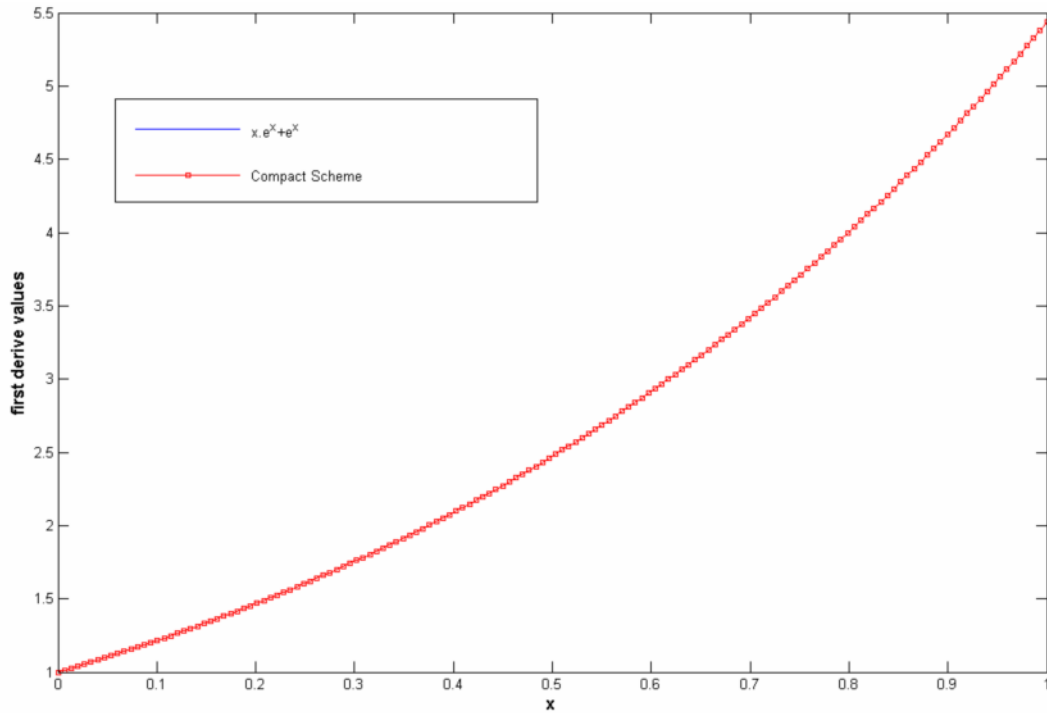
در شکل (۴-۲) موجود است:



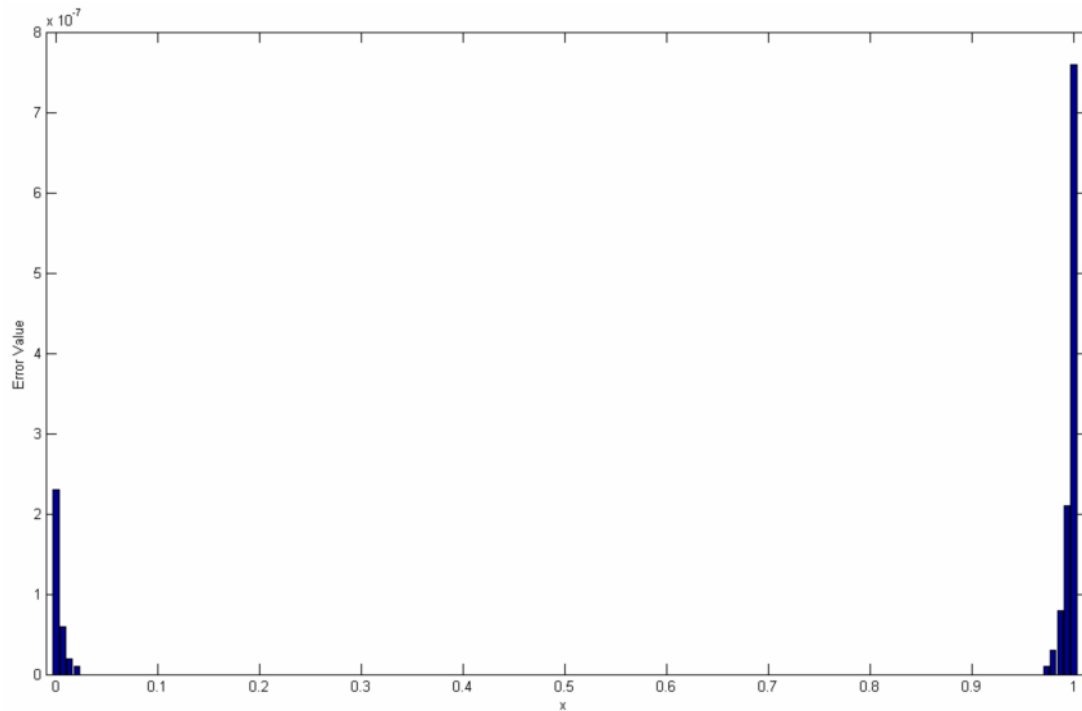
شکل ۴-۲: نمودار تابع  $f(x) = x.e^x$



مشتق اول این تابع که به روش تفاضلات محدود فشرده محاسبه شده است همراه با مشتق که به روش تحلیلی محاسبه شده است در شکل (۳-۴) رسم شده و قابل مقایسه است.



شکل ۳-۴: نمودار مشتق اول تابع  $f(x) = x.e^x + e^x$  (۱۵۰ گره)

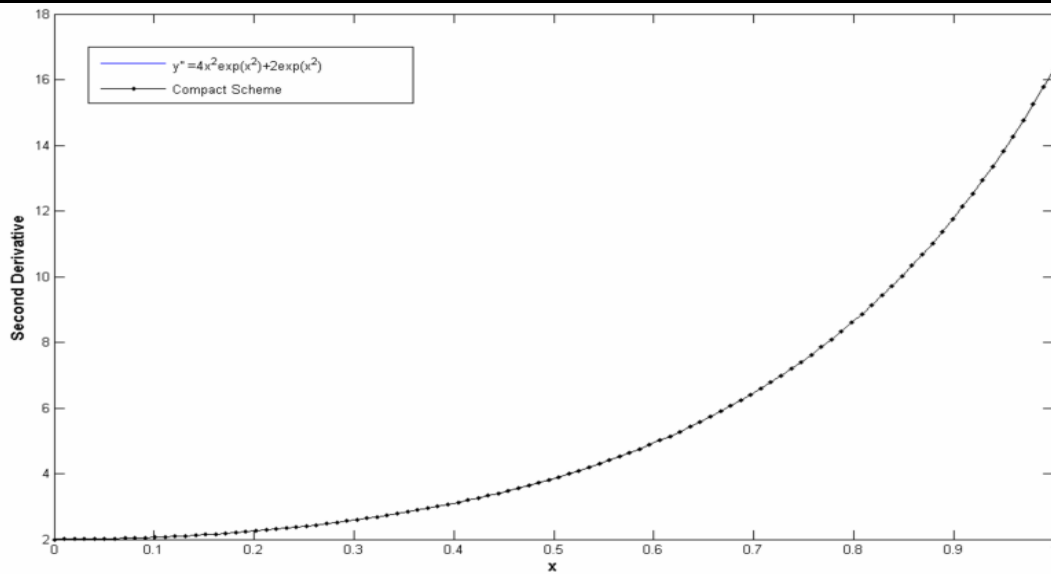


شکل ۴-۴: نمودار خطا در مشتق اول در جهت x (با ۱۵۰ گره)

## ۲- محاسبه مشتق دوم تابع

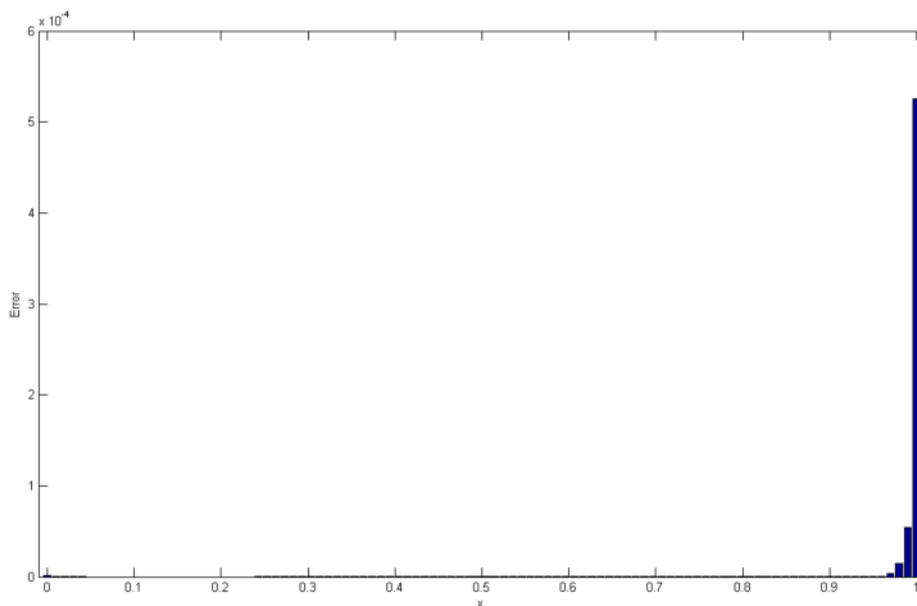
مشتق دوم تابع قسمت قبل هم به روش عددی و هم روش تحلیلی محاسبه شده است که

نتایج به صورت زیر است:



شکل ۴-۵: نمودار مشتق دوم تابع  $f(x) = e^{x^2}$  (با ۱۰۰ گره)

همچنین نمودار خطای نسبی مشتق دوم در شکل (۴-۶) رسم شده است.



شکل ۴-۶: نمودار خطای نسبی مشتق دوم تابع  $f(x) = e^{x^2}$  (با ۱۰۰ گره)

### ۳-مقایسه مشتق محاسبه شده در تابع نگاشت با حل تحلیلی

در این قسمت مانند قسمت قبل مشتق اول و دوم یک تابع ریاضی را که در محاسبه مشتق

آنها از تابع نگاشت استفاده شده است، بررسی کرده و با حل تحلیلی مقایسه کرده ایم.



همانطور که در قسمت های قبل اشاره شد نداشت مورد استفاده برای جریان داخلی به

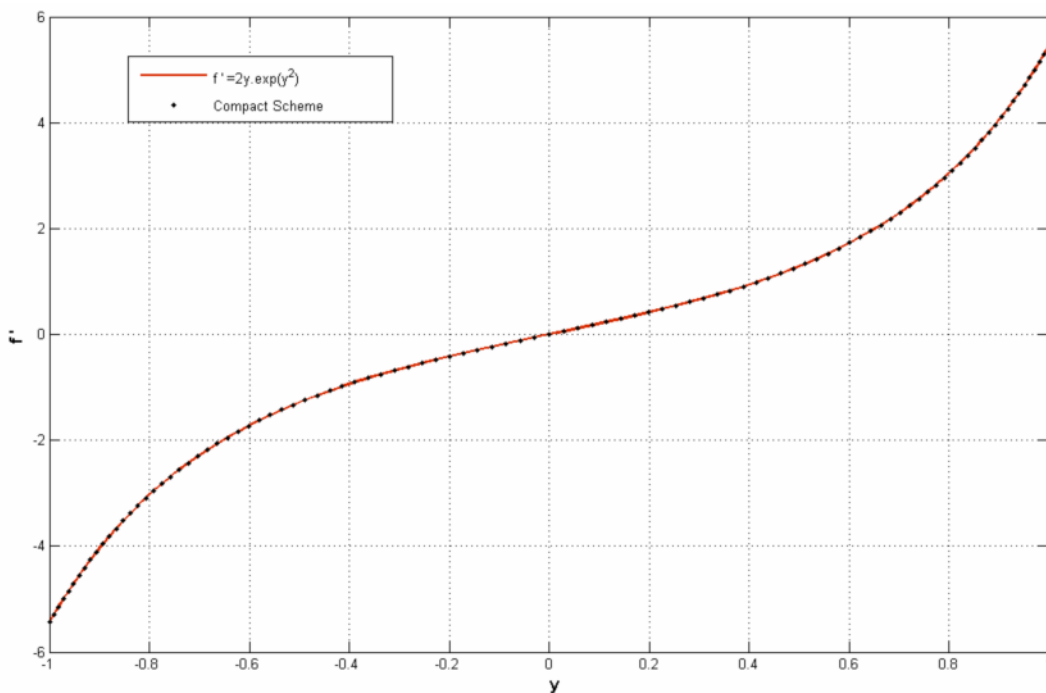
صورت زیر در نظر گرفته شده است :

$$y(\eta) = \frac{I_y \left( y_0 \left( \frac{y_0 + 1}{y_0 - 1} \right)^\eta - y_0 \right)}{1 + \left( \frac{y_0 + 1}{y_0 - 1} \right)^\eta} \quad (۲۵-۴)$$

