بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندســی مکانیک

گروه تبدیل انرژی

مدل‌سازی ریاضی برای انتقال حرارت و انجماد در ریخته‌گری پیوسته

دانشجو:

حامد حسین زاده

استاد راهنما:

دکتر علی جباری مقدم

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

خرداد **۱۳۹۲**

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای حامد حسین زاده رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی تحت عنوان مدل‌سازی ریاضی برای انتقال حرارت و انجماد در ریخته‌گری پیوسته

که در تاریخ ۱۳۹۲/۰۳/۰۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : عالی امتیاز ۱۹) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر علی جباری مقدم	استادیار	
۲ـ استاد مشاور			
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر محسن نظری	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر محمدحسن کیهانی	استاد	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر علی عباس نژاد	استادیار	

رئیس دانشکده:

دانشکده مکانیک

تقدیم به

روان پاک **پدرم**

و قلب مهربان **مادرم**

تشکر و قدردانی

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، به‌ویژه استاد محترم آقای دکتر علی جباری مقدم که با راهنمایی‌های مدبرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

تعهد نامه

اینجانب **حامد حسین زاده** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک- گرایش تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه با عنوان **"مدل‌سازی ریاضی برای انتقال حرارت و انجماد در ریخته‌گری پیوسته"** تحت راهنمائی دکتر **علی جباری مقدم** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این تحقیق، فرآیند تغییر فاز و انتقال حرارت در فرآیند ریخته‌گری پیوسته مورد تحلیل قرار گرفته است. مختصات قالب ریخته‌گری که در این مسئله در نظر گرفته شده است بصورت ستونی و با سطح مقطع مربعی شکل است. همچنین شار خروجی از قالب و شرایط آب خنک‌کننده از قبیل دمای ورودی و پروفیل تغییر دمای آن در طول فرآیند معلوم فرض می‌شود.

در ابتدا برای قالب، با تغییر مختصات کارتزین به مختصاتی که مشابه مختصات قطبی است، معادلات انرژی حاکم برای قسمت‌های مذاب و جامد و قالب را از حالت دوبعدی به یک‌بعدی تبدیل می‌کنیم که با این کار حل معادلات به شکل ساده‌تری انجام می‌گیرد و حتی می‌توان این معادلات را به شکل تحلیلی نیز حل نمود.

چون میدان حل در قسمت‌های مایع و جامد مدام در حال تغییر هستند، معادلات بدست آمده را با انتقال مناسب دستگاه مختصات بصورتی تبدیل می‌کنیم که میدان حل در مذاب ثابت و بدون تغییر شود. برای انتقال دستگاه مختصات از روش تثبیت مرز استفاده شده است. در نهایت معادلات بدست آمده با استفاده از روش تفاضل محدود گسسته‌سازی و بصورت عددی مورد تحلیل قرار گرفته-اند. همچنین یک حل تحلیلی و با استفاده از روش تکرار متغیر برای این مسئله ارائه شده است.

در فصل اول مقدمه‌ای برای ریخته‌گری پیوسته و مسائل با مرز متحرک بیان شده است و همچنین مروری بر تحقیقات انجام شده قبلی صورت گرفته است. در فصل دوم به بیان مسئله و معادلات حاکم بر فرآیند تغییر فار در ریخته‌گری پیوسته پرداخته شده است. در فصل سوم به حل عددی مسئله اختصاص دارد و در فصل چهارم نتایج بدست آمده از این روش ارائه و مورد تحلیل قرار داده شده است. در فصل پنجم و ششم حل تحلیلی مسئله و نتایج آن گزارش شده است. در نهایت در فصل هفتم به نتیجه‌گیری و پیشنهادات پرداخته شده است. در این تحقیق نتایج برای مقادیر مختلف عدد استفان و سرعت ریخته‌گری به منظور بررسی تاثیر این پارامترها بدست آورده شده‌اند.

نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که با تغییر مختصات می‌توان مسئله دوبعدی کارتزین را به یک‌بعدی تبدیل کرد و مسئله را به شکل ساده‌تر مورد تحلیل قرار داد. در این تحقیق پارامترهای تاثیرگذار در فرآیند انجماد عبارتند از عدد استفان و سرعت ریخته‌گری؛ و در اینجا اثر این پارامترها مورد بررسی قرار گرفته است. از نتایج بدست آمده می‌توان به این اشاره کرد که با افزایش عدد استفان ضخامت لایه جامد و سرعت انجماد نیز افزایش می‌یابد.

کلمات کلیدی: فرآیند ریخته‌گری پیوسته، مسائل استفان، سرعت ریخته‌گری، روش تثبیت مرز، ضخامت لایه جامد، توزیع دما.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فهرست علائم

a	نمای تجربی استفاده شده در معادله (۲-۳۱) $[\mathrm{m^{-1}}]$
c	گرمای ویژه $[\mathrm{J\ kg^{-1}\ {}^{o}C^{-1}}]$
d	ضخامت قالب $[\mathrm{m}]$
H	طول قالب $[\mathrm{m}]$
k	ضریب هدایت گرمایی $[\mathrm{W\ m^{-1}\ {}^{o}C^{-1}}]$
L_f	گرمای نهان ذوب $[\mathrm{J\ kg^{-1}}]$
N	تعداد گریدها
P_m	محیط قالب $[\mathrm{m}]$
Q	نرخ جریان حجمی آب خنک‌کننده $[\mathrm{m^3\ s^{-1}}]$
r	جهت شعاعی مختصات قطبی $[\mathrm{m}]$
S	ضخامت جامد تشکیل شده $[\mathrm{m}]$
Ste	عدد استفان
T	دما $[\mathrm{{}^{o}C}]$
T_f	دمای نقطه ذوب $[\mathrm{{}^{o}C}]$
T_{in}	دمای ورودی مذاب به قالب $[\mathrm{{}^{o}C}]$
t	زمان $[\mathrm{s}]$
U_z	سرعت ریخته‌گری $[\mathrm{m\ min^{-1}}]$
x	جهت طولی مختصات کارتزین $[\mathrm{m}]$
y	جهت عرضی مختصات کارتزین $[\mathrm{m}]$
z	فاصله محوری از ورودی قالب $[\mathrm{m}]$
$2L$	عرض قالب $[\mathrm{m}]$

زیرنویس‌ها

i	گام زمانی در حل عددی
l	فاز مایع (مذاب)
liq	خط مایع
M	دیواره قالب
m	گام مکانی در حل عددی
n	تعداد تکرار در حل تحلیلی
s	فاز جامد
sol	خط جامد
w	آب خنک‌کننده

نمادهای یونانی

α	ضریب نفوذ حرارتی $[\mathrm{m^2\ s^{-1}}]$
ΔT_w	افزایش کلی دما در آب خنک-کننده $[\mathrm{{}^{o}C}]$
η	مختصات مکانی بدون بعد
λ	ضریب تغییر لاگرانژ
θ	دمای بدون بعد
ρ	چگالی $[\mathrm{kg\ m^{-3}}]$
τ	متغیر زمان
ζ	موقعیت فصل مشترک

فصل ۱.

مقدمه

۱-۱- مقدمه‌ای در مورد ریخته‌گری پیوسته

در ریخته‌گری پیوسته، فلز مذاب را براساس یک فرآیند پیوسته، به جامد تبدیل می‌کنند و این مکانیزم شامل چندین فرآیند تجاری مهم می‌باشد. این فرآیندها موثرترین راه برای جامد کردن حجم زیادی از فلز و تبدیل آنها به اشکال ساده برای پردازش‌های بعدی می‌باشند. در جهان، اکثر فلزات پایه (شامل بیش از ۵۰۰ میلیون تن فولاد، ۲۰ میلیون تن آلومینیم، و یک میلیون تن مس، نیکل و دیگر فلزات)، سالانه با استفاده از فرآیند ریخته‌گری پیوسته به تولید انبوه می‌رسند.

ریخته‌گری پیوسته توسط ماهیت حالت پایدار خود از دیگر فرآیندهای انجماد متمایز می‌شود. فلز مذاب در مجاورت دیواره قالب منجمد می‌شود، در حالی که بطور همزمان، از کف قالب با سرعتی که فصل مشترک جامد- مایع در یک موقعیت ثابت با زمان تغییر نکند، دوباره باز پس گرفته شده و دوباره مایع، جامد می‌شود. این فرآیند هنگامی که تمام جنبه‌های آن در حالت پایدار کار کنند، به بهترین وجه عمل می‌کند.

نسبت به دیگر فرآیندهای ریخته‌گری، ریخته‌گری پیوسته عموماً هزینه سرمایه‌گذاری بالاتر اما هزینه اجرایی کمتری دارد. این فرآیند پربازده‌ترین روش (چه از لحاظ هزینه و چه از لحاظ انرژی) برای تولید انبوه قطعات فلزی نیمه‌تمام با کیفیتی سازگار با انواع ابعاد و اشکال محسوب می‌شود. سطح مقطع قطعات می‌تواند مستطیلی، برای نورد و تبدیل آن به ورق یا صفحه، مربع یا دایره برای محصولات طویل، و حتی اشکال "استخوان سگی" برای نورد و تبدیل به تیرهای H یا L باشد.

انواع مختلف فرآیند ریخته‌گری پیوسته وجود دارد. ماشین‌های عمودی، برای ریخته‌گری آلومینیم و برخی فلزات دیگر با کاربردهای خاص، بکار می‌روند. ماشین‌های انحنادار، برای ریخته‌گری اکثر فولادها مورد استفاده قرار می‌گیرند و نیازمند خم کردن و یا راست کردن لایه در حال انجماد است. ریخته‌گری افقی، ساختمان کوچک‌تری دارد و گاهاً برای فولادها و آلیاژهای غیرآهنی بکار می-

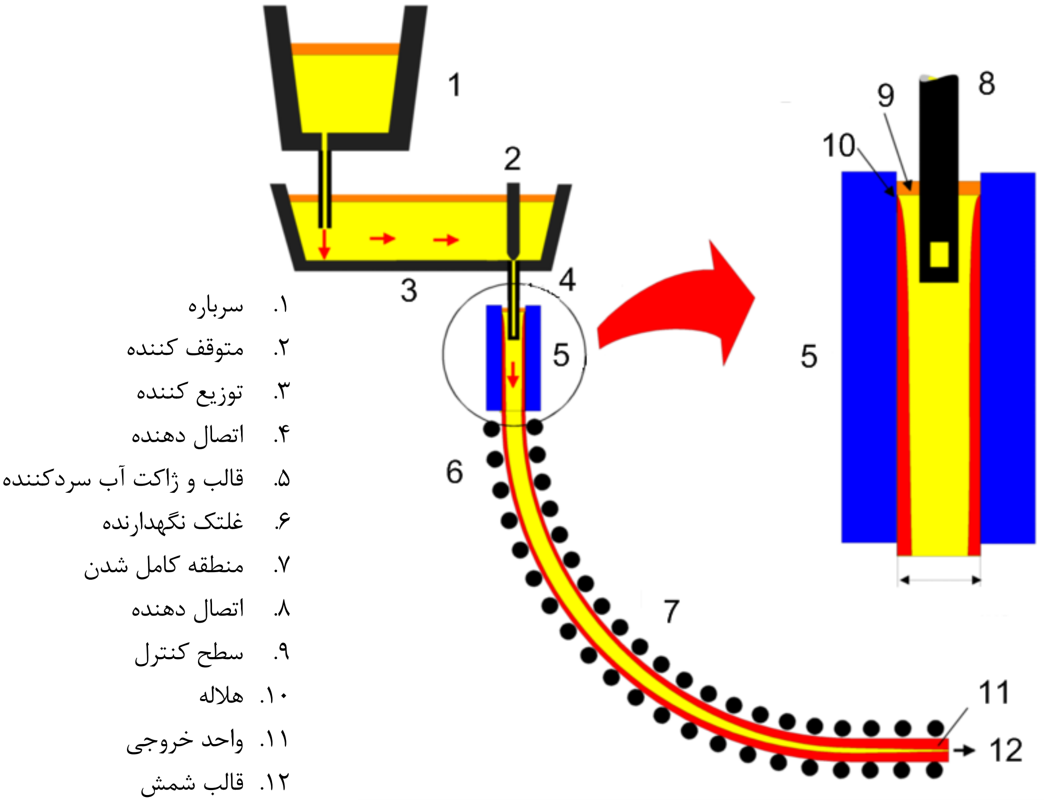
رود. در نهایت، ریخته‌گری تسمه نازک، به منظور به حداقل رساندن میزان نورد مورد نیاز، برای تولید محدود فولادها و فلزات دیگر استفاده می‌شود.

۱-۱-۱- ریخته‌گری پیوسته فولاد

ریخته‌گری پیوسته، فرآیندی نسبتاً جدید در دوره‌های تاریخی محسوب می‌شود. اگرچه ریخته-گری پیوسته تسمه توسط بسمر[1] در سال ۱۸۵۸ مطرح شد، اما ریخته‌گری پیوسته فولاد تا دهه ۶۰ میلادی استفاده گسترده نیافت. تلاش‌های اولیه مشکلات فنی زیادی داشت مانند گسیختگی[2] با این مفهوم که لایه فولاد در حال انجماد به قالب می‌چسبد، پاره می‌شود و فولاد مذاب اجازه می‌یابد در تمام کف دستگاه پاشیده شود. این مشکل توسط ژانقانز[3] در سال ۱۹۳۴ از طریق نوسان عمودی قالب (با استفاده از مفهوم "تسمه منفی" به این معنا که قالب سریع‌تر از لایه فولاد به سمت پایین بیاید تا چسبندگی اتفاق نیافتد) حل شد. بسیاری نوآوری‌ها و پیشرفت‌های دیگر، فرآیند ریخته‌گری پیوسته را به فرآیند پیچیده کنونی آن برای تولید بیش از ۹۰ درصد فولاد امروز جهان شامل فولاد کربنی ساده، آلیاژی و فولادهای زنگ نزن، تبدیل کرد.

مکانیزم فرآیند ریخته‌گری در شکل (۱-۱) نشان داده شده است. قسمت‌های مختلف خنک-سازی در این فرآیند در شکل مشخص است. قالب مسی گرما را از مذاب به آب خنک‌کننده منتقل می‌دهد. در زیر قالب که به آن منطقه خنک‌سازی ثانویه[4] گفته می‌شود، فرآیند خنک‌سازی با اسپری کردن آب انجام می‌شود و در قسمت پایین‌تر دستگاه، این عمل با انتقال حرارت بوسیله تشعشع صورت می‌گیرد. در این تحقیق قسمت مشخص شده در شکل را برای بررسی فرآیند انتقال حرارت و تشکیل انجماد در نظر گرفته شده است.

1. Bessemer
2. Breakout
3. Junghans
4. Secondary cooling zone



شکل (۱-۱)	طرح کلی از فرآیند ریخته‌گری پیوسته و اجزای آن.

چون انتقال حرارت نقش مهمی در فرآیند ریخته‌گری بازی می‌کند درک پدیده مکانیزم انتقال حرارت در این فرآیند به ما این امکان را می‌دهد که در مورد پروفیل انجماد تشکیل شده و توزیع دما پیش‌بینی‌های اولیه درستی داشته باشیم و متغیرهایی که بر این دو پارامتر اثر می‌گذارند را بشناسیم.

در قالب، فولاد مذاب در مجاورت دیواره‌های قالب مسی بدون کف (غیر محدود) که به وسیله آب سرد می‌شود، منجمد شده و یک لایه جامد را تشکیل می‌دهد. قالب بصورت عمودی نوسان می‌کند تا چسبندگی لایه به دیواره قالب برطرف شود. قرارگیری نوردهای متحرک پایین‌تر از دستگاه از چسبیدن لایه جامد به دیواره در سرعتی که با جریان فلز در حال ورود مطابقت داشته باشد، جلوگیری می‌کند در نتیجه فرآیند بصورت ایده آل در حالت پایدار پیش می‌رود. سرعت جریان مذاب توسط محدود کردن دهانه نازل، براساس سیگنالی که از یک حسگر سطحی در قالب فرستاده می‌شود،

کنترل می‌گردد. بحرانی‌ترین قسمت فرآیند انجماد اولیه در هلاله[1] است، جایی که نوک لایه منجمد شده به قالب و مذاب می‌رسد. اینجا، جایی است که سطح محصول نهایی ایجاد می‌شود و اگر مشکلاتی از قبیل تغییر سطحی اتفاق بیافتد، نواقصی مانند ترک‌های سطحی می‌توانند شکل گیرند. برای اجتناب از این موضوع، روغن یا سرباره قالب به هلاله فولاد اضافه شده و در فاصله بین قالب و لایه جاری می‌شود. علاوه بر روانکاری سطح تماس، لایه سرباره قالب از فولاد در برابر هوا محافظت کرده، ناخالصی‌ها را جذب کرده و عایق حرارتی ایجاد می‌کند.

قالب باید قادر به خارج کردن مقدار کافی حرارت از فولاد مذاب در حال عبور باشد بطوریکه ضخامت جامد تشکیل شده هنگام خروج از قالب به اندازه‌ای باشد که از ایجاد پدیده گسیختگی که در قسمت قبل به آن اشاره شد، جلوگیری شود. زیر خروجی قالب، لایه نازک منجمد (با ضخامت ۶ الی ۲۰ میلی متر) به عنوان ظرف عمل کرده و از مایع باقی‌مانده که بخش درونی لایه را ایجاد می‌کند، حفاظت می‌کند. پاشش آب یا هوا، سطح لایه بین نوردهای پشتیبان را خنک می‌کند. نرخ سیلان پاشش برای کنترل دمای سطح لایه با حداقل گرم شدن دوباره تا جامد شدن کامل هسته مذاب تنظیم می‌شود. بعد از آنکه هسته کاملا منجمد شد (در طول متالورژیکی[2] بارریز که ۱۰ تا ۴۰ متر است)، شمش پیوسته با مشعل اکسی استیلن به تختال یا شمشال یا هر طول دلخواه دیگری بریده می‌شوند.

فرآیندهای ریخته‌گری پیوسته مختلفی برای تولید مقاطعی با اشکال و ابعاد متفاوت وجود دارد. قالب‌های سنگین چهار تکه صفحه‌ای با صفحات سخت و محکم پشتیبان برای ریخته‌گری تختال‌های بزرگ و مستطیلی (به ضخامت ۵۰ تا ۲۵۰ میلی متر و عرض ۰/۵ تا ۲/۲ متر) که نورد شده و به ورق یا صفحه تبدیل می‌شوند، بکار می‌روند. قالب‌های مشابهی نیز برای ریخته‌گری شمشه‌های با مقطع تقریبا مربع که سطح مقطع آنها تا ابعاد ۶۰۰×۴۰۰ میلی متر می‌رسد، استفاده می‌شوند. قالب‌های

1. Meniscus
2. Metallurgical length

استوانه‌ای یک تکه برای ریخته‌گری شمش‌های کوچک و مربعی (به ضخامت ۱۰۰ تا ۲۰۰ میلی متر) که نورد شده و به محصولات طویل‌تری مانند مفتول‌ها، نبشی‌ها، ریل‌ها، میخ‌ها و محورها تبدیل می‌شوند، مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرآیند جدید ریخته‌گری تسمه با استفاده از نوردهای دوار بزرگ به عنوان دیواره‌های قالب برای انجماد ورق‌های فولادی به ضخامت ۱ تا ۳ میلی متر در حال توسعه است.

در هنگام ریخته‌گری مقاطع بزرگ مانند تختال، باید یک سری غلتک نورد لایه فولادی نرم بین خروجی قالب و طول متالورژیکی را پشتیبانی کند تا باد کردن[1] در اثر فشار مذاب درونی به حداقل برسد. غلتک‌های اضافی دیگری نیز برای وادار کردن لایه به راست شدن (از طریق انتقال از بخش انحنادار به بخش مستقیم و راست مسیر) لازم است. اگر پشتیبانی و تنظیم غلتک نورد کافی نباشد، منجر به بروز ترک‌های داخلی و جدایی می‌شود. این عیوب حتی بعد از چندین نورد دیگر در عملیات‌های دیگر، در محصول نهایی باقی خواهد ماند، بنابراین کنترل فرآیند ریخته‌گری از اهمیت زیادی برخوردار است.

فرایند فوق با بستن کف قالب با یک "میله کف بند" آغاز می‌شود. بعد از آنکه فلز به میزان کافی مانند یک قطعه ریخته‌گری معمولی تا نوکش منجمد شد، میله کف بند به آرامی از طریق دستگاه ریخته‌گری پیوسته پایین می‌آید و به حالت پایدار باز می‌گردد. سپس این فرآیند بطور پیوسته از یک ساعت تا چند هفته ادامه می‌یابد تا وقتی که ذخیره فولاد به اتمام رسد و فرآیند دوباره آغاز شود. حداکثر سرعت ریخته‌گری به میزان ۰٫۱ الی ۸ متر بر دقیقه برای اجتناب از مشکلات کیفیتی - که عموما در سرعت‌های بالاتر بدتر است- توسط طول مجاز هسته مذاب کنترل می‌شود.

به دلیل تشکیل جامد در فرآیند ریخته‌گری، این مسائل را باید در زمره مسائل دوفازی قرار داد. نکته مهم در اینگونه فرآیندها این است که در حین تشکیل جامد موقعیت فصل مشترک جامد و مایع در هر مقطع قالب متفاوت بوده و با حرکت مذاب در داخل قالب مقدار بیشتری از مایع به جامد تبدیل

1. Bulging

می‌شود و مرز بین این دو فاز به سمت مرکز قالب حرکت می‌کند. در نتیجه قبل از هر چیز باید ابتدا مقدمه‌ای در مورد مسائل مرز متحرک ارائه داد.

۱-۲- مقدمه‌ای بر مسائل با مرز متحرک

محققین، مسائل مرز متحرک را با مسائل استفان[1] می‌شناسند. در مسائل استفان همیشه یک شرط مرزی اضافه در مسئله وجود دارد که به این شرط، شرط استفان می‌گویند. این شرط براساس موازنه انرژی در مرز بین جامد و مایع نوشته می‌شود که در آن انرژی آزاد شده یا جذب شده به دلیل فرآیند انجماد یا ذوب به سمت خارج یا داخل ناحیه حل منتقل می‌شود. روابط موجود در مسائل استفان نشان‌دهنده یک مدل ریاضی برای توضیح فرآیندهای گرمایی ایجاد شده در طی جذب یا آزاد شدن انرژی در فرآیند تغییر فاز هستند. به عنوان مثال می‌توان به فرآیندهای یخ زدن آب، انجماد فلزات، انجماد سریع غذاها[2]، ذوب یخ و ... اشاره کرد [۱].

عموماً محققین مسائل استفان را در صورتی که شرایط اولیه و مرزی و پارامترهای ترموفیزیکی مشخص باشند، به منظور تعیین توزیع دما در میدان مورد مطالعه و همچنین بدست آوردن موقعیت فصل مشترک مایع- جامد که به آن جبهه انجماد[3] نیز می‌گویند، مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهند. یک حالت خاص از این مسائل را می‌توان به مسئله استفان تک‌فازی[4] اشاره کرد که در آن دما را در یک طرف فصل مشترک ثابت و برابر با دمای تغییر فاز یا همان دمای ذوب در نظر می‌گیرند و تغییرات دما در فاز دیگر را مورد بررسی قرار می‌دهند. مثالی از این حالت فرآیند انجماد آب می‌باشد که در آن دما در فاز مایع برابر دمای ذوب می‌باشد [۱]. اما در تحقیق حاضر ما با مسئله استفان دوفازی مواجه هستیم، به این صورت که دما در هر دو طرف مرز متحرک در حال تغییر می‌باشد.

1. Stefan problem
2. Deep freezing of foodstuffs
3. Freezing front
4. One-phase Stefan problem

۱-۲-۱- پیشینه تاریخی مسائل مرز متحرک

مسائل مرز متحرک در ابتدا توسط جوزف استفان[1] (۱۸۹۳-۱۸۳۵) بر روی تغییر فاز جامد-مایع بین سال‌های (۱۸۹۱-۱۸۸۹) مورد مطالعه قرار گرفت، هر چند بین سال‌های (۱۷۶۲-۱۷۵۸) فیزیکدان و شیمیدان اسکاتلندی جوزف بلاک[2] (۱۷۹۹-۱۷۲۸) یک سری فعالیت‌های تجربی بر روی فرآیند تغییر فاز آب و یخ در دانشگاه گلاسکو[3] انجام داد. او اثبات کرد که انرژی حاصل از این فرآیند نمی‌تواند تنها به صورت گرمای محسوس از آن خارج شود. در نتیجه او پارامتری را با مفهوم گرمای نهان معرفی کرد [۱].

ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی جان باپتیس جوزف فوریه[4] (۱۸۳۰-۱۷۶۸) برای انتقال حرارت در فرآیند تغییر فاز مطالعات گسترده‌ای انجام داد و روابط ریاضی و فیزیکی مهمی را تهیه و در کتاب خود با عنوان "La Théorie Analytique de la Chaleur" که در سال ۱۸۲۲ به چاپ رسیده بود، منتشر کرد. ترکیب گرمای نهان در معادلات انتقال حرارت هدایتی اولین بار توسط فیزیکدان گابریل لامی[5] (۱۸۵۰-۱۷۹۵) و مهندس مکانیک امیل کلاپیرون[6] (۱۸۶۴-۱۷۹۹) در سال ۱۸۳۱ در به صورت تحلیلی مورد بحث قرار گرفت و در مقاله‌ای به چاپ رسید [۱].

۱-۳- پیشینه تحقیق

در این قسمت مروری بر تحقیقات انجام شده قبلی در زمینه ریخته‌گری پیوسته و مسائل مرز متحرک صورت گرفته است و به بررسی روش‌هایی که محققان برای حل این نوع مسائل استفاده کرده‌اند، پرداخته می‌شود.

