

صلى الله عليه وسلم



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی جامدات

تحلیل عددی گسترش ترک در یک صفحه از جنس ماده تابعی

تحت بار دینامیکی و شوک حرارتی

دانشجو

مسعود مهدی زاده رخی

استاد راهنما

پروفسور محمود شریعتی

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

دی ماه ۱۳۹۱



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۱

شماره :
تاریخ :
ویرایش :

بسمه تعالی

صور تجلسه دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود آقای مسعود مهدی زاده رخی دانشجوی دکتری رشته مکانیک ورودی سال ۸۶ در تاریخ ۹۱/۱۰/۱۷ از رساله خود با عنوان : تحلیل عددی گسترش ترک در یک صفحه از جنس ماده تابعی تحت بار دینامیکی و شوک حرارتی دفاع و با اخذ ۱۹۱۰۲ به درجه : عالی نائل گردید .

<input checked="" type="checkbox"/> الف (درجه عالی : نمره ۱۹-۲۰	<input type="checkbox"/> ب) درجه بسیار خوب : نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷
<input type="checkbox"/> ج (درجه خوب : نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵	<input type="checkbox"/> د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
<input type="checkbox"/> ذ) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر محمود شریعتی	استاد راهنما	استاد	
۲	دکتر امیر رضا شاهانی	استاد مدعو خارجی	استاد	
۳	دکتر رحمت الله قاجار	استاد مدعو خارجی	استاد	
۴	دکتر محمد باقر نظری	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۵	دکتر حمید رضا ایپکچی	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۶	دکتر علیرضا شاطرزاده	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه
ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید .

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران :

تاریخ و امضاء

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

تقدیم به برادر و خواهر دلسوزم

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از لطف و عنایت کلیه اساتید بزرگوارم تشکر و قدردانی نمایم. به ویژه از استاد راهنمای گرامی جناب آقای پروفسور محمود شریعتی به خاطر کمک‌ها و پشتیبانی‌های دلسوزانه بسیار سپاسگذارم.

همچنین از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر نظری نیز به دلیل رهنمودهای ارزشمند در انجام این رساله قدردانی می‌کنم.

تعهد نامه

اینجانب مسعود مهدی زاده رخی دانشجوی دوره دکتری رشته مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده رساله تحلیل عددی گسترش ترک در یک صفحه از جنس ماده تابعی تحت بار دینامیکی و شوک حرارتی تحت راهنمایی پروفسور محمود شریعتی متعهد می شوم:

* تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است.

* در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

* مطالب مندرج در رساله تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.

* کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.

* حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت می گردد.

* در کلیه مراحل انجام این رساله در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

* کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و ...) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد.

* استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این رساله رفتار شکست مواد تابعی تحت شوک‌های حرارتی-مکانیکی مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. برای این منظور از معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک جفت شده استفاده می‌شود. ابتدا این معادلات با استفاده روش المان محدود توسعه یافته در قلمرو مکان گسسته‌سازی شده و سپس با استفاده از روش نیومارک در قلمرو زمان حل می‌شوند. در این رساله شبیه‌سازی مواد تابعی توسط مدل‌های میکرومکانیکی متداول برای مواد مرکب و با بهره‌گیری از المان‌های ایزوپارامتریک تعمیم یافته که تغییرات خواص ماده را به صورت پیوسته مدل‌سازی می‌کنند، انجام می‌شود. در این مقاله کلی‌ترین شکل انتگرال برهمکنش برای ترک‌های متحرک تحت بارهای حرارتی و مکانیکی در مواد تابعی استخراج و برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی بکار گرفته می‌شود.

کلیه مراحل حل مسئله از المان‌بندی نمونه تا حل معادلات مربوطه و استخراج نتایج در محیط برنامه‌نویسی نرم‌افزار MATLAB صورت گرفته است. صحت و دقت برنامه نوشته شده با استفاده از حل چندین مثال عددی و مقایسه نتایج حاصل از آنها با نتایج تحلیلی و عددی موجود در مقالات دیگر به اثبات می‌رسد. در نهایت سه مثال عددی دیگر که عبارتند از یک صفحه تابعی از جنس Al_2O_3/Si_3N_4 با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی، یک تیر تابعی ترک‌دار از جنس شیشه/اپوکسی تحت شوک گرمایی-مکانیکی و یک صفحه تابعی از جنس $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی با ترک لبه‌ای در حالت کرنش صفحه‌ای حل می‌شوند و اثر پروفیل تغییر خواص ماده تابعی بر رفتار ضرایب شدت تنش و نیز سرعت و مسیر رشد ترک در آنها مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی:

شکست دینامیکی؛ رشد ترک؛ مواد تابعی؛ ترموالاستیسیته جفت شده؛ شوک گرمایی-مکانیکی.

مقالات مستخرج از رساله

کنفرانس‌ها

- ۱- مسعود مهدی‌زاده رخی، محمود شریعتی، "ارائه روابط عددی برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مواد تابعی (FGMs) با ترک لبه‌ای به کمک روش المان محدود توسعه یافته" یازدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ۱-۳ اسفند ماه ۱۳۹۰.
- ۲- مسعود مهدی‌زاده رخی، محمود شریعتی، محمد باقر نظری، "مطالعه رشد ترک در مواد تابعی (FGMs) به کمک روش المان محدود توسعه یافته" یازدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ۱-۳ اسفند ماه ۱۳۹۰.

مجلات

- ۱- محمود شریعتی، مسعود مهدی‌زاده رخی، "مطالعه شکست دینامیکی مواد تابعی تحت شوک‌های حرارتی - مکانیکی" مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، شماره ۳، ۱۳۹۱.

2- Masoud Mahdizadeh Rokhi, Mahmoud Shariati, "Implementation of the Extended Finite Element Method for Coupled Dynamic Thermoelastic Fracture of a Functionally Graded Cracked Layer" J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng, Vol. 34(4), 2012.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
فصل اول	
۱	مقدمه.....
۲	۱-۱- مقدمه.....
۴	۱-۲- مطالعات تحلیلی انجام شده.....
۱۱	۱-۳- بررسی مطالعات عددی انجام شده.....
۱۷	۱-۴- خلاصه ای از مباحث ارائه شده در این رساله.....
فصل دوم	
۱۹	مواد تابعی.....
۲۰	۱-۲- معرفی مواد تابعی و کاربردهای آنها.....
۲۲	۲-۲- خواص موثر مواد تابعی.....
فصل سوم	
۲۷	روش المان محدود توسعه یافته.....
۲۸	۱-۳- مقدمه.....
۲۹	۲-۳- تفکیک واحد المان های محدود غنی شده.....
۳۰	۲-۳- مدل سازی ترک ها در روش المان محدود توسعه یافته.....
۳۴	۳-۳- المان های ایزوپارامتریک تعمیم یافته.....
۳۶	۳-۴- انتگرال گیری عددی.....
۳۸	۳-۵- تعیین موقعیت نقاط نسبت به مسیر ترک.....
فصل چهارم	
۴۳	حل معادلات ترموالاستیک کلاسیک جفت شده.....

- ۴-۱-۱- مقدمه ۴۴
- ۴-۲- استخراج معادلات ترموالاستیک جفت شده کلاسیک ۴۵
- ۴-۳- گسسته سازی معادلات ترموالاستیک جفت شده کلاسیک ۴۹
- ۴-۴- روش نیومارک ۶۷

فصل پنجم

- مکانیک شکست دینامیکی ۷۰
- ۵-۱- مقدمه ۷۱
- ۵-۲- انتگرال J ۷۱
- ۵-۳- انتگرال برهمکنش ۷۵
- ۵-۳-۱- فرمول بندی ها برای مواد ناهمگن ۷۶
- الف- فرمول بندی ناسازگاری ۷۷
- ب- فرمول بندی تانسور تشکیل دهنده ثابت ۷۸
- ج) فرمول بندی غیر تعادلی ۷۸
- ۵-۴- محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی ۸۳
- ۵-۴-۱- ضرایب شدت تنش برای ترک ایستا ۸۳
- ۵-۴-۲- ضرایب شدت تنش برای ترک متحرک ۸۴
- ۵-۵- معیار رشد ترک ۸۵
- ۵-۵-۱- محاسبه سرعت رشد ترک ۸۷

فصل ششم

- مثال های عددی ۹۰
- ۶-۱- مقدمه ۹۱
- ۶-۱-۱- ویژگی های برنامه نوشته شده ۹۱
- ۶-۲- مثال اول: صفحه همگن با ترک لبه ای تحت شوک گرمایی ۹۲

- ۳-۶- مثال دوم: صفحه تابعی Si_3N_4/Al_2O_3 با ترک لبه ای تحت شوک گرمایی ۹۴
- ۴-۶- مثال سوم: صفحه همگن با ترک لبه ای تحت شوک مکانیکی ۹۷
- ۵-۶- مثال چهارم: تیر همگن ترکدار تحت شوک مکانیکی ۹۹
- ۶-۶- مثال پنجم: رشد ترک در صفحه تابعی Al_2O_3/Si_3N_4 ۱۰۱
- ۷-۶- مثال ششم: تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ترک لبه ای ۱۰۶
- ۸-۶- مثال هفتم: صفحه تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با ترک لبه ای ۱۱۸

فصل هفتم

- نتیجه گیری و پیشنهادها ۱۳۱
- ۱-۷- مقدمه ۱۳۲
- ۲-۷- نتایج بدست آمده ۱۳۲
- ۳-۷- پیشنهادها ۱۳۴

پیوست الف

- میدان های کمکی نوک ترک ۱۳۵
- الف-۱- میدان های کمکی برای ترک ایستا ۱۳۵
- الف-۲- میدان های کمکی برای ترک های متحرک ۱۳۷
- منابع ۱۳۹

فهرست شکل‌ها

صفحه

عنوان

شکل ۱-۱	(دو نمونه از شکست‌های دینامیکی الف) گسترش ترک از لبه پره توربین گازی به داخل	۴
شکل ۱-۲	(سطح آن ب) شکست بتن بعد از اصابت موشک [۶]	۲۲
شکل ۲-۲	مدل‌های تحلیلی برای یک ماده تابعی [۱۰۷]	۲۳
شکل ۲-۳	منحنی تغییرات کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس، توصیف شده با پارامتر p	شکل ۱-۳
شکل ۱-۳	یک ترک دلخواه در یک شبکه با المان‌های غنی شده گام (المان‌های هاشور خورده) و المان‌های غنی شده نوک (المان‌های پر رنگ شده). گره‌ها در مجموعه‌های NH و NC به ترتیب با مربع‌ها و دایره‌ها مشخص شده‌اند	۳۱
شکل ۲-۳	المان محدود ایزوپارامتریک	۳۵
شکل ۳-۳	موقعیت نقاط گوسی در المان‌های مربعی و مثلثی در حالت $nQ = 10$	۳۷
شکل ۴-۳	تقسیم بندی المان‌های شامل ترک برای انتگرال گیری عددی	۳۸
شکل ۵-۳	تقسیم بندی المان شامل نوک ترک برای انتگرال گیری عددی	۳۸
شکل ۶-۳	موقعیت یک نقطه دلخواه نسبت به مسیر ترک	۳۹
شکل ۷-۳	الگوریتم یافتن تابع فاصله Z	۴۱
شکل ۱-۵	مسیر انتگرال J اطراف نوک ترک	۷۳
شکل ۲-۵	تابع وزنی مسطح q [۶۴]	۸۳
شکل ۳-۵	دستگاه‌های مختصات سراسری و محلی در نوک ترک	۸۴
شکل ۴-۵	الگوریتم محاسبه سرعت رشد ترک	۸۹
شکل ۱-۶	هندسه و ابعاد صفحه همسانگرد همگن دارای ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی	۹۴
شکل ۲-۶	آزمون همگرایی ضرایب شدت تنش بدست آمده با تعداد المان‌های متفاوت برای مثال	اول
شکل ۳-۶	نمودار ضریب شدت تنش بی بعد شده در برابر لگاریتم زمان بی بعد شده برای مثال اول	اول
شکل ۳-۶	نمودار ضریب شدت تنش بی بعد شده در برابر لگاریتم زمان بی بعد شده برای مثال اول	۹۵