برای تست محاسبه مشتقات به روش تفاضلات محدود فشرده همراه با تابع نگاشت، مشتق

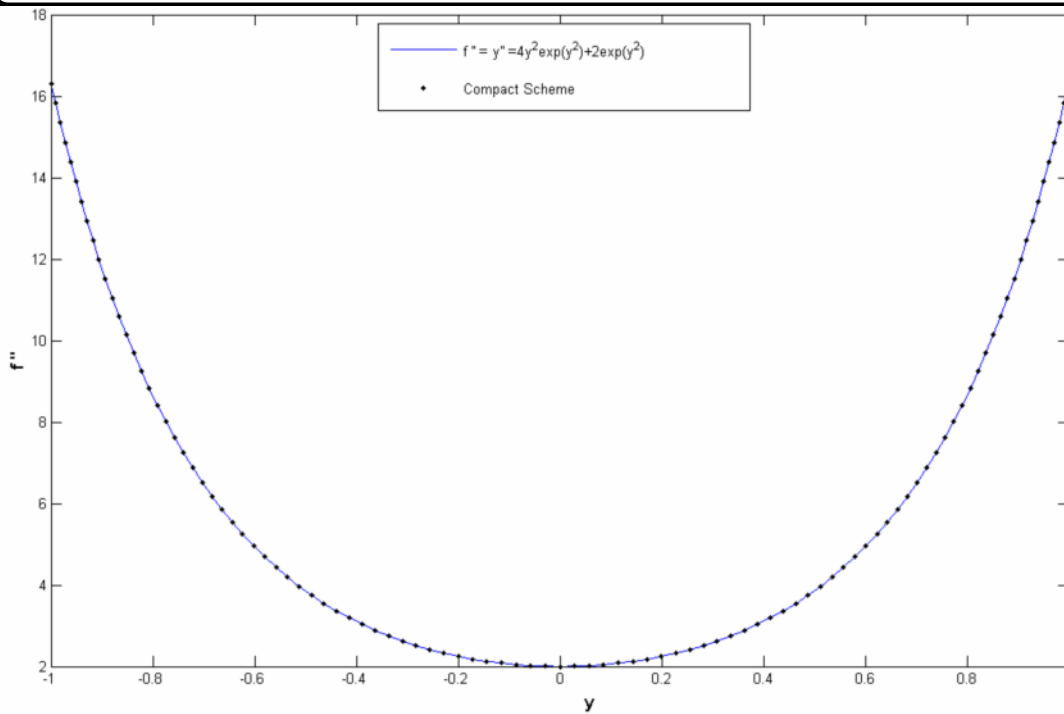
تابع زیر محاسبه شده است که نتایج به صورت زیر است:

شکل (۷-۴) مشتق اول تابع  $f(y) = e^{y^2}$  را با اعمال نگاشت نشان می دهد.

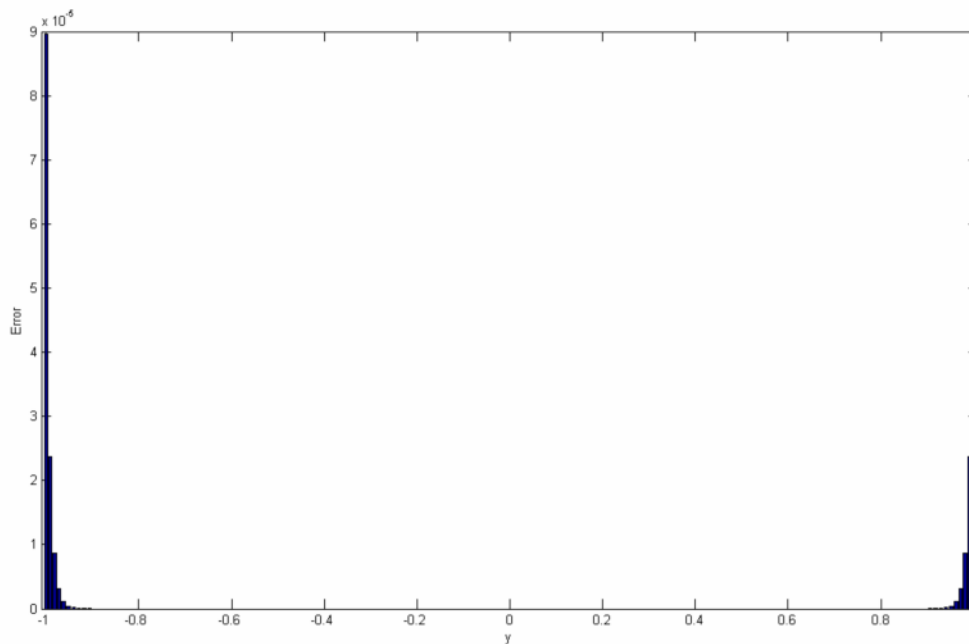


شکل ۷-۴: نمودار مشتق اول تابع  $f(y) = e^{y^2}$  با اعمال نگاشت رابطه ۲۵-۴ (با ۱۰۰ گره)

و شکل (۸-۴) نمودار مشتق دوم همین تابع را نشان می دهد:

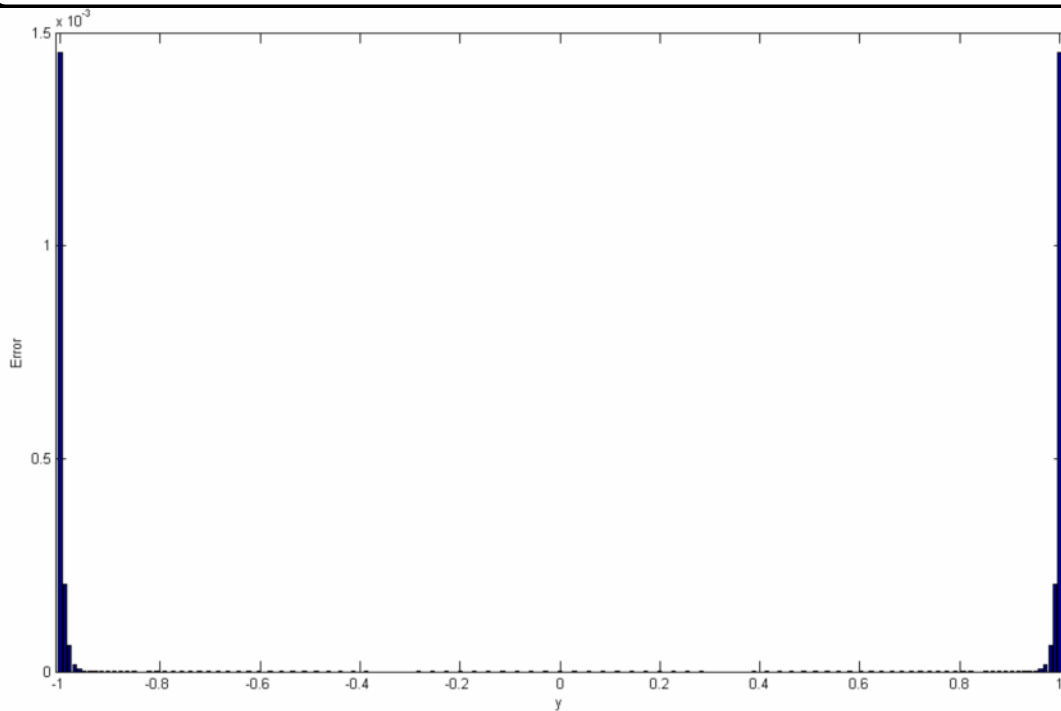


شکل ۴-۸: نمودار مشتق دوم تابع  $f(y) = e^{y^2}$  با اعمال نگاشت رابطه ۴-۲۵ (با ۱۰۰ گره) مقادیر تفاضل بین حل تحلیلی و عددی را به صورت زیر می بینیم:



شکل ۴-۹: نمودار خطای مشتق اول تابع  $f(y) = e^{y^2}$  با اعمال نگاشت رابطه ۴-۲۵ (با ۱۰۰ گره)

و شکل ۴-۱۰ نمودار خطای مشتق دوم همین تابع را نشان می دهد:



شکل ۴-۱۰: نمودار خطا در مشتق دوم تابع  $f(y) = e^{y^2}$  با اعمال نگاشت رابطه ۴-۲۵ (با ۱۰۰ گره)

#### ۴-۶- الگوی پیشروی در زمان

برای انجام محاسبات و پیشروی در زمان از روش رانج-کوتا مرتبه سوم که توسط Wray ارائه شده است استفاده می‌کنیم. کاربرد این روش در معادله مدل زیر در جدول (۴-۱) و در سه زیر مرحله زمانی آورده شده است.

$$\frac{du}{dt} = R(u) \quad (۴-۲۶)$$

جدول ۴-۱: الگوی پیشروی در زمان رانج - کوتا مرتبه سوم

Time	First location	Second location
$t^n$	$u^n$	$R(u^n)$
$t' = t^n + c_1 \Delta t$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$R' = R(u')$
$t'' = t' + (c_2 + d_2) \Delta t$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R) \Delta t$	$R'' = R(u'')$
$t^{n+1} = t^n + \Delta t$	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R') \Delta t$	





این جدول نشان می‌دهد که پیشرفت زمان در معادله (۴-۲۶) بوسیله پیشرفت زمانی ( $\Delta t$ ) نیازمند محاسبه طرف راست معادله (R) در سه زیربازه زمانی است. در هر زیر بازه زمانی، زمان با رابطه  $(c_i + d_i)\Delta t$  افزایش می‌یابد و u بوسیله ترکیبی خطی از R در زمان جاری و زیر بازه زمانی قبلی بدست می‌آید.

ضرایب استفاده شده در روش پیشروی زمان  $(c_i + d_i)$  با بسط سری تیلور نسبت به متغیر زمان و مساوی قرار دادن ضرایب هم‌مرتبه به دست می‌آید، پس داریم:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 &= 1 \\ c_1 c_2 + c_3 \left[ \frac{d_2}{c_2} \left( 1 + \frac{d_3}{c_3} \right) + c_2 \left( 1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right] &= \frac{1}{2} \\ c_1^2 c_2 + c_3 \left[ c_1 + c_2 \left( 1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right]^2 + c_1^2 d_3 &= \frac{1}{3} \\ c_1 c_2 c_3 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

در روابط بالا مقدار دو پارامتر باید پیش‌بینی شود تا حل کامل شود. در شروع حل واضح است که  $d=0$ . پس بقیه پارامترها به صورت تابعی از یک پارامتر بدست می‌آید. یک جواب از دسته جوابها می‌تواند به صورت زیر باشد:

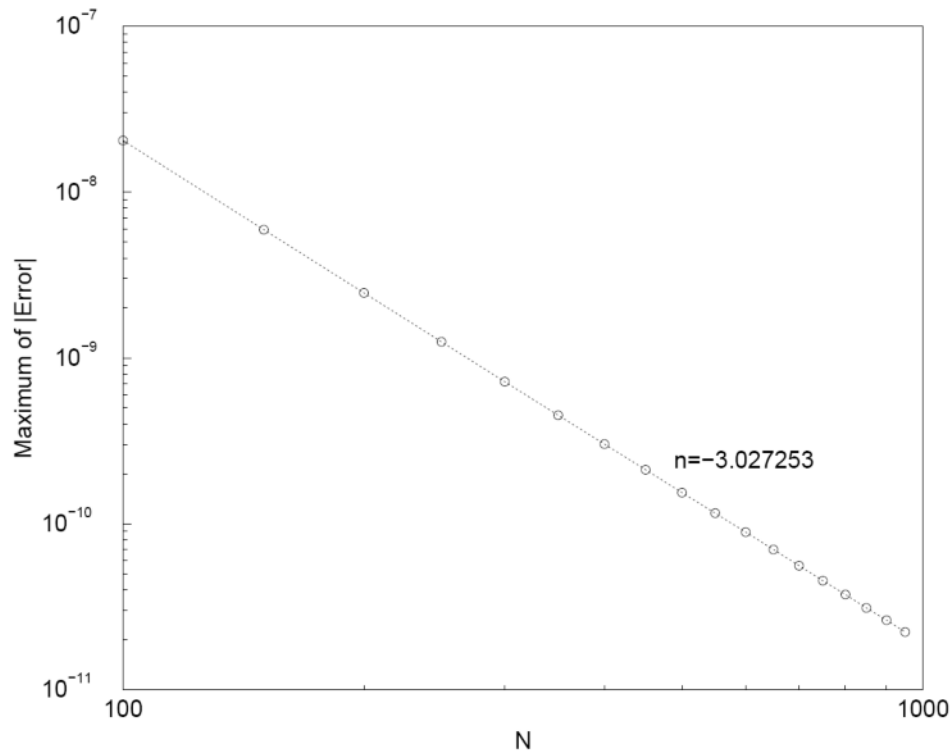
$$\begin{aligned} c_1 &= 8/15, & d_1 &= 0 \\ c_2 &= 5/12, & d_2 &= -17/60 \\ c_3 &= 3/4, & d_3 &= -5/12 \end{aligned}$$

برای تست روش ذکر شده در بالا و همچنین بررسی میزان دقت آن معادله زیر را در نظر گرفته و آن را به روش عددی حل می‌کنیم:

$$\frac{du}{dt} = -u(t), \quad u(0) = -1$$



می‌دانیم که جواب حل تحلیلی معادله بالا به صورت  $u(t) = e^{-t}$  است. ماگزیمم خطای نتایج عددی و حل دقیق در شکل (۴-۱۲) رسم شده است. این شکل به طور واضح میزان دقت این روش را که از مرتبه سه است نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱۲: مرتبه دقت الگوی پیشروی زمان (۱۱)

## فصل ۵- معادلات دیفرنسیل حاکم و الگوریتم حل عددی آنها

### ۵-۱- مقدمه

در این فصل معادلات حاکم بر حرکت سیال یعنی معادلات پیوستگی و ناویر-استوکس و همچنین روشهای حل مستقیم عددی این معادلات بررسی خواهد شد. در ابتدای این فصل با اعمال چند اپراتور برداری معادلات ناویر-استوکس را به صورتی دیگر تبدیل می‌کنیم تا بوسیله آن بتوانیم مجهولات را در این معادله کم کرده و آن را به روش عددی حل کنیم. مشتقات جزئی به همان روشی که در فصل ۴ بررسی شد، محاسبه می‌شود.

