

الله
لرَحْمَنِ
الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تحلیل ریاضی و عددی سیر پا خنجر نسبتاً زیاد تحت بار دینامیکی عرضی به چک توری تغییر شکل بر شی مرتبه اول

دانشجو:

فاطمه سوهانی

استاد راهنمای:

دکتر حمیدرضا امیری پیچ

سیر ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم فاطمه سوهانی

تحت عنوان: تحلیل ریاضی و عددی تیر با خیز نسبتاً زیاد تحت بار دینامیکی عرضی به
کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنمای
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماينده تحصيلات تمكيلي	امضاء	اساتيد داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

الیس اللہ بکاف عبد ۵

(قرآن کریم ، سورہ ۳۶ ، آیہ ۳۹)

تَهْدِيم بِعَزِيزَتِينَ هُنَّا

م در و م ا د ر م



بـ جـ سـ رـ اـ قـ طـ رـ هـ اـ زـ دـ يـ اـ مـ حـ شـ شـ اـ نـ

بدون شک جایگاه و مژالت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شایبی او، بازمان
قادرو دست نتوان، چنری بگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت

امانت های را که به دشنه سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و ازباب

”من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزوجل“:

از مردم عزیزم، این دو معلم بزرگوارم، که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار

غفلت هایم کردند اند و در تمام عرصه های زندگی مارو یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

واز استاد ارجمند و شایسته؛ جناب آقای دکتر حمید رضا ایپاچی که در حال سعد صدر، با حسن خلق و فروتنی، از

هیچ کلی در این عرصه بر من دینع تنومند و وزحمت را همایی این پیان نامه را بر عهده گرفته؛

کمال شکر و قدردانی را دارم

باشد که این خردترین، نجشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تعهد نامه

اینجانب فاطمه سوهانی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل ریاضی و عددی تیر با خیز نسبتاً زیاد تحت بار دینامیکی عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تحت راهنمائی دکتر حمید رضا ایپک چی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیر گذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافته‌ای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد .

چکیده

در این پایان‌نامه تحلیل ریاضی و عددی تیر با خیز نسبتاً زیاد، تحت بار دینامیکی عرضی و بار محوری ارائه شده است. تیر همگن و همسانگرد است و شرایط مرزی به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. در استخراج معادلات، میدان جابه‌جایی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول تخمین زده می‌شود. سینماتیک مسئله بر اساس روابط کرنش- جابه‌جایی فن-کارمن و رابطه‌ی بنیادین، رابطه‌هوك است. معادلات حاکم بر حرکت تیر، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی و با ضرایب ثابت هستند که به یکدیگر کوپل بوده و به کمک اصل همیلتون تعیین شده‌اند. برای تعیین پاسخ تیر، پس از لایه‌گیری از معادلات، حل مسئله در فضای لایپلاس با استفاده از روش لایه مرزی تعیین و برای انتقال پاسخ‌ها به حوزه زمان، از قضیه باقی‌مانده‌ها کمک گرفته شده است. علاوه بر آن حل تحلیلی به کمک بسط مدهای نرمال نیز تعیین شده است. همچنین مسئله به کمک نرم افزار انسیس نیز تحلیل شده است.

مواردی که در این تحلیل در نظر گرفته شده است عبارتند از: تعیین پاسخ بر حسب مکان و زمان، تعیین فرکانس‌های طبیعی تیر، بررسی تأثیر پارامترهای هندسی بر پاسخ و فرکانس، بررسی دقت تئوری مرتبه اول در تعیین فرکانس و مقایسه نتایج با حل عددی.

کلمات کلیدی:

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تحلیل فرکانسی، تئوری اغتشاشات، روش لایه مرزی، خیز نسبتاً زیاد، روش اجزای محدود

فهرست مقاله‌های مستخرج از پایان‌نامه

- Natural frequencies determination of a beam with moderately large deflection using first order shear deformation theory; Journal of nonlinear dynamics (submitted).

بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش تیر با خیز نسبتاً زیاد به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول؛

مجله مکانیک تربیت مدرس (ارسال شده).

- Mathematical and numerical analysis of beam with large deflection under transverse dynamic load by using first order shear deformation theory; Journal of solid mechanics (submitted).

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	- تاریخچه و مرور مقالات
۲	۱-۱- مقدمه
۳	۲-۱- اجزای سازه‌ای
۴	۳-۱- غیرخطی
۵	۴-۱- تاریخچه
۱۰	۵-۱- مروری بر مقالات انجام شده
۱۵	۶-۱- جمع بندی
۱۷	۲- استخراج معادلات حرکت
۱۸	۱-۲- مقدمه
۱۸	۲-۲- تعریف مسأله
۲۰	۳-۲- محاسبه‌ی انرژی پتانسیل
۲۱	۴-۲- محاسبه‌ی انرژی جنبشی
۲۱	۵-۲- کار نیروهای خارجی
۲۳	۶-۲- تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون
۲۶	۷-۲- جمع بندی
۲۷	۳- حل تحلیلی
۲۸	۱-۳- مقدمه
۲۸	۲-۳- بی‌بعدسازی معادلات
۳۰	۳-۳- تعیین فرکانس طبیعی
۳۵	۴-۳- تعیین پاسخ
۳۵	۴-۴-۱- تبدیل لاپلاس
۳۵	۴-۵-۳- روش لایه مرزی
۳۶	۴-۵-۳-۱- حل خارجی
۳۷	۴-۵-۳-۲- حل داخلی در $x^* = 0$
۴۰	۴-۵-۳-۳- حل داخلی در $x^* = 1$
۴۱	۴-۶-۳- تبدیل معکوس لاپلاس
۴۲	۴-۶-۳-۱- تبدیل معکوس لاپلاس با روش باقی‌ماندها
۴۳	۴-۶-۳-۲- قضیه‌ی پیچش
۴۳	۴-۶-۳-۷- تعیین پاسخ استاتیکی

۴۴	۸-۳- معادلات مرتبه دو.....
۴۴	۱-۸-۳- حل خارجی
۴۴	۲-۸-۳- حل داخلی
۴۴	۹-۳- روش بسط توابع ویژه (مدهای نرمال)
۴۸	۱۰-۳- بار کمانش
۴۸	۱۱-۳- جمع‌بندی
۵۰	۴- حل عددی
۵۱	۱-۴- مقدمه
۵۱	۲-۴- معرفی المان‌ها
۵۱	۱-۲-۴- المان Beam189
۵۲	۲-۲-۴- المان Solid95
۵۳	۳-۴- تعیین مش بهینه
۵۴	۴-۴- حل استاتیکی
۵۴	۵-۴- حل مدار
۵۵	۶-۴- حل کمانش
۵۵	۷-۴- حل دینامیکی
۵۷	۸-۴- جمع‌بندی
۵۸	۵- بررسی نتایج
۵۹	۱-۵- مقدمه
۵۹	۲-۵- فرکانس طبیعی
۶۱	۱-۲-۵- بررسی تأثیر بار محوری بر فرکانس طبیعی
۶۶	۲-۲-۵- اثر کرنش نرمال عرضی بر فرکانس طبیعی
۶۶	۳-۵- تحلیل کمانش
۶۸	۴-۵- پاسخ
۷۲	۵-۵- جمع‌بندی
۷۳	نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۷۴	۱-۶- مقدمه
۷۴	۲-۶- نتایج
۷۷	۳-۶- پیشنهادها
۷۸	پیوست ها
۷۹	پیوست الف- مسائل لایه مرزی
۷۹	الف-۱- بررسی یک مثال ساده
۸۲	الف-۲- روش حل لایه مرزی

۸۷	پیوست ب- معادلات مرتبه دو
۸۸	پیوست ج - حل عددی
۸۸	ج-۱- حل عددی یکبعدی
۹۰	ج-۲- حل عددی سه بعدی
۹۲	منابع

فهرست شکل‌ها

۱۸	شکل(۲-۱) نمای شماتیک سازه
۲۱	شکل(۲-۲) دیاگرام آزاد تیر تحت بار محوری
۱۵	شکل (۴-۱) شکل المان beam189
۵۲	شکل (۴-۲) شکل المان solid95
۵۶	شکل (۴-۳) تغییرات زمانی نیروی گستردگی
۶۰	شکل (۵-۱) تأثیر چگالی بر فرکانس طبیعی
۶۰	شکل (۵-۲) تأثیر طول بر فرکانس طبیعی
۶۱	شکل (۵-۳) تأثیر مدول الاستیسیته بر فرکانس طبیعی
۶۱	شکل (۵-۴) تأثیر ضخامت بر فرکانس طبیعی
۶۴	شکل (۵-۵) تأثیر چگالی بر فرکانس طبیعی به ازای بار محوری ۴۰۰۰
۶۴	شکل (۵-۶) تأثیر طول بر فرکانس طبیعی به ازای بار محوری ۴۰۰۰
۶۴	شکل (۵-۷) تأثیر ضخامت بر فرکانس طبیعی به ازای بارهای محوری مختلف
۶۵	شکل (۵-۸) چهار شکل مد عرضی به ازای بار محوری ۴۰۰۰
۶۷	شکل (۵-۹) تأثیر ضخامت بر بار کمانش
۶۸	شکل (۱۰-۵) تأثیر طول بر بار کمانش
۶۸	شکل(۱۱-۵) پاسخ عرضی تیر در $x^* = 0,5$ به ازای گام‌های زمانی مختلف
۶۹	شکل(۱۲-۵) پاسخ عرضی تیر در $x^* = 0,5$
۶۹	شکل(۱۳-۵) پاسخ محوری تیر در $x^* = 0,05$
۷۰	شکل(۱۴-۵) پاسخ عرضی تیر در $x^* = 0,1$
۷۰	شکل(۱۵-۵) تغییر شکل عرضی تیر در $t = 0,5$
۷۱	شکل(۱۶-۵) تغییر شکل عرضی تیر در $t = 0,5$ به ازای بارهای محوری مختلف
۷۱	شکل(۱۷-۵) پاسخ عرضی تیر در $x^* = 0,5$ به ازای بارهای محوری مختلف
۸۱	شکل(الف-۱) مقایسه‌ی بسط حل خارجی با حل دقیق
۸۲	شکل(الف-۲) اثر مقدار پارامتر اغتشاشی بر اندازه لایه مرزی
۸۶	شکل(الف-۳) مقایسه‌ی حل مركب روش‌های MAE با حل دقیق

فهرست جداول

۵۳	جدول (۴-۱) مشخصات تیر
۵۳	جدول (۴-۲) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی به ازای مشاهی مختلف در مدل‌سازی یکبعدی
۵۴	جدول (۴-۳) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی به ازای مشاهی مختلف در مدل‌سازی سهبعدی
۵۹	جدول (۵-۱) مقادیر اولیه انتخابی
۵۹	جدول (۵-۲) فرکانس‌های (مد محوری) حل تحلیلی
۶۲	جدول (۵-۳) مقایسه‌ی فرکانس‌ها با روش تحلیلی و عددی به ازای بارهای مختلف
۶۳	جدول (۵-۴) مقایسه‌ی فرکانس‌ها با روش تحلیلی و عددی به ازای ضرایب لاغری مختلف
۶۵	جدول (۵-۵) فرکانس طبیعی تیر با تکیه‌گاه‌های متفاوت و به ازای بارهای محوری مختلف
۶۶	جدول (۵-۶) فرکانس‌های مد محوری (Hz)
۶۶	جدول (۵-۷) مقایسه‌ی حل تحلیلی و عددی کمانش (N)

علائم و اختصارات

t	مختصه زمانی (S)	T	انرژی جنبشی
x, y, z	مختصه های کارتزین	U	انرژی کرنشی
E	مدول الاستیسیته	Q	بار گستردہ
S	مساحت سطح مقطع	P	بار محوری
β_i	مقادیر ویژه	ε	پارامتر بی بعد کوچک
$N_x, M_x, P_x,$ N_z, M_{xz}, N_{xz}	منتجه های تنش	b	پهنا
u, v, w	مؤلفه های جابه جایی	$F(s)$	تابع دلخواه در فضای لاپلاس
u_0, w_0	مؤلفه های جابه جایی صفحه میانی	$\tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{yx}$	تنشهای برشی
W_{Px}, W_{Py}	مؤلفه های کار نیروی محوری	$\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x$	تنشهای نرمال
Z_i	نقاط تکین (قطب های تابع)	u_I, w_I	توابع مجھول با بعد چرخش
L	نماد تبدیل لاپلاس، لاگرانژین	c_i, d_i	ثابت ها در حل عمومی
		μ, λ	ثوابت لامه
		ρ	چگالی
		T^*	چگالی انرژی جنبشی
		U^*	چگالی انرژی کرنشی
		v	ضریب پواسون
		κ	ضریب تصحیح برشی
		l	طول تیر
		h	عمق تیر
		ω	فرکانس طبیعی
		W_Q	کار انجام شده توسط نیروی گستردہ
		$\gamma_{zy}, \gamma_{zx}, \gamma_{yx}$	کرنش های برشی
		$\varepsilon_z, \varepsilon_y, \varepsilon_x$	کرنش های نرمال
		$[Bi]$	ماتریس های ضرایب
		η	متغیر سریع حل داخلی در $x = 0$
		ζ	متغیر سریع حل داخلی در $x = l$
		s	متغیر لاپلاس

پیشگفتار

پایاننامه‌ی حاضر دارای ساختار کلی زیر است.

در فصل اول، ابتدا به معرفی انواع پیوستارها پرداخته می‌شود؛ سپس در مورد تیرها و سازه‌های غیرخطی توضیح داده می‌شود. تاریخچه‌ی مختصراً در مورد تئوری‌های تیر و کارهای انجام شده در زمینه تئوری‌های غیرخطی ارتعاشات بیان خواهد شد و درنهایت به مرور مقالات مرتبط با پایاننامه پرداخته می‌شود. در فصل دوم، بر اساس تئوری تغییر شکل بر Shi مرتبه اول، معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیر استخراج می‌شود. این معادلات شامل مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان هستند و به کمک اصل همیلتون تعیین می‌شوند. در فصل سوم، برای حل این معادلات، از تئوری اغتشاشات^۱ استفاده می‌شود. برای این منظور ابتدا معادلات بی‌بعد شده و سپس به کمک تبدیل لاپلاس^۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در حوزه زمان به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه لاپلاس تبدیل خواهند شد. در ادامه، به کمک روش لایه مرزی^۳، پاسخ در حوزه لاپلاس به‌دست می‌آید. درنهایت برای تعیین لاپلاس معکوس از قضیه‌ی باقی‌مانده‌ها^۴ استفاده شده و پاسخ نهایی معادلات در حوزه‌ی زمان و مکان تعیین می‌گردد. علاوه بر آن حل تحلیلی به کمک بسط مدهای نرمال و فرکانس‌های طبیعی تیر نیز تعیین می‌شوند. در فصل چهارم، حل عددی شامل حل مدار و حل دینامیکی مسئله‌ی مورد بررسی، ارائه خواهد شد. در فصل پنجم، به بیان نتایج مسئله پرداخته می‌شود. اثر پارامترهای مختلف مادی و هندسی بر رفتار سیستم مورد بررسی قرار خواهد گرفت. نتایج و پیشنهادها در فصل پایانی ارائه خواهد شد.

¹ Perturbation theory

² Laplace transformation

³ Matched Asymptotic Expansion (MAE)

⁴ Residual theorem

فصل اول

تاریخچہ و مرور مقالات

پ

۱-۱- مقدمه

تیر یکی از عناصر بنیادی در سازه‌های مهندسی است و در بیشتر سازه‌ها مانند پره‌های هلی کوپتر، آنتن فضاییما، بال‌های هواپیما، لوله‌ی تفنگ، ساختمان‌های بلند، پل‌های عربیض و اجزای سازنده‌ی سازه‌های پیچیده کاربرد دارد. مطالعه‌ی پاسخ دینامیکی و استاتیکی تیرها تحت بارگذاری‌های مختلف می‌تواند به درک بهتر رفتار سازه‌های واقعی تحت شرایط بارگذاری مشابه کمک کند.

بررسی مدل‌های خطی به تنها‌ی برای درک رفتار سیستم کافی نیست و این مدل‌ها ممکن است نادرست، ناکافی و یا گمراه‌کننده باشند. زمانی که دامنه نوسانات بزرگ باشد و فرکانس‌های طبیعی افزاینده، وابسته به دامنه‌هایشان باشد پاسخ‌های خطی نادرست هستند. مدل‌های خطی می‌تواند گمراه‌کننده باشد؛ زیرا ممکن است یک حل خطی پیش‌بینی کند که سیستم پایدار است در حالی که در واقعیت ناپایدار است.

از طرفی پدیده‌های فیزیکی جالبی در سازه‌های غیرخطی اتفاق می‌افتد که به وسیله مدل‌های خطی نمی‌توان آن‌ها را توضیح داد. این پدیده‌ها شامل پرش^۱، اشباع^۲، تشیده‌های ساپهارمونیک^۳، سوپر-هارمونیک^۴ و ترکیبی^۵، نوسانات خودتحریک^۶ و آشوب^۷ است. در سیستم‌های پیوسته جملات غیرخطی باعث کوپل شدن مدهای نرمال خطی می‌گردد و این پدیده منجر به انتقال انرژی بین مدها می‌شود. آزمایش‌ها نشان می‌دهند که گاهی انرژی از یک مد با فرکانس بالا به مد فرکانس پایین منتقل می‌شود که این پدیده می‌تواند به شدت خطرناک باشد؛ زیرا دامنه‌ی پاسخ مدهای فرکانس پایین در مقایسه با دامنه‌ی مدهای فرکانس بالا بسیار بزرگ‌تر است. در واقعیت هیچ سیستم فیزیکی کاملاً خطی وجود ندارد و مدل‌های خطی سیستم‌های فیزیکی دارای محدودیت‌هایی هستند. به طور

¹Jump

²Saturation

³Subharmonic

⁴Superharmonic

⁵Combination

⁶Self-excited oscillations

⁷Chaos

کلی مدل‌های خطی برای محدوده‌های بسیار کوچک کاربرد دارند. مثلاً زمانی که دامنه ارتعاشات بسیار کوچک است. بنابراین برای شناخت و درک دقیق‌تر رفتار دینامیکی سازه تحت شرایط بارگذاری عمومی ضروری است که پارامترهای غیرخطی در مدل‌سازی سیستم در نظر گرفته شده و بررسی شوند [۱].

در این فصل، در ابتدا توضیح مختصری درباره‌ی عناصر ساختاری و تیرها داده شده است. در قسمت بعد، به معرفی سیستم‌های غیرخطی پرداخته و درنهایت مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه انجام شده است.

۲-۱- اجزای سازه‌ای

از لحاظ هندسه و شرایط بارگذاری، سازه‌ها را می‌توان به شش گروه تقسیم‌بندی نمود: کابل‌ها^۱، میله‌ها^۲، تیرها، غشاها^۳، ورق‌ها^۴ و پوسته‌ها^۵. کابل‌ها سازه‌هایی یک بعدی هستند که تنها بار کششی را تحمل می‌کنند. رشتہ نوعی کابل است که در ابتدا مستقیم بوده و دارای پیش‌کشش می‌باشد. میله‌ها سازه‌هایی یک بعدی هستند که می‌توانند بارهای محوری و پیچشی را تحمل کنند. میله‌ها و ستون‌ها نوعی سازه‌ی دو نیرویی هستند و خرپا مجموعه‌ای از میله‌ها است. تیرها سازه‌هایی هستند که یکی از ابعاد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از دو بعد دیگر است و در معرض بارهای عرضی قرار دارند که منجر به خمس آن‌ها می‌شود. در حالت کلی تیر قادر به تحمل نیروهای کششی، فشاری، خمشی، برش عرضی و پیچشی است. به عبارت دیگر کابل‌ها، رشتہ‌ها، میله‌ها و ستون‌ها نوع خاصی از تیرها هستند. ورق‌ها سازه‌هایی مسطح هستند که دو بعد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از بعد سوم است و قادرند نیروهای کششی، فشاری، برش صفحه‌ای^۶، خمشی، پیچشی و بارهای برشی عرضی را تحمل کنند.

¹Cables

²Rods

³Membranes

⁴Plates

⁵Shells

⁶In-plane

غشا سازه‌ای دو بعدی است که تنها می‌تواند نیروی کشش و برش صفحه‌ای را تحمل کند. پوسته‌ها سازه‌هایی خمیده هستند که دو بعد آن‌ها به مراتب بزرگ‌تر از بعد سوم است و قادرند نیروهای خارج صفحه^۱ را با ایجاد نیروهای صفحه‌ای، تحمل کنند. پوسته‌ها عمومی‌ترین سازه‌های مهندسی هستند که ورق‌ها و غشاها نوع خاصی از آن‌ها می‌باشند [۲].

۱-۳-۱- غیرخطی^۲

سیستم‌های غیرخطی سیستم‌هایی هستند که اصل جمع آثار در مورد آن‌ها صادق نیست. در طبیعت سیستم‌های غیرخطی فراوانی وجود دارد. در حقیقت سیستم‌های غیرخطی نه تنها استثنا نیستند، بلکه قانون و قاعده طبیعت هستند. از نظر ریاضی، سیستم، غیرخطی است اگر ضرب متغیرهای وابسته و مشتقات آنها در معادلات حرکت، شرایط مرزی و یا روابط سازگاری وجود داشته باشد. علاوه بر این وجود هرگونه پرش و یا ناپیوستگی در سیستم می‌توانند سبب غیرخطی شدن معادلات گردد. ایوان ایوانوسکی [۳]، نایفه و موک [۴] و مون [۵] انواع غیرخطی‌ها را با جزئیات و به وسیله مثال‌های مختلف توضیح داده‌اند. منشأ رفتار غیرخطی در سیستم می‌تواند جنس ماده، هندسه، اینرسی، نیروهای حجمی و یا استهلاک باشد که هر یک در ادامه توضیح داده خواهد شد.

استهلاک: استهلاک اساساً یک پدیده غیرخطی است؛ زیرا نیروی استهلاک تابع غیرخطی از جابه‌جایی و سرعت است. استهلاک ویسکوز خطی نوعی ایده‌آل‌سازی سیستم است. اصطکاک خشک و استهلاک هیستریزیس^۳ نمونه‌هایی از استهلاک غیرخطی هستند.

هندسه: در سیستم‌هایی که تحت تغییر شکل‌ها و یا جابه‌جایی‌های بزرگ قرار دارند، غیرخطی هندسی وجود دارد. این غیرخطی در انرژی پتانسیل سیستم ظاهر می‌شود. در سازه‌ها، تغییر شکل‌های بزرگ معمولاً منجر به روابط غیرخطی کرنش‌جانبی می‌شود. به عنوان مثال می‌توان به

¹Out-of-plane

²Nonlinearity

³Hysteretic damping

حرکت یک پاندول ساده با در نظر گرفتن زاویه‌های بزرگ و یا یک تیر یک سر گیر دار با انحنای بزرگ اشاره نمود.

اینرسی: غیرخطی اینرسی ناشی از جملات غیرخطی سرعت و شتاب در معادلات حرکت است. انرژی جنبشی سیستم منشأ ایجاد غیرخطی‌های اینرسی است. به عنوان مثال، می‌توان به جملات شتاب کریولیس و مرکزگرا اشاره نمود. همچنین در معادلات توصیف حرکت یک پاندول الاستیک و یا حرکت عرضی یک تیر تحت کشش، غیرخطی‌های اینرسی وجود دارد.

جنس: این نوع غیرخطی زمانی که رابطه‌ی تنش-کرنش غیرخطی باشد ایجاد می‌شود. لاستیک یک مثال کلاسیک این دسته است.

شرایط مرزی و تحریک خارجی: جملات غیرخطی ممکن است که در شرایط مرزی مسئله ظاهر شوند.

جملات غیرخطی ممکن است در استخراج معادلات دیفرانسیل، شرایط مرزی و یا هر دو ظاهر شوند. در سال‌های اخیر، گسترش سریع تحقیقات فضایی سبب انجام تحقیقات گسترده در دینامیک و کنترل سازه‌های فضایی منعطف بزرگ مانند کنترل کننده‌های خورشیدی، آنتن‌ها، رادارها، خرپاهای بزرگ، تلسکوپ‌های فضایی و ایستگاه‌های فضایی شده است. برای طراحی روند مناسب برای کنترل ارتعاشات سازه‌ها با دامنه‌ی بزرگ، نیاز به درک رفتار غیرخطی دینامیکی و استاتیکی سیستم‌ها، شامل کوپلینگ مدار (انتقال انرژی میان مدهای سازه) و ناپایداری دینامیکی و استاتیکی است و این‌ها، نیازمند مدل‌سازی صحیح سیستم‌های غیرخطی است.

مدل‌سازی سیستم‌ها را می‌توان به سه گروه تقسیم کرد: مدل‌سازی خطی، مدل‌سازی شبۀ غیرخطی^۱ و مدل‌سازی غیرخطی. در مدل‌سازی خطی، رفتارهای دینامیکی و استاتیکی سازه‌ها به وسیله‌ی مدل‌های خطی توصیف می‌شود که دارای پاسخ‌های دینامیکی و استاتیکی منحصر به فرد هستند. مدل استاتیکی خطی می‌تواند یکی از انشعابات استاتیکی مانند کمانش را تعیین کند؛ اما نمی‌تواند مقدار

^۱Pseudo nonlinear

جابه‌جایی کمانش را پیش‌بینی کند. در مدل‌سازی شبیه‌غیرخطی رفتار استاتیکی به وسیله‌ی یک مدل غیرخطی توصیف می‌شود؛ اما رفتار دینامیکی به کمک مدل خطی توصیف می‌گردد. یک مدل استاتیکی غیرخطی مقدار جابه‌جایی کمانش سازه‌ها را می‌تواند پیش‌بینی کند. سپس تحلیل پایداری دینامیکی حول نقطه‌ی تعادل استاتیکی به وسیله‌ی مدل دینامیکی خطی صورت خواهد گرفت.

۱-۴- تاریخچه

مهمنترین تئوری‌های تیر که امروزه کاربرد دارند عبارتند از: معادلات دقیق الاستیسیته، تئوری تیر اویلر برنولی و تئوری تیر تیموشنکو. مشکل اساسی در تئوری الاستیسیته این است که تنها برای تعداد کمی از مسائل می‌تواند حل دقیق ارائه دهد؛ از همین رو این تئوری پرکاربرد نیست. در تئوری تیر اویلر برنولی [۶] فرض شده است که صفحات سطح مقطع که پیش از تغییر شکل عمود بر تار خنثی هستند، پس از تغییر شکل نیز همچنان مسطح و عمود بر تار خنثی باقی خواهند ماند و هیچ کرنشی در این صفحات رخ نخواهد داد. به عبارت دیگر از تأثیرات اعوجاج و تغییر شکل برشی و همین‌طور از کرنش‌های عمودی عرضی چشم‌پوشی شده است. این فرضیات برای تیرهای بلند و باریک معتبر است. فرض عدم وجود برش عرضی بدین معناست که چرخش در سطح مقطع تنها به دلیل خمش ایجاد می‌شود. اما برای تیرهای ضخیم، مدهای فرکانس بالا و یا در تیرهای کامپوزیتی برش عرضی قابل چشم‌پوشی نیست.

با وارد نمودن اثر تغییر شکل برشی در مدل تیر اویلر برنولی تئوری تیر تیموشنکو پدید آمد [۷]. در این تئوری، برای ساده‌سازی استخراج معادلات حرکت، فرض شده است که کرنش برشی در سطح مقطع یکنواخت خواهد بود و به جای آن یک ضریب تصحیح برشی در معادلات در نظر گرفته خواهد شد که این فاکتور علاوه بر پارامترهای جنس و هندسه به شرایط مرزی و نوع بارگذاری وابسته است. [۸] در حضور برش عرضی، چرخش در سطح مقطع ناشی از هر دو تغییر شکل خمشی و برشی عرضی خواهد بود.

در تئوری‌های مرتبه بالاتر علاوه بر عمود بودن از مستقیم بودن خطوط نیز صرف نظر شده است. مثلاً در تئوری مرتبه سوم ردی-بیکفورد^۱، میدان جابه‌جایی به گونه‌ای است که یک کرنش برشی و تنש برشی عرضی مرتبه دو را در تیر ایجاد می‌کند و در صفحات بالایی و پائینی تنش و کرنش برشی صفر می‌باشد؛ در نتیجه در این تئوری نیازی به فاکتور تصحیح برش نیست.

