



دانشگاه سندھ

دانشکده مهندسی مکانیک

مرکز طراحی کاربردی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تحلیل ارتعاشی یک ورق ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت بار عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول باروش عددی

دانشجو

جلال عبدالآبادی

استاد راهنما

دکتر حمید رضا ایک چھی

شہر پورہ 92

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: مهندسی مکانیک

گروه: طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای جلال عبدالله آبادی

تحت عنوان: تحلیل ارتعاشی یک ورق ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت بار عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با روش عددی

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:

تقدیم به

پدر و مادرم

و به تمام آزاد مردانی که نیک می اندیشند و عقل و منطق را پیشه خود نموده و جز رضای الهی و پیشرفت و سعادت جامعه، هدفی ندارند

دانشمندان، بزرگان و جوانمردانی که جان و مال خود را در حفظ و اعتلای این مرز و بوم فدا نموده و می نمایند.

شکرتان نثار از دستان که توفیق را رفیق را هم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم. از استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر حمیدرضا ایک چی به عنوان استاد راهنما که همواره بخاندانه را مورد لطف و محبت خود قرار داده اند، کمال شکرت را دارم.

این پایان نامه را ضمن شکرت و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم.

مخضرات ز شند پدر و مادر عزیزم به خاطر همه ی تلاشهای محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی ام انجام داده اند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته اند

به استادان فرزانه و فرهیخته ای که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند

به آنان که در راه کسب دانش را به ما هدایت نمودند

به آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه ی راهم بود.

## تعهد نامه

اینجناب جلال عبدالله آبادی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل ارتعاشی یک ورق ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت بار عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با روش عددی تحت راهنمایی دکتر حمیدرضا ایک چی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجناب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

## تاریخ

### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

در این پایان نامه حل عددی ارتعاش یک ورق متحرک ویسکوالاستیک تحت بار عرضی جهت به دست آوردن جابجایی ها و فرکانس های آن بر پایه تئوری برشی مرتبه اول ارائه می شود. برای این منظور معادلات حاکم بر سیستم با فرض مدل استاندارد خطی زرن نوع دوم برای جنس ماده به کمک اصل هامیلتون استخراج شده و با روش گالرکین، بخش های زمانی و مکانی آن جدا می شود. جهت حل معادلات حاکم بر رفتار سیستم که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بر حسب زمان است از روش

تفاضلات محدود استفاده می‌شود. پاسخ ورق در حین زمان حل و نیز حساسیت این مقادیر به پارامترهای هندسی ورق و نیز خواص ویسکوالاستیک بررسی می‌شود. همچنین فرکانس طبیعی سیستم و وابستگی آن به هندسه و جنس ورق بررسی می‌گردد.

### **کلمات کلیدی**

ورق متحرک محوری- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول- المان محدود- ویسکوالاستیک

## فهرست مطالب

ج	..... تعهد نامه	
و	..... چکیده	
ح	..... فهرست	
1	..... کلیات و مرور مقالات	فصل 1
2	..... 1-1- مقدمه	
2	..... 2-1- معرفی برخی از پیوستارهای متحرک	
3	..... 3-1- کاربردهای پیوستارهای متحرک	
5	..... 4-1- مرور برخی مقاله‌های مرتبط با سازه‌های متحرک محوری	
7	..... 5-1- مروری بر کاربرد المان محدود و تئوری‌های مختلف در ورق‌ها	
9	..... 6-1- مروری بر برخی مقالات دینامیک ورق‌ها	
14	..... 7-1- جمع‌بندی	
15	..... استخراج معادلات	فصل 2
16	..... 1-2- مقدمه	
16	..... 2-2- استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات وب الاستیک متحرک محوری بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول	
17	..... 1-2-2- میدان جابجایی	
18	..... 2-2-2- نتیجه‌های تنش	
20	..... 3-2-2- استفاده از اصل هامیلتون	
21	..... 4-2-2- محاسبه انرژی کرنشی وب الاستیک متحرک	
21	..... 5-2-2- محاسبه انرژی جنبشی وب الاستیک متحرک	
22	..... 6-2-2- محاسبه کار حاصل از نیروهای خارجی اعمالی	
23	..... 7-2-2- استخراج معادله حاکم بر وب الاستیک متحرک	
24	..... 3-2- اعمال فرض ویسکوالاستیک به معادلا	
28	..... 4-2- جمع‌بندی	
29	..... اعمال روش گالرکین برای حل المان محدود مساله	فصل 3
30	..... 1-3- مقدمه	
30	..... 2-3- تعیین معادلات حاکم توسط روش گالرکین	
39	..... 3-3- توابع شکل	
40	..... 4-3- اعمال شرایط مرزی و محاسبه شار	



42.....	5-3- روند تشکیل و مونتاژ ماتریس‌ها	
44.....	6-3- روش تقریب تفاضلات محدود	
44.....	7-3- روند استخراج فرکانس طبیعی	
45.....	8-3- جمع‌بندی	
46.....	بررسی نتایج	فصل 4
47.....	1-4- مقدمه	
47.....	2-4- پاسخ کلی سیستم به ازای مقادیر اولیه	
48.....	1-2-4- روند حل برای بدست آوردن پاسخ وب	
50.....	2-2-4- پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان	
51.....	3-2-4- تاثیر بار محوری بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان	
51.....	4-2-4- تاثیر سرعت حرکت محوری وب بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان	
52.....	5-2-4- تاثیر ضخامت وب بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان	
55.....	6-2-4- تاثیر طول وب بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان	
56.....	7-2-4- تاثیر پارامتر $E_1$ بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان	
57.....	8-2-4- تاثیر پارامتر $E_2$ بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان	
58.....	9-2-4- تاثیر پارامتر $h$ بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان	
59.....	3-4- فرکانس طبیعی	
59.....	4-4- جمع‌بندی	
60.....	نتیجه‌گیری و پیشنهادها	فصل 5
61.....	1-5- مقدمه	
61.....	2-5- نتایج	
62.....	3-5- پیشنهادها	
64.....	پیوست‌ها	
65.....	الف- بررسی تئوری‌های ورق	
65.....	الف- 1- مروری بر تئوری‌های بررسی رفتار ورق‌ها	
68.....	الف- 2- تئوری کلاسیک (کیرشهف) ورق (CPT)	
70.....	الف- 3- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)	
73.....	الف- 4- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم (TSDT)	
75.....	پیوست ب- معرفی مواد ویسکوالاستیک	
75.....	ب- 1- مقدمه	
75.....	ب- 2- خواص مواد ویسکوالاستیک	
75.....	ب- 2-1- خزش	
77.....	ب- 3- مدل‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک	

78	ب-3-1- مدل ماکسول .....
80	ب-3-2- مدل کلونین .....
82	ب-3-3- مدل استاندارد خطی .....
83	ب-3-4- مدل زنر نوع اول .....
84	ب-3-5- مدل زنر نوع دوم .....
85	ب-3-6- مدل ویچرت .....
87	پیوست ج- روش المان محدود .....
87	ج-1- مقدمه .....
91	ج-2- روش اجزای محدود .....
95	منابع .....
100	عنوان انگلیسی .....

## فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه
شکل (1-2) شماتیک وب متحرک تحت بار عرضی و کششی طولی.....16	
شکل (2-2) لبه تغییر شکل یافته و بدون تغییر شکل در تئوری کلاسیک و مرتبه اول.....18	
شکل (3-2) المان‌های نشان دهنده منتجه‌های تنش.....20	
شکل (4-2) مدل زبر نوع دوم.....25	
شکل (1-3) المان دو بعدی مسأله با سه گره.....40	
شکل (1-4) جابجایی عرضی نقطه وسط وب در طی زمان برحسب تعداد المان.....48	
شکل (2-4) جابجایی عرضی نقطه وسط وب در طی زمان برحسب گام زمانی.....48	
شکل (3-4) شماتیک بارگذاری عرضی و کششی وارد بر وب.....49	
شکل (4-4) بارگذاری گسترده عرضی وب.....49	
شکل (5-4) جابجایی طولی نقطه وسط وب در طی زمان.....50	
شکل (6-4) جابجایی عرضی نقطه وسط وب در طی زمان.....50	
شکل (7-4) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با بارهای کششی متفاوت در طی زمان.....51	

شکل(8-4) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با بارهای کششی متفاوت در طی  
زمان.....51

شکل(9-4) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با سرعت‌های محوری متفاوت در طی  
زمان.....52

شکل(10-4) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با سرعت‌های محوری متفاوت در طی  
زمان...52

شکل(11-4) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با ضخامت وب متفاوت در طی  
زمان.....53

شکل(12-4) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با ضخامت وب متفاوت در طی  
زمان.....53

شکل(13-4) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با ضخامت وب متفاوت با سرعت  
بالا.....54

شکل(14-4) واگرایی جابجایی طولی نقطه وسط وب با ضخامت وب متفاوت با سرعت  
بالا.....54

شکل(15-4) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با ضخامت وب متفاوت با سرعت  
بالا.....55

شکل(16-4) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با طول وب متفاوت در طی  
زمان.....55

شکل(17-4) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با طول وب متفاوت در طی  
زمان.....56

شکل(18-4) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با  $E_1$  متفاوت در طی  
زمان.....56

شکل(19-4) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با  $E_1$  متفاوت در طی  
زمان.....57

شکل (4-20) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با  $E_2$  متفاوت در طی زمان ..... 57

شکل (4-21) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با  $E_2$  متفاوت در طی زمان ..... 58

شکل (4-22) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با  $h$  متفاوت در طی زمان ..... 58

شکل (4-23) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با  $h$  متفاوت در طی زمان ..... 59

شکل (الف-1) هندسه اولیه و تغییر شکل یافته یک لبه ورق از دیدگاه تئوری‌های مختلف ..... 67

شکل (الف-2) نیروها و ممان‌ها در المان ورق ..... 69

شکل (ب-1) نمودار کرنش-زمان برای خزش و بازیافت آن ..... 76

شکل (ب-2) نمودار کرنش-زمان برای رهایش و بازیافت آن ..... 77

شکل (ب-3) مدل الاستیک ..... 78

شکل (ب-4) مدل ویسکوز ..... 78

شکل (ب-5) مدل ماکسول ..... 79

شکل (ب-6) رفتار مواد ویسکوالاستیک در مدل ماکسول ..... 80

شکل (ب-7) مدل

81..... کلوین

شکل (ب-8) رفتار مواد ویسکوالاستیک در مدل

81..... کلوین

شکل (ب-9) مدل استاندارد

82..... خطی

شکل (ب-10) رفتار مواد ویسکوالاستیک در مدل استاندارد

83..... خطی

شکل (ب-11) مدل زنر نوع

84..... اول

شکل (ب-12) مدل زنر نوع

85..... دوم

شکل (ب-13) شماتیک مدل

86..... ویچرت

## فهرست جدول‌ها

صفحه	عنوان
مرتبۀ	جدول (1-3) ضرایب روش پسروری تفاضلات محدود با خطای مرتبۀ
	دو ..... 44
هندسه	جدول (1-4) مقادیر اولیه انتخابی برای خصوصیات ماده، بارگذاری و هندسه
	وب ..... 47
معادله	جدول (2-4) فرکانس‌های دو
	کوپل ..... 61

### علائم و اختصارات

ماتریس‌های ضرایب	$[A_i]$	کرنش‌های نرمال	$e_x, e_y, e_z$
اپراتور مشتق زمانی	$D$	چگالی	$r$
مساحت سطح المان انتخاب شده	$dA$	زمان رهایش، تنش برشی	$t$
سختی فنرها در مدل رئولوژیکی	$E_1, E_2$	مختصه زمانی	$t$
مدول رهایش برشی	$G(t)$	تنش نرمال، نرخ تنش	$\dot{s}, s$
مدول بالک	$K$	ویسکوزیته برشی	$h$
ضریب تصحیح برشی	$K_s$	تنش‌های نرمال	$s_x, s_y, s_z$
فشار عرضی ثابت	$P$		
نیروی کشش، انرژی جنبشی	$T$		
مولفه‌های جابجایی	$u, v, w$		
توابع مجهول از بعد چرخش	$u_1, v_1$		
عرض ورق	$b$		
سرعت انتقال وب متحرک	$c$		
مدول کشش	$E$		
مدول برشی	$G$		
ضخامت وب	$h$		
تابع کامپلینس خزشی	$J(t)$		
مدول رهایش بالک	$K(t)$		
طول وب	$L$		
مولفه‌های جابجایی صفحه	$u_0, v_0, w_0$		



میان	
مختصه‌های طولی، جانبی و عرضی ورق	$x, y, z$
مدول رهايش بالک	$K(t)$
منتجه‌های تنش	$N_x, N_y, N_{xy}$
منتجه‌های تنش	$M_x, M_y, M_{xy}$
منتجه‌های تنش	$Q_x, Q_y$

# فصل 1

## کلیات و مرور مقالات

## 1-1- مقدمه

امروزه پیوستارهای متحرک بطور وسیعی در کاربردهای صنعتی مختلفی از جمله انتقال قدرت و بار مشاهده می‌شوند. از این رو جهت بهره‌وری بهینه از این سازه‌ها، بررسی‌های علمی و دقیقی مطلوب می‌باشد. مشکل اصلی در بررسی این سازه‌ها، مدلسازی آنها می‌باشد. از طرفی، پیش از بررسی پیوستارهای متحرک، شناخت انواع پیوستارها ضروری می‌نماید. از این رو در این فصل ابتدا به معرفی انواع پیوستارها، کاربرد و مدلسازی پیوستارهای متحرک پرداخته می‌شود. سپس تاریخچه‌ای از حل این سازه‌ها، به اختصار بیان می‌گردد. در پایان برخی از مقالات منتشر شده در دهه اخیر و در زمینه‌های مختلف ارتعاشات ورق‌های ویسکوالاستیک ساکن، ورق‌های تحت جرم و بار متحرک، پیوستارهای الاستیک و ویسکوالاستیک متحرک محوری، تیرهای ویسکوالاستیک متحرک محوری و همچنین ارتعاشات ورق بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی<sup>1</sup> بررسی می‌شوند.

## 1-2- معرفی برخی از پیوستارهای متحرک [2و1]

**الف - رشته<sup>2</sup>:** ساده‌ترین عضو مکانیکی که فقط نیروی کشش ساده را در حالت یک بعد تحمل می‌کند، رشته می‌نامند. طنابها، تارها و زنجیرها جزء رشته‌ها محسوب می‌شوند.

**ب - غشاء<sup>3</sup>:** غشاء تعمیم حالت دوبعدی رشته می‌باشد (یعنی نیروی کششی را در حالت دو بعدی تحمل می‌کند). کاغذها و ورق‌های نازک جزء غشاءها می‌باشند. این دسته از پیوستارها جزء ورقها تقسیم می‌شوند.

**ج - تیر:** اگر رشته علاوه بر نیروی کششی، نیروی فشاری و لنگر خمشی را نیز تحمل کند، آن را تیر می‌نامند.

**د - ورق:** تعمیم تیر به حالت دو بعدی را ورق گویند. از آنجایی که روابط موجود در این پایان‌نامه برای ورق است، بنابراین در پیوست الف به صورت کامل به تشریح ورقها پرداخته شده است.

---

<sup>1</sup> Shear Deformation Theory

<sup>2</sup> String

<sup>3</sup> Membrane

ه - وب<sup>1</sup>: در حالت کلی، پیوستار متحرک محوری به شکل ورق نازک و مستطیل شکل مسطح را وب می‌نامند. مسائل مرتبط با دینامیک چنین سازه‌هایی، در صنایع ساخت و رنگ‌کاری ورقها و پارچه‌ها قابل مشاهده می‌باشد. در طی پروسه‌های ساخت، سرعت انتقال وب‌ها حتی به 50 متر بر ثانیه نیز می‌رسد. تحت شرایط خاصی، چنین سرعت‌های بالایی می‌توانند منجر به ارتعاشات رزونانسی، ناپایداری یا لرزش صفحات وب شوند. این رفتارها نیز می‌توانند چین‌خوردگی و شکست وب‌ها را در طی حرکت ایجاد کنند. تغییرات نیروی کششی وب که از ارتعاشات آن پیروی می‌کنند، می‌تواند تغییر در ضخامت ورق در حال ساخت را به همراه آورد.

### 1-3- کاربرد پیوستارهای متحرک

پیوستارهای متحرک در کاربردهای صنعتی مختلفی قابل مشاهده می‌باشند. از جمله‌ی این کاربردها عبارتند از: تسمه‌های انتقال قدرت، تسمه‌های انتقال بار، تیغه‌ی اره‌های نواری، سیستم‌های پروسه‌ی ساخت ورق‌ها، فرآیند ساخت و نقاشی روی پارچه، نوارهای منسوجات طی ساخت و فرآوری. در تمام کاربردهای صنعتی مذکور، به منظور افزایش کارایی و سرمایه‌گذاری بهینه و ارزش بهره‌وری، در دستگاهها و تاسیسات گران‌قیمت و پیچیده، سرعت انتقال ماکزیمم مطلوب می‌باشد. البته رفتار دینامیکی سیستم متحرک محوری، از دستیابی به آن جلوگیری می‌کند. بنابراین برای ورق‌های متحرک یک سرعت بحرانی تعریف می‌شود که برای سرعت‌های بالاتر از آن ناپایداری‌های دینامیکی مختلفی، اغلب به صورت واگرایی، ارتعاشات اضافی، لرزش و یا حتی شکست صفحات وب قابل مشاهده است. سرعت بحرانی، سرعت محوری است که در آن بخش حقیقی مقادیر ویژه سیستم به صفر میل می‌کنند و سیستم دچار ناپایداری به صورت کماتش می‌شود. همانطور که پیشتر نیز گفته شد، در برخی از این سازه‌های متحرک، سرعت محوری حتی تا 3000 متر بر دقیقه (50 متر بر ثانیه) نیز می‌رسد. بنابراین در بررسی دینامیکی چنین سیستم‌هایی، پاسخ و پایداری دینامیکی مربوط به ارتعاشات عرضی حائز اهمیت می‌باشد و برای اطمینان از کارکرد سیستم در شرایط پایدار، باید تحلیل

---

<sup>1</sup> Web

دینامیکی کاملی از آن به عمل آید.

مهمترین مسئله در بررسی ورق‌های متحرک محوری، مدلسازی آن می‌باشد. این مدلسازی از دو دیدگاه قابل بررسی است: یکی از نظر خصوصیات (جنس) ماده مورد استفاده و دیگری از نظر ابعادی (مدل یا مختصه‌های در نظر گرفته شده برای مسئله).

در بسیاری از مطالعاتی که تاکنون بر دینامیک پیوستارهای متحرک محوری انجام شده، خصوصیات مواد به صورت الاستیک در نظر گرفته شده است. این فرض که منجر به یک ساده‌سازی در مدل ریاضی مسئله می‌شود، در برخی از موادی که در عمل ملاحظه می‌شوند، مورد قبول می‌باشد. اما امروزه با پیشرفت تکنولوژی و ظهور مواد جدید، پیوستارهایی از جنس مواد تقویت شده فلزی و سرامیکی، مواد پلیمری و مواد مرکب تولید می‌شوند. بسیاری از این مواد به طور ذاتی رفتارهای ویسکوالاستیک از قبیل جریان ویسکوز و نرخ کرنش وابسته به سابقه‌ی بارگذاری در محدوده‌ی وسیعی از تنش و نرخ کرنش، از خود نشان می‌دهند. بنابراین این مواد از قانون هوک پیروی نمی‌کنند و باید رفتار ویسکوالاستیک آنها با معادلات رفتاری مناسب مدل شود. همچنین برای بسیاری از موادی که در موقعیت‌های حساس و حیاتی به کار می‌روند، ارائه یک مدل کامل‌تر، که رفتار ماده‌ی مورد استفاده را شامل شود، ضروری می‌باشد. بنابراین در مواردی که تئوری‌های الاستیسیته و ویسکوزیته، هر کدام به تنهایی، برای مدل کردن رفتار سازه کافی نمی‌باشند، تئوری ویسکوالاستیسیته به کار می‌رود.

برای مدلسازی پیوستارهای متحرک محوری می‌توان از مدل‌های یک‌بعدی تئوری رشته متحرک و تئوری تیر و یا مدل‌های دوبعدی تئوری ورق استفاده کرد. اگرچه تئوری ورق، توصیف دقیق‌تری از حالت فیزیکی وب ارائه می‌دهد، اما معادلات حاکم از نظر ریاضی بسیار پیچیده بوده و حل تحلیلی آن بسیار دشوار می‌باشد. تئوری‌های رشته متحرک و تیر در تعداد زیادی از مطالعات انجام شده برای مدلسازی پیوستارهای دوبعدی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. مطالعات صورت گرفته نشان داده است که این ساده‌سازی در اکثر موارد، به نتایج قانع‌کننده‌ای منجر می‌شود. بخصوص در ورق‌های با سفتی

خمشی کوچک (وب)، نتایج حاصله با نتایج تئوری ورق یکسان می‌باشد. اما در بسیاری از موارد دیگر، مانند وقتی که پهنای ورق، خصوصیات اورتوتروپیکی سیستم، تغییر در توزیع بار در راستای عرض ورق، ورق‌های کامپوزیتی (مرکب)، لایه‌های واسطه و یا نقاط تکیه‌گاهی مورد ملاحظه باشد، این ساده‌سازیها رضایت‌بخش نمی‌باشند و برای بررسی‌های دینامیکی، استفاده از تئوری ورق ضروری می‌نماید.

#### 1-4- مرور برخی مقاله‌های مرتبط با سازه‌های متحرک محوری

لی و جانگ [3] توسط روش ( $SEM^1$ )، خواص پایداری یک تیر الاستیک بینهایت و متحرک برای یک بازه محدوده با ورودی و خروجی مشخص را مورد بررسی قرار دادند. تیر بر روی تکیه‌گاه ساده مبنای این بررسی بوده است. این بررسی‌ها نشان داد با افزایش سرعت فرکانس اصلی کاهش می‌یابد. دینگ و چن [4] آنالیز عددی و تقریبی ارتعاشات اجباری غیرخطی تیرهای ویسکوالاستیک متحرک محوری را انجام دادند. آن‌ها نشان دادند مودهای تشدید غیر اول روی حالت پایداری اثر بسیار ضعیفی دارند، دامنه پایای حالت پایداری با افزایش سختی فنرهای چرخشی مرزی کاهش می‌یابند. و اگر دامنه تحریک به اندازه کافی بزرگ باشد و ضریب ویسکوزیته به اندازه کافی کوچک باشد پدیده پرش وجود دارد.

بشارتی و همکاران [5] بررسی جامعی بر روی رفتار مواد ویسکوالاستیک و روش‌های یافتن مشخصه‌های دینامیکی آن انجام داده و سپس با تحلیل پاسخ فرکانسی که از روش آزمایشگاهی بدست می‌آید، این مشخصه‌ها را برای یک ماده ویسکوالاستیک نمونه اندازه‌گیری کردند. در این روش اثرات پدیده‌ی تشدید در فرکانس‌های بالاتر در ایجاد خطا بررسی شده است و با یک روش تحلیلی این خطاها حذف شده است. پیدا کردن مدول مختلط با روش آزمایش‌های استاتیکی میسر نمی‌شود و فقط با تست‌های دینامیکی می‌توان آن را بدست آورد. در این جا روش غیر تشدید<sup>2</sup> بر روی یک نمونه

<sup>1</sup> Strip element method

<sup>2</sup> Non resonant method

ویسکوالاستیک بکار گرفته شده است. امتیاز این روش رنج وسیع فرکانسی و بکارگیری آن در فرکانس های قبل و بعد از تشدید می باشد.

چن و یانگ [6] رزونانس پارامتریک در ارتعاش عرضی برای تیرهای ویسکوالاستیک متحرک محوری با سرعت محوری نوسانی را بررسی نمودند. معادله دیفرانسیل مشتق جزئی غیر خطی ارتعاش عرضی با استفاده از قانون دوم نیوتون بدست آمده است و با در نظر گرفتن کشش به صورت کشش متوسط، معادله به فرم مشتق - انتگرالی در آمده است. روش مقیاس های چندگانه<sup>1</sup> برای محاسبه پاسخ حالت پایدار دو مدل ارائه شده است. حل های تقریبی برای دامنه ارتعاش از شرایط حل پذیری حذف جمله های سکولار بدست آمده است. پایداری تعادل مستقیم و پاسخ حالت پایدار غیر بدیهی با استفاده از تئوری پایداری خطی لیپانوف تحلیل شده است. با استفاده از حل های عددی تأثیر سرعت نوسانی، ویسکوزیته و جمله های غیرخطی بر پاسخ معادلات و هم چنین مقایسه نتایج دو مدل را ارائه کرده اند.

چن و تانگ [7] رزونانس های اصلی پارامتریک تیرهای ویسکوالاستیک شتاب محوری با تمرکز بر شناخت تنش های متغیر طولی را بررسی کردند. پارامترهای ارتعاشی غیرخطی تیر با اثرات تغییر کشش طولی، تغییر می کنند. معادلات توسط روش هامیلتون استخراج شدند. افزایش تنش طولی ناحیه فرکانس ناپایداری را کاهش و دامنه نوسان پاسخ را افزایش می دهد. نوسان پاسخ حالت پایا به پارامترهای سختی تکیه گاه طولی وابسته نیست. فرکانس ناپایداری با افزایش سرعت و سختی تیر افزایش می یابد.

چن و همکاران [8] پایداری دینامیکی تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت رزونانس پارامتریک را بررسی کردند. تأثیر تغییر شکل برشی و ممان چرخشی به وسیله تئوری تیر ضخیم تیموشنکو در نظر گرفته شده است. در روابط از مدل کلوین و مشتق مادی زمان استفاده شده است. معادلات دیفرانسیل با استفاده از قانون دوم نیوتون، قانون مومنوم زاویه ای اویلری و روابط مرتبط

---

<sup>1</sup> Multiple scale

استفاده شده است. روش مقیاس‌های چندگانه برای تعیین شرایط پایداری در رزونانس پارامتریک مجموع و رزونانس پارامتریک اصلی استفاده شده است. شرط لازم و کافی برای پایداری از طریق معیار راث-هرویتس تعیین شد. با استفاده از حل‌های عددی تأثیر پارامترهای مختلف روی مرزهای پایداری بررسی شده است.

مارینوسکی و کاپیتانیاک [9] مشخصات پایداری و نوسان ورق‌های دو بعدی متحرک را بررسی کردند. کاربرد تیرهای یک بعدی مشابه ورق اجزای شناخت محدوده‌ی پایداری و تخمین سرعت بحرانی را می‌دهد. آن‌ها برای جنس تیر دو مدل مختلف کلونین-ویت و برگر را در نظر گرفتند، همچنین حل عددی کاملاً غیرخطی و معادلات خطی را مقایسه کردند. براساس نتایج آنان تأثیرات سرعت پیمایش خطی و میرایی داخلی بر روی دینامیک پایداری ورق‌های متحرک به صورت جزئی مطالعه شده است، مطالعه عددی کلونین-ویت و برگر نشان می‌دهد که هر دو مدل نتایج مشابهی برای مقادیر کوچک میرایی داخلی می‌دهد و می‌توان نتایج آن‌ها را برای ضرایب میرایی کوچک یکی دانست. برای ضرایب میرایی بزرگتر مدل برگر نتایج قابل اطمینان‌تری می‌دهد.

## 1-5- مروری بر کاربرد المان محدود و تئوری‌های مختلف در ورق‌ها

تاکنون کارهای زیادی در مورد تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی منتشر شده است که بخش وسیعی از این مطالعات به تحلیل ورق‌های نازک بر مبنای تئوری کلاسیک اختصاص دارد از آنجا که در تئوری کلاسیک ورق از اثر تغییر شکل‌های برشی و اینرسی دورانی صرف نظر میشود بنابراین حوزه اعتبار این تئوری برای ورق‌های نازک بوده و با افزایش ضخامت ورق بر مقدار این خطا افزوده میشود.

بخش عمده مطالعات صورت گرفته در تحلیل ارتعاشات ورق‌های ضخیم، بر پایه تئوری برشی مرتبه اول است که توسط میندلین و رایزنر<sup>1</sup> معرفی گردید. در این تئوری اثر تغییر شکل‌های برشی

---

<sup>1</sup> Reissner



عرضی در نظر گرفته شده است و با احتساب اثر اینرسی دورانی در معادلات دینامیکی، نتایج بهبود داده شده است.