### ۵-۲- شکل چرخشی معادله ناویر-استوکس

با در نظر گرفتن رابطه برداری مشخص زیر:

$$\nabla(A.B) = (B.\nabla)B + (A.\nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B) \quad (1-5)$$

و با فرض اینکه بردارهای **A** و **B** با هم برابر و مساوی بردار **U** باشد، داریم:

$$A = B = U = (U, V, W)$$

$$(V.\nabla)V = \omega \times V + \frac{1}{2} \nabla(V.V) \quad (2-5)$$

که در آن:

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \nabla \times V$$

از طرفی می دانیم که فرم بی بعد شده معادله ناویر استوکس به صورت رابطه (۳-۵) می باشد:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}}(\nabla^2 V) \quad (3-5)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۲-۵) و (۳-۵) به رابطه (۴-۵) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = H - \nabla \left( p + \frac{V \cdot V}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}}(\nabla^2 V) \quad (4-5)$$

که در آن:

$$H = (H_1, H_2, H_3) = U \times \omega$$

با ضرب طرفین معادله (۴-۵) در بردار کرل  $(\nabla \times)$  داریم:

$$\frac{\partial (\nabla \times V)}{\partial t} = \nabla \times H - \nabla \times \nabla \left( p + \frac{V \cdot V}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times V) \quad (5-5)$$

از طرفی می دانیم که  $\nabla(\text{scalar}) = 0$  می باشد. در نتیجه معادله (۵-۵) به فرم معادله

(۶-۵) تبدیل خواهد شد:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times H + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (6-5)$$

با تکرار عمل ضرب بالا در معادله (۶-۵) به معادله زیر خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \nabla \times (\nabla \times V)}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times V) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times (\nabla \times V)) \quad (7-5)$$

با بکار بردن معادله پیوستگی  $(\nabla \cdot V) = 0$  و رابطه ریاضی مشخص زیر

$$\nabla \times (\nabla \times V) = \nabla(\nabla \cdot V) + \nabla^2 V \quad (8-5)$$

به رابطه محاسباتی (۹-۵) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \nabla^2 V}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times H) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 V \quad (9-5)$$

مزیت رابطه (۹-۵) در این است که ترم فشار از معادله ناویر- استوکس حذف شده و می توان

سرعت در لحظه  $n+1$  را بعد از گسسته سازی معادله بدست آورد. اما از طرفی دیگر چون مرتبه

مشتقات بزرگتر شده است، هزینه محاسبات بیشتر شده و اعمال شرایط مرزی نیز سخت تر شده

است.

### ۵-۳- روش حل عددی معادلات

برای حل عددی معادله (۹-۵) ابتدا سرعت را به صورت اجزای زیر تفکیک می‌کنیم:

$$V(x, y, z, t) = v(x, y, z, t) \quad (10-5)$$

که در رابطه بالا ترم معادل همان ترم محاسباتی است که باید به روش عددی محاسبه شود.. با این تفکیک می‌توان معادله (۹-۵) را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \nabla^2 V}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times H) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 V \quad (11-5)$$

برای اینکه یک روش عددی مناسب برای حل معادله (۱۱-۵) ارائه دهیم، ابتدا طرف راست معادله را که در حقیقت یک عبارت شامل مشتقات جزئی است را به روش تفاضلات محدود فشرده محاسبه می‌کنیم که نتیجه یک ماتریس  $n \times m$  خواهد بود این ماتریس را با RHS نمایش می‌دهیم. با این عمل و گسسته سازی طرف چپ معادله (۱۱-۵) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{\nabla^2 v^{n+1} - \nabla^2 v^n}{\Delta t} = RHS^n \quad (12-5)$$

و یا به عبارت دیگر سرعت در لحظه  $n+1$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\nabla^2 v^{n+1} = \Delta t (RHS^n + \nabla^2 v^n) \quad (13-5)$$

معادله (۱۳-۵) در حقیقت همان معادله پواسون دو بعدی است در این قسمت می‌خواهیم اثبات کنیم که معادله پواسون بعد از گسسته‌سازی مشتقات جزئی به روش تفاضلات محدود فشرده، به فرم ماتریسی  $AX+XB=C$  تبدیل می‌شود.

### ۴-۵- روش گسسته‌سازی معادله پواسون دو بعدی

در حالت کلی معادله پواسون دو بعدی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = R(x, y) \quad (14-5)$$

حال فرض کنیم که می‌خواهیم معادله پواسون را برای یک دامنه حل کنیم که یک شبکه

$I \times J$  را به صورت شکل زیر تشکیل می‌دهد:

$$\begin{array}{cccc} v_{1 \times 1} & v_{1 \times 2} & \cdots & v_{1 \times J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{2 \times 1} & v_{2 \times 2} & \cdots & v_{2 \times J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{I \times 1} & v_{I \times 2} & \cdots & v_{I \times J} \end{array}$$

پس  $u$  به صورت  $[u_{ij}]$  در نظر گرفته می‌شود حال از معادلات تفاضل محدود فشرده داریم

(الف) مشتق دوم در جهت X

$$Av_{xx} = Bv \quad (15-5)$$

که در آن  $v_{xx}$  مشتق دوم در جهت X است معادله بالا به شکل ماتریس به صورت زیر است:

$$A_{J \times J} v_{xx I \times J}^T = B_{J \times J} v_{I \times J}^T \Rightarrow v_{xx I \times J}^T = (A_{J \times J}^{-1} B_{J \times J}) v_{I \times J}^T \quad (16-5)$$

حال یک بار دیگر ترانزپوز طرفین رابطه بالا را محاسبه می‌کنیم تا به رابطه (۱۷-۵) برسیم:

$$v_{xx I \times J} = v_{I \times J} (A_{J \times J}^{-1} B_{J \times J})^T = VB \quad (17-5)$$

(ب) مشتق دوم در جهت Y

$$Av_{yy} = Bv$$

که در آن  $v_{yy}$  مشتق دوم در جهت Y است معادله بالا به شکل ماتریس به صورت (۱۸-۵)

است:

$$A_{I \times I} v_{yy I \times J} = B_{I \times I} v_{I \times J} \Rightarrow v_{yy I \times J} = (A_{I \times I}^{-1} B_{I \times I}) v_{I \times J} = AV \quad (18-5)$$

با جاگذاری این روابط و تبدیل R به فرم ماتریسی یعنی  $R_{I \times J}$  در معادله پواسون داریم:

$$AV + VB = R \quad (19-5)$$

### ۵-۵- حل معادله ماتریسی $AX+XB=C$

در این قسمت می‌خواهیم معادله ماتریسی زیر را حل کرده و ماتریس مجهول X را محاسبه

کنیم. (۹)

$$AX + XB = C \quad (20-5)$$

در رابطه بالا A، B، C، ماتریسهای حقیقی با ابعاد  $m \times m$  و  $n \times n$  و  $m \times n$  هستند. که m

تعداد گره در جهت y و n تعداد گره در جهت x است. از سابروتین‌های اضافی موجود می‌توان برای

حل معادله (۲۱-۵) نیز استفاده کرد:

$$A^T X + XA = C \quad (21-5)$$

که در اینجا ماتریس C متقارن می‌باشد. معادله (۲۰-۵) در حل مستقیم معادله پواسون

کاربرد دارد.

کاملاً آشکار است که معادله (۲۰-۵) فقط یک راه حل دارد؛ اگر و فقط اگر، مقادیر ویژه

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  ماتریس A و  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  ماتریس B شرط زیر را ارضا کند:

$$\alpha_i + \beta_j \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (22-5)$$

روش حل بر مبنای یک روش محاسباتی می‌باشد اما اگر شرایط سیستم، مقدار ویژه

ناهنجار باشد روش حل ناپایدار خواهد بود. روش پیشنهاد شده در اینجا استفاده از روش کاهش

مثلی Schur با استفاده از تبدیل شبه متعامد می‌باشد. (۱۴)

معادله (۲۰-۵) به این صورت حل می‌شود.

ماتریس A با استفاده از تبدیل شبه متعامد U به ماتریس حقیقی Lower Schur مانند

$A'$  کاهش می‌یابد.

$$A' = U^T A U = \begin{bmatrix} A'_{11} & & & 0 \\ A'_{21} & A'_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ A'_{p1} & A'_{p2} & \dots & A'_{pp} \end{bmatrix} \quad (23-5)$$

که هر ماتریس  $A'_{ii}$  حداکثر از مرتبه ۲ می باشد. ماتریس B نیز با استفاده از روش فوق و با استفاده از ماتریس متعامد V به ماتریس Upper Schur مانند  $B'$  کاهش می یابد.

$$B' = V^T B V = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} \dots \dots & B'_{1q} \\ & B'_{22} \dots \dots & B'_{2q} \\ 0 & & B'_{qq} \end{bmatrix} \quad (24-5)$$

که ماتریس  $B'_{ii}$  نیز حداکثر از مرتبه ۲ می باشد. اگر

$$C' = U^T C V = \begin{bmatrix} C'_{11} & \dots & C'_{11q} \\ \vdots & & \\ C'_{11} & \dots & C'_{11} \end{bmatrix} \quad (25-5)$$

و

$$X' = U^T X V = \begin{bmatrix} X'_{11} & \dots & X'_{1q} \\ \vdots & & \\ X'_{p1} & \dots & X'_{pq} \end{bmatrix} \quad (26-5)$$

آنگاه معادله (۲۰-۵) با معادله زیر هم ارز می شود :

$$A'X' + X'B' = C'$$

اگر قسمت های  $X', C', B', A'$  همانند (Conformal) باشند آنگاه :

$$A'_{KK} X'_{KL} + X'_{KL} B'_{LL} = C'_{KL} - \sum_{j=1}^{k-1} A'_{Kj} X'_{jL} - \sum_{i=1}^{l-1} X'_{ki} B'_{iL} \quad (27-5)$$

$$(k = 1, 2, \dots, p ; l = 1, 2, \dots, q)$$



این معادله برای مقادیر  $X'_{11}, X'_{21}, \dots, X'_{p1}, X'_{12}, X'_{22}, \dots$  حل می شود آنگاه حل معادله (۲۰-۵) بویسله  $X = UX'V^T$  داده می شود.

کاهش ماتریس  $A$  و  $B$  به شکل حقیقی Schur با استفاده از روش های استاندارد انجام شده است. ماتریس  $B$  با استفاده از روش هاوس هولدر (Householders) به ماتریس بالا هسنبرگی (Hessenberg) کاهش پیدا می کند. آنگاه ماتریس بالا هسنبرگی با استفاده از الگوریتم QR به فرم حقیقی Schur تبدیل می شود. نتیجه این تبدیل در کاهش به شکل ماتریس  $V$  مورد استفاده قرار می گیرد. تبدیل ماتریس  $A$  به فرم پایین مثلثی حقیقی Schur با استفاده از کاهش ماتریس ترانهاده  $A$  به بالا مثلثی Schur و سپس عمل عکس ترانسپوز مسیر می شود.

از آنجائیکه الگوریتم QR استفاده شده در اینجا یک روش تکراری می باشد، کاهش عناصر زیر قطری ماتریس بالا مثلثی هسنبرگ به صفر، نیاز به استفاده از فرضیاتی برای محاسبه، وقتی که مقدار یک عنصر ناچیز می شود، دارد.

در این برنامه هر المان از  $H$  اگر دارای مقداری کمتر از  $\varepsilon_H \|H\|_\infty$  باشد، قابل صرفنظر کردن است. که در اینجا  $\varepsilon_H$  مقدار ثابتی است که توسط کاربر اعمال می شود. استفاده از این فرض اگر عناصر  $H$  دارای اندازه های یکسانی باشند، فرض مناسبی می باشد اما اگر این عناصر در یک طیف وسیعی باشند و المان های کوچک مهم باشند. احتیاج به فرضیات دیگری می باشد.

حل  $X'_{KL}$  در (۲۷-۵) هنوز احتیاج به حل معادله ماتریسی به شکل (۲۰-۵) دارد. در این حالت ماتریس  $A'_{KK}$  و  $B'_{LL}$  از مرتبه حداکثر دو هستند. از اینرو حل (۲۷-۵) را می توان با حل سیستم خطی از مرتبه حداکثر چهار بدست آورد. برای مثال اگر  $A'_{KK}$ ،  $B'_{LL}$  هر دو از مرتبه دو باشند.

آنگاه:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} + b'_{11} & a'_{12} & b'_{12} & \mathbf{0} \\ a'_{21} & a'_{22} + a'_{11} & \mathbf{0} & b'_{21} \\ b'_{12} & \mathbf{0} & a'_{11} + b'_{22} & a'_{12} \\ \mathbf{0} & b'_{12} & a'_{21} & a'_{22} + b'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_{11} \\ X'_{21} \\ X'_{12} \\ X'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{12} \\ d_{22} \end{bmatrix} \quad (28-5)$$



که  $a'_{ij}$ ,  $b'_{ij}$ ,  $x'_{ij}$  المان های عناصر  $X'_{LK}, B'_{LL}, A'_{KK}$  را مشخص می کنند و  $d_{ij}$  المان های سمت راست معادله (۲۰-۵) هستند.

دستگاهی که از معادله (۲۷-۵) بدست می آید با استفاده روش کاهش کروت (Crout) حل می شود. (۱۳)

این برنامه تمهیداتی برای کاربر در نظر گرفته است تا در آن مرحله تبدیل ماتریس A به فرم حقیقی Schur حذف شود در نتیجه چنانچه ماتریس تبدیل شده A توسط کاربر وارد شود محاسبه ماتریس های  $A'$  و  $U$  براحتی امکان پذیر بوده و از آنها برای می توان برای حل یک دستگاه جدید با ماتریس های B و C مختلف استفاده نمود.

