

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

# کنترل غیر خطی خودروی تک چرخ با چهاردرجه ی آزادی

دانشجو:

رضا رضوانیان نقندر

استاد راهنما :

جناب دکتر اردشیر گرمی

استاد مشاور :

جناب دکتر محمد مهدی فاتح

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه شاهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای رضا رضوانیان  
تحت عنوان: کنترل غیر خطی خودروی تک چرخ با  
چهاردرجه ی آزادی

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی  
و با درجه..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	دکتر محمد مهدی فاتح		دکتر اردشیر کرمی محمدی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	دکتر رضا طاهریان		دکتر امیر جلالی
			دکتر حبیب احمدی

## تعهد نامه

اینجانب **رضا رضوانیان نقندر** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک- گرایش تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه با عنوان **"کنترل غیر خطی خودروی تک چرخ با چهاردرجه ی آزادی"** تحت راهنمایی **دکتر اردشیر کرمی محمدی و دکتر محمود مهدی فاتح** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.



تقدیم به

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را

و به کسانی که عشقتان را در وجودم دیدم.

تقدیم به پدر و مادرم

که از نگاهشان صلابت

از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی را آموختم

به مصداق «من لم یسکر المخلوق لم یسکر الخالق» بسی شایسته است از استاد

فریخته و فرزانه جناب آقای دکتر اردشیر کریمی محمدی و آقای دکتر محمد مهدی فتح

که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و

دانش را بار آسمانی های کارساز و سازنده بارور ساختند؛ تقدیر و شکر نمایم.

(ویرگیتم ویدعلمم الکتاب و الحکمه)

معلمانم ز عرش برتر باد همیشه توست اندیشه ات مظفر باد

به نکته های دلاویز و گفته های بلند صحیفه های سخن از تو علم پرور باد

همچنین از پدر و مادر عزیز، دلسوز و مهربانم که آرایش روحی و آسایش فکری فراهم

نمودند تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیر پایان نامه

درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم؛ سپاسگزاری نمایم.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا برتتهای همت خود کامران شدم

## چکیده

در این پایان‌نامه خودروی تک‌چرخ با چهار درجه آزادی برای اولین بار به صورت غیرخطی و بدون خطی‌سازی مدل شده است. در تمامی مطالعات انجام شده، مدل خودرو به صورت دو یا سه درجه آزادی بوده که به علت محدودیت حرکتی یک عدد چرخ می‌باشد. در این پایان‌نامه مدل ارائه شده، توسط مکانیزم خاصی درجه آزادی بیشتری برای یک چرخ فراهم می‌کند. با استفاده از روش لاگرانژ و زوایای اولیه متوالی معادلات حرکت خودروی تک‌چرخ محاسبه می‌شود. چهار معادله حرکت کاملاً غیرخطی و کوپل بوده و نسبت به معادلات خودرو با سه درجه آزادی بسیار پیچیده‌تر می‌باشد.

این خودرو شامل محل استقرار سرنشین، دو موتور و یک چرخ چندجهته که خود متشکل از تعدادی چرخ کوچک و یک چرخ بزرگ می‌باشد، تشکیل شده است. چهار درجه آزادی سیستم عبارتند از: زاویه پیچ که چرخش چرخ حول محور چرخ بزرگ می‌باشد، زاویه رول که انحراف خودرو به طرفین را توصیف می‌کند، زاویه انحراف محل استقرار سرنشین که سبب حرکت به سمت جلو-عقب می‌شود و زاویه چرخش چرخ‌های کوچک که حرکت به سمت چپ-راست را معرفی می‌نماید. موتورها بر روی محل استقرار سرنشین قرار گرفته‌اند و عکس‌العمل گشتاور تولیدی موتور به بدنه و شاسی محل استقرار سرنشین اعمال می‌شود.

همواره در محاسبات پارامترهای هندسی سیستم به علت وجود خطای اندازه‌گیری، عدم قطعیت وجود دارد. برای غلبه بر عدم قطعیت‌های سیستم و کنترل آن از روش کنترل غیرخطی تطبیقی استفاده شده است. همچنین با استفاده از روش پایداری لیاپانوف، پایداری خودرو بررسی و تضمین می‌شود. روش کنترل تطبیقی استفاده شده از نوع تطبیقی خود تنظیم می‌باشد که با ایجاد اصلاحاتی در آن، عملکرد بهبود یافته‌تری از خود نشان می‌دهد. به علت ساختار پیچیده معادلات با استفاده از یک ایده جدید که شامل یک حلقه‌ی داخلی می‌باشد، سیگنال گشتاور کنترلی محاسبه و به موتورها ارسال می‌شود.

در نهایت معادلات حرکت در سیمولینک متلب شبیه‌سازی می‌شود و پس از بررسی صحت آن و مقایسه با فیزیک مسئله و مدلسازی‌های انجام شده درستی آن تصدیق می‌شود. برای تایید عملکرد بالای روش کنترل تطبیقی، نتایج آن را با روش کنترل PD مقایسه می‌نماییم. کنترل تطبیقی به خوبی عمل نموده و در کمترین زمان ممکن، انحراف خودرو به سمت جلو-عقب و طرفین را اصلاح نموده و پایداری آن را تضمین می‌نماید.

کلمات کلیدی: کنترل تطبیقی، دینامیک غیرخطی، خودروی تک‌چرخ، روش لاگرانژ

# فهرست مطالب

فصل اول پیشینه تحقیق.....	۱
۱-۱ مقدمه .....	۲
۲-۱ وسایل نقلیه تعادلی دو چرخ .....	۳
۳-۱ وسایل نقلیه تعادلی تک چرخ.....	۹
۱-۳-۱ رباتهای تعادلی تک چرخ پایدار به کمک اثر ژيروسکوپ .....	۱۰
۲-۳-۱ رباتها و خودروهای تعادلی تک چرخ با مدلسازی دینامیکی .....	۱۳
۳-۳-۱ خودروهای تعادلی تک چرخ بدون مدلسازی دینامیکی .....	۱۸
۴-۳-۱ خودروهای تجاری تک چرخ .....	۱۹
۴-۱ تعریف مسئله و هدف .....	۲۱
۵-۱ معرفی فصل های پایان نامه .....	۲۳
فصل دوم مفاهیم دینامیکی و کنترلی .....	۲۴
۱-۲ مقدمه .....	۲۵
۲-۲ مفاهیم مدلسازی دینامیکی خودروی تک چرخ .....	۲۵
۱-۲-۲ زاویای اوپلر .....	۲۵
۲-۲-۲ زاویه اوپلر متوالی ۳-۱-۳ .....	۲۶
۳-۲-۲ اجسام متقارن محوری .....	۲۸
۴-۲-۲ غلتش .....	۳۰
۵-۲-۲ حرکت صفحه ای جسم غلتان .....	۳۱
۶-۲-۲ حرکت سه بعدی جسم غلتان .....	۳۲
۳-۲ معرفی کنترل غیرخطی .....	۳۴
۴-۲ تحلیل سیستم های غیر خطی .....	۳۵
۱-۴-۲ تحلیل صفحه فازی .....	۳۶
۲-۴-۲ توابع توصیف کننده .....	۳۶
۳-۴-۲ نظریه ی لیاپانوف .....	۳۷



۳۷	۵-۲ مفاهیم پایداری
۳۸	۱-۵-۲ پایداری مجانبی
۳۹	۶-۲ روش مستقیم لیاپانوف
۴۱	۷-۲ کنترل تطبیقی
۴۴	۱-۷-۲ کنترل تطبیقی مدل مرجع (MRAC)
۴۵	۲-۷-۲ کنترل کننده های خود-تنظیم (STC)
۴۷	۳-۷-۲ مقایسه روشهای MRAC و STC
۴۸	<b>فصل سوم مدل سازی دینامیکی خودروی تک چرخ</b>
۴۹	۱-۳ توصیف مدل
۵۱	۲-۳ معادلات حرکت خودروی تک چرخ
۵۱	۱-۲-۳ چرخ کوچک
۵۴	۲-۲-۳ چرخ بزرگ
۵۷	۳-۲-۳ مجموعه چرخهای کوچک
۶۱	۴-۲-۳ محل سرنشین
۶۶	۵-۲-۳ محاسبه انرژی جنبشی
۷۳	۶-۲-۳ محاسبه انرژی پتانسیل
۷۵	۷-۲-۳ محاسبه معادلات حرکت
۸۰	<b>فصل چهارم شبیه سازی و کنترل خودروی تک چرخ</b>
۸۱	۱-۴ مقدمه
۸۲	۲-۴ شبیه سازی دینامیکی
۸۳	۳-۴ کنترل تطبیقی خودروی تکچرخ
۸۳	۱-۳-۴ آماده سازی معادلات کنترلی
۸۹	۲-۳-۴ اعمال کنترل تطبیقی
۱۰۳	<b>فصل پنجم نتایج شبیه سازی و بررسی آنها</b>
۱۰۴	۱-۴ مقدمهای بر نتایج
۱۰۴	۲-۴ نتایج شبیه سازی دینامیکی

۱۰۹	.....	۳-۴	مقایسه نتایج با مدل اوکی و ناکامورا
۱۱۰	.....	۴-۴	نتایج کنترل تطبیقی
۱۱۸	.....	۵-۴	جمع بندی نتایج
۱۲۰	.....	۶-۴	پیشنهادات
۱۲۱	.....		مراجع

## فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ ربات تعادلی دو چرخ یامافوجی ..... ۳
- شکل ۲-۱ وسیله نقلیه تجاری Segway ..... ۴
- شکل ۳-۱ شماتیک درجات آزادی سگوی ..... ۵
- شکل ۴-۱ ربات تعادلی دو چرخ JOE ..... ۵
- شکل ۵-۱ ربات تعادل دو چرخ کیم و همکاران ..... ۶
- شکل ۶-۱ ربات تعادلی دو چرخ Equibot ..... ۷
- شکل ۷-۱ ربات تعادلی دو چرخ UMASS uBot ..... ۷
- شکل ۸-۱ ربات تعادلی دو چرخ nBot ..... ۸
- شکل ۹-۱ نمونه هایی از ربات های تعادلی دو چرخ ..... ۹
- شکل ۱۰-۱ ربات تعادلی تکچرخ شنگ و یامافوجی ..... ۱۰
- شکل ۱۱-۱ مدل پیشنهادی ربات تعادلی تک چرخ کمپ و یاوین ..... ۱۱
- شکل ۱۲-۱ مدل پیشنهادی ربات تعادلی تک چرخ کاپر ..... ۱۱
- شکل ۱۳-۱ مدل پیشنهادی ربات تعادلی تک چرخ زنکو، بلوچ و مارسدن ..... ۱۲
- شکل ۱۴-۱ ربات تعادلی ژایرور ..... ۱۲
- شکل ۱۵-۱ ربات تعادلی تک چرخ کادیس و هوانگ ..... ۱۳
- شکل ۱۶-۱ خودروی تعادلی تک چرخ کادیس و همکاران ..... ۱۴
- شکل ۱۷-۱ ربات تعادلی تک چرخ لی و همکاران ..... ۱۵
- شکل ۱۸-۱ خودروی تک چرخ اوکی و ناکامورا ..... ۱۵
- شکل ۱۹-۱ مکانیزم ربات تعادلی Ballbot ..... ۱۶
- شکل ۲۰-۱ نمونه هایی از ربات تعادلی Ballbot ..... ۱۶
- شکل ۲۱-۱ مکانیزم چرخ چند جهته Honda Omni Traction Drive System ..... ۱۷
- شکل ۲۲-۱ خودروی تک چرخ U3-X ..... ۱۷
- شکل ۲۳-۱ خودروی تک چرخ UNI.CUB ..... ۱۸
- شکل ۲۴-۱ خودروی تک چرخ هوفر ..... ۱۹
- شکل ۲۵-۱ خودروی تک چرخ ترور بلک ول ..... ۲۰
- شکل ۲۶-۱ خودروی تک چرخ استفان بویر ..... ۲۰
- شکل ۲۷-۱ خودروی تک چرخ مفهومی EMBRIO ..... ۲۱
- شکل ۲۸-۱ خودروی تک چرخ enicycle ..... ۲۱
- شکل ۳-۲ زاویه اوپلر متوالی ۳-۱-۳ ..... ۲۸
- شکل ۴-۲ چارچوب اف برای جسم نوک تیز چرخان ..... ۲۹

- شکل ۲-۵ غلتش بر روی سطح ثابت ..... ۳۰
- شکل ۲-۶ غلتش دو جسم روی یکدیگر ..... ۳۰
- شکل ۲-۷ مسیر سیکلوئیدی طی شده توسط یک نقطه روی محیط جسم غلتان ..... ۳۲
- شکل ۲-۸ موقعیت اولیه جسم و حرکت تقدیمی ..... ۳۳
- شکل ۲-۹ دورانهای متوالی زاویه‌ی اوپلر  $3-1-3$  ..... ۳۳
- شکل ۳-۲ قلمرو جذب نقطه تعادل ..... ۳۹
- شکل ۳-۳ شکل نمونه وار تابع معین مثبت  $V(x_1, x_2)$  ..... ۴۰
- شکل ۳-۴ نمایش جام وارون تابع لیاپانوف ..... ۴۰
- شکل ۳-۵ منحنی های کانتور جام وارون تابع لیاپانوف ..... ۴۱
- شکل ۳-۶ ساختار سیستم کنترل تطبیقی مدل- مرجع ..... ۴۴
- شکل ۳-۷ ساختار سیستم کنترل کننده تطبیقی خود- تنظیم ..... ۴۶
- شکل ۲-۱ مدل شماتیک مکانیزم چرخ چندجهته ..... ۴۹
- شکل ۲-۲ شماتیک خودروی تک چرخ ..... ۵۰
- شکل ۲-۱۰ چرخ کوچک و محورهای مختصات مبنا و نسبی متصل به آن ..... ۵۲
- شکل ۲-۱۱ چرخ کوچک در وضعیت قائم ..... ۵۲
- شکل ۲-۱۲ وضعیت دستگاه مختصات  $xyz$  و  $x'y'z'$  ..... ۵۵
- شکل ۲-۱۳ موقعیت دستگاه های مختصات نسبی و مبنا برای چرخ کوچک و بزرگ ..... ۵۷
- شکل ۲-۱۴ دستگاه مختصات نسبی متصل به چرخهای کوچک ..... ۵۸
- شکل ۲-۱۵ وضعیت بردارهای یکه چرخ کوچک شماره‌ی ۲ نسبت به چرخ بزرگ ..... ۵۹
- شکل ۲-۱۶ وضعیت دستگاههای مختصات چرخهای کوچک نسبت به چرخ بزرگ ..... ۶۱
- شکل ۲-۱۷ وضعت محور مختصات نسبی متصل به محل استقرار سرنشین نسبت به چرخ ..... ۶۲
- شکل ۲-۱۸ وضعیت تمامی محورهای مختصات نسبی و مبنا در خودروی تک چرخ ..... ۶۵
- شکل ۳-۱ مدل سازی دینامیک خودروی تکچرخ در نرم افزار سیمولینک ..... ۸۳
- شکل ۴-۱ دینامیک آزاد زاویه رول و زاویه چرخش چرخ کوچک ..... ۱۰۶
- شکل ۴-۲ دینامیک آزاد زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین ..... ۱۰۶
- شکل ۴-۳ تغییرات زاویه رول و زاویه چرخش چرخ کوچک در مدل دو درجه آزادی ..... ۱۰۷
- شکل ۴-۴ تغییرات زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین در مدل دو درجه آزادی ..... ۱۰۷
- شکل ۴-۵ تغییرات زاویه رول و زاویه چرخش چرخ کوچک با مقدار اولیه غیر صفر ..... ۱۰۸
- شکل ۴-۶ تغییرات زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین با مقدار اولیه غیر صفر ..... ۱۰۸
- شکل ۴-۷ نتایج مدل اوکی و ناکامورا در مرجع ۲۴ ..... ۱۰۹
- شکل ۴-۸ نتایج مدل اوکی و ناکامورا با ساده سازی معادلات چهار درجه آزادی ..... ۱۱۰
- شکل ۴-۹ تغییرات زاویه‌ی رول بر حسب زمان با اعمال کنترل PD ..... ۱۱۱
- شکل ۴-۱۰ تغییرات زاویه‌ی رول بر حسب زمان با اعمال کنترل تطبیقی ..... ۱۱۲

- شکل ۱۱-۴ تغییرات زاویه انحراف محل استقرار سرنشین با اعمال کنترل PD ..... ۱۱۲
- شکل ۱۲-۴ تغییرات زاویه انحراف محل استقرار سرنشین با اعمال کنترل تطبیقی ..... ۱۱۳
- شکل ۱۳-۴ تغییرات زاویه چرخش چرخ کوچک با اعمال کنترل PD ..... ۱۱۳
- شکل ۱۴-۴ تغییرات زاویه چرخش چرخ کوچک با اعمال کنترل تطبیقی ..... ۱۱۴
- شکل ۱۵-۴ تغییرات سرعت زاویه‌های چرخ کوچک با اعمال کنترل PD ..... ۱۱۴
- شکل ۱۶-۴ تغییرات سرعت زاویه‌های چرخ کوچک با اعمال کنترل تطبیقی ..... ۱۱۵
- شکل ۱۷-۴ خطای کنترل PD در جبران زاویه ی رول ..... ۱۱۵
- شکل ۱۸-۴ خطای کنترل PD در جبران زاویه انحراف محل استقرار سرنشین ..... ۱۱۵
- شکل ۱۹-۴ خطای کنترل تطبیقی در جبران زاویه ی رول ..... ۱۱۶
- شکل ۲۰-۴ خطای کنترل تطبیقی در جبران زاویه انحراف محل استقرار سرنشین ..... ۱۱۶
- شکل ۲۱-۴ سیگنال کنترل گشتاور چرخ کوچک با اعمال کنترل PD ..... ۱۱۷
- شکل ۲۲-۴ سیگنال کنترل گشتاور چرخ بزرگ با اعمال کنترل PD ..... ۱۱۷
- شکل ۲۳-۴ سیگنال کنترل گشتاور چرخ کوچک با اعمال کنترل تطبیقی ..... ۱۱۸
- شکل ۲۴-۴ سیگنال کنترل گشتاور چرخ بزرگ با اعمال کنترل تطبیقی ..... ۱۱۸

## فهرست جداول

- جدول ۱-۳ پارامترهای معادلات حرکت خودروی تک چرخ ..... ۹۱
- جدول ۲-۳ متغیرهای معادلات حرکت خودروی تک چرخ ..... ۹۲
- جدول ۳-۳ پارامترهای کنترل تطبیقی ..... ۹۵
- جدول ۱-۴ پارامترهای خودرو تک چرخ بر اساس مرجع شماره ۲۴ ..... ۱۰۵

# فصل اول

پیشینه تحقیق

در عصر حاضر مشکل آلودگی هوا و آثار سوء آن بر سلامتی انسان و همچنین بحران کمبود انرژی سبب شده است تا محققین و دولتمردان بیش از پیش به مسائل محیط زیستی واکنش نشان دهند. از همین رو، در طی سال‌های اخیر مراکز تحقیقاتی و محققین تلاش‌های خود را بر روی تولید وسایل نقلیه با سوخت پاک، کم حجم، قابلیت جابجایی آسان و کمترین میزان آلودگی متمرکز نموده‌اند. وسایل نقلیه برقی تک نفره با قابلیت استفاده در مکان‌های مختلف با مانور پذیری بالا و همچنین توانایی حفظ شارژ به مدت طولانی، از جمله اهداف مهندسين طراح و محققين می‌باشد. خودروهای تعادلی دو چرخ و تک چرخ نمونه‌هایی از خودروهای تک نفره می‌باشد که قابل شارژ با برق شهری بوده و هیچ گونه آلاینده‌ی صوتی و زیست محیطی ندارد. خودروهای تعادلی دو چرخ و تک چرخ سیستم‌هایی ذاتا ناپایداری بوده و در سال‌های اخیر توجه بسیاری را به خود معطوف نموده است.

وسایل نقلیه و ربات‌های تعادلی دوچرخ و تک‌چرخ به موضوعی پر کاربرد در مکانیک و رباتیک تبدیل شده است که با الهام از پاندول معکوس<sup>۱</sup> محققین به مطالعه و تحقیق در جهت توسعه الگوریتم موثر کنترل کننده آن مشغول می‌باشند. توسعه پاندول معکوس که یکی از سیستم‌های کلاسیک در دینامیک و کنترل می‌باشد، به علت ناپایداری ذاتی و خاصیت غیرخطی به عنوان یکی از مسایل چالش برانگیز در مهندسی کنترل شناخته می‌شود. این سیستم به عنوان یک محک برای تست الگوریتم‌های کنترلی متفاوت مانند کنترل کننده‌های کلاسیک PID، شبکه عصبی<sup>۲</sup>، کنترل کننده‌ی فازی<sup>۳</sup>، کنترلرهای غیرخطی و... به کار می‌رود. این مدل بطور گسترده توسط پژوهشگران در سراسر جهان نه تنها در طراحی کنترلر یک ربات چرخدار مورد استفاده قرار می‌گیرد بلکه در انواع دیگری از ربات‌ها مانند ربات‌های پادار و ربات‌های انسان‌نما نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این فصل ابتدا به معرفی و دسته بندی وسایل نقلیه و ربات‌های تعادلی دو چرخ می‌پردازیم و در ادامه خودروهای تک‌چرخ را معرفی می‌نماییم. برای هر دو دسته دینامیک سیستم، نحوه‌ی حرکت، پایداری و کنترل آنها معرفی شده و پژوهش‌ها و مقالات ارائه شده در این زمینه بررسی می‌شود. در نهایت نوآوری‌های صورت گرفته و سیستم طراحی شده برای خودروی تک‌چرخ معرفی و مزایای آن بیان می‌شود. در بخش انتهایی این فصل، فصل‌های پایان‌نامه به اختصار معرفی شده است.

---

<sup>1</sup> Inverted Pendulum

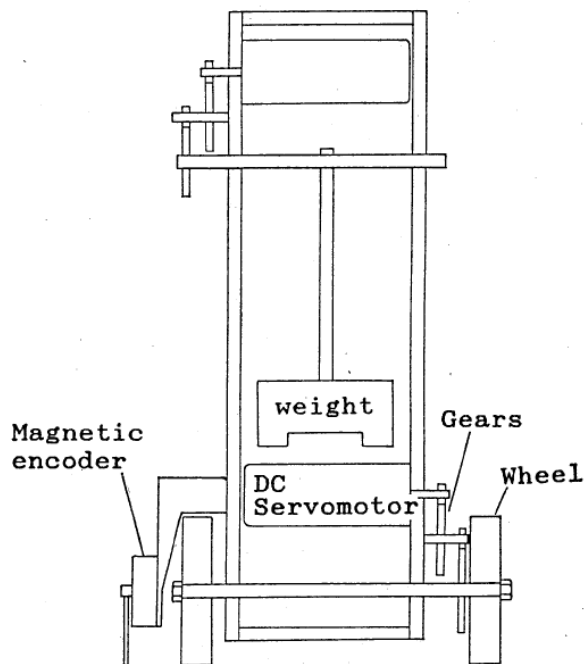
<sup>2</sup> Neural Networks

<sup>3</sup> Fuzzy Control



## ۲-۱ وسایل نقلیه تعادلی دو چرخ

وسایل نقلیه‌ی دو چرخ TWV<sup>۴</sup>، دو نقطه‌ی تماس با زمین داشته و در نتیجه در راستای زاویه‌ی رول پایدار می‌باشد. یامافوجی، استاد ممتاز بازنشسته دانشگاه الکترو-ارتباطات در توکیو در سال ۱۹۸۹ اولین ربات تعادلی دو چرخ را معرفی و با معیار رات-هرویتس زاویه پیچ آن را کنترل نمود [1]. در شکل ۱-۱، ربات تعادلی دو چرخ یامافوجی مشاهده می‌شود.



شکل ۱-۱ ربات تعادلی دو چرخ یامافوجی

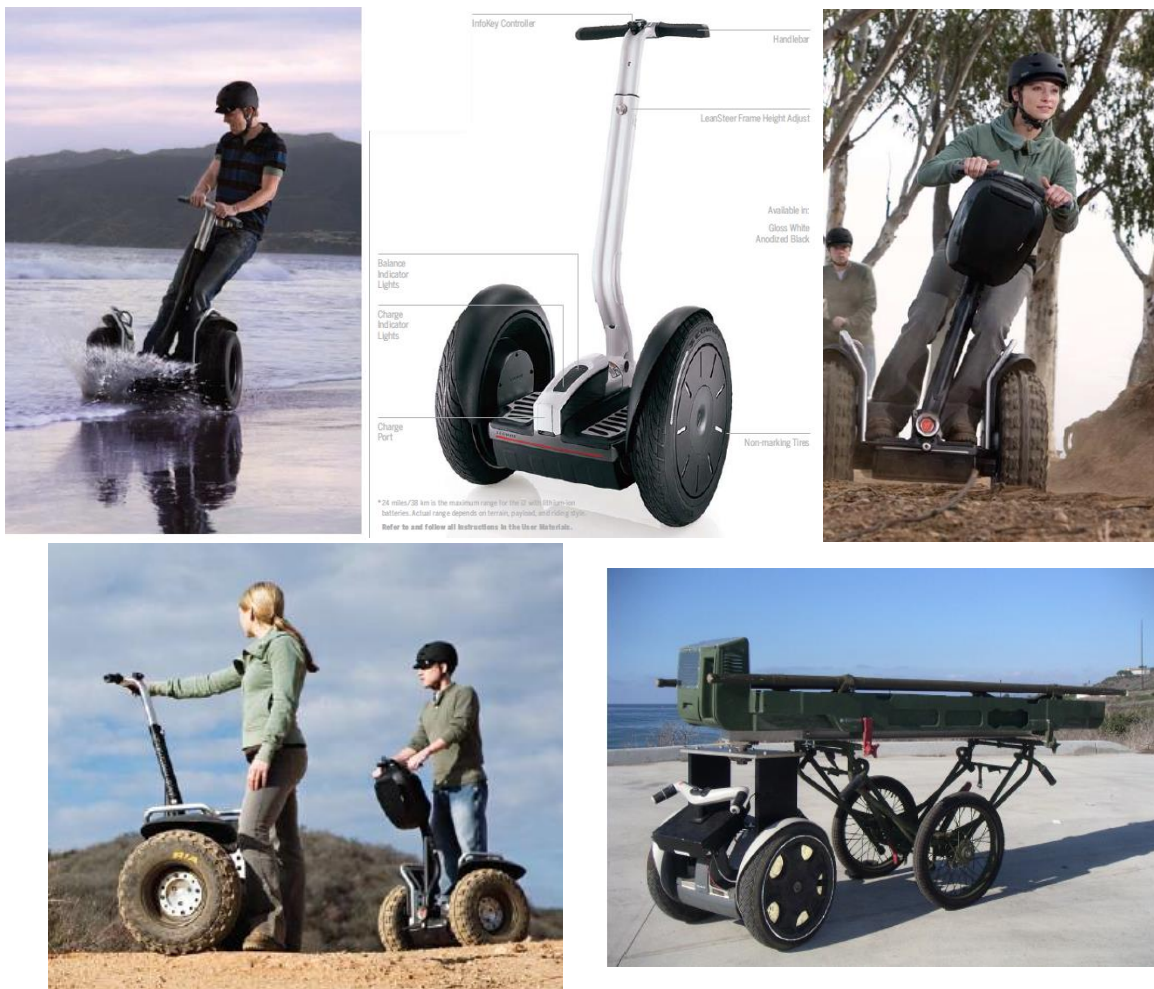
سگوی<sup>۵</sup> نام محصول تجاری می‌باشد که در سال ۲۰۰۲ توسط آقای دن کامن در آمریکا اختراع و به تولید انبوه رسید. تعادل زاویه‌ی پیچ در آن توسط کنترلر و همچنین زاویه‌ی یاو و مانورپذیری به وسیله‌ی سرعت غیر وابسته‌ی چرخ‌ها تنظیم می‌شود [2]. سگوی از پنج ژيروسکوپ و دو سنسور شیب برای حفظ تعادل و پایداری خود استفاده می‌نماید. در شکل ۲-۱ وسیله نقلیه تجاری سگوی را مشاهده می‌نماییم.

سگوی‌ها، مشهورترین وسایل نقلیه دو چرخ تجاری موجود می‌باشند که از آنها در مراکز تفریحی، خدماتی، توریستی و گردش‌گری استفاده می‌شود. همچنین از آنها در زمینه‌های نظامی نیز استفاده می‌شود. برای این منظور سگوی، گاری یا محموله متصل به خود را در مکان‌هایی که برای

<sup>4</sup> Two-Wheeled Vehicle

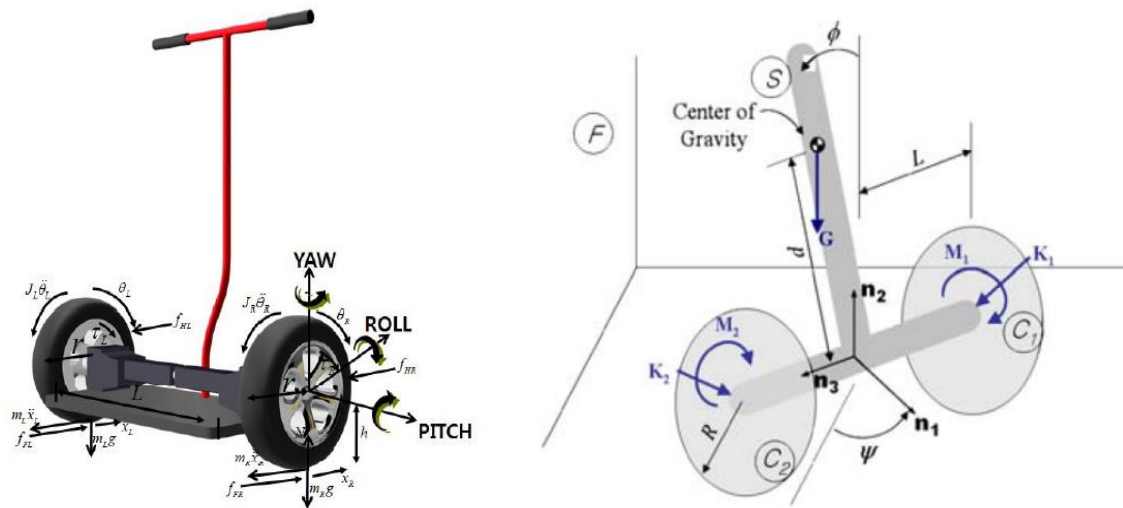
<sup>5</sup> Segway

حضور انسان خطرناک می‌باشد، حمل می‌نماید. همچنین برای جابه‌جایی مصدومان نیز استفاده می‌شود.



شکل ۱-۲ وسیله نقلیه تجاری Segway

مدل ریاضی این وسیله سه درجه آزادی دارد که عبارتند از: چرخش چرخ‌ها، زاویه‌ی پیچ محل استقرار سرنشین نسبت به محور چرخ‌ها و زاویه‌ی یابو محل استقرار سرنشین نسبت به محور چرخ‌ها که برای این منظور دو چرخ بایستی با سرعت متغیر نسبت به هم حرکت نمایند و مانور پذیری بالایی برای سگویی ایجاد می‌نماید. همان‌طور که پیشتر بیان شد، به علت دو نقطه‌ی تماس سگویی با زمین زاویه‌ی رول مقید می‌باشد. در شکل ۱-۳ شماتیک درجات آزادی سگویی و چرخ‌های آن نشان داده شده است.



شکل ۳-۱ شماتیک درجات آزادی سگویی

به علت ذات ناپایدار سیستم، محققین بسیاری با استفاده از روش های کنترل خطی و غیر خطی به موضوع حفظ تعادل و پایداری این سیستم پرداخته اند. گراسر و همکاران در سال ۲۰۰۲ مدل دینامیکی را با استفاده از روش دینامیک نیوتنی محاسبه و در نهایت معادلات را خطی سازی نموده و با دو سیگنال کنترل فضای حالت آن را کنترل نموده اند [3]. در شکل ۴-۱ ربات تعادلی دو چرخ JOE را مشاهده می نمایم

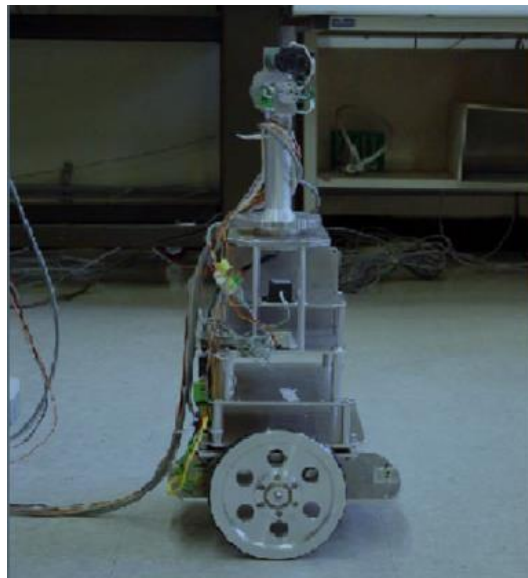


شکل ۴-۱ ربات تعادلی دو چرخ JOE

روش مدلسازی ربات تعادلی دو چرخ JOE و معادلات تعادل آن، به عنوان مرجع بسیاری از

مطالعات بعدی می‌باشد که همانند سگوی سه درجه آزادی دارد.

کیم و همکاران در سال ۲۰۰۵ مدل دینامیکی دقیق پاندول معکوس دو چرخ را معرفی و سیستم را با خطی سازی حول نقطه تعادل با فرض تغییرات زاویه‌ی کوچک، خطی نموده است [4]. در شکل ۱-۵ ربات تعادل دو چرخ کیم و همکاران را مشاهده می‌نماییم.

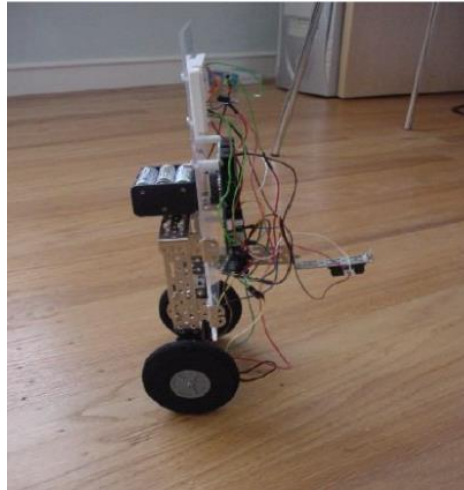


شکل ۱-۵ ربات تعادل دو چرخ کیم و همکاران

پاساک و همکاران دو کنترلر سرعت با خطی‌سازی فیدبک جزئی و کنترل پایداری موقعیت را برای ربات تعادلی دو چرخ خود ارائه نمود [5].

برای اندازه‌گیری میزان انحراف زاویه پاندول از ابزارهای متفاوتی مثل سنسورهای نوری، انواع شتاب سنج‌ها و ژيروسکوپ استفاده می‌شود. سنسورهای نوری باید در موقعیت جلو یا پشت ربات رو به پایین قرار داده شوند به طوری که امکان اندازه‌گیری طول موج از کف زمین وجود داشته باشد. در این صورت، امکان اندازه‌گیری فاصله از زمین وجود داشته و مشخص می‌شود که ربات به کدام سمت سقوط می‌کند.

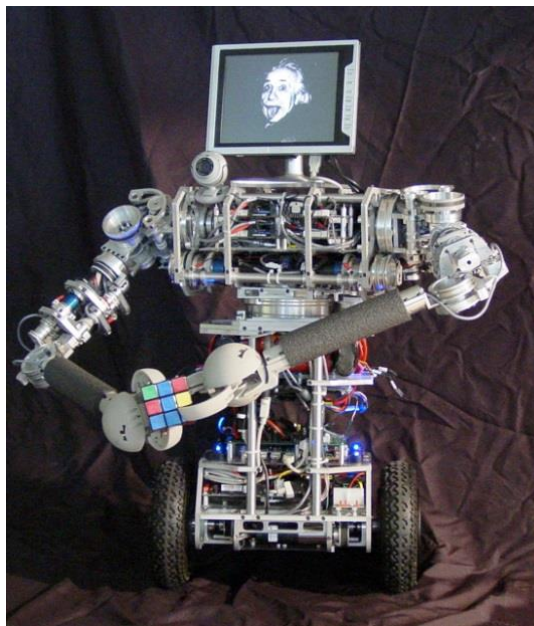
ربات Equibot از سنسور مادون قرمز شارپ برای اندازه‌گیری فاصله از کف زمین استفاده می‌نماید و با استفاده از زاویه شیب، میزان انحراف را تشخیص می‌دهد. ربات تعادلی Equibot شبیه به سگوی در مقیاس کوچکتر می‌باشد که مبتنی بر میکروکنترلر ATmega32 RISC بوده و تصویر آن در شکل ۱-۶ نشان داده شده است [6].



شکل ۶-۱ ربات تعادلی دو چرخ Equibot

برای تشخیص زاویه ربات می‌توانیم از شتاب سنج به همراه یک ژيروسکوپ استفاده شود. شتاب سنج مسئول اندازه‌گیری شتاب مناسب ربات در هنگام کج شدن می‌باشد، که با این داده‌ها می‌توانیم زاویه ربات را تعیین نماییم و ژيروسکوپ برای اندازه‌گیری شتاب زاویه‌ای می‌باشد. این سنسورها را می‌توان در هر طرف ربات با توجه به این نکته که تنظیم آن با توجه به محوری که ربات حول آن منحرف می‌شود، قرار داد.

ربات UMASS uBot توسط برد IMU بواسطه یک شتاب سنج و ژيروسکوپ کنترل می‌شود. در uBot از مدل فضای حالت استفاده می‌شود و یک تنظیم کننده خطی بهینه برای کنترل تعادل سیستم استفاده می‌شود که تصویر آن در شکل ۷-۱ نشان داده شده است [7].



شکل ۷-۱ ربات تعادلی دو چرخ UMASS uBot

مثال دیگری از ربات تعادلی دو چرخ که از شتاب سنج وژیروسکوپ استفاده می کند، ربات nBot می باشد. داده هایی که از دو سنسور جمع آوری می شوند توسط FAS-G IMU پردازش شده و یک فیلتر وینر اطلاعات سنسور را به یک اندازه گیری واحد تلفیق می کند. تصویر آن در شکل ۸-۱ نشان داده شده است [8].



شکل ۸-۱ ربات تعادلی دو چرخ nBot

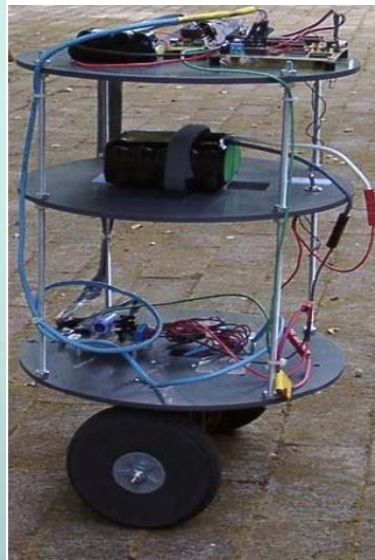
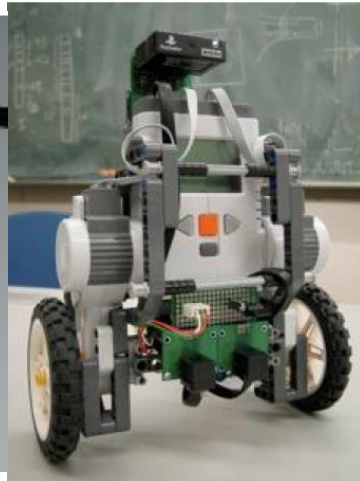
در شکل ۹-۱ نمونه هایی از ربات های تعادلی دو چرخ نشان داده شده است. که در برخی از آنها از لگوی پی سی ایکس<sup>۶</sup> و لگوی ان ایکس تی<sup>۷</sup> استفاده شده است [9-14]. به علت ساختار یکسان ربات های تعادلی دو چرخ از توضیح بیشتر آنها صرف نظر نموده و در ادامه به معرفی وسایل نقلیه تک چرخ می پردازیم.

---

6 PCX Lego

7 NXT Lego





شکل ۹-۱ نمونه هایی از ربات های تعادلی دو چرخ

### ۳-۱ وسایل نقلیه تعادلی تک چرخ

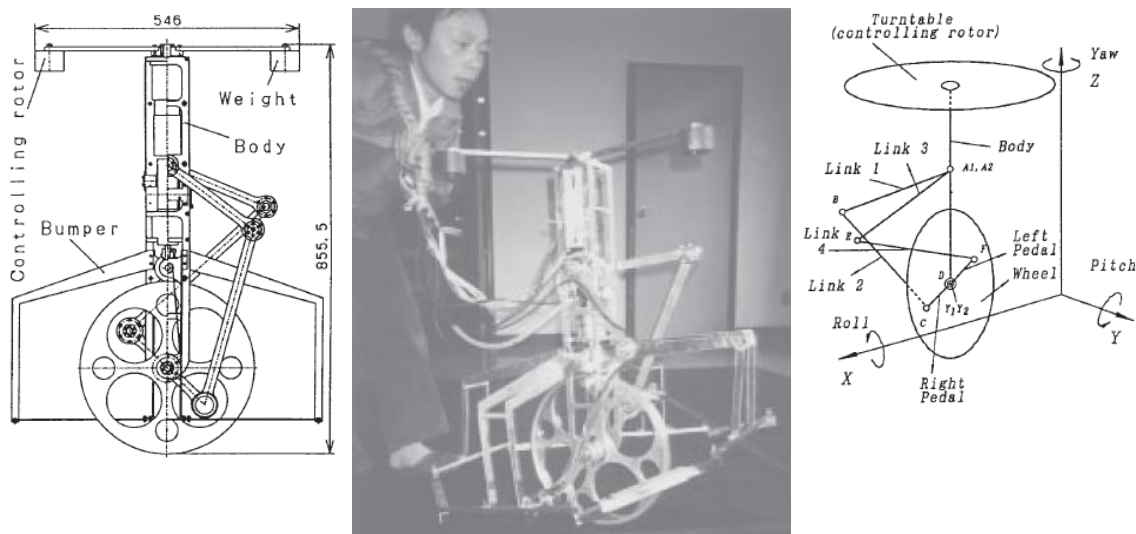
وسایل نقلیه تک چرخ OWV<sup>۱</sup>، تنها یک نقطه تماس با زمین داشته و در نتیجه بسیار ناپایدارتر از TWVها می باشند و کنترل آنها چالش برانگیزتر می باشد. وسایل نقلیه تک چرخ، تکامل یافته ی وسایل نقلیه دوچرخ می باشد و علاوه بر نام OWV، به نام Unicycle نیز شناخته می شود. درکامل ترین مدل سازی خودروی تک چرخ نیازمند کنترل و حفظ پایداری در سه جهت پیچ، رول و یاو می باشیم که سیستم را به شدت ناپایدار می نماید. در ادامه به معرفی انواع ربات ها و خودروهای تک چرخ پرداخته و مزایا و معایب آنها بررسی می شود.

OWV ها از لحاظ مدل سازی و کنترل به دسته های مختلف تقسیم می شوند، که عبارتند از:

خودروها و ربات‌های تعادلی که از اثر ژيروسکوپ برای حفظ تعادل خود استفاده می‌نمایند، خودروهایی که بر اساس مدل‌سازی دینامیکی و معادلات حرکت کنترل می‌شوند، خودروهایی که بدون نیاز به مدل دینامیکی سیستم کنترل می‌شوند و از کنترل هوشمند بهره می‌برند و خودروهایی که به صورت تجربی و بدون مدل‌سازی ساخته و از سنسورهای مختلف برای پایداری خود استفاده می‌نمایند.

### ۱-۳-۱ ربات‌های تعادلی تک‌چرخ پایدار به کمک اثر ژيروسکوپ

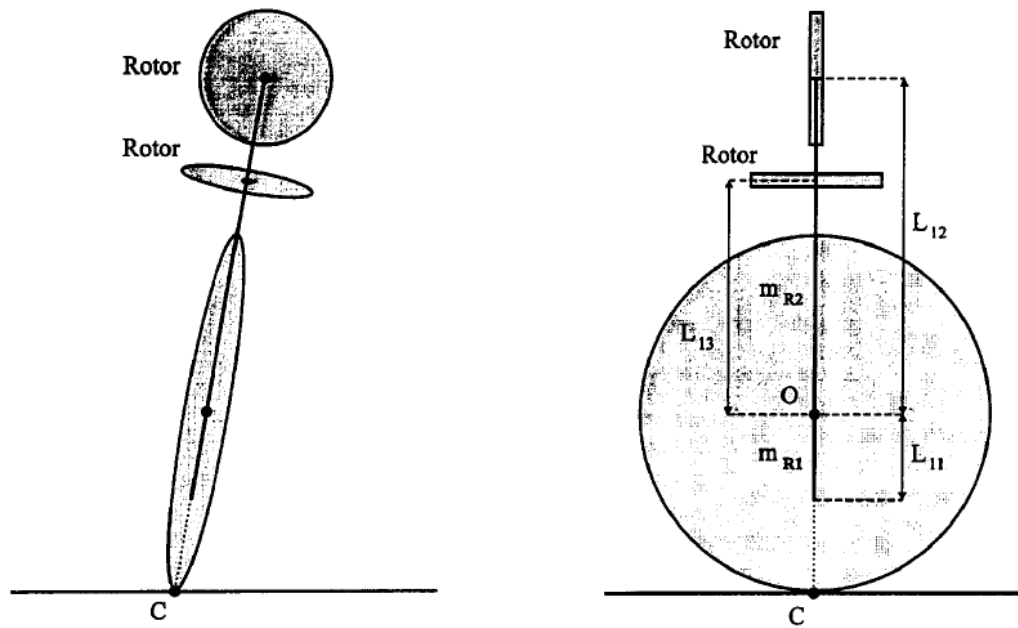
در تعدادی از خودروها و ربات‌های تعادلی تک‌چرخ برای بالانس زاویه‌ی یاء، رول و پیچ از اثر ژيروسکوپ استفاده می‌شود. شنگ و یامافوجی مدلی را برای پایداری خودروی تک‌چرخ ارائه دادند که از یک دیسک دوار عمود بر چرخ استفاده می‌کرد، که در شکل ۱-۱۰ مشاهده می‌شود [15]. این مدل‌سازی برای اولین بار انجام گرفت و کنترل پایداری آن با تقلید حرکت راننده توسط ربات با موفقیت انجام شد.



شکل ۱-۱۰ ربات تعادلی تک‌چرخ شنگ و یامافوجی

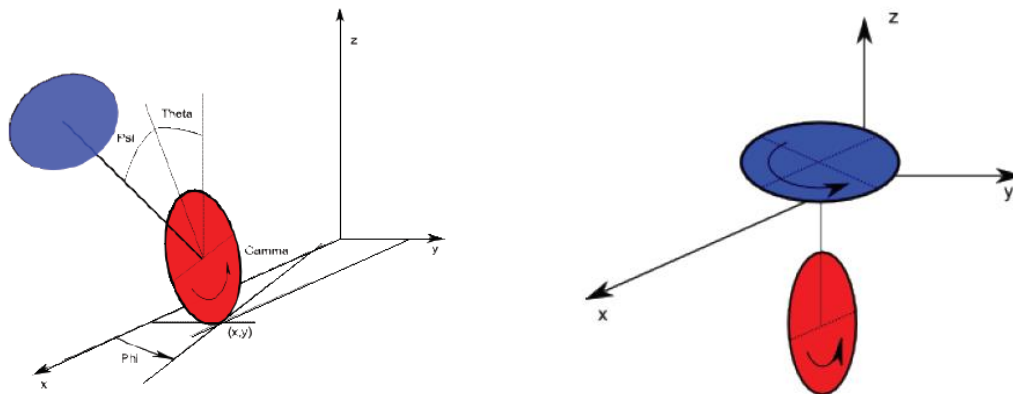
کمپ و یاوین در سال ۲۰۰۰ مدلی را پیشنهاد دادند که از دو روتور عمود بر هم و آثار متقابل دوران‌های آنها بر یکدیگر برای حفظ تعادل استفاده می‌نمود [16]. مدل پیشنهادی ربات تعادلی تک‌چرخ کمپ و یاوین را در شکل ۱-۱۱ مشاهده می‌نماییم.





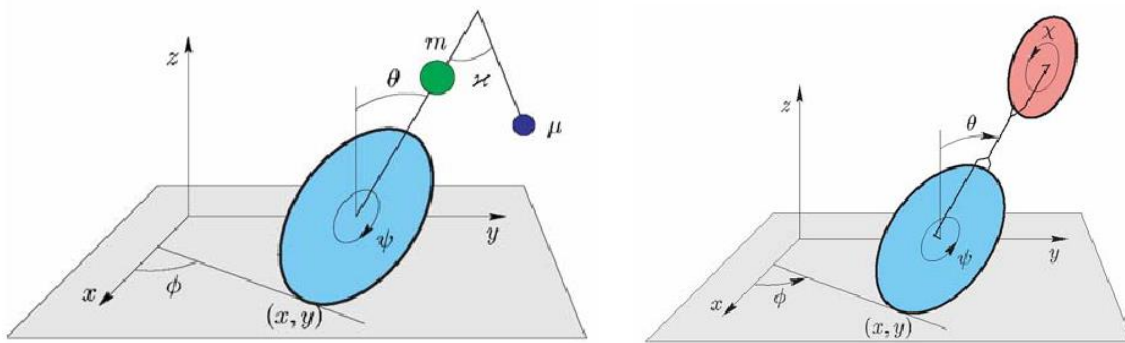
شکل ۱۱-۱ مدل پیشنهادی ربات تعادلی تک چرخ کمپ و یاوین

کاپلر در سال ۲۰۰۷ از یک ژيروسکوپ عمود بر چرخ برای حفظ تعادل در صفحه‌ی عرضی استفاده نمود و پایداری مدل پیشنهادی خود را بررسی نمود [17]. مدل پیشنهادی ربات تعادلی تک چرخ کاپر را در شکل ۱۲-۱ مشاهده می‌نماییم.



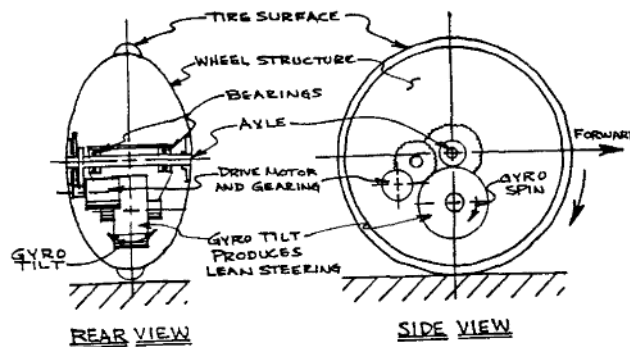
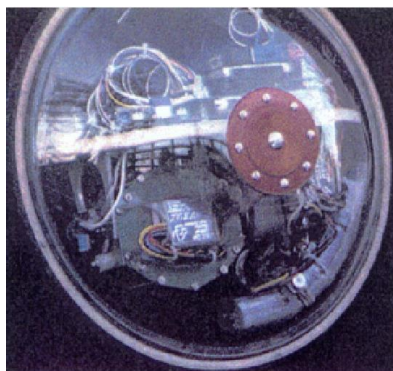
شکل ۱۲-۱ مدل پیشنهادی ربات تعادلی تک چرخ کاپر

زنکو، بلوچ و مارسدن دو نوع ربات تک چرخ را پیشنهاد می‌دهند که در شکل ۱۳-۱ مشاهده می‌شود [18,19]. البته آنها به این رباتها به عنوان یک سیستم پیچیده برای کنترل نگاه کرده و از آنها به عنوان نمونه‌هایی برای بررسی تئوری‌های کنترلی خود استفاده می‌کنند.



شکل ۱۳-۱ مدل پیشنهادی ربات تعادلی تک چرخ زنکو، بلوچ و مارسدن

ربات تک چرخ ژيروسکوپي موسوم به ژایرور<sup>۹</sup> ایده‌ای نو در بین ربات‌های تک چرخ می‌باشد که برای اولین بار توسط براون و ژو در دانشگاه کارنگی ملون<sup>۱۰</sup> در سال ۱۹۹۶ ارائه شد [20]. ایده‌ی اصلی این ربات در استفاده از اثر ژيروسکوپي برای پایداری و کنترل ربات می‌باشد. این ربات دارای یک چرخ طیار<sup>۱۱</sup> در درون خود بوده که با سرعت بسیار زیاد در حال دوران می‌باشد و توسط یک بازوی دو درجه آزادی از وسط چرخ آویزان می‌گردد. با کنترل زاویه بین چرخ طیار و محور چرخ، در اثر اعمال گشتاور، چرخ طیار به یک سو متمایل می‌شود. سپس گشتاوری که به خاطر وجود چرخ طیار توسط نیروی وزن به چرخ وارد می‌شود و ایجاد اثر ژيروسکوپي، چرخ شروع به دور زدن می‌نماید. لذا به کمک چرخ طیار می‌توان پایداری و فرمانخوری<sup>۱۲</sup> ربات را کنترل کرد. در شکل ۱۴-۱ ربات تعادلی ژایرور مشاهده می‌شود.