1. Jožef Stefan
2. Joseph Black
3. Glasgow University
4. Jean Baptiste Joseph Fourier
5. Gabriel Lamé
6. Emile Clapeyron

۱-۳-۱- پیشینه تحقیق ریخته‌گری پیوسته

با اینکه ریخته‌گری پیوسته یکی از روش‌های عملی پرکاربرد و مهم در صنعت تولید فلز به دلیل هزینه اجرایی کم آن است، اما داده‌های آزمایشگاهی دقیق برای بررسی و تحلیل پارامترهای ترمودینامیکی، بدست آوردن توزیع دما در مذاب، جامد و قالب و همچنین شار حرارتی آزاد شده به دلیل انجماد، کم و نادر و انجام این آزمایشات با دشواری‌هایی روبرو است. در نتیجه، مدل‌های ساده شده مختلفی برای این مسئله پیشنهاد شده است.

به دلیل وجود تغییر فاز در فرآیندهای ریخته‌گری پیوسته، حل تحلیلی معادلات انرژی در قلمرو نامشخص و متغیر بسیار پیچیده است و بیشتر برای قالب‌های استوانه‌ای مدل تحلیلی ارائه شده است. بنابراین قالب‌ها با هندسه چهارگوشه‌دار را بیشتر بوسیله روش‌های عددی یا با استفاده از نرم-افزارهای تجاری حل کرده‌اند که در ادامه به برخی از این مدل‌ها اشاره می‌شود.

کنجیل[1] و همکارانش [۲] به صورت تئوری پدیده خنک‌سازی را در کنار قالب با سطح مقطع مربعی شکل و در ناحیه خنک‌سازی ثانویه مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها برای تحلیل خود از یک مدل ریاضی ناپایدار و دوبعدی انتقال حرارت برای محاسبه توزیع دما و همچنین مطالعه تاثیر پارامترهای ریخته‌گری بر روی کیفیت شمش، استفاده کردند. آنها این مسئله را با استفاده از روش ADI گسسته‌سازی و بصورت عددی حل کردند.

علیزاده و همکارانش [۳] مکانیزم انتقال حرارت و فرآیند تشکیل انجماد را برای فرآیند ریخته-گری پیوسته در شرایط مختلف مورد بررسی قرار دادند. مدلی را که به آن پرداختند شامل معادله ناپایدار و دوبعدی انرژی بود و آن را با استفاده از روش حجم محدود حل کردند. مدل ریاضی آنها قادر به تعیین ضخامت لایه جامد تشکیل شده و توزیع دما در قالب و جامد می‌باشد.

1. Kandeil

داس[1] [۴] مسئله حالت پایدار مربوط به ریخته‌گری پیوسته آلومینیوم که این فرآیند در یک قالب استوانه‌ای انجام می‌پذیرد را با استفاده از روش شبیه‌سازی عددی حل کرد. او با استفاده از گسسته‌سازی حجم کنترل غیر متعامد[2] و همچنین تکنیک انتقال دستگاه مختصات به حل پدیده انتقال حرارت که شامل تعیین مرز مشترک جامد و مایع و ارزیابی پروفیل دمایی در طول عملکرد ریخته‌گری پیوسته بود، پرداخت.

سانتوس[3] و همکارانش [۵] با استفاده از الگوریتم ژنتیک یک مدل ریاضی برای انجماد در فرآیند ریخته‌گری پیوسته ارائه دادند. آنها از استراتژی بهینه‌سازی برای شرایط خنک‌سازی (خنک-سازی اولیه در قالب و مرحله ثانویه) و شرایط متالوژیکی مذاب به منظور تولید با بالاترین کیفیت بهره بردند. در نهایت نتایج بدست آمده را با نتایج قبلی که از روش تجربی بدست آمده بود مقایسه کردند.

ژنگ[4] و همکارانش [۶] یک روش بدون شبکه با نام روش نقطه محدود[5] را برای مدل‌سازی فرآیند انجماد مذاب بکار بردند. آنها همچنین از روش آنتالپی[6] برای محاسبه گرمای نهان بهره بردند. آنها نتایج خود را با مسئله استفان کلاسیک و انجماد دوبعدی که با استفاده از روش روش المان محدود (FEM) حل شده بود، از نظر صحت و درستی بررسی کردند.

جانیک[7] و جایجه[8] [۷] حل عددی را برای معادله سه‌بعدی انرژی در داخل قالب برای شمش فلز در طی فرآیند ریخته‌گری پیوسته ارائه کردند. آنها این روش عددی را برای محاسبه میدان دما و ضخامت لایه جامد تشکیل شده بکار بردند. برای حل عددی، آنها از روش FEM و نرم‌افزار تجاری $ANSYS$ بهره بردند.

1. Das
2. Nonorthogonal control volume discretization
3. Santos
4. Zhang
5. Finite point method
6. Enthalpy method
7. Janik
8. Dyja

کانستیلز[1] و ونکیر[2] [8] روش المان محدود را به منظور مدل‌سازی ریاضی فرآیند ریخته‌گری پیوسته در یک قالب استوانه‌ای استفاده کردند. در این تحقیق آنها فرض کردند که مذاب با سرعت ثابتی از داخل قالب استوانه‌ای عبور می‌کند. در این تحقیق دو حالت استفان مستقیم و معکوس[3] مورد بررسی قرار گرفت. در مورد مسائل استفان مستقیم و معکوس در قسمت بعدی توضیح داده می‌شود.

علیزاده و همکارانش [۹] مدل تحلیلی جدیدی را برای محاسبه شار حرارتی محلی در قالب ریخته‌گری پیوسته ارائه کردند. این مدل محدودیت‌های مدل‌های ارائه شده قبلی در مورد تعیین شار حرارتی منتقل شده را ندارد و می‌توان از آن برای حالت‌های دیگر نیز استفاده کرد.

شی[4] و همکارش [۱۰] انتقال حرارت را در فرآیند ریخته‌گری پیوسته سیم[5] (CWC) در کانال ریخته‌گری مستطیلی شکل که به تدریج باریک می‌شود، مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. آنها در این تحقیق از روش تفاضل محدود برای حل عددی خود استفاده کردند و همچنین تاثیر پارامترهای موثر در فرآیند از جمله سرعت ریخته‌گری، دمای آب خنک‌کننده، دمای ورودی مذاب و ضریب هدایت گرمایی قالب را بر روی زمان تشکیل انجماد بررسی کردند.

مسئله ریخته‌گری پیوسته به دلیل تغییر فاز و حرکت مرز فصل مشترک را می‌توان جزء مسائل استفان در نظر گرفت و حل کرد. بنابراین در اینجا لازم است مختصری از پیشینه تحقیق مسائل دوفازی و مرز متحرک و روش‌های مورد استفاده برای حل اینگونه مسائل ارائه شود.

۱-۳-۲- پیشینه تحقیق مسائل استفان

در ابتدا تاریخچه‌ای از روش‌های مورد استفاده در مسائل مرز متحرک که در [۱] به آنها اشاره شده است را در این قسمت عنوان می‌شود.

1. Constales
2. Van Keer
3. Direct & inverse Stefan problem
4. Shi
5. Continuous wire casting

نظریه‌هایی که برای مدل‌سازی و ساده‌سازی مسائل مرز متحرک مطرح شده‌اند و معمولاً از این ایده‌ها برای حل عددی این نوع مسائل استفاده شده‌اند عبارتند از: روش تثبیت مرز[۱] (روش مرز بدون حرکت[۲]) و روش تعیین مسیر مرز[۳].

روش تثبیت مرز براساس انتقال لاندا[۴] بنا نهاده شده است. این انتقال با تغییر متغیر مناسب بصورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\eta = \frac{x}{\zeta(t)} \tag{۱-۱}$$

که در آن $\zeta(t)$ بیانگر موقعیت فصل مشترک جامد و مایع است. نقاط محدود به دو مرز $x = 0$ و $x = \zeta(t)$ $\left(0 \le x \le \zeta(t)\right)$ به دستگاه ثابت $\left(0 \le \eta \le 1\right)$ منتقل می‌شود. با استفاده از این نگاشت، قلمرو غیرخطی مسئله حذف می‌شود. از طرف دیگر معادلات حاکم به معادلات صریح تبدیل می‌شوند که از نظر جبری غیرخطی هستند. بنابراین یکی از راه‌های حل این دستگاه معادلات غیرخطی استفاده از روش‌های عددی است.

انتقال دستگاه مختصات که در بالا به آن اشاره شده، لاندا در سال ۱۹۵۰ پیشنهاد کرده بود و اولین بار در سال ۱۹۵۷ توسط کرانک[۵] برای پیاده‌سازی روش تفاضل محدود از آن استفاده شد. انتقال یک‌بعدی تعریف شده در بالا یکی از حالت‌های ساده انتقال‌های کلی است که در آنها ناحیه‌های منحنی شکل دوبعدی و سه‌بعدی به ناحیه مستطیل ثابت تبدیل می‌شوند و معمولاً با عنوان انتقال-های منحنی شکل[۶] معرفی می‌شوند. روش آنتالپی یکی از رایج‌ترین روش‌های مرز ثابت است که برای حل مسائل استفان از آن استفاده می‌شود.

1. Front fixing method
2. Boundary immobilization method
3. Front tracking method
4. Landau transformation
5. Crank
6. Curvilinear transformation

در روش تعیین مسیر مرز، موقعیت فصل مشترک جامد و مایع بطور پیوسته مشخص می‌شود. روش انتگرال تعادل گرمایی[1] مثالی از این روش است که در آن موقعیت خطوط همدما (مرز تغییر فاز نیز یکی از خطوط همدما به شمار می‌آید) بطور صریح تعیین می‌شود. روش شبکه متغیر[2] (شبکه مکانی متغیر و یا گام زمانی متغیر) که روشی برای تعیین مرز فاز است مثالی دیگر از نظریه تعیین مسیر مرز به شمار می‌آید. در این روش تعداد شبکه‌های مکانی بین مرز ثابت $x = 0$ و مرز متحرک $x = \zeta(t)$ ثابت و برابر با N است و بنابراین مرز متحرک همیشه در گره Nام قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که بخاطر حرکت مرز موقعیت گره‌ها و همچنین اندازه شبکه‌ها بطور پیوسته در حال تغییر است.

اکنون در زیر به تحقیقاتی که بیشتر از روش‌های ذکر شده در بالا در حل مسائل استفاده شده است اشاره می‌شود.

اسلوتا[3] [۱۱] مسئله استفان را در دو حالت مستقیم و معکوس حل کرد. مسائل استفان مستقیم به مسائلی گفته می‌شود که در آنها توزیع دما و موقعیت مرز متحرک مجهول است و هدف محققان از تحلیل این مسائل بدست آوردن این پارامترها است، اما مسائل استفان معکوس به مسائلی گفته می‌شود که در آنها توزیع دما و تابعی که دما را در مرز نشان دهد (یکی از شرایط مرزی)، مجهول است. حل اینگونه شامل یافتن این دو پارامتر است در حالیکه موقعیت مرز متحرک معلوم فرض می‌شود. حلی که اسلوتا ارائه داد براساس روش تکرار متغیر[4] (VIM) بود. او در این مقاله به برتری‌های این روش در برابر روش‌های عددی از جمله روش تفاضل محدود و المان محدود پرداخت که می‌توان به عدم نیاز به گسسته‌سازی این روش اشاره کرد. او همچنین مسئله استفان معکوس را با استفاده از روش انحراف هماتاپی[5] حل کرد [۱۲]. این مسئله شامل حل توزیع دما در میدان حل و

1. Heat balance integral method
2. Variable grid method
3. Slota
4. Variational iteration method
5. Homotopy perturbation method

بدست آوردن توابعی که دما و شار حرارتی منتقل شده در مرز را نشان دهد، بود در حالیکه موقعیت فصل مشترک معلوم در نظر گرفته شده بود. محاسبات نشان می‌داد که این روش نیز روشی موثر برای حل مسائل مورد نظر به شمار می‌آید.

اسلوتا در تحقیقی دیگر به همراه زیلونکا[1] با استفاده از روش تکرار متغیر یک حل تقریبی برای مسئله استفان تک‌فازی ارائه دادند [۱۳]. این مسئله شامل تعیین میدان دما در میدان حل و همچنین مشخص کردن موقعیت فصل مشترک بود. میدان حل مسئله استفان تک‌فازی به دلیل تشکیل جامد با گذشت زمان در حال تغییر بود، بنابراین اسلوتا و همکارش در ابتدا با استفاده از روش تثبیت مرز و تبدیل مختصات، قلمرو حل را مستقل از زمان کردند و سپس با انتخاب تابع اولیه برای دما و موقعیت فصل مشترک، مسئله را حل کردند. هتمینی‌آک[2] و همکارانش [۱۴] نیز این مسئله را با دو روش تجزیه ادومین[3] و روش تکرار متغیر حل و نتایج حاصل از این دو روش را با هم مقایسه کردند. آنها به این نتیجه رسیدند نتایج بدست آمده از هر دو روش رضایت‌بخش است، ولی با تحلیل دقیق‌تر و تحلیل خطاهای هر دو روش نسبت به حل دقیق مسئله، روش VIM را برای حل مسائل مرز متحرک مناسب‌تر و دقیق‌تر دانستند.

راجیو[4] و همکارانش [۱۵] مسئله یک‌بعدی مرز متحرک با شرط مرزی متناوب را به کمک روش تکرار متغیر حل کردند. آنها در این مقاله با استفاده از روش تکرار متغیر دما را برحسب موقعیت مرز متحرک بدست آوردند و با جایگذاری در شرط استفان تابع موقعیت مرز متحرک را تعیین کردند و بنابراین به دنبال آن تابع توزیع دما نیز تعیین شد. لازم به ذکر است که شرط استفان رابطه بین گرادیان دما و موقعیت مرز متحرک را نشان می‌دهد. آنها در این تحقیق نیز به حجم کم محاسبات و همگرایی سریع این روش اشاره کردند.

1. Zeilonka
2. Hetmaniok
3. Adomian decomposition method
4. Rajeev

سیوویچ[1] و کادول[2] [۱۶] با روش تفاضل محدود مسئله استفان یک‌بعدی با شرط مرزی دیریشله متناوب را به منظور تعیین توزیع دما، موقعیت فصل مشترک و همچنین سرعت انجماد حل کردند. آنها این پارامترها را به ازای مقادیر مختلف عدد استفان بدست آوردند. آنها همچنین با تغییر دامنه نوسان در شرط مرزی دیریشله اثرات این پارامتر را نیز مورد بررسی قرار دادند. این دو محقق در تحقیق دیگری روش شبکه مکانی متغیر را که براساس روش تفاضل محدود گسسته‌سازی شده است، برای تشریح فرآیند انجماد در مسئله یک‌بعدی استفان با شرایط مرزی وابسته به زمان بکار بردند [۱۷]. در این تحقیق تعیین توزیع دما، موقعیت مرز متحرک و سرعت انجماد مورد نظر بود. نتایج بدست آمده تطبیق خوبی با نتایج موجود از حل دقیق داشت. از مزایای روش بکار رفته در این تحقیق، کمتر بودن زمان محاسبات نسبت به روش‌های مشابه دیگر است و همچنین می‌توان با تصحیح اندازه شبکه‌ها به دقت بالاتری دست یافت.

کاتلویی[3] [۱۸] با استفاده از دو روش شبکه متغیر و تثبیت مرز مسئله‌ای مشابه مسئله استفان را حل کرد. او معادله مورد نظر را با استفاده دو روش به فرم مناسبی برای حل تبدیل کرد. در نهایت معادلات بدست آمده را براساس روش تفضل محدود و بصورت صریح گسسته‌سازی و حل کرد.

یجت[4] [۱۹] مسئله یک‌بعدی انجماد که به تشکیل جامد در کف قالب اشاره دارد و با شرط مرزی متناوب را با استفاده از روش تفاضل محدود حل کرد. او در این تحقیق به دنبال تعیین توزیع دما در ضخامت جامد تشکیل شده و قالب، موقعیت مرز متحرک انجماد و همچنین سرعت تشکیل انجماد بود. او همچنین به مطالعه اثر پارامترهای مختلف نظیر عدد استفان، ضخامت قالب، ضریب هدایت حرارتی و ضریب نفوذ حرارتی بر روی ضخامت تشکیل شده و سرعت آن پرداخت.

1. Savović
2. Caldwell
3. Kutluay
4. Yigit

روش شبکه ثابت متناوب[1] که براساس روش تفاضل محدود بصورت صریح گسسته‌سازی شده است توسط ورما[2] و همکارانش [۲۰] به منظور حل مسئله استفان تک‌فازی کلاسیک ارائه شد. اسیتهامبی[3] [۲۱] همین مسئله را ابتدا با روش تثبیت مرز و انتقال دستگاه مختصات به فرم مناسب-تری برای حل تبدیل و سپس با استفاده از یک روش عددی ساده براساس تکنیک مشتق‌گیری خودکار[4] این مسئله را حل کرد. این روش براساس بسط سری تیلور پایه‌گذاری شده است.

ویتولا[5] و همکارانش [۲۲] با استفاده از روش تکرار پیکارد[6] مسئله دوفازی استفان را حل کردند. آنها در این مسئله یک تابع مجهول را برای توزیع دما انتخاب و با استفاده از روش پیکارد و براساس شرایط مرزی موجود تابع مجهول را تعیین کردند. برای موقعیت فصل مشترک نیز تابعی با ضرایب مجهول فرض کردند که با روش مینیمم انحراف توابع براساس شرایط مرزی و تابع دما تعیین شد.

رودیی[7] و کازمیرژاک[8] [۲۳] با استفاده از روش انتگرال تعادل حرارتی مسئله یک‌بعدی ذوب و انجماد در یک قالب با شرط مرزی انتقال حرارت جابجایی که این شرط تابع زمان نیز می‌باشد، حل کردند. آنها حالت گذرای این مسئله را با همین روش نیز مورد بررسی قرار دادند. در نهایت اثرات تغییر عدد بیوت را بر روی افزایش یا کاهش ضخامت فصل مشترک مایع و جامد بررسی کردند.

کادول و وان[9] [۲۴] با استفاده از روش‌های انتگرال تعادل حرارتی و آنتالپی مسئله انجماد را در هندسه کروی بررسی کردند. هدف از این تحقیق بدست آوردن موقعیت فصل مشترک بود. آنها این مسئله را برای مقادیر مختلف عدد استفان حل کردند و به این نتیجه رسیدند که نتایج بدست آمده از هر دو روش انطباقی خوبی با یکدیگر دارند.

1. Alternative fixed grid method
2. Verma
3. Asaithambi
4. Automatic differentiation
5. Witula
6. Picard's iterative method
7. Roday
8. Kazmierczak
9. Kwan

سیدون[1] و همکارانش [۲۵] با استفاده از روش انتگرال تعادل حرارتی و روش شبکه مکانی متغیر مسئله استفان تک‌فازی را حل کردند. روش شبکه مکانی متغیر براساس طرح صریح گسسته-سازی شده بود و هر دو مشتق‌های مکانی و زمانی براساس روش تفاضل مرکزی جایگزین شده بودند.

کادول و همکارش در سال ۲۰۰۴ کتابی در مورد مدل‌سازی ریاضی منتشر کردند [۲۶]. در فصل سوم این کتاب، انتقال حرارت در فرآیند انجماد در هندسه‌های تخت، کروی و استوانه‌ای مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. در این فصل بحث جامع و کاملی در مورد فرآیند انجماد صورت نگرفته است و فقط محدود به تعدادی از مسائل استفان که شامل انجماد بر روی یک صفحه تخت، قسمت خارجی استوانه و همچنین قسمت خارجی کره می‌باشد، است ولی می‌توان آن را برای مسائل دیگر استفان گسترش داد. روش‌های که در این بخش از کتاب معرفی و مورد استفاده قرار گرفته‌اند شامل روش آنتالپی، تثبیت مرز، انحراف هماتاپی، روش انتگرال گرهی[2] و انتگرال تعادل حرارتی می-باشند.

میشل[3] و همکارانش [۲۷] یک الگوریتم عددی جدید برای مسئله استفان یک‌بعدی وابسته به زمان در گرمایش گذرای یک قطره در حال تبخیر ارائه دادند. آنها از طرح تفاضل محدود کلر[4] برای حل عددی خود استفاده کردند. قسمت مهم و اصلی استفاده از این روش در دقت استفاده از انتقال متغیر[5] می‌باشد. همچنین کادول و سیوویچ این مسئله را بصورت عددی و با استفاده از روش‌های تثبیت مرز و شبکه مکانی متغیر که با استفاده از روش تفاضل محدود گسسته‌سازی شده بودند، حل کردند [۲۸].

1. Sadoun
2. Nodal integral method
3. Mitchell
4. The Keller box finite-difference scheme
5. Variable transformation

ویتورینو[1] و همکارانش [۲۹] از روش مرز بدون حرکت، فرآیند انجماد مواد تغییر فاز[2] (pcm) را مورد تحلیل قرار دادند. در این مسئله، انتقال حرارت هدایتی بین pcm و دیواره ظرف و انتقال حرارت جابجایی بین سطح خارجی ظرف و مایع سردی که در محیط بیرون ظرف جریان دارد، صورت می‌پذیرد. همچنین ایزماعیل[3] و هنریکس[4] [۳۰] بصورت عددی انجماد مواد pcm را در داخل پوسته کروی بررسی کردند. در این مسئله سطح خارجی کره که محتوی مایع است در معرض هوای خنک-کننده با دمای ثابت $T=T_\infty$ قرار می‌گیرد و بصورت جابجایی حرارت از کره به خارج منتقل می‌شود و همچنین دمای مایع داخل کره ثابت و برابر دمای تغییر فاز فرض می‌شود. آنها انتقال حرارت از لایه جامد به کره را هدایت خالص فرض کردند. در نهایت اثرات اندازه ضخامت کره، جنس کره، دمای اولیه مایع و دمای دیواره خارجی را بر روی زمان کامل شدن انجماد بررسی کردند.

سیدون و همکارانش [۳۱] فرم صریح گسسته‌سازی شده با استفاده از روش شبکه مکانی متغیر و روش تثبیت مرز را برای حل مسئله انتقال حرارت گذرای با تغییر فاز در نظر گرفتند. براساس نتیجه این تحقیق در روش تثبیت مرز، زمان بیشتری نسبت به روش شبکه مکانی متغیر برای انجام محاسبات صرف می‌شود.

با بررسی مقالات چاپ شده در زمینه حل مسائل استفان و مرز متحرک، همانطور که مشاهده شد یکی از تکنیک‌های حل تحلیلی اینگونه مسائل روش تکرار متغیر می‌باشد. بنابراین در ادامه به تحقیقات صورت گرفته در زمینه این روش پرداخته می‌شود و مشاهده خواهیم کرد که این روش نه تنها برای تحلیل مسائل با مرز متحرک مفیدند، بلکه برای حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل غیرخطی که در علوم مهندسی با این نوع مسائل به دفعات مواجه هستیم، نیز می‌تواند سودمند باشد.

1. Vitorino
2. Phase change materials
3. Ismail
4. Henríquez

۱-۳-۳- پیشینه تحقیق روش VIM

روش تکرار متغیر در ابتدا توسط هی[1] [۳۲] پایه‌ریزی شد. او در این تحقیق به توضیح روش و چگونگی کاربرد آن پرداخت و با حل چندین معادله دیفرانسیل غیرخطی با استفاده از این روش، موثر و کارا بودن این روش را در حل مسائل نشان داد. در نهایت با بررسی نتایج بدست آمده به برخی برتری‌های روش مورد نظر در برابر روش‌های مشابه پرداخت که از آن جمله می‌توان به سادگی کاربرد آن، همگرایی سریع روش، حجم پایین محاسبات و در نهایت اینکه می‌توان تقریب اولیه برای شروع حل را بطور اختیاری تابعی با ضرایب مجهول را انتخاب کرد که این ضرایب را می‌توان با روش‌های مختلفی تعیین کرد. همچنین او در تحقیق دیگری [۳۳] از همین روش برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل استفاده کرد و در این مقاله نیز به معرفی روش تکرار متغیر با حل چند مثال پرداخت. او در این تحقیق نیز چگونگی تعیین ضریب تغییر لاگرانژ کلی[2] را توضیح داد که در روش تکرار متغیر از آن استفاده می‌شود. بنابر توضیحات این محقق این ضریب را می‌توان با استفاده از قانون لم تغییرات[3] بدست آورد.

هی در تحقیق دیگری یک حل تحلیلی تقریبی با استفاده از همین روش پیشنهادی خود برای معادله بلازیوس در جریان آرام و لزج دوبعدی بر روی صفحه تخت محدود ارائه کرد [۳۴]. او در این تحقیق نشان داد که حتی تقریب تکرار اول این روش نیز دقت بالایی دارد و بوسیله یک نرم‌افزار ریاضی مناسب می‌توان به سرعت تکرارهای بعدی را با دقت بالاتر بدست آورد. بنابراین این روش نقش مهمی در مسائل غیرخطی بازی می‌کند.

چانگ[4] [۳۵] مسئله ناپایدار تواِش[5] را با استفاده از روش تکرار متغیر حل کرد. او تنها با دو مرتبه تکرار توانست مسئله را بصورت تحلیلی و با دقت بالا حل کند.

1. He
2. General Lagrange multiplier
3. Variational theory
4. Chang
5. Troesch

وازواز[1] [۳۶] معادله لاپلاس در سه حالت با شرایط مرزی مختلف را با استفاده از روش تکرار متغیر بصورت تحلیلی حل کرد. او در این مقاله ثابت کرد که این روش حجم محاسبات را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد و در عین حال قدرت همگرایی بالایی نیز دارد.

کوری[2] و سیفی[3] [۳۷] به معرفی طرح عددی تکرار متغیر لاپلاس[4] پرداختند. این طرح براساس روش تکرار متغیر و انتقال لاپلاس بنا نهاده شده و برای حل برخی معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی مناسب است. آنها بعد از معرفی این طرح با حل چند مثال، موثر بودن روش را نشان دادند.

گنجی و همکارانش [۳۸] معادله حرارت در فین با شرط نوک پره عایق را با استفاده از روش تکرار متغیر به منظور بدست آوردن توزیع دما حل کردند. در این مسئله ضریب هدایت حرارتی تابع دما در نظر گرفته شده است. آنها این مسئله را با استفاده از روش انحراف هماتاپی نیز حل کرده‌اند و با مقایسه نتایج حل این دو روش با حل دقیق مسئله به این نتیجه رسیدند که نتایج هر دو روش انطباق بسیار خوبی با حل دقیق مسئله دارند. همچنین کاسکون[5] و اتیی[6] [۳۹] همین مسئله را با استفاده از روش تکرار متغیر برای محاسبه توزیع دما و نیز کارایی پره حل کردند. آنها حل بدست آمده از این روش را با نتایج قبلی که از روش تجزیه ادومین مقایسه کردند و به این نتیجه رسیدند که روش تکرار متغیر، نتایج بهتر و منطقی‌تری بدست می‌دهد. با این حال برای معادلات غیرخطی با مرتبه بالا باید تکرار بیشتری با این روش انجام داد تا حل دقت کافی را داشته باشد.