مدل تیر خطی برای تغییر شکل‌های کوچک مناسب است. اما زمانی که تغییر شکل‌ها نسبتاً بزرگ هستند، برای مدل‌سازی دقیق باید جملات غیرخطی مورد نیاز را نیز در مسئله وارد نمود. دشوار است که بتوان یک تئوری تیر سه‌بعدی بسیار کلی را با در نظر گرفتن تمامی جملات غیرخطی و اثرات ثانویه مانند اینرسی دورانی، تغییر شکل برشی، اعوجاج، استهلاک، تغییر شکل استاتیکی و غیره بررسی کرد. معمولاً جملات غیرخطی ناچیز هستند و اثرات ثانویه به منظور ساده‌سازی عبارت‌های مختلف، کنترل‌پذیر نمودن مدل و تسهیل نمودن حل معادلات، در نظر گرفته نمی‌شوند. انتخاب جملات غیرخطی و اثرات ثانویه‌ای که قرار است از آن‌ها چشم پوشی شود، به خواص تیر (ابعاد، جنس و غیره)، بارگذاری و شرایط مرزی وابسته است. بسیاری از تئوری‌های غیرخطی ارتعاشاتِ عرضی تیر به بررسی تأثیر کشش صفحه‌ی میانی در تیر یکنواخت با تکیه‌گاه ساده با مقاومت محوری نامحدود می‌پردازنند. وینوسکی-کریگر [۹] و بورگرین [۱۰] نوسانات آزاد تیر با تکیه‌گاه‌های مفصلی را بررسی نمودند. معادلات حرکت آن‌ها شامل یک جمله‌ی غیرخطی ناشی از کشش صفحه‌ی میانی است که سبب غیرخطی شدن روابط کرنش-جابه‌جایی می‌شود. آن‌ها پاسخ را به صورت توابع بیضوی ارائه کردند و دریافتند که فرکانس ارتعاشات با دامنه تغییر می‌کند. همچنین بورگرین تأثیر بار محوری فشاری را به صورت تئوری و تجربی بررسی نمود. ایزلی [۱۱] تأثیر بار نوسانی محوری را بر روی حرکت تیر مفصلی مطالعه کرد. تئوری‌های فوق با نتایج آزمایشگاهی ری و برت [۱۲] تطابق کامل داشت. ایونسن [۱۳] تأثیر کشش صفحه‌ی میانی بر روی ارتعاشات تیر یکنواخت را با تکیه‌گاه‌های ساده، گیردار و ساده-گیردار بررسی کرد. بازبی و وینگارتون [۱۴] از روش المان محدود برای

^۱Reddy – Bickford

فرمول‌بندی معادلات دیفرانسیل غیرخطی تیر تحت بار نوسانی استفاده کردند. آن‌ها شرایط مرزی با تکیه‌گاه ساده و گیردار را بررسی نمودند. هو و همکاران [۱۵] و [۱۶] به مطالعه تأثیر کشش صفحه‌ی میانی در حرکات چرخشی غیرصفحه‌ای با دامنه‌ی بزرگ در تیر با تکیه‌گاه ساده پرداختند. بولوتین [۱۷] در یک مسئله خاص نشان داد که تأثیر غیرخطی اینرسی مهم‌تر از تأثیر غیرخطی هندسی در تیرها است. آتلوری [۱۸] ارتعاشات غیرخطی تیر مفصلی را بررسی نمود. او در معادلات، اینرسی پیچشی، غیرخطی هندسی و غیرخطی اینرسی را وارد نمود؛ اما از تأثیر کشش صفحه‌ی میانی و تغییر شکل برشی عرضی صرف‌نظر کرد. استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه^۱ برای حل معادلات حاصل نشان داد که غیرخطی مؤثر وابسته به جملات غیرخطی اینرسی و هندسی است که با شماره‌ی مد تغییر می‌کنند. کرسپو داسیلووا [۱۹] و [۲۰] معادلات غیرخطی و شرایط مرزی حرکت خمشی- خمشی-پیچشی تیر همسانگرد تحت کشش را بررسی نمود. در معادلات، جملات غیرخطی هندسی و اینرسی مرتبه سوم را در نظر گرفته و نشان دادند که جملات غیرخطی اینرسی هم‌مرتبه با جملات غیرخطی هندسی هستند. کرسپو داسیلووا [۱۹] و [۲۰]، پای و نایفه [۲۱] و اندرسون و همکاران [۲۲] حرکت غیرخطی تیر یک سرگیردار را بررسی و نشان دادند که در مد اول جملات غیرخطی هندسی که از نوع سخت‌شونده^۲ است، غالب می‌باشد؛ در حالی که در مدهای دوم و بالاتر جملات غیرخطی اینرسی که از نوع نرم‌شونده^۳ می‌باشند، غالب هستند. نوردگرن [۲۳] از روش عددی برای تحلیل حرکت سه‌بعدی با دامنه‌ی محدود برای تیرهای در معرض کشش داخلی استفاده نمود. اپستین و موری [۲۴] تئوری سه‌بعدی برای تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ تیرهای جدار نازک را فرمول‌بندی کردند. حل‌های عددی صورت گرفته برای رفتار پیش‌کمانش تیر I شکل در این تئوری با داده‌های تجربی تطابق بسیار خوبی داشت. هودگس و داول [۲۵] معادلات غیرخطی حرکت با جملات غیرخطی درجه دوم را برای توصیف دینامیکی تیرهای بسیار باریک و پره‌های چرخان هلی‌کوپتر با

¹Multiple scale²Hardening³Softening

کشش خارجی و تحت تغییر شکل‌های نسبتاً زیاد تعیین نمودند. داول و همکاران [۲۶] به صورت تجربی حرکت تیر یکسرگیردار غیرچرخشی تحت تغییر شکل بزرگ را بررسی و با نتایج حاصل از تئوری هودکس و داول [۲۵] مقایسه کردند. انطباق نسبتاً خوبی برای تغییر شکل خمشی کوچک وجود داشت؛ اما در جابه‌جایی‌های بزرگ‌تر بین نتایج اختلاف دیده شد. راسن و فریدمن [۲۷] با در نظر گرفتن جملات غیرخطی مرتبه سوم توانستند معادلات دقیق‌تری نسبت به هودکس و داول [۲۵] ارائه دهند. نتایج عددی آن‌ها انطباق خوبی با داده‌های تجربی داول و همکاران [۲۶] داشت. راسن و همکاران [۲۸] و [۲۹] معادلات حرکات پیچشی-خمشی کوپل‌شده غیرخطی را برای تحلیل میله پیش‌پیچیده‌شده^۱ استخراج نمودند. کین و همکاران [۳۰] تئوری جامعی در ارتباط با ارتعاشات کوچک تیرهای یکسرگیردار با حرکت اختیاری در حالت سه‌بعدی (انتقالی و چرخشی) ارائه نمودند. این تئوری برای تیرهایی با سطح مقطع دلخواه و خواص مادی متغیر با مکان کاربرد دارد. آن‌ها به کمک یک مثال ناکارایی یک برنامه‌ی کامپیوترا معرفت در تحلیل دینامیکی سازه‌های چندعضوی را نشان دادند. هینانت و هودگس [۳۱] برنامه‌ای به صورت ترکیبی از اعضای چندعضوی و روش اجزای محدود برای بررسی رفتار دینامیکی خطی و استاتیکی غیرخطی سازه‌ها ارائه نمودند. نتایج این برنامه با نتایج تجربی ارائه شده توسط داول و همکاران [۳۲] انطباق بسیار خوبی داشت. کرسپو داسیلوا و همکاران [۳۳] به بررسی جابه‌جایی استاتیکی و فرکانس‌های طبیعی نوسانات بسیار کوچک حول موقعیت تعادل استاتیکی پرداختند و نتایج حاصل کاملاً با نتایج روش اجزای محدود هینانت و هودگس [۳۴] و نتایج تجربی داول و همکاران [۳۵] یکسان بود. کرسپو داسیلوا و هودگس [۳۶] و [۳۷] معادلات دیفرانسیل غیرخطی حرکت تیر چرخان را با در نظر گرفتن تمام جملات غیرخطی مرتبه سوم ارائه و تأثیر این جملات را بر حرکت پره‌های چرخان هلی کوپتر بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که مهم‌ترین جملات غیرخطی مرتبه سوم، جملات غیرخطی هندسی هستند که در معادلات پیچش ظاهر می‌شوند. سپس معادلات توصیف دینامیک غیرخطی تیرهای خمشی-خمشی-پیچشی-

^۱ Pretwisted

کششی توسط کرسپو داسیلوا [۳۸] و [۳۹] ارائه شده است. پای و نایفه [۴۰] معادلات ارتعاشات خمشی-خمشی-پیچشی-کششی تیرهای کامپوزیت و فلزی چرخان را ارائه نمودند. معادلات حاصل شامل جملات کوپل شده ساختاری و غیرخطی‌های مرتبه دوم و سوم هندسی و اینرسی بودند. پای و نایفه [۴۱] مدل فوق را با اضافه نمودن تأثیر تغییر شکل برشی عرضی گسترش دادند. پای و نایفه [۴۲] به صورت هندسی مدل دقیق تیر غیرخطی را برای تیغه‌های چرخان کامپوزیتی خمیده و تحت پیچش تحت ارتعاشات بزرگ ارائه دادند و تأثیرات تنفس سه‌بعدی و اعوجاج را بررسی کردند. زمانی که معادلات توصیف حرکت تیر سه‌بعدی و با خیز نسبتاً زیاد استخراج می‌شوند، سه زاویه چرخش برای ارتباط وضعیت تغییر شکل یافته و تغییر شکل نیافته استفاده می‌شود. هودگس و همکاران [۴۳] به بعضی از اشتباهات رایج در مدل‌سازی غیرخطی تیرهای یکسرگیردار اشاره نمودند.

۱-۵- مروری بر مقالات انجام شده

وانگ و ایسا [۴۴] فرمول‌بندی ماتریس سفتی دینامیکی را برای سازه‌های خمیده با سطح مقطع ثابت و با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی عرضی، اینرسی دورانی و کشیدگی محور خنثی تحت ارتعاش اجباری، ارائه کردند. یک مثال عددی برای نشان دادن کاربرد این روش ارائه شده است. تیرهای غیریکنواخت با سطح مقطع‌های متغیر در راستای طول، در بسیاری از سازه‌هایی که در آن‌ها نیاز به توزیع بهینه‌ی استحکام و وزن است، کاربرد دارند. جتگانکار و چهیل [۴۵] فرکانس‌های طبیعی تیر با اینرسی، مساحت و جرم متغیر را در یک حالت عمومی بررسی کرد. این روش پیشنهادی اجازه می‌دهد که تأثیر هر یک از این متغیرها به صورت جداگانه ارزیابی شود و منجر به مفاهیم جرم مؤثر، اینرسی مؤثر و سطح مؤثر می‌گردد. در این روش می‌توان با یک فرمول ساده مانند فرمول محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی تیر یکنواخت، فرکانس تیر با خواص متغیر را تعیین کرد. همچنین اثرات تغییر شکل برشی بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر با شرایط مرزی کلاسیک را می‌توان با فرمول‌های ساده‌ای مشابه تیرهای با تکیه‌گاه ساده مشخص کرد. ویژگی بارز این کار سادگی روابطی است که می‌توان

برای انواع شرایط مرزی استفاده کرد. ما و همکاران [۴۶] روش جدیدی را بر اساس ترکیب اغتشاشات مdal^۱، بر همکنش مدها^۲ و اغتشاشات ماتریسی^۳ برای پاسخ غیرخطی تیر با خیز نسبتاً زیاد تحت بارگذاری نوسانی ارائه کردند. در فرمولبندی، جابه‌جایی طولی و اینرسی در نظر گرفته شده است. همچنین یک مثال عددی از کاربرد این روش ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که اغتشاشات Mdal روش مؤثرتری در تحلیل این دسته از مسائل است. فودا [۴۷] از روش مقیاس‌های چندگانه برای تحلیل ارتعاش غیرخطی تیر با تکیه‌گاه ساده استفاده کرد. در فرمولبندی، اثرات تغییر شکل برشی عرضی همانند اینرسی دورانی بر روی رفتار ارتعاشات دامنه بزرگ در نظر گرفته شده است. تأثیر برش و اینرسی دورانی در تیرهای نسبتاً ضخیم و کوتاه تحت ارتعاشات دامنه بزرگ قابل توجه است. تغییر فرکانس‌های غیرخطی با پارامترهای مختلف ارائه شده است. یون و همکاران [۴۸] معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی تیر خمیده جدار نازک^۴ را بر اساس مقاله‌های [۴۹] و [۵۰] در نظر گرفتند. حل عددی صریح برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی تیرهای خمیده نازک ارائه شده است تا بتوان رفتار دینامیکی تیر را ارزیابی کرد. در فرمولبندی علاوه بر شش درجه آزادی معمول، درجه آزادی هفتم که مربوط به تابیدگی^۵ در هر گره است نیز در نظر گرفته شده است. در این مقاله اعتبار و همگرایی فرمولبندی ارائه شده برای المان تیر خمیده نشان داده شده است و نتایج این مقاله با مقالات دیگر مقایسه شده است. فریرا و فسشار [۵۱] ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکو و ورق‌های میندلین^۶ را بررسی کردند. معادلات حرکت و شرایط مرزی تیرهای تیموشنکو و ورق‌های میندلین ارائه شده است. این روش امکان استفاده از هندسه‌های غیرمستطیلی را می‌دهد. برای این منظور از توابع شکل جدیدی به همراه روش شبه‌طیفی استفاده کردند. دقیق نتایج این روش برای تیرهای تیموشنکو بسیار

¹ Modal perturbation

² Mode superposition

³ Matrix perturbation

⁴Thin-walled

⁵ Warping

⁶ Mindlin

بالاست. فن رنژبورگ و فن درمرو [۵۲]، روش حل مسأله‌ی مقدار ویژه مرتبط با مدل تیر تیموشنکو یکنواخت را ارائه کردند. در مورد فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای تیر با تکیه‌گاه ساده و تیر یک سرگیردار بحث شده‌است. نتایج آن‌ها، نتایج موجود را بسط داده و تکمیل می‌کند. ژونگ و لیائو [۵۳] ارتعاشات غیرخطی مرتبه بالای تیرهای تیموشنکو با مرزهای ثابت را بررسی کردند. اثرات غیرخطی تغییر شکل محوری، انحنای خمشی و کرنش‌های برشی عرضی در نظر گرفته شده است. معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم با استفاده از روش SDQM^۱ حل شده است. نسبت فرکانس‌های غیرخطی به خطی استخراج و تغییرات آنها با نسبت دامنه به شعاع ژیراسیون بررسی شده است. برخلاف یافته‌های شناخته شده برای فرکانس‌های اصلی غیرخطی تیرها، بعضی از فرکانس‌های غیرخطی مرتبه بالا با افزایش نسبت دامنه به شعاع ژیراسیون، کاهش می‌یابند. ون [۵۴] به تعیین روش حل اساسی^۲ برای ورق تحت تغییر شکل برشی (تئوری‌های ریسنر^۳ و میندلین) بر روی پی الاستیک تحت بار دینامیکی یا استاتیکی پرداخت. پاسخ اساسی روش المان مرزی برای ورق میندلین در حوزه لاپلاس برای نخستین بار تعیین شد. تمام متغیرها در حوزه زمان را می‌توان با تبدیل لاپلاس معکوس داربین^۴ تعیین کرد. روش‌های عددی برای تأکید بر صحت نتایج آورده شده است.

به علاوه حساسیت^۵ و همگرایی^۶ روش برای حل استاتیکی بررسی شده است. روش پیشنهادی برای اجرا ساده بوده و نتایج ورق با تغییر شکل برشی تحت بارهای دینامیکی و استاتیکی را تأیید می‌کند. چن [۵۵] روش انتگرالی^۷ جدیدی را برای حل مسأله‌ی تیر یک سرگیردار با خیز نسبتاً زیاد ارائه نمود. روش انتگرال ممان^۸ را می‌توان برای بارگذاری‌های پیچیده و خواص متغیر در تیر به کار برد.

¹Spline-based differential quadrature method

²Method of Foundamental Solution(MFS)

³Reissner's theory

⁴Durbin's laplace transform inversion method

⁵Sensitivity

⁶Convergence

⁷ Integral approach

⁸ Moment integral

این شیوه‌ی آسان، تنها به روش‌های ساده عددی نیاز دارد در نتیجه کاربرد آن آسان است. پاسخ برای بارگذاری و خواص مشخص در تیر به منظور نشان دادن اعتبار این روش ارائه شده است. سیمیک [۵۶] تحلیل دینامیکی غیرخطی تیر ساخته شده از مواد تابعی^۱ با تکیه‌گاه ساده تحت بار هارمونیک متحرک را با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و روابط کرنش-جابه‌جایی فن-کارمن^۲ ارائه کرد. خواص مواد تیر در راستای ضخامت بر اساس قانون توانی به صورت پیوسته تغییر می‌کند. معادلات حرکت با استفاده از معادلات لاگرانژ استخراج شدند. توابع حدسی برای تغییر شکل عرضی و محوری و چرخش سطح مقطع تیر به صورت چندجمله‌ای در نظر گرفته شده است. قیود شرایط مرزی با استفاده از ضرایب لاگرانژ در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت غیرخطی با استفاده از روش نیومارک بتا^۳ و روش تکرار مستقیم^۴ حل شده‌اند. در این مقاله اثرات تغییر شکل زیاد، توزیع مواد، سرعت بار متحرک و فرکانس تحریک بر روی جابه‌جایی تیر، ممان‌های خمی و تنش‌های برشی بررسی شده است. مطالعات همگرایی و مقایسه‌ای انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که موارد فوق نقش مهمی در پاسخ‌های دینامیکی تیر ایفا می‌کنند. استویکوف و ریبرو [۵۷]، ارتعاشات غیرخطی هندسی تیر با سطح مقطع مستطیلی با تغییر شکل‌های خمی، پیچشی و طولی در هر صفحه را با استفاده از روش المان محدود p-version بررسی کردند. غیرخطی هندسی با استفاده از تانسور کرنش گرین^۵ در نظر گرفته شده است و اهمیت جابه‌جایی‌های طولی مرتبه دو که معمولاً در روابط کرنش-جابه‌جایی نادیده گرفته می‌شوند، بررسی شده است. در این مقاله دو مدل اصلی استفاده شده است؛ یکی از آنها بر اساس تئوری تیر اویلر برنولی برای خمی تیر و دیگری بر اساس تئوری تیر تیموشنکو است. در هر دو مدل فرض شده است که سطح مقطع به صورت صلب می‌چرخد و در جهت طولی، مشابه تئوری

¹ Functionally graded materials

² Von-Karman

³ Newmark- β method

⁴ Direct iteration method

⁵ Green's strain

سنتونان^۱ برای پیچش، تابیدگی در تیر رخ می‌دهد. با به کارگیری قانون عمومی هوک^۲، معادلات حرکت بر اساس اصل کار مجازی استخراج شده‌اند. اهمیتتابع تابیدگی برای سطح مقطع‌های مستطیلی مختلف بررسی و نشان داده شد که در نظر گرفتن آن نقش اساسی در نتایج صحیح دارد. همچنین نشان داده شد که خطی‌سازی توابع مثلثاتی مرتبط با زاویه پیچش، که معمولاً در میدان جابه‌جایی در مدل‌های بر اساس تئوری سنتونان انجام می‌گیرد، باید در روابط کرنش–جابه‌جایی انجام شود. مقایسه‌ی مدل‌های تیر سه‌بعدی بر اساس تئوری‌های تیر اویلر برنولی و تیر تیموشنکو ارائه شده‌است. نشان داده شد که اگر چرخش در راستای محور عرضی با مشتق توابع جابه‌جایی عرضی (همان‌طور که در مدل ارائه شده بر اساس تئوری تیر اویلر برنولی وجود دارد) تقریب زده شود، زمانی که حرکات خمشی و پیچشی کوپل شده‌اند، تنش برشی اضافی منجر به نتایج غلط می‌گردد. در نهایت با در نظر گرفتن صحت و سادگی، مدلی انتخاب شد و ارتعاش اجباری غیرخطی تیر با استفاده از انگرال مستقیم از معادلات حرکت در حوزه‌ی زمان بررسی شد. مثال‌هایی از کوپل خمشی–پیچشی ناشی از جملات غیرخطی در مسائل دینامیکی ارائه شده است. لی و همکاران [۵۸] ارتعاشات آزاد تیرهای برشی^۳ را با در نظر گرفتن اینرسی دورانی بررسی کردند؛ در حالی که در تیرهای برشی کلاسیک حرکت دورانی در نظر گرفته نشده است. از یک معادله واحد تیر تیموشنکو به صورت تحلیلی معادلات تیر رایلی^۴ و تیر برشی، به ترتیب با موارد حدی نسبت سفتی برشی کاهش یافته به سفتی خمشی بزرگ و کوچک ارائه شده است. تأکید بر تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای برشی غیر کلاسیک بدون در نظر گرفتن اثرات میرایی است. تحت شرایط عمومی، معادله‌ی مشخصه‌ی تیرهای برشی با اینرسی دورانی محدود به صورت صریح ارائه شده است. فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها برای تیر ایستاده بر روی پی الاستیک محاسبه شده است. اثرات اینرسی دورانی محدود، خواص ماده،

¹Saint-Venant's theory

²Generalized Hooke's law

³ Shear beam

⁴ Rayleigh beam

شرایط هندسی و شرایط مرزی بر روی فرکانس طبیعی تیر بحث شده است. سو و همکاران [۵۹] با استفاده از دو روش تحلیلی، تبدیل لایپلاس و مد نرمال، پاسخ دینامیکی گذرای تیر تیموشنکو یکسرگیردار را تحت نیروی ضربه‌ای بررسی کردند. پاسخ صریح برای روش مد نرمال و روش تبدیل لایپلاس ارائه شده است. از روش داربین برای تعیین لایپلاس معکوس استفاده شده است و نتایج عددی بر پایه این دو روش با هم مقایسه شده است. مقایسه دو روش نشان می‌دهد که روش مد نرمال در تحلیل پاسخ گذرای تیر تیموشنکو یکسرگیردار از روش تبدیل لایپلاس کارتر است، در حالی که در تحلیل تیر تیموشنکوی چند دهانه‌ی پیچیده، روش لایپلاس از روش مد نرمال دقیق‌تر می‌باشد. مدل‌سازی سه‌بعدی المان محدود تیر یکسرگیردار انجام شد و نتایج با پاسخ گذرا برای جابه‌جاوی، تنش‌های نرمال، تنش‌های برشی و فرکانس‌های تشدید اویلر برنولی و تیموشنکو مقایسه شد. در تعیین پاسخ جابه‌جاوی گذرا برای یک تیر یکسرگیردار، اگر ضریب لاغری^۱ بزرگ‌تر از ۱۰ باشد از تئوری تیر تیموشنکو و اگر ضریب لاغری بزرگ‌تر از ۱۰۰ باشد از تئوری تیر اویلر برنولی می‌توان استفاده نمود. همچنین فرکانس‌های تشدید تیر یکسرگیردار را، اگر ضریب لاغری بزرگ‌تر از ۱۰۰ باشد از تئوری تیر تیموشنکو و اگر ضریب لاغری بزرگ‌تر از ۴۰۰ باشد از تئوری تیر اویلر برنولی، می‌توان به طور دقیق تعیین نمود.

۱-۶- جمع بندی

در این فصل، در ابتدا به معرفی انواع پیوستارها پرداخته شد، سپس در مورد تیرها و انواع غیرخطی‌ها توضیح داده شد. در قسمت بعد تاریخچه‌ی مختصراً در مورد تئوری‌های تیر و کارهای انجام شده در زمینه‌ی تئوری‌های غیرخطی ارتعاشات تیر بیان گردید و درنهایت به مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه پرداخته شد. با توجه به مقالات مرور شده تحلیل سازه‌ها با خیز نسبتاً زیاد معمولاً با روش‌های عددی مانند تفاضل محدود و اجزاء محدود انجام می‌شود و کمتر مقاله‌ای به حل تحلیلی مسئله پرداخته

^۱ Slender Ratio

است. در این پایان‌نامه، به صورت تحلیلی به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری تیر با خیز نسبتاً زیاد که در آن میدان جابه‌جایی به کار رفته، به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول تخمین زده شده است، پرداخته می‌شود.

فصل ٦٥م

استخراج معادلات

۱-۲- مقدمه

در ارتعاشات غیرخطی تیرها، معادلات حرکت و شرایط مرزی را می‌توان به کمک قانون دوم نیوتون و یا اصل همیلتون^۱ تعیین نمود. در این فصل معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیر با خیز نسبتاً زیاد، به کمک اصل همیلتون استخراج شده است. میدان جابه‌جایی، مطابق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بوده و برای استخراج معادلات حرکت، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

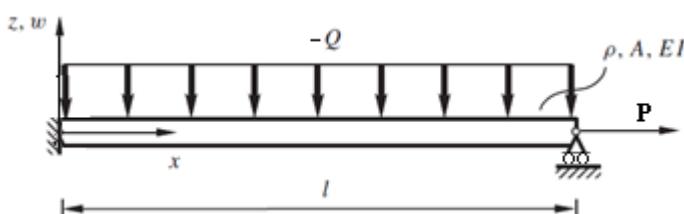
- تیر همگن و همسانگرد است.

- جابه‌جایی‌ها نسبتاً بزرگ و روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی هستند.

- رابطه تنش-کرنش خطی^۲ و از رابطه هوک استفاده شده است.

۲-۲- تعریف مسئله

تیری مطابق شکل (۱-۲)، با طول l ، پهنای b ، عمق h و چگالی ρ مفروض است. تیر تحت بار محوری P و بار عرضی دینامیکی بر واحد طول $(Q(x, t))$ قرار دارد. برای فرمول‌بندی از سیستم مختصات کارتزین (x, y, z) استفاده شده است که در آن x جهت محوری تیر، y در جهت پهنای تیر و z در راستای عمق تیر بوده و از صفحه‌ی میانی اندازه‌گیری می‌شوند.



شکل (۱-۲) نمای شماتیک سازه

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، میدان جابه‌جایی به صورت

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) + z u_1(x, t) \\ v(x, z, t) &= 0 \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) + z w_1(x, t) \end{aligned} \quad (1-2)$$

در نظر گرفته شده است. با تعیین انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروهای خارجی، به کمک این

¹ Hamilton's principle

² Small strain

میدان جابه‌جایی و با بهره گرفتن از اصل همیلتون، روابط حاکم بر تیر استخراج می‌شود. در میدان جابه‌جایی (۱-۲)، u و v و w به ترتیب سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی در راستای محورهای مختصات x ، y و z هستند. u_0 و w_0 دارای بعد طول بوده، معرف جابه‌جایی صفحه‌ی میانی می‌باشند و u_1 و w_1 متغیرهای بی‌بعد هستند. با در نظر گرفتن حرکت به صورت صفحه‌ای، مؤلفه‌ی جابه‌جایی در راستای y صفر خواهد بود. بر اساس روابط کرنش-جابه‌جایی فن-کارمن، مؤلفه‌های کرنش عبارتند از [۶۰]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (۳-۲)$$

جملات غیرخطی موجود در رابطه فن-کارمن، در نهایت باعث غیرخطی شدن معادلات خواهد شد. به این ترتیب، مسئله، غیرخطی هندسی است. با استفاده از میدان جابه‌جایی (۱-۲) و روابط فوق، مؤلفه‌های میدان کرنش تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_z &= w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \\ \gamma_{xz} &= u_1 + (1+w_1) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right), & \varepsilon_y &= \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0\end{aligned}\quad (۴-۲)$$

مؤلفه‌های میدان تنش به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= A\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_z) & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= A\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_z + \varepsilon_x) & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= A\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}\end{aligned}\quad (۵-۲)$$

λ و μ ثابت لامه^۱ بوده و تابعی از مدول الاستیک^۲ و ضریب پواسون^۳ هستند.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad A = \lambda + 2\mu \quad (۶-۲)$$

در نهایت میدان تنش با استفاده از روابط (۳-۲) و (۴-۲) تعیین خواهد شد.

¹ Lamé coefficients

² Elastic modulus

³ Poisson's ratio

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= A \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) + \lambda \left(w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \right) \\
 \sigma_y &= \lambda \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \right) \\
 \sigma_z &= A \left(w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) \\
 \tau_{xz} &= \mu \left(u_1 + (1+w_1) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0
 \end{aligned} \tag{6-۲}$$

۳-۲- محاسبه‌ی انرژی پتانسیل

چگالی انرژی کرنشی به شکل زیر تعریف می‌شود [۶۱].

$$U^* = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \tag{7-۲}$$

و تغییرات^۱ چگالی انرژی کرنشی U^* با جایگزینی مقادیر صفر برخی از مؤلفه‌های تنش، عبارتست از:

$$\delta U^* = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \tag{8-۲}$$

با جایگذاری مؤلفه‌های میدان کرنش (۳-۲) در (۸-۲) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}
 \delta U^* &= \sigma_x \left(\delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \delta \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \right) \\
 &+ \tau_{zx} \left(\delta u_1 + (1+w_1) \left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \delta \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \delta w_1 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \right. \\
 &\left. + \sigma_z (\delta w_1 + w_1 \delta w_1) \right)
 \end{aligned} \tag{9-۲}$$

انرژی کرنشی تیر با انتگرال‌گیری چگالی انرژی کرنشی بر روی حجم به دست می‌آید. المان حجم به

صورت $dV = dx dy dz$ در نظر گرفته شده است و در آن محدوده‌ی تغییرات مؤلفه‌های محورهای

مختصات به صورت $-h/2 \leq z \leq h/2$, $-b/2 \leq y \leq b/2$, $0 \leq x \leq l$ می‌باشد.

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \int \left(N_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(M_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + M_{xz} (1+w_1) \right) \delta \frac{\partial w_1}{\partial x} + \right. \\
 &\left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + M_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + Q_x (1+w_1) \right) \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + Q_x \delta u_1 + M_x \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} + \\
 &\left. \left((w_1 + 1)N_z + Q_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + Q_x \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \delta w_1 \right) dx
 \end{aligned} \tag{10-۲}$$

^۱ Variations

در انرژی کرنشی، منتجه‌های تنش^۱ به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{-h/2} \sigma_x dz & M_x &= \int_{-h/2}^{-h/2} z \sigma_x dz & P_x &= \int_{-h/2}^{-h/2} z^2 \sigma_x dz \\ Q_x &= \kappa \int_{-h/2}^{-h/2} \tau_{xz} dz & M_{xz} &= \kappa \int_{-h/2}^{-h/2} z \tau_{xz} dz & N_z &= \int_{-h/2}^{-h/2} \sigma_z dz \end{aligned} \quad (11-2)$$

κ ضریب تصحیح برشی است و این ضریب وابسته به هندسه سازه بوده و برای مقطع مستطیلی مقدار

$$\text{آن } 12/\pi^2 \text{ است.}[62]$$

۴-۲- محاسبه‌ی انرژی جنبشی

برای تعیین انرژی جنبشی تیر، ابتدا چگالی انرژی جنبشی به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$T^* = \frac{1}{2} \rho \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (12-2)$$

با جایگذاری میدان جابه‌جایی (۱-۲) و انتگرال‌گیری از چگالی انرژی جنبشی روی حجم، انرژی

جنسبی تیر تعیین می‌شود.

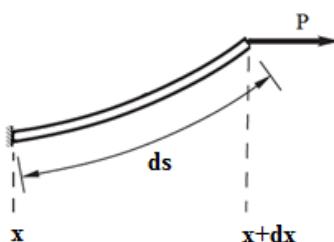
$$T = \iiint T^* dx dy dz = \frac{1}{2} \rho b \int_0^l \left(h \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + h \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 \right) dx \quad (13-2)$$

۵- کار نیروهای خارجی

کار حاصل از نیروی خارجی از دو بخش کار انجام شده توسط نیروی محوری و کار انجام شده توسط

تحریک دینامیکی عرضی تشکیل شده است. نیروی محوری P مطابق شکل (۲-۲) به صورت افقی در

یک لبه تیر وارد می‌شود. کار انجام شده توسط نیروی محوری به شکل زیر می‌باشد.



