

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد طراحی کاربردی

# آنالیز مودال غیر خطی برای تیر میکرو با میرایی ترموالاستیک

دانشجو:

رامتین حدادزاده هندو

استاد راهنما:

دکتر اردشیر کرمی محمدی

شهریور ۱۳۹۲



دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :  
تاریخ :  
ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای رامتین حدادزاده هندو رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان **آنالیز مودال غیر خطی برای تیر میکرو با میرایی ترموالاستیک** که در تاریخ ۹۲/۶/۲۵ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح زیر است :

<input type="checkbox"/> قبول (با درجه <b>بسیار خوب</b> امتیاز ۱۸/۹۹)	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input type="checkbox"/> مردود
---	------------------------------------	--------------------------------

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)

۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	اعضای هیأت داوران
	استاد یار	امیر کرمی کهن	۱- استاد راهنما
			۲- استاد مشاور
	استاد یار	رضا طهرانی	۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
		اسدی	۴- استاد ممتحن
	استاد یار	امیر حدادی	۵- استاد ممتحن

تأیید رئیس دانشکده



سرشت استاد زندگی است

همه است و همه او نیستند

اندوه و شادی، پس و پیش، درون و برون

حکلی افزار پرورش اویند  
خرد و دانش، بیچ اند

مگر میانجی در ره‌ی تاریک به سوی تهی

ارجمند جهان... سپاس گزارم

# تعهد نامه

اینجانب رامتین حدادزاده هندو دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه آنالیز مودال غیر خطی برای تیر میکرو با میرایی ترموالاستیک تحت راهنمایی دکتر اردشیر کرمی محمدی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند ، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

۹۲،۶،۲۰  


امضای دانشجو

## مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

هدف در این پایان نامه بررسی ارتعاشات غیر خطی گذرای تیر میکرو با میرایی ترموالاستیک است. پس از مرور تاریخچه ی پژوهش های مهم و کلیدی انجام شده ، معادله ی انتقال حرارت برای رابطه کرنش - جابجایی غیر خطی حل و سپس معادله حرکت تیر اویلر - برنولی با جابجایی عرضی بزرگ و میرایی ترموالاستیک استخراج شده است. سیستم مورد بحث به کمک تئوری مود های طبیعی غیر خطی ، بررسی و توابع مود بر حسب بیشینه دامنه ی سیستم ارائه شده و سپس با استفاده از مود های غیر خطی ، سیستم یک درجه آزادی معادل در حرکت تک مودی محاسبه شده است. پاسخ گذرای سیستم برای ابعاد و دماهای متفاوت با استفاده از روش بالانس هارمونیکی و سیگنال تحلیلی بدست آمده از تبدیل هیلبرت ، محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده است. ارتباط دامنه ی سیستم در ارتعاش غیر خطی با میرایی ترموالاستیک ، نحوه ی اثر گذاری این مکانیزم میرایی بر پارامتر های پاسخ و همچنین اتلاف انرژی سیستم به واسطه کاهش فرکانس در شرایط متفاوت مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. نشان داده شده است که رابطه حاکم بر سیستم معادل تیر میکرو در آنالیز مودال غیر خطی ، از نظر ساختاری متفاوت با دیگر روش های معمول همانند گلرکین بوده و این موضوع سبب وجود نقاط کمینه در پارامتر های پاسخ می گردد.

کلید واژه : مود غیر خطی ، تیر میکرو ، میرایی ترموالاستیک ، سیگنال تحلیلی

## فهرست مطالب

فصل اول : مقدمه	۱
۱-۱. پیشگفتار	۲
۲-۱. سیستم های میکرو الکترو مکانیکی	۲
۳-۱. تاریخچه	۳
۱-۳-۱. میرایی ترموالاستیک	۳
۲-۳-۱. مود غیر خطی	۴
۳-۳-۱. تبدیل هیلبرت	۵
فصل دوم : استخراج معادله حرکت	۶
۱-۲. کلیات	۷
۲-۲. هندسه تیر صفحه ای	۷
۳-۲. تحلیل انتقال حرارت	۱۰
۴-۲. معادله حرکت و شرایط مرزی	۱۳
فصل سوم : آنالیز مودال غیر خطی	۱۵
۱-۳. مود طبیعی غیر خطی	۱۶
۲-۳. آنالیز مودال تیر اوپلر برنولی با جابجایی عرضی بزرگ	۱۸
۱-۲-۳. تحلیل درجه اول	۲۱
۲-۲-۳. تحلیل درجه دوم	۲۳
۳-۲-۳. تحلیل درجه سوم	۲۳
۳-۳. شکل مود و دینامیک مود	۲۶
فصل چهارم : بررسی پاسخ گذرا	۳۳
۱-۴. کلیات	۳۴

۳۴	..... روش بالانس هارمونیکی
۳۵	..... ۱-۲-۴. نوع اول
۳۷	..... ۲-۲-۴. نوع دوم
۳۸	..... ۳-۲-۴. محاسبه پاسخ ضمنی
۳۹	..... ۳-۴. سیگنال تحلیلی
۳۹	..... ۱-۳-۴. تبدیل هیلبرت و سیگنال تحلیلی
۴۱	..... ۲-۳-۴. دامنه و فرکانس لحظه ای
۴۳	..... ۳-۳-۴. بررسی پاسخ با استفاده از سیگنال تحلیلی
۴۵	..... ۴-۳-۴. فرکانس نامیرا
۴۵	..... ۵-۳-۴. میرایی معادل
۴۶	..... ۴-۴. پاسخ گذرا
۴۸	..... ۱-۴-۴. میرایی خطی
۶۹	..... ۲-۴-۴. میرایی غیر خطی
۹۰	..... فصل پنجم: نتیجه گیری
۹۱	..... ۱-۵. خلاصه نتایج
۹۱	..... ۲-۵. پیشنهاد برای پژوهش های آینده
۹۳	..... مراجع و منابع:



## فهرست اشکال

- ۱-۲..... ۷
- ۱-۳ (الف) مود اول خطی و غیر خطی  $\delta = 0.7$  ..... ۲۸
- ۱-۳ (ب) مود اول خطی و غیر خطی  $\delta = 1.2$  ..... ۲۸
- ۲-۳ (الف) مود دوم خطی و غیر خطی  $\delta = 0.7$  ..... ۲۹
- ۲-۳ (ب) مود دوم خطی و غیر خطی  $\delta = 1.2$  ..... ۲۹
- ۳-۳ (الف) مود سوم خطی و غیر خطی  $\delta = 0.7$  ..... ۳۰
- ۳-۳ (ب) مود سوم خطی و غیر خطی  $\delta = 1.2$  ..... ۳۰
- ۴-۳ (الف) مود چهارم خطی و غیر خطی  $\delta = 0.7$  ..... ۳۱
- ۴-۳ (ب) مود چهارم خطی و غیر خطی  $\delta = 1.2$  ..... ۳۱
- ۱-۴ (الف) دامنه نرمال  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۴۹
- ۱-۴ (ب) دامنه نرمال  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۴۹
- ۱-۴ (ج) دامنه نرمال  $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۰
- ۲-۴ (الف) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۰
- ۲-۴ (ب) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۱
- ۲-۴ (ج) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۱
- ۳-۴ (الف) فرکانس میرا  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۲
- ۳-۴ (ب) فرکانس میرا  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۳
- ۳-۴ (ج) فرکانس میرا  $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۳
- ۴-۴ (الف) فرکانس موهومی معادل  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۴
- ۴-۴ (ب) فرکانس موهومی معادل  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۴
- ۴-۴ (ج) فرکانس موهومی معادل  $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۵
- ۵-۴ (الف) تغییر نرمال فرکانس  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۶
- ۵-۴ (ب) تغییر نرمال فرکانس  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۶
- ۵-۴ (ج) تغییر نرمال فرکانس  $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۷
- ۶-۴ (الف) معکوس ضریب کیفیت  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۸
- ۶-۴ (ب) معکوس ضریب کیفیت  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۸
- ۶-۴ (ج) معکوس ضریب کیفیت  $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$  ..... ۵۹

- ۶۰ .....  $T = 200 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  دامنه نرمال (الف ۷-۴)
- ۶۰ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  دامنه نرمال (ب ۷-۴)
- ۶۱ .....  $T = 400 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  دامنه نرمال (ج ۷-۴)
- ۶۱ .....  $T = 200 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان (الف ۸-۴)
- ۶۲ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان (ب ۸-۴)
- ۶۲ .....  $T = 400 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان (ج ۸-۴)
- ۶۳ .....  $T = 200 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  فرکانس میرا (الف ۹-۴)
- ۶۳ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  فرکانس میرا (ب ۹-۴)
- ۶۴ .....  $T = 400 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  فرکانس میرا (ج ۹-۴)
- ۶۴ .....  $T = 200 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  فرکانس موهومی معادل (الف ۱۰-۴)
- ۶۵ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  فرکانس موهومی معادل (ب ۱۰-۴)
- ۶۵ .....  $T = 400 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  فرکانس موهومی معادل (ج ۱۰-۴)
- ۶۶ .....  $T = 200 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  تغییر نرمال فرکانس (الف ۱۱-۴)
- ۶۶ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  تغییر نرمال فرکانس (ب ۱۱-۴)
- ۶۷ .....  $T = 400 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  تغییر نرمال فرکانس (ج ۱۱-۴)
- ۶۷ .....  $T = 200 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  معکوس ضریب کیفیت (الف ۱۲-۴)
- ۶۸ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  معکوس ضریب کیفیت (ب ۱۲-۴)
- ۶۸ .....  $T = 400 \text{ K}$  ،  $L = 80 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$  معکوس ضریب کیفیت (ج ۱۲-۴)
- ۷۰ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 50 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$  دامنه نرمال (الف ۱۳-۴)
- ۷۰ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 70 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$  دامنه نرمال (ب ۱۳-۴)
- ۷۱ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 90 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$  دامنه نرمال (ج ۱۳-۴)
- ۷۱ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 50 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$  مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان (الف ۱۴-۴)
- ۷۲ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 70 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$  مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان (ب ۱۴-۴)
- ۷۲ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 90 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$  مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان (ج ۱۴-۴)
- ۷۳ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 50 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$  فرکانس میرا (الف ۱۵-۴)
- ۷۴ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 70 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$  فرکانس میرا (ب ۱۵-۴)
- ۷۴ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 90 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$  فرکانس میرا (ج ۱۵-۴)
- ۷۵ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 50 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$  فرکانس موهومی معادل (الف ۱۶-۴)
- ۷۵ .....  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 70 \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$  فرکانس موهومی معادل (ب ۱۶-۴)

- ۷۶..... $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$  معادل فرکانس موهومی (ج ۱۶-۴)
- ۷۷..... $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$  تغییر نرمال فرکانس (الف ۱۷-۴)
- ۷۷..... $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$  تغییر نرمال فرکانس (ب ۱۷-۴)
- ۷۸..... $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$  تغییر نرمال فرکانس (ج ۱۷-۴)
- ۷۸..... $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$  معکوس ضریب کیفیت (الف ۱۸-۴)
- ۷۹..... $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$  معکوس ضریب کیفیت (ب ۱۸-۴)
- ۷۹..... $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$  معکوس ضریب کیفیت (ج ۱۸-۴)
- ۸۰..... $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  دامنه نرمال (الف ۱۹-۴)
- ۸۱..... $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  دامنه نرمال (ب ۱۹-۴)
- ۸۱..... $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  دامنه نرمال (ج ۱۹-۴)
- ۸۲..... $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان (الف ۲۰-۴)
- ۸۲..... $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان (ب ۲۰-۴)
- ۸۳..... $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان (ج ۲۰-۴)
- ۸۳..... $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  فرکانس میرا (الف ۲۱-۴)
- ۸۴..... $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  فرکانس میرا (ب ۲۱-۴)
- ۸۴..... $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  فرکانس میرا (ج ۲۱-۴)
- ۸۵..... $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  معادل فرکانس موهومی (الف ۲۲-۴)
- ۸۵..... $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  معادل فرکانس موهومی (ب ۲۲-۴)
- ۸۶..... $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  معادل فرکانس موهومی (ج ۲۲-۴)
- ۸۶..... $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  تغییر نرمال فرکانس (الف ۲۳-۴)
- ۸۷..... $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  تغییر نرمال فرکانس (ب ۲۳-۴)
- ۸۷..... $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  تغییر نرمال فرکانس (ج ۲۳-۴)
- ۸۸..... $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  معکوس ضریب کیفیت (الف ۲۴-۴)
- ۸۸..... $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  معکوس ضریب کیفیت (ب ۲۴-۴)
- ۸۹..... $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$  معکوس ضریب کیفیت (ج ۲۴-۴)

# فصل اول

## مقدمه

## ۱-۱. پیشگفتار

هدف در این پایان نامه بررسی ارتعاشات آزاد تیر میکرو با میرایی ترموالاستیک است که به دلیل جابجایی عرضی بزرگ، رفتار غیر خطی دارد. در فصل اول پس از معرفی بعضی کاربردهای سیستم میکرو الکترو مکانیکی، تاریخچه پژوهش‌های مهم و کلیدی انجام شده در این زمینه ارائه شده است.

در فصل دوم پس از بررسی هندسه تیر و استخراج رابطه‌ی کرنش - جابجایی، به حل معادله انتقال حرارت پرداخته و ارتباط گرادیان دما با جابجایی و نحوه‌ی اثر گذاری میرایی ترموالاستیک بر سیستم بررسی شده و سپس معادله ارتعاش غیر خطی تیر اویلر - برنولی با میرایی ترموالاستیک به کمک اصل تعمیم یافته هامیلتون استخراج شده است.

در فصل سوم پس از معرفی تعریف مودهای طبیعی غیر خطی در خمینه‌ی ناوردای فضای فاز سیستم و نحوه‌ی بررسی آن‌ها، شکل مودهای غیر خطی برای سیستم مورد بحث تا درجه‌ی سوم محاسبه و تفاوت آن‌ها با شکل مود خطی برای دامنه‌های متفاوت بررسی شده است. سپس به کمک توابع مود غیر خطی، معادله‌ی دینامیک مود یا سیستم یک درجه آزادی معادل بدست آمده است.

در فصل چهارم در ابتدا به معرفی اجمالی بالانس هارمونیک به عنوان یکی از روش‌های متداول جهت بررسی ارتعاشات غیر خطی پرداخته، سپس با معرفی تبدیل انتگرالی هیلبرت و خواص آن، نحوه‌ی محاسبه‌ی سیگنال تحلیلی به کمک تبدیل هیلبرت شرح داده شده است. پس از بررسی مفهومی پارامترهای سیگنال تحلیلی هم چون فرکانس لحظه‌ای و دامنه لحظه‌ای، روشی جهت کوتاه نمودن روند حل عددی و بالا بردن دقت دامنه و فرکانس بدست آمده از آن ارائه شده است. در آخر پاسخ‌های بدست آمده از دو روش فوق برای ارتعاش گذرای تیر میکرو با یکدیگر در شرایط متفاوت از نظر ابعاد و دما برای دو حالت میرایی خطی و غیر خطی مقایسه شده و دلیل اختلاف بین پاسخ این دو روش شرح داده شده است.

در فصل پنجم خلاصه‌ی نتایج و چند پیشنهاد برای پژوهش‌های آینده ارائه شده است.

## ۱-۲. سیستم‌های میکرو الکترو مکانیکی<sup>۱</sup>

سیستم‌های الکترو مکانیکی در ابعاد میکرون، در حوزه‌های متفاوت صنعتی و زندگی روزمره حضور دارند. روند ساخت و توسعه‌ی این سیستم‌ها از سال ۱۹۵۸ میلادی با اختراع آی سی شروع شد و پس از آن با پیشرفت تکنولوژی میکرو الکترونیک و تولید انبوه در ابعاد کوچک، استفاده از آن‌ها بسیار گسترش یافت. از جمله این سیستم‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

---

<sup>1</sup> Micro Electro Mechanical System (MEMS)

## ۱- سنسور فشار

معمولاً این سنسور ها تشکیل شده از یک دیافراگم سیلیکونی بوده که مواد با خاصیت پیزو مقاومتی<sup>۱</sup> در دهانه ی آن کار گذاشته شده است. در صورت وجود اختلاف فشار بین دو طرف ، دیافراگم تغییر شکل داده که منجر به تغییر مقاومت الکتریکی پیزو می گردد. این تغییر مقاومت توسط چیپ الکترونیکی دستگاه قابل اندازه گیری بوده و با استفاده از آن سیگنال خروجی سنسور ساخته می شود.

## ۲- سنسور اینرسی

این سنسور ها به دو دسته ی شتاب سنج و ژيروسکوپ تقسیم بندی شده که به ترتیب تغییرات سرعت خطی و سرعت زاویه ای را شناسایی می کنند. جابجایی قسمت الاستیک آنها توسط پیزو اندازه گیری شده و ابعاد کوچک آنها ، امکان استفاده در اکثر سیستم ها را فراهم می کند.

## ۳- سویچ های RF

این سویچ ها برای سالیان زیادی تحت بررسی و توسعه بوده اند. ولی بنا به دلایلی همچون رسیدن به بازدهی مناسب ، تولید انبوه و قابلیت اطمینان ، به تازگی وارد بازار تجاری شده اند. سویچ های RF در سیستم هایی که ابعاد کوچک و توان مصرفی کم برای آن ها حائز اهمیت است ، نسبت به دیگر سویچ ها الکترونیکی برتری دارند و امروزه در بسیاری از بخش های رایانه ، سیستم های مخابراتی و سیستم های امنیتی استفاده می شوند.

از دیگر سیستم های میکرو الکترو مکانیکی می توان به میکرو آینه ها ، سیستم های مهندسی پزشکی ، ابزار آزمایشگاهی بیوشیمی و میکرو ماهواره ها اشاره نمود.

## ۳-۱. تاریخچه

### ۱-۳-۱. میرایی ترموالاستیک

یکی از عوامل موثر در بررسی سیستم های میکرو ، انرژی اتلافی آن در ارتعاش است. ضریب کیفیت بزرگ منجر به پایداری فرکانسی و عملکرد بهتر خواهد بود [۱،۲]. انواع مختلف میرایی همچون میرایی آیرودینامیکی ، میرایی تکیه گاهی و میرایی داخلی وجود دارد. اما مکانیزم میرایی غالب در سیستم های میکرو مکانیکی که در حلال نسبی کار می کنند ، میرایی ترموالاستیک است [۳]. این میرایی در واقع کوپلینگ بین میدان های مکانیکی و حرارتی است. میرایی ترموالاستیک در سیستم های ارتعاشی با بار خمشی بوجود می آید. در خمش ، یک سمت تحت کشش بوده و سرد شده در حالی که سمت دیگر تحت فشار بوده و گرم می شود. این اختلاف دما منجر به ایجاد گرادیان دما و در نهایت باعث تولید حرارت برگشت ناپذیر شده که انتروپی سیستم را افزایش داده و سبب از دست رفتن انرژی می گردد. مبدا شناسایی میرایی

<sup>1</sup> Piezoresistive effect

ترموالاستیک ، کار های آزمایشگاهی بنویتر<sup>۱</sup> در سال ۱۹۲۴ است [۴]. برای اولین بار زنر<sup>۲</sup> در سال ۱۹۳۷ این مکانیزم میرایی را در رزوناتور های خمشی بررسی نمود و رابطه ای تقریبی برای آن ارائه داد [۵،۶]. بری<sup>۳</sup> به صورت آزمایشگاهی میرایی ترموالاستیک را به صورت تابعی از فرکانس محاسبه نمود که نتایج او تئوری زنر را تایید می کرد [۷]. لاندو و لیفشیتز<sup>۴</sup> معادله ی دقیق میرایی ترموالاستیک را برای تیر میکرو ارائه کرده در حالی که پاسخ قابل قبول برای معادله ی مذکور وجود نداشت [۸]. روزهارت<sup>۵</sup> اثر میرایی ترموالاستیک را در تک کریستال سیلیکون به صورت آزمایشگاهی بدست آورد [۳]. لیفشیتز و روکس<sup>۶</sup> میرایی ترموالاستیک را به صورت تحلیلی بررسی کرده و رابطه ی ضریب کیفیت را برای تیر با سطح مقطع مربعی بدست آوردند [۹]. نایفه و یونیس<sup>۷</sup> با استفاده از تکنیک اغتشاشات ، رابطه ای برای ضریب کیفیت در ورق میکرو ارائه کردند [۱۰]. سیلور و پترسون<sup>۸</sup> [۱۱] با روش المان محدود و سان<sup>۹</sup> [۱۲] با استفاده از تبدیل فوریه سینوسی محدود ، اثر میرایی ترموالاستیک را محاسبه کردند. یی<sup>۱۰</sup> اثر شکل هندسی را بر روی میرایی ترموالاستیک بررسی نمود [۱۳].

### ۱-۳-۲. مود غیر خطی

مود طبیعی یک مفهوم کاملا شناخته شده در سیستم های ارتعاشی است که معمولا با کمک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت که حاصل خطی سازی معادله حرکت حول نقطه ی تعادل سیستم است ، تعریف می شوند. مود های طبیعی بیان گر گونه ی خاصی از حرکت بوده که در آن سیستم همانند سیستمی با مرتبه ی پایین تر رفتار می کند. در سیستم های خطی پایستار و غیر ژيروسکوپیک ، شکل مود به صورت تابع ویژه و فرکانس طبیعی همان مقدار ویژه متناظر است. مود طبیعی برای سیستم های میرا و ژيروسکوپیک نیز وجود دارد ، ولی بررسی به سادگی حالت قبل نیست. زیرا در این شرایط مود های طبیعی به صورت موج در حال حرکت خواهد بود. دینامیک هر مود برای اکثر سیستم های خطی با یک سیستم معادل یک یا چند درجه آزادی قابل توصیف است.

مود غیر خطی اولین بار در دهه ی ۱۹۶۰ میلادی توسط روزنبرگ<sup>۱۱</sup> تحت عنوان ارتعاش متحد تعریف شد [۱۴-۱۶] و کار بر روی آن در دهه ی ۱۹۷۰ توسط رند<sup>۱۲</sup> [۱۷-۱۹] و مانویچ و میکلین<sup>۱۳</sup> [۲۰] ادامه

<sup>1</sup> K. Bennewitz

<sup>2</sup> C. Zenner

<sup>3</sup> B.S. Berry

<sup>4</sup> L.D. Landau, E.M. Lifshitz

<sup>5</sup> R.V. Roszhardt

<sup>6</sup> R. Lifshitz, M. Roukes

<sup>7</sup> A.H. Nayfeh, M.I. Younis

<sup>8</sup> M.J. Silver, L.D. Peterson

<sup>9</sup> Y. Sun

<sup>10</sup> Y.B. Yi

<sup>11</sup> R.M. Rosenberg

<sup>12</sup> R. Rand

<sup>13</sup> L.I. Manevitch, Y.V. Mikhlin

یافت. واکاکیس<sup>۱</sup> تعریف و روش جدیدی جهت محاسبه ی مود های غیر خطی بر مبنای انرژی سیستم ارائه داد [۲۱-۲۶] و شاو و پیر<sup>۲</sup> مود غیر خطی را به صورت حرکتی در خمینه ی ناوردای سیستم تعریف و بررسی نمودند [۲۷-۳۰]. تعریف انرژی واکاکیس و روش ارائه شده توسط شاو و پیر ، دو دیدگاه متفاوت از مود غیر خطی بوده که به جواب های مشابه منتهی می شوند. از این مرحله به بعد ، تحلیلی غیر خطی مودال به سطح قابل اجرا رسید و پژوهشگران به کمک این دو روش ، سیستم های متفاوت غیر خطی را بررسی نمودند. ولی از آن جایی که تعریف واکاکیس از مود غیر خطی بر مبنای انرژی سیستم است ، نمی توان از آن برای بررسی سیستم های میرا استفاده نمود و از این جهت بیان مود غیر خطی به صورت حرکت در خمینه ی ناوردای سیستم به آن ارجعیت دارد. بویوین<sup>۳</sup> ، پیر و شاو نحوه ی آنالیز مودال غیر خطی برای سیستم هایی با رزونانس داخلی را ارائه کردند [۳۱،۳۲]. پشک<sup>۴</sup> ، پیر و شاو با استفاده از روش گلرکین محاسبه ی مود غیر خطی را ساده تر کرده [۳۳] و جیانگ<sup>۵</sup> ، پیر و شاو پژوهش در زمینه ی مود های غیر خطی را ادامه دادند [۳۴-۳۶]. در حال حاضر آنالیز مودال غیر خطی به عنوان یک ابزار قدرتمند و با ارزش در بررسی ارتعاشات غیر خطی شناخته شده است.

### ۱-۳-۳. تبدیل هیلبرت

تبدیل هیلبرت در سال ۱۹۵۳ توسط دیوید هیلبرت<sup>۶</sup> تعریف شد [۳۷]. این تبدیل ، آرگومان بخش های نوسانی هر تابع را به اندازه ی  $\pi/2$  تغییر داده و دامنه ی آن ها را بدون تغییر باقی می گذارد. در سال ۱۹۶۲ بدروسین<sup>۷</sup> قضیه معروف خود را در زمینه ی تبدیل هیلبرت ارائه داد [۳۸] و از آن پس استفاده از تبدیل هیلبرت در حوزه های پردازش سیگنال و مخابرات رشد چشم گیری یافت. در دهه ی ۱۹۹۰ میلادی روش بسیار جالبی در زمینه شناسایی سیستم های ارتعاشی یک درجه آزادی [۳۹،۴۰] و دو درجه آزادی [۴۱] با کمک تبدیل هیلبرت توسط فلدمن<sup>۸</sup> ارائه شد و از آن پس استفاده از تبدیلات انتگرالی در شناسایی سیستم ها گسترش یافت. از دیگر پژوهش های فلدمن در این زمینه می توان به [۴۲-۴۵] اشاره نمود. به دلیل محدودیت های تبدیل هیلبرت در تحلیل سیگنال های چند فرکانسی ، هانگ<sup>۹</sup> در سال ۱۹۹۸ تبدیل هیلبرت - هانگ را ارائه کرد [۴۶]. در شناسایی سیستم ها با داشتن پاسخ ارتعاشی ، پارامتر های سیستم محاسبه می شوند. روند بررسی در این پایان نامه ، معکوس شیوه ی فوق است. با داشتن پارامتر های سیستم که به صورت تحلیلی بدست آمده اند ، پاسخ سیستم محاسبه خواهد شد و از تبدیل هیلبرت جهت سبک نمودن حل عددی و دقیق تر کردن آن استفاده شده است.

<sup>1</sup> A.F. Vakakis

<sup>2</sup> S.W. Shaw, C. Pierre

<sup>3</sup> N. Boivin

<sup>4</sup> E. Pesheck

<sup>5</sup> D. Jiang

<sup>6</sup> D. Hilbert

<sup>7</sup> E. Bedrosian

<sup>8</sup> M. Feldman

<sup>9</sup> N.E. Huang



# فصل دوم

## استخراج معادله حرکت

## ۱-۲. کلیات

در این فصل ابتدا هندسه ی تیر با حرکت صفحه ای مورد بررسی قرار گرفته است. پس از بررسی روابط کرنش - جابجایی و حل معادله ی انتقال حرارت ، مدل اویلر - برنولی با جابجایی عرضی بزرگ برای تیر میکرو با استفاده از اصل تعمیم یافته ی هامیلتون استخراج شده است. پس از بحث در مورد نحوه ی اثر گذاری میرایی ، معادله حرکت و شرایط مرزی محاسبه شده اند.

## ۲-۲. هندسه تیر صفحه ای

در مدل ارتعاشی تیر اویلر - برنولی که به دلیل دامنه ی زیاد رفتار غیر خطی دارد ، کرنش عمودی ایجاد شده را می توان مشابه (۱-۲) در نظر گرفت. تیر مورد نظر به طول  $L$  بوده که  $x$  راستای طولی و  $z$  در جهت ارتفاع سطح مقطع آن است.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ben} + \mathcal{E}_{ext} \quad (۱-۲)$$

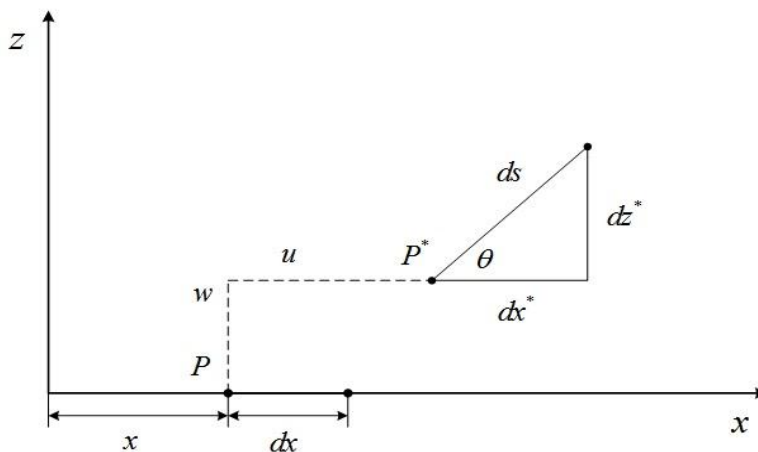
$$\mathcal{E}_{ben} = -zK \quad (۲-۲)$$

$\mathcal{E}_{ext}$  و  $\mathcal{E}_{ben}$  به ترتیب کرنش ناشی از خمش و کرنش تار خنثی به دلیل کشش ایجاد شده هستند. کرنش ناشی از خمش تیر به صورت (۲-۲) بوده که در آن  $K$  انحنای تار خنثی است. جهت محاسبه ی  $K$  و  $\mathcal{E}_{ext}$  مطابق شکل (۱-۲) دو نقطه  $P(x, z)$  و  $P^*(x^*, z^*)$  را در نظر گرفته می شود.

$$x^* = x + u \quad (۳-۲)$$

$$z^* = w$$

$$ds = \sqrt{dx^{*2} + dz^{*2}} \quad (۴-۲)$$



که  $ds$  طول المان تغییر شکل یافته است. (۵-۲) از دیفرانسیل گیری از رابطه ی (۳-۲) نسبت به  $x$  بدست می آید.

$$dx^* = (1 + u_{,x}) dx \quad (۵-۲)$$

$$dz^* = w_{,x} dx$$

بنابر این (۴-۲) را می توان به صورت (۶-۲) بازنویسی کرد. روابط (۷-۲) و (۸-۲) به ترتیب تغییر طول و زاویه چرخش المان را نشان می دهد.

$$ds = \left( \sqrt{(1 + u_{,x})^2 + w_{,x}^2} \right) dx \quad (۶-۲)$$

$$e = ds - dx = \left( \sqrt{(1 + u_{,x})^2 + w_{,x}^2} - 1 \right) dx \quad (۷-۲)$$

$$\sin \theta = \frac{dz^*}{ds} = \frac{w_{,x}}{\lambda} \quad (۸-۲)$$

$$\cos \theta = \frac{dx^*}{ds} = \frac{1 + u_{,x}}{\lambda}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{w_{,x}}{1 + u_{,x}} \right)$$

$$\lambda = \frac{ds}{dx} = \sqrt{(1 + u_{,x})^2 + w_{,x}^2} \quad (۹-۲)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{(1 + u_{,x})w_{,xx} - u_{,xx}w_{,x}}{\lambda^2} \quad (۱۰-۲)$$

$\varepsilon_{ext} = e/dx$  و انحنای تار خنثی به صورت (۱۱-۲) است که با قرار دادن روابط (۹-۲) و (۱۰-۲) در (۱۱-۲)، به صورت نهایی (۱۲-۲) بدست می آید.

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} \quad (۱۱-۲)$$

$$\kappa = \frac{(1 + u_{,x})w_{,xx} - u_{,xx}w_{,x}}{\left[ 1 + 2u_{,x} + u_{,x}^2 + w_{,x}^2 \right]^{3/2}} \quad (۱۲-۲)$$

معادلات (۱۳-۲) و (۱۴-۲) به ترتیب بسط تیلور روابط (۷-۲) و (۱۲-۲) هستند.

$$e = \left\{ \frac{1}{2} [2u_{,x} + u_{,x}^2 + w_{,x}^2] - \frac{1}{8} [2u_{,x} + u_{,x}^2 + w_{,x}^2]^2 + \dots \right\} dx \quad (۱۳-۲)$$

$$\kappa = w_{,xx} - u_{,xx} w_{,x} - 2u_{,x} w_{,xx} + \dots \quad (14-2)$$

از این مرحله به بعد ، با در نظر گرفتن مرتبه ی بسط تیلور و اعمال ساده سازی هاست که روابط کرنش جابجایی و به تبع از آن معادله حرکت غیر خطی مدل های مختلف تیر حاصل می گردد.

از تغییرات  $u$  نسبت به  $x$  صرفنظر شده است. این فرض زمانی صحیح است که نیروهای محوری وارد بر تیر همچون نیروهای تکیه گاهی و اینرسی قابل صرفنظر باشند [47]. با در نظر گرفتن تقریب های (2-15) و (2-16) برای (2-13) و (2-14) رابطه ی کرنش جابجایی به صورت معادله (2-17) بدست خواهد آمد.

$$e = \left( \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) dx \quad (15-2)$$

$$\kappa = w_{,xx} \quad (16-2)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} w_{,x}^2 - z w_{,xx} \quad (17-2)$$

برای تنش ها ،  $\varepsilon_{yy}$  و  $\varepsilon_{zz}$  می توان نوشت :

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} - E\alpha\theta \quad (18-2)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy} + \nu(\sigma_{xx} + \cancel{\sigma_{zz}}^0) - E\alpha\theta = 0 \\ \sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} + \nu(\sigma_{xx} + \cancel{\sigma_{yy}}^0) - E\alpha\theta = 0 \end{cases} \quad (19-2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = (1+\nu)\alpha\theta - \nu\varepsilon_{xx} \quad (20-2)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A w_{,t}^2 dx \quad (21-2)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dA dx$$

$$\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} = E\varepsilon_{xx}^2 - E\alpha\theta \varepsilon_{xx} \quad (22-2)$$

(21-2) انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم را نشان می دهند. به دلیل آن که از اثر  $u$  در کرنش و انرژی پتانسیل صرفنظر شده ، جمله ی  $\frac{1}{2} \int_0^L \rho A u_{,t}^2 dx$  در رابطه انرژی جنبشی محاسبه نشده است. می توان به راحتی نشان داد ، در صورتی که از  $u_{,x}$  صرفنظر شود ، فرکانس طبیعی نوسان در راستای طولی تیر ( $u$ )

همان بخش غیر خطی فرکانس طبیعی ارتعاشات عرضی خواهد بود. جهت ادامه ی محاسبات انتگرال های فوق ابتدا می بایست  $\theta$  نسبت به  $w$  محاسبه شود که این محاسبات در بخش بعدی شرح داده شده است.

## ۳-۲. تحلیل انتقال حرارت

در این بخش اثر کرنش بر تغییرات دما محاسبه می گردد. پس از جایگذاری تغییرات دما در (۲-۲۲)، می توان معادله حرکت تیر اویلر برنولی با جابجایی عرضی بزرگ و میرایی ترموالاستیک را بدست آورد. معادله انتقال حرارت در حالت کلی همانند (۲-۲۳) است [۴۸]. که در آن  $k$  ضریب هدایت حرارتی،  $c_v$  ظرفیت گرمایی ویژه در حجم ثابت،  $\tau_0$  ثابت زمانی و  $\beta = \frac{E\alpha}{1-2\nu}$  مدول حرارتی است.  $T_0$  دمای مرجع سیستم و  $\theta$  تغییرات دماست. در صورتی که  $\tau_0 = 0$  باشد، سرعت توزیع امواج حرارتی<sup>۱</sup> بی نهایت خواهد بود. به عبارت دیگر تغییرات دما بلافاصله پس از تغییرات کرنش ایجاد می گردد و تغییرات دما و کرنش هم فاز خواهند بود. در صورتی که  $\tau_0 \neq 0$  باشد، تغییرات دما از نظر زمانی اندکی پس از ایجاد کرنش خواهد بود. در عمل  $\tau_0$  بسیار کوچک بوده و فقط در زمانی که فرکانس نوسانات خیلی بالا باشد، اثر قابل ملاحظه خواهد گذاشت و در اکثر مسائل می توان از حضور آن صرفنظر کرد.

$$k \theta_{,ii} = \rho c_v (\dot{\theta} + \tau_0 \ddot{\theta}) + \beta T_0 (\dot{\varepsilon}_{kk} + \tau_0 \ddot{\varepsilon}_{kk}) \quad (۲۳-۲)$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (1-2\nu)\varepsilon_{xx} + 2(1+\nu)\alpha\theta \quad (۲۴-۲)$$

اگر  $\Delta E = \frac{E\alpha^2 T_0}{\rho c_v}$  بوده و از انتقال حرارت در راستای طولی تیر در برابر انتقال حرارت عرضی صرفنظر کنیم  $\theta_{,xx} \ll \theta_{,zz}$ ، آن گاه می توان معادله ی انتقال حرارت را به صورت (۲-۲۵) نوشت.

$$\left[ 1 + 2\Delta E \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\Delta E}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{xx}) \quad (۲۵-۲)$$

$\varepsilon_{kk}$  به صورت (۲-۲۴) است. اگر از اثر جملات فوق هارمونیک بر میرایی صرفنظر کنیم، آنگاه می توان  $w(x,t)$  را مشابه (۲-۲۷) به صورت تک فرکانسی در نظر گرفت. در فصل چهارم نشان داده خواهد شد که به ازای بعضی شرایط، در فرض جابجایی عرضی به صورت (۲-۲۷) هیچ تقریبی وجود نداشته و نیازی به لحاظ کردن فرکانس های دیگر در پاسخ نیست. بررسی انجام شده در این قسمت مشابه [۹] بوده، با این تفاوت که کرنش تیر به صورت غیر خطی است. از آن جایی که  $\varepsilon_{xx}$  جمع دو جمله ی مجزاست، جهت حل (۲-۲۵)،  $\theta(x,z,t)$  را به صورت (۲-۲۷) فرض کرده که در آن  $\Omega$  همان فرکانس طبیعی مختلط است.

<sup>1</sup> Thermal Wave Propagation

$$\varepsilon_{xx} = -z w_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad (26-2)$$

$$w(x, t) = w_0(x) e^{i\Omega t} \quad (27-2)$$

$$\theta(x, z, t) = \theta_{01}(x, z) e^{i\Omega t} + \theta_{02}(x) e^{2i\Omega t}$$

$$X = \left[ 1 + 2\Delta E \left( \frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \quad (28-2)$$

با قرار دادن (26-2) و (27-2) در (25-2) و اعمال تغییر متغیر (28-2) معادله (29-2) بدست می آید.

$$X \left( i \Omega \theta_{01} e^{i\Omega t} + 2i \Omega \theta_{02} e^{2i\Omega t} \right) = \frac{k}{\rho c_v} \frac{\partial^2 \theta_{01}}{\partial z^2} e^{i\Omega t} + \frac{\Delta E}{\alpha} i \Omega \left[ z w_0'' e^{i\Omega t} - w_0'^2 e^{2i\Omega t} \right] \quad (29-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \theta_{01} + (i \Omega) \frac{X \rho c_v}{k} \left[ \frac{\Delta E}{X \alpha} z w_0'' - \theta_{01} \right] = 0 \\ \theta_{02} = -\frac{\Delta E}{X \alpha} \frac{1}{2} w_0'^2 \end{cases} \quad (30-2)$$

$\Omega = \omega + i\alpha$  فرکانس طبیعی مختلط سیستم بوده که بخش حقیقی آن فرکانس نوسان و بخش موهومی آن میرایی سیستم را نشان می دهد. با استفاده از تغییر متغیر (31-2)، معادله ی اول (30-2) به صورت (32-2) تبدیل خواهد شد.

$$F(x, z) = \frac{\Delta E}{X \alpha} z w_0'' - \theta_{01} \quad (31-2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - (i \Omega) \frac{X \rho c_v}{k} F = 0 \quad (32-2)$$

(33-2) از اعمال تفکیک متغیرها به صورت  $F(x, z) = Q(x)P(z)$  در (32-2) بدست می آید. سپس با جایگذاری (34-2) و  $Q(x) = w_0''(x)$  در (31-2)،  $\theta_{01}$  به صورت (36-2) بدست می آید.

$$P'' - (i \Omega) \frac{X \rho c_v}{k} P = 0 \quad (33-2)$$

$$P = A \sin(\eta z) + B \cos(\eta z) \quad (34-2)$$

$$\eta = (i-1) \sqrt{\frac{\Omega X \rho c_v}{2k}} \quad (35-2)$$

$$\theta_{01} = \left( \frac{\Delta E}{X\alpha} z - P(z) \right) w_0'' \quad (36-2)$$

انتقال حرارت در راستای ارتفاع سطح مقطع بر روی سطوح فوقانی و زیرین تیر صفر است. ثابت های  $A$  و  $B$  در  $P(z)$  با اعمال شرط مرزی (۳۷-۲) قابل محاسبه هستند.

$$\left. \frac{\partial \theta_{01}}{\partial z} \right|_{z=-h/2} = \left. \frac{\partial \theta_{01}}{\partial z} \right|_{z=+h/2} = 0 \quad (37-2)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{01}}{\partial z} \right|_{z=-h/2} = \left. \frac{\partial \theta_{01}}{\partial z} \right|_{z=+h/2} \Rightarrow 2B\eta \sin(\eta h/2) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (38-2)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_{01}}{\partial z} \right|_{z=+h/2} = 0 \Rightarrow A = \frac{\Delta E}{X\alpha\eta \cos(\eta h/2)}$$

$$\theta_{01}(x, z) = \frac{\Delta E}{X\alpha} w_0''(x) \left[ z - \frac{\sin(\eta z)}{\eta \cos(\eta h/2)} \right] \quad (39-2)$$

حل نهایی معادله انتقال حرارت به صورت (۴۰-۲) است که  $\theta(x, z, t)$  را بر حسب  $w(x, t)$  و  $z$  نشان می دهد. با استفاده از (۴۰-۲) می توان انتگرال روی سطح مقطع در (۲۱-۲) را مطابق (۴۱-۲) محاسبه کرد.

$$\theta(x, z, t) = \frac{\Delta E}{X\alpha} \left[ z - \frac{\sin(\eta z)}{\eta \cos(\eta h/2)} \right] w_{,xx}(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{X\alpha} w_{,x}^2(x, t) \quad (40-2)$$

$$\int_A \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dA = E w_{,xx}^2 \int_A z^2 dA + E b w_{,xx}^2 \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{\Delta E}{X} \left( z - \frac{\sin(\eta z)}{\eta \cos(\eta h/2)} \right) \right] z dz$$

$$- E w_{,xx} w_{,x}^2 \int_A z dA - E \frac{b}{2} w_{,xx} w_{,x}^2 \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{\Delta E}{X} \left( z - \frac{\sin(\eta z)}{\eta \cos(\eta h/2)} \right) \right] dz$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{X} E w_{,xx} w_{,x}^2 \int_A z dA + \frac{1}{4} E w_{,x}^4 \int_A dA + \frac{1}{4} E \frac{\Delta E}{X} w_{,x}^4 \int_A dA$$

$$\int_A \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dA = EI w_{,xx}^2 + \frac{1}{4} EA w_{,x}^4 + EI \frac{\Delta E}{X} (q(\eta) + 1) w_{,xx}^2 + \frac{1}{4} EA \frac{\Delta E}{X} w_{,x}^4$$

$$\int_A \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dA = E_\eta I w_{,xx}^2 + \frac{1}{4} E_T A w_{,x}^4 \quad (41-2)$$

$E_T$  و  $E_\eta$  مطابق (۴۳-۲) بوده که در آن  $\Delta E = \frac{E\alpha^2 T_0}{\rho c_v}$  است.  $X$  و  $q(\eta)$  به ترتیب در روابط (۲۸-۲) و (۴۲-۲) ارائه شده اند.

$$q(\eta) = \frac{24}{\eta^3 h^3} \left( \frac{\eta h}{2} - \tan\left(\frac{\eta h}{2}\right) \right) \quad (۴۲-۲)$$

$$E_\eta = E \left[ 1 + \frac{\Delta E}{X} (q(\eta) + 1) \right] \quad (۴۳-۲)$$

$$E_T = E \left( 1 + \frac{\Delta E}{X} \right)$$

جهت صرفنظر از مرتبه ی  $\Delta E^2$  ، کافی است در روابط (۴۳-۲) ،  $X$  را برابر با یک قرار داده شود. با جایگذاری بسط تیلور  $\tan(x)$  در معادله (۴۲-۲) ،  $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \dots$  ، اگر  $\Omega$  مقدار کوچکی باشد ،  $q(\eta) \rightarrow -1$  و در نتیجه  $E_\eta = E_{Isothermal} = E$  بوده و در صورتی که  $\Omega$  مقدار بزرگی باشد ،  $q(\eta) \rightarrow 0$  و در نتیجه  $E_\eta = E_{Adiabatic} = E \left( 1 + \frac{\Delta E}{X} \right)$  خواهد بود. برای فرکانس های مابین ،  $E_\eta$  مختلط بوده که سبب مختلط شدن  $\Omega$  شده و میرایی ترموالاستیک به صورت سختی موهومی وارد معادله حرکت سیستم می گردد.