1. Wazwaz
2. Khuri
3. Sayfy
4. Laplace variational iteration strategy
5. Coşkun
6. Atay

۱-۴- معرفی مسئله و اهداف تحقیق

مسئله‌ای که در این تحقیق به آن پرداخته می‌شود مطالعه پدیده تغییر فاز و انتقال حرارت در قالب با سطح مقطع مربعی شکل در فرآیند ریخته‌گری پیوسته است.

در این تحقیق، معادله توزیع دما برای قسمت‌های مایع، جامد و قالب و همچنین معادله بالانس انرژی در قسمت فصل مشترک مایع و جامد بصورت ریاضی مدل‌سازی می‌شود. ایده اصلی برای این مدل‌سازی با استفاده از نظریه تثبیت مرز انجام می‌گیرد. حل این معادلات بصورت عددی و همچنین بصورت تحلیلی و با استفاده از روش تکرار متغیر مورد بررسی قرار می‌گردد. روش عددی که در این تحقیق برای حل مسئله مرز متحرک گزارش شده با استفاده از روش تفاضل محدود گسسته‌سازی شده است [۴۰].

در نهایت اثر پارامترهای تاثیرگذار مانند عدد استفان و سرعت ریخته‌گری بر روی ضخامت انجماد، نرخ تشکیل انجماد، شار حرارتی محلی و توزیع دما در قسمت‌های مایع، جامد و قالب مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در این مسئله براساس ماهیت فرآیند ریخته‌گری پیوسته فرض حالت پایدار در نظر گرفته شده است و تغییر دما در مایع و جامد و همچنین تشکیل انجماد صرفاً به دلیل وجود سرعت در این فرآیند اتفاق می‌افتد. لازم به ذکر است دما در طول قالب در هر مقطع با یکدیگر متفاوت است ولی در طول زمان ثابت باقی می‌ماند.

بطور خلاصه پارامترهای مورد مطالعه در این تحقیق عبارتند از:

- ساده‌سازی مسئله با استفاده از تغییر مختصات و همچنین انتقال دستگاه مختصات.
- حل توزیع دما در مذاب، جامد و قالب.
- تعیین ضخامت جامد تشکیل شده در طول قالب.
- نرخ تشکیل جامد.

- محاسبه شار حرارتی محلی در طول و عرض قالب.
- بررسی تاثیر پارامترهای موثر در فرآیند تغییر فاز مانند عدد استفان و سرعت ریخته-گری بر روی توزیع دما و ضخامت لایه جامد.

فصل ۲.

بیان مسئله و معادلات حاکم

۲-۱- مقدمه

برای فرموله کردن مسئله نیاز به درک تصویر واضحی از مسئله است. درک این موضوع که چه پدیده‌هایی در فرایند تغییر فاز مایع- جامد نقش دارند و باید در نظر گرفته شوند و از چه پدیده‌های می‌توان صرفنظر کرد، به شناسایی پارامترهای درگیر با مسئله و پیاده‌سازی روابط کمک می‌کند. بنابراین در این فصل ابتدا تصویر کلی از پدیده‌هایی که در این فرآیند درگیر هستند، ارائه می‌شود، سپس مسئله با فرضیات در نظر گرفته شده و با استفاده از روش تثبیت مرز برای فاز مایع و روش گرید متغیر برای فاز جامد، مدل‌سازی می‌شود.

۲-۲- پدیده‌های فیزیکی درگیر در فرآیند تغییر فاز مایع- جامد

در جامد مولکول‌ها در اطراف موقعیت تعادلی ثابت خود ارتعاش می‌کنند در حالیکه در مایع مولکول‌ها آزادانه بین موقعیت‌هایشان در حال حرکت هستند. در شکل ماکروسکوپی به این انرژی‌های ارتعاشی، انرژی گرمایی یا انرژی حرارتی گفته می‌شود. واضح است که اتم‌ها در فاز مایع دارای انرژی به مراتب بیشتری نسبت به حالتی است که آنها در فاز جامد هستند. بنابراین قبل از اینکه جامد به مایع تبدیل شود باید مقدار مشخصی از انرژی را دریافت کند تا بر نیروهای بین مولکولی که باعث بوجود آمدن ساختمان جامد شده‌اند، غلبه کند. این انرژی به عنوان گرمای نهان ذوب مواد شناخته می‌شود و نشان‌دهنده اختلاف بین آنتالپی‌های حالت‌های جامد و مایع است. با همین استدلال مایع نیاز به خارج کردن این مقدار انرژی نهان است تا ساختمان اتم‌ها در حالت شبکه پایدارتری قرار گیرند و مایع به جامد تبدیل شود.

منطقه انتقال فاز، جایی که حالت جامد و مایع ماده هر دو وجود دارند، به عنوان فصل مشترک بیان می‌شود. ضخامت این فصل مشترک ممکن است بین چند دهم میلی‌متر تا چند سانتی‌متر متغیر باشد و شکل میکروسکوپی آن ممکن است خیلی پیچیده و به پارامترهای مختلفی (مانند خصوصیات

ذاتی ماده، نرخ خنک‌کاری، گرادیان دما در مایع و ...) وابسته باشد. برای بیشتر مواد خالص فرآیند انجماد تحت شرایط خنک‌کاری معمولی، در نقطه‌ای با دمای ثابت انجماد (T_f)، فصل مشترک بصورت سطحی معلوم ظاهر می‌شود و ضخامت آن قابل صرفنظر کردن است که آن را به عنوان جبهه معلوم[۱] می‌توان در نظر گرفت که سطح جدا کننده فازهای جامد و مایع در دمای T_f است. در حالت-های دیگر، بطور نمونه در فرآیند فوق تبرید[۲] یا در فرآیند انجماد موادی که از چند ترکیب تشکیل شده‌اند (مانند آلیاژهای دوتایی[۳]) ناحیه انتقال فاز ممکن است دارای ضخامتی باشد که این ضخامت به عنوان ناحیه حساس[۴] نامیده می‌شود. اگر اختلاف بین دماهای خط جامد و خط مایع ناچیز باشد، می‌توان از ضخامت این ناحیه چشم‌پوشی کرد.

مکانیزم‌های مختلفی در فرآیند جامد به مایع یا مایع به جامد دخالت دارند مانند تغییر فاز همراه با انتقال حرارت (و همچنین در برخی موارد همراه با انتقال جرم)، احتمال وجود فرآیند فوق تبرید، جذب یا آزاد کردن گرمای نهان، تغییر در پارامترهای ترموفیزیکی، اثرات سطح و ... . بحث کیفی این پارامترها در زیر آورده شده است [۱].

۲-۲-۱- انتقال حرارت و انتقال جرم

در این فرآیند سه حالت انتقال حرارت ممکن است در ماده رخ دهد: انتقال حرارت هدایتی، انتقال حرارت جابجایی و انتقال حرارت به روش تشعشع. انتقال حرارت هدایتی نوعی از انتقال انرژی جنبشی بین اتم‌هاست که می‌تواند بوسیله هر یک از این روش‌ها که شامل برخورد اتم‌های همسایه با یکدیگر و حرکت الکترون‌هاست، رخ دهد. در این روش جریان ماده و همچنین انتقال جرم وجود ندارد. این روشی است که بیشتر در اجسام جامد رخ می‌دهد. در مایع حرارت می‌تواند بواسطه جریان

1. Sharp front
2. Supercooling
3. Binary alloys
4. Mushy zone

ذرات رخ دهد، مانند انتقال حرارت جابجایی. تشعشع تنها روش انتقال حرارت است که می‌تواند در خلأ نیز رخ دهد (در این روش نیاز به وجود ماده واسطه نیست).

۲-۲-۲- متغیر بودن دمای فاز

فرآیند تحول از یک فاز به فاز دیگر -که ممکن است بواسطه جذب یا آزادشدن گرمای نهان باشد- در دماهای مشخصی رخ می‌دهد. این تغییر فاز با دمای فاز ذوب T_f، به فشار بستگی دارد. برای یک فشار ثابت، T_f ممکن است یک مقدار مشخص ثابت باشد که یک ویژگی ماده محسوب می-شود (برای مثال برای آب خالص در حال انجماد تحت فشار اتمسفر دمای ذوب 0^oC است.)، و یا تابعی از متغیرهای ترمودینامیکی دیگر باشد (برای مثال، میزان غلظت حلال در یک مخلوط ضد یخ).

۲-۲-۳- فوق تبرید

بیشتر اجسام جامد بلورین هستند، به این معنی که ذرات آنها (اتم‌ها، مولکول‌ها و یا یون‌ها) در یک ساختار شبکه منظم قرار گرفته‌اند. چون تشکیل یک کریستال منظم از جامد ممکن است نیاز به حرکت اتم‌ها در داخل ساختار شبکه جامد باشد، به همین دلیل ممکن است دمای ماده به کمتر از T_f برسد بدون اینکه جامدی تشکیل شود. بنابراین مایع فوق تبرید مانند مایعی در دمای کمتر از T_f ممکن است ظاهر شود. در این حالت خاصیت‌های ترمودینامیکی در حالت ناپایدار خود قرار دارند. به این ترتیب در این گونه فرآیندها ناحیه حساس وجود دارد. در فرآیند ریخته‌گری پیوسته -که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفته است- نیز فرآیند فوق تبرید رخ می‌دهد و در نتیجه ناحیه حساس تشکیل می‌شود.

۲-۲-۴- تغییرات پارامترهای ترموفیزیکی

بیشتر پارامترهای ترموفیزیکی مواد -معمولاً به آهستگی با تغییر دما تغییر می‌کنند- بیشتر تحت تاثیر تغییر فاز هستند و ممکن است تغییر فاز ماده تاثیر بسزائی در تغییر این گونه پارامترها داشته باشد و یا اصلاً تاثیر محسوسی نداشته باشد. تاثیرگذار بودن یا نبودن این پدیده به جنس ماده و مواد تشکیل دهنده آن بستگی دارد؛ برای مثال تغییر کمیت ظرفیت گرمایی در فلز آلومینیوم در دمای ذوب (۶۵۹^oC) ۱۱٪ می‌باشد در حالیکه در فلز سیلیسیوم شاهد فقط ۰,۳٪ تغییر ظرفیت گرمایی در دمای ذوب (۱۰۸۳^oC) هستیم. این قبیل ناپیوستگی‌ها در خاصیت‌های ترموفیزیکی مدل‌سازی ریاضی را پیچیده می‌کند؛ چون باعث ایجاد ناپیوستگی‌هایی در ضرایب موجود در معادلات دیفرانسیلی می‌شود. اگرچه بیشترین تاثیرات بنیادی و مهم در فرآیند تغییر فاز به علت تغییرات در چگالی است.

۲-۲-۵- تغییرات چگالی

تغییرات چگالی به علت انجماد یا میعان در بیشتر فرآیندهای واقعی که اتفاق می‌افتند، بین ۵٪ تا ۱۰٪ است اما در برخی موارد می‌تواند حتی بیشتر از ۳۰٪ نیز شود. برای بیشتر مواد، فاز جامد آنها چگال‌تر از فاز مایع‌شان است؛ در نتیجه ممکن است طی تشکیل لایه جامد حفره‌های خالی در این لایه بوجود آید و یا در هنگام ذوب شدن ظرف محتوی ماده ذوب شده دچار شکستگی شود. لازم به ذکر است که در آب این استثنا وجود دارد که فاز جامد این ماده دارای چگالی کمتری نسبت به فاز مایع آن است و هنگام منجمد شدن دچار انبساط می‌شود که باعث شکستن لوله‌ها در روزهای سرد و شناور شدن یخ‌ها در اقیانوس‌ها می‌شود.

تغییر چگالی با دما باعث بوجود آمدن جریان با انتقال حرارت جابجایی طبیعی در صورت وجود نیروی ثقل می‌شود. همه این تاثیرات ممکن است باعث پیچیده‌تر شدن فرآیند تغییر فاز می‌شود که فراتر از توانایی ما در تحلیل این تاثیرات است.

۲-۳- فرضیات استفاده شده

در این قسمت با در نظر گرفتن فرضیات مناسب بصورت زیر، تحلیل فرآیند تغییر فاز در ریخته‌گری پیوسته، به شکل ساده‌تری صورت می‌گیرد:

- در ریخته‌گری پیوسته گرمای نهان ذوب ثابت در نظر گرفته می‌شود $(L_f = cte)$.
- اثرات فوق تبرید در این فرآیند در نظر گرفته شده است ولی چون در قسمت خنک-کاری اولیه (قالب) ضخامت ناحیه حساس کم است می‌توان از ضخامت آن چشم-پوشی کرد.
- ظرفیت‌های گرمایی ویژه و ضرایب انتقال حرارت هدایتی برای فازهای جامد و مایع ثابت ولی با یکدیگر متفاوت هستند. $(c_s \neq c_l \neq c(T) \quad , \quad k_s \neq k_l \neq k(T))$.
- انتقال حرارت فقط بوسیله هدایت فرض شده است.
- از تغییر چگالی به علت تغییر فاز صرفنظر شده است. این فرض برای جلوگیری از جابجایی قسمت سیال ضروری است. از طرفی با توجه به بحثی که در قسمت قبل انجام شد، این فرض برای بیشتر حالت‌ها منطقی است، اگرچه برای همه حالت‌ها ممکن است مناسب نباشد. به هر حال این فرض از پیچیده‌تر شدن مسئله جلوگیری می‌کند.

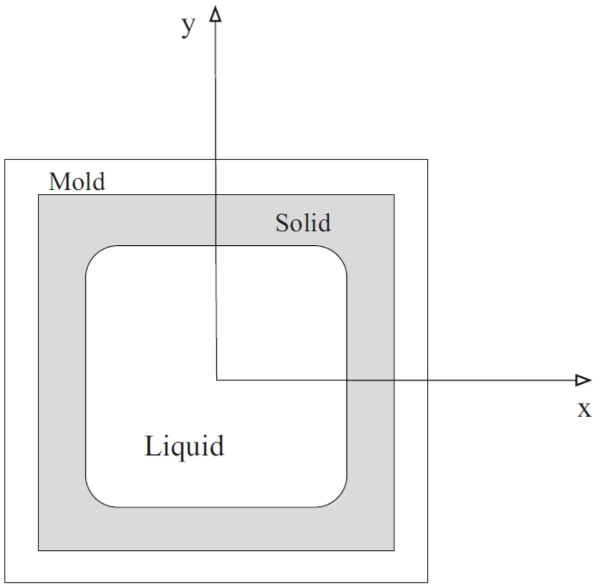
۲-۴- معادلات حاکم در فرآیند ریخته‌گری پیوسته

در این قسمت معادلات حاکم روی پدیده تغییر فاز در فرآیند ریخته‌گری پیوسته براساس فرضیات در نظر گرفته مورد بررسی قرار می‌گیرد و با استفاده از تغییر پارامترهای مناسب، مسئله به شکل ساده‌تری تبدیل می‌شود.

۲-۴-۱- معادله حاکم در مختصات کارتزین

براساس شکل(۲-۱) و طبق [۲]، [۵] و [۱۰] با در نظر گرفتن یک‌چهارم سطح مقطع معادله حاکم در مذاب بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}U_z\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (۲-۱)$$



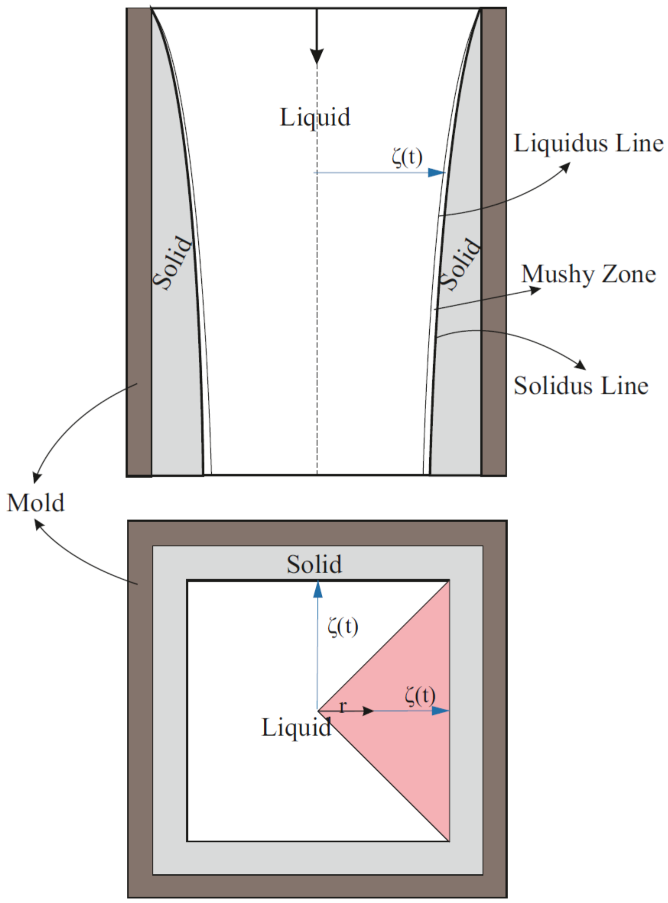
شکل(۲-۱) سطح مقطع قالب در مختصات کارتزین.

در مختصات کارتزین دوبعدی نمی‌توان تعریف دقیقی از شرط استفان در نظر گرفت و معادله حاکم بر روی این شرط را براساس موازنه انرژی نوشت. ضمن اینکه معادله توزیع دما در ضخامت جامد تشکیل شده و قالب را نمی‌توان تعریف کرد چون طبق شکل(۲-۱) شرایط مرزی حاکم در قسمت جامد و قالب براساس مختصات کارتزین تعریف مشخصی ندارند.

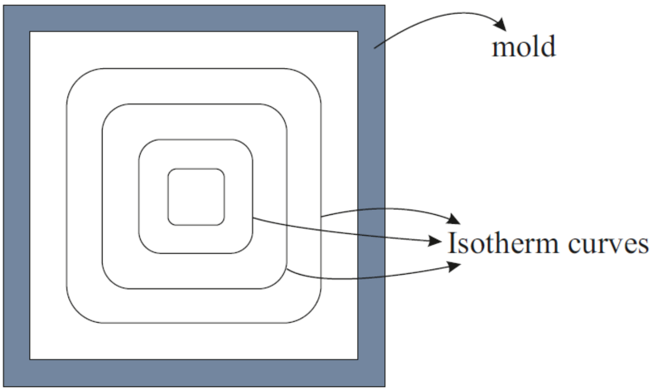
برای حل این مشکل با تغییر مختصات مناسب می‌توان این مشکل را برطرف کرد. لازم به ذکر است که این تغییر مختصات در این گونه مسائل اولین بار در این تحقیق انجام شده است.

۲-۴-۲- تغییر مختصات

در این مساله با انتخاب یک‌چهارم مقطع قالب ریخته‌گری مطابق شکل(۲-۲) می‌توان مختصات مشابه مختصات استوانه‌ای را برای این مسئله پیاده‌سازی کرد. برای اثبات این موضوع شکل(۲-۳) را در نظر بگیرید. در این شکل منحنی‌های همدما در قسمت مذاب تقریبا بصورت مربعی شکل هستند، پس با توجه به شکل(۲-۲) دما فقط در جهت r متغیر است و با تغییر زاویه، دما تغییر نمی‌کند. ضمن اینکه در [۲] و [۶] کانتور و منحنی‌های همدما در مذاب گزارش شده است که صحت این موضوع را مشخص می‌کند.



شکل(۲-۲) تغییر میدان حل در سطح مقطع قالب.



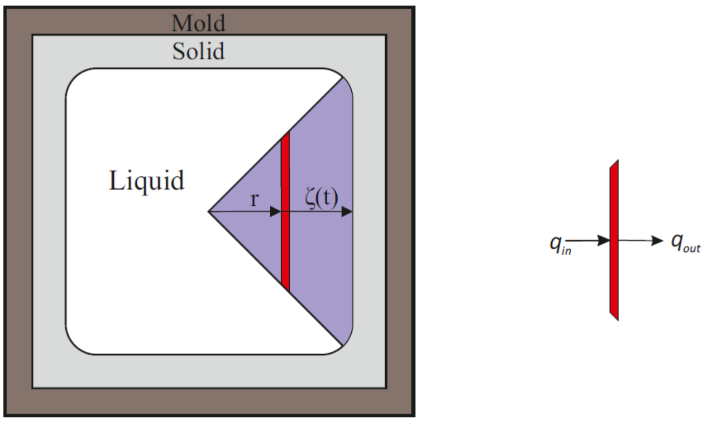
شکل(۲-۳) منحنی‌های همدما در یک مقطع از قالب.

با این تغییر مختصات علاوه بر اینکه معادله از حالت دوبعدی به حالت یک‌بعدی تبدیل می‌شود، می‌توان معادله توزیع دما در قسمت‌های لایه جامد تشکیل شده و همچنین قالب را مطابق این مختصات تعریف و به سادگی مسئله را حل کرد که در قسمت‌های بعدی به آن اشاره می‌شود.

۲-۴-۳- معادله توزیع دما در قسمت مذاب

مطابق با شکل(۲-۴) المانی را در این منطقه در نظر می‌گیریم. با پیاده‌سازی قانون بقای انرژی برای این المان داریم:

$$q_{in} - q_{out} = \dot{E}_{st} \tag{۲-۲}$$



شکل(۲-۴) المان‌گیری در قسمت مایع.

که در این معادله داریم:

$$q_{in} = q_r \tag{۲-۳}$$

$$q_{out} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \tag{۲-۴}$$

$$\dot{E}_{st} = \rho c_l (2rdr \times dz)\left(U_z \frac{\partial T_l}{\partial z}\right) \tag{۲-۵}$$

$$q_r = -k_l (2rdz)\frac{\partial T_l}{\partial r} \tag{۲-۶}$$

توجه این نکته در اینجا ضروری است که با اینکه فرآیند ریخته‌گری پیوسته به حالت پایا انجام می‌شود ولی چون مذاب با سرعت ثابت U_z در حال حرکت است پس در عبارت ذخیره انرژی (معادله (۲-۵)) مشتق مادی دما برابر با $U_z \frac{\partial T_l}{\partial z}$ است.

با جایگذاری عبارات بالا در (۲-۲) و ساده‌سازی‌های صورت گرفته، معادله توزیع دما در مذاب بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 T_l}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_l}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_l}\left(U_z \frac{\partial T_l}{\partial z}\right) \tag{۲-۷}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید رابطه بدست آمده مشابه معادله انرژی در مختصات استوانه‌ای است. چون سرعت ریخته‌گری در سرتاسر فرآیند ثابت است، رابطه بین جهت طولی z و زمان t برای یک قطعه (المان) باریک از فلز مذاب که در جهت z در حال حرکت در داخل قالب ریخته‌گری است، بصورت زیر بیان می‌شود [۲]، [۸] و [۱۰]:

$$z = U_z t \tag{۲-۸}$$

با در نظر گرفتن این رابطه و جایگذاری آن در معادله (۲-۷)، معادله انرژی بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial^2 T_l}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_l}{\partial r}=\frac{1}{\alpha_l}\frac{\partial T_l}{\partial t} \quad , \quad 0\le r<\zeta(t) \tag{۲-۹}$$

که در آن α_l ضریب نفوذ حرارتی مایع و $\zeta(t)$ موقعیت فصل مشترک جامد- مایع است.

شرایط مرزی و شرط اولیه برای مذاب بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_l(r,0)=T_{in} \tag{۲-۱۰الف}$$

$$T_l(\zeta(t),t)=T_{liq} \tag{۲-۱۰ب}$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial r}(0,t)=0 \tag{۲-۱۰ج}$$

در مسائل استفان، علاوه بر شرایط مرزی که در بالا به آنها اشاره شد، همیشه یک شرط مرزی اضافی دیگر وجود دارد که به شرط استفان معروف است. این شرط بر پایه تعادل انرژی در فصل مشترک جامد- مایع پیاده‌سازی می‌شود که در ادامه معادله حاکم بر این شرط را خواهیم دید. لازم به ذکر است که در این شرط باید قسمت جامد نیز در نظر گرفته شود و به نوعی این شرط بصورت مشترک برای ناحیه‌های جامد و مایع بیان می‌شود.

۲-۴-۴- معادله استفان (شرط استفان)

در فرآیند تغییر فاز مایع به جامد باید مقدار انرژی نهان ذوب که به دلیل تشکیل جامد آزاد می‌شود، در نظر گرفته شود و این ترم هنگام پیاده‌سازی موازنه انرژی در فصل مشترک جامد- مایع در معادله ظاهر می‌شود. در مسائل دوفازی جامد و مایع به این شرط مرزی شرط استفان گفته می‌شود. در فرآیند ریخته‌گری که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است، شرط استفان بصورت زیر تعریف می‌شود [۸]، [۲۰] و [۲۳]:

$$-\rho\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)L_f=k_l\left.\frac{\partial T_l}{\partial r}\right|_{r=\zeta(t)^-}-k_s\left.\frac{\partial T_s}{\partial r}\right|_{r=\zeta(t)^+} \tag{۲-۱۱}$$

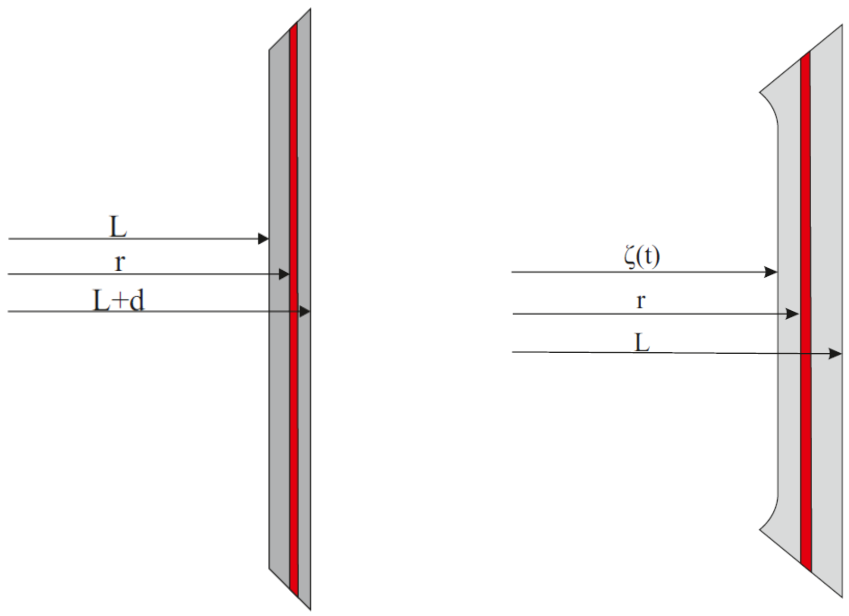
توجه داشته باشید که دو طرف معادله فوق باید مثبت باشند [۸].

