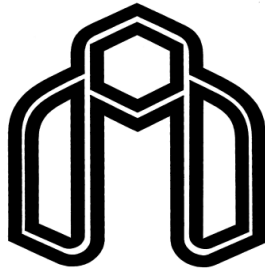


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک  
گروه تبدیل انرژی

حل عددی انتقال حرارت جابجایی آزاد و انتقال جرم در  
یک محفظه در حضور مانع مربعی گرم به روش شبکه  
بولتزمن

دانشجو:

لادن سادات لوح قلم

استاد راهنما:

دکتر محمدحسن کیهانی

استاد مشاور:

دکتر محسن نظری

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

زمستان ۱۳۹۱



دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

### بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

### فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای لادن سادات لوح قلم رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی تحت عنوان حل عددی انتقال حرارت جابجایی آزاد و انتقال جرم در یک محفظه در حضور مانع مربعی گرم به روش شبکه بولتزمن که در تاریخ ۹۱/۱۱/۳۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول ( با درجه : عالی ) امتیاز (۱۹,۲۸)	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input type="checkbox"/> مردود
--	------------------------------------	--------------------------------

۲- بسیار خوب ( ۱۸ - ۱۸/۹۹ )

۱- عالی ( ۱۹ - ۲۰ )

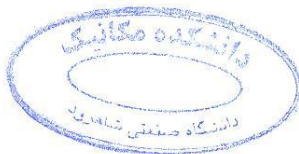
۴- قابل قبول ( ۱۴ - ۱۵/۹۹ )

۳- خوب ( ۱۶ - ۱۷/۹۹ )

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	دانشیار	محمد حسن کیهانی	۱- استاد راهنما
	استادیار	محسن نظری	۲- استاد مشاور
	استادیار	علی عباس نژاد	۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	استادیار	علی جباری مقدم	۴- استاد ممتحن
	استادیار	پوریا اکبرزاده	۵- استاد ممتحن

رئیس دانشکده :



تقدیم به

خانواده مہربانم

## تشکر و قدردانی

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، به‌ویژه اساتید محترم آقای دکتر محمد حسن کیهانی و آقای دکتر محسن نظری که با راهنمایی‌های مدبرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از مهندسین حسنی شکری، آلاله انارکی و امیرحسین زارعی که در تکمیل این پروژه مرا یاری نموده‌اند سپاسگزاری می‌کنم.

## تعهد نامه

اینجانب **لادن سادات لوح قلم** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک- گرایش تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه با عنوان "حل عددی انتقال حرارت جابجایی آزاد و انتقال جرم در یک محفظه در حضور مانع مربعی گرم به روش شبکه بولتزمن" تحت راهنمایی دکتر محمد حسن کیهانی و دکتر محسن نظری متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### تاریخ

### امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

در این تحقیق، انتقال حرارت و جرم در یک محفظه مربعی در حضور مانع گرم و با غلظت ثابت به روش شبکه بولتزمن مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات شبکه بولتزمن برای جریان، دما و غلظت و انواع شرایط مرزی مربوط به آن‌ها ارائه شده و با مقایسه دو نوع شرط مرزی با دقت‌های مرتبه اول و دوم برای جریان، حرارت و غلظت، این نتیجه به دست آمد که در مساله‌ای با مرزهای مستقیم، استفاده از شرایط مرزی با دقت مرتبه اول مناسب بوده و نیازی به استفاده از حلگرهای مرتبه دوم در روش شبکه بولتزمن نمی‌باشد. سپس مساله جابجایی حرارت و جرم در یک محفظه مربعی که دیوارهای افقی آن عایق و بدون نفوذ جرم و حرارت‌اند و دیوارهای عمودی آن دارای دما و غلظت بی-بعد صفر هستند و یک مانع مربعی با دما و غلظت بی‌بعد یک در وسط آن قرار گرفته است، مورد بررسی قرار گرفته است. در این بررسی پارامترهای بی‌بعد حاکم بر مساله عدد پرانتل  $Pr$  برابر  $0.71$ ، ویسکوزیته  $\nu$  برابر  $0.02$ ، عدد رایلی  $10^4 - 10^6$ ،  $Ra$ ، عدد لوییس  $Le$  برابر  $0.1$ ،  $2$  و  $10$ ، نسبت شناوری  $N$  بین  $0$  تا  $4$  - و نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه  $A$  برابر  $0.2$ ،  $0.4$  و  $0.6$  در نظر گرفته شده است. در این مطالعه اثر گرادیان‌های موافق ( $N > 0$ ) در نظر گرفته نشده است. نتایج نشان می‌دهند هنگامی که اندازه نسبت شناوری کوچکتر از واحد باشد با افزایش این پارامتر، اعداد ناسلت و شروود کاهش می‌یابند حال آنکه هنگامی که اندازه نسبت شناوری بیش از واحد است، این دو عدد بی‌بعد با افزایش  $|N|$  افزایش می‌یابند و در واقع یک نقطه کمینه در نمودار تغییرات ناسلت برحسب نسبت شناوری یافت می‌شود. در یک نسبت شناوری ثابت، اعداد ناسلت و شروود با افزایش عدد رایلی و همچنین نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه، افزایش می‌یابند که این به معنای افزایش نرخ انتقال حرارت و جرم است. مشاهده می‌شود که با افزایش عدد رایلی، جریان داخل محفظه چند سلولی خواهد بود. یعنی به علت افزایش اثر گرادیان دما در مقایسه با گرادیان غلظت، بخشی از جریان در داخل محفظه گردابه‌هایی تشکیل می‌دهد که جهت حرکت آن‌ها خلاف جهت جریان اصلی است و

گردابه‌های مذکور با افزایش اندازه نسبت شناوری کوچک شده و در نهایت از بین می‌روند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش عدد لوییس، برای غلبه اثر گرادیان غلظت به اثر گرادیان دما، به نسبت شناوری بالاتری نیاز است. همچنین با افزایش عدد لوییس، عدد شروود افزایش می‌یابد.

**کلمات کلیدی:** انتقال حرارت و جرم جابجایی آزاد - شبکه بولتزمن - مانع گرم



## فهرست مطالب

فصل ۱. مقدمه	۱
۱-۱- مقدمه	۲
۲-۱- روند روی آوری به روش شبکه بولتزن	۳
۳-۱- مدل شبکه خودکار سلول گاز	۶
۱-۳-۱- مدل شبکه خودکار سلول گاز HPP	۷
۲-۳-۱- مدل شبکه خودکار سلول گاز FHP	۱۰
۳-۳-۱- تکامل (تجدید آرایش) میکرو دینامیکی شبکه خودکار سلول گاز	۱۳
۴-۳-۱- مزایا و معایب روش شبکه خودکار سلول گاز	۱۳
۴-۱- معادله بولتزن	۱۴
۱-۴-۱- مفاهیم اولیه بولتزن	۱۵
۲-۴-۱- تئوری جنبشی	۱۵
۳-۴-۱- تابع توزیع مرتبه اول	۱۶
فصل ۲. پیشینه تحقیق	۱۹
۱-۲- مقدمه	۲۰
۲-۲- انتقال حرارت به روش جابجایی طبیعی	۲۰
۱-۲-۲- انتقال حرارت جابجایی طبیعی به روش شبکه بولتزن	۲۱
۳-۲- انتقال جرم و حرارت به روش جابجایی طبیعی	۳۰
۱-۳-۲- جابجایی طبیعی جرم و حرارت به روش شبکه بولتزن	۳۶
فصل ۳. معادلات شبکه بولتزن برای حل جریان، انتقال حرارت و جرم	۴۰
۱-۳- مقدمه	۴۱

- ۴۲..... ۲-۳- چارچوب اصلی LBM و معادلات مربوط به جریان
- ۴۴..... ۱-۲-۳- مدل BGK با زمان آرامش منفرد
- ۴۶..... ۳-۳- شرایط مرزی جریان
- ۴۷..... ۱-۳-۳- شرط مرزی تقارن
- ۴۷..... ۲-۳-۳- مرزهای پرپودیک
- ۴۸..... ۳-۳-۳- شرایط مرزی فون نیومن
- ۴۹..... ۴-۳-۳- شرط مرزی دیریشله (فشار)
- ۵۰..... ۵-۳-۳- شرط مرزی برای مرز باز
- ۵۰..... ۶-۳-۳- شرط مرزی عدم لغزش
- ۵۱..... ۷-۳-۳- کمانه کردن روی گره
- ۵۲..... ۸-۳-۳- کمانه کردن روی لینک
- ۵۲..... ۹-۳-۳- شرط مرزی عدم لغزش اینامورو و همکارانش
- ۵۴..... ۴-۳-۳- مدل های حرارتی شبکه بولتزن
- ۵۶..... ۱-۴-۳- مدل شبکه بولتزن دمایی برای میدان دما (وغلطت)
- ۵۷..... ۵-۳-۳- شرایط مرزی دمایی
- ۵۸..... ۱-۵-۳- شرط مرزی دیوارهای با دمای مشخص
- ۵۹..... ۲-۵-۳- شرط مرزی شار ثابت
- ۵۹..... ۳-۵-۳- شرط مرزی آدیاباتیک
- ۵۹..... ۴-۵-۳- شرط مرزی مرز باز با دمای ثابت
- ۶۰..... ۵-۵-۳- شرط مرزی خروجی با گرادیان صفر
- ۶۰..... ۶-۵-۳- شرط مرزی دما ثابت و آدیاباتیک با دقت مرتبه دوم

- ۶۲-۶-۳- مقایسه شرایط مرزی در روش شبکه بولتزن ..... ۶۲
- ۶۳-۱-۶-۳- شرایط مرزی برای جریان ..... ۶۳
- ۶۴-۲-۶-۳- شرایط مرزی برای دما ..... ۶۴
- ۶۴-۳-۶-۳- مطالعه و بررسی نتایج ..... ۶۴

#### فصل ۴. حل انتقال حرارت و جرم در یک محفظه مربعی در حضور یک مانع مربعی با

- دیوارهای فعال ..... ۸۲
- ۸۳-۱-۴- مقدمه ..... ۸۳
- ۸۴-۲-۴- هندسه مساله مورد مطالعه ..... ۸۴
- ۸۴-۳-۴- مدل شبکه بولتزن برای جریان، دما و غلظت ..... ۸۴
- ۸۵-۴-۴- نتایج و مطالعه آنها ..... ۸۵
- ۸۶-۱-۴-۴- مطالعه استقلال حل عددی از شبکه ..... ۸۶
- ۸۸-۲-۴-۴- بررسی همگرایی روش عددی ..... ۸۸
- ۸۸-۳-۴-۴- اعتبار سنجی نتایج با نتایج به دست آمده به روش حجم محدود ..... ۸۸
- ۹۰-۴-۴-۴- بررسی شکل خطوط جریان و مطالعه اثر پارامترهای کنترلی مساله ..... ۹۰
- ۹۹-۵-۴-۴- اثر عدد رایلی روی کانتورهای دما و غلظت و همچنین نرخ انتقال حرارت و جرم ..... ۹۹
- ۱۰۴-۶-۴-۴- اثر عدد لوییس روی کانتورهای دما و غلظت و همچنین نرخ انتقال حرارت و جرم ..... ۱۰۴
- ۱۰۹-۷-۴-۴- اثر نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه روی کانتورهای دما و غلظت و همچنین نرخ انتقال حرارت و جرم ..... ۱۰۹

#### فصل ۵. نتیجه گیری و پیشنهادات ..... ۱۱۴

- ۱۱۵-۱-۵- نتایج ..... ۱۱۵
- ۱۱۶-۲-۵- پیشنهادات ..... ۱۱۶



## فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ روش‌های مدل سازی. ۶
- شکل ۲-۱ شبکه مربعی HPP ۷
- شکل ۳-۱ HPP: برخورد و جاری شدن. ۸
- شکل ۴-۱ HPP: برخورد ۹
- شکل ۵-۱ شبکه شش وجهی FHP. ۱۱
- شکل ۶-۱ تمام برخوردهای ممکن در FHP ۱۲
- شکل ۱-۲ خطوط جریان به دست آمده در عدد رایلی الف)  $10^3$  ب)  $10^4$  ج)  $10^5$  د)  $10^6$  ۲۲
- شکل ۲-۲ پروفیل دما در خط مرکزی محفظه در عدد رایلی الف)  $10^3$  ب)  $10^4$  ج)  $10^5$  د)  $10^6$  ۲۳
- شکل ۳-۲ خطوط جریان در جریان لمینار در عدد رایلی الف)  $10^3$  ب)  $10^4$  ج)  $10^5$  د)  $10^6$  ۲۴
- شکل ۴-۲ شکل خطوط جریان به دست آمده به روش LBM در عدد رایلی  $10^3$ ،  $10^4$ ،  $10^5$  و  $10^6$  ۲۵
- شکل ۵-۲ شکل کانتور دما به دست آمده به روش LBM در عدد رایلی  $10^3$ ،  $10^4$ ،  $10^5$  و  $10^6$  ۲۵
- شکل ۶-۲ شکل کانتور دما به دست آمده به روش LBM در عدد رایلی  $10^3$ ،  $10^4$ ،  $10^5$  و  $10^6$  ۲۵
- شکل ۷-۲ شکل خطوط جریان به دست آمده در عدد رایلی  $10^5$  و نسبت ابعاد ۱/۰ ۲۷

- شکل ۲-۸ خطوط همدمما به دست آمده در عدد رایلی  $10^5$  و نسبت ابعاد  $1/0$   
 شکل ۲-۹ عدد ناسلت متوسط به صورت تابعی از نسبت ابعاد محفظه در عدد رایلی  
 $10^5$
- شکل ۲-۱۰ خطوط جریان و کانتور دما در حالتی که یک سیلندر حلقوی در محفظه  
 مربعی در عدد رایلی  $10^5$  قرار گرفته است.
- شکل ۲-۱۱ خطوط جریان و کانتور دما در حالتی که یک سیلندر مربعی در محفظه  
 مربعی در عدد رایلی  $10^5$  قرار گرفته است .
- شکل ۲-۱۲ عدد ناسلت بر حسب نسبت شناوری در  $Ra^* = 2 \times 10^6$   
 $\phi = 0/8, \lambda_{eff} = \lambda_s = \lambda_f, Da = 8/88 \times 10^{-6}, Gr_\phi = 2/25 \times 10^{10}$
- شکل ۲-۱۳ عدد شروع بر حسب نسبت شناوری در  $Ra^* = 2 \times 10^6$   
 $\phi = 0/8, \lambda_{eff} = \lambda_s = \lambda_f, Da = 8/88 \times 10^{-6}, Gr_\phi = 2/25 \times 10^{10}$
- شکل ۲-۱۴ عدد ناسلت متوسط در وضعیت قرارگیری دیوار گرم در الف) بالا ب)  
 وسط ج) پایین
- شکل ۲-۱۵ عدد شروع متوسط در وضعیت قرارگیری دیوار گرم در الف) بالا ب)  
 وسط ج) پایین
- شکل ۲-۱۶ تغییرات عدد ناسلت بر حسب تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $10^5$
- شکل ۲-۱۷ تغییرات عدد شروع بر حسب تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $10^5$
- شکل ۳-۱ مولفه‌های x و y مدل D2Q9
- شکل ۳-۲ نمای شبکه و نمودار هیستوگرام تابع توزیع گسسته/چگالی جهت‌دار  $f_a$
- شکل ۳-۳ نمایش توابع توزیع‌ها
- شکل ۳-۴ نمایش شرط مرزی تقارن

- ۵۱ شکل ۳-۵ نمایش شرط مرزی کمانه کردن روی گره
- ۵۲ شکل ۳-۶ نمایش کمانه کردن توابع توزیع احتمال روی لینک
- ۵۴ شکل ۳-۷ نمایش توابع توزیع مجهول در یک مرز جنوبی
- ۶۳ شکل ۳-۸ نمایش شرایط مرزی محفظه و جهت‌های سرعت
- ۶۵ شکل ۳-۹ خطوط جریان و (ب) پروفیل دما، در حالت عدد رایلی  $Ra=10^5$  و ویسکوزیته  $\nu$  برابر  $0.05$  با استفاده از شرایط مرزی مرتبه اول
- ۶۷ شکل ۳-۱۰ نمایش تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $Ra=10^4$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $64 \times 64$  (ب)  $128 \times 128$  و ج)  $256 \times 256$
- ۶۸ شکل ۳-۱۱ نمایش تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $64 \times 64$  (ب)  $128 \times 128$  و ج)  $256 \times 256$
- ۶۹ شکل ۳-۱۲ نمایش تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $Ra=10^6$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $128 \times 128$  و (ب)  $256 \times 256$
- ۷۰ شکل ۳-۱۳ نمایش تغییرات دما در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه اول، عدد رایلی  $Ra=10^4$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $64 \times 64$  (ب)  $128 \times 128$  و ج)  $256 \times 256$
- ۷۱ شکل ۳-۱۴ نمایش تغییرات دما در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $64 \times 64$  (ب)  $128 \times 128$  و ج)  $256 \times 256$

- شکل ۳-۱۵ نمایش تغییرات دما در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط  
 ۷۲ مرزی حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $10^6 = Ra$  و تعداد نقاط شبکه الف)  
 ۱۲۸×۱۲۸ (ب) و ۲۵۶×۲۵۶
- شکل ۳-۱۶ نمایش تغییرات سرعت در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور  
 ۷۳ شرط مرزی حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $10^4 = Ra$  و تعداد نقاط شبکه الف)  
 ۶۴×۶۴ (ب) ۱۲۸×۱۲۸ و ج) ۲۵۶×۲۵۶
- شکل ۳-۱۷ نمایش تغییرات سرعت در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور  
 ۷۴ شرط مرزی حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $10^5 = Ra$  و تعداد نقاط شبکه الف)  
 ۶۴×۶۴ (ب) ۱۲۸×۱۲۸ و ج) ۲۵۶×۲۵۶
- شکل ۳-۱۸ نمایش تغییرات سرعت در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور  
 ۷۷ شرط مرزی حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $10^6 = Ra$  و تعداد نقاط شبکه الف)  
 ۱۲۸×۱۲۸ (ب) و ۲۵۶×۲۵۶
- شکل ۳-۱۹ نمایش تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ محفظه برحسب گام  
 ۷۸ زمانی در حضور شرایط مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی مختلف، در عدد رایلی  
 $10^5 = Ra$  و تعداد نقاط شبکه الف) ۶۴×۶۴ (ب) ۱۲۸×۱۲۸ و ج) ۲۵۶×۲۵۶
- شکل ۳-۲۰ نمایش تغییرات دما در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور  
 ۷۹ شرایط مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی مختلف، در عدد رایلی  $10^5 = Ra$  و تعداد  
 نقاط شبکه الف) ۶۴×۶۴ (ب) ۱۲۸×۱۲۸ و ج) ۲۵۶×۲۵۶
- شکل ۳-۲۱ نمایش تغییرات عدد شروود در دیوار سمت چپ محفظه برحسب گام  
 ۸۰ زمانی در حضور شرط مرزی غلظت و هیدرودینامیکی مختلف، در عدد رایلی  
 $10^5 = Ra$  و تعداد نقاط شبکه ۱۲۸×۱۲۸ برای نسبت شناوری الف)  $N = -0.8$  (ب)



$$N=-1/2$$

۸۴ شکل ۴-۱ نمایش هندسه و شرایط مرزی محفظه

۸۵ شکل ۴-۲ نمایش توابع توزیع احتمال در مرزها

۸۸ شکل ۴-۳ نمایش تعداد گام زمانی لازم برای همگرایی روش شبکه بولتزمن در حالت

$$A=0/4 \text{ و } Le=2, Ra=10^5$$

شکل ۴-۴ مقایسه نتایج به دست آمده برای دمای بی بعد در مرکز محفظه با استفاده

۸۹ از روش حجم محدود و روش شبکه بولتزمن در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و نسبت ابعاد

$$A=0/4$$
 مانع به ابعاد محفظه

شکل ۴-۵ مقایسه نتایج به دست آمده برای سرعت در مرکز محفظه با استفاده از

۹۰ روش حجم محدود و روش شبکه بولتزمن در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و نسبت ابعاد

$$A=0/4$$
 مانع به ابعاد محفظه

شکل ۴-۶ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^4, L=0/1, A=0/4$  و الف)  $N=0/0$

۹۱

$$N=-2/4 \text{ (ه) } N=-1/5 \text{ (د) } N=-1/2 \text{ (ج) } N=-0/8 \text{ (ب)}$$

شکل ۴-۷ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^4, L=2, A=0/4$  و الف)  $N=0/0$

۹۲

$$N=-2/5 \text{ (ه) } N=-1/5 \text{ (د) } N=-1/2 \text{ (ج) } N=-0/8 \text{ (ب)}$$

شکل ۴-۸ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^4, L=10, A=0/4$  و الف)  $N=0/0$

۹۳

$$N=-2/5 \text{ (ه) } N=-1/5 \text{ (د) } N=-1/2 \text{ (ج) } N=-0/8 \text{ (ب)}$$

شکل ۴-۹ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^5, L=0/1, A=0/4$  و الف)  $N=0/0$

۹۵

$$N=-2/5 \text{ (ه) } N=-1/5 \text{ (د) } N=-1/2 \text{ (ج) } N=-0/8 \text{ (ب)}$$

شکل ۴-۱۰ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^5, L=2, A=0/4$  و الف)  $N=0/0$

۹۶

$$N=-2/5 \text{ (ه) } N=-1/5 \text{ (د) } N=-1/2 \text{ (ج) } N=-0/8 \text{ (ب)}$$

- ۹۷ شکل ۴-۱۱ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^6$ ،  $L=2$ ،  $A=0/4$  و الف)  $-0/8$   
 $N=$  (ب)  $N=-1/2$  (ج)  $N=-1/5$  (د)  $N=-2/0$  (ه)  $N=-2/5$
- ۹۸ شکل ۴-۱۲ نمایش اثر ابعاد مانع روی شکل خطوط جریان در حالت  $Ra=10^5$  و  
 $Le=2$  در نسبت شناوری مختلف
- ۱۰۰ شکل ۴-۱۳ نمایش اثر عدد رایلی و نسبت شناوری روی کانتور دما در عدد لوییس  
 $Le=2$
- ۱۰۲ شکل ۴-۱۴ نمایش اثر عدد رایلی و نسبت شناوری روی کانتور غلظت در عدد  
 $Le=2$  لوییس
- ۱۰۳ شکل ۴-۱۵ نمایش اثر عدد رایلی روی تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ  
 محفظه بر حسب تغییرات نسبت شناوری در عدد لوییس  $Le=2$  و نسبت ابعاد مانع  
 $A=0/4$
- ۱۰۴ شکل ۴-۱۶ نمایش اثر عدد رایلی روی تغییرات عدد شروود در دیوار سمت چپ  
 محفظه بر حسب تغییرات نسبت شناوری در عدد لوییس  $Le=2$  و نسبت ابعاد مانع  
 $A=0/4$
- ۱۰۵ شکل ۴-۱۷ نمایش اثر عدد لوییس روی کانتور دما در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و  
 $A=0/4$
- ۱۰۶ شکل ۴-۱۸ نمایش اثر عدد لوییس روی کانتور غلظت در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و  
 $A=0/4$
- ۱۰۷ شکل ۴-۱۹ نمایش اثر عدد لوییس روی تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ  
 محفظه بر حسب تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $Ra=10^4$  و نسبت ابعاد مانع  
 $A=0/4$

- شکل ۴-۲۰ نمایش اثر عدد لوییس روی تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ
- ۱۰۸ محفظه برحسب تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و نسبت ابعاد مانع
- $A=0/4$
- شکل ۴-۲۱ نمایش اثر عدد لوییس روی تغییرات عدد شروود در دیوار سمت چپ
- ۱۰۸ محفظه برحسب تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $Ra=10^4$  و نسبت ابعاد مانع
- $A=0/4$
- شکل ۴-۲۲ نمایش اثر عدد لوییس روی تغییرات عدد شروود در دیوار سمت چپ
- ۱۰۹ محفظه برحسب تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و نسبت ابعاد مانع
- $A=0/4$
- شکل ۴-۲۳ اثر ابعاد مانع روی کانتور دما در حالت  $Ra=10^5$  و  $Le=2$  در نسبت
- ۱۱۰ شناوری مختلف
- شکل ۴-۲۴ اثر ابعاد مانع روی کانتور غلظت در حالت  $Ra=10^5$  و  $Le=2$  در نسبت
- ۱۱۱ شناوری مختلف
- شکل ۴-۲۵ نمایش اثر نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه روی تغییرات عدد ناسلت در
- ۱۱۲ دیوار سمت چپ محفظه برحسب تغییرات نسبت شناوری در عدد لوییس  $Le=2$  و
- عدد رایلی  $Ra=10^5$
- شکل ۴-۲۶ نمایش اثر نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه روی تغییرات عدد شروود در
- ۱۱۲ دیوار سمت چپ محفظه برحسب تغییرات نسبت شناوری در عدد لوییس  $Le=2$  و
- عدد رایلی  $Ra=10^5$

## فهرست جداول

- جدول (۱-۳) مقایسه عدد ناسلت به دست آمده در دیوار سمت چپ محفظه در ویسکوریته  $\nu$  برابر با  $0.02$  با استفاده از دو شرط مرزی هیدرودینامیکی مختلف و در حضور شرط
- ۶۶ مرزی حرارتی مرتبه اول
- جدول (۲-۳) مقایسه عدد ناسلت به دست آمده در دیوار سمت چپ محفظه با استفاده
- ۶۶ از شرایط مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی مختلف در ویسکوریته  $\nu$  برابر با  $0.05$  و عدد رایی  $Ra=10^5$
- جدول (۱-۴) مقایسه عدد ناسلت به دست آمده در دیوار سمت چپ محفظه با استفاده از ابعاد
- ۸۷ شبکه مختلف در رایی  $10^6$  و عدد لوییس  $Le=2$  در سه نسبت شناوری مختلف
- جدول (۲-۴) مقایسه عدد شروود به دست آمده در دیوار سمت چپ محفظه با استفاده از ابعاد
- ۸۷ شبکه مختلف در رایی  $10^6$  و عدد لوییس  $Le=2$  در سه نسبت شناوری مختلف
- جدول (۳-۴) مقایسه عدد ناسلت به دست آمده در دیوار سمت چپ محفظه با استفاده روش
- ۹۰ شبکه بولتزمن و روش حجم محدود در نسبت ابعاد مانع به محفظه  $A=0.2$

## فهرست علائم

$\rightarrow$	بردار موقعیت ذره
$x$	
$e_i$	بردارهای شبکه
$f_a^{eq}$	تابع توزیع احتمال تعادلی مربوط به جریان
$g_a^{eq}$	تابع توزیع احتمال تعادلی مربوط به دما و غلظت
$f_a$	تابع توزیع احتمال مربوط به جریان
$g_a$	تابع توزیع احتمال مربوط به دما و غلظت
$\overline{F}_a$	ترم نیرو
$\omega_a$	توابع وزنی
$m$	جرم
$\rho_w$	چگالی سیال مجازی روی دیوار
$\rho$	چگالی ماکروسکوپیک
$T$	دما
$T_w$	دمای دیوار
$T_c$	دمای دیوار سرد
$T_h$	دمای دیوار گرم
$t$	زمان
$\omega_s$	زمان آرامش مربوط به دما و غلظت
$\tau$	زمان آرامش منفرد مربوط به جریان

$c$	سرعت شبکه
$c_s$	سرعت صوت
$u'$	سرعت ضد لغزشی
$U_{act}$	سرعت فیزیکی
$\vec{u}$	سرعت ماکروسکوپی
$\vec{g}_r$	شتاب گرانش
$\beta_T$	ضریب انبساط حرارتی
$\beta_C$	ضریب انبساط غلظت
$C_u$	ضریب تبدیل سرعت
$C_H$	ضریب تبدیل طول
$C_v$	ضریب تبدیل ویسکوزیته
$k$	ضریب هدایت حرارتی
$a$	طول مانع
$H$	طول محفظه
$Pr$	عدد پرانتل
$Ra$	عدد رایلی
$Sh$	عدد شروود
$Le$	عدد لوییس
$Ma$	عدد ماخ
$Nu$	عدد ناسلت
$C$	غلظت

$ts$	گام زمانی
$u_w$	مولفه X سرعت دیوار
$v_w$	مولفه Y سرعت دیوار
$P$	مومنتم ذره
$A$	نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه
$N$	نسبت شناوری
$\alpha$	نفوذ پذیری حرارتی
$D$	نفوذ پذیری غلظت
$lu$	واحد طول شبکه
$\nu$	ویسکوزیته سینماتیکی
$\nu_{act}$	ویسکوزیته فیزیکی

## فصل ۱. مقدمه



## ۱-۱- مقدمه

از آنجایی که انتقال مومنتوم، حرارت و جرم به عنوان شاخه‌های اصلی فیزیک کلاسیک شناخته می‌شوند، مطالعه همزمان آنها به عنوان یکی از علوم مهندسی اصلی، جایگاه خاصی یافته است. انتقال حرارت به روش جابجایی طبیعی کاربردهای فراوانی هم در صنعت و هم در مهندسی دارد که از آن جمله می‌توان به خنک کاری تجهیزات الکترونیکی، بهبود انتقال حرارت در دستگاه‌های مبدل حرارتی و مخازن نفتی اشاره کرد [۱]. انتقال حرارت در محفظه‌های باز و شکافدار در گیرنده‌های حرارتی خورشیدی، جابجایی حرارت از سطوح گسترش یافته در مبدل‌های حرارتی، کلکتورهای خورشیدی با نوارهای عایق استفاده می‌شود [۲]. بیشتر مطالعات انجام گرفته در رابطه با جابجایی، تنها با حرکت سیال به دلیل گرادیان دما سر و کار دارند. در حالی که حرکت سیال می‌تواند ناشی از تغییرات چگالی به علت گرادیان کمیت‌های اسکالر دیگر نیز باشد. یکی از این کمیت‌ها، می‌تواند غلظت آلاینده‌ها در سیال باشد [۳]. انتقال حرارت و جرم به روش جابجایی طبیعی که به آن جابجایی با نفوذ دوگانه<sup>۱</sup> نیز گفته می‌شود، جریان‌هایی هستند که به علت نیروی شناوری ناشی از گرادیان‌های دما و غلظت ایجاد می‌شوند. در طبیعت این جریان‌ها در اقیانوس‌ها، دریاچه‌ها، حوضچه‌های خورشیدی، آب‌های کم عمق ساحلی و اتمسفر دیده می‌شوند. در صنعت، مثال‌ها شامل فرآیندهای شیمیایی، رشد کریستالی، مخازن ذخیره گاز طبیعی، ذخیره انرژی و ... می‌باشد [۴-۵]. مثال خاص این پدیده نفوذ رطوبت یا آلودگی از شکاف‌های باز ساختمان مثل دودکش می‌باشد [۶].

در سال‌های اخیر، روش شبکه بولتزمن<sup>۲</sup> به عنوان ابزار بسیار مفیدی در حل مسائل انتقال حرارت و جرم مورد استفاده قرار گرفته است. این روش، که بر خلاف روش‌های متداول عددی مانند روش حجم محدود و ... که تنها در محدوده جریان‌های پیوسته قابل استفاده‌اند، محدودیت پیوستگی جریان را

<sup>1</sup> Double diffusive convection

<sup>2</sup> Lattice Boltzmann method

ندارد، به دلیل روند محاسبات موازی از سرعت بیشتری برخوردار است و هزینه‌های محاسباتی را تا حد زیادی کاهش می‌دهد. علاوه بر این به دلیل سهولت در اعمال شرایط مرزی، برای حل مسائل با مرزهای پیچیده بسیار کارآمد است.

مدل‌های شبکه بولتزنم قابلیت فوق العاده‌ای در مدل‌سازی سیالات تک فازی و چند فازی دارند. رفتارهای مختلف مانند جریان‌های غیر دائم، جدایی فازها، تبخیر، چگالش، کاویتاسیون، انتقال حرارت و جرم، شناوری و برهم کنش با سطوح به آسانی قابل مدل‌سازی است. مدل‌های شبکه بولتزنم به عنوان آزمایشگاه‌های عددی استثنایی برای بسیاری از فرآیندهای فیزیکی و شیمی فیزیکی عمل می‌کنند [۷].

در ادامه این فصل ابتدا به روند روی‌آوری به روش شبکه بولتزنم می‌پردازیم. سپس اندک توضیحاتی در ارتباط با مدل شبکه خودکار سلول گاز، از مدل‌های مختلف گرفته تا نحوه به روز رسانی آرایش‌ها و مزایا و معایب این روش، ارائه می‌دهیم. در ادامه، به مفاهیم اولیه روش شبکه بولتزنم می‌پردازیم و توضیحاتی درباره تئوری جنبشی و همچنین تابع توزیع بولتزنم ارائه می‌کنیم و در نهایت معادله بولتزنم را به دست می‌آوریم.

در فصل دوم، مطالعاتی که تاکنون در زمینه انتقال حرارت و انتقال جرم انجام گرفته است، بیان می‌شود. فصل سوم به بیان معادلات شبکه بولتزنم در حل جریان، انتقال حرارت و جرم و انواع شرایط مرزی مربوط به آن اختصاص یافته است. همچنین مقایسه‌ای بین دو نوع شرط مرزی با دقت‌های مرتبه اول و دوم انجام گرفته و نتایج این مقایسه در فصل سوم آمده است. فصل چهارم به حل جریان، انتقال حرارت و جرم در یک محفظه مربعی و در حضور یک مانع گرم اختصاص یافته است. در فصل پنجم نتایج به دست آمده از این تحقیق و پیشنهادات برای آینده ارائه می‌شود.

## ۱-۲- روند روی‌آوری به روش شبکه بولتزنم [۸]

در مدل سازی معادلات انتقال (حرارت، جرم و مومنتوم) دو روش اساسی وجود دارد: دیدگاه پیوسته و دیدگاه گسسته. در دیدگاه پیوسته، معادلات دیفرانسیل عادی یا پاره‌ای با اعمال بقای جرم، انرژی و مومنتوم در یک حجم کنترل بسیار کوچک به وجود می‌آیند. از آنجایی که حل معادلات دیفرانسیل حاکم به دلایل بسیاری (غیر خطی بودن، شرایط مرزی پیچیده، هندسه‌های پیچیده و ...) مشکل است، روش‌های تفاضل محدود، المان محدود، حجم محدود و ... معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی و اولیه مشخص را به یک سیستم از معادلات جبری تبدیل می‌کنند. معادلات جبری به صورت تکرار شونده تا رسیدن به همگرایی کامل حل می‌شوند. یعنی ابتدا معادلات حاکم تعریف می‌شوند (عمدتاً معادله دیفرانسیل جزئی). گام بعدی گسسته سازی قلمرو با توجه به روش حل به حجم‌ها، المان‌ها یا حلقه‌هایی می‌باشد. می‌توان این این مرحله را به گونه‌ای تصور کرد که هر حجم یا گره یا المان شامل جمعی از ذرات (از مرتبه  $10^{16}$ ) باشد. این مقیاس، مقیاس ماکروسکوپی است. سرعت، فشار و دمای این ذرات توسط یک مقدار گرهی<sup>۱</sup> بیان می‌شود، یا روی یک حجم محدود میانگین گیری می‌شود و یا به سادگی فرض می‌شود که از یک گره به گره بعدی به صورت خطی یا دوسویه تغییر می‌کند. مشخصه‌هایی مانند ویسکوزیته، هدایت حرارتی، ظرفیت گرمایی و ... معمولاً معلوم هستند.

از طرفی، می‌توان محیط را تشکیل شده از ذرات کوچکی (اتم، مولکول) در نظر گرفت که این ذرات به یکدیگر برخورد می‌کنند. این مقیاس، مقیاس میکروسکوپی است. بنابراین، باید نیروهای بین ذره‌ای (بین مولکولی) را تعیین کنیم و معادلات دیفرانسیل معمولی قانون دوم نیوتن (بقای مومنتوم) را حل کنیم. لازم است در هر گام زمانی، مکان و سرعت هر ذره یعنی خط سیر ذرات را مشخص کنیم. در این مرحله، تعریفی از دما، فشار و مشخصه‌های ترموفیزیکی مانند ویسکوزیته، هدایت حرارتی، ظرفیت گرمایی و ... وجود ندارد. مکانیک آماری باید به عنوان رابطی بین دنیای مولکولی و دنیای ماکروسکوپی استفاده شود. برای مثال، دما و فشار به ترتیب به انرژی جنبشی ذرات (جرم و سرعت)

<sup>1</sup> nodal

و فرکانس ذرات برخورد کننده به مرزها، مربوط می‌شوند. این روش مدل‌سازی، دینامیک مولکولی نامیده می‌شود. برای داشتن درک بهتر، معادلات زیادی باید حل شود.  $10^3$  سانتی متر هوا در شرایط اتاق، حاوی  $10^{22} \times 3$  مولکول می‌باشد. یک مول آب، حاوی بیش از  $10^{22} \times 6$  مولکول است. سوال این است که آیا لازم است که رفتار هر مولکول یا اتم را بدانیم؟

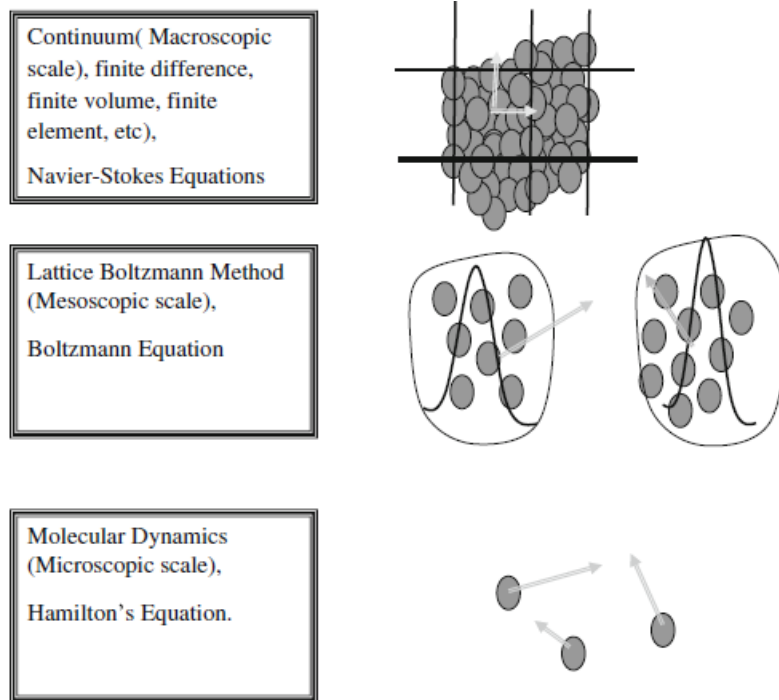
در فرآیند جمع‌آوری اطلاعات، نیاز داریم موقعیت و سرعت هر ذره را تعیین کنیم. همچنین گام زمانی در مدل‌سازی باید کمتر از زمان برخورد ذرات که از مرتبه فرو ثانیه ( $10^{-12}$  s) است، باشد. بنابراین حل مسائل با مرتبه بزرگ (مرتبه سانتی‌متر) توسط روش دینامیک مولکولی، غیر ممکن است. سوال این است که آیا موقعیت و سرعت هر ذره برای ما مهم است؟ در مقیاس ماکروسکوپی، این رفتار هر ذره نیست که برای ما اهمیت دارد بلکه اثرات برآیند است.

حال یک روش واسطه که بین هر دو روش گفته شده قرار دارد، یعنی روش شبکه بولتزمن را در نظر می‌گیریم. ایده اصلی بولتزمن ایجاد پلی بین مقیاس ماکروسکوپی و مقیاس میکروسکوپی است به گونه‌ای که به جای در نظر گرفتن رفتار هر ذره به تنهایی، رفتار گروهی از ذرات را به عنوان یک واحد در نظر بگیرد. مشخصه‌های گروه ذرات توسط یک تابع توزیع بیان می‌شود. مساله اصلی، تابع توزیع است. تابع توزیع به عنوان نماینده گروه ذرات عمل می‌کند. این مقیاس، مقیاس مسوسکوپی<sup>1</sup> است. روش‌های گفته شده در شکل ۱-۱ نشان داده شده‌اند.

روش شبکه بولتزمن از مزایای هر دو روش ماکروسکوپی و میکروسکوپی با استفاده از منابع کامپیوتری بهره می‌برد. روش شبکه بولتزمن مزایای بسیاری دارد. به راحتی در قلمروهای پیچیده اعمال می‌شود. برای حل جریان‌های چند فازی و چند جزئی بدون نیاز به دنبال کردن مرز بین فازها استفاده می‌شود. همچنین می‌توان آن را با فرآیندهای کامپیوتری موازی مرتبط کرد. علاوه بر این دیگر نیازی به حل معادله لاپلاس در هر گام زمانی برای ارضای معادله پیوستگی جریان‌های تراکم

<sup>1</sup> Mesoscopic scale

ناپذیر غیردائم، چنانکه در حل معادلات ناویر استوکس لازم است، نیست. از طرفی نسبت به حلگر ناویر استوکس نیاز به حافظه کامپیوتری بیشتری دارد که البته این محدودیت بزرگی نیست.



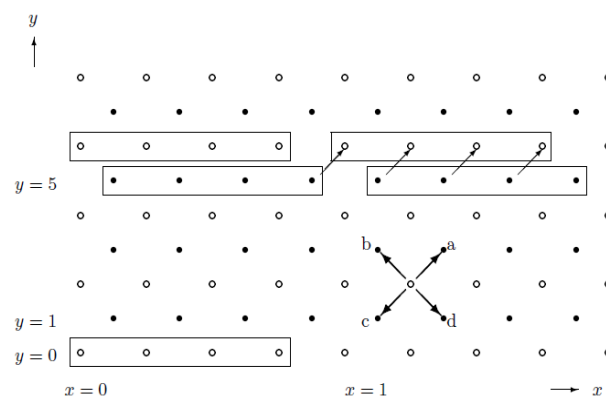
شکل ۱-۱ روش‌های مدل سازی.

