





## تقدیم

تقدیم به پدر و مادرم که در تمامی مراحل زندگی یار و حامی من

بوده اند

## تشکر و قدردانی

از جناب آقای دکتر محمدحسن کیهانی و دکتر محمدرضا حیرانی نوبی که با راهنمایی‌هایشان مرا در انجام این تحقیق یاری رسانده اند، کمال تشکر و قدردانی را عرض نمایم.

عنوان :

**مدلسازی عددی خنک کاری داخلی**

**پره های توربین گازی**

## چکیده

توربینهای گازی از جمله تجهیزات مهم صنعتی هستند که در ایجاد نیروی رانش در هواپیماها، تولید انرژی در نیروگاهها و سایر کاربردهای صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بطور کلی با افزایش دمای سیال داغ ورودی به روتور توربینهای گازی، بازده حرارتی و توان خروجی آنها افزایش پیدا می‌کند، ولی مشکلات متالورژیکی، سبب محدود شدن این دما می‌شوند. امروزه برای غلبه بر این مشکل، روشهای مختلفی ارائه شده است. یکی از این روشها، خنک‌کاری داخلی پره‌ها است. در روش خنک‌کاری داخلی، یک مسیر U شکل در داخل هر پره ایجاد می‌شود تا با عبور سیال سرد از داخل آن، عمل خنک‌کاری انجام شود. در این تحقیق با استفاده از مدل‌سازی عددی، رفتار سیال خنک‌کننده شبیه‌سازی شده و اثر پارامترهای هندسی (شعاع دوران توربین، شعاع انحنا قوس داخلی و زاویه حمله پره) و پارامترهای فیزیکی (عدد رینولدز و عدد دوران) در حالت‌های دوبعدی و سه بعدی بررسی شده است. از جمله نتایج قابل توجه این پروژه، بررسی جریانهای ثانویه ناشی از دوران و انحنا و نحوه اثر آنها بر یکدیگر و نیز اثر دوران بر توزیع فشار در کانالهای گردان است.

همچنین در این تحلیل، معادلات حاکم (شامل معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی) به طور کامل تحلیل شده و برای مدل‌سازی جریانهای مغشوش از روش  $k - \epsilon$  استفاده شده است.

## فهرست مطالب

الف.....	تقدیم
ب.....	تشکر و قدردانی
ت.....	عنوان
ث.....	چکیده
ج.....	فهرست مطالب
د.....	فهرست علائم
ز.....	فهرست جداول
س.....	فهرست اشکال
ط.....	پیشگفتار
۱.....	فصل اول : مقدمه
۲.....	۱-۱ : نیاز به خنک کاری پره های توربین
۲.....	۱-۱-۱ : پیشرفتهای جدید در موتورهای هوایما
۵.....	۲-۱-۱ : پیشرفتهای جدید در توربینهای گازی نیروگاهی
۶.....	۲-۱ : تکنولوژی خنک کاری توربین
۶.....	۱-۲-۱ : مفهوم خنک کاری پره های توربین
۹.....	۲-۲-۱ : سیستمهای خنک کاری معمول در توربینها
۱۷.....	۳-۱ : انتقال حرارت در توربین و روشهای خنک کاری
۱۷.....	۱-۳-۱ : انتقال حرارت در پره توربین
۲۳.....	۲-۳-۱ : خنک کاری داخلی پره های توربین
۲۴.....	۳-۳-۱ : خنک کاری فیلمی پره توربین
۲۵.....	۴-۳-۱ : پوشش حرارت و انتقال حرارت
۲۷.....	فصل دوم : ملاحظات فیزیکی خنک کاری داخلی
۲۸.....	۱-۲ : اثرات فیزیکی دوران بر جریان خنک کاری داخلی
۳۲.....	۲-۲ : معادلات حاکم

۳۸	۳-۲: مدل توربولانسی
۴۳	۱-۳-۲: مدل‌های اغتشاش صفر معادله ای
۴۶	۲-۳-۲: مدل‌های اغتشاش دومعادله ای
۴۸	۴-۲: تحلیل تشابهی معادلات حاکم
۵۰	۵-۲: شرایط مرزی و شرایط اولیه
۵۱	۱-۵-۲: شرایط مرزی در دیواره های جامد
۵۳	۲-۵-۲: شرایط مرزی در ورودی
۵۵	۳-۵-۲: شرایط مرزی در خروجی
۵۷	۴-۵-۲: شرایط اولیه
۵۹	فصل سوم: ملاحظات عددی خنک کاری داخلی
۶۰	۱-۳: الگوریتم‌های تحلیل مسائل پایدار
۶۰	۱-۱-۳: روش تراکم پذیری مصنوعی
۶۱	۲-۱-۳: روش معادله پواسون برای فشار
۶۲	۲-۳: نحوه تولید مش
۶۷	۳-۳: نحوه گسسته کردن معادلات حاکم
۶۸	۱-۳-۳: صورت گسسته معادلات حاکم در دستگاه مختصات کارتیزین
۷۲	۲-۳-۳: صورت گسسته معادلات حاکم در دستگاه مختصات استوانه ای
۷۸	۴-۳: نحوه اعمال شرایط مرزی
۸۰	۵-۳: نحوه اجرای روش علامتگذاری و سلول
۸۲	فصل چهارم: بحث و نتیجه گیری
۸۵	۱-۴: جریان آرام دو بعدی
۹۱	۱-۲-۴: اثر شعاع انحنا قوس
۹۷	۲-۲-۴: اثر عدد دوران
۱۰۶	۳-۴: جریان مغشوش دوبعدی
۱۰۹	۱-۳-۴: اثر عدد رینولدز



۱۱۲	..... اثر عدد دوران ۲-۳-۴
۱۱۶	..... جریان آرام سه بعدی ۴-۴
۱۲۱	..... اثر عدد دوران ۱-۴-۴
۱۲۶	..... اثر زاویه حمله ۲-۴-۴
۱۳۲	..... اثر شعاع انحنا قوس داخلی ۳-۴-۴
۱۳۶	..... پیشنهادات
۱۳۷	..... مراجع و مؤاخذ
۱۳۹	..... ضمائم
۱۴۰	..... ضمیمه -الف : برنامه تحلیل جریان آرام دوبعدی بین دو صفحه
۱۴۴	..... ضمیمه -ب : برنامه تحلیل حرارت برای جریان آرام دوبعدی بین دو صفحه
۱۴۶	..... ضمیمه -ج : برنامه تحلیل جریان آرام دوبعدی در مسیر خنک کاری داخلی
۱۵۹	..... ضمیمه -د : برنامه تحلیل حرارت برای جریان آرام دوبعدی در مسیر خنک کاری داخلی
۱۶۴	..... ضمیمه -ه : برنامه تحلیل جریان مغشوش دوبعدی بین دو صفحه
۱۷۲	..... ضمیمه -و : برنامه تحلیل حرارت برای جریان مغشوش دوبعدی بین دو صفحه
۱۷۴	..... ضمیمه -ز : برنامه تحلیل جریان مغشوش دوبعدی در مسیر خنک کاری
	..... ضمیمه -ح : برنامه تحلیل حرارت جریان مغشوش دوبعدی در یک کانال با مقطع مستطیلی .
۲۰۲	.....
۲۰۷	..... ضمیمه -ط : برنامه تحلیل جریان آرام سه بعدی در یک کانال با مقطع مستطیلی
۲۱۵	..... ضمیمه -ی : برنامه تحلیل حرارت جریان آرام سه بعدی در یک کانال با مقطع مستطیلی
۲۱۸	..... ضمیمه -ک : برنامه تحلیل جریان آرام سه بعدی در مسیر خنک کاری
۲۴۵	..... ضمیمه -ل : برنامه تحلیل حرارت جریان آرام سه بعدی در مسیر خنک کاری
۲۵۲	..... ضمیمه -م : مقالات
۲۶۹	..... چکیده به انگلیسی
۲۷۰	..... عنوان به انگلیسی

## فهرست علائم

$R_t$ : شعاع توربین (m)

$R_c$ : شعاع انحنای قوس داخلی (m)

$L$ : طول قسمت‌های مستقیم مسیر خنک کاری (m)

$D_h$ : قطر هیدرولیکی مسیر خنک کاری (m)

$b_y$ : عرض مقطع خنک کاری در جهت  $y$  (m)

$b_z$ : عرض مقطع خنک کاری در جهت  $z$  (m)

$\Phi$ : زاویه حمله پره

$A$ : سطح ( $m^2$ )

$u$ : سرعت در جهت محور  $x$  (m/s)

$v$ : سرعت در جهت محور  $y$  (m/s)

$w$ : سرعت در جهت محور  $z$  (m/s)

$v_r$ : سرعت شعاعی (m/s)

$v_\theta$ : سرعت قطاعی (m/s)

$v_z$ : سرعت عرضی در جهت  $z$  (m/s)

$V$ : بردار سرعت (m/s)

$U$ : سرعت در ورودی (m/s)

$P$ : فشار استاتیکی (pa)

T: دمای سیال (k)

$T_m$ : دمای متوسط سیال (k)

$T_i$ : دمای سیال در ورودی (k)

$T_o$ : دمای سیال در خروجی (k)

$\omega$ : سرعت زاویه ای توربین (rad/s)

a: شتاب نسبی ( $m/s^2$ )

$\nu$ : ویسکوزیته سینماتیکی سیال ( $m^2/s$ )

$\nu_i$ : ویسکوزیته سینماتیکی جریان مغشوش ( $m^2/s$ )

$\alpha$ : ثابت انتقال حرارت سیال ( $m^2/s$ )

$\alpha_i$ : ثابت انتقال حرارت مغشوش ( $m^2/s$ )

$\mu$ : ویسکوزیته سیال ( $kg/(m.s)$ )

$\mu_i$ : ویسکوزیته مغشوش ( $kg/(m.s)$ )

$\mu_r/\mu$ : ویسکوزیته نسبی =  $\mu_r/\mu$

$\rho$ : چگالی سیال ( $kg/m^3$ )

k: اثرژی جنبشی اغتشاش ( $m^2/s^2$ )

$\varepsilon$ : تلفات اغتشاش ( $m^3/(kg.s)$ )

I: درصد اغتشاش

l: طول اختلاط (m)

q: شار حرارتی ( $W/m^2$ )

h: ضریب جابجایی ( $W/(m^2.k)$ )

$\tau$ : تنش برشی (pa)

Re: عدد رینولدز =  $U.D_h/\nu$

Ro: عدد دوران =  $\omega.D_h/U$

Pr: عدد پراتل =  $\nu/\alpha$

Nu: عدد ناسلت =  $h.D_h/k$

$Nu_m$ : عدد ناسلت متوسط =  $h_m.D_h/k$

## فهرست جداول

جدول ۱-۲ : پدیده های جریان خنک کاری داخلی در اثر عوامل فیزیکی ..... ۳۲

جدول ۱-۳ : شماره گره های تخصیص یافته برای پارامترهای جریان در حالت سه بعدی ..... ۶۴

## فهرست اشکال

- شکل ۱-۱: افزایش قدرت خروجی از چرخه با افزایش دمای جریان ورودی به توربین که به طور شماتیک نشان داده شده است..... ۳
- شکل ۱-۲: تغییر دمای ورودی به توربین در طول زمان ..... ۳
- شکل ۱-۳: پیشرفت نسبت تراکم کمپرسور در گذر زمان ..... ۴
- شکل ۱-۴: موتور توربوفن F117 که توسط شرکت Pratt & Whitney ساخته شده است .... ۴
- شکل ۱-۵: ساختار یک موتور ساخته شده توسط سیستمهای قدرت GE زیرنظر برنامه ATS. ۶
- شکل ۱-۶: برشی از تصویر موتور توربوفن GE CF6..... ۸
- شکل ۱-۷: طبقه اول پره نازل توربین فشار بالا برای موتور GE CF6..... ۸
- شکل ۱-۸: پره طبقه اول روتور توربین فشار بالا برای موتور GE CF6 ..... ۹
- شکل ۱-۹: طرح کلی روتور، استاتور و قفسه سیستم خنک کاری برای موتور  $E^3$ ..... ۱۰
- شکل ۱-۱۰: هندسه خنک کاری پره طبقه اول  $E^3$  و سیستم خنک کاری ..... ۱۱
- شکل ۱-۱۱: طرح خنک کاری درون پره طبقه اول  $E^3$  ..... ۱۲
- شکل ۱-۱۲: طرح خنک کاری بیرون پره طبقه اول  $E^3$  ..... ۱۲
- شکل ۱-۱۳: جزئیات توزیع دما در بخش گام پره طبقه اول  $E^3$  ..... ۱۳
- شکل ۱-۱۴: سیستم خنک کاری پره روتور HPT طبقه اول  $E^3$  ..... ۱۴
- شکل ۱-۱۵: طرح خنک کاری پره روتور HPT طبقه اول  $E^3$  ..... ۱۵
- شکل ۱-۱۶: توزیع دما در پره روتور HPT طبقه اول  $E^3$  در حالت پایدار پرواز ..... ۱۵
- شکل ۱-۱۷: جریانهای خنک کاری نازل طبقه دوم  $E^3$  ..... ۱۶
- شکل ۱-۱۸: طرح پره روتور طبقه دوم  $E^3$  ..... ۱۷
- شکل ۱-۱۹: دو نوع متفاوت محفظه احتراق و سطح مقطع آنها ..... ۱۹
- شکل ۱-۲۰: پروفیل دمای خروجی از یک آتشدان حلقوی ..... ۱۹
- شکل ۱-۲۱: پروفیل دمای شعاعی متوسط در ورودی پره طبقه اول روتور توربین ..... ۲۱

- شکل ۱-۲۲: جریان پیچیده در مسیر گازهای داغ در روتور، که شامل جریانهای ثانویه، جریان در نوک پره، دنباله ها و جریانهای چرخشی می باشد ..... ۲۱
- شکل ۱-۲۳: نمونه ای از خنک کاری پره توربین گاز هواپیما ..... ۲۲
- شکل ۱-۲۴: تغییر نرخ انتقال حرارت در روی یک پره ..... ۲۲
- شکل ۱-۲۵: خنک کاری در پره یک توربین مدرن چند پاسه ..... ۲۴
- شکل ۲-۱: پروفیل سرعت در یک کانال گردان ..... ۲۸
- شکل ۲-۲: دیاگرام اعداد رینولدز بحرانی برحسب اعداد دوران ..... ۲۹
- شکل ۲-۳: توزیع سرعت و ویسکوزیته توربولانس در یک کانال گردان ..... ۳۰
- شکل ۲-۴: طرح شماتیک مسیر خنک کاری داخلی و پدیده های آن ..... ۳۱
- شکل ۲-۵: هندسه مسیر خنک کاری داخلی ..... ۳۳
- شکل ۲-۶: دستگاههای مختصات مطلق و نسبی در ناحیه اول ..... ۳۴
- شکل ۲-۷: دستگاههای مختصات مطلق و نسبی در ناحیه دوم ..... ۳۶
- شکل ۲-۸: دستگاههای مختصات مطلق و نسبی در ناحیه سوم ..... ۳۷
- شکل ۲-۹: رژیمهای مختلف جریان نزدیک سطح ..... ۳۸
- شکل ۲-۱۰: مقایسه پروفیلهای سرعت لایه های مرزی آرام و مغشوش ..... ۳۹
- شکل ۲-۱۱: نمایش مقادیر متوسط و نوسانی در جریانهای دائم و غیردائم ..... ۴۰
- شکل ۲-۱۲: مرز خروجی در حالت دوبعدی ..... ۵۵
- شکل ۲-۱۳: مرز خروجی در حالت سه بعدی ..... ۵۶
- شکل ۳-۱: نمونه شبکه جابجا شده و متغیرهای جریان ..... ۶۳
- شکل ۳-۲: شبکه مسیر خنک کاری در حالت دوبعدی ..... ۶۵
- شکل ۳-۳: شبکه مسیر خنک کاری در حالت سه بعدی ..... ۶۷
- شکل ۳-۴: شرایط مرزی در یک شبکه جابجا شده ..... ۷۹
- شکل ۴-۱: میزان خطا برحسب تعداد گامهای زمان تحلیل در تعداد گره های مختلف ..... ۸۴
- شکل ۴-۲: میزان خطا برحسب تعداد گره ها ..... ۸۴
- شکل ۴-۳: کانتور سرعت محوری بی بعد در مسیر خنک کاری دوبعدی ..... ۸۶

- شکل ۴-۴ : برشهای محللهای مهم جریان ..... ۸۷
- شکل ۴-۵ : پروفیلهای سرعت محوری در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری ..... ۸۸
- شکل ۴-۶ : کانتور سرعت عرضی بی بعد در مسیر خنک کاری دوبعدی ..... ۸۹
- شکل ۴-۷ : کانتور فشار استاتیکی بی بعد در مسیر خنک کاری داخلی ..... ۹۰
- شکل ۴-۸ : کانتور فشار کل بی بعد در مسیر خنک کاری داخلی ..... ۹۰
- شکل ۴-۹ : کانتور دمای بی بعد در مسیر خنک کاری داخلی ..... ۹۱
- شکل ۴-۱۰ : کانتورهای سرعت محوری در شعاعهای انحنای مختلف ..... ۹۲
- شکل ۴-۱۱ : کانتورهای دما در شعاعهای انحنای مختلف ..... ۹۳
- شکل ۴-۱۲ : توزیع عدد ناسلت سرتاسری در شعاعهای انحنای مختلف ..... ۹۶
- شکل ۴-۱۳ : توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره داخلی و در شعاعهای انحنای مختلف ..... ۹۶
- شکل ۴-۱۴ : توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره خارجی و در شعاعهای انحنای مختلف ..... ۹۷
- شکل ۴-۱۵ : کانتورهای سرعت محوری در اعداد دوران مختلف ..... ۹۹
- شکل ۴-۱۶ : پروفیلهای سرعت محوری در اعداد دوران مختلف ..... ۱۰۰
- شکل ۴-۱۷ : کانتورهای فشار استاتیکی در اعداد دوران مختلف ..... ۱۰۱
- شکل ۴-۱۸ : توزیع عدد ناسلت سرتاسری برحسب عدد دوران ..... ۱۰۲
- شکل ۴-۱۹ : توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره داخلی و در اعداد دوران مختلف ..... ۱۰۳
- شکل ۴-۲۰ : توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره خارجی و در اعداد دوران مختلف ..... ۱۰۳
- شکل ۴-۲۱ : توزیع عدد ناسلت سرتاسری برحسب شعاع توربین ..... ۱۰۴
- شکل ۴-۲۲ : توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره داخلی و در شعاعهای توربین مختلف ..... ۱۰۵
- شکل ۴-۲۳ : توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره خارجی و در شعاعهای توربین مختلف ..... ۱۰۵
- شکل ۴-۲۴ : توزیع سرعت محوری در  $Re=5000$  و  $Ro=0$  ..... ۱۰۷
- شکل ۴-۲۵ : کانتور دما در  $Re=5000$  و  $Ro=0$  ..... ۱۰۸
- شکل ۴-۲۶ : کانتور نسبت ویسکوزیته در  $Re=5000$  و  $Ro=0$  ..... ۱۰۹
- شکل ۴-۲۷ : اثر عدد رینولدز بر پروفیلهای سرعت محوری ..... ۱۱۰
- شکل ۴-۲۸ : اثر عدد رینولدز بر پروفیلهای دما ..... ۱۱۱



- شکل ۴-۲۹ : اثر عدد رینولدز بر عدد ناسلت سرتاسری در جریان مغشوش ..... ۱۱۱
- شکل ۴-۳۰ : کانتورهای سرعت محوری در  $Re=5000$  و اعداد دوران مختلف ..... ۱۱۳
- شکل ۴-۳۱ : اثر عدد دوران بر پروفیل‌های سرعت محوری ..... ۱۱۴
- شکل ۴-۳۲ : کانتورهای دما در  $Re=5000$  و اعداد دوران مختلف ..... ۱۱۴
- شکل ۴-۳۳ : اثر عدد دوران بر پروفیل‌های دما ..... ۱۱۵
- شکل ۴-۳۴ : اثر عدد دوران بر عدد ناسلت سرتاسری در جریان مغشوش ..... ۱۱۵
- شکل ۴-۳۵ : کانتورهای سرعت محوری در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری ایستا ..... ۱۱۷
- شکل ۴-۳۶ : خطوط جریانهای عرضی در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری ایستا ..... ۱۱۹
- شکل ۴-۳۷ : کانتورهای دما در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری ایستا ..... ۱۲۰
- شکل ۴-۳۸ : کانتورهای سرعت محوری در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری گردان ..... ۱۲۳
- شکل ۴-۳۹ : خطوط جریانهای عرضی در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری گردان ..... ۱۲۴
- شکل ۴-۴۰ : کانتورهای دما در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری گردان ..... ۱۲۵
- شکل ۴-۴۱ : اثر عدد دوران بر عدد ناسلت سرتاسری ..... ۱۲۶
- شکل ۴-۴۲ : جریانهای ثانویه در وسط ناحیه اول و به ازای زوایای حمله مختلف ..... ۱۲۸
- شکل ۴-۴۳ : جریانهای ثانویه در وسط ناحیه دوم و به ازای زوایای حمله مختلف ..... ۱۲۹
- شکل ۴-۴۴ : جریانهای ثانویه در وسط ناحیه سوم و به ازای زوایای حمله مختلف ..... ۱۳۰
- شکل ۴-۴۵ : کانتورهای سرعت محوری در خروجی و به ازای زوایای حمله مختلف ..... ۱۳۱
- شکل ۴-۴۶ : اثر زاویه حمله بر عدد ناسلت سرتاسری ..... ۱۳۲
- شکل ۴-۴۷ : خطوط جریان در وسط ناحیه دوم و به ازای شعاعهای انحنا مختلف ..... ۱۳۳
- شکل ۴-۴۸ : کانتورهای سرعت محوری در وسط ناحیه دوم و به ازای شعاعهای انحنا مختلف ... ۱۳۴
- شکل ۴-۴۹ : اثر شعاع انحنا قوس داخلی بر عدد ناسلت سرتاسری ..... ۱۳۵

## پیشگفتار

امروزه افزایش روزافزون نیازهای بشری لزوم بهینه کردن سیستمها را ایجاب می کند. با بهینه کردن سیستمها میزان تولید افزایش و میزان هزینه ها کاهش می یابد. انرژی الکتریکی به سبب کاربردهای گسترده و آلودگی کم نقش مهمی را در زندگی انسانها ایفا می کند. نیروگاههای حرارتی دارای سهم فراوانی در تولید برق جهان هستند. در نیروگاههای گازی با افزایش دمای سیال داغ ورودی به توربین، میزان انرژی تولیدی و بازده توربین افزایش پیدا می کند ولی در دماهای بالا یکسری مشکلات متالورژیکی برای توربینهای گازی ایجاد می شود که سبب محدود شدن دمای ورودی به آنها می گردد. در سال ۱۹۷۶ میلادی باری<sup>۱</sup> نشان داد که اگر دمای متوسط پره ها  $900^{\circ}\text{C}$  باشد، افزایش ویا کاهش دما به میزان  $20^{\circ}\text{C}$  عمر پره ها را نصف و یا دو برابر می کند [۱]. علت اصلی این موضوع بارگذاری خستگی ناشی از تنشهای حرارتی است. تاکنون راه حلهای متنوعی برای حل این مشکل ارائه شده است که عبارتند از:

اصلاح متالورژیکی پره ها، خنک کاری داخلی و خنک کاری خارجی.

خنک کاری داخلی یکی از متداولترین شیوه های خنک کاری است. در این روش یک مسیر U شکل در داخل پره ها ایجاد می شود و با عبور سیال سرد از داخل آن، پره خنک کاری میشود. در این تحقیق به فرآیند خنک کاری داخلی پرداخته شده و ضمن معرفی کامل این شیوه خنک کاری و با استفاده از یک روش عددی، پدیده ها و عوامل موثر بر آن مدل شده است.

در فصل اول به تاریخچه خنک کاری و روشهای مختلف حفاظت پره ها پرداخته شده و جدیدترین راهکارها در خنک کاری توربینهای گازی پیشرفته معرفی شده اند. در فصل دوم به ملاحظات فیزیکی خنک کاری داخلی پرداخته شده است. بدین معنی که در ابتدا به اثرات فیزیکی دوران در کانالهای دوار و پدیده های خنک کاری داخلی پرداخته شده و سپس یک مدل فیزیکی برای خنک کاری

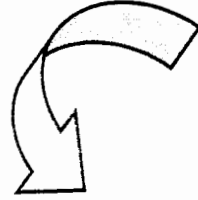
---

1. Burry

داخلی طراحی و در مورد معادلات حاکم، شرایط مرزی و مدل‌های توربولانسی بحث شده است. در فصل سوم به ملاحظات عددی پرداخته شده است.

در این فصل با استفاده از یک روش CFD، معادلات حاکم گسسته شده و نحوه تولید مش، تحلیل معادلات حاکم و اعمال شرایط مرزی بررسی شده است. در فصل چهارم، نتایج حاصل از تحلیل CFD خنک کاری داخلی آمده است. در این فصل اثر پارامترهای فیزیکی و هندسی بر خنک کاری داخلی در حالات دوبعدی و سه بعدی بررسی شده و در مورد آنها بحث شده است. در بخش ضمیمه این پایان نامه، کدهای CFD استفاده شده برای تحلیل خنک کاری داخلی آمده است.

فصل اول



مقدمه

## ۱-۱: احتیاج به خنک‌کاری پره های توربین

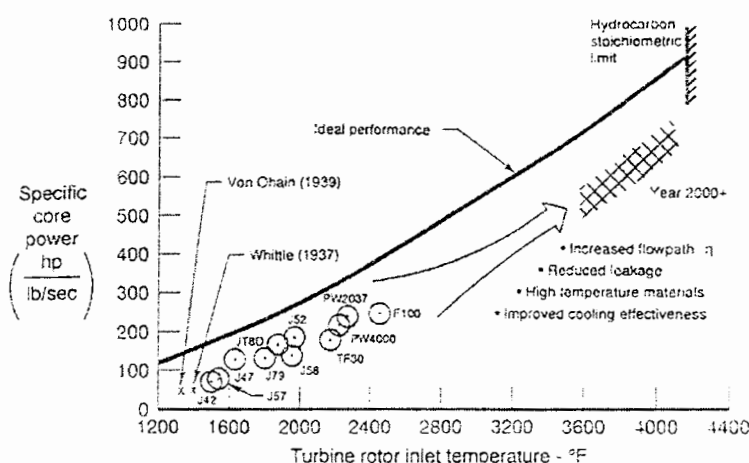
### ۱-۱-۱: پیشرفت های جدید در موتورهای هواپیماها

توربین های گازی بطور گسترده بمنظور ایجاد نیروی محرکه در هواپیماها و همین طور در مولد های تولید انرژی و مصارف صنعتی دیگر بکار برده می شوند. با افزایش دمای جریان ورودی به درون روتور در این توربین ها، بازده حرارتی و قدرت خروجی آنها افزایش می یابد. این مسئله بطور شماتیک در شکل ۱-۱ با نمایش قدرت مرکزی ویژه<sup>۱</sup> (که می توان آن را متناسب با نیروی پیش برنده ویژه دانست) بصورت تابعی از دمای جریان ورودی به روتور توربین مشخص شده است. مناسب تر آن است که موتورهای در نزدیکی خط عملکرد مطلوب خود بکار گرفته شوند، که حالتی است که در آن، قدرت خروجی چرخه در حالت بازده ۱۰۰٪ توربین بوده و هیچ نشتی و یا جریان خنک کاری وجود نخواهد داشت. بطور مشخص، افزایش دمای جریان ورودی به روتور، یکی از روشهای تکنولوژیک برای افزایش بازده در موتورهای توربین گاز می باشد. شکل ۱-۲ نشان می دهد که دمای جریان ورودی به روتور (RIT) در توربین های گازی پیشرفته از نقطه ذوب جنس سازنده ماده هم بالاتر است: از این رو، می بایست به نوعی پره های توربین را خنک کرد. برای دو برابر کردن قدرت موتور در توربین های گاز هواپیماها تا سال ۲۰۰۳، RIT می بایست با استفاده از همین مقادیر هوای خنک کن (۳ تا ۵ درصد هوای کمپرسور) از مقادیر دمای 2500°F به 3500°F افزایش یابد. ضمناً، نسبت فشار کمپرسور می بایست از نسبت تراکم ۲۰ به نسبت تراکم ۴۰ تا حتی بیشتر افزایش یابد که در شکل ۱-۳ نشان داده شده است. این بدان معناست که در توربین های گاز هواپیماهای آینده، دمای جریان ورودی به توربین بالاتر است، در صورتیکه هوای خنک کن حاصل از کمپرسورها تغییری نخواهد کرد. از این رو متدهای قابل بکارگیری در دماهای بالا نظیر محافظ های پوششی حرارتی (TBC) و روشهای پیشرفته خنک کاری از ملزومات مورد نیاز در طراحی توربین های گازی پر قدرت و با بازده بالا در قرن آتی می باشند. برای رسیدن به این منظور، سازمان دفاع آمریکا (DOD)، NASA و سازندگان توربین های گازی برای هواپیماهای آمریکایی، بخش تحقیق و توسعه

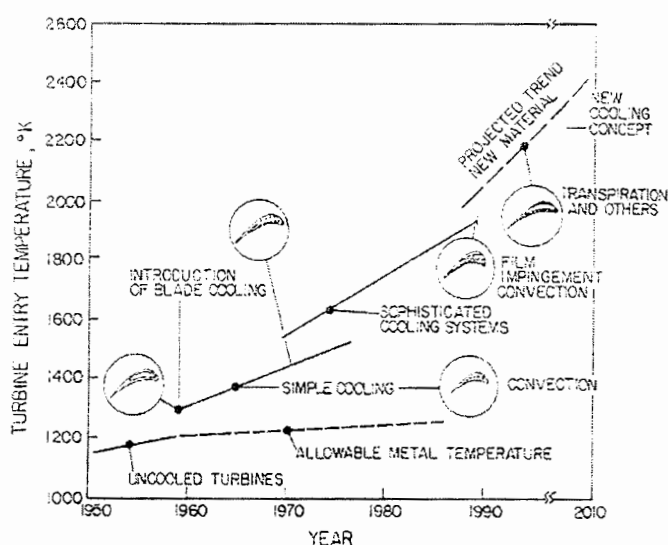
---

1. Specific core power

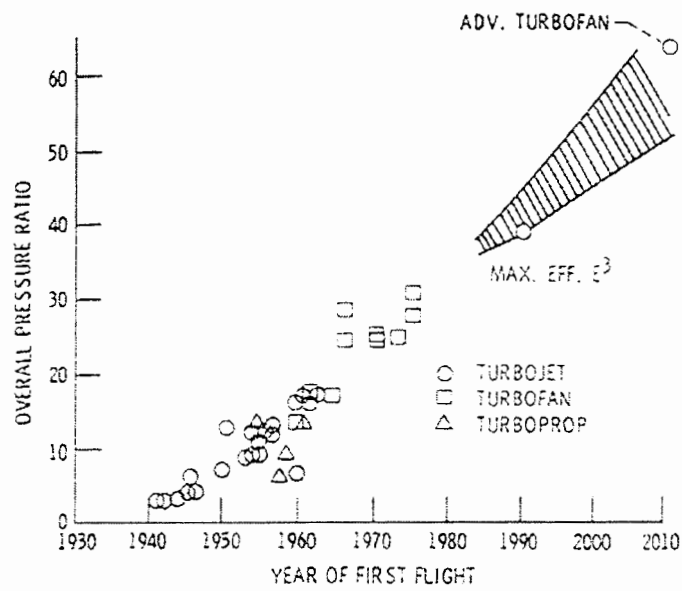
خاصی برای مطالعه تکنولوژی موتورهای توربین با بازده بالا (IHPTET) ایجاد کرده اند. در سال ۱۹۹۳، هدف دو برابر کردن قدرت موتورها تا سال ۲۰۰۳ بوده است. مطالعات و تحقیقات توسط نیروی هوایی آمریکا، نیروی دریایی، ارتش و NASA و سازندگان توربین های گازی آمریکا نظیر موتورهای هواپیماهای GE, Pratt & Whitney, Allison و Allied Signal پشتیبانی می شود. تحقیقات در آزمایشگاههای دولتی آمریکا، آزمایشگاههای صنعتی و مراکز تحقیقاتی دانشگاهی پیگیری می شود. شکل ۱-۴ دیاگرامی است که موتور توربوفن F117 را نشان می دهد که توسط شرکت Pratt & Whitney ساخته شده است.



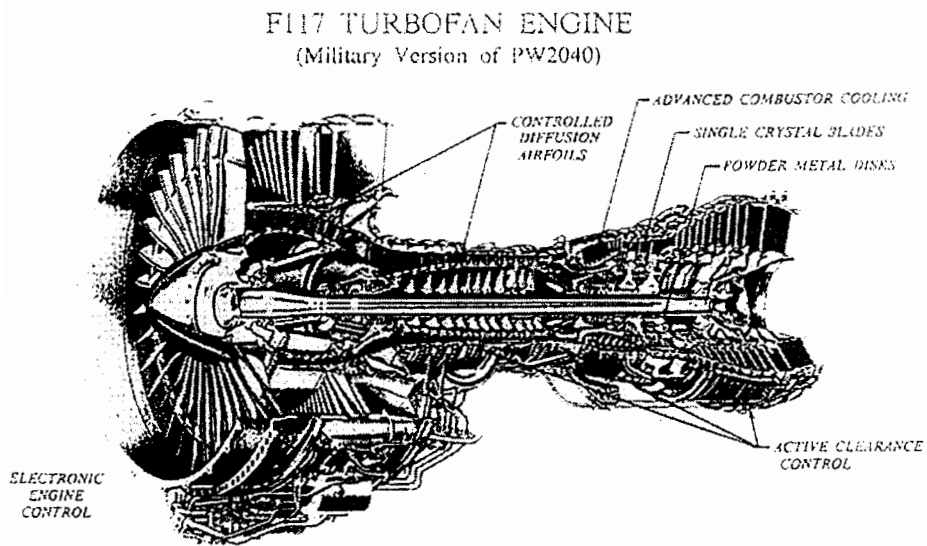
شکل ۱-۴: افزایش قدرت خروجی از چرخه با افزایش دمای جریان ورودی به توربین بطور شماتیک نشان داده شده است [۱].



شکل ۱-۲: تغییر دمای ورودی به توربین در طول زمان [۱].



شکل ۱-۳: پیشرفت نسبت تراکم کمپرسور در گذر زمان [۱].



شکل ۱-۴: موتور توربوفن F117 که توسط شرکت Pratt & Whitney ساخته شده است [۱].

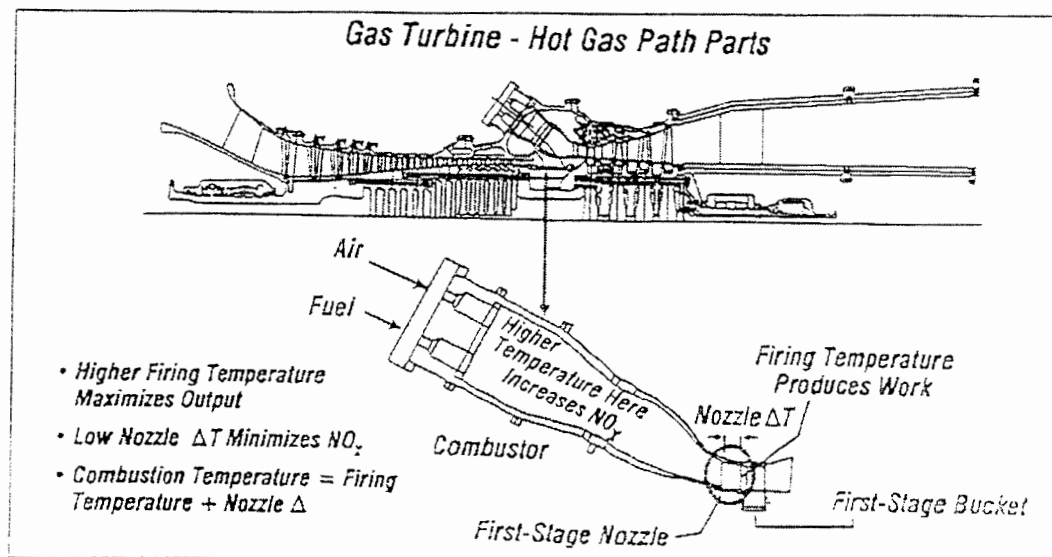
تمامی فعالیت ها و تحقیقات بمنظور دو برابر کردن توانایی موتورهای توربین از طریق (۱) افزایش بازده خنک کاری، (۲) ساخت مواد با مقاومت بیشتر در مقابل حرارت برای استفاده در TBC و (۳) افزایش بازده مسیر جریان با کاهش نشتی ها بوده است.

## ۱-۱-۲ پیشرفت های جدید در توربین های گازی نیروگاهی

برای توربین های گازی نیروگاهی شامل مولدهای قدرت (سیکلهای مرکب ۳۰۰ مگاواتی)، نیروهای محرکه دریایی و توربین های گازی با کاربردهای صنعتی، RIT می بایست بعلت محدودیت های حاصل از آلودگی توسط  $\text{NO}_x$  در محدوده  $2500^\circ\text{F}$ - $2600^\circ\text{F}$  باقی بماند. از این رو مسئله اصلی در این توربین ها آن است که چگونه بازده حرارتی در همین محدوده RIT افزایش داده شود - برای مثال، چگونه بازده توربین های گازی مجزا را از ۳۵٪ کنونی به ۴۰٪ و توربین های گازی سیکلهای مرکب را از ۵۵٪ کنونی به ۶۰٪ تا سال ۲۰۰۳ افزایش دهیم. برای نیل به این هدف، سازمان انرژی آمریکا (DOE) و سازندگان این توربین ها یک برنامه تحقیقاتی بلند مدت تهیه کرده اند که با نام سیستم های توربین پیشرفته (ATS) شناخته می شود. در سال ۱۹۹۲، برنامه ATS افزایش بازده سیکل های مرکب تا ۶۰٪ تا سال ۲۰۰۲ بوده است. مراکز تحقیقاتی توسط DOE و سازندگان توربین های گازی نظیر سیستم های قدرت GE، Westinghouse Electric، Allison، Solar Turbines و Allied Signal پشتیبانی می شوند. تحقیقات در آزمایشگاههای دولتی، مراکز تحقیقاتی صنعتی و مراکز دانشگاهی دنبال می شود. برای مثال، شکل ۱-۵ طرح شماتیک اجزای موتور گاز داغ را نشان می دهد که توسط سیستم های قدرت GE تحت نظر برنامه ATS ایجاد شده است. در این موتور از یک نازل بخار خنک مدار بسته دارای TBC استفاده شده است تا افت دمای گاز داغ در نازل مرتبه اول کاهش یابد. از این رو دمای جریان ورودی به روتور (RIT یا دمای شعله) را می توان افزایش داد تا در همین مقدار دمای احتراق، قدرت بیشتری تولید کرد. این موتور از جدیدترین طرح محفظه احتراق استفاده می کند که در آن، هوا و سوخت از پیش با هم مخلوط می شوند و احتراق ضعیف صورت می گیرد تا مسئله آلودگی محیطی کاهش یابد (تولید کمتر



$\text{NO}_x$ ). تحقیقات بر سه بخش متمرکز است: (۱) احتراق و ناپایداری های احتراق بمنظور استفاده از محفظه های احتراق با اختلاط زودتر هوا و سوخت بمنظور کاهش  $\text{NO}_x$ ، (۲) پیشرفت مواد نظیر ساخت پره های تک کریستالی با TBC و پره های سرامیکی و (۳) خنک کاری پیشرفته پره های توربین نظیر چرخه های بسته خنک کاری پره ها با بخار خنک.



شکل ۱-۵: ساختار یک موتور ساخته شده توسط سیستم های قدرت GE زیر نظر برنامه ATS [۱].

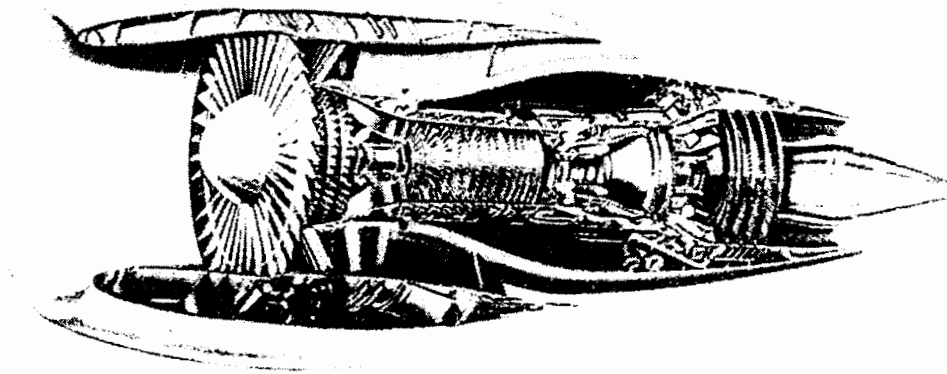
## ۲-۱ تکنولوژی خنک کاری توربین

### ۱-۲-۱ مفهوم خنک کاری پره های توربین

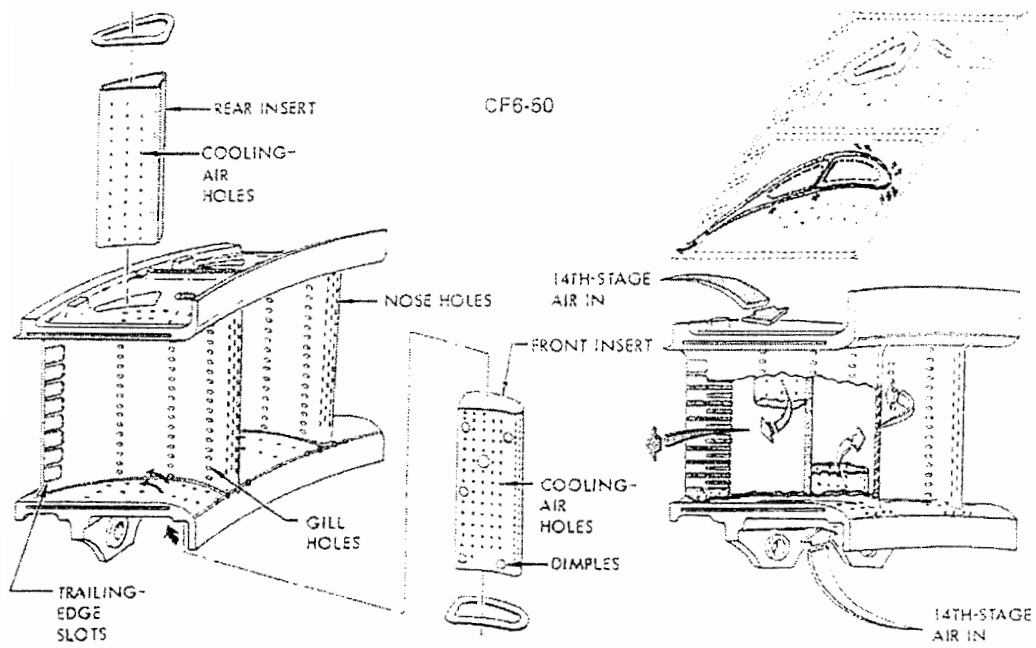
توربین های گاز پیشرفته در دماهای بالایی ( $2500-2600^\circ\text{F}$ ) بکار برده می شوند تا بازده حرارتی و قدرت خروجی آنها افزایش یابد. با افزایش دمای ورودی به توربین، انتقال حرارت به پره های توربین نیز افزایش می یابد. می بایست برای سطح و تغییرات دما در درون ماده پره (که سبب تنش های حرارتی می شود) محدودیتی در نظر گرفت تا حد دوام مورد نظر بدست آید.

دماهای کاری، بسیار بالاتر از حد مجاز برای فلزات می باشد. از این رو، برای آنکه توربین بدرستی عمل کند، نیاز است که پره های توربین خنک شوند. پره ها توسط هوای خروجی از کمپرسور موتور خنک می شوند. از آنجا که این نوع خنک کاری باعث کاهش بازده حرارتی می شود، لازم است که تکنیک خنک کاری، شرایط عملکرد، و هندسه پره توربین به درستی شناخته شده و مورد بهینه سازی قرار گیرند. پره های توربین گاز هم از درون و هم از بیرون خنک می شوند. خنک کاری از درون توسط عبور دادن ماده خنک کن از مسیرهای مارپیچ شکل قرار داده شده در درون پره و جذب گرما از سطح خارجی پره صورت می گیرد. خنک کاری از بیرون، خنک کاری فیلمی نیز نامیده می شود. هوای خنک کن درونی از طریق تعدادی سوراخ یا شکاف به بیرون دمیده می شوند تا یک لایه از هوای خنک کن در روی سطح برای محافظت از سطح خارجی پره از گازهای داغ احتراقی بوجود آید.

تکنیک های خنک کاری بسیار پیشرفته در موتور توربین های گازی شامل خنک کاری فیلمی، خنک کاری دمشی و خنک کاری جابجایی افزایشی می باشند. شکل های ۱-۶ و ۱-۷ به ترتیب برشی از تصویر موتور توربوفن جنرال الکتریک CF6 و بخش اول نازل فشار بالای هادی پره (NGV) موتور توربوفن GE CF6 را نشان می دهند. هوای خنک کن از کمپرسور ۱۴ طبقه خارج شده و به روی دیوارهای داخلی NGV دمیده می شود. بعد از خنک کاری دمشی، هوای باقیمانده با خروج از سوراخهای گوشه ابتدایی، سوراخهای آبششی و شکافهای انتهایی، از طریق خنک کاری فیلمی به خنک کاری می پردازد. شکل ۱-۸ پره طبقه اول روتور توربین فشار بالای موتور توربوفن GE CF6 را نشان می دهد که بطور درونی خنک شده است. سیستم خنک کاری بر اساس استفاده از خنک کاری جابجایی در ناحیه ابتدایی و خنک کاری فیلمی در سوراخهای آبششی، خنک کاری جابجایی افزایشی در ناحیه میانی و خنک کاری ممتد و افزایشی در درون پره ها در ترکیب با خنک کاری فیلمی در گوشه انتهایی می باشد. ترکیب بهینه این تکنیک های خنک کاری برای حصول به ملزومات بسیار پیچیده طراحی، بخش اصلی طراحی پره های توربین های خنک شونده با هوا می باشند.

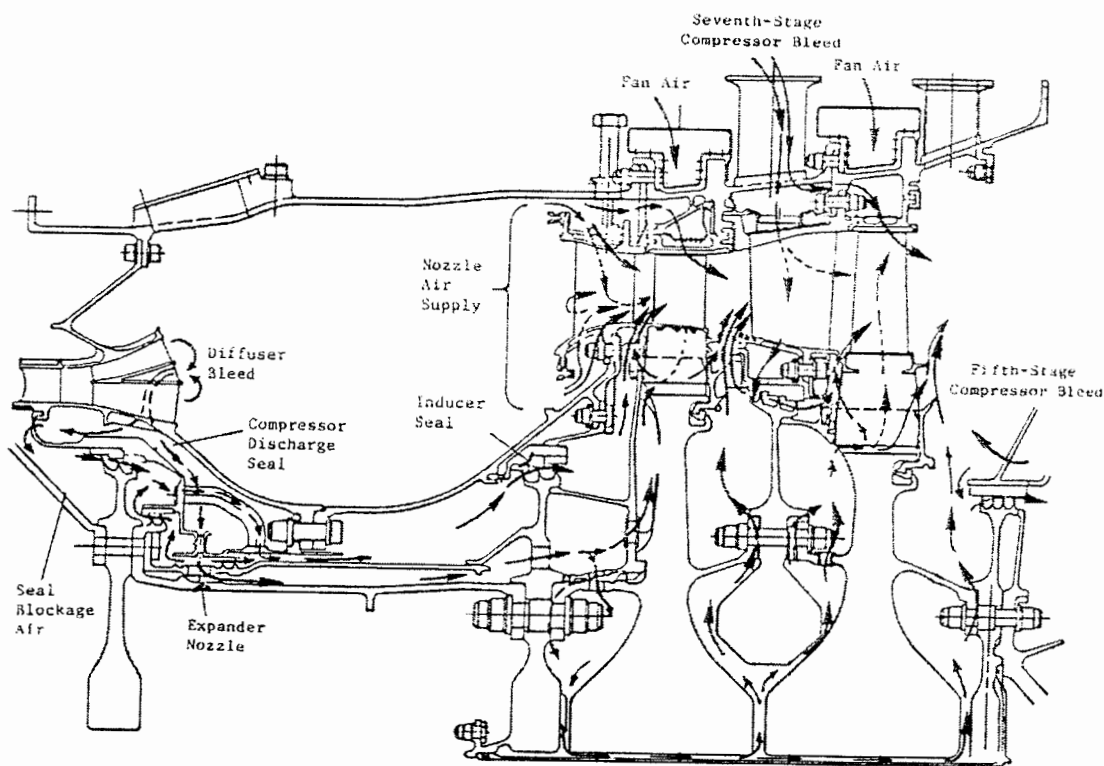


شکل ۱-۶: برشی از تصویر موتور توربوفن GE CF6 [۱].

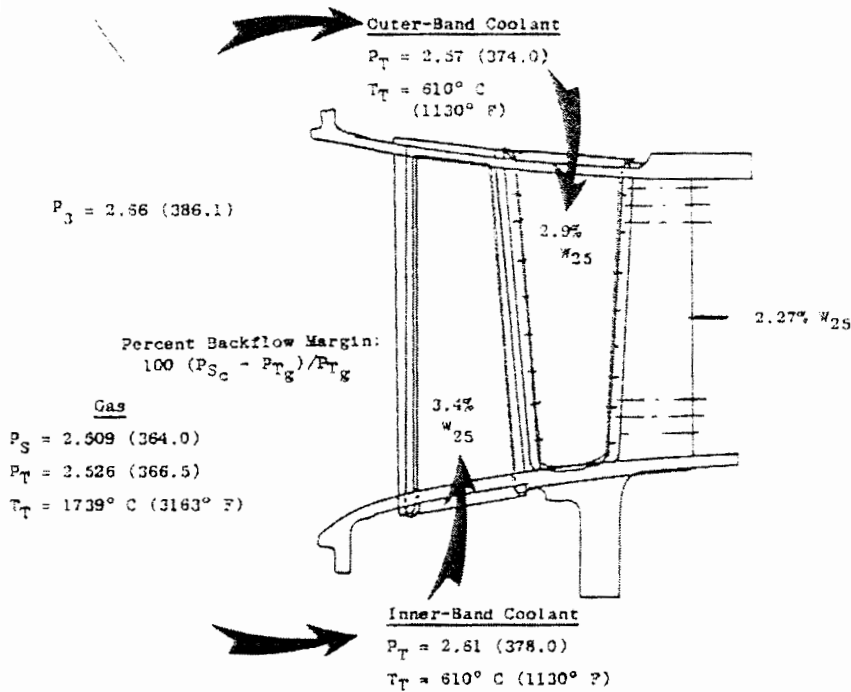
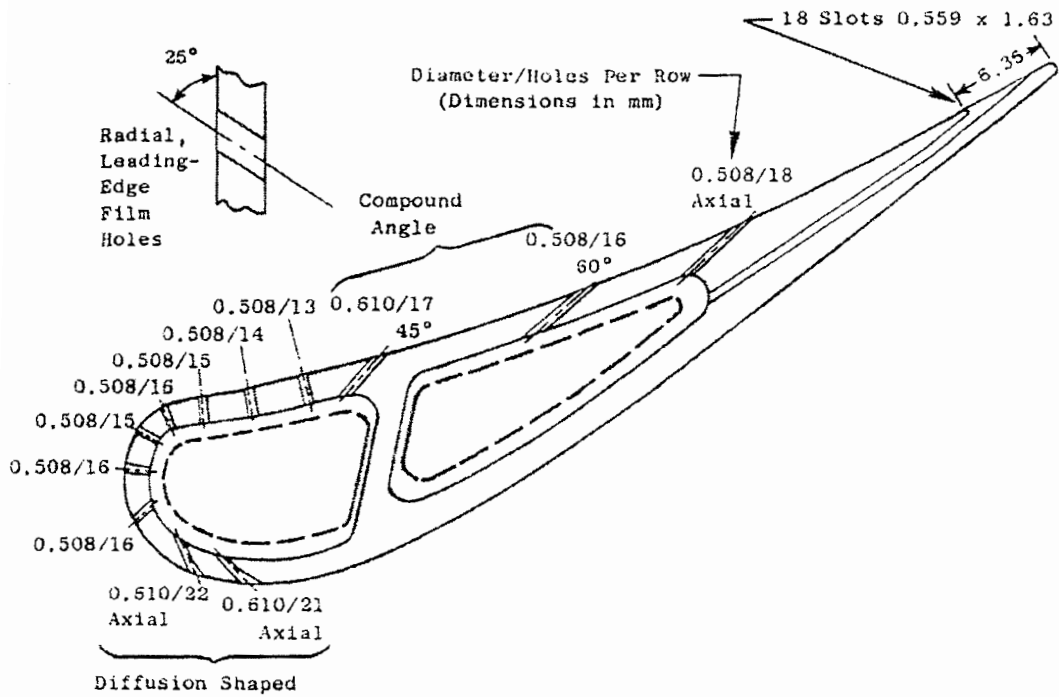


شکل ۱-۷: طبقه اول پره نازل توربین فشار بالا برای موتور GE CF6 [۱].

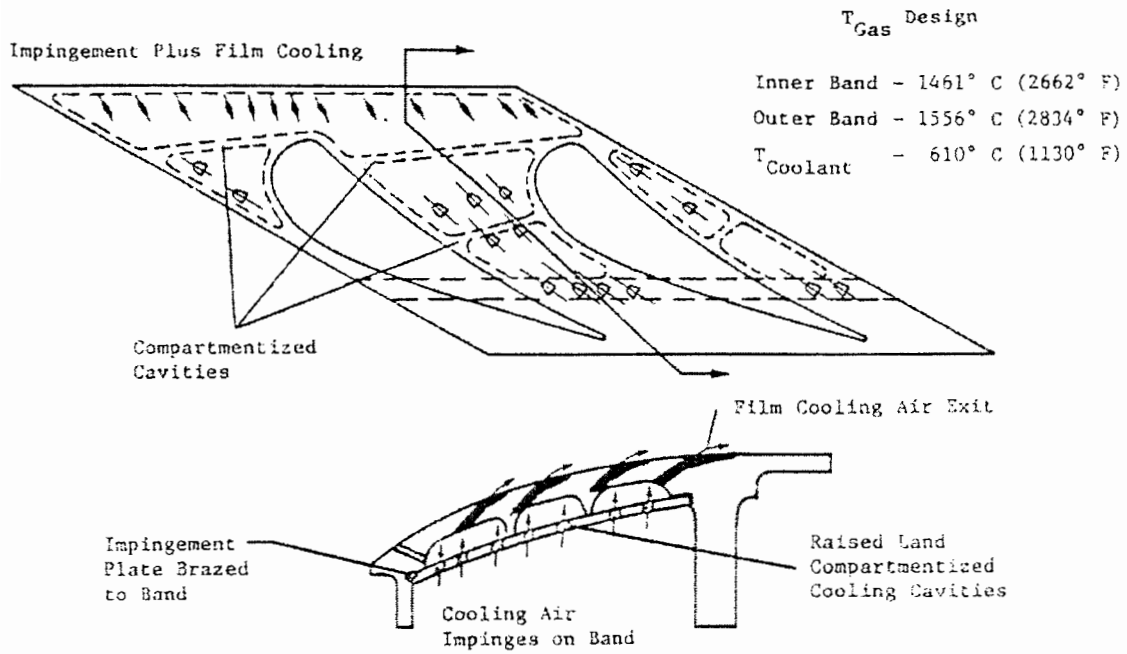
شده از دیفیوزر کمپرسور متوسط خنک می شوند. خنک کن نازل طبقه دوم از پره های کمپرسور طبقه هفتم و خنک کن روتور طبقه دوم از سیستم الغایی روتور طبقه اول تامین می شوند. شکل های ۱-۱۰ تا ۱-۱۲ سیستم تامین هوای خنک کن را برای خط گام نازل و بخش های داخل و خارج نشان می دهند. این طراحی شامل درج دو محل دمش متفاوت و شکاف های سمت فشار در گوشه انتهایی می باشد. طرح علاوه بر این هم از خنک کاری دمشی و هم خنک کاری فیلمی در لبه ابتدایی نازل و ناحیه میانی با دو سطر سوراخهای مرکب بر روی سطح فشار و دو سطر سوراخ در سطح مکش استفاده می کند. ورودی پره توسط دمش خنک می شود و از خنک کاری فیلمی در سوراخهای مرکب استفاده می شود. خروجی پره توسط سوراخهای سری دوم خنک می شود. هدف، کمینه کردن هزینه خنک کاری و بیشینه کردن تاثیر آن و بدست آوردن یک سطح دما و توزیع دمای قابل قبول در سطح پره است که در شکل ۱-۱۳ نشان داده شده است.



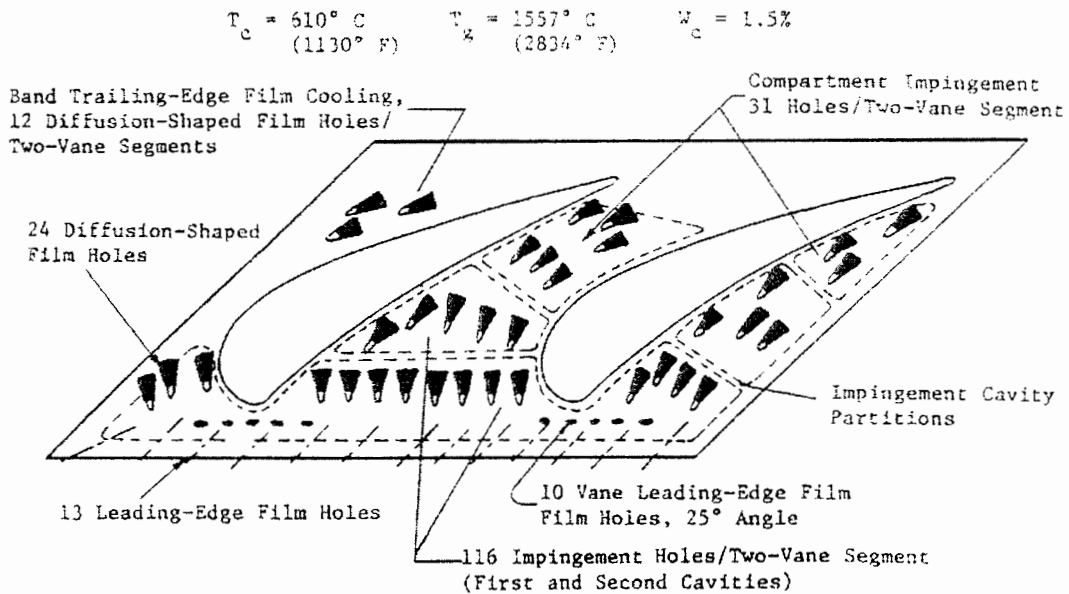
شکل ۱-۹: طرح کلی روتور، استاتور و قفسه سیستم خنک کاری برای موتور E<sup>3</sup> [۱].



شکل ۱-۱۰: هندسه خنک کاری پره طبقه اول  $E^3$  و سیستم خنک کاری [۱].



شکل ۱۱-۱: طرح خنک کاری درون پره طبقه اول E<sup>3</sup> [۱].

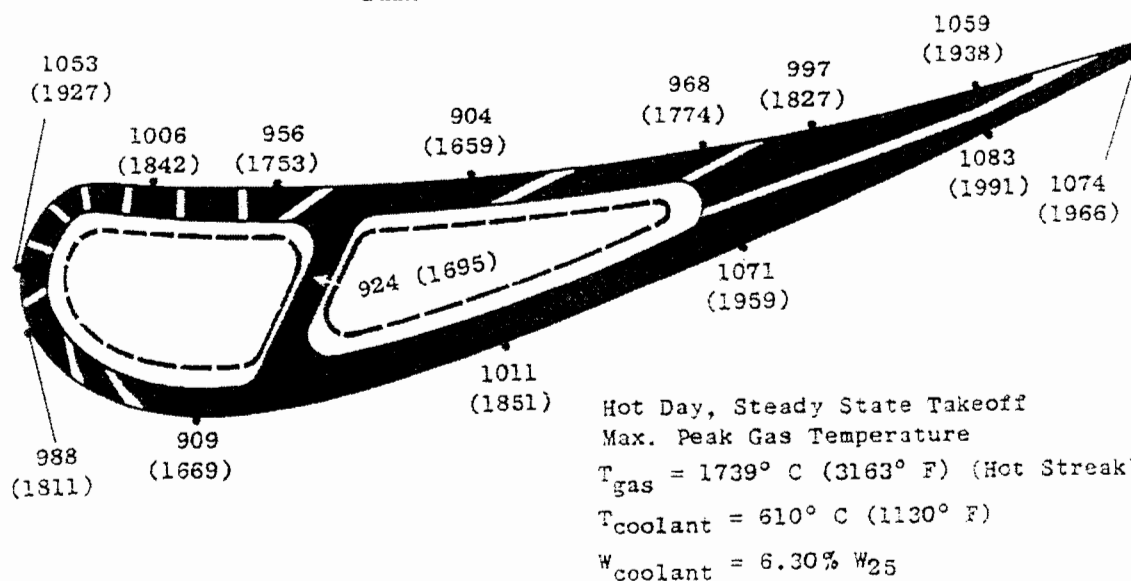


شکل ۱۲-۱: طرح خنک کاری بیرون پره طبقه اول E<sup>3</sup> [۱].

### Detailed Temperatures at Pitch Section

° C (° F)

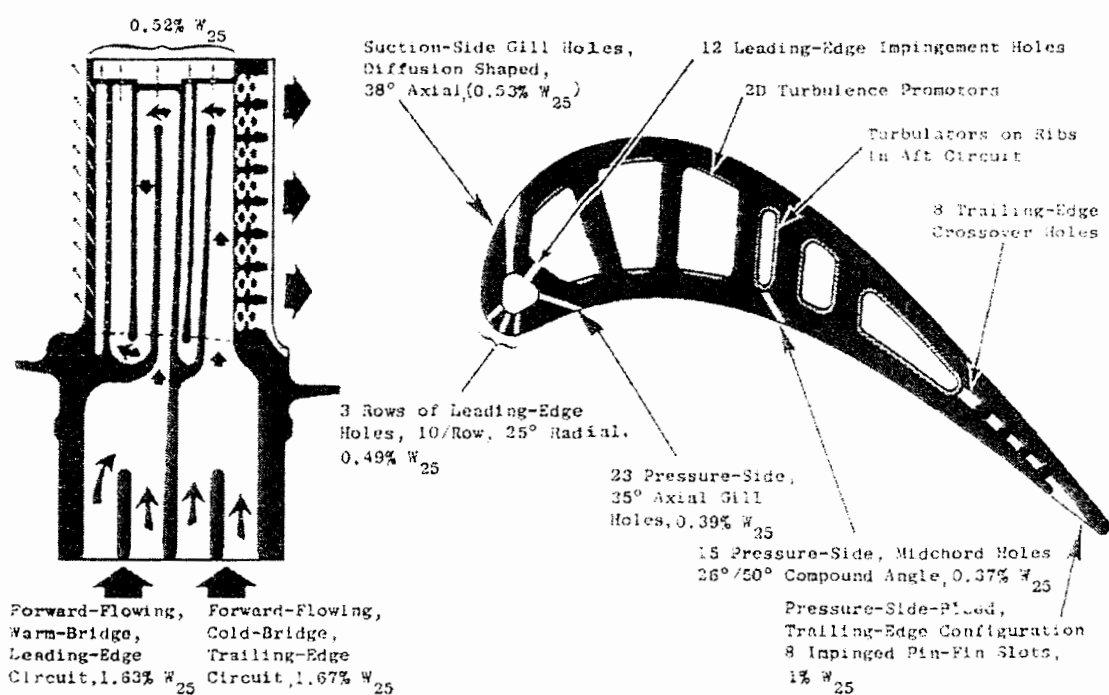
$$T_{\text{Bulk}} = 947 \text{ (1737)}$$



شکل ۱-۱۳: جزئیات توزیع دما در بخش گام پره طبقه اول E<sup>3</sup> [۱].

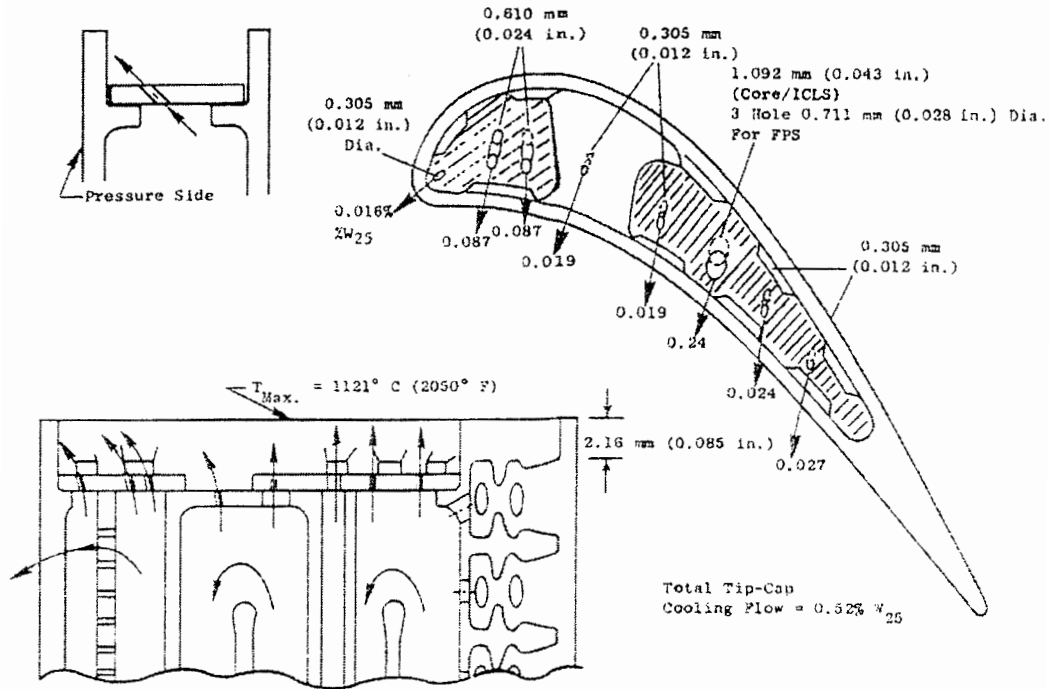
شکل ۱-۱۴ جزئیات سیستم خنک کاری توسط هوا را برای پره روتور طبقه اول نشان می دهد. سیستم خنک کاری پره روتور طبقه اول، از یک طرح خنک کاری جابجایی افزایشی دو مداره و خنک کاری فیلمی استفاده می کند. در مدار پیشرو، هوای مورد نیاز برای سوراخهای دمشی گوشه ابتدایی توسط سه مسیر ماریپیج تامین می شود. گوشه ابتدایی توسط ترکیبی از خنک کاری فیلمی و خنک کاری دمشی از طریق سه ردیف سوراخ با زاویه شعاعی خنک می شود. یک ردیف سوراخ مدور با زاویه محوری هم خنک کاری فیلمی سطح فشار توسط هوا را ممکن می سازند، و یک ردیف سوراخهای پخشی با زاویه محوری هم خنک کاری فیلمی سطح مکش توسط هوا را ممکن می کنند. مسیر دوم، شامل سه پاس مسیر ماریپیج پیشرو است. این حلقه دوم، هوای لازم برای خنک کاری دمشی - فیلمی گوشه انتهایی را نیز تامین می کند. هوای خنک کن باقیمانده برای گوشه انتهایی از طریق شکافهای سطح فشار خارج

شده و خنک کاری فیلمی خارجی را برای باقیمانده گوشه انتهایی ممکن می سازد. مسیر سوم حلقه دوم هوا را از طریق یک ردیف سوراخ مرکب در سطح فشار برای تقویت خنک کاری فیلمی سطح فشار خارج می کند. شکل ۱-۱۵ طرح خنک کاری پره روتور طبقه اول را نشان می دهد. هدف کمینه کردن هزینه خنک کاری، بیشینه کردن اثر خنک کاری و بدست آوردن یک سطح دما و توزیع دمای قابل قبول برای سطح پره روتور است که در شکل ۱-۱۶ نشان داده شده است.



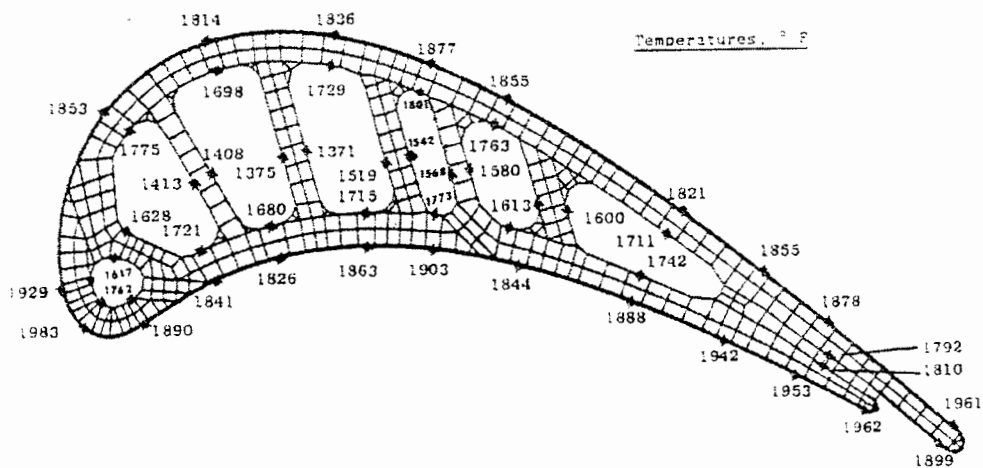
شکل ۱-۱۴: سیستم خنک کاری پره روتور HPT طبقه اول E<sup>3</sup> [۱].





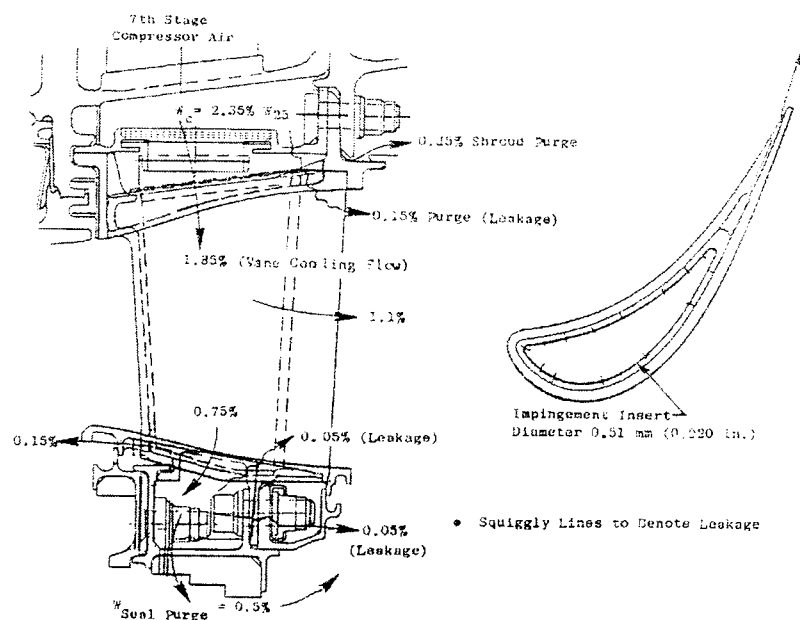
شکل ۱-۱۵: طرح خنک کاری پره روتور HPT طبقه اول E<sup>3</sup> [۱].

T<sub>TB</sub> = 1296° C (2345° F)  
 T<sub>CDT</sub> = 44° C (111° F)  
 T<sub>CP</sub> = 628° C (1182° F)  
 W<sub>Coolant</sub> = 0.3% W<sub>25</sub>  
 T<sub>Bulk</sub> = 353° C (667° F)

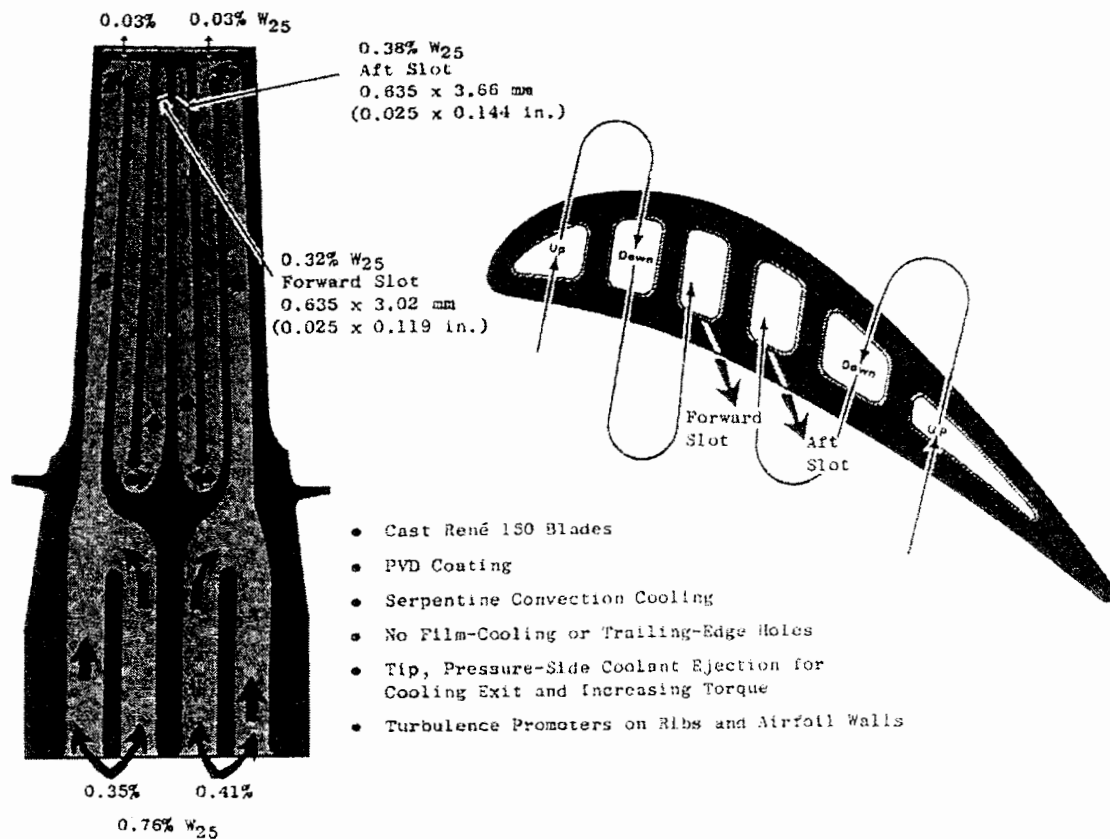


شکل ۱-۱۶: توزیع دما در پره روتور HPT طبقه اول E<sup>3</sup> در حالت پایدار پرواز [۱].

شکل ۱۷-۱ سیستم خنک کاری را برای پره طبقه دوم نشان می دهد. برای خنک کاری یک سوراخ دمش در پره قرار داده شده است. در اینجا از خنک کاری فیلمی استفاده نشده است، بلکه از سوراخهای سطح فشار برای خنک کردن ناحیه گوشه انتهایی و دمش باقیمانده خنک کن (بعد از خنک کاری دمشی) به درون مسیر جریان گاز داغ با افت اختلاط ایرودینامیکی اندک استفاده شده است. بعد از دمش، بخشی از هوای باقیمانده از طریق قطر داخلی پره برای پاکسازی از درزگیرهای درونی بکار برده می شود. شکل ۱۸-۱ سیستم خنک کاری پره روتور دو طبقه را با دو مدار و طرح خنک کاری جابجایی درونی افزایشی نشان می دهد. در مدار پیشرو، هوای خنک کن از گوشه ابتدایی توسط یک مسیر مارپیچ سه پاس به بیرون دمیده می شود. بطور مشابه، در مدار دوم، هوای خنک کن از دم پره از طریق یک مسیر مارپیچ که در نزدیکی گوشه انتهایی قرار دارد، آورده می شود. هوای باقیمانده از مدارهای پیشرو و مدار ثانوی از طریق یک شکاف در سمت فشار خارج می شود. از خنک کاری فیلمی و یا سوراخهای نزدیک گوشه انتهایی نیز استفاده نشده است.



شکل ۱۷-۱: جریانهای خنک کاری نازل طبقه دوم  $E^3$  [۱].



شکل ۱-۱۸: طرح پره روتور طبقه دوم E<sup>3</sup> [۱].

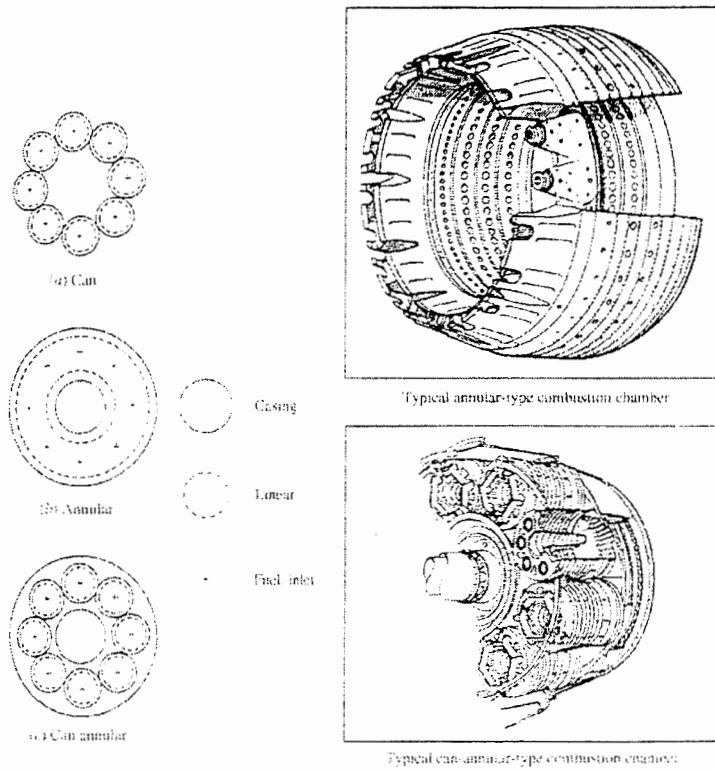
### ۳-۱ انتقال حرارت در توربین و روشهای خنک کاری

#### ۱-۳-۱ انتقال حرارت در پره توربین

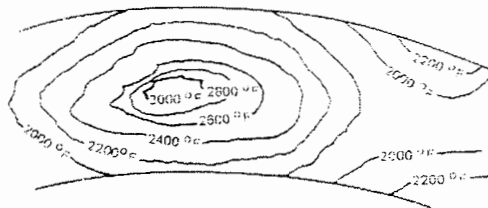
توربین های گاز پیشرفته بگونه ای طراحی می شوند تا در دماهای ورودی بالاتر از محدودیت های دمایی فلزهای جاری بکار برده شوند. علاوه بر افزایش مقاومت حرارتی مواد و پوشش های بکار گرفته شده، می بایست از تکنیک های خنک کاری بسیار جالب نظیر خنک کاری درونی مرکب و خنک کاری فیلمی خارجی استفاده کرد تا بتوان عمر و شرایط کارکرد قابل قبولی را مهیا کرد. برای طراحی سیستمی که اجزای توربین را که در مسیر جریان گازهای داغ قرار گرفته اند به کارآمدترین نحو خنک کند، لازم

است که جزئیات فیزیک جریان گاز داغ در درون توربین بهتر شناخته شود. لازم است تا انتقال حرارت این میدان جریان ناپیوسته با اغتشاش زیاد و کاملاً سه بعدی به درستی درک شود. توجه داشته باشید در صورتی که در تعیین دمای سطحی پره تنها  $50^{\circ}\text{F}$  خطا داشته باشیم، ممکن است عمر پره نصف شود. از این رو لازم است که ضریب انتقال حرارت محلی و همین طور توزیع محلی دمای پره با دقت بالایی تعیین شود تا از رویداد نقاط داغ جلوگیری کرده و بدین ترتیب عمر پره ها را افزایش داد. در توربین هایی که هم اکنون ساخته می شوند بعلت آنکه میدان جریان این توربوماشین هنوز بطور کامل شناخته نشده است، قادر به تعیین دقیق توزیع ضریب انتقال حرارت محلی نیستیم. نتیجه این مسئله آن است که طراحی بصورت بینه صورت نمی گیرد و همیشه از مقادیر زیادی از هوای خنک کن استفاده می شود که نتیجه آن، افت قابل توجه در سیکل و نیروی پیشران و مصرف ویژه سوخت خواهد بود.

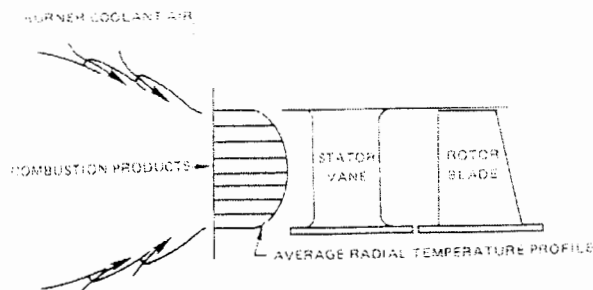
اجزایی از توربین گاز که در مسیر گازهای داغ قرار دارند عبارت از پره های استاتور و روتور توربین می باشند. پره های طبقه اول استاتور در معرض گازهای داغ با دما و شدت اغتشاش بسیار بالا قرار دارند که از محفظه احتراق خارج شده اند. تعیین توزیع بار حرارتی بر روی پره های طبقه اول استاتور و روی دیوار تحت یک عدد رینولدز و عدد ماخ مشخص، اهمیت بسیاری دارد. تخمین دقیق توزیع انتقال حرارت کمک شایانی در طراحی سیستم خنک کاری و ممانعت از ایجاد نقاط داغ خواهد کرد. شکل ۱-۱۹ دو نوع مختلف از محفظه های احتراق و سطح مقطع آنها را نشان می دهد. شکل ۱-۲۰ هم توزیع دمای شعاعی و محیطی و پروفیل دمای شعاعی متوسط را برای یک آتسخان حلقوی در دمای  $2500^{\circ}\text{F}$  نشان می دهد. این پروفیل های سرعت به همراه سطح اغتشاش جریان (هم شدت و هم مقیاس)، در تعیین توزیع بار حرارتی نازل طبقه اول بسیار مهم می باشند. علاوه بر مشکلات موجود در تعیین پروفیل دمای ورودی و تاثیر شدت بالای اغتشاش (شدت اغتشاشی افزون بر ۲۰ درصد)، جریانهای ثانویه ای که در نزدیکی پایه پره های استاتور ایجاد می شوند، پیش بینی انتقال حرارت در پره های استاتور توربین را مشکلتر می کنند.



شکل ۱-۱۹: دو نوع متفاوت محفظه احتراق و سطح مقطع آنها [۱].



Typical radial and circumferential temperature distribution for an annular burner at 2500°F

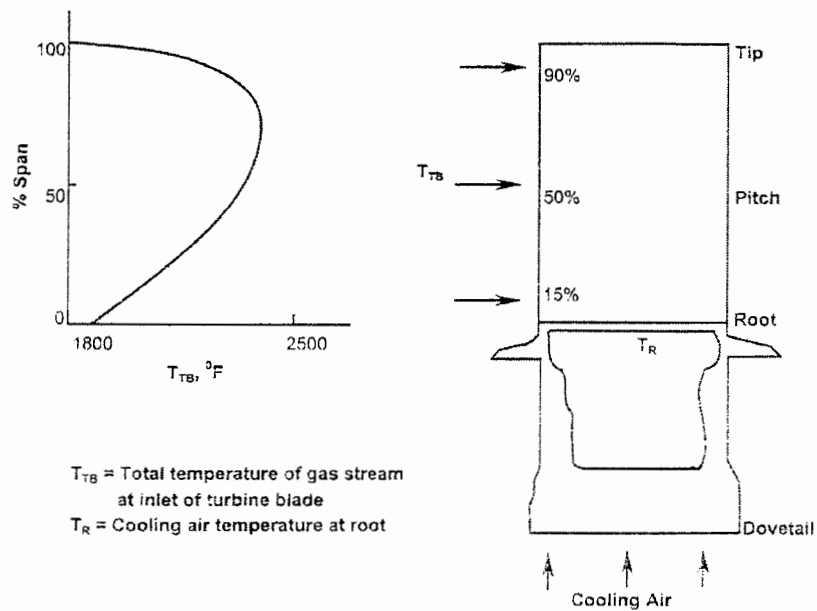


Burner average radial temperature profile

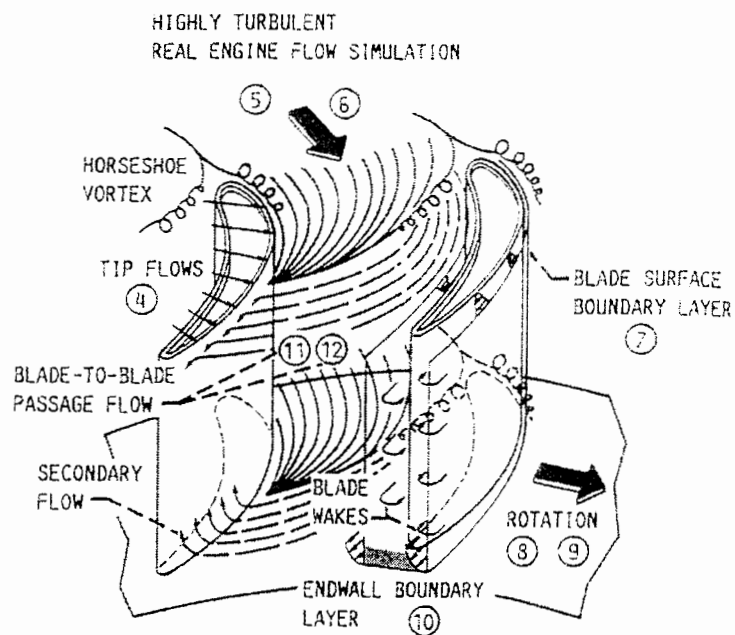
شکل ۱-۲۰: پروفیل دمای خروجی از یک آتشیان حلقوی نمونه [۱].