فوگال و شیمی [10] مروری از تئوری‌های ورق ارائه نموده‌اند و ضمن بررسی نتایج آن‌ها با تئوری الاستیسیته سه بعدی، مزایا و معایب هر یک را بیان کردند. نور و بورتون [11] نیز هشت تئوری مختلف ورق را با یکدیگر مقایسه نمودند و نقاط قوت و ضعف هر یک از تئوری‌ها را برای عوامل مختلف بررسی کردند. لیو و همکاران [12]، مرور جامعی از مطالعات صورت گرفته بر روی ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی ارائه نمودند. باترا و جین [13] با استفاده از روش المان محدود ارتعاشات ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند ناهمسانگرد را بر پایه تئوری برشی مرتبه اول مطالعه کردند. چاندراشخارا و آگاروال [14] نیز رفتار ارتعاشات ورق‌های کامپوزیتی لایه ای را به روش المان محدود و بر اساس تئوری برشی مرتبه اول تحلیل کردند. رستگار و همکاران [15]، پس از استخراج معادلات بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم<sup>1</sup> (TSDT)، با استفاده از روش المان محدود، فرکانس‌های طبیعی ورق‌های کامپوزیتی مربعی با شرایط مرزی مختلف را بدست آوردند. از جمله مطالعات صورت گرفته بر روی ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی همسانگرد اورتوتروپیک و ناهمسانگرد لایه‌ای و ساندویچی با شرایط مرزی مختلف به روش المان محدود و بر پایه تئوری مرتبه بالای ردی می‌توان به کارهای لیو [16] و نایاک و همکاران [17] اشاره کرد. لی و همکاران [18] با بهره‌گیری از سه دسته تابع متفاوت ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیتی چند لایه متقارن را بر پایه تئوری برشی مرتبه اول با روش ترکیبی ریلی - ریتز و کانتورویچ تحلیل نمودند. پاپازوگلو و همکاران [19] و چونگ [20] به ترتیب با بهره‌گیری از چند جمله‌ای لاگرانژ و چند جمله‌ای تابع تیر تیموشنکو ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی همگن ناهمسانگرد به روش ریلی ریتز مطالعه کردند. از جمله مطالعات صورت گرفته با روش نوار محدود<sup>2</sup> برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های

<sup>1</sup> Third-order Shear Deformation Theory

<sup>2</sup> Finite Strip Method

کامپوزیتی چند لایه مستطیلی با شرایط مرزی مختلف بر پایه تئوری های برشی می توان به کارهای داو و وانگ [21] و اخرس و همکاران [22] اشاره کرد. کیان و همکاران [23] ارتعاشات آزاد و اجباری ورق های ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند را بر پایه تئوری برشی مرتبه بالا و روش پتروف گالرکین تحلیل کردند. خدیر و ردی [24] ارتعاشات گذرای ورق های ضخیم چند لایه نامتقارن با شرایط مرزی تکیه گاه ساده تحت بارگذاری دلخواه رامطالعه کردند.

با توجه به پیچیدگی معادلات حرکت در تئوری های برشی تقریباً همه کارهای منتشر شده در ارتباط با تحلیل ارتعاشات ورق های ضخیم به روش های عددی و نیمه تحلیلی اختصاص دارد. اگر چه هاشمی و ارسنجانی [25] برای ارتعاشات آزاد ورق های مستطیلی ضخیم، پاسخ تحلیلی دقیق ارائه کردند. با وجود این، این تحلیل به ورق های همسانگرد محدود می شد.

ژانگ و یانگ [26] پیشرفت های اخیر آنالیز المان محدود برای صفحات لایه ای کامپوزیتی را بررسی کردند. استفاده از کامپوزیت های لایه ای در کاربردهای مختلف صنعتی به خاطر استحکام بسیار بالا، نسبت مقاومت به وزن بالا، زمان خستگی طولانی، مقاومت به خوردنده های شیمیایی در حال افزایش است. در مقاله آن ها تمرکز بر مرور روش المان محدود در دینامیک و ارتعاش آزاد، کمانش، هندسه غیرخطی، آنالیز تغییر شکل زیاد و شکست و عیب صفحات کامپوزیتی مرور شده است.

## 1-6- مروری بر برخی مقالات دینامیک ورق ها

هاشمی و همکاران [27] در پژوهشی آنالیز ارتعاش ورق نسبتاً ضخیم که نسبت ضخامت به طول آن ها بین یک دهم تا یک دهم است با تکیه گاه خطی داخلی با استفاده از روش ریلی ریتز را انجام داده اند. ورق 21 حالت ممکن شرایط مرزی دارد (ترکیبی از حالت گیر ساده و آزاد). معادله بی بعد پتانسیل و انرژی جنبشی بر پایه ی ورق میندلین<sup>1</sup> برای مطالعه ی ورق ضخیم بدست آمده است. با روش ریلی ریتز دو تابع چند جمله ای قابل قبول برای جابه جایی فرض شده است. روش عددی برای محدوده ی وسیعی از نسبت اضلاع به هم و ضخامت به طول ها ارائه شده است. تاثیرات تکیه گاه خطی

---

<sup>1</sup> Mindline plate

و ضخامت به طول بر روی فرکانس به صورت گرافیکی نشان داده شده است. فرکانس با افزایش نسبت ضخامت به طول کاهش می یابد و این روش فقط برای ورق‌های ضخیم مناسب می باشد.

حاتمی و همکاران [28] روش اجزای محدود استاندارد و طیفی براساس نظریه کلاسیک ورق برای تحلیل ارتعاش و پایداری دینامیکی ورق‌های دینامیکی دارای حرکت محوری و تحت اثر نیروهای غشایی را توسعه دادند. فرمولسازی اجزای محدود استاندارد به کمک اصل هامیلتون استخراج شده است. در مقاله آن‌ها دقت و مزایای روش اجزای محدود استاندارد و طیفی مقایسه شده‌اند.

خانا و همکاران [29] با یک طراحی صحیح سازه‌های صفحه‌ای و کاربرد صحیح جنس، رفتار و مقاومت صفحات را به طور دقیق تخمین زد. یک مدل ریاضی برای کاربرد مهندسی، تکنولوژی محور نیز تهیه شده است. تاثیرات دو بعدی دمایی روی فرکانس ارتعاش آزاد ورق‌های مربعی ویسکوالاستیک بررسی شده است. در این مقاله ضخامت در دو جهت سهمی وار و تاثیرات در یک جهت خطی و در جهت دیگر سهمی است. روش ریلی ریتز برای تخمین فرکانس پایه استفاده شده است. هر دو فرکانس توسط آخرین روش‌های محاسباتی متلب<sup>1</sup> برای ضخامت‌های متغیر و گرادیان-های دمایی بدست آمده است.

حاتمی و همکاران [30] بر پایداری ارتعاش یک ورق ارتوتروپیک متحرک محوری بر روی یک تکیه‌گاه الاستیک کار کرده‌اند. در این مقاله از روش تئوری کلاسیک ورق‌ها استفاده شده است. در ابتدا یک حل بر پایه‌ی روش دقیق باریکه محدود (FSM)<sup>2</sup> برای ورق چند قسمتی<sup>3</sup> با تکیه‌گاه الاستیک ارائه شده است. سپس یک روش الحاقی برای بدست آوردن معادله کل ورق انجام شده است و در انتها چند مثال برای نشان دادن صحت روش آورده شده است. در مقاله آن‌ها دو روش (FSM) ارائه شده که یکی دقیق و دیگری تقریبی است. روش دقیق در مورد نوع تکیه‌گاه‌ها محدودیت‌هایی

---

<sup>1</sup> Matlab

<sup>2</sup> Finite Strip Method

<sup>3</sup> Multi-span

دارد، در حالی که روش تقریبی در هر حالت کارایی دارد. تاثیرات نسبت اضلاع، سختی تکیه‌گاه الاستیک و نیروهای صفحه‌ای بر سرعت بحرانی و فرکانس طبیعی نیز بررسی شده است.

صفحات مربعی ویسکوالاستیک کاربرد گسترده‌ای در سازه‌های مکانیکی دارند. گوپتا [31] آنالیز ارتعاش یک ورق مربعی ویسکوالاستیک با ضخامت متغیر خطی در یک جهت و سهموی در جهت دیگر را بررسی کرد. او فرض کرده است که ورق در چهار جهت تکیه‌گاه گیردار دارد. روش ریلی ریتز برای بدست آوردن معادله استفاده شده است. در این مقاله تاثیر تغییر ثابت مخروطی و نسبت اضلاع بر دوره ی تناوب و انحراف برای دو مد اول بررسی شده است.

سوکاپ و ولک [32] یک صفحه مستطیلی ویسکوالاستیک ارتوتروپیک تحت بارگذاری ناگهانی عرضی را بررسی کردند. آن‌ها یک حل تحلیلی برای موج تنش منتشر شده در یک ورق نازک ویسکوالاستیک ارتوتروپیک با بار ناگهانی ارائه کردند. حل بر پایه تئوری تقریبی صفحات نازک کریشف و ریلی است. ترکیب معادلات برای حالت دو بعدی خطی مدل ویسکوالاستیک ماکسول براساس جمع آثار بدست آمده است. بار لحظه‌ای عرضی بر یک قسمت دایره‌ای از صفحه وارد شده است. نتایج به شکل جابه جایی، سرعت و مقادیر تنش بدست آمده است.

چن و چنگ [33] ناپایداری ورق‌های ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه ساده تحت بار داخلی را بررسی کرده‌اند. ماده ویسکوالاستیک از رابطه غیرخطی لیدرمن پیروی می‌کند. معادلات توسط روش گالرکین حل شده است. نتایج عددی برای مقایسه با روش تحلیلی آورده شده است.

حاتمی و همکاران [34] از روش FSM برای تحلیل ارتعاش آزاد ورق محوری متحرک ویسکوالاستیک استفاده شده کردند. با استفاده از معادله حرکت یک ورق متحرک با سرعت ثابت و با استفاده از روشی خاص ماتریس دقیق سختی که شامل مقادیر ویژه، نیروهای داخلی، پارامترهای ویسکوالاستیک، سرعت محوری و هندسه ورق است، بدست می‌آید. با مونتاژ کردن تمام ماتریس‌های سختی، ماتریس سختی کل بدست می‌آید، سپس با یک الگوریتم مناسب مقدار فرکانس طبیعی

سیستم را بدست آوردند. آن‌ها در این مقاله سعی کرده‌اند تاثیر سرعت و پارامترهای ویسکوالاستیک را بر ارتعاش ورق بررسی کنند.

ژو و وانگ [35] دینامیک پایداری ورق‌های ویسکوالاستیک با شتاب محوری را بررسی کرده‌اند. سرعت محوری صفحه‌ی ویسکوالاستیک به صورت یک مقدار هارمونیک حول یک مقدار ثابت فرض شده است. با روش مربع‌سازی تفاضلی<sup>1</sup> بر معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر ارتعاش عرضی حل شده است. نتیجه مطالعه آن‌ها نشان می‌دهد برای صفحات چهار تکیه‌گاه ساده (SSSS) و ورق با دو تکیه‌گاه ساده و دو تکیه‌گاه گیردار (CSCS) با افزایش زمان تاخیر محدوده پایداری کاهش می‌یابد، با افزایش سرعت متوسط، محدوده‌ی پایداری کاهش می‌یابد. در کل برای پارامترهای مشابه محدوده‌ی پایداری (CSCS) کوچکتر از (SSSS) است.

فنگ و مین [36] بر روی ارتعاش ورق متحرک محوری ویسکوالاستیک با ضخامت متغیر سهموی کار کردند. معادلات ویسکوالاستیک ورق مستطیلی توسط روش کلونین-ویت، با ضخامت متغیر سهموی در راستای محور  $y$  بدست آمده‌اند. فرکانس‌های مختلف بدون بعد ورق ویسکوالاستیک با شرایط مرزی مختلف براساس نسبت‌های متنوع عرض به طول، پارامتر ضخامت و زمان تاخیر بدون بعد توسط روش حداقل مربعات حل شده است. تاثیرات پارامترهای مختلف بر ارتعاش ورق بحث شده است.

ارتعاش ورق متوازی‌الاضلاع ویسکوالاستیک با ضخامت متغیر سهموی توسط گوپتا و همکاران [37] مورد بررسی قرار گرفت. در این مقاله فرض چهار تکیه‌گاه گیردار<sup>2</sup> و ضخامت متغیر سهموی در یک جهت در راستای طولی ورق است. روش ریلی ریتز برای بدست آوردن فرکانس معادله استفاده شده است. برای حالت ویسکوالاستیک اصول الاستیک و ویسکوز المان‌ها ترکیب شده‌اند. در این مقاله از مدل کلونین که المان الاستیک (فدر) و ویسکوز (دمپر) آن موازی هستند استفاده شده است. آن‌ها

---

<sup>1</sup> Differential quadrature

<sup>2</sup> Clamped

بسامد و انحراف در نقاط مختلف برای مقادیر مختلف زاویه ی کجی، نسبت اضلاع و ثابت باریک شدن برای دو مد اول را بدست آورده‌اند. آلیاژی از آلومینیوم برای کلیه نتایج عددی استفاده شده است. زمان نوسان در حالت تغییر سهموی ضخامت بیشتر از تغییر خطی است. در انتها این که تغییرات سهموی مفیدتر است.

گوپتا [38] ارتعاش آزاد ورق مستطیلی تکیه‌گاه گیردار ویسکوالاستیک با تغییر نمایی دو جهتی ضخامت را نیز بررسی کردند. آن‌ها از مدل کلونین برای خاصیت ویسکوالاستیک که شامل یک فنر و دمپر موازی است استفاده کردند. یک معادله تقریبی اما کاملاً مناسب با روش ریلی ریتز بدست آمده است. کاهش لگاریتمی دوره تناوب و انحراف دو مد اول ارتعاش برای مقادیر متفاوت ثابت مخروطی شدن و نسبت طول به عرض محاسبه شده است. بعد از مقایسه، نویسندگان نتیجه گرفته اند که با افزایش ثابت مخروطی شدن برای ضخامت متغیر نمایی دوره‌ی تناوب کاهش می یابد.

چن و چن [39]، ناپایداری ورق ایزوتروپیک، همگن با تکیه‌گاه ساده تحت بار نوسانی داخلی را بررسی کرده‌اند، جنس ویسکوالاستیک در نظر گرفته شده و از رابطه غیرخطی لیدرمن پیروی می‌کند. معادلات به روش گالرکین به دست می‌آید. روش متوسط برای بدست آوردن شرایط ناپایداری بکار برده شده است. روش عددی با روش تحلیلی مقایسه شده است.

ری [40] جهت تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق کامپوزیتی لایه‌ای از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه صفر<sup>1</sup> (ZSDT) استفاده کرد. وی از مقایسه نتایج خود با کارهای قبلی دریافت که استفاده از تئوری‌های تغییر شکل برشی برای هر دو ورق نازک و ضخیم پاسخ‌هایی با دقت کافی ارائه می‌دهد.

صالحی و آقایی [41]، بر مبنای تئوری تغییر شکل مرتبه بالا، معادلات حاکم بر ورق‌های ویسکوالاستیک دایروی غیرمتقارن را استخراج و با استفاده از رهایی پویا<sup>2</sup> به حل آن پرداختند و برای توصیف حالت ویسکوالاستیک حالت جامد خطی استاندارد را در نظر گرفتند.

<sup>1</sup> Zeroth-order shear deformation theory

<sup>2</sup> Dynamic relaxation

## 1-7- جمع‌بندی

در این فصل ابتدا به معرفی پیوستارهای مکانیک، تفاوت آن‌ها و کاربردشان در صنعت پرداخته شد، سپس مقالات و کارهای انجام شده بر روی تیرها، ورق‌های ساکن و نیز حالت متحرک آن‌ها مرور شد. کارهای مختلفی که با تمرکز بر روش‌های عددی همچون المان محدود و نیز تئوری‌های مختلف ورق و خواص گوناگون جنس ورق انجام شده بودند آورده شد.

## فصل 2

# استخراج معادلات



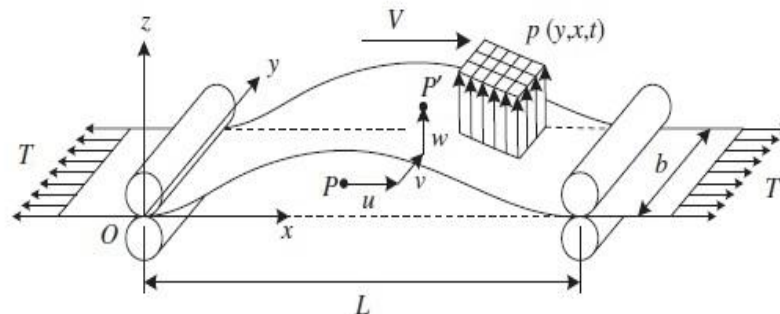
## 2-1- مقدمه

ورقی ویسکوالاستیک با سرعتی ثابت در حال حرکت است. به واسطه سرعت، ارتعاشات عرضی در ورق ایجاد می شود. برای این منظور معادلات حاکم بر سیستم با فرض مدل استاندارد خطی برای جنس ماده به کمک اصل هامیلتون و با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول استخراج شده است. سپس معادلات با در نظر گرفتن رفتار ماده به صورت الاستیک در اتساع و ویسکوالاستیک در برش به حالت ویسکوالاستیک تعمیم داده شده است. مدل مورد استفاده در برش مدل زبر است.

## 2-2- استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات وب الاستیک متحرک محوری بر

### مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

وبی با طول  $L$ ، عرض  $b$ ، ضخامت  $h$  و دانسیته حجمی  $\rho$ ، تحت کشش ثابت محوری  $T_0$  و فشار عرضی ثابت  $P(x, y, t) = P_0$  با سرعت محوری ثابت  $c$  بر روی تکیه گاه‌های مختلف قرار می گیرد.



شکل (1-2) شماتیک وب متحرک تحت بار عرضی و کشش طولی [42]

جهت استخراج معادلات حاکم، فرضیات زیر در نظر گرفته می شوند:

- 1- ضخامت وب کم<sup>1</sup> و در کل سازه ثابت می باشد.
- 2- تغییر شکل‌های سازه کوچک<sup>2</sup> است.
- 3- فشار عرضی و نیروی کشش واحد حجم وارد بر سیستم دارای مقادیری ثابت می باشند.
- 4- نسبت طول به عرض وب بزرگ می باشد.

<sup>1</sup> Thin web

<sup>2</sup> Small deflection

- 5- وب دارای خصوصیات ایزوتروپیکی می باشد.
- 6- پدیده انتشار امواج الاستیک در صفحه وب در نظر گرفته نمی شوند.
- 7- سازه همگن است.
- 8- غلتکها بدون اصطکاک می باشند و فقط حالت غلتشی دارند.
- 9- رابطه کرنش جابه جایی و تنش کرنش خطی است.

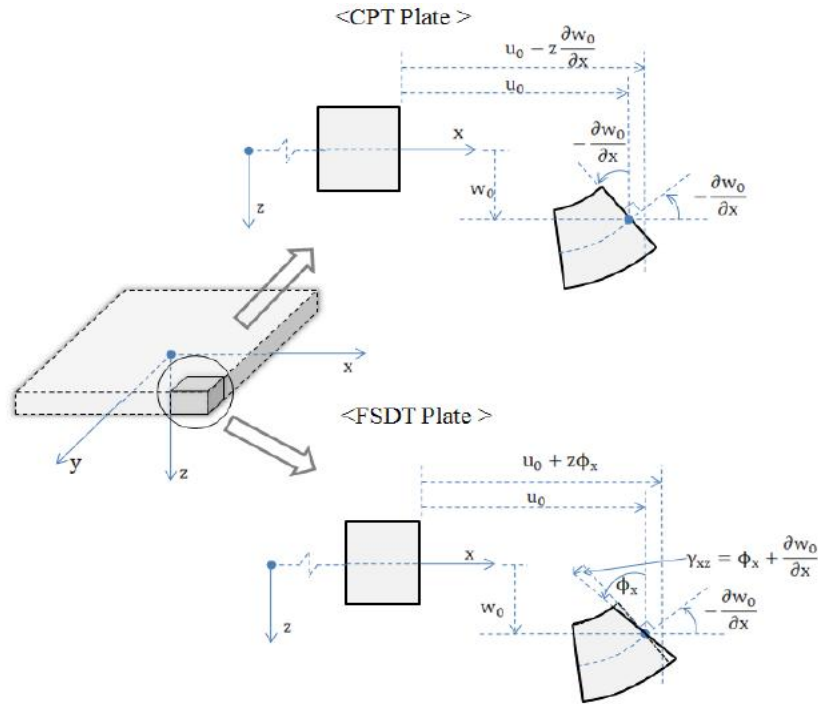
## 2-2-1- میدان جابجایی

برای بدست آوردن مقادیر تنش برحسب میدان جابجایی، ابتدا براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی برای وب نازک به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z u_1(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z v_1(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (1-2)$$

که در آن  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب سه مولفه جابجایی در راستای سه محور مختصات  $x$ ،  $y$  و  $z$  می باشند.  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  (جابجایی های صفحه میانی) پارامترهای مجهول با بعد طول،  $u_1$  و  $v_1$  دارای بعد چرخش بوده و توابع مجهول می باشند. براساس رابطه (1-2)، جابجایی نقاط مختلف وب به صورت تابع خطی از ضخامت تغییر می کند. بنابراین هر مقطع صاف و عمود بر صفحه میانی، پس از تغییر شکل همچنان صاف ولی غیرعمود بر صفحه میانی باقی می ماند. در واقع تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، با در نظر گرفتن تغییر شکل عرضی در فرضیات سینماتیکی اش (کرنش برشی عرضی ثابت نسبت به مختصات ضخامت)، تئوری ورق کلاسیک (CPT<sup>1</sup>) را بهبود بخشیده است.

<sup>1</sup>Classic Plastic Theory



شکل (2-2) لبه تغییر شکل یافته و بدون تغییر شکل در تئوری کلاسیک و مرتبه اول [43]

توضیحات بیشتر مربوط به تئوری ورق کلاسیک، تئوری‌های تغییر شکل برشی و تفاوت آن‌ها در

پیوست الف آمده است.

## 2-2-2-2 - نتیجه‌های تنش

با توجه به میدان جابجایی (1-2)، روابط کرنش - جابجایی برای حالت خیز کوچک به صورت زیر

به دست می‌آیند [44]:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ e_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \\ g_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2-2)$$

معادلات تنش بر حسب کرنش نوشته می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_x = (K - \frac{2}{3}G)(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2Ge_{xx} \\ s_y = (K - \frac{2}{3}G)(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2Ge_{yy} \\ s_z = (K - \frac{2}{3}G)(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) + 2Ge_{zz} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{xy} = Gg_{xy} \\ t_{xz} = Gg_{xz} \\ t_{yz} = Gg_{yz} \end{array} \right. \quad (3-2)$$

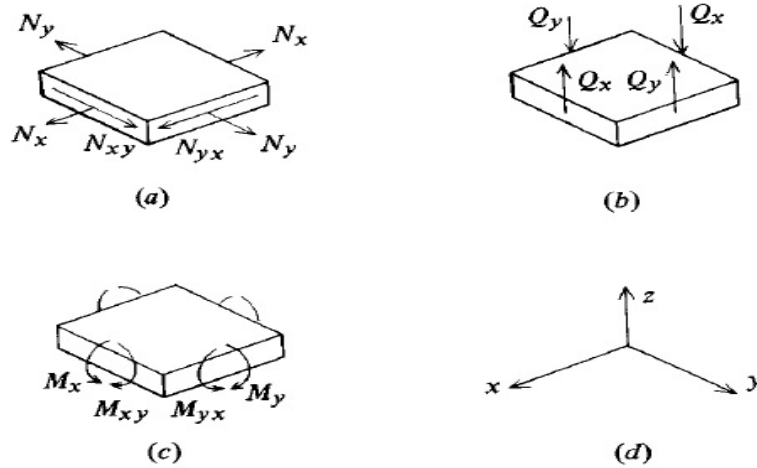
با جایگذاری مقادیر کرنش بر حسب جابجایی از معادلات (2-2) در معادلات (3-2) نتیجه می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_x = (K + \frac{4}{3}G)(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial u_1}{\partial x}) + \\ (K - \frac{2}{3}G)(\frac{\partial v_0}{\partial y} + z\frac{\partial v_1}{\partial y}) \\ s_y = (K + \frac{4}{3}G)(\frac{\partial v_0}{\partial y} + z\frac{\partial v_1}{\partial y}) + \\ (K - \frac{2}{3}G)(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial u_1}{\partial x}) \\ s_z = (K - \frac{2}{3}G)(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial u_1}{\partial x} + \\ z(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y})) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{xy} = G(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \\ z(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x})) \\ t_{xz} = G(u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x}) \\ t_{yz} = G(v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y}) \end{array} \right. \quad (4-2)$$

منتجه‌های تنش به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x = \int_{-h/2}^{h/2} s_x dz \\ N_y = \int_{-h/2}^{h/2} s_y dz \\ N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} t_{xy} dz \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z s_x dz \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z s_y dz \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z t_{xy} dz \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} K_s t_{xz} dz \\ Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} K_s t_{yz} dz \end{array} \right. \quad (5-2)$$

منتجه‌های تنش فوق، در المان شکل (3-2) نشان داده شده‌اند.



شکل (3-2) المان‌های نشان دهنده منته‌های تنش [45]

در روابط (5-2)، ضریب تصحیح برشی می‌باشد که در واقع اختلاف بین نیروی برشی عرضی واقعی و آنچه که با استفاده از روابط سینماتیکی بدست می‌آید را تصحیح می‌کند. این ضریب علاوه بر هندسه سازه، به بارگذاری و شرایط مرزی ورق نیز وابسته می‌باشد. برای ورق‌های مستطیلی مقدار  $K_s = 5/6$  در نظر گرفته شده است. [46]

### 2-2-3 - استفاده از اصل هامیلتون

معادله حاکم بر حرکت وب در بازه زمانی  $(t_0, t_1)$  باید اصل هامیلتون را ارضا کند. براساس این اصل:

$$d \int_{t_0}^{t_1} (T - U_s + W) dt = 0 \quad (6-2)$$

که در آن  $T$  انرژی جنبشی،  $U_s$  انرژی کرنشی و  $W$  کار انجام شده توسط نیروهای خارجی سیستم می‌باشند. با جایگزینی روابط مربوط به انرژی کرنشی، جنبشی و کار نیروهای خارجی در اصل هامیلتون، معادلات حاکم بر ارتعاشات وب الاستیک متحرک محوری تحت فشار عرضی یکنواخت، کشش ثابت و سرعت انتقال ثابت برای هر یک از مولفه‌های جابجایی، به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل به دست می‌آیند.

## 2-2-4- محاسبه انرژی کرنشی وب الاستیک متحرک

چگالی انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{U}_s = \frac{1}{2} (s_x e_x + s_y e_y + s_z e_z + t_{xy} g_{xy} + t_{xz} g_{xz} + t_{yz} g_{yz}) \quad (7-2)$$

با در نظر گرفتن المان حجم  $dV = dAdz = dxdydz$  برای وب و انتگرال‌گیری روی آن انرژی

کرنشی وب تعیین می‌شود، رابطه انرژی کرنشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (s_x e_x + s_y e_y + s_z e_z + t_{xy} g_{xy} + t_{xz} g_{xz} + t_{yz} g_{yz}) dxdydz \quad (8-2)$$

تغییرات انرژی کرنشی براساس تنش و کرنش برابر است با:

$$\int_{t_1}^{t_2} U_s dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (s_x de_x + s_y de_y + s_z de_z + t_{xy} dg_{xy} + t_{xz} dg_{xz} + t_{yz} dg_{yz}) dxdydz \quad (9-2)$$

در ادامه با قرار دادن مقادیر کرنش‌ها از رابطه (2-2) در رابطه (9-2) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} d \int_{t_1}^{t_2} U_s dt = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (s_x d(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial u_1}{\partial x}) + s_y d(\frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial v_1}{\partial y}) + \\ & t_{xy} d(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x})) + t_{xz} d(u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x}) + t_{yz} d(v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y})) dxdydz \end{aligned} \quad (10-2)$$

با قرار دادن نتیجه‌های تنش از رابطه (5-2) ضرایب هر کدام از تغییرات پنج پارامتر  $v_0, u_1, u_0,$

$w_0$  و  $v_1$  برای انرژی کرنشی بدست می‌آید.