### ۱-۳- مدل شبکه خودکار سلول گاز

برای درک بهتر فیزیک شبکه خودکار سلول گاز، ابتدا لازم به ذکر است که یک سیال را می‌توان در سه سطح تعریف کرد: سطح مولکولی، سطح جنبشی با تقریب بولتزمن و سطح ماکروسکوپی با تقریب پیوستگی. در دو سطح اول، سیال نزدیک تعادل ترمودینامیکی قرار دارد. در سطح آخر متغیرهای ترمودینامیکی آزاد مانند چگالی موضعی، مومنتوم، دما و... وجود دارند. یک تعریف ماکروسکوپی از سیال با حضور تعادل که در زمان و مکان به آرامی تغییر می‌کند و با به کارگیری معادلات پیوستگی برای متغیرهای ترمودینامیکی به عنوان شرایط پایداری، انجام می‌گیرد [۹].

## ۱-۳-۱- مدل شبکه خودکار سلول گاز HPP [۱۰]

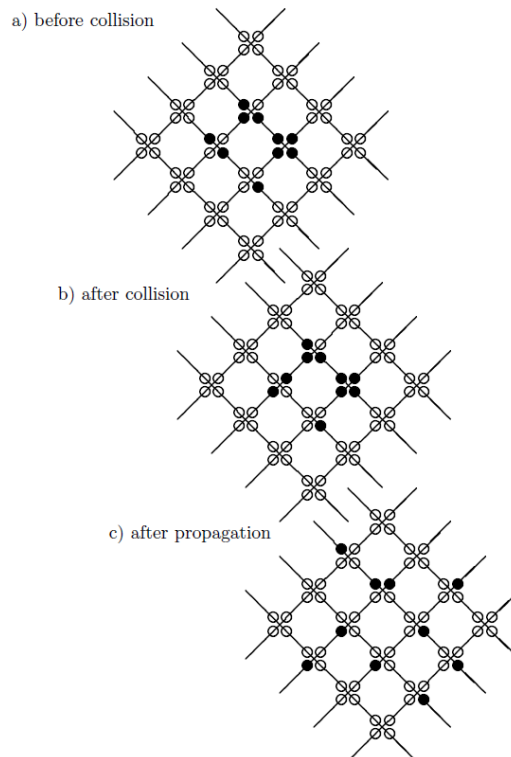
اولین شبکه خودکار سلول گاز (LGCA) اولین بار در سال ۱۹۷۳ توسط هاردی<sup>۱</sup>، پازیس<sup>۲</sup> و پومئو<sup>۳</sup> ارائه شد و به همین دلیل به آن مدل HPP گفته می‌شود. مدل HPP ساده‌ترین مدل شبکه خودکار سلول گاز است و با وجود این که مشخصه‌های مهمی مانند حضور تعادل ترمودینامیکی دارد، اما در مقیاس ماکروسکوپی به معادلات ناویر استوکس نمی‌رسد.



شکل ۱-۲ شبکه مربعی HPP، چهار برداری که به نام‌های  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  نام‌گذاری شده‌اند، سرعت‌های شبکه هستند. ذرات بین نقاط سیاه و دایره‌های سفید جابجا می‌شوند [۱۰].

مدل HPP یک مدل شبکه خودکار سلول گاز در یک شبکه مربعی است. بردارهای  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) که نزدیک‌ترین همسایه‌ها را به هم متصل می‌کنند (شکل ۱-۲)، بردارهای شبکه یا سرعت‌های شبکه نامیده می‌شوند. تعریف دقیق‌تر این است که سرعت‌های شبکه برابرند با تقسیم بردارهای شبکه بر گام زمانی که همواره یک در نظر گرفته می‌شود. بنابراین بردارهای شبکه و سرعت‌های شبکه مقادیر عددی یکسان اما واحدهای متفاوت دارند.

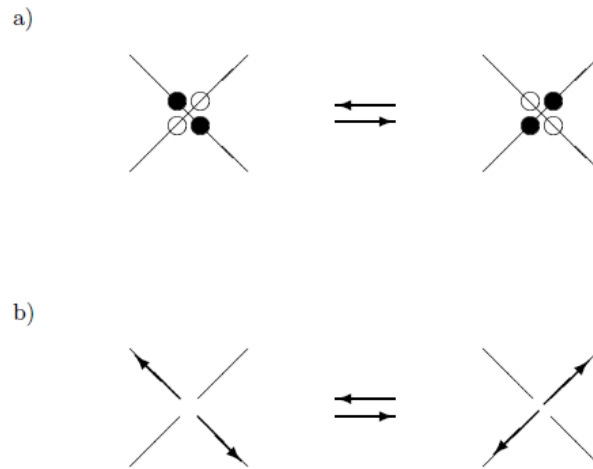
<sup>1</sup> Hardy  
<sup>2</sup> de Pazzis  
<sup>3</sup> Pomeau



شکل ۱-۳ HPP: برخورد و جاری شدن. دایره‌های توپر نشان دهنده سلول‌های اشغال شده و دایره‌های تو خالی نشان دهنده سلول‌های خالی هستند. (a) بخشی از شبکه قبل از برخورد (یعنی بعد از جاری شدن)، تنها یک آرایش برخورد وجود دارد. (b) بعد از برخورد (قبل از جاری شدن) آرایش سلول‌ها در نود در سمت چپ تغییر کرده است. (c) بعد از جاری شدن: تمام ذرات در راستای رابطه‌ها به نزدیکترین همسایه‌شان منتقل شده‌اند. (شبکه در خارج از قسمت نشان داده شده خالی فرض شده یعنی هیچ جاری شدن ذراتی از خارج انجام نمی‌شود). [۱۰]

در هر نود چهار سلول وجود دارد که هر یک به یک رابط با نزدیکترین همسایه مربوط می‌شوند (شکل ۱-۳). این سلول‌ها ممکن است خالی یا حداکثر توسط یک ذره اشغال شده باشند. این قانون منع ورود<sup>۱</sup>، مشخصه تمام مدل‌های شبکه خودکار سلول گاز می‌باشد. تمام ذرات دارای جرم یکسان  $m$  و مشابه یکدیگر (غیر قابل تشخیص) هستند.

<sup>1</sup> Exclusion principle



شکل ۱-۴ HPP: برخورد (a) تنها یک آرایش برخورد (برخورد سر به سر) برای HPP وجود دارد: دو سلول در لینک‌های مخالف اشغال شده و در سلول دیگر خالی هستند. بعد از برخورد، سلول‌هایی که قبلاً خالی بوده‌اند، اشغال می‌شوند و برعکس (b) همانند a اما در این جا بردارهای مومنتوم مربوطه نشان داده شده‌اند، هر دو بردار مومنتوم 90 درجه چرخیده‌اند: بقای جرم و مومنتوم حفظ شده است. [۱۰]

تکامل در زمان به صورت تناوب بین برخورد<sup>۱</sup> محلی C (تنها ذرات همان نود درگیر هستند) و جاری شدن<sup>۲</sup> S در راستای رابط مناسب به نزدیکترین همسایه، انجام می‌گیرد. برخورد باید بقای جرم و مومنتوم را حفظ کند. برای HPP تنها یک آرایش برخورد وجود دارد. هنگامی که دو ذره از دو جهت مخالف به یک نود وارد می‌شوند و دوسلول دیگر خالی هستند، یک برخورد سر به سر<sup>۳</sup> صورت می‌گیرد که هر دو ذره را در همان جهت 90 می‌چرخاند (شکل ۱-۴). باقی آرایش‌ها در طول مرحله برخورد، بدون تغییر باقی می‌مانند.

<sup>1</sup>Collision  
<sup>2</sup>Streaming  
<sup>3</sup>head on collision



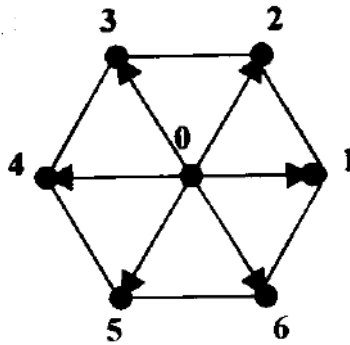
## ۱-۳-۲- مدل شبکه خودکار سلول گاز FHP

در سال ۱۹۸۶، فریش<sup>۱</sup>، هاسلاچر<sup>۲</sup> و پومئو<sup>۳</sup> مدل بسیار جالبی ارائه دادند: یک روش خودکار سلولی ساده که تنها از قوانین بقا در مقیاس میکروسکوپی تبعیت می‌کند و قادر است پیچیدگی‌های جریان سیال واقعی را مدل کند. این مدل با هندسه شش وجهی با توجه به نام نویسندگان آن، مدل FHP نامیده می‌شود [۹].

یک شبکه معمولی با تقارن شش وجهی را در نظر بگیرید که در آن هر نود شبکه با شش همسایه که با بردارهای رابط  $e_i$  مشخص می‌شوند، محاصره شده است. هر نود شبکه حداکثر شش ذره را در خود جای می‌دهد. تمام ذرات دارای جرم یکسان  $m$  هستند. ذرات تنها می‌توانند در راستای یکی از شش جهت تعیین شده، حرکت کنند [۱۱]. بردارهای شبکه  $e_i$ ، همچنین سرعت‌های شبکه نامیده می‌شوند زیرا گام زمانی همواره در مدل شبکه خودکار سلول گاز، یک در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که تمام ذرات جرم یکسان ( $m=1$ ) دارند،  $e_i$  مومنوم ذرات نیز می‌باشد [۱۰]. در یک گام زمانی ذرات به نزدیکترین همسایه منتقل می‌شوند. پرش‌های کوتاه‌تر و بزرگتر ممنوع است. بنابراین تمام ذرات دارای انرژی یکسان‌اند. هیچ دو ذره‌ای که در یک نود قرار دارند، نمی‌توانند در یک جهت حرکت کنند. همانند HPP، در این جا برخورد سر به سر امکان‌پذیر است (شکل ۱-۶).

مشخصه‌های اصلی مدل FHP عبارت‌اند از [۱۰]:

<sup>1</sup> Frisch  
<sup>2</sup> Hasslacher  
<sup>3</sup> Pomeau



شکل ۱-۵ شبکه شش وجهی FHP. [۱۱]

(۱) شبکه تقارن شش وجهی دارد.

(۲) نودها به نزدیکترین همسایه‌ها که در فاصله یکسان نسبت به نود مرکزی قرار گرفته‌اند، متصل هستند.

(۳) بردارهای  $e_i$  که نزدیکترین نودهای همسایه را به هم متصل می‌کنند، بردارهای شبکه یا بردارهای سرعت نامیده می‌شوند.

$$e_i = (\cos \pi/3 i, \sin \pi/3 i) \quad i=1,2,\dots,6 \quad (|e_i|=1 \text{ برای تمام } i)$$

(۴) یک سلول در تمام نودها، با هر رابط مرتبط است.

(۵) سلول ممکن است خالی یا حداکثر توسط یک ذره اشغال شده باشد.

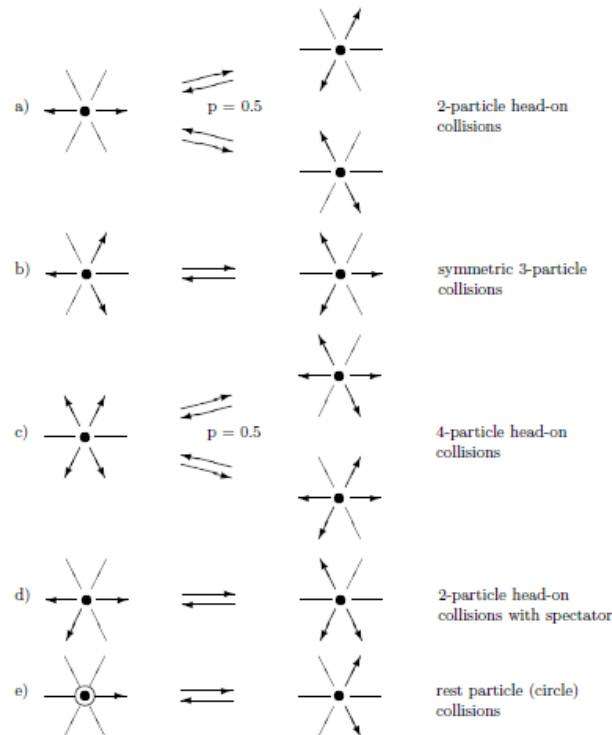
(۶) تمام ذرات جرم یکسان ( $m=1$ ) دارند و مشابه یکدیگر هستند.

(۷) تکامل در زمان، با تناوب برخورد  $C$  و جاری شدن  $S$  انجام می‌گیرد.

(۸) برخوردها کاملاً محلی هستند یعنی فقط ذرات یک نود درگیر می‌شوند.

این قوانین یک مدل مشابه گاز را تعریف می‌کنند که دینامیک آن به نحوی نشان دهنده دینامیک نیوتنی مولکول‌های واقعی است. در گازهای واقعی، مولکول‌ها در تمام جهات حرکت می‌کنند (ایزوتروپی)، در حالی که در این جا، تنها در شش جهت می‌توانند حرکت کنند. همچنین مولکول‌های واقعی در هر سرعتی حرکت می‌کنند، در حالی که در این جا تنها شش سرعت مجاز است. در نهایت

استفاده از قانون منع ورود در ذرات کلاسیک که مومنتوم و موقعیت آن‌ها را می‌توان با دقت دلخواه به طور همزمان تعیین کرد، عجیب به نظر می‌رسد. با این وجود این مدل به ظاهر ضعیف از دینامیک مولکولی، هر آنچه برای مدل‌سازی هیدرودینامیک واقعی لازم است را در خود دارد [۱۱].



شکل ۱-۶ تمام برخوردهای ممکن در FHP، سلول‌های اشغال شده توسط پیکان و سلول‌های خالی توسط خطوط

نازک مشخص شده است. [۱۰]

با توضیح بالا، حالت سیستم در هر نود شبکه به طور واضح در فرم بله/خیر که نشان دهنده حضور یا عدم حضور ذره در آن نود است، مشخص می‌شود و این تنها چیزی است که لازم داریم [۱۱]:

$$n_i(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{عدم حضور ذره در موقعیت } \vec{x} \text{ در زمان } t \quad (1-1)$$

$$n_i(\vec{x}, t) = 1 \quad \text{حضور ذره در موقعیت } \vec{x} \text{ و در زمان } t \quad (2-1)$$

### ۱-۳-۳- تکامل (تجدید آرایش) میکرو دینامیکی شبکه خودکار سلول گاز [۱۱]

همان طور که پیش تر گفته شد، دو مکانیزم اصلی روش شبکه گاز برخورد و جاری شدن هستند. جاری شدن شامل انتقال ذرات از یک موقعیت به موقعیت دیگر براساس سرعت های گسسته  $e_i$  می باشد. بنابراین ذره ای که در زمان  $t$  در موقعیت  $\vec{x}$  و با سرعت  $e_i$  قرار دارد، در زمان  $t+1$  به موقعیت  $\vec{x} + e_i$  می رود.

$$n_i(\vec{x} + e_i, t+1) = n_i(\vec{x}, t) \quad (3-1)$$

بنابراین اپراتور گسسته جاری شدن  $\Delta_i n_i$  به این صورت تعریف می شود:

$$\Delta_i n_i = n_i(\vec{x} + e_i, t+1) - n_i(\vec{x}, t) \quad (4-1)$$

### ۱-۳-۴- مزایا و معایب روش شبکه خودکار سلول گاز [۱۱]

مدل شبکه گاز کاملاً در زمان، مکان و سرعت گسسته است و بنابراین می تواند به عنوان مدلی که از مولکول های بولین ساخته شده به آن نگریت و بنابراین می توان با استفاده از یک الگوریتم مناسب، محاسبات دقیقی را انجام داد.

از طرفی استفاده از روش شبکه خودکار سلول گاز مشکلاتی را به همراه دارد. هر چند تاکنون راه های برای حل این مشکلات پیشنهاد شده اما همچنان مشکلاتی بر سر راه وجود دارد که در ادامه به برخی اشاره می کنیم.

به دست آوردن معادلات ناویر استوکس از مدل شبکه خودکار گاز دو مشکل اساسی در رابطه با

گسسته سازی شبکه ایجاد می کند:

وابستگی غیرعادی سرعت به فشار سیال

این مورد به این دلیل است که با توجه به تعداد محدود سرعت‌ها، برقراری پیوستگی تنها از طریق یک بسط پرتوریشن در میدان جریان امکان پذیر است. این بسط نمی تواند با تانسورهای فشار و اینرسی ناویراستوکس هم خوانی پیدا کند. برای اعداد ماخ کوچک ( $Ma \ll 1$ ) فشار بسیار کوچک و چگالی تقریباً ثابت می شود و با توجه به ناچیز شدن این مشکلات، امکان به دست آوردن معادلات ناویراستوکس، فراهم می شود.

ویسکوزیته بالا (عدد رینولدز پایین)

بالاترین عدد رینولدزی که با استفاده از روش شبکه خودکار گاز می توان مدلسازی کرد، توسط حداقل طول آزاد میانگین در شبکه یعنی حداکثر تعداد برخوردهایی که در واحد زمان ماشین سلولی خودکار می تواند تأمین کند، تعیین می شود. علاوه بر تعداد برخوردها، کیفیت آنها یعنی مقدار مومنتومی که قادرند در جهت های مختلف در شبکه گسسته جابجا کنند، نیز اهمیت دارد. گسسته سازی فضای فازی دو نقش متفاوت در دستیابی به اعداد رینولدز پایین ایفا می کند. از یک طرف تعداد سرعت های گسسته ترکیب شده با ارضای بقای جرم و مومنتوم، محدودیت سنگینی روی تعداد برخوردهای ممکن اعمال می کند. از طرفی جهت سرعت ها ذرات را وادار به برخورد در مکان های شبکه می کند و این احتمال عدم برخورد آنها را از بین می برد.

اغتشاشات آماری:

مانند هر روش شبکه ای دیگر، روش شبکه خودکار سلول گاز، دچار مشکل نوسانات آماری است. مطالعات بسیاری برای رفع این مشکل انجام گرفته است.

## ۱-۴- معادله بولتزمن

## ۱-۴-۱ - مفاهیم اولیه بولتزمن [۷]

لودویگ بولتزمن<sup>۱</sup> در سال ۱۸۴۴ در اتریش متولد شد. او در سال ۱۹۰۶ احتمالاً به این دلیل که برای قبولاندن ایده‌هایش مشکلات زیادی داشت، خودکشی کرد. کمی بعد از مرگ وی، نظریه گازها و تئوری اتمی ماده او توسط جامعه علمی پذیرفته شد، از آن پس نقش مهمی ایفا کرد [۱۱].

ایده اصلی روش بولتزمن این است که یک گاز از ذراتی تشکیل شده است که با هم در حال فعل و انفعال هستند و می‌توان آن‌ها را توسط مکانیک کلاسیک تعریف کرد و از آنجایی که تعداد این ذرات زیاد است، یک روش آماری لازم و مناسب خواهد بود. مکانیک می‌تواند بسیار ساده و فقط شامل مفاهیم جاری شدن به فضا و برخوردهای بیلیارد مانند باشد. چنانکه خواهیم دید، مدل‌های شبکه بولتزمن، با وجود این که مانند مدل‌های شبکه گاز، رفتار سیالات واقعی را مدل‌سازی می‌کنند، بسیار ساده کننده هستند.

در این جا برخی مفاهیم تئوری جنبشی گازها و مکانیک آماری را معرفی می‌کنیم و یک فرم ساده شده معادله بولتزمن را به دست می‌آوریم.

## ۱-۴-۲ - تئوری جنبشی [۷]

یک گاز رقیق شامل ذرات کروی سخت که با سرعت زیاد حرکت می‌کنند و دارای برخوردهای الاستیک هستند را در نظر بگیرید. فرض کنیم این امکان وجود دارد که بردار موقعیت  $(x)$  و مومنتوم  $(P)$  هر ذره را در چند لحظه بدانیم. چنین اطلاعاتی وضعیت دینامیکی دقیق سیستم را به دست می‌دهد که به همراه مکانیک کلاسیک، پیش‌بینی تمامی وضعیت‌های آینده را امکان‌پذیر می‌کند.

می‌توانیم سیستم را توسط تابع توزیع  $f^{(N)}(x^N, P^N, t)$  تعریف کنیم که در آن  $N$  تعداد ذرات است. در اینجا توزیع به صورت قرار گرفتن در یک "فضای فاز" در نظر گرفته می‌شود که فضایی است که

<sup>1</sup> Ludwig Boltzmann

در آن مختصات توسط بردارهای موقعیت و مومنتوم در زمان تعریف می‌شود. از طرفی چنین تعریفی برای گازهای واقعی که در آن‌ها تقریباً  $10^3$  ذره (یک مول) در ۲۰ لیتر گاز در دما و فشار اتمسفریک وجود دارد، امکان پذیر نیست. خوشبختانه ما معمولاً به توابع توزیع مرتبه پایین علاقه‌مندیم ( $N=1$  و  $2$ ).

### ۱-۴-۳- تابع توزیع مرتبه اول [۷]

تابع توزیع  $f^1(x, P, t)$  احتمال یافتن یک مولکول خاص با موقعیت و مومنتوم معین را نشان می‌دهد؛ موقعیت و مومنتوم  $N-1$  مولکول دیگر می‌تواند نامعلوم باقی بماند زیرا هیچ آزمایشی وجود ندارد که بتواند مولکول‌ها را از هم تشخیص بدهد. بنابراین، این که کدام مولکول انتخاب شود اهمیتی ندارد. این تابع توزیع "یک ذره" است.  $f$  برای تعریف تمامی خصوصیات گاز که به موقعیت مولکول‌ها نسبت به هم بستگی ندارد (گاز رقیق با طول آزاد میانگین زیاد) کافی است.

تعداد احتمالی مولکول‌ها با مختصات موقعیتی در محدوده  $x \pm dx$  و مختصات مومنتوم  $P \pm dP$  توسط  $f(x, P, t) dx dP$  به دست می‌آید. فرض کنید یک نیروی خارجی  $F$  که در مقایسه با نیروهای بین مولکولی کوچک است را تعریف کنیم. اگر هیچ برخوردی وجود نداشته باشد، در زمان  $t + dt$  موقعیت جدید مولکول‌هایی که از موقعیت  $x$  شروع کرده‌اند، برابر است با:

$$x + \left(\frac{P}{m}\right)dt = x + \left(\frac{dx}{dt}\right)dt = x + dx \quad (5-1)$$

و مومنتوم جدید عبارت است از:

$$P = P + Fdt = P + \left(\frac{dP}{dt}\right)dt = P + dP \quad (6-1)$$

بنابراین اگر موقعیت‌ها و مومنتوم‌ها در یک زمان خاص  $t$  معلوم باشد، با توسعه آنها می‌توان  $f$  را در

زمان بعدی  $t + dt$  بدست آورد.

$$f(x + dx, P + dP, t + dt)dxdP = f(x, P, t)dxdP \quad (7-1)$$

این فرایند جاری شدن است. از طرف دیگر برخوردهایی وجود دارد که باعث می شود نقاط فازی که از  $(x, P)$  شروع شده‌اند، به  $(x + \left(\frac{P}{m} dt\right), P + Fdt)$  برسند و برخی که از  $(x, P)$  شروع نشده‌اند به آنجا برسند. ما  $\Gamma^{(-)}dxdPdt$  را برابر تعداد مولکول‌هایی که به علت برخوردها در فاصله زمانی  $dt$  به بخشی از فضای فاز که انتظار می‌رفت، نرسیده‌اند، در نظر می‌گیریم. همچنین  $\Gamma^{(+)}dxdPdt$  را برابر تعداد مولکول‌هایی که از جایی به غیر از  $(x, P)$  شروع کرده‌اند و به علت برخوردها در زمان  $dt$  به آن قسمت از فضای فاز رسیده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از معادله (7-1) شروع کنیم و تغییرات  $f$  را به علت برخوردها اضافه کنیم، داریم:

$$f(x + dx, P + dP, t + dt)dxdP = f(x, P, t)dxdP + [\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)}]dxdPdt \quad (8-1)$$

اولین ترم بسط سری تیلور سمت چپ معادله (8-1) عبارت است از:

$$f(x + dx, P + dP, t + dt)dxdP = f(x, P, t) + dx \cdot \nabla_x f + dP \cdot \nabla_P f + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)dt + \dots \quad (9-1)$$

و معادله بولتزمن به دست می‌آید:

$$\left[ f(x, P, t) + dx \cdot \nabla_x f + dP \cdot \nabla_P f + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)dt + \dots \right] dxdP = f(x, P, t)dxdP + [\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)}]dxdPdt \quad (10-1)$$

یا



$$v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_p f + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)} \quad (11-1)$$

روابط فوق را می‌توان برای هر تعداد دلخواه ترکیبات شیمی مختلف نوشت.

فرم کامل معادله بولتزمن که در آن اپراتور برخورد صریح تر نوشته شده است، یک معادله غیر خطی دیفرانسیلی انتگرالی است که بسیار پیچیده است. پنجاه سال از زمانی که بولتزمن این معادله را به دست آورد طول کشید تا یک حل تقریبی برای آن پیدا شد [۱۲]. به کمک روش شبکه بولتزمن، معادله را از دیدگاه ذره حل می‌کنیم و روی معادله‌ای که به شدت به معادله (۸-۱) وابسته است تمرکز می‌کنیم. این معادله شامل مفاهیم اصلی LBM یعنی "برخورد و جاری شدن" می‌باشد.

## فصل ۲. پیشینه تحقیق

## ۲-۱- مقدمه

در طی چند دهه اخیر، مطالعات بسیاری در ارتباط با انتقال حرارت و جرم در محفظه‌ها انجام گرفته و پارامترهای اساسی مسائل مورد مطالعه اندازه‌گیری شده است. از آنجایی که این پروژه در راستای تکمیل مطالعات گذشته انجام گرفته است، لذا می‌بایست از روند این مطالعات مطلع بوده و از نتایج آنها آگاهی کافی داشت. در این فصل نگاهی به مطالعات انجام شده در ارتباط با انتقال حرارت جابجایی طبیعی در محفظه‌ها و همچنین حل همزمان انتقال حرارت و جرم به روش جابجایی طبیعی داریم. به طور کلی مسائل مطالعه شده را در دو دسته کلی بررسی می‌کنیم: انتقال حرارت به روش جابجایی طبیعی - انتقال جرم و حرارت به روش جابجایی طبیعی.

## ۲-۲- انتقال حرارت به روش جابجایی طبیعی

در سال ۱۹۸۴ چان و تین [۱۳]، انتقال حرارت جابجایی آزاد جریان دائم آرام را در یک محفظه مستطیلی به صورت عددی مورد مطالعه قرار دارند. در مطالعه آنها، خطوط جریان و کانتورهای دما در یک محفظه باز کم عمق با نسبت ابعاد  $0/143$  و برای اعداد رایلی تا  $10^6$ ، با استفاده از خواص ثابت و تقریب بوزینسک و با اعمال شرایط مرزی تقریبی در دیوار باز، رسم شده است. این مدل تست شده و با حالتی که محاسبات در یک فضای گسترش یافته خارجی انجام می‌شود، مقایسه شده است. نتایج آنها نشان می‌دهد که شکل جریان خروجی و نتایج انتقال حرارتی توسط خصوصیات قوی محفظه گرم شده، کنترل می‌شود. این نتایج تطابق خوبی با نتایج تجربی برای  $Ra=10^6$  دارد. آن‌ها همچنین جریان را داخل محفظه‌های باز کم عمق دوبعدی با استفاده از سرعت‌سنج داپلر لیزری بررسی کرده بودند [۱۴]. هدف از مطالعه آن‌ها بررسی عددی مسأله و مقایسه آن با نتایج تجربی بوده است. هر دو نتایج تجربی و عددی نشان می‌دهند که جریان در محفظه‌های کم‌عمق، تک‌سلولی باقی می‌ماند و هیچ سلول ثانویه‌ای ایجاد نمی‌گردد. مرز باز به سیال داغ که به شدت هدایت می‌شود اجازه می‌دهد به

راحتی خارج شود و به این صورت، اثر پایدار کننده‌ای به وجود می‌آید.

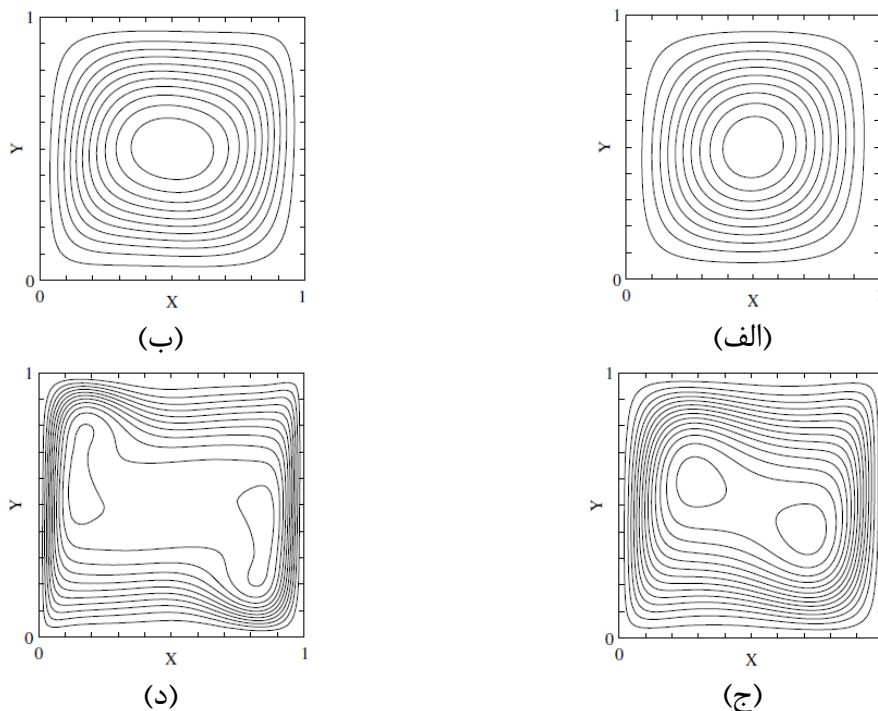
در سال ۲۰۰۸، بیلگن و مفتواقلو [۱۵]، جابجایی طبیعی در یک محفظه مربعی باز با چندین شکاف تهویه در یک دیوار آن را مدل‌سازی کرده‌اند. دیواری که مقابل دیوار باز است، توسط شار یکنواختی گرم می‌شود و دو دیوار افقی عایق هستند. در این مدل‌سازی، از الگوریتم SIMPLE استفاده شده است. پارامترهای حاکم بر مسأله اعداد رایلی  $10^3 - 10^6$  در نظر گرفته شده است و نسبت باز بودن شکاف بی‌بعد OR از  $0/1$  تا  $0/6$  متغیر است. مشخصه‌های خنک کاری به صورت تابعی از پارامترهای گرمایی و هندسی حاکم به دست آمده است. آن‌ها در این مدل‌سازی نتیجه گرفتند که عدد ناسلت و دبی حجمی، هر دو توابعی صعودی از عدد رایلی و نسبت باز بودن شکاف OR، و توابعی نزولی از تعداد شکاف‌ها هستند. در اعداد رایلی بالا، یک مقدار بهینه برای OR وجود دارد. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که در مقایسه با محفظه کاملاً باز، انتقال حرارت و دبی حجمی به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. با این حال، انتقال حرارت چندان به تعداد شکاف‌ها برای  $N > 2$  (تعداد شکاف‌ها)، حساس نیست. بنابراین از دید طراحی، در انتخاب تعداد شکاف‌ها، انعطاف‌پذیری وجود دارد.

همانطور که گفته شد، در سال‌های اخیر روش شبکه بولتزمن به عنوان ابزار بسیار مفیدی جایگزین روش‌های عددی معمول شده است. محققین بسیاری از این شیوه استفاده نموده و مسائل انتقال حرارت جابجایی طبیعی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در اینجا به چند مورد اشاره می‌کنیم.

## ۲-۱-۲- انتقال حرارت جابجایی طبیعی به روش شبکه بولتزمن

در سال ۲۰۰۶، دیکسیت و بابو [۱۶]، با استفاده از روش شبکه بولتزمن ارائه شده توسط هی و همکارانش [۱۷]، جابجایی طبیعی در یک محفظه مربعی را در حالت اعداد رایلی بالا مدل‌سازی کردند. مشکل اساسی استفاده از این مدل دو برابر شدن حافظه لازم برای مدل‌سازی، به دلیل استفاده از دو تابع توزیع جداگانه می‌باشد. برای رفع این مشکل، آن‌ها از یک شبکه غیریکنواخت دائماً در حال

تغییر استفاده کردند که منجر به کاهش قابل ملاحظه ابعاد شبکه شده است. همچنین آنها اثر ابعاد شبکه را برای روش شبکه بولتزمن الحاقی به میانمایی<sup>۱</sup> (ISLBM)، در اعداد رایلی بالا، مطالعه کرده‌اند. هدف اصلی از این مطالعه، استفاده از روش شبکه بولتزمن به عنوان یک ابزار کارآمد در مدل‌سازی میدان‌های حرارتی در اعداد رایلی بالا و نشان دادن سودمندی شبکه‌های کاملاً غیریکنواخت است. نتایج عددی تطابق خوبی با نتایج معیار موجود دارند. نکته مهم در محاسبات آنها، این است که از هیچ مدل توربولانسی استفاده نشده است. مهمترین نتیجه مطالعه آنها، نشان دادن قابلیت روش شبکه بولتزمن در پیش‌بینی دقیق پروفیل لایه مرزی سرعت میانگین توربولانس<sup>۲</sup> است. شکل خطوط جریان به دست آمده در اعداد رایلی مختلف، در شکل ۱-۲ نشان داده شده است.

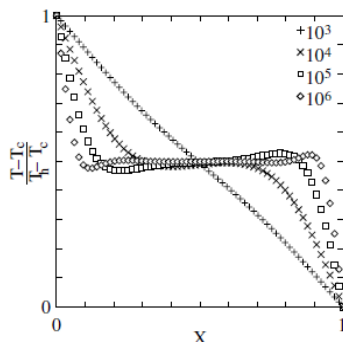


شکل ۱-۲ خطوط جریان به دست آمده در عدد رایلی الف)  $10^3$  ب)  $10^4$  ج)  $10^5$  د)  $10^6$  [۱۶]

<sup>۱</sup> Interpolation Supplemeated LBM

<sup>۲</sup> Mean velocity turbulent bundery layer profile

همچنین پروفیل دما در خط مرکزی محفظه ( $\frac{y}{H}=0.5$ )، در اعداد رایلی مختلف در شکل ۲-۲ نشان داده شده است.



شکل ۲-۲ پروفیل دما در خط مرکزی محفظه در عدد رایلی الف)  $10^3$  ب)  $10^4$  ج)  $10^5$  د)  $10^6$

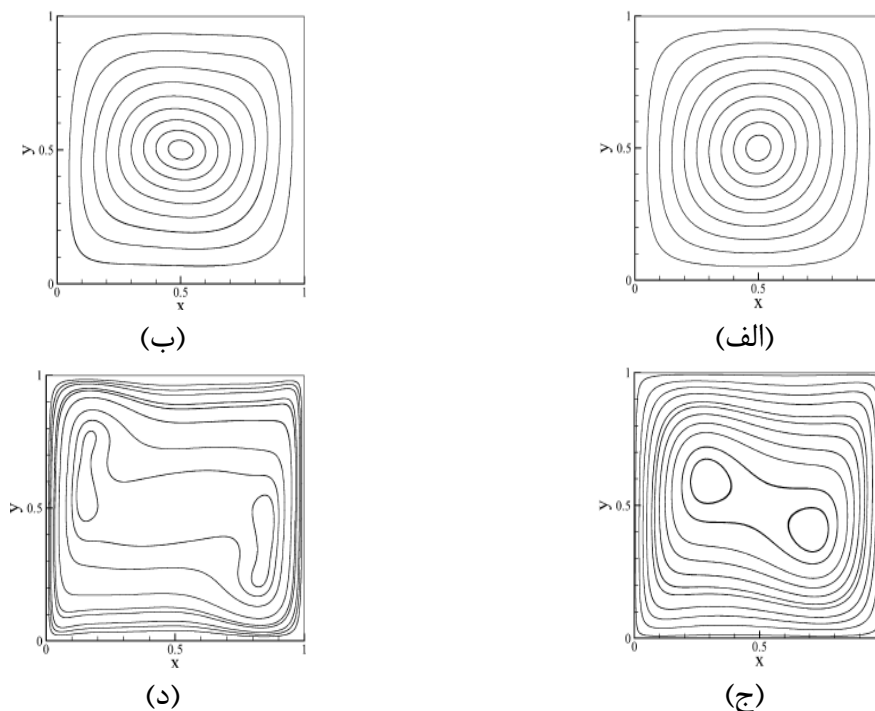
[۱۶]

در سال ۲۰۰۷، کوزینگ و همکارانش [۱۸]، از یک روش شبکه بولتزمن گرمایی با دو تابع توزیع جداگانه<sup>۱</sup> برای حل مسأله محفظه گرم توسط دمای اعمال شده، استفاده کردند. برای عدم استفاده از شبکه بسیار بزرگ، از شبکه غیریکنواخت استفاده شده و این کار به کمک روش شبکه بولتزمن مبتنی بر بسط تیلور- حداقل مربعات<sup>۲</sup> (TLLBM) انجام گرفته است. این امر امکان مدل‌سازی میدان‌های جریان لمینار و گذرا ( $10^3 < Ra < 10^8$ ) را در حد هزینه محاسباتی معقول برای آن‌ها، فراهم ساخت. هدف اصلی از مطالعه آن‌ها، اعتبارسنجی استفاده از مدل ارائه شده توسط He و همکارانش [۱۷] برای پیش‌بینی میدان‌های سرعت و دما در حالت جابجایی طبیعی در یک محفظه مربعی برای جریان‌های لمینار و گذرا، می‌باشد. با مقایسه نتایج عددی مرتبط با انتقال حرارت در موارد آزمایش شده، با مطالعات انجام گرفته پیشین تطابق خوبی مشاهده شده است. خطوط جریان به دست آمده در مطالعه آن‌ها در جریان لمینار در شکل ۳-۲ نشان داده شده است.

<sup>۱</sup> Double population thermal LBM

<sup>۲</sup> Taylor series expansion- and least square based Lattice Boltzmann method

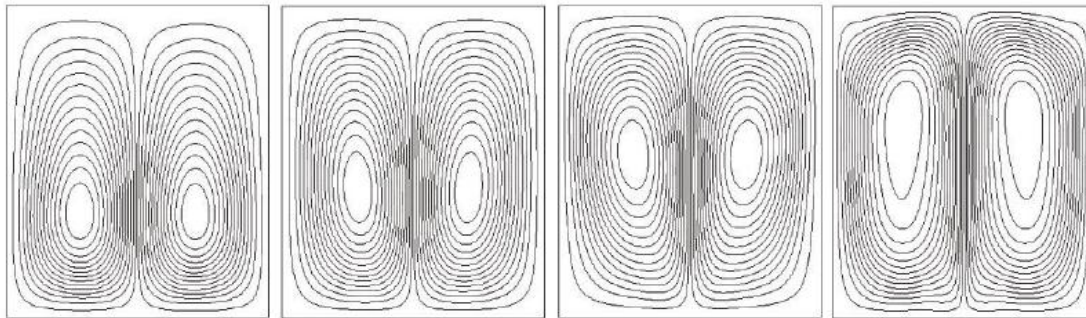
نورازودی و رسدیمین [۱۹]، با استفاده از روش شبکه بولتزنم حرارتی، انتقال حرارت جابجایی طبیعی را در یک محفظه مورد مطالعه قرار دادند. آنها همچنین نتایجی را که به دست آورده‌اند، با نتایج به دست آمده از ابزارهای CFD (FLUENT) مقایسه کرده‌اند. در این مطالعه، در اعداد رایلی پایین مدل D2Q9 با ساده‌ترین مدل D2Q4 به ترتیب برای ارائه تابع توزیع چگالی و چگالی انرژی داخلی، استفاده شده است در حالی که در مدل‌سازی اعداد رایلی بالا، برای هر دو توابع توزیع چگالی و انرژی داخلی، مدل D2Q9 را به کار برده‌اند. محفظه مورد بررسی آنها، یک محفظه مستطیلی با گرمایش موضعی از پایین و سرمایش متقارن از جوانب می‌باشد. نتایج مطالعه آنها نشان می‌دهد که روش شبکه بولتزنم، ابزار مناسبی در مدل‌سازی پدیده جابجایی طبیعی در محدوده بزرگی از اعداد رایلی می‌باشد.