شکل (۲-۲) دیاگرام آزاد تیر تحت بار محوری

$$dW_P = (dP)(ds - dx) \quad (14-2)$$

^۱ Stress resultants

که در آن ds طول کمان بوده و بر اساس هندسه‌ی مسئله به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2} = dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)$$

با جایگذاری رابطه فوق در (۱۴-۲) و انتگرال گیری از تغییرات آن در راستای طول تغییرات کار ناشی

از نیروی محوری تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned} \delta W_P &= \int_0^l P \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w_0) dx = \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta w_0 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \delta w_0 \right) dx \\ &= P \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta w_0 \Big|_0^l - \int_0^l P \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \delta w_0 dx \end{aligned} \quad (15-2)$$

برای تعیین کار حاصل از تحریک دینامیکی عرضی کار هر یک از مؤلفه‌های آن تعیین می‌شود. نیروی

گستردگی $Q(x,t)$ بر لبه‌ی بالایی تیر یعنی $z=h/2$ وارد می‌شود و پس از تغییر شکل تیر، تحریک

عرضی دارای مؤلفه‌ی $Q \sin \theta$ در راستای x و مؤلفه‌ی $Q \cos \theta$ در راستای z می‌باشد. با توجه به

اینکه:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\partial w}{\partial x} \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + t g^2 \theta}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \dots \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 + \dots \approx \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (16-2)$$

کار انجام شده توسط این دو مؤلفه به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$W_Q = \begin{Bmatrix} -Q \sin \theta \\ Q \cos \theta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}_{z=\frac{h}{2}} = -Qu \sin \theta + Qw \cos \theta \quad (17-2)$$

با استفاده از روابط (۱-۲) و (۱۶-۲) در (۱۷-۲) تغییرات کار حاصل از تحریک دینامیکی عرضی

تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta W_Q &= -Q(u_0 + zu_1) \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + Q \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) \delta(w_0 + zw_1) \\ &\quad + Q(w_0 + zw_1) \delta \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) - Q \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \delta(u_0 + zu_1) \end{aligned} \quad (18-2)$$

با انتگرال گیری از این رابطه در راستای طول تیر، کار نیروی گستردگی تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial x} (Q u_0) \delta w_0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h}{2} u_0 \right) \delta w_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h}{2} u_1 \right) \delta w_0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h^2}{4} u_1 \right) \delta w_1 \right. \\
& - Q \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta u_0 - Q \frac{h}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta u_1 - Q \frac{h}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \delta u_0 - Q \frac{h^2}{4} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \delta u_1 \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \delta w_0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q w_0 \frac{h}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \delta w_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h}{2} w_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \delta w_0 \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h^2}{4} w_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \delta w_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h}{2} w_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \delta w_0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h^2}{4} w_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \delta w_1 \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h^3}{8} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \delta w_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{h^2}{4} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \delta w_0 + Q \delta w_0 + Q \frac{h}{2} \delta w_1 \\
& \left. - \frac{1}{2} Q \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \delta w_0 - \frac{1}{2} Q \frac{h}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \delta w_1 - Q \frac{h}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \delta w_0 \right. \\
& - Q \frac{h^2}{4} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \delta w_1 - Q \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \delta w_0 - Q \frac{h^3}{16} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \delta w_1 \Big) dx \\
& - \left[\frac{h}{2} Q u_1 \delta w_0 + \frac{h^2}{4} Q u_1 \delta w_1 + Q w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta w_0 + \frac{h^2}{4} Q w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \delta w_1 \right. \\
& + \frac{h^2}{4} Q w_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \delta w_1 + \frac{h}{2} Q w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta w_1 + \frac{h}{2} Q w_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \delta w_0 + \frac{h}{2} Q w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \delta w_0 \\
& \left. + \frac{h}{2} Q u_0 \delta w_1 + Q u_0 \delta w_0 + \frac{h^2}{4} Q w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \delta w_0 \right] \Bigg]_0^l
\end{aligned} \tag{۱۹-۲}$$

۶-۲- تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون

معادلات حاکم بر حرکت تیر در بازه زمانی (t_0, t_1) باید اصل همیلتون را ارضا کنند. بر اساس اصل

همیلتون [۶۳]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left(T - U + W_p + W_Q \right) dt = 0 \tag{۲۰-۲}$$

T انرژی جنبشی سیستم، U انرژی کرنشی، W_p کار حاصل از نیروی محوری و W_Q کار ناشی از تحریک دینامیکی عرضی است. با به کار گیری روابط (۱۰-۲)، (۱۳-۲)، (۱۵-۲) و (۱۹-۲) در اصل

همیلتون معادلات حرکت تیر تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned}
& b \frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho b h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f_1 = 0 \\
& b \frac{\partial M_x}{\partial x} - b Q_x - \frac{\rho b h^3}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - f_2 = 0 \\
& b \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + M_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + Q_x (1+w_1) \right) - \rho b h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - f_3 = 0
\end{aligned} \tag{۲۱-۲}$$

$$b \frac{\partial}{\partial x} \left(M_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + M_{xz} (1+w_1) \right) - b Q_x \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ - b M_{xz} \frac{\partial w_1}{\partial x} - b N_z (1+w_1) - \frac{\rho b h^3}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - f_4 = 0$$

f_4 و f_3 , f_2 , f_1 مؤلفه‌های ناشی از تحریک‌های خارجی بوده و به شکل زیر می‌باشند.

$$f_1 = -Q \frac{\partial w_0}{\partial x} - Q \frac{h}{2} \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad f_2 = -Q \frac{h}{2} \frac{\partial w_0}{\partial x} - Q \frac{h^2}{4} \frac{\partial w_1}{\partial x}, \\ f_3 = \frac{\partial}{\partial x} (Q u_0) + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} (Q u_1) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Q w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q w_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q w_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ + \frac{h^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + Q - \frac{1}{2} Q \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{h}{2} Q \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - Q \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + P \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ f_4 = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} (Q u_0) + \frac{h^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} (Q u_1) + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q w_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - Q \frac{h^3}{16} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \\ + \frac{h^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q w_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{h^3}{8} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + Q \frac{h}{2} - \frac{1}{4} Q h \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - Q \frac{h^2}{4} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x}$$

و در صورتی که نیروی گستردگی $Q(x,t)$ قائم باقی بماند جملات غیرهمگن به شکل زیر ساده خواهد

شد:

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = Q + P \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad f_4 = Q \frac{h}{2} \quad (22-2)$$

با قرار دادن منتجه‌های تنش در معادلات (۲۱-۲)، معادلات حرکت بر اساس مؤلفه‌های جابه‌جای

تعیین خواهد شد:

$$Abh \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + Abh \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{12} Abh^3 \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \lambda bh \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \\ - \rho bh \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f_1 = 0, \quad (23-2)$$

$$\frac{Abh^3}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{Abh^3}{12} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{Abh^3}{12} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \mu bh \left(u_1 + (1+w_1) \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ - \frac{\rho bh^3}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - f_2 = 0, \quad (24-2)$$

$$Abh \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{Abh^3}{12} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \lambda bh \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} (1+w_1) \right) \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ + \frac{Abh^3}{12} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{Abh^3}{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\ + \mu bh \left(u_1 + (1+w_1) \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} + \mu bh \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} + (1+w_1) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) (1+w_1) \quad (25-2)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(Abh \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{Abh^3}{24} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \lambda bh \left(w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \right) \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
& - \rho bh \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - f_3 = 0, \\
& \frac{Abh^3}{12} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{Abh^3}{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
& + \mu bh \left(u_1 + (1+w_1) \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\mu b h^3}{12} (1+w_1) \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu b h^3}{12} (1+w_1) \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \\
& + \left(\frac{Abh^3}{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \frac{Ah^5}{80} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\lambda bh^3}{12} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} (1+w_1) \right) \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} \\
& + \left(\frac{Abh^3}{12} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{Ah^5}{160} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda bh^3}{12} \left(w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \right) \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \\
& (1+w_1) \left(Abh \left(w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \right) + \lambda bh \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\lambda h^3}{24} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) + \\
& (1+w_1) \frac{\mu b h^3}{12} \left(\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + (1+w_1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) - \frac{\rho b h^3}{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - f_4 = 0
\end{aligned} \tag{۲۶-۲}$$

معادلات به صورت یک دستگاه معادله شامل چهار معادله دیفرانسیل با مشتقهای جزئی است که به یکدیگر کوپل می‌باشد. با صرف نظر کردن از اثرات کرنش نرمال عرضی، دستگاه معادله‌ی حاصل به سه معادله‌ی دیفرانسیل مشتق جزئی کاهش می‌یابد که شامل مؤلفه‌های جابه‌جایی u_0 و w_0 و w_1 خواهد بود. با استفاده از اصل همیلتون علاوه بر معادلات حرکت، شرایط مرزی نیز به دست خواهد آمد. شرایط مرزی تیر بر اساس منتجه‌های تنش به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
N_x \delta u_0 \Big|_0^l &= 0 \\
M_x \delta u_1 \Big|_0^l &= 0 \\
\left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + Q_x (1+w_1) + Qu_0 + \frac{h}{2} Qu_1 + Qw_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{h}{2} Qw_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{h}{2} Qw_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{h^2}{4} Qw_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} - P \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \delta w_0 \Big|_0^l &= 0 \\
\left(M_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_x \frac{\partial w_1}{\partial x} + M_{xz} (1+w_1) + \frac{h}{2} Qu_0 + \frac{h^2}{4} Qu_1 + \frac{h^2}{4} Qw_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{h}{2} Qw_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{h^2}{4} Qw_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \delta w_1 \Big|_0^l &= 0
\end{aligned} \tag{۲۷-۲}$$

از (۲۷-۲) شرایط مرزی مسئله را می‌توان تعیین نمود؛ مثلاً برای شرایط مرزی به صورت یک سر

تکیه‌گاه ساده و طرف دیگر تکیه‌گاه گیردار نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \quad \text{at} \quad x = 0 & N_x &= 0 \quad \text{at} \quad x = l & w_0 &= 0 \quad \text{at} \quad x = 0, l \\ u_1 &= 0 \quad \text{at} \quad x = 0 & M_x &= 0 \quad \text{at} \quad x = l & w_1 &= 0 \quad \text{at} \quad x = 0, l \end{aligned} \quad (28-2)$$

۷-۲- جمع بندی

در این فصل، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیر با خیز نسبتاً زیاد استخراج شد. معادلات حرکت شامل جملات غیرخطی هندسی است که با در نظر گرفتن روابط کرنش-جابه‌جایی فن-کارمن، ظاهر می‌شوند. معادلات به صورت یک دستگاه معادله دیفرانسیل، شامل چهار معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقهای جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان هستند که به یکدیگر کوپل بوده و برای تعیین مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی باید به طور هم زمان حل شوند. در فصل بعد پس از بی‌بعدسازی معادلات حاکم بر تیر، حل تحلیلی مسئله به کمک تئوری اغتشاشات و روش لایه مرزی و به کمک بسط مدهای نرمال ارائه خواهد شد.

فصل سوم

حل تخلییی

۱-۳- مقدمه

در فصل قبل، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیر بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، استخراج شد. معادلات به صورت یک دستگاه معادله دیفرانسیل، شامل چهار معادله دیفرانسیل با مشتقهای زمان و مکان بوده که به یکدیگر کوپل هستند. از آنجا که در تعیین حل این دستگاه معادله، از تئوری اغتشاشات استفاده می‌شود، نخست به بی‌بعدسازی معادلات پرداخته می‌شود. پس از بی‌بعدسازی در بخش اول، فرکانس‌های طبیعی سیستم تعیین شده و تحلیل مدار ارتعاشات غیرخطی تیر بیان می‌گردد. در قسمت بعد به منظور تحلیل دینامیکی مسئله و تعیین پاسخ، ابتدا، به کمک تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیل با مشتقهای زمان به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه‌ی لاپلاس تبدیل خواهند شد. به کمک روش لایه مرزی، پاسخ در حوزه‌ی لاپلاس به دست می‌آید و در نهایت برای تعیین لاپلاس معکوس پاسخ از قضیه‌ی باقی‌مانده‌ها استفاده خواهد شد و پاسخ نهایی بر حسب مکان و زمان تعیین می‌گردد. علاوه بر آن حل تحلیلی به کمک بسط مدهای نرمال نیز تعیین شده است.

۲-۳- بی‌بعدسازی معادلات

از آنجا که در تعیین حل این دستگاه معادله، از تئوری اغتشاشات استفاده شده، نخست به بی‌بعدسازی معادلات پرداخته می‌شود. در ابتدا پارامترهای بی‌بعد زیر تعریف می‌شوند:

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}, \quad u_0^* = \frac{u_0}{h_0}, \quad w_0^* = \frac{w_0}{h_0}, \quad h^* = \frac{h}{h_0} \quad (1-3)$$

x^* و t^* به ترتیب مکان و زمان بی‌بعد، u_0^* و w_0^* جابه‌جایی‌های بی‌بعد مؤلفه‌ی u_0 و w_0 بوده و h_0 و t_0 شاخص‌های ضخامت و زمان هستند که مؤلفه‌های جابه‌جایی u_1 و w_1 نیز بی‌بعد هستند. c معرف سرعت موج بوده و به صورت $c = \sqrt{A/\rho}$ تعریف شده است. با توجه به پارامترهای بی‌بعد فوق، اپراتورهای مشتق بی‌بعدشده به صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{t_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \quad (2-3)$$

با اعمال پارامترها و اپراتورهای بی بعد فوق در معادلات (۲-۳) تا (۴-۲) پارامترهای بی بعد زیر نیز

تعریف می شوند.

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{A}, \quad \theta_2 = \frac{\kappa\mu}{A}, \quad P^* = \frac{P}{bAh_0}, \quad Q^* = \frac{Q}{bA\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{l}, \quad e = \frac{\rho h_0^2}{At_0^2} \quad (3-3)$$

ε پارامتری کوچک است و به عنوان پارامتر اختشاش در نظر گرفته می شود. در نهایت معادلات

بی بعدشده، شامل چهار معادله دیفرانسیل با مشتقهای جزئی غیرخطی کوپل بهم و به شکل زیر است.

$$h^* \varepsilon \left(\varepsilon \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^{*2}} + \varepsilon^2 \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{1}{12} h^{*2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} + \theta_1 (1+w_1^*) \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right) - eh^* \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^{*2}} - f_1^* = 0, \quad (4-3)$$

$$\frac{h^{*3}}{12} \varepsilon \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^{*2}} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right) - e \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} \right) - \theta_2 \varepsilon h^* \left(u_1^* + (1+w_1^*) \varepsilon \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right) - f_2^* = 0 \quad (5-3)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^{*2}} + \varepsilon^2 h^* \left(\frac{1}{4} \varepsilon^2 h^{*2} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} + \theta_1 (1+w_1^*) \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} + \frac{h^{*3}}{12} \varepsilon^3 \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} \right) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \\ & + \varepsilon^2 h^* \left(\varepsilon \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{8} h^{*2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + \theta_1 w_1^* \left(1 + \frac{1}{2} w_1^* \right) \right) \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} \end{aligned} \quad (6-3)$$

$$\begin{aligned} & + \theta_2 h^* \varepsilon \left(u_1^* + 2\varepsilon (1+w_1^*) \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \frac{1}{12} h^{*3} \varepsilon^3 \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \theta_2 h^* \varepsilon^2 (1+w_1^*)^2 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} \\ & + \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} \theta_2 h^* \varepsilon (1+w_1^*) - eh^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^{*2}} - f_3^* = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^*}{12} \varepsilon^3 \left(h^* \varepsilon \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^{*2}} + 3h^* \varepsilon^2 \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} + \frac{3}{2} h^{*2} \varepsilon^2 \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} + \frac{h^{*2}}{12} \varepsilon^4 \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}} \\ & + \varepsilon (1+w_1^*) \left(- \left(w_1^* + \frac{1}{2} w_1^{*2} \right) - \theta_1 \varepsilon \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} - \frac{1}{2} \theta_1 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{h^{*2}}{24} \theta_1 \varepsilon^3 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (7-3)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{h^{*2}}{12} \theta_2 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{h^{*2}}{12} \theta_2 \varepsilon^2 (1+w_1^*) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} + \theta_2 \varepsilon^2 \left(u_1^* + (-1+w_1^*) \varepsilon \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \end{aligned} \quad (7-3)$$

$$+ h^{*2} \varepsilon^3 \left(\frac{1}{12} \varepsilon \frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{h^{*2} \varepsilon^2}{160} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{\theta_1}{12} \left(w_1^* + \frac{1}{2} w_1^{*2} \right) \right) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^{*2}} + \frac{h^{*2} \varepsilon^4}{12} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}$$

$$- \frac{eh^{*2}}{12} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^{*2}} - f_4^* = 0$$

که در آن $f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*$ و مؤلفه‌های بی بعد، ناشی از تحریک‌های خارجی است.

$$\begin{aligned}
 f_1^* &= -Q^* \varepsilon \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} - Q^* \varepsilon \frac{h^*}{2} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}, \quad f_2^* = -Q^* \varepsilon \frac{h^*}{2} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} - Q^* \varepsilon \frac{h^*}{4} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*}, \\
 f_3^* &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* u_0^* \right) + \frac{h^* \varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* u_1^* \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* w_0^* \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right) \\
 &\quad + \frac{h^* \varepsilon^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* w_0^* \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right) + \frac{h^* \varepsilon^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* w_1^* \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right) + \frac{h^{*2} \varepsilon^2}{4} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* w_1^* \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right) \\
 &\quad + Q^* - \frac{1}{2} \varepsilon^2 Q^* \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right)^2 - \frac{h^*}{2} \varepsilon^2 Q \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right) - Q^* \varepsilon^2 \frac{h^{*2}}{8} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + P^* \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}}, \quad (8-3) \\
 f_4^* &= \frac{h^*}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* u_0^* \right) + \frac{h^*}{4} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* u_1^* \right) + \frac{h^{*2} \varepsilon^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* w_0^* \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right) \\
 &\quad - Q^* \frac{h^* \varepsilon^2}{16} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{h^{*2} \varepsilon^2}{4} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* w_1^* \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right) + \frac{h^{*2} \varepsilon^2}{8} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* w_1^* \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right) + Q_1^* \frac{1}{2} \\
 &\quad - \frac{1}{4} Q^* h^{*2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \right)^2 - Q^* \frac{h^{*2} \varepsilon^2}{4} \frac{\partial w_0^*}{\partial x^*} \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} + \frac{h^{*2} \varepsilon^2}{4} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(Q^* w_0^* \frac{\partial w_1^*}{\partial x^*} \right)
 \end{aligned}$$

اگر فرض شود که بار گستردگی Q قائم باقی می‌ماند، مقادیر f_1^* تا f_4^* عبارتند از:

$$f_1^* = f_2^* = 0, \quad f_3^* = Q^* + P^* \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}}, \quad f_4^* = \frac{1}{2} Q^* \quad (9-3)$$

حل‌هایی که در ادامه ارائه می‌شود بر اساس روابط (9-3) می‌باشد.

۳-۳-۳- تعیین فرکانس طبیعی

در تعیین فرکانس‌های طبیعی تیر تحریک دینامیکی عرضی تأثیری بر مقدار فرکانس طبیعی نخواهد

داشت؛ از این رو در معادلات جملات مربوط به بار محوری در نظر گرفته شده است. جهت یافتن

فرکانس‌های طبیعی، با تعریف $X=x^*/\varepsilon$ در معادلات (4-۳) تا (7-۳) نتیجه می‌شود:

$$h^* \left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2} + \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} + \left(\frac{1}{12} h^{*2} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} + \theta_1 (1+w_1^*) \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right) - e h^* \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^{*2}} - f_1^* = 0, \quad (10-3)$$

$$\frac{h^{*3}}{12} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial X^2} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial X} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right) - e \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} \right) - \theta_2 h^* \left(u_1^* + (1+w_1^*) \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right) - f_2^* = 0 \quad (11-3)$$

$$\theta_2 h^* (1+w_1^*)^2 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} + h^* \left(\frac{1}{4} h^{*2} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} + \theta_1 (1+w_1^*) \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \frac{\partial w_0^*}{\partial X}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^{*3}}{12} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial X} \right) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} + h^* \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial X} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right)^2 + \frac{1}{8} h^{*2} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right)^2 \right. \\
& \left. + \theta_1 w_1^* \left(1 + \frac{1}{2} w_1^* \right) \right) \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} + \frac{\partial u_1^*}{\partial X} \theta_2 h^* \left(1 + w_1^* \right) + h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2} \\
& + \theta_2 h^* \left(u_1^* + 2 \left(1 + w_1^* \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial X} + \frac{h^{*3}}{12} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_1^*}{\partial X} - e h^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^{*2}} - f_3^* = 0,
\end{aligned} \tag{۱۲-۳}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^*}{12} \left(h^* \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial X^2} + 3 h^* \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} + \frac{3}{2} h^{*2} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + \frac{h^{*2}}{12} \frac{\partial u_1^*}{\partial X} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \\
& + \frac{h^{*2}}{12} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_1^*}{\partial X} + \left(1 + w_1^* \right) \left(- \left(w_1^* + \frac{1}{2} w_1^{*2} \right) - \theta_1 \frac{\partial u_0^*}{\partial X} - \frac{1}{2} \theta_1 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right)^2 + \frac{h^{*2}}{24} \theta_1 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right)^2 \right. \\
& \left. + \frac{h^{*2}}{12} \theta_2 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right)^2 + \frac{h^{*2}}{12} \theta_2 \left(1 + w_1^* \right) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} \right) + \theta_2 \left(u_1^* + \left(-1 + w_1^* \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \\
& + h^{*2} \left(\frac{1}{12} \frac{\partial u_0^*}{\partial X} + \frac{h^{*2}}{160} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right)^2 + \frac{\theta_1}{12} \left(w_1^* + \frac{1}{2} w_1^{*2} \right) \right) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} - \frac{e h^{*2}}{12} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^{*2}} - f_4^* = 0
\end{aligned} \tag{۱۳-۳}$$

برای حل تقریبی معادلات فوق از روش بسط مستقیم^۱ در تئوری اغتشاشات استفاده می‌گردد. در ابتدا

مؤلفه‌های دامنه‌ی ارتعاشات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
u_0^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(u_0^*(X, t^*) + \varepsilon u_1^*(X, t^*)) \\
u_1^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(u_2^*(X, t^*) + \varepsilon u_3^*(X, t^*)) \\
w_0^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(w_0^*(X, t^*) + \varepsilon w_1^*(X, t^*)) \\
w_1^*(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(w_2^*(X, t^*) + \varepsilon w_3^*(X, t^*))
\end{aligned} \tag{۱۴-۳}$$

با جایگذاری (۱۴-۳) در معادلات (۱۰-۳) تا (۱۳-۳) معادلات بر اساس مرتبه‌های مختلف ε حاصل

می‌شوند. جملات با کوچک‌ترین مرتبه (مرتبه یک) عبارتند از:

$$\begin{aligned}
h^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2} + \theta_1 h^* \frac{\partial w_2^*}{\partial X} - 2 e h^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^{*2}} &= 0, \\
\frac{1}{12} h^{*2} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial X^2} - \theta_2 \left(u_2^* + h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right) - \frac{e h^{*2}}{6} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial t^{*2}} &= 0, \\
\theta_2 \left(h^* \frac{\partial u_2^*}{\partial X} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \right) - 2 e h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^{*2}} - P^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} &= 0,
\end{aligned} \tag{۱۵-۳}$$

^۱ Straight forward expansion

$$-\theta_1 h^* \frac{\partial u_0^*}{\partial X} + \frac{\theta_2 h^{*2}}{12} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} - w_2^* - \frac{e h^{*2}}{6} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial t^{*2}} = 0$$

معادلات (۱۵-۳) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی است که دو به دو مستقل از هم هستند. هر

دستگاه را می‌توان به شکل ماتریسی:

$$\left[\overline{B}_2 \right] \frac{d^2 y^*}{dX^2} + \left[\overline{B}_1 \right] \frac{dy^*}{dX} + \left[\overline{B}_3 \right] y^* + \left[\overline{B}_4 \right] \frac{d^2 y^*}{dt^{*2}} = \{0\} \quad (16-3)$$

نمایش داد که $\{y^*\}$ شامل توابع وابسته‌ی هر دستگاه می‌باشد. با در نظر گرفتن حل به صورت:

$$\{y^*\} = \{V(X)\} e^{i\alpha x^*} \quad (17-3)$$

که در آن ω فرکانس طبیعی بی‌بعد است و جایگذاری رابطه‌ی (۱۶-۳) در رابطه‌ی (۱۶-۳)، نتیجه

می‌شود:

$$\left[\overline{B}_2 \right] \frac{d^2 V}{dX^2} + \left[\overline{B}_1 \right] \frac{dV}{dX} + \left[\overline{B}_0 \right] V = \{0\} \quad \left[\overline{B}_0 \right] = \left[\overline{B}_3 \right] - \omega^2 \left[\overline{B}_4 \right] \quad (18-3)$$

پاسخ معادله (۱۸-۳) را که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت است، می‌توان به صورت

زیر در نظر گرفت.

$$\{V(X)\} = \{A\} e^{\beta X} \quad (19-3)$$

$\{A\}$ بردارهای ویژه و β مقادیر ویژه می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌ی (۱۹-۳) در (۱۸-۳)، معادله‌ی

مشخصه‌ی سیستم به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\left[\beta^2 \overline{B}_2 + \beta \overline{B}_1 + \overline{B}_0 \right] \{A\} = \{0\} \quad (20-3)$$

شرط داشتن جواب غیرصفر برای معادله‌ی فوق این است که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد.

$$\det(\beta^2 \overline{B}_2 + \beta \overline{B}_1 + \overline{B}_0) = 0 \quad (21-3)$$

رابطه‌ی (۲۱-۳)، معادله‌ی تفرق است و از حل آن چهار مقدار ویژه β_j ($j = 1, 2, 3, 4$) تعیین شده

است. به ازای هر مقدار ویژه، یک بردار ویژه موجود است که به کمک معادله (۲۰-۳) تعیین می‌شود.

این مقادیر ویژه و بردارهای ویژه شامل عباراتی از ω هستند. پس از یافتن مقادیر ویژه و بردارهای

ویژه، پاسخ کلی معادله (۱۸-۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{V\} = \sum_{j=1}^4 C_j \{A\}_j e^{\beta_j X} \quad (22-3)$$

x^* ثابت است و از شرایط مرزی تعیین می‌شود. با اعمال شرایط مرزی در دو لبه، که در C_j گیردار و در $x^* = 1$ ساده فرض شده است، یک دستگاه معادله جبری به صورت $\{C\} = \{0\}$ حاصل می‌شود که $\{C\}$ شامل عناصر C_j است. شرط وجود جواب غیرصفر، صفر بودن دترمینان ماتریس ax است. این معادله یک رابطه‌ی جبری بین ω و β_j می‌باشد که مقادیر β_j نیز تابع ω است و از حل آن، مقادیر ω تعیین می‌شود. برای تعیین ω از روش‌های محاسبات عددی استفاده می‌شود. در این پایان‌نامه از الگوریتم تنصیف¹ برای حل معادله فوق استفاده شده است. پس از تعیین مقادیر فرکانس طبیعی هر دستگاه به کمک رابطه‌ی (17-3)، شکل مدها تعیین شد. برای ادامه حل به کمک معادلات مرتبه دوم، با جایگذاری (14-3) در معادلات (10-3) تا (13-3) معادلات مرتبه دو به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial X^2} + \theta_1 \frac{\partial w_3^*}{\partial X} - 2e \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} + \theta_1 w_2^* \frac{\partial w_2^*}{\partial X} + \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + \frac{1}{12} h^{*2} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial X} &= 0, \\ \left(h^{*2} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} - 12\theta_2 w_2^* \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + h^{*2} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial X^2} - 2eh^{*2} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial X} - 12\theta_2 \frac{\partial w_1^*}{\partial X} - 12\theta_2 u_3^* &= 0 \\ h^{*2} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial X} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} \frac{\partial u_2^*}{\partial X} + 12\theta_2 \frac{\partial u_3^*}{\partial X} + 12 \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + 12\theta_2 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} + 12\theta_1 \frac{\partial w_2^*}{\partial X} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \\ + 12\theta_2 u_2^* \frac{\partial w_2^*}{\partial X} + 12\theta_1 w_2^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} - 12e \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} + 24\theta_2 \frac{\partial w_2^*}{\partial X} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + 12 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial u_0^*}{\partial X} + 12\theta_2 w_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial X} \\ + 24\theta_2 w_2^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} - P \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} &= 0 \\ \theta_2 h^{*2} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial X^2} + \theta_2 h^{*2} \left(\frac{\partial w_2^*}{\partial X} \right)^2 - eh^{*2} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial t^{*2}} + \frac{1}{2} \theta_1 h^{*2} \left(\frac{\partial w_2^*}{\partial X} \right)^2 + 2\theta_2 h^{*2} w_2^* \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} \\ + h^{*2} \frac{\partial u_0^*}{\partial X} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} + \theta_1 h^{*2} w_2^* \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} + h^{*2} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial u_2^*}{\partial X} + h^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial X} &= 0 \\ -w_3^* - \theta_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial X} - \theta_2 u_2^* \frac{\partial w_0^*}{\partial X} - \frac{3}{2} w_2^{*2} - \theta_1 u_2^* \frac{\partial u_0^*}{\partial X} - \theta_2 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta_1 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (23-3)$$

با جایگذاری حل معادلات مرتبه اول در (23-3) معادلات مرتبه دو به شکل (24-3) خواهد بود بخش

¹ Bisection

همگن معادلات مشابه معادلات مرتبه اول است و روند حل آن یکسان است.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial X^2} + \theta_1 \frac{\partial w_3^*}{\partial X} - e \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} &= k_1, \\ \frac{1}{12} h^{*2} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial X^2} - \theta_2 \left(u_3^* + \frac{\partial w_1^*}{\partial X} \right) - \frac{1}{12} e h^{*2} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial t^{*2}} &= k_2, \\ \theta_2 \left(h^* \frac{\partial u_3^*}{\partial X} + h^* \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} \right) - e h^* \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^{*2}} - P^* \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} &= k_3, \\ -\theta_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial X} + \frac{\theta_2 h^{*2}}{12} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial X^2} - w_3^* - \frac{1}{12} e h^{*2} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial t^{*2}} &= k_4 \end{aligned} \quad (24-3)$$

که در آن k_4 و k_3 ، k_2 ، k_1 بخش‌های ناهمگن معادلات بوده و به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} k_1 &= \left(\theta_{w_2^*}(X) \frac{dw_2^*(X)}{\partial X} + \frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} \frac{dw_2^*(X)}{dX} \right) e^{2I\omega_1 t_s} + \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} \frac{dw_0^*(X)}{dX} e^{2I\omega_2 t_s}, \\ k_2 &= \left(\frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} \frac{dw_0^*(X)}{dX} + \frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} \frac{dw_2^*(X)}{dX} - \theta_{w_2^*}(X) \frac{dw_0^*(X)}{dX} \right) e^{I\omega_1 t_s + I\omega_2 t_s} \\ k_3 &= \left(\frac{1}{12} h^{*3} \frac{d^2 u_2^*(X)}{dX^2} \frac{dw_2^*(X)}{dX} + \frac{1}{12} h^{*3} \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} \frac{du_2^*(X)}{dX} + h^* \frac{d^2 u_0^*(X)}{dX^2} \frac{dw_0^*(X)}{dX} \right. \\ &\quad \left. + h^* \theta_1 \frac{dw_2^*(X)}{dX} \frac{dw_0^*(X)}{dX} + h^* \theta_2 u_2^*(X) \frac{dw_2^*(X)}{dX} + h^* \theta_{w_2^*}(X) \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} \right. \\ &\quad \left. + 2h^* \theta_2 \frac{dw_2^*(X)}{dX} \frac{dw_0^*(X)}{dX} + h^* \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} \frac{du_0^*(X)}{dX} + h^* \theta_{w_2^*}(X) \frac{du_2^*(X)}{dX} \right. \\ &\quad \left. + 2h^* \theta_2 \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} w_2^*(X) \right) e^{I\omega_1 t_s + I\omega_2 t_s} \\ k_4 &= \left(\frac{1}{12} \theta_2 h^{*2} \left(\frac{dw_2^*(X)}{dX} \right)^2 + \frac{1}{24} \theta_1 h^{*2} \left(\frac{dw_2^*(X)}{dX} \right)^2 + \frac{1}{6} \theta_2 h^{*2} w_2^*(X) \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} h^{*2} \frac{du_0^*(X)}{dX} \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} + \frac{1}{12} \theta_1 h^{*2} w_2^*(X) \frac{d^2 w_2^*(X)}{dX^2} + \frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 u_0^*(X)}{dX^2} \frac{dw_2^*(X)}{dX} \right. \\ &\quad \left. - \theta_{w_2^*}(X) \frac{du_0^*(X)}{dX} - \frac{3}{2} w_2^*(X)^2 \right) e^{2I\omega_1 t_s} + \left(\frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 u_2^*(X)}{dX^2} \frac{dw_0^*(X)}{dX} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 w_0^*(X)}{dX^2} \frac{du_2^*(X)}{dX} - \theta_2 u_2^* \frac{dw_0^*(X)}{dX} - \theta_2 \left(\frac{dw_0^*(X)}{dX} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta_1 \left(\frac{dw_0^*(X)}{dX} \right)^2 \right) e^{2I\omega_2 t_s} \end{aligned}$$

ω_1 فرکانس طبیعی دستگاه اول و ω_2 فرکانس طبیعی مربوط به دستگاه دوم می‌باشد که از حل معادلات مرتبه یک حاصل شده‌اند. با دقت در بخش ناهمگن معادلات مشخص می‌شود که جمله‌های سکولار ظاهر نشده است و با حل معادلات مرتبه دو مقادیر فرکانس تغییر نخواهد کرد. اما در شکل

مدهای مرتبط با هر فرکانس، اعوجاج‌هایی وجود خواهد داشت. بررسی انجام شده نشان می‌دهد در رابطه (۱۴-۳)، اگر بسط تا مرتبه s^3 ادامه یابد در معادلات مرتبه s^3 ، جملات سکولار ظاهر خواهد شد در این صورت می‌توان وابستگی فرکانس به دامنه را با فرمول‌بندی مسئله با روش مقیاس چندگانه تعیین کرد. این موضوع در پایان‌نامه انجام نشده است.

