



دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته مهندسی مکانیک  
گرایش طراحی کاربردی

**آنالیز ترک در صفحه مستطیلی FGM**

**به روش بدون المان گالرکین**

محمد مجیدزاده

استاد راهنما:

دکتر محمود شریعتی

شهریور ۱۳۸۶



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# تشکر و قدر دانی

با تشکر فراوان از جناب آقای دکتر شریعتی که با راهنمایی های خود مرا در انجام این پژوهش  
همراهی کردند.

# تقدیم اثر

تقدیم به خانواده عزیزم که در تمام مدت تحصیل، مرا یاری کرده اند.

## چکیده

با توجه به اینکه روش های تحلیل عددی مبتنی بر شبکه، مانند المان محدود در تحلیل سازه های دارای ترک از دقت کمتری برخوردار می باشند، در این پایان نامه سعی شده روش بدون المان گالرکین برای تحلیل اینگونه سازه ها بررسی گردد. در ابتدا سعی شده با توجه به اهمیت علم مکانیک شکست به توضیح لزوم توجه به مسائلی که با این موضوع در ارتباط هستند، پرداخته شود. در ادامه با توجه به تازگی مباحث مواد FG و روش تحلیل عددی بدون المان گالرکین، سعی شده در فصول جداگانه توضیحات کافی در رابطه با ساختار هر یک از این موضوعات گنجانده شود. مهم ترین بخش این پژوهش، بررسی روش بدون المان گالرکین و چگونگی به کار بستن این روش در تحلیل ترک می باشد. در نهایت نیز با توجه به توضیحات بیان شده، نتایج برنامه ای که با استفاده از روش بدون المان گالرکین نوشته شده است، آورده شده و مورد بحث قرار گرفته اند. در مجموع می توان گفت در شرایط مختلف، این روش کارایی مناسب خود را در این تحقیق نشان داده است و در شرایطی که روش المان محدود توانایی تحلیل کمتری دارد، روش بدون المان گالرکین نتایج خوبی را از خود نشان می دهد.

**واژه های کلیدی:** بدون شبکه - روش بدون المان گالرکین - تابع وزنی - ضریب شدت تنش - مکانیک شکست.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
چهار	تشکر و قدردانی
پنج	تقدیم اثر
شش	چکیده
هفت	فهرست مطالب
ده	فهرست اشکال
چهارده	فهرست جداول
۱	<b>فصل اول: مقدمه</b>
۱	۱-۱- مقدمه
۲	۲-۱- تاریخچه علم مکانیک شکست
۳	۳-۱- تحلیل پدیده شکست
۹	<b>فصل دوم: مواد FG</b>
۹	۱-۲- مقدمه
۱۰	۲-۲- مفهوم مواد FG
۱۴	۳-۲- تاریخچه مواد FG
۱۷	۴-۲- ویژگی های مواد FG
۱۹	۵-۲- مدل سازی توزیع خواص در مواد FG
۲۲	۶-۲- فرایندهای تولید مواد FG
۲۲	۱-۶-۲- شاخه های فرایندهای تولید
۲۴	۲-۶-۲- فرایند تثبیت پودر در حالت جامد
۲۵	۳-۶-۲- فرایند های روکش دهی
۲۷	۴-۶-۲- جداسازی گریز از مرکز
۲۹	<b>فصل سوم: روش تحلیل بدون المان گالرکین</b>
۲۹	۱-۳- مقدمه
۳۲	۲-۳- روش های بدون المان
۳۵	۳-۳- روش بدون المان گالرکین
۳۷	۴-۳- توابع وزنی
۴۱	۵-۳- توابع پایه کامل
۴۲	۶-۳- شبکه انتگرال گیری
۴۳	۷-۳- توابع شکل در روش بدون المان گالرکین
۴۶	۸-۳- بررسی معادلات تعادل و فرم ضعیف شده
۴۸	۹-۳- معادلات گسسته سازی

۴۸	..... ۳-۹-۱- استفاده از ضرایب لاگرانژ
۵۲	..... ۳-۹-۲- ترکیب روش های بدون المان گالرکین و المان محدود
۵۷	..... ۳-۱۰-۱- المان های ترک
۶۱	..... <b>فصل چهارم: مکانیک شکست در مواد FG</b>
۶۱	..... ۴-۱- مقدمه
۶۲	..... ۴-۲- معادلات پایه
۶۷	..... ۴-۳- محاسبه ضرایب شدت تنش به کمک انتگرال J
۶۸	..... ۴-۴- محاسبه ضرایب شدت تنش به کمک انتگرال J در مواد FG
۷۱	..... <b>فصل پنجم: روش بدون المان گالرکین در مواد FG</b>
۷۱	..... ۵-۱- مقدمه
۷۲	..... ۵-۲- ساختار پروژه
۷۳	..... ۵-۳- تابع وزنی
۷۵	..... ۵-۴- انتگرال گیری عددی
۷۷	..... ۵-۵- نحوه تعیین شرایط مواد FG
۷۸	..... ۵-۶- تعیین تابع شکل
۸۱	..... ۵-۷- الگوریتم روش بدون المان گالرکین با استفاده از ضرایب لاگرانژ نوع دوم
۸۳	..... <b>فصل ششم: تحلیل چند مثال</b>
۸۳	..... ۶-۱- مقدمه
۸۴	..... ۶-۲- تحلیل صفحه ایزوتروپیک بدون ترک
۹۴	..... ۶-۳- نتایج تحلیل صفحه بدون ترک ساخته شده از مواد FG
۱۰۲	..... ۶-۴- نتایج تحلیل صفحه ایزوتروپیک دارای ترک جانبی
۱۰۸	..... ۶-۵- نتایج تحلیل صفحه ترکدار ساخته شده از مواد FG
۱۰۸	..... ۶-۵-۱- صفحه دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG تحت مود اول
۱۱۷	..... ۶-۵-۲- تیر دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG تحت مود اول
۱۲۱	..... ۶-۵-۳- نوار کامپوزیتی ساخته شده از ماده FG تحت مود اول
۱۲۳	..... ۶-۵-۴- ترک مورب در صفحه FG تحت مود اول و دوم
۱۲۷	..... ۶-۵-۵- صفحه FG دارای ترک مرکزی تحت مود اول و دوم
۱۳۴	..... ۶-۵-۶- تیر دارای ترک مرکزی ساخته شده از مواد FG تحت بارگذاری گسترده
۱۳۷	..... ۶-۵-۷- صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک
۱۴۰	..... ۶-۵-۸- نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک
۱۴۵	..... <b>فصل هفتم: بحث و نتیجه گیری</b>
۱۵۱	..... <b>فصل هشتم: نتایج و پیشنهادات</b>



---

۱۵۱	.....	۸-۱- نتایج
۱۵۲	.....	۸-۲- پیشنهادات
۱۵۵	.....	منابع

## فهرست اشکال

صفحه	عنوان
۱۱	شکل ۱-۲: چگونگی تغییر در ساختار استخوان
۱۳	شکل ۲-۲: چگونگی تغییر در ساختار و خواص مواد FG
۱۵	شکل ۳-۲: ساختار فعالیت سه گروه در پروژه ساخت مواد FG
۱۹	شکل ۴-۲: مقایسه تغییرات خواص در مواد ساده، مواد مرکب و مواد FG
۲۲	شکل ۵-۲: تغییرات کسر حجمی فلز در راستای ضخامت
۲۶	شکل ۶-۲: شکل شماتیک روش پاشش پلاسما برای ساخت مواد FG
۲۸	شکل ۷-۲: دسته بندی روش های گوناگون برای ساخت مواد FG
۳۳	شکل ۱-۳: تفاوت بین روش های تقریب و میانبایی
۳۴	شکل ۲-۳: مقایسه توابع شکل در روش های المان محدود و روش های بدون شبکه
۳۸	شکل ۳-۳: تصویر کیفی یک تابع وزنی
۴۳	شکل ۴-۳: ساختار شبکه بندی زمینه برای انتگرال گیری
۴۴	شکل ۵-۳: نمای هندسی محدوده اثر فشرده متناظر با نقطه X
۵۵	شکل ۶-۳: چگونگی قرار گرفتن المان ها و گره ها در ترکیب دو روش
۵۶	شکل ۷-۳: نمونه هایی از توابع شیب برای المان های میانی
۵۹	شکل ۸-۳: چگونگی تاثیر ترک بر روی دامنه اثر گره
۶۳	شکل ۱-۴: مود های ایجاد شده در اطراف ترک
۶۳	شکل ۲-۴: مشخصات میدان های موجود در نزدیکی ترک
۶۶	شکل ۳-۴: ساختار صفحه ترکدار تحت مودهای اول و دوم
۶۸	شکل ۴-۴: ساختار صفحه ترکدار ساخته شده از مواد FG
۷۲	شکل ۱-۵: شکل مساله نهایی مورد آنالیز
۷۴	شکل ۲-۵: چگونگی قرار گرفتن دامنه تاثیر دایره ای و مربعی
۸۱	شکل ۳-۵: چگونگی قرار گرفتن گره ها در نزدیکی نوک ترک
۸۴	شکل ۱-۶: مساله اولیه مورد آنالیز برای ماده ایزوتروپیک بدون ترک
۸۵	شکل ۲-۶: شبکه گره های ساختار تحلیل
۸۶	شکل ۳-۶: مقایسه جابجایی در جهت X برای روش EFG و نرم افزار ANSYS
۸۶	شکل ۴-۶: مقایسه جابجایی در جهت Y برای روش EFG و نرم افزار ANSYS
۸۹	شکل ۵-۶: جابجایی در جهت X برای نتایج روش ansys با ۱۵ گره
۸۹	شکل ۶-۶: جابجایی در جهت X برای نتایج روش EFG با ۱۵ گره
۸۹	شکل ۷-۶: جابجایی در جهت X برای نتایج روش ansys با ۴۵ گره
۹۰	شکل ۸-۶: جابجایی در جهت X برای نتایج روش EFG با ۴۵ گره
۹۰	شکل ۹-۶: جابجایی در جهت Y برای نتایج روش ansys با ۱۵ گره
۹۰	شکل ۱۰-۶: جابجایی در جهت Y برای نتایج روش EFG با ۱۵ گره

- شکل ۶-۱۱: جابجایی در جهت Y برای نتایج روش ansys با ۴۵ گره ..... ۹۱
- شکل ۶-۱۲: جابجایی در جهت Y برای نتایج روش EFG با ۴۵ گره ..... ۹۱
- شکل ۶-۱۳: کانتور تنش افقی برای ۱۲۱ گره ..... ۹۲
- شکل ۶-۱۴: کانتور تنش افقی برای ۲۳۱ گره ..... ۹۲
- شکل ۶-۱۵: کانتور تنش عمودی برای ۱۲۱ گره ..... ۹۳
- شکل ۶-۱۶: کانتور تنش عمودی برای ۲۳۱ گره ..... ۹۳
- شکل ۶-۱۷: کانتور تنش برشی برای ۱۲۱ گره ..... ۹۳
- شکل ۶-۱۸: کانتور تنش برشی برای ۲۳۱ گره ..... ۹۴
- شکل ۶-۱۹: جابجایی در جهت X برای روش EFG با ۱۵ گره در ماده FG ..... ۹۵
- شکل ۶-۲۰: جابجایی در جهت X برای روش EFG با ۴۵ گره در ماده FG ..... ۹۶
- شکل ۶-۲۱: جابجایی در جهت X برای روش EFG با ۲۳۱ گره در ماده FG ..... ۹۶
- شکل ۶-۲۲: جابجایی در جهت Y برای روش EFG با ۱۵ گره در ماده FG ..... ۹۶
- شکل ۶-۲۳: جابجایی در جهت Y برای روش EFG با ۴۵ گره در ماده FG ..... ۹۷
- شکل ۶-۲۴: جابجایی در جهت Y برای روش EFG با ۱۵۳ گره در ماده FG ..... ۹۷
- شکل ۶-۲۵: بررسی همگرایی جابجایی افقی روش EFG در ماده FG ..... ۹۸
- شکل ۶-۲۶: بررسی همگرایی جابجایی عمودی روش EFG در ماده FG ..... ۹۸
- شکل ۶-۲۷: کانتور تنش افقی برای ۱۲۸ گره در ماده FG ..... ۱۰۰
- شکل ۶-۲۸: کانتور تنش افقی برای ۳۴۱ گره در ماده FG ..... ۱۰۰
- شکل ۶-۲۹: کانتور تنش عمودی برای ۱۲۸ گره در ماده FG ..... ۱۰۰
- شکل ۶-۳۰: کانتور تنش عمودی برای ۳۴۱ گره در ماده FG ..... ۱۰۱
- شکل ۶-۳۱: کانتور تنش برشی برای ۱۲۸ گره در ماده FG ..... ۱۰۱
- شکل ۶-۳۲: کانتور تنش برشی برای ۳۴۱ گره در ماده FG ..... ۱۰۱
- شکل ۶-۳۳: ساختار صفحه ایزوتروپیک دارای ترک جانبی ..... ۱۰۳
- شکل ۶-۳۴: ساختار مورد آنالیز با توجه به تقارن های موجود در شکل صفحه ..... ۱۰۳
- شکل ۶-۳۵: کانتور جابجایی افقی در ماده ایزوتروپیک دارای ترک جانبی ..... ۱۰۵
- شکل ۶-۳۶: کانتور جابجایی عمودی در ماده ایزوتروپیک دارای ترک جانبی ..... ۱۰۵
- شکل ۶-۳۷: کانتور تنش افقی در ماده ایزوتروپیک دارای ترک جانبی ..... ۱۰۶
- شکل ۶-۳۸: کانتور تنش قائم در ماده ایزوتروپیک دارای ترک جانبی ..... ۱۰۶
- شکل ۶-۳۹: کانتور تنش فون میزز در ماده ایزوتروپیک دارای ترک جانبی ..... ۱۰۷
- شکل ۶-۴۰: صفحه دارای ترک جانبی تحت مود اول ..... ۱۰۹
- شکل ۶-۴۱: کانتور های جابجایی صفحه دارای ترک جانبی ساخته شده از مواد FG مورد آنالیز ..... ۱۱۳
- شکل ۶-۴۲: کانتور های تنش صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از مواد FG مورد آنالیز ..... ۱۱۳
- شکل ۶-۴۳: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط کرنش ثابت برای صفحه دارای ترک جانبی تحت مود اول برای حالت  $\frac{E_2}{E_1} = 0.1$  ..... ۱۱۴

- شکل ۴۴-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط کرنش ثابت برای صفحه دارای ترک جانبی تحت  
 مود اول برای حالت  $\frac{E_2}{E_1} = 0.2$  ..... ۱۱۵
- شکل ۴۵-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط کرنش ثابت برای صفحه دارای ترک جانبی تحت  
 مود اول برای حالت  $\frac{a}{w} = 0.2$  ..... ۱۱۵
- شکل ۴۶-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط تنش ثابت برای صفحه دارای ترک جانبی تحت مود  
 اول برای حالت  $\frac{E_2}{E_1} = 0.1$  ..... ۱۱۶
- شکل ۴۷-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط تنش ثابت برای صفحه دارای ترک جانبی تحت مود  
 اول برای حالت  $\frac{E_2}{E_1} = 0.2$  ..... ۱۱۶
- شکل ۴۸-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط خمش خالص برای صفحه دارای ترک جانبی تحت  
 مود اول برای حالت  $\frac{a}{w} = 0.6$  ..... ۱۱۷
- شکل ۴۹-۶: تیر تحت خمش تحت بارگذاری مود اول ..... ۱۱۸
- شکل ۵۰-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش برای تیر دارای ترک مرکزی بر حسب تغییرات مدول الاستیسیته  
 در حالت  $\frac{a}{2H} = 0.45$  ..... ۱۲۰
- شکل ۵۱-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش برای تیر دارای ترک مرکزی بر حسب تغییرات مدول الاستیسیته  
 در حالت  $\frac{a}{2H} = 0.5$  ..... ۱۲۰
- شکل ۵۲-۶: نوار کامپوزیتی تحت بارگذاری مود اول ..... ۱۲۱
- شکل ۵۳-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش در نوار کامپوزیتی برای ترک با طول متغیر ..... ۱۲۳
- شکل ۵۴-۶: صفحه دوبعدی دارای ترک مورب جانبی ..... ۱۲۴
- شکل ۵۵-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش در صفحه با ترک مورب نسبت به تغییرات در خواص  
 ماده FG ..... ۱۲۵
- شکل ۵۶-۶: صفحه دوبعدی دارای ترک مستقیم جانبی ..... ۱۲۶
- شکل ۵۷-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش در صفحه دارای ترک مستقیم نسبت به تغییرات در خواص ماده  
 FG ..... ۱۲۷
- شکل ۵۸-۶: هندسه و بارگذاری صفحه دوبعدی دارای ترک مورب مرکزی ..... ۱۲۸
- شکل ۵۹-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود اول در صفحه دارای ترک مرکزی بر حسب تغییرات زاویه  
 ترک ( $\eta = 0.25$ ) ..... ۱۳۱
- شکل ۶۰-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود اول در صفحه دارای ترک مرکزی بر حسب تغییرات زاویه  
 ترک ( $\eta = 0.5$ ) ..... ۱۳۱

- شکل ۶-۶۱: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود اول در صفحه دارای ترک مرکزی بر حسب تغییرات زاویه ترک در حالت تنش ثابت ..... ۱۳۴
- شکل ۶-۶۲: تیر تحت خمش تحت بارگذاری گسترده در شرایط مود اول ..... ۱۳۵
- شکل ۶-۶۳: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش برای تیر دارای ترک مرکزی تحت بارگذاری گسترده بر حسب تغییرات مدول الاستیسیته ..... ۱۳۶
- شکل ۶-۶۴: صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک ..... ۱۳۷
- شکل ۶-۶۵: تاثیر تغییرات مدول الاستیسیته بر روی ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک ..... ۱۳۹
- شکل ۶-۶۶: تاثیر تغییرات ضریب پواسون بر روی ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک ..... ۱۳۹
- شکل ۶-۶۷: نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک ..... ۱۴۰
- شکل ۶-۶۸: چگونگی تغییر خواص در نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک و محل قرار گرفتن مرجع تعیین تغییر خواص ..... ۱۴۰
- شکل ۶-۶۹: تغییرات ضریب شدت تنش برای نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک بر حسب فاصله مرجع محاسبه تغییرات خواص نسبت به نوک ترک (حالت اول) ..... ۱۴۳
- شکل ۶-۷۰: تغییرات ضریب شدت تنش برای نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک بر حسب فاصله مرجع محاسبه تغییرات خواص نسبت به نوک ترک (حالت دوم) ..... ۱۴۳
- شکل ۶-۷۱: تغییرات ضریب شدت تنش برای نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک بر حسب فاصله مرجع محاسبه تغییرات خواص نسبت به نوک ترک (حالت سوم) ..... ۱۴۴

- جدول ۶-۱: مقایسه نتایج برای روش EFG و نرم افزار ANSYS برای جابجایی در جهت X ..... ۸۷
- جدول ۶-۲: مقایسه نتایج برای روش EFG و نرم افزار ANSYS برای جابجایی در جهت Y ..... ۸۸
- جدول ۶-۳: بررسی نتایج جابجایی برای مواد FG ..... ۹۹
- جدول ۶-۴: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه FG دارای ترک جانبی تحت شرایط کرنش ثابت ..... ۱۱۰
- جدول ۶-۵: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه FG دارای ترک جانبی تحت شرایط تنش ثابت ..... ۱۱۱
- جدول ۶-۶: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه FG دارای ترک جانبی تحت شرایط خمش خالص ..... ۱۱۲
- جدول ۶-۷: ضریب شدت تنش نرمال شده برای تیر FG دارای ترک مرکزی ..... ۱۱۹
- جدول ۶-۸: ضریب شدت تنش نرمال شده برای نوار کامپوزیتی ..... ۱۲۲
- جدول ۶-۹: ضریب شدت تنش نرمال شده برای نوار کامپوزیتی با طول ترک متغیر ..... ۱۲۳
- جدول ۶-۱۰: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه ترکدار مورب ..... ۱۲۵
- جدول ۶-۱۱: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مستقیم ..... ۱۲۷
- جدول ۶-۱۲: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی مورب ( $\eta = 0.25$ ) ..... ۱۲۹
- جدول ۶-۱۳: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی مورب ( $\eta = 0.5$ ) ..... ۱۳۰
- جدول ۶-۱۴: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی مورب  
به طول  $2a = 4$  ( $\eta = 0.25$ ) ..... ۱۳۲
- جدول ۶-۱۵: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی مورب به طول  $2a = 4$  ( $\eta = 0.5$ ) ..... ۱۳۲
- جدول ۶-۱۶: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی مورب در حالت تنش ثابت به  
طول  $2a = 2$  ( $\eta = 0.25$ ) ..... ۱۳۳
- جدول ۶-۱۷: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی مورب در حالت تنش ثابت به  
طول  $2a = 2$  ( $\eta = 0.5$ ) ..... ۱۳۳
- جدول ۶-۱۸: ضریب شدت تمرکز تنش نرمال شده برای تیر FG دارای ترک مرکزی تحت بارگذاری گسترده ... ۱۳۶
- جدول ۶-۱۹: تاثیر تغییرات مدول الاستیسیته بر روی ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک  
مرکزی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک ..... ۱۳۸
- جدول ۶-۲۰: تاثیر تغییرات ضریب پواسون بر روی ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی  
ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک ..... ۱۳۸
- جدول ۶-۲۱: تغییرات ضریب شدت تنش برای نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG  
ارتوتروپیک بر حسب فاصله مرجع محاسبه تغییرات خواص نسبت به نوک ترک ..... ۱۴۲

# فصل اول

## مقدمه

### ۱-۱- مقدمه

مکانیک شکست یکی از علوم مهندسی است که به بررسی شکست در مواد مختلف می پردازد و روش های طراحی برای عملکرد مطمئن سازه و یا قطعات ماشین را ارائه می نماید. این علم دارای کاربردهای فراوان و گسترده ای در طراحی قطعات سازه ها و ماشین الات مربوط به صنایع مختلف می باشد. از جمله این صنایع می توان به صنایع نیروگاهی، خودرو سازی، کشتی سازی، هوا و فضا و ... اشاره نمود. به طوری که تخمین زده می شود امروزه دست کم ۸۰٪ از طراحی ها در زمینه های مختلف مهندسی بر اساس دانش مکانیک شکست انجام می گیرد و یا لا اقل سازه های طراحی شده با روش های دیگر، به منظور اطمینان از ایمنی و کارایی لازم، با روش های مکانیک شکست مورد بررسی و آزمایش قرار می گیرند [۱].

وجود و یا ایجاد ترک و ناپیوستگی ها در سازه و قطعات دلایل مختلفی دارد. بسیاری از روش های تولید مواد و سازه - به عنوان مثال فرایند جوشکاری - به طور طبیعی باعث ایجاد شکاف و یا ناپیوستگی می شوند. ترک ها می توانند از این شکاف ها و ناپیوستگی ها که می توانند بسیار ریز باشند شروع به رشد کرده و در نهایت موجب از هم گسیختگی قطعه و از کار افتادن سازه شوند. بنابراین می توان گفت مهم ترین هدف علم مکانیک شکست، محاسبه میزان حساسیت قطعه به ترک و اندازه بحرانی ترک است که می تواند باعث شکست ناگهانی در بارهای اعمالی گردد.

## ۱-۲- تاریخچه علم مکانیک شکست

تاریخچه بررسی شکست سازه ها در حین فعالیت، به سال های بسیار گذشته بر می گردد. شنک<sup>۱</sup> [۲] و پارکر<sup>۲</sup> [۳] در اوایل قرن ۱۹ میلادی مروری بر تاریخچه شکست ترد را ارائه دادند. پس از آن نیز موارد متعددی از شکست های ناگهانی اتفاق افتاد که برخی از آنها با خسارات زیادی همراه بودند. حتی در مواردی دیده شده که یک کشتی به طور کامل از وسط به دو نیم تقسیم شده است. بسیاری از این موارد به خاطر عبور کشتی ها از آب های سرد بوده که در این حالت فولاد از خود رفتار مواد ترد را نشان می دهد. یکی از عوامل مهم و محل شروع بسیاری از ترک ها را نیز محل های جوشکاری تشخیص دادند.

سابقه علم مکانیک شکست به دهه ۱۹۲۰ و آزمایشات گریفیث<sup>۳</sup> [۴] بر روی شیشه بر می گردد. او ضمن آزمایشات خود متوجه شد که استحکام کششی تارهای شیشه درصد ناچیزی

<sup>۱</sup> - Shank

<sup>۲</sup> - Parker

<sup>۳</sup> - Griffith



از استحکام نظری این ماده است که از روابط حاکم بر اتصالات اتمی به دست می آید. در عین حال او متوجه شد که با کاهش ضخامت الیاف های شیشه، استحکام واقعی به مقدار استحکام نظری نزدیک می گردد. بر این اساس او نتیجه گرفت که وجود این اختلاف ها ناشی از وجود ترک های ریز در داخل شیشه می باشد. بر این اساس او معیاری را برای شکست قطعات در نظر گرفت. گریفیث بیان کرد که شکست هنگامی رخ می دهد که نرخ تغییر انرژی پتانسیل ناشی از رشد ترک با مقاومت در برابر رشد ترک یکسان شود.

بر این اساس می توان گفت دیدگاه گریفیث بیشتر متوجه ساختار میکروسکوپی ماده بود. البته به علت دشوار بودن سنجش و تحلیل در مقیاس اتمی، پس از گریفیث تا چند دهه این عرصه به عنوان یک زمینه تئوری صرف بلا استفاده باقی ماند. حوزه مکانیک شکست در دهه ۱۹۵۰ با وقوع سوانح هوایی و همچنین شکستن قطعات بسیاری از وسایل که میزان بارگذاری بر روی آنها بسیار کمتر از حد تحمل آنها بود، وارد مرحله جدیدی گردید. این مورد بیشتر در وسایلی دیده می شد که بارگذاری بر روی آنها به صورت تناوبی انجام می گرفت. به همین علت این نوع شکست را اصطلاحاً شکست خستگی نامگذاری کردند. از آن زمان به بعد مطالعه بر روی این موضوع اهمیت برجسته ای در طراحی سازه های تحت بارگذاری های تکراری پیدا کرد. اکنون نیز با گذشت بیش از چند دهه، محققان روشها و مدل های گوناگونی برای تحلیل پدیده ایجاد ترک و رشد آن ارائه کرده اند.

### ۳-۱- تحلیل پدیده شکست

با افزایش موارد شکست در اواسط قرن بیستم میلادی توجه زیادی به این موضوع شد. به این ترتیب مکانیک شکست در زمره یکی از علوم مهم در زمینه علم مکانیک قرار گرفت. عوامل زیادی که می توانست در ایجاد پدیده شکست موثر باشد بررسی گردید. به این ترتیب سه عامل که

نقش موثرتری در ایجاد شکست داشتند به عنوان پارامترهای اصلی شکست در نظر گرفته شدند. این سه عامل به شرح زیر می باشند.

۱- استحکام شکست ماده.

۲- طول ترک.

۳- سطح تنش اعمالی.

استحکام شکست ماده، میزان توانایی ماده برای تحمل بارهای وارد شده بر روی جسم دارای ترک می باشد. این پارامتر که یکی از خواص ذاتی ماده می باشد به تغییر شکل پلاستیک ماده در اطراف ترک بستگی دارد که خود تابعی از درجه حرارت محیط می باشد. طول ترک نیز تاثیر به سزایی در شکست قطعات دارد و به طور عام می توان گفت هر چه طول ترک موجود بیشتر باشد احتمال به وقوع پیوستن شکست ناگهانی بر اثر اعمال نیروی مشخص بیشتر می گردد. البته در برخی موارد خاص در طول های بزرگ، لبه های ترک به هم نزدیک می گردند و فاکتور شدت تنش را کاهش می دهند که این مساله وقوع شکست را به تاخیر می اندازد. عاملی که باعث رشد ترک و ایجاد شکست می گردد تنش کششی می باشد. در این رابطه می توان گفت که هر چه سطح تنش اعمالی بیشتر گردد احتمال به وقوع پیوستن گسیختگی نیز بیشتر می شود.

برای افزایش استحکام ماده در برابر شکست می توان از ساختارهای مواد<sup>۱</sup> FG استفاده کرد. مواد FG مواد مرکبی هستند، متشکل از دو فاز که کسر حجمی فاز های آن به صورت تابعی پیوسته و هموار از یک ساختار به ساختار دیگر تغییر می یابد. هر چند ساختارهای بسیاری در طبیعت دارای چنین خاصیتی هستند ولی ساخت چنین موادی برای انسان و با شکل های پیچیده بسیار مشکل می باشد. برای اولین بار در کشور ژاپن به ساخت چنین موادی، برای استفاده در

<sup>۱</sup> - Functionally graded materials

صنایع فضایی توجه گردید. نینو<sup>۱</sup> [۵] و همکارانش در آزمایشگاه فضایی ملی ژاپن<sup>۲</sup> برای اولین بار به صورت یک پروژه کاملاً سازمان یافته به بررسی این موضوع پرداختند. به این ترتیب در سال ۱۹۸۷ پروژه ملی به نام (( پژوهش بر روی تکنولوژی پایه برای پیشرفت و توسعه مواد FG برای رهایی و کاهش تنش حرارتی)) زیر نظر موسسه علوم و تکنولوژی دولت ژاپن آغاز گردید [۶]. هدف از انجام این پروژه، ارتقاء دادن ساختار مواد پوشش محافظ های حرارتی پیشرفته برای برنامه های فضایی آینده بود. پس از چند سال برنامه ساخت چنین موادی به یکی از پروژه های بزرگ علمی در کشور ژاپن و در کشورهای صنعتی دیگر تبدیل گردید. تا کنون روش های بسیاری برای ساخت چنین موادی پیشنهاد گردیده است. با گسترش زمینه های تحقیق در رابطه با مواد FG کاربرد های متعدد دیگری نیز برای اینگونه مواد مورد توجه قرار گرفتند. از این جمله می توان به ساخت اندام های مصنوعی بدن، بخش های انفجاری موتور، وسایل مغناطیسی، ابزارهای برنده و همچنین در سطوح داخلی بسته های میکرو الکترونیک و در هسته مرکزی مواد به کار رفته در سازه های تحت فشارهای بالا و تاخیر اندازهای آتش در ساختارها و ترکیب ها اشاره کرد.

هر چند بیشتر تحقیقات انجام شده بر روی این مواد زمینه انتقال حرارت دارند و بیشتر در مورد مقاومت آنها در مقابل تنش های حرارتی بحث گردیده است ولی باید توجه داشت به خاطر تغییر در خواص باید بسیار مراقب تشکیل و رشد ترک در فاصله بین لایه های با خواص متفاوت بود. به همین دلیل بررسی پدیده شکست در ساختار اینگونه مواد بسیار حیاتی می باشد.

با روی آوردن موسسات تحقیقاتی به سمت علم مکانیک شکست، در ابتدا با روش های تئوری به بررسی پدیده شکست پرداخته شد. روش های تئوری در ابتدای امر با توجه به ساده بودن مسائل و هندسه های موجود، کارایی مطلوبی را از خود نشان می دادند. با پیچیده شدن

<sup>۱</sup> -Niino

<sup>۲</sup> - NAL

تقریب زدن مقادیر مجهول استفاده کرد. پس از آن تغییرات زیادی در ساختار این روش توسط بلیچکو و دیگران انجام پذیرفت و کاربرد این روش در حالات مختلف بررسی گردید. بیشتر این تحقیقات در رابطه با پدیده های شکست، خزش و رشد ترک می باشند.

این روش به تنهایی از کارایی مناسبی برای تحلیل برخوردار می باشد ولی با توجه به اینکه در این روش مشکلاتی برای اعمال شرایط مرزی وجود دارد از تلفیق این روش با روش های دیگر مانند المان محدود به وفور استفاده می گردد. در اکثر این تحقیقات از ترکیب روش بدون المان گالرکین و روش المان محدود برای به دست آوردن نتایج دقیق تر استفاده شده است.

لیم<sup>۱</sup> و همکارانش [۸] در مقاله ای به بررسی اثرات نیروهای ترمودینامیکی بر روی سازه های ساخته شده از مواد FG - سرمیک و فلز - پرداختند. آنها در این مقاله از روش تلفیقی اجزاء محدود و روش بدون المان گالرکین برای تحلیل استاتیکی یک تیر یک سر درگیر ساخته شده از مواد FG کمک گرفته اند. چانگ<sup>۲</sup> [۹] و همکارانش نیز در مقاله خود به محاسبه انتگرال J برای رشد ترک در مواد FG پرداخته اند. در این مقاله سعی شده با استفاده از روش ترکیبی اجزاء محدود و روش بدون المان گالرکین چگونگی تغییرات انتگرال J در ترک های ساکن و رشد ترک بررسی گردد. به این ترتیب از روش بدون المان گالرکین در مناطق اطراف ترک استفاده شده و در باقی مناطق از المان های اجزاء محدود استفاده گردیده است. زیرا در این قسمت ها - مناطق نزدیک ترک - به قدرت تفکیک بالا نیاز است که دقت روش های بدون المان در چنین مناطقی به مراتب بالاتر از تحلیل های اجزای محدود می باشد. لاکروکس<sup>۳</sup> و بویلارد<sup>۴</sup> [۱۰] نیز به ارتقاء روش بدون المان گالرکین با استفاده از ترکیب روش های بدون المان گالرکین و روش اجزای محدود

<sup>۱</sup> - Lim

<sup>۲</sup> - Chang

<sup>۳</sup> - Lacroix

<sup>۴</sup> - Bouillard

پرداخته اند. آنها در این پژوهش به مقایسه نتایج روش بدون المان گالرکین و روش المان محدود برای یک استوانه تو خالی که هم دارای فشار داخلی و دارای فشار خارجی است پرداخته اند. ضمناً با توجه به اینکه مساله مورد بررسی آنها به صورت تحلیلی نیز قابل بررسی است، آنها از نتایج به دست آمده در حل تحلیلی برای مقایسه خطای ایجاد شده در روش های حل عددی استفاده کرده اند. رحمان<sup>۱</sup> و رائو<sup>۲</sup> نیز در دو مقاله جداگانه از روش های محاسبه ضرایب لاگرانژ [۱۱] و تلفیق روش های بدون المان گالرکین و اجزای محدود [۱۲] برای آنالیز ساختارهای ترک دار در شرایط الاستیک خطی و در معرض بارگذاری های مود اول و مود ترکیبی I و II استفاده کرده اند که در مقاله اول بررسی های انجام شده بر روی مواد FG ایزوتروپیک بوده و پژوهش دوم نیز بر روی مواد ایزوتروپیک انجام گرفته است. در ایران نیز برخی از محققان به بررسی این روش پرداخته اند. از مهم ترین این کارها می توان به تحقیق اختراعی طوسی [۱۳] در زمینه رشد ترک و خزش اشاره کرد.

به هر حال تحقیق در مورد روش بدون المان گالرکین و ساختار مواد FG که هر دو مورد از لحاظ مدت زمان تحقیق دارای قدمت زیادی نمی باشند بسیار مفید می باشد. در این پژوهش نیز سعی شده با استفاده از روش بدون المان گالرکین به تحقیق در زمینه شکست صفحات ساخته شده از مواد FG پرداخته شود.

---

<sup>۱</sup> - Rahman

<sup>۲</sup> - Rao

## فصل دوم

# مواد FG

### ۲-۱- مقدمه

انسان همواره برای انجام کارهای مختلف به مواد گوناگون نیاز داشته است و همواره تلاش کرده با دستیابی به مواد بدیع تر از خواص برتر آنها در زمینه های مختلف کارهای خود استفاده کند. هنگامی که انسان تمامی عناصر طبیعی را شناخت و به خواص کلی هر یک واقف گشت، دریافت این مواد به تنهایی قادر به تامین نیازهای او نیستند. به همین دلیل سعی کرد با ترکیب آنها چه به صورت همگن و چه به صورت غیر همگن به خواص برتری دست پیدا کند. به این ترتیب طیف بسیار وسیعی از مواد با خواص ارتقا یافته ساخته شدند که در موارد بسیاری مشکل گشای نیازهای بشر بودند. اگر چه این مواد توانستند بسیاری از مشکلات پیش روی بشر را بر طرف کنند ولی همچنان به موادی با خواص برتر نیاز بود تا ابزارهای ساخته شده بتوانند در شرایط پیچیده تر، شرایط محیطی ایجاد شده برای اجسام را تحمل کنند.

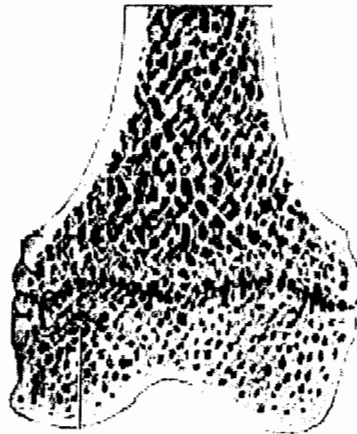
مواد مرکب آلیاژی و کامپوزیتی به علت نوع ترکیب یکنواخت عناصر خود در سرتاسر دامنه ماده، در شرایطی که لازم بود قسمت های مختلف ماده، شرایط محیطی متفاوتی را تحمل کنند با مشکلات بسیاری مواجه می شدند. به عنوان مثال در موتورهای احتراق داخلی، پیستون متحرک داخل سیلندر موتور در سطح قسمت داخل سیلندر می بایست شوک حرارتی شدید ناشی از انفجار سوخت را تحمل کند در حالی که در انتهای گردنده آن، باید مقاومت بالایی در برابر سایش وجود داشته باشد. در مورد پره های توربین نیز قسمت داخلی بدنه پره باید مقاومت بالایی داشته باشد تا بتواند نیروی گریز از مرکز ایجاد شده را تحمل کند و مقاومت قابل قبولی نیز در برابر خزش داشته باشد، در حالیکه سطوح خارجی آن باید سخت و ضد زنگ باشد و همچنین در برابر دماهای بالا مقاومت قابل توجهی از خود نشان دهد. این مساله باعث شد توجه خاصی به ساخت موادی شود که دارای تغییرات پیوسته و تدریجی در دامنه ابعادی خود هستند. به همین علت نوع جدیدی از مواد به نام مواد FG که دارای این خاصیت بودند مورد بررسی قرار گرفتند. البته به علت ساختار پیچیده اینگونه مواد و مشکلات فراوان در مسیر ساخت اینگونه مواد، به صورت گسترده به این موضوع پرداخته نشده است و تحقیقات انجام گرفته در رابطه با این مواد، مراحل مقدماتی خود را طی می کند و تنها کشورهای معدودی که تکنولوژی های مورد نیاز برای ساخت اینگونه مواد را دارند به سمت تولید این مواد حرکت کرده اند. به هر حال با وجود اندک بودن این پژوهش ها، این گونه تحقیقات بیانگر موفقیت آمیز بودن کاربرد چنین ساختارهایی در شرایطی است که مواد باید در آن واحد در قسمت های مختلف خود تحت شرایط متفاوت محیطی قرار گیرند.

## ۲-۲- مفهوم مواد FG

با وجود آنکه تحقیقات علمی در مورد مواد FG سابقه زیادی ندارد ولی تصور کلی و مفهوم مواد FG از زمان های دور در ساختار سازه های فولادی اولیه و حتی در ساختار ارگانسیم های

زنده طبیعت مانند استخوان و خیزران وجود داشته است. اینگونه مواد در ساختارشان دارای تغییرات تدریجی هستند تا اجزای قویتر ساختار آنها در مکان هایی متمرکز شوند که تنش وارد بر سازه در آن نقاط بیشتر است.

به عنوان مثال در ساختار استخوان بدن که لازم است در سطوح خارجی آن مقاومت مناسبی در مقابل عوامل بیرونی از جمله ضربات شدید وجود داشته باشد و در قسمت های داخلی شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی وجود داشته باشد ساختاری که کاملاً مشابه ساختار مواد FG می باشد وجود دارد. به گونه ای که استخوان در سطوح خارجی کاملاً سخت و مقاوم می باشد ولی در مرکز ساختاری کاملاً نرم و اسفنجی را داراست و تغییرات بین این دو ناحیه نیز به صورت کاملاً پیوسته و هموار می باشد. (شکل ۱-۲)



شکل ۱-۲: چگونگی تغییر در ساختار استخوان [۱۴]

البته یک تفاوت اساسی در ساختار تغییرات تدریجی مواد زنده و مواد مصنوعی وجود دارد. چرا که ارگانسیم های زنده دارای قابلیت وفق دادن سازه خود با توجه به ظرفیت انباشته سازی پویای عناصر مورد نیاز خود را دارند [۱۴].

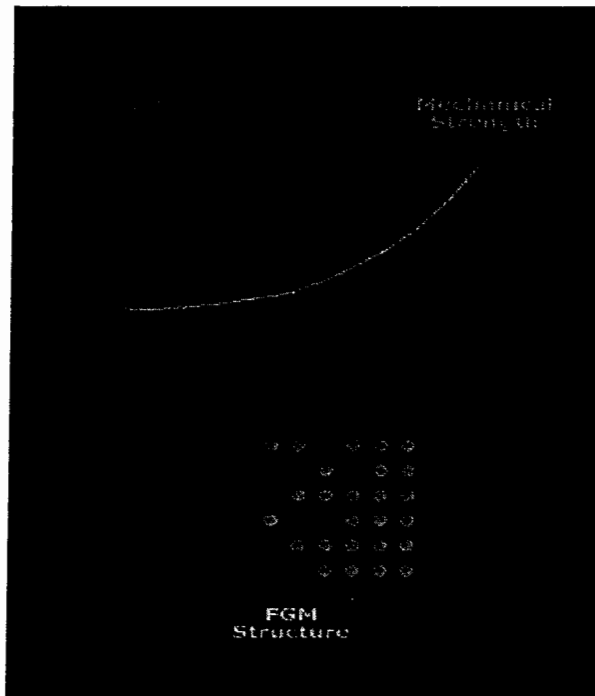


در ساختار مواد FG می بایست خواص از یک ترکیب یا ماده به سمت خواص یک ترکیب یا ماده دیگر تغییر کند. به عبارت دیگر مواد FG به طور معمول از دو فاز جداگانه ساخته شده اند به گونه ای که کسر حجمی آنها به صورت پیوسته و مستمر در حالت تغییر از یک فاز به فاز دیگر می باشد. معمولاً نوع ترکیب به گونه ای است که خواص مواد ترکیبی مکمل یکدیگر می باشند و کمبودها و نواقص یکدیگر را جبران می کنند.

اکثر تحقیقات انجام شده تا کنون، بیشتر به گونه ای بوده که مواد در یک قسمت قابلیت تحمل حرارت و گرادیان های دمایی بالا را داشته باشند و در قسمت دیگر دارای استحکام مکانیکی و انعطاف پذیری مناسبی باشند. یکی از معروف ترین ترکیبات شناخته شده در این رابطه، ترکیب فلزات و سرامیک می باشد. همانگونه که می دانید فلزات دارای ویژگی هایی از قبیل قابلیت ماشین کاری، شکل پذیری و استحکام بالا هستند در صورتی که در برابر حرارت و خوردگی، ضعیف و آسیب پذیرند. بر عکس فلزات، سرامیک ها دارای مقاومت بالای حرارتی و خوردگی ناچیز هستند ولی قابلیت شکل پذیری و استحکام آنها بسیار پایین می باشد. به این ترتیب می توان با تلفیق خواص آنها ساختاری را ایجاد کرد که هم بتواند در مقابل حرارت های شدید مقاومت کند و هم دارای استحکام بالایی باشد. شکل ۲-۲ تغییرات ساختاری و خواص را در اینگونه مواد نشان داده است [۶].

برای تشریح مطالب بالا می توان به تغییرات محیطی ایجاد شده در ساختار سفینه های فضایی اشاره کرد. دمایی که تخمین زده می شود سفینه های فضایی در سطوح خارجی به آن برسند در حدود ۲۱۰۰ درجه کلوین می باشد، لذا مواد سازنده سطوح خارجی سفینه های فضایی می بایست در برابر این دمای بالا مقاومت کنند. علاوه بر این، به علت آنکه دمای قسمت های داخلی سفینه در حدود ۳۰۰ درجه کلوین می باشد، ساختار جداره سفینه های فضایی می بایست گرادیان دمایی در حدود ۱۸۰۰ درجه کلوین را تحمل کنند [۵].

به طور کلی هیچ ماده متداول صنعتی که توان مقاومت در برابر چنین تنش هایی را داشته باشد شناخته نشده است. چنین ماده ای باید مقاومت حرارتی بالا و خاصیت ضد زنگ بودن در لایه های سطحی دما بالای سازه و چقرمگی مکانیکی زیاد در طرف دما پایین سازه را دارا باشد. همچنین این ماده باید دارای خاصیت تحمل تنش های حرارتی را در سراسر ماده دارا باشد.



