بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک

تبدیل انرژی

# حل عددی جریان سیال و انتقال حرارت در محفظه بسته با دیواره‌های مایل به روش شبکه بولتزمن

دانشجو : حسنی شکری

استاد راهنما :

دکتر محمدحسن کیهانی

استاد مشاور:

دکتر محسن نظری

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

**فرم شماره (۶)**

**بسمه تعالی**

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

## فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای حسنی شکری رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی تحت عنوان **حل عددی جریان سیال و انتقال حرارت در محفظه بسته با دیواره های مایل به روش شبکه بولتزمن**

که در تاریخ ۹۱/۱۱/۲۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

| |
|---|
| قبول ( با درجه : عالی امتیاز ۲۰ ) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐ |

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب ( ۱۸/۹۹ ـ ۱۸ )

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶ ) ۴ـ قابل قبول ( ۱۵/۹۹ ـ ۱۴ )

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

| عضو هیأت داوران | نام ونام خانوادگی | مرتبهٔ علمی | امضاء |
|---|---|---|---|
| ۱ـ استادراهنما | محمد حسن کیهانی | دانشیار | |
| ۲ـ استاد مشاور | محسن نظری | استادیار | |
| ۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی | محمود فرزانه گرد | دانشیار | |
| ۴ـ استاد ممتحن | محمد محسن شاه مردان | استادیار | |
| ۵ ـ استاد ممتحن | علی عباس نژاد | استادیار | |

**رئیس دانشکده :**

دانشکده مکانیک

دانشگاه صنعتی شاهرود

تقدیم به:

خدایی که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را

و به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید،

پدر و مادرم، ستون های استوار زندگیم و تنها برادرم که همه زندگی من است.

برخود لازم می‌دانم از زحمات جناب آقای دکتر محمد حسن کیهانی و دکتر محسن نظری که در تمام مراحل انجام پروژه راهنمای من بوده و مساعدت ایشان راهگشای انجام این پایان نامه بوده است و همچنین دوستان عزیزم مهندس لادن سادات لوح قلم و مهندس آلاله انارکی و تمامی کسانی که در تهیه و تکمیل این پایان نامه من را یاری نمودند ، تقدیر و قدردانی نمایم.

# تعهد نامه

اینجانب **حسنی شکری** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک- گرایش **تبدیل انرژی** دانشکده **مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود** نویسنده پایان‌نامه **حل عددی جریان سیال و انتقال حرارت در محفظه بسته با دیواره‌های مایل به روش شبکه بولتزمن** تحت راهنمائی آقای **دکتر محمد حسن کیهانی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده‌است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده‌است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده‌است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده‌است.

**تاریخ: ۹۱/۱۱/۲۹**

**امضای دانشجو**

## مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

**چکیده:**

در این پایان‌نامه به حل عددی جریان تراکم‌ناپذیر در محفظه‌های غیرمربعی دو بعدی به روش بولتزمن شبکه‌ای پرداخته شده است. در واقع دو نوع مسئله مورد بررسی قرار گرفته است. نخست به شبیه‌سازی جریان تراکم‌ناپذیر در محفظه‌های غیرمربعی با درپوش متحرک شامل محفظه‌ای به شکل نیم بیضی، مثلث و محفظه‌ای با دیواره دایروی پرداخته شده و نتایج به صورت خطوط جریان برای اعداد رینولدز مختلف ارائه شده است. همچنین برای محفظه مثلثی، تاثیر جهت حرکت درپوش و برای محفظه با دیواره دایروی، تاثیر تغییر ابعاد محفظه مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد رینولدز شاهد افزایش تعداد گردابه‌ها و با تغییر ابعاد محفظه و جهت حرکت درپوش، شاهد پیدایش الگوی جریان متفاوت در محفظه هستیم. پس از اطمینان از توانایی روش بولتزمن شبکه‌ای در مدلسازی هندسه‌های پیچیده و اعمال شرایط مرزی سرعت با دقت مناسب بر روی مرزهای منحنی و مایل، به بررسی و تحلیل انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌های غیرمربعی شامل مثلث، ذوزنقه و نیم دایره پرداخته شده است. برای این محفظه‌ها، برای سیال عامل هوا با عدد پرانتل ۰/۷۱ خطوط جریان، خطوط هم‌دما و تغییرات عدد ناسلت موضعی در اعداد رایلی مختلف ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که در اعداد رایلی پایین، خطوط هم‌دما به صورت یکنواخت و هموار است و با افزایش عدد رایلی این خطوط شروع به فشرده شدن و تغییر حالت خواهند کرد. همچنین برای محفظه مثلثی، تاثیر موقعیت قرارگیری محفظه و زاویه بین اضلاع در روند انتقال حرارت از دیوار و الگوی جریان بررسی شده است، که نشان‌دهنده تاثیر وضعیت قرارگیری محفظه و هندسه آن بر روی روند تغییرات انتقال حرارت و الگوی جریان است. نتایج نشان می-دهد در محفظه‌ای به شکل مثلث با زاویه قائمه و ارتفاع ثابت، با افزایش زاویه تشکیل شده توسط قاعده و

وتر که به معنای کوچک شدن قاعده است، در صورتی که زاویه قائمه در پایین‌ترین نقطه محفظه واقع شود، عدد ناسلت موضعی در هر نقطه از دیوار قائم افزایش خواهد یافت، در حالیکه اگر زاویه قائمه در بالاترین نقطه محفظه واقع شود، در نقاط نزدیک به قاعده مثلث، شاهد کاهش عدد ناسلت موضعی با افزایش این زاویه هستیم. در واقع در این موقعیت قرارگیری محفظه، شاهد یک نقطه کمینه در روند تغییر عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم با فاصله از قاعده خواهیم بود. همچنین نتایج در محفظه ذوزنقه‌ای برای دو زاویه مختلف تشکیل شده توسط ساق‌ها و دیوار افقی پایین محفظه ارائه شده است، که مقایسه ناسلت موضعی بر روی دیوار گرم پایین محفظه نشان می‌دهد که در زاویه کمتر، این عدد بیشتر خواهد بود. مقایسه نتایج این پژوهش با نتایج عددی منتشر شده در این زمینه نشان می‌دهد که این روش از دقت بالایی برخوردار می‌باشد و با توجه به مزیت این روش در مقایسه با روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی( محاسبات ساده‌تر، سهولت اعمال شرایط مرزی وقابلیت موازی‌شدن)، می‌تواند جایگزینی مناسب برای روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی در حل مسائلی با هندسه پیچیده باشد.

واژگان کلیدی: روش شبکه بولتزمن، محفظه غیرمربعی، درپوش متحرک، انتقال حرارت جابجایی طبیعی

فهرست مطالب

# فهرست اشکال

# فهرست جداول

| | |
|---|---|
| تابع توزیع تعادلی چگالی در جهت α | $f_\alpha^{(eq)}$ |
| تابع توزیع تعادلی دما در جهت α | $g_\alpha^{(eq)}$ |
| تابع توزیع چگالی پس از برخورد در جهت α | $\tilde{f}_\alpha$ |
| تابع توزیع چگالی در جهت α | $f_\alpha$ |
| تابع توزیع دما پس از برخورد در جهت α | $g_\alpha$ |
| تابع توزیع دما در جهت α | $g_\alpha$ |
| تابع وزنی | $\omega_\alpha$ |
| چگالی سیال $(kg/m^3)$ | $\rho$ |
| دما $({}^\circ C)$ | $T$ |
| دمای بی‌بعد | $\theta$ |
| دمای دیوار سرد$({}^\circ C)$ | $T_C$ |
| دمای دیوار گرم$({}^\circ C)$ | $T_H$ |
| زاویه در محفظه‌ها $({}^\circ)$ | $\gamma$ |
| زمان (s) | $t$ |
| زمان آرامش شبکه برای معادله انرژی | $\tau_c$ |
| زمان آرامش شبکه برای معادله مومنتوم | $\tau_v$ |
| سرعت بی‌بعد در راستای افقی | $u^*$ |
| سرعت بی‌بعد در راستای قائم | $v^*$ |
| سرعت در راستای افقی$(m/s)$ | $u$ |
| سرعت در راستای عمودی$(m/s)$ | $v$ |
| سرعت درپوش متحرک محفظه$(m/s)$ | $U_0$ |
| سرعت صوت در مقیاس شبکه بولتزمن | $c_s$ |
| سرعت گسسته شده شبکه بولتزمن | $\vec{e}_\alpha$ |
| شتاب جاذبه$(m/s^2)$ | $g$ |
| ضریب انبساط حجمی$(1/K)$ | $\beta$ |
| ضریب نفوذپذیری حرارتی سیال $(m^2/s)$ | $\alpha$ |
| طول مشخصه در محفظه‌ها$(m)$ | $H$ |
| عدد اقامت بولین | $n_i$ |
| عدد پرانتل | $Pr$ |

| | |
|---|---|
| عدد رایلی | Ra |
| عدد رینولدز | Re |
| عدد ناسلت موضعی | $Nu_L$ |
| لزجت سینماتیکی سیال ($m^2/s$) | ν |
| محور افقی | X |
| محور افقی بدون بعد | x* |
| محور قائم | Y |
| محور قائم بدون بعد | y* |
| نسبت ارتفاع محفظه‌ای با دیواره دایروی به قطر دایره | m |
| نسبت قاعده‌ی کمان‌های جدا شده به قطردایره  در محفظه‌ای با دیواره دایروی | n |
| نیرو (N) | $F$ |

# فصل۱:

# مقدمه

## ۱-۱- مقدمه

بررسی جریان و انتقال حرارت درون محفظه‌ی بسته از دیرباز توجه زیادی را به خود جلب کرده است. بیشترین حجم مطالعات در این زمینه مربوط به محفظه‌های به شکل مربع و یا مستطیل می‌باشد. این نوع محفظه‌ها از هندسه‌ای به مراتب ساده‌تر از آنچه عملاً در طبیعت و صنعت به چشم می‌خورد برخوردارند. بنابراین ما بر آن شدیم که در این مطالعه به بررسی جریان و انتقال حرارت در محفظه‌های با هندسه‌ی غیر مربعی بپردازیم. محفظه‌های که در حالت دوبعدی به شکل نیم‌بیضی یا نیم دایره، مثلث، ذوزنقه و محفظه‌های با دیواره دایروی هستند. از جمله کاربردهای این نوع محفظه‌ها می‌توان به کاربرد در مهندسی خورشیدی، ساختمان‌سازی و سیستم‌های عایق حرارتی، خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی، سیستم خشک کردن، مطالعات ژئوفیزیک و ... پرداخت.

در سالهای اخیر روش بولتزمن شبکه‌ای در تحلیل جریان سیال به عنوان راه کارآمد جایگزین برای روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، رشد چشم‌گیری داشته است. مزیت این روش در مقایسه با روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، محاسبات ساده‌تر، سهولت اعمال شرایط مرزی وقابلیت موازی‌شدن است که برای حل مسائلی با هندسه پیچیده، دارای کاربرد فراوانی است. با وجود مزایای روش بولتزمن شبکه‌ای و کاربرد فراوان محفظه‌های غیرمربعی تاکنون از این روش کمتر برای شبیه‌سازی این نوع محفظه‌ها استفاده شده است. مهمترین قسمت شبیه‌سازی در این نوع محفظه‌ها، اعمال شرایط مرزی دما و سرعت بر روی دیوار مایل است. اعمال شرایط مرزی در روش بولتزمن شبکه‌ای نیاز به توجه خاصی دارد چرا که به طور مستقیم بر دقت جواب نهایی اثر می‌گذارد.

## ۱-۲- مروری بر کارهای انجام شده

### ۱-۲-۱-مطالعات انجام شده به کمک روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی

مطالعات انجام شده در زمینه محفظه‌های با هندسه غیر مربعی با استفاده از روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی مانند روش حجم محدود، المان محدود وتفاضل محدود را می‌توان به دو بخش کلی تقسیم نمود: مطالعاتی که به تحلیل الگوی جریان در محفظه‌های غیر مربعی با درپوش متحرک پرداخته اند و مطالعاتی که انتقال حرارت در این نوع محفظه‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند. در ادامه اشاره‌ای مختصر به بعضی از این مطالعات خواهیم داشت.

### ۱-۲- ۱-۱- بررسی جریان در محفظه‌ی غیرمربعی با درپوش متحرک

گلووینسکی[۱] و همکارانش [۱] برای نشان دادن توانایی روش المان محدود( تکنیک‌های اپراتور-تقسیم[۲]) در شبیه‌سازی جریان سیال لزج تراکم‌ناپذیر با عدد رینولدز بالا در ناحیه‌ای با مرز منحنی، به شبیه سازی جریان در محفظه‌ای به شکل نیم‌دایره با درب متحرک پرداختند. نتایج آنها شامل خطوط جریان، خطوط هم‌فشار، سرعت در مقاطع مختلف محفظه و ... در اعداد رینولدز ۵۰۰ تا۶۷۰۰ ارائه شد. نتایج آنها نشان داد که با افزایش عدد رینولدز تعداد گردابه افزایش می‌یابد، همچنین عدد رینولدز روی اندازه گردابه‌ها نیز موثر است. ادریس[۳] و همکارانش [۲] شبیه‌سازی جریان در محفظه‌ای به شکل نیم‌بیضی با درب متحرک را به روش تفاضل محدود با شبکه غیر یکنواخت مورد مطالعه قرار داده‌اند. نتایج آنها برای محفظه‌های با نسبت ارتفاع به پهنای ۱ به ۴، ۱به۳و ۳به ۸ در اعداد رینولدز ۱۰۰۰،۱۵۰۰،۵۰۰،۱۰۰و ۲۰۰۰ نشان داد که هنگامی که نسبت به ارتفاع به پهنای محفظه ۱ به ۴ است، گردابه ثانویه در عدد رینولدز ۱۵۰۰ ظاهر می‌شود، این در حالیست که در دو حالت دیگر در عدد رینولدز ۱۰۰۰شاهد وجود گردابه ثانویه هستیم. ارتورک[۴] و گوکول[۵] [۳]به شبیه‌سازی جریان پایا و ترکم‌ناپذیر در محفظه‌های به شکل مثلث با درب

---

*1* Glowinski
*2* Operature -spilitting
*3* Idris
*4*Erturk
*5* Gokol

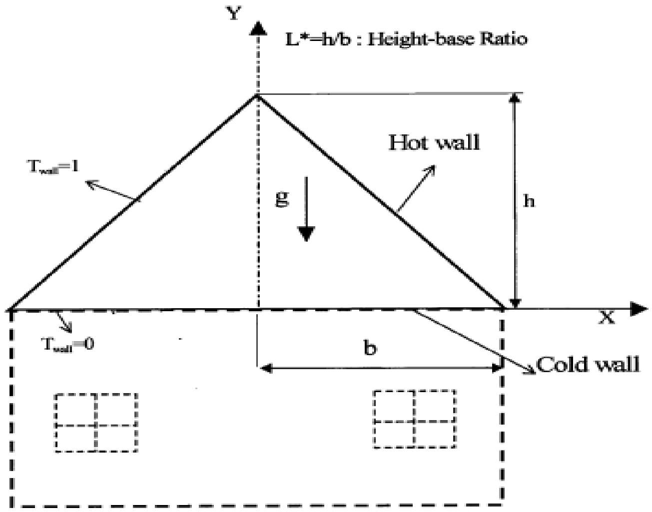
متحرک پرداختند. برای این منظور معادلات ناویراستوکس در قالب توابع جریان و بردار چرخش را به کمک روش آرامش متوالی[1] حل کردند و با مقایسه نتایج خود و سایر نتایج موجود برای این مسئله، توانایی روش خود در شبیه‌سازی چنین هندسه‌هایی را اثبات کردند. مککویین[2] و همکارانش [۴] جریان در محفظه‌های مثلثی و ذوزنقه‌ای با ابعاد مختلف را برای اعداد رینولدز ۱ تا ۵۰۰ به روش تفاضل محدود مورد بررسی قرار دادند. نتایج آنها نشان‌دهنده تاثیر هندسه محفظه بر الگوی جریان بود. پارامانه[3] و شارما[4] [۵] برای اثبات توانایی طرح‌های مختلف روش حجم محدود، به مقایسه نتایج این طرح‌ها، در شبیه‌سازی جریان در محفظه‌های به شکل ذوزنقه، متوازی‌الاضلاع و مثلث با درب متحرک پرداختند.

### ۱-۲- ۱-۲- بررسی پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد در هندسه‌های غیرمربعی

آسان[5] وناملی[6][۶] به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در سقف یک خانه که در حالت دوبعدی به صورت مثلث متساوی‌الساقین است(شکل ( ۱-۱ ))، در شرایط یک روز تابستانی پرداختند. در شرایط روز-های تابستانی، مقطع مثلث در دمای بی‌بعد ثابت صفر و دمای دیوارهای مایل در دمای بی‌بعد یک در نظر گرفته شده است. اگر نسبت ارتفاع به نصف قاعده را با $L^*$ نشان دهیم، آنها به بررسی الگوی جریان و روند انتقال حرارت در محدوده $L^*$ از۰/۱۲۵ تا ۱ و عدد رایلی $۱۰^۳$تا $۱۰^۶$برای سیال هوا با عدد پرانتل ۰/۷پرداختند. نتایج آنها نشان میدهد در $L^*$کمتر از یک، تاثیر افزایش عدد رایلی تا $۱۰^۵$به روی نرخ انتقال حرارت روی دیوار مقطع مثلث، بسیار ناچیز است. از طرفی با کم شدن $L^*$، ناسلت متوسط روی مقطع مثلث به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.

---

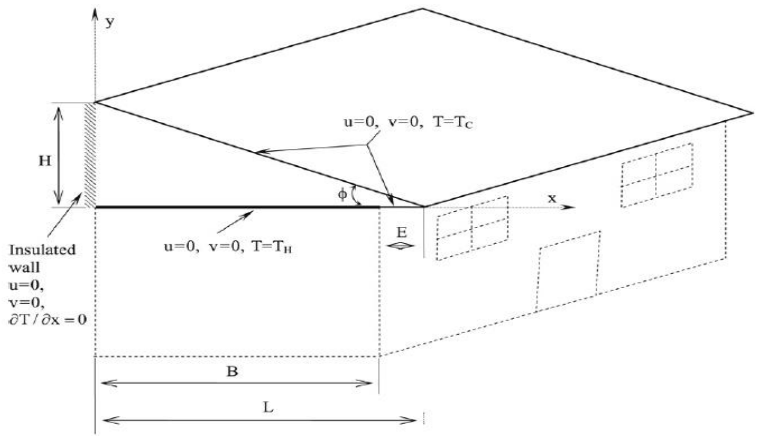
[1] Successive_over_relaxation
[2] Mcquain
[3] Paramane
[4] Sharma
[5] Asan
[6] Namli




شکل (۱-۱) هندسه مورد بررسی توسط آسان و ناملی[۶].

از سوی دیگر، کوکا[1] و همکارانش [۷] به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در سقف یک خانه در شرایط اقلیمی سرد به روش تفاضل محدود و به صورت دو بعدی پرداختند( شکل ( ۱-۲ )). همانطور که در شکل قابل مشاهده است، سطح مقطع سقف به صورت مثلث قائم‌الزاویه فرض شده‌است. بخشی از مرز پایین در تماس با اتاق و در دمای ثابت $T_H$قرار دارد و بخشی از آن در تماس با هوای سرد بیرون است و فرض شده که به همراه مرز مایل در دمای ثابت $T_C$ و با این شرط که $T_H > T_C$است نگهداری می‌شود. همچنین مرز عمودی مثلث، عایق فرض شده است. اگر نسبت ارتفاع به قاعده مثلث را با $AR=\frac{H}{L}$و بخشی از قاعده که در معرض هوای بیرون قرا دارد را با $E=\frac{L}{n}$ نشان دهیم، آنها نتایج خود را به صورت خطوط هم‌دما، الگوی جریان و عدد ناسلت برای AR، ۰/۲۵ تا ۱ و n، ۳ تا ۷ و عدد رایلی $۱۰^{۳}$تا $۱۰^{۶}$ارائه کردند. نتایج آنها نشان می‌دهد که در اعداد رایلی کوچک، انتقال حرارت با افزایش ARکاهش می‌یابد ولی در اعداد رایلی بزرگ افزایش خواهد یافت. همچنین انتقال حرارت با کاهش اندازه E افزایش خواهد یافت.

[1] Koca




شکل (۱-۲) هندسه مورد بررسی توسط کوکا و همکارانش[۷].

از جمله مطالعات دیگر انجام شده در زمینه انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه مثلثی، می‌توان به مطالعه انجام شده توسط باساک[1] و همکارانش[۸] اشاره کرد. باساک و همکارانش به بررسی پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌ای به شکل مثلث قائم‌الزاویه با نسبت ارتفاع به پهنای یک، به روش المان محدود پرداختند. نتایج عددی برای اعداد رایلی $۱۰^۳$تا $۱۰^۵$و اعداد پرانتل ۰/۰۷تا ۱۰۰۰در دو شرط مرزی مختلف گزارش شد. در حالت اول دیوار عمودی به صورت یکنواخت یا به صورت خطی گرم می‌شود این در حالیست که دیوار مایل در دمای ثابت سرد نگه داشته شده است و در حالت دوم دیوار عمودی در دمای ثابت سرد نگه داشته شده و دیوار مایل به صورت یکنواخت یا خطی گرم می‌شود. در تمامی حالات دیوار افقی عایق در نظر گرفته شده است. نتایج عددی به صورت خطوط جریان و خطوط هم‌دما و اعداد ناسلت ارائه شده است. نتایج آنها نشان دادکه تاثیر عدد رایلی بر روی روند انتقال حرارت در محفظه بسیار بیشتر از عدد پرانتل است. همچنین با محاسبه ناسلت متوسط نشان دادند که نرخ انتقال حرارت در شرایط گرمایش خطی کمتر از گرمایش یکنواخت است. در کار دیگری باساک و همکارانش [۹] به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌ای به شکل مثلث متساوی‌الساقین با نسبت ارتفاع به قاعده ۰/۵، به

[1] Basak

روش المان محدود پرداختند. برای این منظور دو شرط مرزی مختلف در نظر گرفته شد: در حالت اول دیواره‌های مایل به صورت یکنواخت گرم می‌شوند در حالیکه دیوار پایین در دمای ثابت سرد نگه داشته شده است و در حالت دوم دیواره‌های مایل به صورت غیریکنواخت گرم خواهد شد در حالیکه دیوار پایین مانند حالت قبل در دمای ثابت سرد نگه داشته شده است. نتایج عددی برای اعداد پرانتل ۰/۰۲۶ تا ۱۰۰۰و اعداد رایلی $۱۰^{۳}$تا$۱۰^{۶}$ارائه شده است. مشاهده شد که در عدد رایلی پایین($Ra=۱۰^{۳}$ ) خطوط هم‌دما به صورت هموار و یکنواختند زیرا در این حالت انتقال حرارت تنها ناشی از هدایت است. با افزایش عدد رایلی انتقال حرارت جابجایی غالب گشته و موجب آشفتگی خطوط هم‌دما خواهد شد. باساک و همکارانش محدوده‌ای که در آن انتقال حرارت به روش هدایت غالب است را برای عدد پرانتل ۰/۰۲۶در هر دو شرایط مرزی، اعداد رایلی کمتر از $۲×۱۰^{۴}$ گزارش کرده‌اند. همچنین نشان دادند در همه حالات ناسلت متوسط روی دیوارها در حالت اول(حرارت یکنواخت) بیشتر از حالت دوم (حرارت غیریکنواخت) می‌باشد. همچنین کنت[1][۱۰] به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در رژیم جریان آرام در محفظه به شکل مثلث متساوی‌الساقین به روش حجم محدود پرداخت. اگر زاویه تشکیل شده توسط هرکدام از ساق-های مثلث و قاعده‌ی آن را زاویه پایه بنامیم. کنت نتایج خود را که شامل خطوط جریان، خطوط هم‌دما و ناسلت متوسط بود، برای ۵ زاویه پایه مختلف (۱۵°،۳۰°،۴۵°،۶۰°و ۷۵ درجه) و برای اعداد رایلی $۱۰^{۳}$تا $۱۰^{۵}$و در شرایطی که دو ساق مثلث در دمای ثابت $T_H$و قاعده مثلث در دمای ثابت $T_C$ قرار دارند( $T_H > T_C$) و محفظه با سیال هوا با عدد پرانتل ۰/۷۱ پر شده است، ارائه داد. کنت مثلث را به گونه‌ای در نظر گرفت که با تغییر زاویه پایه، اندازه ارتفاع مثلث تغییر کند و اندازه قاعده آن ثابت باقی بماند. نتایج او نشان می‌دهند که در تمام زوایای پایه، ناسلت متوسط به آرامی با افزایش عدد رایلی افزایش می‌یابد. همچنین کاهش زاویه پایه، افزایش عدد ناسلت متوسط را به دنبال دارد به طوریکه ناسلت متوسط در

[1] Kent

زاویه پایه ۱۵ درجه، ۳/۴ برابر بیشتر از زاویه پایه ۷۵ درجه است. علاوه بر مطالعات اشاره شده، کالوری[1] و همکارانش[۱۱] به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌ای به شکل مثلث قائم‌الزاویه به روش المان محدود پرداختند. نتایج آنها برای سه زاویه مختلف بین دیوار عمودی و مایل (۱۵، ۳۰ و ۴۵ درجه) برای اعداد پرانتل ۰/۰۱۵، ۷/۲و۱۰۰۰ در محدوده عدد رایلی ۱۰^۳تا ۱۰^۵برای شرایط مرزی زیر ارائه شده است:

حالت اول: دیوار سمت چپ در دمای ثابت گرم و دیوار سمت راست در دمای ثابت سرد نگه داشته شده‌اند.

حالت دوم:دیوار سمت چپ به صورت خطی گرم می‌شود درحالیکه دیوار سمت راست در دمای ثابت سرد نگه داشته شده است.

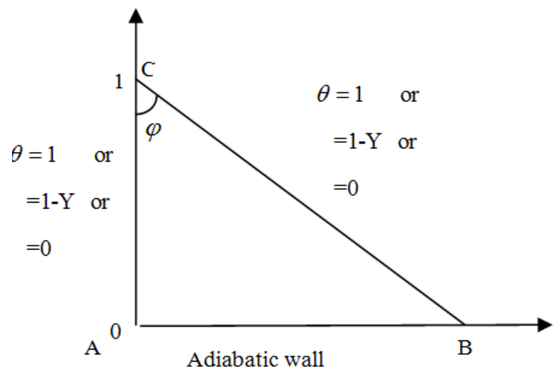
حالت سوم: دیوار سمت چپ در دمای ثابت سرد و دیوار سمت راست در دمای ثابت گرم نگه داشته شده‌اند.

حالت چهارم: دیوار سمت راست به صورت خطی گرم می‌شود درحالیکه دیوار سمت چپ در دمای ثابت سرد نگه داشته شده است.

در تمامی حالات دیوار پایین کاملاً عایق فرض می‌شود. این شرایط در شکل (۱-۳) بهتر نشان داده شده است. درتمامی حالات ارتفاع محفظه ثابت در نظر گرفته شده و طول قاعده آن با تغییر زاویه تغییر خواهد کرد. نتایج آنها نشان داد هنگامی که گرمایش دیوار به صورت یکنواخت صورت می‌گیرد (حالت اول و سوم) نرخ انتقال حرارت بیشتر از حالتی است که گرمایش خطی داریم( حالت دوم و چهارم). همچنین برای $\varphi = 15^{\circ}$ ناسلت متوسط، با افزایش عدد رایلی تغییر چندانی نخواهد کرد و البته با کاهش زاویه، ناسلت متوسط افزایش خواهد یافت، این درحالیست که عدد پرانتل تاثیر چندانی در تغییر این عدد ندارد.

---

[1] Kaluri

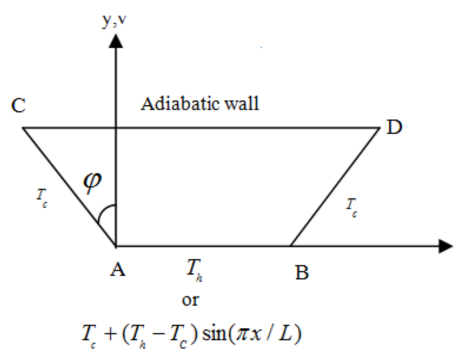


شکل (۱-۳) هندسه مورد بررسی توسط باساک و همکارانش [۱۱].

علاوه بر محفظه‌های مثلثی شکل، بررسی انتقال حرارت در محفظه‌های ذوزنقه‌ای شکل نیز توجه زیادی را به خود جلب کرده است. ناتاراجان[1] و همکارانش [۱۲] به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌ای به شکل ذوزنقه به روش المان محدود پرداختند. در محفظه‌ی مورد بررسی آنها دیوارهای چپ و راست، دارای زاویه ۳۰ درجه نسبت به عمود است و در دمای ثابت سرد نگه داشته می‌شوند، این درحالیست که دیوار بالای به خوبی عایق شده و دیواره‌ی پایین به صورت یکنواخت و یا غیریکنواخت گرم می‌شود( شکل (۱-۴ )). نتایج به صورت خطوط جریان، خطوط هم‌دما و اعداد ناسلت در اعداد پرانتل ۰/۰۷، ۰/۷و۱۰ و در محدوده عدد رایلی $۱۰^۳$تا $۱۰^۵$ارائه شده است. نتایج آنها نشان می‌دهد هنگامی که دیوار پایین محفظه به صورت یکنواخت گرم می‌شود، تا عدد رایلی $۵\times۱۰^۳$ انتقال حرارت ناشی از هدایت خواهد بود ولی هنگامی که دیوار پایین به صورت غیر یکنواخت گرم می‌شود تا عدد رایلی$۳\times۱۰^۳$ انتقال حرارت هدایت، غالب است. همچنین در حالت گرمایش یکنواخت نرخ انتقال حرارت روی دیوار پایین محفظه از سمت چپ به راست، ابتدا به تدریج کاهش یافته تا در نقطه میانی دیوار به کمترین میزان خود می‌رسد و از آن پس شاهد افزایش تدریجی نرخ انتقال حرارت تا انتهای سمت راست دیوار خواهیم بود. اما در گرمایش غیر یکنواخت در عدد رایلی $۱۰^۳$شاهد افزایش نرخ انتقال حرارت روی این دیوار تا نقطه میانی آن و سپس کاهش آن خواهیم بود، در حالیکه در رایلی $۱۰^۵$تغییرات نرخ انتقال حرارت روی این دیوار

[1] Natarajan

روندی سینوسی خواهد داشت و در همه‌ی اعداد رایلی نرخ انتقال حرارت درنقطه میانی دیوار پایین در حالت گرمایش غیر یکنواخت بیشتر از گرمایش یکنواخت است اما ناسلت متوسط نشان می‌دهد که در کل نرخ انتقال حرارت حالت گرمایش غیریکنواخت کمتر خواهد بود. همچنین افزایش عدد پرانتل موجب افزایش ناسلت متوسط مخصوصاً در اعداد رایلی بالا خواهد شد.




شکل (۱-۴) هندسه مورد بررسی توسط ناتاراجان و همکارانش [۱۲].

علاوه بر این، باساک[1] و همکارانش [۱۳] محفظه ذوزنقه‌ای قبل را برای زوایای $\varphi$برابر صفر، ۳۰و ۴۵ درجه با روش المان محدود و براساس مفهوم خطوط گرما برای اعداد رایلی $۱۰^۳$تا $۱۰^۵$و اعداد پرانتل ۰/۰۲۶، ۰/۷و۱۰۰۰ شبیه‌سازی کردند. واضح است که هنگامی که زاویه $\varphi$برابر صفر است، محفظه به محفظه مربعی تبدیل خواهد شد. نتایج نشان می‌دهد که تغییر زاویه در گرمایش غیریکنواخت دیوار پایین، تاثیر چندانی در عدد ناسلت متوسط روی این دیوار ندارد. همچنین تغییرات ناسلت موضعی روی دیوارهای مایل نشان می‌دهند که نرخ انتقال حرارت در بخش پایینی محفظه بیشتر است. در تمامی زوایا و اعداد رایلی، ناسلت متوسط روی دیوارها در حالت گرمایش یکنواخت بیشتر از غیر یکنواخت است و البته می‌توان گفت با کم شدن زاویه نرخ انتقال حرارت افزایش می‌یابد. در مطالعه دیگری، باساک و همکارانش [۱۴] محفظه ذوزنقه‌ای قبل را در همان زوایا و در همان محدوده رینولدز، برای اعداد پرانتل

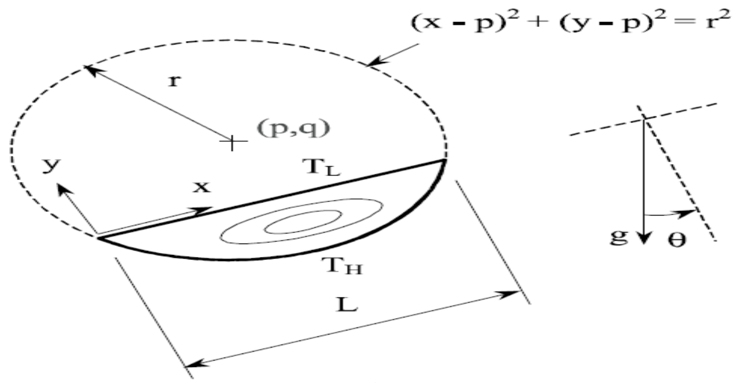
[1] Basak

۰/۷، ۱۰و۱۰۰۰ در دو شرط مرزی مختلف با روش المان محدود بررسی کردند. در حالت اول دیوار بالا عایق و دیوار پایین به صورت یکنواخت گرم می‌شود، این درحالیست که دو دیوار چپ و راست به صورت خطی گرم می‌شوند و در حالت دوم تنها شرایط دیوار راست تغییر داده شده و به صورت سرمایش در دمای ثابت در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که این تغییر شرایط همواره موجب افزایش ناسلت متوسط روی دیوار پایین خواهد شد. در حالت گرمایش خطی دیوارهای چپ و راست، الگوی جریان متقارنی در محفظه مشاهده می‌شود. همچنین برای این حالت در زاویه صفر درجه و در عدد رایلی بالا و اعداد پرانتل بیشتر از ۰/۷ شاهد تشکیل گردابه‌های ثانوبه در گوشه‌های پایین محفظه هستیم. در حالیکه در حالت دوم برای این زاویه، گردابه ثانویه در بخش بالایی دیوار سمت چپ تشکیل خواهد شد.

همچنین در بسیاری از مطالعات، به بررسی پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌های با دیوارهای دایروی پرداخته شده است. چن[1] و چنگ[2] [۱۵] به بررسی جریان در محفظه‌ای به شکل کمانی از دایره به روش حجم محدود پرداختند. محفظه مورد بررسی آنها در شکل (۱-۵) نشان داده شده است. در هندسه مورد بررسی آنها دیوار صاف در دمای ثابت $T_L$ و دیوار کمانی شکل در دمای ثابت $T_H$ و با این فرض که $T_H > T_L$ است، نگهداری می‌شود. همچنین $\frac{p}{r}$، $\frac{q}{r}$و $\frac{r}{L}$ به ترتیب برابر ۰/۵، ۰/۲۹و۰/۵۷۷ در نظر گرفته شد. اگر زاویه‌ای که خط عمود بر دیوار صاف و بردار شتاب گرانش تشکیل می‌دهند را با $\theta$ نمایش دهیم، آنها نتایج خود را که شامل خطوط جریان، خطوط هم‌دما و عدد ناسلت بود، برای سیال هوا با پرانتل ۰/۷ در $0 \le \theta \le \pi$ و عدد گراشهف ۱۰<sup></sup>$^{4}$تا$10^{7}$ارائه دادند. آنها همچنین نتایج به دست آمده از روش عددی خود را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند. نتایج آنها نشان می‌دهد هنگامی که $\theta$برابر $0$یا $\pi$ است، الگوی جریان شامل دو سلول است، در حالیکه در بقیه زوایا فقط یک سلول در الگوی جریان به-

Chen[1]
Cheng[2]

چشم می‌خورد. همچنین برای این زوایا تغییرات ناسلت موضعی به صورت متقارن خواهد بود. همچنین با تغییر زاویه از $0$ تا $\pi$ از مقدار ناسلت متوسط کاسته می‌شود. همچنین افزایش عدد گراشهف، افزایش ناسلت متوسط را در پی خواهد داشت.

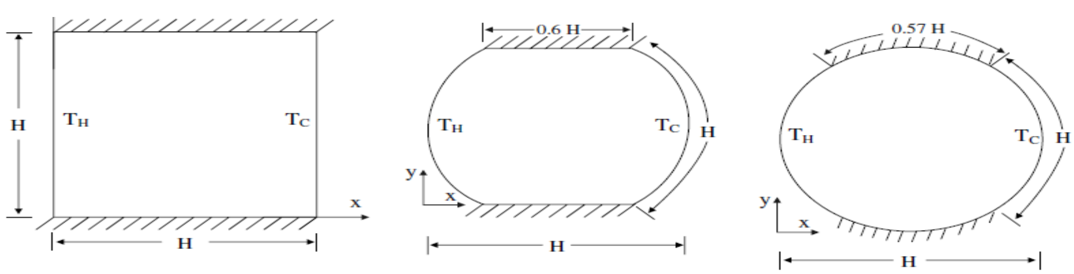



شکل (۱-۵) هندسه مورد بررسی توسط چن و چنگ [۱۵].

در کار دیگری چن وچنگ[۱۶] انتقال حرارت جابجایی آزاد را در محفظه بالا را برای عدد پرانتل ۴و $0 \le \theta \le 2\pi$ و عدد گراشهف $10^5$ تا $4\times10^6$ به روش حجم محدود و در مختصات منحنی‌الخط شبیه‌سازی کردند. نتایج آنها نشان می‌دهد بهترین عملکرد انتقال حرارت برای عدد پرانتل ۴ در زاویه ۹۰ درجه و در گراشهف $4\times10^6$ و کمترین عملکرد انتقال حرارت، در زاویه ۱۸۰ درجه و گراشهف $10^5$ خواهد بود. هنگامی که در زاویه ۹۰ درجه عدد گراشهف از $10^5$ تا $4\times10^6$ تغییر می‌کند، ناسلت متوسط از۱۳/۹۴۶ به ۲۵/۳ می‌رسد یعنی ۸۱/۴درصد افزایش ولی در زاویه ۱۸۰ این تغییر عدد گراشهف، ناسلت متوسط را از ۱۱/۶۵۵به ۱۳/۴۷۶می‌رساند یعنی تنها ۱۵/۶درصد افزایش در عدد ناسلت متوسط خواهیم داشت. همچنین، ریدوانه[1] و کامپو[2] [۱۷] به بررسی تاثیر انحنای دیوار بر روی انتقال حرارت جابجایی آزاد آرام و پایا به روش حجم محدود پرداختند. برای این منظور سه محفظه متفاوت در نظر گرفته شد: محفظه مربعی با طول دیواره برابر H، محفظه به شکل دایره با قطر H و محفظه سوم که ترکیبی از دو محفظه

[1] Ridouane
[2] Campo

قبلی است، یعنی دایره‌ای به قطر H که کمان‌های از بالا و پایین آن به گونه‌ای جدا شده که کمان باقی- مانده در سمت چپ و راست طولی برابر H داشته باشد. این محفظه کمان- دایره‌ای[1] نامیده شد(شکل (۱-۶)). شرایط مرزی محفظه‌ها به گونه‌ایست که دیوارهای بالا و پایین کاملاًعایق و دیواره سمت چپ در دمای ثابت ۳۷۳ کلوین و دیواره سمت راست در دمای ثابت ۲۸۷ کلوین فرض شده است. در مورد محفظه دایروی، کمان‌های در بالا و پایین به اندازه کمان‌های که در حالت سوم از محفظه جدا شده‌اند، به عنوان دیوار بالا و پایین در نظر گرفته شده است و کاملاً عایق هستند. یعنی در تمامی محفظه‌ها طول دیوار گرم و سرد یکسان و برابر H است. همچنین در تمامی شبیه‌سازی‌ها سیال عامل هوا در نظر گرفته شد. برای هر سه محفظه ناسلت متوسط روی دیوار در اعداد رایلی ۱۰ تا $۱۰^{۶}$محاسبه شد. آنها مشاهده نمودند که در تمام این محدوده‌ی عدد رایلی، ناسلت متوسط در محفظه دایروی بیشتر از محفظه کمان-مربعی و درمحفظه کمان- مربعی بیشتر از محفظه مربعی است که این تفاوت با زیاد شدن عدد رایلی کم می‌شود. به عنوان مثال در عدد رایلی ۵۰ اختلاف عدد ناسلت متوسط روی دیوار، بین محفظه دایروی و مربعی ۲۱/۵٪ و بین محفظه کمان- مربعی و مربعی ۹٪ گزارش شد، در حالیکه برای عدد رایلی$۱۰^{۶}$ به حدود ۲% برای محفظه دایروی و مربعی و ۰/۴ ٪برای محفظه کمان- مربعی و مربعی می‌رسد.




شکل (۱-۶) هندسه مورد بررسی توسط ریدوانه و کامپو [۱۷].

[1] Arc-square

در مطالعاتی که تاکنون اشاره شد، محفظه دارای شکل هندسی مشخصی بود علاوه بر این هندسه‌ها، تاکنون مطالعات زیادی در زمینه انتقال حرارت جابجایی آزاد درمحفظه‌های با دیواره موجی شکل ارائه شده است[۱۸-۲۲].

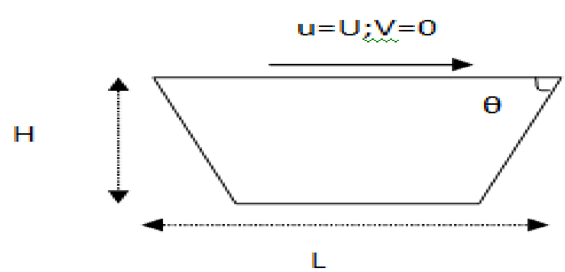
## ۱-۲-۲- مطالعات انجام شده به روش شبکه بولتزمن

در تمام مطالعاتی که تاکنون بیان شد از روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی مانند روش حجم محدود، تفاضل محدود و المان محدود برای حل معادلات ناویراستوکس و شبیه‌سازی جریان در این محفظه‌ها استفاده شده است. در سالهای اخیر روش بولتزمن شبکه‌ای در تحلیل جریان سیال به عنوان راه کارآمد جایگزین برای روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، رشد چشم‌گیری داشته است. مزیت این روش در مقایسه با روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، محاسبات ساده‌تر، سهولت اعمال شرایط مرزی وقابلیت موازی‌شدن است که برای حل مسائلی با هندسه پیچیده، دارای کاربرد فراوانی است. با وجود مزایای روش بولتزمن شبکه‌ای و کاربرد فراوان آن، تاکنون کمتر در شبیه‌سازی جریان و خصوصاً انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌های غیر مربعی پرداخته شده است. منیر[۱] و همکارانش [۲۳] به شبیه‌سازی جریان پایا و تراکم‌ناپذیر در محفظه‌ی به شکل مثلث با درب متحرک به کمک روش بولتزمن شبکه‌ای پرداختند. هر چند در کار آنها اشاره‌ای به چگونگی مواجه با مرز مایل در روش بولتزمن شبکه‌ای نشد اما نتایج آنها برای اعداد رینولدز ۱۰۰تا ۲۵۰۰ در محفظه‌های به شکل مثلث قائم‌الزاویه، تطابق مناسب نتایج روش بولتزمن شبکه‌ای برای این نوع محفظه با نتایج حاصل از سایر روش-های مرسوم را نشان می‌دهد. همچنین ژانگ[۲] و همکارانش[۲۴] جریان در داخل محفظه‌ای به شکل ذوزنقه که دیواره‌ی بالایی آن با سرعت ثابت حرکت می‌کرد را به روش LBMشبیه سازی کردند. شکل (۱-۷) نشان دهنده هندسه مورد بررسی آنهاست. آنها به بررسی تاثیر عدد رینولدز و زاویه $\theta$ بر روی

---

[1] Munir
[2] Zhang

الگوی جریان پرداختند. نتایج آنها نشان داد هنگامی که در عدد رینولدز ثابت، (Re=۱۰۰۰) زاویه $\theta$از ۵۰ تا ۹۰ درجه تغییر کند، گردابه موجود در پایین محفظه پهن‌تر شده و سرانجام به دو گردابه مجزا تقسیم خواهد شد، به طوریکه در ابتدا گردابه گوشه راست پایین محفظه بزرگتر از گوشه چپ پایین محفظه خواهد بود ولی به تدریج با افزایش زاویه، گردابه گوشه چپ بزرگتر از گردابه گوشه راست خواهد شد. برای مشاهده تاثیر عدد رینولدز بر روی الگوی جریان، آنها در زاویه ثابت (۶۰درجه) عدد رینولدز را از ۱۰۰تا ۱۵۰۰۰ تغییر دادند. افزایش عدد رینولدز ابتدا موجب پیچیده شدن الگوی جریان و افزایش گردابه‌ها خواهد شد و سپس موجب تغییر رژیم جریان می‌شود. به طوریکه تا عدد رینولدز ۷۵۰۰ جریان در محفظه به صورت پایا خواهد بود و سپس برای اعداد رینولدز ۸۱۵۰تا ۱۰۰۰۰جریان نسبت به زمان متناوب[1] است و در اعداد رینولدز ۱۲۵۰۰و ۱۵۰۰۰ شاهد جریان نامنظم[2] خواهیم بود، و در نهایت رینولدز بحرانی برای تغییر رژیم جریان در زوایای ۶۰ تا ۹۰ درجه را ارائه دادند.