عملاً می توان الگوریتم توصیف شده در بالا را برای حل سیستم های متقارن (۲۱-۵) بکاربرد در نتیجه می توان مزیت تقارن را مشاهده کرد. اگر U متعامد و  $A' = U^T A U$  به شکل فرم بالا مثلثی حقیقی Schur باشد، آنگاه مقادیر  $A'$  و  $C' = U^T C U$  و  $X' = U^T X U$  به شکل زیر خواهند بود:

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} X'_{11} & X'^T_{21} \\ X'_{21} & X'_{22} \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'^T_{21} \\ C'_{21} & C'_{22} \end{bmatrix}$$

که  $A'_{11}$ ,  $X'_{11}$ ,  $C'_{11}$  حداکثر از مرتبه دو خواهند بود. آنگاه از معادله  $A'^T X' + X' A' = C'$  داریم:

$$A'^T_{22} X'_{22} + X'_{22} A'_{22} = C'_{22} - X'_{21} A'_{12} - A'^T_{12} X'_{21}$$

بنابراین هنگامیکه  $X'_{11}$ ,  $X'_{21}$  محاسبه شدند، اندازه مساله می تواند کاهش یابد.

ماتریس  $X'_{21}$  در حالت کلی، مانند روش توصیف شده در بالا می تواند محاسبه شود.

ماتریس  $X'_{11}$  معادله متقارن را ارضا می کند.

$$A'^T_{11} X'_{11} + X'_{11} A'_{11} = C'_{11} \quad (۲۹-۵)$$



که اگر  $A'_{11}$  از مرتبه یک باشد، حل این معادله آسان می باشد. اما هنگامیکه  $A'_{11}$  از مرتبه دو باشد، معادله فوق یک سیستم جدید مرتبه سه را برای سه المان متفاوت  $X'_{11}$  معرفی می کند. در اینجا برای پرهیز از توضیح جزئیات خلاصه برنامه را ذکر می کنیم و خواننده را برای مطالعه بیشتر به مراجع راهنمایی می کنیم. (۱۴)

زیر برنامه AXPXB برنامه را برای حل معادله (۵-۲۰) هدایت می کند. با استفاده از A و B و C داده شده، ماتریس C با ماتریس جواب X بازنویسی می شود. شکل حقیقی پایینی ماتریس A، خود ماتریس A و شکل Schur بالایی ماتریس B، ماتریس B را بازنویسی می کند. کاربر می تواند فرم Schur را خود آماده کرده و مرحله تبدیل را حذف کند. این زیر برنامه سابروتین های HSHLDR و BCKMLT، SCHUR، SHRSLV و SYSSLV را احضار می کند.

ATXPXA: برنامه را برای حل معادله (۵-۲۱) هدایت می کند. با استفاده از A و C داده شده، ماتریس C با ماتریس جواب X بازنویسی می شود. شکل حقیقی بالایی ماتریس A، خود ماتریس A را بازنویسی می کند. کاربر می تواند فرم Schur را خود آماده کرده و مرحله تبدیل را حذف کند. این زیر برنامه سابروتین های HSHLDR و BCKMLT، SCHUR، SYMSLV و SYSSLV را احضار می کند.

HSHLDR: ماتریس A را به شکل بالا هسنبرگی کاهش می دهد. این فرم بالا هسنبرگی و تاریخچه تبدیل، A را بازنویسی می کند.

BCKMLT: ماتریس A را که به فرم بالا هسنبرگی است، گرفته و ماتریس متعامد U را محاسبه می کند.

SCHUR: شکل حقیقی بالای Schur یک ماتریس بالا مثلثی هسنبرگ را محاسبه می کند.

SHRSLV: معادله (۵-۲۰) را حل می کند، در حالیکه A به شکل Schur حقیقی پایینی و

B به شکل Schur حقیقی بالایی می باشد.

SYMSLV: معادله (۲۱-۵) را حل می کند در حالیکه A به شکل Schur حقیقی بالایی

است.

SYSSLV: دستگاه معادله خطی را حل می کند.

### ۵-۵-۱- تست حل عددی معادله پواسون:

همانطور که در قسمتهای قبل توضیح داده شد، معادله پواسون پس از گسسته سازی به فرم

معادله (۲۰-۵) تبدیل می شود در این قسمت برای تست این مراحل و اعمال شرایط مرزی مناسب

معادله پواسون (۳۰-۵) با شرایط مرزی (۳۱-۵) تا (۳۴-۵) به روش عددی حل شده و نتایج با روش

تحلیلی مقایسه شده است:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin x(2 - y^2) + e^x \quad (۳۰-۵)$$

$$f(y) = 6 \quad x = 0 \quad (۳۱-۵)$$

$$f(y) = y^2 \sin 2 + e^2 + 5 \quad x = 2 \quad (۳۲-۵)$$

$$f(x) = e^x + 5 \quad y = 0 \quad (۳۳-۵)$$

$$f(y) = 9 \sin x + e^x + 5 \quad y = 3 \quad (۳۴-۵)$$

همانطور که می دانیم این معادله دیفرانسیل دارای حل تحلیلی است که جواب آن به

صورت  $f(x,y) = y^2 \sin x + e^x + 5$  است. روش حل ارائه شده در قسمت ۵-۵ از دقت مناسبی

برای این حل برخوردار است. سابروتین PoissonSolver وظیفه حل معادله پواسون را دارد.

### ۵-۶- نحوه اعمال شرایط مرزی

به دلیل اینکه معادلات ناویر استوکس و پیوستگی برای متغیرهای محاسباتی حل می شوند

شرایط مرزی بر روی متغیرهای محاسباتی اعمال می شوند. معادله (۹-۵) یک معادله دیفرانسیل

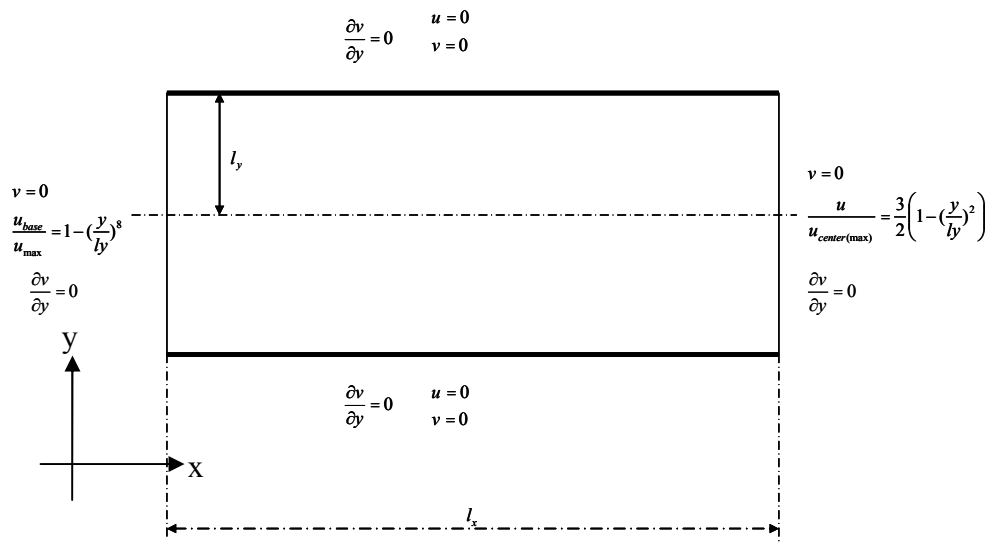
درجه چهار می باشد، در نتیجه نیاز به اعمال چهار شرط مرزی داریم. مقادیر u در مرز ورودی و



مرز خروجی مجموعه محاسباتی مشخص می باشد. همچنین با توجه به معادله پیوستگی  $\frac{\partial u}{\partial x}$  هم

در مرزهای ورودی و خروجی مجموعه محاسباتی معلوم می باشند. این شرایط مرزی به شرایط درجالت و نیومن معروف می باشند.

در مرز خروجی هم از شرط مرزی توسعه یافتگی استفاده شده است. (۱۶)



## ۵-۷- شرط اولیه

در حالت پایدار زمانی یک پروفیل سرعت یکنواخت برای تمام مقاطع مختلف  $x$  به عنوان شرط اولیه برای جریان انتخاب شده است.

## ۵-۸- الگوریتم حل عددی

الگوریتم کاری برای حل معادله ناویر استوکس در فرم چرخشی با توجه به ۴ شرط مرزی و

یک شرط اولیه برای  $v$  در زیر توضیح داده شده است:

۱- با توجه به شرط اولیه مشخص برای  $v$ ، مقدار  $u$  محاسبه می شود.

۲- با توجه به اینکه  $\omega = \nabla \times U$  است و برای حالت دو بعدی  $\omega_x = 0$  ,  $\omega_y = 0$  است،

$$\text{مقدار } \omega_z = \omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \text{ حساب می شود.}$$

۳- مقدار  $H = U \times \omega$  می باشد که برای حالت دو بعدی  $H_z = 0$  است مقادیر

$$H_x = v \cdot \omega \quad , \quad H_y = -u \cdot \omega \text{ محاسبه می شود.}$$

۴- محاسبه ترم های غیر خطی در معادله که به صورت  $\frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}$  است .

۵- محاسبه ترم های لزجتی در معادله که به صورت  $\frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 v$  است .

۶- بعد از محاسبه طرف راست معادله ، با توجه به روش رانج کوتای مرتبه سوم ترکیب خطی

مقادیر سمت راست معادله دیفرانسیل به عنوان  $\nabla^2(\Delta v)$  محاسبه می شود.

۷- شرط مرزی برای  $v$  و  $\Delta v$  برای مرحله زمانی جدید محاسبه می گردد.

۸- با مشخص شدن  $\nabla^2(\Delta v)$  مقدار  $\Delta v$  و پس از آن  $v$  در مرحله جدید استخراج می شود.

۹- تمام مراحل ذکر شده در بالا برای یک گام زمانی است که از  $v$  تولید شده در مرحله قبل

به عنوان شرط اولیه استفاده می شود.

برای حل معادله ۵-۹ طبق الگوریتم بالا ، باید قادر به انجام اعمال زیر باشیم :

۱- محاسبه مشتقات مادی

۲- انتگرال گیری از معادله پیوستگی به منظور بدست آوردن  $u$

۳- محاسبه ترم های غیر خطی

۴- حل معادله پواسون برای حالت دو بعدی

۵- پیشرفت زمانی ( بدست آوردن داده های جدید که در اصل آنها به صورت شرط اولیه برای

زمان بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت).



## فصل ۶- نتایج

### ۶-۱- مقدمه

در این فصل ابتدا نرم افزار نوشته شده برای حل عددی معرفی شده و قسمت‌های مختلف این نرم افزار مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس نتایج حاصل از جریان داخلی بین دو صفحه بینهایت مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

### ۶-۲- معرفی جریان های داخلی

توسعه جریان لایه ای در ورودی یک لوله. تفکرات بسیاری از محققین را به خود مشغول کرده است. (وایت) مطالعات زیادی توسط اشمیت و زلدین (۱۹۶۹)<sup>۱</sup> و شاه و لندن (۱۹۷۸)<sup>۲</sup> روی این مساله صورت گرفته است.

هندسه جریان ورودی برای یک لوله با شعاع  $a$  در شکل ۵-۱ نشان داده شده است. در یک ورودی مدور. پروفیل سرعت در  $x=0$  تقریباً یکنواخت است.  $\bar{u} = u = const$ . و این فرض در

---

<sup>1</sup> Schmidt & Zeldin 1969

<sup>2</sup> Shah & London 1978



مطالعات تئوری. معمول است. در ورودی جریان. یک لایه مرزی شکل می گیرد که رفتار اولیه آن. هنگامی که  $\delta \ll a$  می باشد. شبیه به پاسخ بلازیوس برای صفحه مسطح می باشد. اما به علت برقراری پیوستگی. کاهش سرعت در نزدیکی دیواره. سبب خواهد شد که سرعت هسته غیر لزج که در مرکز لوله قرار دارد افزایش یابد (گرادیان موافق) و این مساله باعث می شود لایه مرزی از تخمین بلازیوس. رابطه ۵-۱ نازک تر شود.

$$\frac{\delta_{99\%}}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (۵-۱)$$

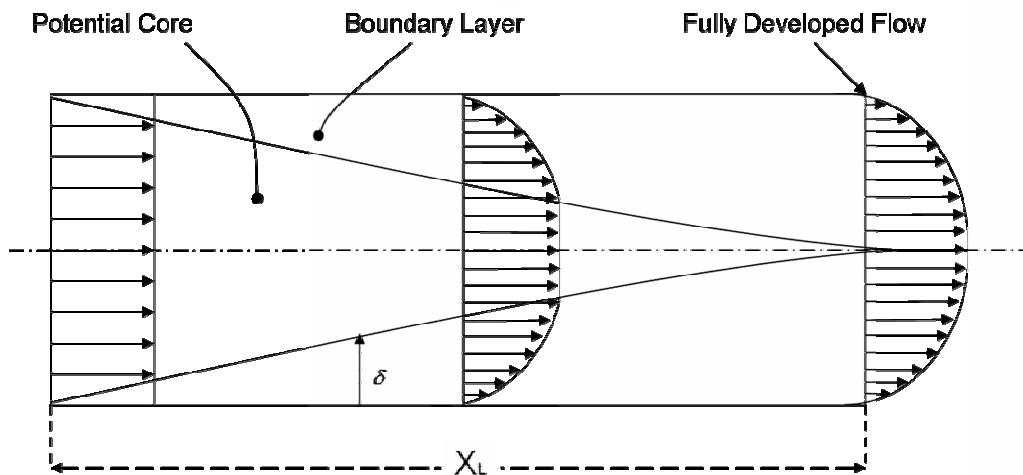
کمی جلوتر در پایین دست. لایه های برشی به هم می رسند و کل لوله را در بر می گیرند. کمی جلوتر از آن. در  $x = X_L$ . جریان کاملا توسعه یافته می شود و پروفیل سهموی پوازیه را به خود خواهد گرفت. ناحیه  $0 \leq x \leq X_L$  را ناحیه ورودی می نامیم. مسائلی که در مهندسی در مورد این ناحیه برای ما مهم است:

- افزایش افت فشار نسبت به جریان پوازیه

- طول ورودی  $X_L/D$  می باشد.