شکل ۱۴-۱ ربات تعادلی ژایرور

استفاده از اثر ژيروسکوپي نیازمند دیسکی در جهت عمود بر چرخ می‌باشد که با سرعت نسبتاً

<sup>9</sup> Gyrover

<sup>10</sup> Carnegie Mellon University

<sup>11</sup> Flywheel

<sup>12</sup> Steering

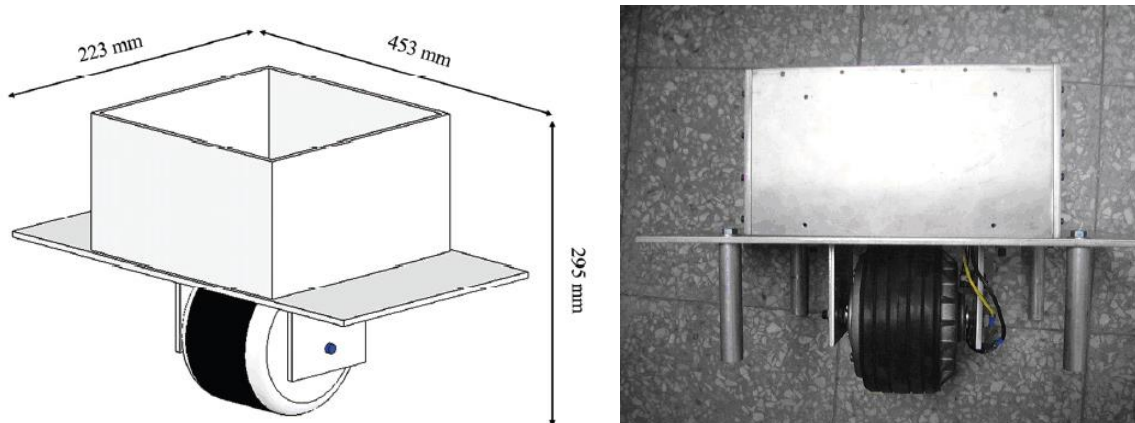
بالایی دوران نماید، که محدودیت‌هایی را در به کار بردن آن برای OWV در دنیای واقعی و کاربردی ایجاد می‌نماید. بنابراین از این روش بیشتر در زمینه‌های آزمایشگاهی و تحقیقاتی استفاده می‌شود.

### ۱-۳-۲ ربات‌ها و خودروهای تعادلی تک‌چرخ با مدلسازی دینامیکی

از لحاظ کاربردی معمولاً خودروهای تک‌چرخ، زاویه‌ی پیچ را کنترل و به راننده برای حفظ زاویه‌ی رول کمک می‌نمایند و همچنین راننده نیز برای کنترل راستای زاویه‌ی رول و یاباوری نسبتاً مهارت داشته باشد. این خودروها دو دسته می‌باشند: در دسته‌ی اول، معادلات حرکت مدل سیستم محاسبه شده و کنترلر خطی یا غیرخطی وظیفه‌ی حفظ تعادل و پایداری محل استقرار سرنشین را دارد. در دسته دوم، مدلسازی دینامیکی انجام نشده و هیچ‌گونه معادلاتی در دسترس نمی‌باشد و راننده با مهارت خود آن را کنترل می‌نماید که در ادامه به معرفی نمونه‌هایی از آنها می‌پردازیم. البته در دسته دوم، روش طراحی خودرو راننده را در هدایت آن کمک می‌نماید.

در خودروهای دسته‌ی اول، اکثراً مدل سیستم بسیار ساده شده و در نهایت معادلات آن را خطی می‌نمایند که سبب تفاوت‌هایی بین مدل واقعی و مدل دینامیکی سیستم می‌شود. در این خودروها از چرخ‌های معمولی، کروی و چرخ‌های چند جهته<sup>۱۳</sup> استفاده می‌شود. در ادامه نمونه‌هایی از هر حالت را معرفی می‌نماییم.

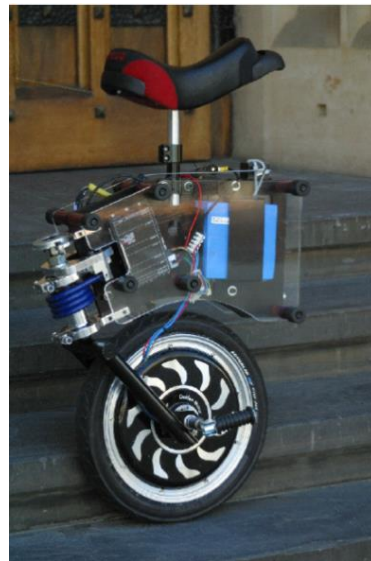
هوانگ در سال ۲۰۱۰ مدل ریاضی OWV پیشنهادی خود را در حالت صفحه‌ای محاسبه و با خطی‌سازی معادلات و اعمال کنترل خطی با روش جابدهی قطب‌ها و کنترل بهینه خطی تعادل خودروی پیشنهادی خود را حفظ نمود [21]. در شکل ۱-۱۵ ربات تعادلی تک‌چرخ پیشنهادی هوانگ را مشاهده می‌نماییم.



شکل ۱-۱۵ ربات تعادلی تک‌چرخ کادیس و هوانگ

<sup>13</sup> Omni directional Wheel

کادیس و همکاران در سال ۲۰۱۰ در استرالیا با استفاده از روش لاگرانژ معادلات دینامیکی OWV را بدون در نظر گرفتن زاویه یاو در حالت صفحه‌ای مدلسازی نموده و با استفاده از کنترل خطی PD، مدل پیشنهادی را در راستای پیچ کنترل و راننده به کمک پدال‌های طراحی شده در طرفین چرخ، تعادل رول را حفظ می‌نماید [22]. در شکل ۱-۱۶ خودروی تعادلی تک‌چرخ کادیس و همکاران نشان داده شده است.



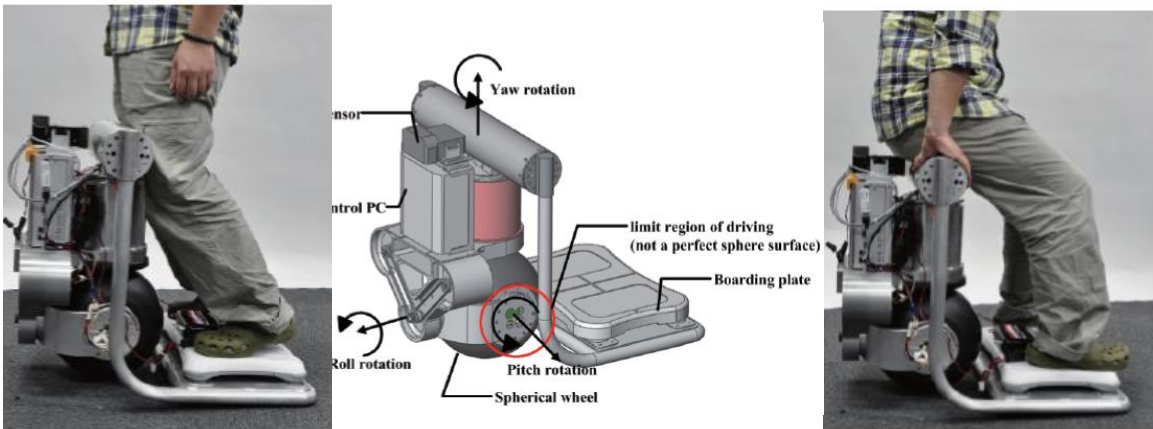
شکل ۱-۱۶ خودروی تعادلی تک‌چرخ کادیس و همکاران

برای حفظ زاویه‌ی پیچ، بسته به میزان انحراف محل استقرار سرنشین، با چرخش چرخ این انحراف اصلاح می‌شود و خودرو در راستای پیچ پایدار می‌شود. به علت تنها یک نقطه‌ی تماس در OWV، توسط هیچ موتوری نمی‌توان محور یاو خودرو را دوران داد. در نتیجه حفظ زاویه‌ی یاو به صورت خودکار ممکن نمی‌باشد و باید تغییراتی در سیستم خودرو برای حفظ زاویه‌ی یاو ایجاد نمود. لی و همکاران در سال ۲۰۱۱ ایده‌ای خلاقانه برای حفظ تعادل رول با استفاده از نیروی اعمالی توسط فشار هوای ایجاد شده به وسیله‌ی دو فن داخل کانال در طرفین چرخ ارائه نمود. در حالی که زاویه‌ی پیچ توسط کنترل خطی PID کنترل می‌شود، یک کنترلر خطی PID مجزا برای حفظ زاویه‌ی رول در راستای قائم استفاده می‌شود [23]. در شکل ۱-۱۷ ربات تعادلی تک‌چرخ لی و همکاران را مشاهده می‌نماییم.



شکل ۱۷-۱ ربات تعادلی تک چرخ لی و همکاران

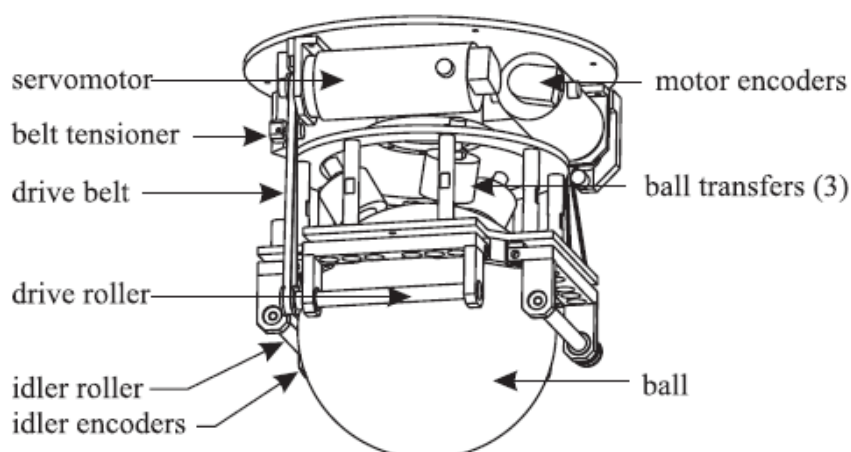
در برخی از ربات‌ها و خودروهای تک چرخ از یک چرخ کروی استفاده شده است. اوکی و ناکامورا در ۲۰۱۱ مدلی برای OWV ارائه دادند که از یک چرخ کروی و یک سکو برای سر نشین تشکیل می‌شود. مدل دینامیکی سیستم با روش لاگرانژ محاسبه و پس از خطی سازی با استفاده از کنترل بهینه خطی، زوایای پیچ و یاو را کنترل می‌شود [24]. در شکل ۱۸-۱ خودروی تک چرخ اوکی و ناکامورا مشاهده می‌شود. در این مدل سازی فرض شده که زوایای رول و پیچ مستقل از یکدیگر بوده و مدل سیستم را به دو زیر سیستم صفحه‌ای تقسیم نموده است و برای حفظ تعادل هر یک از زوایا از یک کنترلر استفاده نموده است.



شکل ۱۸-۱ خودروی تک چرخ اوکی و ناکامورا

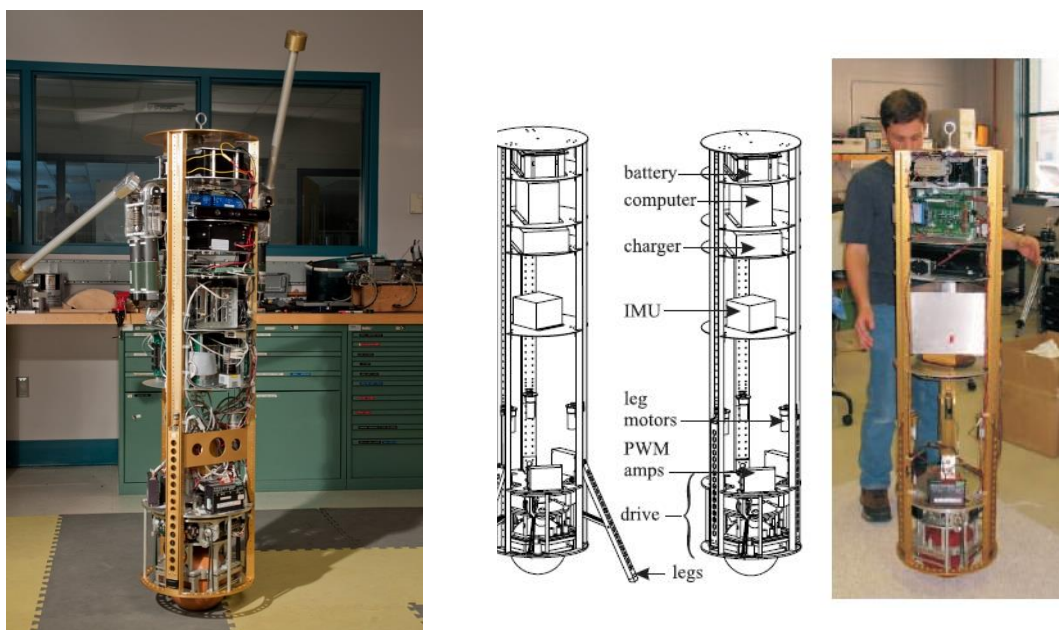
ربات‌هایی که تنها از یک چرخ کروی تشکیل شده و توسط مکانیزم نشان داده شده در شکل ۱۹-۱ حرکت می‌نمایند، ربات تعادلی Ballbot نامیده می‌شود. این مکانیزم، مکانیزم معکوس استفاده شده در موس‌های توپی کامپیوتر می‌باشد [25,26].





شکل ۱۹-۱ مکانیزم ربات تعادلی Ballbot

در شکل ۲۰-۱، ربات تعادلی Ballbot طراحی شده توسط لاریس و همکاران نشان داده شده است. معادلات حرکت سیستم را توسط روش لاگرانژ محاسبه و پس از خطی‌سازی با استفاده از کنترل بهینه خطی، ربات را کنترل می‌نماید. این گونه ربات‌ها به آسانی قادر بوده بدون محدودیت در تمام نقاط صفحه حرکت نماید که بزرگترین مزیت آن نسبت به سایر ربات‌های چرخدار می‌باشد [25].

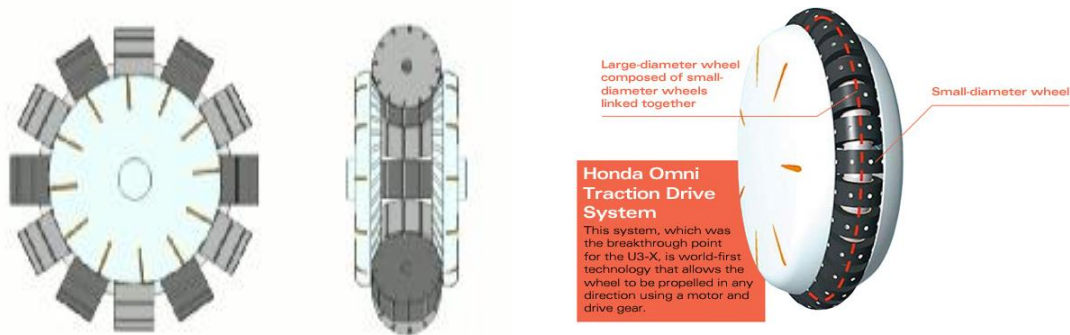


شکل ۲۰-۱ نمونه‌هایی از ربات تعادلی Ballbot

خودروی تک‌چرخ U3-X، پیچیده‌ترین و کامل‌ترین خودروی تک‌چرخ موجود می‌باشد که در سال ۲۰۰۹ توسط کمپانی مشهور هند<sup>۱۴</sup> ارائه شد. این وسیله قادر است در هر جهتی با استفاده از

<sup>14</sup> HONDA

مکانیزم چرخ چند جهته منحصر به فرد خود به نام Honda Omni Traction Drive System بدون مشکل حرکت نماید. برای حرکت و تنظیم سرعت در هر جهتی کافی است که راننده خود را به سمت مورد نظر متمایل نماید [27]. در شکل ۱-۲۱ مکانیزم چرخ چند جهته مشاهده می‌شود.



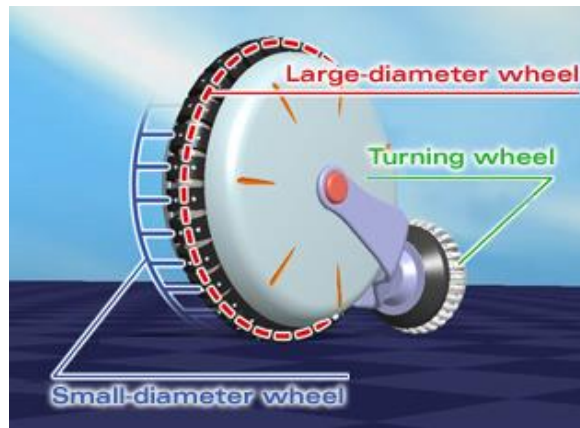
شکل ۱-۲۱ مکانیزم چرخ چند جهته Honda Omni Traction Drive System

مکانیزم چرخ چند جهته Honda Omni Traction Drive System، از یک چرخ بزرگ و تعدادی چرخ کوچک تشکیل شده است. مهمترین ویژگی آن، قابلیت حرکت مستقل چرخ‌های کوچک و بزرگ می‌باشد. در صورت دوران چرخ بزرگ، چرخ به سمت جلو-عقب حرکت می‌نماید و در صورتی که چرخ‌های کوچک دوران نمایند، مجموعه چرخ به چپ-راست حرکت می‌کند. در صورتی که چرخ بزرگ و کوچک همزمان حرکت کنند، بسته به نسبت سرعت آنها، چرخ به صورت مورب حرکت می‌کند. در شکل ۱-۲۲ خودروی تک‌چرخ U3-X نشان داده شده است.



شکل ۱-۲۲ خودروی تک‌چرخ U3-X

در سال ۲۰۱۲ شرکت هندل مدل بهبود یافته‌ی U3-X را با نام UNI.CUB ارائه نمود که در این مدل از یک چرخ کمکی برای پایداری بیشتر و کنترل زاویه یابو استفاده می‌شود [28]. در شکل ۱-۲۳ خودروی تک‌چرخ UNI.CUB نشان داده شده است.



شکل ۱-۲۳ خودروی تک چرخ UNI.CUB

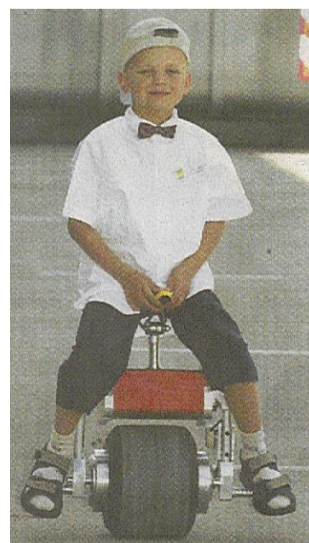
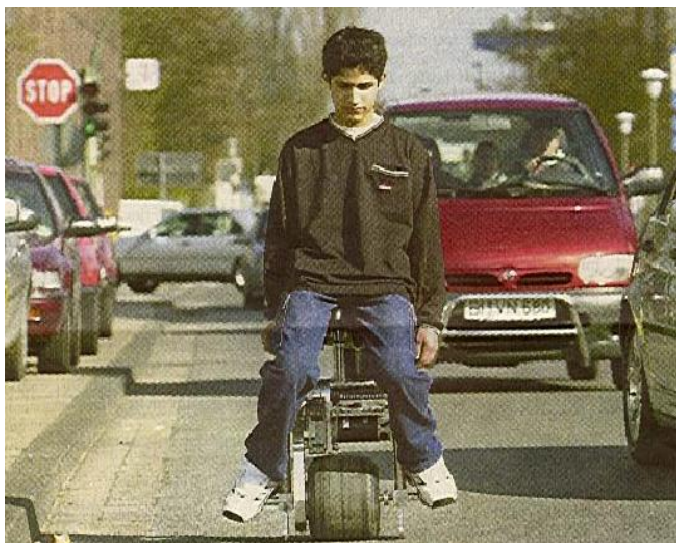
در U3-X امکان دوران حول محور یاء وجود نداشت در حالیکه در UNI.CUB به کمک چرخ انتهایی این امکان ایجاد شده است و همچنین پایداری و مانور پذیری آن را به شدت افزایش می دهد.

### ۱-۳-۳ خودروهای تعادلی تک چرخ بدون مدلسازی دینامیکی

در صورت استفاده از روش های کنترل هوشمند مانند کنترل فازی، دیگر نیازی به محاسبه ی معادلات حرکت سیستم نمی باشد که در مدلسازی های پیچیده بسیار مطلوب می باشد.

در سال ۲۰۰۵ و ۲۰۰۶ آقای هوفر خودروی تک چرخ خود را با فرض پهن بودن چرخ که سبب تعادل حرکت زاویه رول می شود را با استفاده از روش کنترل فازی طراحی و کنترل نمود [29,30]. در این مدل از یک موتور dc برای تامین نیرو استفاده شده است که یک کنترلر مشاهده گر وظیفه کنترل آن را بر عهده دارد. این وسیله در هر ثانیه صد بار میزان زاویه ی انحراف را اندازه گیری می نماید تا انحراف آن را جبران نموده و خودرو پایدار باقی بماند. در شکل ۱-۲۴ خودروی تک چرخ هوفر نشان داده شده است.





شکل ۱-۲۴ خودروی تک چرخ هوفر

### ۱-۳-۴ خودروهای تجاری تک چرخ

در سال‌های اخیر تعدادی از OWV توسط مهندسان و محققین طراحی و کنترل شده و تعدادی از آنها نیز به صورت تجاری موجود می‌باشند ولی مقالات یا مدلسازی معادلات حرکت آنها در این زمینه موجود نمی‌باشد. در این خودروها راننده بایستی مهارت کافی برای حفظ تعادل خود در جهات مختلف را داشته باشد که شبیه دوچرخه سواری بدون کمک دست می‌باشد. البته ساختار خودرو و لینک بندی آن به صورتی می‌باشد که راننده را در هدایت و مانورپذیری کمک می‌نماید.

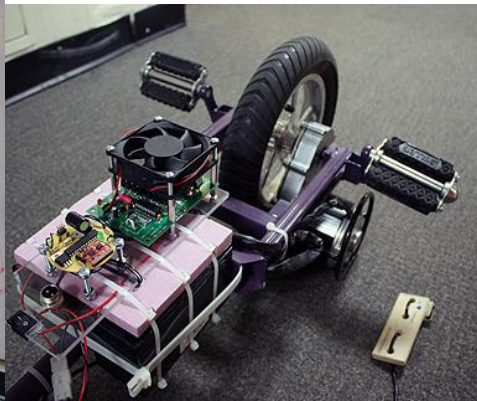
از این میان به کارهای مهندس آمریکایی، ترور بلک ول<sup>۱۵</sup> اشاره نمود [31]. برای راندن این خودرو کافی است مرکز جرم خود را به هر سمتی که می‌خواهیم متمایل نماییم. در شکل ۱-۲۵ خودروی تک چرخ ترور بلک ول را مشاهده می‌نماییم.

<sup>15</sup> Terewer Black Well



شکل ۱-۲۵ خودروی تک چرخ ترور بلک ول

استفان بویر<sup>۱۶</sup> دانشجوی MIT در سال ۲۰۱۱ خودروی تک چرخ را طراحی و معرفی نمود [32]. او برای حفظ تعادل خود از پدال‌های طرفین چرخ استفاده می‌نماید. در شکل ۱-۲۶ خودروی تک چرخ استفان بویر نشان داده شده است. در این نوع خودروها موتور چرخ را می‌چرخاند و راننده وظیفه‌ی حفظ تعادل را بر عهده دارد.



شکل ۱-۲۶ خودروی تک چرخ استفان بویر

خودروی تک چرخ EMBRIO ساخت کمپانی تولید کننده‌ی موتور سیکلت کانادایی BRP بوده که از ژيروسکوپ برای بالانس خود استفاده می‌کند [33]. در شکل ۱-۲۷ خودروی تک چرخ مفهومی

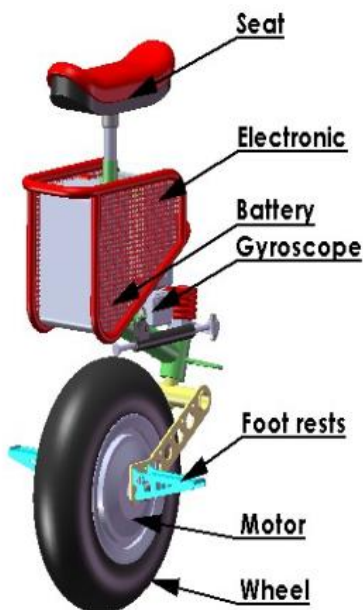
<sup>16</sup> Stephan Boyer

EMBRIO مشاهده می شود.



شکل ۲۷-۱ خودروی تک چرخ EMBRIO

الکساندر پولوتنیک وسیله‌ای به نام enicycle را طراحی و ساخت که با استفاده از ژيروسکوپ پایداری خود را تضمین می‌نماید کند و برای تامین نیروی مورد نیاز خود از انرژی الکتریسیته استفاده می‌کند [34]. در شکل ۲۸-۱ خودروی تک چرخ enicycle نشان داده شده است.



شکل ۲۸-۱ خودروی تک چرخ enicycle

#### ۴-۱ تعریف مسئله و هدف

با توجه به مطالعات انجام شده مشاهده می‌شود که، اکثر مدلسازی‌ها با ساده‌سازی‌های بسیاری همراه بوده یا پس از تعیین معادلات حرکت، آنها را حول نقطه‌ی تعادل خطی می‌نمایند. البته در خودروها و

ربات‌های دو چرخ میزان ساده‌سازی‌ها کمتر بوده و در بسیاری موارد از مدل‌های دقیق استفاده شده است. همچنین کنترل پیاده‌سازی شده بر روی OVV اغلب خطی بوده و قابلیت غلبه بر عدم قطعیت‌های پارامتری و اغتشاشات را ندارد. البته دینامیک خودروی تک چرخ با چرخ معمولی کار دشواری نیست و اکثراً آن را صفحه‌ای در نظر گرفته و مدلسازی نموده‌اند.

در این پایان‌نامه از چرخ چند جهته به عنوان مکانیزم حرکت خودرو استفاده شده است که برای این منظور از U3-X الهام گرفته شده است [27]. البته مکانیزم استفاده شده در U3-X به طور کامل مشخص نمی‌باشد و هیچ‌گونه اطلاعاتی در مورد معادلات حرکت و کنترل آن موجود نمی‌باشد. در ابتدا مکانیزم چرخ چند جهته که قابلیت حرکت به تمامی جهات را داشته باشد طراحی و سپس بر اساس آن معادلات تعادل خودروی تک چرخ با چهار درجه آزادی محاسبه شد. لازم به ذکر است که مکانیزم چرخ کاملاً ابتکاری بوده و با مدل شرکت هنداً متفاوت می‌باشد و در حال حاضر مشغول مراحل اداری ثبت اختراع آن می‌باشم. این چرخ از یک چرخ بزرگ و تعدادی چرخ کوچک تشکیل شده است که با دوران موتور چرخ بزرگ، خودرو به سمت جلو- عقب حرکت می‌نماید و با دوران موتور مجموعه چرخ‌های کوچک، خودرو به طرفین حرکت می‌کند. در صورتی که هر دو موتور دوران نمایند، بسته به سرعت دورانی آنها، خودرو حرکت مورب انجام داده و در نتیجه می‌توان تمامی نقاط صفحه را پوشش دهد. مدل دینامیکی استفاده شده، کاملاً غیرخطی و سه بعدی بوده و پس از تعیین معادلات حرکت، هیچ‌گونه خطی‌سازی انجام نشده است. در نهایت از کنترل کننده غیرخطی تطبیقی برای حفظ پایداری و تعادل خودرو استفاده شد است. به علت وجود عدم قطعیت‌هایی همچون جرم سرنشین، فاصله مرکز جرم سرنشین تا مرکز چرخ و سایر پارامترهای سیستم از روش کنترل تطبیقی برای کنترل سیستم استفاده شده است و معادلات غیرخطی در سیمولینک متلب شبیه‌سازی شده و در نهایت هدف قانون کنترل که حفظ تعادل زاویه پیچ و رول در برابر انحراف و اغتشاشات وارده بر سرنشین و پایداری یابو در برابر گشتاور اعمالی توسط راننده می‌باشد، محقق شده است. یکی از ویژگی‌های این مدل حفظ و پایداری زاویه رول می‌باشد.

برای طراحی مکانیزم چرخ چند جهته از نرم‌افزار Solidworks و همچنین برای محاسبه و شبیه‌سازی معادلات تعادل و اعمال کنترل تطبیقی از نرم‌افزار Maple و Matlab-Simulink استفاده شده است. در فصل مدلسازی، دینامیک سیستم به تفصیل توصیف شده است و در فصل شبیه‌سازی و کنترل، کنترل تطبیقی و نحوه‌ی اعمال آن ارائه شده است که عملکرد بسیار خوب آن، همان طور که انتظار می‌رفت تایید شد.

## ۵-۱ معرفی فصل های پایان نامه

این پایان نامه شامل پنج فصل می باشد که در ادامه به معرفی هر یک از فصول می پردازیم. در فصل اول، بعد از ارائه مقدمه به دسته بندی انواع ربات ها و خودروهای تعادلی تک چرخ و دو چرخ می پردازیم و در ادامه نحوه ی حرکت و مدلسازی آنها بیان شده است. سپس انواع خودروها و ربات های تک چرخ و نحوه ی حفظ تعادل و پایداری آنها توصیف شده است و در انتهای این فصل صورت مسئله و هدف آن بیان می شود. در فصل دوم، مفاهیم دینامیکی و کنترلی استفاده شده در فصل های آتی بیان می شود. این مباحث شامل مفاهیم دینامیکی مورد نیاز برای مدلسازی، مفاهیم کنترلی و پایداری می باشد. در فصل سوم، دینامیک خودرو و شیوه ی حرکت خودروی تک چرخ با چهار درجه آزادی بیان می شود. در ادامه، با استفاده از مختصات تعمیم یافته و دوران آنها، انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی هر بخش از سیستم با کمک سرعت خطی و سرعت زاویه ای توصیف می شود. با استفاده از معادلات لاگرانژ، چهار معادله حالت سیستم که بیانگر چهار درجه آزادی خودرو می باشد، محاسبه می شود. به علت حجم بالای محاسبات در این قسمت از نرم افزار Maple استفاده شده است. در فصل چهارم شبیه سازی دینامیکی، و همچنین کنترل تطبیقی و نحوه ی اعمال آن بر روی سیستم معرفی می شود. در فصل پنجم، نتایج شبیه سازی دینامیکی و صحت معادلات بررسی می شود. سپس نتایج کنترل تطبیقی با نتایج کنترل PD مقایسه شده و عملکرد هر یک بررسی می شود.

## فصل دوم

مفاهیم دینامیکی و کنترلی

## ۱-۲ مقدمه

در این فصل مفاهیم دینامیکی و کنترلی مورد استفاده در فصل‌های آتی پایان‌نامه بیان می‌شود. مفاهیم بیان شده حاصل ترجمه و نتیجه‌گیری از کتاب‌های دینامیک پیشرفته، کنترل غیرخطی و کنترل تطبیقی و همچنین مقالات و فایل‌های آموزشی می‌باشد.

در ابتدا مفاهیم دینامیکی و تئوری فرضیات استفاده شده در مدلسازی بیان می‌شود. سپس مفاهیم کنترلی و کنترل تطبیقی و انواع روش‌های آن به اختصار ارائه می‌شود. در انتها مبانی بررسی پایداری و روش پایداری لیاپانوف نیز معرفی می‌شود.

## ۲-۲ مفاهیم مدلسازی دینامیکی خودروی تک چرخ

برای کنترل خودروی تک‌چرخ و قائم نگه‌داشتن آن بایستی مدل ریاضی سیستم در دسترس باشد که معادلات دینامیکی حرکت نامیده می‌شود. با داشتن مدل کامل و دقیق خودرو می‌توان بررسی بهتر و صحیح‌تری از رفتار دینامیکی آن بدست آورد و همچنین اثر اعمال کنترلرهای مختلف را می‌توان روی مدل واقعی‌تری مشاهده نمود. روش استفاده شده در مدلسازی دینامیکی، روش لاگرانژ می‌باشد. برای محاسبه‌ی معادلات حرکت از زوایای اویلر متوالی و همچنین انتقال محورهای مختصات نسبی و تئوری اجسام متقارن استفاده می‌شود و فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

❖ حرکت دورانی چرخ، غلتش بدون لغزش می‌باشد.

❖ از اثر اصطکاک صرف‌نظر شده است.

❖ در مدل چرخ ساده‌سازی‌هایی انجام گرفته است.

در این بخش تعدادی از مفاهیم دینامیکی که در مدلسازی دینامیکی و تعیین معادلات حرکت استفاده شده است بیان می‌شود [35,36].

## ۱-۲-۲ زوایای اویلر<sup>۱۷</sup>

تئوری اویلر<sup>۱۸</sup> بیان می‌کند که جابجایی یک جسم صلب با یک نقطه ثابت را می‌توان با یک دوران حول

---

<sup>17</sup> Euler angel

<sup>18</sup> Euler Theorem



چند محور که نقطه‌ای ثابت دارند توصیف نمود، که محورهای دوران یا خط اصلی<sup>۱۹</sup> نامیده می‌شود. برای انتقال از یک سیستم مختصات به سیستم مختصات دیگر تنها کافیست که سه دوران مناسب حول محورهای غیر موازی انجام شود. سه زاویه‌ای که برای تبدیل یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگری استفاده می‌شود را زوایای اوپلر می‌نامند.

به طور کلی سه مجموعه دوران برای تبدیل مختصات  $a_1a_2a_3$  به  $b_1b_2b_3$  نیاز است که دوازده حالت ممکن برای آن وجود دارد و نبایستی هیچ دو دوران متوالی حول یک محور انجام شود. ابتدا مختصات  $a_1a_2a_3$  را حول یک محور دوران می‌دهیم تا مختصات  $a'_1a'_2a'_3$  ایجاد شود، برای این کار سه حالت انتخاب داریم. سپس امکان دوران حول دو محوری که در مرحله اول استفاده نشده وجود دارد که مختصات  $a''_1a''_2a''_3$  تولید می‌شود، در نتیجه دو حالت وجود دارد. برای دوران سوم نیز دو حالت وجود دارد که مختصات  $b_1b_2b_3$  تولید می‌شود. در نهایت برای تبدیل مختصات  $a_1a_2a_3$  به مختصات  $b_1b_2b_3$  به میزان  $12 = 3 \times 2 \times 2$  حالت، امکان پذیر است که به آنها زوایای اوپلر متوالی<sup>۲۰</sup> گفته می‌شود و عبارتند از :

$$1-2-1, 1-2-3, 1-3-1, 1-3-2, 2-1-2, 2-1-3, \\ 2-3-1, 2-3-2, 3-1-2, 3-1-3, 3-2-1, 3-2-3 \quad (1-2)$$

انتخاب هر یک از این حالات بسته به کاربرد آن و دید فیزیکی که برای درک مسئله ایجاد می‌نماید، دارد. یکی از پر کاربردترین زوایای اوپلر متوالی حالت ۳-۱-۳ می‌باشد که اغلب برای توصیف دوران جسم صلب به کار می‌رود. البته در سال‌های اخیر از زاویه اوپلر متوالی ۳-۲-۳ نیز استفاده می‌شود.

### ۲-۲-۲ زاویه اوپلر متوالی ۳-۱-۳

در انتقال ۳-۱-۳ ابتدا محورهای  $a_1a_2a_3$  را حول محور  $a_3$  با زاویه  $\varphi$  دوران داده که منجر به تولید  $a'_1a'_2a'_3$  می‌شود. سپس با زاویه  $\theta$  حول محور  $a'_1$  دوران یافته و  $a''_1a''_2a''_3$  ایجاد می‌شود. به محور  $a'_1$  خط گره‌ها<sup>۲۱</sup> نیز گفته می‌شود. در نهایت با دوران حول محور  $a''_3$  با زاویه  $\psi$ ، محورهای  $b_1b_2b_3$  ایجاد می‌-

<sup>۱۹</sup> Principal Line

<sup>۲۰</sup> Euler Angle Sequences

<sup>۲۱</sup> Line of Nodes



شود. زوایای  $\varphi$ ،  $\theta$  و  $\psi$  به ترتیب زوایای تقدیمی (Precession)، انحرافی (Nutation) و چرخش (Spin) نامیده می‌شود. در حالت انتقال ۳-۲-۳، زوایای دوران به صورت روبرو تعریف می‌شود:  $\psi$  تقدیمی (Precession)،  $\theta$  انحرافی (Nutation) و  $\varphi$  چرخش (Spin).

ماتریس های انتقال زاویه اوایلر متوالی ۳-۱-۳ مطابق رابطه (۲-۲) می‌باشد.

$$\begin{aligned} \{a'\} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{a\} \\ \{a''\} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \{a'\} \end{aligned} \quad (2-2)$$

$$\{b\} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{a''\}$$

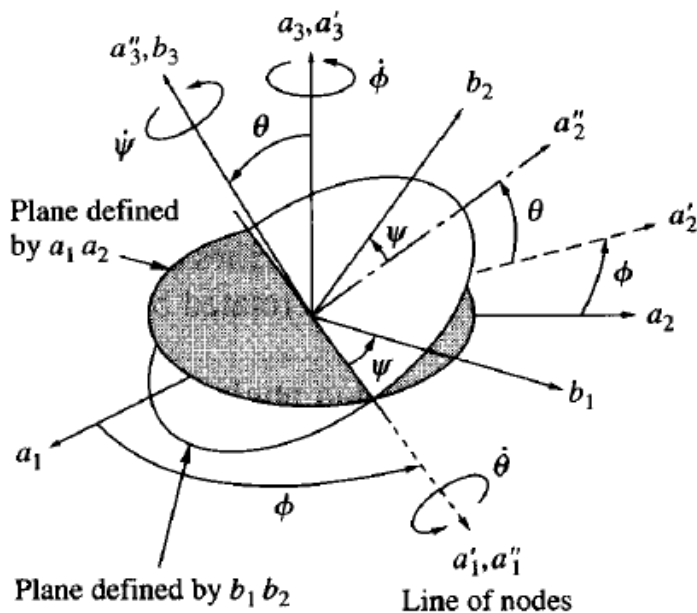
ترکیب سه انتقال (۲-۲) را در رابطه (۳-۲) مشاهده می‌نماییم که بیانگر شکل ۱-۲ می‌باشد.

$$\{b\} = [R_{3-1-3}] \{a\} \quad (3-2)$$

که در آن :

$$[R_{3-1-3}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

$$[R_{3-1-3}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



شکل ۱-۲ زاویه اوپلر متوالی ۳-۱-۳

### ۳-۲-۲ اجسام متقارن محوری

استفاده از مجموعه‌ای از محورهای نسبی که به محورهای جسم منطبق نباشد، یکی از حالت‌های بسیار مطلوب برای بررسی حرکت می‌باشد. یک از این حالت‌ها در مواقعی رخ می‌دهد که جسم متقارن محوری<sup>۲۲</sup> باشد. برای آنالیز حرکت این دسته مسائل، استفاده از چارچوب مرجعی که شامل زاویه چرخش<sup>۲۳</sup> نباشد بسیار مطلوب است. به طور مثال هنگامی که از زاویه انتقال اوپلر<sup>۳-۲-۳</sup> استفاده می‌شود، چارچوب نسبی پس از انتقال<sup>۳-۲</sup> بدست می‌آید. انگیزه اصلی در انتخاب چارچوب مرجع متفاوتی از چارچوب جسم، مهم نبودن مقدار حقیقی زاویه چرخش در هنگامی که نرخ چرخش تغییر می‌کند، می‌باشد. زوایای تقدیمی و انحرافی کاملاً جهت محور تقارن را توصیف می‌نماید و می‌توان از زاویه چرخشی صرف‌نظر نمود.

در انتقال<sup>۳-۱-۳</sup> مختصات اولیه  $a_1 a_2 a_3$ ، به محورهای مختصات چارچوب جدید  $a''_1 a''_2 a''_3$  تبدیل می‌شود که سرعت زاویه ای چارچوب مرجع پس از دوران<sup>۳-۱</sup> به صورت زیر می‌باشد.

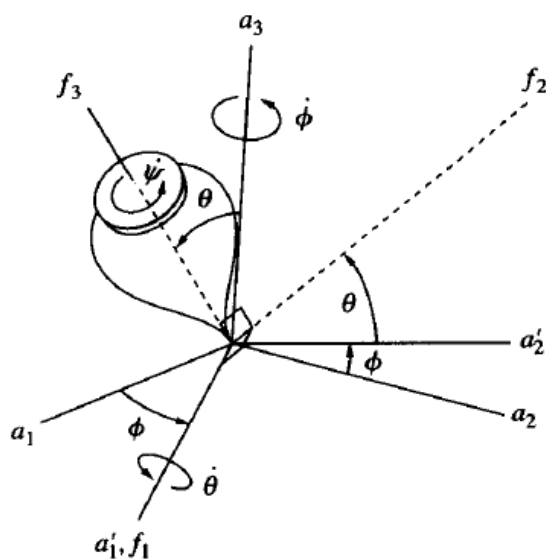
<sup>22</sup> Axisymmetric Body

<sup>23</sup> Spin angle

$${}^A\omega^{A''} = \dot{\phi}a_3 + \dot{\theta}a'_3 = \dot{\phi}(\sin\theta a_2'' + \cos\theta a_3'') + \dot{\theta}a_1'' \quad (5-2)$$

به این چارچوب مرجع نسبی، چارچوب اف (F frame) گفته می‌شود که حرکت چرخشی را در نظر نمی‌گیرد، که محورهای مختصات آن را با  $F_1F_2F_3$  و بردارهای یکه متناسب با آن را با  $f_1f_2f_3$  نشان می‌دهیم. این مفهوم در شکل ۲-۲ برای یک جسم نوک تیز چرخان نشان داده شده است. به عنوان مثال برای اجسام تقارن محوری مانند دیسک یا جسم نوک تیز، نشان دادن چارچوب اف برابر است با نشان دادن شکل عمومی دیسک یا جسم نوک تیز چرخان بدون دنبال کردن حرکت نقطه‌ای خاص بر روی جسم می‌باشد. در این حالت سرعت زاویه‌ای جسم را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$\omega = {}^A\omega^B = {}^A\omega^F + {}^F\omega^B \quad (6-2)$$



شکل ۲-۲ چارچوب اف برای جسم نوک تیز چرخان

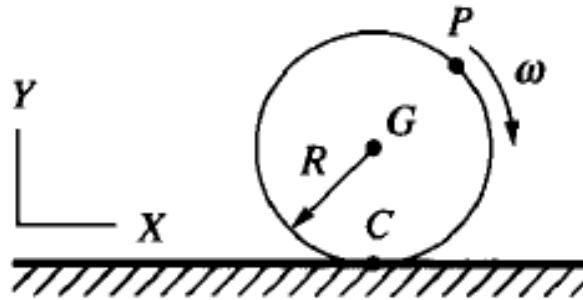
که  ${}^A\omega^{A''} = {}^A\omega^F$  و  ${}^F\omega^B$  حرکت چرخشی می‌باشد و برابر با  ${}^F\omega^B = \dot{\psi}f_3$  است. روش نوشتن فوق را می‌توان به صورت خلاصه با  $\omega_b$ ،  $\omega_f$  و  $\omega_s$  نشان داد که اندیس زیر نویس  $b$ ،  $f$  و  $s$  به ترتیب به معنی جسم، چارچوب و چرخش می‌باشد. می‌توان نشان داد که:

$$\omega = \omega_b = \omega_f + \omega_s \quad (7-2)$$

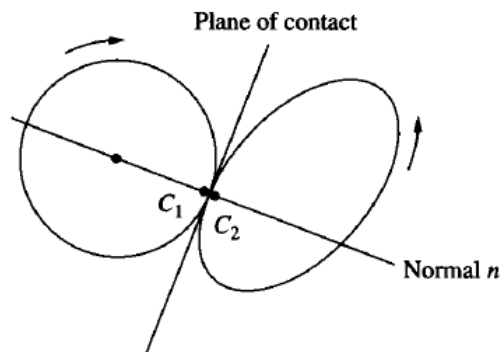
## ۴-۲-۲ غلتش

یکی از حالت‌های حرکت مقید جسم صلب، حرکت غلتشی می‌باشد. جسم می‌تواند روی یک سطح ثابت یا بر روی جسم دیگر غلتش نماید. غلتش در حالتی رخ می‌دهد که همواره نقاط متوالی پیوسته‌ای روی جسم با نقاط متوالی پیوسته روی جسم دیگر در تماس باشد. شرط لازم برای پیوستگی، صاف و یکنواخت بودن سطوح تماس می‌باشد. برای دیسک نازک و کره تماس در یک نقطه اتفاق می‌افتد و برای استوانه و دیسک ضخیم مثل چرخ صلب، تماس در یک خط می‌باشد. سطح جسم همواره از برآمدگی‌ها و فرورفتگی‌هایی تشکیل شده است که بایستی نسبت ابعادی آن به جسم در حال دوران ناچیز باشد تا سطح جسم را بتوان صاف فرض نمود. حرکت جسم با لبه‌های تیز یا سطوح زبر به عنوان حرکت غلتشی در نظر گرفته نمی‌شود.

غلتش به شیوه‌های متفاوتی اتفاق می‌افتد ولی دو حالت رایج تر دارد. حالت اول که در شکل ۳-۲ مشاهده می‌شود، غلتش بر روی یک سطح ثابت می‌باشد که این سطح می‌تواند مسطح یا منحنی شکل باشد. حالت دوم غلتش دو جسم روی یکدیگر است که در شکل ۴-۲ نشان داده شده است. حرکت چرخنده‌ها از این نوع است.



شکل ۳-۲ غلتش بر روی سطح ثابت



شکل ۴-۲ غلتش دو جسم روی یکدیگر

نقطه تماس، صفحه تماس<sup>۲۴</sup> را تعیین می‌نماید که بر هر دو جسم مماس می‌باشد. در نقطه تماس، شعاع‌های انحنای جسم غلتنده همه روی یک خط قرار می‌گیرند که یک قید هندسی است و تعیین کننده حرکت غلتشی یک جسم بر روی دیگر می‌باشد.

مطابق شکل ۲-۴ وقتی دو جسم روی هم می‌غلتند نقاط تماس روی دو جسم را  $C_1$  و  $C_2$  می‌نامیم که سرعت آنها برابر با  $V_1$  و  $V_2$  می‌باشد.  $n$  بردار یکه عمود بر صفحه تماس می‌باشد. سرعت نسبی نقطه تماس نسبت به سایر نقاط بر روی صفحه تماس قرار دارد. قید غلتش را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$(V_{C_2} - V_{C_1}) \cdot n = 0 \quad (۸-۲)$$

غلتش جسم صلب یک سیستم ۵ درجه آزادی می‌باشد. اگر نقطه تماس سرعت جسم را داشته باشد به این حالت غلتش بدون لغزش<sup>۲۵</sup> گفته می‌شود و اگر سرعت آن متفاوت باشد به این حالت غلتش با لغزش<sup>۲۶</sup> گفته می‌شود. وجود غلتش بستگی به نیروی اعمالی به جسم غلتنده دارد. در بسیاری از حالت‌های غلتش جسم که اصطکاک زیادی نیز وجود دارد می‌توان شرط عدم لغزش را برای آن در نظر گرفت که به صورت زیر است.

$$V_{C_2} = V_{C_1} \quad (۹-۲)$$

غلتش با لغزش ۵ درجه آزادی دارد در حالیکه غلتش بدون لغزش ۳ درجه آزادی دارد. نکته جالب در مورد شتاب نقطه تماس، متفاوت بودن آن بسته به وجود لغزش می‌باشد. در کل هیچ رابطه قیدی مشخصی را برای شتاب نقطه تماس جسم غلتان نمی‌توان نوشت.

## ۲-۲-۵ حرکت صفحه ای جسم غلتان

در حرکت صفحه‌ای جسم متقارن محوری مثل دیسک یا استوانه با شعاع  $R$  روی یک سطح صاف می‌غلتد (شکل ۲-۳). مختصات تعمیم یافته برای تعیین موقعیت مرکز جرم جسم استفاده می‌شود که با  $X$  و  $Y$  نمایش می‌دهیم،  $\theta$  نیز زاویه دوران دیسک می‌باشد. سرعت زاویه‌ای جسم برابر است با  $\omega = -\dot{\theta}K$  که

<sup>24</sup> Plane of Contact

<sup>25</sup> Roll without Slip

<sup>26</sup> Roll with Slip

$\omega = \dot{\theta}$ . سرعت نقطه P را می توان به صورت زیر نشان داد:

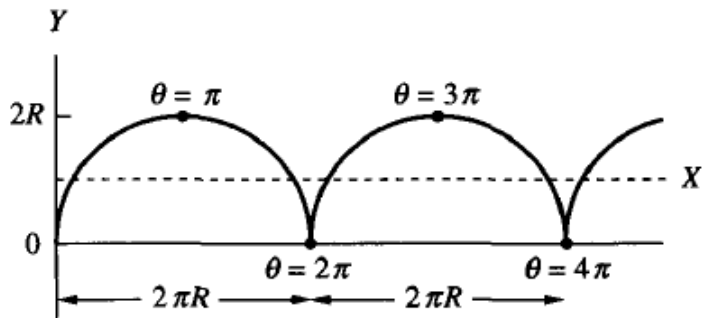
$$V_P = V_G + \omega \times r_{P/G} \quad (10-2)$$

که بردار موقعیت P نسبت به مرکز جرم می باشد. مسیر طی شده توسط یک نقطه روی محیط جسم غلتان را سیکلوئید می نامند. شکل ۵-۲ مسیر سیکلوئیدی را نشان می دهد. برای محاسبه سرعت نقطه تماس C معادله (۱۰-۲) را برای نقطه C می نویسیم. در حالت بدون لغزش  $V_C = 0$  است و با جایگذاری در معادله (۱۰-۲) داریم:

$$V_C = 0 = V_G + \omega \times r_{P/G} \quad (11-2)$$

با جایگزینی متغیرها می توان نوشت:

$$V_G = -\omega \times r_{P/G} = -(-\omega K \times -RJ) = R\omega I = (R\dot{\theta})I \quad (12-2)$$



شکل ۵-۲ مسیر سیکلوئیدی طی شده توسط یک نقطه روی محیط جسم غلتان

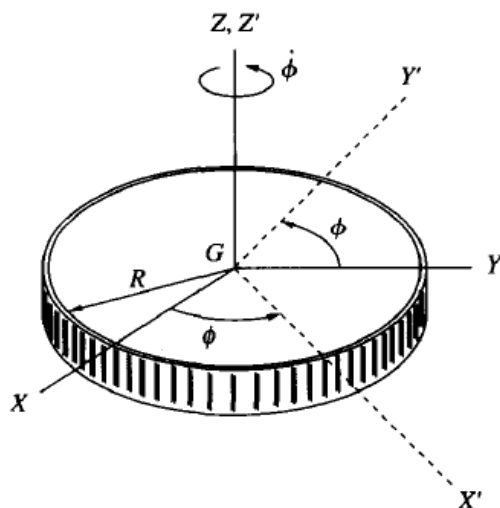
بنابراین  $\dot{X} = R\omega$  و  $\dot{Y} = 0$  می شود. در حالت غلتش با لغزش در حرکت صفحه ای، سیستم دو درجه آزادی می باشد و در حالت غلتش بدون لغزش مسئله تک درجه آزادی می شود. در حالت غلتش بدون لغزش، در نقطه تماس جسم با زمین سرعت برابر صفر است و می توان تصور نمود که جسم حول نقطه C در هر لحظه دوران می نماید که به این نقطه مرکز آنی دوران<sup>۲۷</sup> گفته می شود.

### ۶-۲-۲ حرکت سه بعدی جسم غلتان

برای توصیف غلتش جسم متقارن محوری با سطوح صاف مثل دیسک نازک یا سکه از انتقال های متوالی اویلر ۳-۱-۳ استفاده می شود. مختصات جسم در حالت ابتدایی را با XYZ نشان می دهیم که موقعیت

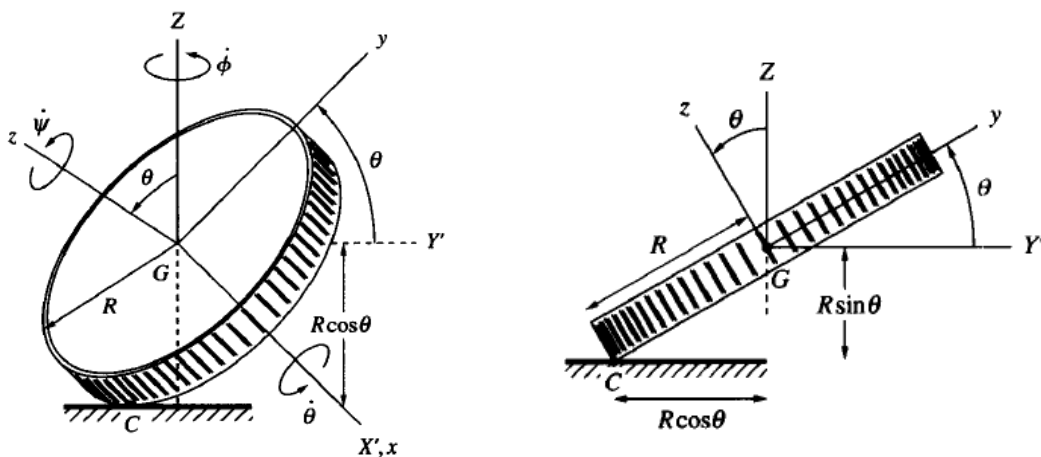
<sup>27</sup> Instant Center

دیسک بصورت خوابیده و صاف در صفحه  $XY$  مطابق شکل ۶-۲ می‌باشد. در این شکل دوران اول زاویه اوپلر متوالی ۳-۱-۳ را که حرکت تقدیمی نامیده می‌شود و به میزان  $\phi$  حول محور  $Z$  می‌باشد را مشاهده می‌نماییم.