## 2-2-5- محاسبه انرژی جنبشی وب الاستیک متحرک

انرژی جنبشی سیستم، برابر با مجموع انرژی‌های جنبشی تک‌تک ذرات آن می‌باشد. یعنی:

$$T = \frac{1}{2} \int \bar{V} dm \quad (11-2)$$

$\bar{V}$  مقدار سرعت کلی یک المان جرم سیستم می‌باشد. با در نظر گرفتن المان جرم به صورت  $dm = r dV$  و با توجه به اینکه سرعت کلی هر ذره برابر برآیند مولفه‌های سرعت آن می‌باشد، انرژی جنبشی کل سیستم برابر است با:

$$T = \frac{1}{2} \iiint_A \int_{-h/2}^{h/2} r V^2 dz dx dy = \frac{1}{2} \iiint_A \int_{-h/2}^{h/2} r (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) dz dx dy \quad (12-2)$$

مولفه‌های سرعت  $V_x$ ،  $V_y$  و  $V_z$  می‌باشند که با توجه به توصیف مادی<sup>1</sup> (لاگرانژی) مشتق‌گیری متغیرها تعیین می‌شوند. در توصیف لاگرانژی، مشتق‌گیری متغیرها به صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad i=1..3, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z \quad (13-2)$$

در رابطه فوق  $\frac{\partial x_i}{\partial t} = v_i$  که  $v_i$  سرعت انتقالی سیستم در راستای محور  $x_i$  می‌باشد [47] با توجه

به رابطه (13-2) مولفه‌های سرعت سیستم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V_x = c + \frac{du}{dt} = c + \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$V_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} \quad (14-2)$$

$$V_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x}$$

با قرار دادن مقادیر رابطه (14-2) و (1-2) در رابطه (12-2):

$$T = \frac{1}{2} \iiint_A \int_{-h/2}^{h/2} r \left\{ \left( c + \frac{\partial u_0}{\partial t} + z \frac{\partial u_1}{\partial t} + c \frac{\partial u_0}{\partial x} + cz \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} + z \frac{\partial v_1}{\partial t} + c \frac{\partial v_0}{\partial x} + cz \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} + c \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (15-2)$$

تغییرات انرژی جنبشی به کمک رابطه (15-2) قابل محاسبه است.

## 2-2-6- محاسبه کار حاصل از نیروهای خارجی اعمالی

<sup>1</sup> Material (Lagrange's) Description

کار حاصل از نیروهای خارجی از دو قسمت، یکی مربوط به فشار عرضی ( $W_q$ ) و دیگری نیروی کششی ( $W_p$ ) تشکیل می‌شود.

کار حاصل از بار فشاری یکنواخت  $W_q$  به طور عمودی (عرضی) بر وب وارد می‌شود و تغییرات آن برابر است با:

$$W_q = \int_0^L q(x,t)w dx = \int_0^L q(x,t)w_0 dx \quad (16-2)$$

$$dW_q = q(x,t)dw_0 \quad (17-2)$$

کار حاصل از نیروی کشش بر واحد حجم و تغییرات آن به صورت زیر بدست می‌آید:

$$W_p = \int_0^L \frac{1}{2} P \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^L \frac{1}{2} P \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 dx \quad (18-2)$$

$$dW_p = -P \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} dw_0 \quad (19-2)$$

## 2-2-7 - استخراج معادله حاکم بر وب الاستیک متحرک

با قرار دادن نتایج روابط (10-2)، (15-2)، (17-2) و (19-2) در رابطه (1-2) دستگاه معادلات

حاکم بر مساله بدست می‌آید.

$$Eq1: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = rh \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)$$

$$Eq2: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = rh \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right)$$

$$Eq3: \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x,t) - P \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = rh \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (20-2)$$

$$Eq4: \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \frac{rh^3}{12} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)$$

$$Eq5: \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = \frac{rh^3}{12} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)$$

دستگاه معادلات (20-2)، معادله حاکم بر ارتعاش یک وب الاستیک نازک دارای سرعت محوری

ثابت می‌باشد. این دستگاه شامل پنج معادله دیفرانسیل مشتق جزئی و هشت مجهول است.



با استفاده از فرض نسبت طول به عرض بزرگ  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$  فرض می‌شود. در ادامه با قرار دادن

منتجه‌های تنش از رابطه (5-2) در رابطه (20-2)، معادلات در شکل الاستیک به صورت زیر بدست

می‌آید:

$$\begin{aligned}
 eq1 &= \frac{h(3K+4G)}{3} \left( \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} \right) - rh \left( \left( \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} \right) + 2c \left( \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \right. \\
 &\quad \left. + c^2 \left( \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} \right) \right) \\
 eq2 &= Gh \left( \frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x^2} \right) - rh \left( \left( \frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial t^2} \right) + 2c \left( \frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x \partial t} \right) + c^2 \left( \frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x^2} \right) \right) \\
 eq3 &= K_s b Gh \left( \left( \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \right) \right) - P \left( \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \right) + q(x,t) - \\
 &\quad rhb \left( \left( \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial t^2} \right) + 2c \left( \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x \partial t} \right) + c^2 \left( \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \right) \right) \tag{21-2} \\
 eq4 &= \frac{(3K+4G)h^3}{36} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) - K_s Gh \left( u_1(x,t) + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right) - \\
 &\quad \frac{rh^3}{12} \left( \left( \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} \right) + 2c \left( \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x \partial t} \right) + c^2 \left( \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} \right) \right) \\
 eq5 &= \frac{Gh^3}{12} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) - K_s Gh v_1(x,t) \\
 &\quad - \frac{rh^3}{12} \left( \left( \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial t^2} \right) + 2c \left( \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x \partial t} \right) + c^2 \left( \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

همانطور که از معادلات (21-2) مشخص است سه معادله اول، دوم و پنجم مستقل از یکدیگر

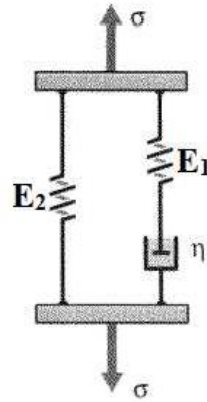
هستند و فقط دو معادله سوم و چهارم به هم کوپل هستند.

## 2-3- اعمال فرض ویسکوالاستیک به معادلات

به دلیل تفاوت رفتار ماده ویسکوالاستیک در برش و اتساع، برای توصیف برش از مدل زرن نوع دوم

که در پیوست توضیح داده شده، استفاده شده است و برای اتساع حالت الاستیک در نظر گرفته

می‌شود. برای مدل زرن نوع دوم اپراتورهای  $P_1$  و  $Q_1$  به صورت زیر تعیین می‌شوند:



شکل (4-2) مدل زلزله نوع دوم

$$P_1(D) = D + \frac{1}{t} \quad (22-2)$$

$$Q_1(D) = 2((E_1 + E_2)D + \frac{E_2}{t}) \quad (23-2)$$

که  $t = \frac{h}{E_1}$  و  $D$  اپراتور مشتق زمانی ( $D = \frac{\partial}{\partial t}$ ) می‌باشند. برای رفتار الاستیک وب در اتساع،

اپراتورهای  $P_2$  و  $Q_2$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} P_2 &= 1 \\ Q_2 &= 3K \end{aligned} \quad (24-2)$$

با استفاده از روابط (22-2) و (23-2) و (24-2)، پارامترهای  $G$  و  $K$  به صورت زیر به دست

می‌آیند:

$$\begin{aligned} G &= \frac{Q_1}{2P_1} = (E_1 + E_2)D + \frac{E_2}{t} \\ K &= \frac{Q_2}{3P_2} \end{aligned} \quad (25-2)$$

با جایگذاری روابط (22-2) و (23-2)، (24-2) و (25-2) در معادلات (20-2)، مولفه‌های تنش

معادل محاسبه و منته‌های تنش (2-2) به صورت ویسکوالاستیک تعیین می‌شوند، سپس با

جایگذاری در رابطه (21-2) معادلات به صورت ویسکوالاستیک بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
Eq1 &= \frac{bh}{3t} (-3rt (\frac{\partial^3 u_0(x,t)}{\partial t^3}) - 6rct (\frac{\partial^3 u_0(x,t)}{\partial x \partial t^2}) + \\
&(4E_1 t - 3rc^2 t + 3Kt + 4E_2 t) (\frac{\partial^3 u_0(x,t)}{\partial x^2 \partial t}) - \\
&3r (\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2}) - 6rc (\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x \partial t}) + (-3rc^2 + 3K + 4E_2) (\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2})) \\
Eq2 &= \frac{bh}{t} (-rt (\frac{\partial^3 v_0(x,t)}{\partial t^3}) - 2rct (\frac{\partial^3 v_0(x,t)}{\partial x \partial t^2}) + \\
&(E_1 t - rc^2 t + E_2 t) (\frac{\partial^3 v_0(x,t)}{\partial x^2 \partial t}) \\
&- r (\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial t^2}) - 2rc (\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x \partial t}) + (-rc^2 + E_2) (\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x^2})) \\
Eq3 &= \frac{1}{t} (t (\frac{\partial q(x,t)}{\partial t}) - rbht (\frac{\partial^3 w_0(x,t)}{\partial t^3}) - 2rbhtc (\frac{\partial^3 w_0(x,t)}{\partial x \partial t^2}) + \\
&(-Pt - rhbc^2 t + K_s bhE_1 t + K_s bhE_2 t) (\frac{\partial^3 w_0(x,t)}{\partial x^2 \partial t}) - rhb (\frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial t^2}) \\
&- 2rhbc (\frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x \partial t}) + (-P - rhbc^2 + K_s bhE_2) (\frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2}) \\
&+ K_s bhE_2 (\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}) + q(x,t))
\end{aligned} \tag{26-2}$$

$$\begin{aligned}
Eq4 &= -\frac{bh}{36t} (3rh^2 t (\frac{\partial^3 u_1(x,t)}{\partial t^3}) + 6rh^2 tc (\frac{\partial^3 u_1(x,t)}{\partial x \partial t^2}) + \\
&(3rh^2 c^2 t - 4h^2 E_1 t - 3h^2 Kt - 4h^2 E_2 t) (\frac{\partial^3 u_1(x,t)}{\partial x^2 \partial t}) + 3rh^2 (\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}) + \\
&6rh^2 c (\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x \partial t}) + (3rh^2 c^2 - 3h^2 K - 4h^2 E_2) (\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}) \\
&- (36K_s E_2 t + 36K_s E_1 t) (\frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x \partial t}) + (36K_s E_2 t + 36K_s E_1 t) (\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}) \\
&36K_s E_2 u_1(x,t) + 36K_s E_1 (\frac{\partial w_0(x,t)}{\partial x}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Eq5 &= -\frac{bh}{12t} (rh^2 t (\frac{\partial^3 v_1(x,t)}{\partial t^3}) + 2rh^2 ct (\frac{\partial^3 v_1(x,t)}{\partial x \partial t^2}) + \\
&(rh^2 c^2 t - h^2 E_1 t - h^2 E_2 t) (\frac{\partial^3 v_1(x,t)}{\partial x^2 \partial t}) + rh^2 (\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial t^2}) + 2rh^2 c (\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x \partial t}) \\
&(rh^2 c^2 - h^2 E_2) (\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2}) + (12K_s E_2 t + 12K_s E_1 t) (\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}) + \\
&12K_s E_2 v_1(x,t))
\end{aligned}$$

می‌توان معادلات (26-2) را به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 & [A_1]y + [A_2]\frac{\partial y}{\partial x} + [A_3]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + [A_4]\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + [A_5]\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} + [A_6]\frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} + [A_7]\frac{\partial y}{\partial t} \\
 & + [A_8]\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + [A_9]\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = \{f\}
 \end{aligned} \tag{27-2}$$

در رابطه (27-2)  $y$  برداری شامل پنج پارامتر مجهول و  $f$  بردار نیرو است.

$$\begin{aligned}
 y = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} - \frac{q(x,t)}{t} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad A_1 = \begin{Bmatrix} 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,-\frac{bhK_s E_2}{t},0 \\ 0,0,0,0,-\frac{bhK_s E_2}{t} \end{Bmatrix} \\
 A_2 = \begin{Bmatrix} 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,\frac{bhK_s E_2}{t},0 \\ 0,0,-\frac{bhK_s E_1}{t},0,0 \\ 0,0,0,0,0 \end{Bmatrix}, \quad A_3 = \begin{Bmatrix} AB,0,0,0,0 \\ 0,\frac{bh(E_2 - rc^2)}{t},0,0,0 \\ 0,0,AA,0,0 \\ 0,0,0,AC,0 \\ 0,0,0,0,-\frac{bh^3(rc^2 - E_2)}{12t} \end{Bmatrix} \\
 A_4 = \begin{Bmatrix} -\frac{2rhbc}{t},0,0,0,0 \\ 0,-\frac{2rhbc}{t},0,0,0 \\ 0,0,-\frac{2rhbc}{t},0,0 \\ 0,0,bh(K_s E_2 + K_s E_1),-\frac{rh^3bc}{6t},0 \\ 0,0,0,0,-\frac{rh^3bc}{6t} \end{Bmatrix}, \quad A_5 = \begin{Bmatrix} AD,0,0,0,0 \\ 0,AE,0,0,0 \\ 0,0,AF,0,0 \\ 0,0,0,AG,0 \\ 0,0,0,0,AH \end{Bmatrix} \\
 A_6 = \begin{Bmatrix} -2rhbc,0,0,0,0 \\ 0,-2rhbc,0,0,0 \\ 0,0,-2rhbc,0,0 \\ 0,0,0,-\frac{rbh^3c}{6},0 \\ 0,0,0,0,-\frac{rbh^3c}{6} \end{Bmatrix}, \quad A_7 = \begin{Bmatrix} 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,-bh(K_s E_2 + K_s E_1),0 \\ 0,0,0,0,-bh(K_s E_2 + K_s E_1) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{28-2}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} \frac{-rbh}{t}, 0, 0, 0, 0 \\ 0, \frac{-rbh}{t}, 0, 0, 0 \\ 0, 0, \frac{-rbh}{t}, 0, 0 \\ 0, 0, 0, \frac{-rbh^3}{12t}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, \frac{-rbh^3}{12t} \end{bmatrix}, A_9 = \begin{bmatrix} -rbh, 0, 0, 0, 0 \\ 0, -rbh, 0, 0, 0 \\ 0, 0, -rbh, 0, 0 \\ 0, 0, 0, \frac{-rbh^3}{12}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, \frac{-rbh^3}{12} \end{bmatrix}$$

$$AA = \frac{bh(-3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3t}$$

$$AB = \frac{(-P - rhbc^2 + K_s bhE_2)}{t}$$

$$AC = \frac{-b(3rh^2c^2 - 3h^2K - 4h^2E_2)}{36t}$$

$$AD = \frac{bh(4E_1 - 3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3}$$

$$AE = bh(E_1 - rc^2 + E_2)$$

$$AF = -P - rhbc^2 + K_s bhE_1 + K_s bhE_2 \quad (29-2)$$

$$AG = \frac{-bh(3rh^2c^2 - 4h^2E_1 - 3h^2K - 4h^2E_2)}{36}$$

$$AH = \frac{-bh(rh^2c^2 - h^2E_1 - h^2E_2)}{12}$$

## 2-4- جمع بندی

در این فصل معادلات حاکم بر مساله با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول برای حالت الاستیک استخراج شد، سپس از مدل زبر مرتبه دوم برای توصیف رفتار وب متحرک در برش و رفتار الاستیک در اتساع استفاده شد. معادلات حاکم که به صورت یک دستگاه معادله پنج معادله و پنج مجهول در آمدند از فرض طول به عرض بزرگ استفاده شد و تغییرات نسبت به  $y$  صفر در نظر گرفته شد تا مساله فقط تابعی از طول و زمان شود. در فصل آینده به حل عددی این معادلات پرداخته شده است.

## فصل 3

اعمال روش گالرکین

برای حل المان محدود

مساله

### 3-1- مقدمه

برای مطالعه حرکت باید آن را مدل کرد، این مدل معمولاً یک رابطه ریاضی است که موقعیت را بر حسب مکان و زمان توصیف می‌کند و به شکل یک معادله دیفرانسیل یا معادله انتگرال می‌باشد. برای حل معادلات حرکت دو روش وجود دارد:

1. روش تحلیلی<sup>1</sup> که یک فرمول ریاضی برای حل مساله و معادله دیفرانسیل به دست می‌دهد.

مانند استفاده از سری‌های توانی و ... این روش در صورتی قابل استفاده است که شکل معادله و شرایط مرزی آن ساده باشد.

2. روش عددی<sup>2</sup> که مبتنی بر روش‌های محاسبات عددی است و برای مدل‌های پیچیده با

شرایط مرزی پیچیده قابل اعمال است که نتیجه یک جدول از اعداد است. اعتبار نتیجه حل

عددی به کمک روش‌های دیگر کنترل می‌شوند مانند روش‌های ریاضی، تجربی یا سایر روش‌های عددی.

هدف طراحی یک المان است که به کمک آن بتوان پاسخ سیستم و فرکانس‌های طبیعی را

براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT<sup>3</sup>) بدست آورد. در این فصل معادلات وابسته به

زمان و مکان به روش عددی حل می‌گردد. روش گالرکین جهت جداسازی قسمت مکانی استفاده شده

و سپس روش تفاضلات محدود جهت حل معادله تابع زمان باقی مانده استفاده شده است.

### 3-2- تعیین معادلات حاکم توسط روش گالرکین

با این‌که معمولاً روش‌های تحلیلی دقیق‌تر هستند اما سهولت و جامع بودن روش‌های عددی سبب

گسترش کاربرد آن‌ها طی سال‌های اخیر شده است. در پیوست (ج) به طور کامل به انواع و جزئیات

این روش‌ها پرداخته شده است.

---

<sup>1</sup> Analytical Method

<sup>2</sup> Numerical Method

<sup>3</sup> First Shear Deformation Theory

ورق ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت بار عرضی مفروض است. المان به صورت سه گرهی و هر گره، شامل پنج درجه آزادی است. برای حل مساله ابتدا بخش‌های زمانی و مکانی معادلات توسط روش گالرکین از هم جدا می‌شود.

معادله 1:

$$Eq1 = \frac{bh}{3t}(-3rt(\frac{\partial^3 u_0(x,t)}{\partial t^3}) - 6rct(\frac{\partial^3 u_0(x,t)}{\partial x \partial t^2}) + (4E_1 t - 3rc^2 t + 3Kt + 4E_2 t)(\frac{\partial^3 u_0(x,t)}{\partial x^2 \partial t}) - 3r(\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2}) - 6rc(\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x \partial t}) + (-3rc^2 + 3K + 4E_2)(\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2})) = 0 \quad (1-3)$$

طبق روش گالرکین از پیوست (ج):

$$\int_0^l R(\tilde{u}) f_i dx = 0 \quad (2-3)$$

$$\begin{aligned} & -rbh \int_0^l \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^3} f_i dx - 2rbhc \int_0^l \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} f_i dx + \\ & \frac{bh(4E_1 - 3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3} \int_0^l \frac{\partial^3 u_0}{\partial t \partial x^2} f_i dx - \frac{rbh}{t} \int_0^l \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} f_i dx - \\ & \frac{2rbhc}{t} \int_0^l \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} f_i dx + \frac{bh(-3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3t} \int_0^l \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} f_i dx = 0 \end{aligned} \quad (3-3)$$

از انتگرال جزء به جزء:

$$-2rbhc \int_0^l \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} f_i dx = -2rbhc \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ [u_0 f_i]_0^l - \int_0^l u_0 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \quad (4-3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{bh(4E_1 - 3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3} \int_0^l \frac{\partial^3 u_0}{\partial t \partial x^2} f_i dx = \\ & \frac{bh(4E_1 - 3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} f_i - u_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l + \int_0^l u_0 \frac{d^2 f_i}{dx^2} \right\} \end{aligned} \quad (5-3)$$



$$-\frac{2rbhc}{t} \int_0^l \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} f_i dx = -\frac{2rbhc}{t} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [u_0 f_i]_0^l - \int_0^l u_0 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \quad (6-3)$$

$$\frac{bh(-3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3t} \int_0^l \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} f_i dx = \frac{bh(-3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3t} \left\{ \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} f_i - u_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l + \int_0^l u_0 \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right\} \quad (7-3)$$

از آنجایی که:

$$A_1 = -2rbhc \frac{\partial^2}{\partial t^2} [u_0 f_i]_0^l \quad (8-3)$$

$$A_2 = \frac{bh(4E_1 - 3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} f_i - u_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l \quad (9-3)$$

$$A_3 = \frac{-2rbhc}{t} \frac{\partial}{\partial t} [u_0 f_i]_0^l \quad (10-3)$$

$$A_4 = \frac{bh(-3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3t} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} f_i - u_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l \quad (11-3)$$

با انتخاب میدان حل به صورت:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{j=1}^3 a_j(t) f_j(x) & v_0 &= \sum_{j=1}^3 b_j(t) f_j(x) & w_0 &= \sum_{j=1}^3 c_j(t) f_j(x) \\ u_1 &= \sum_{j=1}^3 d_j(t) f_j(x) & v_1 &= \sum_{j=1}^3 e_j(t) f_j(x) \end{aligned} \quad (12-3)$$

نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} Eq1 &= \left[ -rbh \int f_j f_i dx \right] \ddot{a}_j + \left[ 2rbhc \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] \ddot{a}_j + \\ &\left[ \frac{bh(4E_1 - 3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3} \int f_j \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right] \dot{a}_j - \left[ \frac{rbh}{t} \int f_j f_i dx \right] \ddot{a}_j - \\ &\left[ \frac{2rbhc}{t} \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] \dot{a}_j + \left[ \frac{bh(-3rc^2 + 3K + 4E_2)}{3t} \int f_j \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right] a_j \\ &+ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \end{aligned} \quad (13-3)$$

معادله 2:

$$\begin{aligned}
Eq2 = & \frac{bh}{t} (-rt (\frac{\partial^3 v_0(x,t)}{\partial t^3}) - 2rct (\frac{\partial^3 v_0(x,t)}{\partial x \partial t^2}) + \\
& (E_1 t - rc^2 t + E_2 t) (\frac{\partial^3 v_0(x,t)}{\partial x^2 \partial t}) \\
& - r (\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial t^2}) - 2rc (\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x \partial t}) + (-rc^2 + E_2) (\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x^2}))
\end{aligned} \tag{14-3}$$

از انتگرال جزء به جزء:

$$-2rbhc \int_0^l \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial t^2} f_i dx = -2rbhc \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ [v_0 f_i]_0^l - \int_0^l v_0 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \tag{15-3}$$

$$\begin{aligned}
bh(E_1 - rc^2 + E_2) \int_0^l \frac{\partial^3 v_0}{\partial t \partial x^2} f_i dx = \\
bh(E_1 - rc^2 + E_2) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{\partial v_0}{\partial x} f_i - v_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l + \int_0^l v_0 \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right\}
\end{aligned} \tag{16-3}$$

$$-\frac{2rbhc}{t} \int_0^l \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial t} f_i dx = -\frac{2rbhc}{t} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [v_0 f_i]_0^l - \int_0^l v_0 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \tag{17-3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{bh(-rc^2 + E_2)}{t} \int_0^l \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} f_i dx = \\
\frac{bh(-rc^2 + E_2)}{t} \left\{ \left[ \frac{\partial v_0}{\partial x} f_i - v_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l + \int_0^l v_0 \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right\}
\end{aligned} \tag{18-3}$$

با فرض:

$$B_1 = -2rbhc \frac{\partial^2}{\partial t^2} [v_0 f_i]_0^l \tag{19-3}$$

$$B_2 = bh(E_1 - rc^2 + E_2) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial x} f_i - v_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l \tag{20-3}$$

$$B_3 = \frac{-2rbhc}{t} \frac{\partial}{\partial t} [v_0 f_i]_0^l \tag{21-3}$$

$$B_4 = \frac{bh(-rc^2 + E_2)}{t} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial x} f_i - v_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l \tag{22-3}$$

مانند قبل:

$$\begin{aligned}
Eq2 = & \left[ -rbh \int f_j f_i dx \right] \ddot{b}_j + \left[ 2rbhc \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] \ddot{b}_j + \\
& \left[ bh(E_1 - rc^2 + E_2) \int f_j \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right] \dot{b}_j - \left[ \frac{rbh}{t} \int f_j f_i dx \right] \dot{b}_j - \\
& \left[ \frac{2rbhc}{t} \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] \dot{b}_j + \left[ \frac{bh(-rc^2 + E_2)}{t} \int f_j \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right] b_j \\
& + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 0
\end{aligned} \tag{23-3}$$

معادله 3:

$$\begin{aligned}
Eq3 = & \frac{1}{t} \left( t \left( \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} \right) - rbht \left( \frac{\partial^3 w_0(x,t)}{\partial t^3} \right) - 2rbhtc \left( \frac{\partial^3 w_0(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) + \right. \\
& \left. (-Pt - rhbc^2 t + K_s bhE_1 t + K_s bhE_2 t) \left( \frac{\partial^3 w_0(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) - rhb \left( \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial t^2} \right) \right. \\
& \left. - 2rhbc \left( \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x \partial t} \right) + (-P - rhbc^2 + K_s bhE_2) \left( \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} \right) \right. \\
& \left. + K_s bhE_2 \left( \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} \right) + q(x,t) \right)
\end{aligned} \tag{24-3}$$

از رابطه (2-3):

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \frac{\partial q}{\partial t} f_i dx - rbh \int_0^l \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^3} f_i dx - 2rbhc \int_0^l \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial x} f_i dx + \\
& (-P - rhbc^2 + K_s bhE_1 + K_s bhE_2) \int_0^l \frac{\partial^3 w_0}{\partial t \partial x^2} f_i dx - \frac{rbh}{t} \int_0^l \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} f_i dx \\
& - \frac{2rbhc}{t} \int_0^l \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} f_i dx - \frac{(-P - rhbc^2 + K_s bhE_2)}{t} \int_0^l \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} f_i dx + \\
& K_s bhE_2 \int_0^l \frac{\partial u_1}{\partial t} f_i dx + \int_0^l q(x,t) f_i dx = 0
\end{aligned} \tag{25-3}$$

از انتگرال جزء به جزء به دست می‌آید:

$$-2rbhc \int_0^l \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} f_i dx = -2rbhc \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ [w_0 f_i]_0^l - \int_0^l w_0 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \tag{26-3}$$

$$\begin{aligned}
& (-P - rhbc^2 + K_s bhE_1 + K_s bhE_2) \int_0^l \frac{\partial^3 w_0}{\partial t \partial x^2} f_i dx = \\
& (-P - rhbc^2 + K_s bhE_1 + K_s bhE_2) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{\partial w_0}{\partial x} f_i - w_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l + \int_0^l w_0 \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right\}
\end{aligned} \tag{27-3}$$

$$-\frac{2rbhc}{t} \int_0^l \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} f_i dx = -\frac{2rbhc}{t} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [w_0 f_i]_0^l - \int_0^l w_0 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \quad (28-3)$$

$$\begin{aligned} \frac{(-P - rbhc^2 + K_s bhE_2)}{t} \int_0^l \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} f_i dx = \\ \frac{(-P - rbhc^2 + K_s bhE_2)}{t} \left\{ \left[ \frac{\partial w_0}{\partial x} f_i - w_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l + \int_0^l w_0 \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right\} \end{aligned} \quad (29-3)$$

$$K_s bhE_2 \int_0^l \frac{\partial u_1}{\partial t} f_i dx = K_s bhE_2 \left\{ [u_1 f_i]_0^l - \int_0^l u_1 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \quad (30-3)$$

با تعریف:

$$C_1 = -2rbhc \frac{\partial^2}{\partial t^2} [w_0 f_i]_0^l \quad (31-3)$$

$$C_2 = (-P - rbhc^2 + K_s bhE_1 + K_s bhE_2) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial w_0}{\partial x} f_i - w_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l \quad (32-3)$$

$$C_3 = \frac{-2rbhc}{t} \frac{\partial}{\partial t} [w_0 f_i]_0^l \quad (33-3)$$

$$C_4 = \frac{(-P - rbhc^2 + K_s bhE_2)}{t} \left[ \frac{\partial w_0}{\partial x} f_i - w_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l \quad (34-3)$$

$$C_5 = K_s bhE_2 [u_1 f_i]_0^l \quad (35-3)$$

با جایگذاری در معادله (25-3):

$$\begin{aligned} Eq3 = & \left[ -rbh \int f_j f_i dx \right] \ddot{c}_j + \left[ 2rbhc \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] \dot{c}_j + \\ & \left[ (-P - rbhc^2 + K_s bhE_1 + K_s bhE_2) \int f_j \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right] \dot{c}_j - \left[ \frac{rbh}{t} \int f_j f_i dx \right] \ddot{c}_j - \\ & \left[ \frac{2rbhc}{t} \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] \dot{c}_j + \left[ \frac{(-P - rbhc^2 + K_s bhE_2)}{t} \int f_j \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right] c_j + \\ & \left[ K_s bhE_2 \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] d_j \\ & + \int \frac{\partial q}{\partial t} f_i dx + \int q(x, t) f_i dx + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 0 \end{aligned} \quad (36-3)$$