شکل (۱-۷) هندسه مورد بررسی توسط ژانگ و همکارانش[۲۴].

مهمترین قسمت شبیه‌سازی جریان در محفظه‌های غیرمربعی اعمال شرایط مرزی سرعت و دما بر روی مرزهای مایل و منحنی است. فیلیپوا و هانل[3][۲۵] با استفاده از برونیابی خطی مدلی را برای اعمال شرایط مرزی سرعت ارائه کردند. می و همکارانش [۲۶-۲۸] این مدل را بهبود بخشیده **و** محدودیت‌ها آن را نیز

[1] Periodic flow
[2] Chaotic flow
[3] Fillipova and Hannel

برطرف کردند. برای اعمال شرط مرزی دما بر روی مرزهای منحنی، یان و زو[1][۲۹] برای اولین بار مدلی ارائه کردند که دارای دقت مرتبه دوم است و تطابق خوبی با نتایج عددی و آزمایشگاهی موجود دارد. جزییات این مدل‌ها در بخش‌های بعد توضیح داده خواهد شد. در این پایان‌نامه از مدل‌های می و همکارانش [۲۷] و یان و زو [۲۹] به ترتیب برای مدل‌سازی میدان سرعت و دما بر روی مرزهای مایل و منحنی استفاده شده است

## ۱-۳- محتوای فصل‌های بعد

در فصل دوم این پایان‌نامه روش بولتزمن شبکه‌ای به طور کامل معرفی می‌شود. در این فصل ابتدا به معرفی روش‌های موجود برای بررسی جریان سیال خواهیم پرداخت و روند روآوری به روش بولتزمن شبکه‌ای توضیح داده خواهد شد. از آنجاییکه روش بولتزمن شبکه‌ای در ابتدا برای پاسخگویی به مشکلات روش شبکه‌ی گاز بوجود آمده است، به بررسی این روش و معایب و مزایای آن خواهیم پرداخت و پس از مقایسه حلگرهای ناویراستوکس و روش بولتزمن، توضیح جامعی در مورد شرایط مرزی دما و سرعت و نحوه اعمال آنها داده می‌شود. در فصل سوم نحوه اعمال شرایط مرزی دما و سرعت بر روی مرزهای منحنی و مایل در روش بولتزمن شبکه‌ای به صورت جامع توضیح داده خواهد شد. در فصل چهارم نیز نتایج هندسه‌های مورد بررسی به همراه تطابق حل‌عددی با نتایج موجود آورده شده است. نتایج در دو بخش ارائه شده‌اند: بررسی جریان در محفظه‌های غیر مربعی با درپوش متحرک که شامل محفظه‌ای به شکل نیم بیضی،محفظه ای به شکل مثلث قائم‌الزاویه و محفظه با دیواره دایروی می‌شود و بررسی جریان و انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌های غیر مربعی که شامل محفظه‌های به شکل مثلث قائم‌الزاویه، ذوزنقه و نیم‌دایره است.

---

[1] Yan and Zu

# فصل ۲:

# روش تحقیق

## ۲-۱- مقدمه

برای تحلیل جریان سیال روش‌های مختلفی وجود دارد. نخستین روشی که برای حل هر مساله‌ای به ذهن می‌رسد، حل تحلیلی معادلات حاکم بر آن مساله است. اما برای بسیاری از پدیده‌های طبیعی و صنعتی شامل جریان سیال، حل تحلیلی وجود ندارد. لذا همگام با پیشرفت تکنولوژی و توسعه‌ی کامپیوترها، روش‌های عددی حل معادلات حاکم بر جریان مورد توجه قرار گرفتند. روش‌های اختلاف محدود، حجم محدود و اجزای محدود از جمله روش‌های متداول عددی در تحلیل جریان هستند. در این روش‌ها معادلات ناویر-استوکس به عنوان معادلات حاکم بر جریان در نظر گرفته می‌شود و با گسسته‌سازی، جبری‌سازی، خطی‌سازی و حل دستگاه معادلات، جریان سیال تحلیل می‌شود. این معادلات تنها بر رژیم جریان پیوسته حاکم هستند. پیوستگی جریان با عدد بی‌بعد نودسن[1] سنجیده می‌شود. رژیم جریانی که عدد نودسن آن، نسبت طول آزاد میانگین مولکولی به مقیاس طول مشخصه‌ی جریان، کمتر از ۰/۱ باشد پیوسته در نظر گرفته می‌شود. بنابراین با کوچک شدن ابعاد مسئله و در نتیجه افزایش عدد نودسن، نمی-توان از فرض پیوسته بودن جریان و روابط حاکم بر جریان که با استفاده از این فرض بدست آمده‌اند استفاده کرد. جریان در میکروکانالهای نمونه‌ای از این مسائل است. یکی از روش‌های تحلیل این نوع جریان‌ها، روش‌های شبیه‌سازی برخورد مولکولی یا دینامیک مولکولی است. در این روش‌ها برخوردهای بین مولکولی شبیه سازی می‌شود و با کمک قانون دوم نیوتن، مکان و سرعت هر مولکول در هر لحظه با استفاده از مکان و سرعت آن مولکول در لحظه قبل محاسبه میگردد و در پایان شبیه‌سازی، مجموعه‌ی کاملی از اطلاعات در مورد موقعیت، سرعت و انرژی تک تک مولکولها و توزیع آنها بدست می‌آید که با تحلیل آن‌ها نسبت به زمان می‌توان پارامترهای نظیر دما و فشار را بررسی کرد. همانطور که می‌توان حدس زد در این روش‌ها مقدار محاسبات بسیار زیاد است. این مشکل باعث می‌شود که بررسی رفتار برخوردهای مولکولی از دیدگاه آماری، به عنوان روش مناسب‌تر در نظر گرفته شود. در حال حاضر یکی از

---

**1**Knudsen

کارآمدترین روش‌ها برای شبیه سازی جریان‌های با عدد نودسن بالا، شبیه سازی مستقیم مونت کارلو[1]ست. در این روش مولکولهای با خواص یکسان نظیر دما و سرعت، به صورت یک ذره در نظر گرفته می‌شود و به جای بررسی تک‌تک مولکول‌ها، برخورد این ذرات شبیه‌سازی می‌شود و در نهایت خواص ماکروسکوپی جریان با تحلیل آماری به دست می‌آیند. در این روش هر چند حجم عملیات نسبت به روش‌های دینامیک مولکولی کمترمی‌باشد ولی همچنان چشم‌گیر است. بنابراین محدودیت دیگری بر روی روش‌های دینامیک مولکولی اعمال شد و روشهای دیگری به نام روش‌های شبکه‌ای ایجاد گردید. در این روش‌ها درجات آزادی ذرات محدود شده است یعنی ذرات تنها اجازه دارند در جهت‌های خاصی از میدان حرکت کنند. اگرچه در این روش‌ها نوع ذرات و قواعد برخورد، در سطح میکروسکوپی، مطابق با واقعیت فیزیکی نیست ولی اثبات می‌گردد که الگوریتم‌های آن‌ها در سطح ماکروسکوپی منجر به ارضای معادلات بقای جرم و مومنتوم می‌گردد. روش شبکه‌ی گاز و روش شبکه‌ی بولتزمن از جمله‌ی این روش‌هاست. در واقع روش شبکه بولتزمن از روش شبکه گاز منشا گرفته است و برای پاسخگویی به اشکالات اولیه آن ایجاد شد.

## ۲-۲- روش شبکه گاز

روش شبکه گاز، مدل‌های از برخورد ذرات مجازی بر روی یک شبکه‌ی منظم است. در واقع در این روش رفتار ذرات منفرد موجود در سیال، به ساده‌ترین حالت ممکن شبیه سازی می‌شود.

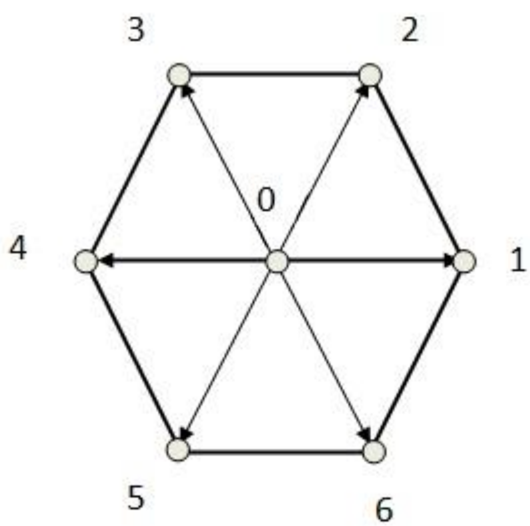
### ۲-۲-۱- شبکه گاز HPP :

1Direct simulation of Monte Carlo

هاردی[1]، پومیو و پازیس[2] نخستین مدل شبکه گاز را در سال ۱۹۷۳ برای شبیه سازی جریان سیال ارائه نمودند[۳۰]. در این مدل که HPP نامیده شد از یک شبکه مربعی استفاده می‌شود. این مدل با وجود ارضا قوانین بقای جرم و مومنتوم، به معادلات ناویر استوکس در مقیاس ماکروسکوپیک منجر نمی‌شد، بنابراین جستجو برای یافتن مدلی بهتر همچنان ادامه داشت.

## ۲-۲-۲- شبکه گاز FHP :

فریش[3]، هاسلاچر[4]و پومیو[5] در سال ۱۹۸۶ شبکه شش ضلعی جدیدی ارائه نمودند که FHP نامیده می‌شود و به معادلات ناویر استوکس در مقیاس ماکروسکوپیک منجر می‌شود[۳۱]. این مدل که به مدل شش سرعته نیز معروف است در شکل(۲-۱) نشان داده شده است.




شکل (۲-۱) شبکه‌ی FHP

در این روش، حضور یا عدم حضور ذره در مکانی خاص از شبکه، با عدد اقامت بولین[6] نشان داده می‌شود.

---

1 Hardy
2 Pomeau and Pazzis
3 Frish
4 Hasslacher
5 pomeau
6 Boolean occupation numbers

$n_i(\vec{x},t)=0$ عدم حضور ذره در مکان $\vec{x}$ ودر زمان $t$ در مسیر $i$ام (۲-۱)

$n_i(\vec{x},t)=1$ حضور ذره در مکان $\vec{x}$ ودر زمان $t$ در مسیر $i$ ام (۲-۲)

الگوریتم شبکه گاز از دو مرحله مجزا تشکیل شده است :

- مرحله برخورد
- مرحله جاری شدن

در مرحله جاری شدن هر ذره در راستای سرعتش $\mathbf{c}_{ia}$ به نزدیکترین نقطه همسایه می‌رود. بنابراین ذره‌ای که در مکان $\vec{\mathbf{x}}$ در زمان t با سرعت $\mathbf{c}_{ia}$ قرار دارد، در زمان t+1 به مکان $\vec{\mathbf{x}}+\mathbf{c}_{ia}$ می‌رود.

$$n_i(\vec{x}+c_{ia},t+1)=n_i(\vec{x},t) \tag{۲-۳}$$

عملکرد اوپراتور جاری شدن $\Delta_i$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta_i n_i \equiv n_i(\vec{x}+c_{ia},t+1)-n_i(\vec{x},t) \tag{۲-۴}$$

در مرحله برخورد در هر مکان، عدد اقامت $n_i$ به $n_i'$ تغییر می‌کند، بنابراین اوپراتور برخورد $C_i(\underline{n})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$= C_i(\underline{n})\ n_i'-n_i \tag{۲-۵}$$

در این معادله $\underline{\mathbf{n}}\equiv[\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2,\ldots,\mathbf{n}_b]$ نشان دهنده مجموعه‌ی اعداد اقامت در شبکه است. سپس شبکه گاز به وسیله رابطه‌ی زیر اصلاح می‌شود:

$$\begin{gathered}\Delta_i n_i = C_i\\ \text{or}\\ n_i(\vec{x}+c_i,t+1)=n_i'(\vec{x},t)\end{gathered} \tag{۲-۶}$$

معادلات (۲-۵) و(۲-۶) ارائه دهنده معادلات میکرودینامیک شبکه‌ی گازند[۳۲].

با وجود تفاوت‌های موجود در مدل‌های مختلف این روش، ویژگی‌های زیر در همه‌ی آنها مشاهده می‌شود:

- بقای جرم و مومنتوم در هر برخورد ارضا می‌شود.
- برخوردها تنها در مراکز شبکه، یعنی گره‌ها رخ می‌دهد.
- تمام برخوردها به صورت همزمان اتفاق می‌افتد.
- در هر دوره زمانی، ذرات به سمت گره مجاور حرکت می‌کنند.
- ذرات مجازی تنها بر روی مسیرهای مشخص قادر به حرکت هستند.
- در هر لحظه، در هر یک از مسیرها امکان حرکت تنها یک ذره در هر جهت وجود دارد.

### ۲-۲-۳- مزایا روش شبکه‌ی گاز[۳۲]:

محاسبات دقیق و توانای پردازش موازی از مهمترین مزایای روش شبکه‌ی گاز محسوب می‌شوند. با توجه به طبیعت بولین این روش، یک الگوریتم مناسب می‌تواند بدون نیاز به محاسبات اعشاری، محاسبات دقیقی را انجام دهد. همچنین کاملاً موضعی بودن مرحله‌ی برخورد توانایی پردازش موازی در این روش را به همراه دارد.

### ۲-۲-۴- معایب روش شبکه‌ی گاز[۳۲]:

به دست آوردن معادلات مشابه ناویر-استوکس از میکرودینامیک شبکه‌ی گاز دو ضعف اساسی مربوط به گسسته‌سازی شبکه را آشکار می‌سازد:

- فقدان نامتغیر گالیله‌ای[1]
- وابستگی غیرعادی سرعت به فشار سیال

---

[1] Galilean invariance

این مشکلات به این دلیل ایجاد می‌شود که با توجه به مسیرهای محدود در نظر گرفته شده برای حرکت ذرات، برقراری پیوستگی تنها با تعریف یک بسط اضافه در میدان سیال بدست می‌آید و این بسط نمی‌تواند به صورت دقیق با شکل جبری معادلات ناویر-استوکس و تانسور فشار هم‌خوانی یابد. البته در عدد ماخ پایین (کمتر از یک) برای سیال تراکم‌ناپذیر این مشکلات را می‌توان نادیده گرفت و به معادلات ناویر استوکس دست یافت.

همچنین مشکلاتی نیز به دلیل گسسته‌سازی فضای فازی وجود خواهد داشت:

- اغتشاشات آماری[1]

همانند هر روش ذره‌ای دیگر، روش شبکه‌ی گاز با مقداری نوسانات آماری همراه است. نسخه‌ی دوم و سوم از شبکه‌ی FHPدر واقع برای رفع این مشکل ایجاد شد.

- عدد رینولدز پایین

بیشترین مقدار عدد رینولدزی که روش شبکه گاز می‌تواند به آن دست یابد توسط حداقل مسیر آزاد میانگین که در شبکه می‌توان به آن دست یافت، کنترل می‌شود. حداقل مسیر آزاد میانگین در واقع بیشترین تعداد برخوردها در واحد زمان است که ماشین سلولی قادر است تامین کند. علاوه بر تعداد برخوردها، کیفیت آنها یعنی میزان مومنتومی که قادرند در جهات مختلف شبکه گسسته منتقل نمایند نیز اهمیت دارد. گسسته سازی فضای فازی در اینجا دو تاثیر متفاوت روی دستیابی به مقادیر پایین رینولدز می‌گذارد. از یک سو، تعداد محدود سرعت‌های گسسته با برقراری بقای جرم و مومنتوم ترکیب شده، محدودیت سنگینی روی تعداد برخوردهای ممکن می‌گذارد و از سوی دیگر جهت

[1] Statistical noise

سرعت‌ها، ذرات را مجبور می‌کنند در مکان‌های شبکه با هم برخورد داشته باشند که احتمال عدم برخورد آنها را از بین می‌برد.

## ۲-۳- روش بولتزمن شبکه‌ای برای محاسبه سرعت

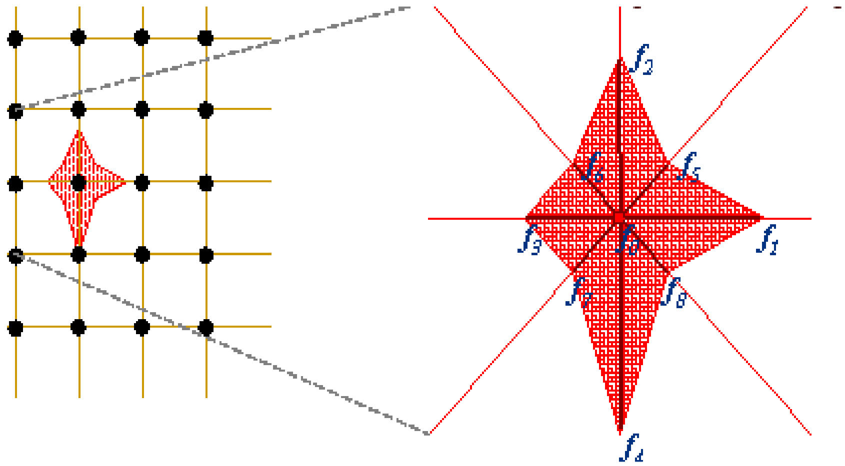
معادله‌ی شبکه‌ی بولتزمن اولیه در سال ۱۹۸۸ توسط مک نامارا[1] و زانتی[2] [۳۳] برای پاسخگویی به یکی از مشکلات اصلی روش شبکه‌ی گاز یعنی اغتشاشات آماری ایجاد شد. ایده اصلی برای رفع این مشکل میانگین‌گیری از اعداد اقامت بولین است.

$$f_i = \langle n_i \rangle \tag{۲-۷}$$

علامت براکت در رابطه‌ی بالا میانگین‌گیری مجموع را نشان می‌دهد. در واقع، به جای دنبال کردن یک ذره منفرد بولین، با تاریخچه‌ی زمانی یک جمعیت گروهی سروکار داریم که احتمال حضور آنها به صورت یک ابر میکروسکوپی (شکل ۲-۲) می‌تواند تجسم یابد. در واقع LBE رونویس مستقیم از LGCA است که درآن $n_i$ با $f_i$ جایگزین شده است و با این جایگزینی مشکل اغتشاشات آماری از بین خواهد رفت زیرا $f_i$ کمیتی هموار و متوسط است. اندکی بعد آشکار شد که شبکه‌ی بولتزمن می‌تواند اغلب مشکلات دیگری را که به روش شبکه‌ی گاز آسیب می‌رساند به طور طبیعی برطرف کند. بنابراین این روش به سرعت به یک موضوع مستقل تحقیقاتی تبدیل شد. اگرچه مدل‌های روش شبکه‌ی بولتزمن از تکامل روش شبکه‌ی گاز منشا گرفته است هی و لو[3][۳۵] نشان دادند که معادله‌ی شبکه بولتزمن می‌تواند مستقیماً از معادله‌ی پیوسته‌ی بولتزمن به دست آید. به این ترتیب استقلال معادله‌ی شبکه‌ی بولتزمن از روش شبکه‌ی گاز را به صورت تئوری نشان دادند.

---

[2] McNamara
[3] Zanetti
[1] He and Luo




شکل(۲-۲) نمایش ابر میکروسکوپی تابع توزیع ذره[۳۴]

### ۲-۳-۱- مدل بولتزمن شبکه‌ای BGK

معادله‌ی بولتزمن که به عنوان معادله‌ی انتقال بولتزمن نیز شناخته می شود توسط لودویگ بولتزمن[۱] برای توصیف  توزیع آماری ذرات در سیال ارائه شد.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \nabla f = \Omega \qquad (۲-۸)$$

این معادله نشان دهنده‌ی تغییرات زمانی تابع توزیع ذره، $f_i(\vec{x}, \vec{p}, t)$ در فضای فازی است. تابع توزیع نشان دهنده‌ی احتمال یافتن مولوکلهای با خواص مذکور است. در واقع معادله بولتزمن از دو بخش برخورد و پخش تشکیل شده است. تابع برخورد( $\Omega$) از قوانین برخورد بین مولکولها به دست می‌آید که معمولاً فرض می‌شود، مولکولها کروی، صلب و برخورد آنها کاملاً الاستیک است. حتی با در نظر گرفتن این فرض‌ها باز هم معادله بولتزمن، معادله‌ای پیچیده خواهد بود. بسیاری از ترم‌های موجود در رابطه- برخورد شاید تاثیر چندانی بر مقدار کمیت‌های میکروسکوپیک نداشته باشد. در سال ۱۹۵۴ بتینگر و

---
[1] Ludwig Boltzmann

همکارانش[۳۶] اپراتور برخورد ساده‌ای با یک زمان آرامش پیشنهاد کردند. معادله‌ی بولتزمن BGK[۱] در قالب معادله دیفرانسیلی معمولی است و به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi\cdot\nabla f=\frac{-1}{\lambda}(f-g) \tag{۹-۲}$$

در معادله‌ی بالا $f_i(\vec{x},\vec{p},t)$ تابع توزیع ذره‌ی مجزا ، $\xi$ سرعت میکروسکوپی ، $\lambda$ زمان آرامش ناشی از برخورد است و $g$ تابع توزیع بولتزمن- مکسول است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g\equiv\frac{\rho}{(2\Pi RT)^{D/2}}\exp[\frac{-(\xi-u)^2}{2RT}] \tag{۱۰-۲}$$

در معادله (۲-۱۰)، $R$ ثابت گاز ایده آل، $D$ بعد فضا و $\rho$، $u$ و $T$ به ترتیب چگالی، سرعت و دمای ماکروسکوپیک هستند. متغیرهای ماکروسکوپیک، مومنتوم‌های تابع توزیع هستند:

$$\rho=\int f d\xi=\int g d\xi \tag{۱۱-۲}$$

$$\rho u=\int \xi f d\xi=\int \xi g d\xi \tag{۱۲-۲}$$

$$\varepsilon\rho=\frac{1}{2}\int(\xi-u)^2 f d\xi=\frac{1}{2}\int(\xi-u)^2 g d\xi \tag{۱۳-۲}$$

در معادلات بالا از فرض چاپمن-انسکوگ[۲] استفاده شده است:

$$\int h(\xi)f(x,\xi,t)d\xi=\int h(\xi)g(x,\xi,t)d\xi \tag{۱۴-۲}$$

که در این معادله $h(\xi)$ ترکیبی خطی از نامتغیرهای برخورد است. نامتغیر برخورد، خاصیتی میکروسکوپیک است که تحت اثر برخورد تغییر نمی‌کند. هی و لو[۳][۳۷] نشان دادند که با انتگرال‌گیری از معادله (۲-۹) در گام زمانی $\delta_t$ و با فرض کوچک بودن $\delta_t$ به معادله‌ی زیر خواهیم رسید:

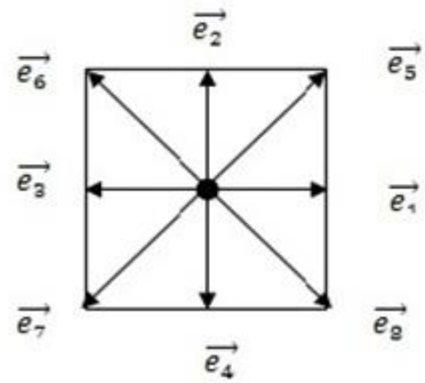
$$f(x+\xi\partial t,\xi,t+\partial t)-f(x,\xi,t)=\frac{-1}{\tau}[f(x,\xi,t)-g(x,\xi,t)]. \tag{۱۵-۲}$$

---

*1* Bhatnagar ,Gross and Krook)
*2* Chapman-enskog
1He and Luo

در معادله(۲-۱۵)، $\tau = \frac{\lambda}{\delta_t}$ زمان آرامش بدون بعد است. برای راحتی تابع تعادلی **g** را می‌توان با $f^{(eq)}$ نشان داد. در این قسمت لازم است توضیح مختصری در مورد فضای فازی داده شود:

فضای فازی فضای جدیدیست که علاوه بر متغیرهای مکان، متغیرهای سرعت هم به آن اضافه می‌شود. بنابراین فضای فازی را به صورت $D_dQ_q$ نشان می‌دهیم. که d بعد هندسی مسئله و q تعداد بردارهای سرعت است. مدلی که بیشتر برای جریان‌های دوبعدی استفاده می‌شود، مدل D2Q9 است که در شکل (۲-۳) نشان داده شده است.




شکل(۲-۳) مدل D2Q9

هی و لو نشان دادند تابع توزیع تعادلی برای مدل دوبعدی و ۹ سرعته LBE به صورت زیر درخواهد آمد:

$$f_\alpha^{eq}(\vec{x},t) = \omega_\alpha \rho[1+\frac{3}{c^2}(\vec{e}_\alpha.\vec{u}) + \frac{9}{2c^2}(\vec{e}_\alpha.\vec{u})^2 - \frac{3}{2c^2}\left|\vec{u}\right|^2]. \qquad (۲-۱۶)$$

در معادله‌ی بالا تابع وزنی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \frac{4}{9} & \alpha = 9 \\ \frac{1}{9} & \alpha = 1,2,3,4 \\ \frac{1}{36} & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \qquad (۲-۱۷)$$

و $\vec{e}_\alpha$ بردار سرعت‌های میکروسکوپی در جهت $\alpha$ است و در مدل ۹ سرعته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{e}_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 9 \\ ([\cos[(\alpha-1)\pi/2], (\sin[(\alpha-1)\pi/2])c & \alpha = 1,2,3,4 \\ \sqrt{2}([\cos[(\alpha-5)\pi/2+\pi/4], & \\ (\sin[(\alpha-5)\pi/2+\pi/4])c & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (۱۸-۲)$$

همچنین $c=\sqrt{3RT}=\delta_x/\delta_t$ یا $RT=c_s^2=c^2/3$ ،که در آن $c_s$ سرعت صوت مدل است. در اینجا فضای فازی به صورت شبکه‌ی مربعی با ثابت شبکه بندی $\delta_x=\sqrt{3RT}\delta_t$ گسسته شده است.

بنابراین در کل معادله شبکه بولتزمن با زمان آرامش واحد و اوپراتور برخورد BGK را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f_\alpha(\vec{x}+\vec{e}_\alpha\delta t, t+\delta t) - f_\alpha(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau_\nu}[f_\alpha(\vec{x},t) - f_\alpha^{eq}(\vec{x},t)]. \quad (۱۹-۲)$$

که در آن :

$$f_\alpha^{(eq)} = \omega_\alpha \left\{ 1 + \frac{3(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u})}{c^2} + \frac{9(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u})^2}{2c^4} - \frac{3|\vec{u}|^2}{2c^2} \right\} \quad (۲۰-۲)$$

و در آن مقادیر چگالی و مومنتوم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

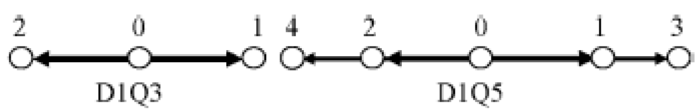
$$\rho = \sum_\alpha^q f_\alpha \quad , \qquad \rho\vec{u} = \sum_\alpha^q f_\alpha \vec{e}_\alpha \quad (۲۱-۲)$$

منظور از زمان آرامش واحد این است که انتقال جرم، مومنتوم و حرارت در یک نرخ مشخص رخ می‌دهد. در جدول( ۲-۱) ضرایب وزنی و سرعت صوت برای انواع شبکه آورده شده است. شکل(۲-۴) نشان دهنده-

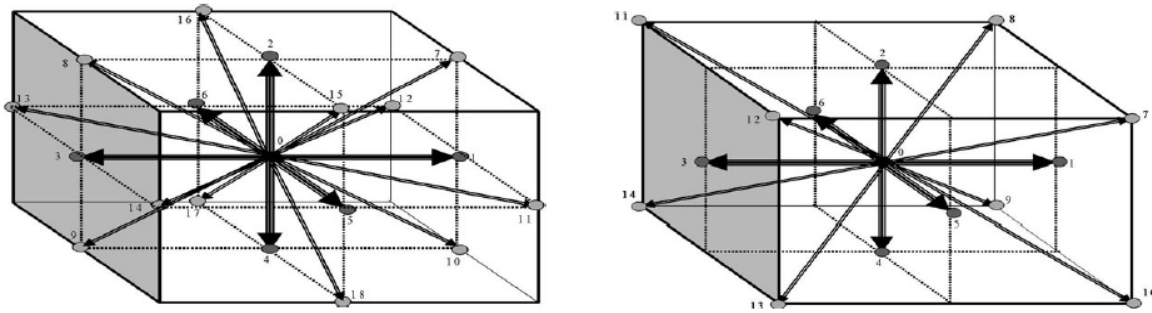
ی مدل شبکه های D1Q5وD1Q3 و شکل (۲-۵) نشان دهنده‌ی مدل شبکه های D3Q15 و D3Q19 است.

جدول(۲-۱) ضرایب وزنی و مربع سرعت صوت مربوط به انواع شبکه مورد استفاده در LBM

| سرعت‌های شبکه | ضرایب وزنی | مربع سرعت صوت | نوع شبکه |
|---|---|---|---|
| 0 | 4/6 | 1/3 | D1Q3 |
| 1 | 1/6 | | |
| 0 | 6/12 | 1 | D1Q5 |
| 1 | 2/12 | | |
| 2 | 1/12 | | |
| 0 | 16/36 | 1/3 | D2Q9 |
| 1 | 4/36 | | |
| $\sqrt{2}$ | 1/36 | | |
| 0 | 16/72 | 1/3 | D3Q15 |
| 1 | 8/72 | | |
| $\sqrt{3}$ | 1/72 | | |
| 0 | 12/36 | 1/3 | D3Q19 |
| 1 | 2/36 | | |
| $\sqrt{2}$ | 1/36 | | |




شکل (۲-۴) مدل شبکه‌های D1Q5وD1Q3 [۳۷]



شکل (۲-۵)شکل سمت راست مدل شبکهD3Q15 و شکل سمت چپ مدل شبکه‌یD3Q19 [۳۷]

معادله (۲-۱۹) را می‌توان به دو مرحله‌ی مجزا تقسیم نمود :

- مرحله برخورد[1]:

$$\tilde{f}_\alpha(\vec{x},t) = f_\alpha(\vec{x},t) - \frac{1}{\tau_v}[f_\alpha(\vec{x},t) - f_\alpha^{eq}(\vec{x},t)], \qquad (۲-۲۲)$$

مرحله برخورد از یک زمان بی‌نهایت کوچک قبل از برخورد شروع شده وتا یک زمان بی‌نهایت کوچک پس از برخورد را در بر می‌گیرد. در صورتی که آرایش ذرات قبل از برخورد در دست باشد، می‌توان با استفاده از رابطه (۲-۲۲) آرایش ذرات پس از برخورد را محاسبه نمود. $\tilde{f}_\alpha(\vec{x},t)$ تابع توزیع پس از برخورد و $\tau_v$ زمان آرامش هستند.

- مرحله جاری شدن[2]

$$f_\alpha(\vec{x} + \vec{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) = \tilde{f}_\alpha(\vec{x},t) \qquad (۲-۲۳)$$

این مرحله بلافاصله پس از مرحله برخورد شروع شده و تا رسیدن ذرات مجازی به گره مجاور ادامه می‌یابد. باید به این نکته توجه کرد که با جداسازی معادله (۲-۱۹) به دو مرحله‌ی برخورد و جاری شدن،

[1] collision
[2] streaming

نیازی به ذخیره‌ی همزمان $f_\alpha(\vec{x},t)$ و $\tilde{f}_\alpha(\vec{x},t)$ نیست و در واقع با این جداسازی درک فیزیکی مسئله نیز ساده‌تر می‌شود.

## ۲-۳-۲- ویسکوزیته

ویسکوزیته سینماتیکی سیال $\nu$ در روش شبکه بولتزمن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\nu = (\tau_\nu - 0.5)c_s^2 \qquad (۲-۲۴)$$

از معادله (۲-۲۴) می‌توان ملاحظه نمود در صورتی که $\tau_\nu \prec \frac{1}{2}$ باشد، برای ویسکوزیته عدد منفی خواهیم داشت، بنابراین باید عدد آرامش بزرگتر از ۰/۵ در نظر گرفته شود. با نزدیک شدن این پارامتر به ۰/۵ مشکلاتی در روند حل عددی ایجاد می‌گردد. بهترین مقدار برای زمان آرامش $\tau_\nu = 1$ است که برای مدل D2Q9 ، ویسکوزیته $\nu = \frac{1}{6}$ را نتیجه می‌دهد.

## ۳-۳-۲-ضرایب تبدیل

با تعریف سه کمیت طول مشخصه، زمان مشخصه و چگالی مشخصه در یک سیتم آحاد متعارف و همچنین در سیتم آحاد شبکه، می‌توان بین نتایج حاصل از روش شبکه بولتزمن و متغیرهای فیزیکی ارتباط برقرار کرد. در واقع ضرایب تبدیل از واحد شبکه به واحدهای متعارف با مقایسه کمیات فوق در دو سیستم قابل محاسبه است. اگر کمیات مشخصه را در سیستم آحاد متعارف به صورت H، t و $\rho$ که به ترتیب طول مشخصه، زمان مشخصه و چگالی مشخصه هستند و در سیستم آحاد شبکه با $H_L$، $t_L$ و $\rho_L$ نشان دهیم، ضرایب تبدیل به شکل زیر تعیین می‌گردد.

$$C_H = \frac{H}{H_L}, \qquad C_t = \frac{t}{t_L}, \qquad C_\rho = \frac{\rho}{\rho_L} \qquad (۲-۲۵)$$

این سه ضریب تبدیل به عنوان ضریب تبدیل اولیه در نظر گرفته می‌شود و سایر ضرایب تبدیل را می‌توان از ترکیب این ضرایب به دست آورد به عنوان مثال:

$$[U]=\frac{[L]}{[t]} \quad \Rightarrow \quad C_U=\frac{C_H}{C_t} \qquad (۲۶-۲)$$

البته باید توجه کرد که اعداد بی‌بعد در هر حالت ثابت باقی می‌مانند.

## ۲-۳-۴- تفاوت حلگرهای ناویر-استوکس و بولتزمن

- جابجایی:

یک تفاوت عمده‌ی روش شبکه بولتزمن، نداشتن ترم جابجایی غیر خطی است. سایر روش‌های CFD که براساس تحلیل معادلات ناویراستوکس هستند، ناچار با ترم غیر خطی جابجایی به صورت $u \cdot \nabla u$ سروکار دارند، در حالیکه در روش شبکه بولتزمن این جابجایی غیرخطی در گام خطی جاری شدن انجام می‌شود.

- فشار:

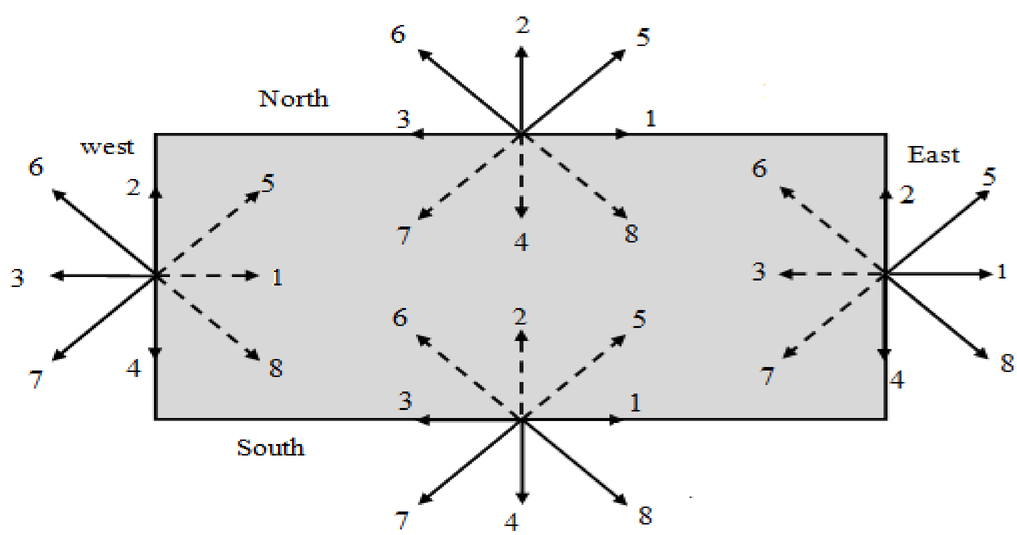
در روشهای سنتیCFD، حلگرهای معادلات تراکم ناپذیر ناویراستوکس برای بدست آوردن فشار ناچار به حل معادله‌ی پواسون هستند، در حالیکه در روش شبکه بولتزمن، فشار به راحتی از معادله‌ی حالت تعیین می‌شود. معادله (۲-۲۷) معادله‌ی فشار در شبکه‌ی بولتزمن را نشان می‌دهد.

$$p=\rho c_s^2 \qquad (۲۷-۲)$$

## ۲-۳-۵- شرایط مرزی

دینامیک واقعی سیال به شدت به محیط احاطه کننده‌ی آن بستگی دارد. این وابستگی از دیدگاه ریاضی با بیان مناسب شرایط مرزی توصیف می‌شود. همانطور که در بخش‌های قبل بیان شد در روش شبکه بولتزمن خواص ماکروسکوپیک مانند سرعت و فشار به وسیله‌ی معادلات شامل توابع توزیع محاسبه می-

گردند و این توابع توزیع هستند که در محاسبات این روش شرکت می‌کنند. بنابراین در این روش مانند سایر روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی، نمی‌توان شرایط مرزی را به وسیله کمیات ماکروسکوپیک اعمال کرد. به عنوان مثال برای دیواره‌ای با سرعت معلوم، در روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی، شرط مرزی با برابر قرار دادن سرعت سیال روی دیواره، با سرعت دیواره اعمال می-شود، اما در روش شبکه بولتزمن باید توابع توزیع را به گونه‌ای تعریف کرد تا سرعت مورد نظر برای سیال روی دیواره بدست آید. در واقع اعمال شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن به تعیین توابع توزیع مجهول روی مرزها خلاصه می‌شود. به عنوان مثال در شکل (۲-۶) توابع توزیعی که با خطوط پیوسته نشان داده شده‌اند از مرحله جاری شدن به دست آمده و مشخص هستند اما توابع توزیعی که با خط چین نشان داده شده‌اند نامعین می‌باشند که براساس شرایط مرزی مختلف تعیین می‌شوند. در واقع این توابع توزیع در مرحله جاری شدن به گره‌های داخلی منتقل می‌شوند، بنابراین نحوه‌ی اعمال شرایط مرزی به طور مستقیم بر جواب نهایی اثر می‌گذارد. در ادامه به بیان رایج‌ترین شرایط مرزی خواهیم پرداخت.




شکل (۲-۶) توابع توزیع در مرزهای یک ناحیه[۳۷]

### ۲-۳-۵-۱- شرط مرزی پریودیک[۳۷]

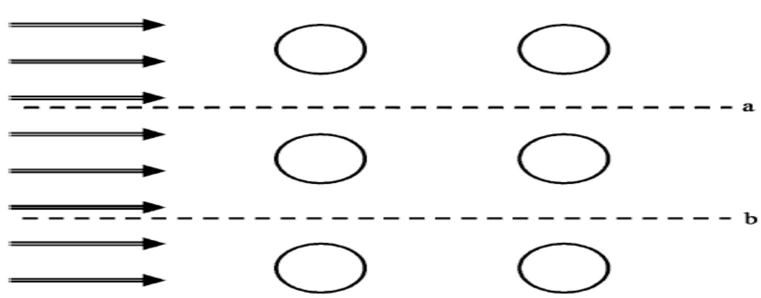
هنگامی که روند جریان به گونه‌ای کاملاً مشابه تکرار می‌شود می‌توان به جای تحلیل کل جریان، بخشی از جریان را تحلیل کرد و نتیجه را به کل جریان بسط داد. در این مواقع شرط مرزی پریودیک کاربرد دارد. برای مثال شکل (۲-۷) جریانی را نشان می‌دهد که از روی تعدادی لوله می‌گذرد. فرض کنید شرایط جریان در بالای خط a و پایین خط b کاملاً مشابه باشد. در این شرایط برای شبیه سازی جریان بین دو خط a و b استفاده از شرایط مرزی پریودیک ضروری است. در واقع توابع توزیعی که خط a را ترک می‌کنند دقیقاً برابر توابع توزیعی است که وارد خط b می‌شوند و برعکس. در واقع توابع توزیع $f_4$، $f_7$ و $f_8$ روی خط a و توابع توزیع $f_2$،$f_5$ و $f_6$روی خط b نامشخص هستند که با توجه به شرایط مرزی پریودیک به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

- در طول خط a

$$f_{4,a} = f_{4,b}; \quad f_{7,a} = f_{7,b}; \quad f_{8,a} = f_{8,b} \qquad (۲\text{-}۲۸\text{-الف})$$

- در طول خط b

$$f_{5,b} = f_{5,a}; \quad f_{6,b} = f_{6,a}; \quad f_{2,b} = f_{2,a} \qquad (۲\text{-}۲۸\text{-ب})$$

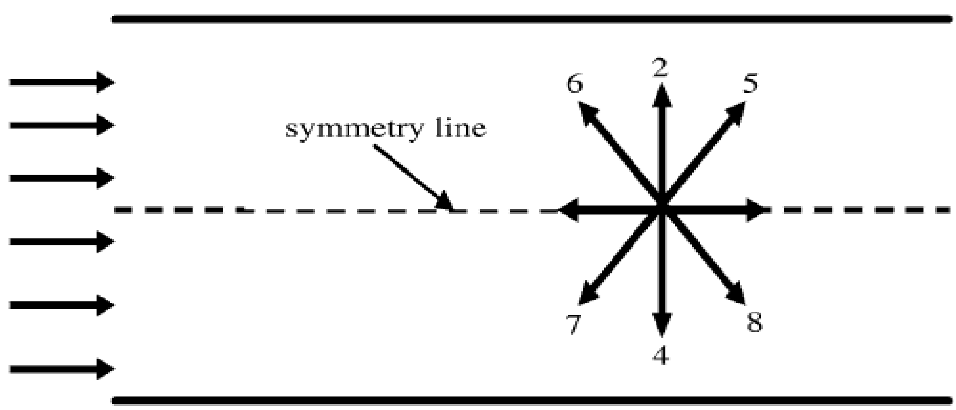



شکل (۲-۷) نمونه‌ای از شرایط مرزی پریودیک در دامنه‌ی حل[۳۷]

### ۲-۳-۵-۲- شرط مرزی تقارن[۳۷]

بسیاری از مسائل کاربردی حول یک خط یا صفحه تقارن دارند. بنابراین پیدا کردن راه‌حلی که فقط نیمی از دامنه‌ی حل را شامل شود در کاهش هزینه‌ی محاسباتی مفید است. به عنوان مثال شکل (۲-۸) جریان در کانالی را نشان می‌دهد که جریان زیر خط تقارن تصویر جریان بالای خط تقارن می‌باشد. به عنوان مثال برای این شکل می‌توان فقط قسمت بالا را تحلیل کرد. راه اعمال شرط مرزی تقارن این است که مقادیر توابع توزیع مجهول را برابر قرینه آنها حول خط تقارن قرار دهیم. یعنی در طول خط تقارن خواهیم داشت:

$$f_6 = f_8;\ \ f_2 = f_4;\ \ f_5 = f_7 \qquad (۲-۲۹)$$




شکل (۲-۸) شرط مرزی تقارن[۳۷]

### ۲-۳-۵-۳- شرط مرزی با سرعت معلوم در مرز[۳۷]

در بسیاری از مسائل کاربردی مولفه‌های سرعت ثابتی در طول زمان برای مرز وجود دارد. روش‌های مختلفی برای محاسبه توابع توزیع مجهول روی این نوع مرزها ارائه شده است. روش زو و هی یکی از این روش‌هاست که در ادامه به آن می‌پردازیم.