شکل ۲-۳ خطوط جریان در جریان لمینار در عدد رایلی الف)  $10^3$  ب)  $10^4$  ج)  $10^5$  د)  $10^6$  [۱۸]

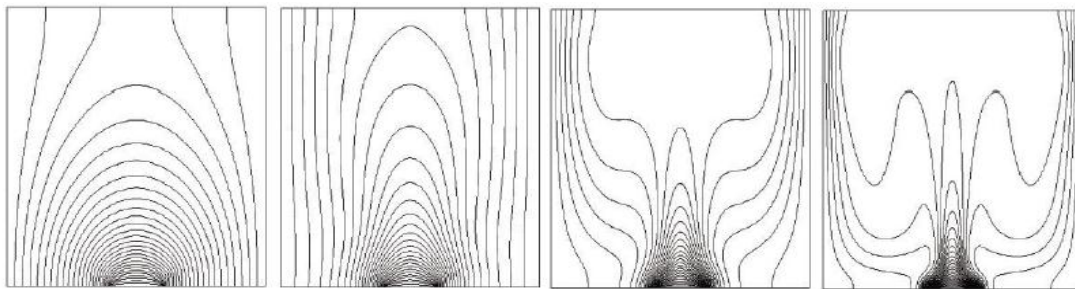
شکل خطوط جریان به دست آمده با استفاده از روش شبکه بولتزنم، کانتور دمای به دست آمده با استفاده از روش شبکه بولتزنم و کانتور دمای به دست آمده با استفاده از FLUENT به ترتیب در

شکل‌های ۴-۲، ۵-۲ و ۶-۲ نشان داده شده است.



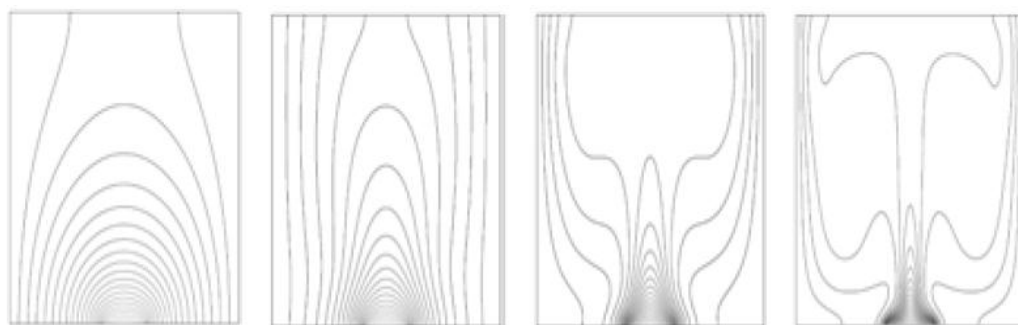
شکل ۴-۲ شکل خطوط جریان به دست آمده به روش LBM در عدد رایلی  $10^3$ ،  $10^4$ ،  $10^5$  و  $10^6$

[۱۹]  $10^6$



شکل ۵-۲ شکل کانتور دما به دست آمده به روش LBM در عدد رایلی  $10^3$ ،  $10^4$ ،  $10^5$  و  $10^6$

[۱۹]



شکل ۶-۲ شکل کانتور دما به دست آمده به روش LBM در عدد رایلی  $10^3$ ،  $10^4$ ،  $10^5$  و  $10^6$

[۱۹]

در سال ۲۰۰۸، هوبر و همکاران [۲۰]، یک روش شبکه بولتزمن برای کوپل کردن جابجایی حرارتی و

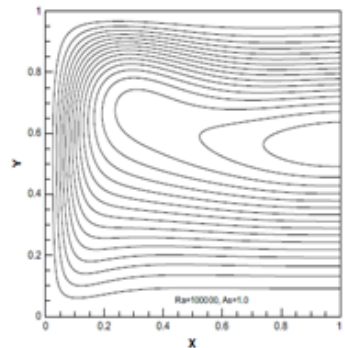


ذوب شدن در محدوده بزرگی از پارامترهای بدون بعد (مخصوصاً عدد رایلی و عدد استفان St) ارائه کردند. آنها همچنین حدی که در آن اینرسی حرارتی قابل چشم‌پوشی نیست (عدد استفان بالا)، را بررسی کردند و از نتایج خود برای تعمیم روابط معیار به دست آمده در عدد استفان پایین استفاده نمودند و رابطه‌ای بین انتشار جبهه ذوب شونده<sup>۱</sup> و عدد استفان برای جابجایی کاملاً توسعه یافته ارائه دادند. آنها همچنین نشان دادند که مدل پیشنهادی آنها، برای مطالعه ذوب در اثر جابجایی در محیط‌های با هندسه پیچیده و محیط‌های متخلخل بدون هر گونه اصلاحی مناسب است.

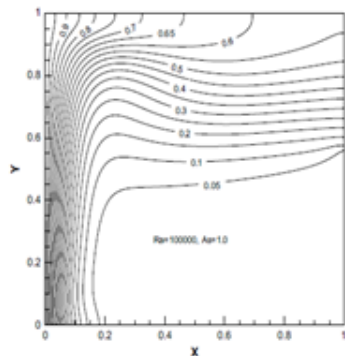
در سال ۲۰۰۹، محمد و همکارانش [۲]، جابجایی طبیعی را در یک محفظه باز به روش شبکه بولتزمن مدل‌سازی کرده‌اند. جریان توسط نیروی شناوری ناشی از دیوار گرم عمودی به داخل محفظه رانده می‌شود. در مطالعه آنها میدان سرعت و پروفیل دما در مرز باز قبل از حل، نامعلوم است. شرط مرزی ارائه شده توسط آنها، تا پیش از آن در کاربردهای LBM تست نشده بود. آنها مسأله را با وجود پارامترهای حاکم بر مسأله عدد پرانتل  $0.71$ ، عدد رایلی  $10^4 - 10^6$  و نسبت ابعاد محفظه  $10 - 0.5$  مدل‌سازی کردند. ابتدا نتایج به دست آمده از روش شبکه بولتزمن را با روش حجم محدود مقایسه نموده و تطابق خوبی مشاهده کردند. نتایج مدل‌سازی آنها نشان داد که نرخ انتقال حرارت با افزایش نسبت ابعاد محفظه، به صورت مجانبی کاهش می‌یابد و برای مقادیر بزرگ نسبت ابعاد محفظه، ممکن است به مرز هدایت حرارتی برسد. شکل‌گیری جریان داخلی محفظه با تشکیل یک سلول آغاز می‌شود و با گذشت زمان جریان داخل محفظه با محیط بیرون مرتبط می‌شود. با افزایش نسبت ابعاد محفظه و یا کاهش عدد رایلی، زمان لازم برای مرتبط شدن جریان داخل محفظه با محیط بیرون افزایش می‌یابد. همچنین نتایج نشان دادند که شرط مرزی پیشنهاد شده برای LBM در مرز باز، بدون دانستن شرایط جریان مناسب به نظر می‌رسد. شکل‌های ۲-۷ و ۲-۸ به ترتیب خطوط جریان و کانتور دمای به دست آمده در مطالعه آنها را برای درک فیزیک مسأله مورد مطالعه در عدد رایلی  $10^5$  و نسبت

<sup>1</sup> Melting front propagation

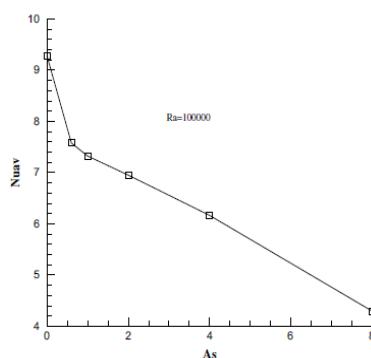
ابعاد محفظه ۱/۰ نشان می‌دهند. همچنین شکل ۲-۹، عدد ناسلت متوسط را به صورت تابعی از نسبت ابعاد محفظه مورد مطالعه آن‌ها نشان می‌دهد.



شکل ۲-۷ شکل خطوط جریان به دست آمده در عدد رایلی  $10^5$  و نسبت ابعاد ۱/۰ [۲]



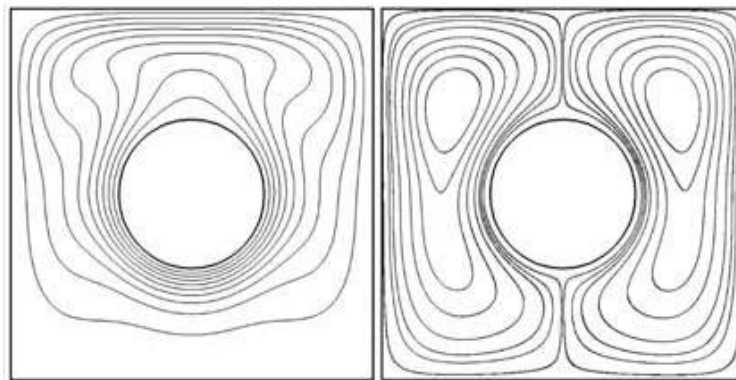
شکل ۲-۸ شکل خطوط همدمما به دست آمده در عدد رایلی  $10^5$  و نسبت ابعاد ۱/۰ [۲]



شکل ۲-۹ عدد ناسلت متوسط به صورت تابعی از نسبت ابعاد محفظه در عدد رایلی  $10^5$  [۲]

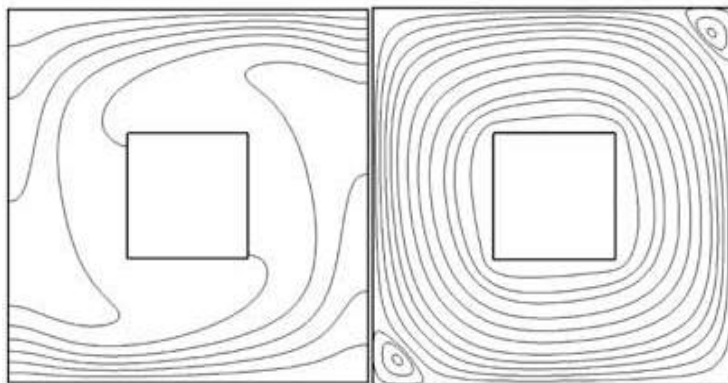
در سال ۲۰۱۰ جنونگ و همکاران [۲۱]، یک روش شبکه بولتزمان گرمایی با مرز غوطه‌ور جدید به نام روش چگالی انرژی داخلی تعادلی برای مدل‌سازی جریان با انتقال حرارت ارائه داده‌اند. ایده اصلی در

مطالعه آنها، ترکیب روش مرز غوطه‌ور (IBM) با روش شبکه بولتزمن گرمایی (TLBM)، براساس روش ارائه شده توسط هی [۱۷] با دو تابع توزیع جداگانه برای جریان و انرژی می‌باشد. ایده روش چگالی انرژی داخلی تعادل این است که برقراری تعادل انرژی بین منبع حرارتی روی مرز غوطه‌ور و مقدار تبدیل چگالی انرژی برحسب زمان، شرط مرزی روی مرز غوطه‌ور را ارضا می‌کند. مزیت این روش، مفهوم ساده، سهولت در پیاده‌سازی و استفاده از معادله حاکم اصلی بدون اصلاح کردن است. آنها همچنین جابجایی طبیعی را در یک محفظه مربعی در حضور اشکال مختلف برای اعداد رایلی مختلف مطالعه کرده تا قابلیت و دقت روش پیشنهادی خود را در حل مسائل انتقال حرارت بررسی کنند. نتایج به دست آمده با نتایج مطالعات قبلی تطابق خوبی داشت. شکل‌های ۲-۱۰ و ۲-۱۱ خطوط جریان و کانتورهای دمای به دست آمده در عدد رایلی  $10^5$  را به ترتیب برای حالتی که در داخل محفظه مربعی یک سیلندر حلقوی و یک سیلندر مربعی قرار گرفته، نشان می‌دهند.



شکل ۲-۱۰ خطوط جریان و کانتور دما در حالتی که یک سیلندر حلقوی در محفظه مربعی در عدد

رایلی  $10^5$  قرار گرفته است. [۲۱]



شکل ۲-۱۱ خطوط جریان و کانتور دما در حالتی که یک سیلندر مربعی در محفظه مربعی در عدد

رایلی  $10^5$  قرار گرفته است. [۲۱]

در سال ۲۰۱۰ حق شناس و همکاران [۱]، جابجایی طبیعی در یک محفظه مربعی پر شده از محیط متخلخل را به روش شبکه بولتزمن مدل سازی کردند. آنها در این مطالعه از دو تابع توزیع جداگانه برای مدل سازی میدان های هیدرودینامیکی و گرمایی استفاده کرده و روش شبکه بولتزمن مبتنی بر بسط سری تیلور و حداقل مربعات را برای گسترش مدل حرارتی به کار برده اند. در مطالعه آنها اثر محیط متخلخل با اضافه نمودن نسبت متخلخل به تابع توزیع تعادلی و افزودن ترم نیرو به معادله تکامل، در نظر گرفته شده است. آنها نتایج به دست آمده از مدل پیشنهادی خود را با نتایج مطالعات پیشین مقایسه و تطابق خوبی مشاهده نموده اند. آنها مطالعه جامعی به صورت پارامتریک روی جریان های با جابجایی طبیعی در حالت مقادیر مختلف عدد رایلی و نسبت تخلخل انجام داده اند و مشاهده نموده اند که این دو پارامتر، اثرات قابل ملاحظه ای روی انتقال حرارت دارند.

در سال ۲۰۱۰ موندال و لی [۲۲]، با استفاده از روش شبکه بولتزمن با شبکه غیریکنواخت، اثر تشعشع حجمی روی جابجایی طبیعی را در یک محفظه مربعی دربرگیرنده یک محیط جاذب، صادر کننده و پخش کننده بررسی کردند. آنها در مطالعه خود از روش حجم محدود برای محاسبه ترم تشعشع در معادله انرژی استفاده کردند. آنها دمای خط مرکزی در محفظه، کانتورهای دما، سرعت

عمودی در نیم صفحه افقی محفظه، سرعت افقی در نیم صفحه عمودی محفظه و خطوط جریان برای پارامترهای مختلف مانند عدد رایلی، پارامتر هدایت- تشعشع، ضریب خاموشی<sup>۱</sup> و بازتاب پخش<sup>۲</sup> را مورد مطالعه قرار دادند و نتایج به دست آمده از LBM با شبکه یکنواخت مقایسه کردند. مشاهدات آنها نشان داد که روش LBM با شبکه غیریکنواخت، نتایج دقیق تری ارائه می دهد و از لحاظ محاسباتی بهینه تر است.

چن و گائو [۲۳]، در سال ۲۰۱۱ با استفاده از روش شبکه بولتزمن، ذوب شدن بر اثر جابجایی طبیعی را در یک محفظه مستطیلی با محیط متخلخل، مدل سازی کردند. نتایج عددی به دست آمده توسط آنها، تطابق خوبی با نتایج تحلیلی، تجربی و عددی گذشته داشته است. همچنین تحلیل فرآیند ذوب شدن در یک محدوده بزرگتر از پارامترهای بدون بعد، نشان می دهد که برای حالت عدد داری بزرگ و نسبت تخلخل بالا، اثر جابجایی طبیعی روی ذوب شدن شدیدتر می شود و ممکن است عدد رایلی محیط متخلخل که در مطالعات پیشین پیشنهاد شده بود، برای تصحیح عدد ناسلت متوسط دیوار گرم به طور مستقل مناسب نباشد. آنها همچنین ادعا کرده اند که مدلی که ارائه کرده اند، برای انجماد و جامدسازی در محیط متخلخل بدون هر گونه اصلاحی، قابل استفاده است.

## ۲-۳- انتقال جرم و حرارت به روش جابجایی طبیعی

در سال ۲۰۰۸ ماکایسی و همکاران [۴]، انتقال حرارت و جرم به روش جابجایی طبیعی (جابجایی طبیعی با نفوذ دوگانه) را در یک محفظه مستطیلی کم عمق حاوی سیال غیرنیوتنی توان-پیرو<sup>۳</sup> به روش عددی و تحلیلی مطالعه کرده اند. در محفظه مستطیلی مورد نظر آنها روی دیوارهای کوتاه عمودی شارهای یکنواخت حرارتی و جرم اعمال می شود و دیوارهای افقی عایق اند و نفوذ جرم و

<sup>1</sup> Extinction coefficient

<sup>2</sup> Scattering albedo

<sup>3</sup> Power-law

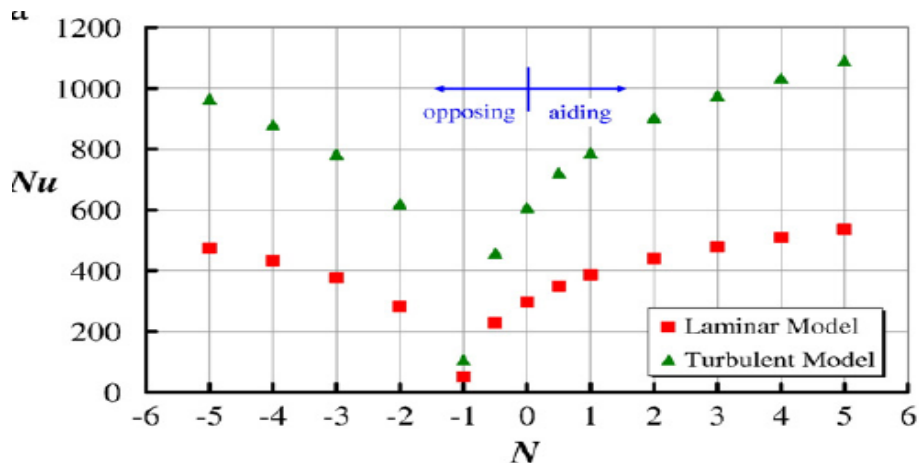
حرارت ندارند. در این مطالعه، آنها ابتدا اثر پارامترهای حاکم بر مسأله یعنی نسبت ابعاد (A)، عدد لوییس (Le)، نسبت شناوری (N)، اندیس رفتاری توان-پیرو (n)، عدد پرانتل کلی (Pr) و عدد رایلی حرارتی ( $Ra_T$ ) را به ترتیب در محدوده  $1 \leq A \leq 24$ ،  $10^{-2} \leq Le \leq 10^2$ ،  $10^{-2} \leq N \leq 10^2$ ،  $0 \leq Ra_T \leq 10^6$  و  $0/6 \leq n \leq 1/4$  به صورت عددی بررسی کرده‌اند. سپس برپایه تقریب جریان موازی، مسأله را در حالت محفظه کم‌عمق ( $A \gg 1$ ) به صورت تحلیلی حل نموده‌اند. آنها دریافتند که هنگامی که  $A \geq 24$  است، مشخصه‌های جریان سیال و انتقال حرارت و جرم نسبت به این پارامتر حساس نیستند. در نتیجه برای جریان‌های غیرنیوتنی در نظر گرفته شده در مسأله مورد مطالعه آنها، که با عدد پرانتل بالا مشخص می‌شوند، انتقال حرارت و جرم در محفظه‌های کم‌عمق، عمدتاً تحت تأثیر عدد لوییس (Le)، نسبت شناوری (N)، مشخصه رفتاری جریان (n) و عدد رایلی حرارتی ( $Ra_T$ ) می‌باشند. اثر عدد رایلی حرارتی در مشاهدات آنها، به گونه‌ای است که به طور کلی در  $Ra_T \geq 100$  هرگونه افزایش در این پارامتر، باعث تقویت جابجایی طبیعی حرارت و جرم می‌شود. از طرفی اثر عدد لوییس، برحسب مقدار آن متفاوت است. مقادیر بسیار کم این پارامتر، اثری روی جابجایی طبیعی جرم و حرارت ندارند، در حالی که با نزدیک شدن این پارامتر به عدد یک، جابجایی طبیعی نسبت به عدد لوییس حساس می‌شود. از این مقدار به بعد، تنها جابجایی طبیعی جرم با تغییر عدد لوییس، تغییر می‌کند و بر جابجایی طبیعی حرارتی چیره می‌شود. مشاهدات آنها نشان می‌دهد که در مسأله مورد مطالعه آنها، نسبت شناوری (N)، تنها در حالت بالاتر از 10، جابجایی طبیعی جرم و حرارت را تحت تأثیر قرار می‌دهد. آنها نشان دادند که مشخصه‌های جریان سیال و انتقال حرارت و جرم نسبت به اندیس رفتاری جریان حساس است. در نهایت آنها نتایج به دست آمده از حل تحلیلی را با نتایج عددی مقایسه کرده و تطابق خوبی مشاهده کرده‌اند.

در سال 2008 مزرهاب [24]، تشعشع کوپل شده با جابجایی طبیعی با نفوذ دوگانه را در یک محفظه مربعی به صورت عددی مطالعه کرده‌است. او برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم از روش حجم

محدود و با پیاده‌سازی الگوریتم SIMPLER برای کوپل کردن سرعت و فشار، استفاده نموده است. برای مدل‌سازی انتقال حرارت تشعشی از روش عرضی گسسته<sup>۱</sup> استفاده شده است. سیال مورد مطالعه گازی خاکستری، جاذب، صادرکننده و پخش نشونده است و دیوارهای محفظه مات، دیفیوز و خاکستری در نظر گرفته شده است. او برای نشان دادن اثرات عدد رایلی، نسبت شناوری، عدد لوییس و ضخامت نوری روی ساختار انتقال حرارت و جرم یک مطالعه پارامتری انجام داده و از نتایج به دست آمده به عنوان حل‌های مبنا در اعتبارسنجی برنامه کامپیوتری نوشته شده برای انتقال حرارت جابجایی طبیعی با نفوذ دوگانه و تشعشع، استفاده کرده است.

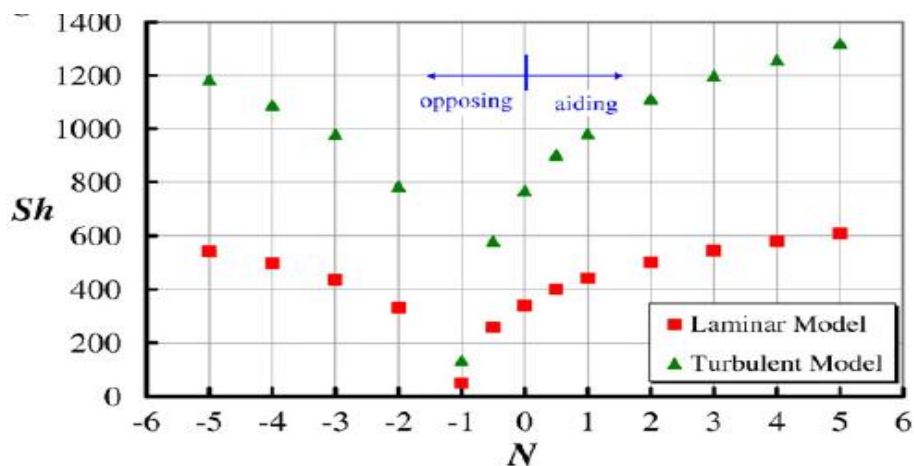
در سال ۲۰۰۹ توفانلی و لموس [۲۵]، نتایج انتقال حرارت و جرم کوپل شده را در رژیم جریان‌های آرام و توربولانس در محفظه‌های متخلخل، ارائه کرده‌اند. آنها در مطالعه خود، جریان‌های موافق و مخالف را به ترتیب با گرادیان‌های دما و غلظت هم جهت و با علامت مختلف در نظر گرفته‌اند. انتقال توربولانس به کمک یک مدل  $K-\epsilon$  ماکروسکوپیک بیان شده است. آنها تغییرات عدد ناسلت و عدد شروود در محفظه را برحسب تغییرات نسبت شناوری  $N$  ارائه دادند و نشان دادند که در حالت جریان موافق، انتقال حرارت و جرم در محفظه نسبت به حالتی که گرادیان‌های دما و غلظت مخالف‌اند، سریعتر بهبود می‌یابد. نتایج آنها نشان می‌دهد که برای شرایط مورد بررسی در مطالعه آنها با استفاده از مدل توربولانس عدد شروود و ناسلت به دست آمده، تقریباً دو برابر این مقادیر در حالت جریان آرام تحت همین شرایط است. عدد ناسلت و شروود به دست آمده در مطالعه آنها در شکل ۲-۱۱ و ۲-۱۲ در جریان لمینار و توربولانس نشان داده شده است.

<sup>1</sup> Discrete ordinate



شکل ۲-۱۲ عدد ناسلت بر حسب نسبت شناوری در  $Ra^* = 2 \times 10^6$

$$[25] \varphi = 0, \lambda_{\text{eff}} = \lambda_s = \lambda_f, Da = \lambda / \lambda \lambda \times 10^{-6}, Gr_{\varphi} = 2 / 25 \times 10^{10}$$



شکل ۲-۱۳ عدد شروود بر حسب نسبت شناوری در  $Ra^* = 2 \times 10^6$

$$[25] \varphi = 0, \lambda_{\text{eff}} = \lambda_s = \lambda_f, Da = \lambda / \lambda \lambda \times 10^{-6}, Gr_{\varphi} = 2 / 25 \times 10^{10}$$

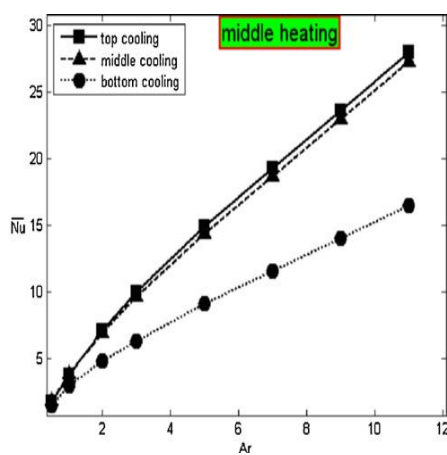
در سال ۲۰۱۰ الویی و همکاران [۲۶]، تأثیر ترکیبی اثر سورت و اثر دما-غلظتی را روی جابجایی طبیعی در یک محفظه کم عمق پر شده از مخلوط دوجزئی به صورت تحلیلی و عددی بررسی کرده اند. در مسأله مورد مطالعه آنها، شرط مرزی نیومن برای دما و غلظت روی دیوارهای افقی محفظه اعمال شده در حالی که دو دیواره عمودی عایق و نفوذناپذیرند. آنها فرض کرده اند که نیروی شناوری غلظت، توسط اثر همزمان اثر سورت و اعمال یک شار ثابت غلظت روی دیوارهای افقی (جابجایی با نفوذ



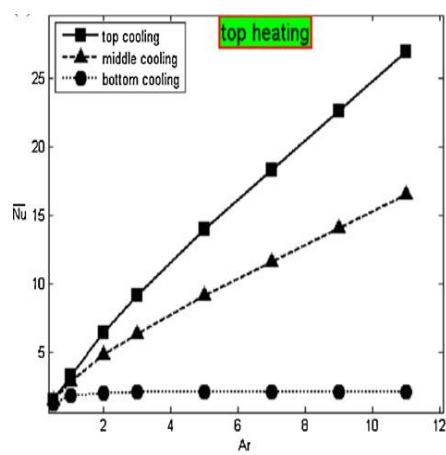
دوگانه) تولید می‌شود. آنها مسأله را در حالت نیروهای شناوری غلظت و دمای مخالف و موافق در یک محدوده بزرگ از پارامترهای حاکم یعنی عدد رایلی حرارتی، نسبت شناوری، عدد لوییس، عدد پراتل، نسبت ابعاد محفظه، شار غلظت، نوع جابجایی، بررسی کرده‌اند. در حل معادلات حاکم اصلی، از یک روش حجم محدود استفاده نموده و با مقایسه پیش‌بینی‌های تحلیلی و مدل‌سازی‌های عددی، تطابق خوبی مشاهده نموده‌اند.

در سال ۲۰۱۲، نیکبختی و رحیمی [۳]، انتقال حرارت و جرم به روش جابجایی طبیعی را در یک محفظه مستطیلی که بخشی از دیوارهای عمودی آن گرم شده است. به طور عددی مورد مطالعه قرار دادند. سیال درون محفظه هوا در نظر گرفته شده و طول بخش گرم شده (فعال)، نصف ارتفاع محفظه است. شرایط مرزی به گونه‌ای است که بخش فعال دیوار سمت چپ، نسبت به بخش فعال دیوار سمت راست، دما و غلظت بیشتری دارد و دیوارهای افقی محفظه و بخش‌های غیرفعال دیوارهای عمودی، آدیاباتیک‌اند و نفوذ جرم ندارند. از آنجایی که نحوه قرارگیری دیوارهای فعال اثر مهمی در انتقال حرارت و جرم دارد، برای دستیابی به نرخ بهینه انتقال حرارت و جرم در داخل محفظه، آنها نه وضعیت نسبی برای قرارگیری قسمت‌های فعال در نظر گرفته‌اند. این نه وضعیت شامل قرار گرفتن بخش گرم در بالا، وسط و پایین دیوار و مشابه آن برای بخش سرد است. در مطالعه آنها، رژیم جریان دائم در نظر گرفته شده است. معادلات دیفرانسیلی کوپل شده به روش تفاضل محدود گسسته‌سازی و با استفاده از الگوریتم SOR حل شده است. نرخ انتقال حرارت و انتقال جرم در داخل محفظه در فرم عدد ناسلت  $Nu$  و عدد شروود  $Sh$  محاسبه شده است. نتایج مطالعه آنها نشان می‌دهد که هنگامی که بخش فعال دیوار سمت چپ پایین و بخش فعال دیوار سمت راست بالا قرار دارد، نرخ انتقال حرارت و جرم زیاد است. در حالی که نرخ انتقال حرارت و جرم در حالتی که بخش فعال دیوار سمت چپ در بالای محفظه و بخش فعال دیوار سمت راست در پایین محفظه قرار دارد، ضعیف است. آنها همچنین در مطالعه خود اثر پارامترهای مختلف مانند نسبت ابعاد محفظه، نسبت شناوری و عدد اشویت  $Sc$  را

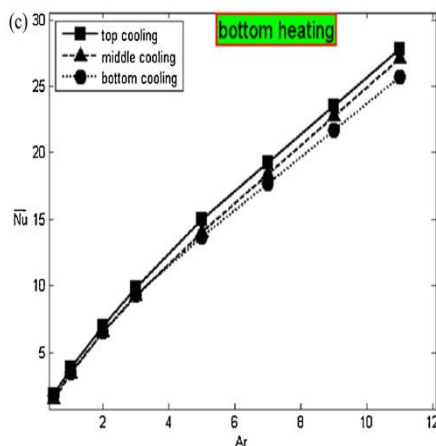
مورد بررسی قرار دادند و مشاهده نمودند که با افزایش نسبت ابعاد محفظه، نرخ انتقال حرارت و جرم افزایش می‌یابد. نتایج مطالعه آنها نشان می‌دهد که در جریان موافق، عدد ناسلت متوسط با افزایش نسبت شناوری افزایش و بنابراین نرخ انتقال حرارت در محفظه افزایش می‌یابد. در جریان مخالف، با افزایش نسبت شناوری تا  $N=1$  عدد ناسلت متوسط کاهش می‌یابد و بعد از نقطه بحرانی ( $N=1$ ) جهت چرخش جریان تغییر می‌کند و با افزایش نسبت شناوری عدد ناسلت متوسط و در نتیجه انتقال حرارت در محفظه افزایش می‌یابد. در اینجا عدد ناسلت و عدد شروود متوسط به دست آمده در مطالعه آنها در نه وضعیت قرارگیری دیوار فعال در شکل‌های ۲-۱۴ و ۲-۱۵ نشان داده می‌شود.



(ب)



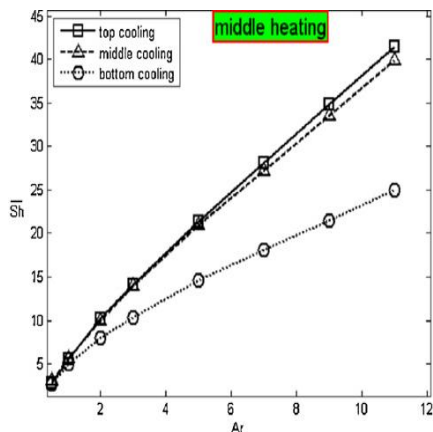
(الف)



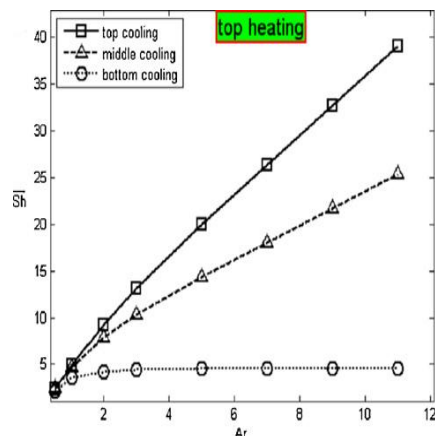
(ج)

شکل ۲-۱۴ عدد ناسلت متوسط در وضعیت قرارگیری دیوار گرم در الف) بالا ب) وسط ج) پایین

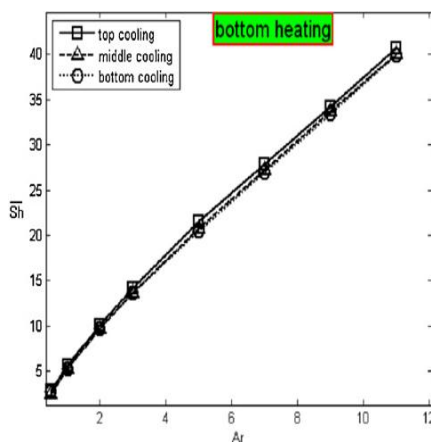
[۳]



(ب)



(ف)



(ج)

شکل ۲-۱۵ عدد شروود متوسط در وضعیت قرارگیری دیوار گرم در الف) بالا ب) وسط ج) پایین

[۳]

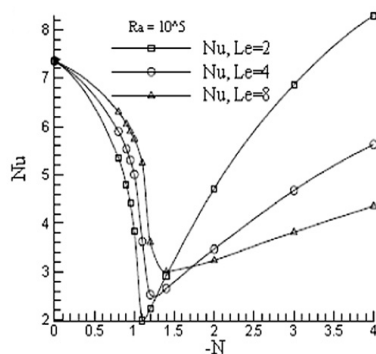
تاکنون به مطالعات انجام شده روی جابجایی طبیعی جرم و حرارت، اشاره کردیم. در این مطالعات از روش‌های تحلیلی و عددی استفاده شده است. اخیراً برخی از محققین از روش شبکه بولتزنم برای بررسی جابجایی طبیعی جرم و حرارت استفاده نموده‌اند. از آنجایی که در این پروژه به دنبال حل همزمان انتقال حرارت و جرم در محفظه‌ها به روش شبکه بولتزنم هستیم، لازم است به مطالعات انجام شده در این زمینه اشاره کنیم.

### ۲-۳-۱- جابجایی طبیعی جرم و حرارت به روش شبکه بولتزنم

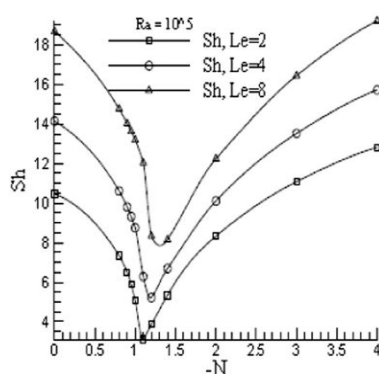
در سال ۲۰۰۹، چنگنگ ما [۲۷]، انتقال حرارت و جرم دوبعدی هیدرومگنتیک جریان تشکیل شده از ترکیب دوگاز را به روش شبکه بولتزن BGK مدل سازی کرد. محفظه مورد بررسی او، یک محفظه مستطیلی است که دیوارهای افقی آن عایق و دیوارهای عمودی آن دارای دما و غلظت ثابت هستند و یک میدان مغناطیسی یکنواخت در راستای  $x$  اعمال می شود. در مدل ارائه شده او، میدان های سرعت، دما و غلظت توسط سه معادله BGK مجزا حل می شوند که برای کل سیستم با هم کوپل می شوند. در مدل سازی او، عدد پرانتل  $Pr=1$ ، عدد لوییس  $Le=2$ ، عدد رایلی  $10^4, 10^5, 10^6$ ،  $Ra=10^5$ ، عدد هارتمن  $Ha=0, 10, 25, 50$ ، تولید یا جذب حرارت بی بعد  $\phi=0, -1$ ، نسبت شناوری  $N=1/0, 3/8$  و نسبت ابعاد محفظه  $A=2$  در نظر گرفته شده است. این مدل پیشنهاد شده در چارچوب تابع توزیع دوگانه، انجام گرفته است. نتایج عددی نشان می دهد که این مدل شبکه دما-غلظت BGK ارائه شده مؤثر است و تطابق خوبی با نتایج به دست آمده از مطالعات انجام شده گذشته دارد.

در سال ۲۰۱۰ محمد و همکاران [۲۸]، انتقال حرارت و انتقال جرم را در یک محفظه باز به روش شبکه بولتزن مدل سازی کردند. آنها در این مطالعه از مدل D2Q9 برای جریان و مدل D2Q4 برای دما و غلظت استفاده کردند. محفظه مورد مطالعه آنها مربعی با دیوارهای افقی عایق (بدون نفوذ جرم و حرارت) و دیوارهای عمودی با دما و غلظت ثابت است. دیواره بسته دارای دما و غلظت بی بعد واحد است، در حالی که دیواره باز دما و غلظت بی بعد صفر دارد. عدد پرانتل  $0/71$  در نظر گرفته شده و نتایج برای اعداد رایلی  $10^4$  تا  $10^6$  و اعداد لوییس ۲، ۴، ۸ ارائه شده است. در این مطالعه، نسبت شناوری  $N$  که برابر است با نسبت نیروی شناوری ناشی از گرادیان غلظت به نیروی شناوری ناشی از گرادیان دما، منفی در نظر گرفته شده تا اثرات مخالف شناوری ناشی از غلظت و شناوری ناشی از دما برای اعداد مختلف  $N$  (منفی) مشخص شود. نتایج در حالت  $N$ های مثبت چندان مورد اهمیت نویسندگان نبوده است زیرا هر دو نیروهای شناوری، جریان را در یک جهت خاص هدایت می کنند و شدت جریان را تشدید می کنند. از طرفی ضخامت لایه مرزی دما و غلظت در حالت عدد لوییس

غیرواحد، با هم متفاوت است و این می‌تواند شکل جریان را در یک نسبت شناوری خاص، تغییر دهد. از آنجایی که شکل خطوط جریان از لحاظ کیفی قابل پیش‌بینی است، حالت‌های  $N$  مثبت مورد توجه نویسندگان قرار نگرفته است. نتایج نشان می‌دهند که شرایط مرزی پیشنهاد شده برای LBM در مرزهای باز، بدون داشتن اطلاعات قبلی از جهت جریان، مناسب به نظر می‌رسد. نرخ انتقال حرارت و جرم با افزایش  $N$  از صفر تا یک، به دلیل کاهش نیروی شناوری کل، کاهش می‌یابد. جریان داخل محفظه ممکن است برای  $N$  های از مرتبه یک، فرم دو سلولی داشته باشد. شکل‌های ۲-۱۶ و ۲-۱۷ به ترتیب تغییرات عدد ناسلت متوسط را برحسب نسبت شناوری در اعداد لوییس مختلف نشان می‌دهند.



شکل ۲-۱۶ تغییرات عدد ناسلت متوسط برحسب تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $10^5$  [۲۸]



شکل ۲-۱۷ تغییرات عدد شروود متوسط برحسب تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $10^5$  [۲۸]

موارد ذکر شده به ما کمک می‌کند دید بهتری نسبت به مساله مورد مطالعه در این تحقیق و

پارامترهای حاکم بر مساله داشته باشیم. تا جایی که می‌دانیم مساله انتقال جرم و حرارت در یک محفظه با حضور مانع گرم و با غلظت ثابت تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته است که ما در این تحقیق به آن می‌پردازیم.

فصل ۳. معادلات شبکه بولتزمن برای حل جریان،

انتقال حرارت و جرم

## ۳-۱- مقدمه

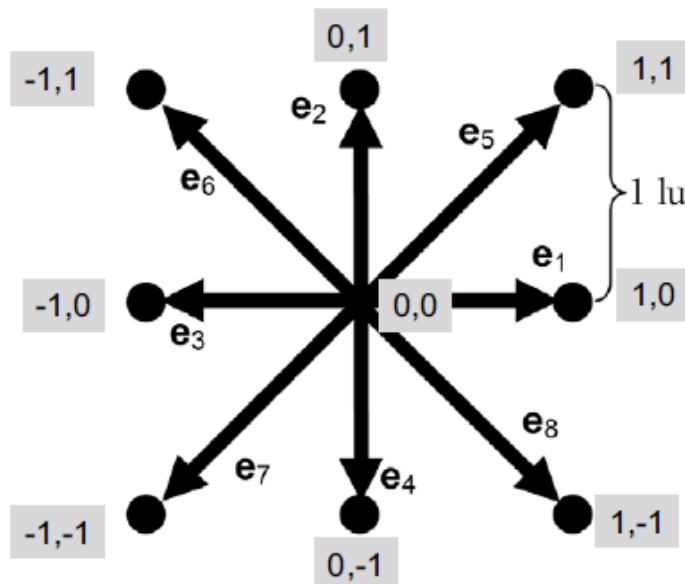
در این پروژه، حل همزمان انتقال جرم و حرارت به روش شبکه بولتزن در یک محفظه مربعی در حضور مانع گرم انجام شده است. برای رسیدن به این هدف، لازم است که معادلات شبکه بولتزن مربوط به جریان، دما و غلظت را بدانیم. این معادلات، روابط اصلی در حل جریان و انتقال حرارت و جرم هستند. از طرفی، مانند هر حل دیگری باید شرایط مرزی روی مرزها را به درستی اعمال کنیم. بنابراین می‌باید از انواع شرایط مرزی در روش شبکه بولتزن آگاهی کافی داشته باشیم. در اینجا به تعدادی از شرط مرزی‌های رایج در روش شبکه بولتزن اشاره می‌کنیم. لازم به ذکر است روش‌هایی که در اینجا بیان می‌شوند، تنها روش‌های اعمال شرایط مرزی نیستند. مطالعات بسیاری در زمینه اعمال شرایط مرزی انجام گرفته است که در اینجا به برخی از آنها می‌پردازیم. شرایط مرزی که به آنها اشاره خواهیم کرد، دو دسته هستند. شرط مرزی‌های با دقت مرتبه اول و شرط مرزی‌های با دقت مرتبه دوم. از آنجایی که روش شبکه بولتزن یک روش با دقت مرتبه دوم است، ضروری است بدانیم که آیا استفاده از هر شرط مرزی و با هر دقتی در مساله مورد نظر ما صحیح است یا خیر. بنابراین در اینجا بخشی را به مقایسه دو نوع شرط مرزی متفاوت (هم برای جریان و هم برای دما و غلظت) با دقت‌های مرتبه اول و دوم، در یک محفظه باز اختصاص می‌دهیم.