۴-۳- تعیین پاسخ

در ادامه، روند تعیین پاسخ با روش لایه مرزی و بسط توابع ویژه بیان خواهد شد.

۴-۱- تبدیل لاپلاس

معادلات حاصل، شامل معادلات با مشتق‌لات جزئی می‌باشند. در ابتدا با استفاده از تبدیل لاپلاس نسبت به زمان بی‌بعد معادلات حاکم، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. تبدیل لاپلاس

تابع $(t^*)f$ به صورت زیر تعریف می‌گردد [۶۴]:

$$L(f(t^*)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st^*} f(t^*) dt^* \quad (25-3)$$

۵-۳- روش لایه مرزی [۶۶]

در بسیاری از مسائل، اغتشاش در ناحیه‌ای کوچک (باریک) اثر کرده و اثر تغییرات متغیرهای وابسته در آن خیلی زیاد است. در این دسته مسائل، پارامتر s در بزرگترین مرتبه مشتق ضرب می‌شود. این نواحی باریک معمولاً به مرزهای حوزه‌ی مورد بررسی مرتبط می‌شوند. از این رو، این دسته از مسائل به مسائل لایه مرزی معروفند. در این نواحی، تغییرات سریع تابع را نمی‌توان با متغیر کند^۱ بیان کرد؛ اما به کمک مقیاس سریع این کار امکان‌پذیر است. از آنجا که در معادلات، پارامتر کوچک s در بزرگترین مرتبه مشتق ضرب شده است، مسئله‌ی مورد بررسی را می‌توان جزء مسائل لایه مرزی دانست. برای حل این مسئله، از روش لایه مرزی استفاده شده است.

^۱ Slow

ایده‌ی اصلی در روش لایه مرزی این است که حل، لزوماً بر حسب یک بسط و یک مقیاس قابل بیان نیست؛ بلکه حل مسئله شامل دو یا چند بسط و مقیاس است که هر کدام در ناحیه‌ای خاص، معتبر است. این مقیاس‌ها باید به گونه‌ای انتخاب شوند که بسط‌ها، تمام حوزه‌ی مورد بررسی را شامل شوند و نیز حل‌های نواحی مجاور، همپوشانی^۱ (ناحیه‌ی مشترک) داشته باشند. در نواحی نزدیک مرز، حل، داخلی^۲ (y^i) و در نقاط دور از آن، حل، خارجی^۳ (y^o) نامیده می‌شود. از ترکیب حل‌های داخلی و خارجی به صورت $y^c = y^i + y^o - (y^i)^o$ حل کلی^۴ حاصل می‌شود، که بخش مشترک حل‌های داخلی و خارجی است. در معادلات موجود، با قرار دادن $\epsilon = 0$ ، مرتبه‌ی مشتقات معادله، دو مرتبه کاهش می‌یابد و حل مسئله، شامل دو حل داخلی در نزدیکی دو مرز و یک حل خارجی در نقاط دور از آن است.

۳-۵-۱- حل خارجی

حل خارجی، حل در نواحی دور از مرز است و با متغیر^{*} x تعریف می‌شود. ابتدا با تبدیل لاپلاس از روابط (۴-۳) تا (۷-۳) این معادلات به حوزه‌ی لاپلاس منتقل می‌شود.

$$\begin{aligned} u_0^*(x^*; \epsilon) &= \epsilon(u_0^*(x^*) + \epsilon u_1^*(x^*)) \\ u_1^*(x^*; \epsilon) &= \epsilon(u_2^*(x^*) + \epsilon u_3^*(x^*)) \\ w_0^*(x^*; \epsilon) &= \epsilon(w_0^*(x^*) + \epsilon w_1^*(x^*)) \\ w_1^*(x^*; \epsilon) &= \epsilon(w_2^*(x^*) + \epsilon w_3^*(x^*)) \end{aligned} \quad (26-3)$$

با جایگذاری حل به شکل (۲۶-۳)، معادلات مرتبه‌ی یک حل خارجی تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} -eh^{*2}s^2u_0^* - p^* &= 0, \\ -\theta_2u_2^* - \frac{eh^{*2}}{6}s^2u_2^* &= 0, \\ -Q^* - 2eh^{*2}s^2w_0^* &= 0, \end{aligned} \quad (27-3)$$

¹ Overlap

² Inner solution

³ Outer solution

⁴ Composite solution

$$-Q^* - 2w_2^* - \frac{eh^{*2}}{6} s^2 w_2^* = 0$$

معادلات مرتبه یک در حل خارجی، یک دستگاه معادله جبری است که به راحتی قابل حل است.

-۲-۵-۳ حل داخلی در $x^* = 0$

معادلات مربوط به حل داخلی در مرز چپ ($x^* = 0$), با اعمال متغیر سریع $\eta = x^*/\varepsilon$ و اعمال تبدیل لاپلاس در معادلات (۴-۳) تا (۷-۳) حاصل می‌شود:

$$h^* \left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} + \left(\frac{1}{12} h^{*2} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} + \theta_1 (1+w_1^*) \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right) - eh^* s^2 u_0^* - k_1^* = 0, \quad (28-3)$$

$$\frac{h^{*3}}{12} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) - es^2 u_1^* \right) - \theta_2 h^* \left(u_1^* + (1+w_1^*) \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) - k_2^* = 0 \quad (29-3)$$

$$\begin{aligned} & \theta_2 h^* (1+w_1^*)^2 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} + h^* \left(\frac{1}{4} h^{*2} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} + \theta_1 (1+w_1^*) \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} + \frac{h^{*3}}{12} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} \\ & + h^* \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial \eta} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{8} h^{*2} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)^2 + \theta_1 w_1^* \left(1 + \frac{1}{2} w_1^* \right) \right) \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} \\ & + \frac{\partial u_1^*}{\partial \eta} \theta_2 h^* (1+w_1^*) + \theta_2 h^* \left(u_1^* + 2(1+w_1^*) \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} + \frac{h^{*3}}{12} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \\ & + h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \eta^2} - eh^* s^2 w_0^* - k_3^* = 0, \end{aligned} \quad (30-3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^*}{12} \left(h^* \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \eta^2} + 3h^* \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} + \frac{3}{2} h^{*2} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} + \frac{h^{*2}}{12} \frac{\partial u_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} \\ & + \frac{h^{*2}}{12} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} + (1+w_1^*) \left(- \left(w_1^* + \frac{1}{2} w_1^{*2} \right) - \theta_1 \frac{\partial u_0^*}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \theta_1 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{h^{*2}}{24} \theta_1 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)^2 \right) \\ & + \frac{h^{*2}}{12} \theta_2 \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{h^{*2}}{12} \theta_2 (1+w_1^*) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} + \theta_2 \left(u_1^* + (-1+w_1^*) \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \\ & + h^{*2} \varepsilon^3 \left(\frac{1}{12} \frac{\partial u_0^*}{\partial \eta} + \frac{h^{*2}}{160} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\theta_1}{12} \left(w_1^* + \frac{1}{2} w_1^{*2} \right) \right) \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2} - \frac{eh^{*2}}{12} s^2 w_1^* - k_4^* = 0 \end{aligned} \quad (31-3)$$

که در آن:

$$k_1^* = -Q^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} - Q^* \frac{h^*}{2} \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta}, \quad k_2^* = -Q^* \frac{h^*}{2} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} - Q^* \frac{h^*}{4} \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta},$$

$$k_3^* = \frac{\partial}{\partial \eta} (Q^* u_0^*) + \frac{h^*}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (Q^* u_1^*) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Q^* w_0^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) + \frac{h^*}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Q^* w_0^* \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^*}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Q^* w_1^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) + \frac{h^{*2}}{4} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Q^* w_1^* \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right) + Q^* - \frac{1}{2} Q^* \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right)^2 \\
& - \frac{h^*}{2} Q \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right) - Q^* \frac{h^{*2}}{8} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)^2 + P^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2}, \tag{32-3} \\
k_4^* &= \frac{h^*}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (Q^* u_0^*) + \frac{h^*}{4} \frac{\partial}{\partial \eta} (Q^* u_1^*) + \frac{h^{*2}}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Q^* w_0^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) \\
& - Q^* \frac{h^*}{16} \left(\frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{h^{*2}}{4} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Q^* w_1^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right) + \frac{h^{*2}}{8} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Q^* w_1^* \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} Q_1^* \\
& - \frac{1}{4} Q^* h^{*2} \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right)^2 - Q^* \frac{h^{*2}}{4} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} + \frac{h^{*2}}{4} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Q^* w_0^* \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

اگر فرض شود که بار گستردگی Q قائم باقی می‌ماند، مقادیر k_1^* تا k_4^* عبارتند از:

$$k_1^* = k_2^* = 0, \quad k_3^* = Q^* + P^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2}, \quad k_4^* = \frac{1}{2} Q^* \tag{33-3}$$

معادلات فوق، چهار معادله‌ی دیفرانسیل معمولی (با پارامتر s) کوپل بهم است. حل این معادله به

صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned}
u_0(\eta; \varepsilon) &= \varepsilon(u_0(\eta) + \varepsilon u_1(\eta)) \\
u_1(\eta; \varepsilon) &= \varepsilon(u_2(\eta) + \varepsilon u_3(\eta)) \\
w_0(\eta; \varepsilon) &= \varepsilon(w_0(\eta) + \varepsilon w_1(\eta)) \tag{34-3} \\
w_1(\eta; \varepsilon) &= \varepsilon(w_2(\eta) + \varepsilon w_3(\eta))
\end{aligned}$$

با جایگذاری (34-3) در معادلات (28-3) تا (31-3) و جداسازی معادلات بر اساس مرتبه‌های مختلف

ε ، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
h^{*2} \frac{d^2 u_0^*}{d \eta^2} + \theta_1 h^* \frac{dw_2^*}{d \eta} - 2e h^{*2} s^2 u_0^* &= 0, \\
\frac{1}{12} h^{*2} \frac{d^2 u_2^*}{d \eta^2} + \theta_2 \left(u_2^* + h^* \frac{dw_0^*}{d \eta} \right) - \frac{eh^{*2}}{6} s^2 u_2^* &= 0, \tag{35-3} \\
\theta_2 \left(h^* \frac{du_2^*}{d \eta} + h^{*2} \frac{d^2 w_0^*}{d \eta^2} \right) - 2e h^{*2} s^2 w_0^* - Q^* - P^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} &= 0, \\
\theta_1 h^* \frac{du_0^*}{d \eta} + \frac{\theta_2 h^{*2}}{12} \frac{d^2 w_2^*}{d \eta^2} + w_2^* - \frac{eh^{*2}}{6} s^2 w_2^* - \frac{1}{2} Q^* &= 0
\end{aligned}$$

معادلات (35-3) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی است که دو به دو مستقل از هم هستند. هر

دستگاه را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\left[\overline{B_2} \right] \frac{d^2 y_0^i}{d\eta^2} + \left[\overline{B_1} \right] \frac{dy_0^i}{d\eta} + \left[\overline{B_0} \right] y_0^i + F = \{0\} \quad (36-3)$$

حل این دستگاه معادلات دیفرانسیل، شامل دو بخش حل عمومی و خصوصی خواهد بود. بر اساس تئوری مقدماتی حل معادلات دیفرانسیل، پاسخ عمومی معادله (36-3) به شکل زیر در نظر گرفته شده است.

$$Y_{0g}^i = \{V\} e^{m\eta} \quad (37-3)$$

که در آن m مقدار ویژه و $\{V\}$ بردار ویژه می‌باشد. تعیین پاسخ عمومی معادله، وابسته به تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه است. برای یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، با جایگزین کردن (37-3) در بخش همگن معادلات (36-3) و حذف $e^{m\eta}$ از طرفین معادلات، دستگاه معادله‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$[D]_{2 \times 2} \{V\} = \{0\} \quad (38-3)$$

شرط داشتن جواب غیر صفر برای دستگاه (38-3) آن است که دترمینان ماتریس D صفر گردد. ریشه‌های معادله‌ی $\det(D) = 0$ مقادیر ویژه سیستم هستند، که تابعی از متغیر η خواهند بود. بردارهای ویژه مرتبط با هر یک از مقادیر ویژه با کمک رابطه‌ی (38-3) تعیین می‌شوند. با یافتن مقادیر و بردارهای ویژه، پاسخ عمومی حل داخلی در مرز چپ تعیین می‌شود. برای به دست آوردن جواب خصوصی معادله‌ی (36-3) در حوزه‌ی لاپلاس، با توجه به ثابت بودن ضرایب معادله دیفرانسیل، برای تعیین حل خصوصی می‌توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد. بر اساس این روش، حل خصوصی معادله به صورت زیر است:

$$Y_p = -[B_0]^{-1} \{F\} \quad (39-3)$$

با توجه به این که بردار نیروی $\{F\}$ و ماتریس $[B_0]$ مستقل از η می‌باشند، حل خصوصی نیز مستقل از η است. بنابراین حل کلی داخلی در مرز $x^* = 0$ برابر است با مجموع حل عمومی و خصوصی:

$$y_0^i = Y_{0g}^i + Y_p \Rightarrow y_0^i = \sum_{n=1}^4 C_n \{V_n\} e^{m_n \eta} + Y_p \quad (40-3)$$

C_n ضرایب ثابت هستند که با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند.

بر اساس شرط انطباق^۱، باید $(y^i)^o = (y^o)^i$ ؛ در اولین مرتبه معادلات، می‌توان نوشت:

$$(y^i)^o = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} y_0^i \quad , \quad (y^o)^i = \lim_{x^* \rightarrow 0} y^o \quad (41-3)$$

که y_0^i حل داخلی است. بنابراین پاسخ y^i باید در $\eta \rightarrow +\infty$ محدود باشد. از این رو در بخش حل عمومی آن، ضرایب η در $e^{m_n \eta}$ (مقادیر ویژه) باید دارای قسمت حقیقی منفی باشند. هر دو دستگاه به همین روش حل می‌شوند.

۳-۵-۳- حل داخلی در $x^* = 1$

با اعمال متغیر سریع $\xi = (x^* - 1)/\varepsilon$ در معادلات (۴-۳) تا (۷-۳) معادلات این ناحیه به دست می‌آید. این معادلات مشابه معادلات (۲۸-۳) تا (۳۱-۳) است؛ فقط η به ξ تبدیل می‌شود. روند حل، مشابه حل داخلی در $x^* = 0$ است. معادلات حاصل در مرتبه‌ی یک، به دو دستگاه مستقل تبدیل می‌شود که هر دستگاه به شکل زیر است:

$$\left[\overline{B_2} \right] \frac{d^2 y_1^i}{d\xi^2} + \left[\overline{B_1} \right] \frac{dy_1^i}{d\xi} + \left[\overline{B_0} \right] y_1^i + F = \{0\} \quad (42-3)$$

که در آن، y_1^i حل داخلی در فضای لاپلاس برای $x^* = 1$ است. حل عمومی معادله (۴۲-۳) به صورت $Y_{1g}^i = \{V\} e^{m_n \xi}$ در نظر گرفته می‌شود. با توجه به یکسان بودن ماتریس‌های ضرایب معادلات (۳۶-۳) و (۴۲-۳)، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مربوط به حل داخلی در مرز راست، همان مقادیر به دست آمده برای مرز چپ هستند. حل خصوصی در مرز سمت راست نیز همان رابطه‌ی (۳۹-۳) است. بنابراین حل کلی داخلی در مرز $x^* = 1$ برابر است با:

$$y_1^i = Y_{1g}^i + Y_p \quad \Rightarrow \quad y_1^i = \sum_{n=1}^4 D_n \{V_n\} e^{m_n \xi} + Y_p \quad (43-3)$$

ضرایب ثابت مربوط به حل عمومی در مرز راست هستند که با توجه به شرایط مرزی مرز راست D_n

^۱ Matching principle

تعیین می‌شوند. بر اساس شرط انطباق، باید $(y^i)^o = (y^o)^i$ ؛ در اولین مرتبه معادلات، می‌توان نوشت:

$$(y^i)^o = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} y_1^i \quad , \quad (y^o)^i = \lim_{x^* \rightarrow 1} y^o \quad (44-3)$$

بنابراین پاسخ کلی y^i باید در $\rightarrow \infty$ محدود باشد. از این رو در بخش حل عمومی آن، مقادیر ویژه

ضرب شده در \rightarrow باید دارای قسمت حقیقی مثبت باشند. بنابراین حل داخلی و خارجی به صورت مجزا

تعیین شدند. حل کلی مسئله در فضای لاپلاس به صورت $y^C = y_0^i + y_1^i + y^o - (y_0^i)^o - (y_1^i)^o$ است

که $(y_0^i)^o$ و $(y_1^i)^o$ بخش‌های مشترک حل خارجی با هر کدام از حل‌های داخلی هستند. با قرار دادن

$x^* = 1$ و $x^* = 0$ در حل خارجی، می‌توان این بخش‌های مشترک را پیدا کرد. با توجه به مستقل

بودن حل خارجی از x^* ، $(y_0^i)^o = (y_1^i)^o$ بنا براین، حل کلی برابر است با:

$$y^C = y_0^i + y_1^i - y^o \quad (45-3)$$

حل کلی را در فضای لاپلاس می‌دهد. با محاسبه لاپلاس معکوس، می‌توان حل را در حوزه زمان

به دست آورد.

۶-۳- تبدیل معکوس لاپلاس

رابطه‌ی کلی لاپلاس معکوس تابع $F(s)$ به شکل زیر است [۶۴]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (46-3)$$

در رابطه‌ی بالا $f(t)$ و $F(s)$ به ترتیب توابع در حوزه‌ی زمان و لاپلاس هستند. γ نیز یک ثابت

حقیقی است. پاسخ در حوزه لاپلاس شامل جملات نمایی با ضرایبی پیچیده است. این ضرایب تابع

متغیر لاپلاس s است. بار گستردۀ از نظر زمانی به صورت تابع پله^۱ در نظر گرفته شده است. تابع پله-

ای واحد به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases} \quad (47-3)$$

¹ Heaviside

در مسئله‌ی حاضر با توجه به پیچیدگی مقادیر ویژه m_n در رابطه (۴۰-۳) و در نتیجه پاسخ کلی در فضای لپلاس، برای یافتن تبدیل لپلاس معکوس حل نهایی، نمی‌توان از فرمول کلی (۴۶-۳) استفاده کرد. از این رو برای تعیین پاسخ‌ها در حوزه زمان، از روش باقی‌مانده‌ها استفاده می‌شود. قبل از استفاده از این روش، مقادیر ویژه m_n که هم در توان عبارت نمایی رابطه (۴۰-۳) و هم در ضرایب C_n ظاهر می‌شود، در یک بازه مشخص، با یک چند جمله‌ای بر حسب ω تقریب^۱ زده شده است.

۳-۶-۱ - تبدیل معکوس لپلاس با روش باقی‌مانده‌ها

لپلاس معکوس‌گیری با استفاده از تئوری باقی‌مانده‌ها بر اساس قضیه‌ی مانده‌ی کوشی است [۶۵]. این قضیه به صورت زیر بیان می‌شود:

قضیه‌ی کوشی: هرگاه (z) f در درون و روی مرز ساده‌ی C به استثنای نقاط تکین z_1, z_2, \dots, z_n قضیه‌ی کوشی باشد در این صورت:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(z), z_k] \quad (48-3)$$

بر این اساس، لپلاس معکوس‌گیری با روش باقی‌مانده‌ها به شکل زیر بیان می‌شود:
اگر $F(s)$ تبدیل لپلاس تابع $f(t)$ باشد ($F(s) = L\{f(t)\}$) و این تبدیل لپلاس $f(t)$ ، تعداد محدودی قطب داشته باشد، با انتخاب c به گونه‌ای که تمام قطب‌ها سمت چپ $\operatorname{Re}(s)=c$ قرار گیرند؛ سپس M ای وجود داشته باشد که برای همه‌ی s های سمت چپ c ، رابطه‌ی $|s F(s)| \leq M$ برقرار باشد، آن‌گاه لپلاس معکوس تابع $f(t)$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(s)e^{st}, z_k] \quad (49-3)$$

در نهایت با استفاده از رابطه‌ی (۴۹-۳)، می‌توان جواب نهایی معادلات را از فضای لپلاس به فضای زمان بازگرداند. برای استفاده از رابطه (۴۹-۳)، لازم است قطب‌های سیستم مشخص باشند. این قطب‌ها باید شرط همگرایی رابطه (۴۶-۳)، شرط انطباق ذکر شده در بخش (۲-۵-۳) و (۳-۵-۳) و

^۱ Curve fitting

همچنین محدوده‌ی همگرایی تابع فیت شده را ارضا کنند. در واقع تمام قطب‌ها، قابل قبول نیستند. پس از تعیین قطب‌های سیستم، لaplas معکوس مربوط به قطب‌های صفر مستقیماً محاسبه می‌شوند و برای سایر قطب‌ها به صورت جداگانه از قضیه‌ی فوق استفاده می‌شود. در این متن، پاسخ مرتبط با قطب‌های صفر سیستم، حل استاتیکی و پاسخ مرتبط به سایر قطب‌ها، حل دینامیکی مسئله نامیده شده است. پس از تعیین لaplas معکوس ضرایب توابع نمایی به کمک روش باقیمانده‌ها، پاسخ نهایی به کمک قضیه‌ی پیچش^۱ [۶۵] تعیین می‌شود.

۳-۲-۶- قضیه‌ی پیچش

هرگاه $F(s)$ و $G(s)$ به ترتیب تبدیل لaplas دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ باشند:

$$L\{f * g\} = F(s)G(s) \quad (50-3)$$

و در آن:

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (51-3)$$

$f * g$ را کانولوشن دو تابع f و g می‌نامند و یک متغیر مجازی است که پس از انجام انتگرال گیری حذف می‌گردد.

۳-۷- تعیین پاسخ استاتیکی

حل استاتیکی حل مسئله به ازای قطب $s=0$ تعریف شده است با جایگذاری $s=0$ در معادلات، دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می‌شود.

$$\varepsilon^2 [B_2] \frac{\partial^2 Y^S}{\partial x^{*2}} + \varepsilon [B_1] \frac{\partial Y^S}{\partial x^*} + [B_0] Y^S = \{F\} \quad (52-3)$$

با حل معادله‌ی بالا بر اساس شرایط مرزی مسئله، پاسخ استاتیکی سیستم تعیین می‌شود. بنابراین پاسخ کلی سیستم در محیط بی‌بعد، برابر با مجموع پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی است؛

$$y_{total}^* = y_{statical}^* + y_{dynamical}^* \quad (53-3)$$

¹ Convolution theorem

۳-۸-۳- معادلات مرتبه دو

معادلات مرتبه دو برای حل داخلی و خارجی در ضمیمه‌ی ب آورده شده است.

۳-۱-۸-۳- حل خارجی

معادلات، مشابه قبل، معادلات جبری است که با معلوم بودن حل مرتبه یک، تعیین می‌شوند.

۳-۲-۸-۳- حل داخلی

حل داخلی این معادلات نیز، مشابه حل داخلی مرتبه یک، دو به دو مستقل از هم هستند. بخش همگن این معادلات، شامل جملاتی است که در مرتبه یک محاسبه شده و حل همگن مشابه قبل است. حل خصوصی، با توجه به شکل جملات غیرهمگن، نسبتاً پیچیده است که در این پایان‌نامه، حل آن به کمک روش MAE انجام نشده است.

۳-۹- روش بسط توابع ویژه (مدهای نرمال)

در روش دوم برای حل معادلات (۳-۱۰) تا (۳-۱۳) از روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات استفاده شده است. حل معادلات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_0(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(u_0(X, T_0, T_1) + \varepsilon u_1(X, T_0, T_1)) \\ u_1(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(u_2(X, T_0, T_1) + \varepsilon u_3(X, T_0, T_1)) \\ w_0(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(w_0(X, T_0, T_1) + \varepsilon w_1(X, T_0, T_1)) \\ w_1(X, t^*; \varepsilon) &= \varepsilon(w_2(X, T_0, T_1) + \varepsilon w_3(X, T_0, T_1)) \end{aligned} \quad (54-3)$$

که $T_I = \varepsilon t^*$ و $T_0 = t^*$ است؛ با توجه به این تعریف‌ها، اپراتور مشتق زمان به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (55-3)$$

با جایگذاری روابط (۳-۵۴) و (۳-۵۵) در معادلات (۳-۱۰) تا (۳-۱۳) و جداسازی معادلات بر اساس مرتبه‌های مختلف، معادلات مرتبه یک به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$h^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2} + \theta_1 h^* \frac{\partial w_2^*}{\partial X} - 2e h^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial T_0^2} = 0, \quad (56-3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} h^{*2} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial X^2} - \theta_2 \left(u_2^* + h^* \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right) - \frac{eh^{*2}}{6} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial T_0^2} &= 0, \\ \theta_2 \left(h^* \frac{\partial u_2^*}{\partial X} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \right) - 2eh^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial T_0^2} - P^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} - Q^* &= 0, \\ -\theta_1 h^* \frac{\partial u_0^*}{\partial X} + \frac{\theta_2 h^{*2}}{12} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} - w_2^* - \frac{eh^{*2}}{6} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial T_0^2} - \frac{1}{2} Q^* &= 0 \end{aligned}$$

معادلات حاصل در مرتبه‌ی یک، دو دستگاه مستقل از هم بوده که حل دستگاه اول برای تیر با

تکیه‌گاه ساده به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_2(X, T_0, T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m}(T_0, T_1) \cos(m\pi X/l) \\ w_0(X, T_0, T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m}(T_0, T_1) \sin(m\pi X/l) \end{aligned} \quad (57-3)$$

و در آن $l=I/\varepsilon$ است. با جایگذاری حل به صورت روابط (57-3) در معادلات دوم و سوم دستگاه (3)

(56) معادلات به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{aligned} P_1 \cos(m\pi X/l) &= F_1 \\ P_2 \sin(m\pi X/l) &= F_2 \end{aligned} \quad (58-3)$$

که در آن

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{1}{12} h^{*2} A_1 \pi^2 \varepsilon^2 - \theta_2 (A_1 + A_2 \pi \varepsilon) - \frac{1}{12} e h^{*2} \frac{d^2 A_1}{dT_0^2}, \\ P_2 &= \theta_2 (h^* A_1 \pi \varepsilon + h^{*2} A_2 \pi^2 \varepsilon^2) + e h^{*2} \frac{d^2 A_2}{dT_0^2} - P^* A_2 \pi^2 \varepsilon^2, \\ F_1 &= 0, \quad F_2 = Q^* \end{aligned} \quad (59-3)$$

برای رعایت سادگی در نوشتار از اندیس m صرفنظر شده است. بر اساس بسط نیم دامنه فوریه از

روابط (58-3) می‌توان مقادیر P_1 و P_2 را به صورت زیر تعیین نمود.