- شکل ۶-۴- هندسه و شرط مرزی لایه تابعی $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{Al}_2\text{O}_3$ با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی ۹۶
- شکل ۶-۵- مقایسه منحنی‌های ضریب شدت تنش مد اول برای لایه تابعی تحت شوک حرارتی،
الف) $a/L = 0/1$ ب) $a/L = 0/3$ ۹۸
- شکل ۶-۶- هندسه و نحوه بارگذاری صفحه همسانگرد همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک مکانیکی ۹۹
- شکل ۶-۷- مقایسه ضریب شدت تنش $\text{KI} (\text{Pa}\sqrt{\text{m}})$ به دست آمده در این تحقیق با مقادیر حل
تحلیلی برای مثال سوم ۱۰۰
- شکل ۶-۸- هندسه تیر همگن ترکدار تحت شوک مکانیکی ۱۰۱
- شکل ۶-۹- مقایسه منحنی‌های ضریب شدت تنش KI بی بعد شده برای تیر تحت شوک مکانیکی ... ۱۰۲
- شکل ۶-۱۰- هندسه و شرایط مرزی لایه تابعی $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Si}_3\text{N}_4$ با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی
(مثال پنجم) ۱۰۳
- شکل ۶-۱۱- مطالعه اثر پارامتر p بر روی ضرایب شدت تنش برای لایه تابعی $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Si}_3\text{N}_4$ به روش
عددی حاضر. الف) KI برای ترک افقی، ب) KI برای ترک مایل با زاویه ۲۰ درجه، ج)
KII برای ترک مایل با زاویه ۲۰ درجه ۱۰۴
- شکل ۶-۱۲- منحنی‌های ضرایب شدت تنش بی بعد برای ترک‌های لبه‌ای با زاویه اولیه متفاوت در
لایه تابعی $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Si}_3\text{N}_4$. الف) KI ، ب) KII ۱۰۵
- شکل ۶-۱۳- مسیر رشد ترک، کانتورهای تنش ون میزز با واحد پاسکال (Pa) و شبکه تغییر شکل
یافته با جابجایی‌هایی که ۵۰ برابر بزرگ شده‌اند برای ترک لبه‌ای افقی در لایه تابعی
 $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Si}_3\text{N}_4$ تحت شوک گرمایی $\theta = -500^\circ\text{K}$ (مثال پنجم) ۱۰۶
- شکل ۶-۱۴- مسیر رشد ترک برای ترک لبه‌ای با زاویه اولیه ۲۰ درجه در لایه تابعی $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Si}_3\text{N}_4$
تحت شوک گرمایی $\theta = -500^\circ\text{K}$ در لحظه $t = 0/01$ s، الف) کانتورهای تنش ون
میزز با واحد پاسکال (Pa)، ب) کانتورهای جابجایی u_y با واحد متر (m) ۱۰۷
- شکل ۶-۱۵- هندسه و بارگذاری تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی-
مکانیکی ۱۰۷

- شکل ۶-۱۶- مقایسه منحنی‌های KI با واحد $(Pa\sqrt{m})$ بر حسب زمان برای سه بارگذاری مختلف بر روی تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ماتریس شیشه ۱۰۹
- شکل ۶-۱۷- مقایسه منحنی‌های KI با واحد $(Pa\sqrt{m})$ بر حسب زمان برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی تحت شوک حرارتی-مکانیکی با سه مقدار مختلف p (الف) ماتریس شیشه، (ب) ماتریس اپوکسی ۱۱۰
- شکل ۶-۱۸- مقایسه منحنی‌های ضرایب شدت تنش با واحد $Pa\sqrt{m}$ برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ماتریس اپوکسی تحت شوک حرارتی-مکانیکی با سه مقدار مختلف e (الف) KI، (ب) KII ۱۱۱
- شکل ۶-۱۹- منحنی‌های جابجایی نقطه میانی لبه بالایی تیر تابعی شیشه/اپوکسی تحت شوک حرارتی و مکانیکی در حالت $p = 1$ (الف) ماتریس شیشه، (ب) ماتریس اپوکسی ۱۱۲
- شکل ۶-۲۰- درصد اختلاف مقادیر خیز نقطه میانی لبه بالایی تیر حاصل از معادلات جفت شده و غیر جفت شده برای تیری با ماتریس اپوکسی و پارامتر $p = 1$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی ۱۱۳
- شکل ۶-۲۱- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای میدان تنش ون میزز با واحد پاسکال (Pa) در زمان‌های مختلف برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ماتریس شیشه در حالت $p = 1$ و $e = 0$ تحت شوک مکانیکی ۱۱۴
- شکل ۶-۲۲- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش و جابجایی و نیز شبکه تغییر شکل یافته برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ماتریس اپوکسی در حالت $p = 1$ و $e = 0$ تحت شوک گرمایی $\theta = 20^\circ K$ در زمان $t = 100 \mu s$ ۱۱۵
- شکل ۶-۲۳- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش و جابجایی و نیز شبکه تغییر شکل یافته برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ماتریس شیشه در حالت $p = 1$ و $e = 0$ تحت شوک گرمایی $\theta = 20^\circ K$ در زمان $t = 50 \mu s$ ۱۱۶

- شکل ۶-۲۴- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای میدان تنش ون میزز و جابجایی در جهت طول تیر (Y) برای تیرهای تابعی شیشه/اپوکسی در حالت $p = 1$ و $e = 0$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی ۱۱۷
- شکل ۶-۲۵- منحنی‌های ضرایب شدت تنش معادل با واحد $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی در حالت $p = 1$ و $e = 0$ تحت الف) شوک گرمایی $(\theta = 20^\circ\text{K})$ ب) شوک گرمایی-مکانیکی ۱۱۸
- شکل ۶-۲۶- منحنی‌های سرعت رشد ترک برای تیر شیشه/اپوکسی در حالت $p = 1$ و $e = 0$ تحت الف) شوک گرمایی $(\theta = 20^\circ\text{K})$ ب) شوک گرمایی-مکانیکی ۱۱۸
- شکل ۶-۲۷- هندسه و شرایط بارگذاری صفحه تابعی $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ با یک ترک لبه‌ای ۱۱۹
- شکل ۶-۲۸- منحنی‌های ضریب شدت تنش با واحد $(\text{Pa}\sqrt{\text{m}})$ بر حسب زمان برای صفحه تابعی $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ تحت شوک‌های گرمایی و مکانیکی الف) $p = 1$ ، ب) $p = 5$ ، ج) p متغیر، صفحه تحت شوک مکانیکی و شوک مکانیکی-گرمایی، د) p متغیر، صفحه تحت شوک گرمایی و شوک مکانیکی-گرمایی ۱۲۱
- شکل ۶-۲۹- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش ون میزز با واحد Pa و شبکه تغییر شکل یافته برای صفحه تابعی $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ با پارامتر $p = 0.2$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های مختلف ۱۲۲
- شکل ۶-۳۰- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای جابجایی با واحد متر برای صفحه تابعی $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ با پارامتر $p = 0.2$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های مختلف ۱۲۳
- شکل ۶-۳۱- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش ون میزز با واحد Pa و شبکه تغییر شکل یافته برای صفحه تابعی $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ با پارامتر $p = 1$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های مختلف ۱۲۴

- شکل ۳۲-۶- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای جابجایی با واحد متر برای صفحه تابعی
 ۱۲۵ ZrO₂/Ti-6Al-4V با پارامتر $p = 1$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های مختلف
- شکل ۳۳-۶- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش ون میزز با واحد Pa و شبکه تغییر شکل
 یافته برای صفحه تابعی ZrO₂/Ti-6Al-4V با پارامتر $p = 5$ تحت شوک گرمایی-
 ۱۲۶ مکانیکی در زمان‌های مختلف
- شکل ۳۴-۶- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای جابجایی با واحد متر برای صفحه تابعی
 ۱۲۷ ZrO₂/Ti-6Al-4V با پارامتر $p = 5$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های مختلف
- شکل ۳۵-۶- مقایسه مسیرهای رشد ترک در صفحه تابعی ZrO₂/Ti-6Al-4V با پارامترهای
 ۱۲۸ $p = 0.2$, $p = 1$ و $p = 5$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی
- شکل ۳۶-۶- منحنی‌های سرعت گسترش نوک ترک بر حسب زمان برای صفحات تابعی
 ۱۲۹ ZrO₂/Ti-6Al-4V با پارامترهای p مختلف تحت شوک گرمایی-مکانیکی
- شکل الف-۱- دستگاه مختصات محلی نوک ترک
 ۱۳۵

فهرست جدول‌ها

صفحه	عنوان
۳۹	جدول ۱-۳- تفسیر پارامتر τ_c
۹۷	جدول ۱-۶- خواص Al_2O_3 و Si_3N_4 [۴۵]
۱۰۸	جدول ۲-۶- خواص اپوکسی و شیشه [۶]
۱۱۹	جدول ۳-۶- خواص ZrO_2 و Ti-6Al-4V [۱۰۰]

فهرست علامتها

مساحت المان، (m^2)	A
مساحت ناحیه انتگرال برهمکنش، (m^2)	A^*
طول ترک، (m)	a
بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل المان محدود	\mathbf{a}
ضخامت نمونه، (m)	B
بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم، (N/m^3)	B_f
مولفه‌های بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم، (N/m^3)	B_x و B_y
بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل غنی‌شده با تابع هویساید	\mathbf{b}
بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل غنی‌شده نوک ترک	\mathbf{c}
ماتریس میرایی	$[C]$
مولفه‌های ماتریس تشکیل دهنده ماده (N/m^2)	C_{ijkl}
سرعت موج ریلی، (m/sec)	c_r
سرعت موج برشی، (m/sec)	c_s
ظرفیت گرمایی ویژه، ($J/(kg \cdot ^\circ K)$)	c_t
ماتریس خواص ماده، (N/m^2)	$[D]$
خروج از مرکز، (m)	e
مدول یانگ، (N/m^2)	E
بردار نیروهای گره‌ای، (N)	F
توابع غنی‌سازی نوک ترک، ($m^{0.5}$)	F_m
بردار نیرو، (N)	Fr
مدول صلبیت برشی، (N/m^2)	G
تابع هویساید	H
انتگرال J ، (N/m)	J
ماتریس ژاکوبی	Ja
هدایت گرمایی، ($W/(m \cdot ^\circ K)$)	k
مدول حجمی، (N/m^2)	K

ماتریس سفتی	[K]
چگالی انرژی جنبشی، (N/m^2)	KE
ضریب شدت تنش معادل، ($N.m^{-1.5}$)	K_I^{eq}
مد I ضریب شدت تنش، ($N.m^{-1.5}$)	K_I
چقرمگی شکست، ($N.m^{-1.5}$)	K_{Id}
ضریب شدت تنش بی بعد،	K_{IDim}
ضریب شدت تنش مد دوم، ($N.m^{-1.5}$)	K_{II}
ضریب شدت تنش گرمایی، ($N.m^{-1.5}$)	K_T
طولی که بار گسترده بر روی آن توزیع می‌شود، (m)	l
طول نمونه، (m)	L
بردار نرمال بر مسیر انتگرال گیری در انتگرال J	m
ماتریس جرم، (kg)	[M]
انتگرال برهمکنش، (N/m)	MI
تعداد توابع شکل المان محدود توسعه یافته	n_s
تابع شکل روش المان محدود	N
مجموعه گره‌های شبکه	N_A
مجموعه گره‌های اطراف مسیر ترک	N_H
مجموعه گره‌های المان‌های نوک ترک	N_C
بردارهای نرمال در جهت‌های x و y	n_x و n_y
تعداد نقاط گوسی	n_Q
پارامتر تعیین کننده پروفیل تغییر کسر حجمی اجزای تشکیل دهنده ماده تابعی، بی بعد	p
تابع وزنی برای محاسبه انتگرال برهمکنش، بی بعد	q
مولفه‌های بردار شار گرمایی بر واحد سطح، (W/m^2)	q_i
گرمای تولید شده بر واحد حجم، (W/m^3)	R
مولفه دستگاه مختصات قطبی، (m)	r
پارامتر تعریف شده با رابطه (۳-۲۵)	r_C
پارامتر تعریف شده با رابطه (۳-۲۶)	r_S

