

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک  
گروه طراحی کاربردی

محاسبه پارامترهای دینامیکی شکست (ضریب شدت تنش و تنش  $T$ ) در مواد  
مرکب تحت بار حرارتی با روش اجزای محدود توسعه یافته

دانشجو  
مجتبی حاجی محمدی

استاد راهنما  
دکتر محمد جعفری

استاد مشاور  
دکتر محمدباقر نظری

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تیر ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مجتبی حاجی محمدی

تحت عنوان:

محاسبه پارامترهای دینامیکی شکست (ضریب شدت تنش و تنش  $T$ ) در مواد مرکب تحت

بار حرارتی با روش اجزای محدود توسعه یافته

در تاریخ ۱۳۹۲/۰۴/۰۹ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی: محمدباقر نظری		نام و نام خانوادگی: محمد جعفری
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : رضا طاهریان		نام و نام خانوادگی : مهدی قناد
			نام و نام خانوادگی : حمیدرضا ایپکچی
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

## تقدیم

تقدیم به اولین معلمم ، صمیمی ترین دوستم و یگانه خالقم

آنکه ید قدرتش آسمان و زمین را فراگرفته، می اندیشد بر اندیشه ما، می خواند بر زبان ما، می دمد بر قلب ما، می بیند بر دیدگان ما، آن که جهت دهد بر قدم هایمان برای پیمودن آنچه وهم انگیز است، می بوییم محبتش را و می پیماییم راه هدایتش را.

رساله را به « او » تقدیم کرده ام. اما سخت معتقدم هر انسانی یک نویسنده است و زندگی هر فرد، واقعی ترین کتاب است. امیدوارم کتاب زندگی من، شما و همه کسانی که دغدغه رشد و خوب زیستن دارند، به صورتی نگاشته شود که لایق تقدیم کردن به « او » باشد.

## تشکر

به مصداق «من لم يشكر المخلوق لم يشكر الخالق» بسی شایسته است از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر محمدباقر نظری که با کرامتی چون خورشید، گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی های کار ساز و سازنده بارور ساختند؛ تقدیر و تشکر نمایم.

بر حسب وظیفه و از باب «من لم يشكر المنعم من المخلوقين لم يشكر الله عزّ و جلّ» از استاد دانشمند و پر مایه ام جناب آقای دکتر محمد جعفری که از مساعدت های بی شائبه ایشان، بهره ها برده ام، کمال تشکر را دارم.

همچنین از پدر و مادر عزیز، دلسوز و مهربانم که برایم آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم، سپاسگزاری می نمایم.

در پایان از همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده اند، سپاسگزارم.

# تعهد نامه

اینجانب **مجتبی حاجی محمدی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه محاسبه پارامترهای دینامیکی شکست (ضریب شدت تنش و تنش  $T$ ) در مواد مرکب تحت بار حرارتی با روش اجزای محدود توسعه یافته تحت راهنمایی دکتر محمد جعفری متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

## تاریخ

### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

\* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

## چکیده

وجود ترک در سازه‌ها، باعث گسیختگی سازه‌ها در بارهای کمتر از مقدار مورد انتظار می‌شود. لذا بررسی و پیشگویی رفتار رشد ترک و شکست مواد ارتوتروپیک، لازم و ضروری است. از طرفی، بسیاری از سازه‌ها و ماشین‌ها تحت گرادیان دما و یا دمای بالا قرار می‌گیرند؛ تحلیل تنش‌های حرارتی یکی از مهمترین موضوعات مهندسی است. در این پایان نامه از روش المان محدود توسعه یافته برای محاسبه ضرایب شدت تنش و تنش  $T$  در صفحه ارتوتروپیک تحت بار حرارتی استفاده شده است. صفحه ارتوتروپیک به صورت تک لایه مستطیلی شکل در نظر گرفته شده است و نوع بارگذاری و شرایط مرزی به این گونه است که در ضلع حاوی ترک، دمای سطح، طی یک فرایند انتقال گرما، معلوم و برابر  $T_s$  است و سه ضلع دیگر عایق فرض شده اند و مساله در حالت دو بعدی بررسی گردیده است. در این پایان نامه معادلات ترموالاستیسیته غیرکوپل در نظر گرفته شده است. شبکه المانی ناحیه حل با کاربرد المانهای چهار گره‌ای و هشت گره‌ای ایجاد شده است. برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش و تنش  $T$ ، انتگرال برهم‌کنش بکار گرفته شده است. برای حل انتگرال زمانی معادلات الاستودینامیک، روش نیومارک و برای حل عددی معادله هدایت گرمایی، روش کرنک- نیکلسون بکار برده شده است.

در این پایان نامه کلیه مراحل حل مسئله از جمله المان بندی و حل معادلات مربوطه و استخراج نتایج به کمک نرم افزار *MATLAB* انجام شده است. برای بررسی صحت نتایج تحلیل حاضر و درستی برنامه نوشته شده، نتایج بدست آمده با داده‌های تحلیلی و عددی موجود در مقالات دیگر مقایسه گردیده است، نتایج حاصل تطابق قابل قبولی با نتایج و مقادیر گزارش شده دارد.

**واژه‌های کلیدی:** مواد مرکب ( ارتوتروپیک )، روش المان محدود توسعه یافته، ضرایب شدت تنش، تنش  $T$ ، تنش حرارتی

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- ۱- محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی در مواد مرکب با روش اجزای محدود توسعه یافته ، دوازدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران ، تهران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر اسفند ۱۳۹۱
- ۲- توابع غنی سازی جدید برای مدل سازی ترک در مواد ارتوتروپیک با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته ، بیست و یکمین همایش سالانه بین المللی مهندسی مکانیک ایران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ایران، تهران ، اردیبهشت ۱۳۹۲
- ۳- بررسی تاثیر زاویه ناهمسانگردی و زاویه ترک بر شکست دینامیکی مواد ارتوتروپیک، بیست و یکمین همایش سالانه بین المللی مهندسی مکانیک ایران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ایران، تهران ، اردیبهشت ۱۳۹۲
- ۴- بررسی دینامیکی یک ترک ایستا در محیط محدود دو بعدی ارتوتروپیک با روش المان محدود توسعه یافته ، مجله علمی- پژوهشی مکانیک سازه ها و شاره ها ، (تحت داوری)
- ۵- محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی در مواد ارتوتروپیک تحت بار حرارتی با روش المان محدود توسعه یافته ، مجله علمی - پژوهشی مکانیک تربیت مدرس، (تحت داوری)



## فهرست مطالب

صفحه	
	فصل اول
۱	کلیات
۲	۱-۱- مقدمه
۴	۱-۲- مروری بر تحقیقات انجام شده
۱۴	۱-۳- رفتار مکانیکی تک لایه ها
	فصل دوم
۱۷	روش المان محدود توسعه یافته
۱۸	۱-۲- مقدمه
۱۹	۲-۲- روند تحلیل المان محدود
۱۹	۱-۲-۲- تقسیم بندی هندسه مساله به نواحی ساده
۱۹	۲-۲-۲- ایجاد المان در نواحی معرفی شده
۲۰	۳-۲-۲- معرفی خصوصیات مواد
۲۱	۴-۲-۲- محاسبه ماتریس سفتی
۲۴	۵-۲-۲- نصب ماتریس سفتی المان ها در ماتریس سفتی کل
۲۴	۶-۲-۲- معرفی شرایط مرزی نیرو و جابجایی
۲۵	۳-۲- مدل سازی ترک با روش المان محدود توسعه یافته
۲۶	۱-۳-۲- فرمول بندی و گسسته سازی معادلات
۲۷	۲-۳-۲- تقریب المان محدود توسعه یافته
۳۶	۳-۳-۲- استخراج رابطه سفتی برای انواع المان
۳۹	۴-۳-۲- جزئیات کاربردی
۴۵	۵-۳-۲- محاسبه میدان جابه جایی
	فصل سوم
۴۶	روش انتگرال برهم کنش برای تحلیل شکست مواد مرکب
۴۷	۱-۳- مقدمه
۴۷	۲-۳- فرمول بندی انتگرال برهم کنش
۵۰	۳-۳- ضرایب شدت تنش
۵۱	۱-۳-۳- میدان های کمکی ضرایب شدت تنش
۵۲	۲-۳-۳- استخراج ضرایب شدت تنش
۵۲	۴-۳- تنش $T$
۵۳	۱-۴-۳- میدان های کمکی تنش $T$
۵۴	۲-۴-۳- دیدگاه لختنسیکی
۵۶	۳-۴-۳- استخراج تنش $T$
۵۷	۵-۳- مثال های عددی
۵۸	۱-۵-۳- ترک لبه ای برای ماده ایزوتروپیک در حالت استاتیکی
۵۹	۲-۵-۳- ترک مرکزی برای ماده ایزوتروپیک در حالت استاتیکی

۶۲	۳-۵-۳	ترک لبه‌ای برای ماده ارتوتروپیک در حالت استاتیکی
۶۵	۳-۵-۴	ترک مرکزی برای ماده ارتوتروپیک در حالت استاتیکی
		فصل چهارم
۷۲		تحلیل دینامیکی ترک ایستا
۷۳	۴-۱-۱	مقدمه
۷۳	۴-۲-۲	معادلات حاکم
۷۴	۴-۲-۱	استخراج ماتریس جرم برای انواع المان
۷۶	۴-۳-۳	حل معادله دینامیکی
۷۷	۴-۴-۴	انتگرال بر هم‌کنش برای مواد ارتوتروپیک در حالت دینامیکی
۷۷	۴-۵-۵	مثال های عددی
۷۸	۴-۵-۱	ترک لبه‌ای برای ماده ایزوتروپیک در حالت دینامیکی
۷۹	۴-۵-۲	ترک لبه‌ای برای ماده ارتوتروپیک در حالت دینامیکی
۸۲	۴-۵-۳	ترک مرکزی برای ماده ارتوتروپیک در حالت دینامیکی
		فصل پنجم
۸۹		تحلیل حرارتی ترک ایستا
۹۰	۵-۱-۱	مقدمه
۹۰	۵-۲-۲	هدایت حرارتی در مواد ارتوتروپیک
۹۲	۵-۳-۳	حل عددی معادله هدایت گرمایی
۹۲	۵-۳-۱	فرم ضعیف معادلات حاکم
۹۳	۵-۳-۲	گسسته سازی معادلات حاکم
۹۷	۵-۴-۴	بررسی ترک در میدان ترموالاستیک
۹۷	۵-۴-۱	انتگرال برهم‌کنش برای شکست حرارتی
۹۹	۵-۵-۵	مثال های عددی
۱۰۰	۵-۵-۱	ترک لبه‌ای برای ماده ایزوتروپیک تحت بار حرارتی (شبه استاتیکی)
۱۰۶	۵-۵-۲	ترک لبه‌ای برای ماده ایزوتروپیک تحت بار حرارتی (دینامیکی)
۱۰۸	۵-۵-۳	ترک لبه‌ای برای ماده ارتوتروپیک تحت بار حرارتی (دینامیکی)
		فصل ششم
۱۱۳		نتیجه گیری و پیشنهادها
۱۱۴	۶-۱-۱	خلاصه نتایج
۱۱۵	۶-۲-۲	پیشنهادهای عملی بر اساس نتایج حاصل از پایان نامه
۱۱۵	۶-۳-۳	پیشنهاد موضوع برای پژوهش های بعدی
۱۱۶		مراجع و منابع

## فهرست اشکال

شماره	عنوان	صفحه
۱-۲	نگاشت تبدیل ناحیه چهارضلعی مورد نظر به یک مربع	۲۰
۲-۲	نمایش گره‌هایی که نیاز به غنی‌سازی خارجی جهت افزایش درجات آزادی دارند	۲۶
۳-۲	جسم با مرزهای داخلی تحت بارگذاری خارجی	۲۷
۴-۲	تکیه‌گاه یک گره	۲۸
۵-۲	نمایش مختصات عمودی و مماسی برای یک ترک یکنواخت	۲۹
۶-۲	ترکی که بر روی شبکه قرار ندارد	۳۰
۷-۲	مختصات قطبی محلی نوک ترک	۳۲
۸-۲	مختصات قطبی محلی روی هر دو نوک ترک	۳۲
۹-۲	دستگاه مختصات متعامد محلی نوک ترک $(\phi - \psi)$	۴۱
۱۰-۲	تقسیم سطح مجموعه المانی به دو سطح، نسبت به موقعیت ترک	۴۲
۱۱-۲	رسم مثلث‌های دلانی	۴۳
۱۲-۲	مثلث‌های استفاده شده برای المان بریده شده با ترک	۴۴
۱۳-۲	مثلث‌های استفاده شده برای المان نوک ترک	۴۵
۱-۳	تبدیل فرم کانتوری انتگرال $J$ به فرم ناحیه‌ای [۳۱]	۴۸
۲-۳	پیوستار دو بعدی شامل ترک و دستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی نوک ترک	۵۱
۳-۳	اعمال یک بار نقطه ای به نوک یک ترک نیمه بی نهایت	۵۳
۴-۳	نیروی نقطه ای اعمال شده به نوک ترک در راستای ترک در صفحه ارتوتروپیک بی نهایت	۵۵
۵-۳	صفحه ارتوتروپیک دارای ترک مرکزی تحت تنش	۵۷
۶-۳	صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت تنش	۵۸
۷-۳	صفحه ایزوتروپیک دارای ترک مرکزی تحت تنش	۵۹
۸-۳	مقادیر ضریب شدت تنش بی‌بعد $K_{In}$ در زوایای مختلف ترک $(\beta)$ برای ماده ایزوتروپیک	۶۱
۹-۳	مقادیر ضریب شدت تنش بی‌بعد $K_{IIn}$ در زوایای مختلف ترک $(\beta)$ برای ماده ایزوتروپیک	۶۱
۱۰-۳	صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت تنش	۶۳
۱۱-۳	مقادیر ضریب شدت تنش بی‌بعد $K_{In}$ در صفحه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی $(\alpha)$	۶۳
۱۲-۳	مقادیر ضریب شدت تنش بی‌بعد $K_{IIn}$ در صفحه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی $(\alpha)$	۶۴
۱۳-۳	مقادیر ضریب شدت تنش بی‌بعد $K_{In}$ در یک صفحه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی $(\alpha)$ با استفاده از توابع غنی سازی جدید	۶۴
۱۴-۳	مقادیر ضریب شدت تنش بی‌بعد $K_{IIn}$ در یک صفحه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی $(\alpha)$ با استفاده از توابع غنی سازی جدید	۶۵
۱۵-۳	صفحه ارتوتروپیک دارای ترک مرکزی تحت تنش	۶۵
۱۶-۳	ضریب شدت تنش بی‌بعد $K_{In}$ در زوایای ناهمسانگردی مختلف و زاویه ترک صفر درجه	۶۷
۱۷-۳	ضریب شدت تنش بی‌بعد $K_{IIn}$ در زوایای ناهمسانگردی مختلف و زاویه ترک صفر درجه	۶۷
۱۸-۳	ضریب شدت تنش بی‌بعد $K_{In}$ بر حسب زاویه ترک $(\beta)$ در زوایای ناهمسانگردی مختلف	۶۸

۶۸	ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ بر حسب زاویه ترک ( $\beta$ ) در زوایای ناهمسانگردی مختلف	۱۹-۳
۷۰	ضریب شدت تنش بی بعد $K_{II}$ بر حسب زاویه ترک ( $\beta$ ) در زاویه ناهمسانگردی ( $\alpha=45$ ) با توابع غنی سازی ارائه شده جدید	۲۰-۳
۷۰	ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ بر حسب زاویه ترک ( $\beta$ ) در زاویه ناهمسانگردی ( $\alpha=45$ ) با توابع غنی سازی ارائه شده جدید	۲۱-۳
۷۸	صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بار دینامیکی	۱-۴
۷۸	مقدار ضریب شدت تنش $K_I$ در زمان‌های مختلف در ماده ایزوتروپیک	۲-۴
۷۹	صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بار دینامیکی	۳-۴
۸۰	مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{II}$ در زمان‌های مختلف در ماده ارتوتروپیک	۴-۴
۸۰	مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ در زمان‌های مختلف با زوایای ناهمسانگردی مختلف	۵-۴
۸۱	مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ در زمان‌های مختلف با زاویه ناهمسانگردی صفر درجه در ماده ارتوتروپیک با توابع غنی سازی جدید $\Delta t = a/1 \cdot c_1$	۶-۴
۸۲	مقدار دینامیکی تنش $T$ در زمان‌های مختلف در ماده ارتوتروپیک	۷-۴
۸۳	صفحه ارتوتروپیک دارای ترک مرکزی تحت بار دینامیکی	۸-۴
۸۳	مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ در ترک با زاویه صفر درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک	۹-۴
۸۴	مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ در ترک با زاویه صفر درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک	۱۰-۴
۸۵	مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ در ترک با زاویه ۴۵ درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک	۱۱-۴
۸۵	مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ در ترک با زاویه ۴۵ درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک	۱۲-۴
۸۶	مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ در ترک با زاویه صفر درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک (توابع جدید)	۱۳-۴
۸۶	مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ در ترک با زاویه صفر درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک (توابع جدید)	۱۴-۴
۸۷	مقایسه مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ در توابع غنی سازی ارائه شده و توابع قبلی، در ترک با زاویه صفر درجه، در زمان‌های مختلف و زوایای ناهمسانگردی صفر درجه	۱۵-۴
۸۷	مقایسه مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ در توابع غنی سازی ارائه شده و توابع قبلی، در ترک با زاویه صفر درجه، در زمان‌های مختلف و زوایای ناهمسانگردی ۴۵ درجه	۱۶-۴
۸۸	مقایسه مقدار ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ در توابع غنی سازی ارائه شده و توابع قبلی، در ترک با زاویه صفر درجه، در زمان‌های مختلف و زوایای ناهمسانگردی ۴۵ درجه	۱۷-۴
۹۲	شرایط مرزی مختلف اعمال شده در حالت کلی	۱-۵
۱۰۰	صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری حرارتی	۲-۵
۱۰۱	نمودار تغییرات دما در راستای عرضی در زمان‌های مختلف	۳-۵
۱۰۲	نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ بر حسب زمان بی بعد برای طول ترک‌های متفاوت در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای با روش تحلیلی [۹]	۴-۵
۱۰۲	نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش بی بعد $K_{III}$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه	۵-۵

	ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول $a=0.3 \text{ mm}$	
۱۰۳	نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش بی بعد $K_{Im}$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول $a=0.4 \text{ mm}$	۶-۵
۱۰۳	نمودار ضریب شدت تنش $K_I$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول $a=0.4 \text{ mm}$	۷-۵
۱۰۴	نمودار ضریب شدت تنش $K_I$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول $a=0.5 \text{ mm}$	۸-۵
۱۰۵	المان های هشت گره ای با اندازه متغیر	۹-۵
۱۰۵	نمودار ضریب شدت تنش $K_I$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول $a=0.4 \text{ mm}$ با المان های مختلف	۱۰-۵
۱۰۶	نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش بی بعد $K_{Im}$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول $a=0.4 \text{ mm}$ با المان های مختلف	۱۱-۵
۱۰۷	نمودار ضریب شدت تنش $K_I$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول $a=0.4 \text{ mm}$ در حالت دینامیکی	۱۲-۵
۱۰۷	نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش بی بعد $K_{Im}$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول $a=0.4 \text{ mm}$ در حالت دینامیکی	۱۳-۵
۱۰۸	صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری حرارتی	۱۴-۵
۱۰۹	نمودار ضریب شدت تنش دینامیکی $K_I$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول $a=0.4 \text{ mm}$	۱۵-۵
۱۱۰	نمودار ضریب شدت تنش دینامیکی $K_I$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای در زوایای ناهمسانگردی مختلف	۱۶-۵
۱۱۰	نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش دینامیکی $K_I$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای در زوایای ناهمسانگردی مختلف	۱۷-۵
۱۱۱	نمودار ضریب شدت تنش دینامیکی $K_{II}$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای در زوایای ناهمسانگردی مختلف	۱۸-۵
۱۱۱	نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش دینامیکی $K_{II}$ بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای در زوایای ناهمسانگردی مختلف	۱۹-۵
۱۱۲	مقدار دینامیکی تنش $T$ در زمان‌های مختلف در ماده ارتوتروپیک تحت بار حرارتی	۲۰-۵

## فهرست جداول

صفحه	عنوان	شماره
۵۸	مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد در مش‌بندی های مختلف برای ماده ایزوتروپیک	۱-۳
۶۰	مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد در زوایای مختلف ترک ( $\beta$ ) برای ماده ایزوتروپیک با روش ارائه شده	۲-۳
۶۲	مقادیر تنش $T$ در زوایای مختلف ترک ( $\beta$ ) برای ماده ایزوتروپیک با روش ارائه شده و روش تحلیلی	۳-۳
۶۶	مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد در مش‌بندی های مختلف برای ماده ارتوتروپیک	۴-۳
۶۶	مقایسه مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد برای ماده ارتوتروپیک با روش‌های دیگر	۵-۳
۶۹	مقایسه مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد بدست آمده از توابع جدید برای ماده ارتوتروپیک با روش‌های دیگر	۶-۳
۷۱	مقادیر تنش $T$ برای ماده ارتوتروپیک با مش بندی های مختلف	۷-۳
۷۱	مقایسه مقادیر تنش $T$ برای ماده ارتوتروپیک با روش‌های دیگر	۸-۳

فصل اول

# کلیات

از آنجایی که مقاومت بر واحد وزن مواد مرکب خیلی بیشتر از سایر مواد مهندسی متعارف است، کاربردهای مهندسی و صنعتی این مواد در سال‌های اخیر توسعه یافته‌است. بسیاری از نیازهای صنعتی صنایعی مانند صنایع فضایی، راکتورسازی، الکترونیک و غیره نمی‌تواند با استفاده از مواد معمولی شناخته‌شده، برآورده‌شود. با توجه به مقاومت مواد مرکب، این مواد معمولاً به صورت لایه‌های نازک ساخته می‌شوند که رفتاری ارتوتروپیک دارند. رفتار این لایه‌ها به صورت ورق‌های نازک و پوسته‌ها بسیار کارآمد می‌باشند. رایج‌ترین آسیب در این مواد که در شرایط مختلف رخ می‌دهد، ایجاد ترک است. ترک‌ها در اثر عواملی چون وجود ضعف اولیه در مقاومت مواد تشکیل‌دهنده آن، ایجاد خستگی، رسیدن به تسلیم و یا وجود نقص در هنگام ساخت حاصل می‌شوند. وجود ترک در سازه‌ها باعث گسیختگی سازه‌ها در بارهای کمتر از مقدار مورد انتظار می‌شود. از ویژگی‌ها و مشکلات تحلیل ترک خوردگی این مواد، ارتوتروپ بودن آن است که سبب می‌شود که ویژگی‌های مادی آن در زوایای مختلف متفاوت گردد.

در تحلیل و طراحی اجسام دارای ترک، مکانیک شکست یکی از ابزارهای اساسی است. داشتن اطلاعاتی در مورد ترک اهمیت ویژه‌ای در ارزیابی ایمنی و عمر قطعات و سازه‌ها دارد. لذا بررسی و پیشگویی رفتار رشد ترک و شکست مواد ارتوتروپیک، لازم و ضروری است. مطالعات در زمینه‌ی شکست مواد مرکب در طی دو دهه‌ی گذشته انجام گرفته‌است. در این مدت تغییرات فاکتورهای مختلف شامل نوع بارگذاری و مدل‌سازی ترک با روش‌های کلاسیک بررسی شده‌است.

امروزه در بسیاری موارد، اجزای سازه‌ها و ماشین‌ها علاوه بر نیروهای مکانیکی در معرض بارگذاری حرارتی نیز قرار می‌گیرند. مخازن تحت فشار و لوله‌ها در راکتور نیروگاه هسته‌ای، اجزای داخلی راکتورهای شیمیایی و بدنه هواپیماهای فوق سریع در دماهای بالا، تحت گرادیان شدید و تغییر نوسانی دما قرار می‌گیرند. بنابراین تحلیل تنش‌های حرارتی یکی از مهم‌ترین موضوع‌های مهندسی است. طبق تحقیقات شکست تحت بارهای حرارتی یکی از مرسوم‌ترین و پیچیده‌ترین حالت‌های



گسیختگی در سازه‌ها می‌باشد. با توجه به محدودیت خصوصیات مواد ایزوتروپیک در دماهای بالا، انتخاب مواد با خواص مکانیکی و حرارتی قابل قبول از مهمترین چالش‌های طراحی در این زمینه می‌باشد.

موضوع اصلی مورد بحث، بررسی رفتار ترک در مواد ارتوتروپیک تحت بار حرارتی می‌باشد. با کاربرد روش عددی المان محدود توسعه یافته به بررسی رفتار ترک پرداخته و ضرایب شدت تنش و تنش  $T$  محاسبه می‌شود.

به منظور مدل‌سازی ترک، یک مدل ساده ولی کارآمد در نظر گرفته شده است. در این پایان نامه ابتدا روابط مربوط به روش المان محدود توسعه یافته و کاربرد آن در مدل‌سازی ترک دینامیکی با توابع غنی‌سازی نوک ترک ارائه شده است. در ادامه، میدان‌های جابجایی و تنش در نزدیکی نوک ترک بیان شده است. برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش دینامیکی و تنش  $T$  از میدان‌های کمکی و انتگرال برهم‌کنش استفاده شده است. برای حل انتگرال زمانی، روش نیومارک بکار برده شده است و برای حل معادله حرارتی از روش کرانک نیکلسون استفاده شده است.

در این پایان نامه کلیه مراحل حل مسئله از جمله المان‌بندی و حل معادلات مربوطه و استخراج نتایج به کمک نرم‌افزار *MATLAB* انجام شده است. برای بررسی صحت نتایج تحلیل حاضر و درستی برنامه نوشته شده، نتایج بدست آمده با داده‌های تحلیلی و عددی موجود در مقالات دیگر مقایسه گردیده است، نتایج حاصل تطابق قابل قبولی با نتایج و مقادیر گزارش شده دارد.

## ۱-۲- مروری بر تحقیقات انجام شده

اهمیت و کاربرد گسترده مواد ارتوتروپیک در بسیاری از صنایع از جمله خودرو و هوافضا، به نیاز رو به رشد برای درک بهتر از رفتار این مواد منجر شده است. مدل کردن ناپیوستگی‌ها و به ویژه ترک به علت ضرورت آن همیشه از نظر طراحی که با دیدگاه مکانیک شکست و تحمل ترک توسط قطعه، طراحی می‌کرده‌اند از اهمیت خاصی برخوردار بوده است. یکی از موضوعات بسیار مهم در مکانیک جامدات مدل‌سازی پدیده‌های شکست و خرابی است که این کار معمولاً به وسیله روش المان محدود انجام می‌شود که در نیمه دوم قرن گذشته میلادی در این زمینه به کار گرفته شد. استفاده بهینه همراه با رعایت ایمنی کامل در طراحی، مستلزم تحلیل رفتار این مواد در شرایط بحرانی ایجاد شده در آن‌ها می‌باشد. بر این اساس، بسیاری از تحقیقات انجام شده در دهه‌های اخیر جهت شبیه‌سازی و تحلیل رفتار پیچیده این مواد است.

موشخلیشوویلی<sup>۱</sup>، لخنیتسکی<sup>۲</sup> [۲]، سی<sup>۳</sup> و همکاران [۳]، برای حل تعدادی از مشکلات الاستیسیته تلاش کردند که با روش‌های تحلیلی مانند توابع مختلط به بررسی ناپیوستگی‌ها در مواد ناهمسانگرد الاستیک پرداختند. نوبایل<sup>۴</sup> و کارلونی<sup>۵</sup> با حل تحلیلی مساله مقدار مرزی در مواد ناهمسانگرد به تجزیه و تحلیل دینامیکی ترک پرداختند [۷-۸]. سیم<sup>۶</sup> و لی<sup>۷</sup> [۹] ضریب شدت تنش را در نوار ایزوتروپیک بینهایت دارای ترک لبه ای که در معرض شوک حرارتی می‌باشد، با استفاده از روش تابع وزنی بدست آوردند.

با توجه به عدم امکان به دست آوردن راه حل‌های تحلیلی در کلیه مسائل، به خصوص در موارد پیچیده مهندسی، روش‌های عددی بهترین روش می‌باشند. روش‌های عددی از قبیل المان مرزی<sup>۸</sup>،

---

<sup>1</sup> Muskelishvili

<sup>2</sup> Lekhnitskii

<sup>3</sup> Sih

<sup>4</sup> Nobile

<sup>5</sup> Carloni

<sup>6</sup> sim

<sup>7</sup> lee

<sup>8</sup> Boundary element method

بدون المان<sup>۱</sup> و المان محدود<sup>۲</sup> در بسیاری موارد توسعه یافته اند و مورد کاربرد های مهندسی قرار گرفته اند. در دهه گذشته شکست دینامیکی مواد مرکب یکی از زمینه های مورد توجه محققین بوده است [۱۰]. علی آبادی و همکاران، راه حل های المان مرزی را برای انتشار ترک و تجزیه و تحلیل دینامیکی ترک در مواد ارتوتروپیک ارائه کردند [۱۱]. سانچز<sup>۳</sup> و همکارانش با استفاده از روش المان مرزی، ترک در مواد جامد الاستیک دو بعدی، همگن و ناهمسانگرد که تحت بار دینامیکی قرار دارد را تجزیه و تحلیل نموده اند [۱۲].

روش المان مرزی، صرف نظر از تمام مزایایی که دارد، در مقایسه با روش المان محدود، کمتر در سیستم های غیر خطی به کار می رود. روش المان محدود در بسیاری از برنامه های دانشگاهی و صنعتی استفاده می شود. با این حال، این روش نیز دارای محدودیت است. روش المان محدود قادر است سیستم های غیر خطی را تحلیل کند و می تواند به آسانی با شرایط مرزی عمومی و هندسی تطبیق داده شود، اما برای مدل سازی ترک، مش های المان محدود باید با سطح ترک مطابق باشد و با گسترش ترک تطبیق داده شود. اورتیز و همکارانش روش المان محدود برای تجزیه و تحلیل شکست موضعی را بررسی نمودند [۱۳]. این روش با هدف ارتقاء بخشیدن به عملکرد المان محدود در مسائل محلی سازی کرنش پیشنهاد شده است. هنگامی که نقطه شروع محلی سازی شناسایی شد، توابع شکل مناسب در درون المان هایی که نزدیک آن نقطه است، تعریف می شود. آنها روش پیشنهادی را در مسائل دوبعدی و سه بعدی استفاده کردند.

روش های المان محدود و المان مرزی از سال ۱۹۸۷ به بعد برای مدل کردن ترک به کار گرفته شده اند و در هر یک از این دو روش نیز پیشرفت هایی حاصل گشته، ولی مشکل مشترک این دو روش، تطبیق ترک با مش بندی و تغییر مش در هر مرحله از رشد ترک می باشد.

---

<sup>1</sup> meshless

<sup>2</sup> Finite Element method

<sup>3</sup> Sanchez

بلیچکو<sup>۱</sup> و همکارانش روش بدون المان را که در آن فقط گره در محیط مدل در نظر گرفته می‌شد، بنیانگذاری کردند [۱۵-۱۶]. آن‌ها روش بدون المان گالرکین<sup>۲</sup> را ارائه نموده و مسائل شکست ایستا و دینامیکی را بررسی کردند. روش بدون المان گالرکین، که بر پایه توابع شکل حداقل مربعات متحرک است، تنها نیاز به داده‌ها در گره‌ها، بدون اتصال به المان مورد نظر دارد. آنها هندسه و مدل عددی از مسئله که تنها شامل مجموعه‌ای از گره‌ها و توصیفی از مرزهای بیرونی و مرزهای داخلی ترک شده است را بررسی کردند. حداقل مربعات بوسیله حداقل کردن مجموع باقیمانده‌ها در نقاط هم‌مکان، منجر به تشکیل یک دستگاه معادلات گسسته می‌شود. از آنجایی که این روش هیچ نیازی به شبکه بندی ندارد، می‌توان گفت که به طور کامل یک روش بدون شبکه است.

استفاده از مفهوم تفکیک پیوستگی که ملنک<sup>۳</sup> و بابوسکا<sup>۴</sup> ارائه کردند چشم‌انداز جدیدی برای مدل کردن ترک بوجود آورد [۱۷]. آن‌ها نشان دادند که پیکره‌بندی واحد روش المان محدود<sup>۵</sup>، چگونه می‌تواند با بکارگیری ساختار معادله دیفرانسیل به روش‌های موثر و قوی، مورد استفاده قرار گیرد. اگر چه روش و تئوری آن‌ها در  $n$  بعد معتبر می‌باشد، آنها تجزیه و تحلیل دقیق و گویا برای یک مسئله یک بعدی را بررسی کرده‌اند. در همین حال، بلیچکو و همکاران برای حل و بهبود مشکلات شکست دینامیکی، روش بدون المان گالرکین توسعه دادند [۱۸].

بهبود درخور توجهی که در مدل سازی ترک به وجود آمد، بکارگیری نحوه غنی‌سازی موجود در روش پیکره‌بندی واحد<sup>۶</sup> در زمینه ناپیوستگی‌ها می‌باشد که تحت عنوان روش المان محدود توسعه یافته<sup>۷</sup> بدان اشاره شده است. از پیشگامان این حوزه می‌توان از بلیچکو و همکارانش نام برد [۱۹].

در حالت کلی روش‌های رشد ترک به دو گروه کلی تقسیم می‌شوند. در گروه اول که گروه نمایش هندسی نامیده می‌شود، ترک به صورت هندسی در نظر گرفته می‌شود؛ بدین ترتیب هندسه و

---

<sup>1</sup> Belytschko

<sup>2</sup> EFG

<sup>3</sup> Melenk

<sup>4</sup> Babuska

<sup>5</sup> PUFEM

<sup>6</sup> Partition of Unity

<sup>7</sup> Extended Finite Element Method (XFEM)

شبکه‌بندی مدل در حین رشد ترک تغییر می‌کند. در گروه دوم که گروه نمایش غیرهندسی نامیده می‌شود، هندسه ترک در حین آنالیز به صورت مستقیم وارد نمی‌شود؛ بلکه تأثیر حضور ترک در روابط حاکم وارد می‌شود. این تأثیر می‌تواند در روابط بنیادین تنش-کرنش و یا در روابط سینماتیک کرنش-تغییر مکان لحاظ شود. در حالت اول ماتریس  $C$  و در حالت دوم ماتریس  $B$  تحت تأثیر قرار می‌گیرد. ( توضیح اینکه در فرمول‌بندی المان محدود داریم:  $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$  و  $\{\varepsilon\} = [B]\{u\}$  که در آن  $\{\sigma\}$  و  $\{\varepsilon\}$  و  $\{u\}$  به ترتیب بردارهای تنش، کرنش، و تغییر مکان هستند.) یکی از روش‌هایی که با تأثیر در روابط سینماتیک حضور ترک را در نظر می‌گیرد، روش المان محدود توسعه یافته می‌باشد. در این روش با افزودن درجه آزادی به گره‌های اطراف ترک، حضور ترک مدل می‌شود.

در سال ۱۹۹۸ بلیچکو و بلک [۱۹]، برای اولین بار از روش المان محدود توسعه یافته در مسایل مکانیک شکست استفاده کردند. با استفاده از این روش مدل سازی رشد ترک می‌تواند بدون شبکه بندی مجدد صورت پذیرد. در این روش یکسری توابع خاص در قالب پیکره‌بندی واحد به تقریب المان محدود اضافه می‌گردد. برای مدلسازی ترک، از تابع ناپیوسته تعمیم یافته هویساید<sup>۱</sup> و همچنین از توابع دوبعدی تغییر مکان‌های حوزه نوک ترک استفاده می‌شود تا ترک در مدل المان محدود لحاظ شود. این کار باعث می‌شود تا ترک بدون احتیاج به هیچ‌گونه مش‌بندی خاص در المان محدود مدل شود. در نتیجه برای یک مش المان محدود مشخص، مکان ترک دلخواه و گسترش آن در حالات شبه استاتیکی و دینامیکی بدون نیاز به تغییر مش قابل اجرا می‌باشد. ماوس<sup>۲</sup> و همکارانش نیز روشی بر پایه المان محدود که نیاز به مش‌بندی مجدد نداشت را براساس مفهوم تفکیک پیوستگی معرفی کردند [۲۰].

دالبو<sup>۳</sup> جزئیات مربوط به تعیین گره‌های اطراف ترک و غنی‌سازی آنها را بیان کرد و روابط پایه جهت اضافه کردن توابع پله‌ای واحد و تکینه را برای مدل‌های ساده با المان‌های چهار گره‌ای ارائه

<sup>1</sup> Heaviside

<sup>2</sup> Moes

<sup>3</sup> Dolbow

نمود [۲۱]. اساس غنی‌سازی از ادغام مجموعه‌ای از توابع شکل گره‌ای با مجموعه‌ای از حاصل ضرب توابع شکل گره‌ها و توابع غنی‌سازی شکل گرفته‌است. به منظور جلوگیری از وابستگی‌های خطی در تقریب و حالت‌های منحصر به فرد احتمالی در سیستم کلی از معادلات، دستورالعمل‌ها برای مجموعه‌ای از گره‌های غنی‌شده است. ناپیوستگی در توابع غنی‌سازی با هندسه مشخص شده هماهنگ بوده و یک میدان ناپیوسته به طور مستقل از مش المان محدود نشان داده شده‌است. دائوکس<sup>۱</sup> و همکارانش ترک‌های چند شاخه و سوراخ‌ها را به روش المان محدود توسعه یافته بررسی کردند [۲۲]. از ویژگی‌های روش المان محدود توسعه یافته این است که چون معادلات پایه آن براساس روش المان محدود استاندارد استوار است لذا تمام خواص آن را به همراه خواهد داشت و همچنین امکان استفاده از المان‌های نسبتاً درشت‌تر و معمولی (غیرتکینه) در اطراف نوک ترک نیز میسر می‌باشد. در این روش برای مدل کردن ترک درون یک المان پیوسته (به صورت مستقل از مش)، با استفاده از مفهوم تفکیک پیوستگی شرایط مرزی ترک را به گره‌ها منتقل نمودند. با این کار درجات آزادی گره‌های اطراف ترک به صورت مجازی افزایش می‌یابد که این کار غنی‌سازی گره‌ای، نامیده می‌شود.

دالبو و همکارانش با استفاده از توابع غنی‌ساز مناسب از طریق روابط انرژی و انتگرال  $J$  پارامترهای نوک ترک را به دست آوردند [۲۳]. برای اولین بار کاربرد روش المان محدود توسعه یافته در مدل کردن ترک‌های سه بعدی توسط سوکمار<sup>۲</sup> و همکارانش ارائه شد [۲۴]. آن‌ها همچنین ضرایب شدت تنش<sup>۳</sup> را برای ترک مسطح سه بعدی ارائه کردند.

در بررسی ترک‌های دو بعدی ارائه معیار تشخیص و انتخاب گره‌هایی که باید غنی‌سازی برایشان انجام شود کار دشواری بوده است و این مشکل در مدل‌های سه بعدی بیشتر نمود پیدا کرده‌است، از این رو روشی به نام مجموعه بردارهای مرتبه‌ای<sup>۴</sup> در سال ۲۰۰۱ توسط استلارسکا<sup>۱</sup> و همکارانش در

---

<sup>۱</sup> Daux

<sup>۲</sup> Sukumar

<sup>۳</sup> SIFs

<sup>۴</sup> Level Sets

حالت دو بعدی به کار برده شده است [۲۵]، آنها یک الگوریتم کارآمد ارائه کردند. روش مجموعه بردارهای مرتبه ای برای نشان دادن موقعیت ترک، از جمله محل نوک ترک استفاده می شود. علاوه بر این، الگوریتم مجموعه بردارهای مرتبه ای برای مدل سازی رشد ترک در سه بعد شرح داده شده است. سوکمار و همکارانش روش مدل سازی حفره ها و روابط المان محدود بدون مش زدن مرزهای داخلی را ارائه کردند [۲۶] و روش مجموعه بردارهای مرتبه ای را برای نشان دادن محل سوراخ ها و واسط های المان ها مورد استفاده قرار دادند. همچنین از نمونه های عددی در الاستوالاستیک خطی دو بعدی برای نشان دادن دقت روش جدید استفاده کردند.

روش دیگری در سال ۲۰۰۳ به نام *Fast Marching* توسط سوکمار و همکارانش در حالت سه بعدی به کار برده شده است [۲۸]. آن ها روش های عددی برای شبیه سازی رشد ترک سه بعدی مسطح پیشنهاد دادند. روش مزدوج جدید با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته و *Fast Marching* ارائه شده است.

کیم<sup>۲</sup> و پائولینو<sup>۳</sup> [۳۱]، ضرایب شدت تنش را با استفاده از روش انتگرال برهم کنش، برای مواد مرکب تابعی ارتوتروپیک بدست آوردند. همچنین سونگ<sup>۴</sup> و پائولینو، ضرایب شدت تنش دینامیکی را برای مواد همگن و ناهمگن ایزوتروپیک با استفاده از روش انتگرال متقابل بررسی نمودند [۳۲]. توسعه توابع جدید غنی سازی برای تجزیه و تحلیل المان محدود توسعه یافته در مواد ارتوتروپیک، توسط اسدپور و همکاران گزارش شده است [۳۳-۳۵]. آن ها یک مجموعه یکپارچه از توابع غنی سازی برای المان های اطراف نوک ترک ارائه نمودند و با استفاده از روش انتگرال برهم کنش، ضرایب شدت تنش را در مواد ارتوتروپیک بدست آوردند.