بعد از شتاب گرفتن گازهای داغ در اولین طبقه استاتور، این گازها وارد پره های طبقه اول روتور می شوند تا به تولید قدرت در توربین بپردازند. در ورودی پره های طبقه اول روتور، هم دما و هم سطح اغتشاش کمتر از ورودی به پره های طبقه اول استاتور می باشند. اما سرعت ممکن است ۲ یا ۳ برابر شده باشد. علاوه بر این، پره ها یک جریان ناپیوسته را از گوشه انتهایی پره های استاتور بالادست دریافت می کنند. مهمتر از این، چرخش پره باعث می شود گازهای داغ از نوک پره ها از سطح فشار به سطح مکش رخنه کنند. این مسئله باعث می شود که نوک پره های روتور در نزدیکی گوشه انتهایی صدمه ببینند. بسیار مهم است که فیزیک جریان پیچیده سه بعدی و توزیع انتقال حرارت متناظر بر روی پره های روتور خصوصا در نزدیکی گوشه انتهایی آن تحت شرایط کارکرد موتور شناخته شود. این مسئله می تواند در طراحی سیستم خنک کاری مفیدتر بسیار سودمند باشد و از آسیب دیدگی پره ها بعلت خنک کاری نامناسب در تنش های حرارتی بالا در سرعت های بالا جلوگیری کند.

شکل ۱-۲۱ پروفیل های دمای شعاعی متوسط را در ورودی پره روتور طبقه اول توربین نشان می دهد. لازم به ذکر است که چرخش پره ها سبب می شود تا نقطه دمای ماکزیمم به سمت نوک پره متمایل شود. علاوه بر این بسیار مهم است که دمای ورودی به روتور همین طور پروفیل سرعت ناپیوسته و سطح اغتشاش جریان ورودی تعیین شود. شکل ۱-۲۲ جریان پیچیده ماریچ گازهای داغ را بر روی پره روتور نشان می دهد که شامل جریان های ثانویه، جریان در نوک، دنباله ها و جریان های چرخشی نیز می باشد. شکل ۱-۲۳ یک روش خنک کاری را برای یک پره روتور توربین نشان می دهد که شامل خنک کاری فیلمی، خنک کاری دمشی، و خنک کاری جابجایی افزایشی می باشد. شکل ۱-۲۴ هم تغییر نرخ انتقال حرارت را روی یک پره توربین نشان می دهد. توزیع انتقال حرارت در شرایط یکسان برای پره هایی که بطریق خنک کاری فیلمی خنک نشده اند در مقابل پره هایی که به طریق خنک کاری فیلمی خنک شده اند، به مراتب بیشتر است. این توزیع انتقال حرارت می تواند برای شرایط مختلف کارکردی توربین، متفاوت باشد؛ از این رو، برای یک طراح بسیار مهم است که قادر باشد این توزیع ها را برای پره های دارای خنک کاری فیلمی و یا فاقد خنک کاری فیلمی بدرستی پیش بینی کند تا یک خنک کاری کارآمد داشته باشد.

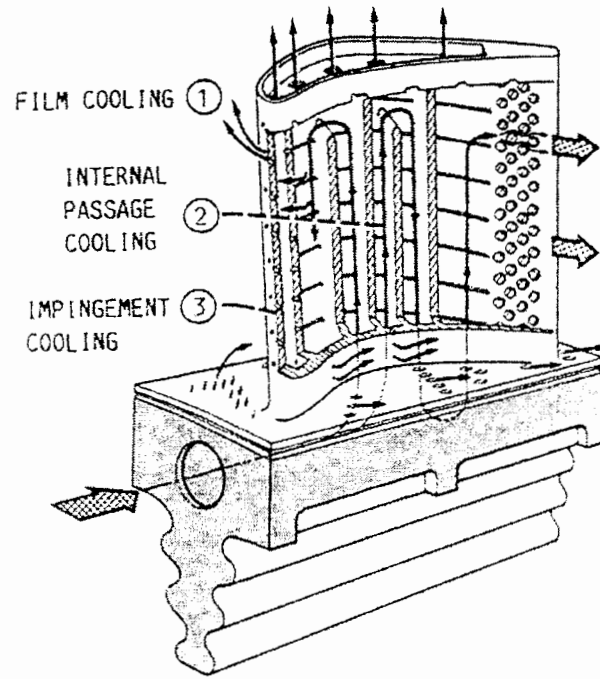


شکل ۱-۲۱: پروفیل دمای شعاعی متوسط در ورودی پره طبقه اول روتور توربین [۱].

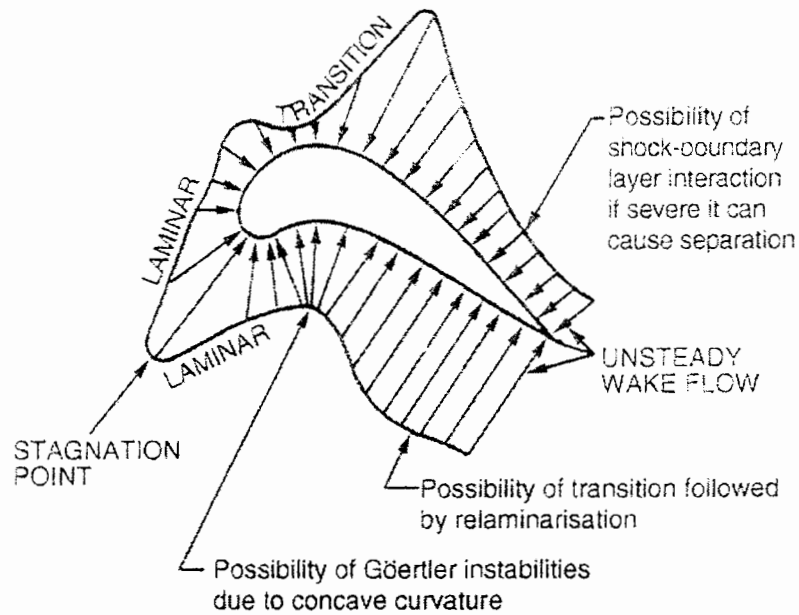


شکل ۱-۲۲: جریان پیچیده در مسیر گازهای داغ در روتور، که شامل جریانهای ثانویه، جریان در نوک پره

دنباله ها و جریانهای چرخشی می باشد [۱].



شکل ۱-۲۳: نمونه ای از خنک کاری پره توربین گاز هواپیما [۱].



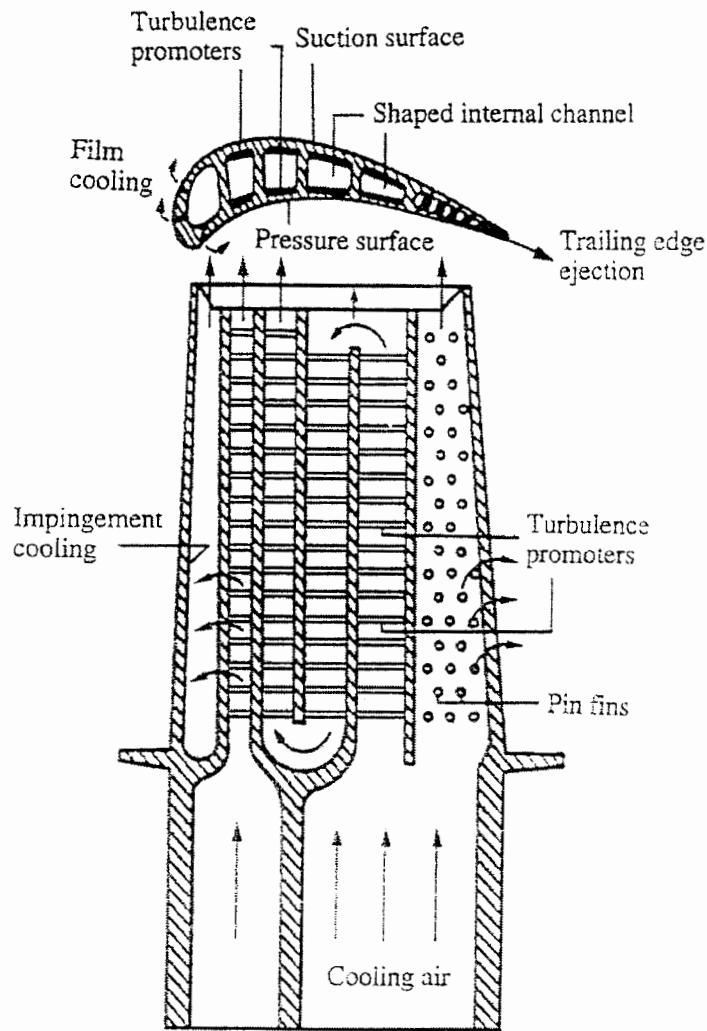
شکل ۱-۲۴: تغییر نرخ انتقال حرارت در روی یک پره [۱].



## ۱-۳-۲ خنک کاری داخلی پره های توربین

دمش جت بر روی سطح داخلی ایرفویل از طریق سوراخهای بسیار ریز روش معمولی است، این تکنیک برای خنک کاری پره های طبقه اول استاتور بسیار کارآمد است. بخشی از هوای باقیمانده هم از طریق ردیف های در نظر گرفته شده حرکت کرده و برای خنک کاری فیلمی بکار برده می شود. بخش دیگر هوای باقیمانده هم به سمت گوشه انتهایی حرکت کرده و از طریق سوراخهای ریز موجود در انتها خارج می شود تا برای خنک کاری ناحیه ای گوشه انتهایی بکار برده شود. خنک کاری دمش بسیار کارآمد است، چون هوای خنک کننده را می توان بطور مستقیم بر روی نقاط داغ دمش کرد. اما اثر جریان متقاطع هوای باقیمانده می تواند اثر خنک کاری دمش را کاهش دهد. تعیین دقیق توزیع ضریب انتقال حرارت در خنک کاری دمشی در روی پره های توربین تحت هندسه خاص سوراخ خروج هوا و شرایط جریان خنک کننده موتور بسیار مهم است.

بعثت محدودیت های ساختاری بر روی پره های روتور تحت سرعتهای چرخش و بارهای بالا، خنک کاری دمشی را تنها می توان در مورد نوک پره های روتور بکار برد. شکل ۱-۲۵ خنک کاری پره روتور یک توربین پیشرفته چند مسیره را نشان می دهد. در حال حاضر برای خنک کاری ناحیه میانی پره روتور، از مسیرهای مارپیچ در درون پره های روتور استفاده می شود، برای خنک کاری گوشه انتهایی هم بعثت محدودیت های فضایی و ساختی، از مسیر های کوچک استفاده می شود. انتقال حرارت در مسیرهای دوار خنک کن، اختلاف زیادی با انتقال حرارت در مسیرهای ساکن داراست. هم نیروهای کوریولیس و هم نیروهای بویانسی بر روی جریان سیال و پروفیل های دما موثر می باشند و توزیع ضریب انتقال حرارت را تحت تاثیر قرار خواهند داد. تعیین توزیع انتقال حرارت محلی در مسیرهای روتور با انواع مختلف خنک کاری تحت جریان خنک کاری متفاوت، اختلاف دمایی متفاوت پره با خنک کن (اثر بویانسی) و شرایط چرخش متفاوت بسیار مهم است. علاوه بر این، داشتن اطلاعاتی در مورد افت فشار در مسیر خنک کن برای یک طراحی خاص هم بسیار مهم است. این مسئله سبب می شود بتوان سیستم خنک کن کارآمدی ارائه کرد که بتواند از ایجاد نقاط داغ روی پره روتور جلوگیری کند.



شکل ۱-۲۵: خنک کاری در پره یک توربین مدرن چند پاسه [۱].

### ۱-۳-۳ خنک کاری فیلمی پره توربین

خنک کاری فیلمی به مقدار زیادی به نسبت فشار خنک کن به جریان داغ اصلی ( $p_c/F_c$ )، همین طور نسبت دما ( $T_c/T_g$ ) و موقعیت سوراخ، هندسه و توزیع خنک کاری فیلمی در یک ایرفویل وابسته است. نسبت فشار خنک کن به جریان اصلی متناسب با نسبت دبی جرمی خنک کن به جریان اصلی (نسبت دمشی) است، در حالیکه نسبت دمای خنک کن به جریان اصلی متناسب با نسبت چگالی خنک کن به

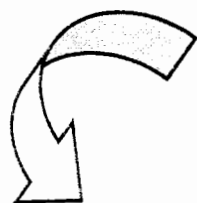
جریان اصلی است. در یک ایرفویل توربین گاز، نسبت  $p_c/p_t$  در حدود ۱,۰۲ تا ۱,۱۰ می باشد، در حالیکه نسبت دمش متناظر در حدود ۰,۵ تا ۲,۰ است. اما مقادیر  $T_c/T_g$  در حدود ۰,۵ تا ۰,۸۵ و نسبت چگالی متناظر در حدود ۲,۰ تا ۱,۵ است. می توان گفت نسبت های فشار ( $p_c/p_t$ ) و دما ( $T_c/T_g$ ) کارآمدترین مقیاسها برای تعیین بازده خنک کاری فیلمی می باشند، چون این نسبت ها، نسبت ظرفیت گرمایی خنک کن به جریان اصلی را مشخص می کنند. در حالت کلی، با افزایش نسبت فشار در یک نسبت دمای ثابت، محافظت خنک کاری فیلمی افزایش می یابد (بعبارت دیگر، انتقال حرارت به ایرفویل کاهش می یابد)؛ در مقابل، کاهش نسبت دما در نسبت فشار ثابت، باعث محافظت بهتر خنک کاری فیلمی خواهد شد. اما نسبت های فشار بسیار بالا (دمش های بسیار بالا)، می تواند بعث نفوذ جت به درون جریان اصلی (بعث بلند شدن جت از روی سطح) باعث کاهش محافظت خنک کاری فیلمی شود. از این رو، بهینه کردن مقدار خنک کن برای خنک کاری فیلمی ایرفویل تحت شرایط خاص کارکرد موتور بسیار اهمیت دارد (عدد رینولدز  $\sim 10^6$ ، عدد ماخ  $\sim 0,9$  در شرایط خروجی). علاوه بر این تعیین اثرات شدت اغتشاش جریان آزاد و دنباله های ناپایدار بر روی عملکرد خنک کاری فیلمی ایرفویل (کارآمدی خنک کاری فیلمی و توزیع ضریب انتقال حرارت) نیز بسیار مهم است. همانگونه که پیش از این ذکر شد، طراحان سیستم خنک کاری توربین برای طراحی بهتر الگوهای خنک کاری ایرفویلها، نیاز به آن دارند که بدانند انتقال حرارت از جریان اصلی داغ به ایرفویل در کجا صورت می گیرد. این الگوها بر روی عملکرد خنک کاری فیلمی تاثیر غیر قابل انکاری دارند.

### ۱-۳-۴ پوشش حرارتی و انتقال حرارت

برای عملکرد مناسب تر، پره های توربین در موتورهای موجود توسط یک سوپراآلیاژ نیکل پوشش داده می شوند. برای دماهای ورودی روتور بالاتر در توربین های گاز پیشرفته، تکنیک های پوششی خاصی، نظیر جامد سازی مستقیم و پره های تک کریستالی با پوشش TBC بکار برده می شوند. پوشش TBC همچون یک عایق برای ایرفویل های توربین عمل می کند و اجازه می دهد که دمای جریان ورودی به

روتور ۲۰۰ تا ۳۰۰°F بالاتر باشد که این مسئله می تواند باعث افزایش بازده توربین شود. دو نوع تکنیک مختلف برای پوشش سطح وجود دارد: (۱) اسپری پلاسمای هوا با هدایت حرارتی سطحی با تخلخل پایین و (۲) تجزیه فیزیکی بخار اشعه الکترون با هدایت حرارتی ستونی با چگالی بالا. عملکرد پوشش TBC، سرامیک‌های ساخته شده از زیرکونیوم، به تکنیک‌های پوششی نامبرده وضخامت پوشش (۵ تا ۵۰ میلیمتر) وابسته است. آزمایشگاهی دولتی ایالات متحده و سازندگان توربین های گاز و صنایع مربوط، مطالعات زیادی را در مورد شناخت پوشش های بهتر، تکنیک‌های بهتر پوشش، کنترل ضخامت پوشش و تست های خوردگی در دماهای بالا برای تعیین طول عمر TBC انجام داده اند. تعیین تاثیرات زبری TBC و جدا شدن ذرات آن در عملکرد ایرودینامیکی و انتقال حرارت در توربین نیز بسیار مهم است.

## فصل دوم

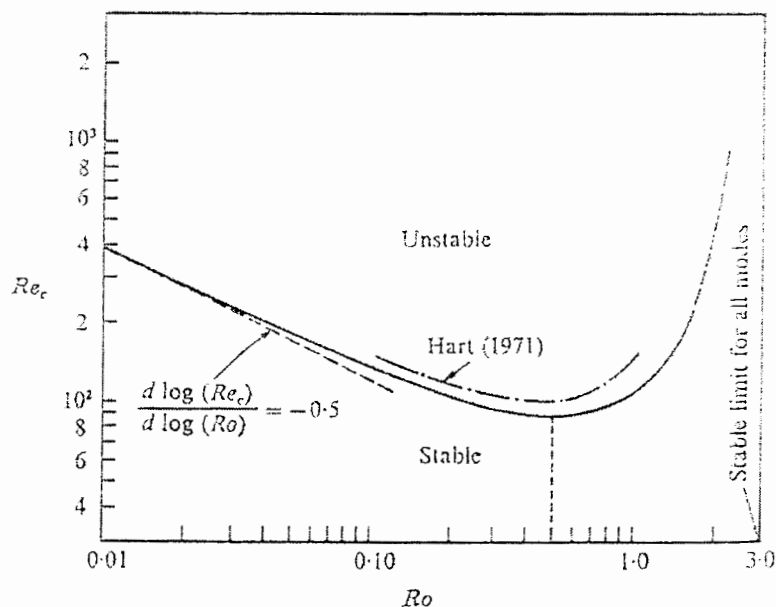


ملاحظات فیزیکی  
خنک کاری داخلی

آنها در آزمایشاتشان از یک کانال گردنده با مقطع مربعی استفاده کرده و مشاهده نموده‌اند که با بوجود آوردن دوران، پروفیل سرعت از حالت متقارن خارج شده و یک سمت آن پایدار و سمت دیگر ناپایدار شده است.

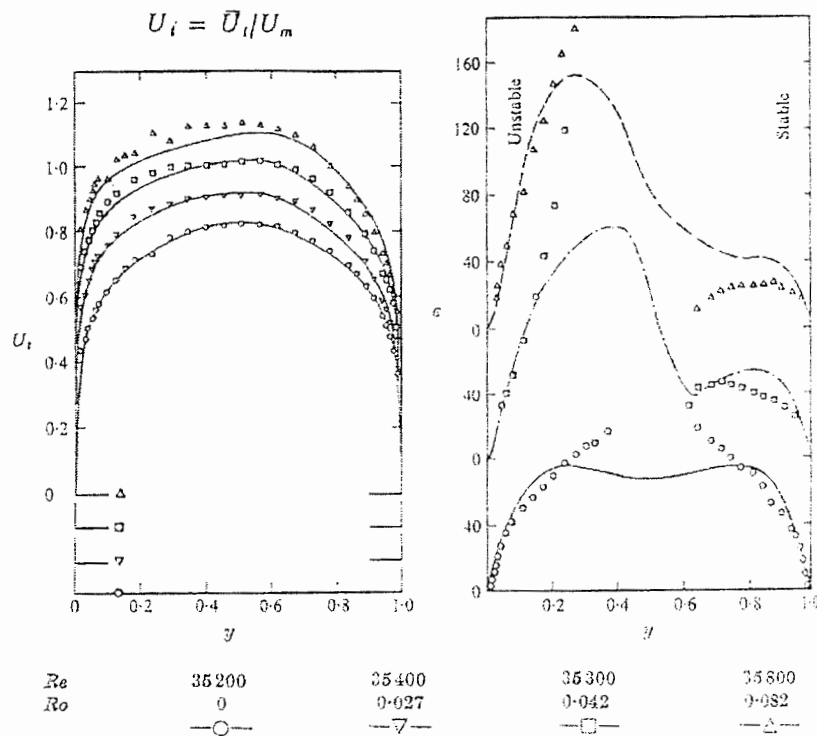
در شکل ۲-۲ پایداری براساس اعداد رینولدز و اعداد دوران مختلف بررسی شده است. عدد دوران ( $Ro$ ) به صورت  $Ro = \omega D / V$  تعریف می‌شود که در آن  $\omega$  سرعت زاویه‌ای،  $D$  قطر هیدرولیکی کانال و  $V$  متوسط سرعت محوری جریان است.

مطابق شکل، کمترین عدد رینولدز بحرانی  $Re = 88.5$  و در عدد دوران  $Ro = 0.5$  است. در حالیکه، در کمترین عدد دوران  $Ro = 0.01$  میزان عدد رینولدز بحرانی برابر 400 است. در آزمایشات لزیوس و جانسون فقط اثر دوران بررسی شده و اثرات حرارت در نظر گرفته نشده است. بنابراین فقط نیروهای کریولیس ناشی از دوران بر جریان اثر دارند و اثرات نیروهای ارشمیدسی لحاظ نشده است.



شکل ۲-۲: دیاگرام اعداد رینولدز بحرانی بر حسب اعداد دوران [۱].

در شکل ۳-۲ پروفیل‌های سرعت و ویسکوزیته مؤثر که توسط جانسون<sup>۱</sup> (۱۹۷۶) اندازه‌گیری شده‌اند، نشان داده شده است. مطابق شکل در سمت دیواره ناپایدار میزان سرعت و ویسکوزیته مؤثر جریان بیشتر است.



شکل ۳-۲: توزیع سرعت و ویسکوزیته توربولانس در یک کانال گردان [۱].

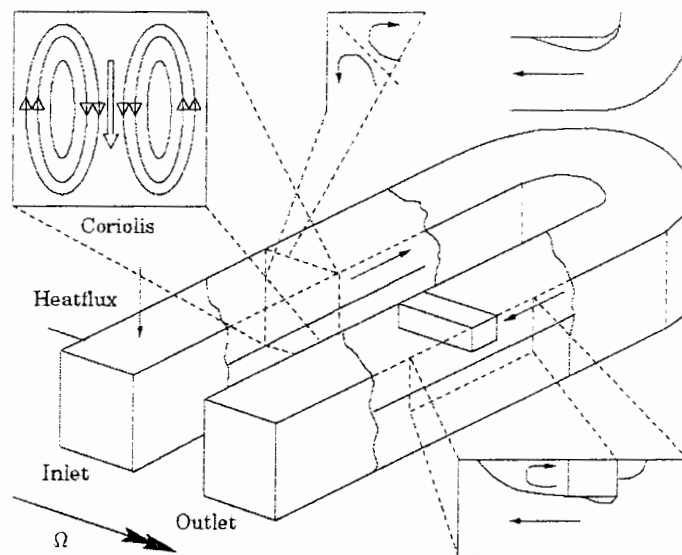
هندسه مسیر خنک‌کاری داخلی در شکل ۴-۲ نشان داده شده است. بطور کلی هر توربین گازی از چندین طبقه استاتور و روتور تشکیل شده است که هم استاتور و هم روتور دارای یکسری پره هستند و پره‌های استاتور در بالا دست جریان قرار دارند تا جریان را به سمت پره‌های روتور هدایت نمایند. برای حفاظت حرارتی هر پره، داخل هر یک از آنها مسیر U شکلی مطابق شکل ۴-۲ ایجاد می‌شود تا با عبور سیال سرد از داخل آن، حفاظت حرارتی پره انجام شود.

1. Johnston

مطابق شکل ۲-۴، جریان خنک کاری تحت نیروهای ناشی از دوران و بار حرارتی قرار دارد. در شکل جریانهای ثانویه ناشی از دوران نشان داده شده‌اند. این جریانهای ثانویه در اثر نیروهای کریولیس ایجاد شده‌اند و نقش مهمی در افزایش انتقال حرارت جریان دارند.

البته در ناحیه قوس ایجاد جریانهای ثانویه فقط ناشی از دوران نیست. حتی در حالتیکه دوران وجود ندارد، جریانهای ثانویه در این ناحیه تولید می‌شوند. علت ایجاد این جریانهای ثانویه در اثر وجود انحنا در این ناحیه است. این جریانها به گردابه‌های تیلور-گورتلر<sup>۱</sup> معروف هستند.

در حالتیکه پره دوران می‌کند، جریانهای ثانویه ناشی از دوران می‌توانند جریانهای ثانویه ناشی از انحنا را تقویت و یا تضعیف نمایند. برای افزایش انتقال حرارت، در مسیر خنک کاری داخلی یک سری برآمدگیهای کوچک (به شکل پله) ایجاد می‌کنند. این برآمدگیها سبب، ایجاد گردابه و اغتشاش در جریان می‌شوند و میزان انتقال حرارت را افزایش می‌دهند. (تا حدی نیز سطح انتقال حرارت را افزایش می‌دهند). در ناحیه انتهای قوس نیز یک جدایش نسبتاً قوی وجود دارد. پدیده جدایش در انتهای قوس، سبب افزایش انتقال حرارت در این ناحیه می‌شود. در جدول ۲-۱، پدیده‌های جریان خنک کاری داخلی در اثر عوامل فیزیکی، لیست شده‌اند. بایستی توجه کرد که در این جدول تنها عوامل اصلی که تأثیر مستقیم بر جریان دارند، لحاظ شده‌اند.



شکل ۲-۴: طرح شماتیک مسیر خنک کاری داخلی و پدیده های آن [۲].

1. Taylor Gorder



جدول ۱-۲: پدیده‌های حاصل از جریان خنک‌کاری داخلی در اثر عوامل فیزیکی [۲]

نیروهای حجمی	پایداری	کاهش شتاب	جدایش	جریانهای ثانویه	تنش برشی
		×	×	×	×
				×	
×	×				
		×	×	×	×
					×
×	×			×	

## ۲-۲: معادلات حاکم

در این تحقیق، جریان سیال داخل مسیر خنک‌کاری، یک جریان سه بعدی، تراکم ناپذیر و پایدار فرض شده است. معادلات حاکم در مسیر خنک‌کاری، معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی هستند. به دلیل دوران پره، حول محور توربین، مؤلفه‌های سرعت در یک دستگاه مختصات نسبی تعیین می‌شوند. این دستگاه مختصات به پره متصل است و همراه پره دوران می‌کند در اینحالت دستگاه مختصات اینرسی در مرکز دوران قرار داشته و دستگاه مختصات نسبی، نسبت به آن دوران می‌کند. اگر  $R$  بردار جابجایی در دستگاه مختصات نسبی،  $r$  بردار بین دستگاه مختصات اینرسی و نسبی و  $\Omega$  بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات نسبی نسبت به دستگاه مختصات اینرسی باشد شتاب در دستگاه مختصات اینرسی از رابطه زیر بدست می‌آید [۳]:

$$a = \frac{dV}{dt} + \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{d\Omega}{dt} \times r + \Omega \times (\Omega \times r) + 2\Omega \times V \quad (1-2)$$

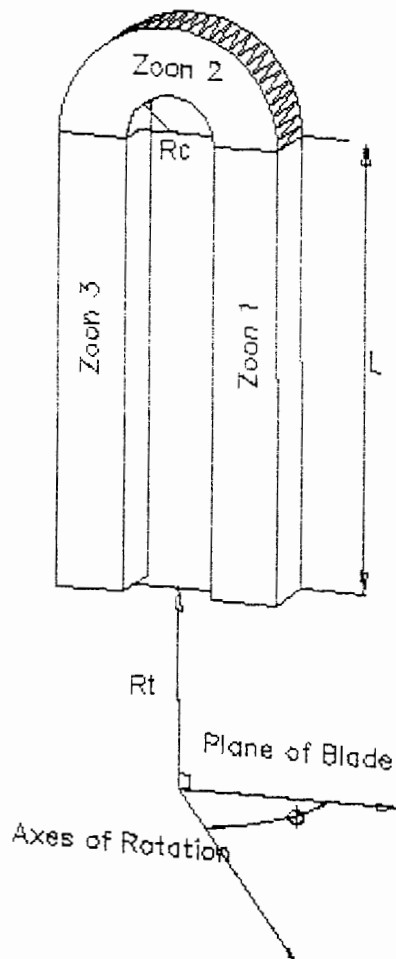
رابطه ۱-۲ در دستگاه مختصات لاگرانژی بیان شده است. در دستگاه مختصات اویلری رابطه ۱-۲

به فرم زیر خواهد بود :

$$a = \frac{DV}{Dt} + \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{d\Omega}{dt} \times r + \Omega \times (\Omega \times r) + 2\Omega \times V \quad (2-2)$$

در روابط ۱-۲ و ۲-۲،  $V$  بردار سرعت در دستگاه مختصات نسبی است.

در این تحقیق بنا به برخی ملاحظات عددی مسیر خنک کاری به سه قسمت تقسیم شده است. با توجه به شکل (۵-۲) نواحی ۱ و ۳ به شکل مکعب مستطیل و ناحیه ۲ به شکل نیم حلقه است. مطابق شکل  $R_c$  شعاع توربین،  $R_e$  شعاع مسیر خنک کاری،  $L$  طول نواحی ۱ و ۳ و  $\phi$  زاویه حمله پره است (زاویه حمله پره، زاویه بین محور دوران توربین و صفحه گذرنده از مسیر خنک کاری است). معادلات حاکم بر جریان سیال خنک کاری بطور جداگانه در این نواحی توسط یک روش CFD حل می‌شوند و در هر گام زمانی به هم کوپل می‌گردند تا پاسخ معادلات حاکم همگرا شوند.



شکل ۵-۲: هندسه مسیر خنک کاری داخلی

بنابراین لازم است که معادلات حاکم، در این دستگاهها بیان شوند. مطابق شکل ۶-۲ در ناحیه (۱)

معادلات حاکم به فرم زیر هستند [۴]:

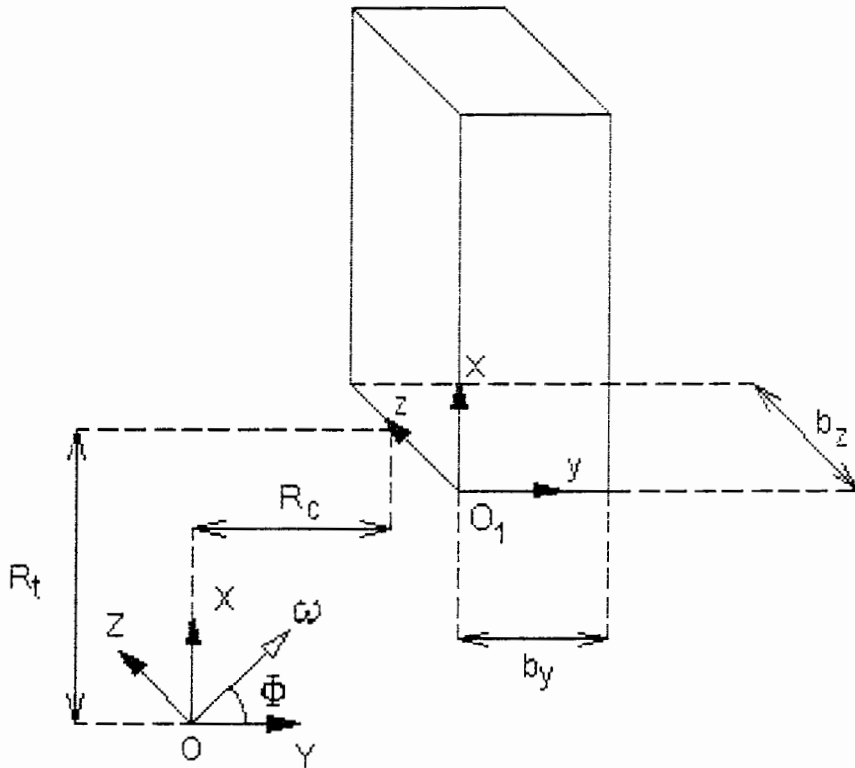
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (۳-۲)$$

$$\frac{Du}{Dt} + a_{x,rel} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (۴-۲)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + a_{y,rel} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (۵-۲)$$

$$\frac{Dw}{Dt} + a_{z,rel} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (۶-۲)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (۷-۲)$$



شکل ۶-۲: دستگاههای مختصات مطلق و نسبی در ناحیه اول

در معادلات فوق  $u$ ،  $v$  و  $w$  مؤلفه‌های سرعت در دستگاه مختصات  $xyz$  (دستگاه مختصات نسبی که به مسیر خنک‌کاری در ناحیه ۱ و در نقطه  $O_1$  متصل است)،  $P$  فشار استاتیکی و  $T$  دمای سیال است.

در معادلات ۲-۴ تا ۲-۶ ترمهای  $a_{x,rel}$ ،  $a_{y,rel}$  و  $a_{z,rel}$  معرف شتابهای نسبی دستگاه مختصات  $xyz$  نسبت به دستگاه اینرسی  $XYZ$  در جهات  $x$ ،  $y$  و  $z$  است.

$$a_x = -(R_t + x)\omega^2 + 2(w \cos \phi - v \sin \phi)\omega \quad (۸-۲)$$

$$a_y = \left[ \left( z - \frac{b_z}{2} \right) \sin \phi \cos \phi - (R_c + y) \sin^2 \phi \right] \omega^2 + 2u\omega \sin \phi \quad (۹-۲)$$

$$a_z = \left[ (R_c + y) \sin \phi \cos \phi - \left( z - \frac{b_z}{2} \right) \cos^2 \phi \right] \omega^2 - 2u\omega \cos \phi \quad (۱۰-۲)$$

در ناحیه ۲ مطابق شکل ۲-۷، مبدأ دستگاه مختصات نسبی  $r\theta z$  در مرکز نیم حلقه قرار دارد. در

این ناحیه معادلات حاکم در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان می‌شوند [۴]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (۱۱-۲)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) v_r - \frac{1}{r} v_\theta^2 + a_{r,rel} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v (\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}) \quad (۱۲-۲)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) v_\theta + \frac{1}{r} v_r v_\theta + a_{\theta,rel} = \frac{-1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v (\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}) \quad (۱۳-۲)$$

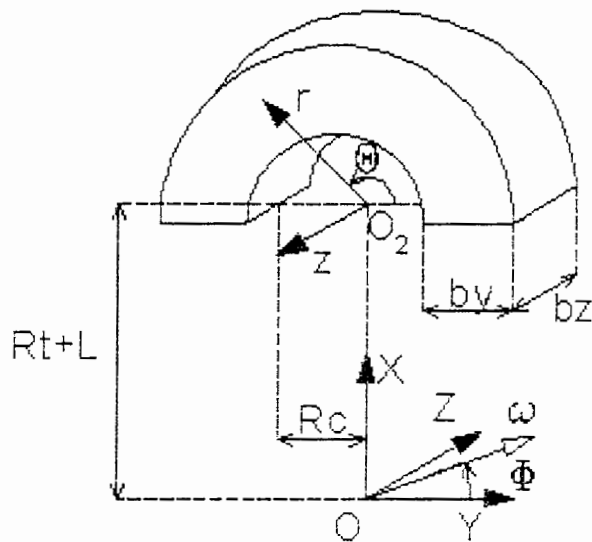
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) v_z + a_{z,rel} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \nabla^2 v_z \quad (۱۴-۲)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T \quad (۱۵-۲)$$

همچنین ترمهای  $\mathbf{V} \cdot \nabla$  و  $\nabla^2$  نیز از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (۱۶-۲)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۱۷-۲)$$



شکل ۷-۲: دستگاههای مختصات مطلق و نسبی در ناحیه دوم

در معادلات ۱۱-۲ تا ۱۷-۲،  $v_r$ ،  $v_\theta$  و  $v_z$  مؤلفه‌های سرعت در دستگاه مختصات نسبی  $r\theta z$  و در جهات  $r$ ،  $\theta$  و  $z$  هستند. همچنین در معادلات ۱۲-۲ تا ۱۴-۲ ترمهای  $a_{r,rel}$  و  $a_{\theta,rel}$  و  $a_{z,rel}$  معرف شتابهای نسبی دستگاه مختصات  $r\theta z$  نسبت به دستگاه اینرسی  $XYZ$  است.

$$a_r = \left\{ -(R_t + L + r \sin \theta) \omega^2 + 2 [v_z \cos \phi + (v_\theta \sin \theta - v_r \cos \theta) \sin \phi] \omega \right\} \sin \theta + \left\{ \left[ \left( z - \frac{b_z}{2} \right) \sin \phi \cos \phi - r \cos \theta \sin^2 \phi \right] \omega^2 + 2(v_\theta \cos \theta + v_r \sin \theta) \omega \sin \phi \right\} \cos \theta \quad (18-2)$$

$$a_\theta = \left\{ -(R_t + L + r \sin \theta) \omega^2 + 2 [v_z \cos \phi + (v_\theta \sin \theta - v_r \cos \theta) \sin \phi] \omega \right\} \cos \theta - \left\{ \left[ \left( z - \frac{b_z}{2} \right) \sin \phi \cos \phi - r \cos \theta \sin^2 \phi \right] \omega^2 + 2(v_\theta \cos \theta + v_r \sin \theta) \omega \sin \phi \right\} \sin \theta \quad (19-2)$$

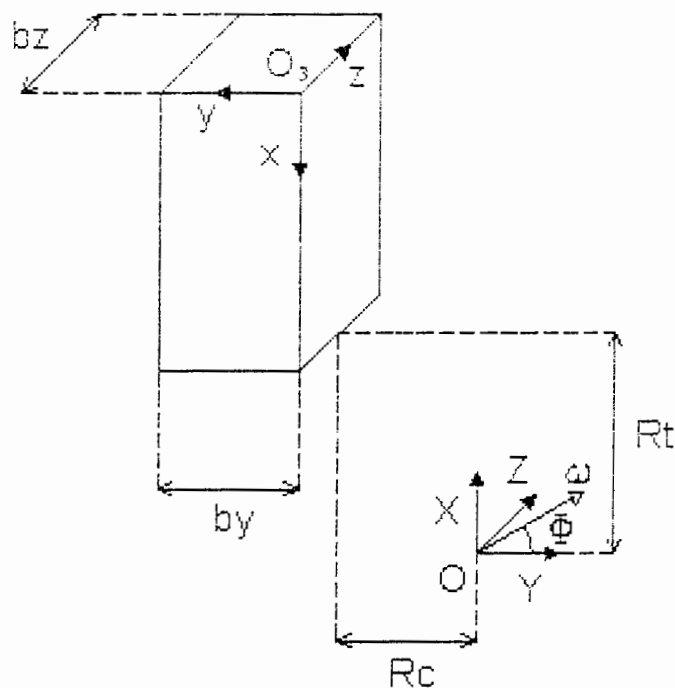
$$a_z = - \left[ r \cos \theta \sin \phi \cos \phi - \left( z - \frac{b_z}{2} \right) \cos^2 \phi \right] \omega^2 + 2(v_\theta \cos \theta + v_r \sin \theta) \omega \cos \phi \quad (20-2)$$

مطابق شکل (۸-۲) در ناحیه سوم مبدا دستگاه مختصات نسبی XYZ در نقطه  $O_3$  قرار دارد. با توجه به این شکل می‌توان دریافت که جهت Z دستگاه XYZ مخالف جهت Z دستگاه مختصات XYZ است. در ناحیه سوم معادلات حاکم به فرم معادلات ناحیه اول است. لذا معادلات ۲-۳ تا ۲-۷ در این ناحیه نیز صادقند با این تفاوت که ترمهای شتاب نسبی از روابط زیر به دست می‌آید:

$$a_x = (R_t + L - x) \omega^2 - 2(w \cos \phi + v \sin \phi) \omega \quad (21-2)$$

$$a_y = - \left[ \left( z - \frac{b_z}{2} \right) \sin \phi \cos \phi + (R_c + y) \sin^2 \phi \right] \omega^2 + 2u \omega \sin \phi \quad (22-2)$$

$$a_z = - \left[ \left( z - \frac{b_z}{2} \right) \cos^2 \phi + (R_c + y) \sin \phi \cos \phi \right] \omega^2 + 2u \omega \cos \phi \quad (23-2)$$



شکل ۸-۲: دستگاههای مختصات مطلق و نسبی در ناحیه سوم

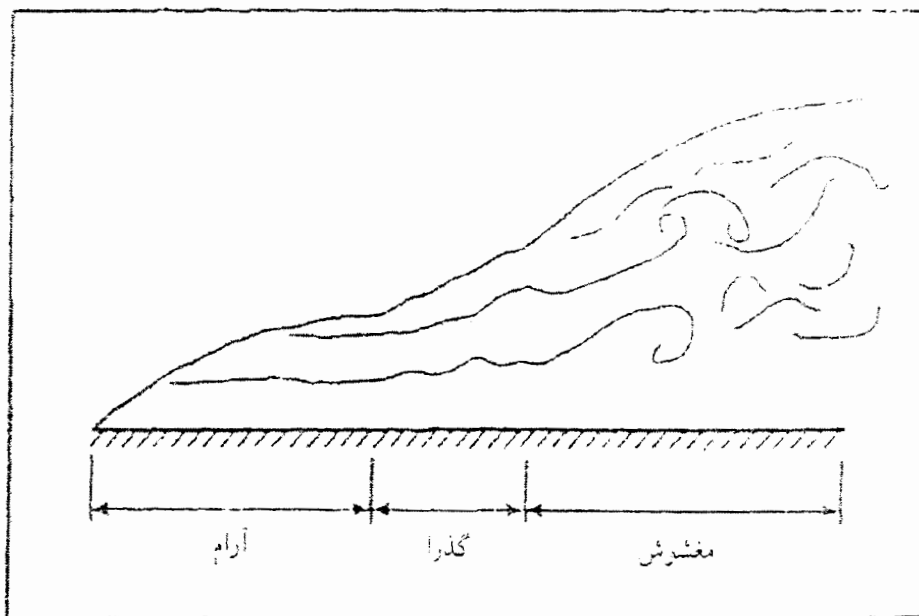
## ۳-۲: مدل توربولانسی

در این تحقیق، تحلیل جریان در دو حالت انجام شده است:

۱- تحلیل جریان در رینولدزهای پایین با مدل آرام<sup>۱</sup>

۲- تحلیل جریان در رینولدزهای بالا با روش  $k-\epsilon$

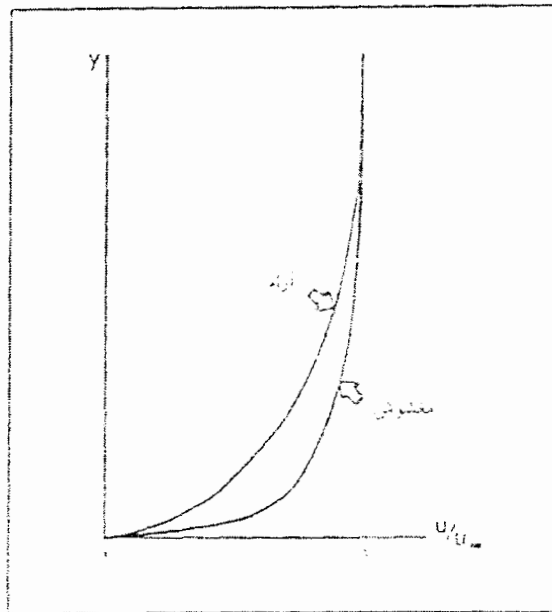
در بیشتر جریانهای با رینولدز بالا، اثر نیروهای لزجت به ناحیه نزدیک سطح محدود می‌شود. این ناحیه را لایه مرزی می‌نامند. از مبانی درس مکانیک سیالات می‌دانیم که لایه مرزی معمولاً از یک دسته خطوط جریان خوش‌رفتار آغاز می‌شود و اختلال در سطح میکروسکوپی صورت می‌گیرد. چنین لایه مرزی را لایه مرزی آرام می‌نامند. به علت شرایط ناشی از شکل هندسی و میدان جریان، مانند زبری سطح، دمای سطح، تزریق به سطح و گرادیان فشار، اختلال سیال به سطح ماکروسکوپی افزایش می‌یابد و خطوط جریان دیگر خوش ترکیب نیستند. این نوع جریان را جریان مغشوش می‌نامند. ناحیه گذرای هم بین لایه‌های مرزی آرام و مغشوش وجود دارد که به آن ناحیه گذرا می‌گوییم.



شکل ۲-۹: رژیمهای مختلف جریان نزدیک سطح [۵]

1. laminar

در نتیجه اختلال شدید در لایه مرزی مغشوش و شار مومنتوم بزرگ مربوط به آن، پروفیل سرعت در لایه مرزی مغشوش پهن تر از پروفیل مربوط به لایه مرزی آرام است، یعنی، گرادیان سرعت نزدیک دیوار در لایه مرزی مغشوش بزرگتر از مقدار آن در لایه مرزی آرام است. نمونه‌ای از پروفیل‌های سرعت لایه‌های مرزی آرام و مغشوش در شکل ۲-۱۰ نشان داده شده است.



شکل ۲-۱۰: مقایسه پروفیل‌های سرعت لایه‌های مرزی آرام و مغشوش [۵]

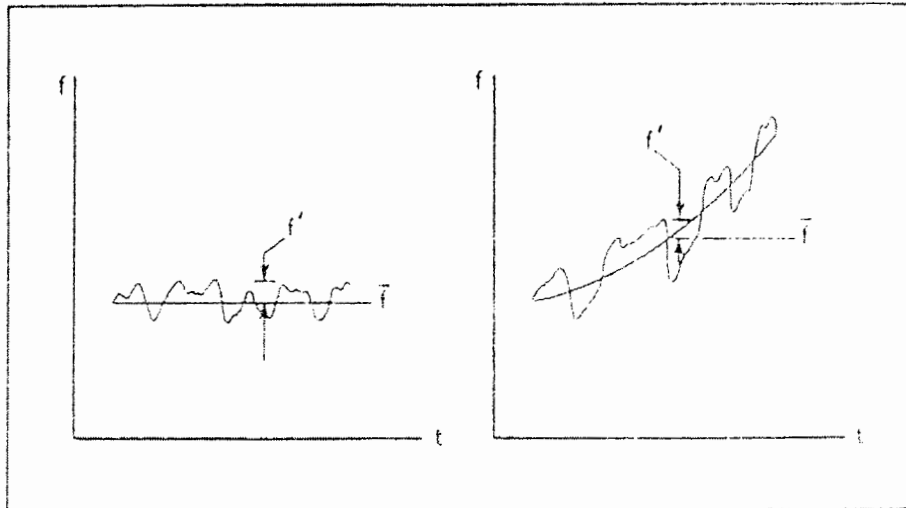
برای در نظر گرفتن اثر اغتشاش در میدان جریان باید معادله‌های حرکت سیال را تغییر داد. مرسوم است که این تغییرات را با نشان دادن مقادیر لحظه‌ای به صورت مجموع مقداری متوسط (که با قراردادن خط کوتاهی روی متغیر نشان داده می‌شود) و مقدار نوسانی تابع زمانی (که با علامت پریم مشخص می‌شود) اعمال کنیم. از نظر ریاضی آنرا بصورت زیر می‌نویسیم:

$$f = \bar{f} + f' \quad (24-2)$$

در رابطه ۲-۲۴ کمیت  $\bar{f}$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f dt \quad (25-2)$$





شکل ۲-۱۱: نمایش مقادیر متوسط و نوسانی در جریانهای دائم و غیردائم [۵]

فاصله زمانی  $\Delta t$  که در تعاریف بالا به کار رفت باید بزرگتر از دوره نوسانهای کمیتها و کوچکتر از فاصله زمانی جریان غیردائم باشد. پس فاصله زمانی تابعی از مسأله است یعنی تابعی از شکل هندسی و فیزیک میدان جریان موردنظر است.

شایان توجه است که در یک جریان دائم مقدار متوسط زمانی ثابت است در حالیکه در جریان غیردائم تابعی از زمان است برای پیگیری جزئیات ریاضی، قانونهای متوسط گیری زیر را به کار می بریم:

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f} \quad (۱-۲۶-۲)$$

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g} \quad (۲-۲۶-۲)$$

$$\overline{fg} = \overline{f} \overline{g} \quad (۳-۲۶-۲)$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad (۴-۲۶-۲)$$

$$\overline{f'^2} \neq 0 \quad (۵-۲۶-۲)$$

$$\overline{f'g'} \neq 0 \quad (۶-۲۶-۲)$$

$$\overline{[f + f']^2} = \overline{f}^2 + \overline{f'^2} \quad (۷-۲۶-۲)$$

قابل ذکر است که متوسط حاصلضرب مقادیر نوسانی که با  $\overline{f'g'}$  نشان داده می شود، در حالت کلی صفر نیست. در واقع، این کمیتها بویژه آنهایی که نوسانهای سرعت را شامل می شوند، بسیار مهم

هستند و زیرینای اثر جریان مغشوش را تشکیل می‌دهند. در صورتیکه در معادلات حاکم ترمهای سرعت، فشار و دما را به فرم رابطه ۲-۲۴ بنویسیم و سپس از معادلات حاکم بصورت رابطه ۲-۲۵ متوسط بگیریم، معادلات جدیدی برای ترمهای متوسط سرعت، فشار و دما به دست می‌آید برای مثال در ناحیه اول معادلات به فرم زیر درمی‌آیند :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (27-2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} = 0 \quad (28-2)$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} + \bar{a}_{x,rel} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \left( \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \quad (29-2)$$

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} + \bar{a}_{y,rel} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{v} - \left( \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \quad (30-2)$$

$$\frac{D\bar{w}}{Dt} + \bar{a}_{z,rel} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{w} - \left( \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right) \quad (31)$$

$$\frac{D\bar{T}}{Dt} = \alpha \nabla^2 \bar{T} - \left( \frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z} \right) \quad (32-2)$$

می‌توان نشان داد که تبادل مومنتوم ناشی از اغتشاش در اثر ترمهای  $\rho \overline{u'^2}$ ،  $\rho \overline{u'v'}$  و ... بوده که

آنرا را تنش برشی اغتشاش (یا تنش رینولدز) می‌نامند و با  $\tau_t$  نشان می‌دهند.

در جریان روی صفحه تخت تنش برشی لزجت بصورت زیر نشان داده می‌شود.

$$\tau_t = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (33-2)$$

برای نشان دادن تنش اغتشاشی به روش مشابه، مفهوم گرادیان لزجت را در نظر می‌گیریم، که در

آن تنش برشی مغشوش به گرادیان سرعت متوسط جریان مربوط می‌شود. این تحلیل را بوزینسک<sup>۱</sup>

انجام داده و به فرضیه بوزینسک معروف است.

$$\tau_t = \rho \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (34-2)$$

1. Boussinesq

به روش مشابه، انتشار گردابه برای ترکیب شارهای حرارتی آرام و مغشوش تعریف می‌شود. لذا معادلات مومنوم و انرژی به فرم استاندارد زیر در می‌آیند:

$$\frac{D\bar{V}}{Dt} + \bar{a}_{rel} = \frac{-1}{\rho} \nabla \bar{p} + (\nu + \nu_t) \nabla^2 \bar{V} \quad (35-2)$$

$$\frac{D\bar{T}}{Dt} = (\alpha + \alpha_t) \nabla^2 \bar{T} \quad (36-2)$$

در رابطه ۳۵-۲،  $\bar{V}$  بردار سرعت متوسط است.

بایستی توجه داشت که در اینجا هنوز معادلات حاکم تکمیل نشده‌اند زیرا دو مجهول  $\alpha_t$  و  $\mu_t$  به این معادلات اضافه شده‌اند. برای بدست آوردن این دو مجهول روشهای متنوعی ارائه شده است. قبل از معرفی این روشها، لازم است که طول اختلاط پراتل<sup>۱</sup> را معرفی می‌کنیم.

می‌دانیم که در جریان آرام اختلاط سیال در سطح مولکولی است و تنشهای لزجت و شارهای حرارتی ناشی از انتقال مومنوم و حرارت در اثر حرکت مولکولها در فاصله آزاد آنها پیش از برخوردشان است.

مفهوم مشابهی را برای جریان مغشوش به کار می‌بریم، به این شکل که فرض می‌کنیم تکه‌های سیال پیش از برخورد، فاصله محدودی را طی می‌کنند. تبادل مومنوم و انرژی حاصل مفهوم تنش برشی و شار حرارتی مغشوش را می‌دهد. این فاصله محدود را طول اختلاط می‌نامند. این مفهوم توسط پراتل معرفی شده و به طول اختلاط پراتل معروف است.

فرضیه پراتل بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho \ell^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (37-2)$$

$$\left( \frac{q}{A} \right)_t = \rho \ell_c^2 \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)^2 \quad (38-2)$$

برحسب جمله‌های لزجت گردابه‌ای و پخش گردابه‌ای، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\nu_t = \ell^2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (39-2)$$

$$\alpha_t = \ell_c^2 \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \quad (40-2)$$

#### 1. Prantel Mixing Length

مفهوم لزجت گردابه‌ای و پخش گردابه‌ای را می‌توان به آسانی به معادلات ناویراستوکس تعمیم داد. مثلاً در یک مسأله دوبعدی  $v_t$  از قرار زیر خواهد بود:

$$v_t = \ell^2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (41-2)$$

آنچه تا این مرحله ارائه شد، معرفی دو پارامتر جدید است و موضوع اصلی یعنی تکمیل معادلات هنوز پابرجاست زیرا دو مجهول اضافی وجود دارند. که به صورت  $\ell$  و  $\ell_e$  ظاهر شده‌اند. برای نوشتن رابطه‌ای برای طول اختلاط، شدیداً به نتایج آزمایشگاهی نیاز است و  $\ell$  و  $\ell_e$  را برای رژیم‌های مختلط جریان، یعنی ناحیه داخلی و خارجی مدل می‌کنیم. این روابط نیمه تجربی را مدل‌های اغتشاش می‌نامند و به صورت معادلات جبری یا معادلات دیفرانسیل ارائه می‌شوند.

### ۲-۳-۱: مدل‌های اغتشاش صفر معادله‌ای

مدل‌های صفر معادله‌ای، معادلاتی هستند که جمله‌های نوسانی اغتشاش با رابطه‌های جبری و برحسب کمیت‌های متوسط میدان جریان مشخص می‌شوند. فرض نهفته در مدل‌های صفر معادله‌ای این است که نرخ تولید و از بین رفتن اغتشاش مساوی است. به هر حال این معادلات جابجایی اغتشاش را در نظر نمی‌گیرند.

آشکار است که این نکته با فیزیک مسأله مغایرت دارد، زیرا تاریخچه قبلی جریان در نظر گرفته نمی‌شود. به هر صورت این مدل‌ها شکل ریاضی ساده‌ای دارند و اعمال آنها در یک برنامه عددی نسبتاً آسان است. عموماً، اغلب مدل‌ها ناحیه‌های داخلی و خارجی را برای نشان دادن اختلاط ارائه می‌کنند. مدلی که معمولاً استفاده می‌شود از یک تابع نمایی [۶] (تابع استهلاک و ن درشت<sup>۱</sup>) برای ناحیه داخلی استفاده می‌کند در حالیکه ناحیه خارجی با ضخامت لایه مرزی متناسب است.

$$\ell_i = k(1 - e^{-y^+/A^+})y \quad (42-2)$$

$$\ell_o = C_s \delta \quad (43-2)$$

1. Van Driest

در روابط فوق  $k$  ثابت فون کارمن بوده و حدود  $0.41$  و  $C_o$  حدود  $0.08$  تا  $0.09$  است  $\delta$  نیز معرف ضخامت لایه مرزی است همچنین  $y^+$  و  $A^+$  نیز از روابط زیر بدست می آیند :

$$y^+ = \frac{y}{\nu} \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (44-2)$$

$$A^+ = 26 \left[ 1 + \frac{dp}{dx} \left( \frac{y}{\tau_w} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (45-2)$$

فرمولبندی دیگری که معمولاً برای لزجت مغشوش ناحیه خارجی به کار می رود، مدل سبسی و اسمیت<sup>[۶]</sup> است و به صورت زیر است.

$$v_t = \alpha \bar{u}_e \delta^* \quad (46-2)$$

این مدل براساس  $Re_\theta$  (عدد رینولدز مبتنی بر ضخامت مومنوم) بزرگتر از  $5000$  قابل استفاده بوده و مقدار  $\alpha$  نیز حدود  $0.0168$  و  $\delta^*$  ضخامت جابجایی جنبشی است.

$$\delta^* = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (47-2)$$

گفتنی است که عدد رینولدز برحسب ضخامت مومنوم بصورت زیر تعریف می شود :

$$Re_\theta = \frac{\rho_e u_e \theta}{\mu_e} \quad (48-2)$$

که ضخامت مومنوم  $\theta$  بصورت زیر است :

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad (49-2)$$

دو مدل ذکر شده به اطلاعات مربوط به ضخامت لایه مرزی و خواص جریان در لبه لایه مرزی نیاز دارد. وقتی معادلات ناویراستوکس را حل می کنیم، تعیین ضخامت لایه مرزی یا خواص لبه آن امری دشوار است هرگاه جدایی جریان وجود داشته باشد، این امر دشوارتر است. در هر حال، اگر بخواهیم حد ناحیه لزج را تعیین کنیم از آنتالپی کل استفاده می کنیم. بالدوین ولومکس<sup>[۶]</sup> مدل اغتشاشی را برای لایه مرزی نوشتند که برحسب ضخامت لایه مرزی نیست. ناحیه داخلی را با رابطه زیر تقریب می زنیم :

- 
1. Cebci/Smith
  2. Baldwin & Lomax

$$\mu_t = \rho \ell^2 |\omega| \quad (50-2)$$

که  $\omega$  ورتیسیتی است و برای جریانهای دوبعدی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (51-2)$$

در جریانهای سه بعدی نیز مقدار  $\omega$  از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\omega = \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (52-2)$$

در منطقه خارجی مقدار ویسکوزیته توربولانس از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mu_t = \alpha \bar{\rho} C_{cp} F_{wake} F_{kleb} \quad (53-2)$$

مانند مدل سبسی و اسمیت مقدار  $\alpha$ ، 0.0168 بوده و  $F_{wake}$  نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F_{wake} = \min \left[ y_{max} G_{max}, C_{wake} y_{max} \frac{(\Delta v)^2}{G_{max}} \right] \quad (54-2)$$

مقدار نمونه برای  $C_{wake}$ ، 0.25 است و  $G_{max}$  نیز از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$G_{max} = \max \left( \frac{1}{k} |\omega| \right) \quad (55-2)$$

در روابط فوق  $k$  ثابت فون کارمن و  $\ell$  طول اختلاط (رابطه ۴۲-۲) است. اختلاف بین مقدار ماکزیمم و مینیمم سرعت مطلق در ناحیه لزوج را با  $\Delta v$  نشان می‌دهیم و  $F_{kleb}$  ضریب تناوبی است.

$$F_{kleb} = \left[ 1 + 5.5 \left( \frac{C_{kleb} y}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1} \quad (56-2)$$

همچنین  $y_{max}$  موقعیت  $y$  در  $G_{max}$  بوده و ثابت کلبانف<sup>۱</sup>  $C_{kleb}$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C_{kleb} = \frac{2}{3} \frac{0.01312}{0.1724 - \beta^*} \quad (57-2)$$

در رابطه ۵۷-۲ مقدار  $\beta^*$  از رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$\beta^* = \frac{y_{max}}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (58-2)$$

1. Klebanoff constant

پس از تعیین ثابت کلبانف مقدار  $C_{ep}$  از رابطه زیر تعیین می‌شود :

$$C_{cp} = \frac{3 - 4C_{kleb}}{2C_{kleb}(2 - 3C_{kleb} + C_{kleb}^3)} \quad (59-2)$$

برای مدل کردن ضریب پخش گردابه‌ای از تحلیل رینولدز استفاده می‌کنیم. گفتنی است که تحلیل رینولدز تشابهی را بین انتقال مومنتوم و انتقال حرارت فرض می‌کند. از اینرو عدد پراتل مغشوش بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$Pr_t = \frac{v_t}{\alpha_t} = \frac{\mu_t C_p}{k_t} \quad (60-2)$$

در بیشتر جریانها، فرض می‌کنیم که عدد پراتل مغشوش در لایه مرزی ثابت می‌ماند. برای  $Pr_t = 0.9$  است پس ضریب هدایت اغتشاش بصورت زیر محاسبه می‌شود :

$$k_t = \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \quad (61-2)$$

که در رابطه فوق  $\mu_t$  از مدل‌های اغتشاش بدست می‌آید.

## ۲-۳-۲ : مدل‌های اغتشاش دو معادله‌ای

بیشتر گفتیم که جابجای اغتشاش در مدل‌های صفر معادله‌ای منظور نمی‌شود. از اینرو اثر فیزیکی تاریخچه قبلی جریان وارد مدل‌های ساده جبری نمی‌شود. برای در نظر گرفتن این منظور از مدل‌های چند معادله‌ای استفاده می‌شود. معمولاً برای اعمال جابجایی اغتشاش، این معادلات براساس معادله ناویراستوکس به دست می‌آیند.

هرگاه دو معادله از این نوع را بکار بریم، مدل را دو معادله‌ای می‌نامند. یکی از معروفترین مدل‌های دو معادله‌ای، مدل  $k-\varepsilon$  [۷] است. در این مدل دو معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی برای انرژی جنبشی اغتشاش ( $k$ ) و اتلاف آن ( $\varepsilon$ )، بکار می‌رود و بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (62-2)$$

$$\varepsilon = \nu_t \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \quad (63-2)$$

معادلات  $k-\varepsilon$  بصورت زیر تعریف می‌شوند :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k\bar{V} - \frac{v_t}{Pr_k} \nabla k) = \phi - \varepsilon \quad (64-2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon\bar{V} - \frac{v_t}{Pr_\varepsilon} \nabla \varepsilon) = c_1 \phi \frac{\varepsilon}{k} - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (65-2)$$

در روابط فوق  $\phi$  معرف تولید اغتشاش ناشی از تنشهای رینولدز است و از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\phi = v_t \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad (66-2)$$

مقدار ویسکوزیته توربولانس برحسب  $k$  و  $\varepsilon$  تعریف می‌شود :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (67-2)$$

ثابتهای معادلات فوق عبارتند از :

$$C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad Pr_k = 1, \quad Pr_\varepsilon = 1.3, \quad C_\mu = 0.09$$

یکی دیگر از روشهای دو معادله‌ای، روش  $k-\omega$  [۶] است این روش توسط ویل کاکس<sup>۱</sup> (۱۹۹۳)

ارائه شده و در مسائلی که در آنها جدایش اتفاق می‌افتد دارای دقت بیشتری نسبت به روش  $k-\varepsilon$

است معادلات  $k-\omega$  بصورت زیر تعریف می‌شوند :

$$\nabla \cdot (k\bar{V} - \frac{v_t}{\sigma_k} \nabla k) = \phi - \beta^* \omega k \quad (68-2)$$

$$\nabla \cdot (\omega\bar{V} - \frac{v_t}{\sigma_\omega} \nabla \omega) = \alpha \phi \frac{\omega}{k} - \beta \omega^2 \quad (69-2)$$

در روابط فوق  $\phi$  معرف تولید اغتشاش ناشی از تنشهای رینولدز است و از رابطه ۶۶-۲ بدست

می‌آید. مقدار ویسکوزیته توربولانس برحسب  $k$  و  $\omega$  به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\mu_t = \rho \alpha^* \frac{k}{\omega} \quad \text{یا} \quad \mu_t = \rho \frac{C_\mu}{\beta^*} \frac{k}{\omega} \quad (70-2)$$

1. Wilcox



ثابت‌های معادلات فوق از روابط زیر بدست می‌آیند :

$$\alpha^* = \frac{1 + \frac{\text{Re}_T}{6}}{1 + \frac{\text{Re}_T}{6}} \quad (1-71-2)$$

$$\beta^* = 0.09 \frac{5/18 + (\text{Re}_T/8)^4}{(1 + \text{Re}_T/8)^4} \quad (2-71-2)$$

$$\beta^* = 0.09 \frac{0.01 + \text{Re}_T/2.7}{1 + \text{Re}_T/8} \frac{1}{\alpha^*} \quad (3-71-2)$$

$$\beta = \frac{3}{40} \quad (4-71-2)$$

همچنین در معادلات ۷۱-۲ عدد رینولدز توربولانس بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$\text{Re}_T = \frac{\rho k}{\omega \mu} \quad (72-2)$$

## ۴-۲: تحلیل تشابهی معادلات حاکم

حل معادلات حاکم بصورت بی‌بعد منجر به جوابهای کلیتری می‌شود که این جوابها می‌توانند برای هندسه، جنس، سرعت و دماهای دیگر که مشابه با تحلیل صورت گرفته‌اند، قابل استفاده باشند.

پارامترهای بی‌بعد معادلات حاکم عبارتند از :

$$t^* = \frac{tU}{D_h} \quad , \quad \text{Length}^* = \frac{\text{Length}}{D_h}$$

$$\text{Velocity}^* = \frac{\text{Velocity}}{U} \quad , \quad P^* = \frac{P}{\rho U^2} \quad , \quad T^* = \frac{T}{T_{in}}$$

$$\text{Re} = \frac{UD_h}{\nu} \quad , \quad \text{Ro} = \omega^* = \frac{\omega D_h}{U} \quad (73-2)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad , \quad \mu_r = \frac{\mu_t}{\mu} \quad , \quad \alpha_r = \frac{\alpha_t}{\alpha}$$

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon D_h}{U^3} \quad , \quad k^* = \frac{k}{U^2}$$

در روابط فوق  $D_n$ ، قطر هیدرولیکی مسیر خنک کاری،  $U$  سرعت سیال در ورود و  $T_{in}$  دمای سیال در ورود به مسیر خنک کاری است. در صورتیکه روابط ۲-۷۳ را در معادلات حاکم اعمال کنیم، حالت بی بعد معادلات حاکم بدست می آید:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{V}^* = 0 \quad (74-2)$$

$$\frac{D^* \mathbf{V}^*}{Dt^*} + \mathbf{a}_{rel}^* = -\nabla^* P^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{V}^* \quad (75-2)$$

$$\frac{D^* T^*}{Dt^*} = \frac{1}{RePr} \nabla^{*2} T^* \quad (76-2)$$

در معادله ۲-۷۵ ترم  $\mathbf{a}_{rel}^*$  معرف شتابهای نسبی بی بعد است و برای بدست آوردن آن کافی است، در رابطه  $\mathbf{a}_{rel}$  که در بخش ۲-۲ معرفی شده اند، روی کلیه پارامترها علامت \* بگذاریم. برای جریان مغشوش، معادلات بی بعد جریان به فرم زیر خواهند بود:

$$\nabla^* \cdot \bar{\mathbf{V}}^* = 0 \quad (77-2)$$

$$\frac{D^* \bar{\mathbf{V}}^*}{Dt^*} + \bar{\mathbf{a}}_{rel}^* = -\nabla^* \bar{P}^* + \frac{1 + \mu_r}{Re} \nabla^{*2} \bar{\mathbf{V}}^* \quad (78-2)$$

$$\frac{D^* \bar{T}^*}{Dt^*} = \frac{1 + \alpha_r}{RePr} \nabla^{*2} \bar{T}^* \quad (79-2)$$

از آنجا که در این تحلیل از روش  $k-\varepsilon$  [۷] برای مدل سازی جریان مغشوش استفاده شده، لذا در اینجا فرم بی بعد این معادلات را نیز مطرح می کنیم:

$$\frac{D^* k^*}{Dt^*} = \frac{1}{RePr_k} \nabla^* \cdot (\mu_r \nabla^* k^*) - \varepsilon^* \quad (80-2)$$

$$\frac{D^* \varepsilon^*}{Dt^*} = \frac{1}{RePr_\varepsilon} \nabla^* \cdot (\mu_r \nabla^* \varepsilon^*) + C_1 \left( \frac{\mu_r}{Re} \right) \left( \frac{\varepsilon^*}{k^*} \right) \phi^* - C_2 \frac{\varepsilon^{*2}}{k^*} \quad (81-2)$$

$$\mu_r = Re C_\mu \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \quad (82-2)$$

در روابط فوق  $\phi^*$  معرف تولید اغتشاش ناشی از تنشهای رینولدز در حالت بی بعد است و از رابطه زیر بدست می آید:

$$\phi^* = 2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] +$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial x^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial x^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial z^*}\right)^2 \quad (۸۳-۲)$$

## ۲-۵: شرایط مرزی و شرایط اولیه

بطور کلی مرزهای فیزیکی که در آن شرایط مرزی کلی مورد نیاز است و یا مقادیر متغیر وابسته به عنوان بخشی از جوابها باید معلوم شوند به پنج دسته تقسیم می‌شوند، این پنج دسته عبارتند از: سطح بدنه، فواصل بسیار دور، خط تقارن (یا سطح تقارن در حالت سه بعدی)، جریان ورودی و جریان خروجی. تشخیص و تبیین شرایط مرزی، فیزیکی یا عددی در امتداد مرزهای مختلف بطور کلی مشکل است. تعیین شرایط مرزی برای معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر نیز از این قاعده جدا نیست.

البته شرایط فیزیکی معمولاً نتایجی را در مورد شرایط مرزی می‌دهد که اعمال برخی از آنها نسبتاً ساده است. به عنوان مثال بر روی یک سطح جامد از شرط عدم لغزشی برای تعیین شرط مرزی سرعت استفاده می‌کنیم. در هر حال تعیین شرط مرزی برای مؤلفه‌های سرعت در ورودی، خروجی و فواصل دور معمولاً سر راست نیست. بدیهی است که روند تعیین شرایط مرزی بطور گسترده‌ای تابع شرایط فیزیکی و قلمرو مسأله مورد نظر است. مثلاً اگر مرز دور دست را واقعاً دور از بدنه که تمام فعالیت‌های جریان در حوالی آن روی می‌دهد در نظر بگیریم، شرایط جریان آزاد را می‌توان برای آن مرز به کار برد. در حالیکه اگر مرز فواصل دور را نزدیک به سطح بدنه که فعالیتها در آن انجام می‌شوند، در نظر بگیریم، بسته به علامت مؤلفه‌های عمودی سرعت آن را به عنوان مرز ورودی یا خروجی در نظر می‌گیریم.

در صورتیکه شرایط مرزی ورودی و خروجی را اعمال کنیم، دو عامل عمده را باید در نظر بگیریم. اولاً، سرعت و یا فشار در خروجی مجهولند و با پیشروی حل عمومی باید آنها را مشخص کرد. ثانیاً، به علت تأثیر جوابهای داخل شبکه حل در ورودی یا فواصل دور (اگر آنها را هم ورودی تلقی کنیم)، ممکن است که تجدید مقادیر مرزی مورد نیاز باشد.

البته این عوامل به علت پدیده فیزیکی انتشار علائم است یعنی در جریان تراکم‌ناپذیر اغتشاشها در تمام جهتها منتشر می‌شوند. بنابراین تعیین شرایط مرزی بستگی زیادی به شرایط مسأله مورد مطالعه

دارد. یعنی به چگونگی موقعیت مرزهای ورودی، خروجی و مرزهای دور دست نسبت به محل‌هایی که در آنها تغییرات خواص سیال روی می‌دهند، بستگی دارد.

با توجه به هندسه مسیر جریان خنک کاری داخلی پره‌های توربین گازی بطور کلی سه دسته شرط مرزی وجود دارد این شرایط مرزی عبارتند از: مرز دیواره، مرز ورودی و مرز خروجی (در حالت کلی شرط مرزی تقارن صادق نیست).

همچنین با وجود اینکه جریان خنک کاری داخلی یک جریان پایدار است ولی در اکثر روش‌های CFD مسائل پایدار به شکل شبه‌گذرا حل می‌شوند به همین دلیل معادلات نیاز به شرط اولیه نیز دارند. نحوه تعیین شرایط مرزی و شرایط اولیه در بخش‌های بعدی توضیح داده شده‌اند.

## ۲-۵-۱۰: شرایط مرزی در دیواره‌های جامد

با توجه به معادلات حاکم در می‌یابیم که در این معادلات، مؤلفه‌های سرعت در دستگاه مختصات نسبی (دستگاه مختصاتی که به پره متصل است و همراه آن دوران می‌کند) تعریف شده‌اند بنابراین به سادگی می‌توان بر روی دیواره‌های جامد، شرط عدم لغزش را برای تمامی مؤلفه‌های سرعت اعمال کرد ( $u=v=w=0$ ).

همچنین برای دیواره می‌توان شرط ثابت بودن دما را با دقت بالایی به کار برد. درستی این شرط در آزمایشات زیادی به اثبات رسیده است. چه<sup>۱</sup> و همکارانش [۸] در آزمایشاتشان دمای دیواره مسیرخنک کاری را حدود 700k در نظر گرفته‌اند. از لحاظ تئوری نیز اعمال این شرط قابل توجیه است.

برای هر پره عدد بایوت بصورت  $Bi = \frac{hL}{k}$  تعریف می‌شود که در آن  $h$  ضریب جابجایی در سطح خارجی پره (سمت جریان اصلی داغ)،  $L$  طول مؤثر پره و  $k$  ضریب انتقال حرارت پره است. به دلیل اینکه پره‌ها از سطح خارجی بوسیله فیلم خنک کاری حفاظت می‌شوند، این فیلم علاوه بر انتقال حرارت از شدت اغتشاش نیز در سطح خارجی پره می‌کاهد، به همین دلیل ضریب جابجایی نسبت به حالتیکه فیلم خنک کاری برقرار نیست، کمتر است. همچنین پره‌ها بصورت توخالی ساخته می‌شوند به

---

1. Cheah

همین دلیل طول مؤثر آنها نیز کم می‌باشد. جنس پره‌ها نیز معمولاً از آلیاژهای فولاد که مقاوم در برابر حرارت هستند، می‌باشند که ضریب انتقال حرارت آنها در مقایسه با سایر موارد نسبتاً بالا است. کلیه عوامل ذکر شده موجب می‌شوند که عدد بایوت، نسبتاً کوچک باشد و بتوان پره را لامپ فرض کرد. بدین معنی که می‌توان از گرادیان دما در پره صرف‌نظر کرده و یک دما را به کل پره نسبت داد. (کاهش گرادیان دما تأثیر مستقیمی در کاهش تنشهای حرارتی دارد).

اعمال شرط مرزی برای فشار اندکی دشوار است زیرا معمولاً مقدار فشار روی مرز معلوم نیست و به عنوان بخشی از حل کلی باید تعیین شود. بطور کلی، شرط مرزی نیومن برای فشار اعمال می‌شود. اگر پره ثابت باشد می‌توان شرط مرزی را از رابطه زیر بدست آورد [۵]:

$$\frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}^*} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 (\mathbf{V}^* \cdot \bar{\mathbf{n}})}{\partial \mathbf{n}^{*2}} \quad (۸۴-۲)$$

که در رابطه فوق  $\bar{\mathbf{n}}$  معرف بردار عمود بر سطح است. برای مثال اگر بردار عمود بر سطح در جهت X باشد، شرط مرزی فشار روی مرز به صورت زیر خواهد بود [۵]:

$$\frac{\partial P^*}{\partial x^*} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \quad (۸۵-۲)$$

به ازای اعداد رینولدز نسبتاً بزرگ می‌توان شرط مرزی فشار روی دیواره را بصورت ساده زیر اعمال کرد [۵]:

$$\frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}^*} = 0 \quad (۸۶-۲)$$

برای پره‌های روتور توربین که دوران می‌کنند شرایط مرزی ذکر شده را نمی‌توان برای فشار اعمال کرد. در این مورد شرط مرزی مربوط به فشار به فرم زیر خواهد بود :

$$\frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}^*} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 (\mathbf{V}^* \cdot \bar{\mathbf{n}})}{\partial \mathbf{n}^{*2}} - \mathbf{a}_{\text{rel},c}^* \quad (۸۷-۲)$$

که در رابطه فوق  $\mathbf{a}_{\text{rel},c}^*$  معرف شتاب بی‌بعد مرکزگرای دستگاه مختصات نسبی، نسبت به دستگاه مختصات اینرسی است و به ازای اعداد رینولدز بزرگ شرط مرزی فشار روی دیواره بصورت زیر خواهد بود :

$$\frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}^*} = -\mathbf{a}_{\text{rel},c}^* \quad (۸۸-۲)$$

هرچند اعمال شرط مرزی برای فشار نسبتاً دشوار است ولی روشهای عددی ویژه‌ای ابداع شده است که به معلوم بودن شرط مرزی فشار نیازی ندارند. به عنوان مثال فرمولبندی به روش علامتگذاری و سلول در یک شبکه جابجا شده، روش مناسبی از این نوع است که در این پروژه از این روش استفاده شده است.

در این تحقیق برای محاسبه ویسکوزیته توربولانس از روش  $k-\varepsilon$  استفاده شده است. روش  $k-\varepsilon$  در نزدیکی دیواره ( $y^+ < 40$ ) صادق نیست به همین دلیل در این ناحیه از تابع دیواره روش بالدوین و لومکس استفاده شده است (دقت تابع دیواره بالدوین و لومکس برای سطوح قوسی شکل نسبتاً بالا است). هرچند خود معادلات  $k-\varepsilon$  بر روی دیواره نیاز به شرط مرزی ندارند ولی در ناحیه نزدیک دیواره و در مرز بین ناحیه داخلی و ناحیه خارجی به شرط مرزی احتیاج دارند [۵]. اگر  $y_i$  سطح تماس ناحیه خارجی و زیر لایه لزج باشد، داریم:

$$k_{y=y_i} = \frac{\tau_i}{\rho C_D^{3/2}} \quad (۸۹-۲)$$

که در رابطه فوق  $C_D$  معمولاً 0.164 و  $\tau_i$  تنش برشی در  $y_i$  است به همین ترتیب:

$$\varepsilon_{y=y_i} = \frac{C_D k_{y=y_i}^{3/2}}{\ell} \quad (۹۰-۲)$$

که طول اختلاط را می‌توان با رابطه خطی زیر برای زیر لایه لزج بدست آورد:

$$\ell = ky \quad (۹۱-۲)$$

## ۲-۵-۲: شرایط مرزی در ورودی

در ورود شرایط مرزی معمولاً بصورت شرایط دیریکله است. برای سرعت، اعمال شرط مرزی در ورود بسیار ساده است. در این تحقیق در ورود، مؤلفه سرعت محوری برابر مقدار ثابت  $U$  لحاظ شده و سایر مؤلفه‌های سرعت برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند. ( $u=U, v=w=0$ )

اعمال پروفیل سرعت محوری یکنواخت در ناحیه ورودی یکی از شرایط مرزی معمول در بسیاری از مسائل CFD است. مشابه چنین شرطی را برای دما می‌توان به کار برد. در توربینهای گازی معمولاً

مقدار  $\ell$ ، برابر 0.5% شعاع میدان جریان به کار برده شده است) در این تحقیق مقدار  $\ell$ ، 8 درصد و مقدار  $\ell$ ، 1 درصد قطر هیدرولیکی در نظر گرفته شده است.

### ۲-۵-۳: شرایط مرزی در خروجی

بطور کلی پارامترهای جریان در مرز خروجی معلوم نیستند. بنابراین در اغلب مسائل CFD از شرط نیومن همگن (گرادیان صفر) برای پارامترهای جریان در خروجی استفاده می‌شود.

برای سرعت محوری می‌توان به سادگی شرط مرزی نیومن را اعمال کرد ( $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$ ). برای جریان

دو بعدی با فرض توسعه یافتگی سرعت ( $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$ ) از معادله پیوستگی شرط مرزی  $v$  بصورت  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

به دست می‌آید. با توجه به صفر بودن سرعت  $v$  در  $y=0$  (روی مرز جامد) به سادگی می‌توان در خروجی  $v$  را برابر صفر در نظر گرفت.



شکل ۲-۱۲: مرز خروجی در حالت دو بعدی

برای جریان سه بعدی نیز می‌توان به نتیجه مشابهی دست یافت. در شکل ۲-۱۳ مقطع خروجی

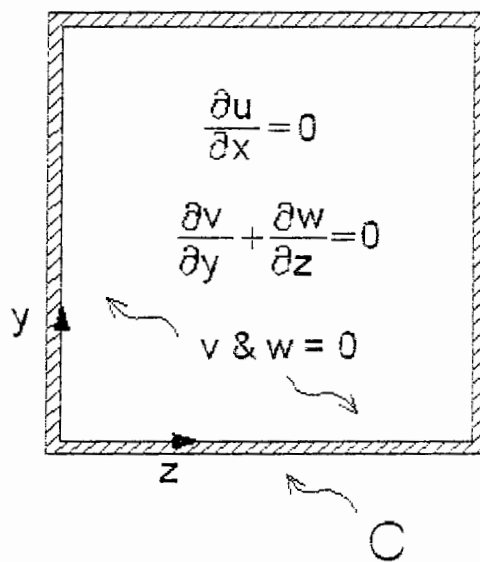
جریان نشان داده شده است با فرض توسعه یافتگی سرعت در خروجی ( $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$ ) از معادله پیوستگی،

معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی با شرایط مرزی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2-95-الف)$$

$$\text{at } C: v \ \& \ w = 0 \quad (2-95-ب)$$

که C معرف مرز مقطع است. مطابق یکی از قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال هر معادله متعلق به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی که همگن بوده و دارای شرایط مرزی همگن است. جوابهایش صفر است یعنی در تمام مقطع خروجی مؤلفه‌های سرعت V و W صفر هستند.



شکل ۲-۱۳: مرز خروجی در حالت سه بعدی

برای دما نیز می‌توان شرط توسعه یافتگی دما (و نه مستقیماً شرط همگن نیومن برای دما) را به کار برد:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T - T_s}{T_m - T_s} \right) = 0 \quad (2-96)$$

که در رابطه فوق  $T_s$  دمای دیواره‌ها (700k) و  $T_m$  دمای متوسط جریان در ناحیه خروجی است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T_m = \frac{1}{UA} \int \int_A uT \, dA \quad (2-97)$$



برای فشار در ناحیه خروجی هم می‌توان شرط مرزی نیومن همگن ( $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ ) و هم شرط خروج جریان به فضای آزاد ( $P = P_{\infty}$ ) را اعمال کرد. بسته به نوع مسأله می‌توان یکی از این شرایط را انتخاب نمود. (در روش CFD استفاده شده در این تحقیق، نیازی به اعمال شرط مرزی فشار در خروجی نیست).

برای پارامترهای جریان توربولانس نیز می‌توان به سادگی شرط مرزی نیومن همگن را اعمال کرد.

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$$

یعنی در ناحیه خروجی

## ۲-۵-۴: شرایط اولیه

از نظر فیزیکی، هر مسأله را می‌توان به حالت‌های دائم و یا غیردائم دسته‌بندی کرد. روشن است که در مسائل جریان دائم، جمله‌های تابع زمانی از معادلات حاکم حذف می‌شوند. در هر حال بنا به ملاحظات عددی، معادلات ناویراستوکس جریان دائم را در حالت کلی از یک روش شبه‌گذرا حل می‌کنیم. در این روش با افزودن یک جمله غیرفیزیکی تابع زمان به معادله پیوستگی، دستگاه معادلات غیردائمی تشکیل می‌شود و به دنبال آن شکل غیردائم معادلات را به صورت عددی حل می‌کنیم تا به جواب حالت دائم برسیم. روشن است که در اینجا زمان ارزش فیزیکی ندارد و فقط نقش تکرار را ایفا می‌کند. با توجه به اینکه معادلات حاکم به صورت شبه‌گذرا حل می‌شوند لذا نیاز به شرایط اولیه دارند.

شرایط اولیه بایستی دارای یک خاصیت اساسی باشند. این خاصیت اساسی، این است که شرایط اولیه بایستی در معادلات حاکم صدق کنند (یا حداقل با آن سازگار باشند) [۵].

برای اکثر سیستم‌هایی که دارای دیواره‌های بدون شتاب هستند و نیروهای حجمی بر آنها اثر ندارند می‌توان شرط اولیه سکون را لحاظ کرد. یعنی در تمام میدان جریان، مؤلفه‌های سرعت و فشار را برابر صفر فرض کرد. برای پره‌های ثابت (پره‌های استاتور)، فرض سکون، شرط اولیه مناسبی است. ولی برای پره‌های متحرک (پره‌های روتور) این فرض با معادلات ناویراستوکس سازگار نیست. زیرا این شرط برای پره‌های متحرک فاقد ارزش فیزیکی است و در معادلات حاکم صدق نمی‌کند. علت این امر وجود ترم شتاب گریز از مرکز در معادلات ناویراستوکس است.

### ۳-۱: الگوریتمهای تحلیل مسائل پایدار

همانگونه که در بخش ۲-۵-۴ بیان شد، تحلیل عددی مسائل جریان پایدار بصورت شبه گذرا صورت می‌گیرد و پس از انتخاب یک شرط اولیه مناسب، معادلات حاکم در حالت غیردائم حل می‌شوند تا جوابها به سمت جوابهای، جریان پایدار همگرا شوند.

پیش از پرداختن به روشهای عددی، لازم است که به مشکلی که در رابطه با حل معادلات ناویراستوکس غیردائم وجود دارد، اشاره کنیم. با توجه به معادلات حاکم (معادلات ۲-۳ تا ۲-۷) مشاهده می‌کنیم که معادلات مومنتوم و معادله انرژی دارای ترم تابع زمان برای مؤلفه‌های سرعت و دما هستند. بنابراین پارامترهای  $u, v, w$  و  $T$  بصورت غیردائم موجود می‌باشند ولی متأسفانه فشار در این معادلات دارای ترم تابع زمان نیست. برای غلبه بر این مشکل باید تغییراتی در معادله پیوستگی ایجاد کنیم تا فشار نیز قابل محاسبه شود.