با توصیف بالا ، دلیل عدم حضور میرایی ترموالاستیک در سیستم هایی با ابعاد بزرگ ، کاملاً مشخص است. در آن گونه سیستم ها به دلیل کوچک بودن فرکانس طبیعی ،  $E_\eta$  یا کاملاً حقیقی است و یا بخش موهومی آن بسیار ناچیز است. از طرف دیگر ، از آن جایی که از انتقال حرارت در راستای طولی تیر صرفنظر شده است ، مشاهده می شود در تنش ناشی از کشش طولی المان دیفرانسیلی ، مدول یانگ یا  $E_T$  به صورت  $E_{Adiabatic}$  ظاهر شده است.

## ۴-۲. معادله حرکت و شرایط مرزی

با استفاده از نتایج (۴۳-۲) ، انرژی پتانسیل سیستم با اثر تغییرات دما به صورت (۴۴-۲) قابل محاسبه است.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left( E_\eta I w_{,xx}^2 + \frac{1}{4} E_T A w_{,x}^4 \right) dx \quad (۴۴-۲)$$

معادله حرکت و شرایط مرزی به ترتیب در (۴۵-۲) و (۴۶-۲) با استفاده از اصل تعمیم یافته ی هامیلتون محاسبه شده اند.



$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \rho A w_{,t} \delta w_{,t} - E_{\eta} I w_{,xx} \delta w_{,xx} - \frac{1}{2} E_T A w_{,x}^3 \delta w_{,x}^3 \right) dx dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left( E_{\eta} I w_{,xxx} - \frac{E_T A}{2} w_{,x}^3 \right) \delta w \Big|_0^L - \int_{t_1}^{t_2} (E_{\eta} I w_{,xx}) \delta w_{,x} \Big|_0^L + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( -\rho A w_{,tt} - E_{\eta} I w_{,xxxx} + \frac{3E_T A}{2} w_{,x}^2 w_{,xx} \right) \delta w dx dt = 0$$

$$\rho A w_{,tt} + E_{\eta} I w_{,xxxx} - \frac{3}{2} E_T A w_{,x}^2 w_{,xx} = 0 \quad (45-2)$$

$$w = 0 \quad \text{یا} \quad E_{\eta} I w_{,xxx} - \frac{1}{2} E_T A w_{,x}^3 = 0 \quad (46-2)$$

$$w_{,x} = 0 \quad \text{یا} \quad E_{\eta} I w_{,xx} = 0$$

میرایی ترمو الاستیک به صورت مختلط شدن مدول یانگ ( $E_{\eta}$ ) در معادله حرکت ظاهر شده است. شرایط مرزی در دو طرف تیر تکیه گاه ساده بوده ، بنابر این

$$w(0, t) = w(L, t) = 0 \quad (47-2)$$

$$w_{,xx}(0, t) = w_{,xx}(L, t) = 0$$

در فصل سوم معادله حرکت (45-2) با شرایط مرزی (47-2) به کمک آنالیز مودال غیر خطی در ارتعاش گذرای تک مودی بررسی خواهد شد.

# فصل سوم

## آنالیز مودال غیر خطی

### ۳-۱. مود طبیعی غیر خطی<sup>۱</sup>

مود طبیعی برای یک سیستم پیوسته یک بعدی، حرکتی است که در یک خمینه ی ناوردای<sup>۲</sup> دو بعدی (رویه) در فضای فاز سیستم صورت گیرد. به گونه ای که هر حرکتی در این رویه شروع شود، در همان باقی بماند. این خمینه در نقطه ی تعادل بر فضای ویژه دوبعدی (صفحه ی ویژه) سیستم خطی شده مماس است [۳۰]. در این خمینه می توان معادله حرکت سیستم را بر حسب یک جفت متغیر حالت نوشت، به گونه ای که رفتار آن مشابه سیستم یک درجه آزادی باشد و سیستم یک درجه آزادی معادل در حرکت تک مودی را بدست آورد. بر اساس تعریف فوق، مود غیر خطی را به صورت نسبت جابجایی و سرعت نقاط سیستم به جابجایی و سرعت یک نقطه ی خاص یا نقطه ی مرجع در نظر می گیرند. این نقطه با  $x_0$  و جابجایی و سرعت متناظر با این نقطه را به صورت  $(w_0, v_0)$  نشان داده می شود. لازم به ذکر است که مود های خطی در واقع حالت خاصی از مود های غیر خطی هستند. در آنالیز مودال غیر خطی جمع آثار امکان پذیر نبوده و مود های غیر خطی نسبت به یکدیگر متعامد نیستند. در سیستم هایی که به واسطه ی دامنه ی زیاد رفتار غیر خطی دارند، هرچه  $(w_0, v_0)$  کوچکتر باشند، مود غیر خطی به مود سیستم خطی شده نزدیک تر می گردد. اگر جابجایی و سرعت سیستم را به ترتیب با  $w(x, t)$  و  $v(x, t)$  نشان دهیم، می توان نوشت:

$$w(x_0, t) = w_0(t) \quad (۱-۳)$$

$$v(x_0, t) = v_0(t)$$

$$w(x, t) = W(w_0(t), v_0(t), x, x_0) \quad (۲-۳)$$

$$v(x, t) = V(w_0(t), v_0(t), x, x_0)$$

$W$  و  $V$  توابعی بوده که  $(w, v)$  را با  $(w_0, v_0)$  ارتباط می دهند و شرایط مرزی را ارضا می کنند. این روابط به صورت قید است، که اگر حرکتی آن ها را ارضا کند، به صورت کامل توسط زوج  $(w_0, v_0)$  مشخص خواهد شد. این زوج متغیر های حالت مرجع بوده و بقیه متغیر های حالت تابعی از این دو هستند. از ترکیب روابط (۱-۳) و (۲-۳)، معادلات (۳-۳) بدست می آید.

$$W(w_0(t), v_0(t), x_0, x_0) = w_0(t) \quad (۳-۳)$$

$$V(w_0(t), v_0(t), x_0, x_0) = v_0(t)$$

معادله حرکت به فرم کلی (۴-۳) مفروض است. قدم اول مشتق گیری از معادلات قید (۲-۳) نسبت به زمان است.

$$\ddot{w} + f(w, \dot{w}) = 0 \quad (۴-۳)$$

<sup>1</sup> Nonlinear Normal Mode (NNM)

<sup>2</sup> Invariant Manifold

$$\dot{w}(x,t) = \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial w_0} \dot{w}_0 + \frac{\partial W}{\partial v_0} \dot{v}_0 \quad (5-3)$$

$$\dot{v}(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial w_0} \dot{w}_0 + \frac{\partial V}{\partial v_0} \dot{v}_0$$

$$V = \frac{\partial W}{\partial w_0} v_0 + \frac{\partial W}{\partial v_0} f(W(w_0(t), v_0(t), x_0, x_0), V(w_0(t), v_0(t), x_0, x_0)) \quad (6-3)$$

$$f(W(w_0(t), v_0(t), x, x_0), V(w_0(t), v_0(t), x, x_0)) = \frac{\partial V}{\partial w_0} v_0$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial v_0} f(W(w_0(t), v_0(t), x_0, x_0), V(w_0(t), v_0(t), x_0, x_0))$$

با استفاده از معادله حرکت می توان به صورت (۶-۳) ، وابستگی زمانی روابط (۵-۳) را از بین برده و سپس به کمک سری توانی معادلات (۶-۳) را حل نمود. ابتدا  $w$  و  $v$  را مانند (۷-۳) و (۸-۳) بسط داده ، پس از جایگذاری بسط مذکور در (۶-۳) و بالانس ضرایب  $w_0^m v_0^n$  را به ازای  $m, n = 0, 1, 2, \dots$  و  $m+n \geq 1$  دستگاه معادلات دیفرانسیلی در حوزه ی مکان برای درجات متفاوت بدست می آید.

$$w(x,t) = W(w_0(t), v_0(t), x, x_0) = a_1(x, x_0)w_0(t) + a_2(x, x_0)v_0(t) \quad (7-3)$$

$$+ a_3(x, x_0)w_0^2(t) + a_4(x, x_0)w_0(t)v_0(t) + a_5(x, x_0)v_0^2(t)$$

$$+ a_6(x, x_0)w_0^3(t) + a_7(x, x_0)w_0^2(t)v_0(t) + a_8(x, x_0)w_0(t)v_0^2(t)$$

$$+ a_9(x, x_0)v_0^3(t) + \dots$$

$$v(x,t) = V(w_0(t), v_0(t), x, x_0) = b_1(x, x_0)w_0(t) + b_2(x, x_0)v_0(t) \quad (8-3)$$

$$+ b_3(x, x_0)w_0^2(t) + b_4(x, x_0)w_0(t)v_0(t) + b_5(x, x_0)v_0^2(t)$$

$$+ b_6(x, x_0)w_0^3(t) + b_7(x, x_0)w_0^2(t)v_0(t) + b_8(x, x_0)w_0(t)v_0^2(t)$$

$$+ b_9(x, x_0)v_0^3(t) + \dots$$

(۹-۳) شرط برقراری رابطه ی (۳-۳) در بسط های (۷-۳) و (۸-۳) است.

$$a_1(x_0, x_0) = 1 \quad a_2(x_0, x_0) = 0 \quad a_j(x_0, x_0) = 0 \quad j = 3, 4, 5, \dots \quad (9-3)$$

$$b_1(x_0, x_0) = 0 \quad b_2(x_0, x_0) = 1 \quad b_j(x_0, x_0) = 0$$

با قرار دادن (۷-۳) و (۸-۳) در (۶-۳) و دسته بندی ضرایب جملات هم درجه و حل معادلات بدست آمده ، می توان مجهول های  $a_i(x, x_0)$  و  $b_i(x, x_0)$  ،  $i = 1, 2, 3, \dots$  را محاسبه نمود. سپس با قرار دادن  $W$  و  $V$  در معادله حرکت و محاسبه در  $x = x_0$  ، معادله یک درجه آزادی سیستم کاهش یافته بدست آمده که می توان فرکانس های طبیعی را از آن محاسبه نمود. سیستم های پیوسته یک بعدی که در بالا

شرح داده شد ، به گونه ای هستند که می توانند حرکت تک مودی داشته باشند و خمینه های نوردای آنان در فضای فاز ، دو بعدی است. در سیستم هایی که تحت رزونانس داخلی بوده و یا چند بعدی هستند ، بین مود های غیر خطی کوپلینگ وجود دارد. در این حالت پس از اعمال روش فوق ، نمی توان ضرایب  $a_i(x, x_0)$  و  $b_i(x, x_0)$  ،  $i=1, 2, 3, \dots$  را بدست آورد. بسته به نوع سیستم ، با انتخاب دو یا چند نقطه مرجع ، می توان مشکل فوق را برطرف نمود.

### ۳-۲. آنالیز مودال تیر اویلر برنولی با جابجایی عرضی بزرگ

با اعمال دو تغییر متغیر  $E_1 = \frac{E_\eta I}{\rho A}$  و  $E_2 = \frac{E_T}{\rho}$  می توان معادله حرکت (۲-۴۵) را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$w_{,t} = v \quad (۱۰-۳)$$

$$v_{,t} = -E_1 w_{,xxxx} + \frac{3}{2} E_2 w_{,xx} w_{,x}^2$$

$$V = \frac{\partial W}{\partial w_0} v_0 + \frac{\partial W}{\partial v_0} \left[ -E_1 w_{,xxxx} + \frac{3}{2} E_2 w_{,xx} w_{,x}^2 \right]_{x=x_0} \quad (I) \quad (۱۱-۳)$$

$$-E_1 w_{,xxxx} + \frac{3}{2} E_2 w_{,xx} w_{,x}^2 = \frac{\partial V}{\partial w_0} v_0 + \frac{\partial V}{\partial v_0} \left[ -E_1 w_{,xxxx} + \frac{3}{2} E_2 w_{,xx} w_{,x}^2 \right]_{x=x_0} \quad (II)$$

(۱۱-۳) حاصل جایگذاری (۱۰-۳) در (۳-۶) است. با قرار دادن بسط های (۳-۷) و (۳-۸) در (۱۱-۳) و دسته بندی ضرایب جملات هم درجه در (I) و (II) معادلات حاکم بر مجهول های  $a_i(x, x_0)$  و  $b_i(x, x_0)$  ،  $i=1, 2, 3, \dots$  مطابق زیر بدست می آیند.

درجه ۱ :

$$(I) \quad (۱۲-۳)$$

$$w_0 : b_1(x, x_0) + a_2(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) = 0$$

$$v_0 : b_2(x, x_0) - a_1(x, x_0) + a_2(x, x_0) E_1 a_2''''(x_0, x_0) = 0$$

$$(II) \quad (13-3)$$

$$w_0 : -E_1 a_1''''(x, x_0) + b_2(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) = 0$$

$$v_0 : -E_1 a_2''''(x, x_0) - b_1(x, x_0) + b_2(x, x_0) E_1 a_2''''(x_0, x_0) = 0$$

درجه ۲ :

$$(I) \quad (14-3)$$

$$w_0^2 : b_3(x, x_0) + a_2(x, x_0) E_1 a_3''''(x_0, x_0) + a_4(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) = 0$$

$$w_0 v_0 : b_4(x, x_0) - 2a_3(x, x_0) + a_2(x, x_0) E_1 a_4''''(x_0, x_0) \\ + 2a_5(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) + a_4(x, x_0) E_1 a_2''''(x_0, x_0) = 0$$

$$v_0^2 : b_5(x, x_0) - a_4(x, x_0) + a_2(x, x_0) E_1 a_5''''(x_0, x_0) \\ + 2a_5(x, x_0) E_1 a_2''''(x_0, x_0) = 0$$

$$(II) \quad (15-3)$$

$$w_0^2 : -E_1 a_3''''(x, x_0) + b_2(x, x_0) E_1 a_3''''(x_0, x_0) \\ + b_4(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) = 0$$

$$w_0 v_0 : -E_1 a_4''''(x, x_0) - 2b_3(x, x_0) + b_2(x, x_0) E_1 a_4''''(x_0, x_0) \\ + b_4(x, x_0) E_1 a_2''''(x_0, x_0) + 2b_5(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) = 0$$

$$v_0^2 : -E_1 a_5''''(x, x_0) - b_4(x, x_0) + b_2(x, x_0) E_1 a_5''''(x_0, x_0) \\ + 2b_5(x, x_0) E_1 a_2''''(x_0, x_0) = 0$$

درجه ۳ :

$$(I) \quad (16-3)$$

$$w_0^3 : b_6(x, x_0) + a_4(x, x_0) E_1 a_3''''(x_0, x_0) - a_2(x, x_0) \left[ -E_1 a_6''''(x_0, x_0) \right]$$

$$+\frac{3}{2}E_2a_1'^2(x_0, x_0)a_1''(x_0, x_0)] + a_7(x, x_0)E_1a_1''''(x_0, x_0) = 0$$

$$w_0^2v_0 : b_7(x, x_0) - 3a_6(x, x_0) - a_2(x, x_0) \left[ -E_1a_7''''(x_0, x_0) \right. \\ \left. + \frac{3}{2}E_2a_1'^2(x_0, x_0)a_2''(x_0, x_0) + 3E_2a_1'(x_0, x_0)a_1''(x_0, x_0)a_2'(x_0, x_0) \right] \\ + 2a_5(x, x_0)E_1a_3''''(x_0, x_0) + a_4(x, x_0)E_1a_4''''(x_0, x_0) \\ + 2a_8(x, x_0)E_1a_1''''(x_0, x_0) + a_7(x, x_0)E_1a_2''''(x_0, x_0) = 0$$

$$w_0v_0^2 : b_8(x, x_0) - 2a_7(x, x_0) - a_2(x, x_0) \left[ -E_1a_8''''(x_0, x_0) \right. \\ \left. + \frac{3}{2}E_2a_2'^2(x_0, x_0)a_1''(x_0, x_0) + 3E_2a_2'(x_0, x_0)a_2''(x_0, x_0)a_1'(x_0, x_0) \right] \\ + 2a_5(x, x_0)E_1a_4''''(x_0, x_0) + 3a_9(x, x_0)E_1a_1''''(x_0, x_0) \\ + a_4(x, x_0)E_1a_5''''(x_0, x_0) + 2a_8(x, x_0)E_1a_2''''(x_0, x_0) = 0$$

$$v_0^3 : b_9(x, x_0) - a_8(x, x_0) + 3a_9(x, x_0)E_1a_2''''(x_0, x_0) \\ - a_2(x, x_0) \left[ -E_1a_9''''(x_0, x_0) + \frac{3}{2}E_2a_2'^2(x_0, x_0)a_2''(x_0, x_0) \right] \\ + a_5(x, x_0)E_1a_5''''(x_0, x_0) = 0$$

(II)

(۱۷-۳)

$$w_0^3 : -E_1a_6''''(x, x_0) + \frac{3}{2}E_2a_1'^2(x, x_0)a_1''(x, x_0) + b_7(x, x_0)E_1a_1''''(x_0, x_0) \\ - b_2(x, x_0) \left[ -E_1a_6''''(x_0, x_0) + \frac{3}{2}E_2a_1'^2(x_0, x_0)a_1''(x_0, x_0) \right] \\ + b_4(x, x_0)E_1a_3''''(x_0, x_0) = 0$$

$$w_0^2v_0 : -E_1a_7''''(x, x_0) + 3E_2a_1'(x, x_0)a_1''(x, x_0)a_2'(x, x_0) - 3b_6(x, x_0) \\ + \frac{3}{2}E_2a_1'^2(x, x_0)a_2''(x, x_0) - b_2(x, x_0) \left[ -E_1a_7''''(x_0, x_0) \right. \\ \left. + 3E_2a_1'(x_0, x_0)a_1''(x_0, x_0)a_2'(x_0, x_0) + \frac{3}{2}E_2a_1'^2(x_0, x_0)a_2''(x_0, x_0) \right] \\ + 2b_5(x, x_0)E_1a_3''''(x_0, x_0) + b_4(x, x_0)E_1a_4''''(x_0, x_0)$$

$$+2b_8(x, x_0)E_1a_1''''(x_0, x_0) + b_7(x, x_0)E_1a_2''''(x_0, x_0) = 0$$

$$w_0v_0^2 : -E_1a_8''''(x, x_0) + 3E_2a_2'(x, x_0)a_2''(x, x_0)a_1'(x, x_0) - 2b_7(x, x_0)$$

$$+ \frac{3}{2}E_2a_2'^2(x, x_0)a_1''(x, x_0) - b_2(x, x_0) \left[ -E_1a_8''''(x_0, x_0) \right.$$

$$\left. + 3E_2a_2'(x_0, x_0)a_2''(x_0, x_0)a_1'(x_0, x_0) + \frac{3}{2}E_2a_2'^2(x_0, x_0)a_1''(x_0, x_0) \right]$$

$$+ 2b_5(x, x_0)E_1a_4''''(x_0, x_0) + b_4(x, x_0)E_1a_5''''(x_0, x_0)$$

$$+ 2b_8(x, x_0)E_1a_2''''(x_0, x_0) + 3b_9(x, x_0)E_1a_1''''(x_0, x_0) = 0$$

$$v_0^3 : -E_1a_9''''(x, x_0) + \frac{3}{2}E_2a_2'^2(x, x_0)a_2''(x, x_0) + 3b_9(x, x_0)E_1a_2''''(x_0, x_0)$$

$$- b_2(x, x_0) \left[ -E_1a_9''''(x_0, x_0) + \frac{3}{2}E_2a_2'^2(x_0, x_0)a_2''(x_0, x_0) \right]$$

$$- b_8(x, x_0) + 2b_5(x, x_0)E_1a_5''''(x_0, x_0) = 0$$

ملاحظه می شود که شرایط (۳-۹) در معادلات (۳-۱۲) تا (۳-۱۷) صدق می کند.

### ۳-۲-۱. تحلیل درجه اول

می دانیم که در یک سیستم میرا، بین جابجایی و سرعت نقاط یک نوع ارتباط یا کوپلینگ وجود دارد. در سیستم مورد نظر، میرایی به واسطه ی مختلط بودن  $E_1$  ایجاد می گردد. بنابر این بایستی عامل ایجاد کننده ی کوپلینگ بین جابجایی و سرعت نقاط سیستم، مختلط بودن  $E_1$  باشد و زمانی که  $E_1$  یک مقدار حقیقی داشته باشد، این ارتباط در مرحله ی خطی از بین رفته، و  $u$  و  $v$  از هم جدا شوند. جهت این که  $u$  و  $v$  در مرحله ی خطی، یک ارتباط دائمی نداشته باشند، می بایست  $a_2(x, x_0) = b_1(x, x_0) = 0$  باشد. بنابر این معادلات (۳-۱۲) و (۳-۱۳) به صورت (۳-۱۸) ساده می شوند.

$$\begin{cases} a_1(x, x_0) = b_2(x, x_0) \\ a_1''''(x, x_0) - a_1(x, x_0)a_1''''(x_0, x_0) = 0 \end{cases} \quad (۳-۱۸)$$

دقت شود که  $a_1''''(x_0, x_0)$  یک ضریب ثابت بوده و پاسخ کلی (۳-۱۸) به راحتی مطابق (۳-۱۹) محاسبه خواهد شد. شرایط مرزی در دو طرف، تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده و (۳-۲۰) پاسخ نهایی (۳-۱۸) پس از اعمال شرایط مرزی است.

$$a_1(x, x_0) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + C \sinh(\lambda x) + D \cosh(\lambda x) \quad (۳-۱۹)$$



$$\lambda = \left[ a_1''''(x_0, x_0) \right]^{1/4}$$

$$w(0, t) = w(L, t) = 0 \Rightarrow a_1(0, x_0) = a_1(L, x_0) = 0$$

$$w_{,xx}(0, t) = w_{,xx}(L, t) = 0 \Rightarrow a_1''(0, x_0) = a_1''(L, x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = C = D = 0 \\ \lambda = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow a_1''''(x_0, x_0) = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \end{cases}$$

$$a_1(x_0, x_0) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sin(n\pi x_0/L)}$$

$$a_1(x, x_0) = b_2(x, x_0) = \frac{\sin(n\pi x/L)}{\sin(n\pi x_0/L)} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20-3)$$

در این مرحله می توان مود های سیستم خطی شده را به صورت (۲۱-۳) محاسبه کرد. لازم به یادآوری است که  $x_0$  نباید در نود شکل مود باشد. این محدودیت مشکلی ایجاد نمی کند زیرا برای هر مود می توان  $x_0$  متفاوتی در نظر گرفت.

$$W_n(w_0(t), v_0(t), x, x_0) = \frac{\sin(n\pi x/L)}{\sin(n\pi x_0/L)} w_0(t) \quad (21-3)$$

$$V_n(w_0(t), v_0(t), x, x_0) = \frac{\sin(n\pi x/L)}{\sin(n\pi x_0/L)} v_0(t)$$

جهت تکمیل کار و محاسبه ی فرکانس طبیعی ، از رابطه ی (۲۱-۳) شکل مود را در معادله حرکت قرار داده و سپس در  $x = x_0$  محاسبه می کنیم. از آن جایی که تا این مرحله محاسبات را تا مرتبه ی اول انجام شده است ، از فرم خطی (۱۰-۳) به عنوان معادله حرکت استفاده خواهد شد.

$$\frac{\partial}{\partial t} W_n(w_0(t), v_0(t), x_0, x_0) = V_n(w_0(t), v_0(t), x_0, x_0) \quad (22-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V_n(w_0(t), v_0(t), x_0, x_0) = -E_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} W_n(w_0(t), v_0(t), x_0, x_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1(x, x_0) \dot{w}_0(t) = b_2(x, x_0) v_0(t) \\ b_2(x, x_0) \dot{v}_0(t) = -\frac{E_\eta I}{\rho A} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 a_1(x, x_0) w_0(t) \end{cases}$$

$$\ddot{w}_0 + \frac{E_\eta I}{\rho A} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 w_0 = 0 \quad \Omega_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{E_\eta I}{\rho A}} \quad (23-3)$$

$$w_0 = A'e^{st} \Rightarrow s^2 = -\Omega_n^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_n = \omega_{dn} + i\alpha_n \\ s = a + ib \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b^2 = \omega_{dn}^2 \\ a = -\alpha_n \end{array} \right. \Rightarrow s = -\alpha_n + i\omega_{dn}$$

$$w_0 = e^{-\alpha t} (c_1 \sin(\omega_{dn} t) + c_2 \cos(\omega_{dn} t)) \quad (24-3)$$

روابط (۳-۲۱) ، (۳-۲۳) و (۳-۲۴) کاملا با دانسته های قبلی از سیستم خطی مطابقت دارد. در این روش بر خلاف روش های متداول ابتدا شکل مود و سپس فرکانس های طبیعی بدست می آید.

### ۳-۲-۲. تحلیل درجه دوم

در معادلات مربوط به مرتبه ی دوم یا همان روابط (۳-۱۴) و (۳-۱۵) ، ضریب عامل غیر خطی در معادله حرکت حضور ندارد. بنابراین اگر پاسخی برای  $a_j(x, x_0)$  و  $b_j(x, x_0)$  ،  $j=3,4,5$  محاسبه شود ،  $E_2$  در آن نقشی نداشته و این امر سبب می شود که با صفر قرار دادن  $E_2$  در (۳-۱۰) ، معادله حرکت سیستم ، خطی شده ولی پاسخ بدست آمده به پاسخ خطی تبدیل نشود. به همین دلیل جواب مورد نظر برای مرتبه ی دوم ، پاسخ بدیهی یا همان صفر خواهد بود. در حالت کلی می توان گفت در صورتی که سیستم از درجه ی فرد باشد ، پاسخ آن نیز از درجه ی فرد و در صورتی که سیستم از درجه زوج باشد ، پاسخ آن از درجه ی زوج خواهد بود.

$$a_3(x, x_0) = a_4(x, x_0) = a_5(x, x_0) = 0 \quad (25-3)$$

$$b_3(x, x_0) = b_4(x, x_0) = b_5(x, x_0) = 0$$

### ۳-۲-۳. تحلیل درجه سوم

با استفاده از نتایج بدست آمده در مراحل قبل یا همان روابط (۳-۲۰) و (۳-۲۵) ، معادلات (۳-۱۶) و (۳-۱۷) به صورت زیر ساده می شوند.

$$(I) \quad (26-3)$$

$$b_6(x, x_0) + a_7(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) = 0$$

$$b_7(x, x_0) - 3a_6(x, x_0) + 2a_8(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) = 0$$

$$b_8(x, x_0) - 2a_7(x, x_0) + 3a_9(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) = 0$$

$$b_9(x, x_0) - a_8(x, x_0) = 0$$

(II)

(۲۷-۳)

$$\begin{aligned}
& -E_1 a_6''''(x, x_0) + \frac{3}{2} E_2 a_1'^2(x, x_0) a_1''(x, x_0) + b_7(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) \\
& + a_1(x, x_0) \left[ E_1 a_6''''(x_0, x_0) - \frac{3}{2} E_2 a_1'^2(x_0, x_0) a_1''(x_0, x_0) \right] = 0 \\
& -E_1 a_7''''(x, x_0) - 3b_6(x, x_0) + a_1(x, x_0) E_1 a_7''''(x_0, x_0) + 2b_8(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) = 0 \\
& -E_1 a_8''''(x, x_0) - 2b_7(x, x_0) + a_1(x, x_0) E_1 a_8''''(x_0, x_0) + 3b_9(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) = 0 \\
& -E_1 a_9''''(x, x_0) - b_8(x, x_0) + a_1(x, x_0) E_1 a_9''''(x_0, x_0) = 0
\end{aligned}$$

سپس با محاسبه ی  $b_6(x, x_0)$  تا  $b_9(x, x_0)$  برحسب  $a_6(x, x_0)$  تا  $a_9(x, x_0)$  از روابط (۳-۲۶) و جایگذاری آن ها در (۳-۲۷) چهار معادله و چهار مجهول زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}
& -E_1 a_6''''(x, x_0) + a_1(x, x_0) E_1 a_6''''(x_0, x_0) \tag{۳-۲۸} \\
& + \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 \left[ 3a_6(x, x_0) - 2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 a_8(x, x_0) \right] = -\frac{3}{2} E_2 a_1'^2(x, x_0) a_1''(x, x_0) \\
& + a_1(x, x_0) \left[ \frac{3}{2} E_2 a_1'^2(x_0, x_0) a_1''(x_0, x_0) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -E_1 a_7''''(x, x_0) + 3 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 a_7(x, x_0) + 2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 \left[ 2a_7(x, x_0) - 3 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 a_9(x, x_0) \right] \tag{۳-۲۹} \\
& + a_1(x, x_0) E_1 a_7''''(x_0, x_0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -E_1 a_8''''(x, x_0) - 2 \left[ 3a_6(x, x_0) - 2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 a_8(x, x_0) \right] + a_1(x, x_0) E_1 a_8''''(x_0, x_0) \tag{۳-۳۰} \\
& + 3a_8(x, x_0) E_1 a_1''''(x_0, x_0) = 0
\end{aligned}$$

$$-E_1 a_9''''(x, x_0) - \left[ 2a_7(x, x_0) - 3 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 a_9(x, x_0) \right] + a_1(x, x_0) E_1 a_9''''(x_0, x_0) = 0 \tag{۳-۳۱}$$

در معادلات (۳-۲۹) و (۳-۳۱) مشخص است که  $E_2$  نقشی در  $a_7(x, x_0)$  و  $a_9(x, x_0)$  نداشته و بنابر دلایلی که در تحلیل مرتبه دوم ذکر شد، نتیجه می شود که  $a_7(x, x_0) = a_9(x, x_0) = 0$  است. پس از آن با جایگذاری در (۳-۲۶)،  $b_6(x, x_0) = b_8(x, x_0) = 0$  خواهد بود.

از آن جایی که شرایط مرزی همگن بوده و ضریب جمله ی غیر خطی در معادله حرکت در آن ها حضور ندارد، پاسخ مورد نظر برای معادلات (۳-۲۸) و (۳-۳۰)، جواب خصوصی  $a_6(x, x_0)$  و  $a_8(x, x_0)$  است. با در نظر گرفتن  $a_6(x, x_0)$  و  $a_8(x, x_0)$  به صورت (۳-۳۲)، جایگذاری در (۳-۲۸) و (۳-۳۰)، استفاده از

اتحاد های مثلثاتی (۳-۳۳) و سپس مرتب کردن ضرایب  $\sin(n\pi x/L)$  و  $\sin(3n\pi x/L)$  ، چهار معادله و چهار مجهول (۳-۳۴) بدست می آید.

$$a_6(x, x_0) = M_1 \sin(n\pi x/L) + M_3 \sin^3(n\pi x/L) \quad (۳۲-۳)$$

$$a_8(x, x_0) = N_1 \sin(n\pi x/L) + N_3 \sin^3(n\pi x/L)$$

$$M_1 \sin(\alpha x) + M_3 \sin^3(\alpha x) = \left( M_1 + \frac{3}{4} M_3 \right) \sin(\alpha x) - \frac{1}{4} M_3 \sin(3\alpha x) \quad (۳۳-۳)$$

$$N_1 \sin(\alpha x) + N_3 \sin(3\alpha x) = (N_1 + 3N_3) \sin(\alpha x) - 4N_3 \sin^3(\alpha x)$$

$$\sin(n\pi x/L): \quad (۳۴-۳)$$

$$3M_1 + \left( 81S_{0n}^2 - \frac{117}{2} \right) M_3 - 2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 N_1 - \frac{3}{2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 N_3 = \frac{3E_2}{2E_1 S_{0n}} - \frac{9E_2}{8E_1 S_{0n}^3}$$

$$-6M_1 - \frac{9}{2} M_3 + 7 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 N_1 + \left( 81S_{0n}^2 - \frac{111}{2} \right) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 N_3 = 0$$

$$\sin(3n\pi x/L):$$

$$\frac{39}{2} M_3 + \frac{1}{2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 N_3 = \frac{3E_2}{8E_1 S_{0n}^3}$$

$$\frac{3}{2} M_3 + \frac{37}{2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_1 N_3 = 0$$

که  $S_{0n} = \sin(n\pi x_0/L)$  بوده و دترمینان ضرایب برابر با  $3240E_1^4 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^8$  است.

$$M_1 = -\frac{37}{1920} \frac{E_2}{E_1 S_{0n}} \quad (۳۵-۳)$$

$$M_3 = \frac{37}{1920} \frac{E_2}{E_1 S_{0n}^3}$$

$$N_1 = \frac{1}{640} \left( \frac{L}{n\pi} \right)^4 \frac{E_2}{E_1^2 S_{0n}}$$

$$N_3 = -\frac{1}{640} \left( \frac{L}{n\pi} \right)^4 \frac{E_2}{E_1^2 S_{0n}^3}$$

از آن جایی که  $a_1(x, x_0) = \frac{1}{S_{0n}} \sin(n\pi x/L)$  است، می توان  $a_6(x, x_0)$ ،  $a_8(x, x_0)$ ،  $b_7(x, x_0)$  و  $b_9(x, x_0)$  را به فرم (۳۶-۳) نوشت، همچنین ملاحظه می شود که شرایط مرزی و شرط (۹-۳) در آن ها صدق می کند.

$$a_6(x, x_0) = \frac{37}{1920} \frac{E_2}{E_1} (-a_1(x, x_0) + a_1^3(x, x_0)) \quad (۳۶-۳)$$

$$a_8(x, x_0) = -\frac{1}{640} \frac{E_2}{E_1^2} \left( \frac{L}{n\pi} \right)^4 (-a_1(x, x_0) + a_1^3(x, x_0))$$

$$b_7(x, x_0) = \frac{39}{640} \frac{E_2}{E_1} (-a_1(x, x_0) + a_1^3(x, x_0))$$

$$b_9(x, x_0) = -\frac{1}{640} \frac{E_2}{E_1^2} \left( \frac{L}{n\pi} \right)^4 (-a_1(x, x_0) + a_1^3(x, x_0))$$

### ۳-۳. شکل مود و دینامیک مود

از آن جایی که معادله حرکت از درجه ۳ است، محاسبات توابع مود نیز تا درجه سوم انجام می شود. با قرار دادن  $a_j(x, x_0)$  و  $b_j(x, x_0)$ ،  $j=1, 2, 3, \dots$  محاسبه شده در بخش های (۱-۲-۳) تا (۳-۲-۳) در (۷-۳) و (۸-۳)، توابع شکل مود به صورت (۳۷-۳) بدست می آیند. نسبت جابجایی و سرعت تمامی نقاط سیستم را به جابجایی و سرعت نقطه ی مرجع نشان می دهد.

$$W_n(w_0(t), v_0(t), x, x_0) = a_1(x, x_0)w_0(t) + a_6(x, x_0)w_0^3(t) + a_8(x, x_0)w_0(t)v_0^2(t) \quad (۳۷-۳)$$

$$V_n(w_0(t), v_0(t), x, x_0) = b_2(x, x_0)v_0(t) + b_7(x, x_0)w_0^2(t)v_0(t) + b_9(x, x_0)v_0^3(t)$$

به دلیل وجود میرایی ترموالاستیک،  $E_1$  مختلط شده و (۳۷-۳) تابع شکل مود مختلط<sup>۱</sup> است. مود غیر خطی برای سیستم های نامیرا و غیر ژيروسکوپیک به صورت موج ایستا<sup>۲</sup> یا یک حرکت هم فاز است. در این حالت با صفر شدن جابجایی یا سرعت نقطه ی مرجع، به ترتیب جابجایی یا سرعت بقیه نقاط صفر خواهد بود. در سیستم های میرا یا ژيروسکوپیک، مود غیر خطی به صورت موج در حال<sup>۳</sup> حرکت بوده و حرکت نقاط با یکدیگر هم فاز نیستند. این حالت می تواند به دو شکل ظاهر شود، یا شکل مود همانند (۳۷-۳)

<sup>1</sup> Complex Mode

<sup>2</sup> Standing Wave

<sup>3</sup> Traveling Wave

مختلط شده و یا با صفر شدن جابجایی یا سرعت نقطه ی مرجع ، به ترتیب جابجایی یا سرعت بقیه نقاط صفر نخواهد شد.

برای مقایسه شکل مود غیر خطی با مود خطی می توان از اثر میرایی صرفنظر کرد. که در این حالت  $E_\eta = E_T = E$  است. معمولاً شکل مود در لحظه ای بررسی می شود که جابجایی در ماکزیمم خود باشد. از آن جایی که از اثر میرایی صرفنظر شده است ، در ماکزیمم جابجایی نقطه ی مرجع ، سرعت این نقطه برابر صفر ( $v_0 = 0$ ) بوده و می توان رابطه ی (۳۷-۳) را به صورت (۳۸-۳) بازنویسی کرد.

$$W_n = a_1 w_0 + a_6 w_0^3 = a_1 w_0 + \frac{37}{1920} \frac{E_2}{E_1} (-a_1 + a_1^3) w_0^3 \quad (38-3)$$

برای  $E_1$  می توان نوشت :

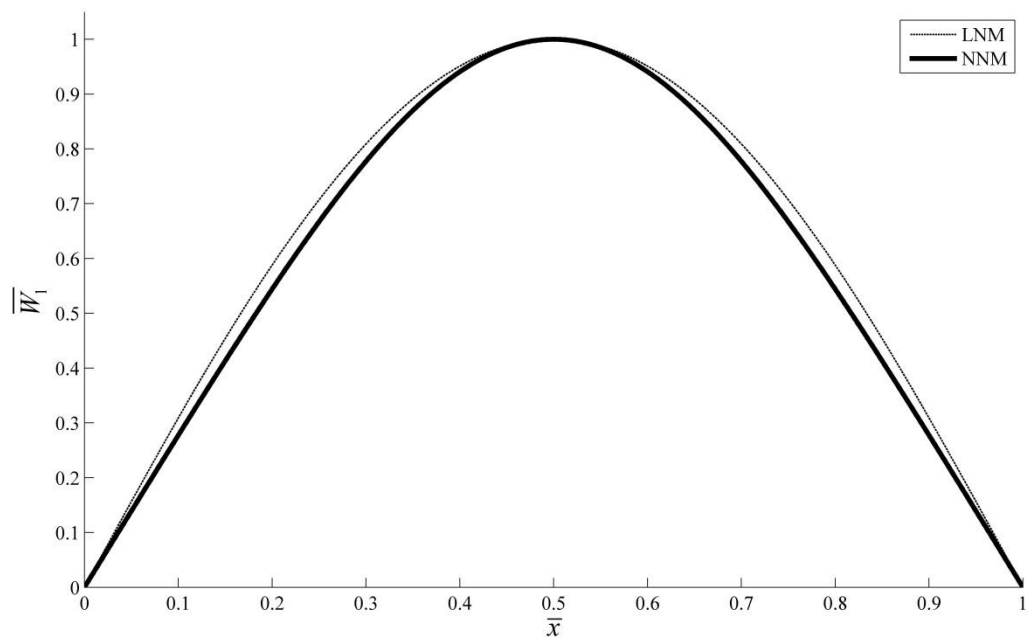
$$E_1 = \frac{EI}{\rho A} = \frac{E}{\rho} \left( \frac{h^2}{12} \right) = E_2 \left( \frac{h^2}{12} \right) \quad (39-3)$$

با استفاده از رابطه ی (۳۹-۳) در (۳۸-۳) و اعمال تغییر متغیر  $w_{0max} = \delta h$  ، شکل مود نرمالیزه شده به صورت (۴۰-۳) بدست خواهد آمد که در آن  $\bar{W}_n = \frac{W_n}{\delta h}$  است.