همین مسائل در جریانهای مغشوش نیز رخ می دهد. در آنجا لایه های مرزی ابتدا لایه ای

هستند. ولی قبل از آنکه در پایین دست به هم برسند تبدیل به مغشوش می شوند.



شکل ۶-۱: جریان لایه ای در ورودی بین دو صفحه

افزایش افت فشار . به برش اضافه شده در لایه مرزی ورودی و همین طور شتاب هسته مرکزی وابسته است. فرض کنید فشار ورودی در  $x=0$  برابر با  $P_0$  باشد. همچنین فرض کنید  $\tau = \frac{4\mu u_p}{a}$  تنش برشی در جریان توسعه یافته پوازیه باشد. که در آن  $u_p = 2\bar{u}(1-r^2/a^2)$  می باشد. تحلیل مومنتم در حجم معیار بین  $x=0$  و هر  $x \geq X_L$  تساوی زیر را نتیجه خواهد داد:

$$(P_0 - P_x)\pi a^2 = \tau_p 2\pi a x + \int_0^a \rho(u_p^2 - u^2) 2\pi r dr + \int_0^a (\tau - \tau_p) 2\pi a dx$$

این رابطه را می توان به فرم بدون بعد زیر نوشت و آن را اصطکاک "ظاهری" نامید:

$$\frac{P_0 - P_x}{\frac{1}{2}\rho u^2} = C_{f,app} \frac{4x}{D} = C_{fp} \frac{4x}{D} + K \quad (۲-۵)$$

$$K = \frac{2}{3} + \int_0^{x/a} \frac{4(\tau - \tau_p)}{\rho u^2} \frac{dx}{a} \quad \text{که در آن}$$

که  $C_{fp} = 16/Re_D$  فاکتور اصطکاک پوازیه است و  $D=2a$  قطر لوله است. جمله  $K$  افزایش افت فشار به علت ناحیه ورودی است. که در آن  $2/3$  افت فشار لازم برای شتاب گرفتن یک جریان یکنواخت به سهموی پوازیه است. بخش انتگرالی  $K$  توزیع برش اضافه شده است. که تقریباً  $0,6$  می باشد. باید توجه کرد که برای یک لوله بلند.  $x \gg D$ . جمله  $C_{fp}(4x/D)$  افت فشار اصلی را نشان خواهد داد.

اگر معادله ۲-۵ را برای ناحیه ورودی در نظر بگیریم.  $K=K(x)$  از صفر در  $x=0$  آغاز شده و تا یک مقدار حدی ثابت  $K_\infty$  در جریان توسعه یافته رشد می کند. شکل ۲-۵ محاسبات اختلاف محدود اشمیت و زلدین (۱۹۶۹)<sup>۳</sup> را برای  $K(x)$  در لوله ها و بین صفحات موازی را نشان می دهد. توجه باید بکنیم که تاثیر عدد رینولدز اندک است. که نشان می دهد جریان ورودی. رفتار لایه مرزی از خود نشان می دهد. با آنکه طبق محاسبات صورت گرفته برای جریان درون لوله که در شکل ۳-۵ نیز نشان داده شده است.  $K_\infty = 1.31$  تا  $1.40$  بدست آمده است. نتایج آزمایشگاهی صورت گرفته توسط شاه (۱۹۷۸) نشان می دهد که در حالت واقعی  $K_\infty = 1.25$  صحیح است.

اصطکاک کل برای هر مقطع لوله با یک متغیر از نوع گراتز با نام  $\zeta = (x/D)/Re_D$  ارائه می شود. شاه (۱۹۷۸) فرمول زیر را پیشنهاد داد که از میانبایی نتایج تجربی بدست آمده است و با دقت  $\pm 2$  درصد برای تمامی انواع کانالها معتبر است:

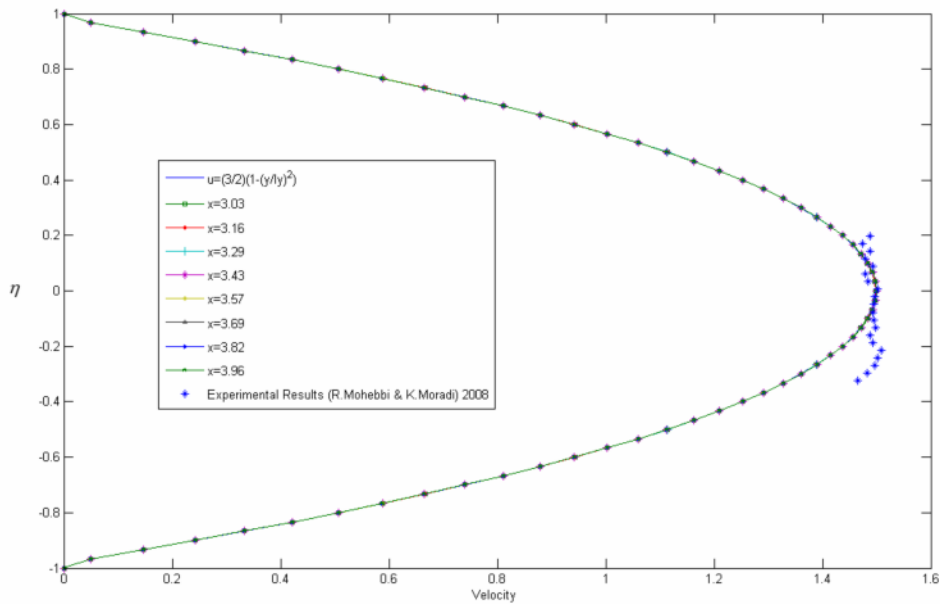
$$C_{f,app} Re \approx \frac{3.44}{\sqrt{\zeta}} + \frac{C_{fp} Re + K_\infty / 4\zeta - 3.44 / \sqrt{\zeta}}{1 + c/\zeta^2} \quad (3-5)$$

که  $c, C_{fp}, K_\infty$  متناسب با هندسه بوده و در جدول ۱-۵ داده شده اند. برای مقاطع غیر دایروی می بایست از قطر هیدرولیکی  $D_h$  و  $Re_{Dh}$  استفاده شود.

<sup>3</sup> Schmidt & Zeldin

### ۳-۶- نتایج حل عددی

شکل ۲-۶ توزیع سرعت جریان توسعه یافته بین دو صفحه را در دستگاه مختصات خودتشابه نشان می‌دهد. در اینجا از  $D_h$  و  $U = U_{centerline}$  به ترتیب برای بی بعدسازی طول و سرعت استفاده شده است.

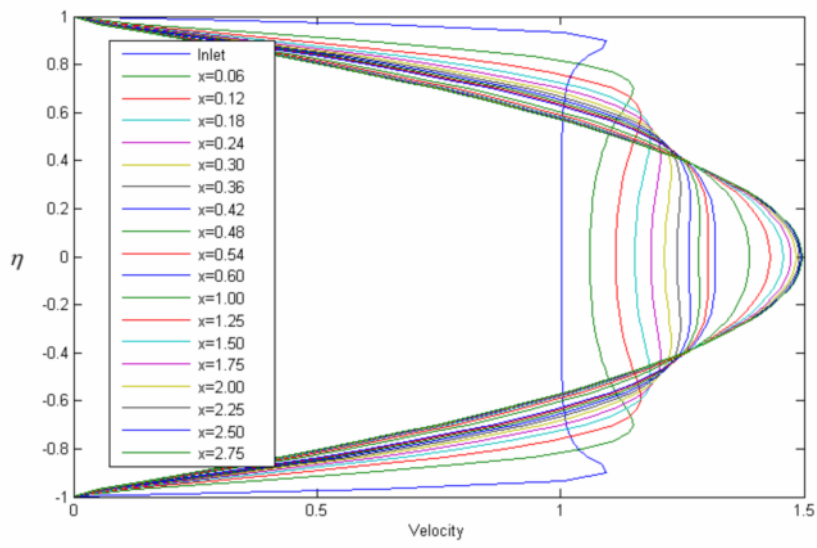


شکل ۲-۶: پروفیل سرعت  $u$  در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه توسعه یافته

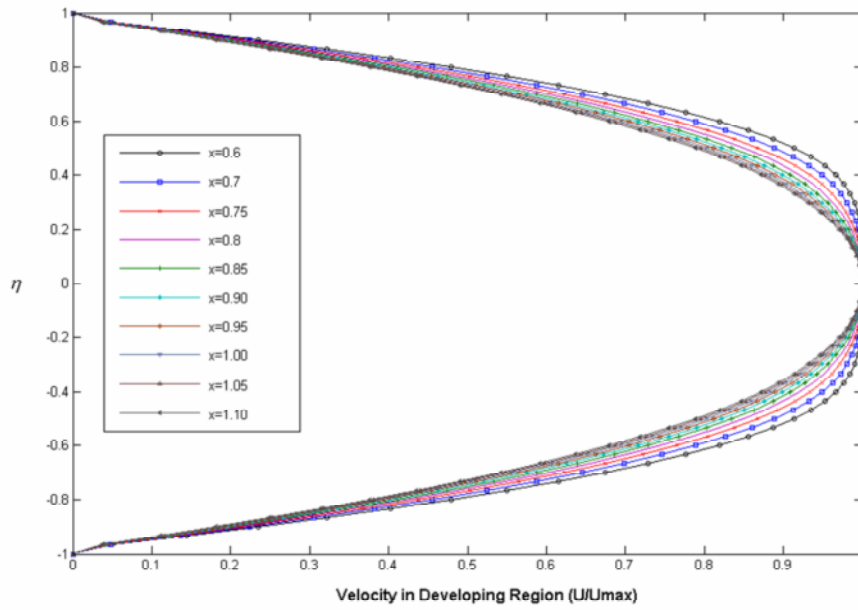
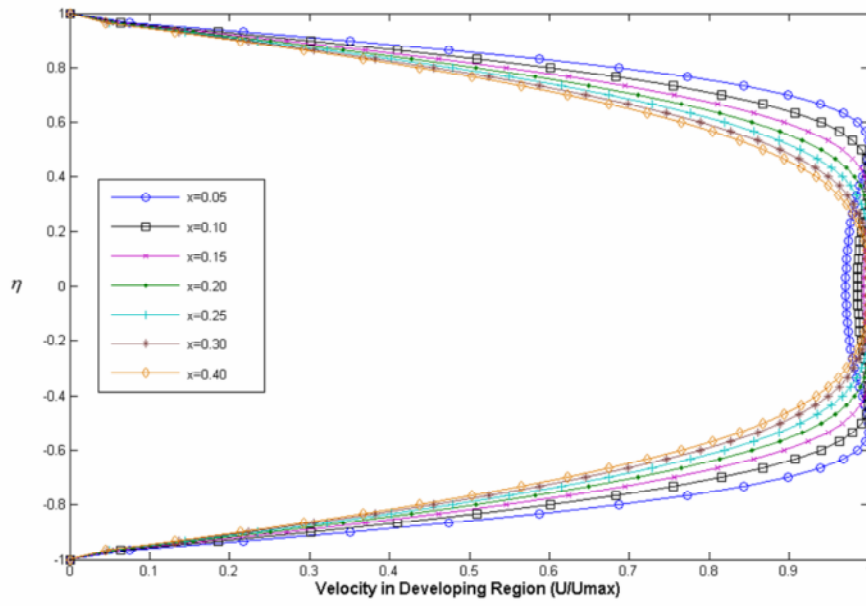
همانطور که قبلاً توضیح داده شد طبق نتایج تئوری، جریان بین دو صفحه در ناحیه توسعه

یافته خود تشابه است و روی پروفیل سرعت تحلیلی  $\frac{u}{u_{centerline}} = \left(\frac{3}{2}\right) \left(1 - \left(\frac{y}{R_h}\right)^2\right)$  می

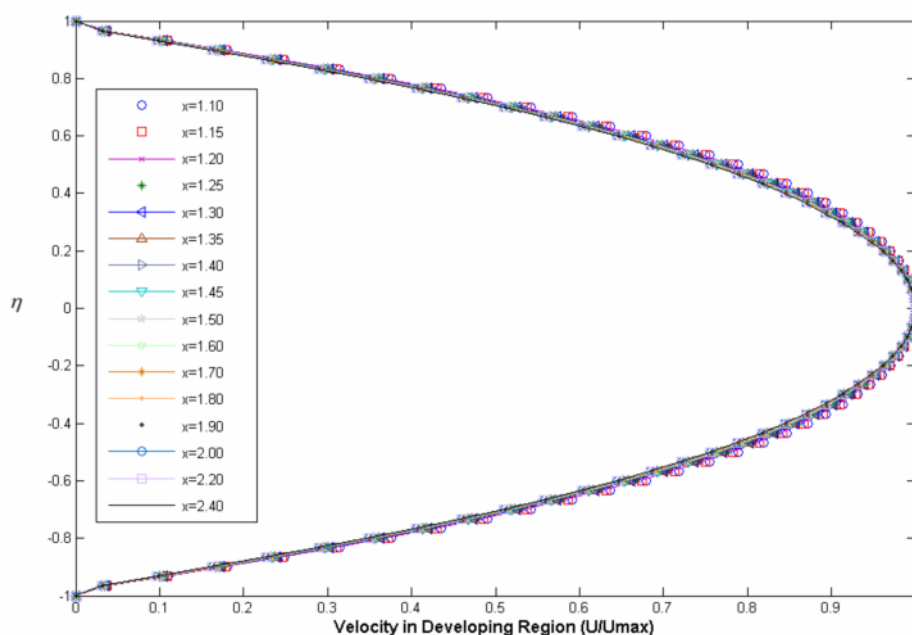
افتد. (۱۶) ولی در ناحیه در حال توسعه پروفیل سرعت  $u$  به صورت شکل (۴-۶) درمی آید:



شکل ۶-۳: پروفیل سرعت  $u$  برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه در حال توسعه

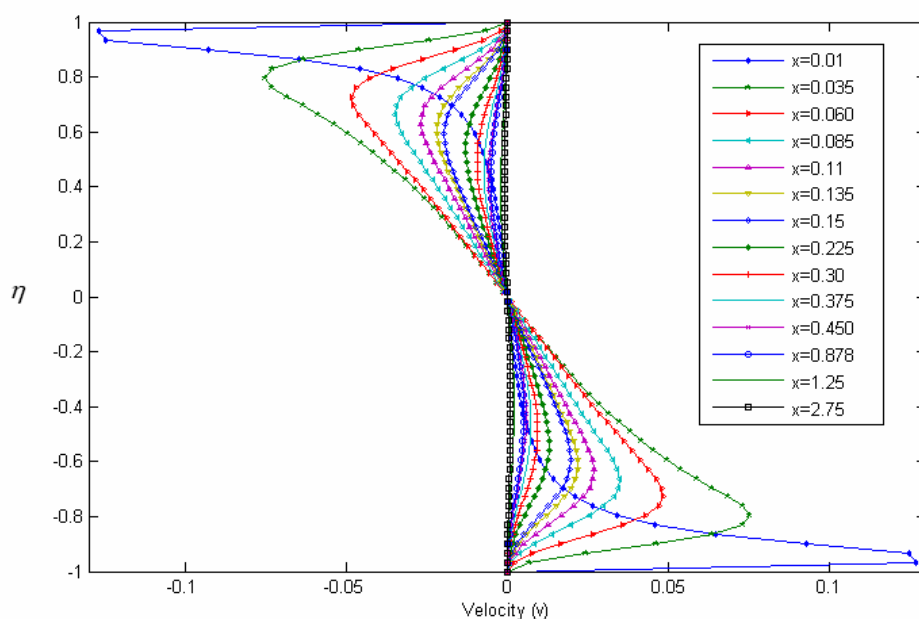


شکل ۳-۶: پروفیل سرعت  $u$  در مختصات خود تشابه در نواحی مختلف ورودی در طول کانال برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه در حال توسعه

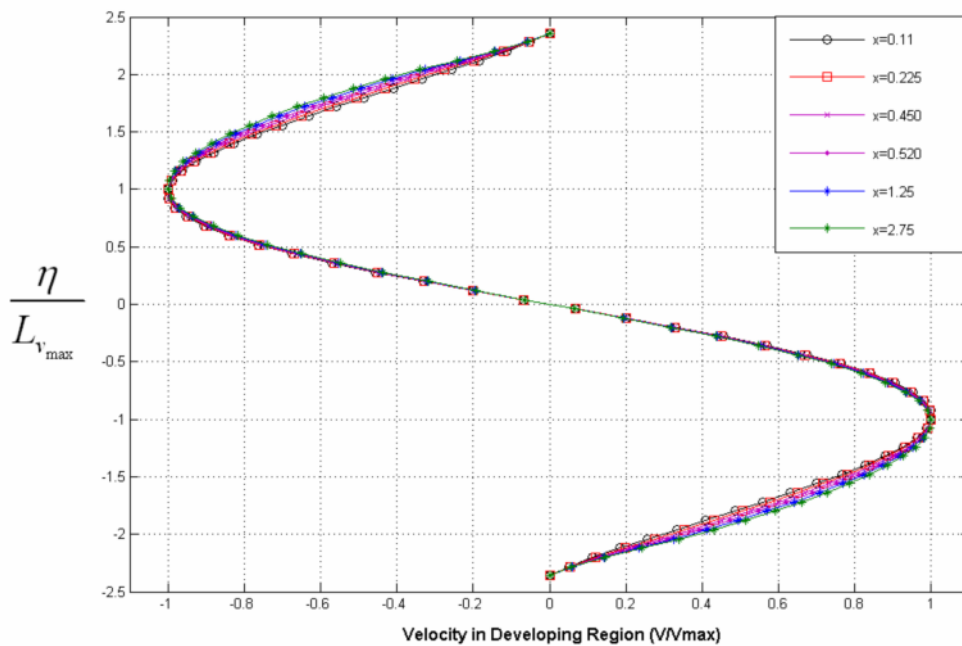


شکل ۴-۶: : پروفیل سرعت  $u$  در مختصات خود تشابه در نواحی مختلف در طول کانال برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه در حال توسعه

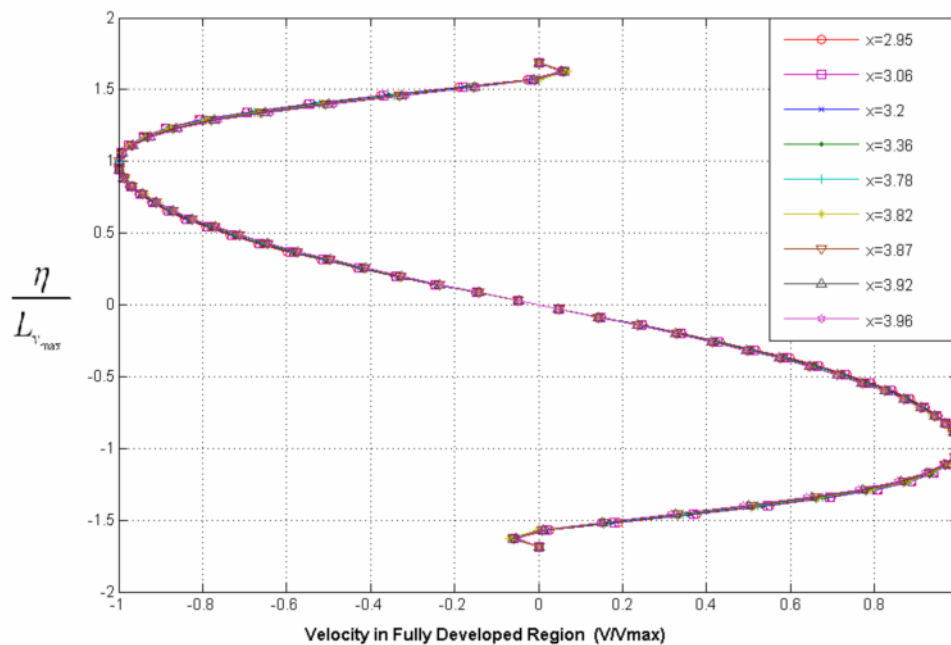
جواب دقیقی برای ناحیه در حال توسعه وجود ندارد ولی پروفیل های بدست آمده بایستی طوری باشند که شرایط مرزی را ارزا شده ببینیم، لذا پروفیل سرعت  $v$  را در حال توسعه در ورودی به صورت زیر در شکل ۵-۶ می بینیم:



شکل ۶-۵: پروفیل سرعت برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه در حال توسعه



شکل ۶-۶: پروفیل سرعت  $v$  در مختصات خود تشابه در ورودی برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه در حال توسعه

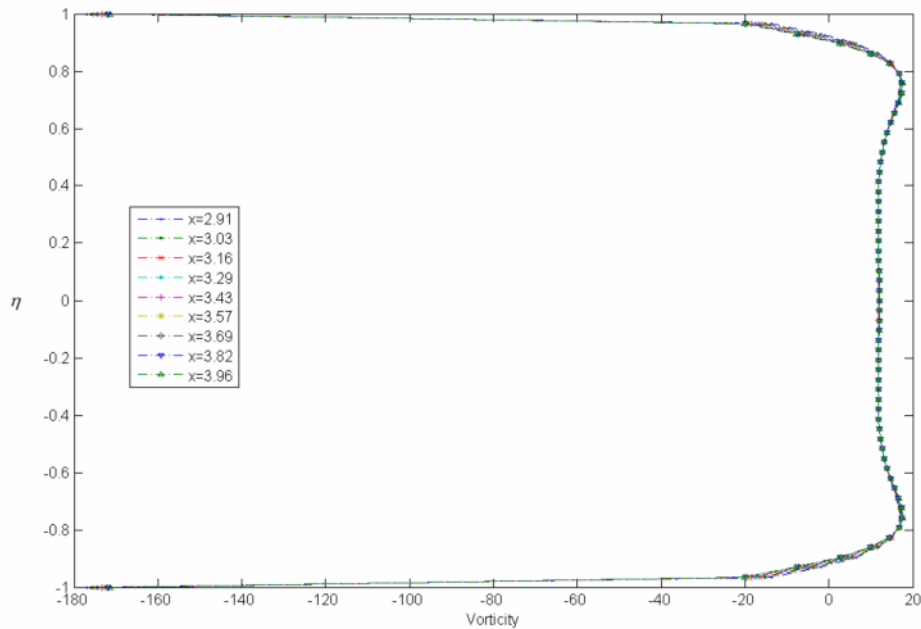


شکل ۶-۷: پروفیل سرعت  $v$  در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه توسعه یافته





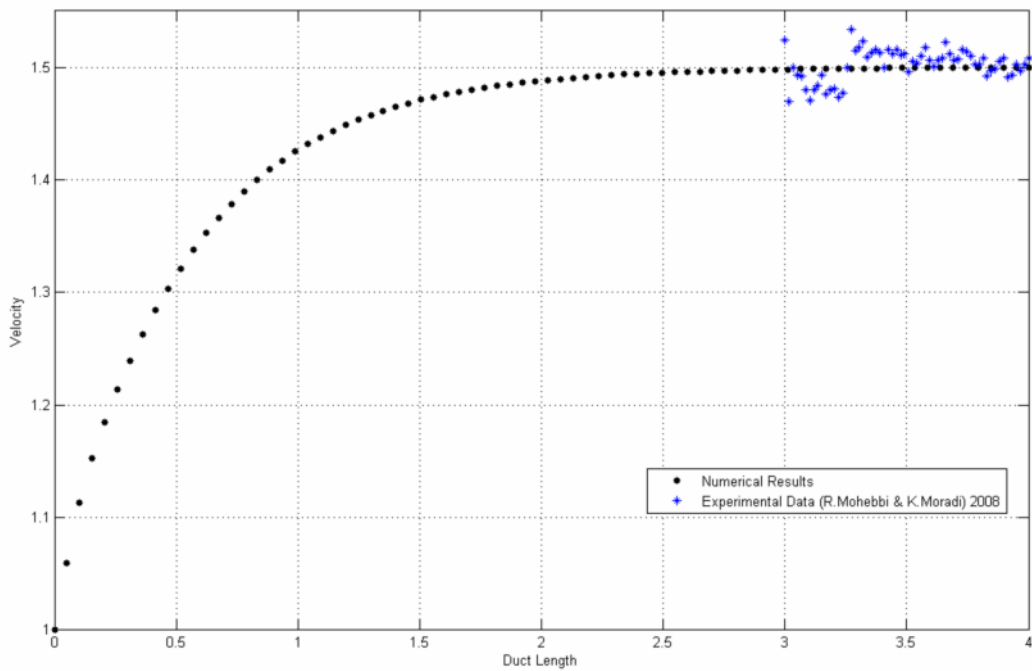
جریان بین دو صفحه را در دستگاه مختصات خود تشابهی نشان دادیم، برای سرعت  $v$  جریان چه در ناحیه در حال توسعه و چه در ناحیه توسعه یافته خود تشابه است ولی سرعت  $u$  در ناحیه در حال توسعه در چند ناحیه خود تشابه می باشد،



شکل ۶-۶: پروفیل  $\omega$  در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی

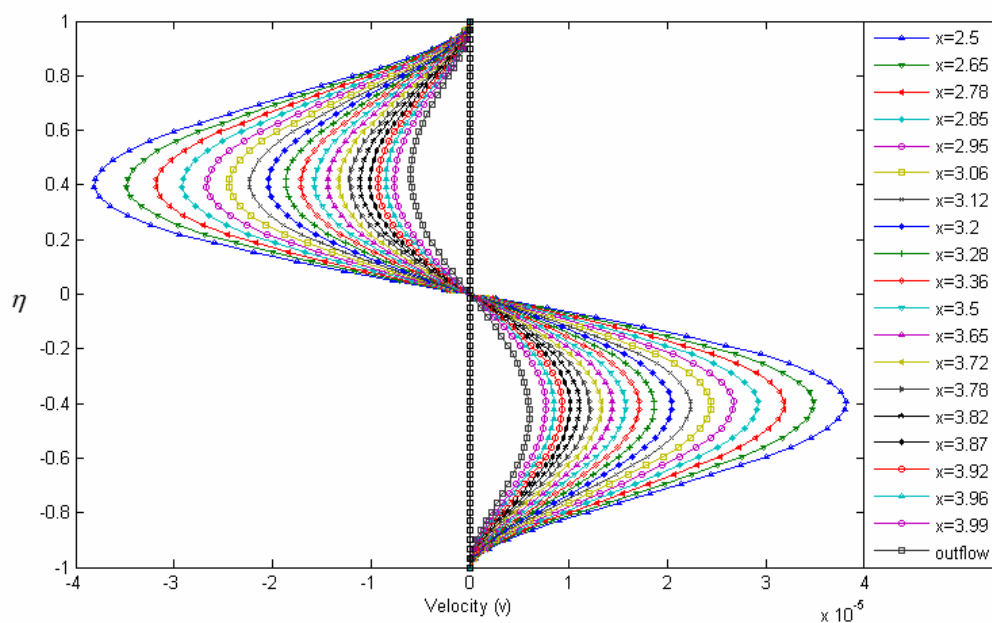
سرعت خط مرکزی در جریان بین دو صفحه دو بعدی آرام به صورت زیر در شکل ۶-۷

نشان داده می شود.