شکل ۲-۲: چگونگی تغییر در ساختار و خواص مواد FG [۶]

البته اینگونه ساختارها در صنایع فضایی و دیگر صنایع پیشرفته کاربرد بیشتری دارند. از دلایلی که تا کنون بیشتر به اینگونه تغییرات دمایی پرداخته شده است می توان به این نکات اشاره کرد که صنایعی همچون صنایع فضایی به علت شرایط حساس تجهیزات خود در فضا نیاز مبرمی به اینگونه مواد دارند و همچنین ساخت مواد FG بسیار دشوار و هزینه بر است و برای صنایع معمولی مقرون به صرفه نیست. به هر ترتیب پیش بینی می شود که با پیشرفت تکنولوژی ساخت مواد FG استفاده های صنعتی از این نوع مواد نیز افزایش یابد.

## ۲-۳- تاریخچه مواد FG

با وجود آنکه در سال های بسیار دور یک سری تحقیقات مختصر در رابطه با موضوع ساخت مواد دارای خصوصیت تغییر تدریجی در خواص مکانیکی انجام گرفته است ولی برای اولین بار به صورت خاص این موضوع در سال ۱۹۷۲ توسط بور<sup>۱</sup> و دووز<sup>۲</sup> [۱۵] مطرح گردید. تعبیر مواد FG نیز برای اولین بار توسط محققان ژاپنی در دهه ۱۹۸۰ به اینگونه مواد اطلاق گردید. مفهوم مواد FG در سال ۱۹۸۴ توسط نینو<sup>۳</sup> [۵] و همکارانش در آزمایشگاه فضایی ملی ژاپن<sup>۴</sup> پیشنهاد گردید. آنها در حال تحقیق در مورد ساخت مواد عایق حرارتی بودند که نه تنها در سازه های فضایی و راکتورهای جوش هسته ای کاربرد داشته باشد بلکه بتوان از آنها در سیستم فضاپیمای آینده نیز استفاده کرد.

در سال ۱۹۸۷ پروژه ملی به نام (( پژوهش بر روی تکنولوژی پایه برای پیشرفت و توسعه مواد FG برای رهایی و کاهش تنش حرارتی)) زیر نظر موسسه علوم و تکنولوژی دولت ژاپن آغاز گردید [۶]. هدف از انجام این پروژه، ارتقاء دادن ساختار مواد پوشش محافظ های حرارتی پیشرفته برای برنامه های فضایی آینده بود. در این پروژه دانشمندان و محققان هفده موسسه تحقیقاتی و دانشگاه های مختلف گرد هم آمدند تا در مورد موادی که هم بتوانند دماهای بالای حدود ۲۱۰۰ درجه کلوین و هم گرادیان دمایی حدود ۱۸۰۰ درجه کلوین را تحمل کنند، تحقیق کنند. سه مشخصه در ساخت موادی که لازم بود این شرایط را تحمل کنند در نظر گرفته شد.

۱- مقاومت حرارتی و خاصیت ضد زنگ بالا ( آنتی اکسیدان ) در دماهای بالا برای

جداره های خارجی مواد.

<sup>۱</sup> - Bever

<sup>۲</sup> - Duwez

<sup>۳</sup> - Niino

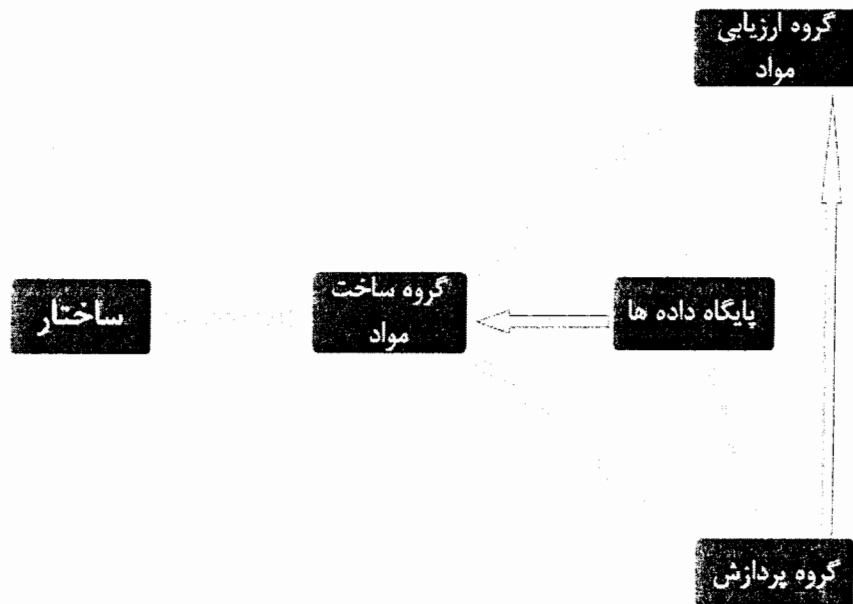
<sup>۴</sup> - NAL

۲- چقرمگی مکانیکی زیاد در طرف سطوح دما پایین.

۳- خاصیت مقاومت و کاهش تنش های حرارتی موثر در سراسر ماده.

برای شرایط گفته شده، نظریه منحصر به فرد مواد FG پیشنهاد گردید که یک نوع ماده مرکب جدید با استفاده از سرامیک های با مقاومت بالای حرارتی در سطوح با دمای بالا و فلزات با چقرمگی زیاد و ضریب هدایت حرارتی بالا در سطوح دما پایین همراه با تغییرات تدریجی ترکیب مواد از سرامیک به فلز ساخته شود تا این شرایط را ارضاء کند. در چنین ساختارهایی ضریب انبساط حرارتی و دیگر خواص ماده با کنترل ترکیب مواد و ریزساختارها و نسبت خلل و فرج بین سطوح داخلی کنترل می گردد.

این پروژه با همکاری سه گروه ساخت و تولید مواد (ساخت مواد) ، پردازش (پایگاه اطلاعاتی) و گروه ارزیابی به صورت فعالانه هدایت می شد. با هماهنگی کردن دقیق کلیه فعالیت ها، سه گروه کار تحقیق و توسعه مواد FG را شروع کردند.



شکل ۲-۳: ساختار فعالیت سه گروه در پروژه ساخت مواد FG [۵]

گروه فرایندهای ساخت با حمایت گروه طراحی مواد، به صورت موفقیت آمیزی قطعات آزمایشی لازم را که چنین نیازهایی را برآورده می کردند، تولید نمودند. این قطعات توسط گروه ارزیابی آزمایش می شدند. ارزیابی قطعات ساخته شده اصولاً به دو صورت انجام می گرفت. در روش اول یک نوع تکنیک لیزری برای ارزیابی مقاومت در برابر شوک و مقاومت خستگی مواد FG به کار گرفته می شد و از روشی دیگر نیز برای برای ارزیابی خواص ترمودینامیکی و به صورت خاص، خواص خستگی حرارتی مواد FG تحت شار حرارتی بالا استفاده می شد. نتایج حاصل از آزمایش های سنجش بالا به گروه ساخت و تولید و گروه طراحی بازگردانده می شد تا بهترین طراحی و ساخت انجام پذیرد. چگونگی ارتباط این گروه ها در شکل ۲-۳ نشان داده شده است [۵].

هدف نهایی این پروژه که از سال ۱۹۸۷ تا ۱۹۸۹ به طول انجامید، ساخت و آماده سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلیمتر و ۱ تا ۱۰ میلیمتر ضخامت بود که قادر بودند دماهایی در حدود ۲۰۰۰ درجه کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ درجه کلوین را به خوبی تحمل کنند. بنا نهادن یک پایگاه داده ای ( مبنای اطلاعات ) با استفاده از جمع آوری داده های آزمایشگاهی در مورد مواد FG نیز از نتایج دیگر این پژوهش به شمار می رفت.

پس از کسب موفقیت در این پروژه، مرحله دوم آن در سال های ۱۹۹۰ و ۱۹۹۱ پیگیری شد. در این مرحله تعداد موسسات همکاری کننده به ۳۲ موسسه افزایش یافت. نتیجه کلی این مرحله، ساخت قطعات بزرگ آزمایشگاهی مواد FG بود که دارای اشکال پیچیده تری بودند. ساخت مواد FG مانند صفحه مربعی شکل با ابعاد ۳۰۰ میلیمتر برای استفاده در قسمت قاعده دماغه سفینه های فضایی و نیم کره با قطر ۵۰ میلیمتر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه نیز در این مرحله با موفقیت انجام گرفت.

تقریباً به صورت هم زمان کشورهای دیگر نیز دست به تحقیق و پژوهش در رابطه با مواد FG زدند. از جمله این کشورها می توان به برنامه ۶ ساله آلمان که در سال ۱۹۹۵ آغاز شد، اشاره کرد. این برنامه دارای ۴ بخش اصلی بود.

۱- تولید مواد FG بر اساس روش های تولیدی که شامل مواد مذاب می باشد. ( ریخته گری

و تصفیه )

۲- روش های تولید مواد FG بر اساس تکنولوژی پودر.

۳- روکش دهی و مدل سازی ترمو الکترونیک.

۴- مواد دارویی حیاتی.

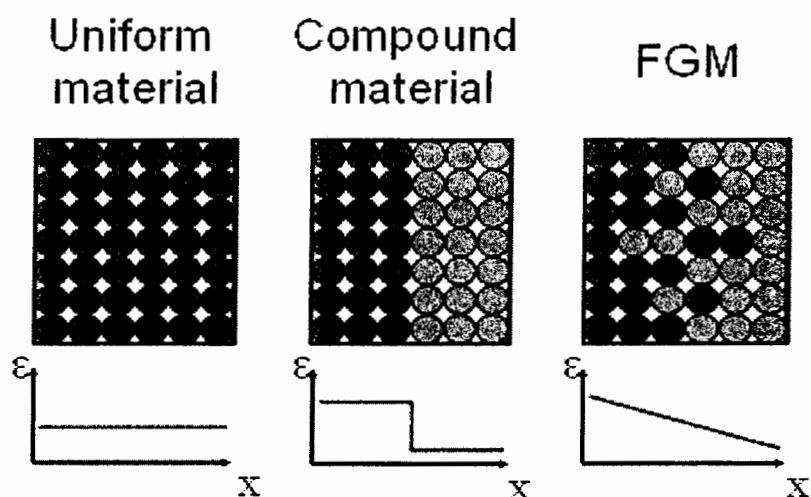
به این صورت مواد FG به تدریج در جهان جایگاه ویژه ای به خود اختصاص دادند. به طوری که اکنون این تکنولوژی در ژاپن به عنوان یکی از ده تکنولوژی برتر شناخته شده است. در سال های اخیر استفاده از مواد FG نه تنها در صنایع فضایی که از اهداف اولیه استفاده از این مواد بوده، بلکه در ساخت اندام های مصنوعی بدن، بخش های انفجاری موتور، وسایل مغناطیسی، ابزارهای برنده و همچنین در سطوح داخلی بسته های میکرو الکترونیک و در هسته مرکزی مواد به کار رفته در سازه های تحت فشارهای بالا و تاخیر اندازه های آتش در ساختارها و ترکیب ها به شدت مورد استفاده قرار گرفته است [۱۶].

## ۲-۴- ویژگی های مواد FG

با توجه به نکاتی که گفته شد و با تحقیقاتی که بر روی مواد FG انجام گرفته است، می توان

ویژگی های زیر را برای مواد FG نام برد [۱۷].

- ۱- مقاومت بالا در برابر گرادیان دمایی بالا. در حقیقت اینگونه مواد با کاهش دادن تنش های حرارتی، اثرات منفی آن را به طور قابل توجهی کاهش می دهند. به کمک این خاصیت می توان در اطراف نقاطی که تنش های حرارتی دارای مقدار بیشینه است و در حقیقت نوعی حالت بحرانی به وجود آمده است، تنش ها را کنترل کرد.
- ۲- به کمک مواد FG می توان استحکام مواد را افزایش داد و از ورود اجسام به منطقه پلاستیک و حتی شکست اجسام تا حدود زیادی جلوگیری کرد.
- ۳- یکی از مهم ترین ویژگی هایی که مواد FG دارند، قابلیت از بین بردن تمرکزهای تنش می باشد. در بسیاری از اجسام به علت وجود شکل های خاص هندسی، تمرکز تنش در برخی از نقاط جسم ایجاد می گردد، مانند لبه های جسم یا در نزدیکی سوراخ های درون جسم که به وسیله مواد FG می توان اثرات آنها را کاهش داد.
- ۴- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد موجب استحکام بین فاز های مختلف می گردد. در مواد مرکب کامپوزیتی تداخل موجود بین ساختارهای زمینه و الیاف تقویت کننده، یک نوع نا هماهنگی در خواص مکانیکی را ایجاد می کند. به عنوان مثال هنگامی که در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می گیرند، ترک ابتدا در پهنه مرزی زمینه و الیاف ایجاد می گردد و سپس در لایه ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می گردد. در شکل ۲-۴ تفاوت در تغییر ساختار مواد ساده، مواد مرکب و مواد FG نشان داده شده است. در مواد FG به علت پیوستگی موجود در خواص، تنش ها و هم گرادیان آنها نیز حالت پیوسته ای پیدا می کنند و این مساله باعث افزایش استحکام مواد FG می گردد.
- ۵- نیروهایی که باعث ایجاد و رشد ترک می گردند با استفاده از مواد FG و یافتن بهترین ترکیب برای تغییر خواص قابل کنترل می باشند.



شکل ۲-۴: مقایسه تغییرات خواص در مواد ساده، مواد مرکب و مواد FG [۱۷]

۶- اگر هنگام قرار دادن یک روکش سخت و ترد بر روی مواد نرم این کار به وسیله تغییرات پیوسته و تدریجی انجام پذیرد، اینکار بسیار ساده تر انجام می گیرد و احتمال جدا شدن لایه کاهش می یابد.

۷- به کمک تغییرات تدریجی خواص مکانیکی در لایه های سطحی می توان از بریدگی های سطحی که باعث ایجاد میدان های تکین می شوند، جلوگیری کرد و خواص تغییر شکل پلاستیک ماده را در اطراف این بریدگی ها تغییر داد.

## ۲-۵- مدل سازی توزیع خواص در مواد FG

روش مرسوم و رایج در مدل سازی خواص مکانیکی مواد FG بر اساس فرض یک پروفیل برای کسر حجمی مواد ترکیب شونده می باشد. در این روش معمولاً از یک چند جمله ای و یا تابع نمایی برای بیان توزیع خواص در اجسام استفاده می گردد. افراد زیادی از این روش



برای تشریح خواص مواد FG استفاده کردند. از شاخص ترین این افراد می توان به نودا<sup>۱</sup> [۱۸] ، اردوگان<sup>۲</sup> ، ردی<sup>۳</sup> [۱۹] و یانیگاوا<sup>۴</sup> اشاره کرد. معمولاً در عبارات مربوط به توزیع خواص مکانیکی، تغییرات را در خواصی مانند ضریب هدایت حرارتی، مدول الاستیسیته و ضریب انبساط خطی در نظر می گیرند و این تغییرات را برای ضریب پواسون در نظر نمی گیرند. علت این امر نیز این است که مقدار ضریب پواسون برای مواد مختلف بسیار نزدیک به هم می باشد و از تغییرات آن برای مواد مختلف می توان صرف نظر کرد.

ردی در مقالات خود برای مواد یک ورق FG با فرض ضخامت یکنواخت و تغییر خواص ورق در جهت ضخامت رابطه زیر را بیان کرده است:

$$p(z) = (p_c - p_m) \left( \frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^n + p_m \quad (1-2)$$

$n$ : نمای کسر حجمی است که بزرگتر یا مساوی صفر می باشد و در حالت  $n=0$  ورق دارای شرایط کاملاً سرامیک می باشد.

$$\begin{array}{ll}
 h: \text{ضخامت ورق.} & m: \text{فاز} \\
 p_m: \text{خواص فلز} & p_c: \text{خواص سرامیک} \\
 c: \text{سرامیک} & 
 \end{array}$$

همانگونه که دیده می شود در  $z = \frac{h}{2}$  ورق کاملاً سرامیک است و در  $z = -\frac{h}{2}$  ورق به طور کامل فلز می باشد. کسر حجمی سرامیک و فلز به ترتیب بیانگر نسبت حجم سرامیک و فلز به حجم کل آنها است.

رابطه فوق برای پوسته های استوانه ای ساخته شده از مواد FG به دو صورت زیر ارائه می گردد:

<sup>۱</sup> -Noda

<sup>۲</sup> - Erdogan

<sup>۳</sup> - Reddy

<sup>۴</sup> - Yanigawa

$$p(z) = (p_c - p_m) \left( \frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^n + p_m \quad (2-2)$$

$$p(z) = (p_m - p_c) \left( \frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^n + p_c \quad (3-2)$$

در محیط های نیمه بینهایت دارای ترک نیز می توان از پروفیل زیر برای مدل سازی مواد FG استفاده کرد که توسط نودا ارائه شده است.

$$\begin{aligned} E &= E_0 \exp(\beta z) & \alpha &= \alpha_0 \exp(\gamma z) \\ K &= K_0 \exp(\delta z) & \nu &= \nu_0 (1 + \varepsilon_y) \exp(\eta z) \end{aligned} \quad (4-2)$$

کاپوریا<sup>۱</sup> [۲۰] نیز رابطه زیر را برای تغییرات کسر حجمی سرامیک و فلز ( $V_m, V_c$ ) در راستای ضخامت بر اساس قاعده توانی در نظر گرفته است.

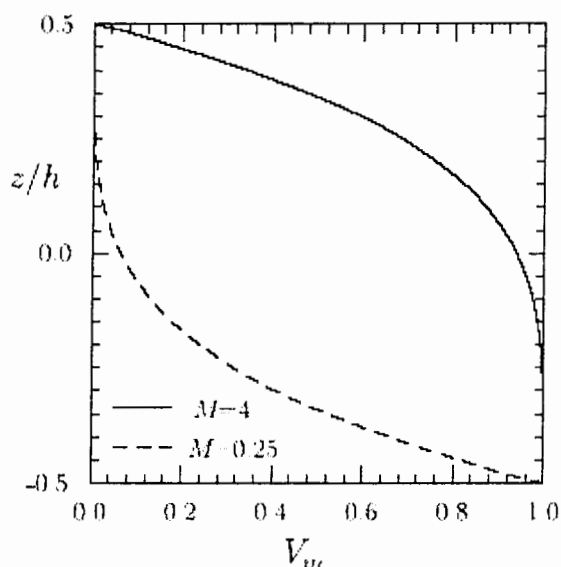
$$V_m(z) = \begin{cases} 1 - \left( \frac{z}{h} + 0.5 \right)^M & M \geq 1 \\ 1 - \left( \frac{z}{h} + 0.5 \right)^{1/M} & M \leq 1 \end{cases} \quad (5-2)$$

$$V_c(z) = 1 - V_m(z)$$

که در این دو رابطه  $M$  یک عدد حقیقی غیر صفر می باشد. تغییرات  $V_m$  برای مقادیر  $M=4$  و  $M=0.25$  در شکل ۲-۵ بر حسب تغییرات ضخامت رسم شده است [۲۰].

روابط دیگری نیز برای مواد FG بیان گردید که هم به صورت چند جمله ای و هم به صورت نمایی بوده است ولی نکته بسیار مهمی که باید به آن توجه کرد این است که روابطی که از آنها استفاده می کنیم علاوه بر آنکه نیازهای موجود در مساله را بر طرف می کنند بایستی قابلیت ساخته شدن را نیز داشته باشند.

<sup>۱</sup> - Kupuria



شکل ۲-۵: تغییرات کسر حجمی فلز در راستای ضخامت [۲۰]

## ۲-۶- فرایندهای تولید مواد FG

### ۲-۶-۱- شاخه‌های فرایند تولید

یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های فرایندهای تولید مواد FG طیف بسیار وسیع روش‌های موجود برای تولید اینگونه مواد می‌باشد. به طور کلی می‌توان روش‌های تولید مواد FG را به دو گروه عمده تقسیم کرد. در گروه اول فرایندهای تولید، مواد FG به صورت لایه لایه ساخته می‌شوند. این تکنیک‌های ساخت را فرایندهای ساختمانی می‌گویند، چرا که تغییرات تدریجی در خواص، به صورت دقیق در حالت فضایی ایجاد می‌گردد. این نوع فرایندها به طور جامع نتیجه‌ای از پیشرفت‌های گسترده و شگرف انجام شده در زمینه اتوماسیون ساخت مواد پیشرفته می‌باشد.

در فرایندهای ساختمانی، تغییرات تدریجی توسط انباشته شدن (توده کردن) مواد با یک اسلوب برنامه‌ریزی شده انجام می‌گیرد. با توجه به روش ساخت در این گروه، مدل‌های ایجاد

شده را می توان به هر شکل و با هر گونه تغییرات دلخواهی سازگار کرد. به همین دلیل اساساً هیچگونه محدودیتی در چگونگی تغییرات تدریجی وجود ندارد. این مساله یک نوع انعطاف پذیری مناسب برای طراح ایجاد می کند. البته با وجود نکات مثبت زیادی که در این روش ها وجود دارد، این روش های تولید از لحاظ هزینه بسیار گران و بسیار وقتگیر می باشند و هر چه دقت ساخت در این روش ها افزایش می یابد این مشکلات به صورت چشمگیری خود را نشان می دهند.

گروه دوم فرایندهای تولید مواد FG، بر پدیده انتقال طبیعی برای ایجاد تغییرات تدریجی در یک جزء از مواد موجود تکیه دارد. اینگونه فرایندها از جریان سیال، انواع انتشار اتمی یا انتقال حرارت برای تولید تغییرات تدریجی در ریزساختارهای محلی و یا ترکیب های موجود بهره می گیرند. انتشار حرارت و جرم قرنیها برای ایجاد تغییر تدریجی در عملکردها و گرادیان های ریزساختاری و یا ترکیبی فولاد به کار گرفته شده اند. جریان سیال و انتشار حالت جامد در طول فرایند جامد سازی پاسخگوی تفکیک کریستال ها در ساخت مواد الیازی ریخته گری می باشند. به این ترتیب می توان به گونه ای دیگر از روش ها برای ایجاد تغییرات تدریجی در ساختارها دست یافت [۱۷].

به طور کلی و طبیعی پدیده های تفکیکی وجود دارند که برای ایجاد تغییرات تدریجی مناسب در یک جزء به کار گرفته می شوند. اگر این فرایندها از لحاظ کمی درک گردند و تحت کنترل در آیند، تغییرات تدریجی تولید شده ولو در یک باریکه محدود از ساختارهای ممکن، قابل بهینه سازی هستند. نکته ای که در این روش ها حائز اهمیت می باشد این است که در ادامه امر تغییرات تدریجی، پدیده انتقال تمایل زیادی به از بین بردن تغییرات ایجاد شده در ابتدای سیکل فرایند تولید مواد FG دارد که باید به صورت مطلوبی کنترل گردد. از طرف دیگر با توجه چگونگی فرایند انتقال، این روشها انعطاف پذیری روش های تولید ساختمانی را ندارند و اجازه پیش گزینش پروفیل های مورد نظر برای تغییرات تدریجی از یک فهرست نامحدود را ممکن نمی سازند.

از لحاظ ساختاری نیز دو نکته بسیار مهم در ساخت مواد FG به این روش وجود دارد که حتماً باید در نظر گرفته شود. اول آنکه سرامیک در هنگام وارد شدن به فاز مذاب تشکیل کلوخه سرامیکی ندهد و دوم این که جنس سرامیک و فلز به گونه ای باشد که در دماهای بالا با هم واکنش شیمیایی ندهند. مثلاً برای جلوگیری از تشکیل کلوخه می توان از ذرات ریزتر سرامیک کمک گرفت [۲۱].

این گونه روش ها از لحاظ زمانی و هزینه ای بسیار مناسب تر از روش های تولید ساختمانی می باشند. ولی بر خلاف روش های ساختمانی در این گروه طراح در چگونگی قرار گرفتن ساختار ماده آنچنان آزاد نیست و حتماً باید شرایط انتقال را در نظر بگیرد. در ضمن به علت اینکه در روش های انتقال طبیعی از شرایط محیطی برای ایجاد تغییرات در خواص مواد FG استفاده می شود در صورت منطقی و مناسب بودن شرایط ایجاد شده، نتایج مطلوب تری به دست خواهیم آورد و تغییرات در شرایط کاملاً هموار و پیوسته به وجود می آیند. در ادامه به صورت مختصر برخی از این روش ها را ارائه می کنیم.

## ۲-۶-۲- فرایند تثبیت پودر حالت جامد

برای ساخت مواد با تغییرات تدریجی تک جهته ساختمانی، از تکنیک های متنوع لایه بندی پودر استفاده می گردد. به طور کلی برای تولید یک ماده FG به کمک فرایندهای موسوم به تکنولوژی پودر، یک جرم که تغییرات تدریجی خواسته شده در کسر حجمی فازها را در بر دارد، از قبل به شکل پودر در آورده می شود. پودر مذکور سپس با فرایندهایی نظیر پرس سرد تحت فشار و پرس ایزواستاتیک گرم متراکم می شود. یکی از روش هایی که به وفور از آن استفاده می شود فرایندی است که در آن لایه های جداگانه ای که دارای ساختار ایزوتروپیک، درون خود می باشند را مهیا و انباشته می سازند و سپس با روی هم قرار دادن لایه های مختلف، تغییرات مورد نظر را

ایجاد می کنند. یکی از مهم ترین مزیت های این روش این است که در این روش محدودیتی برای ایجاد گرادیان های دلخواه در خواص مورد نظر که قابل دسترسی هستند وجود ندارد. ولی باید توجه داشت که در هنگام اتصال لایه های مجاور تغییرات در سطوح تماس کاملاً یکنواخت باشد و اختلافی بین خواص دو لایه در محل اتصال وجود نداشته باشد.

### ۲-۶-۳- فرایندهای روکش دهی

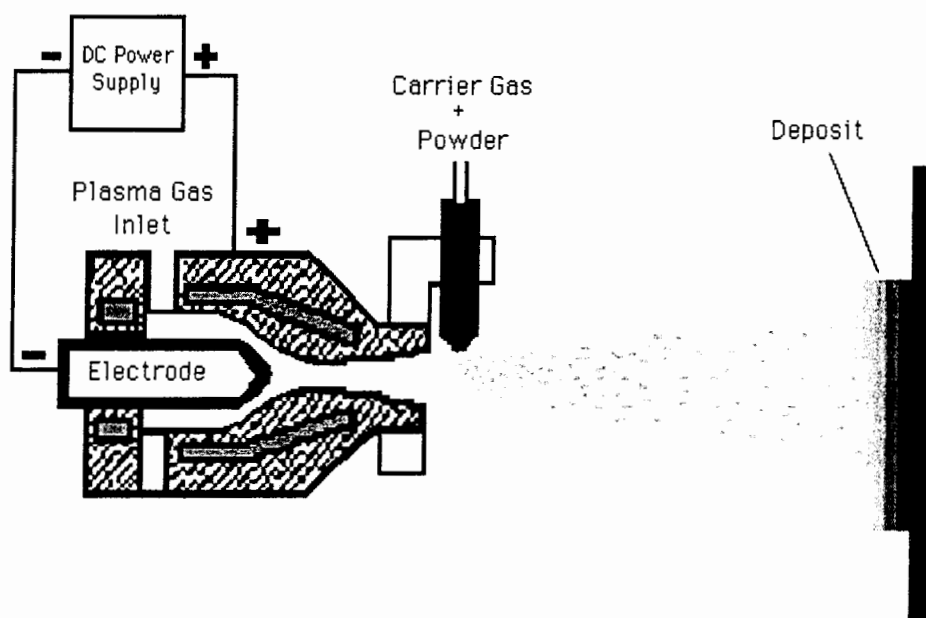
در بسیاری از کاربردها، لایه های با تغییرات تدریجی می توانند به عنوان یک انتقال بهینه بین یک جز توده و یک پوشش خارجی که قسمت زیرین را از شرایط ناملایمی مانند خوردگی و فرسایش محافظت می کند به خدمت گرفته شود. با توجه به اینکه معمولاً ضخامت مورد نظر برای تغییرات ناچیز می باشد، زمان لازم برای ساخت اینگونه سطوح ناچیز می باشد به همین دلیل از روش هایی مثل پاشش پلاسما، روکش دهی لیزری و ته نشین کردن بخار فازها به خوبی می توان بهره گرفت.

### ۲-۶-۳-۱- فرایند پاشش پلاسما

در فرایند پاشش پلاسما، ذرات پودر به قطر ۱۰۰ میکرون به سرعت گرم می شوند و شتاب می گیرند و پس از آن در جای خود قرار داده می شوند. نکته مثبتی که در این روش وجود دارد این است که به علت ریز بودن ذرات، فازهای دیرگداز و مقاوم را می توان به راحتی گداخته کرد و آنها را به هر نسبتی که مورد نظر باشد مخلوط کرد [۲۲]. در شکل ۲-۶ شکل شماتیک این روش نشان داده شده است [۲۳].

## ۲-۳-۶-۲- ته نشانندن افشانکی حرارتی

این فرایند از لحاظ ساختاری بسیار شبیه فرایند پاشش پلاسما می باشد. در این روش یک فواره از فلز که از قبل به صورت مذاب در آورده شده است به پودر تبدیل می گردد و بر لایه های دیگر که حالت جامد دارند افشانده می شود.



شکل ۲-۶: شکل شماتیک روش پاشش پلاسما برای ساخت مواد FG [۲۳]

## ۲-۳-۶-۳- روکش دهی لیزری

این روش برای ساخت یک لایه نازک بر روی بستر زمینه انجام می گیرد. ابتدا مقدار کمی از ماده روکش را بر روی سطح بستر قرار می دهند. سپس به وسیله لیزر این لایه را با یک لایه نازک از بستر گداخته کرده و باعث همجوشی این دو لایه می گردند. این مساله باعث می گردد که لایه ایجاد شده دارای زمینه اصلی خواص ماده بستر و کمی هم از خواص ماده روکش باشد. حال یک لایه دیگر از ماده روکش را بر روی این لایه قرار داده و دوباره با لیزر لایه ای جدید ساخته

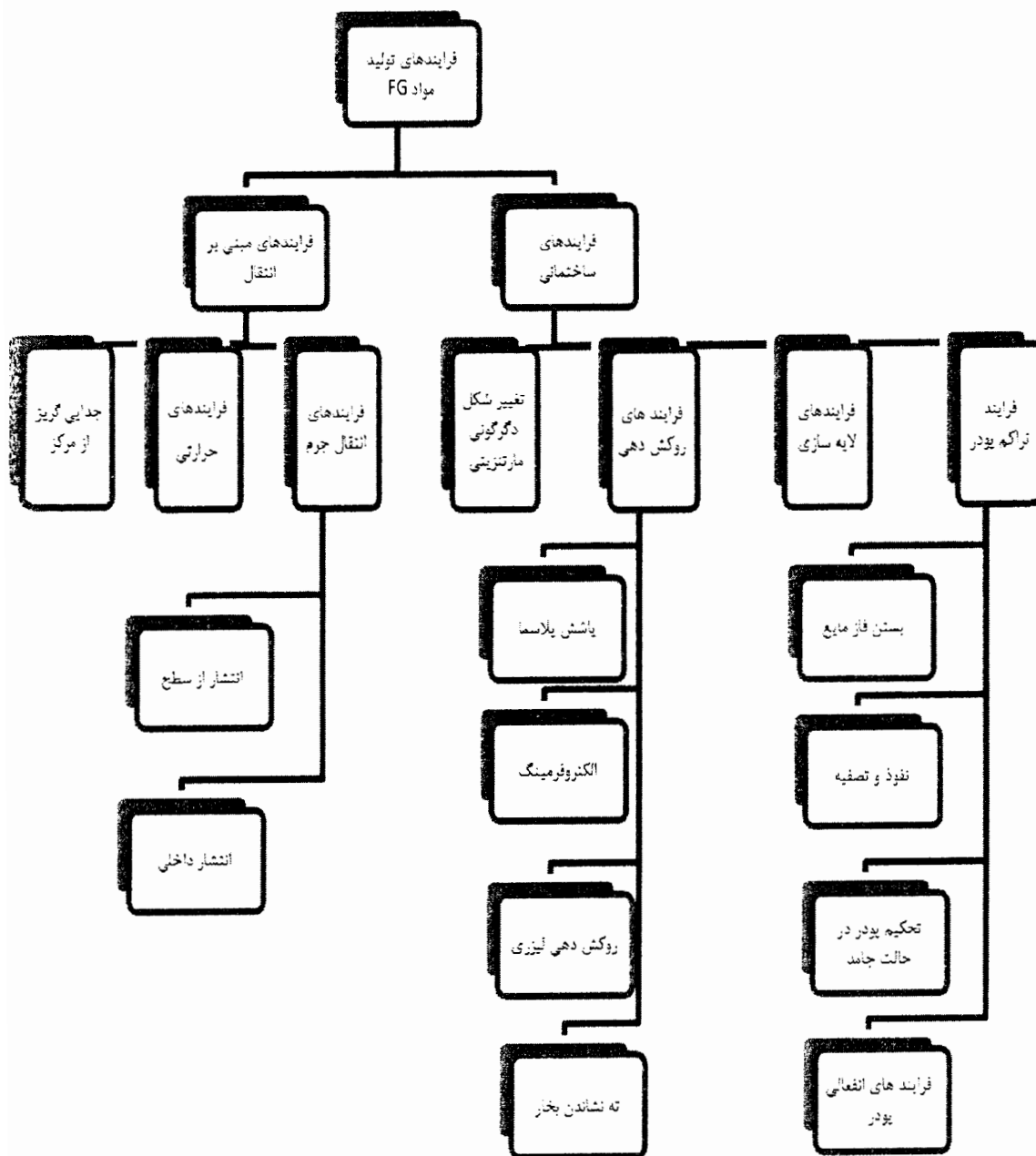
می شود با این تفاوت که در این لایه خواص سطح بستر کمتر و خواص ماده روکش بیشتر شده است. اگر این کار به صورت مداوم ادامه یابد یک سری لایه که دارای تغییرات تدریجی پیایی هستند ایجاد می گردد. پروفیل های تغییرات تدریجی می توانند با توجه به مقدار و ضخامت لایه های اولیه و همچنین عمق ناحیه گداخته شده کنترل گردند که کنترل خود این موارد با توجه به قدرت لیزر به کار رفته و سرعت حرکت آن کنترل می گردد. این روش برای روکش دهی تیتانیوم به وسیله آلیاژهای تیتانیوم - آلومینیوم کاوش شده است.

## ۲-۶-۴- جدا سازی گریز از مرکز

یک گروه از فرایندهای تولید مواد FG، تولید یک سوسپانسیون از ذرات یک فاز در یک زمینه مایع از فاز دیگر را شامل می گردد که با جدا سازی فلز جامد و مایع توسط قرار دادن مخلوط سوسپانسیون در یک محیط دارای نیروی گریز از مرکز انجام می پذیرد. هنگامی که مخلوط موجود تحت نیروی گریز از مرکز قرار می گیرد، دو منطقه قابل تشخیص از هم ایجاد می گردد که این دو قسمت به وسیله یک منطقه میانی که دارای تغییرات تدریجی هستند به یکدیگر متصل می باشند [۲۴].

میزان جداسازی ذرات از هم و چگونگی قرار گرفتن آنها در ظرف ریخته گری به اندازه ذرات، دانسیته فلز، سرعت خنک سازی و شتاب دستگاه گریز از مرکز بستگی دارد. وابستگی چگونگی ساختار به چگالی ذرات اینگونه است که ذرات با چگالی کمتر به سمت مرکز و محور چرخش رانده می شوند، در صورتیکه ذرات با چگالی بیشتر به سمت کناره ها رانده می شوند. در شکل ۲-۷ دسته بندی روش های ساخت مواد FG نشان داده شده است [۱۷].





شکل ۲-۷: دسته بندی روش های گوناگون برای ساخت مواد FG [۱۷]

# فصل سوم

## روش تحلیل بدون

## المان گالرکین

### ۳-۱- مقدمه

در تحلیل مسایل مهندسی، به ویژه در حیطه مهندسی مکانیک، مسایل موجود رفته رفته با چالش فکری و عملی بیشتری مواجه می گردند. اکنون بسیاری از سازه های ساخته شده به دست بشر - مانند هواپیماها - آنچنان حساس و پیچیده شده اند که باید ریسک از کار افتادن یا خرابی قطعات در آنها بسیار اندک باشد. در حیطه مهندسی مکانیک، یکی از مواردی که توجه به آن بسیار مهم و ضروری می باشد تحلیل های مربوط به شکست قطعات می باشد که نکته اصلی در اینگونه مسایل نیز بررسی و آنالیز ترک های موجود در قطعات می باشد. به همین دلیل در

تحلیل و شبیه سازی فرایندهای خرابی مواد، نیاز به مدلی است که بتواند گسترش ترک را در مسیرهای پیچیده و دلخواه میسر سازد.

در ابتدای گسترش آنالیزهای قطعات و در دهه های گذشته، بیشتر سعی بر آن بود که اینگونه آنالیزهای پیش از ساخت توسط روش های تحلیلی انجام پذیرد ولی پیچیده تر شدن مسایل باعث گردید که در بسیاری از موارد روشهای تحلیلی صرف، به علت ساده سازی های فراوان و بیش از حد، کارایی خود را از دست بدهند.

پس از آن، ابداع روش های حل عددی و پیشرفت تکنولوژی های مربوط به کامپیوترهای محاسباتی باعث گردید، روش هایی که اساس آن بر شبکه بندی هندسه ساختار مسایل بود - از جمله المان محدود، تفاضل محدود و احجام محدود - برای آنالیز قطعات به کار گرفته شوند که این امر باعث گردید تا بسیاری از نقیصه های موجود در روش های تحلیلی مرتفع گردند. بر اساس این روش ها صد ها برنامه و نرم افزار جامع برای آنالیز موضوعات در زمینه های مختلف طراحی گردید. ولی این روش ها نیز به نوبه خود دارای مشکلات زیادی بودند. چرا که هر کدام از این روش ها نیازمند در نظر گرفتن تمهیدات و تدابیر خاصی در مدل سازی و پیش بینی تغییرات در ساختار شبکه خود بودند که در موارد متعددی انجام آنها به سادگی امکان پذیر نبود.

برای رفع این مشکلات، گروه جدیدی از روش های حل معادلات دیفرانسیلی ارائه شده اند که در اینگونه روش ها نیازی به شبکه بندی متعارف مانند آنچه در روش های المان محدود نیاز بود، وجود ندارد. در این روش ها تقریب های عددی حل معادله دیفرانسیلی، نه بر مبنای المان ها و روابط پیوستگی بین آنها، بلکه بر مبنای مجموعه ای از نقاط انجام می پذیرد و هیچگونه المان بندی و یا مشخصات و ویژگی هایی برای پیوستگی نقاط مشترک برای ساخت معادلات گسسته سازی نیاز نیست. به این گونه روشها اصطلاحاً روش های تحلیل بدون المان یا بدون

شبکه<sup>۱</sup> گفته می شود. این مساله باعث می گردد که اینگونه تحلیل ها قابلیت سازگاری بیشتری با شکل های پیچیده و تغییر شکل های شدید و بیش از حد داشته باشند.

البته به علت اینکه پرداختن به این روش ها قدمت زیادی ندارد، می توان گفت اینگونه روش ها شکل استاندارد کاملی به خود نگرفته اند و چگونگی تحلیل و میزان همگرایی نتایج در این روش ها در برخی موارد به صورت بسیار شدید به انتخاب برخی پارامترهای دلخواه و اختیاری وابسته است که این مساله، همگرایی نتایج این روش را تحت الشعاع خود قرار می دهد. به همین دلیل استفاده از این روش ها برای افرادی که آشنایی کافی و مناسب با این روش ها را ندارند، بسیار دشوار می باشد. در ضمن این روش ها از لحاظ ساختاری شکل پیچیده تری نسبت به روش های مرسوم المان محدود و دیفرانسیل محدود دارند که این موضوع خود باعث دشوارتر شدن استفاده از این روش ها می گردد.

به طور خلاصه اینگونه می توان بیان کرد، در مسایلی که تغییر شکل های بزرگ و غیر قابل پیش بینی وجود دارد، تکیه بر روش های مرسوم مکانیک محاسباتی که بر پایه شبکه های المان بندی شده بنا شده اند منجر به افت شدید دقت محاسباتی می گردد. چرا که ممکن است در طی روند تحلیل مساله، تغییر شکل های المان ها به مشکلات عددی ناخواسته ای منجر گردد. به عنوان مثال در مواردی ممکن است در حوزه تحلیل، نقاط منفردی که در آنها تغییرات شدیدی در پاسخ ها ایجاد می گردد، وجود داشته باشد. استفاده غیر معقول و ساده از این روش ها در چنین نقاطی باعث ایجاد خطای فراوان در تحلیل می گردد. نمونه بارز این مساله تحلیل ترک در مکانیک خستگی می باشد. با رشد ترک، المان هایی که با هم در ارتباط هستند از هم گسیخته می شوند و ساختار شبکه به طور کلی تغییر می کند. در اینگونه روش ها برای مرتفع ساختن این مساله به شبکه بندی مجدد دامنه حل پرداخته می شود. انجام این کار نیز با توجه به آنکه اگر

<sup>۱</sup> - Mesh less

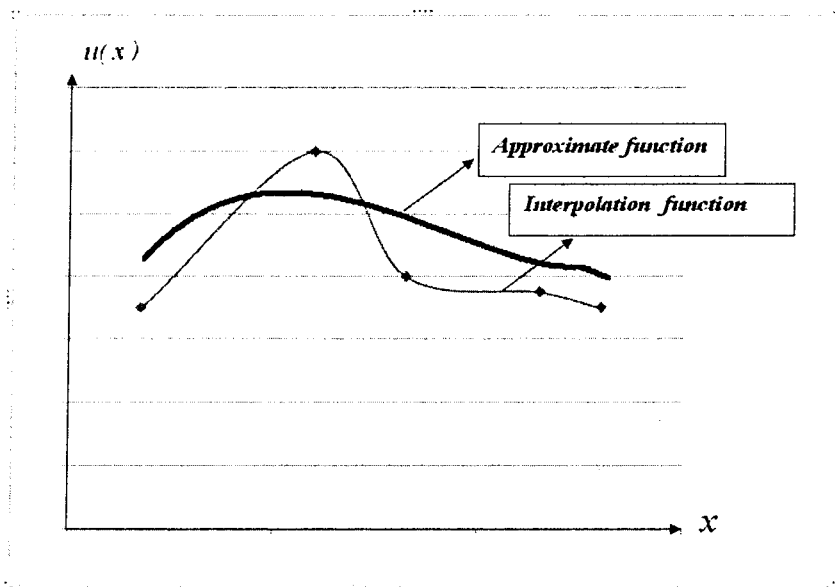
دقت بالایی در تحلیل لازم باشد، باید بازسازی شبکه در فواصل بسیار کم انجام پذیرد، این امر زمان و هزینه بسیار زیادی را به خود اختصاص خواهد داد. همچنین در بین این مراحل باید هماهنگی بین المان ها و متغیر ها در شبکه های متوالی حفظ گردد که این مطلب نیز به تجربه، دقت و صرف زمان زیادی نیاز دارد. از طرف دیگر اگر تغییر شکل های زیادی داشته باشیم المان ها ممکن است از شکل طبیعی خود خارج گردند. به صورتی که اگر زاویه بین اضلاع المان از حدود ۳۰ درجه کمتر و یا از ۱۲۰ درجه بیشتر گردد، در نتایج خطاهای بسیار دیده می شود و یا اینکه نتایج مساله به طور کامل واگرا می گردند. به همین خاطر می توان با توسعه روش های بدون المان، گام موثری در بهینه سازی روش های حل عددی بنا نهاد تا بر مشکلات روش های المان محدود غلبه کرد.

### ۳-۲- روش های بدون المان

از لحاظ مفهومی تفاوت اساسی موجود میان روش های المان محدود و روش های بدون المان، ناشی از تفاوت میان مفاهیم تقریب و میانیابی می باشد. فرض کنید در یک دامنه از مساله در نقاطی خاص ( نقاط پایه ) مقدار جواب مساله موجود باشد ولی در دیگر نقاط، مقدار مساله مجهول باشد و بخواهیم جواب کلی را به صورت یک میدان یا تابع در تمامی نقاط دامنه به دست آوریم. اگر در صورت تحلیل قید شده باشد که تابع داده شده از مقادیر نقاط پایه عبور کند، نتیجه به دست آمده را میانیابی می گویند ولی اگر تولید تابع، نرمی از میان مقادیر پایه مورد نظر باشد و لزومی برای عبور از روی خود نقاط پایه در آن وجود نداشته باشد، غالباً نتیجه را تقریب می گویند. حال فرض کنید تنها در نقاط کمی که نقاط پایه هستند مقادیر تابع تقریب زنده موجود باشد و به کمک یک تابع تقریب زنده بخواهیم ناپیوستگی موجود بین مقادیر را رفع کنیم. در روش اجزای محدود ناحیه کل را به قطعاتی با هندسه های ساده تر تفکیک می کنیم. در هر یک

از این مناطق با استفاده از مقادیر موجود در نقاط پایه آن محدوده، با انتخاب یک روش مناسب اقدام به ایجاد یک تابع درونیاب می‌کنیم. به این ترتیب این تابع لزوماً می‌بایست از مقادیر نقاط پایه عبور کند [۷].