در ادامه این فصل، ابتدا معادلات جریان در روش شبکه بولتزن را به همراه انواع شرایط مرزی مربوط به آن بیان می‌کنیم. سپس در راستای حل انتقال حرارت و جرم، معادلات شبکه بولتزن مربوط به دما و غلظت را توضیح می‌دهیم. همچنین انواع شرط مرزی مربوط به دما و غلظت را بیان می‌کنیم. در قسمت بعد، در راستای معتبر سازی شرایط مرزی مورد استفاده، مساله انتقال حرارت و جرم در یک محفظه مربعی باز را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این مساله از دو شرط مرزی برای جریان و دو شرط مرزی برای دما و غلظت با دقت‌های مرتبه اول و دوم استفاده می‌کنیم و نتایج را با یکدیگر و همچنین نتایج منتشر شده، مقایسه می‌کنیم.



### ۳-۲- چارچوب اصلی LBM و معادلات مربوط به جریان

مدل‌های شبکه بولتزمن، با کاهش موقعیت‌های فضایی ممکن ذره و مومنتوم میکروسکوپی به گام-های مجزا، دیدگاه مفهومی اصلی بولتزمن را به طور وسیعی ساده‌سازی می‌کنند. موقعیت ذرات به گره‌هایی روی شبکه محدود می‌شود. تغییرات مومنتوم که ممکن است به دلیل پیوستگی جهت‌ها و بزرگی سرعت و همچنین تغییرات جرم ذرات اتفاق بیفتد، به هشت جهت، سه اندازه سرعت و یک جرم ذره کاهش یافته است [۷]. شکل ۱-۳ سرعت‌های  $e_a$  را نشان می‌دهد که  $a=0,1,2,\dots,8$  اندیس‌های جهت و  $e_a=0$  نشان دهنده ذرات در آرامش می‌باشند. این مدل به مدل D2Q9 معروف است زیرا دوبعدی است و دارای نه سرعت می‌باشد. روش طبقه بندی LBM توسط کیان و همکارانش [۲۹] ارائه شده و به طور گسترده استفاده می‌شود. از آنجایی که جرم ذرات یکسان است، این سرعت-های میکروسکوپی و مومنتوم همواره به طور موثری معادل‌اند. واحد شبکه ( $lu$ )، واحد طول اصلی در مدل‌های LBM است و گام زمانی ( $ts$ ) واحد زمان است.

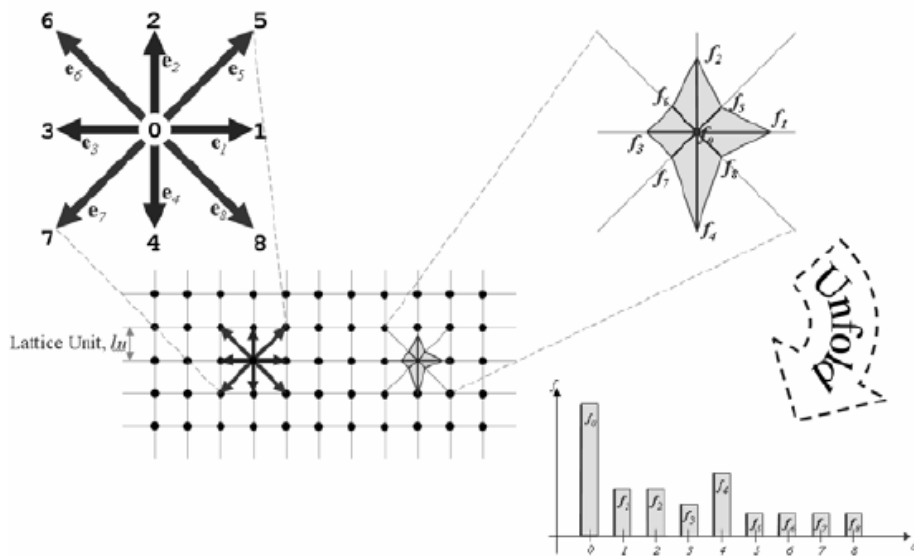


شکل ۱-۳ مولفه‌های  $x$  و  $y$  مدل D2Q9 [۷]

مرحله بعد شرکت دادن تابع توزیع احتمال تک ذره  $f$  است که لزوماً همان تابع توزیعی است که در معادله (۸-۱) ظاهر شده، با این تفاوت که به جای این که یک تابع پیوسته باشد، فقط نه مولفه گسسته دارد.

می‌توان تابع توزیع را مانند شکل ۲-۳ به صورت یک هیستوگرام که فرکانس رویداد را نشان می‌دهد، در نظر گرفت [۷]. فرکانس‌ها را می‌توان چگالی‌های سیال با جهت‌های خاص در نظر گرفت. بنابراین چگالی ماکروسکوپیک سیال برابر است با:

$$\rho = \sum_{a=0}^8 f_a \quad (1-3)$$



شکل ۲-۳ نمای شبکه و نمودار هیستوگرام تابع توزیع گسسته/چگالی جهت دار  $f_a$  [۷]

سرعت ماکروسکوپیک  $\bar{u}$ ، میانگین وزنی سرعت‌های میکروسکوپیک  $e_a$  است که در چگالی-های جهت‌دار  $f_a$  ضرب شده است.

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{a=0}^8 f_a \vec{e}_a \quad (2-3)$$

این معادله ساده به ما امکان می‌دهد تا از سرعت‌های میکروسکوپی گسسته LBM به پیوستگی سرعت‌های ماکروسکوپی که حرکت سیال را نشان می‌دهند، برسیم. گام بعدی، جاری شدن و برخورد ذرات از طریق تابع توزیع است. ساده ترین روش از تقریب Bhatunagar–Gross–krook برای برخورد استفاده می‌کند.

### ۳-۲-۱- مدل BGK با زمان آرامش منفرد<sup>۱</sup>

تقریب Bhatunagar–Gross–krook در ساده‌ترین مدل LBM استفاده شده است. سوچی [۱۱]، به طور گسترده‌ای روی مدل‌های پیچیده‌تر و روند رسیدن به تقریب BGK بحث می‌کند. جاری شدن و برخورد به این صورت است:

$$f_a(x + \vec{e}_a \Delta t, t + \Delta t) = f_a(x, t) - \frac{[f_a(x, t) - f_a^{eq}(x, t)]}{\tau} + \Delta t \cdot \vec{F}_a \quad (3-3)$$

که  $f_a(x + \vec{e}_a \Delta t, t + \Delta t) = f_a(x, t)$  بخش جاری شدن و  $\frac{[f_a(x, t) - f_a^{eq}(x, t)]}{\tau}$  ترم برخورد است.

در رابطه (۳-۳)،  $\tau$  زمان آرامش منفرد و  $f_a^{eq}$  تابع توزیع تعادلی است که وابستگی تابعی مناسبی به مشخصه‌های هیدرودینامیکی موضعی دارد. عبارت  $f_a^{eq}$  عبارت است از:

<sup>۱</sup> relaxation time

$$f_a^{eq}(x) = \omega_a \rho(x) \left[ 1 + 3 \frac{\vec{e}_a \cdot \vec{u}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\vec{e}_a \cdot \vec{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{c^2} \right] \quad (4-3)$$

که در آن توابع وزنی  $\omega_a$  در مدل D2Q9 عبارت‌اند از:

$$\omega_a = \begin{cases} 4/9 & a = 0 \\ 1/9 & a = 1, 2, 3, 4 \\ 1/36 & a = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (5-3)$$

سرعت‌های  $\vec{e}_a$  عبارت‌اند از [۱۱]:

$$\vec{e}_a = \begin{cases} 0 & a = 0 \\ c(\cos \theta_a, \sin \theta_a) & \theta_a = (a-1)\frac{\pi}{2} \quad a = 1, 2, 3, 4 \\ c\sqrt{2}(\cos \theta_a, \sin \theta_a) & \theta_a = (a-5)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad a = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (6-3)$$

$c$  سرعت پایه شبکه است ( $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ) که در آن  $\Delta x$  و  $\Delta t$  به ترتیب مقادیر ثابت طول و زمان در شبکه هستند).

در معادله (۳-۳)،  $\vec{F}_a$  ترم نیرو در هریک از جهت‌ها است و به صورت زیر تعریف می‌شود [28]:

$$\vec{F}_a = \omega_a \vec{F} \cdot \frac{\vec{e}_a}{c_s^2} \quad (7-3)$$

که در آن  $c_s$  سرعت صوت است که برابر با  $c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$  است. ویسکوزیته سینماتیکی سیال در

مدل D2Q9 عبارت است از:

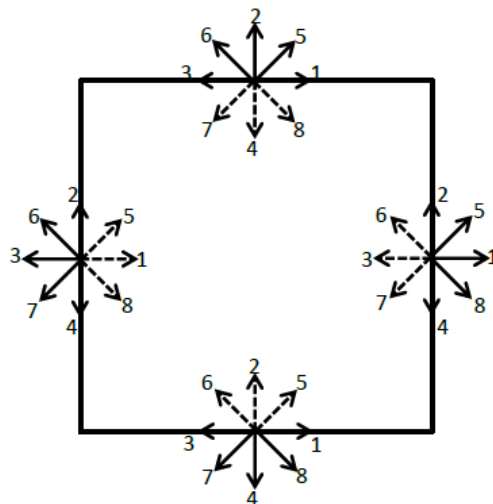
$$\nu = \left[ \tau - \frac{1}{2} \right] c_s^2 \Delta t \quad (8-3)$$

توجه شود که برای ویسکوزیته مثبت (فیزیکی)  $\tau > \frac{1}{2}$  است. با نزدیک شدن  $\tau$  به  $0.5$  مشکلات عددی ایجاد می‌شود. مطمئن‌ترین مقدار  $\tau = 1$  است.

### ۳-۳- شرایط مرزی جریان

پس از مرحله جاری شدن، توابع توزیع داخل محدوده مشخص هستند. همچنین توابع توزیع روی مرزها و به سمت خارج از محدوده، از مرحله جاری شدن معلوم هستند. تنها توابع توزیعی که روی مرزهای محدوده و به سمت داخل هستند، مجهول‌اند که این مجهولات با اعمال شرایط مرزی، به دست می‌آیند. شکل ۳-۳ توابع توزیع معلوم و مجهول را نشان می‌دهد.

تاکنون مطالعات بسیاری روی شرایط مرزی مختلف انجام گرفته است و روش‌های مختلفی برای پیاده‌سازی شرایط مرزی گوناگون پیشنهاد شده است [۳۱-۳۵]. در حالت کلی برای اعمال شرایط مرزی در LBM انعطاف‌پذیری بالایی وجود دارد، در واقع قابلیت شرکت دادن آسان مرزهای جامد، یکی از جالب‌ترین جنبه‌های این روش است. در اینجا به انواع مختلف شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن اشاره می‌کنیم.



شکل ۳-۳ نمایش توابع توزیع ها: توابع توزیع مجهول با خط چین و توابع توزیع معلوم با خطوط پر

نشان داده شده‌اند.

## ۳-۳-۱- شرط مرزی تقارن

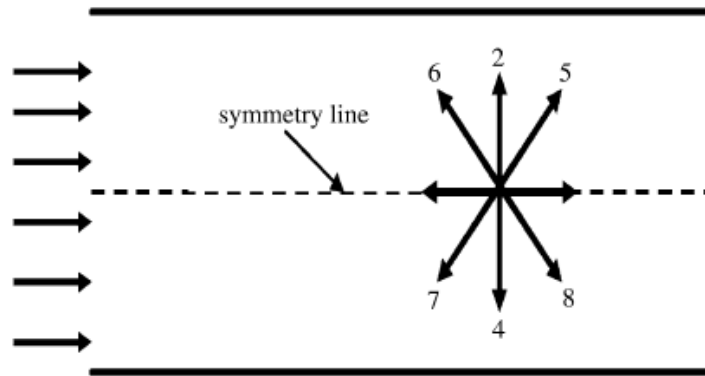
در حل بسیاری از مسائل، با حالتی مواجه می‌شویم که مساله حول یک محور متقارن است. در این حالت کافی است که تنها نیمی از مساله را حل کنیم. در این صورت توابع توزیع مجهول روی محور تقارن، برابر توابع توزیع قرینه (تصویر آینه‌ای) آن در نظر گرفته می‌شود [۸]. به عنوان مثال در شکل ۳-۴ جریان در یک کانال نشان داده می‌شود که نسبت به محور تقارن، متقارن است. بنابراین حل نیمی از مساله کافی است و تنها لازم است توابع توزیع مجهول روی محور تقارن را به دست آوریم. در این جا مجهولات  $f_4$  و  $f_7$  و  $f_8$  هستند و به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$f_4 = f_2$$

$$f_7 = f_6$$

$$f_8 = f_5$$

(۳-۹)



شکل ۳-۴ نمایش شرط مرزی تقارن [۸]

## ۳-۳-۲- مرزهای پریودیک

ساده‌ترین شرایط مرزی، شرایط مرزی پریودیک است که در آن با در نظر گرفتن لبه‌ها به صورت متصل به لبه‌های روبرو، سیستم بسته می‌شود. شرط مرزی کاملاً پریودیک در برخی

شرایط، برای مثال در شبیه سازی یک قلمرو نامحدود از سیالات چند فازی بسیار مفید است [۷]. در واقع در این نوع شرط مرزی، توابع توزیع احتمال که از یک سو خارج می‌شوند، از سوی دیگر وارد می‌شوند [۸].

### ۳-۳-۳ - شرایط مرزی فون نیومن

شرایط مرزی فون نیومن شامل سرعت معلوم در مرزها می‌شود. در اینجا از روشی که زو و هی [۳۶] پیشنهاد کرده‌اند، استفاده می‌کنیم. در اینجا با استفاده از معادلات مربوط به چگالی و سرعت ماکروسکوپیک مجهولات را به دست می‌آوریم. یک بردار سرعت شامل مولفه های  $x$  و  $y$ ،  $u_0 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  تعریف می‌شود که با کمک آن چگالی/فشار بر اساس شرایط داخل قلمرو محاسبه می‌شود. چگالی/فشار ماکروسکوپیک تنها بخشی از آن چیزی است که باید محاسبه شود. چگالی‌های جهتی (توابع توزیع احتمال) نامعلوم نیز باید محاسبه شوند [۷]. بعد از مرحله جاری شدن، سه تابع توزیع احتمال نامعلوم در هر نود شبکه وجود دارند که جهت آن‌ها به سمت درون قلمرو است. این مجهولات را می‌توان با برابر قرار دادن یک سرعت مشخص روی گره‌های شبکه به دست آورد. به عنوان مثال چنانچه مرز غربی را در نظر بگیریم، توابع توزیع  $f_a$  برای  $a = \{0, 2, 3, 4, 6, 7\}$  معلوم هستند. زیرا آنها از نودهای داخل قلمرو به دست می‌آیند. باید مساله را برای  $f_1$  و  $f_5$  و  $f_8$  و  $\rho$  حل کنیم. بنابراین به چهار معادله نیاز داریم. یک معادله، رابطه چگالی ماکروسکوپیک است.

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \quad (10-3)$$

رابطه دیگر، رابطه سرعت ماکروسکوپیک است.

$$\begin{aligned} u\rho &= f_1 + f_5 + f_8 - f_3 - f_6 - f_7 \\ v\rho &= f_2 + f_5 + f_6 - f_4 - f_7 - f_8 \end{aligned} \quad (11-3)$$

تا این جا سه معادله و چهار مجهول داریم و بنابراین به یک معادله دیگر نیاز داریم. زو و هی [۳۶] پیشنهاد کردند که معادله چهارم با فرض تعادل در جهت عمود بر مرز به دست می‌آید.

$$f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq} \quad (۱۲-۳)$$

این یک دستگاه چهار معادله و چهار مجهول است. از معادله (۳-۴)،  $f^{eq}$  به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f_1^{eq} &= \frac{1}{9} \rho_w \left[ 1 + 3u + \frac{9}{2} u^2 - \frac{3}{2} (u^2 + v^2) \right] \\ f_3^{eq} &= \frac{1}{9} \rho_w \left[ 1 - 3u + \frac{9}{2} u^2 - \frac{3}{2} (u^2 + v^2) \right] \end{aligned} \quad (۱۳-۳)$$

با حل چهار معادله فوق، توابع توزیع مجهول و چگالی ماکروسکوپیک به دست می‌آیند.

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3} \rho u$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho u + \frac{1}{2} \rho v \quad (۱۴-۳)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho u - \frac{1}{2} \rho v$$

$$\rho = \frac{1}{1-u} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)]$$

خلاصه این روند به این صورت است: یک سرعت مشخص در مرز انتخاب و مساله را برای به دست آوردن چگالی ماکروسکوپیک و سه تابع توزیع مجهول حل می‌کنیم. معادلات با استفاده از فرمول‌های متغیرهای ماکروسکوپیک و با فرض برقرار بودن تقارن در راستای عمود بر مرز، به دست می‌آیند.

### ۳-۳-۴ - شرط مرزی دیریشله (فشار) [۷]

شرایط مرزی دیریشله، فشار/ چگالی را روی مرزها مقید می‌کنند. حل این شرایط مرزی، مشابه روند گفته شده برای شرایط مرزی سرعت است. یک چگالی  $\rho_0$  تعیین می‌شود که از روی آن سرعت محاسبه می‌شود. توجه شود که تعیین چگالی، معادل تعیین فشار است زیرا معادله حالت، آن‌ها را مستقیماً به هم مربوط می‌سازد. برای مدل D2Q9 تک مولفه‌ای، رابطه



$p = \rho RT$  بین فشار و چگالی برقرار است که  $RT = \frac{1}{3}$  است. فرض می‌کنیم که شیب سرعت نسبت به مرز صفر است و مساله را برای مولفه سرعت عمود بر مرز حل می‌کنیم.

### ۳-۳-۵- شرط مرزی برای مرز باز

برای مرزهای باز می‌توان توابع توزیع مجهول را با در نظر گرفتن گرادیان صفر به دست آورد. به عنوان مثال، در یک مرز شرقی باز داریم:

$$\begin{aligned} f_{3,n} &= f_{3,n-1} \\ f_{6,n} &= f_{6,n-1} \\ f_{7,n} &= f_{7,n-1} \end{aligned} \quad (۱۵-۳)$$

که در آن  $n$  شماره گره‌های شبکه روی مرز شرقی و  $n-1$  شماره گره‌های همسایه دیوار (مرز) در راستای  $y$  است.

### ۳-۳-۶- شرط مرزی عدم لغزش

شرط مرزی عدم لغزش، یعنی حالتی که سرعت سیال روی مرز صفر است، یکی از ساده‌ترین شرایط مرزی در روش شبکه بولتزن است. معمولاً در اعمال این نوع شرط مرزی، از روش کمانه کردن<sup>۱</sup> استفاده می‌شود. در حالت کلی، دو روش در پیاده‌سازی این شرط مرزی وجود دارد. حالت اول، حالتی است که مرز فیزیکی روی نودهای شبکه قرار دارد که به آن کمانه کردن روی گره<sup>۲</sup> گفته می‌شود. حالت دوم، حالتی است که مرز فیزیکی روی لینک‌های بین گره‌های شبکه قرار می‌گیرد که به آن کمانه کردن روی لینک<sup>۳</sup> گفته می‌شود. شرط مرزی کمانه کردن روی گره، دقتی از مرتبه اول دارد [۱۱]، درحالی که روش شبکه بولتزن، دارای

<sup>۱</sup> Bounce Back

<sup>۲</sup> On-grid Bounce Back

<sup>۳</sup> Mid-grid Bounce Back

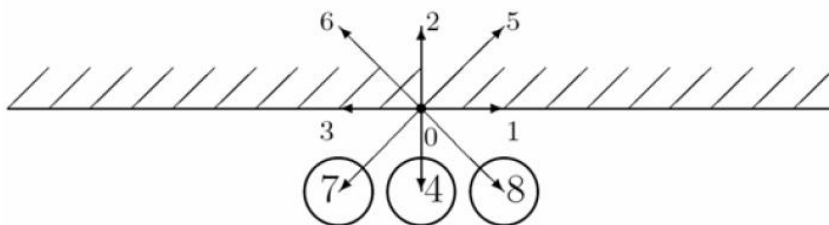
دقت مرتبه دوم است. از طرفی، شرط مرزی کمانه کردن روی لینک، دارای دقت مرتبه دوم است و می‌تواند مشکل عدم دقت روش کمانه کردن روی گره را حل کند. تاکنون مطالعات بسیاری در راستای افزایش دقت شرط مرزی عدم لغزش انجام گرفته است [۳۷-۴۰]. در اینجا به چند مورد از شرط مرزی‌های گفته شده اشاره می‌کنیم.

### ۳-۳-۷- کمانه کردن روی گره

همان طور که قبلاً گفته شد، این نوع شرط مرزی بسیار ساده است و برای مدل‌سازی سیالات با مرزهای پیچیده مانند سیال در محیط‌های متخلخل مناسب است. زیبایی آن به این دلیل است که تنها کافی است یک گره مشخص را به مانع جامد اختصاص دهیم، بدون این که هیچ برنامه نویسی خاصی نیاز باشد [۷]. نحوه اعمال این نوع شرط مرزی به این گونه است که توابع توزیع مجهول روی مرز (در راستای داخل محدوده)، برابر توابع توزیع در جهت عکس آن (در راستای خارج از محدوده) خواهد بود. به عنوان مثال، در شکل ۳-۵ توابع توزیع مجهول  $f_4$  و  $f_7$  و  $f_8$  هستند و به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} f_4 &= f_2 \\ f_7 &= f_5 \\ f_8 &= f_6 \end{aligned}$$

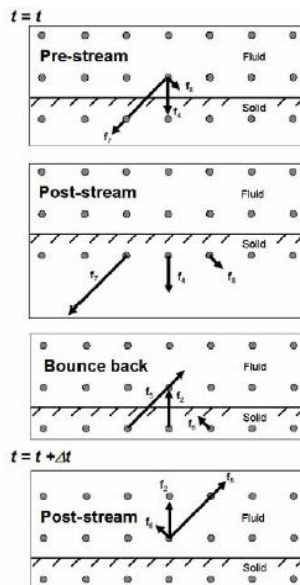
(۱۶-۳)



شکل ۳-۵ نمایش شرط مرزی کمانه کردن روی گره [۷]

## ۳-۳-۸- کمانه کردن روی لینک

این نوع شرط مرزی توسط لاد [۴۱-۴۲] پیشنهاد شده است و دارای دقت مرتبه دوم است. در این نوع شرط مرزی، مرز فیزیکی به جای قرار گرفتن روی گره‌ها، در فاصله بین گره‌های شبکه قرار می‌گیرد. در اینجا، توابع توزیع احتمال به طور موقت درون جامد ذخیره می‌شوند و در گام زمانی بعدی، دوباره پدیدار می‌شوند [۷]. شکل ۳-۶ این روند را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۶ نمایش کمانه کردن توابع توزیع احتمال روی لینک [۷]

۳-۳-۹- شرط مرزی عدم لغزش اینامورو<sup>۱</sup> و همکارانش [۳۸]

در این روش، توابع توزیع مجهول به صورت توابع توزیع تعادلی با یک سرعت ضد لغزشی<sup>۲</sup> فرض می‌شوند که این سرعت ضد لغزشی به صورتی تعیین می‌شود که سرعت سیال روی دیوار، با سرعت دیوار برابر باشد. سرعت سیال در راستای عمود بر دیوار برابر با سرعت دیوار

<sup>1</sup> Inamuro

<sup>2</sup> Counter slip

است، درحالی که سرعت سیال در راستای موازی دیوار با سرعت دیوار برابر نیست. اختلاف بین سرعت دیوار و سرعت سیال در راستای موازی دیوار، سرعت ضد لغزشی نامیده می‌شود. شکل ۳-۷ یک مرز جنوبی را نشان می‌دهد که در آن توابع توزیع مجهول،  $f_2$  و  $f_5$  و  $f_6$  هستند که به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{9} \rho' \left[ 1 + 3v_w + \frac{9}{2} v_w^2 - \frac{3}{2} \left[ (u_w + u')^2 + v_w^2 \right] \right] \\ f_5 &= \frac{1}{36} \rho' \left[ 1 + 3(u_w + u' + v_w) + \frac{9}{2} (u_w + u' + v_w)^2 - \frac{3}{2} \left[ (u_w + u')^2 + v_w^2 \right] \right] \\ f_6 &= \frac{1}{36} \rho' \left[ 1 + 3(-u_w - u' + v_w) + \frac{9}{2} (-u_w - u' + v_w)^2 - \frac{3}{2} \left[ (u_w + u')^2 + v_w^2 \right] \right] \end{aligned} \quad (17-3)$$

که در آن  $u_w$  و  $v_w$  به ترتیب مولفه های  $x$  و  $y$  سرعت دیوار و  $\rho'$  و  $u'$  پارامترهای مجهولی هستند که با اعمال این قید که سرعت سیال روی دیوار با سرعت دیوار برابر است، به دست می‌آیند.  $u'$  سرعت ضد لغزشی است. بنابراین، دو معادله برای  $u_w$  و  $v_w$  و یک معادله برای  $\rho_w$  داریم که چگالی سیال مجازی روی دیوار است که با استفاده از معادله (۳-۱) به دست می‌آید. بنابراین پارامترهای مجهول عبارت‌اند از:

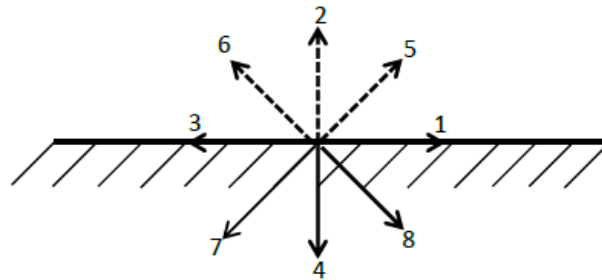
$$\begin{aligned} \rho_w &= \frac{1}{1-v_w} \left[ f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_4 + f_7 + f_8) \right] \\ \rho' &= 6 \frac{\rho_w v_w + (f_4 + f_7 + f_8)}{1 + 3v_w + 3v_w^2} \\ u' &= \frac{1}{1+3v_w} \left[ 6 \frac{\rho_w u_w - (f_1 - f_3 + f_8 - f_7)}{\rho'} - u_w - 3u_w v_w \right] \end{aligned} \quad (18-3)$$

از آنجایی که  $u_w = v_w = 0$ ، توابع توزیع مجهول برابر اند با:

$$f_2 = \rho' \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{6} u'^2 \right)$$

$$f_5 = \rho' \left( \frac{1}{36} + \frac{1}{12} u' + \frac{1}{12} u'^2 \right) \quad (19-3)$$

$$f_6 = \rho' \left( \frac{1}{36} - \frac{1}{12} u' + \frac{1}{12} u'^2 \right)$$



شکل ۳-۷ نمایش توابع توزیع مجهول در یک مرز جنوبی

تا اینجا معادلات بولتزمن برای جریان و شرایط مرزی مربوط به آن را بیان کردیم. برای بررسی انتقال حرارت و جرم، نیاز داریم تا معادلات بولتزمن مربوط به دما و غلظت را نیز به دست آوریم. در اینجا به این نکته اشاره می‌کنیم که معادلات بولتزمن مربوط به حل انتقال حرارت و جرم دارای فرم یکسان‌اند و توابع توزیع‌های تعادلی آنها مشابه یکدیگر است. در ادامه ابتدا توضیح کوتاهی در رابطه با مدل‌های حرارتی مختلف ارائه می‌دهیم و سپس از روش پیشنهاد شده توسط هی و همکارانش [۱۷] برای مدل سازی انتقال حرارت و جرم استفاده می‌کنیم.

### ۳-۴- مدل‌های حرارتی شبکه بولتزمن

همانطور که پیش‌تر گفته شد، روش شبکه بولتزمن از لحاظ عددی پایدار، از لحاظ محاسباتی بهینه و بسیار دقیق است. با وجود این مزایا، LBM محدودیت‌هایی دارد که آن را به عنوان

یک ابزار CFD محدود می‌کند. یکی از مشکلات آن، عدم کفایت مدل شبکه بولتزمن دمایی برای حل مسائل انتقال حرارت است [۲۱]. بسیاری از محققین، مدل‌های شبکه بولتزمن گرمایی مختلفی برای حل مسائل پدیده‌های گرمایی ارائه داده‌اند. در حالت کلی مدل‌های گرمایی متداول را می‌توان در سه دسته طبقه بندی کرد: مدل چند سرعت<sup>۱</sup>، مدل منفعل عددی<sup>۲</sup> و مدل تابع توزیع دوگانه<sup>۳</sup>. مدل چند سرعت، تعمیم مستقیم مدل شبکه بولتزمن دمایی است که تنها از تابع توزیع چگالی استفاده می‌کند [۴۳-۴۴]. برای به دست آوردن معادله تکامل دما در مقیاس میکروسکوپی، به یک سری سرعت‌های اضافه نیاز است و توزیع تعادلی باید شامل ترم‌های سرعت از مرتبه بالاتر باشد. این مدل ناپایداری عددی زیادی دارد و تنها در یک محدوده دمایی بسیار کوچک قابل مدل‌سازی است. در یک مدل شبکه بولتزمن دمایی منفعل عددی، دما توسط یک تابع توزیع جداگانه که مستقل از توزیع چگالی است، مدل‌سازی می‌شود. مزیت اصلی این مدل نسبت به مدل چند سرعت، بهبود پایداری عددی است [۱۷].

مدل تابع توزیع دوگانه ارائه شده توسط هی و همکارانش، می‌تواند با گسسته سازی صحیح معادله بولتزمن پیوسته در فضای زمانی، مکانی و مومنتوم، مدل‌های ایزوترم شبکه بولتزمن را به دست آورد. همین روند را می‌توان برای معادله انرژی بولتزمن به کار برد. این روش مشابه روش منفعل عددی است زیرا در این روش هم از یک تابع توزیع مستقل برای مدل‌سازی تکامل دمایی استفاده می‌شود. پایداری عددی آن مشابه مدل‌های شبکه بولتزمن دمایی منفعل عددی است. [۱۷].

<sup>1</sup> Multispeed

<sup>2</sup> Passive-scalar

<sup>3</sup> Double-population

## ۳-۴-۱- مدل شبکه بولتزمن دمایی برای میدان دما (و غلظت)

همانطور که گفتیم، هی و همکارانش [۱۷]، پیشنهاد کردند که با گسسته‌سازی صحیح معادله بولتزمن انرژی می‌توان به معادله شبکه بولتزمن دمایی رسید که تکامل میدان دمای ماکروسکوپی را توصیف می‌کند.

برخورد و جاری شدن در مدل شبکه بولتزمن دما (یا غلظت) به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$g_a(x + \Delta x, t + \Delta t) = g_a(x, t)(1 - \omega_s) + \omega_s g_a^{eq}(x, t) \quad (20-3)$$

که در آن  $g_a^{eq}(x, t)$  تابع توزیع احتمال تعادلی است و  $\omega_s$  زمان آرامش است. تابع توزیع احتمال تعادلی برابر است با:

$$g_a^{eq} = \omega_a \Phi(x, t) \left[ 1 + \frac{\vec{e}_a \cdot \vec{u}}{c_s^2} \right] \quad (21-3)$$

که در آن،  $\Phi(x, t)$  دما یا غلظت ماکروسکوپی است.

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} T(x, t) & \text{Temperature} \\ C(x, t) & \text{Concentration} \end{cases} \quad (22-3)$$

برای مدل D2Q9،  $\omega_s$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_s = \frac{1}{3\Gamma + 0.5} \quad (23-3)$$

که در آن  $\Gamma$  ضریب نفوذ حرارتی یا غلظت است:

$$\Gamma = \begin{cases} \alpha & \text{thermal diffusivity} \\ D & \text{mass diffusivity} \end{cases} \quad (24-3)$$

بنابراین دما (و غلظت) ماکروسکوپی در هر نقطه از محدوده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Phi(x, t) = \sum_{a=0}^8 g_a \quad (25-3)$$

عدد ناسلت میانگین برابر خواهد بود با [۲۸]:

$$Nu = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M - \frac{\partial T}{\partial X} \quad (26-3)$$

به طور مشابه عدد شروود برابر است با:

$$Sh = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M - \frac{\partial C}{\partial X} \quad (27-3)$$

که در آن  $M$  تعداد گره‌های شبکه در راستای  $y$  است.

اکنون تنها کافی است که ترم نیرو را تعریف کنیم. در حل همزمان انتقال حرارت و جرم نیروهای محرک، نیروی گرانش ناشی از گرادیان‌های دما و غلظت است. بنابراین در رابطه (3-7)،  $\bar{F}$  برابر اثرات همزمان گرانش ناشی از دما و غلظت است.

$$\bar{F} = \rho \bar{g}_r (\beta_T \Delta T + \beta_C \Delta C) = \rho \bar{g}_r \beta_T \Delta T (1 + N) \quad (28-3)$$

در این معادله [28]،  $\bar{g}_r$ ،  $\beta_T$  و  $\beta_C$  به ترتیب شتاب گرانش، ضریب انبساط حرارتی و ضریب انبساط غلظت هستند. همچنین  $\Delta T$  و  $\Delta C$  به ترتیب اختلاف دما و غلظت است و  $N$  نسبت شناوری است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N = \frac{\beta_C \Delta C}{\beta_T \Delta T} \quad (29-3)$$

### 3-5- شرایط مرزی دمایی

همانطور که پیشتر گفته شد پس از مرحله جاری شدن، توابع توزیع احتمال داخل محدوده و روی مرزها به سمت خارج از محدوده مشخص می‌شوند. برای حل انتقال حرارت کافی است تا توابع توزیع مجهول روی مرزها به سمت داخل محدوده را تعیین کنیم. این امر با اعمال شرایط مرزی انجام می‌گیرد. مطالعات بسیاری در ارتباط با شرایط مرزی دمایی انجام گرفته است [45-48]. آرازیو<sup>1</sup> و

<sup>1</sup> D'Orazio



همکارانش [۴۹]، یک شرط مرزی دمایی جدید ارائه کرده‌اند که هم برای حالت دمایی ثابت در دیوار (شرط مرزی دیریشله) و هم برای حالت شار ثابت (شرط مرزی نیومن) قابل استفاده است. ارازو و سوچی [۵۰]، یک شرط مرزی دمایی ارائه داده‌اند که در آن توابع توزیع مجهول به صورت توابع توزیع تعادلی با انرژی داخلی ضد لغزشی در نظر گرفته می‌شوند و به کمک این روش می‌توان شرط مرزی دما ثابت و شار ثابت را به دست آورد. در ادامه انواع مختلف شرط مرزی دمایی در روش شبکه بولتزن توضیح داده می‌شود.

### ۳-۵-۱- شرط مرزی دیوارهای با دمایی مشخص [۸]

در دیوارهای با دمایی مشخص، برای به دست آوردن توابع توزیع احتمال مجهول از دمایی دیوار استفاده می‌شود. به عنوان مثال یک دیوار غربی را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} g_{1,0,j} - g_{1,0,j}^{eq} + g_{3,0,j}^{eq} - g_{3,0,j} &= 0 \\ g_{5,0,j} - g_{5,0,j}^{eq} + g_{7,0,j}^{eq} - g_{7,0,j} &= 0 \\ g_{8,0,j} - g_{8,0,j}^{eq} + g_{6,0,j}^{eq} - g_{6,0,j} &= 0 \end{aligned} \quad (30-3)$$

توابع توزیع تعادلی در مرز معلوم‌اند (سرعت صفر است).

$$\begin{aligned} g_{1,0,j}^{eq} &= \omega_1 T_w \\ g_{5,0,j}^{eq} &= \omega_5 T_w \\ g_{8,0,j}^{eq} &= \omega_8 T_w \end{aligned} \quad (31-3)$$

که  $T_w$  دمایی دیوار است. بنابراین توابع توزیع مجهول به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} g_{1,0,j} &= T_w (\omega_1 + \omega_3) - g_{3,0,j} \\ g_{5,0,j} &= T_w (\omega_5 + \omega_7) - g_{7,0,j} \\ g_{8,0,j} &= T_w (\omega_8 + \omega_6) - g_{6,0,j} \end{aligned} \quad (32-3)$$

این شرط مرزی دارای دقت مرتبه اول است. در ادامه نوع دیگری از شرط مرزی برای مرزهای با دمایی ثابت معرفی می‌کنیم که دارای دقت مرتبه دوم است و برای روش شبکه بولتزن بسیار مناسب است.

## ۳-۵-۲ - شرط مرزی شار ثابت [۸]

برای شار ثابت در دیواره، به عنوان مثال در دیوار غربی ( $x=0$ )، داریم:

$$q = k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (33-3)$$

می‌توان با استفاده از روش تفاضل محدود معادله (۳۳-۳) را در مرزگسسته‌سازی کرد:

$$q = k \frac{T(1, j) - T(0, j)}{\Delta x} \quad (34-3)$$

با مرتب کردن رابطه فوق:

$$T(0, j) = T(1, j) - \frac{q\Delta x}{k} \quad (35-3)$$

سپس مشابه روند دمای ثابت با یک ترم اضافی روش را ادامه می‌دهیم.

## ۳-۵-۳ - شرط مرزی آدیاباتیک

با فرض این که دیوار غربی آدیاباتیک باشد، توابع توزیع مجهول  $g_1$ ،  $g_5$  و  $g_8$  هستند که به صورت

زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} g_{1,0,j} &= g_{1,1,j} \\ g_{5,0,j} &= g_{5,1,j} \\ g_{8,0,j} &= g_{8,1,j} \end{aligned} \quad (36-3)$$

## ۳-۵-۴ - شرط مرزی مرز باز با دمای ثابت

در اینجا شرط مرزی ارائه شده توسط محمد و همکارانش [۲] را بیان می‌کنیم. در این نوع شرط

مرزی، بسته به اینکه سیال به محفظه وارد می‌شود یا از آن خارج می‌شود به دو صورت مختلف عمل

می‌کنیم. چنانچه سیال به داخل محفظه نفوذ کند، دمای مرز با دمای محیط ( $T=0$ ) برابر خواهد بود.