به دلیل مجهول بودن موقعیت مشترک فصل تغییر فاز (ζ)، معادله (۲-۹) باید بصورت همزمان با معادله (۲-۱۱) و همچنین معادله توزیع دما در لایه جامد تشکیل شده که در ادامه خواهید دید، حل شود.

۲-۴-۵- معادله توزیع دما در لایه جامد و قالب

براساس المان مشخص شده در شکل(۲-۵) و پیاده‌سازی قانون بقای انرژی در این المان مشابه قسمت ۲-۴-۳- ، معادله توزیع دما در جامد بصورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2}+{}^1\!/_r\,\frac{\partial T_s}{\partial r}={}^1\!/_{\alpha_s}\left(U_z\,\frac{\partial T_s}{\partial z}\right) \tag{۱۲-۲}$$



(ب) (الف)

شکل(۲-۵) المان‌گیری در قسمت الف) لایه جامد و ب) قالب.

به دلیل ثابت بودن سرعت ریخته‌گری و براساس (۲-۸) داریم:

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2}+{}^1\!/_r\,\frac{\partial T_s}{\partial r}={}^1\!/_{\alpha_s}\,\frac{\partial T_s}{\partial t}\quad,\quad \zeta(t)<r\le L \tag{۱۳-۲}$$

شرایط مرزی و شرط اولیه را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$T_s(r,0)=T_{sol} \tag{۲-۱۴الف}$$

$$T_s(\zeta(t),t)=T_{sol} \tag{۲-۱۴ب}$$

$$k_s\left.\frac{\partial T_l}{\partial r}\right|_{r=L}=-q(z) \tag{۲-۱۴ج}$$

که در آن $q(z)$ مقدار حرارت خروجی از جامد و ورودی به قالب است و چون در قالب نیز حالت پایا برقرار است، مقدار حرارت خارج شده از قالب با حرارت وارد شده به آن یعنی $q(z)$، برابر است؛ چون هیچ حرارتی در قالب ذخیره و یا دفع نمی‌شود و کل حرارت وارد شده به آن عیناً از آن خارج می‌شود. بنابراین معادله توزیع دما قالب براساس شکل(۲-۵) بصورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_M}{\partial r}\right)=0 \quad , \quad L\le r\le L+d \tag{۲-۱۵}$$

همچنین شرایط مرزی حاکم در قالب بصورت زیر می‌باشد:

$$T_M(L)=T_s(L,t) \tag{۲-۱۶الف}$$

$$k_M\left.\frac{\partial T_M}{\partial r}\right|_{r=L+d}=-q(z) \tag{۲-۱۶ب}$$

معادلات (۲-۹)، (۲-۱۱) و (۲-۱۳) را نمی‌توان به روش تحلیلی حل نمود. بنابراین در این قسمت با انتقال مناسب دستگاه مختصات، مرز متحرک بین جامد و مایع به شکل ثابت تبدیل می‌شود. برای این کار از روش تثبیت مرز استفاده می‌کنیم که در ادامه به آن اشاره می‌شود.

۲-۴-۶- روش تثبیت مرز

همانطور که در فصل اول اشاره شد، برای انتقال دستگاه مختصات و همچنین بی‌بعد کردن دماهای مایع و جامد از روابط زیر استفاده می‌شود [۱۹]، [۲۱] و [۲۶]:

$$\eta = \frac{r}{\zeta(t)} \tag{۲-۱۷الف}$$

$$\theta_l = \frac{T - T_{liq}}{T_{in} - T_{liq}} \tag{۲-۱۷ب}$$

$$\theta_s = \frac{T - T_{sol}}{T_{in} - T_{sol}} \tag{۲-۱۷ج}$$

با استفاده از روابط فوق معادلات (۲-۹)، (۲-۱۱) و (۲-۱۳) به ترتیب بصورت زیر به مختصات جدید (η, t) و در میدان غیر متحرک $(0 \le \eta \le 1)$ تبدیل می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 \theta_l}{\partial \eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\eta \zeta \dot{\zeta}}{\alpha_l}\right)\frac{\partial \theta_l}{\partial \eta} = \left(\frac{\zeta^2}{\alpha_l}\right)\frac{\partial \theta_l}{\partial t} \quad , \quad 0 \le \eta < 1 \tag{۲-۱۸}$$

$$-\zeta \frac{d\zeta}{dt} = Ste\left(\alpha_l \left.\frac{\partial \theta_l}{\partial \eta}\right|_{\eta=1^-} - \left(\frac{c_s}{c_l}\right)\left(\frac{T_{in} - T_{sol}}{T_{in} - T_{liq}}\right)\alpha_s \left.\frac{\partial \theta_s}{\partial \eta}\right|_{\eta=1^+}\right) \tag{۲-۱۹}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\eta \zeta \dot{\zeta}}{\alpha_s}\right)\frac{\partial \theta_s}{\partial \eta} = \left(\frac{\zeta^2}{\alpha_s}\right)\frac{\partial \theta_s}{\partial t} \quad , \quad 1 < \eta \le l \tag{۲-۲۰}$$

که در آن Ste بیانگر عدد استفان است که طبق رابطه $c_l (T_{in} - T_{liq})/L_f$ تعریف می‌شود و همچنین l برابر است با $l = L/\zeta(t)$ [۲۴]. تعبیر فیزیکی عدد استفان بصورت نسبت انرژی محسوس به انرژی نهان خارج شده طی تغییر فاز مایع- جامد بیان می‌شود.

با انتقال دستگاه مختصات شرایط مرزی و اولیه در مایع بصورت زیر در مختصات جدید تعریف می‌شوند:

$$\theta_l(\eta, 0) = 1 \tag{۲-۲۱الف}$$

$$\theta_l(1, t) = 0 \tag{۲-۲۱ب}$$

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial \eta}(0, t) = 0 \tag{۲-۲۱ج}$$

و همچنین در جامد نیز شرایط مرزی و اولیه بصورت زیر در مختصات جدید تعریف می‌شوند:

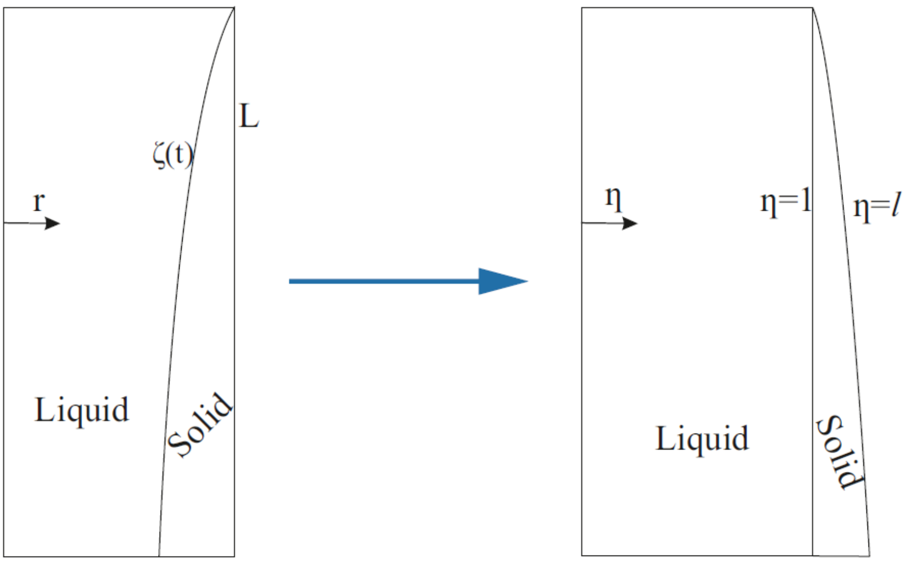
$$\theta_s(\eta,0)=0 \qquad (۲-۲۲الف)$$

$$\theta_s(1,t)=0 \qquad (۲-۲۲ب)$$

$$k_s(T_{in}-T_{sol})\frac{1}{\zeta}\times\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}\right|_{\eta=l}=-q(z) \qquad (۲-۲۲ج)$$

برای معادله شرط استفان تنها یک شرط اولیه مورد نیاز است که بصورت $\zeta(0)=L$ تعریف می‌شود.

در شکل(۲-۶) تغییر میدان حل در مایع و جامد را پس از انتقال دستگاه مختصات را می‌بینید. همانطور که از شکل مشهود است قلمرو حل در ناحیه جامد با زمان تغییر می‌کند که برای حل عددی در این ناحیه از روش شبکه مکانی متغیر (VSG) استفاده می‌شود که در فصل بعد به تفصیل درباره این روش و چگونگی استفاده از آن در این مسئله بحث خواهد شد.



شکل(۲-۶) تغییر میدان حل در مایع و جامد بعد از تغییر مختصات.

همچنین برای بی‌بعد کردن دما در ناحیه قالب از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\theta_M = \frac{T - T_{sol}}{T_{in} - T_{sol}} \quad (۲-۲۳)$$

با استفاده از این رابطه معادله توزیع دما در قالب بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \theta_M}{\partial r}\right) = 0 \quad , \quad L \le r \le L + d \quad (۲-۲۴)$$

شرایط مرزی در قالب نیز بصورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\theta_M(L) = \theta_s(L,t) \quad (۲-۲۵الف)$$

$$k_M(T_{in} - T_{sol})\left.\frac{\partial \theta_M}{\partial r}\right|_{r=L+d} = -q(z) \quad (۲-۲۵ب)$$

معادله (۲-۲۴) با شرایط مرزی (۲-۲۵) به راحتی و بصورت تحلیلی قبل حل است. با دو بار انتگرال‌گیری از معادله نتیجه زیر برای θ_M بدست خواهد آمد:

$$\theta_M = C_1 \ln r + C_2 \quad (۲-۲۶)$$

ثابت‌های C_1 و C_2 با استفاده از شرایط مرزی بصورت زیر تعیین می‌شوند:

$$C_1 = \frac{-q(z)\times(L+d)}{k_M(T_{in} - T_{sol})} \qquad C_2 = \theta_s(L,t) + \frac{q(z)\times(L+d)}{k_M(T_{in} - T_{sol})}\ln L \quad (۲-۲۷)$$

با بررسی پیشینه تحقیقات انجام شده در زمینه انتقال حرارت در ریخته‌گری پیوسته و تا جایی که دانش نگارنده یاری می‌کند تاکنون بصورت تحلیلی حلی برای توزیع دما در قالب‌های مربعی به دلیل شرایط هندسی آنها گزارش نشده است ولی در تحقیق حاضر با تغییر مختصات برای این نوع هندسه به راحتی مسئله قابل حل شد.

۲-۴-۷- مقدار حرارت خارج شده (q(z))

برای ارزیابی مقدار شار حرارتی منتقل شده به آب خنک‌کننده المانی در جهت z بر روی سطح قالب در نظر گرفته می‌شود [۹]. مقدار شار حرارتی منتقل شده از این المان برابر است با:

$$dq = \frac{\rho_w c_w Q \times dT_w}{ds} \tag{۲-۲۸}$$

که در آن dT_w مقدار افزایش دمای آب و ds مساحت المان است که عمود بر شار حرارتی است و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$ds = dz \times P_m \tag{۲-۲۹}$$

برای بدست آوردن مقدار حرارت ورودی به آب خنک‌کننده از معادله (۲-۲۸) نیازمند داشتن رابطه T_w بر حسب z هستیم که خود جزء مجهولات مسئله است، بنابراین تعداد کل مجهولات مسئله بیشتر از تعداد معادلات است و دستگاه معادلات غیرخطی غیرقابل حل می‌شود. در اینجا برای رفع این مشکل رابطه پروفیل دما در آب، از نتایج مقالات مرتبط دیگر استخراج می‌شود. در [۹] با استفاده از روش تحلیلی رابطه‌ای برای افزایش دمای آب در طول قالب بر حسب z گزارش شده است و در تحقیق حاضر از این رابطه برای بدست آوردن پارامترهای مورد نظر استفاده می‌شود. رابطه گزارش شده بصورت زیر می‌باشد:

$$T_w = T_w^0 + \Delta T_w^T \times \frac{e^{-az} - e^{-aH}}{1-e^{-aH}} \;\rightarrow\; \Delta T_w = \Delta T_w^T \times \frac{e^{-az} - e^{-aH}}{1-e^{-aH}} \tag{۲-۳۰}$$

که در آن ΔT مقدار افزایش موضعی دمای آب و ΔT_w^T افزایش کلی دمای آب در طول قالب است. با استفاده از این رابطه، رابطه‌ای برای شار حرارتی بصورت زیر بدست می‌آید که روش دستیابی به این رابطه در [۹] توضیح داده شده است:

$$q(z) = \frac{a \rho_w c_w Q \times \Delta T_w^T}{P_m} \times \frac{e^{-az}}{1-e^{-aH}} \quad \left(\mathrm{W\,m^{-2}}\right) \qquad \left(z = U_z . t\right) \tag{۲-۳۱}$$

حال با حل همزمان سه معادله کوپله (۲-۱۸)، (۲-۱۹) و (۲-۲۰)، سه مجهول $\zeta, \theta_s, \theta_l$ بدست می‌آید. ضمن اینکه با مشخص شدن مقدار شار حرارتی خارج شده توزیع دمای قالب نیز با استفاده از معادله (۲-۲۶) تعیین می‌شود.

معادلات (۲-۱۸)، (۲-۱۹) و (۲-۲۰) به دلیل اینکه به هم وابسته هستند باید تواماً حل شوند. در فصل‌های بعد این معادلات هم بصورت عددی و هم بصورت تحلیلی مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

فصل ۳.

حل عددی مسئله

۳-۱- مقدمه

در این قسمت معادله‌های بدست آمده در فصل قبل، بوسیله روش عددی حل می‌شوند. برای این منظور از نرم‌افزار $MATLAB$ استفاده خواهد شد. البته لازم به ذکر است که حل بوسیله روش عددی فقط برای معادله‌های حاکم در قسمت‌های مایع و جامد و همچنین برای شرط استفان گزارش شده است و برای جداره قالب نیازی به حل عددی نیست.

این فصل، شامل مباحثی در مورد روش عددی مورد استفاده، صورت گسسته معادلات حاکم و نحوه اعمال شرایط مرزی می‌باشد.

در این تحقیق، روش تفاضل محدود برای تحلیل انتقال حرارت در مسئله تغییر فاز در فرآیندهای ریخته‌گری پیوسته مورد استفاده قرار گرفته است. معادلات حاکم به‌صورت صریح گسسته-سازی شده‌اند. تقریب مرکزی مرتبه دوم برای مشتقات مکانی و تقریب پیشروی مرتبه اول برای مشتق زمان استفاده شده است.

۳-۲- صورت گسسته شده معادلات

در این قسمت شکل گسسته معادلات حاکم انتقال حرارت که در فصل قبل مدل‌سازی شده‌اند، ارائه می‌شود. با اعمال روش تفاضل محدود بر روی معادله (۲-۱۸)، فرم گسسته این معادله در جهت η به شکل زیر خواهد بود [۴۰]:

$$\theta_{l,i,m+1} = \theta_{l,i,m} + \frac{g\,\alpha_l}{\zeta_m^2}\left[\left(\frac{\theta_{l,i+1,m} - 2\theta_{l,i,m} + \theta_{l,i-1,m}}{h_l^2}\right) + \left(\frac{1}{\eta_i} + \frac{\eta_i \zeta_m \dot{\zeta}_m}{\alpha_l}\right)\left(\frac{\theta_{l,i+1,m} - \theta_{l,i-1,m}}{2h_l}\right)\right] \qquad (۳-۱)$$

که در آن $\theta_{l,i,m} \equiv \theta_l(\eta_i, t_m)$ و $h_l \equiv \Delta\eta$ به عنوان گام مکانی ثابت و $g \equiv \Delta t$ به عنوان گام زمانی در نظر گرفته شده‌اند.

فرم گسسته شده شرط استفان (معادله (۲-۱۹)) نیز بصورت زیر می‌باشد:

$$\zeta_{m+1}=\zeta_m-\frac{Ste}{\zeta_m}\left[\alpha_l\left(\frac{3\theta_{l,N,m}-4\theta_{l,N-1,m}+\theta_{l,N-2,m}}{2h_l}\right)-M\,\alpha_s\left(\frac{-3\theta_{s,1,m}+4\theta_{s,2,m}-\theta_{s,3,m}}{2h_s}\right)\right] \quad (۲\text{-}۳)$$

که در آن $M=\left(\frac{c_s}{c_l}\right)\left(\frac{T_{in}-T_{sol}}{T_{in}-T_{liq}}\right)$ می‌باشد. در این رابطه از تفاضل سه نقطه پسرو و پیشروی مرتبه دوم برای گرادیان دما در مرز مشترک مایع- جامد استفاده شده است که بصورت زیر می‌باشد [۴۰]:

$$\left.\frac{\partial\theta_l}{\partial\eta}\right|_{\eta=1}=\frac{3\theta_{l,N,m}-4\theta_{l,N-1,m}+\theta_{l,N-2,m}}{2h_l}+o(\Delta x^2) \quad (۳\text{-}۳)$$

$$\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}\right|_{\eta=1}=\frac{-3\theta_{s,1,m}+4\theta_{s,2,m}-\theta_{s,3,m}}{2h_s}+o(\Delta x^2) \quad (۴\text{-}۳)$$

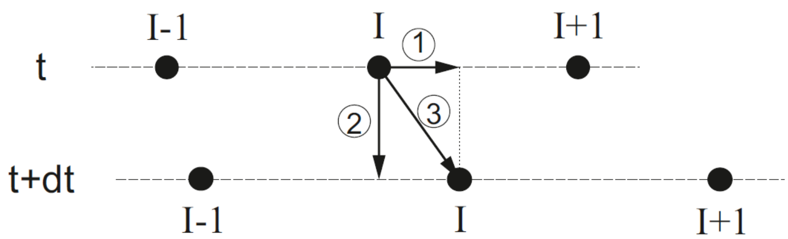
همانطور که در فصل قبل به آن اشاره شد، میدان حل در قسمت جامد با زمان متغیر است، از طرفی تعداد شبکه‌ها بین مرزهای $\eta=1$ و $\eta=l$ در همه زمان‌ها ثابت و برابر با N_s در نظر گرفته می‌شود، بنابراین اندازه گام مکانی با زمان متغیر است، در نتیجه قبل از گسسته‌سازی معادله (۲-۲۰) باید تغییر موقعیت گره‌ها را بواسطه حرکت مرز متحرک در نظر گرفته شود. برای بیان تاثیر حرکت مرز و در نظر گرفتن آن از روش شبکه مکانی متغیر (VSG) استفاده می‌کنیم که در ادامه به آن اشاره می‌شود.

۳-۲-۱- روش شبکه مکانی متغیر

در مسائلی که در آنها با تغییر موقعیت گره‌ها و همچنین تغییر اندازه شبکه مواجه هستیم، برای در نظر گرفتن اثر این تغییرات در هر گره از رابطه زیر استفاده می‌شود [۱۷]، [۱۸] و [۳۱]:

$$\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial t}\right|_i=\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}\right|_t\times\left.\frac{\partial\eta}{\partial t}\right|_i+\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial t}\right|_\eta \qquad (۵-۳)$$

در این رابطه به نوعی از مشتق مادی استفاده شده است، به این ترتیب که تغییرات کلی (مشتق مادی) دما در یک نقطه بر حسب زمان (طرف چپ معادله) برابر است با تغییر دما که تنها به واسطه گذشت زمان رخ می‌دهد ($\frac{\partial\theta_s}{\partial t}$) بعلاوه تغییر دما بواسطه تغییر مکان که باید در سرعت حرکت همان نقطه نیز ضرب شود (شکل(۳-۱) را ببینید).



بردار (۱): $\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}\right|_t\times\left.\frac{\partial\eta}{\partial t}\right|_i$

بردار (۲): $\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial t}\right|_\eta$

بردار (۳): $\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial t}\right|_i$

شکل(۳-۱) نمایش تصویری از روش شبکه مکانی متغیر

در معادله (۳-۵) $\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial t}\right|_\eta$ برابر با طرف راست معادله (۲-۲۰) است و $\left.\frac{\partial\eta}{\partial t}\right|_i$ برابر است با [۱۸]:

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{\eta_i}{l}\times\frac{dl}{dt} \qquad (۶-۳)$$

با جاگذاری معادله‌های (۲-۲۰) و (۳-۶) در معادله (۳-۵) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{\zeta^2}{\alpha_s}\right)\frac{\partial\theta_s}{\partial t}=\left(\frac{\zeta^2}{\alpha_s}\right)\frac{\eta_i}{l}\frac{dl}{dt}\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}+\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\eta^2}+\left(\frac{1}{\eta}+\frac{\eta\zeta\dot{\zeta}}{\alpha_s}\right)\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta} \quad , \quad 1<\eta\le l \qquad (۷-۳)$$

لازم به ذکر است که اندازه شبکه که برابر $\Delta\eta=\frac{(l-1)}{N_s}$ می‌باشد، در هر زمان متغیر است در حالیکه تعداد گره‌ها N_s ثابت در نظر گرفته می‌شود. همچنین در رابطه (۳-۷) مقدار $\frac{dl}{dt}$ برابر

است با $-L\dot{\zeta}\big/\zeta^2$.

حال فرم گسسته معادله (۳-۷) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\theta_{s,i,m+1}=\theta_{s,i,m}+\frac{g\alpha_s}{\zeta_m^2}\left(\frac{\theta_{s,i+1,m}-2\theta_{s,i,m}+\theta_{s,i-1,m}}{h_s^2}\right)+ g\left(\frac{\eta_i}{l}\left(\frac{L\dot{\zeta}_m}{\zeta_m^2}\right)+\frac{\alpha_s}{\eta_i\zeta_m^2}+\frac{\eta_i\dot{\zeta}_m}{\zeta_m}\right)\left(\frac{\theta_{s,i+1,m}-\theta_{s,i-1,m}}{2h_s}\right) \quad (۳-۸)$$

که در آن $\theta_{s,i,m}\equiv\theta_s(\eta_i,t_m)$ و $h_s\equiv\Delta\eta$ به عنوان گام مکانی ثابت و $g\equiv\Delta t$ به عنوان گام زمانی در نظر گرفته شده‌اند.

در تمام روابط $m+1$ معرف گام زمانی تحلیل در لحظه جدید و m معرف گام زمانی در لحظه قبل است.

۳-۳- اعمال شرایط مرزی

رابطه (۴-۱) برای $0<\eta<1$ قابل استفاده است ولی برای نقاط مرزی باید روابط دیگری بدست آورد. مرزهای دامنه محاسباتی برای قسمت مایع شامل یک شرط ورودی و دو شرط مکانی که یکی از آنها شرط تقارن در مرکز قالب $(\eta=0)$ و شرط دیگر در $\eta=1$ قرار دارد که در این نقطه دمای مایع برابر با دمای خط مایع می‌شود.

برای $\eta=0$ طبق شرط (۱-۲۱ج) داریم:

$$\theta_{l,i,m+1}=\theta_{l,i,m}+\frac{g\alpha_l}{\zeta_m^2}\left[\left(\frac{\theta_{l,i+1,m}-\theta_{l,i,m}}{h_l^2}\right)+\left(\frac{1}{\eta_i}+\frac{\eta_i\zeta_m\dot{\zeta}_m}{\alpha_l}\right)\left(\frac{\theta_{l,i+1,m}-\theta_{l,i,m}}{2h_l}\right)\right] \quad (۳-۹)$$

توجه کنید که در $\eta=0$ به دلیل تقارن داریم: $\theta_{l,i-1,m}=\theta_{l,i,m}\,(i=1)$ که با جایگذاری این رابطه در معادله (۳-۱) به معادله (۳-۹) می‌رسیم.

همچنین برای $\eta=1$ براساس شرط (۱-۲۱ب) داریم: $\theta_{l,i,m}=0$ که در آن $i=N_l$ و $m=1,2,3,\ldots$.

برای قسمت جامد نیز می‌توان روابط مشابهی برای مرزهای ناحیه محاسباتی بدست آورد. رابطه (۳-۸) برای $1<\eta<l$ برقرار است و برای $\eta=1$ براساس شرط (۱-۲۲ب) داریم: $\theta_{s,i,m}=0$ که $i=1$ و $m=1,2,3,...$. همچنین برای $\eta=l$ طبق شرط (۱-۲۲ج) داریم:

$$\theta_{s,l,m+1}=\theta_{s,l-1,m+1}-\frac{h_s\zeta_m}{k_s(T_{in}-T_{sol})}\times q(z) \qquad (۱۰-۳)$$

فصل ۴.

نتایج روش عددی

۴-۱- مقدمه

در این فصل، نتایج حاصل از حل عددی برای تحلیل پدیده تغییر فاز و انتقال حرارت از مذاب در حال حرکت در داخل قالب ریخته‌گری مربعی شکل، ارائه شده است. نتایج برای سه حالت عدد استفان و سه حالت سرعت ریخته‌گری به منظور بررسی تاثیر این پارامترها ارائه شده‌اند.

در ابتدای این فصل، مشخصات ترموفیزیکی و پارامترهای موردنیاز و همچنین فرضیات لازم برای حل عددی ارائه می‌شود. در ادامه جهت ارزیابی صحت روش عددی، نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از مطالعات قبلی مقایسه شده است. در پایان برای حالات مختلف عدد استفان و سرعت ریخته‌گری پروفیل ضخامت جامد، توزیع دما و شار حرارتی بصورت نمودار و کانتور نمایش داده می-شود.