شکل ۶-۲ موقعیت اولیه جسم و حرکت تقدیمی

در شکل ۷-۲ (الف) و (ب) موقعیت دیسک را پس از زاویه اوپلر متوالی ۳-۱-۳ دوم و سوم که به ترتیب حرکت انحرافی و حرکت چرخشی نامیده می‌شود، مشاهده می‌نماییم. در شکل ۷-۲ (الف) دیسک علاوه بر حرکت دورانی حول  $Z$  به میزان  $\theta$  حول محور  $x$  دوران می‌یابد و در شکل ۷-۲ (ب) دیسک علاوه بر حرکت دورانی حول  $Z$  و  $x$  به میزان  $\psi$  حول محور  $Z$  دوران یافته است.



(ب) موقعیت دیسک پس از سه دوران متوالی

(الف) موقعیت جسم پس از دو دوران متوالی

شکل ۷-۲ دوران‌های متوالی زاویه‌ی اوپلر ۳-۱-۳

## ۲-۳ معرفی کنترل غیرخطی

کنترل غیرخطی موضوعی جاافتاده با روش‌های متنوع، توانا و تاریخی طولانی در کاربردهای موفق صنعتی می‌باشد. محققین و طراحان در زمینه‌های مختلف چون کنترل هواپیما و فضاپیما، رباتیک، کنترل فرایند و مهندسی زیست پزشکی علاقه جدی نسبت به توسعه و کاربرد روش‌های کنترل غیرخطی نشان داده‌اند. دلایل متعددی برای انتخاب کنترل غیرخطی نسبت به کنترل خطی وجود دارد که عبارتند از:

❖ اصلاح سیستم‌های کنترل موجود:

روش‌های کنترل خطی بر پایه فرض اصلی عملکرد در محدوده کوچک برای مدل خطی بنا نهاده شده است. هنگامی که محدوده‌ی عملکرد مورد نیاز وسیع است کنترل کننده خطی اساساً عملکرد ضعیف و یا ناپایدار دارد، زیرا اثرات غیرخطی در سیستم را نمی‌تواند به طور مناسب جبران نماید. در نتیجه برای کسب دقت مورد نیاز در عملکرد روبات نظیر برداشتن و گذاشتن، جوشکاری قوسی و برش لیزر، لازم است سرعت روبات و در نتیجه میزان تولید را پایین نگه داریم. از طرف دیگر کنترلر غیرخطی که عموماً کنترل کننده محاسبه گشتاور نامیده می‌شود، می‌تواند به طور کامل نیروهای غیرخطی حرکت روبات را جبران نماید و در نتیجه منجر به کسب دقت بالای کنترلی در دامنه بسیار وسیعی از سرعت‌های روبات و فضای وسیع کاری می‌شود.

❖ تحلیل عوامل غیرخطی سخت:

فرض دیگر کنترل خطی آن است که مدل سیستم واقعاً قابل خطی سازی باشد. در حالی که در سیستم‌های کنترل عوامل غیرخطی بسیاری وجود دارد که طبیعت ناپیوسته آنها اجازه تقریب خطی را نمی‌دهد. این عوامل به اصطلاح "عوامل غیرخطی سخت" مشتمل بر اصطکاک کولومبی، اشباع، ناحیه مرده، لقی و پسماند غالباً در مهندسی کنترل یافت می‌شوند. اثرات این عوامل را نمی‌توان با روش‌های خطی بدست آورد و باید تکنیک‌های تحلیل غیرخطی به کار گرفته شود تا بتوان عملکرد سیستم را در حضور این عوامل غیرخطی ذاتی پیش بینی نمود.

❖ مقابله با عدم قطعیت‌های مدل:

در طراحی کنترل کننده‌های خطی، معمولاً ضرورت دارد که فرض کنیم پارامترهای مدل سیستم به طور منطقی شناخته شده‌اند. در صورتی که در بسیاری از مسایل کنترل، عدم قطعیت در پارامترهای مدل وجود دارد. یک کنترل کننده خطی مبتنی بر پارامترهای مدل به صورت غیر دقیق یا مقادیر منسوخ ممکن است عملکردی بسیار ضعیف یا حتی ناپایدار از خود نشان دهد. در کنترل کننده‌های غیرخطی،



عوامل غیرخطی را می‌توان به طور عمدی در بخش کنترل کننده به نحوی وارد کرد که بر عدم قطعیت مدل غلبه نماید. دو دسته از کنترلرهای غیرخطی برای غلبه بر عدم قطعیت عبارتند از: کنترل مقاوم<sup>۲۸</sup> و کنترل تطبیقی.

#### ❖ نحوه‌ی طراحی:

در صورتی که کنترل غیرخطی به خوبی طراحی شود، ممکن است ساده‌تر و محتوای غنی‌تری نسبت به طراحی‌های خطی هم ردیف خود داشته باشد. طراحی کنترل کننده غیرخطی عموماً ریشه عمیق در فیزیک سیستم دارند و فهم عمیق‌تری نیز از دنیای واقعی، که به طور ذاتی غیرخطی است را فراهم می‌کند.

در گذشته کاربرد کنترل غیرخطی با مشکلات محاسباتی مربوط به تحلیل و طراحی آن محدود می‌شد، اما امروزه با پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در تکنولوژی کامپیوتر، به میزان زیادی این مشکل مرتفع شده است. مبحث طراحی کنترلر غیرخطی در محدوده‌ی عملیاتی وسیع، توجه خاصی را به خود جلب کرده است. زیرا از یک طرف، ظهور ریزپردازنده‌های قوی اجرای کنترل کننده‌های غیرخطی را موضوعی نسبتاً ساده نموده و از طرف دیگر تکنولوژی جدید، نظیر روبات‌ها با سرعت بالا یا هواپیماها با عملکرد بالا نیازمند سیستم‌های کنترل با مشخصات طراحی بسیار دقیق‌تری است [37].

## ۲-۴ تحلیل سیستم‌های غیر خطی

موضوع روش‌های تحلیل سیستم‌های کنترل غیرخطی بسیار مهم و قابل توجه می‌باشد، اولاً، معمولاً تحلیل نظری ارزانترین راه درک مشخصات یک سیستم می‌باشد. دوماً، گرچه شبیه‌سازی در کنترل غیرخطی بسیار مهم است اما بایستی از لحاظ نظری جهت گرفته باشد. شبیه‌سازی چشم بسته سیستم‌های غیرخطی ممکن است به نتایج محدود و یا گمراه کننده منتهی شود. سوماً، طراحی کنترل کننده‌های غیرخطی همیشه بر اساس روش‌های تحلیل است. به علاوه ابزار تحلیل امکان ارزیابی طراحی‌ها را بعد از انجام، فراهم می‌کند و در صورتی که عملکرد مطلوب نباشد، راه‌هایی را برای اصلاح طراحی کنترلر ارائه می‌دهند.

تا کنون هیچ روش کلی برای تحلیل تمام سیستم‌های کنترل غیرخطی ارائه نشده است. در کنترل خطی می‌توان یک سیستم را در حوزه‌ی زمان یا فرکانس تحلیل کرد. اما در سیستم‌های غیرخطی هیچ

---

<sup>28</sup> Robust Control

یک از این رهیافت‌های استاندارد را نمی‌توان بکار گرفت، زیرا که حل مستقیم معادلات دیفرانسیل غیرخطی در حالت کلی ممکن نیست و تبدیل‌های حوزه فرکانس قابل اعمال نیستند. در عین حال که تحلیل سیستم‌های کنترل غیرخطی مشکل می‌باشد، فعالیت‌های جدی برای توسعه ابزار مناسب نظری آنها صورت گرفته است. بعضی از این روش‌ها عبارتند از :

#### ۲-۴-۱ تحلیل صفحه فازی

یک روش ترسیمی در مطالعه سیستم‌های کنترل غیرخطی مرتبه دوم می‌باشد. ایده‌ی اصلی آن حل معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم به طور ترسیمی به جای جستجوی یک راه حل تحلیلی است. نتیجه‌ی این عمل یک خانواده از مسیرهای حرکت سیستم در یک صفحه دو بعدی بوده، که به آن صفحه فاز گفته می‌شود و به ما اجازه می‌دهد به طور بصری الگوی حرکت سیستم را ببینیم. این روش تنها برای سیستم‌هایی که بتوان آنها را به خوبی با دینامیک مرتبه‌ی دوم تقریب زد، استفاده می‌شود. به خاطر طبیعت ترسیمی و غالباً برای ایجاد درک شهودی اثرات غیرخطی از این روش استفاده می‌شود.

#### ۲-۴-۲ توابع توصیف کننده

روش تابع توصیف کننده یک روش تقریب در مطالعه سیستم‌های غیرخطی می‌باشد. ایده‌ی اصلی این روش جایگزین نمودن عناصر غیر خطی در سیستم، با عناصر معادل می‌باشد و سپس با استفاده از روش‌های حوزه‌ی فرکانس، سیستم تحلیل می‌شود. بر خلاف روش صفحه‌ی فازی، این روش به سیستم‌های مرتبه‌ی دوم محدود نمی‌شود و اصولاً برای پیش‌بینی چرخه‌ی حدی استفاده می‌شود. سایر کاربردهای آن شامل پیش‌بینی تولید هماهنگ‌های فرعی و تعیین پاسخ سیستم به تحریک‌های سینوسی می‌باشد. مزایای این روش عبارتند از: اول، می‌تواند در سیستم‌های مرتبه پایین و مرتبه بالا با دستور العملی یکسان به کار گرفته شود. دوم، به خاطر شباهت آن به تحلیل حوزه فرکانس در سیستم‌های خطی از نظر مفهومی ساده و از نظر فیزیکی مطلوب است و به استفاده کنندگان اجازه می‌دهد که شناخت فیزیکی و مهندسی خود را درباره سیستم کنترل به کار گیرند. سوم، می‌تواند عامل غیرخطی سخت راکه غالباً در سیستم‌های کنترل یافت می‌شوند را بدون هیچ مشکلی در برگیرند. نقاط ضعف این روش عبارتند از طبیعت تقریبی آن، احتمال پیش بینی غیر دقیق و عملکرد نامطلوب در سیستم‌هایی با چندین عامل غیرخطی می‌باشند.

## ۲-۴-۳ نظریه‌ی لیاپانوف<sup>۲۹</sup>

نظریه اساسی لیاپانوف شامل دو روش است که توسط الکساندر میخائیلوویچ لیاپانوف<sup>۳۰</sup> معرفی شده است: روش غیر مستقیم و روش مستقیم. در روش غیرمستقیم یا روش خطی شده اصولاً خواص پایداری یک سیستم غیرخطی در نزدیکی یک نقطه تعادل همانند تقریب خطی آن در نظر گرفته می‌شود. این روش به عنوان یک توجیه نظری برای استفاده کنترل خطی در سیستم‌های فیزیکی می‌باشند که همیشه به طور ذاتی غیرخطی‌اند. روش مستقیم یک وسیله قوی برای تحلیل سیستم غیرخطی بوده و در حقیقت اغلب منظور از روش تحلیل لیاپانوف همان روش مستقیم می‌باشد. روش مستقیم یک مفهوم عمومیت داده شده مفهوم انرژی مربوط به یک سیستم مکانیکی است که حرکت یک سیستم مکانیکی پایدار می‌باشد، اگر که مجموع انرژی مکانیکی آن در تمام زمان‌ها کاهش یابد. برای استفاده از روش مستقیم در تحلیل پایداری یک سیستم غیرخطی، از یک تابع شبه-انرژی اسکالر که تابع لیاپانوف نامیده می‌شود، استفاده می‌نماییم. توانایی روش مستقیم لیاپانوف در عمومی بودن آن بوده و برای انواع سیستم‌های کنترل متغیر با زمان یا نامتغیر با زمان، قابل استفاده می‌باشد. محدودیت این روش در این حقیقت نهفته است که اغلب پیدا کردن یک تابع لیاپانوف در سیستم مفروض کار مشکلی بوده و نیاز به مهارت و دانش کافی دارد.

## ۲-۵ مفاهیم پایداری

در سیستم کنترلی اولین و مهمترین سوالی که در باره ویژگی‌های متعدد آن مطرح می‌شود پایداری سیستم می‌باشد، زیرا سیستم ناپایدار عموماً بی‌فایده و بالقوه خطرناک است. سیستمی پایدار توصیف می‌شود که شروع به فعالیت سیستم از موقعیتی نزدیک نقطه کار مطلوبش منجر به باقی ماندن دائمی آن در اطراف نقطه کاری آن شود. از آنجایی که سیستم‌های غیرخطی ممکن است رفتار به مراتب پیچیده‌تر و ناشناخته‌تری نسبت به سیستم‌های خطی داشته باشند لذا شماری از مفاهیم پایداری نظیر پایداری مجانبی، پایداری نمایی و پایداری مجانبی کلی را معرفی می‌نماییم [37].

حالت تعادل  $x=0$  پایدار گفته می‌شود اگر برای هر مقدار  $R > 0$  و  $r > 0$  وجود داشته باشد، چنانکه اگر  $\|x(0)\| < r$  باشد، آنگاه برای هر مقدار  $\|x(t)\| < R$ ،  $t \geq 0$  باشد در غیر این صورت نقطه تعادل

<sup>29</sup> Lyapunov Theory

<sup>30</sup> Alexander Mikhailovich Lyapunov

ناپایدار است. اساساً پایداری که پایداری از دیدگاه لیاپانوف یا پایداری لیاپانوف نیز نامیده می‌شود، به این معنی است که با شروع فعالیت سیستم از محلی که به اندازه کافی به مبدا نزدیک بوده مسیر سیستم را بتوان در نزدیکی مبدا باقی نگاه داشت :

$$\forall R > 0, \exists r > 0, \|X(0)\| < r \Rightarrow \forall t \geq 0, \|X(t)\| < R \quad (2-13)$$

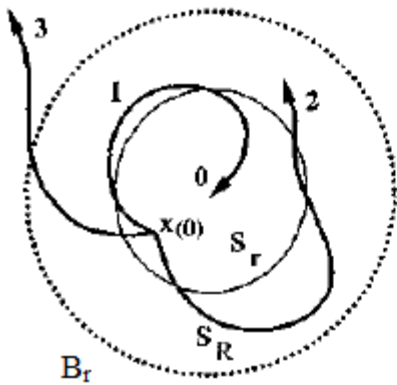
### ۲-۵-۱ پایداری مجانبی<sup>۳۱</sup>

در بسیاری از کاربردهای مهندسی پایداری لیاپانوف به تنهایی کافی نمی‌باشد. برای مثال هنگامی که وضعیت یک ماهواره نسبت به موقعیت اسمی آن دچار آشفتگی می‌شود نه تنها می‌خواهیم که ماهواره وضعیتش را در محدوده مشخص شده توسط دامنه آشفتگی حفظ نماید، یعنی پایداری لیاپانوف، بلکه می‌خواهیم که وضعیت ماهواره به تدریج به مقدار اصلیش بازگردد که این نوع نیازهای مهندسی با مفهوم پایداری مجانبی برآورده می‌شود. نقطه تعادل صفر به صورت مجانبی پایدار است اگر علاوه بر پایداری، وجود داشته باشد  $r > 0$  به گونه ای که  $\|x(0)\| < r$  نتیجه شود هنگامی که  $t \rightarrow \infty$   $x(t) \rightarrow 0$  میل کند.

پایداری مجانبی به این معنی تعادل پایدار بوده و به علاوه حالت‌هایی که نزدیک صفر شروع می‌شوند، هنگامی که  $t$  به سمت بینهایت میل می‌کند واقعا به صفر همگرا شوند. در شکل ۲-۸ مسیرهایی از سیستم که از درون گوی  $B_r$  که قلمرو جذب نقطه تعادل نامیده می‌شود را نشان می‌دهد. قلمرو جذب نقطه تعادل یعنی مجموعه تمام نقاطی که اگر مسیرها از این نقاط آغاز شوند نهایتاً به مبدا همگرا می‌شوند. نقطه تعادلی که پایدار لیاپانوف بوده اما به صورت مجانبی پایدار نمی‌باشد را پایداری حاشیه‌ای<sup>۳۲</sup> می‌نامیم.

<sup>31</sup> Asymptotically Stable

<sup>32</sup> Marginally Stable



**Curve 1 - Asymptotically Stable**  
**Curve 2 - Marginally Stable**  
**Curve 3 - Unstable**

شکل ۸-۲ قلمرو جذب نقطه تعادل

### ۶-۲ روش مستقیم لیاپانوف

روش مستقیم که بر اساس توابع اصطلاحاً لیاپانوف شکل گرفته بر خلاف روش غیرمستقیم محدود به حرکات کوچک نمی‌باشد. این روش قابل استفاده در همه سیستم‌های دینامیکی اعم از خطی یا غیرخطی، زمانی پیوسته یا گسسته بوده، مرتبه محدود یا نامحدود و حرکات کوچک یا بزرگ می‌باشد. با این وجود، مشکل متداول این روش یافتن تابع لیاپانوف در یک سیستم مفروض می‌باشد. از آنجایی که هیچ راه کلی موثری برای یافتن تابع لیاپانوف وجود ندارد باید از روش آزمون یا خطا، تجربه و به طور شهودی برای جستجوی توابع لیاپانوف مناسب استفاده کرد. خصوصیات فیزیکی از قبیل بقای انرژی و دیدگاه‌های فیزیکی در فرمول‌بندی توابع لیاپانوف بکار می‌روند و ممکن است منجر به انتخاب‌های بی نظیر توانمندی شوند. روشهای ریاضی همچون روش کراسوفسکی یا روش گرادیان متغیر نیز کارآمد می‌باشد.

فلسفه اصلی روش مستقیم لیاپانوف تعمیم ریاضی یک مشاهده فیزیکی بنیادی می‌باشد. اگر تمام انرژی یک سیستم مکانیکی یا الکتریکی به صورت پیوسته مصرف شود آنگاه سیستم خطی یا غیرخطی نهایتاً باید در یک نقطه تعادل ساکن شود. بنابراین می‌توانیم پایداری یک سیستم را با بررسی تغییرات تنها یک تابع اسکالر نتیجه‌گیری نماییم.

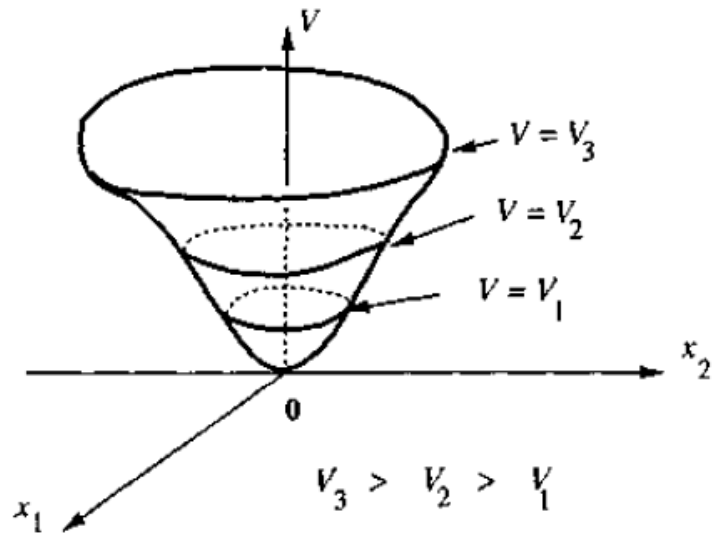
تابع اسکالر پیوسته  $V(x)$  به صورت موضعی مثبت معین نامیده می‌شود اگر در گوی  $B_r$   $x \neq 0 \rightarrow$

$$v(x) > 0 \quad (۱۴-۲)$$

$$\begin{cases} X = 0 & V(x)=0 \\ X \neq 0 & V(x)>0 \end{cases}$$

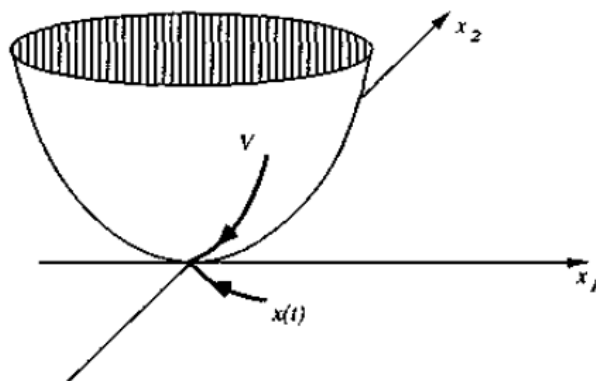
اگر  $V(x)=0$  باشد و خاصیت فوق در تمام فضای حالت برقرار باشد آنگاه  $V(x)$  به صورت کلی

معین مثبت نامیده می‌شود.



شکل ۹-۲ نمونه وار تابع معین مثبت  $V(x_1, x_2)$

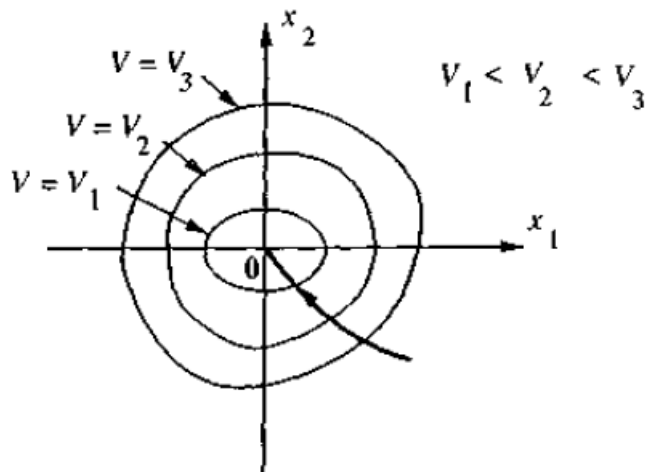
تغییر هندسی تابع معین مثبت  $V(x)$  با دو متغیر  $x_1$  و  $x_2$  که در صفحه سه بعدی رسم شده در شکل ۹-۲ نشان داده شده است که به صورت یک جام رو به بالا می باشد. اگر در گوی  $B_R$  تابع  $V(x)$ ، معین مثبت و مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد و اگر مشتق زمانی آن در امتداد هر مسیر حالت سیستم نیم معینی منفی باشد یعنی  $\dot{V}(x) \leq 0$  آنگاه  $V(x)$  را یک تابع لیاپانوف می نامند.



شکل ۱۰-۲ نمایش جام وارون تابع لیاپانوف

یک تابع لیاپانوف می تواند تعبیر هندسی ساده ای داشته باشد که در شکل ۱۰-۲ مشاهده می شود. نقطه ای که نمایانگر مقدار  $V(x_1, x_2)$  بوده همواره به سمت پایین جام وارون اشاره می نماید. در شکل

۱۱-۲ منحنی‌های کانتوری که تغییرات حرکت  $V(x_1, x_2)$  را نشان می‌دهد، مشاهده می‌شود و مقدار آن پیوسته کاهش می‌یابد.



شکل ۱۱-۲ منحنی‌های کانتور جام وارون تابع لیاپانوف

قضیه پایداری موضعی: اگر در گوی  $B_r$  تابع اسکالر  $V(x)$ ، با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته وجود داشته باشد به گونه ای که  $V(x)$  معین مثبت باشد (به صورت موضعی در  $B_r$ ) و  $\dot{V}(x)$  نیم معین منفی باشد (به صورت موضعی در  $B_r$ )، آنگاه نقطه تعادل صفر پایدار است. در واقع اگر مشتق  $\dot{V}(x)$  در  $B_r$  به صورت موضعی معین منفی باشد آنگاه پایداری مجانبی است.

## ۷-۲ کنترل تطبیقی

تحقیقات در زمینه کنترل تطبیقی در اوایل سالهای ۱۹۵۰، درباره‌ی طراحی خلبان خودکار در هواپیماهای با عملکرد برجسته، که در محدوده وسیعی از سرعت و ارتفاع کار می‌کنند و لذا با تغییرات زیاد پارامترها مواجه‌اند، آغاز شد. کنترل تطبیقی به عنوان یک روش برای تنظیم خودکار پارامترهای کنترل کننده سیستم‌هایی که دینامیک آنها با تغییرات روبه روست پیشنهاد شد. اما به خاطر عدم شناخت درست و سقوط یک هواپیمای در حال آزمایش، علاقه درباره این موضوع خیلی زود فروکش کرد. تنها در دهه اخیر است که نظریه منسجم کنترل تطبیقی با استفاده از ابزارهای نظری کنترل غیرخطی توسعه داده شده است. این نظریه‌های پیشرفت یافته به همراه قابلیت دسترسی به محاسبات ارزان، منجر به استفاده‌های متعددی مثل جابه‌جا کننده‌های رباتیک، کنترل هواپیما و موشک، فرایندهای شیمیایی، سیستمهای قدرت، گردش کشتیها و مهندسی پزشکی شده است.

کنترل تطبیقی روشی است برای مقابله کردن با سیستم‌های نامعلوم یا سیستم‌های متغیر با زمان می‌باشد. این روش کنترل در سیستم‌هایی به کار گرفته می‌شود که ساختار دینامیکی معلومی ندارند، ولی شامل پارامترهای نامعلوم یا تغییر پذیر آهسته با زمان می‌باشند که عدم قطعیت پارامتری نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که پارامترها با تغییرات سریع، ممکن است ناشی از مدلسازی ناقص بوده و لازم است که دینامیک‌هایی که باعث این تغییرات پارامتری می‌شوند نیز به مدل اضافه شوند. اگر میزان نامعلومی این پارامترها با یک مکانیسم تطبیق و یا تخمین به صورت بهنگام تقلیل داده نشوند، ممکن است باعث عدم دقت و یا ناپایداری در سیستم کنترل شوند. یک نکته مهم که باید به آن اشاره کرد این که در روش‌های تطبیقی در سیستم‌های غیرخطی، عموماً لازم است که دینامیک‌های پلان به طور خطی پارامتری شوند، یعنی عدم قطعیت پارامتری به صورت تابعی خطی از یک مجموعه پارامترهای نامشخص بیان شوند. در بسیاری از مواقع، مثل کنترل سیستم‌های قدرت، ممکن است دینامیک سیستم در ابتدای کار کاملاً معلوم باشد، ولی در حین انجام فرایند کنترل، پارامترهای آن با تغییرات غیرقابل پیش‌بینی مواجه شوند. لذا بدون طراحی مجدد کنترل کننده، ممکن است کنترل کننده طراحی شده اولیه که در ابتدای کار مناسب بود قادر نباشد سیستم در حال تغییر را کنترل نماید [37,38].

ایده اصلی در کنترل تطبیقی، تخمین زدن پارامترهای نامعلوم بر اساس سیگنال‌های اندازه‌گیری شده به صورت بهنگام می‌باشد و در انجام محاسبات ورودی کنترل از پارامترهای تخمین زده شده استفاده می‌شوند. بنابراین می‌توان سیستم کنترل تطبیقی را یک سیستم کنترل با تخمین بهنگام پارامترها در نظر گرفت. به طور کلی، هدف اصلی کنترل تطبیقی حفظ عملکرد سیستم در مقابل عدم قطعیت پارامتری و تغییرات نامشخص آنها به طور سازگار می‌باشد. از آنجا که یک چنین عدم قطعیت پارامتری و یا تغییرات آنها می‌تواند در بسیاری از مسائل کاربردی صورت پذیرد، کنترل تطبیقی در بسیاری از موقعیت‌های صنعتی مفید می‌باشد. نمونه‌هایی از کاربرد کنترل تطبیقی عبارتند از:

**روبات‌ها:** روبات‌ها مجبورند بارهایی را با اندازه‌ها، وزن‌ها و توزیع وزن‌های متفاوتی جابه‌جا نمایند. اینکه فرض شود پارامترهای اینرسی بارها قبل از اینکه روبات آنها را برداشته و جابه‌جا کند از قبل کاملاً معلوم بوده، خیلی محدود کننده می‌باشد. اگر پارامترهای بار دقیقاً شناخته شده نباشد و از کنترل کننده‌هایی با بهره‌های ثابت استفاده شود، ممکن است حرکت‌های روبات بدون دقت و یا ناپایدار باشند. کنترل تطبیقی این امکان را ایجاد می‌نماید که روبات‌ها بارهایی با پارامترهای نامعلوم را با سرعت و دقت بالا جابه‌جا نمایند.



**هدایت کشتی:** در مسیرهای طولانی، معمولاً کشتی‌ها تحت هدایت خودکار قرار می‌گیرند. اما، مشخصات دینامیکی آنها به شدت به خیلی از پارامترهای نامعلوم، مثل عمق آب، میزان بار کشتی، شرایط باد و امواج وابسته‌اند. از کنترل تطبیقی هم می‌توان برای به دست آوردن عملکرد کنترلی خوب در شرایط تغییر نقاط کار استفاده نمود و هم از هدر رفتن انرژی به خاطر تغییرات زیاد زاویه سکان به وجود می‌آید، جلوگیری نمود.

**کنترل هواپیما:** رفتار دینامیکی هواپیما بستگی به ارتفاع، سرعت و موقعیت آن دارد. در یک محدوده پروازی، نسبت تغییرات بعضی از پارامترها می‌تواند بین ۱۰ تا ۵۰ باشند. بنابراین استفاده از روش کنترل تطبیقی بسیار کارآمد می‌باشد.

**کنترل فرآیند:** مدل‌های فرآیندهای شیمیایی و متالورژیکی معمولاً پیچیده می‌باشند. پارامترهایی که این فرآیندها را مشخص می‌کنند بسیار متغیر می‌باشند. علاوه بر این، معمولاً شرایط کار نیز با زمان تغییر می‌نماید. به طور مثال، مشخصات راکتور در طول عمر آن تغییر می‌کند، مواد خامی که وارد راکتور می‌شود هرگز یکسان نیستند، شرایط جوی و آب و هوایی نیز متغیر می‌باشد. در حقیقت کنترل فرآیند یکی از مهمترین و فعالترین زمینه‌های کنترل تطبیقی است. در کنترل فرآیندها، جایی که ممکن است صدها حلقه کنترل در یک سیستم وجود داشته باشد، کنترل تطبیقی می‌تواند در کاهش تعداد تنظیم‌کننده‌های دستی به کار گرفته شود.

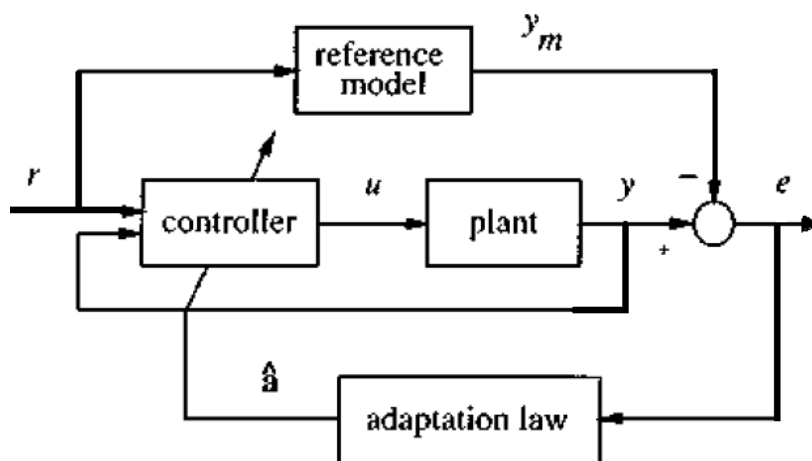
برای غلبه بر عدم قطعیت، از دو روش کنترل مقاوم و کنترل تطبیقی استفاده می‌شود. کنترل تطبیقی از نظر مقابله با عدم قطعیت‌ها در پارامترهایی که آهسته تغییر می‌کنند، نسبت به کنترل مقاوم ارجحیت دارد. دلیل اصلی آن در رفتار یادگیری کنترل تطبیقی می‌باشد. کنترل‌کننده تطبیقی عملکرد خود را در حین تطبیق بهبود می‌بخشد، در صورتی که به طور ساده یک کنترل‌کننده مقاوم سعی می‌کند که عملکرد سازگار را حفظ نماید. علاوه بر این، کنترل‌کننده تطبیقی یا نیاز کمی به اطلاعات پیشین درباره پارامترهای سیستم دارد، یا هیچ نیازی به این اطلاعات ندارد. در صورتی که معمولاً در کنترل‌کننده مقاوم معمولاً لازم است که تخمین‌های پیشین معقولی درباره محدوده پارامترها مهیا باشد. اما کنترل مقاوم قابلیت مقابله با آشفتگیها، پارامترهایی که به سرعت تغییر می‌کنند، و دینامیک‌های مدل نشده را دارد که کنترل تطبیقی فاقد آن می‌باشد. در حقیقت، این ویژگیها ممکن است با کنترل تطبیقی ترکیب شوند و حاصل آن منجر به کنترل‌کننده تطبیقی مقاوم شوند که در آنها عدم شناخت درباره پارامترهای ثابت یا پارامترهای متغیر آهسته، به وسیله روش تطبیق پارامترها تصحیح می‌شوند و سایر

منابع عدم قطعیت با روشهای مقاوم گونه کنترل می‌شوند.

دو روش اصلی برای ساختن کنترل کننده‌های تطبیقی موجود است. روش موسوم به روش کنترل تطبیقی مدل- مرجع و روش خود-تنظیم که در ادامه آنها را معرفی می‌نماییم:

### ۱-۷-۲ کنترل تطبیقی مدل مرجع (MRAC)<sup>۳۳</sup>

به طور کلی، یک سیستم کنترل تطبیقی مدل مرجع را می‌توان به صورت طرح وار در شکل ۱۲-۲ نمایش داد. این سیستم از چهار قسمت تشکیل شده است: پلان که شامل پارامترهای نامعلوم است، یک مدل مرجع برای مشخص کردن خروجی دلخواه سیستم کنترل به طور فشرده، یک قانون کنترل پس‌خوردی که قابلیت تنظیم پارامترها را داشته باشد، و یک مکانیسم تطبیق برای به روز کردن پارامترهای قابل تنظیم است.



شکل ۱۲-۲ ساختار سیستم کنترل تطبیقی مدل- مرجع

فرض می‌شود پلان ساختار معلوم داشته باشد، اگر چه پارامترهای آن ناشناخته اند. در پلان‌های خطی، این بدان معنی است که فرض کنیم تعداد قطب‌ها و صفرهای پلان معلوم است، ولی محل این قطب‌ها و صفرها معلوم نیست. در پلان‌های غیرخطی، این فرض منتهی می‌شود به اینکه ساختار معادلات دینامیکی معلوم و بعضی از پارامترها نامعلوم است.

مدل مرجع، برای مشخص کردن پاسخ ایده‌آل سیستم کنترل تطبیقی به دستورات خارجی است.

<sup>33</sup> Model Reference Adaptive Control

ملاحظه می‌شود که این مدل، خروجی ایده آل پلان را که مکانیزم تطبیق، در تنظیم پارامترها به آن نیاز دارد مهیا می‌سازد. نحوه انتخاب مدل مرجع، قسمتی از طراحی سیستم کنترل تطبیقی می‌باشد و بایستی دو شرط را برآورده کند. از یک سو، مشخصه‌های عملکرد وظایف کنترل، مثل زمان خیز، زمان استقرار، فراجهدش یا مشخصه‌های حوزه فرکانس را بایستی برآورده سازد. از سوی دیگر، این رفتار ایده‌آل بایستی توسط سیستم کنترل تطبیقی قابل دست‌یابی باشد، یعنی در پلان داده شده با ساختار معلوم، بعضی محدودیت‌های ذاتی در ساختار مدل مرجع وجود دارد مثل مرتبه و درجه نسبی آن.

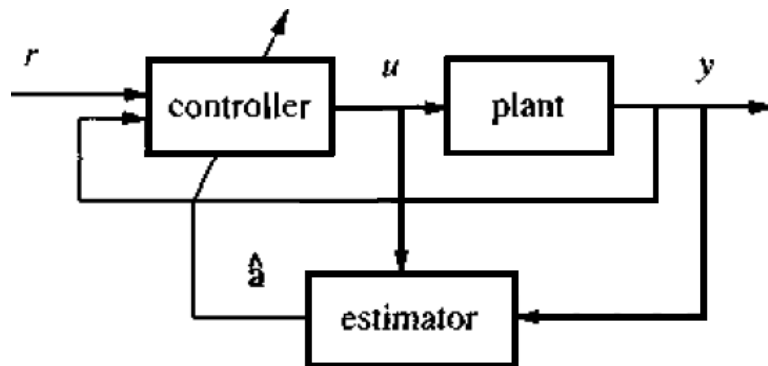
مکانیسم تطبیق در تنظیم پارامترها در قانون کنترل استفاده می‌شوند. در سیستم‌های MRAC، قانون تطبیق به دنبال پارامترهایی است که پاسخ سیستم تحت کنترل تطبیقی را با پاسخ مدل مرجع یکسان می‌نمایند و هدف از تطبیق، همگراکردن خطای ردیابی به سمت صفر است. تفاوت کنترل تطبیقی با سایر روش‌های کنترلی در همین مکانیسم تطبیق نهفته است. نکته اساسی در طراحی تطبیق، همگذاری مکانیسم تطبیق به صورتی است که در حالی که پارامترها تغییر داده می‌شوند، پایداری سیستم کنترل تضمین شده و خطای ردیابی به سمت صفر همگرا شود. برای رسیدن به این نتیجه از چندین روش کنترل غیرخطی، مثل نظریه لیاپانوف، نظریه ابر پایداری، و نظریه عدم فعالیت می‌توان استفاده نمود. اگر چه ممکن است به کارگیری یک روش راحت‌تر از روش دیگر باشد، ولی غالباً نتایج یکسان است و بیشتر از نظریه لیاپانوف استفاده می‌شود [37,38].

## ۲-۷-۲ کنترل‌کننده‌های خود-تنظیم (STC)<sup>۳۴</sup>

در طراحی کنترلرهای غیر تطبیقی، پارامترهای کنترل‌کننده از روی پارامترهای پلان محاسبه می‌شوند. اگر پارامترهای پلان نامعلوم باشند، این مقادیر با تخمین‌هایشان به وسیله تخمین‌گر پارامتر جایگزین می‌شوند. کنترل‌کننده‌ای که با یک چنین ترکیبی از یک کنترل‌کننده و یک تخمین‌گر بهنگام (بازگشتی) پارامتر حاصل می‌شود را کنترل‌کننده خود-تنظیم می‌نامیم. شکل ۲-۱۳ ساختار کنترل‌کننده تطبیقی خود-تنظیم را به نمایش گذاشته است. بنابراین یک کنترل‌کننده خود-تنظیم، کنترل‌کننده‌ای است که کار شناسایی پلان ناشناخته را به طور همزمان انجام می‌دهند.

---

<sup>34</sup> Self-Tuning Controliers



شکل ۲-۱۳ ساختار سیستم کنترل کننده تطبیقی خود-تنظیم

نحوه عملکرد یک کنترل کننده خود-تنظیم بدین صورت می‌باشد: در هر لحظه از زمان تخمین‌گر یک مجموعه از پارامترهای تخمین زده شده پلان را که بر اساس گذشته ورودی  $u$  و خروجی  $y$  پلان محاسبه شده است را به کنترل کننده می‌فرستد که در شکل ۲-۱۳ با  $\hat{a}$  نشان داده شده است؛ کامپیوتر پارامترها کنترل کننده را پیاده سازی می‌کند و سپس ورودی کنترل  $u$  را بر اساس پارامترهای کنترل کننده و سیگنالهای اندازه‌گیری شده محاسبه می‌نماید؛ این ورودی کنترل  $u$  باعث می‌شود که خروجی جدید پلان  $y$  تولید شود و تمامی چرخه به روز شدن پارامتر و ورودی تکرار می‌شوند. توجه شود که پارامترهای کنترل کننده بر مبنای تخمین پارامترهای پلان صحیح، همانند اینکه آنها پارامترهای واقعی پلان باشند، محاسبه می‌شوند. این ایده اغلب اصل تعادل اطمینان<sup>۳۵</sup> نامیده می‌شود [38].

در کنترل خود-تنظیم، ابتدا پارامترهای پلان تخمین زده می‌شود و سپس پارامترهای کنترل کننده را محاسبه می‌نماییم. چون در این روش نیاز است که پارامترهای تخمین زده شده به پارامترهای کنترل کننده تبدیل شوند، این روش کنترل تطبیقی غیرمستقیم نامیده شده است. این قسمت از محاسبه را می‌توان حذف کرد. برای انجام این کار، بایستی به این نکته توجه کرد که در روش کنترل مشخص، پارامترهای قانون کنترلی و پارامترهای پلان با هم ارتباط دارند. لذا ممکن است مدل پلان را مجدداً با استفاده از پارامترهای کنترل کننده که البته نامعلوم می‌باشد، پارامتری کرده و سپس روشهای استاندارد تخمین را در این مدل به کار بگیریم. چونکه در این روش نیازی به هیچ گونه تبدیل نیست، این روش کنترل تطبیقی مستقیم نامیده می‌شود. به طور مشابه، در سیستم‌های MRAC هم می‌توان راه‌های مستقیم و غیرمستقیم را برای به روز کردن پارامترهای کنترل کننده در نظر گرفت.

<sup>35</sup> Certainty Equivalence Principle

## ۲-۷-۳ مقایسه روش‌های MRAC و STC

کنترل MRAC و کنترل STC از دیدگاه‌های متفاوتی ناشی شده‌اند، طوری که در سیستم‌های MRAC پارامترها به طریقی به روز می‌شوند که خطای ردیابی بین خروجی پلان و خروجی مدل مرجع حداقل شود، در حالی که در سیستم‌های STC پارامترها طوری به روز می‌شوند که خطای تطبیق ورودی-خروجی‌های اندازه‌گیری شده حداقل شوند. با مقایسه شکل ۲-۱۲ و شکل ۲-۱۳ متوجه می‌شویم که هر دو سیستم یک حلقه داخلی برای کنترل و یک حلقه خارجی برای تخمین پارامترها دارند. از دیدگاه نظری، در حقیقت می‌توان نشان داد که ممکن است کنترل کننده‌های MRAC و STC را در یک چارچوب واحد قرار داده شوند. در روش جدید که کنترل تطبیقی مرکب نامیده می‌شود، قانون تطبیق، اطلاعات پارامتر را از هر دو منبع استخراج می‌نماید. این روش جدید تطبیق، بدون اینکه منجر به نوسانات شدید در پارامترهای تخمین زده شده شود، فرآیند تطبیق را سریع تر می‌نماید و لذا عملکرد بهبود یافته تری خواهد داشت.

این دو روش از نظر طراحی و پیاده‌سازی، می‌توانند کاملاً متفاوت باشند. در مقایسه با کنترل کننده MRAC، به خاطر امکان جفت کردن کنترل کننده‌های متنوع با تخمین‌گرهای متنوع به علت مجزا بودن کنترل و تخمین‌گر، کنترل کننده‌های STC انعطاف‌پذیر تر می‌باشد. در حالی که معمولاً تضمین پایداری و همگرایی کنترل کننده‌های خود-تنظیم بسیار مشکل بوده و برای همگرایی پارامترهای تخمین زده شده با پارامترهای واقعی، غالباً لازم است که سیگنال‌های موجود سیستم به اندازه کافی توانمند باشند. اگر سیگنال‌ها خیلی توانمند نباشند، اگر سیگنال مرجع صفر و یا یک مقدار ثابت باشد، پارامترهای تخمین زده شده ممکن است به پارامترهای واقعی نزدیک نبوده و تضمین پایداری و همگرایی سیستم کنترل حاصل امکان پذیر نباشد. در چنین مواقعی، یا باید سیگنال‌های اعوجاجی را به ورودی اضافه کرد، یا به طریقی قانون کنترل را تغییر داد. ولی در سیستم‌های MRAC، معمولاً بدون توجه به توانمندی سیگنال‌ها، پایداری و همگرایی خطای ردیابی تنظیم شده‌اند.

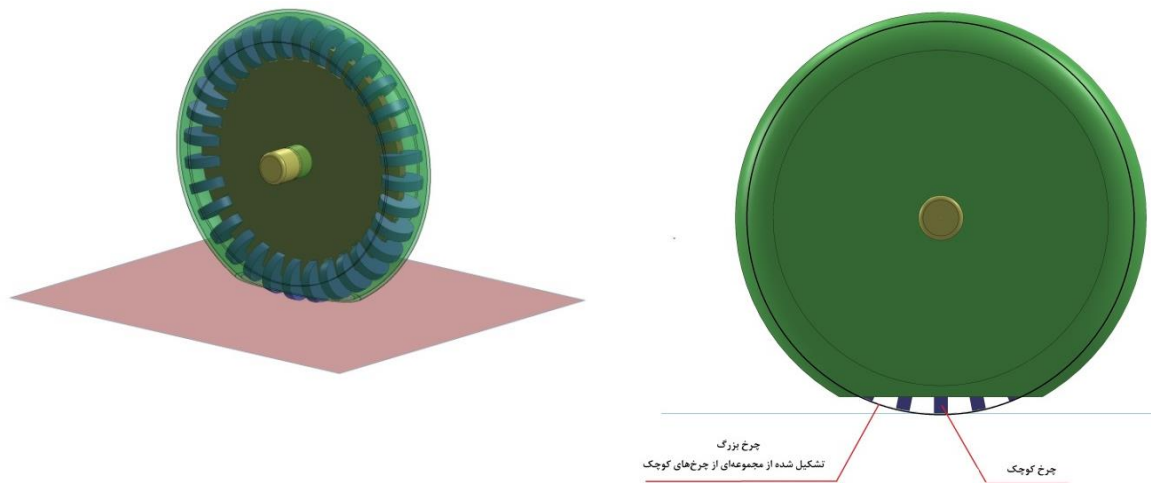
## فصل سوم

مدل سازی دینامیکی خودروی تک چرخ

### ۱-۳ توصیف مدل

در این فصل مدل کامل دینامیکی خودروی تک چرخ با در نظر گرفتن تمامی پارامترهای سیستم و بدون ساده سازی خاصی معرفی می شود. خودروهای تک چرخ بسته به ویژگی و خصوصیات خود، به دسته های متفاوتی تقسیم می شود. خودروهای تک چرخ را بر اساس سیستم هدایت و کنترل، تعداد درجات آزادی کنترل شونده، نوع حرکت، پایداری آن و خطی یا غیرخطی بودن مدل سیستم می توان به دسته های متفاوتی تقسیم نمود. در این پایان نامه روش کنترل غیرخطی تطبیقی برای کنترل و حفظ پایداری خودروی تک چرخ استفاده شده است. این خودرو از لحاظ نوع حرکت و درجات آزادی شبیه به U3-X می باشد [27]، اما از مکانیزم ابتکاری برای حرکت آن استفاده شده است. این مکانیزم در ادامه توصیف می شود.

این خودرو شامل محل استقرار سرنشین، دو موتور و یک چرخ چندجهته که خود متشکل از تعدادی چرخ کوچک و یک چرخ بزرگ می باشد، تشکیل شده است. چرخ چندجهته از یک چرخ بزرگ و ۳۲ عدد چرخ کوچک تشکیل شده که چرخ بزرگ و مجموعه چرخ های کوچک قادر به حرکت مستقل از یکدیگر می باشند. در شکل ۱-۳ مدل مکانیزم چرخ چندجهته به صورت شماتیک نشان داده شده است.

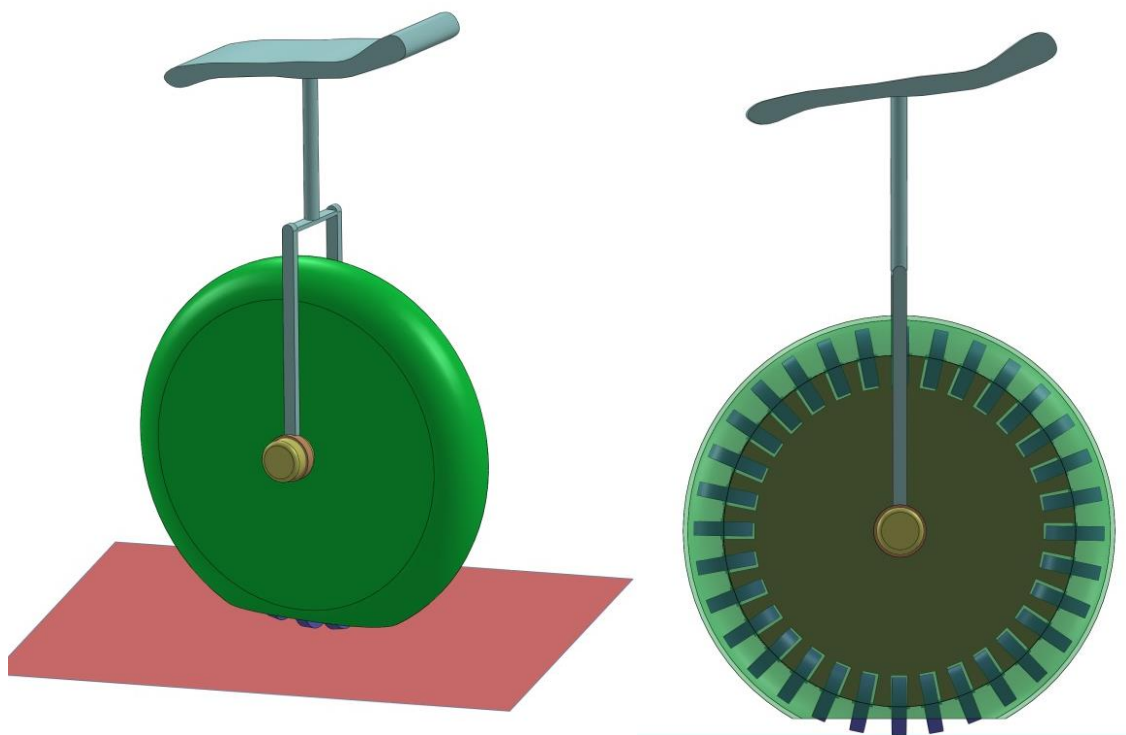


شکل ۱-۳ مدل شماتیک مکانیزم چرخ چندجهته

چرخ چندجهته توسط دو موتور که سیگنال گشتاور کنترلی تولید شده توسط کنترلر تطبیقی آن را متعادل و کنترل می نماید، هدایت و بایستی همواره قائم باقی بماند. با دوران موتور سمت چپ، چرخ حرکت مستقیم به سمت جلو-عقب را انجام می دهد که حرکت عمومی کلیه چرخ ها می باشد. این موتور به

مجموعه چرخ بزرگ و چرخ‌های کوچک متصل می‌باشد. با دوران موتور سمت راست که توسط اجزایی که در شکل ۱-۳ نشان داده نشده است، چرخ به سمت چپ-راست حرکت می‌نماید. با دوران موتور سمت راست، چرخ‌های کوچک شروع به حرکت نموده که سبب حرکت مجموعه به طرفین می‌شود. این موتور به مکانیزم داخلی چرخ متصل بوده و حرکت دورانی آن مستقل از حرکت دورانی مجموعه چرخ بزرگ و چرخ‌های کوچک می‌باشد. همچنین در صورتی که هر دو موتور شروع به دوران نمایند، بسته به سرعت دورانی آنها ترکیبی از حرکت مستقیم و حرکت به طرفین را انجام می‌دهد و در نتیجه قابلیت دسترسی به تمام نقاط صفحه تنها با یک چرخ را خواهیم داشت که در نوع خود منحصر به فرد و بسیار مطلوب می‌باشد.

موتورها بر روی محل استقرار سرنشین قرار گرفته‌اند که با دوران آنها چرخ آزادانه در هر جهت دلخواه درون صفحه حرکت می‌نماید. عکس العمل گشتاور تولیدی موتور به بدنه آن و شاسی محل استقرار سرنشین اعمال می‌شود که وظیفه کنترل، تنظیم و قائم نگه داشتن محل استقرار سرنشین در اثر حرکت مستقیم و حرکت به طرفین را عهده دار می‌باشد. در شکل ۲-۳ شماتیک خودروی تک چرخ را مشاهده می‌نماییم.