اگر سیال از محفظه خارج شود، هیچ نفوذ حرارتی وجود ندارد یعنی گرادیان دما قابل چشم پوشی

است. به عنوان مثال در یک مرز شرقی، توابع توزیع مجهول به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \text{if } u < 0 \text{ then } & g_{3,n} = -g_{1,n} \quad g_{6,n} = -g_{8,n} \quad g_{7,n} = -g_{5,n} \\ \text{if } u > 0 \text{ then } & g_{3,n} = g_{3,n-1} \quad g_{6,n} = g_{6,n-1} \quad g_{7,n} = g_{7,n-1} \end{aligned} \quad (37-3)$$

### ۳-۵-۵- شرط مرزی خروجی با گرادیان صفر

معمولا در مرز خروجی از شرط گرادیان صفر استفاده می شود. در یک مرز خروجی شرقی، توابع توزیع

مجهول  $g_3$ ،  $g_6$  و  $g_7$  هستند که به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} g_{3,n,j} &= g_{3,n-1,j} \\ g_{6,n,j} &= g_{6,n-1,j} \\ g_{7,n,j} &= g_{7,n-1,j} \end{aligned} \quad (38-3)$$

### ۳-۵-۶- شرط مرزی دما ثابت و آدیاباتیک با دقت مرتبه دوم

در اینجا روش ارائه شده توسط ارازیو و همکارانش [۴۹] توضیح داده می شود. این روش دارای دقت

مرتبه دوم است. در این روش، توابع توزیع مجهول به صورت توابع توزیع تعادلی در دمای  $T_0$  در نظر

گرفته می شوند. دمای  $T_0$ ، برحسب اینکه مرز عایق است (شرط مرزی دیریشله) یا دمای ثابت دارد

(شرط مرزی نیومن)، تعیین می شود. از آنجایی که در دیواره سرعت صفر است، با توجه به معادله (۳-۳)

(۲۱) توابع توزیع مجهول برابرند با:

$$g_a^{eq} = \omega_a T_0 \quad (39-3)$$

برای یک مرز غربی با دمای ثابت، توابع توزیع مجهول  $g_1$ ،  $g_5$  و  $g_8$  هستند که به صورت توابع

توزیع تعادلی در دمای  $T$  در نظر گرفته می شوند:

$$\begin{aligned} g_1^{eq} &= \frac{1}{9} T_0 \\ g_5^{eq} &= \frac{1}{36} T_0 \end{aligned} \quad (40-3)$$

$$g_8^{eq} = \frac{1}{36} T_0$$

دمای دیوار با توجه به معادله (۲۵-۳) تعیین می‌شود:

$$T_w = \sum_{a=0}^8 g_a = T_p + \frac{1}{6} T_0 \quad (41-3)$$

که در آن  $T_p$  مجموع توابع توزیع معلوم است.

$$T_p = g_0 + g_2 + g_3 + g_4 + g_6 + g_7 \quad (42-3)$$

بنابراین با توجه به معادله (۴۱-۳)، دمای  $T$  برحسب دمای دیوار و توابع توزیع معلوم به دست می‌آید.

$$T_0 = 6(T_w - T_p) \quad (43-3)$$

در نهایت توابع توزیع مجهول به شکل زیر محاسبه می‌شوند.

$$g_1 = \frac{2}{3}(T_w - T_p)$$

$$g_5 = \frac{1}{6}(T_w - T_p) \quad (44-3)$$

$$g_8 = \frac{1}{6}(T_w - T_p)$$

برای مرز عایق نیز به همین شیوه عمل می‌کنیم. به عنوان مثال چنانچه مرز شمالی عایق باشد، توابع

توزیع مجهول  $g_4$ ،  $g_7$  و  $g_8$  خواهند بود که با توجه به رابطه (۳۹-۳) برابرند با:

$$g_4^{eq} = \frac{1}{9} T_0$$

$$g_7^{eq} = \frac{1}{36} T_0 \quad (45-3)$$

$$g_8^{eq} = \frac{1}{36} T_0$$

در مرز عایق، هیچ گرادیان دمایی وجود ندارد. بنابراین داریم:

$$g_2 + g_5 + g_6 - g_4 - g_7 - g_8 = 0 \quad (46-3)$$

$$g_4 + g_7 + g_8 = \frac{1}{6}T_0 \quad (47-3)$$

و مجموع توابع توزیع معلوم برابر  $T_p$  خواهد بود.

$$T_p = g_2 + g_5 + g_6 \quad (48-3)$$

بنابراین با توجه به معادلات فوق،  $T$  به دست می‌آید.

$$T_0 = 6T_p \quad (49-3)$$

و از آنجا توابع توزیع مجهول در مرز عایق به دست می‌آیند:

$$g_4 = \frac{2}{3}T_p$$

$$g_7 = \frac{1}{6}T_p \quad (50-3)$$

$$g_8 = \frac{1}{6}T_p$$

### ۳-۶- مقایسه شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن

برای مقایسه شرایط مرزی با دقت‌های مختلف، در یک محفظه مربعی باز دو نوع شرط مرزی برای جریان و دو نوع شرط مرزی برای دما اعمال شده است. در مساله مورد بررسی دیوارهای افقی عایق و نفوذ ناپذیراند، در حالی که دیوارهای عمودی دارای دماهایی ثابت اما مختلف هستند. دیوار سمت چپ (دیوار بسته) دارای دمای بی‌بعد  $T_h = 1$  و دیوار سمت راست (دیوار باز) دارای دمای بی‌بعد  $T_c = 0$  است. مساله برای دو ویسکوزیته بی بعد  $0.2$  و  $0.5$  حل شده است. نتایج به دست آمده با نتایج منتشر شده در مقالات، مقایسه و معتبرسازی شده است. این مطالعه همچنین اثر ابعاد شبکه را نیز بررسی می‌کند. همانطور که گفته شد توابع توزیع احتمال مربوط به دما و غلظت مشابه‌اند و بنابراین نحوه اعمال شرایط مرزی دما و غلظت یکسان است. در این جا برای چند حالت خاص، مساله برای حالتی که علاوه بر گرادیان دما در محفظه، گرادیان غلظت نیز وجود دارد حل شده و نتایج به دست آمده، نشان دهنده صحت این ادعاست. شکل ۳-۸ نشان دهنده هندسه محفظه، شرایط مرزی و جهت

سرعت‌ها است.

### ۳-۶-۱- شرایط مرزی برای جریان

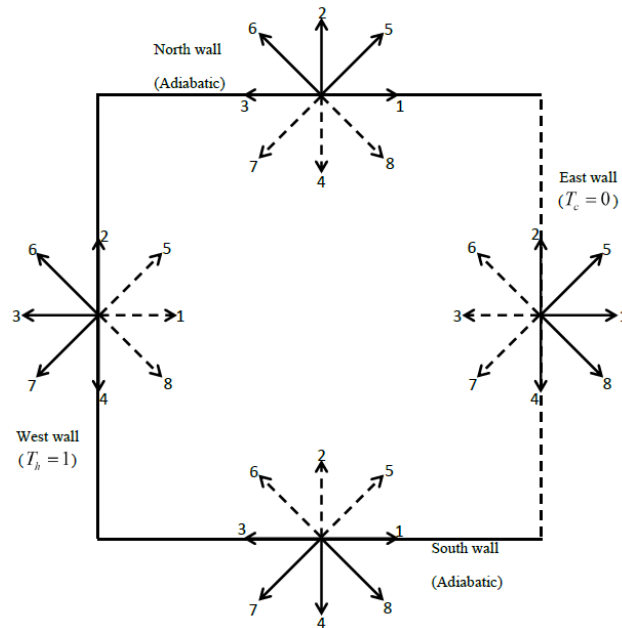
در دیوار باز (دیوار سمت راست)، شرط مرزی ذکر شده در قسمت ۳-۳-۵ با در نظر گرفتن گرادیان صفر استفاده شده است. یعنی:

$$f_{3,n} = f_{3,n-1}$$

$$f_{6,n} = f_{6,n-1}$$

$$f_{7,n} = f_{7,n-1}$$

(۵۱-۳)



شکل ۳-۸ نمایش شرایط مرزی محفظه و جهت‌های سرعت

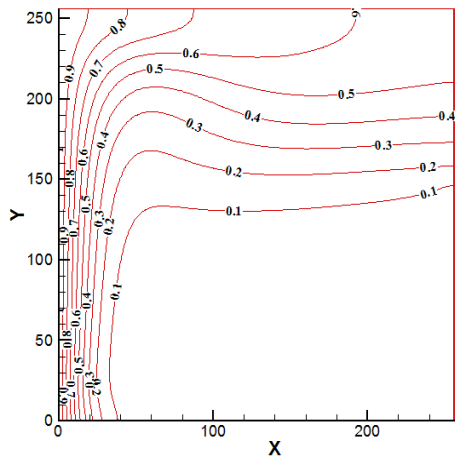
برای دیوارهای جامد دو نوع شرط مرزی اعمال شده است: شرط مرزی کمانه کردن روی گره که در قسمت ۳-۳-۷ توضیح داده شد و شرط مرزی عدم لغزش اینامورو [۳۸] که در قسمت ۳-۳-۹ بیان شد. همان طور که گفته شد، شرط مرزی کمانه کردن روی گره دارای دقت مرتبه اول و شرط مرزی عدم لغزش اینامورو [۳۸]، دارای دقت مرتبه دوم است.

### ۳-۶-۲- شرایط مرزی برای دما

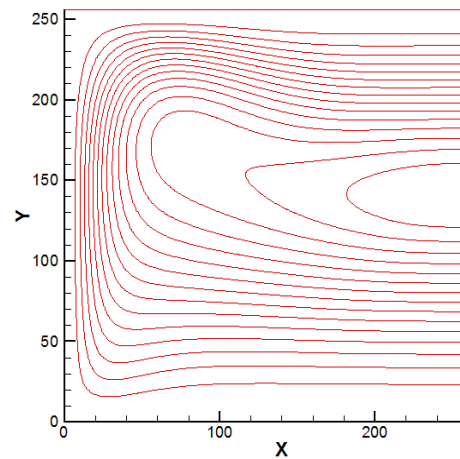
برای دیوار باز شرط مرزی ارائه شده توسط محمد [۲] و همکارانش استفاده می‌شود (رابطه (۳-۳۷)). این نوع شرط مرزی از آن جهت دارای اهمیت است که میدان جریان و پروفیل دما در دیواره باز قبل از حل مشخص نیست. با این حال، با توجه به اینکه جریان به داخل محفظه نفوذ می‌کند یا از آن خارج می‌شود، می‌توان شرط مرزی مناسبی در مرز اعمال کرد. برای دیوارهای جامد شرایط مرزی با دقت‌های مرتبه اول و دوم به صورت زیر اعمال می‌شود. ابتدا شرایط مرزی مرتبه اول را بیان می‌کنیم. در دیواره سمت راست، شرط مرزی بیان شده در قسمت ۳-۵-۱ برای مرز با دمای معلوم استفاده شده و توابع توزیع مجهول از رابطه (۳-۳۲) به دست می‌آیند. همچنین برای دیوارهای افقی (آدیاباتیک)، شرط مرزی بیان شده در قسمت ۳-۵-۳ به کار برده می‌شود. در اینجا برای اعمال شرایط مرزی با دقت مرتبه دوم، از روش ارائه شده توسط ارازو [۴۹] و همکارانش استفاده می‌شود و توابع توزیع مجهول برای دیوارهای با دمای معلوم و آدیاباتیک، به ترتیب با توجه به روابط (۳-۴۴) و (۳-۵۰) تعیین می‌شوند.

### ۳-۶-۳- مطالعه و بررسی نتایج

در اینجا برای مقایسه دو شرط مرزی هیدرودینامیکی و دو شرط مرزی حرارتی، پارامترهای مهم مساله مانند عدد ناسلت ( $Nu$ )، سرعت در مرکز محفظه و دما در مرکز محفظه با یکدیگر مقایسه شده‌اند. این نمودارها نشان‌دهنده اثرات این روش‌ها روی پارامترهای ذکر شده و شباهت‌ها و تفاوت‌های آن‌هاست. شکل ۳-۹-الف و ب) به ترتیب خطوط جریان و پروفیل دما در محفظه را در حالت عدد رایلی  $Ra = 10^5$  و ویسکوزیته  $\nu = 0/05$  نشان می‌دهند. این نمایش میدان‌های جریان و دما، به درک بهتر فیزیک مساله کمک می‌کند.



(ب)



(الف)

شکل ۳-۹ الف) خطوط جریان و ب) پروفیل دما، در حالت عدد رایلی  $Ra=10^5$  و ویسکوزیته  $\nu$  برابر  $0/05$  با

استفاده از شرایط مرزی مرتبه اول

جدول (۱-۳) مقایسه عدد ناسلت به دست آمده با استفاده از دو شرط مرزی هیدرودینامیکی ذکر شده و در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه اول را در اعداد رایلی مختلف و برای تعداد گره‌های مختلف شبکه نشان می‌دهد. این جدول همچنین اعداد ناسلت گزارش شده توسط محققین پیشین، با استفاده از روش شبکه بولتزمن و روش حجم محدود را نیز دربرمی‌گیرد. همان‌طور که دیده می‌شود، نتایج به دست آمده از این روش تطابق خوبی با مطالعات انجام شده دارد. جدول (۲-۳)، اعداد ناسلت به دست آمده از هر چهار شرط مرزی بیان شده را با یکدیگر مقایسه می‌کند. همان‌طور که در این جدول دیده می‌شود در یک ویسکوزیته مشخص، عدد ناسلت به دست آمده از تمامی روش‌های ذکر شده، تقریباً در تمامی حالات مختلف ابعاد شبکه (تعداد گره‌های شبکه) با یکدیگر برابر است.



جدول (۱-۳) مقایسه عدد ناسلت به دست آمده در دیوار سمت چپ محفظه در ویسکوریته  $U=0/02$  با استفاده

از دو شرط مرزی هیدرودینامیکی مختلف و در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه اول

Ra		LBM (Error(%)) grid=64x64	LBM (Error(%)) grid=128x128	LBM (Error(%)) grid=256x256	Mohamad [۲] LBM	Mohamad [۵۱] FVM	Hinojosa et. al [۵۲] FVM
۱۰۴	Bounce Back	۳/۲۹۷(۱/۰۱۶)	۳/۲۸۳(۰/۵۹۶)	۳/۳۶۱(۲/۹۷۷)	۳/۳۷۷	۳/۲۶۴	۳/۵۷
	Inamuro	۳/۲۹۹(۱/۰۸۲)	۳/۲۸۴(۰/۶۱۲)	۳/۳۶۱(۲/۹۸۱)			
۱۰۵	Bounce Back	۷/۲۵۴(۰/۰۹۵)	۷/۲۵۰(۰/۰۱۷)	۷/۲۵۶(۰/۰۶۴)	۷/۳۲۳	۷/۲۶۱	۷/۷۵
	Inamuro	۷/۲۵۷(۰/۰۵۴)	۷/۲۶۱(۰/۰۰۳)	۷/۲۵۷(۰/۰۵۹)			
۱۰۶	Bounce Back	۱۴/۱۹(۰/۸۴۳)	۱۴/۳۳(۱/۸۳۱)	۱۴/۳۳(۱/۸۳۹)	۱۴/۳۸	۱۴/۰۷۶	۱۵/۱۱
	Inamuro	-	۱۴/۳۳(۱/۸۳۹)	۱۴/۳۳(۱/۸۴۳)			

خطا با توجه به روش حجم محدود محاسبه شده است.

جدول (۲-۳) مقایسه عدد ناسلت به دست آمده در دیوار سمت چپ محفظه با استفاده از شرایط مرزی

هیدرودینامیکی و حرارتی مختلف در ویسکوریته  $U=0/05$  و عدد رایلی  $Ra=10^5$

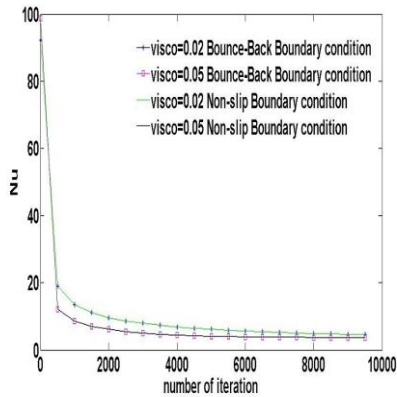
عدد ناسلت			نوع شرایط مرزی	
شبهه ۲۵۶x۲۵۶	شبهه ۱۲۸x۱۲۸	شبهه ۶۴x۶۴	حرارتی	هیدرودینامیکی
۷/۲۴۶۴۷۲	۷/۲۵۷۶۰۷	۷/۲۴۴۲۵۷	مرتبه اول	مرتبه اول
۷/۲۴۶۴۱۱	۷/۲۵۷۳۱۴	۷/۲۴۲۵۵۱	مرتبه اول	مرتبه دوم
۷/۲۵۵۸۲۱	۷/۲۶۳۴۸۱	۷/۲۵۳۸۰۴	مرتبه دوم	مرتبه اول
۷/۲۵۵۷۲۸	۷/۲۶۳۲۳۹	۷/۲۵۲۰۱۲	مرتبه دوم	مرتبه دوم

نتایج مربوط به هریک از شرایط مرزی، در شکل‌های ۱۰-۳ تا ۲۰-۳ نشان داده شده است.

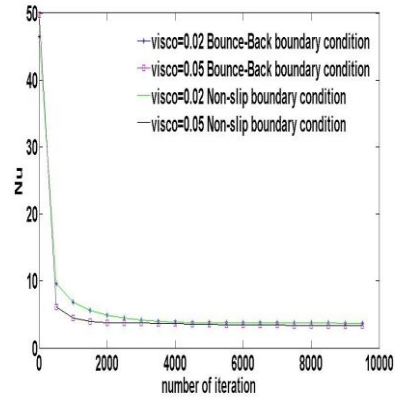
در تمامی شکل‌های ۱۰-۳ تا ۱۸-۳ شرایط مرزی حرارتی اعمال شده، شرط مرزی مرتبه اول

است. در این شکل‌ها منظور از "bounce-back"، کمانه کردن روی گره و منظور از "Non-

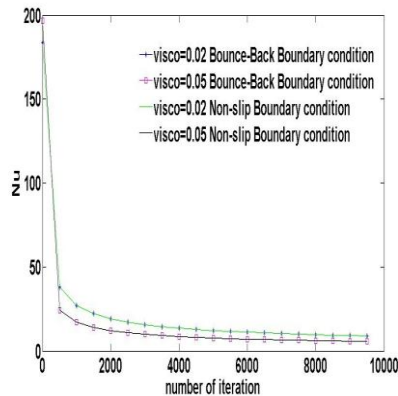
”slip، شرط مرزی عدم لغزش اینامورو می باشد.



(ب)



(الف)



(ج)

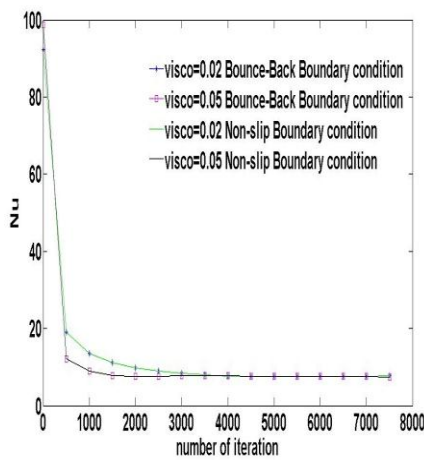
شکل ۳-۱۰ نمایش تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ محفظه بر حسب گام زمانی در حضور شرط مرزی

حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $Ra=10^4$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $64 \times 64$  ب)  $128 \times 128$  و ج)

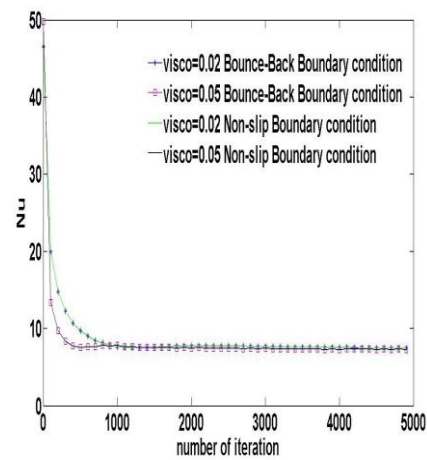
$$256 \times 256$$

شکل‌های ۳-۱۰ تا ۳-۱۲ نشان دهنده تغییرات عدد ناسلت بر حسب گام زمانی می‌باشند. همانطور که دیده می‌شود در یک ویسکوزیته ثابت، عدد ناسلت به دست آمده با استفاده از هردو روش کمانه کردن و روش اینامورو تقریباً یکسان است. علاوه بر این، در هر دو روش اعمال شرایط مرزی، مقدار ویسکوزیته اثر چندانی روی عدد ناسلت ندارد. به عبارت دیگر در

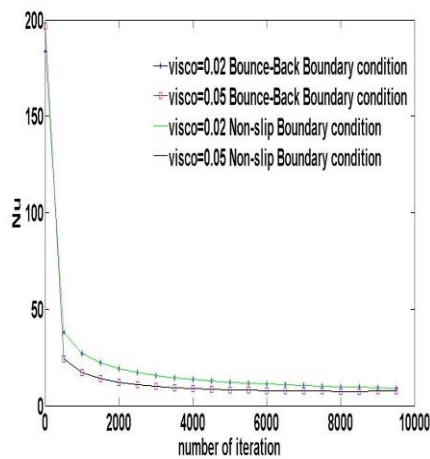
هر دو روش با تغییر ویسکوزیته، عدد ناسلت تغییر نمی‌کند و این امر عمدتاً در اعداد رایلی بالا دیده می‌شود. نکته دیگری که در این شکل‌ها دیده می‌شود این است که ابعاد (تعداد نقاط) شبکه، اثر چندانی روی عدد ناسلت ندارد و این پارامتر، تقریباً در تمام حالت‌های (الف-ج) یکسان است. در اینجا عدد ناسلت مربوط به آخرین گام زمانی در نظر گرفته شده که این مقدار با افزایش گام زمانی (تعداد تکرار) تغییر نمی‌کند.



(ب)



(الف)



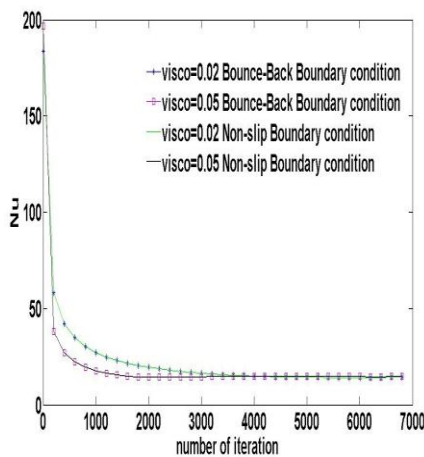
(ج)

شکل ۳-۱۱ نمایش تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی

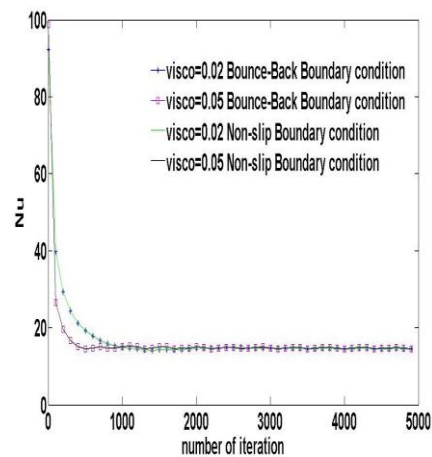
حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $10^5$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $64 \times 64$  ب)  $128 \times 128$  و ج)

$256 \times 256$

شکل‌های ۳-۱۳ تا ۳-۱۵ تغییرات دما در مرکز محفظه برحسب گام زمانی را نشان می‌دهند. نتایج نشان می‌دهند که در یک ویسکوزیته ثابت، هر دو شرط مرزی کمانه کردن و روش اینامورو اثر یکسانی روی دمای مرکز محفظه دارند. با مقایسه حالت‌های (الف)، (ب) و (ج) در تمامی شکل‌ها مشاهده می‌شود که هر یک از آن‌ها روند متفاوتی در رسیدن به همگرایی دارند. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد نقاط شبکه، اختلاف بین دمای مرکز محفظه در دو ویسکوزیته افزایش می‌یابد. این اختلاف با افزایش گام زمانی، کاهش می‌یابد. همین نتیجه هنگامی که عدد رایلی افزایش می‌یابد نیز دیده می‌شود.



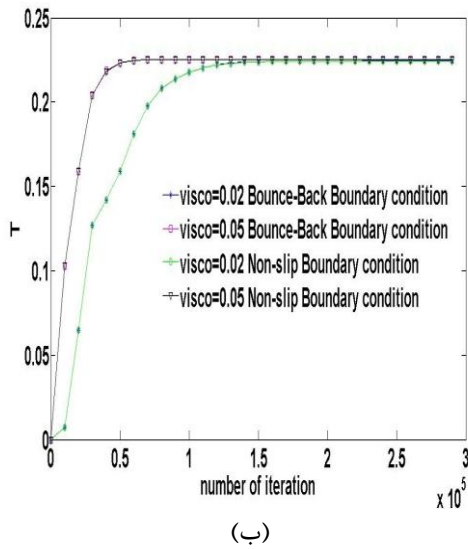
(ب)



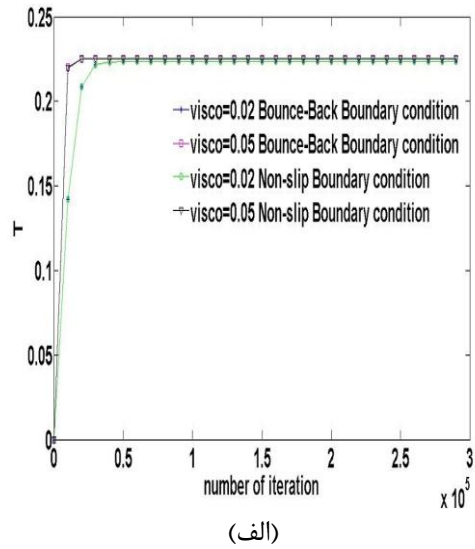
(الف)

شکل ۳-۱۲ نمایش تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی

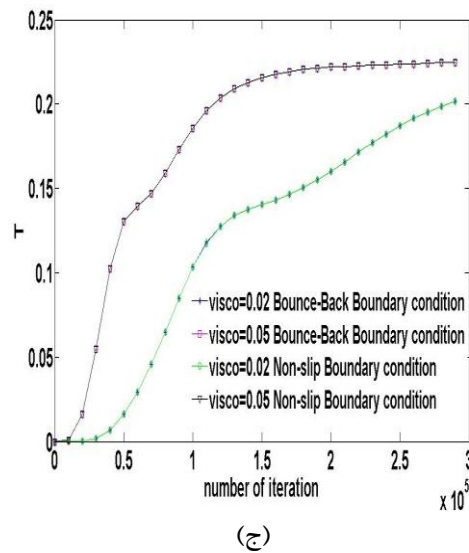
حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $10^6$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $128 \times 128$  و ب)  $256 \times 256$



(ب)



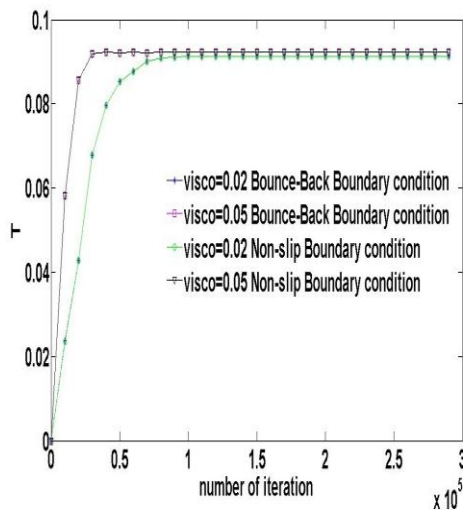
(الف)



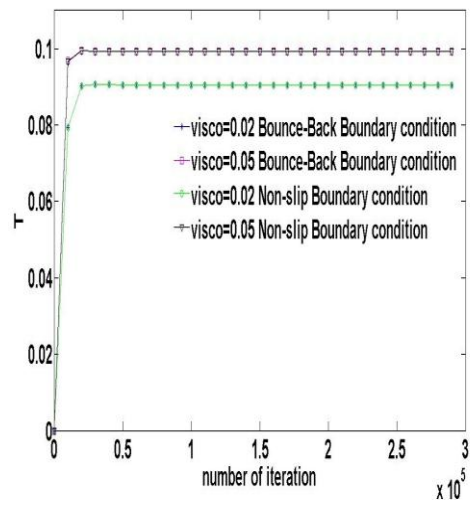
(ج)

شکل ۳-۱۳ نمایش تغییرات دما در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه اول،

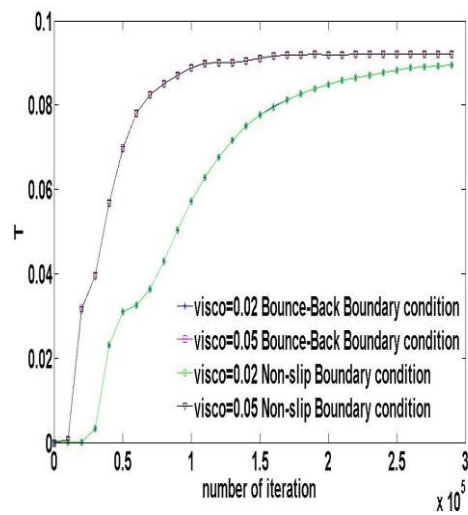
در عدد رایلی  $Ra=10^4$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $64 \times 64$  ب)  $128 \times 128$  و ج)  $256 \times 256$



(ب)



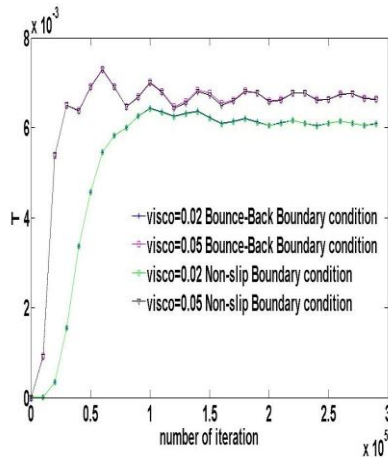
(الف)



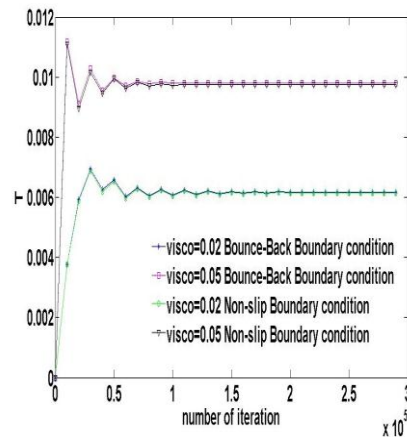
(ج)

شکل ۳-۱۴ نمایش تغییرات دما در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه اول،

در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $64 \times 64$  ب)  $128 \times 128$  و ج)  $256 \times 256$



(ب)

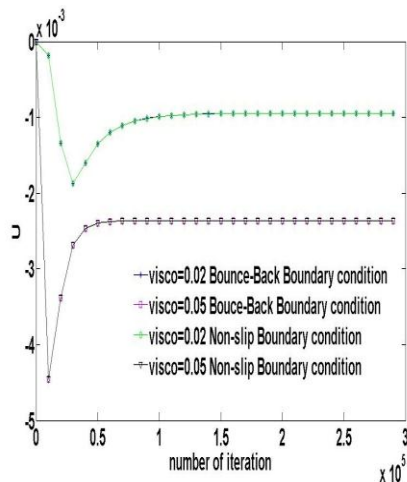


(الف)

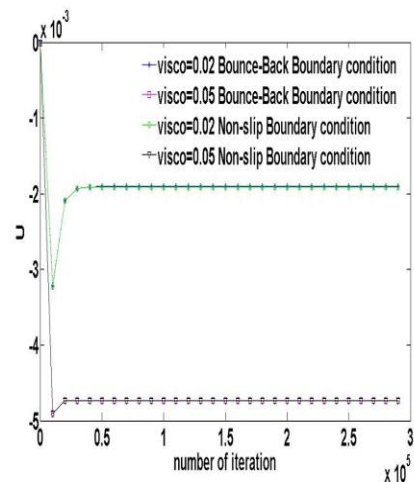
شکل ۳-۱۵ نمایش تغییرات دما در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه اول،

در عدد رایلی  $10^6$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $128 \times 128$  و ب)  $256 \times 256$

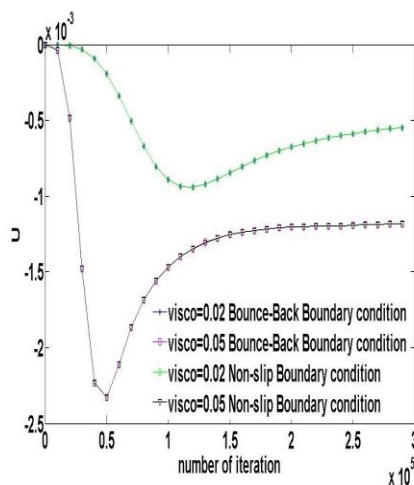
مشاهده می‌شود که در اعداد رایلی بالاتر و برای تعداد نقاط شبکه مشخص، اختلاف بین نتایج دو ویسکوزیته مختلف بیشتر است، اما این اختلاف قابل چشم پوشی است. همچنین دیده می‌شود که در اعداد رایلی بالاتر، روند رسیدن به همگرایی نوسانی است. لازم به ذکر است که در اعداد رایلی بالاتر، گام زمانی کمتری برای رسیدن به همگرایی لازم است. از طرف دیگر با افزایش ویسکوزیته در هر دو روش اعمال شرط مرزی ذکر شده، دما در مرکز محفظه افزایش می‌یابد. از طرفی با کاهش ویسکوزیته، گام زمانی لازم برای رسیدن به پاسخ همگرا افزایش می‌یابد. از آنجایی که گام زمانی تابعی از ویسکوزیته می‌باشد، این نتیجه مورد انتظار است [۳۰].



(ب)



(الف)



(ج)

شکل ۳-۱۶ نمایش تغییرات سرعت در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه

اول، در عدد رایلی  $10^4$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $64 \times 64$  ب)  $128 \times 128$  و ج)  $256 \times 256$

شکل‌های ۳-۱۶ تا ۳-۱۸، تغییرات سرعت در مرکز محفظه را بر حسب گام زمانی در رایلی-های مختلف نشان می‌دهند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش عدد رایلی، گام زمانی (تعداد تکرار) لازم برای رسیدن به پاسخ پایدار کاهش می‌یابد. از طرفی با کاهش ویسکوزیته، برای رسیدن به پاسخ پایدار به تعداد تکرار بیشتری نیاز است. همانطور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود، هر دو شرط مرزی هیدرودینامیکی ذکر شده اثر یکسانی روی سرعت در مرکز محفظه دارند. نکته دیگری که باید به آن اشاره کرد این است که در هر دو شرط مرزی



هیدرودینامیکی بیان شده، سرعت در مرکز محفظه یک مقدار منفی است و اندازه قدر مطلق سرعت در حالت ویسکوزیته  $U=0/02$  کمتر از اندازه آن در حالت ویسکوزیته  $U=0/05$  می‌باشد (نسبت سرعت در حالت ویسکوزیته  $U=0/02$  به سرعت در حالت ویسکوزیته  $U=0/05$  برابر  $0/4$  است). این نتیجه مورد انتظار است زیرا در فرآیند مقیاس‌گذاری<sup>1</sup>، ضریب تبدیل ویسکوزیته برابر حاصل ضرب ضرایب تبدیل سرعت و طول است. از طرفی  $M$  (اندازه طول بی بعد) در هر دو روش یکسان است و در نتیجه ضریب تبدیل طول محفظه نیز در هر دو روش اعمال شرط مرزی ثابت می‌باشد. بنابراین نسبت سرعت‌ها برابر نسبت ویسکوزیته‌ها خواهد بود.

اگر  $H$  طول محفظه،  $U_{act}$  ویسکوزیته فیزیکی و  $U_{act}$  سرعت فیزیکی باشند، ضرایب تبدیل طول، سرعت و ویسکوزیته به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$C_H = \frac{H}{M}$$

$$C_v = \frac{U_{act}}{U} \quad (52-3)$$

$$C_u = \frac{U_{act}}{U}$$

که در آن  $M$  تعداد نقاط شبکه (اندازه طول بی‌بعد)،  $U$  ویسکوزیته بی‌بعد شبکه ( $0/02$  و یا  $0/05$ ) و  $U$  سرعت بی‌بعد می‌باشد. از آنجایی که اعداد بی‌بعد حاکم بر مساله (عدد رینولدز در این مساله) باید در هر دو سیستم فیزیکی و بی‌بعد با هم برابر باشند داریم:

$$\frac{U_{act} H}{U_{act}} = \frac{U M}{U} \quad (53-3)$$

بنابراین با توجه به روابط (52-3) و (53-3)، رابطه بین ضرایب تبدیل به دست می‌آید:

<sup>1</sup> scaling

$$C_u = \frac{C_v}{C_H} \quad (54-3)$$

یا

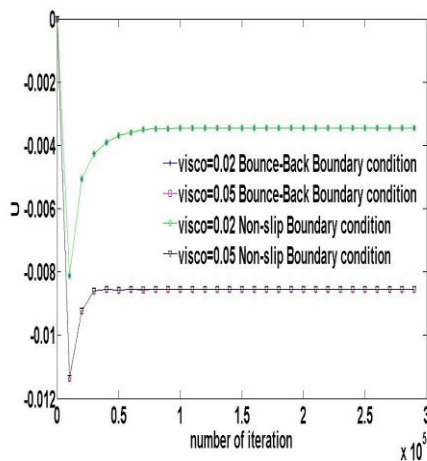
$$\begin{cases} C_u = \left(\frac{1}{0.02}\right) \left(\frac{v_{act} M}{H}\right) & \text{if } v = 0.02 \\ C_u = \left(\frac{1}{0.05}\right) \left(\frac{v_{act} M}{H}\right) & \text{if } v = 0.05 \end{cases} \quad (55-3)$$

و با استفاده از معادله (52-3) به رابطه بین نسبت سرعت‌ها و نسبت ویسکوزیته‌ها خواهیم رسید.

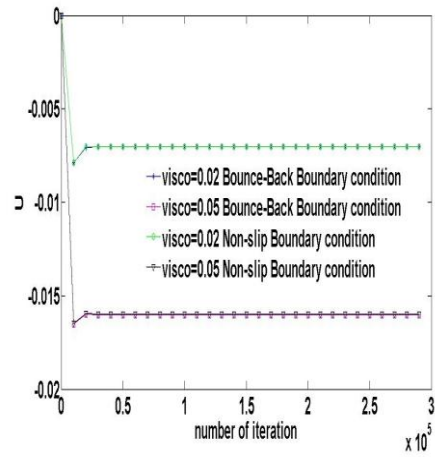
$$\begin{cases} U_1 = \frac{0.02 U_{act} \cdot H}{v_{act} M} & \text{if } v = 0.02 \\ U_2 = \frac{0.05 U_{act} \cdot H}{v_{act} M} & \text{if } v = 0.05 \end{cases} \rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{0.02}{0.05} = 0.4 \quad (56-3)$$

که  $U_1$  و  $U_2$  به ترتیب، سرعت در حالت ویسکوزیته 0.02 و 0.05 هستند.

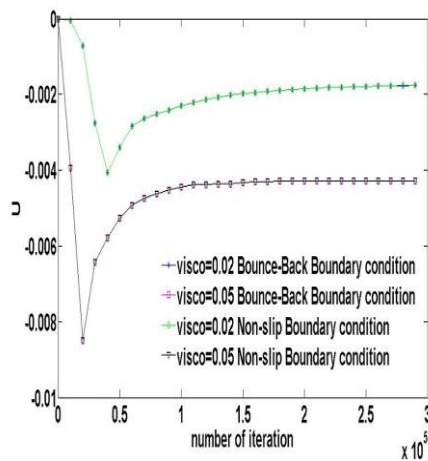
شکل 3-19 نشان‌دهنده اثر هریک از چهار شرط مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی استفاده شده، روی تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ برحسب تعداد تکرار است. در این شکل عبارت B.B و Temp به ترتیب نشان‌دهنده "شرط کمانه کردن روی گره" و "دما" هستند. نتایج نشان می‌دهند که در یک ویسکوزیته ثابت، عدد ناسلت در تمام حالات یکسان است. بنابراین ویسکوزیته تاثیر چندانی روی عدد ناسلت ندارد. به عبارت دیگر، در هیچ کدام از روش‌های گفته شده، عدد ناسلت با ویسکوزیته تغییر نمی‌کند. همانطور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود، تعداد نقاط شبکه اثر ناچیزی روی عدد ناسلت دارد و عدد ناسلت در تمامی حالت‌های (الف) تا (ج) تقریباً یکسان است.



(ب)



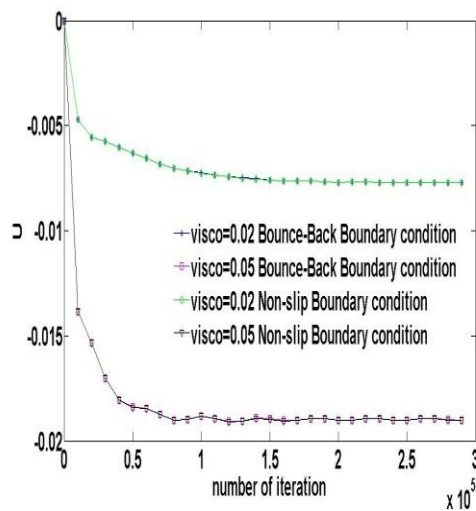
(الف)



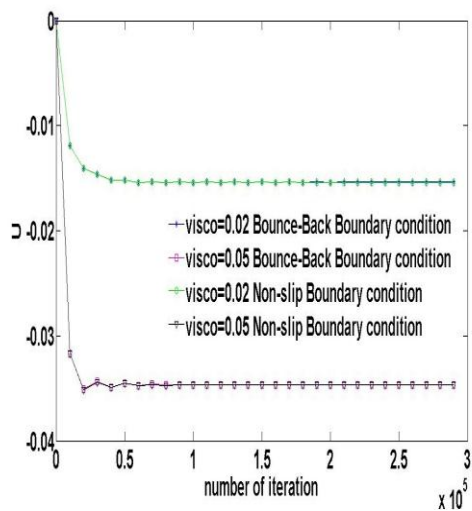
(ج)

شکل ۳-۱۷ نمایش تغییرات سرعت در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $10^5$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $64 \times 64$  ب)  $128 \times 128$  و

ج)  $256 \times 256$



(ب)



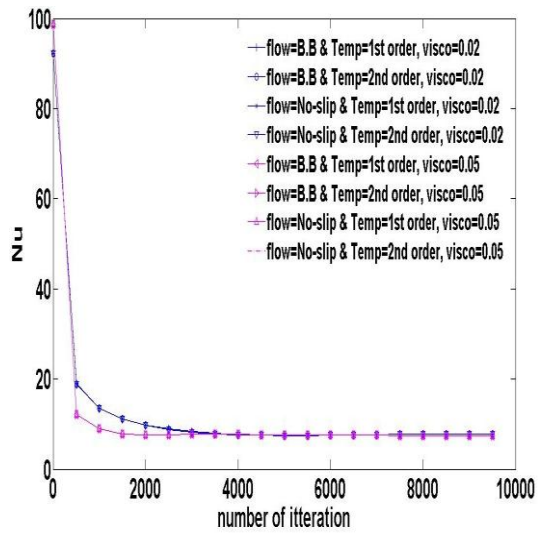
(الف)

شکل ۳-۱۸ نمایش تغییرات سرعت در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرط مرزی

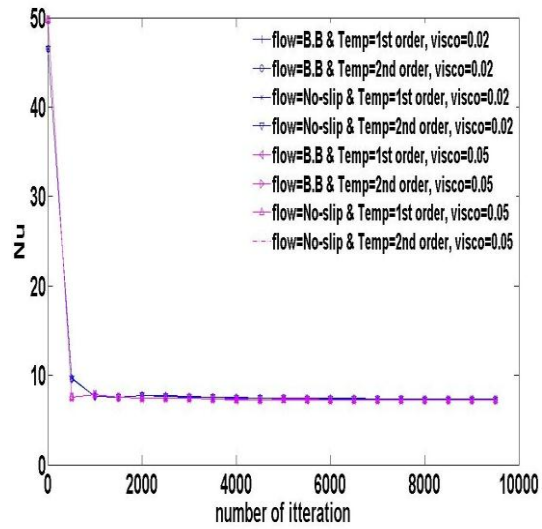
حرارتی مرتبه اول، در عدد رایلی  $Ra=10^6$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $128 \times 128$  و ب)

$$256 \times 256$$

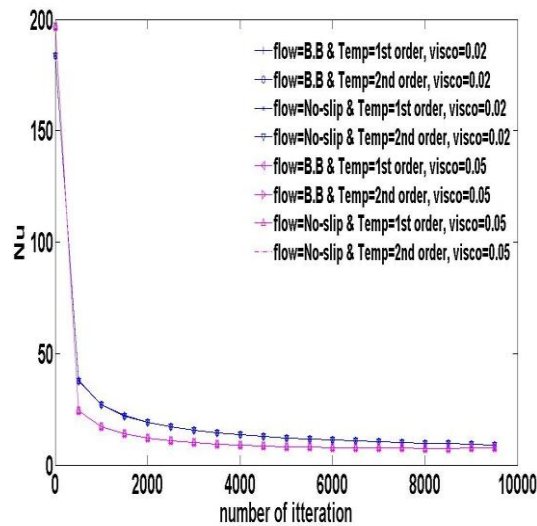
شکل ۳-۲۰ تغییرات دما در مرکز محفظه را برحسب گام زمانی با استفاده از شرایط مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی ذکر شده نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در یک ویسکوزیته ثابت، تمامی شرط مرزی‌های گفته شده اثر یکسانی روی دما در مرکز محفظه دارند. از طرفی روند رسیدن به همگرایی، با افزایش تعداد نقاط شبکه تغییر می‌کند. در حالتی که ابعاد شبکه بزرگتر است، اختلاف بیشتری بین نتایج دما در دو ویسکوزیته متفاوت مشاهده می‌شود که این اختلاف با افزایش گام زمانی، افزایش می‌یابد.