۴-۲- اطلاعات اولیه

با استفاده از معادلات (۳-۱)، (۳-۲) و (۳-۸) که از روش تفاضل محدود بدست آمدند، میدان دما در قسمت مایع و جامد و همچنین موقعیت فصل مشترک بین جامد و مایع به روش عددی محاسبه خواهند شد. مقادیر خواص ترموفیزیکی و پارامترهایی که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است در جدول (۴-۱) آمده است. قسمتی از اطلاعات این جدول براساس داده‌هایی که در [۳] و [۹] گزارش شده، آورده شده است و پارامترهای دیگر براساس خواص فولاد که در جداول فولاد گزارش شده، آمده است. برای اینکه بتوان از ضخامت ناحیه حساس که در فصل دوم به آن اشاره شد، صرفنظر کرد در اینجا دماهای خط مایع و جامد طوری انتخاب شده‌اند که اختلاف چندانی با هم نداشته باشند.

جدول (۴-۱) پارامترهای ترموفیزیکی فولاد و آب خنک‌کننده و مشخصات هندسی قالب ریخته‌گری [۳] و [۹].

	جامد	مایع
مشخصات فیزیکی فولاد مذاب:		
$c\ (J\ kg^{-1}\ {}^{o}C^{-1})$	430	825
$\rho\ (kg\ m^{-3})$	7400	7400
$k\ (W\ m^{-1}\ {}^{o}C^{-1})$	33	39
$T_{liq}\ ({}^{o}C)$	1450	
$T_{sol}\ ({}^{o}C)$	1425	
$L_f\ (J\ kg^{-1})$	260000	
$T_{in}\ ({}^{o}C)$	1530	
Ste	0.25, 0.75, 1	
مشخصات هندسی قالب ریخته‌گری:		
Section size (2L×2L) (m×m)	0.28×0.28	
H (m)	0.67	
$U_z\ (m\ min^{-1})$	0.6, 0.75, 0.9	
d (m)	0.02	
$k\ (W\ m^{-1}\ {}^{o}C^{-1})$	315	
مشخصات فیزیکی آب خنک‌کننده:		
$Q\ (l\ min^{-1})$	2347	
$\Delta T_w\ ({}^{o}C)$	5	
$c\ (J\ kg^{-1}\ {}^{o}C^{-1})$	4200	
$\rho\ (kg\ m^{-3})$	1000	
$a\ (m^{-1})$	1.25	

۴-۳- ملاحظات اولیه

در ابتدای فرآیند ریخته‌گری، انجمادی صورت نمی‌گیرد و ابتدا مذاب کمی خنک می‌شود و سپس انجماد شروع می‌شود. بنابراین در زمان بسیار کمی بعد از ورود مذاب به قالب لایه جامد و شرط استفان وجود ندارد. در نتیجه در این محدوده زمانی فقط معادله (۲-۹) برقرار است و شرط مرزی مذاب در $r=L$ وجود دارد که در این نقطه به جای شرط مرزی (۲-۱۰ب)، شرط انتقال

حرارت در مرز را داریم که برای هر مقطع z مقدار حرارت خارج شده از مذاب در این مرز برابر $q(z)$ است. با گسسته‌سازی این رابطه و شرایط مرزی مربوطه، معادله تا جایی حل می‌شود که دمای گره آخر برابر دمای خط مایع (T_{liq}) شود. با حل این رابطه، بعد از مدت زمان $500\Delta t$ دمای گره آخر تقریباً به دمای خط مایع نزدیک می‌شود که در آن $\Delta t = \dfrac{H/U_z}{100000}$ است. این فرض از این جهت لازم و ضروری است که چون در ابتدا گرادیان دما در مایع در نقطه $\eta = 1$ بسیار زیاد بود، باعث می‌شد حل مسئله به سمت واگرایی پیش برود؛ که با در نظر گرفتن این مدت زمان گردیان دما کمی کاهش می‌یابد و این مشکل برطرف می‌شود.

ضخامت لایه جامد تشکیل شده در ابتدا خیلی کم است، بنابراین حل معادلات به سمت واگرایی پیش می‌رود و مسئله ناپایدار می‌شود چون گام مکانی در لایه جامد مقدار کمی را داراست. به همین دلیل برای $l - 1 < 0.01$ فرض می‌شود دما در لایه جامد بصورت خطی تغییر می‌کند، بنابراین مقدار حرارت وارد شده به آن با حرارت خارج شده از آن برابر است. برای $l - 1 = 0.01$ معادله (۳-۸) در فرم ضمنی با $h_s = 0.001$ حل می‌شود و در نهایت برای $l - 1 > 0.01$ معادله (۳-۸) با اندازه شبکه متغیر $h_s = (l-1)/10$ برای جامد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

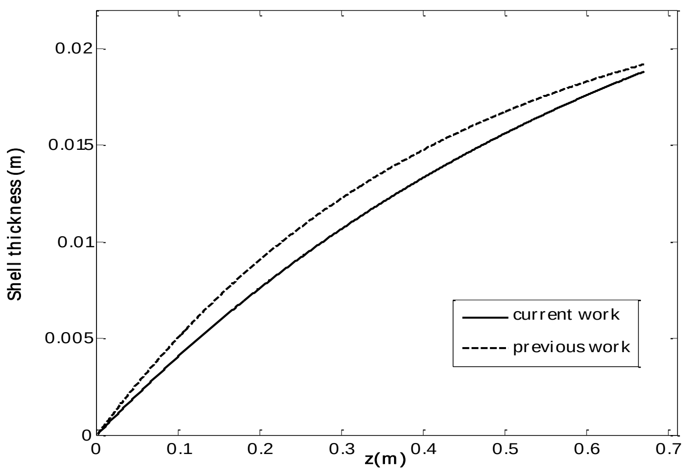
اندازه شبکه مکانی برای قسمت مایع ثابت و برابر با $h_l (\equiv \Delta x = 1/N_l)$ است (تعداد گره‌ها برابر $N_l = 200$ در نظر گرفته شده است). مقدار گام مکانی برای لایه جامد متغیر و برابر $h_s = (l-1)/10$ می‌باشد. اندازه گام زمانی $g\,(\equiv \Delta t)$ برای همه معادلات برابر است با: $\Delta t = \dfrac{H/U_z}{100000}$.

ذکر این نکته در اینجا ضروری است که مقدار حرارت خارج شده برای همه حالت‌ها برابر در نظر گرفته شده است که در واقعیت این امر امکان‌پذیر نیست چون به عنوان مثال با افزایش سرعت

ریخته‌گری مطمئناً مقدار حرارت کمتری از قالب خارج می‌شود ولی در اینجا برای تحلیل بهتر تاثیر تغییر پارامترهای مهم (U_z و Ste) این فرض در نظر در نظر گرفته شده است.

۴-۴- ارزیابی صحت مدل

به منظور مقایسه و اعتبار بخشیدن به صحت مدل‌سازی تحقیق حاضر، نتیجه حل برای موقعیت فصل مشترک جامد و مایع را با نتایج عددی که قبلا انجام گرفته است مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرد. در شکل(۴-۱) مقدار حل عددی از تحقیق حاضر برای موقعیت مرز متحرک بین جامد و مایع به عنوانی تابعی از z رسم شده است، و نتیجه بدست آمده برای این مرز تطابق خوبی با نتیجه در دسترس از مطالعات گذشته دارد [۹]. توجه کنید که در [۹] عدد استفان برابر $Ste = 0.1254$ است $\left(T_{liq} = 1492\ , T_{sol} = 1396\right)$



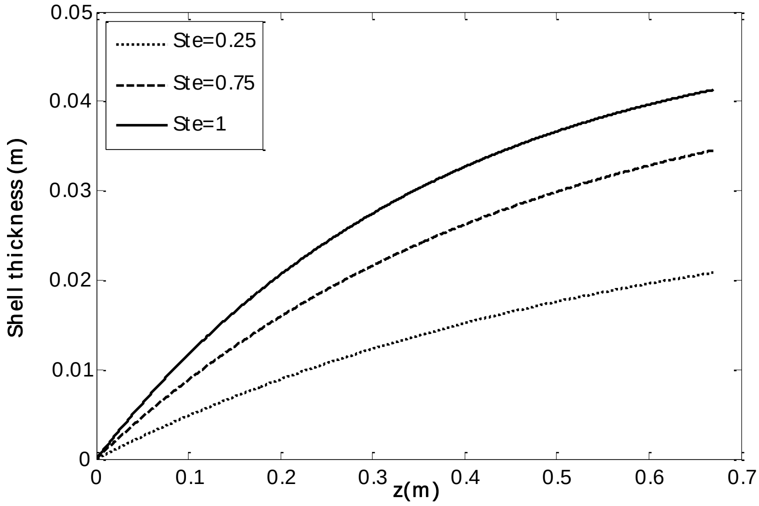
شکل(۴-۱) مقایسه ضخامت جامد بدست آمده از تحقیق حاضر با نتایج قبلی.

در تحقیق حاضر، پارامترهای موثر در فرآیند ریخته‌گری عدد استفان (Ste) و سرعت ریخته-گری (U_z) هستند. بنابراین برای این مسئله اثرات این پارامترها را بر روی ضخامت لایه تشکیل

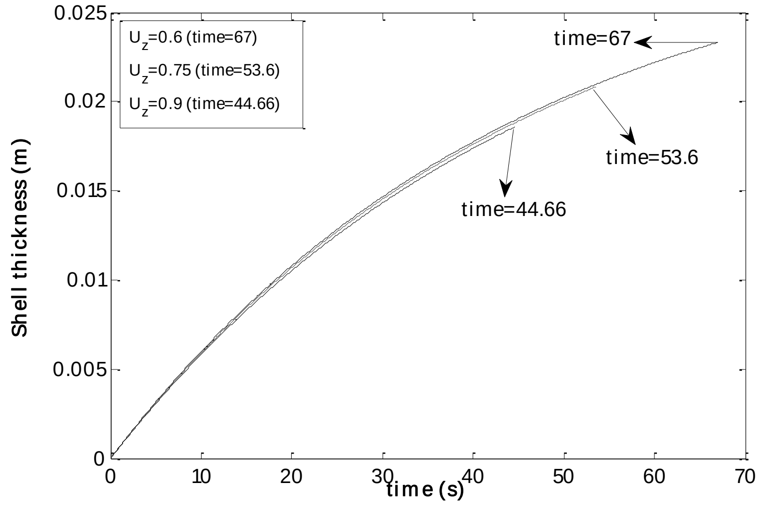
شده، سرعت انجماد و میدان دما در مایع، جامد و قالب با تغییر یک پارامتر و ثابت نگه داشتن بقیه پارامترها، مورد بحث و بررسی قرار خواهند گرفت.

۴-۵- نتایج بدست آمده

در شکل(۴-۲) ضخامت جامد تشکیل شده برای مقادیر مختلف عدد استفان (شکل(۴-۲)) و مقادیر مختلف سرعت ریخته‌گری (شکل(۴-۲)) نشان داده شده است. لازم به ذکر است که $S = L - \zeta$. براساس نتایج شکل(۴-۲) با افزایش عدد استفان ضخامت جامد تشکیل شده نیز افزایش می‌یابد، دلیل این را می‌توان اینطور استدلال کرد که به عنوان مثال طبق تعریف عدد استفان $\left(Ste = c_l (T_{in} - T_{liq})/L_f\right)$ افزایش این عدد به دلیل کاهش مقدار L_f باشد و چون مقدار حرارت خارج شده از قالب در هر سه حالت برابر است پس با کاهش L_f انجماد سریع‌تر انجام می‌گیرد و ضخامت جامد تشکیل شده بیشتر می‌شود. همانطور که از شکل(۴-۲) دیده می‌شود برای سه حالت سرعت ریخته‌گری ضخامت‌ها بر هم منطبق شده است، از نظر فیزیکی این نتیجه قابل قبول است چون با فرض برابر بودن مقدار حرارت خارج شده برای سه حالت و با توجه به اینکه بقیه پارامترهای ترموفیزیکی از جمله عدد Ste تغییر نکرده است پس منطقی است که ضخامت‌های تشکیل شده برای هر سه مورد بر هم منطبق باشد و تنها تفاوت در این است که با افزایش سرعت ریخته‌گری مذاب زودتر از قالب خارج می‌شود و بنابراین با ضخامت کمتری وارد مرحله خنک‌کاری ثانویه می‌شود.



(الف)

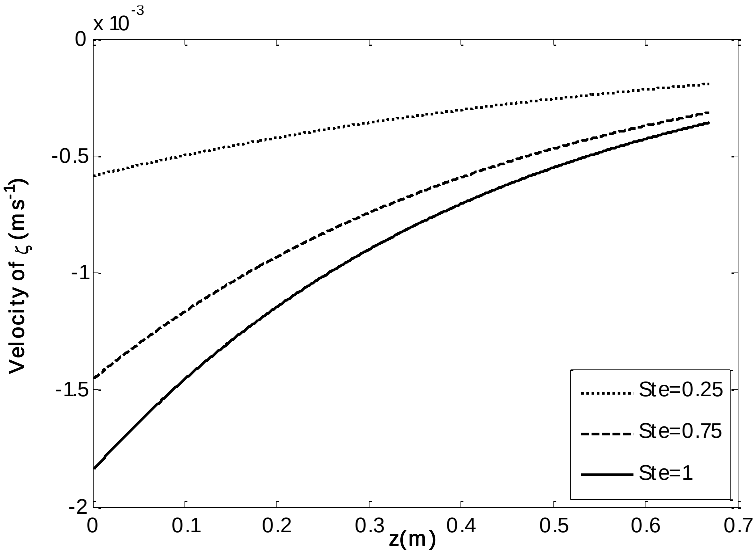


(ب)

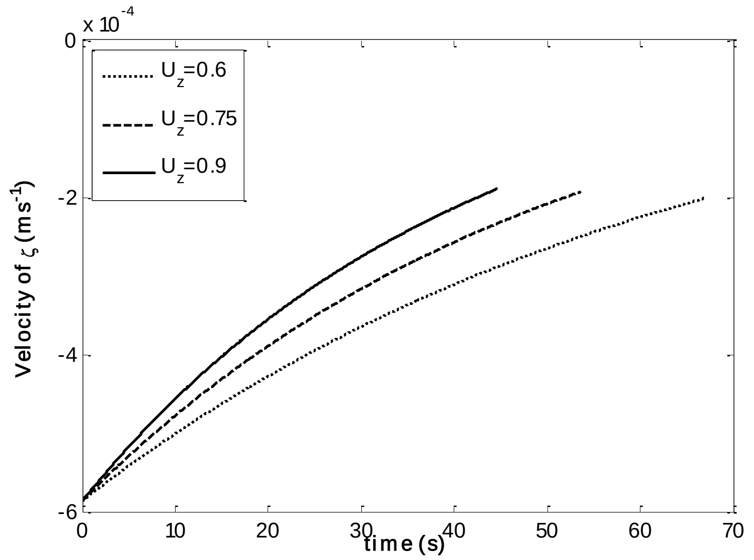
شکل(۴-۲) ضخامت جامد تشکیل شده برای الف) مقادیر مختلف عدد استفان در سرعت ثابت ریخته‌گری (U_z=0.75 m min^{-1}) و ب) مقادیر مختلف سرعت ریخته‌گری در Ste=0.25.

در شکل(۴-۳) سرعت انجماد برای حالت‌های مختلف گزارش شده است. همانطور که در قسمت قبل توضیح داده شد افزایش عدد استفان باعث می‌شود که انجماد سریع‌تر رخ دهد که تاثیر افزایش این عدد بر روی سرعت انجماد در شکل(۴-۳) نشان داده شده است. در شکل(۴-۳) نشان می‌دهد که سرعت انجماد در طول فرآیند به ازای مقادیر مختلف سرعت ریخته‌گری تقریبا با هم برابر

است چون برای این سه حالت مقدار حرارت خارج شده و بقیه پارامترها یکسان در نظر گرفته شده است.



(الف)

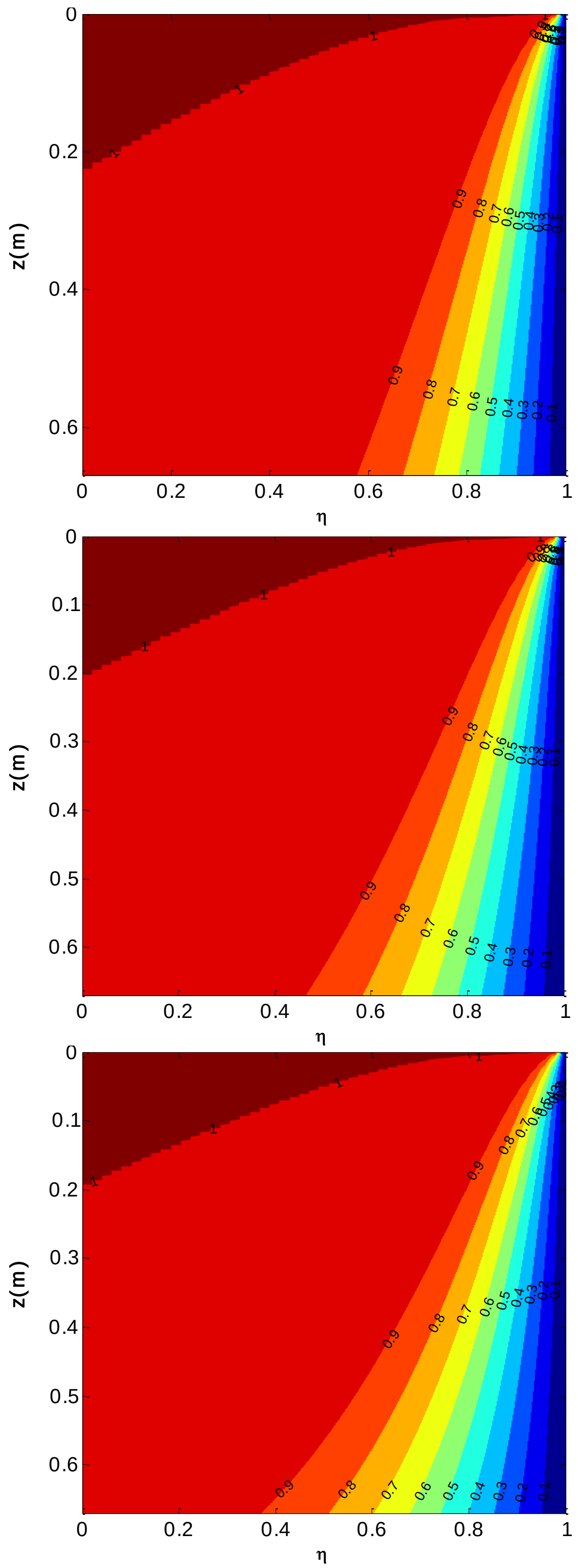


(ب)

شکل(۴-۳) پروفیل سرعت ζ برای الف) مقادیر مختلف عدد استفان در سرعت ثابت ریخته‌گری (U_z=0.75 m min^{-1}) و ب) مقادیر مختلف سرعت ریخته‌گری در Ste=0.25.

در شکل(۴-۴) توزیع دما در قسمت مذاب به ازای مقادیر مختلف عدد استفان بصورت کانتور نمایش داده شده است. همانطور که از شکل معلوم است با افزایش Ste گرادیان دما در نقاط داخلی‌تر بیشتر شده است. مطابق تعریف عدد استفان که در فصل دوم به آن اشاره شد افزایش این پارامتر به معنای افزایش حرارت محسوس منتقل شده نسبت به حرارت نهان منتقل شده است، بنابراین با افزایش Ste حرارت بیشتری بصورت محسوس از مذاب خارج خواهد شد که منجر به کاهش بیشتر دما می‌شود.

در شکل(۴-۵) به ازای مقادیر مختلف سرعت ریخته‌گری توزیع دما در مذاب را می‌توان دید که اختلاف بین آنها تنها به این دلیل است که با افزایش سرعت ریخته‌گری مذاب زودتر از قالب خارج می‌شود و به همان نسبت گرادیان دما در نقاط داخلی کمتر است.

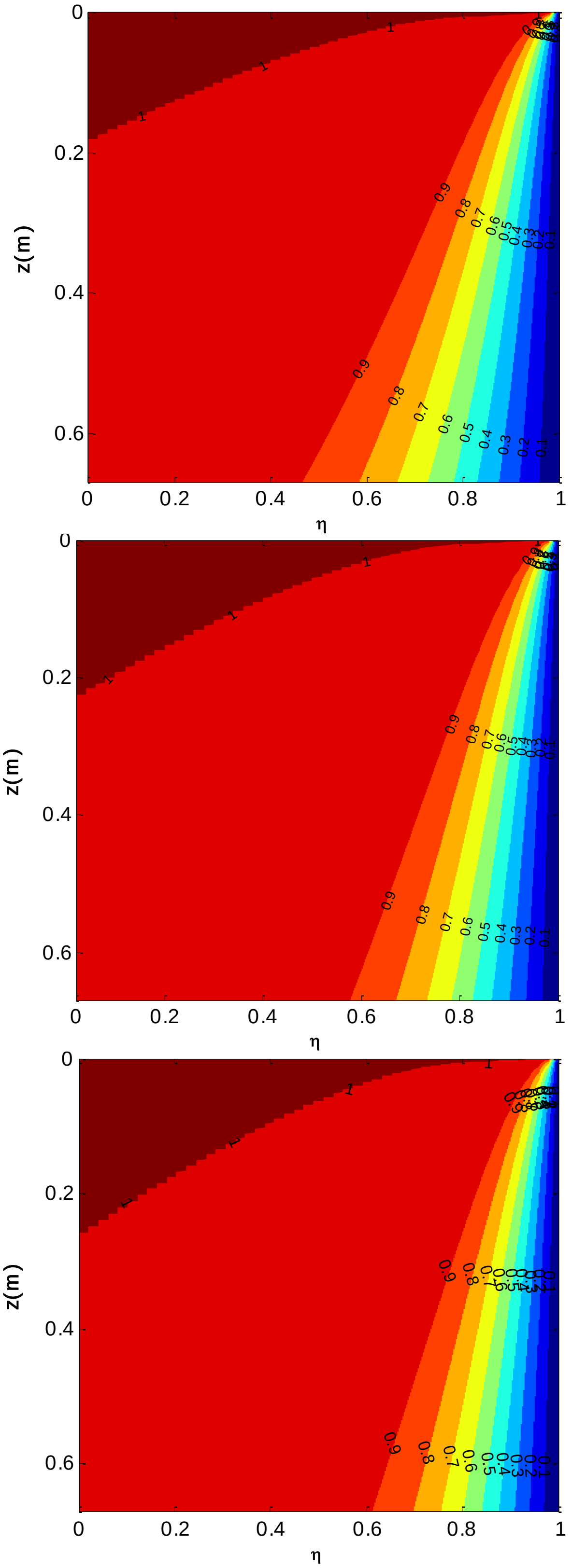


(الف)

(ب)

(ج)

شکل(۴-۴) توزیع دما در قسمت مایع در سرعت ریخته‌گری ثابت (U_z=0.75 m min^{-1}) و الف) Ste=0.25، ب) Ste=0.75، ج) Ste=1.



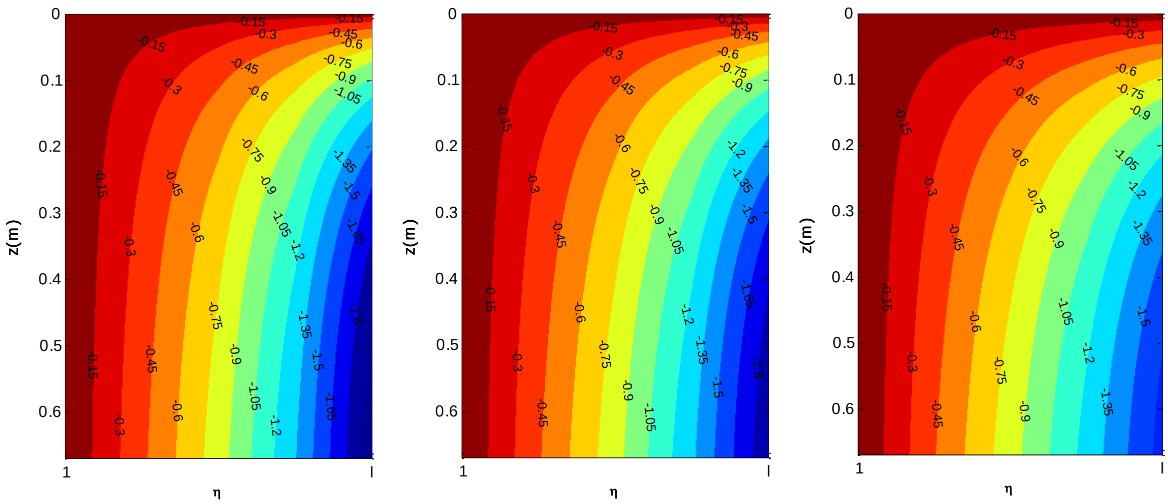
الف)

ب)

ج)

شکل(۴-۵) توزیع دما در قسمت مایع در عدد استفان ثابت (Ste=0.25) و الف) $U_z=0.6$، ب) $U_z=0.75$، ج) $U_z=0.9$.