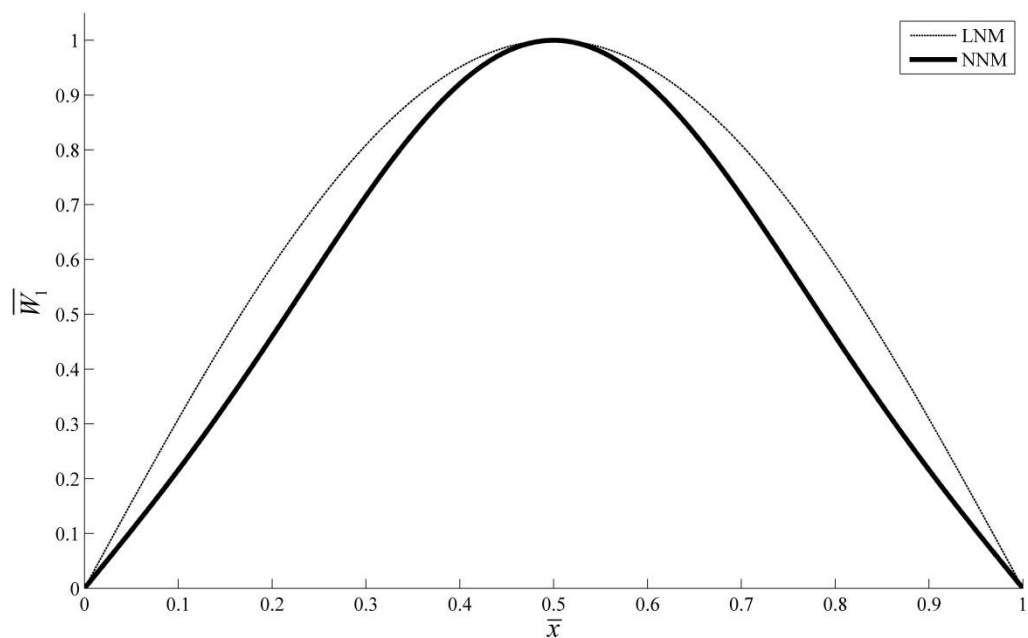
$$W_n = a_1 (\delta h) + \frac{37}{1920} \left( \frac{12}{h^2} \right) (-a_1 + a_1^3) \delta^2 h^2 (\delta h)$$

$$\bar{W}_n = a_1 + \frac{37}{160} (-a_1 + a_1^3) \delta^2 \quad (40-3)$$

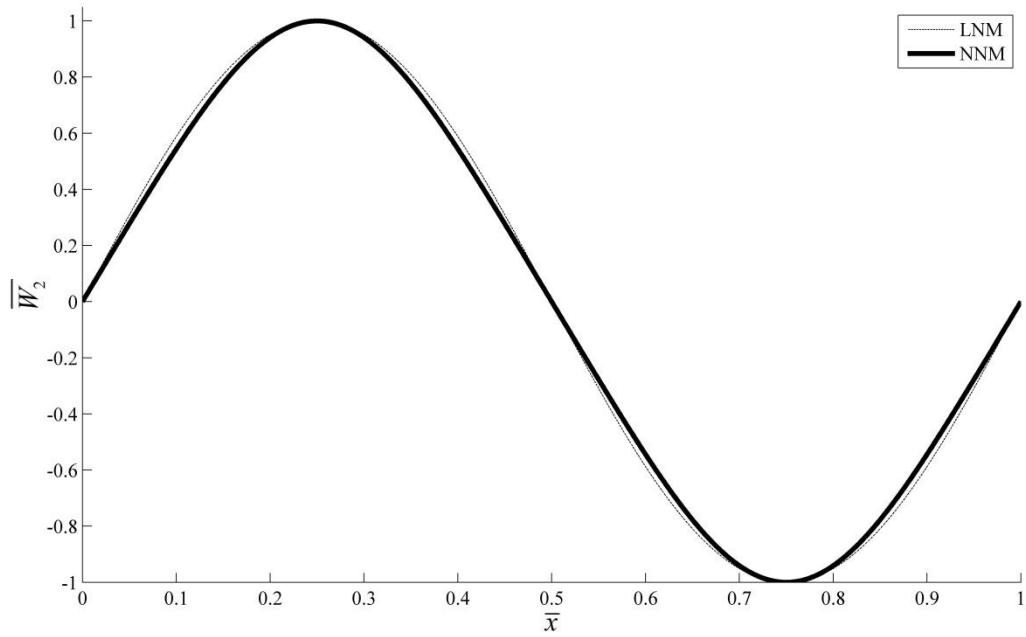
$\delta$  نسبت دامنه ی سیستم به ارتفاع سطح مقطع یا همان دامنه ی نسبی است. می توان برای نقطه ی مرجع هر موقعیت دلخواهی به جز نود شکل مود را در نظر گرفت. ولی انتخاب  $x_0 = L/2n$  یا  $\bar{x}_0 = 1/2n$  نسبت به بقیه موقعیت ها ارجعیت دارد. در این حالت هیچ گاه نقطه ی مرجع در نود شکل مود نبوده و از طرف دیگر ، ماکزیمم دامنه ی سیستم همان ماکزیمم دامنه ی نقطه ی مرجع خواهد بود. شکل مود اول تا چهارم برای دامنه های نسبی متفاوت بر حسب موقعیت بی بعد ( $\bar{x} = x/L$ ) در شکل های (۳-۱) تا (۳-۴) رسم شده است. مود های غیر خطی و خطی به ترتیب با خطوط پر رنگ و نقطه چین نمایش داده شده است. مشخص است که هر اندازه دامنه نسبی سیستم بیشتر باشد ، تفاوت بین شکل مود های غیر خطی و خطی محسوس تر می گردد. همچنین می توان گفت که به ازای  $\delta \leq 0.5$  ، معادله حرکت خطی شده تقریب مناسبی از رفتار سیستم است.



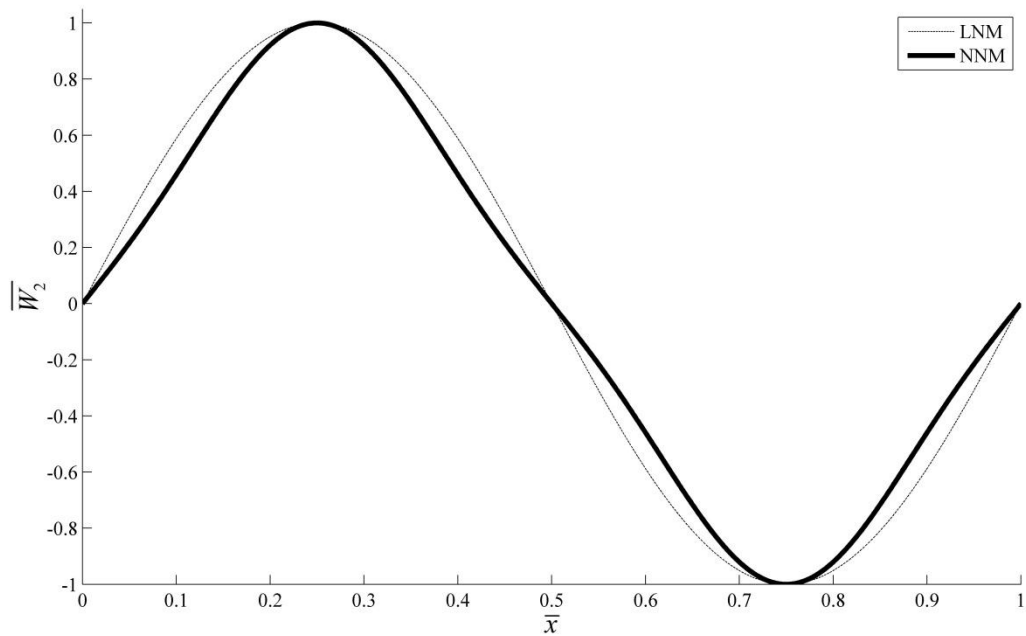
۱-۳ الف) مود اول خطی و غیر خطی  $\delta = 0.7$



۱-۳ ب) مود اول خطی و غیر خطی  $\delta = 1.2$

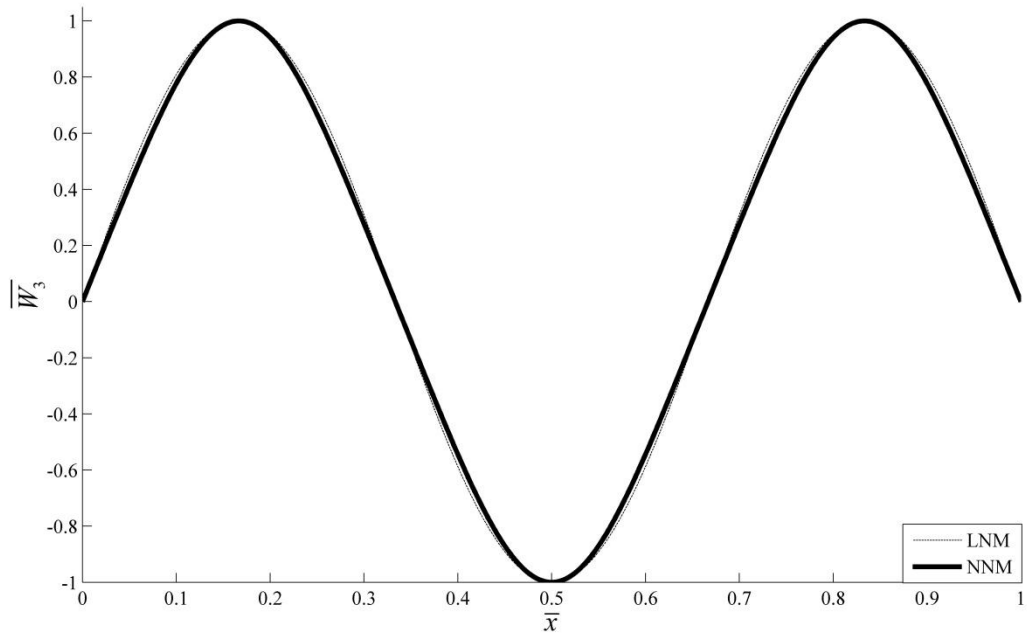


۲-۳ الف) مود دوم خطی و غیر خطی  $\delta = 0.7$

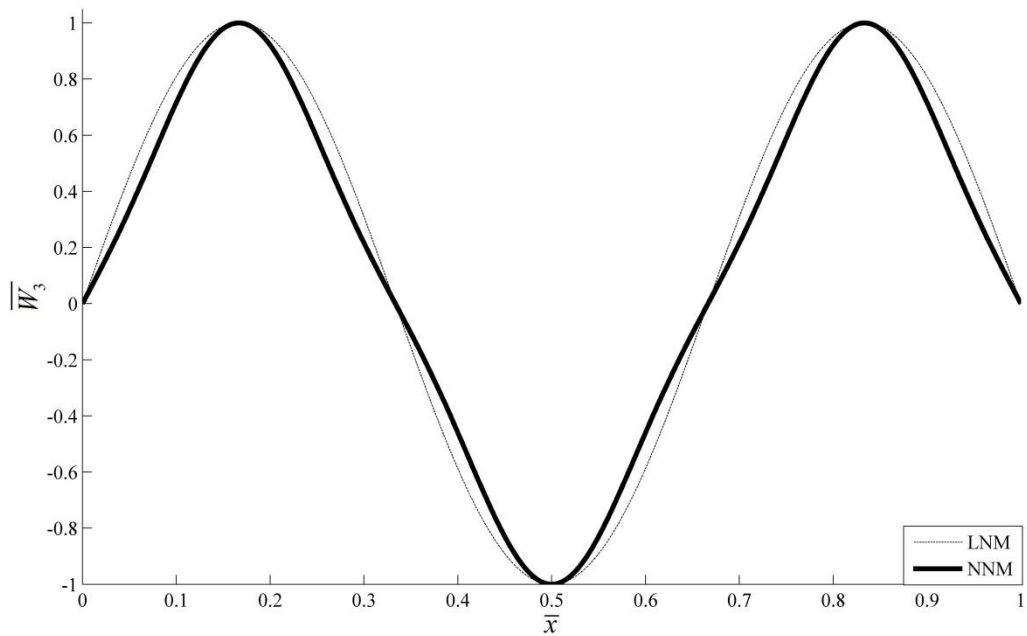


۲-۳ ب) مود دوم خطی و غیر خطی  $\delta = 1.2$

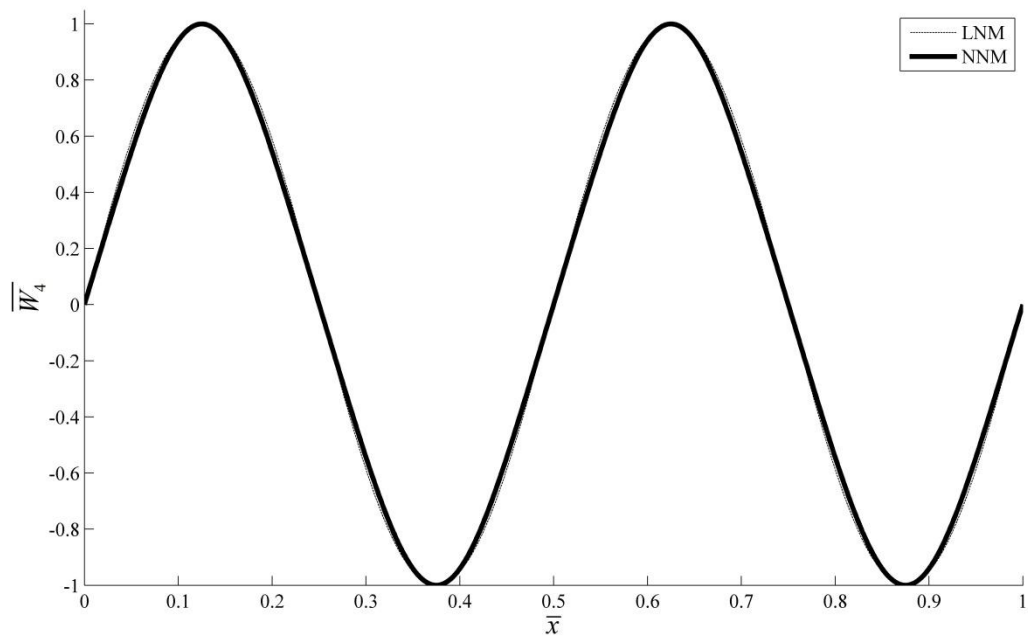




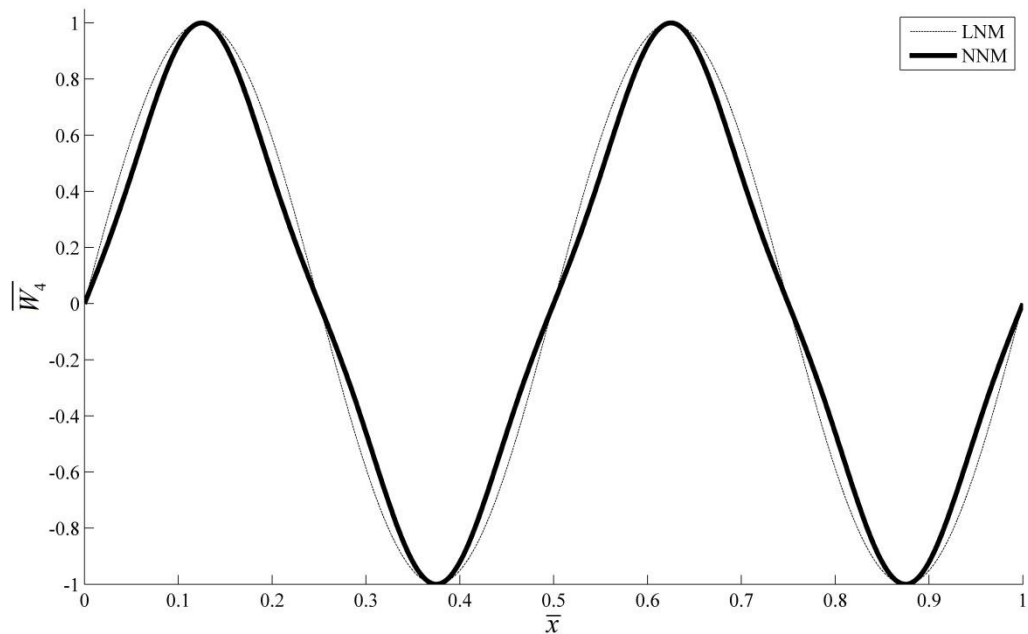
۳-۳ الف) مود سوم خطی و غیر خطی  $\delta = 0.7$



۳-۳ ب) مود سوم خطی و غیر خطی  $\delta = 1.2$



۴-۳ الف) مود چهارم خطی و غیر خطی  $\delta = 0.7$



۴-۳ ب) مود چهارم خطی و غیر خطی  $\delta = 1.2$

با قرار دادن (۳۷-۳) در (۱۰-۳) و محاسبه در  $x=x_0$  تا مرتبه ی سوم ، معادله ی دینامیک مود به صورت (۴۱-۳) بدست می آید که می توان فرکانس های طبیعی و  $Q^{-1}$  را از آن محاسبه نمود.

$$\ddot{w}_0 + E_1 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 w_0 + E_2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \left[ \frac{1}{24} + \frac{11}{32S_{0n}^2} \right] w_0^3 + \frac{E_2}{E_1} \left( -\frac{1}{8} + \frac{3}{32S_{0n}^2} \right) w_0 \dot{w}_0^2 = 0 \quad (41-3)$$

که  $S_{0n} = \sin(n\pi x_0/L)$  است. در ابتدا از (۴۱-۳) به نظر می رسد که فرکانس طبیعی به  $S_{0n}$  وابسته است ، ولی فرکانس طبیعی تابع  $A_0$  یا همان دامنه ی ارتعاش  $x_0$  نیز هست. با استفاده از شکل مود می توان ارتباط  $A_0$  با دامنه ماکزیمم سیستم را به صورت (۴۲-۳) نوشت. به راحتی می توان نشان داد که موقعیت نقطه ی مرجع تاثیری در پاسخ ندارد. بنابر این جهت ساده شدن معادله (۴۱-۳) می توان نقطه ی مرجع را به صورت  $x_0 = L/2n$  در نظر گرفت. در این حالت  $S_{0n} = 1$  و  $A_0$  با دامنه ماکزیمم سیستم برابر خواهد بود.

$$A_{\max} \approx \frac{1}{S_{0n}} A_0 + \frac{37}{1920} \frac{E_2}{E_1} \left( -\frac{1}{S_{0n}} + \frac{1}{S_{0n}^3} \right) A_0^3 \quad (42-3)$$

$$\ddot{w}_0 + E_1 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 w_0 + \frac{37}{96} E_2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 w_0^3 - \frac{1}{32} \frac{E_2}{E_1} w_0 \dot{w}_0^2 = 0 \quad (43-3)$$

از آن جایی که  $E_1$  مختلط است ، می توان با اعمال تغییر متغیر های (۴۵-۳) ، معادله ی دینامیک مود تیر اویلر برنولی با کرنش کوچک و چرخش زیاد را به صورت نهایی (۴۴-۳) نوشت.

$$\ddot{\bar{w}}_0 + (K_1 + iD_1) \bar{w}_0 + K_3 \bar{w}_0^3 - (K_2 + iD_2) \bar{w}_0 \dot{\bar{w}}_0^2 = 0 \quad (44-3)$$

$$K_1 = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \text{Re}[E_1] \quad K_2 = h^2 \text{Re} \left[ \frac{E_2}{32E_1} \right] \quad K_3 = \frac{37}{96} h^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 E_2 \quad (45-3)$$

$$D_1 = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \text{Im}[E_1] \quad D_2 = h^2 \text{Im} \left[ \frac{E_2}{32E_1} \right]$$

که  $L$  و  $h$  به ترتیب طول تیر و ارتفاع سطح مقطع بوده و  $\bar{w}_0 = w_0/h$  جابجایی عرضی بی بعد نقطه ی مرجع است. با استفاده از معادله (۴۴-۳) فرکانس های تیر میکرو قابل محاسبه اند.

# فصل چہارم

## بررسی پاسخ گذرا

#### ۴-۱. کلیات

هدف در این فصل محاسبه ی فرکانس های طبیعی و اثر میرایی است. در فصل سوم با استفاده از توابع مود ، ارتعاش تیر به سیستم یک درجه آزادی کاهش یافت. در این فصل با حل معادلات دینامیک مود استخراج شده در فصل سوم ، فرکانس های طبیعی و نحوه ی اثر گذاری میرایی ترموالاستیک بررسی خواهد شد.

#### ۴-۲. روش بالانس هارمونیک

بالانس هارمونیک<sup>۱</sup> از روش های متداول و نسبتاً دقیق تحلیلی تقریبی جهت بررسی ارتعاشات غیر خطی است. در این روش پاسخ معادله دیفرانسیل مشابه سری (۱-۴) در نظر گرفته می شود. در صورتی که معادله از درجه فرد یا زوج باشد ، (۱-۴) به ترتیب به فرم (۲-۴) یا (۳-۴) تغییر می کند. پس از جایگذاری سری مورد نظر در معادله و استفاده از اتحاد های مثلثاتی (۴-۴) ، ضرایب توابع هارمونیک به گونه ای انتخاب شده که معادله دیفرانسیل را ارضا کند. بسته به مرتبه ی سری در نظر گرفته شده ، بالانس بعضی از توابع امکان پذیر نبوده و حل انجام شده تقریبی از پاسخ واقعی معادله است.

$$x = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(2\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + A_3 \sin(3\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + \dots \quad (1-4)$$

$$x = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) + A_3 \sin(3\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + A_5 \sin(5\omega t) + B_5 \cos(5\omega t) + \dots \quad (2-4)$$

$$x = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(2\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + A_4 \sin(4\omega t) + B_4 \cos(4\omega t) + \dots \quad (3-4)$$

---

<sup>1</sup> Harmonic Balance Method (HBM)

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha) \quad (4-4)$$

$$\sin^3(\alpha) = \frac{3}{4} \sin(\alpha) - \frac{1}{4} \sin(3\alpha)$$

$$\sin^4(\alpha) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha) + \frac{1}{8} \cos(4\alpha)$$

$$\sin^5(\alpha) = \frac{5}{8} \sin(\alpha) - \frac{5}{16} \sin(3\alpha) + \frac{1}{16} \sin(5\alpha)$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha)$$

$$\cos^3(\alpha) = \frac{3}{4} \cos(\alpha) + \frac{1}{4} \cos(3\alpha)$$

$$\cos^4(\alpha) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha) + \frac{1}{8} \cos(4\alpha)$$

$$\cos^5(\alpha) = \frac{5}{8} \cos(\alpha) + \frac{5}{16} \cos(3\alpha) + \frac{1}{16} \cos(5\alpha)$$

در این روش معادله دیفرانسیل غیر خطی به یک دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل می شود و هرچه تعداد جملات بسط در نظر گرفته شده بیشتر باشد ، تقریب فرکانس طبیعی دقیق تر خواهد بود. بالانس هارمونیک مرتبه های بالاتر در سیستم های میرا در بعضی موارد بسیار مشکل و حتی غیر ممکن خواهد بود.

۴-۲-۱. نوع اول

در روش اول ابتدا می بایست فرم رابطه ی (۳-۴۵) را از حالت مختلط خارج کرد. از آن جایی که پاسخ ارتعاشی سیستم های غیر خطی به صورت چند فرکانسی است ، پاسخ مشابه (۴-۵) در نظر گرفته می شود. آن گاه  $\dot{\bar{w}}_0 / \bar{w}_0$  را مطابق زیر قابل محاسبه است.

$$\bar{w}_0 = \bar{A}_1 e^{i\Omega_1 t} + \bar{A}_2 e^{i\Omega_2 t} \quad (5-4)$$

$$\frac{\dot{\bar{w}}_0}{\bar{w}_0} = \frac{i\Omega_1 (\bar{A}_1 e^{i\Omega_1 t} + \bar{A}_2 e^{i\Omega_2 t}) + i(\Omega_2 - \Omega_1) \bar{A}_2 e^{i\Omega_2 t}}{\bar{A}_1 e^{i\Omega_1 t} + \bar{A}_2 e^{i\Omega_2 t}} = i\Omega_1 + i(\Omega_2 - \Omega_1) \frac{\bar{A}_2 e^{i\Omega_2 t}}{\bar{A}_1 e^{i\Omega_1 t} + \bar{A}_2 e^{i\Omega_2 t}} \quad (6-4)$$

(۴-۶) نشان می دهد که  $\dot{\bar{w}}_0 / \bar{w}_0$  یک نسبت مختلط بوده که می توان آن را به صورت دو بخش مجزا در نظر گرفت. یک بخش موهومی و ثابت و یک بخش دیگر که مختلط و نوسانی است. به هنگام بررسی اثر میرایی ، معمولا برآیند این اثر در یک سیکل در نظر گرفته می شود. از آن جایی که متوسط بخش نوسانی (۴-۶) در یک سیکل صفر است ، می توان در بررسی میرایی پاسخ را تک فرکانسی در نظر گرفته و (۴-۶) را به صورت (۴-۷) ساده کنیم.  $\Omega = \omega + i\alpha$  فرکانس طبیعی مختلط بوده که در آن  $\omega$  و  $\alpha$  به ترتیب

فرکانس حقیقی و موهومی هستند. آن گاه می توان همانند (۴-۸) دو مدل میرایی ، سختی موهومی و ویسکوز را به یکدیگر تبدیل نمود.

$$\bar{w}_0(t) = \bar{A}e^{i\Omega t} \Rightarrow \dot{\bar{w}}_0(t) = i\Omega \bar{w}_0(t) = (i\omega - \alpha)\bar{w}_0(t) \quad (۷-۴)$$

$$\begin{cases} iD_1\bar{w}_0 = \frac{D_1}{\omega}(i\omega)\bar{w}_0 - \frac{D_1}{\omega}\alpha\bar{w}_0 + \frac{D_1}{\omega}\alpha\bar{w}_0 \\ iD_2\bar{w}_0\dot{\bar{w}}_0^2 = \frac{D_2}{\omega}(i\omega)\bar{w}_0\dot{\bar{w}}_0^2 - \frac{D_2}{\omega}\alpha\bar{w}_0\dot{\bar{w}}_0^2 + \frac{D_2}{\omega}\alpha\bar{w}_0\dot{\bar{w}}_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} iD_1\bar{w}_0 = \frac{D_1}{\omega}\dot{\bar{w}}_0 + \frac{D_1}{\omega}\alpha\bar{w}_0 \\ iD_2\bar{w}_0\dot{\bar{w}}_0^2 = \frac{D_2}{\omega}\dot{\bar{w}}_0^3 + \frac{D_2}{\omega}\alpha\bar{w}_0\dot{\bar{w}}_0^2 \end{cases} \quad (۸-۴)$$

$$\ddot{\bar{w}}_0 + \frac{D_1}{\omega}\dot{\bar{w}}_0 + \left(K_1 + \frac{D_1}{\omega}\alpha\right)\bar{w}_0 + K_3\bar{w}_0^3 - \frac{D_2}{\omega}\dot{\bar{w}}_0^3 - \left(K_2 + \frac{D_2}{\omega}\alpha\right)\bar{w}_0\dot{\bar{w}}_0^2 = 0 \quad (۹-۴)$$

معادله (۹-۴) هم ارز (۳-۴۵) بوده و می توان آن را با بالانس هارمونیک بررسی نمود. در این جا حل تا مرتبه ی اول انجام شده است. (۴-۱۰) از جایگذاری پاسخ در نظر گرفته شده در (۴-۹) و سپس استفاده از اتحاد های (۴-۴) بدست می آید.

$$\bar{w}_0 = \bar{A}_0e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned} & -\bar{A}_0\omega^2e^{-\alpha t} \sin(\omega t) + \bar{A}_0\alpha^2e^{-\alpha t} \sin(\omega t) - 2\alpha\omega\bar{A}_0e^{-\alpha t} \cos(\omega t) + D_1\bar{A}_0e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \\ & + K_1\bar{A}_0e^{-\alpha t} \sin(\omega t) + \frac{3}{4}K_3\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \sin(\omega t) - \frac{1}{4}K_3\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \sin(3\omega t) \\ & - \frac{3}{4}D_2\omega^2\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \cos(\omega t) - \frac{1}{4}D_2\omega^2\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \cos(3\omega t) - \frac{1}{4}K_2\omega^2\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \sin(\omega t) \\ & - \frac{1}{4}K_2\omega^2\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \sin(3\omega t) - \frac{1}{4}D_2\alpha^2\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \cos(\omega t) + \frac{1}{4}D_2\alpha^2\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \cos(3\omega t) \\ & - \frac{3}{4}K_2\alpha^2\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \sin(\omega t) + \frac{1}{4}K_2\alpha^2\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \sin(3\omega t) + \frac{1}{2}D_2\alpha\omega\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \sin(\omega t) \\ & + \frac{1}{2}D_2\alpha\omega\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \sin(3\omega t) + \frac{1}{2}K_2\alpha\omega\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \cos(\omega t) - \frac{1}{2}K_2\alpha\omega\bar{A}_0^3e^{-3\alpha t} \cos(3\omega t) = 0 \end{aligned} \quad (۱۰-۴)$$

به دلیل شکل پاسخ در نظر گرفته شده ، جملات  $\sin(3\omega t)$  و  $\cos(3\omega t)$  بالانس نمی شود. با صرف نظر کردن از آن ها ، جدا کردن ضرایب  $\sin(\omega t)$  و  $\cos(\omega t)$  و سپس تقسیم طرفین به  $\bar{A}_0 e^{-\alpha t}$  ، دو معادله (۱۱-۴) و (۱۲-۴) بدست آمده که از طریق آن ها  $\omega$  و  $\alpha$  قابل محاسبه هستند.

$$\left(1 + \frac{1}{4} \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_2\right) \omega^2 - \left(\frac{1}{2} D_2 \alpha \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t}\right) \omega = \left(K_1 + \frac{3}{4} \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_3 + \alpha^2 \left(1 - \frac{3}{4} \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_2\right)\right) \quad (11-4)$$

$$\frac{1}{2} K_2 \alpha \omega \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} - \frac{3}{4} D_2 \omega^2 \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} - \frac{1}{4} D_2 \alpha^2 \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} - 2\alpha \omega + D_1 = 0 \quad (12-4)$$

۲-۲-۴. نوع دوم

در این روش به جای معادل سازی میرایی ، سختی موهومی به طور مستقیم مورد بررسی قرار می گیرد. معادله (۱۳-۴) از جایگذاری پاسخ در نظر گرفته شده در (۳-۴) بدست می آید.

$$\bar{w}_0 = \bar{A}_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned} &(\alpha^2 - \omega^2 + K_1 + iD_1) \sin(\omega t) - 2\alpha \omega \cos(\omega t) \\ &+ 2\alpha \omega \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} (K_2 + iD_2) \sin^2(\omega t) \cos(\omega t) - \omega^2 \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} (K_2 + iD_2) \sin(\omega t) \cos^2(\omega t) \\ &+ [\bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_3 - \alpha^2 \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} (K_2 + iD_2)] \sin^3(\omega t) = 0 \end{aligned} \quad (13-4)$$

میرایی ترمو الاستیک به صورت سختی موهومی در معادله حرکت ظاهر می شود. جهت درک بهتر عبارات موهومی در معادله حرکت ، ابتدا چرخش بردار فازور در صفحه ی مختلط در نظر گرفته می شود. بردار فازور بیان گر ارتعاش به فرم سیگنال تحلیلی است که هر دو قسمت حقیقی و موهومی آن در حال نوسان با فرکانس یکسان بوده ولی با یکدیگر اختلاف فاز دارند. یک بردار فازور حقیقی به اندازه ی  $\pi/2$  از بردار فازور موهومی عقب تر است. بنابر این حرکت موهومی از نظر ریاضی بیان گر حرکتی است که با  $\pi/2$  اختلاف فاز با حرکت حقیقی صورت می گیرد. با بسط استدلال فوق می توان گفت که سختی موهومی باعث اعمال نیرویی به سیستم شده که  $\pi/2$  با جابجایی اختلاف فاز دارد. پس می توان نوشت  $i \sin(\omega t) \rightarrow \sin(\omega t + \pi/2)$  . با اعمال رابطه ی فوق در (۱۳-۴) ، استفاده از اتحادهای (۴-۴) و بالانس کردن ضرایب  $\sin(\omega t)$  و  $\cos(\omega t)$  ،  $\omega$  و  $\alpha$  به ترتیب به صورت (۱۴-۴) و (۱۵-۴) بدست می آیند.

$$\omega^2 = \frac{K_1 + \frac{3}{4} \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_3 + \left(1 - \frac{3}{4} \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_2\right) \alpha^2}{1 + \frac{1}{4} \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_2} \quad (14-4)$$



$$\alpha = \frac{\left(\frac{3}{2}\bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} D_2 + \frac{1}{2}\bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_2 - 2\right)\omega}{\frac{3}{2}\bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} D_2} \quad (15-4)$$

$$+ \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} D_2 + \frac{1}{2}\bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_2 - 2\right)^2 \omega^2 - 3\left(\bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} D_2\right)\left(\frac{3}{4}\omega^2 \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} D_2 - D_1\right)}}{\frac{3}{2}\bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} D_2}$$

۳-۲-۴. محاسبه پاسخ ضمنی

اگرچه ظاهر پاسخ های بدست آمده در این دو روش متفاوت است ولی اختلاف مقادیر بدست آمده برای  $\omega$  و  $\alpha$  کمتر از دو درصد است. زیرا در ارتعاش آزاد دامنه ی پاسخ های با فرکانس بالاتر کم بوده و خطای حاصل از معادل سازی (۳-۴۵) به صورت (۴-۹) قابل صرفنظر است.

در بخش قبل مشاهده شد که شکل مود غیر خطی، تابعی از دامنه ی ارتعاش است. هرچه دامنه کمتر باشد، مود غیر خطی به مود خطی نزدیک تر شده و هرچه دامنه بیشتر باشد، اختلاف بین این دو واضح تر می گردد. در (۴-۱۱) یا (۴-۱۴) مشخص است که مشابه شکل مود، فرکانس طبیعی نیز تابع دامنه است. از آن جایی که سیستم میرا بوده، دامنه نسبت به زمان تغییر می کند و به تبع آن فرکانس طبیعی نیز تابع زمان خواهد بود. با گذشت زمان به دلیل میرا شدن دامنه ی ارتعاش، فرکانس طبیعی سیستم به فرکانس خطی نزدیک تر شده و در نهایت با آن برابر می گردد. بنابر این در صورتی که  $\bar{w}_0 = \bar{A} \sin \phi(t)$  باشد، آنگاه می توان مانند (۴-۱۶) برای  $\phi(t)$  نوشت.

$$\phi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \phi_0 \quad (16-4)$$

حل فوق فقط در صورتی قابل قبول است که در نظر گرفتن دو شرط  $\int_0^t \omega(\tau) d\tau \approx \omega t$  و  $\frac{d}{dt}\omega \ll \omega$  منطقی باشد. هرچقدر اختلاف بین فرکانس طبیعی غیر خطی با فرکانس طبیعی خطی بیشتر باشد، تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به زمان بزرگ تر بوده و خطای وارد شده در حل بالانس هارمونیک بیشتر خواهد شد. از آن جایی که  $D_1$  و  $D_2$  تابعی از  $\omega$  بوده و (۴-۱۱) و (۴-۱۲) یا (۴-۱۴) و (۴-۱۵) ضمنی هستند، می بایست حل را با روش تکرار انجام داد. روند حل به صورت زیر است:

در لحظه ی  $t=0$ ، با در نظر گرفتن  $\alpha=0$  و صرفنظر از بخش های موهومی معادله حرکت می توان  $\omega$  را از معادله ی (۴-۱۱) یا (۴-۱۴) با استفاده از شرط اولیه دامنه یا  $\bar{A}_0$  بدست آورد.

۱ - محاسبه ی  $E_{\eta}$  مختلط از رابطه ی (۲-۴۳) و سپس بدست آوردن  $K_1$  ،  $K_2$  ،  $D_1$  و  $D_2$  جدید با استفاده از روابط (۳-۴۵) . لازم به یاد آوری است که  $K_3$  بدون تغییر می ماند.

۲ - محاسبه ی  $\alpha$  از رابطه ی (۴-۱۲) یا (۴-۱۵) .

۳ - با قرار دادن  $\alpha$  در (۴-۱۱) یا (۴-۱۴) ،  $\omega$  جدید محاسبه می شود.

با تکرار ۳ مرحله ی فوق ،  $\omega$  و  $\alpha$  بدست می آیند. از آن جایی که تفاوت فرکانس طبیعی سیستم میرا و نامیرا بسیار کوچک بوده ، سرعت همگرایی بالاست.

با انجام روند فوق برای گام های زمانی ، پاسخ نهایی بدست خواهد آمد.

### ۳-۴. سیگنال تحلیلی

#### ۱-۳-۴. تبدیل هیلبرت و سیگنال تحلیلی

استفاده از تبدیل هیلبرت<sup>۱</sup> یک روش متداول در تحلیل سیگنال و بررسی سیستم های مخابراتی است که می توان از آن در بررسی پاسخ آزاد و اجباری سیستم های ارتعاشی نیز استفاده نمود. در صورتی که تابع  $f(t)$  در  $-\infty < t < \infty$  تعریف شده باشد ، تبدیل هیلبرت و معکوس آن به صورت (۴-۱۷) بوده [۳۷] و برخی از خواص مهم آن در (۴-۱۸) آورده شده است [۴۹].

$$\mathbf{H}[f(t)] = \hat{f}_H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad (۴-۱۷)$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_H(\tau)}{\tau-t} d\tau = -\mathbf{H}[\hat{f}_H(\tau)]$$

$$\mathbf{H}^{-1} = -\mathbf{H} \quad (۴-۱۸)$$

$$\mathbf{H}[f(t+a)] = \hat{f}_H(t+a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}[f(at)] = \hat{f}_H(at) \\ \mathbf{H}[f(-at)] = -\hat{f}_H(-at) \end{cases} \quad a > 0$$

<sup>1</sup> Hilbert Transform (HT)

$$\mathbf{H}[f(t)] = \frac{d}{dt} \hat{f}_H(t)$$

$$\mathbf{H}[t f(t)] = t \hat{f}_H(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

$$\|\mathbf{H}[f(t)]\| = \|f(t)\|$$

تبدیل هیلبرت در یک تابع پریودیک، به اندازه ی  $-\pi/2$  به ازای فرکانس مثبت و  $\pi/2$  به ازای فرکانس منفی اختلاف فاز ایجاد می کند. از روابط بسیار مهم حاکم بر تبدیل هیلبرت قضیه بدروسین<sup>۱</sup> است. بنابر این قضیه، اگر  $f(x)$  و  $g(x)$  دو تابعی باشند که تبدیل فوریه آن ها در شرط (۴-۱۹) صدق کند، آن گاه رابطه (۴-۲۰) برقرار خواهد بود [۳۸].

$$\begin{cases} \forall |\omega| > a & F(\omega) = 0 \\ \forall |\omega| < a & G(\omega) = 0 \end{cases} \quad (۴-۱۹)$$

$$\mathbf{H}[f(x)g(x)] = f(x)\mathbf{H}[g(x)] \quad (۴-۲۰)$$

که  $a$  یک ثابت مثبت دلخواه است. به عبارت دیگر، اگر محدوده ی فرکانس تغییرات  $f(x)$  و  $g(x)$  با هم تداخل نداشته و فرکانس  $f(x)$  کمتر از  $g(x)$  باشد، شرایط قضیه بدروسین برقرار است. در این حالت اصطلاحاً به  $f(x)$  و  $g(x)$  به ترتیب پایین گذر<sup>۲</sup> و بالا گذر<sup>۳</sup> می گویند. اگر  $y(t)$ ، یک سیگنال مشابه (۴-۲۱) باشد، می توان سیگنال تحلیلی  $Y(t)$  را به صورت (۴-۲۲) تعریف نمود [۳۹]. خصوصیات  $Y(t)$  در روابط (۴-۲۳) تا (۴-۲۵) بیان شده است.

$$y(t) = A(t) \cos \psi(t) \quad (۴-۲۱)$$

$$Y(t) = y(t) + i \tilde{y}(t) = A(t) e^{i\psi(t)} \quad (۴-۲۲)$$

$$A(t) = \sqrt{y^2(t) + \tilde{y}^2(t)} \quad \psi(t) = \arctan\left(\frac{\tilde{y}(t)}{y(t)}\right) \quad (۴-۲۳)$$

$$\omega(t) = \dot{\psi}(t) = \frac{y(t)\dot{\tilde{y}}(t) - \dot{y}(t)\tilde{y}(t)}{A^2(t)} = \text{Im} \left[ \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \right] \quad (۴-۲۴)$$

$$\dot{A}(t) = \frac{y(t)\dot{y}(t) + \tilde{y}(t)\dot{\tilde{y}}(t)}{A(t)} = A(t) \text{Re} \left[ \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \right] \quad (۴-۲۵)$$

<sup>1</sup> Bedrosian

<sup>2</sup> Low Pass

<sup>3</sup> High Pass

که  $A(t)$  و  $\dot{\psi}(t)$  به ترتیب دامنه لحظه ای<sup>۱</sup> و فرکانس لحظه ای<sup>۲</sup> هستند. با استفاده از روابط (۴-۱۸) و (۴-۲۲) می توان ارتباط بین سیگنال تحلیلی  $Y(t)$  و مشتقات آن را به صورت (۴-۲۶) محاسبه کرد.

$$\dot{Y} = \dot{A}e^{i\psi} + iA\dot{\psi}e^{i\psi} = \frac{\dot{A}}{A}Y + i\omega Y \quad (۴-۲۶)$$

$$\ddot{Y} = \ddot{A}e^{i\psi} + 2i\dot{A}\dot{\psi}e^{i\psi} + iA\ddot{\psi}e^{i\psi} - A\dot{\psi}^2e^{i\psi} = \left(\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2\right)Y + i\left(2\omega\frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega}\right)Y$$

۴-۳-۲. دامنه و فرکانس لحظه ای

پاسخ ارتعاشات غیر خطی به صورت چند فرکانسی است. اگر پاسخ سیستم نامیرا را به صورت (۴-۲۷) در نظر بگیریم، می توان از آن تبدیل هیلبرت گرفته و سیگنال تحلیلی (۴-۲۹) را بدست آورد.

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_0) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_0) \quad (۴-۲۷)$$

$$\tilde{y}(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_0) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_0) \quad (۴-۲۸)$$

$$Y(t) = A_1 e^{i\omega_1 t + \alpha_0} + A_2 e^{i\omega_2 t + \alpha_0} \quad (۴-۲۹)$$

با استفاده از (۴-۲۳) و (۴-۲۴) دامنه و فرکانس لحظه ای سیستم نامیرا به ترتیب به صورت (۴-۳۰) و (۴-۳۱) بدست می آیند [۴۴].

$$A(t) = \left[ A_1^2 + 2A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_0) A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_0) + A_2^2 + 2A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_0) A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_0) \right]^{1/2}$$

$$A(t) = \left[ A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos((\omega_2 - \omega_1)t) \right]^{1/2} \quad (۴-۳۰)$$

$$\dot{Y}(t) = A_1 (i\omega_1) e^{i\omega_1 t + \alpha_0} + A_2 (i\omega_2) e^{i\omega_2 t + \alpha_0}$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{i\omega_1 [A_1 e^{i\omega_1 t + \alpha_0} + A_2 e^{i\omega_2 t + \alpha_0}] + iA_2 (\omega_2 - \omega_1) e^{i\omega_2 t + \alpha_0}}{A_1 e^{i\omega_1 t + \alpha_0} + A_2 e^{i\omega_2 t + \alpha_0}}$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = i\omega_1 + \frac{iA_2 (\omega_2 - \omega_1) e^{i\omega_2 t + \alpha_0} (A_1 e^{-i\omega_1 t - \alpha_0} + A_2 e^{-i\omega_2 t - \alpha_0})}{(A_1 e^{i\omega_1 t + \alpha_0} + A_2 e^{i\omega_2 t + \alpha_0}) (A_1 e^{-i\omega_1 t - \alpha_0} + A_2 e^{-i\omega_2 t - \alpha_0})}$$

<sup>1</sup> Instantaneous Amplitude (IA)

<sup>2</sup> Instantaneous Frequency (IF)

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = i\omega_1 + \frac{iA_2(\omega_2 - \omega_1)(A_2 + A_1 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t})}{A_1^2 + A_1 A_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + A_1 A_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + A_2^2}$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = i\omega_1 + \frac{(\omega_2 - \omega_1) [A_2^2 + A_1 A_2 [i \cos((\omega_2 - \omega_1)t) - \sin((\omega_2 - \omega_1)t)]]}{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos((\omega_2 - \omega_1)t)}$$

$$\omega(t) = \text{Im} \left[ \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \right] = \omega_1 + \frac{(\omega_2 - \omega_1) [A_2^2 + A_1 A_2 \cos((\omega_2 - \omega_1)t)]}{A^2(t)} \quad (31-4)$$

در (30-4) و (31-4) مشخص است که برای یک سیستم ارتعاشی غیر خطی نامیرا، دامنه و فرکانس لحظه ای متشکل از دو بخش ثابت و نوسانی هستند. در صورتی که معادله حرکت از مرتبه ی زوج باشد،  $\omega_2 = 2\omega_1$  و اگر معادله حرکت از مرتبه ی فرد باشد،  $\omega_2 = 3\omega_1$  خواهد بود. بنابر این فرکانس نوسانات دامنه و فرکانس لحظه ای برای سیستم نامیرا با مرتبه ی زوج و فرد به ترتیب برابر و دو برابر فرکانس پایه نوسان سیستم خواهد بود.