برای به دست آوردن توابع مجهول روی مرزی با سرعت مشخص زو و هی روشی را ارئه دادند که در آن از روابط (۲-۲۱) استفاده می‌شود.

این روابط را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9 \qquad (۲-۳۰)$$

$$\rho u = f_1 + f_5 + f_8 - (f_6 + f_3 + f_7) \qquad (۲-۳۱)$$

$$\rho v = f_5 + f_2 + f_6 - (f_7 + f_4 + f_8) \qquad (۲-۳۲)$$

با معلوم بودن مولفه‌های سرعت، چهار مجهول وجود دارد: سه تابع توزیع و چگالی $\rho$. در واقع ما سه معادله و چهار مجهول خواهیم داشت. برای حل این مشکل شرایطی تحت عنوان شرایط تعادلی عمودی روی مرز پیشنهاد کردند. به عنوان مثال فرض کنید مولفه‌های سرعت روی مرز غربی در شکل (۲-۵) به ترتیب $u_w$ و $v_w$ باشند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\rho_w = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_9 \qquad (۲-۳۳\text{- الف})$$

$$\rho_w u_w = f_1 + f_5 + f_8 - (f_6 + f_3 + f_7) \qquad (۲-۳۳\text{- ب})$$

$$\rho_w v_w = f_5 + f_2 + f_6 - (f_7 + f_4 + f_8) \qquad (۲-۳۳\text{- ج})$$

معادله چهارم شرط تعادل عمودی روی مرز است که توسط زو و هی پیشنهاد شد:

$$f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq} \qquad (۲-۳۴)$$

با جاگذاری $f_1^{eq}$ و $f_3^{eq}$ بدست آمده از رابطه (۲- ۲۰) در معادله (۲-۳۴) داریم:

$$\mathrm{f}_1 = \mathrm{f}_3 + \frac{2}{3}\mathrm{u}_w\rho_w \qquad (۲-۳۵)$$

با ترکیب معادلات (۲-۳۳) و معادلهی (۲-۳۵) چهار مجهول $\rho_w$و $f_1$، $f_5$ و $f_8$به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$\rho_w = \frac{1}{1-u_w}\left[f_9 + f_2 + f_4 + 2\left(f_3 + f_6 + f_7\right)\right] \qquad (۲-۳۶)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}\left(f_2 - f_4\right) + \frac{1}{6}\rho_w u_w + \frac{1}{2}\rho_w v_w \qquad (۲-۳۷)$$

$$f_8 = f_6 - \frac{1}{2}\left(f_2 - f_4\right) + \frac{1}{6}\rho_w u_w - \frac{1}{2}\rho_w v_w \qquad (۲-۳۸)$$

با معلوم شدن مقدار $\rho_w$، مقدار $f_1$ از معادله (۲-۳۵) قابل محاسبه است.

به همین ترتیب برای سایر مرزها در صورت داشتن سرعت معلوم می‌توان توابع توزیع را محاسبه نمود.

### ۲-۳-۵-۴- شرط مرزی عدم لغزش

برای اعمال شرط مرزی عدم لغزش در روش شبکه بولتزمن معمولاً از طرح بازگشت به عقب[1] استفاده می-شود. نحوه‌ی اعمال این طرح با توجه به موقعیت قرارگیری دیوار نسبت به گره‌های شبکه متفاوت است. در صورتی که مرز مورد نظر دقیقاً روی نقاط شبکه قرار گیرد از طرح بازگشت به عقب کامل[2] و در صورتی که در بین نقاط شبکه قرار گیرد از طرح بازگشت به عقب با دیوار میانی[3] استفاده می‌شود.

- طرح بازگشت به عقب کامل

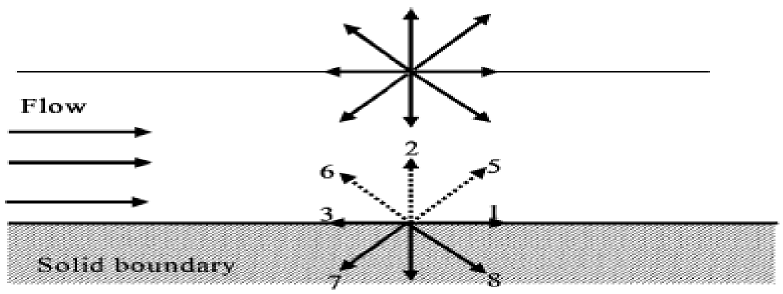
براساس این طرح، تابع توزیع ذره که از گره سیال در امتداد لینک شبکه جریان می‌یابد بعد از برخورد با گره دیوار در همان امتداد در جهت مخالف باز می‌گردد. به زبان ساده‌تر می‌توان گفت تمام توابع توزیع

---

[1] Bounce Back
[2] Complete bounceback scheme
[3] Half way bounceback scheme

روی گره دیوار معکوس می‌شوند. شکل (۲-۹) نشان دهنده‌ی این شرایط مرزی است. در این شکل یک مرز جنوبی با توابع توزیع مجهول $f_2$،$f_5$ و $f_6$ به نمایش در آمده است. براساس طرح بازگشت به عقب کامل خواهیم داشت:

$$f_2 = f_4;\ \ f_5 = f_7;\ \ \ f_6 = f_8 \tag{۲-۳۹}$$




شکل (۲-۹) شرط مرزی بازگشت به عقب کامل[۳۷]

هرچند این طرح دارای دقت مرتبه اول است، اما به دلیل سادگی استفاده از آن بسیار معمول است.

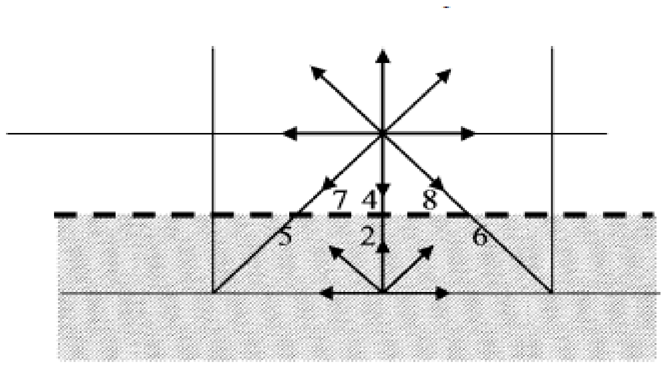
- طرح بازگشت به عقب با دیوار میانی

همانطور که گفته شد طرح بازگشت به عقب کامل دارای دقت مرتبه اول است. لاد[1] پیشنهاد کرد مرز جسم را به جای قرار دادن در روی نقاط شبکه، در بین نقاط شبکه قرار دهیم و اثبات کرد که به این ترتیب می‌توان به دقت مرتبه دوم دست یافت[۳۸-۳۹]. در این طرح توابع توزیع جاری شده از سیال به سمت دیوار، در دیوار ذخیره شده و در گام زمانی بعد به سیال بازگردانده می‌شود. از لحاظ ریاضی می‌توان این طرح را به عنوان مثال برای دیوار جنوبی نمایش داده شده در شکل (۲-۱۰)، به صورت زیر نمایش داد که $(x,y)$ بیانگر موقعیت گره جامد درون مرز است.

$$f_2(x,y) = f_4(x,y+1);\quad f_5(x,y) = f_7(x+1,y+1);\quad f_6(x,y) = f_8(x-1,y+1) \tag{۲-۴۰}$$

---

[1] Ladd




شکل (۲-۱۰) شرط مرزی بازگشت با دیوار میانی[۳۷]

### ۲-۳-۵-۵- شرط مرز خروجی گرادیان صفر

برای اعمال این شرط، مجهولات در ستون آخر شبکه برابر مقادیر آن در ستون یکی مانده به آخر قرار داده می‌شود. یعنی اگر مرز خروجی در محل گره i=n قرار داشته باشد خواهیم داشت:

$$f_{6,n} = f_{6,n-1}; f_{3,n} = f_{3,n-1} \; ; \; f_{7,n} = f_{7,n-1} \qquad (۲\text{-}۴۱)$$

## ۲-۴- روش بولتزمن شبکه‌ای برای محاسبه دما

مدل‌های روش شبکه بولتزمن به دو دسته جداگانه تقسیم می‌شوند، در دسته اول که به مدل چند سرعته معروف است، تابع توزیع تعادلی چگالی با یک ترم اضافی سرعت برای به دست آوردن معادله انرژی و توزیع تعادلی دما استفاده می‌شود[۴۱،۴۰]. دسته دوم شامل مدل‌های چندگانه توزیع تعادلی می‌باشد که در آن علاوه بر تابع توزیع تعادلی چگالی، تابع توزیع دیگری برای دما نیز ارائه شده است[۴۲،۴۳]. در این بخش ما به ارائه مدل دوم می‌پردازیم، این مدل محدودیت‌های مدل اول را ندارد و پایداری حل را نیز بهبود می‌بخشد. اگر تابع توزیع دما را با g نشان دهیم، $g_\alpha(\vec{x},t)$ نشان دهنده‌ی احتمال انرژی ذره در مکان $\vec{x}$ و زمان t در جهت $\alpha$ است. معادله شبکه بولتزمن دما، نشان دهنده‌ی تغییرات این تابع توزیع در فضای فازی است و به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$g_\alpha(\vec{x}+\vec{e}_\alpha\delta t, t+\delta t)-g_\alpha(\vec{x},t)=-\frac{1}{\tau_c}[g_\alpha(\vec{x},t)-g_\alpha^{eq}(\vec{x},t)]. \tag{۲-۴۲}$$

در این معادله $g_\alpha^{eq}(\vec{x},t)$ نشان دهنده تابع توزیع تعادلی و $\tau_c$ زمان آرامش انتقال حرارت است. تابع توزیع تعادلی برای مدل D2Q9 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_\alpha^{eq}(\vec{x},t)=\omega_\alpha T[1+\frac{3}{c^2}(\vec{e}_\alpha.\vec{u})]. \tag{۲-۴۳}$$

و در نهایت دما به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$T=\sum_{\alpha=1}^{9} g_\alpha \tag{۲-۴۴}$$

معادله (۲-۴۲) را می توان مانند معادله مومنتوم(۲-۱۹) در دو مرحله مجزا بیان نمود:

- مرحله برخورد

$$g_\alpha(\vec{x},t)-g_\alpha(\vec{x},t)=-\frac{1}{\tau_c}[g_\alpha(\vec{x},t)-g_\alpha^{eq}(\vec{x},t)], \tag{۲-۴۵}$$

- مرحله جاری شدن

$$g_\alpha(\vec{x}+\vec{e}_\alpha\delta t, t+\delta t)=g_\alpha(\vec{x},t) \tag{۲-۴۶}$$

همچنین ضریب پخش $\alpha$ در این روش به کمک معادله زیر قابل محاسبه است:

$$\alpha=(\tau_c-0.5)c_s^2 \tag{۲-۴۷}$$

با توجه به اینکه ضریب پخش منفی از نظر فیزیکی بی‌معناست بنابراین همواره زمان آرامش انتقال حرارت، باید از ۰/۵ بیشتر باشد.

$$\tau_c \rangle \frac{1}{2} \tag{۲-۴۸}$$

### ۲-۴-۱- شرایط مرزی دما

#### ۲-۴-۱-۱- مرز آدیاباتیک

برای اعمال این شرط، به عنوان مثال اگر دیوار شرقی آدیاباتیک باشد، یعنی مرز آدیاباتیک روی گره i=n قرار داشته باشد مجهولات برابر مقادیر آنها در ستون قرار گرفته روی گره i=n-1 قرار داده می‌شوند. یعنی داریم:

$$g_{6,n}=g_{6,n-1};\ g_{3,n}=g_{3,n-1}\ ;\ \ g_{7,n}=g_{7,n-1} \tag{۴۹-۲}$$

برای سایر مرزها هم در صورت آدیاباتیک بودن به طریق مشابه از اطلاعات نزدیکترین ستون یا ردیف سیال استفاده می‌شود.

#### ۲-۴-۱-۲- شرط مرزی با دمای معلوم در مرز

با فرض اینکه دمای ورودی به محفظه برابر $T_{in}$ باشد، برای اعمال این شرط مرزی بر روی مرز غربی واقع شده روی گره i=1 به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$g_{1,1,j}=T_{in}(\omega_1+\omega_3)\text{-}g_{3,1,j}\ ;\ g_{5,1,j}=T_{in}(\omega_5+\omega_7)\text{-}g_{7,1,j}\ ;\ g_{8,1,j}=T_{in}(\omega_6+\omega_8)\text{-}g_{6,1,j} \tag{۵۰-۲}$$

در صورت مشخص بودن دمای هریک از مرزها، می‌توان شرط مرزی دما ثابت را به طریقی مشابه بالا اعمال کرد.

## ۲-۵- ارتباط معادلات بولتزمن شبکه‌ای و معادلات ناویر-استوکس

معادلات بولتزمن شبکه‌ای در سطح مزوسکوپیک ( مابین میکروسکوپیک و ماکروسکوپیک) به توصیف سیال می‌پردازند. یو[1] و همکارانش[۴۴] و ژیو و همکارانش[۴۲] نشان دادند که با استفاده از بسط چاپمن-

---

[1] Yu

انسکوگ و بافرض سیال تراکم‌ناپذیر($Ma=|\vec{u}|/C_s \le 1$) معادلات ناویر استوکس از معادلات شبکه بولتزمن قابل استخراج هستند. در واقع در حالت کلی داریم:

$$\nabla\cdot\vec{u}=0 \tag{۵۱-۲}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{u}+\frac{1}{\rho}\vec{F} \tag{۵۲-۲}$$

$$\frac{\partial\vec{T}}{\partial t}+\nabla.(\vec{u}T)=\alpha\nabla^2\vec{T} \tag{۵۳-۲}$$

که مقدار ویسکوزیته سینماتیکی و ضریب پخش از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\nu=(\tau_\nu-0.5)c_s^2 \tag{۵۴-۲}$$

$$\alpha=(\tau_c-0.5)c_s^2 \tag{۵۵-۲}$$

پارامتر $\vec{F}$ نشان‌دهنده نیروی وارد بر سیال است.

## ۲-۶- نحوه اعمال ترم نیرو در معادلات بولتزمن شبکه‌ای در انتقال حرارت جابجایی آزاد

برای بررسی جابجایی آزاد تنها نیروی حجمی، نیروی شناوری ناشی از شتاب جاذبه فرض می‌شود که در واحد حجم برابر است با $\Delta\rho\vec{g}$. در مطالعات مربوط به مباحث انتقال حرارت، متغیر اولیه دما می‌باشد لذا بیان نیرو برحسب اختلاف دما، بسیار مطلوب می‌باشد ولی این امر مستلزم بیان خاصیتی است که تغییر چگالی یک سیال با دما را در فشار ثابت نشان می‌دهد. خاصیتی که این اطلاعات را فراهم می‌کند، ضریب انبساط حجمی $\beta$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \tag{۲-۵۶}$$

با جاگذاری مشتق با اختلاف‌ها رابطه فوق را که به تقریب بوزینکس معروف است به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$\Delta\rho \approx -\rho\beta\Delta T \tag{۲-۵۷}$$

بنابراین معادله (۲-۵۲) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{u} + \beta\vec{g}\Delta T \tag{۲-۵۸}$$

در بخش قبل روابط بولتزمن شبکه‌ای بدون در نظر گرفتن نیروی شناوری بیان شد. بنابراین برای بررسی پدیده جابجایی طبیعی باید این ترم به سمت راست معادله مومنتوم بولتزمن شبکه‌ای (۲-۱۹) اضافه شود. این ترم در هرجهت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_\alpha = \omega_a \vec{F}.\frac{\vec{e_a}}{c_s^2} \tag{۲-۵۹}$$

که با تقریب بوزینسک داریم:

$$\vec{F} = \rho\,\vec{g_r}\,\beta\Delta T \tag{۲-۶۰}$$

# فصل ۳:

# نحوه اعمال شرایط مرزی بر روی مرز مایل و منحنی

## ۳-۱- مقدمه

بررسی جریان و انتقال حرارت در محفظه‌های بسته از دیرباز توجه زیادی را به خود جلب کرده است. محفظه‌های مربعی حجم زیادی از این مطالعات را به خود اختصاص داده‌اند. اما جریان‌های واقعی در طبیعت و صنعت اغلب در هندسه‌ها پیچیده‌تری دیده می‌شود مانند محفظه‌های با مقطعی به شکل مثلث، نیم دایره و ذوزنقه. در سال‌های اخیر این محفظه‌ها بارها و بارها به کمک روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی همچون حجم محدود، تفاضل محدود و المان محدود شبیه‌سازی شده‌اند. امروزه روش بولتزمن شبکه‌ای توجه زیادی را به خود جلب کرده‌است به طوری که برتری آن بر روش‌های مرسوم، دیگر بر کسی پوشیده نیست با این حال حجم مطالعات انجام شده به کمک این روش، در زمینه جریان و خصوصاً انتقال حرارت در محفظه‌های غیرمربعی بسیار کم است. در این پایان‌نامه به شبیه‌سازی این مسئله به کمک روش بولتزمن شبکه‌ای خواهیم پرداخت. نکته قابل توجه در شبیه‌سازی جریان در این نوع محفظه‌ها اعمال شرایط مرزی بر روی دیوارهای مایل و یا منحنی است که در ادامه نحوه اعمال این روش بیان شده است.

## ۳-۲-مرزهای منحنی در روش بولتزمن شبکه‌ای

برای هندسه‌های منحنی شکل، استفاده از طرح بازگشت به عقب با دیوار میانی(BBL) نیازمند این است که دیوار جامد منحنی شکل به صورت پله تقریب زده شود. واضح است که با این تقریب تمامیت هندسه مورد نظر حفظ نخواهد شد. بنابراین ازدقت محاسبات کاسته می‌شود. این مسئله در اعداد رینولدز بالا بیشتر مشکل‌ساز خواهد بود. به همین منظور، هی و لو[1][۴۵-۴۷] پیشنهاد کردند که از معادله شبکه بولتزمن با شبکه غیر یکنواخت استفاده شود. در ادامه هی و دولن[2] [۴۸] درون‌یابی برای معادله بولتزمن

[1] He and Luo
[2] He and Doolen

در مختصات منحنی‌الخط به کار بردند. می و شای[1][۴۹] معادله بولتزمن در مختصات منحنی‌الخط را با استفاده از روش حجم محدود حل کردند. فیلیپوا و هانل[2][۲۵] روشی را برای بیان شرط مرزی خمیده مطرح کردند. این طرح که بوسیله‌ی می[3]و همکارانش [۲۶-۲۸] بهبود بخشیده شد، دارای دقت مرتبه‌ی دوم است. در ادامه به بررسی این طرح می‌پردازیم.

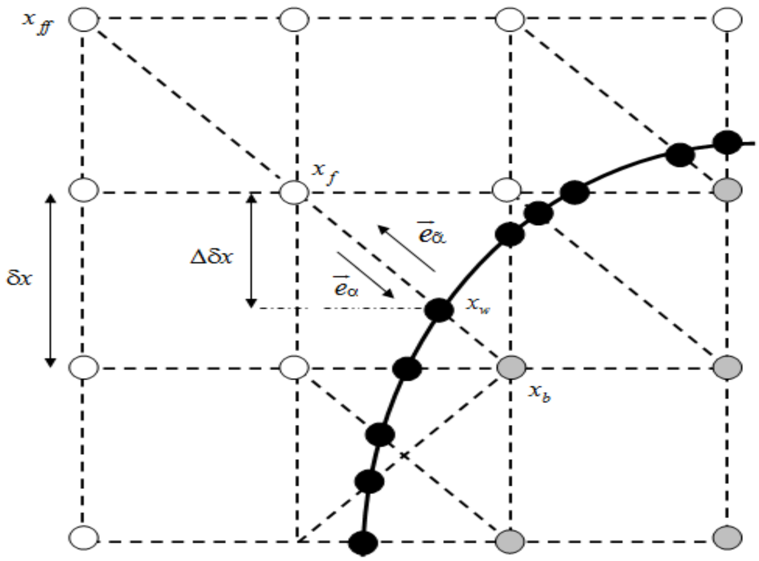
## ۳-۲-۱-بررسی روش فیلیپوا و هانل[۲۶]

فیلیپوا و هانل مرز منحنی شکلی را که در بین نقاط شبکه قرار گرفته است، مورد بررسی قرار دادند. این هندسه در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. دایره‌های سیاه نشان دهنده‌ی محل برخورد مرز با شبکه بندی ($x_w$)، دایره‌های توخالی گره‌های سیال ($x_f$) و دایره‌های خاکستری نشان دهنده گره‌های جامد ($x_b$) می‌باشند. جهت حرکت از گره سیال به سمت گره جامد با $\alpha$ و از گره جامد به سمت گره سیال با $\bar{\alpha}$ نشان داده شده است. اگر تابع توزیع بلافاصله پس از برخورد را با $\tilde{f}$ نشان دهیم، برای اتمام مرحله جاری شدن روی گره $x_f$، به $\tilde{f}_{\bar{\alpha}}(x_b,t)$ نیاز است. در واقع در مرحله جاری شدن داریم:

$$f_{\bar{\alpha}}(\overrightarrow{x_f} = \overrightarrow{x_b} + \vec{e}_{\bar{\alpha}}\delta t, t+\delta t) = \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(\overrightarrow{x_b}, t) \qquad (۱\text{-}۳)$$

همانطور که از شکل (۳-۱) می‌توان ملاحظه نمود $\vec{e}_{\bar{\alpha}} = -\vec{e}_{\alpha}$ است.

[1] Mei and Shyy
[2] Fillipova and Hannel
[3] Mei




شکل(۳-۱) نمایش مرز منحنی در شبکه

اولین قدم در محاسبه $\tilde{f}_{\tilde{\alpha}}(x_b,t)$ تعیین کسری از خط رابط گره سیال و جامد در راستای $\tilde{\alpha}$ است که در سیال قرار گرفته است. اگر این پارامتر را با $\Delta$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\Delta = \frac{\left|\vec{x}_f - \vec{x}_w\right|}{\left|\vec{x}_f - \vec{x}_b\right|} \tag{۳-۲}$$

واضح است که $0 \le \Delta \le 1$ می‌باشد و فاصله عمودی یا افقی بین $x_w$ و $x_f$ در شبکه مربعی برابر $\Delta\delta x$ است. سپس برای بدست آوردن $\tilde{f}_{\tilde{\alpha}}(x_b,t)$ از اطلاعات محیط اطراف، فیلیپوا و هانل پیشنهاد کردند که از یک درونیابی خطی به صورت زیر استفاده شود:

$$\tilde{f}_{\tilde{\alpha}}(\vec{x}_b,t) = (1-\chi)\,\tilde{f}_{\alpha}(\vec{x}_f,t) + \chi f^*_{\alpha}(\vec{x}_b,t) \; + 2\omega_{\alpha}\rho\frac{3}{c^2}\vec{e}_{\tilde{\alpha}}.\vec{u}_{\omega} \tag{۳-۳}$$

که $\vec{u}_w = \vec{u}(\vec{x}_w,t)$ سرعت دیواره است و $\chi$ فاکتور وزنی است که درون‌یابی (یا برون‌یابی) بین $\tilde{f}_{\alpha}(\vec{x}_f,t)$ و $f^*_{\alpha}(\vec{x}_b,t)$ را کنترل می‌کند. تابع توزیع مجازی $f^*_{\alpha}(\vec{x}_b,t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_\alpha^*(\vec{x}_b,t)=\omega_\alpha\rho(\vec{x}_f,t)\left[1+\frac{3}{c^2}\vec{e}_\alpha\cdot\vec{u}_{bf}+\frac{9}{2c^4}(\vec{e}_\alpha\cdot\vec{u}_f)^2-\frac{3}{2c^2}\vec{u}_f\cdot\vec{u}_f\right] \quad (۳-۴)$$

در واقع معادله بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f_\alpha^*(\vec{x}_b,t)=f_\alpha^{(eq)}(\vec{x}_f,t)+\omega_\alpha\rho(x_f,t)\cdot\frac{3}{c^2}\vec{e}_\alpha\cdot(\vec{u}_{bf}-\vec{u}_f) \quad (۳-۵)$$

در معادله بالا $\vec{u}_f=\vec{u}(\vec{x}_f,t)$ سرعت سیال مجاور مرز و $\vec{u}_{bf}$ سرعتی مجازی است که باید انتخاب شود. مثلاً می‌توان آن را برابر سرعت سیال مجاور مرز گرفت: $\vec{u}_{bf}=\vec{u}_f$ یا از برونیابی خطی به صورت زیر استفاده کرد:

$$\vec{u}_{bf}=\frac{(\Delta-1)\vec{u}_f}{\Delta}+\frac{\vec{u}_w}{\Delta}$$

لازم به ذکر است که تعیین فاکتور وزنی $\chi$ بستگی به چگونگی انتخاب $\vec{u}_{bf}$ دارد. برای تعیین فاکتور وزنی $\chi$ فیلیپوا و هانل جریانی با شرط زیر را در نظر گرفتند:

$$\frac{L}{cT}\le 1 \quad (۳-۶)$$

که به این معناست که زمان مشخصه جریان T، بسیار بزرگتر از زمان جابجایی[۱] $\frac{L}{c}$ در مقیاس شبکه است. این شرط که نشان دهنده جریان آرام[۲] است، به فیلیپوا و هانل این امکان را داد که $f_{\tilde\alpha}(\overrightarrow{x_f}=\overrightarrow{x_b}+\vec{e}_{\tilde\alpha}\delta t,t+\delta t)$ در معادله (۳-۱) را به کمک $f_{\tilde\alpha}(\overrightarrow{x_f},t)$ تقریب بزنند:

$$f_{\tilde\alpha}(\overrightarrow{x_f}=\overrightarrow{x_b}+\vec{e}_{\tilde\alpha}\delta t,t+\delta t)=f_{\tilde\alpha}(\overrightarrow{x_f},t)+\delta t\frac{\partial f_{\tilde\alpha}}{\partial t}+\ldots \quad (۳-۷)$$

با استفاده از آنالیز ابعادی، $O(\frac{\partial f_{\tilde\alpha}}{\partial t})\approx O(\frac{f_{\tilde\alpha}}{T})$ فرض می‌شود. بنابراین داریم:

[1] Advection time
[2] Slow-flow

$$f_{\tilde{\alpha}}(\overrightarrow{x_f},t+\delta t)=f_{\tilde{\alpha}}(\overrightarrow{x_f},t)\left[1+O(\frac{\delta t}{T})\right]=f_{\tilde{\alpha}}(\overrightarrow{x_f},t)\left[1+O(\frac{\delta x}{L}\cdot\frac{L}{cT})\right]\approx f_{\tilde{\alpha}}(\overrightarrow{x_f},t) \quad (۸-۳)$$

با استفاده از بسط چاپمن به صورت زیر:

$$f_{\tilde{\alpha}}(\overrightarrow{x_f},t)=f_{\tilde{\alpha}}^{eq}(\overrightarrow{x_f},t)+\varepsilon f_{\tilde{\alpha}}^{(1)}(\overrightarrow{x_f},t)+\ldots \quad (۹-۳)$$

$$f_{\tilde{\alpha}}^{(1)}(\overrightarrow{x_f},t)=-\lambda\left[\frac{\partial f_{\tilde{\alpha}}^{(eq)}(\overrightarrow{x_f},t)}{\partial t}+\vec{e}_{\tilde{\alpha}}.\nabla f_{\tilde{\alpha}}^{(eq)}(\overrightarrow{x_f},t)\right] \quad (۱۰-۳)$$

و با همان فرض جریان آزاد خواهیم داشت:

$$f_{\tilde{\alpha}}(\overrightarrow{x_f},t)=f_{\tilde{\alpha}}^{eq}(\overrightarrow{x_f},t)-\lambda\left[\frac{\partial f_{\tilde{\alpha}}^{(eq)}(\overrightarrow{x_f},t)}{\partial t}+\vec{e}_{\tilde{\alpha}}.\nabla f_{\tilde{\alpha}}^{(eq)}(\overrightarrow{x_f},t)\right]+\ldots$$
$$\approx f_{\tilde{\alpha}}^{eq}(\overrightarrow{x_f},t)-\lambda\vec{e}_{\tilde{\alpha}}.\nabla f_{\tilde{\alpha}}^{(eq)}(\overrightarrow{x_f},t)+\ldots$$

(۱۱-۳)

عبارت $\nabla f_{\tilde{\alpha}}^{(eq)}(\overrightarrow{x_f},t)$ با فرض جریان تراکم‌ناپذیر به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla f_{\tilde{\alpha}}^{(eq)}(\overrightarrow{x_f},t)=3\omega_\alpha\rho\nabla(\vec{u}\cdot\vec{e}_{\tilde{\alpha}})/c^2 \quad (۱۲-۳)$$

همچنین داریم: $\lambda=\tau\delta t$ بنابراین معادله (۳-۱۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f_{\tilde{\alpha}}(\overrightarrow{x_f},t)\approx f_{\tilde{\alpha}}^{eq}(\overrightarrow{x_f},t)-3\omega_\alpha\rho\tau\delta t\frac{1}{c^2}\vec{e}_{\tilde{\alpha}}.\nabla(\vec{u}_f\cdot\vec{e}_{\tilde{\alpha}})$$
$$=f_{\alpha}^{eq}(\overrightarrow{x_f},t)-6\omega_\alpha\rho\frac{1}{c^2}\vec{u}_f\cdot\vec{e}_\alpha-3\omega_\alpha\rho\tau\delta t\frac{1}{c^2}\vec{e}_{\tilde{\alpha}}.\nabla(\vec{u}_f\cdot\vec{e}_{\tilde{\alpha}}) \quad (۱۳-۳)$$

این عبارت در واقع همان عبارت سمت چپ معادله(۳-۱) می‌باشد. برای بسط سمت راست معادله (۳-۱) در شرایط پارامتر کوچک محاسباتی داریم:

$$\frac{\delta x}{L}=\frac{c\delta t}{L}\leq 1 \tag{۱۴-۳}$$

حال با قرار دادن معادله (۳-۵) در معادله (۳-۳) خواهیم داشت:

$$f_{\alpha}^{*}(\vec{x}_b,t)\approx f_{\alpha}^{(eq)}(\vec{x}_f,t)+(1-\chi)(\tau-1)\delta t\omega_{\alpha}\rho\cdot\frac{3}{c^2}\vec{e}_{\alpha}\cdot\nabla\vec{u}_f.\vec{e}_{\alpha}+ \omega_{\alpha}\rho\cdot\frac{3}{c^2}\vec{e}_{\alpha}\cdot(\chi\vec{u}_{bf}-\chi\vec{u}_f-2\vec{u}_w) \tag{۱۵-۳}$$

حال اگر $\vec{u}_{bf}$براساس درونیابی خطی تعریف شود، یعنی $\vec{u}_{bf}=\frac{(\Delta-1)\vec{u}_f}{\Delta}+\frac{\vec{u}_w}{\Delta}$ و بسط دادن سرعت دیوار حول $\vec{u}_f$ نزدیک دیوار با کمک بسط تیلور $\vec{u}_w=\vec{u}_f+\Delta\delta t\vec{e}_{\alpha}\cdot\nabla\vec{u}_f$ خواهیم داشت:

$$\vec{u}_{bf}-\vec{u}_f=\delta t\vec{e}_{\alpha}\cdot\nabla\vec{u}_f \tag{۱۶-۳}$$

به این ترتیب بسط سمت راست معادله(۳-۱) کامل می‌شود. حال با مساوی قرار دادن معادله (۳-۱۳)و معادله (۳-۱۵) و برابر قرار دادن ضرایب خطی $\delta t$ داریم:

$$\chi=\frac{2\Delta-1}{\tau} \tag{۱۷-۳}$$

و اگر فرض کنیم $\vec{u}_{bf}=\vec{u}_f$ است، با برابر قرار دادن ضرایب خطی $\delta t$ خواهیم داشت:

$$\chi=\frac{2\Delta-1}{\tau-1} \tag{۱۸-۳}$$

فیلیپوا و هانل دریافتند که اگر از حالت $\vec{u}_{bf}=\frac{(\Delta-1)\vec{u}_f}{\Delta}+\frac{\vec{u}_w}{\Delta}$استفاده شود فقط هنگامیکه $\Delta\geq\frac{1}{2}$به جواب پایدار می‌رسیم بنابراین آنها پیشنهاد کردند که:

$$\vec{u}_{bf}=\frac{(\Delta-1)\vec{u}_f}{\Delta}+\frac{\vec{u}_w}{\Delta}\quad\text{and}\quad\chi=\frac{2\Delta-1}{\tau}\quad\text{for}\quad\Delta\geq\frac{1}{2} \tag{۱۹-۳}$$

$$\vec{u}_{bf} = \vec{u}_f \qquad \text{and} \quad \chi = \frac{2\Delta - 1}{\tau - 1} \quad \text{for} \quad \Delta \langle \frac{1}{2} \qquad (۳-۲۰)$$

هنگامی که فاکتور وزنی بزرگ می‌شود ناپایداری افزایش می‌یابد. برای $\Delta \geq \frac{1}{2}$، $|\chi| = \frac{|2\Delta - 1|}{\tau}$ همیشه از ۲ کوچکتر می‌باشد زیرا همانطور که قبلاً اشاره شد ویسکوزیته مثبت مسلتزم این است که $\tau$ بزرگتر از ۰/۵ باشد. اما برای حالتی که $\Delta \langle \frac{1}{2}$، با میل کردن $\tau$ به سمت یک، مقدار $|\chi| = \left|\frac{2\Delta - 1}{\tau - 1}\right|$ بزرگ و بزرگتر خواهد شد و ناپایداری در میدان حل را به دنبال خواهد داشت.

### ۳-۲-۲- بهبود روش توسط می[1] و همکاران[۲۶]:

برای رفع مشکل ناپایداری در $\Delta \langle \frac{1}{2}$، می و همکارانش پیشنهاد کردند برای این بازه از رابطه زیر در تخمین $\vec{u}_{bf}$ استفاده شود:

$$\vec{u}_{bf} = \vec{u}_{ff} = \vec{u}(\vec{x}_f + \vec{e}_{\tilde{\alpha}} \delta t, t) \qquad (۳-۲۱)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{u}_{bf} - \vec{u}_f = \vec{u}(\vec{x}_f + \vec{e}_{\tilde{\alpha}} \delta t, t) - \vec{u}(\vec{x}_f, t) = -\delta t \nabla \vec{u}_f \cdot \vec{e}_\alpha \qquad (۳-۲۲)$$

که این رابطه منجر می‌شود به:

$$-\tau(1-\chi)(1-1/\tau) - x = 2\Delta - \tau \qquad (۳-۲۳)$$

حال با برابر قرار دادن ضرایب خطی $\delta t$ خواهیم داشت:

$$\chi = \frac{2\Delta - 1}{\tau - 2} \qquad \text{for} \quad \Delta \langle \frac{1}{2} \qquad (۳-۲۴)$$

[1] Mei

لازم به ذکر است که برای $\Delta \geq \frac{1}{2}$ همچنان از همان رابطه فیلیپوا و هانل استفاده می‌شود. سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که برای پایداری کامل آیا بهتر نیست از $\vec{u}_{bf} = \vec{u}_{fff} = \vec{u}(\vec{x}_f + 2\vec{e}_{\bar{\alpha}}\delta t, t)$ استفاده شود؟ باید گفت اگرچه این کار پایداری را در میدان حل تضمین می‌کند اما کاهش دقت حل، مانع از چنین انتخابی خواهد شد. معادلات بالا دارای دقت مرتبه یک هستند. بنابراین می و همکاران معادلات را برای رسیدن به دقت مرتبه دوم به صورت زیر اصلاح کردند[۲۷]:

$$\vec{u}_{bf} = \vec{u}_{ff} \quad \text{and } \chi = \frac{2\Delta - 1}{\tau - 2} \quad \text{for} \quad \Delta \langle \frac{1}{2} \tag{۲۵-۳}$$

$$\vec{u}_{bf} = \frac{1}{2\Delta}(2\Delta - 3)\vec{u}_f + \frac{3}{2\Delta}\vec{u}_w \quad \text{and } \chi = \frac{(2\Delta - 1)}{(\tau + 1/2)} \quad \text{for} \quad \Delta \geq \frac{1}{2} \tag{۲۶-۳}$$

## ۳-۲-۳-شرایط مرزی حرارتی:

مانند حالت قبل برای اجرای کامل مرحله جاری شدن توابع توزیع انرژی، به تابع $g_{\bar{\alpha}}(\vec{x}_b, t)$ نیاز است. برای محاسبه این تابع توزیع ما از روش ارائه شده توسط یان و زو[1][۲۹] که دارای دقت مرتبه دوم است استفاده خواهیم کرد. در ادامه به بیان جزئیات این روش خواهیم پرداخت.

هر تابع توزیع را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد: بخش تعادلی و بخش غیرتعادلی، یعنی می‌توان نوشت:

$$g_\alpha(\vec{x}, t) = g_\alpha^{(eq)}(\vec{x}, t) + g_\alpha^{(neq)}(\vec{x}, t) \tag{۲۷-۳}$$

در بخش قبل نشان دادیم که تابع توزیع انرژی پس از برخورد به صورت زیر تعریف می‌شود(معادله(۲-۶۳)):

$$g_\alpha(\vec{x}, t) - g_\alpha(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\tau_c}[g_\alpha(\vec{x}, t) - g_\alpha^{eq}(\vec{x}, t)],$$

[1] Yan and Zu

حال با جایگذاری معادله(۳-۲۷) در معادله (۲-۶۳) خواهیم داشت:

$$g_{\alpha}(\vec{x},t)=g_{\alpha}^{(eq)}(\vec{x},t)+(1-\frac{1}{\tau_c})g_{\alpha}^{(neq)}(\vec{x},t) \tag{۳-۲۸}$$

بنابراین برای محاسبه $g_{\tilde{\alpha}}(\vec{x}_b,t)$ براساس معادله (۳-۲۸) به $g_{\tilde{\alpha}}^{(eq)}(\vec{x}_b,t)$ و $g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\overrightarrow{x_b},t)$ نیاز است. همانطور که در فصل قبل اشاره کردیم، تابع توزیع تعادلی در مدل دو بعدی ۹ سرعته D2Q9 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_{\tilde{\alpha}}^{eq}(\overrightarrow{x_b},t)=\omega_{\tilde{\alpha}}T_b[1+\frac{3}{c^2}(\vec{e}_{\tilde{\alpha}}.\overrightarrow{u_b})]. \tag{۳-۲۹}$$

بنابراین برای محاسبه بخش تعادلی تابع توزیع به $\overrightarrow{u_b}\equiv\vec{u}(\vec{x}_b,t)$ و $T_b\equiv T(\vec{x}_b,t)$ نیاز است.

اگر فرض کنیم $\delta x=\delta t=\varepsilon$ آنگاه با برونیابی خطی بین اولین گره سیال در جهت $\tilde{\alpha}$ و مرز می‌توانیم $\overrightarrow{u_b}$ را به صورت زیر تقریب بزنیم:

$$\overrightarrow{u_b}=[\overrightarrow{u_w}+(\Delta-1)\overrightarrow{u_f}]/\Delta+O(\varepsilon^2) \tag{۳-۳۰}$$

واضح است که با کوچک شدن $\Delta$، $\overrightarrow{u_b}$ بسیار بزرگ خواهد شد و این موضوع ناپایداری عددی در شبیه-سازی را در پی خواهد داشت. بنابراین $\overrightarrow{u_b}$ دیگری براساس برونیابی بین دومین گره سیال در جهت $\tilde{\alpha}$ و مرز به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\overrightarrow{u_b}=[2\overrightarrow{u_w}+(\Delta-1)\overrightarrow{u_{ff}}]/(1+\Delta)+O(\varepsilon^2) \tag{۳-۳۱}$$

همانگونه که نشان داده شده هر دوی این معادلات (۳-۳۱و۳-۳۰) با دقت مرتبه دوم $\overrightarrow{u_b}$ را به خوبی تقریب میزنند اما اگر $\overrightarrow{u_b}$ حاصل از معادله (۳-۳۰) را با $\overrightarrow{u_{b1}}$ و $\overrightarrow{u_b}$ حاصل از معادله (۳-۳۱) را با $\overrightarrow{u_{b2}}$ نشان دهیم واضح است که $\overrightarrow{u_{b1}}$ نسبت به $\overrightarrow{u_{b2}}$ تقریب بهتری است زیرا $\overrightarrow{x_f}$ به $\overrightarrow{x_b}$ نزدیکتر از $\overrightarrow{x_{ff}}$ است.