برای انجام این کار، دو روش پیشنهاد شده است یکی از روشها افزودن جمله فشار تابع زمان به معادله پیوستگی است که به آن روش تراکم‌پذیر مصنوعی<sup>۱</sup> می‌گویند [۱۱] و روش دیگر ایجاد تغییراتی در معادلات مومنتوم و پیوستگی است که حاصل آن معادله یواسون برای فشار است.

### ۳-۱-۱: روش تراکم‌پذیری مصنوعی

کاربرد این روش برای معادلات ناویرا-استوکس تراکم‌ناپذیر بوده وازسوی چورین<sup>۲</sup> [۱۱] معرفی شده است. در این روش، معادله پیوستگی با درج یک عبارت تابع زمان برای فشار به فرم زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1-3)$$

در رابطه فوق  $\tau$ ، تراکم‌پذیری مصنوعی سیال است. با توجه به معادله حالت، تراکم‌پذیری را به صورت شبه سرعت صوت و جرم مخصوص مصنوعی را با استفاده از روابط زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau = \frac{1}{a^2} \quad (1-2-3)$$

1. Artificial Compressibility
2. Chorin

$$a^2 = \frac{P}{\rho} \quad (2-2-3)$$

در روابط فوق همه متغیرها به صورت بی بعد تعریف شده‌اند.

با توجه به روابط ۱-۳ و ۲-۳ معادله پیوستگی به فرم نهایی زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a^2 \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3-3)$$

گفتنی است که در حالت حدی، وقتی که به حالت دائم می‌رسیم ( $t \rightarrow \infty$ ) معادله ۳-۳ به صورت

$$\text{معادله پیوستگی تراکم‌ناپذیر ساده در می‌آید. (چون در حالت دائم } \frac{\partial P}{\partial t} \text{ برابر صفر شده است)}$$

### ۲-۱-۳: روش معادله پواسون برای فشار

یکی دیگر از روشهای CFD برای ایجاد ارتباط بین معادلات پیوستگی و مومنتوم، به کارگیری معادله پواسون برای فشار است [۵]. هرچند در این تحقیق از روش تراکم‌پذیری مصنوعی استفاده شده ولی بیان این روش خالی از لطف نیست. در این بخش، این روش برای جریانهای دوبعدی بررسی شده است. فرم بقایی معادلات ناویراستوکس در حالت بی‌بعد و در جهات x و y بصورت زیر است. برای سادگی علامت \* از بالای معادلات حذف شده است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (3-4-الف)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 v \quad (3-4-ب)$$

اگر از معادلات فوق به ترتیب نسبت به x و y مشتق بگیریم و نتیجه را با هم جمع کنیم، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (uv) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (v^2) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 u) + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 v) \right] \quad (5-3)$$

سمت راست معادله ۵-۳ بصورت زیر قابل ساده شدن است.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 u) + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 v) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6-3)$$

در نهایت معادله ۳-۵ به فرم زیر قابل ساده شدن است :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial y^2} = \frac{-\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathbf{u}^2) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mathbf{uv}) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mathbf{v}^2) + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathbf{D}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mathbf{D}) \right] \quad (3-7)$$

در رابطه فوق  $D$ ، اتساع  $(\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y})$  است.

روشن است که در یک جریان تراکم‌ناپذیر، از معادله پیوستگی، عبارت  $D$  صفر است. ولی به دلایل عمدی این عبارت را در معادله ۳-۷ برابر صفر قرار نمی‌دهیم. در واقع باید آنرا در معادله ۳-۷ نگه‌داریم تا از انباشته شدن خطا در طی عملیات تکرار و همچنین از ناپایداری غیرخطی جلوگیری کند.

### ۳-۲: نحوه تولید مش

در مسائلی که در آنها قوانین حاکم را به ترتیب حل می‌کنیم، بهتر است فرمولبندیهای تفاضل محدود را به صورتی بنویسیم که برای شبکه‌بندی موسوم به شبکه جابجا شده مناسب باشد. این روش، امکان به هم جفت شدن متغیرها را فراهم کرده و پایداری را بهبود می‌بخشد.

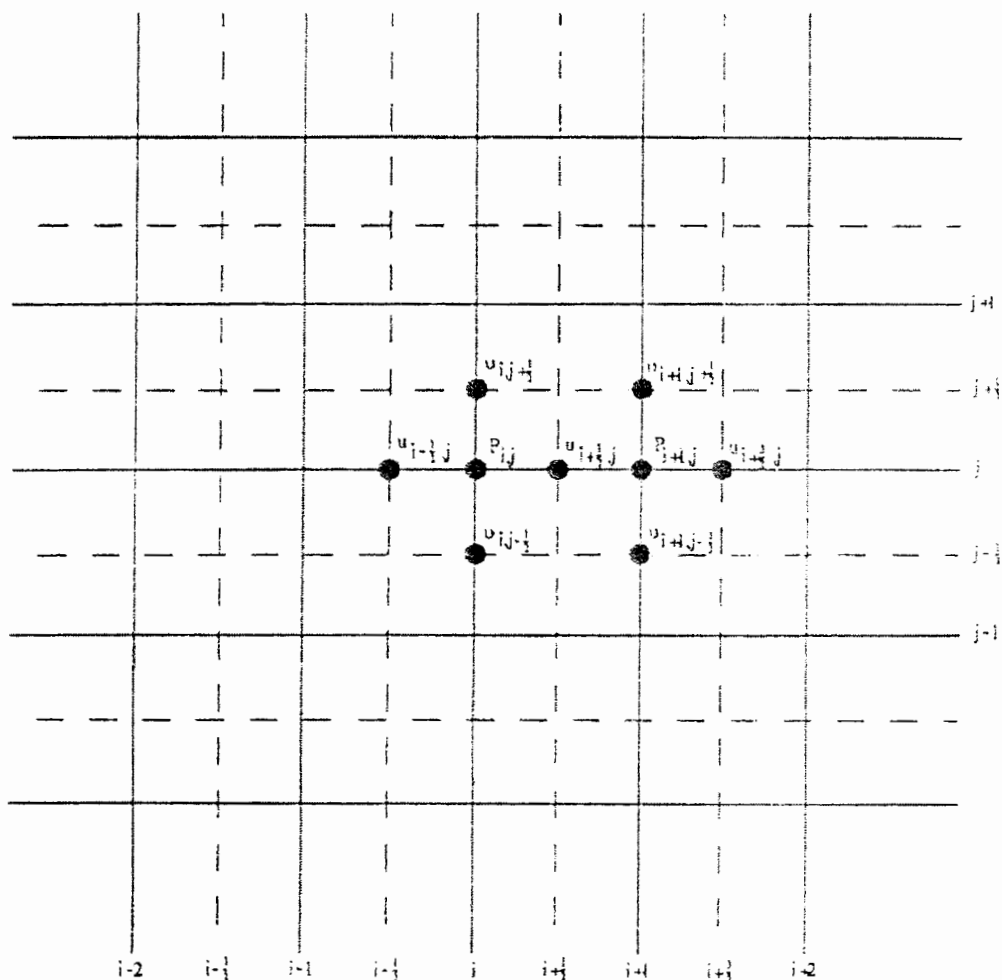
شبکه جابجا شده را به روشهای مختلفی می‌توان تولید کرد. مثلاً شبکه را می‌توان در امتداد یکی از خطوط مختصات به اندازه نصف فاصله دو نقطه و یا در امتداد قطر و به اندازه نصف قطر جابجا کرد. در شکل ۳-۱ نمونه‌ای از شبکه جابجا شده نشان داده شده است (در حالت دو بعدی). با توجه به شکل، از آنجا که از دو شبکه منطبق بر هم استفاده می‌شود، آنها را شبکه‌های اولیه و ثانویه می‌نامیم. نقاط شبکه اولیه را با  $i$  و  $j$  که برای شبکه‌های استاندارد به کار می‌رود نشان می‌دهیم، در حالیکه شبکه ثانویه را با فواصل نصف مشخص می‌کنیم.

شبکه اولیه با خطوط پرو شبکه ثانویه با خطوط خطچین نشان داده شده است. مؤلفه‌های  $u$  و  $v$  سرعت و فشار  $P$  مجهولهای مسأله هستند. نمونه‌ای از تخصیص متغیرها به نقاط مختلف شبکه به

صورت زیر است. فشار را در گره‌های شبکه اولیه تعریف می‌کنیم و مولفه‌های سرعت را روی سطوح شبکه ثانویه انتخاب می‌کنیم.

به عبارت دقیقتر، مؤلفه  $x$  سرعت ( $u$ ) را در فاصله میانی بین دو گروه  $(i + \frac{1}{2})$  و در جهت  $y$  مشابه

به شبکه اولیه ( $j$ ) انتخاب می‌کنیم. مؤلفه  $y$  سرعت را نیز در گره‌های  $i, j + \frac{1}{2}$  تعریف می‌کنیم.



شکل ۳-۱: نمونه شبکه جابجا شده و متغیرهای جریان [۵]

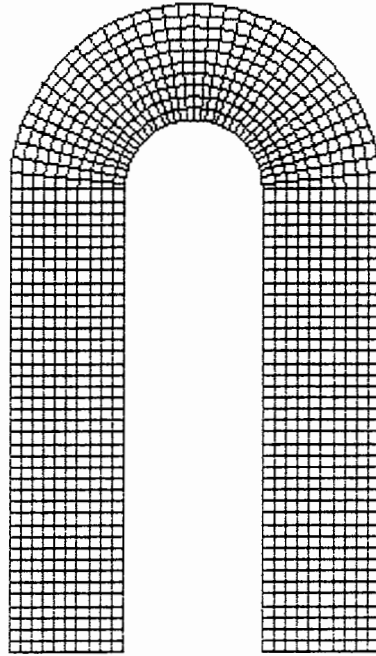
از آنجا که مرزها بر روی شبکه ثانویه تعریف می‌شوند و فشار بر روی شبکه اولیه تعریف شده و در معادلات حاکم فاقد مشتق مرتبه دوم است، لذا نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار نیست.

در جدول زیر شماره گره‌های تخصیص یافته برای پارامترهای جریان در حالت سه بعدی آمده است :

جدول ۱-۳: شماره گره های اختصاص یافته برای پارامترهای جریان در حالت سه بعدی [۱۲]

پارامتر	جهت x	جهت y	جهت z
u	$i + \frac{1}{2}$	j	k
v	i	$j + \frac{1}{2}$	k
w	i	j	$k + \frac{1}{2}$
P	i	j	k
T	i	j	k
k	i	j	k
$\varepsilon$	i	j	k

با توجه به هندسه مسیر خنک‌کاری در ناحیه قوس، دیگر معادلات حاکم در دستگاه مختصات کارتیزین صادق نیستند. بطورکلی دو روش برای تحلیل مش و بدست آوردن معادلات جدید، پیشنهاد می‌شود. روش اول، روش عمومی و معمول برای تحلیل قلمروهای غیرمستطیلی است. در این روش از یک نگاشت مناسب استفاده می‌شود و مش تحت این نگاشت به مش مستطیلی تبدیل می‌شود. سپس ترمهای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم مطابق پارامترهای دستگاه مختصات جدید محاسبه می‌شوند.



شکل ۳-۲: شبکه مسیر خنک کاری در حالت دوبعدی [۱۳]

فرض کنیم که مش اصلی در دستگاه مختصات  $xy$  تعریف شده باشد در صورتیکه پس از اعمال نگاشت، مش بصورت مستطیلی درآید و دستگاه مختصات جدید  $\xi\eta$  باشد، می‌توانیم برای بدست آوردن ترمهای مشتقات مربوط به معادلات حاکم از قانون زنجیره‌ای مشتقات استفاده کنیم:

$$\xi = \xi(x, y) \quad (1-8-3)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (2-8-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (3-8-3)$$

اگر  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  را با  $\xi_x$  و سایر مشتقات را به همین شکل نشان دهیم، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (1-9-3)$$

و به طریق مشابه:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2-9-3)$$

ترمهای  $\xi_x$ ،  $\xi_y$ ،  $\eta_x$  و  $\eta_y$ ، متریکهای انتقال نامیده می‌شوند [۵]. در واقع متریکها، نسبت طول قوس‌ها در فضای محاسباتی به طول قوسهای مشابه در فضای فیزیکی هستند. برای محاسبه متریکها می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$\xi_x = \mathbf{J} \mathbf{y}_\eta \quad (۱-۱۰-۳)$$

$$\xi_y = -\mathbf{J} \mathbf{x}_\eta \quad (۲-۱۰-۳)$$

$$\xi_x = \mathbf{J} \mathbf{y}_\eta \quad (۳-۱۰-۳)$$

$$\eta_x = \mathbf{J} \mathbf{x}_\xi \quad (۴-۱۰-۳)$$

در روابط فوق،  $\mathbf{J}$  ژاکوبین تبدیل نامیده می‌شود.

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mathbf{x}_\xi \mathbf{y}_\eta - \mathbf{y}_\xi \mathbf{x}_\eta} \quad (۵-۱۰-۳)$$

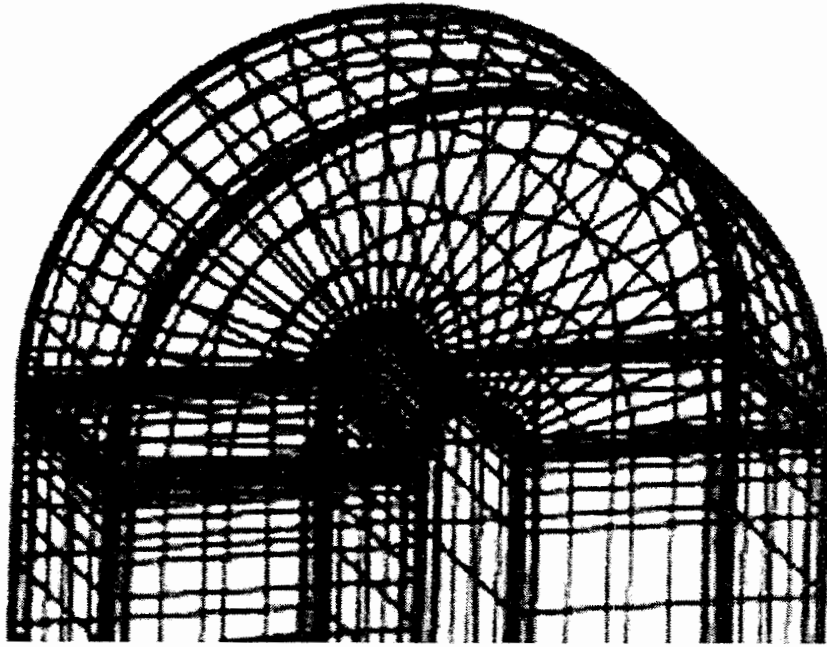
ژاکوبین در واقع نسبت سطح (نسبت حجم در حالت سه بعدی) در فضای فیزیکی به سطح در فضای محاسباتی است.

از مقایسه ترمهای ساده مشتقات در دستگاه مختصات مستطیلی با ترمهای پیچیده مشتقات در دستگاه مختصات غیرمستطیلی (۳-۹) نتیجه می‌شود که محاسبه مشتقات و بخصوص مشتقات مرتبه بالا در دستگاه مختصات غیرمستطیلی، کار بسیار مشکلی است و با اعمال این روش حجم محاسبات مربوط به مشتقات فوق‌العاده بالا خواهد رفت.

در این تحقیق از روش دیگری برای تحلیل معادلات حاکم در ناحیه قوس استفاده شده است. به این ترتیب که فضای خنک‌کاری به سه ناحیه تقسیم شده است. این سه قسمت عبارتند از:

دو ناحیه مکعب مستطیلی و یک ناحیه به شکل نیم حلقه. در دو ناحیه مکعب مستطیلی تولید مش بسیار ساده بوده و مشها به شکل مستطیلی تولید شده‌اند و در ناحیه قوس نیز، مش در جهات  $\theta$  و  $Z$  تولید شده است.





شکل ۳-۳: شبکه مسیر خنک کاری در حالت سه بعدی [۱۳]

در دو ناحیه مکعب مستطیلی، معادلات حاکم در دستگاه مختصات کارتزین و در ناحیه قوس (نیم حلقه) در دستگاه مختصات استوانه‌ای، حل شده‌اند. (مشبهاً در دستگاه مختصات استوانه‌ای به شکل مکعب هستند). در قسمتهایی که نواحی به هم می‌رسند، معادلات حاکم بهم کوپل شده‌اند. بطوریکه ورودی یک ناحیه، خروجی ناحیه دیگر خواهد بود. به این ترتیب حجم محاسبه مشتقات در ناحیه قوس به حداقل خواهد رسید.

### ۳-۳: نحوه گسسته کردن معادلات حاکم

فرمولبندی بسیار مناسب در شبکه جابجاشده برای گسسته کردن معادلات حاکم، روش علامتگذاری وسلول است که توسط هارلوولج<sup>۱</sup> [۱۲] ابداع شده است. در این روش، برای گسسته کردن معادلات حاکم از تقریب تفاضل محدود پیشرو مرتبه اول برای مشتق زمان و تقریب تفاضل محدود مرتبه دوم برای مشتقات مکان استفاده شده است. در این تحقیق معادلات بصورت صریح فرمولبندی شده‌اند.

1. Marker and Cell Method  
2. Harlow & Welch

### ۳-۳-۱: صورت گسسته معادلات حاکم در دستگاه مختصات کارتیزین

حال می‌توان براساس بخشهای ۳-۲ و ۳-۳ معادلات حاکم را گسسته کرد. برای بهبودی دقت بهتر است که معادلات ناویراستوکس را به فرم بقایی بنویسیم. فرم بقایی معادلات ناویراستوکس در حالت بی‌بعد بصورت زیر است. برای سادگی علامت \* از بالای پارامترها حذف شده است.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} u^2 + P \\ uv \\ uw \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} uv \\ v^2 + P \\ vw \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} uw \\ vw \\ w^2 + P \end{Bmatrix} + \mathbf{a}_{rel} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (11-3)$$

صورت گسسته معادله پیوستگی در دستگاه مختصات کارتیزین از قرار زیر است:

$$\frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n}{\Delta t} + a^2 \left( \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1}}{\Delta x} \right) + a^2 \left( \frac{v_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1}}{\Delta y} \right) + a^2 \left( \frac{w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z} \right) = 0 \quad (12-3)$$

معادله X مومنوم:

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta t} + \frac{P_{i+1,j,k}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta x} + \frac{(u^2)_{i+1,j,k}^n - (u^2)_{i,j,k}^n}{\Delta x} + \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} + \frac{(uw)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n - (uw)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} + \mathbf{a}_{x,rel} = \frac{1}{Re} \left( \frac{u_{i-\frac{1}{2},j,k}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + u_{i+\frac{3}{2},j,k}^n}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^n}{\Delta y^2} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}^n - 2u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + u_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^n}{\Delta z^2} \right) \quad (13-3)$$

معادله y مومنتوم :

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta t} + \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta x} + \\ & \frac{(v^2)_{i,j+1,k}^n - (v^2)_{i,j,k}^n}{\Delta y} + \frac{P_{i,j+1,k}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta y} + \\ & \frac{(vw)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - (vw)_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} + a_{y_{rel}} = \frac{1}{Re} \left( \frac{v_{i-1,j+\frac{1}{2},k}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta x^2} \right) + \\ & \frac{1}{Re} \left( \frac{v_{i,j-\frac{1}{2},k}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j+\frac{3}{2},k}^n}{\Delta y^2} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{v_{i,j+\frac{1}{2},k-1}^n - 2v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{i,j+\frac{1}{2},k+1}^n}{\Delta z^2} \right) \end{aligned} \quad (14-3)$$

معادله z مومنتوم :

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{(uw)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n - (uw)_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} + \\ & \frac{(uw)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - (vw)_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} + \frac{(w^2)_{i,j,k+1}^n - (w^2)_{i,j,k}^n}{\Delta z} + \\ & \frac{P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta z} + a_{z_{rel}} = \frac{1}{Re} \left( \frac{w_{i-1,j,k+\frac{1}{2}}^n - 2w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + w_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x^2} \right) + \\ & \frac{1}{Re} \left( \frac{w_{i,j-1,k+\frac{1}{2}}^n - 2w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + w_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y^2} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{w_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n - 2w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + w_{i,j,k+\frac{3}{2}}^n}{\Delta z^2} \right) \end{aligned} \quad (15-3)$$

در معادلات ۱۳-۳ تا ۱۵-۳، با توجه به نحوه استقرار پارامترها روی شبکه جابجا شده، لازم است

که برخی ترمهای معادلات به فرم زیر محاسبه شوند:

$$(u^2)_{i+1,j,k} = \frac{1}{4} \left( u_{i+\frac{3}{2},j,k} + u_{i+\frac{1}{2},j,k} \right)^2 \quad (1-16-3)$$

$$(u^2)_{i,j,k} = \frac{1}{4} \left( u_{i+\frac{1}{2},j,k} + u_{i-\frac{1}{2},j,k} \right)^2 \quad (2-16-3)$$

$$(v^2)_{i,j+1,k} = \frac{1}{4} \left( v_{i,j+\frac{3}{2},k} + v_{i,j+\frac{1}{2},k} \right)^2 \quad (3-16-3)$$

$$(\mathbf{v}^2)_{i,j,k} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2},k} + \mathbf{v}_{i,j-\frac{1}{2},k})^2 \quad (4-16-3)$$

$$(\mathbf{uv})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} + \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j+1,k}) (\mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2},k} + \mathbf{v}_{i+1,j+\frac{1}{2},k}) \quad (5-16-3)$$

$$(\mathbf{uv})_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} + \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j-1,k}) (\mathbf{v}_{i,j-\frac{1}{2},k} + \mathbf{v}_{i+1,j-\frac{1}{2},k}) \quad (6-16-3)$$

$$(\mathbf{uv})_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j,k} + \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j+1,k}) (\mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2},k} + \mathbf{v}_{i-1,j+\frac{1}{2},k}) \quad (7-16-3)$$

$$(\mathbf{uw})_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} + \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j,k+1}) (\mathbf{w}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \mathbf{w}_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}) \quad (8-16-3)$$

$$(\mathbf{uw})_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j,k-1} + \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j,k}) (\mathbf{w}_{i,j,k-\frac{1}{2}} + \mathbf{w}_{i+1,j,k-\frac{1}{2}}) \quad (9-16-3)$$

$$(\mathbf{uw})_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j,k} + \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j,k+1}) (\mathbf{w}_{i-1,j,k+\frac{1}{2}} + \mathbf{w}_{i,j,k+\frac{1}{2}}) \quad (10-16-3)$$

$$(\mathbf{vw})_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2},k} + \mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2},k+1}) (\mathbf{w}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \mathbf{w}_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}) \quad (11-16-3)$$

$$(\mathbf{vw})_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2},k-1} + \mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2},k}) (\mathbf{w}_{i,j,k-\frac{1}{2}} + \mathbf{w}_{i,j+1,k-\frac{1}{2}}) \quad (12-16-3)$$

$$(\mathbf{vw})_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_{i,j-\frac{1}{2},k} + \mathbf{v}_{i,j-\frac{1}{2},k+1}) (\mathbf{w}_{i,j-1,k+\frac{1}{2}} + \mathbf{w}_{i,j,k+\frac{1}{2}}) \quad (13-16-3)$$

$$(\mathbf{w}^2)_{i,j,k+1} = \frac{1}{4} (\mathbf{w}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \mathbf{w}_{i,j,k+\frac{3}{2}})^2 \quad (14-16-3)$$

$$(\mathbf{w}^2)_{i,j,k} = \frac{1}{4} (\mathbf{w}_{i,j,k-\frac{1}{2}} + \mathbf{w}_{i,j,k+\frac{1}{2}})^2 \quad (15-16-3)$$

صورت گسسته معادله انرژی از قرار زیر است :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{T}_{i,j,k}^{n+1} - \mathbf{T}_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j,k}^n) \left( \frac{\mathbf{T}_{i+1,j,k}^n - \mathbf{T}_{i-1,j,k}^n}{4\Delta x} \right) + \\ & (\mathbf{v}_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + \mathbf{v}_{i,j-\frac{1}{2},k}^n) \left( \frac{\mathbf{T}_{i,j+1,k}^n - \mathbf{T}_{i,j-1,k}^n}{4\Delta y} \right) + (\mathbf{w}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \mathbf{w}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n) \left( \frac{\mathbf{T}_{i,j,k+1}^n - \mathbf{T}_{i,j,k-1}^n}{4\Delta z} \right) = \\ & \text{RePr} \left( \frac{\mathbf{T}_{i+1,j,k}^n - 2\mathbf{T}_{i,j,k}^n + \mathbf{T}_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{\mathbf{T}_{i,j+1,k}^n - 2\mathbf{T}_{i,j,k}^n + \mathbf{T}_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \quad (17-3)$$

برای جریانهای مغشوش، صورت گسسته معادلات  $k$  و  $\varepsilon$  تاحدی شبیه معادله انرژی است :

$$\begin{aligned} & \frac{k_{i,j,k}^{n+1} - k_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + \bar{u}_{i-\frac{1}{2},j,k}^n) \left( \frac{k_{i+1,j,k}^n - k_{i-1,j,k}^n}{4\Delta x} \right) + \\ & (\bar{v}_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + \bar{v}_{i,j-\frac{1}{2},k}^n) \left( \frac{k_{i,j+1,k}^n - k_{i,j-1,k}^n}{4\Delta y} \right) + (\bar{w}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \bar{w}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n) \left( \frac{k_{i,j,k+1}^n - k_{i,j,k-1}^n}{4\Delta z} \right) = \\ & \frac{\mu_{r,i,k}^n}{\text{RePr}_k} \left( \frac{k_{i+1,j,k}^n - 2k_{i,j,k}^n + k_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{k_{i,j+1,k}^n - 2k_{i,j,k}^n + k_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \right. \\ & \left. \frac{k_{i,j,k+1}^n - 2k_{i,j,k}^n + k_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} - \varepsilon_{i,j,k}^n \right) \quad (18-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_{i,j,k}^{n+1} - \varepsilon_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + \bar{u}_{i-\frac{1}{2},j,k}^n) \left( \frac{\varepsilon_{i+1,j,k}^n - \varepsilon_{i-1,j,k}^n}{4\Delta x} \right) + \\ & (\bar{v}_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + \bar{v}_{i,j-\frac{1}{2},k}^n) \left( \frac{\varepsilon_{i,j+1,k}^n - \varepsilon_{i,j-1,k}^n}{4\Delta y} \right) + \\ & (\bar{w}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \bar{w}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n) \left( \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^n - \varepsilon_{i,j,k-1}^n}{4\Delta z} \right) = \frac{\mu_{r,i,k}^n}{\text{RePr}_\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon_{i+1,j,k}^n - 2\varepsilon_{i,j,k}^n + \varepsilon_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \right. \\ & \left. \frac{\varepsilon_{i,j+1,k}^n - 2\varepsilon_{i,j,k}^n + \varepsilon_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^n - 2\varepsilon_{i,j,k}^n + \varepsilon_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) + \\ & \frac{c_1}{\text{Re}} \left( \frac{\mu_r \varepsilon \phi}{k} \right)_{i,j,k} - C_2 \left( \frac{\varepsilon^2}{k} \right)_{i,j,k} \quad (19-3) \end{aligned}$$

از فصل دوم می‌دانیم که  $\phi^*$  معرف تولید اغتشاش ناشی از تنشهای رینولدز در حالت بی‌بعد است و

از رابطه زیر بدست می‌آید (برای سادگی علامت \* از بالای پارامترها حذف شده است)

$$\phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \quad (20-3)$$

برای محاسبه  $\phi_{i,j,k}$  بایستی کلیه مشتقات رابطه ۲۰-۳ را در نقاط  $k, j, i$  محاسبه کنیم :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{i,j,k} = \frac{\bar{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \bar{u}_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\Delta x} \quad (1-21-3)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right|_{i,j,k} = \frac{\bar{v}_{i,j+\frac{1}{2},k} - \bar{v}_{i,j-\frac{1}{2},k}}{\Delta y} \quad (2-21-3)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right|_{i,j,k} = \frac{\bar{w}_{i,j,k+\frac{1}{2}} - \bar{w}_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \quad (3-21-3)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{i,j,k} = \frac{(\bar{u}_{i-\frac{1}{2},j+1,k} + \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j+1,k}) - (\bar{u}_{i-\frac{1}{2},j-1,k} + \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j-1,k})}{4\Delta y} \quad (4-21-3)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right|_{i,j,k} = \frac{(\bar{v}_{i+1,j-\frac{1}{2},k} + \bar{v}_{i+1,j+\frac{1}{2},k}) - (\bar{v}_{i-1,j-\frac{1}{2},k} + \bar{v}_{i-1,j+\frac{1}{2},k})}{4\Delta x} \quad (5-21-3)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|_{i,j,k} = \frac{(\bar{u}_{i-\frac{1}{2},j,k+1} + \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j,k+1}) - (\bar{u}_{i-\frac{1}{2},j,k-1} + \bar{u}_{i+\frac{1}{2},j,k-1})}{4\Delta z} \quad (6-21-3)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right|_{i,j,k} = \frac{(\bar{w}_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} + \bar{w}_{i+1,j,k-\frac{1}{2}}) - (\bar{w}_{i-1,j,k+\frac{1}{2}} + \bar{w}_{i-1,j,k-\frac{1}{2}})}{4\Delta x} \quad (7-21-3)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right|_{i,j,k} = \frac{(\bar{v}_{i,j-\frac{1}{2},k+1} + \bar{v}_{i,j+\frac{1}{2},k}) - (\bar{v}_{i,j-\frac{1}{2},k-1} + \bar{v}_{i,j+\frac{1}{2},k-1})}{4\Delta z} \quad (8-21-3)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right|_{i,j,k} = \frac{(\bar{w}_{i,j+1,k-\frac{1}{2}} + \bar{w}_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}) - (\bar{w}_{i,j-1,k-\frac{1}{2}} + \bar{w}_{i,j-1,k+\frac{1}{2}})}{4\Delta y} \quad (9-21-3)$$

### ۳-۳-۲: صورت گسسته معادلات حاکم در دستگاه مختصات استوانه‌ای

از آنجا که در ناحیه قوس، معادلات حاکم در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل می‌شوند، لذا در این بخش صورت گسسته معادلات حاکم را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان می‌کنیم با توجه به نحوه تولید مش، شماره‌های  $i$ ،  $j$  و  $k$  به ترتیب معرف شماره گره‌ها در جهات  $\theta$ ،  $r$  و  $z$  هستند. در اینجا نیز مانند بخش ۳-۳-۱ معادلات ناویراستوکس بصورت بقایی گسسته شده‌اند. فرم بقایی معادلات ناویراستوکس در دستگاه مختصات استوانه‌ای بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(v_r v_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta^2}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(v_\theta v_z) + \frac{2}{r} v_r v_\theta + a_{\theta,rel} = \\ \frac{-1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} (\nabla^2 v_\theta^2 - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}) \end{aligned} \quad (22-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}_r^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}_r \mathbf{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{v}_r \mathbf{v}_z}{\partial z} + \frac{1}{r} (\mathbf{v}_r^2 - \mathbf{v}_\theta^2) + \mathbf{a}_{r_{rel}} =$$

$$-\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{v}_r - \frac{\mathbf{v}_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathbf{v}_\theta}{\partial \theta}) \quad (23-3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{v}_r \mathbf{v}_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{v}_z \mathbf{v}_\theta) + \frac{\partial \mathbf{v}_z^2}{\partial z} + \frac{\mathbf{v}_r \mathbf{v}_z}{r} + \mathbf{a}_{z_{rel}} =$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}_z \quad (24-3)$$

صورت گسسته معادله مومنوم در جهت  $\theta$  از قرار زیر است :

$$\frac{\mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j,k}}^{n+1} - \mathbf{v}_{\theta_{i,j,k}}^n}{\Delta t} + \frac{1}{r_j} \frac{(\mathbf{v}_\theta^2)_{i+1,j,k}^n - (\mathbf{v}_\theta^2)_{i,j,k}^n}{\Delta \theta} + \frac{(\mathbf{v}_r \mathbf{v}_\theta)_{i+1/2,j+1/2,k}^n - (\mathbf{v}_r \mathbf{v}_\theta)_{i+1/2,j-1/2,k}^n}{\Delta r} +$$

$$\frac{(\mathbf{v}_\theta \mathbf{v}_z)_{i+1/2,j,k+1/2}^n - (\mathbf{v}_\theta \mathbf{v}_z)_{i+1/2,j,k-1/2}^n}{\Delta z} + \frac{2}{r_j} (\mathbf{v}_r \mathbf{v}_\theta)_{i+1/2,j,k}^n +$$

$$\mathbf{a}_{\theta_{rel}}^n + \frac{1}{r_j} \frac{P_{i+1,j,k}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta \theta} = \frac{1}{Re r_j^2} \left[ \frac{\mathbf{v}_{\theta_{i-1/2,j,k}}^n - 2\mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j,k}}^n + \mathbf{v}_{\theta_{i+3/2,j,k}}^n}{\Delta \theta^2} \right] +$$

$$\frac{1}{Re} \left[ \frac{\mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j-1,k}}^n - 2\mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j,k}}^n + \mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j+1,k}}^n}{\Delta r^2} \right] + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j,k-1}}^n - 2\mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j,k}}^n + \mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j,k+1}}^n}{\Delta z^2} \right] +$$

$$\frac{1}{Re r_j} \left[ \frac{\mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j+1/2,k}}^n - \mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j-1/2,k}}^n}{\Delta r} \right] - \frac{1}{Re r_j^2} \mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j,k}}^n + \frac{2}{Re r_j^2} \left[ \frac{\mathbf{v}_{r_{i+1,j,k}}^n - \mathbf{v}_{r_{i,j,k}}^n}{\Delta \theta} \right] \quad (25-3)$$

در معادله ۲۵-۳ بخشهایی که روی گره‌های تخصیص یافته‌شان قرار ندارند از روابط زیر محاسبه می‌شوند :

$$(\mathbf{v}_\theta^2)_{i+1,j,k} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_{\theta_{i+3/2,j,k}} + \mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j,k}})^2 \quad (1-26-3)$$

$$(\mathbf{v}_\theta^2)_{i,j,k} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j,k}} + \mathbf{v}_{\theta_{i-1/2,j,k}})^2 \quad (2-26-3)$$

$$(\mathbf{v}_r \mathbf{v}_\theta)_{i+1/2,j+1/2,k} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j,k}} + \mathbf{v}_{\theta_{i+1/2,j+1,k}}) (\mathbf{v}_{r_{i,j+1/2,k}} + \mathbf{v}_{r_{i+1,j+1/2,k}}) \quad (3-26-3)$$

$$(\mathbf{v}_r \mathbf{v}_\theta)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, k}} + \mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, j-1, k}}) (\mathbf{v}_{r_{i, j-\frac{1}{2}, k}} + \mathbf{v}_{r_{i+1, j-\frac{1}{2}, k}}) \quad (4-26-3)$$

$$(\mathbf{v}_\theta \mathbf{v}_z)_{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, k}} + \mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, k+1}}) (\mathbf{v}_{z_{i, j, k+\frac{1}{2}}} + \mathbf{v}_{z_{i+1, j, k+\frac{1}{2}}}) \quad (5-26-3)$$

$$(\mathbf{v}_\theta \mathbf{v}_z)_{i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, k}} + \mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, k-1}}) (\mathbf{v}_{z_{i, j, k-\frac{1}{2}}} + \mathbf{v}_{z_{i+1, j, k-\frac{1}{2}}}) \quad (6-26-3)$$

$$\mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, j+1, k}} + \mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, j, k}}) \quad (7-26-3)$$

$$\mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k}} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, j, k}} + \mathbf{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2}, j-1, k}}) \quad (8-26-3)$$

$$\mathbf{v}_{r_{i+1, j, k}} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{r_{i+1, j+\frac{1}{2}, k}} + \mathbf{v}_{r_{i+1, j-\frac{1}{2}, k}}) \quad (9-26-3)$$

$$\mathbf{v}_{r_{i, j, k}} = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{r_{i, j+\frac{1}{2}, k}} + \mathbf{v}_{r_{i, j-\frac{1}{2}, k}}) \quad (10-26-3)$$

$$\mathbf{v}_{r_{i+\frac{1}{2}, j, k}} = \frac{1}{4} (\mathbf{v}_{r_{i+1, j-\frac{1}{2}, k}} + \mathbf{v}_{r_{i+1, j+\frac{1}{2}, k}} + \mathbf{v}_{r_{i-1, j-\frac{1}{2}, k}} + \mathbf{v}_{r_{i-1, j+\frac{1}{2}, k}}) \quad (11-26-3)$$

فرم گسسته معادله مومنوم در جهت r :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{v}_{r_{i, j+\frac{1}{2}, k}}^{n+1} - \mathbf{v}_{i, j+\frac{1}{2}, k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \left[ \frac{(\mathbf{v}_r \mathbf{v}_\theta)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} - (\mathbf{v}_r \mathbf{v}_\theta)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}}{\Delta \theta} \right] + \\ & \frac{(\mathbf{v}_r^2)_{i, j+1, k}^n - (\mathbf{v}_r^2)_{i, j, k}^n}{\Delta r} + \left[ \frac{(\mathbf{v}_r \mathbf{v}_z)_{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - (\mathbf{v}_r \mathbf{v}_z)_{i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right] + \\ & \frac{1}{r_{j+\frac{1}{2}}} \left[ (\mathbf{v}_r^2)_{i, j+\frac{1}{2}, k}^n - (\mathbf{v}_\theta^2)_{i, j+\frac{1}{2}, k}^n \right] + \mathbf{a}_{r_{\text{res}}}^n + \frac{\mathbf{P}_{i, j+1, k}^n - \mathbf{P}_{i, j, k}^n}{\Delta r} = \\ & \frac{1}{\text{Re } r_{j+\frac{1}{2}}^2} \left( \frac{\mathbf{v}_{r_{i-1, j+\frac{1}{2}, k}}^n - 2\mathbf{v}_{r_{i, j+\frac{1}{2}, k}}^n + \mathbf{v}_{r_{i+1, j+\frac{1}{2}, k}}^n}{\Delta \theta^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\mathbf{v}_{r_{i, j-\frac{1}{2}, k}}^n - 2\mathbf{v}_{r_{i, j+\frac{1}{2}, k}}^n + \mathbf{v}_{r_{i, j+\frac{3}{2}, k}}^n}{\Delta r^2} \right) \\ & \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\mathbf{v}_{r_{i, j+\frac{1}{2}, k-1}}^n - 2\mathbf{v}_{r_{i, j+\frac{1}{2}, k}}^n + \mathbf{v}_{r_{i, j+\frac{1}{2}, k+1}}^n}{\Delta z^2} \right) + \frac{1}{\text{Re } r_{j+\frac{1}{2}}} \left( \frac{\mathbf{v}_{r_{i, j+1, k}}^n - \mathbf{v}_{r_{i, j, k}}^n}{\Delta r} \right) - \frac{1}{\text{Re } r_{j+\frac{1}{2}}^2} \mathbf{v}_{r_{i, j+\frac{1}{2}, k}}^n - \end{aligned}$$



$$\frac{2}{\text{Re}r_{j+\frac{1}{2}}} \left( \frac{v_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^n - v_{\theta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^n}{\Delta\theta} \right) \quad (27-3)$$

در معادله ۲۷-۳ ترمهایی که روی گره‌های تخصیص یافته‌شان قرار ندارند از روابط زیر محاسبه

می‌شوند :

$$(v_r v_{\theta})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4} (v_{\theta_{i+\frac{1}{2},j,k}} + v_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+1,k}}) (v_{r_{i,j+\frac{1}{2},k}} + v_{r_{i+1,j+\frac{1}{2},k}}) \quad (1-28-3)$$

$$(v_r v_{\theta})_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4} (v_{\theta_{i-\frac{1}{2},j,k}} + v_{\theta_{i-\frac{1}{2},j+1,k}}) (v_{r_{i,j+\frac{1}{2},k}} + v_{r_{i-1,j+\frac{1}{2},k}}) \quad (2-28-3)$$

$$(v_r v_z)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (v_{r_{i,j+\frac{1}{2},k}} + v_{r_{i,j+\frac{1}{2},k+1}}) (v_{z_{i,j,k+\frac{1}{2}}} + v_{z_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}}) \quad (3-28-3)$$

$$(v_r v_z)_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (v_{r_{i,j+\frac{1}{2},k}} + v_{r_{i,j+\frac{1}{2},k-1}}) (v_{z_{i,j,k-\frac{1}{2}}} + v_{z_{i,j+1,k-\frac{1}{2}}}) \quad (4-28-3)$$

$$(v_r^2)_{i,j+1,k} = \frac{1}{4} (v_{r_{i,j+\frac{3}{2},k}} + v_{r_{i,j+\frac{1}{2},k}})^2 \quad (5-28-3)$$

$$(v_r^2)_{i,j,k} = \frac{1}{4} (v_{r_{i,j+\frac{1}{2},k}} + v_{r_{i,j-\frac{1}{2},k}})^2 \quad (6-28-3)$$

$$(v_{\theta}^2)_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{16} (v_{\theta_{i-\frac{1}{2},j+1,k}} + v_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+1,k}} + v_{\theta_{i-\frac{1}{2},j,k}} + v_{\theta_{i+\frac{1}{2},j,k}})^2 \quad (7-28-3)$$

$$v_{r_{i,j+1,k}} = \frac{1}{2} (v_{r_{i,j+\frac{3}{2},k}} + v_{r_{i,j+\frac{1}{2},k}}) \quad (8-28-3)$$

$$v_{r_{i,j,k}} = \frac{1}{2} (v_{r_{i,j+\frac{1}{2},k}} + v_{r_{i,j-\frac{1}{2},k}}) \quad (9-28-3)$$

$$v_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}} = \frac{1}{2} (v_{\theta_{i+\frac{1}{2},j+1,k}} + v_{\theta_{i+\frac{1}{2},j,k}}) \quad (10-28-3)$$

$$v_{\theta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}} = \frac{1}{2} (v_{\theta_{i-\frac{1}{2},j+1,k}} + v_{\theta_{i-\frac{1}{2},j,k}}) \quad (11-28-3)$$

فرم گسسته معادله مومنوم در جهت Z :

$$\begin{aligned} & \frac{v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n - v_{z,i,j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{1}{r_j} \left[ \frac{(v_z v_\theta)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n - (v_z v_\theta)_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta \theta} \right] + \\ & \left[ \frac{(v_r v_z)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - (v_r v_z)_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} \right] + \frac{(v_z^2)_{i,j,k+1}^n - (v_z^2)_{i,j,k}^n}{\Delta z} + \\ & \frac{1}{r_j} (v_r v_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + a_{z,rel}^n + \frac{P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k}^n}{\Delta z} = \\ & \frac{1}{Re r_j^2} \left( \frac{v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n - 2v_{z,i,j,k}^n + v_{z,i,j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta \theta^2} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n - 2v_{z,i,j,k}^n + v_{z,i,j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r^2} \right) + \\ & \frac{1}{Re} \left( \frac{v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n - 2v_{z,i,j,k}^n + v_{z,i,j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z^2} \right) + \frac{1}{Re r_j} \left( \frac{v_{z,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - v_{z,i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} \right) \end{aligned} \quad (29-3)$$

در معادله ۳-۲۹ ترمیابی که روی گره‌های مخصوصشان قرار ندارند، از روابط زیر محاسبه می‌شوند :

$$(v_z v_z)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (v_{\theta,i+\frac{1}{2},k} + v_{\theta,i+\frac{1}{2},k+1}) (v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z,i+1,j,k+\frac{1}{2}}) \quad (1-30-3)$$

$$(v_\theta v_z)_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (v_{\theta,i-\frac{1}{2},k} + v_{\theta,i-\frac{1}{2},k+1}) (v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z,i-1,j,k+\frac{1}{2}}) \quad (2-30-3)$$

$$(v_r v_z)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (v_{r,i,j+\frac{1}{2},k} + v_{r,i,j+\frac{1}{2},k+1}) (v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z,i,j+1,k+\frac{1}{2}}) \quad (3-30-3)$$

$$(v_r v_z)_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (v_{r,i,j-\frac{1}{2},k} + v_{r,i,j-\frac{1}{2},k+1}) (v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z,i,j-1,k+\frac{1}{2}}) \quad (4-30-3)$$

$$(v_z^2)_{i,j,k+1} = \frac{1}{4} (v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z,i,j,k+\frac{3}{2}})^2 \quad (5-30-3)$$

$$(v_z^2)_{i,j,k} = \frac{1}{4} (v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}} + v_{z,i,j,k-\frac{1}{2}})^2 \quad (6-30-3)$$

$$(v_r v_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (v_{r,i,j+\frac{1}{2},k} + v_{r,i,j-\frac{1}{2},k} + v_{r,i,j+\frac{1}{2},k+1} + v_{r,i,j-\frac{1}{2},k+1}) v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (7-30-3)$$

$$v_{z,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - v_{z,i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (v_{z,i,j+1,k+\frac{1}{2}} - v_{z,i,j-1,k+\frac{1}{2}}) \quad (8-30-3)$$

فرم گسته معادله پیوستگی نیز بصورت زیر است :

$$\frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n}{\Delta t} + a^2 \left( \frac{1}{r_j} v_{r,i,j,k}^{n+1} + \frac{v_{\theta,i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} - v_{\theta,i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1}}{r_j \Delta \theta} + \frac{v_{r,i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - v_{r,i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1}}{\Delta r} + \frac{v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{z,i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z} \right) = 0 \quad (31-3)$$

که در معادله ۳۱-۳ تنها ترمی که روی گره مخصوصش قرار ندارد  $v_{r,i,j,k}$  است که از رابطه زیر

بدست می آید :

$$v_{r,i,j,k} = \frac{v_{r,i,j+\frac{1}{2},k} + v_{r,i,j-\frac{1}{2},k}}{2} \quad (32-3)$$

صورت گسته معادله انرژی :

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (v_{\theta,i+\frac{1}{2},j,k}^n + v_{\theta,i-\frac{1}{2},j,k}^n) \left( \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{4r_j \Delta \theta} \right) + \\ & (v_{r,i,j+\frac{1}{2},k}^n + v_{r,i,j-\frac{1}{2},k}^n) \left( \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{4\Delta r} \right) + (v_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n + v_{z,i,j,k-\frac{1}{2}}^n) \left( \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{4\Delta z} \right) = \\ & \frac{1}{\text{RePr}} \left( \frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{r_j^2 \Delta \theta} + \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{\Delta r^2} + \right. \\ & \left. \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2r_j \Delta r} + \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) \quad (33-3) \end{aligned}$$

برای جریانها مغشوش صورت گسته معادلات  $\varepsilon - k$  در دستگاه مختصات قطبی از قرار زیر است :

$$\begin{aligned} & \frac{k_{i,j,k}^{n+1} - k_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (\bar{v}_{\theta,i+\frac{1}{2},j,k}^n + \bar{v}_{\theta,i-\frac{1}{2},j,k}^n) \left( \frac{k_{i+1,j,k}^n - k_{i-1,j,k}^n}{4r_j \Delta \theta} \right) + \\ & (\bar{v}_{r,i,j+\frac{1}{2},k}^n + \bar{v}_{r,i,j-\frac{1}{2},k}^n) \left( \frac{k_{i,j+1,k}^n - k_{i,j-1,k}^n}{4\Delta r} \right) + (\bar{v}_{z,i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \bar{v}_{z,i,j,k-\frac{1}{2}}^n) \left( \frac{k_{i,j,k+1}^n - k_{i,j,k-1}^n}{4\Delta z} \right) = \\ & \frac{\mu_{r,i,j,k}^n}{\text{RePr}_k} \left( \frac{k_{i-1,j,k}^n - 2k_{i,j,k}^n + k_{i+1,j,k}^n}{r_j^2 \Delta \theta} + \frac{k_{i,j+1,k}^n - 2k_{i,j,k}^n + k_{i,j-1,k}^n}{\Delta r^2} + \right. \\ & \left. \frac{k_{i,j+1,k}^n - k_{i,j-1,k}^n}{2r_j \Delta r} + \frac{k_{i,j,k+1}^n - 2k_{i,j,k}^n + k_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} - \varepsilon_{i,j,k}^n \right) \quad (34-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\varepsilon_{i,j,k}^{n+1} - \varepsilon_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (\bar{v}_{\theta_{i+\frac{1}{2},k}}^n + \bar{v}_{\theta_{i-\frac{1}{2},k}}^n) \left( \frac{\varepsilon_{i+1,j,k}^n - \varepsilon_{i-1,j,k}^n}{4r_j \Delta \theta} \right) + \\
& (\bar{v}_{r_{i,j+\frac{1}{2},k}}^n + \bar{v}_{r_{i,j-\frac{1}{2},k}}^n) \left( \frac{\varepsilon_{i,j+1,k}^n - \varepsilon_{i,j-1,k}^n}{4\Delta r} \right) + (\bar{v}_{r_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^n + \bar{v}_{r_{i,j,k-\frac{1}{2}}}^n) \left( \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^n - \varepsilon_{i,j,k-1}^n}{4\Delta z} \right) = \\
& \frac{\mu_{r_{i,j,k}}^n}{\text{RePr}_\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon_{i+1,j,k}^n - 2\varepsilon_{i,j,k}^n + \varepsilon_{i-1,j,k}^n}{r_j^2 \Delta \theta} + \frac{\varepsilon_{i,j+1,k}^n - 2\varepsilon_{i,j,k}^n + \varepsilon_{i,j-1,k}^n}{\Delta r^2} + \right. \\
& \left. \frac{\varepsilon_{i,j+1,k}^n - \varepsilon_{i,j-1,k}^n}{2r_j \Delta r} + \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^n - 2\varepsilon_{i,j,k}^n + \varepsilon_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) + \frac{C_1}{\text{Re}} \left( \frac{\mu_r \varepsilon \phi}{k} \right)_{i,j,k} - c_2 \left( \frac{\varepsilon^2}{k} \right)_{i,j,k} \quad (3-3)
\end{aligned}$$

### ۴-۳ : نحوه اعمال شرایط مرزی

به علت مشخص نبودن شرط مرزی فشار در بیشتر مسائل، استفاده از شبکه جابجا شده و فرمولبندی به روش علامتگذاری و سلول مفید است. بدین ترتیب که می‌توان شبکه ثانویه را بر روی مرزهای قلمرو که در آنها شرط مرزی سرعت و نه فشار، لازم است منطبق کرد. در هر حال این فایده با ضرری نیز همراه است و آن ناشی از نیاز به مقادیری از سرعت در خارج قلمروست. این مقادیر را سرانجام با برونابی مقادیر داخل قلمرو و یا تقریب مشتقها در مرزها حساب می‌کنیم. برای اعمال شرایط مرزی، شبکه جابجا شده، شکل ۴-۳ را در حالت جریان دوبعدی در نظر می‌گیریم.

سطح جامد را در امتداد  $j = \frac{1}{2}$  و مرز ورودی را در امتداد  $i = \frac{1}{2}$  فرض می‌کنیم چون سطح جامد فرض شده است، شرط عدم لغزش را می‌توان به کار برد، در نتیجه :

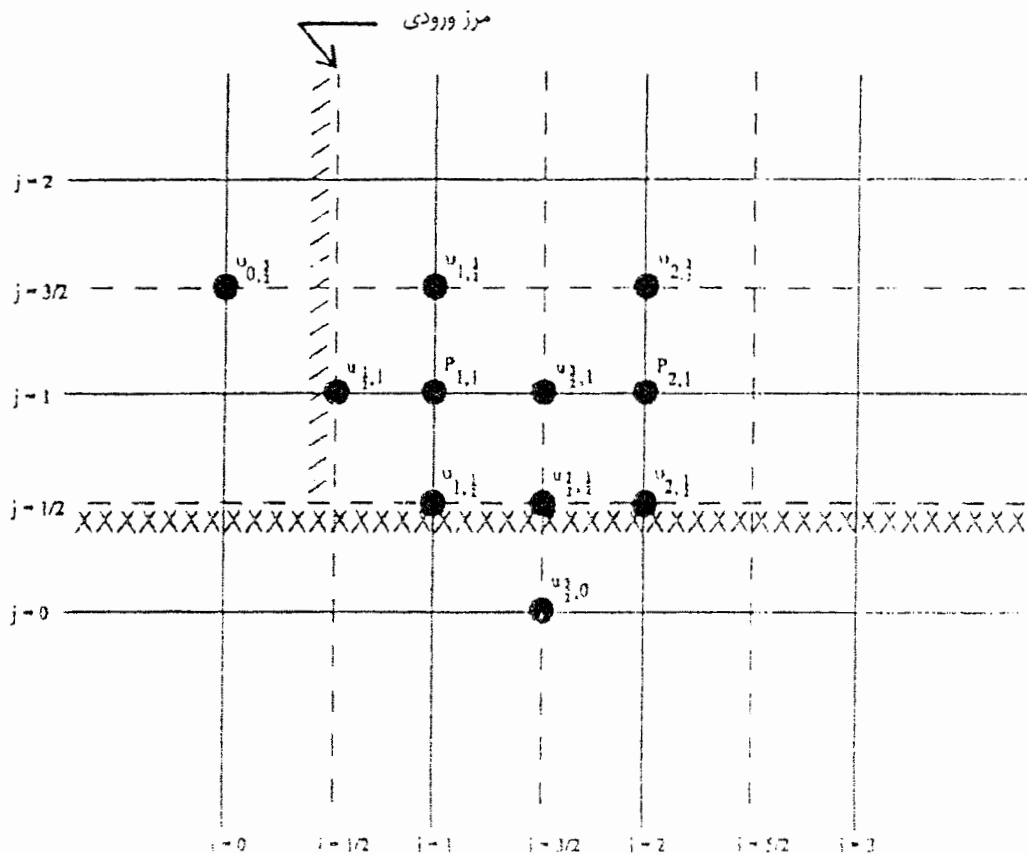
$$v_{1,\frac{1}{2}} = v_{2,\frac{1}{2}} = \dots = v_{i,\frac{1}{2}} = 0$$

به همین ترتیب  $u_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = 0$  است که از آن  $u_{\frac{3}{2},0}$  بصورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$u_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{\frac{3}{2},0} + u_{\frac{3}{2},1}) = 0$$

یا

$$u_{\frac{3}{2},0} = -u_{\frac{3}{2},1}$$



شکل ۳-۴: شرایط مرزی در یک شبکه جابجا شده [۵]

در مرز ورودی مؤلفه  $u$  سرعت مستقیماً مشخص می شود ( $u_{\frac{1}{2},j} = U$ ) در حالیکه مؤلفه  $v$  سرعت را با برونریابی چنین تقریب می زنیم:

$$v_{0,\frac{3}{2}} = 2v_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}} - v_{1,\frac{3}{2}}$$

که  $v_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}$  در شرط مرزی ورودی داده شده است.

فرض کنیم که گره های  $i = m + \frac{1}{2}$  مرز خروجی باشند، در خروجی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \& \quad v = 0$$

بنابراین در این مرز داریم :

$$u_{m+\frac{1}{2},j} = u_{m-\frac{1}{2},j}$$

$$v_{m+1,j+\frac{1}{2}} = -v_{m-1,j+\frac{1}{2}}$$

با توجه به اینکه ترم فشار بر روی شبکه اولیه اعمال می‌شود و نیز به دلیل اینکه در معادلات حاکم ترم فشار فقط دارای مشتقات مرتبه اول نسبت به مکان است، دیگر نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار نیست. هرچند دما نیز مانند فشار بر روی شبکه اولیه تحلیل می‌شود. ولی معادله انرژی دارای مشتقات مرتبه دوم دما نسبت به مکان است، لذا برای دما نیاز به اعمال شرایط مرزی است. ولی برای شرط مرزی دما، نیاز به نقاط خارج از شبکه نیز هست.

در ورودی دما برابر با یک پروفیل ثابت  $T = T_{in}$  است. لذا برای دما در خارج از شبکه در مرز ورودی داریم :

$$T_{0,j} = 2T_{in} - T_{1,j}$$

بر روی دیواره  $z = \frac{1}{2}$  نیز شرط دیواره دما ثابت،  $T = T_w$  را اعمال می‌کنیم پس :

$$T_{i,0} = 2T_w - T_{i,1}$$

اعمال سایر شرایط مرزی نیز به همین شکل خواهد بود.

### ۳-۵ : نحوه اجرای روش علامتگذاری و سلول

برای حل CFD معادلات حاکم بایستی ابتدا مش را تولید کنیم و پس از تولید مش شرایط اولیه را اعمال کنیم (برای جریانهای دائم، شرایط اولیه بایستی با فیزیک مسأله سازگار باشند و شرایط مرزی را ارضا نمایند). با توجه به اینکه معادلات مومنتوم مستقل از معادلات انرژی هستند ابتدا معادلات مومنتوم را بایستی حل کنیم و سپس جوابهای آنرا در معادله انرژی قرار دهیم و معادله انرژی را حل نماییم. با توجه به اینکه معادلات حاکم به شکل صریح گسسته شده‌اند کفایت در هر گام زمانی مقادیر جدید پارامترهای معادلات حاکم را از حل صریح جبری معادلات گسسته شده، بدست آوریم.

با توجه به نحوه گسسته شدن معادلات حاکم در می‌یابیم که در این روش ابتدا بایستی در هر گام از معادلات مومنتوم مقدار جدید مؤلفه‌های سرعت را بدست آوریم و سپس از معادله اصلاح شده

پیوستگی، مقدار فشار جدید را تعیین کنیم و در هرگام تحلیل لازم است که شرایط مرزی را اعمال نماییم تا پاسخها به سمت پاسخهای حالت دائم همگرا شوند. همچنین برای ایجاد پایداری تحلیل لازم است که گام زمانی  $\Delta t$ ، گام مکانی (کوچکترین گام مکانی)  $\Delta x$ ، عدد رینولدز ( $Re$ ) و سرعت صوت مجازی ( $a$ ) رابه نحوی انتخاب کنیم که پاسخها همگرا شوند. برای مثال در حالتیکه دوران وجود ندارد، برای جریان داخلی دوبعدی بایستی عوامل ذکر شده در نامساویهای زیر صدق کند. [۱۴]

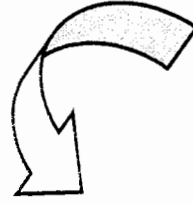
$$\frac{1}{2}(u_s^2 + v_s^2)\Delta t Re \leq 1 \quad (36-3)$$

$$\frac{4\Delta x}{Re\Delta x^2} \leq 1 \quad (37-3)$$

$$\frac{4\Delta t}{Re\Delta x^2} \left( \frac{1}{Re} + \frac{a^2\Delta t}{2} \right) \leq 1 \quad (38-3)$$

نحوه تحلیل برای جریانهای مغشوش نیز به همین شکل است با این تفاوت که در این جریانها برای محاسبه ویسکوزیته توربولانس، معادلات  $k-\varepsilon$  بطور همزمان با معادلات مومنتوم حل می‌شوند. همانگونه که گفته شد، پس از تحلیل میدان جریان می‌توان معادله انرژی را بطور مستقل از سایر معادلات حاکم تحلیل نمود.

## فصل چهارم



### بحث و نتیجه گیری



#### ۴-۱: بررسی دقت و حساسیت

در این بخش دقت و حساسیت روش علامتگذاری و سلول بررسی شده است. برای بررسی دقت، بایستی جوابهای حاصل از این روش را با یک مسأله خاص که دارای جواب دقیق است، مقایسه نمود. برای این منظور جریان حول دو صفحه موازی در حالت دوبعدی انتخاب شده است. زیرا هندسه این جریان یک بخش از هندسه جریان خنک کاری داخلی (جریان دوبعدی) را تشکیل می‌دهد. می‌دانیم که پروفیل سرعت یک جریان آرام، پایدار و تراکم ناپذیر بین دو صفحه تخت، در حالت توسعه یافته از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$u = 1.5 V \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (1-4)$$

که در رابطه فوق،  $R$  نصف فاصله بین دو صفحه،  $r$  فاصله از خط تقارن مسیر و  $V$  متوسط سرعت جریان است. برای این منظور روش علامتگذاری و سلول در حالت زیر پیاده شده است:

۱- فاصله بین دو صفحه: ۱۰ cm

۲- طول صفحات: ۲/۵ m

۳- سرعت جریان: ۰/۰۶۴ m/s

۴- سیال: هوا

۵- نسبت طول به عرض مشها: ۴

۶- عدد رینولدز: ۴۰۰

در این تحقیق، میزان خطا براساس میزان انحراف پروفیل سرعت جریان خروجی از پروفیل به دست آمده از رابطه ۴-۱، تعیین شده است.

در شکل ۴-۱، میزان خطا برحسب تعداد گامهای زمانی تحلیل در تعداد گرههای مختلف بررسی شده است. اگر تعداد گرهها در جهت فاصله بین دو صفحه را با  $n_y$  و تعداد گامهای تحلیل را با  $n_x$  نشان دهیم، مشاهده می‌کنیم که به ازای  $n_y = 5$  و تمامی مقادیر  $n_x$ ، میزان خطا قابل توجه (بیش از ۱۰٪) است و به ازای  $n_x > 5000$ ، مقدار خطا حدود ۱۳/۵٪ است ولی به ازای  $n_y > 5$  و  $n_x > 20000$  میزان خطا کمتر از ۱۰٪ است. همچنین در  $n_y > 25$  دیگر دقت روش بهبود چندانی پیدا نمی‌کند و بنابراین در  $n_y > 25$  دقت روش، حساسیتی نسبت به تعداد گرهها ندارد.

## ۲-۴: جریان آرام دوبعدی

در این بخش نتایج مربوط به جریان آرام در مسیر خنک کاری در حالت دوبعدی بررسی شده است. در تصاویر این بخش، کلیه کمیتها براساس روابط ۲-۷۳ بی بعد شده‌اند. در اشکال ۳-۴ تا ۹-۴ پارامترهای جریان در یک مسیر خنک کاری ایستا (مسیر خنک کاری پره‌های استاتور) بررسی شده‌اند. هندسه و مشخصات کلی جریان از قرار زیر است:

۱- سیال: هوا

۲- سرعت جریان ورودی:  $11.0667 \text{ m/s}$

۳- عدد رینولدز: ۴۰۰

۴- دمای جریان ورودی:  $300 \text{ K}$

۵- دمای دیواره‌ها:  $700 \text{ K}$

۶- قطر هیدرولیکی:  $3 \text{ cm}$

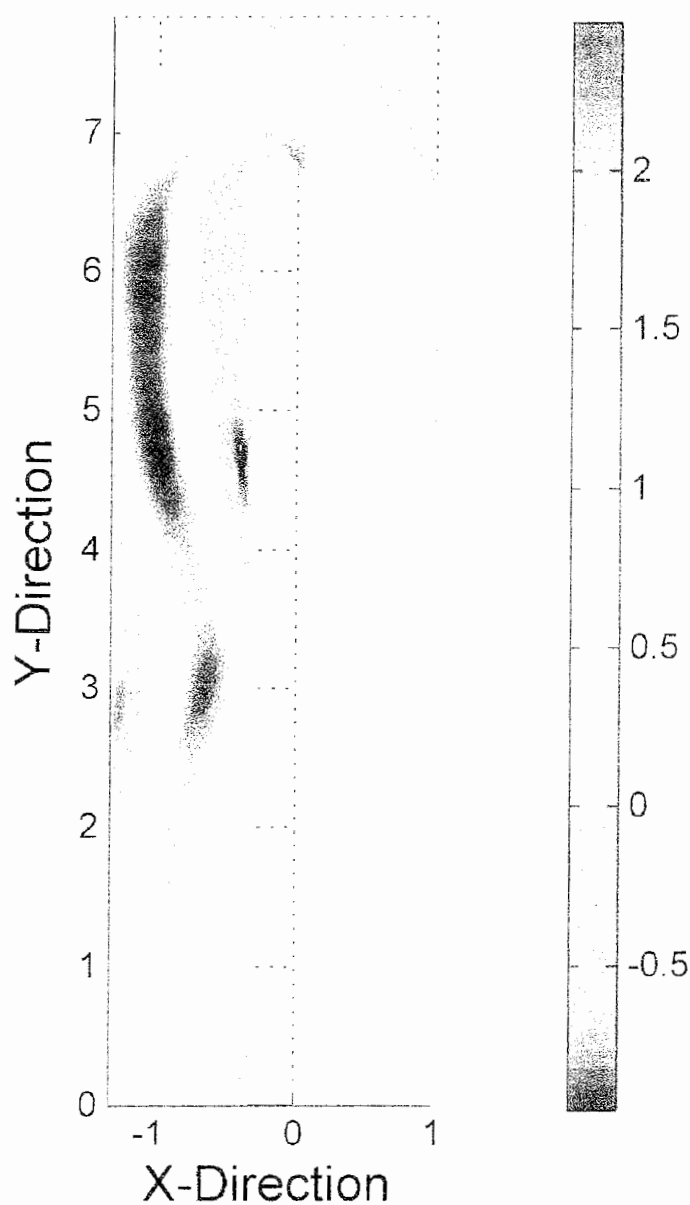
۷- طول قسمتهای مستقیم مسیر (هر کدام):  $20 \text{ cm}$

۸- شعاع انحنا داخلی قوس:  $0.5 \text{ cm}$

در شکل ۳-۴ کانتور سرعت محوری بی بعد در مسیر خنک کاری نشان داده شده است. مطابق شکل سیال از ناحیه اول (ناحیه مستقیم سمت راست) وارد شده و پس از عبور از مسیر U شکل خنک کاری از ناحیه سوم (ناحیه مستقیم سمت چپ) خارج می شود.

در ناحیه اول در ابتدا نحوه حرکت سیال مانند جریان بین دو صفحه تخت است و با رسیدن قوس، تقارن محوری جریان بهم خورده و توده سیال به سمت دیواره داخلی تمایل پیدا می کند. در انتهای قوس پدیده جدایش اتفاق می افتد. در اثر جدایش در این ناحیه گردابه‌های شدیدی وجود دارد. این گردابه‌ها با جریانهای با سرعت محوری منفی (رنگ آبی) نشان داده شده‌اند. مطابق شکل به دلیل انحنای شدید مسیر، توده سیال پس از عبور از قوس با دیواره مقابل (در ناحیه سوم) برخورد کرده و به دلیل اثرات مومنتوم ناشی از این برخورد، دچار تلاطم شده است (در شعاعهای انحنا بزرگ چنین تلاطمی وجود ندارد). به دلیل اثرات لزجت، با پیشروی جریان در مسیر خنک کاری تلاطمات تولید شده ناشی از قوس کاهش پیدا می کنند.

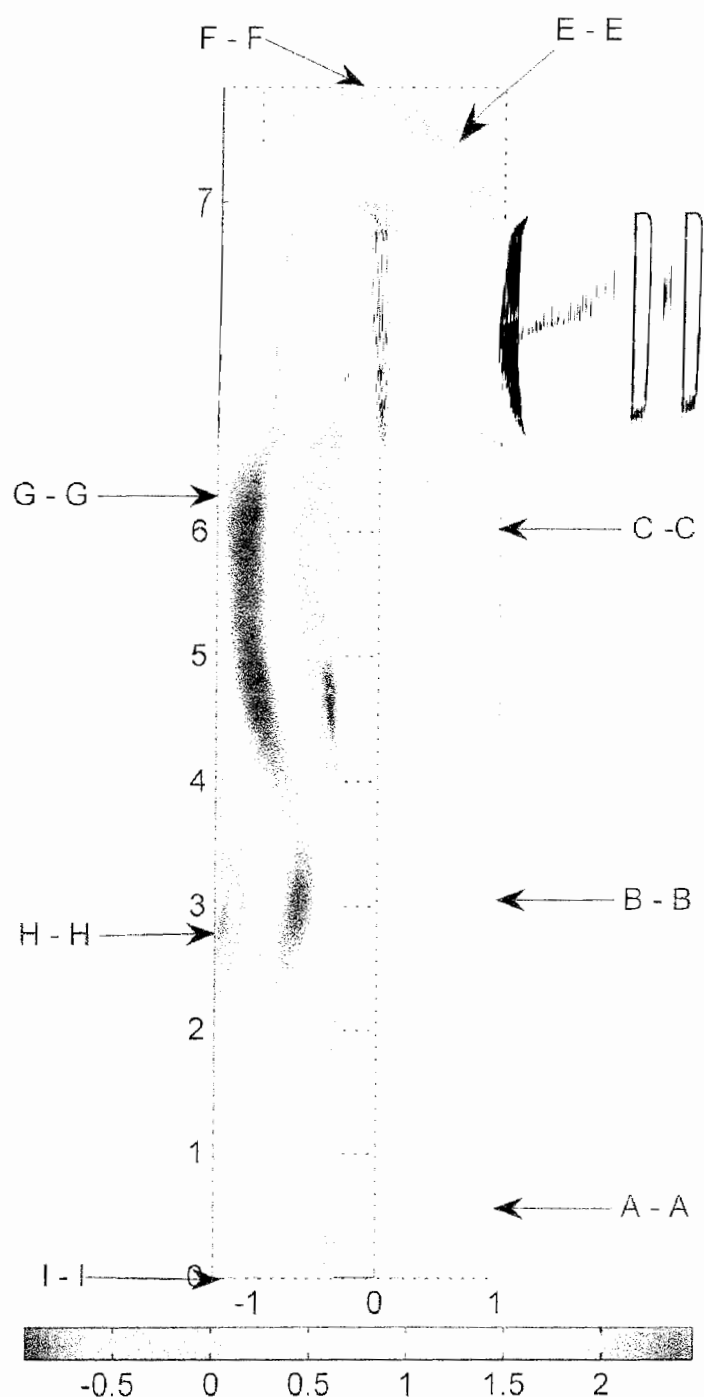
## Axial Velocity Contour



شکل ۴-۳: کانتور سرعت محوری بی بعد در مسیر خنک کاری دوبعدی

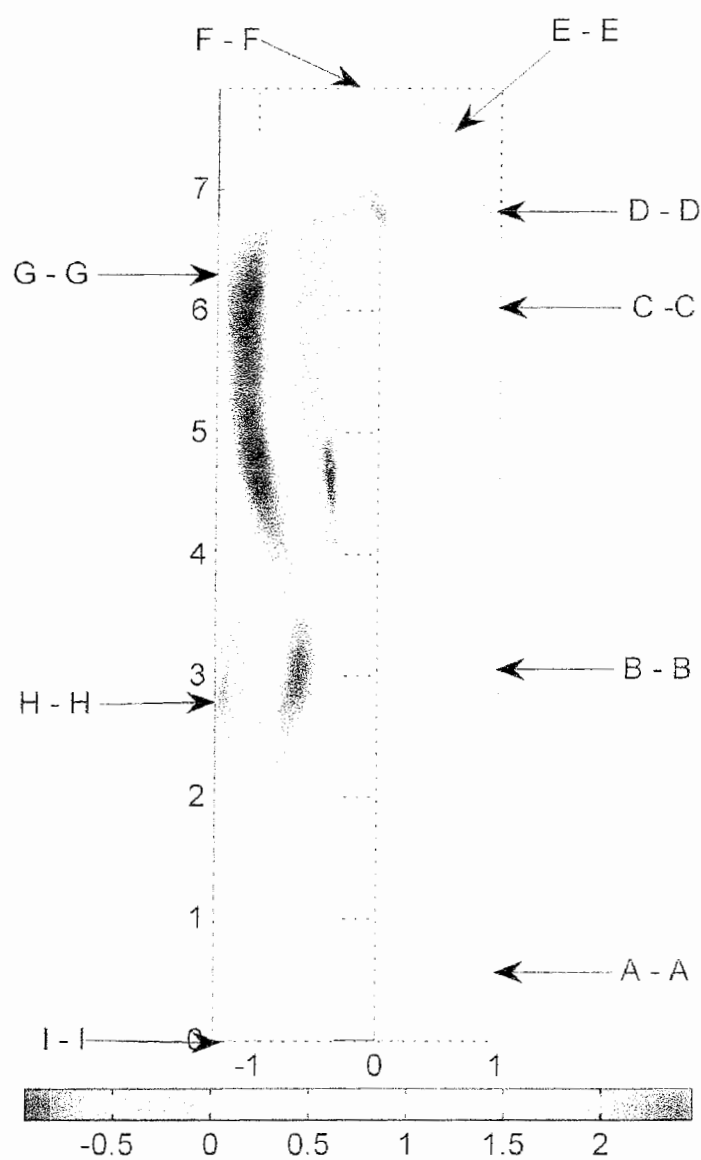
در شکل ۴-۴ نیز کانتور سرعت محوری آمده است و بر روی آن ۹ برش مشخص شده است. در شکل ۴-۵ پروفیل‌های سرعت مربوط به این ۹ برش نشان داده شده‌اند. برش A-A در نزدیکی ناحیه ورودی است. پروفیل‌های سرعت در قسمتهای A-A و B-B نشان می‌دهند که اثرات لزجت در سیال در حال گسترش است و با پیشروی جریان، بتدریج به ضخامت لایه مرزی سیال افزوده می‌شود.

برش C-C در نزدیکی انتهای ناحیه اول قرار دارد. در این قسمت برخلاف قسمتهای A-A و B-B، دیگر پروفیل سرعت متقارن نیست. علت این قضیه وجود قوس در پایین دست جریان است. در برشهای D-D، E-E و F-F پروفیلهای سرعت در ناحیه قوس نشان داده شده‌اند. مطابق شکل در اثر انحنا، توده سیال به سمت انحنای داخلی قوس (دیواره محدب) منحرف شده است. برش G-G مربوط به ناحیه انتهای قوس است. در این ناحیه پدیده جدایش اتفاق افتاده و در اثر جدایش گردابه‌هایی تولید شده‌اند. با توجه به پروفیل سرعت در این بخش می‌توان اثر جدایش را در قسمت منفی پروفیل سرعت مشاهده کرد.

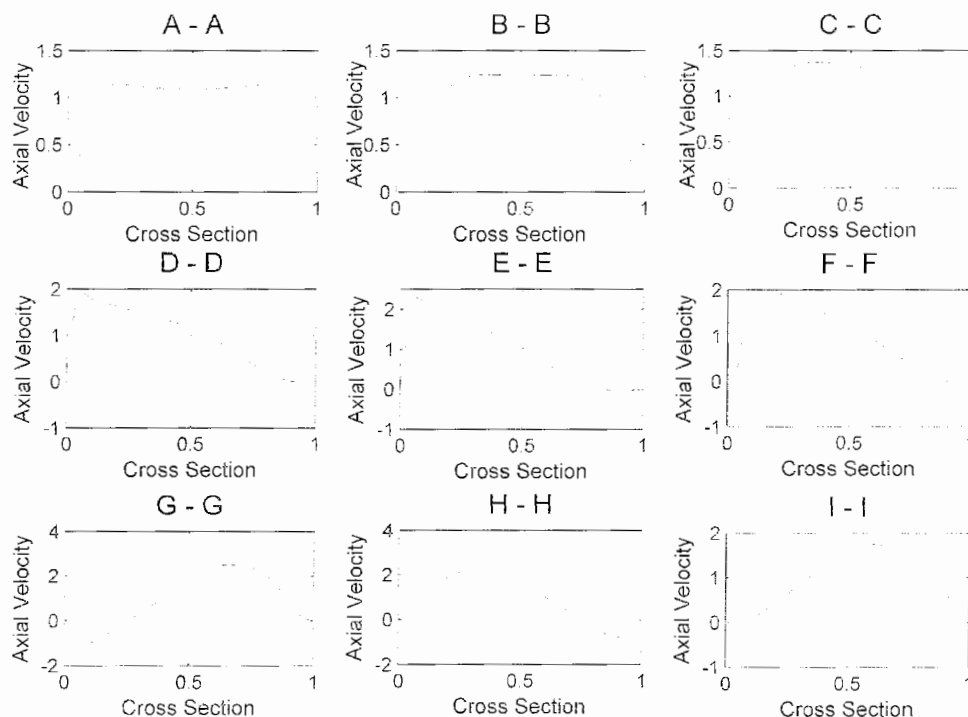


شکل ۴-۴: برشهای محلهای مهم جریان

برش C-C در نزدیکی انتهای ناحیه اول قرار دارد. در این قسمت برخلاف قسمتهای A-A و B-B، دیگر پروفیل سرعت متقارن نیست. علت این قضیه وجود قوس در پایین دست جریان است. در برشهای D-D، E-E و F-F پروفیلهای سرعت در ناحیه قوس نشان داده شده‌اند. مطابق شکل در اثر انحنای توده سیال به سمت انحنای داخلی قوس (دیواره محدب) منحرف شده است. برش G-G مربوط به ناحیه انتهای قوس است. در این ناحیه پدیده جدایش اتفاق افتاده و در اثر جدایش گردابه‌هایی تولید شده‌اند. با توجه به پروفیل سرعت در این بخش می‌توان اثر جدایش را در قسمت منفی پروفیل سرعت مشاهده کرد.



شکل ۴-۴: برشهای محلهای مهم جریان



شکل ۴-۵: پروفیل‌های سرعت محوری در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری

در برش H-H نیز پروفیل سرعت در ناحیه متلاطم (ناحیه بعد از قوس) نشان داده شده است. مطابق این شکل، در اثر تلاطم ناشی از وجود انحنا شدید، گردابه‌هایی در جریان ایجاد شده است. در برش I-I پروفیل سرعت خروجی مشخص شده است. در ناحیه خروجی اثر تلاطم تا حد زیادی کاهش یافته است. (در صورتیکه طول ناحیه خروجی افزایش یابد، در اثر لزجت سیال، اثرات تلاطم کاملاً محو می‌شود و پروفیل سرعت خروجی کاملاً متقارن خواهد شد.)

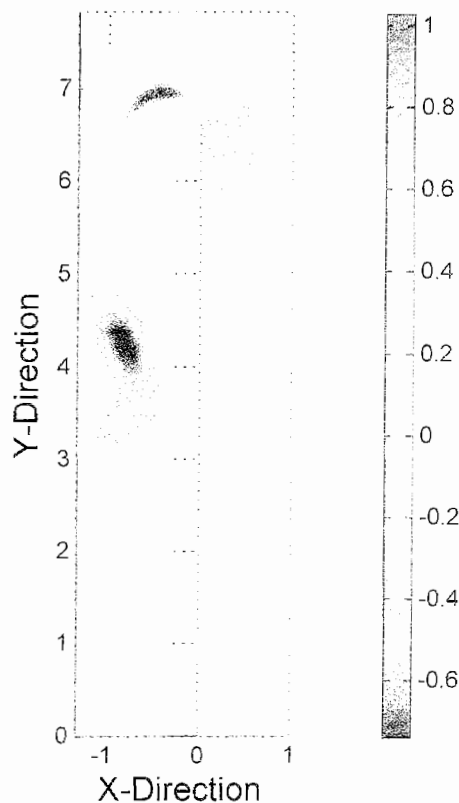
در شکل ۴-۶ کانتور سرعت‌های عرضی نشان داده شده‌اند. مطابق شکل، سرعت‌های عرضی در ناحیه اول (ناحیه ورودی) تقریباً صفر هستند ولی در نواحی دوم و سوم به دلیل وجود اثرات انحنا، جدایش و تلاطمات جریان، مقدار این سرعت‌ها قابل توجه است.

در شکل ۴-۷ کانتور فشار استاتیکی بی‌بعد مشخص شده است. مطابق این شکل در ناحیه اول، در طول مسیر فشار استاتیکی به تدریج در حال کاهش است ولی در اثر قوس، فشار استاتیکی افت قابل توجهی پیدا می‌کند. فشار استاتیکی در ابتدای ناحیه سوم از انتهای این ناحیه کمتر است. علت این قضیه مربوط به پدیده جدایش و اثرات قابل توجه تلاطم در این ناحیه است. با توجه به شکل ۴-۳، در

اثر جدایش در کنار گردابه‌ها، سرعت محوری فوق‌العاده بالاتر از متوسط سرعت جریان است. لذا کاهش فشار استاتیکی در این ناحیه، ناشی از تبدیل فشار به سرعت است. در ناحیه خروجی به دلیل عدم وجود جدایش و کاهش میزان ماکزیمم سرعت محوری، مقدار فشار استاتیکی اندکی افزایش یافته است. یعنی مقداری از فشار دینامیکی در ابتدای ناحیه سوم به فشار استاتیکی در انتهای این ناحیه تبدیل شده است. این موضوع را می‌توان در شکل ۴-۸ به نحو مناسبتری بررسی کرد. در این شکل کانتور فشار کل نشان داده شده است. با توجه به شکل می‌توان دریافت که در اثر تنشهای برشی، فشار کل در طول کل مسیر دائماً در حال کاهش است.

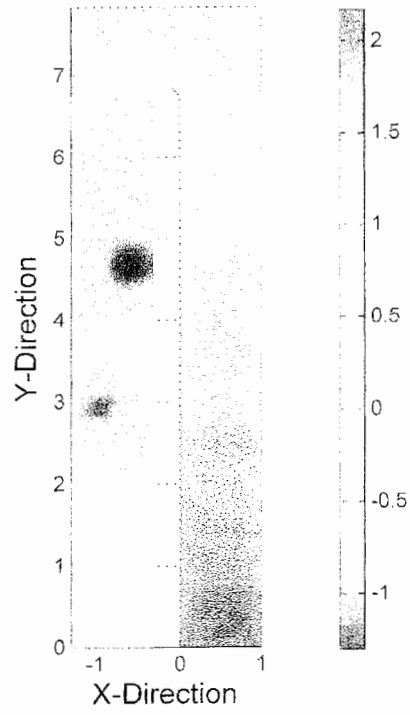
در شکل ۴-۹ کانتور دما نشان داده شده است. مطابق شکل با پیشروی جریان، دمای سیال در نزدیکی دیواره‌ها بتدریج زیاد شده و در ناحیه جدایش به دلیل اختلاط قابل توجه جریان، میزان دما، فوق‌العاده افزایش یافته است. همچنین با مقایسه شکل ۴-۹ با شکل ۴-۳ درمی‌یابیم که توزیع دما تا حد بسیار زیادی از رفتار توزیع سرعت محوری تبعیت می‌کند.

Lateral Velocity Contour



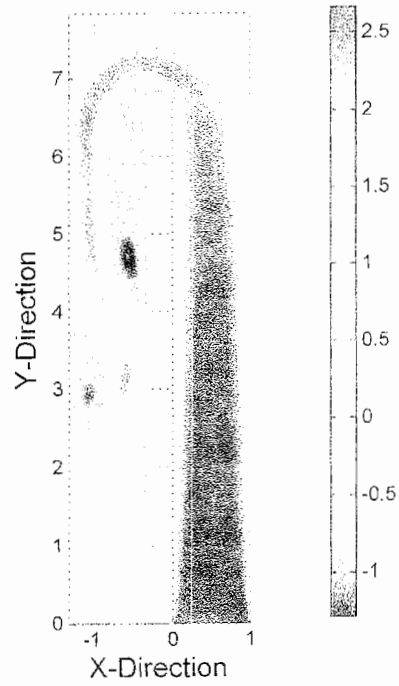
شکل ۴-۶: کانتور سرعت عرضی بی بعد در مسیر خنک کاری دوبعدی

Static Pressure Contour



شکل ۴-۷: کانتور فشار استاتیکی بی بعد در مسیر خنک کاری داخلی

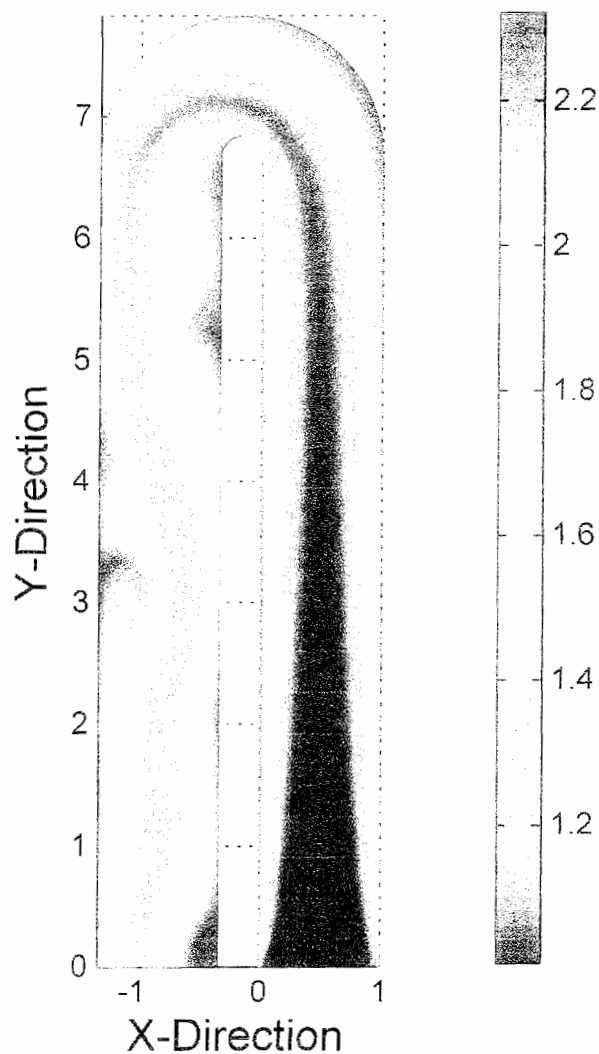
Total Pressure Contour



شکل ۴-۸: کانتور فشار کل بی بعد در مسیر خنک کاری داخلی



## Temperature Contour



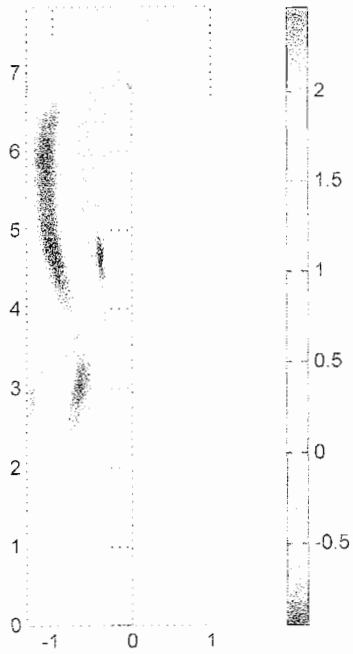
شکل ۴-۹: کانتور دمای بی بعد در مسیر خنک کاری داخلی

### ۴-۲-۱: اثر شعاع انحنای قوس

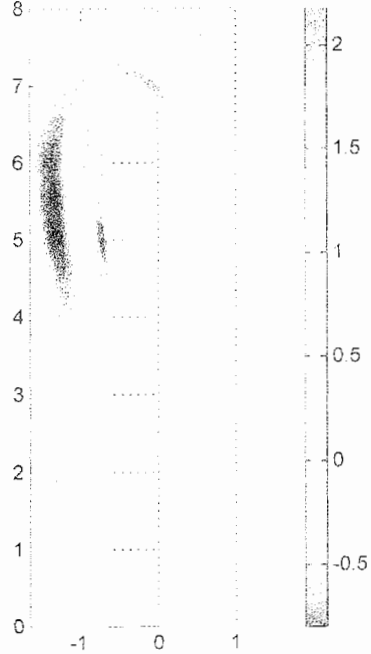
در این بخش اثر شعاع انحنای قوس بر جریان خنک کاری مورد مطالعه قرار گرفته است. در شکل ۴-۱۰ کانتورهای سرعت محوری در شعاعهای مختلف نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که با افزایش شعاع انحنای، میزان جدایش و تلاطم در ناحیه بعد از قوس کاهش پیدا می‌کند، بطوریکه در شعاع انحنای  $R_c=3\text{cm}$  مقدار جدایش به حداقل خود کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش شعاع انحنای، مقدار

ماکزیمم سرعت محوری نیز بتدریج کاهش می‌یابد. در شکل ۴-۱۱ کانتورهای دما در شعاعهای انحنا مختلف نشان داده شده‌اند.