پاسخ چند فرکانسی برای سیستم میرا را می توان به صورت (32-4) در نظر گرفت. که در آن  $A_1(t)$  و  $A_2(t)$  با گذشت زمان به صفر میل می کنند.  $\phi_1(t)$  و  $\phi_2(t)$  فرکانس های لحظه ای جزئی هستند. از آن جایی که در سیستم های غیر خطی، فرکانس نوسان تابعی از دامنه بوده و سیستم میراست، با گذشت زمان  $\phi_1(t)$  و  $\phi_2(t)$  به آرامی تغییر کرده و به مقدار فرکانس خطی میل می کنند. با استفاده از قضیه بدروسین می توان مشابه (33-4) از (32-4) تبدیل هیلبرت گرفت و سیگنال تحلیلی پاسخ را به صورت (34-4) محاسبه نمود.

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1(t) \cos \phi_1(t) + A_2(t) \cos \phi_2(t) \quad (32-4)$$

$$\tilde{y}(t) = A_1(t) \sin \phi_1(t) + A_2(t) \sin \phi_2(t) \quad (33-4)$$

$$Y(t) = A_1(t) e^{i\phi_1(t)} + A_2(t) e^{i\phi_2(t)} \quad (34-4)$$

با استفاده از (23-4) و (24-4) دامنه و فرکانس لحظه ای سیستم میرا به ترتیب به صورت (35-4) و (36-4) بدست می آیند.

$$A(t) = [A_1^2(t) + 2A_1(t)A_2(t) \cos \phi_1(t) \cos \phi_2(t) + A_2^2(t) + 2A_1(t)A_2(t) \sin \phi_1(t) \sin \phi_2(t)]^{1/2}$$

$$A(t) = [A_1^2(t) + A_2^2(t) + 2A_1(t)A_2(t) \cos(\phi_2(t) - \phi_1(t))]^{1/2} \quad (35-4)$$

$$\dot{Y}(t) = \dot{A}_1(t)e^{i\varphi_1(t)} + A_1(t)i\dot{\varphi}_1(t)e^{i\varphi_1(t)} + \dot{A}_2(t)e^{i\varphi_2(t)} + A_2(t)i\dot{\varphi}_2(t)e^{i\varphi_2(t)}$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{[\dot{A}_1(t)e^{i\varphi_1(t)} + \dot{A}_2(t)e^{i\varphi_2(t)}] + i\dot{\varphi}_1(t)[A_1(t)e^{i\varphi_1(t)} + A_2(t)e^{i\varphi_2(t)}]}{A_1(t)e^{i\varphi_1(t)} + A_2(t)e^{i\varphi_2(t)}}$$

$$+ \frac{iA_2(t)(\dot{\varphi}_2(t) - \dot{\varphi}_1(t))e^{i\varphi_2(t)}}{A_1(t)e^{i\varphi_1(t)} + A_2(t)e^{i\varphi_2(t)}}$$

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = i\dot{\varphi}_1(t) + \frac{iA_2(t)(\dot{\varphi}_2(t) - \dot{\varphi}_1(t))[A_2(t) + A_1(t)e^{i(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))}]}{A_1^2(t) + A_2^2(t) + 2A_1(t)A_2(t)\cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))}$$

$$+ \frac{A_1(t)\dot{A}_1(t) + A_2(t)\dot{A}_1(t)e^{i(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))} + A_2(t)\dot{A}_2(t) + A_1(t)\dot{A}_2(t)e^{i(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))}}{A_1^2(t) + A_2^2(t) + 2A_1(t)A_2(t)\cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))}$$

$$\omega(t) = \text{Im} \left[ \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} \right] = \dot{\varphi}_1(t) + \frac{(\dot{\varphi}_2(t) - \dot{\varphi}_1(t))[A_2^2 + A_1A_2\cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))]}{A^2(t)} \quad (36-4)$$

$$+ \frac{[A_1(t)\dot{A}_2(t) - A_2(t)\dot{A}_1(t)]\sin(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))}{A^2(t)}$$

دامنه لحظه ای سیستم میرا مشابه سیستم نامیرا حالت نوسانی دارد ولی به دلیل وجود میرایی ، تابع متوسط آن نیز با زمان تغییر می کند. فرکانس لحظه ای متوسط نیز همانند دامنه لحظه ای متوسط با زمان تغییر کرده و به مقدار خطی خود میل می کند. در مقایسه سیستم های میرا و نامیرا با یکدیگر ، در فرکانس لحظه ای یک جمله ی نوسانی دیگر به دلیل تغییرات دامنه نسبت به زمان ، وجود دارد. که البته اثر آن ناچیز است. مشابه سیستم نامیرا ، در صورتی که معادله حرکت از مرتبه ی زوج باشد ،  $\varphi_2(t) = 2\varphi_1(t)$  و اگر معادله حرکت از مرتبه ی فرد باشد ،  $\varphi_2(t) = 3\varphi_1(t)$  خواهد بود. بنابر این فرکانس نوسانات دامنه و فرکانس لحظه ای برای سیستم میرا با مرتبه ی زوج و فرد به ترتیب برابر و دو برابر فرکانس پایه نوسان سیستم خواهد بود.

۳-۳-۴. بررسی پاسخ با استفاده از سیگنال تحلیلی

اگر معادله حرکت سیستم را به صورت (۳۷-۴) در نظر بگیریم ، از آن جایی که شرایط قضیه بدروسین برقرار است ، می توان با استفاده از (۲۰-۴) از آن تبدیل هیلبرت گرفت و سپس با ضرب کردن معادله ی حاصل در  $i$  و جمع کردن آن با (۳۷-۴) ، (۳۸-۴) را بدست آورد. در روابط زیر  $\omega_0^2(A)$  و  $D(A, \omega)$  به ترتیب فرکانس طبیعی سیستم نامیرا (سختی معادل) و میرایی معادل هستند.

$$\ddot{y} + iD(A, \omega)y + \omega_0^2(A)y = 0 \quad (37-4)$$

$$\ddot{Y} + iD(A, \omega)Y + \omega_0^2(A)Y = 0 \quad (38-4)$$

(39-4) از جایگذاری (26-4) در (38-4) بدست می آید. سپس با مساوی صفر قرار دادن جملات حقیقی و موهومی آن ، روابط (40-4) استخراج می گردد [39].

$$\left( \frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2 \right) Y + i \left( 2\omega \frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega} \right) Y + iD(A, \omega)Y + \omega_0^2(A)Y = 0 \quad (39-4)$$

$$\begin{cases} \omega_0^2(A) = \omega^2 - \frac{\ddot{A}}{A} \\ D(A, \omega) = -2\omega \frac{\dot{A}}{A} - \dot{\omega} \end{cases} \quad (40-4)$$

روابط (40-4) ، ارتباط بین فرکانس لحظه ای و دامنه لحظه ای را با فرکانس طبیعی سیستم نامیرا و میرایی معادل نشان می دهد. معمولا استفاده از این روش در شناسایی سیستم ها است. بدین صورت که با داشتن سیگنال پاسخ ، فرکانس و دامنه ی لحظه ای را با روابط (23-4) و (24-4) محاسبه کرده و سپس با حل معادلات جبری (40-4) ، فرکانس طبیعی و میرایی معادل سیستم بدست خواهند آمد. هدف در این بخش ، طی کردن معکوس روند فوق است. بنابر این (40-4) دستگاه معادله دیفرانسیل بوده که می بایست به صورت عددی حل شود. حل عددی (40-4) در مقایسه با حل عددی معادله حرکت به صورت مستقیم ، مزایا و معایبی دارد. در این روش :

- 1- فرکانس و دامنه لحظه ای به طور مستقیم محاسبه می شود و دیگر نیازی به استخراج فرکانس و دامنه از شکل پاسخ نیست. این موضوع در سیستمی که میرایی آن مشابه میرایی ترموالاستیک تابعی از فرکانس باشد ، اهمیت خیلی بیشتری خواهد داشت.
- 2- گام های زمانی می توانند مقادیر بزرگ تری داشته باشند و زمان سپری شده جهت حل عددی نسبتا کوتاه تر خواهد بود.
- 3- همان طور که در روابط (30-4) ، (31-4) ، (35-4) و (36-4) اشاره شد ، فرکانس و دامنه لحظه ای در سیستم های ارتعاشی غیر خطی به دلیل پاسخ چند فرکانسی ، حالت نوسانی دارند. در حل مستقیم معادله حرکت این پدیده قابل مشاهده نخواهد بود.
- 4- جهت حل (40-4) سه شرط اولیه لازم است که فقط یکی از آن ها را می توان از شرط اولیه مسئله بدست آورد. ولی از آن جایی که روند حل خود اصلاح است ، می توان دو شرط دیگر را از روش تکرار محاسبه نمود.

معادله ی (۴۱-۴) ، شکل نامیرا (۳-۴۴) است. با در نظر گرفتن پاسخ به صورت (۴-۴۲) ، فرکانس نامیرا را می توان با استفاده از بالانس هارمونیک مشابه زیر محاسبه نمود.

$$\ddot{\bar{w}}_0 + K_1 \bar{w}_0 + K_3 \bar{w}_0^3 - K_2 \bar{w}_0 \dot{\bar{w}}_0^2 = 0 \quad (۴۱-۴)$$

$$\bar{w}_0 = \bar{A} [\cos(\omega t) + \beta \cos(3\omega t)] \quad (۴۲-۴)$$

$$-\omega^2 + K_1 + \frac{3}{4} K_3 \bar{A}^2 + \frac{3}{4} K_3 \bar{A}^2 \beta + \frac{3}{2} K_3 \bar{A}^2 \beta^2 - \frac{1}{4} K_2 \bar{A}^2 \omega^2 - \frac{5}{4} K_2 \bar{A}^2 \beta \omega^2 - \frac{9}{2} K_2 \bar{A}^2 \beta^2 \omega^2 = 0$$

$$-9\beta \omega^2 + K_1 \beta + \frac{1}{4} K_3 \bar{A}^2 + \frac{3}{2} K_3 \bar{A}^2 \beta + \frac{3}{4} K_3 \bar{A}^2 \beta^3 + \frac{1}{4} K_2 \bar{A}^2 \omega^2 - \frac{1}{2} K_2 \bar{A}^2 \beta \omega^2 - \frac{9}{4} K_2 \bar{A}^2 \beta^3 \omega^2 = 0$$

با صرفنظر کردن از  $\beta^2$  و  $\beta^3$  به دلیل کوچکی آن ها ،  $\omega$  و  $\beta$  به ترتیب مطابق (۴-۴۳) و (۴-۴۴) بدست می آیند.

$$\omega = \sqrt{\frac{4K_1 + 3K_3 \bar{A}^2 + 3K_3 \bar{A}^2 \beta}{4 + K_2 \bar{A}^2 + 5K_2 \bar{A}^2 \beta}} \quad (۴۳-۴)$$

$$\beta = \frac{K_1 K_2 \bar{A}^2 + K_3 \bar{A}^2 + K_2 K_3 \bar{A}^4}{32K_1 + K_1 K_2 \bar{A}^2 + 21K_3 \bar{A}^2 - 2K_2 K_3 \bar{A}^4} \quad (۴۴-۴)$$

دو رابطه ی (۴-۴۳) و (۴-۴۴) در کنار یکدیگر فرکانس نامیرا را به صورتی تابعی از دامنه ی نرمال نشان می دهند. می توان نشان داد ، در صورتی که دامنه ی نرمال ( $\bar{A} = A/h$ ) برابر با یک باشد ، اختلاف فرکانس طبیعی محاسبه شده از روش بالانس هارمونیک با حل عددی مستقیم (۴-۴۱) در حدود ۰.۳٪ است.

$D(A, \omega)$  میرایی معادل سیستم غیر خطی بوده که تابع دامنه و فرکانس و طبیعی است. میرایی معادل را می توان از طریق محاسبه ی کار نیروی غیر پایستار انجام شده بر روی سیستم در یک سیکل بدست آورد. (۴-۴۵) نیروی غیر پایستار وارد شده به سیستم است که مشابه (۴-۸) به صورت زیر بدست می آید.

$$F_d = iD_1 \bar{w}_0 - iD_2 \bar{w}_0 \dot{\bar{w}}_0^2 \quad (۴۵-۴)$$



انرژی اتلاف شده در هر سیکل  $W_d = \oint F_d d\bar{w}_0$  ، با استفاده از (۴-۴۵) انرژی اتلافی در هر سیکل را می توان به دو صورت (۴-۴۶) و (۴-۴۷) نوشت.

$$W_d = \oint (iD_1\bar{w}_0 - iD_2\bar{w}_0\dot{\bar{w}}_0^2) d\bar{w}_0 = \oint (iD_1\bar{w}_0 - iD_2\bar{w}_0\dot{\bar{w}}_0^2) \dot{\bar{w}}_0 dt \quad (۴-۴۶)$$

$$W_d = \oint (D_{eff}\bar{w}_0) \dot{\bar{w}}_0 dt \quad (۴-۴۷)$$

از (۴-۳۵) و (۴-۳۶) مشخص است که دامنه ی بخش نوسانی ، دامنه لحظه ای و فرکانس لحظه ای نسبت به مقدار بخش دیگر از مرتبه ی  $\varepsilon$  است. از آن جایی که میرایی سیستم وابسته به فرکانس بوده و  $D_1$  و  $D_2$  از فرکانس لحظه ای بدست می آیند ، این دو نیز مشابه فرکانس لحظه ای دارای دو بخش بوده و دامنه ی بخش نوسانی در این توابع نسبت به بخش دیگر از مرتبه ی  $\varepsilon$  خواهد بود. با در نظر گرفتن های فوق را با حدود  $2n\pi/\omega$  تا  $2(n+1)\pi/\omega$  ،  $n=0,1,2,\dots$  ، محاسبه می کنیم. با صرف نظر از تغییرات زمانی جملات با مرتبه های  $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$  می توان  $\bar{A}$  ،  $\omega$  ،  $D_1$  و  $D_2$  را از انتگرال خارج کرده و میرایی معادل را به صورت (۴-۴۸) محاسبه نمود.

$$W_d = \oint [iD_1\bar{A}\sin(\omega t)] \bar{A}\omega\cos(\omega t) dt \\ - \oint [iD_2\bar{A}\omega^2\sin(\omega t)\cos^2(\omega t)] \bar{A}\omega\cos(\omega t) dt$$

$$\begin{cases} W_d = \oint D_1\bar{A}^2\omega\cos^2(\omega t) dt - \oint D_2\bar{A}^2\omega^3\cos^4(\omega t) dt \\ W_d = \oint D_{eff}\bar{A}^2\omega\cos^2(\omega t) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_d = D_1\pi\bar{A}^2 - \frac{3}{4}D_2\pi\omega^2\bar{A}^4 \\ W_d = D_{eff}\pi\bar{A}^2 \end{cases} \Rightarrow D_{eff} = D_1 \left( 1 - \frac{3D_2}{4D_1}\bar{A}^2\omega^2 \right) \quad (۴-۴۸)$$

(۴-۴۸) میرایی موثر سیستم است. بدین معنی که کار ناپایستار انجام شده توسط آن و میرایی غیر خطی در طول یک سیکل برابر است.

#### ۴-۴. پاسخ گذرا

در این بخش پاسخ بدست آمده از سیگنال تحلیلی را با حل حاصل از روش بالانس هارمونیک مقایسه خواهیم کرد. تمامی نمودار ها برای مود اول هستند. پاسخ بالانس هارمونیک در روابط (۴-۱۱) و (۴-۱۲) یا (۴-۱۴) و (۴-۱۵) بدست آمده است و همان طور که قبلا اشاره شد ، مقادیر بدست آمده از آنها تفاوت قابل مشاهده ای ندارند. فرم فضای حالت دستگاه معادله دیفرانسیل (۴-۴۰) به صورت (۴-۵۰) است. که  $\omega_0$  و

$D_{eff}$  به ترتیب فرکانس طبیعی نامیرا و میرایی موثر بوده که به ترتیب از روابط (۴-۴۹) و (۴-۴۸) جایگذاری می شوند. دلیل انتخاب (۴-۴۹) به جای روابط (۴-۴۳) و (۴-۴۴)، محاسبه ی پاسخ هم مرتبه در دو روش و مقایسه بهتر آن هاست.

تنها شرط اولیه ای که جهت بررسی عددی (۴-۵۰) از مسئله موجود است، دامنه لحظه ای اولیه است. از آن جایی که روند حل خود اصلاح است و سیگنال های متوسط دامنه و فرکانس لحظه ای، توابعی پیوسته و مشتق پذیر هستند، می توان  $\omega(0) = \omega_0(\bar{A}(0))$  و  $\dot{\bar{A}}(0) = \bar{A}(0) \left[ D_{eff} / 2\omega_0(\bar{A}(0)) \right]$  را فرض نمود. در این حالت، اثر شرط اولیه تقریبی در ۲٪ ابتدایی دوره ی پاسخ از بین خواهد رفت. به همین دلیل شرط اولیه دامنه لحظه ای را بیشتر از مقدار آن در مسئله ی مورد نظر قرار داده تا اثر شرط اولیه تقریبی قبل از رسیدن به دامنه اولیه مورد نظر از بین برود. در نهایت با محاسبه ی سیگنال های متوسط، رفتار سیستم در ارتعاش آزاد بررسی خواهد شد. متوسط دامنه لحظه ای ( $\bar{A}$ ) و متوسط فرکانس لحظه ای ( $\bar{\omega}$ ) به ترتیب دامنه و فرکانس سیستم میرا هستند.

در روش هایی که معمولا جهت تحلیل سیستم های غیر خطی استفاده می گردد، میرایی سیستم معادل به صورت خطی بدست می آید. از آن جایی که تابع میرایی معادل در شکل پاسخ بسیار تاثیر گذار بوده، پاسخ ها برای دو حالت میرایی خطی و غیر خطی به طور جداگانه بررسی شده است. جنس تیر سیلیکون در نظر گرفته شده و خصوصیات مکانیکی آن برابر با  $E = 162.4 \text{ Gpa}$ ،  $\nu = 0.28$ ،  $\rho = 2.33e^3 \text{ kg m}^{-3}$ ،  $c_v = 711 \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ K^{-1}$  و مابقی در جدول (۴-۱) ارائه شده است.

$$\omega_0(\bar{A}) = \sqrt{\frac{4K_1 + 3K_3\bar{A}^2}{4 + K_2\bar{A}^2}} \quad (۴-۴۹)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \omega = -D_{eff} - 2\omega \frac{\dot{\bar{A}}}{\bar{A}} \\ \frac{d}{dt} \bar{A} = \dot{\bar{A}} \\ \frac{d}{dt} \dot{\bar{A}} = \bar{A}\omega^2 - \bar{A}\omega_0^2 \end{cases} \quad (۴-۵۰)$$

(۴-۱) ضریب انبساط و هدایت حرارتی سیلیکون در دما های  $200 \text{ K}$ ،  $300 \text{ K}$  و  $400 \text{ K}$  [۵۰]

	$T$	$200 \text{ K}$	$300 \text{ K}$	$400 \text{ K}$
$\alpha$	$10^{-6} \text{ } ^\circ K^{-1}$	1.406	2.616	3.253
$k$	$W m^{-1} \text{ } ^\circ K^{-1}$	266	156	105

#### ۱-۴-۴. میرایی خطی

در این حالت  $D_2 = 0$  بوده ،  $D_{eff} = D_1$  است. پاسخ بالانس هارمونیک به فرم (۴-۵۱) ساده می گردد. در تمامی شکل ها منحنی های پر رنگ و نقطه چین به ترتیب پاسخ بدست آمده با کمک تبدیل هیلبرت و بالانس هارمونیک هستند که آن ها را به ترتیب حل (۱) و حل (۲) می نامیم.

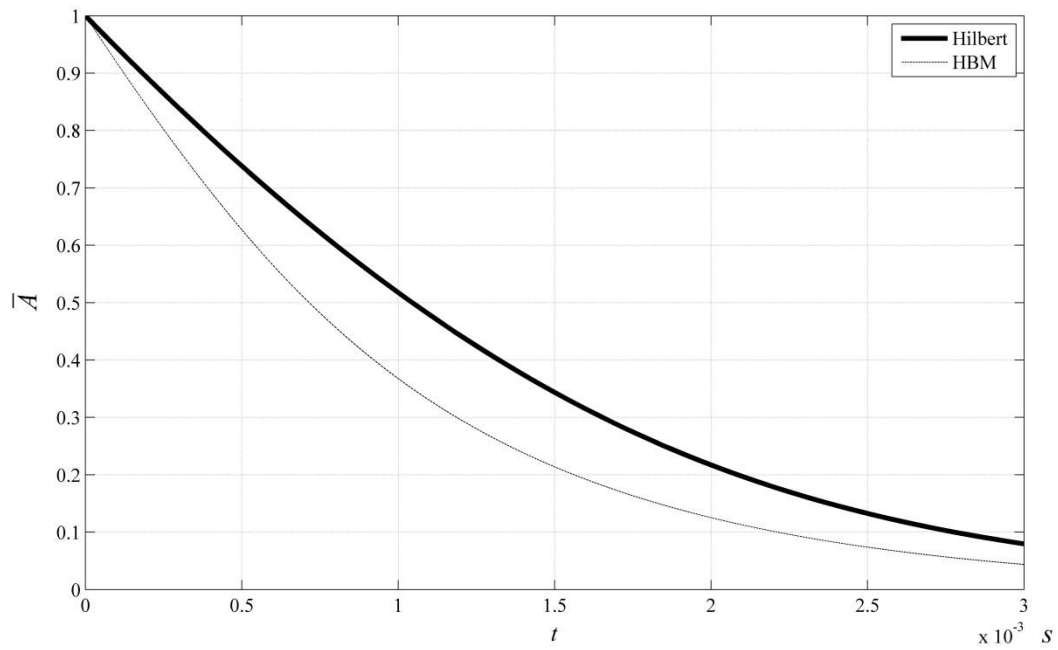
$$\omega = \sqrt{\frac{4K_1 + 4\alpha^2 + 3\bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_3}{4 + \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_2}} \quad \alpha = \frac{D_1}{\omega \left( 2 - \frac{1}{2} \bar{A}_0^2 e^{-2\alpha t} K_2 \right)} \quad (۴-۵۱)$$

انرژی سیستم تابعی از دامنه و فرکانس ارتعاش آن بوده و کاهش این دو ، به معنی از دست رفتن انرژی است. بخشی از میرایی روی کاهش دامنه و بخشی دیگر روی کاهش فرکانس اثر می گذارد. اگر در روند محاسبات از تغییر فرکانس نسبت زمان صرف نظر شود ، در واقع از انرژی اتلاف شده به ازای کاهش فرکانس صرف نظر شده است. به عبارت دیگر در حل (۲) تمامی اثر میرایی روی کاهش دامنه اعمال شده است که در نهایت منجر به افت شدید تر دامنه در حل (۲) و اختلاف بین دامنه ها در دو روش حل می گردد.

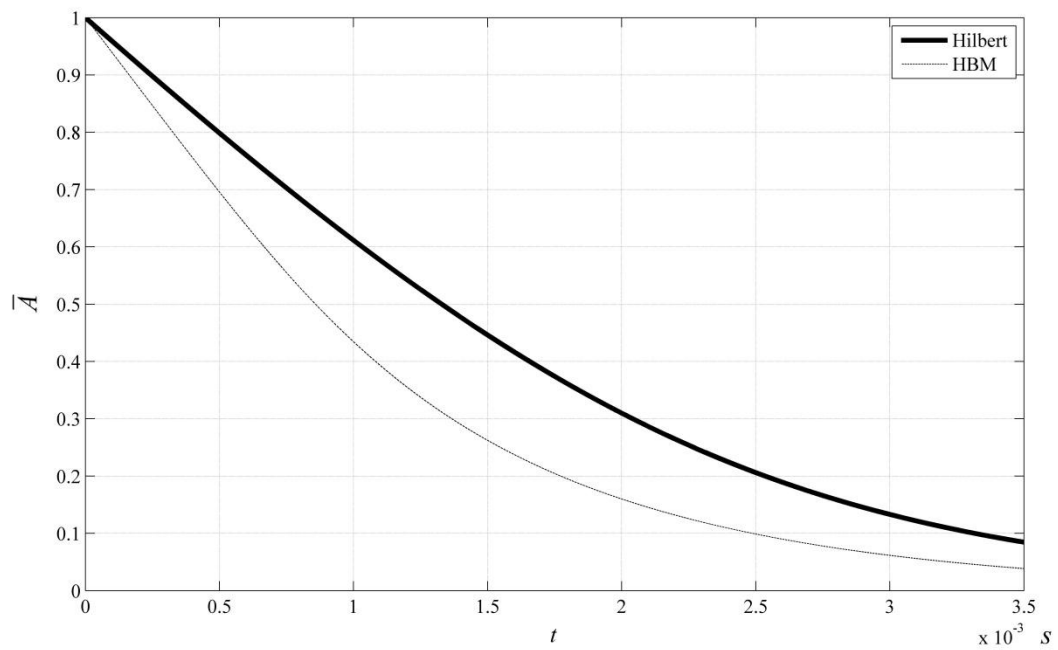
#### ۱-۴-۴-۱. اثر طول تیر

بنابر همان دلایل فوق ، در ابتدای پاسخ اندازه ی مشتق دامنه نسبت به زمان در حل (۲) بیشتر از (۱) است. با گذشت زمان به دلیل کاهش بیشتر دامنه در حل (۲) نسبت به حل (۱) ، اندازه ی مشتق دامنه نسبت به زمان نیز در آن کاهش می یابد. در این قسمت نسبت طول به ارتفاع سطح مقطع تیر ثابت در نظر گرفته شده و پاسخ سیستم برای طول های متفاوت رسم شده است.

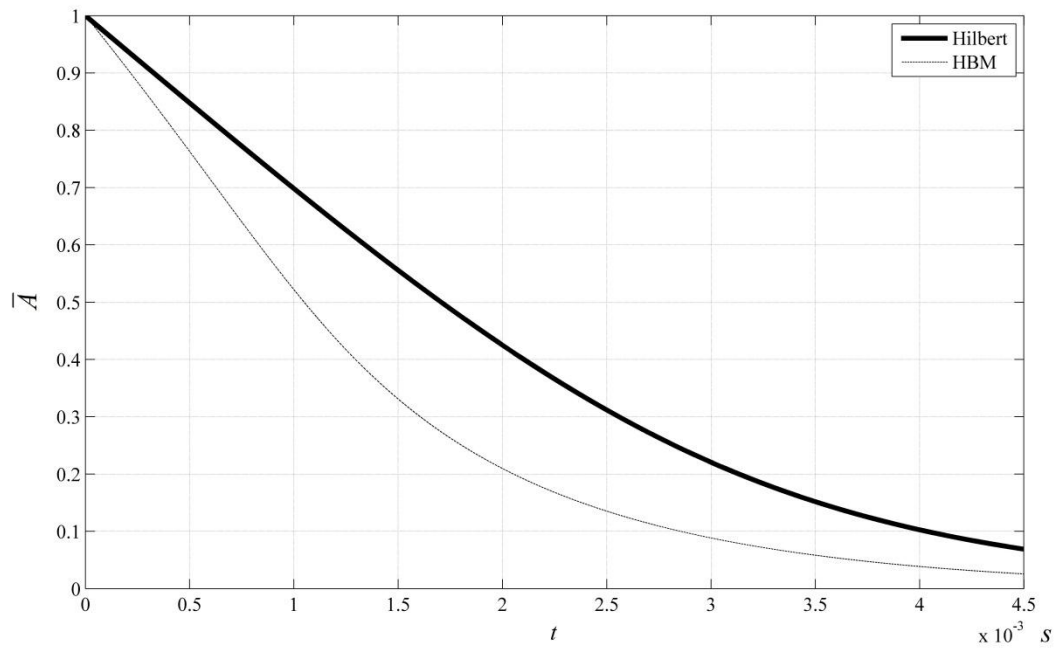
شکل های (۴-۱) و (۴-۲) به ترتیب تغییرات دامنه نرمال ( $\bar{A} = A/h$ ) و مشتق آن نسبت به زمان را در دو روش فوق برای ابعاد مختلف نشان می دهد. وابستگی میرایی به فرکانس باعث تغییر در مدت زمان پاسخ گذرا برای ابعاد متفاوت می گردد.



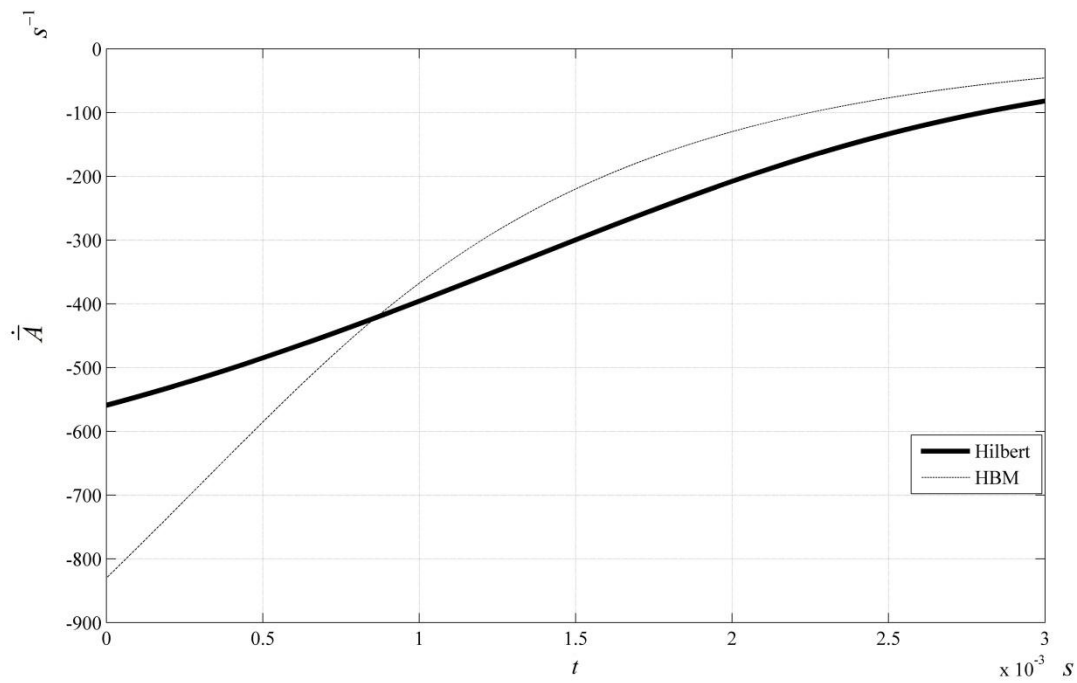
۴-۱ الف) دامنه نرمال  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$



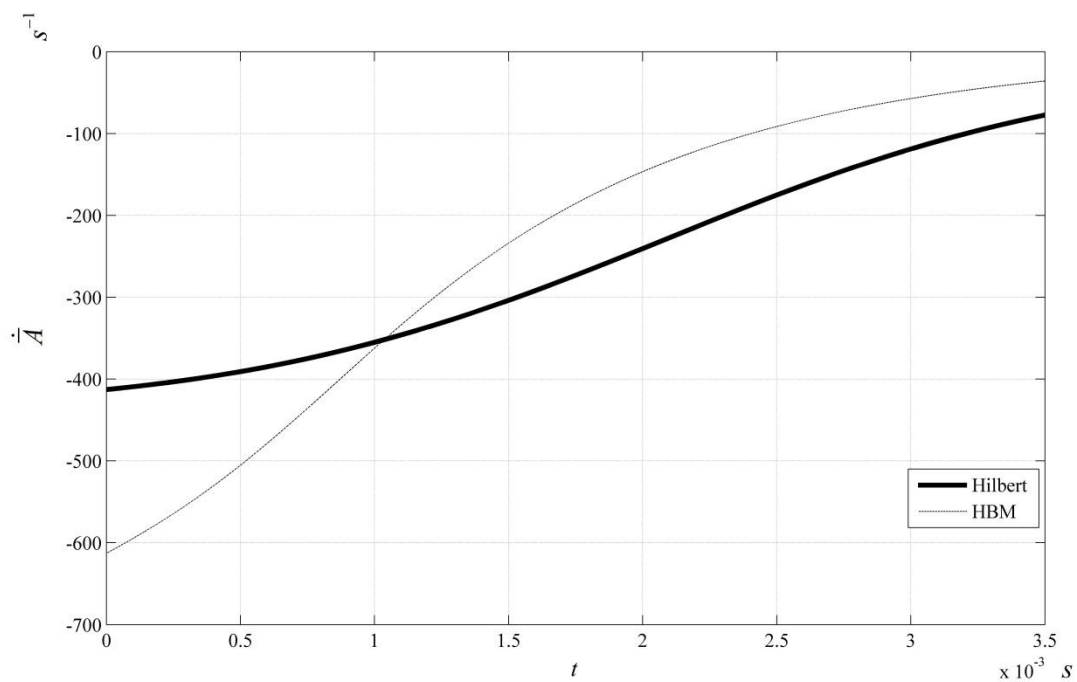
۴-۱ ب) دامنه نرمال  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$



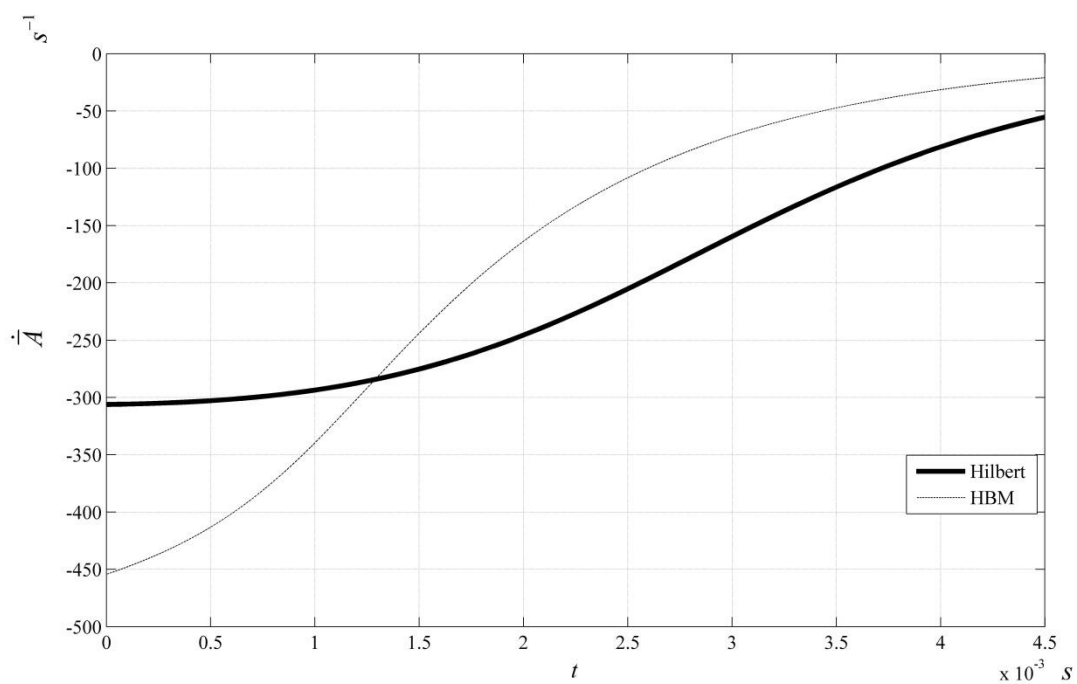
۴-۱ ج) دامنه نرمال  $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$



۴-۲ الف) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$

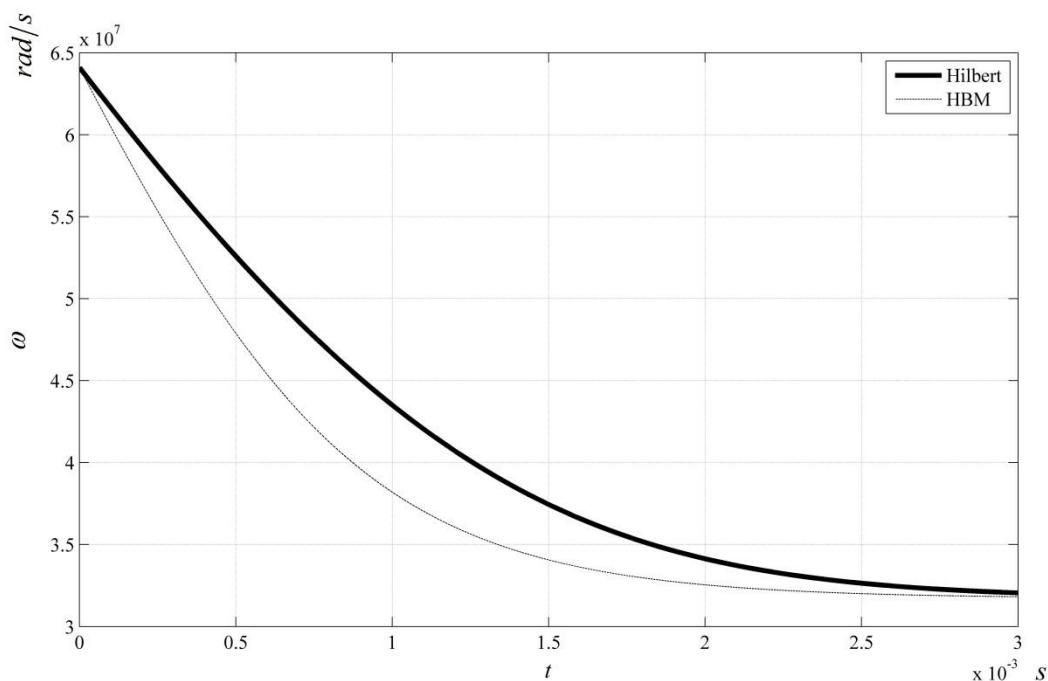


۲-۴ ب) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 300\text{ K}$  ،  $L = 70\ \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$

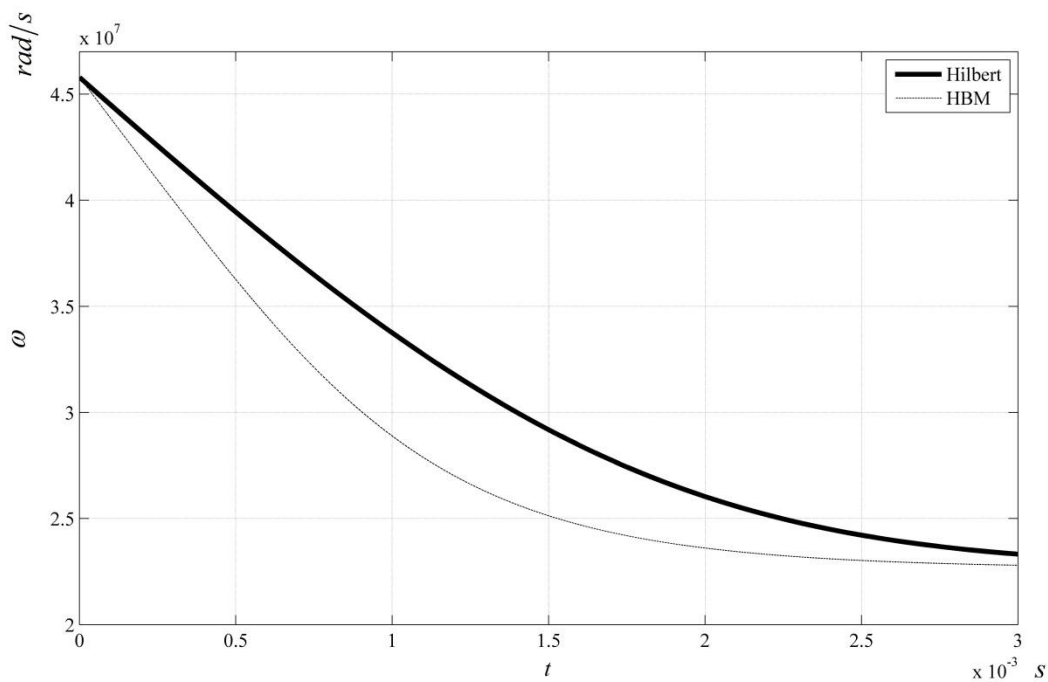


۲-۴ ج) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 300\text{ K}$  ،  $L = 90\ \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$

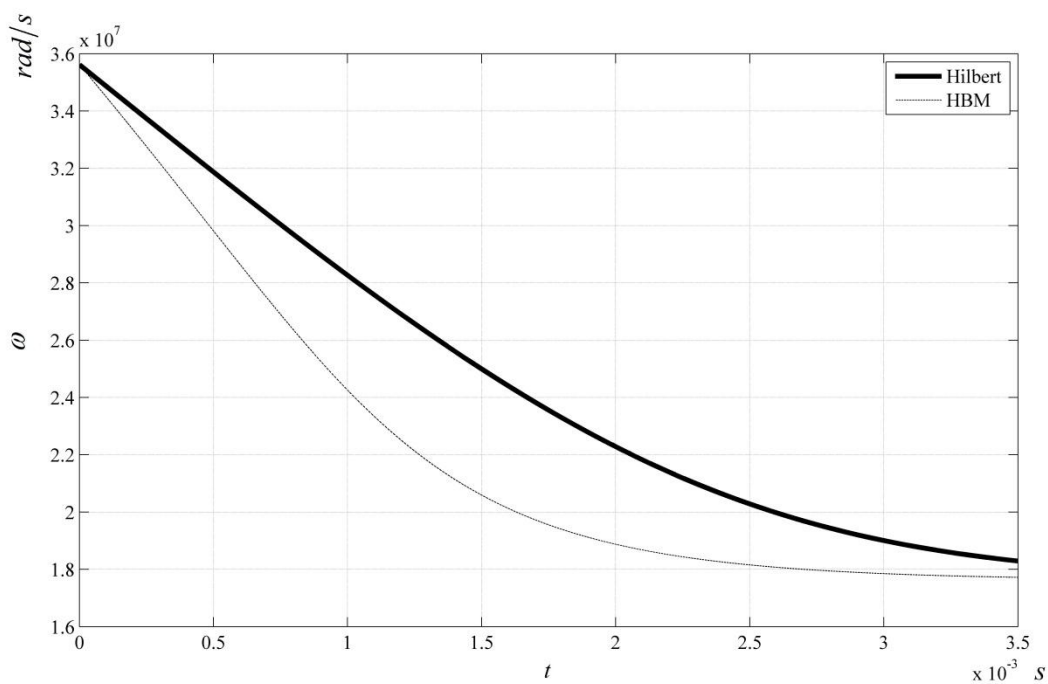
شکل های (۳-۴) ، تغییرات فرکانس میرا نسبت به زمان را به دلیل کاهش دامنه برای ابعاد متفاوت نشان می دهد. ابعاد تیر بر روی فرکانس غیر خطی و میرایی سیستم اثر مستقیم دارد. از آن جایی که میرایی دامنه در حل (۲) سریع تر از حل (۱) است ، فرکانس میرا در حل (۲) سریع تر به مقدار خطی خود میل می کند. شکل های (۴-۴) ، تغییرات نسبت اندازه ی مشتق دامنه نسبت به زمان بر دامنه را بر حسب زمان نشان می دهد. این منحنی ها شدت اثر گذاری میرایی بر دامنه را نشان می دهد و می توان آنها را معادل با فرکانس موهومی در نظر گرفت. به دلیل صرفنظر از انرژی اتلافی به واسطه ی کاهش فرکانس در حل (۲) ، فرکانس موهومی معادل نسبت به حل (۱) بیشتر بدست می آید. همچنین ملاحظه می شود که پاسخ ها با گذشت زمان و کم شدن دامنه ی ارتعاش به مقدار خطی خود میل می کنند.