در روش های بدون المان تمام میدان حل به عنوان یک المان در نظر گرفته می‌شود. اما چون در این محدوده تعداد نقاط پایه بسیار زیاد می‌باشد با انتخاب معیاری مناسب تابع تقریب زننده را از بین مقادیر پایه عبور می‌دهیم و لازم نیست حتماً تابع از روی مقادیر موجود عبور کند. در شکل ۱-۳ تفاوت میان این دو روش به صورت فیزیکی نشان داده شده است.



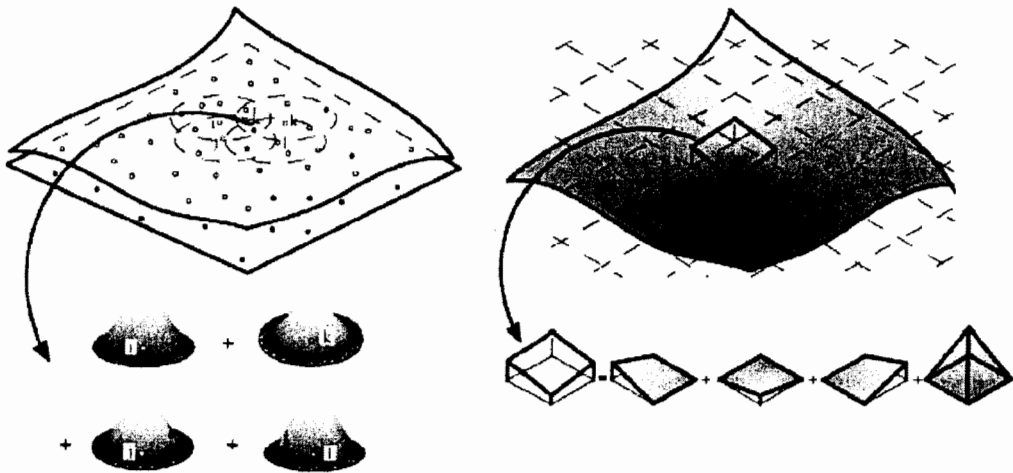
شکل ۱-۳: تفاوت بین روش های تقریب و میانیابی

از لحاظ ساختاری نیز تفاوت بین این دو روش با توجه به فرم توابع شکل آنها کاملاً مشخص می‌گردد. به طوریکه در توابع شکل روش های المان محدود، تابع شکل مربوط به هر گره باید در آن گره مقدار واحد را داشته باشد و در باقی نقاط مقدار صفر را اتخاذ کند که این امر باعث می‌گردد مقدار تقریب زده شده با مقدار واقعی یکسان گردد ولی در روش های بدون المان که از

تقریب زنده های حداقل مربعات متحرک استفاده می کنند این شرط ارضا نمی گردد که این مساله باعث ایجاد مشکلاتی در اینگونه ساختارها می گردد.

نکته مهم در روش های تحلیل بدون المان، امکان تسهیل آنالیز خطا و دقت در سازگار سازی شبکه در مسایل با مرزها و ناپیوستگی های متحرک می باشد. به عنوان مثال در مساله مربوط به گسترش ترک، می توان به تعداد دلخواه نقاط فراوان حول نوک ترک اضافه کرد تا ضرایب شدت تنش با دقت مطلوبی محاسبه گردد.

نکته مثبت دیگر این روش ها این است که بر خلاف روش های اجزای محدود که تغییر دادن یک المان باعث تغییر در المان های مجاور می شود - که این مطلب نیز خود باعث تغییر اساسی در ساختار کلی شبکه می شود - در این روش ها برای افزودن هر تعداد نقاط دلخواه برای بالا بردن دقت در تحلیل مساله نیاز به هیچگونه تغییر در دیگر موارد ساختار شبکه نمی باشد.



توابع شکل در روش بدون المان

توابع شکل در روش المان محدود

شکل ۳-۲: مقایسه توابع شکل در روش های المان محدود و روش های بدون شبکه [۲۵]

از طرف دیگر در این دو روش تفاوت اساسی بین توابع شکل تخمین زننده نتایج وجود دارد. به صورتی که در روش های اجزای محدود از توابع شکل خطی استفاده می گردد در صورتی که در روش های بدون المان توابع شکل، دارای درجات بالاتری از چند جمله ای ها می باشند و گاهی از توابع شکلی که به صورت نمایی می باشند استفاده شده است که نتایج قابل قبولی از خود نشان داده اند. در شکل ۳-۲ [۲۵] توابع شکلی مربوط به دو روش و چگونگی تاثیر آنها بر تقریب در یک نقطه نشان داده شده است.

یکی دیگر از مزایای این روش این است که اگر در نقطه ای دلخواه بخواهیم پارامترهایی را محاسبه کنیم کافی است در آن نقطه یک گره قرار دهیم و با انجام محاسبات مقادیر به دست آمده برای آن نقطه را یادداشت کنیم. در حالی که در روش های المان محدود به دلیل آنکه نتایج به دست آمده مربوط به نقطه مرکزی المان می باشد اگر نقطه مورد نظر ما در قسمت های دیگر المان باشد لازم است یا با تقریب از همان نتایج نقطه مرکزی استفاده کنیم و یا اینکه با استفاده از روش های تقریبی نتایج در نقطه مورد نظر را حدس بزنیم و یا اگر نقطه مورد نظر بر روی مرز بین المان ها باشد از تقریب میان دو المان استفاده کنیم.

### ۳-۳- روش بدون المان گالرکین

یکی از روش های بدون المان که بیش از دیگر روش ها مورد توجه قرار گرفته است، روش بدون المان گالرکین می باشد. اولین مقاله ای که در این رابطه انتشار یافته است در سال ۱۹۹۴ توسط بلیچکو<sup>۱</sup> [۷] و همکارانش منتشر گردید. در این مقاله، کاربرد توابع حداقل مربعات متحرک در تولید سطوح بیان گردید. در روش بدون المان گالرکین با به کارگیری تقریب روش حداقل

<sup>۱</sup> - Blytschko



مربعات متحرک (MLS) شرایط پیوستگی لحاظ می گردد و توابع شکل بر این اساس ساخته می شوند (معادله ۱-۳).

$$s(x) = \sum_{l=1}^{n_{sn}} w(x - x_l) [u_l - p^T(x_l) a(x)]^2 \quad (1-3)$$

این روش بر سه پایه استوار است [۲۶]:

۱- تابع وزنی با محدوده اثر فشرده برای هر گره  $w(x - x_l)$ .

۲- یک چند جمله ای پایه  $p^T(x_l)$ .

۳- مجموعه ای از ضرایب مجهول که به موقعیت مکانی بستگی دارند  $a(x)$ .

همانگونه که دیده می شود این روش بسط یافته روش حداقل مربعات استاندارد می باشد که به صورت زیر تعریف می شود.

$$s(x) = \sum_{l=1}^{n_{sn}} [u_l - p^T(x_l) a(x)]^2 \quad (2-3)$$

تفاوت بین این دو روش کاملاً مشهود می باشد و همانگونه که دیده می شود در روش حداقل مربعات استاندارد، تابع وزنی موجود در روش حداقل مربعات متحرک وجود ندارد. به طور مختصر می توان گفت این عبارت باعث می گردد که نقاط شرکت کننده در تقریب، اثر یکسانی بر مقادیر به دست آمده نداشته باشند که این مساله خود باعث می شود میزان همگرایی در این روش افزایش یابد. در ادامه به صورت مفصل در مورد هر یک از این عبارات شرح داده می شود.

این روش دارای امتیازات زیادی است که در زیر به برخی از این امتیازات اشاره می گردد [۲۷]:

۱- این روش هیچگونه قفل شدگی حجمی را ایجاد نمی کند، حتی اگر توابع پایه خطی باشند.

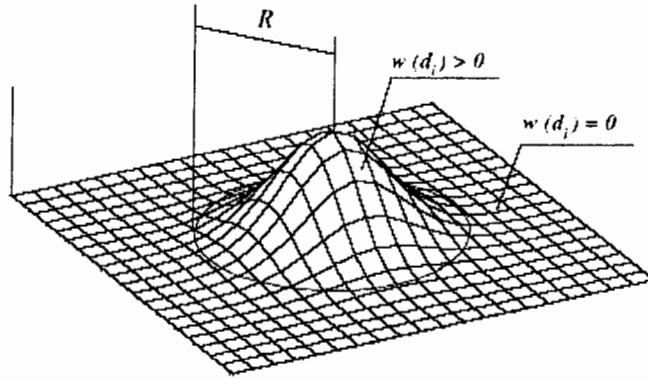
۲- سرعت همگرایی را در این روش می توان به مقدار زیادی نسبت به روش های المان محدود افزایش داد.

۳- حتی در شرایطی که مساله با گرادیان های شدید محلی مواجه است می توان به نتایجی با قدرت تفکیک بالا دست پیدا کرد.

### ۳-۴- توابع وزنی

توابع وزنی بیان شده در معادله ۳-۱ در اصل عبارات چند جمله ای یا نمایی می باشند که به صورت کاملاً مستقیم بر روی توابع شکل تاثیر می گذارند. محدوده اثر تابع وزنی برای هر گره یک دامنه تاثیر تعریف می کند که در اصل زیر دامنه ای است از دامنه کلی جسم که در آن محدوده، هر گره خاص بر تقریب MLS تاثیرگذار است و گره هایی که خارج از این محدوده می باشند هیچگونه اثری بر روی میزان تقریب ندارند. همچنین در دامنه تاثیر نیز نقاطی که در فاصله بیشتری از نقطه مرکزی هستند اثر کمتری بر روی تقریب می گذارند که این مساله باعث افزایش دقت در این روش می گردد. علت این موضوع را اینگونه می توان بیان کرد که بین تمامی گره های داخل دامنه نوعی تاثیر متقابل وجود دارد ولی طبیعی است که نقاط نزدیکتر اثر بیشتری در این بر هم کنش دارند، به همین دلیل در محاسبات نیز باید اثر آنها بر روی گره های مرکزی بیشتر باشد. همپوشانی بین دامنه گره ها تعیین کننده پیوستگی بین نقاط می باشد.

البته باید توجه داشت، انتخاب توابع وزنی باید به صورتی باشد که هم دارای جواب یگانه برای  $a_i(x)$  باشند و هم اینکه این توابع دارای مقدار مثبت باشند. باید به این نکته نیز توجه داشت که مقدار تابع وزنی  $w(x-x_i)$  بر روی تقریب  $u^h(x)$  تاثیر به سزایی دارد. در روش تحلیل بدون المان گالرکین عموماً تابع وزنی  $w(x-x_i)$  به گونه ای انتخاب می شود که با افزایش مقدار  $\|x-x_i\|$  مقدار آن به صورت پیوسته کاهش یابد. برای درک بهتر این مطلب در شکل ۳-۳ [۲۸] یک تابع وزنی فرضی نشان داده شده است. همانگونه که در این شکل دیده می شود نکات ذکر شده، در این تابع لحاظ شده است.



شکل ۳-۳: تصویر کیفی یک تابع وزنی [۲۸]

برای ساده سازی شکل این توابع، متغیرهای زیر تعریف شده اند:

$$r = \frac{d_i}{d_{im}} \quad d_i = \|x - x_i\| \quad (۳-۳)$$

در این روابط  $d_{im}$  شعاع دامنه تاثیر گره  $I$  ام می باشد. اکنون تابع وزنی را می توان به صورت ساده تر و فشرده تری بر حسب فاصله نرمال شده  $r$  بیان کرد. چند تابع وزنی متداول در این رابطه به صورت زیر بیان شده است.

تابع وزنی گوسی [۲۹]:

$$w(r) = \begin{cases} e^{-(r/0.4)^2} & \text{for } r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (۴-۳)$$

تابع وزنی اسپلاین درجه سوم [۳۰]:

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{for } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{for } \frac{1}{2} < r < 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (۵-۳)$$

تابع وزنی چند جمله ای درجه چهارم [۸]:

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{for } r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (6-3)$$

تابع وزنی چند جمله ای درجه سوم:

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 3r^2 + 2r^3 & \text{for } r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (7-3)$$

توابع وزنی اسپلاین درجه سوم و چند جمله ای درجه ۴ پیوستگی  $C^2$  دارند و تابع وزنی چند جمله ای درجه سوم و گوسی نیز پیوستگی  $C^{-1}$  دارند ولی تابع گوس در اهداف محاسباتی پیوستگی  $C^1$  یا بالاتر از خود نشان می دهد.

شعاع محدوده اثر در یک گره مفروض،  $d_{im}$ ، با رابطه زیر بیان می گردد:

$$d_m = d_{max} \cdot c_i \quad (8-3)$$

که  $d_{max}$  ضریب مقیاس و  $c_i$  فاصله مطلوب برای جستجوی گره های به اندازه کافی نزدیک به گره مرکزی است که شرایط چند جمله ای را ارضا کنند و برابر کمترین شعاع دامنه تاثیر مجاز برای گره I ام می باشد که همان فاصله گره I تا نزدیکترین گره مجاور می باشد.

ضریب مقیاس دامنه تاثیر  $d_{max}$ ، نیز معمولاً برای تحلیل های استاتیکی مقادیر ۲ و برای تحلیل های دینامیکی مقداری بین ۲ تا ۲٫۵ را اختیار می کند. باید توجه داشت با اینکه ابعاد دامنه تاثیر مقداری دلخواه و اختیاری می باشد ولی با کمترین تغییر در آن ممکن است در نتایج خطای زیادی به وجود آید. همچنین افزایش بیش از حد آن می تواند باعث شود تا زمان بسیار زیادی برای محاسبات نیاز باشد.

با وجود آنکه دامنه تاثیر به صورت کلی به شکل دایره در نظر گرفته می شود ولی در حالاتی خاص ممکن است استفاده از اشکال دیگر برای این محدوده باعث ساده سازی های مناسب در مساله گردند. به عنوان مثال گاهی می توان از دامنه ای به شکل مربع استفاده کرد که با استفاده

از این دامنه مقدار محاسبات کاهش می یابد و در ضمن تاثیر چندانی هم در همگرایی نتایج ندارد. در فصل آینده به صورت کامل به این مطلب پرداخته می شود.

اگر تابع وزنی در تمام طول دامنه ثابت فرض گردد، تقریب حداقل مربعات متحرک -MLS- به روش آشنای حداقل مربعات استاندارد تبدیل می گردد. در این حالت  $a(x)$  تابعی از موقعیت مکانی  $x$  نبوده و در تمامی دامنه مقدار ثابتی دارد.

اگر تابع وزنی به گونه ای انتخاب گردد که در محدوده ای خاص برای هر گره دارای مقدار ثابت و در باقی گره ها مقدار صفر را دارا باشد تقریب حداقل مربعات متحرک به روش اجزای محدود تبدیل می گردد که در این حالت مفهوم المان، همان زیر دامنه ای است که تابع وزنی در آنجا غیر صفر است.

توابع وزنی که از طریق معادله ۳-۱ وارد فرمول بندی مساله شده اند، تاثیر تعیین کننده ای در پاسخ های مساله دارند. به صورتی که در برخی موارد حتی با اندکی تغییر در دامنه تاثیر و یا شکل توابع وزنی، نتایج کاملاً از مسیر جواب حقیقی منحرف می گردد. با توجه به اینکه خاصیت پیوستگی تابع وزنی عیناً به تابع شکل و از آن نیز به تابع تقریب یعنی همان پاسخ عددی مورد نظر منتقل می گردد، بهتراست تابع تقریب از لحاظ پیوستگی دارای مرتبه بالایی باشد. همچنین چون مشتقات تابع وزنی نیز در محاسبات استفاده می گردند بهتر است از توابعی که دارای مشتقات پیوسته هستند استفاده کرد. تابع وزنی چند جمله ای درجه چهار با توجه به نکات گفته شده از مناسب ترین توابع گفته شده می باشد که در بسیاری از تحلیل های انجام شده توسط افراد خبره به کار گرفته شده است.

## ۳-۵- توابع پایه کامل

در روش حداقل مربعات متحرک، یک تابع میانیاب  $u^h(x)$  به صورت زیر به عنوان تقریبی از تابع حقیقی  $u(x)$  در نظر گرفته می شود.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) \equiv p^T(x) a(x) \quad (9-3)$$

که در آن  $p_i(x)$  یک تابع چند جمله ای پایه کامل با رتبه دلخواه  $m$  می باشد.  $a_i(x)$  نیز ماتریس ضرایب مجهول می باشد که با یافتن این ماتریس، تابع  $u(x)$  نیز تقریب زده می شود. هم تابع چند جمله ای  $p_i(x)$  و هم ماتریس  $a_i(x)$  توابعی از موقعیت مکانی  $\mathbf{x}$  می باشند.

$$p^T(x) = \{p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)\} \quad (10-3)$$

$$a^T(x) = \{a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)\} \quad (11-3)$$

در روابط فوق همواره  $p_1(x)$  برابر واحد می باشد.  $p_i(x)$  نیز تک جمله ای هایی در مختصات فضایی می باشند. برای پی بردن به مفهوم توابع پایه کامل مثال های زیر آورده شده است:

در یک بعد:

$$p^T(x) = \{1, x_1\}, m = 2 \quad \text{چند جمله ای پایه از درجه ۱ (تابع خطی):}$$

$$p^T(x) = \{1, x_1, x_1^2\}, m = 3 \quad \text{چند جمله ای پایه از درجه ۲ (تابع سهموی):}$$

در دو بعد:

$$p^T(x) = \{1, x_1, x_2\}, m = 3 \quad \text{چند جمله ای پایه از درجه ۱ (تابع خطی):}$$

$$p^T(x) = \{1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2\}, m = 6 \quad \text{چند جمله ای پایه از درجه ۲ (تابع سهموی):}$$

در موارد خاص، با توجه به اینکه لازم است نوع خاصی از مساله حل گردد توابعی که در آن حالت کارایی بهتری داشته باشند نیز پیشنهاد شده اند. به عنوان مثال، تابع زیر برای بررسی نوک ترک پیشنهاد شده است. جملات ویژه موجود باعث می گردد تا ضرایب تمرکز تنش به خوبی در نوک ترک محاسبه گردند [۱۱].

$$p^T(x) = \{1, x_1, x_2, \sqrt{r} \cos(\theta/2), \sqrt{r} \sin(\theta/2), \sqrt{r} \sin(\theta/2) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin(\theta)\}, m = 7 \quad (12-3)$$

البته با وجود آنکه استفاده از توابع پایه با درجات بالاتر باعث ایجاد همگرایی بیشتر در نتایج می گردد ولی با این وجود استفاده از این درجات بالاتر باعث افزایش مقدار محاسبات می گردد. همچنین همگرایی ایجاد شده با استفاده از توابع پایه خطی به اندازه ای مطلوب می باشد که دیگر نیازی به استفاده از توابع پایه با درجات بالاتر نمی باشد.

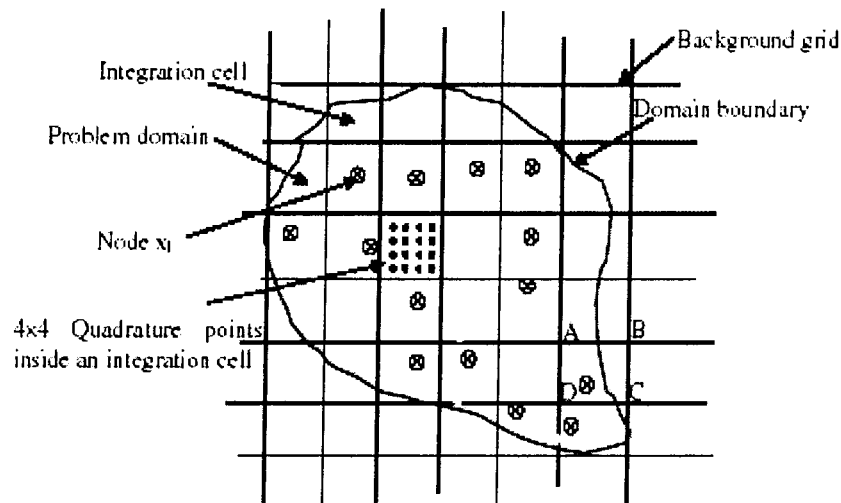
### ۳-۶- شبکه انتگرال گیری

باید توجه داشت با وجود اینکه این روش به عنوان یک روش بدون المان و شبکه در نظر گرفته می شود ولی با این وجود برای حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره ای<sup>۱</sup> چون از روش گالرکین استفاده شده است نیاز به ایجاد شبکه ای برای انتگرال گیری می باشد. هر چند استفاده از یک شبکه در پیاده سازی روش بدون المان گالرکین متداول، برای انتگرال گیری لازم است ولی در طی فرایند شبیه سازی نیازی به شبکه بندی مجدد دامنه نمی باشد و همچنین می توان گفت محاسبات انجام شده در این روش کاملاً مستقل از شکل این شبکه انتگرال گیری می باشد و این شبکه تنها به عنوان یک شبکه زمینه در روش های بدون المان کاربرد دارد و با تعریف معمول در

<sup>۱</sup> - PDE

روش های المان محدود کاملاً متفاوت می باشد. این مساله هنگامی که هندسه مساله دائماً در حال تغییر است بسیار مفید می باشد. در شکل ۳-۴ ساختار کلی این شبکه برای تحلیل هندسه های مختلف نشان داده شده است [۳۰].

یکی از مهم ترین مزایای اینگونه شبکه بندی این است که با توجه به این که در روش های تحلیل عددی بیشتر از روش های انتگرال گیری عددی گوس استفاده می کنند - چون در روش های بدون المان شبکه انتگرال گیری کاملاً مستقل از دیگر پارامترها می باشد - به راحتی می توان از توابع گوسی با درجات بالا استفاده کرد که این مساله باعث ایجاد دقت بیشتر در موارد ضروری می گردد.



شکل ۳-۴: ساختار شبکه بندی زمینه برای انتگرال گیری [۳۰]

### ۳-۷- توابع شکل در روش بدون المان گالرکین

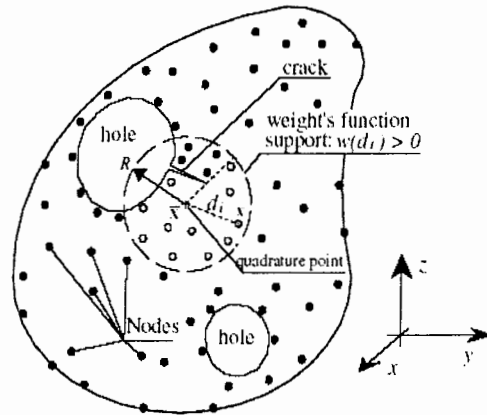
همانگونه که گفته شد در عبارت تخمینی ۳-۹ ضرایب  $a_i(x)$  مجهول می باشند که به دست آمدن آنها برای هر نقطه  $x$  با حداقل سازی نرم  $L_2$  - خطای وزندار - زیر محاسبه می شود.



$$s(x) = \sum_{I=1}^{n_{op}} w(x-x_I) [u_I - p^T(x_I) a(x)]^2 \quad (13-3)$$

در این رابطه  $u_I$  مقدار واقعی تابع در گره  $I$  برای  $x=x_I$  می باشد. تابع وزنی نیز  $w(x-x_I)$  یک تابع با محدوده اثر فشرده متناظر با گره  $I$  ام می باشد.  $n_{sn}$  نیز تعداد گره هایی می باشد که مقدار تابع در این نقاط بر روی تخمین مقدار نقطه  $x$  تاثیر می گذارد. به عبارت دیگر در این نقاط مقدار تابع وزنی غیر صفر می باشد. در شکل ۳-۵ [۲۸] چگونگی شبکه بندی یک جسم فرضی و چگونگی محاسبه محدوده اثر هر نقطه نشان داده شده است. به صورت هندسی نشان داده شده است.

$$\begin{cases} w(r) \neq 0 & r < 1 \\ w(r) = 0 & r > 1 \end{cases} \quad (14-3)$$



شکل ۳-۵: نمای هندسی محدوده اثر فشرده متناظر با نقطه  $x$  [۲۸]

همان گونه که گفته شد ضرایب  $a_i(x)$  برای هر نقطه  $x$  با حداقل سازی نرم  $L_2$  - خطای وزندار - محاسبه می شوند. در روش های تحلیل عددی بهتر است این ضرایب مجهول را با قرار دادن آنها در توابعی که اصطلاحاً به آنها توابع شکل گفته می شود محاسبه کرد و با توجه به

وابستگی توابع شکل به این ضرایب مجهول برای محاسبه آنها نیز از کمینه کردن  $s(x)$  استفاده می شود. با توجه به معادله نرم  $L_2$  خواهیم داشت [۱۱]:

$$\frac{\partial s(x)}{\partial a(x)} = 0 \rightarrow A(x)a(x) = c(x)u \quad (۱۵-۳)$$

که در این رابطه داریم:

$$A(x) = \sum_{l=1}^{n_{sn}} w(x - x_l) p(x_l) p^T(x_l)$$

$$c(x) = [w(x - x_1)p(x_1), w(x - x_2)p(x_2), \dots, w(x - x_n)p(x_n)] \quad (۱۶-۳)$$

$$u^T = [u_1, u_2, \dots, u_{n_{sn}}]$$

با توجه به این روابط، ضرایب  $a(x)$  را می توان اینگونه به دست آورد:

$$a(x) = A^{-1}(x)c(x)u \quad (۱۷-۳)$$

با جایگذاری معادله ۱۷-۳ در ۹-۳ تقریب زننده های MLS اینگونه به دست می آیند:

$$u^h(x) = p^T(x)a(x) \equiv \phi(x)u \quad (۱۸-۳)$$

که با توجه به معادلات قبل، تابع  $\phi(x)$  که همان تابع شکل است به این صورت بیان می گردد:

$$\phi(x) = p^T(x)A^{-1}(x)c(x) \quad (۱۹-۳)$$

برای یافتن مشتقات توابع شکلی، هر دو تابع  $p(x)$  و  $a(x)$  متغیر فرض می گردند. مشتق

توابع شکلی به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$u_{,i}^h = \phi_{,i(x)}u \quad (۲۰-۳)$$

که در آن:

$$\phi_{,i}(x) = p_{,i}^T A^{-1}c + p^T (A_{,i}^{-1}c + A^{-1}c_{,i}) \quad (۲۱-۳)$$

مشتق گیری از تابع  $A^{-1}$  را می توان با مشتق گیری از رابطه  $A^{-1}A = I$  به دست آورد که

نتیجه می گردد:

$$A_{,i}^{-1} = -A^{-1} A_{,i} A^{-1} \quad (22-3)$$

یکی از نکاتی که به آن اشاره شد این است که تقریب زنده های MLS بر خلاف روش های اجزای محدود در حالت کلی دارای خاصیت دلتای کرونگر نمی باشند. یعنی:

$$\phi_i(x_j) \neq \delta_{ij} \quad (23-3)$$

لذا معادلات به دست آمده ضرورتاً شرایط مرزی را ارضا نمی کنند. به همین علت باید تمهیدات خاصی برای اعمال شرایط مرزی به کار بست که این مساله یکی از مهم ترین مشکلات این روش ها می باشد.

نتیجتاً اعمال شرایط مرزی ضروری بسیار پیچیده تر از روش استاندارد اجزای محدود می باشد. برای اعمال شرایط مرزی روش های گوناگونی بیان شده است که از بین آنها می توان به معادلات ضعیف شده الاستیسیته ( تعادل استاتیکی و دینامیکی ) به روش ضرایب لاگرانژ و ترکیب روش های اجزای محدود با روش های بدون المان گالرکین اشاره کرد.

### ۳-۸- بررسی معادلات تعادل و فرم ضعیف شده

با فرض تغییر مکان های کوچک، معادله تعادل استاتیکی در تئوری الاستیسیته برای مساله ای با دامنه  $\Omega$  و مرز  $\Gamma$  از این قرار است:

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (24-3)$$

که در آن  $\sigma$  تانسور تنش می باشد که متناظر با میدان تغییر مکان  $u$  است.  $b$  نیز بردار نیروی حجمی وارد بر جسم است.

اگر به جای مساله تعادل با مساله ای از نوع دینامیکی سر و کار داشته باشیم، آنگاه در سمت راست معادله ۳-۲۴ به جای مقدار صفر عبارت  $\rho a$  قرار می گیرد که در آن  $\rho$  بیانگر چگالی و  $a$  بیانگر شتاب می باشد. در این حالت لازم است که علاوه بر شرایط مرزی، شرایط اولیه نیز معین گردد.

رابطه بین تانسور تنش و میدان تغییر مکان نیز با استفاده از روابط زیر بیان می گردد:

$$\varepsilon = \nabla_s u \quad , \quad \sigma = D\varepsilon \quad (25-3)$$

که ماتریس  $D$  ماتریس خواص ماده،  $u$  میدان تغییر مکان و عملگر  $\nabla$  نیز عملگر گرادیان می باشد.  $\nabla_s u$  نیز بخش متقارن عبارت  $\nabla u$  می باشد.

شرایط مرزی اعمال شده بر مساله نیز اینگونه هستند:

$$\begin{cases} u_i = \bar{u}_i & \text{on } \Gamma_{ui} \\ \sigma_{ij} . n_j = \bar{t}_i & \text{on } \Gamma_{ti} \end{cases} \quad (26-3)$$

که در آنها، مقادیر سمت راست معادلات، مقادیر تعیین شده توسط شرایط مساله و بردار  $n$  بردار نرمال بر مرز  $\Gamma$  در هر نقطه می باشد.

فرم حساب تغییراتی یا ضعیف شده معادله تعادل به شرحی که آمده است، مطرح می گردد.

با فرض توابع آزمون  $u(x) \in H^1$  (متعلق به فضای سوبولوف<sup>۱</sup> رسته یک) و ضرایب لاگرانژ

$$\lambda \in H^0 \quad (\text{متعلق به فضای سوبولوف رسته صفر}) \quad \text{برای تمام توابع آزمون داریم:}$$

$$\delta V(x) \in H^1 \quad , \quad \delta \lambda \in H^0 \quad (27-3)$$

در این صورت اگر رابطه زیر برقرار باشد:

<sup>۱</sup> - Sobolov

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla_s V^T) : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta V^T \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta V^T \cdot \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta V^T \cdot \lambda d\Gamma = 0 \quad (3-28)$$

معادلات تعادل و شرایط مرزی ارضا خواهند شد. در روابط فوق  $\nabla_s V^T$  بخش متقارن  $\nabla V^T$  و  $H^1$  و  $H^0$  به ترتیب فضای سوبولوف رسته صفر و رسته یک می باشند.

ذکر این نکته لازم است که توابع آزمون بیان شده، شرایط مرزی ضروری را ارضاء نمی کنند. زیرا به طوری که قبلاً اشاره شد تابع تقریب  $u_h(x)$  در روش گالرکین بدون اجزاء یک تخمین بین گره ها می باشد و لذا در هر گره لزوماً مقدار آن برابر با پاسخ در آن گره نمی باشد. لذا در نقاط مرزی که تابع تقریب باید مقدار مشخصی داشته باشد، یعنی در مرزهایی که شرایط ضروری حاکم است، بدون دانستن ارتباط بین مقادیر تابع تقریب و پارامترهای گره ای، اعمال شرایط مرزی اجباری میسر نمی باشد.

تا کنون روش های گوناگونی برای اعمال شرایط مرزی در روش بدون المان گالرکین ارائه گردیده که در برخی از این روش ها از اعمال معادلات اضافه برای اثر دادن شرایط مرزی استفاده می شود و در برخی دیگر نیز از تلفیق این روش ها با روش های دیگر استفاده شده است. در اینجا روش ضرایب لاگرانژ و همچنین روشی که تلفیقی از روش های بدون المان گالرکین و المان محدود می باشد برای اعمال شرایط مرزی بیان می گردد.

### ۳-۹- معادلات گسسته سازی

#### ۳-۹-۱- استفاده از ضرایب لاگرانژ

برای یافتن معادلات گسسته سازی از فرم ضعیف شده، حل تقریبی  $u$  و توابع آزمون  $\delta V$  با

توجه به روابط قبل بیان می گردند و ضرایب لاگرانژ  $\lambda$  با استفاده از روابط زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= N_l(s)\lambda_l, \quad x \in \Gamma_u \\ \delta\lambda(x) &= N_l(s)\delta\lambda_l, \quad x \in \Gamma_u\end{aligned}\quad (29-3)$$

که در آنها  $N_l(s)$  یک درون یاب لاگرانژی و  $s$  نیز طول قوس در راستای مرز است. - اندیسه‌های تکراری نشان دهنده جمع روی آنهاست. - معادلات گسسته سازی نهایی با جایگذاری روابط ۲۹-۳ در فرم ضعیف شده انتگرالی ۲۸-۳ به دست می آید که نتیجه می دهد [۳۱]:

$$\begin{bmatrix} k & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix}\quad (30-3)$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega\quad (31-3)$$

$$G_{ik} = - \int_{\Gamma_u} \phi_i N_k d\Gamma\quad (32-3)$$

$$f_i = \int_{\Gamma_l} \phi_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_i b d\Omega\quad (33-3)$$

$$g_k = - \int_{\Gamma_u} N_k \bar{u} d\Gamma\quad (34-3)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{bmatrix}\quad (35-3)$$

$$N_k = \begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix}\quad (36-3)$$

$$D = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} & \text{plane stress} \\ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} & \text{plane strain} \end{cases} \quad (37-3)$$

در روابط ارائه شده علامت ( , ) بیانگر مشتق پاره ای نسبت به متغیر مورد نظر می باشد. E و  $\nu$  نیز به ترتیب مدول یانگ و ضریب پواسون می باشند. در روابط بالا ماتریس K ماتریس سختی می باشد که از لحاظ ساختاری مشابه ماتریس سختی در روش المان محدود می باشد. درونیاب های لاگرانژی  $N_I(s)$  نیز در جهت y برای گره I ام به صورت زیر بیان می گردد.

$$N_I(y) = \frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_{l-1})(y-y_{l+1})\cdots(y-y_n)}{(y_l-y_0)(y_l-y_1)\cdots(y_l-y_{l-1})(y_l-y_{l+1})\cdots(y_l-y_n)} \quad (38-3)$$

برای جملات لاگرانژی در جهت x به همین ترتیب عمل می شود و برای قسمت هایی که در جهت خاصی نیستند باید از شکل دو بعدی آنها استفاده کرد.

از مهم ترین مزایای استفاده از ضرایب لاگرانژ این است که هیچگونه پارامتری برای اطمینان از ارضاء کامل شرایط مرزی لازم نمی باشد ولی مشکل این روش این است که هم تعداد پارامترهای مجهول را افزایش می دهد و هم این که باعث به وجود آمدن عوامل صفر در قطر اصلی ماتریس می گردد - در ماتریس حالت تکین بوجود می آید - که هر دوی این مسائل باعث کند شدن و کم شدن دقت این روش می گردد.

روش دیگر استفاده از ضرایب لاگرانژ، استفاده از آنها در داخل خود ماتریس های سختی و بردار نیرو می باشد. به این ترتیب معادلات بالا به صورت زیر خلاصه می گردند.

$$ku = f \quad (39-3)$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega - \int_{\Gamma_u} \phi_i S N D B_j d\Gamma - \int_{\Gamma_v} B_i^T D^T N^T S \phi_j d\Gamma \quad (40-3)$$

$$f_i = \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_i b d\Omega + \int_{\Gamma_u} B_i^T D^T N^T S \bar{u} d\Gamma \quad (41-3)$$

که در آن داریم:

$$N = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (42-3)$$

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \quad (43-3)$$

که  $n_x$  و  $n_y$  به ترتیب بردارهای نرمال عمود بر سطح در جهات  $x$  و  $y$  می باشند. مولفه های بردار  $S$  نیز اینگونه تعریف می شوند:

$$s_x = \begin{cases} 1 & \text{اگر } u_x \text{ بر روی دامنه } \Gamma_u \text{ معلوم باشد.} \\ 0 & \text{اگر } u_x \text{ بر روی دامنه } \Gamma_u \text{ مجهول باشد.} \end{cases} \quad (44-3)$$

$$s_y = \begin{cases} 1 & \text{اگر } u_y \text{ بر روی دامنه } \Gamma_u \text{ معلوم باشد.} \\ 0 & \text{اگر } u_y \text{ بر روی دامنه } \Gamma_u \text{ مجهول باشد.} \end{cases} \quad (45-3)$$

از لحاظ کاربردی استفاده از نوع دوم معادلات از بسیاری جهات مناسب می باشد. هم اینکه دیگر نیازی به محاسبه دورنیاب های لاگرانژ نیست و هم اینکه مقدار محاسبات افزایش نمی یابد و از همه مهم تر عوامل صفر در قطر اصلی که باعث تکین شدن ماتریس می گردند دیگر ظاهر نمی گردند.



### ۳-۹-۲- ترکیب روش های بدون المان گالرکین و المان محدود

در این روش اینگونه عمل می گردد که در قسمت هایی که از مرزها دور می باشند و اصطلاحاً در داخل دامنه حل می باشند از روش بدون المان گالرکین استفاده می گردد ولی در قسمت های مرزی از روش المان محدود برای اعمال شرایط مرزی استفاده می شود. برای ارتباط دادن این دو قسمت هم از یک ردیف المان ارتباط دهنده به نام تابع شیب استفاده می گردد. این روش کارایی بسیار مناسبی در مسایل دارد و باعث می شود دقت روش بدون المان گالرکین و سرعت روش المان محدود با هم ترکیب گردند. البته کار ترکیب کردن دو نوع شبکه ساده نمی باشد و به دقت فراوان نیاز دارد.

#### الف- توابع شکلی

هر دو روش بدون المان گالرکین و روش اجزای محدود از فرم خاص و یکسانی برای تقریب زدن تغییر مکان در روش گالرکین استفاده می کنند.

$$u_i^h(x, t) = \sum_{l=1}^n \bar{N}_l(x) u_{il}(t) \quad (۴۶-۳)$$

که در این رابطه  $\bar{N}_l(x)$  توابع شکل متکی بر نوع روش استفاده شده می باشد.  $u_{il}(t)$  نیز ضرایب گرهی برای مولفه  $i$  ام تغییر مکان گره  $l$  در نظر گرفته می شود.

#### ب- توابع شکلی اجزای محدود

توابع درونیاب  $u_i^h$  که تقریب زننده تغییر مکان های  $u_i$  در یک المان ایزوپارامتریک می باشند با رابطه زیر ارائه می گردد:

$$u_i^h(x, t) = \sum_{I=1}^{n_{en}} N_I(\xi(x)) u_{iI}(t) \quad , \quad x \in \Omega_F^e \quad (47-3)$$

که در آن  $\Omega_F^e$  زیر دامنه مدل اجزای محدود مربوط به المان  $e$  می باشد و  $n_{en}$  نیز تعداد گره های المان می باشد. برای المان چهار ضلعی دارای ۴ گره داریم [۲۵]:

$$N_I(\xi) = \frac{(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta)}{4} \rightarrow \begin{cases} \xi \in [-1, 1] \\ \eta \in [-1, 1] \end{cases} \quad (48-3)$$

### ج- توابع شکل در روش بدون المان گالرکین

در تقریب روش بدون المان گالرکین، تابع  $u_i^h(x, I)$  با رابطه زیر بیان می گردد:

$$u_i^h(x, t) = \sum_{I=1}^{n_{sn}} \phi_I(x) u_{iI}(t) \quad , \quad x \in \Omega_E \quad (49-3)$$

که توابع شکل در این رابطه به صورت زیر می باشند:

$$\phi_I(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) (A^{-1}(x) c(x))_{II} \quad (50-3)$$

که در آن  $\Omega_E$  دامنه مدل بدون المان می باشد. تعاریف عبارت های  $A(x)$  و  $p_j(x)$  و  $c(x)$  نیز در قسمت های قبل بیان شده اند.

### د- تقریب تغییر مکان های المان میانی

برای نشان دادن پروسه ترکیب دو روش در ناحیه میانی، از عبارت زیر استفاده می گردد

[۱۰]

$$u_i^h(x, t) = [1 - R(x)] u_i^{FE}(x, t) + R(x) u_i^{EFG}(x, t) \quad , \quad x \in \Omega_I \quad (51-3)$$

$\Omega_I$  دامنه مدل در ناحیه میانی می باشد.  $u_i^{FE}$  و  $u_i^{EFG}$  نیز تقریب های  $u_i$  در دو روش تقریب مورد نظر می باشد.  $R(x)$  نیز یک تابع شیب می باشد. این تابع با استفاده از توابع شکل اجزای محدود اینگونه تعریف می گردد:

$$R(x) = \sum_j N_{j(x)} \quad , \quad x_j \in \Gamma_E \quad (52-3)$$

$$R(x) \begin{cases} 1 & x \in \Gamma_E \\ 0 & x \in \Gamma_F \end{cases} \quad (53-3)$$

با جایگذاری تقریب های تغییر مکان FE و EFG در رابطه های فوق، توابع شکل میانی به دست می آیند:

$$\begin{aligned} u_i^h(x,t) &= [1 - R(x)] \sum_{l=1}^{n_{en}} N_l(\xi(x)) u_{il}(t) + R(x) \sum_{l=1}^{n_{en}} \phi_l(x) u_{il}(t) \\ &\equiv \sum_{l=1}^{n_{en}} \tilde{N}_l u_{il}(t) \quad , \quad x \in \Omega_I^e \end{aligned} \quad (54-3)$$

در رابطه فوق، توابع شکل المان میانی از روابط زیر به دست می آید:

$$\bar{N}_l(x) = \begin{cases} [1 - R(x)] N_l(\xi(x)) + R(x) \phi_l(x) & \\ R(x) \phi_l(x) & x \notin \Omega_I^e \end{cases} \quad (55-3)$$

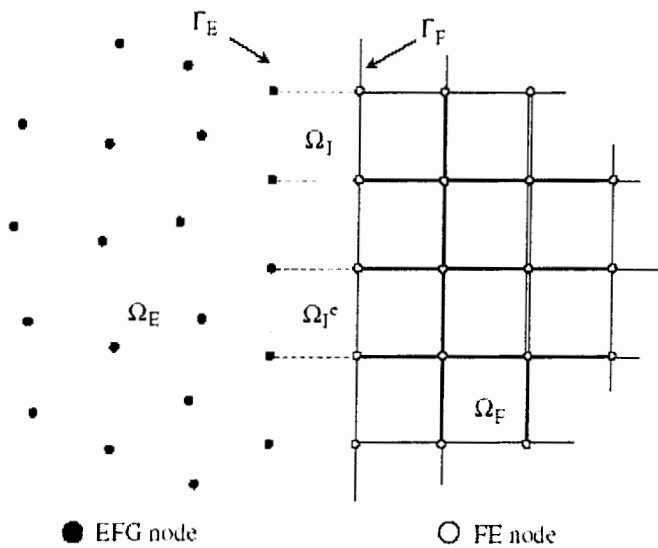
در این رابطه عبارت اول مربوط به توابع شکل گره هایی هستند که با المان های میانی ارتباط دارند و عبارت دوم نیز مربوط به المان هایی هستند که خارج از محدوده المان های میانی می باشند. مشتق توابع شکل میانی نیز با استفاده از رابطه زیر به دست می آید.

$$\bar{N}_{l,i} = \begin{cases} -R_{,i} N_l + [1 - R(x)] N_{l,i} + R_{,i} \phi_l + R \phi_{l,i} & \\ R_{,i} \phi_l + R \phi_{l,i} & x \notin \Omega_I^e \end{cases} \quad (56-3)$$

که در آن داریم:

$$R_{,i} = \sum_j N_{j,i} \quad , \quad x_j \in \Gamma_E \quad (57-3)$$

با توجه به رابطه بالا با وارد شدن مشتقات توابع شیب، مشتق توابع شکل دارای ناپیوستگی در طول مرز المان میانی می باشند. در مواردی باید به این نکته توجه کرد که نرمی و پیوستگی مشتقات EFG در طول مرز EFG یعنی  $\Gamma_E$  لزوماً باید حفظ گردد. در مورد المان های اجزای محدود نیز باید اطمینان حاصل شود که تغییرات ناگهانی مشتق در طول  $\Gamma_F$  بیشتر از مقدار مشابه در المان های دیگر موجود در دامنه  $\Omega_E$  نباشد. در شکل ۳-۶ [۱۰] چگونگی ارتباط این دو روش نشان داده شده است.