(ب)



(ف)

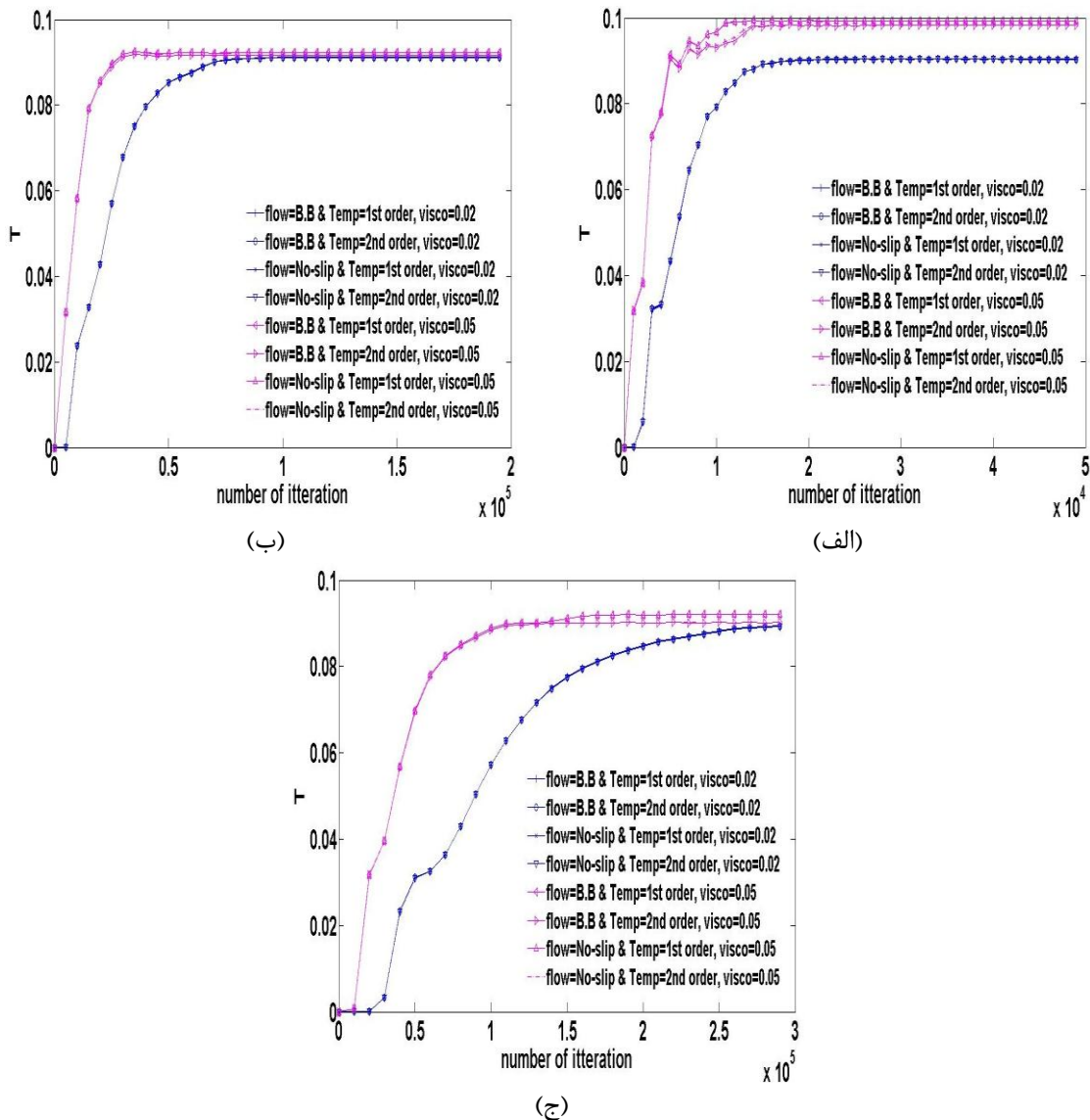


(ج)

شکل ۳-۱۹ نمایش تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ محفظه برحسب گام زمانی در حضور

شرایط مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی مختلف، در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و تعداد نقاط شبکه

(الف)  $64 \times 64$  (ب)  $128 \times 128$  و (ج)  $256 \times 256$



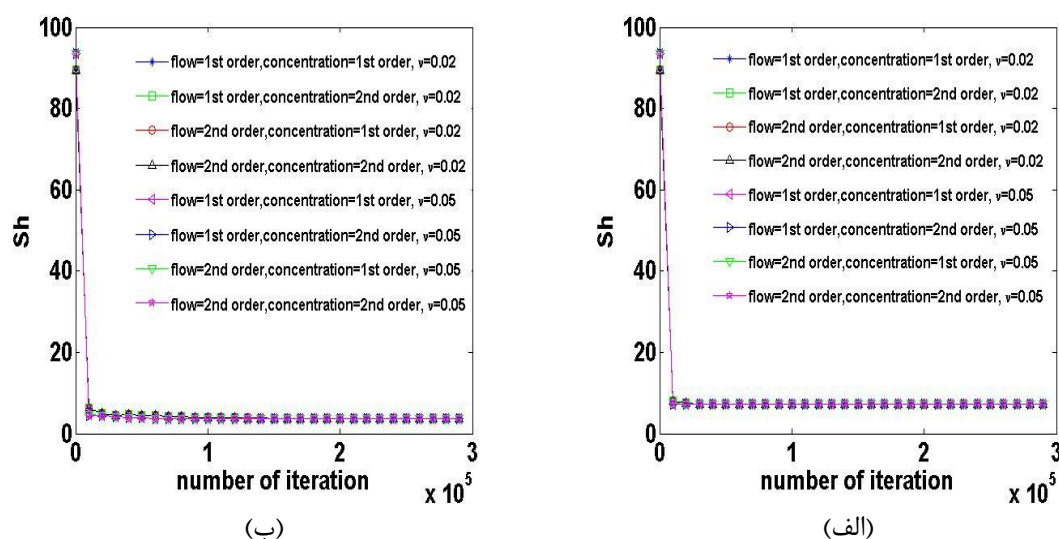
شکل ۳-۲۰ نمایش تغییرات دما در مرکز محفظه برحسب گام زمانی در حضور شرایط مرزی حرارتی

و هیدرودینامیکی مختلف، در عدد رایلی  $10^5$  ( $Ra=10^5$  و تعداد نقاط شبکه الف)  $64 \times 64$  (ب)

$128 \times 128$  و ج)  $256 \times 256$

با توجه به بررسی‌های فوق، واضح است که هردو شرط مرزی هیدرودینامیکی کمانه کردن روی گره و شرط مرزی اینامورو، نتایج یکسانی به دست می‌دهند. این به این معناست که در یک مساله با هندسه و شرایط مرزی مشابه این مساله، استفاده از شرط کمانه کردن روی گره که ساده‌تر است و پیاده‌سازی آن آسان‌تر است، مناسب به نظر می‌رسد. زیرا با هزینه محاسباتی کمتر، نتایج مورد قبولی به دست

می‌دهد. همین منطق را می‌توان برای شرایط مرزی حرارتی به کار برد. همانطور که در شکل‌ها دیده شد، هر دو شرط مرزی حرارتی با دقت‌های مرتبه اول و دوم منجر به نتایج یکسانی می‌شوند. با توجه به این نتایج می‌توان استنباط کرد که در مساله‌ای مشابه مساله حل شده در اینجا، استفاده از شرط مرزی حرارتی مرتبه اول به جای شرط مرزی مرتبه دوم که پیچیده‌تر و زمان‌بر است، مناسب است.



شکل ۳-۲۱ نمایش تغییرات عدد شروود در دیوار سمت چپ محفظه برحسب گام زمانی در حضور

شرط مرزی غلظت و هیدرودینامیکی مختلف، در عدد رایلی  $10^5$  و  $Ra=10^5$  و تعداد نقاط شبکه

$$N=128 \times 128 \text{ (برای نسبت شناوری الف) } N=0/8 \text{ و } N=1/2 \text{ (ب)}$$

در انتها، با توجه به اینکه نحوه اعمال شرط مرزی مربوط به غلظت، مشابه شرط مرزی حرارتی است، برای دو حالت مشخص با نسبت شناوری  $N=0/8$  و  $N=1/2$  مساله انتقال حرارت و جرم در محفظه باز با شرایط مرزی غلظت با دقت‌های مرتبه اول و دوم (مشابه آنچه برای دما گفته شد)، حل شده و نتیجه این حل در شکل ۳-۲۱ نشان داده شده است. در این شکل، عدد شروود در دیوار سمت چپ محفظه در حضور شرایط مرزی هیدرودینامیکی، حرارتی و غلظت مختلف نشان داده شده و همانطور که مشاهده می‌شود در تمامی این روش‌های اعمال شرط مرزی، عدد شروود تقریباً یکسان است.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در مساله انتقال حرارت و جرم در یک محفظه با دیوارهای عمودی، استفاده از شرایط مرزی غلظت مرتبه اول به جای شرط مرزی پیچیده‌تر مرتبه دوم صحیح و بجاست. بنابراین در نهایت می‌توان ادعا کرد که در مساله‌ای مشابه مساله حل شده (با دیوارهای عمودی)، استفاده از شرایط مرزی هیدرودینامیکی، حرارتی و غلظت با دقت مرتبه اول مناسب است و نتایجی که به دست می‌آیند دارای دقت قابل قبولی هستند.



فصل ۴. حل انتقال حرارت و جرم در یک محفظه

مربعی در حضور یک مانع مربعی با دیوارهای فعال

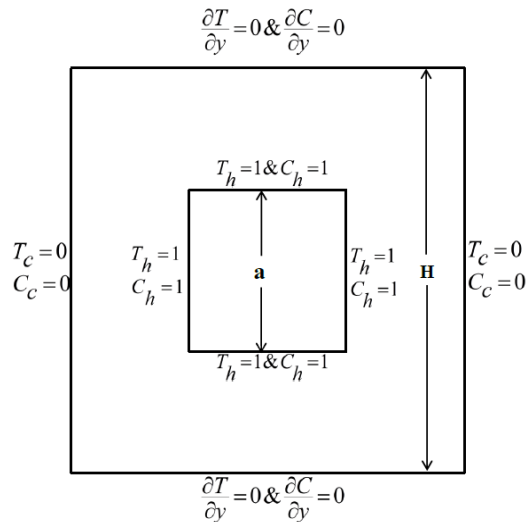
## ۴-۱- مقدمه

در این تحقیق، جابجایی طبیعی حرارت و جرم به روش بولتزمن در یک محفظه مربعی و در حضور یک مانع مربعی در مرکز محفظه مورد مطالعه قرار گرفته است. محفظه مورد بررسی، دارای دیوارهای افقی عایق و بدون نفوذ جرم است. دیوارهای عمودی محفظه، دما و غلظت ثابت و بی بعد صفر دارند. درحالی که مرزهای مانع همگی دارای دما و غلظت بی بعد یک هستند. سیال به دلیل نیروی شناوری ناشی از گرادیانهای دما و غلظت در محفظه جریان می‌یابد. در نظر داریم فیزیک جریان، انتقال حرارت و انتقال جرم را در این محفظه بررسی کنیم. به این منظور کمیت‌های بی بعد حاکم بر مساله مانند عدد ناسلت (Nu) و عدد شروود (Sh) و همچنین خطوط جریان و کانتورهای دما و غلظت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. پارامترهای کنترلی حاکم بر مساله در اینجا عدد رایلی (Ra)، عدد پرانتل (Pr)، عدد لوییس (Le)، نسبت شناوری (N) و نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه ( $A = \frac{a}{H}$ ) می‌باشند. در این تحقیق، عدد پرانتل  $Pr=0.71$  و ویسکوزیته  $\nu=0.02$  در نظر گرفته شده است و مساله برای عدد رایلی  $10^4$ ،  $10^5$  و  $10^6$  حل می‌شود. عدد لوییس  $0.1$ ،  $2$  و  $10$ ، نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه  $0.2$ ،  $0.4$  و  $0.6$  و نسبت شناوری در محدوده  $0$  تا  $4$  در نظر گرفته شده‌اند. لازم به ذکر است در اینجا اثرات موافق گرادیانهای دما و غلظت در نظر گرفته نمی‌شود، زیرا هنگامی که گرادیانهای دما و غلظت هم‌جهت هستند ( $N > 0$ )، این اثر همزمان باعث تشدید جریان می‌شود و با افزایش  $N$  (مثبت) انتقال حرارت و جرم افزایش می‌یابد. از سوی دیگر، در حالتی که گرادیانهای دما و غلظت مخالف‌اند ( $N < 0$ )، پدیده‌های جالبی رخ می‌دهد که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

در ادامه این فصل پس از توضیح هندسه محفظه مورد مطالعه و شرایط مرزی مربوط به آن، نتایج به دست آمده از این بررسی ارائه می‌شود. در اینجا نیز مانند هر حل عددی دیگر، لازم است استقلال حل عددی از ابعاد شبکه و تعداد گام‌های زمانی لازم برای همگرایی حل، مورد بررسی قرار گیرد. همچنین در راستای اعتبارسنجی نتایج، مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده با استفاده از روش شبکه بولتزمن و

روش حجم محدود انجام گرفته است.

#### ۲-۴- هندسه مساله مورد مطالعه



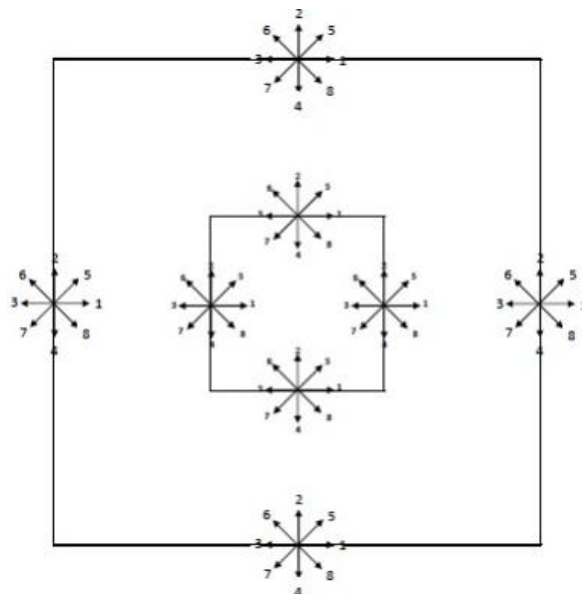
شکل ۴-۱ نمایش هندسه و شرایط مرزی محفظه

همانطور که گفته شد مساله مورد بررسی، یک محفظه مربعی با دیوارهای عمودی سرد و با غلظت بی‌بعد صفر است که دیوارهای افقی آن عایق و بدون نفوذ جرم و حرارت‌اند و در مرکز آن یک مانع مربعی گرم و با غلظت بی‌بعد واحد قرار گرفته است. شکل ۴-۱، هندسه و شرایط مرزی محفظه مورد نظر را نشان می‌دهد. نیروی شناوری ناشی از گرادیان‌های دما و غلظت (رابطه (۳-۲۸))، باعث رانش سیال در محفظه می‌شود.

#### ۳-۴- مدل شبکه بولتزمن برای جریان، دما و غلظت

در اینجا از مدل ساده D2Q9 برای جریان، دما و غلظت استفاده می‌شود. شکل ۴-۲، توابع توزیع احتمال در مرزها را نشان می‌دهد. روابط مورد نیاز برای حل جریان، انتقال حرارت و انتقال جرم همان روابط بیان شده در فصل ۳ هستند که به طور مفصل توضیح داده شده‌اند. در اینجا نیز پس از مرحله

جاری شدن، با اعمال شرایط مرزی مناسب، توابع توزیع احتمال مجهول در هر مرز به دست آورده می‌شود. برای تمامی مرزها، شرایط مرزی با دقت مرتبه اول استفاده شده است. در اعمال شرایط مرزی جریان، در تمامی مرزهای محفظه و مانع از شرط کمانه کردن روی گره که در قسمت ۳-۳-۷ توضیح داده شد، استفاده می‌شود و توابع توزیع احتمال مجهول در حل جریان، از رابطه (۳-۱۶) به دست می‌آیند. برای دما و غلظت شرایط مرزی مورد استفاده مشابه یکدیگرند. در مرزهای افقی محفظه، شرط مرزی آدیاباتیک بیان شده در قسمت ۳-۵-۳ استفاده می‌شود و توابع توزیع احتمال مجهول مربوط به دما و غلظت از رابطه (۳-۳۶) به دست می‌آیند. از طرفی در مرزهای عمودی محفظه و دیوارهای مانع (مرزهای با دما و غلظت ثابت)، شرایط مرزی گفته شده در بخش ۳-۵-۱ به کار برده شده است که با استفاده از روابط (۳-۳۲) توابع توزیع مجهول در این مرزها به دست می‌آیند.



شکل ۲-۴ نمایش توابع توزیع احتمال در مرزها

#### ۴-۴- نتایج و مطالعه آنها

در این قسمت نتایج حاصل از مطالعه انتقال حرارت و جرم به روش شبکه بولتزمن در یک محفظه

مربعی و در حضور یک مانع مربعی با دیوارهای فعال (دارای دما و غلظت بی بعد واحد) مورد مطالعه قرار می گیرند. برای مطالعه جریان، انتقال حرارت و جرم در این محفظه، خطوط جریان، کانتورهای دما و غلظت، عدد ناسلت و عدد شروود دیوار سرد محفظه نشان داده می شوند. اثر پارامترهای کنترلی حاکم بر مساله، یعنی عدد رایلی ( $Ra$ )، عدد پرانتل ( $Pr$ )، عدد لوییس ( $Le$ )، نسبت شناوری ( $N$ ) و نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه ( $A = \frac{a}{H}$ ) مورد بررسی قرار گرفته است. در اینجا، عدد پرانتل  $Pr=0.71$  (برای هوا)، ویسکوزیته  $\nu=0.02$  و عدد رایلی  $10^4$ ،  $10^5$  و  $10^6$  در نظر گرفته شده است. مساله برای عدد لوییس  $0.1$ ،  $2$  و  $10$ ، نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه  $0.2$ ،  $0.4$  و  $0.6$  و نسبت شناوری در محدوده  $0$  تا  $4$ - حل شده است. در این مطالعه، تنها حالتی که گرادیانهای دما و غلظت مخالفاند ( $N < 0$ )، مورد توجه است. زیرا هنگامی که گرادیانهای دما و غلظت هم جهت اند ( $N > 0$ )، این جریانهای کمکی باعث تشدید جریان می شوند و در این صورت با افزایش  $N$  طبق رابطه (۳-۲۸)، نیروی شناوری افزایش و در نتیجه انتقال حرارت و جرم افزایش می یابد. از سوی دیگر هنگامی که گرادیانهای دما و غلظت مخالفاند، انتقال حرارت و جرم وابستگی شدیدی به مقدار نسبت شناوری ( $|N|$ )، دارد و با تغییر نسبت شناوری پدیدههای جالبی رخ می دهند.

#### ۴-۴-۱- مطالعه استقلال حل عددی از شبکه

در این قسمت برای بررسی استقلال حل از ابعاد شبکه، عدد ناسلت و شروود در دیوار سرد سمت چپ محفظه در سه حالت مختلف برای ابعاد شبکه با یکدیگر مقایسه شده اند. از آنجایی که با افزایش عدد رایلی برای رسیدن به پایداری به تعداد نقاط شبکه بیشتری نیاز است، در اینجا مساله برای عدد رایلی  $10^6$  آزمایش شده است. در این بررسی سه نسبت شناوری  $N$  برابر با  $0.8$ ،  $1.5$  و  $2.2$ - و نسبت ابعاد مانع به ابعاد شبکه  $A=0.4$  در نظر گرفته شده است. جدول (۴-۱) و (۴-۲) نتایج مربوط به این مقایسه را نشان می دهند. لازم به ذکر است که در اینجا خطای محاسبه شده، درصد خطای نسبی بر

حسب شبکه مورد استفاده در این پروژه یعنی شبکه  $200 \times 200$  می باشد. همانطور که مشاهده می شود، خطای محاسبه شده در تمامی موارد کمتر از یک درصد است که نشان می دهد شبکه انتخاب شده، از دقت کافی برخوردار است.

جدول (۱-۴) مقایسه عدد ناسلت به دست آمده در دیوار سمت چپ محفظه با استفاده از ابعاد شبکه مختلف در رایلی  $10^6$

و عدد لوییس  $Le=2$  در سه نسبت شناوری مختلف

Nu			
نسبت شناوری	شبكة $180 \times 180$	شبكة $200 \times 200$	شبكة $240 \times 240$
N	(درصد خطای نسبی)	(درصد خطای نسبی)	(درصد خطای نسبی)
-۰/۸	۶/۱۲۲۹۱۵ (۰/۰۰۲)	۶/۱۲۳۰۴۸	۶/۱۲۷۴۹۵ (۰/۰۷)
-۱/۵	۴/۴۴۵۲۷ (۰/۴۷)	۴/۴۲۴۲۲۸	۴/۴۰۸۶۱ (۰/۳۵)
-۲/۲	۵/۷۴۹۲۶۶ (۰/۰۸)	۵/۷۵۳۸۷۱	۵/۷۶۱۹۸۲ (۰/۱۴)

خطاها نسبت به شبکه  $200 \times 200$  محاسبه شده اند

جدول (۲-۴) مقایسه عدد شروود به دست آمده در دیوار سمت چپ محفظه با استفاده از ابعاد شبکه مختلف در رایلی  $10^6$

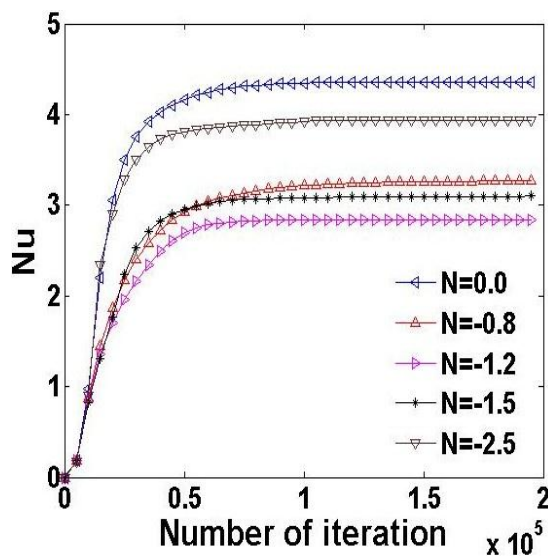
و عدد لوییس  $Le=2$  در سه نسبت شناوری مختلف

Sh			
نسبت شناوری	شبكة $180 \times 180$	شبكة $200 \times 200$	شبكة $240 \times 240$
N	(درصد خطای نسبی)	(درصد خطای نسبی)	(درصد خطای نسبی)
-۰/۸	۷/۹۸۰۲ (۰/۰۴)	۷/۹۷۷	۷/۹۴۲۵ (۰/۴۳)
-۱/۵	۶/۴۹۱۳ (۰/۷۲)	۶/۴۴۴۴	۶/۴۱۹۴ (۰/۴۵)
-۲/۲	۸/۸۰۳ (۰/۱۸)	۸/۸۱۹۳	۸/۸۳۵۱ (۰/۱۷)

خطاها نسبت به شبکه  $200 \times 200$  محاسبه شده اند

## ۴-۴-۲- بررسی همگرایی روش عددی

در این قسمت برای بررسی تعداد تکرار لازم برای همگرایی حل عددی، حالتی که عدد رایلی برابر  $Ra=10^5$ ، عدد لوییس  $Le=2$  و نسبت ابعاد مانع به محفظه  $A=0.4$  است، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در اینجا، روند تغییرات عدد ناسلت متوسط در دیوار سمت چپ محفظه برحسب تعداد تکرار برای چند نسبت شناوری مختلف در شکل ۳-۴، نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در تمامی این نسبت‌های شناوری، پس از گام‌های زمانی مشخصی، عدد ناسلت متوسط ثابت شده و دیگر تغییر نمی‌کند. تمامی اعداد بی‌بعد گزارش شده در این تحقیق، اعدادی هستند که پس از ثابت شدن این روند به دست آمده‌اند و دیگر با اضافه شدن تعداد گام زمانی، تغییر نمی‌کنند.



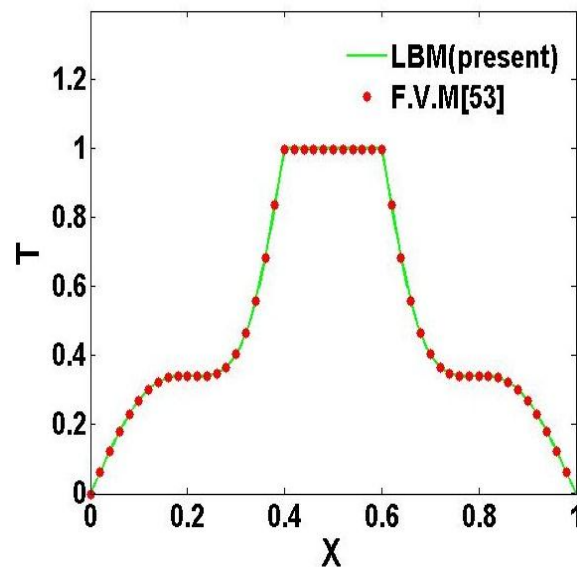
شکل ۳-۴ نمایش تعداد گام زمانی لازم برای همگرایی روش شبکه بولتزمن در حالت  $Le=2, Ra=10^5$  و

$$A=0.4$$

## ۴-۴-۳- اعتبار سنجی نتایج با نتایج به دست آمده به روش حجم محدود

در این بخش، نتایج به دست آمده با استفاده از روش شبکه بولتزمن در حالتی که تنها گرادپان دما در محفظه وجود دارد ( $N=0$ )، با نتایج به دست آمده با استفاده از روش حجم محدود در نسبت ابعاد

$A=0.2$  مقایسه و اعتبارسنجی می‌شوند. جدول (۳-۴) عدد ناسلت به دست آمده در دیوار سمت چپ محفظه با استفاده از روش شبکه بولتزمن را با عدد ناسلت به دست آمده از روش حجم محدود و همچنین روش شبکه بولتزمن [۵۳] مقایسه می‌کند. شکل‌های ۴-۴ و ۴-۵ به ترتیب نشان دهنده دمای بی‌بعد در خط مرکزی و سرعت عمودی در نیم صفحه افقی محفظه با استفاده از روش شبکه بولتزمن و روش حجم محدود هستند و دقت نتایج به دست آمده با استفاده از روش شبکه بولتزمن در اینجا را با روش حجم محدود مقایسه می‌کنند. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج به دست آمده با استفاده از روش شبکه بولتزمن (مطالعه حاضر) با نتایج موجود [۵۳] تطابق خوبی دارد.



شکل ۴-۴ مقایسه نتایج به دست آمده برای دمای بی‌بعد در مرکز محفظه با استفاده از روش حجم

محدود و روش شبکه بولتزمن در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه  $A=0.4$

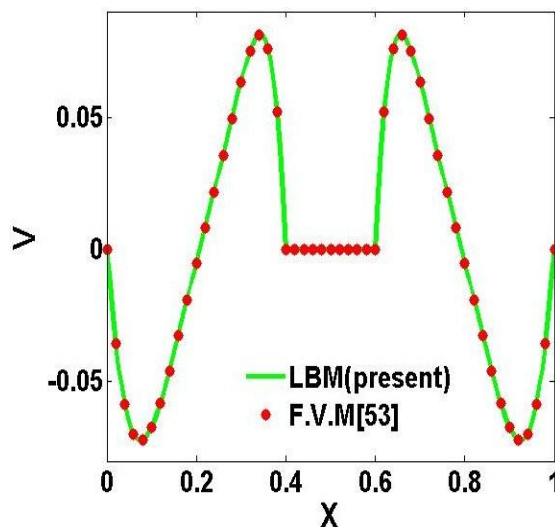


جدول (۴-۳) مقایسه عدد ناسلت به دست آمده در دیوار سمت چپ محفظه با استفاده روش شبکه بولتزمن و روش حجم

محدود در نسبت ابعاد مانع به محفظه  $A=0.2$

عدد رایلی	ناسلت متوسط به روش شبکه بولتزمن (مطالعه حاضر)(درصد خطا)	ناسلت متوسط به روش شبکه بولتزمن [۵۳]	ناسلت متوسط به روش حجم محدود [۵۳]
$10^3$	$1/7086$ (۰/۶۲)	$1/716$	$1/698$
$10^4$	$1/9395$ (۰/۲۳)	$1/951$	$1/944$
$10^5$	$3/5220$ (۱/۵)	$3/549$	$3/576$

خطاها نسبت به روش حجم محدود محاسبه شده‌اند.

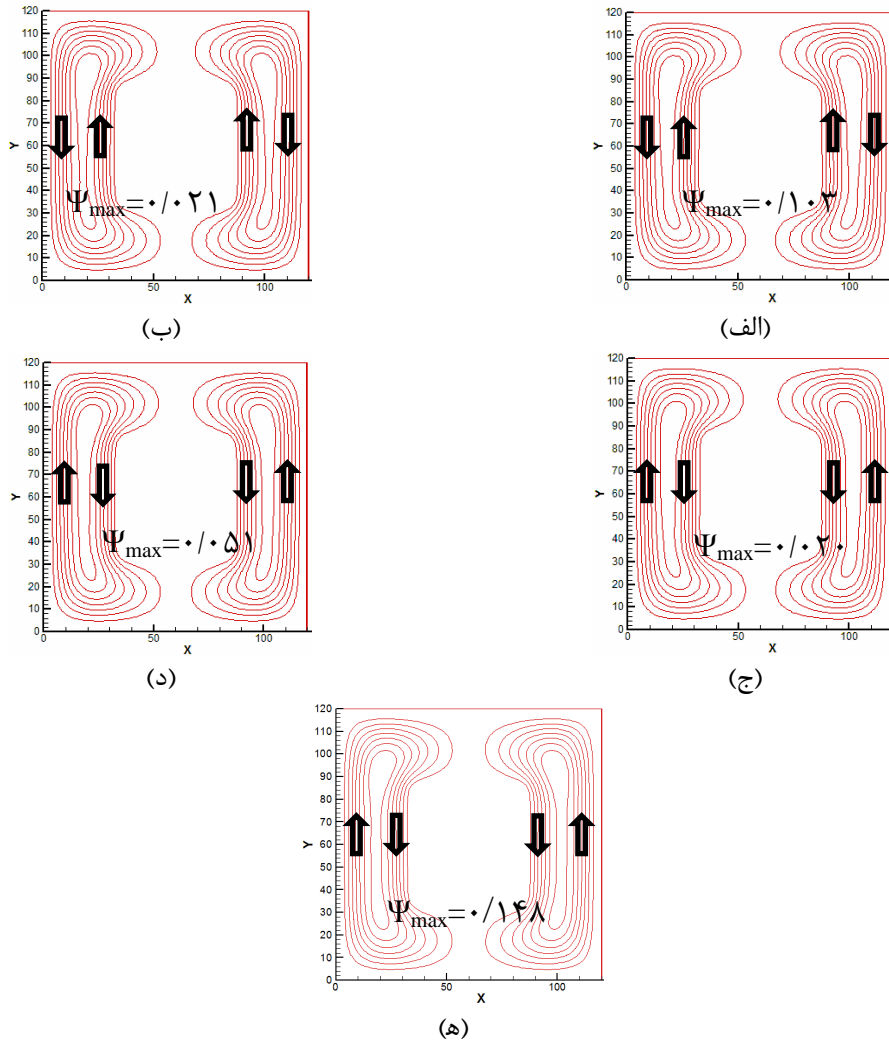


شکل ۴-۵ مقایسه نتایج به دست آمده برای سرعت در مرکز محفظه با استفاده از روش حجم

محدود و روش شبکه بولتزمن در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه  $A=0.4$

#### ۴-۴-۴ بررسی شکل خطوط جریان و مطالعه اثر پارامترهای کنترلی مساله

شکل‌های ۴-۶ تا ۴-۱۲ اثر پارامترهای کنترلی حاکم بر مساله یعنی عدد رایلی، عدد لوییس، نسبت شناوری و نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه را روی شکل خطوط جریان نشان می‌دهند. جهت حرکت سیال و مقدار بیشینه تابع جریان در تمامی شکل‌ها مشخص شده‌است. این نمایش شکل جریان به درک بهتر فیزیک مساله کمک می‌کند.

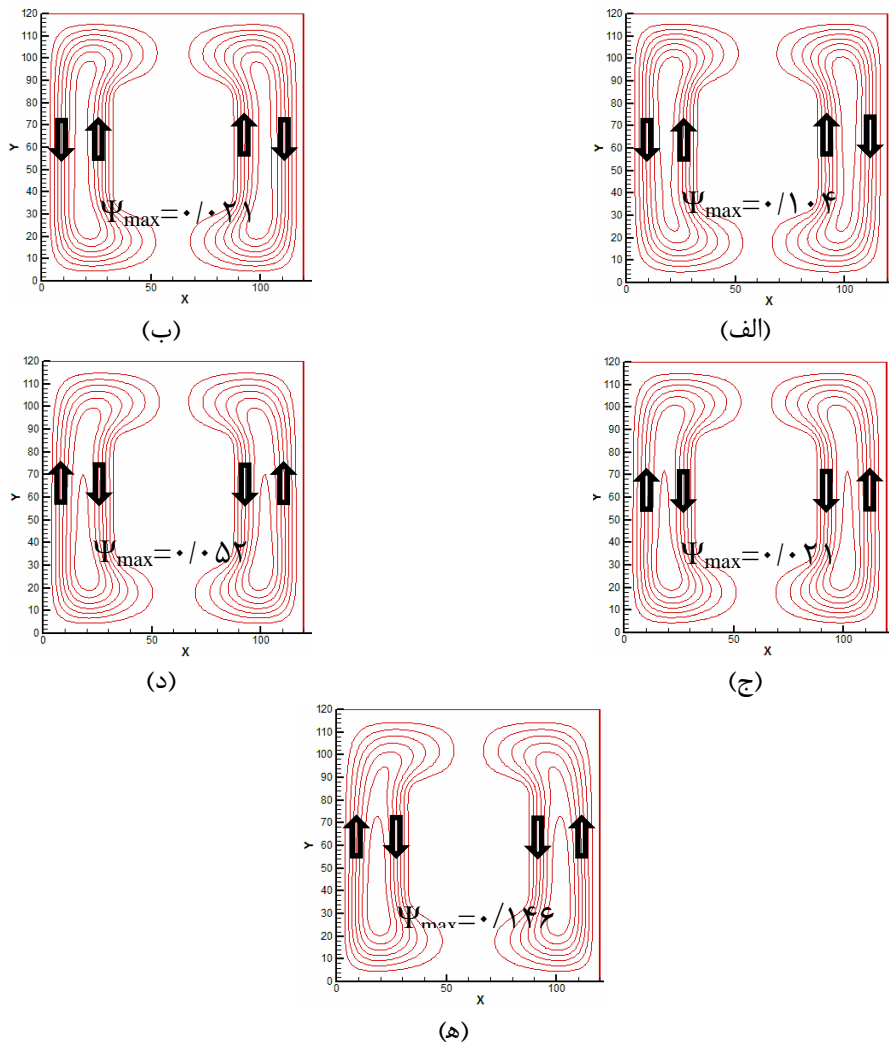


شکل ۴-۶ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^4$ ,  $A=0.4$ ,  $L=0.1$  و (الف)  $N=0$  (ب)  $N=-0.1$  (ج)  $N=-0.2$  (د)  $N=-0.5$  (ه)  $N=-2/4$

$$N = -2/4 \text{ (ه) } N = -1/5 \text{ (د) } N = -1/2 \text{ (ج) } N = -0/8$$

شکل ۴-۶ خطوط جریان در داخل محفظه را در حالتی که عدد رایلی  $Ra=10^4$ ، عدد لوییس  $Le=0.1$  و اندازه مانع  $0.4$  اندازه محفظه باشد، نشان می‌دهد. این شکل نشان دهنده اثرات نسبت شناوری روی شکل جریان است. همانطور که در شکل دیده می‌شود، هنگامی که  $N=0$  باشد نیروی پیش‌برنده، تنها نیروی شناوری ناشی از گرادیان دما است. با افزایش نسبت شناوری (مقدار قدرمطلق)، اثر گرادیان غلظت نیز به نیروی پیش‌برنده افزوده می‌شود. با این وجود تا مقدار  $|N| < 1$  جریان تحت تاثیر نیروی شناوری دما باقی می‌ماند. هنگامی که اندازه (قدر مطلق) نسبت شناوری از یک بیشتر می‌شود، اثرات

نیروی شناوری غلظت بیشتر شده و جریان تحت تاثیر نیروی شناوری غلظت تغییر جهت می‌دهد. لازم به ذکر است هنگامی که  $N=-1$  است طبق رابطه (۳-۲۸)، نیروی پیش‌برنده صفر شده و جریان برقرار نمی‌شود.

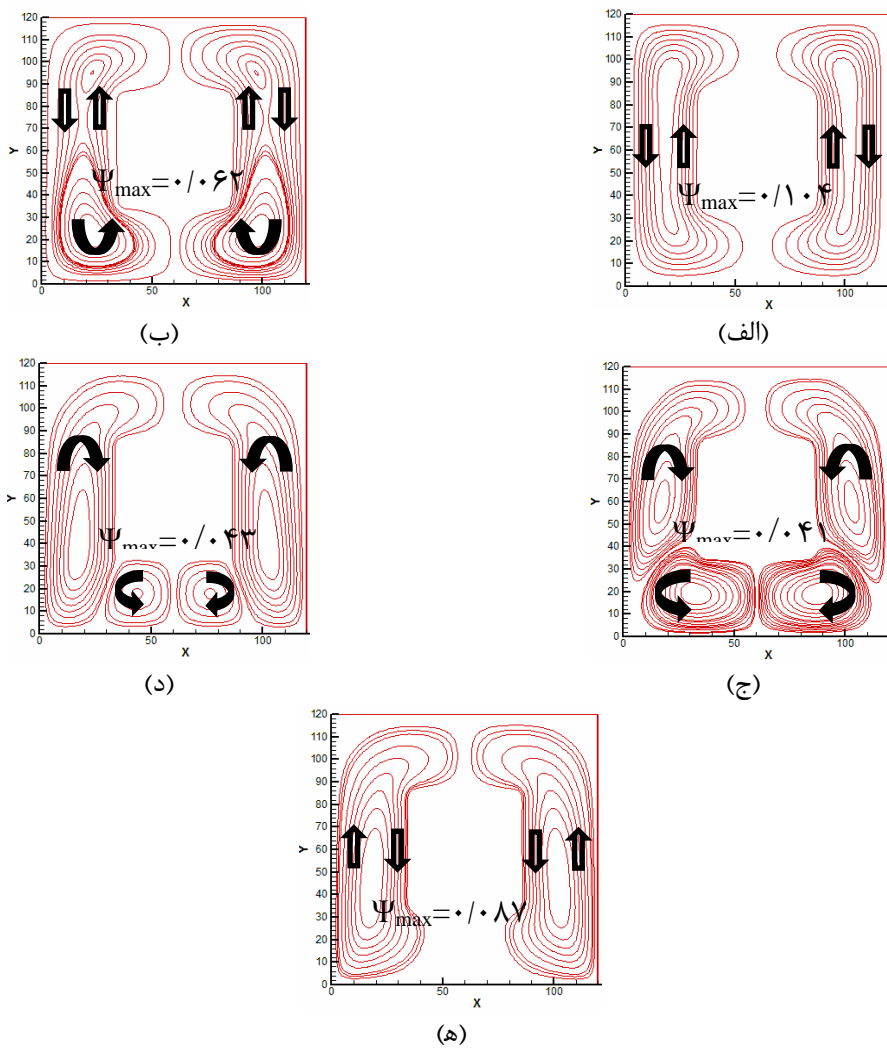


شکل ۴-۷ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^4$ ,  $A=0.4$ ,  $L=2$  و (الف)  $N=0$  و (ب)  $N=0.8$

(ج)  $N=-1.2$  (د)  $N=-1.5$  (ه)  $N=-2.5$

روند شکل ۴-۷ که خطوط جریان را در حالت عدد رایلی  $Ra=10^4$  و عدد لوییس  $Le=2$  نشان می‌دهد، مشابه شکل ۴-۶ است. در اینجا نیز جریان داخل محفظه دو سلولی است. در حالتی که  $|N|$

کوچکتر از یک است و گرادیان دما نقش اصلی در حرکت سیال را ایفا می‌کند، جریان نزدیک به دیوار سرد به علت چگالی بیشتر به سمت پایین حرکت می‌کند. در حالی که سیال نزدیک به مانع گرم سبک شده به سمت بالا حرکت می‌کند و این پدیده باعث ایجاد جریان دو سلولی در محفظه و در اطراف مانع می‌شود. در حالتی که نیروی شناوری غلظت در جهت مخالف نیروی شناوری دما و بیشتر از آن است جهت جریان معکوس می‌شود.