۳-۴ الف) فرکانس میرا  $L/h=15$  ،  $L=50 \mu m$  ،  $T=300 K$

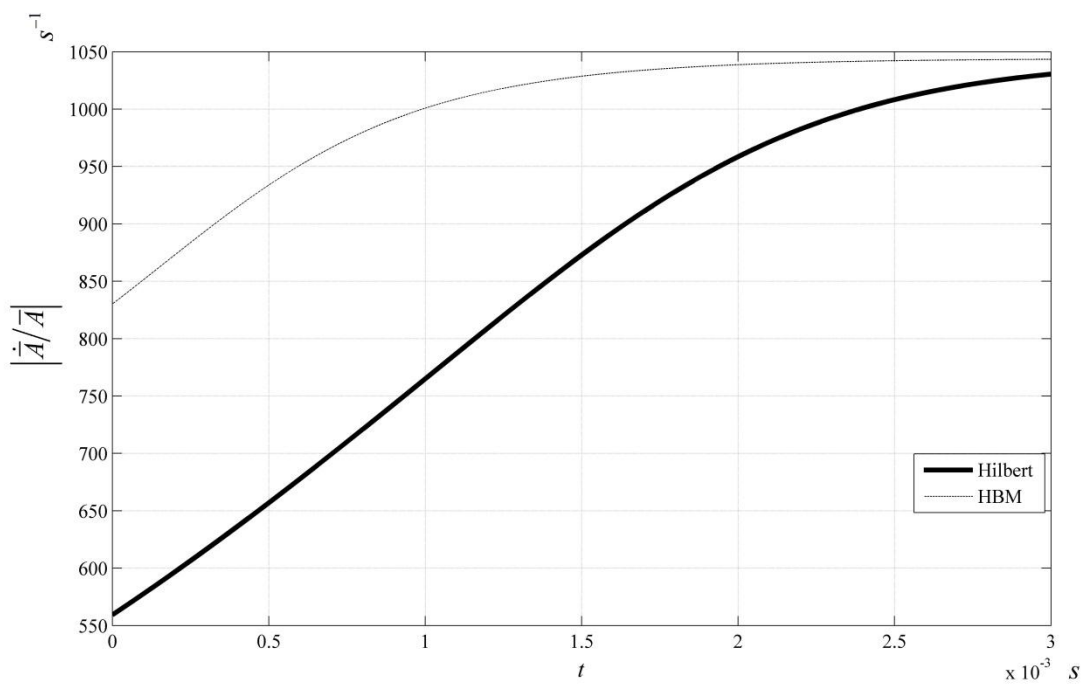


۳-۴ ب) فرکانس میرا  $L/h=15$  ،  $L=70 \mu m$  ،  $T=300 K$

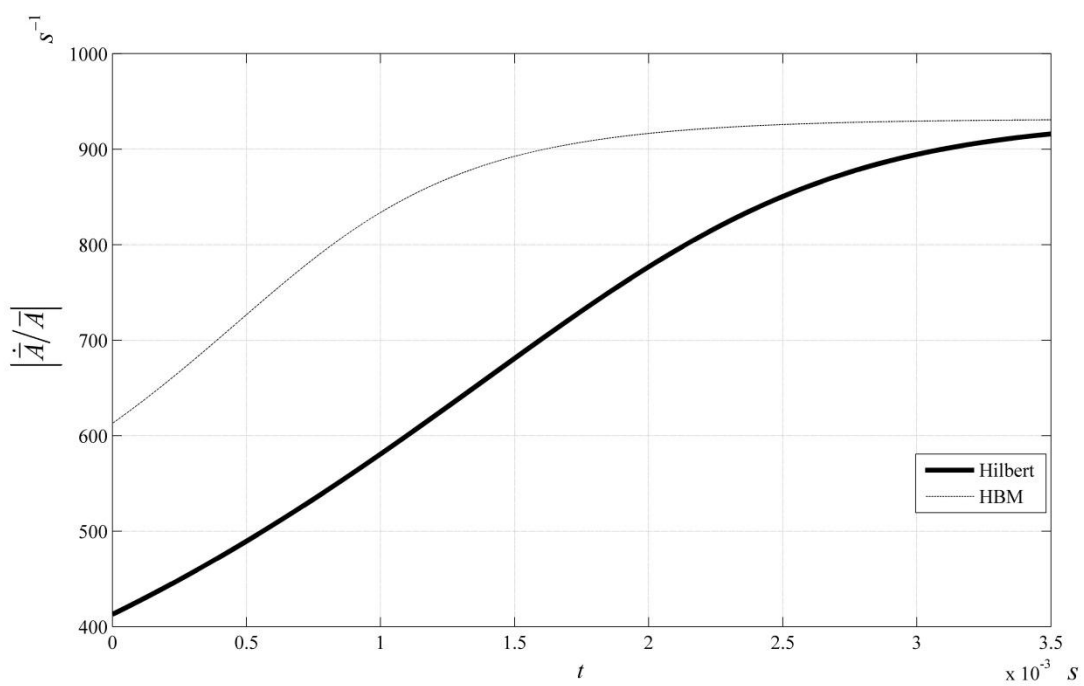


۳-۴ ج) فرکانس میرا  $L/h=15$  ،  $L=90 \mu m$  ،  $T=300 K$

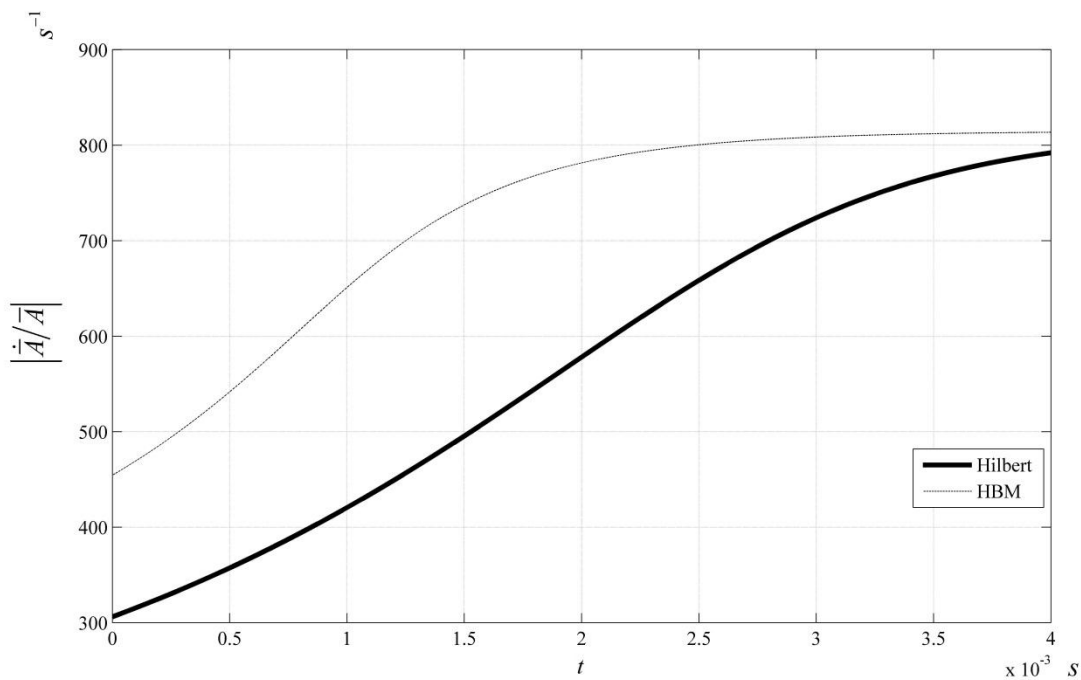




۴-۴ الف) فرکانس موهومی معادل  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$



۴-۴ ب) فرکانس موهومی معادل  $T = 300 \text{ K}$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$

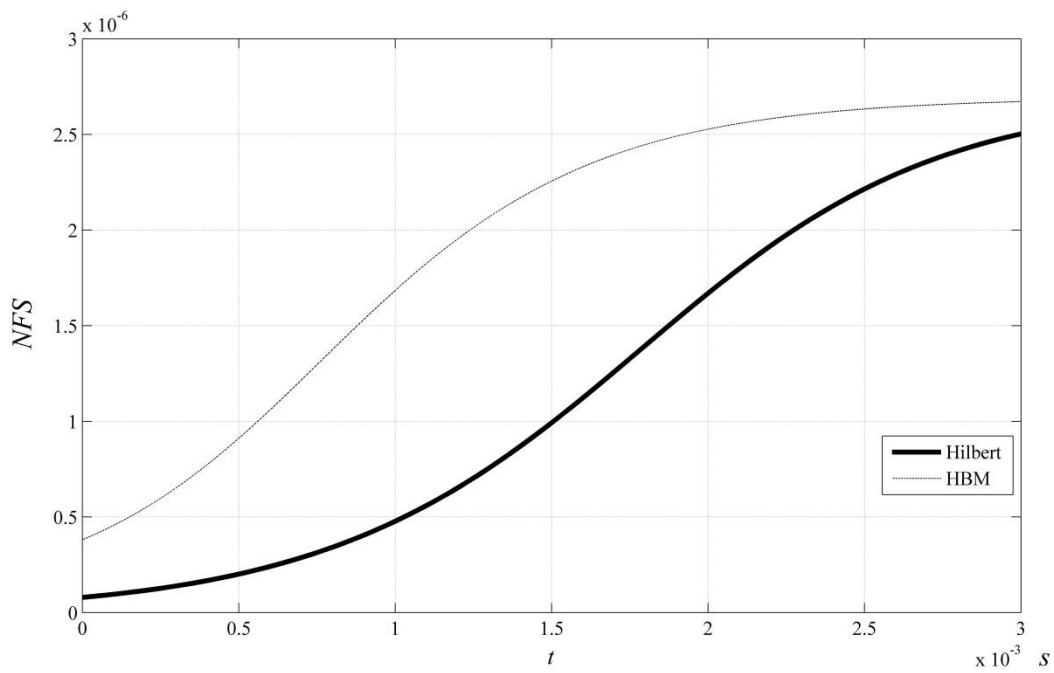


۴-۴ ج) فرکانس موهومی معادل  $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$

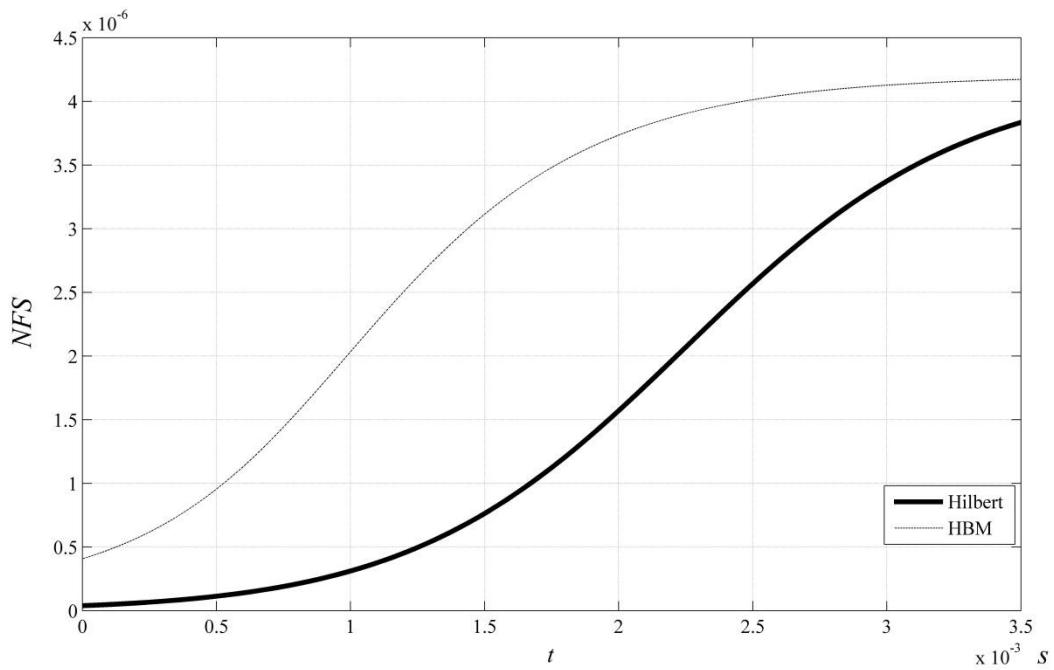
شکل های (۴-۵) ، تغییر نرمال فرکانس که به دلیل وجود میرایی در سیستم ایجاد می شود را نشان می دهد. تغییر نرمال فرکانس<sup>۱</sup> به صورت رابطه (۴-۵۲) تعریف شده که در آن  $\Delta E = \frac{E\alpha^2 T_0}{\rho c_v}$  بوده که همان مقدار معرفی شده در فصل دوم است. تغییر فرکانس با نسبت مشتق دوم دامنه نسبت به زمان و دامنه ارتباط دارد ولی نحوه ی اثر گذاری این نسبت در دو روش حل متفاوت است.

$$NFS = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta E \omega_0} \quad (۴-۵۲)$$

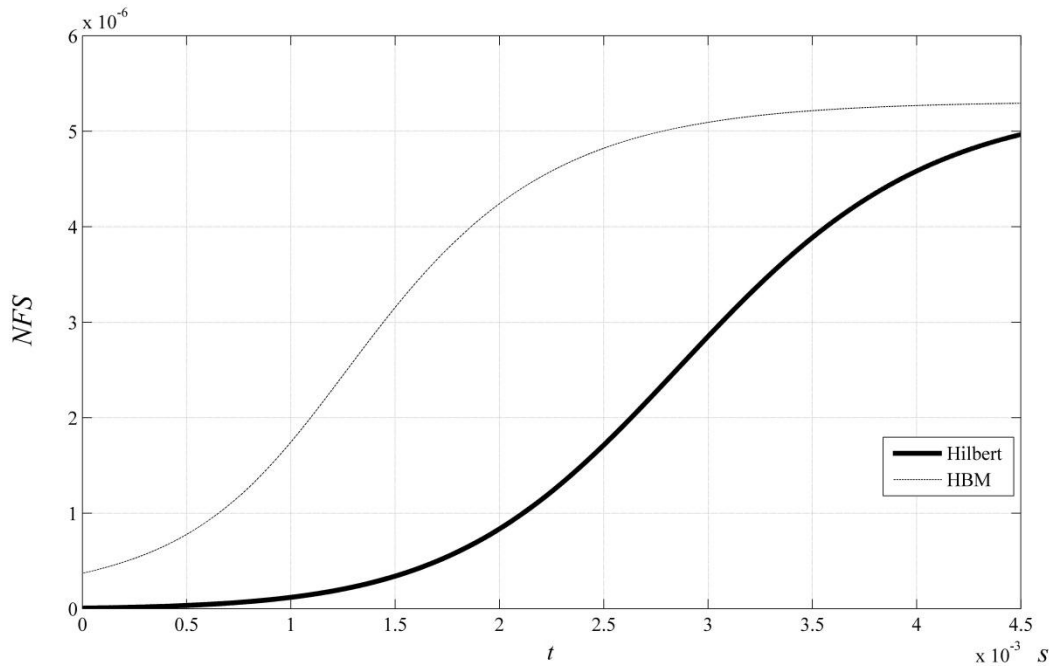
<sup>۱</sup> Normalized Frequency Shift



۴-۵ الف) تغییر نرمال فرکانس  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$



۴-۵ ب) تغییر نرمال فرکانس  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$



۴-۵ ج) تغییر نرمال فرکانس  $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$

شکل های (۴-۴) نشان می دهند که با کوچکتر شدن ابعاد تیر و بالا رفتن فرکانس طبیعی ، میرایی ترموالاستیک قوی تر می گردد. ولی تغییر نرمال فرکانس به صورت یک نسبت تعریف می شود. همان طور که در شکل های (۵-۴) مشخص است که علیرغم افزایش میرایی در سیستم های با ابعاد کوچک تر ، این نسبت نیز کوچک تر خواهد بود. به عبارت دیگر اثر گذاری میرایی ترموالاستیک بر فرکانس سیستم های کوچک تر ، کمتر خواهد بود.

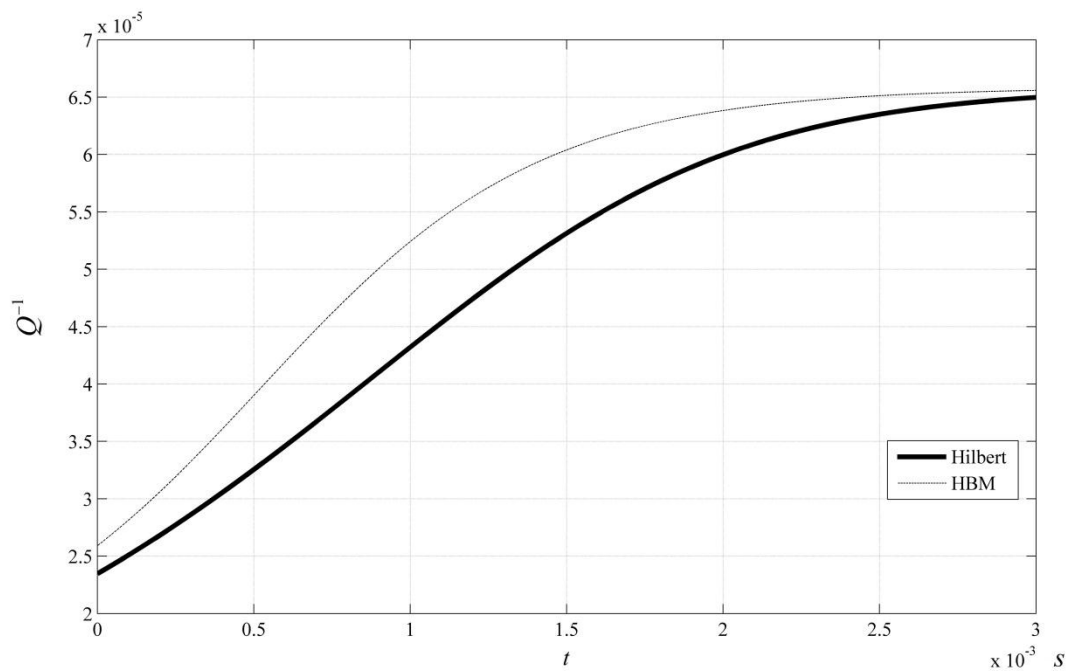
ضریب کیفیت به صورت رابطه (۴-۵۳) تعریف می شود که در آن  $E_{System}$  و  $E_{Loss}$  به ترتیب انرژی کل سیستم و انرژی از دست رفته در یک سیکل است. در صورتی که اثر میرایی فقط در کاهش دامنه در نظر گرفته شود ،  $Q^{-1}$  به صورت (۴-۵۴) ساده شده که در آن فرکانس مختلط است. اگر اثر میرایی را روی کاهش دامنه و فرکانس در نظر بگیریم ، آن گاه معکوس ضریب کیفیت مطابق (۴-۵۵) خواهد بود.

$$Q = 2\pi \frac{E_{System}}{E_{Loss}} \quad (۴-۵۳)$$

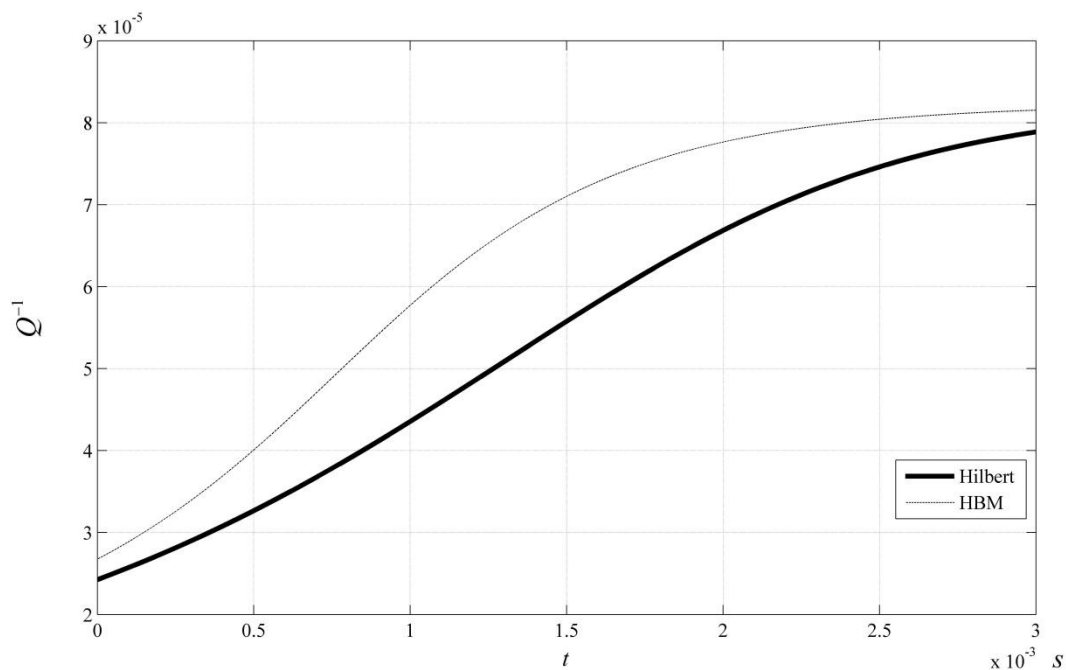
$$Q^{-1} = \frac{\pi \bar{A}^2 (2\xi\omega_n)\omega}{\pi \bar{A}^2 \omega^2} = \frac{2\xi\omega_n}{\omega} = \frac{2|\text{Im}[\Omega]|}{|\text{Re}[\Omega]|} \quad (۴-۵۴)$$

$$Q^{-1} = \frac{\pi \bar{A}^2 D_{eff}}{\pi \bar{A}^2 \omega^2} = \frac{D_{eff}}{\omega^2}$$

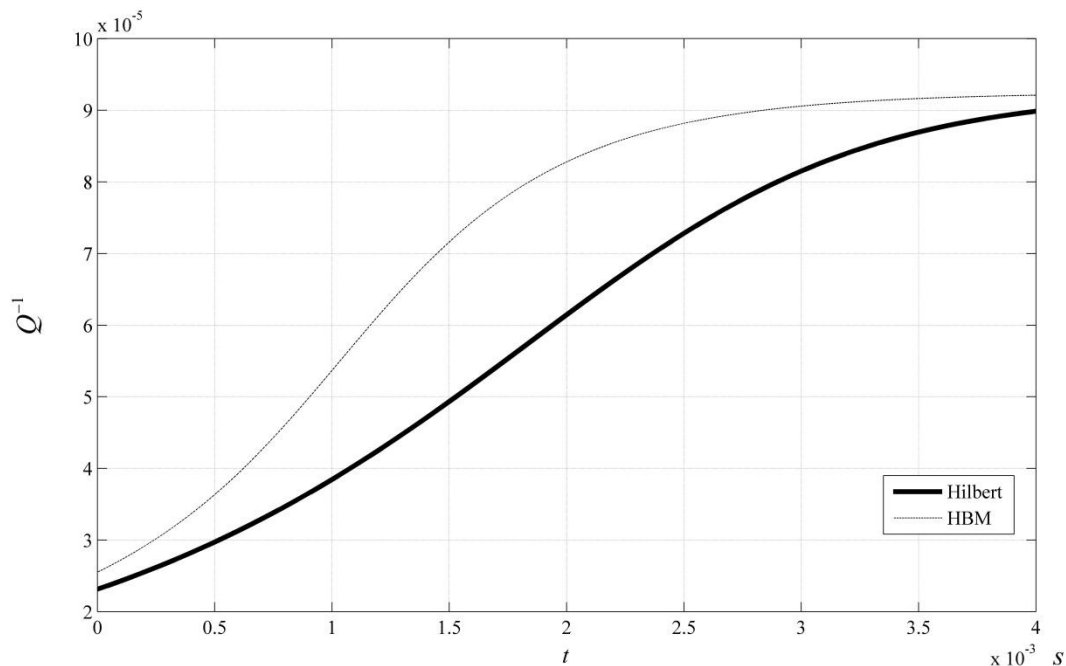
(۵۵-۴)



۶-۴ الف) معکوس ضریب کیفیت  $L/h=15$  ،  $L=50 \mu m$  ،  $T=300 K$



۶-۴ ب) معکوس ضریب کیفیت  $L/h=15$  ،  $L=70 \mu m$  ،  $T=300 K$

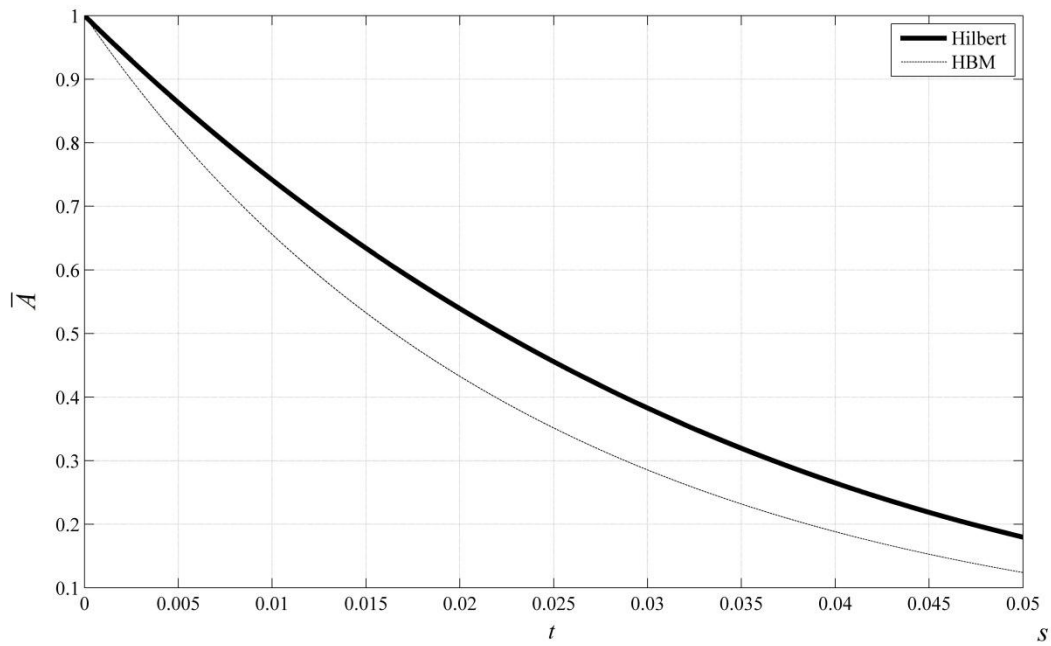


۴-۶ ج) معکوس ضریب کیفیت  $L/h=15$  ،  $L=90 \mu m$  ،  $T=300 K$

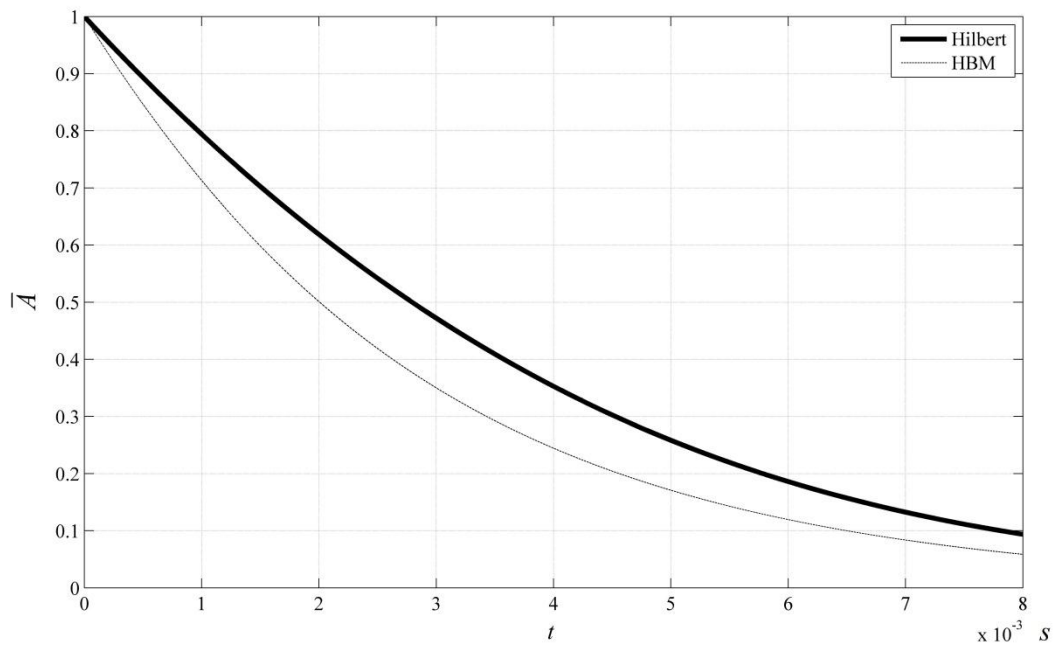
در حل (۱) انرژی از دست رفته ی سیستم مستقیم از معادله حرکت محاسبه می شود در صورتی که در حل (۲) ، این مقدار از اثر میرایی بر دامنه بدست می آید. از طرف دیگر به دلیل میرایی سریع تر دامنه ، فرکانس سیستم در حل (۲) همواره کمتر از حل (۱) است. این عوامل سبب اختلاف بین ضریب کیفیت های بدست آمده از دو روش شده است.

#### ۴-۱-۲. اثر دما

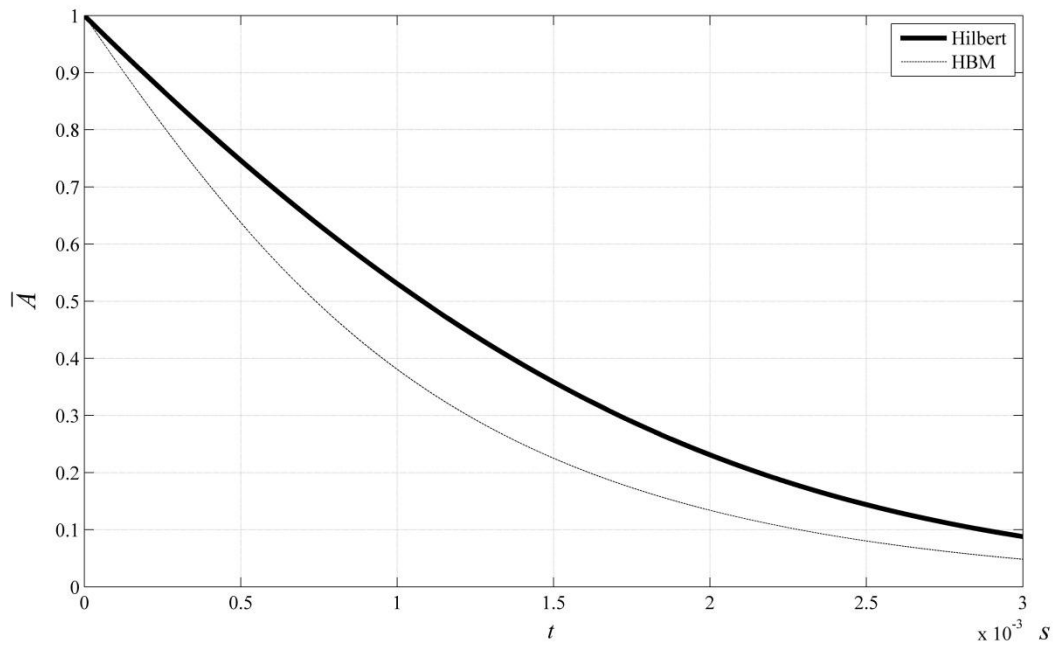
در این قسمت ابعاد تیر ثابت در نظر گرفته شده و اثر دمای سیستم بر روی میرایی ترموالاستیک بررسی می شود. از بررسی دمای بسیار زیاد صرف نظر شده است ، زیرا تغییر بعضی خواص مکانیکی هم چون مدول یانگ در دمای بالا زیاد بوده و به جز میرایی ترموالاستیک ، دیگر پارامتر های سیستم نیز دستخوش تغییر می گردند. دامنه ی نرمال ، مشتق دامنه ی نرمال نسبت به زمان ، فرکانس میرا ، نسبت اندازه ی مشتق دامنه نسبت به زمان بر دامنه ، تغییر نرمال فرکانس و معکوس ضریب کیفیت به ترتیب در شکل های (۴-۷) تا (۴-۱۲) برای سه دمای  $200 K$  ،  $300 K$  و  $400 K$  نشان داده شده است. دلایل اختلاف بین حل های (۱) و (۲) مشابه بخش ۴-۱-۱ است. همچنین هر چه میرایی سیستم کم تر باشد ، خطای ناشی از صرف نظر کردن تغییرات فرکانس نسبت به زمان بزرگ تر می شود. این موضوع در شکل های مربوط به دمای  $200 K$  کاملاً مشهود است.



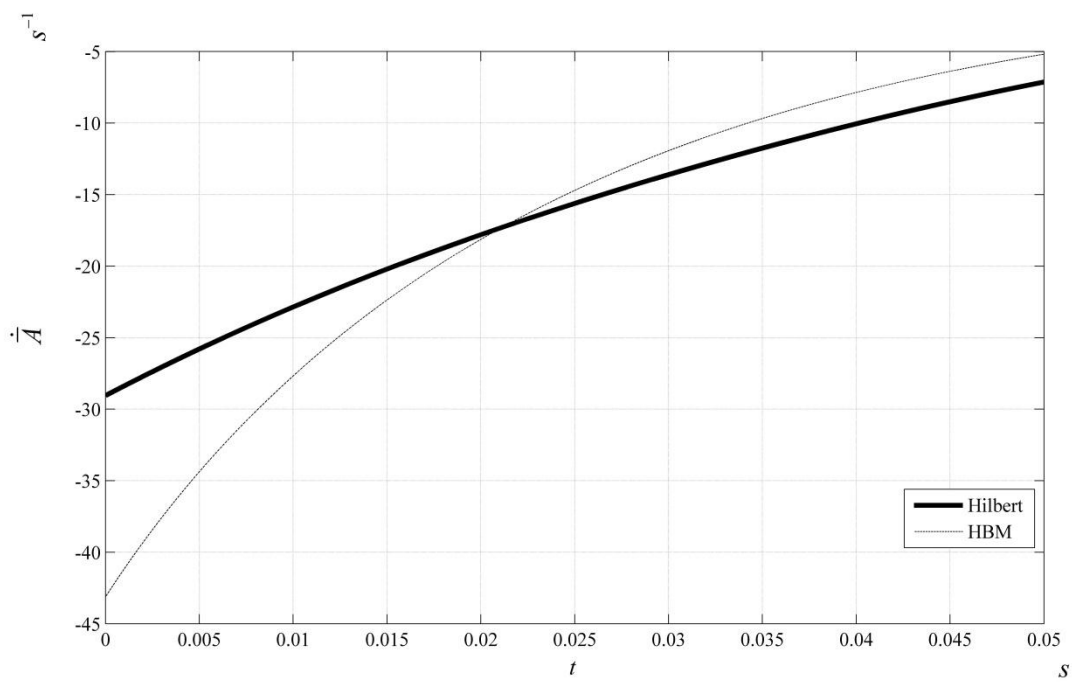
۴-۷ الف) دامنه نرمال  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



۴-۷ ب) دامنه نرمال  $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$

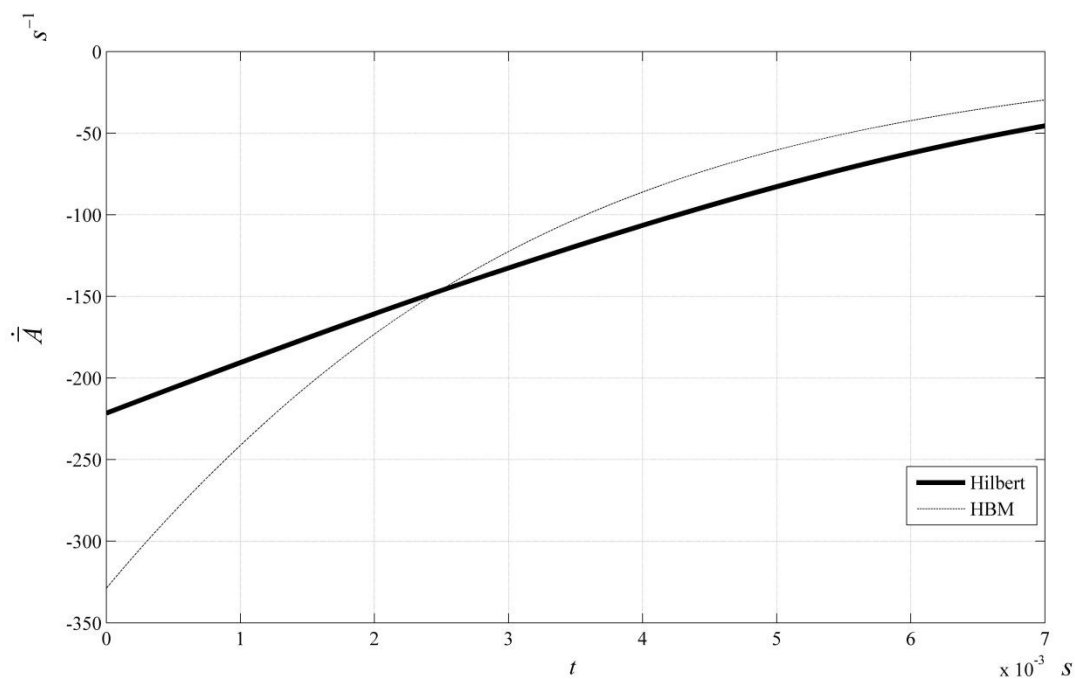


۴-۷) دامنہ نرمال  $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$

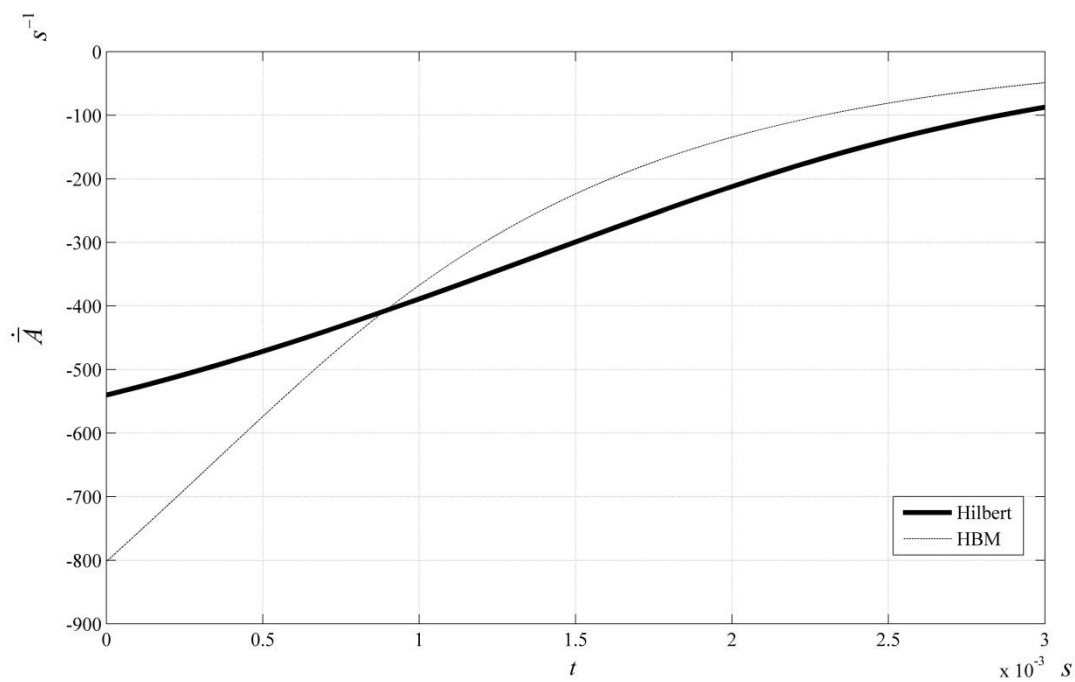


۴-۸) مشتق دامنہ نرمال نسبت به زمان  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$