شکل ۳-۶: چگونگی قرار گرفتن المان ها و گره ها در ترکیب دو روش [۱۰]

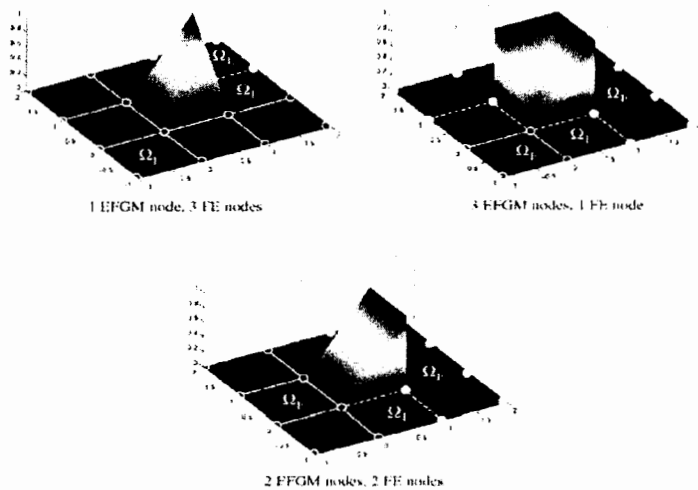
برای رسیدن به این هدف می توان از گونه های دیگری از توابع شکل استفاده کرد. این توابع به نحوی تعریف می شوند که مشتق نخست آنها روی  $\Gamma_F$  برابر صفر باشد. لذا از اثر منفی آن بر ناپیوستگی مشتق تابع شکل در طول مرزهای میانی جلوگیری می شود. از آنجا که  $R(x)$  بیان شده در عبارت های قبل تابعی است که به صورت پیوسته و یکنواخت از  $\Gamma_E$  تا  $\Gamma_F$  کاهش

می یابد، می توان از آن به عنوان تابعی مستقل در یک چند جمله ای درجه سوم استفاده کرد تا هدف مورد نظر تامین گردد.

$$R_s(x) = 3R^2(x) - 2R^3(x) \quad (58-3)$$

در این عبارت اندیس s برای نشان دادن آن به عنوان تابع شیب پیوسته به کار رفته است. از چند جمله ای های مرتبه بالاتر نیز می توان برای افزایش پیوستگی در طول  $\Gamma_E$  تا هر درجه پیوستگی دلخواه و حداکثر تا درجه پیوستگی تقریب EFG استفاده کرد. در روابط قبل نیز کافی است به جای R عبارت  $R_s$  را قرار داد که به این ترتیب  $R_{s,i}$  اینگونه به دست می آید:

$$R_{s,i}(x) = (6R(x) - 6R^2(x)) \cdot R_i \quad (59-3)$$



شکل ۳-۷: نمونه هایی از توابع شیب برای المان های میانی [۱۰]

در شکل ۳-۷ نمونه هایی از توابع شیب به کار رفته در روش تلفیق نشان داده شده است [۱۰]. همانگونه که دیده می شود تعداد گره های قرار گرفته در اطراف این توابع بر شکل آن تاثیر می گذارند.

### ۳-۱۰- المان های ترک

در بسیاری از روش های بدون شبکه مبتنی بر توابع وزنی با محدوده اثر معین، مشکلاتی در مدل سازی سطوح غیر محدب - مانند ترک، شکاف و حفره - به وجود می آید. مشکل عمده موجود ناشی از چگونگی تعریف محدوده اثر تابع وزنی گرهی در نزدیکی مرزهای غیر محدب است.

در روش های بدون شبکه، ترک به واسطه خطی که درون ماده ایجاد شده به عنوان یکی از مرزهای دامنه شکل مدل می گردد. روابط بین گره های دو وجه روبروی ترک به خاطر ایجاد فاصله فیزیکی بین آنها به سادگی دیگر قسمت ها قابل اعمال نمی باشد و اگر بخواهیم در این قسمت اثر گره های موجود در جهت مخالف را به سادگی اعمال کنیم مانند آن است که ترک را نادیده گرفته ایم. برای گره های اطراف ترک دو وضعیت متفاوت وجود دارد.

در حالت اول - شکل a-۳-۸ - محدوده اثر گره به طور کامل به وسیله ترک قطع می گردد و خط ترک یک ناپیوستگی در تقریب ایجاد می کند چرا که محدوده اثر گره که در باقی مناطق پیوسته می باشد به صورت ناگهانی محدود می گردد. حالت دوم - شکل b-۳-۸ - زمانی رخ می دهد که تعیین محدوده اثر مربوط به گره های نزدیک ترک با ابهام روبرو باشد. این حالت هنگامی رخ می دهد که گره مورد نظر در نزدیکی نوک ترک واقع شده باشد [۲۸].

ساده ترین روش ممکن برای برخورد با این مساله به این صورت است که کل ناحیه دایره ای شکل اثر گره به طور کامل برای محدوده اثر در نظر گرفته شود و اثر ترک فقط در هنگام بررسی مرزها در نظر گرفته شود. این روش از دقت و همگرایی پایینی برخوردار است.

در سال ۱۹۹۶ دورات<sup>۱</sup> قالب معیار خط ممتد را برای چنین مناطقی ارائه کرد. بر اساس این روش هر نقطه ای را که بتوان به وسیله یک خط ممتد و پیوسته درون دامنه تاثیر اولیه گره مورد

<sup>۱</sup>- Durate

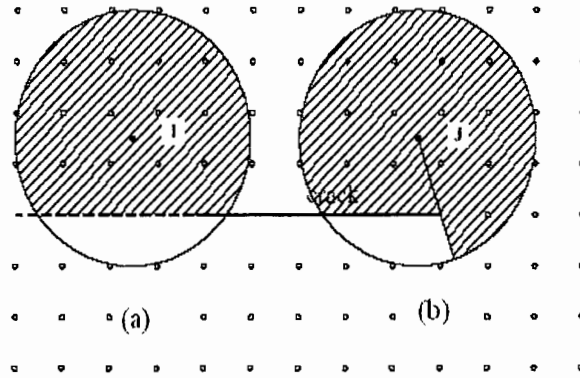
نظر مرتبط ساخت در دامنه در نظر گرفته می شود. این روش یک تقریب پیوسته ایجاد می کند ولی همگرایی این روش کند می باشد. علت این مساله هم این است که ناپیوستگی هایی که در تابع شکل در طول خط ترک وجود دارد به صورت قابل ملاحظه ای در نوک ترک حذف می گردد. این مساله باعث می گردد که مساله منفرد بودن نوک ترک به قبل از آن منتقل گردد که در این صورت طول ترک کمتر از مقدار واقعی آن در نظر گرفته می شود.

معیار دیگری توسط بلیچکو [۲۷] ارائه گردید که به معیار میدان دید معروف می باشد. در این روش اثر متقابل نقاطی که خط راست متصل کننده آنها به هم، با خط ترک تلاقی داشته باشد حذف می گردد. در این روش گسترش ترک نیز با توسعه دادن خط تعریف کننده ترک درون ماده و کنترل مجدد رابطه بین نقاط حول ترک، مدل می گردد.

هر چند که تغییرات ناشی از اعمال معیار میدان دید بر دامنه تاثیر، منجر به ایجاد یک ناپیوستگی در توابع وزنی و نتیجتاً ناپیوستگی در توابع شکل در بخش هایی از دامنه پیوستگی می گردد، اما هم بوسیله آزمون های عددی و هم به صورت تئوری ثابت شده است که تقریب گالرکین استفاده شده در روش بدون المان گالرکین با اعمال معیار میدان دید بر تقریب زننده ها، با وجود ناپیوستگی تقریب از سرعت خوبی برای همگرایی برخوردار می باشد.

البته ساختار ماتریس سختی نقاط گوسی واقع شده در نزدیکی خط ترک با ساختار نقاط گوسی دیگر نقاط متفاوت می باشد، زیرا در این نقاط تعدادی از گره های قرار گرفته در دامنه تاثیر تابع وزنی نقطه گوسی از محاسبات حذف می گردند. به این ترتیب اگر تعداد گره های به کار رفته در نزدیک ترک کم باشد باعث می گردد سطر یا ستونی از ماتریس سختی مربوط به آن گره گوسی صفر گردد، یا اینکه دترمینان ماتریس سختی در آن گره به صفر میل کند. این مساله باعث

ایجاد حالت تکین در ماتریس سختی کل می شود و دقت محاسبات را به شدت کاهش می دهد. به همین دلیل می بایست در تعداد گره در نظر گرفته در اطراف ترک دقت کافی را به عمل آورد.



شکل ۳-۸: چگونگی تاثیر ترک بر روی دامنه اثر گره [۲۸]





## فصل چهارم

# مکانیک شکست

## در مواد FG

### ۴-۱- مقدمه

با توجه به اینکه یکی از مباحثی که در این پژوهش مورد بررسی قرار می‌گیرد مکانیک شکست و آنالیز ترک می‌باشد، در این قسمت برای آشنایی با این مبحث به صورت مختصر به آن پرداخته می‌شود.

بیشتر قطعات سازه‌ها دارای ناپیوستگی‌های هندسی از جمله سوراخ‌های گوناگون، شکاف و غیره می‌باشند. این سوراخ‌ها باعث می‌گردند میدان‌های تنش ایجاد شده در ساختار قطعات از حالت طبیعی خود خارج گردند، به گونه‌ای که در اطراف این سوراخ‌ها تنش معمولاً مقدار

بیشتری نسبت به قسمت های دیگر سازه دارد. هنگامی که شعاع قوس شکاف در یک قسمت به سمت صفر میل می کند و یک نوع حالت نوک تیز در آن قسمت ایجاد می گردد، تنش در آن قسمت به شدت افزایش می یابد و تمرکز تنش شدیدی ایجاد می گردد. ولی توزیع تنش در این قسمت ها بگونه ای است که معمولا می توان آن را به کمک ضریبی که اصطلاحا به آن ضریب شدت تمرکز تنش گفته می شود به تنش عمومی که در قسمت های دور از سوراخ وجود دارد مرتبط ساخت. به همین دلیل یکی از مهم ترین مواردی که در علم مکانیک شکست در مورد آن بحث می گردد به دست آوردن ضرایب شدت تمرکز تنش می باشد تا به کمک آنها بتوان میدان های تنش را در نزدیکی ترک محاسبه کرد.

#### ۴-۲- معادلات پایه

با در نظر گرفتن شکل ۴-۱ میدان های جابجایی اطراف یک ترک را می توان به یکی از سه مود نشان داده شده تقسیم کرد. اولین مود گشایش<sup>۱</sup> نامیده می شود. مد دوم برش یا لغزش<sup>۲</sup> نامیده می شود و مود سوم پاد صفحه ای یا پارگی<sup>۳</sup> نامیده می شود. مودهای اول و دوم بر روی صفحه رخ می دهند ولی مود سوم در جهت خارج از صفحه به وجود می آید. به همین دلیل در اکثر موارد تنها شاهد رخ دادن مودهای اول و دوم هستیم و بیشتر به مسایل صفحه ای پرداخته می شود. در اینجا نیز چون به تحلیل صفحه پرداخته می شود حداکثر مودهای اول و دوم مورد بررسی قرار می گیرند [۱].

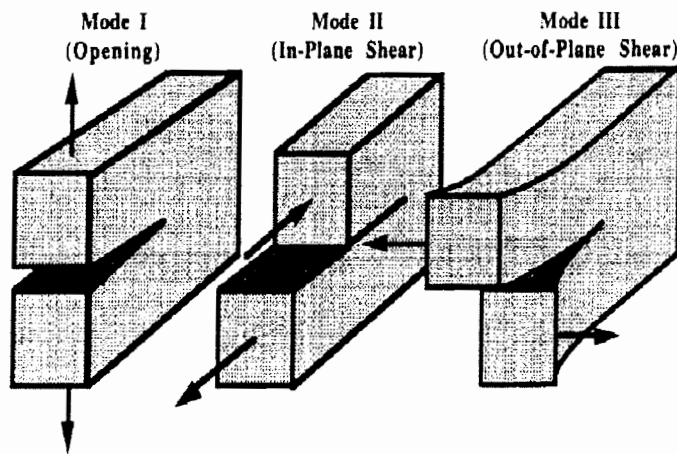
برای تعیین شرایط نوک ترک از فاکتورهای ضریب شدت تمرکز تنش به عنوان نمادی از نحوه توزیع تنش و کمیت دیگری به نام نرخ رهایی انرژی که وضعیت میدان های تنش را در

<sup>۱</sup> - Opening

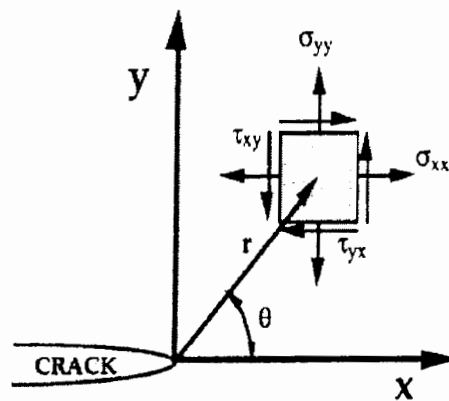
<sup>۲</sup> - Shear / slide

<sup>۳</sup> - Tear

اطراف ترک مشخص می کند استفاده می گردد. نرخ رهایی انرژی که نشان دهنده تغییر انرژی کرنشی در اثر رشد ترک می باشد بر اساس رابطه ای که به رابطه ایروین<sup>۱</sup> مرسوم است به ضریب شدت تنش مرتبط می گردد. ضرایب شدت تنش، ضرایبی هستند که به طول ترک، هندسه قطعه و بارگذاری بستگی دارند و معمولاً محاسبه این ثوابت به تنهایی برای مشخص کردن میدان های تنش و جابجایی در مجاورت نوک ترک کفایت می کند.



شکل ۴-۱: مود های ایجاد شده در اطراف ترک [۱]



شکل ۴-۲: مشخصات میدان های موجود در نزدیکی ترک [۱]

<sup>۱</sup> - Irwin

در این رابطه معادلات زیر را با توجه به شکل ۴-۲ می توان برای مودهای اول و دوم در صفحه در حالت منفرد در نظر گرفت. در این صورت میدان های تنش و جابجایی برای مود اول بر حسب ضریب شدت تنش مود اول به صورت زیر نوشته می شوند [۱].

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (1-4)$$

$$\begin{cases} u_x \\ u_y \end{cases} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} (k-1+2\sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} (k+1-2\cos^2 \frac{\theta}{2}) \end{cases} \quad (2-4)$$

برای مود دوم نیز این روابط به صورت زیر هستند.

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{cases} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} -\sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \end{cases} \quad (3-4)$$

$$\begin{cases} u_x \\ u_y \end{cases} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} (k+1+2\cos^2 \frac{\theta}{2}) \\ -\cos \frac{\theta}{2} (k-1-2\sin^2 \frac{\theta}{2}) \end{cases} \quad (4-4)$$

که در این روابط مطابق شکل ۴-۲  $r$  فاصله شعاعی از نوک ترک و  $\theta$  زاویه ای است که با راستای ترک ایجاد می کند. در این روابط  $k$  ثابت کولوسوف<sup>۱</sup> نامیده می شود که بر حسب ضریب پواسون به صورت زیر است.

$$k = 3 - 4\nu \quad \text{کرنش صفحه ای} \quad (5-4)$$

<sup>۱</sup>-Kolosov

$$k = \frac{3-U}{1+U} \quad \text{تنش صفحه ای} \quad (6-4)$$

و  $\mu$  نیز مدول ارتجاعی برشی می باشد.

همانگونه که در معادلات بالا دیده می شود مقادیر تنش با میزان فاصله از نوک ترک نسبت عکس دارند. به این ترتیب با نزدیک شدن به نوک ترک مقدار تنش به سمت بینهایت میل می کند. این مطلب بیانگر ایجاد نوعی حالت تکین در نوک ترک می باشد. نکته دیگری که دیده می شود وابستگی میدان های جابجایی و تنش به ضرایب شدت تمرکز تنش می باشد که به این ترتیب با مشخص بودن ضرایب شدت تنش در نوک ترک می توان میدان های تنش و جابجایی را در این محدوده پیش بینی کرد. البته باید توجه داشت که این روابط تنها برای محدوده نزدیک به نوک ترک صادق هستند و با دور شدن از نوک ترک دقت این روابط کاهش می یابد.

اگر راستای ترک و راستای بارگذاری با یکدیگر موازی نباشند، در این حالت در نوک ترک شاهد ایجاد هر دو مود اول و دوم می باشیم. در این صورت روابط بین میدان های جابجایی و تنش با ضرایب شدت تنش حالت پیچیده تری پیدا می کنند.

در روابط ۱-۴ تا ۴-۴ که میدان های تنش و جابجایی را در مودهای اول و دوم در حالت منفرد نشان می دهند به علت کوچک بودن جملات با درجات بالاتر  $r$  از آنها صرف نظر کرده شد. ولی در حالت ترکیب مودها لازم است این جملات را نیز در نظر گرفت. به این ترتیب میدان های جابجایی و تنش را در ترکیب مودها به این صورت می توان بیان کرد.

میدان های تنش:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (7-4)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \sigma_y (1 - \lambda) \cos 2\beta \quad (8-4)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (9-4)$$

و میدان های جابجایی:

$$u = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(k-1) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(k+1) + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \quad (10-4)$$

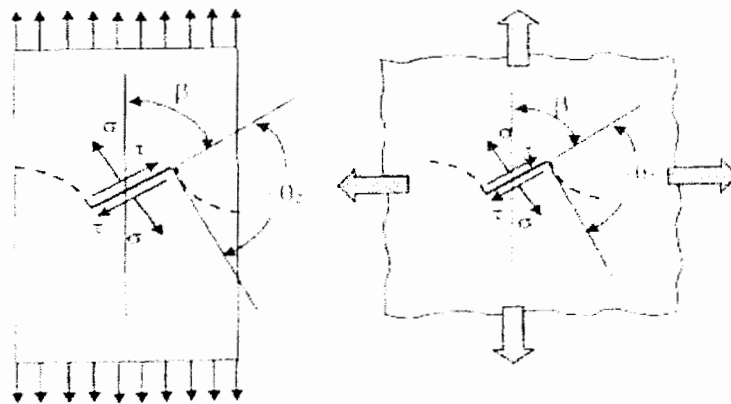
$$\frac{(1-\lambda)\sigma_y}{8\mu} \{ r [\cos(\theta+2\beta) + k \cos(\theta-2\beta) - 2 \sin \theta \sin 2\beta] + (k+1)a \cos 2\beta \}$$

$$v = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(k+1) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(-k+1) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \quad (11-4)$$

$$\frac{(1-\lambda)\sigma_y}{8\mu} \{ r [\sin(-\theta+2\beta) + k \sin(\theta+2\beta) - 2 \sin \theta \cos 2\beta] + (k+1)a \sin 2\beta \}$$

که در روابط بالا  $\lambda$  نسبت بار اعمال شده در جهت X به بار اعمال شده در جهت Y می باشد. در

شکل ۳-۴ هندسه مربوط به این روابط نشان داده شده است [۱].



شکل ۳-۴: ساختار صفحه ترکدار تحت مودهای اول و دوم [۱]

## ۴-۳- محاسبه ضرایب شدت تنش به کمک انتگرال J

در سال ۱۹۵۶ اشلبی<sup>۱</sup> متوجه شد رابطه انتگرالی انرژی - مومنتوم که امروزه به نام انتگرال J معروف است مستقل از مسیر می باشد. روش انتگرال J برای محاسبه شدت تنش که توسط رایس<sup>۲</sup> [۳۴] ابداع شده روشی قوی و مطمئن برای محاسبه ضرایب شدت تنش می باشد. این انتگرال به صورت زیر می باشد.

$$J = \int_{\Gamma} (w \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) n_j d\Gamma \quad (12-4)$$

که در این رابطه w چگالی انرژی کرنشی،  $\sigma$  تنش و n بردار واحد عمود بر کانتور  $\Gamma$  محاط بر نوک ترک است. رایس در سال ۱۹۶۸ تشخیص داد که اگر مسیر انتگرال گیری نوک ترک را احاطه کند این کمیت به عنوان پارامتری از شکست بیان می گردد. خصوصیت استقلال از مسیر این امکان را می دهد که بتوان انتگرال را در فواصل دور از مسیر ترک محاسبه کرد که این مساله در روش های عددی بسیار مفید است. یکی از مزایای این روش این است که انتگرال خط را می توان به صورت انتگرال سطح بیان کرد. محاسبه انتگرال های خط در روش های عددی به دلیل ناپیوستگی موجود در میدان های تنش خطای قابل ملاحظه ای دارد و هم چنین در مسایل دینامیکی لازم است که مسیر انتگرال J نزدیک به نوک ترک باشد. در این حالت تبدیل انتگرال خط به سطح به دلیل اجتناب از خطای بالا لازم است. لذا فرم انتگرال J سطح به این صورت خواهد بود.

$$J = \int_A (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - w \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (13-4)$$

رابطه بین انتگرال J و ضریب شدت تنش نیز به صورت زیر بیان می گردد.

<sup>۱</sup> - Eshelby

<sup>۲</sup> - Rice



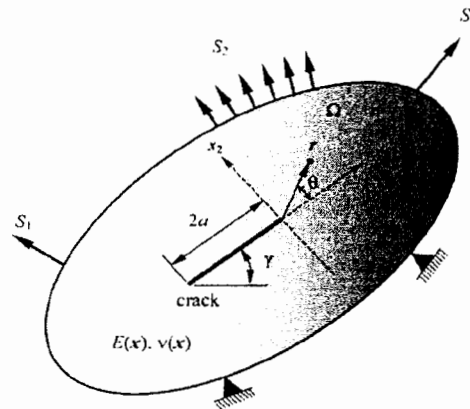
$$J = \frac{K_I^2}{E} \quad \text{تنش صفحه ای} \quad (14-4)$$

$$J = \frac{K_I^2}{E(1-\nu^2)} \quad \text{کرنش صفحه ای} \quad (15-4)$$

به این ترتیب با محاسبه انتگرال  $J$  از رابطه ۴-۱۳ و استفاده از رابطه ۴-۱۴ می توان ضریب شدت تنش را محاسبه کرد.

#### ۴-۴- محاسبه ضرایب شدت تنش به کمک انتگرال $J$ در مواد FG

در شکل ۴-۴ یک سازه ی صفحه ای که در آن یک ترک مستقیم الخط به طول  $2a$  وجود دارد تحت بارگذاری های متفاوت خارجی نشان داده شده است.



شکل ۴-۴: ساختار صفحه ترکدار ساخته شده از مواد FG [۱۱]

ایچن<sup>۱</sup> [۳۵] و پس از او جین<sup>۲</sup> و نودا<sup>۳</sup> [۳۶] نشان دادند برای تغییرات خواص مواد که به طور قطعه ای مشتق پذیر باشند، میدان های تنش و تغییر مکان الاستیک در مواد FG همانند مواد ایزوتروپیک با به کار بردن تنش به فرم تفکیک پذیر متغیر به دست می آید. لذا ناحیه تنش تکینگی الاستیک خطی نزدیک نوک ترک همانند مواد ایزوتروپیک محاسبه می گردند. بنابراین

<sup>۱</sup> - Eischen

<sup>۲</sup> - Jin

<sup>۳</sup> - Noda

دیده می شود که گرادیان ماده روی ریشه تکینی یا توزیع تنش تکینی تاثیر نمی گذارد. با این وجود پارامترهای شکست از جمله ضرایب شدت تمرکز تنش تابعی از گرادیان خواص ماده، بارگذاری های خارجی و هندسه ماده می باشند.

معادله پایه انتگرال  $J$  در حالت کلی به صورت ۴-۱۶ می باشد که با به کارگیری معادلات تعادل، شرایط سازگاری و ثابت بودن خواص در ساختار سازه به صورت بیان شده در رابطه ۴-۱۳ در می آید.

$$J = \int_A (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - W \delta_{ij}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA + \int_A (\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_1} - \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial x_1} \varepsilon_{kl}) q dA \quad (۴-۱۶)$$

ولی در مواد FG به علت متغیر بودن خواص نمی توان از تمامی جملات انتگرال دوم صرفنظر کرد. به این ترتیب با توجه به اینکه معادلات تعادل و سازگاری ارضا گردند عبارت مربوط به گرادیان خواص ماده را نمی توان حذف کرد. بنابراین رابطه ۴-۱۶ به صورت زیر بیان می گردد.

$$J = \int_A (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - W \delta_{ij}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA - \int_A (\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \frac{\partial D_{ijkl}}{\partial x_1} \varepsilon_{kl}) q dA \quad (۴-۱۷)$$

عبارت دوم این انتگرال برای مسیرهای نزدیک به نوک ترک ناچیز و قابل صرفنظر کردن می باشد ولی اگر لازم باشد انتگرال در محدوده وسیعی محاسبه گردد می بایست این جمله را نیز در نظر گرفت. به سادگی می توان نشان داد در مواد FG همانند مواد ایزوتروپیک انتگرال  $J$  برای هر مسیر بسته برابر صفر می باشد. به همین دلیل از این عبارت می توان برای به دست آوردن ضرایب شدت تمرکز تنش استفاده کرد.



## فصل پنجم

### روش بدون المان

### گالرکین در مواد FG

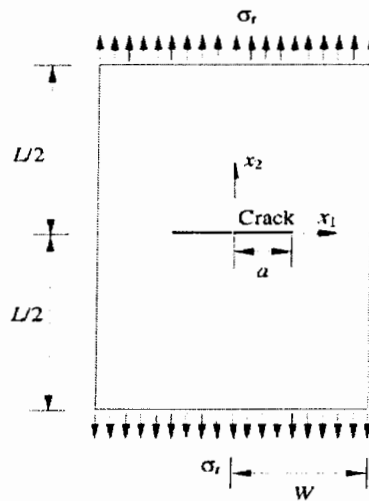
#### ۵-۱- مقدمه

در فصل های گذشته مطالب تئوری مورد نیاز برای استفاده در این پروژه به صورت کامل بیان گردید. اکنون با توجه به مطالب بیان شده می توان چگونگی به کار گرفتن روش بدون المان گالرکین را در انجام این پروژه - که مربوط به تحلیل ترک در مواد FG می باشد، - شرح داد. توضیحاتی که در این فصل آورده شده بر اساس مواردی است که در متن برنامه اصلی از آنها استفاده شده است و سعی شده در این قسمت به صورت گسترده تری مطالب گفته شده در فصل های قبل توضیح داده شود. ترتیب مطالب هم به گونه ای می باشد که ابتدا مطالب اولیه و

پایه که در توضیحات بعد به آنها نیاز است بیان می گردند و سپس به طرح مطالب دیگر پرداخته می شود.

## ۵-۲- ساختار پروژه

با وجود آنکه هدف اصلی این پروژه، آنالیز ترک در صفحه مستطیل شکل دارای ترک مرکزی در حالت تنش صفحه ای می باشد، برای ساده تر شدن کار و اطمینان از صحیح بودن الگوریتم استفاده شده، مساله موجود به قسمت های ساده تری تقسیم می شود. در ابتدا مساله در ساده ترین حالت ممکن، یعنی صفحه مستطیل شکل بدون ترک ساخته شده از ماده ایزوتروپیک بررسی می شود. سپس با افزودن ترک و خواص ماده FG نتایج نهایی از آنالیز به دست می آیند. در مواردی هم که ممکن باشد برای اطمینان بیشتر از صحیح بودن نتایج، اطلاعات به دست آمده با نتایج به دست آمده از نرم افزار ANSYS و مقالات معتبری که توسط افراد دیگر انجام شده اند، مقایسه می شوند. شکل مساله نهایی که مورد آنالیز قرار می گیرد در شکل ۵-۱ نشان داده شده است.



شکل ۵-۱: شکل مساله نهایی مورد آنالیز

### ۵-۳- تابع وزنی

یکی از مهم ترین مواردی که در مورد آن باید دقت زیادی داشت، چگونگی استفاده از توابع وزنی می باشد. زیرا ساختار تابع وزنی و مواردی چون محدوده اثر آن است که بیشترین تاثیرگذاری را بر چگونگی همگرایی می گذارند و همانگونه که گفته شد گاهی با کوچکترین تغییر در پارامترهای اختیاری آن ممکن است جواب های مساله واگرا گردد.

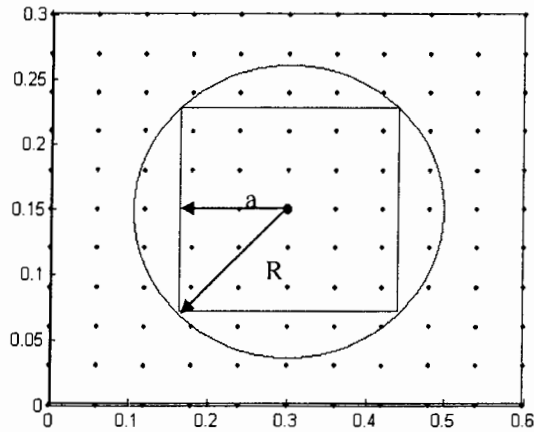
یکی از مهم ترین موارد، در به کارگیری تابع وزنی در این پروژه این است که از تابع وزنی با محدوده تاثیر مربع شکل استفاده شده است. برخی از محققان از جمله لی<sup>۱</sup> و زو<sup>۲</sup> در مرجع [۳۰] از چنین ناحیه تاثیری استفاده کرده اند که به نتایج مطلوبی نیز دست یافته اند. علت استفاده از این نوع دامنه تاثیر ساده تر شدن ساختار مساله می باشد. با توجه به اینکه شکل صفحه مورد نظر مستطیل شکل می باشد، استفاده از دستگاه مختصات کارتزین برای تحلیل مناسب می باشد، ولی اگر از محدوده اثر دایره شکل بخواهیم استفاده کنیم لازم است به طور متناوب پارامترها را بین مختصات قطبی و کارتزین تغییر دهیم که این مساله خود باعث پیچیده شدن مساله می گردد. البته باید محدوده مربع را به گونه ای تعریف کرد که تفاوت چندانی با حالت دایره ای شکل نداشته باشد. برای درک بهتر این موضوع شکل ۵-۲ ترسیم شده است.

همانگونه که در شکل ۵-۲ دیده می شود برای آنکه بتوان نتیجه مناسبی گرفت، برای جایگزینی ناحیه مربعی بهتر است از مربعی که در داخل دایره تاثیر محاط شده استفاده کرد که در این صورت تعدادی از نقاط داخل دایره بی تاثیر می گردند. ولی با توجه به اینکه فاصله این نقاط با نقطه مرکزی زیاد است خطای چندانی ایجاد نمی گردد. با توجه به اینکه نوع تحلیل در این مساله استاتیکی است و شعاع مناسب دایره تاثیر در حالت استاتیکی برابر ۲ می باشد بهتر است برای

<sup>۱</sup> - Lee

<sup>۲</sup> - Zhou

اندازه  $a$  از مقدار  $۱,۴۱۴۲$  استفاده گردد. به این ترتیب به راحتی می توان توابع شکل را تشکیل داد و بدون هیچ مشکلی از آنها نسبت به  $x$  و  $y$  مشتق گرفت.



شکل ۵-۲: چگونگی قرار گرفتن دامنه تاثیر دایره ای و مربعی

در این حالت باید دقت داشت تابع وزنی تابعی از پارامترهای  $x$  و  $y$  می باشد و به همین دلیل باید با ترکیب توابع وزنی به دست آمده در این دو جهت تابع وزنی کلی را به دست آورد. به این ترتیب تابع وزنی را به صورت زیر بیان می کنیم:

$$w = w_x \times w_y \quad (۱-۵)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial x} \times w_y \quad (۲-۵)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial y} \times w_x \quad (۳-۵)$$

برای تابع وزنی نیز از تابع چند جمله ای درجه ۴ استفاده شده است. در برخی از مراجع از توابع پیچیده تری نیز استفاده شده است. از جمله رانو و رحمان که از تابع تاثیر به شکل زیر استفاده کرده اند [۱۱].

$$w(r) = \begin{cases} \frac{(1 + \beta^2 r^2)^{-(1+\beta)/2} - (1 + \beta^2)^{-(1+\beta)/2}}{1 - (1 + \beta^2)^{-(1+\beta)/2}} & r < 1 \\ 0 & r > 0 \end{cases} \quad (4-5)$$

که در این رابطه پارامتر  $\beta$  یک پارامتر دلخواه است. هر چند با استفاده از این تابع وزنی نتایج خوبی به دست آمده است، ولی با توجه به اینکه یک پارامتر دلخواه دیگر نیز به اطلاعات ورودی برنامه اضافه می گردد، بهتر است از همان تابع وزنی چند جمله ای درجه چهارم استفاده شود. نکته دیگری که قبلا نیز به آن اشاره شد و از اهمیت بسیاری برخوردار است این است که مقادیر تابع وزنی حتما باید مثبت باشند ولی مشتقات آنها ممکن است مثبت یا منفی باشند. به این ترتیب تابع وزنی درجه چهارم و مشتقات آن به صورت زیر در مساله مورد استفاده قرار می گیرند.

$$w(x) = \begin{cases} 1 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4 & \text{for } x \leq 1 \\ 0 & \text{for } x > 1 \end{cases} \quad (5-5)$$

$$w(y) = \begin{cases} 1 - 6y^2 + 8y^3 - 3y^4 & \text{for } y \leq 1 \\ 0 & \text{for } y > 1 \end{cases} \quad (6-5)$$

$$w(x, y) = w_x \times w_y = \begin{cases} (1 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4)(1 - 6y^2 + 8y^3 - 3y^4) & \text{for } x, y \leq 1 \\ 0 & \text{for } x, y > 1 \end{cases} \quad (7-5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial x} \times w_y = \begin{cases} (-12x + 24x^2 - 12x^3)(1 - 6y^2 + 8y^3 - 3y^4) & \text{for } x, y \leq 1 \\ 0 & \text{for } x, y > 1 \end{cases} \quad (8-5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial y} \times w_x = \begin{cases} (-12y + 24y^2 - 12y^3)(1 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4) & \text{for } x, y \leq 1 \\ 0 & \text{for } x, y > 1 \end{cases} \quad (9-5)$$

## ۴-۵- انتگرال گیری عددی

همانگونه که در معادلات فصل قبل دیده شد در محاسبات مربوط به ماتریس سختی و بردار

نیرو نیاز به انتگرال گیری از عباراتی بر روی یک دامنه معین از جسم و یا بر روی مرزهای جسم



بود. در روش بدون المان گالرکین مانند اکثر روش های تحلیل عددی دیگر، از انتگرال گیری عددی کوادراچر<sup>۱</sup> گوسی در محاسبات استفاده می گردد. صورت کلی این روش انتگرال گیری در حالت یک بعدی به صورت زیر می باشد:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (10-5)$$

در عبارت بالا  $w_i$  را وزن تابع و نقاط  $\xi_i$  را نقاط گوسی می نامند که هر دوی این پارامترها مقادیر ویژه ای هستند که با توجه به تعداد نقاط گوسی در هر سلول انتگرالی تعریف می گردند. همانگونه که دیده می شود در این روش باید دامنه انتگرال را با یک تبدیل خطی از دامنه  $[a, b]$  به دامنه  $[-1, 1]$  تبدیل کنیم. به همین ترتیب باید تغییرات لازم را روی تابع داخل انتگرال نیز انجام دهیم. در حالت دو بعدی این روش به صورت زیر انجام می پذیرد.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \frac{(b-a)(d-c)}{4} \sum_i \sum_j f(\eta_i, \xi_j) \quad (11-5)$$

که با توجه به اینکه می بایست دامنه بازه های اصلی از  $[a, b]$  و همچنین  $[c, d]$  به  $[-1, 1]$  تغییر پیدا کنند از تبدیل های خطی زیر استفاده می کنیم:

$$x = \frac{b-a}{2} \eta + \frac{b+a}{2} \quad (12-5)$$

$$y = \frac{d-c}{2} \xi + \frac{d+c}{2} \quad (13-5)$$

در روش های بدون المان به راحتی می توان از هر تعداد نقاط گوسی برای انتگرال گیری استفاده کرد. در شرایطی که مواد مورد آنالیز ایزوتروپیک باشند، تعداد نقاط گوسی آنچنان در میزان همگرایی تاثیر گذار نیستند و تعداد ۴ نقطه گوسی - دو مقدار برای مشخص کردن نقاط در

<sup>۱</sup> - Quadrature

جهت  $x$  و  $z$  مقدار برای مشخص کردن نقاط در جهت  $y$  - در هر سلول انتگرال گیری نیز برای ایجاد همگرایی مناسب می باشد. ولی در شرایطی که مواد مورد تحلیل FG هستند چون می توان با استفاده از تعداد بیشتر نقاط گوسی پاسخ های هموارتری به دست آورد بهتر است از تعداد نقاط گوسی بیشتری استفاده شود. در عین حال باید توجه داشت که هر چه تعداد نقاط گوسی بیشتر گردد مقدار محاسبات افزایش می یابد و زمان بیشتری نیز نیاز است. به همین دلیل باید دقت داشت که در تعداد نقاط گوسی یک حالت بهینه را استفاده کرد.

در روش بدون المان گالرکین ماتریس سختی با استفاده از رابطه ۳-۳۱ محاسبه می گردد. همانگونه که دیده می شود در این رابطه می بایست بر روی دامنه ای خاص انتگرال گیری کرد. به این ترتیب برای انتگرال گیری در دامنه ای که در راستای  $x$  در محدوده  $[a, b]$  و در راستای  $y$  در محدوده  $[c, d]$  باشد، با فرض تعداد  $n$  نقطه گوسی در راستای  $x$  و  $y$  داریم:

$$k_{i,j} = \int_{\Omega} B_i^T D B_j d\Omega = \frac{(b-a)(d-c)}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [B_i^T(\eta, \xi) D(\eta, \xi) B_j(\eta, \xi)] w_i w_j \quad (14-5)$$

### ۵-۵- نحوه تعیین شرایط مواد FG

در مقاله رحمان و رائو [۱۱] دو روش برای اعمال خواص مواد FG بیان شده است. در روش اول، تغییرات خواص بر روی سلول های انتگرالی اعمال می گردد. به این صورت که اگر بخواهیم تغییرات خواص را در جهت  $x$  داشته باشیم. با توجه به فرمول ارائه شده برای تغییر خواص، مقدار خواص را در مرکز سلول به دست می آوریم و برای تمامی نقاط گوسی موجود در آن سلول از این مقدار استفاده می کنیم. در این روش برای به دست آوردن یک تابع هموار از خواص، نیاز است تا ابعاد سلول های انتگرال گیری کوچک شوند و از تعداد بیشتری سلول استفاده گردد.

در روش دوم، تغییرات را بر روی نقاط گوسی اعمال می کنیم. به این صورت که اگر بخواهیم تغییرات خواص را در جهت  $x$  داشته باشیم. با توجه به فرمول ارائه شده برای تغییر خواص، مقدار

خواص را در هر یک از نقاط گوسی به دست می آوریم. این روش نسبت به روش اول دارای مزایای بسیار زیادی است. اولاً چون هر نقطه گوسی مختصات مخصوص به خود را داراست مقدار خواص به صورت دقیق در آن نقطه محاسبه می گردد و هیچگونه تقریبی زده نمی شود، در صورتی که در روش اول چون از مقدار خواص در مرکز سلول استفاده می گردد مقدار خواص در نقاط گوسی به صورت تقریبی به دست می آیند. دوماً اگر تغییرات بر روی نقاط گوسی اعمال گردد تابع بدست آمده بسیار هموارتر می باشد و هر چه تعداد نقاط گوسی استفاده شده در هر سلول بیشتر گردد بر میزان این همواری افزوده می گردد. در این تحقیق روش دوم استفاده شده است.

### ۵-۶- تعیین تابع شکل

در فصل سوم معادلات پایه برای تشکیل تابع شکل در روش بدون المان گالرکین به صورت کلی بیان گردید. در این قسمت سعی می شود توضیحات کاملتری در راستای الگوریتم نوشته شده برای آنالیزهای مورد نظر بیان گردد. شکل کلی تابع شکل در روش بدون المان گالرکین به صورت زیر می باشد.

$$\phi(x) = p^T(x)A^{-1}(x)c(x) \quad (15-5)$$

در رابطه فوق اگر  $m$  تعداد مولفه های بردار  $P$  باشد و  $n$  تعداد نقاط تاثیرگذار بر تقریب در نقطه دلخواه، جملات تابع شکل را برای گره دلخواه  $I$  اینگونه می توان نشان داد:

$$p_{vm}^T(x) = \{1, x, y\}, \quad m=3 \quad (16-5)$$

$$A_{m \times m}(x) = \sum_I^n W_I(x)P(x_I)P^T(x_I) \quad (17-5)$$

$$C_{m \times n}(x) = [W_1(x)P(x_1), \dots, W_n(x)P(x_n)] \quad (18-5)$$

با توجه به اینکه مقادیر  $W_I(x)$  اسکالر می باشد و با توجه به ابعاد بردار  $P$ ، ماتریس  $A$  ماتریسی با

۹ درایه - ۳ سطر و ۳ ستون - خواهد بود و بسط یافته آن به این صورت است:

$$[A] = \sum W_I \begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ x_I & x_I^2 & x_I y_I \\ y_I & x_I y_I & y_I^2 \end{bmatrix} \quad (19-5)$$

به همین ترتیب مشتق آن نیز با مشتق گیری از تابع وزنی نسبت به متغیر  $x$  به صورت زیر بیان می گردد:

$$[A]_{,x} = \sum W_{I,x} \begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ x_I & x_I^2 & x_I y_I \\ y_I & x_I y_I & y_I^2 \end{bmatrix} \quad (20-5)$$

بردار  $C$  و مشتقات آن نیز به صورت زیر بیان می گردند:

$$\{C_I\} = \begin{Bmatrix} c_{I1} \\ c_{I2} \\ c_{I3} \end{Bmatrix} = W(x, y) \begin{Bmatrix} 1 \\ x_I \\ y_I \end{Bmatrix} \quad (21-5)$$

$$\{C_I\}_{,x} = W(x, y)_{,x} \begin{Bmatrix} 1 \\ x_I \\ y_I \end{Bmatrix} \quad (22-5)$$

با ترکیب عبارات بالا مشتقات تابع شکل که در ساخت ماتریس سختی کاربرد دارد به صورت زیر بیان می گردد:

$$\phi_{I,i}(x) = \sum_{j=1}^m \{P_{j,i}(x)(A^{-1}(x)C(x))_{,j} + P_j(x)(A_i^{-1}(x)C(x) + A^{-1}(x)C(x)_{,i})_{,j}\} \quad (23-5)$$

که رابطه بالا بیانگر مشتق تابع شکل در گره  $I$  ام نسبت به متغیر  $i$  می باشد و  $Z$  نیز بیانگر تعداد عناصر تابع پایه می باشد. با توجه به تابع پایه در نظر گرفته شده، مشتق تابع شکل نسبت به  $x$  در نهایت به صورت زیر بیان می گردد:

$$\phi_{I,x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T A^{-1}C + \begin{bmatrix} 1 \\ x_I \\ y_I \end{bmatrix} \{ [A_{,x}^{-1}][C] + [A^{-1}][C_{,x}] \} \quad (24-5)$$

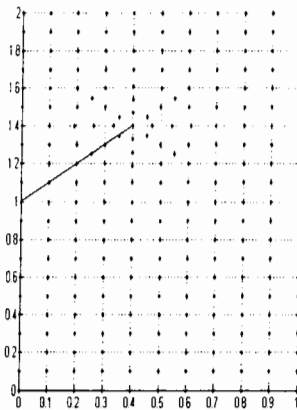
به همین ترتیب مشتق تابع شکل نسبت به  $y$  به صورت زیر بیان می گردد:

$$\phi_{I,x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T A^{-1}C + \begin{bmatrix} 1 \\ x_I \\ y_I \end{bmatrix} \{ [A_{,y}^{-1}][C] + [A^{-1}][C_{,y}] \} \quad (25-5)$$

پس از محاسبه ماتریس شکل با استفاده از روابط بالا می توان ماتریس سختی را بر اساس رابطه ۳-۳۱ محاسبه کرد. برای هر یک از گره های قرار گرفته در محدوده تاثیر تابع وزنی نقاط گوسی، ماتریس سختی  $k_{ij}$  دارای چهار مولفه متناظر با  $i=1,2$  و  $j=1,2$  می باشد. در این ماتریس عنصر  $k_{1,1}$  بیانگر نیروی افقی در محل گره 1 ام به ازای جابجایی واحد افقی در گره J می باشد. لذا این عنصر در ماتریس سختی کل در سطر متناظر با درجه آزادی  $2I-1$  و در ستون  $2J-1$  قرار می گیرد. در حالت کلی قرار گرفتن عناصر ماتریس سختی هر گره در ماتریس سختی کلی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} k_{1,1} = K_{2I-1, 2J-1} \\ k_{1,2} = K_{2I-1, 2J} \\ k_{2,1} = K_{2I, 2J-1} \\ k_{2,2} = K_{2I, 2J} \end{cases} \quad (26-5)$$

در تمامی دامنه تحلیل به جز نقاط نزدیک به نوک ترک از گره هایی با ساختار شکل ۳-۵ استفاده می گردد. ولی با توجه به اینکه در نزدیکی نوک ترک نیاز به افزایش دقت تحلیل می باشد از تعداد گره های بیشتری و عموماً با ساختار دایره ای شکل نیاز است استفاده گردد. به همین دلیل الگوریتم جداگانه ای برای تشکیل گره های نزدیک به نوک ترک برای چنین شرایطی نوشته شده است. به عنوان مثال ساختار گره های نزدیک به نوک ترک در یک ترک جانبی مطابق شکل زیر می باشد.



شکل ۵-۳: چگونگی قرار گرفتن گره ها در نزدیکی نوک ترک

## ۵-۷- الگوریتم روش بدون المان گالرکین با استفاده از ضرایب لاگرانژ نوع

### دوم

با توجه به معادلات به دست آمده در فصل سوم و مطالب بیان شده در این فصل اکنون می توان الگوریتمی که بر اساس آن برنامه مربوط به ضرایب لاگرانژ نوع دوم نوشته می شود را بیان کرد.