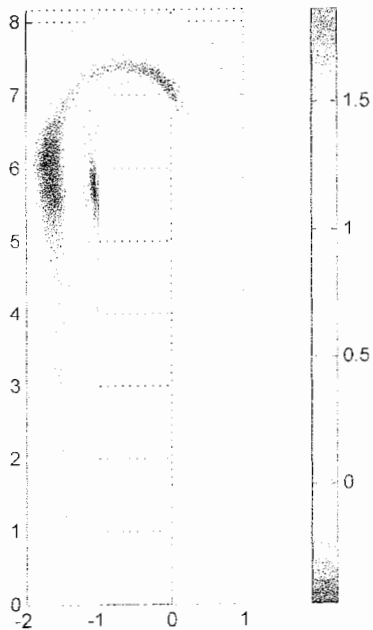
Axial Velocity Contour for  $Rc=0.5$  cm



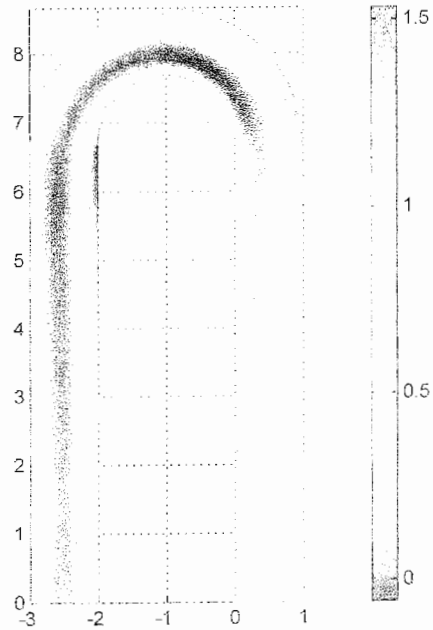
Axial Velocity Contour for  $Rc=1$  cm



Axial Velocity Contour for  $Rc=1.5$  cm

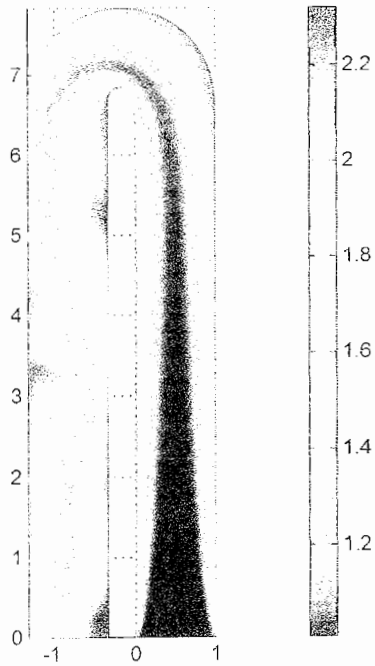


Axial Velocity Contour for  $Rc=3$  cm

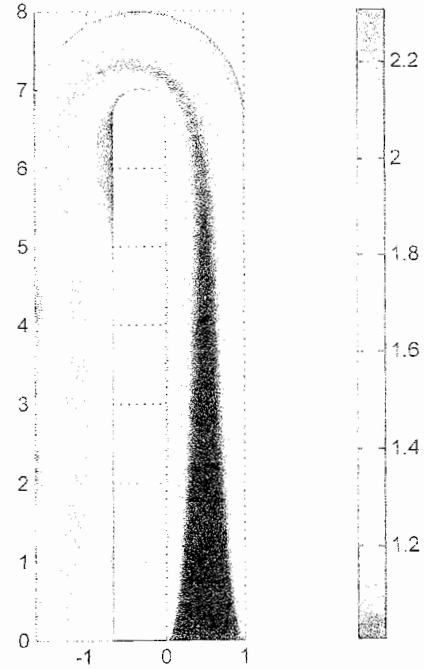


شکل ۴-۱۰: کانتورهای سرعت محوری در شعاعهای انحنا مختلف

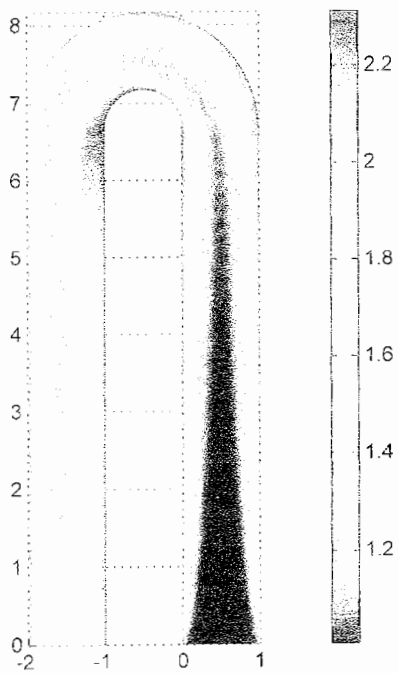
Temperature Contour for  $Rc=0.5$  cm



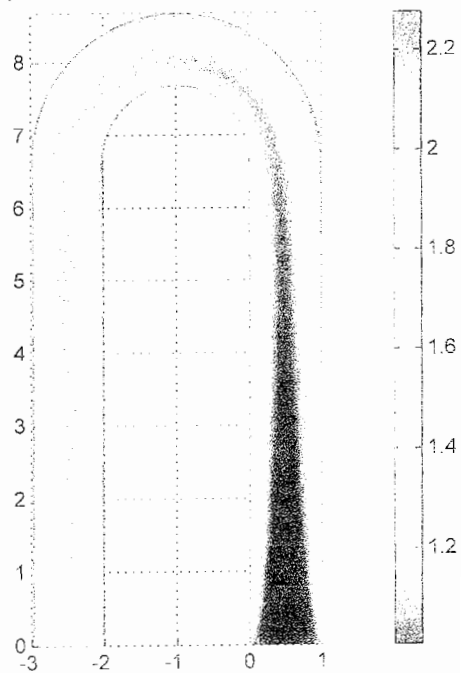
Temperature Contour for  $Rc=1$  cm



Temperature Contour for  $Rc=1.5$  cm



Temperature Contour for  $Rc=3$  cm



شکل ۴-۱۱: کانتورهای دما در شعاعهای انحنای مختلف

با توجه به تصاویر با افزایش شعاع انحناء و کاهش شدت جدایش از میزان افزایش دما، در این نواحی کاسته می‌شود. در شکل ۴-۱۲، تأثیر شعاع انحناء داخلی (به صورت بی‌بعد) بر عدد ناسلت سرتاسری آمده است. در این تحقیق عدد ناسلت سرتاسری بصورت زیر تعریف شده است [۱۵]:

$$Nu_m = \frac{h_m D_h}{k} \quad (2-4)$$

در رابطه فوق،  $h_m$  ضریب جابجایی سرتاسری بوده و برای دیواره دما ثابت از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$h_m = \frac{Q}{A \Delta T_{im}} \quad (3-4)$$

که در رابطه فوق،  $A$  سطح جانبی مسیر خنک‌کاری و  $\Delta T_{im}$  اختلاف دمای متوسط لگاریتمی است:

$$\Delta T_{im} = \frac{(T_s - T_o) - (T_s - T_i)}{\ln \frac{T_s - T_o}{T_s - T_i}} \quad (4-4)$$

که در آن،  $T_s$  دمای سطح،  $T_i$  متوسط دمای ورودی و  $T_o$  متوسط دمای خروجی است. بطور کلی برای محاسبه  $Q$  (کل انتقال حرارت) دو راه وجود دارد:

۱- با اندازه‌گیری شار حرارتی روی دیواره‌ها و انتگرال‌گیری از این شار بر روی سطح دیواره‌ها، می‌توان کل انتقال حرارت را تعیین کرد.

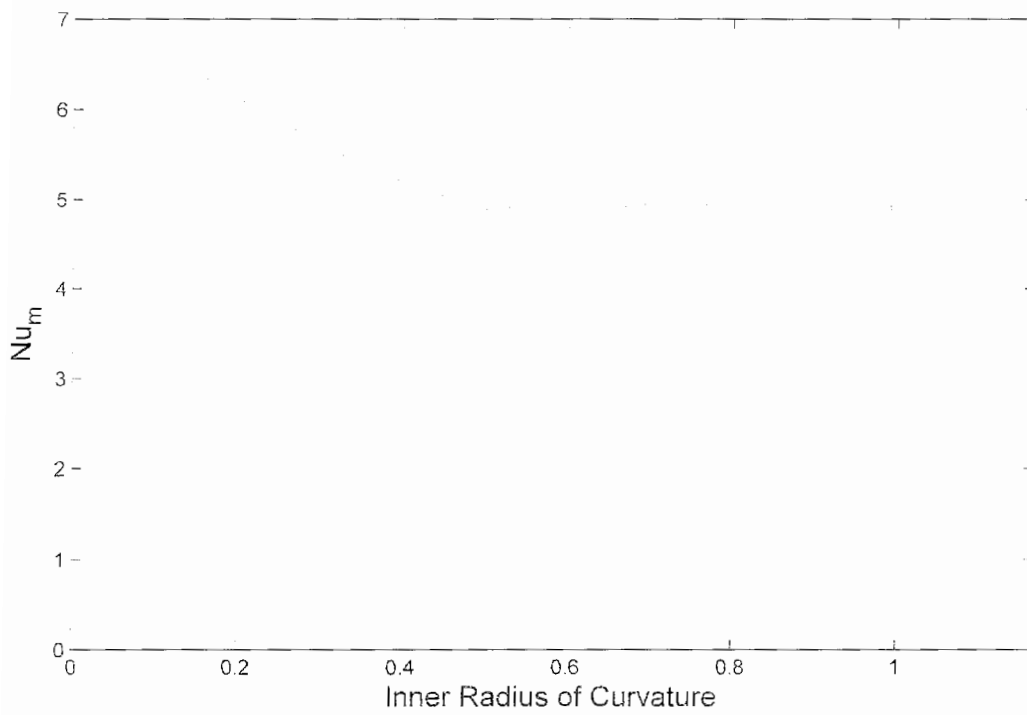
۲- می‌توان انتقال حرارت کلی را براساس دبی جریان و دمای ورودی و خروجی آن از رابطه ساده زیر تعیین کرد:

$$Q = \dot{m} c_p (T_o - T_i) \quad (5-4)$$

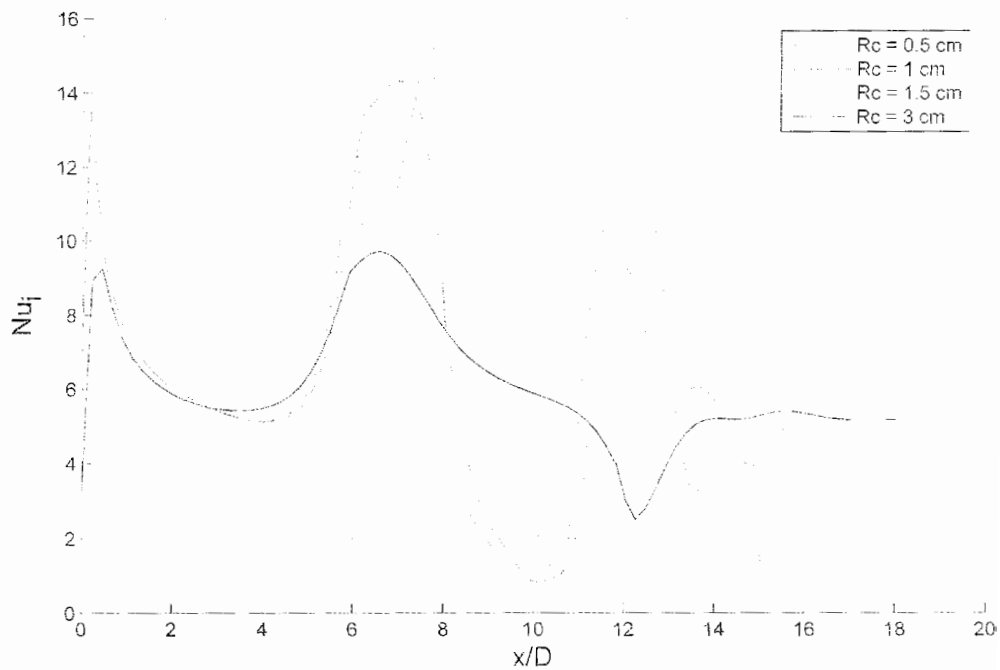
با افزایش شعاع انحناء قوس داخلی از میزان شدت جدایش، تلاطم و اختلاط جریان کاسته می‌شود. بنابراین طبیعی است که با افزایش شعاع انحناء، میزان عدد ناسلت سرتاسری کاهش یابد. این امر کاملاً در شکل ۴-۱۲ مشهود است. با توجه به شکل با ازدیاد شعاع انحناء در  $R_c = 1.5 \text{ cm}$ ، تقریباً اثر جدایش بسیار کوچک بوده و لذا عدد ناسلت سرتاسری به سمت یک مقدار حدی میل می‌کند. در شکل ۴-۱۳ توزیع عدد ناسلت موضعی بر روی دیواره داخلی نشان داده شده است.

مطابق شکل با پیشروی جریان در ناحیه اول ( $x/D < 7$ ) به دلیل ضخیم شدن لایه مرزی انتقال حرارت کاهش می یابد ولی با رسیدن به قوس داخلی ( $x/D \approx 7$ ) مقدار عدد ناسلت افزایش چشمگیری پیدا می کند. علت این قضیه آن است که قوس داخلی یک سطح محدب بوده و ضخامت لایه مرزی روی قوس محدب نسبت به سطح صاف بسیار کمتر است و لذا انتقال حرارت از آن شدیدتر می باشد ولی با پیشروی جریان روی قوس و نزدیک شدن به محل جدایش، ( $x/D \approx 9-11$ ) افت چشمگیری در عدد ناسلت موضعی برای شعاعهای انحنای کمتر اتفاق می افتد. علت این موضوع افزایش دمای سیال در ناحیه جدایش به دلیل اختلاط بالا در این ناحیه است که سبب کاهش انتقال حرارت از دیواره به سیال شده است. تغییرات بعدی عدد ناسلت موضعی مربوط به تلاطمات جریان بعد از وقوع جدایش است به نحوی که هر کجا اثر تلاطم سبب باریک شدن ضخامت لایه مرزی شده، انتقال حرارت افزایش یافته است و بالعکس.

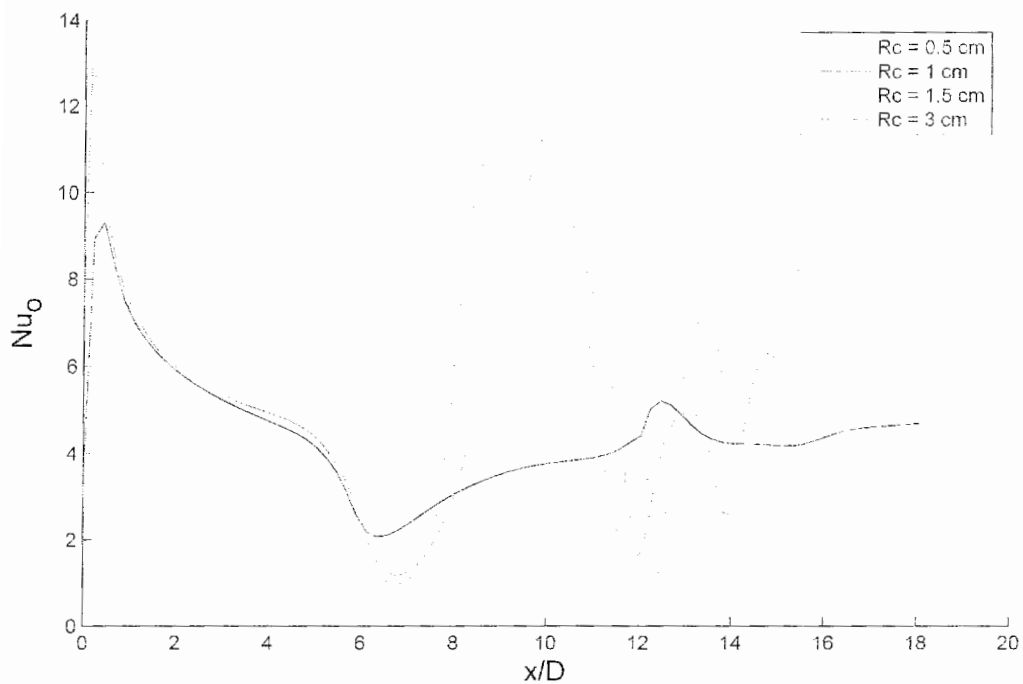
در شکل ۴-۱۴ توزیع عدد ناسلت موضعی بر روی دیواره خارجی نشان داده شده است. مطابق شکل با پیشروی در ناحیه اول ( $x/D < 7$ ) به دلیل افزایش ضخامت لایه مرزی انتقال حرارت کاهش پیدا می کند ولی با رسیدن به قوس ( $x/D \approx 7$ ) افت شدیدی در ناسلت موضعی اتفاق می افتد. علت این قضیه آن است که قوس خارجی یک قوس مقعر بوده و ضخامت لایه مرزی روی قوس مقعر نسبت به سطح صاف بیشتر است و لذا انتقال حرارت آن کمتر می باشد. ولی با پیشروی روی قوس و نزدیک شدن به انتهای آن ضخامت لایه مرزی فوق العاده کم می شود علت این قضیه وقوع جدایش روی سطح داخلی است که سبب متمایل شدن جریان به قوس خارجی شده و ضخامت لایه مرزی را روی آن فوق العاده کاهش داده است بهمین دلیل عدد ناسلت موضعی در این ناحیه افزایش چشمگیری پیدا کرده است. نوسانات بعدی عدد ناسلت موضعی نیز به دلیل اثرات تلاطم بعد از ناحیه جدایش است.



شکل ۴-۱۲: توزیع عدد ناسلت سرتاسری در شعاعهای انحنای مختلف



شکل ۴-۱۳: توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره داخلی و در شعاعهای انحنای مختلف



شکل ۴-۱۴: توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره خارجی و در شعاعهای انحنا مختلف

#### ۴-۲-۲: اثر عدد دوران

در شکل ۴-۱۵، کانتورهای سرعت محوری برای یک هندسه معین و در اعداد دوران مختلف نشان داده شده اند. عدد دوران<sup>۱</sup> (عدد روزبی<sup>۲</sup>) یک پارامتر بی بعد برای بررسی اثر دوران بوده و بصورت زیر تعریف می شود [۱۳].

$$Ro = \frac{\omega D_h}{V} \quad (۴-۶)$$

که در رابطه فوق  $\omega$  سرعت دوران توربین،  $D_h$  قطر هیدرولیکی مسیر خنک کاری و  $V$  متوسط سرعت جریان در ورودی است در اینجا هندسه پره های روتور نظیر هندسه به کار رفته برای پره های استاتور است با این تفاوت که در آنها شعاع انحنا قوس داخلی ۱ cm و شعاع توربین ۱ m است.

- 
1. Rotation Number
  2. Rosbby Number

مطابق شکل ۴-۱۵، اثر عمده دوران در ناحیه خروجی قابل مشاهده است و دوران پره سبب انحراف پروفیل سرعت محوری به سمت یکی از دیواره ها می شود. اینکه پروفیل سرعت به سمت کدامیک از دیواره ها متمایل می شود، کاملاً مربوط به جهت دوران پره است و شدت تمایل جریان به سمت دیواره ها نیز به بزرگی عدد دوران بستگی دارد. مطابق شکل در اعداد دوران بزرگ ( $Ro=1$ ) شدت تلاطم جریان فوق العاده زیاد است علت این امر تقویت جریانهای ثانویه در اعداد دوران بزرگ است. (این قضیه در جریانهای سه بعدی به نحو بهتری قابل بررسی است).

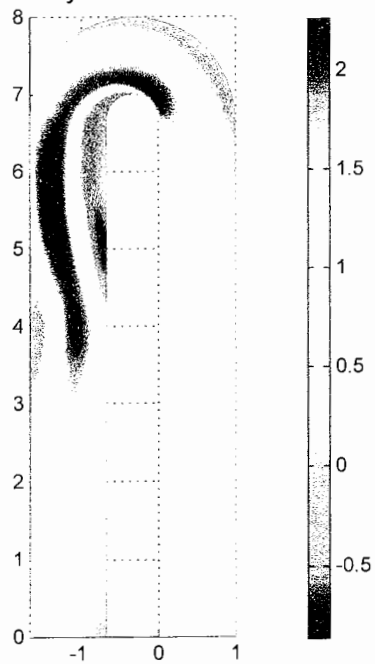
در شکل ۴-۱۶ پروفیلهای سرعت محوری در اعداد دوران مختلف و در خروجی مسیر خنک کاری نشان داده شده اند مطابق شکل به ازای  $Ro=0$  پروفیل سرعت تقریباً متقارن است ولی در  $Ro=-0.5$  پروفیل سرعت به سمت دیواره سمت چپ و در  $Ro=0.5$  به سمت دیواره سمت راست متمایل شده است و میزان تمایل جریان به سمت دیواره در  $Ro=1$  بیشتر از  $Ro=0.5$  است.

در شکل ۴-۱۷، کانتورهای فشار استاتیکی در اعداد دوران مختلف نشان داده شده اند مطابق شکل برای پره های روتور، توزیع فشار استاتیکی مشابه توزیع نیروی گریز از مرکز است در حالیکه برای پره استاتور ( $Ro=0$ ) توزیع فشار به نحوی است که همواره سیر نزولی دارد. علت این قضیه، این است که برای پره ساکن ( $Ro=0$ )، فشار استاتیکی با تنشهای برشی ناشی از ویسکوزیته سیال بالانس شده است.

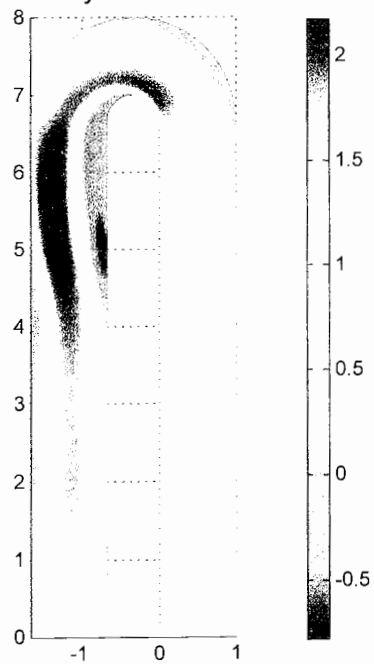
بنابراین انتظار می رود که در ضول مسیردائماً فشار استاتیکی کاهش یابد ولی در پره روتور ( $Ro \neq 0$ ) فشار استاتیکی با نیروی گریز از مرکز بالانس شده است. از این شکل می توان به اهمیت به کاربردن فرض اولیه مناسب برای توزیع فشار در پره های روتور پی برد. زیرا همانگونه که در فصل دوم گفته شد. برای پره های روتور، در لحظه شروع تحلیل، ترمهای سرعت و مشتقات آن در معادله ناوراستوکس، ترمهای کوچکی هستند در حالیکه ترم نیروی گریز از مرکز که با مربع سرعت دوران متناسب است، ترم قدرتمندی است بنابراین بایستی فشار نیز ترم قدرتمندی باشد تا از واگرایی تحلیل عددی جلوگیری کند. لذا اعمال فرض اولیه مناسب برای فشار، شرط بسیار مهمی در همگرایی معادلات حاکم است.



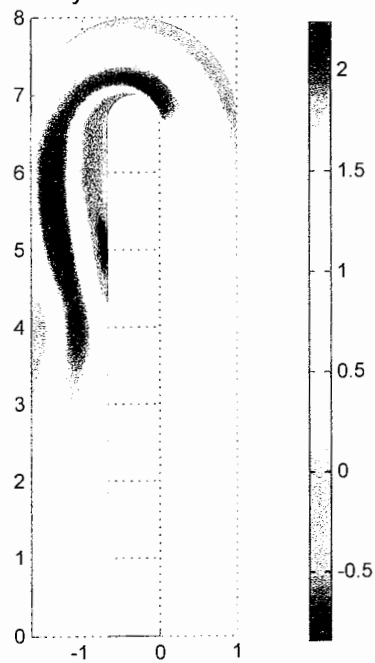
Axial Velocity Contour for  $Ro = -0.5$



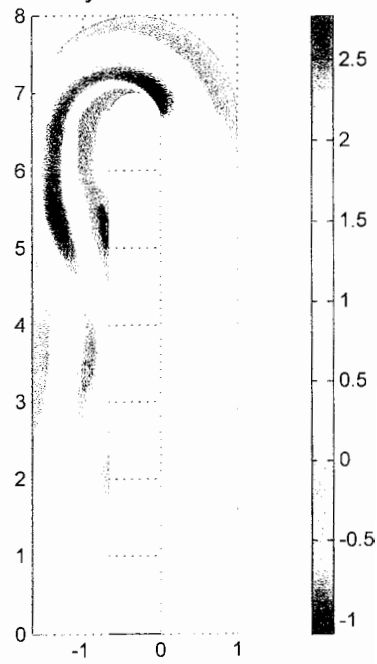
Axial Velocity Contour for  $Ro = 0$



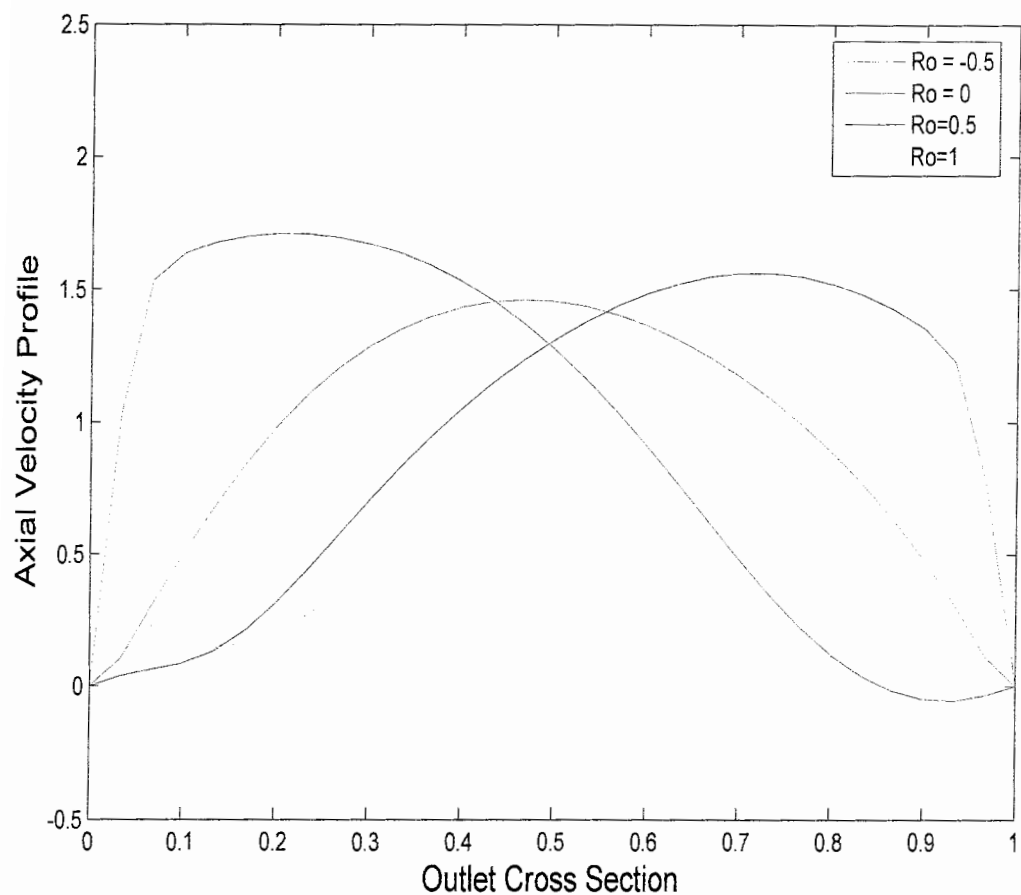
Axial Velocity Contour for  $Ro = 0.5$



Axial Velocity Contour for  $Ro = 1$



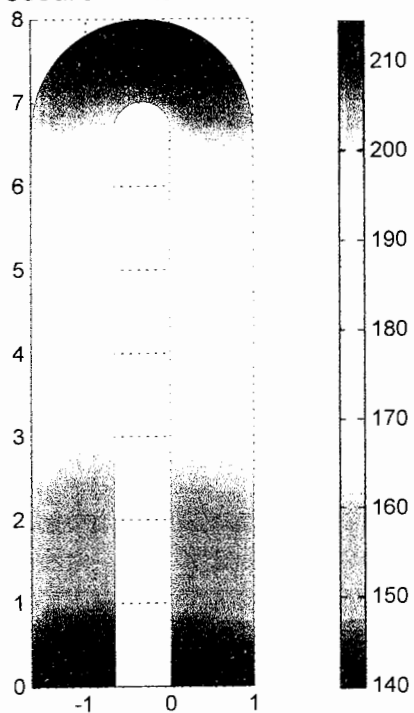
شکل ۴-۱۵: کانتورهای سرعت محوری در اعداد دوران مختلف



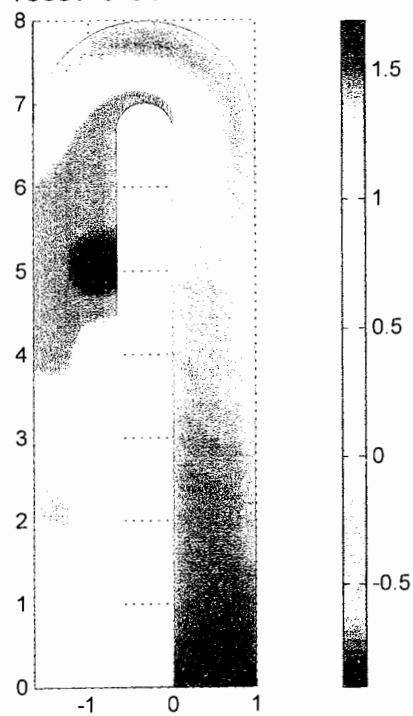
شکل ۴-۱۶: پروفیل‌های سرعت محوری در اعداد دوران مختلف

با توجه به شکل می‌توان دریافت که مرتبه توزیع فشار در پره استاتور بسیار کوچکتر از مرتبه آن در پره‌های روتور است و با افزایش سرعت دوران بر میزان تغییرات توزیع فشار افزوده می‌شود. همچنین توزیع فشار در  $Ro = -0.5$  بسیار شبیه توزیع فشار در  $Ro = 0.5$  است لذا می‌توان نتیجه گرفت که توزیع فشار استاتیکی به جهت دوران وابستگی محسوسی ندارد. کلیه موارد ذکر شده نشان دهنده بالانس شدن ترم نیروی گریز از مرکز با فشار استاتیکی در پره‌های روتور توربین هستند.

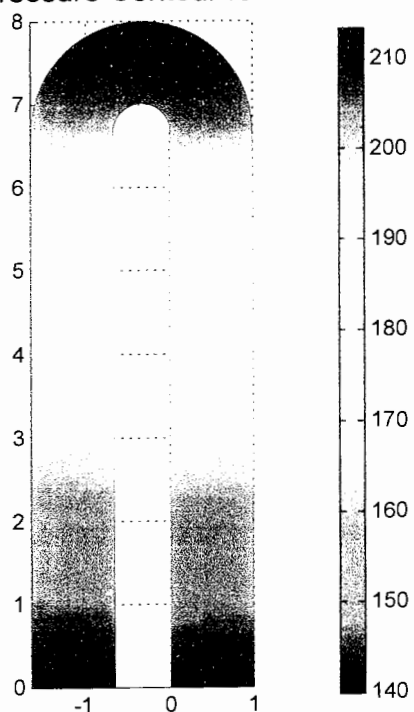
Static Pressure Contour for  $Ro = -0.5$



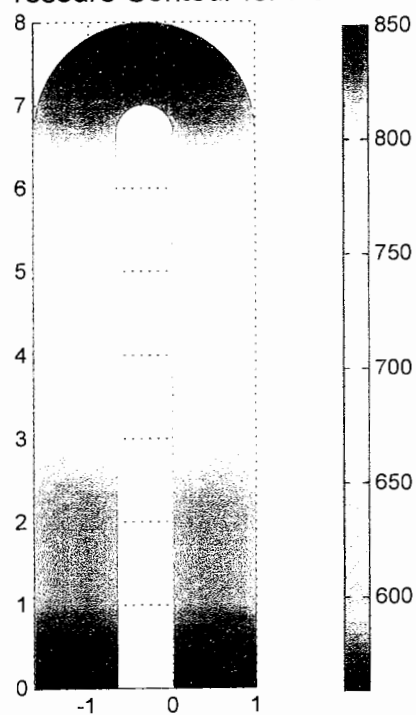
Static Pressure Contour for  $Ro = 0$



Static Pressure Contour for  $Ro = 0.5$



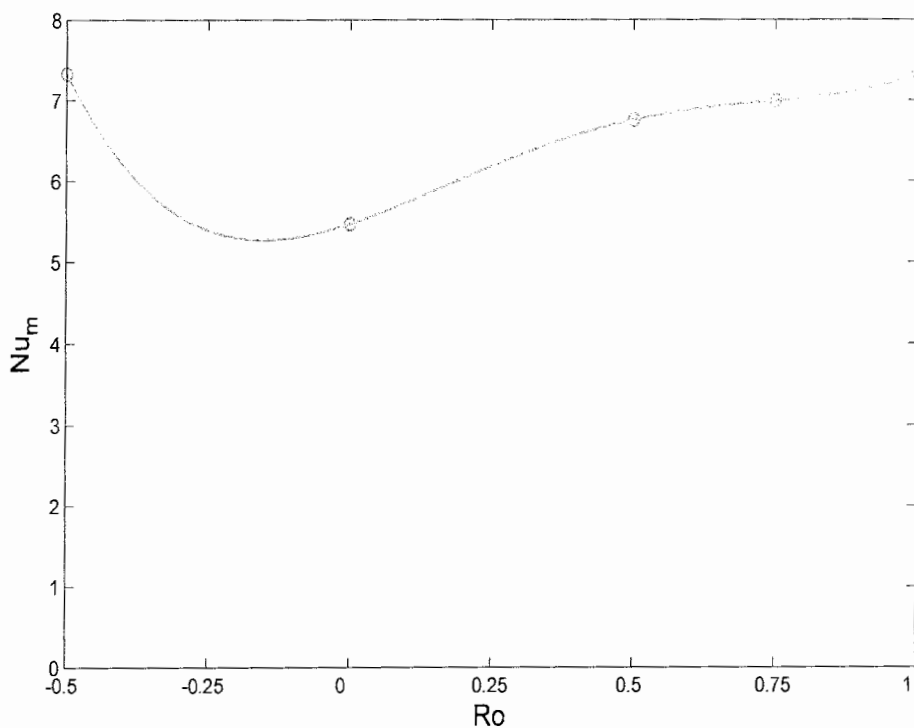
Static Pressure Contour for  $Ro = 1$



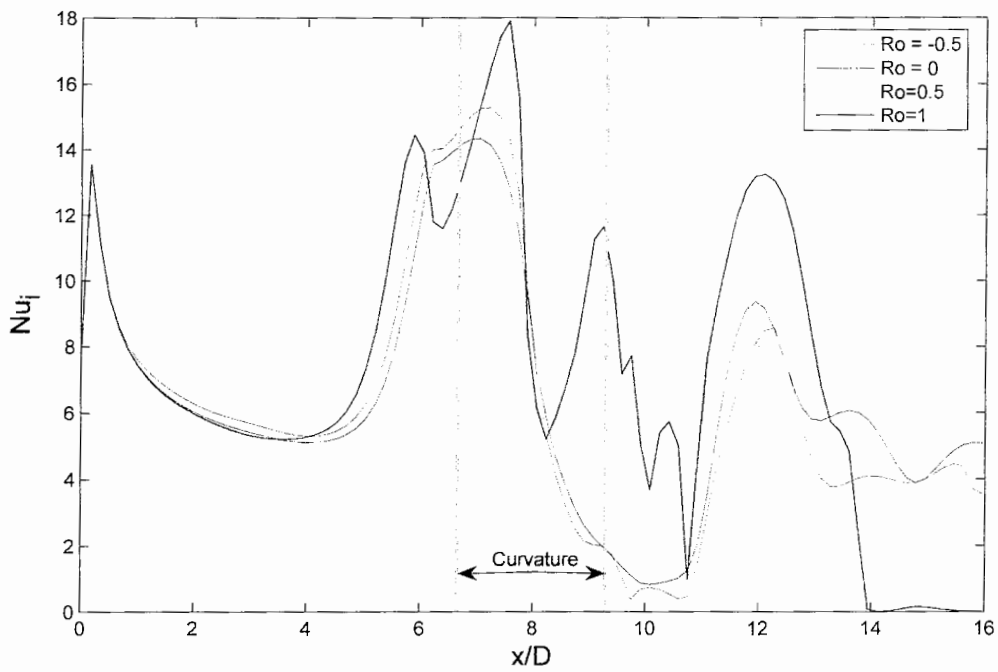
شکل ۴-۱۷: کانتورهای فشار استاتیکی در اعداد دوران مختلف

در شکل ۴-۱۸، توزیع عدد ناسلت سرتاسری برحسب عدد دوران آمده است. مطابق شکل با بوجود آمدن دوران میزان انتقال حرارت افزایش می یابد. کمترین مقدار عدد ناسلت در  $Ro=0$  بوده و با افزایش  $Ro$  بر شدت انتقال حرارت افزوده می شود. بطور کلی با افزایش عدد دوران بر شدت جریانهای ثانویه افزوده شده و این جریانها سهم قابل ملاحظه ای در افزایش انتقال حرارت دارند. همچنین تقویت جریانهای ثانویه به ایجاد تلاطم در جریان اصلی نیز منجر می شود که این تلاطم نیز در افزایش انتقال حرارت نقش مهمی را ایفا می کند.

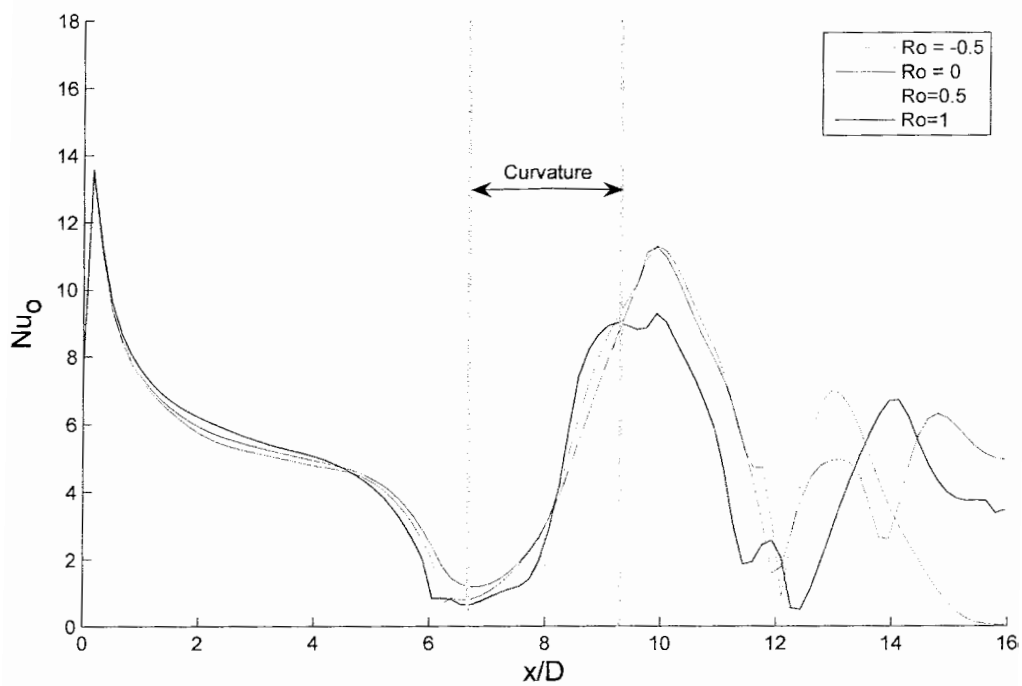
در اشکال ۴-۱۹ و ۴-۲۰ توزیع عدد ناسلت موضعی بر روی دیواره های داخلی و خارجی نشان داده شده اند. مطابق این تصاویر نیز، با افزایش عدد دوران میزان عدد ناسلت موضعی افزایش پیدا می کند.



شکل ۴-۱۸: توزیع عدد ناسلت سرتاسری برحسب عدد دوران



شکل ۴-۱۹: توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره داخلی و در اعداد دوران مختلف

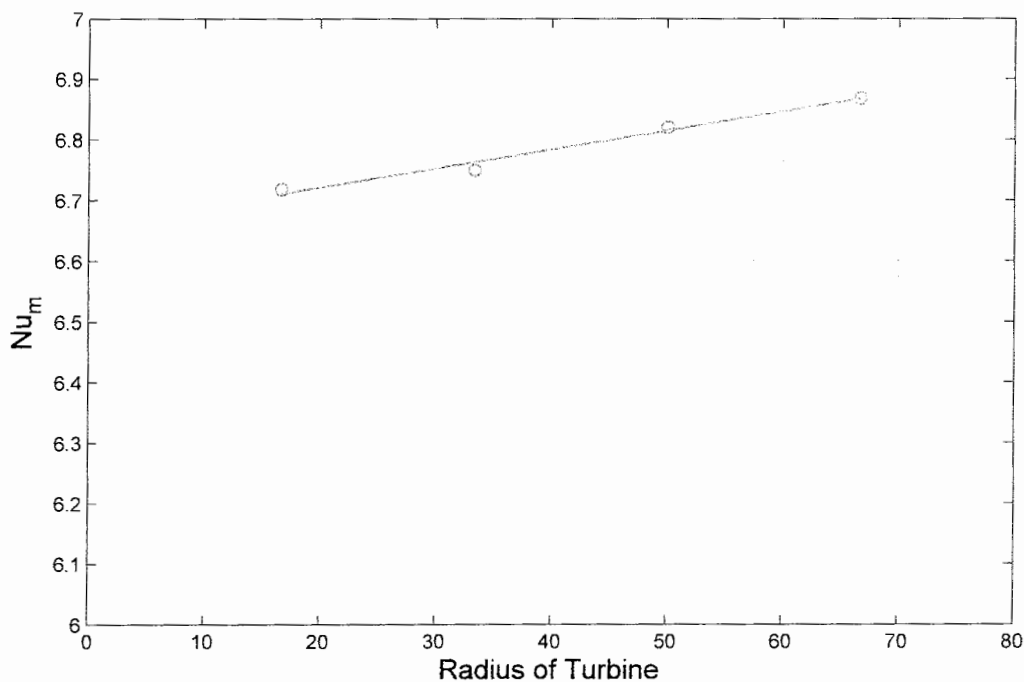


شکل ۴-۲۰: توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره خارجی و در اعداد دوران مختلف

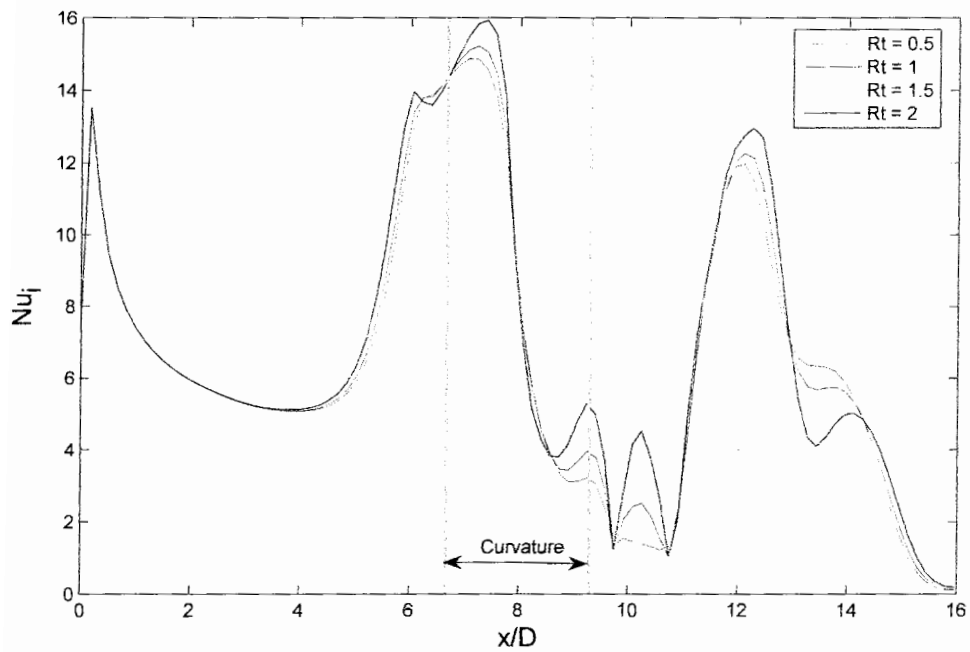
#### ۳-۲-۴: اثر شعاع توربین

در شکل ۴-۲۱ اثر شعاع توربین (بصورت بی بعد) بر عدد ناسلت سرتاسری بررسی شده است. مطابق شکل، اثر شعاع توربین بر عدد ناسلت تقریباً به صورت خطی است و با افزایش شعاع توربین، مقدار ناسلت افزایش پیدامی کند اما مقدار این افزایش بسیار کم است و حساسیت انتقال حرارت نسبت به شعاع توربین بسیار اندک است. علت این قضیه، این است که شعاع توربین مستقیماً در نیروی گریز از مرکز اثر دارد و همانگونه که در بخش ۴-۲-۲ گفته شد، نیروی گریز از مرکز بیشتر در ترم گرادیان فشار معادله نایراستوکس اثر می کند تا مؤلفه های سرعت. از آنجا که در معادله انرژی، دما با مؤلفه های سرعت و مشتقات آن رابطه دارد و با فشار رابطه مستقیمی ندارد بنابراین اثر شعاع توربین بر انتقال حرارت چندان قابل توجه نیست.

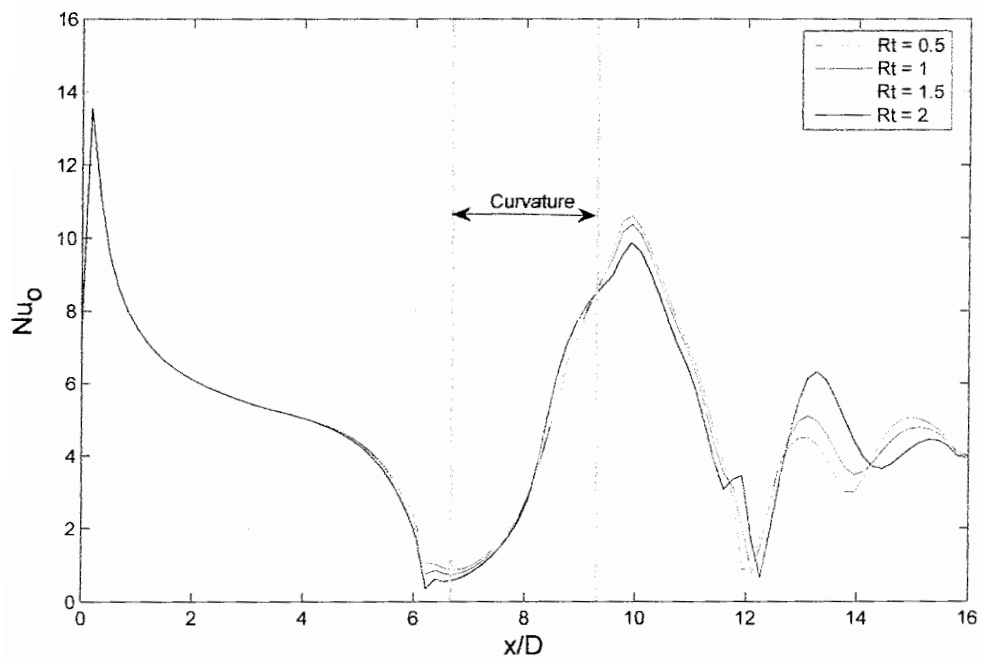
در اشکال ۴-۲۲ و ۴-۲۳ توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره های داخلی و خارجی در مسیر خنک کاری نشان داده شده است. مطابق این اشکال نیز، شعاع توربین تأثیر چندان کمی بر عدد ناسلت موضعی ندارد.



شکل ۴-۲۱: توزیع عدد ناسلت سرتاسری بر حسب شعاع توربین



شکل ۴-۲۲: توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره داخلی و در شعاعهای توربین مختلف



شکل ۴-۲۳: توزیع عدد ناسلت موضعی در دیواره خارجی و در شعاعهای توربین مختلف

### ۳-۴: جریان مغشوش دوبعدی

در این بخش نتایج مربوط به تحلیل جریان مغشوش دوبعدی آمده است. در تصاویر این بخش، کلیه کمیتها براساس روابط ۲-۷۳ بی‌بعد شده‌اند. در اینجا برای مدلسازی اغتشاش از مدل  $k-\epsilon$  استاندارد استفاده شده است. برخی پارامترهای هندسی و فیزیکی استفاده شده در این تحلیل از قرار زیر است:

۱- طول قسمت مستقیم در نواحی ۱ و ۳: ۲۰ cm

۲- شعاع انحنای قوس داخلی: ۲ cm

۳- قطر هیدرولیکی مسیر خنک کاری: ۳ cm

۴- شعاع توربین: ۱ m

۵- دمای سیال ورودی: ۳۰۰ k

۶- دمای دیواره‌ها: ۷۰۰ k

۷- شدت اغتشاش در ورودی: ۸٪

۸- طول اختلاط در ورودی: ۱٪ قطر هیدرولیکی

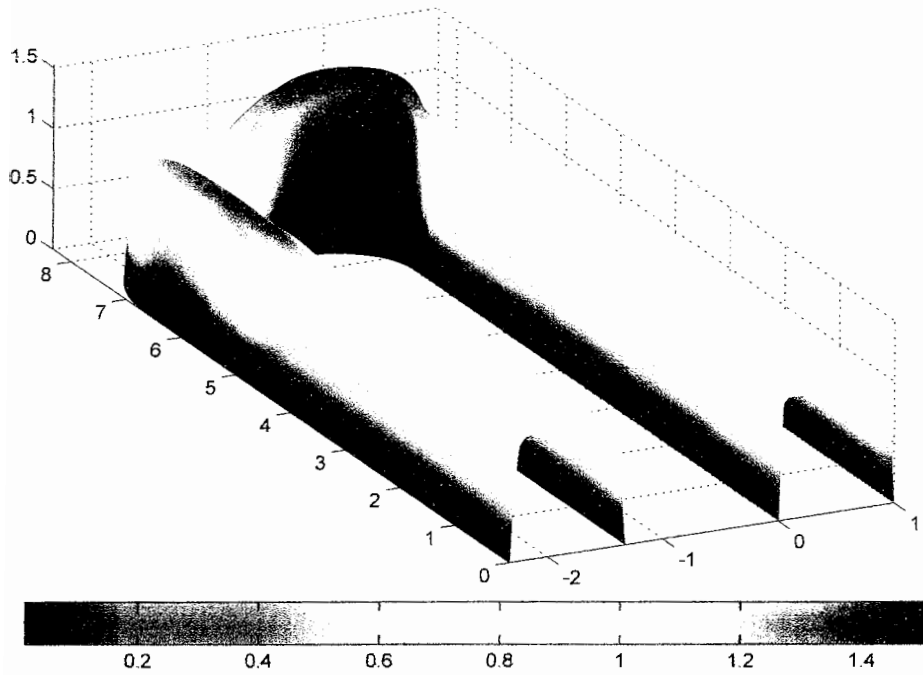
در شکل ۴-۲۴، توزیع سرعت محوری در  $Re = 5000$  و  $Ro = 0$  نشان داده شده است. مطابق شکل، جریان پس از رسیدن به قوس بشدت به دیواره داخلی متمایل شده و در انتهای قوس به دلیل بالابودن عدد رینولدز اثرات جدایش به تعویق افتاده است. با توجه به پروفیل سرعت جریان، مشاهده می‌شود که در اینحالت، اثرات لزجت محدود به اطراف دیواره (ناحیه زیر لایه آرام) بوده و ضخامت لایه مرزی فوق العاده کم است.

در شکل ۴-۲۵، کانتور دما در مسیر خنک کاری داخلی نشان داده شده است.

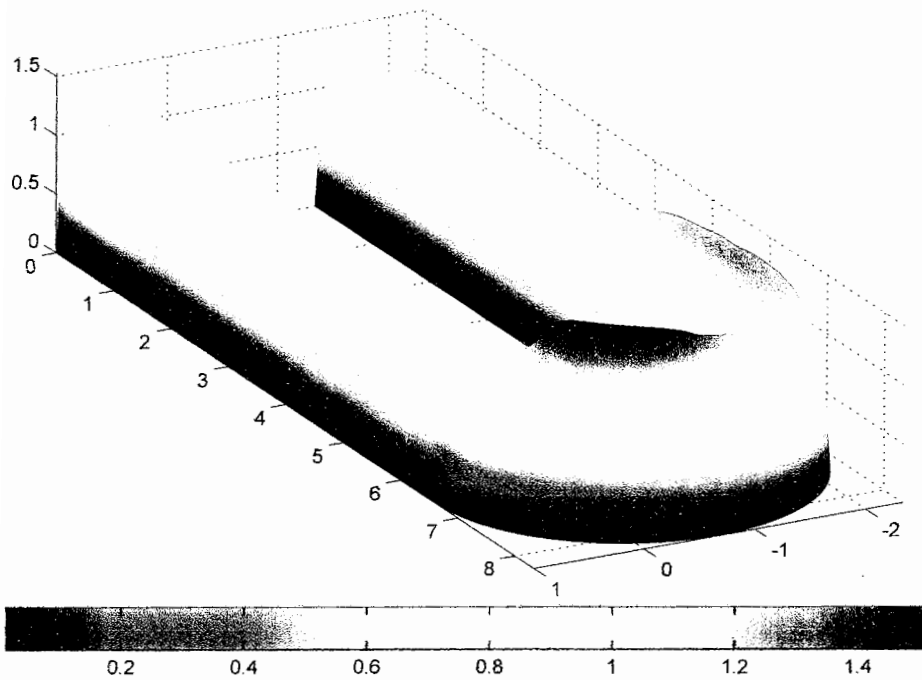
مطابق شکل، مقدار دما در نزدیکی دیواره داخلی بخصوص در ناحیه قوس بیشتر است. علت این امر بالابودن شدت اغتشاش در نزدیکی دیواره محدب و ناحیه جدایش است که منجر به افزایش انتقال حرارت در این نواحی شده است.



Axial Velocity Distribution ( $Re=5000$  &  $Ro=0$ )

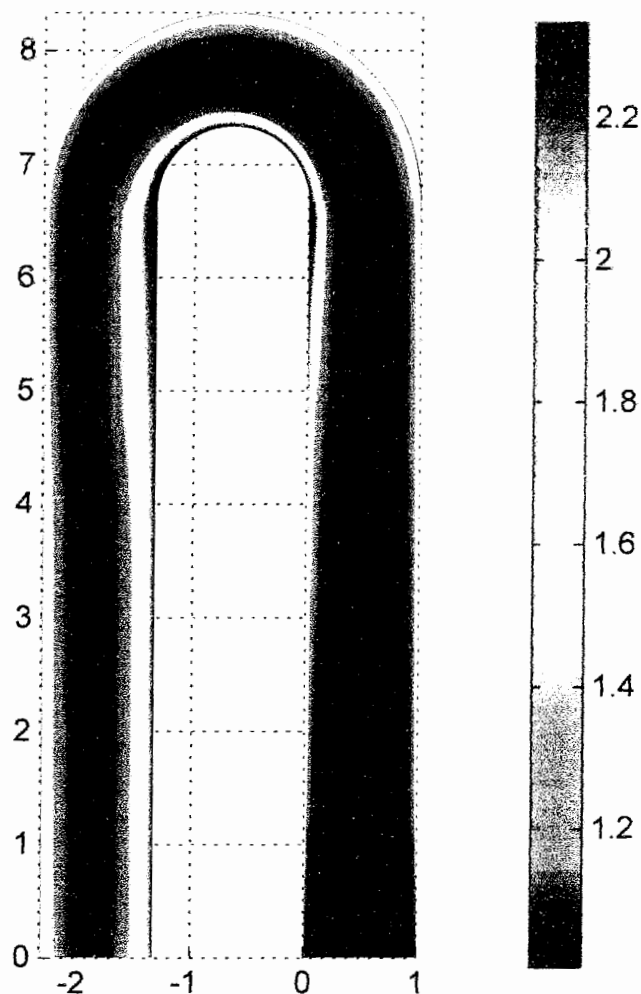


Axial Velocity Distribution ( $Re=5000$  &  $Ro=0$ )



شکل ۴-۲۴: توزیع سرعت محوری در  $Ro=0$  و  $Re=5000$

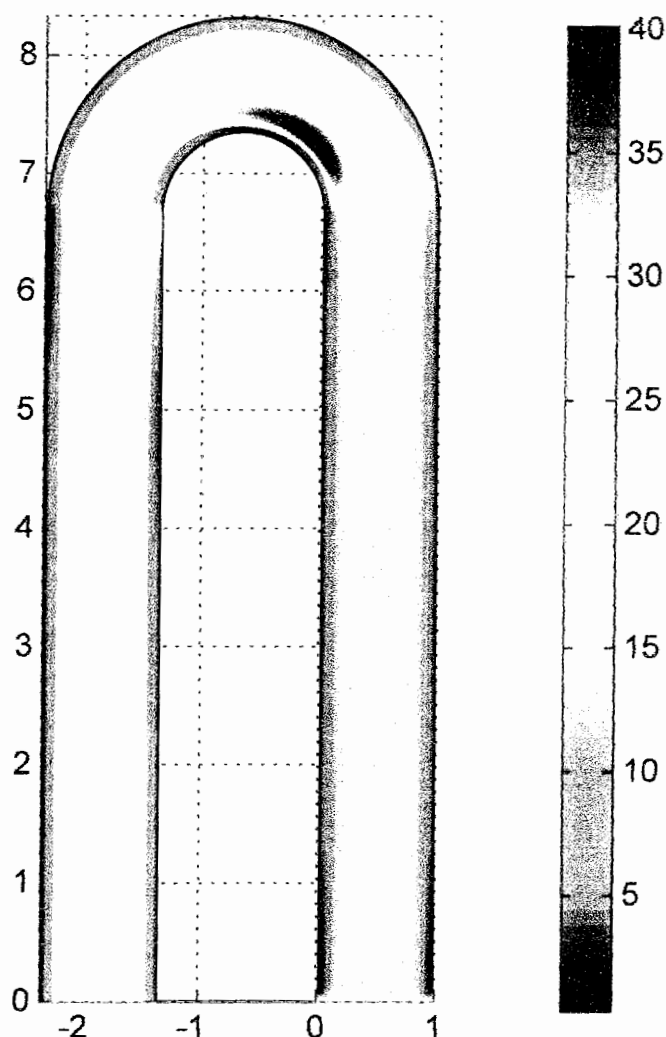
## Temperature Contour (Re=5000 & Ro=0)



شکل ۴-۲۵: کانتور دما در  $Re=5000$  و  $Ro=0$

در شکل ۴-۲۶، کانتور، نسبت ویسکوزیته توربولانس به ویسکوزیته سیال نشان داده شده است. مطابق شکل، ویسکوزیته توربولانس بر روی دیواره محدب (جائیکه سرعت محوری زیاد است)، بالا است. و مقدار آن در ورودی حدود ۱۲ و در خروجی حدود ۲۰ است.

## Turbulent Viscosity Ratio



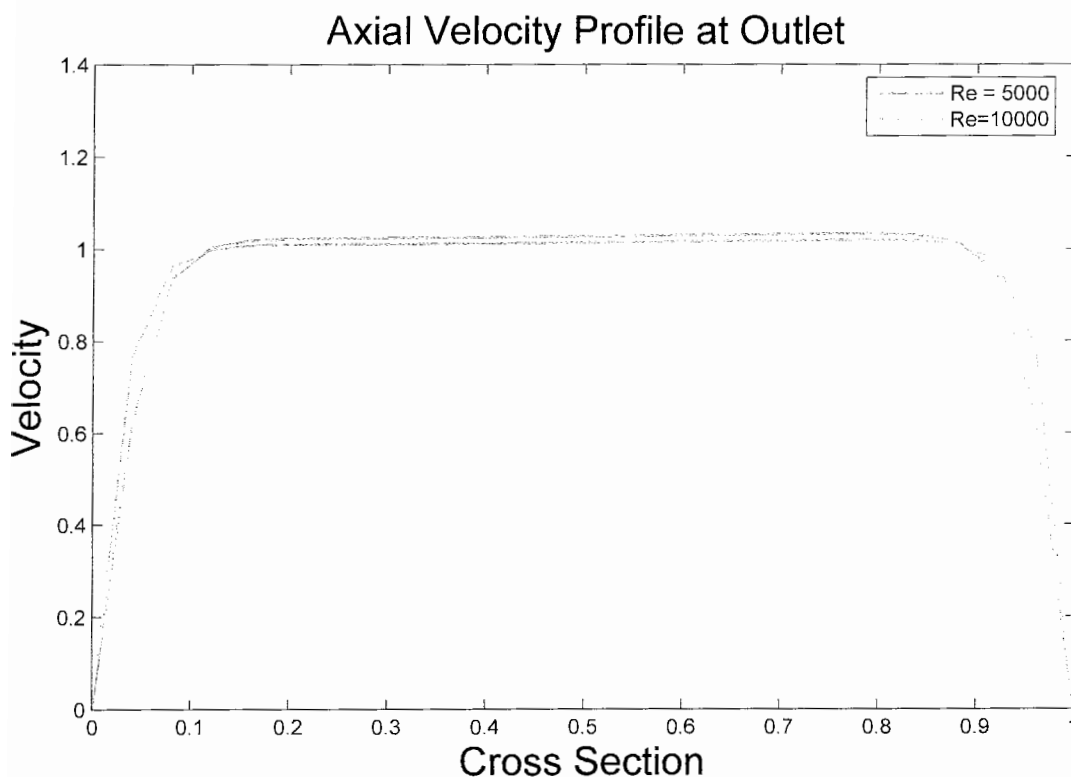
شکل ۴-۲۶: کانتور نسبت ویسکوزیته در  $Re=5000$  و  $Ro=0$

### ۴-۳-۱: اثر عدد رینولدز

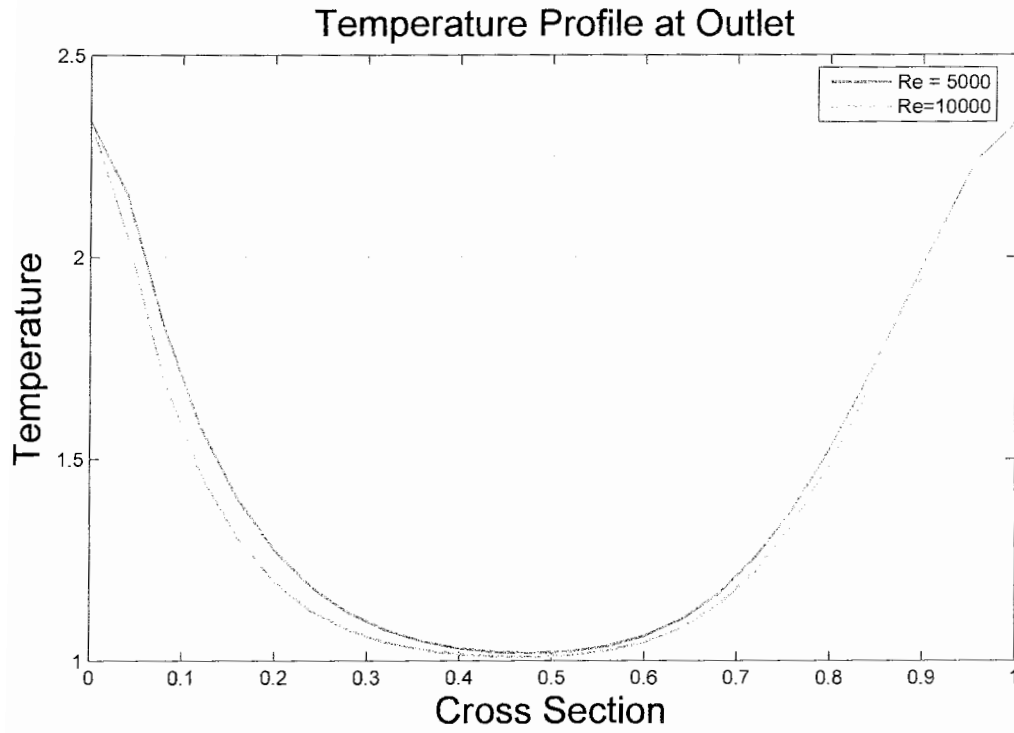
در این بخش اثر عدد رینولدز بررسی شده است. در شکل ۴-۲۷ پروفیل‌های سرعت محوری در  $Re=5000$  و  $Re=10000$  در خروجی نشان داده شده اند. مطابق شکل با افزایش عدد رینولدز، ناحیه زیر لایه آرام کوچکتر شده و اثر لزجت بر پروفیل سرعت کمتر شده است. شبیه همین حالت برای پروفیل دما، وجود دارد. در شکل ۴-۲۸ پروفیل‌های دما در  $Re=5000$  و  $Re=10000$  در ناحیه

خروجی نشان داده شده اند. در اینجا نیز مانند شکل قبل، در  $Re=5000$  ضخامت لایه مرزی حرارت بیشتر از مقدار آن در  $Re=10000$  است و دمای متوسط سیال در خروجی با افزایش عدد رینولدز کاهش می یابد. ولی مقدار آنتالپی با افزایش عدد رینولدز زیاد می شود. زیرا در یک هندسه ثابت هر چند با افزایش عدد رینولدز، دمای متوسط مقداری کم می شود اما مقدار شار جرمی با رینولدز متناسب بوده و بنابراین با افزایش عدد رینولدز، مقدار آنتالپی خروجی و در نتیجه انتقال حرارت کل، زیاد می شود.

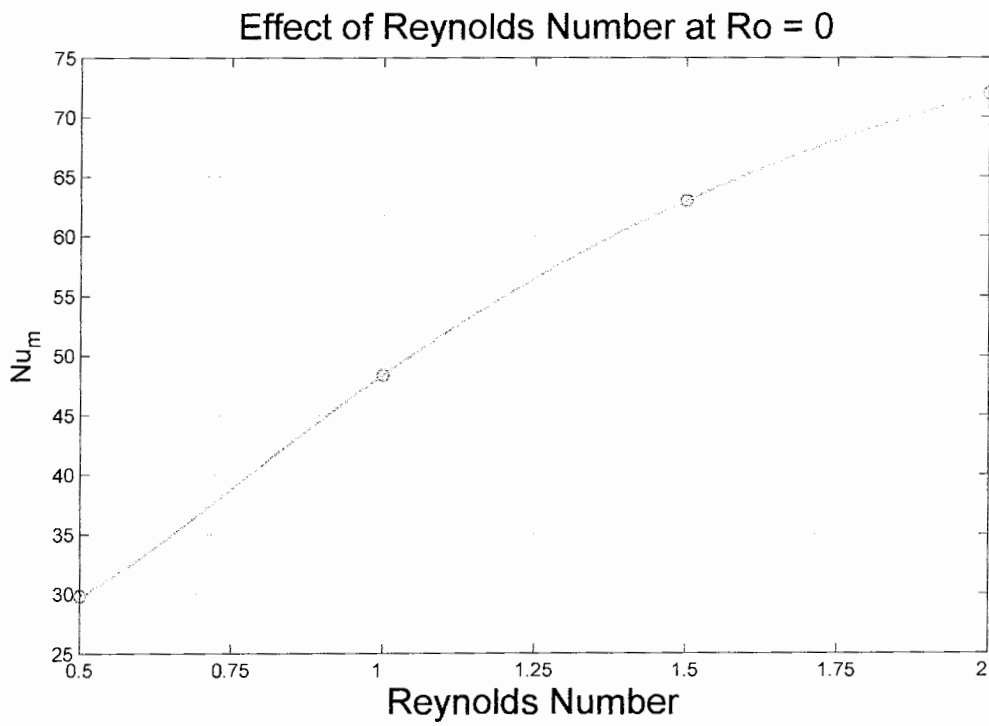
این موضوع در شکل ۴-۲۹ نشان داده شده است. مطابق شکل با ازدیاد عدد رینولدز مقدار ناسلت سرتاسری نیز زیاد می شود و همانطور که انتظار می رود، مرتبه افزایش ناسلت کمتر از یک بوده و به عبارت دیگر نرخ افزایش (مشتق دوم) ناسلت سرتاسری نسبت به عدد رینولدز منفی است.



شکل ۴-۲۷: اثر عدد رینولدز بر پروفیل‌های سرعت محوری



شکل ۴-۲۸: اثر عدد رینولدز بر پروفیل‌های دما



شکل ۴-۲۹: اثر عدد رینولدز بر عدد ناسلت سرتاسری در جریان مغشوش

#### ۴-۳-۲: اثر عدد دوران

در این بخش اثر عدد دوران در جریان مغشوش بررسی شده است. در شکل ۴-۳۰ کانتورهای سرعت محوری در  $Re=5000$  و اعداد دوران مختلف نشان داده شده‌اند. مانند جریان دوبعدی آرام، دوران تأثیر چندانی بر پروفیل سرعت محوری در مسیر خنک‌کاری ندارد و عمده اثر آن در ناحیه خروجی ظاهر می‌شود. این موضوع بخوبی در شکل ۴-۳۱ نشان داده شده است. مطابق شکل پروفیل سرعت محوری در ناحیه خروجی بصورتی است که به ازای  $Ro=0.2$  جریان به سمت دیواره سمت چپ و در  $Ro=0.2$  به سمت دیواره سمت راست متمایل شده است. در حالیکه در  $Ro=0$  جریان تقریباً بصورت متقارن خارج می‌شود.

همچنین در این تصویر مشاهده می‌شود که مقدار ماکزیمم سرعت محوری در  $Ro=-0.2$  از  $Ro=0.2$  بیشتر است. علت این موضوع را بایستی در ناحیه قوس جستجو کرد.

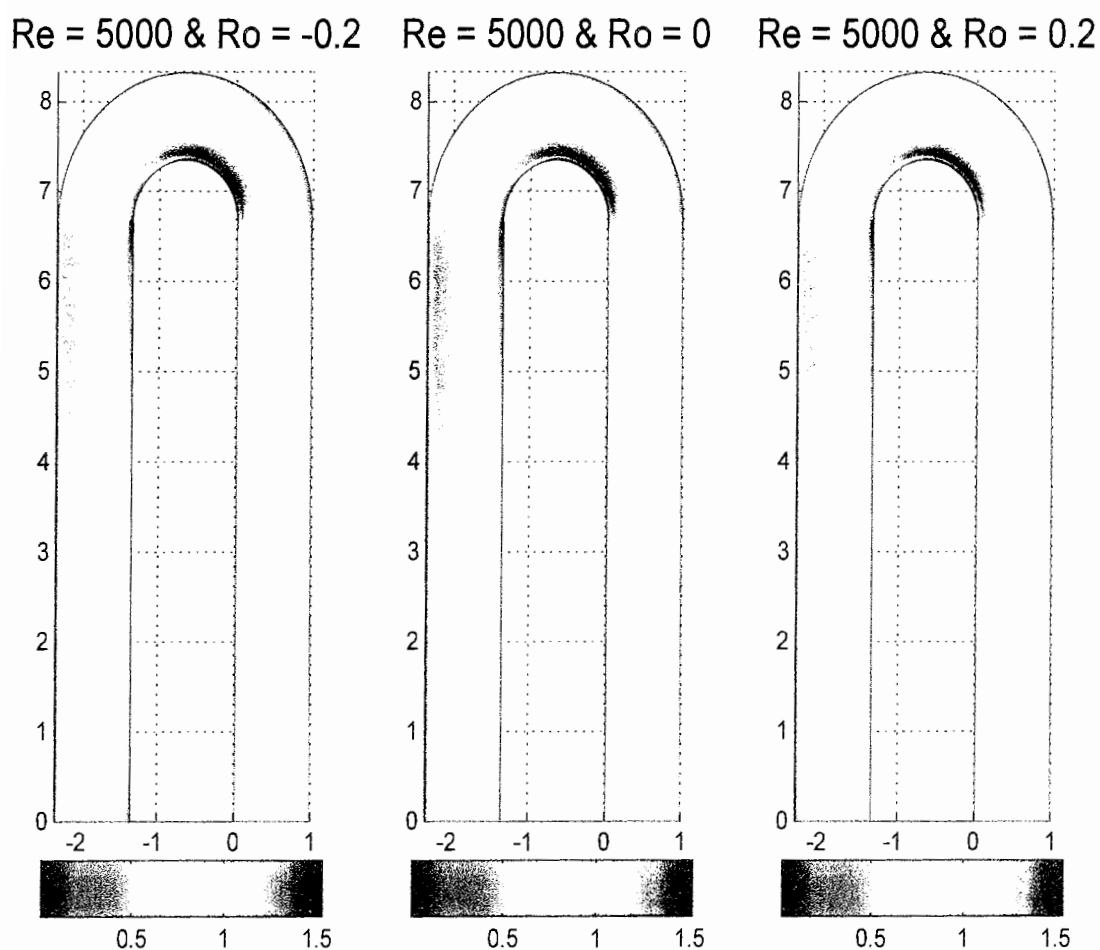
به طور کلی انحنای سبب یکسری جریانهای ثانویه می‌شود که به گردابه‌های تیلور و گورتلر معروف هستند و دوران نیز به دلیل اثر نیروهای کریولیس، یکسری گردابه ایجاد می‌کند با این تفاوت که گردابه‌های تیلور و گورتلر فقط در اثر انحنای قوس ایجاد می‌شوند. در حالیکه جریانهای ثانویه ناشی از دوران، در کل مسیر خنک‌کاری تولید می‌شوند.

در اعداد دوران منفی (دوران ساعتگرد) گردابه‌های ناشی از دوران و انحنای یکدیگر را تشدید می‌کنند در حالیکه در اعداد دوران مثبت (دوران پادساعتگرد) یکدیگر را خنثی می‌نمایند و بطور کلی با ازدیاد جریانهای ثانویه، میزان تمایل جریان به سمت دیواره‌ها بیشتر می‌شود.

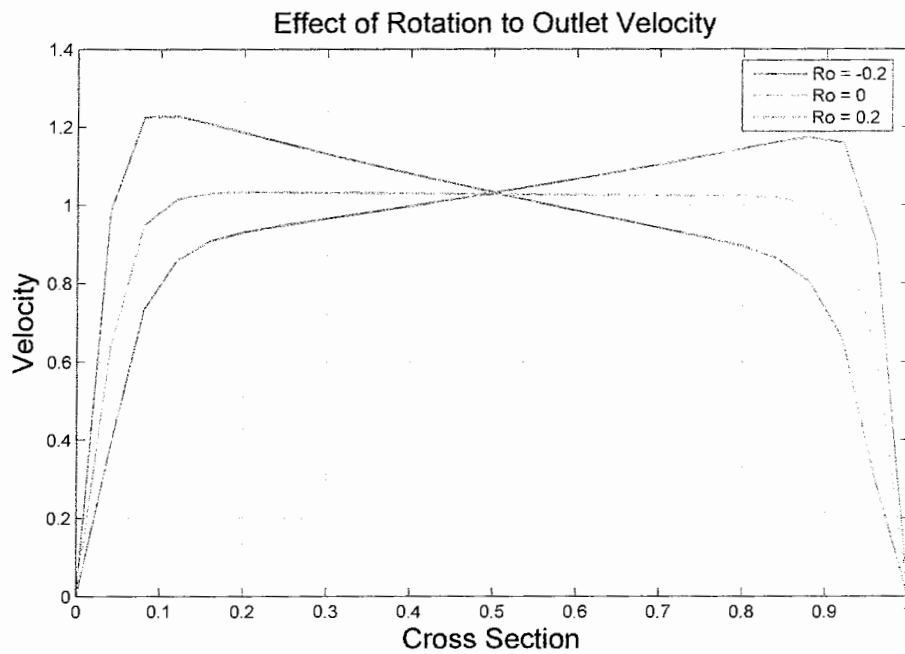
در شکل ۴-۳۲، کانتورهای دما در  $Re=5000$  و اعداد دوران مختلف نشان داده شده است. رفتار کانتورهای دما تا حد بسیار زیادی شبیه کانتورهای سرعت است. یعنی عمده اثر دوران بر دما در نزدیکی ناحیه خروجی قابل مشاهده است. با دوران پره، کانتور دما به سمت یکی از دیواره‌ها متمایل می‌شود. این قضیه در شکل ۴-۳۳ به نحو بهتری قابل مشاهده است.

علت این موضوع را بایستی در وابستگی میدان دما به میدان سرعت جستجو کرد. به همین دلیل، در محلهایی که ضخامت لایه مرزی سرعت زیاد شده ضخامت لایه مرزی دما نیز افزایش یافته است و بالعکس. لذا شکل پروفیل دما تا حد زیادی از پروفیل سرعت محوری تبعیت می‌کند.

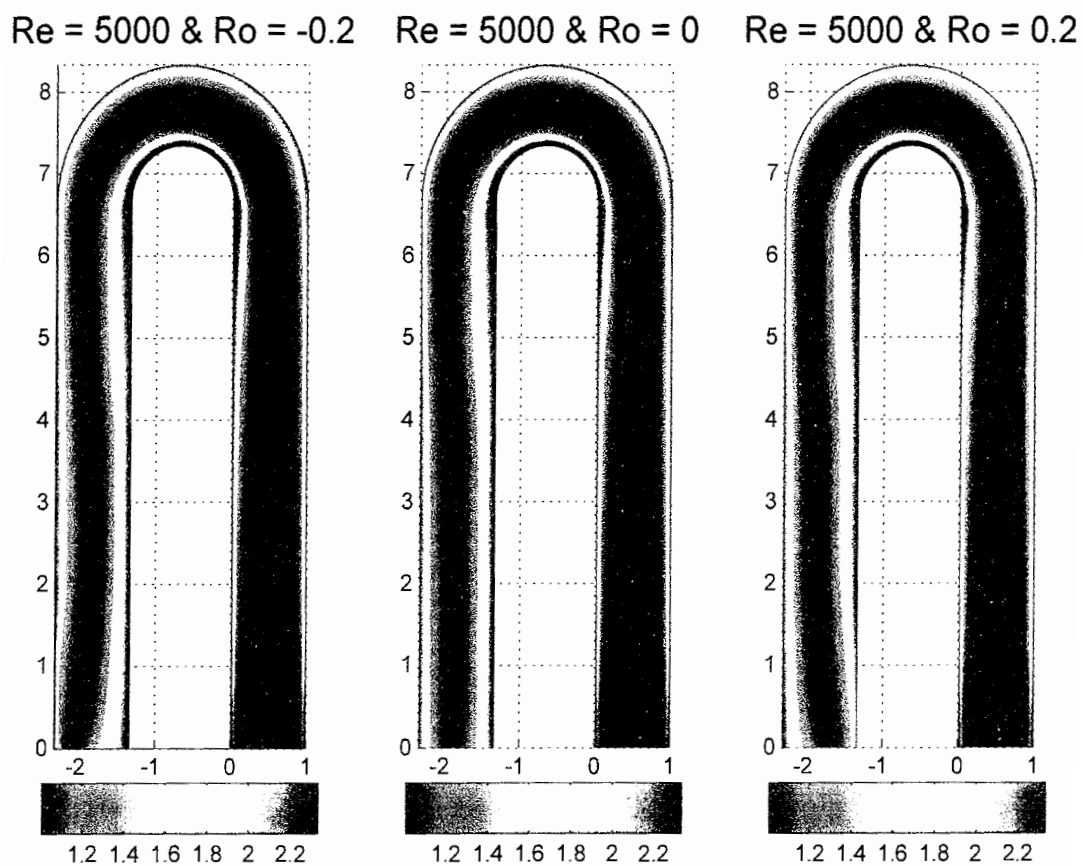
در شکل ۴-۳۴ توزیع عدد ناسلت سرتاسری برحسب عدد دوران در  $Re=5000$  نشان داده شده است. مطابق این شکل، ایجاد دوران سبب افزایش عدد ناسلت می‌شود و علت اصلی این قضیه ناشی از ایجاد جریانهای ثانویه و تقویت اغتشاش در اثر دوران است. همچنین مطابق تصویر عدد ناسلت سرتاسری نسبت به عدد دوران حول  $Ro=0$  متقارن نیست و مقدار آن در  $Ro<0$  از مقادیر نظیرش در  $Ro>0$  بیشتر است و همانطور که گفته شد علت اصلی این موضوع ناشی از تداخل جریانهای ثانویه ناشی از انحنا و دوران است.