معادله 4:

$$\begin{aligned}
Eq4 = & -\frac{rbh^3}{12} \left( \frac{\partial^3 u_1(x,t)}{\partial t^3} \right) - \frac{rbh^3 c}{6} \left( \frac{\partial^3 u_1(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) + \\
& -\frac{bh(3rh^2 c^2 - 4h^2 E_1 - 3h^2 K - 4h^2 E_2)}{36} \left( \frac{\partial^3 u_1(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) - \frac{rbh^3}{12t} \left( \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} \right) \\
& -\frac{rbh^3 c}{6t} \left( \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x \partial t} \right) - \frac{bh(3rh^2 c^2 - 3h^2 K - 4h^2 E_2)}{36t} \left( \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} \right) \\
& + bhK_s(E_2 + E_1) \left( \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x \partial t} \right) - bhK_s(E_2 + E_1) \left( \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} \right) + \\
& -\frac{bhK_s E_2}{t} u_1(x,t) - \frac{bhK_s E_1}{t} \left( \frac{\partial w_0(x,t)}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{37-3}$$

از رابطه (2-3):

$$\begin{aligned}
& -\frac{rbh^3}{12} \int_0^l \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} f_i dx - \frac{rbh^3 c}{6} \int_0^l \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^2 \partial x} f_i dx \\
& -\frac{bh(3rh^2 c^2 - 4h^2 E_1 - 3h^2 K - 4h^2 E_2)}{36} \int_0^l \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial x^2} f_i dx - \frac{rbh^3}{12t} \int_0^l \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} f_i dx \\
& -\frac{rbh^3 c}{6t} \int_0^l \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} f_i dx - \frac{bh(3rh^2 c^2 - 3h^2 K - 4h^2 E_2)}{36t} \int_0^l \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} f_i dx \\
& + bhK_s(E_2 + E_1) \int_0^l \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} f_i dx - bhK_s(E_2 + E_1) \int_0^l \frac{\partial u_1}{\partial t} f_i dx \\
& -\frac{bhK_s E_2}{t} \int_0^l u_1 f_i dx - \frac{bhK_s E_1}{t} \int_0^l \frac{\partial w_0}{\partial x} f_i dx = 0
\end{aligned} \tag{38-3}$$

از انتگرال جزء به جزء به دست می آید:

$$-\frac{rbh^3 c}{6} \int_0^l \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial t^2} f_i dx = -\frac{rbh^3 c}{6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ [u_1 f_i]_0^l - \int_0^l u_1 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \tag{39-3}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{bh(3rh^2 c^2 - 4h^2 E_1 - 3h^2 K - 4h^2 E_2)}{36} \int_0^l \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial x^2} f_i dx = \\
& -\frac{bh(3rh^2 c^2 - 4h^2 E_1 - 3h^2 K - 4h^2 E_2)}{36} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} f_i - u_1 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l + \int_0^l u_1 \frac{d^2 f_i}{dx^2} \right\}
\end{aligned} \tag{40-3}$$

$$-\frac{rbh^3 c}{6t} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} f_i dx = -\frac{rbh^3 c}{6t} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [u_1 f_i]_{-l/2}^{l/2} - \int_{-l/2}^{l/2} u_1 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \tag{41-3}$$

$$-\frac{bh(3rh^2c^2 - 3h^2K - 4h^2E_2)}{36t} \int_0^l \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} f_i dx =$$

$$-\frac{bh(3rh^2c^2 - 3h^2K - 4h^2E_2)}{36t} \left\{ \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} f_i - u_1 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l + \int_0^l u_1 \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right\} \quad (42-3)$$

$$bhK_s(E_2 + E_1) \int_0^l \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} f_i dx = bhK_s(E_2 + E_1) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [w_0 f_i]_0^l - \int_0^l w_0 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \quad (43-3)$$

$$-\frac{bhK_s E_1}{t} \int_0^l \frac{\partial w_0}{\partial x} f_i dx = -\frac{bhK_s E_1}{t} ([w_0 f_i]_0^l - \int_0^l w_0 \frac{df_i}{dx} dx) \quad (44-3)$$

با تعریف:

$$D_1 = -\frac{rbh^3c}{6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} ([u_1 f_i]_0^l) \quad (45-3)$$

$$D_2 = -\frac{bh(3rh^2c^2 - 4h^2E_1 - 3h^2K - 4h^2E_2)}{36} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} f_i - u_1 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l \right) \quad (46-3)$$

$$D_3 = -\frac{rbh^3c}{6t} \frac{\partial}{\partial t} ([u_1 f_i]_0^l) \quad (47-3)$$

$$D_4 = -\frac{bh(3rh^2c^2 - 3h^2K - 4h^2E_2)}{36t} \left( \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} f_i - u_1 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l \right) \quad (48-3)$$

$$D_5 = bhK_s(E_2 + E_1) \frac{\partial}{\partial t} ([w_0 f_i]_0^l) \quad (49-3)$$

$$D_6 = -\frac{bhK_s E_1}{t} ([w_0 f_i]_0^l) \quad (50-3)$$

$$\begin{aligned}
Eq4 = & - \left[ \frac{rbh^3}{12} \int f_j f_i dx \right] \ddot{d}_j + \left[ \frac{rbh^3 c}{36} \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] \dot{d}_j - \\
& \left[ \frac{bh(3rh^2 c^2 - 4h^2 E_1 - 4h^2 E_2 - 3h^2 K)}{36} \int f_j \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right] \dot{d}_j - \left[ \frac{rbh^3}{12t} \int f_j f_i dx \right] \ddot{d}_j + \\
& \left[ \frac{rbh^3 c}{6t} \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] \dot{d}_j + \left[ \frac{bhK_s E_1}{t} \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] c_j - \left[ \frac{bhK_s E_2}{t} \int f_j f_i dx \right] d_j - \\
& \left[ \frac{bh(3rh^2 c^2 - 4h^2 E_2 - 3h^2 K)}{36t} \int f_j \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right] d_j \\
& - \left[ bh(K_s E_1 + K_s E_2) \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] \dot{c}_j - \left[ bh(K_s E_2 + K_s E_1) \int f_j f_i dx \right] \dot{d}_j \\
& + D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6 = 0
\end{aligned} \tag{51-3}$$

معادله 5:

$$\begin{aligned}
Eq5 = & - \frac{bh}{12t} (rh^2 t \left( \frac{\partial^3 v_1(x,t)}{\partial t^3} \right) + 2rh^2 c t \left( \frac{\partial^3 v_1(x,t)}{\partial x \partial t^2} \right) + \\
& (rh^2 c^2 t - h^2 E_1 t - h^2 E_2 t) \left( \frac{\partial^3 v_1(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) + rh^2 \left( \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial t^2} \right) + 2rh^2 c \left( \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x \partial t} \right) + \\
& (rh^2 c^2 - h^2 E_2) \left( \frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} \right) + (12K_s E_2 t + 12K_s E_1 t) \left( \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} \right) + 12K_s E_2 v_1(x,t)
\end{aligned} \tag{52-3}$$

از رابطه (2-3):

$$\begin{aligned}
& - \frac{rbh^3}{12} \int_0^l \frac{\partial^3 v_1}{\partial t^3} f_i dx - \frac{rbh^3 c}{6} \int_0^l \frac{\partial^3 v_1}{\partial t^2 \partial x} f_i dx \\
& - \frac{bh^3 (rc^2 - E_1 - E_2)}{12} \int_0^l \frac{\partial^3 v_1}{\partial t \partial x^2} f_i dx - \frac{rbh^3}{12t} \int_0^l \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} f_i dx \\
& - \frac{rbh^3 c}{6t} \int_0^l \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} f_i dx - \frac{bh^3 (rc^2 - E_2)}{12t} \int_0^l \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} f_i dx - \\
& bhK_s (E_1 + E_2) \int_0^l \frac{\partial v_1}{\partial t} f_i dx - \frac{bhK_s E_2}{t} \int_0^l v_1 f_i dx = 0
\end{aligned} \tag{53-3}$$

از انتگرال جزء به جزء:

$$\frac{-rbh^3 c}{6} \int_0^l \frac{\partial^3 v_1}{\partial x \partial t^2} f_i dx = \frac{-rbh^3 c}{6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ [v_1 f_i]_0^l - \int_0^l v_1 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \tag{54-3}$$

$$-\frac{bh^3(rc^2 - E_1 - E_2)}{12} \int_0^l \frac{\partial^3 v_1}{\partial t \partial x^2} f_i dx =$$

$$-\frac{bh^3(rc^2 - E_1 - E_2)}{12} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x} f_i - v_1 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l + \int_0^l v_1 \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right\} \quad (55-3)$$

$$-\frac{rbh^3c}{6t} \int_0^l \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} f_i dx = -\frac{rbh^3c}{6t} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [v_1 f_i]_0^l - \int_0^l v_1 \frac{df_i}{dx} dx \right\} \quad (56-3)$$

$$-\frac{bh^3(rc^2 - E_2)}{12t} \int_0^l \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} f_i dx =$$

$$-\frac{bh^3(rc^2 - E_2)}{12t} \left\{ \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x} f_i - v_1 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l + \int_0^l v_1 \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right\} \quad (57-3)$$

از آنجایی که:

$$F_1 = -\frac{rbh^3c}{6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [v_1 f_i]_0^l \quad (58-3)$$

$$F_2 = -\frac{bh^3(rc^2 - E_1 - E_2)}{12} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x} f_i - v_1 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l \quad (59-3)$$

$$F_3 = -\frac{rbh^3c}{6t} \frac{\partial}{\partial t} [v_1 f_i]_0^l \quad (60-3)$$

$$F_4 = -\frac{bh^3(rc^2 - E_2)}{12t} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x} f_i - v_1 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_0^l \quad (61-3)$$

نتیجه می‌دهد:

$$Eq5 = -\left[ \frac{rbh^3}{12} \int f_j f_i dx \right] \ddot{e}_j - \left[ \frac{rbh^3c}{6} \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] \dot{e}_j - \left[ \frac{bhK_s E_2}{t} \int f_j f_i dx \right] e_j -$$

$$\left[ \frac{bh^3(rc^2 - E_1 - E_2)}{12} \int f_j \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right] \dot{e}_j - \left[ \frac{rbh^3}{12t} \int f_j f_i dx \right] \ddot{e}_j$$

$$- \left[ \frac{bh^3(rc^2 - E_2)}{12t} \int f_j \frac{d^2 f_i}{dx^2} dx \right] e_j - [bhK_s (E_1 + E_2) \int f_j f_i dx] \dot{e}_j \quad (62-3)$$

$$- \left[ \frac{rbh^3c}{6t} \int f_j \frac{df_i}{dx} dx \right] \dot{e}_j + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0$$

### 3-3- توابع شکل



با فرض وب دو سر گیردار، خیز و شیب در دو سر ورق برابر صفر خواهد بود. حل مساله به تعریف توابع شکل نیازمند است. برای این مساله از توابع شکل درجه دو به شکل زیر استفاده شده است.

$$f_1 = \frac{2}{L^2}(x-x_2)(x-x_3) \quad f_2 = -\frac{4}{L^2}(x-x_1)(x-x_3) \quad f_3 = \frac{2}{L^2}(x-x_1)(x-x_2) \quad (63-3)$$

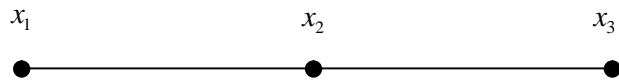
که دارای خاصیت زیر هستند:

$$\begin{array}{lll} f_1(x_1) = 1 & f_2(x_1) = 0 & f_3(x_1) = 0 \\ f_1(x_2) = 0 & f_2(x_2) = 1 & f_3(x_2) = 0 \\ f_1(x_3) = 0 & f_2(x_3) = 0 & f_3(x_3) = 1 \end{array} \quad (64-3)$$

از مقادیر بالا برای محاسبه انتگرال‌های معادلات بر حسب توابع شکل و بدست آوردن ماتریس‌های ضرایب استفاده می‌شود.

### 3-4- اعمال شرایط مرزی و محاسبه شار

المان استفاده شده برای مساله به صورت دو بعدی و با سه گره برای هر المان است. بنابراین مشتقات توابع شکل دو گره ابتدا و انتها برای محاسبه انتگرال‌های معادلات لازم است.



شکل (3-1): المان دو بعدی مساله با سه گره

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{2}{l^2}(2x - x_2 - x_3) \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{2}{l^2}(2x - x_1 - x_2) \quad (65-3)$$

توابع شکل  $f_i$  دارای خاصیت  $f_i(x_j) = d_{ij}$  می‌باشند. با توجه به روابط فوق و استفاده از شرایط

مرزی مقادیر  $A_1$  تا  $A_4$  را می‌توان تعیین کرد. در این صورت نتیجه می‌شود:

$$A_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [u_0 f_1]_1 \quad (66-3)$$

$$u_0 f_i(x)|_1^3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_0 f_i(3) - u_0 f_i(1))$$

$$i=1 \rightarrow u_0 f_1(3) - u_0 f_1(1) = -u_0(1,t)$$

$$i=3 \rightarrow u_0 f_3(3) - u_0 f_1(3) = u_0(3,t)$$

$$A_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_0(3,t) + u_0(1,t))$$

همین طور برای  $A_3$ :

$$A_3 = \frac{\partial}{\partial t} (u_0(3,t) + u_0(1,t)) \quad (67-3)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (3-65) و (3-66):

$$A_2 = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} f_i - u_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} \right]_1^3 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} f_i(x)|_1^3 - u_0(x,t) \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} |_1^3 \right)$$

$$\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} f_i(x)|_1^3 = \frac{\partial u_0(3,t)}{\partial x} f_i(3) - \frac{\partial u_0(1,t)}{\partial x} f_i(1)$$

$$i=1 \Rightarrow \frac{\partial u_0(3,t)}{\partial x} f_1(3) - \frac{\partial u_0(3,t)}{\partial x} f_1(1) = -\frac{\partial u_0(1,t)}{\partial x}$$

$$i=3 \Rightarrow \frac{\partial u_0(3,t)}{\partial x} f_3(3) - \frac{\partial u_0(3,t)}{\partial x} f_3(1) = -\frac{\partial u_0(3,t)}{\partial x} \quad (68-3)$$

$$u_0(x,t) \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} |_1^3 = u_0(3,t) \frac{\partial f_i(3)}{\partial x} - u_0(1,t) \frac{\partial f_i(1)}{\partial x}$$

$$i=1 \Rightarrow u_0(3,t) \frac{\partial f_1(3)}{\partial x} - u_0(1,t) \frac{\partial f_1(1)}{\partial x} = \frac{u_0(3,t)}{l} + 3 \frac{u_0(1,t)}{l}$$

$$i=3 \Rightarrow u_0(3,t) \frac{\partial f_3(3)}{\partial x} - u_0(1,t) \frac{\partial f_3(1)}{\partial x} = 3 \frac{u_0(3,t)}{l} + \frac{u_0(1,t)}{l}$$

و برای یک المان:

$$A_2 = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial u_0(1,t)}{\partial x} - \frac{\partial u_0(2,t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} 2 \left( \frac{u_0(3,t)}{l} - \frac{u_0(1,t)}{l} \right) \quad (69-3)$$

با توجه به شرایط مرزی جابجایی و شیب صفر در گره مرزی یعنی گره اول:

$$A_2 = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial u_0(2,t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} 2 \left( \frac{u_0(3,t)}{l} - \frac{u_0(1,t)}{l} \right) \quad (70-3)$$

همین طور برای  $A_4$ :

$$A_4 = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial u_0(2,t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} 2 \left( \frac{u_0(3,t)}{l} - \frac{u_0(1,t)}{l} \right) \quad (71-3)$$

ثوابت  $B_1$  تا  $B_4$  و  $C_1$  تا  $C_5$ ،  $D_1$  تا  $D_6$  و  $F_1$  تا  $F_4$  به همین شکل محاسبه می‌شوند.

با در نظر گرفتن چندین المان برای پوسته، باید در هر المان و المان بعد شرط پیوستگی رعایت گردد. یعنی باید مقادیر شیب و جابجایی برای هر دو المان مجاور یکسان باشد که با توجه به روابط فوق، مجموع مقادیر شار در المان‌های میانی پس از مونتاژ ماتریس‌های المان صفر خواهد شد. یعنی مثلا اگر ورق دارای دو المان باشد در اینصورت:

$$i=1 \Rightarrow A_1^1 = \frac{u_0(3,t)}{l} + 3 \frac{u_0(1,t)}{l}$$

$$i=3 \Rightarrow A_1^3 = 3 \frac{u_0(3,t)}{l} + \frac{u_0(1,t)}{l} \quad (72-3)$$

$$A_1 = A_1^1 + A_1^3 + A_1^5$$

پس برای دو المان:

$$A_1 = \frac{3u_0(3,t)}{l} + \frac{u_0(1,t)}{l} - \frac{u_0(3,t)}{l} - \frac{3u_0(1,t)}{l} + \frac{3u_0(3,t)}{l} - \frac{u_0(3,t)}{l} + \frac{3u_0(5,t)}{l} + \frac{u_0(3,t)}{l} - \frac{u_0(5,t)}{l} - \frac{3u_0(3,t)}{l} \quad (73-3)$$

از آنجایی که شیب و جابجایی در دو گره مرزی اول و پنجم صفر است:

$$A_1 = 0 \quad (74-3)$$

بنابراین شار کل برای تمام پارامترهای  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$  و  $F$ ، برابر صفر است.

### 3-5- روند تشکیل و مونتاژ ماتریس‌ها

پنج معادله به صورت یک دستگاه معادلات به شکل زیر در قالب ماتریس برای حل عددی مرتب

می‌شود.

$$D\ddot{y} + M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F \quad (75-3)$$

که در آن  $y = \{a, b, c, d, e\}$ ،  $D$ ،  $M$ ،  $C$ ،  $K$  ماتریس ضرایب و  $F$  بردار نیرو است، که بر

حسب اندیس‌های  $i$  و  $j$  با استفاده از معادلات (27-2) و (28-2) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K = [A_1] \int_0^{Le} f_i f_j dx - [A_2] \int_0^{Le} \frac{\partial f_i}{\partial x} f_j dx + [A_3] \int_0^{Le} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} f_j dx \quad (76-3)$$

$$C = [A_7] \int_0^{Le} f_i f_j dx - [A_4] \int_0^{Le} \frac{\partial f_i}{\partial x} f_j dx + [A_5] \int_0^{Le} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} f_j dx \quad (77-3)$$

$$M = [A_8] \int_0^{Le} f_i f_j dx - [A_6] \int_0^{Le} \frac{\partial f_i}{\partial x} f_j dx \quad (78-3)$$

$$D = [A_9] \int_0^{Le} f_i f_j dx \quad (79-3)$$

$$F = [f] \int_0^{Le} f_i dx \quad (80-3)$$

ماتریس‌ها برای هر المان با توجه به اندیس  $i$  و  $j$  پر می‌شوند و سپس با هم مونتاژ می‌گردند. به

طور مثال برای یک المان:

$$D = \begin{bmatrix} (5 \times 5) \begin{cases} i=1 \\ j=1 \end{cases} & (5 \times 5) \begin{cases} i=1 \\ j=2 \end{cases} & (5 \times 5) \begin{cases} i=1 \\ j=3 \end{cases} \\ (5 \times 5) \begin{cases} i=2 \\ j=1 \end{cases} & (5 \times 5) \begin{cases} i=2 \\ j=2 \end{cases} & (5 \times 5) \begin{cases} i=2 \\ j=3 \end{cases} \\ (5 \times 5) \begin{cases} i=3 \\ j=1 \end{cases} & (5 \times 5) \begin{cases} i=3 \\ j=2 \end{cases} & (5 \times 5) \begin{cases} i=3 \\ j=3 \end{cases} \end{bmatrix}_{15 \times 15} \quad (81-3)$$

$$1) i = j = 1, D(1,1) = -rbh \int_0^l f_1 f_1 dx = -rbh \int_0^l f_1^2 dx = \frac{-rbhl}{3} \quad (82-3)$$

$$2) i = j = 2, D(1,6) = -rbh \int_0^l f_1 f_2 dx = -rbh \int_0^l f_1 f_2 dx = \frac{rbhl}{6}$$

### 3-6- روش تقریب تفاضلات محدود<sup>1</sup>

جهت حل دستگاه معادلات به دست آمده بر حسب زمان از روش تفاضلات محدود استفاده می‌گردد. حل‌گرهای پیش‌فرض نرم‌افزارهای عددی به صورت اتوماتیک مقدار گام زمانی را انتخاب می‌کنند، از آنجا که در این مساله همگرایی جواب‌ها به شدت به تعداد المان‌ها و گام زمانی بستگی دارد، لازم است کدی با امکان کنترل بر گام حل و امکان تعمیم به حالت تعداد المان دلخواه آماده شود. با استفاده از روش تفاضلات محدود، مشتقات از درجه سوم و پایین‌تر نسبت به زمان، طبق جدول (3-1) به صورت ترکیبی از مقادیری از تابع در زمان‌های قبلی تقریب زده می‌شوند، سپس این معادلات برای زمان بعدی حل می‌گردد. مقدار تابع بدست آمده در هر گام، در گام بعد به عنوان مقدار قبلی تابع در نظر گرفته شده و حل در زمان پیش می‌رود.

جدول (3-1) ضرایب روش پسروی<sup>2</sup> تفاضلات محدود با خطای مرتبه دو  $(o(h^2))$  [48]

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2hf'(x)$				1	-4	3
$h^2 f''(x)$			-1	4	-5	2
$2h^3 f'''(x)$		3	-14	24	-18	5
$h^4 f^{(4)}(x)$	-2	11	-24	26	-14	3

### 3-7- روند استخراج فرکانس طبیعی [49]

برای استخراج فرکانس‌های طبیعی معادلات کوپل با قرار دادن مقدار  $(y = ae^{i\omega t})$  در بخش همگن معادله (3-75) نتیجه می‌شود:

$$D(ae^{i\omega t}) + M(ae^{i\omega t}) + C(ae^{i\omega t}) + K(ae^{i\omega t}) = 0 \quad (83-3)$$

بنابراین:

$$(-i\omega^3 * D - \omega^2 * M + i\omega C + K)(y)e^{i\omega t} = 0 \quad (84-3)$$

<sup>1</sup> Finite difference Approximations

<sup>2</sup> Backward

با ضرب کردن این ضرایب در ماتریس‌ها و جمع کردن این ماتریس‌های هم مرتبه و محاسبه ریشه‌های دترمینان ماتریس ضرایب بدست آمده، فرکانس‌ها نتیجه می‌شود. مقدار فرکانس‌ها در یک تعداد المان بهینه بدست خواهد آمد. همین روال برای سه معادله مستقل با چند المان اعمال شده و فرکانس‌ها بدست خواهند آمد.

### 3-8- جمع‌بندی

در این فصل ابتدا به وسیله روش گالرکین بخش مکانی و زمانی معادلات از هم جدا شد. معادلات در قالب یک معادله جبری ریخته شد. روش تفاضلات محدود جهت حل معادله مرتبه سوم زمانی مساله به کار برده می‌شود. براساس مرتبه مشتق نسبت به زمان، ضرایب متغیرها در ماتریس‌های ضرایب این دستگاه معادله زمانی قرار می‌گیرند و مونتاژ می‌شوند. روش تفاضلات محدود برای حل این دستگاه با کد کامپیوتری تعمیم داده می‌شود. در فصل بعد به بررسی نتایج حل دستگاه معادلات پرداخته می‌شود.

## فصل 4

# بررسی نتایج

#### 1-4 - مقدمه

در این فصل به بررسی نتایج حاصل از روش‌های بیان شده در فصل سوم برای حل مساله پرداخته می‌شود. تغییر مکان نقطه وسط وب در طی زمان، تاثیرات پارامترهای مختلف هندسی، خواص ویسکوالاستیک و اندازه بارگذاری بر پاسخ نقطه وسط، تعیین فرکانس‌های طبیعی و بررسی تاثیر تغییر پارامترهای هندسی، ویسکوالاستیک بر فرکانس‌ها، از مباحث مطرح شده در این فصل است.

#### 2-4 - پاسخ کلی سیستم به ازای مقادیر اولیه

مقادیر اولیه انتخابی به صورت جدول زیر می‌باشند. در ادامه در این پارامترها تغییراتی ایجاد و تاثیر آن بر پاسخ وب نمایش داده می‌شود:

جدول (1-4) خصوصیات ماده، بارگذاری و هندسه وب

توضیح	مقدار پارامتر	نماد پارامتر
خصوصیات ویسکوالاستیک مدل زلزله	10e10	$E_1(Pa)$
	2.5e10	$E_2(Pa)$
	4e10	$h(Pa.s)$
خصوصیات الاستیک	6.5e10	$E(Pa)$
	0.3	$n$
	5.4167e10	$K(Pa)$
خصوصیات هندسی	0.027	$b(m)$
	0.01	$h(m)$
	0.5	$L(m)$
سرعت انتقال	0.05	$c(m/s)$
بارهای اعمالی	$1 * (1 - Heaviside(t - 1/\sqrt{2}))$	$P(Pa)$
	27800	$T(N/m^3)$
چگالی	7800	$r(kg/m^3)$

قابل ذکر است مدول الاستیسیته و بالک وب الاستیک با توجه به روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$E = \frac{E_2}{2(1+n)} \quad (1-4)$$

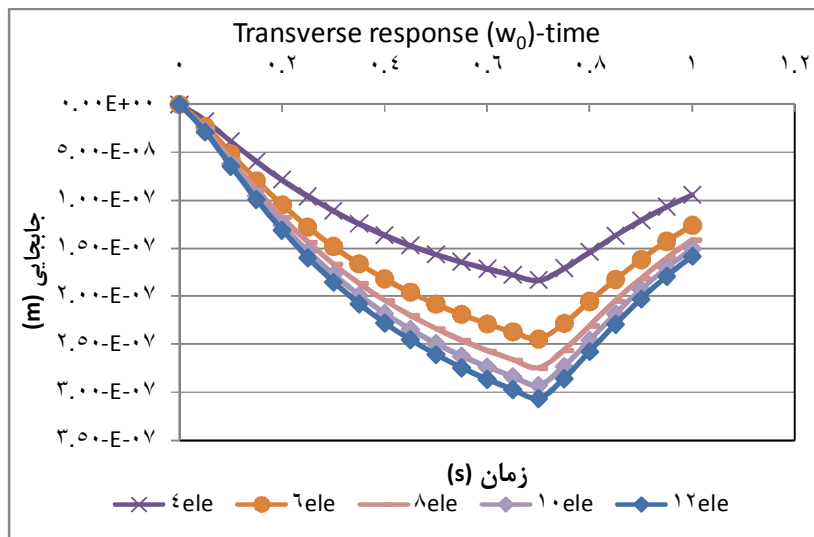
$$K = \frac{E}{3(1-2n)} \quad (2-4)$$



مقادیر خصوصیات الاستیک در تعیین پاسخ استاتیکی وب استفاده می‌شوند.

#### 4-2-1- روند حل برای بدست آوردن پاسخ وب

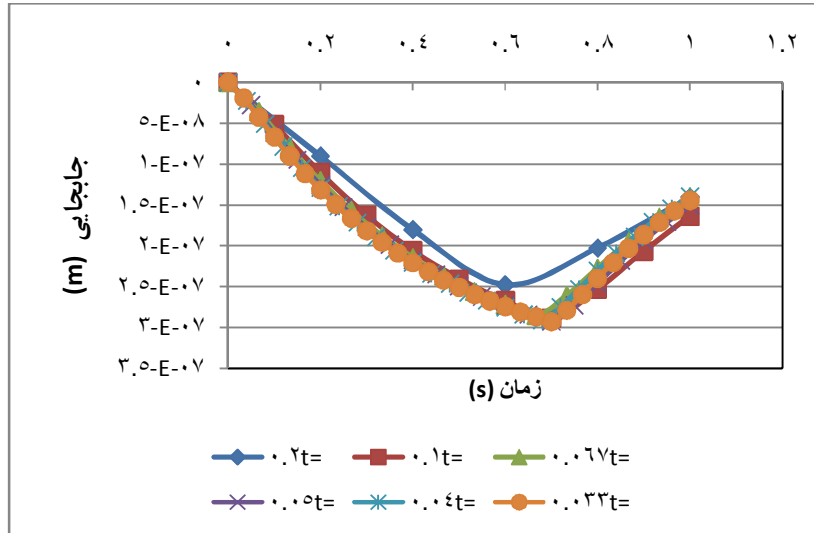
کد کامپیوتری در نرم‌افزار میپل برای حل مساله توسعه داده شد. چند گلوگاه در بدست آوردن جواب‌ها وجود داشت. مهمترین آن‌ها تعداد المان و گام زمانی بهینه، توابع شکل از مرتبه مناسب و رسیدن به یک روش عددی مناسب برای حل دستگاه معادله بود. جهت بدست آوردن تعداد المان بهینه، پاسخ خروجی از کد با شروع از یک المان و افزایش تعداد آن رسم شد، از یک تعداد المان به بعد تغییر آنچنانی در مقادیر پاسخ‌ها به وجود نمی‌آمد، بنابراین این تعداد به عنوان تعداد المان بهینه انتخاب شد.