شکل ۲-۳ شماتیک خودروی تک چرخ



### ۲-۳ معادلات حرکت خودروی تک چرخ

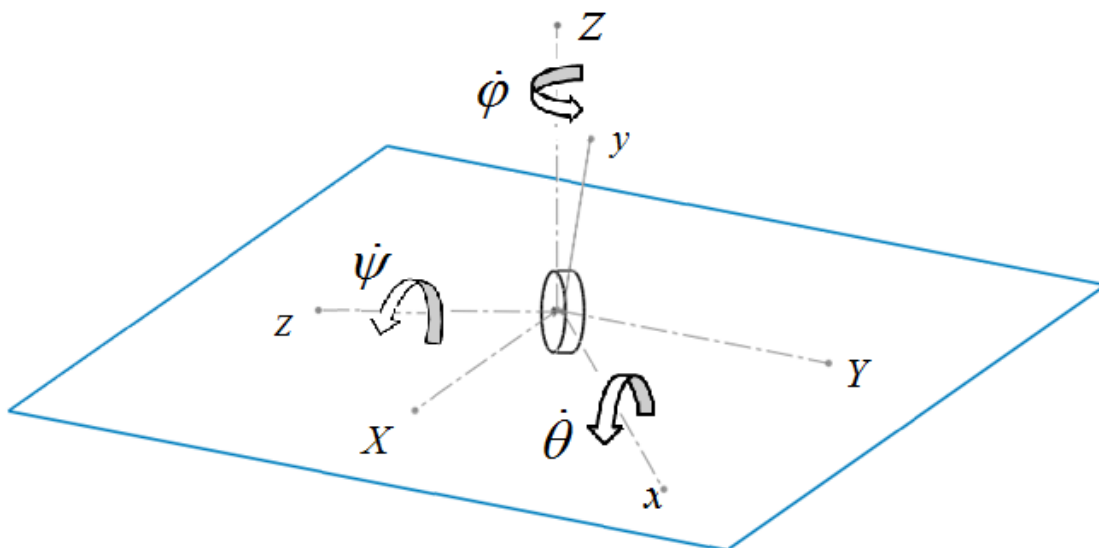
برای محاسبه‌ی معادلات حرکت معمولاً از دو دیدگاه نیوتنی یا لاگرانژی استفاده می‌شود. در دینامیک نیوتنی از روش دیاگرام آزاد استفاده می‌شود و کمیت‌ها برداری می‌باشند. همچنین نیروهای قیدها بایستی لحاظ شود. در دینامیک لاگرانژی کمیت‌ها به صورت اسکالر می‌باشد و انرژی پتانسیل و جنبشی کل سیستم را مد نظر می‌گیریم و نیروهای قیدها به صورت مستقیم وارد مسئله نمی‌شود. در مدلسازی خودروی تک چرخ به علت فضایی بودن مدل، درجات آزادی بالا و همچنین اجزای نسبتاً زیاد مدل، استفاده از روش نیوتنی مشکل بوده و احتمال خطا در نحوه‌ی اعمال قیدها و نیروهای عکس‌العملی در هنگام رسم دیاگرام آزاد و محاسبه‌ی گشتاور وجود دارد. اما در روش دینامیک لاگرانژی مشکلات نیروها و قیدهای روش نیوتنی وجود ندارد و از انرژی جنبشی و پتانسیل هر یک از اجزای سیستم استفاده می‌شود و در نهایت انرژی جنبشی و پتانسیل کل سیستم را محاسبه می‌نماییم و با استفاده از معادلات لاگرانژ، معادلات حرکت سیستم محاسبه می‌شود.

خودروی تک چرخ از تعدادی چرخ کوچک، یک چرخ بزرگ و محل استقرار سرنشین تشکیل شده است. در این مدلسازی فرض می‌شود که همواره یکی از چرخ‌های کوچک در تماس با زمین می‌باشد. برای محاسبه‌ی انرژی از تعدادی دستگاه مختصات نسبی که به هر یک از اجزا متصل می‌باشد، استفاده شده است که در ادامه نحوه‌ی انتخاب آنها را بیان می‌نماییم.

برای استفاده از معادلات لاگرانژ بایستی انرژی پتانسیل و جنبشی کل خودرو را محاسبه نماییم و لاگرانژین را تشکیل دهیم. برای این منظور در ابتدا انرژی جنبشی چرخ کوچک را محاسبه می‌نماییم، سپس انرژی جنبشی و پتانسیل چرخ بزرگ بیان می‌شود و در مرحله‌ی بعد انرژی مجموعه چرخ‌های کوچک توصیف می‌شود. در مرحله‌ی آخر انرژی جنبشی و پتانسیل محل استقرار سرنشین محاسبه می‌شود. انرژی جنبشی و پتانسیل کل به ترتیب برابر مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل اجزا می‌باشد. تعداد معادلات حرکت سیستم بیانگر درجه آزادی سیستم می‌باشد.

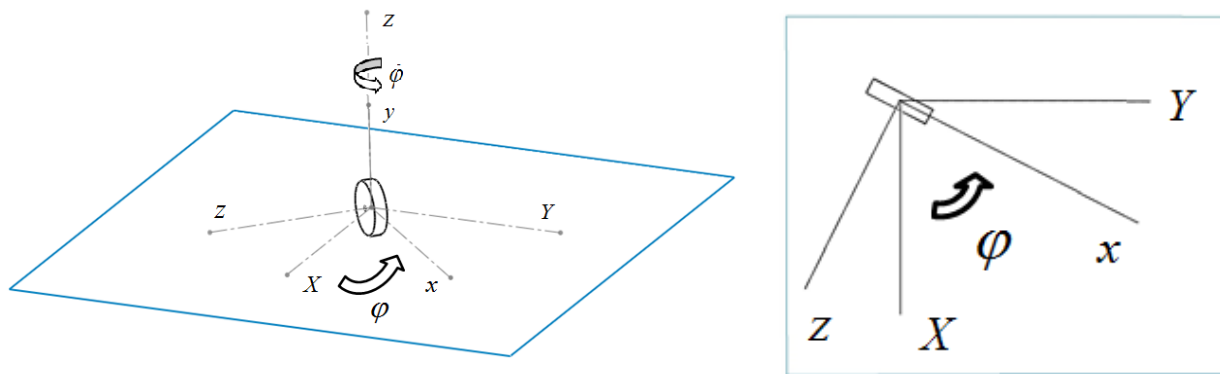
### ۱-۲-۳ چرخ کوچک

برای بیان انرژی جنبشی و پتانسیل چرخ کوچک از دستگاه مختصات نسبی  $xyz$  استفاده شده است. این دستگاه از دوران مختصات مبنا، با زاویه اوپلر متوالی  $3-1-3$  بدست می‌آید که در بخش  $2-2-6$  بیان شد. در شکل  $3-3$  چرخ کوچک و محورهای مختصات مبنا و نسبی متصل به آن مشاهده می‌شود.



شکل ۳-۳ چرخ کوچک و محورهای مختصات مبنا و نسبی متصل به آن

در شکل ۴-۳ چرخ کوچک در وضعیت قائم نشان داده شده است که زاویه  $\theta$  برابر  $90^\circ$  درجه بوده و محورهای  $Z$  مبنا و  $y$  نسبی بر یکدیگر منطبق می‌باشند. همان طور که مشاهده می‌شود، زاویه  $\varphi$  راستای حرکت را مشخص می‌نماید.



شکل ۴-۳ چرخ کوچک در وضعیت قائم

از مختصات تعمیم یافته برای توصیف حرکت چرخ با مختصات مرکز جرم  $X, Y, Z$  و سه زاویه اویلر  $\varphi, \theta, \psi$  همچنین از چارچوب اف به عنوان چارچوب نسبی استفاده شده است که مقدار  $\psi$  در آن صفر در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از معادلات (۴-۲) سیستم مختصات  $XYZ$  با بردارهای یکه  $IJK$  را به سیستم مختصات  $xyz$  با بردارهای یکه  $ijk$  تبدیل می‌نماییم:

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \theta & +\cos \varphi \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I \\ J \\ K \end{Bmatrix} \quad (1-3)$$

رابطه‌ی بردارهای یکه IJK و ijz را در شکل ۳-۳ مشاهده می‌نماییم.

$$i = (\cos \varphi)I + (\sin \varphi)J$$

$$j = (-\sin \varphi \cos \theta)I + (\cos \varphi \cos \theta)J + (\sin \theta)K \quad (2-3)$$

$$k = (\sin \varphi \sin \theta)I + (-\cos \varphi \sin \theta)J + (\cos \theta)K$$

بایستی به این نکته توجه شود که نقطه‌ی تماس چرخ کوچک با زمین همواره در جهت محور  $y$  می‌باشد. سرعت زاویه‌ی ای دیسک کوچک در مختصات xyz برابر است با :

$$\omega = \omega_b = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k = \dot{\theta}i + \dot{\varphi} \sin \theta j + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})k \quad (3-3)$$

که  $\omega_x = \dot{\theta}$ ،  $\omega_y = \dot{\varphi} \sin \theta$  و  $\omega_z = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$  می‌باشد.

سرعت چرخ کوچک در مختصات نسبی xyz که متصل به چرخ می‌باشد، برابر است با :

$$V_{W_{Small}} = (\dot{\theta}i + \dot{\varphi} \sin \theta j + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})k) \times (rj) \quad (4-3)$$

$$V_{W_{Small}} = -r(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})i + r\dot{\theta}k$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲-۳) سرعت چرخ کوچک را در مختصات مبنا XYZ به صورت زیر نوشته

می‌شود:

$$V_{W_{Small}} = \dot{X}I + \dot{Y}J + \dot{Z}K =$$

$$(-r(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \varphi + r\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta)I + (-r(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \sin \varphi - r\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta)J + (r\dot{\theta} \cos \theta)K \quad (5-3)$$

از طرفی سرعت مرکز جرم چرخ کوچک را می‌توان به صورت معادله‌ی (۶-۳) نوشت :

$$V_{G_{Small}} = V_c + V_{G/c} \quad (6-3)$$

که  $V_{G_{Small}}$  سرعت مرکز جرم می‌باشد و با  $V_{W_{Small}}$  برابر می‌باشد.  $V_c$  سرعت نقطه‌ی تماس با زمین

می‌باشد و  $V_{G/c}$  سرعت نسبی بین مرکز جرم و نقطه‌ی تماس چرخ با زمین می‌باشد.

در حرکت غلتش همراه با لغزش مقدار  $V_c$  مخالف صفر است. در این حالت تنها مقدار آن در جهت

عمود بر صفحه (راستای Z) صفر بوده و یک قید محسوب می‌شود. در مدلسازی چرخ، فرض می‌شود

حرکت چرخ غلتش بدون لغزش می‌باشد. در نتیجه  $V_c = 0$  بوده و سه قید خواهیم داشت. با فرض غلتش

بدون لغزش و مقایسه معادلات (۵-۳) و (۶-۳) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -r(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \varphi + r\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta \\ \dot{Y} &= -r(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \sin \varphi - r\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta \\ \dot{Z} &= r\dot{\theta} \cos \theta\end{aligned}\quad (۷-۳)$$

از معادلات (۷-۳) مشاهده می‌شود که در حرکت غلتش بدون لغزش با در نظر گرفتن مختصات اویلر ۳-۱-۳، سه قید ایجاد می‌شود. دو قید اول غیرهولونومیک<sup>۳۶</sup> و قید سوم هولونومیک<sup>۳۷</sup> می‌باشد که تعبیر فیزیکی آن بیانگر فاصله‌ی مرکز جرم چرخ از سطح غلتش می‌باشد. نوع قیده‌های سیستم در تعیین روش محاسبه‌ی معادلات حرکت بسیار تاثیر گذار می‌باشد. در صورتی که قیده‌های سیستم، هولونومیک باشد از روش معادلات لاگرانژ استفاده می‌شود. اما در صورتی که قیده‌ها غیرهولونومیک باشد از روش معادلات لاگرانژ مقید استفاده می‌شود که بسته به تعداد قیده‌ها، از ضرایب لاگرانژ استفاده می‌نماییم و نسبت به معادلات لاگرانژ پیچیده‌تر می‌باشد.

### ۳-۲-۲ چرخ بزرگ

برای محاسبه‌ی انرژی جنبشی و پتانسیل نیاز به یک دستگاه مختصات نسبی متصل به چرخ بزرگ داریم. این دستگاه توسط دوران سیستم مختصات  $xyz$  حول محور  $z$  با زاویه‌ی  $\beta$  ایجاد می‌شود و آن را  $x'y'z'$  می‌نامیم. چرخ بزرگ نسبت به چرخ کوچک یک درجه آزادی داشته و آن را با زاویه  $\beta$  نمایش می‌دهیم. دوران دستگاه مختصات مطابق ماتریس دوران رابطه (۸-۳) و (۹-۳) می‌باشد.

$$\{x'y'z'\} = [T_{z,\beta}] \{xyz\} \quad (۸-۳)$$

که داریم:

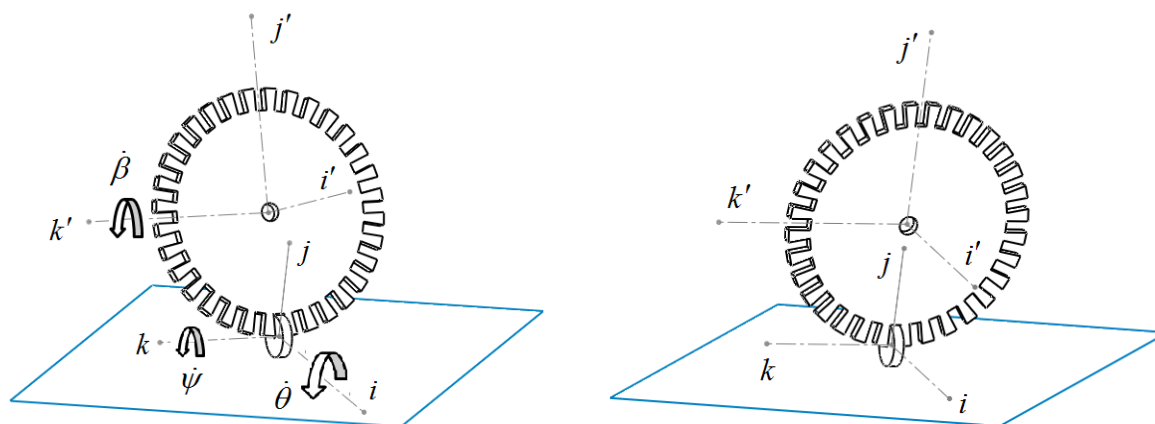
$$\begin{Bmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (۹-۳)$$

در شکل ۵-۳ وضعیت دو دستگاه مختصات  $xyz$  و  $x'y'z'$  را نسبت به هم نشان می‌دهد. در قسمت (الف) دستگاه  $xyz$  با انتقال به دستگاه  $x'y'z'$  تبدیل شده است که در این حالت راستای تمامی محورها

<sup>36</sup> Nonholonomic

<sup>37</sup> Holonomic

یکسان می‌باشد. در قسمت (ب) دستگاه  $x'y'z'$  حول محور  $z'$  دوران می‌نماید.



(ب) دوران دستگاه مختصات  $x'y'z'$  حول  $z'$

(الف) انطباق دو دستگاه مختصات  $xyz$  و  $x'y'z'$

شکل ۵-۳ وضعیت دستگاه مختصات  $xyz$  و  $x'y'z'$

با استفاده از رابطه (۹-۳) بردارهای یکه  $ijk$  دستگاه مختصات  $xyz$  به بردارهای یکه  $i'j'k'$  دستگاه

مختصات  $x'y'z'$  تبدیل می‌شود و داریم:

$$i' = \cos \beta i + \sin \beta j$$

$$j' = -\sin \beta i + \cos \beta j$$

$$k' = k$$

(۱۰-۳)

$$i = \cos \beta i' - \sin \beta j'$$

$$j = \sin \beta i' + \cos \beta j'$$

$$k = k'$$

(۱۱-۳)

از روابط (۱۰-۳) و (۱۱-۳) برای همسان سازی مختصات سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای، در

تشکیل انرژی جنبشی استفاده می‌شود.

سرعت زاویه‌ای چرخ بزرگ با مجموع سرعت زاویه‌ای چرخ کوچک بدون در نظر گرفتن سرعت

زاویه مستقل مربوط به آن بعلاوه سرعت زاویه چرخ بزرگ نسبت به چرخ کوچک توصیف می‌شود. سرعت

زاویه‌ای چرخ بزرگ را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\omega_{W_{Big}} = \dot{\theta}i + \dot{\phi} \sin \theta j + (\dot{\phi} \cos \theta)k + \dot{\beta}k' \quad (۱۲-۳)$$

با استفاده از رابطه (۱۱-۳) و جایگذاری آن در رابطه‌ی (۱۲-۳) داریم:

$$\omega_{W_{Big}} = (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta)i' + (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta)j' + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta})k' \quad (۱۳-۳)$$

برای تعیین سرعت خطی مرکز جرم چرخ از روش سرعت نسبی استفاده می‌نماییم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_{W_{Big}} = V_{W_{Small}} + V_{W_{Big/Small}} \quad (۱۴-۳)$$

سرعت نسبی بین مرکز چرخ بزرگ و مرکز چرخ کوچک می‌باشد و به صورت رابطه‌ی تعریف می‌شود.

$$V_{W_{Big/Small}} = \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) i' + (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) j' + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) k' \right) \times (Rj') = \quad (۱۵-۳)$$

$$-R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) i' + R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) k'$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۰-۳)، سرعت نسبی چرخ بزرگ نسبت به چرخ کوچک را در مختصات  $xyz$  بازنویسی می‌نماییم:

$$V_{W_{Big/Small}} = -R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \cos \beta i - R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta j + R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) k \quad (۱۶-۳)$$

رابطه‌ی (۱۶-۳) را با استفاده از تبدیل (۲-۳)، در مختصات مبنای  $XYZ$  بازنویسی می‌نماییم:

$$V_{W_{Big/Small}} = \left( (-R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \cos \beta \cos \varphi + R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \sin \varphi \cos \theta + R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) \sin \varphi \sin \theta \right) I +$$

$$\left( (-R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \cos \beta \sin \varphi - R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \cos \varphi \cos \theta - R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) \cos \varphi \sin \theta \right) J +$$

$$\left( (-R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \sin \theta + R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) \cos \theta \right) K \quad (۱۷-۳)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۷-۳) و (۱۴-۳) در رابطه‌ی (۱۴-۳)، سرعت مرکز جرم چرخ بزرگ در مختصات مبنا به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$V_{W_{Big}} = \left( (-R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \cos \beta \cos \varphi + R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \sin \varphi \cos \theta + R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) \sin \varphi \sin \theta + \dot{X} \right) I +$$

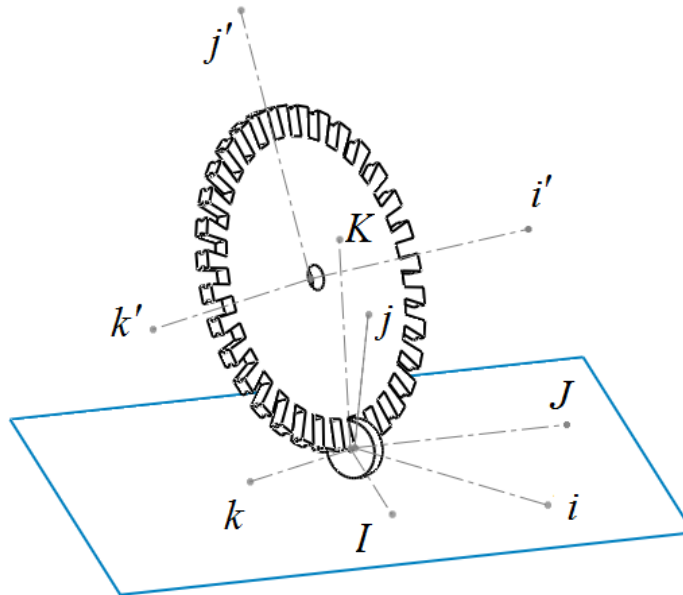
$$\left( (-R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \cos \beta \sin \varphi - R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \cos \varphi \cos \theta - R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) \cos \varphi \sin \theta + \dot{Y} \right) J +$$

$$\left( (-R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \sin \theta + R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) \cos \theta + \dot{Z} \right) K \quad (۱۸-۳)$$

مقادیر  $\dot{X}$ ،  $\dot{Y}$  و  $\dot{Z}$  در رابطه‌ی (۱۸-۳) نشان داده شده است.

چون  $\dot{X}$  و  $\dot{Y}$  قید غیر هولونومیک می‌باشند، به طور مستقیم نمی‌توان آنها را در رابطه‌ی

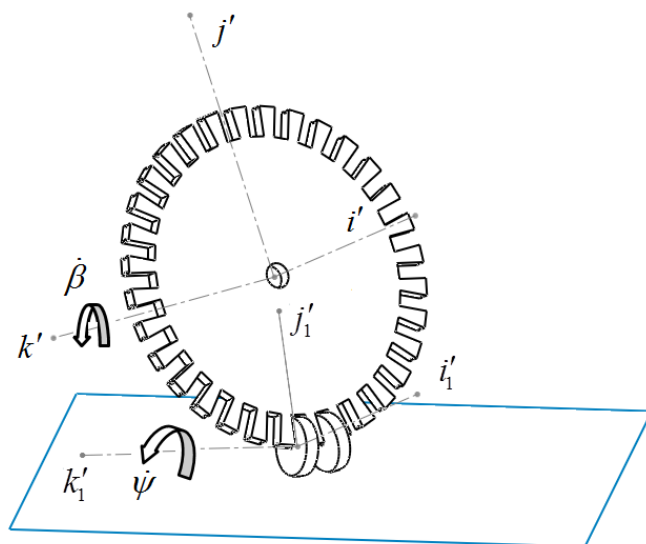
(۱۸-۳) جایگذاری نمود ولی  $Z$  قید هولونومیک بوده و جایگذاری آن بلامانع می‌باشد.  
 در شکل ۶-۳ موقعیت دستگاه‌های مختصات نسبی و مبنا نسبت به یکدیگر برای چرخ کوچک و بزرگ نشان داده شده است که به درک مولفه‌های سرعت چرخ بزرگ کمک می‌نماید.



شکل ۶-۳ موقعیت دستگاه‌های مختصات نسبی و مبنا نسبت به یکدیگر برای چرخ کوچک و بزرگ

### ۳-۲-۳ مجموعه چرخ‌های کوچک

برای محاسبه‌ی سرعت سایر چرخ‌های کوچک، دستگاه مختصات نسبی متصل به چرخ بزرگ را برای هر چرخ به مقدار ثابتی دوران می‌دهیم و دستگاه مختصات  $x'_p, y'_p, z'_p$  ایجاد می‌شود که  $p$ ، بیانگر شماره‌ی چرخ مورد نظر می‌باشد. برای شماره‌گذاری چرخ‌های کوچک از چرخ کوچکی که با زمین در تماس می‌باشد شروع می‌نماییم و مطابق چرخش عقربه‌های ساعت، سایر چرخ‌ها را نامگذاری می‌نماییم. همواره باید به این نکته توجه شود که فرض شده است تنها یک چرخ کوچک در تماس با زمین می‌باشد. در شکل ۷-۳ دستگاه مختصات متصل به چرخ‌های شماره ۳۲ و ۱ را مشاهده می‌نماییم. چرخ ۳۲، چرخ‌ی است که در تماس با زمین می‌باشد.



شکل ۷-۳ دستگاه مختصات نسبی متصل به چرخ‌های کوچک

برای ایجاد حرکت یکنواخت و پیوسته بایستی تعداد چرخ‌های کوچک در حد کافی باشد تا همواره یک چرخ در تماس با زمین باشد. در این مدل‌سازی تعداد چرخ‌های کوچک ۳۲ عدد در نظر گرفته شده است که زاویه‌ی بین آنها برابر  $11/25$  درجه می‌باشد. توسط ماتریس دوران زیر موقعیت مرکز جرم هر یک از چرخ‌های کوچک  $p$  مشخص می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} i'_p \\ j'_p \\ k'_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos p\gamma & \sin p\gamma \\ 0 & -\sin p\gamma & \cos p\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{Bmatrix} \quad (19-3)$$

$p$  شماره چرخ کوچک و  $\gamma$  زاویه‌ی نسبی بین چرخ کوچک شماره ۳۲ که در تماس با زمین بوده و چرخ مورد نظر می‌باشد که برابر مقدار ثابت  $11/25$  - درجه است. با استفاده از رابطه (۱۹-۳) بردارهای  $i'j'k'$  دستگاه مختصات  $x'y'z'$  به بردارهای  $i'_pj'_pk'_p$  دستگاه مختصات  $x'_py'_pz'_p$  تبدیل می‌شود و داریم:

$$\begin{aligned} i'_p &= i' \\ j'_p &= \cos p\gamma j' + \sin p\gamma k' \\ k'_p &= -\sin p\gamma j' + \cos p\gamma k' \end{aligned} \quad (20-3)$$

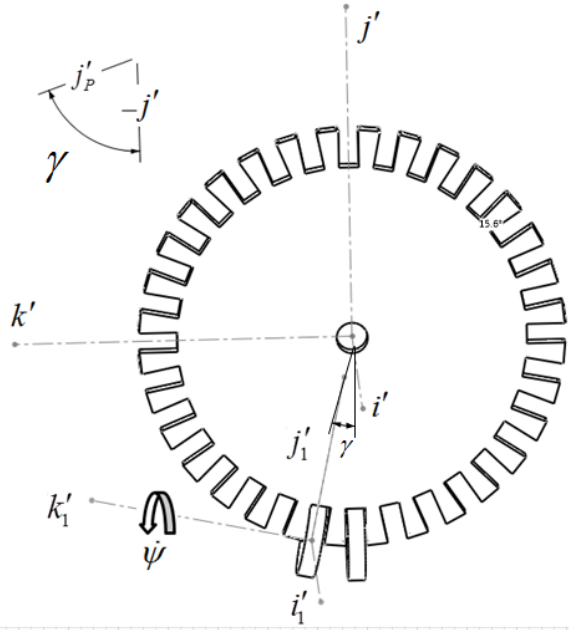


$$i' = i'_p$$

$$j' = \cos p\gamma j'_p - \sin p\gamma k'_p \quad (21-3)$$

$$k' = \sin p\gamma j'_p + \cos p\gamma k'_p$$

در شکل ۸-۳ وضعیت بردارهای یکه چرخ کوچک شماره ۲ نسبت به چرخ بزرگ مشاهده می‌شود.



شکل ۸-۳ وضعیت بردارهای یکه چرخ کوچک شماره ۲ نسبت به چرخ بزرگ

چون سایر چرخ‌های کوچک نقطه‌ی تماسی با زمین ندارند، سرعت مرکز جرم چرخ کوچک p، مانند سرعت نقاط روی چرخ بزرگ می‌باشد و برابر است با:

$$V_{W_p} = V_{W_{Big}} + V_{W_p/Big} \quad (22-3)$$

سرعت نسبی بین چرخ p و مرکز چرخ بزرگ می‌باشد و برابر است با:

$$V_{W_p/Big} = \omega_{W_{Big}} \times (-R \cos p\gamma j' + R \sin p\gamma k') \quad (23-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۳-۳) در رابطه‌ی (۲۳-۳) داریم:

$$V_{W_p/Big} = \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) R \sin p\gamma + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) R \cos p\gamma \right) i' - \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \sin p\gamma \right) j' - \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \cos p\gamma \right) k' \quad (24-3)$$

با استفاده از روابط (۱۰-۳) و (۲-۳)، سرعت نسبی بین چرخ p و مرکز چرخ بزرگ را در مختصات

مبنای XYZ بازنویسی می‌نماییم:

$$V_{W_{p, Big}} = \left( \begin{array}{l} \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) R \sin p\gamma + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) R \cos p\gamma \right) \cos \beta - \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \sin p\gamma \right) \sin \beta \right) \cos \varphi \\ - \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) R \sin p\gamma + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) R \cos p\gamma \right) \sin \beta + \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \sin p\gamma \right) \cos \beta \right) \sin \varphi \cos \theta \\ - \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \cos p\gamma \right) \sin \varphi \sin \theta \end{array} \right) I + \left( \begin{array}{l} \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) R \sin p\gamma + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) R \cos p\gamma \right) \cos \beta - \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \sin p\gamma \right) \sin \beta \right) \sin \varphi \\ + \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) R \sin p\gamma + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) R \cos p\gamma \right) \sin \beta + \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \sin p\gamma \right) \cos \beta \right) \cos \varphi \cos \theta \\ + \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \cos p\gamma \right) \cos \varphi \sin \theta \end{array} \right) J + \left( \begin{array}{l} \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) R \sin p\gamma + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) R \cos p\gamma \right) \sin \beta + \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \sin p\gamma \right) \cos \beta \right) \sin \theta \\ - \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \cos p\gamma \right) \cos \theta \end{array} \right) K \quad (25-3)$$

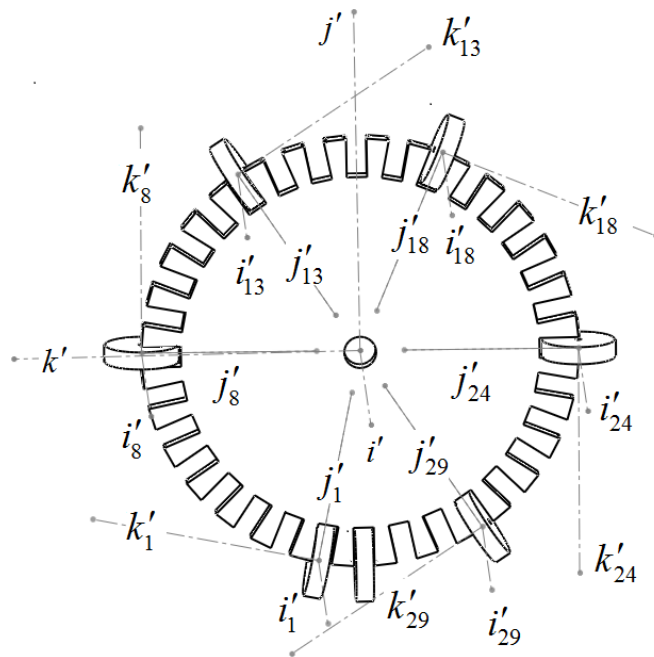
با جایگذاری رابطه‌ی (۲۵-۳) و (۲-۳۰) در (۳-۲۲) داریم:

$$V_{W_p} = \left( \begin{array}{l} \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) R \sin p\gamma + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) R \cos p\gamma \right) \cos \beta - \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \sin p\gamma \right) \sin \beta \right) \cos \varphi \\ - \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) R \sin p\gamma + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) R \cos p\gamma \right) \sin \beta + \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \sin p\gamma \right) \cos \beta \right) \sin \varphi \cos \theta \\ - \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \cos p\gamma \right) \sin \varphi \sin \theta + (-R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \cos \beta \cos \varphi + R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \sin \varphi \cos \theta + \\ + R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) \sin \varphi \sin \theta + \dot{X} \end{array} \right) I + \left( \begin{array}{l} \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) R \sin p\gamma + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) R \cos p\gamma \right) \cos \beta - \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \sin p\gamma \right) \sin \beta \right) \sin \varphi \\ + \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) R \sin p\gamma + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) R \cos p\gamma \right) \sin \beta + \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \sin p\gamma \right) \cos \beta \right) \cos \varphi \cos \theta \\ + \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \cos p\gamma \right) \cos \varphi \sin \theta + (-R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \cos \beta \sin \varphi - R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \cos \varphi \cos \theta \\ - R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) \cos \varphi \sin \theta + \dot{Y} \end{array} \right) J + \left( \begin{array}{l} \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) R \sin p\gamma + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) R \cos p\gamma \right) \sin \beta + \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \sin p\gamma \right) \cos \beta \right) \sin \theta \\ - \left( (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) R \cos p\gamma \right) \cos \theta + (-R(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \sin \theta + R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) \cos \theta + \dot{Z} \end{array} \right) K \quad (26-3)$$

مقادیر  $\dot{X}$ ،  $\dot{Y}$  و  $\dot{Z}$  در رابطه‌ی (۷-۳) نشان داده شده است.

در شکل ۳-۹ وضعیت دستگاه‌های مختصات چرخ‌های کوچک نسبت به چرخ بزرگ در چندین

حالت نشان داده شده است.



شکل ۳-۹ وضعیت دستگاه‌های مختصات چرخ‌های کوچک نسبت به چرخ بزرگ

سرعت زاویه‌ای چرخ کوچک  $p$  با مجموع سرعت زاویه‌ای چرخ بزرگ بعلاوه سرعت زاویه چرخ کوچک  $p$  حول محور خود توصیف می‌شود. سرعت زاویه‌ای چرخ کوچک  $p$  را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\omega_{W_p} = (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) i' + (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) j' + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta}) k' \quad (27-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۲۰) در رابطه (۳-۲۷)، سرعت زاویه‌ای هر یک از چرخ‌های کوچک  $p$  را

محاسبه می‌نماییم و داریم:

$$\omega_{W_p} = (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) i' + (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta - \dot{\psi} \sin p\gamma) j' + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\beta} + \dot{\psi} \cos p\gamma) k' \quad (28-3)$$

### ۳-۲-۴ محل سرنشین

محل استقرار سرنشین شامل شاسی، محل قرارگیری موتورها و صندلی راننده می‌باشد. محل استقرار سرنشین توسط دو موتور در مرکز چرخ بزرگ به آن متصل می‌شود و نسبت به آن تنها یک درجه آزادی دارد و با زاویه‌ی  $\gamma$  نشان داده می‌شود. برای تعیین سرعت خطی و زاویه‌ای محل استقرار سرنشین از

دستگاه مختصات نسبی  $x''y''z''$  استفاده شده است. این دستگاه از دوران سیستم مختصات  $x'y'z'$  متصل به چرخ بزرگ نتیجه می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

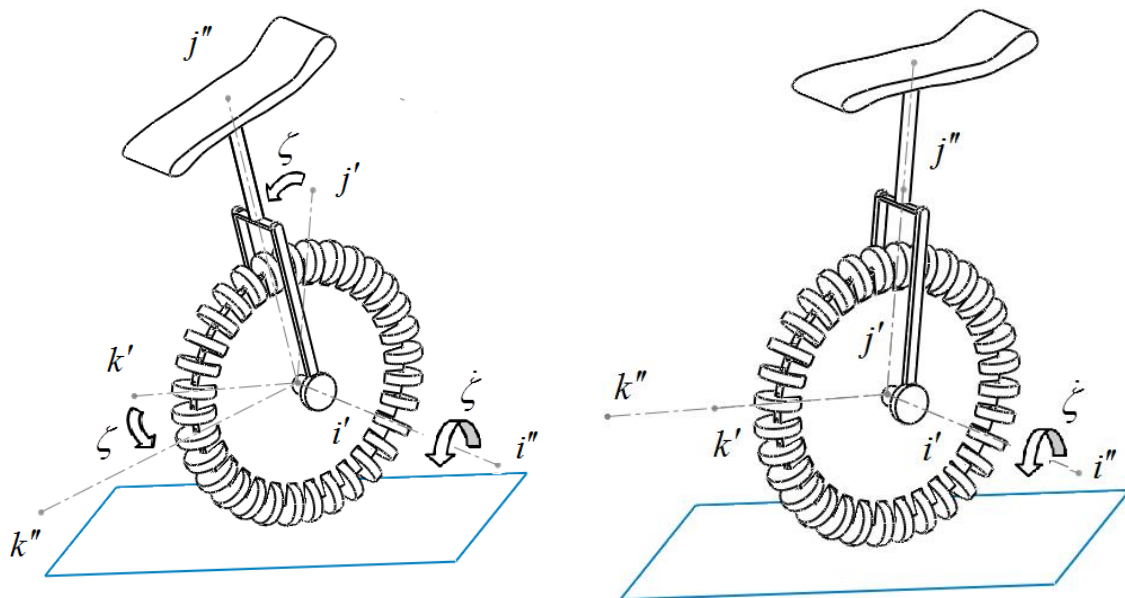
$$\begin{Bmatrix} i'' \\ j'' \\ k'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \zeta & \sin \zeta \\ 0 & -\sin \zeta & \cos \zeta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{Bmatrix} \quad (29-3)$$

بردارهای  $i''j''k''$  دستگاه مختصات  $x''y''z''$  می‌باشد و با استفاده از رابطه‌ی (۲۹-۳)، ارتباط آن را با  $i'j'k'$  به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} i'' &= i' \\ j'' &= \cos \zeta j' + \sin \zeta k' \\ k'' &= -\sin \zeta j' + \cos \zeta k' \end{aligned} \quad (30-3)$$

$$\begin{aligned} i' &= i'' \\ j' &= \cos \zeta j'' - \sin \zeta k'' \\ k' &= \sin \zeta j'' + \cos \zeta k'' \end{aligned} \quad (31-3)$$

در شکل ۱۰-۳ وضعیت محور مختصات نسبی متصل به محل استقرار سرنشین نسبت به چرخ بزرگ را مشاهده می‌نماییم. در قسمت (الف) مختصات نسبی چرخ و محل استقرار سرنشین بر یکدیگر منطبق می‌باشند. در قسمت (ب) محل استقرار سرنشین به اندازه  $\zeta$  حول محور  $x''$  منحرف شده است.



(الف) انطباق دو دستگاه مختصات  $x'y'z'$  و  $x''y''z''$  (ب) دوران دستگاه مختصات  $x''y''z''$  حول  $x''$

شکل ۱۰-۳ وضعیت محور مختصات نسبی متصل به محل استقرار سرنشین نسبت به چرخ

سرعت محل استقرار سرنشین به کمک رابطه‌ی سرعت نسبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_S = V_{W_{Big}} + V_{S/D_{Big}} \quad (32-3)$$

که  $V_{W_{Big}}$  از رابطه‌ی (۳۰-۲) جایگذاری می‌شود و  $V_{S/D_{Big}}$  سرعت نسبی بین مرکز چرخ و مرکز جرم محل استقرار سرنشین می‌باشد. فاصله‌ی مرکز جرم محل استقرار سرنشین تا مرکز چرخ را  $L$  می‌نامیم. سرعت زاویه‌ای محل استقرار سرنشین با مجموع سرعت زاویه‌ای چرخ بزرگ بدون در نظر گرفتن سرعت زاویه مستقل مربوط به آن بعلاوه سرعت زاویه مرکز جرم محل استقرار سرنشین نسبت به چرخ توصیف می‌شود. سرعت زاویه‌ای محل استقرار سرنشین را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\omega_S = (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta) i' + (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) j' + (\dot{\phi} \cos \theta) k' + \dot{\zeta} i'' \quad (33-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳۱-۳) در (۳۳-۳) داریم:

$$\omega_S = (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta}) i'' + ((-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \cos \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \sin \zeta) j'' + ((-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \cos \zeta) k'' \quad (34-3)$$

سرعت نسبی محل استقرار سرنشین نسبت به مرکز چرخ بزرگ برابر است با:

$$V_{S/D_{Big}} = \begin{pmatrix} (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta}) i'' + \\ ((-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \cos \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \sin \zeta) j'' \\ ((-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \cos \zeta) k'' \end{pmatrix} \times (L j'') \quad (35-3)$$

سرعت نسبی محل استقرار سرنشین نسبت به مرکز چرخ بزرگ در مختصات  $x''y''z''$  برابر است با:

$$V_{S/D_{Big}} = L \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \cos \zeta \right) i'' + L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) k'' \quad (36-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳۰-۳) در (۳۶-۳)، سرعت نسبی محل استقرار سرنشین را بازنویسی می‌نماییم:

$$V_{S/D_{Big}} = L \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \cos \zeta \right) i' - L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \sin \zeta j' + L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \cos \zeta k' \quad (37-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۱۰) در (۳-۳۷)، سرعت نسبی محل استقرار سرنشین را در مختصات

XYZ بازنویسی می‌نماییم:

$$V_{S/D_{Big}} =$$

$$\left( L \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \cos \beta + L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \sin \zeta \sin \beta \right) i +$$

$$\left( L \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \sin \beta - L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \sin \zeta \cos \beta \right) j +$$

$$\left( L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \cos \zeta \right) k$$

(۳۸-۳)

با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۲) در (۳-۳۸)، سرعت نسبی محل استقرار سرنشین را در مختصات XYZ

بازنویسی می‌نماییم:

$$V_{S/D_{Big}} =$$

$$\left( \left( L \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \cos \beta + L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \sin \zeta \sin \beta \right) \cos \varphi i - \right.$$

$$\left. \left( L \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \sin \beta - L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \sin \zeta \cos \beta \right) \sin \varphi \cos \theta \right) I +$$

$$\left( L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \cos \zeta \right) \sin \varphi \sin \theta$$

$$\left( \left( L \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \cos \beta + L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \sin \zeta \sin \beta \right) \sin \varphi + \right.$$

$$\left. \left( L \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \sin \beta - L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \sin \zeta \cos \beta \right) \cos \varphi \cos \theta \right) J +$$

$$\left( L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \cos \zeta \right) \cos \varphi \sin \theta$$

$$\left( \left( L \left( (-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\phi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\phi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \sin \beta - L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \sin \zeta \cos \beta \right) \sin \theta \right.$$

$$\left. + \left( L \left( \dot{\theta} \cos \beta + \dot{\phi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta} \right) \cos \zeta \right) \cos \theta \right) K$$

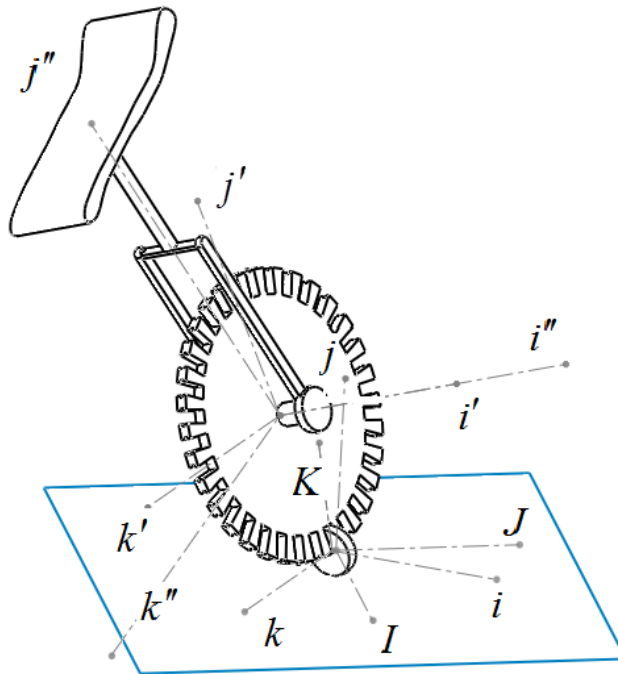
(۳۹-۳)

با جایگذاری روابط (۲-۳۰) و (۳-۳۹) در (۳-۳۲)، سرعت مرکز جرم محل استقرار سرنشین در

مختصات مبنا توصیف می‌شود.

$$V_s = \begin{pmatrix} \left( L(-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\varphi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \cos \beta + L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \sin \beta \cos \varphi - \\ \left( L(-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\varphi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \sin \beta - L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \cos \beta \sin \varphi \cos \theta \\ + \left( L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta}) \cos \zeta \right) \sin \varphi \sin \theta - R(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\beta}) \cos \beta \cos \varphi + R(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \sin \varphi \cos \theta \\ + R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \beta) \sin \varphi \sin \theta + \dot{X} \end{pmatrix} I + \\ \begin{pmatrix} \left( L(-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\varphi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \cos \beta + L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \sin \beta \sin \varphi + \\ \left( L(-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\varphi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \sin \beta - L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \cos \beta \cos \varphi \cos \theta \\ - \left( L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta}) \cos \zeta \right) \cos \varphi \sin \theta + (-R(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\beta}) \cos \beta \sin \varphi - R(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \cos \varphi \cos \theta \\ - R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \beta) \cos \varphi \sin \theta + \dot{Y} \end{pmatrix} J + \\ \begin{pmatrix} \left( L(-\dot{\theta} \sin \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \beta) \sin \zeta + (\dot{\varphi} \cos \theta) \cos \zeta \right) \sin \beta - L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \cos \beta \sin \theta \\ + \left( L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \beta + \dot{\zeta}) \cos \zeta \right) \cos \theta + (-R(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\beta}) \sin \beta \sin \theta + R(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \beta) \cos \theta + \dot{Z} \end{pmatrix} K \end{pmatrix} \quad (40-3)$$

در شکل ۱۱-۳ وضعیت تمامی محورهای مختصات نسبی و مبنا در خودروی تک چرخ را نسبت به یکدیگر مشاهده می‌نماییم. این شکل به درک فیزیکی بیشتر مولفه‌های سرعت رابطه‌ی (۴۰-۳) کمک می‌نماید.



شکل ۱۱-۳ وضعیت تمامی محورهای مختصات نسبی و مبنا در خودروی تک چرخ

### ۳-۲-۵ محاسبه انرژی جنبشی

انرژی جنبشی کل سیستم با مجموع انرژی جنبشی هر یک از اجزای تشکیل دهنده آن برابر است و از دو بخش انرژی جنبشی انتقالی که ناشی از سرعت خطی جسم و انرژی جنبشی دورانی که ناشی از سرعت دورانی جسم می‌باشد، تشکیل شده است. انرژی جنبشی هر جسم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{total} = T_{Translation} + T_{Rotation} \quad (۴۱-۳)$$

$T_{Translation}$  انرژی جنبشی انتقالی می‌باشد که ناشی از سرعت انتقالی جسم بوده و برابر است با:

$$T_{Translation} = \frac{1}{2} m V_G^2 = \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \quad (۴۲-۳)$$

$T_{Rotation}$  انرژی جنبشی دورانی می‌باشد که ناشی از سرعت دورانی جسم بوده و برابر است با:

$$T_{Rotation} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (۴۳-۳)$$

که  $I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$  ماتریس اینرسی می‌باشد. در صورتی که محورهای جسم به محورهای

اصلی منطبق باشند، ممان‌های اینرسی قطبی صفر می‌شود و ماتریس  $I$  به فرم قطری تبدیل می‌شود. در نتیجه:

$$T_{Rotation} = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2) \quad (۴۴-۳)$$

سرعت انتقالی و سرعت زاویه‌ای چرخ‌های کوچک، چرخ بزرگ و محل استقرار سرنشین پیشتر توصیف شده است که می‌توان آنها را در روابط (۴۲-۳) و (۴۴-۳) جایگذاری نمود.

با توجه به این موضوع که خودروی تک چرخ تنها یک نقطه‌ی تماس با زمین دارد و در نتیجه نمی‌توان توسط هیچ موتوری زاویه‌ی  $\varphi$  که زاویه‌ی یابو نامیده می‌شود را ایجاد و سپس کنترل نمود. همچنین با توجه به نرخ پایین تغییرات زاویه‌ی یابو، می‌توان در مدلسازی از آن صرف‌نظر نمود. راننده برای تغییر یابو از حرکت کمر و قسمت تحتانی بدن خود و کمک گرفتن از پدال‌های طرفین چرخ استفاده می‌نماید و هیچ کنترلی روی آن اعمال نمی‌شود [22,29,30].

با حذف یابو، یک درجه آزادی سیستم کاهش می‌یابد و چهار درجه آزادی در مدلسازی خواهیم داشت که تا به امروز چنین کاری انجام نشده است. همچنین طراحی مکانیزم چرخ و مدلسازی نوع حرکت آن نیز یکی از نوآوری‌های منحصر به فرد این پایان نامه می‌باشد که امکان حرکت فوق العاده‌ای به خودرو



می‌دهد و می‌تواند در هر موقعیتی از صفحه قرار گیرد و حرکت نماید. در خودروهای دو چرخ مانند سگویی‌ها، با چرخش چرخ‌ها در خلاف جهت یکدیگر زاویه‌ی یاو را تنظیم می‌نماید و در مدلسازی آنها نمی‌توان از آن صرف‌نظر نمود [2,3]. اما این فرض در مورد خودروهای تک چرخ رایج می‌باشد و در مقالات و پژوهش‌های انجام شده، اکثراً مدل ریاضی خودرو به صورت دو درجه آزادی و صفحه‌ای در نظر گرفته شده و از زاویه‌ی یاو صرف‌نظر شده است [21,22,26,29,30]. خودروی طراحی شده در این پایان نامه شبیه U3-X ساخت شرکت هندای UNI.CUB که مدل بهبود یافته U3-X می‌باشد، برای ایجاد زاویه‌ی یاو از یک چرخ کمکی استفاده نموده است [28].

با فرض حذف زاویه‌ی یاو از مدلسازی خودروی تک چرخ، سرعت انتقالی و سرعت زاویه‌ای اجزای تشکیل دهنده‌ی آن تاحدودی ساده می‌شود. مهمترین مزیت حذف زاویه‌ی یاو در مدلسازی دینامیکی، تبدیل قیده‌های غیرهولونومیک سیستم به قید هولونومیک می‌باشد که در این صورت می‌توانیم از روش معادلات لاگرانژ استفاده نمود و نیازی به ضرایب لاگرانژ نمی‌باشد.

البته به این موضوع توجه شود که مدلسازی خودرو با پنج درجه آزادی و بدون حذف زاویه‌ی یاو انجام شد. با توجه به مولفه‌های زیاد سرعت و عدم امکان محاسبات به صورت دستی، از نرم‌افزار Maple استفاده شد که در نهایت به کمک ضرایب لاگرانژ و روش لاگرانژ مقید، پنج معادله‌ی حرکت محاسبه شد. اما این معادلات بسیار حجیم بوده (هر معادله نزدیک به ۱۰۰ خط در نرم‌افزار Maple) و امکان کنترل و تحلیل آن بسیار پیچیده و ناممکن بود.

برای حذف زاویه یاو، مقدار آن را ثابت و تغییرات آن را برابر صفر در نظر می‌گیریم که در این حالت راستای حرکت ثابت می‌ماند و چرخ با حرکت مستقیم و حرکت به طرفین خود، می‌تواند تمامی نقاط صفحه را پوشش دهد.