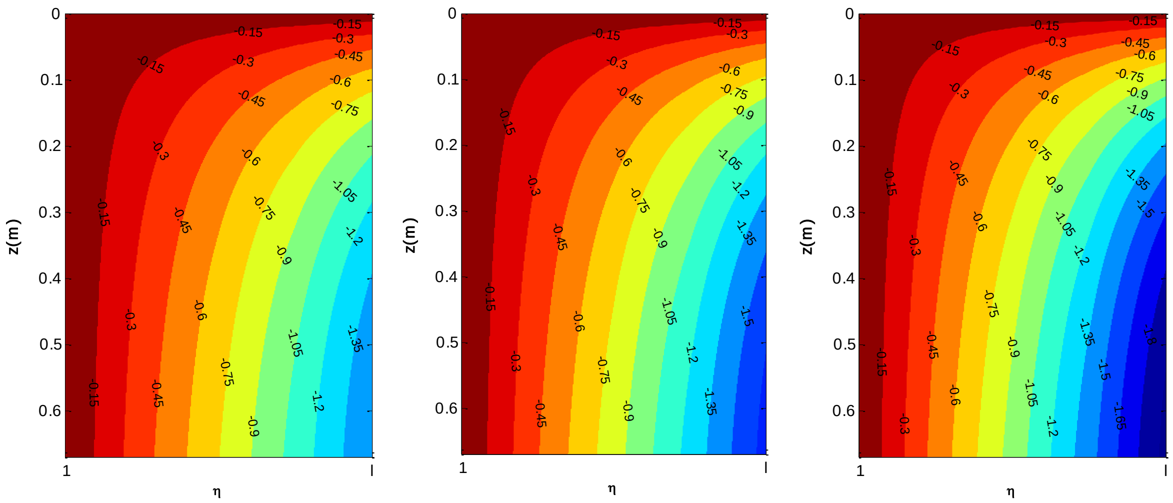
در شکل(۴-۶) توزیع دما در لایه جامد تشکیل شده به ازای حالت‌های مختلف عدد استفان را می‌بینید. در اینجا، تاثیر تغییر عدد استفان بر روی رابطه (۳-۵) مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در رابطه (۳-۵) داریم $\frac{d\eta}{dt}=\frac{\eta_i}{l}\times\frac{dl}{dt}$ که در آن $\frac{dl}{dt}=\frac{-L\dot{\zeta}}{\zeta^2}$است. $\frac{\eta_i}{l}$برای هر سه حالت تقریبا یکسان است ولی در عبارت $\frac{dl}{dt}$ چون با افزایش Ste، ζ کاهش و $\dot{\zeta}$ افزایش می‌یابد در نتیجه $\frac{dl}{dt}$ به میزان زیادی افزایش می‌یابد و علامت آن نیز مثبت است. از طرفی طبق شرط مرزی (۲-۲۲ج) چون $q(z)$ ثابت است در نتیجه $\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}$ برای هر سه حالت برابر است و با توجه به اینکه با افزایش Ste، ζ کاهش می‌یابد پس $\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}$ نیز به همان نسبت کاهش می‌یابد ولی مقدار کاهش $\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}$ کمتر از مقدار افزایش $\frac{d\eta}{dt}$ است، بنابراین $\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta}\right|_t\times\left.\frac{\partial\eta}{\partial t}\right|_i$ در کل افزایش می‌یابد که علامت این عبارت منفی است. از سوی دیگر $\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial t}\right|_\eta$ برای سه حالت برابر و علامت آن نیز منفی است. با این توضیحات می‌توان نتیجه گرفت که $\left.\frac{\partial\theta_s}{\partial t}\right|_i$ در کل از نظر اندازه با افزایش عدد استفان افزایش می‌یابد که علامت آن منفی است که در شکل(۴-۶) تاثیر این افزایش دیده می‌شود.



(ج)　　　　　(ب)　　　　　(الف)

شکل(۴-۶)　　توزیع دما در لایه جامد در سرعت ریخته‌گری ثابت ($U_z=0.75\ m\ min^{-1}$) و الف) Ste=0.25، ب) Ste=0.75، ج) Ste=1.

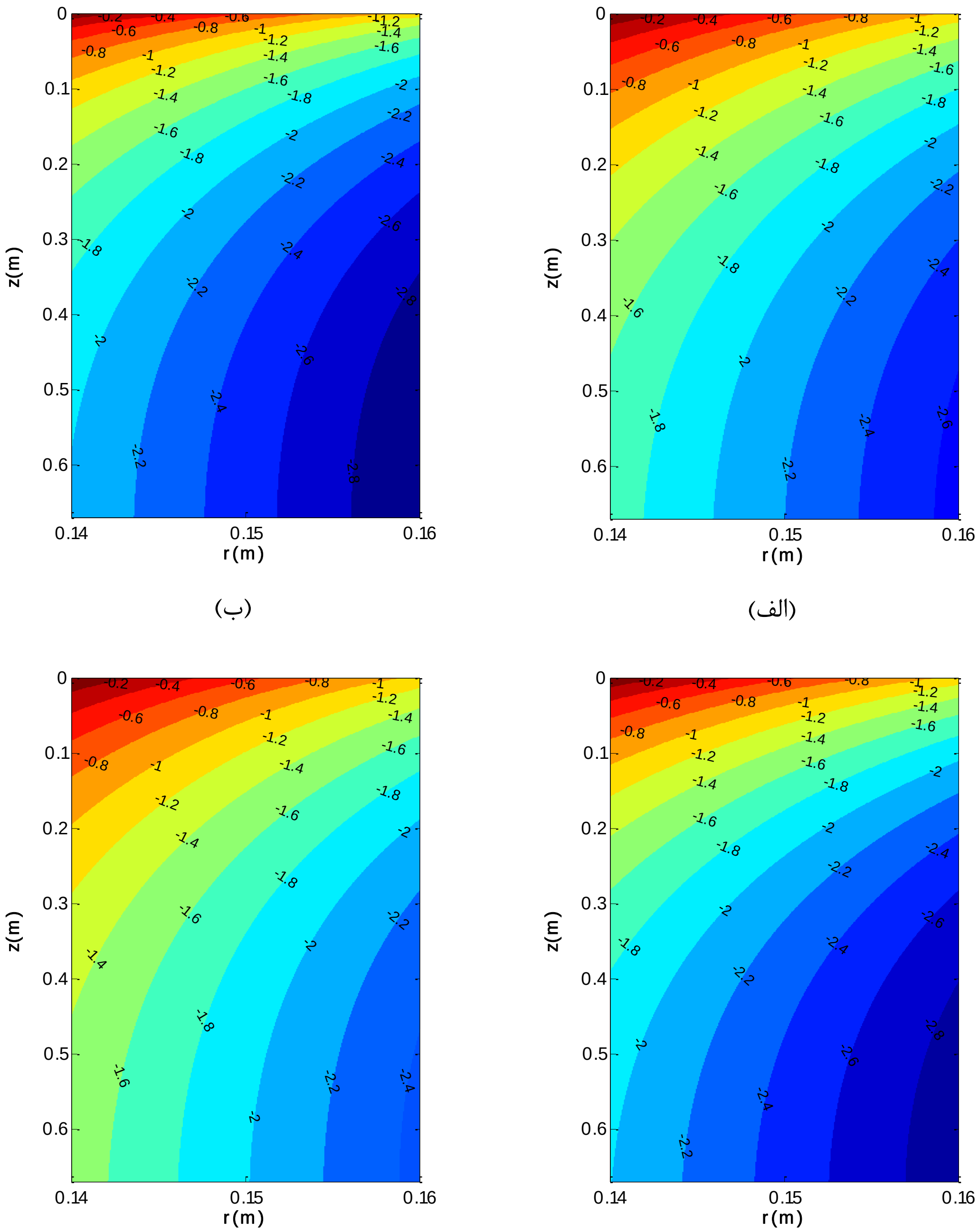
درشکل(۴-۷) نیز کانتور دما در لایه جامد تشکیل شده را می‌بینید با این تفاوت که برای حالت‌های مختلف سرعت ریخته‌گری بدست آمده است. مانند پارگراف قبل نیز می‌توان تحلیل مشابهی بر روی معادله (۳-۵) انجام داد و می‌توان ثابت کرد با افزایش سرعت $\left.\frac{\partial \theta_s}{\partial t}\right|_i$ کاهش می‌یابد که تاثیر این کاهش را در شکل(۴-۷) دیده می‌شود.



(الف) (ب) (ج)

شکل(۴-۷) توزیع دما در لایه جامد در عدد استفان ثابت ($Ste=0.25$) و الف) $U_z=0.6$، ب) $U_z=0.75$، ج) $U_z=0.9$.

در شکل شکل(۴-۸) توزیع دما در قالب برای ۴ حالت مختلف عدد استفان و سرعت ریخته‌گری گزارش شده است. طبق رابط (۲-۲۶) و (۲-۲۷) شار حرارتی در جهت r در قالب ثابت است و برای هر مقطع در z مشخص مقدار این شار حرارتی برابر $q(z)$ است، و تنها به دلیل شرط مرزی (۲-۲۵الف) است که باعث اختلاف بین حالات مختلف شده است.

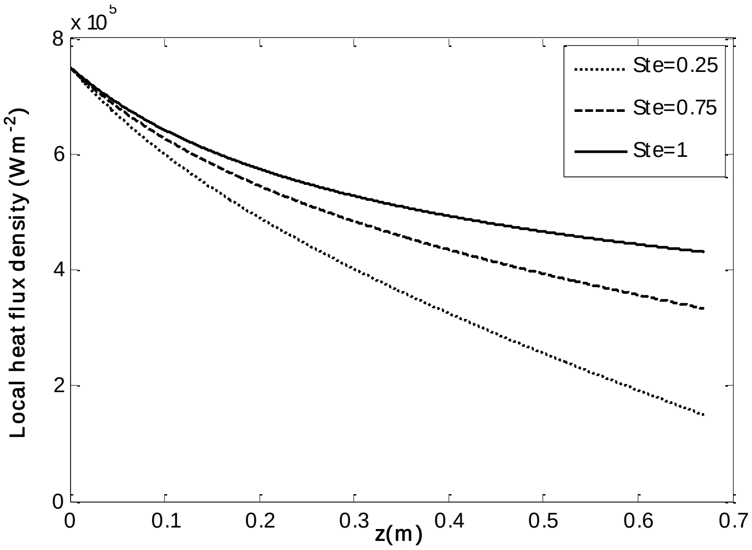


(الف) (ب)

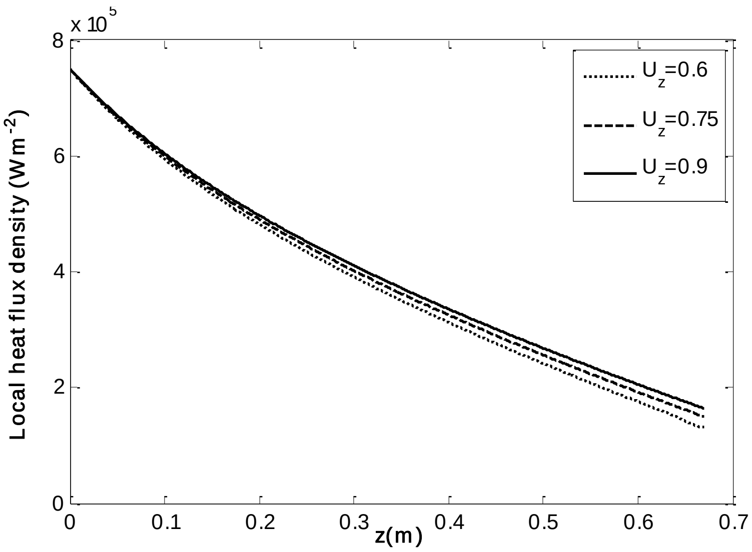
(ج) (د)

شکل(۴-۸) توزیع دما در قالب برای الف) Ste=0.25 و U_z=0.75، ب) Ste=1 و U_z=0.75، ج) Ste=0.25 و U_z=0.6، د) Ste=0.25 و U_z=0.9.

در شکل(۴-۹) شار حرارت خارج شده از مایع به عنوان تابعی از z را مشاهده می‌کنید که در جهت r در $\eta=1$ خارج می‌شود. شکل(۴-۹) به ازای عددهای استفان مختلف رسم شده است و براساس شکل با افزایش Ste مقدار حرارت خارج شده نیز بیشتر می‌شود چون با افزایش Ste مقدار انرژی محسوس بیشتری نسبت به انرژی نهان از مایع خارج می‌شود. در شکل(۴-۹) شار حرارتی خارج شده از به ازای مقادیر مختلف سرعت ریخته‌گری رسم شده است. همانطور که از شکل معلوم است اختلاف چندانی بین حالت‌های مشخص شده وجود ندارد، به این دلیل که چون کل حرارت خارج شده در حالت‌های مختلف برابر بوده و همچنین بر طبق شکل(۴-۳) سرعت انجماد نیز بین حالت‌ها تقریبا برابر بوده پس حرارت خارج شده از مایع نیز تقریبا با هم برابرند. توجه داشته باشید که پروفیل شار حرارتی خارج شده از مایع از ابتدای شروع انجماد رسم شده است.



(الف)

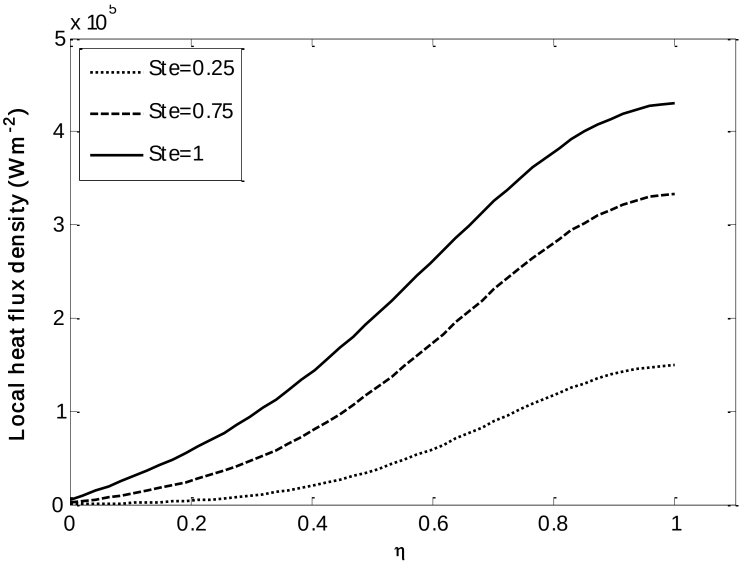


(ب)

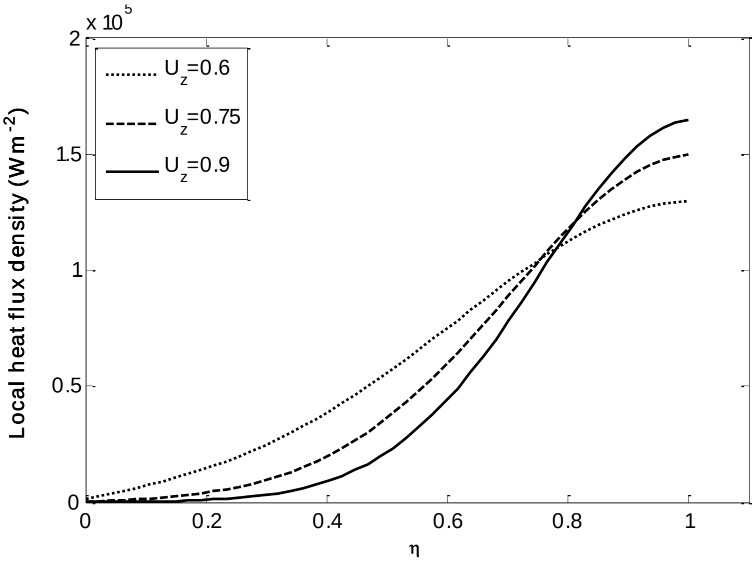
شکل(۴-۹) شار حرارتی محلی بصورت تابعی از z در $\eta=1$ برای الف) مقادیر مختلف عدد استفان در سرعت ریخته‌گری ثابت ($U_z=0.75$ m min^{-1}) و ب)مقادیر مختلف سرعت ریخته‌گری در Ste=0.25.

در شکل(۴-۱۰) شار حرارتی محلی در مایع را می‌بینید که به عنوان تابعی از η در $z=H$ و به ازای مقادیر مختلف Ste و U_z رسم شده است. براساس شکل(۴-۱۰) با افزایش عدد استفان شار حرارتی محلی در مایع نیز بیشتر شده است و همانطور که در قسمت قبل به آن اشاره شد این نتیجه‌گیری منطقی است. در شکل(۴-۱۰) این پارامتر به ازای مقادیر مختلف سرعت ریخته‌گیری رسم شده است و همانطور که از شکل دیده می‌شود با افزایش U_z در نقاط نزدیک به فصل مشترک مایع- جامد

شار حرارت بیشتر و در گره‌های داخلی‌تر کمتر می‌شود. این نتیجه را می‌توان اینطور تحلیل کرد که با افزایش U_z زمان کمی برای اثرگذاری خنک‌کاری قالب بر روی گره‌های داخلی وجود دارد بنابراین گرادیان دما و شار حرارتی در این نقاط کمتر می‌شود. لازم به ذکر است که معادله شار حرارتی بصورت $q'' = -k_l (T_{in} - T_{liq}) \frac{1}{\zeta} \times \frac{\partial \theta_l}{\partial \eta}$ می‌باشد.



(الف)



(ب)

شکل(۴-۱۰) شار حرارتی محلی بصورت تابعی از η در z=H برای الف) مقادیر مختلف عدد استفان در سرعت ریخته‌گری ثابت (U_z=0.75 m min^{-1}) و ب)مقادیر مختلف سرعت ریخته‌گری در Ste=0.25.

لازم به ذکر است که نظریه تفاضل محدود که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته، قبلاً توسط کادول و سیوویچ [۲۸] در مسئله استفان برای توضیح تبخیر قطرات، با موفقیت اعمال شده است، و همچنین در حل مسئله استفان یک‌بعدی با شرط مرزی متناوب که توسط همان محققین مورد ارزیابی قرار گرفته و از روش تفاضل محدود برای آن استفاده شده است [۱۶] و [۱۷]. اما در تحقیق حاضر، این روش برای مسئله استفان به مراتب پیچیده‌تری اعمال شده است. همچنین میدان دما در مایع، جامد و قالب بدست آمده است. به علاوه اثرات تغییر در عدد استفان و سرعت ریخته‌گری بر روی موقعیت فصل مشترک و میدان دما را نیز مورد بحث و بررسی قرار داده شده است. بنابراین، نظریه تفاضل محدود را می‌توان برای مسائل استفان مختلف با دقت بالا و کافی مورد استفاده قرار داد.

فصل ۵.

حل تحلیلی مسئله

۵-۱- مقدمه

در این قسمت، یک روش تحلیلی برای معادله‌های بدست آمده در فصل دوم، ارایه می‌شود. روشی که در این قسمت به آن اشاره می‌شود، به روش تکرار متغیر (VIM) معروف است. قبل از پرداختن به حل معادلات، ابتدا توضیح مختصری در مورد این روش ارایه می‌شود. این روش حجم محاسبات را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد با اینکه دارای دقت بالاتری از روش‌های عددی است. در ادامه، گام‌های اساسی از این روش برای حل یک مسئله بیان خواه شد. لازم به ذکر است که برای حل تحلیلی معادلات باید ساده‌سازی مناسبی بر روی معادلات انجام گیرد که در ادامه به آن اشاره می‌شود.

۵-۲- روش تکرار متغیر

روش VIM در سال ۱۹۹۹ توسط آقای هی ابداع و گسترش یافت و بسیاری از محققان و پژوهشگران از این روش به منظور دستیابی به مدل‌های خطی و غیرخطی معادلات استفاده کردند. ثابت شده است که این روش، مسائلی که متکی به روش‌های عددی است را بهبود می‌بخشد. این روش حل مسئله را با تقریب بسیار خوب و با مرتبه خطای بالا بدست می‌دهد [۳۲] و [۳۳].

برای توضیح مفهوم بنیادی این روش، یک معادله دیفرانسیل را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$Lu + Nu = g(x,t) \qquad (۵-۱)$$

که در آن L و N به ترتیب اپراتورهای خطی و غیرخطی هستند و $g(x,t)$ ترم ناهمگن معادله است.

بر اساس روش تکرار متغیر تابع تصحیح تکراری برای معادله (۵-۱) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۳۲] و [۳۳]:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda\left(Lu_n(\tau) + N\tilde{u}_n(\tau) - g(x,\tau)\right)d\tau \qquad n \geq 0 \qquad (۵-۲)$$

که در آن λ ضریب تغییر لاگرانژ کلی است که بوسیله لم اساسی تغییرات تعیین می‌شود و $\tilde{u}_n(\tau)$ به عنوان متغیر محدود[1] در نظر گرفته می‌شود، بطوریکه $\delta\tilde{u}_n = 0$.

همانطور که از رابطه مشخص است گام اولیه برای پیاده‌سازی روش تکرار متغیر تعیین ضریب تغییر لاگرانژ (λ) است. با تعیین این ضریب، تقریب مناسب u_{n+1} $(n \geq 0)$ که حل تقریبی برای u خواهد بود به آسانی و با استفاده از هر تابع قابل انتخاب برای فرض اولیه (u_0) بدست می‌آید [۳۶]. قرارداد مشخصی برای انتخاب فرض اولیه وجود ندارد، در بعضی تحقیقات انجام شده فرض اولیه را همان شرط اولیه مسئله قرار می‌دهند [۱۳]، البته به شرطی که بصورت یک تابع که بر حسب متغیرهای دیگر باشد، چون همانطور که از رابطه (۵-۲) مشخص است، در مواردی که اپراتورهای L و N بصورت مشتق باشند و شرط اولیه بصورت یک عدد ثابت باشد، نمی‌توان از این روش نتیجه گرفت. برای مواردی که تابع مشخصی بر حسب متغیرهای مستقل مسئله وجود ندارد باید فرض اولیه را براساس ماهیت مسئله طوری انتخاب کرد که حداقل نصف شرایط مرزی را ارضا کند [۳۶]، [۳۸] و [۳۹]. تابع انتخابی می‌تواند چند جمله‌ای، مثلثاتی، نمایی و... باشد [۱۱] و [۱۴]. در نهایت حل دقیق بصورت زیر بدست می‌آید:

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n \tag{۵-۳}$$

برای حل معادلات مورد نظر در تحقیق حاضر به روش تکرار متغیر لازم است فرضیاتی را در نظر گرفت که بتوان مسئله را با استفاده از این روش حل کرد که در زیر به آن اشاره می‌شود.

۵-۳- ساده‌سازی مسئله برای حل تحلیلی

همانطور که از شکل(۲-۶) مشخص است ناحیه جامد بعد از انتقال دستگاه مختصات متغیر است بطوری که نمی‌توان گفت که η در مرز بین جامد و قالب چه مقداری را دارد چون با افزایش زمان مقدار آن نیز بیشتر می‌شود، به همین علت نمی‌توان تابع اولیه را برای قسمت جامد انتخاب و

1. Restricted variation

مسئله را بصورت تحلیلی حل کرد. در اینجا با فرض اینکه پروفیل دما در قسمت جامد بصورت خطی نسبت به η تغییر می‌کند می‌توان مسئله را ساده‌تر کرد. با انتخاب این فرض به این نتیجه می‌رسیم که مقدار حرارت وارد شده به لایه جامد تشکیل شده با حرارت خارج شده از آن برابر است، بنابراین بجای سه معادله کوپله (۲-۱۸)، (۲-۱۹) و (۲-۲۰) با دو رابطه زیر مواجه هستیم:

$$\frac{\partial^2 T_l}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_l}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_l}\frac{\partial T_l}{\partial t} \quad , \quad 0 \le r < \zeta(t) \tag{۵-۴}$$

$$-\rho\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)L_f = k_l \left.\frac{\partial T_l}{\partial r}\right|_{r=\zeta(t)^-} + q(z) \tag{۵-۵}$$

که در رابطه (۵-۵) $q(z)$ برابر است با مقدار حرارت منتقل شده به آب خنک‌کننده است و از رابطه (۲-۳۱) بدست می‌آید. با استفاده از روش تثبیت مرز که در فصل دوم به آن اشاره شد، دو معادله (۵-۴) و (۵-۵) بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \theta_l}{\partial \eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\eta\zeta\dot{\zeta}}{\alpha_l}\right)\frac{\partial \theta_l}{\partial \eta} = \left(\frac{\zeta^2}{\alpha_l}\right)\frac{\partial \theta_l}{\partial t} \quad , \quad 0 \le \eta < 1 \tag{۵-۶}$$

$$-\frac{d\zeta}{dt} = Ste\left[\frac{\alpha_l}{\zeta(t)}\left.\frac{\partial \theta_l}{\partial \eta}\right|_{\eta=1} + \frac{q(z)}{\rho c_l (T_{in} - T_{liq})}\right] \tag{۵-۷}$$

حال با استفاده از این دو معادله توزیع دما در مایع و موقعیت فصل مشترک بدست می‌آید که در زیر به مراحل حل مسئله به روش VIM اشاره می‌شود.