شکل (4-1) جابجایی عرضی نقطه وسط وب در طی زمان بر حسب تعداد المان

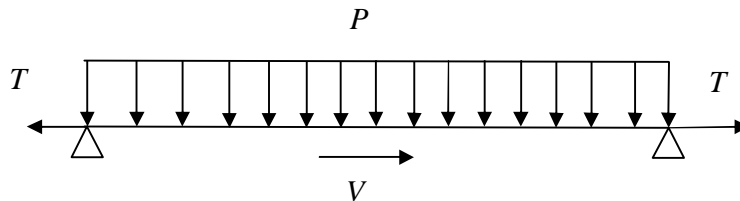
برای گام زمانی بهینه هم همین روال تکرار شده است تا کوچکترین گام زمانی که بعد از آن دقت

پاسخ‌ها خیلی کم تغییر می‌کند، بدست آید.

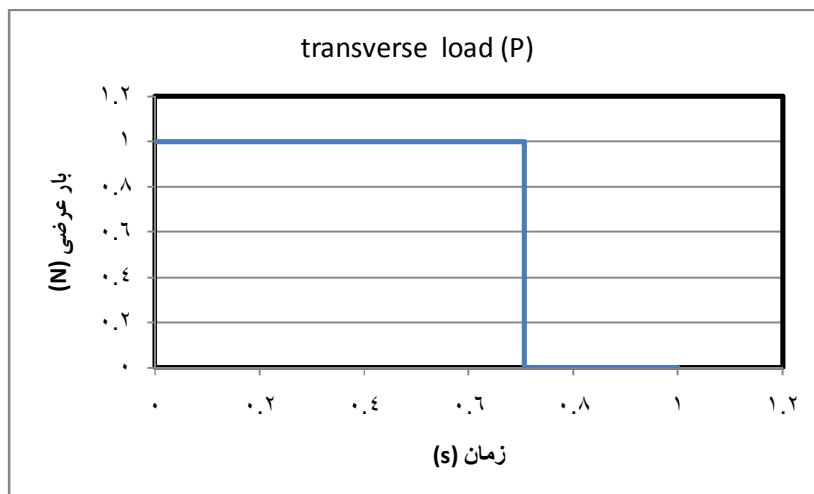


شکل (2-4) جابجایی عرضی نقطه وسط وب در طی زمان بر حسب گام زمانی حل

با ترکیب تعداد المان و گام زمانی بهینه پاسخها با دقت مناسب استخراج شدند، سپس تاثیر پارامترهای مختلف بر پاسخها بررسی شد. برای زمان حل یک ثانیه، تعداد ده المان و بیست گام زمانی حالت بهینه مساله هستند. بار عرضی گسترده زیر بر وب وارد می شود:



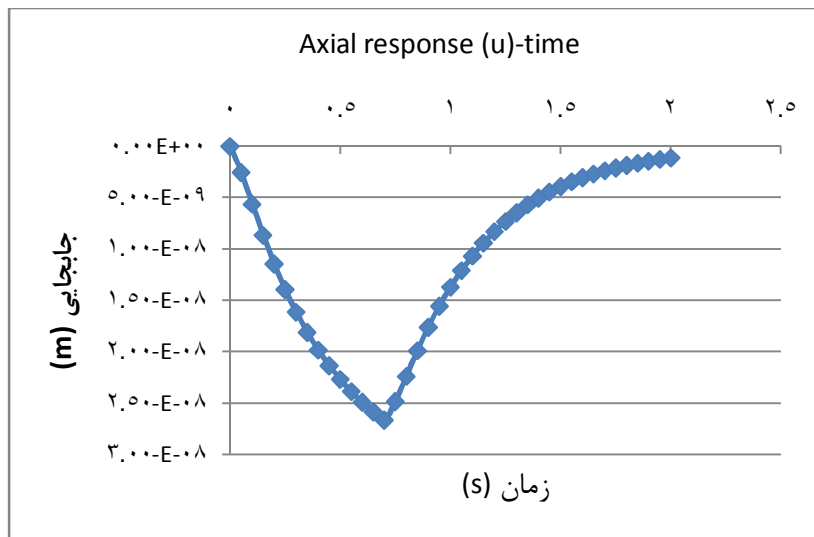
شکل (3-4) شماتیک بارگذاری عرضی و کششی وارد بر وب



شکل (4-4) بارگذاری گسترده عرضی وب

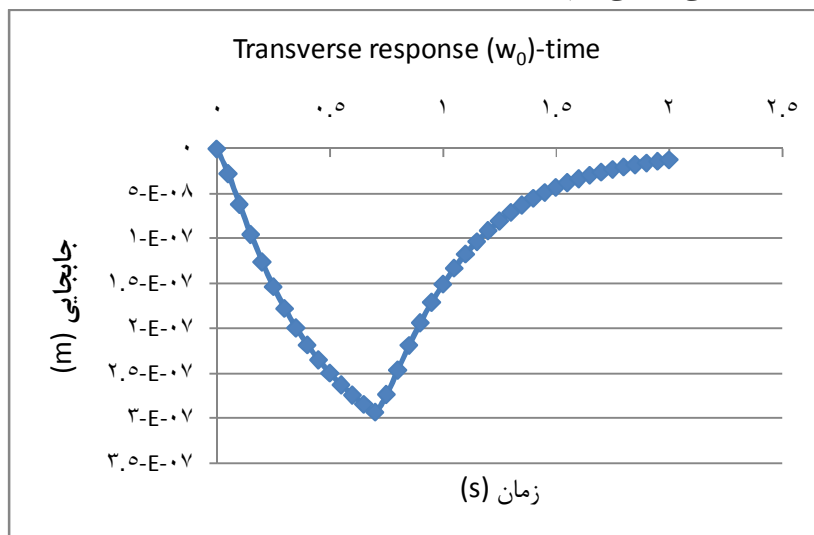
## 4-2-2- پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان

در شکل (4-5) و (4-6) پاسخ نقطه میانی وب برای زمان حل 2 ثانیه آمده است. با قرار گرفتن بار بر روی وب، با گذشت زمان جابجایی افزایش می‌یابد، سپس با برداشته شدن بار عرضی نقطه وسط وب به خاطر خاصیت دمپری به سمت صفر میل می‌کند. نتایج در نمودار زیر برای 40 گام زمانی و ده المان آمده است.



شکل(4-5) جابجایی طولی نقطه وسط وب در طی زمان

همین رفتار در جابجایی عرضی هم وجود دارد:



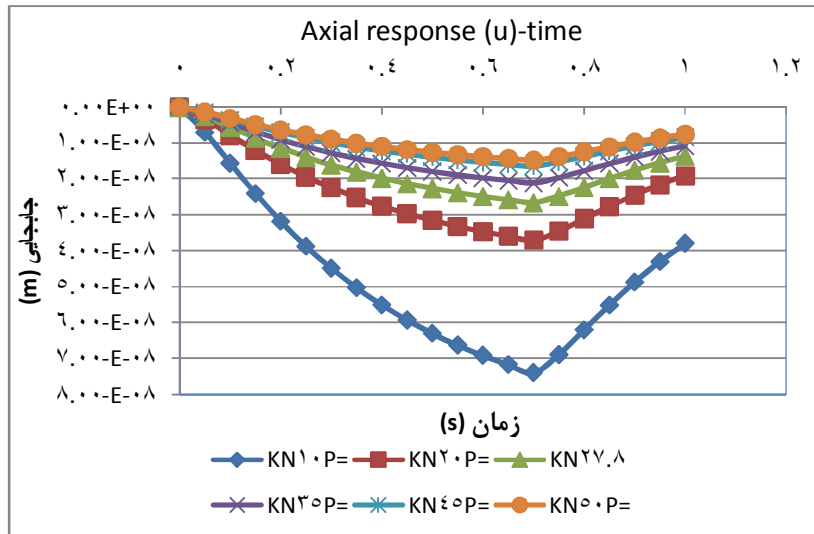
شکل(4-6) جابجایی عرضی نقطه وسط وب در طی زمان

توضیح دیگر این که شکل پاسخ به شدت به شکل بارگذاری وابسته است.

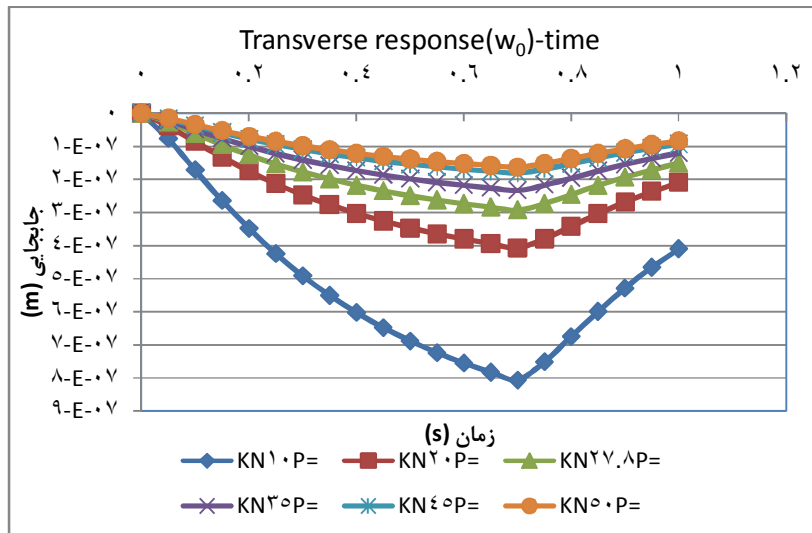
#### 4-2-3- تاثیر بار محوری بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان

همانطور که در شکل (7-4) و (8-4) مشخص است، افزایش بار کششی سبب می‌شود که میزان

تغییرات جابجایی‌ها در طی زمان برای نقطه وسط وب بسیار کمتر شود.



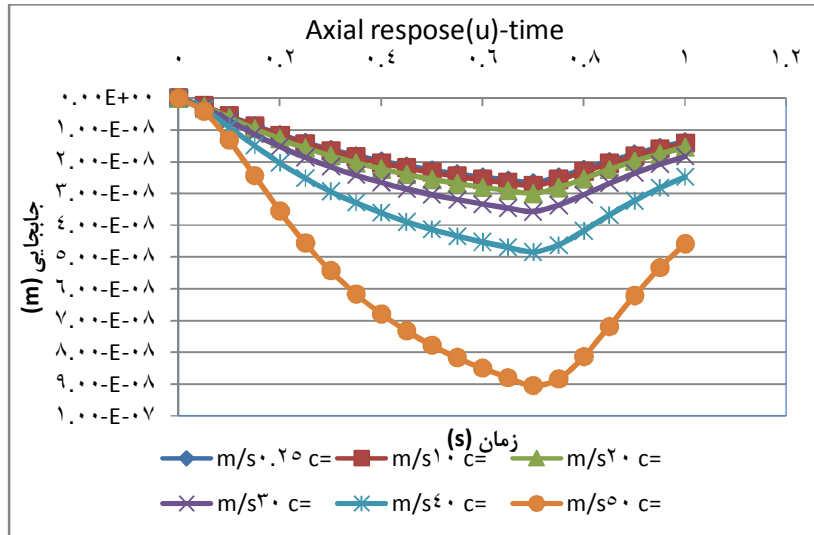
شکل(7-4) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با بارهای کششی متفاوت در طی زمان



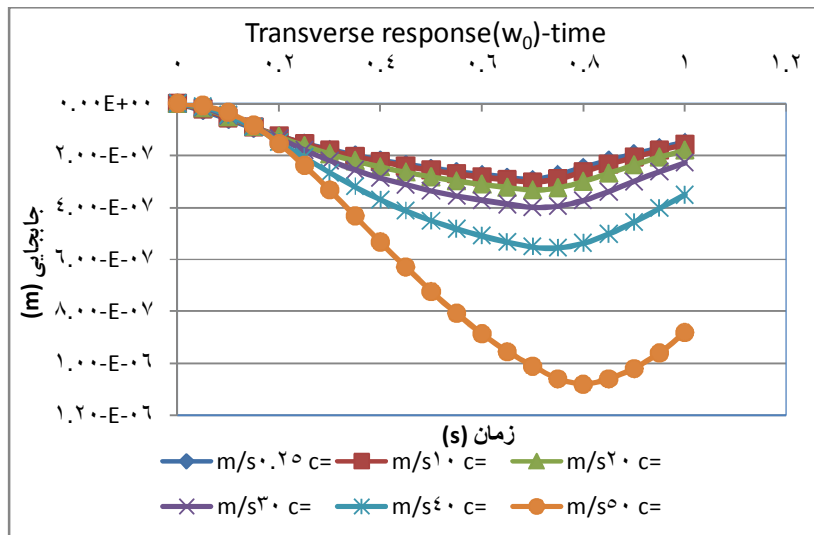
شکل(8-4) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با بارهای کششی متفاوت در طی زمان

#### 4-2-4- تاثیر سرعت حرکت محوری وب بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان

با توجه به شکل (9-4) و (10-4) با افزایش سرعت، مقدار تغییر شکل‌های عرضی و طولی در طی زمان افزوده می‌گردد. این تغییرات در سرعت‌های پایین کم می‌شود، با افزایش سرعت تغییرات به شدت زیاد می‌شود، یعنی به وضعیت ناپایدار سیستم نزدیک می‌شویم.



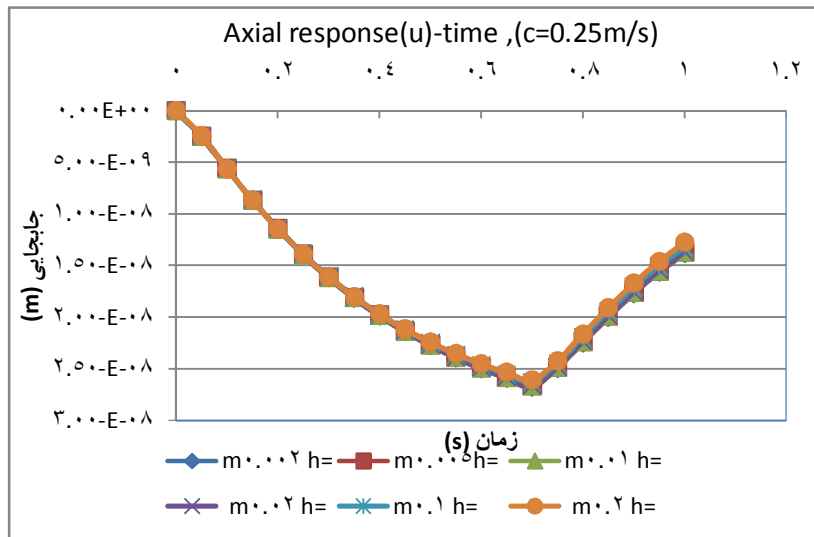
شکل (9-4) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با سرعت‌های محوری متفاوت در طی زمان



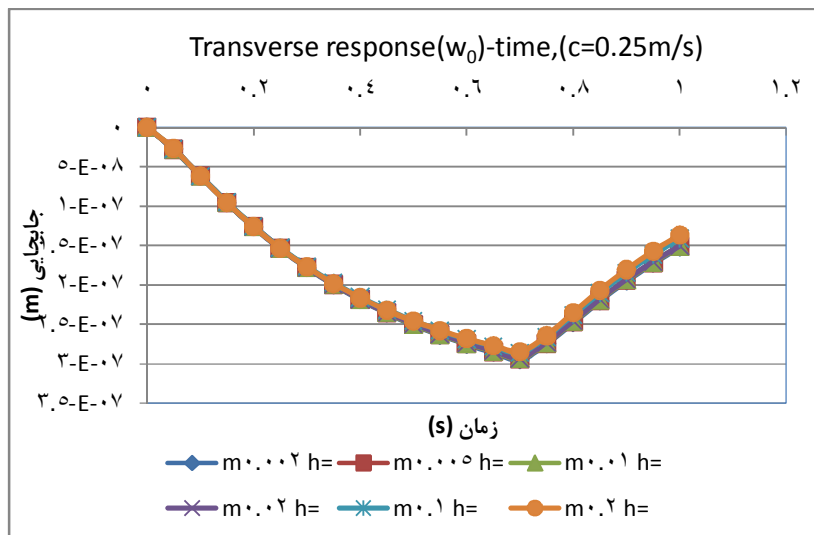
شکل (10-4) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با سرعت‌های محوری متفاوت در طی زمان

#### 4-2-5- تاثیر ضخامت وب بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان

در سرعت‌های پایین مثل ( $c = 0.25m/s$ ) حساسیت پاسخ به تغییرات ضخامت زیاد نیست اما با افزوده شدن سرعت به طور مثال به ( $c = 50m/s$ )، پاسخ به شدت با تغییر ضخامت تغییر کرده و بعد از یک ضخامت خاص واگرا می‌شود.

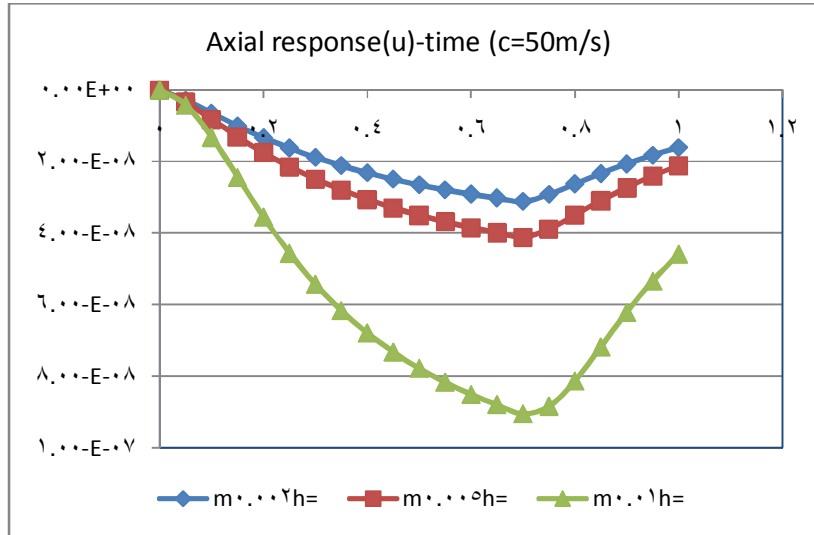


شکل(4-11) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با ضخامت وب متفاوت در طی زمان



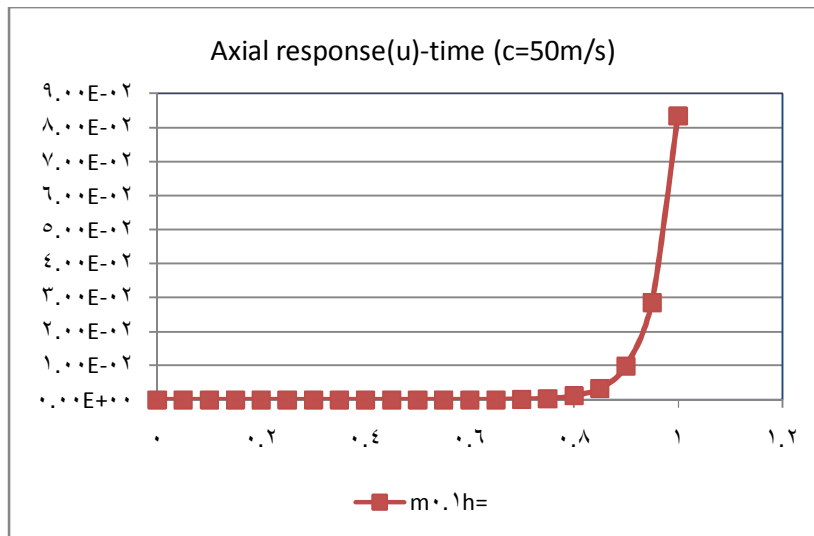
شکل(4-12) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با ضخامت وب متفاوت در طی زمان

اما این تغییرات برای سرعت‌های بالا زیاد است:



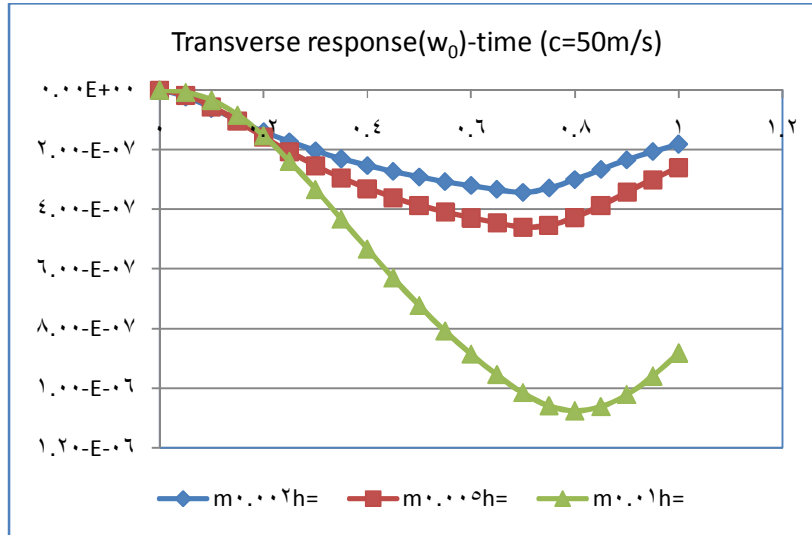
شکل (4-13) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با ضخامت وب متفاوت در طی زمان با سرعت‌های بالا

در ضخامت بالاتر از ( $h = 0.01m$ ) به سرعت پاسخ واگرا می‌شود:



شکل (4-14) وگرایی جابجایی طولی نقطه وسط وب با ضخامت وب متفاوت، در طی زمان با سرعت بالا

همین‌طور برای پاسخ عرضی:



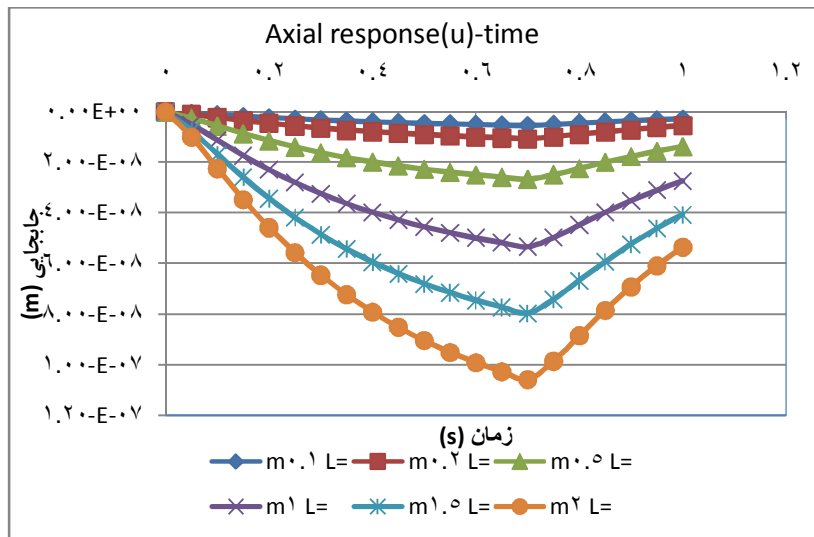
شکل (4-15) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با ضخامت وب متفاوت در طی زمان با سرعت‌های بالا

توجه داریم که مقدار برگشت جابجایی عرضی به حالت اولیه با افزایش ضخامت به نسبت جابجایی طولی کمتر است.

#### 4-2-6- تاثیر طول وب بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان

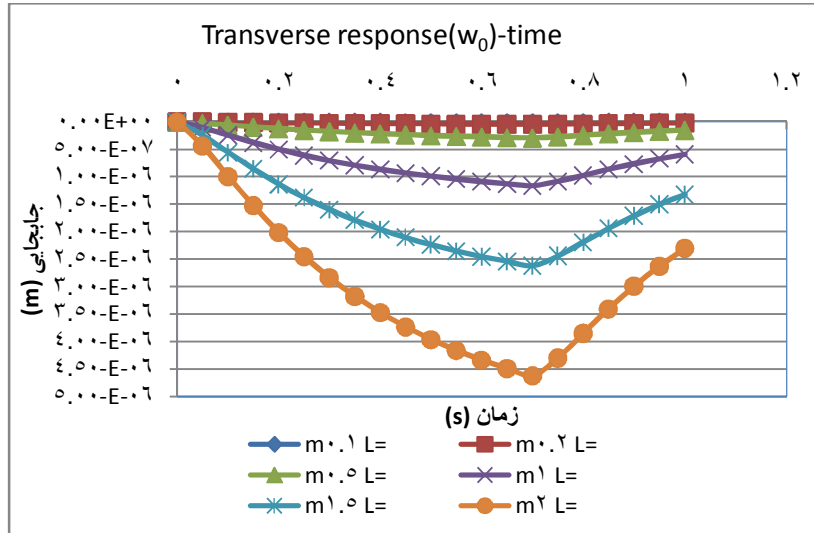
با افزایش طول وب همانطور که نمودارهای زیر نشان می‌دهند، مقدار جابجایی‌های نقطه وسط وب

هم افزوده می‌گردد.



شکل (4-16) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با طول وب متفاوت در طی زمان

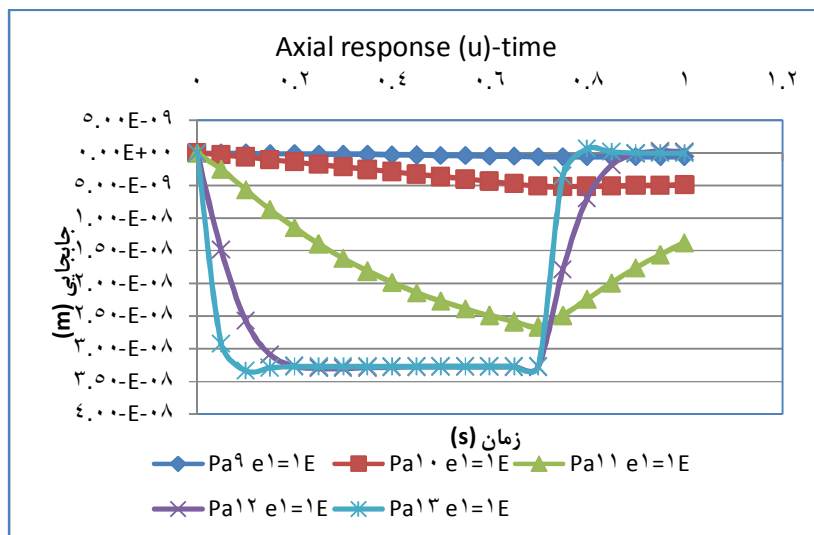




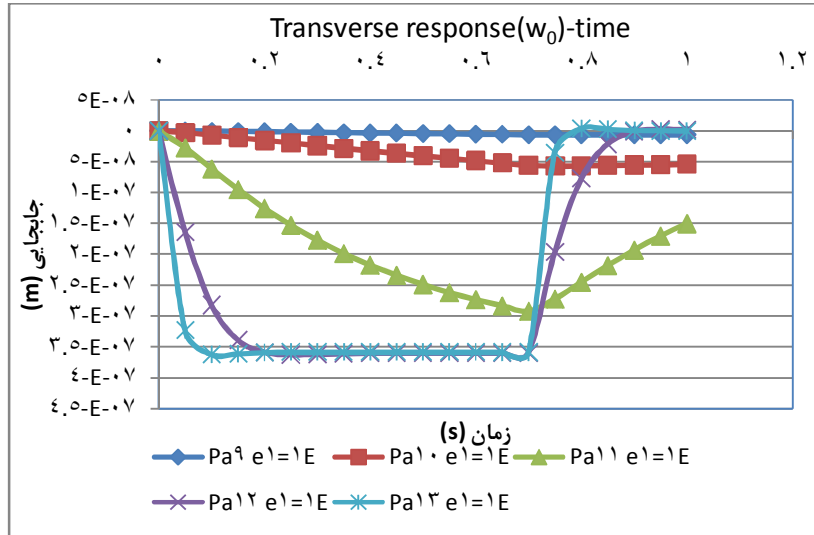
شکل(17-4) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با طول وب متفاوت در طی زمان

#### 4-2-7- تاثیر پارامتر $E_1$ بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان

برخلاف پارامترهای هندسی که بیشتر بر اندازه پاسخ تاثیر می‌گذارند، تغییر در خواص ویسکوالاستیک به شدت بر شکل پاسخ موثر است. در محدوده ( $10^8 < E_1 < 10^{11}$ ) تغییرات پاسخ زیاد است و برای ( $E_1 > 10^{12}$ ) پاسخ تغییری نمی‌کند. با زیاد شدن مقدار  $E_1$  عملا مدل زبر نوع دوم به ماکسول نزدیک می‌شود.