با حذف زاویه‌ی یاو از رابطه‌ی (۳-۳)، سرعت زاویه‌ای چرخ کوچکی که در تماس با زمین می‌باشد برابر است با:

$$\omega_{W_{Small}} = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k = \dot{\theta} i + \dot{\psi} k \quad (۴۵-۳)$$

با حذف زاویه‌ی یاو از رابطه‌ی (۳-۵)، سرعت انتقالی چرخ کوچکی که در تماس با زمین می‌باشد برابر است با:

$$V_{W_{Small}} = \dot{X}I + \dot{Y}J + \dot{Z}K = (-r\dot{\psi})I + (-r\dot{\theta} \sin \theta)J + (r\dot{\theta} \cos \theta)K \quad (46-3)$$

با جایگذاری (45-3) و (46-3) در روابط (42-3) و (44-3)، انرژی جنبشی انتقالی و دورانی چرخ کوچکی که در تماس با زمین می‌باشد، برابر است با:

$$T_{W_{Small32} Translation} = \frac{1}{2} m V_G^2 = \frac{1}{2} m ((-r\dot{\psi})^2 + (-r\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (r\dot{\theta} \cos \theta)^2)$$

$$T_{W_{Small32} Rotation} = \frac{1}{2} (I_{W_{Smallx}} (\dot{\theta}^2) + I_{W_{Smallz}} (\dot{\psi}^2)) \quad (47-3)$$

با توجه به رابطه‌ی (47-3) و جایگذاری آن در رابطه‌ی (41-3)، انرژی جنبشی کل چرخ کوچکی که در تماس با زمین می‌باشد، برابر است با:

$$T_{W_{Small32} total} = T_{W_{Small32} Translation} + T_{W_{Small32} Rotation}$$

$$= \frac{1}{2} (mr^2 + I_{W_{Smallz}}) \dot{\psi}^2 + (mr^2 + I_{W_{Smallx}}) \dot{\theta}^2 \quad (48-3)$$

با توجه به رابطه‌ی (46-3)، مشاهده می‌شود که قیدهای سیستم به حالت هولونومیک بوده و در نتیجه می‌توانیم از معادلات لاگرانژ استفاده نماییم. قیدهای سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{X} = -r\dot{\psi}$$

$$\dot{Y} = -r\dot{\theta} \sin \theta$$

$$\dot{Z} = r\dot{\theta} \cos \theta \quad (49-3)$$

با حذف زاویه‌ی یاو از رابطه‌ی (49-3)، سرعت زاویه‌ای چرخ بزرگ برابر است با:

$$\omega_{W_{Big}} = (\dot{\theta} \cos \beta) i' + (-\dot{\theta} \sin \beta) j' + (\dot{\beta}) k' \quad (50-3)$$

با حذف زاویه‌ی یاو از رابطه‌ی (50-3)، سرعت انتقالی چرخ بزرگ برابر است با:

$$V_{W_{Big}} = (-R\dot{\beta} \cos \beta - r\dot{\psi})I + (-R\dot{\beta} \sin \beta \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin \theta - r\dot{\theta} \sin \theta)J + (-R(\dot{\beta}) \sin \beta \sin \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos \theta + r\dot{\theta} \cos \theta)K \quad (51-3)$$

با جایگذاری (50-3) و (51-3) در روابط (42-3) و (44-3)، انرژی جنبشی انتقالی و دورانی چرخ بزرگ برابر است با:

$$T_{W_{Big} Translation} = \frac{1}{2} m V_G^2 = \frac{1}{2} M ((-R\dot{\beta} \cos \beta - r\dot{\psi})^2 + (-R\dot{\beta} \sin \beta \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin \theta - r\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (-R(\dot{\beta}) \sin \beta \sin \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos \theta + r\dot{\theta} \cos \theta)^2) \quad (52-3)$$

$$T_{W_{Big} Rotation} = \frac{1}{2} (I_{W_{Big} x} (\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta) + I_{W_{Big} y} (\dot{\theta}^2 \sin^2 \beta) + I_{W_{Big} z} (\dot{\beta}^2))$$

به کمک رابطه‌ی (52-3) و جایگذاری آن در رابطه‌ی (41-3)، انرژی جنبشی کل چرخ بزرگ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{W_{Big} total} = T_{W_{Big} Translation} + T_{W_{Big} Rotation} = \frac{1}{2} M (-R\dot{\beta} \cos \beta - r\dot{\psi})^2 + \frac{1}{2} M (-R\dot{\beta} \sin \beta \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin \theta - r\dot{\theta} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} M (-R(\dot{\beta}) \sin \beta \sin \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos \theta + r\dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} (I_{W_{Big} x} (\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta) + I_{W_{Big} y} (\dot{\theta}^2 \sin^2 \beta) + I_{W_{Big} z} (\dot{\beta}^2)) \quad (53-3)$$

با حذف زاویه‌ی یاو از رابطه‌ی (28-3)، سرعت زاویه‌ای چرخ کوچک شماره‌ی p برابر است با:

$$\omega_{W_p} = (\dot{\theta} \cos \beta) i' + (-\dot{\theta} \sin \beta - \dot{\psi} \sin p\gamma) j' + (\dot{\beta} + \dot{\psi} \cos p\gamma) k' \quad (54-3)$$

با حذف زاویه‌ی یاو از رابطه‌ی (26-3)، سرعت انتقالی چرخ کوچک شماره‌ی p برابر است با:

$$(55-3)$$

$$V_{W_p} = \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta R \sin p\gamma + \dot{\beta} R \cos p\gamma) \cos \beta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \sin \beta \right) - r\dot{\psi} \right) I + \left( \left( (-R\dot{\theta} \sin \beta \sin p\gamma + R\dot{\beta} \cos p\gamma) \sin \beta + R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \cos \beta \right) \cos \theta \right. \\ \left. + R\dot{\theta} \cos \beta \cos p\gamma \sin \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \right) J + \left( \left( (-R\dot{\theta} \sin \beta \sin p\gamma + R\dot{\beta} \cos p\gamma) \sin \beta + R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \cos \beta \right) \sin \theta \right. \\ \left. - R\dot{\theta} \cos \beta \cos p\gamma \cos \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \sin \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \right) K$$

با جایگذاری (54-3) و (55-3) در روابط (42-3) و (44-3)، انرژی جنبشی انتقالی و دورانی چرخ

کوچک شماره‌ی p برابر است با:

$$\begin{aligned}
T_{W_p \text{ Translation}} = & \\
& \frac{1}{2} m \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta R \sin p\gamma + \dot{\beta} R \cos p\gamma) \cos \beta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \sin \beta \right) - r\dot{\psi} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m \left( \left( (-R\dot{\theta} \sin \beta \sin p\gamma + R\dot{\beta} \cos p\gamma) \sin \beta + R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \cos \beta \right) \cos \theta \right. \\
& \left. + R\dot{\theta} \cos \beta \cos p\gamma \sin \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m \left( \left( (-R\dot{\theta} \sin \beta \sin p\gamma + R\dot{\beta} \cos p\gamma) \sin \beta + R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \cos \beta \right) \sin \theta \right. \\
& \left. - R\dot{\theta} \cos \beta \cos p\gamma \cos \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \sin \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \right)^2
\end{aligned} \tag{۵۶-۳}$$

$$T_{W_p \text{ Rotation}} = \frac{1}{2} \left( I_{W_{smallx}} (\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta) + I_{W_{smally}} (-\dot{\theta} \sin \beta - \dot{\psi} \sin p\gamma)^2 + I_{W_{smallz}} (\dot{\beta} + \dot{\psi} \cos p\gamma)^2 \right)$$

به کمک رابطه‌ی (۵۶-۳) و جایگذاری آن در رابطه‌ی (۴۱-۳)، انرژی جنبشی کل چرخ کوچک شماره‌ی p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
T_{W_p \text{ total}} = T_{W_p \text{ Translation}} + T_{W_p \text{ Rotation}} = & \\
& \frac{1}{2} m \left( \left( (-\dot{\theta} \sin \beta R \sin p\gamma + \dot{\beta} R \cos p\gamma) \cos \beta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \sin \beta \right) - r\dot{\psi} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m \left( \left( (-R\dot{\theta} \sin \beta \sin p\gamma + R\dot{\beta} \cos p\gamma) \sin \beta + R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \cos \beta \right) \cos \theta \right. \\
& \left. + R\dot{\theta} \cos \beta \cos p\gamma \sin \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \right)^2 \tag{۵۷-۳} \\
& + \frac{1}{2} m \left( \left( (-R\dot{\theta} \sin \beta \sin p\gamma + R\dot{\beta} \cos p\gamma) \sin \beta + R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \cos \beta \right) \sin \theta \right. \\
& \left. - R\dot{\theta} \cos \beta \cos p\gamma \cos \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \sin \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} \left( I_{W_{smallx}} (\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta) + I_{W_{smally}} (-\dot{\theta} \sin \beta - \dot{\psi} \sin p\gamma)^2 + I_{W_{smallz}} (\dot{\beta} + \dot{\psi} \cos p\gamma)^2 \right)
\end{aligned}$$

برای مجموعه چرخ‌های کوچک که با p معرفی می‌شود و از شماره ۱ تا ۳۱ ادامه دارد، انرژی جنبشی کل چرخ‌های کوچک به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T_{W_p} = T_{W_p} + T_{W_p} = \sum_{p=1}^{31} \left( \frac{1}{2} m \left( (-R\dot{\theta} \sin \beta \sin p\gamma + R\dot{\beta} \cos p\gamma) \cos \beta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \sin \beta - r\dot{\psi} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left( \left( (-R\dot{\theta} \sin \beta \sin p\gamma + R\dot{\beta} \cos p\gamma) \sin \beta + R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \cos \beta \right) \cos \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos p\gamma \sin \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \right)^2 + \frac{1}{2} m \left( \left( (-R\dot{\theta} \sin \beta \sin p\gamma + R\dot{\beta} \cos p\gamma) \sin \beta + R\dot{\theta} \cos \beta \sin p\gamma \cos \beta \right) \sin \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos p\gamma \cos \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \sin \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2} \left( I_{W_{smallx}} (\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta) + I_{W_{smally}} (-\dot{\theta} \sin \beta - \dot{\psi} \sin p\gamma)^2 + I_{W_{smallz}} (\dot{\beta} + \dot{\psi} \cos p\gamma)^2 \right) \right) \quad (58-3)$$

یادآوری می‌نماییم که انرژی جنبشی کل چرخ شماره ۳۲، که در تماس با زمین است به صورت جداگانه معرفی شده است.

با حذف زاویه‌ی یابو از رابطه‌ی (۳-۳۴)، سرعت زاویه‌ای محل استقرار سرنشین برابر است با:

$$\omega_s = (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) i'' + (-\dot{\theta} \sin \beta \cos \zeta) j'' + (\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta) k'' \quad (59-3)$$

با حذف زاویه‌ی یابو از رابطه‌ی (۳-۴۰)، سرعت انتقالی محل استقرار سرنشین برابر است با:

$$V_s = \left( (-L\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta \cos \beta + L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \sin \beta) - R\dot{\beta} \cos \beta - r\dot{\psi} \right) I + \left( \begin{array}{l} (-L\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta \sin \beta - L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \cos \beta) \cos \theta \\ -L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \cos \zeta \sin \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \end{array} \right) J + \left( \begin{array}{l} (-L\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta \sin \beta - L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \cos \beta) \sin \theta \\ +L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \cos \zeta \cos \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \sin \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{array} \right) K \quad (60-3)$$

با جایگذاری (۳-۵۹) و (۳-۶۰) در روابط (۳-۴۲) و (۳-۴۴)، انرژی جنبشی انتقالی و دورانی برابر

است با:

$$\begin{aligned}
T_{W_s \text{ Translation}} = & \\
& \frac{1}{2} m_s \left( \left( -L\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta \cos \beta + L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \sin \beta \right) - R\dot{\beta} \cos \beta - r\dot{\psi} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m_s \left( \begin{aligned} & \left( -L\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta \sin \beta - L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \cos \beta \right) \cos \theta \\ & - L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \cos \zeta \sin \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m_s \left( \begin{aligned} & \left( -L\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta \sin \beta - L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \cos \beta \right) \sin \theta \\ & + L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \cos \zeta \cos \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \sin \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \right)^2
\end{aligned} \tag{۶۱-۳}$$

$$T_{W_s \text{ Rotation}} = \frac{1}{2} \left( I_{S_x} (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta})^2 + I_{S_y} (-\dot{\theta} \sin \beta \cos \zeta)^2 + I_{S_z} (\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta)^2 \right)$$

به کمک رابطه‌ی (۶۱-۳) و جایگذاری آن در رابطه‌ی (۴۱-۳)، انرژی جنبشی کل محل استقرار سرنشین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
T_{W_s \text{ total}} = T_{W_s \text{ Translation}} + T_{W_s \text{ Rotation}} = & \\
& \frac{1}{2} m_s \left( \left( -L\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta \cos \beta + L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \sin \beta \right) - R\dot{\beta} \cos \beta - r\dot{\psi} \right)^2 \tag{۶۲-۳} \\
& + \frac{1}{2} m_s \left( \begin{aligned} & \left( -L\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta \sin \beta - L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \cos \beta \right) \cos \theta \\ & - L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \cos \zeta \sin \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \cos \theta - R\dot{\theta} \cos \beta \sin \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m_s \left( \begin{aligned} & \left( -L\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta \sin \beta - L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \sin \zeta \cos \beta \right) \sin \theta \\ & + L(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta}) \cos \zeta \cos \theta - R\dot{\beta} \sin \beta \sin \theta + R\dot{\theta} \cos \beta \cos \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} \left( I_{S_x} (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta})^2 + I_{S_y} (-\dot{\theta} \sin \beta \cos \zeta)^2 + I_{S_z} (\dot{\theta} \sin \beta \sin \zeta)^2 \right)
\end{aligned}$$

انرژی جنبشی کل سیستم برابر است با مجموع انرژی جنبشی هر یک از اجزای تشکیل دهنده‌ی سیستم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{\text{total}} = T_{W_{\text{small32 total}}} + T_{W_{\text{Big total}}} + T_{W_p} + T_{W_s \text{ total}} \tag{۶۳-۳}$$

با جایگذاری روابط (۴۸-۳)، (۵۳-۳)، (۵۸-۳) و (۶۲-۳) در رابطه‌ی (۶۳-۳) انرژی جنبشی کل سیستم محاسبه می‌شود. برای این منظور به علت حجم بالای محاسبات و امکان اشتباه، از نرم‌افزار

Maple استفاده شده است.

$$\begin{aligned}
 T_{total} = & +2.13mR^2 \dot{\beta}^2 \sin \theta \cos \theta - 33.13mR^2 \dot{\beta}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \beta + 33.13mRr\dot{\theta}^2 \cos \beta - 0.38mR^2 \dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \\
 & + 11.71mRr\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \beta \cos \beta - 11.71mR^2 \dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \cos^2 \theta \cos^2 \beta - 33.13mR^2 \dot{\beta}\dot{\theta} \cos \beta \cos^2 \theta \sin \beta \\
 & - 31mRr\dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \cos^2 \theta + 5.85mR^2 \dot{\beta}\dot{\theta} \sin \theta \sin \beta \cos \theta + 33.13mR^2 \dot{\beta}^2 \cos^2 \theta + 5.85I_{Wsx} (\dot{\theta}\dot{\psi}) \sin \beta \\
 & + 25.61mR^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \beta + 0.5mr^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) - 2.13I_{Wsmallz} (\dot{\beta}\dot{\psi}) + 7.5mr^2 \dot{\theta}^2 + 15.5mr^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) \\
 & + 0.5I_{WBigx} (\dot{\theta}^2) \cos^2 \beta + 7.98mR^2 \dot{\beta}^2 + 5.85mR^2 \dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \cos^2 \theta + 2.13mRr\dot{\beta}\dot{\psi} \cos \beta \\
 & - 2.13mR^2 \dot{\beta}^2 \cos \theta \cos^2 \beta \sin \theta + 0.5I_{Sy} (\dot{\theta}^2 \sin^2 \beta \cos^2 \zeta + \dot{\theta}^2 \sin^2 \beta \sin^2 \zeta) \\
 & + 0.5M (2Rr\dot{\beta}\dot{\psi} \cos \beta + r^2\dot{\psi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta + 2Rr\dot{\theta}^2 \cos \beta + r^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\beta}^2) + 16I_{Wsmallx} (\dot{\theta}^2) \\
 & + 0.5m_s (2Lr\dot{\theta}\dot{\zeta} \cos \zeta + 2Lr\dot{\theta}^2 \cos \zeta \cos \beta + L^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\zeta}^2 + 2Rr\dot{\theta}^2 \cos \beta + R^2\dot{\beta}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\psi}^2) \\
 & + 0.5m_s (2LR\dot{\theta}\dot{\beta} \sin \beta \sin \zeta + 2LR\dot{\theta}\dot{\zeta} \cos \zeta \cos \beta + 2L^2\dot{\theta}\dot{\zeta} \cos \beta + 2Rr\dot{\beta}\dot{\psi} \cos \beta - L^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \zeta) \\
 & + 0.5m_s (R^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta + L^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \zeta \cos^2 \beta + 2LR\dot{\theta}^2 \cos \zeta \cos^2 \beta - 2Lr\dot{\zeta}\dot{\psi} \sin \beta \sin \zeta) \\
 & + 0.5I_{Sx} (\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta})^2 + 8.5I_{Wsmallz} (\dot{\psi}^2) + 0.5I_{WBigz} (\dot{\theta}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + 15.5I_{Wsmallz} (\dot{\beta}^2) \\
 & + 7.52I_{Wsmallx} (\dot{\psi}^2) + 33.13mR^2 \dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \cos \theta \cos \beta \sin \theta + 31mRr\dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \cos \theta \sin \theta \\
 & - 11.7mR^2 \dot{\beta}\dot{\theta} \sin \theta \cos^2 \beta \sin \beta \cos \theta
 \end{aligned}$$

(۶۴-۳)

### ۳-۲-۶ محاسبه انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل، انرژی ذخیره شده در اجسام به علت تغییر ارتفاع مرکز جرم و تغییر طول فنر می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$U = U_{Spring} + U_{Hight} \quad (۶۵-۳)$$

در این مدلسازی از فنر استفاده نشده است در نتیجه  $U_{Spring} = 0$  می باشد و انرژی پتانسیل تنها ناشی از تغییر ارتفاع مرکز جرم اجزای تشکیل دهنده سیستم می باشد.

(۶۶-۳)

$$U = U_{Hight} = mg (\Delta h)$$

$g$  شتاب جاذبه‌ی گرانشی زمین بوده و مقدار آن برابر  $۹/۸۱$  متر بر مجذور ثانیه در نظر گرفته

می‌شود.

برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل کل سیستم، بایستی انرژی پتانسیل تمامی اجزای آن محاسبه و در نهایت با یکدیگر جمع شود. خودروی تک چرخ از یک چرخ بزرگ، مجموعه‌ی چرخ‌های کوچک که مرکز جرم آن در وسط چرخ قرار می‌گیرد و محل استقرار سرنشین تشکیل شده است. انرژی پتانسیل چرخ بزرگ برابر است با:

$$U = Mg (\Delta h_{W_{big}}) \quad (67-3)$$

$h_{W_{big}}$  فاصله‌ی مرکز جرم چرخ بزرگ از سطح تماس چرخ با زمین می‌باشد و از طریق موقعیت مرکز جرم چرخ بزرگ که با  $G_{W_{big}}$  نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود، محاسبه می‌شود.

$$G_{W_{big}} = rj + Lj' \quad (68-3)$$

با استفاده از تبدیل‌های روابط (۲-۳) و (۱۰-۳) و جایگذاری آنها در رابطه‌ی (۶۸-۳) داریم:

$$G_{W_{big}} = (-r \sin \varphi \cos \theta - R \sin \beta \cos \varphi - R \cos \beta \sin \varphi \cos \theta) I \\ (r \cos \varphi \cos \theta - R \sin \beta \sin \varphi + R \cos \beta \cos \varphi \cos \theta) J \\ (r \sin \theta + R \cos \beta \sin \theta) K \quad (69-3)$$

با حذف زاویه‌ی  $\varphi$  از (۶۹-۳)، فاصله‌ی مرکز جرم چرخ بزرگ از سطح تماس چرخ با زمین برابر است با:

$$h_{W_{big}} = r \sin \theta + L \sin \theta \cos \beta \quad (70-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۷۰-۳) در رابطه‌ی (۶۷-۳)، انرژی پتانسیل چرخ بزرگ برابر است با:

$$U_{W_{big}} = Mg (r \sin \theta + R \sin \theta \cos \beta) \quad (71-3)$$

برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل، مبدا پتانسیل را زمین در نظر می‌گیریم. جرم تمامی چرخ‌های کوچک برابر بوده و فرض می‌شود چرخ‌های کوچک کاملاً یکسان و متقارن در اطراف چرخ بزرگ نصب شده است. در این صورت مرکز چرخ‌های کوچک بر مرکز جرم چرخ بزرگ منطبق بوده و داریم:

$$U_{W_{small}} = 32mg (r \sin \theta + R \sin \theta \cos \beta) \quad (72-3)$$

$G_{W_{small}}$  موقعیت مرکز جرم محل استقرار سرنشین می‌باشد که به صورت زیر توصیف می‌شود:



$$G_{W_{small}} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \cos \theta - R \sin \beta \cos \varphi - R \cos \beta \sin \varphi \cos \theta \\ -L \cos \zeta \sin \beta \cos \varphi - L \cos \zeta \cos \beta \sin \varphi \cos \theta + L \sin \zeta \sin \varphi \sin \theta \end{pmatrix} I \quad (73-3)$$

$$\begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta - R \sin \beta \sin \varphi + R \cos \beta \cos \varphi \cos \theta \\ -L \cos \zeta \sin \beta \sin \varphi + L \cos \zeta \cos \beta \cos \varphi \cos \theta - L \sin \zeta \cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix} J$$

$$(r \sin \theta + R \cos \beta \sin \theta + L \sin \zeta \cos \theta + L \cos \zeta \cos \beta \sin \theta) K$$

با حذف زاویه‌ی یاو از (۷۳-۳)، فاصله‌ی مرکز جرم محل استقرار سرنشین از سطح تماس چرخ با زمین برابر است با:

$$h_s = r \sin \theta + R \cos \beta \sin \theta + L \sin \zeta \cos \theta + L \cos \zeta \cos \beta \sin \theta \quad (74-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۷۴-۳) در رابطه‌ی (۶۶-۳)، انرژی پتانسیل محل استقرار سرنشین برابر است با:

$$U_s = m_s g (r \sin \theta + R \cos \beta \sin \theta + L \sin \zeta \cos \theta + L \cos \zeta \cos \beta \sin \theta) \quad (75-3)$$

انرژی پتانسیل کل سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_{total} = U_{W_{small}} + U_{W_{big}} + U_s \quad (76-3)$$

با جایگذاری روابط (۷۱-۳)، (۷۲-۳) و (۷۵-۳) در رابطه‌ی (۷۶-۳)، انرژی پتانسیل کل سیستم محاسبه می‌شود

$$U_{total} = 32mg(r \sin \theta + R \sin \theta \cos \beta) + Mg(r \sin \theta + R \sin \theta \cos \beta) + m_s g (r \sin \theta + R \cos \beta \sin \theta + L \sin \zeta \cos \theta + L \cos \zeta \cos \beta \sin \theta) \quad (77-3)$$

### ۷-۲-۳ محاسبه‌ی معادلات حرکت

همان طور که پیشتر بیان شد، برای محاسبه‌ی معادلات تعادل از روش معادلات لاگرانژ استفاده شده است. در این روش از انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم استفاده می‌شود. معادلات لاگرانژ به دو فرم زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dl}{dq_K} \right) - \frac{dl}{dq_K} = Q_{Knc} \quad K=1,2,3,\dots,n \quad (78-3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dT}{dq_K} \right) - \frac{dT}{dq_K} + \frac{dU}{dq_K} = Q_{Knc} \quad K=1,2,3,\dots,n$$

کار نیروهای تمیم یافته‌ی ناپایستار و  $l$  را لاگرانژین<sup>۳۸</sup> می‌نامیم.  $q_K$  بیانگر متغیرهای مختصات تعمیم یافته می‌باشد و به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ \beta \\ \zeta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (۷۹-۳)$$

لاگرانژین، تفاضل انرژی جنبشی کل سیستم و انرژی پتانسیل کل سیستم می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l = T_{Total} - U_{Total} \quad (۸۰-۳)$$

مقادیر انرژی جنبشی کل و انرژی پتانسیل کل را به ترتیب از روابط (۳-۶۴) و (۳-۷۷) در رابطه‌ی (۳-۸۰) جایگذاری می‌نماییم و داریم:

$$\begin{aligned} l = Lagrangian = & +2.13mR^2\dot{\beta}^2 \sin \theta \cos \theta - 33.13mR^2\dot{\beta}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \beta + 33.13mRr\dot{\theta}^2 \cos \beta - 0.38mR^2\dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \\ & + 11.71mRr\dot{\theta}\dot{\psi} \sin \beta \cos \beta - 11.71mR^2\dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \cos^2 \theta \cos^2 \beta - 33.13mR^2\dot{\beta}\dot{\theta} \cos \beta \cos^2 \theta \sin \beta \\ & - 31mRr\dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \cos^2 \theta + 5.85mR^2\dot{\beta}\dot{\theta} \sin \theta \sin \beta \cos \theta + 33.13mR^2\dot{\beta}^2 \cos^2 \theta + 5.85I_{W_sx}(\dot{\theta}\dot{\psi}) \sin \beta \\ & + 25.61mR^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta + 0.5mr^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) - 2.13I_{W_{smallz}}(\dot{\beta}\dot{\psi}) + 7.5mr^2\dot{\theta}^2 + 15.5mr^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) \\ & + 0.5I_{W_{Bigx}}(\dot{\theta}^2) \cos^2 \beta + 7.98mR^2\dot{\beta}^2 + 5.85mR^2\dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \cos^2 \theta + 2.13mRr\dot{\beta}\dot{\psi} \cos \beta \\ & - 2.13mR^2\dot{\beta}^2 \cos \theta \cos^2 \beta \sin \theta + 0.5I_{Sy}(\dot{\theta}^2 \sin^2 \beta \cos^2 \zeta + \dot{\theta}^2 \sin^2 \beta \sin^2 \zeta) + 15.5I_{W_{smallz}}(\dot{\beta}^2) \\ & + 0.5M(2Rr\dot{\beta}\dot{\psi} \cos \beta + r^2\dot{\psi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta + 2Rr\dot{\theta}^2 \cos \beta + r^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\beta}^2) + 16I_{W_{smallx}}(\dot{\theta}^2) \\ & + 0.5m_s(2Lr\dot{\theta}\dot{\zeta} \cos \zeta + 2Lr\dot{\theta}^2 \cos \zeta \cos \beta + L^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\zeta}^2 + 2Rr\dot{\theta}^2 \cos \beta + R^2\dot{\beta}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\psi}^2) \\ & + 0.5m_s(2LR\dot{\theta}\dot{\beta} \sin \beta \sin \zeta + 2LR\dot{\theta}\dot{\zeta} \cos \zeta \cos \beta + 2L^2\dot{\theta}\dot{\zeta} \cos \beta + 2Rr\dot{\beta}\dot{\psi} \cos \beta - L^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \zeta) \\ & + 0.5m_s(R^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \beta + L^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \zeta \cos^2 \beta + 2LR\dot{\theta}^2 \cos \zeta \cos^2 \beta - 2Lr\dot{\zeta}\dot{\psi} \sin \beta \sin \zeta) \\ & + 0.5I_{Sx}(\dot{\theta} \cos \beta + \dot{\zeta})^2 + 8.5I_{W_{smallz}}(\dot{\psi}^2) + 0.5I_{W_{Bigz}}(\dot{\theta}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + 31mRr\dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \cos \theta \sin \theta \\ & + 7.52I_{W_{smallx}}(\dot{\psi}^2) + 33.13mR^2\dot{\beta}\dot{\theta} \sin \beta \cos \theta \cos \beta \sin \theta - 11.7mR^2\dot{\beta}\dot{\theta} \sin \theta \cos^2 \beta \sin \beta \cos \theta \\ & - (32m + M + m_s)g(r \sin \theta + R \sin \theta \cos \beta) - m_s g(L \sin \zeta \cos \theta + L \cos \zeta \cos \beta \sin \theta) \end{aligned} \quad (۸۱-۳)$$

برای محاسبه‌ی کار نیروهای تعمیم یافته‌ی ناپایستار از کار مجازی نیروها استفاده می‌نماییم. کار مجازی برای خودروی تک‌چرخ به صورت زیر تعریف می‌شود:

<sup>38</sup> Lagrangian

$$\delta W = +T_\theta \delta\theta + T_\psi \delta\psi - T_\beta \delta\beta - T_\zeta \delta\zeta \quad (۸۲-۳)$$

$T_\psi$  و  $T_\theta$  دو گشتاور کنترلی سیستم می‌باشد که در فصل آینده به تفصیل به شرح آنها می‌پردازیم. مقادیر  $-T_\psi$  و  $-T_\theta$  عکس العمل گشتاور های اعمالی می‌باشند. گشتاور توسط شفت موتور به چرخ منتقل می‌شود و عکس العمل آن به بدنه و محل نصب آن اعمال می‌شود که سبب پایداری و حفظ تعادل خودرو با یک چرخ می‌شود. استفاده از عمل و عکس العمل گشتاور موتور، روش حفظ تعادل و پایداری در ربات‌ها و وسایل نقلیه‌ی دو چرخ و تک چرخ می‌باشد [2,3,24,26].

برای محاسبه‌ی معادلات تعادل، روابط (۷۹-۳)، (۸۱-۳) و (۸۲-۳) را در رابطه‌ی (۷۸-۳) جایگذاری می‌نماییم. به علت حجم محاسبات بسیار بالا و مشتقات پیچیده نسبت به متغیر های مختلف از نرم‌افزار Maple استفاده شده است.

مراحل تعیین معادلات حرکت:

❖ برای تعیین معادله حرکت اول،  $q_1 = \theta$  بوده و با استفاده از روابط (۸۱-۳) و (۸۲-۳) داریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dl}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dl}{d\theta} = T_\theta$$

❖ برای تعیین معادله حرکت دوم،  $q_2 = \beta$  بوده و با استفاده از روابط (۸۱-۳) و (۸۲-۳) داریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dl}{d\dot{\beta}} \right) - \frac{dl}{d\beta} = -T_\psi$$

❖ برای تعیین معادله حرکت سوم،  $q_3 = \zeta$  بوده و با استفاده از روابط (۸۱-۳) و (۸۲-۳) داریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dl}{d\dot{\zeta}} \right) - \frac{dl}{d\zeta} = -T_\theta$$

❖ برای تعیین معادله حرکت چهارم،  $q_4 = \psi$  بوده و با استفاده از روابط (۸۱-۳) و (۸۲-۳) داریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dl}{d\dot{\psi}} \right) - \frac{dl}{d\psi} = T_\psi$$

در نهایت چهار معادله حرکت برابر است با:

Equation<sub>4</sub> =

$$\begin{aligned}
& (11.7mRr \cos \beta + 5.85I_{W_{smallx}}) \sin \beta \ddot{\theta} + ((M + 2.13m + m_s)Rr \cos \beta - 2.13I_{W_{smallz}}) \ddot{\beta} \\
& + (Mr^2 + 32mr^2 + m_s r^2 + 16.96I_{W_{smallz}} + 15.04I_{W_{smallx}}) \ddot{\psi} - m_s Lr \ddot{\zeta} \sin \zeta \sin \beta \\
& - (M + 2.13m + m_s)Rr \dot{\beta}^2 \sin \beta - m_s Lr \dot{\zeta}^2 \cos \zeta \sin \beta - m_s Lr \dot{\beta} \dot{\zeta} \sin \zeta \cos \beta \\
& + (23.42mRr \cos^2 \beta - 11.7mRr + 5.85I_{W_{smallx}} \cos \beta) \dot{\beta} \dot{\theta} = T_\psi
\end{aligned}$$

(۸۳-۳)

Equation<sub>3</sub> =

$$\begin{aligned}
& (m_s Lr \cos \zeta + m_s LR \cos \zeta \cos \beta + m_s L^2 \cos \beta + I_{S_x} \cos \beta) \ddot{\theta} - (m_s Lr \sin \zeta \sin \beta) \ddot{\psi} + (m_s L^2 + I_{S_x}) \ddot{\zeta} \\
& - (2m_s LR \cos \zeta + m_s L^2 + I_{S_x}) \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta - m_s L^2 \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \zeta \sin^2 \beta + m_s L \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \beta (r + R \cos \beta) \\
& - m_s Lr \dot{\psi} \dot{\beta} \sin \zeta \cos \beta + m_s g (L \cos \zeta \cos \theta - L \sin \zeta \cos \beta \sin \theta) = -T_\theta
\end{aligned}$$

(۸۴-۳)

Equation<sub>2</sub> =

$$\begin{aligned}
& \left( +m_s LR \sin \zeta \sin \beta + 31mRr \sin \beta (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) + 33.13mR^2 \sin \beta \cos \beta (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) \right) \ddot{\theta} \\
& \left( -0.38mR^2 \sin \beta + 5.85mR^2 \sin \beta (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) - 11.7mR^2 \cos^2 \beta \sin \beta (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) \right) \ddot{\beta} \\
& + (I_{W_{Bigz}} + 31I_{W_{smallz}} + mR^2 (66.26 \cos^2 \theta + 4.26 \sin \theta \cos \theta) \sin^2 \beta + (M + 15.96m + m_s) R^2) \ddot{\beta} \\
& + (-2.13I_{W_{smallz}} + (M + 2.13m + m_s) Rr \cos \beta) \ddot{\psi} + (11.7mRr - 23.42mRr \cos^2 \beta - 5.85I_{W_{smallx}} \cos \beta) \dot{\theta} \dot{\psi} \\
& \left( \begin{aligned}
& (62mRr + 66.26mR^2 \cos \beta) (\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta) + m_s L (2R \cos \beta + r) \cos \zeta + m_s L^2 \cos^2 \zeta \cos \beta \\
& - 23.4mR^2 (\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta) \cos^2 \beta + (MRr + 2.13mRr - 5.85mR^2 + m_s Rr) \\
& + 11.7mR^2 (\cos^2 \theta + \cos^2 \beta - \cos \theta \sin \theta) + (MR^2 + 18.09mR^2 + m_s R^2 + I_{S_x} - I_{S_z} + I_{W_{Bigx}} - I_{W_{Bigz}}) \cos \beta
\end{aligned} \right) \dot{\theta}^2 \sin \beta \\
& + mR^2 (66.26 \cos^2 \theta + 4.26 \sin \theta \cos \theta) \dot{\beta}^2 \cos \beta \sin \beta + (2m_s LR \cos \zeta + I_{S_x} + m_s L^2) \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \beta + m_s Lr \dot{\zeta} \dot{\psi} \sin \zeta \cos \beta \\
& + (-4.26mR^2 \sin^2 \beta + mR^2 (8.53 \cos^2 \theta - 132.5 \cos \theta \sin \theta) \sin^2 \beta) \dot{\beta} \dot{\theta} - (M + 32m + m_s) gR \sin \theta \sin \beta \\
& - m_s gL \cos \zeta \sin \beta \sin \theta = -T_\psi
\end{aligned}$$

(۸۵-۳)

Equation<sub>1</sub> =

$$\begin{aligned}
 & \left( (2MRr + 66.26mRr + 2m_s Rr + 2m_s Lr \cos \zeta) + (I_{S_x} - I_{S_z} + I_{W_{Bigx}} - I_{W_{Bigz}}) \cos \beta \right) \ddot{\theta} \cos \beta \\
 & + \left( (MR^2 + 51.22mR^2 + m_s R^2) \cos \beta + (m_s L^2 \cos^2 \zeta + 2m_s LR \cos \zeta) \cos \beta \right) \ddot{\theta} \cos \beta \\
 & + \left( (I_{W_{Bigz}} + 32I_{W_{smallx}} + I_{S_z} + 15.mR^2 + Mr^2 + 32mr^2 + m_s L^2 + m_s r^2) - m_s L^2 \cos^2 \zeta \right) \ddot{\theta} \\
 & + \left( -11.71mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \cos^2 \beta + 31mRr (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) - 0.38mR^2 \right. \\
 & \left. + 33.13mR^2 (\sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta) \cos \beta + 5.85mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + m_s LR \sin \zeta \right) \ddot{\beta} \sin \beta \\
 & + \left( m_s (L^2 + LR \cos \zeta) \cos \beta + I_{S_x} \cos \beta + m_s Lr \cos \zeta \right) \ddot{\zeta} + (11.71mRr \cos \beta + 5.85I_{W_{smallx}}) \ddot{\psi} \sin \beta \\
 & + 2m_s L (L \cos \zeta \sin^2 \beta - (R \cos \beta + r) \cos \beta) \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \zeta - m_s L (r + R \cos \beta) \dot{\zeta}^2 \sin \zeta \\
 & + \left( (-2MR^2 - 2m_s R^2 - 102.45mR^2 + 2I_{W_{Bigz}} - 2I_{W_{Bigx}} - 2I_{S_x} + 2I_{S_z}) \cos \beta \right. \\
 & \left. - (2MRr - 66.26mRr + 2m_s Rr) - 2m_s L (r + 2R \cos \beta + L \cos \zeta \cos \beta) \cos \zeta \right) \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta \\
 & + \left( 29.27mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + 31mRr (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) - 0.38mR^2 \right) \dot{\beta}^2 \cos \beta \\
 & - 35.13mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \cos^2 \beta \\
 & + (2.13mR^2 \sin^2 \beta + m_s LR \sin \zeta \cos \beta + 33.13mR^2 \sin \theta \cos \theta + mR^2 (-62 \cos^2 \beta + 28.86) \cos^2 \theta) \dot{\beta}^2 \\
 & - 11.7mRr \dot{\beta} \dot{\psi} + (23.42mRr \cos \beta + 5.85I_{W_{smallx}}) \dot{\beta} \dot{\psi} \cos \beta + m_s gL \cos \zeta \cos \beta \cos \theta - (I_{S_x} + m_s L^2) \dot{\beta} \dot{\zeta} \sin \beta \\
 & + (M + 32m + m_s) Rg \cos \theta \cos \beta - m_s gL \sin \zeta \sin \theta + (M + 32m + m_s) rg \cos \theta = T_\theta
 \end{aligned}$$

(۸۶-۳)

معادلات (۸۳-۳)، (۸۴-۳)، (۸۵-۳) و (۸۶-۳) معادلات حرکت خودروی تک چرخ می باشد که در آن هیچ گونه ساده سازی یا خطی سازی در نظر گرفته نشده است. همان طور که مشاهده می شود، معادلات پیچیده و کاملاً غیرخطی می باشند. این سیستم چهار درجه آزادی می باشد که درجات آزادی آن عبارتند از: زاویه انحراف محل استقرار سرنشین که حول محور چرخ بزرگ دوران می نماید،  $\beta$  زاویه پیچ<sup>۳۹</sup> خودرو یا میزان انحراف خودرو به طرفین می باشد که حول محور چرخ کوچکی که در تماس با زمین است، انجام می شود،  $\psi$  زاویه دوران چرخ کوچک می باشد،  $\theta$  زاویه رول<sup>۴۰</sup> خودرو یا زاویه دوران چرخ بزرگ می باشد که به صورت همزمان میزان انحراف چرخ کوچکی که در تماس با زمین می باشد را نیز توصیف می نماید. به علت عمود بودن چرخ بزرگ و کوچکی که در تماس با زمین می باشد، زاویه  $\theta$ ، زاویه رول چرخ کوچک نیز می باشد.

<sup>39</sup> Pitch Angle

<sup>40</sup> Roll Angle

## فصل چهارم

### شبیه‌سازی و کنترل خودروی تک چرخ

#### ۴-۱ مقدمه

در فصل سوم، معادلات خودروی تک چرخ با استفاده از روش معادلات لاگرانژ محاسبه شد. روابط (۳-۸۳)، (۳-۸۴)، (۳-۸۵) و (۳-۸۶) معادلات حرکت خودروی تک چرخ را نشان می‌دهد. این معادلات کاملاً غیر-خطی و پیچیده می‌باشد و هیچ گونه ساده‌سازی در آن صورت نگرفته است. پس از تعیین معادلات حرکت خودرو، بایستی پایداری سیستم تضمین شود و در نهایت آن را کنترل می‌نماییم. سیستم خودروی تک-چرخ، چهار درجه آزادی داشته و دو ورودی گشتاور را نیز شامل می‌شود. دو متغیر بایستی به طور کامل کنترل شود و دو متغیر دیگر بایستی محدود باقی مانده و تغییرات آنی نداشته باشد. زاویه انحراف محل سرنشین و زاویه ی رول که همان انحراف خودرو به طرفین می‌باشد، بایستی به صورت کامل کنترل شود و تغییرات زاویه پیچ یا همان سرعت زاویه‌ای چرخ بزرگ و سرعت زاویه‌ای چرخ‌های کوچک بایستی محدود و پس از پایداری ثابت باقی بماند.

در مدل‌سازی سیستم‌های مختلف همواره تعدادی از پارامترهای سیستم به صورت کامل قابل شناسایی نمی‌باشند که سبب عدم قطعیت پارامتری<sup>۴۱</sup> مدل می‌شود. این عدم قطعیت‌ها شامل اندازه‌گیری ناصحیح هندسه سیستم، پارامترهایی همچون جرم سرنشین، ممان اینرسی آن و فاصله مرکز جرم راننده از محور چرخ می‌شود. این عدم قطعیت‌های پارامتری در هنگام کنترل ممکن است سبب ناپایداری خودرو و در نهایت انحراف و زمین خوردن آن شود. برای غلبه بر آنها از روش کنترل غیرخطی تطبیقی<sup>۴۲</sup> استفاده می‌نماییم که با تخمین اولیه پارامترها و بروز رسانی آنها در حین فرآیند کنترل بر این عدم قطعیت‌ها غلبه می‌نماید.

در این فصل، در ابتدا دینامیک حرکت خودروی تک چرخ در نرم افزار سیمولینک متلب شبیه سازی می‌شود. پس از اطمینان از صحت مدل‌سازی ریاضی سیستم، روند طراحی کنترل تطبیقی ارائه می‌شود. برای این منظور مفاهیم کنترلی و پایداری مورد نیاز که شامل روش پایداری لیاپانوف نیز می‌شود، ارائه می‌نماییم و در ادامه روش کنترل تطبیقی و نحوه‌ی عملکرد آن را معرفی می‌شود. در نهایت روش کنترل تطبیقی را بر روی معادلات حرکت خودروی تک چرخ پیاده سازی می‌نماییم. چون دو ورودی گشتاور کنترلی داریم و دو متغیر انحراف زاویه محل استقرار سرنشین و زاویه رول بایستی کنترل شود از کنترل

---

<sup>41</sup> Parametric uncertainty

<sup>42</sup> Nonlinear Adaptive Control

تطبیقی چند ورودی چند خروجی MIMO<sup>۴۳</sup> استفاده می‌نماییم.

#### ۲-۴ شبیه سازی دینامیکی

روابط (۳-۸۳)، (۳-۸۴)، (۳-۸۵) و (۳-۸۶) معادلات حرکت خودروی تک چرخ را نشان می‌دهد. این چهار معادله با یکدیگر کوپل می‌باشد و نمی‌توان آنها را به صورت جداگانه در سیمولینک شبیه‌سازی نمود. برای این منظور بایستی این چهار معادله را بر حسب مشتق مرتبه‌ی دوم متغیرها به صورت پارامتری حل نمود. برای حل معادلات از یک دستگاه معادله ساده چهار معادله، چهار مجهول استفاده می‌نماییم و نتایج آن را به صورت زیر بیان می‌نماییم:

$$\ddot{\theta} = f_1(\dot{\theta}, \theta, \dot{\beta}, \beta, \dot{\zeta}, \zeta, \dot{\psi}, \psi) \quad (۱-۴)$$

$$\ddot{\beta} = f_2(\dot{\theta}, \theta, \dot{\beta}, \beta, \dot{\zeta}, \zeta, \dot{\psi}, \psi) \quad (۲-۴)$$

$$\ddot{\zeta} = f_3(\dot{\theta}, \theta, \dot{\beta}, \beta, \dot{\zeta}, \zeta, \dot{\psi}, \psi) \quad (۳-۴)$$

$$\ddot{\psi} = f_4(\dot{\theta}, \theta, \dot{\beta}, \beta, \dot{\zeta}, \zeta, \dot{\psi}, \psi) \quad (۴-۴)$$

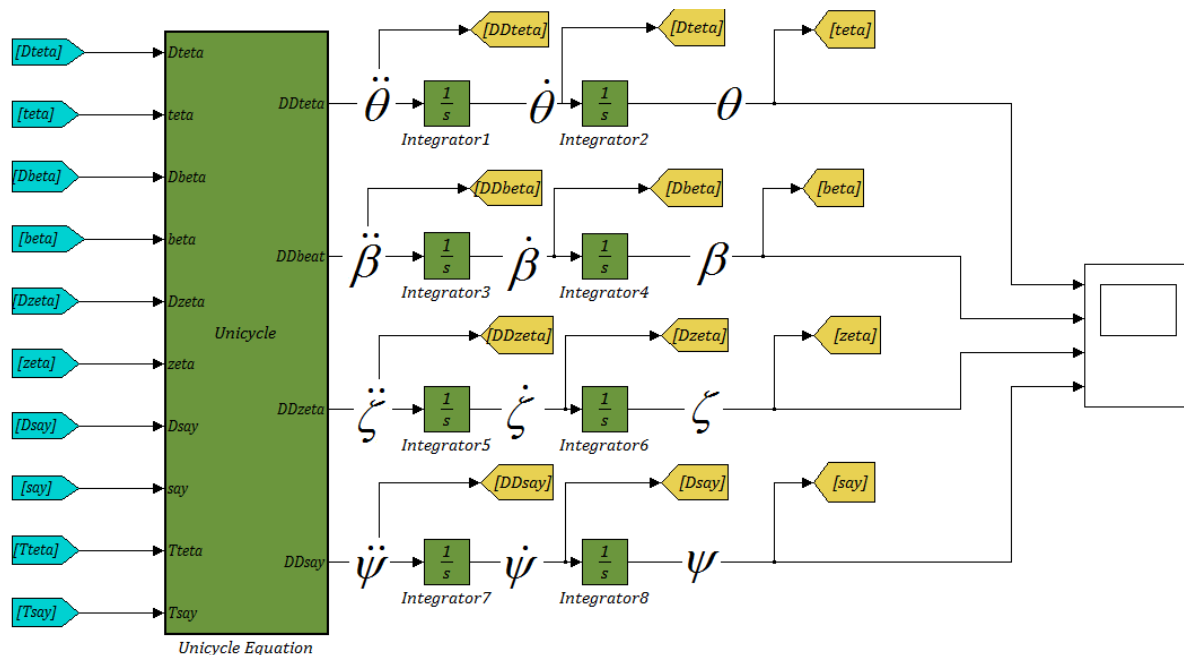
در هر یک از معادلات (۱-۴)، (۲-۴)، (۳-۴) و (۴-۴) در سمت چپ، تنها مشتق مرتبه‌ی دوم یک متغیر وجود دارد و در سمت راست مجموعه‌ای از جملات با متغیرها و مشتق‌های مرتبه پایین‌تر آن وجود دارد. چهار معادله‌ی بالا قابلیت شبیه‌سازی در سیمولینک را دارد که در شکل ۱-۴ مدل سازی دینامیک خودروی تک چرخ نشان داده شده است.

با توجه به شکل ۱-۴ مشاهده می‌شود که در ابتدا مشتق مرتبه دوم متغیرها یا شتاب زاویه‌ای آنها محاسبه می‌شود و با انتگرال گیری از آنها مشتق مرتبه‌ی اول یا سرعت زاویه‌ای تولید شده و در مرحله آخر با انتگرال گیری، زوایای  $\theta$ ،  $\beta$ ،  $\zeta$  و  $\psi$  تولید می‌شود. سپس زوایا، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای محاسبه شده در اولین گام زمانی توسط فیدبک به داخل سیستم باز می‌گردد تا در گام زمانی بعدی استفاده شود. همچنین مقادیر اولیه متغیرها در انتگرال گیرها به عنوان مقادیر اولیه اعمال می‌شود.

در بلوک Unicycle، چهار معادله (۱-۴)، (۲-۴)، (۳-۴) و (۴-۴) قرار دارد. در اولین گام زمانی متغیرها را از مقدار اولیه بلوک انتگرال گیر جایگزین می‌نماید و در گام‌های بعدی زمانی از مقادیر محاسبه شده در مرحله‌ی قبل استفاده می‌نماید.

<sup>43</sup> Multi Input Multi Output





شکل ۱-۴ مدل سازی دینامیک خودروی تک چرخ در نرم افزار سیمولینک

با صفر نمودن بعضی از زوایا و مقید کردن تعدادی از درجات آزادی، می توان سیستم را ساده تر نمود و از صحت مدل سازی انجام شده اطمینان کسب کرد. همچنین کوپل بودم معادلات حرکت به خوبی قابل مشاهده می باشد که نتایج شبیه سازی در فصل بعدی ارائه شده و به تفصیل توضیح داده می شود.

### ۳-۴ کنترل تطبیقی خودروی تک چرخ

برای اعمال کنترل تطبیقی بر روی خودروی تک چرخ، در ابتدا بایستی تغییراتی روی معادلات حرکت انجام شود. در مرحله بعد، قانون کنترل پیشنهادی به سیستم اعمال می شود و پس از بررسی پایداری آن، قانون تطبیق پارامترهای سیستم محاسبه می شود و آنها را بروزرسانی می نماید. بدین ترتیب، کنترل تطبیقی بر عدم قطعیت های پارامتری سیستم غلبه می نماید و تعادل و پایداری خودرو را تضمین می کند. در ادامه هر یک از این دو بخش به تفصیل ارائه می شود

### ۱-۳-۴ آماده سازی معادلات کنترلی

برای کنترل و حفظ پایداری خودروی تک چرخ از مفاهیم کنترلی بیان شده در این فصل استفاده می نمایم و برای بررسی پایداری از روش پایداری لیپانوف استفاده می شود. برای کنترل هر چه دقیق تر

خودرو نیازمند مدل ریاضی دقیقی از سیستم می‌باشیم که برای این منظور، معادلات حرکت خودرو در فصل سوم بدون ساده‌سازی مدل شده و به صورت معادلات (۸۳-۳)، (۸۴-۳)، (۸۵-۳) و (۸۶-۳) در دسترس می‌باشند. برای استفاده راحت‌تر، این معادلات را به صورت زیر بازنویسی می‌نماییم:

$$\theta \rightarrow \text{Equation}_1 : A_1 \ddot{\theta} + A_2 \dot{\beta} + A_3 \ddot{\zeta} + A_4 \dot{\psi} + A_5 = +T_\theta \quad (۵-۴)$$

$$\beta \rightarrow \text{Equation}_2 : B_1 \ddot{\theta} + B_2 \dot{\beta} + B_4 \dot{\psi} + B_5 = -T_\psi \quad (۶-۴)$$

$$\zeta \rightarrow \text{Equation}_3 : H_1 \ddot{\theta} + H_3 \ddot{\zeta} + H_4 \dot{\psi} + H_5 = -T_\theta \quad (۷-۴)$$

$$\psi \rightarrow \text{Equation}_4 : G_1 \ddot{\theta} + G_2 \dot{\beta} + G_3 \ddot{\zeta} + G_4 \dot{\psi} + G_5 = +T_\psi \quad (۸-۴)$$

که ضرایب معادلات (۵-۴)، (۶-۴)، (۷-۴) و (۸-۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_1 = \left( \begin{array}{l} (2MRr + 66.26mRr + 2m_s Rr + 2m_s Lr \cos \zeta) + (I_{S_x} - I_{S_z} + I_{W_{Bigx}} - I_{W_{Bigz}}) \cos \beta \\ (MR^2 + 51.22mR^2 + m_s R^2) \cos \beta + (m_s L^2 \cos^2 \zeta + 2m_s LR \cos \zeta) \cos \beta \\ (I_{W_{Bigz}} + 32I_{W_{smallx}} + I_{S_z} + 15.mR^2 + Mr^2 + 32mr^2 + m_s L^2 + m_s r^2) - m_s L^2 \cos^2 \zeta \end{array} \right) \cos \beta$$

$$A_2 = \left( \begin{array}{l} -11.71mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \cos^2 \beta + 31mRr (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) + m_s LR \sin \zeta \\ +33.13mR^2 (\sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta) \cos \beta + 5.85mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) - 0.38mR^2 \end{array} \right) \sin \beta$$

$$A_3 = (m_s (L^2 + LR \cos \zeta) \cos \beta + I_{S_x} \cos \beta + m_s Lr \cos \zeta)$$

$$A_4 = (11.71mRr \cos \beta + 5.85I_{W_{smallx}}) \sin \beta$$

$$A_5 = \left( \begin{array}{l} +2m_s L (L \cos \zeta \sin^2 \beta - (R \cos \beta + r) \cos \beta) \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \zeta - m_s L (r + R \cos \beta) \dot{\zeta}^2 \sin \zeta \\ + \left( \begin{array}{l} (-2MR^2 - 2m_s R^2 - 102.45mR^2 + 2I_{W_{Bigz}} - 2I_{W_{Bigx}} - 2I_{S_x} + 2I_{S_z}) \cos \beta \\ -(2MRr - 66.26mRr + 2m_s Rr) - 2m_s L (r + 2R \cos \beta + L \cos \zeta \cos \beta) \cos \zeta \end{array} \right) \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta \\ + \left( \begin{array}{l} 29.27mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + 31mRr (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) - 0.38mR^2 \\ -35.13mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \cos^2 \beta \end{array} \right) \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ + \left( \begin{array}{l} 2.13mR^2 \sin^2 \beta + m_s LR \sin \zeta \cos \beta + 33.13mR^2 \sin \theta \cos \theta \\ +mR^2 (-62 \cos^2 \beta + 28.86) \cos^2 \theta \end{array} \right) \dot{\beta}^2 - (I_{S_x} + m_s L^2) \dot{\beta} \dot{\zeta} \sin \beta \\ -11.7mRr \dot{\beta} \dot{\psi} + (23.42mRr \cos \beta + 5.85I_{W_{smallx}}) \dot{\beta} \dot{\psi} \cos \beta + m_s gL \cos \zeta \cos \beta \cos \theta \\ + (M + 32m + m_s) Rg \cos \theta \cos \beta - m_s gL \sin \zeta \sin \theta + (M + 32m + m_s) rg \cos \theta \end{array} \right)$$

(۹-۴)

$$B_1 = \begin{pmatrix} +m_s LR \sin \zeta \sin \beta + 31mRr \sin \beta (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) + 33.13mR^2 \sin \beta \cos \beta (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) \\ -0.38mR^2 \sin \beta + 5.85mR^2 \sin \beta (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) - 11.7mR^2 \cos^2 \beta \sin \beta (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) \end{pmatrix}$$

$$B_2 = (I_{WBigz} + 31I_{Wsmallz} + mR^2 (66.26 \cos^2 \theta + 4.26 \sin \theta \cos \theta)) \sin^2 \beta + (M + 15.96m + m_s) R^2$$

$$B_3 = 0$$

$$B_4 = (-2.13I_{Wsmallz} + (M + 2.13m + m_s) Rr \cos \beta)$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} (11.7mRr - 23.42mRr \cos^2 \beta - 5.85I_{Wsmallx} \cos \beta) \dot{\theta} \dot{\psi} + (2m_s LR \cos \zeta + I_{Sx} + m_s L^2) \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \beta \\ \left( (62mRr + 66.26mR^2 \cos \beta) (\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta) + m_s L (2R \cos \beta + r) \cos \zeta + m_s L^2 \cos^2 \zeta \cos \beta \right) \\ + \left( -23.4mR^2 (\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta) \cos^2 \beta + (MR^2 + 18.09mR^2 + m_s R^2 + I_{Sx} - I_{Sz} + I_{WBigx}) \cos \beta \right) \dot{\theta}^2 \sin \beta \\ \left( -I_{WBigz} \cos \beta + 11.7mR^2 (\cos^2 \theta + \cos^2 \beta - \cos \theta \sin \theta) + (MRr + 2.13mRr - 5.85mR^2 + m_s Rr) \right) \\ + m_s Lr \dot{\zeta} \dot{\psi} \sin \zeta \cos \beta - m_s g L \cos \zeta \sin \beta \sin \theta + mR^2 (66.26 \cos^2 \theta + 4.26 \sin \theta \cos \theta) \dot{\beta}^2 \cos \beta \sin \beta \\ + (-4.26mR^2 \sin^2 \beta + mR^2 (8.53 \cos^2 \theta - 132.5 \cos \theta \sin \theta) \sin^2 \beta) \dot{\beta} \dot{\theta} - (M + 32m + m_s) g R \sin \theta \sin \beta \end{pmatrix}$$

(10-4)

$$H_1 = (m_s Lr \cos \zeta + m_s LR \cos \zeta \cos \beta + m_s L^2 \cos \beta + I_{Sx} \cos \beta)$$

$$H_2 = 0$$

$$H_3 = (m_s L^2 + I_{Sx})$$

$$H_4 = -(m_s Lr \sin \zeta \sin \beta)$$

$$H_5 = \begin{pmatrix} -(2m_s LR \cos \zeta + m_s L^2 + I_{Sx}) \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta - m_s L^2 \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \zeta \sin^2 \beta - m_s Lr \dot{\psi} \dot{\beta} \sin \zeta \cos \beta \\ + m_s L \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \beta (r + R \cos \beta) + m_s g (L \cos \zeta \cos \theta - L \sin \zeta \cos \beta \sin \theta) \end{pmatrix}$$

(11-4)

$$G_1 = (11.7mRr \cos \beta + 5.85I_{Wsmallx}) \sin \beta$$

$$G_2 = ((M + 2.13m + m_s) Rr \cos \beta - 2.13I_{Wsmallz})$$

$$G_3 = -m_s Lr \sin \zeta \sin \beta$$

$$G_4 = (Mr^2 + 32mr^2 + m_s r^2 + 16.96I_{Wsmallz} + 15.04I_{Wsmallx})$$

$$G_5 = \begin{pmatrix} -(M + 2.13m + m_s) Rr \dot{\beta}^2 \sin \beta - m_s Lr \dot{\zeta}^2 \cos \zeta \sin \beta - m_s Lr \dot{\beta} \dot{\zeta} \sin \zeta \cos \beta \\ + (23.42mRr \cos^2 \beta - 11.7mRr + 5.85I_{Wsmallx} \cos \beta) \dot{\beta} \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

(۱۲-۴)

خودروی تک چرخ طراحی شده از یک چرخ بزرگ و مجموعه‌ای از چرخ‌های کوچک تشکیل شده است. دو موتور برای حرکت چرخ مورد نیاز است. موتور متصل به چرخ بزرگ سبب دوران چرخ با زاویه  $\theta$  می‌شود که منجر به حرکت به سمت جلو-عقب شده و از طرفی عکس العمل آن به محل استقرار سرنشین اعمال می‌شود. بنابراین، توسط کنترل گشتاور موتور که با  $T_\theta$  نشان داده می‌شود، می‌توان زاویه  $\theta$  که انحراف زاویه محل استقرار سرنشین نسبت به راستای قائم در جهت جلو-عقب می‌باشد را کنترل نمود. موتور دیگر سبب دوران مجموعه چرخ‌های کوچک با زاویه  $\psi$  می‌شود که حرکت جانبی یا حرکت به سمت چپ-راست را ایجاد می‌نماید و عکس العمل آن به قسمت محل استقرار سرنشین و چرخ بزرگ اعمال شده و با  $T_\psi$  نشان داده می‌شود. تغییرات زاویه‌ی انحراف به طرفین را با  $\beta$  نشان می‌دهیم. بنابراین، با کنترل میزان چرخش چرخ‌های کوچک می‌توان تعادل خودرو به طرفین را حفظ نمود که برای این منظور بایستی گشتاور کنترلی چرخ‌های کوچک متناسب با زاویه  $\beta$  انحراف باشد.