بنابراین بهتر است $\overrightarrow{u_b}$ به صورت زیر تقریب زده شود :

$$\overrightarrow{u_b} = \overrightarrow{u_{b1}} \qquad \text{if } \Delta \geq 0.75 \qquad (۳-۳۲)$$

$$\overrightarrow{u_b} = \Delta\overrightarrow{u_{b1}} + (1-\Delta)\overrightarrow{u_{b2}} \qquad \text{if } \Delta < 0.75 \qquad (۳-۳۳)$$

به طریق مشابه می‌توان $T_b$ را به صورت زیر با دقت مرتبه دو تقریب زد:

$$T_b = T_{b1} \qquad \text{if } \Delta \geq 0.75 \qquad (۳-۳۴)$$

$$T_b = \Delta T_{b1} + (1-\Delta)\, T_{b2} \qquad \text{if } \Delta < 0.75 \qquad (۳-۳۵)$$

که در معادلات بالا داریم:

$$T_{b1} = \left[T_w + (\Delta - 1)T_f\ \right] / \Delta \qquad (۳-۳۶)$$

$$T_{b2} = [2T_w + (\Delta - 1)T_{ff}] / (1 + \Delta) \qquad (۳-۳۷)$$

بنابراین با کمک معادلات بالا می‌توان بخش تعادلی تابع توزیع انرژی روی گره جامد را تقریب زد. حال کافیست بخش غیرتعادلی تابع توزیع انرژی را با دقت مرتبه دوم تقریب بزنیم. تابع توزیع انرژی $g_\alpha(\vec{x},t)$ را براساس بسط چاپمن-انسکوک[1] می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$g_\alpha(\vec{x},t) = g_\alpha^{(0)}(\vec{x},t) + \varepsilon g_\alpha^{(1)}(\vec{x},t) + O(\varepsilon^2) \qquad (۳-۳۸)$$

در معادله بالا $g_\alpha^{(0)}(\vec{x},t)$ در واقع همان بخش تعادلی تابع توزیع انرژی است یعنی $g_\alpha^{(0)}(\vec{x},t) = g_\alpha^{(eq)}(\vec{x},t)$ و به طریق مشابه داریم:

$$g_\alpha(\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_\alpha,t) = g_\alpha^{(0)}(\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_\alpha,t) + \varepsilon g_\alpha^{(1)}(\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_\alpha,t) + O(\varepsilon^2) \qquad (۳-۳۹)$$

حال با کم کردن معادله (۲-۳۸) از معادله (۲-۳۹) داریم:

$$g_\alpha^{(neq)}(\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_\alpha,t) = g_\alpha^{(neq)}(\vec{x},t) + \varepsilon\left[g_\alpha^{(1)}(\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_\alpha,t) - g_\alpha^{(1)}(\vec{x},t)\right] + O(\varepsilon^2) \qquad (۳-۴۰)$$

بسط تیلور برای $g_\alpha^{(1)}(\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_\alpha,t)$ حول نقطه $(\vec{x},t)$ به صورت زیر خواهد بود:

---

[1] Chapman-Enskog

$$g_{\alpha}^{(1)}(\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_{\alpha},t)=g_{\alpha}^{(1)}(\vec{x},t)+\varepsilon\vec{e}_{\alpha}.\nabla g_{\alpha}^{(1)}(\vec{x},t)+O(\varepsilon^{2}) \tag{۴۱-۳}$$

حال با جایگذاری معادله (۲-۴۱) درمعادله (۲-۴۰) خواهیم داشت:

$$g_{\alpha}^{(neq)}(\vec{x}+\varepsilon\vec{e}_{\alpha},t)=g_{\alpha}^{(neq)}(\vec{x},t)+O(\varepsilon^{2}) \tag{۴۲-۳}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\vec{x}_{b},t)=g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\overrightarrow{x_{f}},t)+O(\varepsilon^{2}) \tag{۴۳-۳}$$

همچنین به طریقی دیگر می‌توان $g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\vec{x}_{b},t)$ را به صورت زیر تقریب زد:

$$g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\vec{x}_{b},t)=g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\overrightarrow{x_{ff}},t)+O(\varepsilon^{2}) \tag{۴۴-۳}$$

و در نهایت برای رسیدن به دقت و پایداری بیشتر $g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\vec{x}_{b},t)$را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

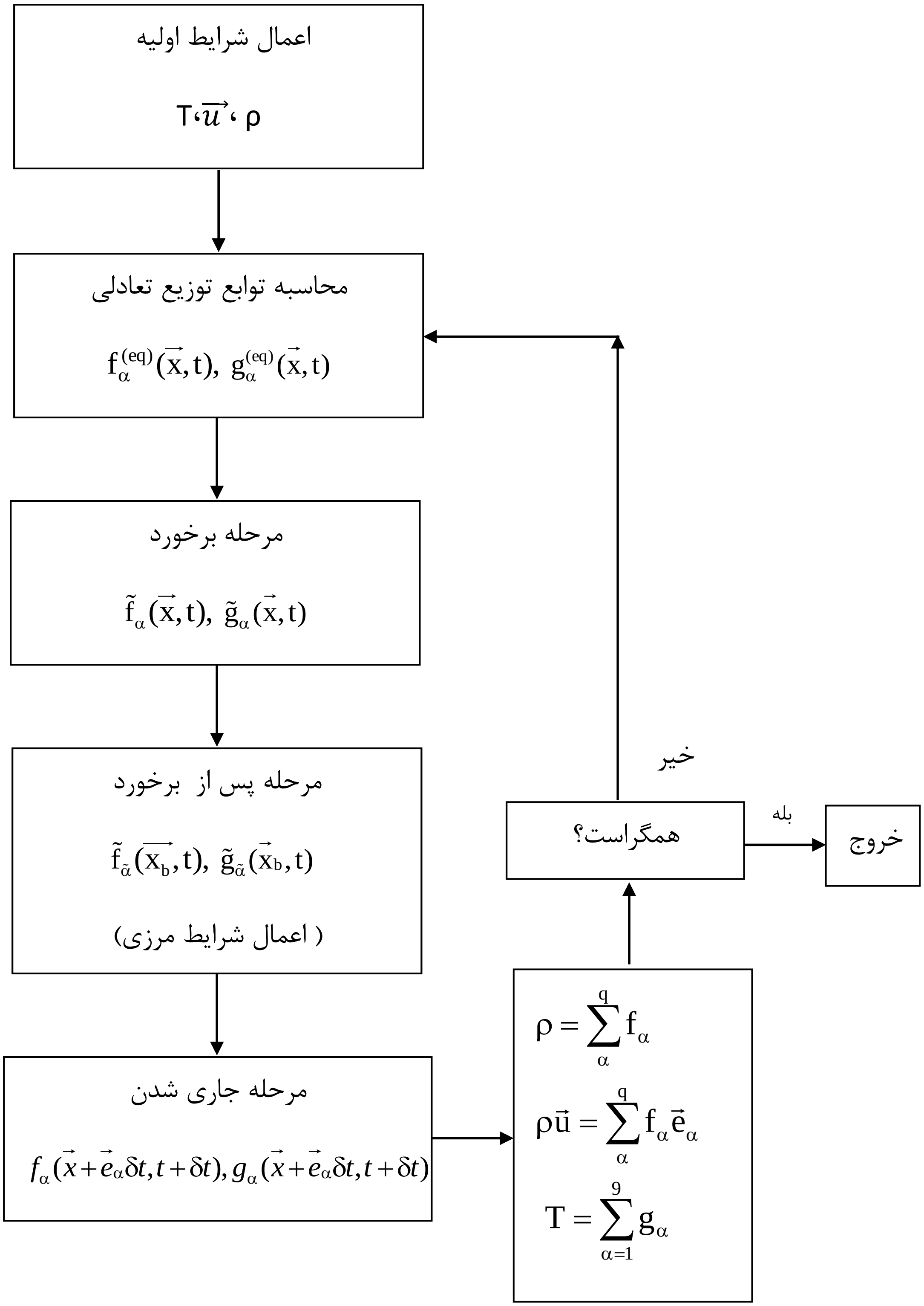
$$g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\vec{x}_{b},t)=g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\overrightarrow{x_{f}},t) \qquad \text{if } \Delta\geq 0.75 \tag{۴۵-۳}$$

$$g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\vec{x}_{b},t)=\Delta g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\overrightarrow{x_{f}},t)+(1-\Delta)g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\overrightarrow{x_{ff}},t) \qquad \text{if } \Delta<0.75 \tag{۴۶-۳}$$

بنابراین با مشخص شدن $g_{\tilde{\alpha}}^{(neq)}(\vec{x}_{b},t)$ و $g_{\tilde{\alpha}}^{(eq)}(\vec{x}_{b},t)$ می‌توان به کمک معادله (۳-۲۸) مقدار $g_{\tilde{\alpha}}(\vec{x}_{b},t)$ را محاسبه نمود.

## ۳-۳- روند کلی شبیه‌سازی جریان و انتقال حرارت در محفظه غیرمربعی

مراحل شبیه‌سازی انتقال حرارت در محفظه‌های غیرمربعی را می‌توان به صورتی که در شکل (۳-۲) نمایش داده شده خلاصه کرد. برای بررسی جریان در حالتی که انتقال حرارت وجود ندارد، مراحل مربوط به دما حذف می‌گردد.




شکل (۳-۲) مراحل انجام الگوریتم روش بولتزمن شبکه‌ای

# فصل ۴:

# نتایج و تفسیر آنها

## ۴-۱- مقدمه

با توجه به مطالب ارائه شده در فصول قبل و موفقیت‌های روش بولتزمن شبکه‌ای در شبیه‌سازی جریان‌های مختلف، اهمیت پرداختن به این روش به عنوان جایگزین مناسب برای روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی بر کسی پوشیده نیست. بررسی جریان و خصوصاً انتقال حرارت در محفظه‌های غیر مربعی ازجمله مسائلی است که با وجود کاربرد فراوان تاکنون کمتر به شبیه‌سازی آن با این روش پرداخته شده است. به همین دلیل در این پایان‌نامه به بررسی این نوع محفظه پرداخته شده تا خلأ موجود برطرف شود. به این منظور، ابتدا به بررسی جریان در محفظه-های غیر مربعی با درپوش متحرک می‌پردازیم. جریان درون محفظه‌ای با درپوش متحرک از جمله مسائل کلاسیک و شناخته شده ایست که هرچند حل تحلیلی برای آن وجود ندارد اما به دفعات توسط روش‌های عددی مرسوم حل شده است و اغلب برای بررسی دقت و کارایی روش های عددی به کار می‌رود. علت انتخاب این جریان آن است که موقعیتی مناسب برای بررسی و مطالعه بسیاری پدیده‌های اساسی برای جریان تراکم‌ناپذیر مانند گردابه‌های گوشه‌ای[1]، گردابه‌های طولی[2]، گردابه‌های تیلور گورتلر لایک[3]، حالت گذرا و شرایط آشفته است. بنابراین برآن شدیم که ابتدا به حل این مسئله بپردازیم تا هم توانایی روش بولتزمن شبکه‌ای برای شبیه‌سازی مرزهای مایل و منحنی اثبات شود و هم صحت کدهای نوشته شده مورد سنجش قرار بگیرد و سپس به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در این نوع محفظه‌ها خواهیم پرداخت.

## ۴-۲- بررسی جریان درمحفظه‌های غیر مربعی با درپوش متحرک

1. corner vortices

2. longitudinal vortices

3.Taylor-Gortler-like (TGL) vortices

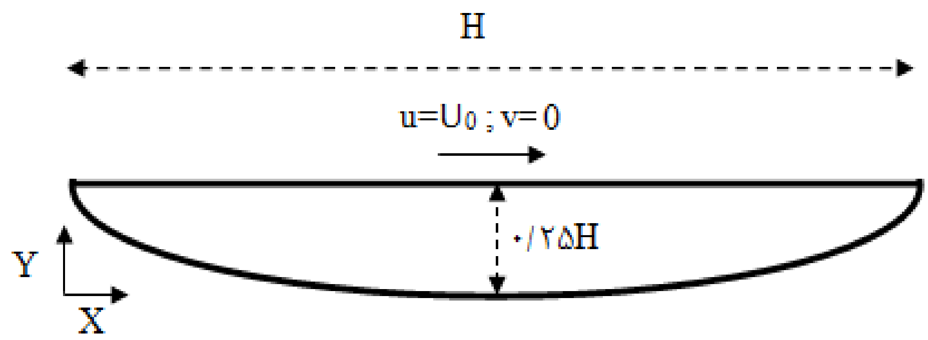
در این بخش به بررسی جریان پایا و تراکم‌ناپذیر دو بعدی در محفظه‌های غیرمربعی با درپوش متحرک خواهیم پرداخت. در هر محفظه، مرزهای غیر از درپوش کاملاً ساکن هستند. نتایج برای اعداد رینولدز مختلف ارائه شده است و در تمامی محفظه‌ها عدد رینولدز به صورت $\mathrm{Re}=\dfrac{U_0 H}{\nu}$ تعریف می‌شود. در شبیه‌سازی‌های انجام شده $U_0$ در سیستم آحاد شبکه برابر ۰/۱ انتخاب شده است و طول مشخصه محفظه، H برابر تعداد تقسیمات شبکه روی طول مشخصه مورد نظر می‌باشد. $U_0$ و H سرعت و طول مشخصه‌ای هستند که برای تبدیل آحاد شبکه به آحاد فیزیکی در نظر گرفته می‌شوند. در اینجا کلیه ابعاد و سرعت‌ها براساس آنها بی‌بعد شده‌اند تا مقایسه آنها با نتایج قبلی موجود بهتر انجام شود. بنابراین با ارائه نتایج به صورت بی‌بعد، در اینجا نیازی به ضرایب تبدیل نیست. بنابراین داریم:

$$x^*=\frac{X}{H};\ \ \mathrm{y}^*=\frac{Y}{H};\quad \mathrm{u}^*=\frac{u}{U_0};\ \ \mathrm{v}^*=\frac{v}{U_0}$$

## ۴-۲-۱- محفظه به شکل نیم بیضی

### ۴-۲-۱-۱- هندسه جریان:

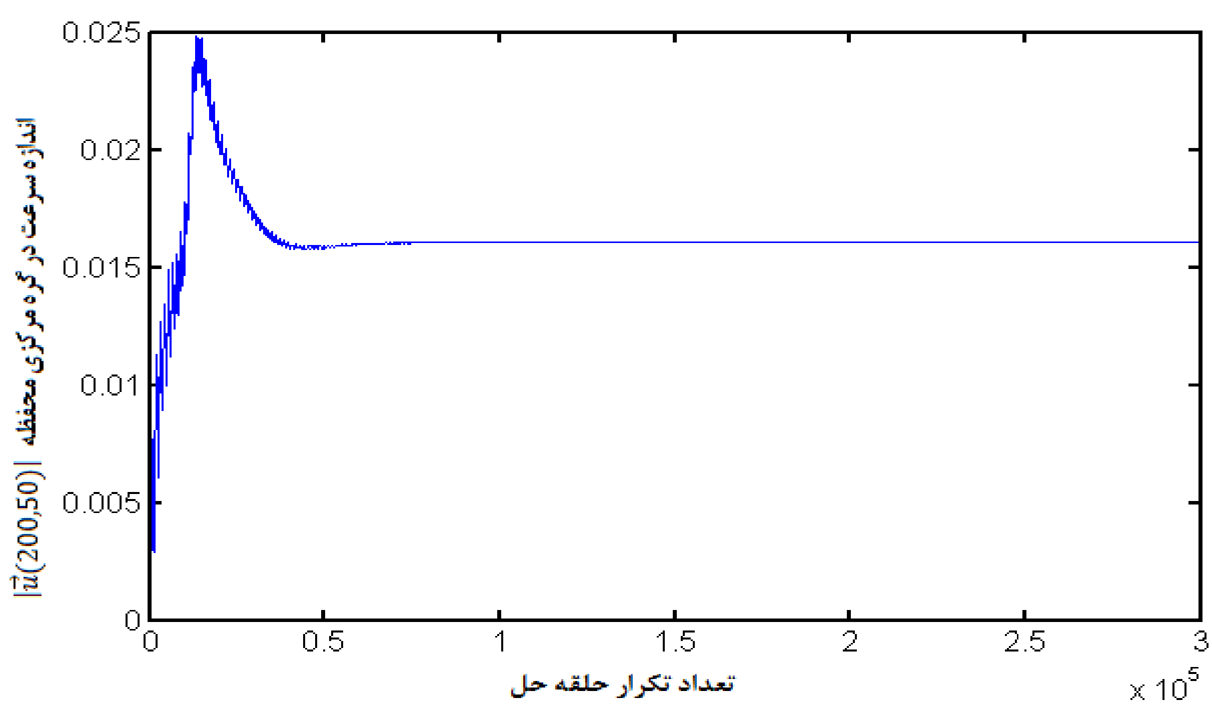
شکل ( ۴-۱ ) نشان دهنده هندسه محفظه‌ای به شکل نیم بیضی است که طول قطر بزرگ آن برابر Hو طول قطر کوچک آن برابر۰/۵H است. قطر بزرگ به عنوان طول مشخصه در نظر گرفته شده است و مرز بالا با سرعت ثابت $U_0$ در جهت نشان داده شده، در حرکت است. شبکه در نظر گرفته شده برای این هندسه ۱۰۰×۴۰۰می‌باشد.




شکل ( ۴-۱ ) هندسه محفظه به شکل نیم بیضی با درپوش متحرک

### ۴-۲-۱-۲- بررسی همگرایی:

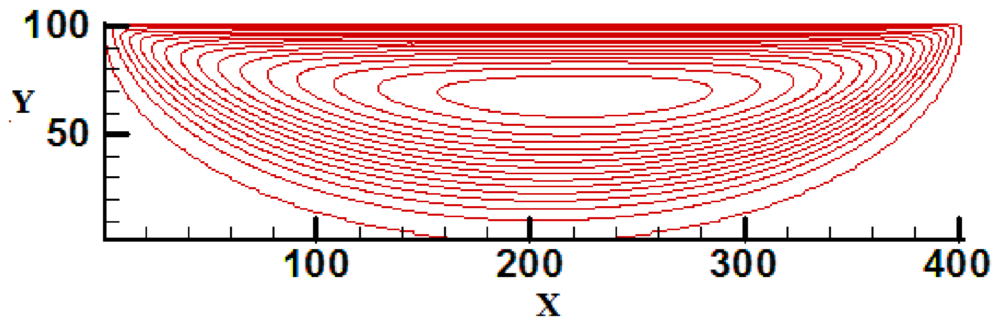
به منظور رسیدن به نتایج، حلقه حل ۳۰۰۰۰۰بار تکرار شده است. برای بررسی همگرایی، اندازه سرعت در نقطه مرکزی محفظه در برابر تعداد تکرار در عدد رینولدز ۲۰۰۰در شکل (۴-۲) رسم شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود سرعت پس از ۱۰۰۰۰۰بار تکرار حلقه همگرا شده بود.



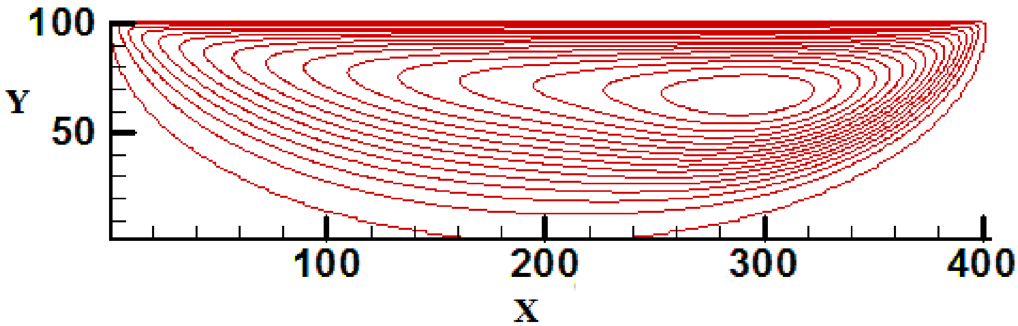

شکل ( ۴-۲ ) تغییرات اندازه سرعت در مرکز محفظه به شکل نیم‌بیضی با درپوش متحرک در برابر تکرار حلقه حل در عدد رینولدز ۲۰۰۰

### ۴-۲-۱-۳- نتایج:

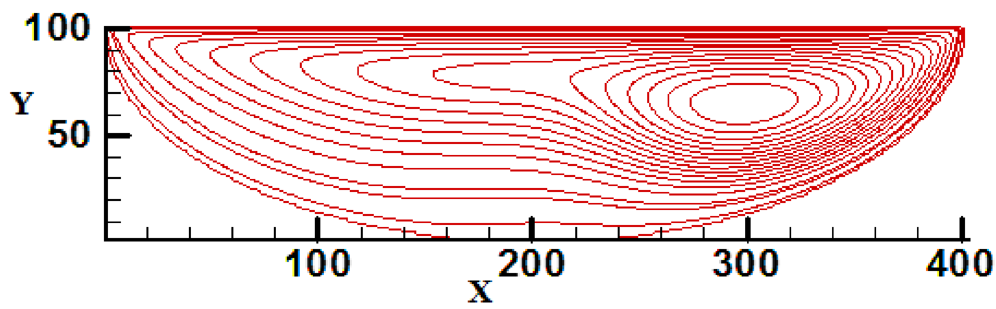
خطوط جریان درون این محفظه برای اعداد رینولدرز ۱۰۰۰،۱۵۰۰،۵۰۰،۱۰۰و ۲۰۰۰ در شکل( ۴-۳ ) نشان داده شده است.




(الف)

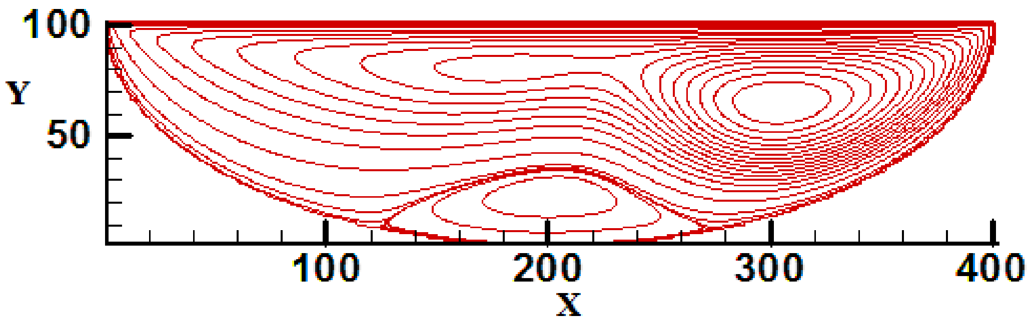



(ب)

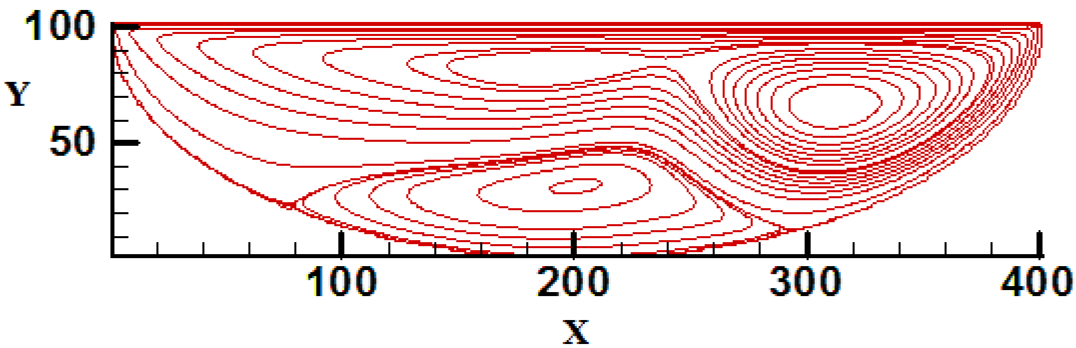



(ج)

شکل ( ۴-۳ ) خطوط جریان درون محفظه به شکل نیم بیضی با درپوش متحرک: الف) Re=۱۰۰ ب) Re=۵۰۰ ج) Re=۱۰۰۰




(د)




(ه)

ادامه شکل ( ۴-۳ ) خطوط جریان درون محفظه به شکل نیم بیضی با درپوش متحرک: د) Re=۱۵۰۰

ه) Re=۲۰۰۰

### ۴-۲-۱-۴- استقلال از شبکه:

از جمله مسائلی که در یک حل عددی باید مورد توجه قرار گیرد مستقل بودن نتایج از شبکه‌بندی است. یعنی شبکه‌بندی میدان حل باید به گونه‌ای باشد که ریزتر کردن شبکه تاثیر قابل توجهی روی نتایج نهایی نداشته باشد، به طوری که بتوان از آن صرف‌نظر کرد. همانطور که قبلاً اشاره شد در حل حاضر شبکه در نظر گرفته شده برای این هندسه ۱۰۰×۴۰۰است. برای بررسی تاثیر ظرافت شبکه روی دقت نتایج، مساله برای بزرگترین عدد رینولدز مورد بررسی، یعنی۲۰۰۰ روی شبکه‌بندی درشتر یعنی ۳۰۰×۷۵و شبکه‌بندی ریزتر یعنی ۵۰۰×۱۲۵ حل شده و مراکز گردابه اولیه و ثانویه شکل گرفته در

محفظه با شبکه اولیه مقایسه شده است. جدول ( ۴-۱ )، این مقایسه را نشان می‌دهد. می‌توان مشاهده کرد که شبکه‌بندی ۱۰۰×۴۰۰شبکه‌بندی مناسبی است.

جدول ( ۴-۱ ) مقایسه مراکز گردابه اولیه و ثانویه در محفظه به شکل نیم‌بیضی برای عدد رینولدز ۲۰۰۰ مربوط به عدم وابستگی حل به شبکه

| درصد انحراف از نتیجه شبکه انتخاب شده | مرکز گردابه ثانویه $(x^*,y^*)$ | درصد انحراف از نتیجه شبکه انتخاب شده | مرکز گردابه اولیه $(x^*,y^*)$ | تعداد نقاط شبکه |
|---|---|---|---|---|
| (۰ ,۰/۹۲) | (۰/۵۰۱۱ ,۰/۰۷۴۸) | (۰ ,۰/۴۳) | (۰/۷۷۶۳ ,۰/۱۶۲۴) | ۳۰۰×۷۵ |
| ۰ | (۰/۵۰۱۱ ,۰/۰۷۵۵) | ۰ | (۰/۷۷۶۳ ,۰/۱۶۱۷) | ۴۰۰×۱۰۰ |
| ۰ | (۰/۵۰۱۱ ,۰/۰۷۵۵) | ۰ | (۰/۷۷۶۳ ,۰/۱۶۱۷) | ۵۰۰×۱۲۵ |

### ۴-۲-۱-۵- معتبرسازی:

به منظور اطمینان از صحت برنامه نوشته شده، نتایج بدست آمده از حل حاضر با نتایج منتشر شده در این زمینه، مقایسه شده است. جدول ( ۴-۲ ) نشان‌دهنده تغییر مکان مرکز گردابه اولیه و ثانویه در اعداد رینولدز مختلف برای حل حاضر و نتایج منتشر شده توسط ادریس[1]و همکارانش [۲]می‌باشد. ادریس و همکارانش مسئله حاضر را به روش تفاضل محدود در شبکه غیر یکنواخت شبیه‌سازی کرده‌اند. نتایج حل حاضر(LBM) از تطابق خوبی با نتایج آنها برخوردار است. بنابراین می‌توان گفت که کد نوشته شده براساس روش بولتزمن شبکه‌ای به خوبی می‌تواند این نوع مسئله را شبیه‌سازی کند.

[1] Idris

جدول ( ۴-۲ ) مقایسه مراکز گردابه اولیه و ثانویه در محفظه به شکل نیم‌بیضی حاصل از حل حاضر و نتایج منتشر شده توسط ادریس و همکاران[۲]

| Re | مرکز گردابه اولیه | | مرکز گردابه ثانویه | |
|---|---|---|---|---|
| | حل حاضر<br>(x*,y*) | ادریس و همکاران[۲]<br>(x*,y*) | حل حاضر<br>(x*,y*) | ادریس و همکاران[۲]<br>(x*,y*) |
| ۱۰۰ | (۰/۵۵۴۸ ,۰/۱۶۵۸) | (۰/۵۴۹۰ ,۰/۱۶۵۸) | - | - |
| ۵۰۰ | (۰/۷۳۱۱ ,۰/۱۶۴۴) | (۰/۷۳۵۷ ,۰/۱۶۵۸) | - | - |
| ۱۰۰۰ | (۰/۷۴۴۰ ,۰/۱۵۹۵) | (۰/۷۴۶۴ ,۰/۱۶۰۰) | - | - |
| ۱۵۰۰ | (۰/۷۵۹۱ ,۰/۱۵۸۲) | (۰/۷۶۷۴ ,۰/۱۶۰۰) | (۰/۵۰۹۶ ,۰/۰۵۷۷) | (۰/۵۱۲۳ ,۰/۰۵۶۷) |
| ۲۰۰۰ | (۰/۷۷۶۳ ,۰/۱۶۱۷) | (۰/۷۸۷۹ ,۰/۱۶۵۸) | (۰/۵۰۱۱ ,۰/۰۷۵۵) | (۰/۵۱۲۳ ,۰/۰۷۷۷) |

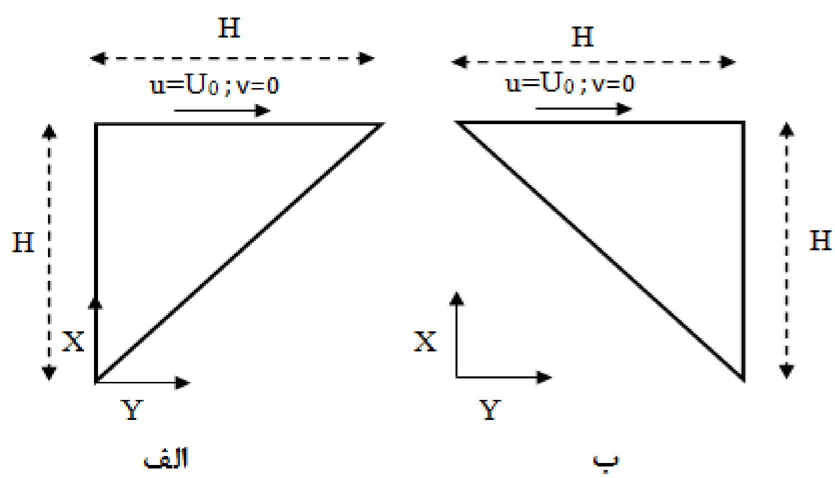
### ۴-۲-۱-۶- بحث روی نتایج بدست آمده:

پس از اطمینان از دقت نتایج به دست آمده اکنون می‌توان به تفسیر نتایج پرداخت. از شکل ( ۴-۳ ) می‌توان ملاحظه نمود که در اعداد رینولدز کمتر از ۱۵۰۰ تنها گردابه اولیه در محفظه وجود دارد و اثری از گردابه ثانویه نیست و با افزایش عدد رینولدز مرکز این گردابه، از مرکز محفظه به سمت راست آن حرکت می‌کند. همانطور که از جدول ( ۴-۲ ) می‌توان ملاحظه نمود، تغییر مکان مرکز گردابه اولیه با افزایش عدد رینولدز در جهت X بیشتر از جهت Y می‌باشد. در اعداد رینولدز بالاتر از ۱۵۰۰ گردابه ثانویه در محفظه ظاهر خواهد شد و با افزایش عدد رینولدز، این گردابه گسترش خواهد یافت. همانطور که ملاحظه می‌شود، در هر دو عدد رینولدز گردابه ثانویه به وسط مرز منحنی متصل شده است.

## ۴-۲-۲- محفظه به شکل مثلث قائم‌الزاویه

### ۴-۲-۲-۱- هندسه جریان:

برای شبیه‌سازی جریان پایا و تراکم‌ناپذیر در محفظه‌ای به شکل مثلث قائم‌الزاویه با درپوش متحرک، این محفظه در دو موقعیت قرارگیری متفاوت در نظر گرفته شده است. شکل ( ۴-۴ ) نشان دهنده این محفظه‌هاست. همانطور که از شکل قابل ملاحظه است، طول ارتفاع و قاعده مثلث برابر H است و مرز بالا با سرعت ثابت $U_0$ در جهت نشان داده شده، در حرکت است. در واقع تغییر موقعیت محفظه به معنای تغییر جهت حرکت درپوش است. شبکه در نظر گرفته شده برای این هندسه ۴۰۰×۴۰۰می‌باشد. در حالت (الف) محفظه به گونه قرار گرفته که زاویه قائمه آن در بالا و سمت چپ قرار دارد در حالیکه در حالت (ب) این زاویه در بالا و گوشه سمت راست واقع شده است.

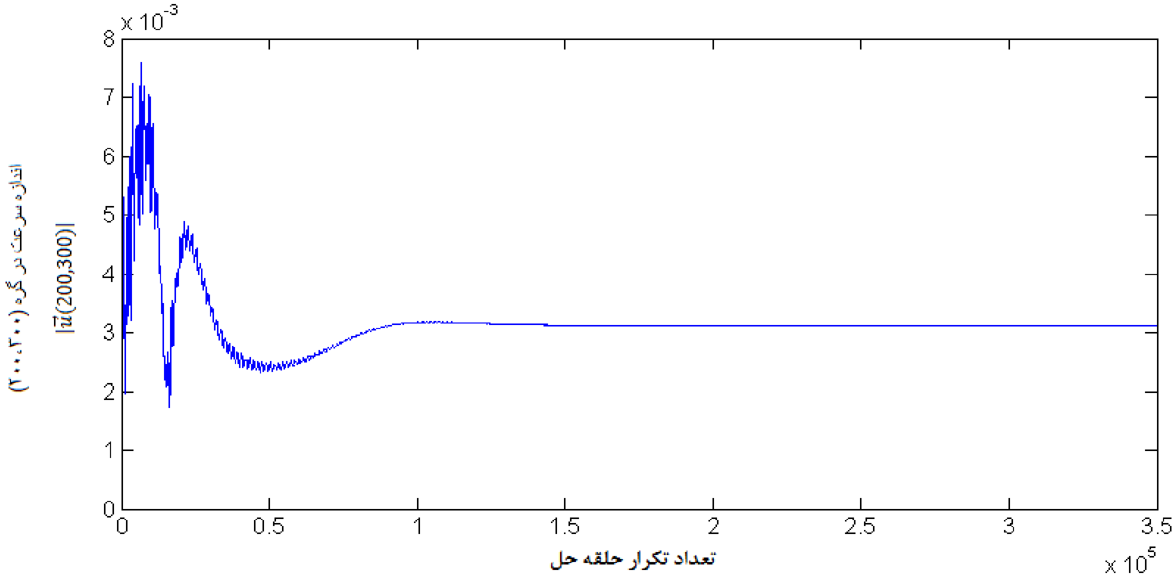



شکل ( ۴-۴ ) هندسه محفظه‌های مثلثی با درپوش متحرک

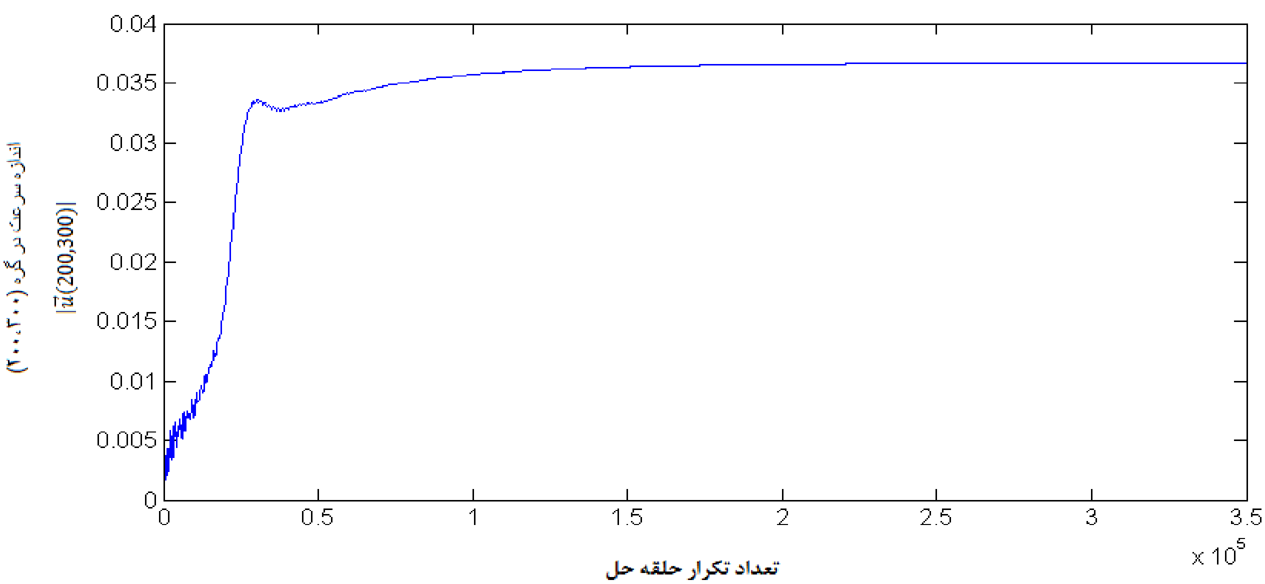
### ۴-۲-۲-۲- بررسی همگرایی:

برای رسیدن به جواب نهایی، حلقه حل به اندازه ۳۵۰۰۰۰ بار تکرار شده است. در واقع با این تعداد تکرار سرعت در هر نقطه درون محفظه به مقدار ثابتی خواهد رسید. برای نمونه، تغییرات اندازه سرعت در گره

(۲۰۰،۳۰۰) در برابر تعداد تکرار حلقه حل برای محفظه‌ای در موقعیت الف و ب به ترتیب در شکل (۴-۵) و (۴-۶)، برای عدد رینولدز ۲۰۰۰ رسم شده است.



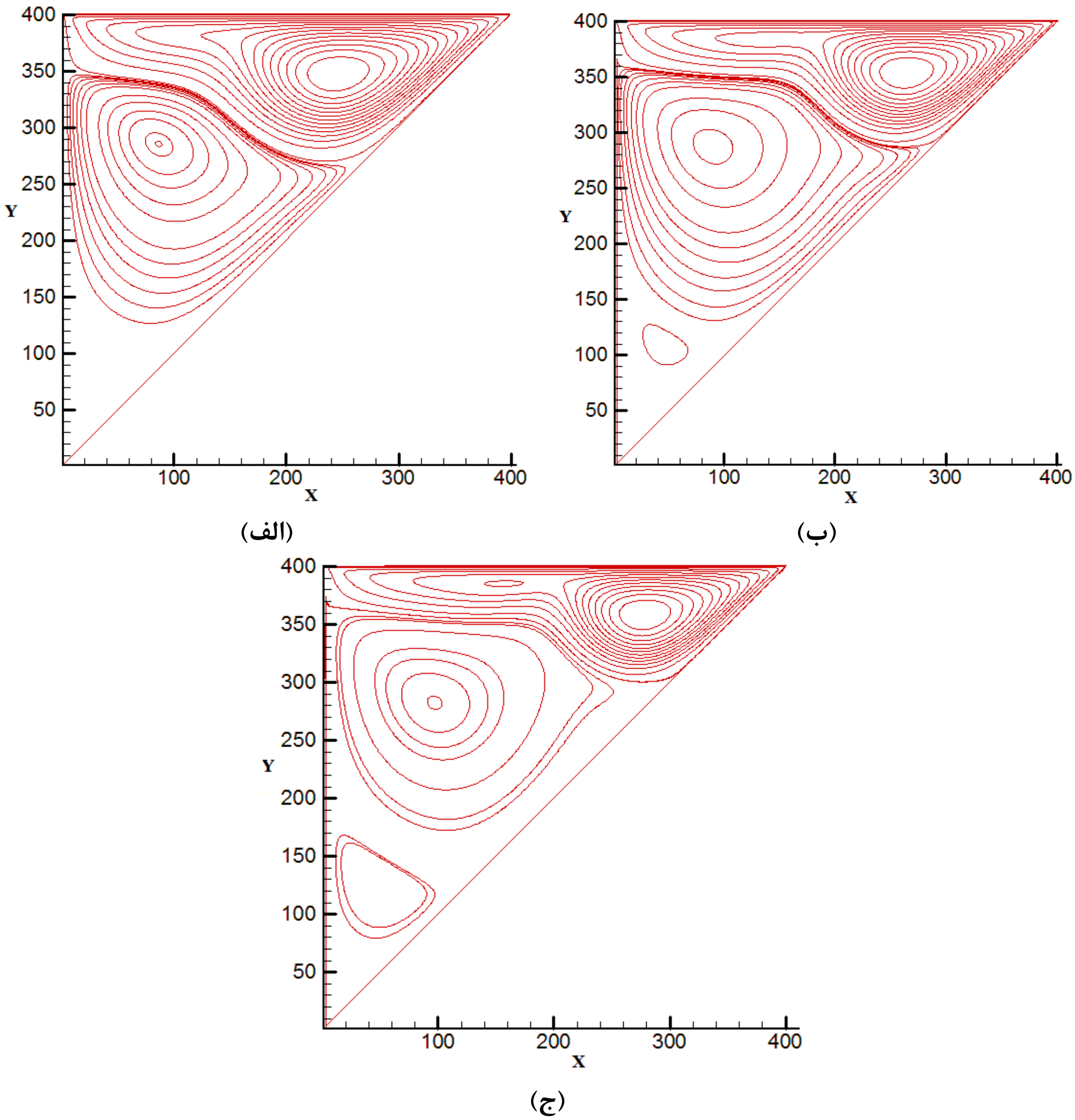

شکل ( ۴-۵ ) تغییرات اندازه سرعت در گره(۲۰۰،۳۰۰) درون محفظه مثلثی با درپوش متحرک در موقعیت( الف) در برابر تکرار حلقه حل در عدد رینولدز ۲۰۰۰




شکل ( ۴-۶ ) تغییرات اندازه سرعت در گره(۲۰۰،۳۰۰) درون محفظه مثلثی با درپوش متحرک در موقعیت( ب) در برابر تکرار حلقه حل در عدد رینولدز ۲۰۰۰

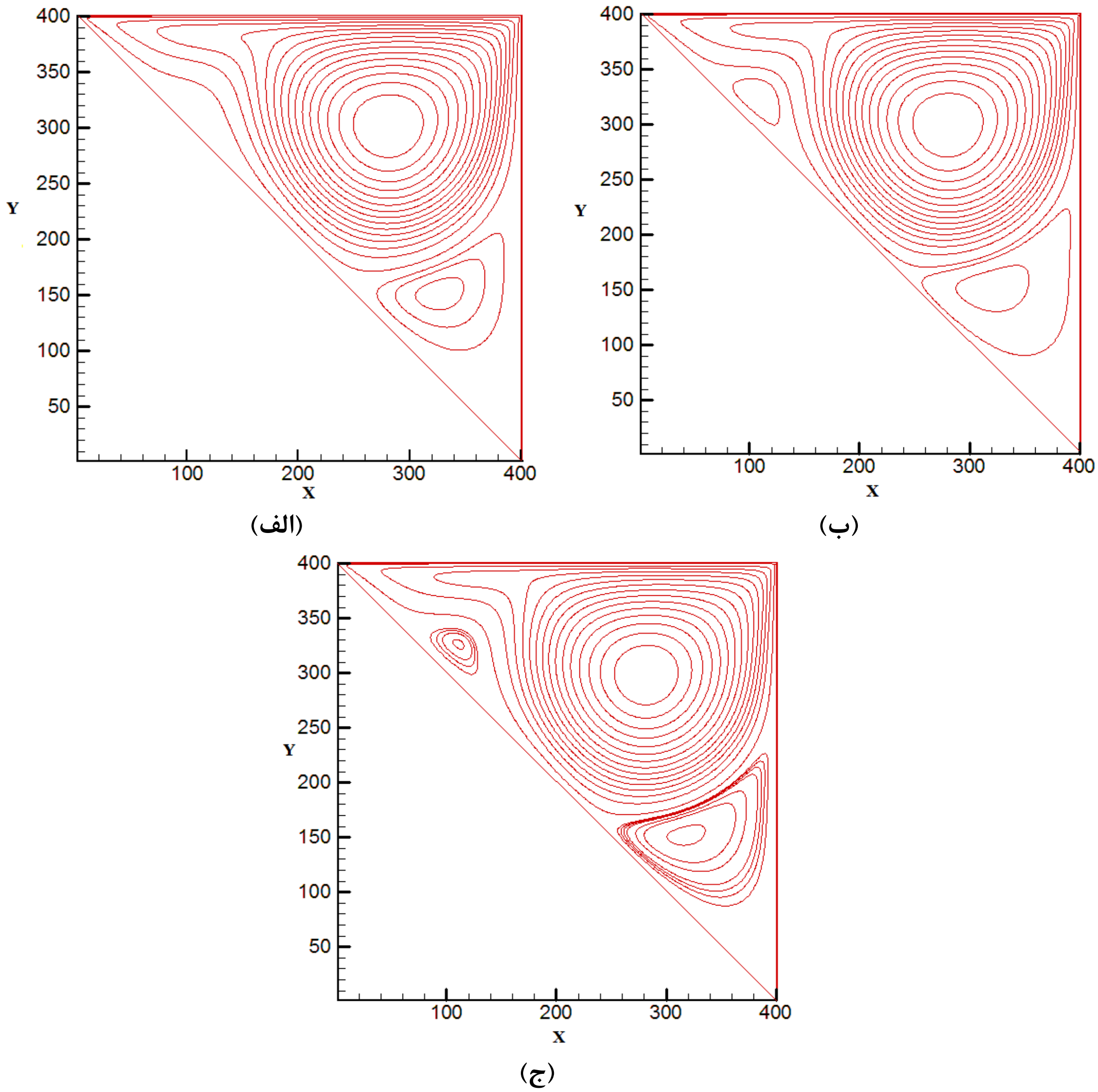
### ۴-۲-۲-۳- نتایج:

خطوط جریان درون محفظه برای اعداد رینولدز ۱۰۰۰،۱۵۰۰و ۲۰۰۰ برای موقعیت قرارگیری (الف) در شکل ( ۴-۷ ) و برای موقعیت قرار گیری (ب) در شکل (۴-۸) نشان داده شده است.




شکل ( ۴-۷ ) خطوط جریان درون محفظه‌ای با درپوش متحرک به شکل مثلث قائم‌الزاویه با زاویه قائمه در بالا سمت چپ:

الف) Re=۱۰۰۰ ب) Re=۱۵۰۰ ج) Re=۲۰۰۰




شکل ( ۴-۸ ) خطوط جریان درون محفظه‌ای با درپوش متحرک به شکل مثلث قائم‌الزاویه با زاویه قائمه در بالا سمت راست: الف) Re=۱۰۰۰ ب) Re=۱۵۰۰ ج) Re=۲۰۰۰

## ۴-۲-۲-۴- استقلال از شبکه:

جهت نشان دادن عدم وابستگی نتایج به تعداد نقاط شبکه، مرکز گردابه اولیه برای بالاترین عدد رینولدز یعنی ۲۰۰۰ در دو شبکه۳۰۰ ×۳۰۰ و ۵۰۰ ×۵۰۰ با شبکه‌بندی در نظر گرفته شده برای ارائه نتایج یعنی ۴۰۰×۴۰۰مقایسه شده است. جدول ( ۴-۳ ) نشان دهنده این مقایسه برای حالت (الف) یعنی مثلث قائم‌الزاویه با زاویه قائمه قرار گرفته در بالا سمت چپ و جدول (۴-۴ ) نشان دهنده این مقایسه برای حالت (ب) یعنی مثلث قائم‌الزاویه با زاویه قائمه قرار گرفته در بالا سمت راست می‌باشند. نتایج عدم وابستگی نتایج به ظرافت شبکه را در هردو حالت اثبات می‌کند.