شکل ۴-۳۰: کانتورهای سرعت محوری در  $Re=5000$  و اعداد دوران مختلف

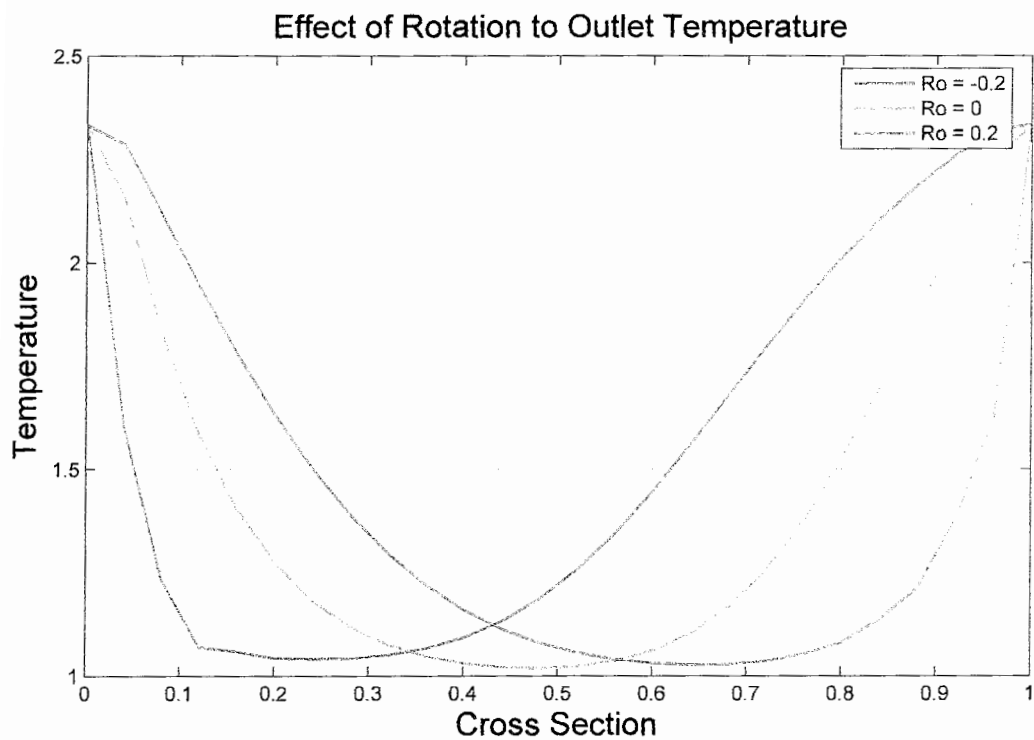


شکل ۴-۳۱: اثر عدد دوران بر پروفیل‌های سرعت محوری

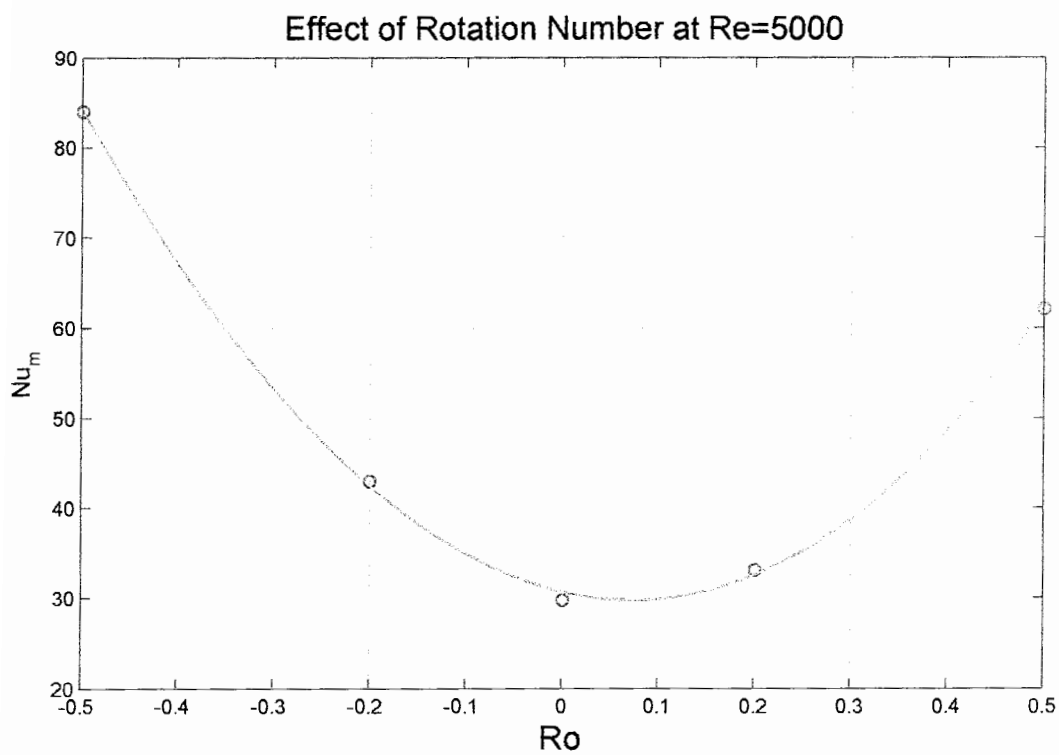


شکل ۴-۳۲: کانورهای دما در  $Re=5000$  و اعداد دوران مختلف





شکل ۴-۳۳: اثر عدد دوران بر پروفیل‌های دما



شکل ۴-۳۴: اثر عدد دوران بر عدد ناسلت سرتاسری در جریان مغشوش

#### ۴-۴: جریان آرام سه بعدی

در این بخش، نتایج مربوط به جریان آرام سه بعدی در مسیر خنک‌کاری مطالعه شده است. در تصاویر این بخش، کلیه کمیته‌ها براساس روابط ۲-۷۳ بی‌بعد شده‌اند. در حالت سه بعدی، هندسه مسیر کاملاً مشابه مسیر خنک‌کاری توربینهای گازی پیشرفته است. در زیر برخی پارامترهای فیزیکی و هندسی جریان آمده است:

۱- طول قسمت مستقیم در نواحی ۱ و ۳: ۲۰ cm

۲- شعاع انحنای قوس داخلی: ۳ cm

۳- قطر هیدرولیکی مسیر خنک‌کاری (مقطع مسیر خنک‌کاری مربع است): ۳ cm

۴- شعاع توربین: ۱ m

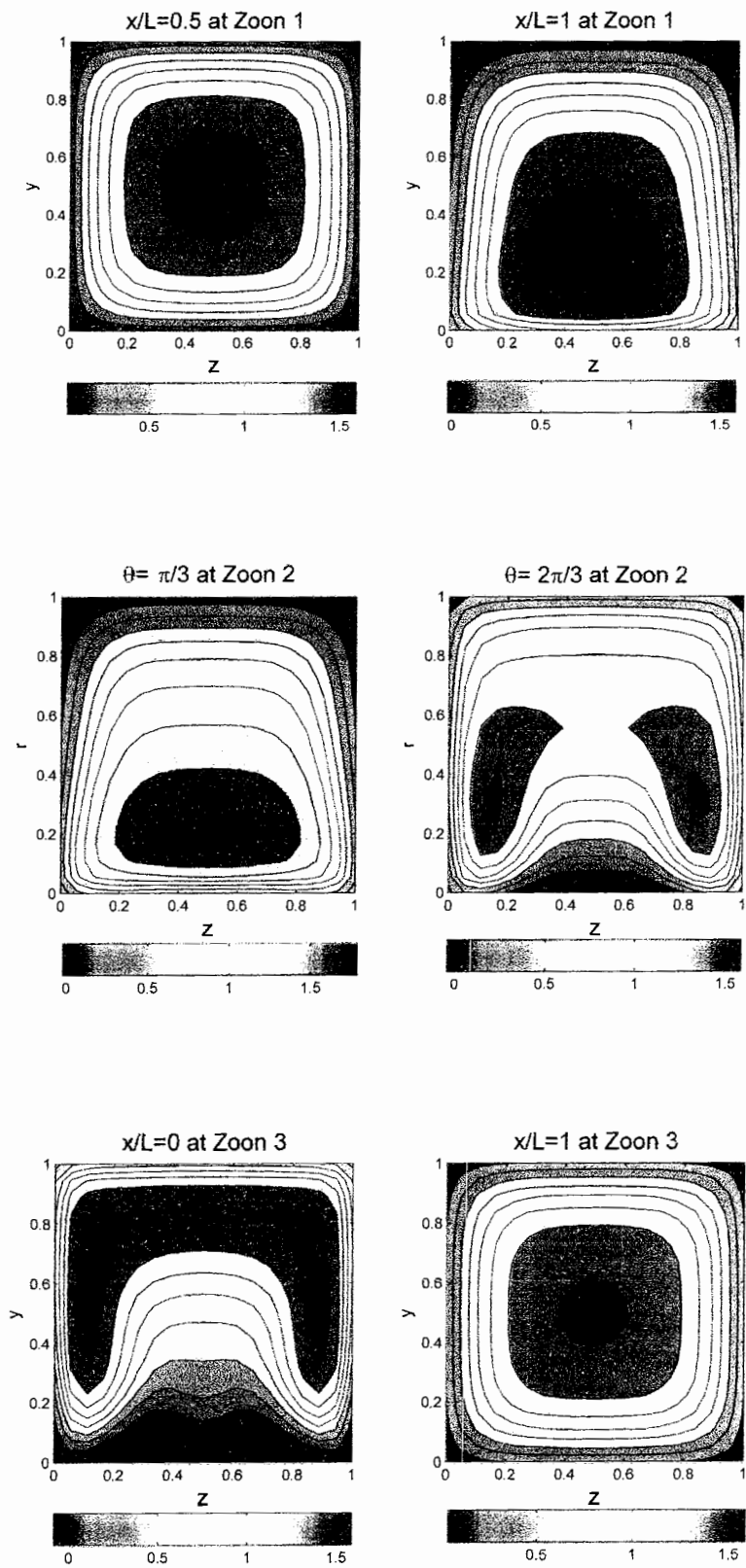
۵- دمای سیال ورودی: ۳۰۰ k

۶- دمای دیواره‌ها: ۷۰۰ k

۷- سرعت جریان در ورودی: ۰/۱ m/s

۸- عدد رینولدز: ۱۹۰

در شکل ۴-۳۵، کانتورهای سرعت محوری در مقاطع مختلف و در یک کانال ایستا (مسیر خنک‌کاری پرده استاتور) نشان داده شده است. مطابق شکل در ناحیه اول و در  $x/L=0/5$  (طول نواحی ۱ و ۳ است) جریان تقریباً به طور متقارن در حال توسعه است و در همین ناحیه و در  $x/L=1$  (شروع انحنا) توده سیال به سمت قوس داخلی متمایل شده است و ضخامت لایه مرزی در سمت قوس محدب بسیار کمتر از قوس مقعر است. با پیشروی در قوس به دلیل رشد لایه مرزی روی قوس محدب، به تدریج توده سیال از قوس محدب فاصله گرفته و در  $\theta = 120^\circ$  در آستانه جدایش قرار می‌گیرد. همانطور که در شکل دیده می‌شود در  $\theta = 120^\circ$  در دو سمت کانال دوهسته پرسرعت ایجاد شده است. علت این قضیه فعالیت جریانهای ثانویه ناشی از انحنا (گردابه‌های تیلور و گورتلر) است. در ابتدای ناحیه سوم، اثرات جدایش و در عین حال اثرات انحنا کاملاً قابل تشخیص است. پس از عبور از قوس جریان دچار تلاطماتی می‌شود که اثرات لزجت این تلاطمات را خنثی می‌کند و در نهایت جریان به شکل متقارن و توسعه یافته (در ناحیه سوم و در  $x/L=1$ ) خارج می‌شود.



شکل ۴-۳۵: کانتورهای سرعت محوری در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری ایستا

در شکل ۴-۳۶، خطوط جریانهای عرضی در مقاطع مختلف کانال نشان داده شده اند. مطابق شکل در ناحیه اول و در  $x/L=0/5$ ، خطوط جریان به سمت مرکز کانال گرایش دارند. این موضوع ناشی از رشد لایه مرزی و در حال توسعه بودن جریان است.

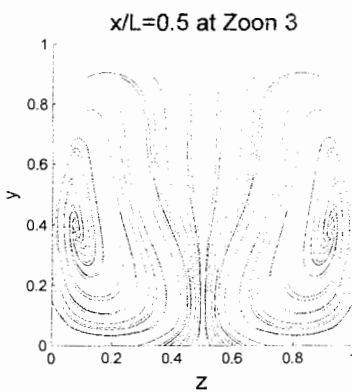
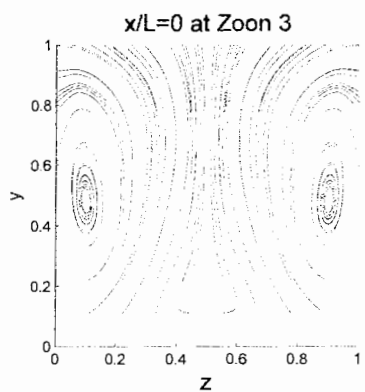
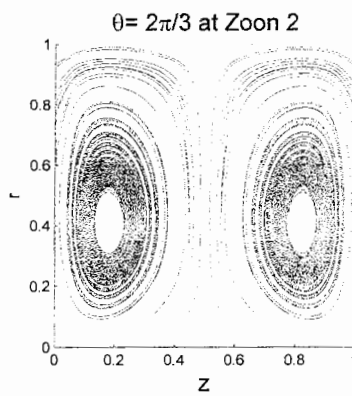
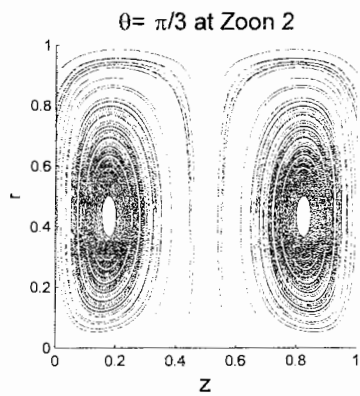
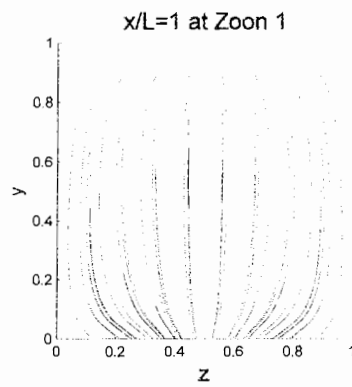
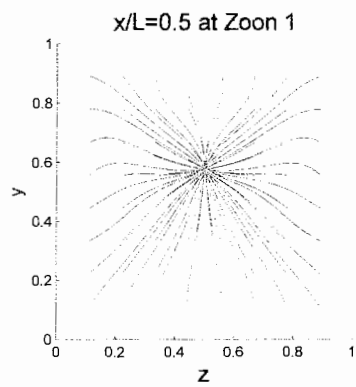
با رسیدن به قوس در  $x/L=1$  خطوط جریان کاملاً بهم ریخته و از سمت بالا به پایین مقطع (از سمت قوس مقعر به سمت قوس محدب) متمایل شده است و این پدیده ناشی از شروع انحنا است که سبب تمایل توده سیال به سمت دیواره محدب گردیده است.

در قوس نیز اثرات انحنا کاملاً قابل ملاحظه است. مطابق شکل در  $\theta=60^\circ$  و  $\theta=120^\circ$  گردابه های تیلور و گورتلر [۱۶] کاملاً قابل مشاهده هستند.

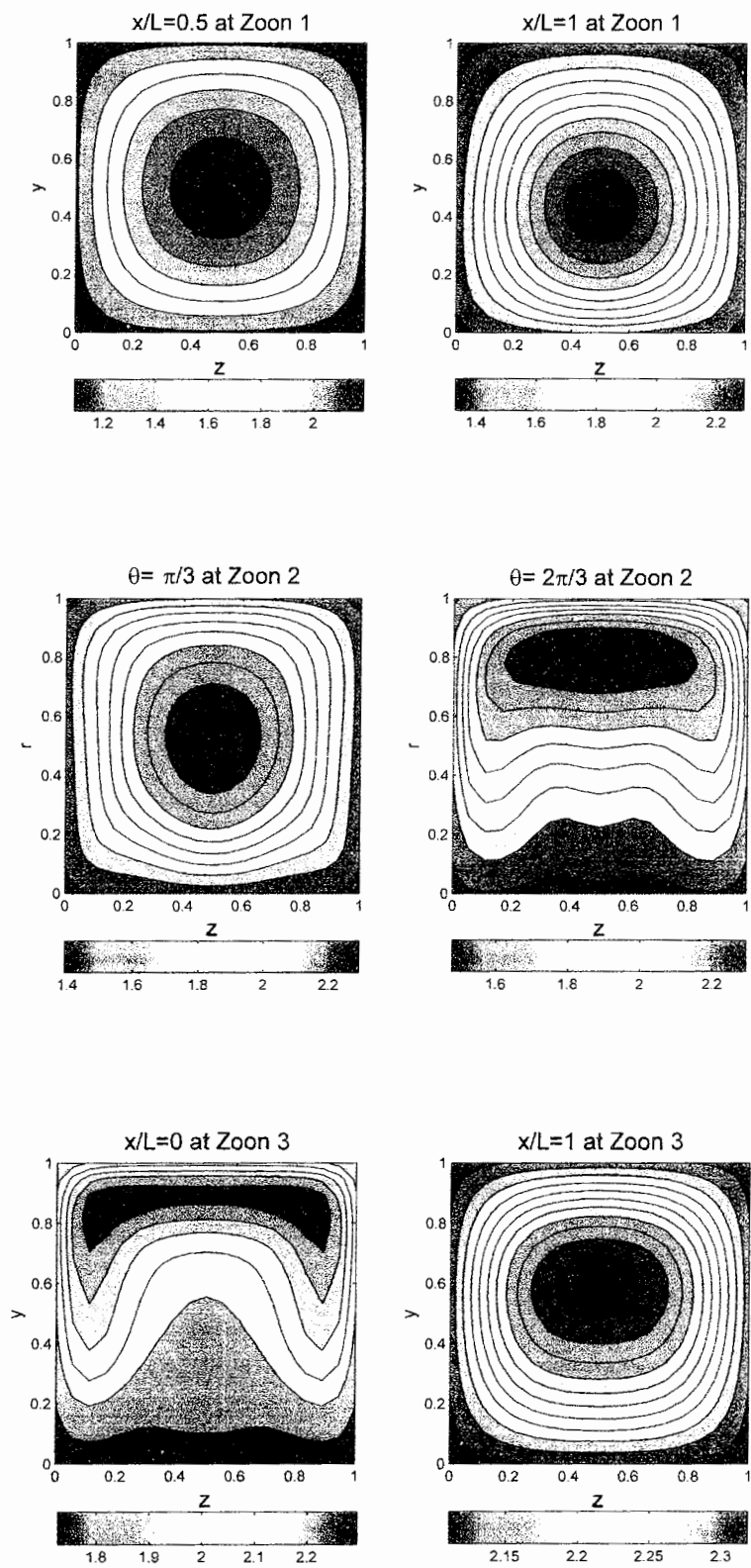
همانطور که دیده می شود، در ابتدای ناحیه سوم و در  $x/L=0$  (انتهای قوس) اثرات انحنا کاهش یافته و اثرات جدایش قابل ملاحظه است. پس از انحنا، تلاطم در جریان ایجاد می شود (مانند جریانهای دوبعدی) که این تلاطمات در وسط ناحیه سوم و در  $x/L=0/5$  نشان داده شده اند.

شکل ۴-۳۷، کانتورهای دما را در مقاطع مختلف کانال نشان می دهد. مطابق شکل با پیشروی جریان به تدریج لایه مرزی حرارتی نیز رشد می کند و همچنین رفتار کانتور دما بسیار شبیه کانتور سرعت محوری است

بطوریکه در نواحی پرسرعت میزان دمای سیال کمتر است و بالعکس. مطابق شکل در ناحیه جدایش (ابتدای ناحیه سوم) دمای سیال فوق العاده بالا و نزدیک دمای دیواره است. در نهایت در انتهای ناحیه سوم، جریان به توسعه یافتگی حرارتی رسیده است.



شکل ۴-۳۶: خطوط جریانهای عرضی در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری ایستا



شکل ۴-۳۷: کانتورهای دما در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری ایستا

#### ۴-۱: اثر عدد دوران

در این بخش اثر دوران بر جریان خنک کاری داخلی بررسی شده است. در شکل ۴-۳۸ کانتورهای سرعت محوری در مقاطع مختلف و در یک کانال متحرک (مسیر خنک کاری پره روتور) نشان داده شده است. در این حالت زاویه حمله پره  $90^\circ$  و عدد دوران برابر  $Ro=1$  است. با مقایسه این شکل با تصویر ۴-۳۵ در می‌یابیم که توزیع سرعت محوری در مسیر خنک کاری گردان بسیار متفاوت با مسیرهای ایستا است و دوران سبب تراکم توده سیال در سمت یکی از دیواره‌ها می‌شود و در اینحالت سرعت جریان را بر روی دیواره داخلی افزایش می‌دهد.

ولی در انحنا و در این زاویه حمله اثر دوران و انحنا کاملاً برعکس یکدیگر است و در جهت تضعیف یکدیگر عمل می‌کنند. و در نهایت در ناحیه خروجی، جریان به صورتی خارج می‌شود که کاملاً به دیواره داخلی متمایل شده است.

در شکل ۴-۳۹ خطوط جریانهای عرضی در مقاطع مختلف کانال نشان داده شده‌اند. مطابق شکل دوران سبب ایجاد یکسری گردابه‌هایی در مسیر خنک کاری می‌شود. این گردابه‌ها کاملاً در ناحیه اول و در  $X/L=0/5$  مشهود هستند.

با پیشروی جریان و نزدیک شدن به انحنا بین گردابه‌های ناشی از دوران و انحنا تداخل پیش می‌آید. در زاویه حمله  $90^\circ$  این گردابه‌ها کاملاً معکوس یکدیگر عمل می‌کنند و لذا همانطور که از شکل دیده می‌شود در انتهای ناحیه اول، گردابه‌های ناشی از دوران در آستانه تضعیف قرار دارند و بر روی قوس و در زوایای  $\theta=60^\circ$  و  $\theta=120^\circ$  اثرات تخریبی آنها بر یکدیگر کاملاً مشهود است. در انتهای قوس و پس از جدایش، خطوط جریان نسبتاً پیچیده هستند این امر ناشی از تداخل اثرات دوران، جدایش و انحنا است.

در ناحیه سوم در  $X/L=0/5$  نیز خطوط جریان نسبتاً پیچیده هستند. در اینجا نیز اثرات تلاطم و دوران با یکدیگر تداخل پیدا کرده‌اند ولی می‌توان دریافت که با کاهش اثرات تلاطم، اثر دوران در حال غلبه است. در ناحیه سوم جهت گردابه‌های ناشی از دوران برعکس ناحیه اول است.

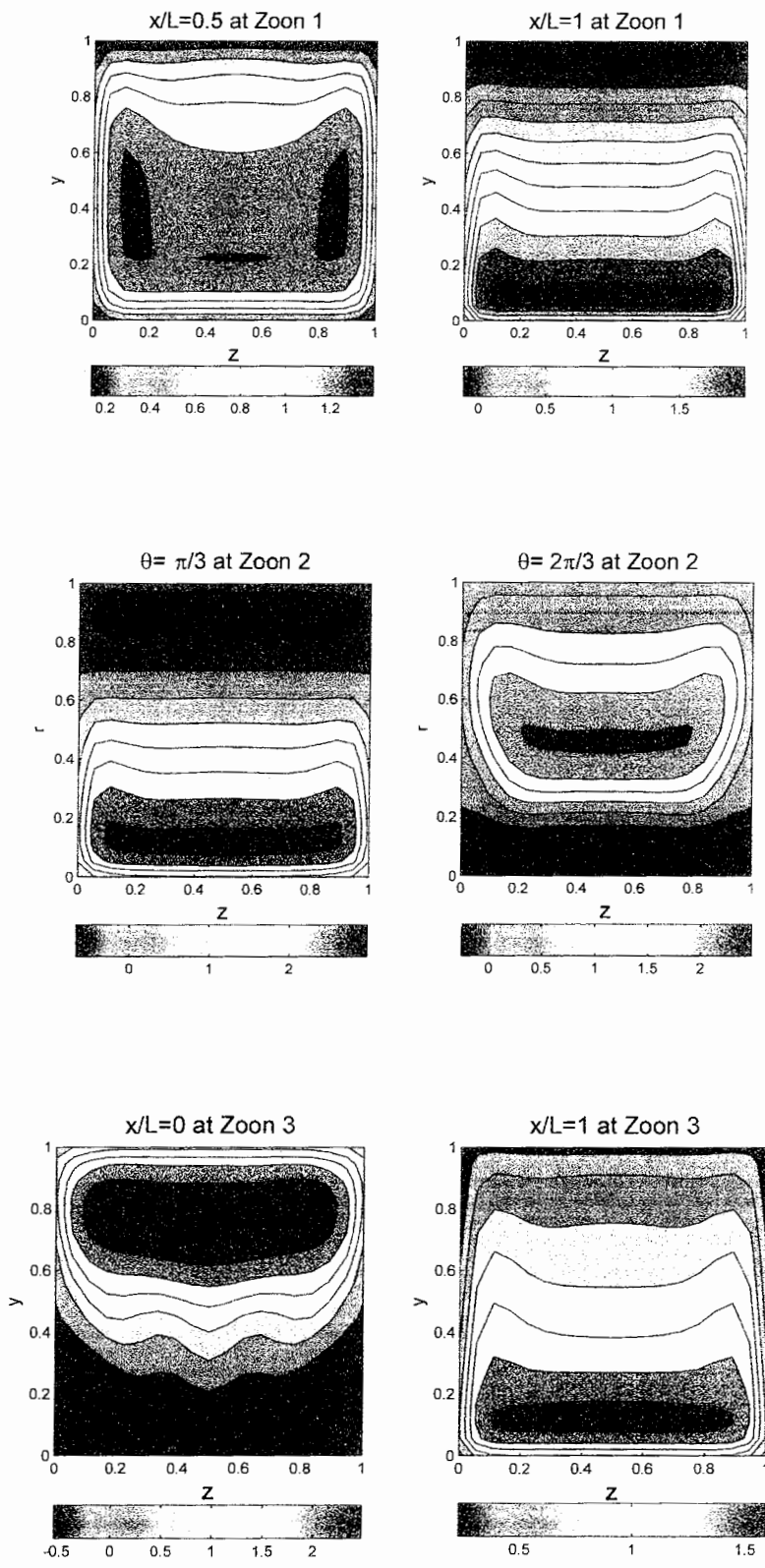
در شکل ۴-۴۰ کانتورهای دمای بی‌بعد در مسیر خنک‌کاری داخلی نشان داده شده‌اند. مطابق شکل با پیشروی جریان، لایه مرزی دما نیز به تدریج رشد می‌کند ولی در اینجا نیز رفتار توزیع دما کاملاً شبیه رفتار توزیع سرعت محوری است.

مطابق شکل در قسمت‌های پرسرعت جریان (قسمت پایینی کانال) دمای سیال نیز کمتر است همچنین در انتهای قوس و در ناحیه جدایش، دمای سیال فوق‌العاده بالا بوده و در خروجی مسیر، توزیع دما به گونه‌ای است که ناحیه دما پایین آن کاملاً به سمت پایین کانال متمایل شده است.

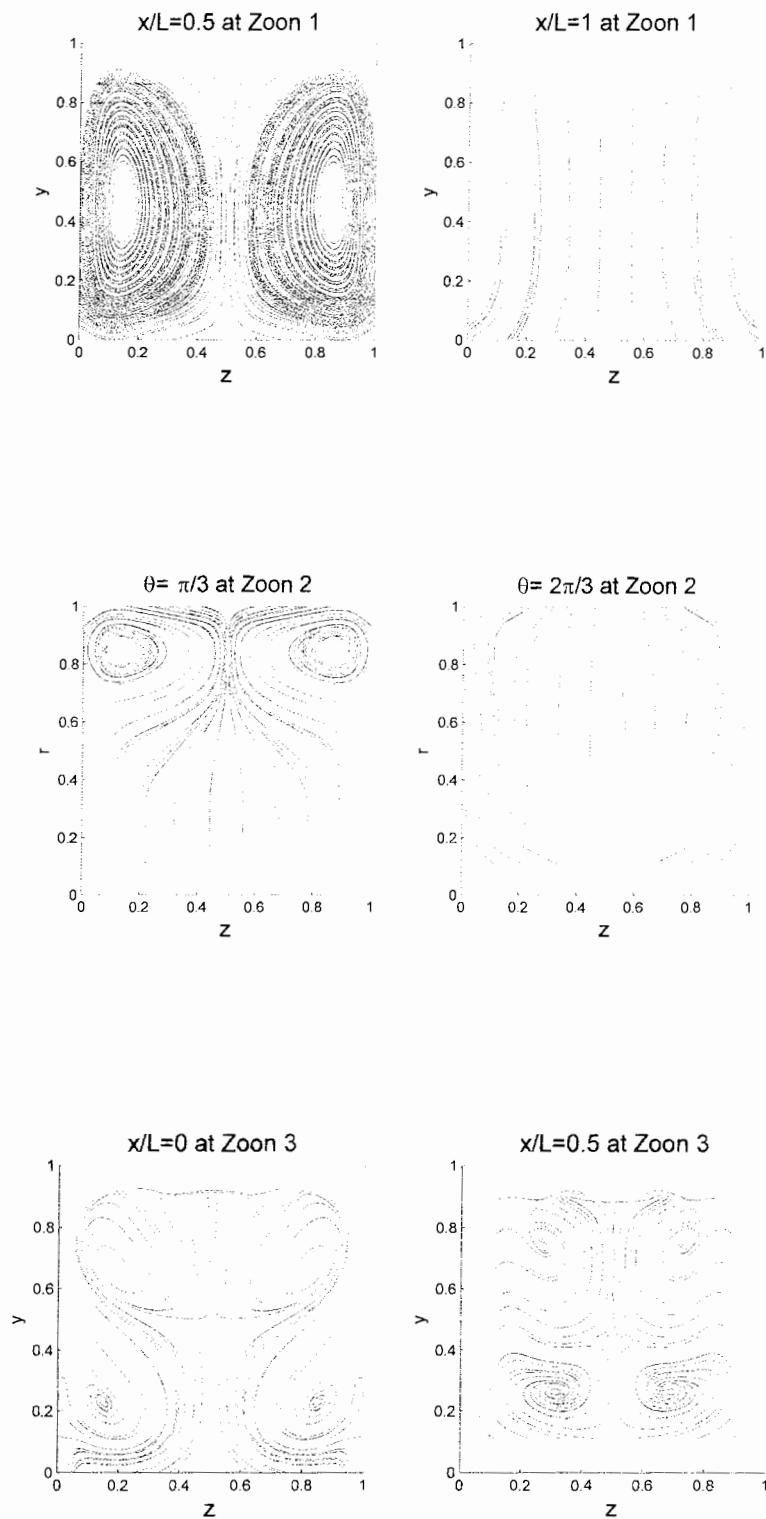
در شکل ۴-۴۱، توزیع عدد ناسلت سرتاسری برحسب عدد دوران و در زاویه حمله  $90^\circ$  نشان داده شده است. مطابق شکل با افزایش عدد دوران، ابتدا عدد ناسلت کاهش می‌یابد ولی به ازای  $Ro > 0.25$  مقدار عدد ناسلت دوباره افزایش می‌یابد. علت این موضوع، این است که با افزایش عدد دوران هرچند شدت گردابه‌ها در مسیرهای مستقیم خنک‌کاری بیشتر می‌شود.

ولی در ناحیه قوس یکدیگر را خنثی می‌کنند. به همین دلیل میزان انتقال حرارت در ابتدا اندکی کاهش می‌یابد ولی به تدریج با تقویت اثر دوران، شدت گردابه‌ها افزایش یافته و افزایش انتقال حرارت ناشی از تقویت گردابه‌ها در مسیر مستقیم به کاهش انتقال حرارت ناشی از تضعیف گردابه‌ها در ناحیه انحنا غلبه می‌کند و انتقال حرارت کلی افزایش می‌یابد.

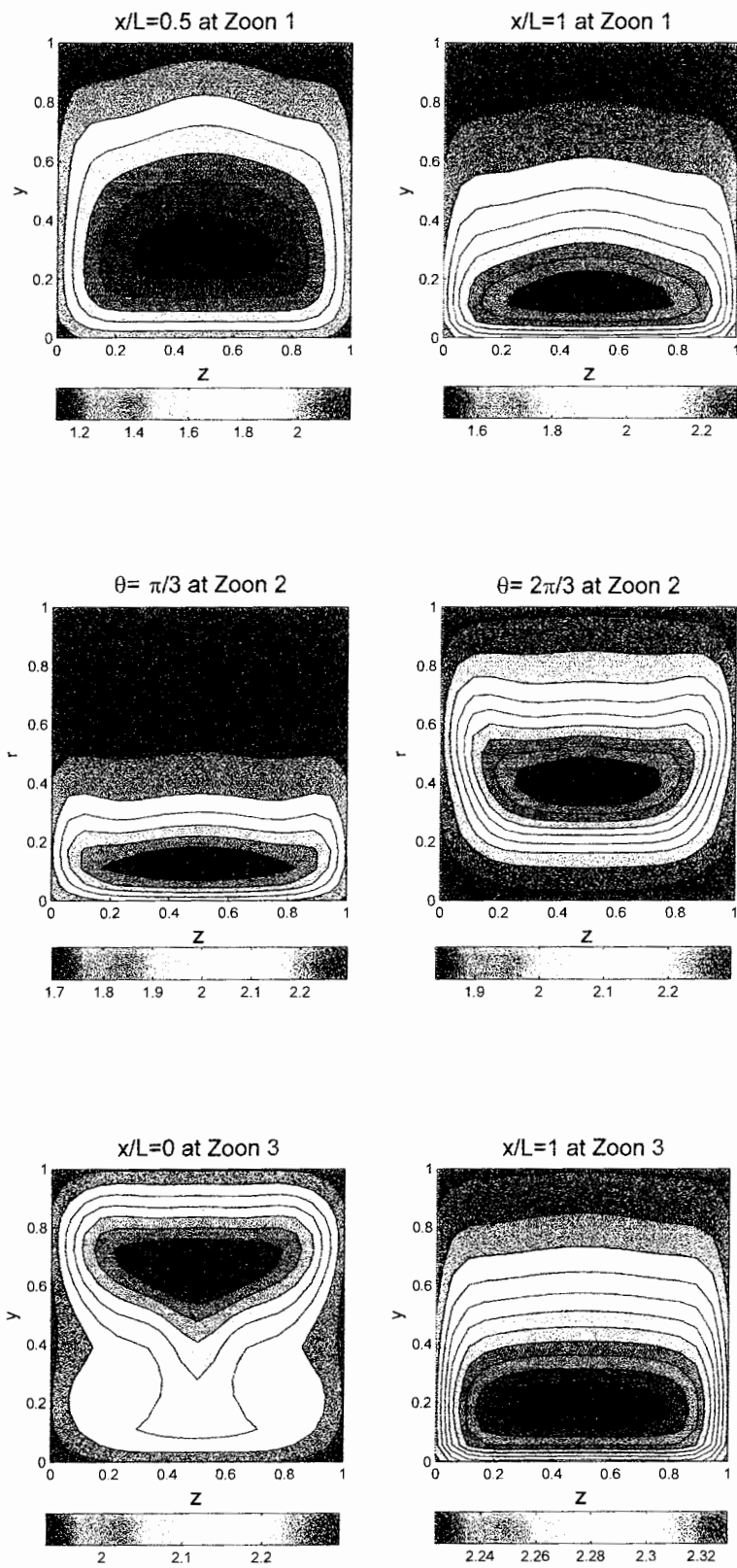




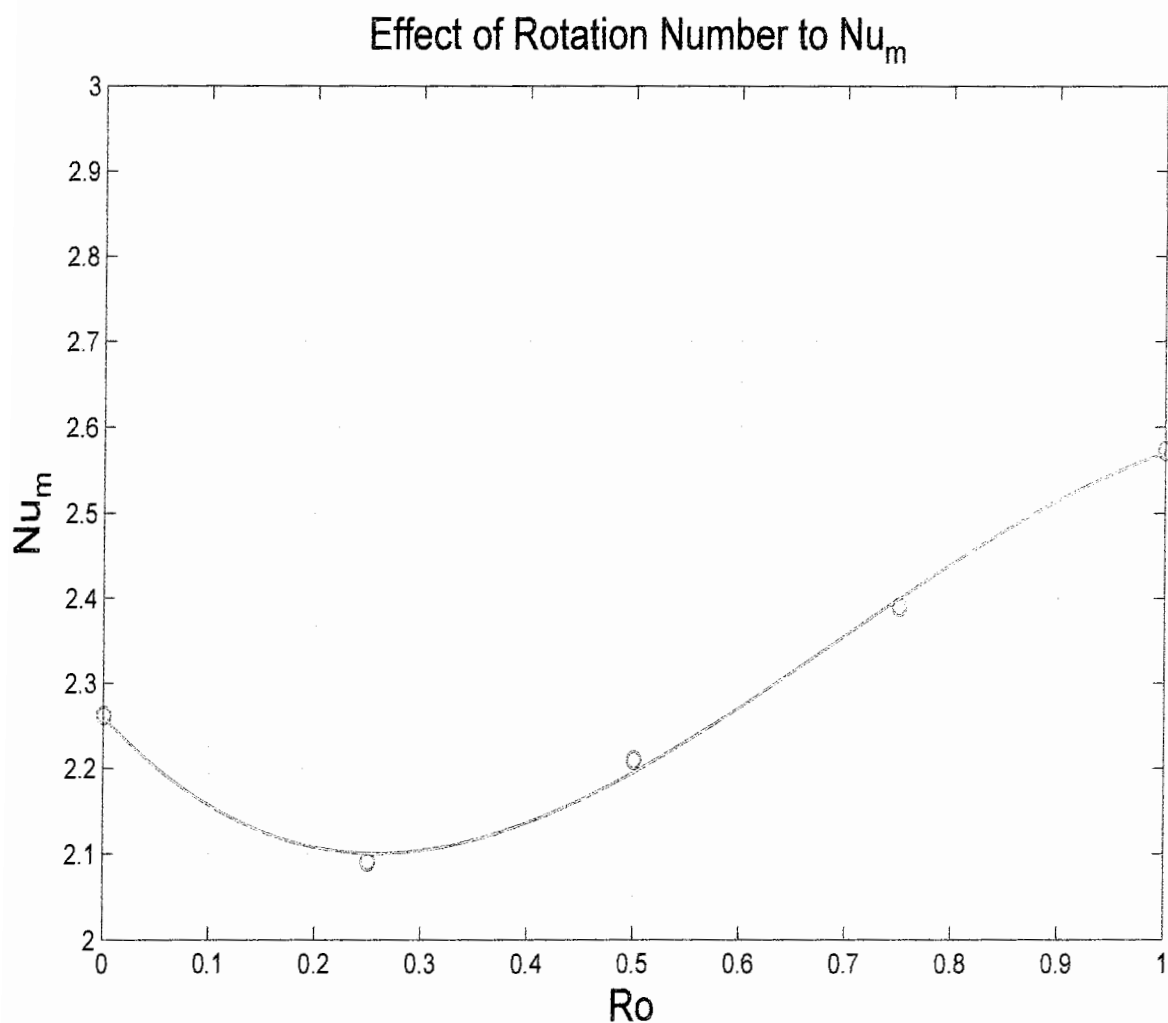
شکل ۴-۳۸: کانتورهای سرعت محوری در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری گردان



شکل ۴-۳۹: خطوط جریانهای عرضی در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری گردان



شکل ۴-۴۰: کانتورهای دما در مقاطع مختلف مسیر خنک کاری گردان



شکل ۴-۴۱: اثر عدد دوران بر عدد ناسلت سرتاسری

#### ۴-۴-۲: اثر زاویه حمله

در این بخش اثر زاویه حمله پره بر جریان خنک‌کاری داخلی بررسی شده است. به طور کلی تغییر زاویه حمله، منجر به تغییر جهت نیروهای کریولیس در مسیر خنک‌کاری می‌شود. بنابراین از آنجا که جریانهای ثانویه ناشی از دوران در اثر نیروهای کریولیس ایجاد شده‌اند. لذا زاویه حمله تأثیر مستقیمی در شکل این جریانهای ثانویه دارند.

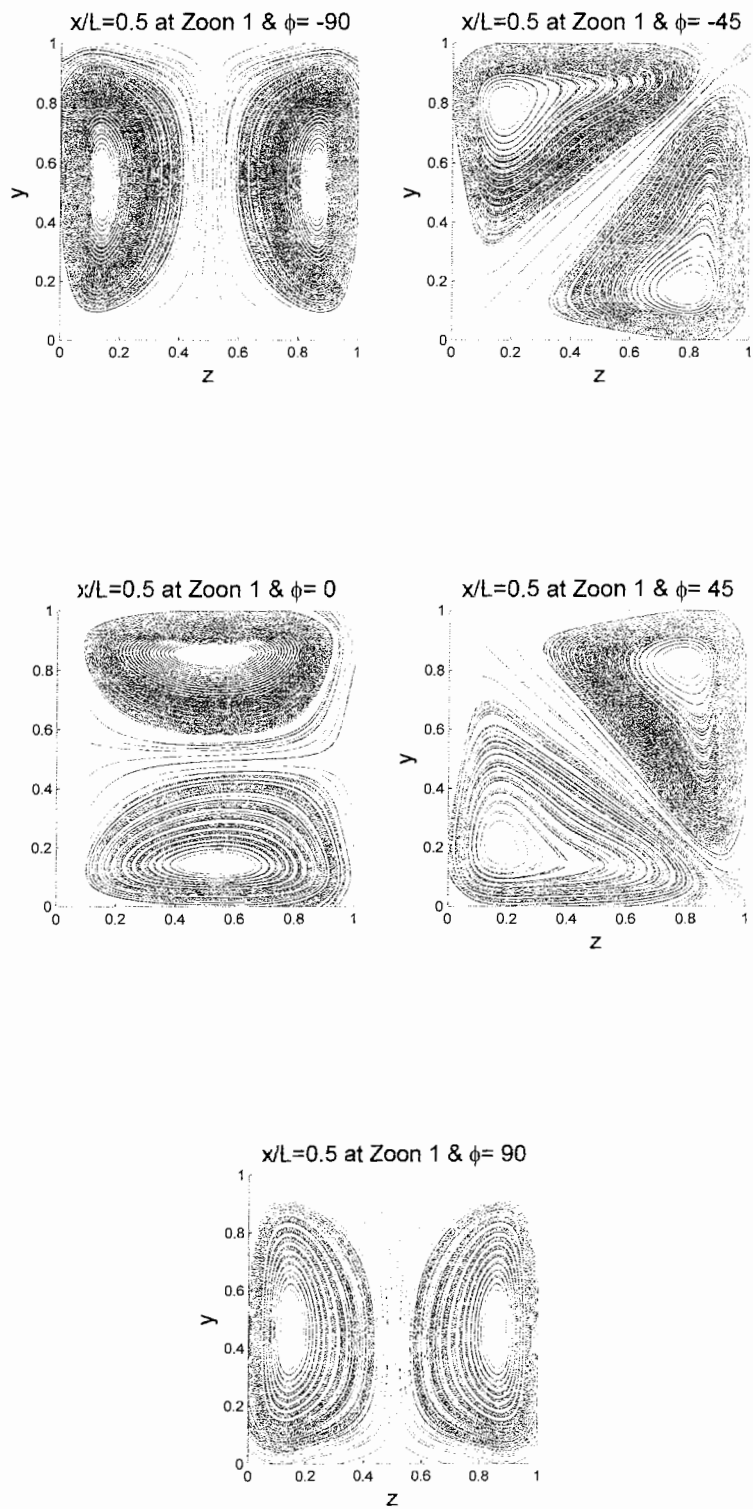
در شکل ۴-۴۲ جریانهای ثانویه در وسط ناحیه اول و به ازای زوایای حمله مختلف نشان داده شده‌اند. در زاویه حمله  $90^\circ$ - نیروی ناشی از شتاب کریولیس در جهت محور  $Y$  و به سمت بالا است که منجر به گردابه‌هایی مطابق شکل شده است. مطابق شکل در زاویه حمله‌های دیگر نیز، گردابه‌ها کاملاً در جهت شتابهای کریولیس ایجاد می‌شوند.

در شکل ۴-۴۳ تداخل اثر گردابه‌های ناشی از دوران و انحنا در وسط ناحیه قوس ( $\theta = 90^\circ$ ) بررسی شده است. مطابق شکل در زاویه حمله  $90^\circ$ - این گردابه‌ها یکدیگر را تقویت می‌کنند ولی به تدریج با افزایش زاویه حمله، اثر یکدیگر را تضعیف می‌کنند بطوریکه در زاویه حمله  $90^\circ$  اثر یکدیگر را کاملاً خنثی می‌نمایند.

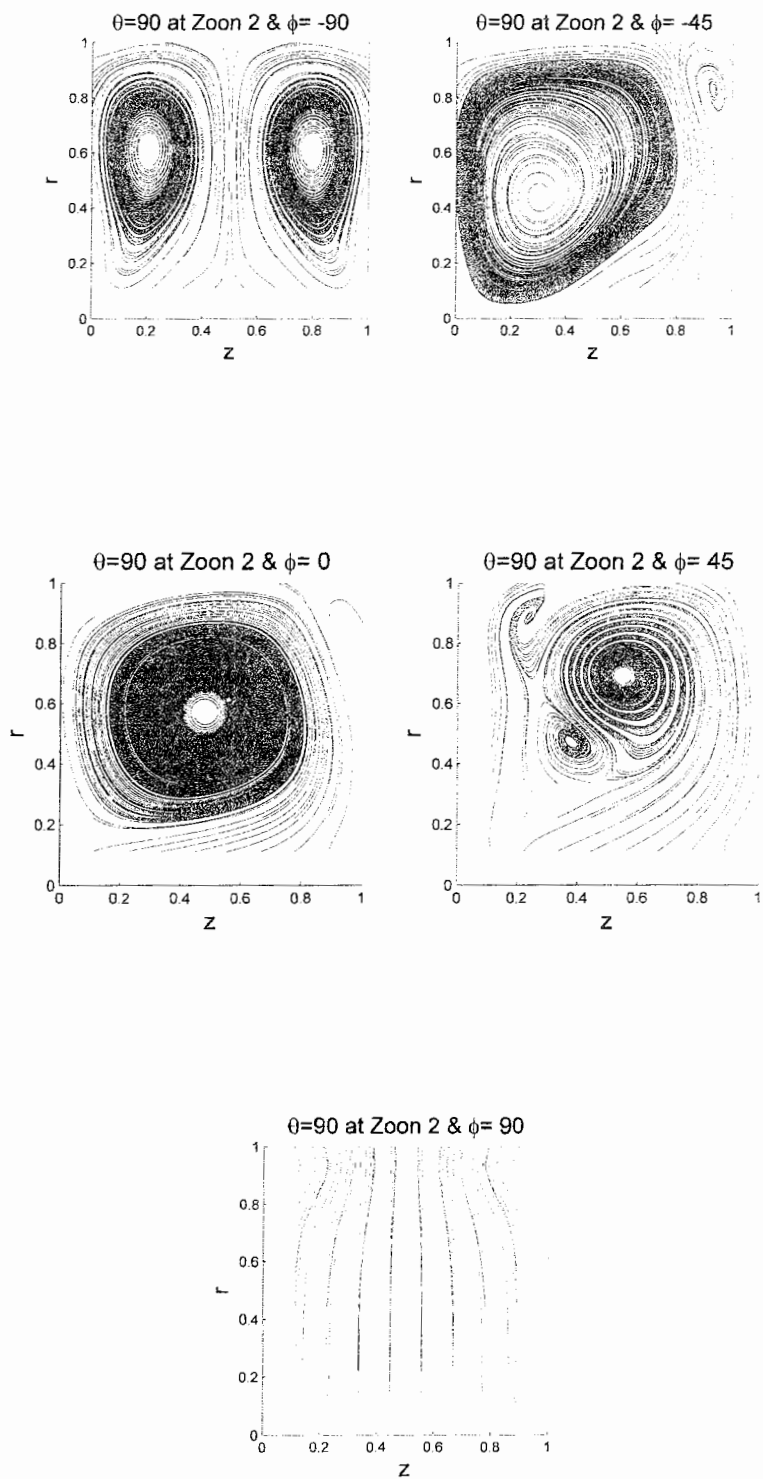
در شکل ۴-۴۴ تداخل اثر گردابه‌های ناشی از دوران و تلاطم در وسط ناحیه سوم نشان داده شده است. مطابق شکل در این قسمت اثرات تلاطم بعد از جدایش و گردابه‌های ناشی از دوران سبب ایجاد این جریانهای ثانویه شده است. ولی به تدریج با پیشروی به سمت ناحیه خروجی، اثرات تلاطم کم شده و اثرات دوران غالب می‌شود.

این موضوع در شکل ۴-۴۵ کاملاً قابل مشاهده است. در این شکل کانتورهای سرعت محوری در خروجی و در زوایای حمله مختلف نشان داده شده است. در اینجا اثرات تلاطم تقریباً محو شده و فقط اثرات دوران حاکم است. مطابق شکل شتابهای کریولیس ناشی از زوایای حمله مختلف سبب ایجاد توزیعهای سرعت متفاوتی می‌شود.

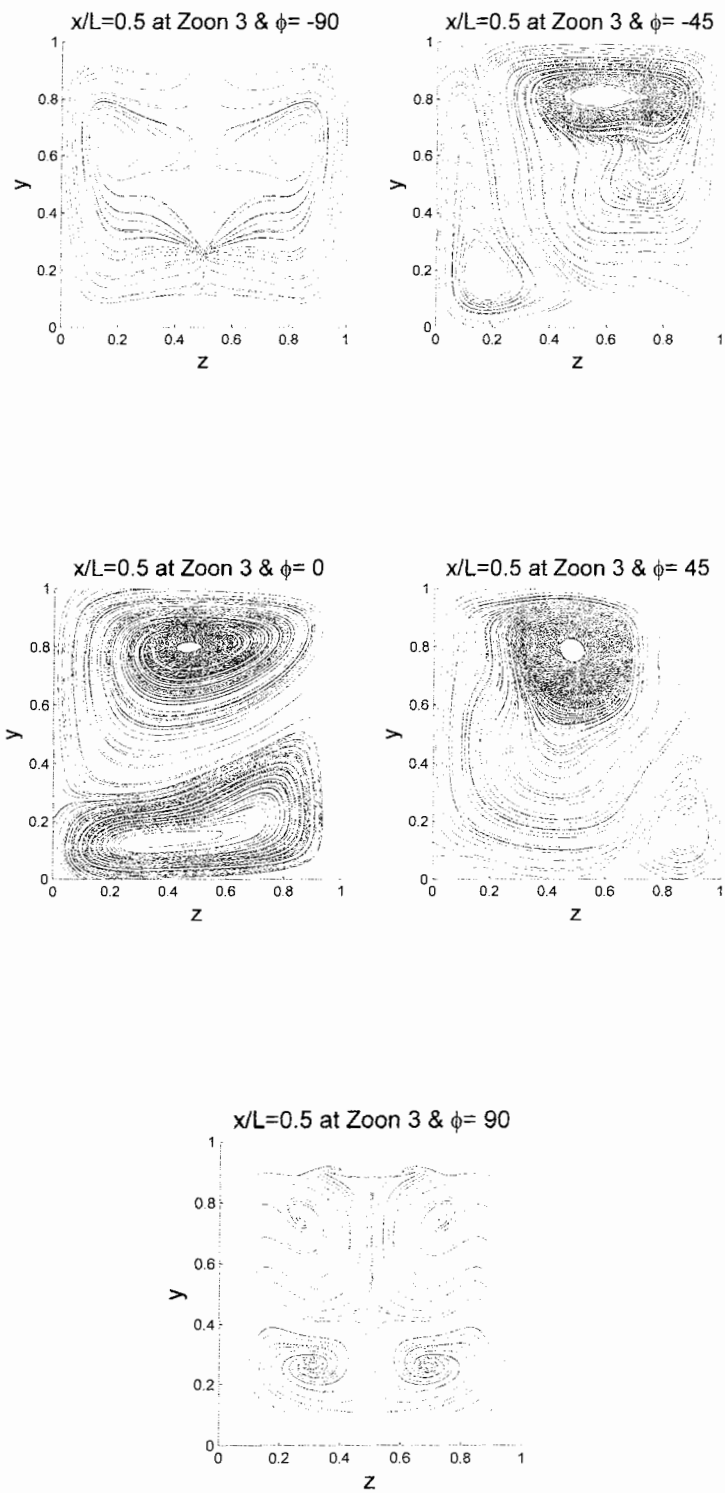
در شکل ۴-۴۶ اثر زاویه حمله بر عدد ناسلت سرتاسری مطالعه شده است. مطابق شکل با افزایش زاویه حمله، عدد ناسلت سرتاسری کاهش می‌یابد. علت این موضوع کاملاً روشن است. زیرا در نواحی اول و سوم، زاویه حمله تأثیر چندانی بر انتقال حرارت ندارد ولی در ناحیه دوم (قسمت قوس) در زوایای حمله منفی، گردابه‌های ناشی از دوران و انحنا یکدیگر را تقویت می‌کنند ولی در زوایای حمله مثبت یکدیگر را تضعیف می‌نمایند.



شکل ۴-۴۲: جریانهای ثانویه در وسط ناحیه اول و به ازای زوایای حمله مختلف

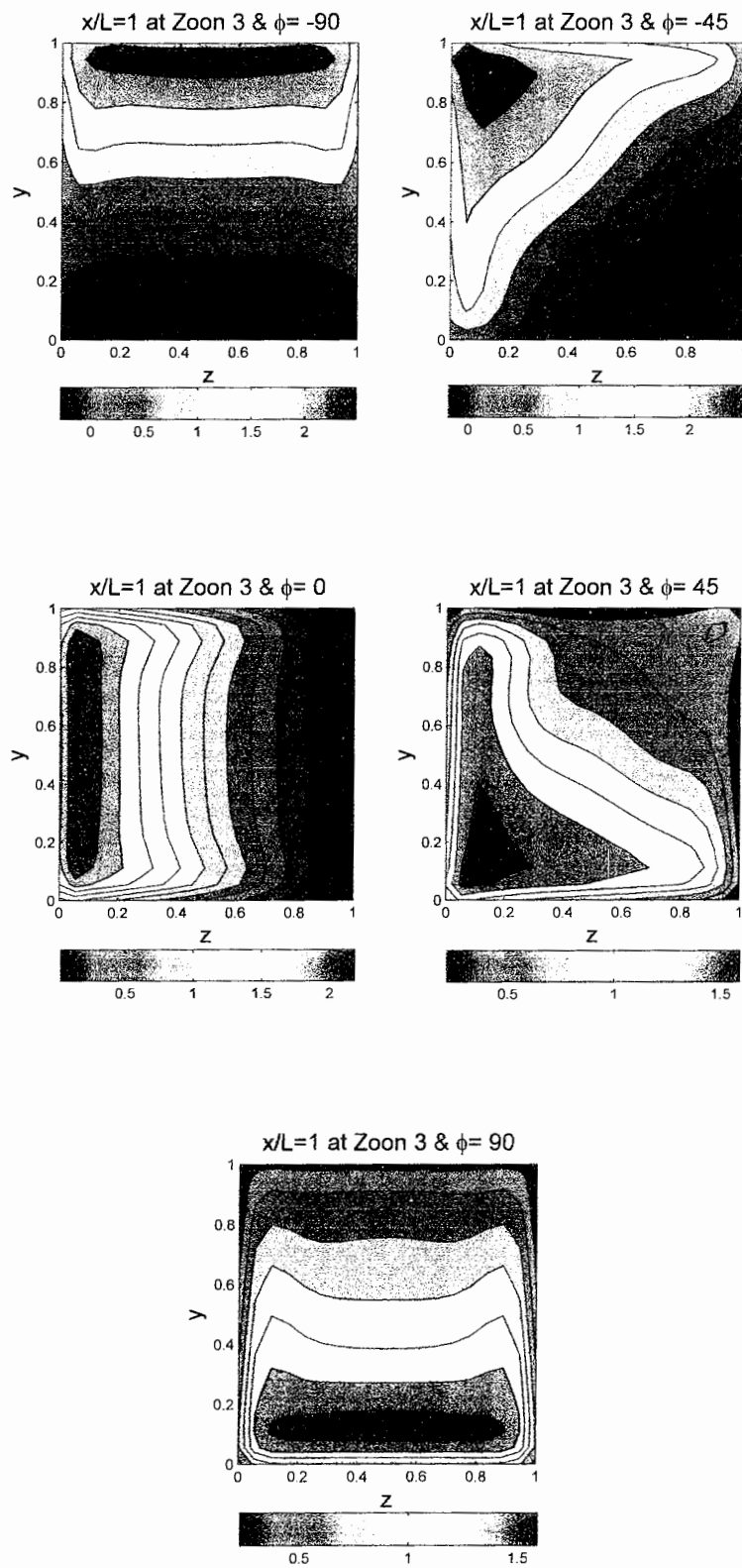


شکل ۴-۴۳: جریانهای ثانویه در وسط ناحیه دوم و به ازای زوایای حمله مختلف

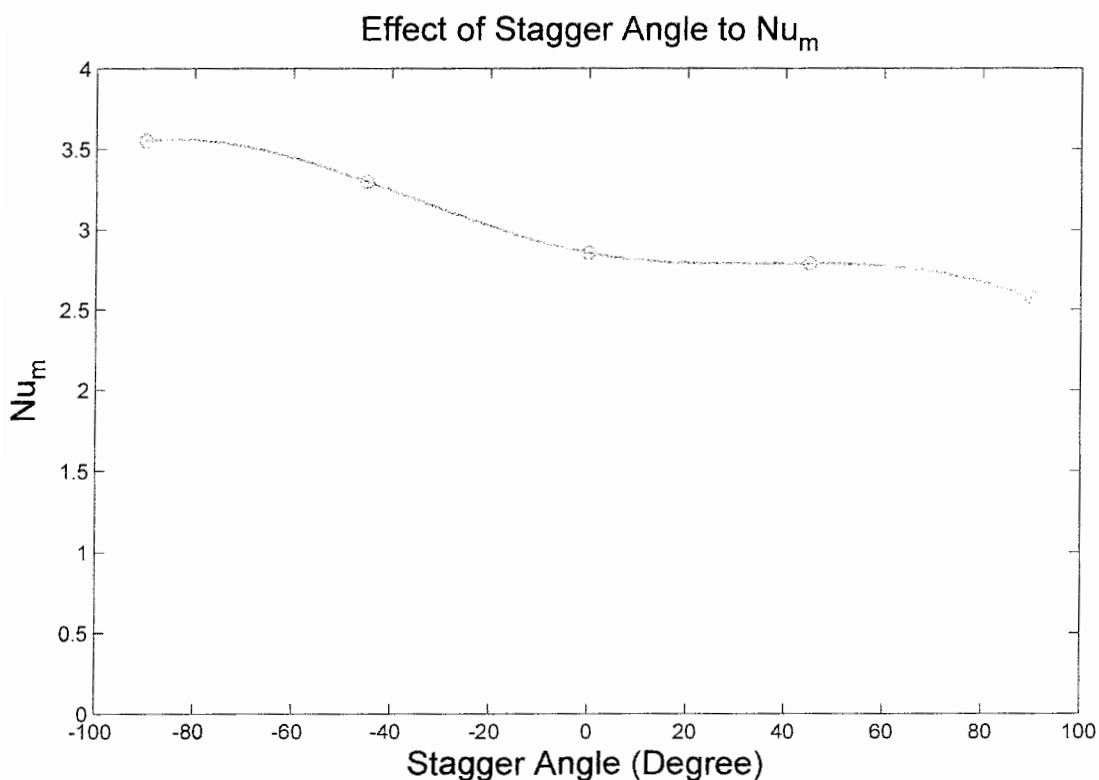


شکل ۴-۴۴: جریانهای ثانویه در وسط ناحیه سوم و به ازای زوایای حمله مختلف





شکل ۴-۴۵: کانتورهای سرعت محوری در خروجی و به ازای زوایای حمله مختلف

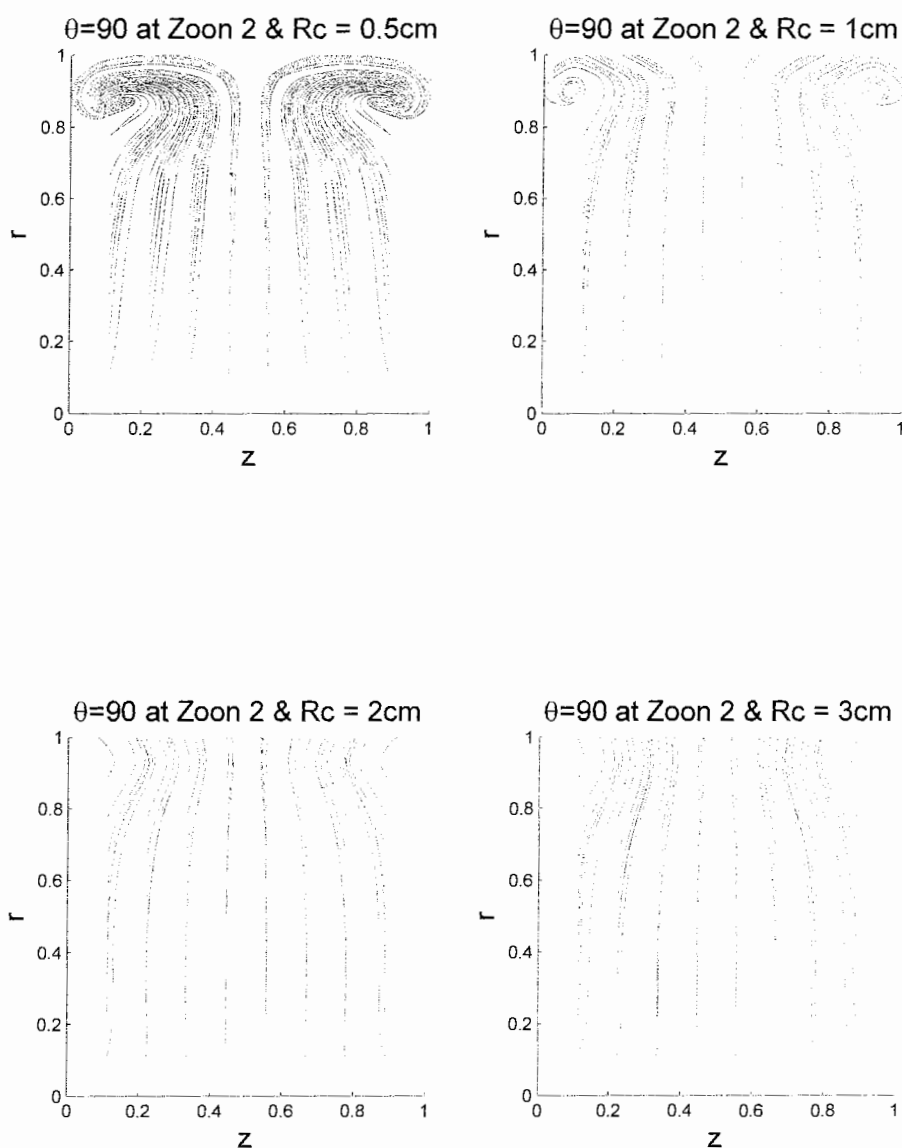


شکل ۴-۴۶: اثر زاویه حمله بر عدد ناسلت سرتاسری

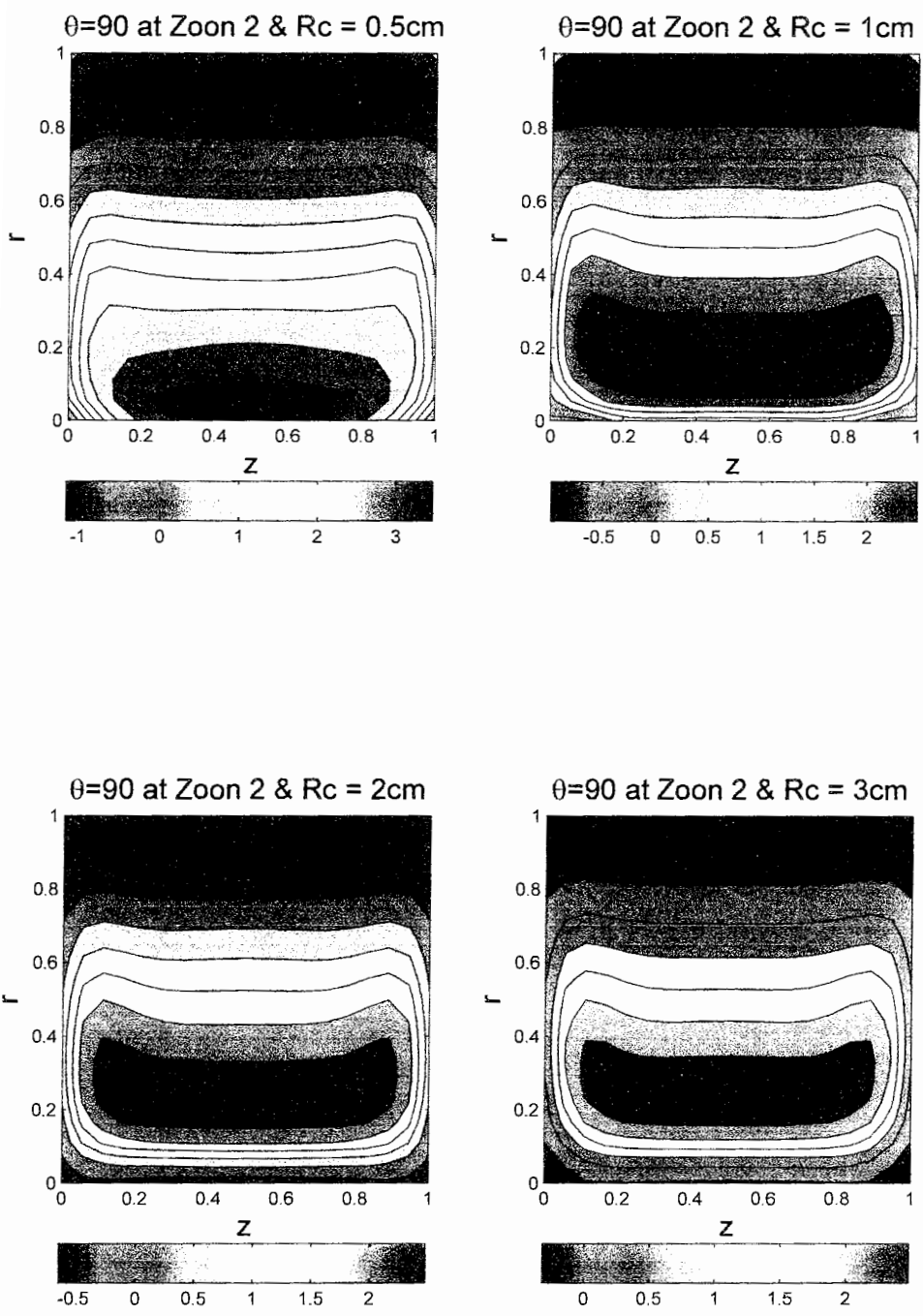
#### ۴-۴-۳: اثر شعاع انحنا قوس داخلی

در این بخش اثر شعاع انحنا قوس داخلی بر جریان خنک کاری پره‌های روتور بررسی شده است. در اینجا زاویه حمله  $90^\circ$  و عدد دوران  $Ro=1$  در نظر گرفته شده است. در شکل ۴-۴۷ خطوط جریان در وسط قوس و در شعاعهای انحنا مختلف نشان داده شده است. مطابق شکل در شعاعهای انحنا کوچک، به دلیل قوی بودن اثر انحنای گردابه‌های ناشی از آن برگردابه‌های ناشی از دوران غلبه دارند ولی با بزرگ شدن شعاع انحنا، اثر گردابه‌های ناشی از انحنا تضعیف شده و به تدریج گردابه‌های ناشی از دوران، اثر آنها را خنثی می‌نمایند. در شکل ۴-۴۸ کانتورهای سرعت محوری در شعاعهای انحنا مختلف نشان داده شده است. مطابق شکل در شعاعهای انحنا کوچک، توده سیال به سمت قوس محدب متمایل شده و اثرات دوران بر آن چندان قابل توجه نیست. ولی به تدریج با افزایش شعاع انحنا

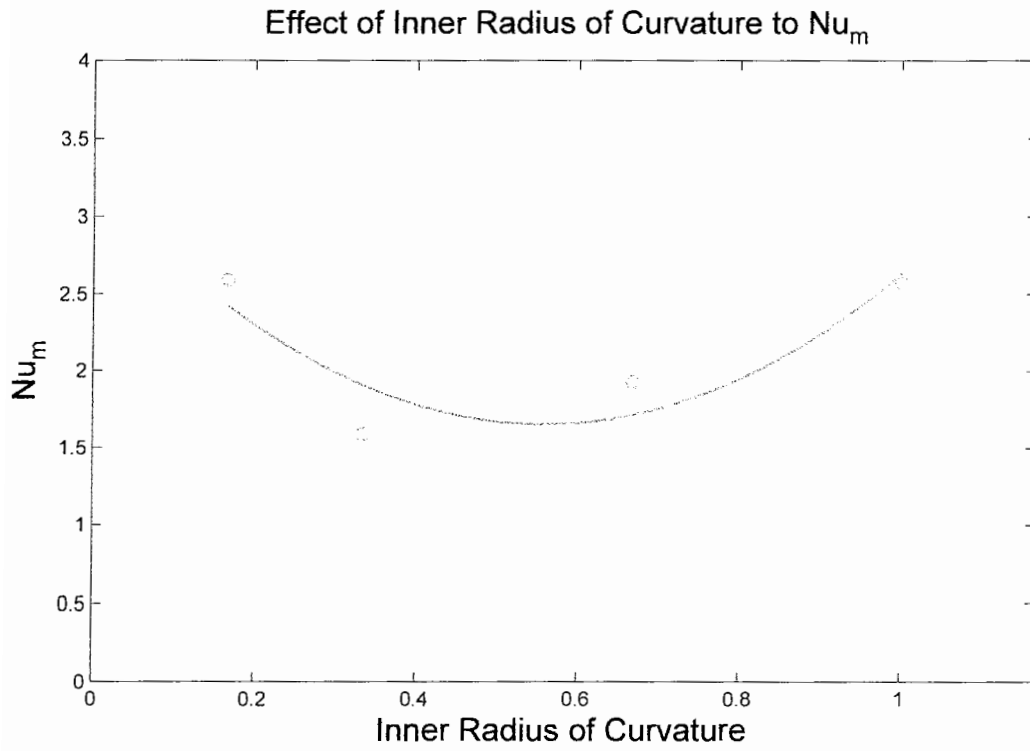
توده سیال از قوس داخلی دور می‌شود. در شکل ۴-۴۹ اثر شعاع انحنا قوس داخلی بی‌بعد بر عدد ناسلت سرتاسری نشان داده شده است. مطابق شکل با افزایش شعاع انحنا، در ابتدا به دلیل تضعیف اثرات انحنا، انتقال حرارت کلی، کاهش می‌یابد ولی به تدریج با ازدیاد شعاع انحنا، اثرات دوران غالب شده و به دلیل سطح اثر بیشتر گردابه‌های ناشی از دوران در ناحیه قوس، انتقال حرارت کلی افزایش یافته است.



شکل ۴-۴۷: خطوط جریان در وسط ناحیه دوم و به ازای شعاعهای انحنا مختلف



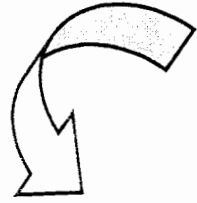
شکل ۴-۴۸: کانتورهای سرعت محوری در وسط ناحیه دوم و به ازای شعاعهای انحنای مختلف



شکل ۴-۴۹: اثر شعاع انحنای قوس داخلی بر عدد ناسلت سرتاسری

- [1] Han, J.C., Dutta, S. and Ekkad, S., 2000, "Gas Turbine Heat Transfer and Cooling Technology," First Edition, London: Taylor & Francis.
- [2] Bredberg, J., 2002, "Turbulence Modelling for Internal Cooling of Gas Turbine Blades," Report 01/9, Dept of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Gothenburg. Also available at [www.tfd.chalmers.se/~bredberg](http://www.tfd.chalmers.se/~bredberg).
- [3] White, F.M., 2004, "Viscous Fluid Flow," Third edition, USA, New York: McGraw-HILL, INC.
- [4] White, F.M., 1994, "Fluid Mechanics," Third edition, USA, New York: McGraw-HILL, INC.
- [5] Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T., 1989, "Computational Fluid Dynamics for Engineers," First Edition, two volumes, Austin, Texas: EES.
- [6] Wilcox, D.C., 1993, "Turbulence Modeling for CFD," First Edition, Glendale, California: DCW Industries, Inc.
- [7] Bredberg, J., 2002, "Prediction of flow and heat transfer inside turbine blade using EARSM, k- $\epsilon$  and k- $\omega$  turbulence model," Thesis for the degree of licentiate of engineering, Dept of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Gothenburg. Also available at [www.tfd.chalmers.se/~bredberg](http://www.tfd.chalmers.se/~bredberg).
- [8] Cheah, S.C., Iacovides, H., Jackson, D.C., Ji, H. and Launder, B.E., 1994, "LDA Investigation of the Flow Development Through Rotating Ducts." ASME Paper No. 94-GT-226.
- [9] Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," First Edition, John Benjamin's Publishing Co.
- [10] Sunden, B. and Faghri, M., 2001, "Heat Transfer in Gas Turbine," First Edition, Boston: WIT Press.
- [11] Chorin, A.j., 1967, "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," Journal Computational Physics, Vol. 2, pp.12-26.
- [12] Harlow, F.H. and Welch, J.E., 1965, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," Vol. 8, pp.2182-2189.

- [13] Chakravarthy, S., Bose, T.K., Batten, P., Palaniswamy, S., Goldberg, U. and Peroomian, O., 2000, "Convective Heat Transfer Inside Rotating Tubes," Report AIAA-2000-3356, Metacomp Technologies, Inc., Westlake Village, CA 91316.
- [14] Tes, D.G.N. and McGrath, D.B., 1995, "A Combined Experimental/Computational Study of Flow in Turbine Blade Cooling Passage," Presented at the International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exposition, Houston, Tex., June 5-8, ASME Paper 95-GT-355.
- [15] Incropera, F. P. and DeWitt D. P., 1996, "Introduction to Heat Transfer," Third Edition, John Wiley & Sons.
- [16] Schlichting, H., Gersten, K., Krause, E., Oertel, H. and Mayes, C. (Translator), 2000, "Boundary-Layer Theory," Springer-Verlag Berlin Heidelberg.



ضمانم



## ضمیمه الف - برنامه تحلیل جریان آرام، دوبعدی بین دو صفحه

برای تحلیل جریان دوبعدی آرام بین دو صفحه، برنامه ای با نام LPF به زبان برنامه نویسی Matlab نوشته شده است. پارامترهای ورود برنامه عبارتند از :

UReal : سرعت جریان در ورودی (m/s)

LReal : طول صفحات (m)

DhReal : تعداد گره ها در جهت طول صفحات

nyR : تعداد گره ها در جهت فاصله بین صفحات

nu : ویسکوزیته سیستماتیکی سیال ( $m^2/s$ )

rou : چگالی سیال ( $kg/m^3$ )

nt : تعداد گامهای زمانی

dt : طول گام زمانی

خروجیهای این برنامه به صورت ماتریس بوده و عبارتند از :

u : سرعت محوری بی بعد

v : سرعت عرضی بی بعد

P : فشار استاتیکی بی بعد

شایان ذکر است که به دلیل استفاده از شبکه جایجا شده برای تحلیل جریان، برای سرعت محوری فقط مؤلفه های  $u_{2i+1,2j}$ ، سرعت عرضی  $v_{2i,2j+1}$  و فشار استاتیکی  $P_{2i,2j}$  دارای ارزش فیزیکی هستند. متن اصلی برنامه از قرار زیر است :

```
clear;
% Data
Time1=clock;
LReal=2.5;
UReal=0.064;
DhReal=0.1;
nxR=77;
nyR=15;

dt=0.001;
nt=50000;
c=30;
```

```

% Properties
nu=0.000016;
rou=1.2;

% Non_Dimension
Re=UReal*DhReal/nu;
Pin=PReal/(rou*UReal^2);
L=LReal/DhReal;
Dh=1;
x=linspace(0,L,nxR-2);
y=linspace(0,Dh,nyR-2);
dx=x(2)-x(1);
dy=y(2)-y(1);
nx=2*nxR-1;
ny=2*nyR-1;

% Initial Value
u=ones(nx,ny+1);
v=zeros(nx,ny);
P=zeros(nx,ny);
u0=zeros(nx,1);
v0=zeros(1,ny);
unew=u;
vnew=v;
Pnew=P;
CBank={};
Uoutlet=[];

handle=waitbar(0,'Please wait...');

for t=1:nt
    % Unew
    for i=1:nxR-2
        for j=1:nyR-1
            PTermX=(P(2*i+2,2*j)-P(2*i,2*j))/dx;
            CTerm1X=((u(2*i+3,2*j)+u(2*i+1,2*j))^2/4-(u(2*i+1,2*j)+u(2*i-
1,2*j))^2/4)/dx;
            if j~=1
                CTerm2X=((u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/4-
...
                (u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j-2))*(v(2*i,2*j-1)+v(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
            else
                CTerm2X=((u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/4-
...
                (u(2*i+1,2*j)+u0(2*i+1))*(v(2*i,2*j-1)+v(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
            end
            STerm1X=(u(2*i-1,2*j)-2*u(2*i+1,2*j)+u(2*i+3,2*j))/(Re*dx^2);

```

```

    if j~=1
        STerm2X=(u(2*i+1,2*j-2)-2*u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
    else
        STerm2X=(u0(2*i+1)-2*u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
    end
    unew(2*i+1,2*j)=u(2*i+1,2*j)+dt*(-PTermX-CTerm1X-
CTerm2X+STerm1X+STerm2X);
    end
end

                                %Vnew

for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-2
        PTermY=(P(2*i,2*j+2)-P(2*i,2*j))/dy;
        if i~=1
            CTerm1Y=((u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/4-
...
            (u(2*i-1,2*j)+u(2*i-1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v(2*i-2,2*j+1))/4)/dx;
        else
            CTerm1Y=((u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/4-...
            (u(2*i-1,2*j)+u(2*i-1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v0(2*j+1))/4)/dx;
        end
        CTerm2Y=((v(2*i,2*j+3)+v(2*i,2*j+1))^2/4-(v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-
1))^2/4)/dy;
        if i~=1
            STerm1Y=(v(2*i-2,2*j+1)-2*v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
        else
            STerm1Y=(v0(2*j+1)-2*v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
        end
        STerm2Y=(v(2*i,2*j-1)-2*v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j+3))/(Re*dy^2);
        vnew(2*i,2*j+1)=v(2*i,2*j+1)+dt*(-PTermY-CTerm1Y-
CTerm2Y+STerm1Y+STerm2Y);

        end
    end

    % BC

    unew(1,:)=1;
    unew(nx,:)=unew(nx-2,:);
    v0=-vnew(2,:);
    vnew(nx-1,:)=0;

    vnew(:,1)=0;
    vnew(:,ny)=0;
    u0=-unew(:,2);

```

```

unew(:,ny+1)=-unew(:,ny-1);

% du(t)=unew(31,21)-u(31,21);

u=unew;
v=vnew;

if t/200==ceil(t/200)
    Uoutlet=[Uoutlet;unew(nx,:)];
end
u(25,4)
                                %Pnew
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        Pnew(2*i,2*j)=P(2*i,2*j)-dt*(c^2*(u(2*i+1,2*j)-u(2*i-1,2*j))/dx+...
            c^2*(v(2*i,2*j+1)-v(2*i,2*j-1))/dy);
    end
end
P=Pnew;
waitbar(t/nt,handle);
end
Time2=clock;
DT=etime(Time2,Time1);
save compare u v P dx dy Re t nxR nyR Uoutlet LReal DhReal UReal

```

### ضمیمه ب- برنامه تحلیل حرارت برای جریان آرام، دو بعدی بین دو صفحه

برای تحلیل حرارت جریان آرام دوبعدی بین دو صفحه، برنامه ای با نام LPH به زبان برنامه نویسی Matlab نوشته شده است. قبل از اجرای این برنامه لازم است که میدان جریان از اجرای برنامه LPF بدست آید سپس با استفاده از نتایج این برنامه، می توان برنامه LPH را اجرا نمود. پارامترهای ورود برنامه LPH عبارتند از :

: $P_r$	عدد پراتل
: $T_{in}$	دمای سیال در ورودی (k)
: $T_w$	دمای دیواره ها (k)
: nt T	تعداد گامهای زمانی
: dt T	طول گام زمانی

خروجی این برنامه ماتریس T است که در آن میدان دمای بی بعد سیال آمده است. شایان ذکر است که به دلیل استفاده از شبکه جابجاشده برای تحلیل جریان، فقط مؤلفه های  $T_{2i,2j}$  دارای ارزش فیزیکی هستند. متن اصلی برنامه از قرار زیر است :

```
Pr=0.7;
Tin=300;
Tw=700;

T=ones(nx+1,ny+1);
Tnew=T;
T0X=(Tw/Tin)*ones(1,ny+1);
T0Y=(Tw/Tin)*ones(nx+1,1);

ntT=50000;
dtT=0.0001

handle=waitbar(0,'Please wait...');
for tT=1:ntT
    for i=1:nxR-1
        for j=1:nyR-1
            if i~=1
                CTermX=(u(2*i+1,2*j)+u(2*i-1,2*j))*(T(2*i+2,2*j)-T(2*i-2,2*j))/(4*dx);
                DTermX=(T(2*i+2,2*j)-2*T(2*i,2*j)+T(2*i-2,2*j))/(Re*Pr*dx^2);
            else
                CTermX=(u(2*i+1,2*j)+u(2*i-1,2*j))*(T(2*i+2,2*j)-T0X(2*j))/(4*dx);
                DTermX=(T(2*i+2,2*j)-2*T(2*i,2*j)+T0X(2*j))/(Re*Pr*dx^2);
            end
        end
    end
end
```

```

end
if j~=1
    CTermY=(v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1))*(T(2*i,2*j+2)-T(2*i,2*j-2))/(4*dy);
    DTermY=(T(2*i,2*j+2)-2*T(2*i,2*j)+T(2*i,2*j-2))/(Re*Pr*dy^2);
else
    CTermY=(v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1))*(T(2*i,2*j+2)-T0Y(2*i))/(4*dy);
    DTermY=(T(2*i,2*j+2)-2*T(2*i,2*j)+T0Y(2*i))/(Re*Pr*dy^2);
end
end

    Tnew(2*i,2*j)=T(2*i,2*j)+dtT*(-CTermX-CTermY+DTermX+DTermY);
end
end
end
%BC
T0X=2-Tnew(2,:);
%Tnew(2*nxR,:)=Tnew(2*nxR-2,:);
TmN2=trapz(linspace(dy/2,Dh-dy/2,nyR-1),(u(2*nxR-3,1:2:2*nyR-3)+...
    u(2*nxR-3,3:2:2*nyR-1)).*(T(2*nxR-2,2:2:2*nyR-2)+T(2*nxR-4,2:2:2*nyR-
2))/4);
TmN1=trapz(linspace(dy/2,Dh-dy/2,nyR-1),(u(2*nxR-5,1:2:2*nyR-3)+...
    u(2*nxR-5,3:2:2*nyR-1)).*(T(2*nxR-4,2:2:2*nyR-2)+T(2*nxR-6,2:2:2*nyR-
2))/4);
dTmN=TmN2-TmN1;
Tnew(2*nxR-2,:)=Tnew(2*nxR-4,:)+(Tw/Tin-(T(2*nxR-2,:)+T(2*nxR-4,:))/2)/...
    (Tw/Tin-TmN2)*dTmN;

T0Y=2*(Tw/Tin)-Tnew(:,2);
Tnew(:,2*nyR)=2*(Tw/Tin)-Tnew(:,2*nyR-2);

% Validate T
T=Tnew;
waitbar(tT/ntT,handle);

if (tT/100)==ceil(tT/100)
    T(30,20)
end
end
end

```

## ضمیمه ج- برنامه تحلیل جریان آرام دوبعدی در مسیر خنک کاری داخلی

برای تحلیل جریان آرام دوبعدی در مسیر خنک کاری داخلی، برنامه ای با نام LCF به زبان برنامه نویسی Matlab نوشته شده است. پارامتری ورودی این برنامه عبارتند از :

URReal : سرعت جریان در ورودی (m/s)

AVReal : سرعت زاویه ای دوران پره (rpm)

LReal : طول مستقیم در نواحی ۱ و ۳ (cm)

RcReal : شعاع انحنا قوس داخلی (cm)

RtReal : شعاع توربین (cm)

nu : ویسکوزیته سینماتیکی ( $m^2/s$ )

rou : چگالی ( $kg/m^3$ )

nLmean : تعداد گره ها در جهت قطر هیدرولیکی

nt : تعداد گامهای زمانی

dt : طول گام زمانی

خروجیهای برنامه بصورت ماتریس بوده و عبارتند از :

u1 : سرعت محور بی بعد در ناحیه اول

v1 : سرعت عرضی به بعد در ناحیه اول

P1 : فشار استاتیکی بی بعد در ناحیه اول

v<sub>t</sub> : سرعت محوری بی بعد در ناحیه دوم

v<sub>r</sub> : سرعت عرضی بی بعد در ناحیه دوم

v<sub>t</sub> : سرعت محوری بی بعد در ناحیه دوم

P2 : فشار استاتیکی بی بعد در ناحیه دوم

u3 : سرعت محوری بی بعد در ناحیه سوم

v3 : سرعت عرضی بی بعد در ناحیه سوم

P3 : فشار استاتیکی بی بعد در ناحیه سوم

شایان ذکر است که به دلیل استفاده از شبکه جابجا شده برای تحلیل جریان، برای سرعت محوری فقط مولفه های  $u1_{2i+1,2j}$ ،  $vt_{2i+1,2j}$  و  $u3_{2i+1,2j}$  سرعت عرضی  $v1_{2i,2j+1}$ ،  $vr_{2i,2j+1}$  و  $v3_{2i,2j+1}$  و فشار استاتیکی  $P1_{2i,2j}$ ،  $P2_{2i,2j}$  و  $P3_{2i,2j}$  دارای ارزش فیزیکی هستند. متن اصلی برنامه از قرار زیر است :

```
clear;
% Data
LReal=20;      % (cm)
RcReal=1;      % (cm)
UReal=1.0667;  % (m/s)
DhReal=3;      % (cm)
AVReal=67.9/2; % (rpm)
RtReal=100;    % (cm)

% Properties
nu=0.00016;
rou=1.2;

% Non_Dimension
Re=UReal*(DhReal/100)/nu;
Pin=PReal/(rou*UReal^2);
L=LReal/DhReal;
Rc=RcReal/DhReal;
Dh=1;
Lmean=2*L+pi*(Rc+Dh/2);
AV=(AVReal*2*pi/60)*(DhReal/100)/UReal;
Rt=RtReal/DhReal;
Ro=(AVReal*2*pi/60)*(DhReal/100)/UReal;

nLmean=230;
nyR=40;

% nLmean : Total discret number in tangential
direction
nxR=ceil(L/Lmean*nLmean); % nxR : Cartesian discret number in x direction
nthetaR=1.5*(nLmean-2*nxR); % nthetaR : polar discret number in theta direction

dt=0.0002/5;
nt=80000;
c=15;

nx=2*nxR-1;
ny=2*nyR-1;
ntheta=2*nthetaR-1;

x1=linspace(0,L,nxR);%nxR-2
```



```

x3=linspace(L,0,nxR);%nxR-2
y=linspace(0,Dh,nyR);%nyR-2
theta=linspace(0,pi,ntheta);%nthetaR-2
r=Rc+linspace(0,1,2*nyR-1);

dx=x1(2)-x1(1);
dy=y(2)-y(1);
dtheta=2*(theta(2)-theta(1));
dr=dy;

% Initial Value

% Zoon1
u1=ones(nx,ny+1);
v1=zeros(nx,ny);
%P1=zeros(nx,ny);
for i=1:nx
    P1(i,1:ny)=(AV*(Rt+(i-1)*dx/2))^2/2;
end
u01=zeros(nx,1);
v01=zeros(1,ny);
unew1=u1;
vnew1=v1;
Pnew1=P1;

% Zoon2
vt=ones(ntheta,ny+1);
vr=zeros(ntheta,ny);
%P2=zeros(ntheta,ny);
for i=1:ntheta
    for j=1:ny
        P2(i,j)=(AV*(Rt+L+r(j)*sin(theta(i))))^2/2;
    end
end
vt0=zeros(ntheta,1);
vr0=zeros(1,ny);
vtnew=vt;
vrnew=vr;
Pnew2=P2;

% Zoon3
u3=ones(nx,ny+1);
v3=zeros(nx,ny);
%P3=zeros(nx,ny);
for i=1:nx
    P3(i,1:ny)=(AV*(Rt+L-(i-1)*dx/2))^2/2;

```

```

end
u03=zeros(nx,1);
v03=zeros(1,ny);
unew3=u3;
vnew3=v3;
Pnew3=P3;

handle=waitbar(0,'Please wait...');
for t=1:nt
    if (t/1000)==(ceil(t/1000))
        save CurveData2 u1 v1 P1 vt vr P2 u3 v3 P3 Re UReal LReal RcReal DhReal...
            nu rou nLmean nxR nx nthetaR ntheta nyR ny dx dy dtheta dr r theta ...
            Dh L Rc dt AVReal RtReal Ro
    end

                                % Unew (1)

    for i=1:nxR-2
        for j=1:nyR-1
            PTermX=(P1(2*i+2,2*j)-P1(2*i,2*j))/dx;
            CTerm1X=((u1(2*i+3,2*j)+u1(2*i+1,2*j))^2/4-(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-
1,2*j))^2/4)/dx;
            if j~=1
                CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/4-...
                    (u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j-2))*(v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
                else
                    CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/4-...
                        (u1(2*i+1,2*j)+u01(2*i+1))*(v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
                    end
                STerm1X=(u1(2*i-1,2*j)-2*u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+3,2*j))/(Re*dx^2);
                if j~=1
                    STerm2X=(u1(2*i+1,2*j-2)-2*u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
                else
                    STerm2X=(u01(2*i+1)-2*u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
                end
                ATermX=-2*(v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j-
1)+v1(2*i+2,2*j+1))/4*AV-...
                    (Rt+(2*i+1)*dx/2)*AV^2;
                unew1(2*i+1,2*j)=u1(2*i+1,2*j)+dt*(-ATermX-PTermX-CTerm1X-
CTerm2X+STerm1X+STerm2X);
            end
        end
    end
    i=nxR-1;
    for j=1:nyR-1
        PTermX=(P2(2,2*j)-P1(2*i,2*j))/dx;
        CTerm1X=((vt(3,2*j)+u1(2*i+1,2*j))^2/4-(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))^2/4)/dx;

```

```

if j~=1
    CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j+1))/4-...
        (u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j-2))*(v1(2*i,2*j-1)+vr(2,2*j-1))/4)/dy;
else
    CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j+1))/4-...
        (u1(2*i+1,2*j)+u01(2*i+1))*(v1(2*i,2*j-1)+vr(2,2*j-1))/4)/dy;
end
STerm1X=(u1(2*i-1,2*j)-2*u1(2*i+1,2*j)+vt(3,2*j))/(Re*dx^2);
if j~=1
    STerm2X=(u1(2*i+1,2*j-2)-2*u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
else
    STerm2X=(u01(2*i+1)-2*u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
end
ATermX=-2*(v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j-1)+vr(2,2*j+1))/4*AV-...
    (Rt+(2*i+1)*dx/2)*AV^2;
unew1(2*i+1,2*j)=u1(2*i+1,2*j)+dt*(-ATermX-PTermX-CTerm1X-
CTerm2X+STerm1X+STerm2X);
end
if t/100==ceil(t/100)
    unew1(23,10)
end

                                %Vnew (1)
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-2
        PTermY=(P1(2*i,2*j+2)-P1(2*i,2*j))/dy;
        if i~=1
            CTerm1Y=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/4-...
                (u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i-2,2*j+1))/4)/dx;
            else
                CTerm1Y=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/4-...
                    (u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v01(2*j+1))/4)/dx;
                end
                CTerm2Y=((v1(2*i,2*j+3)+v1(2*i,2*j+1))^2/4-(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-
1))^2/4)/dy;
                if i~=1
                    STerm1Y=(v1(2*i-2,2*j+1)-2*v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
                else
                    STerm1Y=(v01(2*j+1)-2*v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
                end
                STerm2Y=(v1(2*i,2*j-1)-2*v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j+3))/(Re*dy^2);
                ATermY=2*(u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-
1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/4*AV-...
                    (Rc+(2*j+1)*dy/2)*AV^2;
                vnew1(2*i,2*j+1)=v1(2*i,2*j+1)+dt*(-ATermY-PTermY-CTerm1Y-
CTerm2Y+STerm1Y+STerm2Y);

```

```

    end
end
i=nxR-1;
for j=1:nyR-2
    PTermY=(P1(2*i,2*j+2)-P1(2*i,2*j))/dy;
    CTerm1Y=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j+1))/4-...
        (u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i-2,2*j+1))/4)/dx;
    CTerm2Y=((v1(2*i,2*j+3)+v1(2*i,2*j+1))^2/4-(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-
1))^2/4)/dy;

    STerm1Y=(v1(2*i-2,2*j+1)-2*v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j+1))/(Re*dx^2);
    STerm2Y=(v1(2*i,2*j-1)-2*v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j+3))/(Re*dy^2);
    ATermY=2*(u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-
1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/4*AV-...
        (Rc+(2*j+1)*dy/2)*AV^2;

    vnew1(2*i,2*j+1)=v1(2*i,2*j+1)+dt*(-ATermY-PTermY-CTerm1Y-
CTerm2Y+STerm1Y+STerm2Y);
end

% BC (1)

unew1(1,:)=1;
%unew1(nx,:)=unew1(nx-2,:)+(unew1(nx-2,:)-unew1(nx-4,:));
v01=-vnew1(2,:);
%vnew1(nx-1,:)=vnew1(nx-3,:)+(vnew1(nx-3,:)-vnew1(nx-5,:));

vnew1(:,1)=0;
vnew1(:,ny)=0;
u01=-unew1(:,2);
unew1(:,ny+1)=-unew1(:,ny-1);

u1=unew1;
v1=vnew1;

                                %Pnew (1)
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        Pnew1(2*i,2*j)=P1(2*i,2*j)-dt*(c^2*(u1(2*i+1,2*j)-u1(2*i-1,2*j))/dx+...
            c^2*(v1(2*i,2*j+1)-v1(2*i,2*j-1))/dy);
    end
end
P1=Pnew1;

                                % Vtnew (2)

```

```

for i=1:nthetaR-2
  for j=1:nyR-1
    PTermT=(P2(2*i+2,2*j)-P2(2*i,2*j))/(r(2*j)*dtheta);

    CTerm1T=((vt(2*i+3,2*j)+vt(2*i+1,2*j))^2-(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-
1,2*j))^2)/(4*r(2*j)*dtheta);
    if j~=1

CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j+1))-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2))*(vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j-1)))/(4*dr);
else

CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j+1))-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt0(2*i+1))*(vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j-1)))/(4*dr);
end
if i~=1
  CTerm3T=2*vt(2*i+1,2*j)*(vr(2*i+2,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i-2,2*j-
1)+...
vr(2*i-2,2*j+1))/(4*r(2*j));
else
  CTerm3T=2*vt(2*i+1,2*j)*(vr(2*i+2,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr0(2*j-1)+...
vr0(2*j+1))/(4*r(2*j));
end

STerm1T=(vt(2*i-1,2*j)-
2*vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+3,2*j))/(Re*r(2*j)^2*dtheta^2);
if j~=1
  STerm2T=(vt(2*i+1,2*j-2)-2*vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))/(Re*dr^2);
else
  STerm2T=(vt0(2*i+1)-2*vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))/(Re*dr^2);
end
if j~=1
  STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j))-vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-
2))/(2*Re*r(2*j)*dr);
else
  STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j))-
(vt(2*i+1,2*j)+vt0(2*i+1)))/(2*Re*r(2*j)*dr);
end
STerm4T=-vt(2*i+1,2*j)/(Re*r(2*j)^2);
STerm5T=((vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j-1))-(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)))/(Re*r(2*j)^2*dtheta);
Ax=2*(vt(2*i+1,2*j)*sin(theta(2*i+1))-(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i+2,2*j+1)+...
vr(2*i+2,2*j-1))/4*cos(theta(2*i+1)))*AV-
(Rt+L+r(2*j)*sin(theta(2*i+1)))*AV^2;
Ay=2*(vt(2*i+1,2*j)*cos(theta(2*i+1))+(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i+2,2*j+1)+...