با توجه معادلات (۴-۵)، (۴-۶)، (۴-۷) و (۴-۸) مشاهده می‌شود که مدل خودروی چهار درجه آزادی می‌باشد و تنها کفایت دو درجه آزادی آن که انحراف خودرو به سمت جلو-عقب و انحراف به سمت چپ-راست کنترل شود. برای این منظور، از معادلات (۴-۶) و (۴-۷) استفاده می‌نماییم. توجه به این نکته ضروری می‌باشد که، با وجود اینکه کنترلی روی دو زاویه  $\theta$  و  $\psi$  وجود ندارد ولی کنترلر تطبیقی بایستی خودرو را به نحوی کنترل نماید تا تغییرات آنها محدود باقی بماند و از تغییرات آنی جلوگیری نماید. برای این منظور، دو معادله (۴-۵) و (۴-۷) را با یکدیگر جمع می‌نماییم و همچنین معادلات (۴-۶) و (۴-۸) را با یکدیگر جمع می‌نماییم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

Equation<sub>1</sub> + Equation<sub>3</sub> =

$$\left( \begin{aligned} & \left( 2MRr + 66.26mRr + 2m_s Rr + 3m_s Lr \cos \zeta + m_s L^2 + I_{Sx} \right) + \left( I_{Sx} - I_{Sz} + I_{WBigx} - I_{WBigz} \right) \cos \beta \\ & + \left( MR^2 + 51.22mR^2 + m_s R^2 \right) \cos \beta + \left( m_s L^2 \cos^2 \zeta + 2m_s LR \cos \zeta \right) \cos \beta \end{aligned} \right) \ddot{\theta} \cos \beta$$
$$+ \left( I_{WBigz} + 32I_{Wsmallx} + I_{Sz} + 15.mR^2 + Mr^2 + 32mr^2 + m_s L^2 + m_s r^2 + m_s Lr \cos \zeta - m_s L^2 \cos^2 \zeta \right) \ddot{\beta} \sin \beta$$
$$+ \left( \begin{aligned} & -11.71mR^2 \left( \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \right) \cos^2 \beta + 31mRr \left( \cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \right) + m_s LR \sin \zeta \\ & + 33.13mR^2 \left( \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta \right) \cos \beta + 5.85mR^2 \left( \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \right) - 0.38mR^2 \end{aligned} \right) \ddot{\beta} \sin \beta$$

$$\begin{aligned}
& + (m_s (L^2 + LR \cos \zeta) \cos \beta + I_{S_x} \cos \beta + m_s Lr \cos \zeta + m_s L^2 + I_{S_x}) \ddot{\zeta} - m_s L (r + R \cos \beta) \dot{\zeta}^2 \sin \zeta \\
& + (11.71mRr \cos \beta + 5.85I_{W_{smallx}} - m_s Lr \sin \zeta) \ddot{\psi} \sin \beta + 2m_s L (L \cos \zeta \sin^2 \beta - (R \cos \beta + r) \cos \beta) \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \zeta \\
& + \left( - (2MRr - 66.26mRr + 2m_s Rr + m_s L^2 + I_{S_x}) - 2m_s L (r + R + 2R \cos \beta + L \cos \zeta \cos \beta) \cos \zeta \right) \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta \\
& + \left( -2MR^2 - 2m_s R^2 - 102.45mR^2 + 2I_{W_{Bigz}} - 2I_{W_{Bigx}} - 2I_{S_x} + 2I_{S_z} \right) \cos \beta \\
& + \left( 29.27mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) - 35.13mR^2 (\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \cos^2 \beta - 0.38mR^2 \right) \dot{\beta}^2 \cos \beta \\
& + (2.13mR^2 \sin^2 \beta + m_s LR \sin \zeta \cos \beta + 33.13mR^2 \sin \theta \cos \theta + mR^2 (-62 \cos^2 \beta + 28.86) \cos^2 \theta) \dot{\beta}^2 \\
& - (I_{S_x} + m_s L^2) \dot{\beta} \dot{\zeta}^2 \sin \beta - 11.7mRr \dot{\beta} \dot{\psi} + (23.42mRr \cos \beta + 5.85I_{W_{smallx}} - m_s Lr \sin \zeta) \dot{\beta} \dot{\psi} \cos \beta \\
& + m_s g L \cos \zeta \cos \beta \cos \theta + (M + 32m + m_s) Rg \cos \theta \cos \beta - m_s g L \sin \zeta \sin \theta + (M + 32m + m_s) rg \cos \theta \\
& + m_s g (L \cos \zeta \cos \theta - L \sin \zeta \cos \beta \sin \theta) - m_s L^2 \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \zeta \sin^2 \beta + m_s L \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \beta (r + R \cos \beta) = 0
\end{aligned} \tag{۱۳-۴}$$

Equation<sub>2</sub> + Equation<sub>4</sub> =

$$\begin{aligned}
& \left( +m_s LR \sin \zeta \sin \beta + 31mRr \sin \beta (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) + 33.13mR^2 \sin \beta \cos \beta (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta) \right) \ddot{\theta} \\
& \left( -0.38mR^2 \sin \beta + 5.85mR^2 \sin \beta (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) - 11.7mR^2 \cos^2 \beta \sin \beta (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) \right) \ddot{\theta} \\
& + 5.85I_{W_{smallx}} \sin \beta + 11.7mRr \cos \beta \sin \beta \\
& + \left( I_{W_{Bigz}} + 27.87I_{W_{smallz}} + mR^2 (66.26 \cos^2 \theta + 4.26 \sin \theta \cos \theta) \sin^2 \beta + (M + 15.96m + m_s) R^2 \right) \ddot{\beta} \\
& + (M + 2.13m + m_s) Rr \cos \beta \\
& + ((M + 2.13m + m_s) Rr \cos \beta + (M + 32m + m_s) r^2 + 14.83I_{W_{smallz}} + 15.04I_{W_{smallx}}) \ddot{\psi} \\
& + (2m_s LR \cos \zeta + I_{S_x} + m_s L^2) \dot{\theta} \dot{\zeta}^2 \sin \beta + (11.7mRr - 23.42mRr \cos^2 \beta - 5.85I_{W_{smallx}} \cos \beta) \dot{\theta} \dot{\psi} \\
& - m_s Lr \dot{\zeta}^2 \sin \zeta \sin \beta + m_s Lr \dot{\zeta} \dot{\psi} \sin \zeta \cos \beta - m_s Lr \dot{\beta} \dot{\zeta}^2 \sin \zeta \cos \beta - m_s Lr \dot{\zeta}^2 \cos \zeta \sin \beta \\
& + \left( (62mRr + 66.26mR^2 \cos \beta) (\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta) + m_s L (2R \cos \beta + r) \cos \zeta \right. \\
& \left. - 23.4mR^2 (\cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta) \cos^2 \beta + m_s L^2 \cos^2 \zeta \cos \beta + 11.7mR^2 (\cos^2 \theta + \cos^2 \beta - \cos \theta \sin \theta) \right) \dot{\theta}^2 \sin \beta \\
& + (MRr + 2.13mRr - 5.85mR^2 + m_s Rr) + (MR^2 + 18.09mR^2 + m_s R^2 + I_{S_x} - I_{S_z} + I_{W_{Bigx}} - I_{W_{Bigz}}) \cos \beta \\
& + (mR^2 (66.26 \cos^2 \theta + 4.26 \sin \theta \cos \theta) \cos \beta - (M + 2.13m + m_s) Rr) \dot{\beta}^2 \sin \beta \\
& + (-4.26mR^2 \sin^2 \beta + mR^2 (8.53 \cos^2 \theta - 132.5 \cos \theta \sin \theta) \sin^2 \beta + mRr (23.42 \cos^2 \beta - 11.7)) \dot{\beta} \dot{\theta} \\
& + 5.85I_{W_{smallx}} \cos \beta \dot{\beta} \dot{\theta} - (M + 32m + m_s) gR \sin \theta \sin \beta - m_s gL \cos \zeta \sin \beta \sin \theta = 0
\end{aligned} \tag{۱۴-۴}$$

دو معادله (۱۳-۴) و (۱۴-۴) را می‌توان به صورت فشرده نمایش داد. این فرم در فهم و روند حل

معادلات و تعیین ضرایب به خواننده بسیار کمک می‌نماید.

$$(A_1 + H_1)\ddot{\theta} + (A_2)\ddot{\beta} + (A_3 + H_3)\ddot{\zeta} + (A_4 + H_4)\ddot{\psi} + (A_5 + H_5) = 0 \quad (15-4)$$

$$(B_1 + G_1)\ddot{\theta} + (B_2 + G_2)\ddot{\beta} + (G_3)\ddot{\zeta} + (B_4 + G_4)\ddot{\psi} + (B_5 + G_5) = 0 \quad (16-4)$$

سپس دو معادله‌ی (۱۵-۴) و (۱۶-۴) را بر حسب مشتق مرتبه دوم دو متغیر  $\theta$  و  $\psi$  محاسبه می‌نماییم. در این حالت،  $\ddot{\theta}$  و  $\ddot{\psi}$  را می‌توان بر حسب تابعی از سایر متغیرها و مشتقات مرتبه اول و دوم آن بازنویسی نمود.

$$\ddot{\theta} = f_1(\ddot{\beta}, \ddot{\zeta}, \dot{\theta}, \dot{\beta}, \dot{\zeta}, \dot{\psi}, \theta, \beta, \zeta, \psi) \quad (17-4)$$

$$\ddot{\beta} = f_2(\ddot{\beta}, \ddot{\zeta}, \dot{\theta}, \dot{\beta}, \dot{\zeta}, \dot{\psi}, \theta, \beta, \zeta, \psi) \quad (18-4)$$

دو معادله (۱۷-۴) و (۱۸-۴) فرم تابعی  $\ddot{\theta}$  و  $\ddot{\psi}$  می‌باشد که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{\theta} = \frac{\left( (A_4 + H_4)(B_5 + G_5 + (B_2 + G_2)\ddot{\beta} + G_3\ddot{\zeta}) - (B_4 + G_4)(A_5 + H_5 + (A_3 + H_3)\ddot{\zeta} + A_2\ddot{\beta}) \right)}{A_1B_4 - A_4B_1 + A_1G_4 - A_4G_1 - B_1H_4 + B_4H_1 - G_1H_4 + G_4H_1} \quad (19-4)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\left( (B_1 + G_1)(A_5 + H_5 + (A_3 + H_3)\ddot{\zeta} + A_2\ddot{\beta}) - (A_1 + H_1)(B_5 + G_5 + (B_2 + G_2)\ddot{\beta} + G_3\ddot{\zeta}) \right)}{A_1B_4 - A_4B_1 + A_1G_4 - A_4G_1 - B_1H_4 + B_4H_1 - G_1H_4 + G_4H_1} \quad (20-4)$$

دو معادله (۱۹-۴) و (۲۰-۴) را در معادلات (۶-۴) و (۷-۴) جایگزین می‌نماییم.

$$B_1 \left( \frac{\left( (A_4 + H_4)(B_5 + G_5 + (B_2 + G_2)\ddot{\beta} + G_3\ddot{\zeta}) - (B_4 + G_4)(A_5 + H_5 + (A_3 + H_3)\ddot{\zeta} + A_2\ddot{\beta}) \right)}{A_1B_4 - A_4B_1 + A_1G_4 - A_4G_1 - B_1H_4 + B_4H_1 - G_1H_4 + G_4H_1} \right) + B_2\ddot{\beta} + B_4 \left( \frac{\left( (B_1 + G_1)(A_5 + H_5 + (A_3 + H_3)\ddot{\zeta} + A_2\ddot{\beta}) - (A_1 + H_1)(B_5 + G_5 + (B_2 + G_2)\ddot{\beta} + G_3\ddot{\zeta}) \right)}{A_1B_4 - A_4B_1 + A_1G_4 - A_4G_1 - B_1H_4 + B_4H_1 - G_1H_4 + G_4H_1} \right) + B_5 = -T_\psi \quad (21-4)$$

$$H_1 \left( \frac{\left( (A_4 + H_4)(B_5 + G_5 + (B_2 + G_2)\ddot{\beta} + G_3\ddot{\zeta}) - (B_4 + G_4)(A_5 + H_5 + (A_3 + H_3)\ddot{\zeta} + A_2\ddot{\beta}) \right)}{A_1B_4 - A_4B_1 + A_1G_4 - A_4G_1 - B_1H_4 + B_4H_1 - G_1H_4 + G_4H_1} \right) + H_3\ddot{\zeta} + H_4 \left( \frac{\left( (B_1 + G_1)(A_5 + H_5 + (A_3 + H_3)\ddot{\zeta} + A_2\ddot{\beta}) - (A_1 + H_1)(B_5 + G_5 + (B_2 + G_2)\ddot{\beta} + G_3\ddot{\zeta}) \right)}{A_1B_4 - A_4B_1 + A_1G_4 - A_4G_1 - B_1H_4 + B_4H_1 - G_1H_4 + G_4H_1} \right) + H_5 = -T_\theta \quad (22-4)$$

که معادله (۲۱-۴) و (۲۲-۴) به ترتیب تغییرات  $\beta$  و  $\zeta$  را نشان می‌دهد. ضرایب این دو معادله در روابط (۹-۴)، (۱۰-۴)، (۱۱-۴) و (۱۲-۴) بیان شده است. این دو معادله را به صورت زیر نیز می‌توان نشان داد:

$$\begin{aligned} & (B_2U + B_1(A_4 + H_4)G_3 - B_1(B_4 + G_4)(A_3 + H_3) + B_4(B_1 + G_1)(A_3 + H_3) - B_4(A_1 + H_1)G_3)\ddot{\zeta} \\ & + (B_1(A_4 + H_4)(B_2 + G_2) - B_1(B_4 + G_4)A_2 + B_4(B_1 + G_1)A_2 - B_4(A_1 + H_1)(B_2 + G_2))\ddot{\beta} \\ & B_1(A_4 + H_4)(B_5 + G_5) - B_1(B_4 + G_4)(A_5 + H_5) + B_4(B_1 + G_1)(A_5 + H_5) \\ & - B_4(A_1 + H_1)(B_5 + G_5) + B_5U = -T_\psi U \end{aligned} \quad (۲۳-۴)$$

$$\begin{aligned} & (H_1(A_4 + H_4)(B_2 + G_2) - H_1(B_4 + G_4)A_2 + H_4(B_1 + G_1)A_2 - H_4(A_1 + H_1)(B_2 + G_2))\ddot{\beta} \\ & + (H_3U + H_1(A_4 + H_4)G_3 - H_1(B_4 + G_4)(A_3 + H_3) + H_4(B_1 + G_1)(A_3 + H_3) - H_4(A_1 + H_1)G_3)\ddot{\zeta} \\ & + H_1(A_4 + H_4)(B_5 + G_5) - H_1(B_4 + G_4)(A_5 + H_5) + H_4(B_1 + G_1)(A_5 + H_5) \\ & - H_4(A_1 + H_1)(B_5 + G_5) + H_5U = -T_\theta U \end{aligned} \quad (۲۴-۴)$$

که ضریب  $U$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = A_1B_4 - A_4B_1 + A_1G_4 - A_4G_1 - B_1H_4 + B_4H_1 - G_1H_4 + G_4H_1 \quad (۲۵-۴)$$

معادلات (۲۳-۴) و (۲۴-۴) معادلات اصلی کنترلی بوده و روش کنترل تطبیقی را روی آن پیاده‌سازی می‌شود. با کنترل این معادلات انحراف خودرو به سمت جلو-عقب و به طرفین با حرکت چرخ‌های بزرگ و کوچک به طرفین جبران شده و به سمت صفر میل می‌نمایند. بنابراین، از کنترل تطبیقی چند ورودی چند خروجی MIMO استفاده می‌نماییم.

#### ۲-۳-۴ اعمال کنترل تطبیقی

برای حفظ تعادل و پایداری خودروی تک‌چرخ، بایستی معادلات (۲۳-۴) و (۲۴-۴) که به ترتیب تغییرات  $\beta$  و  $\zeta$  را نشان می‌دهد، با استفاده از کنترل تطبیقی کنترل نماییم. که در روش کنترل تطبیقی برای سیستم‌های غیرخطی، عموماً لازم است که دینامیک‌های پلان به طور خطی پارامتری شوند، یعنی عدم قطعیت پارامتری به صورت تابعی خطی از یک مجموعه پارامترهای نامشخص بیان شوند. این پارامترهای نامشخص شامل جرم چرخ‌ها، جرم راننده، ممان‌های اینرسی، فاصله مراکز جرم از یکدیگر و شعاع

چرخ‌های کوچک و بزرگ می‌شود که در آنها هیچ یک از متغیرها یا مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم حضور ندارد. برای این منظور معادلات (۴-۵)، (۴-۶)، (۴-۷) و (۴-۸) که از پارامترها و متغیرهای متنوعی تشکیل شده است را به صورت زیر باز نویسی می‌نماییم.

$$\theta \rightarrow \text{Equation}_1 : A_1\ddot{\theta} + A_2\ddot{\beta} + A_3\ddot{\zeta} + A_4\ddot{\psi} + A_5 = +T_\theta \quad (۵-۴)$$

$$\beta \rightarrow \text{Equation}_2 : B_1\ddot{\theta} + B_2\ddot{\beta} + B_4\ddot{\psi} + B_5 = -T_\psi \quad (۶-۴)$$

$$\zeta \rightarrow \text{Equation}_3 : H_1\ddot{\theta} + H_3\ddot{\zeta} + H_4\ddot{\psi} + H_5 = -T_\theta \quad (۷-۴)$$

$$\psi \rightarrow \text{Equation}_4 : G_1\ddot{\theta} + G_2\ddot{\beta} + G_3\ddot{\zeta} + G_4\ddot{\psi} + G_5 = +T_\psi \quad (۸-۴)$$

در این حالت، ضرایب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} A_1 &= p_{27}Q_3 - 2p_6Q_{12} + p_{28}Q_{53} - p_{10}Q_{54} + 2p_8Q_{55} + p_{29} + p_{10}Q_{56} \\ A_2 &= p_{16}Q_{57} + p_{16}Q_{58} + p_{12}Q_{21} - p_{12}Q_{22} + p_8Q_4 + p_{13}Q_{23} - p_{13}Q_{24} + p_{15}Q_{21} + p_{15}Q_{22} + p_{14}Q_2 \\ A_3 &= p_9Q_2 + p_8Q_{12} - p_6Q_{11} \\ A_4 &= p_1Q_1 + p_2Q_2 \\ A_5 &= -2p_{10}Q_{59} - 2p_8Q_{60} + p_6Q_{61} + p_6Q_{62} - p_8Q_{84} + p_{30}Q_{63} + p_{31}Q_{85} + 2p_6Q_{64} - 4p_8Q_{65} + 2p_{10}Q_{66} \\ &+ p_{32}Q_{67} + p_{32}Q_{68} + p_{12}Q_{67} - p_{12}Q_{68} + p_{14}Q_{69} + p_{33}Q_{70} + p_{33}Q_{71} + p_{34}Q_{72} + p_8Q_{73} + p_{13}Q_{74} \\ &+ p_{35}Q_{75} + p_{36}Q_{76} - p_9Q_{77} - p_1Q_{78} + p_7Q_{79} + p_2Q_{86} + p_{11}Q_{80} - p_{26}Q_{81} - p_{11}Q_{82} + p_{37}Q_{83} \end{aligned}$$

(۴-۲۶)

$$B1 = p_8Q_4 + p_{12}Q_{21} - p_{12}Q_{22} + p_{13}Q_{23} - p_{13}Q_{24} - p_{14}Q_2 + p_{15}Q_{22} + p_{15}Q_{21} + p_{16}Q_{25} + p_{16}Q_{26}$$

$$B2 = p_{17} + p_{18}Q_{27} + p_{19}Q_{28}$$

$$B3 = 0$$

$$B4 = p_4 + p_3Q_3$$

$$B5 = \left( \begin{aligned} &p_1Q_{29} - p_7Q_{30} - p_2Q_{31} - p_{11}Q_{32} + p_{20}Q_{33} + p_{20}Q_{34} + p_{18}Q_{35} + p_{18}Q_{36} + 2p_8Q_{37} \\ &+ p_6Q_{38} - p_{10}Q_{39} + p_{21}Q_{40} - p_{21}Q_{41} + p_{22}Q_{52} - p_{16}Q_{33} - p_{16}Q_{42} + p_{16}Q_{34} + p_{23}Q_{37} \\ &+ p_{18}Q_{43} + p_{19}Q_{44} + 2p_8Q_{45} + p_9Q_{46} + p_8Q_{47} - p_{19}Q_{48} + p_{24}Q_{49} + p_{25}Q_{50} + p_{26}Q_{51} \end{aligned} \right)$$

(۴-۲۷)



$$\begin{aligned}
H_1 &= -p_6 Q_{11} + p_8 Q_{12} + p_9 Q_3 \\
H_2 &= 0 \\
H_3 &= p_3 \\
H_4 &= p_6 Q_4 \\
H_5 &= 2P_8 Q_{13} - P_9 Q_{14} + p_{10} Q_{15} - p_6 Q_{16} + p_8 Q_{17} + p_6 Q_{18} + p_{11} Q_{19} - p_{11} Q_{20}
\end{aligned}
\tag{۲۸-۴}$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= p_1 Q_1 + p_2 Q_2 \\
G_2 &= p_3 Q_3 + p_4 \\
G_3 &= p_6 Q_4 \\
G_4 &= p_5 \\
G_5 &= -p_3 Q_5 + p_6 Q_6 + p_6 Q_7 + p_7 Q_8 - p_1 Q_9 + p_2 Q_{10}
\end{aligned}
\tag{۲۹-۴}$$

در روابط (۲۶-۴)، (۲۷-۴)، (۲۸-۴) و (۲۹-۴)، ضرایب  $p$  معرف پارامترهای سیستم می باشد که شامل جرم چرخ‌ها، جرم راننده، ممان‌های اینرسی‌ها، فاصله مراکز جرم از یکدیگر و شعاع چرخ‌های کوچک و بزرگ می‌شود و در آنها هیچ یک از متغیرها یا مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم حضور ندارد که در جدول ۱-۴ نشان داده شده است. ضرایب  $Q$  معرف از متغیرها یا مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم و یا ترکیبی از آنها می‌باشد که در جدول ۲-۴ نشان داده شده است.

جدول ۱-۴ پارامترهای معادلات حرکت خودروی تک‌چرخ

$$\begin{aligned}
p_1 &= 11.7mRr & p_{22} &= \begin{pmatrix} MRr + 2.13mRr \\ -5.85mR^2 + m_s Rr \end{pmatrix} \\
p_2 &= 5.85I_{Wsmallx} & p_{23} &= \begin{pmatrix} MR^2 + 18.09mR^2 + m_s R^2 \\ +I_{Sx} - I_{Sz} + I_{WBigx} - I_{WBigz} \end{pmatrix} \\
p_3 &= (M + 2.13m + m_s)Rr & p_{24} &= 8.53mR^2 \\
p_4 &= -2.13I_{Wsmallz} & p_{25} &= -132.5mR^2 \\
p_5 &= \begin{pmatrix} Mr^2 + 32mr^2 + m_s r^2 \\ +16.96I_{Wsmallz} + 15.04I_{Wsmallx} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$p_6 = -m_s Lr$$

$$p_7 = 23.42mRr$$

$$p_8 = m_s LR$$

$$p_9 = (m_s L^2 + I_{Sx})$$

$$p_{10} = -m_s L^2$$

$$p_{11} = m_s gL$$

$$p_{12} = 31mRr$$

$$p_{13} = 33.13mR^2$$

$$p_{14} = -0.38mR^2$$

$$p_{15} = 5.85mR^2$$

$$p_{16} = -11.7mR^2$$

$$p_{17} = \left( \begin{array}{l} I_{WBigz} + 31I_{Wsmallz} \\ + (M + 15.96m + m_s) R^2 \end{array} \right)$$

$$p_{18} = 66.26mR^2$$

$$p_{19} = 4.26mR^2$$

$$p_{20} = 62mRr$$

$$p_{21} = -23.4mR^2$$

$$p_{26} = -(M + 32m + m_s) Rg$$

$$p_{27} = (2MRr + 66.26mRr + 2m_s Rr)$$

$$p_{28} = \left( \begin{array}{l} I_{Sx} - I_{Sz} + I_{WBigx} - I_{WBigz} \\ + MR^2 + 51.22mR^2 + m_s R^2 \end{array} \right)$$

$$p_{29} = \left( \begin{array}{l} I_{WBigz} + 32I_{Wsmallx} + I_{Sz} + 15.mR^2 \\ + Mr^2 + 32mr^2 + m_s L^2 + m_s r^2 \end{array} \right)$$

$$p_{30} = \left( \begin{array}{l} -2MR^2 - 2m_s R^2 - 102.45mR^2 \\ + 2I_{WBigz} - 2I_{WBigx} - 2I_{Sx} + 2I_{Sz} \end{array} \right)$$

$$p_{31} = -(2MRr - 66.26mRr + 2m_s Rr)$$

$$p_{32} = 29.27mR^2$$

$$p_{33} = -35.13mR^2$$

$$p_{34} = 2.13mR^2$$

$$p_{35} = -62mR^2$$

$$p_{36} = 28.86mR^2$$

$$p_{37} = (M + 32m + m_s) rg$$

جدول ۲-۴ متغیرهای معادلات حرکت خودروی تک چرخ

$$Q_1 = \cos \beta \sin \beta$$

$$Q_2 = \sin \beta$$

$$Q_3 = \cos \beta$$

$$Q_4 = \sin \zeta \sin \beta$$

$$Q_5 = \dot{\beta}^2 \sin \beta$$

$$Q_6 = \dot{\zeta}^2 \cos \zeta \sin \beta$$

$$Q_7 = \dot{\beta} \dot{\zeta} \sin \zeta \cos \beta$$

$$Q_8 = \cos^2 \beta \dot{\beta} \dot{\theta}$$

$$Q_9 = \dot{\beta} \dot{\theta}$$

$$Q_{10} = \cos \beta \dot{\beta} \dot{\theta}$$

$$Q_{43} = \dot{\beta}^2 \cos \beta \sin \beta \cos^2 \theta$$

$$Q_{44} = \dot{\beta}^2 \cos \beta \sin \beta \sin \theta \cos \theta$$

$$Q_{45} = \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \beta \cos \zeta$$

$$Q_{46} = \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \beta$$

$$Q_{47} = \dot{\zeta} \dot{\psi} \sin \zeta \cos \beta$$

$$Q_{48} = \dot{\beta} \dot{\theta} \sin^2 \beta$$

$$Q_{49} = \dot{\beta} \dot{\theta} \cos^2 \theta \sin^2 \beta$$

$$Q_{50} = \dot{\beta} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \sin^2 \beta$$

$$Q_{51} = \sin \theta \sin \beta$$

$$Q_{52} = \dot{\theta}^2 \sin \beta$$

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \cos \zeta & Q_{53} &= \cos^2 \beta \\
Q_{12} &= \cos \zeta \cos \beta & Q_{54} &= \cos^2 \zeta \cos^2 \beta \\
Q_{13} &= \dot{\beta} \dot{\theta} \cos \zeta \sin \beta & Q_{55} &= \cos \zeta \cos^2 \beta \\
Q_{14} &= \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta & Q_{56} &= \cos^2 \zeta \\
Q_{15} &= \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \zeta \sin^2 \beta & Q_{57} &= \sin \theta \cos \theta \cos^2 \beta \sin \beta \\
Q_{16} &= \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos \beta & Q_{58} &= \cos^2 \theta \cos^2 \beta \sin \beta \\
Q_{17} &= \dot{\theta}^2 \sin \zeta \cos^2 \beta & Q_{59} &= \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \zeta \cos \zeta \sin^2 \beta \sin \zeta \\
Q_{18} &= \dot{\psi} \dot{\beta} \sin \zeta \cos \beta & Q_{60} &= \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \zeta \cos^2 \beta \\
Q_{19} &= \cos \zeta \cos \theta & Q_{61} &= \dot{\theta} \dot{\zeta} \sin \zeta \cos \beta \\
Q_{20} &= \sin \zeta \cos \beta \sin \theta & Q_{62} &= \dot{\zeta}^2 \sin \zeta \\
Q_{21} &= \sin \beta \cos \theta \sin \theta & Q_{63} &= \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta \cos \beta \\
Q_{22} &= \sin \beta \cos^2 \theta & Q_{64} &= \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta \cos \zeta \\
Q_{23} &= \sin \beta \cos \beta \cos \theta \sin \theta & Q_{65} &= \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta \cos \zeta \cos \beta \\
Q_{24} &= \sin \beta \cos \beta \cos^2 \theta & Q_{66} &= \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta \cos \beta \cos^2 \zeta \\
Q_{25} &= \cos^2 \beta \sin \beta \cos^2 \theta & Q_{67} &= \dot{\beta}^2 \cos \beta \sin \theta \cos \theta \\
Q_{26} &= \cos^2 \beta \sin \beta \sin \theta \cos \theta & Q_{68} &= \dot{\beta}^2 \cos \beta \cos^2 \theta \\
Q_{27} &= \cos^2 \theta \sin^2 \beta & Q_{69} &= \dot{\beta}^2 \cos \beta \\
Q_{28} &= \sin \theta \cos \theta \sin^2 \beta & Q_{70} &= \dot{\beta}^2 \cos^3 \beta \cos \theta \sin \theta \\
Q_{29} &= \dot{\theta} \dot{\psi} & Q_{71} &= \dot{\beta}^2 \cos^3 \beta \cos^2 \theta \\
Q_{30} &= \dot{\theta} \dot{\psi} \cos^2 \beta & Q_{72} &= \dot{\beta}^2 \cos \beta \sin^2 \beta \\
Q_{31} &= \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \beta & Q_{73} &= \dot{\beta}^2 \sin \zeta \cos \beta \\
Q_{32} &= \cos \zeta \sin \beta \sin \theta & Q_{74} &= \dot{\beta}^2 \sin \theta \cos \theta \\
Q_{33} &= \dot{\theta}^2 \sin \beta \cos^2 \theta & Q_{75} &= \dot{\beta}^2 \cos^2 \beta \cos^2 \theta \\
Q_{34} &= \dot{\theta}^2 \sin \beta \cos \theta \sin \theta & Q_{76} &= \dot{\beta}^2 \cos^2 \beta \\
Q_{35} &= \dot{\theta}^2 \sin \beta \cos \beta \cos^2 \theta & Q_{77} &= \dot{\beta} \dot{\zeta} \sin \beta \\
Q_{36} &= \dot{\theta}^2 \sin \beta \cos \beta \cos \theta \sin \theta & Q_{78} &= \dot{\beta} \dot{\psi} \\
Q_{37} &= \dot{\theta}^2 \sin \beta \cos \beta & Q_{79} &= \dot{\beta} \dot{\psi} \cos^2 \beta \\
Q_{38} &= \dot{\theta}^2 \sin \beta \cos \zeta & Q_{80} &= \cos \zeta \cos \beta \cos \theta \\
Q_{39} &= \dot{\theta}^2 \sin \beta \cos^2 \zeta \cos \beta & Q_{81} &= \cos \theta \cos \beta \\
Q_{40} &= \dot{\theta}^2 \sin \beta \cos^2 \theta \cos^2 \beta & Q_{82} &= \sin \zeta \sin \theta \\
Q_{41} &= \dot{\theta}^2 \sin \beta \cos \theta \sin \theta \cos^2 \beta & Q_{83} &= \cos \theta \\
Q_{42} &= \dot{\theta}^2 \sin \beta \cos^2 \beta & Q_{84} &= \dot{\zeta}^2 \cos \beta \sin \zeta \\
& & Q_{85} &= \dot{\beta} \dot{\theta} \sin \beta \\
& & Q_{86} &= \dot{\beta} \dot{\psi} \cos \beta
\end{aligned}$$

این نوع نوشتار کمک شایانی در اعمال کنترل تطبیقی و تشخیص پارامترهای سیستم به منظور پیشنهاد قانون کنترلی می‌نماید.

معادله (۴-۲۳) و (۴-۲۴) دو معادله ای می‌باشند که بایستی کنترل شود. ابتدا روند اعمال کنترل تطبیقی را به صورت دقیق برای معادله (۴-۲۳) توضیح می‌دهیم و به طور مشابه معادله (۴-۲۴) را کنترل می‌نماییم.

معادله (۴-۲۳) را بر اساس ترکیبی از پارامترها و متغیرها به صورت زیر بیان می‌نماییم.

$$\begin{aligned}
 & w_1 \zeta + (w_2 + w_1 + w_7) Q_3 \zeta - w_3 Q_{54} \zeta + w_3 Q_{56} \zeta - w_4 Q_{11} \zeta - (2w_4 + w_6) Q_{12} \zeta + w_5 Q_{53} \zeta + 2w_6 Q_{55} \zeta \\
 & - (w_{10} + w_{16}) Q_4^2 \zeta + (w_8 + w_9 + w_{23}) Q_3^2 \zeta - w_{11} Q_3 Q_{54} \zeta + w_{11} Q_3 Q_{56} \zeta - w_{12} Q_{11} Q_3 \zeta - 2w_{12} Q_{12} Q_3 \zeta \\
 & + w_{13} Q_3 Q_{53} \zeta - w_{14} Q_3 Q_4 \zeta + w_{15} Q_{12} Q_3 \zeta + 2w_{15} Q_3 Q_{55} \zeta - w_{17} Q_4 \zeta - w_{18} Q_{12} Q_4 \zeta + w_{19} Q_{11} Q_4 \zeta - w_{17} Q_2 Q_4 \zeta \\
 & - w_{22} Q_{12} Q_3 Q_4 \zeta + w_{27} Q_{11} Q_3 Q_4 \zeta - w_{24} Q_{11} Q_3^2 \zeta + w_{25} Q_{12} Q_3^2 \zeta + w_{23} Q_2 Q_3^2 \zeta - w_{26} Q_3 Q_4 \zeta + 2w_{27} Q_{12} Q_3 Q_4 \zeta \\
 & - (w_{28} + w_{29}) Q_4 Q_3^2 \zeta + w_{30} Q_3 Q_4 Q_{54} \zeta - w_{30} Q_3 Q_4 Q_{56} \zeta - w_{31} Q_3 Q_4 Q_{53} \zeta - 2w_{22} Q_3 Q_4 Q_{55} \zeta - 2W_{15} Q_3 Q_{55} \beta \\
 & + 2W_{32} Q_{37} Q_4^2 + W_{33} Q_{38} Q_4^2 + W_{33} Q_{36} Q_4^2 + 2W_{32} Q_{45} Q_4^2 + W_{32} Q_{47} Q_4^2 + W_{33} Q_{37} Q_4^2 - 4W_{21} Q_{12} Q_3 Q_{45} \\
 & - W_{35} Q_{39} Q_4^2 + W_{36} Q_{37} Q_4^2 + W_{37} Q_{52} Q_4^2 - W_{22} Q_5 Q_4^2 + W_{39} Q_{46} Q_4^2 - W_{18} Q_{17} Q_4 + 2W_{18} Q_{13} Q_4 + 2W_{18} Q_4 Q_{60} \\
 & + 4W_{18} Q_4 Q_{65} - W_{18} Q_4 Q_{73} + W_{18} Q_4 Q_{84} - W_{40} Q_{15} Q_4 + 2W_{40} Q_4 Q_{59} + W_{19} Q_{16} Q_4 - W_{19} Q_{18} Q_4 - 2W_{40} Q_4 Q_{66} \\
 & - W_{42} Q_4 Q_{63} + W_{17} Q_{14} Q_4 - W_{44} Q_4 Q_{85} - W_{19} Q_4 Q_{61} - W_{19} Q_4 Q_{62} - 2W_{19} Q_4 Q_{64} + W_{17} Q_4 Q_{77} - W_{21} Q_3 Q_4 Q_{73} \\
 & + W_{59} Q_3^2 Q_5 + W_{60} Q_3 Q_5 + W_{60} Q_3^2 Q_5 + W_{62} Q_3 Q_{39} - (W_{63} + 2W_{67}) Q_3 Q_{37} - W_{66} Q_3 Q_{38} - W_{66} Q_3 Q_6 - 2W_{67} Q_3 Q_{45} \\
 & - W_{67} Q_3 Q_{47} - W_{66} Q_3 Q_7 - W_{68} Q_3 Q_{46} - W_{64} Q_3 Q_{52} + W_{30} Q_3^2 Q_{39} - W_{69} Q_3 Q_{39} Q_{54} + W_{69} Q_3 Q_{39} Q_{56} + W_{52} Q_{15} Q_3^2 \\
 & - 2W_{52} Q_3^2 Q_{59} - W_{24} Q_{16} Q_3^2 + W_{24} Q_{18} Q_3^2 + 2W_{52} Q_{66} Q_3^2 - 2W_{52} Q_{13} Q_3^2 + W_{25} Q_{17} Q_3^2 + W_{54} Q_3^2 Q_{63} - W_{23} Q_3^2 Q_{14} \\
 & + W_{56} Q_{85} Q_3^2 + W_{24} Q_{61} Q_3^2 + W_{24} Q_{62} Q_3^2 + 2W_{24} Q_{64} Q_3^2 - 2W_{25} Q_{60} Q_3^2 - 4W_{25} Q_{65} Q_3^2 + W_{25} Q_{73} Q_3^2 - W_{25} Q_{84} Q_3^2 \\
 & - W_{23} Q_{77} Q_3^2 + W_{27} Q_{11} Q_3 Q_{38} + (2W_{27} - W_{22}) Q_{12} Q_3 Q_{38} - W_{71} Q_3 Q_5 Q_{54} + W_{71} Q_3 Q_5 Q_{56} - W_{70} Q_{11} Q_3 Q_5 \\
 & + (2W_{27} - W_{22}) Q_{12} Q_3 Q_5 - W_{21} Q_3 Q_5 Q_{53} + (-2W_{21} + 4W_{22}) Q_{12} Q_3 Q_{37} + (2W_{27} + 2W_{22}) Q_{11} Q_3 Q_6 \\
 & - (4W_{21} + 2W_{97}) Q_{12} Q_3 Q_6 - 2W_{21} Q_{12} Q_3 Q_{47} + W_{27} Q_{12} Q_3 Q_7 + (-W_{76} - 2W_{81} - W_{82} - 2W_{20} + 4W_{22}) Q_3 Q_{45} Q_{55} \\
 & - (W_{76} + W_{84}) Q_3 Q_{47} Q_{55} + 2W_{73} Q_3 Q_{37} Q_{55} + W_{80} Q_3 Q_5 Q_{55} - (W_{78} + W_{29}) Q_{11} Q_3 Q_7 - (W_{78} + W_{29}) Q_3^2 Q_{39} \\
 & - (2W_{81} + 2W_{20}) Q_3^2 Q_{37} - (W_{81} + W_{20}) Q_3^2 Q_{52} - (W_{78} + W_{86}) Q_3^2 Q_{38} - W_{90} Q_3^2 Q_7 + (2W_{30} - W_{46}) Q_3^2 Q_6 \\
 & + (-W_{89} + 2W_{46}) Q_3^2 Q_{45} + (W_{89} - 2W_{46}) Q_3^2 Q_{47} + (-W_{91} + 2W_{22}) Q_{11} Q_3 Q_{39} - W_{93} Q_3 Q_{37} Q_{54} - W_{41} Q_{19} Q_4 \\
 & + (W_{92} - 2W_{101}) Q_{12} Q_3 Q_{39} + W_{93} Q_3 Q_{37} Q_{56} - W_{95} Q_3 Q_{39} Q_{53} + (-2W_{95} + W_{99}) Q_{11} Q_3 Q_{37} + W_{97} Q_3 Q_{37} Q_{53} \\
 & - W_{30} Q_3 Q_{52} Q_{54} + W_{30} Q_3 Q_{52} Q_{56} + 2W_{99} Q_{11} Q_3 Q_{52} - W_{100} Q_3 Q_{52} Q_{53} - W_{100} Q_3 Q_{38} Q_{54} - W_{100} Q_3 Q_{38} Q_{56} \\
 & + 2W_{46} Q_3 Q_{52} Q_{55} + W_{30} Q_3 Q_{38} Q_{53} - W_{30} Q_3 Q_{53} Q_6 + 2W_{46} Q_3 Q_{53} Q_7 - 2W_{46} Q_3 Q_{39} Q_{55} + W_{46} Q_3 Q_{54} Q_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -W_{46}Q_3Q_{56}Q_6 - 2W_{101}Q_3Q_{45}Q_{54} - W_{101}Q_3Q_{45}Q_{56} + W_{30}Q_3Q_{47}Q_{54} + 2W_{22}Q_3Q_{47}Q_{56} - W_{30}Q_3Q_{45}Q_{53} \\
& + W_{22}Q_3Q_{47}Q_{53} + W_{80}Q_3Q_{54}Q_7 + (W_{86} - W_{20})Q_{11}Q_3Q_{45} + 2W_{86}Q_3Q_{56}Q_7 - W_{102}Q_{11}Q_3Q_{47} - 2W_{22}Q_3Q_{46}Q_{54} \\
& - 2W_{22}Q_3Q_{46}Q_{56} - 2W_{22}Q_3Q_{55}Q_7 - 2W_{20}Q_3Q_{46}Q_{55} - W_{34}Q_{32}Q_4^2 + W_{38}Q_4^2Q_{51} + W_{41}Q_4Q_{20} - W_{41}Q_4Q_{80} \\
& + W_{41}Q_4Q_{82} + W_{43}Q_4Q_{81} - W_{45}Q_4Q_{83} + W_{61}Q_3Q_{32} - W_{65}Q_3Q_{51} + W_{53}Q_{19}Q_3^2 - W_{53}Q_{20}Q_3^2 + W_{53}Q_{80}Q_3^2 \\
& - W_{53}Q_{82}Q_3^2 - W_{55}Q_{81}Q_3^2 + W_{57}Q_{83}Q_3^2 + (W_{74} + W_{79})Q_{32}Q_3^2 - (W_{77} + W_{85})Q_{51}Q_3^2 - W_{87}Q_3Q_{32}Q_{54} \\
& + W_{87}Q_3Q_{32}Q_{56} + W_{88}Q_{11}Q_3Q_{32} + (2W_{88} - W_{47})Q_{12}Q_3Q_{32} - W_{103}Q_3Q_{32}Q_{53} - W_{94}Q_3Q_{51}Q_{54} + W_{94}Q_3Q_{51}Q_{56} \\
& - W_{96}Q_{11}Q_3Q_{51} + (-2W_{96} + W_{49})Q_{12}Q_3Q_{51} + W_{98}Q_3Q_{51}Q_{53} + 2W_{47}Q_3Q_{32}Q_{55} - 2W_{49}Q_3Q_{51}Q_{55} = \\
& \left( \begin{aligned}
& +W_{104} + (W_{105} + W_{106} + W_{111})Q_3 - W_{107}Q_{54} + W_{107}Q_{56} - W_{108}Q_{11} + (W_{110} - 2W_{108})Q_{12} \\
& + W_{109}Q_{53} + 2W_{110}Q_{55} + (W_{112} + W_{113})Q_3^2 - W_{114}Q_4^2 - W_{115}Q_3Q_{54} + W_{115}Q_3Q_{56} \\
& - W_{116}Q_{11}Q_3 - 2W_{116}Q_{12}Q_3 + W_{117}Q_3Q_{53} - W_{118}Q_3Q_4 + W_{119}Q_{12}Q_3 + 2W_{119}Q_3Q_{55}
\end{aligned} \right) T_{\psi}
\end{aligned}$$

(۳۰-۴)

که ضرایب  $w$ ، پارامترهای معادله کنترل تطبیقی می باشد که در جدول ۳-۴ نشان داده شده است.

این پارامترها همگی مقداری ثابت و محدود دارند.