جدول ( ۴-۳ ) مقایسه مراکز گردابه اولیه در محفظه به شکل مثلث قائم‌الزاویه با زاویه قائمه قرار گرفته در بالا سمت چپ برای عدد رینولدز ۲۰۰۰ مربوط به عدم وابستگی حل به شبکه

| درصد انحراف از نتیجه شبکه انتخاب شده | مرکز گردابه اولیه (x*,y*) | تعداد نقاط شبکه |
|---|---|---|
| (۰ ,۰) | (۰/۶۹۲۴۷ ,۰/۸۹۲۲) | ۳۰۰×۳۰۰ |
| - | (۰/۶۹۲۴۷ ,۰/۸۹۲۲) | ۴۰۰×۴۰۰ |
| (۰ ,۰/۲۳۵) | (۰/۶۹۲۴۷ ,۰/۸۹۴۳) | ۵۰۰×۵۰۰ |

جدول ( ۴-۴ ) مقایسه مراکز گردابه اولیه در محفظه به شکل مثلث قائم‌الزاویه با زاویه قائمه قرار گرفته در بالا سمت راست برای عدد رینولدز ۲۰۰۰ مربوط به عدم وابستگی حل به شبکه

| درصد انحراف از نتیجه شبکه انتخاب شده | مرکز گردابه اولیه (x*,y*) | تعداد نقاط شبکه |
|---|---|---|
| (۰/۷۵ ,۰) | (۰/۶۹۷۹ ,۰/۷۴۳۵) | ۳۰۰×۳۰۰ |
| - | (۰/۷۰۳۲ ,۰/۷۴۳۵) | ۴۰۰×۴۰۰ |
| (۱/۰۶ ,۰) | (۰/۶۹۵۷ ,۰/۷۴۳۵) | ۵۰۰×۵۰۰ |

### ۴-۲-۲-۵- معتبرسازی:

به منظور اطمینان از نتایج ارائه شده، مکان مرکز گردابه اولیه برای اعداد رینولدز مختلف، با نتایج منتشر شده توسط ارتورک[1] و گوکل[2] [۳] و منیر[3] و همکارانش[۲۳] در جدولهای (۴-۵ ) و (۴-۶ ) به ترتیب برای موقعیت‌های الف (مثلث قائم‌الزاویه با زاویه قائمه قرار گرفته در بالا سمت چپ) و موقعیت ب (شکل مثلث قائم‌الزاویه با زاویه قائمه قرار گرفته در بالا سمت راست) مقایسه شده است. ارتورک و گوکل به منظور حل این مسئله، معادلات ناویراستوکس در قالب توابع جریان و بردار چرخش را به کمک روش آرامش متوالی[4] حل کردند و منیر و همکارانش از روش بولتزمن شبکه‌ای برای تحلیل این مسئله استفاده کردند اما در کار آن‌ها اشاره‌ای به چگونگی مواجه با مرز مایل در روش بولتزمن شبکه‌ای نشد. مشاهده می‌شود که نتایج حاضر از تطابق خوبی با نتایج آنها برخوردار است.

جدول ( ۴-۵ ) مقایسه مراکز گردابه اولیه در محفظه مثلثی حاصل از حل حاضر و نتایج منتشر شده در این زمینه مربوط به موقعیت (الف)

| منیر و همکاران[۲۳] (x*,y*) | ارتورک و گوکل [۳] (x*,y*) | حل حاضر (x*,y*) | Re |
|---|---|---|---|
| (۰/۶۰۵۰ ,۰/۸۶۵۰) | (۰/۶۰۹۴ ,۰/۸۶۹۱) | (۰/۶۰۸۶ ,۰/۸۶۷۲) | ۱۰۰۰ |
| (۰/۶۵۶۷ ,۰/۸۸۳۳) | (۰/۶۵۸۲ ,۰/۸۸۴۸) | (۰/۶۵۵۹۱ ,۰/۸۸۰۰) | ۱۵۰۰ |
| (۰/۶۹۰۰ ,۰/۸۹۳۳) | (۰/۶۹۵۳ ,۰/۸۹۶۵) | (۰/۶۹۲۴۷ ,۰/۸۹۲۲) | ۲۰۰۰ |

[1] Erturk
[2] Gokol
[3] Munir
[4] Successive_over_relaxation

جدول ( ۴-۶ ) مقایسه مراکز گردابه اولیه در محفظه مثلثی حاصل از حل حاضر و نتایج منتشر شده در این زمینه مربوط به موقعیت (ب)

| منیر و همکاران[۲۳] (x*,y*) | ارتورک و گوکل [۳] (x*,y*) | حل حاضر (x*,y*) | Re |
|---|---|---|---|
| (۰/۷۰۰۰ ,۰/۷۵۵۰) | ( ۰/۶۹۹۲ ,۰/۷۵۵۹ ) | ( ۰/۶۹۸۹۲۵ ,۰/۷۵۲۱۵ ) | ۱۰۰۰ |
| (۰/۷۰۰۰ ,۰/۷۴۶۷) | گزارش نشده است. | (۰/۷۰۱۱ ,۰/۷۴۸۴) | ۱۵۰۰ |
| (۰/۷۰۰۰ ,۰/۷۴۶۷) | گزارش نشده است. | (۰/۷۰۳۲ ,۰/۷۴۳۵) | ۲۰۰۰ |

### ۴-۲-۲-۶- بحث روی نتایج بدست آمده:

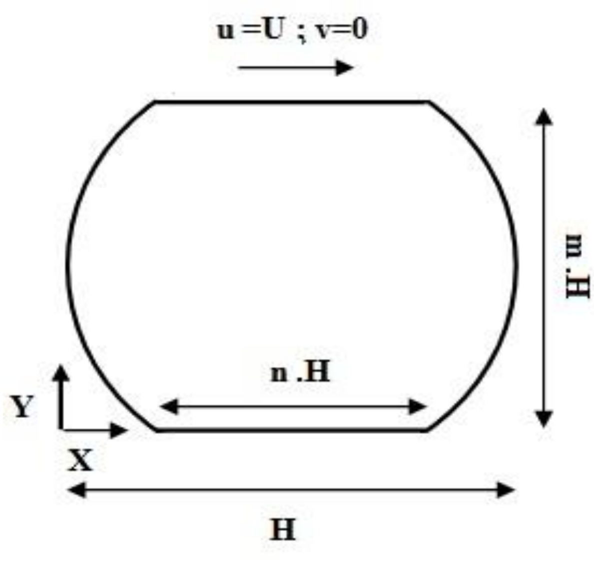
از شکل (۴-۷) و جدول (۴-۵) می‌توان ملاحظه نمود که در موقعیت (الف)، با افزایش عدد رینولدز از ۱۰۰۰به ۱۵۰۰، تعدادگردابه‌ها در داخل محفظه از ۲ به ۳ می‌رسد و مرکز گردابه‌ی اصلی به سمت راست جابه‌جا می‌شود. از شکل (۴-۸) و جدول (۴-۶) می‌توان ملاحظه نمود که در موقعیت (ب) نیز همانند موقعیت (الف) با افزایش عدد رینولدز، تعداد گردابه‌ها افزایش یافته و مرکز گردابه‌ی اولیه به سمت راست حرکت می‌کند که به دلیل وجود نیروهای اینرسی (ناشی از حرکت صفحه) در مقابل لزجی، انتظار همین جهت حرکت منطقی است. می‌توان مشاهده کرد که در موقعیت (الف)، با افزایش عدد رینولدز اندازه‌ی گردابه بالائی کوچکتر شده و گردابه‌ی سوم در پایین محفظه تشکیل می‌گردد، درحالی که در موقعیت (ب) گردابه‌ی سوم در کنار دیوار مایل و تقریباً بالای محفظه شکل گرفته است. البته از نظر فیزیکی، تشکیل گردابه در مجاورت دیواره سمت راست و دور از گوشه نوک تیز محفظه (وقتی زاویه قائمه در سمت راست واقع است)،

منتفی است زیرا در مجاورت این دیواره، عامل موثری برای کاهش مومنتوم سیال در حین حرکت وجود ندارد. در مقابل، در سمت چپ، در حین حرکت سیال روی دیواره مایل، با گرادیان فشار مخالف روبرو هستیم. علت تشکیل گردابه سوم روی دیواره مایل می‌تواند به همین دلیل باشد. در حالتی که زاویه قائمه مثلث در سمت چپ واقع است، یک گردابه نامتقارن در بالای محفظه مشاهده می‌شود. به وضوح می‌توان دید که ساختار گردابه‌ها در دو موقعیت متفاوت قرارگیری محفظه کاملاً با هم متفاوت است به این معنا که اگر در محفظه‌ای جهت حرکت درپوش تغییر کند شاهد الگوی جریان متفاوتی خواهیم بود.

## ۴-۲-۳- محفظه با دیواره‌های دایروی

### ۴-۲-۳-۱- هندسه جریان:

شکل( ۴-۹ ) نشان دهنده هندسه‌ی محفظه‌ی با دیواره‌ی دایروی است. شکل کلی محفظه نشان دهنده‌ی دایره‌ایست که کمانهای از آن جدا شده است. $n$، بیانگر نسبت قاعده‌ی کمان‌های جدا شده به قطردایره و $m$ نسبت ارتفاع محفظه به قطر دایره است. . برای تحلیل این جریان شبکه مستطیلی با شبکه بندی ۴۰۰×۴۰۰

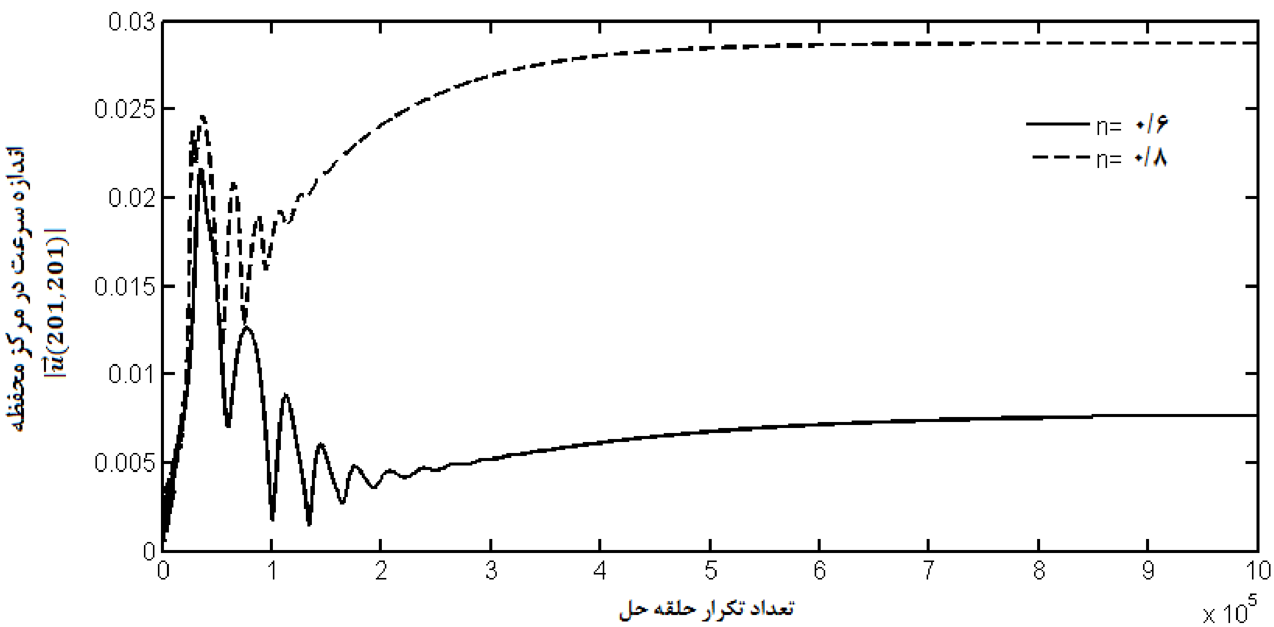



شکل ( ۴-۹ ) هندسه محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی با درپوش متحرک

در نظر گرفته شده که مرکز محفظه در مرکز این شبکه‌بندی واقع می‌شود، بنابراین برای این محفظه تعداد نقاط شبکه در راستای افق برابر ۴۰۰و در راستای عمود، براساس کمان جدا شده تغییر می‌کند.

### ۴-۲-۳-۲- بررسی همگرایی:

به منظور رسیدن به همگرایی برای هر عدد رینولدز تعداد تکرار حلقه حل به اندازه‌ی تکرار شده است که سرعت در مرکز محفظه بدون تغییر بماند. به عنوان نمونه برای عدد رینولدز ۴۰۰۰، حلقه حل به اندازه یک میلیون بار تکرار شده است. شکل (۴-۱۰) نشان‌دهنده تغییرات اندازه سرعت در مرکز محفظه در برابر تعداد تکرار حلقه حل در عدد رینولدز ۴۰۰۰و $n$ برابر ۰/۶ و ۰/۸ است.

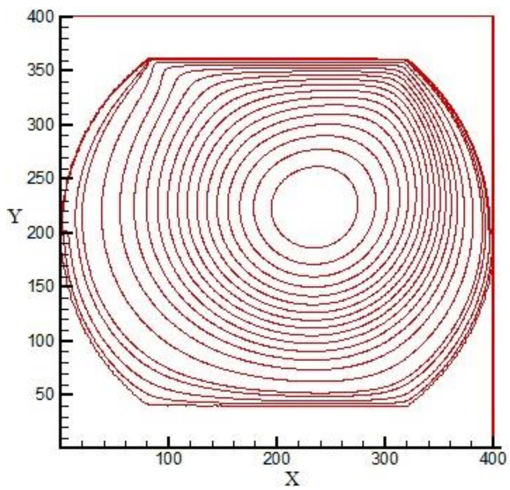



شکل ( ۴-۱۰ ) تغییرات اندازه سرعت در گره مرکز محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی با درپوش متحرک در برابر حلقه تکرار برای عدد رینولدز ۴۰۰۰

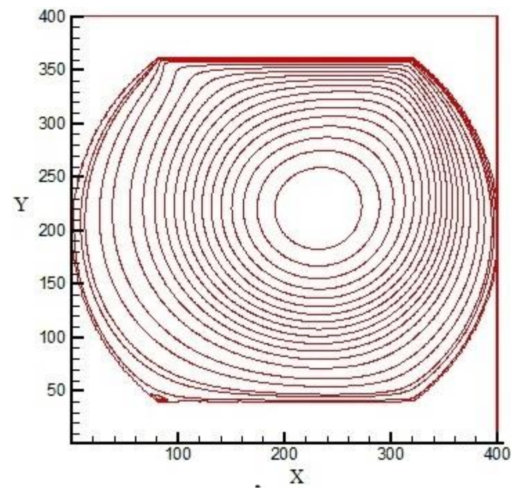
### ۴-۲-۳-۳- نتایج:

بررسی جریان در محفظه‌ی شکل( ۴-۹ )، از جمله مسائلی است که تاکنون کمتر به آن پرداخته شده است. ما در این بخش به بررسی این مسئله برای دو حالت مختلف از این هندسه، با استفاده

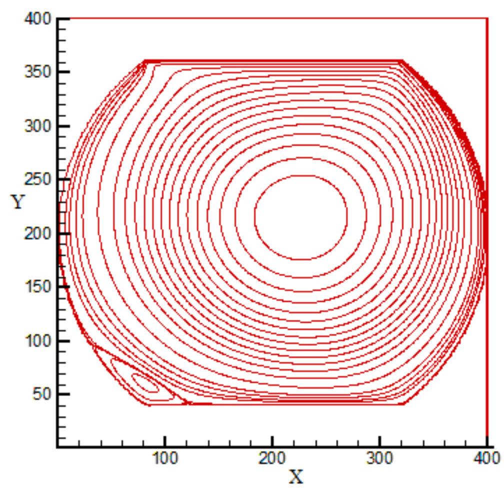
از روش بولتزمن شبکه‌ای می‌پردازیم. شکل ( ۴-۱۱) نشان دهنده خطوط جریان برای حالتی است که n=۰/۶ باشد، در این حالت ضریب ارتفاع محفظه یعنی m برابر ۰/۸ است. همچنین سرعت در خطوط افقی و عمودی گذرنده از مرکز این محفظه در شکل ( ۴-۱۲ ) ارائه شده است. خطوط جریان برای حالت n=۰/۸ و m برابر ۰/۶ در شکل ( ۴-۱۳ ) نشان داده شده است و شکل ( ۴-۱۴ ) نیز نشان‌دهنده سرعت در خطوط افقی و عمودی گذرنده از این محفظه در این حالت است.



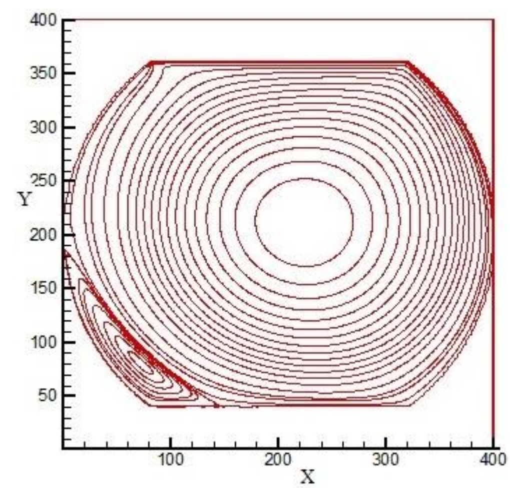

(الف)




(ب)

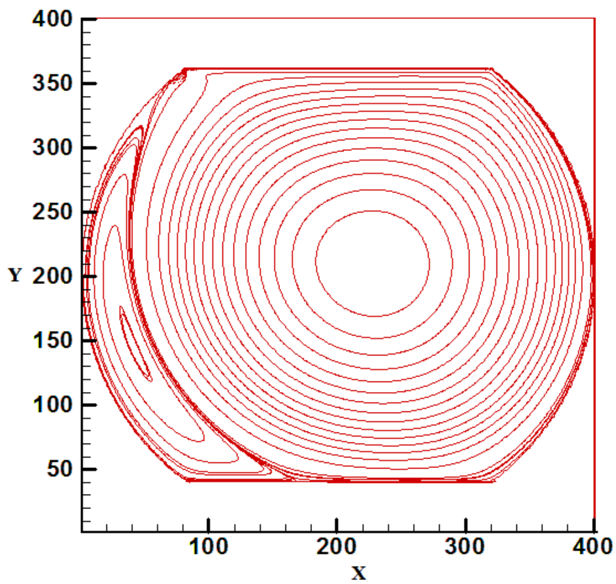



(ج)



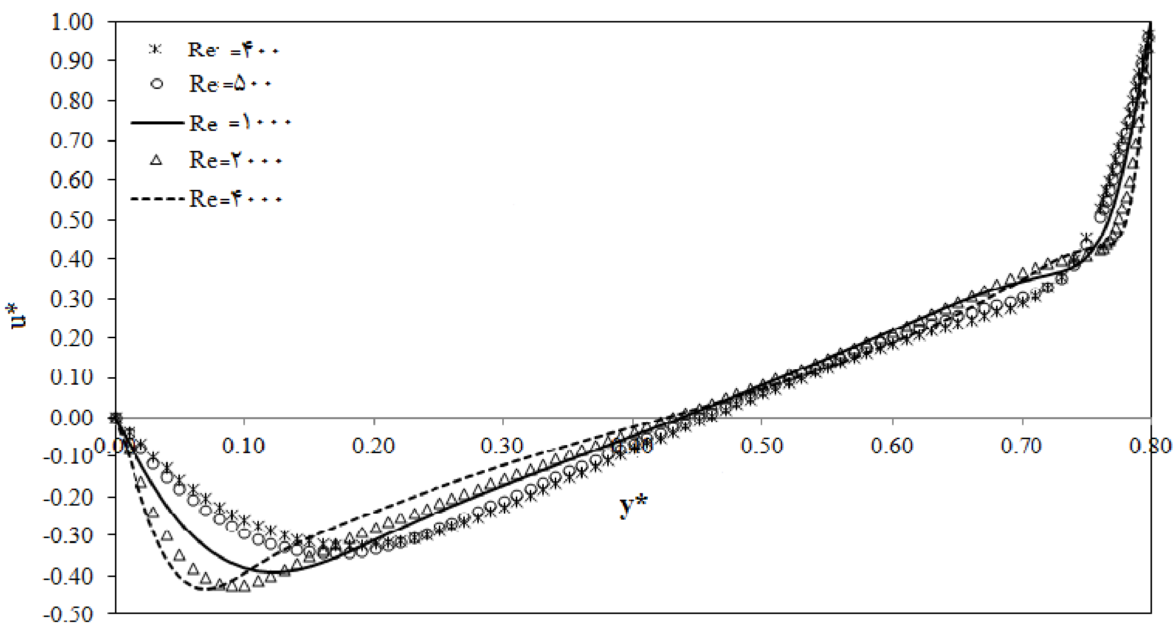

(د)

شکل ( ۴-۱۱ ) خطوط جریان درون با دیوار دایروی و در پوش متحرک در حالت n=۰/۶: الف) Re=۴۰۰ ب) Re=۵۰۰ ج) Re=۱۰۰۰ د) Re=۲۰۰۰



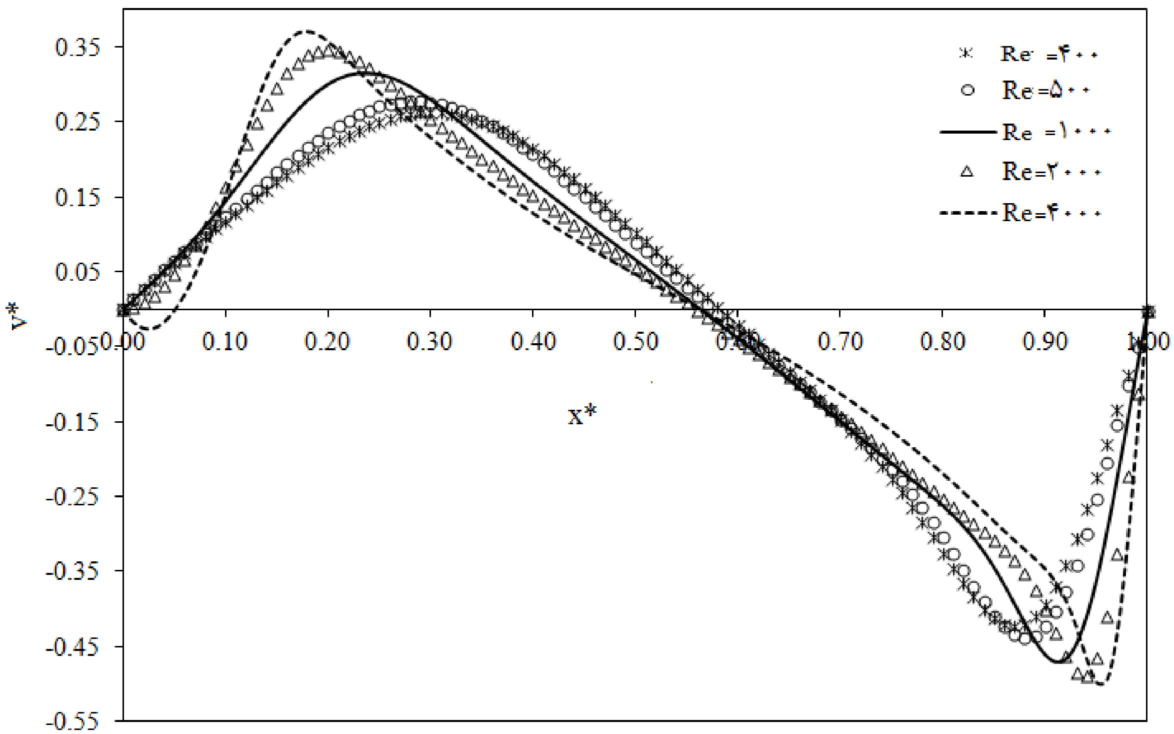

(ه)

ادامه شکل ( ۴-۱۱ ) خطوط جریان درون محفظه با دیوار دایروی و در پوش متحرک در حالت n=۰/۶ :ه) Re=۴۰۰۰



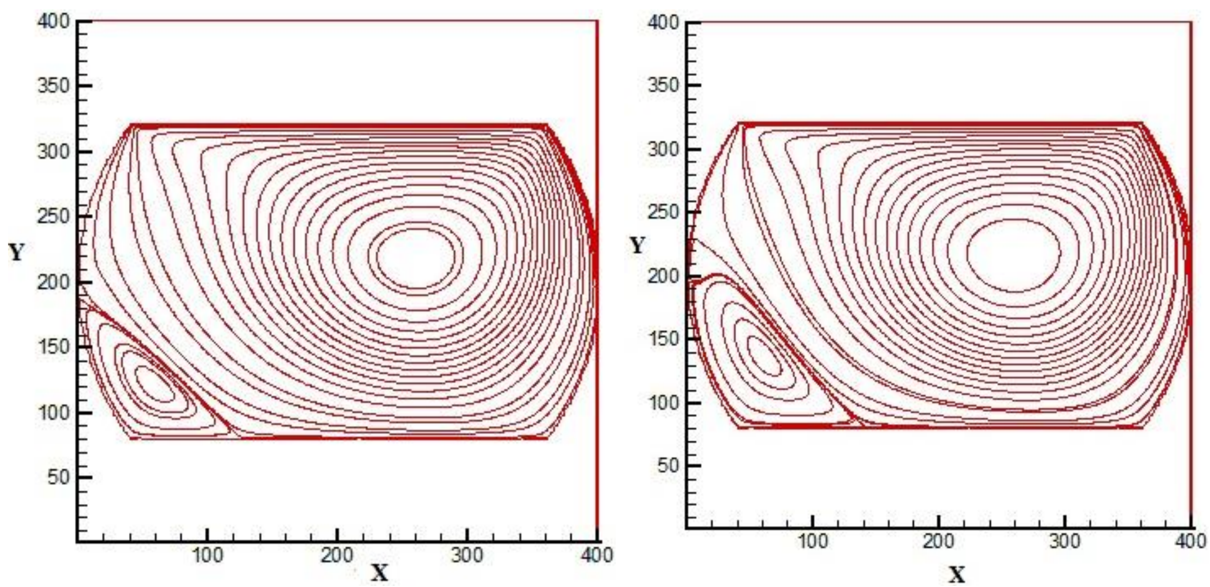

(الف)

شکل ( ۴-۱۲ ) (الف) تغییرات اندازه‌ی سرعت(u*) در طول خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه با دیواره دایروی و درپوش متحرک در n=۰/۶




(ب)

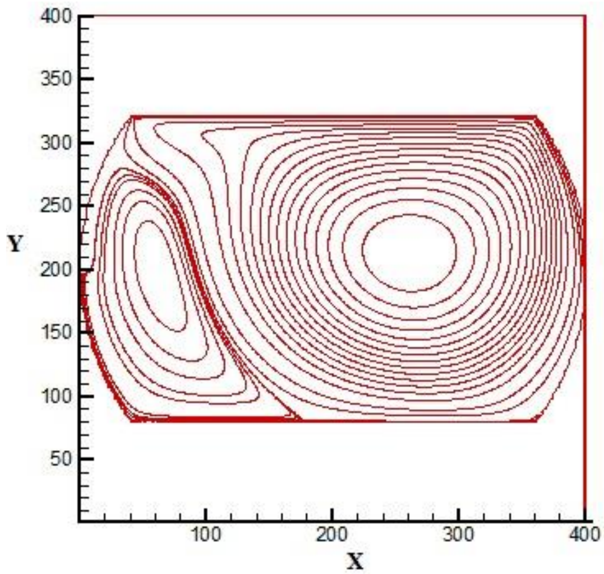
شکل ( ۴-۱۲) (ب) تغییرات اندازه سرعت($v^*$) در طول خط افقی گذرنده از مرکز محفظه با دیواره دایروی و درپوش متحرک در n=۰/۶



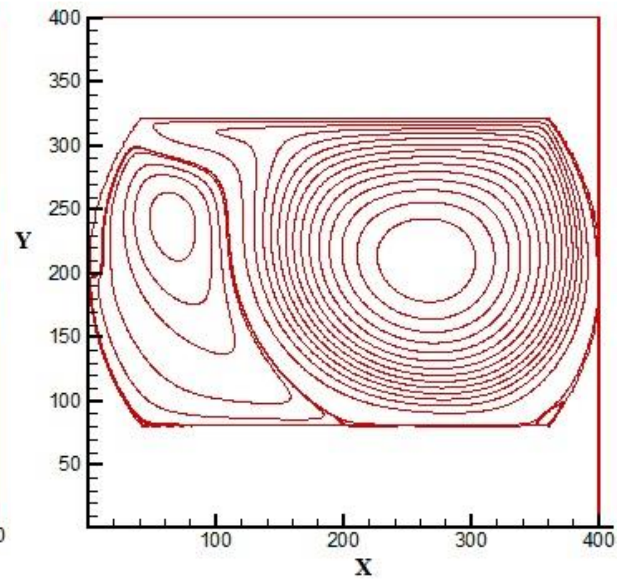

(الف) (ب)

شکل ( ۴-۱۳ ) خطوط جریان درون با دیوار دایروی و درپوش متحرک در حالت n=۰/۸:

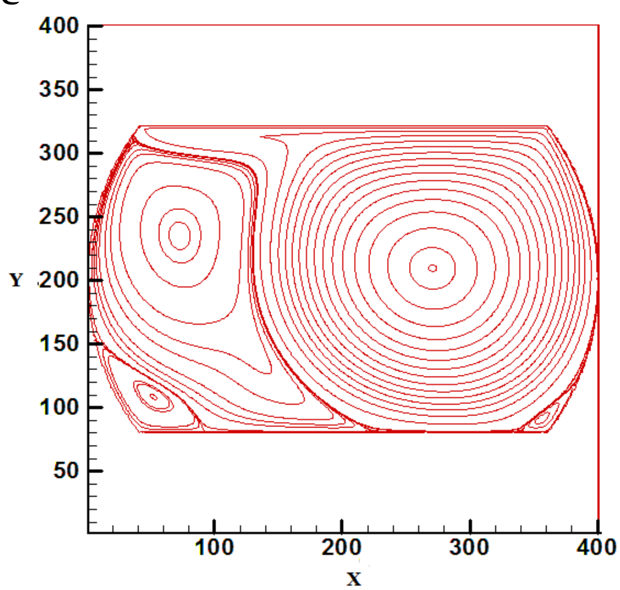
الف) Re=۴۰۰ ب) Re=۵۰۰




(ج)



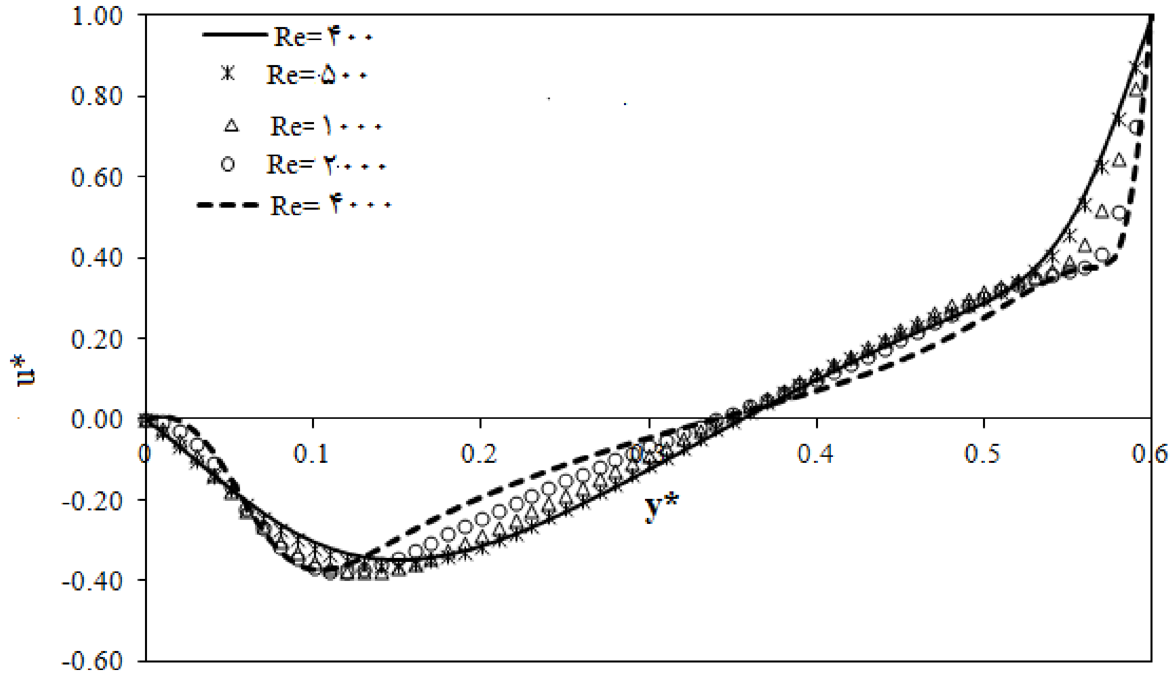

(د)



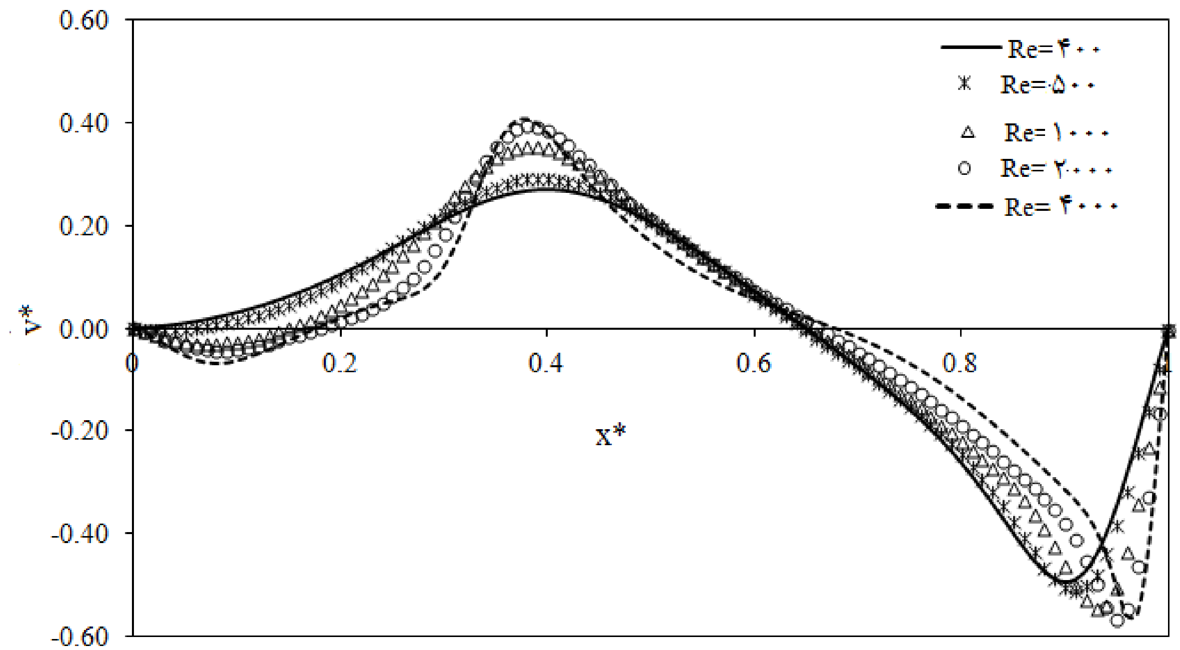

(ه)

ادامه شکل ( ۴-۱۳ ) خطوط جریان درون با دیوار دایروی در حالت n=۰/۸:

ج) Re=۱۰۰۰ د) Re= ۲۰۰۰ ه) Re=۴۰۰۰




(الف)

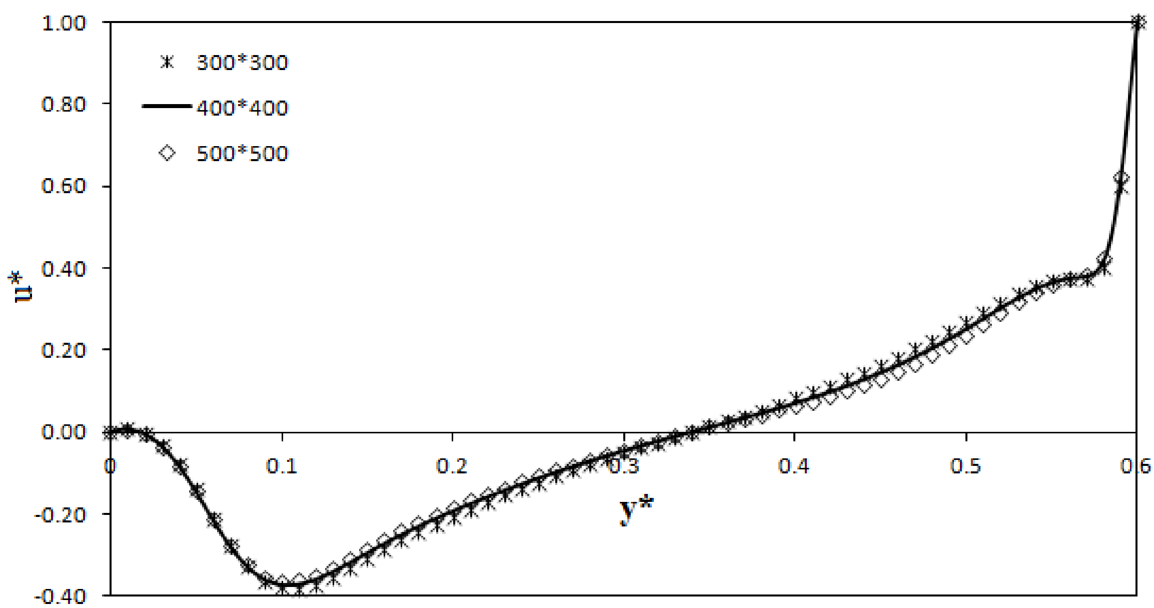



(ب)

شکل ( ۴-۱۴ ) (الف) تغییرات اندازه‌ی سرعت(u*) در طول خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه با دیواره دایروی و درپوش متحرک در n=۰/۸ (ب) تغییرات اندازه سرعت(v*) در طول خط افقی گذرنده از مرکز محفظه با دیواره دایروی و درپوش متحرک در n=۰/۸

### ۴-۲-۳-۴- استقلال از شبکه:

جهت نشان دادن عدم وابستگی نتایج به تعداد نقاط شبکه، تغییرات اندازه‌ی سرعت(u*) در طول خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه در حالت n=۰/۸ برای بزرگترین عدد رینولدز یعنی ۴۰۰۰ در دو شبکه ۳۰۰ × ۳۰۰ و ۵۰۰ × ۵۰۰ با شبکه‌بندی در نظر گرفته شده برای ارائه نتایج یعنی ۴۰۰×۴۰۰ در شکل ( ۴-۱۵ )مقایسه شده است. این شکل عدم وابستگی نتایج به ظرافت شبکه را نشان می‌دهد.




شکل (۴-۱۵) تغییرات اندازه‌ی سرعت(u*) در طول خط عمودی گذرنده از مرکز محفظه با دیواره دایروی و درپوش متحرک در حالت n=۰/۸ برای عدد رینولدز ۴۰۰۰ در شبکه‌بندی مختلف

### ۴-۲-۳-۵- بحث روی نتایج بدست آمده:

حالت اول: n=۰/۶

شکل ( ۴-۱۱ ) نشان دهنده‌ی خطوط جریان در محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی برای عدد n برابر ۰/۶است. شکل (الف )خطوط جریان را برای این محفظه، درعدد رینولدز ۴۰۰ نمایش می‌دهد. در

این عدد رینولدز تنها یک گردابه در محفظه مشاهده می‌شود. با افزایش عدد رینولدز به ۵۰۰، گردابه‌ی دیگری در پایین محفظه، گوشه چپ شکل می‌گیرد(شکل ب). شکل‌های (ج،د،ه) نشان می‌دهند که با افزایش عدد رینولدز، این گردابه بزرگ می‌شود و مرکز آن به سمت دیوار بالا و سمت چپ محفظه حرکت می‌کند. در واقع با افزایش عدد رینولدز در محفظه بسته، انتقال مومنتوم از مرز بالایی به سیال افزایش می‌یابد. سیال طی مسیر منحنی با کاهش مومنتوم روبرو می‌شود. این عامل، به همراه گرادیان فشار معکوس سبب جدایش سیال شده و در ادامه، برگشت جریان و ایجاد گردابه‌ای در خلاف جهت گردابه اول می‌گردد. با افزایش بیشتر عدد رینولدز، گردابه ثانویه نیز رشد خواهد کرد. همچنین سرعت در خطوط افقی و عمودی گذرنده از مرکز این محفظه در شکل(۴-۱۲) ارائه شده است. می‌توان مشاهده نمود که با افزایش عدد رینولدز، اندازه سرعت بیشینه در محفظه افزایش یافته است.

حالت دوم: n=۰/۸

خطوط جریان در محفظه‌ای با دیواره‌های دایروی با عدد n برابر ۰/۸ در اعداد رینولدز ۴۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۴۰۰۰ در شکل (۴-۱۳ ) نمایش داده شده است. همانطور که از شکل مشاهده می‌شود، در این محفظه، در عدد رینولدز ۴۰۰ برخلاف حالت قبل دو گردابه شکل گرفته است. با افزایش عدد رینولدز به عدد ۵۰۰ گردابه گوشه سمت چپ محفظه بزرگتر و پهن‌تر می‌شود. وقتی عدد رینولدز به ۱۰۰۰می‌رسد، گردابه دیگری در پایین محفظه و درگوشه‌ی سمت راست شروع به شکل‌گیری می‌کند، همچنین در این حالت گردابه‌ی گوشه سمت چپ، بزرگتر از حالت قبل است. با افزایش عدد رینولدز به ۲۰۰۰ روند رشد گردابه‌های موجود در گوشه‌های محفظه ادامه می‌یابد و مراکز این گردابه‌ها به سمت بالای محفظه جابجا می‌شود. با در نظر گرفتن عدد رینولدز برابر۴۰۰۰، ضمن رشد گردابه‌های ثانویه، گردابه‌ی دیگری در گوشه‌ی سمت چپ نزدیک دیوار پایینی محفظه شکل می‌گیرد و تعداد گردابه‌ها به ۴ عدد می‌رسد. از

مقایسه‌ی شکل‌های (۴-۱۱) و ( ۴-۱۳) می‌توان مشاهده نمود که در اعداد رینولدز مشابه، با تغییر اندازه عدد n، و در نتیجه‌ی آن تغییر اندازه محفظه، الگوی جریان کاملاً متفاوتی در محفظه بوجود می‌آید. با توجه به بزرگتر بودن دیوار متحرک بالایی در حالت n برابر ۰/۸، پیچیده‌تر بودن الگوی جریان نسبت به حالتی که n برابر ۰/۶ است کاملاً طبیعی است. در این حالت، محفظه کوچکتر از حالت قبل است و مواجه با انتقال بالاتر مومنتوم به سیال عامل، در عدد رینولدز مشابه هستیم. گردابه ثانویه نیز در عدد رینولدز کمتری شکل می‌گیرد. با ادامه روند افزایش عدد رینولدز، در ابتدا جدایش دیگری در گوشه پایین سمت راست رخ می‌دهد و سپس اتفاقی که برای جریان در گردابه‌ی اولیه رخ داد، برای جریان در گردابه‌ی ثانویه تکرار شده و گردابه‌ی سوم شکل می‌گیرد. شکل(۴-۱۴)سرعت در خطوط افقی و عمودی گذرنده از مرکز این محفظه را نشان می‌دهد. از مقایسه این شکل و شکل (۴-۱۲)می‌توان افزایش سرعت در اثر کوچکتر شدن محفظه و بزرگتر شدن دیواره‌ی متحرک بالایی را ملاحظه نمود.