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{2}{l} \int_0^l F_1 \cos(m\pi X/l) dX \\ P_2 &= \frac{2}{l} \int_0^l F_2 \sin(m\pi X/l) dX \quad , l = \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (60-3)$$

معادلات (59-3) دو معادله دیفرانسیل کوپل به هم هستند که حل آن‌ها عبارت است از:

$$\begin{aligned} A_1(T_0, T_1) &= a_1(T_1)e^{i\omega_2 T_0} + a_2(T_1)e^{i\omega_3 T_0} + cc \\ A_2(T_0, T_1) &= a_3(T_1)e^{i\omega_2 T_0} + a_4(T_1)e^{i\omega_3 T_0} + cc \end{aligned} \quad (61-۳)$$

که در آن cc عبارت‌های مزدوج مختلط^۱ حل بوده و ω_2 و ω_3 فرکانس‌های طبیعی مربوط به دستگاه یک می‌باشد. روند حل برای دستگاه دوم شامل معادلات یک و چهار نیز به همین ترتیب بوده و ω_1 و ω_4 معرف فرکانس‌های طبیعی آن می‌باشند. در ادامه با در نظر گرفتن ضرایب e ، معادلات مرتبه دو به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial X^2} + \theta_1 \frac{\partial w_3^*}{\partial X} - e \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial T_0^2} - 2e \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial T_0 \partial T_1} + \theta_{w2}^* \frac{\partial w_2^*}{\partial X} + \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \\ + \frac{1}{12} h^{*2} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial X} = 0, \end{aligned} \quad (62-۳)$$

$$\begin{aligned} h^{*2} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + h^{*2} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial X^2} - eh^{*2} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial T_0^2} - 2eh^{*2} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial T_0 \partial T_1} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial X} \\ - 12\theta_2 w_2^* \frac{\partial w_0^*}{\partial X} - 12\theta_2 \frac{\partial w_1^*}{\partial X} - 12\theta_2 u_3^* = 0 \end{aligned} \quad (63-۳)$$

$$\begin{aligned} h^{*2} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial X} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} \frac{\partial u_2^*}{\partial X} + 12\theta_2 \frac{\partial u_3^*}{\partial X} + 12 \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + 12\theta_2 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} \\ + 12\theta_1 \frac{\partial w_2^*}{\partial X} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + 12\theta_2 u_2^* \frac{\partial w_2^*}{\partial X} + 12\theta_{w2}^* \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} - 12e \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial T_0^2} - 24e \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial T_0 \partial T_1} \\ + 24\theta_2 \frac{\partial w_2^*}{\partial X} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} + 12 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial u_0^*}{\partial X} + 12\theta_2 w_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial X} - P^* \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial X^2} = 0 \end{aligned} \quad (64-۳)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 h^{*2} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial X^2} + \theta_2 h^{*2} \left(\frac{\partial w_2^*}{\partial X} \right)^2 - eh^{*2} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial T_0^2} - 2eh^{*2} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{1}{2} \theta_1 h^{*2} \left(\frac{\partial w_2^*}{\partial X} \right)^2 \\ + 2\theta_2 h^{*2} w_2^* \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} + h^{*2} \frac{\partial u_0^*}{\partial X} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} + \theta_1 h^{*2} w_2^* \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial X^2} + h^{*2} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial X} \\ + h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial u_2^*}{\partial X} + h^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial X} - w_3^* - \theta_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial X} - \theta_2 u_{10}^* \frac{\partial w_0^*}{\partial X} - \frac{3}{2} w_2^{*2} \\ - \theta_1 u_2^* \frac{\partial u_0^*}{\partial X} - \theta_2 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta_1 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (65-۳)$$

برای حل معادلات دستگاه اول شامل معادلات دوم و سوم حل بخش همگن به صورت زیر است.

^۱ Complex conjugate

$$\begin{aligned} u_3(X, T_0, T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{3m}(T_0, T_1) \cos(m\pi X/l) \\ w_1(X, T_0, T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{4m}(T_0, T_1) \sin(m\pi X/l) \end{aligned} \quad (66-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۶۶-۳) به عنوان حل بخش همگن و استفاده از روابط (۵۶-۳) و (۶۰-۳) در معادلات (۶۲-۳) تا (۶۵-۳) معادلات به شکل زیر خواهند بود.

$$\begin{aligned} P_3 \cos(m\pi X/l) &= F_3 \\ P_4 \sin(m\pi X/l) &= F_4 \end{aligned} \quad (67-3)$$

که در آن

$$\begin{aligned} P_3 &= -\frac{1}{12} h^{*2} A_3 \pi^2 \varepsilon^2 - \theta_2(A_3 + A_4 \pi \varepsilon) - \frac{1}{12} e h^{*2} \frac{d^2 A_3}{dT_0^2}, \\ P_4 &= \theta_2(h^* A_3 \pi \varepsilon + h^{*2} A_4 \pi^2 \varepsilon^2) + e h^{*2} \frac{d^2 A_4}{dT_0^2} - P^* A_4 \pi^2 \varepsilon^2, \\ F_3 &= f_1 e^{\pm i \omega_3 T_0} + f_2 e^{\pm i \omega_3 T_0} + f_3 e^{\pm i \omega_3 T_0} + f_4 e^{\pm i \omega_3 T_0} \\ &\quad + f_5 e^{i(\omega_1 \pm \omega_2) T_0} + f_6 e^{\pm i(\omega_3 \pm \omega_4) T_0} + f_7 e^{\pm i(\omega_2 \pm \omega_4) T_0} + f_8 e^{\pm i(\omega_1 \pm \omega_3) T_0} \quad (68-3) \\ F_4 &= g_1 e^{\pm i \omega_4 T_0} + g_2 e^{\pm i \omega_4 T_0} + g_3 e^{\pm i \omega_4 T_0} + g_4 e^{\pm i \omega_4 T_0} \\ &\quad + g_5 e^{i(\omega_1 \pm \omega_2) T_0} + g_6 e^{\pm i(\omega_3 \pm \omega_4) T_0} + g_7 e^{\pm i(\omega_2 \pm \omega_4) T_0} + g_8 e^{\pm i(\omega_1 \pm \omega_3) T_0} \end{aligned}$$

عبارت‌های غیر همگن شامل جملات $e^{\pm i \omega_3 T_0}$ و $e^{\pm i \omega_4 T_0}$ است که برای دستگاه دوم و سوم جملاتی

سکولار است. برای حذف جملات سکولار از شرط حل پذیری استفاده می‌شود [۶۶]. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\varepsilon} (Eq_1 \cos(m\pi X/l) + Eq_2 \sin(m\pi X/l)) dX &= \\ \int_0^{1/\varepsilon} (F_3 \cos(m\pi X/l) + F_4 \sin(m\pi X/l)) dX \end{aligned} \quad (69-3)$$

که در آن Eq_1 و Eq_2 عبارت‌های سمت چپ معادلات (۶۷-۳) می‌باشند.

$$\begin{aligned} Eq_1 &= P_3 \cos(m\pi X/l) \\ Eq_2 &= P_4 \sin(m\pi X/l) \end{aligned} \quad (70-3)$$

با صفر کردن ضرایب جملات $e^{\pm i \omega_3 T_0}$ و $e^{\pm i \omega_4 T_0}$ به دست می‌آیند و در نهایت حل معادلات مرتبه یک تعیین خواهد شد. با جایگزینی $a_1(T_1)$ و $a_2(T_1)$ در معادلات مرتبه دوم و حذف

جملات سکولار $e^{\pm i \omega_1 T_0}$ و $e^{\pm i \omega_3 T_0}$ ، می‌توان معادلات مرتبه دو را حل کرد. حل خصوصی این معادلات

به صورت

$$u_{20} = h_1 e^{\pm i \omega_1 T_0} + h_2 e^{\pm i \omega_2 T_0} + h_3 e^{\pm i \omega_3 T_0} + h_4 e^{\pm i \omega_4 T_0} \\ + h_5 e^{i(\omega_1 \pm \omega_2)T_0} + h_6 e^{\pm i(\omega_3 \pm \omega_4)T_0} + h_7 e^{\pm i(\omega_2 \pm \omega_4)T_0} + h_8 e^{\pm i(\omega_1 \pm \omega_3)T_0} \quad (71-3)$$

می‌باشد. حل کلی معادله شامل حل همگن مرتبه اول به اضافه حل خصوصی مرتبه دو است. یعنی

$$u_2 = \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_{20}) \quad (72-3)$$

با اعمال شرایط اولیه، ثابت‌های به دست آمده از (T_1) و (T_2) به دست می‌آید.

۱۰-۳- بار کمانش

جهت یافتن بار کمانش سیستم، پاسخ همگن دستگاه به صورت زیر فرض می‌شود:

$$u_2^*(X, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} e^{\beta_n X} \\ w_0^*(X, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} e^{\beta_n X} \quad (73-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (73-3) در معادلات مرتبه یک معادلات (11-3) و (12-3) معادله‌ی مشخصه سیستم به دست خواهد آمد. از حل این معادله، β_n بر حسب P^* تعیین و سپس بردارهای ویژه سیستم محاسبه می‌شود. این مقادیر در معادله‌ی (73-3) جایگزین شده و شرط مرزی مسئله اعمال می‌شود. با در نظر گرفتن شرط غیر صفر بودن حل، مقادیر بار کمانش به دست می‌آید.

۱۱-۳- جمع‌بندی

در این فصل، نخست به بی‌بعدسازی معادلات پرداخته شد. سپس، روش تعیین فرکانس‌های طبیعی بیان شد. به کمک تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در حوزه‌ی زمان به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه‌ی لاپلاس تبدیل شد. در ادامه، با توجه به این که مسئله‌ی حاضر جزء مسائل لایه مرزی دسته‌بندی می‌شد، به کمک روش لایه مرزی، پاسخ در حوزه‌ی لاپلاس به دست آمد. در نهایت برای تعیین لاپلاس معکوس از قضیه‌ی باقی‌مانده‌ها استفاده شد و پاسخ نهایی معادلات

در حوزه‌ی زمان و مکان تعیین گردید. علاوه بر آن حل تحلیلی به کمک بسط مدهای نرمال در فصل پنجم نتایج حاصل از این فصل، ارائه خواهد شد.

فصل چهارم

حل عددی

۱-۴- مقدمه

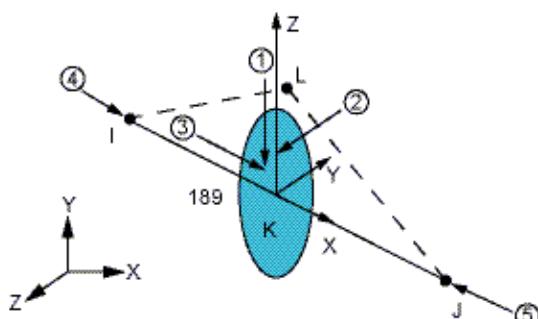
در این فصل حل عددی مسئله، شامل حل استاتیکی، مDAL، کمانش و حل دینامیکی یا گذرا با استفاده از المان‌های یک بعدی و سه بعدی ارائه خواهد شد. برای حل اجزای محدود مسئله از نرم‌افزار انسیس^۱ استفاده شده است. در ابتدای فصل به معرفی المان‌های به کار رفته در تحلیل پرداخته شده است. در بخش بعد آنالیز حساسیت مش انجام شده و اندازه مش بهینه در دو مدل‌سازی یک بعدی و سه بعدی تعیین می‌گردد. سپس به بیان مراحل حل استاتیکی مسئله، مراحل حل مDAL و تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها، حل کمانش و در نهایت به تعیین پاسخ به کمک حل دینامیکی پرداخته شده است. لازم به ذکر است که در این فصل به دلیل رعایت اختصار توضیحاتی در مورد روند حل ارائه می‌شود و بیان جزئیات حل عددی در پیوست (ج) آورده شده است.

۲-۴- معرفی المان‌ها [۶۷]

در این پایان‌نامه، در تحلیل یک بعدی از المان beam189 و در تحلیل سه بعدی از المان 5 در استفاده شده است. در ادامه مختصراً در مورد این المان‌ها توضیح داده می‌شود.

۱-۲-۴ - المان Beam189

المانی مناسب برای تحلیل تیرها اعم از تیرهای نازک و ضخیم می‌باشد. این المان به کمک چهار گره I , J , K و L تعریف می‌شود که گره L جهت المان را مشخص می‌کند و تعریف آن اختیاری است.



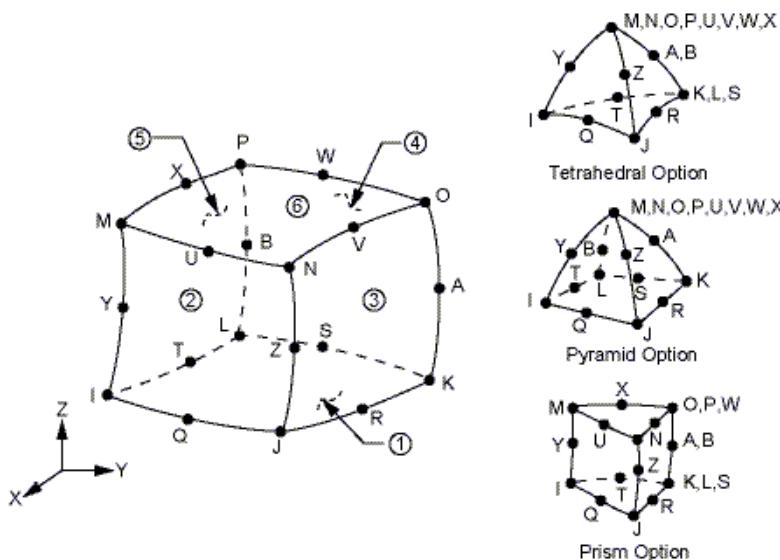
[۶۷] شکل (۱-۴) المان beam189

^۱Ansys 11

المان بر اساس تئوری تیر تیموشنکو است و تأثیرات تغییر شکل برشی نیز در آن در نظر گرفته شده است. Beam189 المانی با سه گره بوده و هر گره آن دارای شش درجه آزادی است؛ سه درجه مربوط به حرکت انتقالی و سه درجه مربوط به حرکت دورانی می‌باشد. این المان برای کاربردهای خطی، دوران‌های بزرگ و کرنش‌های بزرگ غیرخطی مناسب است. در این المان با فعال نمودن گزینه NLGEOM^۱ جملات سفتی تنش در نظر گرفته می‌شود. وجود این جملات سبب می‌شود المان برای تحلیل مسائل مربوط به پایداری خمی، عرضی و پیچشی مناسب باشد. مدل‌های الاستیسیته، خزش و پلاستیسیته نیز بدون در نظر گرفتن نوع سطح مقطع در این المان پشتیبانی می‌شوند.

۲-۲-۴ - المان Solid95

این المان ۲۰ گره و هر گرهی آن سه درجه آزادی دارد. از این المان می‌توان در مدل‌سازی شکل‌های بی‌قاعده استفاده کرد. Solid95 امکان مدل کردن تأثیرات تغییر شکل‌های بزرگ، کرنش‌های بزرگ، پلاستیسیته و خزش را فراهم می‌کند. هندسه و موقعیت گرهها و سیستم مختصات برای این المان در شکل زیر آورده شده است.



شکل [۶۷] (۴-۲) المان solid95

بر اساس نوع قرار گیری گرهها، این المان می‌تواند به صورت چهار وجهی، هرمی و یا منشوری باشد.

^۱Nonlinear geometry

۴-۳- تعیین مش بهینه

مشخصات تیر و خواص مکانیکی آن مطابق جدول (۴-۱) است. در مدل‌سازی به صورت یک‌بعدی، خطی به طول یک متر مدل شده و سپس سطح مقطع تیر تعریف می‌شود. تکیه‌گاه به صورت مفصلی بوده و تنها در راستای ضخامت Z محدود شده است. پس از تعیین خواص مکانیکی و سطح مقطع، تیر مش‌بندی می‌شود.

جدول (۴-۱) مشخصات تیر

$L=1$ (m)	طول
$b=0,02$ (m)	عرض
$h=0,002$ (m)	ضخامت
$E=200$ (GPa)	مدول الاستیسیته
$v=0,3$	ضریب پواسون
$\rho=7800$ (kg/m ³)	چگالی
$P=2500$ (N)	نیروی محوری
$Q=10$ (N/m)	بار گستردہ

در این مسئله آنالیز حساسیت اندازه‌ی مش انجام شده و مش بهینه تعیین گردیده است. برای این کار آنالیز مدل انجام شده و به ازای تعداد گره‌های مختلف فرکانس طبیعی عرضی پنجم گزارش شده که نتیجه به قرار زیر است. بر اساس نتایج مش بهینه به ازای ۳۸ گره حاصل می‌شود.

جدول (۴-۲) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی به ازای مش‌های مختلف در مدل‌سازی یک‌بعدی

تعداد گره	فرکانس عرضی
۱۰۰	۱۱۴,۷
۵۰	۱۱۴,۷
۳۸	۱۱۴,۷
۳۷	۱۱۴,۸
۳۵	۱۱۴,۸
۲۰	۱۱۴,۸
۱۵	۱۱۵,۰
۱۰	۱۱۶,۱
۵	۱۲۷,۴
۹	۹
۹	۹
.	.
۸	۸
۶	۶

در مدل‌سازی سه بعدی، به منظور افزایش دقت محاسبات، از مش‌بندی دستی^۱ به جای مش‌بندی اتوماتیک^۲ استفاده شده است. در ابتدا سطح مقطع تیر به کمک المان Plane83 مش‌بندی شده سپس به ازای تعداد المان‌های مختلف، سطح گسترش داده^۳ شده و نتایج در جدول زیر گزارش شده است. به ازای تعداد المان‌های بیشتر از ۱۳۰ تغییری در نتایج ایجاد نشده و بنابراین مش بهینه در حالت

¹Mapped²Free³Extrude

سه بعدی به ازای 130° المان حاصل می شود.

جدول (۴-۳) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی به ازای مشاهی مختلف در مدل سازی سه بعدی

فرکانس عرضی	۱۱۴,۸	۱۱۴,۹	۱۱۴,۸	۱۱۴,۹	۱۱۵,۰	۱۱۵,۱	۱۱۵,۳	۱۱۶,۰	۳۵	۵۰	۶۰	۷۰	۱۰۰	۱۲۰	۱۳۰	۱۵۰	۲۰۰	تعداد گره
	۸	۹	۸	۸														

۴-۴- حل استاتیکی

از این روش، برای تحلیل مدل های ساکن و مستقل از زمان استفاده می شود. در مدل سازی یک بعدی پس از مش بندی، در مرحله بارگذاری ابتدا شرایط مرزی تعیین شد. تیر به صورت تکیه گاه مفصلی مدل شده است. بارگذاری در این مسئله شامل دو قسمت می باشد. تحریک اول به صورت بار محوری و در انتهای تیر وارد می شود و تحریک دوم بار گسترش عرضی است که به صورت فشار بر روی تیر قابل مدل سازی است. پس از پایان مدل سازی تنظیمات مربوط به حل انجام می گیرد. نوع حل استاتیک بوده و برای در نظر گرفتن خیز بزرگ در مسئله در قسمت تنظیمات حل، گزینه مربوط به نوع حل

انتخاب شده و گزینه مربوط به پیش تنش فعال می شود. Large displacement static

در مدل سازی سه بعدی، در ابتدا سطح مقطع اولیه مدل شده و مش بندی می شود، سپس سطح ایجاد شده گسترش یافته و مدل نهایی ایجاد می گردد. شرایط مرزی بر روی دو سطح مقطع در طرفین اعمال شده و هر دو سطح در راستای محور Z مقید شده اند. بارگذاری محوری و عرضی نیز به صورت فشاری بر روی سطوح اعمال شده است. در مدل سازی سه بعدی تنظیمات حل مشابه یک بعدی است و گزینه مربوط به خیز بزرگ فعال می باشد.

۴-۵- حل مدار [۶۸]

از آنالیز مدار جهت تعیین مقدار فرکانس های طبیعی و شکل مد آن، در فرکانس مزبور استفاده می گردد. مقدار فرکانس طبیعی هر سازه بستگی به شکل آن سازه، جنس و تکیه گاه های آن سازه دارد. در عین حال، مقدار بارگذاری ها و نوع بارگذاری نیز می تواند در مقدار فرکانس طبیعی موثر باشد.

به همین دلیل نرم افزار دو نوع آنالیز مدار (بدون تنش^۱ و پیش‌تنش) را ارائه کرده است. در این پایان‌نامه به منظور بررسی تأثیر بار محوری بر مقدار فرکانس‌های طبیعی سیستم از روش پیش‌تنش استفاده می‌گردد و در تنظیمات مربوط به حل گزینه پیش‌تنش فعال می‌شود.

۴-۶- حل کمانش [۶۸]

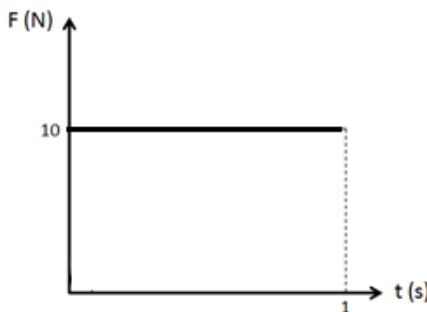
کمانش را می‌توان به صورت تغییر شکل ناگهانی سازه در اثر گذر بار از حد بحرانی تعریف نمود. کمانش حالت خاصی از ناپایداری در سازه‌ها است. با استفاده از این تحلیل، مقدار بار بحرانی و نیز تغییر شکل سازه پس از به وجود آمدن کمانش، مشخص می‌شود. دو روش آنالیز کمانش غیرخطی و آنالیز کمانش خطی (مقادیر ویژه) برای انجام آنالیز کمانش پیش‌بینی شده است. معمولاً پاسخ‌های روش غیرخطی از دقت بالاتری برخوردار بوده و برای طراحی دقیق توصیه می‌شود. در این روش با انجام آنالیز غیرخطی هندسی استاتیکی، نرم افزار بار را به تدریج افزایش می‌دهد تا سازه به مرز ناپایداری برسد. روش آنالیز کمانش خطی محدود به مسائل خطی است و بر اساس روش‌های حل مسائل کلاسیک الاستیک مقادیر ویژه کمانش انجام می‌شود. نکته‌ی قابل توجه در آنالیز کمانش این است که پیش از تحلیل کمانش مسئله، باید حل استاتیکی با فعال کردن گزینه مربوط به پیش‌تنش انجام گیرد.

۴-۷- حل دینامیکی

به کمک این آنالیز می‌توان به محاسبه‌ی پاسخ دینامیکی یک سازه تحت تأثیر بارگذاری‌های وابسته به زمان پرداخت. در این آنالیز می‌توان به محاسبه جابه‌جایی‌ها، کرنش‌ها، تنش‌ها و نیروهای متغیر با زمان در یک سازه پرداخت. این آنالیز عموماً مشکل‌تر از یک آنالیز استاتیکی است؛ چرا که برای محاسبات خود نیاز به امکانات سخت افزاری بیشتری دارد و برای حل هر مسئله زمان بیشتری به کار می‌رود. در آنالیز دینامیک گذرا سه روش برای نحوه انجام محاسبات ماتریسی موجود است. در روش

^۱Stress free

کامل^۱، ماتریس کامل سیستم تشکیل شده و پاسخ آن محاسبه می‌شود این روش قدرتمندترین روش بین سه روش موجود است زیرا قادر است خواص غیرخطی نظری پلاستیسیته تغییر شکل بزرگ و... را منظور کند. در این تحلیل از روش کامل استفاده شده و نمودار نیروی وارد بر تیر نسبت به زمان متغیر بوده و روند تغییرات آن بر حسب زمان مطابق شکل می‌باشد.



شکل (۴-۳) تغییرات زمانی نیروی گسترده

تغییرات نیرو بر حسب زمان را می‌توان به دو قسمت مجزا تقسیم نمود. هر یک از این قسمت‌ها یک مرحله‌ی بارگذاری^۲ نامیده می‌شود. هنگام تحلیل المان محدود، هر یک از مراحل بارگذاری، به بخش‌های کوچک‌تر تقسیم می‌شوند تا دقت حاصل از تحلیل افزایش یابد. به این بخش‌های کوچکتر، گام‌های بارگذاری^۳ گفته می‌شود. در تحلیل دینامیکی شیوه‌های تغییر نیرو به دو صورت خطی^۴ و پله‌ای^۵ است. برای تحلیل یک مدل وابسته به زمان، پیش از هر چیز باید تحلیل المان محدود از نوع تحلیل گذرا^۶ انتخاب شود.

هر یک از مراحل بارگذاری باید جداگانه تعریف و در فایل‌های مستقل ذخیره شوند. از نخستین مرحله بارگذاری شروع کرده و مقادیر کلیه نیروها، قیدها و ... مشابه حالت استاتیکی تعریف می‌شوند. پس از اتمام تعریف بارگذاری، باید لحظه‌ی پایان این مرحله از بارگذاری مشخص شود.

¹Full method

²Load step

³Loading substeps

⁴Ramped

⁵Stepped

⁶Transient

طول بازه‌ی زمانی، گام زمانی^۱ نامیده می‌شود. بدیهی است با افزایش تعداد گام‌های بارگذاری، دقت تحلیل افزایش می‌یابد؛ اما از آنجا که این افزایش دقت، منجر به افزایش زمان تحلیل مدل نیز می‌گردد؛ افزایش تعداد گام‌ها به هر مقدار دلخواه منطقی نیست. در واقع با توجه به دقت قابل قبول، برای تعداد گام‌های تحلیل، عدد بهینه‌ای وجود دارد. در یک تحریک ایده‌آل که همه مدهای سازه تحریک می‌شوند؛ پاسخ تیر شامل همه فرکانس‌ها می‌باشد. هر چند تولید تحریک ایده‌آل به صورت عددی ممکن نیست؛ اندازه‌ی گام‌های زمانی بر اساس بالاترین فرکانس طبیعی سازه به صورت زیر تعیین می‌گردد.

time_step=1/20f

که در آن f بزرگترین فرکانس طبیعی سازه است. گام‌های زمانی باید به گونه‌ای انتخاب شوند که ۲۰ نقطه‌ی مجزا در هر دوره‌ی بزرگترین فرکانس طبیعی ایجاد شود. لازم به تذکر است که پیش از تحلیل دینامیکی، باید تحلیل مдал به منظور شناخت رفتار دینامیکی سازه و تعیین فرکانس‌های آن صورت گیرد.

۴-۸- جمع‌بندی

در این فصل روند حل عددی یک‌بعدی و سه‌بعدی مسئله، شامل حل استاتیکی، مдал، کمانش و حل دینامیکی یا گذرا ارائه شد. در ابتدای فصل به معرفی المان‌های به‌کار رفته در تحلیل پرداخته شد. در بخش بعد به آنالیز حساسیت مش پرداخته شد و اندازه‌ی مش بهینه در دو مدل‌سازی یک‌بعدی و سه‌بعدی تعیین گردید. سپس به بیان مراحل حل استاتیکی مسئله، مراحل حل مдал و تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها، حل کمانش و در نهایت به تعیین پاسخ به کمک حل دینامیکی پرداخته شد. در فصل پنجم نتایج حاصل از این فصل، ارائه خواهد شد.

^۱Time step

فصل پنجم

بررسی نتائج

۱-۵- مقدمه

در این فصل به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل‌های سوم و چهارم پرداخته خواهد شد. محاسبات در محیط Maple 13 انجام گرفته است. در ابتدا نتایج مربوط به فرکانس طبیعی بدون در نظر گرفتن بار محوری ارائه شده و تأثیر پارامترهای مختلف بر روی آن بررسی شده است. در بخش بعد تأثیر بار محوری و کرنش نرمال عرضی بر فرکانس طبیعی نشان داده شده است. باز کمانش مسئله تعیین شده و نتایج آن با تئوری‌های اویلر برنولی و تیموشنکو مقایسه شده است. سپس به بیان نتایج پاسخ کلی پرداخته خواهد شد.

جدول (۱-۵) مقادیر اولیه‌ی انتخابی برای مسئله می‌باشد.

جدول (۱-۵) مقادیر اولیه‌ی انتخابی

		جدول (۱-۵) مقادیر اولیه‌ی انتخابی
۱		طول (m)
۰,۰۲		عرض (m)
۰,۰۰۲		ضخامت (m)
۰,۳		ضریب پواسون
۲۰۰		مدول یانگ (GPa)
۷۸۰۰		چگالی (kg/m^3)

۲-۵- فرکانس طبیعی

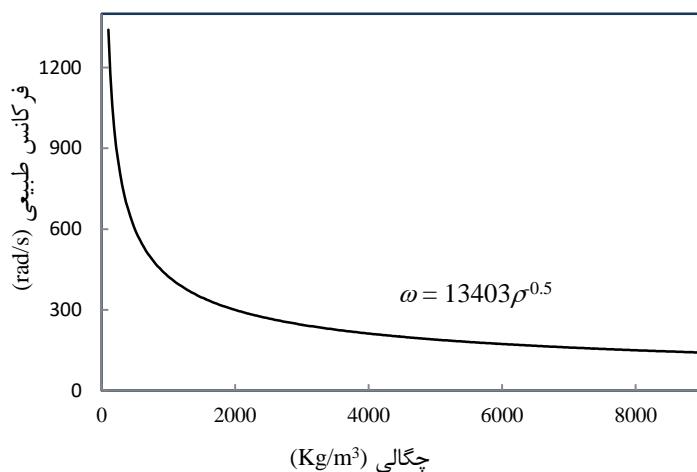
در ابتدا تأثیر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس طبیعی بدون در نظر گرفتن تأثیر بار محوری ارائه خواهد شد. شرایط مرزی در تیر به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. در تئوری‌های خطی مانند تئوری تیر اویلر برنولی و یا تیموشنکو امکان محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی محوری (طولی) وجود ندارد؛ در حالی که با استفاده از معادلات استخراج شده بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، امکان تعیین فرکانس‌های محوری علاوه بر فرکانس‌های عرضی وجود دارد. جدول (۲-۵) چهار فرکانس محوری اول را ارائه کرده است.

جدول (۲-۵) فرکانس‌های (مد محوری) حل تحلیلی (HZ)

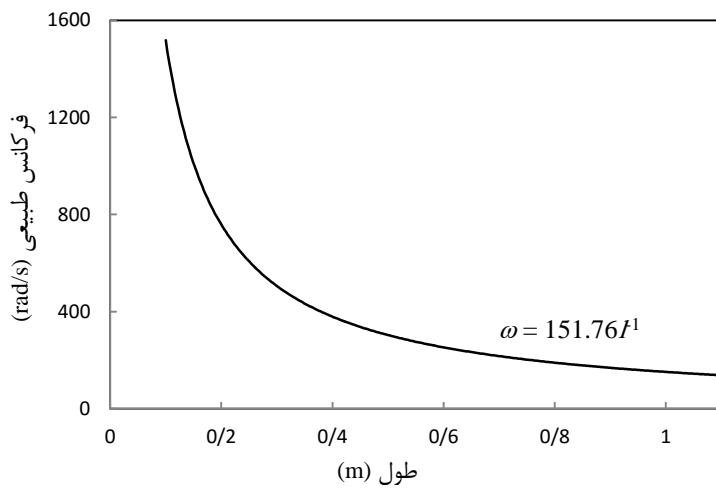
۴	۳	۲	۱	شماره مد
۱۰۶۱۷	۷۹۶۳	۵۳۰۸	۲۶۵۴	نتایج تحلیلی

شکل (۱-۵) اثر تغییر چگالی را بر روی فرکانس طبیعی نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، با افزایش چگالی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین فرکانس با جذر چگالی رابطه‌ی عکس دارد. این رابطه در تمام روابط تحلیلی که از تئوری‌های مختلف به دست می‌آید نیز وجود دارد.

شکل (۲-۵) اثر طول را بر روی فرکانس طبیعی نشان می‌دهد. افزایش طول سبب کاهش فرکانس طبیعی در تیر خواهد شد و فرکانس با طول رابطه‌ی عکس دارد؛ در حالی که در تئوری تیر اویلر برنولی با فرض خیزهای کوچک فرکانس با محدوده طول رابطه‌ی عکس دارد.