```

```

    vr(2*i+2,2*j-1))/4*sin(theta(2*i+1))*AV-r(2*j)*cos(theta(2*i+1))*AV^2;
    ATermT=Ax*cos(theta(2*i+1))-Ay*sin(theta(2*i+1));

    vtnew(2*i+1,2*j)=vt(2*i+1,2*j)+dt*(-ATermT-CTerm1T-CTerm2T-CTerm3T-
PTermT+...
    STerm1T+STerm2T+STerm3T+STerm4T+STerm5T);
    end
    end
    i=nthetaR-1;
    for j=1:nyR-1
        PTermT=(P3(2,2*j)-P2(2*i,2*j))/(r(2*j)*dtheta);

        CTerm1T=((u3(3,2*j)+vt(2*i+1,2*j))^2-(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-
1,2*j))^2)/(4*r(2*j)*dtheta);
        if j~=1
            CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+v3(2,2*j+1))-...
                (vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2))*(vr(2*i,2*j-1)+v3(2,2*j-1)))/(4*dr);
        else
            CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+v3(2,2*j+1))-...
                (vt(2*i+1,2*j)+vt0(2*i+1))*(vr(2*i,2*j-1)+v3(2,2*j-1)))/(4*dr);
        end
        CTerm3T=2*vt(2*i+1,2*j)*(v3(2,2*j-1)+v3(2,2*j+1)+vr(2*i-2,2*j-1)+...
            vr(2*i-2,2*j+1))/(4*r(2*j));

        STerm1T=(vt(2*i-1,2*j)-2*vt(2*i+1,2*j)+u3(3,2*j))/(Re*r(2*j)^2*dtheta^2);
        if j~=1
            STerm2T=(vt(2*i+1,2*j-2)-2*vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))/(Re*dr^2);
        else
            STerm2T=(vt0(2*i+1)-2*vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))/(Re*dr^2);
        end
        if j~=1
            STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j))-(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-
2)))/(2*Re*r(2*j)*dr);
        else
            STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j))-
(vt(2*i+1,2*j)+vt0(2*i+1)))/(2*Re*r(2*j)*dr);
        end
        STerm4T=-vt(2*i+1,2*j)/(Re*r(2*j)^2);
        STerm5T=((v3(2,2*j+1)+v3(2,2*j-1))-(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)))/(Re*r(2*j)^2*dtheta);

        Ax=2*(vt(2*i+1,2*j)*sin(theta(2*i+1))-(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+v3(2,2*j+1)+...
            v3(2,2*j-1))/4*cos(theta(2*i+1))*AV-(Rt+L+r(2*j)*sin(theta(2*i+1))*AV^2;
        Ay=2*(vt(2*i+1,2*j)*cos(theta(2*i+1))+(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+v3(2,2*j+1)+...
            v3(2,2*j-1))/4*sin(theta(2*i+1))*AV-r(2*j)*cos(theta(2*i+1))*AV^2;

```

```

    ATermT=Ax*cos(theta(2*i+1))-Ay*sin(theta(2*i+1));
    vtnew(2*i+1,2*j)=vt(2*i+1,2*j)+dt*(-ATermT-CTerm1T-CTerm2T-CTerm3T-
PTermT+...
    STerm1T+STerm2T+STerm3T+STerm4T+STerm5T);
end

```

% Vrnew(2)

```

for i=1:nthetaR-2
    for j=1:nyR-2
        PTermR=(P2(2*i,2*j+2)-P2(2*i,2*j))/dr;

        if i~=1

CTerm1R=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j+1))-...
        (vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i-
2,2*j+1)))/(4*r(2*j+1)*dtheta);
        else

CTerm1R=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j+1))-...
        (vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-
1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr0(2*j+1)))/(4*r(2*j+1)*dtheta);
        end

        CTerm2R=((vr(2*i,2*j+3)+vr(2*i,2*j+1))^2-(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1))^2)/(4*dr);
        CTerm3R=(vr(2*i,2*j+1)^2-(vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+...
        vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))^2/16)/r(2*j+1);

        if i~=1
            STerm1R=(vr(2*i-2,2*j+1)-
2*vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j+1))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta^2);
            else
                STerm1R=(vr0(2*j+1)-
2*vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j+1))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta^2);
            end
            STerm2R=(vr(2*i,2*j-1)-2*vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j+3))/(Re*dr^2);
            STerm3R=((vr(2*i,2*j+3)+vr(2*i,2*j+1))-(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)))/(2*Re*r(2*j+1)*dr);
            STerm4R=-vr(2*i,2*j+1)/(Re*r(2*j+1)^2);
            STerm5R=-((vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j))-vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta);

            Ax=2*((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))/4*sin(theta(2*i))-...
            vr(2*i,2*j+1)*cos(theta(2*i)))*AV-(Rt+L+r(2*j+1)*sin(theta(2*i)))*AV^2;

```

```

Ay=2*((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))/4*cos(theta(2*i))+...
vr(2*i,2*j+1)*sin(theta(2*i)))*AV-r(2*j+1)*cos(theta(2*i))*AV^2;
ATermR=Ax*sin(theta(2*i))+Ay*cos(theta(2*i));

vrnew(2*i,2*j+1)=vr(2*i,2*j+1)+dt*(-ATermR-PTermR-CTerm1R-CTerm2R-
CTerm3R+...
STerm1R+STerm2R+STerm3R+STerm4R+STerm5R);
end
end
i=nthetaR-1;
for j=1:nyR-2
PTermR=(P2(2*i,2*j+2)-P2(2*i,2*j))/dr;

CTerm1R=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+v3(2,2*j+1))-...
(vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i-
2,2*j+1)))/(4*r(2*j+1)*dtheta);

CTerm2R=((vr(2*i,2*j+3)+vr(2*i,2*j+1))^2-(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1))^2)/(4*dr);
CTerm3R=(vr(2*i,2*j+1)^2-(vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+...
vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))^2/16)/r(2*j+1);

STerm1R=(vr(2*i-2,2*j+1)-
2*vr(2*i,2*j+1)+v3(2,2*j+1))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta^2);

STerm2R=(vr(2*i,2*j-1)-2*vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j+3))/(Re*dr^2);
STerm3R=((vr(2*i,2*j+3)+vr(2*i,2*j+1))-(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)))/(2*Re*r(2*j+1)*dr);
STerm4R=-vr(2*i,2*j+1)/(Re*r(2*j+1)^2);
STerm5R=-((vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j))-(vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta);

Ax=2*((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))/4*sin(theta(2*i))-...
vr(2*i,2*j+1)*cos(theta(2*i)))*AV-(Rt+L+r(2*j+1)*sin(theta(2*i)))*AV^2;
Ay=2*((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))/4*cos(theta(2*i))+...
vr(2*i,2*j+1)*sin(theta(2*i)))*AV-r(2*j+1)*cos(theta(2*i))*AV^2;
ATermR=Ax*sin(theta(2*i))+Ay*cos(theta(2*i));

vrnew(2*i,2*j+1)=vr(2*i,2*j+1)+dt*(-ATermR-PTermR-CTerm1R-CTerm2R-
CTerm3R+...
STerm1R+STerm2R+STerm3R+STerm4R+STerm5R);
end

```



```

% BC (2)

vtnew(1,:)=u1(nx,:);
vr0=v1(nx-1,:);
%vtnew(ntheta,:)=vtnew(ntheta-2,:)+(vtnew(ntheta-2,:)-vtnew(ntheta-4,:));
%vrnew(ntheta-1,:)=vrnew(ntheta-3,:)+(vrnew(ntheta-3,:)-vrnew(ntheta-5,:));

vrnew(:,1)=0;
vrnew(:,ny)=0;
vt0=-vt(:,2);
vtnew(:,ny+1)=-vtnew(:,ny-1);

vr=vrnew;
vt=vtnew;

for i=1:nthetaR-1
    for j=1:nyR-1
        Pnew2(2*i,2*j)=P2(2*i,2*j)-dt*(c^2*(vt(2*i+1,2*j)-vt(2*i-
1,2*j))/(r(2*j)*dtheta)+...
        c^2*(vr(2*i,2*j+1)-vr(2*i,2*j-1))/dr+c^2*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1))/(2*r(2*j)));
    end
end
P2=Pnew2;

%dx=x3(2)-x3(1);
% Unew3
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-1
        PTermX=(P3(2*i+2,2*j)-P3(2*i,2*j))/dx;
        CTerm1X=((u3(2*i+3,2*j)+u3(2*i+1,2*j))^2/4-(u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-
1,2*j))^2/4)/dx;
        if j~=1
            CTerm2X=((u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/4-...
            (u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j-2))*(v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
        else
            CTerm2X=((u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/4-...
            (u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j-2))*(v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
        end
        STerm1X=(u3(2*i-1,2*j)-2*u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+3,2*j))/(Re*dx^2);
        if j~=1
            STerm2X=(u3(2*i+1,2*j-2)-2*u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
        else
            STerm2X=(u3(2*i+1,2*j-2)-2*u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
        end
    end
end

```

```

    ATermX=(Rt+L-(2*i+1)*dx/2)*AV^2-2*(v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i,2*j+1)+...
        v3(2*i+2,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j+1))/4*AV;
    unew3(2*i+1,2*j)=u3(2*i+1,2*j)+dt*(-ATermX-PTermX-CTerm1X-
CTerm2X+STerm1X+STerm2X);
    end
end

                                %Vnew

for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-2
        PTermY=(P3(2*i,2*j+2)-P3(2*i,2*j))/dy;
        if i~=1
CTerm1Y=((u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/4-...
        (u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i-1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i-2,2*j+1))/4)/dx;
        else
CTerm1Y=((u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/4-...
        (u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i-1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v03(2*j+1))/4)/dx;
        end
        CTerm2Y=((v3(2*i,2*j+3)+v3(2*i,2*j+1))^2/4-(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-
1))^2/4)/dy;
        if i~=1
            STerm1Y=(v3(2*i-2,2*j+1)-2*v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
        else
            STerm1Y=(v03(2*j+1)-2*v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
        end
        STerm2Y=(v3(2*i,2*j-1)-2*v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j+3))/(Re*dy^2);
        ATermY=2*(u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i-
1,2*j+2)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))/4*AV-...
        (Rc+(2*j+1)*dy/2)*AV^2;

        vnew3(2*i,2*j+1)=v3(2*i,2*j+1)+dt*(-ATermY-PTermY-CTerm1Y-
CTerm2Y+STerm1Y+STerm2Y);

    end
end

% BC (3)

unew3(1,:)=vt(ntheta,:);
unew3(nx,:)=unew3(nx-2,:);
v03=vr(ntheta-1,:);
vnew3(nx-1,:)=0;

vnew3(:,1)=0;
vnew3(:,ny)=0;

```

```

u03=-unew3(:,2);
unew3(:,ny+1)=-unew3(:,ny-1);

u3=unew3;
v3=vnew3;

                                %Pnew
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        Pnew3(2*i,2*j)=P3(2*i,2*j)-dt*(c^2*(u3(2*i+1,2*j)-u3(2*i-1,2*j))/dx+...
            c^2*(v3(2*i,2*j+1)-v3(2*i,2*j-1))/dy);
    end
end
P3=Pnew3;
waitbar(t/nt,handle);
end
save CurveData2 u1 v1 P1 vt vr P2 u3 v3 P3 Re UReal LReal RcReal DhReal...
    nu rou nLmean nxR nx nthetaR ntheta nyR ny dx dy d:theta dr r theta ...
    Dh L Rc dt AVReal RtReal Ro
%CurveTemp;

```

## ضمیمه د- برنامه تحلیل حرارت برای جریان آرام دوبعدی در مسیر خنک کاری

برای تحلیل حرارت جریان آرام دوبعدی در مسیرخنک کاری داخلی، برنامه ای با نام LCH به زبان

برنامه نویسی Matlab نوشته شده است. پارامترهای ورودی این برنامه عبارتند از :

Pr : عدد پرانتل

$T_{in}$  : دمای سیال در ورودی (k)

$T_w$  : دمای دیواره ها (k)

ntT : تعداد گامهای زمانی

dtT : طول گام زمانی

خروجیهای این برنامه بصورت ماتریس بوده و عبارتند از :

$T_1$  : میدان دمای بی بعد سیال در ناحیه اول

$T_2$  : میدان دمای بی بعد سیال در ناحیه دوم

$T_3$  : میدان دمای بی بعد سیال در ناحیه سوم

شایان ذکر است که به دلیل استفاده از شبکه جابجاشده برای تحلیل جریان، فقط مؤلفه های  $T_{2i,2j}$ ،

$T_{2i,2j}$  و  $T_{3i,3j}$  دارای ارزش فیزیکی هستند. متن اصلی برنامه از قرار زیر است :

Pr=0.7;

Tin=300;

Tw=700;

T1=ones(nx-1,ny+1);

T2=ones(ntheta-1,ntheta+1);

T3=ones(nx-1,ny+1);

Tnew1=T1;

Tnew2=T2;

Tnew3=T3;

T0X1=(Tw/Tin)\*ones(1,ny+1);

T0Y1=(Tw/Tin)\*ones(nx-1,1);

T0t=(Tw/Tin)\*ones(1,ny+1);

T0r=(Tw/Tin)\*ones(ntheta-1,1);

T0X3=(Tw/Tin)\*ones(1,ny+1);

T0Y3=(Tw/Tin)\*ones(nx-1,1);

```

ntT=60000;
dtT=0.001;

handle=waitbar(0,'Please wait...');

for tT=1:ntT
    % Zoon (1)
    for i=1:nxR-1
        for j=1:nyR-1

            if i==1
                CTermX=(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))*(T1(2*i+2,2*j)-T0X1(2*j))/(4*dx);
                DTermX=(T1(2*i+2,2*j)-2*T1(2*i,2*j)+T0X1(2*j))/(Re*Pr*dx^2);
            elseif i==nxR-1
                CTermX=(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))*(T2(2,2*j)-T1(2*i-2,2*j))/(4*dx);
                DTermX=(T2(2,2*j)-2*T1(2*i,2*j)+T1(2*i-2,2*j))/(Re*Pr*dx^2);
            else
                CTermX=(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))*(T1(2*i+2,2*j)-T1(2*i-
                2,2*j))/(4*dx);
                DTermX=(T1(2*i+2,2*j)-2*T1(2*i,2*j)+T1(2*i-2,2*j))/(Re*Pr*dx^2);
            end

            if j~=1
                CTermY=(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1))*(T1(2*i,2*j+2)-T1(2*i,2*j-
                2))/(4*dy);
                DTermY=(T1(2*i,2*j+2)-2*T1(2*i,2*j)+T1(2*i,2*j-2))/(Re*Pr*dy^2);
            else
                CTermY=(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1))*(T1(2*i,2*j+2)-T0Y1(2*i))/(4*dy);
                DTermY=(T1(2*i,2*j+2)-2*T1(2*i,2*j)+T0Y1(2*i))/(Re*Pr*dy^2);
            end

            Tnew1(2*i,2*j)=T1(2*i,2*j)+dtT*(-CTermX-CTermY+DTermX+DTermY);
        end
    end

    %BC
    T0X1=2-Tnew1(2,:);

    T0Y1=2*(Tw/Tin)-Tnew1(:,2);
    Tnew1(:,2*nyR)=2*(Tw/Tin)-Tnew1(:,2*nyR-2);

    % Validate T
    T1=Tnew1;

    %Zoon (2)
    for i=1:nthetaR-1

```

```

for j=1:nyR-1

    if i==1
        CTermT=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*...
            (T2(2*i+2,2*j)-T0t(2*j))/(4*r(2*j)*dtheta);
        DTermT=(T2(2*i+2,2*j)-
2*T2(2*i,2*j)+T0t(2*j))/(Re*Pr*r(2*j)^2*dtheta^2);
    elseif i==nthetaR-1
        CTermT=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*(T3(2,2*j)-T2(2*i-
2,2*j))/(4*r(2*j)*dtheta);
        DTermT=(T3(2,2*j)-2*T2(2*i,2*j)+T2(2*i-
2,2*j))/(Re*Pr*r(2*j)^2*dtheta^2);
    else
        CTermT=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*...
            (T2(2*i+2,2*j)-T2(2*i-2,2*j))/(4*r(2*j)*dtheta);
        DTermT=(T2(2*i+2,2*j)-2*T2(2*i,2*j)+T2(2*i-
2,2*j))/(Re*Pr*r(2*j)^2*dtheta^2);
    end

    if j~=1
        CTermR=(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))*(T2(2*i,2*j+2)-T2(2*i,2*j-2))/(4*dr);

        DTermR1=(T2(2*i,2*j+2)-2*T2(2*i,2*j)+T2(2*i,2*j-2))/(Re*Pr*dr^2);

        DTermR2=(T2(2*i,2*j+2)-T2(2*i,2*j-2))/(Re*Pr*2*r(2*j)*dr);
    else
        CTermR=(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))*(T2(2*i,2*j+2)-T0r(2*i))/(4*dr);

        DTermR1=(T2(2*i,2*j+2)-2*T2(2*i,2*j)+T0r(2*i))/(Re*Pr*dr^2);

        DTermR2=(T2(2*i,2*j+2)-T0r(2*i))/(Re*Pr*2*r(2*j)*dr);
    end

    Tnew2(2*i,2*j)=T2(2*i,2*j)+dtT*(-CTermT-
CTermR+DTermT+DTermR1+DTermR2);
end
end

%BC

T0t=Tnew1(nx-1,:);
T0r=2*(Tw/Tin)-Tnew2(:,2);
Tnew2(:,2*nyR)=2*(Tw/Tin)-Tnew2(:,2*nyR-2);

% Validate T
T2=Tnew2;

```

```

                                % Zoon (3)
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-1

        if i~=1
            CTermX=(u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j))*(T3(2*i+2,2*j)-T3(2*i-
2,2*j))/(4*dx);
            DTermX=(T3(2*i+2,2*j)-2*T3(2*i,2*j)+T3(2*i-2,2*j))/(Re*Pr*dx^2);
        else
            CTermX=(u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j))*(T3(2*i+2,2*j)-T0X3(2*j))/(4*dx);
            DTermX=(T3(2*i+2,2*j)-2*T3(2*i,2*j)+T0X3(2*j))/(Re*Pr*dx^2);
        end

        if j~=1
            CTermY=(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1))*(T3(2*i,2*j+2)-T3(2*i,2*j-
2))/(4*dy);
            DTermY=(T3(2*i,2*j+2)-2*T3(2*i,2*j)+T3(2*i,2*j-2))/(Re*Pr*dy^2);
        else
            CTermY=(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1))*(T3(2*i,2*j+2)-T0Y3(2*i))/(4*dy);
            DTermY=(T3(2*i,2*j+2)-2*T3(2*i,2*j)+T0Y3(2*i))/(Re*Pr*dy^2);
        end

        Tnew3(2*i,2*j)=T3(2*i,2*j)+dtT*(-CTermX-CTermY+DTermX+DTermY);
    end
end

%BC
T0X3=Tnew2(ntheta-1,:);
TmN2=trapz(linspace(dy/2,Dh-dy/2,nyR-1),(u3(2*nxR-3,1:2:2*nyR-3)+...
u3(2*nxR-3,3:2:2*nyR-1)).*(T3(2*nxR-2,2:2:2*nyR-2)+T3(2*nxR-4,2:2:2*nyR-
2))/4);
TmN1=trapz(linspace(dy/2,Dh-dy/2,nyR-1),(u3(2*nxR-5,1:2:2*nyR-3)+...
u3(2*nxR-5,3:2:2*nyR-1)).*(T3(2*nxR-4,2:2:2*nyR-2)+T3(2*nxR-6,2:2:2*nyR-
2))/4);
dTmN=TmN2-TmN1;
Tnew3(2*nxR-2,:)=Tnew3(2*nxR-4,:)+(Tw/Tin-(T3(2*nxR-2,:)+T3(2*nxR-
4,:))/2)/...
(Tw/Tin-TmN2)*dTmN;

T0Y3=2*(Tw/Tin)-Tnew3(:,2);
Tnew3(:,2*nyR)=2*(Tw/Tin)-Tnew3(:,2*nyR-2);

% Validate T
T3=Tnew3;

waitbar(tT/ntT,handle);

if (tT/100)==ceil(tT/100)

```

```
T3(30,20)
end
```

```
end
save CurveData2 u1 v1 P1 vt vr P2 u3 v3 P3 Re UReal LReal RcReal DhReal ...
nu rou nLmean nxR nx nthetaR ntheta nyR ny dx dy dtheta dr r theta ...
Dh L Rc dt AVReal RtReal Ro T1 T2 T3 Pr Tin Tw dt dtT
```



## ضمیمه هـ- برنامه تحلیل جریان مغشوش دوبعدی بین دو صفحه

برای تحلیل جریان دوبعدی مغشوش بین دو صفحه، برنامه ای با نام TPF به زبان برنامه نویسی Matlab نوشته شده است. پارامترهای ورودی برنامه عبارتند از :

UReal : سرعت متوسط جریان در ورودی (m/s)

LReal : طول صفحات (m)

DhReal : فاصله بین صفحات (m)

I<sub>in</sub> : شدت اغتشاش در ورودی

linR : طول اختلاط در ورودی (m)

nu : ویسکوزیته سینماتیکی سیال (m<sup>2</sup>/s)

rou : چگالی سیال (kg/m<sup>3</sup>)

nt : تعداد گامهای زمانی

dt : طول گام زمانی

خروجیهای این برنامه بصورت ماتریس بوده و عبارتند از :

u : سرعت محوری بی بعد

v : سرعت عرضی بی بعد

P : فشار استاتیکی بی بعد

k : انرژی جنبشی اغتشاش بی بعد

ε : تلفات اغتشاش بی بعد

Mut : ویسکوزیته مغشوش (kg/m.s)

```
clear;
% Data
LReal=1.5;
UReal=10;
DhReal=0.05;
PReal=1000;
nxR=100;
nyR=15;

dt=0.0002;
nt=120000;
```

```

c=30;

% Properties
nu=0.0001;
rou=1.2;
Mu=rou*nu;
Prk=1;
Pre=1.3;
C1=1.44;
C2=1.92;
Cmu=0.09;
kf=0.41;
Cd=0.164;

%Entranc value of turbulent properties
kinR=(0.05)^2/2*UReal^2;
linR=(0.01)*DhReal;
einR=Cmu*kinR^1.5/linR;

% Non_Dimension
Re=UReal*DhReal/nu;
Pin=PReal/(rou*UReal^2);
L=LReal/DhReal;
Dh=1;
x=linspace(0,L,nxR-2);
y=linspace(0,Dh,nyR-2);
dx=x(2)-x(1);
dy=y(2)-y(1);
nx=2*nxR-1;
ny=2*nyR-1;
kin=kinR/UReal^2;
ein=einR*(DhReal/UReal^3);

% Initial Value
u=ones(nx,ny+1);
v=zeros(nx,ny);
P=zeros(nx,ny);
u0=zeros(nx,1);
v0=zeros(1,ny);
k=kin*ones(nx,ny);
e=ein*ones(nx,ny);
Mut=rou*Cmu*k.^2./e*(UReal*DhReal);

unew=u;
vnew=v;
Pnew=P;
CBank={};

```

```

handle=waitbar(0,'Please wait...');

for t=1:nt
                                % Unew
    for i=1:nxR-2
        for j=1:nyR-1

            nut=(Mut(2*i,2*j)+Mut(2*i+2,2*j))/(2*rou);
            Re=UReal*DhReal/(nu+nut);

            PTermX=(P(2*i+2,2*j)-P(2*i,2*j))/dx;
            CTerm1X=((u(2*i+3,2*j)+u(2*i+1,2*j))^2/4-(u(2*i+1,2*j)+u(2*i-
1,2*j))^2/4)/dx;
            if j~=1
                CTerm2X=((u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/4-
...
                (u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j-2))*(v(2*i,2*j-1)+v(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
            else
                CTerm2X=((u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/4-
...
                (u(2*i+1,2*j)+u0(2*i+1))*(v(2*i,2*j-1)+v(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
            end
            STerm1X=(u(2*i-1,2*j)-2*u(2*i+1,2*j)+u(2*i+3,2*j))/(Re*dx^2);
            if j~=1
                STerm2X=(u(2*i+1,2*j-2)-2*u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
            else
                STerm2X=(u0(2*i+1)-2*u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
            end
            unew(2*i+1,2*j)=u(2*i+1,2*j)+dt*(-PTermX-CTerm1X-
CTerm2X+STerm1X+STerm2X);
        end
    end
    if (t/100)==ceil(t/100)
        u(31,20)
    end

                                %Vnew
    for i=1:nxR-2
        for j=1:nyR-2

            nut=(Mut(2*i,2*j)+Mut(2*i,2*j+2))/(2*rou);
            Re=UReal*DhReal/(nu+nut);

            PTermY=(P(2*i,2*j+2)-P(2*i,2*j))/dy;
            if i~=1
                CTerm1Y=((u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/4-
...

```

```

        (u(2*i-1,2*j)+u(2*i-1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v(2*i-2,2*j+1))/4/dx;
    else
CTerm1Y=((u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/4-...
        (u(2*i-1,2*j)+u(2*i-1,2*j+2))*(v(2*i,2*j+1)+v0(2*j+1))/4)/dx;
    end
    CTerm2Y=((v(2*i,2*j+3)+v(2*i,2*j+1))^2/4-(v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-
1))^2/4)/dy;
    if i~=1
        STerm1Y=(v(2*i-2,2*j+1)-2*v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
    else
        STerm1Y=(v0(2*j+1)-2*v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
    end
    STerm2Y=(v(2*i,2*j-1)-2*v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j+3))/(Re*dy^2);
    vnew(2*i,2*j+1)=v(2*i,2*j+1)+dt*(-PTermY-CTerm1Y-
CTerm2Y+STerm1Y+STerm2Y);

    end
end

% BC

unew(1,:)=1;
unew(nx,:)=unew(nx-2,:);
v0=-vnew(2,:);
vnew(nx-1,:)=0;

vnew(:,1)=0;
vnew(:,ny)=0;
u0=-unew(:,2);
unew(:,ny+1)=-unew(:,ny-1);

du(t)=unew(31,21)-u(31,21);

u=unew;
v=vnew;

                                %Pnew
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        Pnew(2*i,2*j)=P(2*i,2*j)-dt*(c^2*(u(2*i+1,2*j)-u(2*i-1,2*j))/dx+...
            c^2*(v(2*i,2*j+1)-v(2*i,2*j-1))/dy);
    end
end
P=Pnew;

                                % K - Equation

```

```

for i=2:nxR-2 % (it = 1:nxR-1)
  for j=1:nyR-1 % (jt = 1:nyR-1)
    if (j>=2)&(j<=nyR-2)
      %CTermK1=(u(2*i+1,2*j)*(k(2*i+2,2*j)+k(2*i,2*j))/2-...
      % u(2*i-1,2*j)*(k(2*i,2*j)+k(2*i-2,2*j))/2)/dx;
      %CTermK2=(v(2*i,2*j+1)*(k(2*i,2*j)+k(2*i,2*j+2))/2-...
      % v(2*i,2*j-1)*(k(2*i,2*j)+k(2*i,2*j-2))/2)/dy;
      CTermK1=(u(2*i+1,2*j)+u(2*i-1,2*j))/2*((k(2*i+2,2*j)+k(2*i,2*j))/2-...
      (k(2*i,2*j)+k(2*i-2,2*j))/2)/dx;
      CTermK2=(v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1))/2*((k(2*i,2*j)+k(2*i,2*j+2))/2-...
      (k(2*i,2*j)+k(2*i,2*j-2))/2)/dy;

      DTermK1=(1/(rou*UReal*DhReal))*(Mu+Mut(2*i,2*j)/Prk)*((k(2*i-2,2*j)-
      2*k(2*i,2*j)+k(2*i+2,2*j))/dx^2+...
      (k(2*i,2*j-2)-2*k(2*i,2*j)+k(2*i,2*j+2))/dy^2);
      %DTermK2=(((Mut(2*i+2,2*j)+Mut(2*i,2*j))/2)-((Mut(2*i,2*j)+Mut(2*i-
      2,2*j))/2))*...
      % (((k(2*i+2,2*j)+k(2*i,2*j))/2)-((k(2*i,2*j)+k(2*i-2,2*j))/2))/dx^2+...
      % (((Mut(2*i,2*j+2)+Mut(2*i,2*j))/2)-((Mut(2*i,2*j)+Mut(2*i,2*j-2))/2))*...
      % (((k(2*i,2*j)+k(2*i,2*j+2))/2)-((k(2*i,2*j)+k(2*i,2*j-
      2))/2))/dy^2)/(rou*Prk);

      PTermK=(2*((u(2*i+1,2*j)-u(2*i-1,2*j))/dx)^2+2*((v(2*i,2*j+1)-v(2*i,2*j-
      1))/dy)^2+...
      (((u(2*i-1,2*j)+u(2*i-1,2*j+2)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))-...
      (u(2*i-1,2*j)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i-1,2*j-2)+u(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)+...
      ((v(2*i,2*j-1)+v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j-1)+v(2*i+2,2*j+1))-...
      (v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1)+v(2*i-2,2*j+1)+...
      v(2*i-2,2*j-1)))/(4*dx))^2)*Mut(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal);
    if (i==50)&(j==5)
      k1(t)=CTermK1;
      k2(t)=CTermK2;
      k3(t)=DTermK1;
      k4(t)=DTermK2;
      k5(t)=PTermK;
    end
    CTermK1=0;
    %CTermK2=0;
    DTermK2=0;

    knew(2*i,2*j)=k(2*i,2*j)+dt*(-CTermK1-
    CTermK2+DTermK1+DTermK2+PTermK-e(2*i,2*j));
    else
      %BC
      if j~=1
        knew(2*i,2*j)=abs(Mu/(rou*Cd^1.5))*((u(2*i-1,2*j)+u(2*i-
        1,2*j+2)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))-...

```

```

                (u(2*i-1,2*j)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i-1,2*j-2)+u(2*i+1,2*j-
2)))/(4*dy)/(UReal*DhReal);
            elseif j==1
                knew(2*i,2*j)=abs(Mu/(rou*Cd^1.5)*((u(2*i-1,2*j)+u(2*i-
1,2*j+2)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))-...
                (u(2*i-1,2*j)+u(2*i+1,2*j)+u0(2*i-
1)+u0(2*i+1))))/(4*dy)/(UReal*DhReal);
            end

        end

    end

end

                                % Epsilon Equation

for i=2:nxR-2
    for j=1:nyR-1
        if (j>=2)&(j<=nyR-2)
            %CTermE1=(u(2*i+1,2*j)*(e(2*i+2,2*j)+e(2*i,2*j))/2-...
            %  u(2*i-1,2*j)*(e(2*i,2*j)+e(2*i-2,2*j))/2)/dx;
            %CTermE2=(v(2*i,2*j+1)*(e(2*i,2*j)+e(2*i,2*j+2))/2-...
            %  v(2*i,2*j-1)*(e(2*i,2*j)+e(2*i,2*j-2))/2)/dy;
            CTermE1=(u(2*i+1,2*j)+u(2*i-1,2*j))/2*((e(2*i+2,2*j)+e(2*i,2*j))/2-...
                (e(2*i,2*j)+e(2*i-2,2*j))/2)/dx;

            CTermE2=(v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1))/2*((e(2*i,2*j)+e(2*i,2*j+2))/2-...
                (e(2*i,2*j)+e(2*i,2*j-2))/2)/dy;

            DTermE1=(1/(rou*UReal*DhReal))*(Mu+Mut(2*i,2*j)/Pre)*...
                ((e(2*i-2,2*j)-2*e(2*i,2*j)+e(2*i+2,2*j))/dx^2+...
                (e(2*i,2*j-2)-2*e(2*i,2*j)+e(2*i,2*j+2))/dy^2);
            %DTermE2=(((Mut(2*i+2,2*j)+Mut(2*i,2*j))/2)-((Mut(2*i,2*j)+Mut(2*i-
2,2*j))/2))*...
            %  (((e(2*i+2,2*j)+e(2*i,2*j))/2)-((e(2*i,2*j)+e(2*i-2,2*j))/2))/dx^2+...
            %  (((Mut(2*i,2*j+2)+Mut(2*i,2*j))/2)-((Mut(2*i,2*j)+Mut(2*i,2*j-
2))/2))*...
            %  (((e(2*i,2*j)+e(2*i,2*j+2))/2)-((e(2*i,2*j)+e(2*i,2*j-
2))/2))/dy^2)/(rou*Pre);

            PTermE=(2*((u(2*i+1,2*j)-u(2*i-1,2*j))/dx)^2+2*((v(2*i,2*j+1)-v(2*i,2*j-
1))/dy)^2+...
                (((u(2*i-1,2*j)+u(2*i-1,2*j+2)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))-...
                (u(2*i-1,2*j)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i-1,2*j-2)+u(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)+...
                ((v(2*i,2*j-1)+v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j-1)+v(2*i+2,2*j+1))-...
                (v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1)+v(2*i-2,2*j+1)+v(2*i-2,2*j-1)))/(4*dx))^2)*...
                C1*e(2*i,2*j)*Mut(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal*k(2*i,2*j));
            CTermE1=0;
            %CTermE2=0;

```

```

DTermE2=0;

enew(2*i,2*j)=e(2*i,2*j)+dt*(-CTermE1-CTermE2+DTermE1+DTermE2+...
    PTermE-C2*e(2*i,2*j)^2/k(2*i,2*j));
else
    li=kf*(dy/2);
    enew(2*i,2*j)=Cd*k(2*i,2*j)^1.5/li;
    %enew(2*i,2*j)=rou*Cmu*k(2*i,2*j)^2/Mut(2*i,2*j)

end
end
end

% BC k-epsilon

knew(2,:)=kin;
enew(2,:)=ein;

knew(2*nxR-2,:)=knew(2*nxR-4,:);
enew(2*nxR-2,:)=enew(2*nxR-4,:);

% Validate k e
k=knew;
e=enew;

                                % Mut
for i=2:nxR-1 %nxR-1
    for j=1:nyR-1 %nyR-1
        if (j>1)&(j<nyR-1)
            if (k(2*i,2*j)==0)&(e(2*i,2*j)==0)
                Mut(2*i,2*j)=0;
            else
                Mut(2*i,2*j)=rou*Cmu*k(2*i,2*j)^2/e(2*i,2*j)*(UReal*DhReal);
            end
        end
    end
    if ((j==1)|(j==nyR-1))&(i~=nxR-1)

        if (i~=1)&(j~=1)
            omega=((u(2*i-1,2*j)+u(2*i-1,2*j+2)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))-...
                (u(2*i-1,2*j)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i-1,2*j-2)+u(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)-...
                ((v(2*i,2*j-1)+v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j-1)+v(2*i+2,2*j+1))-...
                (v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1)+v(2*i-2,2*j+1)+v(2*i-2,2*j-1)))/(4*dx);
        elseif (i==1)&(j~=1)
            omega=((u(2*i-1,2*j)+u(2*i-1,2*j+2)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))-...
                (u(2*i-1,2*j)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i-1,2*j-2)+u(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)-...
                ((v(2*i,2*j-1)+v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j-1)+v(2*i+2,2*j+1))-...
                (v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1)+v0(2*j+1)+v0(2*j-1)))/(4*dx);
        elseif (i~=1)&(j==1)

```

```

        omega=((u(2*i-1,2*j)+u(2*i-1,2*j+2)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))-...
            (u(2*i-1,2*j)+u(2*i+1,2*j)+u0(2*i-1)+u0(2*i+1)))/(4*dy)-...
            ((v(2*i,2*j-1)+v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j-1)+v(2*i+2,2*j+1))-...
            (v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1)+v(2*i-2,2*j+1)+v(2*i-2,2*j-1)))/(4*dx);
    elseif (i==1)&(j==1)
        omega=((u(2*i-1,2*j)+u(2*i-1,2*j+2)+u(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j+2))-...
            (u(2*i-1,2*j)+u(2*i+1,2*j)+u0(2*i-1)+u0(2*i+1)))/(4*dy)-...
            ((v(2*i,2*j-1)+v(2*i,2*j+1)+v(2*i+2,2*j-1)+v(2*i+2,2*j+1))-...
            (v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1)+v0(2*j+1)+v0(2*j-1)))/(4*dx);
    end

    if (j==1)|(j==nyR-1)
        li=kf*(dy/2);
    end
    Mut(2*i,2*j)=rou*li^2*abs(omega)*(UReal*DhReal);

    end
end
end
% BC
%Mut(2,:)=Mut(4,:);
Mut(2*nxR-2,:)=Mut(2*nxR-4,:);

if nt>1000
    if t/1000==ceil(t/1000)
        CBankV={u,v,P};
        CBank=[CBank;CBankV];
    end
else
    CBankV={u,v,P};
    CBank=[CBank;CBankV];
end
waitbar(t/nt,handle);

end
Re=UReal*DhReal/nu;

```



## ضمیمه و- برنامه تحلیل حرارت برای جریان مغشوش، دوبعدی بین دو صفحه

برای تحلیل حرارت جریان مغشوش بین دو صفحه، برنامه‌ای با نام TPH به زبان برنامه‌نویسی Matlab نوشته شده است. قبل از اجرای این برنامه لازم است که میدان جریان از اجرای برنامه TPF بدست آید سپس با استفاده از نتایج این برنامه، می‌توان برنامه TPH را اجرا نمود. پارامترهای ورودی برنامه TPH عبارتند از :

عدد پراتل سیال	: Pr
عدد پراتل اغتشاش	: Pr <sub>t</sub>
دمای سیال در ورودی (k)	: T <sub>in</sub>
دمای دیواره‌ها (k)	: T <sub>w</sub>
تعداد گامهای زمانی	: ntT
طول گام زمانی	: dtT

خروجی این برنامه ماتریس T است که در آن میدان دمای بی‌بعد سیال آمده است.

شایان ذکر است که به دلیل استفاده از شبکه جابجا شده برای تحلیل جریان، فقط

مؤلفه‌های  $T_{2i,2j}$  دارای ارزش فیزیکی هستند. متن اصلی برنامه از قرار زیر است :

```
Pr=0.7;
Pr_t=0.8
T_in=300;
T_w=700;

nut=Mut/rou;
T=ones(nx+1,ny+1);
T_new=T;
T0X=(T_w/T_in)*ones(1,ny+1);
T0Y=(T_w/T_in)*ones(nx+1,1);

ntT=50000;
dtT=0.0001

handle=waitbar(0,'Please wait...');
for tT=1:ntT
    for i=1:nxR-1
        for j=1:nyR-1
```

```

if i~=1
    CTermX=(u(2*i+1,2*j)+u(2*i-1,2*j))*(T(2*i+2,2*j)-T(2*i-2,2*j))/(4*dx);
    DTermX=(1+(nut(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*(T(2*i+2,2*j)-...
        2*T(2*i,2*j)+T(2*i-2,2*j))/(Re*Pr*dx^2);
else
    CTermX=(u(2*i+1,2*j)+u(2*i-1,2*j))*(T(2*i+2,2*j)-T0X(2*j))/(4*dx);
    DTermX=(1+(nut(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*(T(2*i+2,2*j)-...
        2*T(2*i,2*j)+T0X(2*j))/(Re*Pr*dx^2);
end

if j~=1
    CTermY=(v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1))*(T(2*i,2*j+2)-T(2*i,2*j-2))/(4*dy);
    DTermY=(1+(nut(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*(T(2*i,2*j+2)-2*T(2*i,2*j)+...
        T(2*i,2*j-2))/(Re*Pr*dy^2);
else
    CTermY=(v(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j-1))*(T(2*i,2*j+2)-T0Y(2*i))/(4*dy);
    DTermY=(1+(nut(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*(T(2*i,2*j+2)-...
        2*T(2*i,2*j)+T0Y(2*i))/(Re*Pr*dy^2);
end

Tnew(2*i,2*j)=T(2*i,2*j)+dtT*(-CTermX-CTermY+DTermX+DTermY);
end
end
%BC
T0X=2-Tnew(2,:);
%Tnew(2*nxR,:)=Tnew(2*nxR-2,:);
TmN2=trapz(linspace(dy/2,Dh-dy/2,nyR-1),(u(2*nxR-3,1:2:2*nyR-3)+...
    u(2*nxR-3,3:2:2*nyR-1))*(T(2*nxR-2,2:2:2*nyR-2)+T(2*nxR-4,2:2:2*nyR-
2))/4);
TmN1=trapz(linspace(dy/2,Dh-dy/2,nyR-1),(u(2*nxR-5,1:2:2*nyR-3)+...
    u(2*nxR-5,3:2:2*nyR-1))*(T(2*nxR-4,2:2:2*nyR-2)+T(2*nxR-6,2:2:2*nyR-
2))/4);
dTmN=TmN2-TmN1;
Tnew(2*nxR-2,:)=Tnew(2*nxR-4,:)+(Tw/Tin-(T(2*nxR-2,:)+T(2*nxR-4,:))/2)/...
    (Tw/Tin-TmN2)*dTmN;

T0Y=2*(Tw/Tin)-Tnew(:,2);
Tnew(:,2*nyR)=2*(Tw/Tin)-Tnew(:,2*nyR-2);

% Validate T
T=Tnew;
waitbar(tT/ntT,handle);

if (tT/100)==ceil(tT/100)
    T(30,20)
end
end
end

```

## ضمیمه ز- برنامه تحلیل جریان مغشوش دوبعدی در مسیر خنک کاری

برای تحلیل جریان مغشوش دوبعدی در مسیر خنک کاری داخلی، برنامه ای با نام TCF به زبان برنامه‌نویسی Matlab نوشته شده است. پارامترهای ورودی این برنامه عبارتند از :

URReal : سرعت جریان در ورودی (m/s)

AVReal : سرعت زاویه‌ای دوران پره (rpm)

LReal : طول قسمتهای مستقیم در نواحی ۱ و ۳ (m)

ReReal : شعاع انحنای قوس داخلی (m)

RtReal : شعاع توربین (m)

nu : ویسکوزیته سینماتیکی سیال ( $m^2/s$ )

rou : چگالی سیال ( $kg/m^3$ )

nLmean : تعداد گره‌ها در طول مسیر خنک کاری

nt : تعداد گامهای زمانی

dt : طول گام زمانی

linR : طول اختلاط در ورودی (m)

I<sub>in</sub> : شدت اغتشاش در ورودی

خروجیهای برنامه به صورت ماتریس بوده و عبارتند از :

u1 : سرعت محوری بی‌بعد در ناحیه اول

v1 : سرعت عرضی بی‌بعد در ناحیه اول

P1 : فشار استاتیکی بی‌بعد در ناحیه اول

k1 : انرژی جنبشی اغتشاش در ناحیه اول (I)

ε1 : تلفات اغتشاش در ناحیه اول ( $m^3/kg.s$ )

Mut1 : ویسکوزیته مغشوش در ناحیه اول ( $kg/m.s$ )

u2 : سرعت محوری بی‌بعد در ناحیه دوم

v2 : سرعت عرضی بی‌بعد در ناحیه دوم

فشار استاتیکی بی‌بعد در ناحیه دوم	: P2
انرژی جنبشی اغتشاش در ناحیه دوم (J)	: k2
تلفات اغتشاش در ناحیه دوم ( $m^3/kg.s$ )	: $\varepsilon_2$
ویسکوزیته مغشوش در ناحیه دوم ( $kg/m.s$ )	: Mut2
سرعت محوری بی‌بعد در ناحیه سوم	: u3
سرعت عرضی بی‌بعد در ناحیه سوم	: v3
فشار استاتیکی بی‌بعد در ناحیه سوم	: P3
انرژی جنبشی اغتشاش در ناحیه سوم (J)	: K3
تلفات اغتشاش در ناحیه سوم ( $m^3/kg.s$ )	: $\varepsilon_3$
ویسکوزیته مغشوش در ناحیه سوم ( $kg/m.s$ )	: Mut3

شایان ذکر است که به دلیل استفاده از شبکه جابجا شده برای تحلیل جریان، برای سرعت محوری فقط مؤلفه‌های  $u_{1,2i+1,2j}$ ،  $v_{t,2i+1,2j}$  و  $u_{3,2i+1,2j}$ ، سرعت عرضی  $v_{1,2i,2j+1}$ ،  $v_{r,2i,2j+1}$  و  $v_{3,2i,2j+1}$ ، فشار استاتیکی  $P_{1,2i,2j}$ ،  $P_{2,2i,2j}$  و  $P_{3,2i,2j}$ ، انرژی جنبشی توربولانس  $k_{1,2i,2j}$ ،  $k_{2,2i,2j}$  و  $k_{3,2i,2j}$ ، تلفات اغتشاش  $\varepsilon_{1,2i,2j}$ ،  $\varepsilon_{2,2i,2j}$  و  $\varepsilon_{3,2i,2j}$  و ویسکوزیته توربولانس  $Mut_{1,2i,2j}$ ،  $Mut_{2,2j,2j}$  و  $Mut_{3,2i,2j}$  دارای ارزش فیزیکی هستند. متن اصلی برنامه از قرار زیر است :

```

ButtonName=questdlg('do you start New project?');
if strcmp(ButtonName,'Yes')==1
    clear;
    Time1=clock;

    % Data
    LReal=0.2;          % (m)
    RcReal=0.02;       % (m)
    UReal=2.6667;      % (m/s)
    DhReal=0.03;       % (m)
    PReal=500;         % (pa)
    AVReal=-424.4185;  % (rpm)
    RtReal=1;          % (m)

    % Properties
    nu=0.000016;
    rou=1.2;
    Mu=rou*nu;

```

```

Prk=1;
Pre=1.3;
C1=1.44;
C2=1.92;
Cmu=0.04;
kf=0.41;
Cd=6;%1.64;

%Enteranc value of turbulent properties
kinR=(0.08)^2/2*UReal^2;
linR=(0.01)*(DhReal);
einR=Cmu*kinR^1.5/linR;

% Non_Dimension
Re=UReal*DhReal/nu;
Rer=(AVReal*2*pi/60*RtReal)*DhReal/nu;
Pin=PReal/(rou*UReal^2);
L=LReal/DhReal;
Rc=RcReal/DhReal;
Dh=1;
Lmean=2*L+pi*(Rc+Dh/2);
kin=kinR/UReal^2;
ein=einR*(DhReal/UReal^3);
AV=(AVReal*2*pi/60)*DhReal/UReal;
Rt=RtReal/DhReal;

nLmean=150;
nyR=25;

direction                                     % nLmean : Total discreat number in tandertial
nxR=ceil(L/Lmean*nLmean); % nxR : Cartezian discreat number in x direction
nthetaR=3*(nLmean-2*nxR); % nthetaR : polar discreat number in theta direction
;

dt=0.0001;
nt=25000;
c=10;

nx=2*nxR-1;
ny=2*nyR-1;
ntheta=2*nthetaR-1;

x1=linspace(0,L,nxR);%nxR-2
x3=linspace(L,0,nxR);%nxR-2
y=linspace(0,Dh,nyR);%nyR-2
theta=linspace(0,pi,ntheta);%nthetaR-2

```

```

r=Rc+linspace(0,1,2*nyR-1);

dtheta=2*(theta(2)-theta(1));
dx=x1(2)-x1(1);
dy=y(2)-y(1);

% Initial Value

% Zoon1
u1=ones(nx,ny+1);
v1=zeros(nx,ny);
for i=1:nx
    P1(i,1:ny)=(AV*(Rt+(i-1)*dx/2))^2/2;
end
u01=zeros(nx,1);
v01=zeros(1,ny);
unew1=u1;
vnew1=v1;
Pnew1=P1;
k1=kin*ones(nx,ny);
e1=ein*ones(nx,ny);
Mut1=rou*Cmu*k1.^2./e1*(UReal*DhReal);

% Zoon2
vt=ones(ntheta,ny+1);
vr=zeros(ntheta,ny);
for i=1:ntheta
    for j=1:ny
        P2(i,j)=(AV*(Rt+L+r(j)*sin(theta(i))))^2/2;
    end
end
vt0=zeros(ntheta,1);
vr0=zeros(1,ny);
vtnew=vt;
vrnew=vr;
Pnew2=P2;
k2=kin*ones(ntheta,ny);
e2=ein*ones(ntheta,ny);
Mut2=rou*Cmu*k2.^2./e2*(UReal*DhReal);

% Zoon3
u3=ones(nx,ny+1);
v3=zeros(nx,ny);
for i=1:nx
    P3(i,1:ny)=(AV*(Rt+L-(i-1)*dx/2))^2/2;
end
u03=zeros(nx,1);

```

```

v03=zeros(1,ny);
unew3=u3;
vnew3=v3;
Pnew3=P3;
k3=kin*ones(nx,ny);
e3=ein*ones(nx,ny);
Mut3=rou*Cmu*k3.^2./e3*(UReal*DhReal);

enew1=e1;
enew2=e2;
enew3=e3;
knew1=k1;
knew2=k2;
knew3=k3;
end

handle=waitbar(0,'Please wait...');
for t=1:nt

                                % Unew (Zoon 1)

dx=x1(2)-x1(1);
dy=y(2)-y(1);
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-1

        nut=(Mut1(2*i,2*j)+Mut1(2*i+2,2*j))/(2*rou);
        Re=UReal*DhReal/(nu+nut);

        PTermX=(P1(2*i+2,2*j)-P1(2*i,2*j))/dx;
        CTerm1X=((u1(2*i+3,2*j)+u1(2*i+1,2*j))^2/4-(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-
1,2*j))^2/4)/dx;
        if j~=1

CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/4-...
        (u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j-2))*(v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
        else

CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/4-...
        (u1(2*i+1,2*j)+u01(2*i+1))*(v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
        end
        ATermX=-2*(v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j-
1)+v1(2*i+2,2*j+1))/4*AV-...
        (Rt+(2*i+1)*dx/2)*AV^2;

        STerm1X=(u1(2*i-1,2*j)-2*u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+3,2*j))/(Re*dx^2);
        if j~=1

```

```

        STerm2X=(u1(2*i+1,2*j-2)-2*u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
    else
        STerm2X=(u01(2*i+1)-2*u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
    end
    unew1(2*i+1,2*j)=u1(2*i+1,2*j)+dt*(-ATermX-PTermX-CTerm1X-
CTerm2X+STerm1X+STerm2X);
    end
end
i=nxR-1;
for j=1:nyR-1
    nut=(Mut1(2*i,2*j)+Mut2(2,2*j))/(2*rou);
    Re=UReal*DhReal/(nu+nut);
    PTermX=(P2(2,2*j)-P1(2*i,2*j))/dx;
    CTerm1X=((vt(3,2*j)+u1(2*i+1,2*j))^2/4-(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))^2/4)/dx;
    if j~=1
        CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j+1))/4-...
        (u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j-2))*(v1(2*i,2*j-1)+vr(2,2*j-1))/4)/dy;
    else
        CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j+1))/4-...
        (u1(2*i+1,2*j)+u01(2*i+1))*(v1(2*i,2*j-1)+vr(2,2*j-1))/4)/dy;
    end
    end
    ATermX=-2*(v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j-1)+vr(2,2*j+1))/4*AV-...
    (Rt+(2*i+1)*dx/2)*AV^2;

    STerm1X=(u1(2*i-1,2*j)-2*u1(2*i+1,2*j)+vt(3,2*j))/(Re*dx^2);
    if j~=1
        STerm2X=(u1(2*i+1,2*j-2)-2*u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
    else
        STerm2X=(u01(2*i+1)-2*u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
    end
    unew1(2*i+1,2*j)=u1(2*i+1,2*j)+dt*(-ATermX-PTermX-CTerm1X-
CTerm2X+STerm1X+STerm2X);
    end
    if t/100==ceil(t/100)
        unew1(23,10)
    end

                                %Vnew (Zoon 1)
    for i=1:nxR-2
        for j=1:nyR-2
            nut=(Mut1(2*i,2*j)+Mut1(2*i,2*j+2))/(2*rou);
            Re=UReal*DhReal/(nu+nut);
            PTermY=(P1(2*i,2*j+2)-P1(2*i,2*j))/dy;
            if i~=1
                CTerm1Y=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/4-...
                (u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i-2,2*j+1))/4)/dx;
            end
        end
    end

```



```

else
CTerm1Y=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/4-...
(u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v01(2*j+1))/4)/dx;
end
CTerm2Y=((v1(2*i,2*j+3)+v1(2*i,2*j+1))^2/4-(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-
1))^2/4)/dy;

ATermY=2*(u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-
1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/4*AV-...
(Rc+(2*j+1)*dy/2)*AV^2;

if i~=1
STerm1Y=(v1(2*i-2,2*j+1)-2*v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
else
STerm1Y=(v01(2*j+1)-2*v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
end
STerm2Y=(v1(2*i,2*j-1)-2*v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j+3))/(Re*dy^2);
vnew1(2*i,2*j+1)=v1(2*i,2*j+1)+dt*(-ATermY-PTermY-CTerm1Y-
CTerm2Y+STerm1Y+STerm2Y);

end
end
i=nxR-1;
for j=1:nyR-2
nut=(Mut1(2*i,2*j)+Mut1(2*i,2*j+2))/(2*rou);
Re=URReal*DhReal/(nu+nut);
PTermY=(P1(2*i,2*j+2)-P1(2*i,2*j))/dy;
CTerm1Y=((u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j+1))/4-...
(u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-1,2*j+2))*(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i-2,2*j+1))/4)/dx;
CTerm2Y=((v1(2*i,2*j+3)+v1(2*i,2*j+1))^2/4-(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-
1))^2/4)/dy;

ATermY=2*(u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-
1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))/4*AV-...
(Rc+(2*j+1)*dy/2)*AV^2;

STerm1Y=(v1(2*i-2,2*j+1)-2*v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j+1))/(Re*dx^2);
STerm2Y=(v1(2*i,2*j-1)-2*v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j+3))/(Re*dy^2);
vnew1(2*i,2*j+1)=v1(2*i,2*j+1)+dt*(-ATermY-PTermY-CTerm1Y-
CTerm2Y+STerm1Y+STerm2Y);
end

% BC (1)

unew1(1,:)=1;
v01=-vnew1(2,:);

```

```

vnew1(:,1)=0;
vnew1(:,ny)=0;
u01=-unew1(:,2);
unew1(:,ny+1)=-unew1(:,ny-1);

u1=unew1;
v1=vnew1;

                                %Pnew (Zoon 1)
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        Pnew1(2*i,2*j)=P1(2*i,2*j)-dt*(c^2*(u1(2*i+1,2*j)-u1(2*i-1,2*j))/dx+...
            c^2*(v1(2*i,2*j+1)-v1(2*i,2*j-1))/dy);
    end
end
P1=Pnew1;

                                % K - Equation (Zoon 1)

for i=2:nxR-2
    for j=1:nyR-1
        if (j>=2)&(j<=nyR-2)

            CTermK1=(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))/2*((k1(2*i+2,2*j)+k1(2*i,2*j))/2-...
                (k1(2*i,2*j)+k1(2*i-2,2*j))/2)/dx;
            CTermK2=(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1))/2*((k1(2*i,2*j)+k1(2*i,2*j+2))/2-...
                (k1(2*i,2*j)+k1(2*i,2*j-2))/2)/dy;

            DTermK1=(1/(rou*UReal*DhReal))*(Mu+Mut1(2*i,2*j)/Prk)*((k1(2*i-2,2*j)-
            ...
                2*k1(2*i,2*j)+k1(2*i+2,2*j))/dx^2+(k1(2*i,2*j-2)-
                2*k1(2*i,2*j)+k1(2*i,2*j+2))/dy^2);

            PTermK=(2*((u1(2*i+1,2*j)-u1(2*i-1,2*j))/dx)^2+2*((v1(2*i,2*j+1)-
            v1(2*i,2*j-1))/dy)^2+...
                (((u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))-...
                (u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j-2)+u1(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy))+...
                ((v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j-1)+v1(2*i+2,2*j+1))-...
                (v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i-2,2*j+1))+...
                v1(2*i-2,2*j-1)))/(4*dx))^2)*Mut1(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal);

            knew1(2*i,2*j)=k1(2*i,2*j)+dt*(-CTermK1-CTermK2+DTermK1+PTermK-
            el(2*i,2*j));
        else
            %BC
            if j~=1

```

```

knew1(2*i,2*j)=abs(Mu/(rou*Cd^1.5)*(((u1(2*i-1,2*j)+...
u1(2*i-1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))-...
(u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j-2)+u1(2*i+1,2*j-
2)))/(4*dy)+...
((v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j-1)+v1(2*i+2,2*j+1))-...
(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i-2,2*j+1)+...
v1(2*i-2,2*j-1)))/(4*dx))/(UReal*DhReal));
elseif j==1
knew1(2*i,2*j)=abs(Mu/(rou*Cd^1.5)*(((u1(2*i-1,2*j)+...
u1(2*i-1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))-...
(u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i+1,2*j)+u01(2*i-1)+u01(2*i+1)))/(4*dy)+...
((v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j-1)+v1(2*i+2,2*j+1))-...
(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i-2,2*j+1)+...
v1(2*i-2,2*j-1)))/(4*dx))/(UReal*DhReal));
end
end
end
end
% Connect Zoon 1 & 2 for k
i=nxR-1;
for j=1:nyR-1
if (j>=2)&(j<=nyR-2)

CTermK1=(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))/2*((k2(2,2*j)+k1(2*i,2*j))/2-...
(k1(2*i,2*j)+k1(2*i-2,2*j))/2)/dx;
CTermK2=(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1))/2*((k1(2*i,2*j)+k1(2*i,2*j+2))/2-...
(k1(2*i,2*j)+k1(2*i,2*j-2))/2)/dy;

DTermK1=(1/(rou*UReal*DhReal))*(Mu+Mut1(2*i,2*j)/Prk)*((k1(2*i-2,2*j)-
...
2*k1(2*i,2*j)+k2(2,2*j))/dx^2+(k1(2*i,2*j-2)-
2*k1(2*i,2*j)+k1(2*i,2*j+2))/dy^2);

PTermK=(2*((u1(2*i+1,2*j)-u1(2*i-1,2*j))/dx)^2+2*((v1(2*i,2*j+1)-
v1(2*i,2*j-1))/dy)^2+...
(((u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))-...
(u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j-2)+u1(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)+...
((v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j-1)+vr(2,2*j+1))-...
(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i-2,2*j+1)+...
v1(2*i-2,2*j-1)))/(4*dx))^2)*Mut1(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal);

knew1(2*i,2*j)=k1(2*i,2*j)+dt*(-CTermK1-CTermK2+DTermK1+PTermK-
el(2*i,2*j));
else
%BC
if j~=1
knew1(2*i,2*j)=abs(Mu/(rou*Cd^1.5)*(((u1(2*i-1,2*j)+...

```

```

    u1(2*i-1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))-...
    (u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j-2)+u1(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)+...
    ((v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j-1)+vr(2,2*j+1))-...
    (v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i-2,2*j+1)+v1(2*i-2,2*j-
1)))/(4*dx))/(UReal*DhReal));
    elseif j==1
        knew1(2*i,2*j)=abs(Mu/(rou*Cd^1.5)*(((u1(2*i-1,2*j)+...
        u1(2*i-1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))-...
        (u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i+1,2*j)+u01(2*i-1)+u01(2*i+1)))/(4*dy)+...
        ((v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j-1)+vr(2,2*j+1))-...
        (v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i-2,2*j+1)+v1(2*i-2,2*j-
1)))/(4*dx))/(UReal*DhReal));
    end
end
end
end

```

% Epsilon Equation (Zoon 1)

```

for i=2:nxR-2
    for j=1:nyR-1
        if (j>=2)&(j<=nyR-2)

            CTermE1=(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))/2*((e1(2*i+2,2*j)+e1(2*i,2*j))/2-
...
            (e1(2*i,2*j)+e1(2*i-2,2*j))/2)/dx;
            CTermE2=(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1))/2*((e1(2*i,2*j)+e1(2*i,2*j+2))/2-
...
            (e1(2*i,2*j)+e1(2*i,2*j-2))/2)/dy;

            DTermE1=(1/(rou*UReal*DhReal))*(Mu+Mut1(2*i,2*j)/Pre)*...
            ((e1(2*i-2,2*j)-2*e1(2*i,2*j)+e1(2*i+2,2*j))/dx^2+...
            (e1(2*i,2*j-2)-2*e1(2*i,2*j)+e1(2*i,2*j+2))/dy^2);

            PTermE=(2*((u1(2*i+1,2*j)-u1(2*i-1,2*j))/dx)^2+2*((v1(2*i,2*j+1)-
v1(2*i,2*j-1))/dy)^2+...
            (((u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))-...
            (u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j-2)+u1(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)+...
            ((v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i+2,2*j-1)+v1(2*i+2,2*j+1))-...
            (v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i-2,2*j+1)+v1(2*i-2,2*j-
1)))/(4*dx))^2)*...
            C1*e1(2*i,2*j)*Mut1(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal*k1(2*i,2*j));

            anew1(2*i,2*j)=e1(2*i,2*j)+dt*(-CTermE1-CTermE2+DTermE1+...
            PTermE-C2*e1(2*i,2*j)^2/k1(2*i,2*j));
        else
            li=kf*(dy/2);
            anew1(2*i,2*j)=Cd*k1(2*i,2*j)^1.5/li;
        end
    end
end

```

```

%enew(2*i,2*j)=rou*Cmu*k(2*i,2*j)^2/Mut(2*i,2*j)

end
end
end
                % Connect Zoon 1 & 2 for Epsilon
i=nxR-1;
for j=1:nyR-1
    if (j>=2)&(j<=nyR-2)

        CTermE1=(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))/2*((e2(2,2*j)+e1(2*i,2*j))/2-...
            (e1(2*i,2*j)+e1(2*i-2,2*j))/2)/dx;
        CTermE2=(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1))/2*((e1(2*i,2*j)+e1(2*i,2*j+2))/2-...
            (e1(2*i,2*j)+e1(2*i,2*j-2))/2)/dy;

        DTermE1=(1/(rou*UReal*DhReal))*(Mu+Mut1(2*i,2*j)/Pre)*((e1(2*i-2,2*j)-
2*e1(2*i,2*j)+e2(2,2*j))/dx^2+...
            (e1(2*i,2*j-2)-2*e1(2*i,2*j)+e1(2*i,2*j+2))/dy^2);

        PTermE=(2*((u1(2*i+1,2*j)-u1(2*i-1,2*j))/dx)^2+2*((v1(2*i,2*j+1)-
v1(2*i,2*j-1))/dy)^2+...
            (((u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i-1,2*j+2)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j+2))-...
            (u1(2*i-1,2*j)+u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j-2)+u1(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)+...
            ((v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i,2*j+1)+vr(2,2*j-1)+vr(2,2*j+1))-...
            (v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1)+v1(2*i-2,2*j+1)+v1(2*i-2,2*j-
1)))/(4*dx))^2)*...
            C1*e1(2*i,2*j)*Mut1(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal*k1(2*i,2*j));

        enew1(2*i,2*j)=e1(2*i,2*j)+dt*(-CTermE1-CTermE2+DTermE1+PTermE-
C2*e1(2*i,2*j)^2/k1(2*i,2*j));
        else
            li=kf*(dy/2);
            enew1(2*i,2*j)=Cd*k1(2*i,2*j)^1.5/li;
        end
    end
end

% BC k-epsilon

knew1(2,:)=kin;
enew1(2,:)=ein;

% Validate k e
k1=knew1;
e1=enew1;

                                % Mut (Zoon 1)

%for i=1:nxR-1
% for j=1:nyR-1

```

```

%   if (k1(2*i,2*j)==0)&(e1(2*i,2*j)==0)
%       Mut1(2*i,2*j)=0;
%   else
%       Mut1(2*i,2*j)=rou*Cmu*k1(2*i,2*j)^2/e1(2*i,2*j)*(UReal*DhReal);
%   end

% end
%end
Mut1=rou*Cmu*k1.^2./e1*(UReal*DhReal);

                                % Vtnew (Zoon2)

dr=dy;
for i=1:nthetaR-2
    for j=1:nyR-1
        nut=(Mut2(2*i,2*j)+Mut2(2*i+2,2*j))/(2*rou);
        Re=UReal*DhReal/(nu+nut);

        PTermT=(P2(2*i+2,2*j)-P2(2*i,2*j))/(r(2*j)*dtheta);

        CTerm1T=((vt(2*i+3,2*j)+vt(2*i+1,2*j))^2-(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-
1,2*j))^2)/(4*r(2*j)*dtheta);
        if j~=1
            CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j+1))-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2))*(vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j-1)))/(4*dr);
            else
                CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j+1))-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2))*(vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j-1)))/(4*dr);
            end
            if i~=1
                CTerm3T=2*vt(2*i+1,2*j)*(vr(2*i+2,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i-2,2*j-
1))+...
                vr(2*i-2,2*j+1))/(4*r(2*j));
            else
                CTerm3T=2*vt(2*i+1,2*j)*(vr(2*i+2,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i-2,2*j-1))+...
                vr(2*i-2,2*j+1))/(4*r(2*j));
            end

            Ax=2*(vt(2*i+1,2*j)*sin(theta(2*i+1))-(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i+2,2*j+1))+...
                vr(2*i+2,2*j-1))/4*cos(theta(2*i+1))*AV-
            (Rt+L+r(2*j)*sin(theta(2*i+1)))*AV^2;
            Ay=2*(vt(2*i+1,2*j)*cos(theta(2*i+1))+(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i+2,2*j+1))+...
                vr(2*i+2,2*j-1))/4*sin(theta(2*i+1))*AV-r(2*j)*cos(theta(2*i+1))*AV^2;
            ATermT=Ax*cos(theta(2*i+1))-Ay*sin(theta(2*i+1));

```

```

    STerm1T=(vt(2*i-1,2*j)-
2*vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+3,2*j))/(Re*r(2*j)^2*dtheta^2);
    if j~=1
        STerm2T=(vt(2*i+1,2*j-2)-2*vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))/(Re*dr^2);
    else
        STerm2T=(vt0(2*i+1)-2*vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))/(Re*dr^2);
    end
    if j~=1
        STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j))-
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2)))/(2*Re*r(2*j)*dr);
    else
        STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j))-
(vt(2*i+1,2*j)+vt0(2*i+1)))/(2*Re*r(2*j)*dr);
    end
    STerm4T=-vt(2*i+1,2*j)/(Re*r(2*j)^2);
    STerm5T=((vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j-1))-
(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)))/(Re*r(2*j)^2*dtheta);

    vtnew(2*i+1,2*j)=vt(2*i+1,2*j)+dt*(-ATermT-CTerm1T-CTerm2T-CTerm3T-
PTermT+...
    STerm1T+STerm2T+STerm3T+STerm4T+STerm5T);
end
end
i=nthetaR-1;
for j=1:nyR-1
    nut=(Mut2(2*i,2*j)+Mut3(2,2*j))/(2*rou);
    Re=UReal*DhReal/(nu+nut);

    PTermT=(P3(2,2*j)-P2(2*i,2*j))/(r(2*j)*dtheta);

    CTerm1T=((u3(3,2*j)+vt(2*i+1,2*j))^2-(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-
1,2*j))^2)/(4*r(2*j)*dtheta);
    if j~=1
        CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+v3(2,2*j+1))-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2))*(vr(2*i,2*j-1)+v3(2,2*j-1)))/(4*dr);
    else
        CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+v3(2,2*j+1))-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt0(2*i+1))*(vr(2*i,2*j-1)+v3(2,2*j-1)))/(4*dr);
    end
    CTerm3T=2*vt(2*i+1,2*j)*(v3(2,2*j-1)+v3(2,2*j+1)+vr(2*i-2,2*j-1)+...
vr(2*i-2,2*j+1))/(4*r(2*j));

    Ax=2*(vt(2*i+1,2*j)*sin(theta(2*i+1))-
(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+v3(2,2*j+1)+...
v3(2,2*j-1))/4*cos(theta(2*i+1)))*AV-(Rt+L+r(2*j)*sin(theta(2*i+1)))*AV^2;
    Ay=2*(vt(2*i+1,2*j)*cos(theta(2*i+1))+
(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+v3(2,2*j+1)+...

```

```

v3(2,2*j-1))/4*sin(theta(2*i+1))*AV-r(2*j)*cos(theta(2*i+1))*AV^2;

ATermT=Ax*cos(theta(2*i+1))-Ay*sin(theta(2*i+1));

STerm1T=(vt(2*i-1,2*j)-2*vt(2*i+1,2*j)+u3(3,2*j))/(Re*r(2*j)^2*dtheta^2);
if j~=1
    STerm2T=(vt(2*i+1,2*j-2)-2*vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))/(Re*dr^2);
else
    STerm2T=(vt0(2*i+1)-2*vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))/(Re*dr^2);
end
if j~=1
    STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j))-(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-
2)))/(2*Re*r(2*j)*dr);
else
    STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j))-
(vt(2*i+1,2*j)+vt0(2*i+1)))/(2*Re*r(2*j)*dr);
end
STerm4T=-vt(2*i+1,2*j)/(Re*r(2*j)^2);
STerm5T=((v3(2,2*j+1)+v3(2,2*j-1))-(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)))/(Re*r(2*j)^2*dtheta);

vtnew(2*i+1,2*j)=vt(2*i+1,2*j)+dt*(-ATermT-CTerm1T-CTerm2T-CTerm3T-
PTermT+...
    STerm1T+STerm2T+STerm3T+STerm4T+STerm5T);
end

                                % Vrnnew (Zoon2)

for i=1:nthetaR-2
    for j=1:nyR-2
        nut=(Mut2(2*i,2*j)+Mut2(2*i,2*j+2))/(2*rou);
        Re=URReal*DhReal/(nu+nut);

        PTermR=(P2(2*i,2*j+2)-P2(2*i,2*j))/dr;

        if i~=1
            CTerm1R=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j+1))-...
                (vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i-
2,2*j+1)))/(4*r(2*j+1)*dtheta);
        else
            CTerm1R=((vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j+1))-...
                (vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-
1,2*j+2))*(vr(2*i,2*j+1)+vr0(2*j+1)))/(4*r(2*j+1)*dtheta);
        end
    end
end

```



```

Ax=2*((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))/4*sin(theta(2*i))-...
vr(2*i,2*j+1)*cos(theta(2*i)))*AV-(Rt+L+r(2*j+1)*sin(theta(2*i)))*AV^2;
Ay=2*((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))/4*cos(theta(2*i))+...
vr(2*i,2*j+1)*sin(theta(2*i)))*AV-r(2*j+1)*cos(theta(2*i))*AV^2;
ATermR=Ax*sin(theta(2*i))+Ay*cos(theta(2*i));

STerm1R=(vr(2*i-2,2*j+1)-
2*vr(2*i,2*j+1)+v3(2,2*j+1))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta^2);

STerm2R=(vr(2*i,2*j-1)-2*vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j+3))/(Re*dr^2);
STerm3R=((vr(2*i,2*j+3)+vr(2*i,2*j+1))-(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)))/(2*Re*r(2*j+1)*dr);
STerm4R=-vr(2*i,2*j+1)/(Re*r(2*j+1)^2);
STerm5R=-((vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j))-vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta);

vrnew(2*i,2*j+1)=vr(2*i,2*j+1)+dt*(-ATermR-PTermR-CTerm1R-CTerm2R-
CTerm3R+...
STerm1R+STerm2R+STerm3R+STerm4R+STerm5R);
end

% BC (2)

vtnew(1,:)=u1(nx,:);
vr0=v1(nx-1,:);

vrnew(:,1)=0;
vrnew(:,ny)=0;
vt0=-vt(:,2);
vtnew(:,ny+1)=-vtnew(:,ny-1);

vr=vrnew;
vt=vtnew;

                                %Pnew (Zoon2)
for i=1:nthetaR-1
    for j=1:nyR-1
        Pnew2(2*i,2*j)=P2(2*i,2*j)-dt*(c^2*(vt(2*i+1,2*j)-vt(2*i-
1,2*j))/(r(2*j)*dtheta)+...
        c^2*(vr(2*i,2*j+1)-vr(2*i,2*j-1))/dr+c^2*(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1))/(2*r(2*j)));
    end
end
P2=Pnew2;

```

% K - Equation (Zoon 2)

```

i=1;
for j=1:nyR-1
    if (j>=2)&(j<=nyR-2)

        CTermK1=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*((k2(2*i+2,2*j)+k2(2*i,2*j))-
(k2(2*i,2*j)+...
        k1(nx-1,2*j)))/(4*r(2*j)*dtheta);
        CTermK2=(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))*((k2(2*i,2*j+2)+k2(2*i,2*j))-...
(k2(2*i,2*j)+k2(2*i,2*j-2)))/(4*dr);

        DTermK=(Mu+Mut2(2*i,2*j)/Prk)/(rou*UReal*DhReal)*((k2(2*i,2*j+2)-...
2*k2(2*i,2*j)+k2(2*i,2*j-2))/dr^2+...
((k2(2*i,2*j+2)+k2(2*i,2*j))-k2(2*i,2*j)+k2(2*i,2*j-2))/(2*r(2*j)*dr)+...
(k2(2*i+2,2*j)-2*k2(2*i,2*j)+k1(nx-1,2*j))/(dtheta^2*r(2*j)^2));
        PTermK=(Mut2(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal))*(2*(vr(2*i,2*j+1)-vr(2*i,2*j-
1))^2/dr^2+...
+2*((vt(2*i+1,2*j)-vt(2*i-1,2*j))/(r(2*j)*dtheta)+...
(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))/(2*r(2*j)))^2+...
(((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
(vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j-2)+vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2)))/(4*dr)-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j-1))-...
(vr0(2*j-1)+vr0(2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i,2*j+1)))/(4*r(2*j)*dtheta))^2);
        knew2(2*i,2*j)=k2(2*i,2*j)+dt*(-CTermK1-CTermK2+DTermK+PTermK-
e2(2*i,2*j));
    else
        if j~=1
            knew2(2*i,2*j)=abs(((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
(vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j-2)+vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2)))/(4*dr)-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j-1))-...
(vr0(2*j-1)+vr0(2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i,2*j+1)))/(4*r(2*j)*dtheta))*...
nu/(UReal*DhReal*Cd^1.5);
        elseif j==1
            knew2(2*i,2*j)=abs(((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
(vt(2*i-1,2*j)+vt0(2*i-1)+vt(2*i+1,2*j)+vt0(2*i+1)))/(4*dr)-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j-1))-...
(vr0(2*j-1)+vr0(2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i,2*j+1)))/(4*r(2*j)*dtheta))*...
nu/(UReal*DhReal*Cd^1.5);
        end
    end
end
end
end

```

```

for i=2:nthetaR-2
  for j=1:nyR-1
    if (j>=2)&(j<=nyR-2)

      CTermK1=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*((k2(2*i+2,2*j)+k2(2*i,2*j))-
(k2(2*i,2*j)+...
      k2(2*i-2,2*j)))/(4*r(2*j)*dtheta);
      CTermK2=(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))*((k2(2*i,2*j+2)+k2(2*i,2*j))-...
      (k2(2*i,2*j)+k2(2*i,2*j-2)))/(4*dr);

      DTermK=(Mu+Mut2(2*i,2*j)/Prk)/(rou*UReal*DhReal)*((k2(2*i,2*j+2)-...
      2*k2(2*i,2*j)+k2(2*i,2*j-2))/dr^2+...
      ((k2(2*i,2*j+2)+k2(2*i,2*j))-(k2(2*i,2*j)+k2(2*i,2*j-2)))/(2*r(2*j)*dr)+...
      (k2(2*i+2,2*j)-2*k2(2*i,2*j)+k2(2*i-2,2*j))/(dtheta^2*r(2*j)^2));
      PTermK=(Mut2(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal))*(2*(vr(2*i,2*j+1)-vr(2*i,2*j-
1))^2/dr^2+...
      +2*((vt(2*i+1,2*j)-vt(2*i-1,2*j))/(r(2*j)*dtheta)+...
      (vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))/(2*r(2*j)))^2+...
      (((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
      (vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j-2)+vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2)))/(4*dr)-...
      (vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
      ((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j-1))-...
      (vr(2*i-2,2*j-1)+vr(2*i-2,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i,2*j+1)))/(4*r(2*j)*dtheta))^2);
      knew2(2*i,2*j)=k2(2*i,2*j)+dt*(-CTermK1-CTermK2+DTermK+PTermK-
e2(2*i,2*j));
    else
      if j~=1
        knew2(2*i,2*j)=abs(((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)-vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
        (vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j-2)+vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2)))/(4*dr)-...
        (vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
        ((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j-1))-...
        (vr(2*i-2,2*j-1)+vr(2*i-2,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i,2*j+1)))/(4*r(2*j)*dtheta))*...
        nu/(UReal*DhReal*Cd^1.5);
      elseif j==1
        knew2(2*i,2*j)=abs(((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
        (vt(2*i-1,2*j)+vt0(2*i-1)+vt(2*i+1,2*j)+vt0(2*i+1)))/(4*dr)-...
        (vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
        ((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j-1))-...
        (vr(2*i-2,2*j-1)+vr(2*i-2,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i,2*j+1)))/(4*r(2*j)*dtheta))*...
        nu/(UReal*DhReal*Cd^1.5);
      end
    end
  end
end

```

```

end
end

% Connect Zoon 2 & 3 for k

i=nthetaR-1;
for j=1:nyR-1
    if (j>=2)&(j<=nyR-2)
        CTermK1=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*((k3(2,2*j)+k2(2*i,2*j))-
(k2(2*i,2*j)+...
    k2(2*i-2,2*j)))/(4*r(2*j)*dtheta);
        CTermK2=(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))*((k2(2*i,2*j+2)+k2(2*i,2*j))-...
(k2(2*i,2*j)+k2(2*i,2*j-2)))/(4*dr);

        DTermK=(Mu+Mut2(2*i,2*j)/Prk)/(rou*UReal*DhReal)*((k2(2*i,2*j+2)-...
2*k2(2*i,2*j)+k2(2*i,2*j-2))/dr^2+...
((k2(2*i,2*j+2)+k2(2*i,2*j))-k2(2*i,2*j)+k2(2*i,2*j-2))/(2*r(2*j)*dr)+...
(k3(2,2*j)-2*k2(2*i,2*j)+k2(2*i-2,2*j))/(dtheta^2*r(2*j)^2));
        PTermK=(Mut2(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal))*(2*(vr(2*i,2*j+1)-vr(2*i,2*j-
1))^2/dr^2+...
+2*((vt(2*i+1,2*j)-vt(2*i-1,2*j))/(r(2*j)*dtheta)+...
(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))/(2*r(2*j)))^2+...
(((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
(vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j-2)+vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2)))/(4*dr)-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+v3(2,2*j+1)+v3(2,2*j-1))-...
(vr(2*i-2,2*j-1)+vr(2*i-2,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i,2*j+1)))/(4*r(2*j)*dtheta)^2);
        knew2(2*i,2*j)=k2(2*i,2*j)+dt*(-CTermK1-CTermK2+DTermK-PTermK-
e2(2*i,2*j));
    else
        if j~=1
            knew2(2*i,2*j)=abs(((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
(vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j-2)+vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2)))/(4*dr)-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+v3(2,2*j+1)+v3(2,2*j-1))-...
(vr(2*i-2,2*j-1)+vr(2*i-2,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i,2*j+1)))/(4*r(2*j)*dtheta))*...
nu/(UReal*DhReal*Cd^1.5);
        elseif j==1
            knew2(2*i,2*j)=abs(((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-
1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
(vt(2*i-1,2*j)+vt0(2*i-1)+vt(2*i+1,2*j)+vt0(2*i+1)))/(4*dr)-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+v3(2,2*j+1)+v3(2,2*j-1))-...
(vr(2*i-2,2*j-1)+vr(2*i-2,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i,2*j+1)))/(4*r(2*j)*dtheta))*...
nu/(UReal*DhReal*Cd^1.5);

```

```

end
end
end

% Epsilon - Equation (Zoon 2)

i=1;
for j=1:nyR-1
    if (j>=2)&(j<=nyR-2)

        CTermE1=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*((e2(2*i+2,2*j)+e2(2*i,2*j))-
(e2(2*i,2*j)+...
    e1(nx-1,2*j)))/(4*r(2*j)*dtheta);
        CTermE2=(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))*((e2(2*i,2*j+2)+e2(2*i,2*j))-
(e2(2*i,2*j)+...
    e2(2*i,2*j-2)))/(4*dr);
        DTermE=(Mu+Mut2(2*i,2*j)/Pre)/(rou*UReal*DhReal)*((e2(2*i,2*j+2)-...
    2*e2(2*i,2*j)+e2(2*i,2*j-2))/dr^2+...
    ((e2(2*i,2*j+2)+e2(2*i,2*j))-(e2(2*i,2*j)+e2(2*i,2*j-2)))/(2*r(2*j)*dr)+...
    (e2(2*i+2,2*j)-2*e2(2*i,2*j)+e1(nx-1,2*j))/(dtheta^2*r(2*j)^2));

PTermE=C1*(Mut2(2*i,2*j)*e2(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal*k2(2*i,2*j)))*(2*(vr(2*i
,2*j+1)-...
    vr(2*i,2*j-1))^2/dr^2+...
    +2*((vt(2*i+1,2*j)-vt(2*i-1,2*j))/(r(2*j)*dtheta)+...
    (vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))/(2*r(2*j)))^2+...
    (((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
    (vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j-2)+vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2)))/(4*dr)-...
    (vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
    ((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j-1))-...
    (vr0(2*j-1)+vr0(2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i,2*j+1)))/(4*r(2*j)*dtheta)^2);
        enew2(2*i,2*j)=e2(2*i,2*j)+dt*(-CTermE1-CTermE2+DTermE+PTermE-...
    C2*e2(2*i,2*j)^2/k2(2*i,2*j));
    else
        li=kf*(dy/2);
        enew2(2*i,2*j)=Cd*k2(2*i,2*j)^1.5/li;
    end
end

for i=2:nthetaR-2
    for j=1:nyR-1
        if (j>=2)&(j<=nyR-2)

            CTermE1=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*((e2(2*i+2,2*j)+e2(2*i,2*j))-
(e2(2*i,2*j)+...
                e2(2*i-2,2*j)))/(4*r(2*j)*dtheta);
            CTermE2=(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))*((e2(2*i,2*j+2)+e2(2*i,2*j))-
(e2(2*i,2*j)+...