جدول ۳-۴ پارامترهای کنترل تطبیقی

$w_1 = p_{17}p_{29}p_5$	$w_{32} = p_6p_8^2$	$w_{63} = p_{23}p_{29}p_3$	$w_{94} = p_{10}p_{26}p_3$
$w_2 = p_{17}p_{29}p_3$	$w_{33} = p_8p_6^2$	$w_{64} = p_{22}p_{29}p_3$	$w_{95} = p_{22}p_3p_6$
$w_3 = p_{17}p_{10}p_5$	$w_{34} = p_{11}p_6p_8$	$w_{65} = p_{26}p_{29}p_3$	$w_{96} = p_{26}p_3p_6$
$w_4 = p_{17}p_5p_6$	$w_{35} = p_{10}p_6p_8$	$w_{66} = p_6p_{29}p_3$	$w_{97} = p_{23}p_3p_8$
$w_5 = p_{17}p_{28}p_5$	$w_{36} = p_{23}p_6p_8$	$w_{67} = p_6p_3p_9$	$w_{98} = p_{26}p_{28}p_8$
$w_6 = p_{17}p_5p_8$	$w_{37} = p_{22}p_6p_8$	$w_{68} = p_{29}p_3p_9$	$w_{99} = p_{22}p_3p_8$
$w_7 = p_{17}p_5p_9$	$w_{38} = p_{26}p_6p_8$	$w_{69} = p_3p_{10}^2$	$w_{100} = p_{28}p_3p_6$
$w_8 = p_{17}p_{27}p_3$	$w_{39} = p_9p_6p_8$	$w_{70} = p_6p_3^2$	$w_{101} = p_{28}p_3p_8$
$w_9 = p_{17}p_3p_9$	$w_{40} = p_{10}p_5p_8$	$w_{71} = p_{10}p_3^2$	$w_{102} = p_{28}p_3p_9$
$w_{10} = p_{17}p_6p_8$	$w_{41} = p_{11}p_5p_8$	$w_{72} = p_{28}p_3^2$	$w_{103} = p_{11}p_{28}p_3$
$w_{11} = p_{17}p_{10}p_3$	$w_{42} = p_{30}p_5p_8$	$w_{73} = p_8p_3^2$	$w_{104} = p_{29}p_5$
$w_{12} = p_{17}p_3p_6$	$w_{43} = p_{26}p_5p_8$	$w_{74} = p_{11}p_{27}p_3$	$w_{105} = p_{29}p_3$
$w_{13} = p_{17}p_{28}p_3$	$w_{44} = p_{31}p_5p_8$	$w_{75} = p_{10}p_{27}p_3$	$w_{106} = p_{27}p_5$
$w_{14} = p_{17}p_1p_6$	$w_{45} = p_{37}p_5p_8$	$w_{76} = p_{23}p_{27}p_3$	$w_{107} = p_{10}p_3$
$w_{15} = p_{17}p_3p_8$	$w_{46} = p_{10}p_3p_8$	$w_{77} = p_{26}p_{27}p_3$	$w_{108} = p_6p_5$

$w_{16} = p_6^3 p_8$	$w_{47} = p_{11} p_3 p_8$	$w_{78} = p_6 p_{27} p_3$	$w_{109} = p_{28} p_5$
$w_{17} = p_5 p_6 p_9$	$w_{48} = p_3 p_{30} p_8$	$w_{79} = p_{11} p_3 p_9$	$w_{110} = p_8 p_5$
$w_{18} = p_5 p_8^2$	$w_{49} = p_3 p_{26} p_8$	$w_{80} = p_{10} p_3 p_9$	$w_{111} = p_9 p_5$
$w_{19} = p_5 p_6 p_8$	$w_{50} = p_3 p_{31} p_8$	$w_{81} = p_{27} p_3 p_8$	$w_{112} = p_{27} p_3$
$w_{20} = p_3 p_8 p_9$	$w_{51} = p_3 p_{37} p_8$	$w_{82} = p_{23} p_3 p_9$	$w_{113} = p_9 p_3$
$w_{21} = p_3 p_8^2$	$w_{52} = p_1 p_{10} p_3$	$w_{83} = p_{27} p_3 p_9$	$w_{114} = p_6 p_8$
$w_{22} = p_3 p_6 p_8$	$w_{53} = p_1 p_{11} p_3$	$w_{84} = p_{22} p_3 p_9$	$w_{115} = p_{10} p_3$
$w_{23} = p_1 p_3 p_9$	$w_{54} = p_1 p_{30} p_3$	$w_{85} = p_{26} p_3 p_9$	$w_{116} = p_6 p_3$
$w_{24} = p_1 p_3 p_6$	$w_{55} = p_1 p_{26} p_3$	$w_{86} = p_6 p_3 p_9$	$w_{117} = p_{28} p_3$
$w_{25} = p_1 p_3 p_8$	$w_{56} = p_1 p_{31} p_3$	$w_{87} = p_{11} p_{10} p_3$	$w_{118} = p_1 p_6$
$w_{26} = p_{29} p_3 p_6$	$w_{57} = p_1 p_{37} p_3$	$w_{88} = p_{11} p_6 p_3$	$w_{119} = p_3 p_8$
$w_{27} = p_3 p_6^2$	$w_{58} = p_2 p_9^2$	$w_{89} = p_{10} p_{23} p_3$	
$w_{28} = p_{27} p_3 p_6$	$w_{59} = p_{27} p_3^2$	$w_{90} = p_{10} p_{28} p_3$	
$w_{29} = p_3 p_6 p_9$	$w_{60} = p_{29} p_3^2$	$w_{91} = p_{23} p_6 p_3$	
$w_{30} = p_{10} p_3 p_6$	$w_{61} = p_{11} p_{29} p_3$	$w_{92} = p_{23} p_{28} p_3$	
$w_{31} = p_{28} p_3 p_6$	$w_{62} = p_{10} p_{29} p_3$	$w_{93} = p_{10} p_{22} p_3$	

سمت راست معادله (۳۰-۴) را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$U_{\psi} = \left( \begin{array}{l} +W_{104} + (W_{105} + W_{106} + W_{111})Q_3 - W_{107}Q_{54} + W_{107}Q_{56} - W_{108}Q_{11} + (W_{110} - 2W_{108})Q_{12} \\ +W_{109}Q_{53} + 2W_{110}Q_{55} + (W_{112} + W_{113})Q_3^2 - W_{114}Q_4^2 - W_{115}Q_3Q_{54} + W_{115}Q_3Q_{56} \\ -W_{116}Q_{11}Q_3 - 2W_{116}Q_{12}Q_3 + W_{117}Q_3Q_{53} - W_{118}Q_3Q_4 + W_{119}Q_{12}Q_3 + 2W_{119}Q_3Q_{55} \end{array} \right) T_{\psi} \quad (۳۱-۴)$$

تکنیک استفاده شده در رابطه (۳۱-۴)، ایده‌ای خلاقانه در کنترل تطبیقی می‌باشد که به موجب آن از یک حلقه‌ی داخلی در کنترلر تطبیقی برای بروز رسانی پارامترها استفاده شده است. سمت چپ معادله (۳۰-۴) را می‌توان به صورت ماتریسی نمایش داد.

$$\begin{aligned} & (B_2U + B_1(A_4 + H_4)G_3 - B_1(B_4 + G_4)(A_3 + H_3) + B_4(B_1 + G_1)(A_3 + H_3) - B_4(A_1 + H_1)G_3) \ddot{\zeta} \\ & + (B_1(A_4 + H_4)(B_2 + G_2) - B_1(B_4 + G_4)A_2 + B_4(B_1 + G_1)A_2 - B_4(A_1 + H_1)(B_2 + G_2)) \ddot{\beta} \\ & B_1(A_4 + H_4)(B_5 + G_5) - B_1(B_4 + G_4)(A_5 + H_5) + B_4(B_1 + G_1)(A_5 + H_5) \\ & - B_4(A_1 + H_1)(B_5 + G_5) + B_5U = PY \end{aligned} \quad (۳۲-۴)$$



$$U_{\psi} = \left( \begin{array}{l} \widehat{w}_1 + (\widehat{w}_2 + \widehat{w}_1 + \widehat{w}_7)Q_3 - \widehat{w}_3Q_{54} + \widehat{w}_3Q_{56} - \widehat{w}_4Q_{11} - (2\widehat{w}_4 + \widehat{w}_6)Q_{12} \\ + \widehat{w}_5Q_{53} + 2\widehat{w}_6Q_{55} - (\widehat{w}_{10} + \widehat{w}_{16})Q_4^2 + (\widehat{w}_8 + \widehat{w}_9 + \widehat{w}_{23})Q_3^2 - \widehat{w}_{11}Q_3Q_{54} \\ + \widehat{w}_{11}Q_3Q_{56} - \widehat{w}_{12}Q_{11}Q_3 - 2\widehat{w}_{12}Q_{12}Q_3 + \widehat{w}_{13}Q_3Q_{53} - \widehat{w}_{14}Q_3Q_4 \\ + 2\widehat{w}_{15}Q_3Q_{55} - \widehat{w}_{17}Q_4 - \widehat{w}_{18}Q_{12}Q_4 + \widehat{w}_{19}Q_{11}Q_4 - \widehat{w}_{17}Q_2Q_4 \\ - \widehat{w}_{22}Q_{12}Q_3Q_4 + \widehat{w}_{27}Q_{11}Q_3Q_4 - \widehat{w}_{24}Q_{11}Q_3^2 + \widehat{w}_{25}Q_{12}Q_3^2 + \widehat{w}_{23}Q_2Q_3^2 \\ - \widehat{w}_{26}Q_3Q_4 + 2\widehat{w}_{27}Q_{12}Q_3Q_4 - (\widehat{w}_{28} + \widehat{w}_{29})Q_4Q_3^2 + \widehat{w}_{30}Q_3Q_4Q_{54} \\ - \widehat{w}_{30}Q_3Q_4Q_{56} - \widehat{w}_{31}Q_3Q_4Q_{53} - 2\widehat{w}_{22}Q_3Q_4Q_{55} + \widehat{w}_{15}Q_{12}Q_3 \end{array} \right) (\ddot{\zeta}_d + K_{d1}(\dot{\zeta}_d - \dot{\zeta}) + K_{p1}(\zeta_d - \zeta))$$

$$\begin{aligned} & + 2\widehat{w}_{32}Q_{37}Q_4^2 + \widehat{w}_{33}Q_{38}Q_4^2 + \widehat{w}_{33}Q_{36}Q_4^2 + 2\widehat{w}_{32}Q_{45}Q_4^2 + \widehat{w}_{32}Q_{47}Q_4^2 + \widehat{w}_{33}Q_{37}Q_4^2 - 4\widehat{w}_{21}Q_{12}Q_3Q_{45} \\ & - \widehat{w}_{35}Q_{39}Q_4^2 + \widehat{w}_{36}Q_{37}Q_4^2 + \widehat{w}_{37}Q_{32}Q_4^2 - \widehat{w}_{22}Q_{54}Q_4^2 + \widehat{w}_{39}Q_{46}Q_4^2 - \widehat{w}_{18}Q_{17}Q_4 + 2\widehat{w}_{18}Q_{13}Q_4 + 2\widehat{w}_{18}Q_4Q_{60} \\ & + 4\widehat{w}_{18}Q_4Q_{65} - \widehat{w}_{18}Q_4Q_{73} + \widehat{w}_{18}Q_4Q_{84} - \widehat{w}_{40}Q_{15}Q_4 + 2\widehat{w}_{40}Q_4Q_{59} + \widehat{w}_{19}Q_{16}Q_4 - \widehat{w}_{19}Q_{18}Q_4 - 2\widehat{w}_{40}Q_4Q_{66} \\ & - \widehat{w}_{42}Q_4Q_{63} + \widehat{w}_{17}Q_{14}Q_4 - \widehat{w}_{44}Q_4Q_{85} - \widehat{w}_{19}Q_4Q_{61} - \widehat{w}_{19}Q_4Q_{62} - 2\widehat{w}_{19}Q_4Q_{64} + \widehat{w}_{17}Q_4Q_{77} - \widehat{w}_{21}Q_3Q_4Q_{73} \\ & + \widehat{w}_{59}Q_3^2Q_5 + \widehat{w}_{60}Q_3Q_5 + \widehat{w}_{60}Q_3^2Q_5 + \widehat{w}_{62}Q_3Q_{39} - (\widehat{w}_{63} + 2\widehat{w}_{67})Q_3Q_{37} - \widehat{w}_{66}Q_3Q_{38} - \widehat{w}_{66}Q_3Q_6 - 2\widehat{w}_{67}Q_3Q_{45} \\ & - \widehat{w}_{67}Q_3Q_{47} - \widehat{w}_{66}Q_3Q_7 - \widehat{w}_{68}Q_3Q_{46} - \widehat{w}_{64}Q_3Q_{52} + \widehat{w}_{30}Q_3^2Q_{39} - \widehat{w}_{69}Q_3Q_{39}Q_{54} + \widehat{w}_{69}Q_3Q_{39}Q_{56} + \widehat{w}_{52}Q_{15}Q_3^2 \\ & - 2\widehat{w}_{52}Q_3^2Q_{59} - \widehat{w}_{24}Q_{16}Q_3^2 + \widehat{w}_{24}Q_{18}Q_3^2 + 2\widehat{w}_{52}Q_{66}Q_3^2 - 2\widehat{w}_{52}Q_{13}Q_3^2 + \widehat{w}_{25}Q_{17}Q_3^2 + \widehat{w}_{54}Q_3^2Q_{63} - \widehat{w}_{23}Q_3^2Q_{14} \\ & + \widehat{w}_{56}Q_{85}Q_3^2 + \widehat{w}_{24}Q_{61}Q_3^2 + \widehat{w}_{24}Q_{62}Q_3^2 + 2\widehat{w}_{24}Q_{64}Q_3^2 - 2\widehat{w}_{25}Q_{60}Q_3^2 - 4\widehat{w}_{25}Q_{65}Q_3^2 + \widehat{w}_{25}Q_{73}Q_3^2 - \widehat{w}_{25}Q_{84}Q_3^2 \\ & - \widehat{w}_{23}Q_{77}Q_3^2 + \widehat{w}_{27}Q_{11}Q_3Q_{38} + (2\widehat{w}_{27} - \widehat{w}_{22})Q_{12}Q_3Q_{38} - \widehat{w}_{71}Q_3Q_5Q_{54} + \widehat{w}_{71}Q_3Q_5Q_{56} - \widehat{w}_{70}Q_{11}Q_3Q_5 \\ & + (2\widehat{w}_{27} - \widehat{w}_{22})Q_{12}Q_3Q_5 - \widehat{w}_{21}Q_3Q_5Q_{53} + (-2\widehat{w}_{21} + 4\widehat{w}_{22})Q_{12}Q_3Q_{37} + (2\widehat{w}_{27} + 2\widehat{w}_{22})Q_{11}Q_3Q_6 \\ & - (4\widehat{w}_{21} + 2\widehat{w}_{97})Q_{12}Q_3Q_6 - 2\widehat{w}_{21}Q_{12}Q_3Q_{47} + \widehat{w}_{27}Q_{12}Q_3Q_7 + (-\widehat{w}_{76} - 2\widehat{w}_{81} - \widehat{w}_{82} - 2\widehat{w}_{20} + 4\widehat{w}_{22})Q_3Q_{45}Q_{55} \\ & - (\widehat{w}_{76} + \widehat{w}_{84})Q_3Q_{47}Q_{55} + 2\widehat{w}_{73}Q_3Q_{37}Q_{55} + \widehat{w}_{80}Q_3Q_5Q_{55} - (\widehat{w}_{78} + \widehat{w}_{29})Q_{11}Q_3Q_7 - (\widehat{w}_{78} + \widehat{w}_{29})Q_3^2Q_{39} \\ & - (2\widehat{w}_{81} + 2\widehat{w}_{20})Q_3^2Q_{37} - (\widehat{w}_{81} + \widehat{w}_{20})Q_3^2Q_{52} - (\widehat{w}_{78} + \widehat{w}_{86})Q_3^2Q_{38} - \widehat{w}_{90}Q_3^2Q_7 + (2\widehat{w}_{30} - \widehat{w}_{46})Q_3^2Q_6 \\ & + (-\widehat{w}_{89} + 2\widehat{w}_{46})Q_3^2Q_{45} + (\widehat{w}_{89} - 2\widehat{w}_{46})Q_3^2Q_{47} + (-\widehat{w}_{91} + 2\widehat{w}_{22})Q_{11}Q_3Q_{39} - \widehat{w}_{93}Q_3Q_{37}Q_{54} - \widehat{w}_{41}Q_{19}Q_4 \\ & + (\widehat{w}_{92} - 2\widehat{w}_{101})Q_{12}Q_3Q_{39} + \widehat{w}_{93}Q_3Q_{37}Q_{56} - \widehat{w}_{95}Q_3Q_{39}Q_{53} + (-2\widehat{w}_{95} + \widehat{w}_{99})Q_{11}Q_3Q_{37} + \widehat{w}_{97}Q_3Q_{37}Q_{53} \\ & - \widehat{w}_{30}Q_3Q_{52}Q_{54} + \widehat{w}_{30}Q_3Q_{52}Q_{56} + 2\widehat{w}_{99}Q_{11}Q_3Q_{52} - \widehat{w}_{100}Q_3Q_{52}Q_{53} - \widehat{w}_{100}Q_3Q_{38}Q_{54} - \widehat{w}_{100}Q_3Q_{38}Q_{56} \\ & + 2\widehat{w}_{46}Q_3Q_{52}Q_{55} + \widehat{w}_{30}Q_3Q_{38}Q_{53} - \widehat{w}_{30}Q_3Q_{53}Q_6 + 2\widehat{w}_{46}Q_3Q_{53}Q_7 - 2\widehat{w}_{46}Q_3Q_{39}Q_{55} + \widehat{w}_{46}Q_3Q_{54}Q_6 \\ & - \widehat{w}_{46}Q_3Q_{56}Q_6 - 2\widehat{w}_{101}Q_3Q_{45}Q_{54} - \widehat{w}_{101}Q_3Q_{45}Q_{56} + \widehat{w}_{30}Q_3Q_{47}Q_{54} + 2\widehat{w}_{22}Q_3Q_{47}Q_{56} - \widehat{w}_{30}Q_3Q_{45}Q_{53} \\ & + \widehat{w}_{22}Q_3Q_{47}Q_{53} + \widehat{w}_{80}Q_3Q_{54}Q_7 + (\widehat{w}_{86} - \widehat{w}_{20})Q_{11}Q_3Q_{45} + 2\widehat{w}_{86}Q_3Q_{56}Q_7 - \widehat{w}_{102}Q_{11}Q_3Q_{47} - 2\widehat{w}_{22}Q_3Q_{46}Q_{54} \\ & - 2\widehat{w}_{22}Q_3Q_{46}Q_{56} - 2\widehat{w}_{22}Q_3Q_{55}Q_7 - 2\widehat{w}_{20}Q_3Q_{46}Q_{55} - \widehat{w}_{34}Q_{32}Q_4^2 + \widehat{w}_{38}Q_4^2Q_{51} + \widehat{w}_{41}Q_4Q_{20} - \widehat{w}_{41}Q_4Q_{80} \\ & + \widehat{w}_{41}Q_4Q_{82} + \widehat{w}_{43}Q_4Q_{81} - \widehat{w}_{45}Q_4Q_{83} + \widehat{w}_{61}Q_3Q_{32} - \widehat{w}_{65}Q_3Q_{51} + \widehat{w}_{53}Q_{19}Q_3^2 - \widehat{w}_{53}Q_{20}Q_3^2 + \widehat{w}_{53}Q_{80}Q_3^2 \\ & - \widehat{w}_{53}Q_{82}Q_3^2 - \widehat{w}_{55}Q_{81}Q_3^2 + \widehat{w}_{57}Q_{83}Q_3^2 + (\widehat{w}_{74} + \widehat{w}_{79})Q_{32}Q_3^2 - (\widehat{w}_{77} + \widehat{w}_{85})Q_{51}Q_3^2 - \widehat{w}_{87}Q_3Q_{32}Q_{54} \\ & + \widehat{w}_{87}Q_3Q_{32}Q_{56} + \widehat{w}_{88}Q_{11}Q_3Q_{32} + (2\widehat{w}_{88} - \widehat{w}_{47})Q_{12}Q_3Q_{32} - \widehat{w}_{103}Q_3Q_{32}Q_{53} - \widehat{w}_{94}Q_3Q_{51}Q_{54} + \widehat{w}_{94}Q_3Q_{51}Q_{56} \\ & - \widehat{w}_{96}Q_{11}Q_3Q_{51} + (-2\widehat{w}_{96} + \widehat{w}_{49})Q_{12}Q_3Q_{51} + \widehat{w}_{98}Q_3Q_{51}Q_{53} + 2\widehat{w}_{47}Q_3Q_{32}Q_{55} - 2\widehat{w}_{49}Q_3Q_{51}Q_{55} \end{aligned}$$

(۳۵-۴)

سپس معادله (۳۵-۴) در معادله (۳۱-۴) جایگذاری می‌نماییم.



$$\begin{aligned}
& +2(w_{32} - \widehat{w}_{32})Q_{37}Q_4^2 + (w_{33} - \widehat{w}_{33})Q_{38}Q_4^2 + (w_{33} - \widehat{w}_{33})Q_6Q_4^2 + 2(w_{32} - \widehat{w}_{32})Q_{45}Q_4^2 + (w_{32} - \widehat{w}_{32})Q_{47}Q_4^2 \\
& + (w_{33} - \widehat{w}_{33})Q_7Q_4^2 - 4(w_{21} - \widehat{w}_{21})Q_{12}Q_3Q_{45} - (w_{35} - \widehat{w}_{35})Q_{39}Q_4^2 + (w_{36} - \widehat{w}_{36})Q_{37}Q_4^2 + (w_{37} - \widehat{w}_{37})Q_{52}Q_4^2 \\
& - (w_{22} - \widehat{w}_{22})Q_5Q_4^2 + (w_{39} - \widehat{w}_{39})Q_{46}Q_4^2 - (w_{18} - \widehat{w}_{18})Q_{17}Q_4 + 2(w_{18} - \widehat{w}_{18})Q_{13}Q_4 + 2(w_{18} - \widehat{w}_{18})Q_4Q_{60} \\
& + 4(w_{18} - \widehat{w}_{18})Q_4Q_{65} - (w_{18} - \widehat{w}_{18})Q_4Q_{73} + (w_{18} - \widehat{w}_{18})Q_4Q_{84} - (w_{40} - \widehat{w}_{40})Q_{15}Q_4 + 2(w_{40} - \widehat{w}_{40})Q_4Q_{59} \\
& + (w_{19} - \widehat{w}_{19})Q_{16}Q_4 - (w_{19} - \widehat{w}_{19})Q_{18}Q_4 - 2(w_{40} - \widehat{w}_{40})Q_4Q_{66} - (w_{42} - \widehat{w}_{42})Q_4Q_{63} + (w_{17} - \widehat{w}_{17})Q_{14}Q_4 \\
& - (w_{44} - \widehat{w}_{44})Q_4Q_{85} - (w_{19} - \widehat{w}_{19})Q_4Q_{61} - (w_{19} - \widehat{w}_{19})Q_4Q_{62} - 2(w_{19} - \widehat{w}_{19})Q_4Q_{64} + (w_{17} - \widehat{w}_{17})Q_4Q_{77} \\
& - (w_{21} - \widehat{w}_{21})Q_3Q_4Q_{73} + (w_{59} - \widehat{w}_{59})Q_3^2Q_5 + (w_{60} - \widehat{w}_{60})Q_3Q_5 + (w_{60} - \widehat{w}_{60})Q_3^2Q_5 + (w_{62} - \widehat{w}_{62})Q_3Q_{39} \\
& - ((w_{63} - \widehat{w}_{63}) + 2(w_{67} - \widehat{w}_{67}))Q_3Q_{37} - (w_{66} - \widehat{w}_{66})Q_3Q_{38} - (w_{66} - \widehat{w}_{66})Q_3Q_6 - 2(w_{67} - \widehat{w}_{67})Q_3Q_{45} \\
& - (w_{67} - \widehat{w}_{67})Q_3Q_{47} - (w_{66} - \widehat{w}_{66})Q_3Q_7 - (w_{68} - \widehat{w}_{68})Q_3Q_{46} - (w_{64} - \widehat{w}_{64})Q_3Q_{52} + (w_{30} - \widehat{w}_{30})Q_3^2Q_{39} \\
& - (w_{69} - \widehat{w}_{69})Q_3Q_{39}Q_{54} + (w_{69} - \widehat{w}_{69})Q_3Q_{39}Q_{56} + (w_{52} - \widehat{w}_{52})Q_{15}Q_3^2 - 2(w_{52} - \widehat{w}_{52})Q_3^2Q_{59} \\
& - (w_{24} - \widehat{w}_{24})Q_{16}Q_3^2 + (w_{24} - \widehat{w}_{24})Q_{18}Q_3^2 + 2(w_{52} - \widehat{w}_{52})Q_{66}Q_3^2 - 2(w_{52} - \widehat{w}_{52})Q_{13}Q_3^2 + (w_{25} - \widehat{w}_{25})Q_{17}Q_3^2 \\
& + (w_{54} - \widehat{w}_{54})Q_3^2Q_{63} - (w_{23} - \widehat{w}_{23})Q_3^2Q_{14} + (w_{56} - \widehat{w}_{56})Q_{85}Q_3^2 + (w_{24} - \widehat{w}_{24})Q_{61}Q_3^2 + (w_{24} - \widehat{w}_{24})Q_{62}Q_3^2 \\
& + 2(w_{24} - \widehat{w}_{24})Q_{64}Q_3^2 - 2(w_{25} - \widehat{w}_{25})Q_{60}Q_3^2 - 4(w_{25} - \widehat{w}_{25})Q_{65}Q_3^2 + (w_{25} - \widehat{w}_{25})Q_{73}Q_3^2 - (w_{25} - \widehat{w}_{25})Q_{84}Q_3^2 \\
& - (w_{23} - \widehat{w}_{23})Q_{77}Q_3^2 + (w_{27} - \widehat{w}_{27})Q_{11}Q_3Q_{38} + (2(w_{27} - \widehat{w}_{27}) - (w_{22} - \widehat{w}_{22}))Q_{12}Q_3Q_{38} - (w_{71} - \widehat{w}_{71})Q_3Q_5Q_{54} \\
& + (w_{71} - \widehat{w}_{71})Q_3Q_5Q_{56} - (w_{70} - \widehat{w}_{70})Q_{11}Q_3Q_5 + (2(w_{27} - \widehat{w}_{27}) - (w_{22} - \widehat{w}_{22}))Q_{12}Q_3Q_5 - (w_{21} - \widehat{w}_{21})Q_3Q_5Q_{53} \\
& + (-2(w_{21} - \widehat{w}_{21}) + 4(w_{22} - \widehat{w}_{22}))Q_{12}Q_3Q_{37} + (2(w_{27} - \widehat{w}_{27}) + 2(w_{22} - \widehat{w}_{22}))Q_{11}Q_3Q_6 - 2(w_{21} - \widehat{w}_{21})Q_{12}Q_3Q_{47} \\
& - (4(w_{21} - \widehat{w}_{21}) + 2(w_{97} - \widehat{w}_{97}))Q_{12}Q_3Q_6 + (w_{27} - \widehat{w}_{27})Q_{12}Q_3Q_7 - ((w_{78} - \widehat{w}_{78}) + (w_{29} - \widehat{w}_{29}))Q_{11}Q_3Q_7 \\
& + (- (w_{76} - \widehat{w}_{76}) - 2(w_{81} - \widehat{w}_{81}) - (w_{82} - \widehat{w}_{82}) - 2(w_{20} - \widehat{w}_{20}) + 4(w_{22} - \widehat{w}_{22}))Q_3Q_{45}Q_{55} + (w_{80} - \widehat{w}_{80})Q_3Q_5Q_{55} \\
& - ((w_{76} - \widehat{w}_{76}) + (w_{84} - \widehat{w}_{84}))Q_3Q_{47}Q_{55} + 2(w_{73} - \widehat{w}_{73})Q_3Q_{37}Q_{55} - ((w_{78} - \widehat{w}_{78}) + (w_{29} - \widehat{w}_{29}))Q_3^2Q_{39} \\
& - (w_{30} - \widehat{w}_{30})Q_3Q_{52}Q_{54} + (w_{30} - \widehat{w}_{30})Q_3Q_{52}Q_{56} + 2(w_{99} - \widehat{w}_{99})Q_{11}Q_3Q_{52} - (w_{100} - \widehat{w}_{100})Q_3Q_{52}Q_{53} \\
& - (w_{100} - \widehat{w}_{100})Q_3Q_{38}Q_{54} - (w_{100} - \widehat{w}_{100})Q_3Q_{38}Q_{56} + 2(w_{46} - \widehat{w}_{46})Q_3Q_{52}Q_{55} + (w_{30} - \widehat{w}_{30})Q_3Q_{38}Q_{53} \\
& - (w_{30} - \widehat{w}_{30})Q_3Q_{53}Q_6 + 2(w_{46} - \widehat{w}_{46})Q_3Q_{53}Q_7 - 2(w_{46} - \widehat{w}_{46})Q_3Q_{39}Q_{55} + (w_{46} - \widehat{w}_{46})Q_3Q_{54}Q_6 \\
& - (w_{46} - \widehat{w}_{46})Q_3Q_{56}Q_6 - 2(w_{101} - \widehat{w}_{101})Q_3Q_{45}Q_{54} - (w_{101} - \widehat{w}_{101})Q_3Q_{45}Q_{56} + (w_{30} - \widehat{w}_{30})Q_3Q_{47}Q_{54} \\
& + 2(w_{22} - \widehat{w}_{22})Q_3Q_{47}Q_{56} - (w_{30} - \widehat{w}_{30})Q_3Q_{45}Q_{53} + (w_{22} - \widehat{w}_{22})Q_3Q_{47}Q_{53} + (w_{80} - \widehat{w}_{80})Q_3Q_{54}Q_7 \\
& + ((w_{86} - \widehat{w}_{86}) - (w_{20} - \widehat{w}_{20}))Q_{11}Q_3Q_{45} + 2(w_{86} - \widehat{w}_{86})Q_3Q_{56}Q_7 - (\widehat{w}_{102} - \widehat{w}_{102})Q_{11}Q_3Q_{47} \\
& - 2(w_{22} - \widehat{w}_{22})Q_3Q_{46}Q_{54} + (w_{87} - \widehat{w}_{87})Q_3Q_{32}Q_{56} + (2(w_{88} - \widehat{w}_{88}) - (w_{47} - \widehat{w}_{47}))Q_{12}Q_3Q_{32} \\
& + (w_{88} - \widehat{w}_{88})Q_{11}Q_3Q_{32} - (w_{103} - \widehat{w}_{103})Q_3Q_{32}Q_{53} - (w_{94} - \widehat{w}_{94})Q_3Q_{51}Q_{54} + (w_{94} - \widehat{w}_{94})Q_3Q_{51}Q_{56} \\
& - (w_{96} - \widehat{w}_{96})Q_{11}Q_3Q_{51} + (-2(w_{96} - \widehat{w}_{96}) + (w_{49} - \widehat{w}_{49}))Q_{12}Q_3Q_{51} + (w_{98} - \widehat{w}_{98})Q_3Q_{51}Q_{53} \\
& + 2(w_{47} - \widehat{w}_{47})Q_3Q_{32}Q_{55} - 2(w_{49} - \widehat{w}_{49})Q_3Q_{51}Q_{55} = \\
& \left( \begin{aligned}
& \widehat{w}_1 + (\widehat{w}_2 + \widehat{w}_1 + \widehat{w}_7)Q_3 - \widehat{w}_3Q_{54} + \widehat{w}_3Q_{56} - \widehat{w}_4Q_{11} - (2\widehat{w}_4 + \widehat{w}_6)Q_{12} \\
& + \widehat{w}_5Q_{53} + 2\widehat{w}_6Q_{55} - (\widehat{w}_{10} + \widehat{w}_{16})Q_4^2 + (\widehat{w}_8 + \widehat{w}_9 + \widehat{w}_{23})Q_3^2 - \widehat{w}_{11}Q_3Q_{54} \\
& + \widehat{w}_{11}Q_3Q_{56} - \widehat{w}_{12}Q_{11}Q_3 - 2\widehat{w}_{12}Q_{12}Q_3 + \widehat{w}_{13}Q_3Q_{53} - \widehat{w}_{14}Q_3Q_4 \\
& + 2\widehat{w}_{15}Q_3Q_{55} - \widehat{w}_{17}Q_4 - \widehat{w}_{18}Q_{12}Q_4 + \widehat{w}_{19}Q_{11}Q_4 - \widehat{w}_{17}Q_{12}Q_4 \\
& - \widehat{w}_{22}Q_{12}Q_3Q_4 + \widehat{w}_{27}Q_{11}Q_3Q_4 - \widehat{w}_{24}Q_{11}Q_3^2 + \widehat{w}_{25}Q_{12}Q_3^2 + \widehat{w}_{23}Q_2Q_3^2 \\
& - \widehat{w}_{26}Q_3Q_4 + 2\widehat{w}_{27}Q_{12}Q_3Q_4 - (\widehat{w}_{28} + \widehat{w}_{29})Q_4Q_3^2 + \widehat{w}_{30}Q_3Q_4Q_{54} \\
& - \widehat{w}_{30}Q_3Q_4Q_{56} - \widehat{w}_{31}Q_3Q_4Q_{53} - 2\widehat{w}_{22}Q_3Q_4Q_{55} + \widehat{w}_{15}Q_{12}Q_3
\end{aligned} \right) ((\ddot{\zeta} - \ddot{\zeta}_d) + K_{d1}(\dot{\zeta}_d - \dot{\zeta}) + K_{p1}(\zeta_d - \zeta))
\end{aligned}$$

رابطه‌ی (۴-۳۶) را بر اساس روابط (۴-۳۲)، (۴-۳۳) و (۴-۳۴) بازنویسی می‌نماییم.

$$[P \quad \hat{P}]Y = \left( \begin{array}{l} \hat{w}_1 + (\hat{w}_2 + \hat{w}_1 + \hat{w}_7)Q_3 - \hat{w}_3Q_{54} + \hat{w}_3Q_{56} - \hat{w}_4Q_{11} - (2\hat{w}_4 + \hat{w}_6)Q_{12} \\ + \hat{w}_5Q_{53} + 2\hat{w}_6Q_{55} - (\hat{w}_{10} + \hat{w}_{16})Q_4^2 + (\hat{w}_8 + \hat{w}_9 + \hat{w}_{23})Q_3^2 - \hat{w}_{11}Q_3Q_{54} \\ + \hat{w}_{11}Q_3Q_{56} - \hat{w}_{12}Q_{11}Q_3 - 2\hat{w}_{12}Q_{12}Q_3 + \hat{w}_{13}Q_3Q_{53} - \hat{w}_{14}Q_3Q_4 \\ + 2\hat{w}_{15}Q_3Q_{55} - \hat{w}_{17}Q_4 - \hat{w}_{18}Q_{12}Q_4 + \hat{w}_{19}Q_{11}Q_4 - \hat{w}_{17}Q_2Q_4 \\ - \hat{w}_{22}Q_{12}Q_3Q_4 + \hat{w}_{27}Q_{11}Q_3Q_4 - \hat{w}_{24}Q_{11}Q_3^2 + \hat{w}_{25}Q_{12}Q_3^2 + \hat{w}_{23}Q_2Q_3^2 \\ - \hat{w}_{26}Q_3Q_4 + 2\hat{w}_{27}Q_{12}Q_3Q_4 - (\hat{w}_{28} + \hat{w}_{29})Q_4Q_3^2 + \hat{w}_{30}Q_3Q_4Q_{54} \\ - \hat{w}_{30}Q_3Q_4Q_{56} - \hat{w}_{31}Q_3Q_4Q_{53} - 2\hat{w}_{22}Q_3Q_4Q_{55} + \hat{w}_{15}Q_{12}Q_3 \end{array} \right) ((\ddot{\zeta} - \ddot{\zeta}_d) + K_{d1}(\dot{\zeta}_d - \dot{\zeta}) + K_{p1}(\zeta_d - \zeta)) \quad (۴-۳۷)$$

پارامتر میزان خطای انحراف خودرو به طرفین و جلو-عقب و همچنین مشتق مرتبه اول و دوم خطا

را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$e_1 = \zeta - \zeta_d \quad (۴-۳۸)$$

$$\dot{e}_1 = \dot{\zeta} - \dot{\zeta}_d \quad (۴-۳۹)$$

$$\ddot{e}_1 = \ddot{\zeta} - \ddot{\zeta}_d \quad (۴-۴۰)$$

معادله (۴-۳۷) را بازنویسی می‌نماییم:

$$[P \quad \hat{P}]Y = J_1((\ddot{e}_1) + K_{d1}(\dot{e}_1) + K_{p1}(e_1)) \quad (۴-۴۱)$$

که ضریب  $J_1$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_1 = \left( \begin{array}{l} \hat{w}_1 + (\hat{w}_2 + \hat{w}_1 + \hat{w}_7)Q_3 - \hat{w}_3Q_{54} + \hat{w}_3Q_{56} - \hat{w}_4Q_{11} - (2\hat{w}_4 + \hat{w}_6)Q_{12} \\ + \hat{w}_5Q_{53} + 2\hat{w}_6Q_{55} - (\hat{w}_{10} + \hat{w}_{16})Q_4^2 + (\hat{w}_8 + \hat{w}_9 + \hat{w}_{23})Q_3^2 - \hat{w}_{11}Q_3Q_{54} \\ + \hat{w}_{11}Q_3Q_{56} - \hat{w}_{12}Q_{11}Q_3 - 2\hat{w}_{12}Q_{12}Q_3 + \hat{w}_{13}Q_3Q_{53} - \hat{w}_{14}Q_3Q_4 \\ + 2\hat{w}_{15}Q_3Q_{55} - \hat{w}_{17}Q_4 - \hat{w}_{18}Q_{12}Q_4 + \hat{w}_{19}Q_{11}Q_4 - \hat{w}_{17}Q_2Q_4 \\ - \hat{w}_{22}Q_{12}Q_3Q_4 + \hat{w}_{27}Q_{11}Q_3Q_4 - \hat{w}_{24}Q_{11}Q_3^2 + \hat{w}_{25}Q_{12}Q_3^2 + \hat{w}_{23}Q_2Q_3^2 \\ - \hat{w}_{26}Q_3Q_4 + 2\hat{w}_{27}Q_{12}Q_3Q_4 - (\hat{w}_{28} + \hat{w}_{29})Q_4Q_3^2 + \hat{w}_{30}Q_3Q_4Q_{54} \\ - \hat{w}_{30}Q_3Q_4Q_{56} - \hat{w}_{31}Q_3Q_4Q_{53} - 2\hat{w}_{22}Q_3Q_4Q_{55} + \hat{w}_{15}Q_{12}Q_3 \end{array} \right) \quad (۴-۴۲)$$

داریم:

$$\ddot{e}_1 = -K_d \dot{e}_1 - K_p e_1 + \frac{1}{J_1} [P - \hat{P}]^T Y \quad (43-4)$$

متغیرهای حالت  $x_1 = e_1$  و  $x_2 = \dot{e}_1$  را معرفی و در رابطه‌ی (۴۳-۴) جایگذاری می‌نماییم. در مدل فضای حالت داریم:

$$\dot{X} = AX + BW \quad (44-4)$$

که  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ،  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}$ ، و  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  می‌باشد. همچنین داریم:

$$W = \frac{1}{\hat{I} \cos \theta^2 + \hat{b}} [P - \hat{P}]^T Y \quad (45-4)$$

برای تعیین قانون بروز شونده، تابع مثبت معین لیاپانوف را پیشنهاد می‌دهیم:

$$V = \frac{1}{2} X^T S X + \frac{1}{2\gamma} [P - \hat{P}]^T [P - \hat{P}] \quad (46-4)$$

که  $S$  ماتریس مثبت معین متقارن و  $\gamma$  ضریب مثبت فرض می‌شود. با مشتق‌گیری از  $V$  داریم:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{X}^T S X + \frac{1}{2} X^T S \dot{X} - \frac{1}{\gamma} [P - \hat{P}]^T \dot{\hat{P}} \quad (47-4)$$

با جایگذاری (۴۱-۴) در (۴۷-۴) داریم:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} X^T (A^T S + S A) X + X^T S B W - \frac{1}{\gamma} [P - \hat{P}]^T \dot{\hat{P}} \quad (48-4)$$

ماتریس  $S$  با حل معادله ریکاتی، برای ماتریس مثبت معین مشخص  $Q$  محاسبه می‌شود. این معادله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^T S + S A = -Q \quad (49-4)$$

با جایگذاری (۴۵-۴) و (۴۹-۴) در رابطه (۴۸-۴) داریم:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} X^T Q X + [P - \hat{P}]^T \left( \frac{1}{J_1} X^T S B Y - \frac{1}{\gamma} \dot{\hat{P}} \right) \quad (50-4)$$

برای پایداری بر اساس روش لیانوف، بایستی  $\dot{V}$  منفی باشد. برای منظور، عبارت  $-\frac{1}{2} X^T Q X$  به طور ذاتی منفی می‌باشد و  $X$  به سمت صفر میل می‌کند اگر:

$$\dot{\hat{P}} = \gamma (J_1)^{-1} X^T S B Y \quad (51-4)$$

با محدود نگاه داشتن پارامترهای  $J_1$  که در رابطه‌ی (4-42) معرفی شده است، می‌توان در نظر گرفت که  $J_1 > 0$  می‌باشد. بنابراین پارامترهای سیستم به صورت زیر بروز رسانی می‌شود:

$$\hat{P} = \gamma \int_0^t X^T S B \left( (J_1)^{-1} Y \right) d\delta + \hat{P}(0) \quad (52-4)$$

بدین ترتیب تمامی پارامترهای  $U_\psi$  مشخص شده و در هر مرحله بروز می‌شود. سپس برای کنترل سیگنال گشتاور کنترلی  $T_\psi$ ، از یک حلقه‌ی داخلی استفاده شده که از رابطه (4-31) محاسبه می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_\psi = \frac{U_\psi}{\left( \begin{array}{l} +W_{104} + (W_{105} + W_{106} + W_{111})Q_3 - W_{107}Q_{54} + W_{107}Q_{56} - W_{108}Q_{11} + (W_{110} - 2W_{108})Q_{12} \\ +W_{109}Q_{53} + 2W_{110}Q_{55} + (W_{112} + W_{113})Q_3^2 - W_{114}Q_4^2 - W_{115}Q_3Q_{54} + W_{115}Q_3Q_{56} \\ -W_{116}Q_{11}Q_3 - 2W_{116}Q_{12}Q_3 + W_{117}Q_3Q_{53} - W_{118}Q_3Q_4 + W_{119}Q_{12}Q_3 + 2W_{119}Q_3Q_{55} \end{array} \right)} \quad (53-4)$$

به طور مشابه معادله (4-24) را نیز کنترل می‌نماییم. در فصل بعد نتایج شبیه سازی دینامیکی و نتایج کنترل تطبیقی ارائه می‌شود.

## فصل پنجم

نتایج شبیه سازی و بررسی آنها

#### ۴-۱ مقدمه‌ای بر نتایج

در این فصل نتایج شبیه‌سازی دینامیکی و اعمال کنترل تطبیقی بررسی می‌شود. در ابتدا صحت مدل‌سازی بررسی می‌شود که برای این منظور نتایج مدل دینامیکی را نسبت به تغییرات متغیرها بررسی نموده و آن را با فیزیک مسئله مقایسه می‌نماییم. همچنین نتایج مدل‌سازی با نتایج اوکی و ناکامورا مقایسه می‌شود که صحت مدل را تصدیق می‌نماید. سیستم خودروی تک‌چرخ ذاتا ناپایدار بوده و بدون کنترل به هیچ وجه متعادل نمی‌باشد. در ادامه کنترل تطبیقی بر روی مدل اعمال می‌شود. هدف از کنترل قائم نگاه داشتن خودرو و حفظ پایداری آن می‌باشد. برای این منظور انحراف محل استقرار نشین به سمت جلو-عقب حول راستای پیچ در کمترین زمان ممکن بایستی صفر شود. همچنین انحراف خودرو به چپ-راست حول محور رول نیز بایستی در کمترین زمان ممکن به سمت صفر میل نماید.

برای نمایش قدرت کنترل تطبیقی در کنترل سیستم و غلبه بر عدم قطعیت‌های پارامتری، نتایج آن را با کنترل PD مقایسه می‌نماییم. مزایا و معایب هر یک بیان شده و در نهایت پیشنهاداتی در مورد پایان‌نامه ارائه می‌شود.

#### ۴-۲ نتایج شبیه‌سازی دینامیکی

یکی از راه‌های بررسی صحت مدل‌سازی دینامیکی، شبیه‌سازی آن در نرم افزار سیمولینک متلب می‌باشد. که با بررسی پاسخ سیستم نسبت به تغییر پارامترها و متغیرهای سیستم و مطابقت دادن آن با فیزیک مسئله می‌توان صحت مدل‌سازی را بررسی نمود. برای این منظور اثر تغییرات متغیرها بر روی یکدیگر را بررسی می‌نماییم و همچنین با حذف تعدادی از متغیرها می‌توان مدل خودرو را، به مدلی ساده‌تر با دو یا سه درجه آزادی تبدیل نمود و با آنها مقایسه شود. توجه به این نکته ضروری است که در صورتی که سیستم به خوبی مدل نشود یا اشتباهی در محاسبات وجود داشته باشد، با تغییر یک متغیر ممکن است سایر متغیرها تغییرات شدید یا آنی داشته باشند یا در جواب معادلات نقطه تکین ایجاد شود که منجر به توقف شبیه‌سازی می‌شود. همچنین در صورت مدل‌سازی نادرست، پاسخ سیستم نسبت به فیزیک مسئله پاسخی غیر منطقی و نوسانی خواهد داشت.

برای شبیه‌سازی و بررسی نتایج از یک مثال عددی استفاده می‌شود. پارامترهای استفاده شده در این پایان‌نامه بر اساس مدل اوکی و ناکامورا می‌باشد [24]. پارامترهای خودرو تک‌چرخ بر اساس مرجع شماره

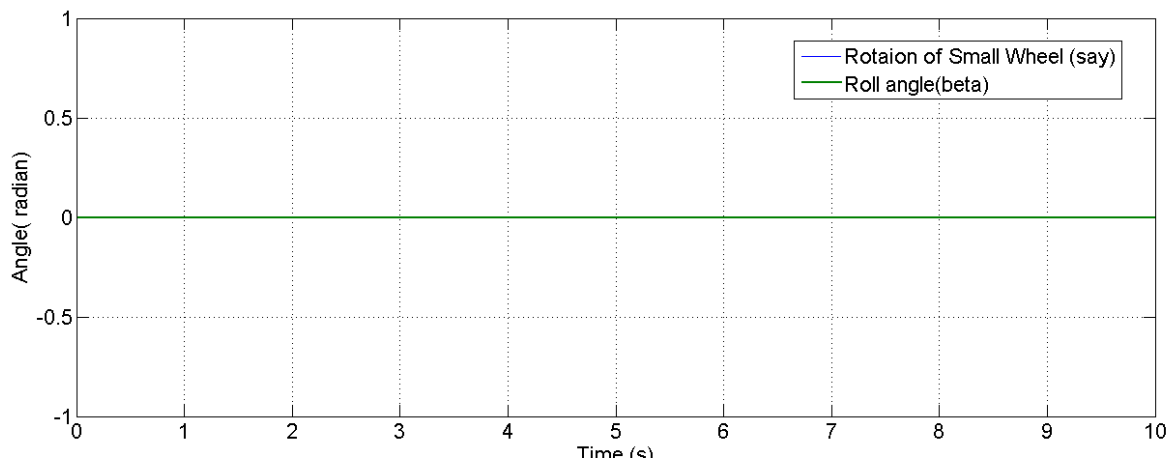
۲۴ در

جدول ۱-۵ معرفی شده است و مدل سیستم مطابق شکل ۱-۴ می‌باشد.

جدول ۱-۵ پارامترهای خودرو تک‌چرخ بر اساس مرجع شماره ۲۴

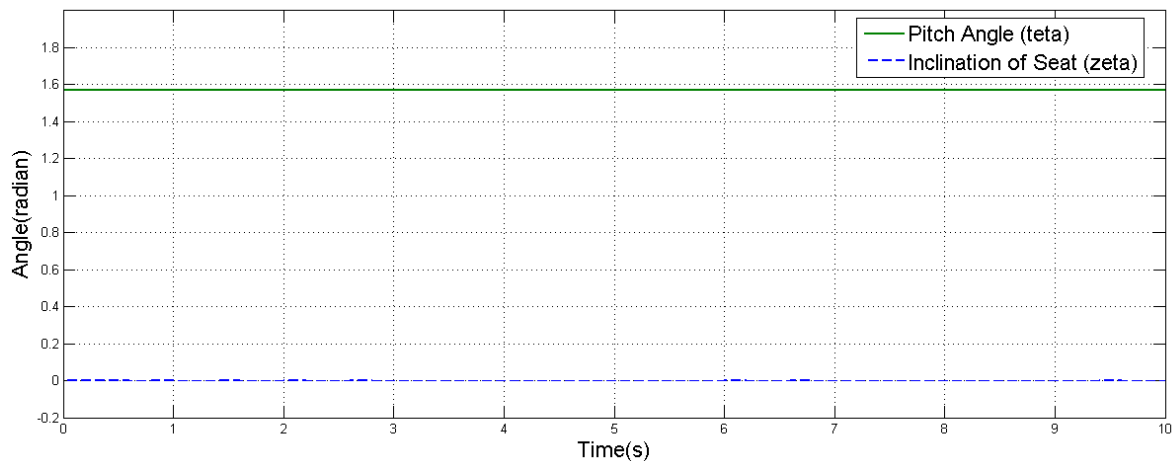
مقدار	پارامترهای خودروی تک‌چرخ	نماد
17.87 Kg	جرم محل استقرار سرنشین و شاسی	$m_s$
15.02 Kg	جرم چرخ بزرگ	$M$
0.1 Kg	جرم چرخ کوچک	$m$
0.025 m	شعاع چرخ بزرگ	$R$
0.15 m	شعاع چرخ کوچک	$r$
0.15 kgm <sup>2</sup>	ممان اینرسی چرخ بزرگ حول محور z	$I_{WBig z}$
0.13 kgm <sup>2</sup>	ممان اینرسی چرخ بزرگ حول محور x	$I_{WBig x}$
1.74 kgm <sup>2</sup>	ممان اینرسی چرخ کوچک حول محور z	$I_{Wsmall z}$
1.76 kgm <sup>2</sup>	ممان اینرسی چرخ کوچک حول محور x	$I_{Wsmall x}$
0.000625 kgm <sup>2</sup>	ممان اینرسی محل استقرار سرنشین حول محور z	$I_{S z}$
0.000125 kgm <sup>2</sup>	ممان اینرسی محل استقرار سرنشین حول محور x	$I_{S x}$
0.27 m	فاصله مرکز جرم محل استقرار سرنشین تا مرکز چرخ	$L$
9.81 m/s <sup>2</sup>	شتاب گرانشی زمین	$g$

به منظور شبیه‌سازی دینامیکی، ورودی‌های کنترلی را برابر صفر قرار می‌دهیم. در شکل ۱-۵ و شکل ۲-۵ به ترتیب دینامیک آزاد زاویه رول و زاویه چرخش چرخ کوچک و دینامیک آزاد زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین مشاهده می‌شود. دینامیک آزاد به معنی، شبیه‌سازی بدون اعمال هیچ گونه ورودی و اغتشاش به سیستم بوده که معادل حالت تعادل خودرو می‌باشد.



شکل ۱-۵ دینامیک آزاد زاویه رول و زاویه چرخش چرخ کوچک

همان طور که در شکل ۱-۵ مشاهده می‌شود، هر دو زاویه رول و زاویه چرخش چرخ کوچک مطابق انتظار برابر صفر می‌باشد که حالت تعادل خودرو برای این دو زاویه می‌باشد.

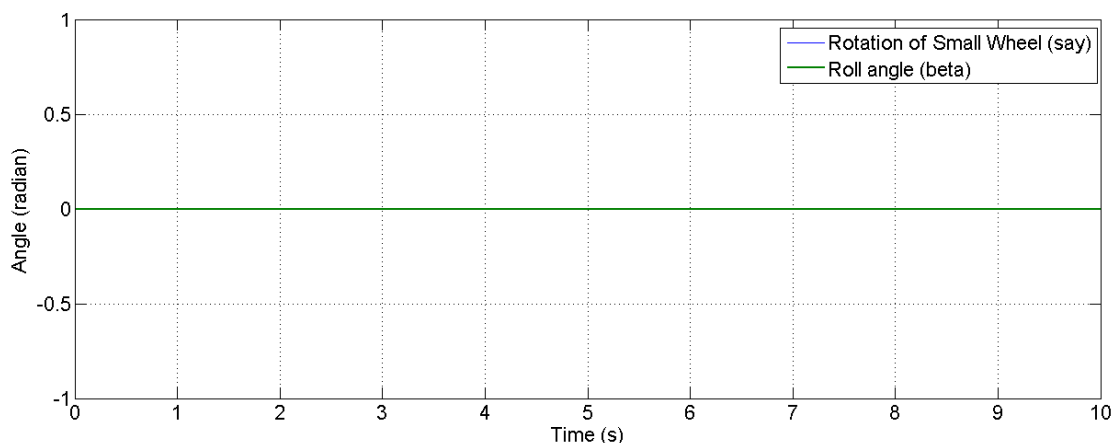


شکل ۲-۵ دینامیک آزاد زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین

در شکل ۲-۵ دینامیک آزاد زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین نسبت به راستای قائم نشان داده شده است. زاویه پیچ در حالت تعادل برابر  $\pi/2$  یا  $1/57$  می‌باشد. همچنین زاویه انحراف خودرو در حالت تعادل برابر صفر می‌باشد. که هر دو زاویه در شکل بالا نشان داده شده است. در مرحله بعد، با ثابت نگاه‌داشتن زاویه رول و زاویه چرخش چرخ کوچک و مشتقات مرتبه اول و دوم آن که به ترتیب بیانگر سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای می‌باشند، مدل چهار درجه آزادی خودرو به مدل دو درجه آزادی تبدیل می‌شود. نتایج مدل تبدیل شده به دو درجه آزادی در حالتی که محل استقرار

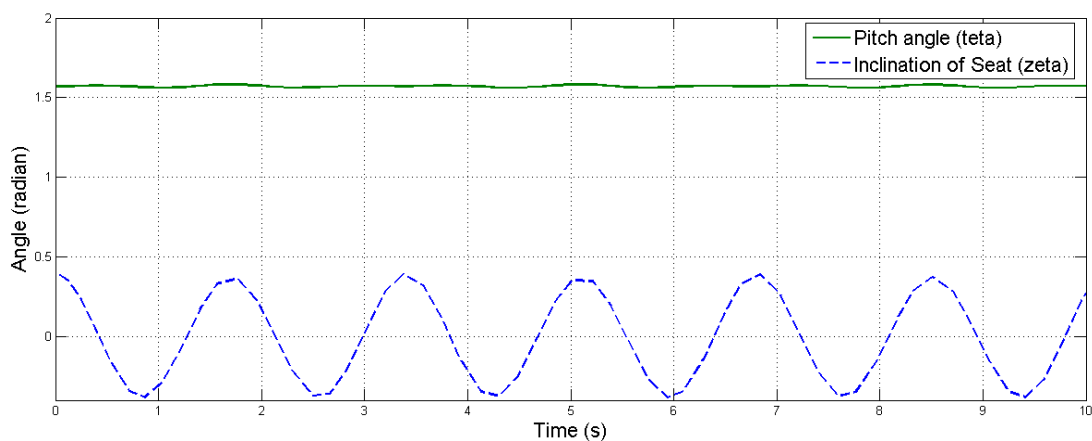


سرنشین به مقدار  $\pi/8$  رادیان یا  $22/5$  درجه منحرف شده است در شکل ۳-۵ و شکل ۴-۵ نشان داده شده است.



شکل ۳-۵ تغییرات زاویه رول و زاویه چرخش چرخ کوچک در مدل دو درجه آزادی

در شکل ۳-۵ تغییرات زاویه رول و زاویه چرخش چرخ کوچک در مدل تبدیل شده به دو درجه آزادی را مشاهده می‌نماییم که مطابق انتظار برابر صفر می‌باشد و هیچ گونه تغییراتی در آن نداریم.

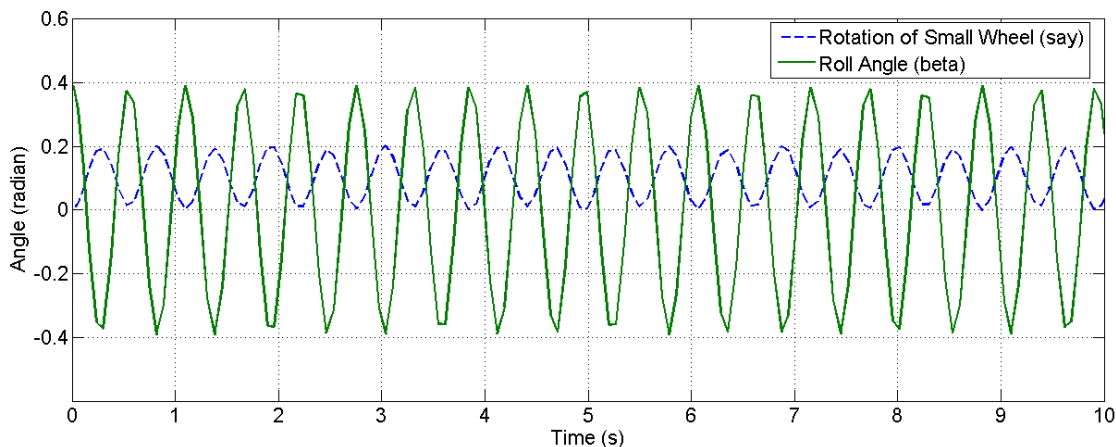


شکل ۴-۵ تغییرات زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین در مدل دو درجه آزادی

در شکل ۴-۵ تغییرات زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین نسبت به راستای قائم در مدل تبدیل شده به دو درجه آزادی را مشاهده می‌نماییم. به علت ذات سیستم، پاسخ زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین به صورت پریودیک می‌باشد که تغییرات زاویه انحراف محل استقرار سرنشین نسبت به زاویه پیچ بیشتر می‌باشد. این پاسخ پریودیک با دوره زمانی ثابت با فیزیک مسئله کاملاً مطابقت دارد.

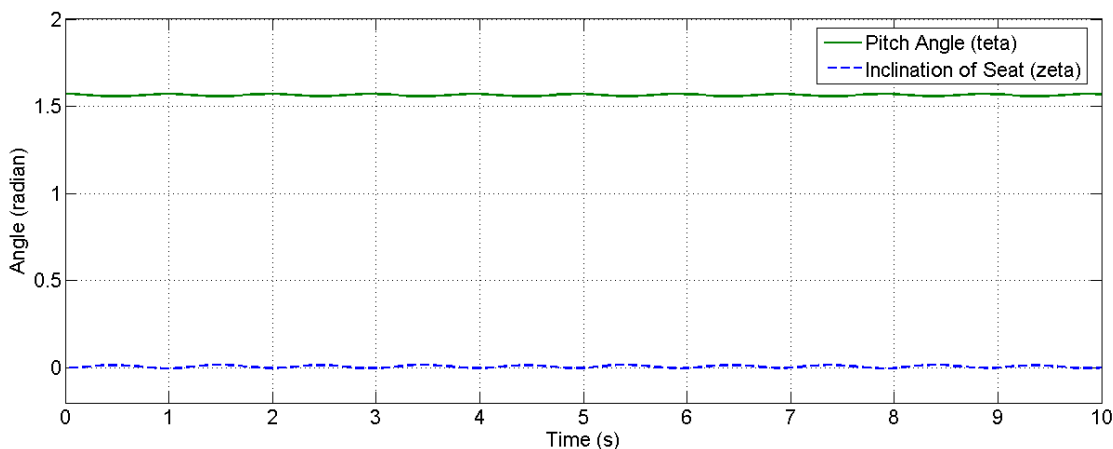
در مرحله بعد، مقادیر اولیه زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین نسبت به راستای قائم

و همچنین مشتق مرتبه اول و دوم آن را برابر صفر قرار می‌دهیم. مقدار اولیه زاویه رول یا زاویه انحراف خودرو به طرفین را برابر مقدار  $\pi/8$  رادیان یا  $22/5$  درجه قرار داده شده و نتایج زیر حاصل شده است.



شکل ۵-۵ تغییرات زاویه رول و زاویه چرخش چرخ کوچک با مقدار اولیه غیر صفر

در شکل ۵-۵ تغییرات زاویه رول و زاویه چرخش چرخ کوچک را در حالتی که خودرو به یک سمت به میزان  $\pi/8$  رادیان منحرف شده، نشان داده شده است. همان طور که انتظار داریم، پاسخ سیستم به علت ذات تغییرات سینوس و کوسینوس‌های موجود در معادلات به صورت نوسانی با پریود زمانی ثابت می‌باشد. به علت مقدار اولیه زاویه رول، دامنه نوسانات آن نسبت به زاویه چرخش چرخ کوچک بزرگتر می‌باشد.