شکل(18-4) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با  $E_1$  متفاوت در طی زمان

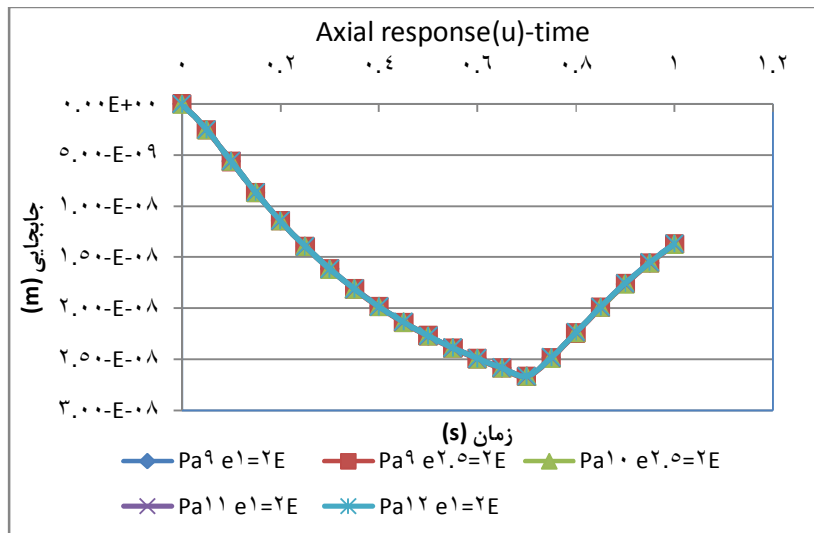


شکل(4-19) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با  $E_1$  متفاوت در طی زمان

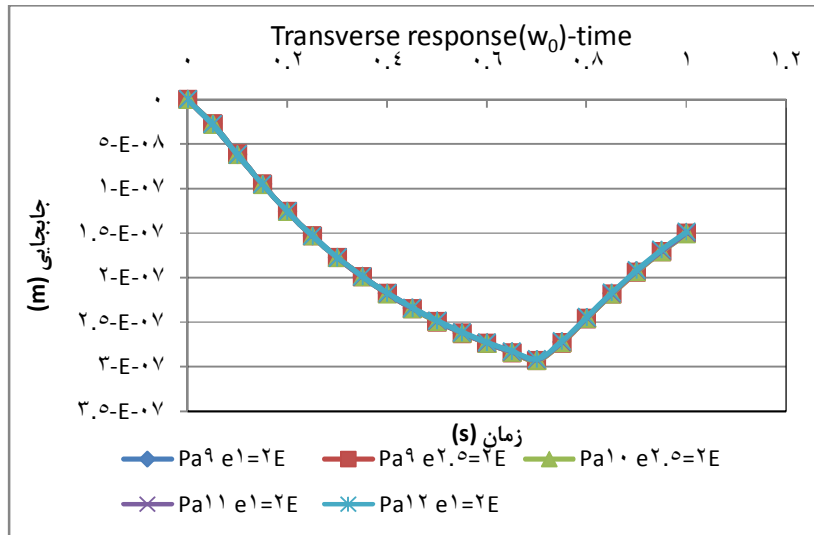
#### 4-2-8- تاثیر پارامتر $E_2$ بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان

با توجه به مدل ویسکوالاستیک انتخاب شده که از نوع زلزله مرتبه دو می باشد تاثیر پارامتر  $E_2$  بر

خلاف  $E_1$  بر مقادیر جوابها تقریباً صفر است:



شکل(4-20) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با  $E_2$  متفاوت در طی زمان



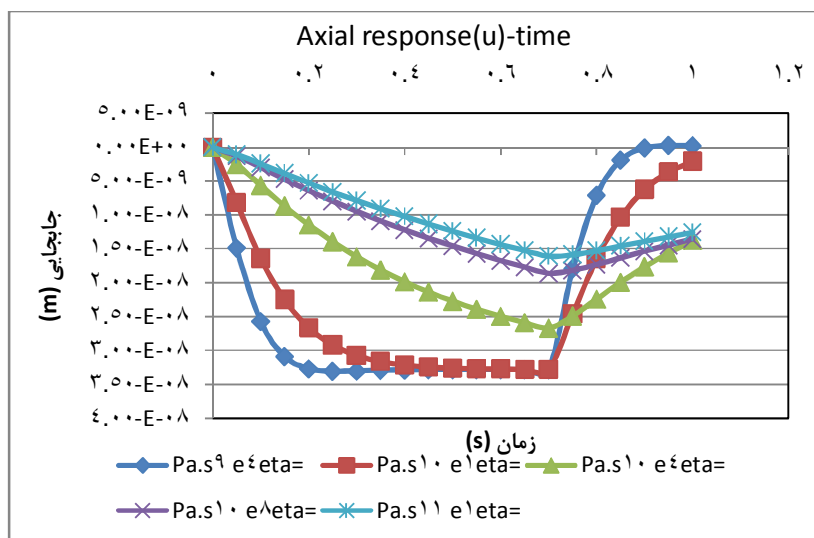
شکل(21-4) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با  $E_2$  متفاوت در طی زمان

#### 4-2-9- تاثیر پارامتر $h$ بر پاسخ نقطه میانی وب در طی زمان

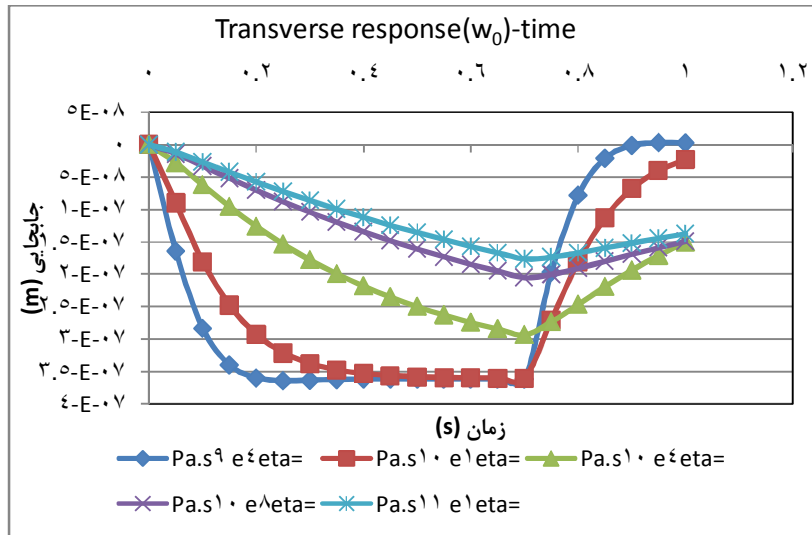
تغییر این پارامتر هم در شکل جوابها تاثیر می‌گذارد، با افزایش دمپینگ سیستم مقدار بیشینه

جابجایی به سرعت کاهش می‌یابد. در نمودار زیر تاثیر گذاری بر شکل پاسخ در  $4 \times 10^9 < h < 4 \times 10^{10}$

( شدید بوده و در بیشتر از آن این تاثیر بسیار کم می‌شود.



شکل(22-4) تغییرات جابجایی طولی نقطه وسط وب با  $h$  متفاوت در طی زمان



شکل (4-23) تغییرات جابجایی عرضی نقطه وسط وب با  $h$  متفاوت در طی زمان

#### 4-3- فرکانس طبیعی

فرکانس طبیعی برای دو معادله کوپل در حالت وجود دمپر در سیستم و بدون آن در جدول آمده است.

جدول (4-2) فرکانس‌های دو معادله کوپل

حالت	فرکانس (rad/s)
با وجود دمپر	672/1
بدون دمپر	1103

#### 4-4- جمع بندی

در این فصل ابتدا پاسخ عرضی و طولی ورق براساس بار وارده بدست آمد، سپس حساسیت این پاسخ‌ها به پارامترهای هندسی ورق و نیز خواص ماده ویسکوالاستیک فرض شده برای جنس ورق بررسی شد. در ادامه فرکانس‌های طبیعی معادلات کوپل بدست آمد.

## فصل 5

# نتیجه‌گیری و پیشنهادها

## 5-1- مقدمه

در این پایان‌نامه، به حل عددی معادله حاکم بر ارتعاشات وب ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت فشار عرضی ثابت پرداخته شده است. در ابتدا، به کمک اصل هامیلتون و براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم بر ارتعاشات وب الاستیک متحرک محوری در حالت دو بعدی استخراج شده‌اند. سپس با در نظر گرفتن مدل زرن نوع دوم جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک وب متحرک در برش و رفتار الاستیک در اتساع، با استفاده از شکل دیفرانسیلی معادلات بنیادین، معادلات مذکور برای وب ویسکوالاستیک متحرک تعمیم داده شده‌اند. معادلات حاکم به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی شامل پنج معادله و پنج مجهول می‌باشند که برخی از آن‌ها کوپل به هم می‌باشند. از آنجا که حل این معادلات در حالت دو بعدی مشکل می‌باشد، با فرض این که نسبت طول به عرض به اندازه کافی بزرگ باشد، تغییرات نسبت به مختصه  $y$  برابر صفر قرار داده شد. بنابراین معادلات حاصل فقط شامل متغیرهای بعد طولی و زمان می‌باشند. با اعمال روش گالرکین قسمت‌های مکانی و زمانی از هم جدا می‌شوند. برای حل قسمت زمانی از روش تفاضلات محدود استفاده شد. گام و تعداد المان بهینه برای حل بدست آمد. سپس اثر پارامترهای مختلف شامل هندسه و خواص ویسکوالاستیک ورق بر پاسخ مکانی ورق بررسی شد. همچنین فرکانس‌ها استخراج شد و برای آن‌ها هم اثر پارامترهای هندسی و خواص ویسکوالاستیک بررسی شد.

## 5-2- نتایج

نتایج این پایان‌نامه به صورت زیر قابل بیان می‌باشند:

1- افزایش بار کششی سبب می‌شود بیشینه جابجایی نقطه وسط وب کاهش یابد. چون استحکام<sup>1</sup>

وب افزایش یافته است.

2- در هر نوع بارگذاری، پس از باربرداری، وب به خاطر خاصیت دمپر خود به حالت اولیه

برمی‌گردد.

---

<sup>1</sup> Stiffness

- 3- با افزایش سرعت محوری مقدار جابجایی وب زیاد شده و به حالت ناپایداری سیستم نزدیک می‌شود.
- 4- با افزایش ضخامت وب، در سرعت‌های پایین مقدار کمی جابجایی وسط وب کمی تغییر می‌کند. اما در سرعت‌های بالاتر، افزایش ضخامت به سرعت جابجایی را هم افزایش می‌دهد و اگر باز هم ضخامت اضافه شود پاسخ واگرا می‌گردد.
- 5- پارامترهای هندسی وب بیشتر بر اندازه جواب‌ها تاثیر می‌گذارند تا شکل جواب‌ها
- 6- با توجه به مدل ویسکوالاستیک زبر نوع دوم در نظر گرفته شده، مقدار پارامتر  $E_2$  تاثیری تقریباً برابر صفر بر پاسخ دارد.
- 7- پارامترهای  $E_1$  و  $h$  تاثیر به سزایی بر شکل پاسخ می‌گذارند، در این شرایط شکل پاسخ‌ها با کاهش  $h$  یا افزایش  $E_1$  هم شکل می‌شوند.
- 8- در حل عددی اگر گام‌های حل، بیشتر یا کمتر از مقدار بهینه باشد جواب‌ها واگرا می‌شود. همچنین با افزایش تعداد المان زمان حل و دقت آن افزوده می‌گردد، اما باید تعداد المان بهینه بدست آید تا بهترین زمان حل را داشت.
- 9- در تشکیل ماتریس‌ها، استفاده از توابع شکل درجات بالاتر بر دقت حل می‌افزاید.

### 3-5- پیشنهادها

موارد زیر جهت شناخت و مطالعه جامع‌تر پیشنهاد می‌گردد:

- 1- بررسی اثر تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌های بالاتر
- 2- بررسی دینامیکی وب ویسکوالاستیک متحرک با سرعت متغیر با زمان
- 3- بررسی اثرات شار مرزی در المان محدود مساله
- 4- بررسی پاسخ سیستم تحت فشار متغیر

5- بررسی اثر مدل‌های مختلف ویسکوالاستیک

6- وب‌های کامپوزیتی متحرک محوری

7- وب‌های متحرک روی بسترهای الاستیک و ویسکوالاستیک

8- بررسی اثر توابع شکل مرتبه بالاتر

9- استفاده از روش‌های حل عددی با دقت بالاتر

10- بررسی اثر تکیه‌گاه‌های مختلف

11- بررسی پاسخ سیستم تحت بار کششی وابسته به زمان

12- حل دوبعدی ورق با بارهای مختلف



# پیوست‌ها

## پیوست الف- بررسی تئوری های ورق [50]

در این پیوست، تئوری های مختلف ورق، از تئوری کیرشهف<sup>1</sup> (کلاسیک) ورق، تئوری تغییر شکل مرتبه اول میندلین<sup>2</sup> و در نهایت تئوری تغییر شکل مرتبه سوم (ردی) ورق ها مطرح شده اند. در تئوری های تغییر شکل برشی، اثر تغییر شکل برشی عرضی که در تئوری کیرشهف صرف نظر شده، لحاظ شده است. با استفاده از اصل جابجایی های مجازی<sup>3</sup> و بر مبنای فرضیات سینماتیکی مطرح شده در تئوری های مورد مطالعه، معادله ی حاکم و شرایط مرزی، برای ورق با ضخامت یکنواخت استخراج شده است.

### الف - 1 - مروری بر تئوری های بررسی رفتار ورق ها

تئوری ورق دوبعدی را می توان به دو دسته تقسیم کرد:

1- تئوری ورق کلاسیک که در آن از اثر تغییر شکل برش عرضی صرف نظر شده است.

2- تئوری های تغییر شکل برشی ورق.

تئوری ورق کلاسیک (کیرشهف) (CPT) برای حالت خمش خالص، بر مبنای میدان جابجایی زیر می باشد:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{الف-1})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

که در آن  $(u, v, w)$  به ترتیب مولفه های جابجایی در راستای  $(x, y, z)$  و  $w_0$  خیز صفحه ی میانی (یعنی  $z = 0$ ) می باشند. میدان جابجایی مذکور دلالت بر آن دارد که خط مستقیم عمود بر صفحه ی

---

<sup>1</sup> Kirchhoff

<sup>2</sup> Mindlin

<sup>3</sup> Virtual Displacements

$xy$ ، پس از تغییر شکل، مستقیم و عمود باقی می‌ماند. در فرض کیرشهف هر دو اثر برش عرضی و نرمال عرضی، یعنی تغییر شکل حاصل از خمش و کشیدگی درون صفحه‌ای، صرف نظر شده است. یک تعداد از تئوری‌های تغییر شکل برشی وجود دارند که ساده‌ترین آن، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) می‌باشد که همچنین به تئوری ورق میندلین (1951) معروف است. این تئوری بر مبنای میدان جابجایی زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad \text{(الف-2)}$$

که در آن  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  به ترتیب چرخش حول محورهای  $x$  و  $y$  می‌باشند. FSDT با در نظر گرفتن تغییر شکل عرضی در فرضیات سینماتیکی‌اش (یعنی کرنش برشی عرضی ثابت نسبت به مختصات ضخامت)، CPT را توسعه بخشیده است. در FSDT، فاکتورهای تصحیح برشی‌ای معرفی می‌شوند که اختلاف بین نیروی برشی عرضی واقعی و آنچه که با استفاده از روابط سینماتیکی FSDT بدست می‌آیند را تصحیح می‌کنند. که این پارامترها علاوه بر هندسه سازه، به بارگذاری و شرایط مرزی ورق نیز وابسته می‌باشد.

در هر دو تئوری FSDT و CPT، حالت تنش را صفحه‌ای در نظر گرفته و از شکل تنش صفحه‌ای کاهش یافته معادله رفتاری استفاده شده است.

در تئوری‌های مرتبه دو و بالاتر، از چند جمله‌ای مرتبه بالاتر در بسط مربوط به مولفه‌های جابجایی استفاده می‌شود. تئوری‌های مرتبه بالاتر پارامترهای جدیدی معرفی می‌کنند که اغلب تعبیر فیزیکی آنها مشکل می‌باشد. تئوری مرتبه دوم میدان جابجایی را به صورت زیر در نظر می‌گیرد:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z \varphi_x(x, y) + z^2 \gamma_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z \varphi_y(x, y) + z^2 \gamma_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad \text{(الف-3)}$$

در تئوری‌های مرتبه سوم ردی 1 (TSDT) نیز میدان جابجایی به شکل زیر فرض می‌شود:

$$u(x, y, z) = z \varphi_x(x, y) - az^3 \left( j_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)$$

$$v(x, y, z) = z \varphi_y(x, y) - az^3 \left( j_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (4\text{-الف})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

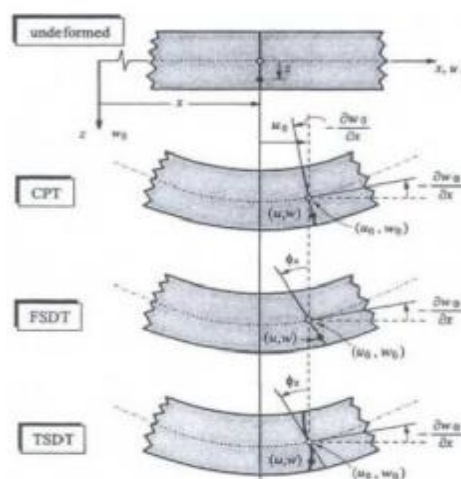
با  $a = 4/(3h^2)$  می‌باشد و با صفر قراردادن آن، به تئوری مرتبه اول می‌رسیم. میدان جابجایی با

تغییرات مرتبه دوم کرنش برشی عرضی در راستای ضخامت و مقدار صفر تنش‌های برشی در سطوح

بالا و پایین ورق، منطبق می‌باشد. برخلاف FSDT، TSDT نیاز به فاکتور تصحیح برشی ندارد. در

شکل (الف-1)، هندسه اولیه و تغییر شکل یافته یک لبه ورق از دیدگاه تئوری‌های مختلف نشان داده

شده است.



شکل (الف-1) هندسه اولیه و تغییر شکل یافته یک لبه ورق از دیدگاه تئوری‌های مختلف

علاوه بر سادگی ذاتی و هزینه‌ی محاسباتی پایین، تئوری ورق مرتبه اول اغلب یک توصیف با دقت

کافی از پاسخ‌های عمومی (مانند خیز، بار کماتش و ففرکانس‌های طبیعی ارتعاشات) برای ورق‌های

نازک یا ضخیم متوسط، فراهم می‌آورد. از این رو از این روش برای تعیین پاسخ‌های عمومی استفاده

<sup>1</sup> Reddy

می‌شود. تئوری مرتبه‌ی سوم، نسبت به FSDT علی‌رغم افزایش زیاد هزینه محاسباتی، دقت نسبی را به میزان کمی افزایش می‌دهد.

## الف - 2 - تئوری کلاسیک (کیرشهف) ورق (CPT)

کرنش خطی وابسته به میدان جابجایی معادله (الف-1) برابر است با:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (\text{الف-5})$$

$$g_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

که در آن  $e_{xx}$  و  $e_{yy}$  کرنش‌های عمودی و  $g_{xy}$  کرنش برشی می‌باشند.

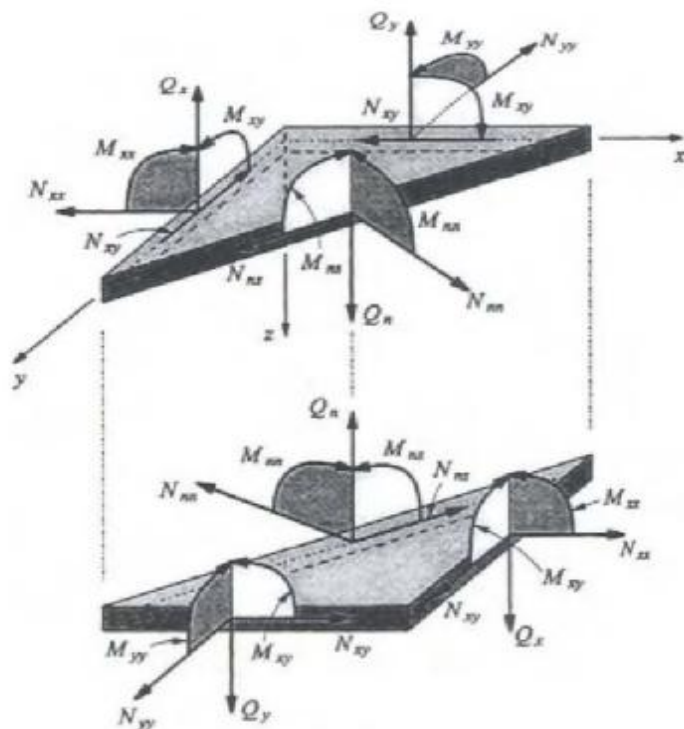
انرژی کرنشی مجازی  $U$  برای ورق کیرشهف نیز برابر است با:

$$\partial U = \int_{\Omega_0} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} (s_{xx} \partial e_{xx} + s_{yy} \partial e_{yy} + s_{xy} \partial g_{xy}) dz \right] dx dy =$$

$$\int_{\Omega_0} (M_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + M_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + s_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}) dx dy \quad (\text{الف-6})$$

که در آن  $\Omega_0$  محدوده اشغال شده توسط صفحه‌ی میانی ورق،  $h$  ضخامت ورق،  $s_{xx}$ ،  $s_{yy}$

تنش‌های عمودی،  $s_{xy}$  تنش برشی و  $M_{xx}$ ،  $M_{yy}$ ،  $M_{xy}$  ممان واحد طول می‌باشند. (شکل (الف-2))



شکل (الف-2) نیروها و ممان‌ها در المان ورق

ممان‌ها نیز به قرار زیر می‌باشند:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (\text{الف-7})$$

از آنجا که در تئوری ورق کیرشهف  $g_{xz} = g_{yz} = 0$ ، انرژی کرنشی مجازی مربوط به کرنش‌های

برشی عرضی صفر است.

انرژی پتانسیل مجازی ناشی از بارگذاری عرضی  $q(x, y)$  برابر است با:

$$dV = - \int_{\Omega_0} q(x, y) dw_0 dx dy \quad (\text{الف-8})$$

اگر نیروها یا مومنتم‌های غیرصفر لبه‌ای موجود باشند، انرژی پتانسیل مجازی آن‌ها نیز باید به

معادله فوق اضافه شود. براساس اصل جابجایی مجازی:

$$dW = dU + dV = 0 \quad (\text{الف-9})$$

و با استفاده از آن، معادله تعادل حاکم بر تئوری ورق کیرشلف برابرست با:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = 0 \quad (10\text{-الف})$$

با فرض این‌که ماده ورق ایزوتروپیک باشد و از قانون هوک پیروی نماید، معادله‌ی تنش-کرنش

برابر است با:

$$\begin{aligned} s_{xx} &= \frac{E}{1-n^2} (e_{xx} + ne_{yy}) \\ s_{yy} &= \frac{E}{1-n^2} (e_{yy} + ne_{xx}) \\ s_{xy} &= Gg_{xy} = \frac{E}{2(1+n)} g_{xy} \end{aligned} \quad (11\text{-الف})$$

با استفاده از روابط فوق و (الف-7) و انتگرالگیری از روابط در راستای ضخامت نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -D \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_{yy} &= -D \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + n \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-n) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \end{aligned} \quad (12\text{-الف})$$

که در آن  $D = \frac{Eh^3}{12(1-n^2)}$ ، سفتی خمشی ورق نامیده می‌شود. با جایگذاری منته‌های تنش

(معادله (الف-12)) در معادله (الف-10)، معادله بایهارمونیک حاکم بر خمش ورق حاصل می‌شود:

$$D \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) = q \quad (13\text{-الف})$$

### الف - 3 - تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)

با توجه به میدان جابجایی داده شده در معادله (ب-2) مولفه‌های کرنش خطی برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{xx} = z \frac{\partial j_x}{\partial x} \\ e_{yy} = z \frac{\partial j_y}{\partial y} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} g_{xy} = z \left( \frac{\partial j_x}{\partial y} + \frac{\partial j_y}{\partial x} \right) \\ g_{xz} = j_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ g_{yz} = j_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{الف-14})$$

همانطور که واضح است، کرنش‌های  $(g_{xy}, e_{yy}, e_{xx})$  در راستای ضخامت ورق خطی می‌باشند، در

حالی که کرنش‌های برشی عرضی  $g_{xz}$  و  $g_{yz}$  ثابت‌اند.

با استفاده از اصل جابجایی مجازی  $\partial W = \partial U + \partial V = 0$  که در آن:

$$\partial U = \int_{\Omega_0} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} (s_{xx} \partial e_{xx} + s_{yy} \partial e_{yy} + s_{xy} \partial g_{xy} + s_{xz} \partial g_{xz} + s_{yz} \partial g_{yz}) dz \right] dx dy \quad (\text{الف-15})$$

$$\partial V = \int_{\Omega_0} q(x, y) \partial w_0 dx dy$$

با معرفی  $(dw_0, df_x, dj_y)$ ، به عنوان جابجایی‌های مجازی و انتگرال‌گیری از معادله‌ی مربوط به

اصل جابجایی مجازی، به سه معادله‌ی زیر برای جابجایی‌های مجازی می‌رسیم:

$$dw_0 : - \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) = q$$

$$dj_x : - \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + Q_x = 0 \quad (\text{الف-16})$$

$$dj_y : - \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) + Q_y = 0$$

که در آن:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_x \\ Q_y \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{array}{l} s_{xz} \\ s_{yz} \end{array} \right\} dz \quad (\text{الف-17})$$

از آنجا که در این تئوری کرنش برشی عرضی در ضخامت ورق ثابت در نظر گرفته شده است،

تنش‌های برشی عرضی نیز ثابت خواهند بود. این مسئله با این حقیقت معروف که تنش‌های برشی

عرضی در راستای ضخامت به صورت سهمی تغییر می‌کنند، در تضاد می‌باشد. این اختلاف بین

تغییرات سهموی تنش‌های برشی عرضی و حالت ثابت تنش‌های برشی پیش‌بینی شده توسط تئوری



مرتبه اول، به دلیل محدودیت‌های سینماتیکی FSDT، در خود تئوری قابل تصحیح نمی‌باشد. اما با ضرب انتگرال (الف-17) در یک پارامتر  $K_S$  که فکتور تصحیح برش نامیده می‌شود، می‌توان نیروهای برشی را تصحیح کرد.

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} s_{xz} \\ s_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{الف-18})$$

ضریب فوق سختی برشی عرضی ورق را اصلاح می‌کند. فاکتور  $K_S$ ، از مساوی قرار دادن انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های برشی عرضی FSDT، با انرژی کرنشی منتهی از تنش‌های برشی عرضی پیش‌بینی شده از تئوری الاستیسیته سه بعدی، محاسبه می‌شود.