بردار توابع شکل روش المان محدود توسعه یافته	S
چگالی انرژی کرنشی، (N/m^2)	SE
دما، $(^{\circ}K)$	T
بردار نیروی سطحی بر واحد سطح، (N/m^2)	Tr
زمان، (sec)	t
زمان بی بعد شده	t_D
مولفه‌های بردار نیروی سطحی، (N/m^2)	t_x^n و t_y^n
بردار جابجایی	u
حجم، (m^3)	V
کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس یک ماده تابعی	V_i
کسر حجمی ماتریس یک ماده تابعی	V_m
توابع وزنی در انگرال گیری گوسی	w
ارتفاع نمونه، (m)	W
مولفه‌های دستگاه مختصات دکارتی سراسری، (m)	X_1 و X_2
مولفه‌های دستگاه مختصات دکارتی، (m)	x و y
تابع فاصله علامت‌دار، (m)	Z

علامت‌های یونانی

ضریب انبساط گرمایی، $(1/^{\circ}K)$	α_t
سرعت موج انبساطی، (m/sec)	α_d
سرعت موج برشی، (m/sec)	α_s
عبارت جفت کننده معادلات ترموالاستیک کلاسیک، $N/(m^2 \cdot ^{\circ}K)$	β
توابع تعریف شده با روابط (۴۵-۵) و (۴۶-۵)	β_i
پارامترهای فرمول بندی نیومارک، بی بعد	γ و ζ
دلتای کرونگر، بی بعد	δ_{ij}
تانسور کرنش، بی بعد	ε
تانسور کرنش کمکی، بی بعد	ε_{aux}
مولفه‌های تانسور کرنش مکانیکی	ε_{ij}^m

θ	تغییر دما، ($^{\circ}\text{K}$)
μ و λ	ثوابت لامه، (N/m^2)
ξ و η	مولفه‌های دستگاه مختصات محلی در المان‌های ایزوپارامتریک
κ	ضریب کلوسوف، بی بعد
ν	نسبت پواسون، بی بعد
ρ	چگالی، (kg/m^3)
φ	مولفه دستگاه مختصات قطبی، بی بعد
ϕ	تابع تفکیک واحد
σ	تانسور تنش، (N/m^2)
σ^{aux}	تانسور تنش کمکی، (N/m^2)
σ_{nc}	تنش بحرانی، (N/m^2)
Φ	تابع شکل غنی شده برای المان‌های مسیر ترک، بی بعد
Ψ	تابع شکل غنی شده برای المان‌های نوک ترک، بی بعد
ω	زاویه بین دستگاه‌های مختصات محلی و سراسری، بی بعد
ω_c	زاویه رشد ترک، بی بعد
Δ	بردار مجهولات گره‌ای
ζ	یک طول اختیاری کوچکتر از ابعاد یک المان برای استفاده در رابطه (۳-۱۰)، (m)
Γ	مسیر انتگرال گیری در انتگرال J

بالا نویس‌ها

aux	مربوط به میدان‌های کمکی
E	مربوط به حالت الاستیک
i	مربوط به ماده افزوده شده به ماتریس ماده تابعی
m	مربوط به ماتریس ماده تابعی و حالت مکانیکی
n	مربوط به بردار نرمال n
s	مربوط به حالت برهم نهی
T	مربوط به دما
u و v	به ترتیب مربوط به جابجایی در جهت محورهای مختصات افقی و قائم

زیر نویس ها

مربوط به مختصات سراسری	g
شمارنده، مربوط به گره‌ها در یک المان	h
شمارنده، مربوط به مولفه x دستگاه مختصات دکارتی و نیز ماده افزوده شده به ماتریس	i
شمارنده، مربوط به مولفه y دستگاه مختصات دکارتی،	j
شمارنده	k
شمارنده مربوط به توابع شکل و نیز نشان دهنده مختصات محلی	l
مربوط به طرف چپ	L
شمارنده، مربوط به توابع غنی سازی نوک ترک و نیز ماتریس ماده تابعی	m
شمارنده، مربوط به گره‌ها، گام زمانی، و مولفه‌های دستگاه مختصات	n
شمارنده، مربوط به گره‌ها در المان e	ne
شمارنده، مربوط به توابع شکل المان محدود توسعه یافته	ns
مربوط به طرف راست	R
مربوط به سطوح مرزی	s
مربوط به نوک ترک	tip
مربوط به حالت اولیه	(0)
شمارنده	۱ تا ۹

فصل اول

مقدمه

۱-۱- مقدمه

در سال‌های اخیر مواد تابعی به دلیل خواص مکانیکی و گرمایی مطلوب و قابل کنترل به طور روز افزون مورد توجه مهندسان و محققان قرار گرفته‌اند. مواد تابعی متشکل از سرامیک و فلز، متداول‌ترین مواد تابعی هستند که از فاز سرامیک در یک طرف به صورت تدریجی به فاز فلز در طرف دیگر تغییر می‌کنند. این مواد به طور همزمان از چقرمگی بالا و استحکام مکانیکی بالای فلزات و مقاومت گرمایی و مقاومت در برابر خوردگی و سایش مواد سرامیکی بهره می‌برند. به دلیل شکنندگی ذاتی سرامیک‌ها، پدیده گسترش ترک تحت بارهای دینامیکی مهمترین عامل خرابی این مواد در بسیاری از کاربردهای مهندسی است. بنابراین بررسی رفتار شکست این مواد با توجه به زمینه‌های کاربردی آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

مواد سرامیکی به دلیل خواص عالی در دماهای بالا و مقاومت بسیار زیاد در برابر خوردگی و سایش، یکی از مواد بسیار پرکاربرد در صنایع هوافضا، هسته‌ای و دیگر کاربردهای مهندسی هستند. محدودیت مهم سرامیک‌ها شکنندگی ذاتی آنها است که در صورت قرار گرفتن در معرض شوک‌های گرمایی یا مکانیکی شدید می‌توانند منجر به خرابی‌های فاجعه آمیز شوند [۱]. برای غلبه بر این محدودیت تلاش‌های قابل توجهی در جهت افزایش چقرمگی سرامیک‌ها صورت گرفت و در نهایت این کوشش‌ها به ایجاد مواد تابعی^۱ منجر شد.

مواد تابعی، مواد مرکبی هستند که میکروساختار و خواص مکانیکی و گرمایی آنها به طور فضایی و پیوسته تغییر می‌کند تا عملکرد موردنظر حاصل شود. در سال‌های اخیر مواد تابعی به دلیل کارایی بالا ناشی از خواص مکانیکی و گرمایی بهبود یافته، به طور روز افزون مورد توجه مهندسان و محققان قرار گرفته‌اند. مزیت مهم مواد تابعی نسبت به مواد مرکب سنتی عدم وجود فصل مشترک‌ها در آنها می‌باشد. مواد تابعی متشکل از سرامیک و فلز، متداول‌ترین مواد تابعی هستند که از فاز سرامیک در یک طرف به صورت تدریجی به فاز فلز در طرف دیگر تغییر می‌کنند. این مواد خواص مطلوب فلزات از

¹ Functionally Graded Materials

قبیل چقرمگی بالا و استحکام مکانیکی بالا و مقاومت بالای مواد سرامیکی در برابر دما، خوردگی و سایش را دارا می‌باشند. کودورا و همکاران [۲] و تاکاهاشی و همکاران [۳] در مطالعات خود گزارش کردند که پوشش‌های تابعی در معرض شوک‌های حرارتی نسبت به پوشش‌های سرامیکی سنتی به طور چشمگیری کمتر دچار خرابی می‌شوند.

آزمایش‌های کاواساکی و همکاران [۴] نشان می‌دهند که وقتی سطح سرامیکی مواد تابعی تحت شوک حرارتی قرار گیرد، در مرحله سرد شدن، ممکن است ترک‌هایی در سطح سرامیکی ایجاد شود. این ترک‌ها می‌توانند عمود بر سطح و یا به صورت منحنی باشند. ترک‌های سطحی لبه‌ای طی فرآیندهای گرمایش با اشعه لیزر (گرمایش لیزری^۱) و گرمایش کوره‌ای^۲ نیز مشاهده شده‌اند [۵].

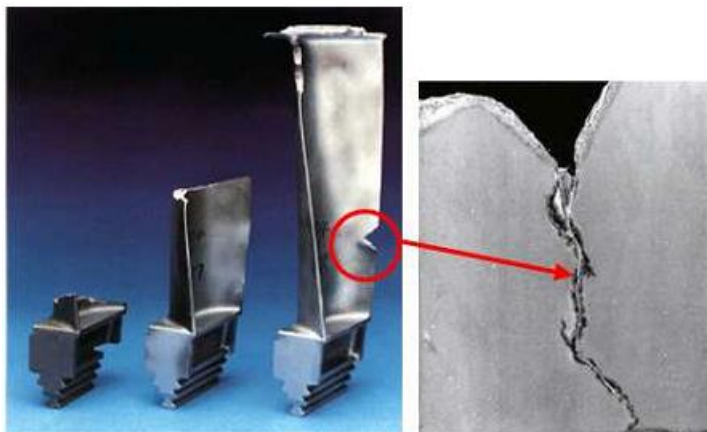
همان‌طور که گفته شد به دلیل شکنندگی ذاتی سرامیک‌ها، ترک‌ها می‌توانند در مرحله ساخت یا در مرحله بکارگیری، در مواد تابعی ایجاد شوند. در بسیاری از کاربردهای مهندسی، پدیده گسترش ترک تحت بارهای دینامیکی گذرا ممکن است اتفاق بیفتد. شوک‌های القایی ناشی از فشار در مخازن رآکتورها، شکست زره فلزی-سرامیکی توسط ضربه ناشی از گلوله و بارگذاری‌های انفجاری در موتور هواپیماها، مثال‌های کمی از این کاربردها هستند [۶]. به عنوان مثال دو نمونه از شکست‌های دینامیکی در شکل (۱-۱) نشان داده شده‌اند.

بنابراین شناخت و تحلیل رفتار شکست و خرابی مواد تابعی به ویژه تحت شوک‌های حرارتی و مکانیکی از اهمیت بسیار بالایی در طراحی، قابلیت اطمینان و بکارگیری این مواد در کاربردهای مهندسی برخوردار است؛ زیرا در بیشتر موارد کاربرد مواد تابعی، بارگذاری‌ها از نوع دینامیکی (مکانیکی و حرارتی) هستند.

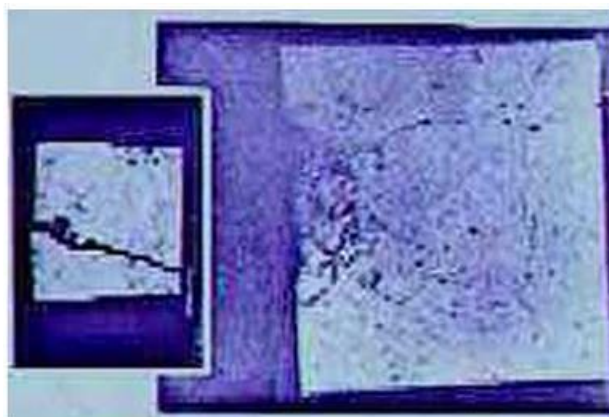
در ادامه این فصل ابتدا مطالعات تحلیلی انجام شده برگزیده در زمینه شکست مواد تابعی و بعد از آن مطالعات عددی انجام شده شاخص در این زمینه بررسی می‌شوند و در انتها مروری بر مطالب بخش‌های بعدی ارائه می‌شود.