شکل ۶-۵ تغییرات زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین با مقدار اولیه غیر صفر

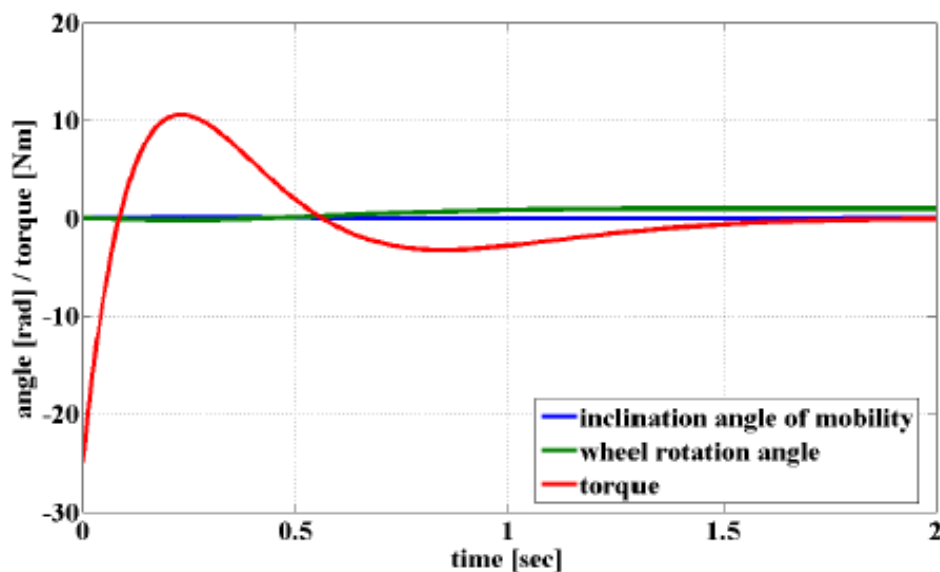
در شکل ۶-۵ تغییرات زاویه پیچ و زاویه انحراف محل استقرار سرنشین نسبت به راستای قائم در حالتی که خودرو به یک سمت به میزان  $\pi/8$  رادیان منحرف شده، نشان داده شده است. با وجود مقدار

اولیه صفر این دو پارامتر، تغییرات آن را نسبت به زمان در شکل بالا مشاهده می‌نماییم که کوپل بودن معادلات خودروی تک چرخ با چهار درجه آزادی نسبت به یکدیگر را نشان می‌دهد و به نوبه‌ی خود فرآیند کنترل آن را مشکل‌تر می‌نماید و بایستی معادلات به صورت همزمان حل شوند.

### ۳-۴ مقایسه نتایج با مدل اوکی و ناکامورا

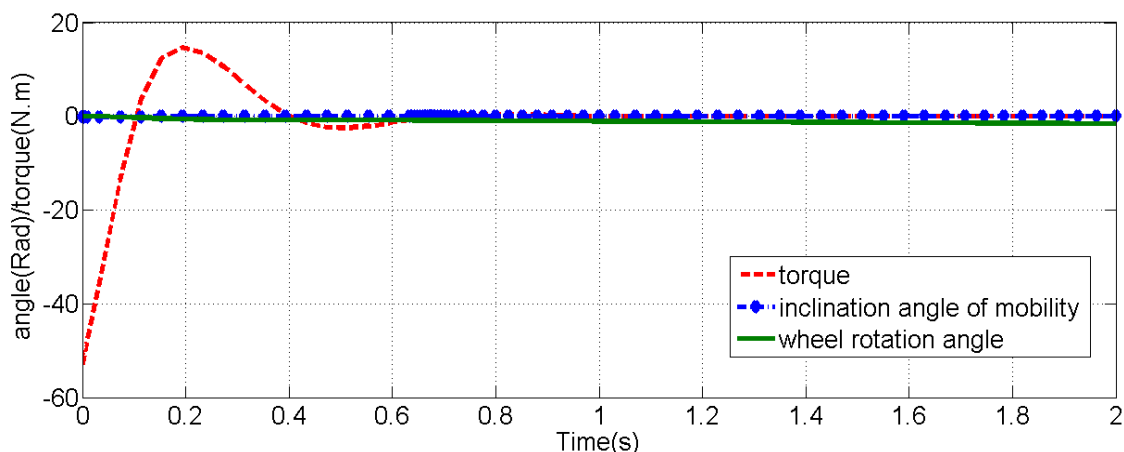
تقریباً نزدیک‌ترین مدل خودروی تک‌چرخ به مدل پیشنهادی در این پایان‌نامه، مدل اوکی و ناکامورا می‌باشد [24]. البته آنها مدل خود را خطی در نظر گرفته و از فرض‌های ساده‌سازی کننده استفاده نموده‌اند.

در شکل ۵-۷ نتایج مدل اوکی و ناکامورا مشاهده می‌شود. در کنترل این سیستم از کنترلر خطی PD استفاده شده و میزان انحراف محل استقرار سرنشین برابر ۰/۱۵ رادیان می‌باشد.



شکل ۵-۷ نتایج مدل اوکی و ناکامورا در مرجع ۲۴

با حذف دو درجه آزادی از مدل پیشنهادی، مدل خودرو با مدل اوکی و ناکامورا شبیه می‌شود با این تفاوت که مدل پایان‌نامه غیرخطی و مدل اوکی و ناکامورا خطی می‌باشد. نتایج اعمال کنترلر PD بر روی مدل پایان‌نامه در شکل ۵-۸ نشان داده شده است.



شکل ۸-۵ نتایج مدل اوکی و ناکامورا با ساده‌سازی معادلات چهار درجه آزادی

با مقایسه دو شکل ۷-۵ و شکل ۸-۵ مشاهده می‌شود که، نتایج مدل‌سازی و اعمال کنترل PD برای هر دو مدل تقریباً یکسان می‌باشد. تغییرات موجود به علت تفاوت مدل‌سازی و حضور پارامترهای غیرخطی می‌باشد.

با توجه به نتایج شبیه‌سازی دینامیکی بیان شده در بخش قبل و همچنین مقایسه نتایج با مدل اوکی و ناکامورا، صحت مدل‌سازی انجام شده تایید می‌شود. در ادامه به تفسیر نتایج اعمال کنترل غیرخطی تطبیقی بر روی مدل غیرخطی پیشنهادی خودرو تک‌چرخ می‌پردازیم.

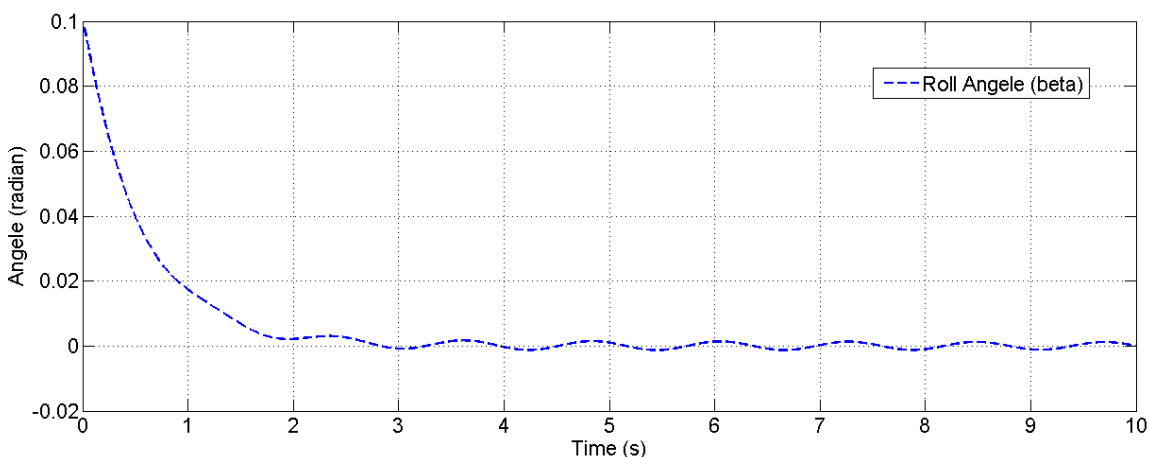
#### ۴-۴ نتایج کنترل تطبیقی

در این بخش به معرفی و بررسی نتایج اعمال کنترل تطبیقی بر روی مدل خودروی تک‌چرخ که در فصل سوم و چهارم ارائه شد، می‌پردازیم. برای نشان دادن توانایی بالای کنترل تطبیقی بر عدم قطعیت‌های پارامتری سیستم و حفظ پایداری و تعادل خودرو، نتایج آن را با یک کنترلر PD نیز مقایسه می‌نماییم که در ادامه به تفصیل شرح داده می‌شود.

به علت استفاده از کنترلر غیرخطی و عدم خطی‌سازی در مدل سیستم، می‌توان از زوایای انحراف بزرگتری نسبت به مدل خطی استفاده نمود. برای این منظور، میزان انحراف اولیه خودرو در راستای پیچ برای محل استقرار سرنشین را برابر  $\pi/8$  رادیان یا  $22/5$  درجه در نظر می‌گیریم که منجر به حرکت خودرو بسته به جهت انحراف، به سمت جلو-عقب می‌شود. همچنین میزان انحراف اولیه خودرو در راستای رول که منجر به حرکت به سمت چپ-راست می‌شود را برابر  $\pi/8$  رادیان یا  $22/5$  درجه در نظر

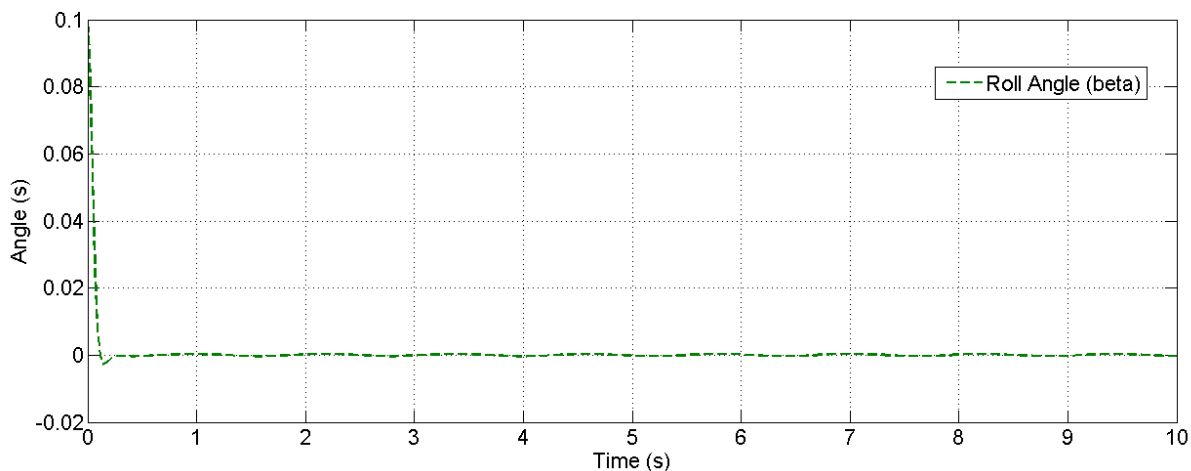
می‌گیریم. مقدار سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای را برای تمامی متغیرها در لحظه صفر، برابر صفر در نظر گرفته شده است. هدف از کنترل قائم نگاه داشتن خودرو و حفظ پایداری آن می‌باشد. برای این منظور انحراف محل استقرار نشین به سمت جلو-عقب حول راستای پیچ در کمترین زمان ممکن بایستی صفر شود. همچنین انحراف خودرو به چپ-راست حول محور رول نیز بایستی در کمترین زمان ممکن به سمت صفر میل نماید.

در شکل ۵-۹ و شکل ۵-۱۰ به ترتیب تغییرات زاویه‌ی رول بر حسب زمان با اعمال کنترل PD و کنترل تطبیقی نشان داده شده است. لازم به ذکر است که به علت متفاوت بودن گام زمانی در دو کنترلر PD و تطبیقی امکان نمایش دادن هر دو نمودار بر روی یکدیگر وجود نداشت.



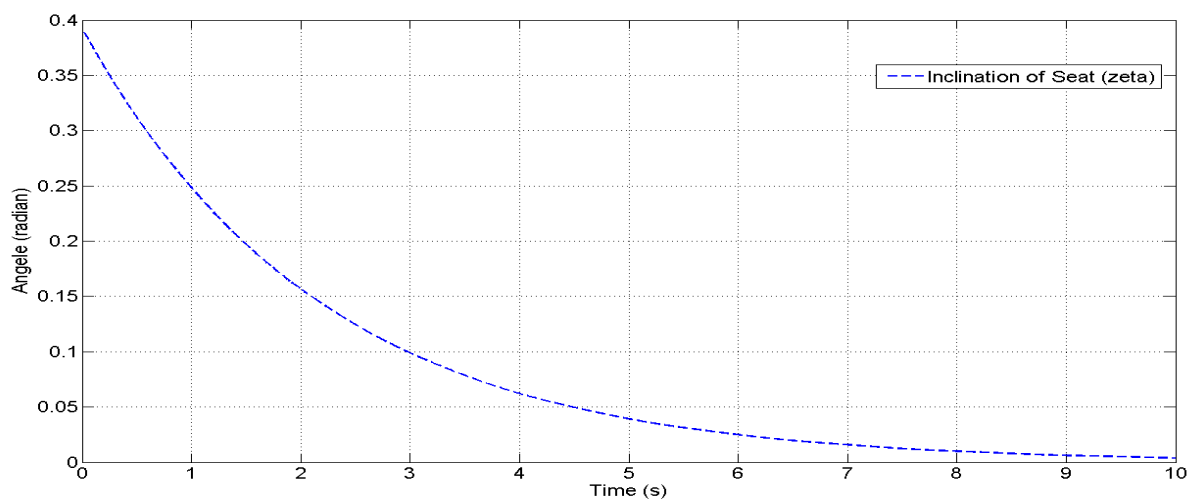
شکل ۵-۹ تغییرات زاویه‌ی رول بر حسب زمان با اعمال کنترل PD

در شکل ۵-۹ تغییرات زاویه‌ی رول بر حسب زمان پس از انحراف اولیه به میزان  $\pi/8$  رادیان را مشاهده می‌نماییم که کنترلر PD وظیفه جبران این انحراف را بر عهده دارد که بایستی به سمت صفر میل نماید. همان طور که مشاهده می‌شود کنترل PD وظیفه‌ی خود را به خوبی انجام نداده و انحراف خودرو تک‌چرخ به طرفین را اصلاح می‌نماید ولی سرعت آن پایین می‌باشد. همچنین میزان خطا در این روش بالا می‌باشد که استفاده از آن توصیه نمی‌شود.



شکل ۵-۱۰ تغییرات زاویه‌ی رول بر حسب زمان با اعمال کنترل تطبیقی

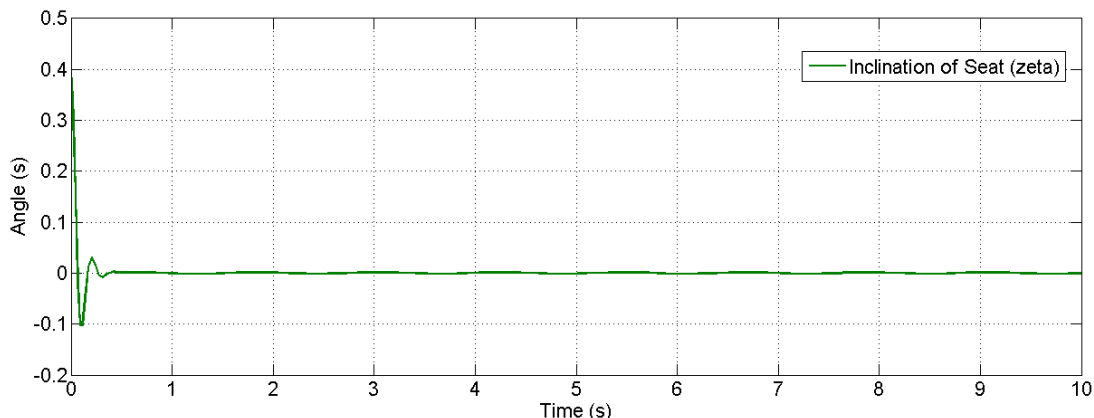
در شکل ۵-۱۰ تغییرات زاویه‌ی رول بر حسب زمان پس از انحراف اولیه به میزان  $\pi/8$  رادیان را مشاهده می‌نماییم که در کمترین زمان ممکن به سمت صفر میل می‌نماید. همان طور که مشاهده می‌شود کنترل تطبیقی وظیفه‌ی خود را به خوبی انجام داده و انحراف خودرو تک‌چرخ به طرفین را به سرعت اصلاح می‌نماید. با مقایسه شکل ۵-۹ و شکل ۵-۱۰ برتری کنترل تطبیقی در اصلاح انحراف خودرو به طرفین و ثابت نگاه داشتن آن در محدوده‌ی صفر مشاهده می‌شود.



شکل ۵-۱۱ تغییرات زاویه انحراف محل استقرار سرنشین با اعمال کنترل PD

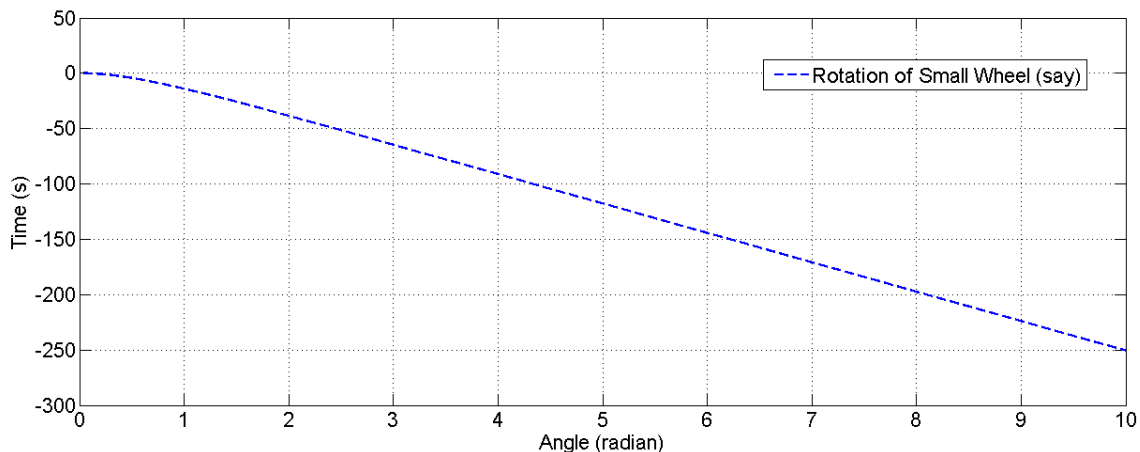
در شکل ۵-۱۱ اثر کنترل PD بر تغییرات زاویه انحراف محل استقرار سرنشین پس از انحراف اولیه به میزان  $\pi/8$  رادیان مشاهده می‌شود. این مقدار بایستی به سرعت به سمت صفر میل نماید که کنترل

PD از عهده آن بر نیامده و این انحراف پس از حدود ۸ ثانیه به سمت صفر میل می‌نماید و نتایج مطلوب نمی‌باشد و خطای بالایی دارد.



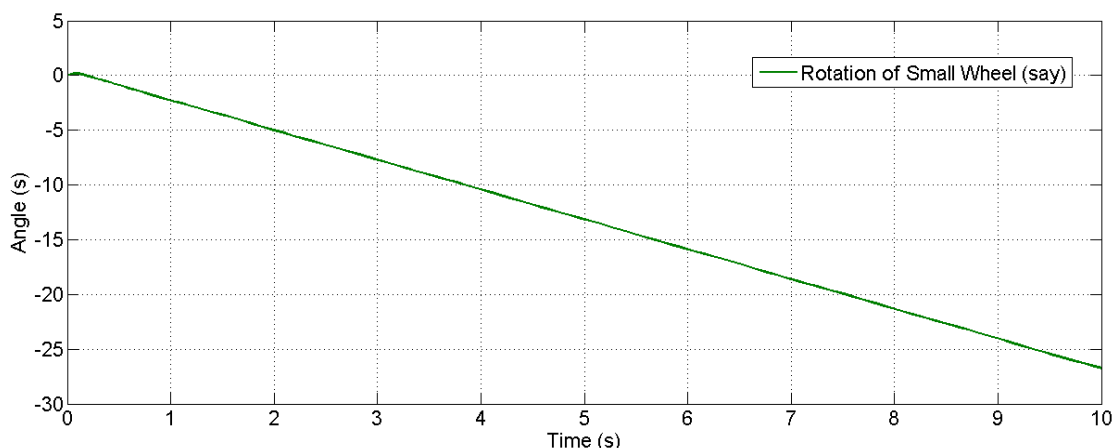
شکل ۵-۱۲ تغییرات زاویه انحراف محل استقرار سرنشین با اعمال کنترل تطبیقی

در شکل ۵-۱۲ اثر کنترل تطبیقی بر تغییرات زاویه انحراف محل استقرار سرنشین پس از انحراف اولیه به میزان  $\pi/8$  رادیان مشاهده می‌شود. این کنترل هدف کنترل را به خوبی تحقق بخشیده و در کمترین زمان ممکن به سمت صفر میل می‌نماید. همچنین خطای آن بسیار ناچیز و قابل قبول می‌باشد.



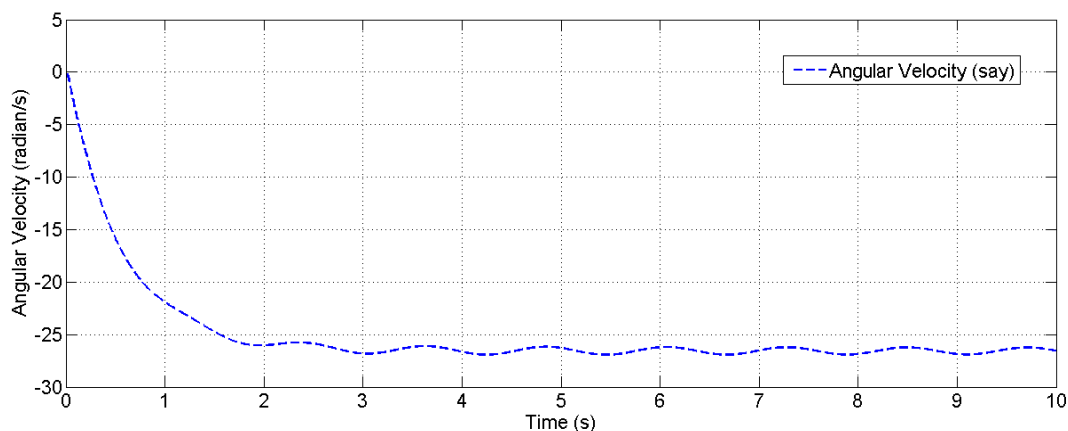
شکل ۵-۱۳ تغییرات زاویه چرخش چرخ کوچک با اعمال کنترل PD

در شکل ۵-۱۳ اثر کنترل PD بر تغییرات چرخش زاویه چرخ کوچک مشاهده می‌شود. برای جبران زاویه انحراف خودرو به طرفین، بایستی چرخ کوچک در جهت مطلوب حرکت نماید تا تعادل و پایداری خودرو را تعیین نماید. این مقدار در مدت زمان ۱۰ ثانیه برابر ۲۵۰ رادیان می‌باشد که مقدار بزرگی است.



شکل ۵-۱۴ تغییرات زاویه چرخش چرخ کوچک با اعمال کنترل تطبیقی

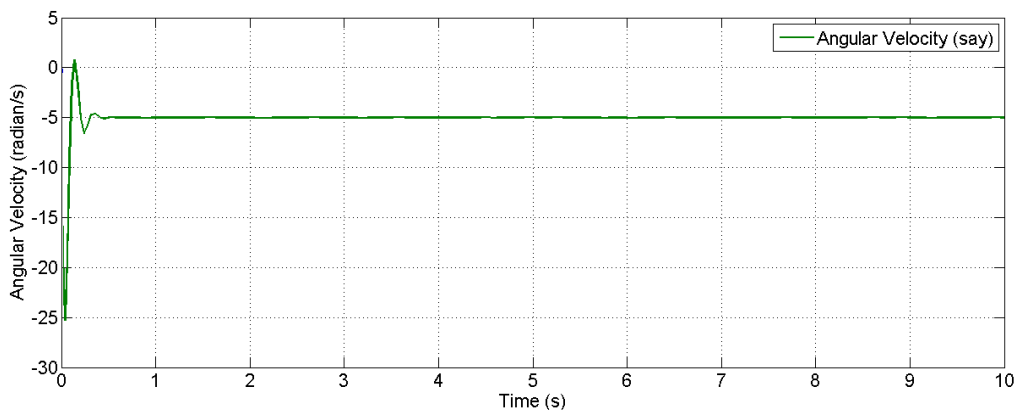
در شکل ۵-۱۴ اثر کنترل تطبیقی بر تغییرات چرخش زاویه چرخ کوچک مشاهده می‌شود. میزان تغییرات این زاویه در ۱۰ ثانیه برابر ۲۷ رادیان بوده که در مقایسه با کنترل PD بسیار کمتر می‌باشد. نکته مهم در کنترل خودروی تک‌چرخ محدود ماندن تغییرات زاویه چرخش چرخ کوچک می‌باشد که در آن تغییرات آنی وجود نداشته باشد. همچنین پس از حفظ تعادل، میزان تغییرات سرعت زاویه‌ای چرخ ثابت بماند.



شکل ۵-۱۵ تغییرات سرعت زاویه‌ای چرخ کوچک با اعمال کنترل PD

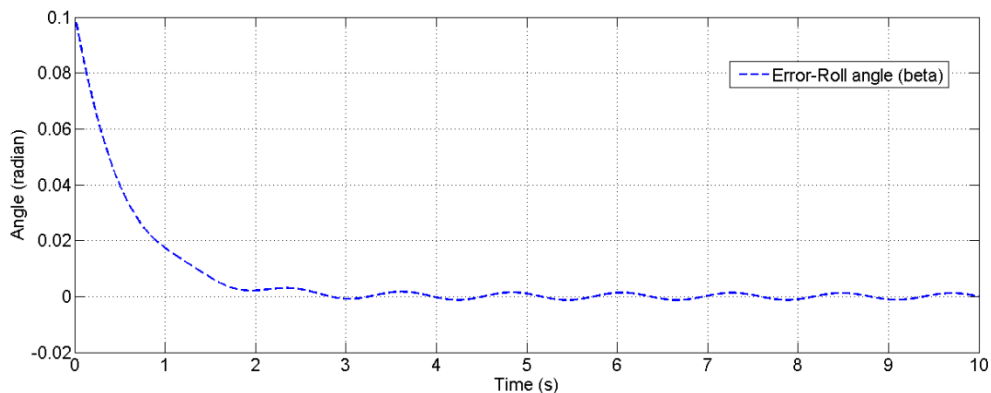
در شکل ۵-۱۵ اثر کنترل PD بر تغییرات سرعت زاویه چرخ کوچک را مشاهده می‌نماییم. این تغییرات پس از گذشت زمان تقریبی ۲ ثانیه، حول مقدار مشخصی نوسان می‌نماید. این تغییرات بایستی ثابت شده که کنترل PD وظیفه‌ی خود را به خوبی انجام نداده است.



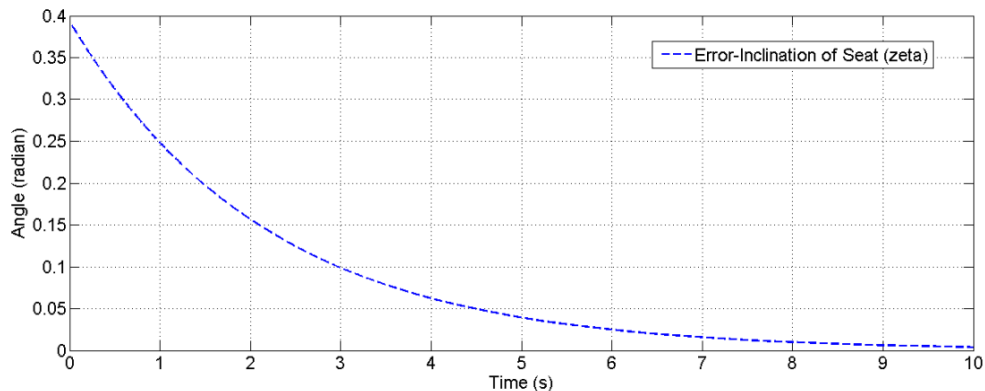


شکل ۱۶-۵ تغییرات سرعت زاویه‌ای چرخ کوچک با اعمال کنترل تطبیقی

در شکل ۱۶-۵ اثر کنترل تطبیقی بر تغییرات سرعت زاویه‌ای چرخ کوچک نشان داده شده است. تغییرات سرعت زاویه‌ای چرخ کوچک در این حالت به سرعت به سمت مقدار ثابتی میل نموده و با این سرعت، مسیر خود را طی می‌نماید. با مقایسه شکل ۱۵-۵ و شکل ۱۶-۵ توانایی بالای کنترل تطبیقی تصدیق می‌شود.

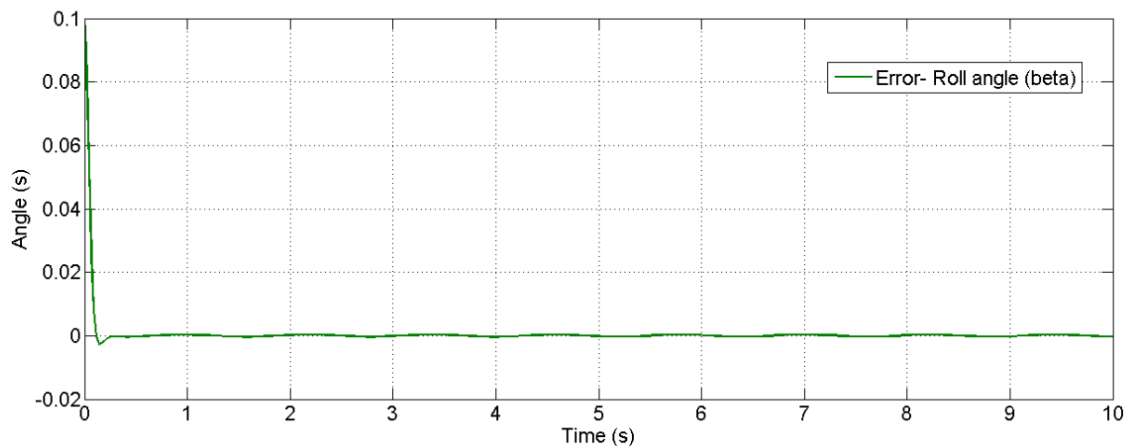


شکل ۱۷-۵ خطای کنترل PD در جبران زاویه‌ی رول

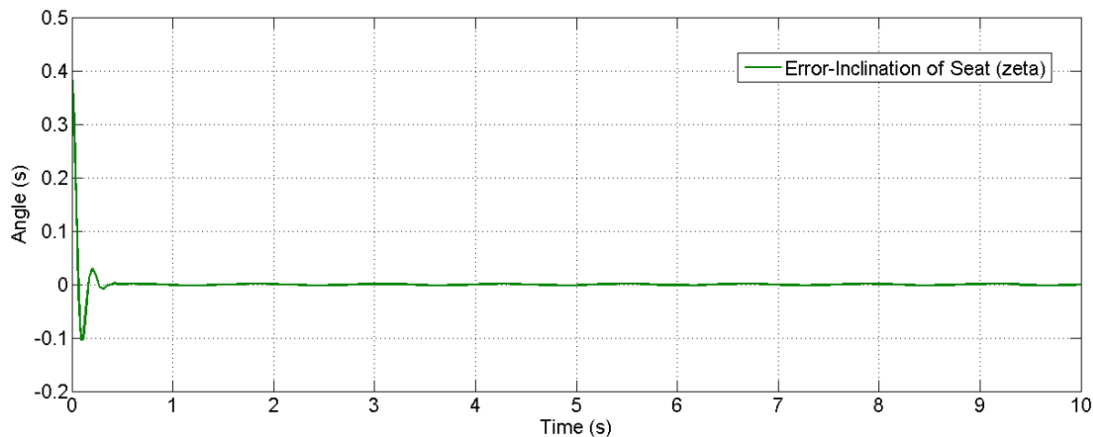


شکل ۱۸-۵ خطای کنترل PD در جبران زاویه انحراف محل استقرار سرنشین

در شکل ۱۷-۵ و شکل ۱۸-۵ به ترتیب خطای کنترل PD در جبران زاویه رول و جبران زاویه انحراف محل استقرار سرنشین پس از انحراف اولیه به میزان  $\pi/8$  رادیان نمایش داده شده است. مقادیر خطا در روش کنترل PD بر روی خودروی تک‌چرخ قابل قبول نبوده و سبب ناپایداری خودرو می‌شود. همچنین ممکن است سبب انحراف و زمین خوردن آن شود.



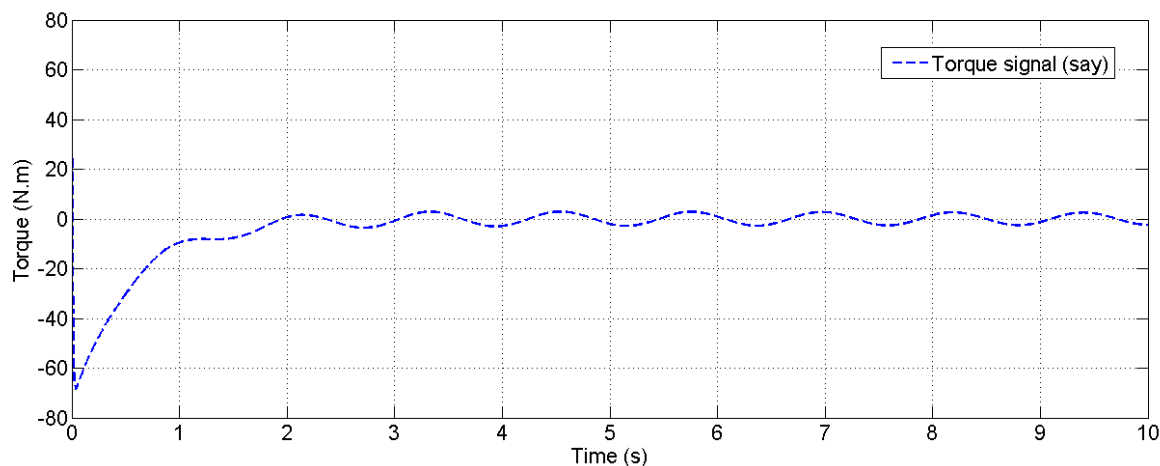
شکل ۱۹-۵ خطای کنترل تطبیقی در جبران زاویه رول



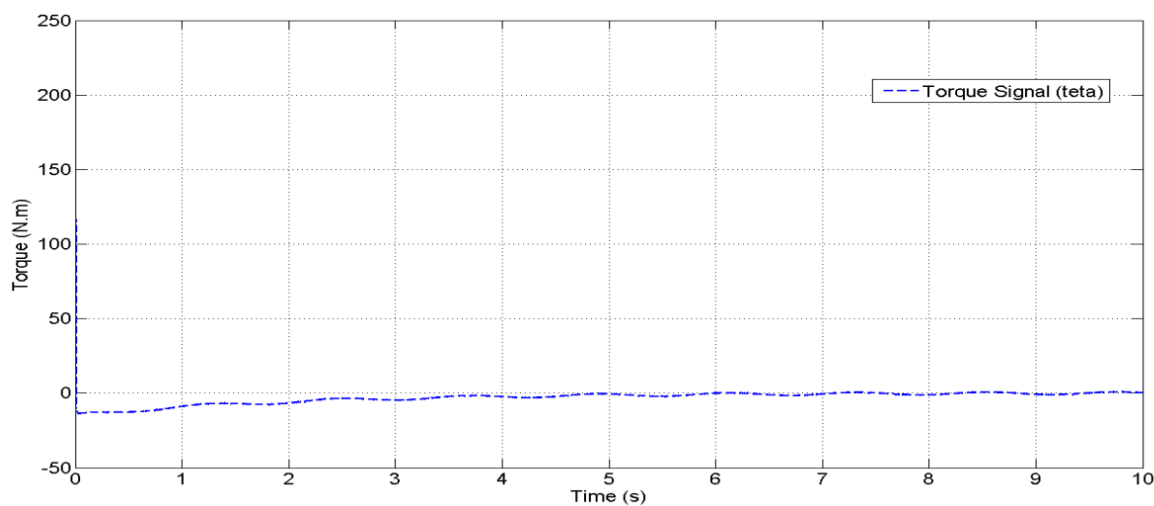
شکل ۲۰-۵ خطای کنترل تطبیقی در جبران زاویه انحراف محل استقرار سرنشین

در شکل ۱۹-۵ و شکل ۲۰-۵ به ترتیب خطای کنترل تطبیقی در جبران زاویه رول و جبران زاویه انحراف محل استقرار سرنشین پس از انحراف اولیه به میزان  $\pi/8$  رادیان نمایش داده شده است. مقادیر خطا در روش کنترل تطبیقی بر روی خودروی تک‌چرخ قابل قبول بوده و در مرتبه منفی چهار و

پنج می‌باشد. کنترل تطبیقی به سرعت انحراف خودرو را جبران نموده و خطا به سمت صفر میل می‌نماید و در ادامه خودرو به صورت متعادل به مسیر خود با سرعت ثابت ادامه می‌دهد. تنها عامل نگاه دارنده‌ی آن، اصطکاک چرخ‌ها با زمین می‌باشد.

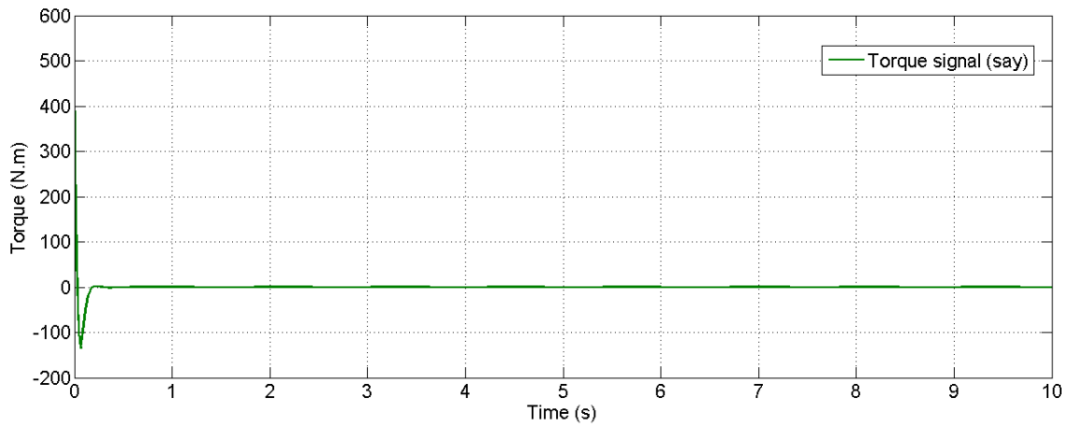


شکل ۲۱-۵ سیگنال کنترل گشتاور چرخ کوچک با اعمال کنترل PD

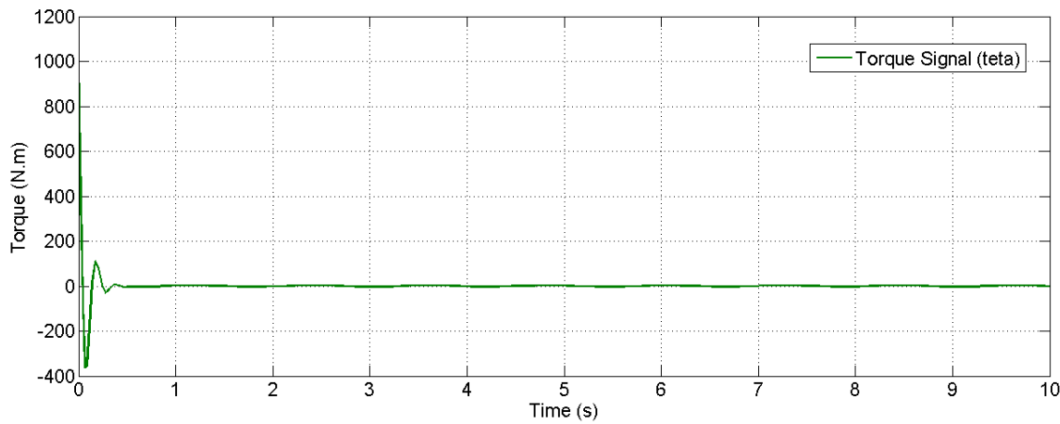


شکل ۲۲-۵ سیگنال کنترل گشتاور چرخ بزرگ با اعمال کنترل PD

در شکل ۲۱-۵ و شکل ۲۲-۵ به ترتیب سیگنال گشتاور کنترلی تولیدی توسط کنترل PD برای چرخ بزرگ و چرخ کوچک مشاهده می‌شود. با توجه به شکل‌های بالا مشاهده می‌شود که همواره یک گشتاور محدود بر روی موتور می‌باشد که امری نامطلوب است.



شکل ۲۳-۵ سیگنال کنترل گشتاور چرخ کوچک با اعمال کنترل تطبیقی



شکل ۲۴-۵ سیگنال کنترل گشتاور چرخ بزرگ با اعمال کنترل تطبیقی

در شکل ۲۳-۵ و شکل ۲۴-۵ به ترتیب سیگنال گشتاور کنترلی تولیدی توسط کنترل تطبیقی برای چرخ بزرگ و چرخ کوچک مشاهده می‌شود. این سیگنال‌ها پس از حفظ تعادل خودرو، به سمت صفر میل می‌نمایند. در نتیجه پس از کنترل، گشتاوری روی موتور نمی‌باشد که بسیار مطلوب است.

#### ۵-۴ جمع بندی نتایج

بر اساس مدل دینامیکی ارائه شده و نتایج اعمال کنترل تطبیقی و کنترل PD، نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱. مدل چرخ طراحی شده به خوبی از عهده حرکت در تمامی نقاط صفحه بر می‌آید.
۲. معادلات حرکت دینامیکی محاسبه شده با فیزیک مسئله مطابقت دارد.
۳. معادلات حرکت کاملاً غیرخطی و کوپل بوده که بایستی به صورت همزمان حل و

شبیه‌سازی شود.

۴. با ساده‌سازی و حذف متغیرهای حالت معادلات حرکت، چهار معادله حرکت به سه و دو معادله حرکت تبدیل می‌شود که کاملاً با مدلسازی‌های انجام شده مطابقت دارد.
۵. کنترل تطبیقی اعمال شده بر روی مدل در کمترین زمان ممکن انحراف خودرو به سمت جلو-عقب و طرفین را اصلاح نموده و پایداری آن تضمین شده است.
۶. خودرو تک‌چرخ ذاتاً ناپایدار بوده و پس از اعمال کنترل تطبیقی و پایداری آن با سرعت ثابت به سمت موقعیت مطلوب حرکت می‌نماید.
۷. کنترل PD به صورت کامل در کنترل خودرو موفق نبوده و پایداری آن را تضمین نمی‌نماید که برای این سیستم توصیه نمی‌شود.
۸. کنترل تطبیقی نسبت به کنترل PD در زمان بسیار کوتاهی خودرو را متعادل نموده و خطای انحراف محل استقرار سرنشین در مرتبه منفی پنج می‌باشد.
۹. روش پایداری لیاپانوف، پایداری مجانبی سیستم را تضمین می‌نماید.
۱۰. در صورت استفاده از کنترل PD، با تغییر پارامترهای سیستم بایستی ضرایب کنترلر دوباره تنظیم شود در حالی که در کنترل تطبیقی ضرایب کنترلر یک بار تنظیم می‌شود. پی از تنظیم با تغییر پارامترها، کنترلر به خوبی عمل نموده و بر عدم قطعیت‌های پارامتری غلبه می‌نماید و خطای میزان انحراف به سمت صفر میل می‌نماید.
۱۱. خطای کنترل PD در اصلاح انحراف خودرو به طرفین و سمت جلو-عقب بسیار زیاد می‌باشد که استفاده از این روش را دچار تردید می‌نماید. در حالی که خطای کنترل تطبیقی صفر می‌باشد و عملکرد مناسبی دارد.
۱۲. کنترل تطبیقی پس از اعمال بر روی مدل و پایدارسازی خودرو، گشتاوری به موتورها اعمال نمی‌نماید که امری مطلوب می‌باشد. پس از پایداری، راننده بایستی خود را در جهت مورد نظر منحرف نماید تا به سمت موقعیت مطلوب حرکت کند.

#### ۴-۶ پیشنهادات

بر اساس پایان نامه انجام شده، پیشنهادات زیر ارائه می‌شود:

۱. مدل دینامیکی خودرو کامل می‌باشد. پیشنهاد می‌شود مکانیزمی طراحی و پیاده‌سازی شود تا بتوان زاویه یا حرکت خودرو حول محور قائم بر زمین را برای مانور پذیری بیشتر کنترل نماییم.
۲. می‌توان از سایر روش‌های کنترلی مانند کنترل مود لغزشی، کنترل مقاوم، کنترل خطی‌سازی پس‌خوردی و غیره استفاده نمود و نتایج آن را با کنترل تطبیقی و کنترل PD مقایسه نماییم.
۳. پیشنهاد می‌شود اثر اغتشاش بر روی مدل خودرو بررسی شود و با استفاده از کنترل مناسب بر آن غلبه نماییم.
۴. پیشنهاد می‌شود در صورت امکان وجود شرایط ساخت، این خودرو به صورت مدل ساخته شده و نتایج کنترل را با نتایج شبیه سازی مقایسه نماییم.

## مراجع

- [1] Yamafuji, K. and Kawamura, T. “**Postural control of a monoaxial bicycle**”. J. Robot. Soc. Jpn, 1989,7(4), 74–79.
- [2] Segway. <http://www.segway.com>
- [3] Grasser F, Darrigo A, Colombi S, Rufer A.” **JOE: a mobile, inverted pendulum**”. IEEE Trans Ind Electron 2002;49(1):107–14.
- [4] Kim, Y., Kim, S. H., & Kwak, Y. K. “**Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled inverted pendulum robot**”. Journal of Intelligent and Robotic Systems,44, 25–46. (2005).
- [5] Pathak, K., Franch, J., & Agrawal, S. K.” **Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum**” (2005).
- [6] <http://dl.dropboxusercontent.com/u/828035/Robotics/equibot.html>
- [7] <http://www-robotics.cs.umass.edu/index.php/Robots/UBot-5>
- [8] <http://www.geology.smu.edu/~dpa-www/robo/nbot/>
- [9] <http://www.teamhassenplug.org/robots/legway/>
- [10] <http://www.philohome.com/nxtway/nxtway.htm>
- [11] <http://www.tedlarson.com/category/robots/balancing/>
- [12] <http://www.philohome.com/nxtway/nxtway-g.htm>
- [13] CALVIN CHAN LITY YONG.”**Two Weeled Self Balancing Robot**”. Universiti Teknologi Malaysia:Degree.Thesis .(2010)
- [14] Hyun-Uk Ha ,Sang-Won Ryu,Jang-Myung Lee,”**Stability analysis of the wheeled humanoid robot** “,Japan,February 5-7,2009
- [15] Z. Sheng and K. Yamafuji, “**Postural Stability of a Human Riding a Unicycle and Its Emulation by a Robot**,” IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 13, No. 5, 1997, pp. 709-720.
- [16] P. D. Kemp, Y. Yavin, “**Stabilization and Control of the Motion of a Rolling Disk by using two Overhead Rotors**”, An International Journal Computers and Mathematics with Applications 39 (2000) 237-252
- [17] F.Kappeler, Unicycle Robot, EPFL, “**Automatic control Laboratory, Switzerland**”,<http://lawwww.epfl.ch/webdav/site/la/users/139973/public/reports/Kappeler.Rapport.pdf.pdf>, 2007.
- [18] Zenkov, D.V., Bloch, A.M., Marsden, J.E., “**The Energy-Momentum Method for Stability of Nonholonomic Systems**”, Dynamics and Stability of Systems 13, 1998, 123–165.
- [19] Zenkov, D.V., Bloch, A.M., Marsden, J.E., “**The Lyapunov–Malkin theorem and stabilization of the unicycle with rider**”, Systems & Control Letters 45 (2002) 293–30.

- [20] Brown HB, Xu Y. A “**single wheel gyroscopically stabilized robot**. In: Proc”. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. 1996. p. 3658-3663.
- [21] Chung Neng Huang. “**The development of self-balancing controller for one-wheeled vehicles**”. Engineering, 2,212-219, 2010.
- [22] A. Kadis, D. Caldecott, A. Edwards, M. Jerbic R. Madigan, M Haynes, B. Cazzolato and Z. Prime “**Modelling, simulation and control of an electric unicycle**”. The University of Adelaide, Australia.2010
- [23] J.H. Lee, H.J. Shin, S.J. Lee, S. Jung,. “**Balancing control of a single-wheel inverted pendulum system using air blowers: Evolution of Mechatronics capstone design**”, mechatronics,2012.08.006
- [24] Sunguk Ok, Yoshi hi ko Nakamura. “**Stabilizing Control of Personal Mobility with a Spherical Wheel** “Composed of Serial Kinematic Chain, 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, Mexico, 19-25 June, 2011
- [25] T. B. Lauwers, G. A. Kantor, and R. L. Hollis, “**A Dynamically Stable Single-Wheeled Mobile Robot with Inverse Mouse-Ball Drive**”, IEEE Int’l. Conf. on Robotics and Automation, Orlando, FL, May 15-19, 2006
- [26] Umashankar Nagarajan, Byungjun Kim and Ralph Hollis,” **Planning in High-dimensional Shape Space for a Single-wheeled Balancing Mobile Robot with Arms**”, IEEE Int’l Conf. on Robotics and Automation (ICRA), May 14-18, 2012
- [27] <http://world.honda.com/U3-X/>
- [28] <http://world.honda.com/UNI-CUB/>
- [29] K.Hofer , “**Electric vehicle on one wheel**” ,IEEE vehicle power and propulsion conference ,2005,pp. 517 -521
- [30] K. Hofer ,”**Observer-Based drive-Control for self-balanced vehicle**”, Proceedings of IEEE,2006
- [31] <http://tlb.org/#eunicycle>
- [32] <http://www.stephanboyer.com/post/17/my-electric-unicycle>
- [33] <http://www.brp.com/en-ca/company/news/bombardierr-embrio-concept>
- [34] <http://enicycle.com/what.html>
- [35] Haim Baruh, “**Analytical Dynamics**”, 1999, MWc CGBraw-Hill, 0-07-365977-0
- [36] J.L. Meriam, L.G. Kraige, “**Engineering mechanical Dynamics**”,Sixth edition, MWc CGBraw-Hill
- [37] jean.jacquesE.Slotin,Weiping Li, “**Applied nonlinear control**”, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey 07632
- [38] Aström, K.J., Wittenmark, B. “**Adaptive Control**”. Addison-Wesley (1995)



## **Abstract**

In this thesis, One-wheel vehicle with four degrees of freedom for the first time as a non-linear and without linearization is modeled. In all studies, vehicle model have two or three degrees of freedom due to motion limitations of a single wheel. In this thesis, the model by using special mechanism for a wheel that provides more degrees of freedom is presented. Equations of motion one-wheel vehicle by using Lagrange method and sequential Euler angles are calculated. Four equation of motion are coupled and nonlinear and more complicated to compare vehicle model with three degrees of freedom. This vehicle is included passenger seating, two motor and one Omni directional wheels which consists of a number of small wheel and a large wheel.

Four degrees of freedom of the system are: the pitch angle which the axis of rotation of the big wheel, roll angle which describe the vehicle inclination, the angle of inclination of the passenger seating cause moving forward –backward and rotation angle of small wheels cause moving left – right. Motors are located on the passenger seating and reaction torque generated by the motor is applied to body and chassis of passenger seating.

There is uncertainty in computing the geometric parameters of the system due to measurement error. Nonlinear adaptive control method is used to overcome the uncertainties of system and control it. Also by using Lyapunov stability method, the stability of the vehicle is investigated and ensured. Adaptive control method is used Self-Tuning adaptive controllers which performance improved by making correction in it. Due to the complex structure equations using a new idea that contains an inner loop, torque control signal is calculated and sent to the motor.

Finally, the equations of motion are simulated in MATLAB-Simulink and after verification and comparison with the physics and modeling is acknowledged. To verify the performance of the adaptive control method, its results are compared with a PD control method. Adaptive control works well and compensates the inclination of vehicle to forward-backward and sideway and ensures stability.

**Keywords:** Adaptive control, nonlinear dynamic, one-wheeled vehicle, Lagrange method



Shahrood University  
Faculty of Mechanical Engineering

# **Nonlinear Control of One Wheeled Vehicle with Four Degree of Freedom**

Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the  
Requirements for the Degree of Master of Science (M.Sc.)  
in Mechanical Engineering, Applied mechanics

Department of Mechanical Engineering  
The of S

By:

**Reza Rezvanian noghondar**

Supervisor(s):

**Dr.Ardeshir Karami Mohamadi**

Advisor(s):

**Dr.Mohamad Mehdi Fateh**

2013