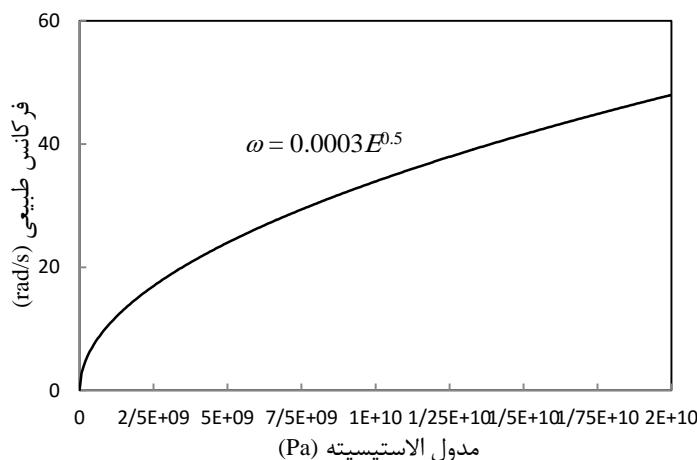
شکل (۱-۵) تأثیر چگالی بر فرکانس طبیعی



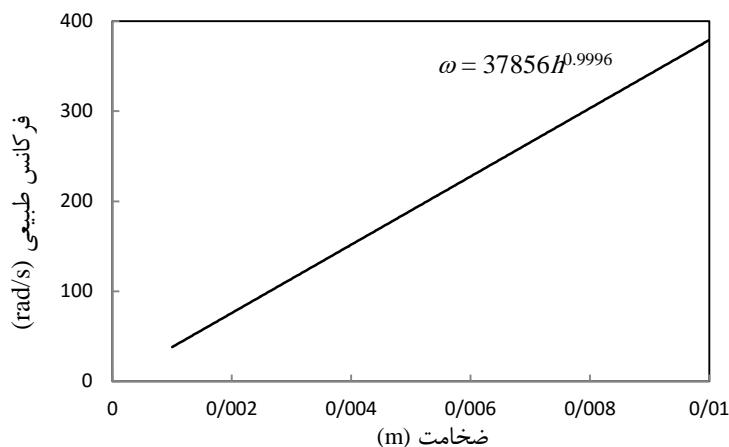
شکل (۲-۵) تأثیر طول بر فرکانس طبیعی

در شکل (۳) تغییرات فرکانس با مدول الاستیک نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش E در محدوده $2e8 \text{ Gpa} \leq E \leq 2e10 \text{ Gpa}$ باعث افزایش نمایی در فرکانس طبیعی

شده است ولی در مقادیر پایین‌تر فرکانس تغییر چندانی نمی‌کند. شکل (۴-۵) اثر ضخامت را بر روی فرکانس طبیعی نشان می‌دهد. افزایش ضخامت سبب افزایش فرکانس طبیعی در تیر خواهد شد و فرکانس با ضخامت رابطه مستقیم دارد، که با نتایج تیر اویلر برنولی سازگار است.



شکل (۳-۵) تأثیر مدول الاستیسیته بر فرکانس طبیعی



شکل (۴-۵) تأثیر ضخامت بر فرکانس طبیعی

۱-۲-۵ - بررسی تأثیر بار محوری بر فرکانس طبیعی

در جدول (۳-۵) مقایسه‌ی بین نتایج تحلیلی با نتایج عددی و تیر اویلر برنولی ارائه شده است. w/h نسبت خیز مرکز تیر به ضخامت آن است که برای تیر اویلر برنولی این نسبت بسیار کوچک است. برای مقادیر بزرگ‌تر w/h ، اختلاف بین نتایج تحلیلی و نتایج تیر اویلر برنولی بیشتر است که این نشان دهنده تأثیر جملات غیرخطی بر فرکانس طبیعی است. همچنین اختلاف در فرکانس‌های بالاتر

افزایش می‌یابد که این به دلیل استفاده از تئوری برشی مرتبه اول است. با افزایش نیروی محوری میزان فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. در واقع افزایش نیروی محوری، متناظر با افزایش سفتی^۱ سازه است.

جدول (۳-۵) مقایسه فرکانس‌ها با روش تحلیلی و عددی به ازای بارهای محوری مختلف (HZ)

w/h	مد پنجم	مد چهارم	مد سوم	مد دوم	مد اول	روش	بار محوری
۲,۵۶۱	۱۴۰,۵۶۵	۹۲,۵۰۰	۵۴,۹۸۵	۲۷,۸۴۸	۱۰,۴۲۲	تئوری برشی مرتبه اول	۱۰۰(N)
	۱۳۴,۸۲۰	۹۰,۸۳۹	۵۵,۹۱۹	۲۹,۸۴۳	۱۱,۹۶۵	انسیس سه بعدی	
	۱۲۳,۲۶۶	۸۱,۷۷۰	۴۹,۳۱۱	۲۵,۶۶۳	۱۰,۰۶۵	تیر تیموشنکو	
	۱۲۳,۲۰۰	۸۱,۷۲۹	۴۹,۲۸۶	۲۵,۶۵۰	۱۰,۰۶۱	انسیس یک بعدی	
	۱۲۳,۲۸۵	۸۱,۷۷۸	۴۹,۳۱۴	۲۵,۶۶۳	۱۰,۰۶۶	تیر اویلر برنولی	
۰,۸۸۵	۱۶۶,۶۷۰	۱۱۷,۰۰۲	۷۶,۸۸۲	۴۵,۳۷۴	۲۰,۷۲۳	تئوری برشی مرتبه اول	۵۰۰(N)
	۱۶۲,۷۵۰	۱۱۶,۶۵	۷۸,۵۵۳	۴۷,۵۶۸	۲۲,۱۸۹	انسیس سه بعدی	
	۱۵۲,۳۶۴	۱۰۸,۷۱۷	۷۲,۹۳۲	۴۴,۰۶۷	۲۰,۵۴۶	تیر تیموشنکو	
	۱۵۲,۲۹۰	۱۰۸,۶۶۰	۷۲,۸۹۵	۴۴,۰۴۵	۲۰,۵۳۶	انسیس یک بعدی	
	۱۵۲,۳۸۲	۱۰۸,۷۲۴	۷۲,۹۳۴	۴۴,۰۶۸	۲۰,۵۴۷	تیر اویلر برنولی	
۰,۴۹۸	۱۹۴,۴۳۳	۱۴۱,۷۹۵	۹۷,۵۷۱	۶۰,۵۲۳	۲۸,۸۲	تئوری برشی مرتبه اول	۱۰۰۰(N)
	۱۹۱,۹۶	۱۴۲,۳۹	۹۹,۷۲۱	۶۲,۸۶۱	۳۰,۲۸۲	انسیس سه بعدی	
	۱۸۲,۳۲۰	۱۳۵,۰۴۰	۹۴,۴۹۰	۵۹,۵۴۹	۲۸,۶۹۱	تیر تیموشنکو	
	۱۸۲,۲۳۰	۱۳۴,۹۷۰	۹۴,۴۴۲	۵۹,۵۱۹	۲۸,۶۷۷	انسیس یک بعدی	
	۱۸۲,۳۳۶	۱۳۵,۰۴۷	۹۴,۴۹۲	۵۹,۵۵	۲۸,۶۹۲	تیر اویلر برنولی	
۰,۲۶۸	۲۴۰,۵۳۰	۱۸۱,۴۹	۱۲۹,۳۷۸	۸۲,۸۹۵	۴۰,۴۰۵	تئوری برشی مرتبه اول	۲۰۰۰(N)
	۲۳۹,۸۰۶	۱۸۳,۱۴	۱۳۲,۰۳۰	۸۵,۳۸۳	۴۱,۸۷۸	انسیس سه بعدی	
	۲۳۰,۸۴۸	۱۷۶,۲۶۳	۱۲۷,۰۷۰	۸۲,۱۸۵	۴۰,۳۱۴	تیر تیموشنکو	
	۲۳۰,۷۳۰	۱۷۶,۱۷۰	۱۲۷,۰۱۰	۸۲,۱۴۴	۴۰,۲۹۵	انسیس یک بعدی	
	۲۳۰,۷۱۹	۱۷۶,۱۶۶	۱۲۷,۰۰۲	۸۲,۱۴۲	۴۰,۲۹۴	تیر اویلر برنولی	

در جدول (۴-۵) نسبت l/h ضریب لاغری تعریف می‌شود. مقادیر کوچک این ضریب به معنی کوتاه و ضخیم بودن تیر است؛ و همان‌طور که از نتایج پیداگست فرکانس‌های محاسبه شده با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به نتایج انسیس سه بعدی نزدیکتر است و در این محدوده نتایج اویلر اختلاف زیادی دارند. با افزایش ضریب لاغری نتایج تئوری‌ها به هم نزدیکتر خواهد بود که این نشان‌دهنده‌ی

^۱ stiffness

اهمیت پایین برش در تیرهای بلند و نازک است.

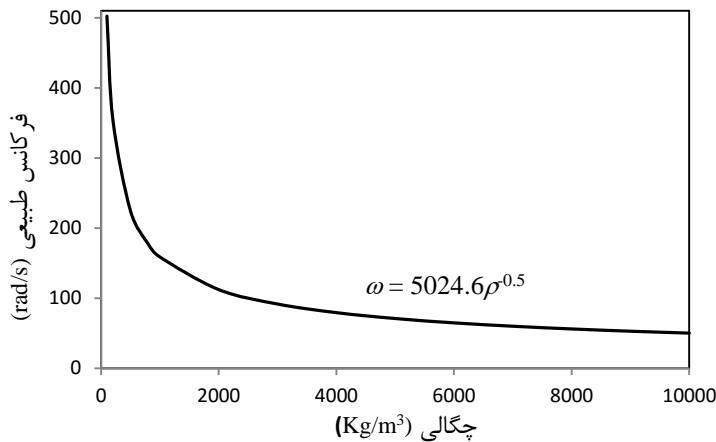
جدول (۴-۵) مقایسه فرکانس‌ها با روش تحلیلی و عددی تیر با بار محوری $N = 10$ به ازای ضرایب لاغری مختلف (HZ)

روش	I/h	مد اول	مد دوم	مد سوم	مد چهارم	مد پنجم
تئوری برشی مرتبه اول	۲۰	۳۴۶۱,۶۲	۱۳۲۰۱,۳۹	۲۸۷۹۸,۱۵	۴۹۴۶۳,۸۳	۷۴۳۳۰,۹۵
انسیس سه بعدی		۴۶۶۷,۰	۱۴۶۷۸,۰	۲۹۸۷۵,۰	۴۹۶۳۱,۰	۷۳۲۵۸,۰
انسیس یک بعدی		۳۰۲۸,۰	۱۱۴۶۸,۰	۲۵۰۹۵,۰	۴۳۳۵۲,۰	۶۵۵۹۶,۰
تیر اویلر برنولی		۳۰۴۱,۱۹	۱۱۶۵۹,۷۵	۲۶۰۱۸,۵۸	۴۶۱۲۰,۱۹	۷۱۹۶۴,۹۰
تئوری برشی مرتبه اول	۱۰۰	۲۴۰,۵۳	۶۶۶,۳۷	۱۳۳۹,۳۱	۲۲۷۰,۷۹	۳۴۶۱,۶۲
انسیس سه بعدی		۲۸۰,۲۹۹	۷۱۸,۴۸۸	۱۳۶۸	۲۲۴۳	۳۳۴۶
انسیس یک بعدی		۲۳۰,۷۳	۶۰۸,۹۴	۱۱۹۴	۱۹۹۹	۳۰۲۸
تیر اویلر برنولی		۲۳۰,۸۷	۶۰۹,۵۳	۱۱۹۵,۶۸	۲۰۰۴,۸۳	۳۰۴۱,۱۹
تئوری برشی مرتبه اول	۳۰۰	۶۸,۳۷۶	۱۴۶,۰۵۳	۲۴۰,۵۳	۳۵۶,۹	۴۹۸,۲۵
انسیس سه بعدی		۷۲,۴۷۲	۱۵۲,۴۲۶	۲۴۵,۹۹۷	۳۵۷,۵۲۶	۴۸۹,۸۴۳
انسیس یک بعدی		۶۷,۹۲۸	۱۴۲,۸۵۹	۲۳۰,۷۳۱	۳۳۵,۹۲۷	۴۶۱,۳۸
تیر اویلر برنولی		۶۷,۹۶	۱۴۲,۹۴	۲۳۰,۸۷	۳۳۶,۱۵	۴۶۱,۷۴
تئوری برشی مرتبه اول	۵۰۰	۴۰,۴۰۵	۸۲,۸۹۵	۱۲۹,۳۷۸	۱۸۱,۴۹	۲۴۰,۵۳۰
انسیس سه بعدی		۴۱,۸۷۸	۸۵,۳۸۳	۱۳۲,۰۳۰	۱۸۳,۱۴	۲۳۹,۸۰۶
انسیس یک بعدی		۴۰,۲۹۵	۸۲,۱۴۴	۱۲۷,۰۱۰	۱۷۶,۱۷۰	۲۳۰,۷۳۰
تیر اویلر برنولی		۴۰,۲۹۴	۸۲,۱۴۲	۱۲۷,۰۰۲	۱۷۶,۱۶۶	۲۳۰,۷۱۹

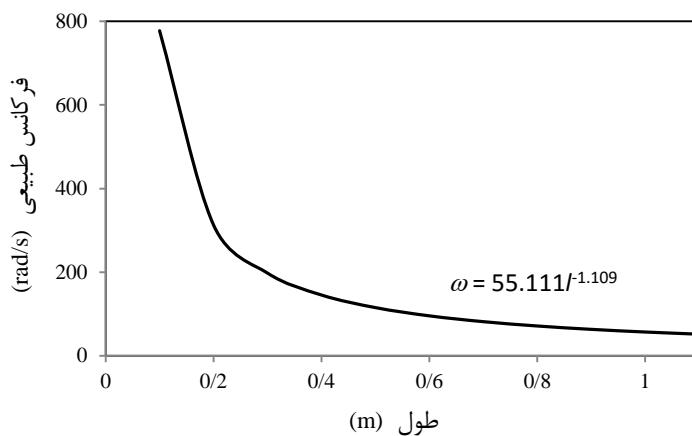
شکل (۵-۵) اثر تغییر چگالی را بر روی فرکانس طبیعی اول به ازای نیروی محوری $N = 4000$ نشان

می‌دهد. با افزایش چگالی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و مانند حالت قبل فرکانس با جذر چگالی رابطه‌ی عکس دارد. شکل (۵-۶) اثر طول را بر روی فرکانس طبیعی اول نشان می‌دهد. افزایش طول سبب کاهش فرکانس طبیعی در تیر خواهد شد، ولی مانند حالت قبل فرکانس با I/l رابطه ندارد.

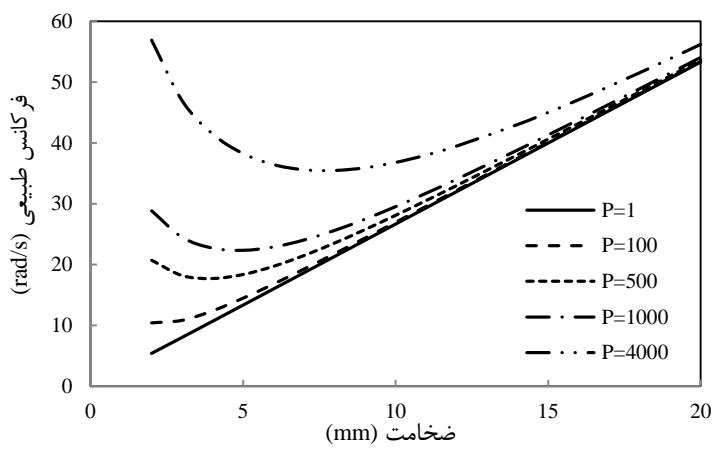
شکل (۷-۵) اثر ضخامت را بر روی فرکانس طبیعی اول نشان می‌دهد. نیروی محوری رابطه‌ی بین ضخامت و فرکانس طبیعی اول را تغییر می‌دهد. در غیاب نیروی محوری این رابطه خطی است؛ اما با افزایش نیروی محوری این رابطه تغییر کلی می‌کند. نمودارها فرکانس طبیعی حداقلی را نشان می‌دهند که به ازای یک ضخامت بحرانی خواهد بود.



شکل (۵) تأثیر چگالی بر فرکانس طبیعی به ازای بار محوری (N) ۴۰۰۰



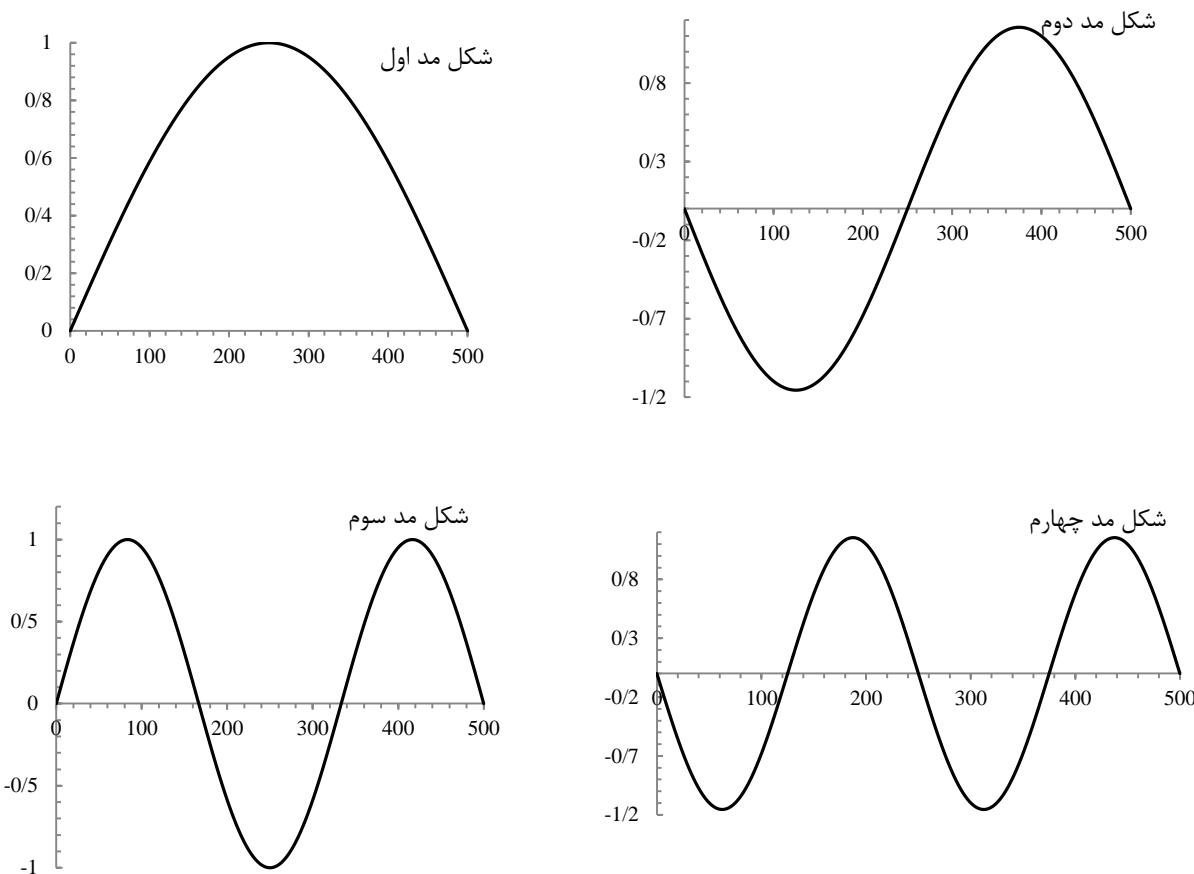
شکل (۶) تأثیر طول بر فرکانس طبیعی به ازای بار محوری (N) ۴۰۰۰



شکل (۷) تأثیر ضخامت بر فرکانس طبیعی به ازای بارهای محوری مختلف

شکل (۸) چهار شکل مدبوبط به حرکت عرضی، به ازای بار N ۴۰۰۰ را نشان می‌دهد.

در جدول (۵-۵) فرکانس طبیعی به ازای دو شرط مرزی، تکیه‌گاه ساده و گیردار-ساده ارائه شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت فرکانس‌های طبیعی تیر با تکیه‌گاه ساده کوچکتر است. همچنین با افزایش بار، فرکانس افزایش می‌یابد. این موضوع در جدول (۳-۵) نیز مشاهده می‌شد.



شکل (۵-۸) چهار شکل مد عرضی به ازای بار محوری $4000(N)$

جدول (۵-۵) فرکانس طبیعی پنج مد اول برای تیر با تکیه‌گاه‌های مختلف و به ازای بارهای محوری مختلف (HZ)

مد پنجم	مد چهارم	مد سوم	مد دوم	مد اول	تکیه گاه ساده $P=1000(N)$
۱۹۴,۴۲۳	۱۴۱,۷۹۵	۹۷,۵۷۱	۶۰,۵۲۳	۲۸,۸۲	تکیه گاه ساده $P=1000(N)$
۲۱۷,۶۵۷	۱۵۹,۷۱	۱۱۰,۴۲۴	۶۸,۶۸۷	۳۲,۸۳۸	دو سر گیر دار
۳۱۲,۹۸	۲۴۲,۰۸۳	۱۷۶,۵۶۷	۱۱۵,۲۷۴	۵۶,۸۹۳	تکیه گاه ساده $P=4000(N)$
۳۳۲,۸۵	۲۵۷,۵۳	۱۸۷,۸۵	۱۲۲,۶۳۲	۶۰,۵۱۸	دو سر گیر دار

۲-۲-۵- اثر کرنش نرمال عرضی بر فرکانس طبیعی

با چشم پوشی از کرنش نرمال عرضی فرکانس‌های طبیعی عرضی تیر بی‌تغییر باقی می‌مانند در حالی که معادلات شامل جملات حرکت محوری تغییر کرده و حذف کرنش نرمال عرضی سبب تغییر فرکانس‌های طبیعی محوری خواهد شد. در جدول (۶-۵) فرکانس‌های طبیعی مربوط به چهار مد اول حرکت محوری آورده شده است که حدود نه درصد بیشتر از نتایج جدول (۲-۵) است. یادآوری می‌شود که حذف کرنش نرمال عرضی متناظر با $w_1=0$ در رابطه (۱-۲) است.

جدول (۶-۵) فرکانس‌های مد محوری (Hz)

شماره مد	۴	۳	۲	۱
تئوری برشی مرتبه اول	۱۱۷۵۶,۲	۸۸۱۷,۱۶	۵۸۷۸,۰۵	۲۹۳۹,۰۳

۳-۵- تحلیل کمانش

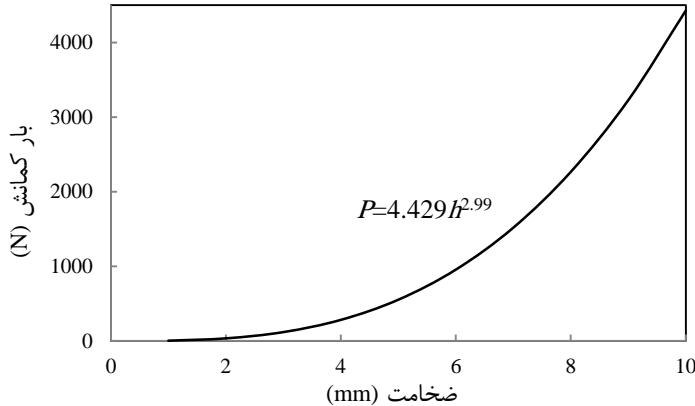
در جدول (۷-۵) مقادیر بار کمانش به دست آمده از روش تحلیلی و حل عددی برای چهار مد کمانش آورده شده است.

جدول (۷-۵) مقایسه بار کمانش با روش تحلیلی و عددی (N)

شماره مد	۴	۳	۲	۱
تئوری برشی مرتبه اول	۵۰۵,۲	۲۸۴,۲	۱۲۶,۳	۳۱,۵۸
انسیس سه‌بعدی	۴۶۲,۰	۲۵۹,۸	۱۱۵,۴	۲۸,۸۶
تیموشنکو	۴۲۱,۰۲	۲۳۶,۸۵	۱۰۵,۲۶	۲۶,۳۲
انسیس یک‌بعدی	۴۲۲,۱	۲۳۷,۲	۱۰۵,۳	۲۶,۳۲

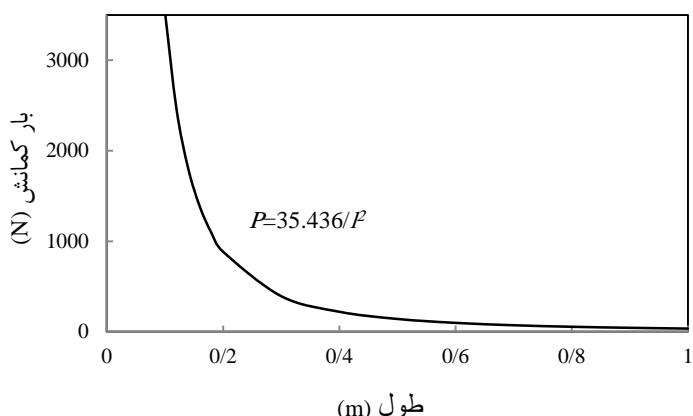
حل تحلیلی با دو تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تیموشنکو انجام شده است. در تئوری تیموشنکو، در رابطه (۱-۲)، مقادیر $w_1=w_0=0$ است. هم‌چنین رابطه‌ی تنش-کرنش نرمال به صورت یک‌بعدی $\sigma_x=E \varepsilon_x$ بوده و سایر مؤلفه‌های تنش نرمال صفر است و از اثر پواسون صرف‌نظر می‌شود؛ در حالی که در تئوری تغییر شکل برشی، رابطه تنش-کرنش با روابط سه‌بعدی الاستیسیته تعریف شده است؛ یعنی (در این حالت خاص) $\sigma_x=A \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_z$ و علاوه بر آن σ_z نیز وجود دارد. هر چند اثر σ_z در معادلات دوم و سوم -که مرتبط با بار کمانش است- ظاهر نمی‌شود؛ اما اختلافی که در تعریف

رابطه‌ی تنش-کرنش نرمال در راستای x وجود دارد نتایج را تغییر می‌دهد. مثلاً برای $v=0.25$ ، اختلاف مقادیر E و A در نتیجه تنش نرمال حدود ۲۵ درصد است که این اختلاف در نتایج حل تئوری برشی مرتبه اول و تیر تیموشونکو نیز مشاهده می‌شود. علاوه بر آن، نتایج تیر تیموشونکو و حل یک بعدی تیر، همان طور که انتظار است اختلاف ناچیزی دارند؛ چون فرمول‌بندی حل عددی نیز بر اساس تئوری تیموشونکو است. بنابراین مقایسه‌ی نتایج حل تئوری برشی مرتبه اول با حل عددی مبتنی بر المان یک‌بعدی، خطای بیشتری دارد. برای بررسی کامل‌تر مسأله، می‌توان نتایج حل تئوری برشی مرتبه اول را با حل عددی سه‌بعدی نیز مقایسه کرد. جدول (۷-۵) نشان می‌دهد نتایج تئوری برشی مرتبه اول به حل عددی سه‌بعدی نزدیکتر از تئوری تیموشونکو است. البته تحلیل سه‌بعدی تیر، به دلیل ابعاد ناهمانگ تیر (طول زیاد و ضخامت کم)، تحلیلی زمان بر است؛ چون نیاز به مش‌بندی ریز و در نتیجه تعداد المان زیاد دارد.



شکل (۹-۵) تأثیر ضخامت بر بار کمانش

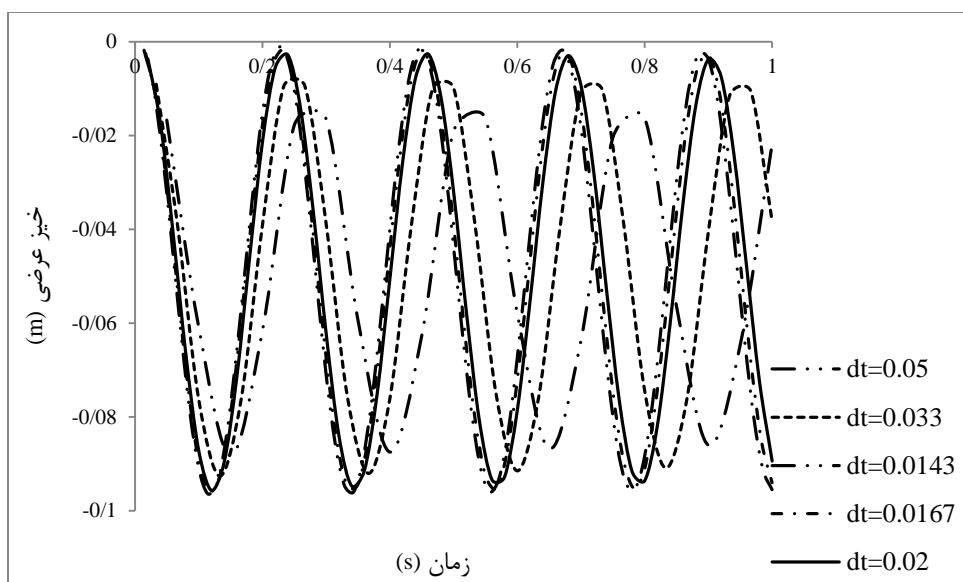
شکل (۹-۵) اثر تغییر ضخامت را بر روی بار کمانش نشان می‌دهد. همانطور که در شکل دیده می‌شود، با افزایش ضخامت بار کمانش افزایش می‌یابد و با توان سوم ضخامت رابطه‌ی مستقیم دارد که با تئوری ستون اویلر سازگار است. شکل (۱۰-۵) اثر طول را بر روی بار کمانش نشان می‌دهد. افزایش طول سبب کاهش بار کمانش در تیر خواهد شد و بار کمانش با $1/l^2$ متناسب است. این موضوع نیز با تئوری ستون اویلر هماهنگی دارد.