¹ Laser heating

² Burner heating



(الف)



(ب)

شکل ۱-۱- دو نمونه از شکست‌های دینامیکی الف) گسترش ترک از لبه پره توربین گازی به داخل سطح آن ب) شکست بتن بعد از اصابت موشک [۶]

۲-۱- مطالعات تحلیلی انجام شده

تاکنون مطالعات زیادی بر روی رفتار شکست شبه استاتیکی مواد تابعی تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی انجام شده است. اتکینسون و لیست [۷] اولین کسانی بودند که گسترش ترک در محیطی با خواص الاستیک متغیر نسبت به مکان را مطالعه کردند. پس از آن تلاش‌های گسترده‌ای انجام شد تا میدان تنش نوک ترک در مواد تابعی تحت شرایط بارگذاری شبه استاتیکی توصیف شود. دلاله و اردوگان [۸] مسائل مختلفی از مکانیک شکست را در مواد تابعی مورد مطالعه قرار دادند و تعدادی از حل‌های ضرایب شدت تنش را ارائه کردند.

وانگ و مگید [۹] یک رفتار تئوری و عددی برای گسترش ترک در یک لایه فصل مشترک با خواص الاستیک متغیر نسبت به موقعیت تحت شرط بارگذاری غیر صفحه‌ای پیشنهاد کردند.

جین و نودا [۱۰] ضرایب شدت تنش گرمایی در حالت پایدار را برای یک ترک لبه‌ای در یک فضای نیمه متناهی از جنس ماده تابعی و در معرض یک بار گرمایی، بدست آوردند. آنها نشان دادند که تکینگی ریشه دوم معکوس در نوک ترک باز هم در مواد تابعی غالب است به شرط آنکه مدول یانگ و نسبت پواسون پیوسته باشند و یا به طور قطعه‌ای پیوسته قابل تشخیص باشند.

با فرض تغییر نمایی مدول الاستیک، اردوگان [۱۱] و اردوگان و وو [۱۲] مسائل ترک تحت بارگذاری مکانیکی در ماده تابعی را حل کردند. اردوگان و وو [۱۳] همچنین ضریب شدت تنش گرمایی حالت پایدار را برای یک لایه تابعی با یک ترک سطحی عمود بر لبه تعیین کردند. با فرض تغییر نمایی خواص گرمایی و مکانیکی مواد، جین و بترا [۱۴] مسئله فروکشی شدت تنش^۱ در نوک یک ترک لبه‌ای در یک ماده تابعی تحت شوک حرارتی را مورد بررسی قرار دادند. کوکینی و چولز [۱۵] و کوکینی و کیس [۱۶] ترک سطحی و فصل مشترک را در پوشش‌های تابعی تحت شوک‌های حرارتی مطالعه کردند.

بابایی و لوکاسیویژ [۱۷] ضرایب شدت تنش دینامیکی برای یک ترک مد III قرار گرفته در یک ماده تابعی را مطالعه کردند. آنها دریافتند که ضرایب شدت تنش با نسبت طول ترک به ضخامت لایه تغییر می‌کنند.

وانگ و همکارانش [۱۸] پاسخ خارج صفحه‌ای یک ماده مرکب ناهمگن شامل چندین ترک در معرض ضربه‌های دینامیکی را تحلیل کردند و یک روش جدید برای تحلیل پاسخ دینامیکی مواد با خواص متغیر در جهت ضخامت ارائه دادند.

جیو و اسارو [۱۹] و بیکر و همکارانش [۲۰] تغییر شکل ترک در مواد تابعی را بررسی کردند. وانگ و همکارانش [۲۱] به کمک یک مدل ماده لایه لایه، مسئله ترک در مواد تابعی تحت بارگذاری

^۱ Stress intensity relaxation

گرمایی گذرا را مطالعه کردند. آنها همچنین پاسخ یک ماده تابعی شامل تعدادی ترک در معرض بارگذاری حرارتی دینامیکی را نیز بررسی نمودند [۲۲]. آنها فرض کردند تمامی خواص ماده فقط به جهت ضخامت بستگی دارد و در تحلیل ماده را به صورت یک سری لایه‌های کامپوزیتی کاملاً متصل به هم که خواص هر لایه با لایه بعدی اندکی تفاوت داشت، در نظر گرفتند. آنها به کمک تکنیک‌های تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه، حل کلی هر لایه را استخراج و در نهایت حل کامل تمام ماده را با معرفی شرایط مرزی مکانیکی و فصل مشترک لایه بدست آوردند.

لی و همکارانش [۲۳] پاسخ دینامیکی یک ترک محدود در یک ماده تابعی بیکران در معرض یک بارگذاری برشی خارج صفحه را مطالعه کردند. آنها تغییر مدول برشی ماده تابعی را در امتداد جهت عمود بر سطح ترک در نظر گرفتند. پارامس‌واران و شوکلا [۲۴] معادلات الاستودینامیک را برای یک مسئله صفحه‌ای کلی در مواد تابعی فرمول‌بندی کردند. برای مد باز شدن گسترش ترک دینامیکی در امتداد گرادیان ماده، این معادلات به طور مجانبی حل شدند و بسط‌هایی برای جابجایی‌های خارج از صفحه تحت شرایط تنش صفحه‌ای بدست آمدند. آنها میدان تنش برای ترک‌های ساکن در امتداد گرادیان در مواد تابعی را نیز گسترش دادند [۲۵]. این محققان همچنین ساختار میدان تنش در امتداد گرادیان ماده تابعی تحت شرایط کرنش صفحه‌ای برای شکست دینامیکی را ارائه کردند [۲۶]. ما و همکارانش [۲۷] رفتار دینامیکی دو ترک خطی در یک لایه از ماده تابعی متصل به نیم صفحات نامتشابه تحت موج‌های برشی خارج صفحه‌ای را با روش اشمیت^۱ مطالعه کردند. آنها مسئله مورد نظر را با استفاده از روش تبدیل فوریه و یک معادله انتگرالی دوگانه حل کردند. معادلات حاصل به کمک روش اشمیت حل شدند. آنها این روش را برای نشان دادن رفتار بنیادی ترک‌هایی که بر هم اثر می‌گذارند در مواد تابعی و تحت بارگذاری دینامیکی استفاده کردند.

¹ Schmidt method

جین و پائولینو [۲۸] تنش‌های گرمایی گذرا را در یک ماده تابعی با یک ترک لبه‌ای مورد مطالعه قرار دادند. در ماده تابعی مورد مطالعه آنها مدول یانگ و نسبت پواسون ثابت بودند و فقط خواص گرمایی در امتداد ضخامت تغییر می‌کردند.

مگید و همکارانش [۲۹] یک بررسی تئوری جامع بر روی رفتار یک ترک در حال رشد در یک ماده تابعی تحت تغییر شکل الاستیک صفحه‌ای انجام دادند. در این تحقیق فرمول‌بندی‌های تحلیلی بر حسب تبدیلات فوریه و حل معادلات انتگرالی تکین منتهجه به کمک چند جمله‌ای‌های چبیشف^۱، انجام شد. آنها اثر گرادیان خواص ماده و سرعت رشد ترک را بر روی ضرایب شدت تنش، نرخ آزاد سازی انرژی کرنشی و باز شدن ترک بررسی کردند.

چن و همکارانش [۳۰] مسئله ترک داخلی گذرا در مد I در یک باریکه ارتوتروپیک غیر همگن تحت ضربه‌های مکانیکی را مطالعه کردند. آنها از تبدیلات انتگرالی و توابع چگالی نابجایی برای کاهش مسئله به معادلات انتگرالی تکین استفاده کردند.

فنگ و ژو [۳۱] پاسخ به ضربه پیچشی یک ترک دایره شکل^۲ در یک باریکه که به طور متقاطع همسانگرد بود را بررسی کردند. در این مطالعه مدول برشی متغیر فرض شده بود به نحوی که به لحاظ ریاضی قابل کنترل باشد. آنها از تبدیل‌های لاپلاس و هنکل برای کاهش مسئله به حل یک معادله انتگرالی فردهولم^۳ استفاده کردند و میدان تنش نوک ترک را با در نظر گرفتن رفتار مجانبی تابع بسل بدست آوردند. آنها اثرات ناهمگنی ماده، ارتوتروپی و طول باریکه بر روی ضریب شدت تنش دینامیکی را بررسی کردند.

جوئو و همکارانش [۳۲] رفتار شکست دینامیکی گذرای یک سیستم زیرلایه-روکش با یک ترک داخلی عمود بر فصل مشترک تحت یک بار ضربه‌ای صفحه‌ای را مطالعه کردند. سازه شامل یک روکش تابعی و یک زیرلایه همگن نیمه نامحدود بود و ترک در روکش تابعی قرار داشت. مسئله مقدار

¹ Chebyshev polynomials

² Penny-Shaped crack

³ Fredholm integral equation

مرزی مختلط به صورت تحلیلی و با استفاده از روش‌های تبدیل انتگرالی و معادله انتگرالی تکین فرمول‌بندی شد.

جاین و همکارانش [۳۳] میدان‌های تنش نوک ترک برای یک ترک قرار گرفته در یک جهت دلخواه نسبت به جهت تغییر خطی خواص در ماده تابعی را بدست آوردند. هوآنگ و وانگ [۳۴] نیز یک مدل جدید برای تحلیل شکست مواد تابعی با تغییر خواص دلخواه ارائه دادند.

وانگ و مای [۳۵] یک آرایه تناوبی از ترک‌ها را در یک ماده تابعی تحت بارگذاری مکانیکی و گرمایی بررسی کردند. به دلیل گرمایش و سرمایش غیر یکنواخت، تنش‌های فشاری ایجاد شده موجب برخورد سطوح ترک در یک طول تماس خاص می‌شدند. آنها مسئله مقدار مرزی مختلط را به یک معادله انتگرالی تکین با طول تماس ترک به عنوان یک مجهول اضافی کاهش دادند. وانگ و مای [۳۶] همچنین یک آرایه متناوب از ترک‌ها در یک ماده تابعی تحت بارگذاری مکانیکی گذرا را بررسی کردند. شرایط بارگذاری در تحقیق آنها، نرمال صفحه‌ای (مد I) و برشی (مد II) در نظر گرفته شده بود. آنها برای هر مد بارگذاری مجزا یک معادله انتگرالی تکین استخراج کردند که در آن جابجایی‌های سطح ترک توابع مجهول بودند. آنها نشان دادند که وجود چندین ترک می‌تواند مد I ضرایب شدت تنش را کاهش، اما مد II را به طور چشمگیری افزایش دهد.

چالیوندرا و شوکلا [۳۷] حل‌های میدان تنش مکانیکی الاستیک برای یک ترک مایل رشد کننده ناپایدار در مواد تابعی را بدست آوردند. جاین و همکاران [۳۸] نیز میدان‌های شبه استاتیکی تنش و جابجایی را برای یک ترک در یک ماده تابعی نامحدود تحت بارگذاری گرمایی-مکانیکی بدست آوردند. چالیوندرا [۳۹] رشد ترک الاستودینامیک گذرا در حالت مد ترکیبی در امتداد مسیرهای متغیر دلخواه در مواد تابعی را بررسی کرد. او تغییر مدول برشی و چگالی جرمی مواد تابعی را به صورت نمایی و جهت‌گردیان ماده نسبت به جهت رشد ترک را متغیر فرض کرد. او میدان‌های جابجایی خارج از صفحه نوک ترک، برای گسترش ترک‌های خمیده با سرعت دلخواه را به کمک روش مجانبی بدست آورد. همچنین ضرایب شدت تنش مد I و II را نیز محاسبه کرد.

جوئو و همکارانش [۴۰] پاسخ دینامیکی گذرای یک نوار ارتوتروپیک تابعی با یک ترک لبه‌ای عمود بر مرز را به طور تئوری مورد مطالعه قرار دادند. آنها از تبدیلات لاپلاس و فوریه برای کاهش مسئله به یک معادله انتگرالی تکین استفاده کردند. چن و لیو [۴۱] نیز پاسخ گذرای یک ماده تابعی ارتوتروپیک شامل یک ترک در حالت مد III یا یک ترک لبه‌ای عمود بر مرز را مطالعه کردند. آنها یک بار ضربه‌ای برشی خارج صفحه را در زمان $t = 0$ بر سطح ترک اعمال کردند و از تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه سینوسی برای کاهش مسئله به یک معادله انتگرالی فردهولم استفاده نمودند. هونگمین و همکارانش [۴۲] مسائل کرنش صفحه‌ای ترک‌های نیمه بی‌نهایت^۱ در یک ماده تابعی ارتوتروپیک نامحدود را مطالعه کردند. آنها دو بارگذاری ضربه‌ای یکنواخت یعنی مد بازشدن و برش صفحه‌ای را در نظر گرفتند. آنها تبدیلهای فوریه و لاپلاس همراه با روش وینر-هاف^۲ را برای حل فرمول‌بندی جابجایی معادلات حرکت بکار گرفتند و حل‌های بسته ضرایب شدت تنش دینامیکی را بدست آوردند. ژو و همکاران [۴۳] نیز با اعمال تبدیلهای فوریه و لاپلاس و با کمک تکنیک وینر-هاف حل‌های ضرایب شدت تنش در مواد تابعی را بدست آوردند.