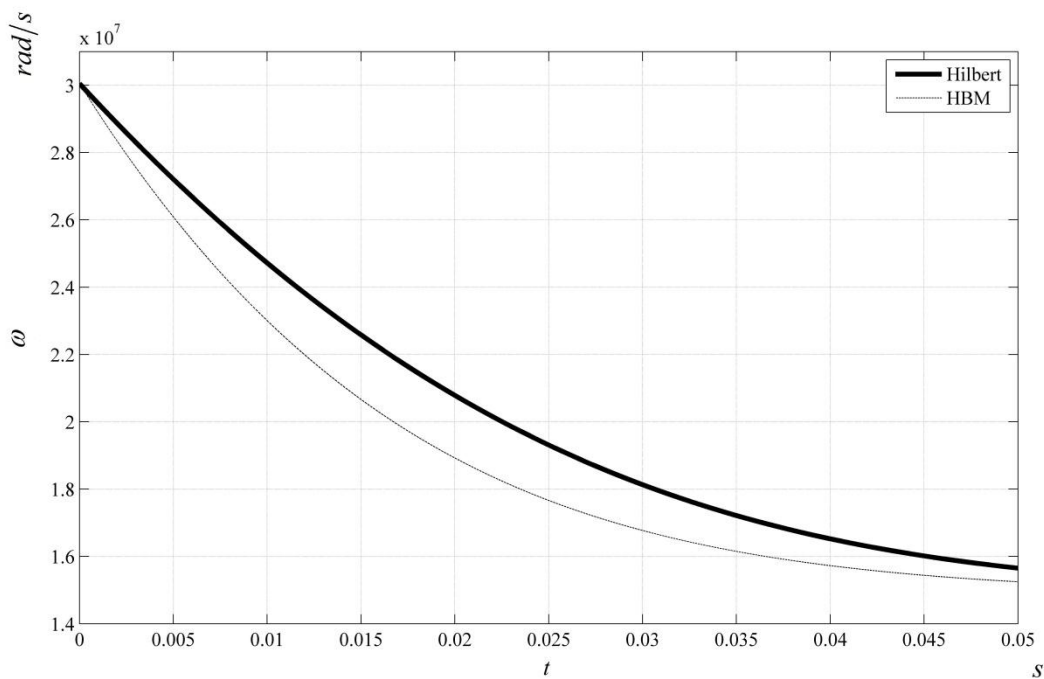




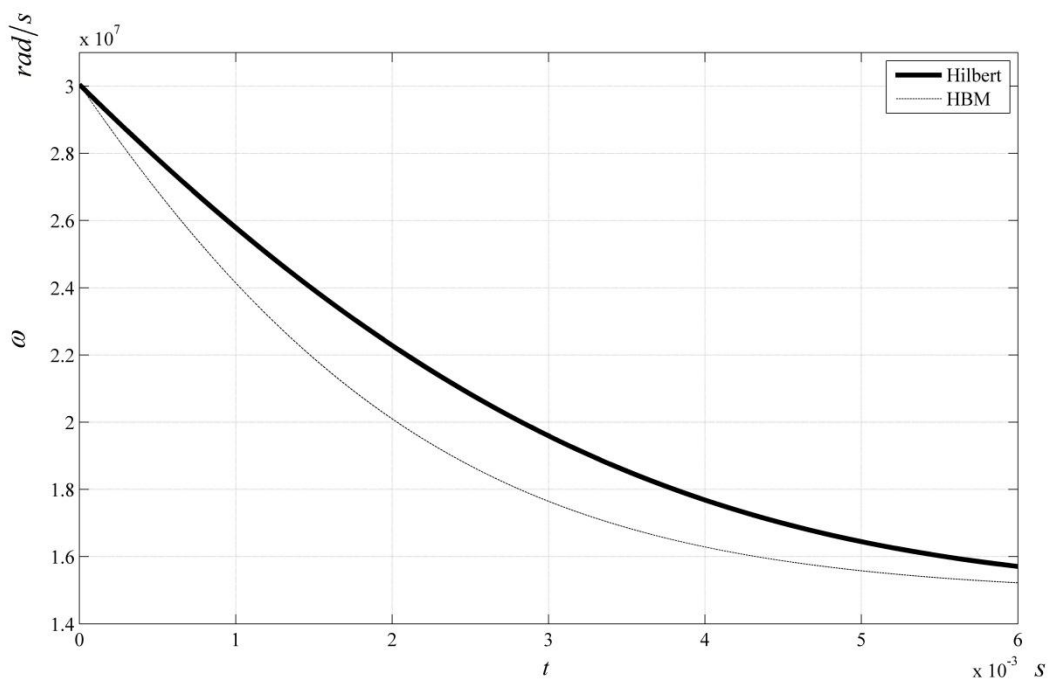
۸-۴ ب) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



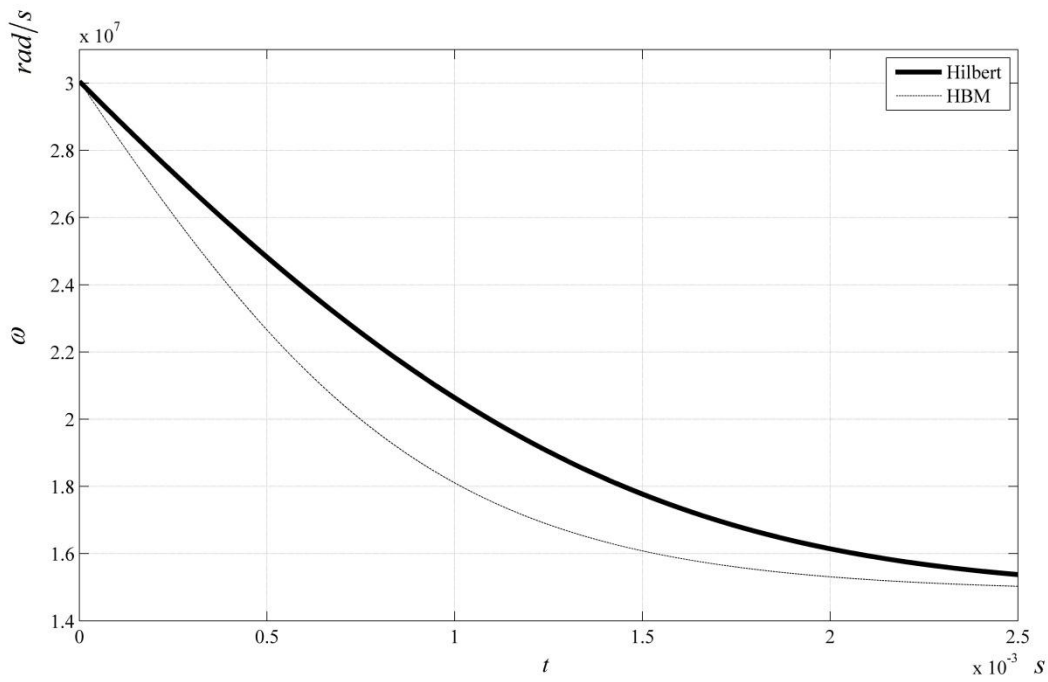
۸-۴ ج) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



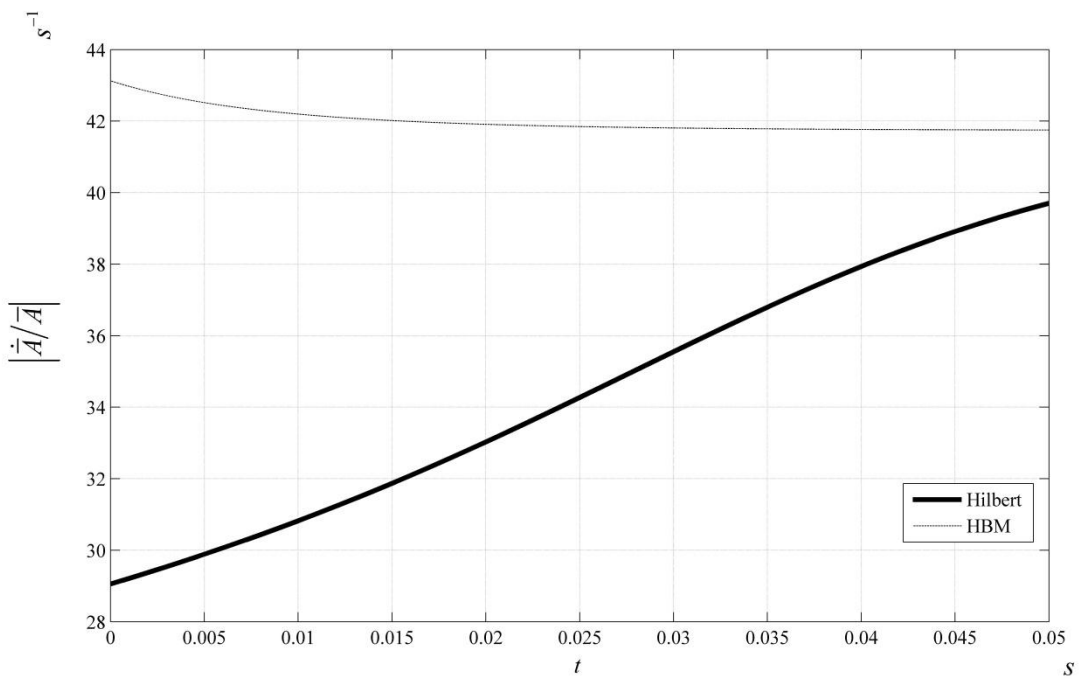
۹-۴ الف) فرکانس میرا  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



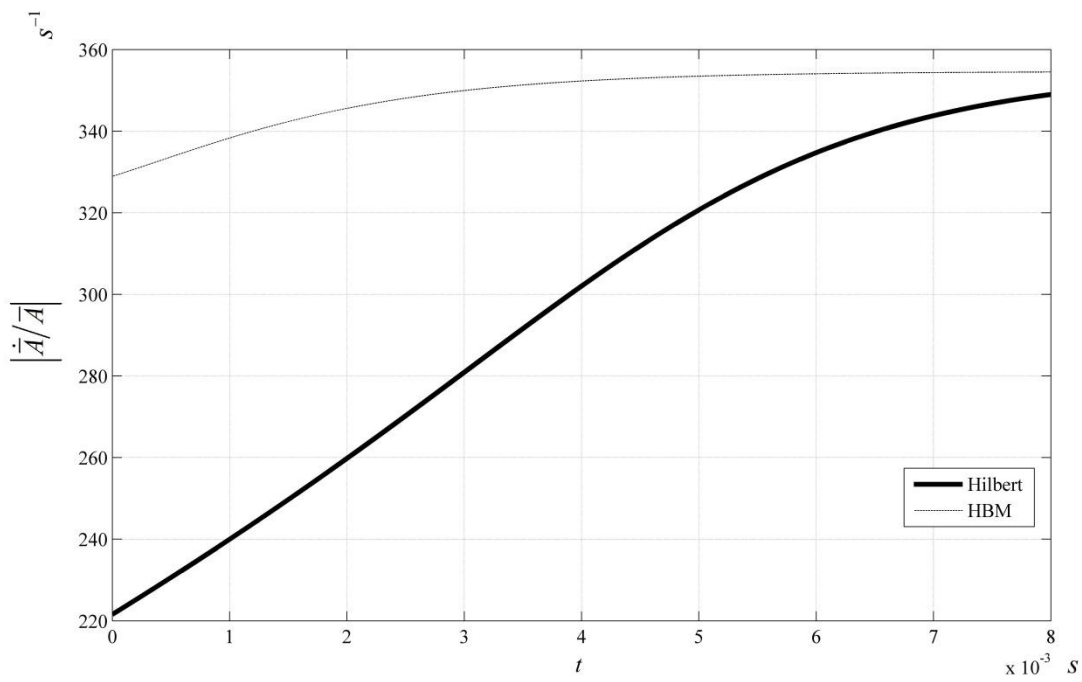
۹-۴ ب) فرکانس میرا  $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



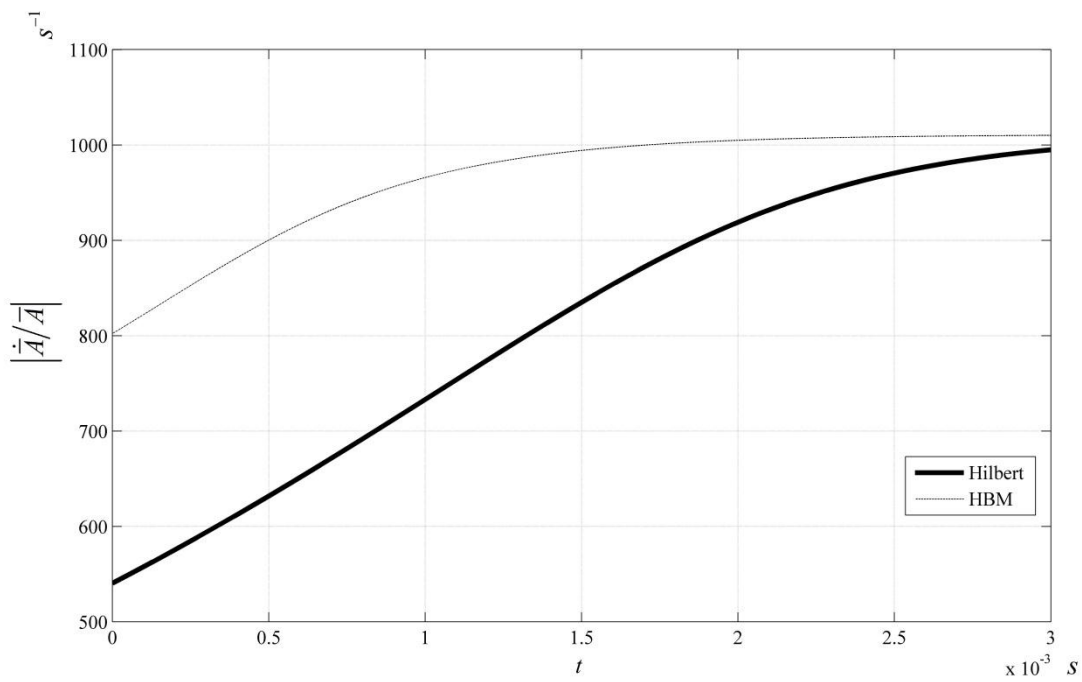
۴-۹ (ج) فرکانس میرا  $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



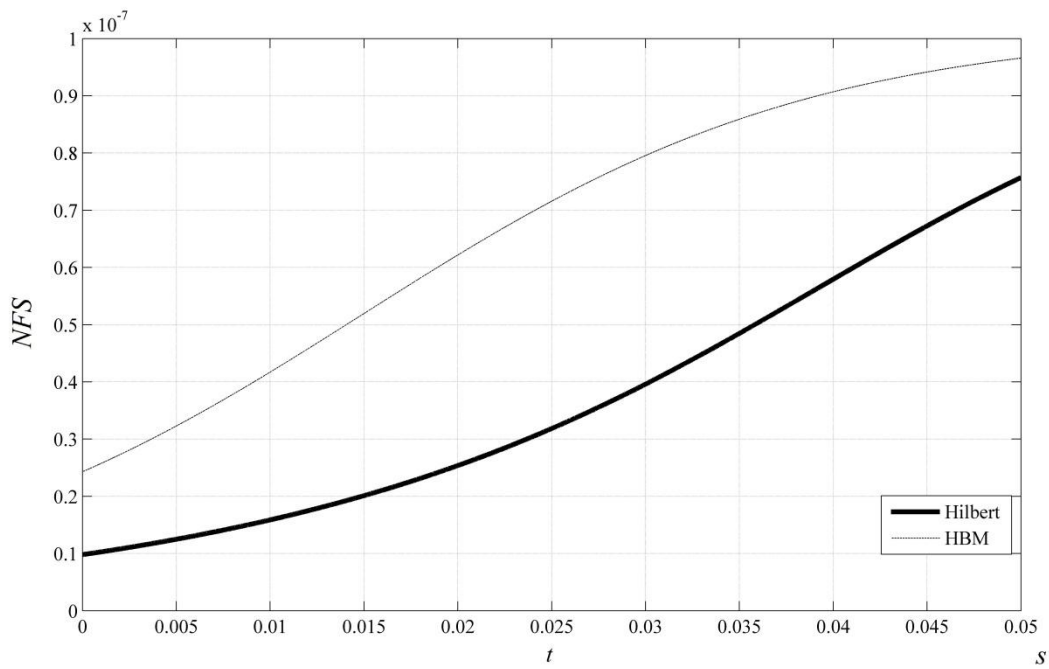
۴-۱۰ (الف) فرکانس موهومی معادل  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



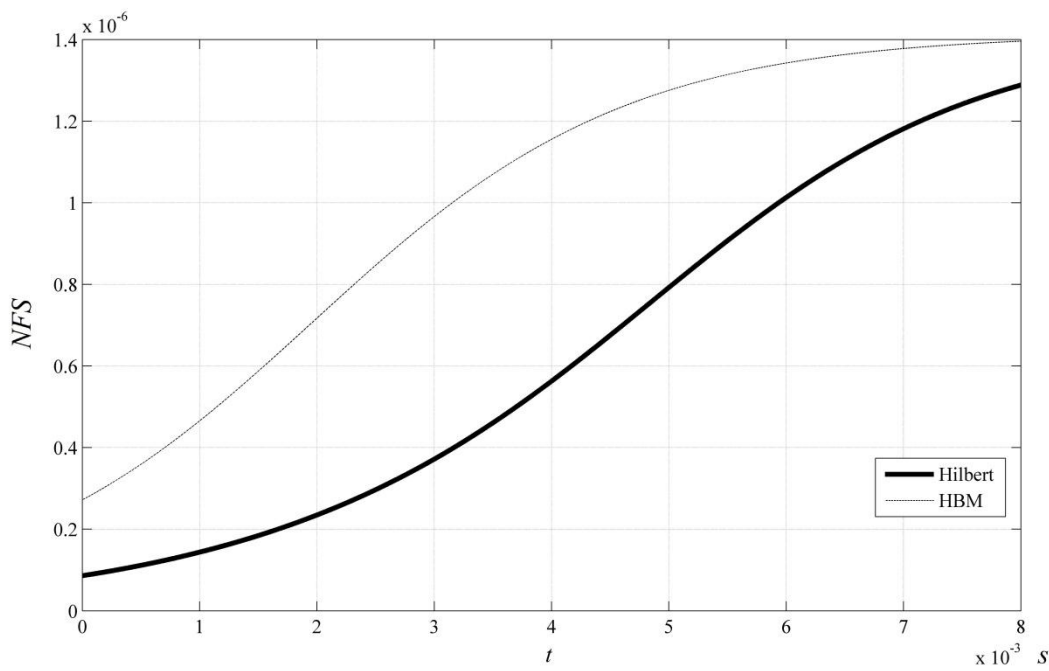
۴-۱۰ ب) فرکانس موهومی معادل  $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



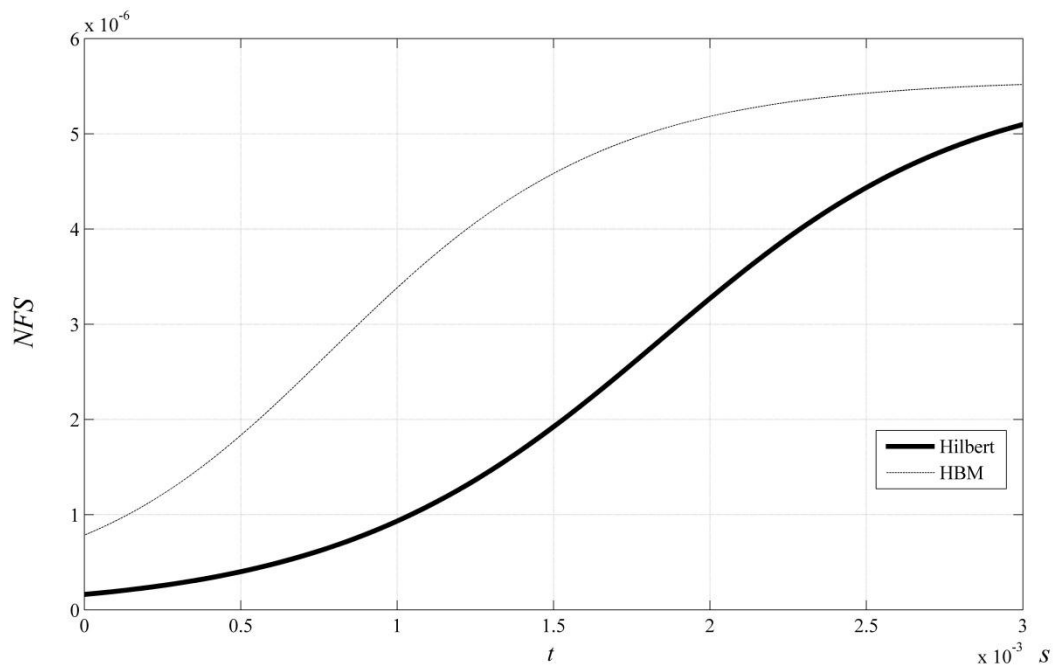
۴-۱۰ ج) فرکانس موهومی معادل  $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



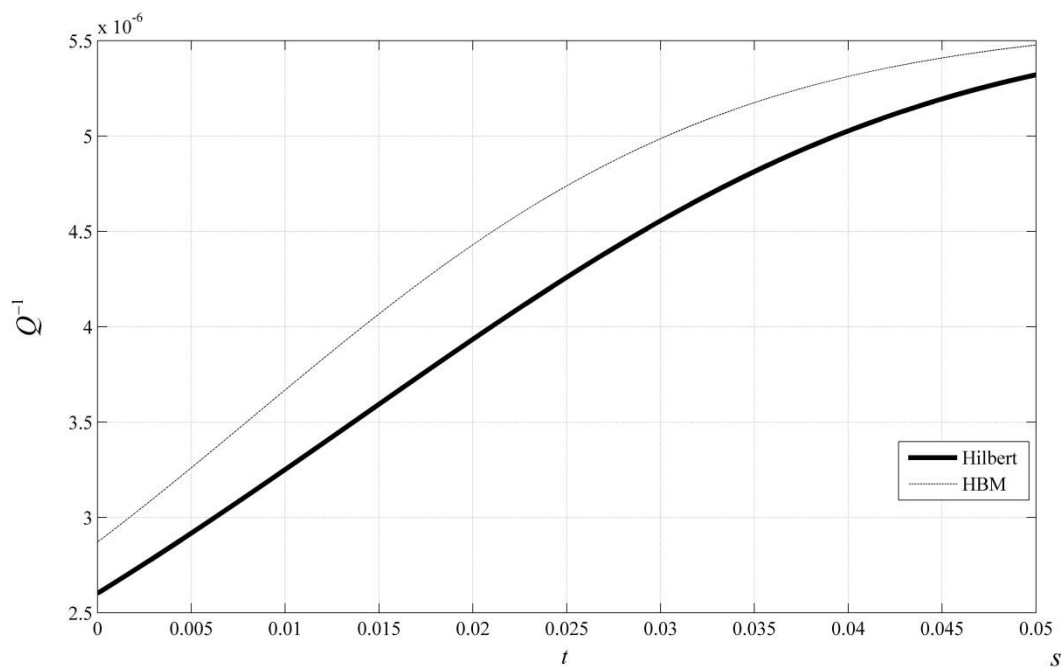
۴-۱۱ الف) تغییر نرمال فرکانس  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



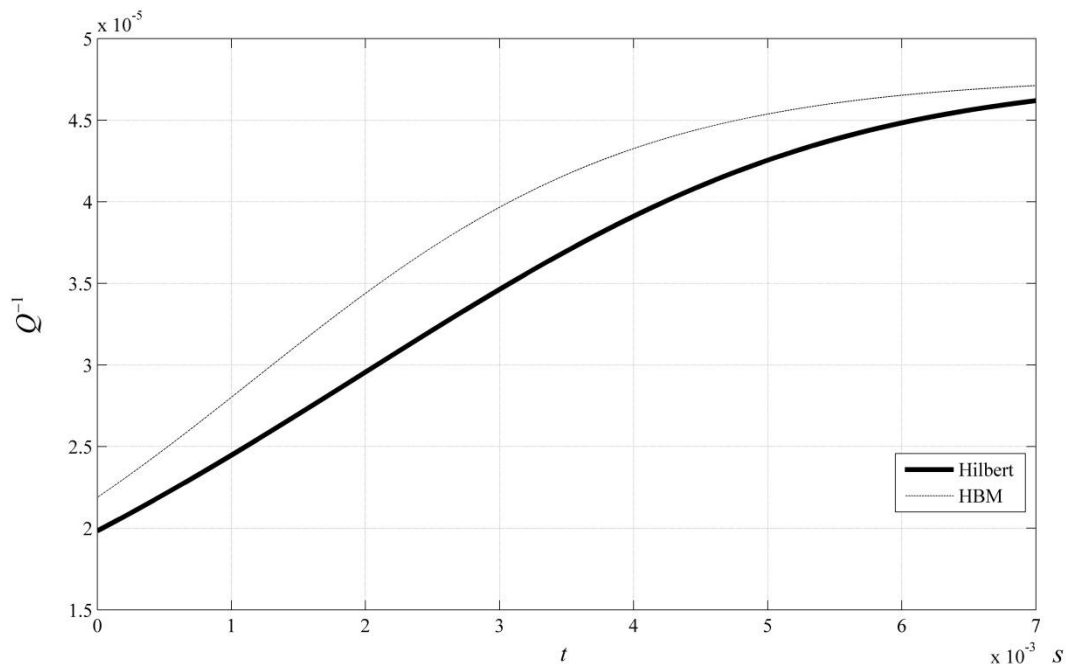
۴-۱۱ ب) تغییر نرمال فرکانس  $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



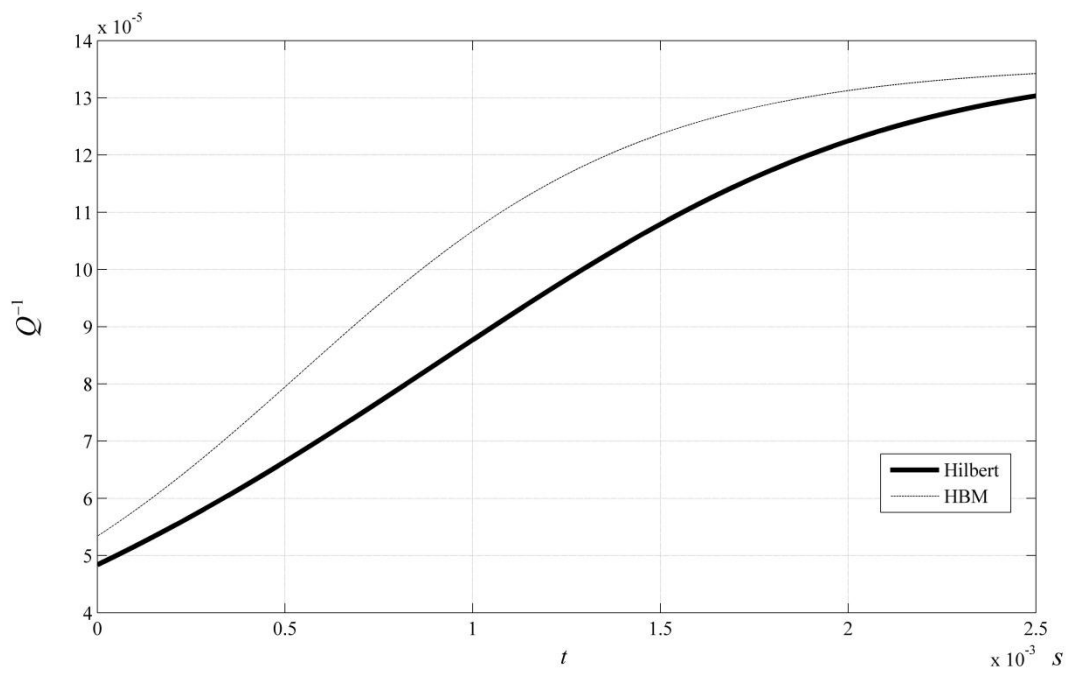
۴-۱۱ (ج) تغییر نرمال فرکانس  $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



۴-۱۲ (الف) معکوس ضریب کیفیت  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



۱۲-۴ ب) معکوس ضریب کیفیت  $T = 300\text{ K}$  ،  $L = 80\ \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$



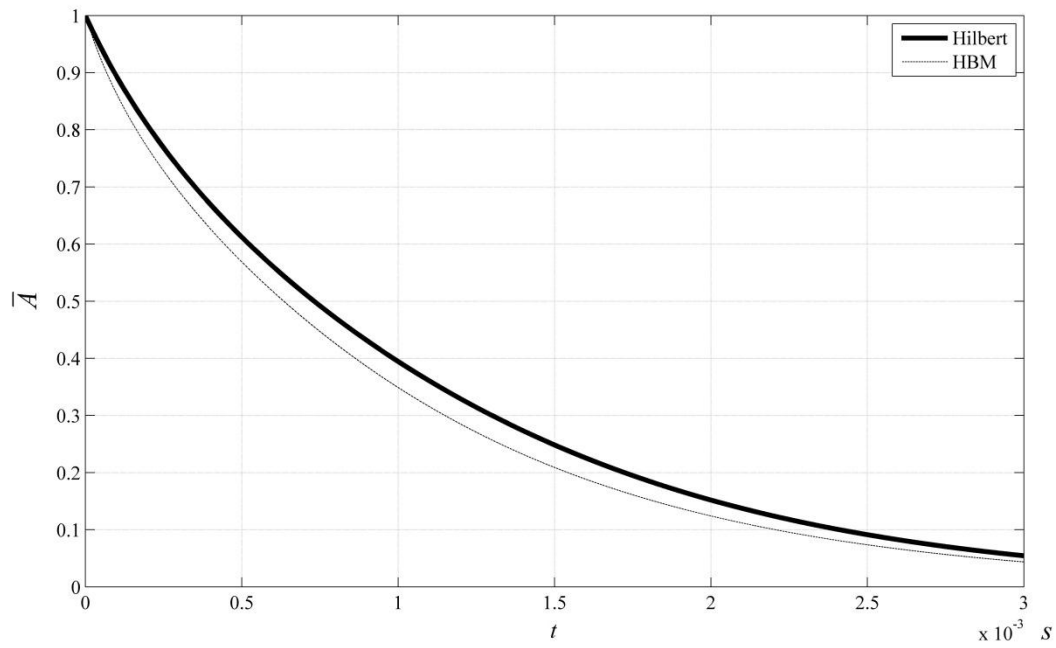
۱۲-۴ ج) معکوس ضریب کیفیت  $T = 400\text{ K}$  ،  $L = 80\ \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$

یکی از تفاوت‌های اصلی بررسی ارتعاش غیر خطی تیر با کمک مودهای غیر خطی نسبت به دیگر روش‌ها همچون گلرکین، حضور میرایی غیر خطی برای تیر میکرو در سیستم معادل یک درجه آزادی در حرکت تک مودی است. در این حالت مطابق معادله (۴-۴۸) بوده و پاسخ بالانس هارمونیکی از یکی از جفت روابط (۴-۱۱) و (۴-۱۲) یا (۴-۱۴) و (۴-۱۵) بدست می‌آید. در بخش ۴-۴-۱ اشاره شد که صرفنظر از کاهش انرژی سیستم به واسطه ی کاهش فرکانس، منجر به بروز خطا در محاسبات مربوط به دامنه و فرکانس شده و از آن جایی که میرایی ترموالاستیک تابع فرکانس است، در محاسبات مربوط به میرایی سیستم نیز خطا وارد می‌شود. بنابر رابطه ی (۴-۴۸) وابستگی میرایی غیر خطی به فرکانس بسیار بیشتر از میرایی خطی بوده و این عامل خود موجب بوجود آمدن تفاوت‌های بیشتری بین حل‌های (۱) و (۲) می‌گردد. در نظر گرفتن این ترم غیر خطی موجب زیاد شدن میرایی موثر سیستم شده و مدت زمان پاسخ گذرا را کاهش می‌دهد. همچنین تغییر تابع میرایی موثر سبب بوجود آمدن اکستریمم نسبی در فرکانس موهومی معادل، تغییر نرمال فرکانس و معکوس ضریب کیفیت می‌گردد.

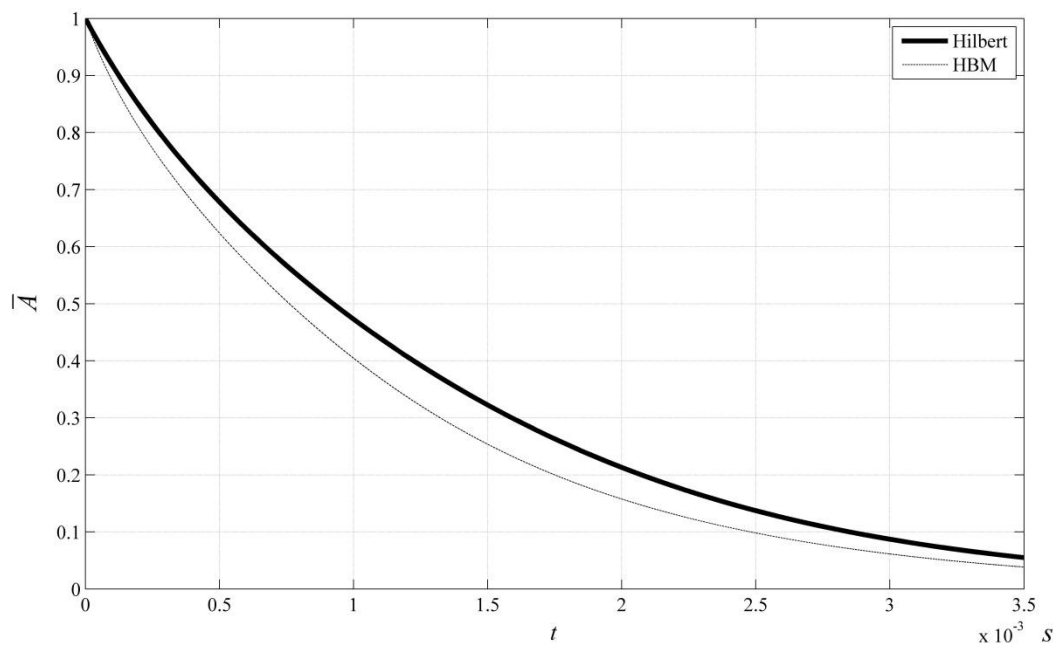
#### ۴-۴-۲-۱. اثر طول تیر

در این بخش نیز همانند بخش ۴-۴-۱-۱ نسبت طول به ارتفاع سطح مقطع ثابت در نظر گرفته شده و پاسخ سیستم برای طول‌های متفاوت رسم شده و ارتباط میرایی با فرکانس از دوره ی زمانی پاسخ گذرا قابل ملاحظه است. دامنه نرمال و مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان در شکل‌های (۴-۱۳) و (۴-۱۴) رسم شده است. تفاوت بارز بین شکل‌های (۴-۱۳) و (۴-۱) یا (۴-۱۴) و (۴-۲) کاهش اختلاف بین حل (۱) و (۲) است. با کاهش دامنه، فرکانس نیز به تبع از آن کاهش می‌یابد. رابطه (۴-۴۸) بیان‌گر حساسیت زیاد میرایی به فرکانس است. این ارتباط به گونه ای است که با اندک تغییر در فرکانس، میرایی موثر سیستم به اندازه ی قابل ملاحظه ای متفاوت خواهد بود. دامنه ی محاسبه شده در حل (۲) کمتر از حل (۱) است و این امر سبب کاهش میرایی در حل (۲) و جلوگیری از ازدیاد اختلاف بین دو حل می‌گردد. همین موضوع سبب می‌گردد که در شکل‌های (۴-۱۴) اختلاف بین حل (۱) و (۲) برای مشتق دامنه نسبت به زمان به سرعت کاهش پیدا کند.

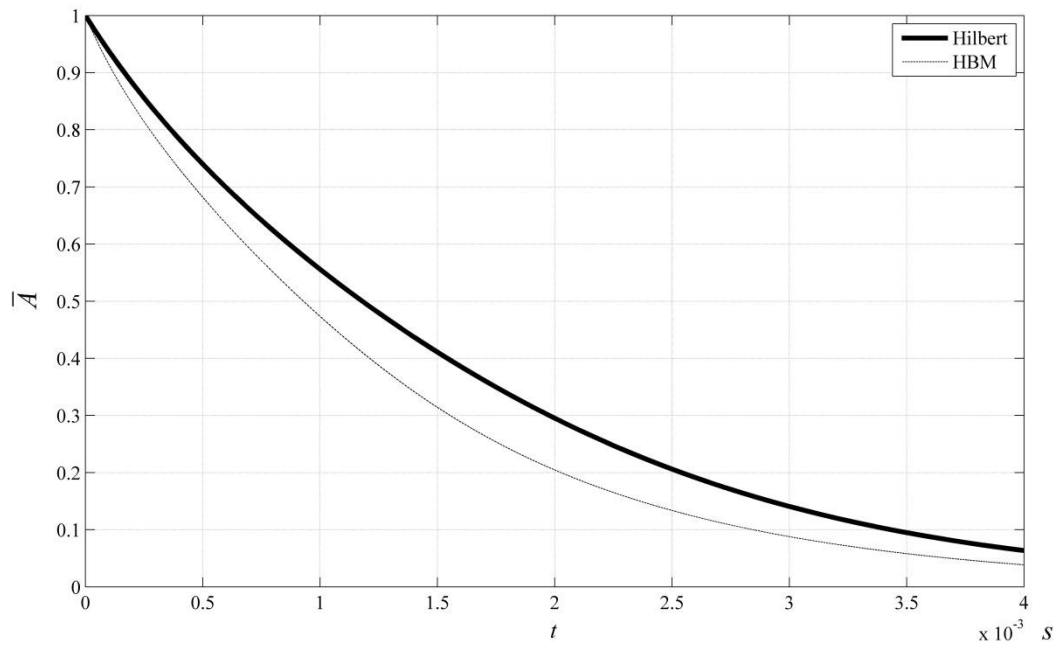




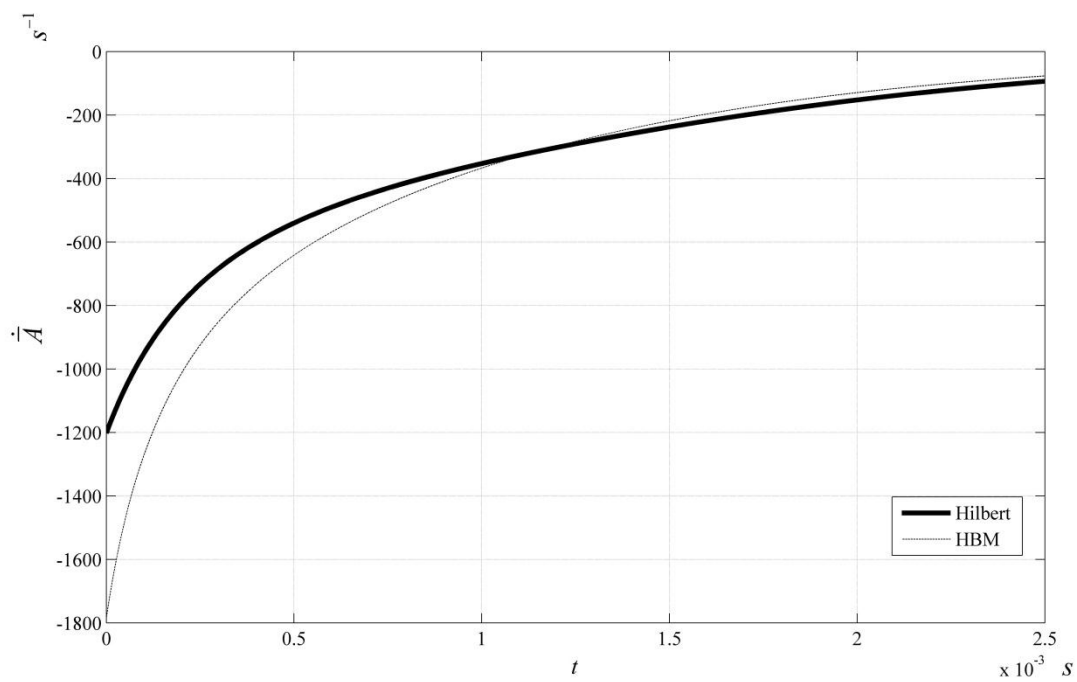
۱۳-۴ الف) دامنہ نرمال  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$



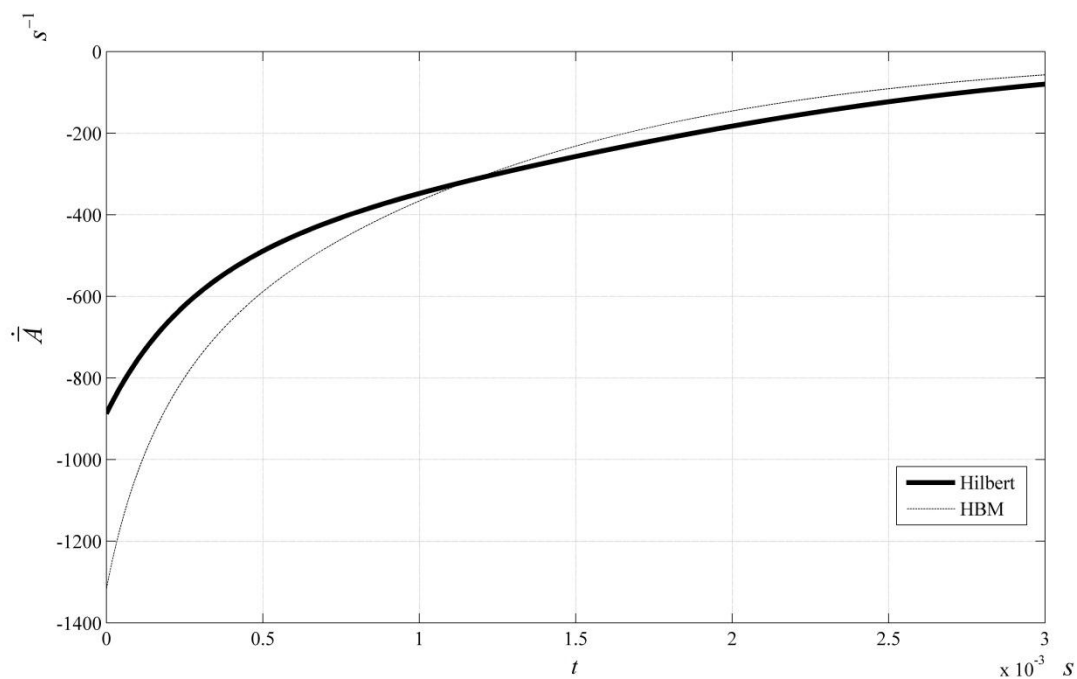
۱۲-۴ ب) دامنہ نرمال  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$



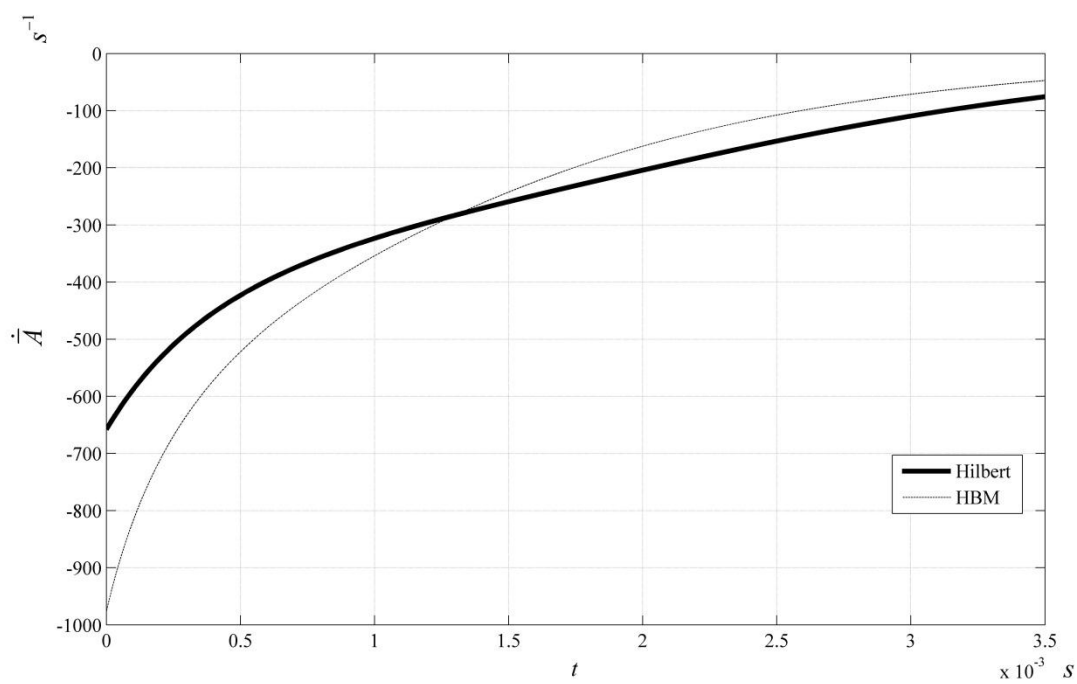
۴-۱۳) دامنه نرمال  $L/h=15$  ،  $L=90 \mu m$  ،  $T=300 K$



۴-۱۴) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $L/h=15$  ،  $L=50 \mu m$  ،  $T=300 K$