---

<sup>1</sup> Stolarska

<sup>2</sup> Kim

<sup>3</sup> Paulino

<sup>4</sup> Song

وانگ<sup>۱</sup> و همکارانش در سال ۲۰۰۹ میدان های دینامیکی نوک ترک و ویژگی های انتشار ترک دینامیکی را در مواد ناهمسانگرد بررسی نمودند [۳۶]. منویلارد<sup>۲</sup> و بلیچکو در سال ۲۰۱۰ شکست دینامیکی را برای مواد ایزوتروپیک با روش غنی سازی المان محدود توسعه یافته بررسی نمودند [۳۷]. معتمدی و محمدی با استفاده از همان توابع غنی سازی مواد ارتوتروپیک به بررسی پایداری ترک دینامیک و انتشار در مواد مرکب پرداخته اند [۳۸]. معتمدی و محمدی در سال ۲۰۱۰ شبیه سازی تجزیه و تحلیل دینامیکی ترک ثابت در مواد ارتوتروپیک با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته را بررسی نمودند [۳۹].

لارسون<sup>۳</sup> و کارلسون<sup>۴</sup> در سال ۱۹۷۳ تنش  $T$  را بررسی نمودند، آن ها دریافتند شکل و اندازه ناحیه پلاستیک نوک ترک به مقدار تنش  $T$  وابسته است [۴۰]. پس از آن، بتگن<sup>۵</sup> و هنکک<sup>۶</sup> میدان های الاستیک - پلاستیک دو پارامتری حوزه نوک ترک را بررسی نمودند [۴۱].

دو<sup>۷</sup> و هنکک اثر تنش  $T$  روی میدان های حوزه نوک ترک در مواد الاستیک - پلاستیک کامل را مطالعه کردند [۴۲]. بعدها ادد<sup>۸</sup> و شی<sup>۹</sup> تئوری  $J-Q$  را ارائه کردند که به عنوان شاخصی برای ناحیه تسلیم کوچک و مرز تبدیل آن به ناحیه تسلیم بزرگ در نظر گرفته شد [۴۳]. همچنین ادد و شی نشان دادند در تئوری  $J-Q$  می توان چقرمگی را اندازه گرفت و در کاربردهای مهندسی بکار برد [۴۴]. مطالعات فوق در حیطه مواد همگن و ایزوتروپیک انجام شده است. برای مواد همگن، آیت الهی و همکارانش نیز با استفاده از روش های مستقیم در میدان های تنش و تغییر مکان، تنش  $T$  را برای بارگذاری های مود  $I$  و مود مختلط محاسبه کردند [۴۵].

---

<sup>1</sup> Wang

<sup>2</sup> Menouillard

<sup>3</sup> Larsson

<sup>4</sup> Carlson

<sup>5</sup> Betegon

<sup>6</sup> Hancock

<sup>7</sup> Du

<sup>8</sup> O'Dowd

<sup>9</sup> Shih



روش های مستقیم مثل روش فوق بر پایه استفاده از کمیت های محاسبه شده حوزه نوک ترک و بخصوص در راستای ترک، در عبارت های تحلیلی میدان های تنش و تغییرمکان حوزه نوک ترک بنا نهاده شده است و طبیعتاً به مقادیر محاسبه شده تنش و تغییرمکان حساسیت زیادی دارد. از اینرو روش های انرژی بر پایه انتگرال های پایستار مورد توجه قرار گرفتند. لیورز<sup>۱</sup> و رادون<sup>۲</sup> از فرم وردشی انتگرال های پایستار برای محاسبه تنش  $T$  استفاده کردند [۴۶]. غفوری<sup>۳</sup> از انتگرال پایستار  $J$  که توسط کیشیموتو<sup>۴</sup> و همکارانش ارائه شده است [۴۷] و کاردو<sup>۵</sup> و همکارانش از انتگرال مستقل از مسیر  $J$  برای محاسبه تنش  $T$ ، تحت بار مکانیکی مود  $I$  استفاده کردند [۴۸]. بکر<sup>۶</sup> تنش  $T$  را با استفاده از اختلاف تنش های عمودی ( $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ ) در راستای ترک ( $\beta = 0$ ) محاسبه کرد [۴۹]. کیم و پائولینو با کاربرد انتگرال برهم کنش تنش  $T$  را برای بارگذاری مکانیکی محاسبه و اثر آن را روی زاویه شروع رشد ترک بررسی نمودند [۵۰]. آن ها علاوه بر ضرایب شدت تنش، تنش  $T$  را نیز در مواد ارتوتروپیک بررسی نمودند.

کیسی<sup>۷</sup> و کیم نیز فرمولبندی نامتعادل انتگرال برهم کنش را برای محاسبه تنش  $T$  با بارگذاری حرارتی پایا در مواد ایزوتروپیک بکار بردند [۵۱]. دگ<sup>۸</sup> از انتگرال های  $J_k$  برای محاسبه ضرایب شدت تنش و تنش  $T$  در  $FGMs$  تحت بارگذاری مود مختلط استفاده کرد [۵۲-۵۳]. مساله شکست ترموالاستیک نیز به خوبی توسط روشهای عددی، غیر از روش المان محدود توسعه یافته مورد مطالعه قرار گرفته است. شیه و همکاران [۵۴]، ویلسون<sup>۹</sup> و یو<sup>۱۰</sup> [۵۵] با استفاده از انتگرال  $J$ ، در مدل کردن مسائل حرارتی از روش المان محدود کلاسیک استفاده کردند.

<sup>1</sup> Leevers

<sup>2</sup> Radon

<sup>3</sup> Kfour

<sup>4</sup> Kishimoto

<sup>5</sup> Cardew

<sup>6</sup> Becker

<sup>7</sup> KC

<sup>8</sup> Dag

<sup>9</sup> Wilson

<sup>10</sup> Yu

پراساد<sup>۱</sup> و همکاران [۵۶]، راوندرا<sup>۲</sup> و بانرجی<sup>۳</sup> [۵۷]، با استفاده از روش المان مرزی برای مسائل شکست حرارتی راه‌حلی ارائه کردند. پراساد و همکاران [۵۸]، دل اربا<sup>۴</sup> و همکاران [۵۹]، شکست ترموالاستیک گذرا و سه‌بعدی را با استفاده از روش المان مرزی بررسی کردند. نودا<sup>۵</sup> و همکاران با استفاده از روش المان محدود برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش ترک تحت بارگذاری حرارتی تحقیقاتی انجام دادند، آنها مواد تابعی همگن و ناهمگن را بررسی نمودند [۶۰ - ۶۲]. حسینی تهرانی و همکاران با استفاده از روش المان مرزی، تاثیر کوپلینگ و اینرسی در مسائل با بارگذاری دینامیکی حرارتی را مورد مطالعه قرار دادند [۶۳-۶۴]. چن<sup>۶</sup> و همکارانش روی تجزیه و تحلیل شکست حرارتی یک نوار مرکب تابعی ارتوتروپیک دارای ترک کار کردند [۶۵].

کیم و کیسی انتگرال برهم کنش را برای شکست حرارتی در مواد مرکب تابعی بررسی نمودند [۶۶]. مثال استاتیکی از شکست ترموالاستیک به روش المان محدود توسعه یافته توسط دافلوت<sup>۷</sup> به صورت جزئی مورد بررسی قرار گرفت. وی مسائل دو بعدی و سه بعدی با شرایط مرزی حرارتی مختلف روی وجوه ترک را بررسی نمود [۶۷]. زمانی و اسلامی ضرایب شدت تنش را در یک لایه مواد مرکب تابعی ترکدار، تحت اثر شوک حرارتی را با استفاده از روش المان محدود بررسی نمودند [۶۸]. همچنین اسلامی و زمانی پیاده سازی روش المان محدود توسعه یافته برای شروع شکست ترموالاستیک دینامیکی را در مواد ایزوتروپیک بررسی نمودند [۶۹]. شریعتی و مهدی زاده [۷۰] رفتار شکست مواد تابعی تحت شوک های حرارتی/ مکانیکی را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. آنها برای این منظور از معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک کوپل استفاده نموده‌اند. اخیراً، حسینی و همکاران با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته به محاسبه ضرایب شدت تنش و بررسی رشد ترک در مواد مرکب تابعی ارتوتروپیک تحت بار حرارتی پایا پرداخته‌اند [۷۱].

---

<sup>1</sup> Prasad  
<sup>2</sup> Raveendra  
<sup>3</sup> Banerjee  
<sup>4</sup> Dell'Erba  
<sup>5</sup> Noda  
<sup>6</sup> Chen  
<sup>7</sup> Dufflot

طبق اطلاع نویسنده، تا کنون گزارشی از تعیین پارامترهای دینامیکی شکست ( ضرایب شدت تنش و تنش  $T$  ) در مواد ارتوتروپیک تحت بار حرارتی با روش المان محدود توسعه یافته منتشر نشده است. در این پایان نامه، ضرایب شدت تنش و تنش  $T$  در محیط دو بعدی ارتوتروپیک تحت بارگذاری حرارتی با استفاده از انتگرال مستقل از مسیر برهم کنش محاسبه شده است. صفحه نازک ارتوتروپیک به صورت تک لایه مستطیلی شکل در نظر گرفته شده است و نوع بارگذاری و شرایط مرزی به این گونه است که در یک ضلع دمای سطح، طی یک فرایند انتقال گرما، معلوم و برابر  $T_s$  است و سه ضلع دیگر عایق فرض شده اند و مساله در حالت دو بعدی بررسی گردیده است. معادلات ترموالاستیسیته غیرکوپل در نظر گرفته شده است. شبکه المانی ناحیه حل با کاربرد المانهای چهار گره‌ای و هشت گره‌ای ایجاد شده است.

در این پایان نامه، همچنین مجموعه‌ای جدید از توابع غنی‌سازی برای مدل‌سازی ترک در مواد ارتوتروپیک با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته ارائه شده است. در روش پیشنهادی درجه آزادی اضافه شده نسبت به روش‌های قبل کمتر می‌باشد. تاثیر زاویه ناهمسانگردی و زاویه ترک نیز بر روی ضرایب شدت تنش دینامیکی بررسی گردیده است.

در بخش بعد، کاربرد المان محدود توسعه یافته در مدل‌سازی ترک با توابع غنی‌سازی نوک ترک شرح داده شده است و میدان‌های جابجایی و تنش در حوزه نوک ترک آورده شده است. فرمول‌بندی مکانیک شکست برای تحلیل دینامیکی ترک در مواد ارتوتروپیک، در ادامه معرفی شده است. میدان‌های کمکی و انتگرال برهم کنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی و تنش  $T$  بیان گردیده است. در معادلات الاستودینامیک گسسته برای انتگرال زمانی، روش نیومارک بکار برده شده است و برای حل معادله حرارت از روش کرانک نیکلسون استفاده شده است. در نهایت، به منظور بررسی دقت و صحت نتایج، مقادیر ضرایب شدت تنش و تنش  $T$  بدست آمده، با داده‌های موجود مقایسه گردیده است.

### ۳-۱- رفتار مکانیکی تک لایه ها:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (1-1)$$

$C_{ij}$  ماتریس الاستیک نام دارد و یک ماتریس متقارن  $6 \times 6$  می باشد که خواص ماده را نشان می دهد، بنابراین دارای ۲۱ عضو مستقل می باشد.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

*SYM*

این ماتریس برای مواد غیر ایزوتروپیک، بدون داشتن هیچ صفحه تقارن صادق است. نام این مواد تری کلینیک است. با توجه به آن که یک جسم دارای یک یا چند صفحه تقارن باشد درایه های ماتریس الاستیک را می توان ساده کرد. اگر خصوصیات مواد دارای یک صفحه تقارن باشد، این مواد مونوتروپیک نامیده می شوند. به عنوان مثال اگر در دستگاه مختصات کارتزین، صفحه  $Z = 0$  صفحه تقارن باشد، ماتریس الاستیک به صورت زیر است:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

*SYM*

اگر ماده نسبت به دو صفحه تقارن داشته باشد حتما تقارن نسبت به صفحه سوم نیز خواهد داشت، موادی که دارای این خاصیت باشد ارتوتروپیک نام دارند. در این حالت ماتریس الاستیک به صورت زیر است:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & SYM & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

تنش های نرمال  $\sigma_1$  ،  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$  هیچ ارتباطی با کرنش های برشی  $\gamma_{12}$  ،  $\gamma_{23}$  و  $\gamma_{13}$  ندارند. در مواد تری کلینیک این مولفه ها به هم مرتبط هستند. همچنین هیچ ارتباطی بین تنش های برشی و کرنش های نرمال و همچنین بین تنش های برشی و صفحات کرنشی در صفحات مختلف وجود ندارد. اگر در هر نقطه از ماده یک صفحه وجود داشته باشد که خواص مکانیکی آن در تمام جهات مساوی باشد، این ماده ایزوتروپیک عرضی نامیده می شود. برای مثال اگر صفحه ایزوتروپیک صفحه ۲-۱ باشد، آن گاه:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & SYM & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{c_{11} - c_{22}}{2} \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

اگر تعداد صفحات تقارن به تعداد نامحدودی برسد، تعداد ضرایب غیر وابسته به دو عدد تقلیل می

یابد، این ماده ایزوتروپیک نامیده می شود:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & SYM & & & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

با معکوس کردن ماتریس الاستیک، ماتریس نرمی بدست می آید. به عنوان مثال ماتریس نرمی

برای ماده ارتوتروپیک به صورت زیر است:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (Y-1)$$

به ترتیب مدول الاستیک در جهت های ۱، ۲ و ۳ می باشند.

فصل دوم

روش

المان محدود توسعه یافته

## ۲-۱- مقدمه:

به طور کلی برای حل مسائل فیزیکی از سه روش استفاده می شود:

۱- روش تحلیلی<sup>۱</sup>

۲- روش عددی<sup>۲</sup>

۳- روش تجربی<sup>۳</sup>

در روش تحلیلی، به محاسبه دقیق پارامتری معادلات دیفرانسیل حاکم بر میدان‌های فیزیکی همچون میدان حرارتی، میدان تنش و غیره پرداخته می‌شود. درحالی‌که در روش دوم به حل تقریبی و عددی این مسائل پرداخته می‌شود. روش تجربی یا آزمایشگاهی نیز با توجه به اینکه رفتار واقعی مسئله را در آزمایشگاه بررسی می‌کند، روش مناسبی محسوب می‌گردد.

در این میان، روش حل عددی که روش المان محدود زیرمجموعه آن می‌باشد، یکی از پرکاربردترین روش‌های مورد استفاده در حل مسائل مهندسی است. استفاده از روش‌های عددی علاوه بر فراهم آوردن امکان تحلیل مسائل پیچیده‌ای که امکان تحلیل آن‌ها از طریق روش‌های متداول، همچون روش‌های تحلیلی فراهم نبوده است، منجر به افزایش دقت و کاهش زمان تحلیل بسیاری از مسائل رایج در علوم مهندسی گردیده است.

در این فصل خلاصه‌ای از روش المان محدود، روش المان محدود توسعه یافته و کاربرد آن در مدل کردن ترک برای مواد ایزوتروپیک و ارتوتروپیک بیان شده است. در روش المان محدود توسعه یافته، مش‌بندی روی مرزهای داخلی مثل ترک منطبق نمی‌شود. در عوض، درجات آزادی اضافی در گره‌هایی در نظر گرفته می‌شود که ناحیه تکیه‌گاهی آن توسط ترک بریده شده است.

---

<sup>1</sup> Analytical method

<sup>2</sup> Numerical method

<sup>3</sup> Experimental method



## ۲-۲- روند تحلیل المان محدود

با وجود اینکه استخراج معادلات حاکم برای بیشتر مسائل چندان مشکل نیست، حل آنها به وسیله روش‌های تحلیلی دقیق کاری بس دشوار است. در چنین مواقعی روش‌های تحلیلی تقریبی راه چاره‌ای را فراهم می‌آورند.

روش المان محدود بر کمبود روش‌های سنتی حساب تغییرات، یعنی تولید روندی منظم جهت استخراج توابع تقریبی برای زیرناحیه‌های دامنه فائق آمده است. این روش دارای سه ویژگی اصلی است که باعث برتری آن بر دیگر روش‌ها شده است.

۱- دامنه پیچیده هندسی مسئله به صورت مجموعه‌ای از زیردامنه‌های ساده به نام المان عرضه می‌شود.

۲- توابع تقریب برای هر المان با استفاده از نظریه ساده که هر تابع پیوسته را می‌توان به وسیله ترکیب خطی چندجمله‌ای‌های جبری بیان نمود، استخراج می‌شود.

۳- روابط جبری بین ضرایب نامعین ( به عبارت دیگر، مقادیر گره‌ای ) به وسیله برقراری معادلات حاکم ، اغلب به صورت انتگرال وزنی، برای هر المان بدست می‌آید.

## ۲-۲-۱- تقسیم بندی هندسه مساله به نواحی ساده

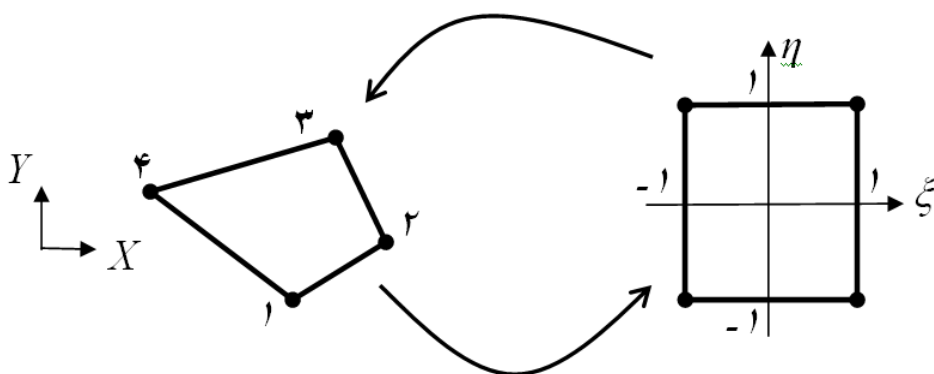
به عنوان اولین مرحله تحلیل سازه با روش المان محدود ، هندسه مساله موردنظر به نواحی ساده تقسیم‌بندی می‌شود که این امر به منظور تسهیل در تولید المان در این نواحی است .

## ۲-۲-۲- ایجاد المان در نواحی معرفی شده

پس از تقسیم هندسه موردنظر به تعدادی ناحیه، می‌توان هر نقطه درون هندسه ناحیه را با استفاده از توابع درونیابی بر حسب مختصات گره‌های ناحیه تقریب نمود. برای این تقریب مناسب‌ترین عمل، استفاده از توابع درونیابی چند جمله‌ای است.

از نظر ریاضی اگر ناحیه چهارضلعی مورد نظر را توسط نگاشت دوخطی به مربعی متقارن با اضلاع  $2 \times 2$  در دستگاه مختصات  $(\xi, \eta)$  تبدیل نماییم، که دستگاه مختصات ایزوپارامتریک نامیده می‌شود و در شکل نمایش داده شده است. رابطه بین مختصات در دو دستگاه، به صورت زیر قابل بیان خواهند بود:

$$x = \sum_{i=1}^4 \Phi_i X_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 \Phi_i Y_i \quad (1-2)$$



شکل (۱-۲) نگاشت تبدیل ناحیه چهارضلعی مورد نظر به یک مربع

در رابطه (۱-۲)  $X_i$  و  $Y_i$  مختصات نقاط گرهی ناحیه بوده و  $\Phi_i$  برداری است که به نام توابع درون‌یاب یا تابع شکل نامیده می‌شوند. این توابع برای ناحیه چهارگره‌ای ساده به فرم زیر بیان می‌گردند:

$$\Phi = \left\{ \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \right\}^T \quad (2-2)$$

اکنون با استفاده از این توابع، می‌توان مختصات هر نقطه درون مربع ترسیم شده، در دستگاه مختصات ایزوپارامتریک را به نقطه مشابه در مختصات اصلی  $(X, Y)$  نگاشت. بنابراین به سادگی می‌توان مربع مذکور را به صورت شبکه‌ای منظم و یا غیرمنظم تقسیم‌بندی نموده و این تقسیم‌بندی را با نگاشت ذکرشده برای هر نقطه به ناحیه اصلی منتقل نمود.

### ۲-۲-۳- معرفی خصوصیات مواد

اگر ماده مورد نظر از نوع ایزوتروپیک باشد، ماتریس الاستیک به صورت زیر می‌باشد:

$$[C] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \text{حالت تنش صفحه ای} \quad (3-2)$$

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \text{حالت کرنش صفحه ای} \quad (4-2)$$

که در آن  $E$  مقدار مدول الاستیک و  $\nu$  ضریب پواسون خواهد بود.

در صورتی که ماده از نوع ارتوتروپیک باشد، ماتریس الاستیک به صورت زیر می باشد:

$$[C] = \frac{1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12}E_2 & 0 \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_{12}\nu_{21})G_{12} \end{bmatrix} \quad \text{حالت تنش صفحه ای} \quad (5-2)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} aE_1 & bE_1 & 0 \\ cE_2 & dE_2 & 0 \\ 0 & 0 & (ad-bc)G_{12} \end{bmatrix} \quad \text{حالت کرنش صفحه ای} \quad (6-2)$$

$$a = 1 - \nu_{23}\nu_{32}$$

$$c = \nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}$$

$$b = \nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}$$

$$d = 1 - \nu_{13}\nu_{31}$$

که در آن  $E_1$  مدول الاستیک در جهت  $x$ ،  $E_2$  مدول الاستیک در جهت  $y$ ،  $\nu_{ij}$  ضریب پواسون و  $G_{12}$  مدول برشی می باشد.

## ۴-۲-۲- محاسبه ماتریس سفتی

روابط بین کرنشها و تغییرمکانها به صورت معادلات دیفرانسیلی بیان می گردند که این معادلات از سینماتیک تغییرشکل یک جز بی نهایت کوچک محاسبه می شوند. بر این اساس، می توان نشان داد که

کرنش‌های خطی در یک جز کوچک به مشتقات جزئی مولفه‌های تغییر مکان بستگی دارند. با این فرض رابطه بین کرنش و جابه‌جایی به فرم ماتریسی به صورت معادله زیر نوشته می‌شود.

$$e = \{\varepsilon\}^m + \{\varepsilon\}^{th} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{th} \\ \varepsilon_y^{th} \\ \gamma_{xy}^{th} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (7-2)$$

در رابطه قبل  $\{\varepsilon\}^m$  کرنش مکانیکی و  $\{\varepsilon\}^{th}$  کرنش حرارتی بوده که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{\varepsilon\}^{th} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{th} \\ \varepsilon_y^{th} \\ \gamma_{xy}^{th} \end{Bmatrix} = \{\lambda\} \Delta T \quad (8-2)$$

مقدار  $\lambda$  با توجه به نوع ماده و حالت صفحه به صورت زیر تعریف می‌شود:

ماده ایزوتروپیک:

$$\{\lambda\} = \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{حالت تنش صفحه ای} \quad (9-2)$$

$$\{\lambda\} = \alpha(1+\nu) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{حالت کرنش صفحه ای} \quad (10-2)$$

ماده ارتوتروپیک:

$$\{\lambda\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{حالت تنش صفحه ای} \quad (11-2)$$

$$\{\lambda\} = \begin{Bmatrix} \nu_{31}\alpha_3 + \alpha_1 \\ \nu_{32}\alpha_3 + \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{حالت کرنش صفحه ای} \quad (12-2)$$

$\alpha$  ضریب انبساط حرارتی می باشد .

حال اگر تغییر مکان ها درون ناحیه با استفاده از توابع شکل تقریب زده شوند، خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \Phi_i \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} \quad (13-2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\sum \Phi_i) & \frac{\partial}{\partial \eta} (\sum \Phi_i) \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix} U_i \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\sum \Phi_i) & \frac{\partial}{\partial \eta} (\sum \Phi_i) \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} V_i \end{cases} \quad (14-2)$$

اکنون با محاسبه مشتقات مولفه های جابه جایی برای المان چهار گره ای داریم:

$$e = [B]\{u\} \quad (15-2)$$

$$\{u\} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (16-2)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} & 0 & 0 \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{21} \\ 0 & 0 & \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (17-2)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \quad (18-2)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi} X_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi} Y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta} X_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta} Y_i \end{bmatrix} \quad (19-2)$$

که در آن ماتریس  $[J]$  به نام ماتریس ژاکوبین شناخته می شود که تابع هندسه المان است.

ماتریس  $[B]$  ماتریسی است که سه سطر دارد و تعداد ستون های آن به تعداد سطرهای بردار  $\{u\}$  وابسته است. می توان نشان داد که ماتریس سفتی به صورت زیر بر حسب ماتریس کرنش - جابه جایی گره  $[B]$ ، قابل بیان است:

$$[K]_{8 \times 8} = \iint [B]_{8 \times 3}^T [C]_{3 \times 3} [B]_{3 \times 8} t \, dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [C] [B] t |J| d\xi d\eta \quad (20-2)$$

انتگرال معرفی شده در معادله بالا که در دستگاه مختصات  $(\xi, \eta)$  باید محاسبه شود را می توان با استفاده از روش عددی انتگرال گوس محاسبه نمود. در روش عددی انتگرال گوس، کافی است که مقادیر تابع تحت انتگرال را در نقاط خاصی درون المان که نقاط گوس خوانده می شوند، حساب نموده و آنها را در ضرایب وزنی گوس ضرب کرد. با جمع این مقادیر می توان مقدار انتگرال را تعیین نمود.

## ۲-۲-۵- نصب ماتریس سفتی المان ها در ماتریس سفتی کل

بعد از محاسبه ماتریس سفتی المان ها، این ماتریس ها در یک ماتریس دیگر که به عنوان ماتریس سفتی کل مدل شناخته می شود، نصب می گردند.

## ۲-۲-۶- معرفی شرایط مرزی نیرو و جابجایی

با توجه به نوع مسئله شرایط مرزی نیرو و جابه جایی نیز به المان های مرزی اعمال می شود.

با بدست آوردن شرایط بالا می توان معادله زیر را حل نمود:

$$K \bar{u} = \bar{F} \quad (21-2)$$

و در نتیجه بردار  $u$  بدست خواهد آمد.

## ۲-۳- مدل سازی ترک با روش المان محدود توسعه یافته

در این بخش یک روش غنی سازی جهت مدل کردن گسستگی های دلخواه در چارچوب الاستیسیته خطی دو بعدی تشریح شده است. یک تقریب المان محدود برای یک ناپیوستگی با تأکید بر روی مدل سازی دلخواه شکل ترک ارائه شده است.

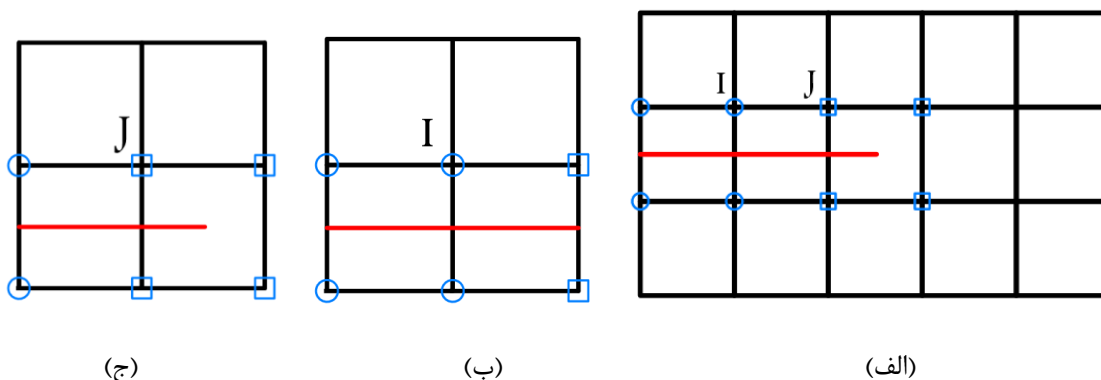
در مقایسه با تقریب کلاسیک ( سنتی ) برای مدل سازی ترک ها با المان محدود، با غنی سازی ناپیوستگی، هندسه ترک به صورت مستقل از شبکه، نمایش داده شده است. همچنین غنی سازی نزدیک نوک ترک در تقریب سازی، جهت محاسبه درست ضرایب شدت تنش، به کار گرفته شده است. در روش المان محدود استاندارد به هر گره از المان تابع شکل نسبت داده می شود و در حالت دو بعدی هر گره ۲ درجه آزادی دارد که ترکیب خطی حاصل ضرب تابع شکل هر نقطه داخل المان در تغییر مکان های گره ای می تواند تغییر مکان نقاط داخل المان را مشخص کند. در المان محدود توسعه یافته از همان توابع شکل المان محدود استاندارد استفاده می شود و تنها درجات آزادی گره های اطراف ترک افزایش پیدا می کند ( غنی سازی ) که این کار بر اساس مفهوم تفکیک پیوستگی انجام می شود [۱۷]، یعنی با اعمال توابع خاص درجات آزادی که به واسطه ناپیوستگی در محل ترک درون المان بوجود می آید به نقاط گره ای اطراف آن المان اختصاص پیدا می کند.

برای تعیین نوع تابع مناسب جهت غنی سازی، محل برخورد ترک با اضلاع المان ها مشخص می گردد اگر ترک در دو ناحیه اضلاع یک المان را ببرد از تابع پله ای واحد جهت غنی سازی گره های اطراف آن المان استفاده خواهد شد و اگر ترک تنها یکی از اضلاع المان را قطع کند یا به عبارت دیگر نوک ترک داخل المان باشد برای گره های اطراف آن المان غنی سازی به روش تابع تکینه انجام خواهد گردید.

البته چون هر گره بین چند المان مشترک است در مجموعه المانی اطراف آن گره انواع موقعیت نسبی بین ترک و المان بوجود خواهد آمد که برای غنی سازی خارجی گره مورد نظر از توابع مراتب بالاتر استفاده می گردد [۲۰].

به عنوان مثال مطابق شکل (۲-۲-الف) گره‌های اطراف ترک که با دایره مشخص شده‌اند از طریق تابع پله‌ای واحد غنی می‌شوند و چهار گره اطراف نوک ترک که با مربع مشخص شده از طریق تابع تکینه غنی می‌گردند. در شکل (۲-۲-ب) مجموعه المانی مرتبط با گره  $I$  ترسیم شده که دو المان بالا توسط ترک بریده نمی‌شود و دو المان پایین در دو نقطه برش می‌خورد، لذا غنی‌سازی از طریق تابع پله‌ای واحد برای  $I$  در نظر گرفته می‌شود.

در شکل (۲-۲-ج) مجموعه المانی مرتبط با گره  $J$  مشخص شده است، دو المان بالا توسط ترک قطع نشده، المان پایین از سمت چپ در دو نقطه بریده شده و آخرین المان فقط در یک نقطه برش خورده، بنابراین برای گره  $J$  غنی‌سازی از طریق تابع تکینه انجام می‌شود.



شکل (۲-۲) نمایش گره‌هایی که نیاز به غنی‌سازی خارجی جهت افزایش درجات آزادی دارند.

### ۲-۳-۱- فرمول‌بندی و گسسته‌سازی معادلات

در این بخش به طور خلاصه معادلات حاکم برای الاستوالاستیک خطی را در مواد ایزوتروپیک و ارتوتروپیک مرور کرده و شکل کاهش مرتبه یافته متناظر را ارائه می‌دهیم.

#### ۲-۳-۱-۱- معادلات حاکم

فرض می‌شود جسم در زمان  $t$  دامنه  $\Omega$  با مرز  $\Gamma$  را اشغال کرده است. مرز  $\Gamma$  متشکل از بخش‌های  $\Gamma_u$  و  $\Gamma_t$  می‌باشد، همانطور که در شکل (۲-۳) نشان داده شده است. جابجایی‌های معین  $\bar{u}$  روی

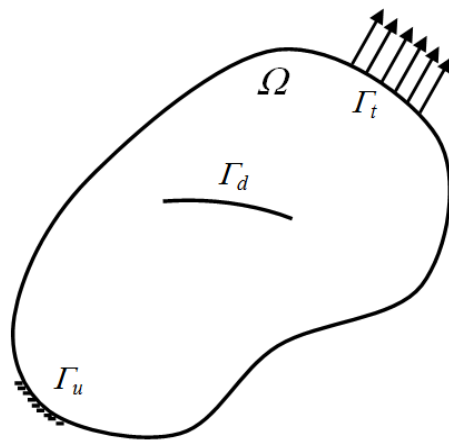


دامنه  $\Gamma_u$  عمل می نماید. در حالیکه کشش  $\bar{t}$  روی دامنه  $\Gamma_t$  وارد می شود. مرز داخلی  $\Gamma_d$  بر این فرض استوار است که بدون کشش می باشد.

معادلات تعادل و شرایط مرزی برای بارگذاری عبارتند از [۲۱]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma + b &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \sigma \cdot n &= \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \\ \text{on } \Gamma_d \quad \sigma \cdot n &= 0 \end{aligned} \quad (22-2)$$

که  $n$  بردار نرمال یکه می باشد. در بالا  $\sigma$  تانسور تنش کوشی و  $b$  چگالی نیروی حجمی است.



شکل (۳-۲) جسم با مرزهای داخلی تحت بارگذاری خارجی.

با فرض کرنشها و جابجایی کوچک ، معادلات جنبشی شامل جابجایی-کرنش مطابق رابطه (۲-۱۵) خواهد بود. با توجه به قانون هوک :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (23-2)$$

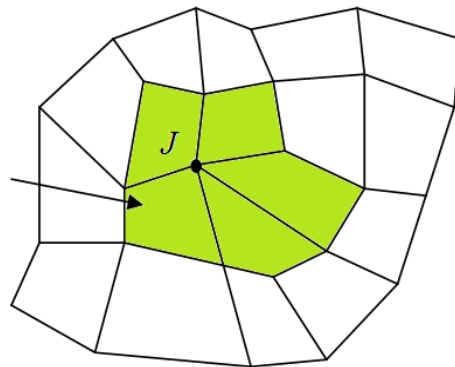
که  $[C]$  ماتریس الاستیک است و در بخش قبل برای مواد ایزوتروپیک (۲-۳ ، ۲-۴) و ارتوتروپیک (۲-۵ ، ۲-۶) تعریف شد. در ادامه ، روش المان محدود توسعه یافته که توابع ناپیوسته در تمام توابع شکل گره‌ای و درجات اضافی آزادی را ترکیب می کند ، معرفی می نمایم.

### ۲-۳-۲- تقریب المان محدود توسعه یافته

ایده اصلی در روش المان محدود توسعه یافته، غنی سازی فضای المان محدود استاندارد با برخی توابع اضافی است. حال مدل ساده‌ای از یک دامنه ترک خورده را در نظر می گیریم. مدل شامل یک مدل

المان محدود استاندارد و یک ترک مستقل از المان می باشد. در حقیقت مدل عددی المان محدود توسعه یافته، از دو بخش تشکیل شده است، بخش اول تولید مش هندسه دامنه (صرفه نظر از وجود هر گونه ترک یا ناپیوستگی های دیگر) و بخش دوم غنی سازی تقریبی المان محدود با توابع مناسب برای مدل سازی هر عیب و نقص است.

شکل ( ۲-۲ ) شبکه بندی مدل نمونه و خط گسستگی را نشان می دهد. مجموعه تمام  $N$  گره در شبکه را با  $n$  و مجموعه گره های غنی شده  $N^E$  را با  $I$  و  $J$  نشان می دهیم. توابع شکل گره های  $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$  هر کدام یک تکیه گاه فشرده  $\omega_i$  دارند که با اجتماع المان های متصل به گره  $J$  که در شکل ( ۴-۲ ) نشان داده شده است، مشخص می شوند. به منظو سهولت، اغلب به این زیر مجموعه از دامنه به عنوان تکیه گاه گره اشاره خواهیم کرد.



شکل ( ۴-۲ ) تکیه گاه یک گره

### ۲-۳-۱-۲-۳-۲-۱-روابط پایه ای

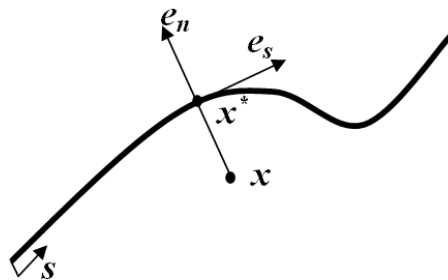
فرض می شود یک نقطه  $x$  در فضای  $R^2$  ( برای محیط دو بعدی ) درون مدل المان محدود داشته باشید. و مجموعه گره های  $N$  به صورت  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$  و تعداد گره های یک المان است، باشد. در این صورت تابع تقریبی غنی شده برای میدان جابجایی  $u(x)$  به صورت زیر تعریف می شود [۱۸]:

$$u^h(x) = \sum_{n_I \in N} \phi_I(x) u_I + \sum_{n_J \in N^E} \phi_J(x) \psi(x) u_J \quad (24-2)$$

که در رابطه ( ۲۴-۲ )،  $u_I$  درجات آزادی گره کلاسیک در مدل المان محدود است و  $u_I$  درجات آزادی اضافی تغییر مکانی نسبت به مجموعه استاندارد مدل المان محدود است.  $\phi_I$  تابع شکل مربوط به گره  $n$  و  $\psi(x)$  تابع غنی‌ساز و  $N^E$  شامل تمام نقاطی است که ترک را در بر می‌گیرد. برای نمونه گره‌هایی که با دایره در شکل ( ۲-۲ ) مشخص شده‌اند، در مجموعه  $N^E$  بوده و با تابع  $\psi(x)$  غنی می‌شوند. به طور کلی تابع غنی‌ساز  $\psi(x)$  با توجه به نوع ناپیوستگی تعیین می‌گردد.

هر تابعی که در سرتاسر  $\Gamma_d$  ناپیوسته است می‌تواند برای مدل کردن یک گسستگی دلخواه در  $u^h(x)$  استفاده شود، ولی شاید ساده‌ترین انتخاب، یک تابع ثابت است که در طول ترک تغییر علامت می‌دهد. برای نمونه تابعی را در نظر می‌گیریم که مقدار ۱ را روی یک سمت و -۱ را در سمت دیگر داشته باشد.

حال ایجاد تابع ناپیوسته  $H(x)$  را در دو بعد شرح می‌دهیم. فرض می‌شود که سطح ترک یک منحنی است که توسط دستگاه مختصات منحنی وار  $S^2$  مشخص می‌شود، شکل (۵-۲).



شکل ( ۵-۲ ) نمایش مختصات عمودی و مماسی برای یک ترک یکنواخت.

با داشتن نقطه مفروض  $x$  روی دامنه نزدیک‌ترین نقطه روی ترک به  $x$  را با  $x^*$  مشخص می‌کنیم. در  $x^*$  بردارهای مماسی و عمود بر منحنی  $e_s$  و  $e_n$  را ایجاد می‌کنیم. برای غنی‌سازی از طریق تابع پله‌ای واحد از یک تابع دو مقداری  $H$  به صورت زیر استفاده می‌شود.

$$H = \begin{cases} +1 & ; e_n > 0 \\ -1 & ; e_n < 0 \end{cases} \quad (۲۵-۲)$$

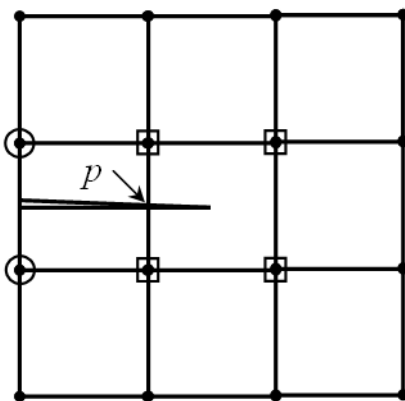
برای استفاده از تابع فوق محور  $e_s$  را به صورت محلی روی امتداد ترک قرار داده به گونه‌ای که جهت مثبت آن به سمت نوک ترک باشد در این شرایط نقاط بالای محور  $e_s$  ( $e_n > 0$ ) دارای  $H$  برابر ۱+ و در غیر اینصورت برابر ۱- می‌شود. به تابع  $H(x)$  تابع هویساید گویند.

### ۲-۳-۲- روابط مربوط به مدل‌سازی ترک در مواد ایزوتروپیک

در این بخش، تغییرات ایجاد شده برای یک تقریب‌سازی با غنی‌سازی ناپیوسته (۲-۲۴) برای مدل‌کردن ناحیه نزدیک راس یک ترک را نشان می‌دهیم. با مورد ساده‌ای از ترک لبه‌ای روی یک شبکه یکنواخت مانند شکل (۲-۶) آغاز می‌کنیم. تقریب شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$u^h(x) = \sum_n \phi_n(x) u_n + \sum_I \phi_I(x) H(x) b_I + \sum_{k \in J} \phi_k(x) \left( \sum_{l=1}^4 C_k^l F_l(x) \right) \quad (2-26)$$

در رابطه (۲-۲۶)،  $I$  مجموعه گره‌های وابسته به بخش درونی ترک و  $J$  مجموعه وابسته به نوک ترک می‌باشد. برای نمونه، گره‌های مجموعه  $I$  و  $J$  به ترتیب با دایره و مربع در شکل (۲-۶) مشخص شده‌اند. در این رابطه  $b_I$  و  $C_k^l$  درجات آزادی گرهی اضافی‌اند. همچنین در این رابطه، عبارت اول مربوط به المان محدود کلاسیک می‌باشد و عبارت دوم برای غنی‌سازی المان‌هایی که ترک آن‌ها را قطع نموده است؛ استفاده می‌شود. عبارات سوم جهت غنی‌سازی المان‌های حاوی نوک ترک به کار برده می‌شود. توابع  $F_l(x)$  توابع جابجایی دوبعدی نزدیک نوک ترک می‌باشد که از جابجایی‌های نزدیک نوک بدست می‌آید. تعاریف دقیق از این مجموعه‌ها در ادامه بیان خواهد شد.