شکل(۱۰-۵) تأثیر طول بر بار کمانش

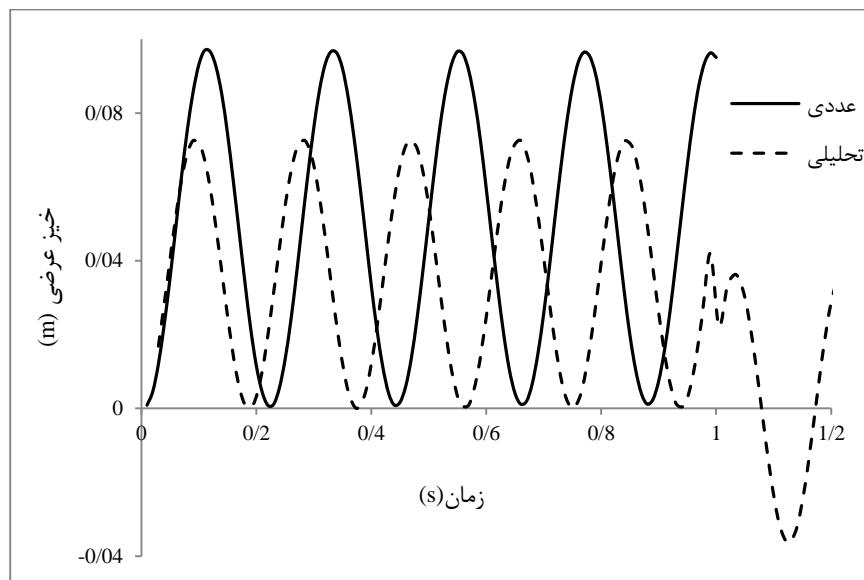
۴-۵- پاسخ

شکل (۱۱-۵) پاسخ عرضی تیر با روش عددی را به ازای گام‌های زمانی مختلف نشان می‌دهد. با دقت در نتایج روشن می‌شود که به ازای گام‌های زمانی کوچکتر از 0.02 ثانیه تغییر چندانی در نتایج ایجاد نخواهد شد. از این رو گام زمانی 0.02 به عنوان گام زمانی بهینه انتخاب می‌شود.

شکل(۱۱-۵) پاسخ عرضی تیر در $x=0.5$ به ازای گام‌های زمانی مختلف

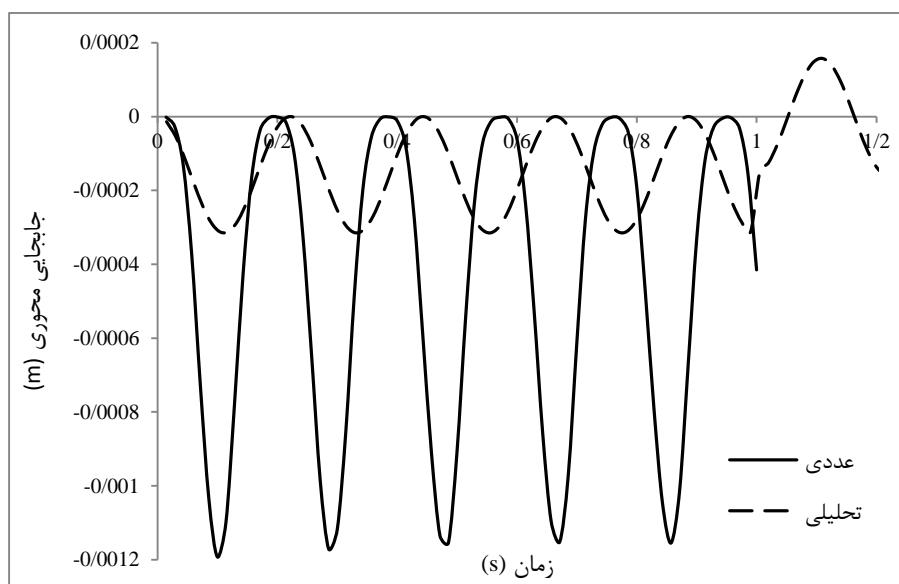
شکل (۱۲-۵) پاسخ عرضی مرکز تیر را با حل تحلیلی و عددی نشان می‌دهد. تیر تحت بار گستردگی $10(N)$ به مدت یک ثانیه است؛ در زمان اعمال بار تیر حول خیز استاتیکی خود نوسان می‌کند و پس

از یک ثانیه با حذف بار حرکت نوسانی تیر حول صفر ادامه می‌یابد.



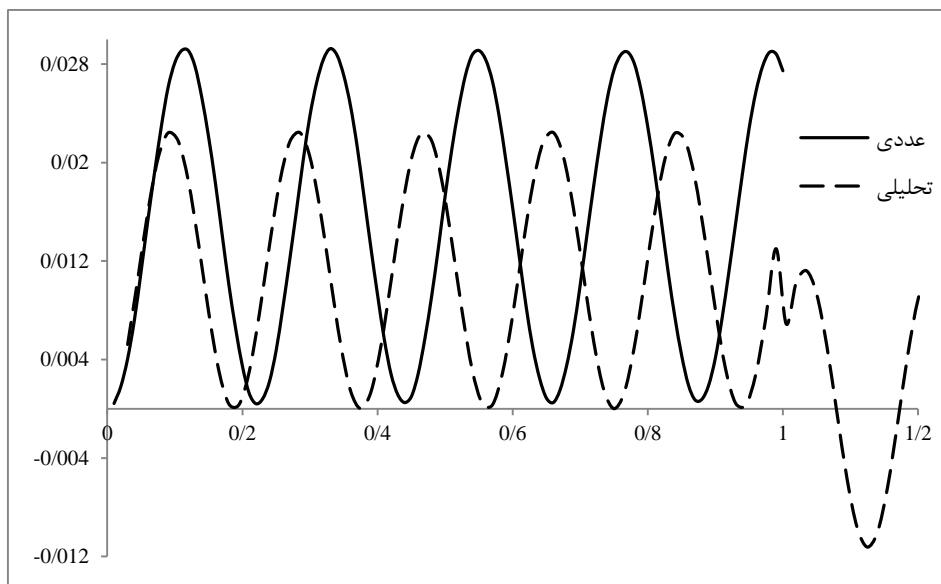
شکل (۱۲-۵) پاسخ عرضی تیر در $x^* = 0,5$

شکل (۱۳-۵) جابجایی محوری تیر در نزدیک مرز ($x^* = 0,05$) نشان می‌دهد. اختلاف نتایج حل تحلیلی با حل عددی در حرکت محوری بیش از حرکت عرضی است.

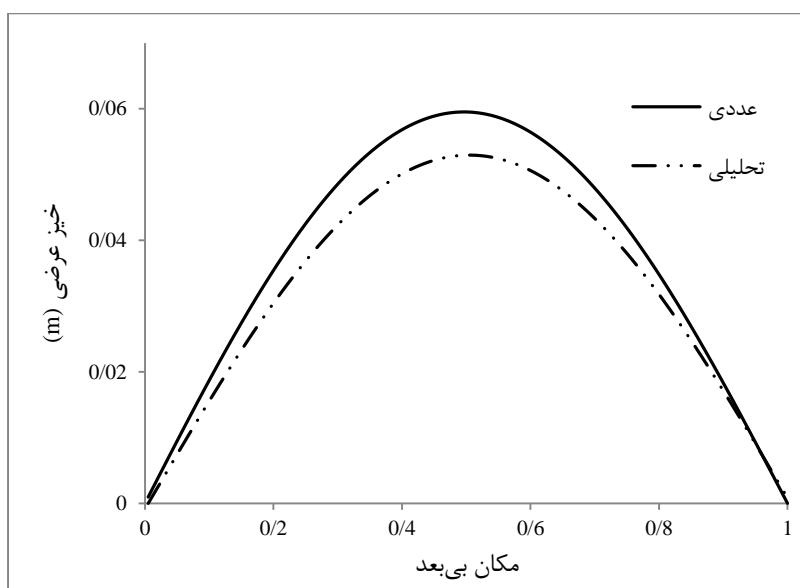


شکل (۱۳-۵) پاسخ محوری تیر در $x^* = 0,05$

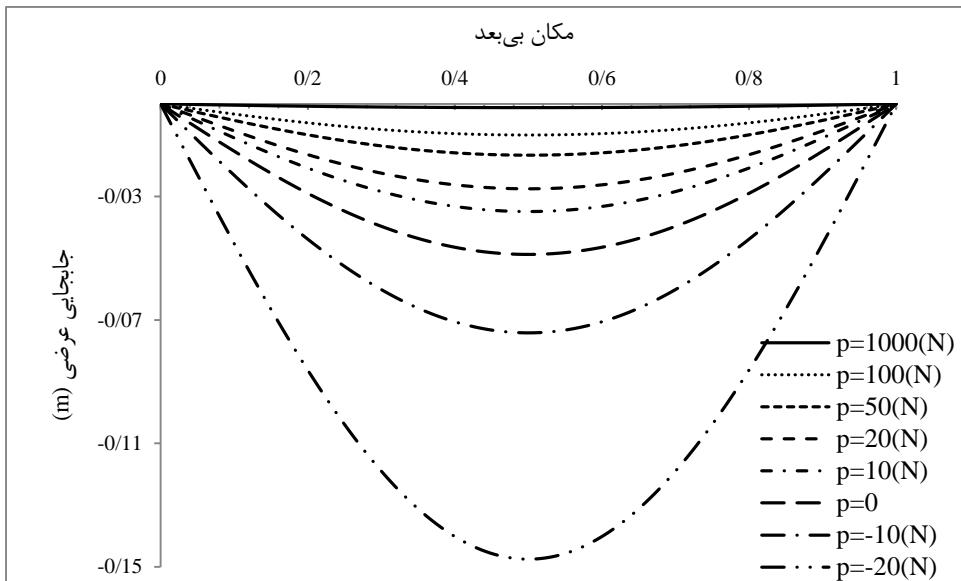
شکل (۱۴-۵) خیز عرضی تیر در نزدیک مرز ($x^* = 0,1$) نشان می‌دهد.

شکل(۱۴-۵) پاسخ عرضی تیر در $x^* = 0, 1$

شکل (۱۵-۵) خیز عرضی تیر در زمان نیم ثانیه را نشان می‌دهد.

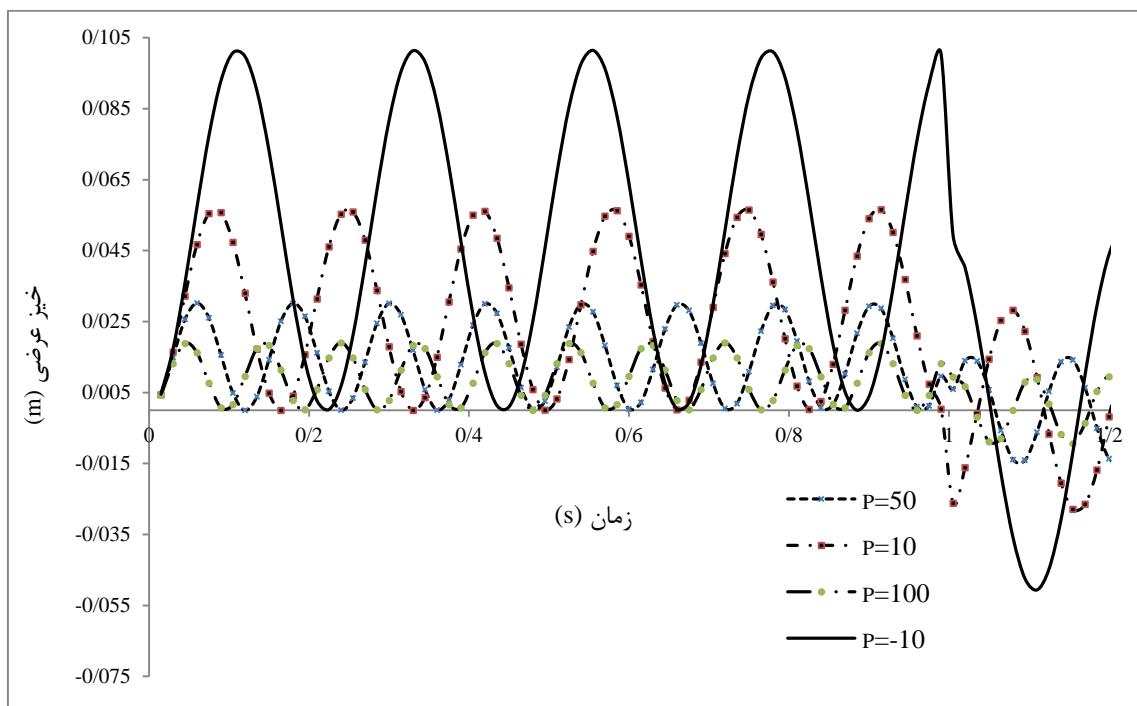
شکل(۱۵-۵) تغییر شکل عرضی تیر در $t = 0, 5$ ثانیه

شکل (۱۶-۵) اثر بار را بر روی حرکت عرضی نشان می‌دهد. با افزایش بار محوری کششی خیز تیر کاهش یافته و با افزایش بار محوری فشاری خیز عرضی به شدت افزایش می‌یابد.



شکل(۱۶-۵) تغییر شکل عرضی تیر در $t = 0,5$ ثانیه به ازای بارهای محوری مختلف

شکل (۱۷-۵) اثر بار را بر روی حرکت عرضی نشان می‌دهد. با افزایش بار محوری خیز تیر کاهش یافته و فرکانس افزایش می‌یابد که با نتایج بخش فرکانس انطباق دارد.



شکل(۱۷-۵) پاسخ عرضی تیر در $x^* = 0,5$ به ازای بارهای محوری مختلف

۵-۵- جمع‌بندی

در این فصل به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل‌های سوم و چهارم پرداخته شد. نتایج مربوط به فرکانس طبیعی بدون در نظر گرفتن بار محوری ارائه و تأثیر پارامترهای مختلف بر روی آن بررسی شد. هم چنین تأثیر بار محوری و کرنش نرمال عرضی بر فرکانس طبیعی نشان داده شد؛ بار کمانش مسئله تعیین و نتایج آن با تئوری‌های اویلر برنولی و تیموشنکو مقایسه شد و در نهایت پاسخ دینامیکی سازه بر حسب مکان و زمان تعیین شد.

فصل ششم

تیکہ کسیری و پیشہ مادہ

۱-۶-مقدمه

در این پایان‌نامه به حل ریاضی و عددی تیر با خیز نسبتاً زیاد تحت بار دینامیکی عرضی پرداخته شد. در ابتدا، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیر استخراج شد. این معادلات شامل مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان بوده و به کمک اصل همیلتون تعیین شدند. در تعیین حل این دستگاه معادله، از تئوری اغتشاشات استفاده شد. برای این منظور ابتدا معادلات بی‌بعدشده و سپس به کمک تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در حوزه‌ی زمان به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه‌ی لاپلاس تبدیل شد. در ادامه، با توجه به این که مسئله حاضر جزء مسائل لایه مرزی دسته بندی می‌شود، به کمک روش لایه مرزی، پاسخ در حوزه‌ی لاپلاس به‌دست آمد. در نهایت برای تعیین لاپلاس معکوس از قضیه‌ی باقی‌مانده‌ها استفاده شد و پاسخ نهایی معادلات در حوزه‌ی زمان و مکان تعیین گردید. همچنانی از روش مدهای نرمال، پاسخ سیستم به‌دست آمد. علاوه بر این، فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش تیر نیز تعیین شدند. در پایان، حل عددی شامل حل مدار، کمانش و حل دینامیکی مسئله به کمک نرم افزار Ansys ارائه شد.

۲-۶-نتایج

نتایج این پایان‌نامه به صورت زیر قابل بیان است.

- در بسط انتخاب شده، فرکانس‌های سیستم خطی و غیرخطی تا مرتبه 2 یکسان است.
- با استفاده از معادلات استخراج شده بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، امکان تعیین فرکانس‌های محوری علاوه بر فرکانس‌های عرضی وجود دارد.
- با چشم پوشی از کرنش نرمال عرضی فرکانس‌های طبیعی عرضی بی‌تغییر باقی می‌مانند؛ در حالی که معادلات شامل جملات حرکت محوری تغییر کرده و حذف کرنش نرمال عرضی سبب تغییر فرکانس‌های طبیعی محوری خواهد شد.

- هم‌خوانی نتایج تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با تئوری سه بعدی الاستیسیته در محاسبه فرکانس طبیعی و بار کمانش بهتر از سایر تئوری‌های یک‌بعدی اویلر برنولی و تیموشنکو است.
- بر اساس جدول‌های ارائه شده، تئوری مرتبه اول بار کمانش را بیش از مقدار محاسبه شده توسط انسیس سه‌بعدی و فرکانس را کمتر از مقدار محاسبه شده توسط انسیس سه‌بعدی نشان می‌دهد.
- بدون در نظر گرفتن نیروی محوری، با افزایش چگالی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین فرکانس با جذر چگالی رابطه‌ی عکس دارد. این رابطه در تمام روابط تحلیلی که از تئوری‌های مختلف به دست می‌آید نیز وجود دارد.
- بدون در نظر گرفتن نیروی محوری، افزایش طول سبب کاهش فرکانس طبیعی در تیر خواهد شد و فرکانس با طول رابطه‌ی عکس دارد؛ در حالی که در تئوری تیر اویلر برنولی با فرض خیزهای کوچک فرکانس با محدود طول رابطه‌ی عکس دارد.
- بدون در نظر گرفتن نیروی محوری، افزایش ضخامت سبب افزایش فرکانس طبیعی در تیر خواهد شد و فرکانس با ضخامت رابطه مستقیم دارد، که با نتایج تیر اویلر برنولی سازگار است.
- برای مقادیر بزرگ‌تر w/h ، اختلاف بین نتایج تحلیلی و نتایج تیر اویلر برنولی بیشتر است که این نشان دهنده تأثیر جملات غیرخطی بر فرکانس طبیعی است.
- در تمام بارهای محوری، نتایج تغییر شکل برشی به حل عددی سه بعدی نزدیکتر از سایر روش‌هاست یا دقیق‌تر این روش، حتی در خیزهای زیاد بیش از سایر تئوری‌های ذکر شده است.
- با افزایش نیروی محوری میزان فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. در واقع افزایش نیروی محوری، متناظر با افزایش سفتی سازه است.
- در مقادیر کوچک l/h فرکانس‌های محاسبه شده با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به

نتایج عددی سه بعدی نزدیکتر است و در این محدوده نتایج اویلر اختلاف زیادی دارند. با افزایش ضریب لاغری نتایج تئوری‌ها به هم نزدیکتر خواهد بود که این نشان‌دهنده اهمیت پایین برش در تیرهای بلند و نازک است.

- با در نظر گرفتن نیروی محوری، با افزایش چگالی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و مانند حالت قبل فرکانس با جذر چگالی رابطه‌ی عکس دارد.
- با در نظر گرفتن نیروی محوری، افزایش طول سبب کاهش فرکانس طبیعی در تیر خواهد شد، ولی مانند حالت قبل فرکانس با I/l رابطه ندارد.
- نیروی محوری رابطه‌ی بین ضخامت و فرکانس طبیعی اول را تغییر می‌دهد. در غیاب نیروی محوری این رابطه خطی است؛ اما با افزایش نیروی محوری این رابطه تغییر کلی می‌کند. نمودارها فرکانس طبیعی حداقلی را نشان می‌دهند که به ازای یک ضخامت بحرانی خواهد بود.
- با افزایش ضخامت بار کمانش افزایش می‌یابد و با توان سوم ضخامت رابطه‌ی مستقیم دارد که با تئوری ستون اویلر سازگار است.
- افزایش طول سبب کاهش بار کمانش در تیر خواهد شد و بار کمانش با I/l^2 متناسب است. این موضوع نیز با تئوری ستون اویلر هماهنگی دارد.

۶-۳-پیشنهادها

- جهت انجام مطالعه جامع‌تر در زمینه جاری، موارد زیر قابل بررسی هستند:
- استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه بالاتر؛
- بررسی پاسخ سیستم تحت بار محوری وابسته به زمان؛
- بررسی پاسخ سیستم تحت بار عرضی متغیر با مکان؛
- استفاده از روش‌های دقیق‌تر در لایل‌اس معکوس‌گیری از پاسخ‌های بدست آمده؛
- در نظر گرفتن ماده به صورت ویسکوالاستیک؛
- در نظر گرفتن ماده به صورت FG؛
- بررسی تغییرات فرکانس با دامنه؛
- تعیین شکل مدها با حل معادلات مرتبه دو؛
- بررسی مسئله، وقتی بار عرضی قائم باقی نمی‌ماند؛
- بررسی تیر ضخامت متغیر (فرکانس – پاسخ – کمانش)؛
- بررسی امکان استفاده از تبدیلات فوریه در تعیین پاسخ؛

پوستہ

پیوست الف - مسائل لایه مرزی [۶۶]

در این قسمت مسائلی در نظر گرفته می شوند که در آن‌ها اغتشاش در ناحیه‌ای کوچک (باریک^۱) اثر کرده و تغییرات متغیرهای وابسته در آن خیلی زیاد است. در این دسته مسائل، پارامتر ϵ در بزرگ‌ترین مرتبه‌ی مشتق ضرب می‌شود. این نواحی باریک به مرزهای حوزه مورد بررسی متصل می‌شوند. از این‌رو، این دسته مسائل به نام‌های مسائل لایه مرزی^۲ در مکانیک سیالات، مسائل لبه‌ای^۳ در مکانیک جامدات و مسائل پوسته‌ای^۴ در کاربردهای الکترونیکی، شناخته می‌شوند. مسائل فیزیکی زیادی وجود دارند که در آن، تغییرات سریعی از یک متغیر، در ناحیه‌ی مورد بررسی اتفاق می‌افتد و ناحیه‌ی باریکی را که این تغییرات در آن اتفاق می‌افتد، لایه‌ی شوک^۵ در مکانیک جامدات و سیالات، نقطه‌ی انتقال^۶ در مکانیک کوانتم و خط یا سطح استوکس^۷ در ریاضیات می‌نامند. در این نواحی، تغییرات سریع را نمی‌توان با متغیر کند بیان کرد، اما به کمک مقیاس سریع (بزرگ‌شده یا کشیده‌شده)^۸ این کار امکان‌پذیر می‌باشد.

در این پیوست روش MAE به اختصار توضیح داده می‌شود. برای این منظور، با یک مثال ساده که حل دقیق آن نیز جهت مقایسه موجود است، به طرح و ضرورت بررسی این دسته مسائل پرداخته می‌شود.

الف-۱- بررسی یک مثال ساده

حل مسئله‌ی مقدار مرزی ساده‌ی زیر را با شرایط مرزی مربوط به آن مدنظر است:

¹ Narrow region

² Boundary layer

³ Edge layer

⁴ Skin layer

⁵ Shock layer

⁶ Transition point

⁷ Stokes line and surface

⁸ Magnified or stretched scale

$$\begin{aligned} y'' + (1+\varepsilon^2)y' + (1-\varepsilon^2)y &= 0 \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \end{aligned} \tag{الف-۱}$$

که در آن ε یک پارامتر مثبت بی بعد کوچک می باشد. همچنین فرض می شود معادله و شرایط مرزی بی بعد هستند.

برای شروع، یک سری یکنواخت به صورت زیر، به عنوان پاسخ تقریبی در نظر گرفته می شود:

$$y^o(x; \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \tag{الف-۲}$$

حل فوق را حل خارجی می نامند. این حل را در معادله اصلی و شرایط مرزی آن جایگذاری کرده و سپس با برابر قرار دادن ضرایب توان های یکسان ε ، برای هر مرتبه نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} y'_0 + y_0 &= 0 \\ y_0(0) &= \alpha \\ y_0(1) &= \beta \end{aligned} \tag{الف-۳}$$

$$\begin{aligned} y'_1 + y_1 &= 0 \\ y_1(0) &= \alpha \\ y_1(1) &= \beta \end{aligned} \tag{الف-۴}$$

پاسخ معادله (الف-۳) که یک معادله مرتبه ۱ می باشد، برابر است با:

$$y_0 = c_0 e^{-x} \tag{الف-۵}$$

معادله (الف-۳) دارای دو شرط مرزی می باشد، در حالی که رابطه ای فوق فقط به یک شرط مرزی نیاز دارد. بنابراین y_0 (به جز در شرایط خاص انطباق) نمی تواند هر دو شرط مرزی را ارضا نماید.

یعنی اعمال هر شرط مرزی، یک پاسخ مختلف می دهد:

$$y_0(0) = \alpha; y_0 = \alpha e^{-x} \tag{الف-۶}$$

$$y_0(1) = \beta; y_0 = \beta e^{-x} \tag{الف-۷}$$

بنابراین به ازای هر شرط یک مقدار برای ثابت حاصل می شود که با هم متفاوت است. پس در هر صورت یک شرط مرزی ارضا نمی شود. هر گاه ضریب y' در معادله (الف-۱) مثبت باشد، شرط مرزی سمت چپ باید نادیده گرفته شود.

بنابراین پاسخ y_0 ، همان معادله (الف-۷) بوده و از آن جا حل معادله (الف-۴) به صورت است:

$$y_1 = c_1 e^{-x} + \beta x e^{1-x} \quad (\text{الف-8})$$

در این جا نیز باز همان مشکل تعدد شرایط مرزی وجود دارد که دوباره با نادیده گرفتن شرط مرزی

چپ، y_1 به صورت زیر خواهد شد:

$$y_1 = \beta(1-x)e^{1-x} \quad (\text{الف-9})$$

بنابراین پاسخ کلی (حل خارجی) به صورت زیر در می‌آید:

$$y^o = \beta e^{1-x} + \varepsilon \beta(1-x)e^{1-x} + \dots \quad (\text{الف-10})$$

که در مبدأ دارای مقدار $\beta e(1+\varepsilon)$ است که با مقدار واقعی $y(0) = \alpha$ متفاوت می‌باشد. جهت

مشخص شدن ریشه این غیریکنواختی پاسخ را با حل دقیق مورد مقایسه قرار گرفته می‌شود.

با جایگذاری $e^{sx} = y$ در (الف-1)، با توجه به شرایط مرزی، حل دقیق آن به صورت زیر به دست

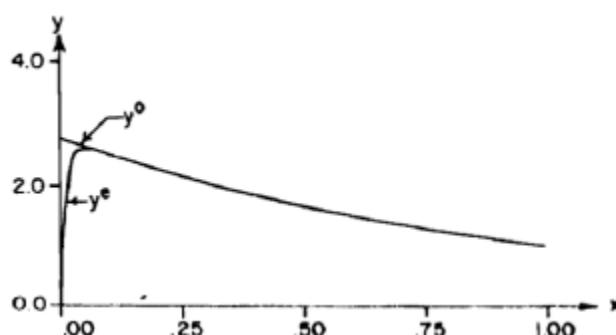
می‌آید:

$$y^e = \frac{\left[\beta - \alpha e^{-\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]} \right] e^{-(1+\varepsilon)x} + \left[\alpha e^{-(1+\varepsilon)} - \beta \right] e^{-\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]x}}{e^{-(1+\varepsilon)} - e^{-\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]}} \quad (\text{الف-11})$$

مقایسه حل خارجی و حل دقیق نشان می‌دهد که به ازای مقداری کوچک ε ، حل تقریبی خارجی، به

جز در نزدیکی مرز چپ (لایه مرزی)، بر حل دقیق منطبق می‌باشد. شکل (الف-1)، این مطلب را بهتر

نشان می‌دهد:



شکل (الف-1) مقایسه بسط حل خارجی با حل دقیق به ازای $\alpha = 0, \beta = 1, \varepsilon = 0.01$ [۶۶]

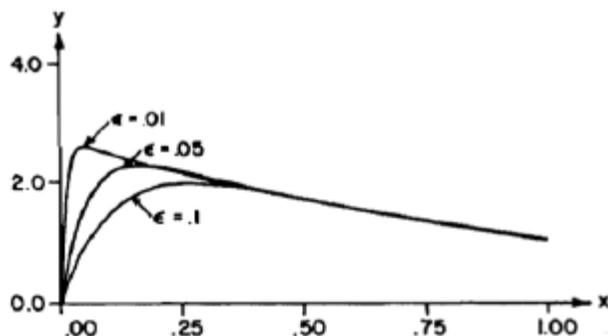
با توجه به شکل (الف-1)، حل دقیق در مبدأ، جهت ارضاء شرایط مرزی، سریعاً تغییر می‌کند. شکل

(الف-۲)، هم اثر مقادیر مختلف پارامتر کوچک ϵ را بر اندازه لایه مرزی بیان می‌کند. با توجه به شکل

(الف-۲)، با افزایش مقدار ϵ ، لایه مرزی باریک‌تر می‌شود.

با توجه به مطالب بیان شده در بالا، به نظر می‌رسد که پاسخ یک معادله را نمی‌توان بر حسب یک

مقیاس تنها بیان کرد



شکل (الف-۲) اثر مقدار پارامتر اغتشاشی بر اندازه لایه مرزی به ازای $\alpha = 0, \beta = 1$ [۶۶]

الف-۲-روش حل لایه مرزی

ایده‌ی اصلی در MAE این است که حل تقریبی لزوماً بر حسب یک بسط و یک مقیاس قابل بیان نیست؛ بلکه حل مسئله شامل دو یا چند بسط و مقیاس است که هر کدام در ناحیه‌ای خاص، متغیر هستند. این مقیاس‌ها باید به گونه‌ای انتخاب شوند که اولاً، بسطها تمام حوزه‌ی مورد بررسی را شامل شوند. ثانیاً، حل‌های نواحی مجاور، همپوشانی (ناحیه مشترک)^۱ داشته باشند. در اینجا با حل یک مثال، به شرح این روش پرداخته می‌شود.

معادله‌ی (الف-۱) مفروض است. وقتی $0 \rightarrow \epsilon$ ، معادله به صورت $y' + y = 0$ کاهش می‌یابد که مرتبه‌ی اول بوده و نمی‌تواند هر دو شرط مرزی را ارضاء نماید. در نتیجه یکی از شرایط مرزی باید حذف شود. در بخش (الف-۱)، با توجه به حل دقیق، مشخص شد که لایه‌ی مرزی در مبدأ است. جهت تعیین موقعیت لایه مرزی، فرض می‌شود که آن، در یکی از دو انتهای است. سپس، با توجه به آن،

^۱ Overlap

یک جمله‌ی بسط حل تعیین می‌شود. اگر بسطهای همسایه قابل‌انطباق باشند فرض درست، و گرنه لایه مرزی در انتهای دیگر قرار دارد.