لی و همکاران [۴۴] به کمک پتانسیل‌های جابجایی و تحلیل مجانبی، عبارت‌هایی تحلیلی را برای میدان‌های جابجایی و تنش در نوک یک ترک دینامیکی تحت بارگذاری گرمایی-مکانیکی در مواد تابعی ارائه کردند. آنها فرض کردند که ترک با سرعت ثابت در حالت پایا گسترش می‌یابد و معادله انتقال گرما را در حالت پایدار در نظر گرفتند. همچنین تغییرات مدول برشی، چگالی جرمی و ضریب انبساط گرمایی مواد تابعی را به صورت نمایی در نظر گرفتند.

فنگ و جین [۴۵] رفتار شکست یک صفحه تابعی شامل ترک‌های سطحی با طول‌های مختلف در معرض شوک حرارتی را بررسی کردند. آنها ضرایب شدت تنش گرمایی در نوک ترک‌هایی با طول‌های مختلف را با استفاده از روش معادله انتگرالی تکین محاسبه و اثرات گرادیان خواص گرمایی، نسبت طول ترک و فواصل ترک‌ها را بر روی ضرایب شدت تنش گرمایی در نوک ترک‌ها بررسی نمودند؛

¹ Semi-infinite cracks

² Winner-Hopf technique

همچنین شوک حرارتی بحرانی را که موجب آغاز رشد ترک می‌شود محاسبه کردند. آنها از توزیع دمای بدست آمده از قانون فوریه برای محاسبه دما استفاده کردند.

کیدانه و همکاران [۴۶] رفتار رشد یک ترک دینامیکی در حالت مد ترکیبی در مواد تابعی تحت بارگذاری گرمایی-مکانیکی را مطالعه کردند. آنها از تحلیل مجانبی همراه با پتانسیل‌های جابجایی برای بدست آوردن میدان تنش مکانیکی هنگام رشد ترک در حالت مد ترکیبی استفاده کردند و میدان‌های تنش گرمایی-مکانیکی برای ترک رشد کننده با سرعت ثابت در جهت تغییر خواص ماده را بدست آوردند. آنها تغییرات خواص ماده را نمایی فرض کردند.

چالیوندرا [۴۷] معادلات میدان جابجایی خارج از صفحه را برای ترک‌های منحنی ناپایدار در مواد تابعی استخراج کرد. ژانگ و کیم [۴۸] برای مشخص کردن ترم‌های مرتبه بالای میدان‌های نوک ترک ایستا در مد III در مواد تابعی از یک رویکرد متغیر مختلط^۱ استفاده کردند. کلمنتس [۴۹] نیز مسئله ترک غیر صفحه‌ای را برای مواد تابعی ناهمسانگرد ناهمگن الاستیک تحلیل کرد.

گوپتا و همکاران [۵۰] میدان‌های جابجایی و تنش گذرا برای ترک در حال گسترش در امتداد مسیر منحنی الخط با سرعت متغیر در مواد تابعی را استخراج کردند. آنها تغییرات خواص مکانیکی و گرمایی ماده تابعی را به صورت نمایی در نظر گرفتند و با استفاده از معیار کمترین چگالی انرژی کرنشی، اثر گرادیان دما، سرعت‌های نوک ترک و تنش T^2 را بر روی جهت‌های گسترش ترک مورد بررسی قرار دادند.

علیرغم پیشرفت‌های تئوری در مورد فرآیند شکست مکانیکی مواد تابعی، مشاهده می‌شود که درک و فهم فرآیند شکست دینامیکی مواد تابعی به دلیل عدم شواهد تجربی هنوز با محدودیت مواجه است. از طرفی به دلیل پیچیدگی مسائل ترک ترموالاستیک در حالت گذرا، حل‌های تحلیلی را می‌توان فقط برای شرایط بارگذاری و هندسه‌های بسیار ساده و خاص بدست آورد [۵۱]. در واقع برای

^۱ Complex variable approach

^۲ T-stress

اجسام ترکدار با ابعاد محدود، بدست آوردن حل‌های دقیق غیر ممکن است [۵۲]. بنابراین به طور کلی برای بررسی این قبیل مسائل باید از روش‌های تجربی و عددی بهره گرفت.

۱-۳- بررسی مطالعات عددی انجام شده

مدل‌سازی عددی رشد ترک در پدیده شکست دینامیکی بسیار پیچیده است. در مورد مواد تابعی، ناهمگنی ماده به پیچیدگی مسئله می‌افزاید. برای پیش‌بینی جهت گسترش ترک در یک ماده تابعی به روش عددی، مدل باید بتواند تغییر فضایی پیوسته خواص ماده را لحاظ کند و ارزیابی مسیر ترک باید خروجی طبیعی تحلیل باشد [۶]. تا کنون مطالعات زیادی در زمینه محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی در مواد تابعی با استفاده از روش‌های عددی تحت بارگذاری‌های مکانیکی و گرمایی انجام شده است؛ اما در زمینه رشد ترک در این مواد مطالعات انجام شده بسیار محدود است. تعدادی از شاخص‌ترین این تحقیقات در ادامه مرور می‌شوند.

ناکاگاکاکی و همکارانش [۵۳] یک روش عددی برای گسترش ترک دینامیکی در مواد تابعی ارائه دادند و اثر تغییر تدریجی خواص را بر روی سفتی نوک ترک در هنگامی که در ماده تابعی گسترش می‌یابد، تعیین کردند.

نودا [۵۴] و فوجیموتو و نودا [۵۵ و ۵۶] از روش المان محدود برای پیش‌بینی رشد ترک در یک صفحه از جنس ماده تابعی تحت شوک حرارتی استفاده کردند. آنها برای بدست آوردن توزیع دما از معادله انتقال حرارت استفاده نموده و از جفت شدگی حرارتی-مکانیکی^۱ صرف‌نظر کردند.

کوگل و گال [۵۷ و ۵۸] با استفاده از حل‌های بنیادی الاستواستاتیک و هدایت گرمایی ایستا، یک فرمول‌بندی المان مرزی برای ترموالاستیسیته جفت شده دینامیکی ارائه کردند.

روسو و تیپور [۵۹] ضرایب شدت تنش دینامیکی برای مواد تابعی را با استفاده از روش‌های عددی و تجربی محاسبه کردند. آنها از میدان‌های مجانبی ویلیامز [۶۰] برای تعیین ضرایب شدت

^۱ Thermo-mechanical coupling

تنش دینامیکی قبل از رشد ترک استفاده کردند. آنها همچنین تغییر شکل نوک ترک و پارامترهای شکست در تیرهای تابعی شیشه-اپوکسی تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی را با استفاده از روش‌های تجربی و عددی بدست آوردند [۶۱]. آنها برای حل‌های عددی از روش المان محدود استفاده کردند. کیم و پائولینو [۶۲] از روش المان محدود برای تحلیل مواد تابعی ارتوتروپیک ترکدار استفاده کردند. آنها ضرایب شدت تنش برای مد I و مد ترکیبی در مسائل دو بعدی را با استفاده از روش اصلاح شده بسته شدن ترک^۱ و روش همبستگی جابجایی^۲ بدست آوردند. کیم و پائولینو [۶۳ و ۶۴] انتگرال برهمکنش را برای مواد تابعی بسط دادند و ضرایب شدت تنش مد ترکیبی، تنش T و زاویه آغاز رشد ترک را محاسبه نمودند. آنها از روش المان محدود برای حل مثال‌های عددی استفاده کردند.

وو و همکاران [۶۵] انتگرال J را برای دربرگرفتن اثرات دینامیکی و گرادیان ماده توسعه دادند. آنها انتگرال J را برای یک ورق تابعی با ترک لبه‌ای تحت بارگذاری پله‌ای و به کمک روش بدون المان گلرکین محاسبه کردند. دالبو و گوژ [۶۶] مسئله صفحه‌ای یک ترک با جهت دلخواه در یک ماده تابعی را با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته بررسی کردند.

ژانگ و همکارانش [۶۷] یک تحلیل ترک دینامیکی گذرا برای یک ماده تابعی به کمک روش معادله انتگرال مرزی قلمرو زمانی فوق تکین^۳، ارائه دادند. در تحقیق آنها تغییرات فضایی پارامترهای ماده تابعی توسط یک قاعده نمایی توصیف شده بودند. آنها یک فرآیند حل عددی برای حل معادله انتگرال مرزی قلمرو زمانی فوق تکین ارائه دادند. ما و همکارانش [۶۸] رفتار دینامیکی یک ترک محدود در مواد تابعی در معرض موج‌های هارمونیک الاستیک نرمال را به وسیله روش اشمیت بررسی کردند. آنها جهت ترک را به طور دلخواه نسبت به جهت گرادیان خواص ماده در نظر گرفته و مسئله را تحت شرایط کرنش صفحه‌ای یا شرایط تنش صفحه‌ای تعمیم یافته حل کردند. ما و همکارانش [۶۹]

¹ Modified crack closure

² Displacement correlation technique

³ Hypersingular time-domain boundary integral equation method

همچنین ضریب شدت تنش دینامیکی را برای ترک گریفیث در مواد ارتوتروپیک تابعی تحت بارگذاری هارمونیک بررسی کردند. آنها دوباره با استفاده از تبدیل فوریه و تعریف پرش‌های مولفه‌های جابجایی در سرتاسر سطح ترک به عنوان توابع مجهول، دو جفت از معادلات انتگرالی دوگانه را استخراج کردند و برای حل معادلات انتگرالی دوگانه، پرش‌های مولفه‌های جابجایی در سرتاسر سطح ترک را به صورت یک سری ژاکوبی چند جمله‌ای بسط دادند. ژیا و ما [۷۰] نیز رفتار دینامیکی یک ترک محدود در مواد تابعی در معرض موج‌های هارمونیک الاستیک نرمال را به وسیله روش اشمیت بررسی کردند. آنها فرض کردند که مدول یانگ و چگالی جرمی مدل به صورت نمایی در امتداد جهت ترک تغییر می‌کند؛ در حالی که نسبت پواسون ثابت باقی می‌ماند. آنها همانند کارهای قبلی که توسط ما و همکارانش انجام شده بود به کمک تبدیل فوریه و تعریف پرش‌های جابجایی در سرتاسر سطوح ترک به عنوان توابع مجهول، دو جفت از معادلات انتگرالی دوگانه را استخراج کرده و برای حل معادلات انتگرالی دوگانه، پرش‌های جابجایی در سطوح ترک را به صورت سری‌هایی بسط دادند.

وانگ و همکارانش [۷۱] با استفاده از یک روش المان محدود/تفاضل محدود، مقاومت در برابر شوک حرارتی یک ماده تابعی را مطالعه کردند و شوک گرمایی بحرانی را بدست آوردند. وانگ و ناکامورا [۷۲] از یک قانون کشش-جدایش نمایی برای شبیه‌سازی گسترش ترک دینامیکی در مواد تابعی الاستیک-پلاستیک استفاده کردند. ژانگ و پائولینو [۷۳] فرآیندهای شکست دینامیکی در مواد همگن و مواد تابعی را بررسی کردند. آنها یک مدل ناحیه چسبنده^۱ جدید برای مواد تابعی کشف کردند و با چهارچوب المان محدود درآمیختند. آنها گرادیان ماده را در سطح المان و با استفاده از یک فرمول‌بندی المانی مدرج تقریب زدند.