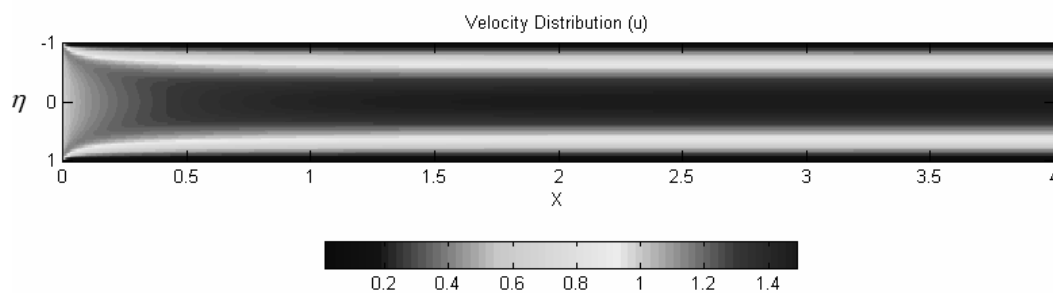
شکل ۶-۷: سرعت  $u$  خط مرکزی برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی

همچنین سرعت  $v$  را در ناحیه کاملاً توسعه یافته در شکل (۶-۸) نشان می دهیم که طبق نتایج تحلیلی بایستی مقدار صفر را می داشت که مقادیر بدست آمده را می توان خطای عددی فرض کرد که اگر این مقدار خطا یعنی  $10^{-5}$  صرف نظر کنیم همان مقدار صفر را نتیجه می دهد، در نهایت به مقدار صفر مطلق می رسد که شرط مرزی خروج در مساله ما می باشد که خودمان اعمال کرده ایم.



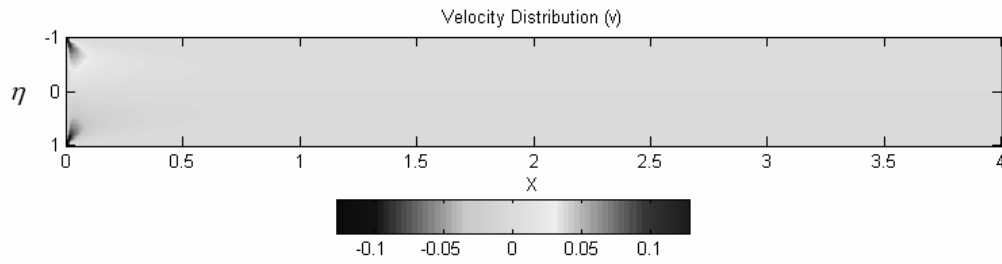
شکل ۶-۸: پروفیل سرعت  $v$  برای شبیه سازی جریان بین دو صفحه بدون اغتشاش ورودی در ناحیه کاملاً توسعه یافته

اگر بخواهیم توزیع پروفیل سرعت  $u$  را به صورت کانتور در طول بازه بی بعد  $(0 \leq x \leq 4)$  و  $(-1 \leq y \leq +1)$  نشان دهیم به صورت شکل (۶-۹) می توان نشان داد:



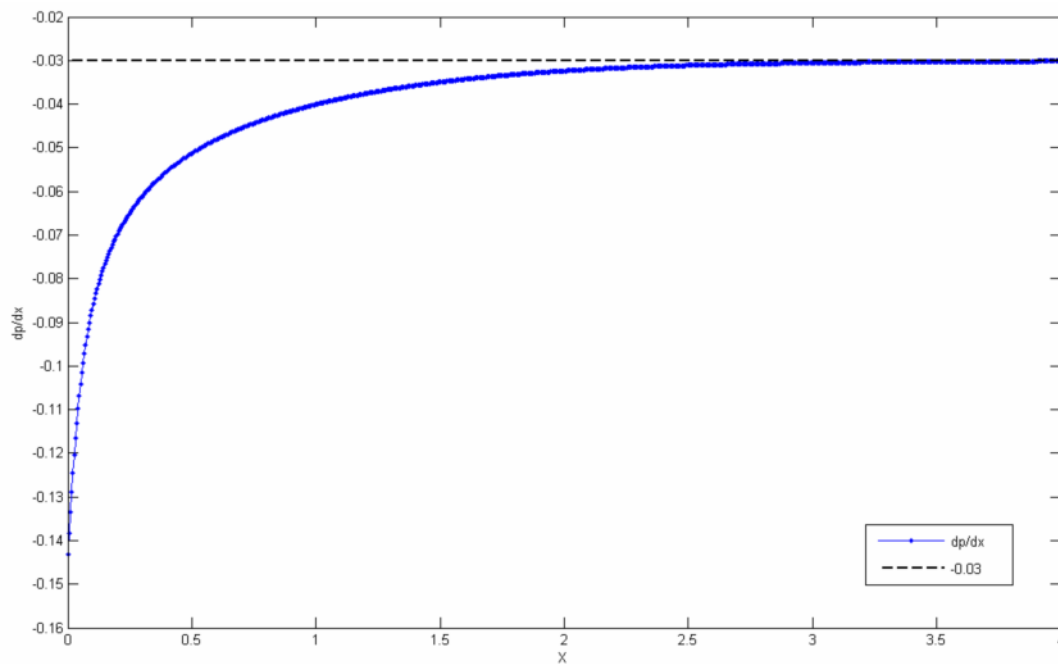
شکل ۶-۹: پروفیل سرعت  $u$

و همچنین اگر بخواهیم توزیع پروفیل سرعت  $v$  را به صورت کانتور در طول بازه بی بعد  $(0 \leq x \leq 4)$  و  $(-1 \leq y \leq +1)$  نشان دهیم به صورت شکل (۶-۱۰) می توان نشان داد:



شکل ۶-۱۰: پروفیل سرعت  $v$

در جریان های داخلی علاوه بر نتایج بالا یکی از مهمترین نتایج پیدا کردن توزیع فشار است که با یک پست-پراسسینگ ساده و نوشتن معادلات ناویر استوکس می توان توزیع فشار را در طول بازه آنالیزی پیدا کرد که توزیع آن به صورت زیر در شکل (۶-۱۱) نشان داده می شود:



شکل ۶-۱۱: توزیع فشار  $\frac{dp}{dx}$  در راستای جریان

همانگونه که در شکل ۶-۱۱ دیده می شود، در ناحیه توسعه یافته به یک عدد خاصی میل

می کند که در کتاب وایت می توان رابطه  $\frac{dp}{dx} = -\frac{12}{Re_D}$  را مشاهده کرد. از آنجاییکه این حل در

$Re_D = 400$  حل شده است لذا بایستی  $\frac{dp}{dx}$  به عدد 0.03 میل کند که در نمودار این رابطه به وضوح قابل رویت می باشد. از شکل ۶-۱۱ می توان استنباط کرد که فشار در ناحیه ورودی با شیب زیادی افت می کند ولی رفته رفته این شیب کم شده و در نهایت به یک عدد ثابتی می رسد که نمایانگر شروع ناحیه توسعه یافتگی است.

## ضمیمه الف) بدست آوردن شکل چرخشی معادله ناویر - استوکس

در این ضمیمه فرم چرخشی<sup>۶۲</sup> معادلات ناویر استوکس را بدست می‌آوریم:

فرم بی‌بعد معادله ناویر استوکس برای جریانهای غیر قابل تراکم به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (1)$$

با توجه به رابطه زیر:

$$\nabla(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B) \quad (2)$$

برای مورد  $A = B = \vec{U} = (U, V, W)$ ، داریم:

$$(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{U} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{U} \cdot \vec{U}) \quad (3)$$

که  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ . اگر معادله ۳ در معادله ۱ جایگزین گردد معادله زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{H} - \nabla(p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2}) + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (4)$$

که  $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z) = \vec{U} \times \vec{\omega}$  با اعمال عملگر کرل<sup>۶۳</sup> در طرفین معادله ۴، داریم:

<sup>62</sup> - Rotational Form

<sup>63</sup> - Curl Operator

$$\frac{\partial(\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \nabla \times \nabla(p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2(\nabla \times \vec{U}) \quad (5)$$

معادله ۵ به رابطه ۶ تبدیل می شود:  $\nabla \times \nabla(\text{scalar}) = 0$  با توجه به اینکه

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (6)$$

با اعمال مجدد عملگر کرل از معادله ۶، معادله زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \nabla \times (\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times (\nabla \times \vec{U})) \quad (7)$$

و به کار بردن رابطه زیر:  $(\nabla \cdot \vec{U} = 0)$  با توجه به معادله پیوستگی

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{U}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U} \quad (8)$$

معادله ۷ به معادله ۹ تبدیل می گردد.

$$\frac{\partial \nabla^2 \vec{U}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \vec{U} \quad (9)$$

جملات غیر خطی هستند.  $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z) = \vec{U} \times \vec{\omega}$  که

مزیت استفاده از این فرم معادلات ناویر استوکس، اولاً کاهش تعداد متغیرهای مستقل و در نتیجه کاهش فضای دیسک مورد نیاز و ثانياً عدم احتیاج به تعیین فشار در مرزهای مساله

می‌باشد. در عین حال در مقابل این دو مزیت، تغییر درجه معادله دیفرانسیل حاکم از دو به چهار را باید تجربه کرد.

چون جریان دوبعدی فرض شده است لذا برای مولفه های سرعت داریم:

$$U = [u \quad v \quad w = 0] \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

طبق آنچه وایت ( ) در کتاب سیالات بیان نموده داریم:

$$\omega_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \quad \omega_y = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \quad \omega_z = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11)$$

از روابط بالا برای جریان دو بعدی  $\omega_x$  و  $\omega_y$  را برابر صفر می‌یابیم، لذا داریم:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

از آنجایی که  $H$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H = U \times \omega = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & \omega_z \end{vmatrix} \quad (13)$$

لذا داریم:

$$H = [v\omega_z \quad -u\omega_z \quad 0] \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H_x = v\omega_z \\ H_y = -u\omega_z \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (14)$$

اپراتور کرل در مختصات کارتزین به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\nabla \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) e_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) e_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) e_z$$

لذا جملات غیر خطی با دوبار گرفتن کرل از H و اعمال شرط دوبعدی بودن جریان بدست

می آید.

$$\nabla \times \vec{H} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) e_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) e_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) e_z$$

$$\nabla \times \vec{H} \Rightarrow \begin{cases} (0-0)e_x \\ (0-0)e_y \\ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) e_z \end{cases} \quad (15)$$

اگر  $\nabla \times \vec{H}$  را A بنامیم و دوباره کرل را اعمال کنیم داریم:

$$\nabla \times \vec{A} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) e_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) e_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) e_z$$

با داشتن  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$  و  $A_x = A_z = 0$  داریم:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial A_z}{\partial y} - 0) e_x \\ (0 - \frac{\partial A_z}{\partial x}) e_y \\ (0 - 0) e_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left( \frac{\partial (\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y})}{\partial y} \right) e_x \\ - \left( \frac{\partial (\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y})}{\partial x} \right) e_y \\ (0) e_z \end{cases}$$

از آنجایی که برای ما فقط جمله غیر خطی در جهت  $y$  مهم است، لذا برای جمله غیر

خطی داریم:

$$\nabla \times (\nabla \times H) \Big|_{e_y} = \left( - \frac{\partial (\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y})}{\partial y} \right) \quad (16)$$

برای محاسبه جمله لزجت نیز بایستی اپراتور  $\nabla^4$  را از نظر ریاضیاتی بدست آوریم :

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

اگر  $A$  همان مولفه سرعت در جهت  $X$  باشد ( $v$ ) داریم:

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (17)$$

که در آن به علت دوبعدی بودن جریان داریم:  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

لذا معادله (۱۷) به صورت زیر در می آید:

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

اگر اپراتور  $\nabla^2$  را دو بار اعمال کنیم به اپراتور  $\nabla^4$  می رسیم (برای این محاسبات  $\nabla^2 v$

را  $A$  می نامیم)

$$\nabla^4 v = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)}{\partial y^2} \quad (18)$$

و به این ترتیب با تقسیم عبارت بالا به عدد رینولدز جمله لزجت معادله نیز بدست می آید.