## ۴-۳- بررسی جریان و انتقال حرارت جابجایی آزاد درمحفظه‌های غیر مربعی

در این بخش به بررسی انتقال حرارت جابجایی طبیعی یا آزاد در محفظه‌های غیرمربعی به روش بولتزمن شبکه‌ای خواهیم پرداخت. جابجایی آزاد در نتیجه حرکت سیال به علت تغییر چگالی مشاهده می‌شود. در واقع حرکت سیال در جابجایی آزاد به خاطر اعمال نیروی شناوری روی سیال به دلیل کاهش چگالی آن در مجاورت سطح انتقال حرارت در فرایند گرمایش است. وقتی میدان نیروی خارجی مثل ثقل، تاثیری روی سیال نداشته باشد نیروی شناوری وجود نخواهد داشت به این معنا که شناوری از وجود همزمان شیب چگالی سیال و نیروی حجمی متناسب با چگالی ناشی می‌شود. شیب چگالی به راه‌های مختلف در سیال بوجود می‌آید اما معمولاً ناشی از شیب دماست چرا که چگالی سیالات به دما بستگی دارد و معمولاً

افزایش دما موجب کاهش چگالی می‌شود. در محفظه‌های بسته حضور همزمان سطح گرم و سرد در موقعیت مناسب موجب می‌شود که سیال مجاور سطح گرمتر به سمت بالا حرکت نموده و سیال مجاور سطح سردتر به سمت پایین حرکت کند و موجب یک حرکت دورانی در فضای بسته شده که موجب افزایش انتقال حرارت در آن می‌شود. در محفظه‌های مورد بررسی در این بخش کلیه مرزها ثابت در نظر گرفته شده و عدد بی‌بعد رایلی به صورت $Ra = \frac{g\beta\Delta T H^3}{\alpha\nu}$ تعریف می‌شود و دما به صورت $\theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C}$ بی بعد شده است که در آن $T_C$ دمای دیوار سرد و $T_H$ دمای دیوار گرم است. بنابراین دما بی‌بعد دیوار گرم، برابر یک و دمای بی‌بعد دیوار سرد، برابر صفر خواهد بود. همچنین در تمام شبیه‌سازی‌ها عدد پرانتل برابر ۰/۷۱ در نظر گرفته شده است. همچنین برای بررسی انتقال حرارت بر روی مرز، از عدد بی‌بعد ناسلت موضعی استفاده شده است. ناسلت موضعی در هر نقطه از سطح مورد نظر در روش بولتزمن شبکه-ای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

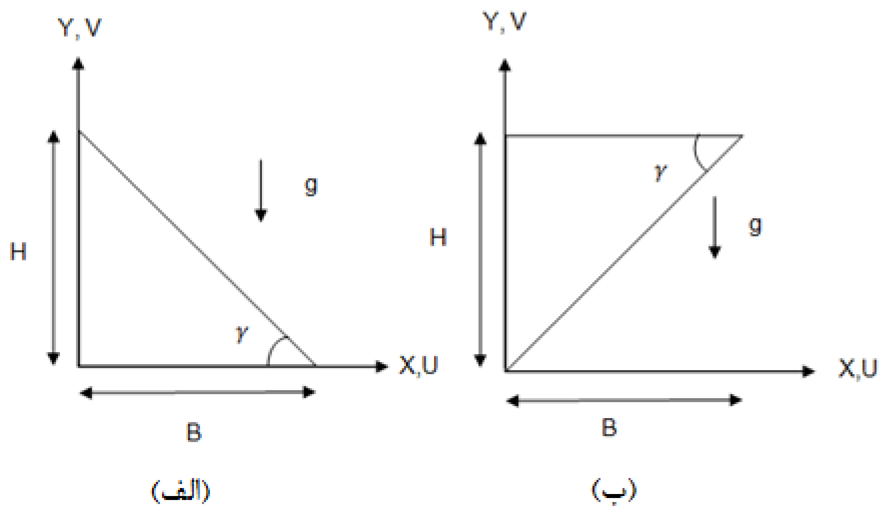
$$Nu_L = L\frac{\partial \theta}{\partial n} \qquad (۱-۴)$$

در اینجا L بیانگر تعداد نقاط شبکه روی سطح مورد نظر و n نشان دهنده جهت عمود برآن است.

## ۴-۳-۱- محفظه به شکل مثلث قائم‌الزاویه

### ۴-۳-۱-۱- هندسه جریان:

برای بررسی پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه به شکل مثلث قائم‌الزاویه، این محفظه در دو موقعیت قرارگیری متفاوت بررسی شده است. شکل ( ۴-۱۶ ) هندسه مورد بررسی را نشان می‌دهد.




شکل ( ۴-۱۶ ) هندسه محفظه مثلثی برای بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد

در این محفظه دیوار قائم در دمای ثابت در حل سرد شدن ($\theta_C = ۰$)و دیوار مایل در دمای ثابت در حال گرم شدن ($\theta_H = ۱$) است. این در حالیست که دیوار افقی کاملاً عایق شده است. ارتفاع محفظه برابر H و قاعده آن برابر Bاست. زاویه بین دیوار مایل و دیوار افقی با $\gamma$نشان داده شده است. در تمام شبیه‌سازی‌ها طول ارتفاع محفظه ثابت است و اندازه قاعده آن با تغییر زاویه $\gamma$تغییر می‌کند. شبکه در نظر گرفته شده برای این هندسه ۲۰۰×۲۰۰می‌باشد. در واقع ارتفاع محفظه ۲۰۰و قاعده آن بر حسب زاویه $\gamma$تغییر می‌کند. موقعیت (ب) محفظه از چرخاندن محفظه در موقعیت (الف)، به اندازه ۱۸۰ درجه حول دیوار افقی آن بوجود می‌آید.

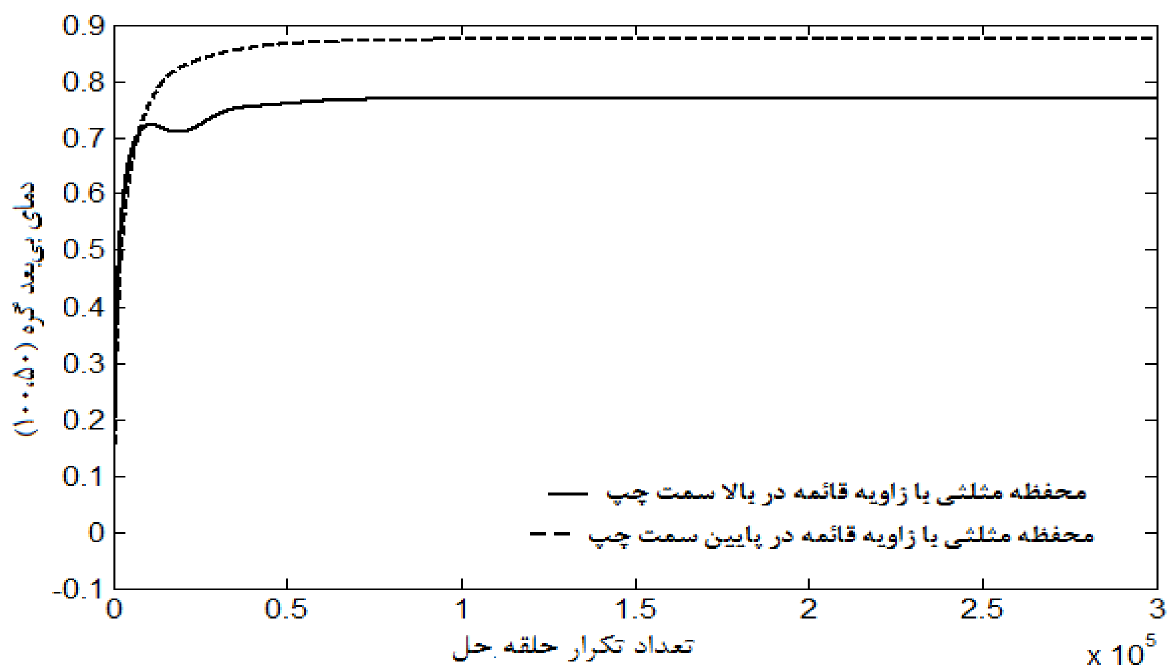
### ۴-۳-۱-۲- بررسی همگرایی :

برای رسیدن به نتایج، مراحل حل به اندازه ۳۰۰۰۰۰بار تکرار شده، برای اطمینان از همگرا شدن پس از این تعداد تکرار، تغییرات دمای بی‌بعد در برابر تعداد تکرار بررسی شده است. برای نمونه دمای بی‌بعد در گره (۵۰،۱۰۰) در هر دو موقعیت و برای زاویه $\gamma = ۶۰^\circ$ و عدد رایلی $۱۰^۵$در برابر تکرار حلقه حل در شکل

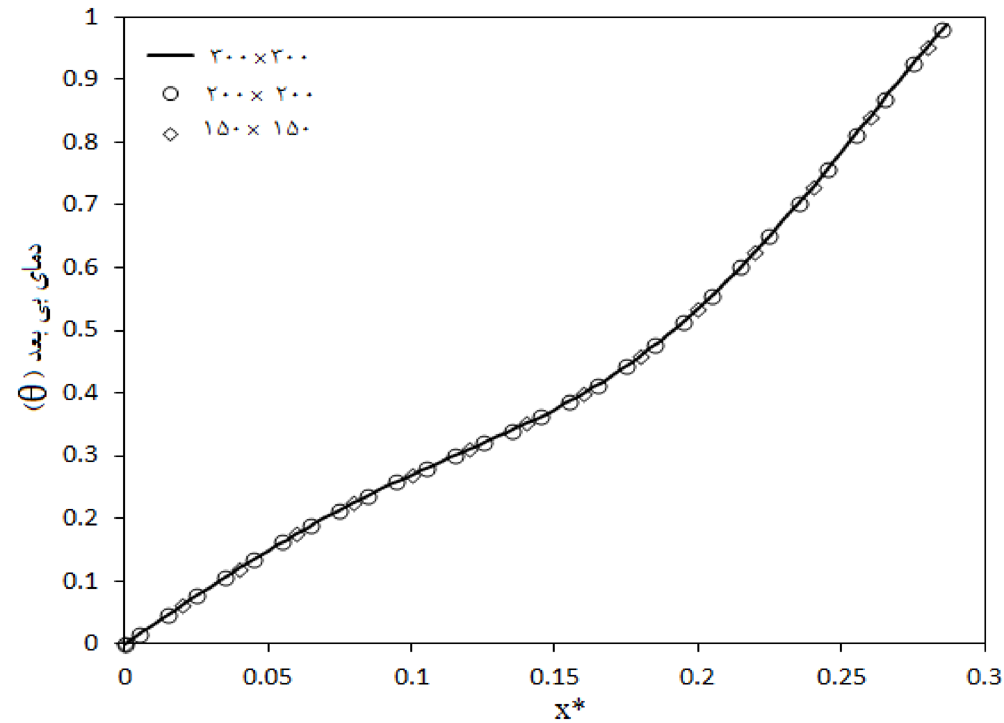
(۴-۱۷) رسم شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود پس از ۱۵۰۰۰۰بار تکرار، تغییرات دما در شکل بسیار کم است.

### ۴-۳-۱-۳- استقلال از شبکه :

برای نشان دادن استقلال نتایج از ظرافت شبکه، تغییرات دمای‌بی‌بعد در مقطع y*=۰/۵ برای محفظه با زاویه $\gamma = ۶۰^\circ$و با موقعیت قرارگیری مشابه شکل (۴-۱۶-ب) در عدد رایلی $۱۰^۵$ برای سه شبکه ۱۵۰ × ۱۵۰ و ۲۰۰ × ۲۰۰ و ۳۰۰×۳۰۰ در شکل ( ۴-۱۸) با هم مقایسه شده است. عدم وابستگی نتایج به شبکه‌بندی در این شکل کاملاً مشخص است.




شکل (۴-۱۷ ) تغییرات دمای بی‌بعد در گره (۵۰،۱۰۰) در برابر تکرار حلقه حل در محفظه مثلثی برای زاویه $\gamma = ۶۰^\circ$ و عدد رایلی $۱۰^۵$




شکل (۴-۱۸) تغییرات دمای بی‌بعد در مقطع $y^*=۰/۵$ برای محفظه مثلثی با زاویه $\gamma = ۶۰^\circ$ و با موقعیت قرارگیری مشابه شکل (۴-۱۶-ب) در عدد رایلی $۱۰^۵$ در شبکه‌بندی مختلف

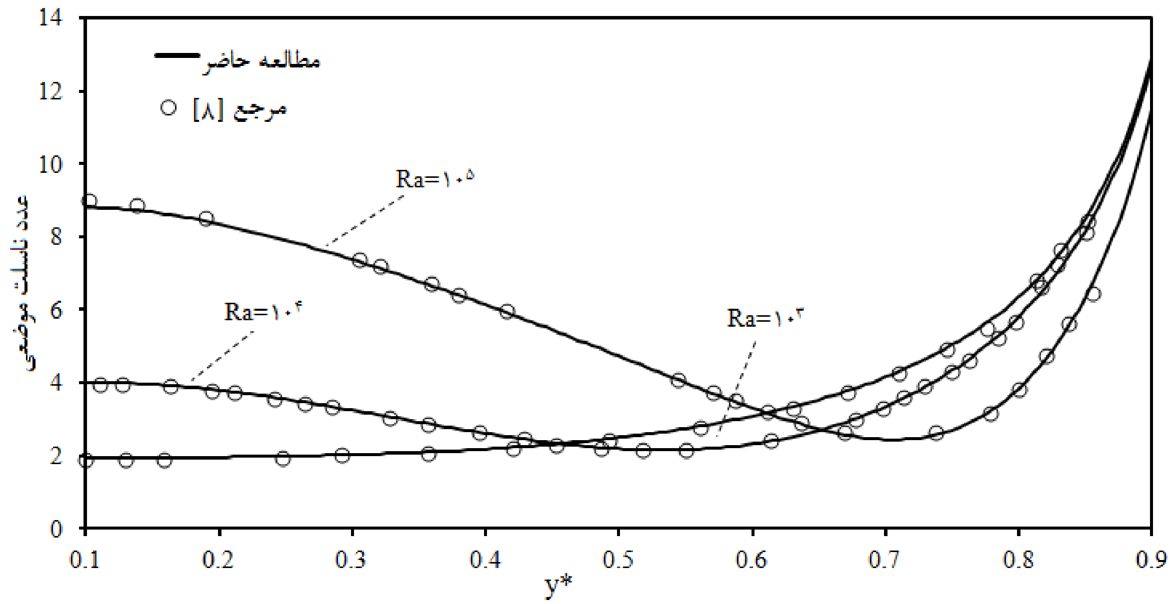
## ۴-۳-۱-۴- معتبرسازی:

در ابتدا برای اطمینان از صحت برنامه نوشته شده، به مقایسه نتایج حاصل از شبکه بولتزمن با نتایج منتشر شده در این زمینه توسط سایر محققین با کمک روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی خواهیم پرداخت. باساک و همکارانش [۸] به شبیه‌سازی انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌ای به شکل مثلث قائم‌الزاویه با $\gamma = ۴۵^\circ$ در موقعیت (الف)، با کمک روش المان محدود پرداختند. نتایج آنها برای دو نوع شرایط مرزی مختلف ارائه شد:

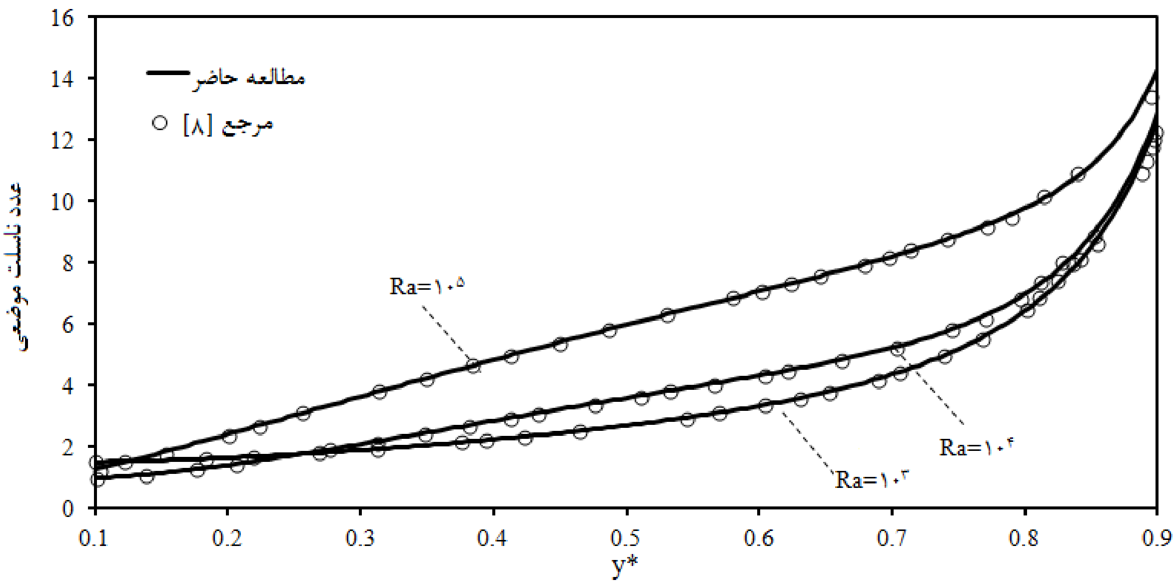
حالت اول: دیوار سمت چپ در دمای ثابت گرم و دیوار مایل در دمای ثابت سرد می‌شود.

حالت دوم: دیوار سمت چپ در دمای ثابت سرد و دیوار مایل در دمای ثابت گرم می‌شود.

قابل ذکر است که در هر دو حالت دیوار افقی به طور کامل عایق در نظر گرفته شده است. مقایسه تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم در اعداد رایلی$۱۰^۳$ ، $۱۰^۴$و $۱۰^۵$ در شکل ( ۴-۱۹ ) نشان داده شده است. شکل نشان دهنده تطابق خوب نتایج حاصل از روش بولتزمن شبکه‌ای و نتایج ارئه شده توسط باساک و همکارانش[۸] به روش المان محدود است. شکل (۴-۱۹-الف ) تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم را در شرایط مرزی اول یعنی هنگامی که این دیوار گرم و دیوار مایل سرد است نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که نرخ انتقال حرارت در گوشه بالای این دیوار دارای بیشترین حد خود و در گوشه پایین دیوار تقریباً یکنواخت است ( اطراف نقطه $y^*=۰/۲$ ). همچنین مشاهده می‌شود هنگامیکه عدد رایلی برابر $۱۰^۳$است، عدد ناسلت موضعی با افزایش فاصله از پایین محفظه به تدریج افزایش خواهد یافت که البته این افزایش با نزدیک شدن به محل برخورد دیوار گرم و سرد شدت خواهد گرفت. اما در اعداد رایلی بالاتر شاهد یک نقطه کمینه در روند تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم هستیم، به این ترتیب که در ابتدا عدد ناسلت موضعی تا ارتفاع مشخصی از دیواره کاهش می‌یابد و پس از این نقطه روند افزایشی خواهد داشت. این مقدار کمینه برای عدد رایلی $۱۰^۴$در نقطه $y^*۰/۵۵$و برای عدد رایلی $۱۰^۵$در نقطه $y^*=۰/۷$ اتفاق می‌افتد. در واقع افزایش یکنواخت عدد ناسلت موضعی در عدد رایلی $۱۰^۳$به دلیل قوی بودن انتقال حرارت هدایت( نسبت به جابجایی) در اعداد رایلی کوچک است. با افزایش عدد رایلی، انتقال حرارت جابجایی افزایش خواهد یافت. در این شرایط لایه مرزی سیال گرم بالا رونده بر روی دیوار قائم رشد خواهد کرد. از طرفی لایه مرزی جریان سرد پایین‌رونده بر روی دیوار مایل در جهت حرکتش رشد می‌کند و در نقطه‌ای که همان نقطه کمینه است با لایه مرزی سیال گرم بالا رونده برخورد خواهد کرد. بنابراین در ناحیه اختلاط این دو لایه، افزایش عدد ناسلت موضعی را خواهیم داشت. از طرفی هرچه عدد رایلی بزرگتر باشد، رشد لایه‌های مرزی سریعتر خواهد بود و در بخش بالاتری از محفظه با هم برخورد می‌کنند.




(الف)




(ب)

شکل ( ۴-۱۹ ) مقایسه تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم در محفظه مثلثی به دست آمده از مطالعه حاضر و نتایج ارائه شده توسط باساک و همکارانش[۸] در حالت الف) دیوار قائم گرم و دیوار مایل سرد ب) دیوار قائم سرد و دیوار مایل گرم

در شرایط مرزی دوم یعنی حالتی که دیوار قائم سرد و دیوار مایل گرم است، برای تمامی اعداد رایلی شاهد افزایش عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم با افزایش فاصله از پایین محفظه هستیم ( شکل (۴-

۱۹- ب). در این شرایط مرز گرم در بالای محفظه واقع شده و سیال گرم شده در مجاورت دیوار قائم سرد می‌شود و به سمت پایین حرکت می‌کند. واضح است که دینامیک سیال در این شرایط مرزی با حالت قبل کاملاً متفاوت است. بنابراین واضح است که باید شاهد روند متفاوتی در تغییرات ناسلت موضعی روی دیوار قائم باشیم.

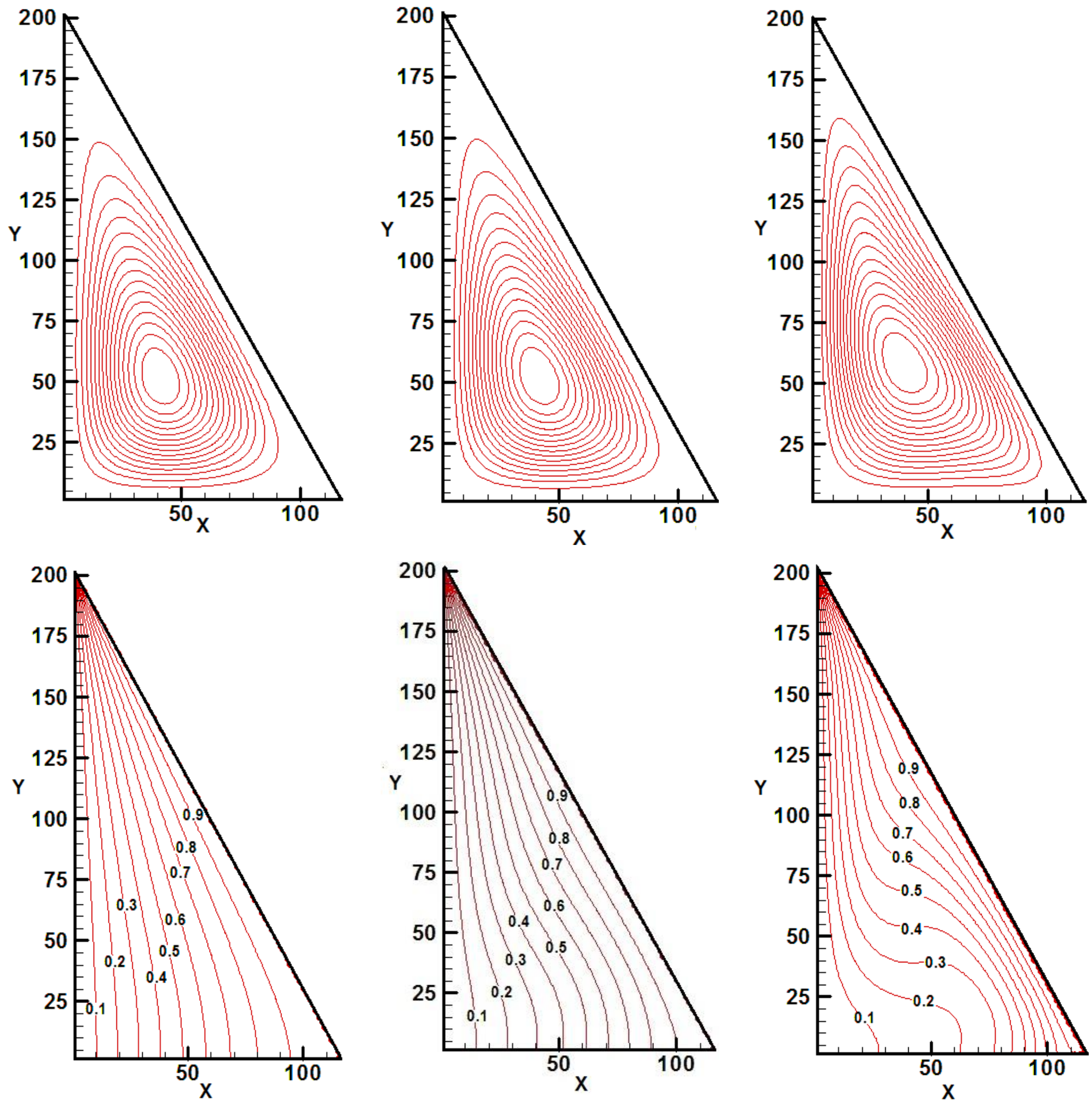
### ۴-۳-۱-۵- نتایج:

پس از اطمینان از صحت برنامه نوشته شده، اکنون می‌توان به شبیه‌سازی انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌های شکل( ۴-۱۶ ) برای زوایای مختلف $\gamma$ $(45 \langle \gamma \langle 75^\circ)$در شرایط مرزی اشاره شده در ابتدا یعنی دیوار قائم سرد و دیوار مایل گرم پرداخت. اعداد رایلی در نظر گرفته شده برای این شبیه‌سازی برابر $10^3$، $10^4$و $10^5$می‌باشد. از آنجایی که ارائه خطوط جریان و خطوط همدما برای همه زوایای $\gamma$ تنها موجب طولانی‌شدن بحث می‌شود، این نتایج تنها برای زوایای $60^\circ$ و $75^\circ$ آورده شده و برای بقیه زوایا تنها تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

موقعیت الف: (مثلث قائم‌الزاویه با زاویه قائمه در پایین محفظه ( شکل ۴-۱۶-الف))

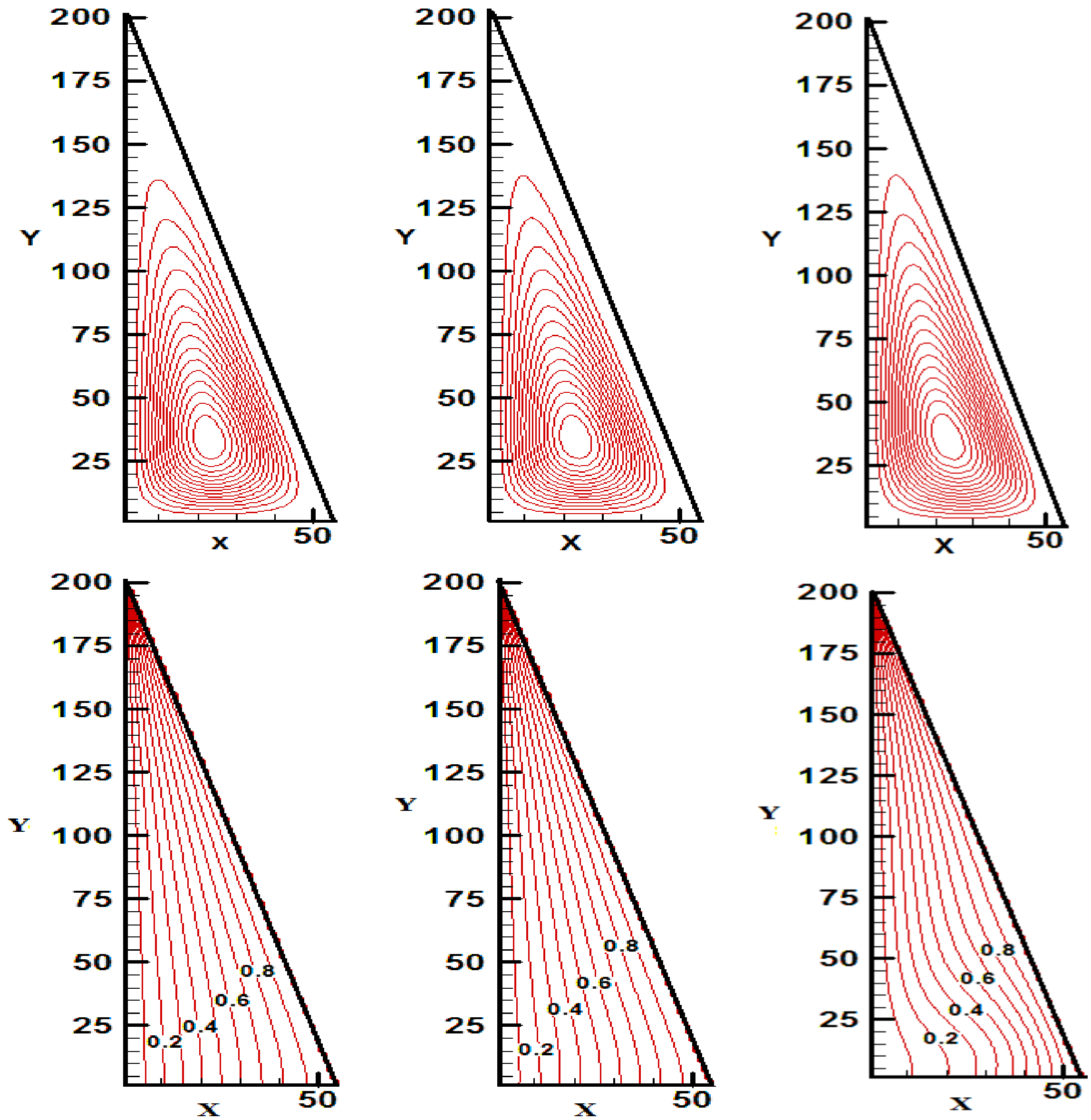
شکل (۴-۲۰) نشان دهنده خطوط جریان و خطوط هم‌دما در اعداد رایلی مختلف در محفظه‌ای با موقعیت الف و زاویه $\gamma$ برابر $60^\circ$ است. همانطور که از شکل قابل مشاهده است، در همه اعداد رایلی، یک گردابه در محفظه ظاهر می‌شود. جهت چرخش این گردابه پادساعتگرد خواهد بود زیرا سیال در مجاورت دیوارمایل گرم با کاهش چگالی در راستای این دیوار بالا می‌رود و سپس در مجاورت دیوار قائم، سرد شده و سیال با چگالی بالا در راستای این دیوار به سمت پایین محفظه هدایت می‌شود. با افزایش عدد رایلی، مرکز این گردابه به تدریج به سمت محل برخورد دیوار گرم و سرد جابه جا می‌شود. همچنین نتایج نشان می‌دهند که در اعداد رایلی پایین($Ra=10^3$)، خطوط هم‌دما هموار و تقریباً یکنواخت هستند. این موضوع

به این دلیل است که در اعداد رایلی پایین، انتقال حرارت غالب، انتقال حرارت هدایت است. در عدد رایلی $10^4$، خطوط هم‌دما شروع به جابه‌جا شدن به سمت دیوار راست می‌کنند و تقریباً از حالت یکنواختی خارج می‌شوند. با افزایش عدد رایلی به $10^5$ و افزایش انتقال حرارت جابجایی، خطوط هم‌دما به سمت پایین دیوار مایل فشرده خواهند شد. از شکل می‌توان افزایش گرادیان دما از بخش پایین دیوار قائم تا بالاترین نقطه آن را مشاهده کرد این موضوع بیانگر این است که نرخ انتقال حرارت به تدریج از پایین‌ترین نقطه دیوار قائم تا بالاترین نقطه آن افزایش می‌یابد. خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای زاویه $\gamma$ برابر $75^\circ$ در شکل (۴-۲۱) نشان داده شده است. واضح است که در این محفظه اندازه دیوار پایین کوچکتر ازحالت قبل است بنابراین نزدیک‌تر بودن دیوار گرم و سرد در این حالت، افزایش نرخ انتقال حرارت از نقاط مشابه دیوار قائم با حالت قبل را به دنبال خواهد داشت. اما تاثیر افزایش عدد رایلی بر روی الگوی جریان و خطوط هم‌دما مشابه حالت قبل است.




(الف) (ب) (ج)

شکل( ۴-۲۰ ) خطوط جریان( شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) برای محفظه‌ای شکل (۴-۱۶-الف) با زاویه $\gamma$ برابر $۶۰^\circ$ در اعداد رایلی الف) $۱۰^۳$ ب) $۱۰^۴$ ج) $۱۰^۵$



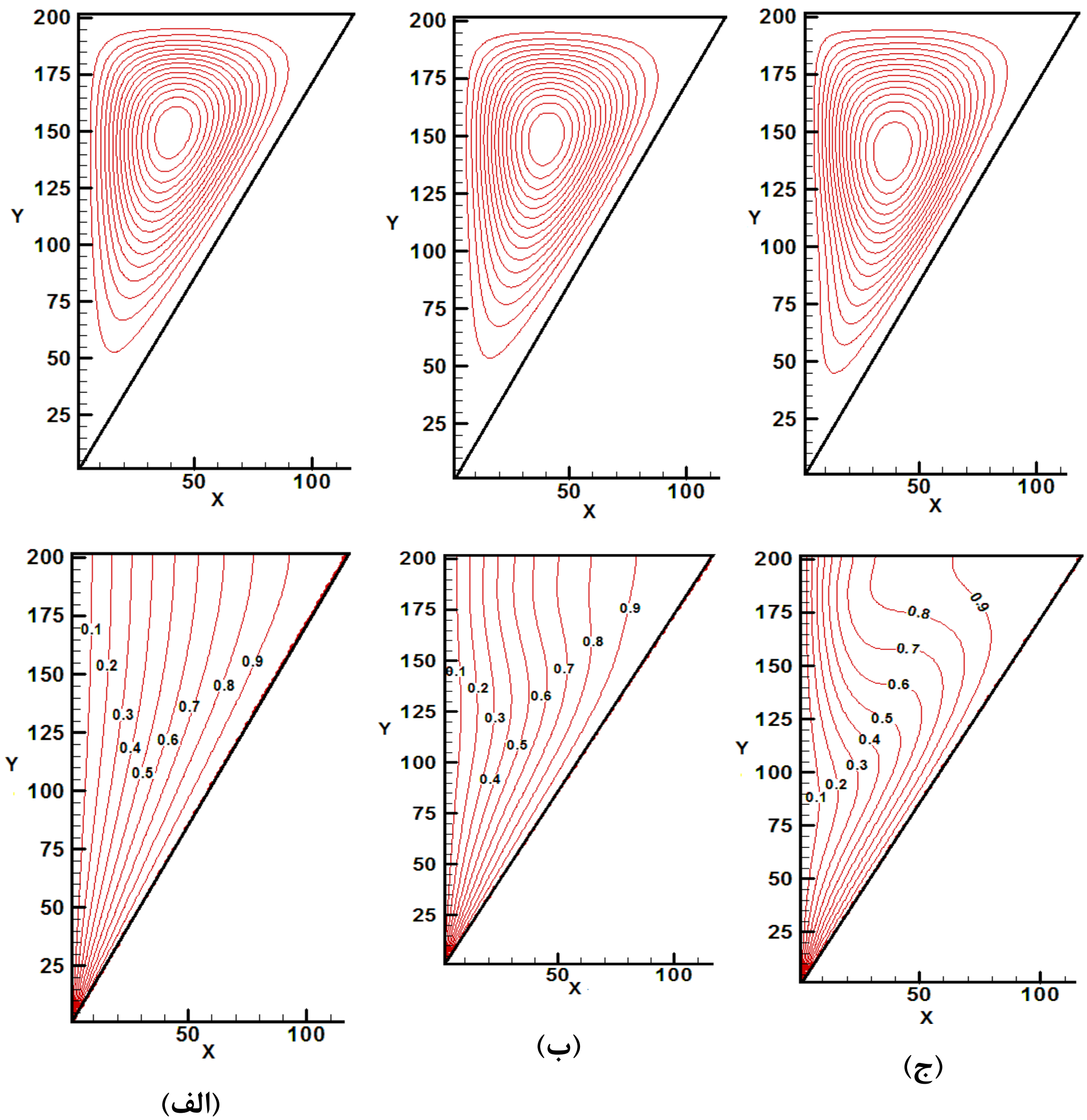

(الف) (ب) (ج)

شکل( ۴-۲۱ ) خطوط جریان( شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) برای محفظه‌ای شکل (۴-۱۶-الف) با زاویه $\gamma$ برابر $75^\circ$ در اعداد رایلی الف) $10^3$ ب) $10^4$ ج) $10^5$

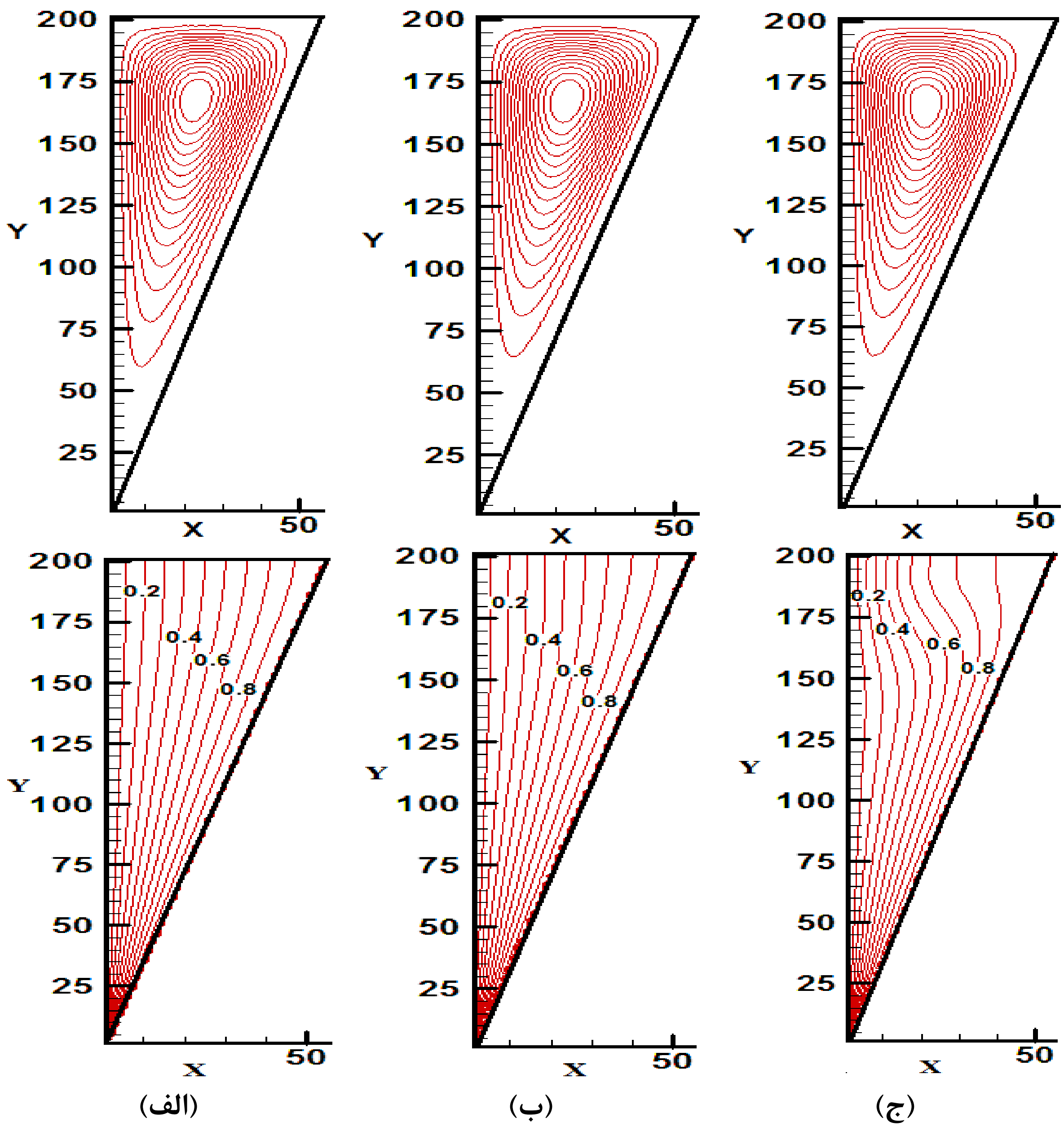
موقعیت ب: (مثلث قائم‌الزاویه با زاویه قائمه در بالا محفظه ( شکل ۴-۱۶- ب))

شکل (۴-۲۲) و (۴-۲۳) به ترتیب نشان‌دهنده خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای محفظه شکل (۴-۱۶- ب) در زوایای $60^\circ$ و $75^\circ$ است. همانطور که از شکل قابل ملاحظه است در این موقعیت نیز یک گردابه پادساعتگرد در محفظه ظاهر می‌شود و مشابه موقعیت قبل، با افزایش عدد رایلی مرکز این گردابه به سمت محل برخورد دو دیوار گرم و سرد که در اینجا برخلاف موقعیت قبل، در پایین‌ترین نقطه محفظه واقع شده است، حرکت می‌کند. مشابه موقعیت قبل در عدد رایلی پایین ($Ra=10^3$)، خطوط هم‌دما یکنواخت و هموار است. در عدد رایلی $10^4$ خطوط هم‌دما شروع به فشرده شدن به سمت دیوار قائم خواهد کرد. با افزایش عدد رایلی به $10^5$ و افزایش انتقال حرارت جابجایی، خطوط هم‌دما به سمت بالای دیوار قائم فشرده خواهند شد. مشاهده می‌شود که گرادیان دما در بخش بالایی و پایینی محفظه زیاد و در بخش میانی محفظه کمتر است. گرادیان دما در بخش پایینی بیشتر از بخش بالایی است. بنابراین انتظار می‌رود عدد ناسلت موضعی با فاصله از دیوار افقی ابتدا کم شود و سپس افزایش یابد، بنابراین می‌توان یک نقطه کمینه برای تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم از بالا تا پایین را انتظار داشت. شکل‌های (۴-۲۴ ) و (۴-۲۵ ) تغییرات ناسلت موضعی را بر روی دیوار قائم برای اعداد رایلی مختلف به ترتیب در زوایای $60^\circ$ و $75^\circ$ نشان می‌دهد. برای مقایسه بهتر بین دو موقعیت قرارگیری محفظه، محور افقی، فاصله از دیوار افقی در نظر گرفته شده است. همانطور که قابل ملاحظه است در عدد رایلی پایین ($Ra=10^3$)، تغییرات عدد ناسلت موضعی با تغییر موقعیت محفظه تغییر چندانی نخواهد کرد. البته این موضوع دور از انتظار نبود چرا که همانطور که قبلاً اشاره شد در اعداد رایلی پایین، انتقال حرارت هدایت، شیوه غالب انتقال حرارت است و با کاهش فاصله دیوار گرم و سرد نرخ انتقال حرارت افزایش خواهد یافت. هنگامیکه عدد رایلی افزایش می‌یابد، اختلاف عدد ناسلت موضعی بین دو موقعیت مختلف قرارگیری محفظه نیز افزایش می‌یابد. برای محفظه‌ای با موقعیت قرارگیری مشابه شکل (۴-۱۶-الف)، در هر دو زاویه $60^\circ$ و $^\circ$