والترز و همکاران [۷۴] روش‌های انتگرال ناحیه^۲ کلی را برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش برای ترک‌های سطحی در مواد تابعی تحت بارگذاری گرمایی-مکانیکی مد اول ارائه کردند. والترز و همکاران [۷۵] همچنین از روش انتگرال انرژی برهمکنش برای تعیین ضرایب شدت تنش تحت

¹ Cohesive zone model

² Domain integral

بارگذاری مد ترکیبی استفاده کردند. آنها در فرمول‌بندی انتگرال انرژی برهمکنش از عبارتهای مربوط به اثر انحنای نوک ترک صرف‌نظر کردند.

پائولینو و کیم [۷۶] یک فرمول‌بندی غیر تعادلی برای محاسبه تنش T در مواد تابعی دارای ترک در مد ترکیبی ارائه کردند. آنها از روش انتگرال برهمکنش به همراه روش المان محدود برای محاسبه تنش T استفاده نمودند. کیم و پائولینو [۷۷] همچنین مسیر رشد ترک در مد ترکیبی در یک ماده تابعی را با استفاده از روش المان محدود شبیه‌سازی کردند. کیم و پائولینو [۷۸] خلاصه‌ای بر سه روش تعریف میدان‌های کمکی ارائه دادند و در مورد چگونگی استخراج ضرایب شدت تنش مد ترکیبی و تنش T در مواد تابعی همسانگرد و ارتوتروپیک بحث کردند.

تیلبروک و همکاران [۷۹] با استفاده از روش المان محدود، گسترش ترک‌ها در مواد تابعی تحت بارگذاری خمشی شبه‌استاتیکی را بررسی کردند.

حسینی تهرانی و حسینی گودرزی [۸۰] از روش المان مرزی به کمک تبدیل لاپلاس در قلمرو زمان برای تحلیل مکانیک شکست با در نظر گرفتن مسائل ترموالاستیک گذرای کوپل شده با زمان فروکشی^۱ در ناحیه محدود دویبعدی استفاده کردند. آنها یک نوار از ماده همسانگرد و همگن دو بعدی تحت شرایط کرنش صفحه‌ای با یک ترک لبه‌ای اولیه بر روی مرز آن را مورد مطالعه قرار دادند. جسم در معرض یک شوک حرارتی بر روی مرزها قرار گرفت و موج‌های تنش گرمایی حاصله از طریق معادلات ترموالاستیک کوپل شده بررسی شدند. آنها مدل ترموالاستیک دینامیکی لورد و شولمن را برای نشان دادن سرعت انتشار گرمایی محدود انتخاب کردند. حسینی تهرانی و همکارانش [۵۲] از روش المان مرزی به کمک تبدیل لاپلاس در قلمرو زمان و با استفاده از تئوری ترموالاستیسیته گرین و لیندزی برای تحلیل مکانیک شکست تحت شوک حرارتی استفاده کردند. آنها از مدل ترموالاستیک دینامیکی گرین و لیندزی برای نشان دادن اثر گسترش موج گرمایی با سرعت محدود بر روی مقدار ضریب شدت تنش نوک ترک استفاده کردند.

¹ Relaxation time

سانگ و پائولینو [۸۱] به منظور محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی برای مواد همگن و ناهمگن، انتگرال برهمکنش را که برای ارزیابی ضرایب شدت تنش در یک محیط همگن استاتیکی پیشنهاد شده بود، برای در بر گرفتن اثرات دینامیکی و ناهمگنی ماده گسترش دادند و از روش المان محدود بهره بردند.

خلمانوا و کوستانزو [۸۲] یک روش المان محدود گلرکین مکانی-زمانی ناپیوسته برای مطالعه مسائل الاستودینامیک خطی و ترموالاستیک جفت شده با ناپیوستگی‌هایی در جابجایی و تغییرات دما ارائه کردند.

اسلادک و همکاران [۸۳-۸۷] یک روش بدون المان پتروف-گلرکین محلی^۱ را برای محاسبه پارامترهای شکست در مواد تابعی و نیز برای مسائل ترموالاستیسیته شبه استاتیکی گذرا پیشنهاد کردند.

ییلدیریم و همکاران [۸۸] مسائل سه بعدی ترک سطحی در پوشش‌های تابعی تحت مد I بارگذاری‌های مکانیکی و گرمایی گذرا را با استفاده از روش همبستگی جابجایی مطالعه کردند. ییلدیریم [۸۹] همچنین انتگرال ناحیه معادل بر مبنای انتگرال J را برای تحلیل شکست مواد تابعی و محاسبه ضریب شدت تنش مد I تحت شرایط بارگذاری دمایی پایا و گذرا بکار گرفت.

کومی و ماریانی [۹۰] شبیه سازی فرآیندهای شکست در مواد تابعی شبه ترد با خواص الاستیک و چقرمگی متغیر نسبت به مکان تحت بار شبه استاتیکی را انجام دادند. آنها از یک فرمول بندی تک منظوره المان محدود گسترش یافته برای شبیه سازی رشد ترک‌های چسبنده^۲ در محیط درجه بندی شده استفاده کردند.

دگ [۹۱] با استفاده از انتگرال J ضرایب شدت تنش مد ترکیبی و تنش T در مواد تابعی تحت بارهای گرمایی را محاسبه کرد. فرمول بندی که او برای تنش T بدست آورد فقط برای مد ترکیبی کاربرد داشت.

¹ Meshless local Petrov-Galerkin method

² Cohesive cracks

سانگ [۹۲] روشی را بر پایه روش المان محدود توسعه یافته و آمیخته با یک الگوی انتگرال‌گیری زمانی صریح به منظور شبیه‌سازی شکست دینامیکی در صفحات و پوسته‌های نازک ارائه داد. او این روش را با بکارگیری المان‌های مربعی چهار‌گره‌ای صفحه‌ای و المان‌های پوسته‌ای بلیچکو-لین-تسای اجرا کرد.

دافلوت [۹۳] شکست ترموالاستیک را در حالت استاتیکی با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته مورد مطالعه قرار داد. او مسائل دو بعدی و سه بعدی با شرایط مرزی حرارتی مختلف بر روی سطح ترک را بررسی کرد. کی سی و کیم [۹۴] با استفاده از روش المان محدود، تنش T و ضرایب شدت تنش در حالت مد ترکیبی در مواد تابعی تحت بارهای حرارتی پایا را محاسبه کردند. نظری و همکاران [۹۵ و ۹۶] نیز ضرایب شدت تنش گرمایی مد اول را برای یک صفحه تابعی تحت بار گرمایی در حالت پایا و گذرا، محاسبه کردند. آنها برای مدل‌سازی ماده تابعی از مدل‌های میکرومکانیکی و برای حل معادلات از روش بدون المان گلرکین استفاده نمودند.

آیپهان [۹۷ و ۹۸] با استفاده از المان‌های محدود غنی شده خاص، ضرایب شدت تنش برای ترک‌های سه بعدی مسطح در مواد تابعی تحت شرایط بارگذاری مد I و مد ترکیبی را بدست آورد. یو و همکاران [۹۹] یک انتگرال برهمکنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش مد ترکیبی در مواد ناهمگن با خواص پیوسته یا ناپیوسته ارائه کردند. آنها از روش المان محدود توسعه یافته برای حل مسائل عددی استفاده نمودند.

زمانی و اسلامی [۱۰۰] با استفاده از روش المان محدود، ضرایب شدت تنش را در یک صفحه تابعی ترکدار به دست آوردند. آنها از معادله ترموالاستیک کلاسیک جفت شده استفاده نموده و این معادلات را با استفاده از روش المان محدود حل کردند. زمانی و اسلامی [۱۰۱] همچنین روش المان محدود توسعه یافته را برای بررسی مسئله شکست ترموالاستیک دینامیکی به کار گرفتند. آنها ترک را ساکن فرض کردند و آغاز شکست یک ماده ترکدار همگن تحت شوک‌های گرمایی و مکانیکی را مطالعه کردند.

شقایقی مقدم و همکاران [۱۰۲] با استفاده از انتگرال انرژی برهمکنش، ضرایب شدت تنش مد ترکیبی را برای ترک‌های خارج صفحه منحنی الخط سه بعدی در مواد تابعی تحلیل کردند. آنها از روش المان محدود برای استخراج ضرایب شدت تنش در امتداد عدسی شکل نوک ترک در یک ماده تابعی استفاده کردند.

اخلاکف و همکاران [۵۱] یک روش المان مرزی-ناحیه‌ای^۱ برای حل مسائل ترک ترموالاستیک جفت شده خطی گذرا در حالت دوبعدی در یک ماده همسانگرد تابعی در معرض شوک حرارتی ارائه کردند. آنها از حل‌های بنیادی ترموالاستیسیته جفت شده خطی در قلمرو تبدیل یافته لاپلاس برای جامدات الاستیک خطی همگن و همسانگرد جهت استخراج فرمول‌بندی معادله انتگرالی مرزی-ناحیه-ای استفاده کردند. آنها همچنین ضرایب شدت تنش گرمایی را نیز با روش برون‌یابی محاسبه نمودند.

۱-۴- خلاصه‌ای از مباحث ارائه شده در این رساله

در بررسی مقالات مرتبط با شکست دینامیکی مواد تابعی تا کنون، هیچ تحقیقی که به طور کامل رفتار گسترش ترک مواد تابعی تحت شوک‌های گرمایی-مکانیکی را با استفاده از معادلات جفت شده ترموالاستیک به طور عددی شبیه‌سازی کرده باشد، مشاهده نمی‌شود. بنابراین و با توجه به اهمیت مطالعه پدیده شکست دینامیکی مواد تابعی تحت شوک‌های گرمایی و مکانیکی همزمان، موضوع رساله حاضر به بررسی این پدیده اختصاص یافته است.

در فصل دوم این رساله مواد تابعی، اهمیت و کاربردهای آنها به طور مختصر معرفی و نحوه مدل‌سازی آنها در این تحقیق با استفاده از مدل‌های میکرومکانیکی، ارائه می‌شود.

فصل سوم به معرفی و نحوه بکارگیری روش المان محدود توسعه یافته در مسائل رشد ترک ترموالاستیک اختصاص یافته است.

^۱ Boundary-domain element method

در فصل چهارم معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک جفت شده با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته در قلمرو مکان گسسته‌سازی شده و به شکل ماتریسی مونتاژ می‌شوند. نحوه حل معادلات ماتریسی استخراج شده نیز با استفاده از روش نیومارک مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل پنجم یک فرمول‌بندی کلی برای انتگرال برهمکنش در مواد تابعی تحت بارهای گرمایی و مکانیکی استخراج می‌شود و شیوه بدست آوردن ضرایب شدت تنش دینامیکی با استفاده از انتگرال برهمکنش و نیز نحوه محاسبه جهت و سرعت رشد ترک، مورد بحث قرار می‌گیرد.

فصل ششم نیز به حل مثال‌های عددی اختصاص یافته است. در این فصل ابتدا چهار مثال عددی حل می‌شوند که هدف از حل آنها بررسی صحت و دقت نتایج حاصل از روش ارائه شده و کد نوشته شده در این تحقیق است. برای این منظور نتایج حاصل از این چهار مثال با نتایج تحلیلی و عددی موجود در مقالات معتبر مقایسه می‌شوند. در ادامه این فصل نیز پدیده گسترش ترک و تاثیر پروفیل تغییر خواص ماده تابعی بر روی مقادیر ضرایب شدت تنش در دو صفحه تابعی از جنس‌های $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ و Al_2O_3/Si_3N_4 و یک تیر تابعی شیشه/اپوکسی تحت شوک‌های مکانیکی، گرمایی و گرمایی مکانیکی توأم در غالب سه مثال جداگانه مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت.

نتیجه‌گیری و پیشنهادهای نیز در قالب فصل هفتم این رساله ارائه می‌شوند.