## ضمیمهٔ ب) ماتریس هسنبرگ

تعریف ماتریس هسنبرگ (Hessenberg Matrix) (۱۵)

### ماتریس بالا هسنبرگی

به یک ماتریس مربعی  $n \times n$  ماتریس بالا هسنبرگی گوییم هرگاه بجز اولین قطر زیر قطر اصلی، بقیه داریه های زیر قطر اصلی صفر باشد به عبارت دیگر اگر  $i > j + 1$  آنگاه داشته باشیم

$$a_{i,j} = 0:$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-3} & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-3} & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & \cdots & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-2,n-3} & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

### ماتریس پایین هسنبرگی

به یک ماتریس مربعی  $n \times n$  ماتریس پایین هسنبرگی گوییم هرگاه بجز اولین قطر زیر قطر اصلی، بقیه داریه های زیر قطر اصلی صفر باشد به عبارت دیگر اگر  $i < j - 1$  آنگاه داشته

$$\text{باشیم } a_{i,j} = 0:$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-3,1} & a_{n-3,2} & a_{n-3,3} & a_{n-3,4} & \cdots & a_{n-3,n-2} & 0 & 0 \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & a_{n-2,4} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$



## ضمیمه ج) تحلیل خطا

به منظور تعیین مرتبه دقت یک روش عددی برای ارزیابی یک تابع، بسط سری تیلور مورد استفاده قرار می‌گیرد. اجازه بدهید خطای عددی در یک نقطه خاص از یک مجموعه را به صورت اختلاف بین مقدار حقیقی و مقدار تقریبی تابع در آن نقطه تعریف کنیم. در تقریب‌های عددی با استفاده از سری تعدای از جملات بسط سری تیلور مورد استفاده قرار می‌گیرد. اولین ترم بریده شده از بسط در تقریب عددی می‌توان تخمین خیلی خوبی برای خطا باشد که می‌تواند مرتبه دقت را نشان دهد. اگر

$$E(x_i) \cong \frac{(L/N)^n}{n!} f^{(n)}(x_i) \quad (\text{ج-۱})$$

که  $E(x_i)$ ، خطا در ارزیابی  $f(x_i)$  در  $x_i$  است و  $L$  و  $N$  به ترتیب برابر طول و تعداد تقسیمات در دامنه می‌باشند.

با گرفتن لگاریتم از هر دو طرف معادله (الف-۱) به معادله (الف-۲) می‌رسیم:

$$\log(E_{\max}) \cong C - n \log(N) \quad (\text{ج-۲})$$

که  $C$  یک ثابت است. معادله (الف-۲) به وضوح نشان می‌دهد که شیب خط در نمودار  $\log(E_{\max})$  بر حسب  $\log N$  برابر  $-n$  می‌باشد که برابر مرتبه خطای تقریب می‌باشد.



## فهرست مراجع:

۱. جرالده، وتیلی (ترجمه علی محمد پورپاک)، محاسبات عددی؛ آنالیز عددی کاربردی برای رشته‌های مهندسی و علوم همراه با ۱۰۰ برنامه کامپیوتری به زبانهای C و Pascal و Fortran و Basic شامل ۳۰۰ مسئله با جواب، جهاد دانشگاهی ۱۳۸۰.
۲. ایروینگ اچ شیمز (ترجمه مهندس علیرضا انتظاری). مکانیک سیالات، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، ۱۳۷۲.
۳. ک.ا. هافمن (ترجمه دکتر احمد رضا عظیمیان). دینامیک سیالات محاسباتی برای مهندسان، مرکز نشر دانشگاهی صنعتی اصفهان
۴. یان م. اسمیت (ترجمه دکتر محمود مشعل)، برنامه نویسی در فرترن ۹۰، انتشارات جهاد دانشگاهی تهران، ۱۳۸۲
۵. ریچارد ال. بوردن، ج. دوگلاس فیرز، آلبرت سی. رینولدز (ترجمه علی اکبر عالم زاده - اسماعیل بابلیان - محمدرضا امیدوار)، آنالیز ریاضی؛ انتشارات منصور، ۱۳۷۳
۶. ورستیگ و مالالاسکرا (ترجمه محمد حسن شجاعی فرد و مهندس علیرضا نورپور هشترودی)، دینامیک سیالات محاسباتی CFD، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ۱۳۷۹
۷. حسین دیبایی بناب و محمد جواد مغربی، تدوین نرم افزاری برای حل جریان های برشی به روش DNS، پایان نامه کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شاهرود، ۲۰۰۶.
۸. احد ضرغامی و محمد جواد مغربی، حل عددی مستقیم جریان لایه اختلاطی به روش تفاضل محدود فشرده، پایان نامه کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شاهرود، ۲۰۰۷.
9. RH. Bartles & GW. Stewart, solution of the matrix equation  $AX+XB=C$  [F4], Communications of the ACM, Vol 15, Number 9,1972.



10. S.K. Lele, Compact Finite Difference Scheme with Spectral- Like Resolutions, Journal of Computational physics, 103, 16-42, 1992.
11. M.J. Maghrebi, A study of evolution of intense focal structures in spatially developing three- dimensional planer vortex, PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia, 1999.
12. M.J. Maghrebi, Orr Summerfeld Solver Using Mapped Finite Difference Scheme for Plan Wake flow, Department of Mechanical Engineering Shahrood University of Technology, Shahrood ,IR.IRAN. 2004.
13. Bickley, W.G. and Mcnamee .J, Matrix and other direct methods for the solution. of systems of linear difference equations. Philos. Trans. Roy. Soc. [London, Ser. A, 232] (1960).
14. Dorr, Fred W. The direct solution of the discrete Poisson equation on a rectangle. SIAM Rev. 12 (1970).
15. Martin. R.S. Peters .G. And Wilkinson. J.H. The QR algorithm for real Hessenberg matrices, (Handbook series linear algebra.) Numer, Math. 14 (1970 ).
16. H.Schlichting, Boundary Layer Theorey, Mc Graw Hill, 2004.
17. Wary & M.Y. Hussaini, Numerical Experiments in Boundary Layer Stability, Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 392,pp 373-389. 1984.
18. B.J. Cantwell. Organized motion in turbulent flow. Ann. Rev. Fluid Mech., 13:457-515, 1981.
19. C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang. Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
20. M.S. Chong, A.E. Perry, and B.J. Cantwell!. A general classification of threedimensional flow fields. Phys. Fluids, 2(5):765-777, 1990.
21. C. de Boor. A practical guide to splines. Springer-Verlag, Berlin, 1978.



22. F. Durst, J. Jovanovi\_, and J. Sender. LDA measurements in the near-wall region of a turbulent pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 295:305-335, 1995.
23. J.G.M. Eggels, F. Unger, M.H. Weiss, J. Westerweel, R.J. Adrian, R. Friedrich, and F.T.M. Nieuwstadt. Fully developed turbulent pipe flow: a comparison between direct numerical simulation and experiment. *J. Fluid Mech.*, 268:175- 209, 1994.
24. T.J.R. Hughes. *The finite element methods. Linear static and dynamic finite element analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
25. J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, 285:69-94, 1995.
26. C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method.* Cambridge University press, Cambridge, 1987.
27. J. Kim, P. Moin, and R.D. Moser. Turbulence statistics in a fully developed channel flow at low reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177:133-166, 1987.
28. Leonard. A. *Numerical simulation of turbulent fluid flows.* NASA Technical Memorandum 83320, 1983.
29. Leonard A. and A. Wray. A new numerical method for the simulation of three dimensional flows in a Pipe. NASA Technical Memorandum 84267, 1982.
30. N.N. Mansour, J.H. Ferziger, and W.C. Reynolds. Large-eddy simulation of a turbulent mixing layer. Technical Report TF-11, Thermoscience division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, CA 94305, April 1978.
31. N.N. Mansour, J. Kim, and P. Moin. Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 194:15-44, 1988.





32. N.N. Mansour, J. Kim, and P. Moin. Near-wall  $k-\epsilon$  turbulence modeling. *AIAA Journal*, 27(8):1068-1073, 1989.
33. P. Moin and J. Kim. Numerical investigation of turbulent channel flow. 3". *Fluid Mech.*, 118:341-377, 1982.
34. R.D. Moser and P. Moin. Direct numerical simulation of curved turbulent channel flow. Technical Report TF-20, Thermoscience division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, CA 94305, July 1984.
35. R.D. Moser, P. Moin, and A. Leonard. A spectral numerical method for the Navier-Stokes equations with applications to Taylor-Couette flow. *J. Comp. Phys.*, 52(3):524-544, 1983.
36. P. Orlandi and M. Fatica. Direct simulation of a turbulent pipe rotating along the axis. *J. Fluid Mech.*, 1995. To appear.
37. S.A. Orszag and L.C. Kells. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 96:159-205, 1980.
38. S.A. Orszag and A.T. Patera. Secondary instability in wall-bounded shear flows. *J. Fluid Mech.*, 128:347-385, 1983.
39. P.L. O'Sullivan and K.S. Breuer. Transient growth in circular pipe flow. I. Linear disturbances. *Phys. Fluids*, 6(11):3643-3651, 1994.
40. P.L. O'Sullivan and K.S. Breuer. Transient growth in circular pipe flow. II. Nonlinear development. *Phys. Fluids*, 6(11):3652-3664, 1994.
41. V.C. Patel and M.R. Head. Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows. *J. Fluid Mech.*, 38:181-201, 1969.
42. A.E. Perry and M.S. Chong. A description of eddy motions and flow patterns using critical-point concepts. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 19:125-155, 1987.



43. O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. *Philos. Trans. Roy. Soc. Lon.*, 174:935-982, 1883.
44. W. Rodi and N.N. Mansour. Low Reynolds number  $k - \epsilon$  modelling with the aid of direct simulation data. *J. Fluid Mech.*, 250:509-529, 1993.
45. M.M. Rogers and R.D. Moser. Direct simulation of a self-similar turbulent mixing layer. *Phys. Fluids*, 6 (2):903-923, 1994.
46. H. Salwen, F.W. Cotton, and C.E. Grosch. Linear stability of poiseuille flow in circular pipe. *J. Fluid Mech.*, 98:273-284, 1980.
47. H. Salwen and C.E. Grosch. The stability of poiseuille flow in a pipe of circular cross-section. *J. Fluid Mech.*, 54:93-112, 1972.
48. K. Shariff and R.D. Moser. Two-dimensional mesh embedding for Galerkin bspline methods. NASA Technical Memorandum 110361, 1995.
49. R. Sondergaard. Direct numerical simulation of a temporally evolving incompressible wake: effect of initial conditions on evolution and topology. PhD thesis, Stanford University, Stanford, CA 94305, March 1995. Also available as Stanford University, Department of Aeronautics and Astronautics, report no. SUDAAR 667.
50. P.R. Spalart, R.D. Moser, and M.M. Rogers. Spectral methods for the Navier-Stokes equations with one infinite and two periodic directions. *J. Comp. Phys.*, 96(2):297-324, 1991.
51. S.K. Stanaway, B.J. Cantwell, and P.R. Spalart. A numerical study of viscous vortex rings using a spectral method. NASA Technical Memorandum 101041, 1988.
52. G. Strang and G. J. Fix. An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.



53. R. Verzicco and P. Orlandi. Direct simulations of the transitional regime of a circular jet. *Phys. Fluids*, 6(2):751-759, 1994. Part 2.
54. R. Verzicco and P. Orlandi. A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates. *J. Comp. Phys.*, 123:402-414, 1996.
55. I. J. Wygnanski and F.H. Champagne. On transition in a pipe part 1. the origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *J. Fluid Mech.*, 59:281-335, 1973.
56. I.J. Wygnanski, M. Sokolov, and D. Friedman. On transition in a pipe 2. the equilibrium puff. 3". *Fluid Mech.*, 69:283-304, 1975.
57. Xu C., J.M.J. den Toonder, F.T.M. Nieuwstadt, and Z. Zhang. Origin of high kurtosis levels in the viscous sublayer. Direct numerical simulation & experiment. To appear: *Phys. Fluids*.
58. Y. Zhang, A. Gandhi, A.G. Tomboulides, and S.A. Orszag. Simulation of pipe flow. In *Symposium on application of direct and large eddy simulation to transition and turbulence*, volume CP-551, pages 17.1-17.9. AGARD, 1994.
59. Patrick Loulou, Robert D. Moser and Naqi N. Mansour, *Direct Numerical Simulation of Incompressible Pipe Flow Using B-Spline Spectral Method*, Stanford University, Stanford, NASA, 1997.

## Abstract

The non-dimensional forms of Navier-Stokes equations for two dimensional plane duct flow are solved using direct numerical simulation. The length scale and the velocity scale of the base flow at the inlet boundary of computational domain are used as two characteristics to define the flow Reynolds number. These two characteristics are the duct diameter and the maximum velocity or velocity at the centerline in cross section. The governing equations are discretized in streamwise using a sixth order compact finite difference scheme and cross stream direction using a mapped compact finite difference scheme, respectively. A mapping is used to relate the physical domain to the computational domain. The third order Runge-Kutta method is used for the time-advancement purpose. The numerical results show a very good accuracy and agreement with the exact solution of the Navier-Stokes equation. Results in self-similar coordinate were also investigated which indicate that the time-averaged statistics for velocity and vorticity tend to collapse on top of each other at the flow downstream locations. The pressure distribution is found by Navier-Stokes equation, which must reach to a constant value related to the flow Reynolds number in fully developed region. The result of pressure analysis shows a good agreement with this exact solution.

**Key words:** Duct Plane Flow, Compact Finite Difference, Mapped Finite Difference, Self-Similarity.



**Shahrood University of Technology**  
**Faculty of Mechanical Engineering**

Dissertation submitted for the Award of M.Sc Degree in Mechanical Engineering

**Direct Numerical Simulation of  
Incompressible Internal Viscous Flow Using  
Compact Finite Difference Scheme  
(Plane Duct Flow)**

**Supervisors:**

**Dr. M. J. Maghrebi**  
**Dr. M. Farzaneh Gord**

**Co-Supervisor:**  
**Dr. M. M. Shahmardan**

By:

**Kamran Moradi**

Feb - 2008