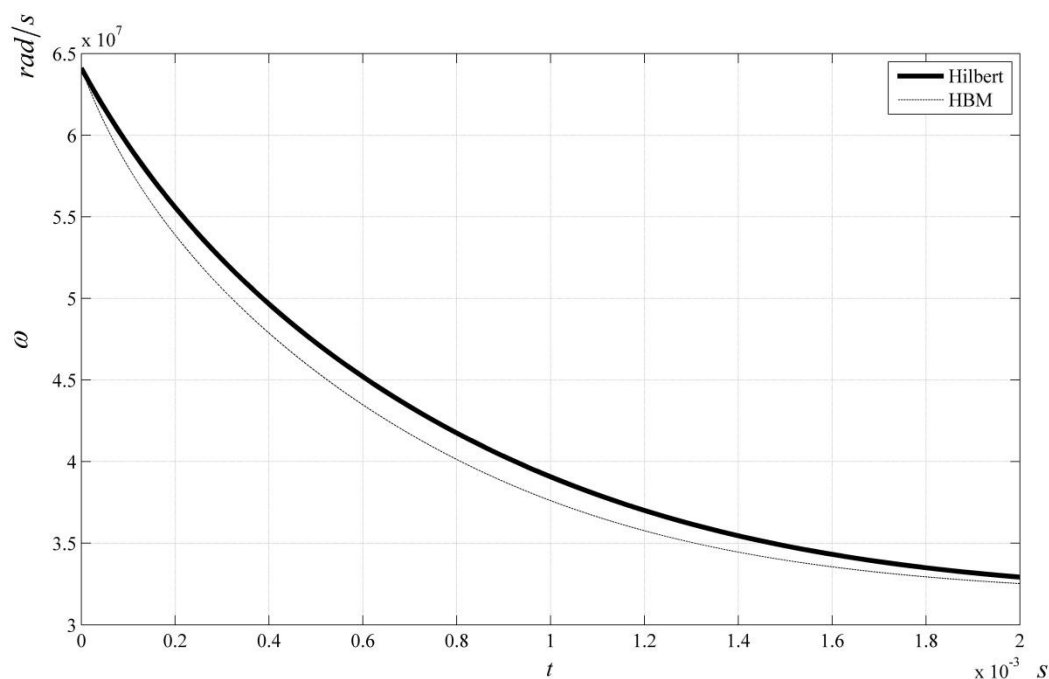


۴-۱۴ ب) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 300\text{ K}$  ،  $L = 70\ \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$

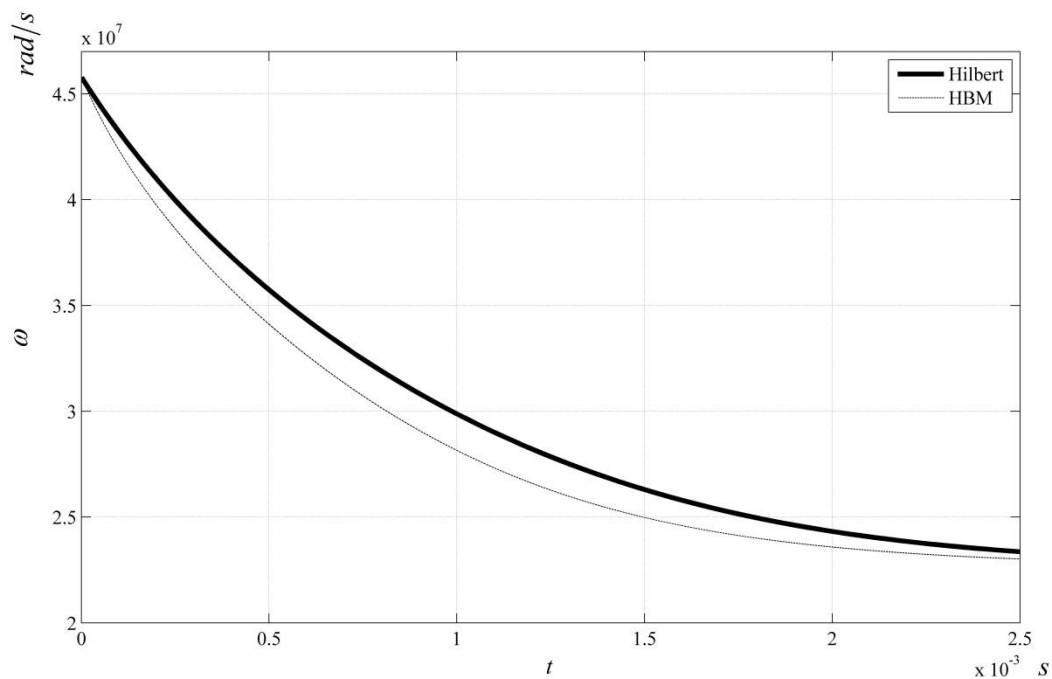


۴-۱۴ ج) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 300\text{ K}$  ،  $L = 90\ \mu\text{m}$  ،  $L/h = 15$

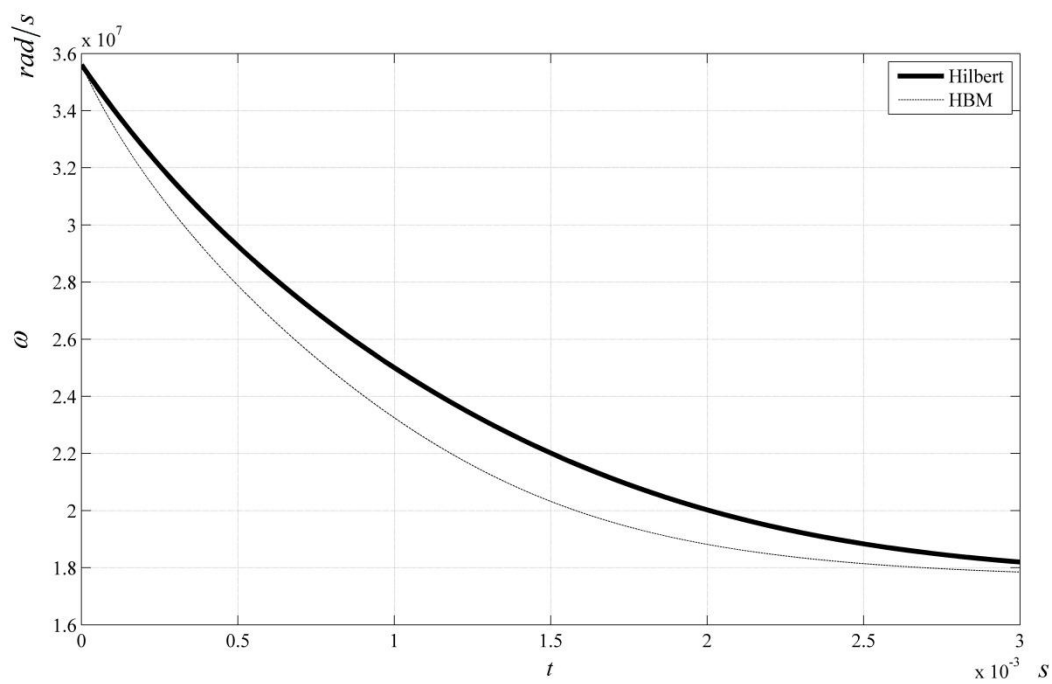
فرکانس میرا و فرکانس موهومی معادل به ترتیب در شکل های (۴-۱۵) و (۴-۱۶) نسبت به زمان رسم شده اند. از آن جایی که فرکانس تابع دامنه است ، کمتر شدن اختلاف بین دامنه ها در حل های (۱) و (۲) سبب کاهش اختلاف بین فرکانس نیز می گردد. روند تغییرات فرکانس موهومی معادل نسبت به زمان کاملا متفاوت با زمانی است که میرایی سیستم خطی باشد. زیرا تابع میرایی معادل کاملا متفاوت بوده و این امر سبب پیدایش نقاط اکسترمم در بعضی پارامتر های پاسخ گذرا می شود. در ابتدا کاهش مشتق دامنه نسبت به زمان بیشتر از کاهش دامنه بوده و از یک مرحله به بعد این روند معکوس خواهد شد. به دلیل آن که فرکانس موهومی معادل نشان دهنده ی اثر میرایی بر روی دامنه است ، همچنان اختلاف قابل توجه بین دو حل مشاهده می شود.



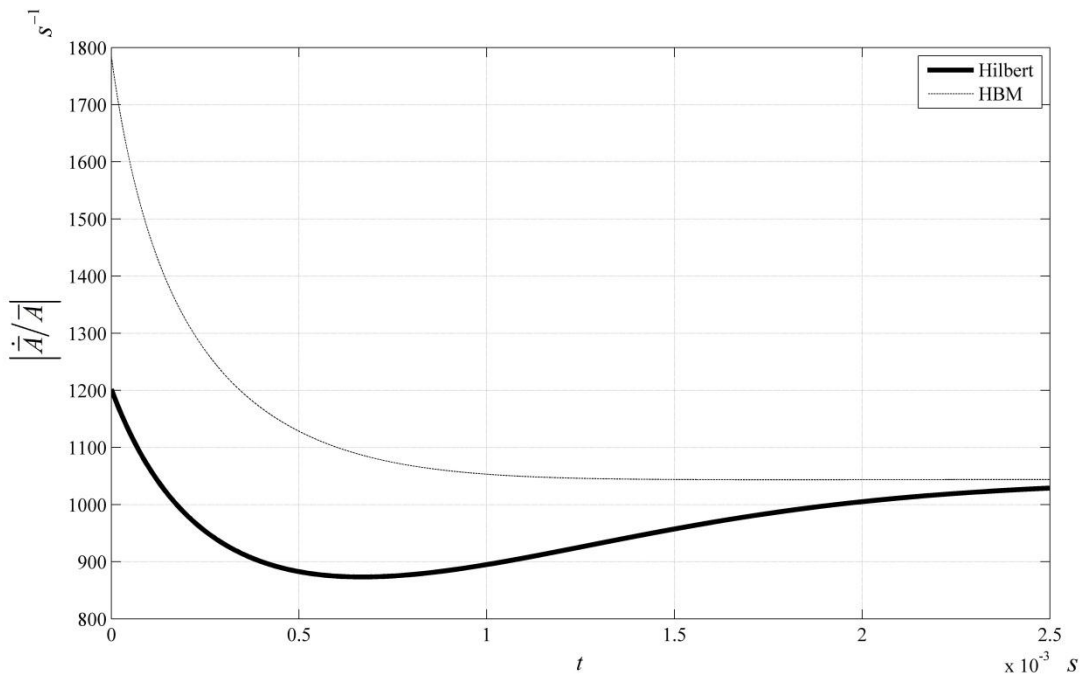
۴-۱۵ الف) فرکانس میرا  $L/h=15$  ،  $L=50 \mu m$  ،  $T=300 K$



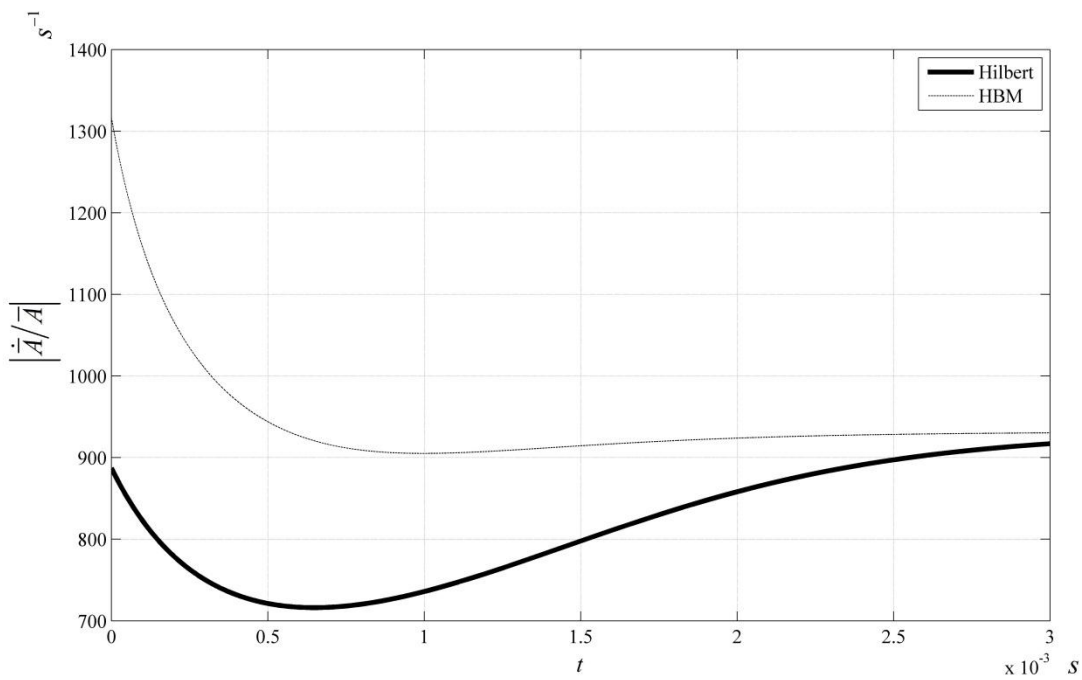
۴-۱۵ (ب) فرکانس میرا  $L/h=15$  ،  $L=70 \mu m$  ،  $T=300 K$



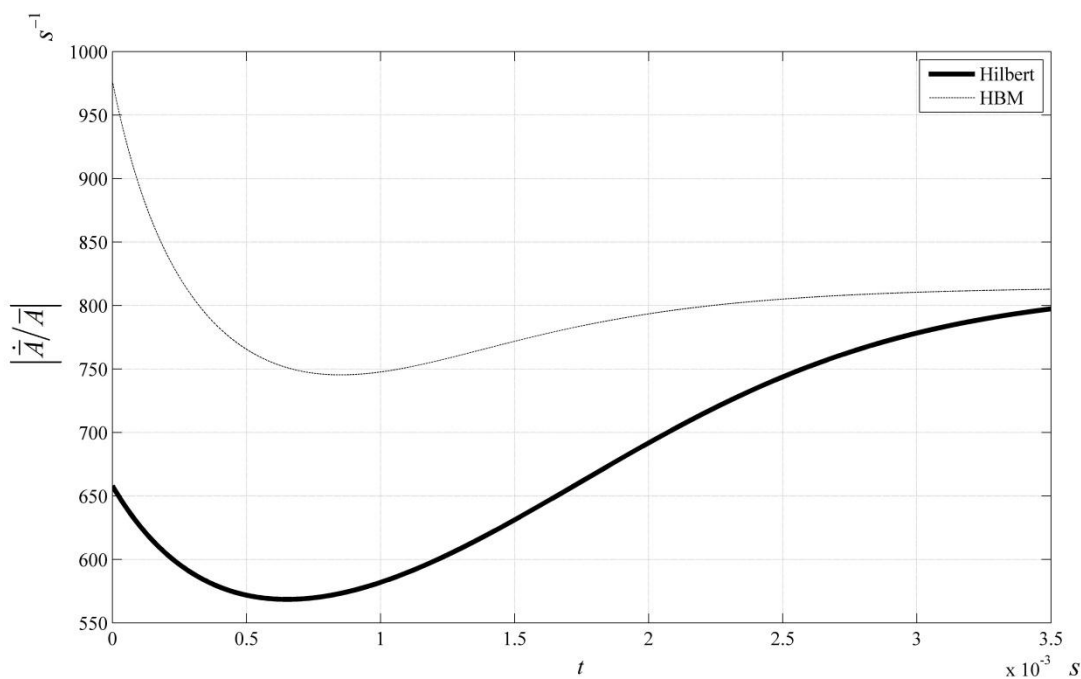
۴-۱۵ (ج) فرکانس میرا  $L/h=15$  ،  $L=90 \mu m$  ،  $T=300 K$



۴-۱۶ الف) فرکانس موهومی معادل  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$

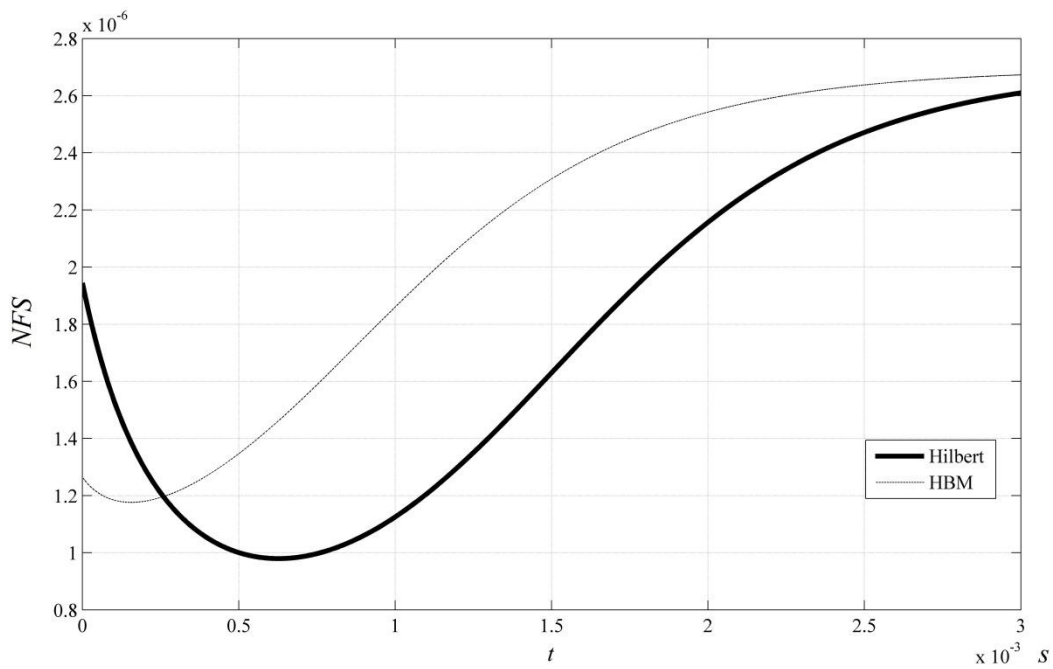


۴-۱۶ ب) فرکانس موهومی معادل  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$

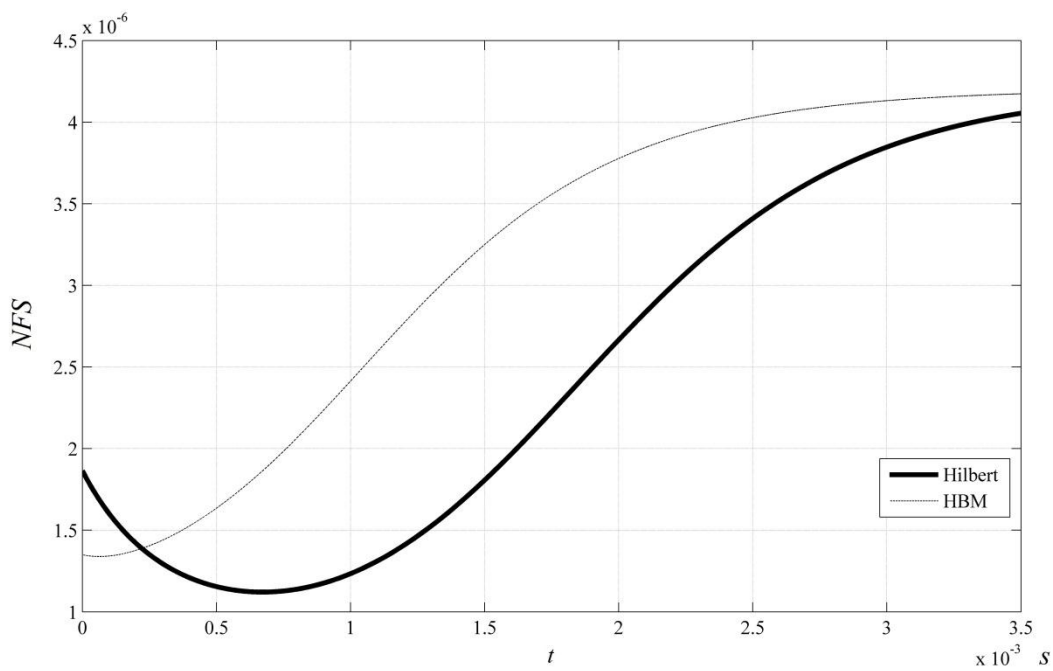


۱۶-۴ ج) فرکانس موهومی معادل  $L/h=15$  ،  $L=90 \mu m$  ،  $T=300 K$

تغییر نرمال فرکانس و معکوس ضریب کیفیت به ترتیب در شکل های (۴-۱۷) و (۴-۱۸) نسبت به زمان رسم شده اند. همان طور که قبلا اشاره شد ، تغییر فرکانس با مشتق اول و دوم دامنه نسبت به زمان ارتباط دارد. وجود میرایی غیر خطی سبب تغییر در روند تغییرات این دو تابع نسبت به زمان شده و در تغییر فرکانس به واسطه ی میرایی نقاط اکسترمم ایجاد می کند. برای معکوس ضریب کیفیت می توان گفت که در ابتدا کاهش میرایی به واسطه ی کاهش دامنه بیشتر از کاهش فرکانس سیستم بوده و این امر سبب کاهش معکوس ضریب کیفیت می شود. از یک مرحله به بعد این روند تغییر کرده و با گذشت زمان معکوس ضریب کیفیت افزایش خواهد یافت.

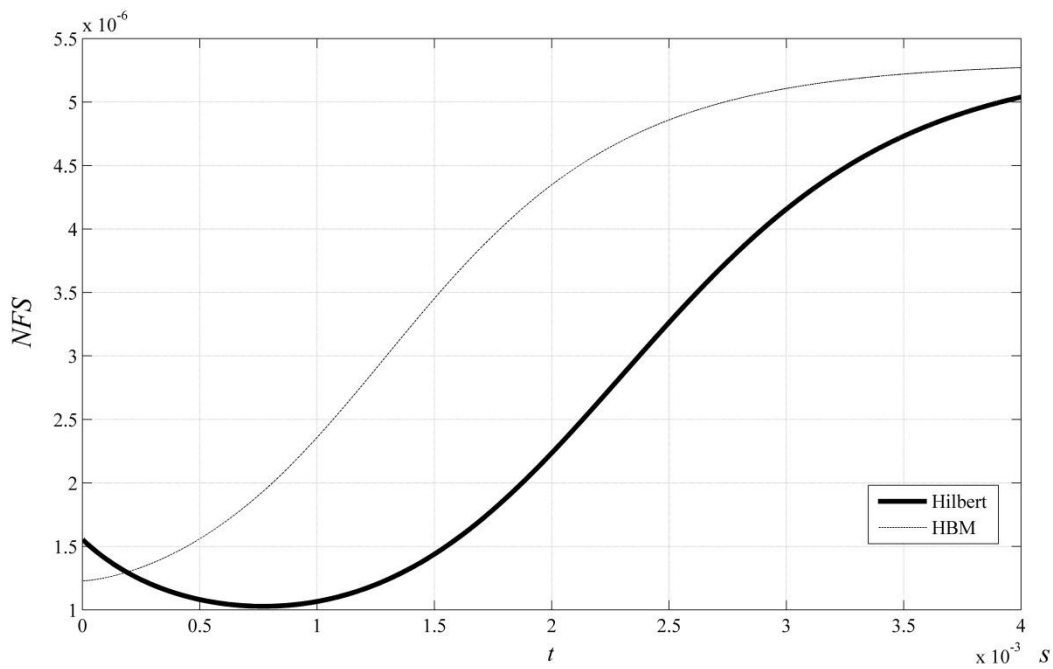


۱۷-۴ الف) تغییر نرمال فرکانس  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$

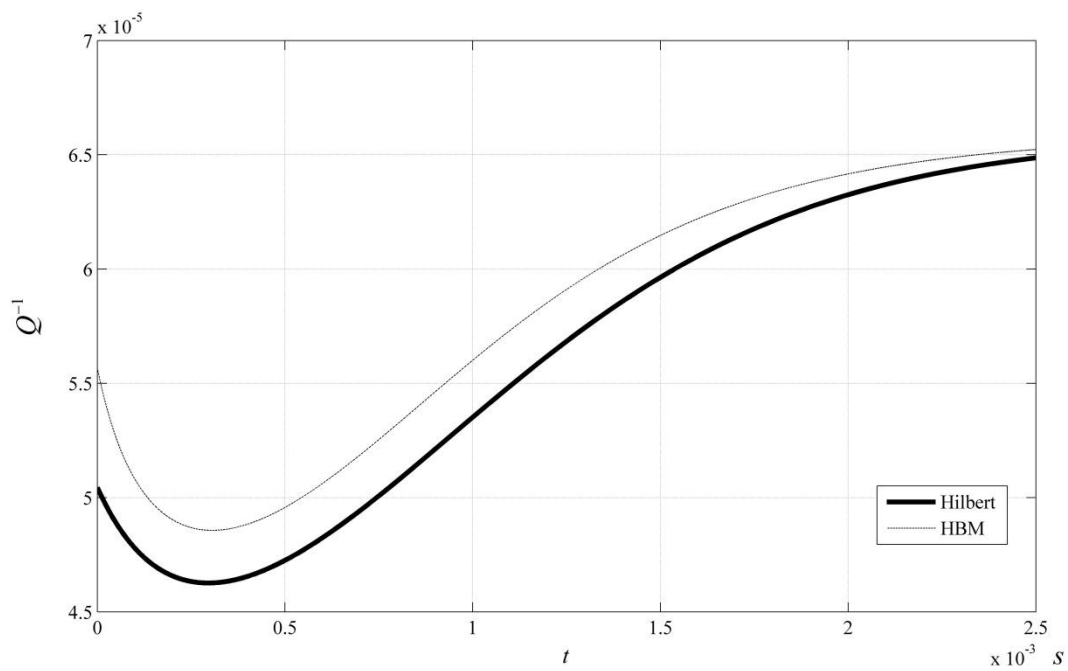


۱۷-۴ ب) تغییر نرمال فرکانس  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$

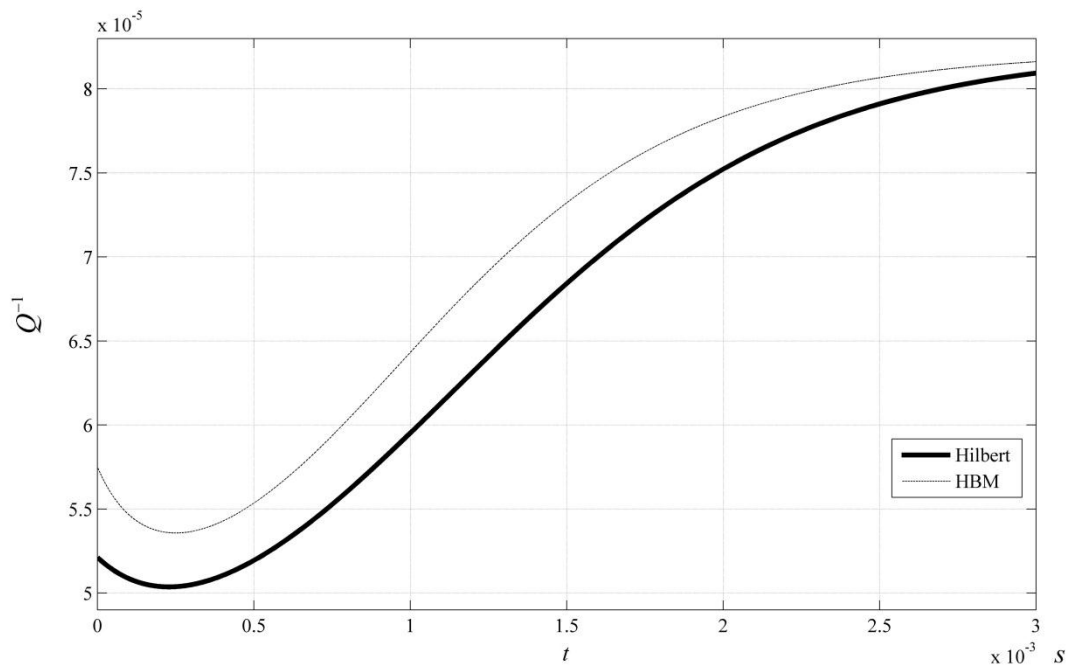




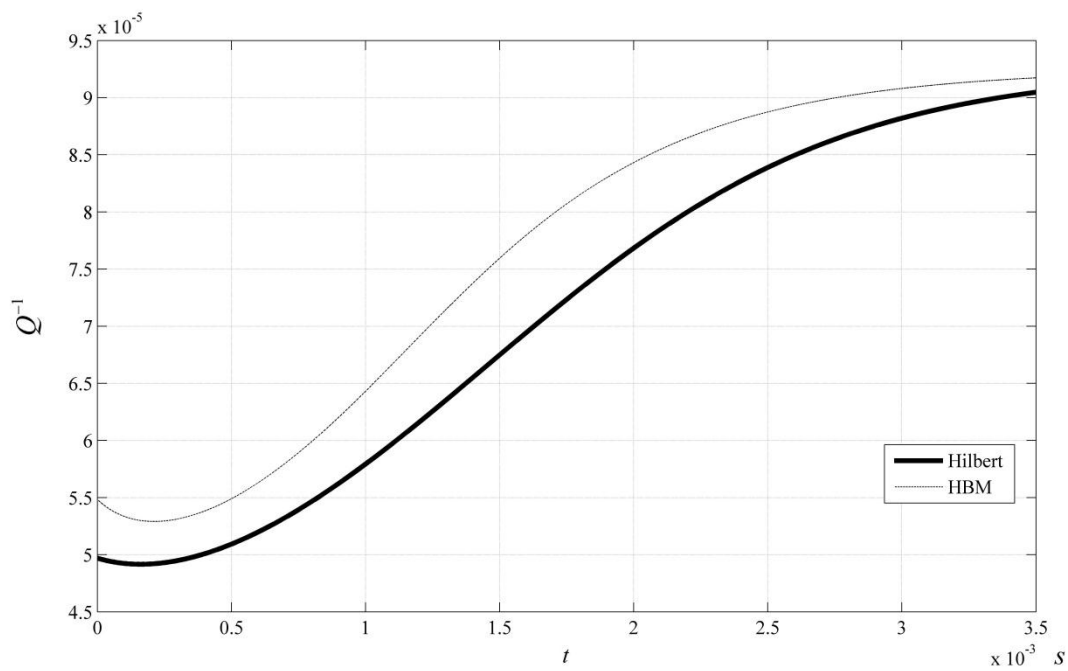
۴-۱۷) تغییر نرمال فرکانس  $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$



۴-۱۸) معکوس ضریب کیفیت  $T = 300 K$  ،  $L = 50 \mu m$  ،  $L/h = 15$

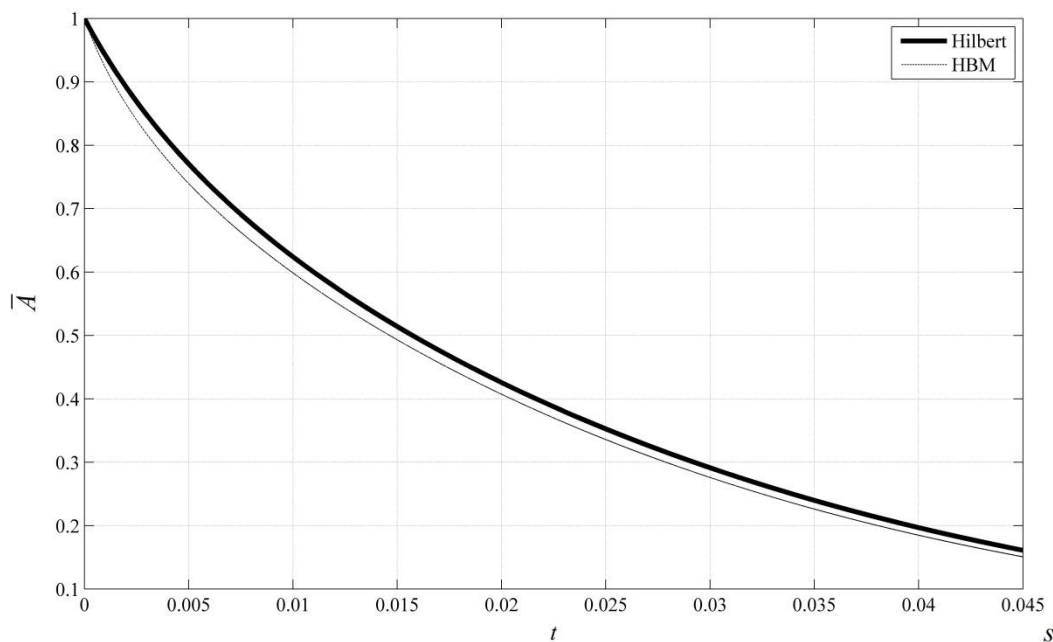


۱۸-۴ ب) معکوس ضریب کیفیت  $T = 300 K$  ،  $L = 70 \mu m$  ،  $L/h = 15$

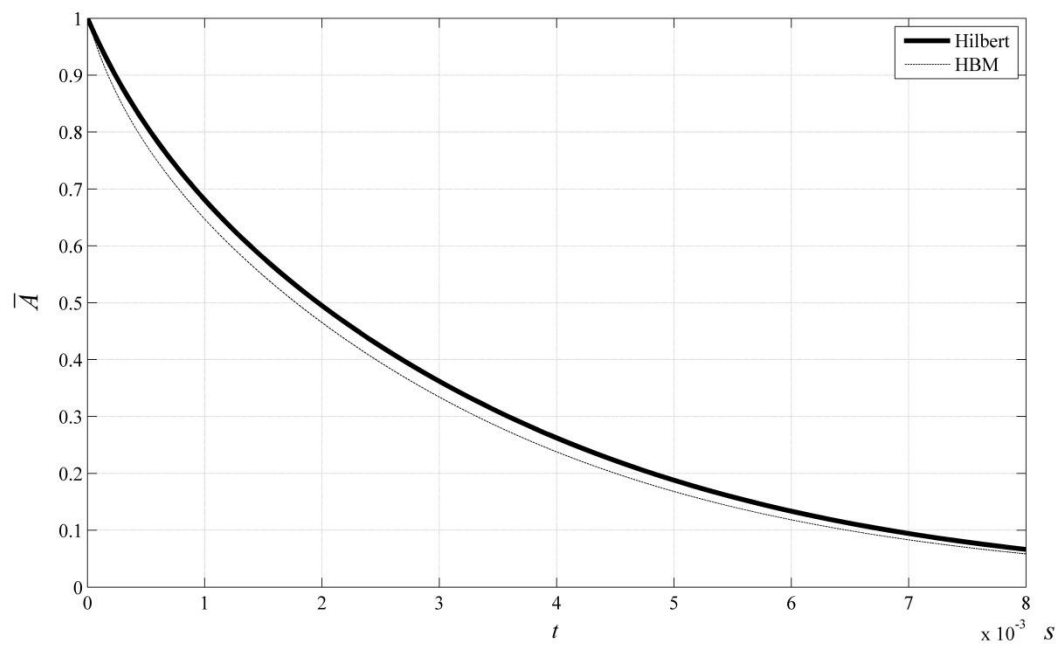


۱۸-۴ ج) معکوس ضریب کیفیت  $T = 300 K$  ،  $L = 90 \mu m$  ،  $L/h = 15$

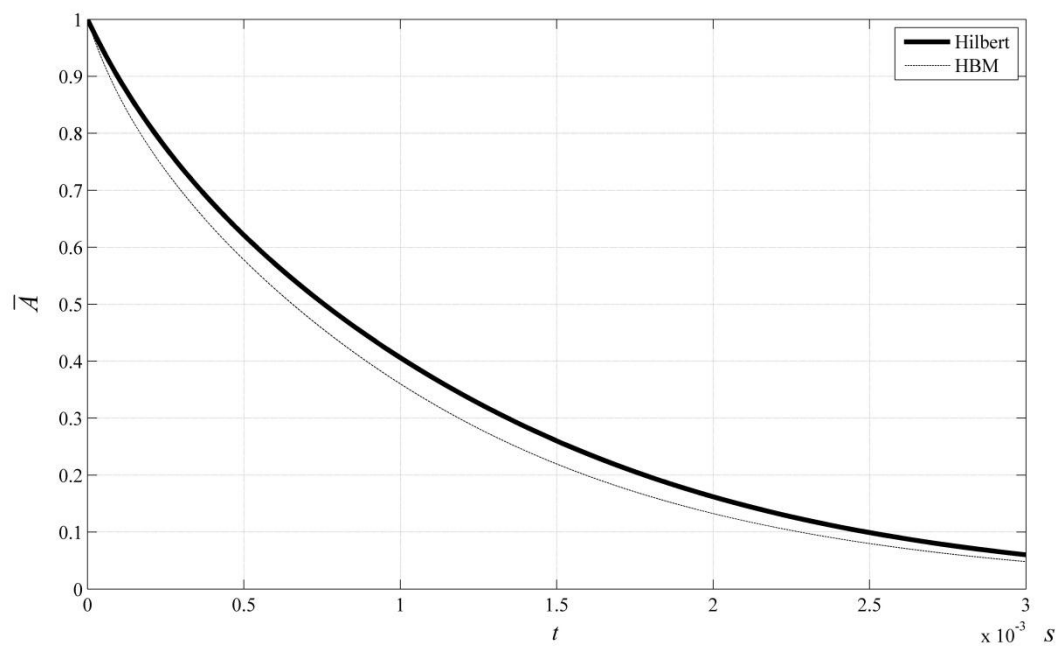
در این قسمت همانند بخش ۴-۱-۴-۲ ابعاد تیر ثابت در نظر گرفته شده و اثر دمای سیستم بر روی میرایی ترموالاستیک بررسی می شود. دامنه ی نرمال ، مشتق دامنه ی نرمال نسبت به زمان ، فرکانس میرا ، نسبت اندازه ی مشتق دامنه نسبت به زمان بر دامنه ، تغییر نرمال فرکانس و معکوس ضریب کیفیت به ترتیب در شکل های (۴-۱۹) تا (۴-۲۴) برای سه دمای  $200 K$  ،  $300 K$  و  $400 K$  نشان داده شده است. افزایش اتلاف انرژی سیستم نسبت به حالت میرایی خطی سبب شده که دیگر خطای ناشی از ضعیف بودن میرایی برای دما ی پایین در حل (۲) ایجاد نشود و نوع اختلاف حل (۱) و (۲) در دما های متفاوت یکسان بماند.