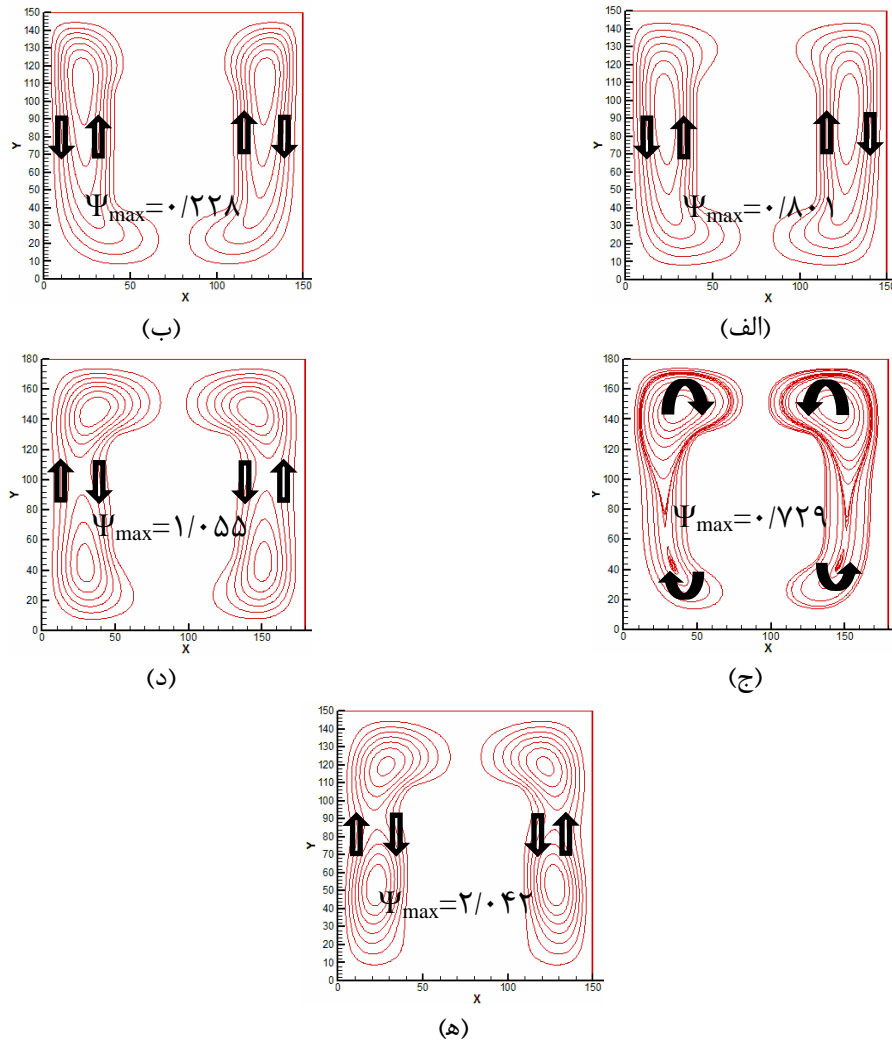


شکل ۴-۸ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^4$ ,  $L=10$ ,  $A=0.4$  و (الف)  $N=0$  (ب)  $N=0$

(ج)  $N=-0.08$  (د)  $N=-0.12$  (ه)  $N=-0.25$

شکل ۴-۸ نشان‌دهنده خطوط جریان در حالتی است که عدد رایلی  $Ra=10^4$ ، عدد لوییس  $Le=10$  و

نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه  $A=0/4$  باشد. همانطور که در شکل دیده می‌شود، هنگامی که اندازه نسبت شناوری  $|N|$  کوچکتر از یک است، نیروی شناوری دما بر نیروی شناوری غلظت غالب می‌شود و جریان تحت تاثیر گرادیان دما در محفظه حرکت می‌کند. هنگامی که نسبت شناوری  $|N|$  بیش از یک باشد، اثر گرادیان دما در مقایسه با اثر گرادیان غلظت نقش کمتری در نیروی پیش‌برنده ایفا می‌کند و در نتیجه جریان بیشتر تحت تاثیر گرادیان غلظت قرار می‌گیرد. از طرفی مشاهده می‌شود هنگامی که نسبت نیروی شناوری ناشی از گرادیان غلظت به نیروی شناوری ناشی از گرادیان دما از یک بیشتر (مقدار قدرمطلق) می‌شود، ابتدا بخشی از جریان تحت تاثیر گرادیان غلظت تغییر جهت می‌دهد و بخشی دیگر تحت تاثیر گرادیان دما به صورت گردابه‌هایی درون محفظه در جهت معکوس حرکت می‌کند. با افزایش نسبت شناوری (اثر گرادیان غلظت)، این گردابه‌ها به تدریج کوچک شده و با جریان اصلی همجهت می‌شوند (شکل ۴-۸ ج و ۴-۸ د) و در نهایت تمام جریان در یک سو حرکت می‌کند. این حالت، حالتی است که نیروی شناوری ناشی از گرادیان غلظت، به طور کامل بر نیروی شناوری ناشی از دما احاطه می‌یابد. (شکل ۴-۸ ه). با مقایسه شکل‌های ۴-۶ و ۴-۷ و ۴-۸، مشاهده می‌شود که با افزایش عدد لوییس در یک رایلی مشخص، اثر نیروی شناوری غلظت در مقایسه با نیروی شناوری دما در  $|N|$ ‌های بالاتر، غالب می‌شود. یعنی برای اینکه جهت جریان در محفظه کاملاً معکوس شود، به نسبت شناوری بالاتری نیاز است. علت این امر این است که وقتی عدد لوییس افزایش می‌یابد، نسبت نفوذپذیری حرارتی به نفوذپذیری غلظت افزایش می‌یابد. در نتیجه اثر اختلاف دما بیش از اثر اختلاف غلظت می‌شود. بنابراین برای غلبه کردن اثر گرادیان غلظت بر گرادیان دما، باید نیروی شناوری غلظت افزایش یابد که این به معنای افزایش نسبت شناوری است.

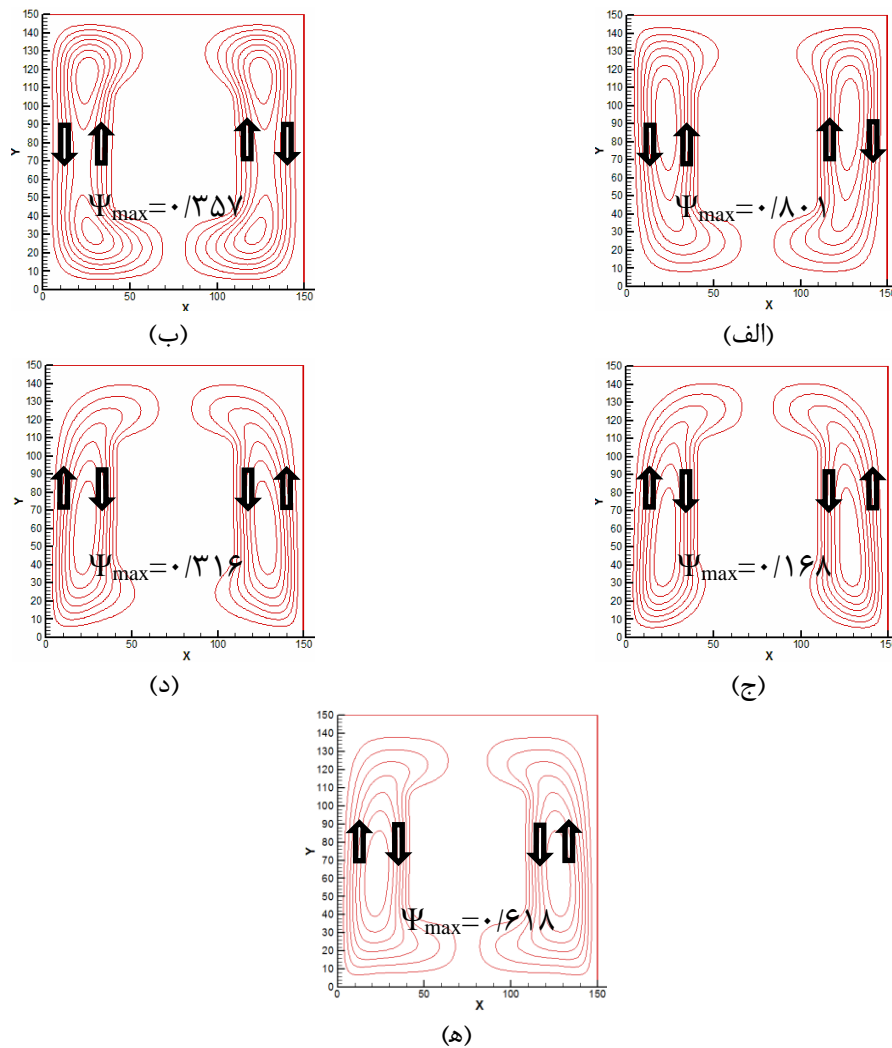


شکل ۹-۴ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^5$ ,  $L=0.1$ ,  $A=0.4$  و (الف)  $N=0.1$  (ب)

$$N=-2/5 \text{ (ه) } N=-1/5 \text{ (د) } N=-1/2 \text{ (ج) } N=-0.8$$

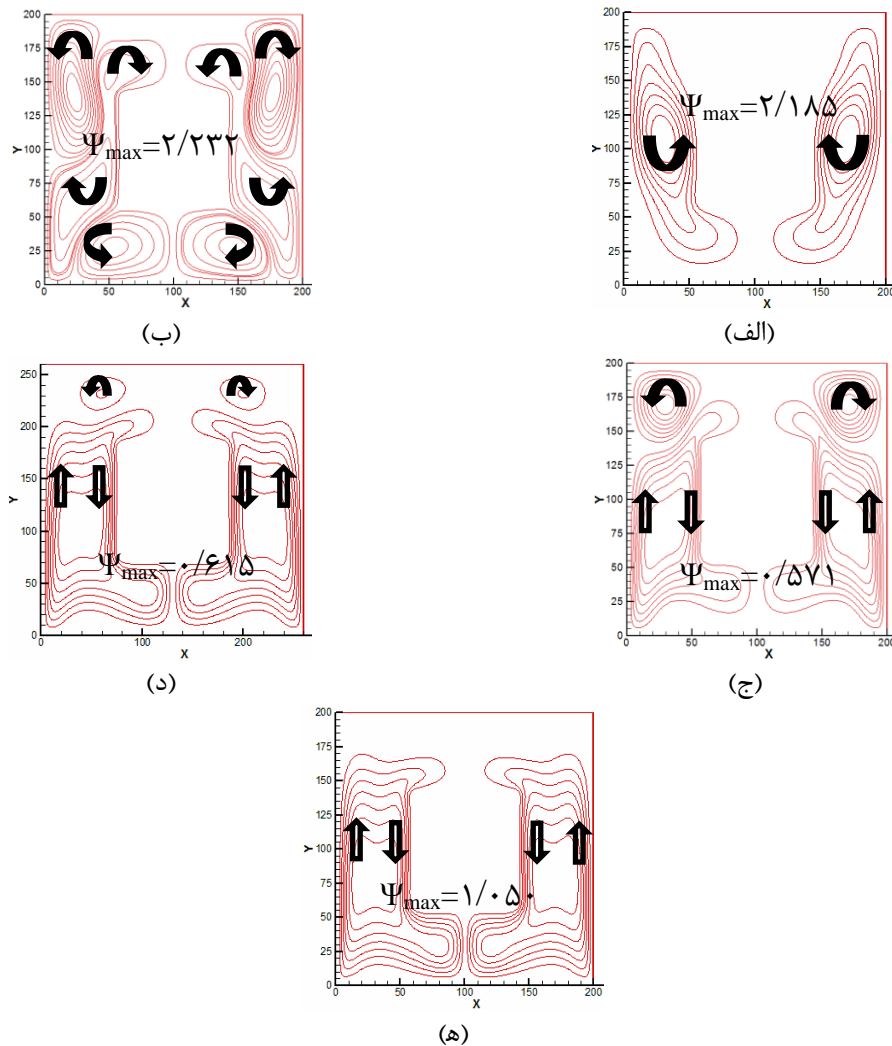
شکل ۹-۴ خطوط جریان را وقتی عدد رایلی  $Ra=10^5$ ، عدد لوییس  $Le=0.1$  و نسبت ابعاد محفظه به ابعاد مانع  $A=0.4$  است را نشان می‌دهد. در اینجا نیز هنگامی که اندازه نسبت شناوری کمتر از یک است، جریان تحت تاثیر نیروی شناوری ناشی از گرادیان دماست. در حالی که با افزایش اندازه نسبت شناوری به بیشتر از یک، جهت جریان معکوس می‌شود و نیروی شناوری ناشی از گرادیان غلظت، غالب می‌گردد. شکل ۱۰-۴ نیز خطوط جریان را در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و عدد لوییس  $Le=2$  نشان می‌دهد. همانطور که دیده می‌شود در این حالت نیز جریان داخل محفظه دو سلولی است و گردابه‌ای

ایجاد نمی‌شود. علت این است که اگرچه عدد رایلی افزایش یافته اما این افزایش به اندازه‌ای نیست که برای غلبه اثر گرادیان غلظت بر گرادیان دما، به نسبت شناوری بالاتری نیاز باشد. از طرفی با وجود این که عدد لوییس افزایش یافته است، این مقدار در حدی نیست که اثر گرادیان غلظت را در نسبت-های شناوری نزدیک به یک تحت تاثیر قرار دهد.



شکل ۴-۱۰ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^5$ ,  $A=0.4$ ,  $L=2$ ,  $N=0.8$  (الف) و  $N=0.0$  (ب)  $N=-0.8$

(ج)  $N=-1/2$  (د)  $N=-1/5$  (ه)  $N=-2/5$

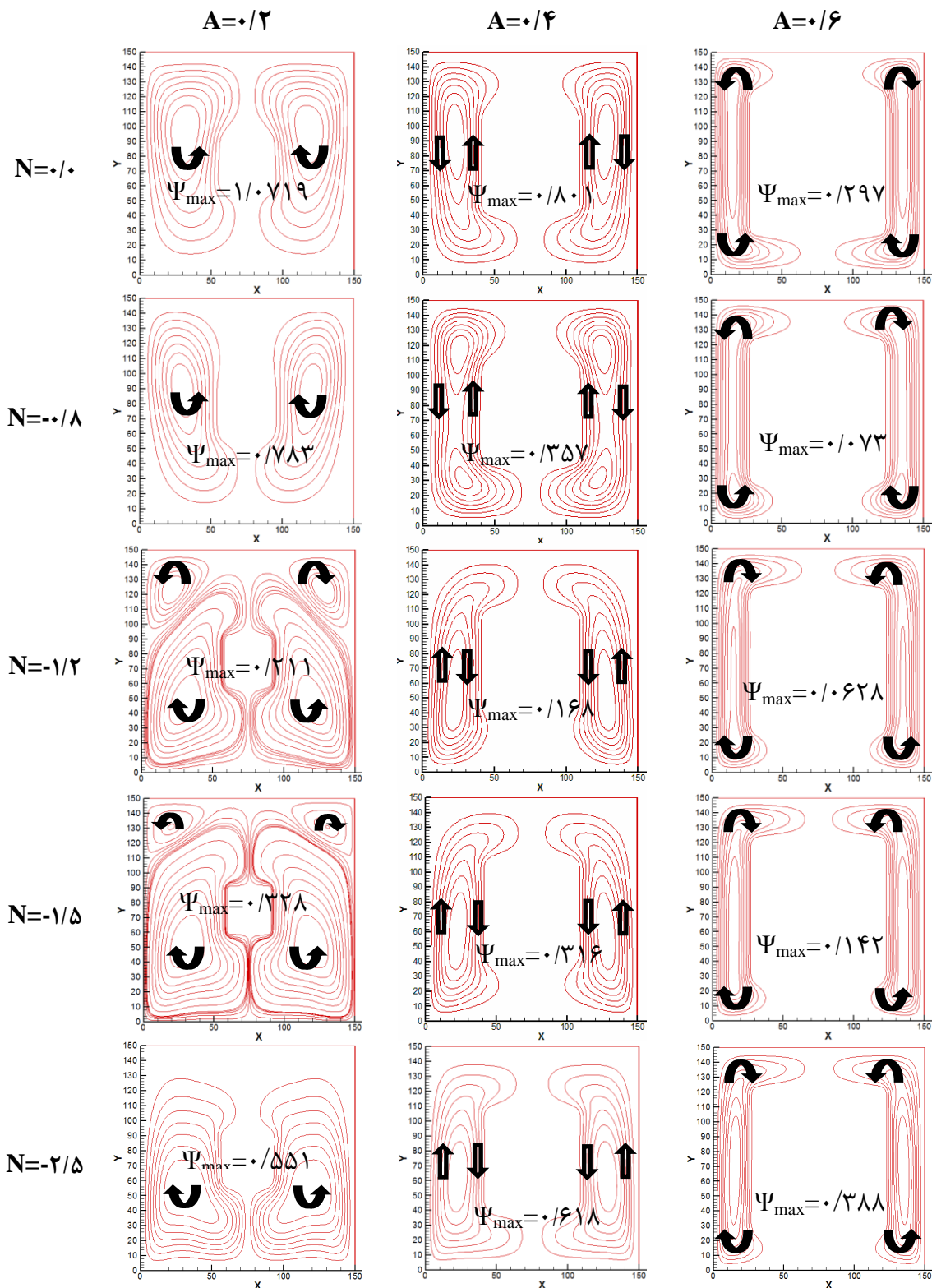


شکل ۴-۱۱ نمایش خطوط جریان در حالت  $Ra=10^6$ ,  $L=2$ ,  $A=0/4$  و الف)  $N=-0/8$  و ب)  $N=-2/332$

$$N=-2/5 \text{ (ه) } N=-2/0 \text{ (د) } N=-1/5 \text{ (ج) } N=-1/2$$

شکل ۴-۱۱ نشان دهنده شکل جریان در عدد رایلی  $Ra=10^6$  و عدد لوییس  $Le=2$  است. همانطور که مشاهده می‌شود، هنگامی که اندازه (قدر مطلق) نسبت شناوری کوچکتر از یک است، جریان داخل محفظه دو سلولی است. با افزایش نسبت شناوری، ابتدا بخشی از جریان تحت تاثیر اثر نیروی شناوری غلظت، در جهت مخالف در داخل محفظه جریان می‌یابد. بخش دیگر که هنوز تحت تاثیر نیروی شناوری دما قرار دارد، به صورت گردابه‌هایی در جهت اولیه حرکت می‌کنند. علت این امر افزایش عدد





شکل ۴-۱۲ نمایش اثر ابعاد مانع روی شکل خطوط جریان در حالت  $Le=2$  و  $Ra=10^5$  در نسبت

شناوری مختلف

رایلی است که باعث می‌شود اثر گرادیان دما افزایش یابد. به تدریج با افزایش نسبت شناوری و غالب شدن اثر گرادیان غلظت بر گرادیان دما، این گردابه‌ها کوچک شده و به جریان اصلی می‌پیوندند. در نهایت زمانی که  $|N|$  به اندازه کافی افزایش یابد، اثر نیروی شناوری دما به طور کامل توسط نیروی شناوری غلظت احاطه می‌شود.

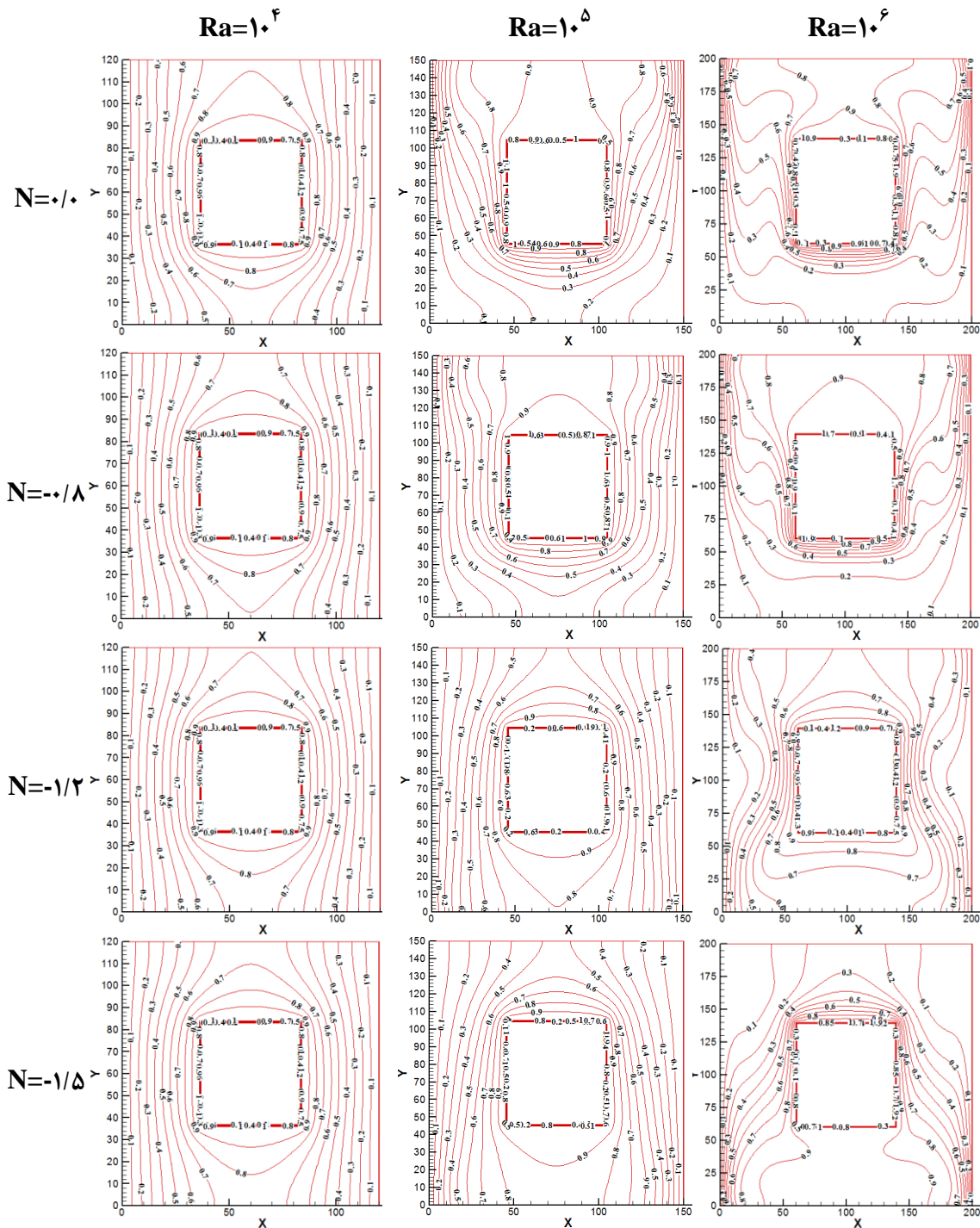
شکل ۴-۱۲ اثر نسبت ابعاد مانع به محفظه را در رایلی  $Ra=10^5$  و عدد لوییس  $Le=2$  روی شکل جریان نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود هنگامی که نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه مقدار کوچکی است، در نسبت شناوری بیش از یک (قدر مطلق) ابتدا گردابه‌هایی در محفظه ایجاد می‌شوند که جهت حرکت آن‌ها خلاف جهت حرکت جریان اصلی است. به تدریج با افزایش نسبت شناوری، این گردابه‌ها کوچک شده و به جریان اصلی می‌پیوندند. با افزایش نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه در یک نسبت شناوری ثابت، گردابه‌ها از بین می‌روند.

#### ۴-۴-۵- اثر عدد رایلی روی کانتورهای دما و غلظت و همچنین نرخ انتقال حرارت و

##### جرم

اثر عدد رایلی و نسبت شناوری روی کانتور دما در شکل ۴-۱۳ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در عدد رایلی  $Ra=10^4$ ، خطوط همدمما در نزدیک دیواره محفظه تقریباً عمودی هستند که این نشان دهنده انتقال حرارت هدایت در محفظه است. با افزایش عدد رایلی و پیدایش اثر جابجایی، خطوط همدمما انحنا می‌یابند و تراکم آن‌ها در نزدیکی دیواره مانع و محفظه افزایش می‌یابد. یعنی با افزایش عدد رایلی در یک نسبت شناوری ثابت، انحنای خطوط همدمما افزایش یافته (اثر جابجایی) و تراکم آن‌ها به سمت دیواره‌های محفظه و مانع منتقل می‌شود. از سوی دیگر با تغییرات نسبت شناوری شکل خطوط همدمما تغییر می‌کند. هنگامی که نسبت شناوری  $N=0$  است، نیروی پیش‌برنده نیروی شناوری ناشی از گرادیان دما است. بنابراین در این نسبت شناوری، خطوط جریان

در واقع نشان دهنده لایه مرزی حرارتی کلاسیک هستند. با افزایش  $|N|$ ، اثر غلظت افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۱۳ نمایش اثر عدد رایلی و نسبت شناوری روی کانتور دما در عدد لوییس  $Le=2$  و

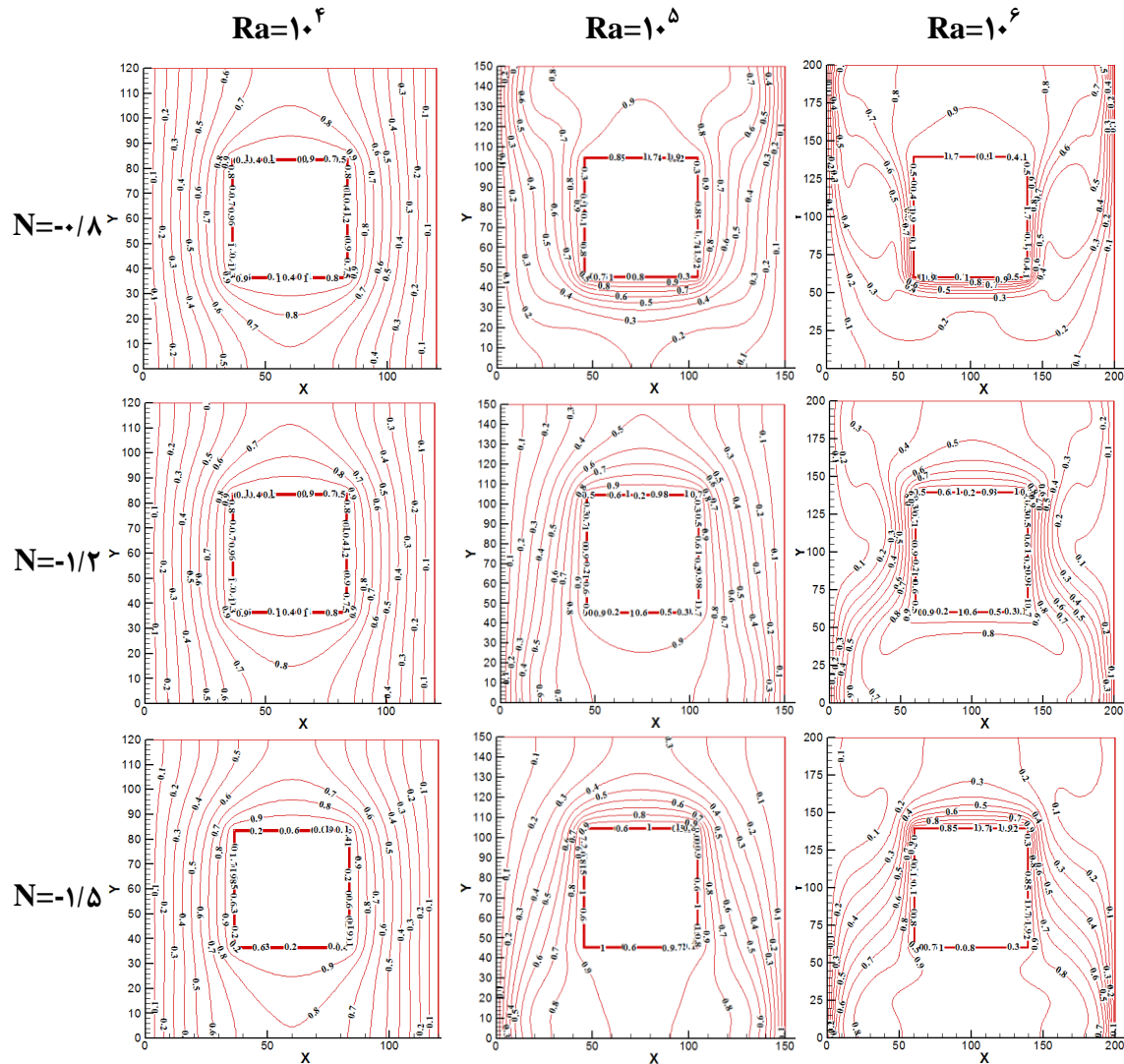
$$A=0/4$$

در حالتی که  $|N|=0/8$  است، هنوز اثر نیروی شناوری غلظت بر نیروی شناوری حرارتی غلبه نکرده است و روند کانتورهای همدمای مشابه حالت  $|N|=0/8$  است. با افزایش نسبت شناوری به  $|N|=1/2$ ، اثرات غلظت بر اثرات گرادیان دما غلبه کرده و جهت انحنای کانتور دما معکوس می‌شود. نکته دیگری که باید به آن توجه کرد این است با افزایش عدد رایلی، به علت افزایش اثر حرارت، غلبه کامل اثر غلظت به اثر دما و در نتیجه تغییر جهت انحنای کانتورهای دما، در نسبت شناوری بالاتری صورت می‌گیرد.

در شکل ۴-۱۴ که کانتور غلظت در اعداد رایلی و نسبت‌های شناوری مختلف را نشان می‌دهد، مشاهده می‌شود که با افزایش عدد رایلی حرارتی از  $10^4$  (هدایت حرارتی) تا  $10^6$  (که برقراری کامل جابجایی را دربرمی‌گیرد)، انحنای کانتورهای غلظت افزایش یافته و تراکم آن‌ها به نزدیک مرزهای مانع و محفظه انتقال می‌یابد. از سوی دیگر با افزایش اندازه نسبت شناوری به بیش از یک، جهت انحنای کانتور غلظت معکوس می‌شود.

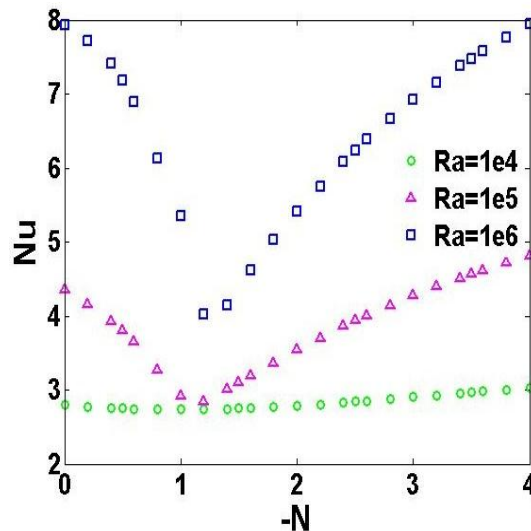
تغییرات عدد ناسلت متوسط در دیواره سرد سمت چپ محفظه با تغییر نسبت شناوری در اعداد رایلی مختلف برای حالتی که عدد لوییس  $Le=2$  و نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه  $A=0/4$  می‌باشد، در شکل ۴-۱۵ نشان داده شده است. هنگامی که  $N=0$  است، جریان تنها به دلیل نیروی شناوری ناشی از گرادیان دما حرکت می‌کند. با افزایش عدد رایلی مقدار عدد ناسلت مربوط به این حالت افزایش می‌یابد. مشاهده می‌شود که در تمامی حالت‌های مختلف عدد رایلی، عدد ناسلت که نشان دهنده نرخ انتقال حرارت از دیوار سمت چپ می‌باشد، ابتدا با افزایش اندازه نسبت شناوری تا یک کاهش و پس از آن افزایش می‌یابد. علت این است که تا زمانی که نسبت شناوری کمتر از یک باشد، نیروی پیش برنده کل با افزایش  $|N|$  کاهش می‌یابد (رابطه ۳-۲۸). با افزایش نسبت شناوری به بیش از یک، نیروی پیش برنده کل با افزایش  $|N|$  افزایش یافته و در نتیجه انتقال حرارت نیز افزایش می‌یابد. علت این که مقدار کمینه عدد ناسلت در هر رایلی دقیقاً در  $N=-1$  اتفاق نمی‌افتد، این است که عدد لوییس

برابر واحد نبوده و بنابراین ضخامت لایه مرزی حرارتی با ضخامت لایه مرزی غلظت متفاوت است. همانطور که در شکل دیده می‌شود با افزایش عدد رایلی، عدد ناسلت افزایش می‌یابد. بنابراین نرخ انتقال حرارت با افزایش عدد رایلی افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۱۴ نمایش اثر عدد رایلی و نسبت شناوری روی کانتور غلظت در عدد لوییس  $Le=2$  و

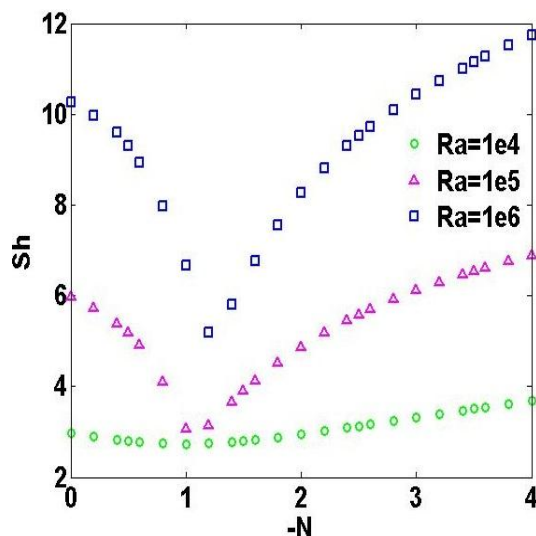
$$A=0/4$$



شکل ۴-۱۵ نمایش اثر عدد رایلی روی تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ محفظه برحسب

تغییرات نسبت شناوری در عدد لوییس  $Le=2$  و نسبت ابعاد مانع  $A=0.4$

تغییرات عدد شروود متوسط روی دیوار سمت چپ محفظه که نمایانگر نرخ انتقال جرم از این دیوار می‌باشد، برحسب تغییرات نسبت شناوری در اعداد رایلی مختلف و در عدد لوییس  $Le=2$  و نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه  $A=0.4$  در شکل ۴-۱۶ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، با افزایش عدد رایلی، عدد شروود افزایش می‌یابد و این به معنای افزایش نرخ انتقال جرم است. با افزایش نسبت شناوری تا  $|N|=1$ ، عدد شروود کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد. همانطور که بیان شد علت کاهش اولیه عدد شروود، کاهش نیروی کل در نسبت شناوری کمتر از یک است. با افزایش نسبت شناوری به بالاتر از یک، نیروی کل افزایش یافته و در نتیجه عدد شروود و به تبع آن نرخ انتقال جرم افزایش می‌یابد. در اینجا نیز مشاهده می‌شود که مقدار کمینه عدد شروود دقیقاً در  $N=-1$  روی نمی‌دهد که علت آن برابر نبودن ضخامت لایه مرزی‌های حرارتی و غلظت است که این خود به این دلیل است که عدد لوییس برابر واحد نیست.