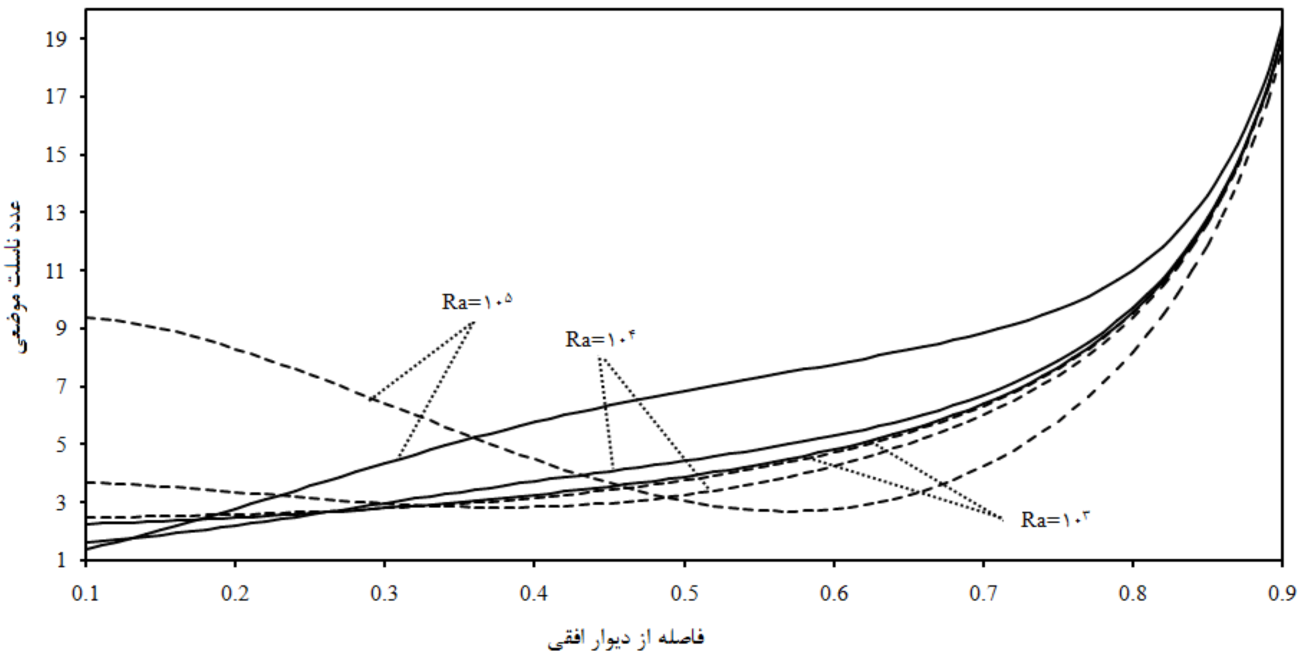
۷۵، عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم به صورت پیوسته از دیوار افقی تا محل برخورد دو دیوار گرم و سرد افزایش می‌یابد. اما در موقعیت قرارگیری مشابه شکل (۴ -۱۶- ب) برای اعداد رایلی بالا ابتدا شاهد کاهش عدد ناسلت با فاصله گرفتن از دیوار افقی هستیم ولی این روند کاهشی تا انتهای دیوار ادامه ندارد



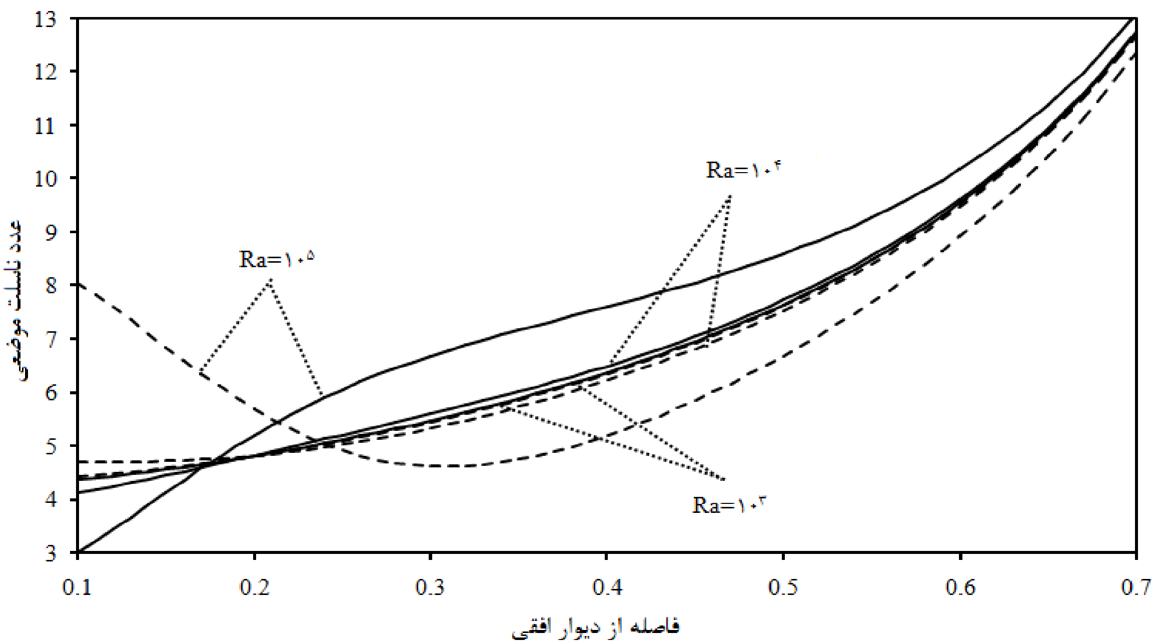

شکل( ۴-۲۲ ) خطوط جریان( شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) برای محفظه‌ای شکل (۴-۱۶- ب) با زاویه $\gamma$ برابر $60^\circ$ در اعداد رایلی الف) $10^3$ب) $10^4$ ج) $10^5$




شکل( ۴- ۲۳ ) خطوط جریان( شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) برای محفظه‌ای شکل (۴-۱۶- ب) با زاویه $\gamma$ برابر $75^{\circ}$ در اعداد رایلی الف) $10^{3}$ ب) $10^{4}$ ج) $10^{5}$

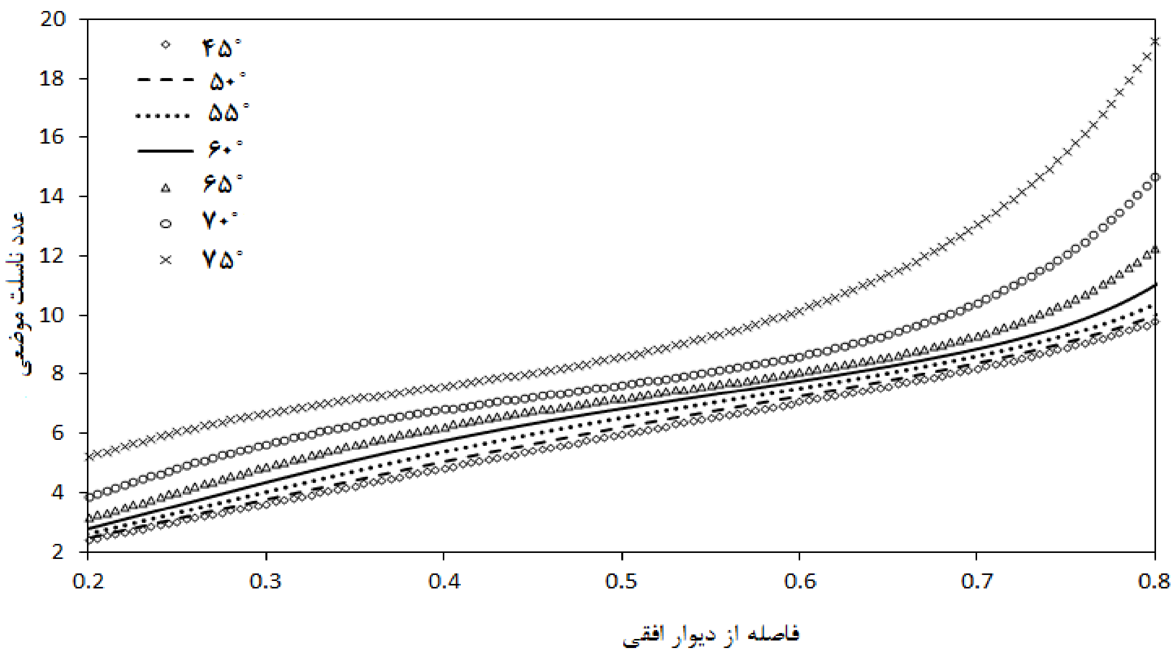



شکل( ۴- ۲۴ )تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم محفظه مثلثی برای $\gamma = ۶۰^\circ$ مربوط به: محفظه شکل(۴-۱۶-الف) ——— و محفظه شکل (۴-۱۶- ب ) - - -

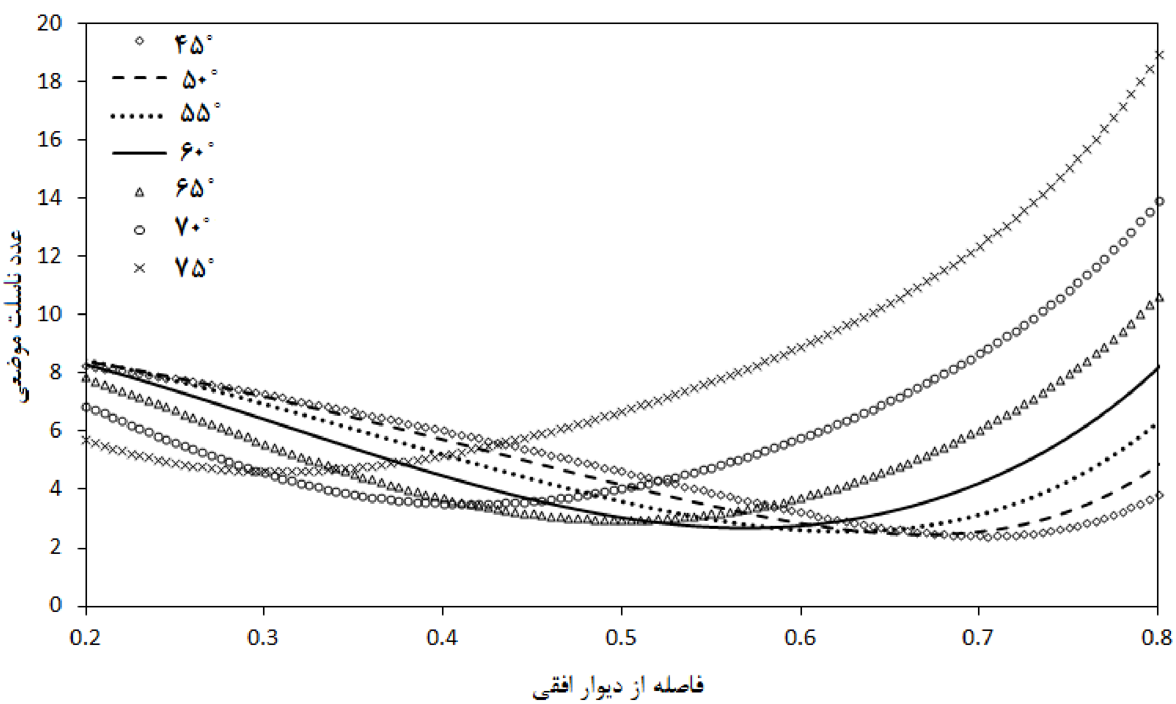



شکل( ۴- ۲۵ )تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم محفظه مثلثی برای $\gamma = ۷۵^\circ$ مربوط به: محفظه شکل(۴-۱۶-الف) ——— و محفظه شکل (۴-۱۶- ب ) - - -

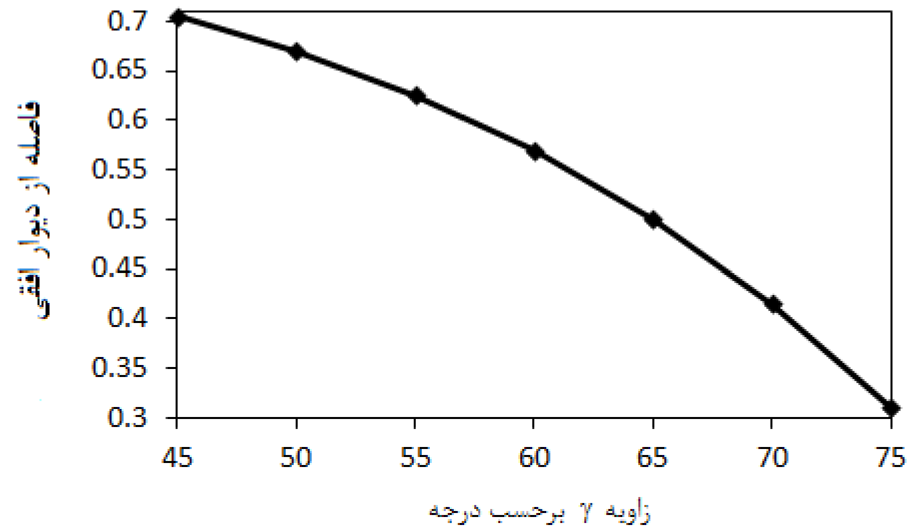
و پس از فاصله مشخص روند افزایشی خواهیم داشت. علت این موضوع همان تداخل لایه مرزی گرم بالا رونده و سرد پایین رونده است که در این موقعیت قرارگیری محفظه اتفاق می‌افتد و موجب افزایش نرخ انتقال حرارت در این ناحیه خواهد شد. با مقایسه بین دو شکل (۴-۲۴) و (۴-۲۵) می‌توان مشاهده کرد که در یک عدد رایلی مشخص، مثلاً $10^5$، نقطه کمینه ناسلت موضعی برای زاویه $\gamma = 75^\circ$ زودتر از $60^\circ$ اتفاق می‌افتد. البته کاملاً واضح است که با کم شدن پهنای محفظه، تداخل دو لایه گرم و سرد در بخش‌بالاتری از محفظه اتفاق می‌افتد، بنابراین نقطه کمینه نیز باید در بخش بالاتری ظاهر شود. برای مشاهده بهتر اثر زاویه $\gamma$ تاثیر این زاویه بر روی تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم در عدد رایلی $10^5$در شکل‌های (۴-۲۶) و (۴-۲۷) به ترتیب برای موقعیت قرارگیری مشابه (۴-۱۶-الف) و (۴-۱۶-ب) نشان داده شده است. از شکل (۴-۲۶) می‌توان ملاحظه کرد که در تمام زوایای $\gamma$ عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم به صورت پیوسته با فاصله از دیوار افقی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش زاویه شاهد افزایش ناسلت موضعی در هر نقطه هستیم، یعنی بیشترین ناسلت موضعی در هر نقطه مربوط به زاویه $75^\circ$ است. البته با کاهش فاصله دیوار گرم و سرد در نتیجه‌ی افزایش زاویه، این موضوع دور از انتظار نبود. شکل (۴-۲۷) نشان می‌دهد برای تمامی زوایای $\gamma$ در محفظه‌ای در موقعیت قرارگیری مشابه (۴-۱۶- ب) ناسلت موضعی با فاصله گرفتن از دیوار افقی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. بنابراین در تمامی زوایا شاهد وجود یک کمینه در روند تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم هستیم که با افزایش زاویه $\gamma$ این نقطه کمینه به سمت بالای محفظه جابه‌جا خواهد شد. تغییر مکان این نقطه کمینه با تغییر زاویه در شکل (۴-۲۸) نشان داده شده است. در این نمودار محور قائم فاصله از دیوار افقی است.




شکل( ۴- ۲۶ )تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم در محفظه مثلثی برای زوایای مختلف $\gamma$ مربوط به موقعیت( الف)




شکل( ۴-۲۷ )تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم در محفظه مثلثی برای زوایای مختلف $\gamma$ مربوط به موقعیت (ب)

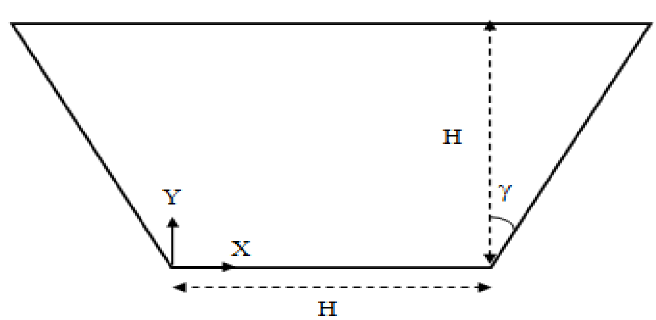



شکل( ۴-۲۸ )تغییرات مکان نقطه کمینه ناسلت موضعی بر روی دیوار قائم محفظه مثلثی در موقعیت (ب) در عدد رایلی $10^5$ و برای زوایای مختلف $\gamma$

## ۴-۳-۲- محفظه به شکل ذوزنقه

### ۴-۳-۲-۱- هندسه جریان:

شکل ( ۴-۲۹ ) نشان‌دهنده محفظه‌ای به شکل ذوزنقه است. در این محفظه ارتفاع و طول دیوار پایینی محفظه برابر H است و زاویه‌ای که هریک از دیوارهای مایل با خط قائم می‌سازند با γ نشان داده شده است. دیوار پایینی محفظه در دمای ثابت $T_H$ در حال گرم شدن و دو دیوار مایل در دمای ثابت $T_C$ در حال سرد شدن می‌باشد. همچنین دیوار افقی بالای محفظه کاملاً عایق فرض شده است. در این محفظه، پدیده

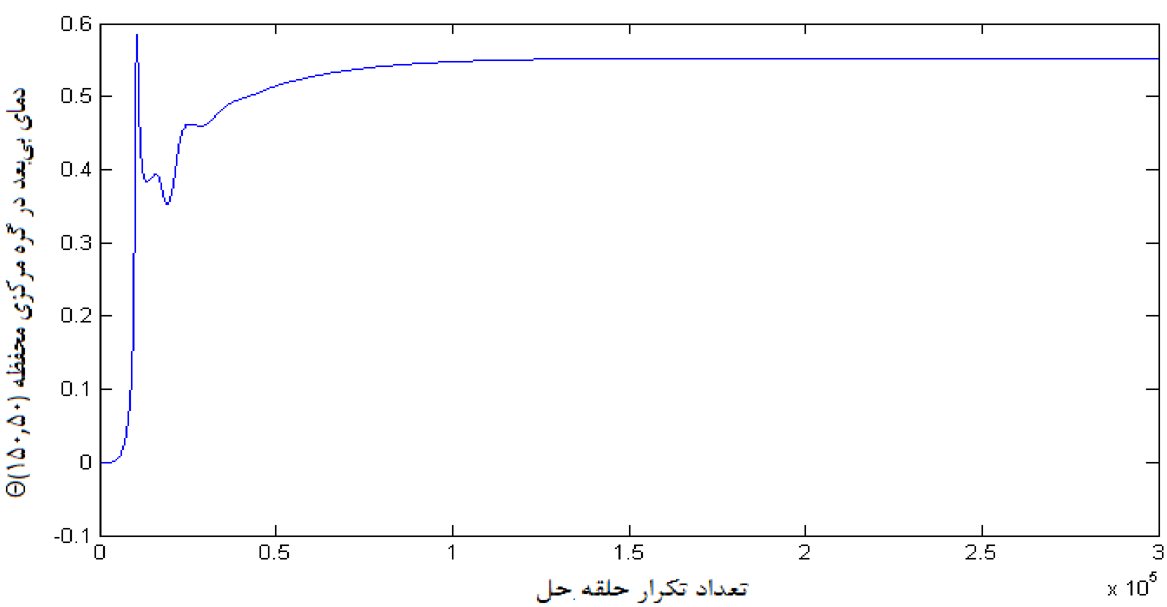



شکل( ۴-۲۹ ) هندسه محفظه ذوزنقه‌ای برای بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد درون محفظه

جابجایی آزاد برای زاوایای $\gamma$ برابر $۳۰^\circ$ و $۴۵^\circ$ در اعداد رایلی $۱۰^۳$، $۱۰^۴$ و $۱۰^۵$ مورد بررسی قرار خواهد گرفت. برای شبیه‌سازی این محفظه از یک شبکه ۱۰۰ × ۳۰۰ استفاده شده است. به این ترتیب که ارتفاع محفظه برابر ۱۰۰ در نظر گرفته شده و طول دیوار بالایی براساس زاویه $\gamma$ تغییر خواهد کرد.

### ۴-۳-۲-۲- بررسی همگرایی:

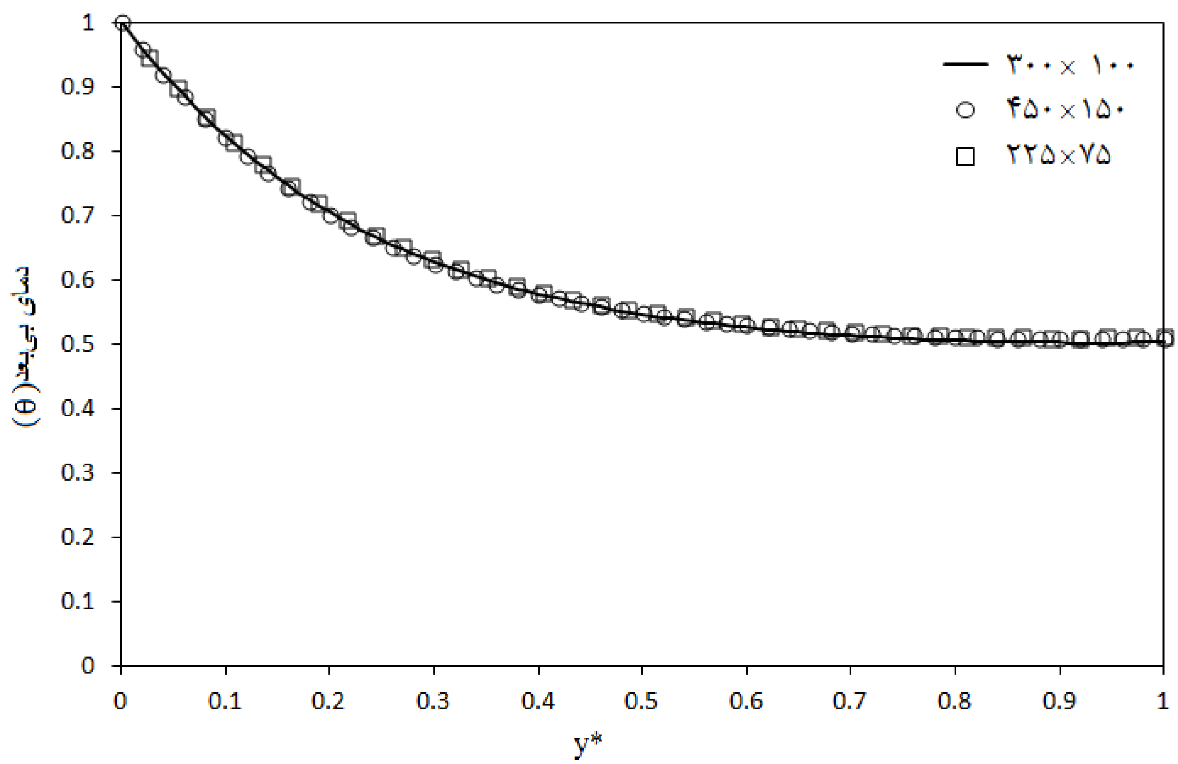
به منظور اطمینان از همگرا شدن برنامه نوشته شده، دمای بی‌بعد در مرکز محفظه( با توجه به شبکه بندی گره(۵۰،۱۵۰ ))در برابر تعداد تکرار حلقه حل در شکل (۴-۳۰) برای $\gamma$ برابر $۳۰^\circ$و عدد رایلی برابر $۱۰^۵$ برای نمونه رسم شده است. ما در این برنامه ۳۰۰۰۰۰بار مراحل حل را تکرار کردیم، همانگونه که ملاحظه می‌شود از ۱۵۰۰۰۰تکرار به بعد تغییرات آنقدر کم است که می‌توان از آن صرف نظر کرد و تکرار بیشتر از ۳۰۰۰۰۰بار، تغییری در نتایج نخواهد داد.




شکل (۴-۳۰ ) تغییرات دمای بی‌بعد در مرکز محفظه  محفظه ذوزنقه‌ای در برابر تکرار حلقه حل برای $\gamma$ برابر $۳۰^\circ$و عدد رایلی برابر $۱۰^۵$

### ۴-۳-۲-۳- استقلال از شبکه:

برای نشان دادن استقلال نتایج از ظرافت شبکه، تغییرات دمای بی‌بعد در مقطع $x^*=۰/۵$ برای محفظه با زاویه $\gamma = ۳۰^\circ$ در عدد رایلی $۱۰^۵$ برای سه شبکه ۷۵ × ۲۲۵ و ۱۰۰ × ۳۰۰ و ۱۵۰ × ۴۵۰ در شکل (۴-۳۱) با هم مقایسه شده است. می‌توان مشاهده کرد که نتایج از ظرافت شبکه مستقل است.

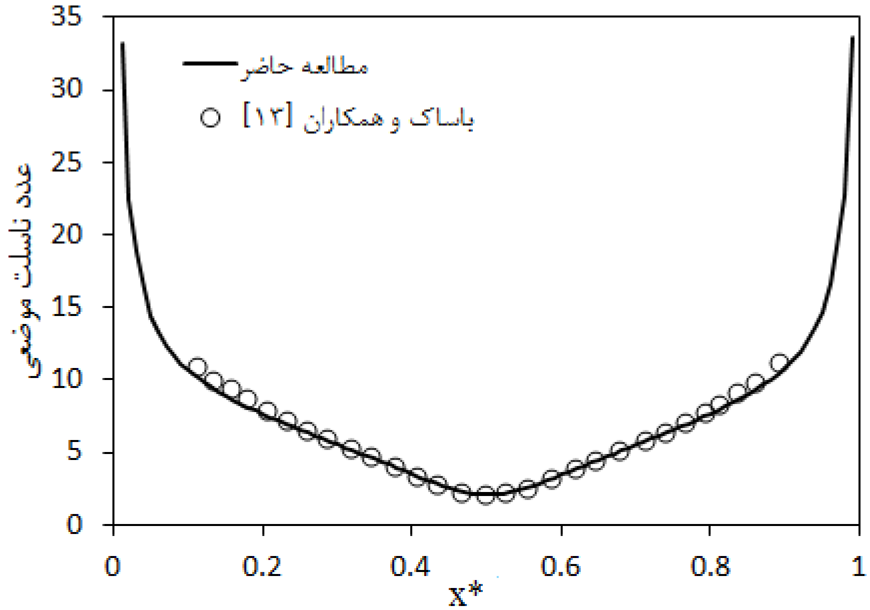



شکل (۴-۳۱ ) تغییرات دمای بی‌بعد در مقطع $x^*=۰/۵$ برای محفظه ذوزنقه‌ای با زاویه $\gamma = ۳۰^\circ$ در عدد رایلی $۱۰^۵$ در شبکه‌بندی مختلف

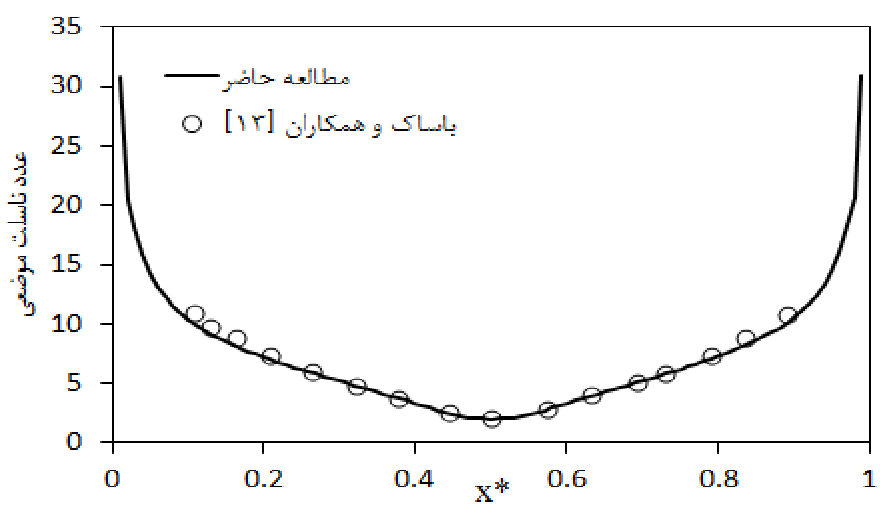
### ۴-۳-۲-۴- معتبرسازی:

به منظور اطمینان از صحت برنامه نوشته شده به مقایسه تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوار افقی پایین محفظه بدست آمده از روش بولتزمن شبکه‌ای در مطالعه حاضر و نتایج منتشر شده توسط باساک و همکارانش [۱۳] به روش المان محدود می‌پردازیم. شکل (۴-۳۲) و (۴-۳۳ ) به ترتیب نشان دهنده این

مقایسه برای زاویه $\gamma$ برابر $30^\circ$ و $45^\circ$، در عدد رایلی $10^5$ است. نتایج به خوبی تطابق بین دو روش را نشان می‌دهد.




شکل ( ۴-۳۲ ) مقایسه تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوارافقی پایین محفظه ذوزنقه‌ای به دست آمده از مطالعه حاضر و نتایج ارائه شده توسط باساک و همکارانش[۱۳] در عدد رایلی $10^5$و $\gamma$ برابر $30^\circ$

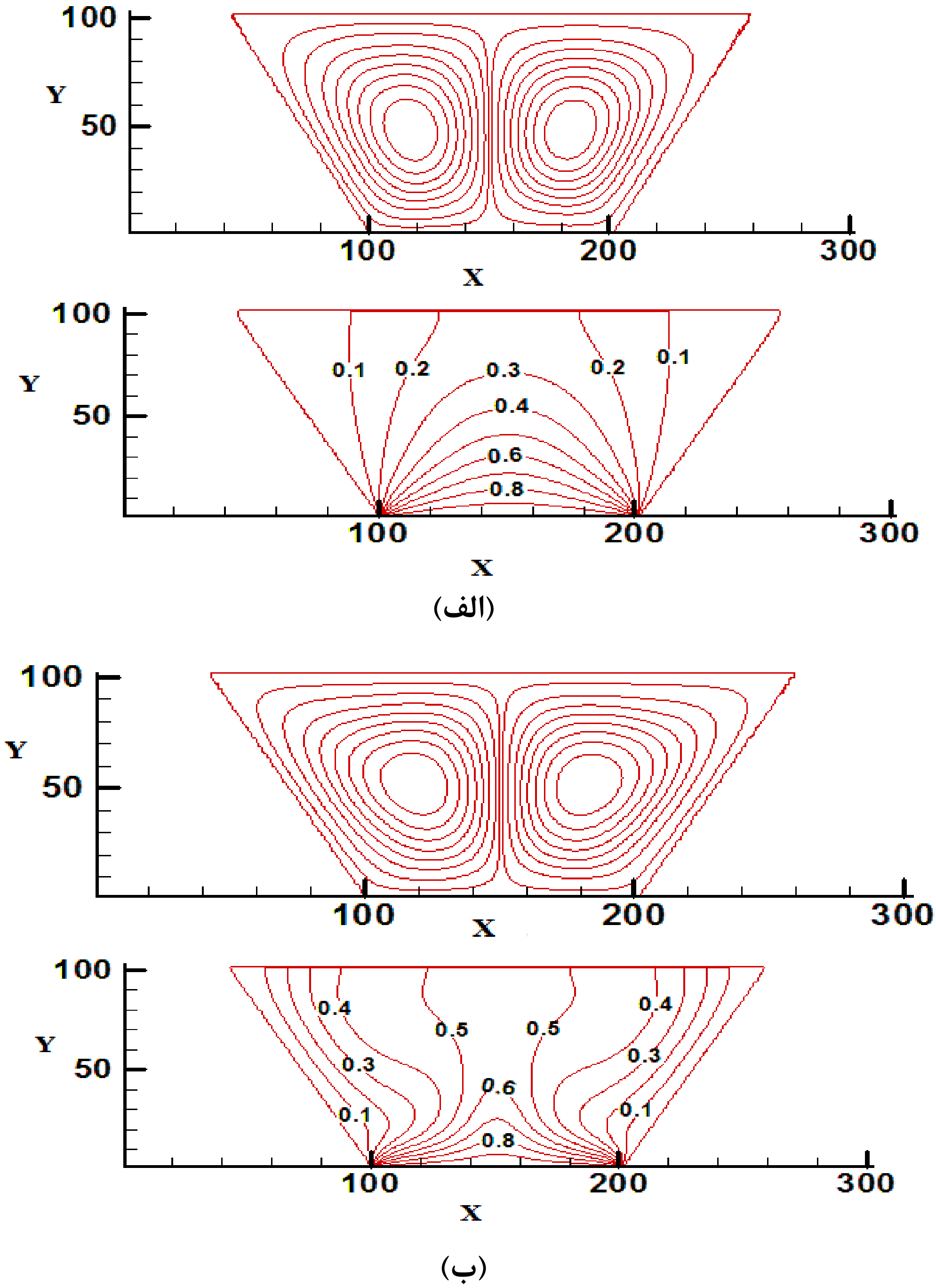



شکل ( ۴-۳۳ ) مقایسه تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوارافقی پایین محفظه ذوزنقه‌ای به دست آمده از مطالعه حاضر و نتایج ارائه شده توسط باساک و همکارانش[۱۳] در عدد رایلی $10^5$و $\gamma$ برابر $45^\circ$

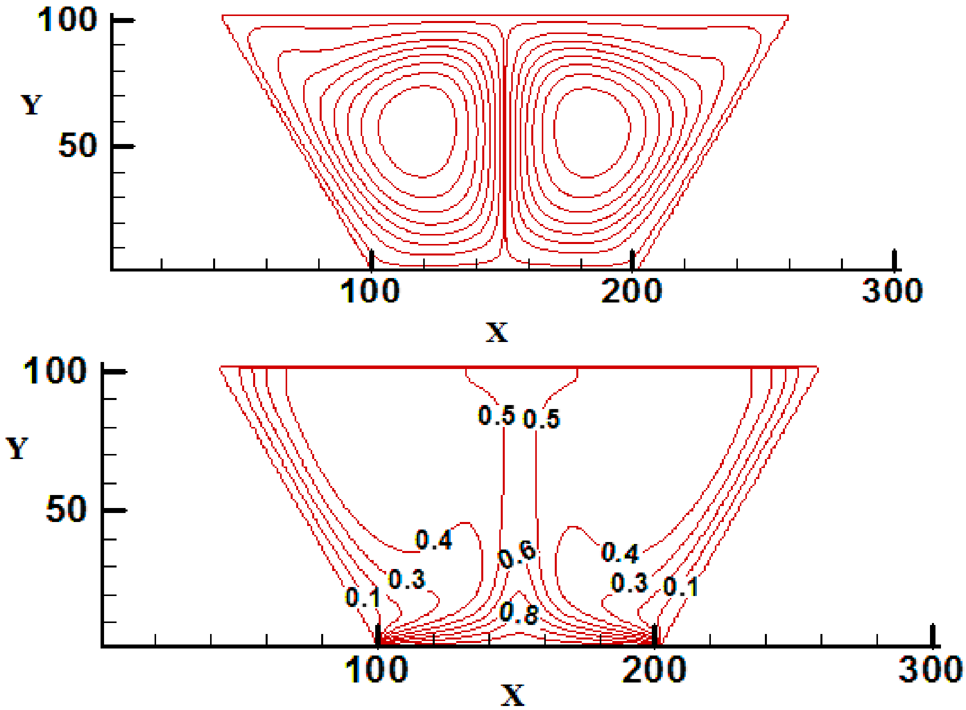
### ۴-۳-۲-۵- نتایج:

شکل‌های (۴-۳۴) و (۴-۳۵) به ترتیب نشان‌دهنده خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای محفظه ذوزنقه‌ای با زاویه $\gamma$ برابر °۳۰ و °۴۵ است. در کل، برای تمامی اعداد رایلی و هر دو زاویه، سیال در وسط دیوار گرم پایینی به سمت بالا حرکت می‌کند و در راستای دیوارهای سرد مورب به سمت پایین هدایت می-شود، بنابراین دو گردابه متقارن ساعتگرد و پادساعتگرد در محفظه شکل خواهد گرفت. برای اعداد رایلی کوچک ($Ra=۱۰^۳$) انتقال حرارت در محفظه بیشتر به شیوه هدایت اتفاق می‌افتد. مشاهده می‌شود که در این عدد رایلی ($Ra=۱۰^۳$) خطوط هم دمای $\theta$ برابر ۰/۱ و ۰/۲ به صورت متقارن و در مجاورت دیوارهای مایل ظاهر می‌شود و دیگر خطوط هم‌دما ($\theta \geq ۰/۳$)به صورت منحنی‌های هموار متقارن نسبت به خط تقارن عمودی محفظه در مرکز شکل می‌گیرند.  با افزایش عدد رایلی، کم کم انتقال حرارت جابجایی به شیوه غالب انتقال حرارت تبدیل شده و خطوط هم‌دما به سمت دیواره‌های مایل فشرده می‌شوند و بعضی از خطوط هم‌دمای منحنی‌الشکل متقارن نسبت به خط تقارن عمودی(۰/۳ و ۰/۴)، به دو خط هم‌دمای متقارن تقسیم خواهد شد. شکل‌های (۴-۳۶) و (۴-۳۷) به ترتیب نشان‌دهنده تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار افقی گرم در محفظه‌های با زاویه $\gamma$ برابر °۳۰ و °۴۵ است. همانند خطوط هم‌دما، تغییرات عدد ناسلت موضعی نیز نسبت به خط تقارن عمودی محفظه، متقارن است که البته با توجه به تقارن هندسه و شرایط مرزی محفظه، این موضوع دور از انتظار نبود. همانطور که از شکل‌ها قابل ملاحظه است، عدد ناسلت موضعی از گوشه چپ دیوار افقی گرم به تدریج کاهش می‌یابد تا در وسط این دیوار به کمترین حد خود می‌رسد و سپس روندی افزایشی تا گوشه سمت راست این دیوار در پیش می‌گیرد. افزایش عدد ناسلت موضعی در هر نقطه با افزایش عدد رایلی با توجه به افزایش انتقال حرارت جابجایی و در نتیجه قوی‌تر شدن گردابه‌های درون محفظه موضوعی است که دور از انتظار نبود. همچنین عدد ناسلت موضعی در نقاط مشخصی از دیوار افقی در اعداد رایلی مختلف برای هر دو زاویه در شکل (۴-۳۸)

نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در یک عدد رایلی مشخص، در هرنقطه عدد ناسلت موضعی در محفظه ذوزنقه‌ای با $\gamma$ برابر °۳۰ بیشتر از °۴۵ است.

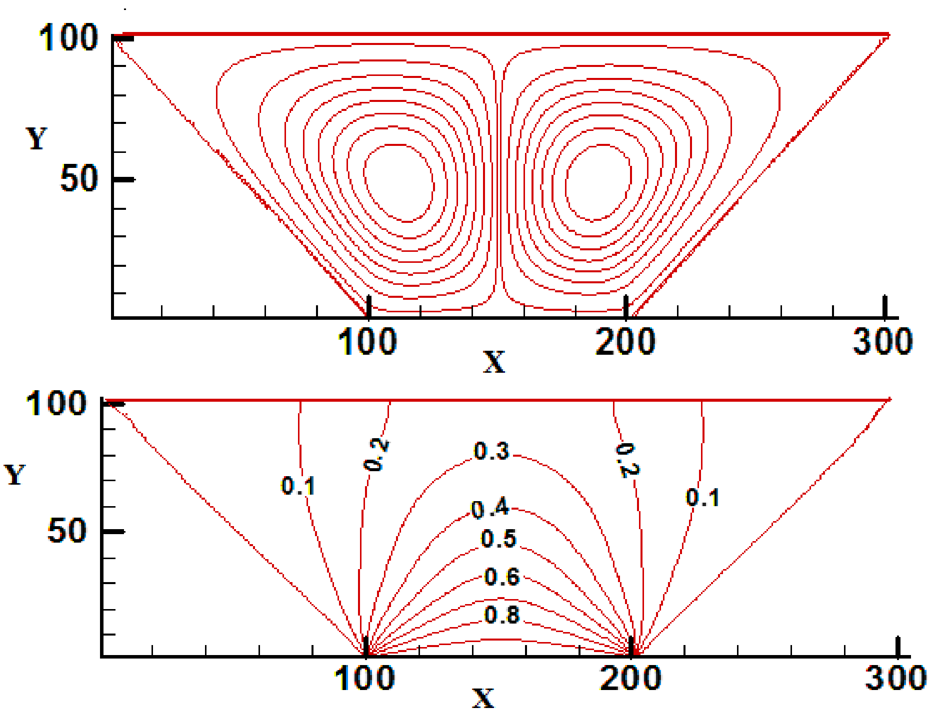



شکل (۴-۳۴) خطوط جریان( شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) در محفظه ذوزنقه‌ای با زاویه $\gamma$ برابر °۳۰ در اعداد رایلی الف) $۱۰^{۳}$ب) $۱۰^{۴}$

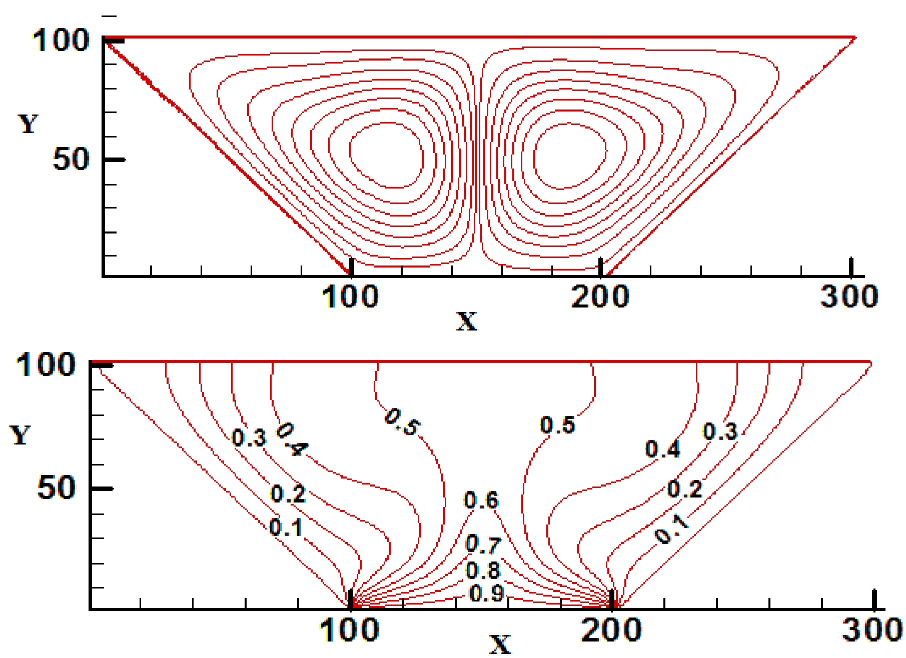



(ج)

ادامه شکل (۴-۳۴) خطوط جریان( شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) در محفظه ذوزنقه‌ای با زاویه $\gamma$ برابر $30^\circ$ درعدد رایلی ج)$10^5$

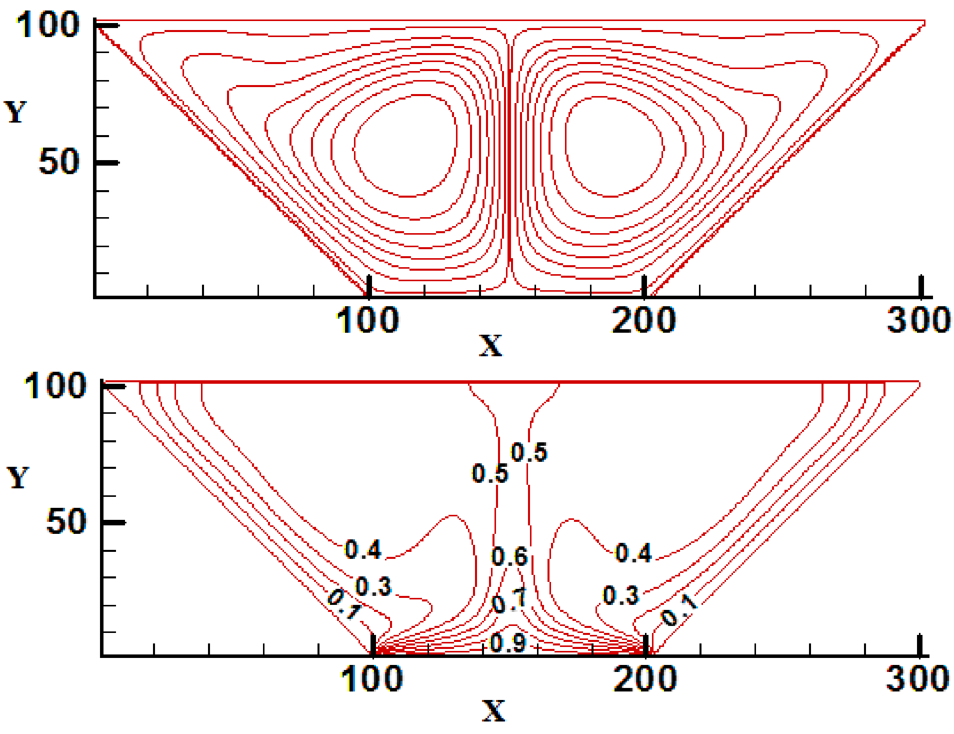



(الف)