۵-۴- حل تحلیلی مسئله

در این قسمت با جایگذاری دو معادله کوپله (۵-۶) و (۵-۷) در رابطه (۵-۲) به روابط زیر می-رسیم:

$$\theta_{n+1}(\eta,t)=\theta_n(\eta,t)+\int_0^t \lambda_1(\tau)\left[\frac{\partial\theta_n(\eta,\tau)}{\partial\tau}-\frac{\alpha_l}{\zeta_n^2(\tau)}\frac{\partial^2\theta_n(\eta,\tau)}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\alpha_l}{\eta\zeta_n^2}+\frac{\eta\dot{\zeta}_n}{\zeta_n}\right)\frac{\partial\theta_n}{\partial\eta}\right]d\tau \tag{۸-۵}$$

$$\zeta_{n+1}(t)=\zeta_n(t)+\int_0^t \lambda_2(\tau)\left[\frac{d\zeta_n(\tau)}{d\tau}+Ste\left(\frac{\alpha_l}{\zeta(t)}\frac{\partial\theta_l}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=1}+\frac{q(z)}{\rho c_l(T_{in}-T_{liq})}\right)\right]d\tau \tag{۹-۵}$$

این دو رابطه با تکرار متغیر حل می‌شوند که در ابتدا باید مقادیر λ_1 و λ_2 بدست آیند. این دو پارامتر با استفاده از قضیه لم اساسی تغییرات بصورت زیر تعیین می‌شوند [۱۵]، [۳۲] و [۳۴]. ابتدا مقدار λ_1 را بدست می‌آوریم، با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned}\delta\theta_{n+1}(\eta,t)&=\delta\theta_n(\eta,t)+\delta\int_0^t \lambda_1(\tau)\frac{\partial\theta_n(\eta,\tau)}{\partial\tau}\\&=\delta\theta_n(\eta,t)+\lambda_1(\tau)\delta\theta_n(\eta,\tau)\big|_{\tau=t}-\int_0^t \lambda_1'(\tau)\delta\theta_n(\eta,\tau)d\tau\end{aligned} \tag{۱۰-۵}$$

براساس قضیه لم اساسی تغییرات داریم $\delta\theta_{n+1}(\eta,t)=0$، پس طرف راست رابطه بالا نیز باید برابر با صفر باشد، در نتیجه:

$$\lambda_1'(\tau)=0 \qquad , \qquad 1+\lambda_1(\tau)\big|_{\tau=t}=0 \tag{۱۱-۵}$$

با حل معادلات بالا به نتیجه زیر برای λ_1 می‌رسیم:

$$\lambda_1(\tau)=-1 \tag{۱۲-۵}$$

برای بدست آوردن مقدار λ_2 نیز به روش مشابه داریم:

$$\begin{aligned}\delta\zeta_{n+1}(t)&=\delta\zeta_n(t)+\delta\int_0^t \lambda_2(\tau)\frac{d\zeta_n(\tau)}{d\tau}d\tau\\&=\delta\zeta_n(t)+\lambda_2(\tau)\delta\zeta_n(\tau)\big|_{\tau=t}-\int_0^t \lambda_2'(\tau)\delta\zeta_n(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{۱۳-۵}$$

براساس قضیه لم اساسی تغییرات داریم:

$$\lambda_2'(\tau)=0 \qquad , \qquad 1+\lambda_2(\tau)\big|_{\tau=t}=0 \tag{۱۴-۵}$$

با حل معادلات فوق داریم:

$$\lambda_2(\tau)=-1 \tag{۱۵-۵}$$

بنابراین روابط (۵-۸) و (۵-۹) بصورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\theta_{n+1}(\eta,t)=\theta_n(\eta,t)-\int_0^t\left[\frac{\partial\theta_n(\eta,\tau)}{\partial\tau}-\frac{\alpha_l}{\zeta_n^2(\tau)}\frac{\partial^2\theta_n(\eta,\tau)}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\alpha_l}{\eta\zeta_n^2}+\frac{\eta\dot{\zeta}_n}{\zeta_n}\right)\frac{\partial\theta_n}{\partial\eta}\right]d\tau \tag{۱۶-۵}$$

$$\zeta_{n+1}(t)=\zeta_n(t)-\int_0^t\left[\frac{d\zeta_n(\tau)}{d\tau}+Ste\left(\frac{\alpha_l}{\zeta(t)}\frac{\partial\theta_l}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=1}+\frac{q(z)}{\rho c_l(T_{in}-T_{liq})}\right)\right]d\tau \tag{۱۷-۵}$$

با انتخاب تابع اولیه مناسب به عنوان فرض اولیه برای $\theta_0(\eta,0)$ و $\zeta_0(\tau)$ و جایگذاری آنها در روابط (۵-۱۶) و (۵-۱۷) تقریب مناسبی برای توزیع دما در مایع و موقعیت فصل مشترک بدست می‌آید که در فصل بعد نتایج حاصل از این روش ارائه و با نتایج حاصل از روش عددی مقایسه می‌شود.

ذکر این نکته در اینجا ضروری است که حل دو معادله کوپله که باید همزمان حل شوند قبلاً توسط اسلوتا در مسئله استفان تک‌فازی که مشابه مسئله مورد بحث در تحقیق حاضر است، با استفاده از روش VIM با موفقیت انجام گرفته است [۱۳].

فصل ۶.

نتایج روش تحلیلی

۶-۱- مقدمه

در این فصل نتایج تحلیلی را با استفاده از روابط و همچنین نمودار ارائه می‌شود. ابتدا با در نظر گرفتن تابع انتخابی اولیه برای دما که شرایط مرزی را ارضاء می‌کند مسئله حل و نتایج نمایش داده خواهند شد. در ادامه با انتخاب دو تابع که پروفیل آنها تقریبا بر هم منطبقند و شرایط مرزی مسئله را ارضاء می‌کنند، مسئله را حل می‌کنیم و اثبات خواهد شد که نتایج بدست آمده از هر دو تابع یکسان است و بنابراین حل مستقل از تابع انتخابی اولیه است. روابط و نمودارهای ارائه شده در این فصل با استفاده از نرم‌افزار *Maple* بدست آمده‌اند.

در روش تحلیلی توزیع دما و موقعیت فصل مشترک، برای دو مقدار عدد استفان و دو مقدار سرعت ریخته‌گری ارائه و نتایج با هم مقایسه خواهند شد. همچنین نتایج را با نتایج بدست آمده از روش عددی نیز مقایسه می‌شود.

۶-۲- نتایج بدست آمده

با انتخاب فرض اولیه برای دما بصورت زیر، حل مسئله شروع می‌شود:

$$(1+\eta^2)\cos(\frac{\pi}{2}\eta) \qquad (۶-۱)$$

برای موقعیت فصل مشترک فرض اولیه را همان شرط اولیه آن یعنی $\zeta(0)=L$ قرار داده و با استفاده از اطلاعات جدول (۴-۱) دو معادله کوپله (۵-۱۶) و (۵-۱۷) بطور همزمان و تا سه بار تکرار حل می‌شوند. با توجه به رابطه (۵-۱۶) به علت وجود ζ در مخرج، حل برای دما به شکل انتگرل-هایی بسیار طولانی و تودرتو بدست می‌آید که امکان ارائه و نمایش آن وجود نداشت و چندین صفحه برای نمایش آن مورد نیاز بود و همچنین به دنبال آن رابطه بدست آمده برای ζ نیز طولانی بود، بنابراین تنها تکرار اول برای توزیع دما (معادله (۶-۲)) و تکرار دوم برای موقعیت فصل مشترک (معادله (۶-۳)) نمایش داده می‌شود که در زیر این روابط را می‌بینید:

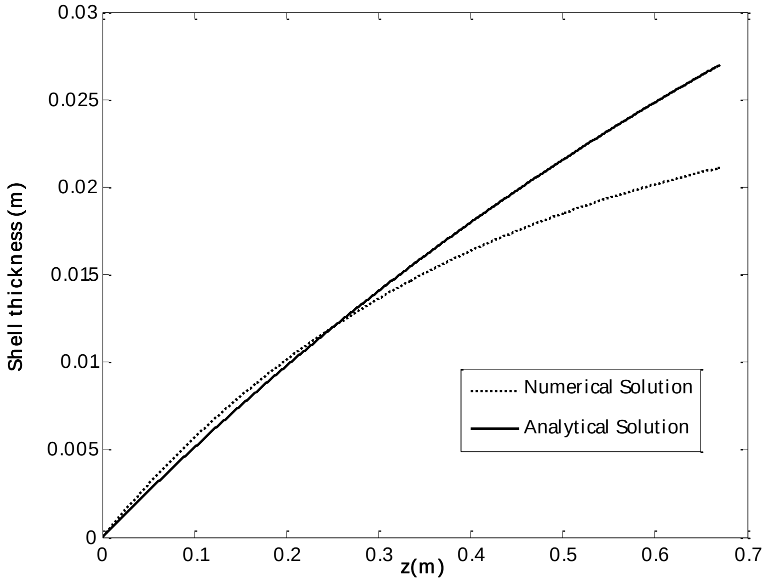
$$T1(\eta,t) := -\frac{1}{\eta}\Big(1.00000000010^{-12}\,\big(-1.00000000010^{12}\,\eta\cos(1.570796327\eta) - 1.00000000010^{12}\cos(1.570796327\eta)\,\eta^3 - 1.03722528810^{9}\cos(1.570796327\eta)\,t\,\eta + 5.31538184210^{9}\,\eta^2\sin(1.570796327\eta)\,t + 1.66987645410^{9}\cos(1.570796327\eta)\,t\,\eta^3 + 1.06307636910^{9}\,t\sin(1.570796327\eta)\big)\Big) \qquad (۶-۲)$$

$$z2(t) := 0.08623433371 + 0.00007441534576t + 0.05376566629e^{-0.01562500000\,t} - 0.000002000000000\Big(\int_{0.}^{t}\big(-1.78615654010^{12} - 2.35193003310^{9}\,\tau + 1.78615653910^{12}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\big)\Big/\big(7.69949408010^{10} + 6.644227310^{7}\,\tau + 4.80050591910^{10}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\big)\,d\tau\Big) \qquad (۶-۳)$$

این روابط براساس عدد استفان ۰,۲۵ و سرعت ریخته‌گری ۰,۷۵ متر بر دقیقه بدست آمده‌اند.

همانطور که اشاره شد امکان ارائه روابط بدست آمده بعد از سه بار تکرار وجود ندارد ولی می‌توان نتایج را بصورت نمودارهایی نمایش داد که در ادامه می‌بینید.

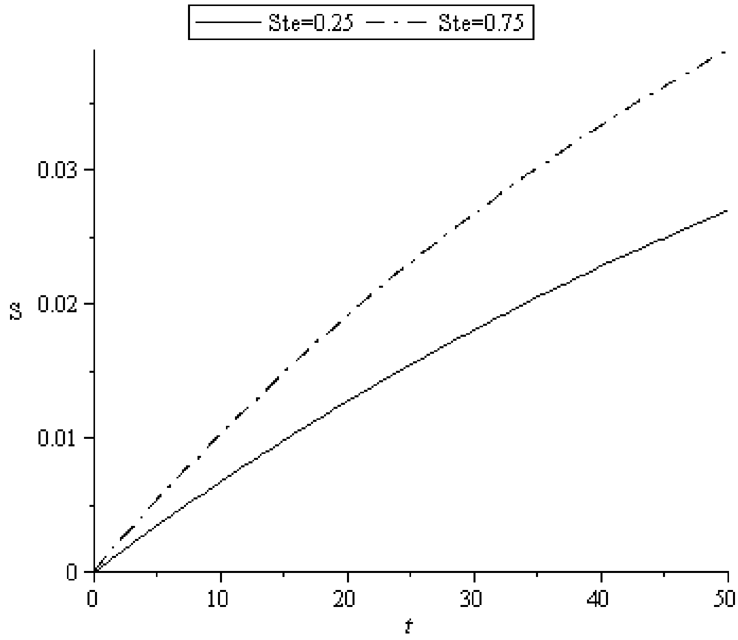
در ابتدا برای مقایسه حل تحلیلی با حل عددی که در فصل قبل ارائه شد، ضخامت لایه جامد بدست آمده از حل تحلیلی بعد از سه بار تکرار برای مقادیر عدد استفان ۰,۲۵ و سرعت ریخته‌گری ۰,۷۵ متر بر دقیقه را با ضخامت بدست آمده از روش عددی مورد مقایسه قرار می‌گیرد که در شکل(۶-۱) این دو نمودار در یک شکل نشان داده شده است.



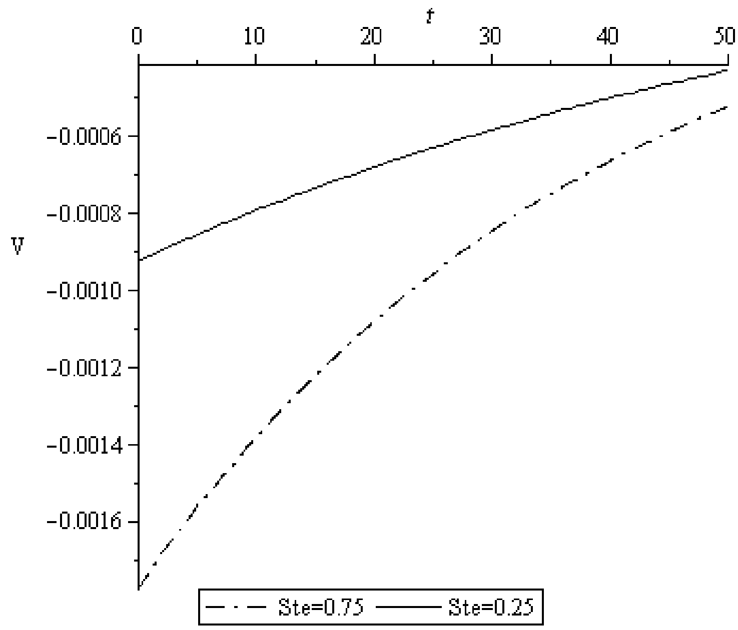
شکل(۶-۱) مقایسه ضخامت لایه جامد بدست آمده از روش تحلیلی با روش عددی.

همانطور که از شکل مشخص است اندازه ضخامت لایه تشکیل شده و سرعت آن بیشتر از مقدار بدست آمده از روش عددی است. دلیل این موضوع را می‌توان اینطور توجیه کرد که گرادیان تابع انتخاب شده برای دما در نقطه $\eta = 1$ کمتر از گرادیان واقعی دما در این نقطه است و طبق معادله (۵-۷) حرارت کمتری از مایع خارج می‌شود و به دنبال آن حرارت بیشتری به واسطه انجماد خارج می‌شود، بنابراین ضخامت لایه جامد و سرعت انجماد بیشتر می‌شود.

در شکل(۶-۲) با استفاده از تکرار سوم ضخامت لایه جامد تشکیل شده و سرعت انجماد را برای دو حالت مختلف عدد استفان می‌بینید که در آن سرعت ریخته‌گری را ثابت و برابر با $U_z = 0.75(m\ \min^{-1})$ در نظر گرفته شده است. همانطور که قبلاً اشاره شد مقدار ضخامت تشکیل شده برابر است با: $S = L - \zeta$.



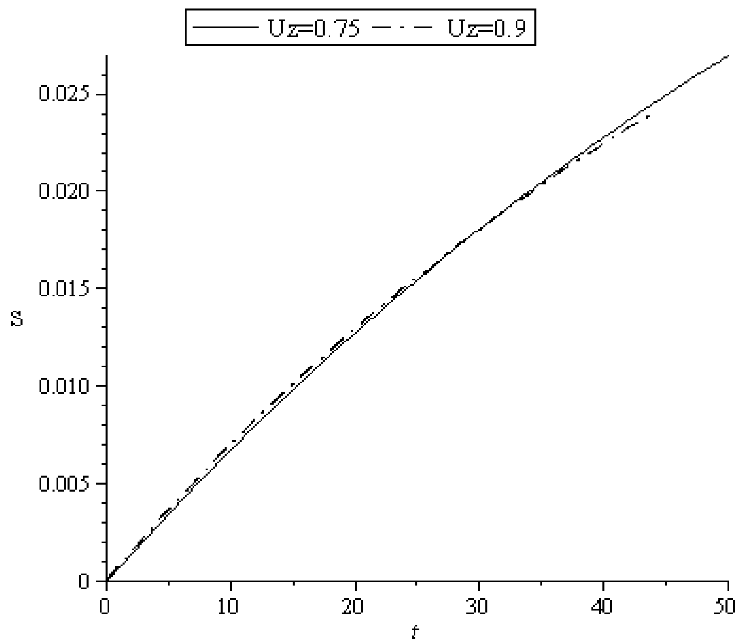
(الف)



(ب)

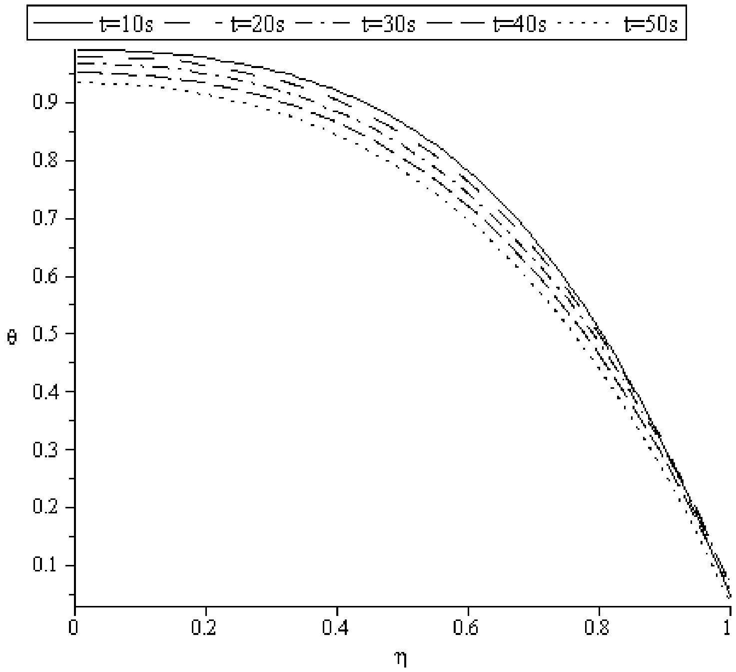
شکل(۶-۲) الف) ضخامت لایه جامد و ب) سرعت ζ، برای مقادیر مختلف Ste در سرعت ریخته‌گری ثابت با استفاده از رابطه (۶-۱) به عنوان فرض اولیه.

در شکل(۶-۳) نیز ضخامت جامد تشکیل شده را برای دو حالت مختلف سرعت ریخته‌گری مشاهده می‌کنید.



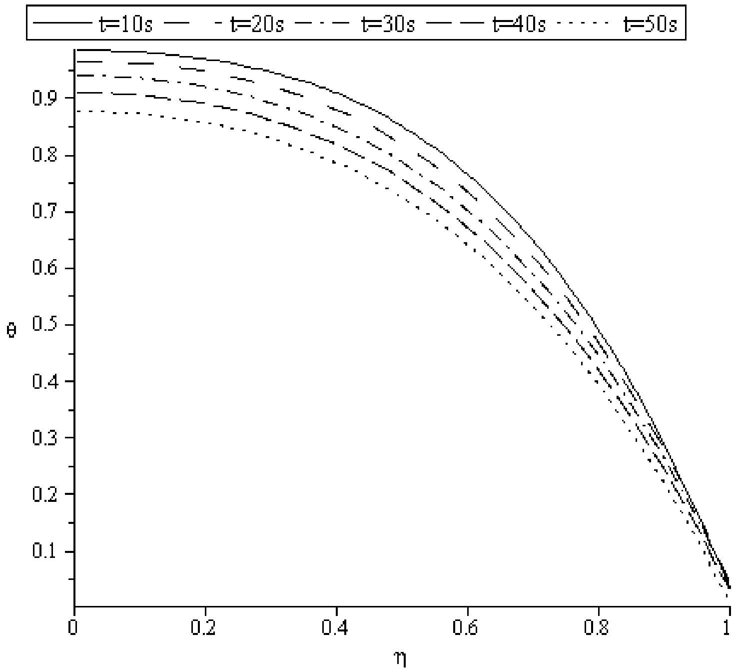
شکل(۶-۳) ضخامت لایه جامد برای دو حالت سرعت ریخته‌گری در عدد استفان ثابت (Ste=0.25).

در شکل(۶-۴) پروفیل دما در زمان‌های مختلف به ازای η رسم شده است. این نمودار عدد استفان و سرعت ریخته‌گری به ترتیب ۰,۲۵ و ۰,۷۵ متر بر دقیقه در نظر گرفته شده است.



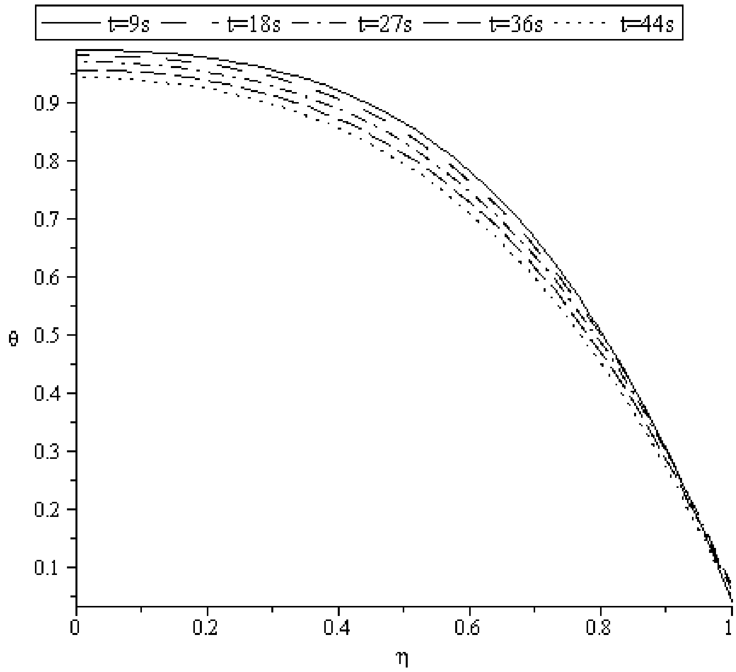
شکل(۶-۴) پروفیل دما در زمان‌های مختلف بصورت تابعی از η در Ste=0.25 و U_z=0.75.

در شکل(۶-۵) نیز پروفیل دما برای عدد استفان ۰٫۷۵ و سرعت ریخته‌گری ۰٫۷۵ متر بر دقیقه رسم شده است و تفاوت موجود بین این شکل و شکل (۶-۳) در عدد استفان آن است. همانطور که قبلاً اشاره شد عدد استفان نسبت انرژی محسوس به انرژی نهان خارج شده طی تغییر فاز مایع- جامد است، بنابراین افزایش عدد استفان به معنای افزایش انرژی محسوس منتقل شده است که منجر به کاهش بیشتر دما در مایع می‌شود.



شکل(۶-۵) پروفیل دما در زمان‌های مختلف بصورت تابعی از η در Ste=0.75 و U_z=0.75.

در شکل(۶-۶) پروفیل دما با در نظر گرفتن عدد استفان ۰,۲۵ و سرعت ریخته‌گری ۰,۹ متر بر دقیقه رسم شده است و تفاوت آن با شکل (۶-۳) به دلیل اختلاف در سرعت ریخته‌گری است که با افزایش سرعت، مذاب فرصت کمتری برای تبادل حرارت دارد و بنابراین دما کمتر کاهش پیدا می‌کند.



شکل(۶-۶) پروفیل دما در زمان‌های مختلف بصورت تابعی از η در Ste=0.25 و U_z=0.9.

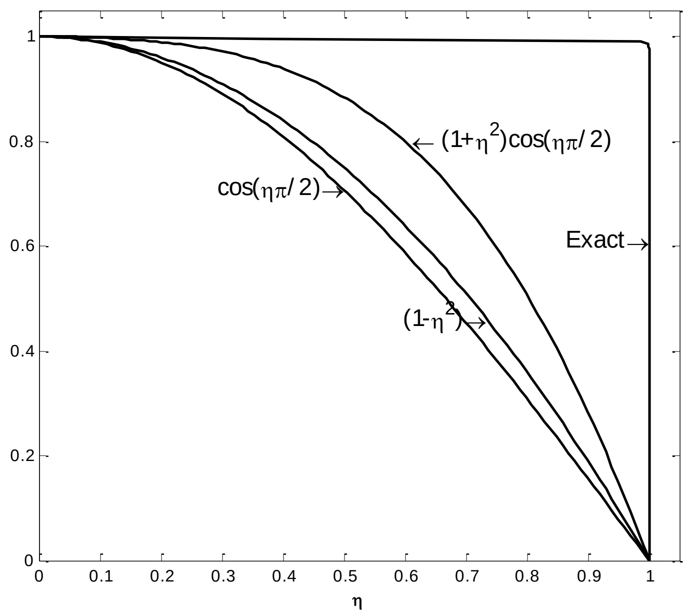
طبق رابطه شار حرارتی (معادله (۶-۴)) به دلیل وجود مشتق دما و همچنین قرار گرفتن ζ در مخرج عبارت، نرم‌افزار *Maple* قادر به ترسیم نمودار شار حرارتی به دلیل طولانی بودن عبارت‌های دما و ζ و همچنین وجود انتگرال‌های حل نشده در آنها، نبود.

$$q'' = -k_l (T_{in} - T_{liq}) \frac{1}{\zeta} \times \frac{\partial \theta_l}{\partial \eta} \qquad (۶-۴)$$

۶-۳- بررسی استقلال حل تحلیلی از فرض اولیه

در این بخش استقلال حل تحلیلی از تابع انتخابی اولیه مورد تحلیل و بررسی قرار داده می‌شود. در اینجا با انتخاب دو تابع که پروفیل آنها در محدوده $0 \le \eta \le 1$ تقریباً بر هم منطبق است مسئله حل و نتایج بدست آمده با یکدیگر مقایسه می‌شوند. دو تابعی که برای حل انتخاب شده‌اند عبارتند از: $\cos(\frac{\pi}{2}\eta)$ و $(1-\eta^2)$.

در شکل(۶-۷) نمودار این دو تابع به همراه تابع انتخابی اول (معادله (۶-۱)) و شرط اولیه واقعی (شرط استفاده شده در حل عددی) رسم شده است. همانطور که از شکل مشهود است دو تابع انتخاب شده در این قسمت دارای نمودارهای مشابه هستند.



شکل(۶-۷)　　مقایسه نمودار توابع انتخابی با شرط واقعی مسئله.

توجه کنید که در شکل(۶-۷) نموار شرط اولیه برای حل عددی (شرط دقیق)، همانطور که قبلاً به آن اشاره شد، بعد از گذشت زمان لازم برای شروع انجماد $(500\Delta t)$ رسم شده است.