شکل (۲-۶) ترکی که بر روی شبکه قرار ندارد.

غنی‌سازی خارجی در گره‌های اطراف نوک ترک از طریق تابع تکینه انجام می‌شود تا بهترین تطبیق را با شرایط واقعی جابجایی‌های اطراف نوک ترک پیدا کند. عبارتی که ایجاد حالت تکینه در نقاط اطراف ترک می‌نماید  $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$  می‌باشد که  $(r, \theta)$  مختصات قطبی نقاط اطراف نوک ترک در دستگاه مختصات قطبی واقع در نوک ترک است.

البته برای افزایش دقت جواب‌ها عبارات دیگری نیز به عبارت مربوط به تکینه‌سازی اضافه می‌شود که این عبارات از رابطه بین جابجایی‌های نقاط اطراف نوک ترک برحسب موقعیت آن نقاط و ضرایب شدت تنش در نوک ترک به دست می‌آیند. این عبارات‌های جابجایی بر حسب مختصات قطبی محلی  $(r, \theta)$ ، در نوک ترک به صورت زیر بیان می‌شود [۱۹]:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ v(x, y) &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (27-2)$$

که  $K_I$  و  $K_{II}$  ضرایب شدت تنش و  $\mu$  و  $\kappa$  به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۹]:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

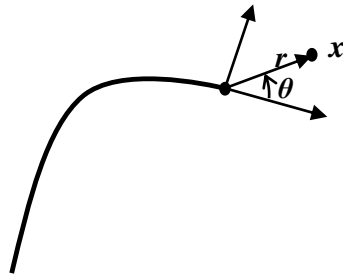
$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{تنش صفحه ای} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{کرنش صفحه ای} \end{cases} \quad (28-2)$$

توابع  $F_I(x)$  توابعی می‌باشند که میادین بالا را پوشش می‌دهند. در نهایت تابع چهارجمله‌ای به

صورت زیر برای غنی‌سازی گره‌های اطراف نوک ترک مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۹]:

$$\{F_I(r, \theta)\}_{I=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (29-2)$$

که  $(r, \theta)$  مختصات قطبی محلی در نوک ترک، مانند شکل (۷-۲) می‌باشند.



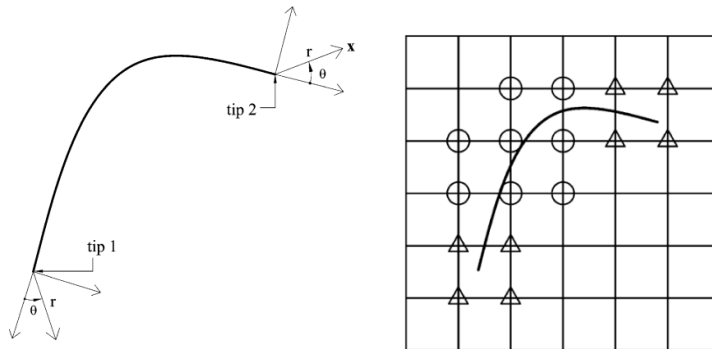
شکل (۷-۲). مختصات قطبی محلی نوک ترک

حال موردی از ترک اختیاری با دو نوک نشان داده شده در شکل (۸-۲) را مورد بررسی قرار

می‌دهیم، تقریب (۲۶-۲) به سادگی به شکل عمومی زیر در می‌آید [۲۰]:

$$u^h(x) = \sum_n \phi_n(x) u_n + \sum_I \phi_I(x) H(x) b_I + \sum_{k \in J_1} \phi_k(x) \left( \sum_{l=1}^4 C_k^{l1} F_l^1(x) \right) + \sum_{k \in J_2} \phi_k(x) \left( \sum_{l=1}^4 C_k^{l2} F_l^2(x) \right) \quad (۳۰-۲)$$

که  $J_2$  و  $J_1$  مجموعه گره‌های غنی شده برای نوک ترک اول و دوم می‌باشند. و مجموعه  $I$  مجموعه گره‌هایی است که توسط ترک قطع شده و نیز متعلق به هیچ کدام از دو مجموعه  $J_1$  و  $J_2$  نیستند. همچنین توابع  $F_l^1(x)$  و  $F_l^2(x)$  همان توابع رابطه (۲۹-۲) می‌باشند.



شکل (۸-۲). مختصات قطبی محلی روی هر دو نوک ترک

### ۳-۲-۳-۲- روابط مربوط به مدل‌سازی ترک در مواد ارتوتروپیک

تا کنون روابط مربوط به مدل‌سازی ترک، در مواد ایزوتروپیک بررسی گردید، روند تحلیل مواد ارتوتروپیک و روابط مربوط به مدل‌سازی ترک در این مواد نیز مشابه مواد ایزوتروپیک می‌باشد. با این تفاوت که جابجایی‌های مماسی نزدیک نوک و به تبع آن توابع غنی‌سازی در نوک ترک در مواد

ارتوتروپیک با مواد ایزوتروپیک یکسان نمی‌باشد. جابجایی‌های مماسی واقعی نزدیک نوک و میدان تنش در حوزه نوک ترک در جسم دو بعدی ارتوتروپیک در معرض بارگذاری عمومی با تعریف توابع

$f_{ij}(\theta, \mu_1, \mu_2)$  و  $g_i(\theta, \mu_1, \mu_2)$  بصورت زیر است [۳۵]:

$$u_i = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^I(\theta, \mu_1, \mu_2) + K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) \quad (۳۱-۲)$$

$$\sigma_{ij} = K_I (2\pi r)^{\frac{1}{2}} f_{ij}^I(\theta, \mu_1, \mu_2) + K_{II} (2\pi r)^{\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) \quad (۳۲-۲)$$

که در آن،  $K_I$  و  $K_{II}$  ضرایب شدت تنش مود  $I$  و  $II$  می‌باشد. توابع زاویه‌ای  $f_{ij}(\theta, \mu_1, \mu_2)$  و  $g_i(\theta, \mu_1, \mu_2)$

به صورت زیر بیان شده‌اند [۳۵].

$$f_{II}^I(\theta, \mu_1, \mu_2) = \text{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (۳۳-۲)$$

$$f_{II}^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (۳۴-۲)$$

$$f_{22}^I(\theta, \mu_1, \mu_2) = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (۳۵-۲)$$

$$f_{22}^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (۳۶-۲)$$

$$f_{12}^I(\theta, \mu_1, \mu_2) = \text{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (۳۷-۲)$$

$$f_{12}^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (۳۸-۲)$$

$$g_1^I(\theta, \mu_1, \mu_2) = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \mu_1 p_2 \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - \mu_2 p_1 \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta} \right\} \right] \quad (۳۹-۲)$$

$$g_1^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ p_2 \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - p_1 \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta} \right\} \right] \quad (۴۰-۲)$$

$$g_2^I(\theta, \mu_1, \mu_2) = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \mu_1 q_2 \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - \mu_2 q_1 \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta} \right\} \right] \quad (۴۱-۲)$$

$$g_2^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) = \text{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ q_2 \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - q_1 \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta} \right\} \right] \quad (۴۲-۲)$$

مقدار  $p_k$  و  $q_k$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \longrightarrow k = 1,2 \quad (43-2)$$

$$q_k = a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} \longrightarrow k = 1,2 \quad (44-2)$$

و  $\mu$  ریشه معادله مشخصه زیر می باشد:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (45-2)$$

در رابطه ( ۴۵-۲ )  $a_{ij}$  اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته صفحه می باشند که براساس فرض تنش صفحه ای یا کرنش صفحه ای بصورت تابعی از ماتریس نرمی  $S_{ij}$  می باشند.

$$a_{ij} = S_{ij} \quad , \quad i, j = 1,2,6 \quad \text{تنش صفحه ای} \quad (46-2)$$

$$a_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}} \quad , \quad i, j = 1,2,6 \quad \text{کرنش صفحه ای} \quad (47-2)$$

ثابت می شود که معادله شماره ( ۴۵-۲ ) چهار ریشه مختلط دارد. چهار ریشه این معادله را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_{1x} + i\mu_{1y} \quad , \quad \mu_3 = \overline{\mu_1} \\ \mu_2 &= \mu_{2x} + i\mu_{2y} \quad , \quad \mu_4 = \overline{\mu_2} \end{aligned} \quad (48-2)$$

توابع  $F_l(x)$  در مواد ارتوتروپیک توابعی در نظر گرفته می شوند که میادین (۳۱-۲) را پوشش می دهند. که در نهایت تابع چهار جمله ای به صورت زیر برای غنی سازی گره های اطراف نوک ترک مورد استفاده قرار می گیرد [۳۳]:

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)} \right\} \quad (49-2)$$

که  $g_k(\theta)$  و  $\theta_k$  از روابط (۵۰-۲) و (۵۱-۲) بدست می آیند.

$$g_k(\theta) = \sqrt{(\cos \theta + \mu_{kx} \sin \theta)^2 + (\mu_{ky} \sin \theta)^2} \quad (50-2)$$

$$\theta_k = \arctg \left( \frac{\mu_{ky} \sin \theta}{\cos \theta + \mu_{kx} \sin \theta} \right) \quad (51-2)$$



## ۲-۳-۲-۴- توابع غنی سازی جدید

در این پایان نامه، مجموعه‌ای جدید از توابع غنی‌سازی برای مدل‌سازی ترک در مواد ارتوتروپیک با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته ارائه شده است. در روش پیشنهادی درجه آزادی اضافه شده نسبت به روش‌های قبل کمتر می‌باشد. در این قسمت توابع غنی‌سازی جدید معرفی شده است که به بررسی این توابع پرداخته می‌شود.

رئو<sup>۱</sup> برای تحلیل ترک در مواد ارتوتروپیک با روش بدون المان گالرکین از توابع پایه زیر استفاده نمود، که در آن، جمله آخر برای غنی‌سازی پایه‌ها اضافه شده است و بیان کرد میدان‌های جابجایی حوزه نوک ترک (رابطه ۲-۳۱) با انجام محاسبات جبری توسط رابطه زیر پوشش داده می‌شوند [۲۷]:

$$p^T(x) = \{l, x_1, x_2, \sqrt{r} \operatorname{Re}[\sqrt{\cos \theta + (1+i)\sin \theta}]\} \quad (۵۲-۲)$$

در آن،  $r$  و  $\theta$  در دستگاه مختصات قطبی به مرکز نوک ترک تعریف می‌شوند و  $\operatorname{Re}$  نشانگر بخش حقیقی یک عدد مختلط است. با توجه به رابطه (۲-۵۲)، اگر جمله غنی‌سازی بصورت بخش حقیقی جذر متغیر مختلط کمکی  $Z^{aux}$  در نظر گرفته شود. در اینصورت،

$$Z^{aux} = r(\cos \theta + (1+i)\sin \theta) = r((\cos \theta + \sin \theta) + i \sin \theta) \quad (۵۳-۲)$$

متغیر  $Z^{aux}$  بصورت زیر نیز قابل بیان است.

$$Z^{aux} = R e^{i\varphi} \quad (۵۴-۲)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} R &= r g(\theta), \\ g(\theta) &= \sqrt{(\cos \theta + \sin \theta)^2 + (\sin \theta)^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}\right) \end{aligned} \quad (۵۵-۲)$$

توابع غنی‌سازی، بخشهای حقیقی و موهومی جذر  $Z^{aux}$  می‌باشند.

<sup>۱</sup> B.N. Rao

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\sqrt{Z^{aux}}\right) &= \sqrt{r} \sqrt{g(\theta)} \cos \frac{\varphi}{2}, \\ \operatorname{Im}\left(\sqrt{Z^{aux}}\right) &= \sqrt{r} \sqrt{g(\theta)} \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (56-2)$$

در نهایت تابع دوجمله‌ای بصورت زیر برای غنی‌سازی گره‌های اطراف نوک ترک مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^2 = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{g(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{g(\theta)} \right\} \quad (57-2)$$

تعداد توابع غنی‌سازی رابطه (57-2) دو تابع می‌باشد، که نسبت به توابعی که در گذشته ارائه شده‌اند کمتر می‌باشد. در روش‌های قبلی، درجه آزادی گره‌های اطراف المان نوک ترک ۸ درجه افزایش می‌یافت [۳۳]. این امر بخصوص در ترک‌های پیشرونده، با توجه به گسترش ترک و افزایش گره‌های غنی‌سازی شده، باعث افزایش درجه آزادی کل سیستم می‌شود. در روش ارائه شده با توجه به توابع غنی‌سازی جدید، درجه آزادی گره‌های المان شامل نوک ترک به مقدار ۴ درجه افزایش می‌یابد، در نتیجه با گسترش ترک و انتقال نوک ترک به المان‌های مجاور، در نهایت درجه آزادی مساله نسبت به حالت قبلی کاهش می‌یابد. همچنین توابع ارائه شده بر خلاف توابع قبل به جنس ماده ارتوتروپیک وابسته نمی‌باشند و از این جهت با توابع غنی‌سازی مواد ایزوتروپیک مشابهت دارد.

### ۳-۳-۲- استخراج رابطه سفتی برای انواع المان

انرژی پتانسیل کل<sup>۱</sup> ( $\Pi$ ) در حالت الاستیک از طریق جمع انرژی کرنشی کل<sup>۲</sup> سازه و کار حاصل از نیروهای خارجی (متمرکز، سطحی و حجمی) به دست می‌آید.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_v \sigma^T \varepsilon dv - \int_v u^T f dv - \int_s u^T T ds - \sum_i u_i^T P_i \quad (58-2)$$

در رابطه فوق  $\sigma$  تنش،  $\varepsilon$  کرنش،  $u$  جابجایی،  $f$  نیروهای حجمی،  $T$  نیروهای سطحی و  $P_i$  نیروهای متمرکز می‌باشد. در المان محدود استاندارد که حجم، توسط تعدادی المان مدل می‌شود رابطه انرژی پتانسیل کل بر حسب مشخصات المان به صورت زیر ارائه می‌گردد:

<sup>1</sup> Total Potential Energy

<sup>2</sup> Total Strain Energy

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_e \frac{1}{2} \int \varepsilon^T C \varepsilon dA - \sum_e \int u^T f dA - \int_L u^T T dL - \sum_i u_i^T P_i \\ \Pi &= \sum_e U^e - \sum_e (f^e + T^e + P^e) \end{aligned} \quad (59-2)$$

در رابطه (۵۹-۲)،  $C$  ماتریس الاستیک ماده است که متقارن می‌باشد و در حالت دو بعدی با توجه به نوع تحلیل تنش صفحه‌ای و یا کرنش صفحه‌ای مشخص می‌گردد و  $t$  ضخامت المان می‌باشد. در المان محدود استاندارد از طریق رابطه انرژی کرنشی المان، می‌توان ماتریس سفتی المان را به دست آورد که به صورت زیر است.

$$K_e = \int_{\Omega^h} [B]^T C [B] d\Omega \quad (60-2)$$

با جایگزینی تقریب (۲۶-۲) در تعریف کرنش (۱۵-۲) رابطه تقریبی کرنش حاصل می‌شود:

$$\varepsilon^e = [B] u = \begin{bmatrix} B_i^u & B_j^a & B_k^{b1} & B_k^{b2} & B_k^{b3} & B_k^{b4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ a_j \\ b_k^1 \\ b_k^2 \\ b_k^3 \\ b_k^4 \end{bmatrix} \quad (61-2)$$

$\varepsilon^e$  کرنش در هر گره و  $u$  جابجایی‌های مربوط به درجات آزادی متناظر گره‌های اطراف هر المان می‌باشد و  $[B]$  گرادیان متقارن گسسته‌سازی شده توابع شکل توسعه‌یافته می‌باشد و مولفه‌های آن به صورت زیر است:

$$B_i^u = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{i,y} \\ \Phi_{i,y} & \Phi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (62-2)$$

$$B_j^a = \begin{bmatrix} (\Phi_j H(x_j))_{,x} & 0 \\ 0 & (\Phi_j H(x_j))_{,y} \\ (\Phi_j H(x_j))_{,y} & (\Phi_j H(x_j))_{,x} \end{bmatrix} \quad (63-2)$$

$$B_k^{bl} \Big|_{l=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} (\Phi_k F_k^l(x_k))_{,x} & 0 \\ 0 & (\Phi_k F_k^l(x_k))_{,y} \\ (\Phi_k F_k^l(x_k))_{,y} & (\Phi_k F_k^l(x_k))_{,x} \end{bmatrix} \quad (64-2)$$

فقط باید با توجه به معیار غنی‌سازی خارجی ارائه شده در قسمت قبل، تأثیر درجات آزادی افزوده شده به هر گره در ابعاد ماتریس  $[B]$  در نظر گرفته شود. لذا ابعاد ماتریس  $[B]$  نیز تفاوت می‌کند و برای هر نوع گره باید سهم مناسبی در ماتریس  $[B]$  در نظر گرفته شود.

اگر گره  $i$  نیاز به غنی‌سازی نداشته باشد در حالت دو بعدی، ۲ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس  $[B]$  به صورت زیر خواهد بود:

$$B_i = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{i,y} \\ \Phi_{i,y} & \Phi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (۶۵-۲)$$

اگر گره  $j$  نیاز به غنی‌سازی از طریق تابع پله‌ای واحد داشته باشد در حالت دو بعدی ۴ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس  $[B]$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B_j = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} & 0 & (\Phi_j H(x_j))_{,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{i,y} & 0 & (\Phi_j H(x_j))_{,y} \\ \Phi_{i,y} & \Phi_{i,x} & (\Phi_j H(x_j))_{,y} & (\Phi_j H(x_j))_{,x} \end{bmatrix} \quad (۶۶-۲)$$

اگر گره  $k$  نیاز به غنی‌سازی از طریق تابع تکین داشته باشد در حالت دو بعدی ۱۰ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس  $[B]$  به صورت زیر خواهد بود:

$$B_k|_{l=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} & 0 & (\Phi_k F_k^l(x_k))_{,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{i,y} & 0 & (\Phi_k F_k^l(x_k))_{,y} \\ \Phi_{i,y} & \Phi_{i,x} & (\Phi_k F_k^l(x_k))_{,y} & (\Phi_k F_k^l(x_k))_{,x} \end{bmatrix} \quad (۶۷-۲)$$

بنابراین سهم هر سه نوع کلی گره به طور جداگانه در روش المان محدود توسعه یافته، درون ماتریس  $[B]$  به دست آورده شد ( روابط ۶۵-۲ و ۶۶-۲ و ۶۷-۲ )، که با توجه به نوع گره‌های اطراف هر المان می‌توان ماتریس کلی  $[B]$  را برای آن المان بدست آورد. البته این امکان وجود دارد که گره‌های اطراف هر المان با توجه به موقعیت نسبی آن المان و ترک از نوع‌های مختلف باشد ولی چون تعداد سطرهای ماتریس  $[B]$  متناظر با آنها همواره یکسان است، لذا به راحتی می‌توان ماتریس کلی  $[B]$  مربوط به هر المان را به دست آورد که ابعاد آن در غنی‌سازی خارجی می‌تواند از  $۸ \times ۳$  برای

المان معمولی تا  $40 \times 3$  برای المان دربرگیرنده نوک ترک متغیر باشد. سپس از طریق رابطه (۶۰-۲) ماتریس سفتی مربوط به آن المان مشخص می‌گردد.

در روش غنی‌سازی خارجی مختصات و درجات آزادی نقاط برخورد ترک با اضلاع المان در ماتریس  $[B]$  و در نتیجه در ماتریس سفتی کل المان وارد نمی‌شود و تنها درجات آزادی اضافه منتسب به گره‌های اطراف المان امکان جابجایی‌های بیشتر گره‌ای در اثر ترک را فراهم می‌کند. از جمع ماتریس سفتی هر یک از المان‌های داخل صفحه ترک خورده که پس از تقسیم بندی المانی به دست آمده‌اند می‌توان ماتریس سفتی کل را به دست آورد.

$$K = \sum_e K_e \quad (68-2)$$

بدیهی است ابعاد ماتریس سفتی المان که وابسته به ابعاد ماتریس  $[B]$  می‌باشد، از  $8 \times 8$  برای المان معمولی تا  $40 \times 40$  برای المان دربرگیرنده نوک ترک در روش غنی‌سازی خارجی می‌تواند متفاوت باشد؛ اما از لحاظ ریاضی به راحتی قابل اثبات است که همواره ماتریس سفتی برای هر نوع المان متقارن خواهد بود که در نتیجه ماتریس سفتی کل نیز متقارن می‌شود.

## ۲-۳-۴- جزئیات کاربردی

با جایگذاری معادله (۶۱-۲) در معادله انرژی پتانسیل (۵۹-۲) و مینیمم کردن انرژی پتانسیل، دستگاه معادلات بر اساس روش المان محدود توسعه یافته به فرم کلی زیر به دست می‌آید:

$$K u = f^{ext} \quad (69-2)$$

$K$  ماتریس سفتی کل مدل است که متقارن می‌باشد،  $u$  بردار مجهولات گره‌ای است که در آن، مجهولات مربوط به درجات آزادی استاندارد (جابجایی در جهت  $x$  و  $y$  هر گره) و درجات آزادی مرتبط با غنی‌سازی هر گره (در صورت وجود) به صورت متوالی قرار گرفته است.  $f^{ext}$  نیز بردار نیروهای خارجی اعمال شده به گره‌ها می‌باشد و شامل نیروهای مکانیکی و نیروهای حرارتی است.

$$f^{ext} = f^m + f^{th} \quad (70-2)$$

عبارت  $f^{ext}$  برای هر گره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{ext} = \{f_i^u; f_j^a; f_k^{b1}; f_k^{b2}; f_k^{b3}; f_k^{b4}\} \quad (71-2)$$

که در آن:

$$f_i^u = \int_{\Gamma_i} \Phi_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_i b d\Omega \quad (72-2)$$

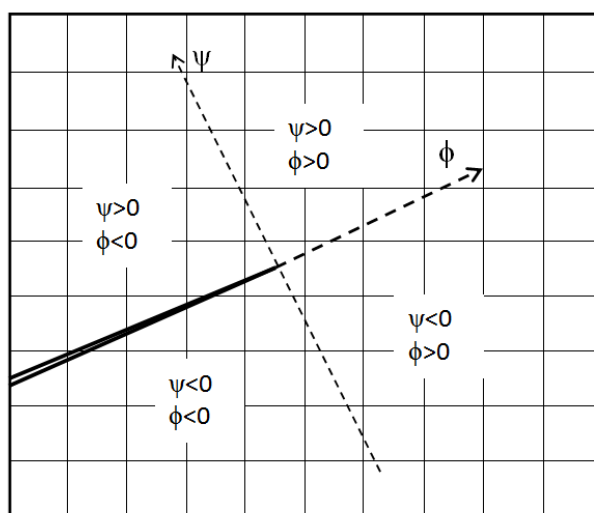
$$f_j^a = \int_{\Gamma_j} \Phi_j H(x_j) \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_j H(x_j) b d\Omega \quad (73-2)$$

$$f_k^{bl} \Big|_{l=1,2,3,4} = \int_{\Gamma_k} \Phi_k F_k^l(x_k) \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_k F_k^l(x_k) b d\Omega \quad (74-2)$$

### ۲-۳-۴-۱- انتخاب گره برای غنی‌سازی

جهت تشخیص موقعیت نسبی ترک و المان‌ها و متعاقب آن تعیین نوع غنی‌سازی مناسب برای آن‌ها از روش‌های مجموعه بردارهای مرتبه‌ای استفاده شده است [۲۵]. در این بخش مشخص می‌شود که آیا ترک به صورت کامل المانی را بریده، یا اینکه نوک ترک در داخل المان است و یا کلاً ترک دور از المان می‌باشد و بر مبنای آن، نوع غنی‌سازی مناسب برای گره‌های اطراف آن المان تشخیص داده می‌شود و درجات آزادی گره‌ها افزایش می‌یابد. در این پایان نامه، از روش دستگاه مختصات متعامد محلی نوک ترک ( $\phi - \psi$ ) استفاده می‌شود. در این روش مطابق شکل (۲-۹) مرکز مختصات محلی در نوک ترک قرار می‌گیرد، محور ( $\phi$ ) را در راستای ترک و به سمت خارج از آن و محور ( $\psi$ ) عمود بر  $\phi$  به صورت راستگرد تعریف می‌شود.

تمام گره‌های بالای محور ( $\phi$ )، دارای ( $\psi > 0$ ) می‌باشند و گره‌های پایین محور، مقدار ( $\psi < 0$ ) دارند. همچنین گره‌های سمت چپ ( $\psi$ )، دارای ( $\phi < 0$ ) و گره‌های سمت راست، دارای ( $\phi > 0$ ) می‌باشند.



شکل ( ۲-۹). دستگاه مختصات متعامد محلی نوک ترک  $(\phi - \psi)$

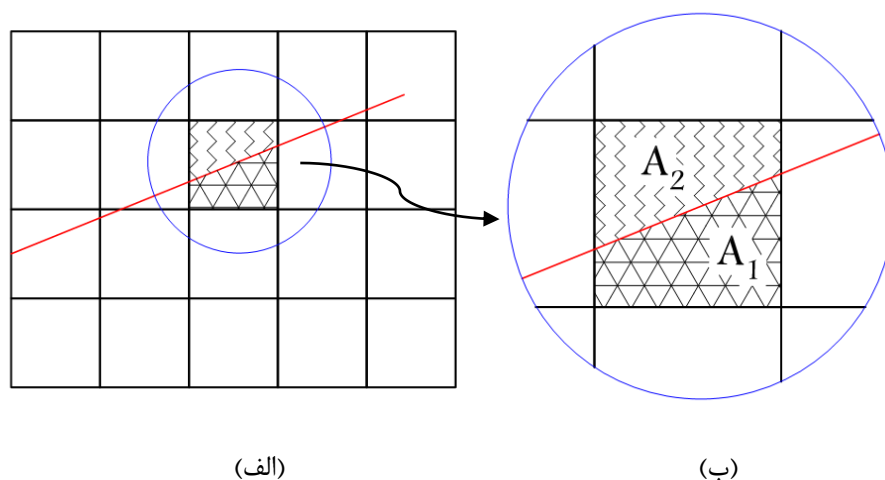
با توجه به علامت  $\psi$  و  $\phi$  در گره‌های اطراف هر المان می‌توان تشخیص داد که آیا ترک از المان فاصله دارد یا اینکه کاملاً آن را برش داده و یا نوک ترک درون آن واقع است. مختصات تمام گره‌ها در مختصات محلی جدید  $(\phi - \psi)$  محاسبه می‌شود و سپس در هر المان مقدار بیشترین و کمترین مقدار  $\phi$  و  $\psi$  تعیین می‌گردد.

اگر در المانی حاصلضرب  $\psi_{min}$  در  $\psi_{max}$  کوچکتر از صفر  $(\psi_{min} \cdot \psi_{max} < 0)$ ، و  $\phi_{max}$  کوچکتر از صفر باشد، ترک در دو نقطه المان را قطع می‌کند، در نتیجه برای افزایش درجات آزادی گره‌های اطراف این المان، غنی‌سازی به روش تابع پله‌ای واحد انجام می‌شود و تعداد درجات آزادی از ۲ به ۴ افزایش می‌یابد. همچنین اگر حاصلضرب  $\psi_{min}$  در  $\psi_{max}$  کوچکتر از صفر  $(\psi_{min} \cdot \psi_{max} < 0)$  و حاصلضرب  $\phi_{min}$  در  $\phi_{max}$  نیز کوچکتر از صفر باشد  $(\phi_{min} \cdot \phi_{max} < 0)$ ، آن المان حاوی نوک ترک می‌باشد. شاید دو یا چند المان به طور همزمان شرط آخر را ارضاء کنند که در چنین شرایطی برای تشخیص دقیق، پس از شناسایی گره‌های المان‌های مشخص شده، با توجه به مختصات این گره‌ها و همچنین موقعیت نوک ترک، بررسی می‌شود که نوک ترک در کدام المان واقع شده است، در نهایت تنها یک المان که نوک ترک درون آن قرار دارد مشخص می‌گردد، که گره‌های اطراف آن المان در غنی‌سازی توسط تکین غنی می‌شود و درجات آزادی آنها از ۲ به ۱۰ افزایش می‌یابد.

برای قرار گرفتن گره در مجموعه المان‌های درونی، علاوه بر شرایطی که تا به حال ارائه گردیده، شرط دیگری نیز باید برقرار باشد. وقتی ترک المانی را در دو ناحیه قطع کند، مجموعه المانی اطراف آن گره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. اگر اندازه سطح در یک سمت ترک  $A_1$  و در سمت دیگر ترک  $A_2$  و سطح کل مجموعه المانی آن گره  $A$  باشد، نسبت‌های زیر طبق شکل (۲-۱۰) قابل تعریف است.

$$r_1 = \frac{A_1}{A} \quad ; \quad r_2 = \frac{A_2}{A} \quad (۲-۷۵)$$

اگر هر یک از نسبت‌های  $r_1$  یا  $r_2$  کوچکتر از  $10^{-4}$  باشد، آن المان از مجموعه المان‌های درونی حذف می‌شود. مطابق شکل (۲-۱۰) پس از تقسیم‌بندی المان‌ها می‌توان سطح هر یک از المان‌ها حاصله را به دست آورد و با توجه به رابطه (۲-۷۵) مقدار  $r_1$  یا  $r_2$  را محاسبه کرد و معیار غنی‌سازی خارجی گره‌های اطراف المان‌ها را بررسی نمود.



شکل (۲-۱۰) تقسیم سطح مجموعه المانی به دو سطح، نسبت به موقعیت ترک

با توجه به معیار فوق گره‌های مشترک بین چند المان ممکن است از نظر هر المان درجات آزادی متفاوتی کسب کند، در این موارد با توجه به اصول روش المان محدود توسعه یافته، بیشترین تعداد درجات آزادی برای آن گره در نظر گرفته می‌شود.

پس از تشخیص وضعیت گره‌ها و افزایش تعداد درجات آزادی آن‌ها، روش مناسب برای غنی‌سازی آن‌ها مشخص می‌شود. با بدست آوردن مقدار  $H$  در گره‌ها می‌توان غنی‌سازی مناسب برای گره‌های

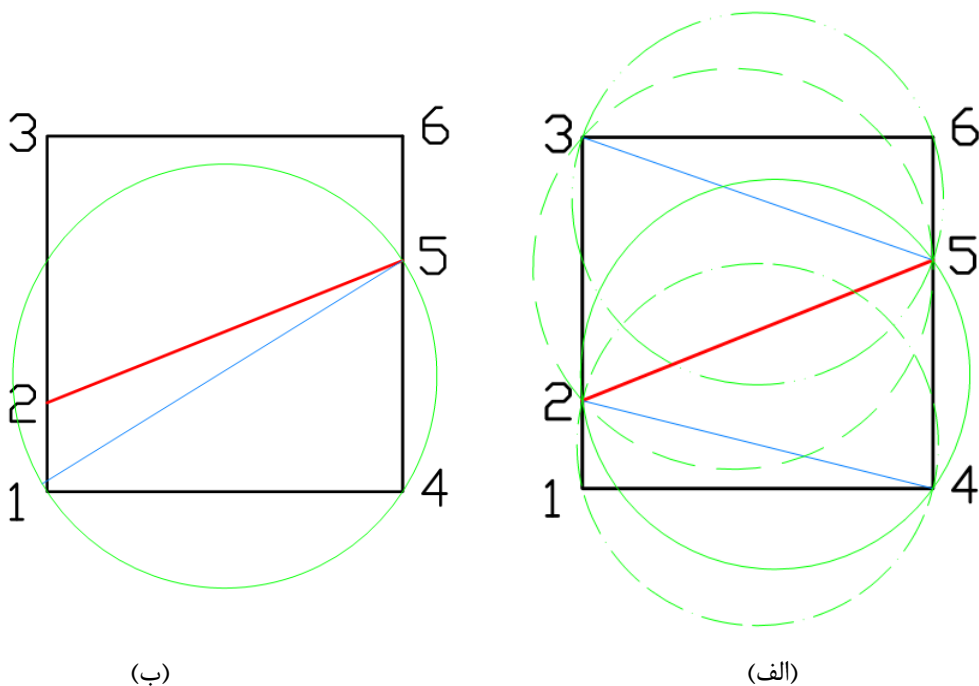


۴ درجه آزادی را انجام داد. برای گره‌های ۱۰ درجه آزادی نیز مطابق شکل (۲-۸) فاصله تا نوک ترک (۲) و زاویه با امتداد ترک ( $\theta$ ) تعیین می‌شود و غنی‌سازی مطلوب برای این گره‌ها انجام می‌گردد. در پایان این قسمت تعداد درجات آزادی گره‌ها و پارامترهای مورد نیاز جهت غنی‌سازی آنها مشخص می‌گردد.

### ۲-۳-۴-۲- مثلث بندی دلانی

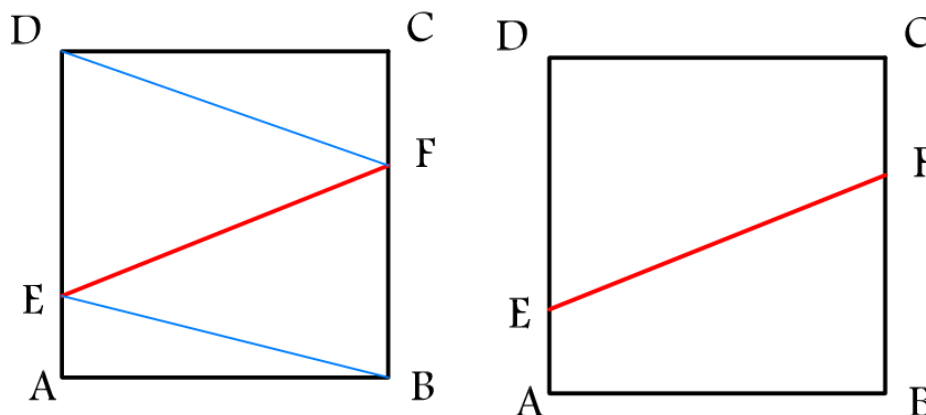
یکی از مسائل قدیمی و کلاسیک هندسه محاسباتی مثلث بندی دلانی می‌باشد که روش‌های مختلفی توسط محققان برای آن ارائه گردیده است. مثلث بندی دلانی، نوعی مثلث بندی است که در آن دایره محیطی هر مثلث شامل هیچ رئوس راسی از رئوس مثلث‌های دیگر نباشد (شرط دایره محیطی) و واضح است که این نوع مثلث بندی یکتا خواهد بود.

همانطور که در شکل (۲-۱۱) مشخص شده است. در شکل (الف) دایره محیطی هر مثلث شامل هیچ رئوس راسی از رئوس مثلث‌های دیگر نمی‌باشد، در شکل (ب) دایره محیطی مثلث با رئوس (۱، ۴، ۵) رأس ۲ را نیز در بر می‌گیرد که این حالت صحیح نمی‌باشد.



شکل (۲-۱۱). رسم مثلث‌های دلانی

مثلث بندی به گونه‌ای است که، هیچ دو مثلثی روی هم نمی‌افتند و هر نقطه از چند ضلعی فقط و فقط در یک مثلث قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، اجتماع مثلث‌ها، چند ضلعی اولیه را تشکیل می‌دهد. وقتی ترک المانی را در دو ناحیه قطع کند و برای گره اطراف آن شرایط غنی‌سازی به روش تابع پله‌ای واحد ایجاد شود، مجموعه المانی اطراف آن گره به دو ناحیه تقسیم می‌شود.



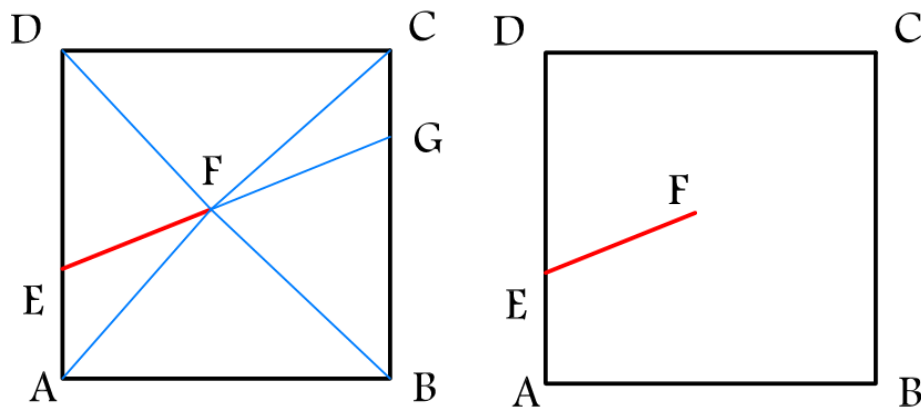
شکل ( ۲-۱۲ ) مثلث‌های استفاده شده برای المان بریده شده با ترک

برای مثال، برای المان  $ABCD$  در شکل (۲-۱۲) لازم است تا این المان به مثلث‌های کوچکتری تقسیم شده و انتگرال‌گیری روی این زیردامنه‌ها صورت پذیرد. در شکل (۲-۱۳) این مثلث‌بندی برای المان نوک نشان داده شده است.

از آنجا که عمل انتگرال‌گیری روی این مثلث‌ها صورت می‌گیرد، جهت دستیابی به نتایج صحیح، در این مثلث‌ها، از مربع‌سازی گاوسی مرتبه بالاتر استفاده می‌کنیم. در این رساله، ۱۳ نقطه گاوسی در هر مثلث کوچکتر برای المان نوک و ۳ نقطه گاوسی در هر مثلث کوچکتر در المان‌های بریده شده استفاده شده است.

روند انتگرال‌گیری عددی برای المان‌های برخورد کرده با ترک به صورت زیر است:

۱. ایجاد مثلث‌بندی دلانی برای تشکیل مثلث‌های کوچکتر
۲. برای هر مثلث کوچکتر، مختصات و وزن‌های نقاط گاوسی محاسبه شده و به سیستم مختصات اصلی منتقل شده است.



شکل (۲-۱۳) مثلث‌های استفاده شده برای المان نوک ترک

### ۲-۳-۵- محاسبه میدان جابه‌جایی

با توجه به اینکه ماتریس سفتی کل  $K$  و بردار نیرو  $f^{ext}$  در مراحل قبل بدست آمده است، با توجه به معادله (۲-۶۹) می‌توان میدان جابه‌جایی را بدست آورد.

$$\{u\} = [K]^{-1} \{f\}^{ext} \quad (۲-۷۶)$$

فصل سوم

# روش انتگرال برهم کنش برای تحلیل شکست مواد مرکب

### ۳-۱- مقدمه

تاکنون روش‌های تحلیلی و عددی برای بدست آوردن پارامترهای شکست در مواد ارتوتروپیک گسترش یافته است. انتگرال برهم‌کنش یک روش کارآمد برای محاسبه پارامترهای شکست (ضرایب شدت تنش و تنش  $T$ ) در سیستم‌های خطی می‌باشد؛ در این فصل، روش انتگرال برهم‌کنش برای مواد ارتوتروپیک و انتخاب‌های مختلف میدان‌های کمکی، با یک رهیافت واحد و قابل توسعه برای برهم‌کنش خطی میدان‌ها فرمولبندی می‌گردد. این روش بر پایه انتگرال‌های پایستار همراه با کاربرد میدان‌های کمکی توسعه یافته است و شامل روابط اساسی مکانیک جامدات می‌باشد. محاسبه پارامترهای ضرایب شدت تنش و تنش  $T$  با استفاده از انتگرال برهم‌کنش نیازمند استفاده از میدان‌های کمکی نظیر میدان جابجایی، میدان کرنش و میدان تنش است.

### ۳-۲- فرمول‌بندی انتگرال برهم‌کنش

انتگرال برهم‌کنش در واقع عبارت برهم‌کنش دو حالت بارگذاری مستقل و قابل قبول برای سازه حاوی ترک است، که در انتگرال‌های پایستار الاستیسیته پدید می‌آید. در این بخش روند بدست آوردن انتگرال مذکور بررسی می‌شود.

فرم معمول انتگرال  $J$  برای یک ترک بدون اعمال نیرو به سطوح آن، بصورت زیر است [۴]:

$$J = \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (W \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j d\Gamma_s \quad (1-3)$$

در این رابطه  $u_i$  مولفه‌های بردار تغییر مکان،  $n_j$  بردار یکه و عمود رو به خارج منحنی و  $W$  چگالی انرژی کرنشی مکانیکی بصورت زیر است:

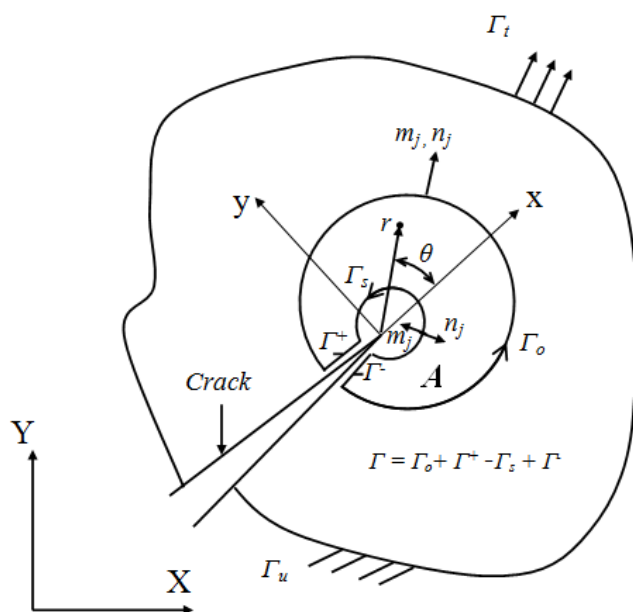
$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^m = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (e_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th}) \quad (2-3)$$

بدلیل محاسبه آسانتر و دقیقتر انتگرال‌های سطح بصورت عددی، مناسب است انتگرال خطی فوق بصورت یک انتگرال ناحیه‌ای معادل نوشته شود.