```

```

e2(2*i,2*j-2))/(4*dr);

DTermE=(Mu+Mut2(2*i,2*j)/Pre)/(rou*UReal*DhReal)*((e2(2*i,2*j+2)-...
2*e2(2*i,2*j)+e2(2*i,2*j-2))/dr^2+...
((e2(2*i,2*j+2)+e2(2*i,2*j))-e2(2*i,2*j)+e2(2*i,2*j-2)))/(2*r(2*j)*dr)+...
(e2(2*i+2,2*j)-2*e2(2*i,2*j)+e2(2*i-2,2*j))/(dtheta^2*r(2*j)^2));

PTermE=C1*(Mut2(2*i,2*j)*e2(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal*k2(2*i,2*j))) * ...
(2*(vr(2*i,2*j+1)-vr(2*i,2*j-1))^2/dr^2+...
+2*((vt(2*i+1,2*j)-vt(2*i-1,2*j))/(r(2*j)*dtheta)+...
(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))/(2*r(2*j)))^2+...
(((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
(vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j-2)+vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2)))/(4*dr)-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+vr(2*i+2,2*j+1)+vr(2*i+2,2*j-1))-...
(vr(2*i-2,2*j-1)+vr(2*i-2,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i,2*j+1)))/(4*r(2*j)*dtheta))^2);
enew2(2*i,2*j)=e2(2*i,2*j)+dt*(-CTermE1-CTermE2+DTermE+PTermE-
C2*e2(2*i,2*j)^2/k2(2*i,2*j));
else
li=kf*(dy/2);
enew2(2*i,2*j)=Cd*k2(2*i,2*j)^1.5/li;
end
end
end
end

% Connect Zoon 2 & 3 for Epsilon
i=nthetaR-1;
for j=1:nyR-1
if (j>=2)&(j<=nyR-2)

CTermE1=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*((e3(2,2*j)+e2(2*i,2*j))-
(e2(2*i,2*j)+...
e2(2*i-2,2*j)))/(4*r(2*j)*dtheta);
CTermE2=(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))*((e2(2*i,2*j+2)+e2(2*i,2*j))-
(e2(2*i,2*j)+...
e2(2*i,2*j-2)))/(4*dr);
DTermE=(Mu+Mut2(2*i,2*j)/Pre)/(rou*UReal*DhReal)*((e2(2*i,2*j+2)-...
2*e2(2*i,2*j)+e2(2*i,2*j-2))/dr^2+...
((e2(2*i,2*j+2)+e2(2*i,2*j))-e2(2*i,2*j)+e2(2*i,2*j-2)))/(2*r(2*j)*dr)+...
(e3(2,2*j)-2*e2(2*i,2*j)+e2(2*i-2,2*j))/(dtheta^2*r(2*j)^2));
PTermE=C1*(Mut2(2*i,2*j)*e2(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal*k2(2*i,2*j))) * ...
(2*(vr(2*i,2*j+1)-vr(2*i,2*j-1))^2/dr^2+...
+2*((vt(2*i+1,2*j)-vt(2*i-1,2*j))/(r(2*j)*dtheta)+...
(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))/(2*r(2*j)))^2+...
(((vt(2*i-1,2*j+2)+vt(2*i+1,2*j+2)+vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i+1,2*j))-...
(vt(2*i-1,2*j)+vt(2*i-1,2*j-2)+vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i+1,2*j-2)))/(4*dr)-...
(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))/(2*r(2*j))+...
((vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1)+v3(2,2*j+1)+v3(2,2*j-1))-...

```

```

        (vr(2*i-2,2*j-1)+vr(2*i-2,2*j+1)+vr(2*i,2*j-
1)+vr(2*i,2*j+1))/(4*r(2*j)*dtheta))^2);
        enew2(2*i,2*j)=e2(2*i,2*j)+dt*(-CTermE1-CTermE2+DTermE+PTermE-
C2*e2(2*i,2*j)^2/k2(2*i,2*j));
        else
            li=kf*(dy/2);
            enew2(2*i,2*j)=Cd*k2(2*i,2*j)^1.5/li;
        end
    end
end

% Validate k2 e2
k2=knew2;
e2=enew2;

                                % Mut (Zoon 2)
%for i=1:nthetaR-1
%   for j=1:nyR-1
%       if (k2(2*i,2*j)==0)&(e2(2*i,2*j)==0)
%           Mut2(2*i,2*j)=0;
%       else
%           Mut2(2*i,2*j)=rou*Cmu*k2(2*i,2*j)^2/e2(2*i,2*j)*(UReal*DhReal);
%       end
%   end
% end
%end
Mut2=rou*Cmu*k2.^2./e2*(UReal*DhReal);

                                % Unew (Zoon3)
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-1
        nut=(Mut3(2*i,2*j)+Mut3(2*i+2,2*j))/(2*rou);
        Re=UReal*DhReal/(nu+nut);

        PTermX=(P3(2*i+2,2*j)-P3(2*i,2*j))/dx;

        CTerm1X=((u3(2*i+3,2*j)+u3(2*i+1,2*j))^2/4-(u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-
1,2*j))^2/4)/dx;
        if j~=1
            CTerm2X=((u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/4-...
                (u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j-2))*(v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
            else
                CTerm2X=((u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/4-...
                    (u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j-2))*(v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j-1))/4)/dy;
            end

            ATermX=(Rt+L-(2*i+1)*dx/2)*AV^2-2*(v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i,2*j+1)+...
                v3(2*i+2,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j+1))/4*AV;

```

```

STerm1X=(u3(2*i-1,2*j)-2*u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+3,2*j))/(Re*dx^2);
if i~=1
    STerm2X=(u3(2*i+1,2*j-2)-2*u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
else
    STerm2X=(u03(2*i+1)-2*u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))/(Re*dy^2);
end

unew3(2*i+1,2*j)=u3(2*i+1,2*j)+dt*(-ATermX-PTermX-CTerm1X-
CTerm2X+STerm1X+STerm2X);
end
end

                                %Vnew (Zoon3)
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-2
        nut=(Mut3(2*i,2*j)+Mut3(2*i,2*j+2))/(2*rou);
        Re=UReal*DhReal/(nu+nut);

        PTermY=(P3(2*i,2*j+2)-P3(2*i,2*j))/dy;
        if i~=1

CTerm1Y=((u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/4-...
        (u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i-1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i-2,2*j+1))/4)/dx;
        else

CTerm1Y=((u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/4-...
        (u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i-1,2*j+2))*(v3(2*i,2*j+1)+v03(2*j+1))/4)/dx;
        end
        CTerm2Y=((v3(2*i,2*j+3)+v3(2*i,2*j+1))^2/4-(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-
1))^2/4)/dy;

        ATermY=2*(u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i-
1,2*j+2)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))/4*AV-...
        (Rc+(2*j+1)*dy/2)*AV^2;

        if i~=1
            STerm1Y=(v3(2*i-2,2*j+1)-2*v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
        else
            STerm1Y=(v03(2*j+1)-2*v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j+1))/(Re*dx^2);
        end
        STerm2Y=(v3(2*i,2*j-1)-2*v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j+3))/(Re*dy^2);
        vnew3(2*i,2*j+1)=v3(2*i,2*j+1)+dt*(-ATermY-PTermY-CTerm1Y-
CTerm2Y+STerm1Y+STerm2Y);

    end
end

```



```

% BC (3)

unew3(1,:)=vt(ntheta,:);
unew3(nx,:)=unew3(nx-2,:);
v03=vr(ntheta-1,:);
vnew3(nx-1,:)=0;

vnew3(:,1)=0;
vnew3(:,ny)=0;
u03=-unew3(:,2);
unew3(:,ny+1)=-unew3(:,ny-1);

u3=unew3;
v3=vnew3;

                                %Pnew (Zoon3)
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        Pnew3(2*i,2*j)=P3(2*i,2*j)-dt*(c^2*(u3(2*i+1,2*j)-u3(2*i-1,2*j))/dx+...
            c^2*(v3(2*i,2*j+1)-v3(2*i,2*j-1))/dy);
    end
end
P3=Pnew3;

                                % K - Equation (Zoon 3)

i=1;
for j=1:nyR-1
    if (j>=2)&(j<=nyR-2)

        CTermK1=(u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j))/2*((k3(2*i+2,2*j)+k3(2*i,2*j))/2-...
            (k3(2*i,2*j)+k2(ntheta-1,2*j))/2)/dx;
        CTermK2=(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1))/2*((k3(2*i,2*j)+k3(2*i,2*j+2))/2-...
            (k3(2*i,2*j)+k3(2*i,2*j-2))/2)/dy;

        DTermK1=(1/(rou*UReal*DhReal))*(Mu+Mut3(2*i,2*j)/Prk)*((k2(ntheta-
1,2*j)-...
            2*k3(2*i,2*j)+k3(2*i+2,2*j))/dx^2+(k3(2*i,2*j-2)-
2*k3(2*i,2*j)+k3(2*i,2*j+2))/dy^2);

        PTermK=2*((u3(2*i+1,2*j)-u3(2*i-1,2*j))/dx)^2+2*((v3(2*i,2*j+1)-
v3(2*i,2*j-1))/dy)^2+...
            (((u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i-1,2*j+2)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))-...
            (u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j-2)+u3(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)+...
            ((v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j+1))-...
            (v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1)+v03(2*j+1))+...

```

```

v03(2*j-1))/(4*dx)^2)*Mut3(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal);

knew3(2*i,2*j)=k3(2*i,2*j)+dt*(-CTermK1-CTermK2+DTermK1+PTermK-
e3(2*i,2*j));
else
%BC
if j~=1
knew3(2*i,2*j)=abs(Mu/(rou*Cd^1.5)*(((u3(2*i-1,2*j)+...
u3(2*i-1,2*j+2)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))-...
(u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j-2)+u3(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)+...
((v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j+1))-...
(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1)+vr(ntheta-1,2*j+1)+...
vr(ntheta-1,2*j-1)))/(4*dx))/(UReal*DhReal));
elseif j==1
knew3(2*i,2*j)=abs(Mu/(rou*Cd^1.5)*(((u3(2*i-1,2*j)+...
u3(2*i-1,2*j+2)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))-...
(u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i+1,2*j)+u03(2*i-1)+u03(2*i+1)))/(4*dy)+...
((v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j+1))-...
(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1)+vr(ntheta-1,2*j+1)+...
vr(ntheta-1,2*j-1)))/(4*dx))/(UReal*DhReal));
end
end
end

for i=2:nxR-2
for j=1:nyR-1
if (j>=2)&(j<=nyR-2)

CTermK1=(u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j))/2*((k3(2*i+2,2*j)+k3(2*i,2*j))/2-...
(k3(2*i,2*j)+k3(2*i-2,2*j))/2)/dx;
CTermK2=(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1))/2*((k3(2*i,2*j)+k3(2*i,2*j+2))/2-...
(k3(2*i,2*j)+k3(2*i,2*j-2))/2)/dy;

DTermK1=(1/(rou*UReal*DhReal))*(Mu+Mut3(2*i,2*j)/Prk)*((k3(2*i-2,2*j)-
...
2*k3(2*i,2*j)+k3(2*i+2,2*j))/dx^2+(k3(2*i,2*j-2)-
2*k3(2*i,2*j)+k3(2*i,2*j+2))/dy^2);

PTermK=(2*((u3(2*i+1,2*j)-u3(2*i-1,2*j))/dx)^2+2*((v3(2*i,2*j+1)-
v3(2*i,2*j-1))/dy)^2+...
(((u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i-1,2*j+2)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))-...
(u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j-2)+u3(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)+...
((v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j+1))-...
(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i-2,2*j+1)+...
v3(2*i-2,2*j-1)))/(4*dx))^2)*Mut3(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal);

knew3(2*i,2*j)=k3(2*i,2*j)+dt*(-CTermK1-CTermK2+DTermK1+PTermK-
e3(2*i,2*j));

```

```

else
    %BC
    if j~=1
        knew3(2*i,2*j)=abs(Mu/(rou*Cd^1.5)*(((u3(2*i-1,2*j)+...
            u3(2*i-1,2*j+2)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))-...
            (u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j-2)+u3(2*i+1,2*j-
2)))/(4*dy)+...
            ((v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j+1))-...
            (v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i-2,2*j+1)+...
            v3(2*i-2,2*j-1)))/(4*dx))/(UReal*DhReal));
    elseif j==1
        knew3(2*i,2*j)=abs(Mu/(rou*Cd^1.5)*(((u3(2*i-1,2*j)+...
            u3(2*i-1,2*j+2)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))-...
            (u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1)+u3(2*i+1)))/(4*dy)+...
            ((v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j+1))-...
            (v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i-2,2*j+1)+...
            v3(2*i-2,2*j-1)))/(4*dx))/(UReal*DhReal));
    end
end
end
end

                                % Epsilon Equation (Zoon 3)

i=1;
for j=i:nyR-1
    if (j>=2)&(j<=nyR-2)

        CTermE1=(u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j))/2*((e3(2*i-2,2*j)+e3(2*i,2*j))/2-...
            (e3(2*i,2*j)+e2(ntheta-1,2*j))/2)/dx;
        CTermE2=(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1))/2*((e3(2*i,2*j)+e3(2*i,2*j+2))/2-...
            (e3(2*i,2*j)+e3(2*i,2*j-2))/2)/dy;

        DTermE1=(1/(rou*UReal*DhReal))*(Mu+Mut3(2*i,2*j)/Pre)*...
            ((e2(ntheta-1,2*j)-2*e3(2*i,2*j)+e3(2*i+2,2*j))/dx^2-...
            (e3(2*i,2*j-2)-2*e3(2*i,2*j)+e3(2*i,2*j+2))/dy^2);

        PTermE=(2*((u3(2*i+1,2*j)-u3(2*i-1,2*j))/dx)^2+2*((v3(2*i,2*j+1)-
v3(2*i,2*j-1))/dy)^2+...
            (((u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i-1,2*j+2)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))-...
            (u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j-2)+u3(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)+...
            ((v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j+1))-...
            (v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j+1)))/(4*dx))^2)*...
            C1*e3(2*i,2*j)*Mut3(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal*k3(2*i,2*j));

        enew3(2*i,2*j)=e3(2*i,2*j)+dt*(-CTermE1-CTermE2+DTermE1+...
            PTermE-C2*e3(2*i,2*j)^2/k3(2*i,2*j));
    else
        li=kf*(dy/2);
    end
end

```

```

    enew3(2*i,2*j)=Cd*k3(2*i,2*j)^1.5/li;
end
end

for i=2:nxR-2
    for j=1:nyR-1
        if (j>=2)&(j<=nyR-2)

            CTermE1=(u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j))/2*((e3(2*i+2,2*j)+e3(2*i,2*j))/2-
...
            (e3(2*i,2*j)+e3(2*i-2,2*j))/2)/dx;
            CTermE2=(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1))/2*((e3(2*i,2*j)+e3(2*i,2*j+2))/2-
...
            (e3(2*i,2*j)+e3(2*i,2*j-2))/2)/dy;
            DTermE1=(1/(rou*UReal*DhReal))*(Mu+Mut3(2*i,2*j)/Pre)*...
            ((e3(2*i-2,2*j)-2*e3(2*i,2*j)+e3(2*i+2,2*j))/dx^2+...
            (e3(2*i,2*j-2)-2*e3(2*i,2*j)+e3(2*i,2*j+2))/dy^2);

            PTermE=(2*((u3(2*i+1,2*j)-u3(2*i-1,2*j))/dx)^2+2*((v3(2*i,2*j+1)-
v3(2*i,2*j-1))/dy)^2+...
            (((u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i-1,2*j+2)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j+2))-...
            (u3(2*i-1,2*j)+u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j-2)+u3(2*i+1,2*j-2)))/(4*dy)+...
            ((v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i+2,2*j-1)+v3(2*i+2,2*j+1))-...
            (v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1)+v3(2*i-2,2*j+1)+v3(2*i-2,2*j-
1)))/(4*dx))^2)*...
            C1*e3(2*i,2*j)*Mut3(2*i,2*j)/(rou*UReal*DhReal*k3(2*i,2*j));

            enew3(2*i,2*j)=e3(2*i,2*j)+dt*(-CTermE1-CTermE2+DTermE1+...
            PTermE-C2*e3(2*i,2*j)^2/k3(2*i,2*j));
        else
            li=kf*(dy/2);
            enew3(2*i,2*j)=Cd*k3(2*i,2*j)^1.5/li;

        end
    end
end

% BC k-epsilon

knew3(nx-1,:)=knew3(nx-3,:);
enew3(nx-1,:)=enew3(nx-3,:);

% Validate k e
k3=knew3;
e3=enew3;

                                % Mut (Zoon 3)
%for i=1:nxR-1 %nxR-1

```

```

% for j=1:nyR-1 %nyR-1

% if (k3(2*i,2*j)==0)&(e3(2*i,2*j)==0)
%     Mut3(2*i,2*j)=0;
% else
%     Mut3(2*i,2*j)=rou*Cmu*k3(2*i,2*j)^2/e3(2*i,2*j)*(UReal*DhReal);
% end

% end
%end
Mut3=rou*Cmu*k3.^2./e3*(UReal*DhReal);

%BC
Mut3(nx-1,:)=Mut3(nx-3,:);

if t/1000==ceil(t/1000)
    Re=UReal*DhReal/nu;
    save CHelp1 Re u1 v1 P1 vt vr P2 u3 v3 P3 Mut1 Mut2 Mut3 k1 k2 k3 e1 e2 e3 ...
    LReal RcReal UReal DhReal AVReal RtReal nu rou Mu Prk Pre C1 C2 Cmu kf
Cd ...
    kinR linR einR Rer L Rc Dh Lmean kin ein AV Rt nLmean nyR nxR nthetaR dt nt
...
    c nx ny ntheta x1 x3 theta r dtheta dx dy dr t;
end

Time2=clock;
waitbar(t/nt,handle);
end
Refine2D;
CurveTempTurb;

```

```

% for j=1:nyR-1 %nyR-1

%   if (k3(2*i,2*j)==0)&(e3(2*i,2*j)==0)
%       Mut3(2*i,2*j)=0;
%   else
%       Mut3(2*i,2*j)=rou*Cmu*k3(2*i,2*j)^2/e3(2*i,2*j)*(UReal*DhReal);
%   end

% end
%end
Mut3=rou*Cmu*k3.^2./e3*(UReal*DhReal);

%BC
Mut3(nx-1,:)=Mut3(nx-3,:);

if t/1000==ceil(t/1000)
    Re=UReal*DhReal/nu;
    save CHelp1 Re u1 v1 P1 vt vr P2 u3 v3 P3 Mut1 Mut2 Mut3 k1 k2 k3 e1 e2 e3 ...
        LReal RcReal UReal DhReal AVReal RtReal nu rou Mu Prk Pre C1 C2 Cmu kf
Cd ...
    kinR linR einR Rer L Rc Dh Lmean kin ein AV Rt nLmean nyR nxR nthetaR dt nt
...
    c nx ny ntheta x1 x3 theta r dtheta dx dy dr t;
end

Time2=clock;
waitbar(t/nt,handle);
end
Refine2D;
CurveTempTurb;

```

## ضمیمه ح - برنامه تحلیل حرارت جریان مغشوش دوبعدی در مسیر خنک کاری

برای تحلیل حرارت جریان مغشوش دوبعدی در مسیر خنک کاری داخلی، برنامه‌ای با نام TCH به

زبان برنامه‌نویسی Matlab نوشته شده است. پارامترهای ورودی این برنامه عبارتند از :

عدد پرانتل سیال	: Pr
عدد پرانتل اغتشاش	: Pr <sub>t</sub>
دمای سیال در ورودی (k)	: T <sub>in</sub>
دمای دیواره‌ها (k)	: T <sub>w</sub>
تعداد گامهای زمانی	: ntT
طول گامهای زمانی	: dtT

خروجیهای این برنامه به صورت ماتریس بوده و عبارتند از :

T1	: میدان دمای بی‌بعد سیال در ناحیه اول
T2	: میدان دمای بی‌بعد سیال در ناحیه دوم
T3	: میدان دمای بی‌بعد سیال در ناحیه سوم

شایان ذکر است که به دلیل استفاده از شبکه جابجا شده برای تحلیل جریان، فقط

مؤلفه‌های  $T1_{2i,2j}$ ،  $T2_{2i,2j}$  و  $T3_{2i,2j}$  دارای ارزش فیزیکی هستند. متن اصلی برنامه از قرار زیر است :

```
Pr=0.8;
Prt=0.8;
Tin=300;
Tw=700;
nut1=Mut1/rou;
nut2=Mut2/rou;
nut3=Mut3/rou;
```

```
T1=ones(nx-1,ny+1);
T2=ones(ntheta-1,ntheta+1);
T3=ones(nx-1,ny+1);
```

```
Tnew1=T1;
Tnew2=T2;
Tnew3=T3;
```

```

T0X1=(Tw/Tin)*ones(1,ny+1);
T0Y1=(Tw/Tin)*ones(nx-1,1);

T0t=(Tw/Tin)*ones(1,ny+1);
T0r=(Tw/Tin)*ones(ntheta-1,1);

T0X3=(Tw/Tin)*ones(1,ny+1);
T0Y3=(Tw/Tin)*ones(nx-1,1);

ntT=60000;
dtT=0.0005;

handle=waitbar(0,'Please wait...');

for tT=1:ntT
    % Zoon (1)
    for i=1:nxR-1
        for j=1:nyR-1

            if i==1
                CTermX=(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))*(T1(2*i+2,2*j)-T0X1(2*j))/(4*dx);
                DTermX=(1+(nut1(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                    (T1(2*i+2,2*j)-2*T1(2*i,2*j)+T0X1(2*j))/(Re*Pr*dx^2);
            elseif i==nxR-1
                CTermX=(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))*(T2(2,2*j)-T1(2*i-2,2*j))/(4*dx);
                DTermX=(1+(nut1(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                    (T2(2,2*j)-2*T1(2*i,2*j)+T1(2*i-2,2*j))/(Re*Pr*dx^2);
            else
                CTermX=(u1(2*i+1,2*j)+u1(2*i-1,2*j))*(T1(2*i+2,2*j)-T1(2*i-
                2,2*j))/(4*dx);
                DTermX=(1+(nut1(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                    (T1(2*i+2,2*j)-2*T1(2*i,2*j)+T1(2*i-2,2*j))/(Re*Pr*dx^2);
            end

            if j~=1
                CTermY=(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1))*(T1(2*i,2*j+2)-T1(2*i,2*j-
                2))/(4*dy);
                DTermY=(1+(nut1(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                    (T1(2*i,2*j+2)-2*T1(2*i,2*j)+T1(2*i,2*j-2))/(Re*Pr*dy^2);
            else
                CTermY=(v1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j-1))*(T1(2*i,2*j+2)-T0Y1(2*i))/(4*dy);
                DTermY=(1+(nut1(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                    (T1(2*i,2*j+2)-2*T1(2*i,2*j)+T0Y1(2*i))/(Re*Pr*dy^2);
            end

            Tnew1(2*i,2*j)=T1(2*i,2*j)+dtT*(-CTermX-CTermY+DTermX+DTermY);
        end
    end
end

```



```

end

%BC
T0X1=2-Tnew1(2,:);

T0Y1=2*(Tw/Tin)-Tnew1(:,2);
Tnew1(:,2*nyR)=2*(Tw/Tin)-Tnew1(:,2*nyR-2);

% Validate T
T1=Tnew1;

                                %Zoon (2)
for i=1:nthetaR-1
    for j=1:nyR-1

        if i==1
            CTermT=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*...
                (T2(2*i+2,2*j)-T0t(2*j))/(4*r(2*j)*dtheta);
            DTermT=(1+(nut2(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                (T2(2*i+2,2*j)-2*T2(2*i,2*j)+T0t(2*j))/(Re*Pr*r(2*j)^2*dtheta^2);
        elseif i==nthetaR-1
            CTermT=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*(T3(2,2*j)-T2(2*i-
2,2*j))/(4*r(2*j)*dtheta);
            DTermT=(1+(nut2(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                (T3(2,2*j)-2*T2(2*i,2*j)+T2(2*i-2,2*j))/(Re*Pr*r(2*j)^2*dtheta^2);
        else
            CTermT=(vt(2*i+1,2*j)+vt(2*i-1,2*j))*...
                (T2(2*i+2,2*j)-T2(2*i-2,2*j))/(4*r(2*j)*dtheta);
            DTermT=(1+(nut2(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                (T2(2*i+2,2*j)-2*T2(2*i,2*j)+T2(2*i-2,2*j))/(Re*Pr*r(2*j)^2*dtheta^2);
        end

        if j~=1
            CTermR=(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))*(T2(2*i,2*j+2)-T2(2*i,2*j-2))/(4*dr);

            DTermR1=(1+(nut2(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                (T2(2*i,2*j+2)-2*T2(2*i,2*j)+T2(2*i,2*j-2))/(Re*Pr*dr^2);

            DTermR2=(1+(nut2(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                (T2(2*i,2*j+2)-T2(2*i,2*j-2))/(Re*Pr*2*r(2*j)*dr);
        else
            CTermR=(vr(2*i,2*j+1)+vr(2*i,2*j-1))*(T2(2*i,2*j+2)-T0r(2*i))/(4*dr);

            DTermR1=(1+(nut2(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                (T2(2*i,2*j+2)-2*T2(2*i,2*j)+T0r(2*i))/(Re*Pr*dr^2);
        end
    end
end

```

```

        DTermR2=(1+(nut2(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
            (T2(2*i,2*j+2)-T0r(2*i))/(Re*Pr*2*r(2*j)*dr);
    end

    Tnew2(2*i,2*j)=T2(2*i,2*j)+dtT*(-CTermT-
CTermR+DTermT+DTermR1+DTermR2);
    end
end

%BC

T0t=Tnew1(nx-1,:);
T0r=2*(Tw/Tin)-Tnew2(:,2);
Tnew2(:,2*nyR)=2*(Tw/Tin)-Tnew2(:,2*nyR-2);

% Validate T
T2=Tnew2;

                                % Zoon (3)
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-1

        if i~=1
            CTermX=(u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j))*(T3(2*i+2,2*j)-T3(2*i-
2,2*j))/(4*dx);
            DTermX=(1+(nut3(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                (T3(2*i+2,2*j)-2*T3(2*i,2*j)+T3(2*i-2,2*j))/(Re*Pr*dx^2);
        else
            CTermX=(u3(2*i+1,2*j)+u3(2*i-1,2*j))*(T3(2*i+2,2*j)-T0X3(2*j))/(4*dx);
            DTermX=(1+(nut3(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                (T3(2*i+2,2*j)-2*T3(2*i,2*j)+T0X3(2*j))/(Re*Pr*dx^2);
        end

        if j~=1
            CTermY=(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1))*(T3(2*i,2*j+2)-T3(2*i,2*j-
2))/(4*dy);
            DTermY=(1+(nut3(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                (T3(2*i,2*j+2)-2*T3(2*i,2*j)+T3(2*i,2*j-2))/(Re*Pr*dy^2);
        else
            CTermY=(v3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j-1))*(T3(2*i,2*j+2)-T0Y3(2*i))/(4*dy);
            DTermY=(1+(nut3(2*i,2*j)/nu)*(Pr/Prt))*...
                (T3(2*i,2*j+2)-2*T3(2*i,2*j)+T0Y3(2*i))/(Re*Pr*dy^2);
        end

        Tnew3(2*i,2*j)=T3(2*i,2*j)+dtT*(-CTermX-CTermY+DTermX+DTermY);
    end
end

```

```

%BC
T0X3=Tnew2(ntheta-1,:);
%Tnew3(2*nxR-2,:)=Tnew3(2*nxR-4,:);
TmN2=trapz(linspace(dy/2,Dh-dy/2,nyR-1),(u3(2*nxR-3,1:2:2*nyR-3)+...
    u3(2*nxR-3,3:2:2*nyR-1)).*(T3(2*nxR-2,2:2:2*nyR-2)+T3(2*nxR-4,2:2:2*nyR-
2))/4);
TmN1=trapz(linspace(dy/2,Dh-dy/2,nyR-1),(u3(2*nxR-5,1:2:2*nyR-3)+...
    u3(2*nxR-5,3:2:2*nyR-1)).*(T3(2*nxR-4,2:2:2*nyR-2)+T3(2*nxR-6,2:2:2*nyR-
2))/4);
dTmN=TmN2-TmN1;
Tnew3(2*nxR-2,:)=Tnew3(2*nxR-4,:)+(Tw/Tin-(T3(2*nxR-2,:)+T3(2*nxR-
4,:))/2)/...
    (Tw/Tin-TmN2)*dTmN;

T0Y3=2*(Tw/Tin)-Tnew3(:,2);
Tnew3(:,2*nyR)=2*(Tw/Tin)-Tnew3(:,2*nyR-2);

% Validate T
T3=Tnew3;

waitbar(tT/ntT,handle);

if (tT/100)==ceil(tT/100)
    T3(30,20)
end

end

save CHelp1 Re u1 v1 P1 vt vr P2 u3 v3 P3 Mut1 Mut2 Mut3 k1 k2 k3 e1 e2 e3 ...
    LReal RcReal UReal DhReal AVReal RtReal nu rou Mu Prk Pre C1 C2 Cmu kf
Cd ...
    kinR linR einR Rer L Rc Dh Lmean kin ein AV Rt nLmean nyR axR nthetaR dt nt
...
    c nx ny ntheta x1 x3 theta r dtheta dx dy dr t T1 T2 T3 Pr Prt Tin Tw dt dtT;

```

## ضمیمه ط - برنامه تحلیل جریان آرام سه بعدی در یک کانال با مقطع مستطیلی

برای تحلیل جریان سه بعدی آرام در یک کانال با مقطع مستطیلی، برنامه ای با نام LPF3D به زبان برنامه نویسی Matlab نوشته شده است. پارامترهای ورودی برنامه عبارتند از :

URReal : سرعت جریان در ورودی (m/s)

LReal : طول کانال (m)

byReal : عرض کانال در جهت y (m)

bzReal : عرض کانال در جهت z (m)

nxR : تعداد گره ها در جهت طول کانال

nyR : تعداد گره ها در عرض کانال و در جهت y

nzR : تعداد گره ها در عرض کانال و در جهت z

nu : ویسکوزیته سینماتیکی سیال ( $m^2/s$ )

rou : چگالی سیال ( $kg/m^3$ )

nt : تعداد گامهای زمانی

dt : طول گام زمانی

خروجیهای این برنامه به صورت تانسور مرتبه سه بوده و عبارتند از :

u : سرعت محوری بی بعد

v : سرعت عرضی بی بعد در جهت y

w : سرعت عرضی بی بعد در جهت z

P : فشار استاتیکی بی بعد

شایان ذکر است که به دلیل استفاده از شبکه جابجا شده برای تحلیل جریان، برای سرعت محوری

فقط مولفه های  $u_{2i+1,2j,2k}$ ، سرعت عرضی در جهت y  $v_{2i,2j+1,2k}$ ، سرعت عرضی در جهت z

$w_{2i,2j,2k-1}$  و فشار استاتیکی  $P_{2i,2j,2k}$  دارای ارزش فیزیکی هستند متن اصلی برنامه از قرار زیر است :

```
clear;
% Data
LReal=0.4;
URReal=0.1;
byReal=0.03;
```

```

bzReal=0.03;
PReal=1000;
nxR=70;
nyR=15;
nzR=15;
DhReal=2*byReal*bzReal/(byReal+bzReal);

dt=0.0005;
nt=30000;
c=20;

% Properties
nu=0.000016;
rou=1000;

% Non_Dimension
Re=UReal*DhReal/nu;
Pin=PReal/(rou*UReal^2);
L=LReal/DhReal;
by=byReal/DhReal;
bz=bzReal/DhReal;
Dh=1;

x=linspace(0,L,nxR-2);
y=linspace(0,by,nyR-2);
z=linspace(0,bz,nzR-2);

dx=x(2)-x(1);
dy=y(2)-y(1);
dz=z(2)-z(1);
nx=2*nxR-1;
ny=2*nyR-1;
nz=2*nzR-1;

% Initial Value
for i=1:nz+1
    u(:,i)=ones(nx,ny+1);
    v(:,i)=zeros(nx,ny);
    if i~=nz+1
        w(:,i)=zeros(nx,ny+1);
        P(:,i)=zeros(nx,ny);
    end
end

u0xy=-ones(nx,ny+1);
u0xz=-ones(nx,nz+1);
v0xy=zeros(nx,ny);

```

```
v0yz=zeros(ny,nz+1);
w0xz=zeros(nx,nz);
w0yz=zeros(ny+1,nz);
```

```
unew=u;
vnew=v;
wnew=w;
Pnew=P;
```

```
CBank={};
```

```
handle=waitbar(0,'Please wait...');
```

```
for t=1:nt
```

```
    % Unew
```

```
    for i=1:nxR-2
```

```
        for j=1:nyR-1
```

```
            for k=1:nzR-1
```

```
                PTermX=(P(2*i+2,2*j,2*k)-P(2*i,2*j,2*k))/dx;
```

```
                CTerm1X=((u(2*i+3,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j,2*k))^2/4-(u(2*i+1,2*j,2*k)+...
                    u(2*i-1,2*j,2*k))^2/4)/dx;
```

```
                if j~=1
```

```
                    CTerm2X=((u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i+2,2*j+1,
                        2*k))/4-...
```

```
                    (u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j-2,2*k))*(v(2*i,2*j-1,2*k)+v(2*i+2,2*j-
                        1,2*k))/4)/dy;
```

```
                    else
```

```
                    CTerm2X=((u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i+2,2*j+1,
                        2*k))/4-...
```

```
                    (u(2*i+1,2*j,2*k)+u0xz(2*i+1,2*k))*(v(2*i,2*j-1,2*k)+v(2*i+2,2*j-
                        1,2*k))/4)/dy;
```

```
                    end
```

```
                    if k~=1
```

```
                        CTerm3X=((u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w(2*i,2*j,2*k+1)+w(2*i+2,2*j,2*
                            k+1))/4-...
```

```
                        (u(2*i+1,2*j,2*k-2)+u(2*i+1,2*j,2*k))*(w(2*i,2*j,2*k-
                            1)+w(2*i+2,2*j,2*k-1))/4)/dz;
```

```
                        else
```

```
                        CTerm3X=((u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w(2*i,2*j,2*k+1)+w(2*i+2,2*j,2*
                            k+1))/4-...
```

```
                        (u0xy(2*i+1,2*j)+u(2*i+1,2*j,2*k))*(w(2*i,2*j,2*k-
                            1)+w(2*i+2,2*j,2*k-1))/4)/dz;
```

```

end

STerm1X=(u(2*i-1,2*j,2*k)-
2*u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+3,2*j,2*k))/(Re*dx^2);
if j~=1
    STerm2X=(u(2*i+1,2*j-2,2*k)-
2*u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dy^2);
else
    STerm2X=(u0xz(2*i+1,2*k)-
2*u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dy^2);
end
if k~=1
    STerm3X=(u(2*i+1,2*j,2*k-2)-
2*u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);
else
    STerm3X=(u0xy(2*i+1,2*j)-
2*u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);
end

unew(2*i+1,2*j,2*k)=u(2*i+1,2*j,2*k)+dt*(-PTermX-CTerm1X-CTerm2X-
CTerm3X+...
    STerm1X+STerm2X+STerm3X);
end
end
if t/10==ceil(t/10);
    u(21,10,10)
end

                                %Vnew
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-2
        for k=1:nzR-1
            PTermY=(P(2*i,2*j+2,2*k)-P(2*i,2*j,2*k))/dy;
            if i~=1
                CTerm1Y=((u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i+2,2*j+1,
                2*k))/4-...
                (u(2*i-1,2*j,2*k)+u(2*i-1,2*j+2,2*k))*(v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i-
                2,2*j+1,2*k))/4)/dx;
            else
                CTerm1Y=((u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i+2,2*j+1,
                2*k))/4-...
                (u(2*i-1,2*j,2*k)+u(2*i-
                1,2*j+2,2*k))*(v(2*i,2*j+1,2*k)+v0yz(2*j+1,2*k))/4)/dx;
            end
        end
    end
end

```

```

CTerm2Y=((v(2*i,2*j+3,2*k)+v(2*i,2*j+1,2*k))^2/4-(v(2*i,2*j+1,2*k)+...
v(2*i,2*j-1,2*k))^2/4)/dy;

if k~=1

CTerm3Y=((v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w(2*i,2*j,2*k+1)+w(2*i,2*j+2,2*
k+1))/4-...
(v(2*i,2*j+1,2*k-2)+v(2*i,2*j+1,2*k))*(w(2*i,2*j,2*k-
1)+w(2*i,2*j+2,2*k-1))/4)/dz;
else

CTerm3Y=((v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w(2*i,2*j,2*k+1)+w(2*i,2*j+2,2*
k+1))/4-...
(v0xy(2*i,2*j+1)+v(2*i,2*j+1,2*k))*(w(2*i,2*j,2*k-
1)+w(2*i,2*j+2,2*k-1))/4)/dz;
end

if i~=1
STerm1Y=(v(2*i-2,2*j+1,2*k)-
2*v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i+2,2*j+1,2*k))/(Re*dx^2);
else
STerm1Y=(v0yz(2*j+1,2*k)-
2*v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i+2,2*j+1,2*k))/(Re*dx^2);
end

STerm2Y=(v(2*i,2*j-1,2*k)-
2*v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i,2*j+3,2*k))/(Re*dy^2);

if k~=1
STerm3Y=(v(2*i,2*j+1,2*k-2)-
2*v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
else
STerm3Y=(v0xy(2*i,2*j+1)-
2*v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
end

vnew(2*i,2*j+1,2*k)=v(2*i,2*j+1,2*k)+dt*(-PTermY-CTerm1Y-CTerm2Y-
CTerm3Y+...
STerm1Y+STerm2Y+STerm3Y);
end
end
end

% wnew

for i=1:nxR-2
for j=1:nyR-1
for k=1:nzR-2
PTermZ=(P(2*i,2*j,2*k+2)-P(2*i,2*j,2*k))/dz;
if i~=1

```



CTerm1Z=((u(2\*i+1,2\*j,2\*k)+u(2\*i+1,2\*j,2\*k+2))\*(w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i+2,2\*j,2\*k+1))/4-...

(u(2\*i-1,2\*j,2\*k)+u(2\*i-1,2\*j,2\*k+2))\*(w(2\*i-2,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i,2\*j,2\*k+1))/4)/dx;

else

CTerm1Z=((u(2\*i+1,2\*j,2\*k)+u(2\*i+1,2\*j,2\*k+2))\*(w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i+2,2\*j,2\*k+1))/4-...

(u(2\*i-1,2\*j,2\*k)+u(2\*i-1,2\*j,2\*k+2))\*(w(2\*i-1,2\*j,2\*k+2))\*(w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i,2\*j,2\*k+1))/4)/dx;

end

if j~=1

CTerm2Z=((v(2\*i,2\*j+1,2\*k)+v(2\*i,2\*j+1,2\*k+2))\*(w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i,2\*j+2,2\*k+1))/4-...

(v(2\*i,2\*j-1,2\*k)+v(2\*i,2\*j-1,2\*k+2))\*(w(2\*i,2\*j-2,2\*k+1)+w(2\*i,2\*j,2\*k+1))/4)/dy;

else

CTerm2Z=((v(2\*i,2\*j+1,2\*k)+v(2\*i,2\*j+1,2\*k+2))\*(w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i,2\*j+2,2\*k+1))/4-...

(v(2\*i,2\*j-1,2\*k)+v(2\*i,2\*j-1,2\*k+2))\*(w(2\*i,2\*j-1,2\*k+2))\*(w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i,2\*j,2\*k+1))/4)/dy;

end

CTerm3Z=((w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i,2\*j,2\*k+3))^2/4-...

(w(2\*i,2\*j,2\*k-1)+w(2\*i,2\*j,2\*k+1))^2/4)/dz;

if i~=1

STerm1Z=(w(2\*i-2,2\*j,2\*k+1)-2\*w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i+2,2\*j,2\*k+1))/(Re\*dx^2);

else

STerm1Z=(w(2\*j,2\*k+1)-2\*w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i+2,2\*j,2\*k+1))/(Re\*dx^2);

end

if j~=1

STerm2Z=(w(2\*i,2\*j-2,2\*k+1)-2\*w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i,2\*j+2,2\*k+1))/(Re\*dy^2);

else

STerm2Z=(w(2\*i,2\*k+1)-2\*w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i,2\*j+2,2\*k+1))/(Re\*dy^2);

end

STerm3Z=(w(2\*i,2\*j,2\*k-1)-2\*w(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w(2\*i,2\*j,2\*k+3))/(Re\*dz^2);

```

        wnew(2*i,2*j,2*k+1)=w(2*i,2*j,2*k+1)+dt*(-PTermZ-CTerm1Z-CTerm2Z-
CTerm3Z+...
        STerm1Z+STerm2Z+STerm3Z);
    end
end
end

% BC
                                % X
    unew(1,,:)=1;
    unew(nx,,:)=unew(nx-2,,:);

    v0yz(:,:)=vnew(2,,:);
    vnew(nx-1,,:)=0;

    w0yz(:,:)=wnew(2,,:);
    wnew(nx-1,,:)=0;

                                % Y
    vnew(:,1,)=0;
    vnew(:,ny,)=0;

    u0xz(:,:)=unew(:,2,);
    unew(:,ny+1,)=unew(:,ny-1,);

    w0xz(:,:)=wnew(:,2,);
    wnew(:,ny+1,)=wnew(:,ny-1,);

                                % Z
    wnew(:,,1)=0;
    wnew(:,,nz)=0;

    u0xy(:,:)=unew(:,,2);
    unew(:,,nz+1)=unew(:,,nz-1);

    v0xy(:,:)=vnew(:,,2);
    vnew(:,,nz+1)=vnew(:,,nz-1);

% Improve
unew(:,ny+1,nz+1)=unew(:,ny-1,nz+1);

u=unew;
v=vnew;
w=wnew;

```

```

                                %Pnew
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-1
            Pnew(2*i,2*j,2*k)=P(2*i,2*j,2*k)-dt*(c^2*(u(2*i+1,2*j,2*k)-u(2*i-
1,2*j,2*k))/dx+...
                c^2*(v(2*i,2*j+1,2*k)-v(2*i,2*j-1,2*k))/dy+...
                c^2*(w(2*i,2*j,2*k+1)-w(2*i,2*j,2*k-1))/dz);
        end
    end
end
P=Pnew;

ControlS=4000;
if nt>ControlS
    if t/ControlS==ceil(t/ControlS)
        CBankV={u,v,w,P};
        CBank=[CBank;CBankV];
    end
else
    CBankV={u,v,w,P};
    CBank=[CBank;CBankV];
end
waitbar(t/nt,handle);

end
close(handle);
save CMarker3 CBank

```

## ضمیمه ی - برنامه تحلیل حرارت جریان آرام سه بعدی در یک کانال با مقطع

### مستطیلی

برای تحلیل حرارت جریان آرام سه بعدی در یک کانال با مقطع مستطیلی، برنامه ای با نام LPH3D به زبان برنامه نویسی Matlab نوشته شده است. قبل از اجرای این برنامه لازم است که میدان جریان از اجرای برنامه LPF3D بدست آید سپس با استفاده از نتایج این برنامه، می توان برنامه LPH3D را اجرا نمود. پارامترهای ورودی برنامه LPH عبارتند از :

Pr : عدد پرانتل

$T_{in}$  : دمای سیال در ورودی (k)

$T_w$  : دمای دیواره ها (k)

ntT : تعداد گامهای زمانی

dtT : طول گام زمانی

خروجی این برنامه تانسور مرتبه سه T است که در آن میدان دمای بی بعد سیال آمده است. شایان ذکر است که به دلیل استفاده از شبکه جابجا شده برای تحلیل جریان، فقط مولفه های  $T_{21,22,23,2k}$  دارای ارزش فیزیکی هستند. متن اصلی برنامه از قرار زیر است :

```
Pr=0.7;
Tin=300;
Tw=400;

% Initial Value
for k=1:nz+1
    T(:,:,k)=ones(nx+1,ny+1);
end

Tnew=T;
T0XZ(:,:)=(Tw/Tin)*ones(nx+1,nz+1);
T0XY(:,:)=(Tw/Tin)*ones(nx+1,ny+1);
T0YZ=(Tw/Tin)*ones(ny+1,nz+1);

ntT=50000;
dtT=0.005;

handle=waitbar(0,'Please wait...');
```

```

for tT=1:ntT
  for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
      for k=1:nzR-1
        if i~=1
          CTermX=(u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i-1,2*j,2*k))*...
            (T(2*i+2,2*j,2*k)-T(2*i-2,2*j,2*k))/(4*dx);

          DTermX=(T(2*i+2,2*j,2*k)-2*T(2*i,2*j,2*k)+...
            T(2*i-2,2*j,2*k))/(Re*Pr*dx^2);
        else
          CTermX=(u(2*i+1,2*j,2*k)+u(2*i-1,2*j,2*k))*...
            (T(2*i+2,2*j)-T0YZ(2*j,2*k))/(4*dx);

          DTermX=(T(2*i+2,2*j,2*k)-2*T(2*i,2*j,2*k)+...
            T0YZ(2*j,2*k))/(Re*Pr*dx^2);
        end

        if j~=1
          CTermY=(v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i,2*j-1,2*k))*...
            (T(2*i,2*j+2,2*k)-T(2*i,2*j-2,2*k))/(4*dy);

          DTermY=(T(2*i,2*j+2,2*k)-2*T(2*i,2*j,2*k)+...
            T(2*i,2*j-2,2*k))/(Re*Pr*dy^2);
        else
          CTermY=(v(2*i,2*j+1,2*k)+v(2*i,2*j-1,2*k))*...
            (T(2*i,2*j+2,2*k)-T0XZ(2*i,2*k))/(4*dy);

          DTermY=(T(2*i,2*j+2,2*k)-2*T(2*i,2*j,2*k)+...
            T0XZ(2*i,2*k))/(Re*Pr*dy^2);
        end

        if k~=1
          CTermZ=(w(2*i,2*j,2*k+1)+w(2*i,2*j,2*k-1))*...
            (T(2*i,2*j,2*k+2)-T(2*i,2*j,2*k-2))/(4*dz);

          DTermZ=(T(2*i,2*j,2*k+2)-2*T(2*i,2*j,2*k)+...
            T(2*i,2*j,2*k-2))/(Re*Pr*dz^2);
        else
          CTermZ=(w(2*i,2*j,2*k+1)+w(2*i,2*j,2*k-1))*...
            (T(2*i,2*j,2*k+2)-T0XY(2*i,2*j))/(4*dz);

          DTermZ=(T(2*i,2*j,2*k+2)-2*T(2*i,2*j,2*k)+...
            T0XY(2*i,2*j))/(Re*Pr*dz^2);
        end

        Tnew(2*i,2*j,2*k)=T(2*i,2*j,2*k)+...
          dtT*(-CTermX-CTermY-CTermZ+DTermX+DTermY+DTermZ);
      end
    end
  end
end

```

```

        end
    end
end
        %BC

% X-Direction
T0YZ(:,:)=2-Tnew(2,,:);
Tnew(2*nxR,,:)=Tnew(2*nxR-2,,:);

% Y-Direction
T0XZ(:,:)=2*(Tw/Tin)-Tnew(:,2,:);
Tnew(:,2*nyR,)=2*(Tw/Tin)-Tnew(:,2*nyR-2,);

% Z-Direction
T0XY(:,:)=2*(Tw/Tin)-Tnew(:,2);
Tnew(:,2*nzR)=2*(Tw/Tin)-Tnew(:,2*nzR-2);

% Validate T
T=Tnew;
waitbar(tT/ntT,handle);

if (tT/100)==ceil(tT/100)
    T(98,14,14)
end
end
end

```

## ضمیمه ک- برنامه تحلیل جریان آرام سه بعدی در مسیر خنک کاری

برای تحلیل جریان آرام سه بعدی در مسیر خنک کاری داخلی، برنامه ای با نام LCF3D به زبان

برنامه نویسی Matlab نوشته شده است. پارامترهای ورودی این برنامه عبارتند از :

UReal : سرعت جریان در ورودی (m/s)

AVReal : سرعت زاویه ای دوران پره (rpm)

byReal : عرض کانال در جهت y (m)

bzReal : عرض کانال در جهت z (m)

RcReal : شعاع انحنای قوس داخلی (m)

RtReal : شعاع توربین (m)

nu : ویسکوزیته سینماتیکی سیال ( $m^2/s$ )

rou : چگالی سیال ( $kg/m^3$ )

nLmean : تعداد گره ها در طول مسیر خنک کاری

nyR : تعداد گره ها در عرض کانال و در جهت y

nzR : تعداد گره ها در عرض کانال و در جهت z

nt : تعداد گامهای زمانی

dt : طول گام زمانی

خروجیهای این برنامه به صورت تانسور مرتبه سه بوده و عبارتند از :

u1 : سرعت محوری بی بعد در ناحیه اول

v1 : سرعت عرضی بی بعد در جهت y و در ناحیه اول

w1 : سرعت عرضی بی بعد در جهت z و در ناحیه اول

P1 : فشار استاتیکی بی بعد در ناحیه اول

vt : سرعت محوری بی بعد در ناحیه دوم

vr : سرعت عرضی بی بعد در جهت شعاع و در ناحیه دوم

vt : سرعت محوری بی بعد در جهت z و در ناحیه دوم

- P2 : فشار استاتیکی بی بعد در ناحیه دوم
- u3 : سرعت محوری بی بعد در ناحیه سوم
- v3 : سرعت عرضی بی بعد در جهت  $y$  و در ناحیه سوم
- w3 : سرعت عرضی بی بعد در جهت  $z$  و در ناحیه سوم
- P3 : فشار استاتیکی بی بعد در ناحیه سوم

شایان ذکر است که به دلیل استفاده از شبکه جابجا شده برای تحلیل جریان، برای سرعت محوری فقط مولفه های  $u_{2i+1,2j,2k}$ ،  $v_{2i+1,2j,2k}$  و  $u_{3,2i+1,2j,2k}$ ، برای سرعت عرضی در جهت  $y$  و  $r$   $v_{2i,2j+1,2k}$ ،  $v_{2i,2j+1,2k}$  و  $v_{3,2i,2j+1,2k}$ ، برای سرعت عرضی در جهت  $z$   $w_{2i,2j,2k+1}$ ،  $w_{2i,2j,2k+1}$  و  $w_{3,2i,2j,2k+1}$  و فشار استاتیکی  $P_{1,2i,2j,2k}$ ،  $P_{2,2i,2j,2k}$  و  $P_{3,2i,2j,2k}$  دارای ارزش فیزیکی هستند.

متن اصلی برنامه از قرار زیر است :

```
clear;
% Data
LReal=0.15;           % (m)
UReal=0.1;           % (m/s)
byReal=0.03;        % (m)
bzReal=0.03;        % (m)
RcReal=0.03;        % (m)
DhReal=2*byReal*bzReal/(byReal+bzReal);    % (m)

dt=0.0005;
nt=40000;
c=20;

% Properties
nu=0.000016;
rou=1.2;

% Non_Dimension
Re=UReal*DhReal/nu;
L=LReal/DhReal;
by=byReal/DhReal;
bz=bzReal/DhReal;
Dh=1;
Rc=RcReal/DhReal;
Lmean=2*L+pi*(Rc+Dh/2);

nLmean=150;
nyR=20;
nzR=20;
```



```

% nLmean : Total discret number in tangential
direction
nxR=ceil(L/Lmean*nLmean); % nxR : Cartesian discret number in x
direction
nthetaR=ceil(1.2*(nLmean-2*nxR)); % nthetaR : polar discret number in theta
direction

x=linspace(0,L,nxR-2);
y=linspace(0,by,nyR-2);
z=linspace(0,bz,nzR-2);
theta=linspace(0,pi,nthetaR);%nthetaR-2
r=Rc+linspace(0,1,2*nyR-1);

dx=x(2)-x(1);
dy=y(2)-y(1);
dz=z(2)-z(1);
nx=2*nxR-1;
ny=2*nyR-1;
nz=2*nzR-1;
ntheta=2*nthetaR-1;

% Initial Value
% Space 1
for i=1:nz+1
    u1(:,i)=ones(nx,ny+1);
    v1(:,i)=zeros(nx,ny);
    if i~=nz+1
        w1(:,i)=zeros(nx,ny+1);
        P1(:,i)=zeros(nx,ny);
    end
end
unew1=u1;
vnew1=v1;
wnew1=w1;
Pnew1=P1;
u0xy1=-ones(nx,ny+1);
u0xz1=-ones(nx,nz+1);
v0xy1=zeros(nx,ny);
v0yz1=zeros(ny,nz+1);
w0xz1=zeros(nx,nz);
w0yz1=zeros(ny+1,nz);

% Space 2
for i=1:nz+1
    vt(:,i)=ones(ntheta,ny+1);

```

```

vr(:, :, i) = zeros(ntheta, ny);
if i ~ nz + 1
    vz(:, :, i) = zeros(ntheta, ny + 1);
    P2(:, :, i) = zeros(ntheta, ny);
end
end
vtnew = vt;
vrnew = vr;
vznew = vz;
Pnew2 = P2;

vt0rt = -ones(ntheta, ny + 1);
vt0tz = -ones(ntheta, nz + 1);
vr0rt = zeros(ntheta, ny);
vr0rz = zeros(ny, nz + 1);
vz0tz = zeros(ntheta, nz);
vz0rz = zeros(ny + 1, nz);

% Space 3
u3 = u1;
v3 = v1;
w3 = w1;
P3 = P1;
unew3 = u3;
vnew3 = v3;
wnew3 = w3;
Pnew3 = P3;
u0xy3 = -ones(nx, ny + 1);
u0xz3 = -ones(nx, nz + 1);
v0xy3 = zeros(nx, ny);
v0yz3 = zeros(ny, nz + 1);
w0xz3 = zeros(nx, nz);
w0yz3 = zeros(ny + 1, nz);

CBank = {};

handle = waitbar(0, 'Please wait...');

for t = 1:nt
    if (t/200) == (ceil(t/200))
        save CL3D3 u1 v1 w1 P1 vt vr vz P2 u3 v3 w3 P3 Dh Rc L dtheta LReal RcReal
        byReal ...
        bzReal .DhReal nu rou UReal nt dt c dr dtheta dx dy dz Re nxR nyR nzR nx ny
        nz ntheta nthetaR r
    end

                                % Unew (Zoon 1)

    for i = 1:nxR - 2

```

```

for j=1:nyR-1
  for k=1:nzR-1
    PTermX=(P1(2*i+2,2*j,2*k)-P1(2*i,2*j,2*k))/dx;
    CTerm1X=((u1(2*i+3,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j,2*k))^2/4-
(u1(2*i+1,2*j,2*k)+...
    u1(2*i-1,2*j,2*k))^2/4)/dx;
    if j~=1
      CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i+2,2*
j+1,2*k))/4-...
      (u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j-2,2*k))*(v1(2*i,2*j-
1,2*k)+v1(2*i+2,2*j-1,2*k))/4)/dy;
      else
      CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i+2,2*
j+1,2*k))/4-...
      (u1(2*i+1,2*j,2*k)+u0xz1(2*i+1,2*k))*(v1(2*i,2*j-
1,2*k)+v1(2*i+2,2*j-1,2*k))/4)/dy;
      end
      if k~=1
        CTerm3X=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i+2,2
*j,2*k+1))/4-...
        (u1(2*i+1,2*j,2*k-2)+u1(2*i+1,2*j,2*k))*(w1(2*i,2*j,2*k-
1)+w1(2*i+2,2*j,2*k-1))/4)/dz;
        else
        CTerm3X=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i+2,2
*j,2*k+1))/4-...
        (u0xy1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j,2*k))*(w1(2*i,2*j,2*k-
1)+w1(2*i+2,2*j,2*k-1))/4)/dz;
        end

      STerm1X=(u1(2*i-1,2*j,2*k)-
2*u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+3,2*j,2*k))/(Re*dx^2);
      if j~=1
        STerm2X=(u1(2*i+1,2*j-2,2*k)-
2*u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dy^2);
        else
        STerm2X=(u0xz1(2*i+1,2*k)-
2*u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dy^2);
        end
        if k~=1
          STerm3X=(u1(2*i+1,2*j,2*k-2)-
2*u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);
          else
          STerm3X=(u0xy1(2*i+1,2*j)-
2*u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);

```

```

end

unew1(2*i+1,2*j,2*k)=u1(2*i+1,2*j,2*k)+dt*(-PTermX-CTerm1X-
CTerm2X-CTerm3X+...
    STerm1X+STerm2X+STerm3X);
end
end
end

i=nxR-1;
for j=1:nyR-1
    for k=1:nzR-1
        PTermX=(P2(2,2*j,2*k)-P1(2*i,2*j,2*k))/dx;
        CTerm1X=((vt(3,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j,2*k))^2/4-(u1(2*i+1,2*j,2*k)+...
            u1(2*i-1,2*j,2*k))^2/4)/dx;
        if j~=1
            CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v1(2*i,2*j+1,2*k)+...
                vr(2,2*j+1,2*k))/4--(u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j-2,2*k))*(v1(2*i,2*j-
                1,2*k)+...
                vr(2,2*j-1,2*k))/4)/dy;
            else
                CTerm2X=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v1(2*i,2*j+1,2*k)+...
                    vr(2,2*j+1,2*k))/4-(u1(2*i+1,2*j,2*k)+u0xz1(2*i+1,2*k))*...
                    (v1(2*i,2*j-1,2*k)+vr(2,2*j-1,2*k))/4)/dy;
            end
            if k~=1
                CTerm3X=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2,2*j,2*
                k+1))/4-...
                    (u1(2*i+1,2*j,2*k-2)+u1(2*i+1,2*j,2*k))*(w1(2*i,2*j,2*k-
                    1)+vz(2,2*j,2*k-1))/4)/dz;
                else
                    CTerm3X=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2,2*j,2*
                    k+1))/4-...
                        (u0xy1(2*i+1,2*j)+u1(2*i+1,2*j,2*k))*(w1(2*i,2*j,2*k-1)+vz(2,2*j,2*k-
                        1))/4)/dz;
                    end

                STerm1X=(u1(2*i-1,2*j,2*k)-2*u1(2*i+1,2*j,2*k)+vt(3,2*j,2*k))/(Re*dx^2);
                if j~=1
                    STerm2X=(u1(2*i+1,2*j-2,2*k)-
                    2*u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dy^2);
                    else
                        STerm2X=(u0xz1(2*i+1,2*k)-
                        2*u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dy^2);
                    end
                end
            end
        end
    end
end

```

```

end
if k~=1
    STerm3X=(u1(2*i+1,2*j,2*k-2)-
2*u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);
else
    STerm3X=(u0xy1(2*i+1,2*j)-
2*u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);
end
unew1(2*i+1,2*j,2*k)=u1(2*i+1,2*j,2*k)+dt*(-PTermX-CTerm1X-CTerm2X-
CTerm3X+...
    STerm1X+STerm2X+STerm3X);
end
end

                                %Vnew (Zoon 1)

for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-2
        for k=1:nzR-1
            PTermY=(P1(2*i,2*j+2,2*k)-P1(2*i,2*j,2*k))/dy;
            if i~=1
                CTerm1Y=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i+2,2*
j+1,2*k))/4-...
                    (u1(2*i-1,2*j,2*k)+u1(2*i-1,2*j+2,2*k))*(v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i-
2,2*j+1,2*k))/4)/dx;
            else
                CTerm1Y=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i-2,2*
j+1,2*k))/4-...
                    (u1(2*i-1,2*j,2*k)+u1(2*i-
1,2*j+2,2*k))*(v1(2*i,2*j+1,2*k)+v0yz1(2*j+1,2*k))/4)/dx;
            end

            CTerm2Y=((v1(2*i,2*j+3,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k))^2/4-
(v1(2*i,2*j+1,2*k)+...
                v1(2*i,2*j-1,2*k))^2/4)/dy;

            if k~=1
                CTerm3Y=((v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j
+2,2*k+1))/4-...
                    (v1(2*i,2*j+1,2*k-2)+v1(2*i,2*j+1,2*k))*(w1(2*i,2*j,2*k-
1)+w1(2*i,2*j+2,2*k-1))/4)/dz;
            else
                CTerm3Y=((v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j
+2,2*k+1))/4-...

```

```

                (v0xy1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j+1,2*k))*
                (w1(2*i,2*j,2*k-1)+w1(2*i,2*j+2,2*k-1))/4)/dz;
            end

            if i~=1
                STerm1Y=(v1(2*i-2,2*j+1,2*k)-
                2*v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i+2,2*j+1,2*k))/(Re*dx^2);
            else
                STerm1Y=(v0yz1(2*j+1,2*k)-
                2*v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i+2,2*j+1,2*k))/(Re*dx^2);
            end

            STerm2Y=(v1(2*i,2*j-1,2*k)-
            2*v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+3,2*k))/(Re*dy^2);

            if k~=1
                STerm3Y=(v1(2*i,2*j+1,2*k-2)-
                2*v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
            else
                STerm3Y=(v0xy1(2*i,2*j+1)-
                2*v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
            end

            vnew1(2*i,2*j+1,2*k)=v1(2*i,2*j+1,2*k)+dt*(-PTermY-CTerm1Y-
            CTerm2Y-CTerm3Y+...
            STerm1Y+STerm2Y+STerm3Y);
        end
    end
end
i=nxR-1;
for j=1:nyR-2
    for k=1:nzR-1
        PTermY=(P1(2*i,2*j+2,2*k)-P1(2*i,2*j,2*k))/dy;
        if i~=1
            CTerm1Y=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))*
            (v1(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2,2*j+1,2*k))/4-...
            (u1(2*i-1,2*j,2*k)+u1(2*i-1,2*j+2,2*k))*
            (v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i-2,2*j+1,2*k))/4)/dx;
        else
            CTerm1Y=((u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i+1,2*j+2,2*k))*
            (v1(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2,2*j+1,2*k))/4-...
            (u1(2*i-1,2*j,2*k)+u1(2*i-1,2*j+2,2*k))*
            (v1(2*i,2*j+1,2*k)+v0yz1(2*j+1,2*k))/4)/dx;
        end
    end
end

```

```

        CTerm2Y=((v1(2*i,2*j+3,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k))^2/4-
(v1(2*i,2*j+1,2*k)+...
        v1(2*i,2*j-1,2*k))^2/4)/dy;

        if k~=1

CTerm3Y=((v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j
+2,2*k+1))/4-...
        (v1(2*i,2*j+1,2*k-2)+v1(2*i,2*j+1,2*k))*(w1(2*i,2*j,2*k-
1)+w1(2*i,2*j+2,2*k-1))/4)/dz;
        else

CTerm3Y=((v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j
+2,2*k+1))/4-...
        (v0xy1(2*i,2*j+1)+v1(2*i,2*j+1,2*k))*(w1(2*i,2*j,2*k-
1)+w1(2*i,2*j+2,2*k-1))/4)/dz;
        end

        if i~=1
                STerm1Y=(v1(2*i-2,2*j+1,2*k)-
2*v1(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2,2*j+1,2*k))/(Re*dx^2);
                else
                STerm1Y=(v0yz1(2*j+1,2*k)-
2*v1(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2,2*j+1,2*k))/(Re*dx^2);
                end

                STerm2Y=(v1(2*i,2*j-1,2*k)-
2*v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+3,2*k))/(Re*dy^2);

                if k~=1
                        STerm3Y=(v1(2*i,2*j+1,2*k-2)-
2*v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
                        else
                        STerm3Y=(v0xy1(2*i,2*j+1)-
2*v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
                        end

                vnew1(2*i,2*j+1,2*k)=v1(2*i,2*j+1,2*k)+dt*(-PTermY-CTerm1Y-
CTerm2Y-CTerm3Y+...
                STerm1Y+STerm2Y+STerm3Y);
        end
end

        % Wnew (Zoon 1)

for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-2
            PTermZ=(P1(2*i,2*j,2*k+2)-P1(2*i,2*j,2*k))/dz;
            if i~=1

```

CTerm1Z=((u1(2\*i+1,2\*j,2\*k)+u1(2\*i+1,2\*j,2\*k+2))\*(w1(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i+2,2\*j,2\*k+1))/4-...

(u1(2\*i-1,2\*j,2\*k)+u1(2\*i-1,2\*j,2\*k+2))\*...  
(w1(2\*i-2,2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i,2\*j,2\*k+1))/4)/dx;

else

CTerm1Z=((u1(2\*i+1,2\*j,2\*k)+u1(2\*i+1,2\*j,2\*k+2))\*(w1(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i+2,2\*j,2\*k+1))/4-...

(u1(2\*i-1,2\*j,2\*k)+u1(2\*i-1,2\*j,2\*k+2))\*(w0yz1(2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i,2\*j,2\*k+1))/4)/dx;

end

if j~=1

CTerm2Z=((v1(2\*i,2\*j+1,2\*k)+v1(2\*i,2\*j+1,2\*k+2))\*(w1(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i,2\*j+2,2\*k+1))/4-...

(v1(2\*i,2\*j-1,2\*k)+v1(2\*i,2\*j-1,2\*k+2))\*...  
(w1(2\*i,2\*j-2,2\*k+1)+w1(2\*i,2\*j,2\*k+1))/4)/dy;

else

CTerm2Z=((v1(2\*i,2\*j+1,2\*k)+v1(2\*i,2\*j+1,2\*k+2))\*(w1(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i,2\*j+2,2\*k+1))/4-...

(v1(2\*i,2\*j-1,2\*k)+v1(2\*i,2\*j-1,2\*k+2))\*(w0xz1(2\*i,2\*k+1)+w1(2\*i,2\*j,2\*k+1))/4)/dy;

end

CTerm3Z=((w1(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i,2\*j,2\*k+3))^2/4-...

(w1(2\*i,2\*j,2\*k-1)+w1(2\*i,2\*j,2\*k+1))^2/4)/dz;

if i~=1

STerm1Z=(w1(2\*i-2,2\*j,2\*k+1)-2\*w1(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i+2,2\*j,2\*k+1))/(Re\*dx^2);

else

STerm1Z=(w0yz1(2\*j,2\*k+1)-2\*w1(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i+2,2\*j,2\*k+1))/(Re\*dx^2);

end

if j~=1

STerm2Z=(w1(2\*i,2\*j-2,2\*k+1)-2\*w1(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i,2\*j+2,2\*k+1))/(Re\*dy^2);

else

STerm2Z=(w0xz1(2\*i,2\*k+1)-2\*w1(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i,2\*j+2,2\*k+1))/(Re\*dy^2);

end

STerm3Z=(w1(2\*i,2\*j,2\*k-1)-2\*w1(2\*i,2\*j,2\*k+1)+w1(2\*i,2\*j,2\*k+3))/(Re\*dz^2);



```

        wnew1(2*i,2*j,2*k+1)=w1(2*i,2*j,2*k+1)+dt*(-PTermZ-CTerm1Z-
CTerm2Z-CTerm3Z+...
        STerm1Z+STerm2Z+STerm3Z);
    end
end
end
i=nxR-1;
for j=1:nyR-1
    for k=1:nzR-2
        PTermZ=(P1(2*i,2*j,2*k+2)-P1(2*i,2*j,2*k))/dz;
        if i~=1
            CTerm1Z=((ul(2*i+1,2*j,2*k)+ul(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)+...
                vz(2,2*j,2*k+1))/4- (ul(2*i-1,2*j,2*k)+ul(2*i-1,2*j,2*k+2))*...
                (w1(2*i-2,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j,2*k+1))/4)/dx;
            else
                CTerm1Z=((ul(2*i+1,2*j,2*k)+ul(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)+...
                    vz(2,2*j,2*k+1))/4- (ul(2*i-1,2*j,2*k)+...
                    ul(2*i-1,2*j,2*k+2))*(w0yz1(2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j,2*k+1))/4)/dx;
            end

            if j~=1
                CTerm2Z=((v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)-w1(2*i,2*j
+2,2*k+1))/4-...
                    (v1(2*i,2*j-1,2*k)+v1(2*i,2*j-1,2*k+2))*(w1(2*i,2*j-
2,2*k+1)+w1(2*i,2*j,2*k+1))/4)/dy;
                else
                    CTerm2Z=((v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j
+2,2*k+1))/4-...
                        (v1(2*i,2*j-1,2*k)+v1(2*i,2*j-
1,2*k+2))*(w0xz1(2*i,2*k+1)+w1(2*i,2*j,2*k+1))/4)/dy;
                    end
                    CTerm3Z=((w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j,2*k+3))^2/4-...
                        (w1(2*i,2*j,2*k-1)+w1(2*i,2*j,2*k+1))^2/4)/dz;
                    if i~=1
                        STerm1Z=(w1(2*i-2,2*j,2*k+1)-
2*w1(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2,2*j,2*k+1))/(Re*dx^2);
                        else
                            STerm1Z=(w0yz1(2*j,2*k+1)-
2*w1(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2,2*j,2*k+1))/(Re*dx^2);
                        end

                        if j~=1

```

```

        STerm2Z=(w1(2*i,2*j-2,2*k+1)-
2*w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j+2,2*k+1))/(Re*dy^2);
        else
        STerm2Z=(w0xz1(2*i,2*k+1)-
2*w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j+2,2*k+1))/(Re*dy^2);
        end
        STerm3Z=(w1(2*i,2*j,2*k-1)-
2*w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j,2*k+3))/(Re*dz^2);

        wnew1(2*i,2*j,2*k+1)=w1(2*i,2*j,2*k+1)+dt*(-PTermZ-CTerm1Z-CTerm2Z-
CTerm3Z+...
        STerm1Z+STerm2Z+STerm3Z);
    end
end

% BC
                                % X
new1(1,:)=1;
%new1(nx,:)=new1(nx-2,:);

v0yz1(:)=-vnew1(2,:);
%vnew1(nx-1,:)=0;

w0yz1(:)=-wnew1(2,:);
%wnew1(nx-1,:)=0;

                                % Y
vnew1(:,1)=0;
vnew1(:,ny)=0;

u0xz1(:)=-unew1(:,2);
unew1(:,ny+1)=-unew1(:,ny-1);

w0xz1(:)=-wnew1(:,2);
wnew1(:,ny+1)=-wnew1(:,ny-1);

                                % Z
wnew1(:,1)=0;
wnew1(:,nz)=0;

u0xy1(:)=-unew1(:,2);
unew1(:,nz+1)=-unew1(:,nz-1);

v0xy1(:)=-vnew1(:,2);
vnew1(:,nz+1)=-vnew1(:,nz-1);

% Improve

```

```

unew1(:,ny+1,nz+1)=unew1(:,ny-1,nz+1);

u1=unew1;
v1=vnew1;
w1=wnew1;

                                %Pnew (Zoon 1)
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-1
            Pnew1(2*i,2*j,2*k)=P1(2*i,2*j,2*k)-dt*(c^2*(u1(2*i+1,2*j,2*k)-u1(2*i-
1,2*j,2*k))/dx+...
                c^2*(v1(2*i,2*j+1,2*k)-v1(2*i,2*j-1,2*k))/dy+...
                c^2*(w1(2*i,2*j,2*k+1)-w1(2*i,2*j,2*k-1))/dz);
        end
    end
end
P1=Pnew1;

                                % Vtnew (Zoon 2)
dr=dy;
dtheta=theta(2)-theta(1);
for i=1:nthetaR-2
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-1
            PTermT=(P2(2*i+2,2*j,2*k)-P2(2*i,2*j,2*k))/(r(2*j)*dtheta);
            CTerm1T=((vt(2*i+3,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k))^2-(vt(2*i-1,2*j,2*k)+...
                vt(2*i-1,2*j,2*k))^2)/(4*r(2*j)*dtheta);
            if j~=1
                CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k))*(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i+2,2*j+
1,2*k))-...
                    (vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j-2,2*k))*(vr(2*i,2*j-
1,2*k)+vr(2*i+2,2*j-1,2*k)))/(4*dr);
                else
                    CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k))*(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i+2,2*j+
1,2*k))-...
                        (vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt0tz(2*i+1,2*k))*(vr(2*i,2*j-1,2*k)+vr(2*i+2,2*j-
1,2*k)))/(4*dr);
                end
            if i~=1
                CTerm3T=2*vt(2*i+1,2*j,2*k)*(vr(2*i+2,2*j-
1,2*k)+vr(2*i+2,2*j+1,2*k)+...
                    vr(2*i-2,2*j-1,2*k)+vr(2*i-2,2*j+1,2*k))/(4*r(2*j));
                else

```

```

        CTerm3T=2*vt(2*i+1,2*j,2*k)*(vr(2*i+2,2*j-
1,2*k)+vr(2*i+2,2*j+1,2*k)+...
        vr0rz(2*j-1,2*k)+vr0rz(2*j+1,2*k))/(4*r(2*j));
        end

        if k~=1

CTerm4T=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i+2,2*j,
2*k+1))-...
        (vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k-2))*(vz(2*i,2*j,2*k-
1)+vz(2*i+2,2*j,2*k-1)))/(4*dz);
        else

CTerm4T=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i+2,2*j,
2*k+1))-...
        (vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt0rt(2*i+1,2*j))*(vz(2*i,2*j,2*k-
1)+vz(2*i+2,2*j,2*k-1)))/(4*dz);
        end

        STerm1T=(vt(2*i-1,2*j,2*k)-
2*vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+3,2*j,2*k))/(Re*r(2*j)^2*dtheta^2);
        if j~=1
            STerm2T=(vt(2*i+1,2*j-2,2*k)-
2*vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dr^2);
        else
            STerm2T=(vt0tz(2*i+1,2*k)-
2*vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dr^2);
        end
        if j~=1
            STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k))-(vt(2*i+1,2*j,2*k)+...
            vt(2*i+1,2*j-2,2*k)))/(2*Re*r(2*j)*dr);
        else
            STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k))-(vt(2*i+1,2*j,2*k)+...
            vt0tz(2*i+1,2*k)))/(2*Re*r(2*j)*dr);
        end
        STerm4T=-vt(2*i+1,2*j,2*k)/(Re*r(2*j)^2);
        STerm5T=((vr(2*i+2,2*j+1,2*k)+vr(2*i+2,2*j-1,2*k))-(vr(2*i,2*j+1,2*k)+...
            vr(2*i,2*j-1,2*k)))/(Re*r(2*j)^2*dtheta);
        if k~=1
            STerm6T=(vt(2*i+1,2*j,2*k-2)-
2*vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);
        else
            STerm6T=(vt0rt(2*i+1,2*j)-
2*vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);
        end

        vtnew(2*i+1,2*j,2*k)=vt(2*i+1,2*j,2*k)+dt*(-CTerm1T-CTerm2T-
CTerm3T-CTerm4T-...

```

```

        PTermT+STerm1T+STerm2T+STerm3T+STerm4T+STerm5T+STerm6T);
    end
end
end

i=nthetaR-1;
for j=1:nyR-1
    for k=1:nzR-1
        PTermT=(P3(2,*j,2*k)-P2(2*i,2*j,2*k))/(r(2*j)*dtheta);

        CTerm1T=((u3(3,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k))^2-(vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i-
1,2*j,2*k))^2)/(4*r(2*j)*dtheta);
        if j~=1

CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k))*(vr(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2,2*j-1,2
*k))-...
        (vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j-2,2*k))*(vr(2*i,2*j-1,2*k)+v3(2,2*j-
1,2*k)))/(4*dr);
        else

CTerm2T=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k))*(vr(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2,2*j-1,2
*k))-...
        (vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt0tz(2*i+1,2*k))*(vr(2*i,2*j-1,2*k)+v3(2,2*j-
1,2*k)))/(4*dr);
        end
        CTerm3T=2*vt(2*i+1,2*j,2*k)*(v3(2,2*j-1,2*k)+v3(2,2*j+1,2*k)+vr(2*i-
2,2*j-1,2*k)+...
        vr(2*i-2,2*j+1,2*k))/(4*r(2*j));

        if k~=1

CTerm4T=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2,2*j,2*k
+1))-...
        (vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k-2))*(vz(2*i,2*j,2*k-1)+w3(2,2*j,2*k-
1)))/(4*dz);
        else

CTerm4T=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2,2*j,2*k
+1))-...
        (vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt0rt(2*i+1,2*j))*(vz(2*i,2*j,2*k-1)+w3(2,2*j,2*k-
1)))/(4*dz);
        end

        STerm1T=(vt(2*i-1,2*j,2*k)-
2*vt(2*i+1,2*j,2*k)+u3(3,2*j,2*k))/(Re*r(2*j)^2*dtheta^2);
        if j~=1

```

```

        STerm2T=(vt(2*i+1,2*j-2,2*k)-
2*vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dr^2);
        else
        STerm2T=(vt0tz(2*i+1,2*k)-
2*vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dr^2);
        end
        if j~=1
        STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k))-
(vt(2*i+1,2*j,2*k)+...
vt(2*i+1,2*j-2,2*k)))/(2*Re*r(2*j)*dr);
        else
        STerm3T=((vt(2*i+1,2*j+2,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k))-...
(vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt0tz(2*i+1,2*k)))/(2*Re*r(2*j)*dr);
        end
        STerm4T=-vt(2*i+1,2*j,2*k)/(Re*r(2*j)^2);
        STerm5T=((v3(2,2*j+1,2*k)+v3(2,2*j-1,2*k))-
(vr(2*i,2*j+1,2*k)+...
vr(2*i,2*j-1,2*k)))/(Re*r(2*j)^2*dtheta);
        if k~=1
        STerm6T=(vt(2*i+1,2*j,2*k-2)-
2*vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);
        else
        STerm6T=(vt0rt(2*i+1,2*j)-
2*vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);
        end

        vtnew(2*i+1,2*j,2*k)=vt(2*i+1,2*j,2*k)+dt*(-CTerm1T-CTerm2T-CTerm3T-
CTerm4T-...
        PTermT+STerm1T+STerm2T+STerm3T+STerm4T+STerm5T+STerm6T);
    end
end

                                % Vrnnew (Zoon 2)

for i=1:nthetaR-2
    for j=1:nyR-2
        for k=1:nzR-1
            PTermR=(P2(2*i,2*j+2,2*k)-P2(2*i,2*j,2*k))/dr;
            if i~=1
                CTerm1R=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k))*
(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i+2,2*j+1,2*k))-...
                (vt(2*i-1,2*j,2*k)+vt(2*i-1,2*j+2,2*k))*
(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i-2,2*j+1,2*k)))/(4*r(2*j+1)*dtheta);
            else
                CTerm1R=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k))*
(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i+2,2*j+1,2*k))-...
                (vt(2*i-1,2*j,2*k)+vt(2*i-1,2*j+2,2*k))*
(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr0rz(2*j+1,2*k)))/(4*r(2*j+1)*dtheta);
            end
        end
    end
end

```

```

end

CTerm2R=((vr(2*i,2*j+3,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k))^2-(vr(2*i,2*j+1,2*k)+...
vr(2*i,2*j-1,2*k))^2)/(4*dr);
CTerm3R=(vr(2*i,2*j+1,2*k)^2-(vt(2*i-
1,2*j+2,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k)+...
vt(2*i-1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k))^2/16)/r(2*j+1);

if k~=1

CTerm4R=((vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
vz(2*i,2*j+2,2*k+1))-(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k-2))*...
(vz(2*i,2*j,2*k-1)+vz(2*i,2*j+2,2*k-1)))/(4*dz);
else

CTerm4R=((vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
vz(2*i,2*j+2,2*k+1))-(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k-2))*...
(vz(2*i,2*j,2*k-1)+vz(2*i,2*j+2,2*k-1)))/(4*dz);
end

if i~=1
STerm1R=(vr(2*i-2,2*j+1,2*k)-
2*vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i+2,2*j+1,2*k))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta^2);
else
STerm1R=(vr(2*i,2*j+1,2*k)-
2*vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i+2,2*j+1,2*k))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta^2);
end
STerm2R=(vr(2*i,2*j-1,2*k)-
2*vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+3,2*k))/(Re*dr^2);
STerm3R=((vr(2*i,2*j+3,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k))-(vr(2*i,2*j+1,2*k)+...
vr(2*i,2*j-1,2*k)))/(2*Re*r(2*j+1)*dr);
STerm4R=-vr(2*i,2*j+1,2*k)/(Re*r(2*j+1)^2);
STerm5R=-((vt(2*i+1,2*j+2,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k))-(vt(2*i-
1,2*j+2,2*k)+...
vt(2*i-1,2*j,2*k)))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta);
if k~=1
STerm6R=(vr(2*i,2*j+1,2*k-2)-
2*vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
else
STerm6R=(vr(2*i,2*j+1,2*k)-
2*vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
end

vrnew(2*i,2*j+1,2*k)=vr(2*i,2*j+1,2*k)+dt*(-PTermR-CTerm1R-CTerm2R-
CTerm3R-...
CTerm4R+STerm1R+STerm2R+STerm3R+STerm4R+STerm5R+STerm6R);
end

```

```

end
end

i=nthetaR-1;
for j=1:nyR-2
    for k=1:nzR-1
        PTermR=(P2(2*i,2*j+2,2*k)-P2(2*i,2*j,2*k))/dr;

CTerm1R=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k))*(vr(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2,2*j+1,2
*k))-...
(vt(2*i-1,2*j,2*k)+vt(2*i-1,2*j+2,2*k))*(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i-
2,2*j+1,2*k)))/(4*r(2*j+1)*dtheta);

CTerm2R=((vr(2*i,2*j+3,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k))^2-(vr(2*i,2*j+1,2*k)+...
vr(2*i,2*j-1,2*k))^2)/(4*dr);

CTerm3R=(vr(2*i,2*j+1,2*k)^2-(vt(2*i-1,2*j+2,2*k)+vt(2*i+1,2*j+2,2*k)+...
vt(2*i-1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k))^2/16)/r(2*j+1);

if k~=1
    CTerm4R=((vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
vz(2*i,2*j+2,2*k+1))-(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k-2))*...
(vz(2*i,2*j,2*k-1)+vz(2*i,2*j+2,2*k-1)))/(4*dz);
else
    CTerm4R=((vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
vz(2*i,2*j+2,2*k+1))-(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr0rt(2*i,2*j+1))*...
(vz(2*i,2*j,2*k-1)+vz(2*i,2*j+2,2*k-1)))/(4*dz);
end

end

STerm1R=(vr(2*i-2,2*j+1,2*k)-
2*vr(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2,2*j+1,2*k))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta^2);
STerm2R=(vr(2*i,2*j-1,2*k)-
2*vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+3,2*k))/(Re*dr^2);
STerm3R=((vr(2*i,2*j+3,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k))-(vr(2*i,2*j+1,2*k)+...
vr(2*i,2*j-1,2*k)))/(2*Re*r(2*j+1)*dr);
STerm4R=-vr(2*i,2*j+1,2*k)/(Re*r(2*j+1)^2);
STerm5R=-((vt(2*i+1,2*j+2,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k))-(vt(2*i-1,2*j+2,2*k)+...
vt(2*i-1,2*j,2*k)))/(Re*r(2*j+1)^2*dtheta);
if k~=1
    STerm6R=(vr(2*i,2*j+1,2*k-2)-
2*vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
else
    STerm6R=(vr0rt(2*i,2*j+1)-
2*vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
end
end

```



```

vrnew(2*i,2*j+1,2*k)=vr(2*i,2*j+1,2*k)+dt*(-PTermR-CTerm1R-CTerm2R-
CTerm3R-...
CTerm4R+STerm1R+STerm2R+STerm3R+STerm4R+STerm5R+STerm6R);
end
end

% Vznew (Zoon 2)
for i=1:nthetaR-2
for j=1:nyR-1
for k=1:nzR-2

PTermZ=(P2(2*i,2*j,2*k+2)-P2(2*i,2*j,2*k))/dz;

if i~=1
CTerm1Z=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
vz(2*i+2,2*j,2*k+1))-(vt(2*i-1,2*j,2*k)+vt(2*i-1,2*j,2*k+2))*...
(vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i-2,2*j,2*k+1)))/(4*r(2*j)*dtheta);
else
CTerm1Z=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
vz(2*i+2,2*j,2*k+1))-(vt(2*i-1,2*j,2*k)+vt(2*i-1,2*j,2*k+2))*...
(vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz0rz(2*j,2*k+1)))/(4*r(2*j)*dtheta);
end

if j~=1
CTerm2Z=((vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
vz(2*i,2*j+2,2*k+1))-(vr(2*i,2*j-1,2*k)+vr(2*i,2*j-1,2*k+2))*...
(vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j-2,2*k+1)))/(4*dr);
else
CTerm2Z=((vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
vz(2*i,2*j+2,2*k+1))-(vr(2*i,2*j-1,2*k)+vr(2*i,2*j-1,2*k+2))*...
(vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz0tz(2*i,2*k+1)))/(4*dr);
end
CTerm3Z=((vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j,2*k+3))^2-(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
vz(2*i,2*j,2*k-1))^2)/(4*dz);
CTerm4Z=(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j-1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2)+...
vr(2*i,2*j-1,2*k+2))*vz(2*i,2*j,2*k+1)/(4*r(2*j));

if i~=1
STerm1Z=(vz(2*i-2,2*j,2*k+1)-
2*vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i+2,2*j,2*k+1))/...
(Re*r(2*j)^2*dtheta^2);
else
STerm1Z=(vz0rz(2*j,2*k+1)-
2*vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i+2,2*j,2*k+1))/...