با فرض اینکه ماده‌ی ورق ایزوتروپیک باشد و از قانون هوک پیروی کند:

$$\begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \\ s_{xz} \\ s_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-n^2} & \frac{nE}{1-n^2} & G & 0 & 0 \\ \frac{nE}{1-n^2} & \frac{E}{1-n^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ g_{xy} \\ g_{xz} \\ g_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{الف-19})$$

معادلات رفتاری به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} s_{xx} z dz = D \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + n \frac{\partial j_y}{\partial y} \right) \\ M_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} s_{yy} z dz = D \left( \frac{\partial j_y}{\partial y} + n \frac{\partial j_x}{\partial x} \right) \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} s_{xy} z dz = \frac{D(1-n)}{2} \left( \frac{\partial j_x}{\partial y} + \frac{\partial j_y}{\partial x} \right) \\ Q_x &= K_s \int_{-h/2}^{h/2} s_{xz} dz = \frac{K_s E h}{2(1+n)} \left( j_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ Q_y &= K_s \int_{-h/2}^{h/2} s_{yz} dz = \frac{K_s E h}{2(1+n)} \left( j_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{الف-20})$$

از جایگذاری منته‌های تنش (رابطه الف-20) در معادلات تعادل (الف-16)، می‌توان معادلات را

بر حسب مولفه‌های جابجایی بیان کرد:

$$dw_0 : -\frac{K_s Eh}{2(1+n)} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} \right) = q(x, y)$$

$$dj_x : -\frac{D(1-n)}{2} \left( \frac{\partial^2 j_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j_x}{\partial y^2} \right) - \frac{D(1+n)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} \right) +$$

$$\frac{K_s Eh}{2(1+n)} \left( j_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{الف-21})$$

$$dj_y : -\frac{D(1-n)}{2} \left( \frac{\partial^2 j_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j_y}{\partial y^2} \right) - \frac{D(1+n)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} \right) +$$

$$\frac{K_s Eh}{2(1+n)} \left( j_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0$$

#### الف - 4 - تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم (TSDT)

در این تئوری با استفاده از میدان جابجایی (ب-3)، به میدان کرنشی زیر می‌رسیم:

$$e_{xx} = z \frac{\partial j_x}{\partial x} - az^3 \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)$$

$$e_{yy} = z \frac{\partial j_y}{\partial y} - az^3 \left( \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)$$

$$g_{xy} = z \left( \frac{\partial j_x}{\partial y} + \frac{\partial j_y}{\partial x} \right) - az^3 \left( \frac{\partial j_x}{\partial y} + \frac{\partial j_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{الف-22})$$

$$g_{xz} = (1 - bz^2) \left( j_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)$$

$$g_{yz} = (1 - bz^2) \left( j_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

که در آن  $a = 4/(3h^2)$  و  $b = 4/h^2$ . به کمک اصل جابجایی مجازی، سه معادله زیر برای سه

مولفه جابجایی حاصل می‌شوند:

$$dw_0 : -\left( \frac{Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) - a \left( \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} \right) = q$$

$$dj_x : -\left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + Q_x = 0 \quad (\text{الف-23})$$

$$dj_y : -\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}\right) + Q_y = 0$$

که در آن پارامترهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz \quad (24-الف)$$

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} s_{xz} \\ s_{yz} \end{Bmatrix} z^2 dz$$

در نهایت معادلات رفتاری ورق به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M_{xx} = \frac{4D}{5} \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + n \frac{\partial j_y}{\partial y} \right) - \frac{D}{5} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)$$

$$P_{xx} = \frac{4h^2 D}{35} \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + n \frac{\partial j_y}{\partial y} \right) - \frac{h^2 D}{28} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{yy} = \frac{4D}{5} \left( \frac{\partial j_y}{\partial y} + n \frac{\partial j_x}{\partial x} \right) - \frac{D}{5} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + n \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)$$

$$P_{yy} = \frac{4h^2 D}{35} \left( \frac{\partial j_y}{\partial y} + n \frac{\partial j_x}{\partial x} \right) - \frac{h^2 D}{28} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + n \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)$$

(25-الف)

$$M_{xy} = \left( \frac{1-n}{2} \right) \left[ \frac{4D}{5} \left( \frac{\partial j_x}{\partial y} + \frac{\partial j_y}{\partial x} \right) - \frac{2D}{5} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right]$$

$$P_{xy} = \left( \frac{1-n}{2} \right) \left[ \frac{4h^2 D}{35} \left( \frac{\partial j_x}{\partial y} + \frac{\partial j_y}{\partial x} \right) - \frac{h^2 D}{14} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right]$$

$$Q_x = \frac{2hG}{3} \left( j_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right); Q_y = \frac{2hG}{3} \left( j_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

$$R_x = \frac{h^3 G}{30} \left( j_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right); R_y = \frac{h^3 G}{30} \left( j_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

## پیوست ب - معرفی مواد ویسکوالاستیک [51]

### ب - 1 - مقدمه

رابطه تنش- کرنش در ناحیه الاستیک برای بسیاری از مواد تابع قانون هوک است.  $(e = js$  یا  $s = Ee)$  که  $E$  مدول الاستیک و  $j$  انعطاف پذیری<sup>1</sup> است. در مقابل مواد الاستیک، سیال ویسکوز وجود دارد که رابطه تنش-کرنش آن  $s = h \frac{de}{dt}$  است که  $s$  تنش برشی و  $h$  ویسکوزیته است. واقعیت این است که بسیاری از مواد به نوعی از قانون هوک انحراف دارند، مثلاً علاوه بر رفتار الاستیک، رفتار ویسکوز مانند هم از خود نشان می‌دهند. در مواد ویسکوالاستیک رابطه تنش-کرنش تابع زمان است. هر چند رفتار مواد ویسکوالاستیک به ساختار مولکولی ماده بستگی دارد ولی از روابط تئوری الاستیسیته برای تحلیل مواد ویسکوالاستیک می‌توان استفاده نمود. در برخی مواد انحراف از حالت الاستیک ناچیز است و در برخی مواد مانند پلیمرها، چوب، اجزای بدن رفتار ویسکوالاستیک زیادی وجود دارد. تغییرات دما می‌تواند تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار مواد ویسکوالاستیک داشته باشد.

### ب - 2 - خواص مواد ویسکوالاستیک

ماده ویسکوالاستیک، ماده ای است که از یک طرف رفتار ویسکوز مانند مایعات و از سوی دیگر رفتار الاستیک جامدات را نشان می‌دهد. دو تابع مهم در ویسکوالاستیسیته، کامپلینس خزشی و مدول رهایش می‌باشد، که تغییر شکل ویسکوالاستیک را ارائه می‌دهند و از تست‌های خزش و رهایش بدست می‌آیند.

### ب - 2 - 1 - خزش<sup>2</sup>

در ماده الاستیک پس از بارگذاری آنی تغییر شکل نیز به صورت آنی صورت خواهد گرفت و زمانی که بار از روی جسم برداشته می‌شود تغییر شکل به صورت آنی و کامل حذف می‌شود. ولی در مواد

<sup>1</sup> Compliance

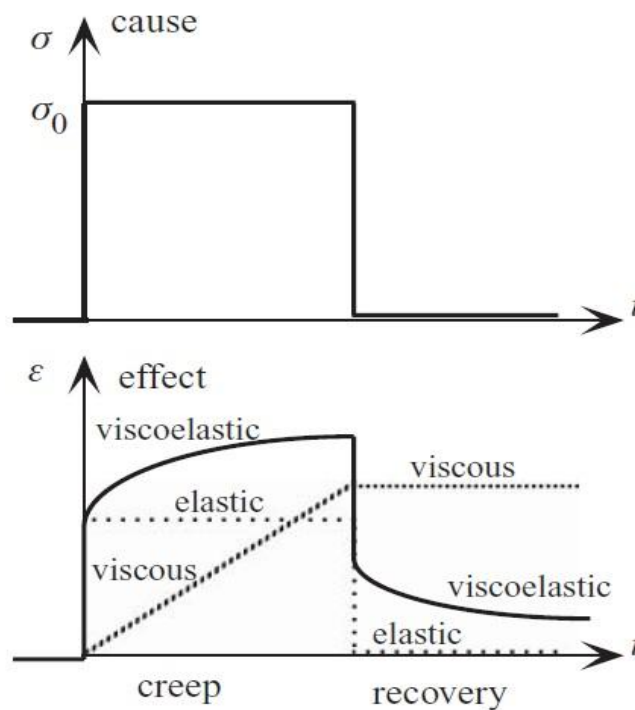
<sup>2</sup> Creep

ویسکوالاستیک اگر یک تنش ثابت به ماده اعمال شود، کرنش با زمان افزایش می‌یابد. در این حالت

رابطه بین تنش-کرنش به صورت  $J(t) = \frac{e(t)}{S_0}$  است که در آن  $J(t)$  انعطاف‌پذیری است. اگر بار

حذف شود، کرنش به تدریج کاهش می‌یابد، این کرنش ممکن است صفر شده یا نشود که به ماده

بستگی دارد.



شکل (ب-1) نمودار کرنش-زمان برای خزش و بازیافت<sup>1</sup> آن [51]

## ب-2-2-رهایش<sup>2</sup>

اگر در جسم ویسکوالاستیک کرنش آنی ایجاد گردد، ابتدا تنش ثابتی در جسم ایجاد خواهد شد و

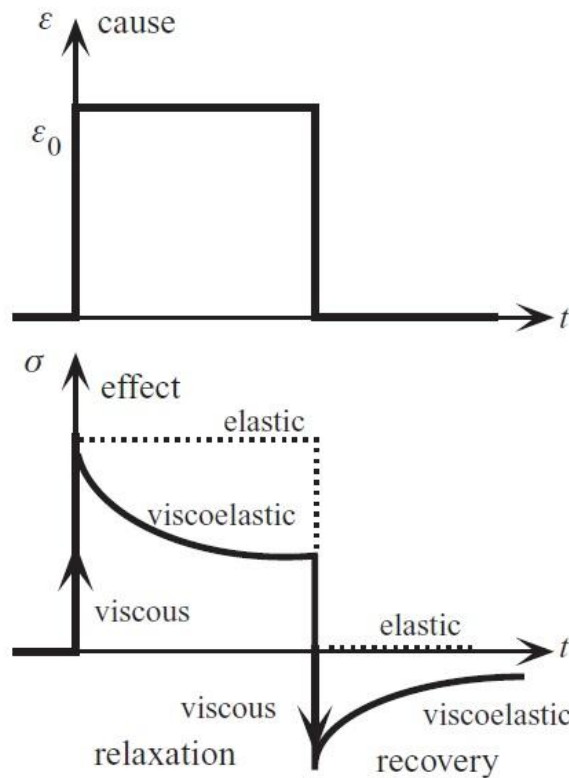
پس از آن تنش به صورت تدریجی کاهش می‌یابد. رابطه بین تنش کرنش در این حالت به صورت

$$E(t) = \frac{S(t)}{e_0}$$

است که در آن  $E(t)$  مدول رهایش است.

<sup>1</sup> Recovery

<sup>2</sup> Relaxation



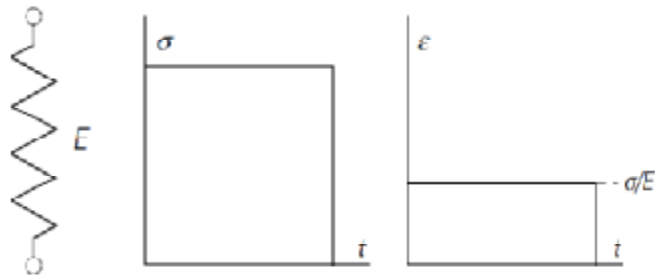
شکل (ب-2) نمودار کرنش-زمان برای رهایش و بازیافت آن [51]

### ب-3- مدل های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک

ویسکوالاستیسیته خطی به طور معمول به صورت ترکیب اجزاء الاستیک و ویسکوز بیان شده و از فنر و دمپر به ترتیب برای ارائه‌ی پاسخ ایده آل الاستیک و ویسکوز استفاده می‌شود. جامد ایده آل از قانون هوک پیروی می‌کند. قانون هوک بیان می‌کند که تنش نسبت خطی با تغییر شکل دارد که به این نسبت خطی ثابت مدول الاستیسیته گفته می‌شود.

$$\sigma \quad (ب-1)$$

مواد الاستیک را می‌توان با المان فنر مدل کرد و نشان داد که در برابر تنش ثابت، تغییر شکل ثابتی از خود نشان می‌دهد. پاسخ به صورت آنی و بدون وابستگی به زمان است و مرحله بازیافت بعد از حذف تنش به طور آنی و کامل انجام می‌شود.

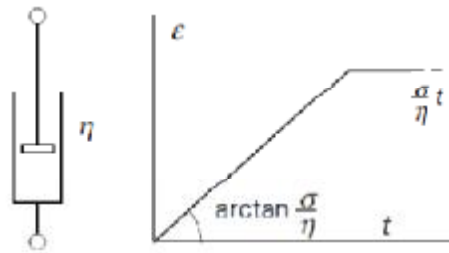


شکل (ب- 3) مدل مواد الاستیک [52]

در مورد سیال ایده ال قانون نیوتون برقرار است. قانون نیوتون بیان می کند که تنش در سیال با نرخ تغییر شکل رابطه خطی دارد و نسبت ثابت را ویسکوزیته ( $\eta$ ) می نامد بنابراین:

$$s = h\dot{\epsilon} \quad (\text{ب-2})$$

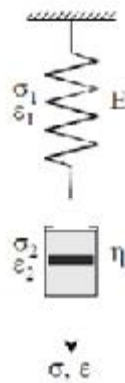
مواد ویسکوز را می توان با المان دمپر مدل کرد. پاسخ به صورت آنی اتفاق نمی افتد بلکه تغییر شکل وابسته به زمان است و مرحله Recovery بعد از حذف تنش وجود ندارد.



شکل (ب- 4) مدل مواد ویسکوز [52]

### ب-3-1- مدل ماکسول

در مدل ماکسول از المان فنر و دمپر به صورت سری استفاده می شود.



شکل (ب-5) مدل ماکسول. [52]

پاسخ مدل ماکسول در خزش: (تنش ثابت)

تعداد:

$$s_1 = s_2 = s \quad (3-ب)$$

کرنش:

$$e = e_1 + e_2 \quad (4-ب)$$

معادله:

$$\dot{e} = \frac{\dot{s}}{E} + \frac{s}{h} \quad (5-ب)$$

کامپلینس خزش مدل ماکسول به شکل زیر است:

$$J(t) = \frac{e}{s_0} = \frac{1}{E} + \frac{t}{h} \quad (6-ب)$$

پاسخ مدل ماکسول در رهایش: (کرنش ثابت)

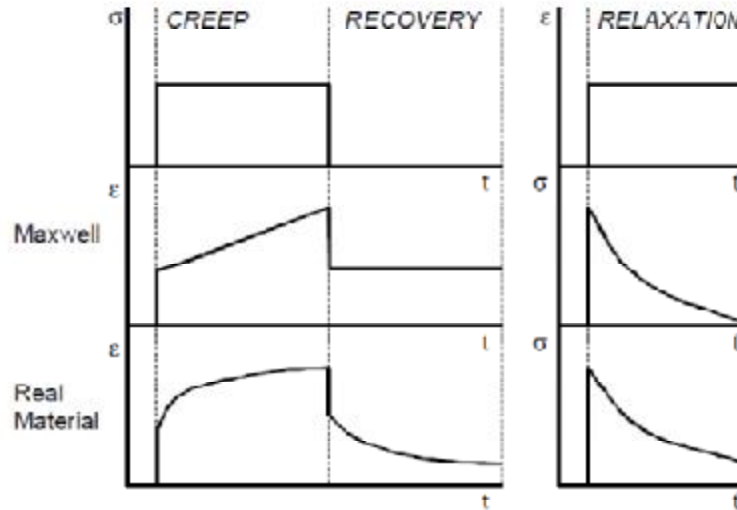
$$s = Ee_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad (7-ب)$$

که  $\tau = \frac{\eta}{E}$  را زمان رهایش می نامند. مدول رهایش مدل ماکسول به فرم زیر است:

$$G(t) = \frac{s}{e_0} = Ee^{\left(\frac{-t}{\tau}\right)} \quad (8-ب)$$



رفتار مدل ماکسول در رهائش به طور تقریبی مناسب است ولی در خزش و برگشت آن پاسخ با رفتار مواد ویسکوالاستیک مطابقت ندارد.



شکل (ب- 6) رفتار مواد ویسکوالاستیک در مدل ماکسول [52]

### ب-3-2- مدل کلونین

در مدل کلونین از المان فنر و دمپر به صورت موازی استفاده می شود.

تعداد:

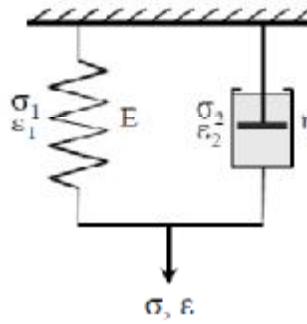
$$s = s_1 + s_2 \quad (\text{ب-9})$$

کرنش:

$$e = e_1 = e_2 \quad (\text{ب-10})$$

معادله:

$$s = Ee + h\dot{e} \quad (\text{ب-11})$$



شکل (ب- 7) مدل کلونین [52]

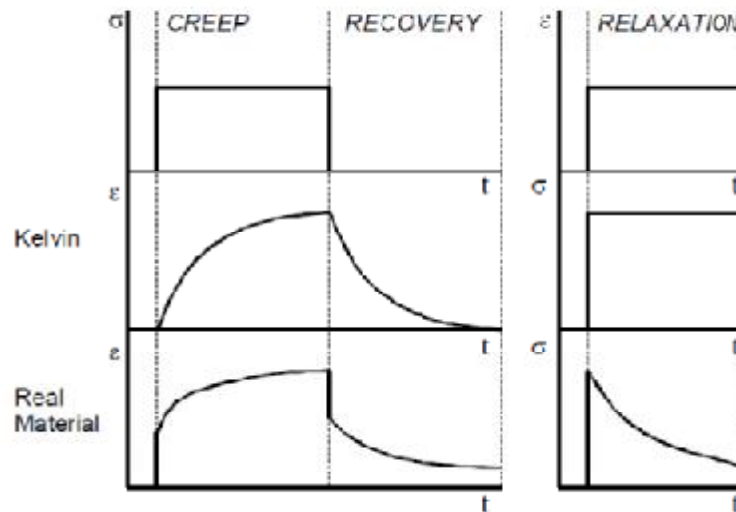
پاسخ مدل کلونین در خزش: (تنش ثابت)

$$e = \frac{S_0}{E} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau})) \quad (12-ب)$$

$$\tau = \frac{\eta}{E} \text{ که}$$

کامپلینس خزش مدل کلونین به فرم زیر است:

$$J(t) = \frac{e}{S_0} = \frac{1}{E} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau})) \quad (13-ب)$$



شکل (ب- 8) رفتار مواد ویسکوالاستیک در مدل کلونین [52]

پاسخ مدل کلونین در رهایش: ( کرنش ثابت)

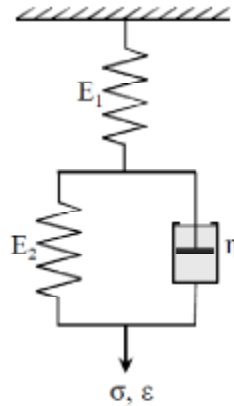
$$s = Ee_0 \quad (14-ب)$$

رفتار مدل کلویین در خزش و بازیافت خزش به طور تقریبی مناسب است ولی در رهایش

پاسخ با رفتار مواد ویسکوالاستیک مطابقت ندارد.

### ب-3-3- مدل استاندارد خطی

در مدل استاندارد از المان فنر و مدل کلویین به صورت موازی استفاده می شود.



شکل (ب-9) مدل استاندارد خطی [52]

$$hE_1\dot{e} + E_1E_2e = h\dot{s} + (E_1 + E_2)s \quad (15-ب)$$

پاسخ مدل استاندارد در خزش: (تنش ثابت)

$$e = \frac{s_0}{E_1} + \frac{s_0}{E_2} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau})) \quad (16-ب)$$

$$\tau = \frac{\eta}{E_2} \text{ که}$$

کامپلینس خزش مدل کلویین به فرم زیر است:

$$J(t) = \frac{e}{s_0} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau})) \quad (17-ب)$$

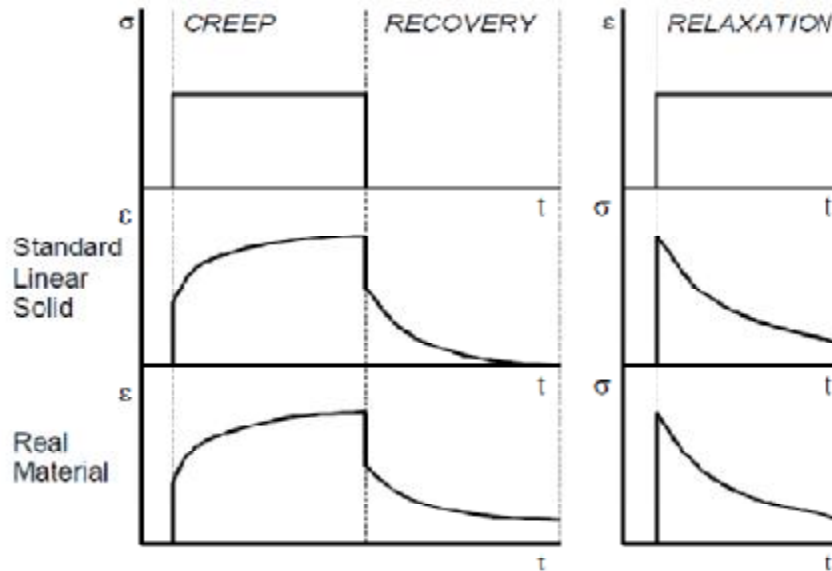
پاسخ مدل استاندارد در رهایش: (کرنش ثابت)

$$s = \frac{E_1e_0}{E_1 + E_2} (E_2 + E_1 \exp(-\frac{t}{\tau})) \quad (18-ب)$$

مدول رهایش مدل استاندارد به فرم زیر است:

$$G(t) = \frac{S}{e_0} = \frac{E_1}{E_1 + E_2} (E_2 + E_1 \exp(-\frac{t}{\tau})) \quad (ب-19)$$

رفتار مدل کلوین در خزش، بازیافت خزش و رهایش به طور تقریبی مناسب است.

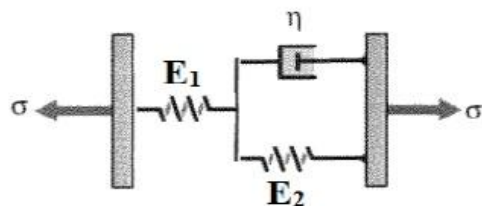


شکل (ب-10) رفتار مواد ویسکوالاستیک در مدل استاندارد خطی [52]

هر چند پاسخ مدل استاندارد از نظر کیفیت با پاسخ ماده ویسکوالاستیک در خزش و رهایش یکسان است ولی پاسخ ها از نظر کمیت متفاوتند و با تغییر پارامترهای مدل تنها نمودارها در راستای محور زمان جابجا می شوند. برای رفع این مشکل رفتار مواد واقعی در خزش را می توان با ترکیبی از چند مدل کلوین و یک فنر مدل نمود. معمولاً استفاده از چهار یا پنج مدل کلوین کافی است و نتایج حاصل از مدل با داده های تجربی به خوبی منطبق می باشد.

### ب-3-4- مدل زنر نوع اول

مدل زنر از نظر ساختاری دارای دو نوع مختلف می باشد که با یکدیگر هم ارز هستند. زنر نوع اول شامل ترکیب مدل کلوین و یک المان فنر مطابق شکل می باشد. یکی از ویژگی های بارز مدل زنر نوع اول تقسیم بندی مشخص انواع کرنش در آن است. بطوری که کرنش الاستیک را با المان الاستیک و کرنش ویسکوالاستیک را با المان کلوین نشان داده است.



شکل (ب- 11) مدل زنر نوع اول [52]

در این مدل، کرنش کل برابر است با مجموع کرنش دو قسمت فنر و کلویین-ویت.

رابطه بین تنش کرنش آن با معادله زیر بیان می‌شود:

$$\frac{1}{E_1} \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{h} \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) s = \frac{de(t)}{dt} + \frac{E_2}{h} \quad (\text{ب-20})$$

پاسخ مدل زنر نوع اول به تست خزش:

$$e(t) = s_0 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{\frac{-E_2}{h}t}\right) \right) \quad (\text{ب-21})$$

مدل زنر هر دو تابع خزش و رهایش را در حوزه زمان به خوبی پیش‌بینی می‌کند.

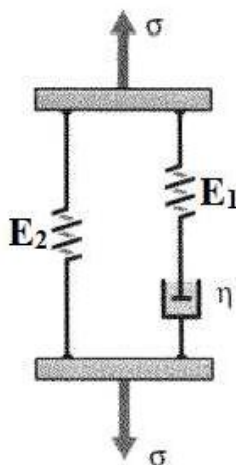
### ب-3-5- مدل زنر نوع دوم

مدل زنر نوع دوم که در این پایان‌نامه از آن استفاده شده است از ترکیب موازی یک فنر خطی با

مدل ماکسول بسته می‌شود. در این مدل تنش‌های اعمالی برابر است با مجموع تنش فنر و ماکسول.

رابطه تنش-کرنش در این مدل برابر است با:

$$\frac{h}{E_1} \frac{ds(t)}{dt} + s = \frac{h}{E_1} (E_1 + E_2) \frac{de(t)}{dt} + E_2 e \quad (\text{ب-22})$$



شکل (ب- 12) مدل زلزله نوع دوم [52]

پاسخ این مدل به تست رهایش:

$$s(t) = e_0(E_2 + E_1 e^{\frac{-E_1}{t}}) \quad \text{(ب-23)}$$

و پاسخ این مدل به تست خزش:

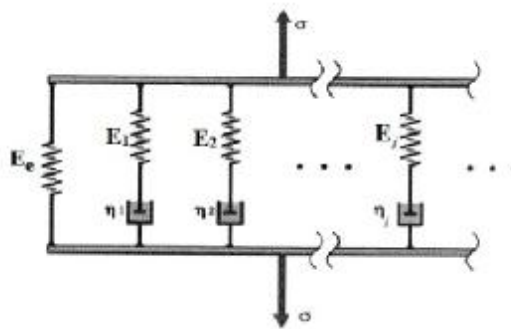
$$e(t) = \frac{S_0}{E_1 + E_2} \left( 1 + \frac{E_1}{E_2} (1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \right) \quad \text{(ب-24)}$$

که در آن  $t = \frac{h}{E_1}$  زمان رهایش می‌باشد که به صورت زمان لازم برای رسیدن به حد نهایی تنش

تفسیر می‌شود.

### ب-3-6- مدل ویچرت

در یک پلیمر واقعی بخش‌های مولکولی متفاوتی وجود دارند بنابراین زمان‌های بازیافت متفاوت است. برای در نظر گرفتن این موارد براساس مدل ویچرت یک ماده ویسکوالاستیک را می‌توان به صورت زیر مدل کرد.



شکل (ب- 13) شماتیک مدل ویچرت [52]

بر این اساس رابطه تنش- کرنش در محیط لاپلاس به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\bar{S}(s) = \bar{S}_e + \sum_j \bar{S}_j = (E_e + \sum_j \frac{E_j s}{s + \frac{E_j}{h_j}}) \bar{e}(s) \quad (25-ب)$$

بطور کلی در یک ماده ویسکوالاستیک رابطه تنش-کرنش با یک فانکشنال تعریف می‌شود. اگر تغییر شکل‌ها کوچک باشد این فانکشنال بر حسب معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت قابل تعریف است.

$$P(D)s(t) = Q(D)e(t) \quad (26-ب)$$

که در آن  $P(D) = \sum_{k=0}^n a_k D^k$  و  $Q(D) = \sum_{k=0}^n b_k D^k$  و  $D = \frac{\partial}{\partial t}$  است. مرسوم است جهت توصیف

رفتار ویسکوالاستیک یک سیستم تحت کشش چند محوری، اثر مولفه برشی را از مولفه تغییر حجم خالص جدا کنند. این قاعده به دلیل پاسخ متفاوت ماده ویسکوالاستیک به برش در برابر حالت اتساع یا بالک، می‌باشد.

$$P_1 S_{ij}^d(t) = Q_1 g_{ij}^d(t) \quad (27-ب)$$

$$P_2 S_{ii}(t) = Q_2 g_{ii}(t)$$

بالانویس  $d$  معرف بخش انحرافی و  $P_1$ ،  $P_2$ ،  $Q_1$  و  $Q_2$  اپراتورهایی به شکل کلی زیر می‌باشند:

$$P_1 = p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad (28-ب)$$

## پیوست ج - روش المان محدود [53]

### ج - 1- مقدمه

افزایش روز افزون نیازهای بشر و تلاش برای برآورده ساختن آنها، منجر به خلق مسائل تازه و پیچیده‌ای در همه زمینه‌های علمی و فنی شده که حوزه مهندسی مکانیک و سازه نیز از این امر مستثنی نبوده است.