- ۱- تعریف پارامترهای ابتدایی مساله از جمله پارامترهای فیزیکی.
- ۲- ایجاد ساختار مناسبی برای قرار دادن گره ها در تمام دامنه با توجه به شکل مساله.
- ۳- ایجاد شبکه بندی مناسب برای ساختار انتگرالی با در نظر گرفتن شکل مساله. (ساده ترین راه نیز استفاده از شبکه منظم می باشد).
- ۴- در هر سلول با توجه به شکل آن نقاط گوس و وزن مناسب محاسبه گردد.
- ۵- حلقه بیرونی: روی تمام سلول های شبکه انتگرالی

- ۶- حلقه داخلی: روی تمام نقاط گوسی موجود در هر سلول انتگرالی
- الف- دامنه تاثیر هر نقطه گوسی در شبکه بندی محاسبه گردد.
- ب- گره هایی که در دامنه تاثیر نقطه گوسی قرار می گیرند معین شوند.
- ج- توابع وزنی، توابع شکل و مشتقات مورد نظر در هر گره تعیین گردد.
- د- ماتریس  $B$  متناظر ساخته شود.
- ه- ماتریس  $k$  متناظر ایجاد گردد.
- و- ماتریس  $k$  مربوط به هر گره در ماتریس  $K$  مرجع ادغام گردد.
- ۷- پایان حلقه داخلی.
- ۸- پایان حلقه خارجی.
- ۹- حل دستگاه مورد نظر برای به دست آوردن جابجایی های گرهی.
- ۱۰- استفاده از ماتریس های به دست آمده در بالا برای به دست آوردن مقادیر تنش.

## فصل ششم

# تحلیل چند نمونه

### ۶-۱- مقدمه

در فصل های قبل تمامی مطالب لازم برای تشریح روش تحلیل برنامه به کار گرفته شده در این پروژه بیان گردید. در این فصل با توجه به مطالب بیان شده در فصل های قبل و با فرض شرایط فیزیکی و محیطی مناسب به بررسی چند مثال پرداخته می شود و برای آنکه بتوانیم شناخت مناسبی نیز از روند اجرای برنامه داشته باشیم مثال های حل شده را از موارد ساده یعنی جسم ایزوتروپیک بدون ترک آغاز کرده و سپس با افزودن شرایط مواد FG و ترک، مثال های پیچیده تری را تحلیل می کنیم. در هنگام تحلیل صفحات ترکدار نیز ابتدا ترک های جانبی که از لحاظ آنالیز کردن ساده تر هستند مورد تحلیل قرار می گیرند. در نهایت با حصول اطمینان از نتایج به دست آمده به تحلیل صفحه ساخته شده از مواد FG دارای ترک مرکزی پرداخته می شود. برای بررسی نتایج مراحل اولیه از مقایسه نتایج با نرم افزار ANSYS کمک گرفته



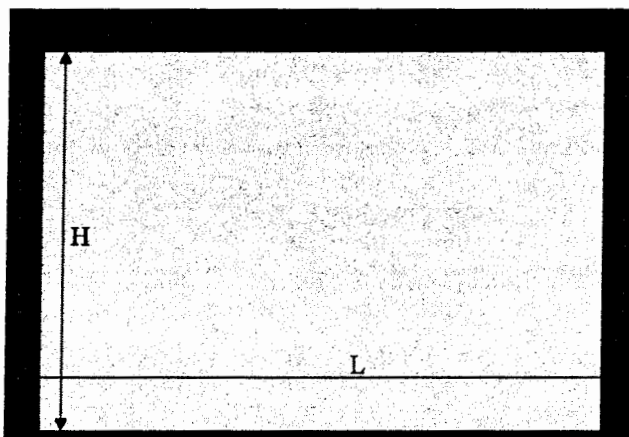
می شود و در مراحل نهایی که تحلیل مساله با نرم افزار بسیار دشوار می گردد از تحقیقات انجام شده توسط محققان دیگر کمک گرفته می شود.

## ۶-۲- تحلیل صفحه ایزوتروپیک بدون ترک

در این قسمت به تحلیل مساله مورد نظر در ساده ترین حالت ممکن پرداخته می شود. اگر نتایج به دست آمده در این قسمت صحیح باشند می توان از صحیح بودن الگوریتم استفاده شده، مطمئن شد و مراحل بعدی را به راحتی تحلیل کرد. در این مساله، در مراحل آنالیز قطعه بدون ترک مقادیر زیر ثابت در نظر گرفته می شوند:

$$t = 0.005 \text{ m}$$

$$L = 0.6 \text{ m} \quad H = 0.3 \text{ m}$$



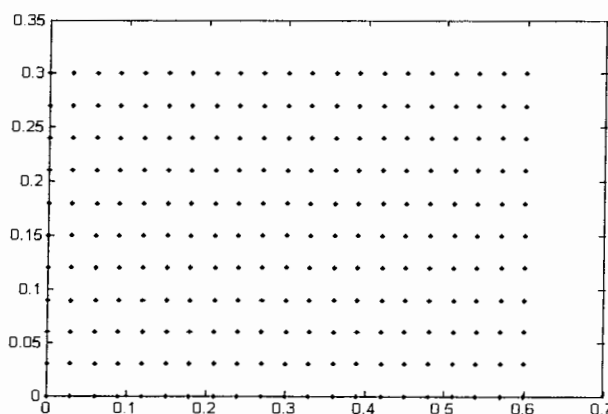
شکل ۶-۱: مساله اولیه مورد آنالیز برای ماده ایزوتروپیک بدون ترک

که با توجه به شکل ۶-۱ و  $L$  و  $H$  به ترتیب ضخامت، طول و عرض صفحه مورد نظر می باشد. همچنین نیروی کششی وارد بر هر سه سطح نشان داده شده در شکل بالا برابر  $2 \text{ Mpa}$  در نظر گرفته می شود. وجه پایین جسم نیز کاملاً ثابت شده است. تمامی مراحل انجام این پروژه از جمله تحلیل و رسم اشکال با استفاده از نرم افزار MATLAB انجام شده است. در قسمت هایی که

قطعه دارای ترک را مورد بررسی قرار می دهیم با توجه به اینکه نتایج می بایست با منابع موثق مقایسه گردند از ابعاد و مواد با خواص دیگر استفاده می شود که در هر قسمت بیان می گردد. در این قسمت علاوه بر فرضیات انجام شده مقادیر زیر نیز در نظر گرفته می شوند:

$$E = 200 \text{ Gpa} \quad \nu = 0.33$$

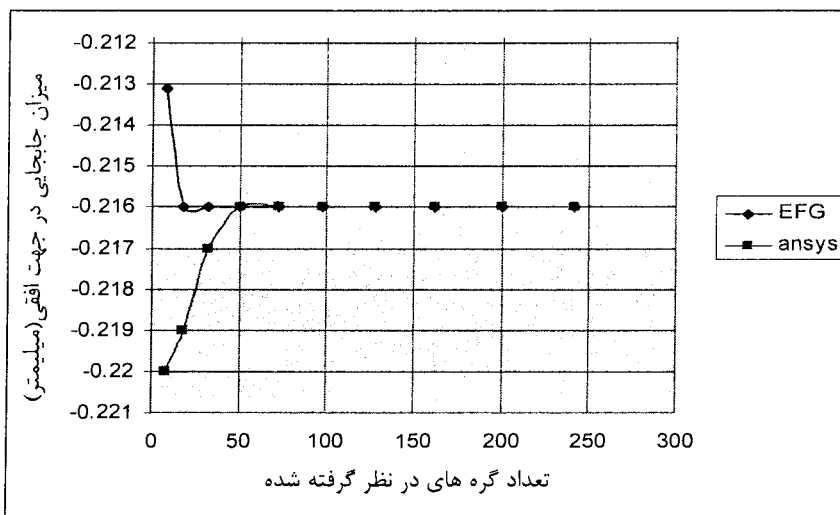
که E مدول یانگ جسم و  $\nu$  ضریب پواسون آن می باشد. نتایج به دست آمده از تحلیل، با نتایج به دست آمده از نرم افزار ANSYS مقایسه شده است. نمونه ای از شبکه گره ها با تعداد ۲۳۱ گره - در ۱۱ ردیف و ۲۱ ستون در شکل ۲-۶ نشان داده شده است.



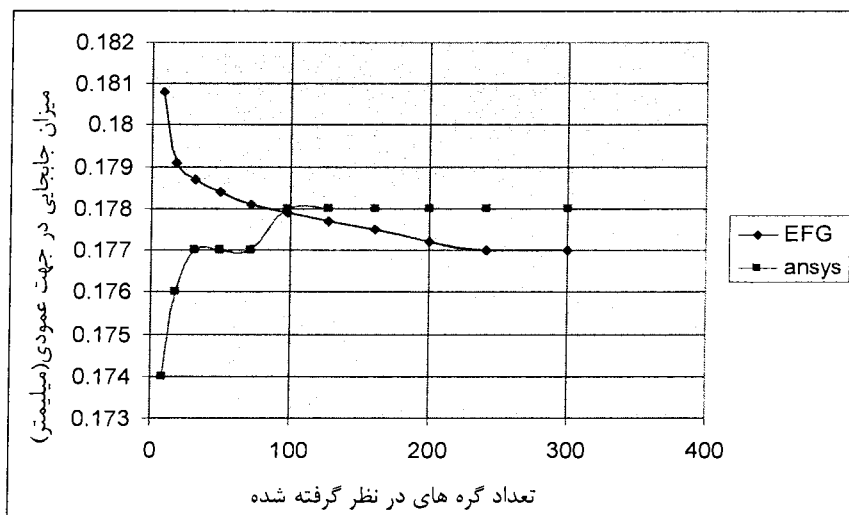
شکل ۲-۶: شبکه گره های ساختار تحلیل

در شکل های شماره ۳-۶ و ۴-۶ میزان جابجایی در جهات افقی و قائم - بر حسب میلیمتر - برای نقطه قرار گرفته در گوشه سمت چپ و بالا با استفاده از تحلیل بدون المان گالرکین و نرم افزار ANSYS به دست آمده و با هم مقایسه شده اند. همانگونه که دیده می شود برای جابجایی در جهت افقی هر دو روش پس از چند مرحله به سمت یک مقدار یکسان همگرا می شوند ولی میزان همگرایی در روش بدون المان گالرکین بیشتر از میزان همگرایی نتایج به دست آمده از نرم افزار ANSYS می باشد. برای جابجایی در جهت قائم هر چند نتایج هر دو روش به یک مقدار واحد همگرا نمی گردند ولی اختلاف بین نتایج آنها بسیار اندک می باشد. در این

قسمت نتایج به دست آمده به روش بدون المان گالرکین بسیار هموار هستند و به شکل مناسبی همگرا می گردند.



شکل ۳-۶: مقایسه جابجایی در جهت x برای روش EFG و نرم افزار ANSYS



شکل ۴-۶: مقایسه جابجایی در جهت y برای روش EFG و نرم افزار ANSYS

از جدول های ۱-۶ و ۲-۶ برای درک بهتر نتایج بالا می توان استفاده کرد. همانگونه که در این دو جدول دیده می شود خطای هر دو روش بسیار اندک می باشد و قابل چشم پوشی هستند.

همچنین در محاسبه مقادیر جابجایی در جهت X دیده می شود که روش بدون المان گالرکین با تعداد ۲۸ گره همگرا می گردد در حالی که در نتایج ANSYS باید حداقل از ۶۶ گره استفاده کرد که این یعنی شبکه ای با حدود دو برابر گره، که این مساله نشانگر همگرایی بهتر روش بدون المان گالرکین نسبت به ANSYS است.

جدول ۱-۶: مقایسه نتایج برای روش EFG و نرم افزار ANSYS برای جابجایی در جهت X (بر حسب میلیمتر)

تعداد کل گره ها	تعداد گره ها در جهت X	تعدادگرهها در جهت Y	نتایج EFG (میلیمتر)	نتایج ANSYS (میلیمتر)
۱۵	۵	۳	-۰.۲۱۳۱	-۰.۲۲
۲۸	۷	۴	-۰.۲۱۶	-۰.۲۱۹
۴۵	۹	۵	-۰.۲۱۶	-۰.۲۱۷
۶۶	۱۱	۶	-۰.۲۱۶	-۰.۲۱۶
۹۱	۱۳	۷	-۰.۲۱۶	-۰.۲۱۶
۱۲۰	۱۵	۸	-۰.۲۱۶	-۰.۲۱۶
۱۵۳	۱۷	۹	-۰.۲۱۶	-۰.۲۱۶
۱۹۰	۱۹	۱۰	-۰.۲۱۶	-۰.۲۱۶
۲۳۱	۲۱	۱۱	-۰.۲۱۶	-۰.۲۱۶
۲۷۶	۲۳	۱۲	-۰.۲۱۶	-۰.۲۱۶

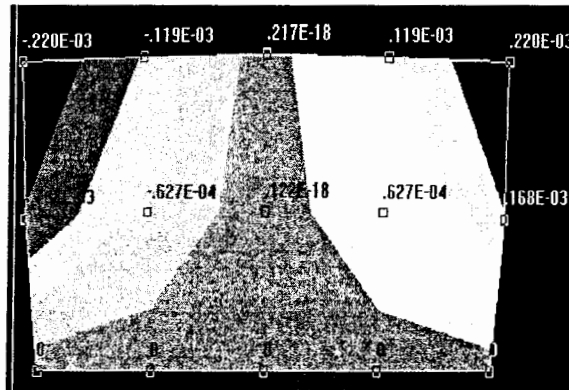
جدول ۶-۲: مقایسه نتایج برای روش EFG و نرم افزار ANSYS برای جابجایی در جهت y (بر حسب میلیمتر)

تعداد کل گره ها	تعداد گره ها در جهت x	تعداد گرهها در جهت y	نتایج EFG (میلیمتر)	نتایج ANSYS (میلیمتر)
۱۵	۵	۳	۰،۱۸۰۸	۰،۱۷۴
۲۸	۷	۴	۰،۱۷۹۱	۰،۱۷۶
۴۵	۹	۵	۰،۱۷۸۷	۰،۱۷۷
۶۶	۱۱	۶	۰،۱۷۸۴	۰،۱۷۷
۹۱	۱۳	۷	۰،۱۷۸۱	۰،۱۷۷
۱۲۰	۱۵	۸	۰،۱۷۷۹	۰،۱۷۸
۱۵۳	۱۷	۹	۰،۱۷۷۷	۰،۱۷۸
۱۹۰	۱۹	۱۰	۰،۱۷۷۵	۰،۱۷۸
۲۳۱	۲۱	۱۱	۰،۱۷۷۲	۰،۱۷۸
۲۷۶	۲۳	۱۲	۰،۱۷۷	۰،۱۷۸

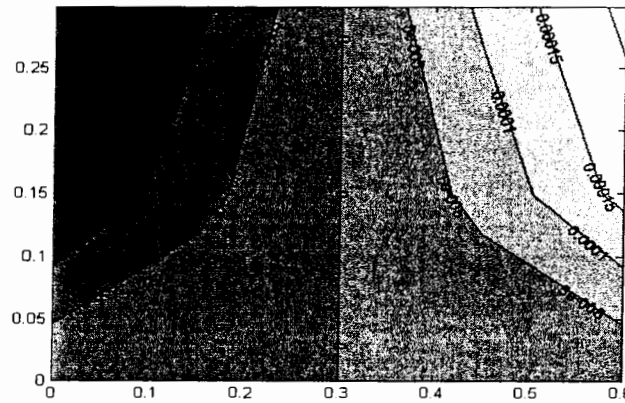
در ادامه برای مقایسه نتایج در کل دامنه، کانتورهای<sup>۱</sup> جابجایی برای هر دو روش در چند حالت متفاوت در شکل های ۶-۵ تا ۶-۱۲ نشان داده می شود. البته از لحاظ شکل ظاهری و

<sup>۱</sup> - کانتور شکلی است که به وسیله آن تغییرات پارامتری خاص بر روی یک ساختار نشان داده می شود. به همین علت ابعاد کانتور همان ابعاد صفحه می باشند. در قسمت هایی که پارامتر مورد نظر یک مقدار را داراست، رنگ کانتور نیز یکسان است.

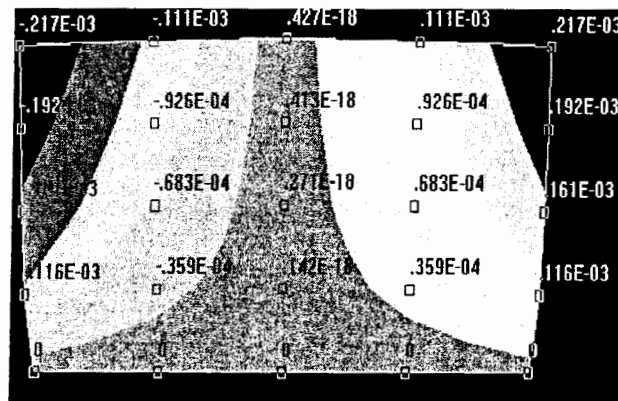
رنگ های موجود نتایج دو روش کمی متفاوت می باشند که این مساله به خاطر تفاوت دو نرم افزار می باشد ولی از لحاظ ساختاری کاملا بر هم منطبق می باشند که این مطلب بیانگر صحت نتایج به دست آمده می باشد.



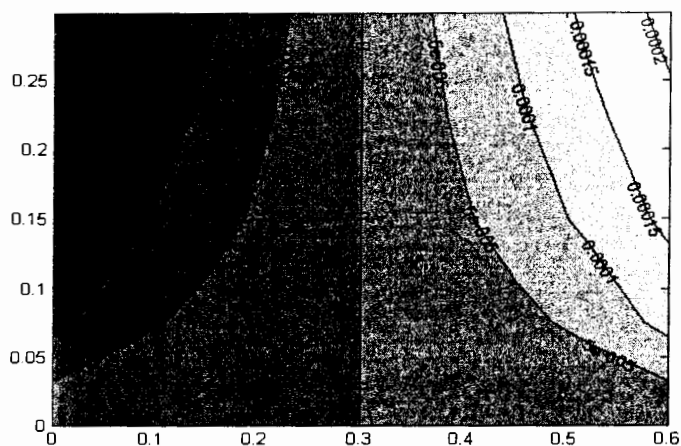
شکل ۶-۵: جابجایی در جهت X برای نتایج روش ANSYS با ۱۵ گره



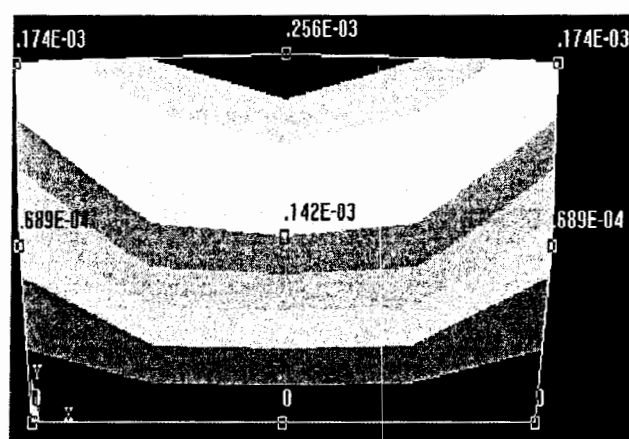
شکل ۶-۶: جابجایی در جهت X برای نتایج روش EFG با ۱۵ گره



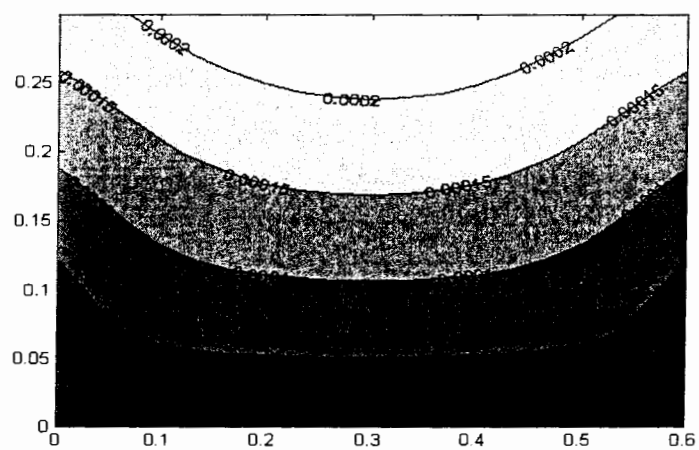
شکل ۶-۷: جابجایی در جهت X برای نتایج روش ANSYS با ۴۵ گره



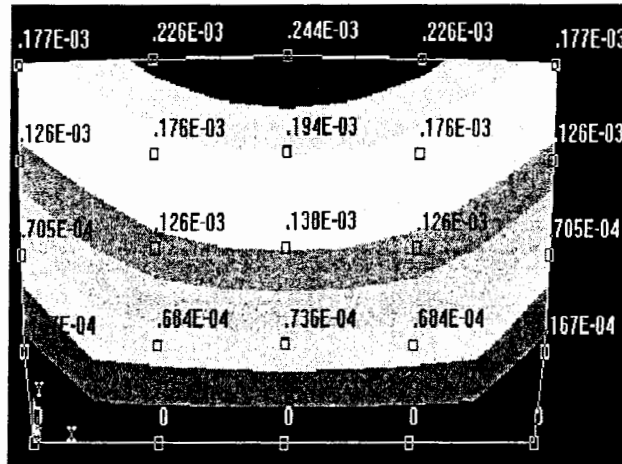
شکل ۶-۸: جابجایی در جهت X برای نتایج روش EFG با ۴۵ گره



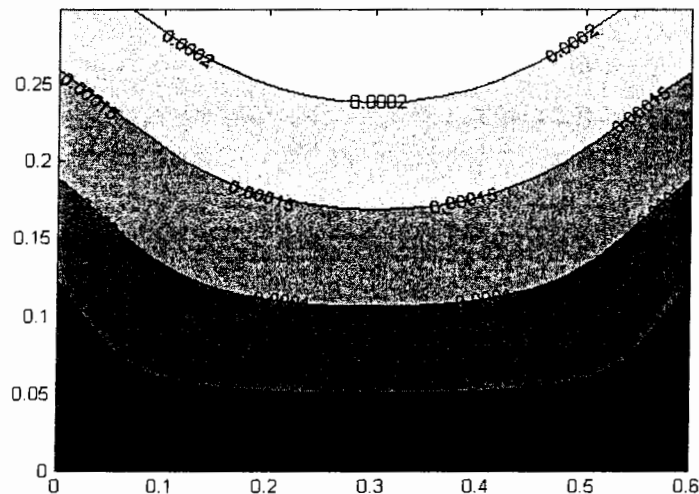
شکل ۶-۹: جابجایی در جهت Y برای نتایج روش ANSYS با ۱۵ گره



شکل ۶-۱۰: جابجایی در جهت Y برای نتایج روش EFG با ۱۵ گره



شکل ۶-۱۱: جابجایی در جهت  $Y$  برای نتایج روش ANSYS با ۴۵ گره



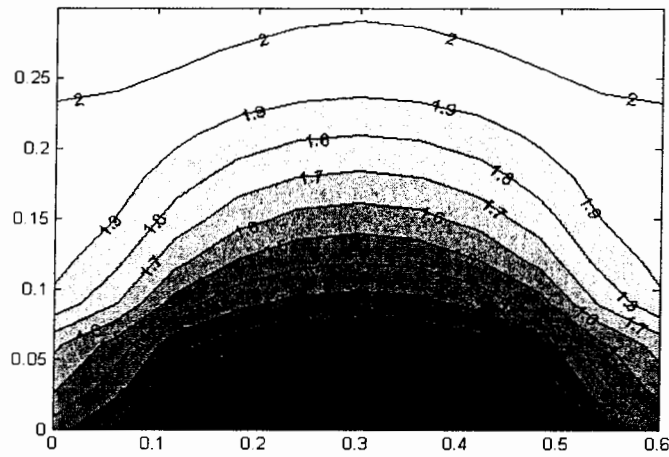
شکل ۶-۱۲: جابجایی در جهت  $Y$  برای نتایج روش EFG با ۴۵ گره

با مقایسه شکل ها و جداول بالا برای دو روش به این نتیجه می رسیم که الگوریتم به کار گرفته شده برای تحلیل صحیح می باشد. زیرا نتایج آن با نتایج به دست آمده از نرم افزار ANSYS همخوانی مناسبی دارد. این مطلب را نه به صورت کاملا دقیق ولی از چگونگی اشکال به دست

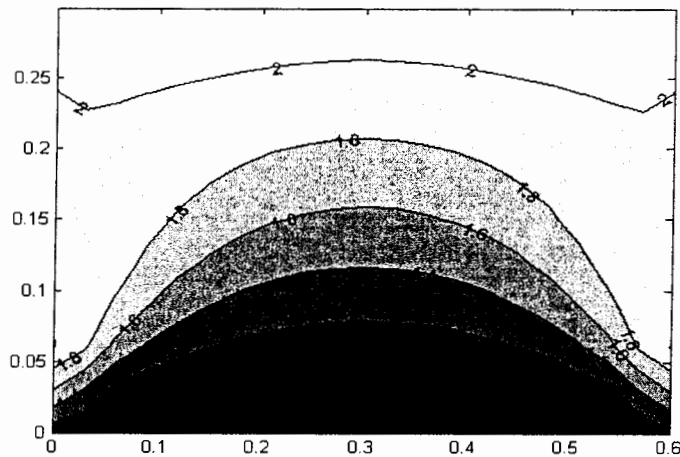


آمده نیز می توان دریافت. با توجه به چگونگی اعمال نیرو بر ساختار صفحه می بایست جابجایی صفحه در جهت افقی نسبت به خط مرکزی متقارن باشد که در شکل های به دست آمده این مطلب کاملا مشهود است.

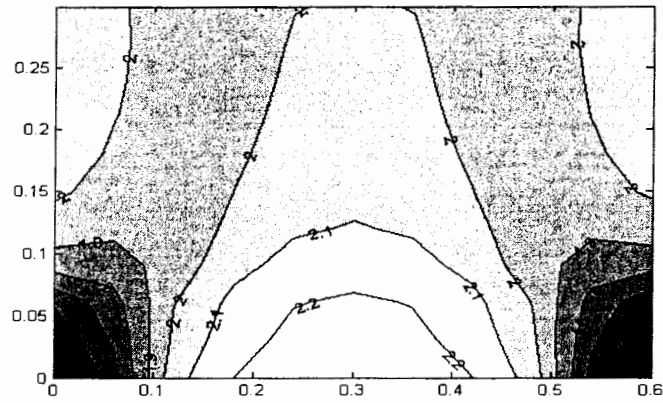
در شکل های ۶-۱۳ تا ۶-۱۸ کانتور های تنش در جهت افقی  $\sigma_{xx}$  و عمودی  $\sigma_{yy}$  و کانتور تنش برشی  $\sigma_{xy}$  برای تعداد ۱۲۱ گره و تعداد ۲۳۱ گره نشان داده شده اند. مقادیر نشان داده شده بر حسب مگا پاسگال می باشند.



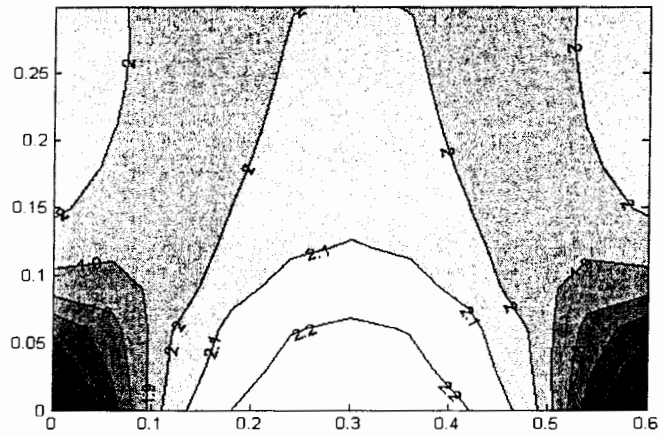
شکل ۶-۱۳: کانتور تنش افقی برای ۱۲۱ گره (مگا پاسگال)



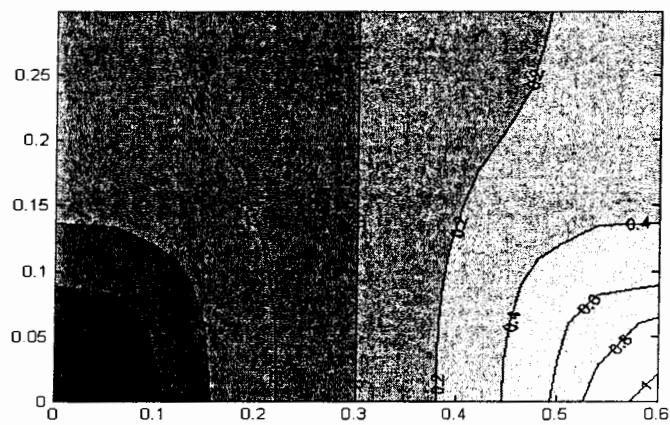
شکل ۶-۱۴: کانتور تنش افقی برای ۲۳۱ گره (مگا پاسگال)



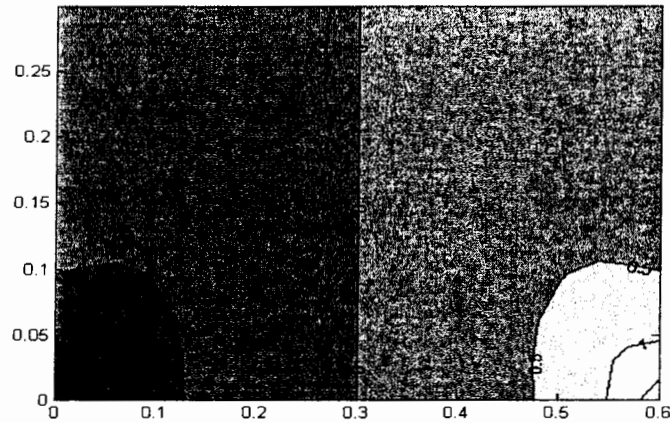
شکل ۶-۱۵: کانتور تنش عمودی برای ۱۲۱ گره (مگا پاسگال)



شکل ۶-۱۶: کانتور تنش عمودی برای ۲۳۱ گره (مگا پاسگال)



شکل ۶-۱۷: کانتور تنش برشی برای ۱۲۱ گره (مگا پاسگال)



شکل ۶-۱۸: کانتور تنش برشی برای ۲۳۱ گره (مگا پاسگال)

نکته دیگری که مورد توجه است این است که هر چند با افزایش تعداد گره ها نتایج هموارتری به دست آمده است ولی نتایج به دست آمده با تعداد گره های کم هم از دقت بالایی برخوردار هستند. اکنون با استفاده از الگوریتم بیان شده و با اندکی تغییرات در آن می توان مراحل بعدی تحلیل را نیز انجام داد.

### ۶-۳- نتایج تحلیل صفحه بدون ترک ساخته شده از مواد FG

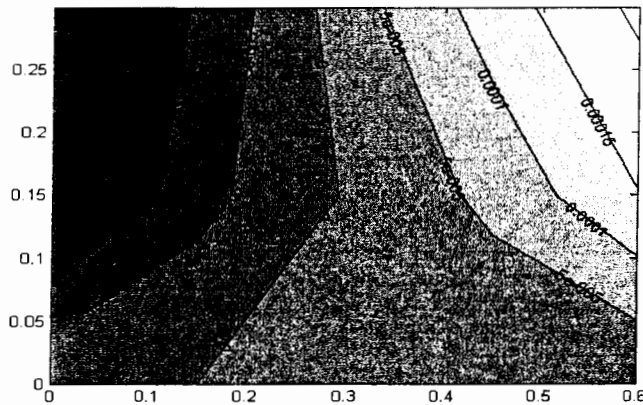
در این مرحله با استفاده از الگوریتم قسمت قبل و تنها با تغییر در ماتریس خواص می توان به تحلیل مساله مورد نظر پرداخت. همانگونه که در فصل قبل گفته شد تغییرات مورد نظر بر روی نقاط گوسی اعمال می گردند. همچنین چون ماده مورد نظر ماده FG ایزوتروپیک است از فرمول های بیان شده در مرجع ۱۱ برای اعمال تغییرات در مدول الاستیسیته استفاده می شود. به این ترتیب می توان با در نظر گرفتن تغییرات در جهت  $X$  از رابطه زیر استفاده کرد.

$$E(x_p) = \frac{E_1 - E_0}{L} \times x_p + E_0 \quad (1-6)$$

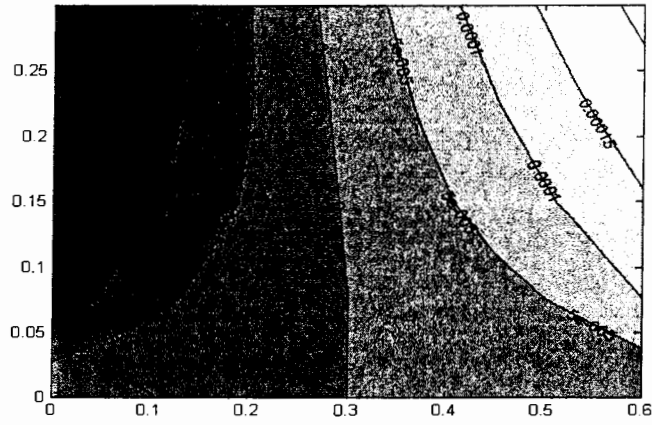
همانگونه که مشاهده می گردد با استفاده از این فرمول تغییرات ایجاد شده به صورت خطی می باشد به گونه ای که در وجه سمت چپ مقدار مدول الاستیسیته برابر  $E_0$  و در وجه سمت راست برابر  $E_1$  می باشد. در این تحلیل مقدار  $E_0$  برابر  $E = 150Gpa$  و  $E_1$  برابر  $E = 250Gpa$  فرض شده اند. به این ترتیب مقدار مدول الاستیسیته در سطح مرکزی برابر  $E = 200Gpa$  می باشد. شرایط فیزیکی و بارگذاری نیز مشابه تحلیل ماده ایزوتروپیک در شکل ۶-۱ در نظر گرفته می شوند.

در این قسمت تنها نتایج به دست آمده با استفاده از برنامه مورد نظر ارائه می گردند زیرا نرم افزارهای المان محدود مانند ANSYS نمی توانند به صورت هموار خواص مواد FG را شبیه سازی کنند. در این نرم افزارها می بایست مواد FG را از کنار هم قرار دادن لایه هایی که نسبت به هم اختلاف کمی در خواص دارند ساخت که در نتیجه برای هموار بودن ساختار خواص مواد FG لازم است ضخامت این لایه ها کوچک باشد تا ساختار مناسب به دست آید. با این وجود ساختارهای بوجود آمده در سطوح حد فاصل خود دارای شکستگی هایی در نتایج به دست آمده می باشند که مطلوب نمی باشد مگر آنکه شبکه بسیار ریز گردد.

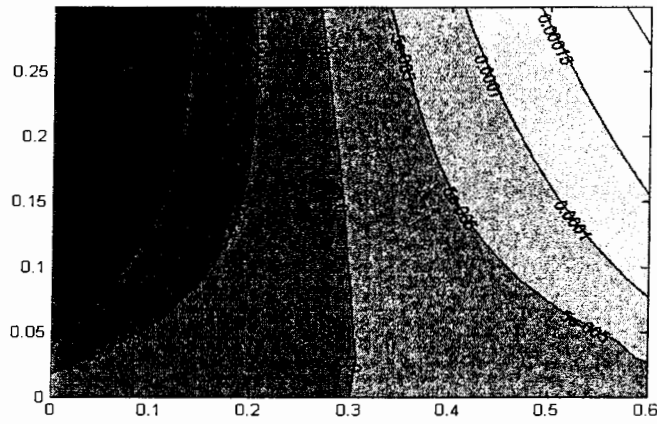
در شکل های ۶-۱۹ تا ۶-۲۴ جابجایی های در راستای افقی و قائم برای تعداد مختلفی از گره ها نشان داده می شوند تا میزان همگرایی نتایج در تمامی سطح صفحه دیده شود.



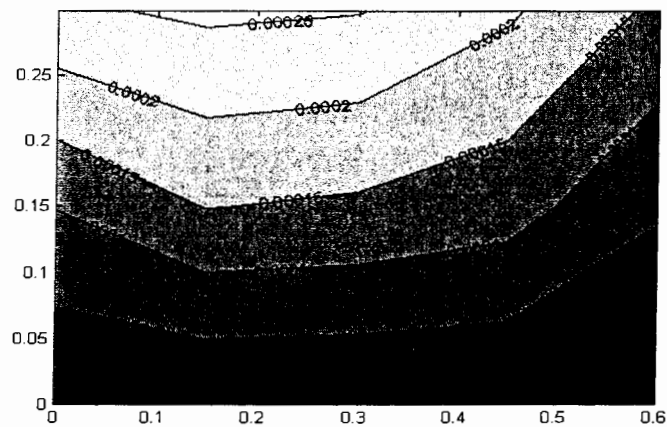
شکل ۶-۱۹: جابجایی در جهت x برای روش EFG با ۱۵ گره در ماده FG



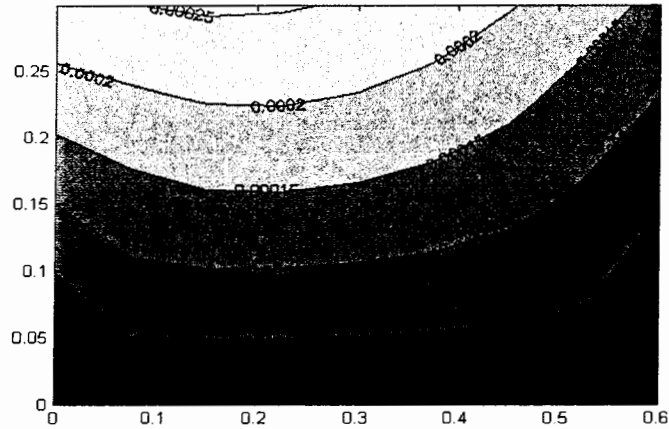
شکل ۶-۲۰: جابجایی در جهت X برای روش EFG با ۴۵ گره در ماده FG



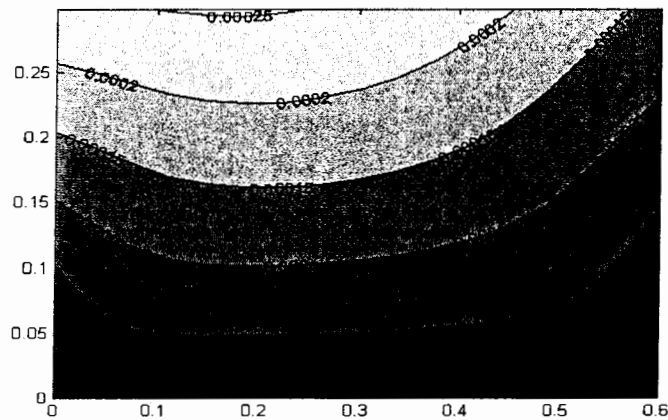
شکل ۶-۲۱: جابجایی در جهت X برای روش EFG با ۲۳۱ گره در ماده FG



شکل ۶-۲۲: جابجایی در جهت Y برای روش EFG با ۱۵ گره در ماده FG

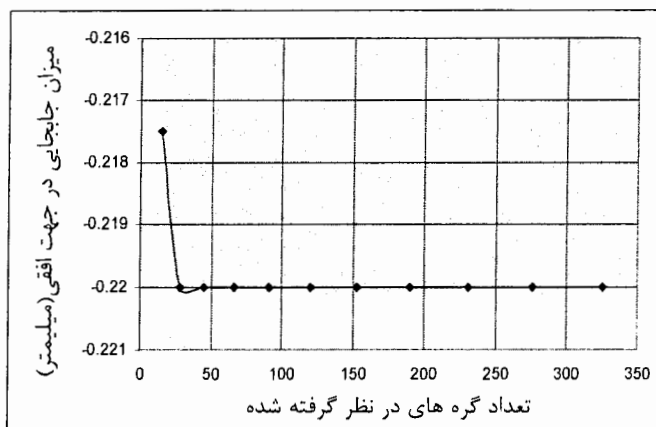


شکل ۶-۲۳: جابجایی در جهت  $\gamma$  برای روش EFG با ۴۵ گره در ماده FG

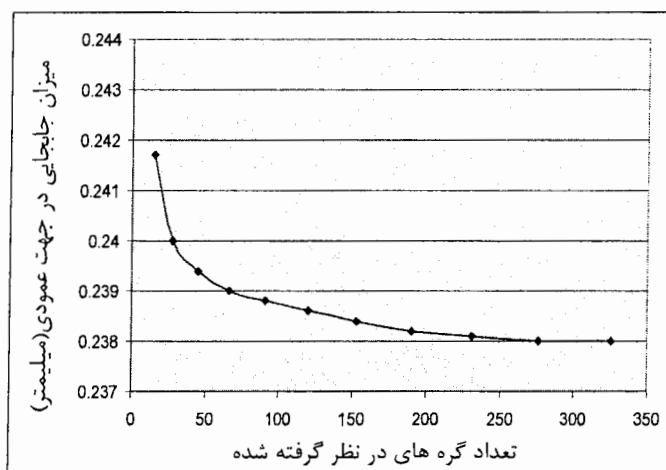


شکل ۶-۲۴: جابجایی در جهت  $\gamma$  برای روش EFG با ۱۵۳ گره در ماده FG

همانگونه که دیده می شود شکل های به دست آمده برای تعداد اندک گره دارای شکستگی های زیادی می باشند ولی با افزایش تعداد گره ها شکل های به دست آمده بسیار هموار می باشند که با افزایش بیش از حد تعداد گره نیز تفاوت چندانی در نتایج به دست نمی آید. باید توجه داشت که شکستگی های ایجاد شده در شکل ها به علت خطا در نتایج نمی باشد بلکه به خاطر تعداد کم نقاط می باشد که باعث می گردد فاصله بین نقاط پایه که در آنها مقادیر به دست آمده، زیاد باشد و در نتیجه هنگام برازش خطوط، شکستگی هایی ایجاد گردد.



شکل ۶-۲۵: بررسی همگرایی جابجایی افقی روش EFG در ماده FG



شکل ۶-۲۶: بررسی همگرایی جابجایی عمودی روش EFG در ماده FG

در شکل های ۶-۲۵ و ۶-۲۶ میزان همگرایی جابجایی های نقطه واقع در گوشه سمت چپ و بالا در جهات افقی و عمودی بررسی شده است. همانگونه که دیده می شود برای جابجایی در جهت افقی نتایج بسیار سریع به میزان مورد نظر همگرا می گردند. و تنها برای کمترین تعداد نقاط یعنی ۱۵ نقطه نتیجه به دست آمده دارای خطا می باشد. همگرایی جابجایی در جهت قائم کند تر می باشد ولی آن هم با افزایش تعداد نقاط همگرا می گردد.

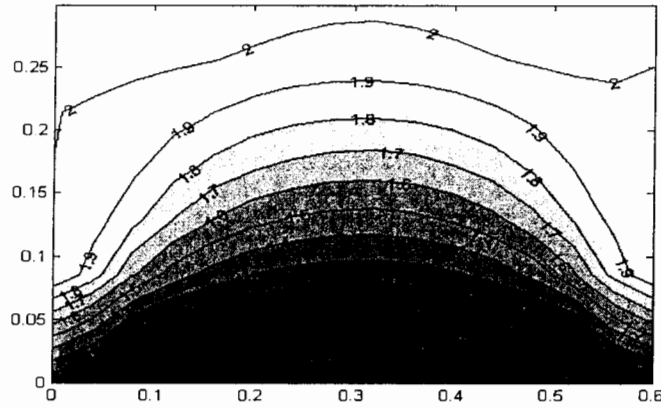
در جدول شماره ۳-۶ نیز مقادیر مربوط به این دو شکل آورده شده است. همانگونه که دیده می شود نتایج به دست آمده برای تعداد گره های متفاوت تقریباً به نتایج مشابهی همگرا می گردند.

جدول ۳-۶: بررسی نتایج جابجایی برای مواد FG

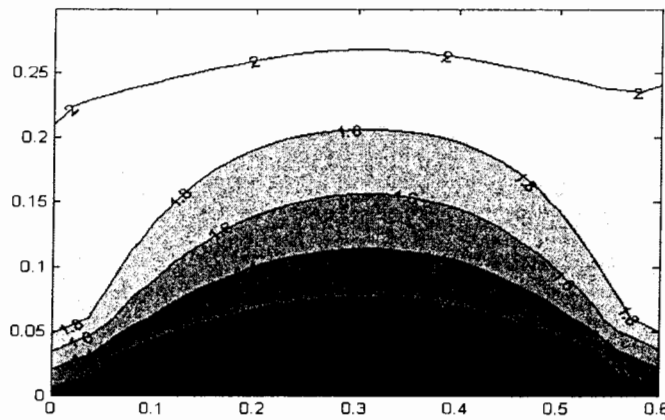
تعداد کل گره ها	تعداد گره ها در جهت X	تعداد گرهها در جهت Y	نتایج در جهت X (میلیمتر)	نتایج در جهت Y (میلیمتر)
۱۵	۵	۳	-۰.۲۱۷۵	۰.۲۴۱۷
۲۸	۷	۴	-۰.۲۲	۰.۲۴
۴۵	۹	۵	-۰.۲۲	۰.۲۳۹۴
۶۶	۱۱	۶	-۰.۲۲	۰.۲۳۹
۹۱	۱۳	۷	-۰.۲۲	۰.۲۳۸۸
۱۲۰	۱۵	۸	-۰.۲۲	۰.۲۳۸۶
۱۵۳	۱۷	۹	-۰.۲۲	۰.۲۳۸۴
۱۹۰	۱۹	۱۰	-۰.۲۲	۰.۲۳۸۲
۲۳۱	۲۱	۱۱	-۰.۲۲	۰.۲۳۸۱
۲۷۶	۲۳	۱۲	-۰.۲۲	۰.۲۳۸



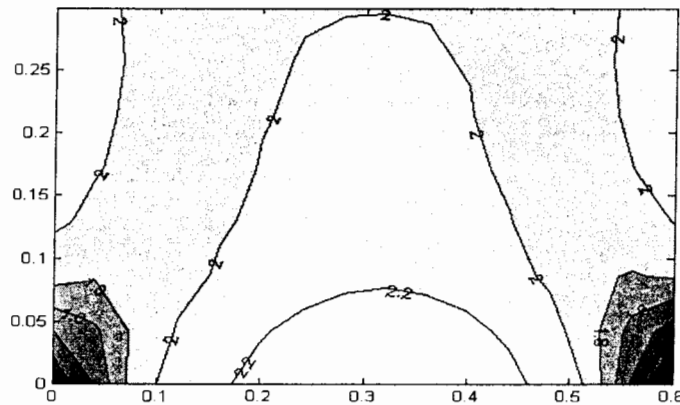
در شکل های ۲۷-۶ تا ۳۲-۶ نیز کانتور های تنش به دست آمده برای تعداد ۱۲۸ و ۳۴۱  
 گره برای صفحه ساخته شده از ماده FG نشان داده شده است.