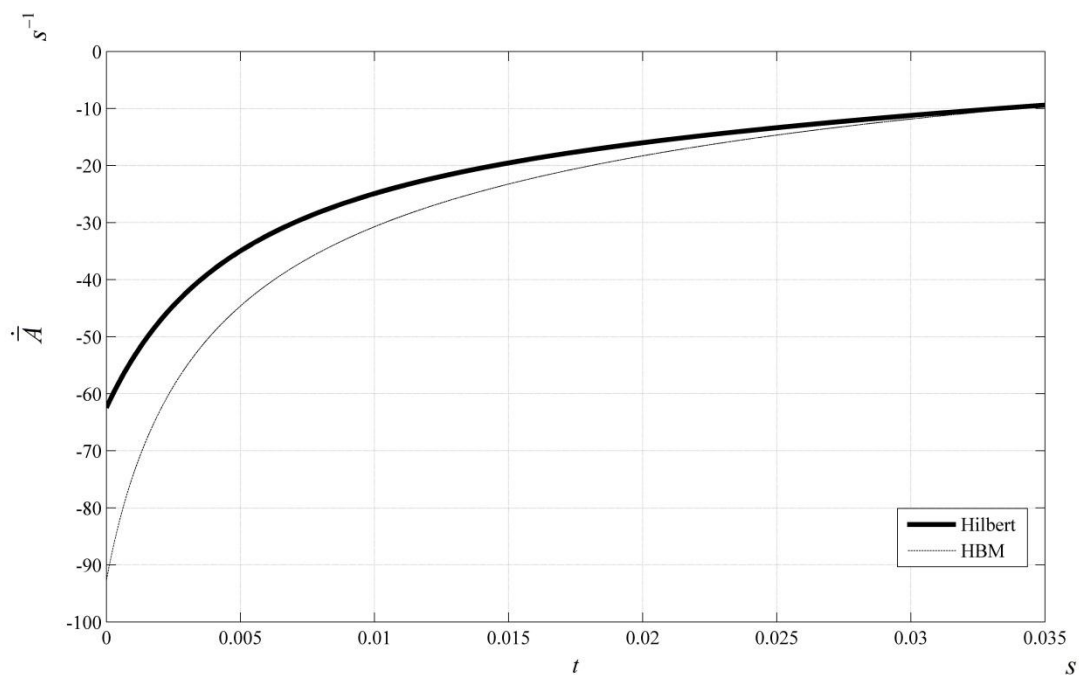
۴-۱۹ الف) دامنه نرمال  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



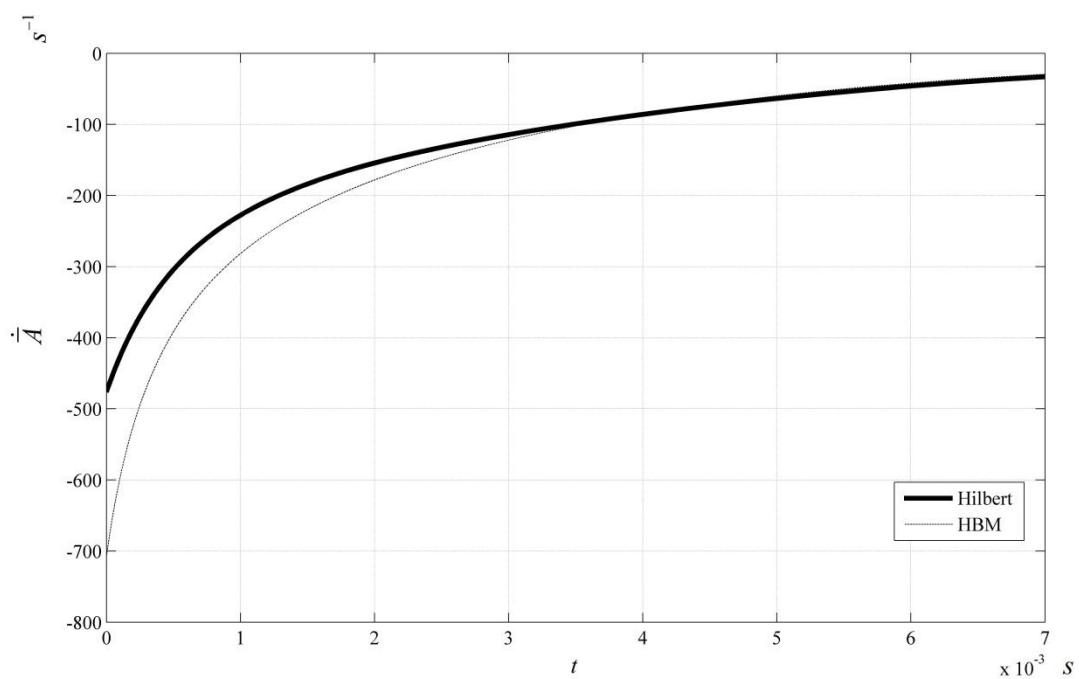
۱۹-۴ ب) دامنه نرمال  $T = 300$  K ،  $L = 80$   $\mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$



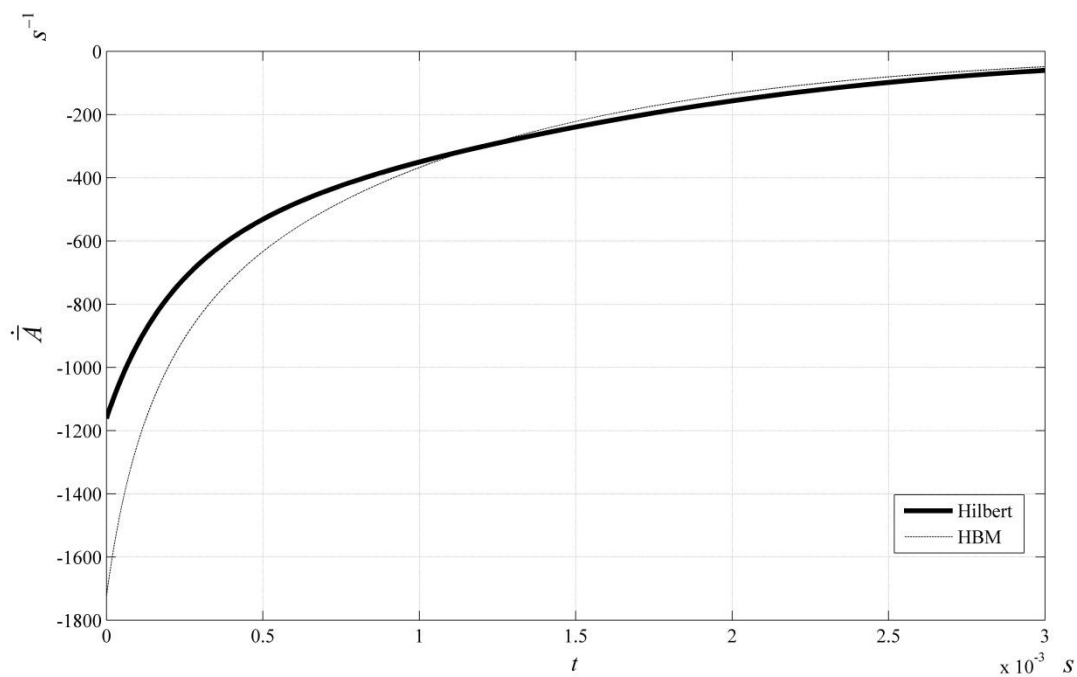
۱۹-۴ ج) دامنه نرمال  $T = 400$  K ،  $L = 80$   $\mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$



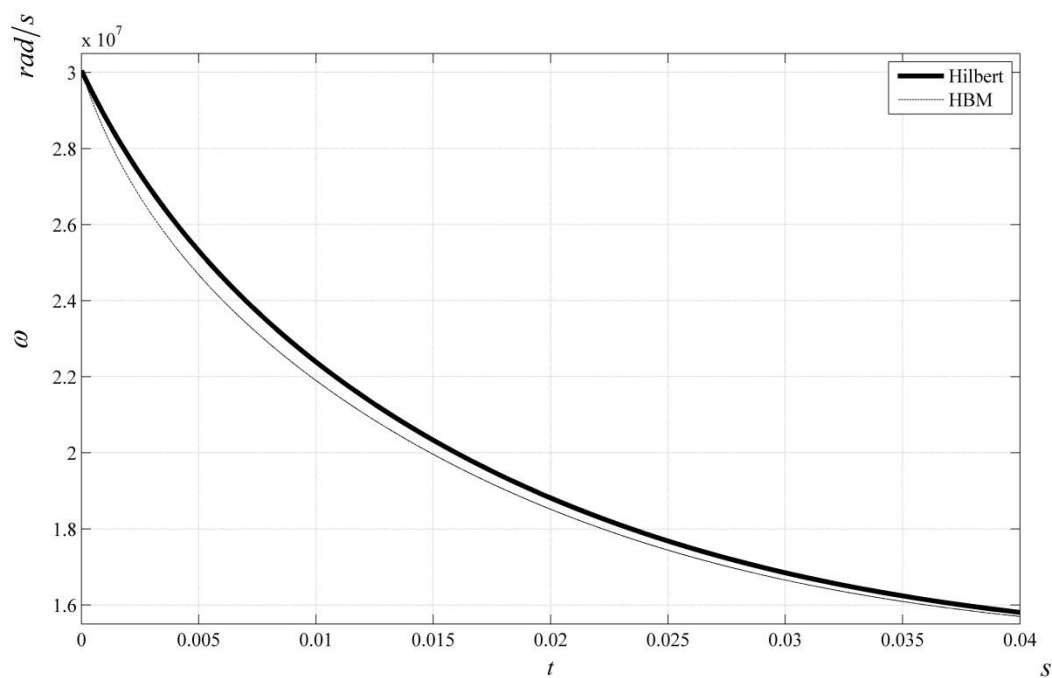
۲۰-۴ الف) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



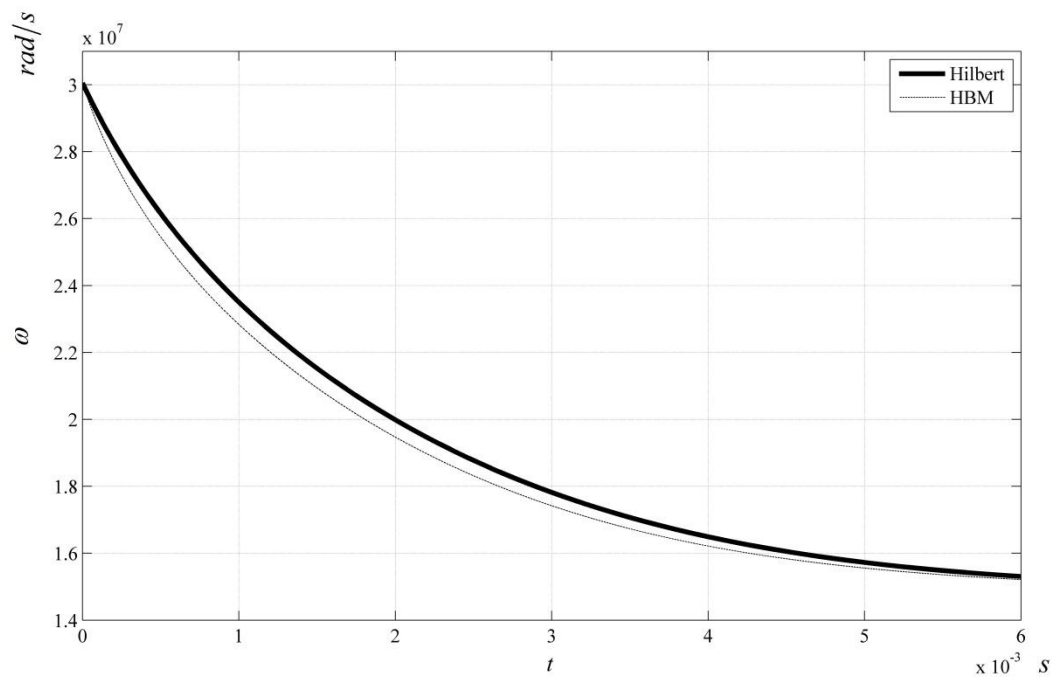
۲۰-۴ ب) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



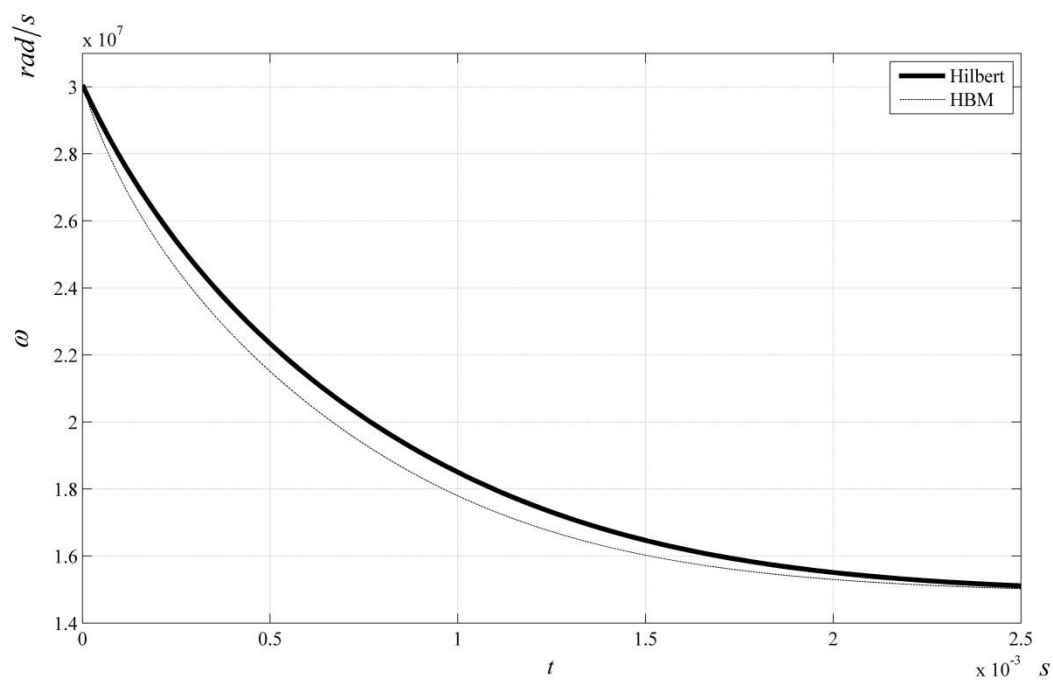
۴-۲۰ (ج) مشتق دامنه نرمال نسبت به زمان  $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



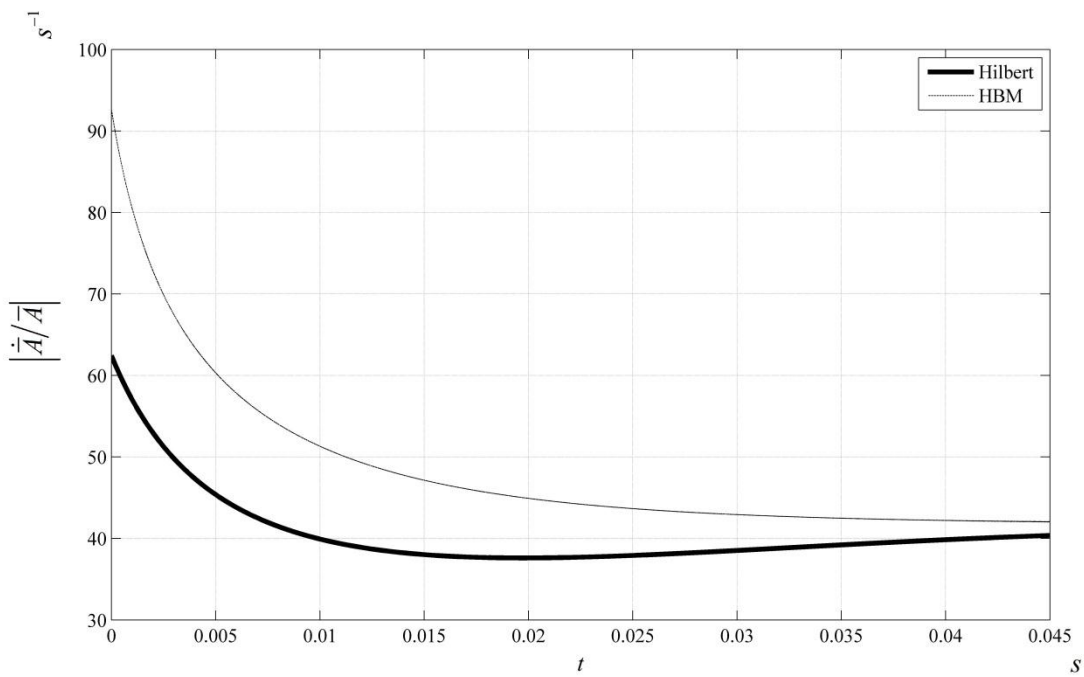
۴-۲۱ (الف) فرکانس میرا  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



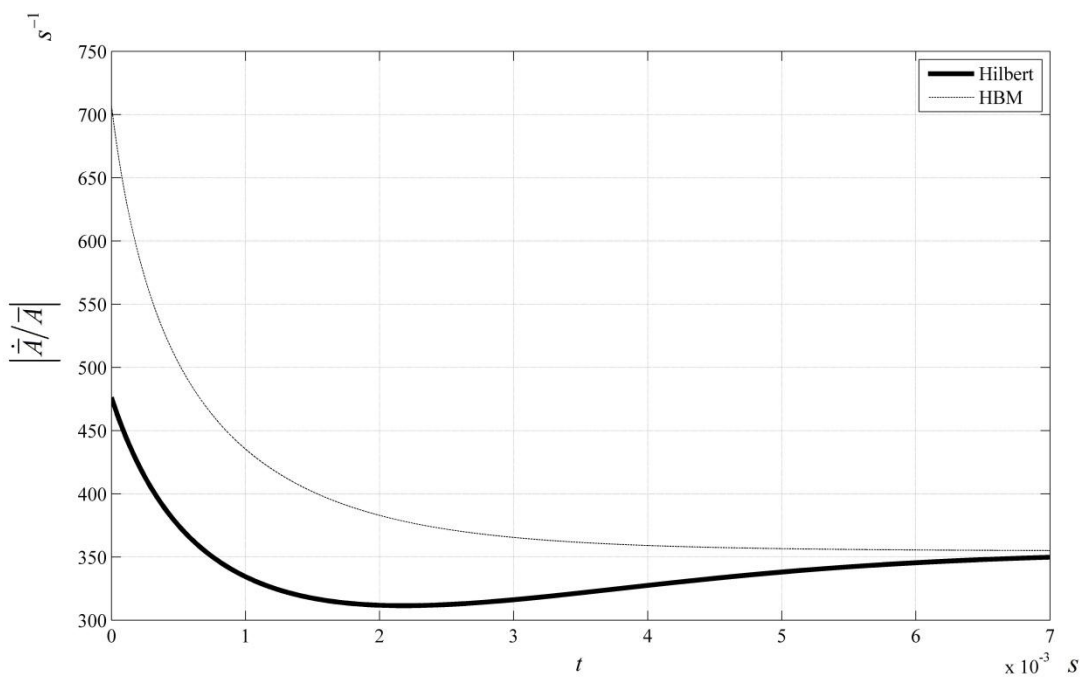
۴-۲۱ ب) فرکانس میرا  $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



۴-۲۱ ج) فرکانس میرا  $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$

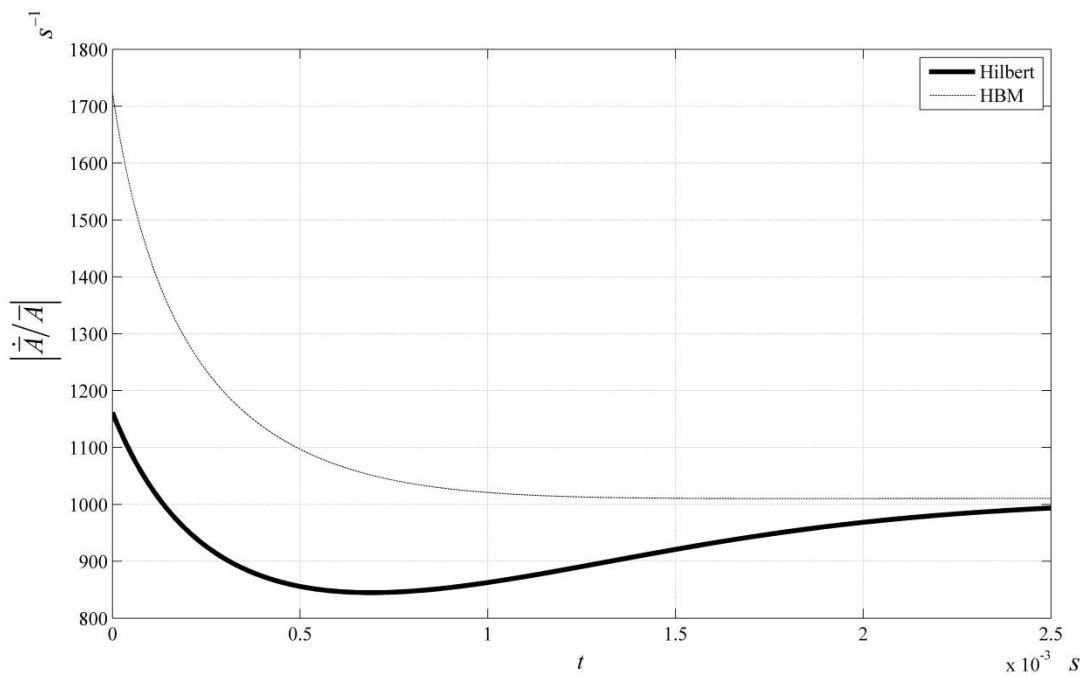


۴-۲۲ الف) فرکانس موهومی معادل  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$

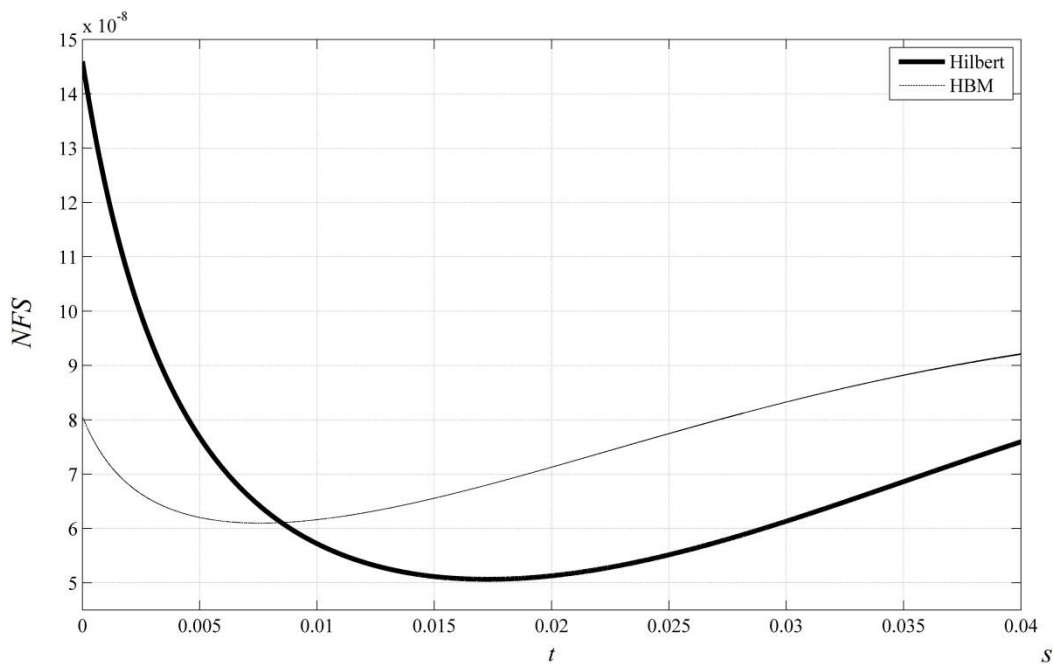


۴-۲۲ ب) فرکانس موهومی معادل  $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$

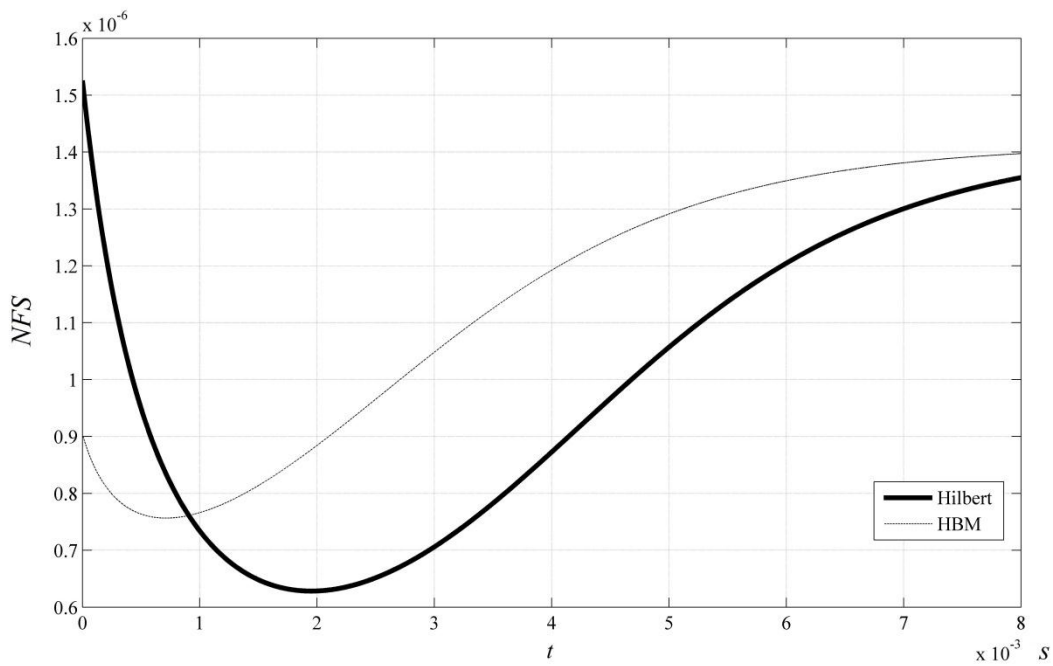




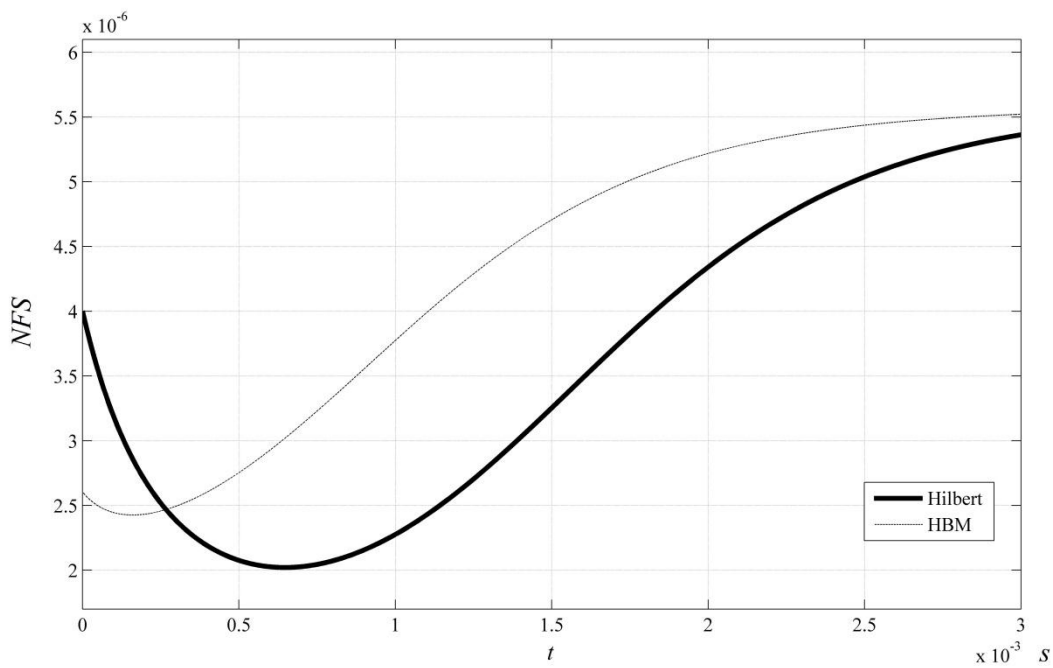
۲۲-۴ ج) فرکانس موهومی معادل  $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



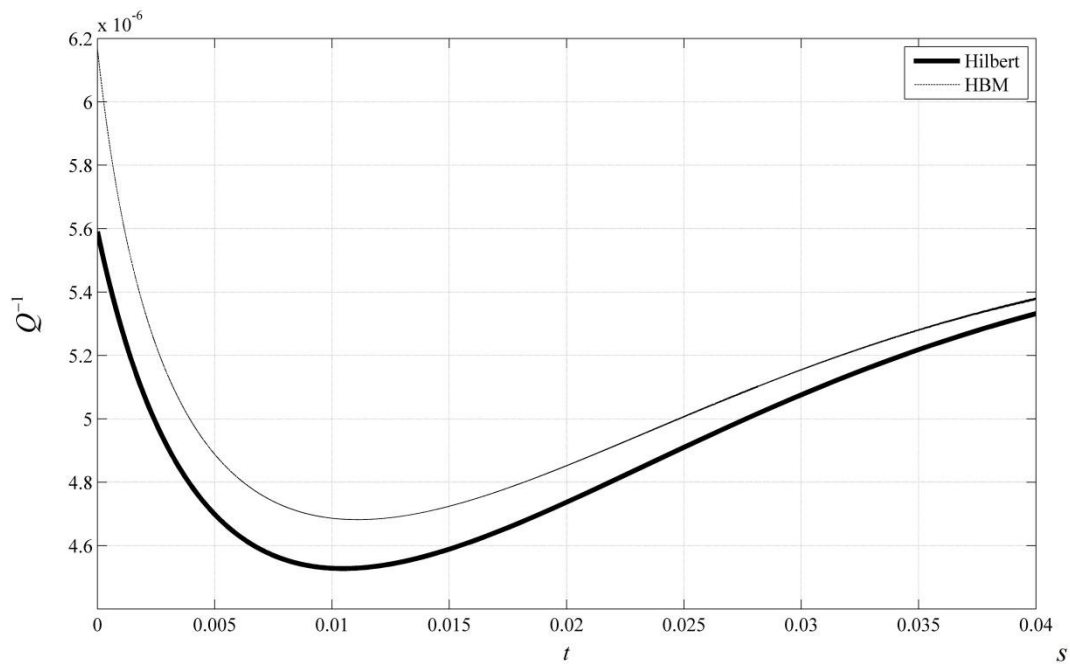
۲۳-۴ الف) تغییر نرمال فرکانس  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



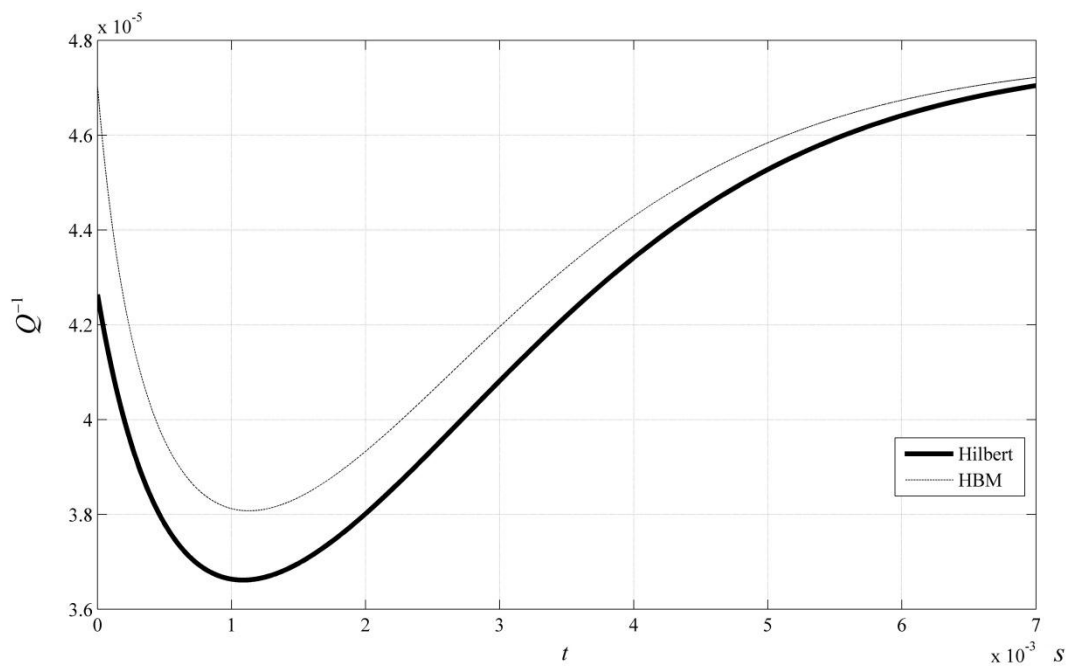
۲۳-۴ ب) تغییر نرمال فرکانس  $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



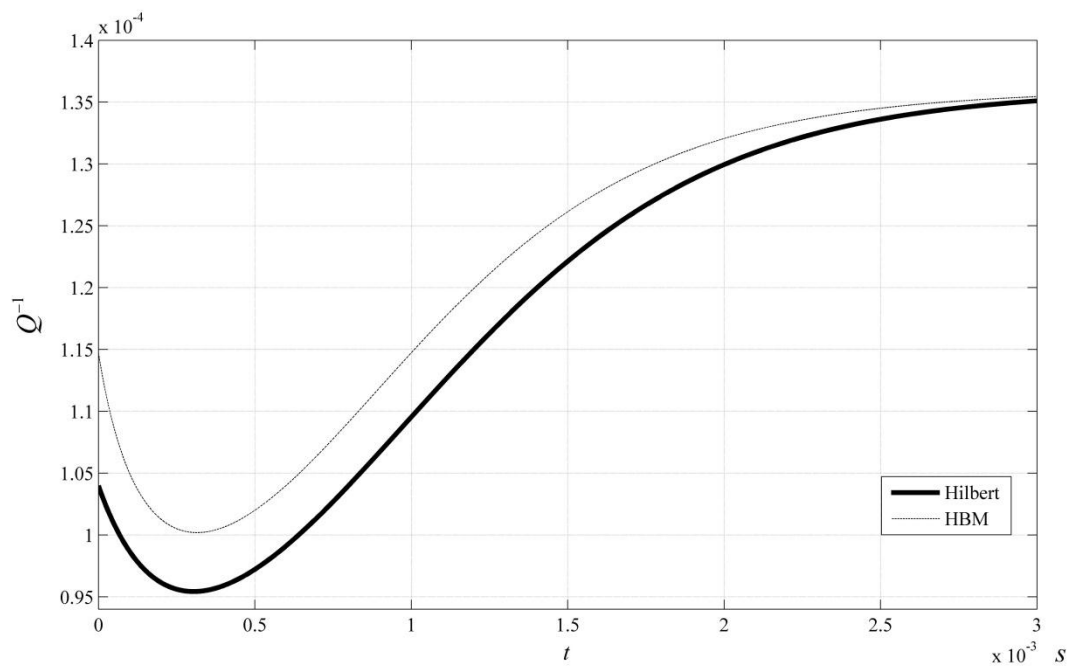
۲۳-۴ ج) تغییر نرمال فرکانس  $T = 400 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



۴-۲۴ الف) معکوس ضریب کیفیت  $T = 200 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



۴-۲۴ ب) معکوس ضریب کیفیت  $T = 300 K$  ،  $L = 80 \mu m$  ،  $L/h = 20$



۴-۲۴) معکوس ضریب کیفیت  $T = 400\text{ K}$  ،  $L = 80\ \mu\text{m}$  ،  $L/h = 20$

# فصل پنجم

## نتیجه گیری

## ۵-۱. خلاصه نتایج

- میرایی ترموالاستیک تابع فرکانس و دما بوده و فقط در فرکانس های بالا اثر قابل ملاحظه روی سیستم خواهد داشت.
- تغییر ابعاد سیستم ، منجر به تغییر در اثر میرایی به روی سیستم می گردد.
- توابع مود غیر خطی و فرکانس غیر خطی تابع دامنه بوده و در ارتعاشات گذرا با میرای شدن دامنه به مقادیر خطی خود میل می کنند.
- به دلیل وابستگی فرکانس به دامنه در سیستم های غیر خطی ، دامنه در میرایی ترموالاستیک اثر مستقیم می گذارد.
- صرفنظر از تغییرات فرکانس نسبت به زمان در ارتعاشات غیر خطی گذرا ، سبب بروز خطای قابل ملاحظه در پارامتر های پاسخ می شود.
- افزایش میرایی موثر سیستم باعث کاهش خطای ناشی از صرفنظر کردن از تغییرات فرکانس نسبت به زمان می گردد.
- تیر مورد بحث ، از نظر مکانیکی سخت شونده بوده و دامنه ی بحرانی برای شرایط اولیه وجود ندارد.
- در بررسی حرکت تک مودی برای تیر میکرو به کمک مود های غیر خطی ، یک جمله غیر خطی برای میرایی در سیستم یک درجه آزادی معادل ایجاد می شود که در دیگر روش های متداول حضور ندارد.
- در تحلیل با میرایی خطی ، فرکانس موهومی معادل ، تغییر فرکانس به واسطه ی میرایی و معکوس ضریب کیفیت در دامنه های بزرگ تر ، کمتر هستند.
- در تحلیل با میرایی غیر خطی ، فرکانس موهومی معادل ، تغییر فرکانس به واسطه ی میرایی و معکوس ضریب کیفیت ، به ازای بعضی مقادیر دامنه نقاط اکسترمم دارند.
- با گذشت زمان و میرا شدن دامنه ، پارامتر های محاسبه شده برای پاسخ سیستم به مقادیر خطی [۹] میل می کنند.

## ۵-۲. پیشنهاد برای پژوهش های آینده

- با تحلیل انتقال حرارت به صورت صدای دوم ، می توان میرایی ترموالاستیک برای ارتعاشات با فرکانس های بسیار بالا نیز مدل کرد. که در این حالت جابجایی سیستم و انتقال حرارت هم فاز نخواهند بود.
- بررسی اثر میرایی ترموالاستیک بر رزونانس داخلی.

- با در نظر گرفتن تئوری هایی همچون تنش غیر محلی<sup>1</sup> ، مدل ریاضی تیر را به شرایط فیزیکی سیستم های نانو نزدیک تر ساخت.
- در زمینه ی ارتعاشات آزاد می توان با استفاده از روش های پردازش سیگنال ، اجزای پاسخ با فرکانس های بالاتر را از سیگنال تحلیلی پاسخ استخراج نمود و رفتار آن ها را در حالت گذرا بررسی نمود.
- ارتعاشات اجباری تیر میکرو نیز تا به حال با مود های غیر خطی بررسی نشده و تحلیل پاسخ پایدار تیر میکرو با لایه های پیرو می تواند موضوع خوبی جهت تحقیق های آینده باشد.

---

<sup>1</sup> Nonlocal Stress

- [1] J. R. Vig, F. L. Walls, Frequency Control Symposium and Exhibition, IEEE/EIA (2000) Kansas City, MO, 30-33.
- [2] L. Rodriguez-Pardo, J. F. Rodriguez, C. Gabrielli, R. Brendel, Sensitivity, noise, and resolution in QCM sensors in liquid media, IEEE Sens. J. 5 (2005), 1251.
- [3] R.V. Roszhardt, The effect of thermoelastic internal friction on the Q of micromachined silicon resonators, IEEE Solid State Sensor and Actuator Workshop, Hilton Head Island, SC, USA (1990), 13-16.
- [4] K. Bennewitz, Uber elastische Nachwirkung, elastische Hysteresis und innere Reibung, Phys. Z., vol. 17 (1924), 417-431.
- [5] C. Zener, Internal friction in solids I: Theory of internal friction in reeds, Phys. Rev., vol. 52, no. 3 (1937), 230-235.
- [6] C. Zener, Internal friction in solids II: General theory of thermoelastic internal friction, Phys. Rev., vol. 53, no. 1 (1938), 90-99.
- [7] B.S. Berry, Precise investigation of the theory of damping by transverse thermal currents, J. Appl. Phys. 26 (1955), 1221-1224.
- [8] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Theory of Elasticity, Pergamon Press (1959), 15-39.
- [9] R. Lifshitz, M. Roukes, Thermoelastic damping in micro and nanomechanical systems, Phys. Rev. B, Condens Matter, vol. 61, no. 8 (2000), 5600-5609.
- [10] A.H. Nayfeh, M.I. Younis, Modeling and simulations of thermoelastic damping in microplates, J. Micromech. Microeng 14 (2004), 1711-1717.
- [11] M.J. Silver, L.D. Peterson, Predictive elastothermo-dynamic damping in finite element models by using a perturbation formulation, AIAA (2005), 2646-2653.
- [12] Y. Sun, D. Fang, A.K. Soh, Thermoelastic damping in micro beam resonators, Int. J. Solids Struct 43 (2006) 3213-3229.
- [13] Y.B. Yi, Geometric effects on thermoelastic damping in MEMS resonators, J. Sound and Vibration 309 (2008), 588-599.
- [14] R.M. Rosenberg, Normal modes of nonlinear dual-mode systems, J. Applied Mechanics 27 (1960), 263-268.
- [15] R.M. Rosenberg, The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems, J. Applied Mechanics 29 (1962), 7-14.
- [16] R.M. Rosenberg, on nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom, Advances in Applied Mechanics 9 (1966) 155-242.
- [17] R. Rand, Nonlinear normal modes in two-degree-of-freedom systems, J. Applied Mechanics 38 (1971), 561.
- [18] R. Rand, A higher-order approximation for nonlinear normal modes in two-degree-of-freedom systems, International J. Non-Linear Mechanics 6 (1971) 545-547.
- [19] R. Rand, A direct method for nonlinear normal modes, International J. Non-Linear Mechanics 9 (1974), 363-368.
- [20] L.I. Manevitch, Y.V. Mikhlin, on periodic solutions close to rectilinear normal vibration modes, Prikladnaya Matematika I Mekhanika 36 (1972), 1051-1058.
- [21] A.F. Vakakis, Analysis and identification of linear and nonlinear normal modes in vibrating systems, Ph.D. Dissertation, California Institute of Technology, 1990.
- [22] T.K. Caughey, A.F. Vakakis, J.M. Sivo, Analytical study of similar normal modes and their bifurcations in a class of strongly nonlinear systems, International J. Non-Linear Mechanics 25 (1990), 521-533.



- [23] A.F. Vakakis, Non-similar normal oscillations in a strongly non-linear discrete system, *J. Sound and Vibration* 159 (1992), 341-361.
- [24] M.E. King, A.F. Vakakis, An energy-based formulation for computing nonlinear normal-modes in undamped continuous systems, *J. Vibration and Acoustics* 116 (1994), 332-340.
- [25] A.F. Vakakis, L.I. Manevitch, Y.V. Mikhlin, V.N. Pilipchuk, A.A. Zevin, *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*, Wiley, New York, 1996.
- [26] A.F. Vakakis, Non-linear normal modes and their applications in vibration theory: an overview, *Mechanical Systems and Signal Processing* 11 (1997), 3-22.
- [27] S.W. Shaw, C. Pierre, Non-linear normal modes and invariant manifolds, *J. Sound and Vibration* 150 (1991), 170-173.
- [28] S.W. Shaw, C. Pierre, on nonlinear normal modes, ASME Winter Annual Meeting, 1992.
- [29] S.W. Shaw, C. Pierre, Normal modes for non-linear vibratory systems, *J. Sound and Vibration* 164 (1993), 85-124.
- [30] S.W. Shaw, C. Pierre, Normal modes of vibration for non-linear continuous systems, *J. Sound and Vibration* 169 (1994), 319-347.
- [31] N. Boivin, C. Pierre, S.W. Shaw, Non-linear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifold, *AIAA* (1994), 1672.
- [32] N. Boivin, C. Pierre, S.W. Shaw, Nonlinear modal analysis of structural systems featuring internal resonances, *J. Sound and Vibration* 182(2) (1995), 336-341.
- [33] E. Pesheck, C. Pierre, S. W. Shaw, A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds, *J. Sound and Vibration* 249 (2002), 971-993.
- [34] D. Jiang, C. Pierre, S. W. Shaw, Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems, *J. Sound and Vibration* 272 (2004), 869-891.
- [35] D. Jiang, C. Pierre, S. W. Shaw, The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance, *International J. Non-Linear Mechanics* 40 (2005), 729-746.
- [36] D. Jiang, C. Pierre, S. W. Shaw, Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation, *J. Sound and Vibration* 288 (2005), 791-812.
- [37] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Chelsea Pub. Co. (1953)
- [38] E. Bedrosian, A product theorem for Hilbert transforms, Rand Corporation Memorandum RM-3439-PR. (December 1962)
- [39] M. Feldman, Nonlinear system vibration analysis using the Hilbert transform - I. free vibration analysis method 'FREEVIB', *Mechanical Systems and Signal Processing* 8 (1994), 119-127.
- [40] M. Feldman, Nonlinear system vibration analysis using the Hilbert transform - II. forced vibration analysis method 'FORCEDVIB', *Mechanical Systems and Signal Processing* 8 (1994), 309-318.
- [41] M. Feldman, Non-linear free vibration identification via the Hilbert transform, *J. Sound and Vibration* 208 (1997), 475-489.
- [42] M. Feldman, Analysis of typical non-linear vibration systems by using the Hilbert transform, *Proceedings of the XI International Modal Analysis Conf*, Kissimmee, Florida (1993), 799-805.
- [43] M. Feldman, S. Braun, Identification of non-linear system parameters via the instantaneous frequency: application of the Hilbert transform and Wigner-Ville technique, *Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Nashville, 637-642.
- [44] M. Feldman, S. Braun, Description of free responses of SDOF systems via the phase plane and Hilbert transform: The concept of envelope and instantaneous frequency, *Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, 739.

- [45] M. Feldman, Theoretical analysis and comparison of the Hilbert transform decomposition methods, *Mechanical Systems and Signal Processing* 22 (2008), 509-519.
- [46] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.C. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung, H.H. Liu, The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A - Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 454 (1998), 903-995.
- [47] K. Behdinan, M.C. Stylianou, B. Tabarrok, Dynamic of flexible sliding beams non-linear analysis part I: formulation, *J. Sound and Vibration* 208 (1997), 517-539.
- [48] R. B. Hetnarski, M. R. Eslami, *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*, Springer (2009), ISBN 978-1-4020-9246-6.
- [49] L. Debnath, D. Bahatta, *Integral Transforms and Their Applications* 2<sup>nd</sup> Ed, Taylor & Francis group (2007), ISBN 978-1-58488-575-7.
- [50] *Basic Mechanical and Thermal Properties of Silicon*, Virginia Semiconductor, Inc.

## **Abstract**

Transient nonlinear vibration of micro beam with thermoelastic damping is the main purpose of this thesis. After presenting a brief history of major related researches, the heat conduction equation for nonlinear strain-displacement relation has been solved and the equation of motion for Euler-Bernoulli beam for large lateral displacement with thermoelastic damping is obtained. Moreover amplitude dependent nonlinear modal functions have been obtained via nonlinear normal modes (NNM) theory which was then used to derive the equivalent SDOF system for single mode vibration. The result of transient nonlinear vibration was obtained by harmonic balance method and analytic signal approach. Amplitude dependent thermoelastic damping and its effect on the response parameters was also studied. Finally it's been shown that the obtained equivalent SDOF system in single mode vibration by NNM theory differs significantly from other conventional methods such as Galerkin procedure, which results in extrema points in response parameters during transient vibration.

**Keywords: NNM, Microbeam, Thermoelastic Damping, Analytic Signal**



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mechanical Engineering**

# **Nonlinear Modal Analysis of Micro Beam with Thermoelasting Damping**

**Ramtin Haddadzadeh Hendou**

Supervisor:

**Dr Ardeshir Karami Mohammadi**

Date: September 2013