در اغلب موارد، نیاز به طراحی و تحلیل قطعات با هندسه و اخیراً خواص پیچیده تحت بارگذاری‌های نامنظم است که بکارگیری روش‌های کلاسیک موجود (به عنوان مثال تئوری الاستیسیته در مورد توزیع تنش) منجر به یافتن معادلات حاکم پیچیده با شرایط مرزی و اولیه متنوع است که عملاً حل این معادلات از روش تحلیلی را غیرممکن می‌سازد.

از همین روست که روش‌های عددی متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم به سیستم‌ها ایجاد و امروزه به طرز وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

بسته به نوع روش عددی و نوع المان‌بندی، روش‌های مختلفی نظیر حجم محدود<sup>1</sup>، اجزا محدود<sup>2</sup>، تفاضل محدود<sup>3</sup> و ... حاصل شده است.

معمولاً مهندسان و فیزیکدان‌ها یک پدیده فیزیکی را به وسیله دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی و یا پاره‌ای<sup>4</sup> که در محدوده<sup>5</sup> خاصی صادق است و شرایط مرزی و آغازین مناسبی را تامین می‌کند توصیف می‌کنند. در واقع یک معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی و اولیه مورد نیاز، خود یک مدل ریاضی کامل از یک پدیده است. برای یافتن توزیع متغیرهای مورد نظر که ارتباط آنها در شکل دیفرانسیلی توسط معادله حاکم بیان می‌گردد، می‌بایست معادله مذکور حل گردد تا بتوان مقادیر عددی هر کمیت مرتبط را در نقاط دلخواه بدست آورد. اما با توجه به این که تنها می‌توان شکل‌های

<sup>1</sup> Finite Volume

<sup>2</sup> Finite Element

<sup>3</sup> Finite Difference

<sup>4</sup> Partial

<sup>5</sup> Region



بسیار ساده این معادلات آن هم در ناحیه‌های هندسی بسیار ساده را با روش‌های تحلیلی حل نمود، در حل اغلب معادلات حاکم به روش تحلیلی با مشکل بزرگی مواجه هستیم.

برای مقابله با چنین مشکلاتی و نیز جهت استفاده از قدرتمندترین وسیله موجود در قرن حاضر یعنی کامپیوتر، ضروری است که مساله مورد نظر در یک قالب کاملاً جبری ریخته شود تا حل آن‌ها تنها نیازمند عملیات جبری باشد. برای دستیابی به چنین هدفی می‌توان از انواع مختلف روش‌های گسسته‌سازی یک مساله پیوسته تعریف شده به وسیله معادلات دیفرانسیل استفاده نمود. در این روش‌ها تابع یا توابع مجهول که می‌توان آن‌ها را با مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد نشان داد، به وسیله تعداد متناهی از پارامترهای مجهول جایگزین می‌گردند که طبیعتاً در حالت کلی نوعی تقریب را در بر دارد.

سه روش عمده در حل عددی یک معادله دیفرانسیل به شرح زیرند:

### ج-1-1- روش تفاضل محدود<sup>1</sup>

این روش مبتنی بر مشتقات تابع مجهول است. در این روش ناحیه مورد نظر به تعدادی زیر ناحیه کوچک تقسیم می‌شود و سپس بسط سری تیلور تابع مجهول حول نقاط مرکزی نواحی کوچک نوشته می‌شود. سپس از جملات مرتبه دوم به بالا صرف نظر می‌شود (تقریب) و به این وسیله تغییرات پیوسته تابع بر حسب مکان یا زمان تبدیل به نوعی تغییرات گسسته می‌شود. پس از نوشتن بسط تیلور  $\frac{d}{dx}$  تبدیل به  $\frac{\Delta}{\Delta x}$  می‌شود و با نوشتن بسط مذکور برای همه نقاط زیر بازه‌ها مجموعه‌ای از معادلات جبری حاصل شده که از روش‌های عددی و توسط کامپیوتر قابل حل می‌باشند. این روش جهت حل مسائل انتقال حرارت و مکانیک سیالات قبلاً استفاده می‌شده است.

### ج-1-2- روش وردشی<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Finite difference method

<sup>2</sup> Variational Method

این روش مبتنی بر یک انتگرال خاص از تابع مجهول است که یک عدد تولید می‌کند. در این انتگرال توابع مختلفی را به عنوان تقریب می‌توان قرار داد و هر بار یک عدد تولید می‌شود. تابعی که کوچکترین عدد را تولید کند، می‌تواند تقریب مناسبی برای یک معادله دیفرانسیل خاص باشد. انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$\Pi = \int_0^H \left[ \frac{D}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - Q_y \right] dx \quad (1-ج)$$

مقدار عددی  $\Pi$  را می‌توان هر بار با تعیین تابعی مانند  $y = f(x)$  بدست آورد. حساب تغییرات نشان می‌دهد که تابعی مثل  $y = g(x)$  که کمترین عدد  $\Pi$  را تولید کند، جواب معادله دیفرانسیل زیر با شرایط مرزی  $y(0) = y_0$  و  $y(H) = y_H$  است:

$$D \frac{d^2 y}{dx^2} + Q = 0 \quad (2-ج)$$

در واقع در عملیات فوق از روی انتگرال به معادله دیفرانسیل مربوطه پی برده می‌شود. فرآیند می‌تواند برعکس باشد. یعنی معادله دیفرانسیل داده شود و از روی آن یک انتگرال تعریف شود. آن‌گاه توابع مختلف در انتگرال قرار داده شود و هنگامی که کمینه  $\Pi$  حاصل شد، آن تابع بهترین تقریب برای معادله دیفرانسیل خواهد بود.

روش وردشی مبنای بسیاری از فرمول‌بندی‌های اجزا محدود می‌باشد، اما یک ایراد اساسی دارد و آن این‌که قابل اعمال برای معادلات دیفرانسیل دارای مشتق مرتبه اول نمی‌باشد.

### ج-1-3-روش باقیمانده وزنی<sup>1</sup>

روش‌های باقیمانده وزنی نیز شامل یک انتگرال می‌باشند. در این روش‌ها ابتدا یک تخمین برای جواب انتخاب می‌شود و در معادله دیفرانسیل مربوطه قرار می‌گیرد. از آنجایی که تقریب اولیه در معادله صدق نمی‌کند، باقیمانده با خطایی مانند  $R$  حاصل می‌شود. فرض کنید تابعی مانند  $y = h(x)$  در ابتدا به عنوان تقریب برای معادله دیفرانسیل زیر به کار رود:

<sup>1</sup> Weighted Residual Methods

$$D \frac{d^2 y}{dx^2} + Q = 0 \quad (3-ج)$$

با قرار دادن تابع در معادله نتیجه می شود:

$$D \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + Q = R(x) \neq 0 \quad (4-ج)$$

در روش های باقیمانده وزنی می بایست رابطه زیر برقرار باشد:

$$\int_0^H W_i(x) R(x) dx = 0 \quad (5-ج)$$

باقیمانده معادله در یک تابع وزنی ضرب شده است و انتگرال حاصل ضرب می بایست برابر صفر باشد.

تعداد توابع وزنی مورد نیاز برابر است با تعداد ضرایب مجهول در حل تقریبی. توابع وزنی مختلفی را

می توان برای حل انتخاب نمود که در زیر به چند نمونه مشهورتر آن اشاره می شود:

- روش تجمعی<sup>1</sup>: در ایت روش توابع ضربه  $W_i(x) = d(x - X_i)$  به عنوان توابع وزنی انتخاب

می شوند. این نوع انتخاب بیانگر این است که می بایست در نقاط خاصی مقدار باقیمانده صفر

باشد. تعداد این نقاط برابر تعداد ضرایب مجهول در حل تقریبی است.

- روش زیردامنه<sup>2</sup>: هر تابع وزنی برابر واحد،  $W_i(x) = 1$ ، در یک ناحیه خاص انتخاب می شود.

این نوع انتخاب بیانگر این است که می بایست در طول فاصله ای از یک ناحیه،

مجموع (انتگرال) باقیمانده ها برابر صفر گردد. تعداد فواصل انتگرال گیری برابر تعداد ضرایب

نامعین در حل تقریبی است.

<sup>1</sup> Collocation Method

<sup>2</sup> Subdomain Method

- روش گالرکین<sup>1</sup>: در روش گالرکین همان تابعی که به عنوان حل تقریبی استفاده می‌شود، به عنوان حل تقریبی استفاده می‌شود. این رهیافت، مبنای روش اجزا محدود برای مسائل دارای مشتق مرتبه اول و بسیاری مسائل دیگر است.
- روش حداقل مربعات<sup>2</sup>: در این روش مقدار خطای  $R$  به عنوان تابع وزنی استفاده می‌شود. بنابراین انتگرال زیر حاصل می‌گردد:

$$E_r = \int_0^H [R(x)]^2 dx \quad (ج-6)$$

این میزان خطا نسبت به ضرایب نامعلوم موجود در حل تقریبی، کمینه می‌شود. از روش حداقل مربعات نیز جهت فرموله کردن حل اجزا محدود استفاده می‌شود، اما این روش به اندازه روش وردشی و روش گالرکین مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

### ج - 2- روش اجزای محدود

روش اجزا محدود یک دستورالعمل عددی جهت حل مسائل فیزیکی می‌باشد که توسط معادله دیفرانسیل توصیف می‌شوند. این روش دارای دو ویژگی است که آن را از سایر روش‌های عددی متمایز می‌سازد:

- 1- در این روش از یک فرمول‌بندی جهت ایجاد یک دستگاه معادلات جبری استفاده می‌شود.
- 2- در این روش از توابع هموار به طور قطعه‌ای پیوسته جهت تقریب کمیت‌های مجهول استفاده می‌شود.

مشخصه دوم، روش اجزای محدود را از سایر روش‌های عددی که فرمول‌بندی انتگرالی دارند متمایز می‌سازد.

روش اجزای محدود را می‌توان به پنج مرحله تقسیم کرد:

<sup>1</sup> Galerkin's Method  
<sup>2</sup> Least Square Method

1- تقسیم ناحیه مورد بحث به تعداد زیادی ناحیه کوچک موسوم به المان<sup>1</sup>. نقاط اتصال المانها به هم گره<sup>2</sup> نامیده می شود.

2- تعیین تقریب اولیه برای حل به صورت یک تابع با ضرایب ثابت مجهول، پس از تعیین شدن مرتبه تقریب اولیه، معادله حاکم در هر گره نوشته می شود.

3- استخراج دستگاه معادلات جبری. در صورت استفاده از روش گالرکین، تابع وزنی برای هر گره مشخص شده و سپس انتگرال باقیمانده تشکیل می گردد. با انتگرال گیری، برای هر گره یک معادله جبری ایجاد می گردد که پس از استخراج معادلات همه گرهها، دستگاه معادلات به وجود می آید.

4- حل دستگاه معادلات ایجاد شده

5- محاسبه سایر کمیتها به کمک مقادیر گرهی.

در مرحله اول همانگونه که اشاره گردید، هندسه مساله به نواحی کوچک موسوم به المان تقسیم می گردد. نقاط اشتراک المانها، گرهها می باشند. به مجموع المان با گرههایش یک مش<sup>3</sup> گفته می شود. المانها می توانند یک، دو و یا سه بعدی باشند. همچنین بسته به بعد المان، اشکال مختلف برای یک المان قابل تصور است. یک المان دو بعدی می تواند به شکل مثلث، مربع و یا شکل دلخواه دیگری باشد. مش بندی هندسه مساله از مراحل مهم مدل سازی می باشد که مستلزم دقت و مهارت مناسب می باشد.

در مرحله دوم، در واقع تقریب اولیه برای جواب مساله به صورت یک تابع با ضرایب ثابت مجهول در نظر گرفته می شود. این تقریب در محدوده یک المان زده می شود و برای کل شکل مساله انجام نمی گیرد. (به عنوان مثال  $u = c_1x + c_2$  یک تقریب خطی برای توزیع جابجایی در یک المان یک بعدی است). در خصوص مسایلی که توسط نرم افزار حل می شوند، چون می توان ابعاد المان را بسیار ریز

<sup>1</sup> Element

<sup>2</sup> Node

<sup>3</sup> Mesh

انتخاب کرد، هیچ‌گاه تقریبی با درجه بیشتر از دو زده نمی‌شود. به عبارت دیگر تقریب اولیه برای جواب همواره در نرم‌افزارها یا خطی است یا سهموی.

در مرحله بعد معادله حاکم برای تک‌تک گره‌ها نوشته شده و پس از انتگرال‌گیری‌های لازم، به شکل یک معادله جبری تبدیل می‌شود. برای روشن‌تر شدن موضوع به معرفی مفهوم تابع شکلی<sup>1</sup> پرداخته می‌شود. همانگونه که ذکر شد در یک تحلیل اجزای محدود ابتدا مقادیر گرهی کمیت مورد نظر محاسبه می‌گردد و سپس با میان‌یابی هر نقطه دلخواه می‌توان مقدار کمیت مجهول را بدست آورد و بنابراین می‌بایست مرتبه میان‌یابی معلوم باشد. المان خطی یک بعدی در نظر گرفته می‌شود. اگر  $j$  کمیت مجهول باشد که معادله حاکم بر حسب آن است، در این المان حل تقریبی و یا همان تابع میان‌یابی عبارتست از:

$$j = a_1 + a_2 x \quad (7-ج)$$

که در آن  $a_1$  و  $a_2$  مجهول می‌باشند. در صورتی که این المان بین دو گره  $i$  و  $j$  با موقعیت‌های  $X_i$  و  $X_j$  واقع شده باشد و مقادیر گرهی  $j$  برابر با  $f_i$  و  $f_j$  باشد، دو ضریب مجهول  $a_1$  و  $a_2$  قابل محاسبه‌اند.

$$f_i = a_1 + a_2 X_i \quad f_j = a_1 + a_2 X_j \quad (8-ج)$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_1 = \frac{f_i X_j - f_j X_i}{X_j - X_i} \quad a_2 = \frac{f_i - f_j}{X_j - X_i} \quad (9-ج)$$

حال اگر مقادیر  $a_1$  و  $a_2$  را در رابطه اولیه قرار دهیم خواهیم داشت:

$$j = \left( \frac{X_j - x}{L} \right) f_i + \left( \frac{x - X_i}{L} \right) f_j \quad (10-ج)$$

که در آن  $L$  طول المان است. رابطه بدست آمده فوق رابطه‌ای استاندارد برای میان‌یابی است، زیرا ترکیب خطی مقادیر گرهی است که ضرایب آن‌ها نیز توابع خطی از  $X$  می‌باشند. این توابع خطی را

<sup>1</sup> Shape Function

با حرف  $N$  می‌دهند و آن‌ها را توابع شکلی می‌نامند. در واقع هر گره، تابع شکلی مخصوص به خود را دارد که بیانگر سهم مقدار گرهی آن گره در میان‌یابی می‌باشد. بنابراین توابع شکلی به صورت زیر می‌باشند:

$$N_i = \frac{X_j - x}{L} \quad N_j = \frac{X_i - x}{L} \quad (11-ج)$$

و رابطه میان‌یابی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$j = N_i f_i + N_j f_j \quad (12-ج)$$

چند نکته در خصوص توابع شکلی قابل ذکر است. هر تابع شکلی در محل گره خود دارای مقدار یک و در محل گره دیگر دارای مقدار صفر است. مجموع توابع شکلی در یک نقطه همواره برابر یک است. همواره مرتبه توابع شکلی و میان‌یابی یکسان است. به عنوان مثال اگر حل تقریبی یا همان میان‌یابی تابعی خطی باشد، توابع شکلی گره‌ها هم توابعی خطی خواهند بود. از دیگر ویژگی‌های توابع شکلی این است که مجموع مشتقات آن‌ها نسبت به یک متغیر (مانند  $x$ ) برابر صفر است.

حال بهتر می‌توان روش گالرکین را مورد بررسی قرار داد. همانگونه که گفته شد، ابتدا یک تخمین (به طور مثال  $u = c_1 x + c_2$  در خصوص توزیع تغییر مکان در المان یک بعدی) برای معادله حاکم زده می‌شود. سپس با انتخاب تابع وزنی مناسب و به تعداد مجهولات موجود در تخمین اولیه، انتگرال حاصلضرب تابع وزنی و باقیمانده محاسبه می‌گردد که عبارتی بر حسب ضرایب نامعلوم تابع تقریب خواهد بود. در روش گالرکین، توابع وزنی همان توابع شکلی می‌باشند. به طور مثال یک المان خطی انتگرال حاصلضرب هر یک از توابع شکلی در باقیمانده محاسبه می‌گردد و در نهایت دو معادله با مجهولات  $f_i$  و  $f_j$  بدست می‌آید. به عبارت دیگر به ازای هر گره یک معادله بدست می‌آید. به دلیل این‌که هر معادله شامل بیش از یک مجهول است، به تنهایی قابل حل نخواهد بود و باید به تعداد گره‌ها معادله استخراج شود تا آن‌گاه تمامی معادلات به صورت یکجا حل گردند.

پس از استخراج معادلات، این دستگاه معادلات جبری حل می‌شود، سپس سایر کمیت‌ها نظیر

کرنش، تنش، نیرو و گشتاور محاسبه می‌گردند.

## منابع

- [1] Marynowski K., (2008). "**Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web**". Second Edition, Springer- Verlag, Berlin.



- [2] Ventsel E., Krauthammer T., (2001). "Thin plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications", New York.
- [3] Lee U., Injoon Jang, (2007), " On the boundary conditions for axially moving beams", **J.Sound and Vibration**, 306, pp.675-690.
- [4] Ding H., Li-Qun Chen, (2011), " Approximate and numerical analysis of nonlinear forced vibration of axially moving viscoelastic beams", *Acta Mech. Sin*, 27, 3, pp. 426-437.
- [5] اکبر بشارتی، فیروز بختیاری نژاد، منوچهر صالحی، (1384)، " یافتن پارامتر های دینامیکی مواد ویسکوالاستیک با تحلیل داده های تجربی پاسخ فرکانسی "، سیزدهمین کنفرانس سالانه بین المللی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [6] Chen L.Q., Yang X.D., (2005), "Stability in parametric resonance of axially moving viscoelastic beams with time-dependent speed", **J.Sound and Vibration**, 284, pp.879–891.
- [7] Chen L.Q., Tang.Y, ( 2011), "Combination and principal parametric resonances of axially accelerating viscoelastic beams: Recognition of longitudinally varying tensions", **J.Sound and Vibration**, 330, pp. 5598-5614.
- [8] Chen L.Q., Tang Y., C.W. Lim, (2010), " Dynamic stability in parametric resonance of axially accelerating viscoelastic Timoshenko beams" , **J.Sound and Vibration**, 329 ,pp.547-565.
- [9] Marynowski K., Kapitaniak T., (2002), "Kelvin–Voigt versus Burgers internal damping in modeling of axially moving viscoelastic web", **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 37, pp. 1147 – 1161.
- [10] Ghugal, Y.M. and Shimpi, R.P. (2002), "A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates" **J.Reinforced Plastics and Composites**, 21, 9, pp. 775-813.
- [11] Noor, A.K. and Burton, W.S. (1990), "Assesment of Computational Models for Multilayered Anisotropic Plates", **Composite Structures**, 14, 3, pp. 233-265.
- [12] Liew K.M., Xiang Y., Kitipornchai S., (1995), "Research on Thick Plate Vibration: A Literature Survey", **J. Sound and Vibration**, 180, 1, pp.163-176.
- [13] Batra R.C., Jin, J., (2005), " Natural Frequencies of a Functionally Graded Anisotropic Rectangular Plate ", **J. Sound and Vibration**, 282, 1-2, pp. 509-516.
- [14] Chandrashekhara, K. and Agarwal, A.N. , (1993), " Active Vibration Control of Laminated Composite Plates, Using Piezoelectric Devices: A Finite Element Approach ", **J. Intelligent Material Systems and Structures**, 4, 4, pp. 496-508.
- [15] Rastgaar Aagaah M., Mahinfalah M. and Nakhaie Jazar G., (2006) , " Nautral frequencies of laminated composite plates using third order shear deformation theory ", **Composite Structures**, 72, pp. 273-279.
- [16] Liu, S., (1991), " A Vibration Analysis of Composite Laminated Plates ", **Finite Elements in Analysis and Design**, 9, 4, pp. 295-307.
- [17] Nayak, A.K., Moy, S.S.J., and Shenoi, R.A. , (2002), " Free Vibration Analysis of Composite Sandwich Plates Based on Reddy’s Higher Order Theory ", **Composites Part B: Eng.**, 33, 7, pp. 505-519.
- [18] Lee, J.M., Chung, J.H., and Chung, T.Y., (1997), " Free Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Rectangular Plates ", **J. Sound Vibration**, 199, 1, pp. 71-85.7.

- [19] Papazoglou, V.J., Tsouvalis, N.G., and Lazaridis, A.G., (1996), " A Non-destructive Evaluation of the Material Properties of a Composite Laminated Plate ", **Applied Composite Materials**, 3, 5, pp. 321-334.
- [20] Chung, J.H. and Chung, T.Y., (1992), " Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Rectangular Plates ", **J. Society of Naval Architects of Korea**, 29, 3, pp. 140-148.
- [21] Dawe, D.J. and Wang, S., (1995), " Spline Finite Strip Analysis of the Buckling and Vibration of Rectangular Composite Laminated Plates ", **International J. Mechanical Sciences**, 37, 6, pp. 645-667.
- [22] Akhras, G., Cheung M.S., and LI, W. (1993), " Vibration and Stability Analysis of Thick Anisotropic Composite Plates by Finite Strip Method ", **Computer and Structures**, 49, 6, pp. 963-967.
- [23] Qian L.F., Batra R.C., and Chen L.M., (2004) , " Static and Dynamic Deformations of Thick Functionally Graded Elastic Plates by Using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory and Meshless Local Petrov-Galerkin Method ", **Composites Part B: Engineering**, 35, 6-8, pp. 685-697.
- [24] Khdeir A.A. and Reddy J.N., (1988) , " Dynamic Response of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates Subjected to Arbitrary Loading ", **J. Sound and Vibration**, 126, 3, pp. 437-445.
- [25] Hashemi S.H. and Arsanjani M., (2005), " Exact Characteristic Equations for Some of Classical Boundary Conditions of Vibrating Moderately Thick Rectangular Plates ", **Int. J. Solids and Structures**, 42, 4, pp. 819-853.
- [26] Zhang Y.X., Yang C.H., (2009) , " Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates ", **Composite Structures**, 88, pp.147-157.
- [27] Hashemi S.H., K. Khorshidi, Payauzndeh H., (2009) , "Vibration Analysis of Moderately Thick Rectangular Plates with Internal Line Support Using the Rayleigh-Ritz Approach", **Sharif University of Technology**.
- [28] حاتمی، ازهری، محمد مهدی سعادت‌پور، (1386) ، " تحلیل ارتعاش و پایداری ورق‌های دارای حرکت محوری به روش اجزای محدود استاندارد و طیفی "، استقلال، 26، 1.
- [29] Khanna A., Sharma A. K., Bhaita M., (2011) , " Study of Free Vibration of Visco-Elastic Square Plate of Variable Thickness with Thermal Effect ", **Innovative Systems Design and Engineering** , 2, 4, ISSN 2222-1727.
- [30] hatami S., azhari M. and saadatapour M.M., (2006), " stability and vibration of elasticity supported Axially moving orthotropic plates ", **Iranian Journal of Science & Technology**, Transaction B, Engineering, 30, 4.
- [31] Gupta A. K., Khanna A., Kumar S., (2010), "Vibration Analysis of Visco-Elastic Rectangular Plate with Thickness Varies Linearly in One and Parabolically in Other Direction", **Adv. Studies Theor. Phys.**, 4, 15, pp.743-758.
- [32] Soukup J., Volek J., (2007), " A thin rectangular viscoelastic orthotropic plate under transverse impuls loading ", **Applied and Computational Mechanics**, 1 ,pp.657-666.
- [33] Chen L. Q., Cheng C. J., (2005), " Instability of nonlinear viscoelastic plates", **Applied Mathematics and Computation**, 162, pp. 1453-1463.
- [34] Hatami S., Ronagh H.R., Azhari M., (2008), " Exact free vibration analysis of axially moving viscoelastic plates ", **Computers and Structures**, 86 ,pp.1738–1746.

- [35] Zhou Y. F., Zhong-Min W., (2009), " Dynamic Stability of Axially Accelerating Viscoelastic Plate ", **Scholarly Research Exchange**, Article ID 856320.
- [36] Zhou Y.f., Zhong-min W., (2008), " Vibrations of axially moving viscoelastic plate with parabolically varying thickness ", **J.Sound and Vibration**, 316, pp.198-210.
- [37] Gupta A. K., Kumar A., Gupta Y. K., (2010), " Vibration of Visco-Elastic Parallelogram Plate with Parabolic Thickness Variation ", **Applied Mathematics**, 1, pp.128-136.
- [38] Gupta A. K., (2009), " free vibration of clamped visco-elastic rectangular plate having bi-direction exponentially thickness variations ", **J. theoretical and applied mechanics**, 47, 2, pp. 457-471.
- [39] Chen L., Chang-Jun Cheng, (2005), " Instability of nonlinear viscoelastic plates ", **Applied Mathematics and Computation**, 162, pp.1453-01463.
- [40] Ray M.C., (2003). " Zeroth-Order Shear Deformation Theory for Laminated Composite Plates ". **ASME J. Appl. Mech.**, 70, pp. 374–380.
- [41] Salehi M. and Aghaei H., (2005), " Dynamic Relaxation large deflection analysis of non-axisymmetric circular viscoelastic plates ". **Computers and Structures**, 83, pp. 1878-1890.
- [42] Shin CH., Chung J., Yoo H., (2006)," Dynamic responses of the in-plane and out-of-plane vibrations for an axially moving membrane", **Journal of Sound and Vibration**, 297, pp. 794–809.
- [43] Reddy J. N., ( 2008), "**An Introduction to Continuum Mechanics with Applications**". Cambridge University Press, New York.
- [44] Martin H. SADD, (2005), "**Elasticity Theory, Application, and Numerics**", first edition, Elsevier Press, USA.
- [45] Calladine C.R., (1983)," **Theory of Shell Structures**", first edition, Cambridge University Press, New York.
- [46] Shooshtari A., Razavi S., (2010), " A closed form solution for linear and nonlinear free vibrations of composite and fiber metal laminated rectangular plates ", **Composite Structures**, 92, pp. 2663–2675.
- [47] Lai W., (2009), "Introduction to continuum mechanics", Fourth edition, Elsevier Inc.
- KIUSALAAS J., (2010), "**Numerical Methods in Engineering With Matlab**", second edition, Cambridge University Press, New York.
- [48] Daryl L. Logan, (2007)," **A First Course in the Finite Element Method**", fourth edition, University of Wisconsin–Platteville, Canada.
- [49] Wang C.M., Reddy J.N. and Lee K.H., (2000),"**Shear Deformable Beams And Plates, Relationships with Classical Solutions**", Elsevier, Amsterdam-NewYork-oxford-singapore-Tokyo.
- [50] Roderic Lakes, (2009)," **Viscoelastic Materials** ", first edition, University of Wisconsin–Madison, Cambridge University Press, New York.
- [51] Roylance D., (2001)," **Engineering Viscoelastic** ", Cambridge, MA 02139.

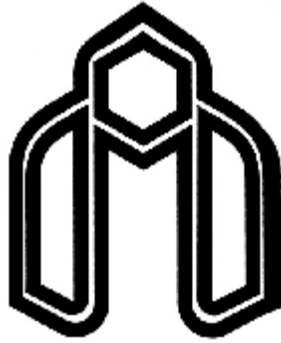
[52] محمد حسین سورگی، دکتر سعید حدیدی مود، (1384)، "راه اندازی و تهیه دستورالعمل

کاربردی نرم افزار آباکوس"، دانشگاه فردوسی مشهد.

## Abstract

In this research numerical solve for vibration of a moving viscoelastic web under transfer loading for acquiring displacement and frequencies on the basis of first shear deformation theory is proposed. for this purpose governing equations on the assumption of standard linear model of Zener for material detection is derived by Hamilton and time and displacement are separated using Galerkin method. For solving governing equations dominated on the behavior of system which is a system of differential equation on the basis of time finite difference method is used. Web response during time is solved and the sensitivity of these values to geometrical parameters and viscoelastic characteristics are investigated. Also natural frequency of system and it's dependency to geometry and web material is investigated.

**Keywords:** Viscoelastic, Axially Moving plate, Shear deformation, Finite element



**Shahrood University of Technology**  
**Faculty of Mechanical Engineering**

**Transverse vibration analysis of an axially  
moving viscoelastic plate using first order  
shear deformation theory by numerical  
method**

Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of  
Master of Science (M.Sc)

**Jalal abdollah abadi**

Supervisors

**Dr. H. R. Epakchi**

**Date: Sept 2013**