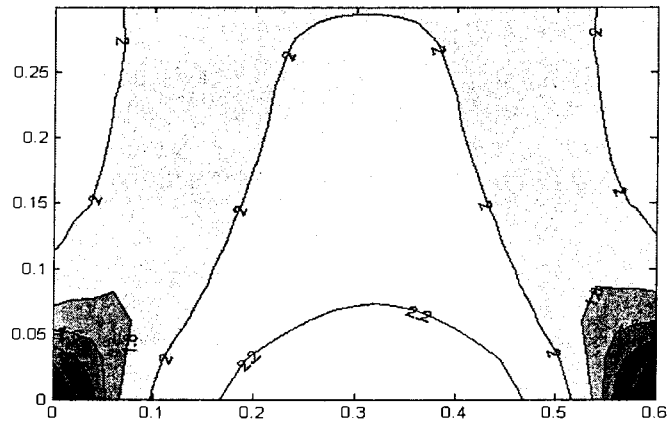
شکل ۲۷-۶: کانتور تنش افقی برای ۱۲۸ گره در ماده FG



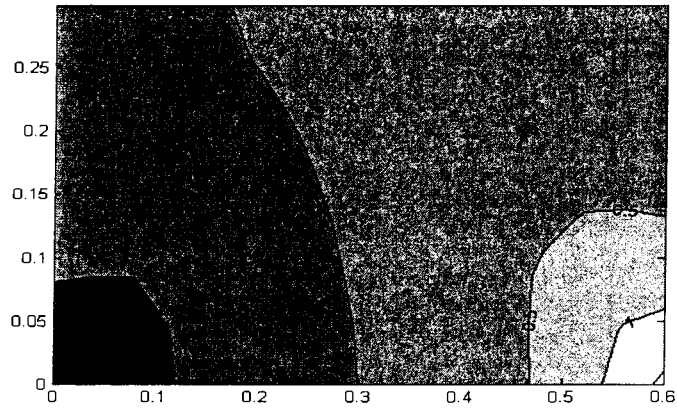
شکل ۲۸-۶: کانتور تنش افقی برای ۳۴۱ گره در ماده FG



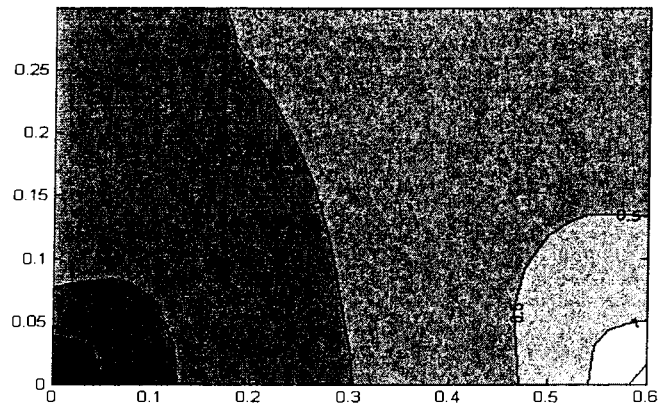
شکل ۲۹-۶: کانتور تنش عمودی برای ۱۲۸ گره در ماده FG



شکل ۳۰-۶: کانتور تنش عمودی برای ۳۴۱ گره در ماده FG



شکل ۳۱-۶: کانتور تنش برشی برای ۱۲۸ گره در ماده FG



شکل ۳۲-۶: کانتور تنش برشی برای ۳۴۱ گره در ماده FG

همانگونه که در شکل های بالا دیده می شود نتایج به دست آمده برای جابجایی های ماده FG برعکس نتایج ماده ایزوتروپیک که کاملاً متقارن هستند کمی به سمت چپ متمایل شده اند. این مطلب به این علت است که در سمت چپ، ماده از استحکام کمتری برخوردار است لذا میزان جابجایی در این قسمت بیشتر از سمت راست صفحه می باشد. این موضوع در شکل های مربوط به کانتورهای تنش و به خصوص در نتایج به دست آمده برای تنش برشی نیز مشهود می باشد. این مطلب باعث می گردد تمرکزهای تنش کمتری در کل ساختار صفحه و به خصوص در قسمت های سمت راست صفحه ایجاد گردد.

همچنین همانند شکل های قبل دیده می شود که برای تعداد کم گره نتایج به دست آمده مناسب می باشند ولی با افزایش تعداد گره ها شکل های هموارتر و مطلوب تری به دست می آیند. صحت نتایج به دست آمده برای تنش را نیز می توان با استفاده از برخی قواعد تئوری بررسی کرد. در قسمت هایی از صفحه که دور از نقاط تکیه گاهی می باشند به خصوص در نقاط نزدیک به اضلاعی که نیرو بر روی آنها وارد می گردد لازم است که مقادیر تنش با مقادیر فشار وارد شده بر جسم برابر باشد که در شکل های تنش این مطلب به وضوح دیده می شود.

#### ۶-۴- نتایج تحلیل صفحه ایزوتروپیک دارای ترک جانبی

اکنون با توجه به نتایج به دست آمده در قسمت های قبل و با ایجاد تغییرات مناسب می توان به تحلیل مسایل دارای ترک پرداخت. در این قسمت برای بررسی از یک صفحه ایزوتروپیک دارای ترک جانبی تحت کشش خالص استفاده شده است. شکل این صفحه و چگونگی بارگذاری روی آن در شکل ۶-۳۳ نشان داده شده است. در این صفحه طول و عرض صفحه و طول ترک به ترتیب برابر ۲، ۱ و ۰،۴ واحد می باشد. تنش دور دست اعمال شده نیز برابر واحد

در این قسمت با توجه به وجود ترک در ساختار شبکه، مهم ترین پارامترهایی که می بایست بررسی گردند انتگرال J و ضریب تمرکز تنش می باشد. نتایج به دست آمده برای ضریب تمرکز تنش در نهایت با مقدار پایه آن که توسط تادا<sup>۱</sup> [۳۷] محاسبه شده است مقایسه می گردد. برای این قسمت از ساختاری با ۹۶۱ گره استفاده شده است. برای محاسبه انتگرال J نیز از انتگرال گیری عددی کوادراچر گوسی با تعداد ۸ گره در هر راستا و در مجموع ۶۴ گره استفاده شده است. مقدار ضریب شدت تنش برای این شرایط برابر ۲،۳۶۷ به دست می آید. با توجه به اینکه مقدار محاسبه شده توسط تادا برابر ۲،۳۵۸ می باشد، نتیجه به دست آمده دارای دقتی مناسبی می باشد که این مساله صحت تحلیل انجام شده را نشان می دهد.

اکنون با توجه به نتیجه به دست آمده برای ضریب شدت تنش و با توجه به صحت انجام کار می توان نتایج دیگر مربوط به این قسمت را نیز به دست آورد. یکی از مهم ترین مواردی که در نتایج باید به آن توجه کرد محاسبه تنش های فون میزز<sup>۲</sup> می باشد. زیرا تنش های فون میزز بهتر از تنش های دیگر می توانند شرایط خرابی را در ساختار جسم مشخص کنند. رابطه تنش فون میزز در حالت سه بعدی به صورت زیر است.

$$\sigma_{von} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad (۲-۶)$$

در حالت دو بعدی تنش های  $\sigma_{zz}$  و  $\tau_{yz}$  و  $\tau_{xz}$  صفر هستند لذا در این حالت رابطه ۲-۶ به صورت زیر بیان می گردد.

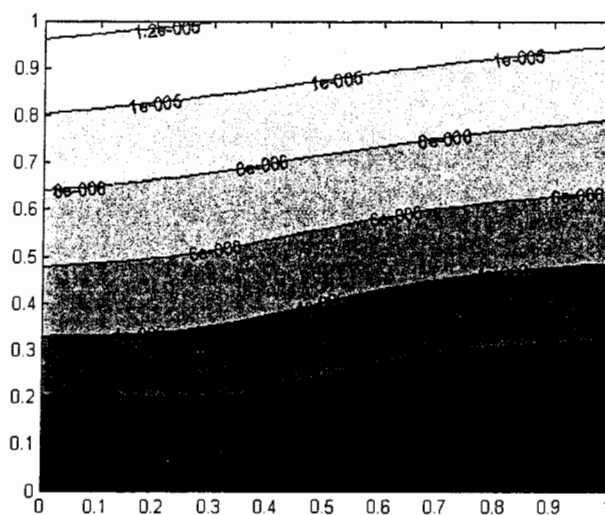
$$\sigma_{von} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (۳-۶)$$

<sup>۱</sup> - Tada

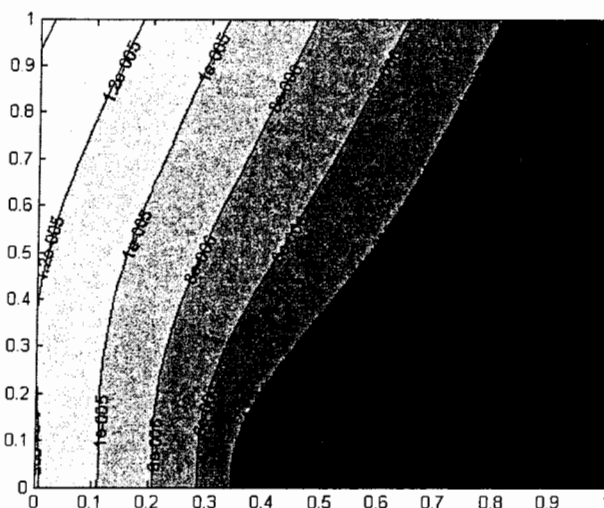
<sup>۲</sup> - Von Mises

به این ترتیب با محاسبه تنش های نرمال در جهات X و Y و تنش برشی می توان تنش فون میزز را محاسبه کرد.

در شکل های ۳۵-۶ و ۳۶-۶ کانتورهای جابجایی در جهات افقی و عمودی برای این صفحه نشان داده شده است.



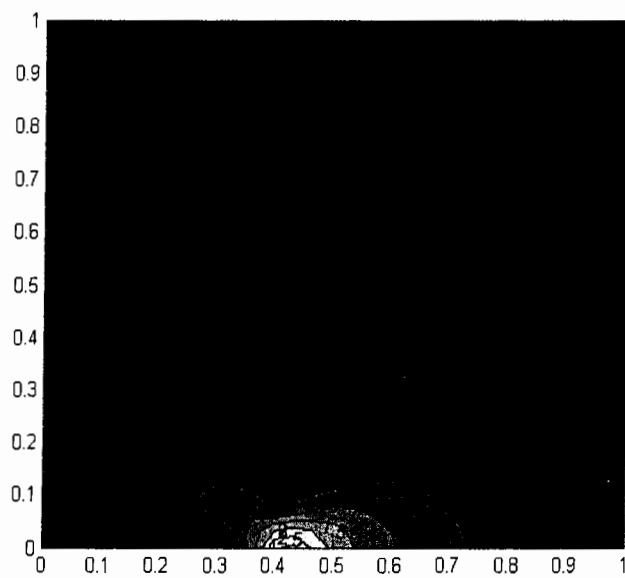
شکل ۳۵-۶: کانتور جابجایی افقی در ماده ایزوتروپیک دارای ترک جانبی



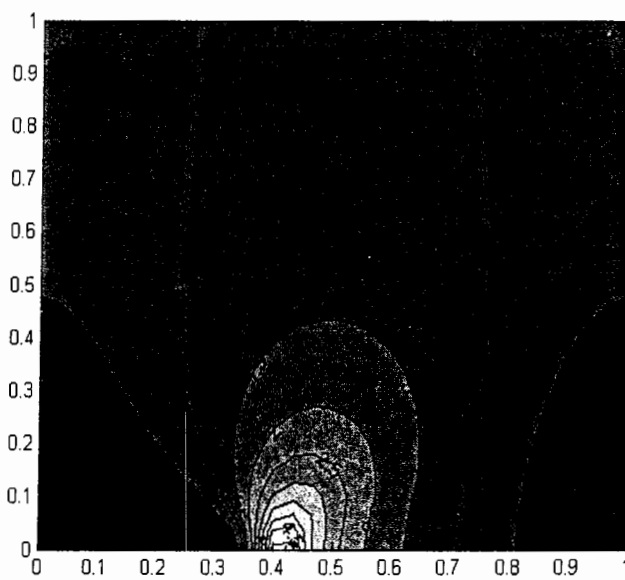
شکل ۳۶-۶: کانتور جابجایی عمودی در ماده ایزوتروپیک دارای ترک جانبی

در شکل های ۳۷-۶ تا ۳۹-۶ کانتور های به دست آمده برای تنش های افقی، عمودی و فون

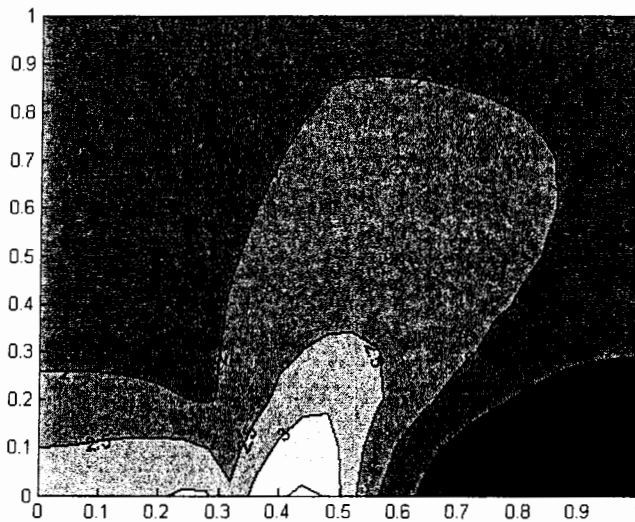
میزز نشان داده شده اند.



شکل ۳۷-۶: کانتور تنش افقی در ماده ایزوتروپیک دارای ترک جانبی



شکل ۳۸-۶: کانتور تنش قائم در ماده ایزوتروپیک دارای ترک جانبی



شکل ۶-۳۹: کانتور تنش فون میزز در ماده ایزوتروپیک دارای ترک جانبی

همانگونه که در هر سه شکل مربوط به کانتورهای تنش مشاهده می شود در نوک ترک یک نوع حالت تمرکز تنش به وجود آمده است و تنش در این نقطه بیشتر از مناطق دیگر صفحه می باشد.

نکته ای که در مورد آنالیز اجسام ترکدار باید به آن توجه کرد این است که اینگونه ساختارها را در روش های المان محدود به راحتی نمی توان تحلیل کرد و نوشتن برنامه ای که بتواند المان بندی های مناسب را انجام دهد - بخصوص هنگامی که اجسام مورد آنالیز دارای تقارن های محوری نباشند - بسیار سخت و دشوار و دارای پیچیدگی های فراوان می باشد. نرم افزار ANSYS نیز به علت اینکه یکپارچگی شکل از بین رفته است از المان بندی های پیچیده ای برای تحلیل استفاده می کند که ساخت چنین المان هایی توسط برنامه های معمولی بسیار دشوار و برای تعداد المان های زیاد تقریباً غیر ممکن می باشد. لذا می توان گفت در چنین شرایطی بهترین راه برای انجام محاسبات استفاده از روش بدون المان گالرکین می باشد.

## ۵-۶- نتایج تحلیل صفحه ترکدار ساخته شده از مواد FG

اکنون با توجه به نتایج قسمت های قبل می توان به بررسی قسمت نهایی پروژه یعنی تحلیل صفحه ساخته شده از ماده FG دارای ترک پرداخت.

در این قسمت با استفاده از الگوریتم مربوط به صفحه ترک دار ساخته شده از ماده ایزوتروپیک و تنها با ایجاد تغییرات در خواص ماده - در ماتریس  $D$  - به تحلیل مساله پرداخته می شود که مانند قسمت ۲-۶ تغییرات تنها بر روی مدول الاستیسیته اعمال می گردد. در این قسمت نیز برای در نظر گرفتن تغییرات جنس، تغییرات مدول الاستیسیته را در هنگام انتگرال گیری بر روی نقاط گوسی اثر می دهیم تا تغییر شکل هموارتری پیدا کند. در این قسمت با ارائه چند مثال متفاوت به بررسی نتایج به دست آمده می پردازیم.

### ۵-۶-۱- صفحه دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG تحت مود اول

در این مثال صفحه ساخته شده از مواد FG تحت سه بارگذاری متفاوت کرنش ثابت، تنش کششی ثابت و خمش خالص قرار داده می شود. با توجه به شکل ۴-۶ طول و عرض صفحه در این قسمت برابر ۸ و ۱ واحد نظر گرفته شده است. طول ترک نیز برابر  $a$  می باشد که در مراحل مختلف آنالیز تغییر می کند. در اینجا فرض شده است که مدول الاستیسیته از تابع نمایی زیر پیروی کند.

$$E(x_1) = E_1 \exp(\eta x_1) \quad 0 \leq x_1 \leq w \quad (۴-۶)$$

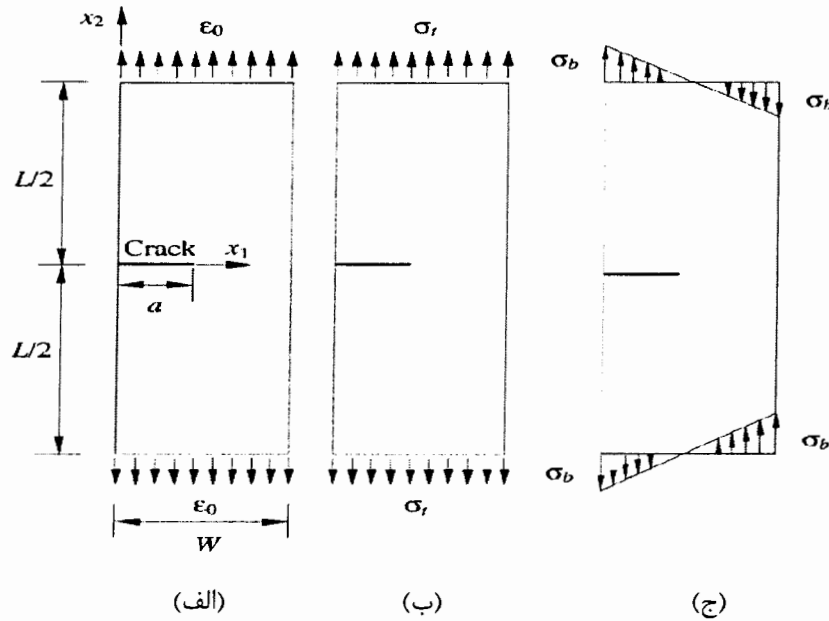
$$\eta = \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \quad (۵-۶)$$

$$E_1 = 1, \quad \frac{E_2}{E_1} = 0.1, 0.2, 5, 10 \quad (۶-۶)$$



تغییرات طول ترک نیز به این صورت می باشد:  $\frac{a}{w} = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$

بارگذاری ها در سه حالت نیز اینگونه می باشد:  $\sigma_t = \sigma_b = 1 \text{ unit}$  ,  $\sigma_0 = \frac{E_1 \varepsilon_0}{(1-\nu^2)}$  ,  $\varepsilon_0 = 1$



شکل ۶-۴: صفحه دارای ترک جانبی تحت مود اول:

(الف) حالت کرنش ثابت، (ب) تنش کششی ثابت، (ج) خمش خالص

در این قسمت ضریب پواسون ثابت و برابر ۰٫۳ واحد در نظر گرفته شده و شرایط صفحه نیز در حالت کرنش صفحه ای می باشد. به علت تقارن موجود در شکل - مانند قسمت قبل - کافی است که تنها نصف صفحه مورد آنالیز قرار گیرد. لذا ساختار مورد آنالیز دقیقاً مانند شکل ۶-۳۴ می باشد با این تفاوت که در این قسمت ماده تشکیل دهنده صفحه، ساختار متغیر دارد و شرایط مورد بررسی در حالت کرنش صفحه ای می باشد. نتایج به دست آمده برای ضرایب شدت تنش

نرمال شده در این قسمت با مقادیر ارائه شده در مراجع ۱۱ و چند مرجع دیگر مقایسه شده اند.

نتایج مربوط به این سه قسمت در جداول ۴-۶ تا ۶-۶ نشان داده شده است.

جدول ۴-۶: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه FG دارای

ترک جانبی تحت شرایط کرنش ثابت

Method	$\frac{E_2}{E_1}$	$\frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}$				
		$\frac{a}{w} = 0.2$	$\frac{a}{w} = 0.3$	$\frac{a}{w} = 0.4$	$\frac{a}{w} = 0.5$	$\frac{a}{w} = 0.6$
Proposed method	0.1	1.3494	1.4322	1.8440	2.0238	3.024
	0.2	1.4300	1.4834	1.8003	2.4862	2.931
	0	1.4076	1.8163	2.7394	3.0649	0.4079
	1.0	1.6270	2.082	2.8446	4.0779	6.7783
Rao and Rahman <sup>[11]</sup>	0.1	1.3118	1.0191	1.8241	2.28	3.01
	0.2	1.3186	1.046	1.8837	2.3966	3.2274
	0	1.4830	1.9161	2.0819	2.6698	0.0708
	1.0	1.0007	2.0724	2.8789	4.2234	6.6266
Erdogan and Wu <sup>[38]</sup>	0.1	1.2963	1.0083	1.8246	2.314	3.1044
	0.2	1.3008	1.033	1.8701	2.4031	3.2981
	0	1.4946	1.9118	2.073	2.6073	0.0704
	1.0	1.074	2.0723	2.8736	4.214	6.6319
Chen et al. <sup>[39]</sup>	0.1	1.2961	1.4919	1.7962	2.2094	3.0044
	0.2	1.3140	1.0283	1.8109	2.3877	3.291
	0	1.0414	1.9499	2.6238	3.7429	0.7936
	1.0	1.6296	2.1206	2.9398	4.3272	6.9171

جدول ۶-۵: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه FG دارای

ترک جانبی تحت شرایط تنش ثابت

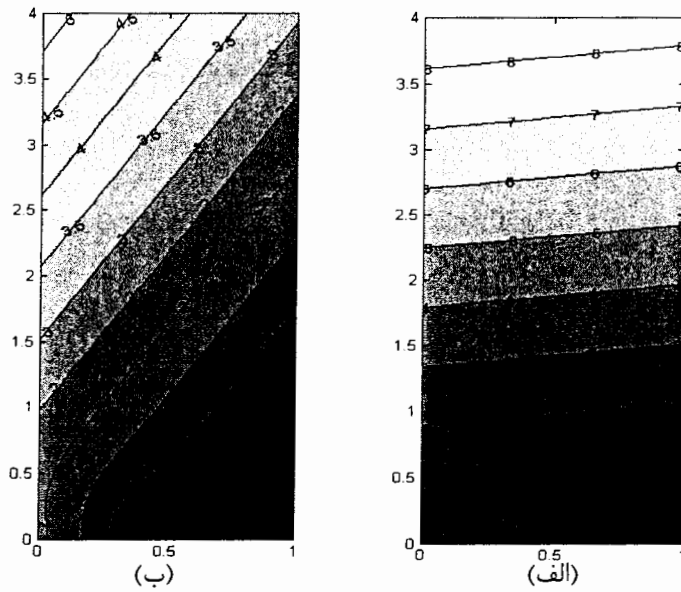
Method	$\frac{E_2}{E_1}$	$\frac{K_I}{\sigma_1 \sqrt{\pi a}}$				
		$\frac{a}{W} = 0.2$	$\frac{a}{W} = 0.3$	$\frac{a}{W} = 0.4$	$\frac{a}{W} = 0.5$	$\frac{a}{W} = 0.6$
Proposed method	0.1	1.3077	1.8043	2.0689	3.6096	0.0278
	0.2	1.4411	1.9019	2.0618	3.2106	4.7926
	0	1.0114	1.2291	1.0810	2.1291	3.0994
	1.0	0.9263	1.1403	1.0341	2.0029	2.971
Rao and Rahman[11]	0.1	1.3374	1.8176	2.0938	3.0472	4.9906
	0.2	1.4193	1.8668	2.4607	3.2297	4.6900
	0	1.1269	1.3704	1.7076	2.3772	3.4478
	1.0	0.9908	1.2343	1.098	2.1889	3.2167
Erdogan and Wu[38]	0.1	1.2960	1.8081	2.0699	3.0701	0.188
	0.2	1.3906	1.8390	2.4436	3.2266	4.7614
	0	1.1318	1.3697	1.7483	2.3606	3.4404
	1.0	1.0019	1.2291	1.0884	2.1762	3.2124
Chen et al. [39]	0.1	1.3193	1.8642	2.0088	3.0213	0.0726
	0.2	1.4188	1.8497	2.4486	3.2234	4.786
	0	1.1622	1.3899	1.7746	2.4120	3.0736
	1.0	1.0324	1.2499	1.6146	2.2234	3.2371
Kim and Paulino[40]	0.1	1.284	1.846	2.044	3.496	4.962
	0.2	1.39	1.831	2.431	3.292	4.669
	0	1.132	1.37	1.749	2.366	3.448
	1.0	1.003	1.228	1.088	2.170	3.212

جدول ۶-۶: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه FG دارای

ترک جانبی تحت شرایط خمش خالص

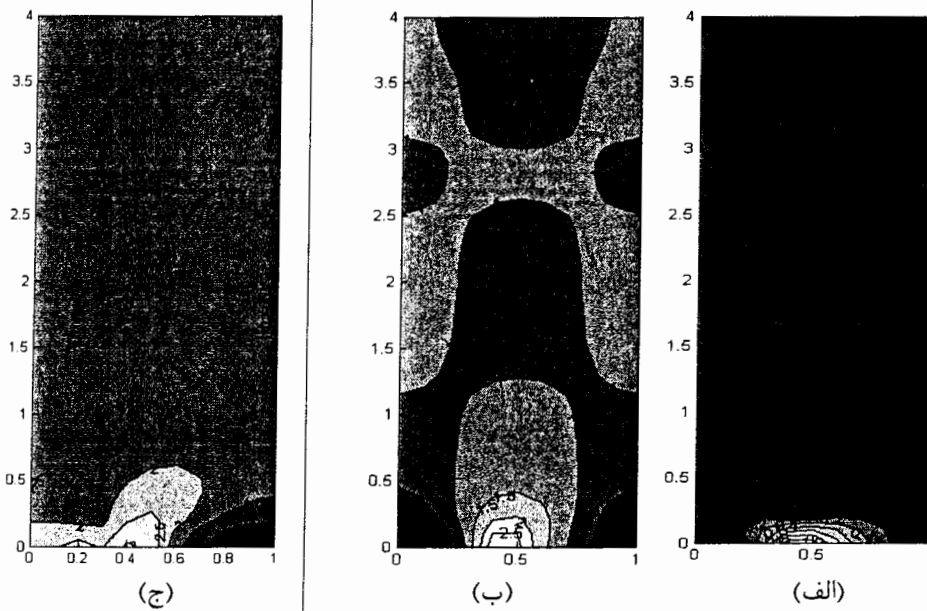
Method	$\frac{E_2}{E_1}$	$\frac{K_I}{\sigma_b \sqrt{\pi a}}$				
		$\frac{a}{w} = 0.2$	$\frac{a}{w} = 0.3$	$\frac{a}{w} = 0.4$	$\frac{a}{w} = 0.5$	$\frac{a}{w} = 0.6$
Proposed method	0.1	1.9613	1.7439	1.9961	2.0079	2.0189
	0.2	1.6474	1.8403	1.6796	2.0409	2.2011
	0.5	0.6286	0.7187	0.8847	1.136	1.0471
	1.0	0.033	0.6321	0.7973	1.034	1.4193
Rao and Rahman[۱۱]	0.1	1.9029	1.8747	1.9039	2.1047	2.0484
	0.2	1.0976	1.6109	1.710	1.9322	2.3347
	0.5	0.6860	0.783	0.931	1.666	1.0626
	1.0	0.0630	0.6637	0.812	1.0447	1.434
Erdogan and Wu[۳۸]	0.1	1.904	1.8809	1.9778	2.2101	2.717
	0.2	1.0902	1.6122	1.721	1.9034	2.4037
	0.5	0.6871	0.7778	0.9236	1.1018	1.0097
	1.0	0.0648	0.6088	0.8043	1.030	1.4286
Kim and Paulino[۴۰]	0.1	1.888	1.864	1.943	2.140	2.003
	0.2	1.088	1.601	1.706	1.920	2.341
	0.5	0.687	0.778	0.924	1.108	1.061
	1.0	0.060	0.609	0.804	1.030	1.429

در شکل های ۶-۴۱-الف و ۶-۴۱-ب کانتورهای مربوط به جابجایی های افقی و عمودی برای این قسمت در حالت تنش کششی ثابت نشان داده شده اند. شکل های ۶-۴۲-الف و ۶-۴۲-ب و ۶-۴۲-ج نیز کانتورهای تنش های افقی، قائم و تنش فون میز را نشان می دهند.



شکل ۶-۴۱: کانتور های جابجایی صفحه دارای ترک جانبی ساخته شده از مواد FG مورد آنالیز.

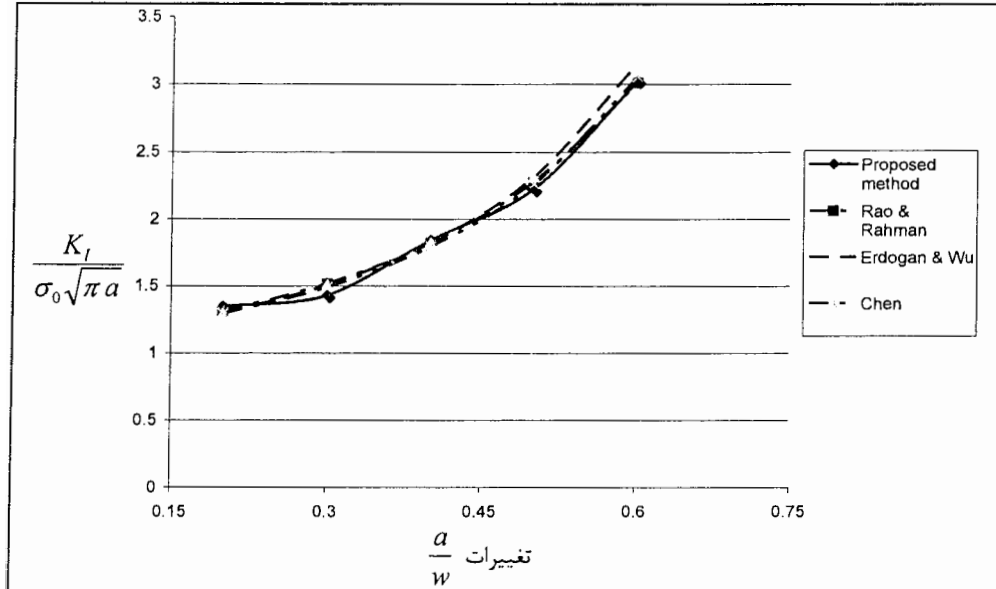
شکل ۶-۴۱- الف جابجایی در جهت افقی و شکل ۶-۴۱- ب جابجایی در جهت عمودی را نشان می دهد.



شکل ۶-۴۲: کانتور های تنش صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از مواد FG مورد آنالیز. شکل های

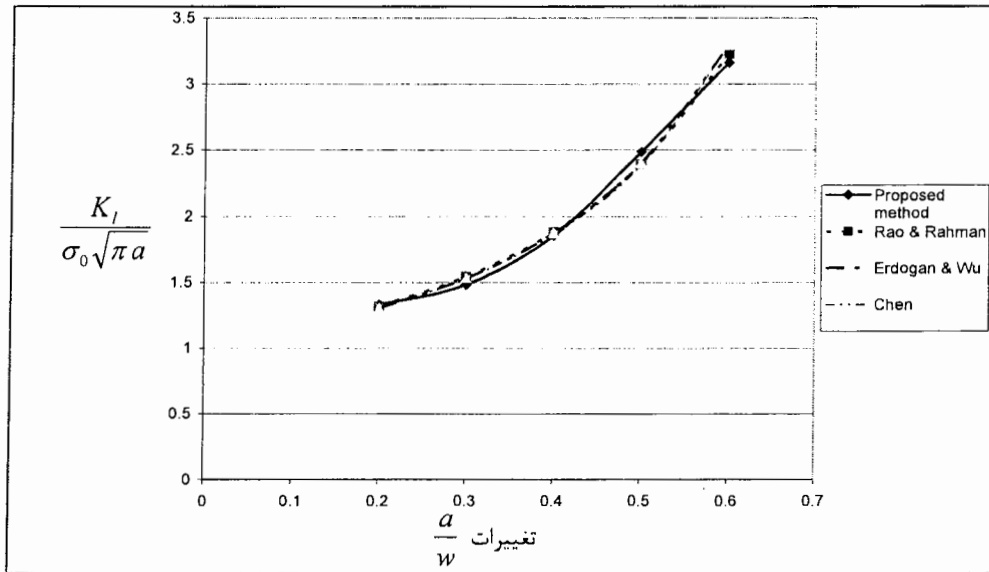
۶-۴۲- الف و ۶-۴۲- ب و ۶-۴۲- ج به ترتیب تنش در جهات افقی، عمودی و فون میز را نشان می دهند.

برای اینکه نتایج بیان شده در جداول ۴-۶ تا ۶-۶ به صورت بهتری نشان داده شوند، در شکل های ۴۳-۶ تا ۴۸-۶ برخی از نتایج بیان شده در این جداول به صورت نمودار تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به پارامترهای مختلف نشان داده شده است.



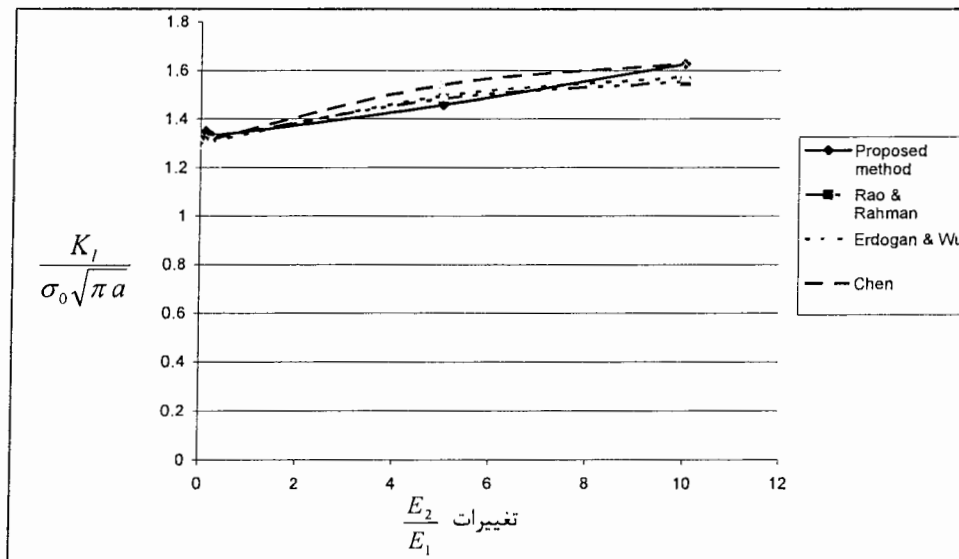
شکل ۴۳-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط کرنش ثابت

برای صفحه دارای ترک جانبی تحت مود اول برای حالت  $\frac{E_2}{E_1} = 0.1$



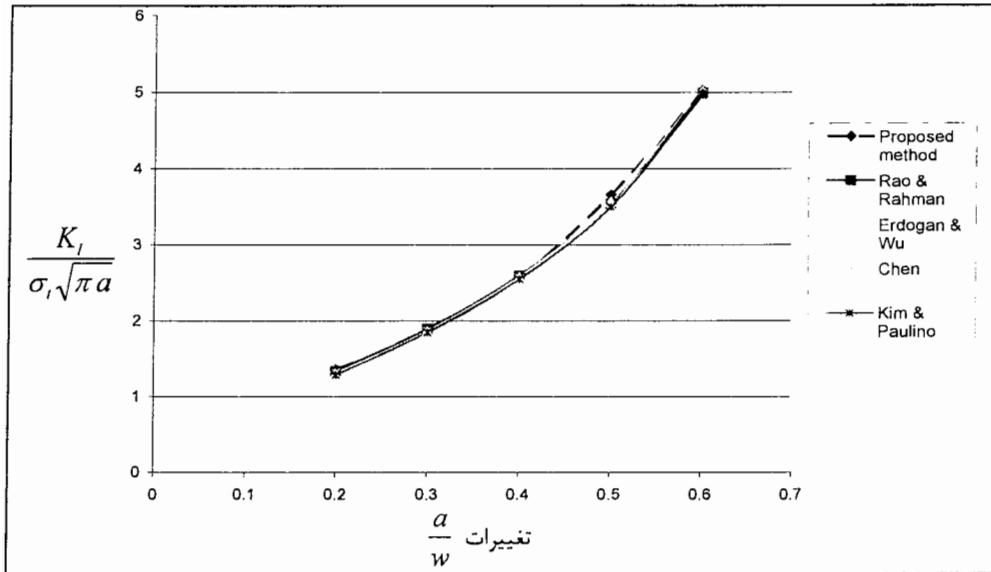
شکل ۴۴-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط کرنش ثابت

برای صفحه دارای ترک جانبی تحت مود اول برای حالت  $\frac{E_2}{E_1} = 0.2$



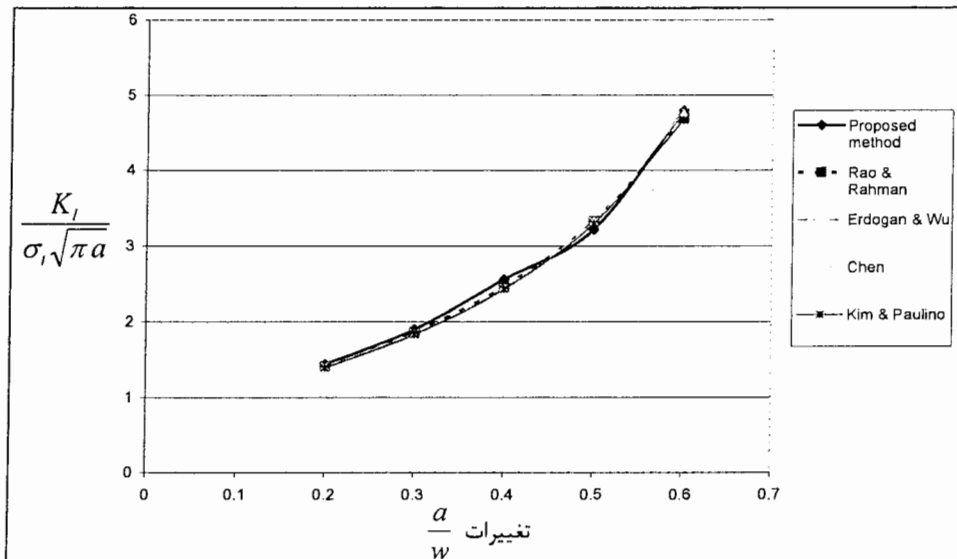
شکل ۴۵-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط کرنش ثابت

برای صفحه دارای ترک جانبی تحت مود اول برای حالت  $\frac{a}{w} = 0.2$



شکل ۴۶-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط تنش ثابت

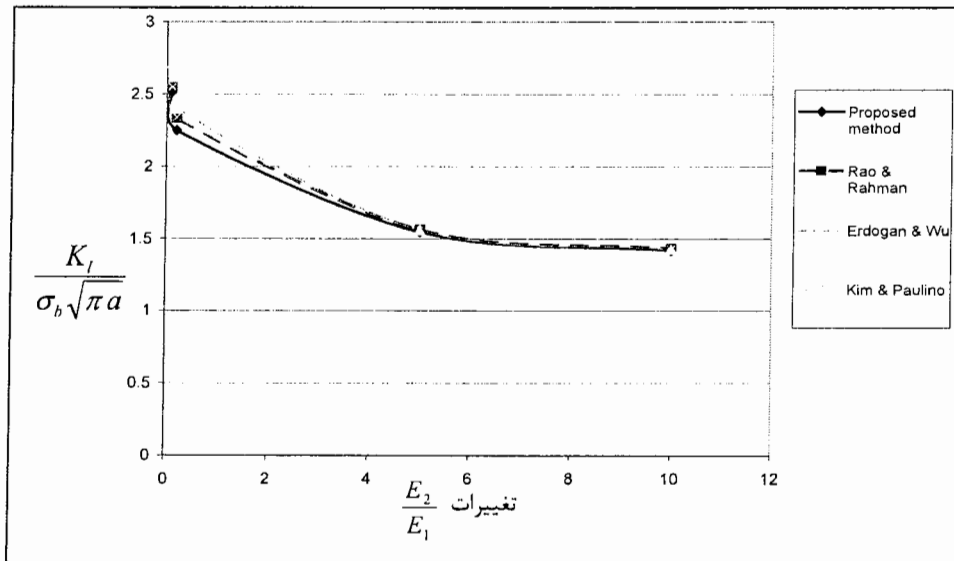
برای صفحه دارای ترک جانبی تحت مود اول برای حالت  $\frac{E_2}{E_1} = 0.1$



شکل ۴۷-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط تنش ثابت

برای صفحه دارای ترک جانبی تحت مود اول برای حالت  $\frac{E_2}{E_1} = 0.2$



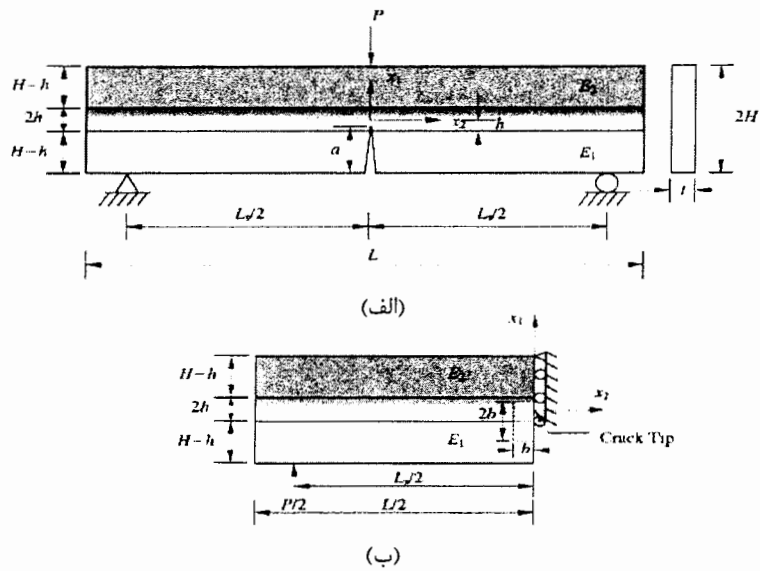


شکل ۶-۴۸: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش تحت شرایط خمشی خالص

برای صفحه دارای ترک جانبی تحت مود اول برای حالت  $\frac{a}{w} = 0.6$

### ۶-۵-۲- تیر دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG تحت مود اول

در این مثال تیری مطابق شکل ۴۹- الف مورد آنالیز قرار می گیرد. این تیر در نقطه مرکزی تحت نیروی متمرکز  $P$  قرار گرفته است. همانگونه که دیده می شود، این تیر نسبت به خط مرکزی خود که ترک در آن قرار دارد متقارن می باشد، لذا برای تحلیل کافی است نصف تیر مورد آنالیز قرار گیرد. شکل این قسمت و چگونگی قرار گرفتن شرایط مرزی در شکل ۴۹- الف و ۴۹- ب نشان داده شده است.