فصل دوم
مواد تابعی

۲-۱- معرفی مواد تابعی و کاربردهای آنها

مواد مرکب سبک وزن با نسبت‌های استحکام به وزن و سفتی به وزن بالا تا کنون با موفقیت در صنایع هوافضا و دیگر کاربردهای مهندسی استفاده شده‌اند. با این وجود مواد مرکب سنتی را نمی‌توان در محیط‌های دما بالا مورد استفاده قرار داد. فلزات نیز به خاطر سفتی و استحکام عالی سالیان درازی است که توسط مهندسان در صنایع مختلف به کار گرفته می‌شوند. اما در دماهای بسیار زیاد استحکام فلزات هم مانند مواد مرکب سنتی کاهش می‌یابد؛ در حالی که مواد سرامیکی مقاومت بسیار بالایی در برابر حرارت دارند. با این وجود به خاطر سفتی و چقرمگی پایین در بکارگیری مواد سرامیکی محدودیت وجود دارد. بنابراین محققان به فکر ابداع مواد مرکب جدیدی افتادند که از سفتی و چقرمگی شکست بالای فلزات و مقاومت گرمایی بالای سرامیک‌ها به طور همزمان بهره ببرند.

اولین بار مفهوم مواد تابعی در اواسط دهه ۸۰ میلادی توسط نینو و همکارانش در آزمایشگاه ملی هوافضای سندای^۱ در ژاپن به عنوان مواد ضد حرارت^۲ معرفی شد [۵]. هدف نینو تولید پوششی با مقاومت حرارتی بسیار بالا برای بدنه هواپیماهای فوق سریع بود که کاهش تنش حرارتی و افزایش مقاومت در برابر گرما را در پی داشته باشد. پس از آن تلاش‌هایی برای توسعه مواد با مقاومت بالا با استفاده از مواد تابعی ادامه یافت. مواد تابعی ابتدا به عنوان عایق حرارتی برای سازه‌های هوافضا و راکتورهای هسته‌ای طراحی شدند [۱۰۵-۱۰۳]. اما امروزه مواد تابعی کاربردهای وسیع‌تری یافته‌اند. با توسعه صنایع جدید و فرآیندهای مدرن، این مواد به عنوان مولفه‌های سازه‌ای در محیط‌هایی با دماهای بسیار بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند. رسانندگی گرمایی و ضریب انبساط گرمایی پایینی به مواد تابعی قابلیت تحمل تغییرات دمایی زیاد را می‌دهد. از دیگر موارد کاربردهای مواد تابعی علاوه بر سازه‌های هوافضا می‌توان به ابزارهای برش، پوشش‌های ضد حرارت پره‌های توربین‌ها، کاشی‌های ضد حرارت، مخازن تحت فشار و لوله‌ها در راکتور نیروگاه‌های هسته‌ای، اجزای

^۱ Sendai

^۲ Thermal Barrier Materials

داخلی راکتورهای شیمیایی، حفاظ حرارتی موشک‌ها، کوره‌ها، سنسورها و محرک‌ها^۱، زره پوش‌ها و دندان‌های مصنوعی^۲ اشاره کرد [۶، ۱۰۶ و ۱۰۷].

تا کنون تکنیک‌های مختلفی برای ساخت مواد تابعی به کار گرفته شده‌اند که از این میان می‌توان رسوب‌سازی با بخار شیمیایی^۳ (CVD)، رسوب با بخار فیزیکی (PVD)، متالوژی پودر، پاشش پلاسما، آبکاری به کمک برق^۴ و سنتز احتراق^۵ را نام برد [۱۰۸].

مهمترین مشخصه مواد تابعی تغییر پیوسته خصوصیات فیزیکی است. تغییر تدریجی کسر حجمی مواد تشکیل دهنده یک ماده تابعی، به تغییر یکنواخت و پیوسته خواص ماده از یک سطح به سطح دیگر منجر می‌شود. بنابراین مشکلات فصل مشترک از بین می‌روند، تمرکز تنش گرمایی کاهش یافته و توزیع تنش یکنواخت‌تری نتیجه می‌شود [۱۰۶]. معمولاً مواد تابعی به صورت ترکیب پیوسته دو ماده مختلف در نظر گرفته می‌شوند. تغییر فضایی در نسبت اجزای سازنده و خواص در یک اتصال بین دو ماده مختلف - در مقایسه با یک فصل مشترک دو ماده‌ای - پتانسیل کاهش تنش‌ها در محل اتصال را داراست. به علاوه استحکام فصل مشترک در اتصال افزایش و احتمال گسستن آن کاهش می‌یابد [۱۰۸]. بنابراین مشکلات فصل مشترک و ضرایب تمرکز تنش گرمایی در مواد تابعی کاهش می‌یابند. از مواد تابعی می‌توان به عنوان اتصالات بین انواع مختلف مواد و نیز پوشش‌های سطحی طبقه‌بندی شده^۶ یا به طور ساده به عنوان مولفه‌های طبقه‌بندی شده^۷، استفاده نمود. عدم حضور فصل مشترک‌های تیز در مواد تابعی، عدم تناسب خواص مواد را کاهش داده و در نتیجه مقاومت در برابر لایه‌لایه شدن فصل مشترک و گسترش ترک خستگی را بهبود می‌دهد. با این وجود ساختمان میکروسکوپی مواد تابعی به طور کلی ناهمگن است و نوع خرابی حاکم بر مواد تابعی آغاز ترک و

¹ Actuators

² Dental implant

³ Chemical Vapor Deposition

⁴ Electro-Plating

⁵ Combustion Synthesis

⁶ Graded Surface Coatings

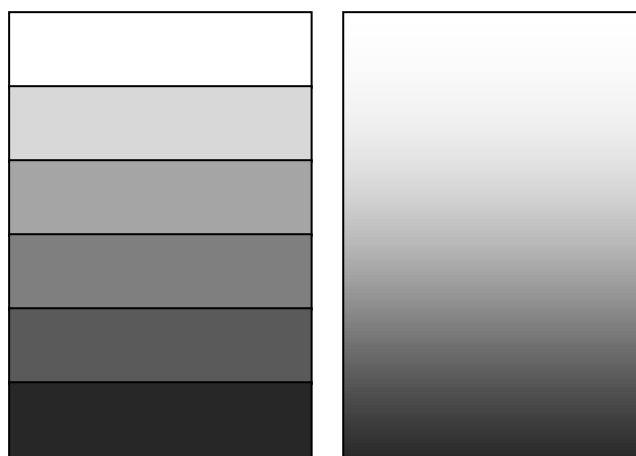
⁷ Graded Components

گسترش آن است. بنابراین توانایی پیش‌بینی رفتار شکست مواد تابعی هنگامی که در معرض بارهای گرمایی و مکانیکی قرار می‌گیرند از اهمیت بسیار بالایی در تحلیل این نوع سازه‌ها برخوردار است.

۲-۲- خواص موثر مواد تابعی

به طور کلی، خواص مواد تابعی علاوه بر پروفیل ترکیب، تابع خواص مواد تشکیل دهنده نیز می‌باشد. معمولاً یک توصیف تفصیلی از میکرو ساختارهای تابعی واقعی در دسترس نیست [۱۰۷]. از آنجایی که کسر حجمی هر فاز به طور تدریجی در جهت گرادیان ماده تابعی تغییر می‌کند، خواص موثر مواد تابعی نیز در امتداد همین جهت تغییر خواهد کرد.

دو روش برای مدل‌سازی مواد تابعی وجود دارد [۱۰۷]. در روش اول فرض می‌شود که کسر حجمی سرامیک یا فلز به صورت تکه‌ای تغییر می‌کند و ماده تابعی به صورت لایه‌لایه با کسر حجمی یکسان در هر لایه در نظر گرفته می‌شود (شکل ۲-۱-الف). در روش دوم فرض می‌شود که کسر حجمی سرامیک یا فلز به صورت پیوسته تغییر می‌کند (شکل ۲-۱-ب). در این روش خواص یک ماده تابعی در امتداد ضخامت آن باید با استفاده از یک تابع توصیف شود. در این رساله از روش دوم برای مدل‌سازی ماده تابعی استفاده می‌شود.



(الف)

(ب)

شکل ۲-۱- مدل‌های تحلیلی برای یک ماده تابعی [۱۰۷]

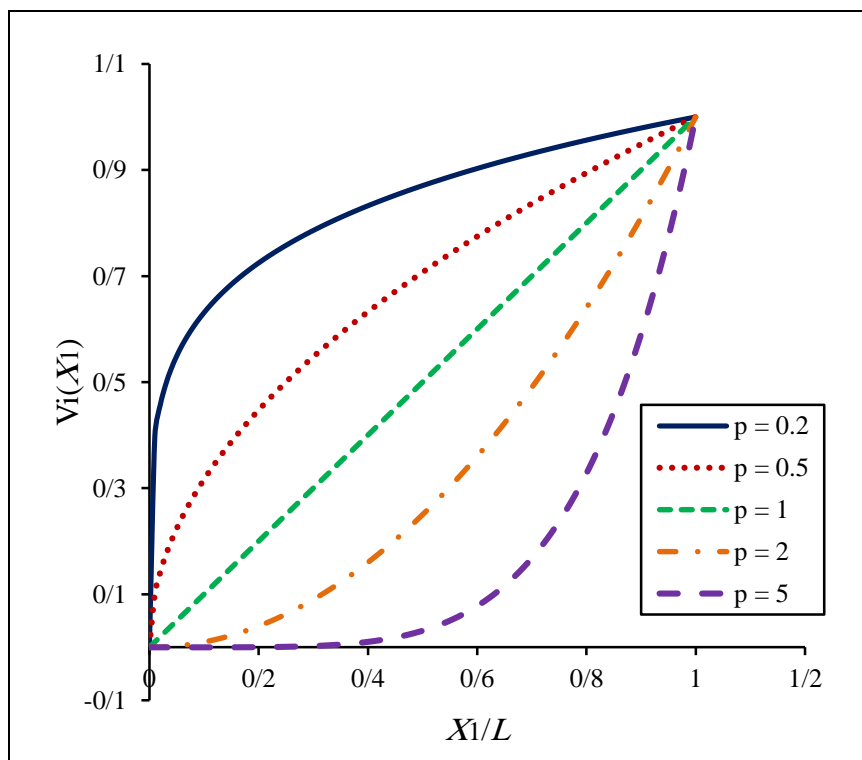
در این تحقیق ضخامت ماده در امتداد محور X_1 قرار داده می‌شود و فرض می‌شود که تغییر خواص ماده در این جهت رخ می‌دهد. همچنین فرض می‌شود که ماده تابعی از دو جزء تشکیل شده باشد؛ ماتریس و ماده افزوده شده^۱ به آن. در این تحقیق کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس (V_i) از تابع نمایی زیر پیروی می‌کند [۴۵]:

$$V_i(X_1) = (X_1/L)^p \quad (۱-۲)$$

که L ضخامت قطعه در امتداد محور X_1 است. و نمای p پارامتر تعیین کننده پروفیل تغییر خواص ماده است. کسر حجمی ماتریس نیز عبارت است از:

$$V_m(X_1) = 1 - V_i(X_1) \quad (۲-۲)$$

شکل (۲-۲) منحنی‌های تغییرات کسر حجمی ماده افزوده شده (V_i) برای مقادیر مختلف p را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۲- منحنی‌های تغییرات کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس، توصیف شده با پارامتر p

¹ Inclusion

با در اختیار داشتن کسر حجمی مواد تشکیل دهنده یک ماده تابعی در هر نقطه از آن می‌توان خواص ماده در آن نقطه را محاسبه نمود. در این تحقیق از مدل‌های میکرومکانیکی مرسوم مواد مرکب برای محاسبه خواص مواد تابعی در هر نقطه استفاده می‌شود.

حتا و تایا [۱۰۹] رابطه‌ای به صورت زیر را برای محاسبه هدایت گرمایی^۱ مواد مرکب ارائه کردند:

$$k = k_m - \frac{3V_i(k_m - k_i)}{V_m(k_m - k_i) + 3k_m} k_m \quad (۳-۲)$$

در این رابطه زیر نویس‌های (i) و (m) به ترتیب مشخص کننده ماده افزوده شده و ماتریس هستند.