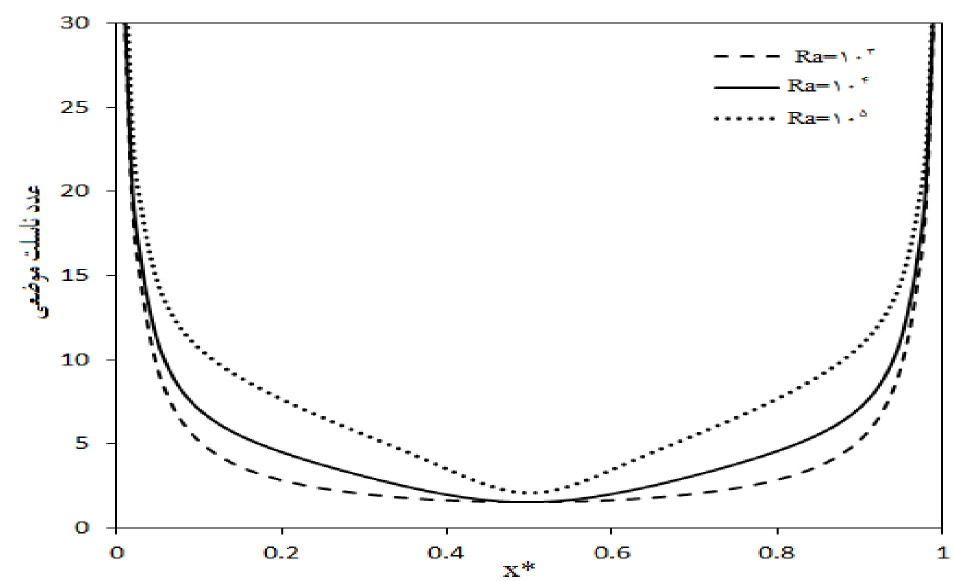

(ب)

شکل (۴-۳۵) خطوط جریان( شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) در محفظه ذوزنقه‌ای با زاویه $\gamma$ برابر $45^{\circ}$ در اعداد رایلی الف) $10^{3}$ ب) $10^{4}$

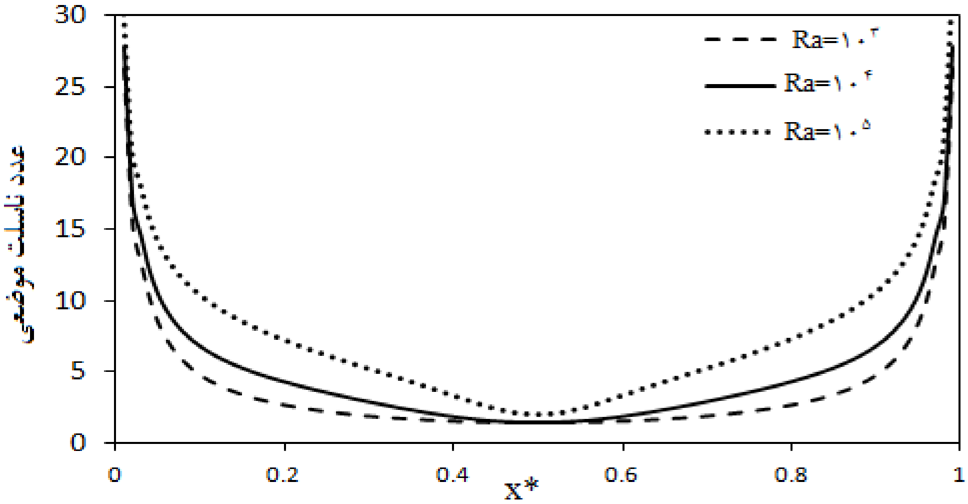



(ج)

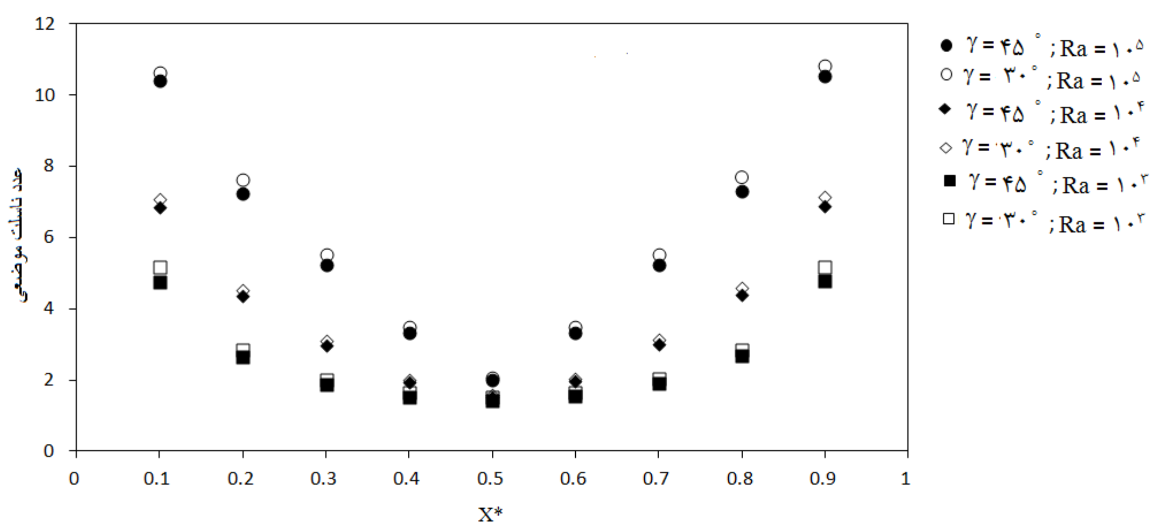
ادامه شکل (۴-۳۵) خطوط جریان( شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) در محفظه ذوزنقه‌ای با زاویه $\gamma$ برابر °۴۵ درعدد رایلی ج)$۱۰^۵$




شکل (۴-۳۶) تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار گرم افقی پایین محفظه ذوزنقه‌ای برای $\gamma$ برابر °۳۰ دراعداد رایلی مختلف




شکل (۴-۳۷) تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار گرم افقی پایین محفظه ذوزنقه‌ای برای $\gamma$ برابر $۴۵^\circ$ دراعداد رایلی مختلف



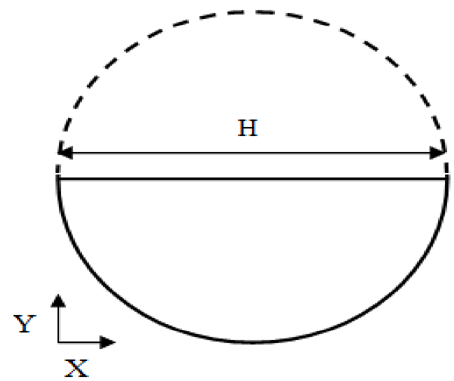

شکل (۴-۳۸) مقایسه عدد ناسلت موضعی برای نقاط روی دیوار گرم افقی پایین محفظه ذوزنقه‌ای بین دو زاویه ۳۰و۴۵ درجه

## ۴-۳-۳- محفظه به شکل نیم‌دایره

### ۴-۳-۳-۱- هندسه جریان:

در این بخش به بررسی پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌ای به شکل نیم‌دایره خواهیم پرداخت. شکل (۴-۳۹) نشان دهنده هندسه مورد نظر ما می‌باشد. در این محفظه دیوار صاف در دمای

ثابت در حل سرد شدن ($\theta_C = ۰$)و دیوار منحنی شکل در دمای ثابت در حال گرم شدن ($\theta_H = ۱$) است. به منظور شبیه سازی این محفظه، در شبکه ۱۵۰×۳۰۰ فرض شده است.



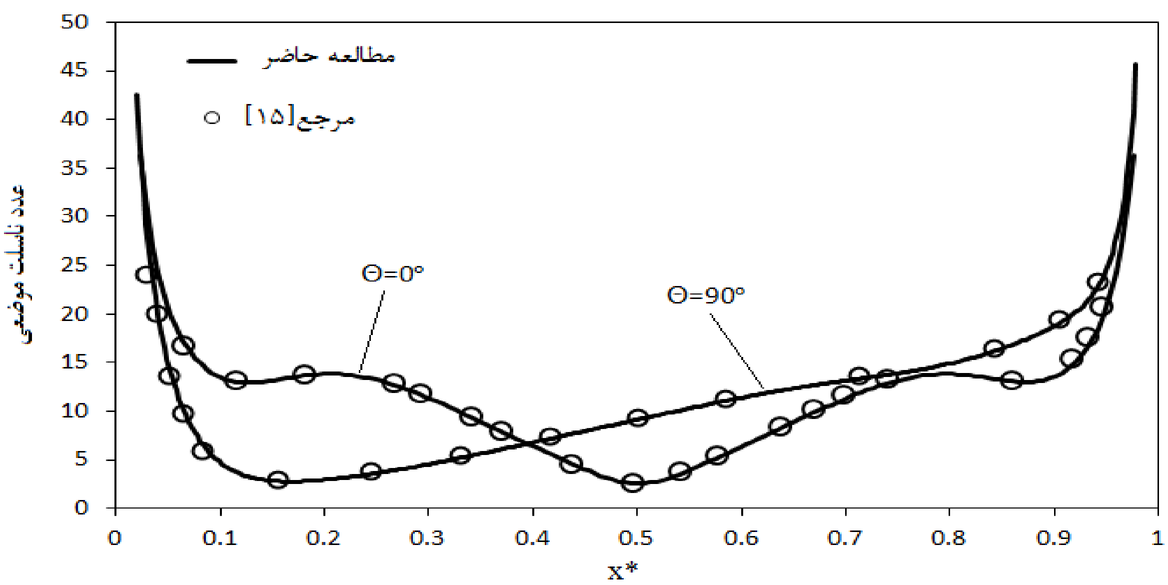

شکل (۴-۳۹) هندسه محفظه به شکل نیم‌دایره برای بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد

### ۴-۳-۳-۲- معتبرسازی:

به منظور اطمینان از صحت برنامه نوشته شده، به مقایسه نتایج حاصل از این مطالعه و نتایج منتشر شده در این زمینه خواهیم پرداخت. چن[۱] و چنگ[۲] [۱۵] به بررسی انتقال حرارت در محفظه‌ای به شکل کمانی از دایره به روش حجم محدود پرداختند. محفظه مورد بررسی آنها پیشتر در شکل (۱-۵) نشان داده شده است. برای این محفظه نسبت شعاع دایره r، به طول دیوار صاف H، ۱ به ۱/۷۳۲ و سیال درون محفظه هوا با عدد پرانتل ۰/۷ در نظر گرفته شده است. شکل (۴-۴۰) نشان دهنده تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار صاف برای عدد گراشهف $۱۰^۶$ و زاویه $\boldsymbol{\theta}$ برابر صفر و۹۰ درجه، حاصل از مطالعه حاضر و نتایج منتشر شده توسط چن و چنگ [۱۵] است. این شکل تطابق مناسب بین نتایج مطالعه حاضر و نتایج منتشر شده توسط چن و چنگ [۱۵] را نشان می‌دهد. همچنین مشاهده می‌شود هنگامی که زاویه برابر صفر درجه است، تغییرات ناسلت موضعی نسبت به خط تقارن عمودی گذرنده از مرکز محفظه، متقارن

Chen[1]
Cheng[2]

است که البته این نتیجه به دلیل تقارن هندسه و سایر شرایط نسبت به این خط دور از انتظار نبود. اما برای زاویه °۹۰ این تقارن وجود ندارد. لایه مرزی حرارتی که در مجاورت دیوار صاف شکل می‌گیرد موجب افزایش ناسلت موضعی در فاصله x بین ۰/۲ تا ۰/۹ خواهد شد.




شکل (۴-۴۰) مقایسه تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیوارصاف محفظه به شکل کمان دایره به دست آمده از مطالعه حاضر و نتایج ارائه شده توسط چن چنگ[۱۵] در عددگراشهف $۱۰^۶$

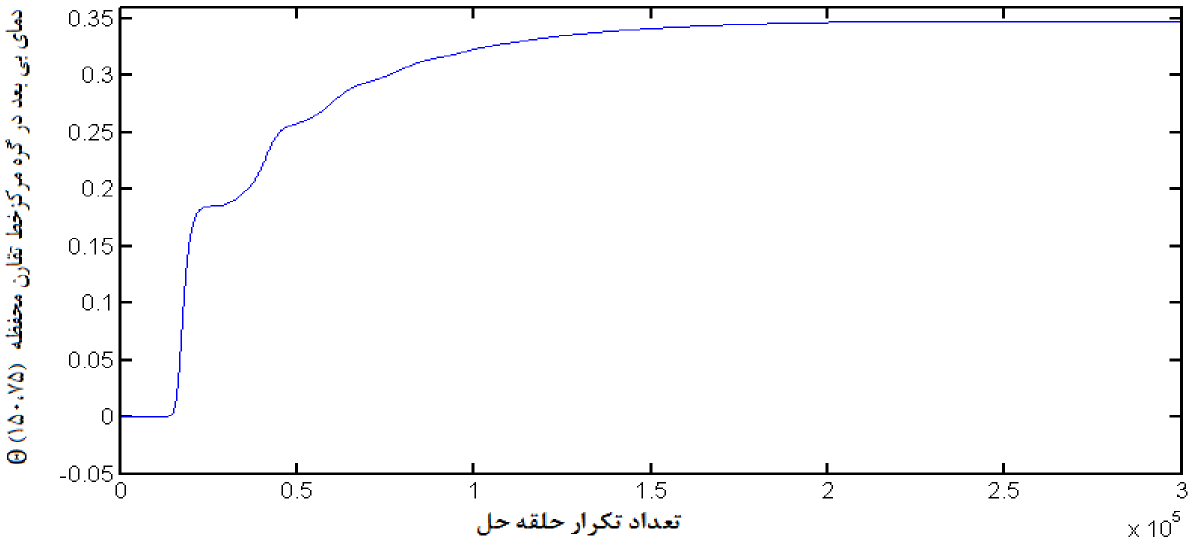
## ۴-۳-۳-۳- بررسی همگرایی:

به منظور اطمینان از همگرا شدن نتایج، تغییرات دمای بی‌بعد در مرکز خط تقارن عمودی محفظه در عدد رایلی $۱۰^۶$ در برابر تعداد تکرار حلقه حل در شکل (۴-۴۱) رسم شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود حلقه حل تا اندازه‌ی تکرار شده که تکرار بیش از آن تاثیری در نتیجه نهایی نداشته باشد.

## ۴-۳-۳-۴- استقلال از شبکه:

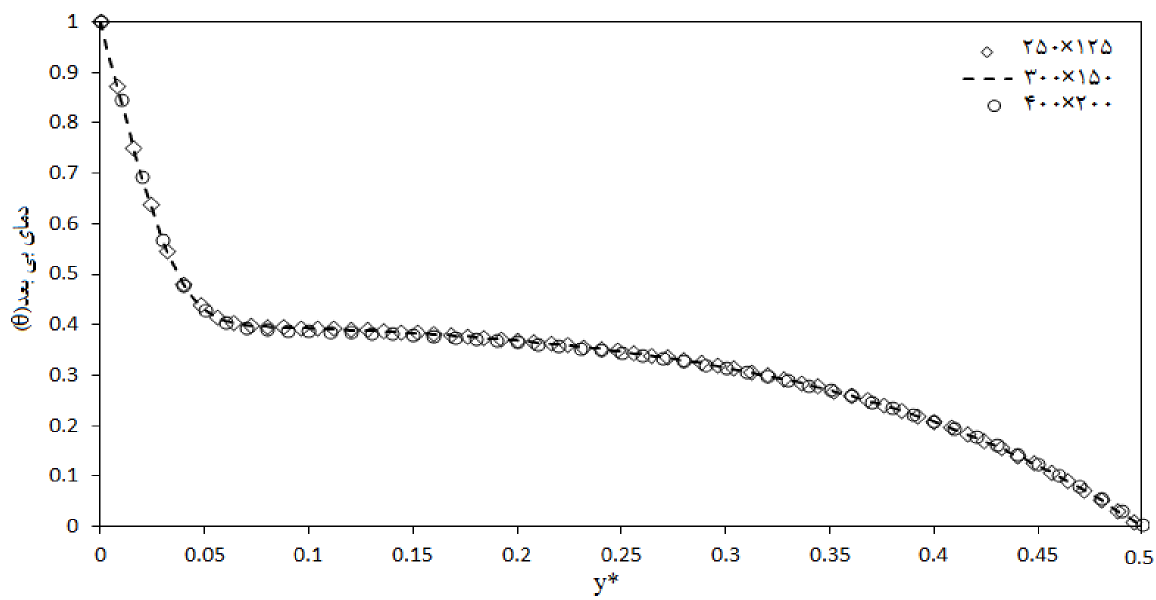
برای نشان دادن استقلال نتایج از ظرافت شبکه، تغییرات دمای بی‌بعد در مقطع x*=۰/۵ برای محفظه در عدد رایلی $۱۰^۵$ برای سه شبکه ۱۲۵×۲۵۰ و ۱۵۰ × ۳۰۰ و ۲۰۰×۴۰۰ در شکل ( ۴-۴۲) با هم

مقایسه شده است. می‌توان مشاهده کرد که نتایج از ظرافت شبکه مستقل است.




شکل (۴-۴۱) تغییرات دمای بی‌بعد در مرکز خط تقارن عمودی محفظه به شکل نیم دایره برای عدد رایلی $۱۰^۶$در برابر

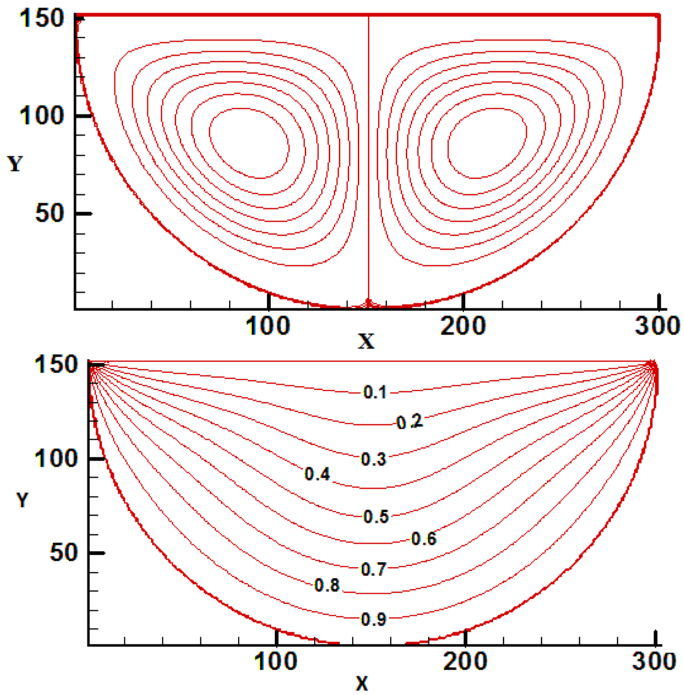
تکرار حلقه حل



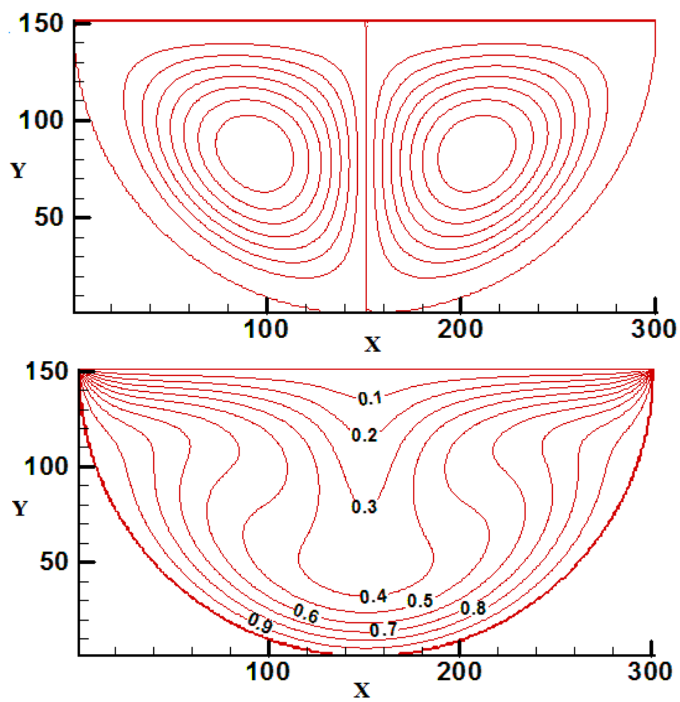

شکل (۴-۴۲) تغییرات دمای بی‌بعد در مقطع $x^*=۰/۵$ برای محفظه نیم دایره شکل در عدد رایلی $۱۰^۶$ در شبکه‌بندی مختلف

### ۴-۳-۳-۵- نتایج:

شکل(۴-۴۳) نشان دهنده خطوط جریان و خطوط هم‌دما درون محفظه در اعداد رایلی $۱۰^۴$،$۱۰^۵$ و $۱۰^۶$ است. همانطور که از شکل قابل ملاحظه است در تمام اعداد رایلی دو گردابه در محفظه ظاهر می شود. در واقع سیال که در مجاورت دیوار صاف سرد با افزایش چگالی مواجه می‌شود، در وسط این دیوار به سمت پایین حرکت می‌کند و در مجاورت دیوار منحنی به دو بخش تقسیم شده و در راستای این دیوار گرم می-شود و به سمت بالا حرکت می‌کند، بنابراین گردابه سمت راست پادساعتگرد و گردابه سمت چپ ساعتگرد خواهد بود. همانطور که مشاهده می‌شود در عدد رایلی پایین ( $Ra=۱۰^۴$ ) انتقال حرارت به شیوه هدایت در محفظه غالب است بنابراین خطوط هم‌دما به صورت یکنواخت و با فواصل تقریباً مساوی از هم‌مشاهده می‌شود اما با افزایش عدد رایلی انتقال حرارت به شیوه جابجایی غالب گشته و خطوط هم‌دما در مرکز به سمت دیوار پایین و در بخش‌های انتهایی به سمت دیوار بالا فشرده می‌شوند. شیب دما در مجاورت دیوار صاف نشان می‌دهد که بیشترین عدد ناسلت موضعی در دو انتهای این دیوار و حداقل عدد ناسلت موضعی در مرکز این دیوار مشاهده خواهد شد. شکل (۴-۴۴) تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار صاف را در اعداد رایلی مختلف نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود در اعداد رایلی پایین ( $Ra=۱۰^۴$ ) در بخش اعظمی از دیوار صاف ( فاصله ۰/۱ تا ۰/۹) عدد ناسلت موضعی تغییر چندانی ندارد و در واقع از یکنواختی خطوط هم‌دما چنین نتیجه‌ای دور از انتظار نبود اما با افزایش عدد رایلی نقطه کمینه منحنی کاملاً واضح خواهد شد و شیب آن در مجاورت مرکز منحنی تندتر و تندتر می‌شود.

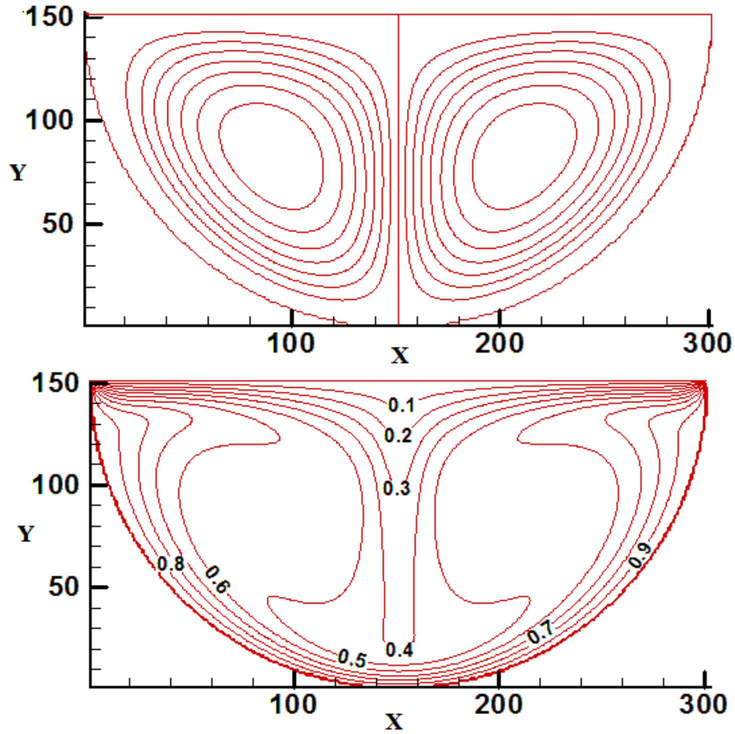



الف




ب

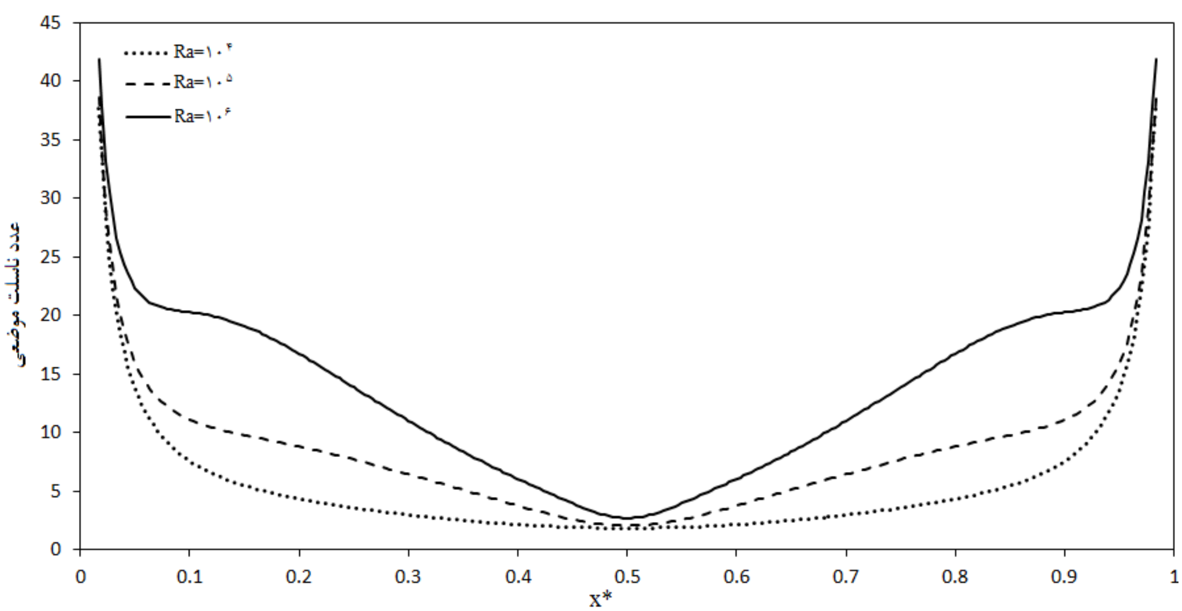
شکل (۴- ۴۳) خطوط جریان( شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) در محفظه‌ای به شکل نیم‌دایره‌ای در الف) $Ra=۱۰^{۴}$ ب) $Ra=۱۰^{۵}$




(ج)

ادامه شکل (۴- ۴۳) خطوط جریان( شکل بالا) و خطوط هم‌دما (شکل پایین) در محفظه‌ای به شکل نیم‌دایره‌ی در

ج) Ra=۱۰^۶




شکل (۴- ۴۴) تغییرات عدد ناسلت موضعی بر روی دیوارصاف  برای محفظه به شکل نیم دایره در اعداد رایلی مختلف

# فصل ۵:

# نتیجه گیری و پیشنهادات

## ۵-۱- نتیجه‌گیری

در این مطالعه جریان و انتقال حرارت برای سیال تراکم‌ناپذیر دوبعدی درون محفظه‌های غیرمربعی به روش بولتزمن شبکه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور ابتدا به شبیه‌سازی محفظه‌های غیر مربعی با درپوش متحرک پرداخته شده است. این مسئله که اغلب برای سنجش دقت و کارایی روش‌های عددی به کار می‌رود، برای محفظه‌های به شکل نیم بیضی، مثلث قائم‌الزاویه و محفظه‌های با دیواره دایروی مورد مطالعه قرار گرفت. در تمام شبیه‌سازی‌ها سرعت درپوش متحرک در مقیاس شبکه بولتزمن برابر ۰/۱ در راستای افق و در جهت چپ به راست در نظر گرفته شد و نتایج زیر به دست آمد:

الف: مقایسه با نتایج عددی نشان می‌دهد که این روش از دقت خوبی برخوردار می‌باشد و میتواند با دقت بالایی مرزهای مایل و منحنی را در هندسه‌های پیچیده شبیه‌سازی کند. سهولت اعمال شرایط مرزی در روش بولتزمن شبکه‌ای در مقایسه با سایر روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی موجب برتری این روش در مقایسه با سایر روش‌های مرسوم است.

ب: در اثر افزایش عدد رینولدز :

۱- تعداد گردابه‌ها افزایش می‌یابد.
۲- مرکز گردابه اولیه در جهت حرکت درپوش و به سمت آن جا به‌جا می‌شود.
۳- اندازه سرعت بیشینه در محفظه افزایش خواهد یافت.

ج: الگوی جریان به جهت حرکت درپوش وابسته است.

د: الگوی جریان تحت تاثیر هندسه محفظه و ابعاد آن است.

پس از اطمینان از توانایی روش بولتزمن شبکه‌ای در شبیه‌سازی مرزهای مایل، به بررسی پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌های غیر مربعی پرداخته شده است. برای این منظور سیال عامل هوا با

عدد پرانتل ۰/۷۱ در نظر گرفته شد. محفظه‌های به شکل مثلث قائم‌الزاویه، ذوزنقه و نیم‌دایره مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به دست آمده به شرح زیراند:

الف: مقایسه با نتایج عددی نشان می‌دهد که این روش به خوبی می‌تواند پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌های با مرز مایل و منحنی را شبیه‌سازی کند.

ب: الگوی جریان به شرایط مرزی دمایی دیواره‌های محفظه وابسته است و می‌توان شاهد یک یا دو گردابه در محفظه بود.

ج: در اعداد رایلی پایین، خطوط هم‌دما اغلب یکنواخت و هموار است که به دلیل شیوه غالب انتقال حرارت یعتی هدایت است و با افزایش عدد رایلی انتقال حرارت به شیوه جابجایی غالب گشته و خطوط هم‌دما از حالت یکنواختی خارج می‌شود.

د: تغییر وضعیت قرارگیری محفظه و زاویه مابین دیواره‌ها تاثیر قابل توجهی روی روند تغییر عدد ناسلت موضعی و انتقال حرارت روی دیوار مشخصی از محفظه دارد. مثلاً در محفظه مثلثی با زاویه قائمه در پایین محفظه در صورت ثابت بودن اندازه ارتفاع، افزایش زاویه مابین وتر و قاعده، موجب افزایش عدد ناسلت موضعی در هرنقطه از دیوار قائم گرم خواهد شد، درحالیکه در محفظه مثلثی با زاویه قائمه در بالا، افزایش این زاویه موجب کاهش ناسلت موضعی برای نقاط نزدیک زاویه قائمه و افزایش این عدد برای سایر نقاط خواهد شد. همچنین در محفظه ذوزنقه در صورت ثابت بودن اندازه دیوار پایین و ارتفاع محفظه، کاهش زاویه بین دیوار چپ و راست و دیوار گرم پایین، موجب افزایش ناسلت موضعی در هر نقطه روی دیوار خواهد شد.

ه: الگوی جریان در محفظه تحت تاثیر هندسه محفظه است.

## ۵-۲- پیشنهادات

با توجه به مراحل صورت گرفته در این پایان نامه، در نهایت ایده‌های در رابطه با موضوع مورد تحقیق قابل ارائه می‌باشند.

الف)بررسی پدیده انتقال حرارت در محفظه‌ی غیر مربعی با درپوش متحرک ،

ب) بررسی اثر مانع غیر مربعی در محفظه‌های غیرمربعی

ج) بررسی محفظه‌های غیر مربعی شامل محیط متخلخل یا شامل دیواره‌های باز

د)بررسی حرکت قطره یا حباب

# مراجع

[1] Glowinskis R., Guidoboni G. and Pan T. W. (**2006**) “Wall-driven incompressible viscous flow in a two-dimensional semi-circular cavity” **J. Comput. Phys**., **216**, pp **76-91.**

[2] Idris M. S., Irwan M. A. M. and Ammar N. M. M. (**2012**) “Steady state vortex structure of lid driven flow inside shallow semi ellipse cavity” **J. Mech. Eng. Sci**, **2**, pp **206-216.**

[3] Erturk E. and Gokcol O. (**2007**) “Fine grid numerical solutions of triangular cavity flow” **Eur. Phys. J. Appl. Phys**, **38**, pp **97-105.**

[4] McQuain W. D., Ribbens C. J., Wang C. Y. and Watson L. T. (**1994**) “Steady viscous flow in a trapezoidal cavity” **Comput. Fluids**, **23**, pp **613-626.**

[5] Paramane S. B. and Sharma A. (**2008**) “Consisent implementation and comparison of FOU, CD, SOU and QUICK convection schemes in square, skew, trapezoidal and triangular lid-driven cavity flow” **Numer. Heat. Tr. B-Fund**, **54, 3**, pp **84-102.**

[6] Asan H. and Namli L. (**2000**) “Laminar natural convection in a pitched roof of triangle cross-section: summer day boundary conditions” **Energy. Buildings**, **33,** pp **69-73.**

**[7]** Koca A., Oztop H. F. and Varol Y. (**2008**) “Numerical analysis of natural convection in shed roofs with eave of buildings for cold climates” **Comput. Math. Appl**, **56**, pp **3165-3174.**

**[8]** Basak T., Roy S. and Thirumalesha Ch. (**2007**) “Finite element analysis of natural convection in a triangular enclosure: Effects of various thermal boundary conditions” **Chem. Eng. Sci**, **62**, pp **2623-2640.**

**[9]** Basak T., Roy S., Krishna Babu S. and Balakrishnan A. R. (**2008**) “Finite element analysis of natural convection flow in a isosceles triangular enclosure due to uniform and non-uniform heating at the side walls” **Int. J. Heat. Mass. Tran**, **51**, pp **4496-4505.**

**[10]** Kent E. F. (**2009**) “Numerical analysis of laminar natural convection in isosceles triangular enclosures for cold base and hot inclined walls” **Mech. Res. Commun**, **36**, pp **497-508.**

**[11]** Kaluri R. S., Anandalakshmi A. and Basak T. (**2010**) “Bejan's heatline analysis of natural convection in right-angled triangular enclosures: Effects of aspect-ratio and thermal boundary conditions” **Int. J. Therm. Sci**, **49**, pp **1576-1592.**

**[12]** Natarajan E., Basak T. and Roy S. (**2008**) “Natural convection flows in a trapezoidal enclosure with uniform and non-uniform heating of bottom wall” **Int. J. Heat. Mass. Tran**, **51**, pp **747-756.**

**[13]** Basak T., Roy S. and Pop I. (**2009**) “Heat flow analysis for natural convection within trapezoidal enclosures based on heatline concept” **Int. J. Heat. Mass. Tran**, **52**, pp **2471-2483.**

**[14]** Basak T., Roy S., Singh A. and Pandey B. D. (**2009**) “Natural convection flow simulation for various angles in a trapezoidal enclosure with linearly heated side wall(s)” **Int. J. Heat. Mass. Tran**, **52**, pp **4413-4425.**

**[15]** Chen Ch. L. and Cheng Ch. H. (**2002**) “Buoyancy- induced flow and convective heat transfer in an inclined arc-shape enclosure” **Int. J. Heat. Fluid. Fl**, **23**, pp **823-830.**

**[16]** Chen Ch. L. and Cheng Ch. H. (**2012**) “Numerical prediction of natural convection with liquid fluids contained in an inclined arc-shaped enclosure” **Int. Commun. Heat. Mass**, **39**, pp **209-215.**

**[17]** Ridouane E. H. and Campo A. (**2006**) “Free convection performance of circular cavities having two active curved vertical sides and two inactive curved horizontal sides” **Appl. Therm. Eng**, **26**, pp **2409-2416.**

**[18]** Mahmud Sh., Das P. K., Hyder N. and Islam A. K. m. S. (**2002**) “Free convection in an enclosure with vertical wavy walls” **Int. J. Therm. Sci**, **41**, pp **440-446.**

**[19]** Das P. K. and Mahmud Sh. (**2003**) “Numerical investigation of natural convection inside a wavy enclosure” **Int. J. Therm. Sci**, **42**, pp **397-406.**

**[20]** Dalal A. and Das P. K. (**2005**) “Laminar natural convection in an inclined complicated cavity with spatially variable wall temperature” **Int. J. Heat. Mass. Tran**, **48**, pp **2986-3007.**

**[21]** Oztop H. F., Abu-Nada E., Varol Y. and Chamkha A. (**2011**) “natural convection in wavy enclosures with volumetric heat sources” **Int. J. Therm. Sci**, **50**, pp **502-514.**

**[22]** Cho Ch. Ch., Chen Ch. L. and Chen Ch. K. (**2012**) “Natural convection heat transfer performance in complex-wavy-wall enclosed cavity filled with nanofluid” **Int. J. Therm. Sci**, **60**, pp **255-263.**

**[23]** Munir F. A., Sidik Ch. A. N., Azmi M. I. M. and Zin M. R. M. (**2011**) “Application of lattice Boltzmann method in predicting flow of shear driven cavities” **J. Mech. Eng. Tech**, **3**, 2, pp **55-70,** ISSN 2180 – 1053.

**[24]** Zhang T., Shi B. and Chai Zh. (**2010**) “Lattice Boltzmann simulation of lid-driven flow in trapezoidal cavities” **Comut. Fluids**, **39**, 19, pp **1977-1989.**

**[25]** Filippova O. and Hanel D. (**1998**) “Grid refinement for lattice-BGK models” **J. Comput. Phys**, **47**, pp **219-228.**

**[26]** Mei R., Luo L. Sh and Shyy W. (**2000**) “An accurate curved boundary treatment in the lattice Boltzmann method” **J. Comput. Phys**, **155**, pp **307-330.**

**[27]** Mei R., Yu D., Shyy W. and Luo L. Sh. (**2002**) “Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry” **Phys. Rev. E**, **65**, pp **1/041203–14/041203.**

**[28]** Mei R., Shyy W., Yu D. and Luo L. Sh. (**2002**) “Lattice Boltzmann method for 3-D flows with curved boundary” **J. Comput. Phys**, **161**, pp **680-699.**

**[29]** Yan Y. Y. and Zu Y. Q. (**2008**) “Numerical simulation of heat transfer and fluid flow past a rotating isothermal cylinder-A LBM approach” **Int. J. Heat. Mass. Tran**, **51**, pp **2519-2536.**

[30] Hardy J., de Pazzis O. and pomeau Y. (**1976**) “Molecular dynamics of a classical lattice gas: transport properties and time correlation functions” **Phys. Rev. A**, **13**, pp **1949-1961.**

[31] Frisch U., Hasslacher B. and pomeau Y. (**1986**) “Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equations” **Phys. Rev. Lett**, **56, 14**, pp **1505-1508.**

[32] Succi S. (2001), “The lattice Boltzmann equation for Fluid Dynamics and beyond”, Oxford Universiy Press.

[33] McNamara G. and Zanetti G. (**1988**) “Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata” **Phys. Rev. Lett**, **61,** pp **2332-2335.**

[34] Sukop M. C. and Thorne D. T. (2007), “Lattice Boltzmann modeling: an introduction for geoscientists and Engineers”, Springer.

[35] He X. and Luo L. Sh. (**1997**) “Theory of the lattice Boltzmann equation: from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation ” **Phys. Rev. E**, **56, 6,** pp **6811-6817.**

[36] Bhatnagar P. L., Gross E.P. and Krook M. (**1954**) “A model for collision processes in gases. I. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems ” **Phys. Rev**, **94, 3**, pp **511-525.**

[37] Mohamad A. A. (2011), “Lattice Boltzmann method: fundamentals and engineering applications with computer codes”, Springer.

[38] Ladd A. J. C. (**1993**) “Numerical simulation of particular suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part I. theoretical foundation” **J. Fluid. Mech**, **271**, pp **285-309.**

[38] Ladd A. J. C. (**1994**) “Numerical simulation of particular suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 2. Numerical results” **J. Fluid. Mech**, **271**, pp **311-339.**

[40]Alexander F. J., Chen S. and Sterling J. D. (**1993**) “Lattice Boltzmann thermo hydrodynamics” **Phys. Rev. E**, **47, 4**, pp **2249-2252.**

[41] Teixeira C., Chen H. and Freed D.M. (**2000**) “Multi-speed thermal lattice Boltzmann method stabilization via equilibrium under-relaxation” **comput Phys Commun**, **129**, pp **207-226.**

[42] Guo Z., Shi B. and Zheng C., (**2002**) “A coupled lattice BGK model for the Boussinesq equation” **Int. J. Numer. Meth. Fl**, **39**, pp **325-342.**

[43] Barrios G., Rechtman R., Rojas J. and Tovar R., (**2005**) “The lattice Boltzmann equation for natural convection in a two- dimensional cavity with a partially heated wall” **J. Fluid. Mech**, **522**, pp **91-100.**

[44]Yu D., Mei R., Lue L. S. and Shyy W. (**2003**) “flow computations with the method of lattice Boltzmann equation” **Prog. Aerosp. Sci**, **39**, pp **329-367.**

[45] He X. and Luo L. Sh. (**1997**) “A priori derivation of the lattice Boltzmann equation” **Phys. Rev. E**, **55, 6,** pp **R6333-R6336.**

[46] He X., Luo L. Sh. and Dembo M. (**1996**) “Some progress in lattice Boltzmann method. Part I. Nonuniform mesh grids” **J. comput. Phys**, **129,** pp **357-363.**

[47] He X., Luo L. Sh. and Dembo M. (**1997**) "Some progress in lattice Boltzmann method. Reynolds number enhancement in simulation " **Physica. A**, **239,** pp **276-285.**

[48] He X. and Doolen G. (**1997**) " Lattice Boltzmann method on curvilinear coordinates system: Flow around a circular cylinder " **J. comput. Phys**. **134,** pp **306-315.**

[49] Mei R. and Shyy W. (**1988**) "On the finite difference-based lattice Boltzmann method in curvilinear coordinates" **J. Comput. Phys**, **143**, pp **426-448.**

Abstract

In this study, numerical simulation of incompressible flow inside two-dimensional non-square cavities are studied via lattice Boltzmann method. In fact, two kinds of problems are studied. First, incompressible flow inside non-square lid driven cavities including semi-ellipse, triangular and arc-square cavities are investigated and the results are presented in form of streamlines for different Reynolds numbers. Also, for triangular cavity, the effect of lid direction and for arc-square cavity, the effect of cavity dimensions are investigated. The results show that as Reynolds number increases, the number of the vortexes increases and with change of cavity dimensions and lid direction, the different flow pattern is created.

Then, natural convection heat transfer inside non-square cavities including triangular, trapezoidal and semi-circular cavities are analyzed and for these cavities, the simulation was carried out with a fluid with Pr=0.71 and the streamlines and temperature profiles and local Nusselt number are presented for different Rayleigh numbers. Results indicate that the for low Rayleigh numbers, the isotherm lines are smooth and monotonic. As Rayleigh number increases, the temperature contours getting condensed. Also, for triangular cavity, the effect of situation of cavity and side angles on the heat transfer rate and flow pattern are studied. The results show that in triangular with right angle and constant height, when the right angle of the cavity is located at the lower point of cavity, with increasing side angles, the local Nusselt number at vertical wall increases. In contrast, when the right angle is at the top point of the cavity, the local Nusselt number of points near the right angle on the vertical wall decreases with increasing side angles. In fact, a minimum value is observed in the diagram of variation of local Nusselt numbers at vertical wall with distance from horizontal wall. Also, the results for trapezoidal cavity are presented for two different angles of cavity and it is shown that local Nusselt number at hot bottom wall is greater for smaller angle between sides and height of cavity. The results predicted by the LBM model are in good agreement with the numerical results presented. Considering advantages of LBM compared to traditional methods (simplicity of programming, locality of computation, natural parallelism and easiness in dealing with complex boundaries), it can be a good alternative for traditional methods.

Keywords: lattice Boltzmann method, Non-square cavity, lid driven, natural convection

**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mechanical Engineering**

# numerical investigation of fluid flow and heat transfer in a cavity with oblique boundaries using Lattice Boltzmann method

Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science (M.Sc)

**Hosna shokri**

Supervisors

**Dr. M. Kayhani**

**Dr. M. Nazari**

**Date: February 2013**