شکل ۶-۴۹: تیر تحت خمش تحت بارگذاری مود اول: (الف) هندسه و بارگذاری تیر (ب) نصف تیر مورد آنالیز

ابعاد نشان داده شده در شکل ۴۹ و همچنین خواص این تیر به صورت زیر می باشند. این مثال تحت شرایط تنش صفحه ای می باشد. در این روابط  $t$  ضخامت تیر و  $P$  نیروی اعمالی به تیر می باشد. در جدول ۶-۷ مقادیر ضریب شدت تنش نرمال شده برای این مثال نشان داده شده است.

$$L = 54, \quad 2H = 10, \quad t = 1, \quad L_s = 50, \quad P = 1$$

$$E(x_1) = \begin{cases} E_2 & x_1 \geq h \\ \frac{E_2 - E_1}{2h}(x + h) + E_1 & -h \leq x_1 \leq h \\ E_1 & x_1 \leq -h \end{cases}$$

$$2h = 1, \quad E_1 = 1, \quad \frac{E_2}{E_1} = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20$$

$$\frac{a}{2H} = 0.45, 0.5, 0.55$$

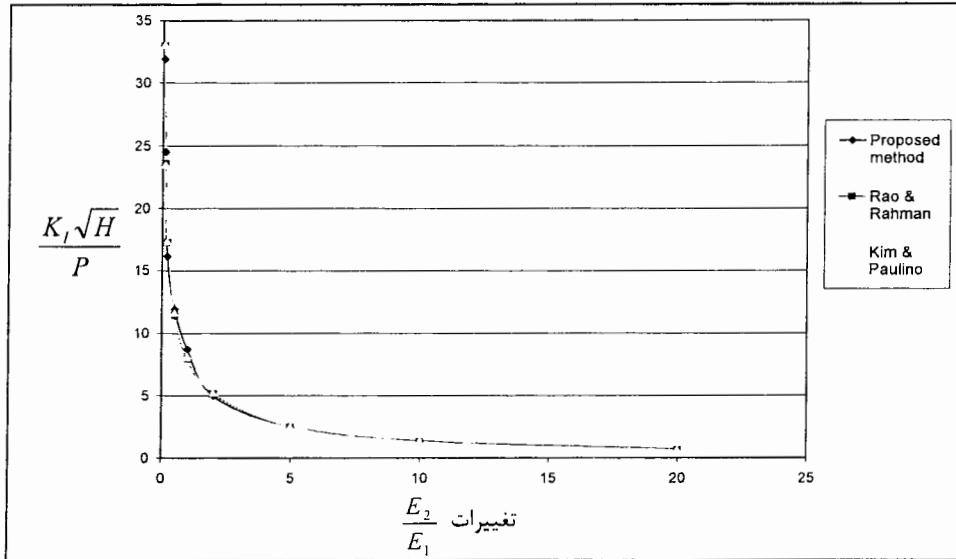
$$\nu = 0.3$$

جدول ۶-۷: ضریب شدت تنش نرمال شده برای تیر FG دارای ترک مرکزی

$\frac{E_2}{E_1}$	$\frac{K_f \sqrt{H}}{P}$								
	$\frac{a}{2H} = 0.45$			$\frac{a}{2H} = 0.5$			$\frac{a}{2H} = 0.55$		
	proposed method	Rao & Rahman	Kim & Paulino	Proposed Method	Rao & Rahman	Kim & Paulino	proposed method	Rao & Ahman	Kim & Paulino
۰,۰۵	۳۱,۹۲۶۹	۳۲,۹۹	۳۳,۰۴	۳۰,۲۴۸۶	۳۱,۵۳	۳۱,۱۲	۱۵,۵۷۷۶	۱۵,۵	۱۵,۲۱
۰,۱	۲۴,۵۰۹۷	۲۳,۶۱	۲۳,۴۷	۲۴,۱۰۵۴	۲۳,۹۶	۲۳,۹۲	۱۴,۷۳۰۵	۱۳,۴	۱۳,۷۳
۰,۲	۱۶,۱۴۳۵	۱۷,۲۸	۱۷,۳۶	۱۷,۱۱۴۸	۱۸,۳۶	۱۸,۳۲	۱۱,۷۰۰۸	۱۲,۱۶	۱۲,۷۹
۰,۵	۱۱,۹۲۷۷	۱۱,۴۵	۱۱,۶۵	۱۲,۵۱۳	۱۲,۳	۱۲,۵۷	۱۱,۹۹۳۹	۱۱,۲۹	۱۱,۷۶
۱	۸,۷۲۶۳	۷,۹۵۹	۸,۱۳۴	۱۰,۴۰۹	۹,۲۰۶	۹,۴۶۷	۱۱,۴۱	۱۰,۸۵	۱۱,۱۵
۲	۴,۹۸۵	۵,۱۵۳	۵,۲۳۹	۷,۳۸۹	۷,۳۳۷	۷,۳۱۸	۹,۹۴۲	۱۰,۴۴	۱۰,۶۲
۵	۲,۵۲۶۹	۲,۵۱۱	۲,۵۴	۴,۹۹۲۴	۵,۴۶۷	۵,۴۹۶	۹,۲۵۸۸	۹,۹۳۱	۹,۹۶۳
۱۰	۱,۳۵۸۳	۱,۳۱۵	۱,۳۳۴	۴,۴۵۷۹	۴,۶۱۹	۴,۵۸۶	۱۰,۰۸۵۱	۹,۵۸۷	۹,۵۰۵
۲۰	۰,۶۹۴۶	۰,۶۵۸	۰,۶۶	۳,۹۷۶۸	۳,۹۸۹	۳,۹۳۹	۸,۸۹۰۲	۹,۲۷۲	۹,۱۲۳

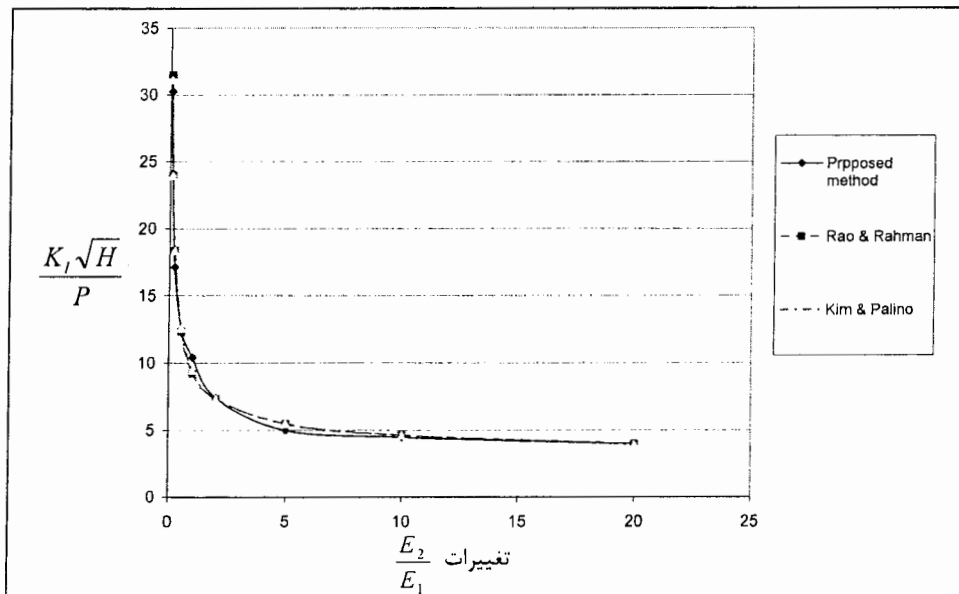
در شکل های ۶-۵۰ و ۶-۵۱ تغییرات ضریب شدت تنش برای این تیر بر حسب تغییرات

$\frac{E_2}{E_1}$  نشان داده شده است.



شکل ۵۰-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش برای تیر دارای

ترک مرکزی بر حسب تغییرات مدول الاستیسیته در حالت  $\frac{a}{2H} = 0.45$



شکل ۵۱-۶: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش برای تیر دارای

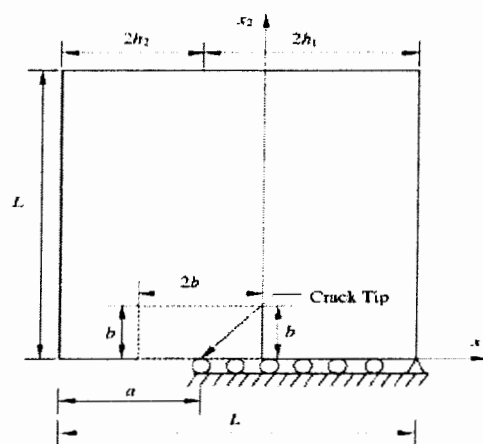
ترک مرکزی بر حسب تغییرات مدول الاستیسیته در حالت  $\frac{a}{2H} = 0.5$

### ۶-۵-۳- نوار کامپوزیتی ساخته شده از ماده FG تحت مود اول

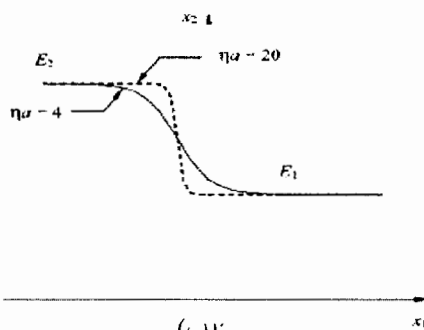
نوار کامپوزیتی مربع شکلی با ابعاد  $L=1$  و  $2h_1=0.6$  و  $2h_2=0.4$  مطابق شکل ۶-۵۲ الف با ترکی به طول  $a=0.4$  بر روی خط  $x_2=0$  در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون این صفحه ثابت و برابر  $0.3$  می باشد. تغییرات مدول الاستیسیته برای این نوار به صورت زیر می باشد.

$$E(x_1) = \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{E_1 - E_2}{2} \tanh[\eta(x_1 + 0.1)] \quad -0.5 \leq x_1 \leq 0.5 \quad (7-6)$$

$$\sigma_{22}(x_1, 1) = \frac{\varepsilon E(x_1)}{(1-\nu^2)} \quad (8-6)$$



(الف)



(ب)

شکل ۶-۵۲: نوار کامپوزیتی تحت بارگذاری مود اول: (الف) هندسه نوار کامپوزیتی

(ب) تغییرات مدول الاستیسیته

که در این عبارت  $E_1$  و  $E_2$  محدوده تغییرات مدول الاستیسیته را مشخص می کنند. در شکل ۶-۵۲ ب تغییرات مدول الاستیسیته نشان داده شده است. یک نیروی کششی بر اساس رابطه ۶-۸ روی لبه بالایی اعمال می گردد که منجر به کرنش یکنواختی بر روی سطح بالایی نوار کامپوزیتی می گردد. حالت تحلیل به صورت کرنش صفحه ای می باشد. مقادیر عددی زیر در این تحلیل مورد استفاده قرار می گیرند:

$$\varepsilon = 1, \quad \eta a = 0, 2, 4, 6, 20, \quad E_2 = 3, \quad E_1 = 1$$

در جدول ۶-۸ مقادیر ضریب شدت تنش نرمال شده برای این مثال نشان داده شده است.

جدول ۶-۸: ضریب شدت تنش نرمال شده برای نوار کامپوزیتی

$\eta a$	$\frac{K_I}{\varepsilon E(-0.5)\sqrt{\pi a}}$		
	Proposed method	Rao & Rahman [۱۱]	Eischen [۳۵]
۰	۲,۱۲۲۳	۲,۱۳۳	۲,۱۱۲
۲	۲,۱۱۰۴	۲,۳۰۴	۲,۲۹۵
۴	۲,۸۰۰۹	۲,۵۸۹	۲,۵۷۱
۶	۲,۸۴۵۴	۲,۷۶۹	۲,۷۳۳
۲۰	۳,۵۵۴۶	۳,۳۱۴	۳,۲۲۸

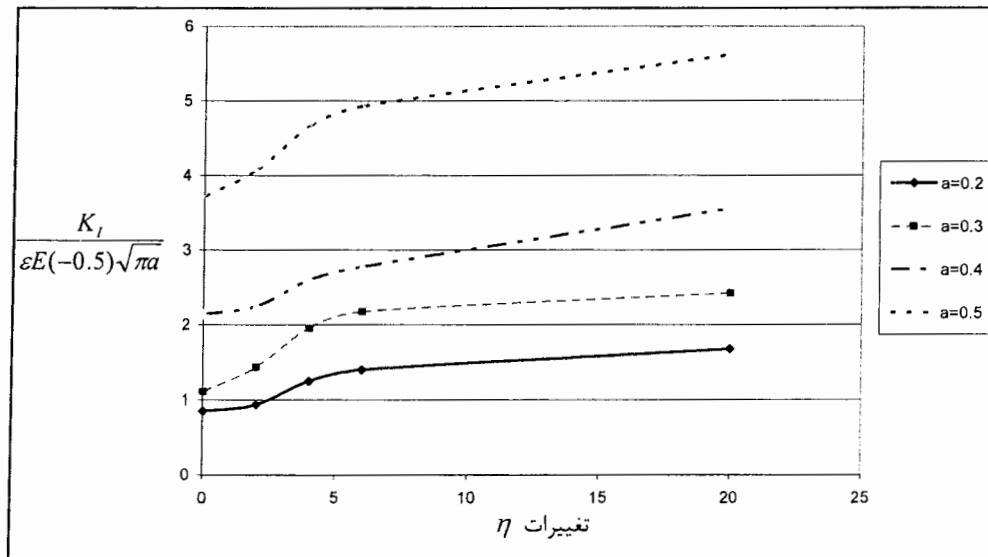
اکنون با توجه به نتایج به دست آمده که حاکی از دقت مناسب در الگوریتم مورد استفاده می باشد، می توان با تغییر طول ترک تاثیر اندازه طول ترک را بر روی ضریب شدت تنش محاسبه کرد. به این منظور تمامی مقادیر مربوط به محاسبات انجام شده را ثابت نگه می داریم و تنها طول ترک را با توجه به مقادیر زیر تغییر می دهیم.

$$a = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$$

نتایج مربوط به این قسمت در جدول ۶-۹ و شکل ۶-۵۳ نشان داده شده است.

جدول ۶-۹: ضریب شدت تنش نرمال شده برای نوار کامپوزیتی با طول ترک متغیر

$\eta a$	$\frac{K_I}{\varepsilon E(-0.5)\sqrt{\pi a}}$			
	$a=0.2$	$a=0.3$	$a=0.4$	$a=0.5$
۰	۰,۸۵۲	۱,۱۱۳	۲,۱۴۲۳	۳,۷۲۳
۲	۰,۹۳۷	۱,۴۳۶	۲,۲۵۰۴	۴,۰۸۳
۴	۱,۲۵۱	۱,۹۵۷	۲,۶۰۰۹	۴,۶۷۲
۶	۱,۴۰۳	۲,۱۷۵۹	۲,۷۷۵۴	۴,۹۳۲
۲۰	۱,۶۷۸	۲,۴۲۳	۳,۵۵۴۶	۵,۶۲۲



شکل ۶-۵۳: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش در نوار کامپوزیتی برای ترک با طول متغیر

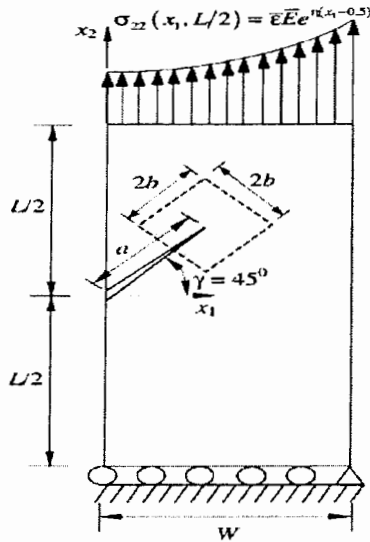
#### ۶-۵-۴- ترک مورب در صفحه FG تحت مود اول و دوم

در یک صفحه مستطیل شکل دوبعدی به ابعاد  $L=2$  و  $W=1$  یک ترک زاویه دار با زاویه

ثابت  $45^\circ$  درجه در نظر گرفته شده است. طول نرمال شده این ترک برابر است با:  $\frac{a}{W} = 0.4\sqrt{2}$

تغییرات مدول الاستیسیته نیز در این صفحه از رابطه زیر پیروی می کند.

$$E(x_1) = E \exp\left[\eta\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (۶-۹)$$



شکل ۶-۵۴: صفحه دوبعدی دارای ترک مورب جانبی

مقادیر عددی زیر نیز در این تحلیل به کار گرفته می شود:

$$E=1, \quad \nu=0.3, \quad \eta=0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$$

با توجه به اینکه در مرز بالایی حالت کرنش یکنواخت در نظر گرفته شده است بار اعمالی در امتداد وجه بالایی به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\sigma_{22}(x_1, 1) = \epsilon E \exp\left[\eta\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (10-6)$$

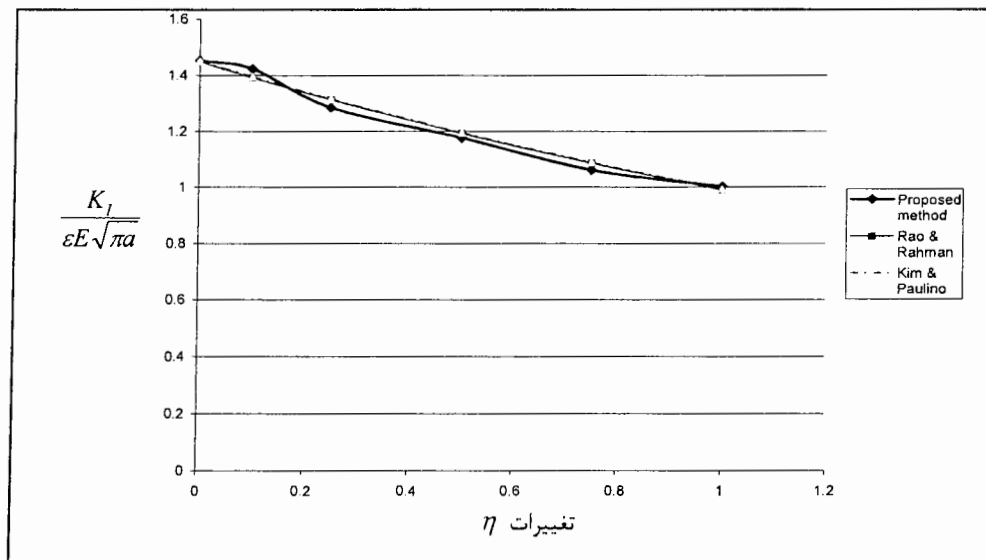
در جدول ۶-۱۰ مقادیر ضریب شدت تنش نرمال شده تحت مدل های اول و دوم و در شکل

۶-۵۵ تغییرات ضریب شدت تنش مود اول بر حسب تغییر خواص نشان داده شده است.



جدول ۶-۱۰: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه ترکدار مورب

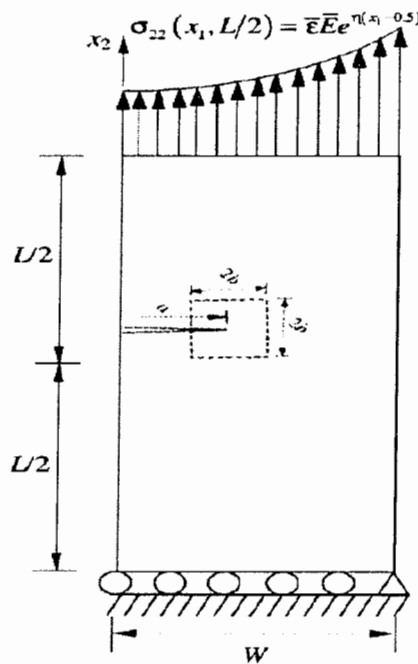
$\eta$	Proposed method		Rao & Rahman		Kim & Paulino	
	$\frac{K_I}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$
۰	۱,۴۵۳	۰,۶۲۱	۱,۴۴۸	۰,۶۱	۱,۴۵۱	۰,۶۰۴
۰,۱	۱,۴۲۳	۰,۵۹۷	۱,۳۹۲	۰,۵۸۵	۱,۳۹۶	۰,۵۷۹
۰,۲۵	۱,۲۱۵	۰,۵۸۱	۱,۳۱۳	۰,۵۴۹	۱,۳۱۶	۰,۵۴۴
۰,۵	۱,۱۷۷	۰,۵۳۲	۱,۱۹۳	۰,۴۹۵	۱,۱۹۶	۰,۴۹۱
۰,۷۵	۱,۰۵۲	۰,۴۲۷	۱,۰۸۶	۰,۴۴۷	۱,۰۸۹	۰,۴۴۳
۱	۱,۰۰۲	۰,۳۷۹	۰,۹۹	۰,۴۰۵	۰,۹۹۳	۰,۴۰۲



شکل ۶-۵۵: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش در صفحه

با ترک مورب نسبت به تغییرات در خواص ماده FG

همانگونه که در جدول و شکل بالا دیده می شود نتایج به دست آمده با نتایج به دست آمده توسط مراجع دیگر مطابقت مطلوبی دارد. در این قسمت با توجه به نتیجه به دست آمده که بیانگر صحت الگوریتم به کار گرفته شده می باشد، تحلیل انجام شده برای صفحه دارای ترک مستقیم انجام می شود. تمامی شرایط هندسی و نیروهای اعمالی این قسمت مانند آنالیز صفحه دارای ترک زاویه دار می باشد. هندسه مرتبط با این قسمت از آنالیز در شکل ۶-۵۶ نشان داده شده است.



شکل ۶-۵۶: صفحه دوبعدی دارای ترک مستقیم جانبی

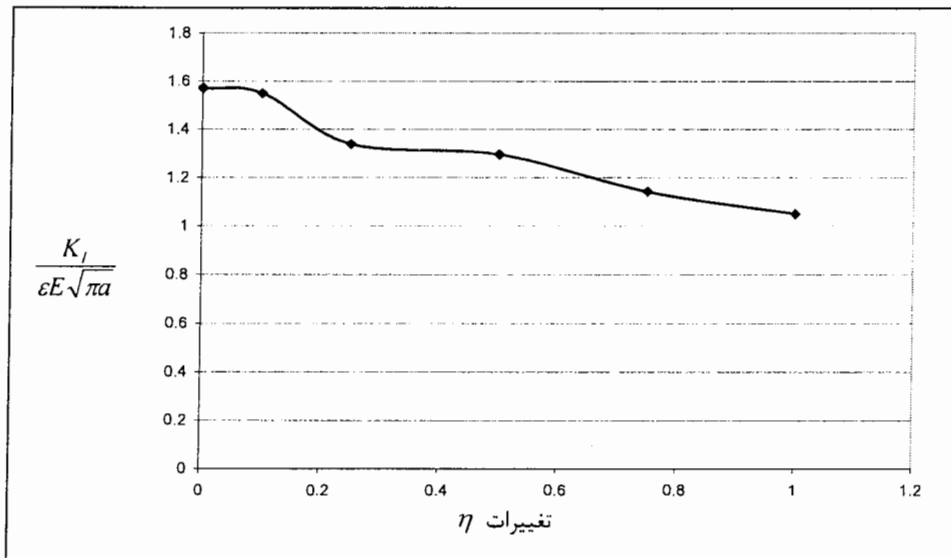
$$E=1, \quad \nu=0.3, \quad \eta=0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1$$

$$\sigma_{22}(x_1, l) = \epsilon E \exp\left[\eta\left(x_1 - \frac{l}{2}\right)\right]$$

در جدول ۶-۱۱ و شکل ۶-۵۷ نتایج به دست آمده برای این قسمت آورده شده است.

جدول ۶-۱۱: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مستقیم

$\eta$	$\frac{K_I}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$
۰	۱,۵۷۱۳۶
۰,۱	۱,۵۵۰۱
۰,۲۵	۱,۳۳۹۴
۰,۵	۱,۲۹۶۵
۰,۷۵	۱,۱۴۲۳
۱	۱,۰۵



شکل ۶-۵۷: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش در صفحه دارای ترک مستقیم نسبت به تغییرات در خواص ماده FG

### ۶-۵-۵- صفحه FG دارای ترک مرکزی تحت مود اول و دوم

مطابق شکل ۶-۵۸ صفحه ای مربع شکل به ابعاد  $2L = 2W = 20$  با ترک مرکزی به طول

$2a = 2$  و زاویه دلخواه  $\gamma$  نسبت به محور X در نظر گرفته می شود. تحلیل این صفحه تحت

حالت تنش صفحه ای انجام می پذیرد. چگونگی قرار گرفتن شرایط مرزی در این تحلیل که در شکل نشان داده شده است به این صورت است که در امتداد لبه پایین صفحه جابجایی در جهت قائم برابر صفر در نظر گرفته شده و نیز برای گره سمت چپ از لبه پایینی جابجایی در راستای افقی نیز ثابت در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون ثابت و برابر ۰٫۳ در نظر گرفته می شود. تغییرات مدول الاستیسیته در این صفحه بر اساس رابطه زیر می باشد.

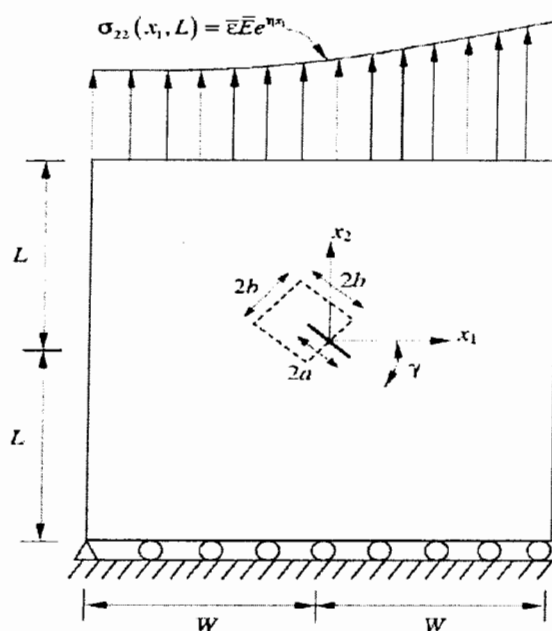
$$E \exp(\eta x_1) \quad (11-6)$$

مقادیر عددی زیر نیز برای این تحلیل در نظر گرفته می شود:

$$\eta = 0.25, 0.5, \quad \frac{\gamma}{\pi} = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, \quad \varepsilon = 1$$

تنش اعمالی بر این صفحه نیز به صورت زیر می باشد:

$$\sigma_{22}(x_1, 10) = \varepsilon E \exp(\eta x_1)$$



شکل ۶-۵۸: هندسه و بارگذاری صفحه دوبعدی دارای ترک مورب مرکزی

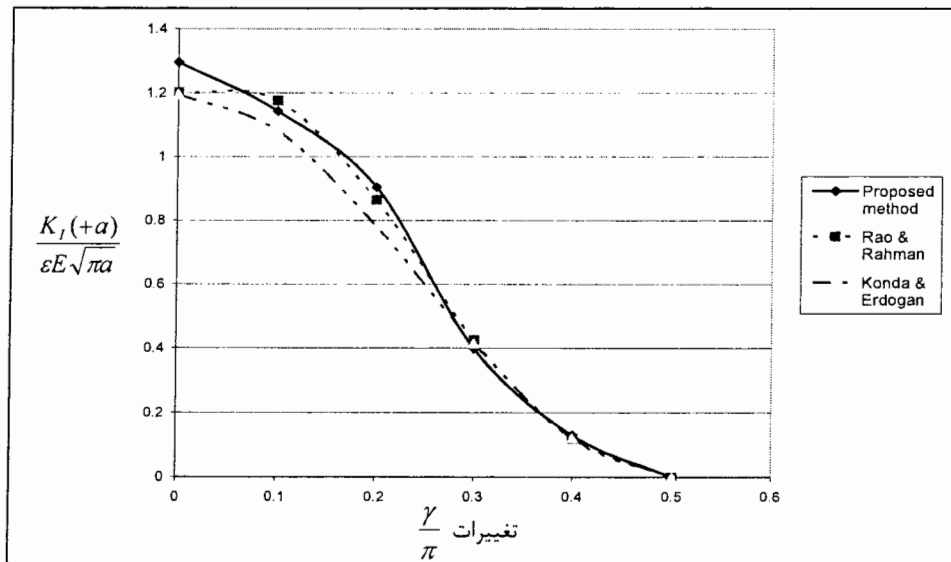
در جدول های ۱۲-۶ و ۱۳-۶ و شکل های ۶-۵۹ و ۶-۶۰ نتایج به دست آمده برای ضرایب شدت تمرکز تنش در مودهای اول و دوم برای این تحلیل نشان داده شده است.

جدول ۱۲-۶: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی مورب ( $\eta = 0.25$ )

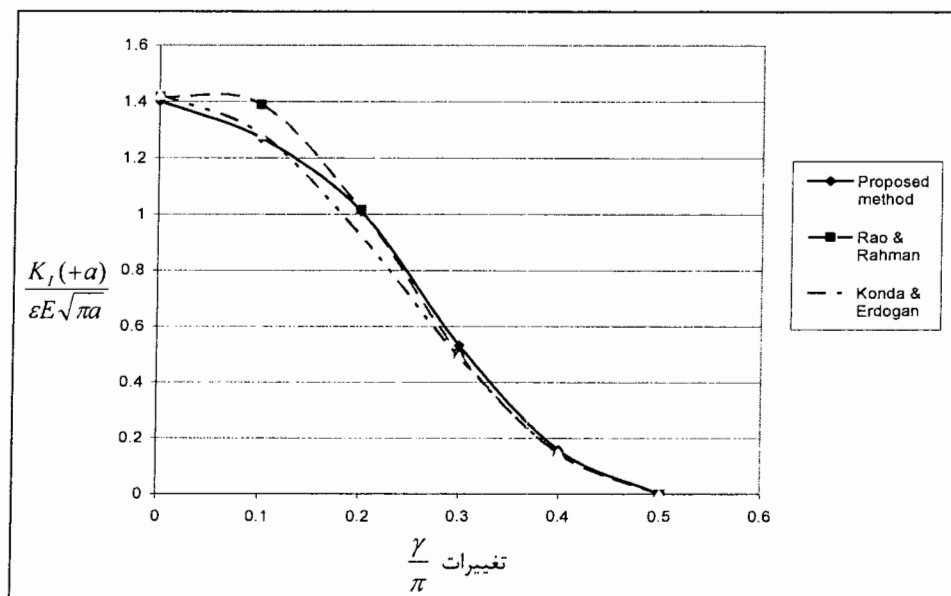
Method	$\frac{\gamma}{\pi}$	$\frac{K_I(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$
Proposed method	۰	۱,۲۹۶	۰,۸۰۹	۰	۰
	۰,۱	۱,۱۴۳	۰,۸۴۴	-۰,۳۵۲	-۰,۲۷۸
	۰,۲	۰,۹۰۴	۰,۶۱۲	-۰,۵۸۳	-۰,۴۲۳
	۰,۳	۰,۳۹۸	۰,۳۱۴	-۰,۴۸۶	-۰,۴۰۲
	۰,۴	۰,۱۲۹	۰,۰۸۴	-۰,۳۳۲	-۰,۲۷۲
	۰,۵	۰	۰	۰	۰
Rao & Rahman <sup>[۱۱]</sup>	۰	۱,۲۰۲	۰,۸۳	۰	۰
	۰,۱	۱,۱۷۶	۰,۸۰۱	-۰,۳۵۴	-۰,۲۶۳
	۰,۲	۰,۸۶۴	۰,۵۹۸	-۰,۵۷۲	-۰,۴۴۱
	۰,۳	۰,۴۲۴	۰,۲۹۳	-۰,۴۹۷	-۰,۴۲۱
	۰,۴	۰,۱۱۸	۰,۰۷۳	-۰,۳۰۷	-۰,۲۸۱
	۰,۵	۰	۰	۰	۰
Konda & Erdogan <sup>[۴۱]</sup>	۰	۱,۱۹۶	۰,۸۲۵	۰	۰
	۰,۱	۱,۰۸۱	۰,۷۵	-۰,۳۲۱	-۰,۲۵۴
	۰,۲	۰,۷۸۱	۰,۵۴۸	-۰,۵۱۴	-۰,۴۲۲
	۰,۳	۰,۴۱۴	۰,۲۹	-۰,۵۰۴	-۰,۴۳۷
	۰,۴	۰,۱۲۱	۰,۰۷۵	-۰,۳۰۴	-۰,۲۸۲
	۰,۵	۰	۰	۰	۰

جدول ۶-۱۳: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی مورب ( $\eta = 0.5$ )

Method	$\frac{\gamma}{\pi}$	$\frac{K_I(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$
Proposed method	۰	۱,۴۰۲	۰,۶۸۲	۰	۰
	۰,۱	۱,۲۷۱	۰,۶۱۸	-۰,۳۵۲	-۰,۱۹۲
	۰,۲	۱,۰۱۱	۰,۴۸۴	-۰,۶۱۵	-۰,۳۸۳
	۰,۳	۰,۵۳۲	۰,۲۲۹	-۰,۵۳۲	-۰,۳۷۱
	۰,۴	۰,۱۵۸	۰,۰۶۳	-۰,۳۰۲	-۰,۲۷۴
	۰,۵	۰	۰	۰	۰
Rao & Rahman <sup>[۱۱]</sup>	۰	۱,۴۱۸	۰,۶۶۵	۰	۰
	۰,۱	۱,۳۹	۰,۶۴۱	-۰,۳۸۱	-۰,۲۰۸
	۰,۲	۱,۰۱۶	۰,۴۸۸	-۰,۶۱۱	-۰,۳۶۱
	۰,۳	۰,۵۰۲	۰,۲۴۳	-۰,۵۱۷	-۰,۳۶۸
	۰,۴	۰,۱۴۵	۰,۰۵۷	-۰,۳۱۵	-۰,۲۶۲
	۰,۵	۰	۰	۰	۰
Konda & Erdogan	۰	۱,۴۲۴	۰,۶۷۴	۰	۰
	۰,۱	۱,۲۸۵	۰,۶۱۷	-۰,۳۴۴	-۰,۲۱۳
	۰,۲	۰,۹۲۵	۰,۴۶	-۰,۵۴۸	-۰,۳۶۵
	۰,۳	۰,۴۹	۰,۲۴۷	-۰,۵۳۲	-۰,۳۹۷
	۰,۴	۰,۱۴۶	۰,۰۵۹	-۰,۳۱۴	-۰,۲۹۶
	۰,۵	۰	۰	۰	۰



شکل ۶-۵۹: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود اول در صفحه دارای ترک مرکزی برحسب تغییرات زاویه ترک ( $\eta = 0.25$ )



شکل ۶-۶۰: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود اول در صفحه دارای ترک مرکزی برحسب تغییرات زاویه ترک ( $\eta = 0.5$ )

با توجه به اینکه نتایج به دست آمده برای این قسمت با نتایج به دست آمده در مراجع دیگر همخوانی مناسبی را نشان می دهند می توان با تغییراتی در ساختار مثال به بررسی مواردی دیگر نیز پرداخت. به همین دلیل در ادامه به آنالیز صفحه ای با ترکی به طول دو برابر با حفظ تمامی شرایط مثال قبل در ساختار صفحه پرداخته می شود. نتایج مربوط به این آنالیز در جداول ۶-۱۴ و ۶-۱۵ نشان داده شده است.

جدول ۶-۱۴: ضریب شدت تنش نرمال شده برای

صفحه دارای ترک مرکزی مورب به طول  $2a = 4$  ( $\eta = 0.25$ )

$\frac{\gamma}{\pi}$	$\frac{K_I(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$
۰	۲,۳۱۲۱	۱,۵۹۶	۰	۰
۰,۱	۲,۰۵۲۷	۱,۴۳۲	-۰,۱۵۲	-۰,۱۳۴
۰,۲	۱,۷۲۳	۱,۰۴۷	-۰,۲۷۸۳	-۰,۲۱۰۹
۰,۳	۰,۷۲۵	۰,۵۶۷	-۰,۲۵۳	-۰,۱۹۹
۰,۴	۰,۲۳۹	۰,۱۵۲	-۰,۱۴۹	-۰,۱۲۷
۰,۵	۰	۰	۰	۰

جدول ۶-۱۵: ضریب شدت تنش نرمال شده برای

صفحه دارای ترک مرکزی مورب به طول  $2a = 4$  ( $\eta = 0.5$ )

$\frac{\gamma}{\pi}$	$\frac{K_I(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$
۰	۲,۷۵۴	۱,۲۷۹	۰	۰
۰,۱	۲,۴۳۹	۱,۲۱۶	-۰,۱۶۸	-۰,۱۱۵
۰,۲	۱,۹۰۱	۰,۹۵۲	-۰,۳۱۲۴	-۰,۱۸۲۴
۰,۳	۰,۹۳۳	۰,۴۳۹	-۰,۲۵۷	-۰,۱۷۸۶
۰,۴	۰,۳۱۱	۰,۱۱۸	-۰,۱۵۶	-۰,۱۳۶۲
۰,۵	۰	۰	۰	۰



با توجه به اینکه در دو تحلیل بیان شده بارگذاری های انجام شده در حالت کرنش ثابت بود، در این قسمت برای بررسی تاثیر تغییر بارگذاری بر روی این مساله، صفحه نشان داده شده در شکل ۶-۵۸ را تحت بارگذاری تنش ثابت  $\sigma_{22}=1$  قرار می دهیم. نتایج مربوط به این قسمت در جدول های ۶-۱۶ و ۶-۱۷ و شکل ۶-۶۱ نشان داده شده است.

جدول ۶-۱۶: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای

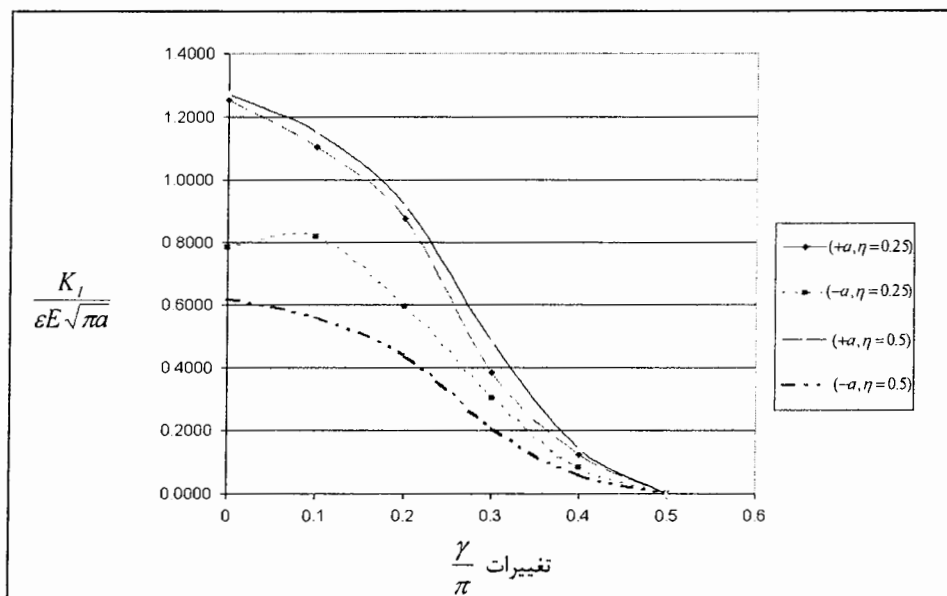
ترک مرکزی مورب در حالت تنش ثابت به طول  $2a = 2$  ( $\eta = 0.25$ )

$\frac{\gamma}{\pi}$	$\frac{K_I(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$
۰	۱,۲۵۵۶	۰,۷۸۳۸	۰	۰
۰,۱	۱,۱۰۷۴	۰,۸۱۷۷	-۰,۳۲۹۰	-۰,۲۴۹۳
۰,۲	۰,۸۷۵۸	۰,۵۹۲۹	-۰,۵۲۴۸	-۰,۳۸۴۳
۰,۳	۰,۳۸۵۶	۰,۳۰۴۲	-۰,۴۴۰۹	-۰,۳۶۷۷
۰,۴	۰,۱۲۵۰	۰,۰۸۱۴	-۰,۳۲۱۷	-۰,۲۶۳۵
۰,۵	۰	۰	۰	۰

جدول ۶-۱۷: ضریب شدت تنش نرمال شده برای صفحه دارای

ترک مرکزی مورب در حالت تنش ثابت به طول  $2a = 2$  ( $\eta = 0.5$ )

$\frac{\gamma}{\pi}$	$\frac{K_I(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(+a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_{II}(-a)}{\varepsilon E \sqrt{\pi a}}$
۰	۱,۲۷۱۷	۰,۶۱۸۶	۰	۰
۰,۱	۱,۱۵۲۹	۰,۵۶۰۶	-۰,۳۱۹۳	-۰,۱۷۴۲
۰,۲	۰,۹۱۷۰	۰,۴۳۹۰	-۰,۵۵۷۸	-۰,۳۴۷۴
۰,۳	۰,۴۸۲۶	۰,۲۰۷۷	-۰,۴۸۲۶	-۰,۳۳۶۵
۰,۴	۰,۱۴۳۳	۰,۰۵۷۱	-۰,۲۷۳۹	-۰,۲۴۸۵
۰,۵	۰	۰	۰	۰



شکل ۶-۶۱: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود اول

در صفحه دارای ترک مرکزی برحسب تغییرات زاویه ترک در حالت تنش ثابت

### ۶-۵-۶- تیر دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG تحت نیروی گسترده

اکنون با توجه به نتایج به دست آمده از مثال های قبل، می توان از صحت الگوریتم به کار رفته اطمینان حاصل کرد. به همین علت در ادامه بررسی های انجام شده می توان با انجام تغییرات اندک در صورت آنالیزهای انجام شده به بررسی برخی دیگر از پارامترهای مورد توجه در این پژوهش پرداخت.