برای تبدیل فرم کانتوری انتگرال  $J$  به یک فرم ناحیه‌ای معادل انتگرال کانتوری زیر تعریف می‌شود:

$$I = \int_{\Gamma} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma \quad (3-3)$$

که در آن،  $\Gamma = \Gamma_o + \Gamma^+ - \Gamma_s + \Gamma^-$  و  $m_i$  بردار یکه و عمود رو به خارج کانتور  $\Gamma$  می باشد. ( یعنی  $m_i = n_i$  روی  $\Gamma_o$  و  $m_i = -n_i$  روی  $\Gamma_s$  ) در این رابطه،  $q$  تابع وزنی دلخواه و همواری می باشد که مقدار آن از  $q = 1$  روی  $\Gamma_s$  تا  $q = 0$  روی  $\Gamma_o$  تغییر می کند.



شکل (۳-۱) تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به فرم ناحیه‌ای [۳۱]

با حدگیری از رابطه (۳-۳) عبارت زیر بدست می آید [۳۱]:

$$\lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} I = \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma = \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_o + \Gamma^+ + \Gamma^- - \Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma \quad (4-3)$$

$$= \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma_o + \Gamma^+ + \Gamma^-} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma + \int_{-\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma \right]$$

$$= \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma_o + \Gamma^+ + \Gamma^-} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma - \int_{\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma \right]$$

و با توجه به اینکه روی مرز  $\Gamma_o$  مقدار  $q = 0$  است و فرض بدون تنش بودن سطوح ترک، رابطه فوق

بصورت زیر ساده می شود:

$$J = - \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} I = - \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1})m_j q d\Gamma \quad (5-3)$$

با کاربرد قضیه دیورژانس و با توجه تغییرات تابع وزنی  $q$  انتگرال ناحیه‌ای معادل بصورت زیر بدست می‌آید.

$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j})_{,j} q dA \quad (6-3)$$

که در آن،  $A$  ناحیه محصور به منحنی است. برای یک سیستم خطی، انتگرال  $J$  برای اعمال همزمان بارگذاری‌های اصلی و کمکی بصورت زیر قابل بیان است:

$$J^s = \int_A \left[ (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux}) - \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}^{aux}) \delta_{1j} \right] q_{,j} dA \\ + \int_A \left[ (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux}) - \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}^{aux}) \delta_{1j} \right]_{,j} q dA \quad (7-3)$$

که  $\sigma^{aux}$ ،  $\varepsilon^{aux}$  و  $u^{aux}$  به ترتیب تنش، کرنش و جابجایی در میدان کمکی می‌باشند. انتگرال فوق را می‌توان به صورت زیر تجزیه نمود:

$$J^s = J + J^{aux} + M \quad (8-3)$$

که در آن  $J^{aux}$  بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$J^{aux} = \int_A (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}^{aux} - W^{aux} \delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}^{aux} - W^{aux} \delta_{1j})_{,j} q dA \quad (9-3)$$

که در آن:

$$W^{aux} = \frac{1}{2} \sigma_{ik}^{aux} \varepsilon_{ik}^{aux} \quad (10-3)$$

انتگرال برهم‌کنش  $M$  نیز بصورت زیر حاصل می‌شود [۳۱]:

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j})_{,j} q dA \quad (11-3)$$

که در آن  $W^{int}$  تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی برهم‌کنش است و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$W^{int} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux} + \sigma_{ik}^{aux} \varepsilon_{ik}^m)$$

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^{aux} = \varepsilon_{kl} C_{klij} \varepsilon_{ij}^{aux} = \sigma_{kl}^{aux} \varepsilon_{kl} \quad , \quad C_{ijkl} = C_{klij}$$

$$W^{int} = \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux} \quad (12-3)$$

بسته به انتخاب میدان‌های کمکی، فرم عمومی انتگرال برهم‌کنش را می‌توان بصورت عبارت‌های ساده‌تر و قابل تفسیر بیان نمود.

رابطه (۳-۱۱) شامل دو عبارت جداگانه است. انتگرال اول معادل انتگرال برهم‌کنش برای مواد همگن است. عبارت دوم شامل مشتقات صریح نسبت به مختصه مکانی است. این نکته قابل ذکر است که در مواد همگن، خصوصیات ماده تابع مختصه‌های مکانی نیستند. با اعمال مشتق در انتگرال دوم و با توجه به رابطه تعادل  $\sigma_{ij,j}=0$  و روابط سازگاری میدان‌های اصلی و کمکی، انتگرال برهم‌کنش به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M = \int_A (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j}) q_{,j} dA \quad (3-13)$$

در این رابطه  $u_i$  مولفه‌های بردار تغییر مکان است، که در فصل قبل برای تمامی گره‌ها بدست آمده است. و با توجه به مولفه‌های بردار تغییر مکان و جایگذاری در روابط (۲-۱۵) و (۲-۲۳) مقدار تنش  $\sigma_{ij}$  نیز بدست می‌آید. مقادیر تنش و جابه‌جایی‌های کمکی نیز در ادامه معرفی می‌شوند.

### ۳-۳- ضرایب شدت تنش

در تئوری‌های مرسوم مکانیک شکست، میدان‌های تنش و کرنش حوزه نوک ترک با یک پارامتر، مثل انتگرال  $J$ ، ضریب شدت تنش و یا بازشدگی سطح ترک تعیین می‌گردد. از طرف دیگر عملاً یک ناحیه پلاستیک در نوک ترک بوجود می‌آید که کاربرد پارامترهای ذکر شده، به اندازه نسبی این ناحیه بستگی دارد. با فرض برقراری شرایط ناحیه تسلیم کوچک<sup>۱</sup> - که بصورت کوچک بودن ناحیه پلاستیک در مقایسه با طول‌های مشخصه سازه دارای ترک، مثل طول ترک، طول سازه در راستای ترک و ضخامت تعریف می‌شود - یکی از پارامترهای ذکر شده بعنوان یک خصوصیت ماده را می‌توان برای توصیف میدان‌های حوزه نوک ترک بکار برد.

همان‌طور که در فصل قبل بیان گردید، میدان تنش در حوزه نوک ترک در یک پیوستار جامد

بصورت زیر است:

<sup>۱</sup> small-scale yielding (SSY)

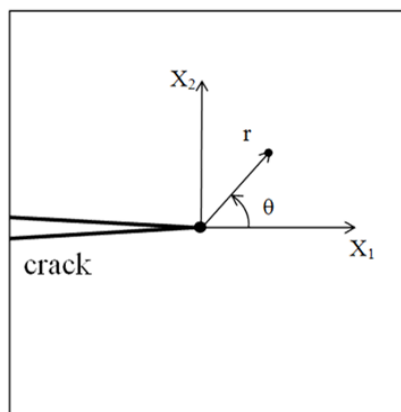


$$\sigma_{ij} = K_I (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^I(\theta, \mu_1, \mu_2) + K_{II} (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) \quad (14-3)$$

### ۳-۳-۱- میدان‌های کمکی ضرایب شدت تنش

بکارگیری انتگرال برهم‌کنش نیازمند کاربرد میدان‌های کمکی جابجایی  $u^{aux}$ ، کرنش  $\varepsilon^{aux}$  و تنش  $\sigma^{aux}$  است. میدان‌های کمکی مذکور بر حسب نوع کمیت مورد محاسبه - ضرایب شدت تنش و تنش  $T$  - تعریف می‌شود. انتخاب‌های مختلفی برای میدان‌های کمکی وجود دارد. میدان‌های کمکی را می‌توان بصورت تحلیلی و یا عددی در نظر گرفت، بطور معمول میدان‌های کمکی انتخابی هر سه قانون مکانیک جامدات را ارضا می‌نمایند.

میدان‌های مذکور برای مواد ارتوتروپیک با در نظر گرفتن خصوصیات ماده در نوک ترک بدست می‌آیند. شکل (۲-۳) ترک در یک پیوستار دو بعدی مواد ارتوتروپیک و دستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی نوک ترک را نشان می‌دهد.



شکل (۲-۳) پیوستار دو بعدی شامل ترک و دستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی نوک ترک

میدان‌های کمکی جابجایی و تنش بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\sigma_{ij}^{aux} = K_I^{aux} (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^I(\theta, \mu_1, \mu_2) + K_{II}^{aux} (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) \quad (15-3)$$

$$u_i^{aux} = K_I^{aux} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^I(\theta, \mu_1, \mu_2) + K_{II}^{aux} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) \quad (16-3)$$

که در آن  $K_I^{aux}$  و  $K_{II}^{aux}$  ضرایب شدت تنش موده‌های  $I$  و  $II$  می‌باشند. توابع زاویه‌ای  $f_{ij}(\theta, \mu_1, \mu_2)$  و  $g_i(\theta, \mu_1, \mu_2)$  در فصل قبل معرفی گردیده اند.

### ۳-۳-۲- استخراج ضرایب شدت تنش

رابطه بین انتگرال برهم‌کنش و ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  بصورت زیر قابل بیان است [۳۱]:

$$M = 2c_{11}K_I K_I^{aux} + c_{12}(K_I K_{II}^{aux} + K_I^{aux} K_{II}) + 2c_{22}K_{II} K_{II}^{aux} \quad (۱۷-۳)$$

$$c_{11} = -\frac{a_{22}}{2} \operatorname{Im}\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}\right)$$

$$c_{12} = -\frac{a_{22}}{2} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mu_1 \mu_2}\right) + \frac{a_{11}}{2} \operatorname{Im}(\mu_1 \mu_2)$$

$$c_{22} = \frac{a_{11}}{2} \operatorname{Im}(\mu_1 + \mu_2) \quad (۱۸-۳)$$

در رابطه بالا  $a_{ij}$  اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته می‌باشند که در روابط (۲-۴۶) و (۲-۴۷) بصورت تابعی از ماتریس نرمی  $S_{ij}$  بیان گردیده اند و مقدار  $\mu$  نیز در فصل قبل بیان شده است.

با انتخاب مناسب میدان‌های کمکی (مود  $I$  و مود  $II$ ) ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  با حل رابطه

زیر بدست می‌آید.

$$M^{(1)} = 2c_{11}K_I + c_{12}K_{II} \leftarrow (K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0)$$

$$M^{(2)} = c_{12}K_I + 2c_{22}K_{II} \leftarrow (K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1) \quad (۱۹-۳)$$

با حل دو معادله، دو مجهول بالا بر حسب  $M^{(1)}$  و  $M^{(2)}$  مقادیر  $K_I$  و  $K_{II}$  بدست می‌آید.

$$K_I = \frac{2c_{22}M^{(1)} - c_{12}M^{(2)}}{4c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$

$$K_{II} = \frac{2c_{11}M^{(2)} - c_{12}M^{(1)}}{4c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \quad (۲۰-۳)$$

### ۳-۴- تنش $T$

همانطور که اشاره شد با فرض برقراری شرایط ناحیه تسلیم کوچک، یکی از پارامترهای ذکرشده بعنوان یک خصوصیت ماده را می‌توان برای توصیف میدان‌های حوزه نوک ترک بکار برد. اما با فرض

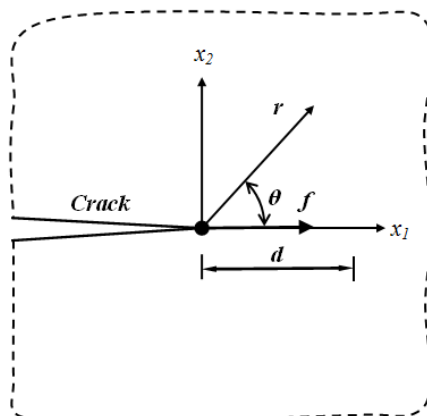
بزرگ بودن ناحیه پلاستیک نوک ترک، برای تعیین میدان‌های حوزه نوک ترک یک پارامتر کافی نیست. از اینرو، مطالعات تجربی و عددی برای توصیف این میدان‌ها با دو پارامتر انجام شده است. یکی از کمیت‌هایی که بعنوان پارامتر دوم شکست مطرح است؛ تنش الاستیک  $T$  می‌باشد. تنش  $T$  مولفه‌ای از تنش با مقدار ثابت است که در جبهه ترک و موازی با سطح ترک اعمال می‌شود و شکل و اندازه ناحیه پلاستیک نوک ترک و چقرمگی را کنترل می‌کند. بعلاوه، روی پایداری مسیر رشد ترک اثر قابل توجهی دارد. بدیهی است که تحلیل شکست با دو پارامتر اطلاعات کاملتری در مورد نحوه گسیختگی سازه را بدست می‌دهد. بنابراین میدان تنش در حوزه نوک ترک در یک پیوستار جامد در این حالت به این صورت تعریف می‌شود:

$$\sigma_{ij} = K_I (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^I(\theta, \mu_1, \mu_2) + K_{II} (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta, \mu_1, \mu_2) + T \delta_{ij} \delta_{1j} \quad (21-3)$$

که در آن،  $K_I$  و  $K_{II}$  ضرایب شدت تنش مود  $I$  و  $II$  می‌باشد و  $T$  مولفه تنش غیر تکین است. تنش  $T$  روی زاویه شروع و رشد ترک در بارگذاری مود مختلط تأثیر دارد. همچنین پایداری مسیر ترک در بارگذاری مود  $I$  تحت تأثیر تنش  $T$  قرار می‌گیرد.

### ۳-۴-۱- میدان‌های کمکی تنش $T$

انتخاب‌های مختلفی برای میدان‌های کمکی وجود دارد. میدان‌های کمکی را می‌توان بصورت تحلیلی و یا عددی در نظر گرفت.



شکل (۳-۳) اعمال یک بار نقطه‌ای به نوک یک ترک نیمه بی‌نهایت

برای محاسبه تنش  $T$  میدان‌های حاصل از اعمال یک بار نقطه ای به نوک ترک نیمه بینهایت واقع در محیط بی نهایت همگن بعنوان میدان‌های کمکی جابجایی، کرنش و تنش در نظر گرفته می‌شوند. حل مذکور بطور تحلیلی و بصورت زیر برای مواد ایزوتروپیک قابل بیان است [۵۰]:

$$u_1^{aux} = -\frac{f(1+\kappa)}{8\pi\mu} \ln \frac{r}{d} - \frac{f}{4\pi\mu} \sin^2 \theta \quad (22-3)$$

$$u_2^{aux} = -\frac{f(\kappa-1)}{8\pi\mu} \theta + \frac{f}{4\pi\mu} \sin \theta \cos \theta \quad (23-3)$$

$$\sigma_{11}^{aux} = -\frac{f}{\pi r} \cos^3 \theta \quad (24-3)$$

$$\sigma_{12}^{aux} = -\frac{f}{\pi r} \cos^2 \theta \sin \theta \quad (25-3)$$

$$\sigma_{22}^{aux} = -\frac{f}{\pi r} \cos \theta \sin^2 \theta \quad (26-3)$$

که در آن  $f$  نیروی متمرکزی است که به نوک ترک و در راستای آن اعمال می‌گردد.  $d$  نیز مختصه  $x_1$  نقطه‌ای است که در راستای این محور مقید شده است.

برای تعریف میدان کمکی تنش  $T$  در مواد ارتوتروپیک دو دیدگاه وجود دارد که در ادامه دیدگاه لختیسیکی توضیح داده می‌شود:

### ۳-۴-۲- دیدگاه لختیسیکی

فرمول بندی لختیسیکی رویکرد موشخلیشویلی در سال ۱۹۳۳ را برای تغییر شکل دو بعدی از یک جسم الاستیک ناهمسانگرد تعمیم داده است و فرض کرده است، که تنش‌ها تنها به مختصات صفحه‌ای بستگی دارد. در فرمول بندی لختیسیکی از میدان‌های تنش کمکی شناخته شده‌ای استفاده شده است و مشتقات میدان‌های جابجایی کمکی نیز تعیین گردیده‌اند. تنش‌های کمکی، با توجه به مختصات قطبی  $(r, \theta)$ ، به صورت زیر داده شده است [۲]:

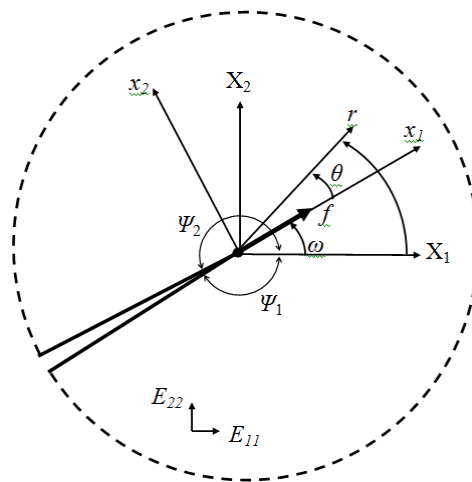
$$\sigma_{rr}^{aux} = \frac{A \cos \phi + B \sin \phi}{r F(\phi)}, \quad \sigma_{\phi\phi}^{aux} = \sigma_{r\phi}^{aux} = 0 \quad (27-3)$$

$$F(\phi) = a_{11} \cos^4 \phi + (2a_{12} + a_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + a_{22} \sin^4 \phi \quad (28-3)$$

ثوابت  $A$  و  $B$  از شرایط تعادل برای یک ترک نیمه بی نهایت در صفحه ارتوتروپیک همگن نامحدود مانند شکل (۳-۴) تعیین می شوند. معادلات تعادل با توجه به مختصات دکارتی اصلی  $X$  و  $Y$  به صورت زیر است:

$$A \int_{-\psi_1}^{\psi_2} \frac{\cos^2 \phi}{F(\phi)} d\phi + B \int_{-\psi_1}^{\psi_2} \frac{\sin \phi \cos \phi}{F(\phi)} d\phi = -f \cos \omega$$

$$A \int_{-\psi_1}^{\psi_2} \frac{\sin \phi \cos \phi}{F(\phi)} d\phi + B \int_{-\psi_1}^{\psi_2} \frac{\sin^2 \phi}{F(\phi)} d\phi = -f \sin \omega \quad (۳-۲۹)$$



شکل (۳-۴) نیروی نقطه ای اعمال شده به نوک ترک در راستای ترک در صفحه ارتوتروپیک بی نهایت

میدان های کمکی تنش با توجه به مختصات اصلی به صورت زیر است:

$$\sigma_{11}^{aux} = \frac{A \cos \phi + B \sin \phi}{r F(\phi)} \cos^2 \phi$$

$$\sigma_{22}^{aux} = \frac{A \cos \phi + B \sin \phi}{r F(\phi)} \sin^2 \phi \quad (۳-۳۰)$$

$$\sigma_{12}^{aux} = \frac{A \cos \phi + B \sin \phi}{r F(\phi)} \sin \phi \cos \phi$$

با استفاده از روابط تنش - کرنش و روابط کرنش - جابجایی، مشتقات جابجایی نسبت به مختصات

دکارتی اصلی به شرح زیر به دست می آید [۵۰]:

$$u_{1,1} = (a_{11} \cos^2 \phi + a_{12} \sin^2 \phi) \frac{A \cos \phi + B \sin \phi}{r F(\phi)}$$

$$u_{2,2} = (a_{12} \cos^2 \phi + a_{22} \sin^2 \phi) \frac{A \cos \phi + B \sin \phi}{r F(\phi)}$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{r F(\phi)} \{A \sin \phi F(\phi) - AH_1(\phi) - BH_2(\phi)\}$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{r F(\phi)} [a_{66} (A \cos \phi + B \sin \phi) \sin \phi \cos \phi - \{A \sin \phi F(\phi) - AH_1(\phi) - BH_2(\phi)\}] \quad (31-3)$$

که در آن:

$$H_1(\phi) = a_{11} \cos^4 \phi \sin \phi + a_{12} \sin \phi \cos^2 \phi - a_{22} \sin^3 \phi \cos^2 \phi - (2a_{12} + a_{66}) \sin \phi \cos^2 \phi$$

$$H_2(\phi) = a_{11} \cos^3 \phi + a_{12} \sin^2 \phi \cos \phi \quad (32-3)$$

با توجه به میدان های کمکی ارائه شده در این روش می توان مقدار تنش  $T$  را مانند ضرایب شدت تنش بدست آورد.

### ۳-۴-۳- استخراج تنش $T$ :

رابطه تنش  $T$  و انتگرال  $M$  در مواد ایزوتروپیک به صورت زیر است:

$$T = \frac{ME^*}{f} - \lambda \Delta T^{tip} E^* \quad (33-3)$$

که در آن  $E^* = E$  برای حالت تنش صفحه ای و  $E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)}$  برای حالت کرنش صفحه ای می

باشد.

رابطه تنش  $T$  و انتگرال  $M$  در مواد ارتوتروپیک نیز به صورت زیر است [31]:

$$T = \frac{M}{fa_{11}} - \frac{\lambda_1 \Delta T^{tip}}{a_{11}} \quad (34-3)$$

مقدار  $\lambda$  در فصل ۲ معرفی گردیده است و  $\Delta T^{tip}$  مقدار تغییر دمای نوک ترک می باشد.

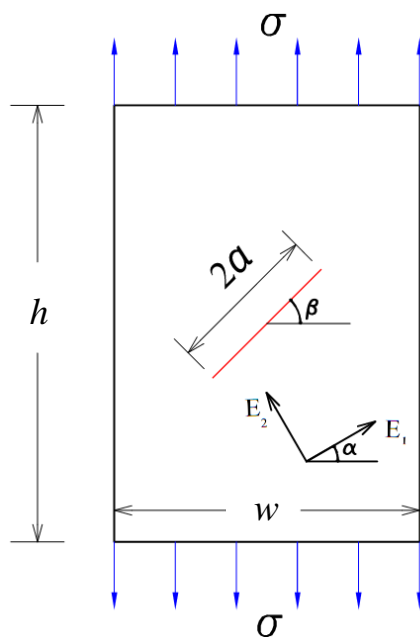
### ۳-۵- مثال های عددی

موضوع مورد بحث در این قسمت ، بررسی رفتار ترک در مواد ایزوتروپیک و ارتوتروپیک تحت بارهای مکانیکی می باشد، که از روش عددی المان محدود توسعه یافته به بررسی رفتار ترک پرداخته و ضرایب شدت تنش و تنش  $T$  را در حالت استاتیکی محاسبه می نماید. در این قسمت برای بررسی درستی برنامه *MATLAB* نوشته شده، ابتدا مسائل ایزوتروپیک آورده شده و سپس مسائل ارتوتروپیک حل شده است و با نتایج دیگر مقالات مقایسه گردیده است.

در تمام مسائل این پایان نامه شرایط صفحه ای فرض شده است و همچنین مقدار ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  مطابق فرمول زیر بی بعد شده اند. در تمامی مسائل مقدار  $(\alpha)$  زاویه ناهمسانگردی با راستای افق و  $(\beta)$  زاویه ترک با راستای افق در نظر گرفته شده است (شکل ۳-۵).

$$K_{In} = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{a\pi}} \quad , \quad K_{IIn} = \frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{a\pi}} \quad (3-35)$$

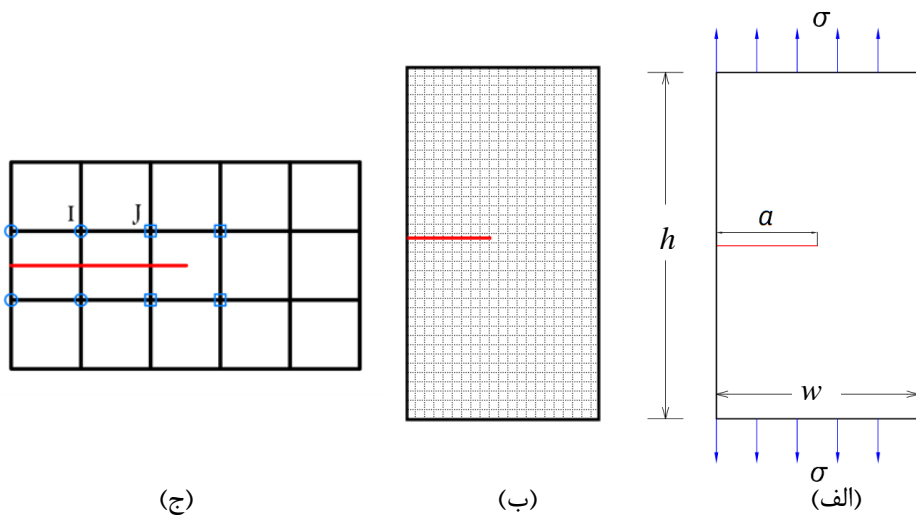
در صفحات دارای ترک مرکزی، مقدار  $K_{In}^1$  و  $K_{IIn}^1$  ضرایب شدت تنش مربوط به نوک ترک اول (سمت چپ) و  $K_{In}^2$  و  $K_{IIn}^2$  ضرایب شدت تنش مربوط به نوک ترک دوم (سمت راست) می باشد. و  $T^1$  مقدار تنش  $T$  در نوک ترک اول و  $T^2$  مقدار تنش  $T$  در نوک ترک دوم می باشد.



شکل (۳-۵) صفحه ارتوتروپیک دارای ترک مرکزی تحت تنش

### ۳-۵-۱- ترک لبه ای برای ماده ایزوتروپیک در حالت استاتیکی

به عنوان اولین مثال در این بخش، یک صفحه ایزوتروپیک با عرض  $w = 7$  واحد و ارتفاع  $h = 16$  واحد در نظر گرفته می شود، که دارای ترک مستقیم لبه ای به طول  $a = 3/5$  واحد است، صفحه تحت تنش ثابت  $\sigma$  قرار دارد ( شکل (۳-۶) ). ضریب پواسون  $\nu = 0.3$  و مدول الاستیسیته  $E = 10^6 \text{ Psi}$  می باشد و حالت تنش صفحه ای فرض شده است.



شکل (۳-۶) صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه ای تحت تنش (الف) هندسه و بارهای وارده (ب) مشبندی صفحه (ج) گسسته سازی نوک ترک

مقدار ضرایب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  و  $K_{IIIn}$  برای تعداد المان های مختلف مستطیلی، در جدول

(۳-۱) آورده شده است. همچنین برای مش  $24 \times 48$  نتایج با نتایج تحلیلی مقایسه گردیده است.

جدول (۳-۱) مقادیر ضرایب شدت تنش بی بعد در مش بندی های مختلف برای ماده ایزوتروپیک

مش	درجه آزادی	$K_{In}$	$K_{IIIn}$
$12 \times 24$	۶۲۸	۲/۶۵۹۴	۰
$24 \times 48$	۲۳۸۰	۲/۷۵۳۶	-۰/۰۰۰۱
$36 \times 46$	۳۴۱۲	۲/۷۵۳۲	-۰/۰۰۰۲



با توجه به حل تحلیلی ارائه شده [۵] :

$$K_I = C\sigma\sqrt{a\pi}\cos^2(\beta) \quad (۳۶-۳)$$

$$K_{II} = C\sigma\sqrt{a\pi}\sin(\beta)\cos(\beta) \quad (۳۷-۳)$$

که  $C$  از رابطه زیر بدست می آید:

$$C = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{w}\right) + 10.55\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{w}\right)^4 \quad (۳۸-۳)$$

با توجه به معادله (۳۸-۳) و جایگزینی مقادیر  $a$  و  $w$  مقدار  $C$  بدست می آید. با بی بعد کردن معادله

(۳۶-۳) مقدار  $K_{In}$  در زاویه ترک صفر درجه برابر  $۲/۸۲۶۴$  بدست می آید. با توجه به جدول (۱-۳)

مقدار  $K_{In}$  از روش ارائه شده  $۲/۷۵۳۶$  بدست آمده است. که با حل تحلیلی تطابق قابل قبولی دارد و

خطای آن  $۲/۵۷\%$  است.

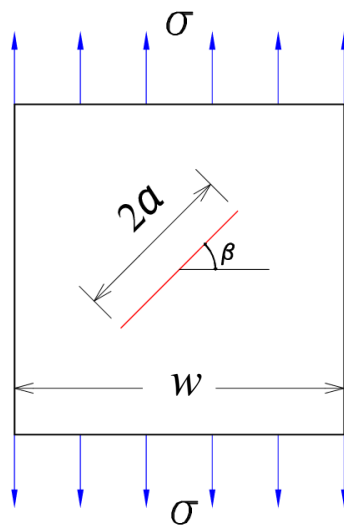
### ۳-۵-۲- ترک مرکزی برای ماده ایزوتروپیک در حالت استاتیکی

یک صفحه ایزوتروپیک مربعی با طول ضلع  $w = ۲۰$  واحد در نظر گرفته می شود، که دارای ترک

مستقیم مرکزی به طول  $۲a = ۲$  واحد است و صفحه تحت تنش ثابت  $\sigma$  قرار دارد (شکل ۷-۳).

ضریب پواسون  $\nu = ۰/۳$  و مدول الاستیسیته  $E = ۱۰^۵$  Psi می باشد و حالت تنش صفحه ای فرض

شده است. ترک مرکزی می تواند زوایای مختلفی داشته باشد.



شکل (۷-۳) صفحه ایزوتروپیک دارای ترک مرکزی تحت تنش

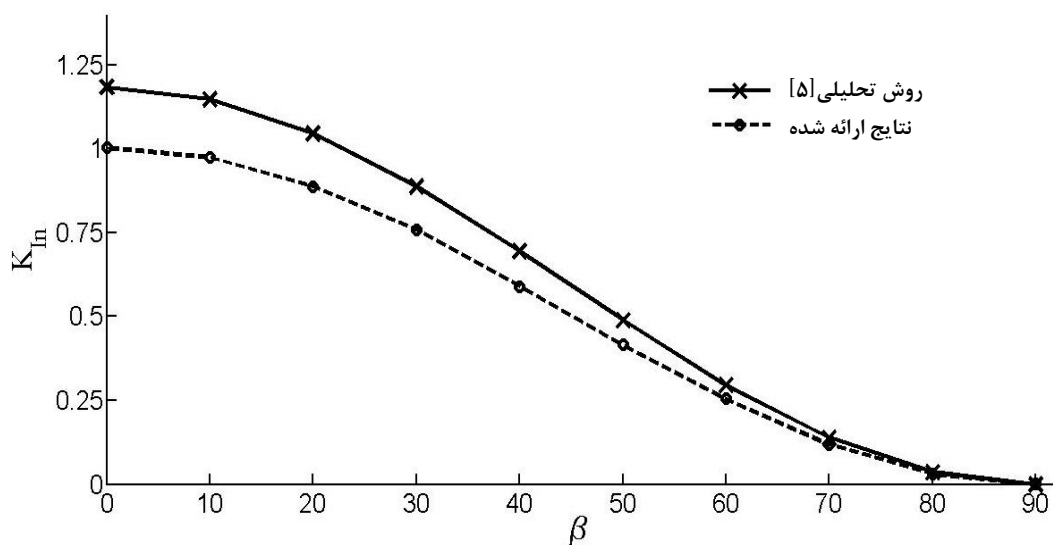
مقدار ضرایب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  و  $K_{IIn}$  برای مش  $۸۰ \times ۸۰$  و زوایای مختلف ترک ( $\beta$ ) محاسبه گردیده است، که نتایج در جدول (۲-۳) آورده شده است و نتایج در شکل (۳-۸) و (۳-۹) با نتایج بدست آمده از روش تحلیلی مقایسه گردیده است.

جدول (۲-۳) مقادیر ضرایب شدت تنش بی بعد در زوایای مختلف ترک ( $\beta$ ) برای ماده ایزوتروپیک با روش ارائه شده

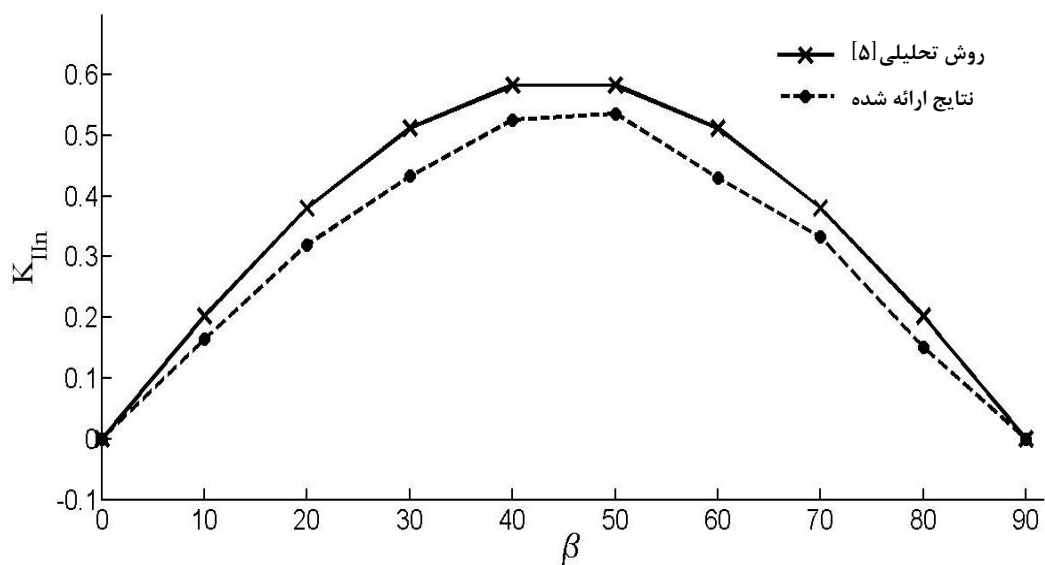
زاویه ترک ( $\beta$ )	$K_{In}^1$	$K_{In}^2$	$K_{IIn}^1$	$K_{IIn}^2$
۰	۱/۰۰۳۹	۱/۰۰۳۹	۰/۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۵
۱۰	۰/۹۷۳۹	۰/۹۷۴۳	۰/۱۷۵۶	۰/۱۷۴۸
۲۰	۰/۸۸۷۶	۰/۸۸۸۴	۰/۳۲۸۶	۰/۳۲۸۰
۳۰	۰/۷۵۹۷	۰/۷۶۰۵	۰/۴۴۸۰	۰/۴۴۷۷
۴۰	۰/۵۹۰۰	۰/۵۹۰۶	۰/۵۰۶۵	۰/۵۰۶۴
۵۰	۰/۴۱۵۹	۰/۴۱۶۳	۰/۵۱۷۱	۰/۵۱۷۲
۶۰	۰/۲۵۴۵	۰/۲۵۴۸	۰/۴۵۴۴	۰/۴۵۴۵
۷۰	۰/۱۱۷۹	۰/۱۱۸۰	۰/۳۱۶۹	۰/۳۱۷۰
۸۰	۰/۰۳۰۳	۰/۰۳۰۳	۰/۱۸۵۵	۰/۱۸۵۵
۹۰	$۱/۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۲ \times ۱۰^{-۵}$	$-۰/۸ \times ۱۰^{-۵}$	$-۰/۸ \times ۱۰^{-۵}$

با توجه به معادله (۳۸-۳) و جایگزینی مقادیر  $a$  و  $w$  مقدار  $C$  برابر  $۱/۱۸۳۷$  بدست می آید. با

بی بعد کردن معادله (۳۶-۳) و (۳۷-۳) مقدار دقیق  $K_{In}$  و  $K_{IIn}$  بدست می آید.



شکل (۸-۳) مقادیر ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{IIn}$  در زوایای مختلف ترک ( $\beta$ ) برای ماده ایزوتروپیک



شکل (۹-۳) مقادیر ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{IIIn}$  در زوایای مختلف ترک ( $\beta$ ) برای ماده ایزوتروپیک

در این مثال مقدار تنش  $T$  نیز محاسبه گردیده است و نتایج در جدول (۳-۳) آورده شده است و با نتایج بدست آمده از روش تحلیلی مقایسه گردیده است. همانطور که دیده می شود، مقادیر بدست آمده با مقادیر تحلیلی اختلاف کمی دارد. مقدار تنش  $T$  با توجه به حل تحلیلی به صورت زیر بدست می آید [۵]:

$$T = -\sigma \cos(2\beta) \quad (۳۹-۳)$$

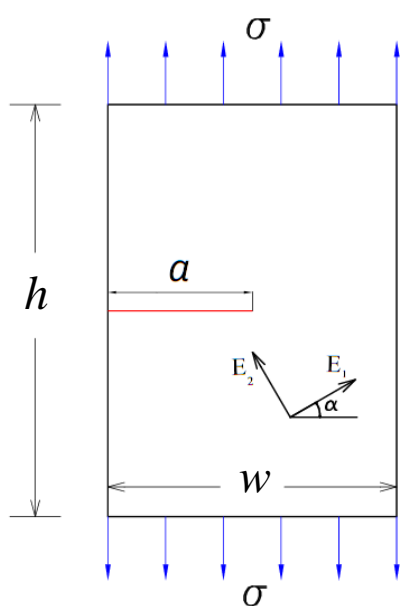
جدول (۳-۳) مقادیر تنش  $T$  در زوایای مختلف ترک ( $\beta$ ) برای ماده ایزوتروپیک با روش ارائه شده و روش تحلیلی

زاویه ترک ( $\beta$ )	نتایج ارائه شده		روش تحلیلی
	$T^1$	$T^2$	
۰	-۱/۰۱۰۲	-۱/۰۱۰۲	-۱
۱۰	-۰/۹۴۸۴	-۰/۹۴۹۸	-۰/۹۳۹۷
۲۰	-۰/۷۷۳۷	-۰/۷۷۶۱	-۰/۷۶۶
۳۰	-۰/۵۰۴۳	-۰/۵۰۷۴	-۰/۵
۴۰	-۰/۱۸۰۹	-۰/۱۸۲۹	-۰/۱۷۳۶
۵۰	۰/۱۶۷۴	۰/۱۶۶۱	۰/۱۷۴۳
۶۰	۰/۴۹۳۰	۰/۴۹۲۲	۰/۵
۷۰	۰/۷۶۳۷	۰/۷۶۳۵	۰/۷۶۶
۸۰	۰/۹۳۸۷	۰/۹۳۸۶	۰/۹۳۹۷
۹۰	۱	۱	۱

### ۳-۵-۳- ترک لبه‌ای برای ماده ارتوتروپیک در حالت استاتیکی

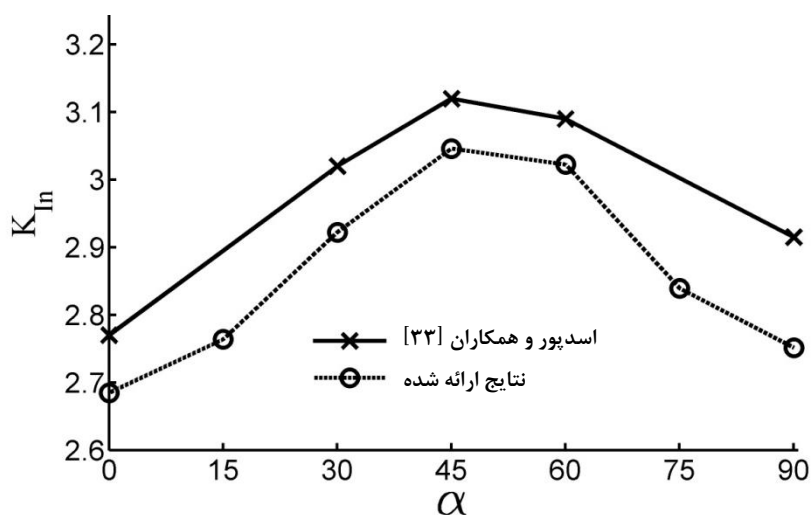
یک صفحه ارتوتروپیک با عرض  $w$  و ارتفاع  $h = 2w$  در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک مستقیم لبه‌ای به طول  $a = 0.5w$  است، صفحه تحت تنش ثابت  $\sigma$  در لبه‌های بالا و پایین قرار دارد (شکل (۳-۱۰)). مشخصات ماده  $\nu_{12} = 0.21$ ،  $E_1 = 114/8 \text{ GPa}$ ،  $E_2 = 11/7 \text{ GPa}$  و  $G_{12} = 9/66 \text{ GPa}$  می‌باشد و حالت تنش صفحه‌ای فرض شده است.

مقدار ضرایب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  و  $K_{IIIn}$  برای زوایای مختلف ناهمسانگردی ( $\alpha$ ) با تعداد مش  $160 \times 80$  محاسبه گردیده است، که نتایج در شکل‌های (۳-۱۱) و (۳-۱۲) آورده شده است. همچنین نتایج با مقادیر گزارش شده توسط اسدیپور و همکارانش [۳۳] مقایسه شده است. که تطابق قابل قبولی بین مقدار آن‌ها دیده می‌شود.

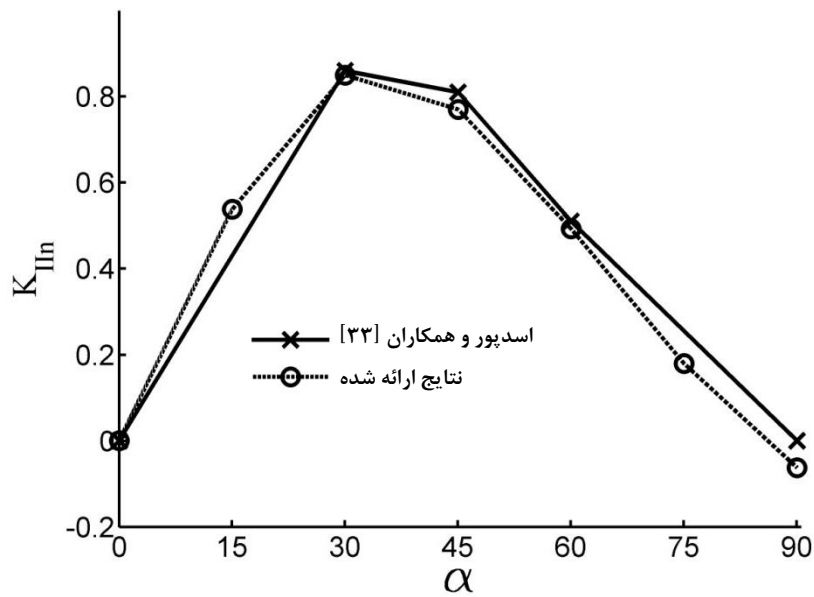


شکل (۱۰-۳) صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت تنش

مطابق نتایج، مقدار ضرایب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  و  $K_{IIIn}$  با افزایش زاویه ناهمسانگردی، ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد. ضریب شدت تنش مود  $I$  در زاویه ناهمسانگردی ۴۵ درجه و ضریب شدت تنش مود  $II$  در زاویه ناهمسانگردی ۳۰ درجه به مقدار حداکثر خود می‌رسند.