شکل ۴-۱۶ نمایش اثر عدد رایلی روی تغییرات عدد شروود در دیوار سمت چپ محفظه برحسب

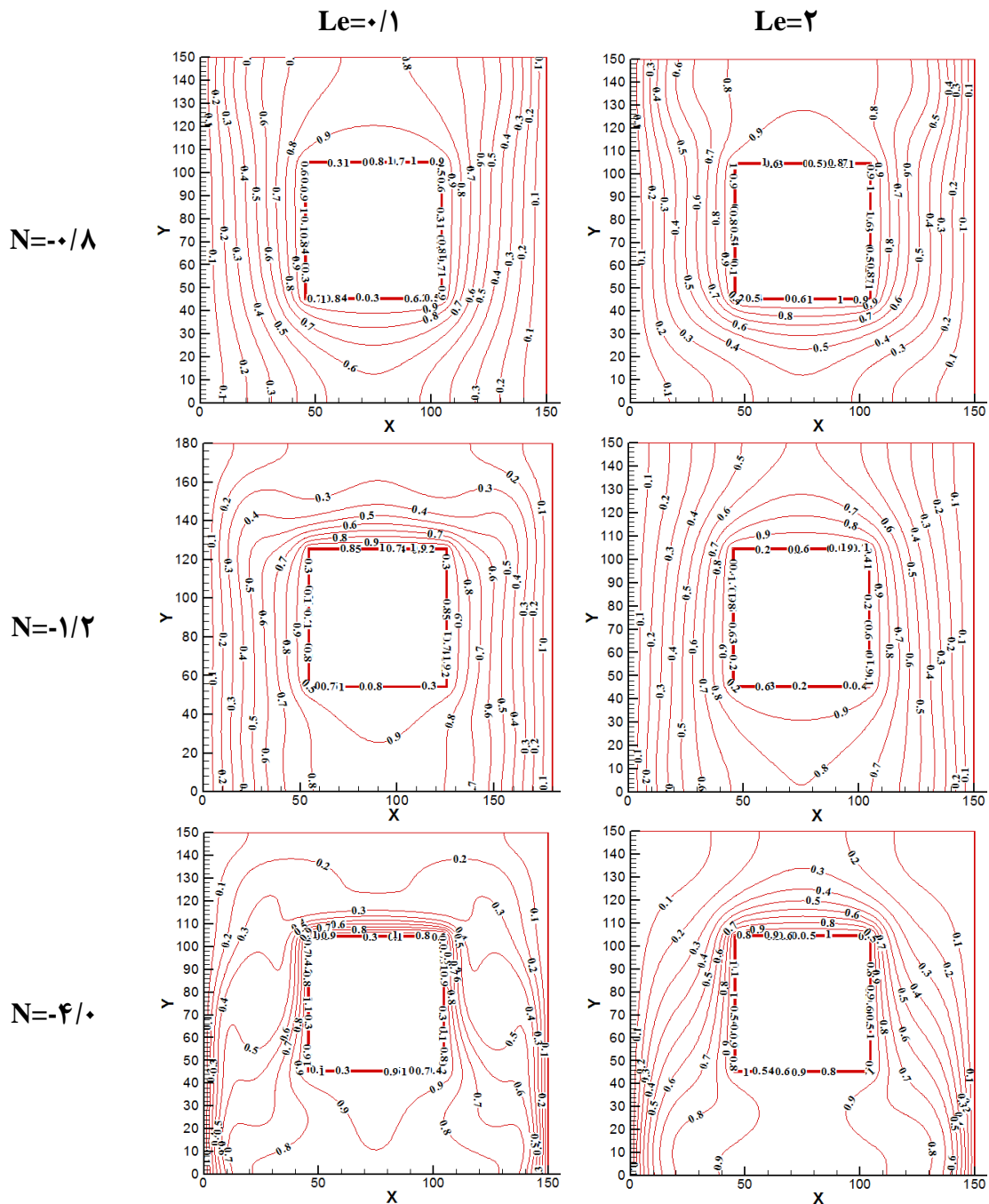
تغییرات نسبت شناوری در عدد لوییس  $Le=2$  و نسبت ابعاد مانع  $A=0.4$

#### ۴-۴-۶- اثر عدد لوییس روی کانتورهای دما و غلظت و همچنین نرخ انتقال حرارت

##### و جرم

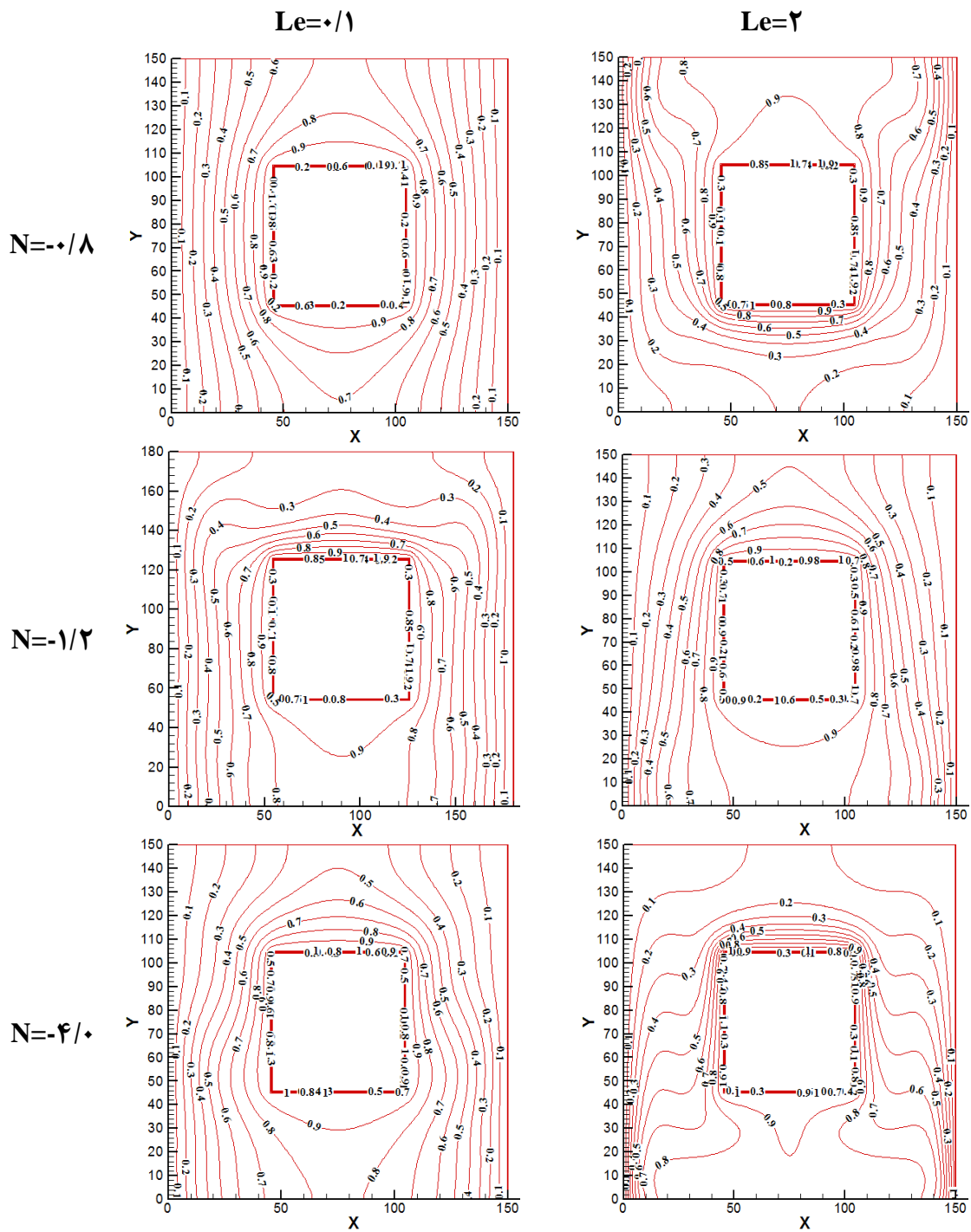
شکل ۴-۱۷ اثر عدد لوییس را روی کانتور دما در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و نسبت شناوری مختلف نشان می‌دهد. هنگامی که  $N=-0.8$  است، اثرات دمایی بر اثرات غلظت غالب است و با افزایش عدد لوییس، این اثرات افزایش می‌یابد. از طرفی در  $|N|>1$ ، اثرات دمایی در مقایسه با اثر غلظت کاهش می‌یابد و جهت انحنای خطوط هم‌دما، معکوس می‌شود. از سوی دیگر با افزایش عدد لوییس، اثر دما تا حدی افزایش می‌یابد. همانطور که در شکل دیده می‌شود، در نسبت شناوری  $N=-1/2$  که اثر غلظت کمی بیش از اثر دماست، با افزایش عدد لوییس و در نتیجه افزایش اثر نفوذ حرارتی، اثر غلظت تا حدی کاهش یافته و غلبه آن بر اثر حرارتی کاملاً واضح نیست. در حالی که در نسبت شناوری  $N=-4$  که اثرات غلظت بسیار بیشتر از اثرات حرارتی است با افزایش عدد لوییس تا  $Le=2$ ، همچنان اثر غلظت

غالب بوده و تنها تراکم خطوط همدمما در نزدیک مرز شمالی مانع تا حدی کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۱۷ نمایش اثر عدد لوییس روی کانتور دما در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و  $A=0.4$

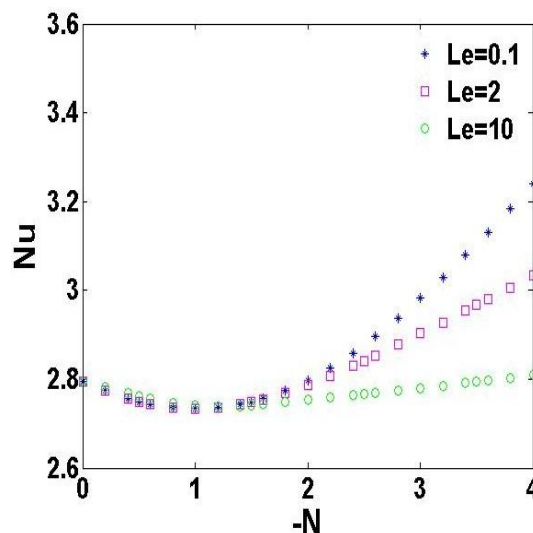




شکل ۴-۱۸ نمایش اثر عدد لوییس روی کانتور غلظت در عدد رایلی  $10^5$  و  $A=0.4$

همانطور که در شکل ۴-۱۸ دیده می‌شود هنگامی که اندازه نسبت شناوری کمتر از یک باشد، با افزایش عدد لوییس، انحنای کانتور غلظت افزایش می‌یابد. در حالی که در نسبت شناوری  $N=1/2$  با

افزایش عدد لوییس انحناى کانتور غلظت کاهش یافته است. با افزایش عدد لوییس در  $N=-4$  که اثر نیروی گرانش ناشی از گرادیان غلظت نسبت به نیروی گرانش ناشی از گرادیان دما بسیار بیشتر است، انحناى کانتورهای غلظت افزایش می‌یابد. علت این امر این است که وقتی  $N=-1/2$  است، اثر غلظت کمی بیشتر از اثر حرارت است و افزایش عدد لوییس تا حد ۲۰ برابر، این اثر را تا حدی خنثی می‌کند. از طرفی هنگامی که  $N=-4$  است در واقع اثر غلظت بسیار بیشتر از اثر حرارتی است و افزایش عدد لوییس و در نتیجه افزایش نفوذ حرارتی، نمی‌تواند اثر غلظت را کاملاً خنثی کند. با افزایش عدد لوییس، ضخامت لایه مرزی غلظت کاهش می‌یابد.

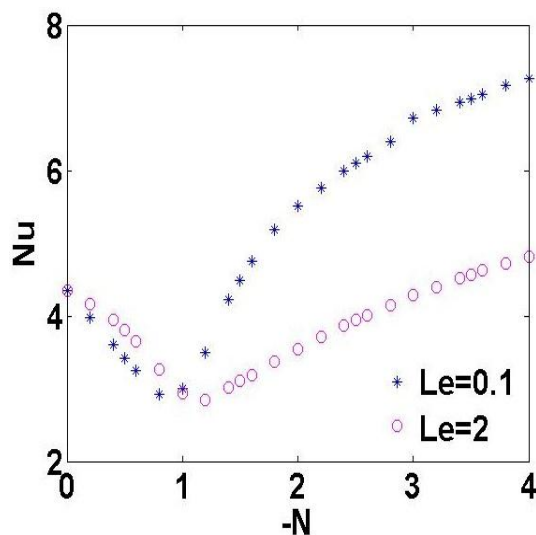


شکل ۴-۱۹ نمایش اثر عدد لوییس روی تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ محفظه برحسب

تغییرات نسبت شناوری در رایلی  $Ra=10^4$  و نسبت ابعاد مانع  $A=0/4$

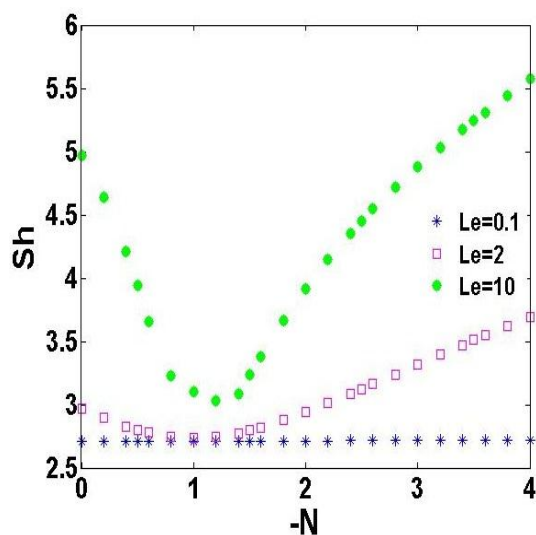
شکل ۴-۱۹ و ۴-۲۰ اثر عدد لوییس را روی تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیوار سمت چپ محفظه برحسب تغییرات نسبت شناوری نشان می‌دهند. در  $N=0$  تنها گرادیان دما در پیشبرد جریان نقش دارد. بنابراین در تمامی اعداد لوییس در  $N=0$ ، مقدار عدد ناسلت یکسان است. با افزایش نسبت شناوری، عدد ناسلت ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. مشاهده می‌شود که با افزایش عدد لوییس،

مقدار کمینه عدد ناسلت به سمت  $N$ های منفی تر حرکت می‌کند. علت این امر کاهش ضخامت لایه مرزی غلظت با افزایش عدد لوییس، در مقایسه با ضخامت لایه مرزی حرارتی می‌باشد. در نتیجه اثر گرادیان غلظت کاهش یافته و به نسبت شناوری بالاتری برای خنثی کردن این اثر نیاز است.



شکل ۴-۲۰ نمایش اثر عدد لوییس روی تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ محفظه برحسب

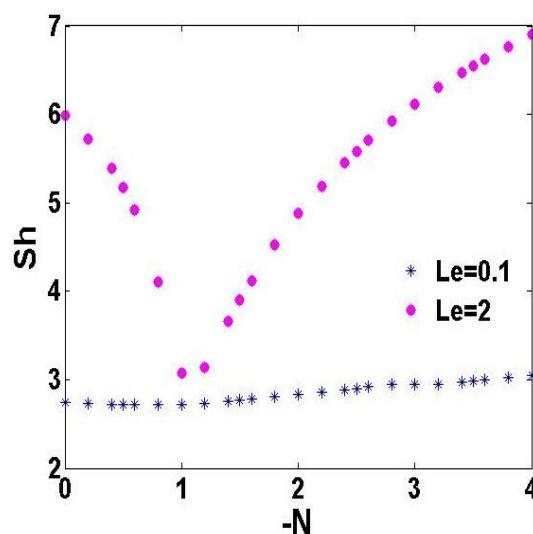
تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و نسبت ابعاد مانع  $A=0.4$



شکل ۴-۲۱ نمایش اثر عدد لوییس روی تغییرات عدد شروود در دیوار سمت چپ محفظه برحسب

تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $Ra=10^4$  و نسبت ابعاد مانع  $A=0.4$

شکل‌های ۲۱-۴ و ۲۲-۴ اثر عدد لوییس را روی تغییرات عدد شروود متوسط روی دیوار سمت چپ محفظه برحسب تغییرات نسبت شناوری به ترتیب در عدد رایلی  $10^4$  و  $10^5$  نشان می‌دهند. به طور کلی مشاهده می‌شود که در تمامی حالت‌ها، عدد شروود ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که در  $N=0$ ، با افزایش عدد لوییس به دلیل کاهش ضخامت لایه مرزی غلظت در مقایسه با ضخامت لایه مرزی حرارتی، عدد شروود افزایش می‌یابد که این به معنای افزایش نرخ انتقال جرم است.



شکل ۲۲-۴ نمایش اثر عدد لوییس روی تغییرات عدد شروود در دیوار سمت چپ محفظه برحسب

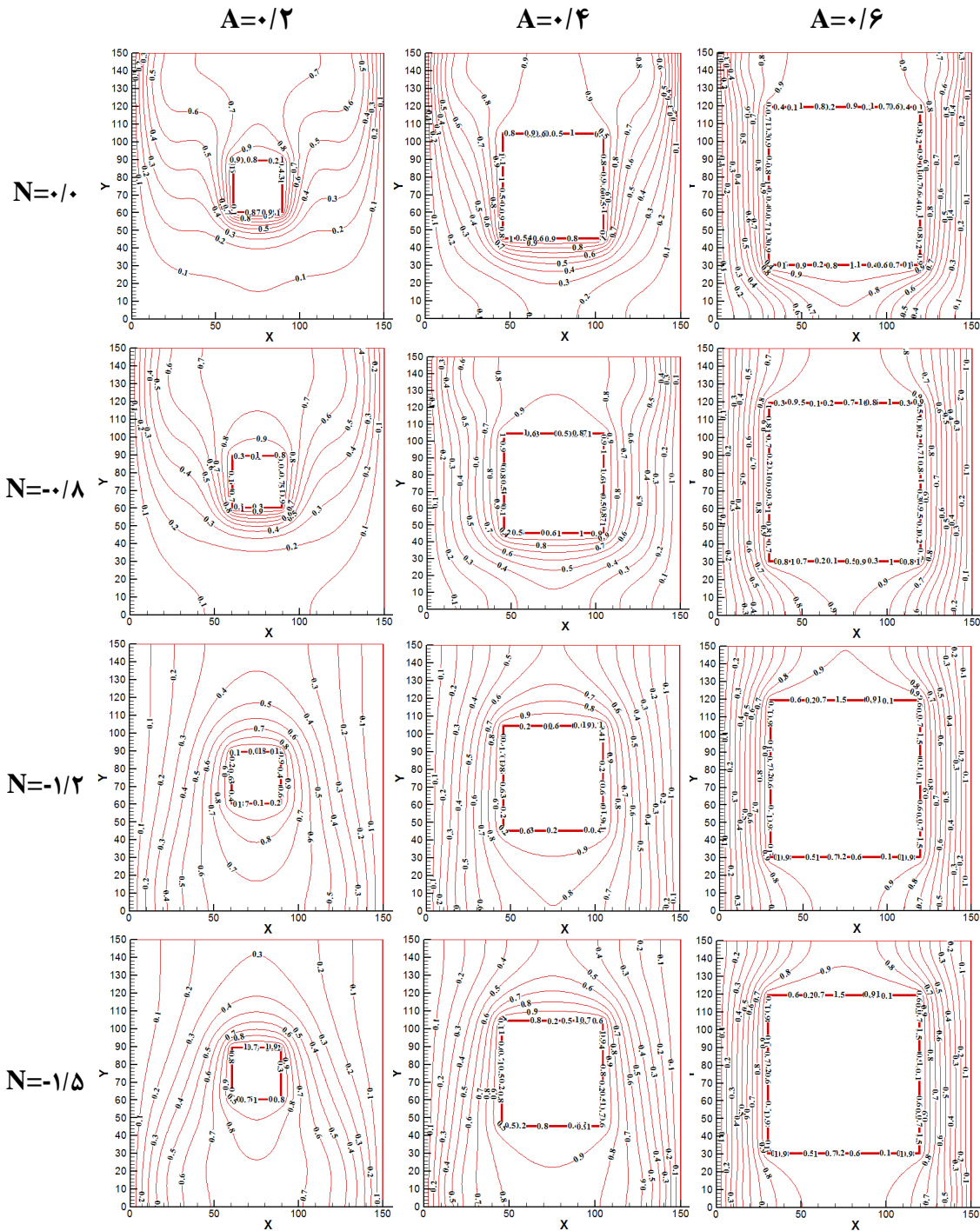
تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $Ra=10^5$  و نسبت ابعاد مانع  $A=0.4$

۴-۴-۷- اثر نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه روی کانتورهای دما و غلظت و همچنین

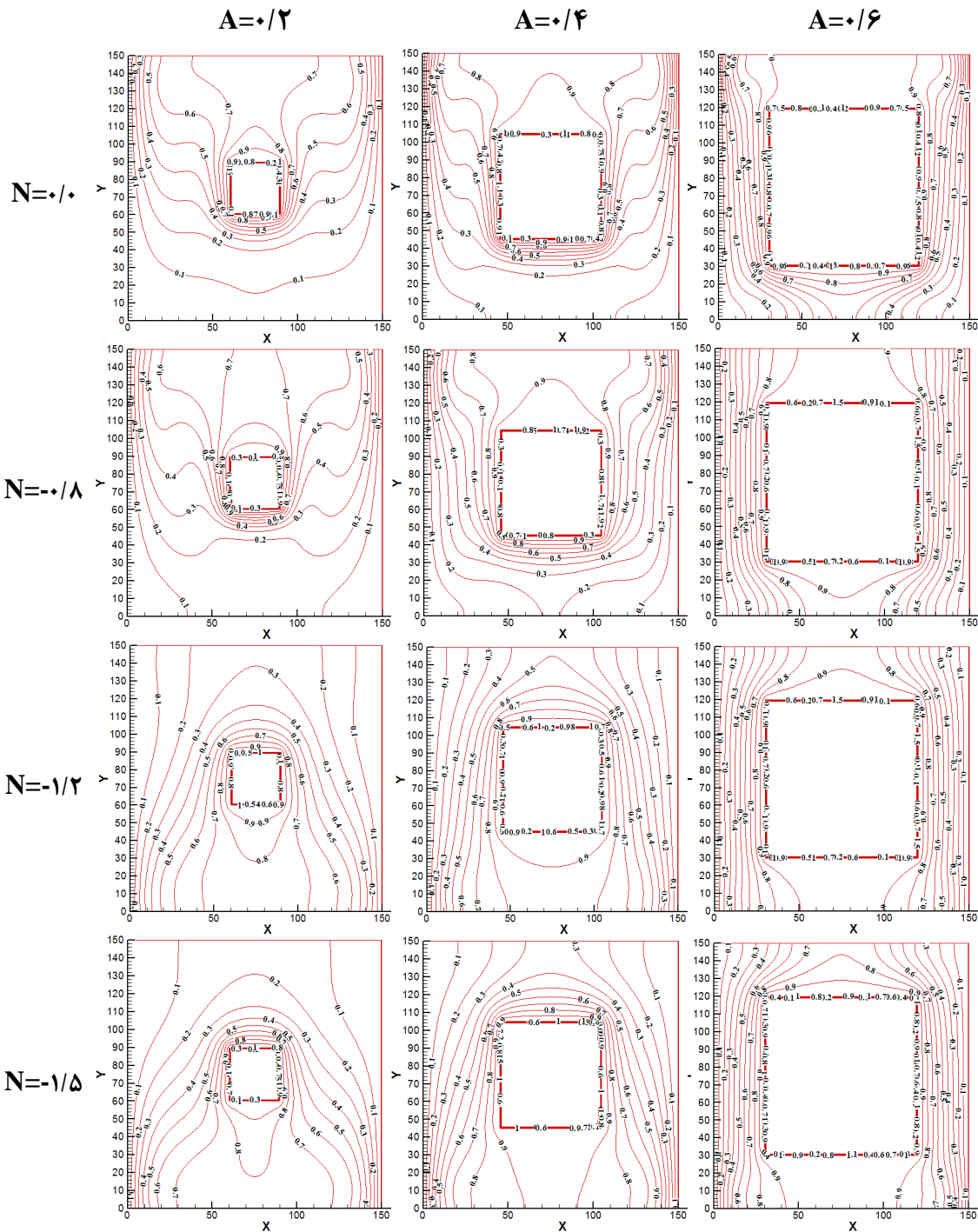
### نرخ انتقال حرارت و جرم

اثر ابعاد مانع روی کانتورهای دما در حالتی که عدد رایلی  $Ra=10^5$  و عدد لوییس  $Le=2$  می‌باشد، در شکل ۲۳-۴ نشان داده شده است. با افزایش نسبت ابعاد مانع سطح انتقال حرارت افزایش یافته و انتقال حرارت افزایش می‌یابد. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه، انحنای

خطوط همدمای کاهش یافته که جهت این انحنا با افزایش اندازه نسبت شناوری به بیش از یک، معکوس می شود.



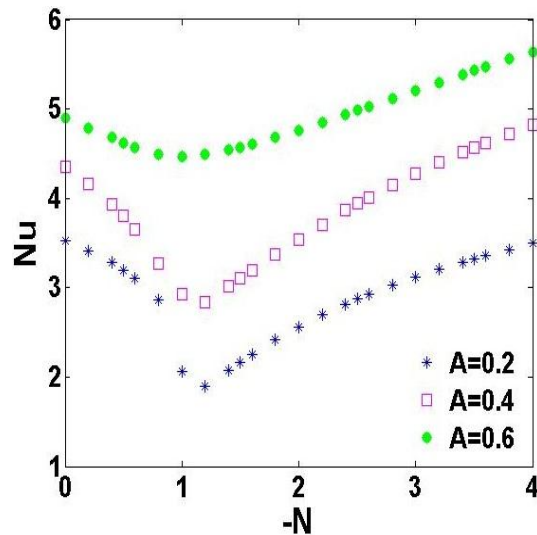
شکل ۴-۲۳ اثر ابعاد مانع روی کانطور دما در حالت  $Le=2$  و  $Ra=10^5$  در نسبت شناوری مختلف



شکل ۴-۲۴ اثر ابعاد مانع روی کانتور غلظت در حالت  $Le=2$  و  $Ra=10^5$  در نسبت شناوری مختلف

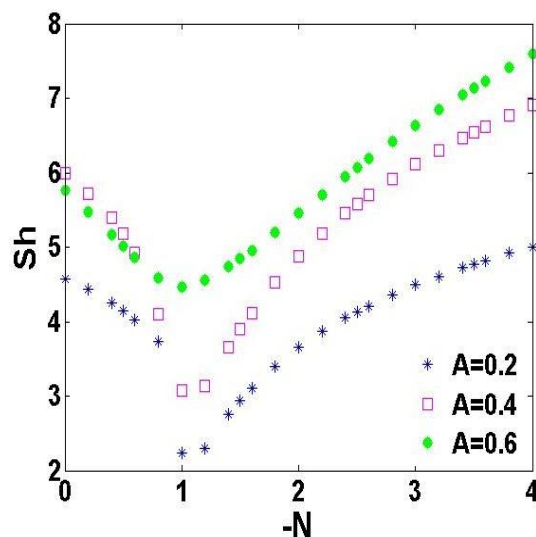
اثر ابعاد مانع روی کانتورهای غلظت در شکل ۴-۲۴ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با

افزایش ابعاد مانع، سطح انتقال جرم افزایش یافته و در نتیجه انتقال جرم افزایش می‌یابد. همانطور که در شکل دیده می‌شود با افزایش ابعاد مانع، انحنای کانترهای غلظت کاهش یافته و ضخامت لایه مرزی غلظت کم می‌شود.



شکل ۴-۲۵ نمایش اثر نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه روی تغییرات عدد ناسلت در دیوار سمت چپ

محفظه برحسب تغییرات نسبت شناوری در عدد لوییس  $Le=2$  و عدد رایلی  $Ra=10^5$



شکل ۴-۲۶ نمایش اثر نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه روی تغییرات عدد شروود در دیوار سمت چپ

محفظه برحسب تغییرات نسبت شناوری در عدد لوییس  $Le=2$  و عدد رایلی  $Ra=10^5$

اثر ابعاد مانع روی نرخ انتقال حرارت و جرم به ترتیب به صورت تغییرات عدد ناسلت و عدد شروود متوسط در دیوار سمت چپ محفظه برحسب تغییرات نسبت شناوری در عدد رایلی  $10^5 = Ra$  و عدد لوییس  $Le=2$  در شکل ۴-۲۵ و ۴-۲۶ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه، عدد ناسلت و عدد شروود افزایش می‌یابند. این نتیجه کاملاً مورد انتظار است، زیرا با افزایش ابعاد مانع، سطح انتقال جرم و حرارت افزایش یافته و در نتیجه انتقال حرارت و جرم افزایش می‌یابد. در این شکل‌ها نیز مشاهده می‌شود که با افزایش اندازه نسبت شناوری تا یک، عدد ناسلت و عدد شروود به دلیل کاهش نیروی کل کاهش می‌یابد. با افزایش نسبت شناوری به بیش از یک، نیروی کل افزایش یافته و انتقال حرارت و جرم نیز افزایش می‌یابد.



## فصل ۵. نتیجه گیری و پیشنهادات

## ۵-۱- نتایج

در این تحقیق، حل انتقال حرارت و جرم در یک محفظه مربعی در حضور مانع گرم و با غلظت ثابت به روش شبکه بولترمن مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات شبکه بولترمن برای جریان، دما و غلظت و انواع شرایط مرزی مربوط به آن‌ها ارائه شده و با مقایسه دو نوع شرط مرزی با دقت‌های مرتبه اول و دوم برای جریان، حرارت و غلظت، این نتیجه به دست آمد که در مساله‌ای مشابه مساله مورد بررسی، استفاده از شرایط مرزی با دقت مرتبه اول مناسب است. در فصل چهارم، مساله جابجایی حرارت و جرم در یک محفظه مربعی که دیوارهای افقی آن عایق و بدون نفوذ جرم و حرارت‌اند و دیوارهای عمودی آن دارای دما و غلظت بی‌بعد صفر هستند و یک مانع مربعی با دما و غلظت بی‌بعد یک در وسط آن قرار گرفته است، مورد بررسی قرار گرفته و نتایج آن به صورت خطوط جریان، کانتورهای دما و غلظت و همچنین اعداد ناسلت و شروود ارائه شده است. در این بررسی پارامترهای بی‌بعد حاکم بر مساله عدد پرانتل  $Pr=0.71$ ، ویسکوزیته  $\nu=0.02$ ، عدد رایلی  $10^4-10^6$ ،  $Ra$ ، عدد لوییس  $10, 2, 0.1$ ،  $Le=0.1$ ، نسبت شناوری  $N$  بین  $0$  تا  $4-$  و نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه  $A$  برابر  $0.2, 0.4, 0.6$  در نظر گرفته شده است. نتایج به دست آمده در فصل چهارم ارائه شده که در اینجا به طور خلاصه به آن‌ها اشاره می‌شود.

- هنگامی که  $|N| < 1$  باشد، عدد ناسلت و عدد شروود با افزایش اندازه نسبت شناوری کاهش می‌یابند و هنگامی که  $|N| > 1$  است با افزایش اندازه نسبت شناوری، این دو عدد بی‌بعد افزایش می‌یابند.
- با افزایش نسبت شناوری از حالتی که  $|N| < 1$  است به حالتی که  $|N| > 1$  است، جهت حرکت جریان معکوس شده و همچنین جهت انحنای کانتورهای دما و غلظت، برعکس می‌شود.

- با افزایش عدد رایلی در یک نسبت شناوری مشخص، عدد ناسلت و عدد شروود افزایش می‌یابند که این به معنای افزایش نرخ انتقال حرارت و جرم است.
- با افزایش عدد رایلی به علت افزایش اثر حرارت در مقایسه با اثر غلظت، غلبه کامل اثر نیروی شناوری ناشی از گرادیان غلظت بر نیروی شناوری ناشی از گرادیان دما، در نسبت شناوری بالاتری صورت می‌گیرد. در نتیجه بخشی از جریان در نسبت شناوری نزدیک به  $1 - (|N| > 1)$ ، گردابه‌هایی تشکیل می‌دهند که جهت حرکت آن‌ها خلاف جهت جریان اصلی است. با افزایش اندازه نسبت شناوری، این گردابه‌ها به تدریج کوچک شده و به جریان اصلی می‌پیوندند.
- با افزایش عدد لوییس، اثر دما افزایش یافته و غلبه اثر نیروی شناوری ناشی از گرادیان غلظت به نیروی شناوری ناشی از گرادیان دما در نسبت شناوری بالاتری صورت می‌گیرد.
- با افزایش عدد لوییس، مقدار کمینه در نمودار تغییرات عدد ناسلت برحسب تغییرات نسبت شناوری، به سمت مقادیر نسبت شناوری منفی‌تر میل می‌کند. علت این است که با افزایش عدد لوییس، به دلیل افزایش نفوذ حرارتی نسبت به نفوذ غلظت، برای غلبه اثر حرارتی به اثر غلظت به نسبت شناوری بالاتری نیاز است.
- با افزایش عدد لوییس در نسبت شناوری ثابت، عدد شروود افزایش می‌یابد.
- اعداد ناسلت و شروود با افزایش نسبت ابعاد مانع به ابعاد محفظه، افزایش می‌یابند.

## ۵-۲- پیشنهادات

در راستای ادامه مطالعه درباره انتقال حرارت و جرم در محفظه‌ها به روش شبکه بولتزمن، می‌توان موارد زیر را مورد بررسی قرار داد:

- 
- می‌توان با افزایش تعداد موانع در داخل محفظه، مساله را به صورت انتقال حرارت و جرم در محیط متخلخل در مقیاس حفره تعمیم داد.
  - می‌توان به بررسی اثرات سورت و دوفور روی توزیع جریان و دما پرداخت.

- [1] Haghshenas, A., Rafati Nasr, M., Rahimian, M.H., Numerical simulation of natural convection in an open-ended square cavity filled with porous medium by lattice Boltzmann method, International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 37, pp. 1513–1519, 2010.
- [2] Mohamad, A.A., Bennacer, R., El-Ganaoui M., Lattice Boltzmann simulation of natural convection in an open ended cavity, International Journal of Thermal Science, Vol. 48, pp. 1870–1875, 2009.
- [3] Nikbakhti, R., Rahimi, A.B., Double-diffusive natural convection in a rectangular cavity with partially thermally active side walls, Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers, Vol. 43, pp. 535–541, 2012.
- [4] Makayssi, T., Lamsaadi, M., Naïmi, M., Hasnaoui, M., Raji, A., Bahlaoui, A., Natural double-diffusive convection in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated and salted from the side and filled with non-Newtonian power-law fluids: The cooperating case. Energy Conversion and Management, Vol. 49, pp. 2016–2025, 2008.
- [5] Viskanta, R., Bergman, T.L., Incopera, F.P., Double-diffusive natural convection. In Natural convection, fundamentals and applications. Washington DC; Hemisphere, 1985.
- [6] Ameziani, D.E., Bouhadef, K., Bennacer, R., Analysis of the chimney natural convection in a vertical porous cylinder. Numerical Heat Transfer Part A, Vol. 54, pp. 47-66, 2008.
- [7] Sukop, M.C., Thorne, jr, D.T., Lattice Boltzmann Modeling, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 2007.
- [8] Mohamad, A.A., Lattice Boltzmann method, fundamentals and engineering applications with computer codes, Springer-Verlag, London, 2011
- [9] Frisch, U., Hasslacher, B., Pomeau, Y., Lattice-gas Automata for the Navier-Stokes Equation, physical review letters, Vol. 56, Num. 14, pp. 1505-1508, 1986.
- [10] Wolf-Gladrow, Dieter A., Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models, An Introduction, Springer, Berlin, June 26, 2005
- [11] Succi, S., The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, Clarendon Press, Oxford, London, 2001.

- [12] Harris, S., An introduction to the theory of the Boltzmann equation, Holt, Rienhart and Winston, Inc., New York, 1971
- [13] Chan, Y.L., Tien, C.L., A numerical study of two-dimensional natural convection in square open cavities, Numerical Heat Transfer, Vol. 8, pp. 65–80, 1985.
- [14] Chan, Y.L., Tien, C.L., Laminar natural convection in shallow open cavities, 21st ASME-AIChE National Heat Transfer Conference, Natural Convection in Enclosures-1983, HTD, Vol. 26, pp. 77–82 (1983).
- [15] Bilgen, E., Muftuoglu, A., Natural convection in an open square cavity with slots, International Communications of Heat and Mass Transfer, Vol. 35, pp. 896–900, 2008.
- [16] Dixit, H.N., Babu, V., Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 49, pp. 727–739, 2006.
- [17] He, X., Chen, S., Doolen, G.D., A novel thermal model for lattice Boltzmann method in incompressible limit, journal of computational physics, Vol. 146, Num. 1, pp. 282–300, 1998.
- [18] Kuznik, F., Vareilles, J., Rusaouen, G., Krauss, G., A double-population lattice Boltzmann method with non-uniform mesh for the simulation of natural convection in a square cavity, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 28, pp. 862–870, 2007.
- [19] Nor Azwadi Che Sidik., Rosdzimin, A.R.M., simulation of natural convection heat transfer in an enclosure using lattice Boltzmann method, Jurnal Mekanikal, No. 27, pp. 42–50, 2008.
- [20] Huber, C., Parmigiani, A., Chopard, B., Manga, M., Bachmann, O., Lattice Boltzmann model for melting with natural convection, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 29, pp. 1469–1480, 2008.
- [21] Jeong, H.K., Yoon, H.S., Ha, M.Y., Tsutahara, M., An immersed boundary-thermal lattice Boltzmann method using an equilibrium internal energy density approach for the simulation of flows with heat transfer, Journal of Computational Physics, Vol. 229, pp. 2526–2543, 2010.

- [22] Mondal, B., Li, X., Effect of volumetric radiation on natural convection in a square cavity using lattice Boltzmann method with non-uniform lattices, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 53, pp. 4935–4948, 2010.
- [23] Gao, D., Chen, Z., Lattice Boltzmann simulation of natural convection dominated melting in a rectangular cavity filled with porous media, International Journal of Thermal Sciences, Vol. 50, pp. 493–501, 2011.
- [24] Mezrhab, A., Lemonnier, D., Meftah, S., Benbrik, A., Numerical study of double-diffusion convection coupled to radiation in a square cavity filled with a participating grey gas, Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 41, Num. 19, pp. 1-16, 2008.
- [25] Tofaneli, L.A., Lemos, J.S., Double-diffusive turbulent natural convection in a porous square cavity with opposing temperature and concentration gradients, International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 36, pp. 991–995, 2009.
- [26] Alloui, I., Benmoussa, H., Vasseur, P., Soret and thermosolutal effects on natural convection in a shallow cavity filled with a binary mixture, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 31, pp. 191–200, 2010.
- [27] Ma, C., Lattice BGK simulations of double diffusive natural convection in a rectangular enclosure in the presences of magnetic field and heat source, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Vol. 10, pp. 2666–2678, 2009.
- [28] Mohamad, A.A., Bennacer, R., El-Ganaoui, M., Double dispersion, natural convection in an open end cavity simulation via Lattice Boltzmann Method, International Journal of Thermal Science, Vol. 49, pp. 1944–1953, 2010.
- [29] Qian, Y.H., d'Humieres, D., Lallemand, P., Lattice BGK models for Navier Stokes equation, Europhys Letter, Vol. 17, pp. 479–484, 1992.
- [30] Mohamad, A.A., Kuzmin, A., A critical evaluation of force term in lattice Boltzmann method, natural convection problem, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 53, pp. 990–996, 2010.
- [31] Maier, R.S., Bernard, R.S., Grunau, D.W., Boundary conditions for the lattice Boltzmann method, Phys. Fluids, Vol. 8, pp. 1788–1801, 1996.

- [32] Chang, C., Liu, C.H., Lin, C.A., Boundary conditions for lattice Boltzmann simulations with complex geometry flows, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 58, Num. 5, pp. 940–949, 2009.
- [33] Skordos, P.A., Initial and boundary conditions for the lattice Boltzmann method, Physical Review, E.48, pp.4823–4842, 1993.
- [34] Guo, Z.L., Zheng, C.g., Shi, B.C., Non-equilibrium extrapolation method for velocity and pressure boundary conditions in the lattice Boltzmann method, Chinese Physics, Vol. 11, Num. 4, pp. 366–374, 2002.
- [35] Noble, D.R., Chen, S., Georgiadis, J.G., Buckius, R.O., A consistent hydrodynamics boundary condition for the lattice Boltzmann method, Phys. Fluids, Vol. 7, pp. 203–209, 1995.
- [36] Zou, Q., He, X., On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, Phys. Fluids, Vol. 9, pp. 1591–1598, 1997.
- [37] Gallivan, M.A., Noble, D.R., Georgiadis, J.G., Buckius, R.O., An evaluation of bounce-back boundary condition for lattice Boltzmann simulations, International journal for numerical methods in fluids, Vol.25, pp. 249–263, 1997.
- [38] Inamuro, T., Yoshino, M., Ogino, F., A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations, Physics of Fluids, Vol. 7, pp. 2928–2930, 1995.
- [39] Zeigler, D.P., Boundary condition for lattice Boltzmann simulations, Journal of statistical physics, Vol. 71, No .5/6, pp. 1171–1177, 1993.
- [40] Chen, S., Martinez, D., Mei, R., On boundary conditions in lattice Boltzmann methods, Phys. Fluids, Vol. 8, pp. 2527–2536, 1996.
- [41] Ladd, A., Numerical simulation of Particular suspensions via a discretizes Boltzman equation, Part 1.Theoretical foundation, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 271, pp. 285–309, 1994.
- [42] Ladd, A., Numerical simulation of Particular suspensions via a discretizes Boltzman equation, Part 2.Numerical results, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 271, pp. 285–339, 1994.
- [43] McNamara, G., Alder, B., Analysis of the lattice Boltzmann treatment of hydrodynamics, Physica A, Vol. 194, pp. 218–228, 1993.



- [44] Chen, Y., Ohashi, H., Akiyama, M., Thermal lattice Bhatnagar–Gross–Krook model without nonlinear deviations in macrodynamic equations, Physical Review. Vol. 50, Num. 4, pp. 2776–2783, 1994.
- [45] Tang, G.H., Tao, W.Q. , He, Y.L., Thermal boundary condition for the thermal lattice Boltzmann equation, Physical Review, Vol. 72, pp. 016703.1–016703.6, 2005.
- [46] Huang, H., Lee, T.S., Shu, C., Thermal curved boundary treatment for the thermal lattice Boltzmann equation, International Journal of Modern Physics C Vol. 17, Num. 5, pp. 631–643, 2006.
- [47] Sofonea, V., Sekerka, R.F., Boundary conditions for the upwind finite difference Lattice Boltzmann model: Evidence of slip velocity in micro-channel flow, Journal of Computational Physics, Vol. 207, pp. 639–659, 2005.
- [48] D’Orazio, A., Succi, S., Boundary conditions for thermal lattice Boltzmann simulations, Lecture Notes Comput. Sci., Vol. 2657, 977–986, 2003.
- [49] D’Orazio, A., Corcione, M., Celata, G.P., Application to natural convection enclosed flows of a lattice Boltzmann BGK model coupled with a general purpose thermal boundary condition, International Journal of Thermal Science, Vol. 43, pp. 575–586, 2004.
- [50] D’Orazio, A., Succi, S., Simulating two-dimensional thermal channel flows by means of a lattice Boltzmann method with new boundary conditions, Future Generation Computer System, Vol. 20, pp. 935–944, 2004.
- [51] Mohamad, A.A., Natural convection in open cavities and slots, Numerical Heat Transfer, Vol 27, pp. 705–716, 1995.
- [52] Hinojosa, J.F., Cabanillas, R.E., Alvarez, G., Estrada, C.E., Nusslet number for the natural convection and surface thermal radiation in a square tilted open cavity, Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 32, pp. 1184–1192, 2005.

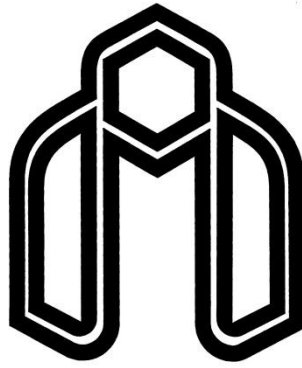
[۵۳] نظری م.، درری الف.، تفکر ص.، عباس نژاد ع.، بررسی عددی خنک کاری بهینه مانع مربعی، مجله علمی و

پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، در حال چاپ

## **Abstract**

Double diffusion natural convection in a square cavity in the presence of a hot square obstacle is simulated using the lattice Boltzmann method (LBM). Lattice Boltzmann equations for flow, temperature and concentration are presented and by comparing different hydrodynamic, thermal and concentration boundary conditions, it was found out that in a problem with straight walls, it is convenient to use first order accuracy boundary conditions and there is no need to use second order accuracy solvers in LBM. Then double diffusive natural convection in square cavity is studied via LBM while horizontal walls are adiabatic and impermeable and vertical walls of the cavity have constant temperature and concentration. A hot obstacle is in the center of the cavity which all of its walls have temperature and concentration of unity. The Prandtl number is 0.71. Viscosity is set to 0.02. The results are presented for Rayleigh numbers  $10^4$ ,  $10^5$  and  $10^6$ , Lewis numbers 0.1, 2 and 10 and aspect ratio A (obstacle height/cavity height) of 0.2, 0.4 and 0.6 for a range of buoyancy number  $N=0$  to -4. In this study the effect of aiding flow ( $N>0$ ) is not the subject of interest. The results show that when  $|N|<1$ , as buoyancy ratio increases, the Nusselt number and Sherwood number decrease with  $|N|$  and when  $|N|>1$ , these numbers rise with  $|N|$ , therefore a minimum value is observed in the Nusselt number per buoyancy ratio diagram. The Nusselt and Sherwood numbers increase with Rayleigh number and aspect ratio in a certain buoyancy ratio which this indicates the growth in heat and mass transfer rate. The flow patterns show that with increase of Rayleigh number, the multi-cell flow will form in the enclosure. As a result of rise in the effect of temperature gradient in respect to that of concentration gradient, parts of the flow will form vortices which their direction is opposite of that of main flow. These vortices will vanish as N increases. It is observed that as Lewis number increases, higher buoyancy ratio is required for concentration effect to overcome the effect of thermal diffusion Also Sherwood number increases with Lewis number.

**Key word:** double diffusion- natural convection- Lattice Boltzmann method- hot hot obstacle



**Shahrood University of Technology**  
**Faculty of Mechanical Engineering**

**Lattice Boltzmann simulation of double  
diffusive natural convection in a cavity in  
presence of a hot square obstacle**

Thesis  
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of  
Master of Science (M.Sc)

**Ladan Sadat Louhghalam**

Supervisors

**Dr. M. Kayhani**

**Dr. M. Nazari**

**Date: February 2013**