در اینجا، لایه‌ی مرزی در سمت راست است و از این رو $\beta = y(1)$ باید حذف شود. سپس، حل خارجی به صورت ... $y^0(x; \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots$ در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری این حل در معادله (الف-۱) و با توجه به شرط مرزی سمت چپ، حل خارجی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$y^0 = \alpha e^{-x} + \dots \quad (\text{الف-۱۲})$$

برای بررسی رفتار حل در لایه مرزی فرضی، لازم است، همسایگی $x = 1$ بزرگ‌تر (گسترده‌تر) شود. از آنجا که بازه‌ی مورد بررسی $[0, 1]$ است، یک بازه‌ی کوچک $x - 1$ نزدیک x که در آن $x < 1$ است، بزرگ می‌شود. بنابراین پارامتر سریع به صورت $\xi = (1-x)/\varepsilon^\nu$ تعریف شده که در آن ν باید بزرگ‌تر از صفر باشد، تا ξ یک پارامتر سریع باشد. مقدار ν نامعلوم است و در حالت کلی، یک مقدار قیاسی است و باید از طریق تحلیل تعیین شود. به هر حال، با تغییر متغیر $\xi = (1-x)/\varepsilon^\nu$ ، معادله (الف-۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \varepsilon^{-\nu} (1 + \varepsilon^2) \frac{dy}{d\xi} + (1 - \varepsilon^2) y = 0 \quad (\text{الف-۱۳})$$

با ثابت نگه داشتن ν وقتی که $\varepsilon \rightarrow 0$ ، جملات غالب^۱ معادله فوق، به صورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \varepsilon^{-\nu} \frac{dy}{d\xi} + y = 0 \quad (\text{الف-۱۴})$$

شكل حدی معادله (الف-۱۳) در $\varepsilon \rightarrow 0$ ، به مقدار ν بستگی دارد. سه امکان وجود دارد: $\nu < 1$ ، $\nu = 1$ و $\nu > 1$. اگر $\nu = 1$ ، شکل حدی معادله (الف-۱۳) به صورت $d^2 y/d\xi^2 = 0$ می‌شود که پاسخ عمومی آن برابر است با:

$$y^i = a_0 + b_0 \xi \quad (\text{الف-۱۵})$$

از آنجا که لایه مرزی در $x = 1$ فرض شد، (الف-۱۵) باید شرط مرزی $y = \beta$ را در $x = 1$ ارضا نماید.

^۱ Dominant

بنابراین برای حل داخلی نتیجه می شود:

$$y^i = \beta + b_0 \xi \quad (\text{الف-}16)$$

حل های به دست آمده خارجی (الف-12) و داخلی (الف-16)، باید بخش های مشترک داشته باشند.

برای تعیین بخش های همپوشان (مشترک) دو حل، به صورت زیر عمل می شود:

۱) در حل خارجی، به جای x ، متغیر سریع ξ را جایگزین شود. در نتیجه معادله (الف-12) با متغیر

جدید به صورت زیر درمی آید:

$$y^o = \alpha e^{-1+\varepsilon^\nu \xi} \quad (\text{الف-}17)$$

۲) حال با فرض ثابت بودن ξ ، بسط تیلور معادله فوق حول پارامتر کوچک $\varepsilon = \varepsilon$ ، نوشته می شود:

$$(y^o)^i = \alpha e^{-1} \quad (\text{الف-}18)$$

از آنجا که معادله در مرتبه صفر بررسی می شود، فقط یک جمله از بسط در نظر گرفته می شود.

۳) در حل داخلی به جای ξ ، متغیر x جایگزین می شود:

$$y^i = \beta + b_0 \frac{1-x}{\varepsilon^\nu} \quad (\text{الف-}19)$$

۴) با فرض x ثابت، بسط تیلور معادله فوق، حول $0 = \varepsilon$ ، به صورت زیر می شود:

$$(y^i)^o = \begin{cases} \beta & \text{if } b_0 = 0 \\ b_0 \frac{1-x}{\varepsilon^\nu} & \text{if } b_0 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{الف-}20)$$

۵) شرط منطبق بودن پاسخ ها، به صورت $(y^o)^i = (y^i)^o$ بیان می شود.

ارضای شرط انطباق نیازمند آن است که $\beta = \alpha e^{-1}$ که این در حالت کلی برقرار نمی باشد. حال اگر

$\nu < 1$ ، شکل حدی معادله (الف-14) به صورت $dy/d\xi = 0$ می شود که پاسخ آن $y^i = a_0$ می

باشد. با توجه به شرط مرزی در $0 = \xi$ ، پاسخ به صورت $y^i = \beta$ درمی آید. ارضای شرط انطباق

حکم می کند، $\beta = \alpha e^{-1}$ که در حالت کلی برقرار نمی باشد. پس فرض $\nu < 1$ نیز برای این حالت

اشتباه است. اگر $\nu = 1$ ، شکل حدی معادله (الف-14) به صورت $0 = d^2 y^i / d\xi^2 - dy^i / d\xi = 0$ می شود که پاسخ

آن $y^i = a_0 + b_0 e^{\xi}$ می باشد. با توجه به شرط مرزی در $\xi = 0$ ، پاسخ به صورت $y^i = \beta - b_0 + b_0 e^{\xi}$ درمی آید. پس از بیان y^i بر حسب x ، با فرض x ثابت، بسط تیلور آن حول $\varepsilon = 0$ برابر است با:

$$(y^i)^o = \begin{cases} \beta & \text{if } b_0 = 0 \\ b_0 e^{\frac{1-x}{\varepsilon}} & \text{if } b_0 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{الف-}21)$$

جهت ارضای شرط انطباق باید $\beta = \alpha e^{-1}$ و $b_0 = 0$ باشد که در حالت کلی صحیح نمی باشد. بنابراین، فرض وجود لایه مرزی در سمت راست صحیح نیست، از این رو لایه مرزی باید در مبدأ باشد. برای اینکه لایه مرزی در مبدأ باشد، حل خارجی باید در $x = 1$ معتبر باشد. بنابراین حل خارجی ای به صورت ... به صورت $y^o(x; \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots$ انتخاب می شود. با جایگذاری این بسط در معادله (الف-1) و با توجه به شرایط مرزی در $x = 1$ حل خارجی به صورت زیر در می آید:

$$y^o = \beta e^{1-x} + \dots \quad (\text{الف-}22)$$

برای بررسی وجود لایه مرزی در مبدأ، متغیر سریع را به صورت $\xi = x/\varepsilon^\nu$ معرفی می گردد. با تغییر این متغیر، معادله (الف-1)، به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \varepsilon^{-\nu} (1 + \varepsilon^2) \frac{dy}{d\xi} + (1 - \varepsilon^2) y = 0 \quad (\text{الف-}23)$$

وقتی که $\varepsilon \rightarrow 0$ ، جملات غالب معادله فوق برابر است با:

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \varepsilon^{-\nu} \frac{dy}{d\xi} + y = 0 \quad (\text{الف-}24)$$

مشابه حالت قبل، در اینجا نیز شکل حدی معادله (الف-24) در $\varepsilon \rightarrow 0$ ، به مقدار ν بستگی دارد که مشابه قبلاً $\nu = 1$ خواهد بود و حد تمایز¹ نامیده می شود. قابل ذکر است، بزرگنمایی صحیح، همیشه توسط حد تمایز حاصل می شود.

y^o برای کل ناحیه به جز بازه کوچک نزدیک مبدأ و y^i فقط برای لایه مرزی معتبر می باشند. در

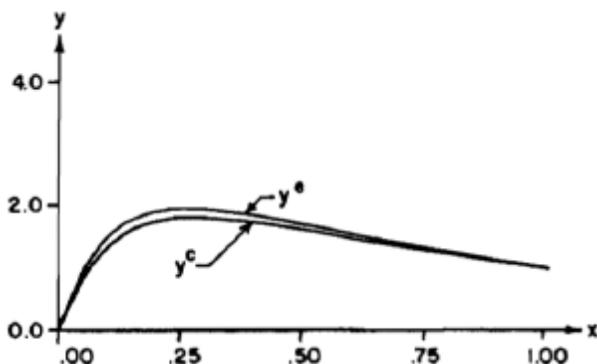
¹ Distinguished limit

ضمن این دو حل، یک ناحیه مشترک نیز دارند. برای تعیین حل کلی^۱، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$y^c = y^o + y^i - (y^o)^i \quad (\text{الف-}25)$$

با توجه به معادله فوق، حل کلی (الف-۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$y^c = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e) e^{\frac{-x}{\varepsilon}} \quad (\text{الف-}26)$$



شکل (الف-۳) مقایسه حل مركب روش‌های MAE با حل دقیق به ازای $\alpha = 0, \beta = 1, \varepsilon = 0.1$ [۶۶]

روش MAE یک پاسخ کلی ایجاد می‌کند که برای حل داخلی و خارجی قابل تفکیک می‌باشد.

^۱ Composite solution

پیوست ب - معادلات مرتبه دو

$$\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \eta^2} + \theta_1 \frac{\partial w_3^*}{\partial \eta} - 2e \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} + \theta_{W_2^*} \frac{\partial w_2^*}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} + \frac{1}{12} h^{*2} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial \eta} = 0,$$

$$h^{*2} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} + h^{*2} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial \eta^2} - 2eh^{*2} \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial \eta} - 12\theta_2 w_2^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta}$$

$$- 12\theta_2 \frac{\partial w_1^*}{\partial \eta} - 12\theta_2 u_3^* = 0$$

$$h^{*2} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial \eta} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial u_2^*}{\partial \eta} + 12\theta_2 \frac{\partial u_3^*}{\partial \eta} + 12 \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} + 12\theta_2 \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial \eta^2}$$

$$+ 12\theta_1 \frac{\partial w_2^*}{\partial \eta} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} + 12\theta_2 u_2^* \frac{\partial w_2^*}{\partial \eta} + 12\theta_{W_2^*} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} - 12e \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial t^{*2}} + 24\theta_2 \frac{\partial w_2^*}{\partial \eta} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta}$$

$$+ 12 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial u_0^*}{\partial \eta} + 12\theta_2 w_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial \eta} = 0$$

$$\theta_2 h^{*2} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial \eta^2} + \theta_2 h^{*2} \left(\frac{\partial w_2^*}{\partial \eta} \right)^2 - eh^{*2} \frac{\partial^2 w_3^*}{\partial t^{*2}} + \frac{1}{2} \theta_1 h^{*2} \left(\frac{\partial w_2^*}{\partial \eta} \right)^2 + 2\theta_2 h^{*2} w_2^* \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial \eta^2}$$

$$+ h^{*2} \frac{\partial u_0^*}{\partial \eta} \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial \eta^2} + \theta_1 h^{*2} w_2^* \frac{\partial^2 w_2^*}{\partial \eta^2} + h^{*2} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} + h^{*2} \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial u_2^*}{\partial \eta} + h^{*2} \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial w_2^*}{\partial \eta}$$

$$- w_3^* - \theta_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial \eta} - \theta_2 u_{10}^* \frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} - \frac{3}{2} w_2^{*2} - \theta_1 u_2^* \frac{\partial u_0^*}{\partial \eta} - \theta_2 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{2} \theta_1 \left(\frac{\partial w_0^*}{\partial \eta} \right)^2 = 0$$

پیوست ج - حل عددی

ج-۱- حل عددی یک بعدی

مرحله‌ی اول: تعریف المان مورد نیاز

Ansys Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete

در پنجره Beam189 library of elements المان را انتخاب کنید.

مرحله‌ی دوم: تعریف خواص ماده

فولاد را به عنوان یک ماده‌ی ایزوتropیک تعریف می‌کنیم.

Ansys Main Menu>Preprocessor>Material Properties>Material Model

سپس مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و چگالی با مقادیر زیر تعریف می‌شود.

Ex=210e9, PRXY=0.25, DENS=7800

مرحله‌ی سوم: مدل‌سازی

برای ترسیم تیر به کمک دو نقطه کلیدی یک خط ترسیم می‌شود.

Ansys Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Keypoints>In active CS

مختصات نقاط (0,0,0) و (1,0,0) است و برای ایجاد خط از مسیر

Ansys Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Lines>Straight line

استفاده می‌شود.

مرحله‌ی چهارم: تعریف سطح مقطع

Ansys Main Menu>Preprocessor>Sections>Beam>Common Sections

به کمک مسیر فوق مستطیلی به طول ۲ سانتی‌متر و عرض ۲ میلی‌متر تعریف می‌کنیم.

مرحله‌ی پنجم: مش‌بندی

در ابتدا تعداد المان‌ها ۳۸ تعیین شده و سپس تیر مش زده می‌شود.

Ansys Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Tool>Mesh

مرحله‌ی ششم: تعیین قیدها و بارگذاری

Ansys Main Menu > Preprocessor > Loads > DefineLoads > Apply > Structural > Displacement > On Keypoints

دو گرهی انتهایی جابه‌جایی در راستای y (عرضی) و گره ۱ در راستای x مقيید خواهد شد. برای بارگذاری مسئله در گره ۲ بار محوری ۱۰۰۰ نيوتون را اعمال نموده و در مدل‌سازی بار گستردۀ از گزینه فشار بر روی تیر استفاده می‌شود.

Ansys Main Menu > Preprocessor > Loads > DefineLoads > Apply > Structural > Force Moment > On Keypoints

$FX=1000$

Ansys Main Menu > Preprocessor > Loads > DefineLoads > Apply > Structural > Pressure > On Beams

PRES value=10

مرحله‌ی هفتم: حل مسئله

۱- حل استاتیکی

برای تعیین حل استاتیکی از حل static استفاده می‌شود.

Ansys Main Menu > Solution > Analysis Type> New Analysis

Static

در قسمت Large displacement Analysis Options برای در نظر گرفتن خیزهای بزرگ گزینه‌ی Analysis Options در قسمت فعال می‌شود.

Ansys Main Menu > Solution > Analysis Type> Solution Controls

۲- حل مدار

برای تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها از حل modal استفاده شد.

Ansys Main Menu > Solution > Analysis Type> New Analysis
modal

در قسمت Block lanczos Analysis Options روشن حل Block lanczos تعیین شده و تعداد مدهای مطلوب برای تعیین مشخص می‌شود. در این مسئله به دلیل وجود نیروهای محوری و تأثیر آن بر مقدار فرکانس گزینه مربوط به prestress effect نیز فعال می‌شود.

۳- حل کمانش

از حل Eigen Buckling در تعیین بار کمانش استفاده شده است.

Ansys Main Menu > Solution > Analysis Type> New Analysis

Eigen Buckling

نکته‌ی قابل توجه در آنالیز کمانش این است که پیش از تحلیل کمانش مسأله، باید حل استاتیکی با فعال کردن گزینه مربوط به پیش‌تنش انجام گیرد. در قسمت Analysis Options روش حل تعیین شده و تعداد مدهای مطلوب برای تعیین مشخص می‌شود.

۴- حل دینامیکی

در تحلیل مسائل وابسته به زمان از حل transient استفاده شد. از مسیر

Ansys Main Menu > Solution > Analysis Type> New Analysis

نوع حل را Transient و روش حل را Full انتخاب می‌کنیم. برای انجام تنظیمات مربوط به حل دینامیکی از مسیر

Ansys Main Menu > Solution > Analysis Type>sol'n controls

نوع تحریک به صورت بار پله و به مدت یک ثانیه اعمال و تعداد زیر بازه‌ها ۱۰۰ انتخاب شد.

ج-۲- حل عددی سه بعدی

مرحله‌ی اول: تعریف المان مورد نیاز

Ansys Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete

در پنجره library of elements المان plane82 و solid95 را انتخاب کنید.

مرحله‌ی دوم: تعریف خواص ماده

فولاد را به عنوان یک ماده ایزوتropیک تعریف می‌کنیم.

Ansys Main Menu>Preprocessor>Material Properties>Materia Model

Ex=210e9, PRXY=0.25, DENS=7800

مرحله‌ی سوم: مدلسازی

برای ترسیم تیر ابتدا مستطیل سطح مقطع رسم می‌شود.

Ansys Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create>Rectangle>By Dimensions

ابعاد مستطیل طول ۲ سانتی متر و عرض ۲ میلی متر است.

مرحله‌ی پنجم: مش بندی

در ابتدا مستطیل سطح مقطع با المان‌هایی با ابعاد یک میلی‌متر مش زده می‌شود.

Ansys Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Tool>Mesh

سپس سطح مقطع در راستای عمود بر آن اکسترود می‌شود. به‌دین منظور ابتدا از مسیر

Ansys Main Menu>Preprocessor>Modeling>Extrude>Elem ext opts

نوع المان solid95 انتخاب شده و تعداد المان‌های در راستای طول ۱۳۰ المان تعیین می‌شود؛ سپس

از مسیر

Ansys Main Menu>Preprocessor>Modeling>Extrude>Areas>Along normal

سطح مقطع به طول یک متر در راستای عمود بر سطح اکسترود می‌شود.

مرحله‌ی ششم: تعیین قیدها و بارگذاری

Ansys Main Menu > Preprocessor > Loads > DefineLoads > Apply > Structural >

Displacement > On Area

در دو سطح در انتهای جایگایی در راستای y (عرضی) را می‌بندیم و در سمت چپ در راستای x محدود

خواهد شد. برای بارگذاری مسئله در سمت راست بار محوری ۱۰۰۰ را در مرکز سطح اعمال نموده و

در مدلسازی بار گسترده از گزینه فشار بر روی سطح استفاده می‌کنیم.

Ansys Main Menu > Preprocessor > Loads > DefineLoads > Apply > Structural > Force

Moment > On Nodes

FZ=1000

Ansys Main Menu > Preprocessor > Loads > DefineLoads > Apply > Structural >

Pressure > On Areas

PRES value=10

مراحل حل و تنظیمات مربوط به آن مشابه حل یک بعدی است.

منابع

- [1] Malatkar P., (2003), “**Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates**”, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, Ph.D. thesis.
- [2] Nayfeh A.H., Pai P.F., (2004), “**Linear and Nonlinear Structural Mechanics**”, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- [3] Evan-Iwanowski R.M., (1976), “**Resonance Oscillations in Mechanical Systems**”, {Volume, Edition}, {Press}, {City}, pp. {page(s)}.
- [4] Nayfeh A.H., Mook D.T., (1979), “**Nonlinear Oscillations**”, John Wiley & Sons, New York.
- [5] Moon F.C., (1987), “**Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers**”, John Wiley & Sons, New York.
- [6] Meirovitch L., (1970), “**Analytical Methods in Dynamics**”, McGraw-Hill, New York.
- [7] Shames I.H., Dym C.L., (1985), “**Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics**”, McGraw-Hill, New York.
- [8] Cowper G.R., (1966), “The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory”, **Journal of Applied Mechanics**, 33, pp. 335-340.
- [9] Woinowsky-Krieger S., (1950), “The Effect of an Axial Force on the Vibration of Hinged Bars”, **Journal of Applied Mechanics**, 17, pp. 35-36.
- [10] Burgreen D., (1951), “Free Vibrations of a Pin-ended Column with constant Distance between Pin Ends”, **Journal of Applied Mechanics**, 18, pp. 135-139.
- [11] Eisley J.G., (1964), “Nonlinear Vibration of Beams and Rectangular Plates”, **ZAMP**, 15, pp. 167-175.
- [12] Ray J.D., Bert C.W., (1969), “Nonlinear Vibrations of a Beam with Pinned Ends”, **Journal of Engineering for Industry**, 91, pp. 997-1004.
- [13] Evensen D.A., (1968), “Nonlinear Vibrations of Beams with Various Boundary Conditions”, **AIAA Journal**, 6, pp. 370-372.
- [14] Busby H.R., Weingarten V.I., (1972), “Non-Linear Response of a Beam to Periodic Loading”, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 7, pp. 289-303.

- [15] Ho C.-H., Scott R.A., Eisley J.G., (1975), “Non-Planar, Non-Linear Oscillations of a Beam I: Forced Motions”, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 10, pp. 113-127.
- [16] Ho C.-H., Scott R.A., Eisley J.G., (1976), “Non-Planar, Non-Linear Oscillations of a Beam II: Free Motions”, **Journal of Sound and Vibration**, 47, pp. 333-339.
- [17] Bolotin V.V., (1964), “**The Dynamic Stability of Elastic Systems**”, Holden-Day, San Francisco, California.
- [18] Atluri S., (1973), “Nonlinear Vibrations of a Hinged Beam Including Nonlinear Inertia Effects”, **Journal of Applied Mechanics**, 40, pp. 121-126.
- [19] Crespo da Silva M.R.M., (1978), “Flexural-Flexural Oscillations of Beck’s Column subject to a Planar Harmonic Excitation”, **Journal of Sound and Vibration**, 60, pp. 133-144.
- [20] Crespo da Silva M.R.M., (1978), “Harmonic Non-Linear Response of Beck’s Column to a Lateral Excitation”, **International Journal of Solids and Structures**, 14, pp. 987-997.
- [21] Pai P.F., Nayfeh A.H., (1990), “Non-Linear Non-Planar Oscillations of a Cantilever Beam Under Lateral Base Excitations”, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 25, pp. 455-474.
- [22] Anderson T.J., Nayfeh A.H., Balachandran B., (1996), “Experimental Verification of the Importance of the Nonlinear Curvature in The Response of a Cantilever Beam”, **Journal of Vibration and Acoustics**, 118, pp. 21-27.
- [23] Nordgren R.P., (1974), “On Computation of the Motion of Elastic Rods”, **Journal of Applied Mechanics**, 41, pp. 777-780.
- [24] Epstein M., Murray D.W., (1976), “Three-Dimensional Large Deformation Analysis of Thin Walled Beams”, **International Journal of Solids and Structures**, 12, pp. 867-876.
- [25] Hodges D.H., Dowell E.H., (1974), “Nonlinear Equations of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades”, **NASA Technical Note D-7818**.
- [26] Dowell E.H., Traybar J., Hodges D.H., (1977), “An Experimental-Theoretical Correlation Study of Non-Linear Bending and Torsion Deformations of a Cantilever Beam”, **Journal of Sound and Vibration**, 50, pp. 533-544.

- [27] Rosen A., Friedmann P., (1979), “The Nonlinear Behavior of Elastic Slender Straight Beams Undergoing Small Strains and Moderate Rotations”, **Journal of Applied Mechanics**, 46, pp. 161-168.
- [28] Rosen A., Loewy R.G., Mathew M.B., (1987), “Nonlinear Analysis of Pretwisted Rods Using Principal Curvature Transformation, Part I: Theoretical Derivation”, **AIAA Journal**, 25, pp. 470-478.
- [29] Rosen A., Loewy R.G., Mathew M.B., (1987), “Nonlinear Analysis of Pretwisted Rods Using Principal Curvature Transformation. Part II: Numerical results”, **AIAA Journal**, 25, pp. 598-604.
- [30] Kane T.R., Ryan R.R., Banerjee A.K., (1987), “Dynamics of a Cantilever Beam Attached to a Moving Base”, **Journal of Guidance**, 10, pp. 139-151.
- [31] Hinnant H.E., Hodges D.H., (1988), “Nonlinear Analysis of a Cantilever Beam”, **AIAA Journal**, 26, pp. 1521-1527.
- [32] Dowell E.H., Traybar J., Hodges D.H., (1977), “An Experimental-Theoretical Correlation Study of Non-Linear Bending and Torsion Deformations of a Cantilever Beam”, **Journal of Sound and Vibration**, 50, pp. 533-544.
- [33] Crespo da Silva M.R.M., Zaretzky C.L., Hodges D.H., (1991), “Effects of Approximations on the Static and Dynamic Response of a Cantilever with a Tip Mass”, **International Journal of Solids and Structures**, 27, pp. 565-583.
- [34] Hinnant H.E., Hodges D.H., (1988), “Nonlinear Analysis of a Cantilever Beam”, **AIAA Journal**, 26, pp. 1521-1527.
- [35] Dowell E.H., Traybar J., Hodges D.H., (1977), “An Experimental-Theoretical Correlation Study of Non-Linear Bending and Torsion Deformations of a Cantilever Beam”, **Journal of Sound and Vibration**, 50, pp. 533-544.
- [36] Crespo da Silva M.R.M., Hodges D.H., (1986), “Nonlinear Flexure and Torsion of Rotating Beams, with Application to Helicopter Rotor Blades. I: Formulation”, **Vertica**, 10, pp. 151-169.
- [37] Crespo da Silva M.R.M., Hodges D.H., (1986), “Nonlinear Flexure and Torsion of Rotating Beams, with Application to Helicopter Rotor Blades. II: Response and Stability Results”, **Vertica**, 10, pp. 171-186.
- [38] Crespo da Silva M.R.M., (1988), “Non-Linear Flexural-Flexural-Torsional-Extensional Dynamics of Beams. I: Formulation”, **International Journal of Solids and Structures**, 24, pp. 1225-1234.

- [39] Crespo da Silva M.R.M., (1991), “Equations for Nonlinear Analysis of 3d Motions of Beams”, **Applied Mechanics Reviews**, 44, pp. 51-59.
- [40] Pai P.F., Nayfeh A.H., (1991), “Three-Dimensional Nonlinear Vibrations of Composite Beams. I: Equations of Motion”, **Nonlinear Dynamics**, 1, pp. 477-502.
- [41] Pai P.F., Nayfeh A.H., (1992), “A Nonlinear Composite Beam Theory”, **Nonlinear Dynamics**, 3, pp. 273-303.
- [42] Pai P.F., Nayfeh A.H., (1994), “A Fully Nonlinear Theory of Curved and Twisted Composite Rotor Blades Accounting for Warpings and Three-Dimensional Stress Effects”, **International Journal of Solids and Structures**, 31, pp. 1309-1340.
- [43] Hodges D.H., Crespo da Silva M.R.M., Peters D.A., (1988), “Nonlinear Effects in the Static and Dynamic Behavior of Beams and Rotor Blades”, **Vertica**, 12, pp. 243-256.
- [44] Wang T.M., Issa M.S., (1987), “Extensional Vibrations of Continuous Circular Curved Beams with Rotary Inertia and Shear Deformation, II Forced Vibration”, **Journal of Sound and Vibration**, 114, 2, pp. 309-323.
- [45] Jategaonkar R., Chehil D.S., (1989), “Natural Frequencies of a Beam with Varying Section Properties”, **Journal of Sound and Vibration**, 133, 2, pp. 303-322.
- [46] Ma A.-J., Chen S.-H., Song D.-T., (1995), “A New Method of Nonlinear Response Analysis for Large Deflection Forced Vibrations of Beams”, **Finite Elements in Analysis and Design**, 20, 1, pp. 39-46.
- [47] Foda M.A., (1999), “Influence of Shear Deformation and Rotary Inertia on Nonlinear Free Vibration of a Beam with Pinned Ends”, **Computers and Structures**, 71, 6, pp. 663-670.
- [48] Yoon K.-Y, Park N.-H., Choi Y.-J., Kang Y.-J., (2006), “Natural Frequencies of Thin-Walled Curved Beams”, **Finite Elements in Analysis and Design**, 42, pp. 1176-1186.
- [49] Kang Y.-J., Yoon K.-Y, (1994), “Thin-Walled Curved Beams, I: Formulation of Nonlinear Equations”, **Journal of Engineering Mechanics**, 120, 10, pp. 2072-2101.

- [50] Kang Y.-J., Yoon K.-Y, (1994), “Thin-Walled Curved Beams, II: Analytical Solutions for Buckling of Arches”, **Journal of Engineering Mechanics**, 120, 10, pp. 2102-2125.
- [51] Ferreira A.J.M., Fasshauer G.E., (2006), “Computation of Natural Frequencies of Shear Deformable Beams and Plates by an RBF-Pseudospectral Method”, **Journal of Computer Methods in applied mechanics and engineering**, 196, pp. 134-146.
- [52] Van Rensburg N.F.J, Van der Merwe A.J., (2006), “Natural Frequencies and Modes of a Timoshenko Beam”, **Wave Motion**, 44, 1, pp. 58-69.
- [53] Zhong H., Liao M., (2007), “Higher-order nonlinear vibration analysis of Timoshenko beams by the spline-based differential quadrature method”, **Shock and Vibration**, 14, 6, pp. 407-416.
- [54] Wen P.H., (2008), “The fundamental solution of Mindlin plates resting on an elastic foundation in the Laplace domain and its applications”, **International Journal of Solids and Structures**, 45, pp. 1032-1050.
- [55] Chen L., (2010), “An Integral Approach for Large Deflection Cantilever Beams”, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 45, 3, pp. 301-305.
- [56] Şimşek M., (2010), “Non-Linear Vibration Analysis of a Functionally Graded Timoshenko Beam under Action of a Moving Harmonic Load”, **Composite Structures**, 92, 10, pp. 2532-2546.
- [57] Stoykov, S., Ribeiro P., (2010), “Nonlinear forced vibrations and static deformations of 3D beams with rectangular cross section: The influence of warping, shear deformation and longitudinal displacements”, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 24, pp. 1225-1234.
- [58] Li X.-F., Yu Z.-W., Zhang H., (2011), “Free Vibration of Shear Beams with Finite Rotational Inertia”, **Journal of Construction Steel Research**, 67, 10, pp. 1677-1683.
- [59] Su Y.-C., Ma C.-C., (2012), “Transient wave analysis of a cantilever Timoshenko beam subjected to impact loading by Laplace transform and normal mode methods”, **International Journal of Solids and Structures**, 49, pp. 1158-1176.
- [60] Amabili M., (2008), “**Nonlinear Vibration and Stability of Shells and Plates**”, Cambridge University Press, New York.

- [61] Boresi A.P., Chong K.P., (2000), “**Elasticity in Engineering Mechanics**”, Second Edition, John Wiley & Sons, New York.
- [62] Wang C.M., Reddy J.N. and Lee K.H., (2000), “**Shear Deformable Beams and Plates, Relationships with Classical Solutions**”, New York.
- [63] Rao S.S., (2007), “**Vibrations of continuous systems**”, John Wiley & Sons. New Jersey.
- [64] Debnath L., (2005), “**Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers**”, Second Edition, Birkhauser, Boston - Basel – Berlin, pp. 53-54.
- [65] Kreyszing E., (2011), “**Advanced Engineering Mathematics**”, Tenth Edition, John Wiley & Sons, New York.
- [66] Nayfeh A.H, (1933), “**Introduction to Perturbation Techniques**”, John Wiley, New York. London. Sydney. Toronto.
- [67] Ansys11 user manual
- [68] جاهد مطلق ح ر، نوبان م ر، اشراقی م ا، (۱۳۸۵)، ”اجزای محدود انسیس“، انتشارات دانشگاه تهران.

Abstract

In this research, mathematical and numerical analysis of beams with moderately large deflection under transverse and axial load are presented. These equations are derived using the first order shear deformation theory. The kinematic of problem is according to the von karman strain-displacement relation and the Hook's law is used as the constitutive equation. These equations which are a system of coupled nonlinear partial differential equations with constant coefficients have been derived by using the Hamilton's principle. The matched asymptotic expansion method (MAE) and the Laplace transform has been applied to obtain the equations in Laplace domain. These displacements have been transmitted to the time domain by using the residual theorem. Based on this analytical solution, the response of the system, the buckling load and the natural frequencies, are determined for a given set of initial values. Finally, a parametric study is performed to investigate the effects of the various parameters such as thickness, density and length on the system response, natural frequency and buckling load. The results are compared with the numerical method too.

Key words: First order shear deformation theory, Frequency analysis, Perturbation technique, Matched asymptotic expansion method, Moderately large deflection, Finite elements method.



Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering

**Mathematical and numerical analysis of a beam with
moderately large deflection under transverse dynamic
load using first order shear deformation theory**

Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
Master of Science (M.Sc)
In Mechanical Engineering, Applied mechanics

Fatemeh Sohani

Supervisor:
Dr. Hamid Reza Eipakchi

2013