شکل (۱۱-۳) مقادیر ضریب شدت تنش بی‌بعد  $K_{In}$  در صفحه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی ( $\alpha$ )



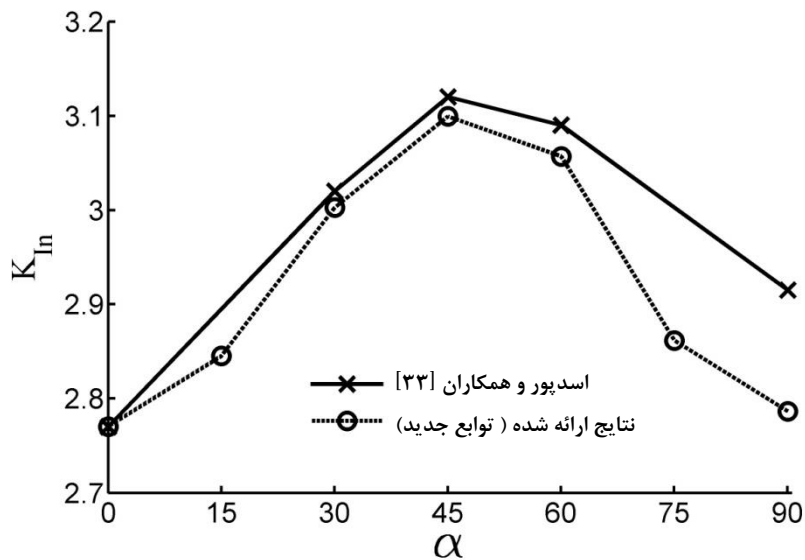
شکل (۳-۱۲) مقادیر ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{IIIn}$  در صفحه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی ( $\alpha$ )

در این مثال مقدار ضرایب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  و  $K_{IIIn}$  برای زوایای مختلف ناهمسانگردی ( $\alpha$ )

با استفاده از توابع غنی سازی جدید ارائه شده نیز محاسبه گردیده است، و نتایج در شکل های (۳-۱۳)

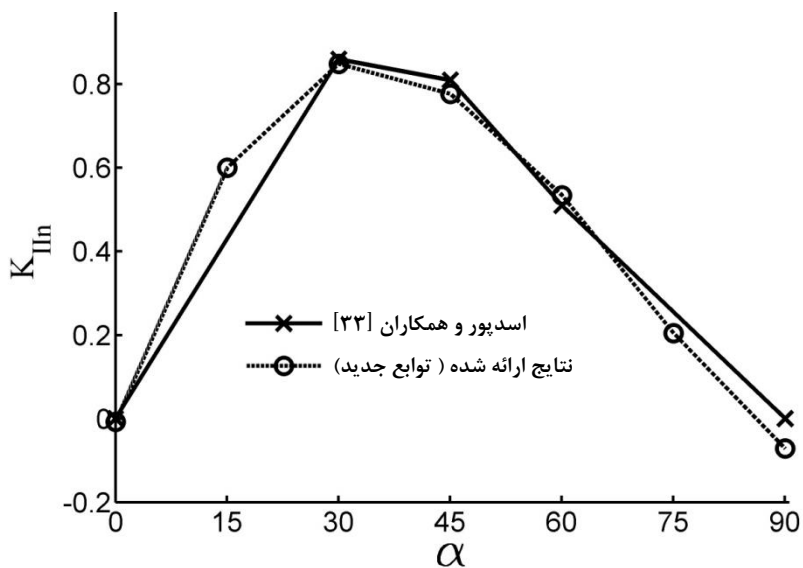
و (۳-۱۴) آورده شده است. همچنین نتایج با مقادیر گزارش شده توسط اسدپور و همکارانش [۳۳]،

مقایسه شده است، که تطابق قابل قبولی بین مقادیر آن ها دیده می شود.



شکل (۳-۱۳) مقادیر ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  در یک صفحه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی ( $\alpha$ )

با استفاده از توابع غنی سازی جدید



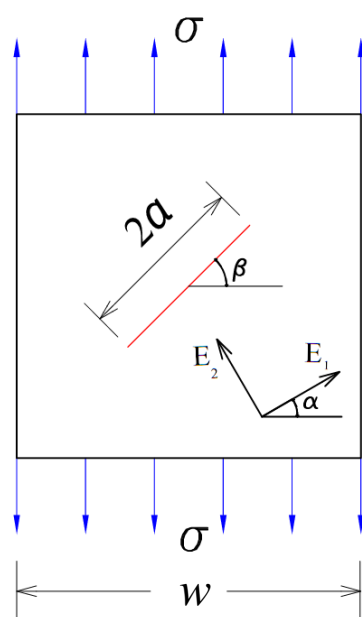
شکل (۳-۱۴) مقادیر ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{IIIn}$  در یک صفحه ارتوتروپیک برای زوایای مختلف ناهمسانگردی ( $\alpha$ ) با استفاده از توابع غنی سازی جدید

### ۳-۵-۴- ترک مرکزی برای ماده ارتوتروپیک در حالت استاتیکی

یک صفحه ارتوتروپیک مربعی با طول ضلع  $w = 20$  واحد در نظر گرفته شده است، که دارای ترک مستقیم مرکزی به طول  $2a = 2$  واحد می باشد. صفحه تحت تنش ثابت  $\sigma$  در قرار دارد (شکل ۳-۱۵).

مشخصات ماده  $\nu_{12} = 0.21$ ،  $E_1 = 114/8 \text{ GPa}$ ،  $E_2 = 11/7 \text{ GPa}$  و  $G_{12} = 9/66 \text{ GPa}$

می باشد.



شکل (۳-۱۵) صفحه ارتوتروپیک دارای ترک مرکزی تحت تنش (هندسه و بارهای وارده)

مقدار ضرایب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  و  $K_{IIn}$  در هر نوک ترک برای زاویه ناهمسانگردی صفر درجه و زاویه ترک صفر درجه، در مش‌بندی‌های مختلف محاسبه گردیده و نتایج در جدول (۳-۴) آورده شده است. مقدار ضرایب شدت تنش با مش  $46 \times 45$  و حالت تنش صفحه‌ای، در جدول (۳-۵) با نتایج بدست آمده توسط اسدپور و همکارانش [۳۴] و کیم و پائولینو [۳۱] مقایسه گردیده است. همانطور که در جدول (۳-۵) دیده می‌شود، نتایج روش ارائه شده با گزارش‌های قبلی مطابقت خوبی دارد.

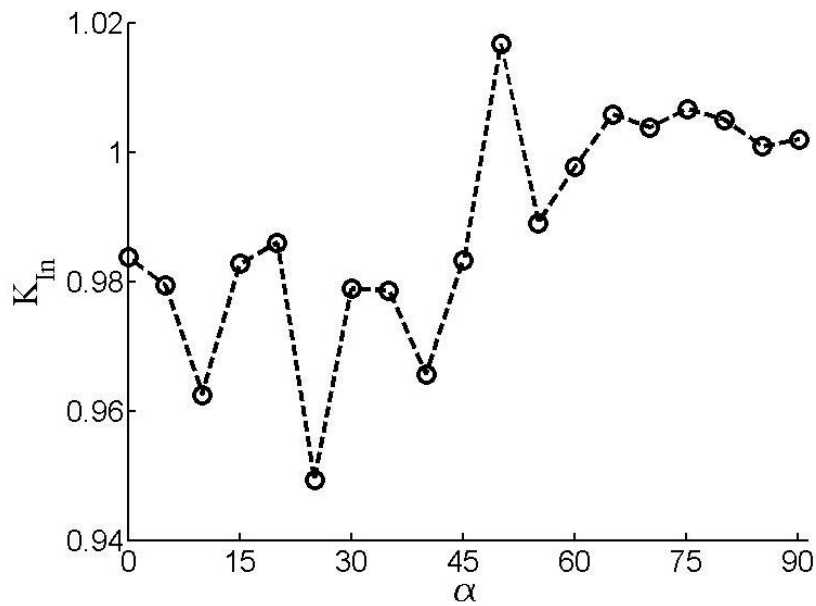
جدول (۳-۴) مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد در مش‌بندی‌های مختلف برای ماده ارتوتروپیک

مش	$K_{In}^1$	$K_{In}^2$	$K_{IIn}^1$	$K_{IIn}^2$	درجه آزادی
$35 \times 36$	۱/۲۱۳۰	۱/۲۱۲۳	۰	۰	۲۵۸۸
$40 \times 40$	۰/۹۵۸۲	۰/۹۵۸۹	۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۱	۳۲۷۲
$45 \times 46$	۰/۹۸۴	۰/۹۸۳۲	۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۱	۴۲۱۶

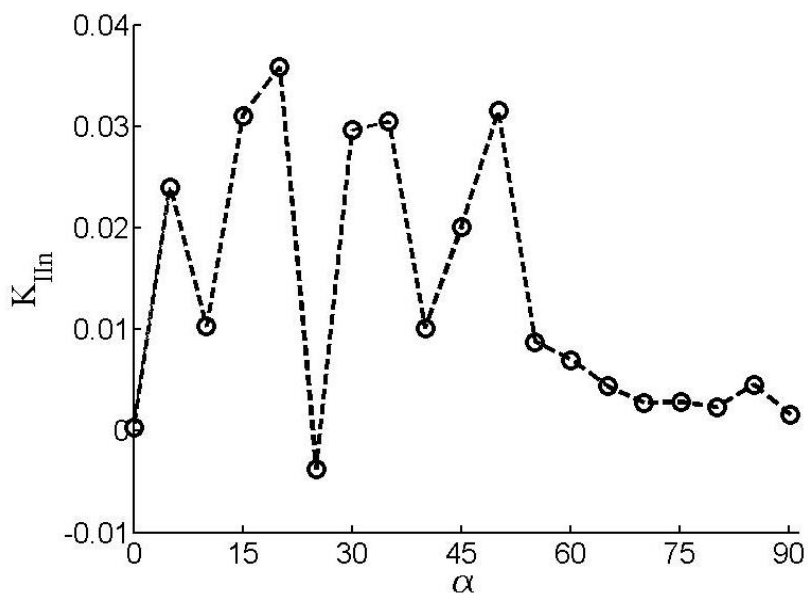
جدول (۳-۵) مقایسه مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد برای ماده ارتوتروپیک با روش‌های دیگر

روش	$K_{In}$	$K_{IIn}$	تعداد المان‌ها	درجه آزادی
اسدپور و همکاران [۳۴]	۱/۰۱۸	۰	۲۰۲۵	۴۲۷۸
کیم و پائولینو [۳۱]	۰/۹۹۷	۰	۲۰۰۱	۱۱۷۰۲
نتایج ارائه شده	۰/۹۸۴	۰/۰۰۰۱	۱۹۸۰	۴۲۱۶





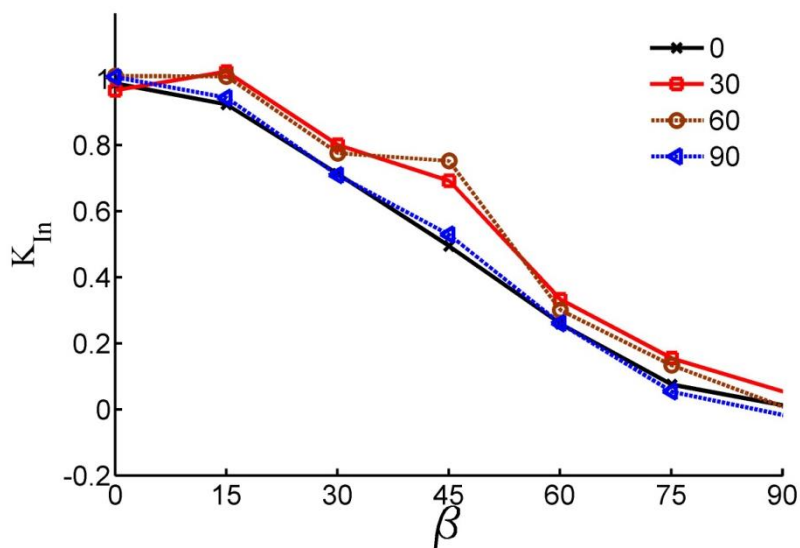
شکل (۳-۱۶) ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  در زوایای ناهمسانگردی مختلف و زاویه ترک صفر درجه ( $\beta = 0$ )



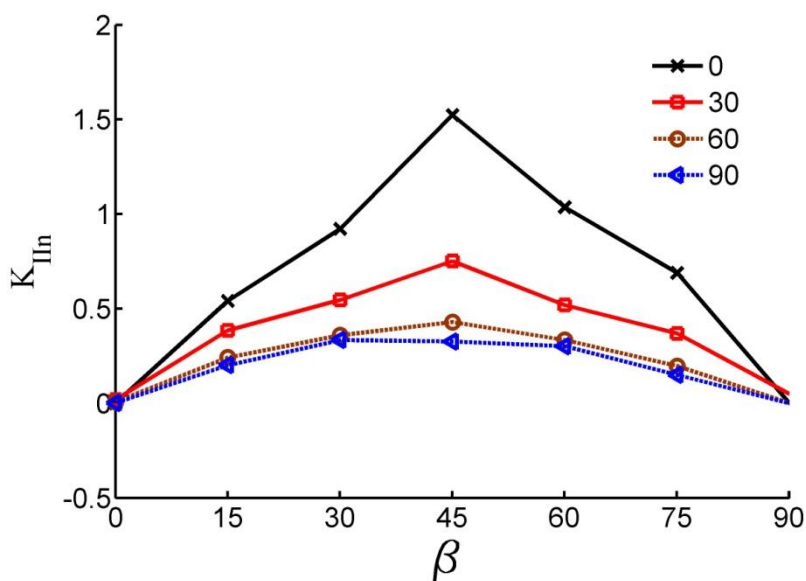
شکل (۳-۱۷) ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{IIIn}$  در زوایای ناهمسانگردی مختلف و زاویه ترک صفر درجه ( $\beta = 0$ )

شکل‌های (۳-۱۶) و (۳-۱۷) ضرایب شدت تنش مربوط به زوایای ناهمسانگردی مختلف را برای

ترکی که با افق زاویه صفر درجه دارد، نشان می‌دهد.



شکل (۳-۱۸) ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  بر حسب زاویه ترک ( $\beta$ ) در زوایای ناهمسانگردی مختلف ( $\alpha$ )



شکل (۳-۱۹) ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{IIIn}$  بر حسب زاویه ترک ( $\beta$ ) در زوایای ناهمسانگردی مختلف ( $\alpha$ )

شکل‌های (۳-۱۸) و (۳-۱۹) به ترتیب ضرایب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  و  $K_{IIIn}$  را بر حسب زاویه ترک با افق، برای زوایای ناهمسانگردی مختلف نشان می‌دهند. نکته قابل توجه این است که در تمامی زوایای ناهمسانگردی برای ترک با زاویه صفر و ۹۰ درجه مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{IIIn}$  تقریباً یکسان است و در ترک با زاویه صفر و ۹۰ درجه حساسیت به زاویه ناهمسانگردی ناچیز می‌باشد. برای تمامی زوایای ناهمسانگردی در زاویه ترک ۴۵ درجه مقدار  $K_{IIIn}$  ماکزیمم است. با مقایسه بین زوایای

ناهمسانگردی مختلف در نمودار شکل (۳-۱۸) و (۳-۱۹)، زاویه ناهمسانگردی ۹۰ درجه کمترین مقدار ضرایب شدت تنش در زوایای ترک مختلف را داراست.

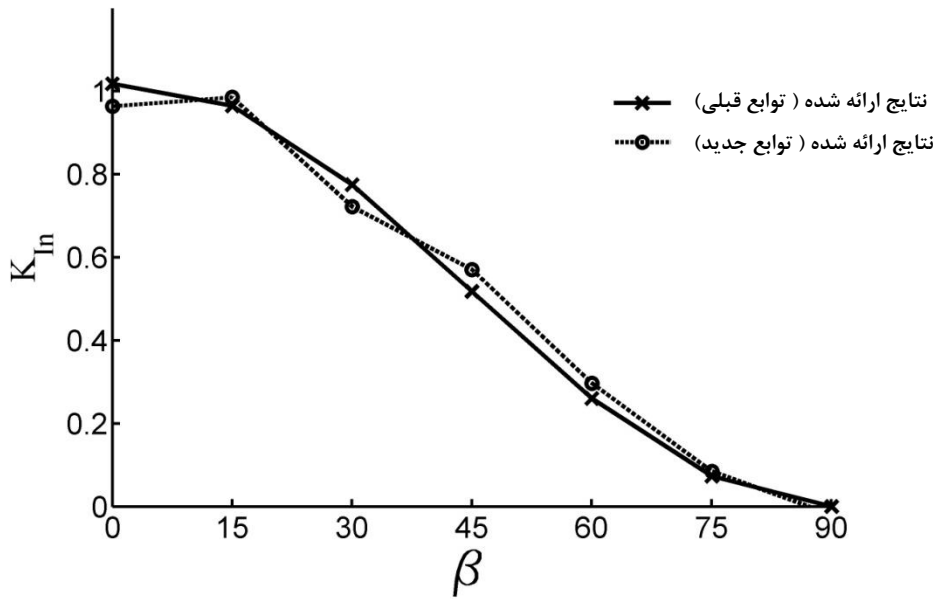
در این مثال مقدار ضرایب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  و  $K_{IIIn}$  برای زوایای مختلف ناهمسانگردی ( $\alpha$ ) و زوایای مختلف ترک ( $\beta$ )، با توابع غنی سازی جدید ارائه شده نیز محاسبه گردیده است، که نتایج در شکل‌های زیر آورده شده است. همچنین نتایج با توابع غنی سازی ارائه شده توسط اسدپور و همکارانش [۳۴]، مقایسه شده است، که تطابق قابل قبولی بین مقادیر آن‌ها دیده می‌شود.

مقدار ضرایب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  و  $K_{IIIn}$  در هر نوک ترک برای زاویه ناهمسانگردی صفر درجه و زاویه ترک صفر درجه محاسبه گردیده است و در جدول (۳-۶) با نتایج بدست آمده توسط اسدپور و همکارانش [۳۴] مقایسه گردیده است. همانطور که در جدول دیده می‌شود، نتایج روش ارائه شده با گزارشات قبلی مطابقت خوبی دارد.

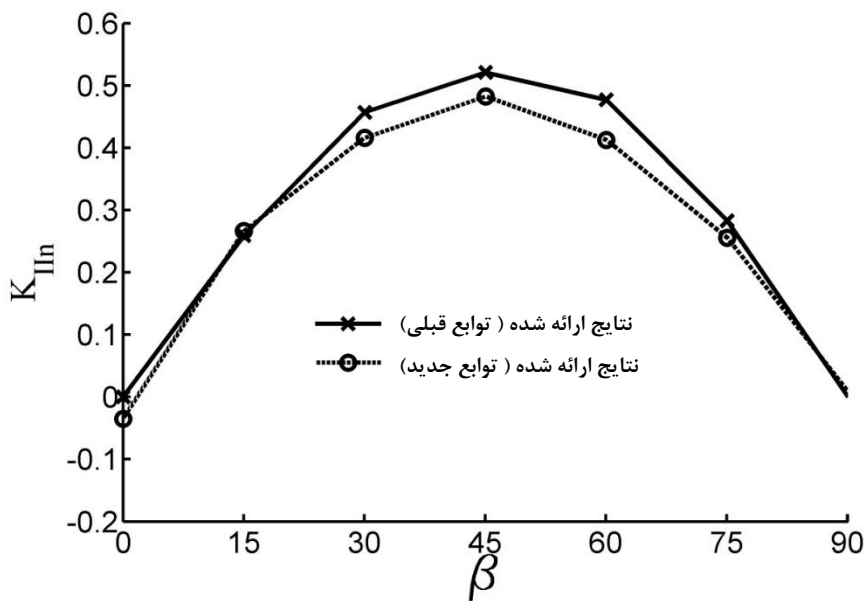
جدول (۳-۶) مقایسه مقادیر ضرایب شدت تنش بی‌بعد بدست آمده از توابع جدید برای ماده ارتوتروپیک با روش‌های دیگر

درجه آزادی	تعداد المان‌ها	$K_{IIIn}$	$K_{In}$	روش
۴۲۷۸	۲۰۲۵	۰	۱/۰۱۸	اسدپور و همکاران [۳۴]
۴۱۸۴	۱۹۸۰	-۰/۰۱۶	۰/۹۶۷۵	توابع جدید ارائه شده

شکل‌های (۳-۲۰) و (۳-۲۱) به ترتیب ضرایب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  و  $K_{IIIn}$  را بر حسب زاویه ترک با افق، برای زاویه ناهمسانگردی ۴۵ درجه نشان می‌دهند. همانطور که ملاحظه می‌شود اختلاف ناچیزی بین روش ارائه شده و گزارشات قبلی وجود دارد.



شکل (۳-۲۰) ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  بر حسب زاویه ترک ( $\beta$ ) در زاویه ناهمسانگردی ( $\alpha = 45$ ) با توابع غنی سازی ارائه شده جدید



شکل (۳-۲۱) ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{IIIn}$  بر حسب زاویه ترک ( $\beta$ ) در زاویه ناهمسانگردی ( $\alpha = 45$ ) با توابع غنی سازی ارائه شده جدید

مقدار تنش  $T$  در نوک ترک نیز برای زاویه ترک صفر درجه و زاویه ناهمسانگردی صفر درجه در مش بندی های مختلف بدست آمده است و مقدار بدست آمده از مش  $100 \times 100$  با حل تحلیلی ارائه شده توسط گائو مقایسه گردیده است [۷۳].

جدول (۷-۳) مقادیر تنش  $T$  برای ماده ارتوتروپیک با مش بندی های مختلف

مش	تعداد المان‌ها	$T$
$45 \times 46$	۱۹۸۰	-۳/۰۹۸
$60 \times 60$	۳۴۸۱	-۳/۱۳۲
$80 \times 80$	۶۲۴۱	-۳/۱۵۵
$90 \times 90$	۷۹۲۱	-۳/۱۷۳
$96 \times 96$	۹۰۲۵	-۳/۱۶۳
$98 \times 98$	۹۴۰۹	-۳/۱۶۲
$100 \times 100$	۹۸۰۱	-۳/۱۶۹

جدول (۸-۳) مقایسه مقادیر تنش  $T$  برای ماده ارتوتروپیک با روش‌های دیگر

روش	$T$	تعداد المان‌ها
تحلیلی [۷۳]	-۳/۱۶۷	-
کیم و پائولینو [۵۰]	-۳/۱۶۴	۱۷۵۹
روش ارائه شده	-۳/۱۶۹	۹۸۰۱

فصل چہارم

# تحلیل دینامیکی ترک ایستنا

#### ۴-۱- مقدمه:

این قسمت به شبیه سازی تجزیه و تحلیل دینامیکی ترک ثابت در مواد ارتوتروپیک با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته اختصاص یافته است. این کار در واقع گسترش مسائل دینامیکی ارتوتروپیک است که به تازگی توسعه یافته و از روش المان محدود توسعه یافته برای تجزیه و تحلیل شکست مواد ارتوتروپیک استفاده می شود.

در این قسمت نیز، توابع هویساید و توابع غنی سازی نزدیک به نوک ترک، در قالب یک پیکربندی واحد برای مدل سازی ناپیوستگی ترک و نوک ترک در روش المان محدود کلاسیک استفاده می شود. برای تعیین خواص شکست، ضرایب شدت تنش دینامیکی<sup>۱</sup> مانند بخش قبل با استفاده از انتگرال برهم کنش ارزیابی می شود.

در این پایان نامه، راه حل موجود استاتیکی المان محدود توسعه یافته در مواد ارتوتروپیک پیش تر برای تجزیه و تحلیل ضرایب شدت تنش ارائه شد، در این قسمت تجزیه و تحلیل ضرایب شدت تنش دینامیکی و تنش  $T$  برای ترک های ایستا در مواد ارتوتروپیک گسترش یافته است. در بخش های قبل، روش المان محدود توسعه یافته و توابع غنی سازی ارتوتروپیک شرح داده شده است و فرمولاسیون اساسی از مکانیک شکست برای مواد ارتوتروپیک بررسی شد. در ادامه، به منظور بررسی غنی سازی مواد ارتوتروپیک و به منظور بررسی استحکام آن، روش بدست آوردن ضرایب شدت تنش دینامیکی ارائه خواهند شد.

#### ۴-۲- معادلات حاکم

در فصل قبل به بررسی حالت استاتیکی ترک پرداخته شد، و میدان جابه جایی در حالت استاتیکی طبق معادله (۲-۷۶) بدست آمد، در فصل ۳ نیز با توجه به میدان جابه جایی بدست آمده و انتگرال برهم کنش مقادیر ضرایب شدت تنش و تنش  $T$  محاسبه گردید.

<sup>۱</sup> DSIFs

در این فصل زمان نیز وارد مسأله می شود، در این حالت معادلات حرکت و شرایط مرزی و شرایط اولیه عبارتند از:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma + b &= \rho \ddot{u} & \text{in } \Omega & \quad (1-4) \\ \sigma \cdot n &= \bar{t} & \text{on } \Gamma_t & \\ \sigma \cdot n &= 0 & \text{on } \Gamma_d & \\ u(x, t=0) &= \bar{u}(0) & & \\ \dot{u}(x, t=0) &= \bar{\dot{u}}(0) & & \end{aligned}$$

که  $n$  بردار نرمال یکه می باشد. در بالا  $\sigma$  تانسور تنش کوشی و  $b$  چگالی نیروی حجمی است.

همچنین معادله زیر جایگزین معادله (۲-۶۹) در فصل ۲ می گردد:

$$M\ddot{u} + Ku = f^{ext} \quad (2-4)$$

مقدار بردار نیرو  $f^{ext}$  و ماتریس سفتی  $K$  مشابه فصل ۲ بدست می آیند. ماتریس  $M$  ماتریس جرم می باشد و مطابق زیر بدست می آید.

#### ۴-۲-۱- استخراج ماتریس جرم برای انواع المان

ماتریس جرم هر المان به صورت زیر به دست می آید:

$$M_e = \int_{\Omega^h} [N]^T \rho [N] d\Omega \quad (3-4)$$

در رابطه (۳-۴)،  $\rho$  چگالی ماده است و  $[N]$  ماتریس گسسته سازی شده توابع شکل توسعه یافته می باشد و مولفه های آن به صورت زیر است:

$$[N] = [N_i^u \quad N_j^a \quad N_k^{b1} \quad N_k^{b2} \quad N_k^{b3} \quad N_k^{b4}] \quad (4-4)$$

در این رابطه:

$$N_i^u = \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & \Phi_i \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

$$N_j^a = \begin{bmatrix} \Phi_j H(x_j) & 0 \\ 0 & \Phi_j H(x_j) \end{bmatrix} \quad (6-4)$$

$$N_k^{bl} \Big|_{l=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} \Phi_k F_k^l(x_k) & 0 \\ 0 & \Phi_k F_k^l(x_k) \end{bmatrix} \quad (7-4)$$



فقط باید با توجه به معیار غنی‌سازی ارائه شده در فصل ۲، تأثیر درجات آزادی افزوده شده به هر گره در ابعاد ماتریس  $[N]$  در نظر گرفته شود. لذا ابعاد ماتریس  $[N]$  نیز تفاوت می‌کند و برای هر نوع گره باید سهم مناسبی در ماتریس  $[N]$  در نظر گرفته شود.

اگر گره  $i$  نیاز به غنی‌سازی نداشته باشد در حالت دو بعدی، ۲ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس  $[N]$  به صورت زیر خواهد بود:

$$N_i = \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & \Phi_i \end{bmatrix} \quad (۸-۴)$$

اگر گره  $j$  نیاز به غنی‌سازی از طریق تابع پله‌ای واحد داشته باشد در حالت دو بعدی ۴ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس  $[N]$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N_j = \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 & \Phi_j H(x_j) & 0 \\ 0 & \Phi_i & 0 & \Phi_j H(x_j) \end{bmatrix} \quad (۹-۴)$$

اگر گره  $k$  نیاز به غنی‌سازی از طریق تابع تکین داشته باشد در حالت دو بعدی، ۱۰ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس  $[N]$  به صورت زیر خواهد بود:

$$N_k^{bl} \Big|_{l=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 & \Phi_k F_k^l(x_k) & 0 \\ 0 & \Phi_i & 0 & \Phi_k F_k^l(x_k) \end{bmatrix} \quad (۱۰-۴)$$

بنابراین سهم هر سه نوع کلی گره به طور جداگانه در روش المان محدود توسعه یافته، درون ماتریس  $[N]$  به دست آورده شد (روابط ۸-۴ و ۹-۴ و ۱۰-۴) که با توجه به نوع گره‌های اطراف هر المان می‌توان ماتریس کلی  $[N]$  را برای آن المان بدست آورد.

البته این امکان وجود دارد که گره‌های اطراف هر المان با توجه به موقعیت نسبی آن المان و ترک از نوع‌های مختلف باشد ولی چون تعداد سطرهای ماتریس  $[N]$  متناظر با آنها همواره یکسان است لذا به راحتی می‌توان ماتریس کلی  $[N]$  مربوط به هر المان را به دست آورد که ابعاد آن در غنی‌سازی، می‌تواند از  $۲ \times ۸$  تا  $۲ \times ۴۰$  متغیر باشد. سپس از طریق رابطه (۳-۴) ماتریس جرم مربوط به آن المان مشخص می‌گردد که در ماتریس جرم کل مدل مونتاژ می‌شود.

از جمع ماتریس جرم تک تک المان‌های داخل صفحه که پس از تقسیم بندی المانی به دست آمده‌اند، می‌توان ماتریس جرم کل را به دست آورد. جمع ماتریس‌های جرم مشابه روش مونتاژ ماتریس‌های سفتی هر المان در ماتریس سفتی کل می‌باشد.

$$M = \sum_e M_e \quad (11-4)$$

بدیهی است ابعاد ماتریس جرم المان که وابسته به ابعاد ماتریس گسسته‌سازی شده  $[N]$  می‌باشد، از  $8 \times 8$  تا  $40 \times 40$  برای روش غنی‌سازی می‌تواند متفاوت باشد. اما از لحاظ ریاضی به راحتی قابل اثبات است که همواره ماتریس جرمی برای هر نوع المان متقارن خواهد بود که در نتیجه ماتریس جرم کل سازه نیز متقارن می‌شود.

#### ۴-۳- حل معادله دینامیکی

در این مطالعه، روش نیومارک برای یکپارچه سازی زمانی معادلات المان محدود توسعه یافته حرکت مورد استفاده قرار می‌گیرد. در هر مرحله زمانی  $n$ ، معادلات نهایی گسسته به طور همزمان بیان شده است:

$$\ddot{u}_n = \frac{F - K \left( u_{n-1} + \Delta t \dot{u}_{n-1} + (1-2\beta) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{n-1} \right) - C (\dot{u}_{n-1} + (1-\alpha) \Delta t \ddot{u}_{n-1})}{(M + \beta \Delta t^2 K + \alpha \Delta t C)} \quad (12-4)$$

$$\dot{u}_n = \dot{u}_{n-1} + (1-\alpha) \Delta t \ddot{u}_{n-1} + \alpha \Delta t \ddot{u}_n$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \dot{u}_{n-1} + (1-2\beta) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{n-1} + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_n$$

که در آن  $u_n$ ،  $\dot{u}_n$  و  $\ddot{u}_n$  به ترتیب بردار جابجایی، بردار سرعت و بردار شتاب گره‌ها می‌باشند.  $M$ ،  $K$  و  $C$  به ترتیب ماتریس جرم، سفتی و ماتریس میرایی می‌باشند.  $F$  بردار نیرو و  $\Delta t$  افزایش زمان در هر گام ( $n$ ) می‌باشد. در اینجا، پارامترهای  $\alpha=0/5$  و  $\beta=0/25$  در نظر گرفته می‌شوند.

به دلیل عدم وجود میرایی در مسأله، ماتریس میرایی  $C$  نیز از معادله (۱۲-۴) حذف می‌شود، بنابراین معادلات به شکل زیر خواهد بود:

$$\ddot{u}_n = \frac{F - K \left( u_{n-1} + \Delta t \dot{u}_{n-1} + (1 - 2\beta) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{n-1} \right)}{(M + \beta \Delta t^2 K)} \quad (13-4)$$

$$\dot{u}_n = \dot{u}_{n-1} + (1 - \alpha) \Delta t \ddot{u}_{n-1} + \alpha \Delta t \ddot{u}_n \quad (14-4)$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \dot{u}_{n-1} + (1 - 2\beta) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{n-1} + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_n \quad (15-4)$$

#### ۴-۴- انتگرال برهم کنش برای مواد ارتوتروپیک در حالت دینامیکی

با مشتق گیری از عبارت داخل انتگرال دوم رابطه (۳-۱۴) و با اعمال معادله حرکت  $\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + X_i$  به جای معادله تعادل برای میدان اصلی و استفاده از روابط سازگاری میدان‌های اصلی و کمکی، انتگرال برهم کنش به صورت زیر بدست می‌آید. با اضافه شدن یک جمله به انتگرال برهم کنش در حالت استاتیکی، انتگرال برهم کنش در حالت دینامیکی بدست خواهد آمد. میدان‌های کمکی نیز مانند قبل می‌باشند [۳۱].

$$M = \int_A (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\rho \dot{u}_i u_{i,1}^{aux}) q dA \quad (16-4)$$

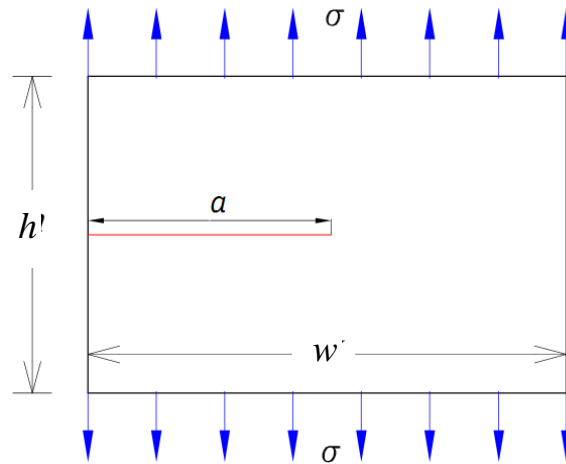
در این رابطه  $u_i$  مولفه‌های بردار تغییر مکان است، و  $\ddot{u}_i$  مولفه‌های بردار شتاب است، که در بخش قبلی برای تمامی گره‌ها بدست آمده است. با توجه به مولفه‌های بردار تغییر مکان و جایگذاری در روابط (۲-۲) و (۱۵-۲) مقدار تنش  $\sigma_{ij}$  نیز بدست می‌آید. مقادیر تنش و جابه‌جایی‌های کمکی و رابطه بین انتگرال برهم کنش و ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  در فصل قبل بیان شده است. با انتخاب مناسب میدان‌های کمکی (مود  $I$  و مود  $II$ ) ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  مشابه فصل ۳ بدست می‌آیند.

#### ۴-۵- مثال‌های عددی

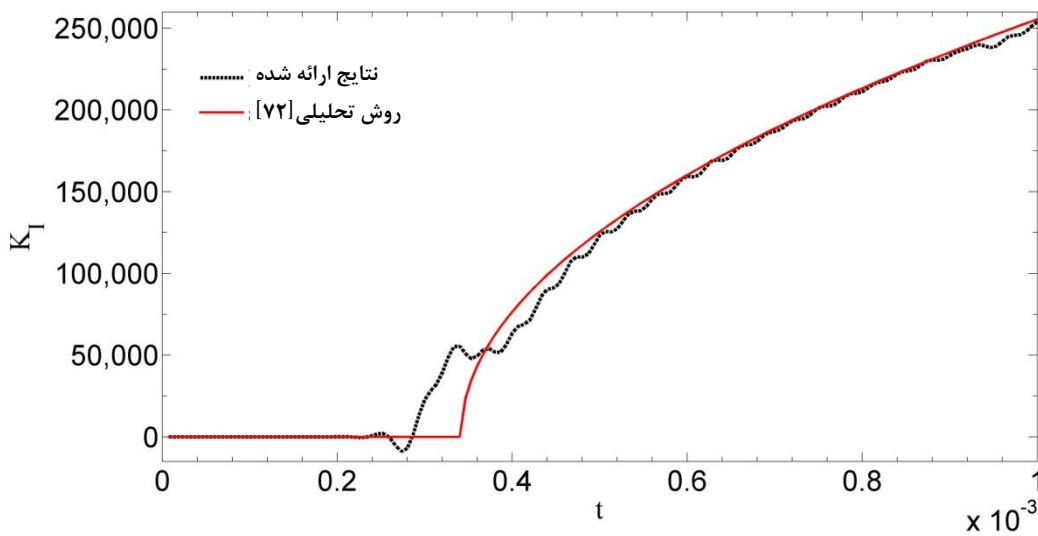
موضوع مورد بحث در این قسمت، تعیین ضرایب شدت تنش دینامیکی و تنش  $T$  در مواد ایزوتروپیک و ارتوتروپیک تحت بار مکانیکی می‌باشد، که از روش عددی المان محدود توسعه یافته استفاده شده است. در این قسمت برای بررسی درستی برنامه *MATLAB* نوشته شده، ابتدا مسائل ایزوتروپیک آورده شده و سپس مسائل ارتوتروپیک حل شده است و با نتایج دیگر مقالات مقایسه گردیده است.

#### ۴-۵-۱ - ترک لبه‌ای برای ماده ایزوتروپیک در حالت دینامیکی

یک صفحه ایزوتروپیک با ابعاد  $h = 4 \text{ m}$  و  $w = 10 \text{ m}$  در نظر گرفته می‌شود، که دارای ترک مستقیم لبه‌ای به طول  $a = 5 \text{ m}$  است، صفحه تحت تنش ثابت  $\sigma = 63750 \text{ MPa}$  قرار دارد (شکل (۴-۱)). ضریب پواسون  $\nu = 0.3$  و مدول الاستیسیته  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\rho = 7833 \text{ Kg/m}^3$  می‌باشد. و حالت کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.



شکل (۴-۱) صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بار دینامیکی (هندسه و بارهای اعمالی)



شکل (۴-۲) مقدار ضریب شدت تنش  $K_I$  در زمان‌های مختلف در ماده ایزوتروپیک

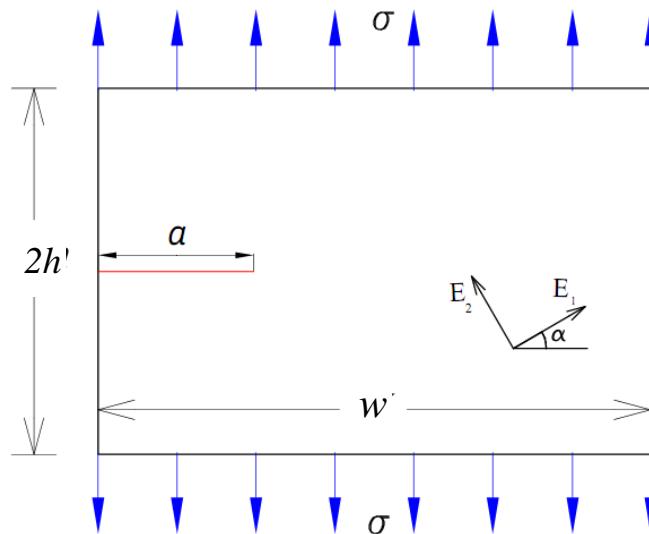
مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_I$  برای زمان‌های مختلف با مش  $50 \times 100$  محاسبه گردیده‌است و نتایج در شکل (۴-۲) آورده شده است و با مقادیر بدست آمده از رابطه تحلیلی ارائه

شده توسط فرند<sup>۱</sup> [۷۲] مقایسه گردیده است، که تطابق قابل قبولی بین حل ارائه شده و مقادیر گزارش شده دیده می شود.

مطابق شکل (۲-۴) جبهه موج در روش ارائه شده در لحظه  $t = 0.0026$  s به داخل ناحیه انتگرال گیری و در روش تحلیلی در لحظه  $t = 0.0034$  s به نوک ترک رسیده و مقدار ضریب شدت تنش به طور ناگهانی از صفر شروع به رشد می کند.