در این قسمت تیر نشان داده شده در شکل ۴۹- الف، با این تفاوت که بر روی آن بار گسترده  $p$  قرار دارد، مورد آنالیز قرار داده می شود. تمامی شرایط در نظر گرفته شده دیگر، مانند بخش ۶-۵-۲ در نظر گرفته می شوند. تنها موردی که در این قسمت متفاوت در نظر گرفته شده،

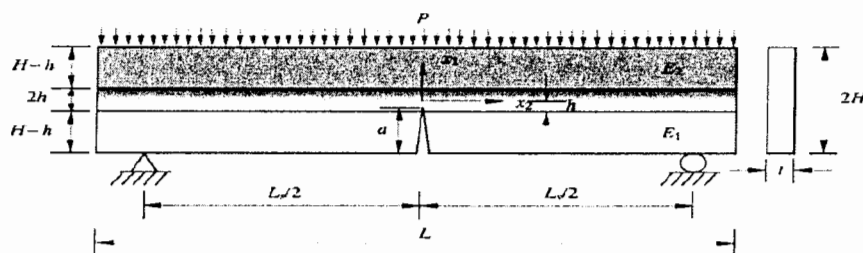
میزان بار اعمالی می باشد که مقدار آن ۰.۱ واحد می باشد. علت این مساله نیز این است که بار گسترده با مقدار واحد باعث ایجاد ضریب شدت تنش زیادی بر روی تیر می گردد که این مساله ممکن است باعث تغییر یافتن شرایط تحلیل استاتیکی گردد و ممکن است ترک موجود گسترش یابد. لذا در این تحلیل برای جلوگیری از ایجاد چنین شرایطی نیروی گسترده کمتری در نظر گرفته شده است. مشخصات این تیر در شکل ۶-۶۲ نشان داده شده است. با وجود آنکه بار اعمال شده بر روی این تیر در این قسمت گسترده می باشد ولی همچنان تقارن موجود در شکل تیر نسبت به خط مرکزی حفظ شده است. نتایج مربوط به این قسمت در جدول ۶-۱۸ و شکل ۶-۶۳ نشان داده شده است.

$$L = 54, \quad 2H = 10, \quad t = 1, \quad L_s = 50, \quad p = 0.1$$

$$E(x_1) = \begin{cases} E_2 & x_1 \geq h \\ \frac{E_2 - E_1}{2h}(x + h) + E_1 & -h \leq x_1 \leq h \\ E_1 & x_1 \leq -h \end{cases}$$

$$2h = 1, \quad E_1 = 1, \quad \frac{E_2}{E_1} = 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20$$

$$\frac{a}{2H} = 0.45, 0.5, 0.55, \quad \nu = 0.3$$

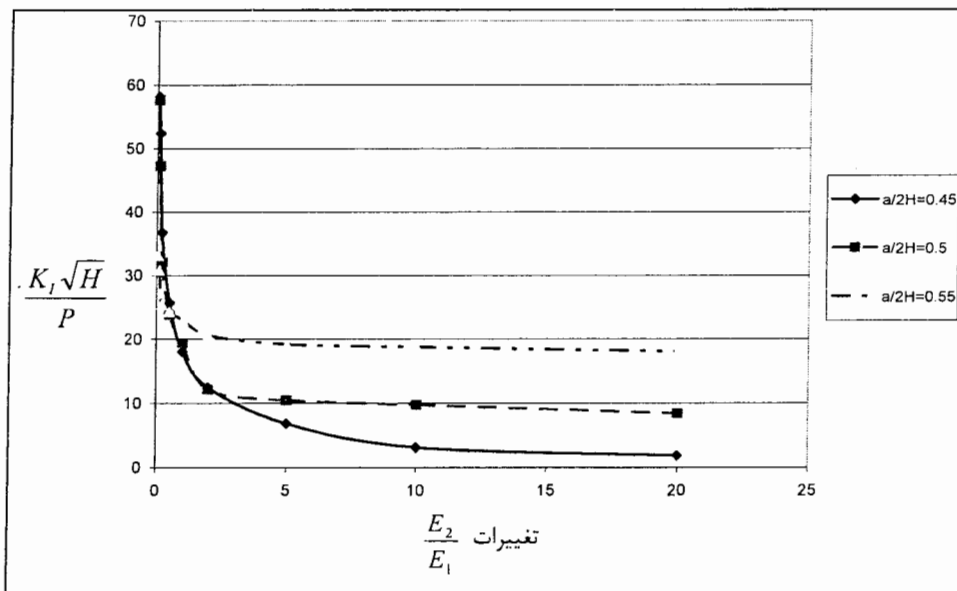


شکل ۶-۶۲: تیر تحت خمش تحت بارگذاری گسترده در شرایط مود اول

جدول ۶-۱۸: ضریب شدت تنش نرمال شده برای تیر FG

دارای ترک مرکزی تحت بارگذاری گسترده

$\frac{E_2}{E_1}$	$\frac{K_1\sqrt{H}}{P}$		
	$\frac{a}{2H} = 0.45$	$\frac{a}{2H} = 0.5$	$\frac{a}{2H} = 0.55$
۰,۰۵	۵۸,۱۷۸	۵۷,۶۲۴	۳۳,۱۷۵
۰,۱	۵۲,۴۵۳	۴۷,۲۸۴	۳۰,۸۲۴
۰,۲	۳۶,۷۵	۳۲,۰۹۸	۲۵,۴۳۹
۰,۵	۲۵,۷۲۵	۲۳,۸۵۲	۲۴,۳۶۴
۱	۱۸,۰۳۱۴	۱۹,۳۲۷	۲۳,۰۱۵
۲	۱۲,۴۸۳	۱۲,۱۵	۲۰,۶۲۷
۵	۶,۸۶۵	۱۰,۴۶۶	۱۹,۱۷۲
۱۰	۳,۱۲۷	۹,۷۵۱	۱۸,۷۴۳
۲۰	۱,۸۵۲	۸,۴۲۱	۱۸,۰۶۹



شکل ۶-۶۳: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش برای تیر دارای ترک مرکزی

تحت بارگذاری گسترده بر حسب تغییرات مدول الاستیسیته

## ۶-۵-۷- صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک

شکل ۶-۶ صفحه دو بعدی دارای ترک مرکزی به طول  $2a$  را نشان می دهد. با توجه به اینکه صفحه تحت شرایط کرنش ثابت قرار دارد، برای اعمال نیرو از میزان نیرویی استفاده می شود که بر روی صفحه بدون ترک معادل با صفحه مورد آنالیز کرنش واحد را ایجاد کند.

$$\varepsilon_{22}(X_1, X_2) = \varepsilon_0$$

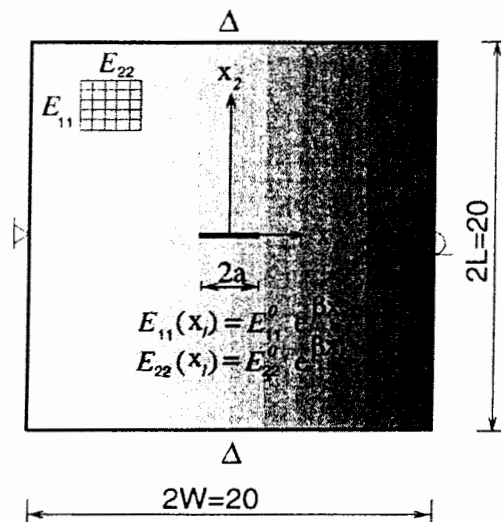
شرایط مرزی صفحه نیز به این صورت است که در گره میانی لبه سمت چپ جابجایی در جهت  $X_1$  و  $X_2$  صفر است و در گره میانی لبه سمت راست جابجایی در جهت  $X_2$  صفر است. مقادیر مربوط به مدول الاستیسیته نیز به صورت نمایی بر اساس متغیر  $X_1$  تغییر می کند. به این ترتیب مقادیر زیر برای این تحلیل به کار گرفته می شود.

$$\frac{a}{W} = 0.1, \quad \frac{L}{W} = 1.0$$

$$\beta a = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, \quad \varepsilon_0 = 1$$

$$\nu = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$$

$$E_{11}(X_1) = E_{11}^0 \exp(\beta X_1) \quad E_{22}(X_1) = E_{22}^0 \exp(\beta X_1)$$



شکل ۶-۶: صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک

در جدول های ۱۹-۶ و ۲۰-۶ و شکل های ۶-۶۵ و ۶-۶۶ نتایج مربوط به این آنالیز نشان داده شده است.

جدول ۱۹-۶: تاثیر تغییرات مدول الاستیسیته بر روی ضریب شدت

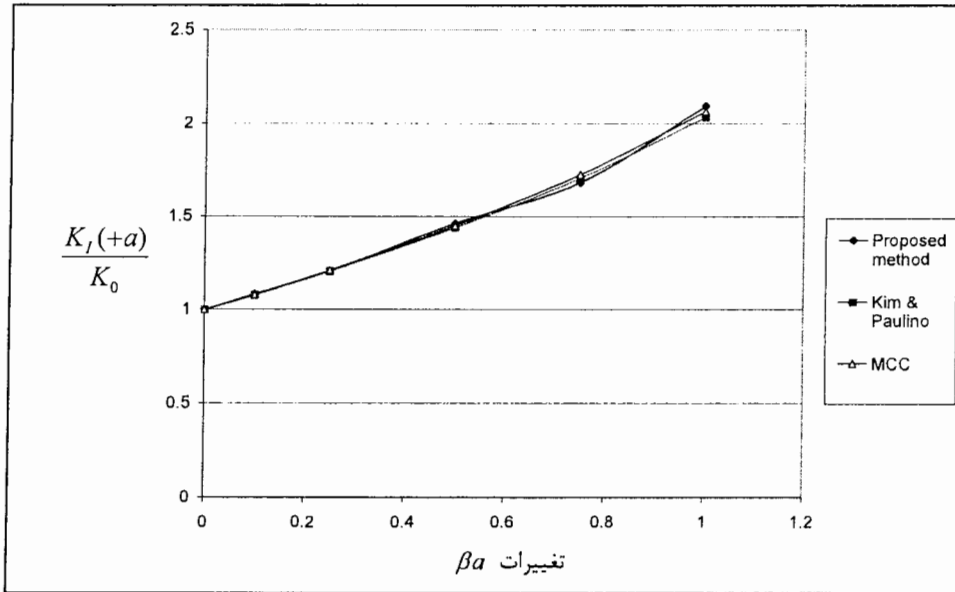
تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک

$\beta a$	proposed method		Kim & Paulino		MCC	
	$\frac{K_I(+a)}{K_0}$	$\frac{K_I(-a)}{K_0}$	$\frac{K_I(+a)}{K_0}$	$\frac{K_I(-a)}{K_0}$	$\frac{K_I(+a)}{K_0}$	$\frac{K_I(-a)}{K_0}$
۰	۰,۹۹۷۱	۰,۹۹۷۲	۰,۹۹۶۹	۰,۹۹۶۹	۰,۹۹۸۶	۰,۹۹۸۶
۰,۱	۱,۰۸۱	۰,۹۱۷۳	۱,۰۷۵	۰,۹۲۴۷	۱,۰۷۹۱	۰,۹۲۵۱
۰,۲۵	۱,۲۰۵۲	۰,۸۲۰۸	۱,۲۰۴۳	۰,۸۲۴۵	۱,۲۱۰۱	۰,۸۲۳۳
۰,۵	۱,۴۶۰۸	۰,۶۸۳۲	۱,۴۳۷۱	۰,۶۷۰۶	۱,۴۴۸۴	۰,۶۶۸
۰,۷۵	۱,۶۸۲۱	۰,۵۴۳۲	۱,۷۰۵۵	۰,۵۴۰۴	۱,۷۲۵۵	۰,۵۳۵۸
۱	۲,۰۹۲۳	۰,۴۱۵۳	۲,۰۳۱۸	۰,۴۳۳۵	۲,۰۶۳۹	۰,۴۲۸۵

جدول ۲۰-۶: تاثیر تغییرات ضریب پواسون بر روی ضریب شدت

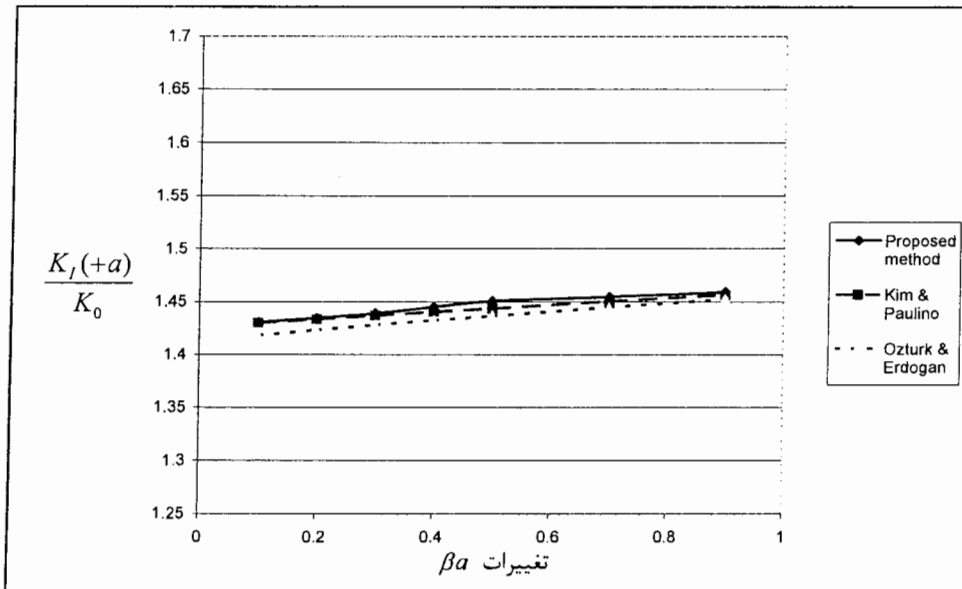
تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک

$\beta a$	proposed method		Kim & Paulino		Ozturk & Erdogan	
	$\frac{K_I(+a)}{K_0}$	$\frac{K_I(-a)}{K_0}$	$\frac{K_I(+a)}{K_0}$	$\frac{K_I(-a)}{K_0}$	$\frac{K_I(+a)}{K_0}$	$\frac{K_I(-a)}{K_0}$
۰,۱	۱,۳۷۲	۰,۶۵۳۹	۱,۴۳	۰,۶۶۶۸	۱,۴۱۸۳	۰,۶۶۴۷
۰,۲	۱,۴۲۳۶	۰,۶۶۷۲	۱,۴۳۳۴	۰,۶۶۸۵	۱,۴۲۳۳	۰,۶۶۷۶
۰,۳	۱,۴۳۹۱	۰,۶۶۹۱	۱,۴۳۷۱	۰,۶۷۰۶	۱,۴۲۸	۰,۶۷۰۴
۰,۴	۱,۴۴۵۲	۰,۶۷۰۱	۱,۴۴۰۵	۰,۶۷۳	۱,۴۳۲۵	۰,۶۷۳
۰,۵	۱,۴۵۰۶	۰,۶۷۲۸	۱,۴۴۳۸	۰,۶۷۵۱	۱,۴۳۶۸	۰,۶۷۵۵
۰,۷	۱,۴۵۴۶	۰,۶۷۵۶	۱,۴۵۰۵	۰,۶۷۸۵	۱,۴۴۴۹	۰,۶۸۰۲
۰,۹	۱,۴۵۹۲	۰,۶۸۰۵	۱,۴۵۶۳	۰,۶۸۲۷	۱,۴۵۲۴	۰,۶۸۴۶



شکل ۶-۶۵: تاثیر تغییرات مدول الاستیسیته بر روی ضریب شدت

تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک

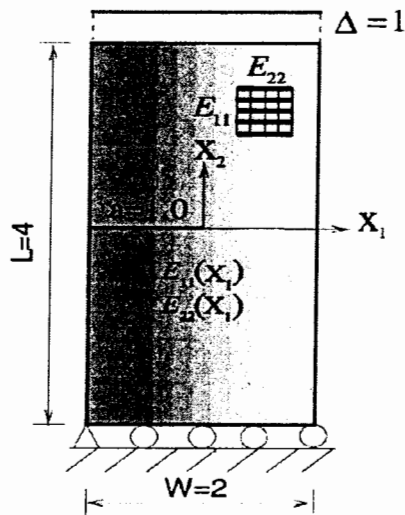


شکل ۶-۶۶: تاثیر تغییرات ضریب پواسون بر روی ضریب شدت

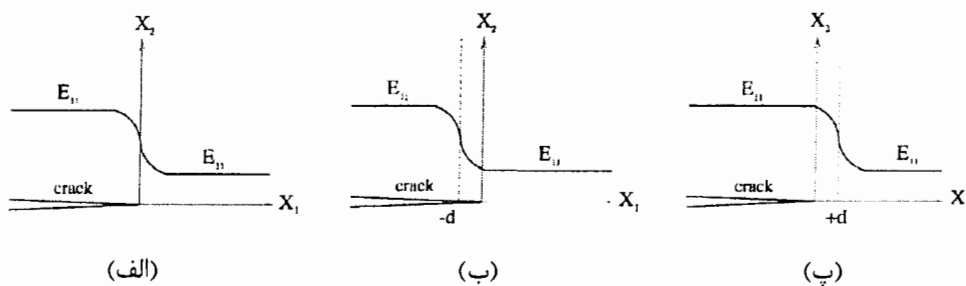
تنش نرمال شده برای صفحه دارای ترک مرکزی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک

### ۶-۵-۸- نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک

در شکل ۶-۶۷ نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از مواد FG ارتوتروپیک نشان داده شده است. در شکل های ۶-۶۸ نیز سه نوع از تغییرات نمایی در نظر گرفته شده برای خواص ماده FG مورد نظر نشان داده شده است. این تغییرات به صورت تانژانت های پربولیک می باشد که نسبت به نوک ترک در سه حالت مرجع تغییرات در نوک ترک - ۶-۶۸ الف - ، مرجع تغییرات در سمت چپ ترک - ۶-۶۸ ب - و مرجع تغییرات در سمت راست ترک - ۶-۶۸ پ - قرار دارد.



شکل ۶-۶۷: نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک



شکل ۶-۶۸: چگونگی تغییر خواص در نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک و محل قرار گرفتن مرجع تعیین تغییر خواص



$$E_{11}(X_1) = \frac{E_{11}^- + E_{11}^+}{2} + \frac{E_{11}^- - E_{11}^+}{2} \tanh[\alpha(X_1 + d)],$$

$$E_{22}(X_1) = \frac{E_{22}^- + E_{22}^+}{2} + \frac{E_{22}^- - E_{22}^+}{2} \tanh[\beta(X_1 + d)]. \quad (11-6)$$

این نوار کامپوزیتی تحت شرایط کرنش ثابت قرار داده شده است. شرایط مرزی جابجایی در نظر گرفته شده برای این نوار کامپوزیتی به این صورت است که جابجایی در جهت  $X_2$  برای کلیه گره های قرار گرفته بر روی لبه پایینی نوار برابر صفر است و جابجایی در جهت  $X_1$  نیز برای گره سمت چپ قرار گرفته در لبه پایینی نوار برابر صفر است. تغییرات اعمال شده بر روی مدول یانگ در این نوار بر اساس رابطه ۱۱-۶ بیان شده است که با توجه به سه حالت نشان داده شده در شکل ۶-۶۹ مقادیر مربوط به این روابط به این صورت می باشند. آنالیز مورد نظر در شرایط تنش صفحه انجام شده است.

$$\frac{a}{W} = 0.5, \quad \frac{L}{W} = 2.0, \quad \varepsilon_0 = 0.25$$

$$d = (-0.5 \text{ to } 0.5), \quad \nu = 0.3$$

حالت الف:

$$\alpha a = \beta a = 15.0$$

$$(E_{11}^-, E_{11}^+) = (1.00, 3.00), \quad (E_{22}^-, E_{22}^+) = (1.25, 2.75)$$

حالت ب:

$$\alpha a = \beta a = 15.0$$

$$(E_{11}^-, E_{11}^+) = (1.00, 5.00), \quad (E_{22}^-, E_{22}^+) = (1.25, 2.75)$$

حالت پ:

$$\alpha a = 4.0, \quad \beta a = 2.0$$

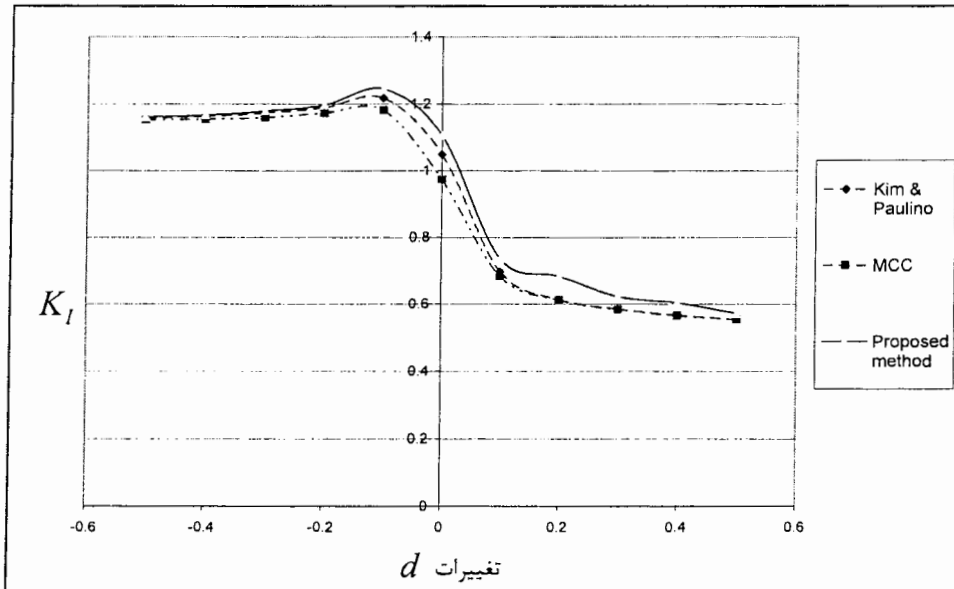
$$(E_{11}^-, E_{11}^+) = (E_{22}^-, E_{22}^+) = (1.00, 3.00)$$

نتایج مربوط به این آنالیز در جدول ۶-۲۱ و شکل های ۶-۶۹ تا ۶-۷۱ نشان داده شده است.

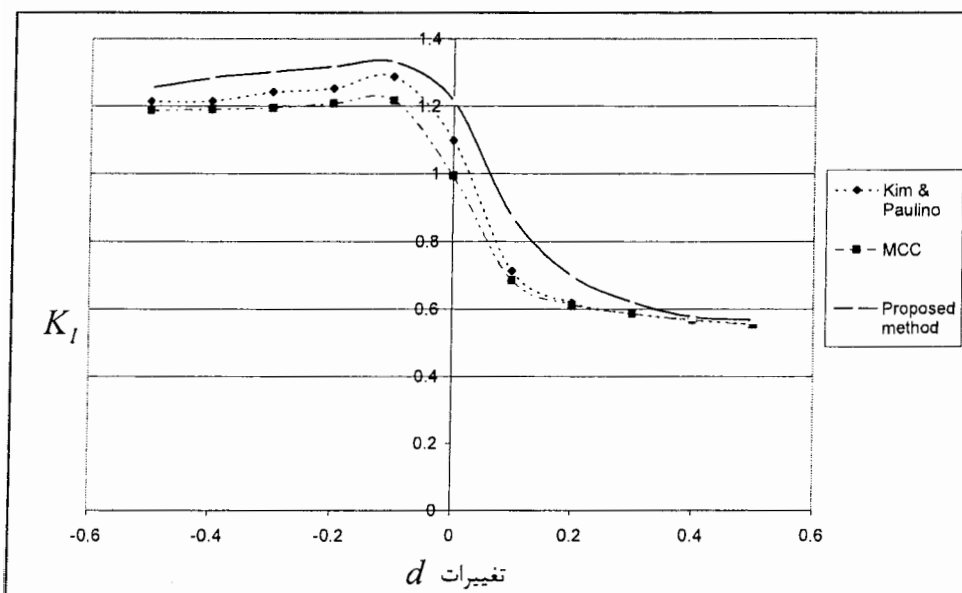
جدول ۶-۲۱: تغییرات ضریب شدت تنش برای نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی

ساخته شده از ماده FG ارتروپیک بر حسب فاصله مرجع محاسبه تغییرات خواص نسبت به نوک ترک

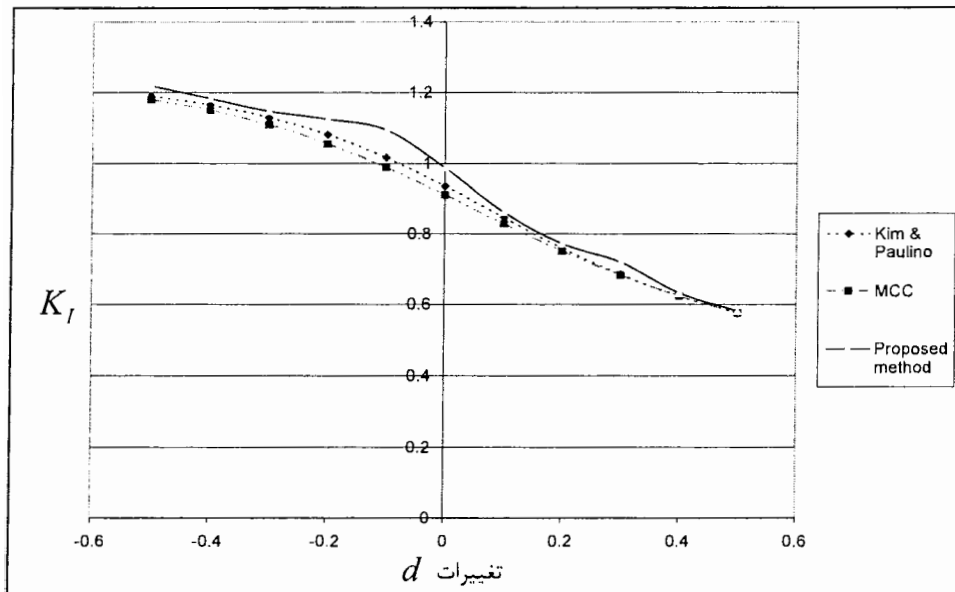
d	$K_I$ (Proposed method)			$K_I$ (Kim & Paulino)			$K_I$ (MCC)		
	Case A	Case B	Case C	Case A	Case B	Case C	Case A	Case B	Case C
-۰,۵	۱,۱۶۲	۱,۲۵۵	۱,۲۱۹	۱,۱۵۸	۱,۲۱۴	۱,۱۹	۱,۱۵۳	۱,۱۸۷	۱,۱۸
-۰,۴	۱,۱۶۷	۱,۲۸۳	۱,۱۸۳	۱,۱۶۳	۱,۲۱۵	۱,۱۶۵	۱,۱۵۵	۱,۱۹	۱,۱۵
-۰,۳	۱,۱۷۹	۱,۳۰۲	۱,۱۴۷	۱,۱۷۳	۱,۲۴۱	۱,۱۲۹	۱,۱۶	۱,۱۹۵	۱,۱۰۹
-۰,۲	۱,۱۹۷	۱,۳۱۸	۱,۱۲۵	۱,۱۸۹	۱,۲۵۲	۱,۰۸۱	۱,۱۷۳	۱,۲۰۸	۱,۰۵۵
-۰,۱	۱,۲۴۵	۱,۳۳۱	۱,۰۹۴	۱,۲۱۷	۱,۲۸۷	۱,۰۱۶	۱,۱۸۱	۱,۲۱۶	۰,۹۸۸
۰	۱,۱۰۶	۱,۲۱۴	۰,۹۸۷	۱,۰۴۹	۱,۰۹۹	۰,۹۳۵	۰,۹۷۴	۰,۹۹۴	۰,۹۱۰
۰,۱	۰,۷۳۶	۰,۸۷۴	۰,۸۶۱	۰,۶۹۷	۰,۷۱۴	۰,۸۴۶	۰,۶۸۳	۰,۶۸۶	۰,۸۲۸
۰,۲	۰,۶۸۳	۰,۶۹۹	۰,۷۷۲	۰,۶۱۴	۰,۶۱۹	۰,۷۵۹	۰,۶۱۲	۰,۶۱۴	۰,۷۵۱
۰,۳	۰,۶۲۳	۰,۶۲۱	۰,۷۱۹	۰,۵۸۵	۰,۵۸۷	۰,۶۸۴	۰,۵۸۴	۰,۵۸۶	۰,۶۸۲
۰,۴	۰,۶۰۴	۰,۵۷۷	۰,۶۳۲	۰,۵۶۷	۰,۵۶۸	۰,۶۲۳	۰,۵۶۶	۰,۵۶۷	۰,۶۲۳
۰,۵	۰,۵۷۲	۰,۵۶۸	۰,۵۸۱	۰,۵۵۴	۰,۵۵۵	۰,۵۷۴	۰,۵۵۴	۰,۵۵۴	۰,۵۷۵



شکل ۶-۶۹: تغییرات ضریب شدت تنش برای نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک بر حسب فاصله مرجع محاسبه تغییرات خواص نسبت به نوک ترک (حالت اول)



شکل ۶-۷۰: تغییرات ضریب شدت تنش برای نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از ماده FG ارتوتروپیک بر حسب فاصله مرجع محاسبه تغییرات خواص نسبت به نوک ترک (حالت دوم)



شکل ۶-۷۱: تغییرات ضریب شدت تنش برای نوار کامپوزیتی دارای ترک جانبی ساخته شده از

ماده FG ارتروپیک بر حسب فاصله مرجع محاسبه تغییرات خواص نسبت به نوک ترک (حالت سوم)

## فصل هفتم

### بحث و نتیجه گیری

در این قسمت با توجه به نتایج به دست آمده در قسمتهای قبل می توان به جمع بندی کلی نتایج پرداخت. در این پژوهش برای رسیدن به نتیجه نهایی، مسایل به ترتیب و از مراحل اولیه شروع و تا مراحل نهایی به صورت جز به جز توسعه داده شدند. این مساله باعث گردید تا در هر مرحله از صحت قسمتی از الگوریتم بیان شده اطمینان حاصل گردد.

به این ترتیب ابتدا مساله به صورت صفحه ساخته شده از ماده ایزوتروپیک بدون ترک در نظر گرفته شد. در این قسمت از نتایج به دست آمده توسط نرم افزار ANSYS برای بررسی صحت نتایج به دست آمده از روش بدون المان گالرکین استفاده شد. با تطبیق دادن نتایج، دیده شد که نه تنها نتایج به دست آمده با استفاده از الگوریتم نوشته شده توسط روش بدون المان گالرکین با نتایج به دست آمده از نرم افزار ANSYS مطابقت دارد بلکه در قسمت هایی نیز نتایج به دست

آمده توسط روش بدون المان گالرکین دارای دقت بالاتری نیز می باشند. به این ترتیب با انجام این مرحله از پژوهش، از مناسب بودن الگوریتم اولیه که تنها مربوط به قسمت بدون المان گالرکین می باشد اطمینان حاصل گردید.

در ادامه با تحلیل صفحه بدون ترک ساخته شده از مواد FG الگوریتم نوشته شده وارد مرحله جدیدی شد. در این قسمت اگر خطایی در نتایج به وجود می آمد با توجه به اطمینان از صحت الگوریتم بدون المان گالرکین در قسمت قبل تنها گزینه برای ایجاد اشتباه در نتایج، مربوط به چگونگی تعیین خواص مواد و چگونگی قرار دادن خواص در برنامه نوشته شده بود. با این وجود این قسمت نیز نتایج قابل قبولی از خود نشان داد و با مشخص شدن صحت نتایج این قسمت، الگوریتم اضافه شده برای قرار دادن خواص مواد FG نیز مورد تایید قرار گرفت. به علاوه با مقایسه نتایج این قسمت با نتایج قسمت قبل دیده می شود استفاده از مواد FG نقش موثری در کاهش تمرکز تنش های به وجود آمده در ساختار مواد ایفا می کنند. به این ترتیب می توان بیان کرد با تعیین تغییرات مناسب در ساختار مواد می توان از بروز ترک و ایجاد تمرکز تنش در مناطق مختلف ماده جلوگیری کرد.

البته چگونگی قرار دادن مواد FG برای جلوگیری از تخریب سازه ها به دو صورت کاملا متفاوت امکان پذیر می باشد. به این ترتیب گاهی با قرار دادن قسمت های مستحکم تر ماده FG در قسمت های بحرانی می توان از تخریب جلوگیری کرد که چگونگی این موضوع تقریبا مشخص می باشد. گاهی نیز با قرار دادن قسمت هایی که دارای مدول الاستیسیته کمتری می باشند در قسمت هایی که در آنها احتمال ایجاد تمرکز تنش وجود دارد می توان از تخریب سازه جلوگیری کرد. در این حالت به این علت که در این قسمت ها میزان تنش بیشتر از قسمت های دیگر است اگر مدول الاستیسیته ماده در این قسمت کمتر باشد میزان جابجایی و کشیدگی سازه در این قسمت افزایش می یابد که خود این مطلب باعث کاهش اثر تمرکز تنش های به وجود آمده در این

قسمت می باشد. البته بدیهی است که این روش در قسمت هایی که تمرکز تنش ایجاد شده به صورت تنش کششی است قابل اجرا می باشد.

در مرحله بعد با افزودن شدن ترک به تحلیل انجام شده، بر پیچیده گی های مساله افزوده شد. با وجود آنکه در نظر گرفتن ترک در ابتدا بسیار ساده به نظر می رسد ولی این کار به دقت بالایی نیاز دارد. برای راحت تر شدن قرار دادن الگوریتم ترک در کنار الگوریتم اصلی برنامه در ابتدا به تحلیل صفحه ساخته شده از مواد ایزوتروپیک پرداخته شد. وارد کردن ترک به ساختار صفحه باعث می شد برای تعیین صحیح ماتریس سختی از روش میدان دید برای تعیین دقیق تر ارتباط گره های اطراف ترک با یکدیگر استفاده گردد که چگونگی استفاده از این روش نیز باعث ایجاد مشکلاتی در نتایج در ابتدای امر شد. زیرا در نزدیک ترک برای دستیابی به نتایج دقیقتر از گره های متراکم تری استفاده گردید که این مساله در شرایطی باعث ایجاد میدان های تکین در ساختار ماتریس سختی می گردید. با این وجود با دقت در روش تعیین این شرایط دیده می شود در روش بدون المان گالرکین تعیین محدوده ترک بسیار ساده تر از روش المان محدود می باشد. زیرا در قسمت های نزدیک ترک در روش المان محدود لازم است از المان هایی با شکل های نامنظم استفاده گردد که در این صورت وقت زیادی صرف قرار دادن این المان ها در ساختار مورد تحلیل می شود. ضمن اینکه ممکن است دقت بالایی نیز با تمام تدابیر در نظر گرفته شده حاصل نگردد که به این ترتیب لازم است المان بندی ساختار کاملاً تغییر کند در حالی که در روش بدون المان گالرکین کافی است بر تعداد گره های قرار داده شده در نزدیکی نوک ترک افزوده گردد. به هر ترتیب در این قسمت با مقایسه نتایج به دست آمده برای ضریب شدت تنش با استفاده از الگوریتم نوشته شده با مرجعی دیگر و نزدیک بودن نتیجه به دست آمده در هر دو قسمت این نتیجه حاصل می گردد که الگوریتم طراحی شده در این قسمت نیز صحیح می باشد. ضمن اینکه

در تمامی این مراحل از توابع وزنی با دامنه تاثیر مربع شکل استفاده شده است که صحت نتایج به دست آمده بر مناسب بودن استفاده از چنین دامنه تاثیری تاکید می کند.

در نهایت با تلفیق الگوریتم تمام قسمت های انجام شده، الگوریتم نهایی برای تحلیل صفحه مستطیل شکل ساخته شده از مواد FG دارای ترک آماده گردید. در این قسمت برای اطمینان از صحت برنامه چند مثال متفاوت برای بررسی نتایج به کار گرفته شد که در هر یک از این مثال ها نیز نتایج به دست آمده با نتایج به دست آمده در مراجع دیگر مقایسه گردید. تمامی نتایج به دست آمده نیز همخوانی مناسبی با نتایج مراجع دیگر از خود نشان دادند.

یکی از مهم ترین نکاتی که این روش را از روش های المان محدود متمایز می کند این است که در این روش می توان مقدار پارامترهای دلخواه را در هر نقطه ای بدون در نظر گرفتن ساختار جسم محاسبه کرد. این نکته با وجود آنکه بسیار ساده به نظر می رسد باعث ایجاد سهولت و دقت فراوانی در آنالیزهای مختلف می گردد. به این ترتیب که با به دست آوردن مقادیر جابجایی در گره های قرار داده شده در ساختار در مراحل بعدی به راحتی می توان مقادیر تنش، کرنش و جابجایی را در هر نقطه از صفحه به دست آورد.

با وجود تمام مزایایی که برای روش بدون المان گالرکین بیان گردید این روش داری معایبی نیز می باشد. مهم ترین نکته ای که باید در روش بدون المان گالرکین در نظر گرفته شود چگونگی تعیین شرایط مرزی می باشد. به گونه ای که گاهی دقت نکردن به این مورد باعث انحراف بسیار در نتایج می گردد. تا کنون روش های مختلفی برای این مساله توسط افراد مختلفی ارائه گردیده است که هر یک از این روش ها نیز داری مزایا و محاسن مختلفی می باشد. در این پژوهش از یکی از ساده ترین و کاربردی ترین این روش ها استفاده شده است. در این روش از تعبیر فیزیکی ضرایب لاگرانژ برای تعیین شرایط مرزی استفاده شده است. به این ترتیب هم دقت موجود در



روش ضرایب لاگرانژ برای اعمال شرایط مرزی حفظ می گردد و هم اینکه از ایجاد درایه های صفر در عناصر قطر اصلی جلوگیری می شود.

یکی دیگر از معایب این روش میزان محاسبات بسیار زیاد در این روش است که این مطلب خود باعث می گردد زمان لازم برای محاسبات افزایش یابد. همچنین در این روش تعداد پارامترهای تاثیرگذار بر همگرایی نتایج زیاد می باشد که برخی از این پارامترها تاثیر بسیار زیادی در همگرایی نتایج دارند به گونه ای که تغییر کمی در مقدار آنها باعث تغییر زیاد در نتایج می گردد. تعیین میزان این پارامترها که اکثر آنها نیز دلخواه می باشند برای به دست آوردن حالت بهینه نیاز به صرف وقت زیادی دارد.

در مجموع با توجه به نتایج به دست آمده در این پژوهش با وجود آنکه نتایج به دست آمده با استفاده از روش بدون المان گالرکین بسیار مطلوب بوده اند، به طور کلی می توان چگونگی استفاده از روش بدون المان گالرکین و روش المان محدود را اینگونه بیان کرد. در مسایل و هندسه های ساده با در نظر گرفتن اینکه خطای روش های المان محدود و بدون المان گالرکین بسیار ناچیز می باشد اگر نیاز به محاسبه نتایج با دقت های بسیار بالا نباشد با توجه به زمانبر بودن روش بدون المان گالرکین مناسبتر است که از روش المان محدود استفاده شود ولی هنگامی که مسایل مورد تحلیل دارای ناپیوستگی هایی در درون خود باشند و یا دارای تغییرات مداوم در خواص مواد خود باشند بهتر است از روش بدون المان گالرکین استفاده گردد.



## فصل هشتم

# نتایج و پیشنهادات

در این قسمت با توجه به موارد بیان شده در فصل های قبل نتایج کلی و پیشنهاداتی که به نظر می رسد برای انجام حقیق های بعدی مناسب باشد ارائه می گردد.

### ۸-۱- نتایج

- ۱- روش بدون المان گالرکین دارای دقت مناسبی برای محاسبه نتایج می باشد. به صورتی که می توان بیان کرد دقت این روش از روش های المان محدود بیشتر می باشد.
- ۲- تغییر ساختار شبکه گره های در نظر گرفته شده در ساختار تحلیل، در صورت لزوم به سادگی انجام می پذیرد.

۳- برای تحلیل سازه ها با تغییرات مداوم در خواص می توان از روش بدون المان گالرکین به راحتی و با دقت بالایی استفاده کرد.

۴- امکان آنالیز خطا در این روش بسیار زیاد می باشد.

۵- در نظر گرفتن ترک در روش بدون المان گالرکین بسیار ساده تر از روش المان محدود می باشد.

۶- استفاده از مواد **FG** در ساختار سازه ها می تواند نقش موثری در جلوگیری از تخریب آنها داشته باشد.

۷- با توجه به ساختار روش بدون المان گالرکین محاسبه پارامترهای مورد نظر در تمامی ساختار بدون در نظر گرفتن شبکه پایه که از آن برای تحلیل استفاده شده است بسیار ساده و دقیق می باشد.

## ۲-۸- پیشنهادات

با توجه به نتایج به دست آمده موارد زیر برای بهبود روش بدون المان گالرکین پیشنهاد می گردد.

۱- محدود کردن تعداد پارامترهای اختیاری موثر در همگرایی.

۲- بررسی روش های جدید برای محاسبه شرایط مرزی با دقت بیشتر و محاسبات ساده تر.

۳- ایجاد یک نوع تابع وزنی پایه که در تمامی شرایط نتایج مطلوبی را ایجاد کند.

۴- بررسی روش هایی که باعث افزایش سرعت این روش گردند.



## منابع

- ۱- جاوید راد، فرهاد، زمستان ۱۳۸۳، مکانیک شکست و کاربرد آن در مهندسی، انتشارات صنایع هوا و فضا.
- 2 - Shank, M.E., 1953, "*A Critical review of Brittle Failure in carbon Plate steel Structures Other than Ships*", Ship structure committee Report, Serial No. SSc-65, National Academy of Sciences- National Research council, Washington, D.C.
- 3 – Parker, E.R., 1957, "*Brittle Behavior of Engineering Structures*", Prepared for the Ship structure committee under the General Direction of the committee of Ship Steel- National Academy of Sciences- National Research council, John Weily, New York.
- 4 - Griffith, A.A., 1920, "*The Phenomena of rupture and flow in solids*", Philosophical Transactions, Series A, vol 221, 163 – 198.
- 5 - Koizumi, M., 1993, "*The Concept of FGM*", Ceramic Transactions functionally graded material, vol 34, 3-10.
- 6 - web.umr.edu
- 7 – Belytschko, .T and Lu, .Y.Y and Gu, .L, 1994, "*Element free Galerkin methods*", International journal for Numerical Methods in Engineering, vol 37, 229-256.
- 8 - K.Y. Dai, G.R. Liu, X. Han, K.M. Lim, 2005, "*Thermomechanical analysis of functionally graded material (FGM) plates using element-free Galerkin method*", Computers and Structures, vol 83, 1487–1502.
- 9 - Wu Chang-chun a, He Peixiang b, Li Ziran, 2002, "*Extension of J integral to dynamic fracture of functional graded material and numerical analysis*", Computers and Structures, vol 80, 411– 416.
- 10 - D. Lacroix, Ph. Bouillard, 2003, "*Improved sensitivity analysis by a coupled FE–EFG method*", Computers and Structures, vol 81, 2431–2439.

- 11 - B.N. Rao, S. Rahman, 2003, "*Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials*", Engineering Fracture Mechanics, vol 70, 1-27.
- 12 - B.N. Rao, S. Rahman, 2001, "*A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks*", International Journal of Pressure Vessels and Piping, vol 78, 647-657.
- ۱۳- اختراعی طوسی، حمید، آبان ۱۳۸۲، تحلیل تنش پیرامون ترک فصل مشترک به روش گالرکین بدون اجزاء، دانشگاه صنعتی شریف.
- 14 – www .What's FGM . htm.
- 15 - Bever, B.M., Duwez, P.E. , 1972, Material Sci. & Eng., vol 10 , 1-8.
- 16 – Watanabe, S., Aoki, K., Iwata, H., "*Use of Functionally Graded Materials in A Temperature Measuring Element*", Internet.
- 17 – Suresh, S., and Mortensen, A., 1998, "*Fundamentals of Functionally Graded Materials*", Combridge Publication, London.
- 18 - Noda, N. and Jin, Z.H., 1993, "*Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in a Strip a Functionally Graded Material*", International Journal of Solids and Structures, vol 30, 1039-1056.
- 19 – Reddy, J.N. and Chin, C.D., 1998, "*Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Syllinders and Plates*", Journal of Thermal Stresses, vol 21, 593-629.
- 20 – Kapuria, .S and Bhattacharyya, .M , 2006, "*Assessment of coupled 1D models for hybrid piezoelectric layered functionally graded beams*", Composite Structure, vol 72 , 455- 468.
- 21 – Li, J.Q. and Sun, W.A., 2007, "*Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> – FeCrAl composites and functionally graded materials fabricated by reactive hot pressing*", Department of Materials Science and Engineering, Shenzhen University, vol 38, 615- 620.

- 22 – Fukui, .Y, 1991, “ *Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force*”, International journal Japan soc. Mech. Eng., series III, vol 34, 144 – 148.
- 23 - [www.matscieng.sunysb.edu/tsl/fgm](http://www.matscieng.sunysb.edu/tsl/fgm).
- 24 - T.P.D. Rajan, R.M. Pillai, B.C. Pai, 2006, “*Functionally graded Al–Al<sub>3</sub>Ni in situ intermetallic composites: Fabrication and microstructural characterization*”, Journal of Alloys and Compounds.
- 25 - H. Karutz, R. Chudoba, W.B. Kratzig, 2002, “*Automatic adaptive generation of a coupled finite element/element-free Galerkin discretization*”, Finite Elements in Analysis and Design, vol 38, 1075–1091.
- 26 - Belytschko, .T and Lu, .Y.Y and Gu, .L, 1994, “*A new implementation of the Element free Galerkin method*”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol 113, 397- 414.
- 27 – Belytschko, .T and Lu, .Y.Y and Gu, .L, 1995, “*Element free Galerkin method for static and dynamic fracture*”, International journal of Solids and Structures, vol 32, 2547-2570.
- 28 - Roberto Brighenti, 2005, “*Application of the element-free Galerkin meshless method to 3-D fracture mechanics problems*”, Engineering Fracture Mechanics, vol 72, 2808–2820.
- 29 - Sang-Ho Lee, Young-Cheol Yoon, 2004, “*Numerical prediction of crack propagation by an enhanced element-free Galerkin method*”, Nuclear Engineering and Design, vol 227, 257–271.
- 30 - C.K. Lee, C.E. Zhou, 2004, “*On error estimation and adaptive refinement for element free Galerkin method*”, Computers and Structures, vol 82, 413–428.
- 31 - Y.Y. Lu, T. Belytschko, M. Tabbara, 1995, “*Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture*”, Comput. Methods Appl. Mech, Engrg., vol 26, 31-153.



- 32 - Erdogan, .F and Wu, .BH, 1997, "*The surface crack problem for a plate with functionally graded properties*", J. appl. Mech., vol 64, 449-56.
- 33 - Chen, .J and Wu, .L, 2000, "*Element free Galerkin methods for fracture of functionally graded materials*", Key Eng. Mater., 183-187:487-92.
- 34 - Rice, .J.R, 1986, "*A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*" journal of applied Mechanics, vol. 35, 379-386.
- 35 - Eischen, .J.W, 1987, "*Fracture of nonhomogeneous materials*", Int. J. Fract., vol 34, 3-22 .
- 36 - Jin, .Z.H., Noda, .N, 1994, "*Crack tip singular fields in nonhomogeneous materials*", J. Appl. Mech., vol 61, 738-40.
- 37 - Tada, .H and Paris, p. c. and Erwin, G. R., 1973, "*The stress analysis of cracks handbook*", Hellertown, PA: Del Research Corporation.
- 38 - Kim, J.H. and Paulino, G.H., 2002, "*Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials*", Int. J. Number Mech. Eng., vol 53 , 1903-35.
- 39- Konda, N. and Erdogan, F., 1994, "*The mixed mode crack problem in a nonhomogeneous elastic medium*", Eng. Fract. Mech., vol 47, 533-45.

## **Abstract**

Considering the numerical analysis methods based on mesh, such as finite element in the analysis of the constructs with crack have less accuracy, in this thesis it is tried to study free element Galerkin method for the analysis of such constructs. Considering the importance of the science of fracture mechanics, at first it is tried to treat the explanation of the necessity of attention to the issues that are related to this subject. In continue, with respect to the novelty of Functionally Graded materials and free element Galerkin method, it is tried to give enough explanation about the structure of each of these subjects in separate chapters. The most important part of this research is to study free element Galerkin method and how to use this method in the analysis of crack . Finally, in due respect to stated explanations the results of the program which has been written by free element Galerkin method have been discussed. Totally it can be said this method in different conditions in this research has shown its own proper efficiency and in conditions that finite element has less ability of analysis, free element Galerkin method shows good results.



**Faculty of Mechanical Engineering**

**M. S. C. Thesis**

**Element Free Galerkin Method (EFGM)  
Analysis of Crack in a Rectangular Plate  
made of Functionally Graded Materials**

**Mohammad Majidzadeh**

Supervisor:

**Dr. M. Shariati**

September 2007