ابتدا با استفاده از تابع انتخابی $\cos(\frac{\pi}{2}\eta)$ مسئله را تا سه بار تکرار حل می‌کنیم. معادله (۶-۵) رابطه بدست آمده برای دما را بعد از دو بار تکرار نشان می‌دهد. همچنین در معادله (۶-۶) رابطه موقعیت فصل مشترک را بعد از دو بار تکرار می‌توانید ببینید.

$$
\begin{aligned}
T2(\eta, t) := -\frac{1}{\eta^{3}}\Bigg(& 2.000000000\,10^{-12}\Bigg(\\
& -5.000000000\,10^{11}\,\eta^{3}\cos(1.570796327\eta) \\
& + 8.349382271\,10^{8}\,\eta^{3}\cos(1.570796327\eta)\,t \\
& + 5.315381841\,10^{8}\,\eta^{2}\sin(1.570796327\eta)\,t + 1.000000000\,10^{15}\Bigg(\\
& \int_{0.}^{t} \\
& \big(1.888983910\,10^{14}\,\eta^{4}\,e^{-0.03125000000\,\tau}\sin(1.570796327\eta)\,\tau \\
& - 1.202564507\,10^{14}\,\eta^{3}\,e^{-0.03125000000\,\tau}\cos(1.570796327\eta)\,\tau \\
& + 7.655763425\,10^{13}\,\eta^{2}\,e^{-0.03125000000\,\tau}\sin(1.570796327\eta)\,\tau \\
& - 9.568284890\,10^{13}\,\eta^{3}\cos(1.570796327\eta)\,\tau \\
& - 1.272655868\,10^{14}\,\eta^{2}\sin(1.570796327\eta)\,\tau \\
& - 2.468843332\,10^{16}\,\eta^{3}\cos(1.570796327\eta)\,e^{-0.01562500000\,\tau} \\
& - 1.571714480\,10^{16}\,\eta^{2}\sin(1.570796327\eta)\,e^{-0.01562500000\,\tau} \\
& - 4.693031039\,10^{9}\,\eta^{2}\sin(1.570796327\eta)\,\tau^{2} \\
& - 9.951514160\,10^{12}\,\eta^{4}\sin(1.570796327\eta)\,\tau \\
& - 5.789794975\,10^{9}\,\eta^{4}\,\tau^{2}\sin(1.570796327\eta) \\
& - 1.764240191\,10^{17}\,\eta^{4}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\sin(1.570796327\eta) \\
& - 3.531660516\,10^{13}\cos(1.570796327\eta)\,\tau\,\eta \\
& + 2.248324914\,10^{13}\sin(1.570796327\eta)\,\tau \\
& - 7.696412845\,10^{15}\,\eta^{3}\cos(1.570796327\eta)\,e^{-0.03125000000\,\tau} \\
& - 4.899688590\,10^{15}\,\eta^{2}\sin(1.570796327\eta)\,e^{-0.03125000000\,\tau} \\
& + 3.238484617\,10^{16}\,\eta^{3}\cos(1.570796327\eta) \\
& + 2.061683342\,10^{16}\,\eta^{2}\sin(1.570796327\eta) \\
& + 8.035752425\,10^{15}\,\eta^{4}\sin(1.570796327\eta) \\
& - 1.982045652\,10^{14}\,\eta^{3}\cos(1.570796327\eta)\,e^{-0.01562500000\,\tau}\,\tau \\
& + 1.126179394\,10^{14}\,\eta^{2}\sin(1.570796327\eta)\,e^{-0.01562500000\,\tau}\,\tau \\
& + 2.163226064\,10^{14}\,\eta^{4}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\sin(1.570796327\eta)\,\tau \\
& + 1.307241224\,10^{11}\,\eta^{4}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\,\tau^{2}\sin(1.570796327\eta) \\
& - 8.322156105\,10^{10}\,\eta^{3}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\,\tau^{2}\cos(1.570796327\eta) \\
& + 5.298049125\,10^{10}\,\eta^{2}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\,\tau^{2}\sin(1.570796327\eta) \\
& - 1.131211776\,10^{17}\,\eta^{4}\,e^{-0.03125000000\,\tau}\sin(1.570796327\eta)\big)\Big/ \\
& \big(1.539898816\,10^{11} + 6.644227310^{7}\,\tau \\
& + 9.601011838\,10^{10}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\big)^{2}\,d\tau\Bigg)\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
\qquad (۵\text{-}۶)
$$

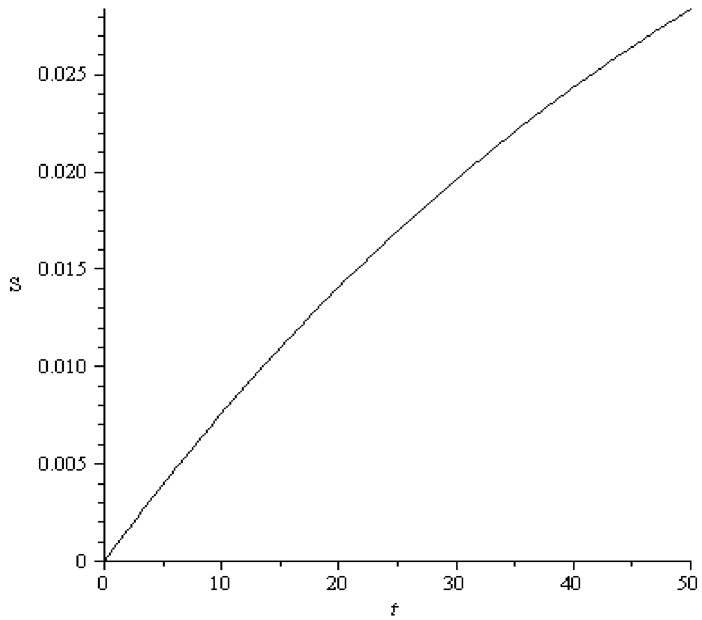
$$z2(t) := 0.08623433371 + 0.00003720767288\,t + 0.05376566629\,e^{-0.01562500000\,t} - 0.00002000000000\left(\int_{0.}^{t}\Big(-1.786156541\,10^{11} + 1.215026317\,10^{9}\,\tau + 1.786156538\,10^{11}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\Big)\Big/\Big(1.539898816\,10^{11} + 6.6442273\,10^{7}\,\tau + 9.601011838\,10^{10}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\Big)\,d\tau\right) \tag{۶-۶}$$

حال با استفاده از تابع انتخابی $(1-\eta^2)$ مسئله مورد تحلیل قرار می‌گیرد. در اینجا نیز تنها سه بار تکرار صورت می‌گیرد. در زیر روابط بدست آمده برای دما (معادله (۶-۷)) و برای موقعیت مرز بین مایع و جامد (معادله (۶-۸)) بعد از دو تکرار ارائه شده است. در اینجا برای هر دو تابع انتخابی عدد استفان و سرعت ریخته‌گری به ترتیب برابر ۰,۲۵ و ۰,۷۵ در نظر گرفته شده است.

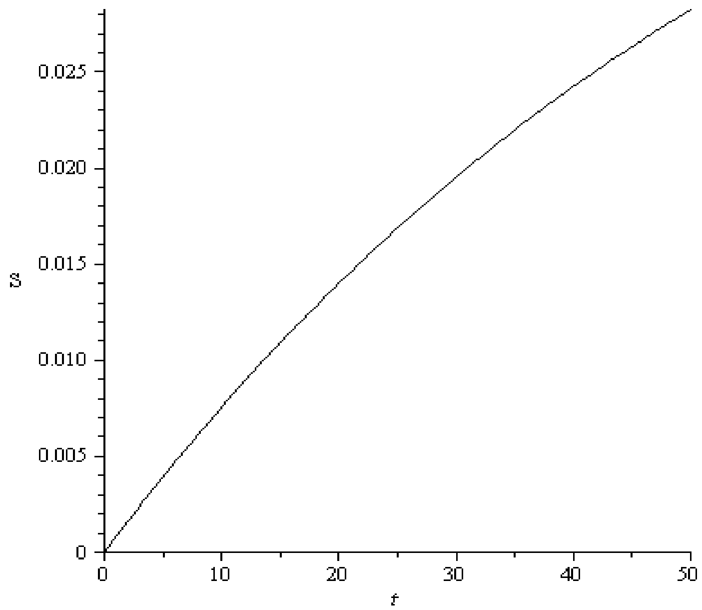
$$T2(\eta,t) := 1. - 1.\,\eta^2 - 0.002707101742\,t + 10000.\left(\int_{0.}^{t}\Big(-1.317128408\,10^{16} + 8.847435488\,10^{12}\,\tau + 1.004106572\,10^{16}\,e^{-0.01562500000\,\tau} + 2.430243689\,10^{9}\,\tau^2 + 5.516228208\,10^{12}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\,\tau + 3.130218357\,10^{15}\,e^{-0.03125000000\,\tau} - 3.268231611\,10^{15}\,\eta^2 - 1.795457962\,10^{12}\,\eta^2\,\tau + 5.591789232\,10^{16}\,\eta^2\,e^{-0.01562500000\,\tau} + 3.183887195\,10^{13}\,\eta^2\,e^{-0.01562500000\,\tau}\,\tau + 3.613433590\,10^{16}\,\eta^2\,e^{-0.03125000000\,\tau}\Big)\Big/\Big(1.724686674\,10^{11} + 9.47485611\,10^{7}\,\tau + 1.075313326\,10^{11}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\Big)^2\,d\tau\right) \tag{۶-۷}$$

$$z2(t) := 0.08623433371 + 0.00004737428050\,t + 0.05376566629\,e^{-0.01562500000\,t} - 0.00002000000000\left(\int_{0.}^{t}\Big(-2.547109756\,10^{12} + 2.244322453\,10^{9}\,\tau + 2.547109756\,10^{12}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\Big)\Big/\Big(1.724686674\,10^{11} + 9.47485611\,10^{7}\,\tau + 1.075313326\,10^{11}\,e^{-0.01562500000\,\tau}\Big)\,d\tau\right) \tag{۶-۸}$$

همچنین در شکل(۶-۸) پروفیل ضخامت جامد تشکیل شده بعد از سه بار تکرار با استفاده از توابع اولیه انتخابی $\cos(\frac{\pi}{2}\eta)$ و $(1-\eta^2)$ گزارش شده است که نمودار (الف) مربوط به تابع انتخابی $\cos(\frac{\pi}{2}\eta)$ است و نمودار (ب) مربوط به تابع انتخابی $(1-\eta^2)$.



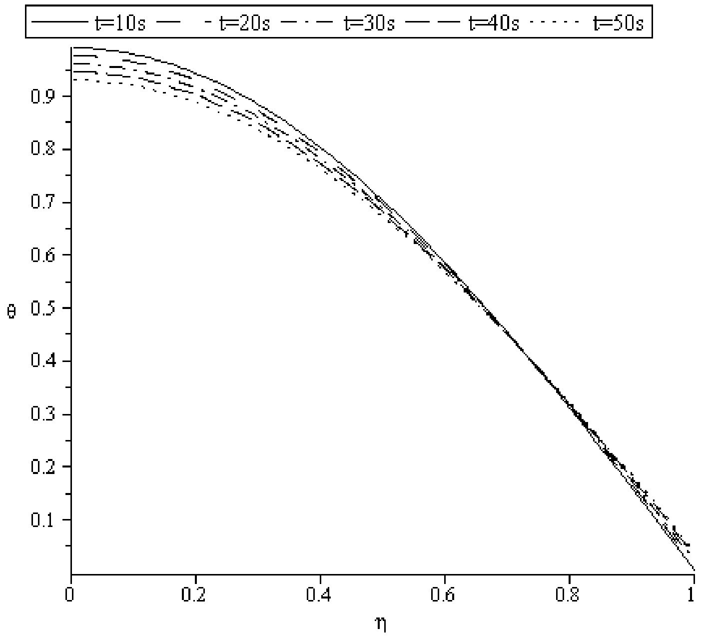
(الف)



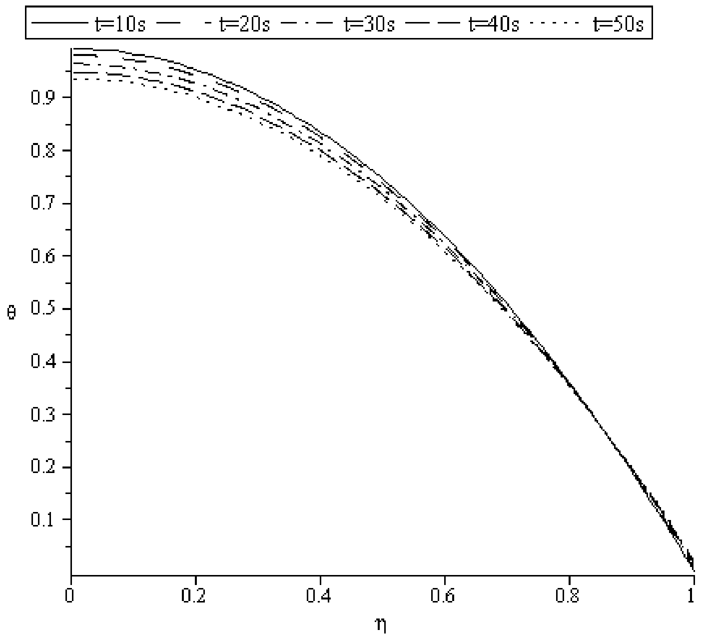
(ب)

شکل(۶-۸) ضخامت لایه جامد تشکیل شده با استفاده از تابع انتخابی الف) $\cos(\eta\pi/2)$ و ب) $1-\eta^2$.

در شکل(۶-۹) نیز پروفیل دمای بدست آمده برای زمان‌های مختلف بصورت تابعی از η رسم شده است و همانطور که مشاهده می‌کنید تطابق خوبی بین جواب‌ها هم در ضخامت لایه جامد و هم در پروفیل دما وجود دارد.



(الف)



(ب)

شکل(۶-۹) پروفیل دما در زمان‌های مختلف بصورت تابعی از η با استفاده از تابع انتخابی الف) $\cos(\eta\pi/2)$ و ب) $1-\eta^2$.

دلیل اینکه در نقاط انتهایی شکستگی رخ داده از محدودیت‌های حل تحلیلی است، به این ترتیب که چون تابع انتخابی، تابع دقیقی برای اعمال شرط اولیه مسئله نبود به همین دلیل حل مناسبی برای دما ارائه نداد و اگر بتوان تابع مناسبی انتخاب کرد بطوری که نمودار آن، با توجه به شکل(۶-۷) به شرط اولیه برای حل عددی نزدیک‌تر باشد، حل نیز دقیق‌تر خواهد شد. همانطوری که با انتخاب تابع رابطه (۶-۱) حل مناسب‌تری نسبت به $\cos(\frac{\pi}{2}\eta)$ و $(1-\eta^2)$ ارائه شد و نقطه برخورد نمودارها به تأخیر افتاده است. دلیل این برخورد را می‌توان اینطور توجیه کرد که با گذشت زمان شیب دما در نقطه $\eta=1$ به دلیل کاهش مقدار حرارت خارج شده از قالب، در حال کم شدن است. بنابراین با گذشت زمان نمودار در به سمت هموار شدن میل می‌کند.

فصل ۷.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۷-۱- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، مکانیزم انتقال حرارت در فرآیند ریخته‌گری پیوسته به‌صورت عددی و تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل دوم، ابتدا با تغییر میدان حل، معادله انرژی از حالت دوبعدی به یک‌بعدی تبدیل شد. سپس با استفاده از روش تثبیت مرز، قلمرو حل در قسمت مایع که متغیر بود، به فرم ثابت تغییر شکل داد، که با این کار معادلات بصورت غیرخطی تبدیل شدند، ضمن اینکه میدان حل لایه جامد همچنان بصورت متغیر باقی ماند که برای حل این مشکل روش شبکه مکانی متغیر مورد استفاده قرار گرفت. در نهایت معادلات بدست آمده، هم به روش عددی و هم به روش تحلیلی حل شدند.

در فصل سوم، روش عددی مورد استفاده تشریح و معادلات حاکم در این تحقیق، با استفاده از روش تفاضل محدود به‌صورت صریح گسسته‌سازی شده‌اند که در فصل چهارم نتایج این روش ارائه شد. نتایج بدست آمده نشان می‌داد که تغییر عدد استفان تاثیر قابل توجهی بر روی ضخامت جامد و توزیع دما می‌گذارد، در حالیکه با تغییر سرعت ریخته‌گری، تغییر چشم‌گیری بر روی این پارامترها مشاهده نشد.

یکی از دستاوردهای این تحقیق حل معادلات به روش تحلیلی با استفاده از روش تکرار متغیر بود که در فصل پنجم به تشریح این روش پرداخته شد و در فصل ششم نتایج حاصل از این روش ارائه شد. همانطور که مشاهده شد، تنها با سه بار تکرار مسئله با دقت مناسب و زمان محاسبات کمتر حل شد.

در ادامه به گزیده‌ای از نتایج حاصله اشاره شده است.

- با افزایش عدد استفان ضخامت جامد و سرعت انجماد افزایش می‌یابد.
- با افزایش عدد استفان دما مذاب و جامد بیشتر کاهش پیدا می‌کند.
- سرعت ریخته‌گری تاثیر چندانی بر روی ضخامت جامد و سرعت آن ندارد.

- فرض اولیه برای حل به روش VIM می‌تواند هر تابعی باشد، فقط باید این نکته را در نظر داشت که حداقل نصف شرایط مرزی را ارضا کند.

۷-۲- پیشنهادات

می‌توان برای ادامه تحقیق در زمینه انتقال حرارت در فرآیند ریخته‌گری پیوسته و همچنین مسائل استفان، موضوعات زیر را بررسی نمود:

- محاسبه توزیع دما و موقعیت فصل مشترک در قالب با سطح مقطع مستطیلی شکل و با طول و عرض نابرابر.
- حل تحلیلی این مسئله با استفاده از روش‌هایی که برای تحلیل مسائل استفان بکار می‌روند و در فصل مقدمه به آنها اشاره شد، مانند روش تکرار پیکارد.
- بدست آوردن توزیع دما و موقعیت فصل مشترک، بدون انتقال دستگاه مختصات و تغییر متغیر، که می‌توان به روش عددی و با استفاده از روش شبکه متغیر مسئله را حل کرد.
- تحلیل فرآیند خنک‌سازی و تشکیل انجماد در ناحیه خنک‌سازی ثانویه.

مراجع

[1] A. Ayasoufi, Numerical simulation of heat conduction with melting and/or freezing by space-time conservation element and solution element method, PhD Thesis, University of Toledo (2004).

[2] A. Y. Kandeil, I. A. Tag, M. A. Hassab, Solidification of steel billets in continuous casting, Engineering J. of Qatar University, Vol. 4 (1991) 103–120.

[3] M. Alizadeh, H. Edris, A. Shafyei, Mathematical modeling of heat transfer for steel continuous casting process, International J. of ISSI, 3 (2006) No. 2, 7–16.

[4] S. K. Das, Thermal modelling of DC continuous casting including submould boiling heat transfer, Appl. Therm. Eng. 19 (1999) 897–916.

[5] C. A. Santos, J. A. Spim, A. Garcia, Mathematical modeling and optimization strategies (genetic algorithm and knowledge base) applied to the continuous casting of steel, Eng. Appl. of Artificial Intelligence, Vol. 16 (2003) 511–527.

[6] L. Zhang, Y. M. Rong, H. F. Shen, T. Y. Huang, Solidification modeling in continuous casting by finite point method, J. of Mater. Process. Technol. 192–193 (2007) 511–517.

[7] M. Janik, H. Dyja, Modelling of three-dimensional temperature field inside the mould during continuous casting of steel, J. of Mater. Process. Technol. 157–158 (2004) 177–182.

[8] D. Constales, R. Van Keer, Finite-element solutions for a direct problem in continuous casting and for its inverse, WIT Trans. Modelling Simul. Vol. 17, (1997) 97–102.

[9] M. Alizadeh, A. J. Jahromi, O. Abouali, New analytical model for local heat flux density in the mold in continuous casting of steel, Comp. Mater. Sci. 44 (2008) 807–812.

[10] Z. Shi, Z. X. Guo, Numerical heat transfer modelling for wire casting, Mater. Sci. Eng. A 365 (2004) 311–317.

[11] D. Slota, Direct and inverse one-phase Stefan problem solved by the variational iteration method, Comput. Math. Appl. 54 (2007) 1139–1146.

[12] D. Slota, The application of the homotopy perturbation method to one-phase inverse Stefan problem, Int. Commun. Heat Mass Tran. (2010) 1–6.

[13] D. Slota, A. Zielonka, A new application of He's variational iteration method for the solution of the one-phase Stefan problem, Comput. Math. Appl. 58 (2009) 2489–2494.

[14] E. Hetmaniok, D. Slota, R. Witula, A. Zielonka, Comparison of the Adomian decomposition method and the variational iteration method in solving the moving boundary problem, Comput. Math. Appl. (2010) 1–4.

[15] Rajeev, K. N. Rai, S. Das, Solution of one-dimensional moving boundary problem with periodic boundary conditions by variational iteration method, Therm. Sci. Vol. 13 (2009), No. 2, pp. 199–204.

[16] S .Savović, J. Caldwell, Finite difference solution of one-dimensional Stefan problem with periodic boundary conditions, Int. J. Heat Mass Tran. 46 (2002) 2911–2916.

[17] S. Savović, J. Caldwell, Numerical solution of Stefan problem with time-dependent boundary conditions by Variable Space Grid method, Therm. Sci. Vol. 13 (2009), No. 4, pp. 165–174.

[18] S. Kutluay, Numerical schemes for one-dimensional Stefan-like problems with a forcing term, Appl. Math. Comput. 168 (2005) 1159–1168.

[19] F. Yigit, One-dimensional solidification of pure materials with a time periodically oscillating temperature boundary condition, Appl. Math. Comput. 217 (2011) 6541–6555.

[20] A. K. Verma, S. Chandra, B. K. Dhindaw, An alternative fixed grid method for solution of the classical one-phase Stefan problem, Appl. Math. Comput. 158 (2004) 573–584.

[21] A. Asaithambi, Numerical solution of Stefan problems using automatic differentiation, Appl. Math. Comput. 189 (2007) 943–948.

[22] R. Witula, E. Hetmaniok, D. Slota, A. Zielonka, Solution of the two-phase Stefan problem by using the Picard's iterative method, Therm. Sci. Vol. 15 (2011), Suppl. 1, pp. S21–S26.

[23] A. P. Roday, M. J. Kazmierczak, Melting and freezing in a finite slab due to a linearly decreasing free-stream temperature of a convective boundary condition, Therm. Sci. Vol. 13 (2009), No. 2, pp. 141–153.

[24] J. Caldwell, Y. Y. Kwan, Spherical solidification by the enthalpy method and heat balance integral method, WIT Trans. Eng. Sci. Ashurst Lodge, Southampton, SO40 7AA, UK, 165–174.

[25] N. Sadoun, E. K. Si-Ahmed, J. Legrand, On heat conduction with phase change: accurate explicit numerical method, J. Appl. Fluid Mech. Vol. 5 (2012), No. 1, pp. 105–112.

[26] J. Caldwell, D. K. S. Ng, Mathematical Modelling Case Studies and Projects, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Vol. 28 (2004).

[27] S. L. Mitchell, M. Vynnycky, I. G. Gusev, S. S. Sazhin, An accurate numerical solution for the transient heating of an evaporating spherical droplet, Appl. Math. Comput. 217 (2011) 9219–9233.

[28] J. Caldwell, S. Savović, Numerical solution of Stefan problem by variable space grid method and boundary immobilization method, J. Math. Sci. 13 (2002) 67–79.

[29] N. Vitorino, J. C. C. Abrantes, J. R. Frade, Numerical solutions for mixed controlled solidification of phase change materials, Int. J. Heat Mass Tran. 53 (2010) 5335–5342.

[30] K. A. R. Ismail, J. R. Henríquez, Solidification of pcm inside a spherical capsule, Energ. Convers. Manage. 41 (2000) 173–187.

[31] N. Sadoun, El-Khider Si-Ahmed, P. Colinet, J. Legrand, On the boundary immobilization and variable space grid methods for transient heat conduction problems with phase change: Discussion and refinement, C. R. Mecanique 340 (2012) 501–511.

[32] J.-H. He, Variational iteration method — a kind of non-linear analytical technique: some examples, Int. J. Nonlin. Mech. 34 (1999) 699–708.

[33] J.-H. He, Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, Appl. Math. Comput. 114 (2000) 115–123.

[34] J.-H. He, Approximate analytical solution of Blasius' equation, Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. Vo1.4 (Apr. 1999), No.1, 75–78.

[35] S.-H. Chang, A variational iteration method for solving Troesch's problem, J. Comput. Appl. Math. 234 (2010) 3043–3047.

[36] A.-M. Wazwaz, The variational iteration method for exact solutions of Laplace equation, Phys. Lett. A 363 (2007) 260–262.

[37] S. A. Khuri, A. Sayfy, A Laplace variational iteration strategy for the solution of differential equations, Appl. Math. Lett. 25 (2012) 2298–2305.

[38] D. D. Ganji, G. A. Afrouzi, R. A. Talarposhti, Application of variational iteration method and homotopy-perturbation method for nonlinear heat diffusion and heat transfer equations, Phys. Lett. A 368 (2007) 450–457.

[39] S. B. Coşkun, M. T. Atay, Fin efficiency analysis of convective straight fins with temperature dependent thermal conductivity using variational iteration method, Appl. Therm. Eng. 28 (2008) 2345–2352.

[40] K. A. Hoffmann, S. T. Chiang, Computational Fluid Dynamics, Vol 1, Engineering Education System, Wichita.

Abstract

In this study, the phase change and heat transfer process in continuous casting machines analyzed. The mold, which use in this problem is column and the cross section is square. In the current work, by choosing a suitable cylindrical coordinates we are able to simplify the problem and transform the equation into an unsteady one-dimensional energy equation.

In the case of solidification in continuous casting process, the boundary of the domain is not known in advance. This means that the solution of such problems requires solving the diffusion or heat conduction equation in an unknown region which has to be determined as part of the solution. Solution reported in the literature using the control-volume finite difference approach together with the boundary immobilization method is selected to predict the position of moving interface and the temperature distribution. Also an analytical solution for this problem is reported that using by variational iteration method.

The approach is validated by some available models and the agreement is found to be satisfactory. Effects of the governing parameters such as Stefan number and casting speed on the evolution of the freezing front and temperature distributions are investigated. It is found that the variation of Stefan number has a strong influence on the growth of the shell thickness and the temperature distributions. For the same values of heat transferred from the mold, increasing Stefan number has significant results such as: accelerating the solidification process and increasing the solid thickness, enhancing the local heat flux in the liquid, and broadening the liquid zone affected by the cooling jacket. As the casting speed becomes higher, the molten flow leaves the mold faster and the solid thickness entering the secondary cooling stage will be decreased. Decreasing of casting speed results in decreasing the solid temperature; in other words, the solid layer becomes cooler. Increasing the casting speed causes the central region has less time to be affected by the cooling water.

Keyword: Continuous casting process; Stefan problems; Casting speed; Boundary immobilization method; Shell thickness; Temperature distribution.

Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering

Mathematical modeling for heat transfer and solidification in continuous casting

Thesis
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
Master of Science (M.Sc)

Hamed Hosseinzadeh

Supervisors

Dr. A. J. Moghadam

Date: May 2013