#### ۲-۵-۴ - ترک لبه‌ای برای ماده ارتوتروپیک در حالت دینامیکی

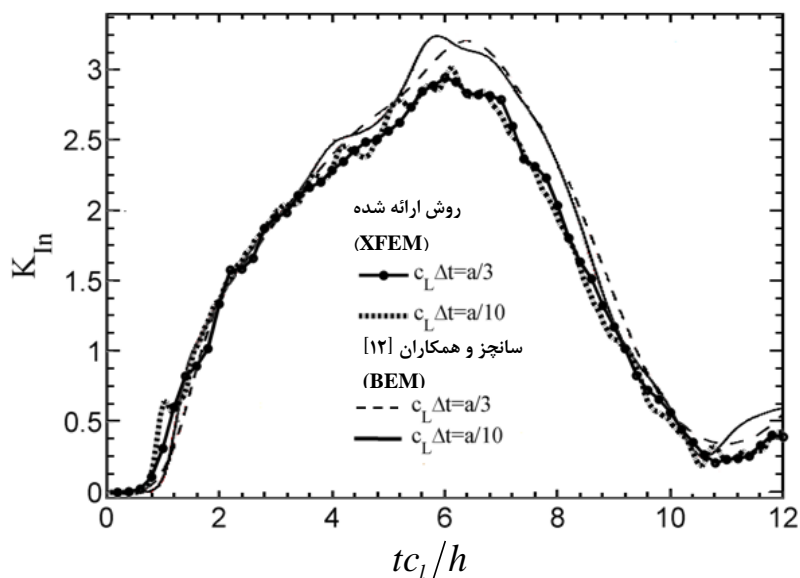
یک صفحه ارتوتروپیک با ابعاد  $2h = 40$  واحد و  $w = 52$  واحد در نظر گرفته می شود که دارای ترک مستقیم لبه‌ای به طول  $a = 12$  واحد است، صفحه تحت تنش ثابت  $\sigma$  قرار دارد (مطابق شکل (۳-۴)). مشخصات ماده  $E_1 = 118/3$  GPa،  $E_2 = 54/8$  GPa و  $G_{12} = 8/79$  GPa و  $\nu_{12} = 0.83$  و  $\rho = 1900$  Kg/m<sup>3</sup> می باشد و شرایط تنش صفحه ای فرض شده است. همچنین گام‌های زمانی برابر  $\Delta t = \frac{a}{3c_1}$  و یک بار نیز  $\Delta t = \frac{a}{10c_1}$  در نظر گرفته شده است، که  $c_1 = \sqrt{\frac{C_{22}}{\rho}}$  می باشد و  $C_{22}$  مولفه ماتریس الاستیک می باشد،  $(\sigma = C \varepsilon)$ .



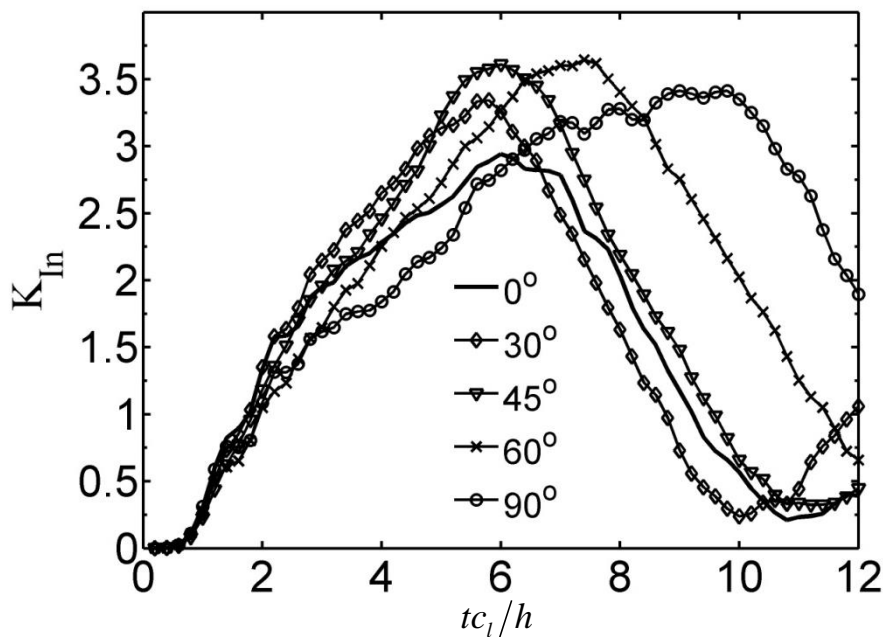
شکل (۳-۴) صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بار دینامیکی (هندسه و بارهای وارده)

<sup>1</sup> Freund

مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد  $K_{In}$  برای زمان‌های مختلف با مش  $60 \times 78$  محاسبه گردیده است و نتایج در شکل (۴-۴) آورده شده است. بعلاوه، نتایج بدست آمده با ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_{In}$  ارائه شده توسط سانچز و همکارانش [۱۲] مقایسه گردیده است.



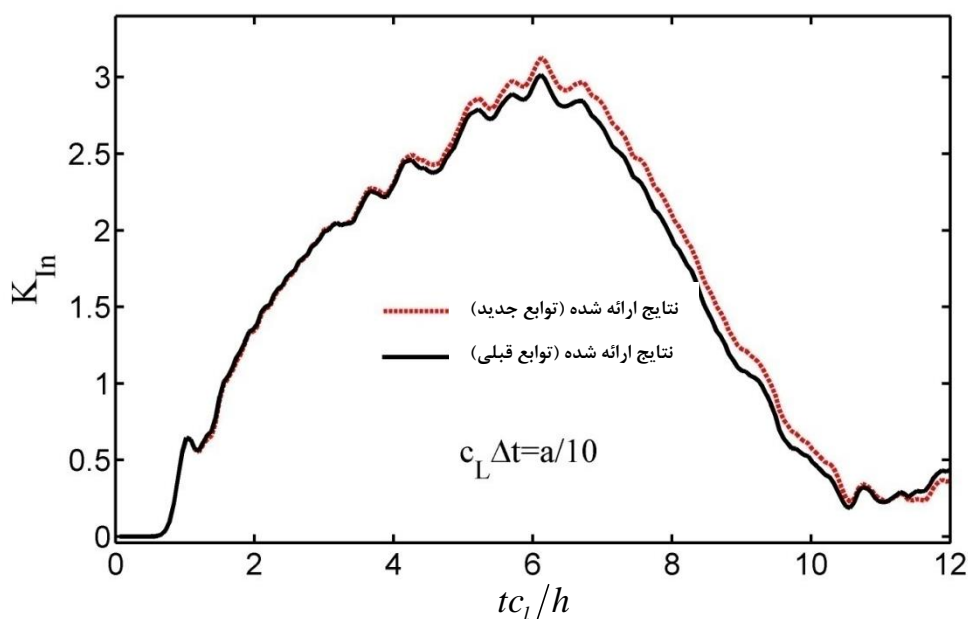
شکل (۴-۴) مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  در زمان‌های مختلف با زاویه ناهمسانگردی صفر درجه در ماده ارتوتروپیک



شکل (۵-۴) مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  در زمان‌های مختلف با زوایای ناهمسانگردی مختلف در ماده ارتوتروپیک

در این مثال مقادیر ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد  $K_{In}$  در زمان‌های مختلف و برای زوایای ناهمسانگردی مختلف بدست آمده است. گام‌های زمانی برابر  $\Delta t = \frac{a}{3c_l}$  در نظر گرفته شده است. مطابق شکل (۴-۵) مقدار ضریب شدت تنش بیشینه در زاویه ناهمسانگردی صفر درجه کمترین مقدار را دارد.

مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد  $K_{In}$  برای زمان‌های مختلف با توابع غنی سازی جدید محاسبه و نتایج در شکل (۴-۶) آورده شده است و با نتایج بدست آمده از توابع غنی سازی قبلی که توسط اسدیپور و همکاران [۳۴] ارائه شده است، مقایسه گردیده است.

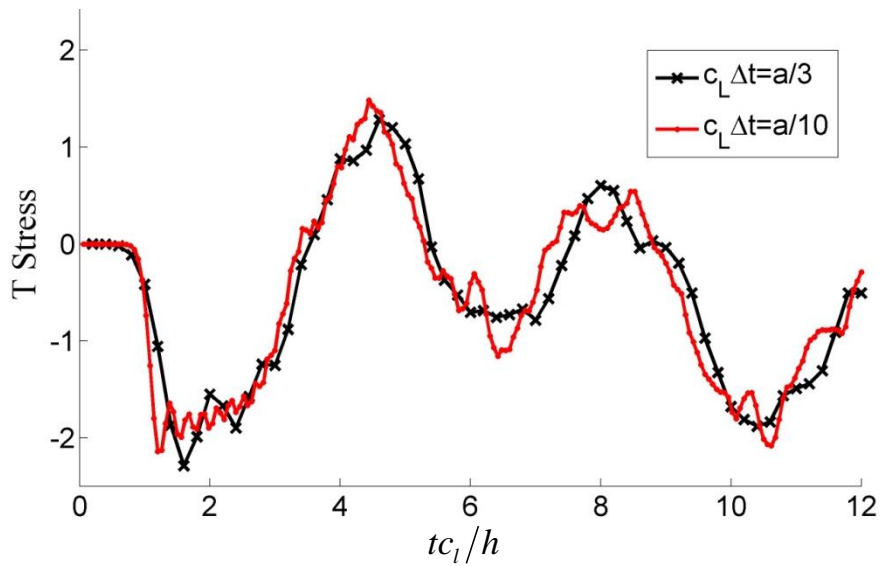


شکل (۴-۶) مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  در زمان‌های مختلف با زاویه ناهمسانگردی صفر درجه در ماده

$$\Delta t = \frac{a}{10c_l} \text{ ارتوتروپیک با توابع غنی سازی جدید}$$

مقدار تنش  $T$  نیز، در حالت دینامیکی در زمان‌های مختلف با استفاده از مش  $80 \times 10^4$  و در دو

حالت مختلف با گام‌های زمانی  $\Delta t = \frac{a}{3c_l}$  و  $\Delta t = \frac{a}{10c_l}$  محاسبه گردیده و در شکل (۶-۶) رسم گردیده است.



شکل (۷-۴) مقدار دینامیکی تنش  $T$  در زمان‌های مختلف در ماده ارتوتروپیک

#### ۳-۵-۴ - ترک مرکزی برای ماده ارتوتروپیک در حالت دینامیکی

یک صفحه با ابعاد  $2h = 40$  واحد و  $w = 20$  واحد در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک مرکزی

مستقیم به طول  $2a = 4/8$  واحد است، صفحه تحت تنش یکنواخت  $\sigma$  قرار دارد (شکل (۸-۴)).

مشخصات ماده به ترتیب  $\nu_{12} = 0.083$ ،  $E_1 = 118/3$  GPa،  $E_2 = 54/8$  GPa و  $G_{12} = 8/79$  GPa

و  $\rho = 1900$  Kg/m<sup>3</sup> می‌باشد و شرایط تنش صفحه ای فرض شده است. همچنین  $\Delta t = \frac{a}{50c_1}$  در نظر

گرفته شده است، که  $c_1 = \sqrt{\frac{C_{22}}{\rho}}$  می‌باشد و  $C_{22}$  مولفه ماتریس الاستیک می‌باشد،  $(\sigma = C \varepsilon)$ .

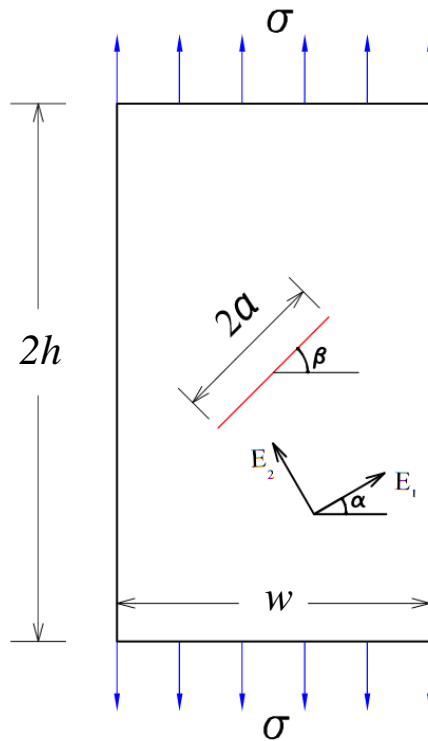
در این مثال ضرایب شدت تنش بی بعد در زمان‌های مختلف و برای زوایای ناهمسانگردی مختلف با

استفاده از مش  $100 \times 50$  محاسبه و رسم گردیده است و با نتایج بدست آمده از روش المان مرزی

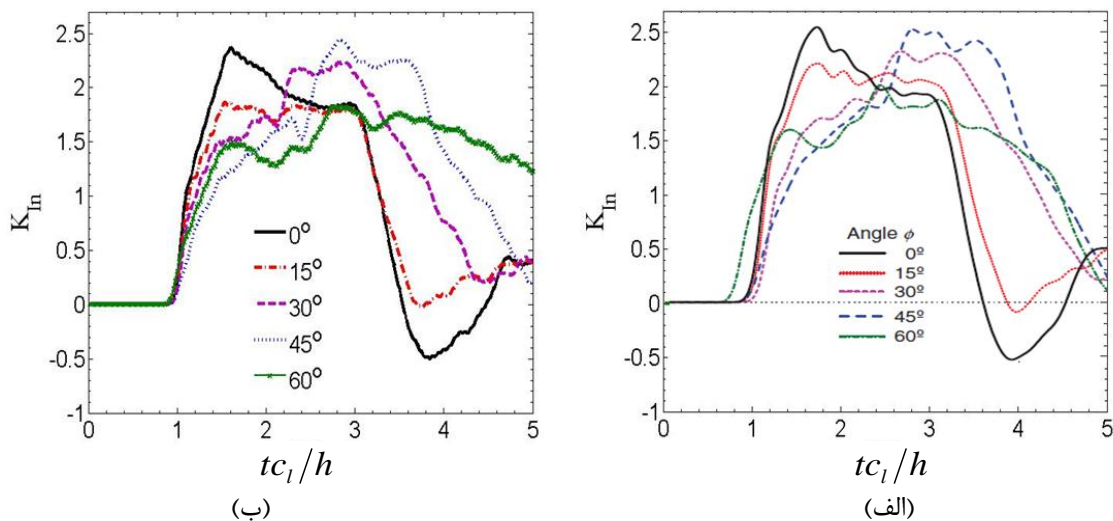
توسط سانچز و همکاران [۱۲] (شکل‌های (۹-۴) و (۱۰-۴)) مقایسه شده است. همانطور که از

شکل‌ها مشخص است نتایج انطباق قابل قبولی دارند.

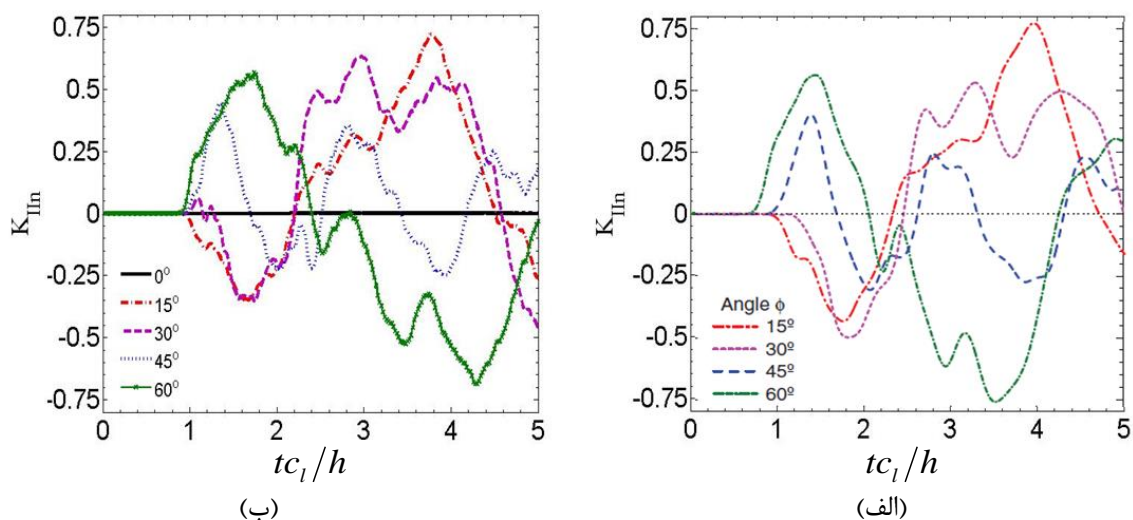




شکل (۴-۸) صفحه ارتوتروپیک دارای ترک مرکزی تحت بار دینامیکی (هندسه و بارهای وارده)



شکل (۴-۹) مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  در ترک با زاویه صفر درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک (الف) سانچز و همکاران (ب) روش ارائه شده

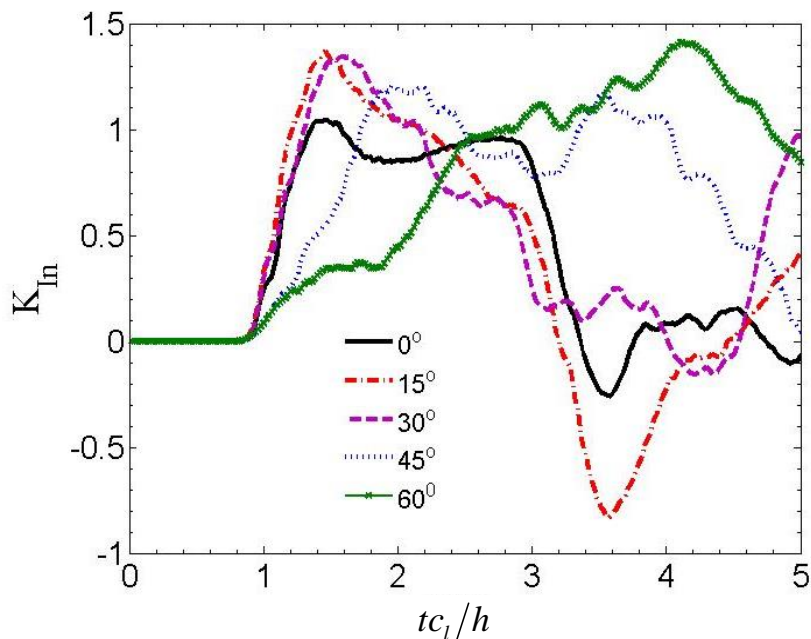


شکل (۴-۱۰) مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد  $K_{IIn}$  در ترک با زاویه صفر درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک (الف) سانچز و همکاران (ب) روش ارائه شده

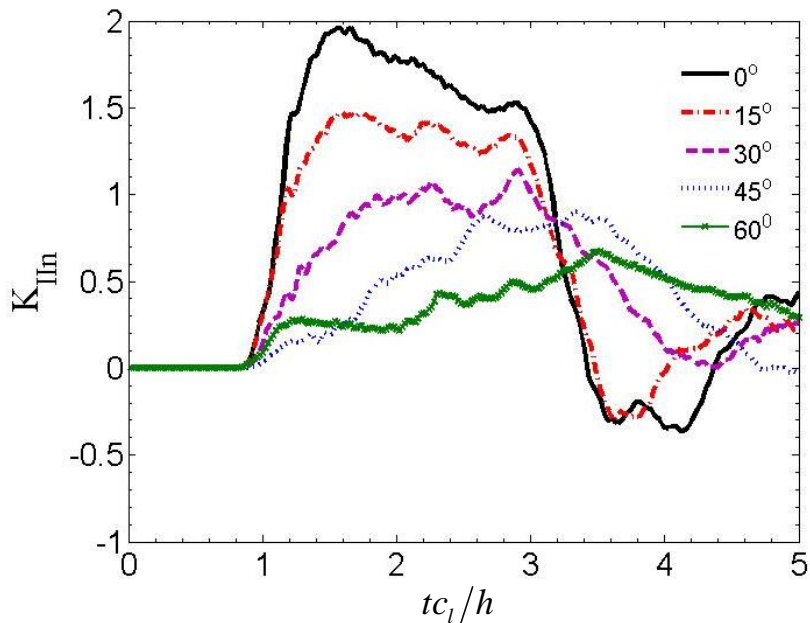
مطابق نتایج، زاویه ناهمسانگردی در مواد ارتوتروپیک اثر قابل توجهی روی ضرایب شدت تنش دینامیکی دارد. به عنوان نمونه، همانطور که در شکل‌های بالا نشان داده شده است، مقدار حداکثر یا حداقل ضرایب شدت تنش دینامیکی و زمان وقوع آن‌ها، برای زوایای مختلف ناهمسانگردی متفاوت می‌باشد.

صفحه دارای ترک با زاویه صفر درجه نسبت به راستای افق، بررسی گردیده و همانطور که دیده می‌شود، نتایج بدست آمده کاملاً تطابق خوبی با مقادیر گزارش شده دارد. در ادامه صفحه با همان خصوصیات و دارای ترک با زاویه ۴۵ درجه نسبت به افق مورد بررسی قرار گرفته است.

با توجه به شکل‌های (۴-۱۱) و (۴-۱۲) زاویه ترک نیز در مقدار ضرایب شدت تنش بسیار حائز اهمیت است. نمودار شکل‌های (۴-۱۱) و (۴-۱۲) بیانگر تاثیر زاویه ترک بر روی مقادیر حداکثر و حداقل مقدار ضرایب شدت تنش و زمان وقوع آن‌ها می‌باشد.



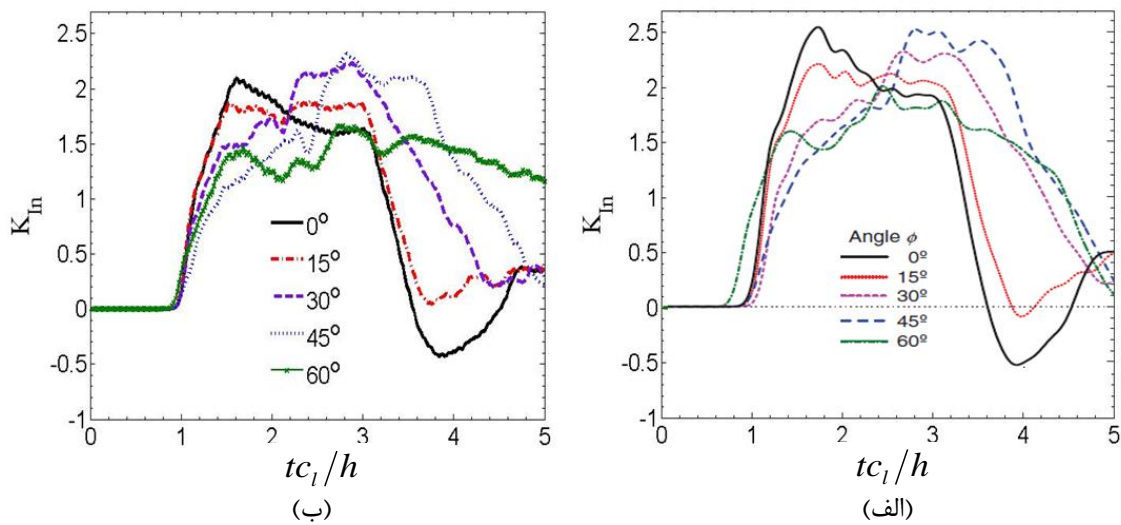
شکل (۴-۱۱) مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد  $K_{IIn}$  در ترک با زاویه ۴۵ درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک با روش ارائه شده



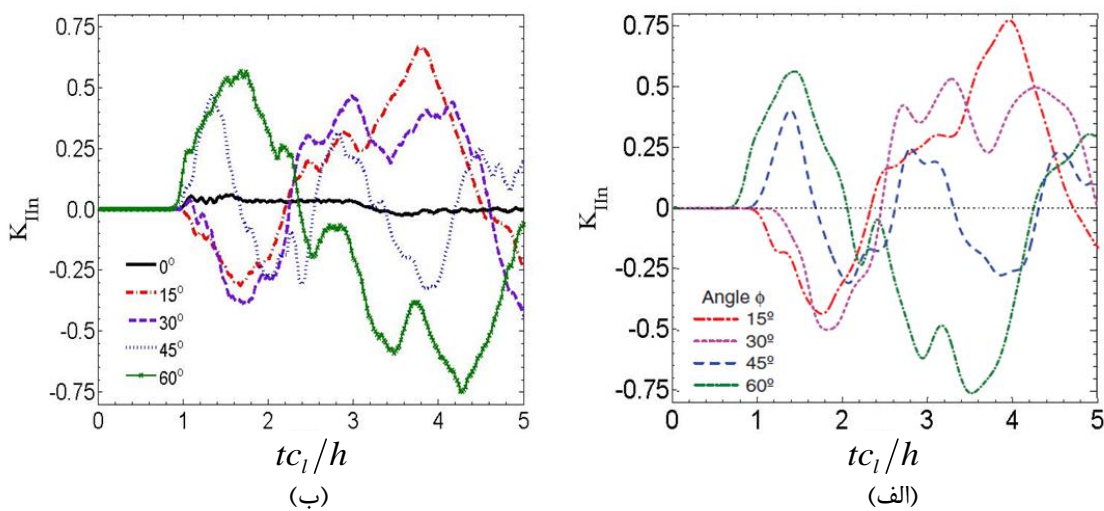
شکل (۴-۱۲) مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد  $K_{IIn}$  در ترک با زاویه ۴۵ درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک با روش ارائه شده

به عنوان مثال با توجه به شکل (۴-۱۰) در زاویه ناهمسانگردی صفر درجه ( $\alpha = 0$ )، در حالتی که زاویه ترک برابر صفر است ( $\beta = 0$ )، مقدار  $K_{IIn}$  در تمامی زمان‌ها برابر صفر است، در صورتی که مقدار آن برای زاویه ترک ۴۵ درجه ( $\beta = 45$ ) با گذشت زمان تغییر می‌کند (شکل (۴-۱۲)).

همچنین در زاویه ناهمسانگردی صفر درجه ( $\alpha = 0$ )، مقدار حداکثر یا حداقل  $K_{In}$  و زمان وقوع آن‌ها، نیز در زاویه ترک ۴۵ درجه ( $\beta = 45$ )، نسبت به زاویه ترک صفر درجه ( $\beta = 0$ )، متفاوت است. مقدار ضرایب شدت تنش دینامیکی بی بعد  $K_{In}$  و  $K_{IIIn}$  برای زمان‌های مختلف با توابع غنی سازی جدید محاسبه و با نتایج بدست آمده از روش المان مرزی توسط سانچز و همکاران [۱۲] (شکل‌های (۱۳-۴) و (۱۴-۴)) مقایسه گردیده است.

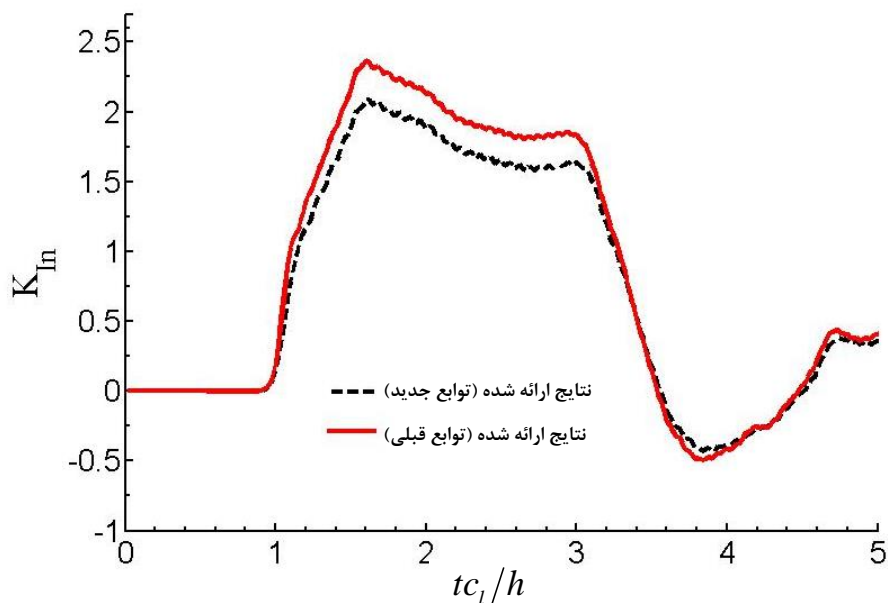


شکل (۱۳-۴) مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد  $K_{In}$  در ترک با زاویه صفر درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک الف) سانچز و همکاران ب) توابع جدید ارائه شده

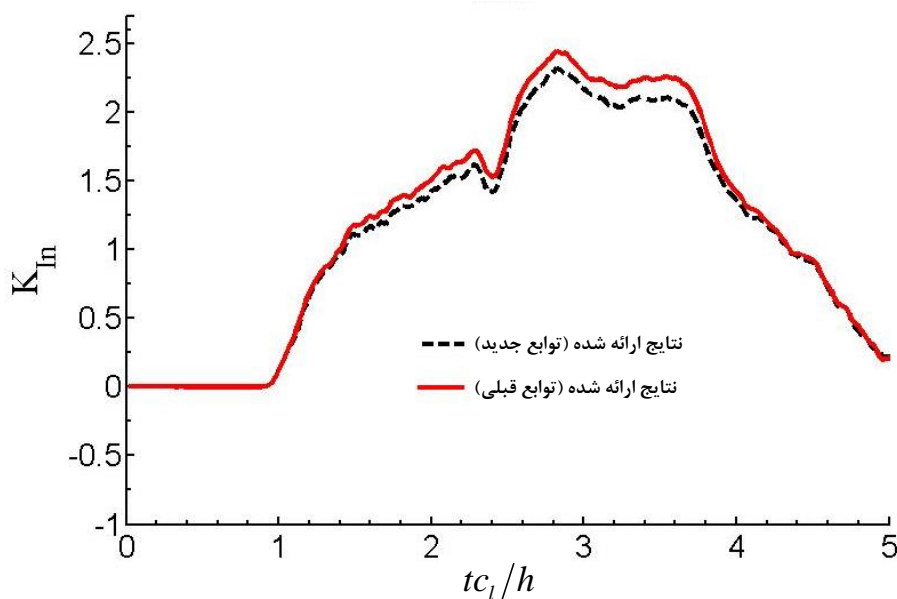


شکل (۱۴-۴) مقدار ضریب شدت تنش بی‌بعد  $K_{In}$  در ترک با زاویه صفر درجه در زمان‌های مختلف و زوایای الیاف مختلف در ماده ارتوتروپیک الف) سانچز و همکاران ب) توابع جدید ارائه شده

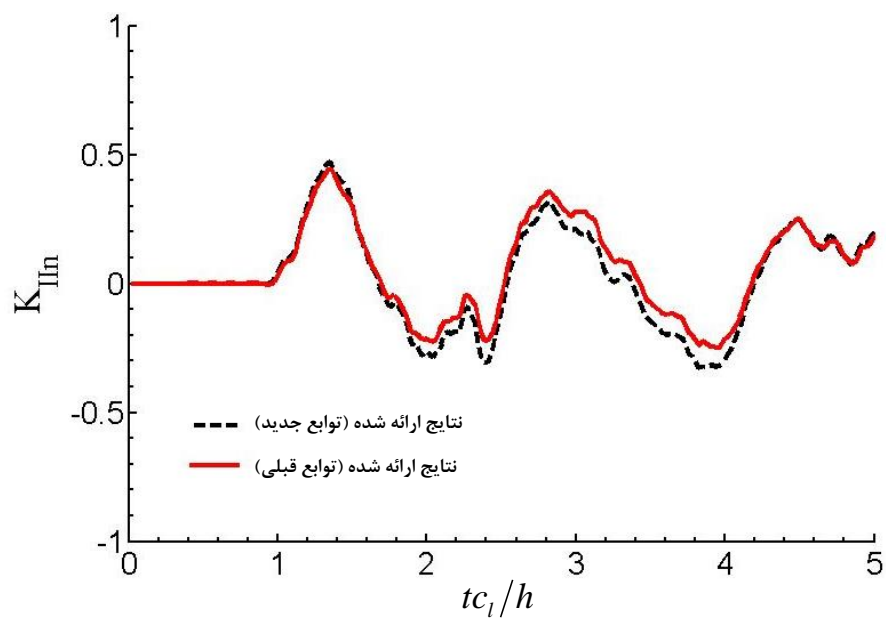
همچنین در شکل (۴-۱۵)، مقدار  $K_{In}$  برای زاویه ناهمسانگردی صفر درجه و در شکل (۴-۱۶) و (۴-۱۷) مقدار  $K_{In}$  و  $K_{IIIn}$  برای زاویه ناهمسانگردی ۴۵ درجه، نتایج بدست آمده از توابع غنی سازی جدید با نتایج حاصل از توابع غنی سازی قبلی مقایسه گردیده است. همانطور که از شکل‌ها مشخص است نتایج انطباق قابل قبولی دارند.



شکل (۴-۱۵) مقایسه مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  در توابع غنی سازی ارائه شده و توابع قبلی، در ترک با زاویه صفر درجه، در زمان‌های مختلف و زوایای ناهمسانگردی صفر درجه



شکل (۴-۱۶) مقایسه مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  در توابع غنی سازی ارائه شده و توابع قبلی، در ترک با زاویه صفر درجه، در زمان‌های مختلف و زوایای ناهمسانگردی ۴۵ درجه



شکل (۴-۱۷) مقایسه مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{IIIn}$  در توابع غنی سازی ارائه شده و توابع قبلی، در ترک با زاویه صفر درجه، در زمان‌های مختلف و زوایای ناهمسانگردی ۴۵ درجه

فصل پنجم

# تحليل حرارتى ترك ايسنا

## ۵-۱- مقدمه:

بررسی های علمی بیشتر بر رفتار مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری های مکانیکی متمرکز بوده و کمتر به بررسی سایر پدیده ها، نظیر اثر انتقال حرارت بر ترک در این مواد پرداخته شده است. تاکنون فعالیت هایی در زمینه تحلیل انتقال حرارت در مواد مرکب تابعی انجام شده است [۶۰-۶۲]. به تدریج و با توسعه دانش مواد مرکب، انتقال حرارت در این مواد نیز مورد توجه قرار گرفت.

در بسیاری موارد، اجزای سازه ها و ماشین ها علاوه بر نیروهای مکانیکی در معرض بارگذاری حرارتی نیز قرار می گیرند. مخازن تحت فشار و لوله ها در راکتور نیروگاه هسته ای، اجزای داخلی راکتورهای شیمیایی و بدنه هواپیماهای فوق سریع در دماهای بالا، تحت گرادیان شدید و تغییر نوسانی دما قرار می گیرند. بنابراین تحلیل تنش های حرارتی یکی از مهم ترین موضوع های مهندسی است.

طبق تحقیقات، شکست تحت بارهای حرارتی یکی از مرسوم ترین و پیچیده ترین حالت های گسیختگی در سازه ها می باشد. انتقال حرارت در اجسام جامد به صورت هدایت گرمایی است. قانون اول ترمودینامیک و قانون هدایت گرمایی فوریه، معادلات حاکم بر توزیع دما در جامدات می باشند.

## ۵-۲- هدایت حرارتی در مواد ارتوتروپیک

قانون اول ترمودینامیک، تعادل انرژی گرمایی در یک پیوستار جامد را به صورت زیر بیان می کند:

$$-div(q) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-5)$$

که در آن  $q$  بردار شار حرارتی،  $Q$  نرخ تولید انرژی داخلی در پیوستار در واحد حجم و زمان واحد،  $T$  میدان اسکالر دمای مطلق،  $\rho$  چگالی جرمی و  $c$  ظرفیت گرمایی ویژه است. قانون تجربی هدایت گرمایی فوریه در یک جامد غیر همسانگرد مولفه های بردار شار حرارتی را به گرادیان های دما مربوط می کند.

$$q = -K^{cond} grad(T) \quad (2-5)$$



در این عبارت،  $K^{cond}$  ماتریس ضرایب هدایت حرارتی برای یک جامد غیر همسانگرد است. در حالت کلی، مولفه‌های ماتریس  $K^{cond}$  تابع دما می‌باشد، اما برای گستره کم دمایی، می‌توان این ضرایب را با تقریب قابل قبولی مستقل از دما و ثابت فرض نمود. بردار شار حرارتی  $q$  و ماتریس ضرایب هدایت حرارتی  $K^{cond}$  در حالت صفحه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$q = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \quad (3-5)$$

$$K^{cond} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

شرط اولیه معادله حاکم به صورت زیر است:

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z) \quad \text{in } t=0 \quad (5-5)$$

شرایط مرزی نیز مطابق شکل (5-1) به صورت یکی یا ترکیبی از شرایط زیر است:

۱- دمای سطح  $S_1$  طی فرآیند انتقال گرما معلوم و برابر  $T_s$  باشد:

$$T(x, y, z, t) = T_s \quad \text{on } S_1 \quad \& \quad t > 0 \quad (6-5)$$

۲- شار حرارتی منتقل شده از سطح  $S_2$  طی فرآیند انتقال دما:

$$-q \cdot n = q'' \quad \text{on } S_2 \quad \& \quad t > 0 \quad (7-5)$$

که در آن،  $n$  بردار یکه عمود بر سطح در هر نقطه از  $S_2$  می‌باشد.

۳- روی سطح  $S_3$  جامد با سیالی به صورت همرفت تبادل گرما داشته باشد.

$$-q \cdot n + h(T - T_\infty) = 0 \quad \text{on } S_3 \quad (8-5)$$

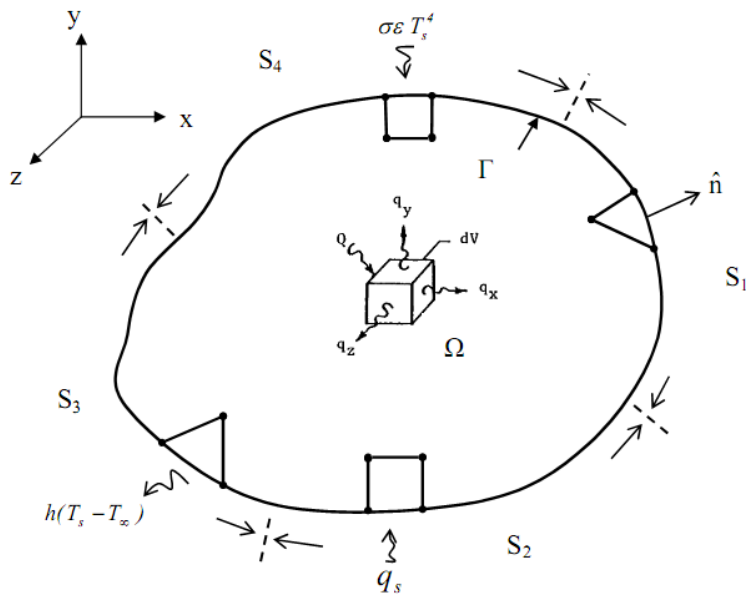
در این عبارت،  $h$  ضریب همرفت و  $T_\infty$  دمای محیط است.

۴- سطح  $S_4$  در معرض تابش قرار داشته باشد.

$$-q \cdot n + \sigma \varepsilon T^4 = \alpha q_r \quad \text{on } S_4 \quad \& \quad t > 0 \quad (9-5)$$

در این عبارت،  $\sigma$  ثابت استفان-بولتزمن،  $\varepsilon$  ثابت تابش سطح مرزی،  $\alpha$  ضریب جذب سطح مرزی

و  $q_r$  نرخ شار حرارتی واحد سطح است که به سطح مرزی می‌رسد.



شکل (۱-۵) شرایط مرزی مختلف اعمال شده در حالت کلی

### ۵-۳- حل عددی معادله هدایت گرمایی

در این بخش، فرمول‌بندی مسائل هدایت گرمایی در پیوستار جامد با استفاده از روش باقیمانده وزنی گالرکین مورد بحث قرار می‌گیرد. فرم گسسته معادلات حاکم بر هدایت گرمایی و قابلیت‌های این روش برای اعمال شرایط مرزی مختلف نیز بررسی می‌شود.

#### ۵-۳-۱- فرم ضعیف معادلات حاکم:

در این بخش، فرم وردشی معادلات هدایت گرمایی بر مبنای روش گالرکین فرمول‌بندی می‌شود. اگر  $\eta: \Omega \rightarrow R$  تابع آزمون بقدر کافی همواری در نظر گرفته شود، بطوریکه روی شرط اساسی  $\eta = 0$  باشد. طبق روش گالرکین، با عمود کردن توابع آزمون بر باقیمانده معادله تعادل گرمایی، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\int_{\Omega} \left( -\text{div}(q) + Q - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) \eta d\Omega = 0 \quad (10-5)$$

با استفاده از قضیه انتگرال گاوس، می‌توان فرم ضعیف رابطه بالا را بدست آورد. با در نظر گرفتن رابطه:

$$\nabla(\eta q) = \nabla \eta \cdot q + \nabla q \cdot \eta \quad (11-5)$$

عبارت اول رابطه (۵-۱۰) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\int_{\Omega} -\eta \nabla q d\Omega = \int_{\Omega} -\nabla(\eta q) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot q d\Omega \quad (۵-۱۲)$$

بطور مشابه، با استفاده از قضیه انتگرال گاوس (شار- دیورژانس) عبارت اول طرف راست رابطه

(۵-۱۲) به انتگرال مرزی تبدیل می شود:

$$\int_{\Omega} -\eta \nabla q d\Omega = \int_{\Gamma} -\eta q \cdot n d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot q d\Omega \quad (۵-۱۳)$$

جایگزینی رابطه (۵-۱۳) در رابطه (۵-۱۰) منجر به معادله زیر می شود:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot q d\Omega = \int_{\Omega} Q \eta d\Omega - \int_{\Gamma} \eta q \cdot n d\Gamma \quad (۵-۱۴)$$

مطابق با شرایط مرزی مسأله که یکی یا ترکیبی از روابط (۵-۶) تا (۵-۹) روی هر قسمت مرز می تواند باشد. انتگرال روی مرز این معادله (عبارت آخر) به انتگرال روی قسمت هایی از مرز شکسته می شود. در این پایان نامه، فقط شرط مرزی اول در نظر گرفته شده است و دمای سطح  $S_I$  طی فرآیند انتقال گرما، معلوم و برابر  $T_s$  می باشد. با لحاظ کردن شرط مرزی و عدم تولید انرژی داخلی، فرم ضعیف معادله هدایت گرمایی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot q d\Omega = - \int_{\Gamma_r} \eta (q \cdot n) d\Gamma \quad (۵-۱۵)$$

طبق قانون تجربی فوریه، گرادیان دما و شار حرارتی در جهت های مختلف با رابطه (۵-۲) به هم مربوط می شوند. با جایگزینی رابطه (۵-۲) در معادله (۵-۱۵)، فرم ضعیف معادله حاکم بر هدایت گرمایی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot K^{cond} \nabla T d\Omega = - \int_{\Gamma_r} \eta (q \cdot n) d\Gamma \quad (۵-۱۶)$$

### ۵-۳-۲- گسسته سازی معادلات حاکم

با استفاده از تقریب کنترولیچ می توان فضای زمان و مکان را برای میدان دما از یکدیگر تفکیک نمود.

$$T(x, y, z, t) = \theta(x, y, z) \bar{T}(t) \quad \text{in } t=0 \quad (۵-۱۷)$$

در هر نقطه از ناحیه حل، متغیر میدان ( در اینجا دما ) با استفاده از پارامترهای گرهی گره‌های ناحیه

تکیه‌گاهی مربوط به نقطه مورد نظر تقریب زده می‌شود:

$$\theta^h = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_{n-1} & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \Phi_{(1 \times n)} \theta_{(n \times 1)} \quad (18-5)$$

در این عبارت،  $\Phi$  بردار توابع شکل،  $n$  تعداد گره‌های ناحیه تکیه‌گاهی و  $\theta$  بردار دمای گره‌های ناحیه

تکیه‌گاهی نقطه مورد نظر است. بدلیل یکسان بودن تابع تقریب و تابع آزمون در روش بابنوف-

گالرکین، می‌توان در فرآیند گسسته‌سازی معادلات از تابع تقریب به جای هر دو تابع استفاده نمود.