```

```

        (Re*r(2*j)^2*dtheta^2);
    end

    if j~=1
        STerm2Z=(vz(2*i,2*j-2,2*k+1)-
        2*vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j+2,2*k+1))/...
        (Re*dr^2);
    else
        STerm2Z=(vz0tz(2*i,2*k+1)-
        2*vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j+2,2*k+1))/...
        (Re*dr^2);
    end

    STerm3Z=(vz(2*i,2*j,2*k-1)-
    2*vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j,2*k+3))/(Re*dz^2);
    if j~=1
        STerm4Z=(vz(2*i,2*j+2,2*k+1)-vz(2*i,2*j-2,2*k+1))/(2*Re*r(2*j)*dr);
    else
        STerm4Z=(vz(2*i,2*j+2,2*k+1)-vz0tz(2*i,2*k+1))/(2*Re*r(2*j)*dr);
    end

    vznew(2*i,2*j,2*k+1)=vz(2*i,2*j,2*k+1)+dt*(-CTerm1Z-CTerm2Z-
    CTerm3Z-...
    CTerm4Z-PTermZ+STerm1Z+STerm2Z+STerm3Z+STerm4Z);
    end
end
end

i=nthetaR-1;
for j=1:nyR-1
    for k=1:nzR-2

        PTermZ=(P2(2*i,2*j,2*k+2)-P2(2*i,2*j,2*k))/dz;
        if i~=1
            CTerm1Z=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
            w3(2,2*j,2*k+1))-(vt(2*i-1,2*j,2*k)+vt(2*i-1,2*j,2*k+2))*...
            (vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i-2,2*j,2*k+1)))/(4*r(2*j)*dtheta);
        else
            CTerm1Z=((vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i+1,2*j,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
            w3(2,2*j,2*k+1))-(vt(2*i-1,2*j,2*k)+vt(2*i-1,2*j,2*k+2))*...
            (vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz0rz(2*j,2*k+1)))/(4*r(2*j)*dtheta);
        end

        if j~=1
            CTerm2Z=((vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
            vz(2*i,2*j+2,2*k+1))-(vr(2*i,2*j-1,2*k)+vr(2*i,2*j-1,2*k+2))*...
            (vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j-2,2*k+1)))/(4*dr);
        else

```

```

CTerm2Z=((vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2))*(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
vz(2*i,2*j+2,2*k+1))-vr(2*i,2*j-1,2*k)+vr(2*i,2*j-1,2*k+2))*...
(vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz0tz(2*i,2*k+1)))/(4*dr);
end
CTerm3Z=((vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j,2*k+3))^2-(vz(2*i,2*j,2*k+1)+...
vz(2*i,2*j,2*k-1))^2)/(4*dz);
CTerm4Z=(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j-1,2*k)+vr(2*i,2*j+1,2*k+2)+...
vr(2*i,2*j-1,2*k+2))*vz(2*i,2*j,2*k+1)/(4*r(2*j));
if i~=1
STerm1Z=(vz(2*i-2,2*j,2*k+1)-2*vz(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2,2*j,2*k+1))/...
(Re*r(2*j)^2*dtheta^2);
else
STerm1Z=(vz0rz(2*j,2*k+1)-2*vz(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2,2*j,2*k+1))/...
(Re*r(2*j)^2*dtheta^2);
end

if j~=1
STerm2Z=(vz(2*i,2*j-2,2*k+1)-
2*vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j+2,2*k+1))/...
(Re*dr^2);
else
STerm2Z=(vz0tz(2*i,2*k+1)-2*vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j+2,2*k+1))/...
(Re*dr^2);
end
STerm3Z=(vz(2*i,2*j,2*k-1)-
2*vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j,2*k+3))/(Re*dz^2);
if j~=1
STerm4Z=(vz(2*i,2*j+2,2*k+1)-vz(2*i,2*j-2,2*k+1))/(2*Re*r(2*j)*dr);
else
STerm4Z=(vz(2*i,2*j+2,2*k+1)-vz0tz(2*i,2*k+1))/(2*Re*r(2*j)*dr);
end
vznew(2*i,2*j,2*k+1)=vz(2*i,2*j,2*k+1)+dt*(-CTerm1Z-CTerm2Z-CTerm3Z-
...
CTerm4Z-PTermZ+STerm1Z+STerm2Z+STerm3Z+STerm4Z);
end
end
% BC
% theta
vtnew(1, :, :) = unewl(nx, :, :);
vr0rz(:, :) = vnewl(nx-1, :, :);
vz0rz(:, :) = wnewl(nx-1, :, :);

% r
vrnew(:, 1, :) = 0;
vrnew(:, ny, :) = 0;

```

```

vt0tz(:,:)=vtnew(:,2,:);
vtnew(:,ny+1,:)=vtnew(:,ny-1,:);

vz0tz(:,:)=vznew(:,2,:);
vznew(:,ny+1,:)=vznew(:,ny-1,:);

                                % Z

vznew(:,:,1)=0;
vznew(:,:,nz)=0;

vt0rt(:,:)=vtnew(:,:,2);
vtnew(:,:,nz+1)=vtnew(:,:,nz-1);

vr0rt(:,:)=vrnew(:,:,2);
vrnew(:,:,nz+1)=vrnew(:,:,nz-1);

% Improve
vtnew(:,ny+1,nz+1)=vtnew(:,ny-1,nz+1);

vt=vtnew;
vr=vrnew;
vz=vznew;

                                % Pnew (Zoon 2)
for i=1:nthetaR-1
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-1
            Pnew2(2*i,2*j,2*k)=P2(2*i,2*j,2*k)-dt*(c^2*(vt(2*i+1,2*j,2*k)-...
                vt(2*i-1,2*j,2*k))/(r(2*j)*dtheta)+c^2*(vr(2*i,2*j+1,2*k)-...
                vr(2*i,2*j-1,2*k))/dr+c^2*(vr(2*i,2*j+1,2*k)+...
                vr(2*i,2*j-1,2*k))/(2*r(2*j))+c^2*(vz(2*i,2*j,2*k+1)-vz(2*i,2*j,2*k-
1))/dz);
        end
    end
end
P2=Pnew2;

                                % Unew (Zoon3)
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-1
            PTermX=(P3(2*i+2,2*j,2*k)-P3(2*i,2*j,2*k))/dx;
            CTerm1X=((u3(2*i+3,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j,2*k))^2/4-
(u3(2*i+1,2*j,2*k)+...
            u3(2*i-1,2*j,2*k))^2/4)/dx;
            if j~=1

```

```

CTerm2X=((u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i+2,2*
j+1,2*k))/4-...
      (u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j-2,2*k))*(v3(2*i,2*j-
1,2*k)+v3(2*i+2,2*j-1,2*k))/4)/dy;
      else

```

```

CTerm2X=((u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j+2,2*k))*(v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i+2,2*
j+1,2*k))/4-...
      (u3(2*i+1,2*j,2*k)+u0xz3(2*i+1,2*k))*(v3(2*i,2*j-
1,2*k)+v3(2*i+2,2*j-1,2*k))/4)/dy;
      end
      if k~=1

```

```

CTerm3X=((u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i+2,2
*j,2*k+1))/4-...
      (u3(2*i+1,2*j,2*k-2)+u3(2*i+1,2*j,2*k))*(w3(2*i,2*j,2*k-
1)+w3(2*i+2,2*j,2*k-1))/4)/dz;
      else

```

```

CTerm3X=((u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i+2,2
*j,2*k+1))/4-...
      (u0xy3(2*i+1,2*j)+u3(2*i+1,2*j,2*k))*(w3(2*i,2*j,2*k-
1)+w3(2*i+2,2*j,2*k-1))/4)/dz;
      end

```

```

      STerm1X=(u3(2*i-1,2*j,2*k)-
2*u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+3,2*j,2*k))/(Re*dx^2);
      if j~=1
          STerm2X=(u3(2*i+1,2*j-2,2*k)-
2*u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dy^2);
          else
              STerm2X=(u0xz3(2*i+1,2*k)-
2*u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j+2,2*k))/(Re*dy^2);
          end
          if k~=1
              STerm3X=(u3(2*i+1,2*j,2*k-2)-
2*u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);
              else
                  STerm3X=(u0xy3(2*i+1,2*j)-
2*u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j,2*k+2))/(Re*dz^2);
              end

```

```

          unew3(2*i+1,2*j,2*k)=u3(2*i+1,2*j,2*k)+dt*(-PTermX-CTerm1X-
CTerm2X-CTerm3X+...
          STerm1X+STerm2X+STerm3X);
      end
end

```

```

end

                                %Vnew (Zoon 3)
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-2
        for k=1:nzR-1
            PTermY=(P3(2*i,2*j+2.2*k)-P3(2*i,2*j,2*k))/dy;
            if i~=1
                CTerm1Y=((u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j+2.2*k))*(v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i+2.2*
                j+1,2*k))/4-...
                    (u3(2*i-1,2*j,2*k)+u3(2*i-1,2*j+2.2*k))*(v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i-
                2.2*j+1,2*k))/4)/dx;
                else
                CTerm1Y=((u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j+2.2*k))*(v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i+2.2*
                j+1,2*k))/4-...
                    (u3(2*i-1,2*j,2*k)+u3(2*i-
                1,2*j+2.2*k))*(v3(2*i,2*j+1,2*k)+v0yz3(2*j+1,2*k))/4)/dx;
                end

                CTerm2Y=((v3(2*i,2*j+3,2*k)+v3(2*i,2*j+1,2*k))^2/4-
                (v3(2*i,2*j+1,2*k)+...
                    v3(2*i,2*j-1,2*k))^2/4)/dy;

                if k~=1

                CTerm3Y=((v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j
                +2,2*k+1))/4-...
                    (v3(2*i,2*j+1,2*k-2)+v3(2*i,2*j+1,2*k))*(w3(2*i,2*j,2*k-
                1)+w3(2*i,2*j+2,2*k-1))/4)/dz;
                else
                CTerm3Y=((v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j
                +2,2*k+1))/4-...
                    (v0xy3(2*i,2*j+1)+v3(2*i,2*j+1,2*k))*(w3(2*i,2*j,2*k-
                1)+w3(2*i,2*j+2,2*k-1))/4)/dz;
                end

                if i~=1
                    STerm1Y=(v3(2*i-2,2*j+1,2*k)-
                2*v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i+2,2*j+1,2*k))/(Re*dx^2);
                else
                    STerm1Y=(v0yz3(2*j+1,2*k)-
                2*v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i+2,2*j+1,2*k))/(Re*dx^2);
                end
            end
        end
    end
end

```

```

    STerm2Y=(v3(2*i,2*j-1,2*k)-
2*v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i,2*j+3,2*k))/(Re*dy^2);

    if k~=1
        STerm3Y=(v3(2*i,2*j+1,2*k-2)-
2*v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
    else
        STerm3Y=(v0xy3(2*i,2*j+1)-
2*v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i,2*j+1,2*k+2))/(Re*dz^2);
    end

    vnew3(2*i,2*j+1,2*k)=v3(2*i,2*j+1,2*k)+dt*(-PTermY-CTerm1Y-
CTerm2Y-CTerm3Y+...
    STerm1Y+STerm2Y+STerm3Y);
end
end
end

                                % Wnew (Zoon 3)
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-2
            PTermZ=(P3(2*i,2*j,2*k+2)-P3(2*i,2*j,2*k))/dz;
            if i~=1
                CTerm1Z=((u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i+2,2
*j,2*k+1))/4-...
                (u3(2*i-1,2*j,2*k)+u3(2*i-1,2*j,2*k+2))*(w3(2*i-
2,2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j,2*k+1))/4)/dx;
            else
                CTerm1Z=((u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i+1,2*j,2*k+2))*(w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i+2,2
*j,2*k+1))/4-...
                (u3(2*i-1,2*j,2*k)+u3(2*i-
1,2*j,2*k+2))*(w0yz3(2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j,2*k+1))/4)/dx;
            end

            if j~=1
                CTerm2Z=((v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j
+2,2*k+1))/4-...
                (v3(2*i,2*j-1,2*k)+v3(2*i,2*j-1,2*k+2))*(w3(2*i,2*j-
2,2*k+1)+w3(2*i,2*j,2*k+1))/4)/dy;
            else
                CTerm2Z=((v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i,2*j+1,2*k+2))*(w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j
+2,2*k+1))/4-...

```

```

        (v3(2*i,2*j-1,2*k)+v3(2*i,2*j-
1,2*k+2))*(w0xz3(2*i,2*k+1)+w3(2*i,2*j,2*k+1))/4)/dy;
        end

        CTerm3Z=((w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j,2*k+3))^2/4-...
        (w3(2*i,2*j,2*k-1)+w3(2*i,2*j,2*k+1))^2/4)/dz;

        if i~=1
            STerm1Z=(w3(2*i-2,2*j,2*k+1)-
2*w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i+2,2*j,2*k+1))/(Re*dx^2);
        else
            STerm1Z=(w0yz3(2*j,2*k+1)-
2*w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i+2,2*j,2*k+1))/(Re*dx^2);
        end

        if j~=1
            STerm2Z=(w3(2*i,2*j-2,2*k+1)-
2*w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j+2,2*k+1))/(Re*dy^2);
        else
            STerm2Z=(w0xz3(2*i,2*k+1)-
2*w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j+2,2*k+1))/(Re*dy^2);
        end

        STerm3Z=(w3(2*i,2*j,2*k-1)-
2*w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j,2*k+3))/(Re*dz^2);

        wnew3(2*i,2*j,2*k+1)=w3(2*i,2*j,2*k+1)+dt*(-PTermZ-CTerm1Z-
CTerm2Z-CTerm3Z+...
        STerm1Z+STerm2Z+STerm3Z);
    end
end
end

% BC

                                % X
unew3(1,:,:) = vtnew(ntheta,:,:);
unew3(nx,:,:)=unew3(nx-2,:,:);

v0yz3(:,:)=vr(ntheta-1,:,:);
vnew3(nx-1,:,:)=0;

w0yz3(:,:)=vz(ntheta-1,:,:);
wnew3(nx-1,:,:)=0;

                                % Y

vnew3(:,1,:)=0;
vnew3(:,ny,:)=0;

```



```

u0xz3(:,:)=-unew3(:,2,:);
unew3(:,ny+1,:)=unew3(:,ny-1,:);

w0xz3(:,:)=-wnew3(:,2,:);
wnew3(:,ny+1,:)=wnew3(:,ny-1,:);

                                % Z
wnew3(:,1)=0;
wnew3(:,nz)=0;

u0xy3(:,:)=unew3(:,2);
unew3(:,nz+1)=unew3(:,nz-1);

v0xy3(:,:)=vnew3(:,2);
vnew3(:,nz+1)=vnew3(:,nz-1);

% Improve
unew3(:,ny+1,nz+1)=unew3(:,ny-1,nz+1);

u3=unew3;
v3=vnew3;
w3=wnew3;

                                %Pnew (Zoon 3)
for i=1:nxR-1
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-1
            Pnew3(2*i,2*j,2*k)=P3(2*i,2*j,2*k)-dt*(c^2*(u3(2*i+1,2*j,2*k)-u3(2*i-
1,2*j,2*k))/dx+...
                c^2*(v3(2*i,2*j+1,2*k)-v3(2*i,2*j-1,2*k))/dy+...
                c^2*(w3(2*i,2*j,2*k+1)-w3(2*i,2*j,2*k-1))/dz);
        end
    end
end
P3=Pnew3;
u3(nx,(ny-1)/2,(nz-1)/2)
waitbar(t/nt,handle);

end
close(handle);

```

## ضمیمه ل- برنامه تحلیل حرارت جریان آرام سه بعدی در مسیر خنک کاری

برای تحلیل حرارت جریان آرام سه بعدی در مسیر خنک کاری داخلی، برنامه ای با نام LCH3D

به زبان برنامه نویسی Matlab نوشته شده است. پارامترهای ورودی این برنامه عبارتند از :

عدد پراتل : Pr

دمای سیال در ورودی (k) :  $T_{in}$

دمای دیواره ها (k) :  $T_w$

تعداد گامهای زمانی : ntT

طول گام زمانی : dtT

خروجیهای این برنامه بصورت تانسور مرتبه سه بوده و عبارتند از :

میدان دمای بی بعد سیال در ناحیه اول : T1

میدان دمای بی بعد سیال در ناحیه دوم : T2

میدان دمای بی بعد سیال در ناحیه سوم : T3

شایان ذکر است که به دلیل استفاده از شبکه جابجا شده برای تحلیل جریان، فقط مولفه های

$T1_{2i,2j,2k}$  ،  $T2_{2i,2j,2k}$  و  $T3_{2i,2j,2k}$  دارای ارزش فیزیکی هستند.

متن اصلی برنامه از قرار زیر است.

```
Pr=0.7;
Tin=300;
Tw=700;

% Initial Value

%Zoon (1)
for k=1:nz+1
    T1(:, :,k)=ones(nx-1,ny+1);
end
Tnew1=T1;
T0XZ1(:, :)=(Tw/Tin)*ones(nx-1,nz+1);
T0XY1(:, :)=(Tw/Tin)*ones(nx-1,ny+1);
T0YZ1=(Tw/Tin)*ones(ny+1,nz+1);

%Zoon (2)
for k=1:nz+1
```

```

    T2(:,:,k)=ones(ntheta-1,ny+1);
end
Tnew2=T2;
T0tz(:,:,:)=(Tw/Tin)*ones(ntheta-1,nz+1);
T0rt(:,:,:)=(Tw/Tin)*ones(ntheta-1,ny+1);
T0rz(:,:,:)=(Tw/Tin)*ones(ny+1,nz+1);

%Zoon (3)
for k=1:nz+1
    T3(:,:,k)=ones(nx-1,ny+1);
end
Tnew3=T3;
T0XZ3(:,:,:)=(Tw/Tin)*ones(nx-1,nz+1);
T0XY3(:,:,:)=(Tw/Tin)*ones(nx-1,ny+1);
T0YZ3=(Tw/Tin)*ones(ny+1,nz+1);

ntT=40000;
dtT=0.005;

handle=waitbar(0,'Please wait...');

for tT=1:ntT
    % Zoon (1)
    for i=1:nxR-1
        for j=1:nyR-1
            for k=1:nzR-1
                if i==1
                    CTermX=(u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i-1,2*j,2*k))*...
                        (T1(2*i+2,2*j)-T0YZ1(2*j,2*k))/(4*dx);

                    DTermX=(T1(2*i+2,2*j,2*k)-2*T1(2*i,2*j,2*k)+...
                        T0YZ1(2*j,2*k))/(Re*Pr*dx^2);
                elseif i==nxR-1
                    CTermX=(u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i-1,2*j,2*k))*...
                        (T2(2,2*j,2*k)-T1(2*i-2,2*j,2*k))/(4*dx);

                    DTermX=(T2(2,2*j,2*k)-2*T1(2*i,2*j,2*k)+...
                        T1(2*i-2,2*j,2*k))/(Re*Pr*dx^2);
                else
                    CTermX=(u1(2*i+1,2*j,2*k)+u1(2*i-1,2*j,2*k))*...
                        (T1(2*i+2,2*j,2*k)-T1(2*i-2,2*j,2*k))/(4*dx);

                    DTermX=(T1(2*i+2,2*j,2*k)-2*T1(2*i,2*j,2*k)+...
                        T1(2*i-2,2*j,2*k))/(Re*Pr*dx^2);
                end

                if j~=1
                    CTermY=(v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j-1,2*k))*...

```

```

        (T1(2*i,2*j+2,2*k)-T1(2*i,2*j-2,2*k))/(4*dy);

        DTermY=(T1(2*i,2*j+2,2*k)-2*T1(2*i,2*j,2*k)+...
            T1(2*i,2*j-2,2*k))/(Re*Pr*dy^2);
    else
        CTermY=(v1(2*i,2*j+1,2*k)+v1(2*i,2*j-1,2*k))*...
            (T1(2*i,2*j+2,2*k)-T0XZ1(2*i,2*k))/(4*dy);

        DTermY=(T1(2*i,2*j+2,2*k)-2*T1(2*i,2*j,2*k)+...
            T0XZ1(2*i,2*k))/(Re*Pr*dy^2);
    end

    if k~=1
        CTermZ=(w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j,2*k-1))*...
            (T1(2*i,2*j,2*k+2)-T1(2*i,2*j,2*k-2))/(4*dz);

        DTermZ=(T1(2*i,2*j,2*k+2)-2*T1(2*i,2*j,2*k)+...
            T1(2*i,2*j,2*k-2))/(Re*Pr*dz^2);
    else
        CTermZ=(w1(2*i,2*j,2*k+1)+w1(2*i,2*j,2*k-1))*...
            (T1(2*i,2*j,2*k+2)-T0XY1(2*i,2*j))/(4*dz);

        DTermZ=(T1(2*i,2*j,2*k+2)-2*T1(2*i,2*j,2*k)+...
            T0XY1(2*i,2*j))/(Re*Pr*dz^2);
    end

    Tnew1(2*i,2*j,2*k)=T1(2*i,2*j,2*k)+...
        dtT*(-CTermX-CTermY-CTermZ+DTermX+DTermY+DTermZ);
    end
end
end

        %BC

% X-Direction
T0YZ1(:,:)=2-Tnew1(2,,:);

% Y-Direction
T0XZ1(:,:)=2*(Tw/Tin)-Tnew1(:,2,:);
Tnew1(:,2*nyR,:)=2*(Tw/Tin)-Tnew1(:,2*nyR-2,:);

% Z-Direction
T0XY1(:,:)=2*(Tw/Tin)-Tnew1(:,2);
Tnew1(:,2*nzR)=2*(Tw/Tin)-Tnew1(:,2*nzR-2);

% Validate T
T1=Tnew1;

        % Zoon (2)

```

```

for i=1:nthetaR-1
  for j=1:nyR-1
    for k=1:nzR-1
      if i==1

        CTermT=(vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i-1,2*j,2*k))*...
          (T2(2*i+2,2*j,2*k)-T0rz(2*j,2*k))/(4*r(2*j)*dtheta);
        DTermT=(T2(2*i+2,2*j,2*k)-2*T2(2*i,2*j,2*k)+...
          T0rz(2*j,2*k))/(Re*Pr*r(2*j)^2*dtheta^2);

      elseif i==nthetaR-1

        CTermT=(vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i-1,2*j,2*k))*...
          (T3(2,2*j,2*k)-T2(2*i-2,2*j,2*k))/(4*r(2*j)*dtheta);
        DTermT=(T3(2,2*j,2*k)-2*T2(2*i,2*j,2*k)+T2(2*i-2,2*j,2*k))/...
          (Re*Pr*r(2*j)^2*dtheta^2);

      else

        CTermT=(vt(2*i+1,2*j,2*k)+vt(2*i-1,2*j,2*k))*...
          (T2(2*i+2,2*j,2*k)-T2(2*i-2,2*j,2*k))/(4*r(2*j)*dtheta);
        DTermT=(T2(2*i+2,2*j,2*k)-2*T2(2*i,2*j,2*k)+T2(2*i-2,2*j,2*k))/...
          (Re*Pr*r(2*j)^2*dtheta^2);

      end

    if j~=1

      CTermR=(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j-1,2*k))*...
        (T2(2*i,2*j+2,2*k)-T2(2*i,2*j-2,2*k))/(4*dr);
      DTermR1=(T2(2*i,2*j+2,2*k)-2*T2(2*i,2*j,2*k)+...
        T2(2*i,2*j-2,2*k))/(Re*Pr*dr^2);
      DTermR2=(T2(2*i,2*j+2,2*k)-T2(2*i,2*j-2,2*k))/(Re*Pr*2*r(2*j)*dr);

    else

      CTermR=(vr(2*i,2*j+1,2*k)+vr(2*i,2*j-1,2*k))*...
        (T2(2*i,2*j+2,2*k)-T0tz(2*i,2*k))/(4*dr);
      DTermR1=(T2(2*i,2*j+2,2*k)-
        2*T2(2*i,2*j,2*k)+T0tz(2*i,2*k))/(Re*Pr*dr^2);
      DTermR2=(T2(2*i,2*j+2,2*k)-T0tz(2*i,2*k))/(Re*Pr*2*r(2*j)*dr);

    end

    if k~=1

      CTermZ=(vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j,2*k-1))*...
        (T2(2*i,2*j,2*k+2)-T2(2*i,2*j,2*k-2))/(4*dz);

```

```

        DTermZ=(T2(2*i,2*j,2*k+2)-2*T2(2*i,2*j,2*k)+...
            T2(2*i,2*j,2*k-2))/(Re*Pr*dz^2);
    else
        CTermZ=(vz(2*i,2*j,2*k+1)+vz(2*i,2*j,2*k-1))*...
            (T2(2*i,2*j,2*k+2)-T0rt(2*i,2*j))/(4*dz);
        DTermZ=(T2(2*i,2*j,2*k+2)-2*T2(2*i,2*j,2*k)+...
            T0rt(2*i,2*j))/(Re*Pr*dz^2);
    end

    Tnew2(2*i,2*j,2*k)=T2(2*i,2*j,2*k)+dtT*(-CTermT-CTermR-CTermZ+...
        DTermT+DTermR1+DTermR2+DTermZ);
end
end
end

% theta-Direction
T0rz(:,:)=Tnew1(2*nxR-2, :, :);

% r-Direction
T0tz(:,:)=2*(Tw/Tin)-Tnew2(:,2,:);
Tnew2(:,2*nyR,:)=2*(Tw/Tin)-Tnew2(:,2*nyR-2,:);

% z-Direction
T0rt(:,:)=2*(Tw/Tin)-Tnew2(:,:,2);
Tnew2(:,:,2*nzR)=2*(Tw/Tin)-Tnew2(:,:,2*nzR-2);

% Validate T
T2=Tnew2;

                % Zoon (3)
for i=1:nxR-2
    for j=1:nyR-1
        for k=1:nzR-1
            if i==1
                CTermX=(u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i-1,2*j,2*k))*...
                    (T3(2*i+2,2*j,2*k)-T0YZ3(2*j,2*k))/(4*dx);

                DTermX=(T3(2*i+2,2*j,2*k)-2*T3(2*i,2*j,2*k)+...
                    T0YZ3(2*j,2*k))/(Re*Pr*dx^2);

            else

                CTermX=(u3(2*i+1,2*j,2*k)+u3(2*i-1,2*j,2*k))*...
                    (T3(2*i+2,2*j,2*k)-T3(2*i-2,2*j,2*k))/(4*dx);

                DTermX=(T3(2*i+2,2*j,2*k)-2*T3(2*i,2*j,2*k)+...
                    T3(2*i-2,2*j,2*k))/(Re*Pr*dx^2);
            end
        end
    end
end

```

```

if j~=1
    CTermY=(v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i,2*j-1,2*k))*...
        (T3(2*i,2*j+2,2*k)-T3(2*i,2*j-2,2*k))/(4*dy);

    DTermY=(T3(2*i,2*j+2,2*k)-2*T3(2*i,2*j,2*k)+...
        T3(2*i,2*j-2,2*k))/(Re*Pr*dy^2);
else
    CTermY=(v3(2*i,2*j+1,2*k)+v3(2*i,2*j-1,2*k))*...
        (T3(2*i,2*j+2,2*k)-T0XZ3(2*i,2*k))/(4*dy);

    DTermY=(T3(2*i,2*j+2,2*k)-2*T3(2*i,2*j,2*k)+...
        T0XZ3(2*i,2*k))/(Re*Pr*dy^2);
end

if k~=1
    CTermZ=(w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j,2*k-1))*...
        (T3(2*i,2*j,2*k+2)-T3(2*i,2*j,2*k-2))/(4*dz);

    DTermZ=(T3(2*i,2*j,2*k+2)-2*T3(2*i,2*j,2*k)+...
        T3(2*i,2*j,2*k-2))/(Re*Pr*dz^2);
else
    CTermZ=(w3(2*i,2*j,2*k+1)+w3(2*i,2*j,2*k-1))*...
        (T3(2*i,2*j,2*k+2)-T0XY3(2*i,2*j))/(4*dz);

    DTermZ=(T3(2*i,2*j,2*k+2)-2*T3(2*i,2*j,2*k)+...
        T0XY3(2*i,2*j))/(Re*Pr*dz^2);
end

Tnew3(2*i,2*j,2*k)=T3(2*i,2*j,2*k)+...
    dtT*(-CTermX-CTermY-CTermZ+DTermX+DTermY+DTermZ);
end
end
end

%BC

% X-Direction
T0YZ3(:,:)=Tnew2(2*nthetaR-2,,:);

[m,n,p]=size(T3);
ToutM1(:,:)=T3(m-4,2:n-2,2:2:p-2);
Uout1(:,:)=u3(m-3,2:2:n-2,2:2:p-2);
UT1=zeros(n/2+1,p/2+1);
UT1(2:n/2,2:p/2)=ToutM1.*Uout1.*Tin;
zp=linspace(0,bzReal,p/2+1);
for i=1:n/2+1
    UTV1(i)=trapz(zp,UT1(i,:));
end
end

```

```

yp=linspace(0,byReal,n/2+1);
Tm1=trapz(yp,UTV1)/(byReal*bzReal);

ToutM2(:,:)=T3(m,2:2:n-2,2:2:p-2);
Uout2(:,:)=u3(m+1,2:2:n-2,2:2:p-2);
UT2=zeros(n/2+1,p/2+1);
UT2(2:n/2,2:p/2)=ToutM2.*Uout2.*Tin;
for i=1:n/2+1
    UTV2(i)=trapz(zp,UT2(i,:));
end
Tm2=trapz(yp,UTV2)/(byReal*bzReal);

Tnew3(2*nxR-2,,:)=2*(Tw-Tm2)/(2*Tw-Tm1-Tm2)*(Tnew3(2*nxR-4,,:)+...
    Tw*(Tm2-Tm1)/(2*Tin*(Tw-Tm2)));
%dTm=Tm2-Tm1;
%Tnew3(2*nxR-2,,:)=Tnew3(2*nxR-4,,:)+abs((Tw/Tin-T3(2*nxR-4,,:))/...
% (Tw-Tm2)*dTm/2);

% Y-Direction
T0XZ3(:,:)=2*(Tw/Tin)-Tnew3(:,2,:);
Tnew3(:,2*nyR,:)=2*(Tw/Tin)-Tnew3(:,2*nyR-2,:);

% Z-Direction
T0XY3(:,:)=2*(Tw/Tin)-Tnew3(:,,2);
Tnew3(:,,2*nzR)=2*(Tw/Tin)-Tnew3(:,,2*nzR-2);

% Validate T
T3=Tnew3;

waitbar(tT/ntT,handle);

%if (tT/100)==ceil(tT/100)
    T3(98,20,20)
%end

end
save CL3D3 u1 v1 w1 P1 vt vr vz P2 u3 v3 w3 P3 Dh Rc L dtheta LReal...
    RcReal byReal bzReal DhReal nu rou UReal nt dt c dr dtheta...
    dx dy dz Re nxR nyR nzR nx ny nz ntheta nthetaR r AVReal RtReal Ro
phiReal...
    t Rt AV phi T1 T2 T3 Tin Tw dtT ntT Pr Tm2

```



## ضمیمه م- مقالات

در این بخش مقالات حاصل از این پژوهش که در کنفرانسهای انتقال حرارت در کشورهای مصر و لهستان پذیرفته شده اند، آمده است.

## NUMERICAL MODELING FOR INTERNAL COOLING OF GAS TURBINE BLADES

Kayhani MH \*, Heirani MR and Norouzi M

\*Author for correspondence

Department of Mechanical Engineering,  
 Shahrood University of Technology,

Shahrood,

Iran,

E-mail: h\_kayhani@shahrood.ac.ir

### ABSTRACT

In order to protect gas turbine blades, a U-shaped bend pass is placed inside each of them. The blade is cooled by passing of coolant fluid through in U-shape bend cavity. In this paper, hydrodynamic and thermal behaviours of coolant fluid were solved by Marker and Cell method and procedures of discretization of governing equations and 3D mesh generation were explained. Specially in this research, combination of secondary flows (secondary flows of curvature and secondary flows of rotation) in U-shape bend and effect of centrifugal force in pressure field were investigated. Then the effect of physical parameters (i.e. : Reynolds number, rotation number) and geometrical parameters (i.e. : turbine diameter , radius of curvature of U-shape bend and stagger angle) on internal cooling were investigated via CFD codes. Finally, CFD codes were validated with experimental results.

### NOMENCLATURE

U	mean velocity (m/s)
$V_b$	bulk velocity (m/s)
V	velocity vector (m/s)
D	hydraulic diameter (m)
T	mean temperature (K)
t	time (s)
K	turbulence kinetic energy ( $m^2/s^2$ )
P	mean pressure (pa)
r	radius (m)
x	length coordinate (m)
y	distance from wall (m)
$X_1$	vector to axis of rotation
Re	Reynolds number = $\rho V_b D / \mu$
Ro	rotation number = $\omega D / V_b$
Nu	Nusselt number
$Nu_m$	overall Nusselt number
<i>Greek Letter</i>	
$\alpha$	heat transfer coefficient ( $m^2/s$ )
$\alpha_t$	turbulence heat transfer coefficient ( $m^2/s$ )

$\varepsilon$	turbulence dissipation rate ( $m^3/(kg.s)$ )
$\varepsilon_{ijk}$	third-order alternating tensor
$\phi$	stagger angle ( $^\circ$ )
$\varphi$	Reynolds stress turbulence production ( $m^2/s^3$ )
$\mu$	dynamic viscosity (kg/(m.s))
$\mu_t$	turbulence eddy viscosity (kg/(m.s))
$\theta$	U-bend angle ( $^\circ$ )
$\rho$	density ( $kg/m^3$ )
$\omega$	angular velocity (rad/s)

### INTRODUCTION

Gas turbines are used for aircraft propulsion and in land-based power generation or industrial applications. Thermal efficiency and power output of gas turbines increase with increasing turbine rotor inlet temperatures [1] but metallurgical problems restrict this temperature. For increasing the temperature of hot fluid to turbine entrance, thermal protection of turbine is necessary. Internal cooling is a common method for thermal protection of turbine blades. As figure (1) shows, for internal cooling of gas turbine blades, a U-shape bend pass is placed inside each of them and a coolant fluid is passed through this cavity to reduce the thermal stress in blade. This geometry is like to the geometry that Cheah et al [2] used for his experiments and the cross-section of cooling line was rectangular. As figure (1) shows, stagger angle ( $\Phi$ ), is angle between plane of blade and axes of rotation (turbine axes).

Geometry of cooling line and blade rotation cause following phenomena in the coolant fluid:

- Separation phenomenon at the end of curvature [3]
- Secondary flows arising from curvature [3] ( this secondary flow is only exist on curve region)
- Secondary flows arising from rotation [3] (this secondary flow is exist on all cooling line)

On curve region, secondary flows arising from curvature and rotation strengthen or weaken each other. Stagger angle and

rotation direction of blade effect directly on manner of interaction between the secondary flows [1].

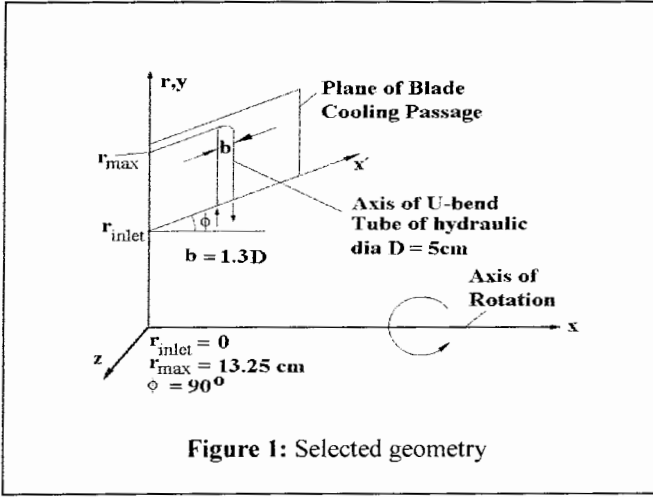


Figure 1: Selected geometry

## GOVERNING EQUATIONS and BOUNDARY CONDITIONS

In this research, flow of coolant was assumed like a steady and incompressible flow.

Governing equations are: continuity, momentum and energy equations [4]:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu + \mu_t}{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i^2} - 2\varepsilon_{ijk} \omega_j U_k - (\omega_k X_k \omega_i - \omega_k X_i \omega_k) \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U_i T}{\partial x_i} = (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \quad (3)$$

In the present article, for low Reynold simulation, laminar model and high Reynolds simulation, standard k-ε method [5] was used.

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial U_i K}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_t}{\rho Pr_k} \frac{\partial K}{\partial x_i} \right) + \varphi - \varepsilon \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial U_i \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_t}{\rho Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_1 \varphi \frac{\varepsilon}{K} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (5)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (6)$$

Where  $C_1=1.44$ ,  $C_2=1.92$ ,  $Pr_k=1$ ,  $Pr_\varepsilon=1.3$ ,  $C_\mu=0.09$ .

Also in 4 and 5 equations,  $\varphi$  term indicates Reynolds Stress Turbulence production and it obtained by following relation:

$$\varphi = \frac{\mu_t}{\rho} \left[ 2 \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (7)$$

The k-ε equation is not reliable within laminar sublayer area in the vicinity of the walls. In this area, wall function of Baldwin-Lomax model [6] was used for turbulence viscosity evaluation:

$$\mu_t = \rho \left\{ k_f y \left[ 1 - \exp\left( -\frac{y^+}{A_0} \right) \right] \right\}^2 |Curl(V)| \quad (8)$$

Equation (8) is valid when  $y^+ < 40$ ,  $A_0^+ = 26$  and  $k_f = 0.41$ .

Following boundary conditions were applied for governing equations:

- Velocity is stated relate to turbine blade, so no-slip condition on walls is valid for velocity. In addition, temperature of walls is constant suppose be 700 K.
- In the inlet, Dirichlet condition (constant value) is considered for velocity, temperature, turbulence kinetic energy and turbulence dissipation rate [7].
- In the outlet, Homogeny Neumann condition is considered for axial velocity, non-dimension temperature, turbulence kinetic energy and turbulence dissipation rate [7].

## NUMERICAL CONSIDERATIONS

As mentioned in the above, rotation rate is constant, so we can assume that the flow is steady state. Flow analysis by quasi unsteady assumption is one of the CFD methods for solving steady state problems [8]. In this method, the term of time function is not eliminated from the equations and flow analysis is accomplished like unsteady flow until answers converge toward steady state. Here time has a repetitive rule and it does not have a physical worth. Though only solutions steady with respect to duct are of interest, initial condition were needed because the unsteady form of the conservation equations was used. The initial conditions used are the solutions of the steady, one-dimensional, inviscid equations [9]. From the governing equations, velocity and temperature quantities have time term, and static pressure is only quantity that does not have time term. In this research, for creating pressure time term, artificial compressibility method is used. This method was demonstrated by Chorin [10]. According to Chorin [10] theory, term of time function is added to continuity equation.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (9)$$

When the flow is being steady, then  $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ , and continuity equation will be satisfied. In the current research, mesh is generated by staggered mesh method [8]. In this method of mesh generation, grid is displaced along each cell diameter by half of its diameter. This method brings about possibility of variables coupling and improves stability. Finally, governing equations are discreted by marker and cell method [11]. Governing equations are formulated explicitly, and forward first order approximation is used for time derivation and central second order approximation is used for space derivation (FTCS).

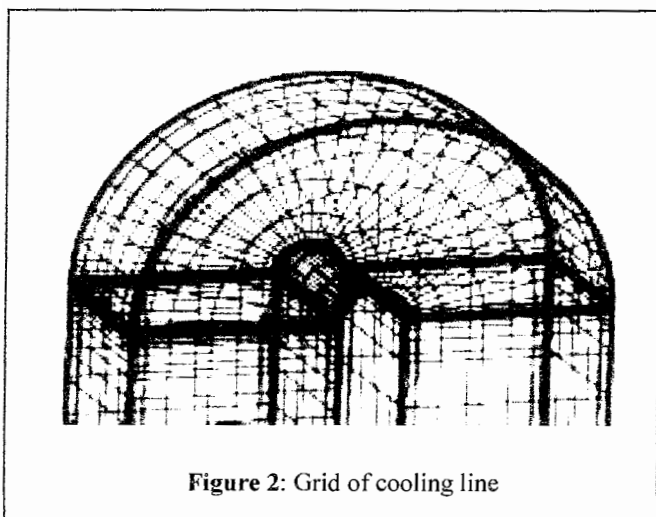


Figure 2: Grid of cooling line

## RESULTS and DISCUSSION

In this paper, two kinds of flow models were used for analysing of internal cooling:

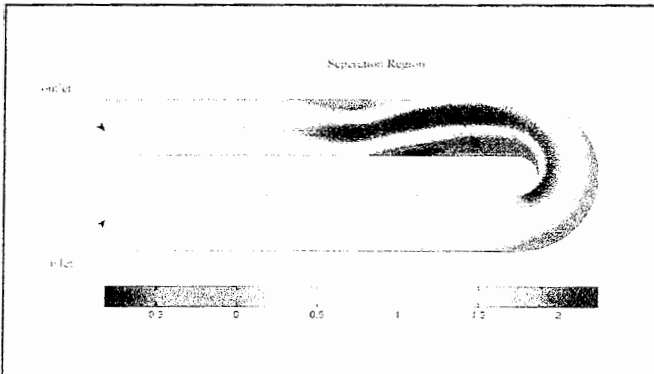
- Laminar model for low Reynolds flow
- $K - \epsilon$  method for high Reynolds flow

Laminar model is a high accurate method for flow analysing but hardware problems restrict this method for simulation of low Reynolds flows. Simulation of laminar flow is suitable for investigation of phenomena in internal cooling. Accuracy of  $K - \epsilon$  method is lower than laminar model but,  $K - \epsilon$  method is useful for simulation of high Reynolds flows and its results correspond to experimental results.

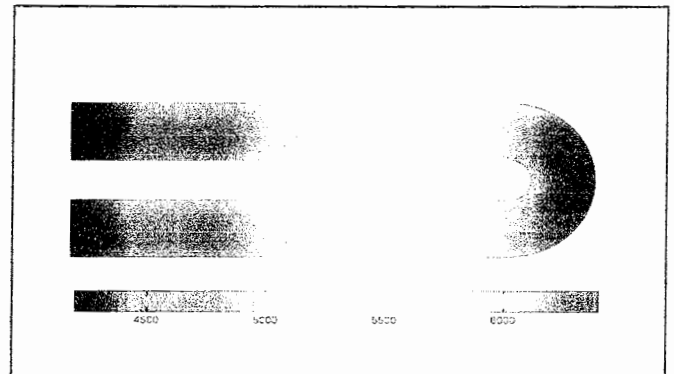
In figures (3) to (6), the geometry and characteristics of flow are:

- Fluid : air
- $Re=2 \cdot 10^3$
- Walls temperature : 700K
- The entrance temperature of coolant fluid : 300K
- Length of direct part : 20cm
- Hydraulic diameter : 3cm
- Inner radius of curvature : 0.75cm
- Radius of turbine : 100cm
- $\Phi=90$

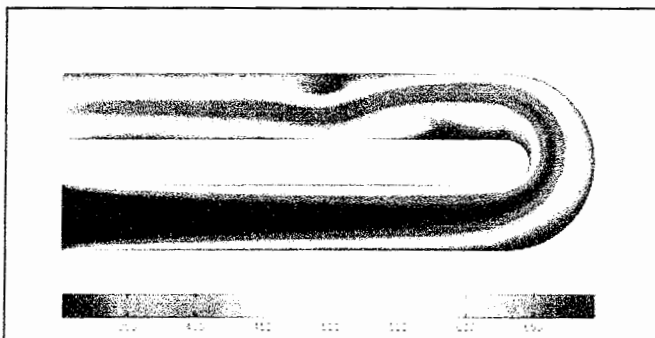
Figure (3) illustrates axial velocity contour for  $Ro=0.5$ . The separation is occurred in the end of curvature and axial velocity is deviated towards the wall in outlet area. Figure (4) illustrates temperature contour for  $Ro=0.5$ . Corresponding to the figure, the temperature distribution is related directly to axial velocity. The mixing of flow is high in the separation region so the temperature is increased in this area [12]. In figures (5) and (6), pressure distribution is demonstrated for  $Ro=0$  and 0.5. In the stationary state ( $Ro=0$ ), static pressure is being continually reducing and intense pressure drop is occurred in the curvature region. In the rotational state ( $Ro=0.5$ ), due to rotation of blade, the static pressure distribution is similar to the centrifugal force distribution and by increasing the distance from rotation axis, the amount of static pressure is increased, therefore the order of pressure distribution in the rotational state is higher than the stationary state. Figure (7) shows secondary flows in the stationary state at  $\theta=90$  (mid part of curvature). The secondary flows are Taylor Görtler [13] vortices. The vortices are created on account of curvature. Figure (8) shows secondary flows in the rotational state ( $\theta=90$ ,  $\Phi=-45$ ,  $Ro=0.5$ ). The vortices are created on account of combination of rotation and curvature effects. Features of the vortices depend on rotation number, stagger angle and radius of curvature. Figure (9) illustrates the effect of stagger angle on Overall Nusselt number. Secondary flows have an important rule in heat transfer. For negative stagger angle, Secondary flows arising rotation and curvature weaken each other so by increasing of the stagger angle, Overall Nusselt number is increased. Figure (10) shows the effect of curve inner radius on Overall Nusselt number. Increasing of the curve inner radius reduces the effect of separation so the Overall Nusselt number is decreased. In the bigger values of curve radius, overall Nusselt number is increased. This is due to increasing of curve surface and increasing the effect of secondary flows. Figure (11) illustrates effect of turbine radius on Overall Nusselt number. By increasing of turbine radius, Overall Nusselt number is linearly increased. The turbine radius does not have a strong effect on Overall Nusselt number. The centrifugal force and static pressure depend on turbine radius but, velocity components have a low sensitivity to it so, turbine radius has a small effect on heat transfer. Figure (12) illustrates the effect of Reynolds number on Overall Nusselt number. Increasing of Reynolds number increases the turbulence intensity so it increases the overall Nusselt number. Figure (13) shows the effect of rotation number on Nusselt number in the leading edge surface at  $Re=25000$  ( $K - \epsilon$  model). Rotation of blade generates secondary flows and the secondary flows exist throughout the cooling lines so, increasing of the rotation number, increases Nusselt number. These results correspond to experimental results. Figure (14) shows the comparison between the results of Nusselt number with results of Wagner et al [14] for  $Ro=0$  and  $Re=25000$ . In addition, this figure shows the accuracy of  $K - \epsilon$  method. Quantity of mean error of  $K - \epsilon$  method for calculation of Nusselt number is 19%.



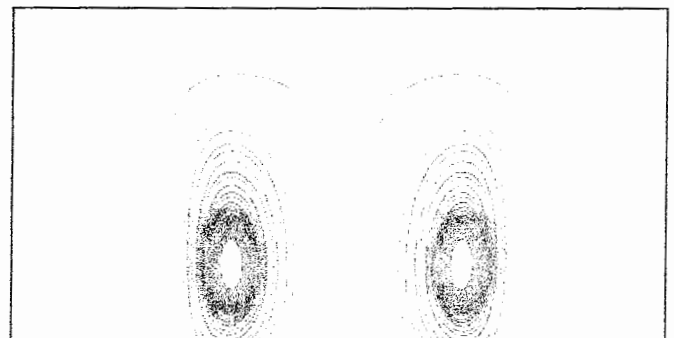
**Figure 3:** Axial velocity contour on symmetry plane (m/s)



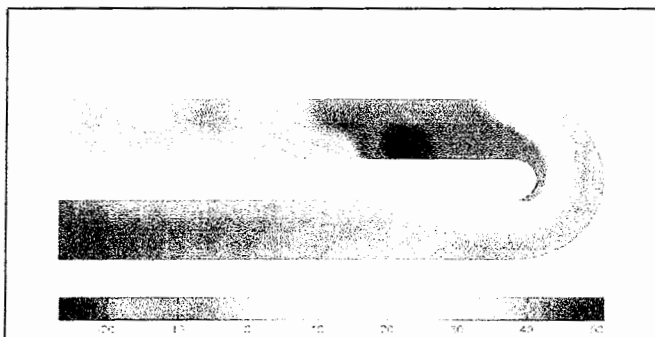
**Figure 6:** Pressure contour for rotary blade on symmetry plane (pa)



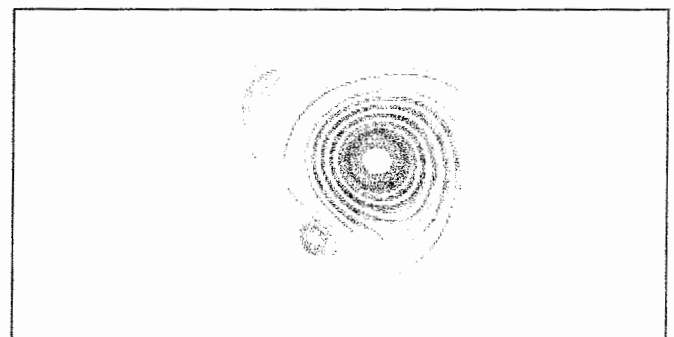
**Figure 4:** Temperature contour on symmetry plane (K)



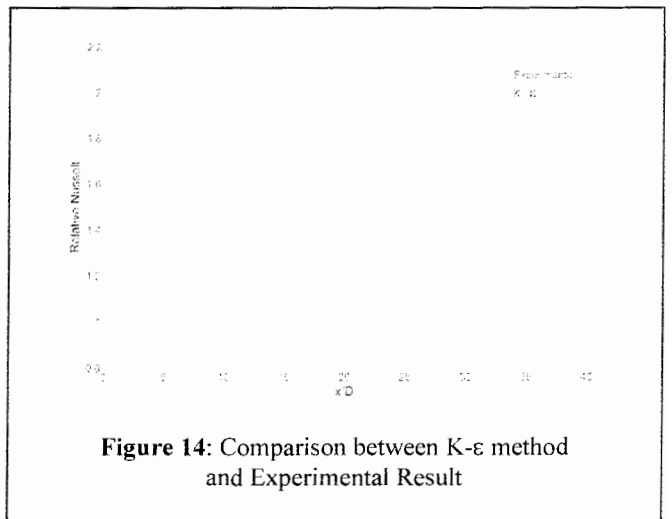
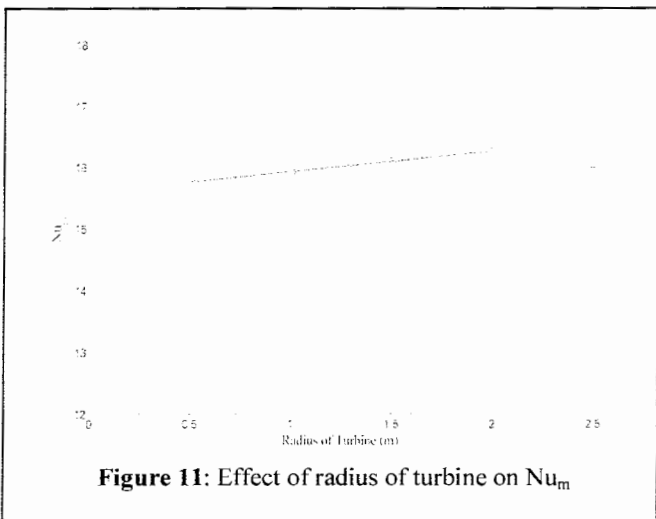
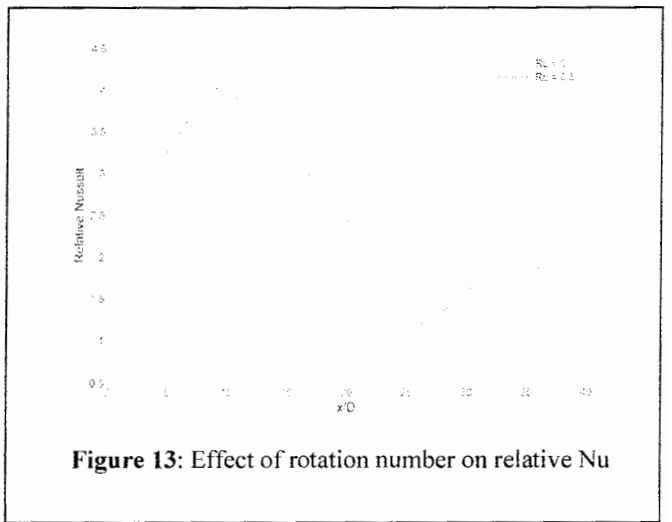
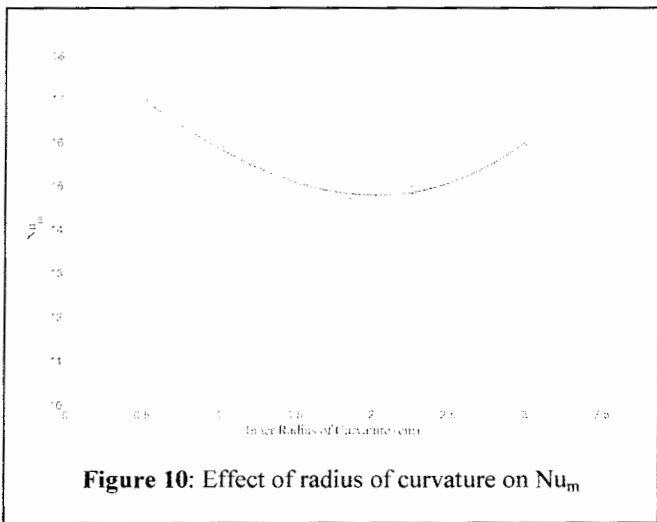
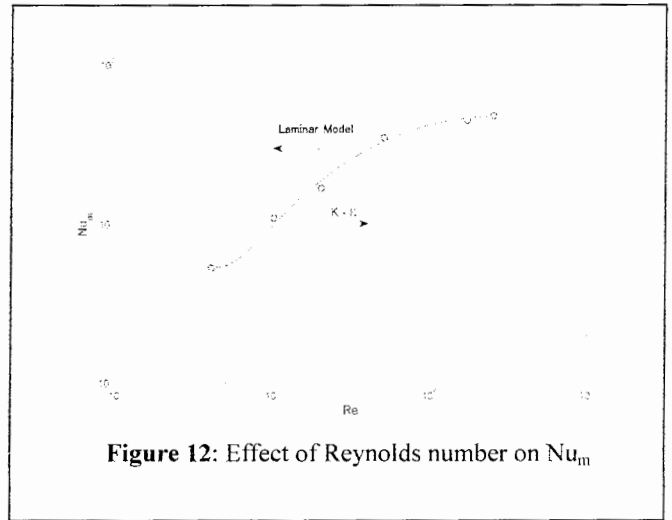
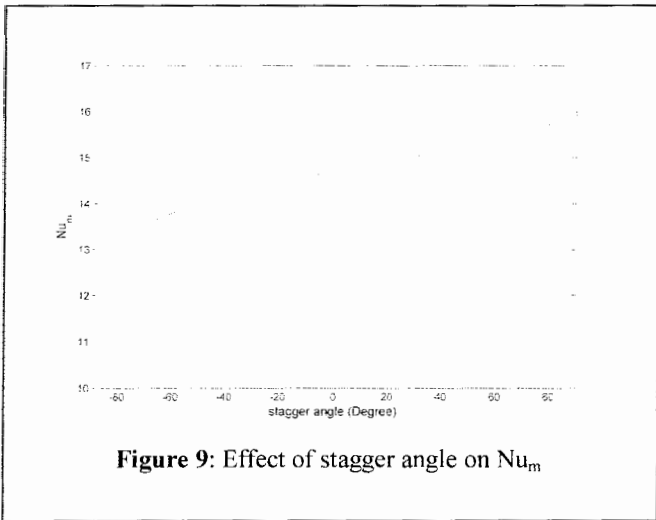
**Figure 7:** Secondary flows for stationary blade at  $\theta=90^\circ$



**Figure 5:** Pressure contour for stationary blade on symmetry plane (pa)



**Figure 8:** Secondary flows for rotary blade at  $\theta=90^\circ$  and  $\phi=45^\circ$



## REFERENCES

- [1] Han, J.C., Dutta, S. and Ekkad, S., 2000, "Gas Turbine Heat Transfer and Cooling Technology," First Edition, London: Taylor & Francis.
- [2] Cheah, S.C., Iacovides, H., Jackson, D.C., Ji, H. and Launder, B.E., 1994, "LDA Investigation of the Flow Development Through Rotating Ducts," ASME Paper No. 94-GT-226.
- [3] Bredberg, J., 2002, "Turbulence Modelling for Internal Cooling of Gas Turbine Blades," Report 01/9, Dept of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Gothenburg. Also available at <http://www.chalmers.se/~tfd>.
- [4] Chakravarthy, S., Bose, T.K., Batten, P., Palaniswamy, S., Goldberg, U. and Peroomian, O., 2000, "Convective Heat Transfer Inside Rotating Tubes." Report AIAA-2000-3356, Metacomp Technologies, Inc., Westlake Village, CA 91316.
- [5] Bredberg, J., 2002, "Prediction of flow and heat transfer inside turbine blade using EARSIM, k- $\epsilon$  and k- $\omega$  turbulence model," Thesis for the degree of licentiate of engineering, Dept of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Gothenburg. Also available at <http://www.chalmers.se/~tfd>.
- [6] Wilcox, D.C., 1993, "Turbulence Modeling for CFD," First Edition, Glendale, California: DCW Industries, Inc.
- [7] Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow," First Edition, John Benjamin's Publishing Co.
- [8] Hoffmann, K.A. and Chiang, S.T., 1989, "Computational Fluid Dynamics for Engineers," First Edition, two volumes, Austin, Texas: EES.
- [9] Sunden, B. and Faghri, M., 2001, "Heat Transfer in Gas Turbine," First Edition, Boston: WIT Press.
- [10] Chorin, A.J., 1967, "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," Journal Computational Physics, Vol. 2, pp.12-26.
- [11] Harlow, F.H. and Welch, J.E., 1965, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," Vol. 8, pp.2182-2189.
- [12] Tes, D.G.N. and McGrath, D.B., 1995, "A Combined Experimental/Computational Study of Flow in Turbine Blade Cooling Passage," Presented at the International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exposition, Houston, Tex., June 5-8, ASME Paper 95-GT-355.
- [13] Schlichting, H., Gersten, K., Krause, E., Oertel, H. and Mayes, C.(Translator), 2000, "Boundary-Layer Theory," Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [14] Wagner, J.H., Johnson, B.V. and Kopper, F.C., 1991, "Heat Transfer in Rotating Serpentine Passages with Smooth Walls." ASME Journal of Turbomachinery, Vol.113, pp.321-330.

## A NUMERICAL INVESTIGATION OF INTERNAL COOLING IN GAS TURBINE BLADES

Kayhani MH \*, Heyrani M.R.H. and Norouzi M.

Department of Mechanical Engineering,  
Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran  
E-mail: h\_kayhani@shahrood.ac.ir

**Key words:** Gas Turbine, Blade, Internal Cooling, CFD, K- $\epsilon$  Model, Marker and Cell Method

### Abstract

Internal cooling is a practical method for protection of gas turbine blades. In this method, a U-shape bend passage is constructed inside blades which are cooled by a coolant fluid passing through these channels. In this paper, the governing equations for flow of coolant fluid are solved by Marker and Cell method in a three dimensional passage using a staggered mesh. Specially in this research, combination of secondary flows resulting from curvature and rotation in a U-shape bend and the effect of centrifugal forces in pressure field are investigated precisely. Then the effect of physical parameters consisting of Reynolds number, rotation number and geometry (i.e., turbine diameter, radius of curvature of U-shape bend and stagger angle) on the internal cooling are investigated via CFD code implemented. Finally, the numerical results are validated with the experimental data.

### Nomenclature

U	mean velocity (m/s)
$V_b$	bulk velocity (m/s)
V	velocity vector (m/s)
D	hydraulic diameter (m)
T	mean temperature (k)
t	time (s)
K	turbulence kinetic energy ( $m^2/s^2$ )
P	mean pressure (pa)
h	convective heat transfer coefficient ( $W/(m^2.K)$ )
$h_m$	average of convective heat transfer coefficient ( $W/(m^2.K)$ )
r	radius (m)
x	length coordinate (m)
y	distance from wall (m)
$X_i$	position vector to axis of rotation



- Re Reynolds number =  $\rho V_b D / \mu$   
 Ro rotation number =  $\omega D / V_b$   
 Nu Nusselt number =  $hD / k$   
 Nu<sub>m</sub> overall Nusselt number =  $h_m D / k$

*Greek Letter*

- $\alpha$  heat transfer coefficient ( $m^2/s$ )  
 $\alpha_t$  turbulence heat transfer coefficient ( $m^2/s$ )  
 $\varepsilon$  turbulence dissipation rate ( $m^3/(kg.s)$ )  
 $\varepsilon_{ijk}$  third-order alternating tensor  
 $\phi$  stagger angle ( $^\circ$ )  
 $\varphi$  Reynolds stress turbulence production ( $m^2/s^3$ )  
 $\mu$  dynamic viscosity ( $kg/(m.s)$ )  
 $\mu_t$  turbulence eddy viscosity ( $kg/(m.s)$ )  
 $\theta$  U-bend angle ( $^\circ$ )  
 $\rho$  density ( $kg/m^3$ )  
 $\omega$  angular velocity ( $rad/s$ )

### Introduction

Gas turbines are used for aircraft propulsion and in land-based power generation or industrial applications. Thermal efficiency of gas turbines increases by increasing the turbine rotor inlet temperatures [1], but metallurgical problems restrict the maximum inlet temperature limit. To increase the inlet temperature of gas turbine, thermal protection of the turbine is necessary. Internal cooling is a common method for thermal protection of turbine blades. As Fig. 1 shows, for internal cooling of gas turbine blades, a U-shape bend passage is constructed inside blades and a coolant fluid flow through this passage reduces the thermal stresses of the blades. This geometry is like to the geometry of Cheah et. al [2] used for his experiments where the cross-section of cooling passage was rectangular. As Fig. 1 shows, stagger angle ( $\Phi$ ), is the angle between the plane of blade and axes of rotation (turbine axes).

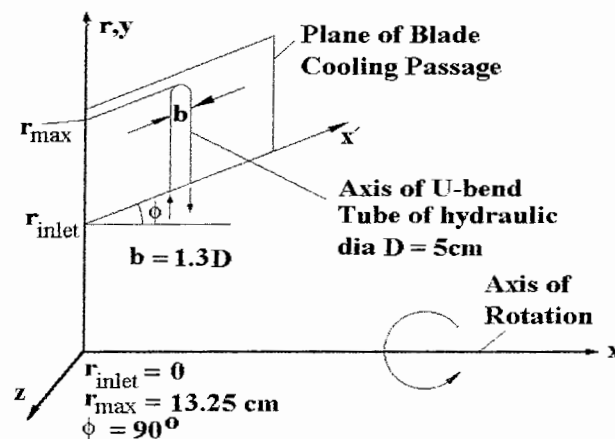


Figure 1: Geometry

Geometry of cooling passage and blade rotation cause the following phenomena in the coolant fluid flow field

- Separation phenomenon at the end of curvature [3]
- Secondary flows arising from curvature [3]
- Secondary flows arising from rotation [3]
- On curved region, secondary flows arising from curvature and rotation may strengthen or weaken each other. Stagger angle and rotation direction of the blades effect directly on manner of interaction between the secondary flows [1].

### Governing Equations and Boundary Conditions

In this research, flow of coolant is assumed to be steady incompressible viscous flow. Governing equations are consisting of continuity, momentum and energy equations [4], respectively, are

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu + \mu_t}{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i^2} -$$

$$2\varepsilon_{ijk}\omega_j U_k - (\omega_k X_k \omega_i - \omega_k X_i \omega_k)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U_i T}{\partial x_i} = (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \quad (3)$$

In the present article, for low Reynolds numbers, laminar model and high Reynolds numbers, standard k-ε method [5] are used.

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial U_i K}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_t}{\rho Pr_k} \frac{\partial K}{\partial x_i} \right) + \varphi - \varepsilon \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial U_i \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_t}{\rho Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) +$$

$$C_1 \varphi \frac{\varepsilon}{K} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{K}$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (6)$$

Where,  $C_1=1.44$ ,  $C_2=1.92$ ,  $Pr_k=1$ ,  $Pr_\varepsilon=1.3$ ,  $C_\mu=0.09$ .

Also in equations 4 and 5, the term  $\varphi$  indicates Reynolds stress turbulence production and it is obtained by the following relation:

$$\varphi = \frac{\mu_t}{\rho} \left[ 2 \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (7)$$

The k-ε equation is not reliable within laminar sublayer area in the vicinity of the walls. In this area, wall function of Baldwin-Lomax model [6] is used for turbulence viscosity evaluation:

$$\mu_t = \rho \{k_f \nu [1 - \exp(\frac{-y^+}{A_0^+})]\}^2 |\text{Curl}(V)| \quad (8)$$

Equation (8) is valid when  $y^+ < 40$ ,  $A_0^+ = 26$  and  $k_f = 0.41$ .

Following boundary conditions are applied in solving the governing equations:

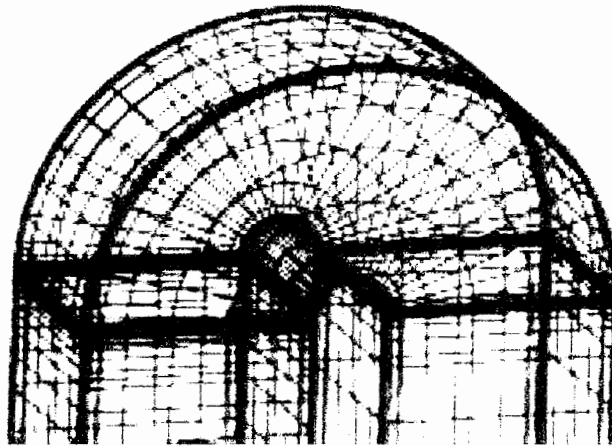
- Velocity is stated relative to the turbine blade, and no-slip condition on the walls is used. In addition, temperature of the walls is constant and assumed to be 700 K.
- In the inlet, Dirichlet condition (constant value) is considered for velocity, temperature, turbulence kinetic energy and turbulence dissipation rate [7].
- In the outlet, Neumann conditions are considered for all physical properties. [7].

### Numerical Considerations

As mentioned above, rotation rate is constant; therefore, we can assume that the flow is steady state. Flow analysis by quasi unsteady assumption is one of the CFD methods for solving steady state problems [8]. In this method, the unsteady terms are not eliminated from the equations and flow analysis is carried out until the steady state condition. Though only steady solutions with respect to the duct are of interest the initial conditions used here are the solutions of the steady, one-dimensional, inviscid equations [9].

In this research, artificial compressibility method is used. This method was demonstrated by Chorin [10] in which unsteady pressure term is added to continuity equation.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (9)$$



**Figure 2:** Grid of cooling line

When the flow is steady, the unsteady terms including  $\frac{\partial U_i}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial t}$  and  $\frac{\partial T}{\partial t}$  tend to zero. Finally, governing equations are discretized explicitly forward first order in time and central second order approximation in space (FTCS) using a staggered mesh where the velocity nodes and other physical property nodes like pressure are displaced.

It is necessary to mention that the computer program used here is written by the authors, and no commercial codes are used.

## Results and Discussion

In this paper, two kinds of flow models are used for analysing internal cooling

- Laminar model for low Reynolds numbers
- $K - \varepsilon$  method for high Reynolds numbers

In laminar model, direct numerical simulation is used. Therefore, the numerical results are high accurate, but hardware problems restrict this method for simulation of moderate Reynolds numbers. Simulation of laminar flow is suitable for investigation of physical phenomena in internal cooling. Accuracy of  $K - \varepsilon$  method is lower than laminar model because of the approximation applied in the turbulent model. However, the numerical results obtained by the  $K - \varepsilon$  method used here are in good agreement with the experimental data available [14].

In Figs. 3 to 6, the geometry and flow properties are

- Fluid : air
- $Re=2 \cdot 10^3$
- Walls temperature : 700K
- The entrance temperature of coolant fluid : 300K
- Length of direct part : 20cm
- Hydraulic diameter : 3cm
- Inner radius of curvature : 0.75cm
- Radius of turbine : 100cm
- $\Phi=90$

Fig. 3 illustrates axial velocity contours for  $Ro=0.5$ . The separation is occurred in the end of curvature and the maximum value of axial velocity is deviated towards the leading wall in the outlet region.

Fig. 4 illustrates temperature contours for  $Ro=0.5$ . Comparing with Fig. 3, the temperature field pattern is similar to the axial velocity field. Because of high mixing in the separation region, the temperature increases in this area [12].

In Figs. 5 and 6, pressure distribution is demonstrated for  $Ro=0$  and 0.5. In the stationary state ( $Ro=0$ ), static pressure is continuously reducing and intense pressure drop is occurred in the curvature region. In the rotational state ( $Ro=0.5$ ), due to rotation, the static pressure distribution is similar to the centrifugal force distribution where by increasing the distance from rotation axis, the amount of static pressure increases.

Figs. 7 and 8 illustrate streamlines of secondary flows at mid-section of the inlet straight duct at two different stagger angles ( $\Phi=0^\circ$  &  $45^\circ$ ) for a rotational case. According to these figures, the Coriolis forces create vortices which rotate against each other and the features of them depend on Coriolis force directions (stagger angle). The vortices arising from rotation are formed throughout the cooling passages.

Fig. 9, illustrates streamlines of secondary flows at mid-section of the curved region ( $\theta = 90^\circ$ ) for a stationary blade. At stationary state, the vortices are formed only in curved region. These vortices are created due to curvature and called Taylor Görtler vortices.

Figs. 10 to 14, show secondary flows at mid-section of curved region ( $\theta=90^\circ$ ) at different stagger angles for a rotating blade. According to Fig. 10, at  $\Phi = 90^\circ$ , vortices arising from curvature and rotation have the same direction and they strengthen each other. Referring to Figs. 11 to 13, decreasing of stagger angle causes the vortices arising from curvature and rotation weaken each other. In Fig. 14, at  $\Phi = -90^\circ$ , vortices arising from rotation and curvature rotate against each other resulting elimination of secondary flows.

Fig. 15 illustrates the effect of stagger angle on overall Nusselt number. Secondary flows have an important rule in heat transfer. For negative stagger angle, secondary flows arising from rotation and

curvature weaken each other, but for positive stagger angles this becomes reverse. Therefore, by increasing stagger angle from negative to positive values overall Nusselt number increases.

Fig. 16 shows the effect of inner radius of curved region on overall Nusselt number. Increasing of the inner radius up to 2cm reduces the effect of separation resulting of decrease in overall Nusselt number. Above this radius, overall Nusselt number starts increasing. This is due to augmentation of the effect of secondary flows.

Fig. 17 illustrates effect of turbine radius on overall Nusselt number. By increasing of turbine radius, overall Nusselt number linearly increases. The turbine radius does not have a strong effect on overall Nusselt number. The centrifugal force and static pressure depend on turbine radius but, velocity components have a low sensitivity to it, therefore, turbine radius has a small effect on heat transfer.

Fig. 18 illustrates the effect of Reynolds number on Overall Nusselt number.

Fig. 19 shows the effect of rotation number on Nusselt number in the leading edge surface at  $Re=25000$  ( $K - \epsilon$  model). Rotation of blade generates secondary flows and the secondary flows exist throughout the cooling lines so, increasing of the rotation number, increases Nusselt number. These results correspond to experimental results.

Fig. 20 compares the numerical results for Nusselt number with experimental data of Wagner et. al [14] for  $Ro=0$  and  $Re=25000$ . The numerical results are in good agreement with experimental data.

### **Conclusion**

Heat transfer in internal cooling of turbine blades depends on Reynolds number, rotation number, stagger angle, type of coolant fluid and geometry of cooling passages.

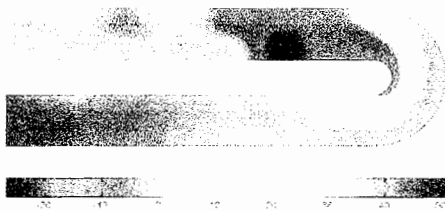
Coriolis force has an important rule on heat transfer. This force has direct effect on distribution of axial velocity and creation of secondary flows. The direction of Coriolis force depends on stagger angle. At the positive stagger angles, vortices arising from rotation and curvature strengthen each other, hence increasing of stagger angle increases overall heat transfer. Also increasing of Reynolds number and rotation number increases the heat transfer rate.



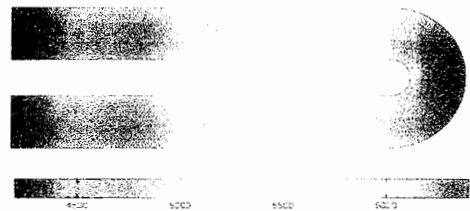
**Figure 3:** Axial velocity contour on symmetry plane (m/s)



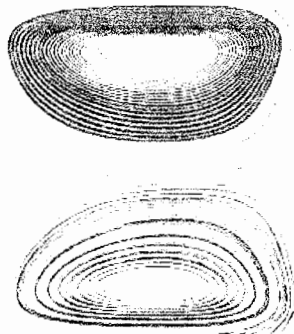
**Figure 4:** Temperature contour on symmetry plane (K)



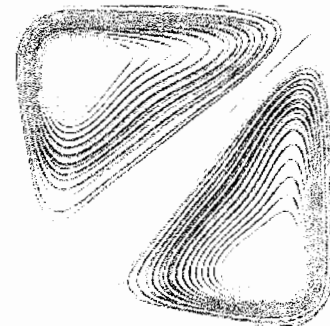
**Figure 5:** Pressure contour for stationary blade on symmetry plane (pa)



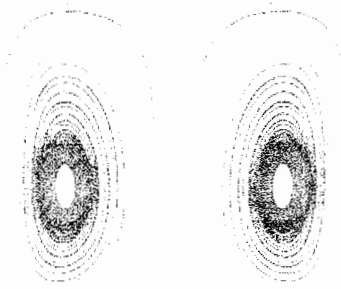
**Figure 6:** Pressure contour for rotary blade on symmetry plane (pa)



**Figure 7:** Secondary flows for rotary blade at mid-section of the inlet straight duct at  $\phi=0^\circ$



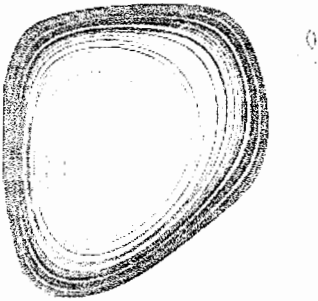
**Figure 8:** Secondary flows for rotary blade at mid-section of the inlet straight duct at  $\phi=45^\circ$



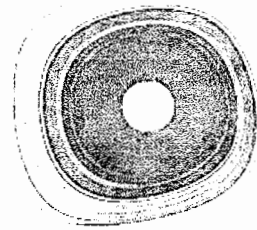
**Figure 9:** Secondary flows for stationary blade at  $\theta=90^\circ$



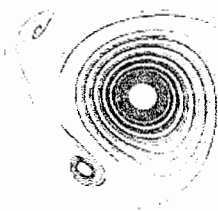
**Figure 10:** Secondary flows for rotary blade at  $\theta=90^\circ$  and  $\phi=90^\circ$



**Figure 11:** Secondary flows for rotary blade at  $\theta=90^\circ$  and  $\phi=45^\circ$



**Figure 12:** Secondary flows for rotary blade at  $\theta=90^\circ$  and  $\phi=0^\circ$



**Figure 13:** Secondary flows for rotary blade at  $\theta=90^\circ$  and  $\phi=-45^\circ$



**Figure 14:** Secondary flows for rotary blade at  $\theta=90^\circ$  and  $\phi=-90^\circ$

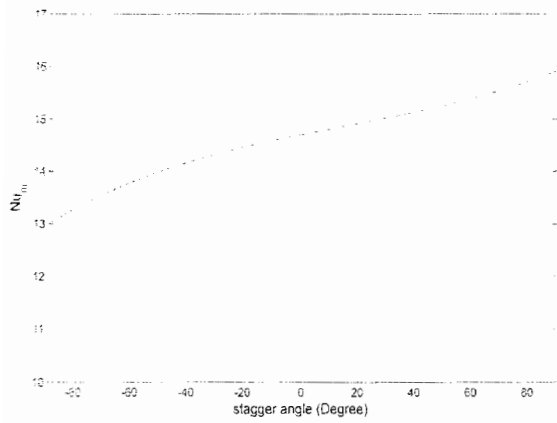


Figure 15: Effect of stagger angle on  $Nu_m$

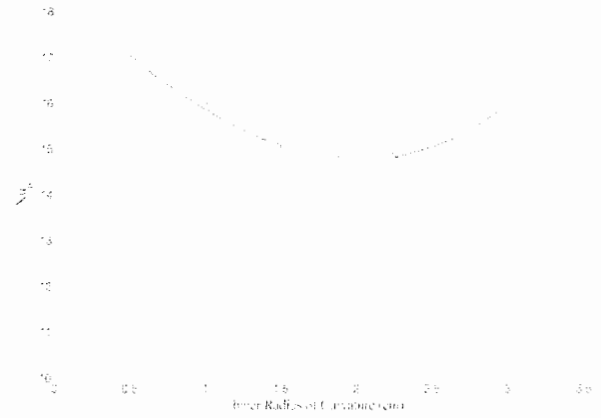


Figure 16: Effect of radius of curvature on  $Nu_m$

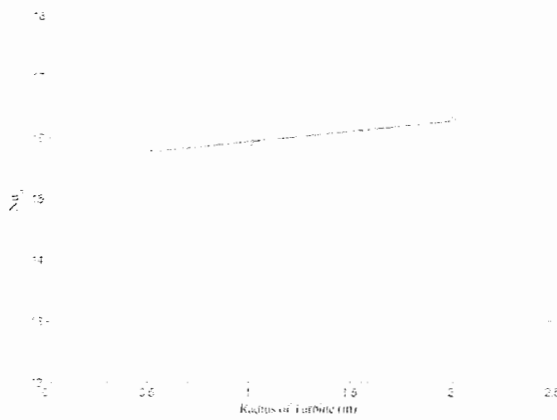


Figure 17: Effect of radius of turbine on  $Nu_m$

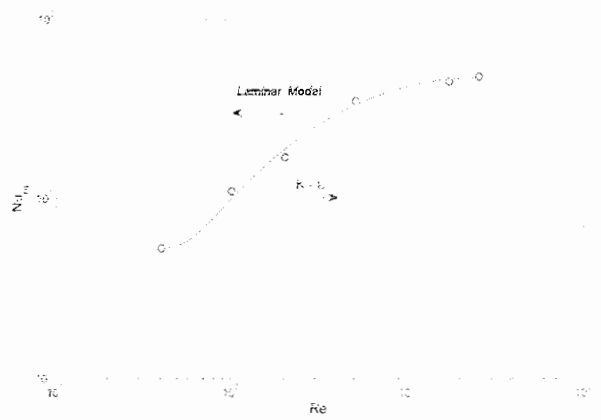


Figure 18: Effect of Reynolds number on  $Nu_m$

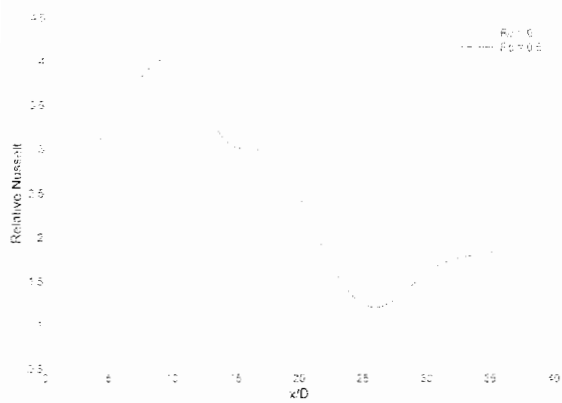


Figure 19: Effect of rotation number on  $Nu$



Figure 20: Comparison between K- $\epsilon$  method and Experimental Result



## References

- [1] J.C. Han, S. Dutta, S. Ekkad, *Gas Turbine Heat Transfer and Cooling Technology*, First Edition, Taylor & Francis, London, (2000).
- [2] S.C. Cheah, H. Iacovides, D.C. Jackson, H. Ji, B.E. Launder, *LDA Investigation of the Flow Development Through Rotating Ducts*, ASME Paper No. 94-GT-226, (1994).
- [3] J. Bredberg, *Turbulence Modelling for Internal Cooling of Gas Turbine Blades*, Report 01/9, Dept of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Gothenburg, (2002), Also available at <http://www.chalmers.se/~tfd>.
- [4] S. Chakravarthy, T.K. Bose, P. Batten, S. Palaniswamy, U. Goldberg, O. Perroomian, *Convective Heat Transfer Inside Rotating Tubes*, Report AIAA-2000-3356, Metacomp Technologies, Inc., Westlake Village, CA 91316, (2000).
- [5] J. Bredberg, *Prediction of flow and heat transfer inside turbine blade using EARSM,  $k-\varepsilon$  and  $k-\omega$  turbulence model*, Thesis for the degree of licentiate of engineering, Dept of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Gothenburg, (2002). Also available at <http://www.chalmers.se/~tfd>.
- [6] D.C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, First Edition, DCW Industries Inc, Glendale, California, (1993).
- [7] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, First Edition, John Benjamin's Publishing Co. (1980).
- [8] K.A. Hoffmann, S.T. Chiang, *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, First Edition, two volumes, Austin, Texas, (1989).
- [9] B. Sunden, M. Faghri, *Heat Transfer in Gas Turbine*, First Edition, WIT Press, Boston, (2001).
- [10] A.J. Chorin, *A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems*, Journal Computational Physics, Vol. 2, (1967), pp.12-26.
- [11] F.H. Harlow, J.E. Welch, *Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface*, Vol. 8, (1965), pp.2182-2189.
- [12] D.G.N. Tes, D.B. McGrath, *A Combined Experimental/Computational Study of Flow in Turbine Blade Cooling Passage*, Presented at the International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exposition, Houston, Tex., June 5-8, ASME Paper 95-GT-355, (1995).
- [13] H. Schlichting, K. Gersten, E. Krause, H. Oertel, C. Mayes (Translator), *Boundary-Layer Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2000).
- [14] J.H. Wagner, B.V. Johnson, F.C. Kopper, *Heat Transfer in Rotating Serpentine Passages with Smooth Walls*, ASME Journal of Turbomachinery, Vol.113, (1991), pp.321-330.

## Abstracts

Gas turbine are used for aircraft propulsion and in land-based power generation or industrial applications .Thermal efficiency and power output of gas turbines increase with increasing turbine rotor inlet temperatures but metallurgical problems restrict this temperature. For increasing the temperature of hot fluid to turbine entrance, thermal protection of turbine is necessary. Internal cooling is a common method for thermal protection of turbine blades. For internal cooling of gas turbine blades, a U-shape bend pass is placed inside each of them and a coolant fluid is passed through this cavity to reduce the thermal stress in blade. In this research work, hydrodynamic and thermal behaviour of coolant fluid were solved by Marker and Cell method and procedure of discretization of governing equations and 3D mesh generation were explained in detail. Specially in this project, combination of secondary flows (secondary flows of curvature and secondary flows of rotation) in U-shape bend and effect of centrifugal force in pressure field were investigated .Finally the effect of physical parameters ( i.e. : Reynolds number, rotation number ) and geometrical parameters( i.e. : turbine diameter , radius of curvature of U-shape bend and stagger angle) on internal cooling were investigated via CFD codes.

*Numerical Modeling for  
Internal Cooling of Gas  
Turbine Blades*