فرم وردشی معادله (18-5) به صورت زیر است:

$$\delta \theta^h = \Phi_{(1 \times n)} \delta \theta_{(n \times 1)} \quad (19-5)$$

گرادیان دما با استفاده از میدان دمای تخمینی به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\nabla \theta^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix} = B_{(2 \times n)}^h \theta_{(n \times 1)} \quad (20-5)$$

فرم وردشی گرادیان دما به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\nabla \delta \theta^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \theta_1 \\ \vdots \\ \delta \theta_n \end{Bmatrix} = B_{(2 \times n)}^h \delta \theta_{(n \times 1)} \quad (21-5)$$

با در نظر گرفتن روابط (20-5) و (21-5)، عبارت دوم رابطه (16-5) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\int_{\Omega} (\nabla \delta \theta^h)^T (K^{cond} \nabla \theta^h) \bar{T} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} (B^h \delta \theta)^T (K^{cond} B^h \theta) \bar{T} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \delta \theta^T [B^{hT} K^{cond} B^h] \theta \bar{T} d\Omega \quad (22-5)$$

می‌توان عملگر انتگرالگیری را به صورت زیر منتقل نمود:

$$\int_{\Omega} (\nabla \delta \theta)^T (K^{cond} \nabla \theta) \bar{T} d\Omega = \sum_e \delta \theta^T \left[ \int_{\Omega_e} [B^{hT} K^{cond} B^h] d\Omega \right] \theta \bar{T} \quad (23-5)$$

طبق این رابطه، ماتریس سفتی حرارتی هر المان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_e^{th} = \int_{\Omega_e} [B^{thT} K^{cond} B^{th}] d\Omega \quad (24-5)$$

در روابط بالا،  $[B^{th}]$  ماتریس عملگر گرادیان است. فقط باید با توجه به معیار غنی‌سازی، تأثیر درجات آزادی افزوده شده به هر گره در ابعاد ماتریس  $[B^{th}]$  در نظر گرفته شود. تعداد توابع غنی‌سازی نوک ترک در میدان حرارتی، ۲ تابع می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_l^{th}(r, \theta) \Big|_{l=1}^2 = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (25-5)$$

با توجه به درجات آزادی اضافه شده، برای هر نوع گره باید سهم مناسبی در ماتریس  $[B_l^{th}]$  در نظر گرفته شود که  $[B_l^{th}]$  ماتریس عملگر گرادیان گرهی است.

$$[B_l^{th}] = [\bar{B}_i^u \quad \bar{B}_j^a \quad \bar{B}_k^{bl} \quad \bar{B}_k^{b2}] \quad (26-5)$$

اگر گره  $i$  نیاز به غنی‌سازی نداشته باشد؛ میدان دما، ۱ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس  $[B_l^{th}]$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} \\ \Phi_{i,y} \end{bmatrix} \quad (27-5)$$

اگر گره  $j$  نیاز به غنی‌سازی از طریق تابع پله‌ای واحد داشته باشد؛ میدان دما، ۲ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس  $[B_l^{th}]$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{B}_j = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} & \left( \Phi_j H(x_j) \right)_{,x} \\ \Phi_{i,y} & \left( \Phi_j H(x_j) \right)_{,y} \end{bmatrix} \quad (28-5)$$

اگر گره  $k$  نیاز به غنی‌سازی از طریق تابع تکین داشته باشد؛ میدان دما، ۳ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس  $[B_l^{th}]$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{B}_k \Big|_{l=1,2} = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} & \left( \Phi_k F_k^l(x_k) \right)_{,x} \\ \Phi_{i,y} & \left( \Phi_k F_k^l(x_k) \right)_{,y} \end{bmatrix} \quad (29-5)$$

بنابراین سهم هر سه نوع کلی گره به طور جداگانه در روش المان محدود توسعه یافته، درون ماتریس  $[B^{th}]$  به دست آورده شد ( روابط ۲۷-۵ و ۲۸-۵ و ۲۹-۵)، که با توجه به نوع گره‌های اطراف هر المان می‌توان ماتریس کلی  $[B^{th}]$  را برای آن المان بدست آورد؛ که ابعاد آن در غنی‌سازی می‌تواند از  $۲ \times ۴$  برای المان معمولی تا  $۲ \times ۱۲$  برای المان دربرگیرنده نوک ترک متغیر باشد. با توجه به اسکالر بودن میدان دما و تعداد گره‌های کل مسأله و درجات آزادی اضافه شده، ماتریس سفتی حرارتی کل بدست می‌آید.

$$K^{th} = \sum_e K_e^{th} \quad (۳۰-۵)$$

با در نظر گرفتن تعریف فوق، رابطه (۲۳-۵) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{\Omega} (\nabla \delta \theta)^T (K^{cond} \nabla \theta) \bar{T} d\Omega = \delta \theta^T K^{th} \theta \bar{T} \quad (۳۱-۵)$$

به طور مشابه، فرم گسسته عبارت‌های دیگر رابطه (۱۶-۵) قابل بیان است. با استفاده از تقریب کنترویچ عبارت اول رابطه (۱۶-۵) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\Omega = \int_{\Omega} \rho c \theta \dot{\bar{T}} \eta d\Omega \quad (۳۲-۵)$$

با جایگزینی تابع تقریب  $\theta$  به جای تابع آزمون  $\eta$ ، فرم گسسته رابطه بالا به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\Omega = \int_{\Omega} \rho c (\delta \theta^h)^T \dot{\bar{T}} \theta^h d\Omega = \dot{\bar{T}} \int_{\Omega} (\delta \theta^h)^T \rho c \theta^h d\Omega \quad (۳۳-۵)$$

عبارت فوق به صورت زیر قابل بیان است.

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \rho c (\Phi \delta \theta)^T \Phi \theta \dot{\bar{T}} d\Omega = \sum_e \delta \theta^T \left( \int_{\Omega_e} \Phi^T \rho c \Phi d\Omega \right) \theta \dot{\bar{T}} \quad (۳۴-۵)$$

$$C_e^{th} = \int_{\Omega_e} [\Phi^T \rho c \Phi] d\Omega \quad (۳۵-۵)$$

$$C^{th} = \sum_e C_e^{th} \quad (۳۶-۵)$$

با جایگزینی روابط فوق در رابطه (۱۶-۵)، معادله گسسته حاکم بر هدایت گرمایی به شکل زیر بدست می‌آید:

$$C^{th} \dot{\bar{T}} + K^{th} \bar{T} = 0 \quad (۳۷-۵)$$

که در آن  $K^{th}$  ماتریس سفتی حرارتی کل سیستم است. در این مطالعه، برای حل معادله (۵-۳۷) از روش کرانک- نیکلسون استفاده شده است.

$$[2C^{th} + K^{th} \Delta t] \{T\}^n = (\{f^{th}\}^{n-1} + \{f^{th}\}^n) \Delta t + [2C^{th} - K^{th} \Delta t] \{T\}^{n-1} \quad (۵-۳۸)$$

#### ۵-۴- بررسی ترک در میدان ترموالاستیک

در این بخش، خصوصیات محلی میدان های گرمایی دما و شار حرارتی، و الاستیک تنش، کرنش و تغییرمکان در حوزه نوک ترک بررسی می شود. در مسائل ترموالاستیک خطی در مواد همگن، روابط میدان تنش با روابط مشابه در مسائل الاستیک یکسان است. بنابراین، حضور شار حرارتی باعث ایجاد تکینی جدید و یا تغییر درجه آن نمی شود. بنابراین خصوصیات محلی میدان های تنش و تغییرمکان حرارتی در حوزه نوک ترک دقیقاً مشابه خصوصیات محلی تنش و تغییرمکان مکانیکی است و می توان این کمیت ها را با استفاده از بسط تابع ویژه ویلیامز بیان نمود.

#### ۵-۴-۱- انتگرال برهم کنش برای شکست حرارتی

در این بخش، فرمولبندی فرم دوبعدی انتگرال برهم کنش بیان می شود. برای هر دو حالت، تنش و کرنش صفحه ای فرم انتگرال برهم کنش  $M$  بصورت زیر می باشد.

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j})_{,j} q dA \quad (۵-۳۹)$$

که در آن  $u_i$  و  $\sigma_{ij}$  به ترتیب مولفه های تنش و تغییرمکان می باشند. و  $W^{int}$  تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی برهم کنش است و بصورت زیر تعریف می شود:

$$W^{int} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux} + \sigma_{ik}^{aux} \varepsilon_{ik}^m) \quad (۵-۴۰)$$

با مشتق گیری از عبارت داخل انتگرال دوم و اعمال معادله تعادل  $\sigma_{ij,j} = 0$ ، انتگرال  $M$  برای حالت استاتیکی به صورت زیر در می آید.

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1,j}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1,j} - W^{int}_{,1}) q dA \quad (۵-۴۱)$$

در صورتی که از معادله حرکت  $\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i$  به جای معادله تعادل استفاده شود، انتگرال برهم کنش برای حالت دینامیکی به صورت زیر بدست می آید:

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,l}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,l} - W^{int} \delta_{lj}) q_{,j} dA + \int_A (\rho \ddot{u}_i u_{i,l}^{aux} + \sigma_{ij} u_{i,lj}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,lj} - W^{int} ,l) q dA \quad (42-5)$$

$\ddot{u}_i$  مولفه های بردار شتاب و  $\rho$  چگالی می باشد. عبارت انتگرال دوم شامل مشتق جزئی  $W^{int}$  نسبت به  $x_l$  است. برای هر دو حالت تنش و کرنش صفحه ای این عبارت به شکل زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} = \frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{lk}^{aux}} \frac{\partial \varepsilon_{lk}^{aux}}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} \right)_{expl} \quad (43-5)$$

در محدوده الاستیک خطی برای هر دو حالت تنش و کرنش صفحه ای، رابطه  $\partial W^{int} / \partial \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}^{aux}$  و

$\partial W^{int} / \partial \varepsilon_{ij}^{aux} = \sigma_{ij}$  برقرار است. با توجه به این رابطه و رابطه کرنش-تغییر مکان بی نهایت کوچک،

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2 \quad \text{را می توان به صورت زیر بیان کرد:}$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} u_{i,j1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,j1} + \left( \frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} \right)_{expl} \quad (44-5)$$

از طرفی چون در مواد ایزوتروپیک و ارتوتروپیک خصوصیات ماده تابع مختصه های مکانی نیستند.

$$\left( \frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} \right)_{expl} = \frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1} \quad (45-5)$$

با توجه به رابطه (۲-۲۳)، معادله ساختاری برای یک پیوستار جامد و حالت صفحه ای به صورت زیر است:

$$\sigma_i = Q_{ij} (\varepsilon_j - \lambda_j \Delta T) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (46-5)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (47-5)$$

در رابطه بالا  $\lambda$  در روابط (۲-۹) تا (۲-۱۲) تعریف شده است. با جایگزینی رابطه (۵-۴۶) در رابطه (۵-۴۰):



$$\begin{aligned}
W^{int} &= \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux} = \sigma_{11} \varepsilon_{11}^{aux} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^{aux} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12}^{aux} \\
&= (Q_{11} \varepsilon_{11} + Q_{12} \varepsilon_{22} + 2Q_{13} \varepsilon_{12}) \varepsilon_{11}^{aux} + (Q_{21} \varepsilon_{11} + Q_{22} \varepsilon_{22} + 2Q_{23} \varepsilon_{12}) \varepsilon_{22}^{aux} \\
&+ 2(Q_{31} \varepsilon_{11} + Q_{32} \varepsilon_{22} + 2Q_{33} \varepsilon_{12}) \varepsilon_{12}^{aux} - (Q_{11} \lambda_1 + Q_{12} \lambda_2 + Q_{13} \lambda_3) \Delta T \varepsilon_{11}^{aux} \\
&- (Q_{21} \lambda_1 + Q_{22} \lambda_2 + Q_{23} \lambda_3) \Delta T \varepsilon_{22}^{aux} - 2(Q_{31} \lambda_1 + Q_{32} \lambda_2 + Q_{33} \lambda_3) \Delta T \varepsilon_{12}^{aux}
\end{aligned} \tag{۴۸-۵}$$

با مشتق گرفتن از رابطه بالا نسبت به  $\Delta T$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} &= -(Q_{11} \lambda_1 + Q_{12} \lambda_2 + Q_{13} \lambda_3) \varepsilon_{11}^{aux} \\
&- (Q_{21} \lambda_1 + Q_{22} \lambda_2 + Q_{23} \lambda_3) \varepsilon_{22}^{aux} - 2(Q_{31} \lambda_1 + Q_{32} \lambda_2 + Q_{33} \lambda_3) \varepsilon_{12}^{aux}
\end{aligned} \tag{۴۹-۵}$$

از طرفی با استفاده از رابطه (۴۶-۵):

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} = -Q_{ij} \lambda_j \varepsilon_i^{aux} = -Q_{ij} \varepsilon_i^{aux} \lambda_j \tag{۵۰-۵}$$

$$\sigma_j^{aux} = Q_{ij} \varepsilon_i^{aux} \tag{۵۱-۵}$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} = -\sigma_i^{aux} \lambda_i \tag{۵۲-۵}$$

در نتیجه فرم انتگرال برهم کنش  $M$  برای حالت استاتیکی بصورت زیر بدست می آید:

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,l}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,l} - W^{int} \delta_{1j}) q_{l,j} dA + \int_A \left( \lambda_i \sigma_i^{aux} \right) \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_i} q dA \tag{۵۳-۵}$$

انتگرال برهم کنش  $M$  برای حالت دینامیکی نیز بصورت زیر خواهد بود:

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,l}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,l} - W^{int} \delta_{1j}) q_{l,j} dA + \int_A \left( \rho \ddot{u}_i u_{i,l}^{aux} + (\lambda_i \sigma_i^{aux}) \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_i} \right) q dA \tag{۵۴-۵}$$

رابطه بین انتگرال برهم کنش و ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  و تنش  $T$  در فصل ۳ بیان شده است.

با انتخاب مناسب میدان‌های کمکی (مود  $I$  و مود  $II$ ) ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  و تنش  $T$  مشابه

فصل ۳ بدست می آیند.

## ۵-۵- مثال های عددی

موضوع مورد بحث در این قسمت ، تعیین ضرایب شدت تنش دینامیکی و تنش  $T$  در مواد ارتوتروپیک

تحت بار حرارتی با استفاده از روش عددی المان محدود توسعه یافته می باشد. در این قسمت برای

بررسی درستی برنامه *MATLAB* نوشته شده، ابتدا مساله ایزوتروپیک آورده شده و سپس مسائل ایزوتروپیک حل گردیده است.

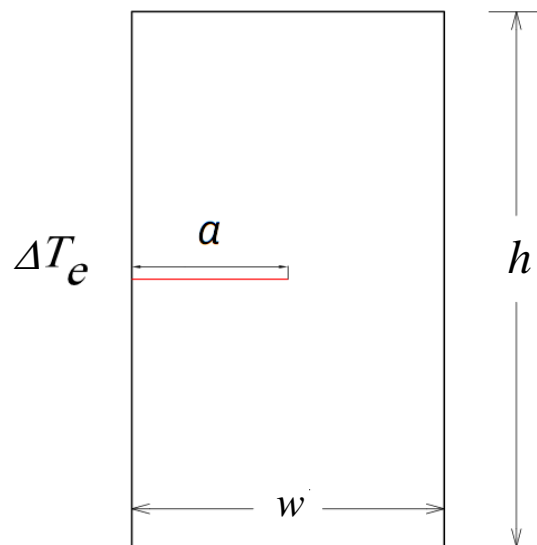
### ۵-۵-۱ - ترک لبه‌ای برای ماده ایزوتروپیک تحت بار حرارتی (شبه استاتیکی)

صفحه دو بعدی با طول  $h = 4 \text{ mm}$  و عرض  $w = 1 \text{ mm}$  در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک لبه‌ای مستقیم است (شکل (۲-۵)). صفحه در لبه چپ به سرعت به اندازه  $\Delta T_e = -10$  سرد می‌شود. تمامی لبه‌های دیگر عایق و شرایط کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.

ضریب پواسون  $\nu = 0.3$ ، مدول الاستیسیته  $E = 200 \text{ GPa}$ ، چگالی  $\rho = 1900 \text{ Kg/m}^3$ ، ضریب انبساط حرارتی  $\alpha = 6.68 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ، ظرفیت گرمایی ویژه  $C = 461 \text{ J/kg.K}$  و ضریب هدایت حرارتی  $k = 17 \text{ W/m.K}$  می‌باشد. در این مثال از مش  $60 \times 160$  استفاده شده است و مقدار ضریب شدت تنش  $K_I$  و زمان  $t$  مطابق فرمول زیر بی بعد شده است.

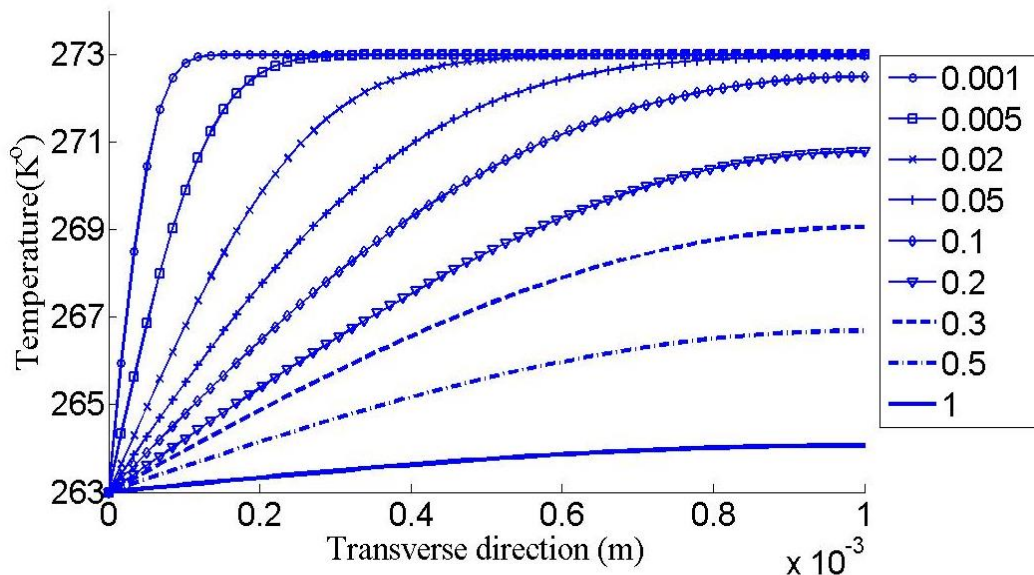
$$K_{In} = \frac{K_I}{\alpha E \sqrt{W \Delta T}} \quad , \quad \Delta T = T_0 - T_e \quad (5-55)$$

$$\tau = \frac{kt}{\rho c W^2} \quad (5-56)$$



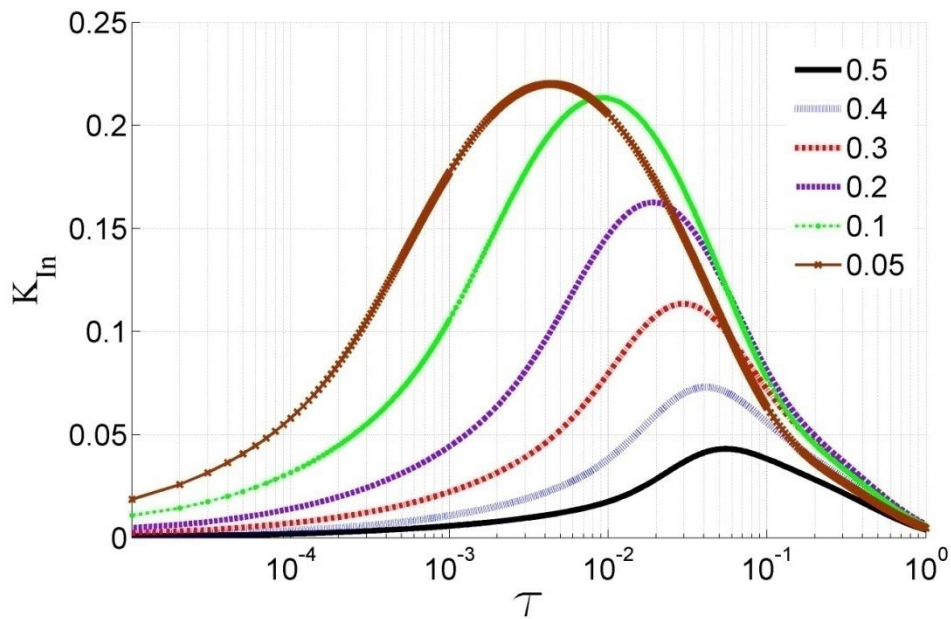
شکل (۲-۵) صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری حرارتی

نمودار تغییرات دمایی نقاط در راستای عرضی صفحه در زمان های مختلف در شکل (۳-۵) نشان داده شده است.



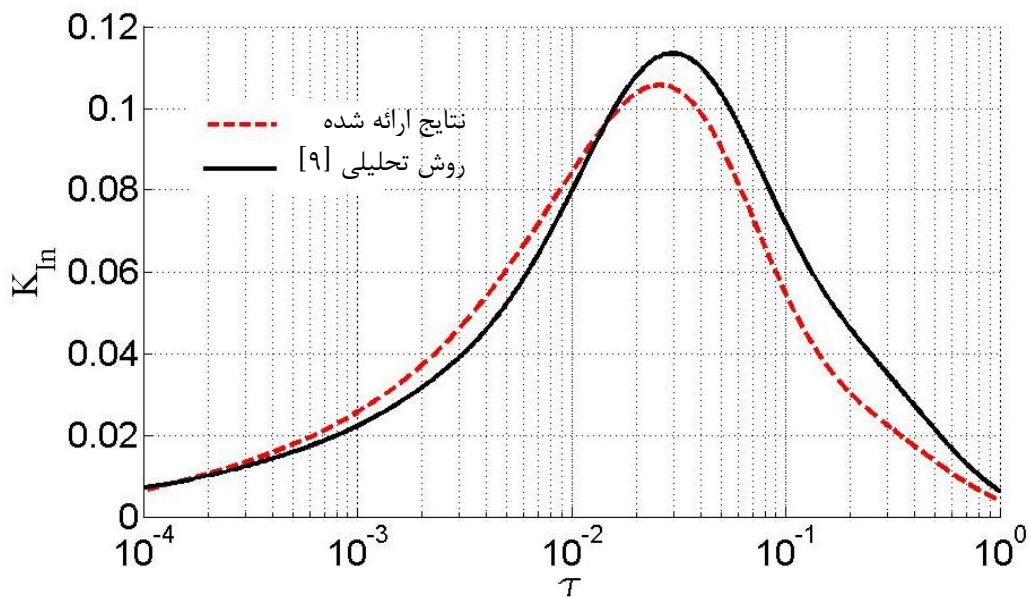
شکل (۳-۵) نمودار تغییرات دما در راستای عرضی در زمان های مختلف

مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  برای زمان های مختلف در مساله ترموالاستیسیته دو بعدی توسط لی و سیم [۹] با استفاده از راه حل تحلیلی ارائه شده است (شکل ۴-۵). در این نمودار محور  $\tau$  لگاریتمی بوده و زمان بی بعد را نشان می دهد و نمودارها برای ترک های با طول متفاوت رسم گردیده است.

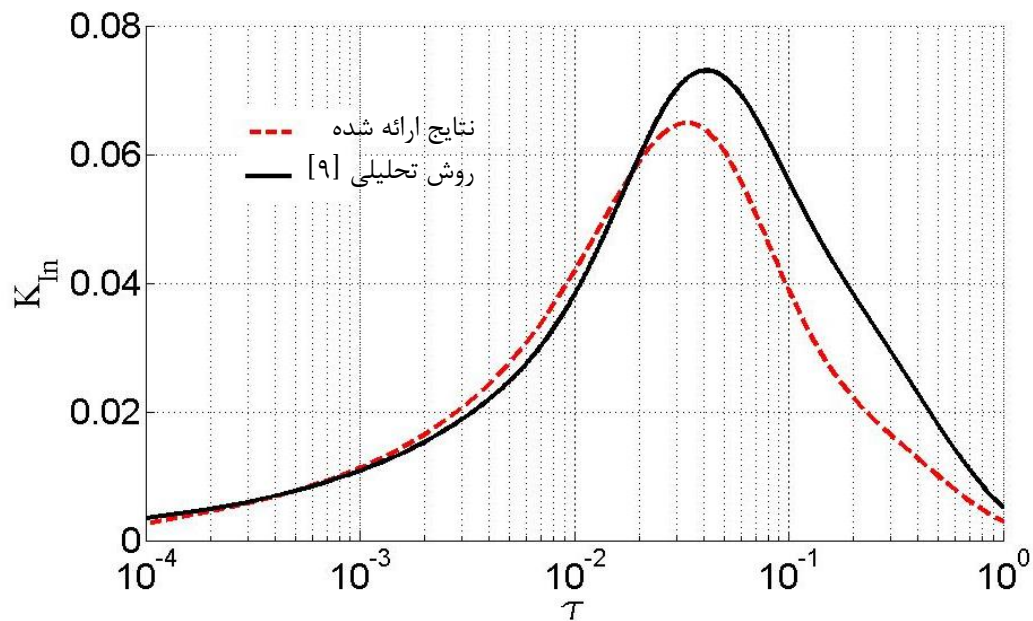


شکل (۴-۵) نمودار نیمه لگاریتمی تغییرات ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  بر حسب زمان بی بعد برای طول ترک های متفاوت در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای با روش تحلیلی [۹]

مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  برای طول ترک های متفاوت در شکل های (۵-۵) و (۶-۵) رسم گردیده و با روش تحلیلی مقایسه گردیده است. در این نمودار ها، از المان چهار گره ای استفاده شده است.

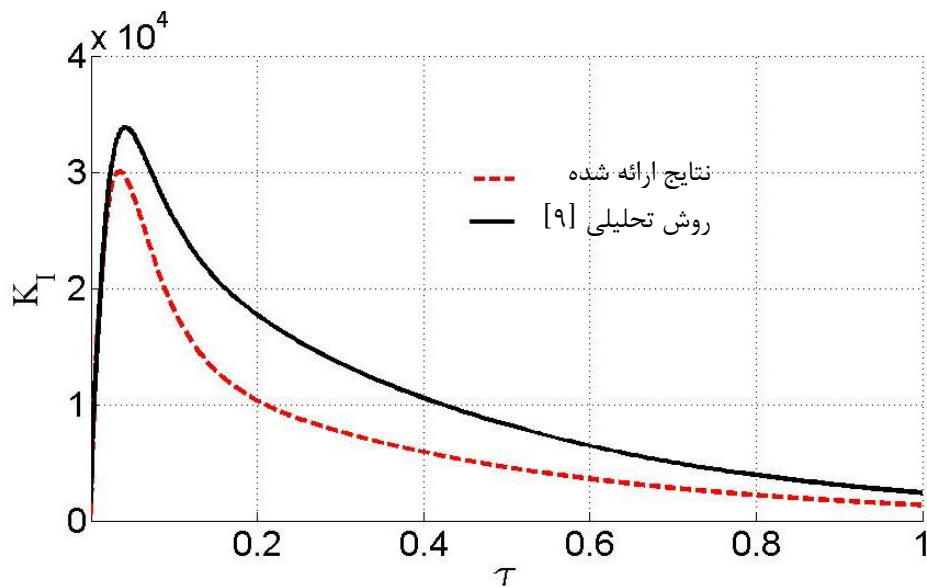


شکل (۵-۵) نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول  $a = 0.3 \text{ mm}$

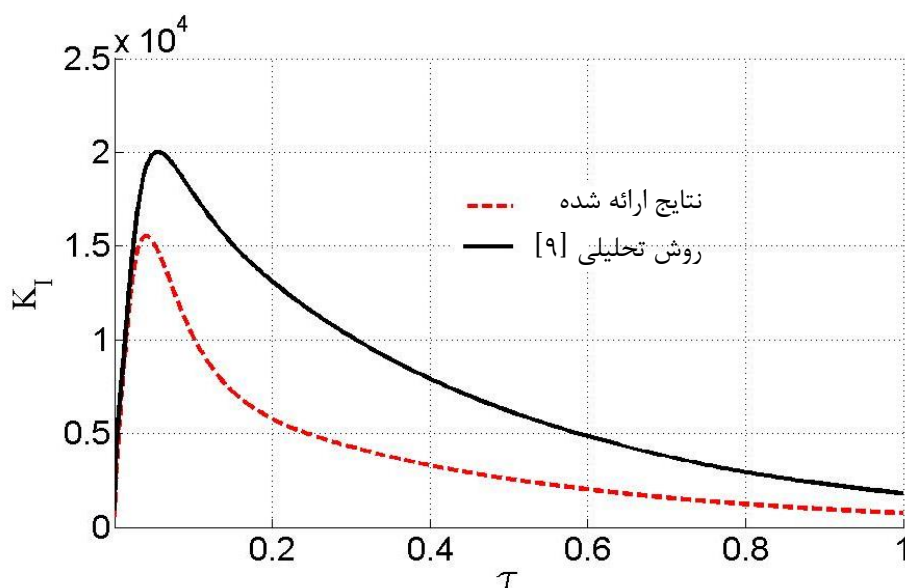


شکل (۶-۵) نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول  $a = 0.14 \text{ mm}$

مقدار ضریب شدت تنش  $K_I$  نیز برای طول ترک های قبلی در شکل های (۷-۵) و (۸-۵) رسم گردیده و با روش تحلیلی مقایسه گردیده است.



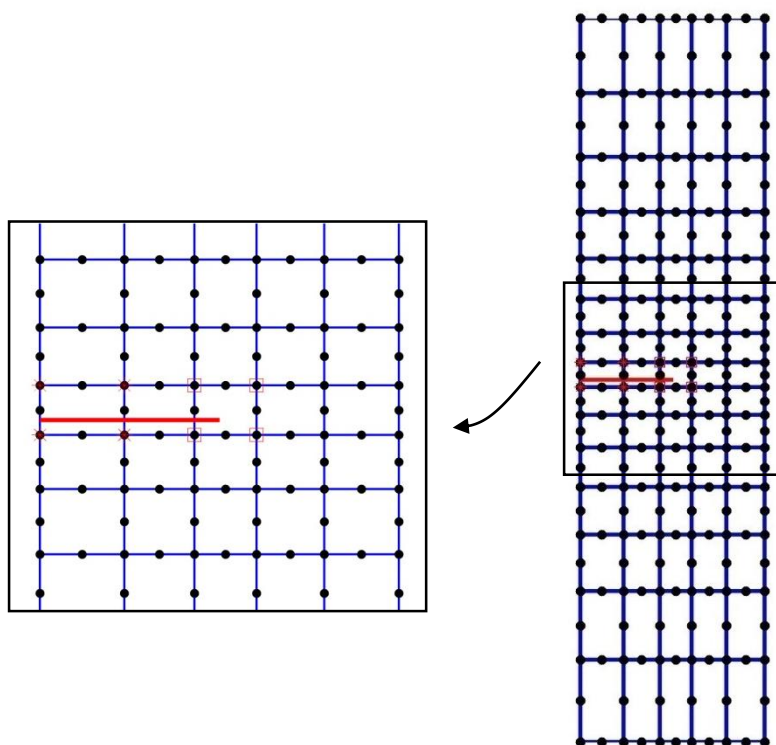
شکل (۷-۵) نمودار ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول  $a = 0.14 \text{ mm}$



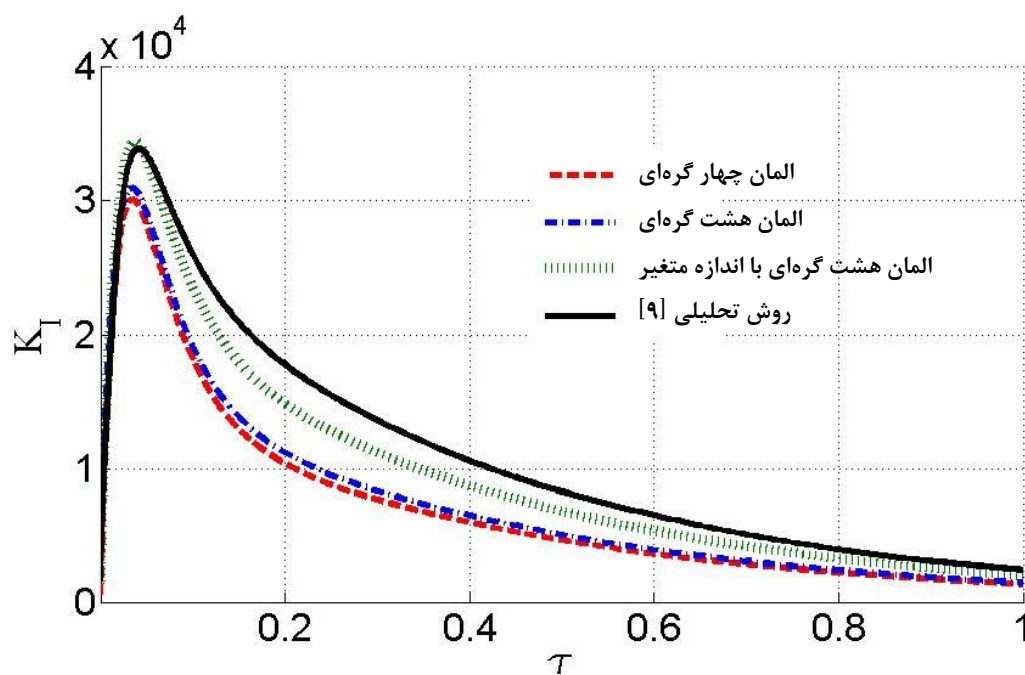
شکل (۸-۵) نمودار ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول  $a = 0.5 \text{ mm}$

همانطور که نمودار شکل های (۵-۵) تا (۸-۵) نشان می دهند، تغییرات  $K_I$  و  $K_{Im}$  با استفاده از روش عددی، مشابه روش تحلیلی می باشد. اما مقدار نمودار های عددی کمتر از حالت تحلیلی می باشد. از این رو، صفحه با طول ترک  $a = 0.4 \text{ mm}$ ، با استفاده از المان های هشت گره ای به صورت عددی حل شده است. در این حالت مقدار ضریب شدت تنش، به مقدار خیلی ناچیزی افزایش یافته است. در دو روش قبلی، یعنی المان چهار گره ای و المان هشت گره ای، ابعاد المان ها در سراسر صفحه یکسان بود. برای بالا بردن دقت روش عددی ارائه شده، از المان های با اندازه متغیر استفاده شده است. برای این منظور ابعاد المان ها هر چه از لبه های صفحه به نوک ترک نزدیک می شوند، کوچک تر می شود. (مطابق شکل (۵-۹)) در این حالت نیز از مش  $160 \times 60$  استفاده شده است.

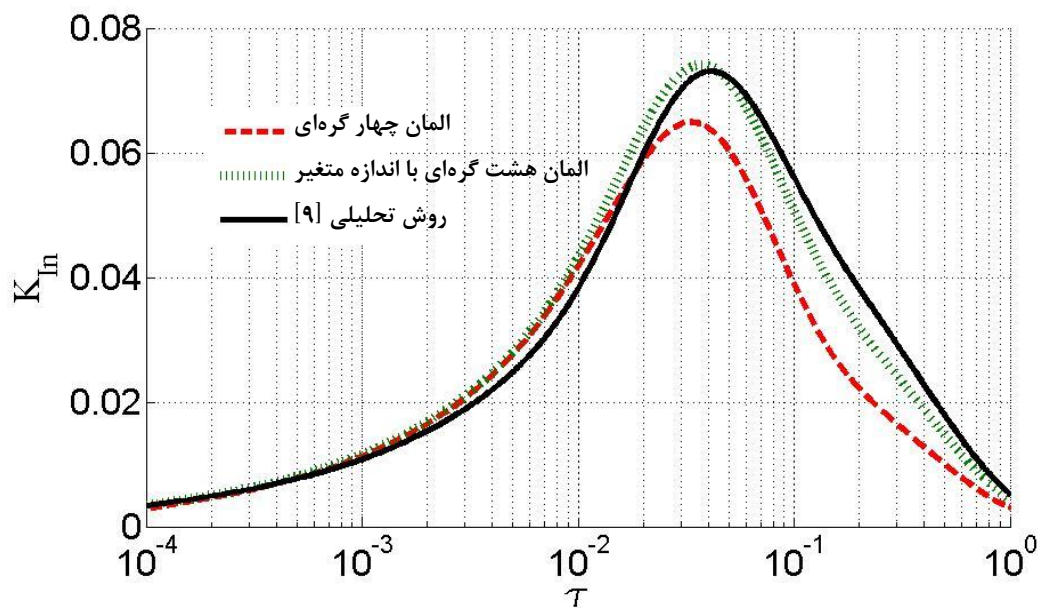
مقدار ضریب شدت تنش  $K_I$  برای طول ترک  $a = 0.4 \text{ mm}$  با استفاده از انواع المان بندی محاسبه شده و در شکل (۵-۱۰) رسم گردیده و با روش تحلیلی مقایسه گردیده است. همانطور که در شکل مشخص است، با استفاده از المان هشت گره ای با اندازه متغیر، نمودار حاصل از روش عددی با تقریب خیلی زیاد به حل تحلیلی نزدیک می باشد.



شکل (۵-۹) المان های هشت گره ای با اندازه متغیر



شکل (۵-۱۰) نمودار ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول  $a = 0.4 \text{ mm}$  با المان های مختلف



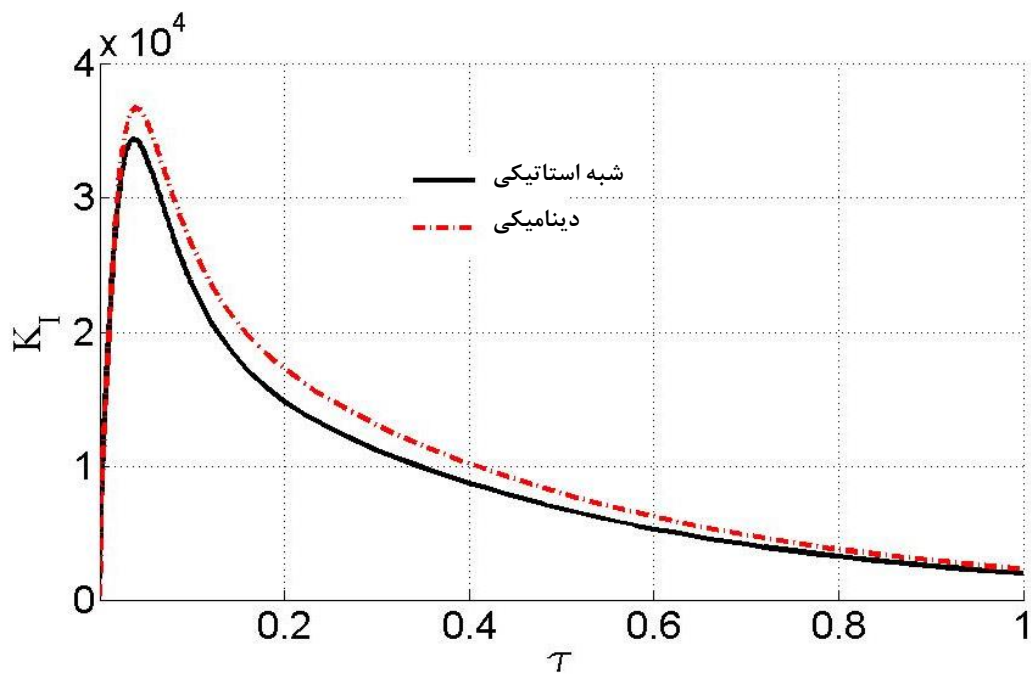
شکل (۵-۱۱) نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول  $a = 0.4 \text{ mm}$  با المان های مختلف

### ۵-۵-۲ - ترک لبه‌ای برای ماده ایزوتروپیک تحت بار حرارتی (دینامیکی)

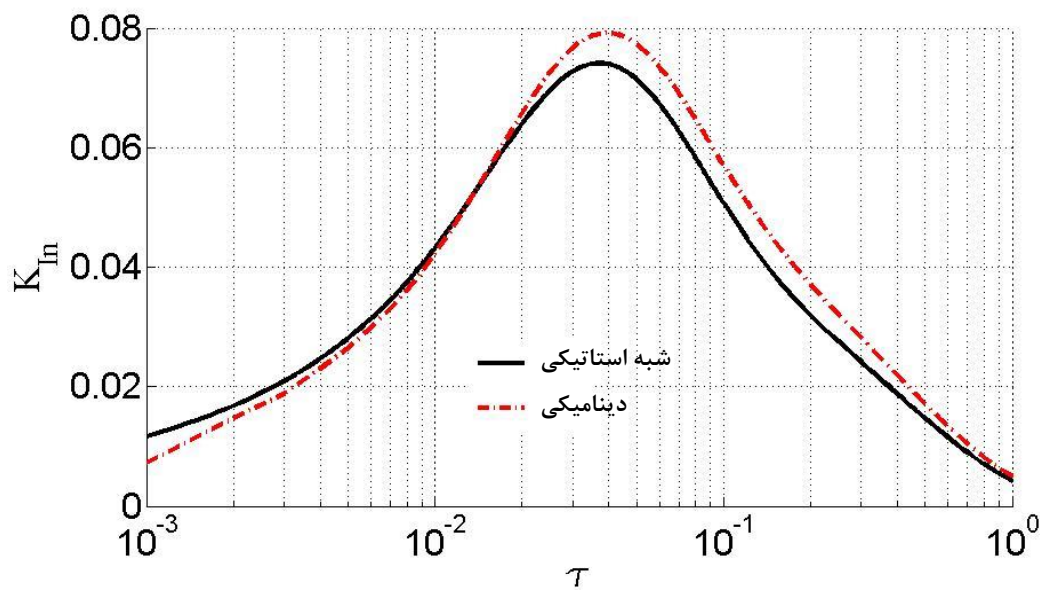
مثال ۵-۵-۱ برای طول ترک  $a = 0.4 \text{ mm}$  این بار در حالت دینامیکی حل شده است. در این حالت مولفه اینرسی نیز در نظر گرفته شده است. به عبارت دیگر معادله (۴-۲) جایگزین معادله (۲-۶۹) گردیده است. با توجه به دقت بالای روش عددی با المان هشت گره ای و اندازه متغیر، از این المان ها در این مثال استفاده شده است.

در شکل (۵-۱۲) نمودار تغییرات ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_I$  رسم گردیده و با حالت شبه استاتیکی مقایسه گردیده است. همانطور که در نمودار شکل (۵-۱۲) مشخص است، مولفه اینرسی تغییری ناچیزی در مقادیر ضریب شدت تنش نسبت به حالت شبه استاتیکی ایجاد کرده است.





شکل (۵-۱۲) نمودار ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول  $a = 0.4 \text{ mm}$  در حالت دینامیکی



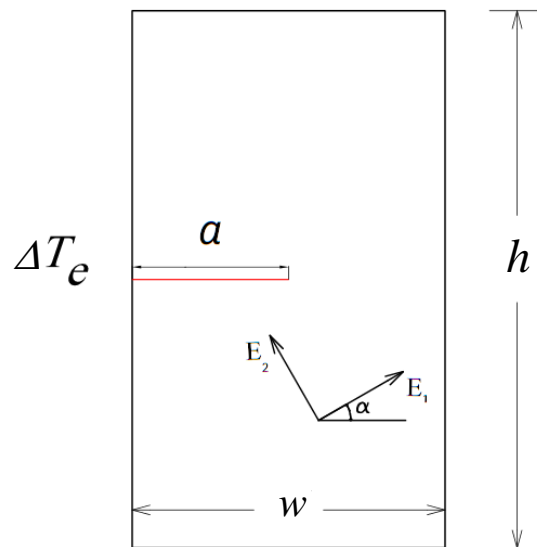
شکل (۵-۱۳) نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول  $a = 0.4 \text{ mm}$  در حالت دینامیکی

### ۵-۵-۳ - ترک لبه‌ای برای ماده ارتوتروپیک تحت بار حرارتی

صفحه دو بعدی ارتوتروپیک با طول  $h = 4 \text{ mm}$  و عرض  $w = 1 \text{ mm}$  در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک لبه‌ای مستقیم به طول  $a = 0.4 \text{ mm}$  است (شکل (۵-۱۴)). صفحه در لبه چپ به سرعت به اندازه  $\Delta T_e = -10$  سرد می‌شود. تمامی لبه‌های دیگر عایق و شرایط کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.

مشخصات ماده  $E_1 = 116/36 \text{ GPa}$  ،  $\nu_{rr} = 0.14$  ،  $\nu_{r1} = 0.21$  ،  $\nu_{1r} = 0.27$  ،  $\nu_{12} = 0.28$  ،  $E_r = 9.0/43 \text{ GPa}$  و  $G_{12} = 38/21 \text{ GPa}$  و  $\rho = 3980 \text{ Kg/m}^3$  می‌باشد. و ضریب انبساط حرارتی به ترتیب  $\alpha_1 = 7/5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  ،  $\alpha_2 = 8 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  ،  $\alpha_3 = 9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  ، ظرفیت گرمایی ویژه  $C = 775 \text{ J/kg.K}$  و ضریب هدایت حرارتی  $k_1 = 29/82 \text{ W/m.K}$  ،  $k_2 = 21/25 \text{ W/m.K}$  می‌باشد. در این مثال از مش  $160 \times 60$  استفاده شده است و مقدار زمان  $t$  مطابق فرمول زیر بی‌بعد شده است.

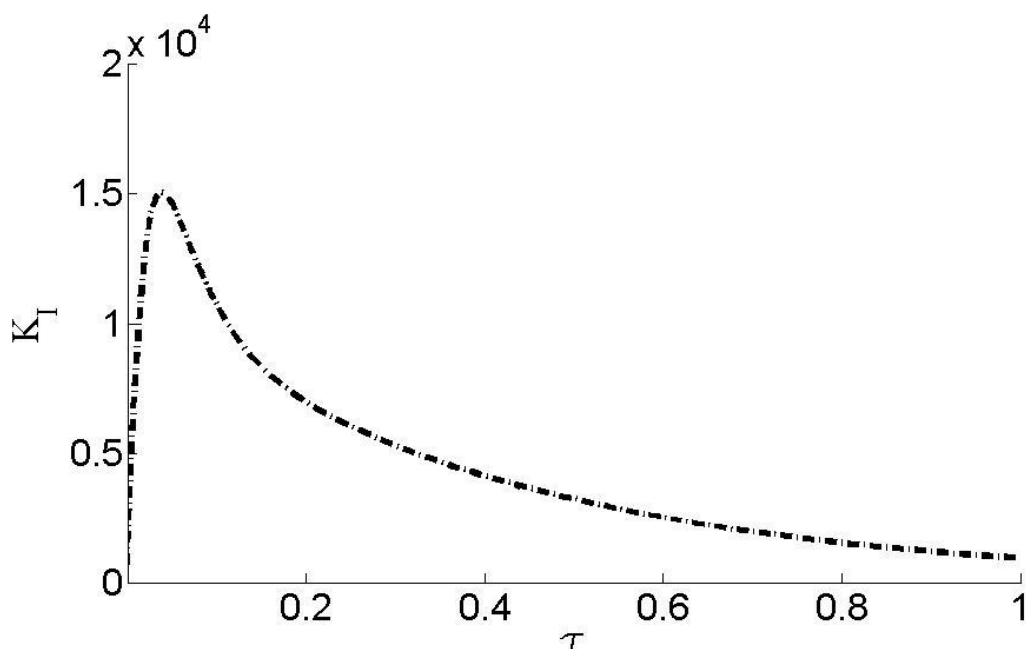
$$\tau = \frac{k_{xx} t}{\rho c W^2} \quad (5-57)$$



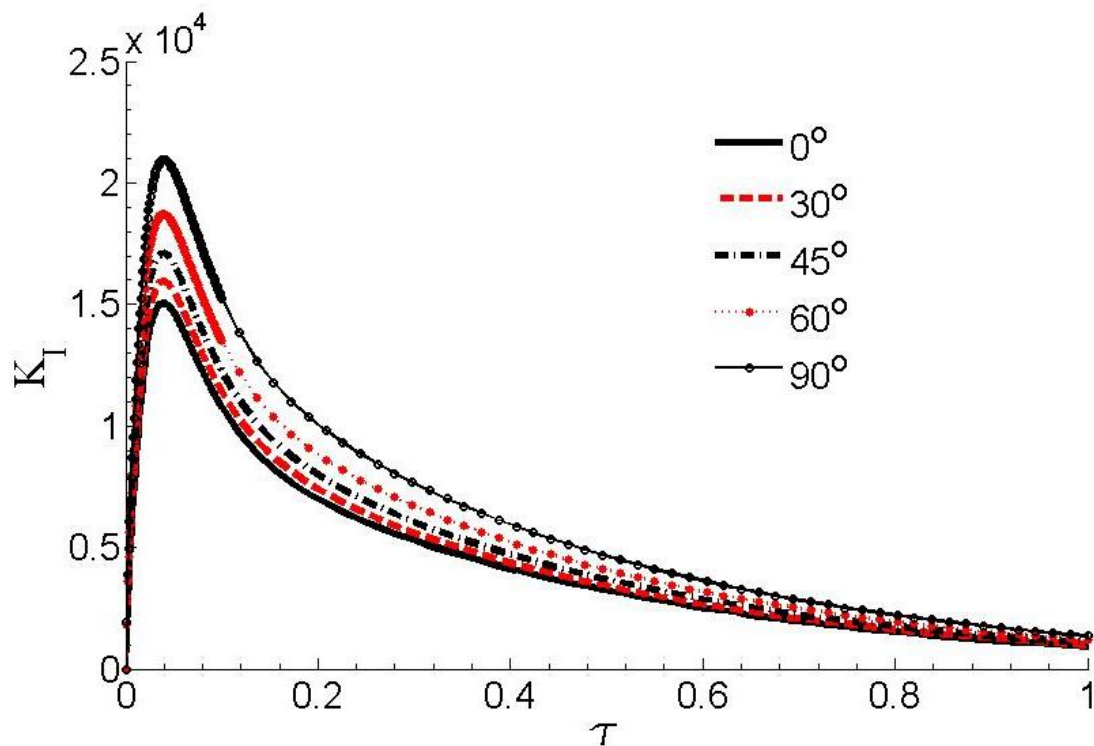
شکل (۵-۱۴) صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری حرارتی

ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_I$  در شکل (۵-۱۵) بر حسب زمان بی‌بعد رسم گردیده است. در این مثال ضرایب شدت تنش دینامیکی برای زوایای ناهمسانگردی مختلف نیز محاسبه گردیده و در شکل

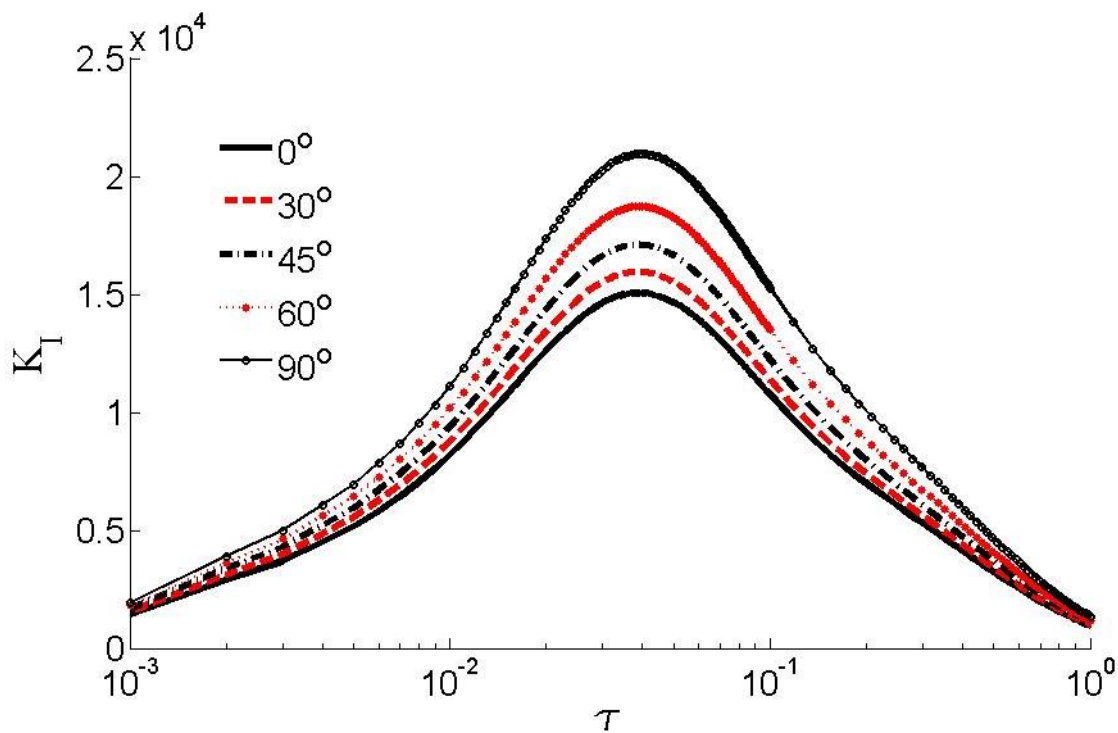
(۱۶-۵) و (۱۷-۵) رسم شده است. همانطور که در نمودار شکل (۱۶-۵) دیده می شود با افزایش زاویه ناهمسانگردی مقدار بیشینه ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_I$  نیز افزایش می یابد. مطابق شکل (۱۸-۵) با افزایش زاویه ناهمسانگردی مقدار بیشینه ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_{II}$  نیز افزایش می یابد. بر خلاف  $K_I$ ، تغییرات مقدار  $K_{II}$  در زاویه ناهمسانگردی ۹۰ درجه مشابه زاویه ناهمسانگردی صفر درجه می باشد. برای مقایسه بهتر نمودارها، نمودار نیمه لگاریتمی ضرایب شدت تنش در شکل (۱۷-۵) و (۱۹-۵) آورده شده است. در مثال ذکر شده، بیشینه ضرایب شدت تنش دینامیکی در زاویه ناهمسانگردی صفر درجه دارای کمترین مقدار است.



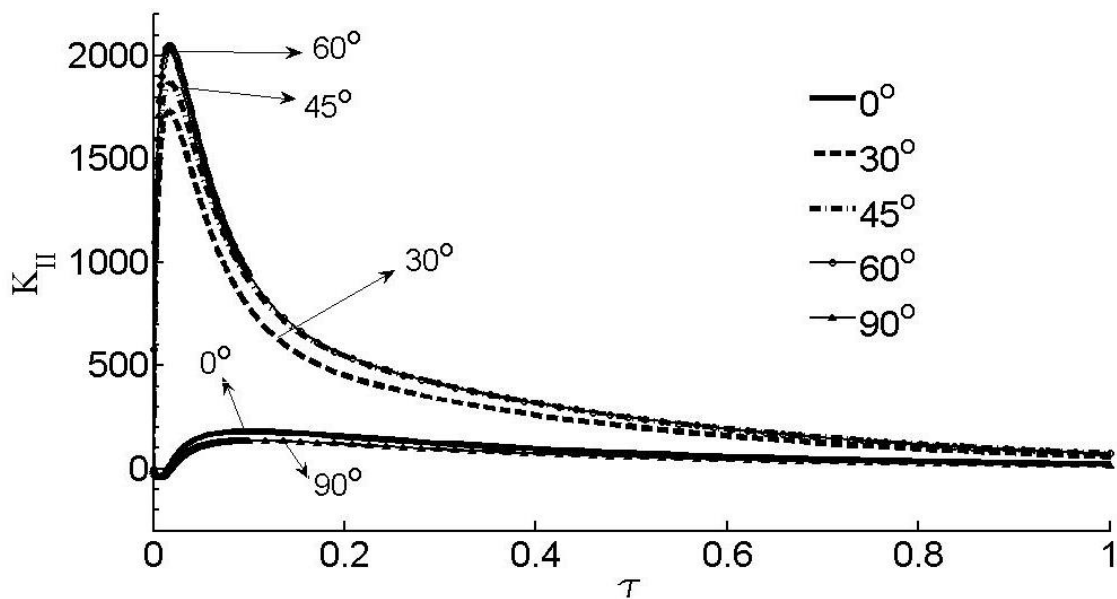
شکل (۱۵-۵) نمودار ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای به طول  $a = 0.4 \text{ mm}$  در حالت دینامیکی



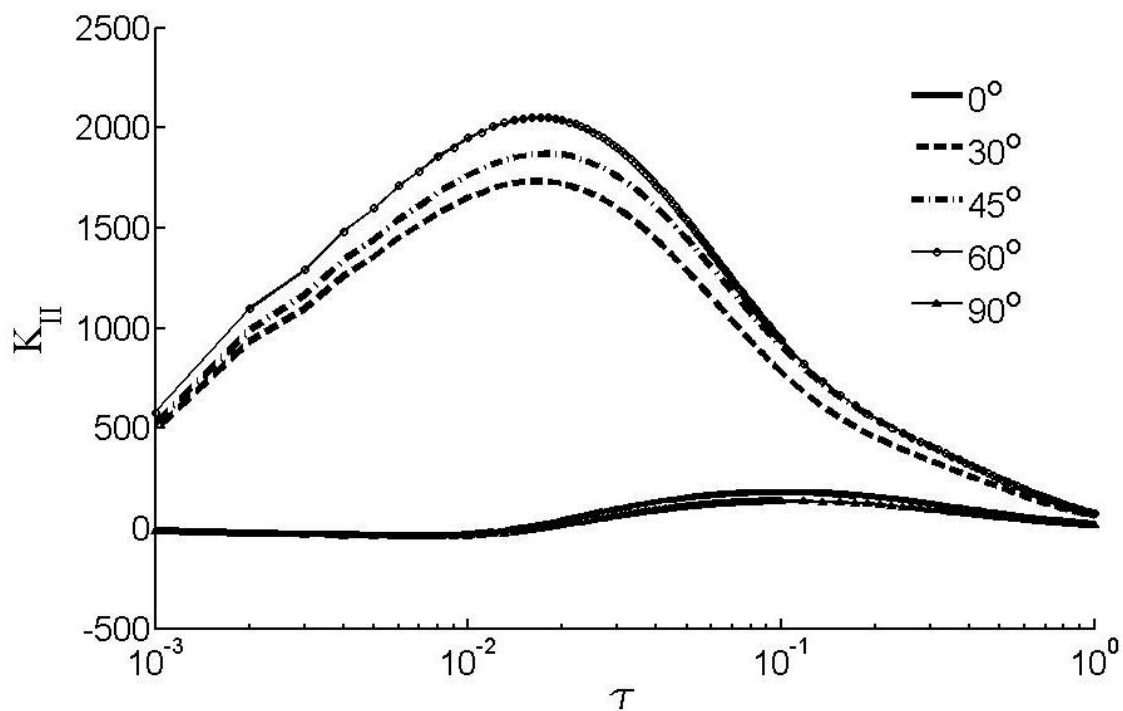
شکل (۵-۱۶) نمودار ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_I$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای در زوایای ناهمسانگردی مختلف



شکل (۵-۱۷) نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_I$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای در زوایای ناهمسانگردی مختلف



شکل (۵-۱۸) نمودار ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_{II}$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای در زوایای ناهمسانگردی مختلف

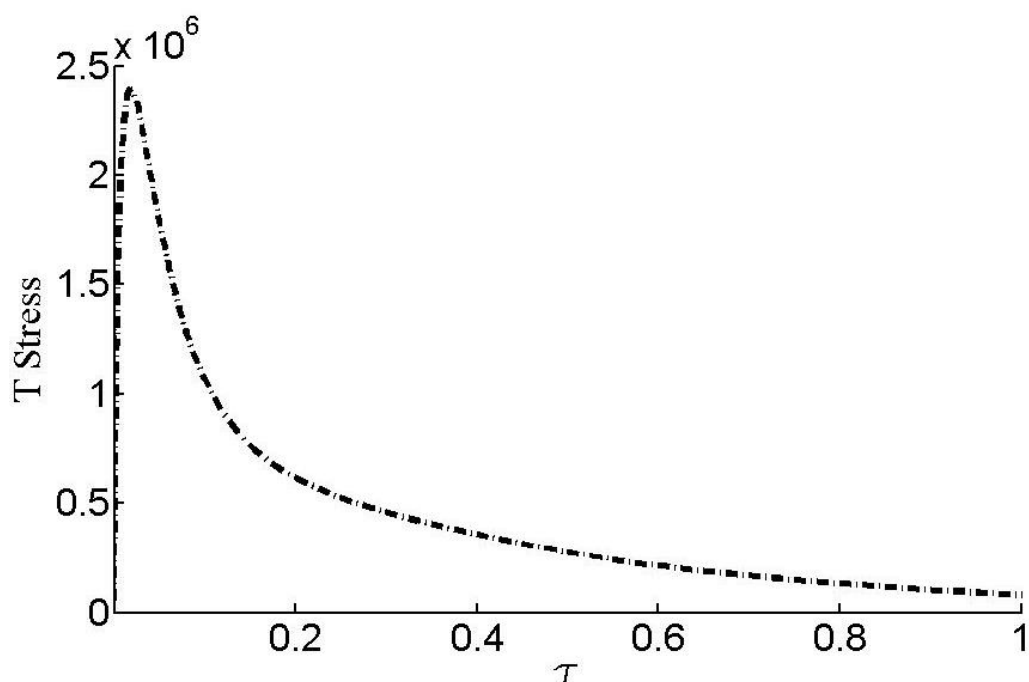


شکل (۵-۱۹) نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_{II}$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای در زوایای ناهمسانگردی مختلف

نتایج نشان می‌دهند در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک، ضرایب شدت تنش به سرعت افزایش و پس از رسیدن به مقدار بیشینه، تا مقدار پایا کاهش می‌یابد. اعمال شوک حرارتی به صورت سرمایشی به لبه

چپ صفحه باعث ایجاد موج تنشی حجمی در آن می‌شود. در یک نقطه ثابت از صفحه، ابتدا تنش بخاطر تغییر نمایی دما به آرامی تا مقدار بیشینه زیاد می‌شود اما با رسیدن موج ناگهان تغییر علامت می‌دهد. پس از عبور موج نیز تنش به آرامی تغییر می‌کند. ضرایب شدت تنش نیز تا قبل از رسیدن موج تنش به نوک ترک افزایش می‌یابند اما با عبور موج و تغییر علامت تنش، مقدار آنها تا رسیدن به مقدار پایا کاهش پیدا می‌کند. زمان متناظر با مقدار بیشینه با زیاد شدن زاویه ناهمسانگردی افزایش می‌یابد.

در این مثال مقدار دینامیکی تنش  $T$  نیز، در زمان‌های مختلف با استفاده از مش  $۱۶۰ \times ۶۰$  و اندازه متغیر محاسبه گردیده و در شکل (۵-۲۰) رسم گردیده‌است.



شکل (۵-۲۰) مقدار دینامیکی تنش  $T$  در زمان‌های مختلف در ماده ارتوتروپیک تحت بار حرارتی

فصل ششم

# نتیجه گیری و پیشنهادها

## ۶-۱- خلاصه نتایج

در این پایان نامه، روش المان محدود توسعه یافته برای تحلیل دینامیکی ترک لبه‌ای در محیط‌های دوبعدی از مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری حرارتی به کار رفته است. با آوردن مثال‌های متعدد، دقت روش عددی ارائه شده با روش‌های دیگر مقایسه گردیده است و تطابق قابل قبولی بین نتایج ارائه شده و گزارش‌های دیگر وجود دارد. در انتها مقادیر ضریب شدت تنش و تنش  $T$  در صفحه ارتوتروپیک تحت بارگذاری حرارتی بدست آمده است.

طبق نتایج، در مواد ارتوتروپیک نیز مانند مواد ایزوتروپیک در ابتدای اعمال شوک حرارتی، ضرایب شدت تنش سریعاً تا یک مقدار حداکثر افزایش یافته و سپس با سرعت کمتری کاهش می‌یابد. این مساله نشانگر امکان ایجاد رشد ترک در زمان‌های ابتدایی تغییر دمای صفحه است.

بعلاوه، در مواد ارتوتروپیک مقدار بیشینه ضرایب شدت تنش و زمان وقوع آن به زاویه ناهمسانگردی کاملاً وابسته بوده و میزان وابستگی در چند مثال بررسی گردیده است.

در این مطالعه، تاثیر زاویه ترک روی مقادیر ضرایب شدت تنش در مسائل با بارگذاری مکانیکی بررسی شده است. نتایج مثال‌های ارائه شده نیز تطابق قابل قبولی بین نتایج تحلیل و مقادیر گزارش شده نشان می‌دهد.

همچنین در این مطالعه، برای مدل‌سازی ترک، توابع غنی‌سازی جدید معرفی شده و در روش المان محدود توسعه یافته برای بارگذاری‌های مکانیکی در دو حالت دینامیکی و استاتیکی بکار برده شده است. به عنوان مزیت توابع جدید می‌توان به این نکته اشاره کرد که در توابع غنی‌سازی قبلی، درجه آزادی گره‌های اطراف المان نوک ترک ۸ درجه افزایش می‌یافت، این امر بخصوص در ترک‌های در حال رشد، با توجه به گسترش ترک باعث افزایش درجه آزادی کل سیستم می‌شود. در روش ارائه شده درجه آزادی گره‌های المان شامل نوک به مقدار ۴ درجه افزایش می‌یابد و توابع غنی‌سازی ۲ تابع می‌باشد. در نتیجه با گسترش ترک و انتقال نوک ترک به المان‌های مجاور، در نهایت درجه آزادی مساله نسبت به حالت قبلی کاهش می‌یابد.



توابع جدید ارائه شده بر خلاف توابع قبل به جنس ماده ارتوتروپیک وابسته نمی باشند و از این جهت با توابع غنی سازی مواد ایزوتروپیک مشابهت دارد.

#### ۶-۲- پیشنهادات عملی بر اساس نتایج حاصل از پایان نامه

- با توجه به دقت بالای روش عددی ارائه شده در این رساله، می توان با اطمینان بیشتر، از این روش در حل مسائل مکانیک شکست استفاده کرد.
- با توجه به مزیت های توابع غنی سازی جدید ارائه شده در این مطالعه، استفاده از این توابع کارایی بیشتری خواهد داشت.
- با توجه به اثر زاویه ناهمسانگردی، روی ضرایب شدت تنش انتخاب جهت زاویه الیاف حائز اهمیت است.

#### ۶-۳- پیشنهاد موضوع برای پژوهش های بعدی

- بررسی ضرایب شدت تنش در مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری ترکیبی حرارتی و مکانیکی
- بررسی اثر کوپلینگ دما بر روی ضرایب شدت تنش در مواد ارتوتروپیک تحت بار حرارتی
- بررسی رشد ترک در مواد ارتوتروپیک تحت بارگذاری حرارتی

- [1] Muskhelishvili NI. (1953) “Some basic problems on the mathematical theory of elasticity”, Translated by Radok JRM. Noordhoof, Groningen.
- [2] Lekhnitskii SG. (1963) “Theory of an anisotropic elastic body” , San Francisco: Holden-Day.
- [3] Sih GC. Paris PC. Irwin GR. (1965) “On cracks in rectilinearly anisotropic bodies”, *Int. J. Fract. Mech.*, 1, pp 189-203.
- [4] Rice JR. (1968) “Path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks” *J. of Appl. Mech.*, Transactions (ASME)., 35, 2, pp. 379–386.
- [5] Tada H. Paris PC. Irwin R. “The stress analysis of cracks”, Handbook. Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania.
- [6] Eichen Jw. (1987) “An improved method for computing the J2 integral”, *Eng. Fract., Mech*, 26, 5, pp 691-700
- [7] Carloni C. Nobile L. (2002) “Crack initiation behaviour of orthotropic solids as predicted by the strain energy density theory”, *Theo. and Appl. Fract. Mech.*, 38, pp. 109-119.
- [8] Nobile L. Carloni C. (2005) “Fracture analysis for orthotropic cracked plates”, *Compos. Struct.*, 68, 3, pp. 285-293.
- [9] Lee K,Y. Sim K.B. (1990) “thermal shock stress buckner’s weght intensity factor by function method”, *Eng. Fract. Mech.*, 37, 4, pp. 799-804.
- [10] Erdogan F. (2000) “Fracture mechanics”, *Int. J. Solids. and Structures.*, 37, pp. 171-183.
- [11] Aliabadi M.H. Sollero P. (1998) “Crack growth analysis in homogeneous orthotropic laminates”, *Compos. Sci. Technol.*, 58, pp. 1697-1703.
- [12] Sanchez F. Zhang C. Saez A. (2008) “A two-dimensional time-domain boundary element method for dynamic crack problems in anisotropic solids”. *Eng. Fract. Mech.*, 75, pp.1412-1430.
- [13] Ortiz M. Leroy Y. Needleman A. (1987) “A finite element method for localized failure analysis” , *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 61, pp. 189-214.
- [14] Belytschko T. Fish J. Engelmann B.E. (1988) “A finite element with embedded localization zones”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 70, pp 59–89.

- [15] Belytshko T. Lu YY, Gu L. (1994) “Element-Free Galerkin Methods”, *Int. J. Num. Methods. in Eng.*, 37, pp. 229-256.
- [16] Fleming M. Chu YA. Moran B. Belytshko T. (1997) “Enriched Element-Free Galerkin Method for Three-Dimensional”, *Int. J. Num. Methods. in Eng.*, 40, pp.1483-1504.
- [17] Melenk J.M. and Babuska I. (1996) “The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 139, pp.289 -314.
- [18] Belytschko T. Krongauz Y. Organ D. Fleming M. and Krysl P. (1996) “Meshless method : An overview and recent developments”. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 139,pp 3-47.
- [19] Belytschko T. Black T. (1998) “Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing”, *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 45, 5, pp. 601-620.
- [20] Moes N. Dolbow J. Belytschko T. (1999) “A Finite Element Method for Crack Growth Without Remeshing”, *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 46, 1, pp.131-150.
- [21] Dolbow J. (1999) PhD. Thesis “An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics ”, *Theo. and Appl. Mech.*, Northwestern University, Evanston , IL, U.S.A.
- [22] Daux Ch. Moes N. Dolbow J. Sukumar N. Belytschko T. (2000) “Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method”, *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 48, pp. 1741-60.
- [23] Dolbow J. Moes N. Belytschko T. (2000) “Discontinuous Enrichment in Finite Elements With a Partition of Unity Method”, *Finite Elem. Anal. Des.*, 36, pp. 235-260.
- [24] Sukumar N. Moes N. Moran B. Belytschko T. (2000) “Extended Finite element Method for Three-Dimensional Crack Modeling”, *Int J Num Methods in Eng.*, 48, 11, pp. 1549-1570.
- [25] Stolarska M. Chopp D.L. Moes N. Belytschko T. (2001) “Modeling Crack Growth by Level Sets and the Extended Finite Element Method”, *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 51, 8, pp.943-960.
- [26] Sukumar N. Chopp D.L. Moes N. Belytschko T. (2001) “Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method ”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 190, 46, pp. 6183-6200.

- [27] Rao B.N. (2002), PhD. Thesis, “Stochastic Meshless methods for deformation and fracture in materials and structures”, Iowa University.
- [28] Sukumar N. Chopp D.L. Moran B. (2003) “Extended Finite Element Method and Fast Marching Method for Three Dimensional Fatigue Crack Propagation”, *Eng. Fract. Mech.*, 70, 1, pp. 29-48.
- [29] Dolbow J. Gosz M. (2002) “On the Computation of Mixed-mode Stress Intensity Factors in Functionally Graded Materials”, *Int. J. Solids Struct.*, 39, 9, pp. 2557-2574.
- [30] Belytschko T. Chen H. Xu J. Zi G. (2003) “Dynamic Crack Propagation Based on Loss of Hyperbolicity and a New Discontinuous Enrichment”. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 58, 12, pp. 1873-1905.
- [31] Kim J.H. Paulino G.H. (2003) “The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors”. *Int. J. Solids Struct.*, 40, pp. 3967-4001.
- [32] Song S.H. Paulino G.H. (2006) “Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method”. *Int. J. of Solids Struct.*, 43, pp. 4830-4866
- [33] Asadpoure A. Mohammadi S. Vafai A. (2006) “Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method” , *Thin-Walled Struct.*, 44, 9, pp. 1031–1038.
- [34] Asadpoure A. Mohammadi S. Vafai A. (2006) “Modeling crack in orthotropic media using a coupled finite element and partition of unity methods” *Finite Elem. Anal. Des.*, 42, 13, pp. 1165–1175.
- [35] Asadpoure A. Mohammadi S. (2007) “Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method” *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 69, pp. 2150–2172.
- [36] Gao X. Kang X.W. Wang H.G. (2009) “Dynamic crack tip fields and dynamic crack propagation characteristics of anisotropic material”, *Theo. and Appl. Fract. Mech.*, 51, pp. 73-85.
- [37] Menouillard T. Belytschko T. (2010) “Dynamic fracture with meshfree enriched XFEM”, *Acta. Mech.*, 213, pp. 53–69.

- [38] Motamedi D. Mohammadi S. (2009) “Dynamic crack propagation analysis of orthotropic media by the extended finite element method”, *Int. J. Fract.*, 161, pp. 21-39.
- [39] Motamedi D. Mohammadi S. (2010) “Dynamic analysis of fixed cracks in composites by the extended finite element method”, *Eng. Fract. Mech.*, 77, pp. 3373-3393.
- [40] Larsson S.G. Carlson A.J. (1973) “Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on smallscale yielding at crack tips in elastic-plastic materials”, *J. Mech. Phys. Solids*, 21, 4, pp. 263–277.
- [41] Betegon C. Hancock J.W. (1991) “Two parameter characterization of elastic – plastic crack-tip fields”, *J. Appl. Mech.*, 58, 4, pp. 104-110
- [42] Du, Z.Z. Hancock J.W. (1991) “The effect of non-singular stresses on crack-tip constraint”, *J. Mech. Phys. Solids.*, 39, 3, pp. 555–567.
- [43] O’Dowd N.P. Shih C.F. (1991) “Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter-I”, structure of fields, *J. Mech. Phys. Solids.*, 39, 8, pp. 989–1015.
- [44] O’Dowd N.P. Shih C.F. (1992) “Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter - II” , Fracture applications, *J. Mech. Phys. Solids.*, 40, 5, pp. 939–963.
- [45] Ayatollahi M.R. Pavier M.J. Smith D.J. (1998) “Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading”, *Int. J. Fract.*, 91, pp. 283-298.
- [46] Leever P.S. Radon J.C.D. (1982) “Inherent stress biaxiality in various fracture specimen”, *Int. J. Frac.*, 19, 4, pp. 311–325.
- [47] Kfoury A.P. (1986) “Some evaluations of the elastic T-term using Eshelby’s method”, *Int. J. Fract.*, 30, 4, pp. 301–315.
- [48] Cardew G.E. Goldthorpe M.R. Howard I.C. Kfoury A.P. “On the elastic T-term Fundamentals of Deformation and Fracture: Eshelby Memorial Symposium”.
- [49] Becker T.L. Cannon R.M. Ritchie R.O. (2001) “Finite crack kinking and T-stresses in functionally graded materials”, *Int. J. Solids Struct.*, 38, 33, pp.5545-5563
- [50] Kim J.H. Paulino G.H. (2004) “T-stress in orthotropic functionally graded materials: Lekhnitskii and Stroh formalisms ”, *Int. J. Fract.*, 126, pp. 345–384.

- [51] Kim J.H. KC A. (2008) “A Generalized Interaction Integral Method for the Evaluation of the T-stress in Orthotropic Functionally Graded Materials under Thermal loading”, *J. appl. Mech.*, 75, 5, pp. 0511121
- [52] Dag S. (2007) “Mixed-Mode Fracture Analysis of Functionally Graded Materials Under Thermal Stresses: A New Approach Using  $J_k$  -Integral”, *J. Thermal Stresses*, 30, pp. 269,296
- [53] Dag, S. Arman, E.E. Yildirim, B. (2010) “Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using  $J_k$ - integral”, *Int. J. Solids Struct.*, 47, pp. 3480-3488.
- [54] Shih C.F. Moran B. Nakamura T. (1986) “Energy release rate along a threedimensional crack front in a thermally stressed body”, *Int. J. Fract.*, 30, pp. 79–102.
- [55] Wilson W.K. Yu I.W. ( 1979) “The use of the J-integral in thermal stress crack problems”, *Int. J. Fract.*, 15, pp. 377–387.
- [56] Prasad N.N.V. Aliabadi M.H. Rooke D.P. (1994) “The dual boundary element method for thermoelastic crack problems”, *Int. J. Fract.*, 66,pp. 255–272.
- [57] Raveendra S.T. Banerjee P.K. (1992) “Boundary element analysis of cracks in thermally stressed planar structures”, *Int. J. Solids Struct.*, 29,pp. 2301–2317.
- [58] Prasad N.N.V. Aliabadi M.H. Rooke D.P. (1996) “The dual boundary element method for transient thermoelastic crack problems”, *Int. J. Solids Struct.*, 33,pp. 2695–2718.
- [59] Dell’Erba D.N. Aliabadi, M.H. Rooke D.P. (1998) “Dual boundary element method for three-dimensional thermoelastic crack problems”, *Int. J. Fract.*, 94,pp. 89–101.
- [60] Noda N. (1997) “Thermal Stress Intensity Factor for Functionally Gradient Plate with an Edge Crack”, *J. Thermal Stresses*, 20, 3, pp. 373–387.
- [61] Fujimoto T. Noda N. (2000) “Crack Propagation in a Functionally Graded Plate Under Thermal Shock”, *Arch. Appl. Mech.*, 70, 6, pp. 377–386.
- [62] Fujimoto T. Noda N. (2001) “Two Crack Growths in a Functionally Graded Plate Under Thermal Shock”, *J. Thermal Stresses*, 24, pp. 847–862.
- [63] Hosseini Tehrani P. Eslami M.R. (1998) “Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation”, *Eng. Analysis with Boundary Elements*, 22, pp 245-250.

- [64] Hosseini-Tehrani P. Eslami M.R. Daghyani H.R. (2001) "Dynamic crack analysis under coupled thermoelastic assumption", *J. Appl. Mech.*, 68, 4, pp.584–588.
- [65] Chen J. Soh A.K. Liu J. Liu ZH. (2004) "Thermal fracture analysis of a functionally graded orthotropic strip with a crack", *Int. J. Mech. and Materials in Design*, 1, pp. 131–141.
- [66] KC A. Kim J.H. (2008) "Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials", *Eng. Fract. Mech.*, 75, pp. 2542–2565
- [67] Duflo M. (2008) "The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 74, pp. 827-847.
- [68] Zamani A. Eslami M.R. (2009) "Coupled dynamical thermoelasticity of a functionally graded cracked layer", *J. Thermal Stresses*, 32, pp. 969–985.
- [69] Zamani A. Eslami M.R. (2010) "Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation", *Int. J. Solids Struct.*, 47, pp. 1392-1404
- [۷۰] شریعتی م، مهدی‌زاده رخی م، (۱۳۹۰) " مطالعه شکست دینامیکی مواد تابعی تحت شوک های حرارتی - مکانیکی"، مجله علمی - پژوهشی مکانیک سازه ها و شماره ها، شماره سوم، صفحه ۱-۱۶.
- [71] Hosseini S.S. Bayesteh H. Mohammdi S. (2013) "Thermo-mechanical XFEM Crack Propagation Analysis of Functionally Graded Materials", *Materials Science and Eng.*, 561, pp. 285-302.
- [72] Freund L.B., (1990) "*Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge University Press*", London .
- [73] Gao H. and Chiu C.-H. (1992) "Slightly curved or kinked cracks in anisotropic elastic solids", *Int. J. Solids Struct.*, 29 , 8, pp. 947–972.

## Abstract

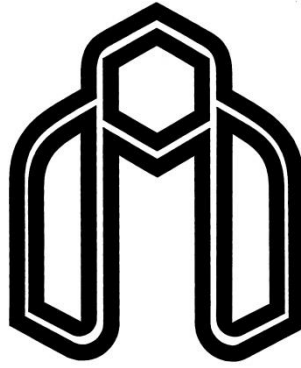
Existence of cracks in the structure, causes structural failure at loads less than the expected ones. So investigating the behaviour of crack in orthotropic materials, is essential. On the other hand, many of the structures and machinery are exposed the temperature gradient or high temperature. According to the research, the thermal failure is one of the conventional failure mode of structures. In this thesis, the Extended finite element method is implemented to compute the dynamic fracture parameters (stress intensity factors and T stress) in 2D orthotropic media under thermal loading. a single layer orthotropic rectangular plane is considered. this plane is exposed to cooling thermal shock at the cracked side, other sides are assumed insulated.

In this thesis, The uncoupled thermoelasticity equations are considered. Isoparametric four-node and eight-node rectangular elements are used to discrete governing equations. The dynamical stress intensity factors and T stress are computed by the interaction integral method. The Newmark method is used for the time integration of the equilibrium equations and the Crank–Nicolson scheme is applied to solve the classical heat conduction equations.

In this thesis, a *MATLAB* code is developed to carry out all stages of the calculations from mesh generation to post-processing. In several numerical examples, dynamic stress intensity factors (SIFs) and T stress are compared to the analytical and numerical reports. is drawn an analogy between obtained results and other numerical or analytical method. proposed results and the reported results are in good agreement.

**Keywords:** Orthotropic materials , extended finite element method , stress intensity factors ,T stress , Thermal stresses





**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mechanical Engineering**

**Calculation of dynamic fracture parameters in  
Orthotropic materials under thermal loading by  
Extended finite element method (XFEM)**

**Mojtaba Hajimohammadi**

**Supervisor  
Mohammad Jafari**

**June 2013**