بر طبق مدل موری و تاناکا [۱۰۷ و ۱۱۲-۱۱۰] مدول صلبیت برشی و مدول حجمی برای مواد

مرکب را می‌توان به ترتیب با استفاده از روابط (۲-۴) و (۲-۵) تخمین زد:

$$\mu = \mu_m + \frac{V_i(\mu_i - \mu_m)}{1 + V_m(\mu_i - \mu_m)/[\mu_m + \frac{\mu_m(9K_m + 8\mu_m)}{6(K_m + 2\mu_m)}]} \quad (۴-۲)$$

$$K = K_m + \frac{V_i(K_i - K_m)}{1 + V_m \frac{(K_i - K_m)}{(K_m + 4\mu_m/3)}} \quad (۵-۲)$$

در این روابط μ_i مدول صلبیت برشی ماده افزوده شده به ماتریس و μ_m مدول صلبیت برشی ماتریس

است. همچنین K_i مدول حجمی ماده افزوده شده به ماتریس و K_m مدول حجمی ماتریس است.

مدول یانگ E و نسبت پواسون ν نیز با استفاده از روابط شناخته شده زیر محاسبه می‌شوند.

$$E = \frac{9\mu K}{(\mu + 3K)} \quad (۶-۲)$$

$$\nu = \frac{3K - 2\mu}{2(\mu + 3K)} \quad (۷-۲)$$

چگالی ρ ، ظرفیت گرمایی ویژه c_t و ضریب انبساط گرمایی α نیز با استفاده از قانون اختلاط^۲ و

به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۱۰۷].

$$\rho = V_i\rho_i + V_m\rho_m \quad (۸-۲)$$

$$c_t = V_i c_{ti} + V_m c_{tm} \quad (۹-۲)$$

^۱ Thermal conductivity

^۲ Rule of mixtures

$$\alpha = V_i \alpha_i + V_m \alpha_m \quad (10-2)$$

برای مطالعه پدیده رشد ترک در مواد تابعی، باید چقرمگی شکست آنها نیز محاسبه شود. چقرمگی شکست برای یک ماده تابعی را می‌توان با استفاده از فرمول اختلاط جین و بترا [۱۴] بدست آورد.

$$K_{IC}(x) = \left\{ V_i(x)(K_{IC}^i)^2 + V_m(x)(K_{IC}^m)^2 \right\}^{0.5} \quad (11-2)$$

فصل سوم

روش المان محدود توسعه یافته

۳-۱- مقدمه

اساساً سه رویکرد در چهارچوب روش المان محدود برای شبیه سازی مسئله رشد ترک در حالت مد ترکیبی در محیط ناهمگن وجود دارد [۶]. اولی روش المان محدود متحرک با تجدید شبکه موضعی در امتداد مسیر ترک است. این روش مستلزم تعیین یک نمو ترک توسط کاربر و متکی بر یک معیار شکست مد ترکیبی برای تعیین جهت رشد ترک است. محدودیت‌های این روش عبارتند از: نیاز به یک الگوریتم تجدید شبکه قوی، ایجاد سیستم ثبت شماره گذاری گره‌ها برای تنظیم دوباره الگوی شبکه به طور متناوب و یک فرآیند منطقه بندی شبکه برای نگاشتن میدان‌های حل در شبکه قبلی بر روی آنها در شبکه جدید.

روش دوم استفاده از المان‌های چسبنده^۱ است. المان‌های چسبناک امکان ابقای کشش در امتداد سطوح شکست بعد از گسترش یک ترک را فراهم می‌کنند و به ترک اجازه می‌دهند تا در طی شبیه‌سازی از هر مسیری گسترش یابد و محدود به یک مسیر از پیش تعیین شده نباشد. با این وجود روش‌های سطح چسبناک در فرمول‌بندی اولیه مشکلات ذاتی دارند. این مشکلات شامل نرم شدن مصنوعی خواص ماده در هنگام کاهش اندازه المان‌های چسبناک و وابستگی به شبکه در امتداد شاخه شدن ترک (حداقل در اولین شروع یک شاخه) است [۱۱۳].

روش سوم که توسط بلیچکو و همکارانش پیشنهاد شد روش المان محدود توسعه یافته^۲ برای مدل‌سازی ناپیوستگی‌های دلخواه در شبکه‌های المان محدود است [۶].

نام روش المان محدود توسعه یافته نخستین بار توسط دانشگاه نورث وسترن^۳ در سال ۱۹۹۹ مطرح شد [۱۱۴ و ۱۱۵]. مبنای روش المان محدود توسعه یافته همان روش المان محدود است که برای ناپیوستگی‌هایی مانند ترک‌ها گسترش یافته و از غنی‌سازی‌های موضعی بهره می‌برد. گسترش این روش حاصل تحقیقات گسترده بلیچکو و همکاران [۱۱۶] در روش‌های بدون المان است.

¹ Cohesive element

² Extended Finite Element Method (XFEM)

³ Northwestern University

۳-۲- تفکیک واحد المان‌های محدود غنی شده

مبنای روش المان محدود توسعه یافته، مفهوم تفکیک واحد^۱ برای المان‌های محدود غنی شده یا تقریب‌های بدون المان است [۱۱۷]. تفکیک واحد در یک قلمرو Ω ، یک مجموعه از توابع $\phi_i(\mathbf{x})$ است به نحوی که

$$\sum_{\forall i} \phi_i(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (۱-۳)$$

در این رابطه \mathbf{x} بردار موقعیت است.

خاصیت تفکیک واحد استفاده شده در روش المان محدود توسعه یافته این است که هر تابع $\Psi(\mathbf{x})$ را می‌توان توسط حاصلضرب توابع تفکیک واحد با $\Psi(\mathbf{x})$ ، بازیابی کرد [۱۱۸]، یعنی:

$$\sum_{\forall i} \phi_i(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) \quad (۲-۳)$$

به علاوه هنگامی که جمع بندی با معرفی پارامترهای b_i اصلاح می‌شود، تابع غنی سازی می‌تواند به کمک تقریب زیر با این پارامترها تنظیم شود [۱۱۹]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\forall i} N_i(\mathbf{x})\mathbf{a}_i + \sum_{\forall I} \phi_i(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})b_i \quad (۳-۳)$$

در این رابطه \mathbf{a}_i ها درجات آزادی گره‌ای استاندارد هستند. N_i ها نیز توابع شکل استاندارد روش المان محدود بوده که برای یک فرمول بندی المانی ایزوپارامتریک به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (۴-۳)$$

که در این رابطه N_i تابع شکل مربوط به نقطه i است.

اولین عبارت در سمت راست رابطه (۳-۳) تقریب المان محدود استاندارد است در حالی که بخش دوم اغلب انساز^۲ نامیده می‌شود [۱۱۹]. مقادیر گره‌ای b_i پارامترهای مجهول هستند که غنی سازی را تنظیم می‌کنند به نحوی که بتواند حل را به خوبی تقریب بزند. $\Psi(\mathbf{x})$ غالباً مبتنی بر حل‌های مجانبی است که حل‌های دقیقی نیستند؛ بنابراین انساز لازم نیست دقیقاً حل موضعی برای مسئله موردنظر

^۱ Partition of unity

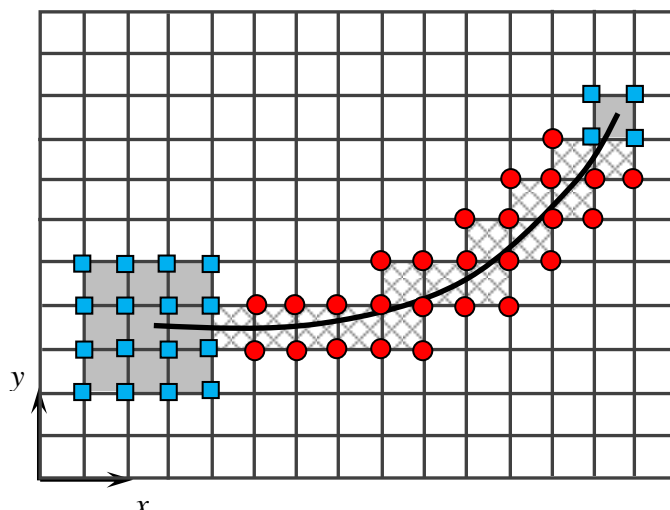
^۲ Ansatz

باشد. مزیت دیگر این تقریب سازه‌ای این است که هنگامی که توابع $\phi_i(\mathbf{x})$ فقط بر روی یک زیر ناحیه کوچک از مسئله غیر صفر هستند، معادلات گسسته شده برای سیستم صفر خواهند شد. در مقابل اضافه کردن مستقیم یک تابع غنی سازی به تقریب، معادلات گسسته غیر صفری را نتیجه می‌دهد که از نظر محاسباتی پرهزینه‌تر هستند. توجه کنید که با خاصیت تفکیک واحد، هنگامی که $b_i = 1$ و $a_i = 0$ ، تابع $\Psi(\mathbf{x})$ دقیقاً با تقریب (۳-۳) بازیابی می‌شود. باید اشاره شود همان‌طور که در بالا نشان داده شد، توابع شکل برای تقریب استاندارد و غنی سازی لازم نیست توابع یکسانی باشند. اما به طور کلی توابع یکسانی مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ یعنی به طور کلی $\phi_i(\mathbf{x}) = N_i(\mathbf{x})$ [۱۱۹]. در اینجا نیز از این قاعده استفاده می‌شود.

تمام توابع شکل المان محدود لاگرانژی خاصیت تفکیک واحد را ارضاء می‌کنند؛ زیرا این خاصیت برای همگرایی و عبور از آزمون پیوستگی ضروری است. خاصیت تفکیک واحد به تقریب المان محدود این قابلیت را می‌دهد که حرکت انتقال جسم صلب را به طور دقیق نمایش دهد [۱۱۹].

۳-۲- مدل سازی ترک‌ها در روش المان محدود توسعه یافته

در این قسمت کاربرد روش المان محدود توسعه یافته برای مدل سازی ترک‌ها تشریح می‌شود. یک مدل المان محدود از یک جسم ترک دار مطابق شکل (۳-۱) در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود تمام گره‌های شبکه المان محدود با N_A مشخص شوند، همچنین مجموعه گره‌های المان‌های اطراف نوک ترک (یا جلوی ترک در حالت سه بعدی) با N_C و مجموعه گره‌های المان‌هایی که توسط ترک بریده می‌شوند یا به عبارتی ناپیوستگی نیز با N_H مشخص شوند. مجموعه المان‌ها با گره‌ها در N_C می‌توانند توسط کاربر انتخاب شوند. معمولاً یک المان کفایت می‌کند؛ اما با استفاده از چندین المان (همان‌طور که در نوک سمت چپ ترک در شکل ۳-۱ مشاهده می‌شود) می‌توان مقداری بهبود در دقت را به دست آورد [۱۱۹]. گره‌ها در N_C و N_H به ترتیب به عنوان گره‌های غنی شده نوک و غنی شده گام و مجموعاً به عنوان گره‌های غنی شده شناخته می‌شوند.



شکل ۳-۱- یک ترک دلخواه در یک شبکه با المان‌های غنی شده گام (المان‌های هاشور خورده) و المان‌های غنی شده نوک (المان‌های پر رنگ شده). گره‌ها در مجموعه‌های N_C و N_H به ترتیب با مربع‌ها و دایره‌ها مشخص شده‌اند

میدان جابجایی در روش المان محدود توسعه یافته برای یک المان غنی شده شامل ترک را

می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۱۸]:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) \mathbf{a}_n(t) + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] \mathbf{b}_n(t) + \sum_m \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) [F_m(r, \varphi) - F_m(r_n, \varphi_n)] \mathbf{c}_{nm}(t) \quad (5-3)$$

در این رابطه $\mathbf{a}_n(t)$ ، $\mathbf{b}_n(t)$ و بردارهای مجهولات گره‌ای بوده که تابعی از زمان هستند.

$$\mathbf{a}_n(t) = \{a_n^u(t), a_n^v(t)\}^T \quad (6-3)$$

$$\mathbf{b}_n(t) = \{b_n^u(t), b_n^v(t)\}^T \quad (7-3)$$

$$\mathbf{c}_{nm}(t) = \{c_{nm}^u(t), c_{nm}^v(t)\}^T \quad (8-3)$$

در رابطه (۵-۳) $H(Z)$ تابع هویساید است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(Z) = \begin{cases} 1, & Z > 0 \\ 0, & Z \leq 0 \end{cases} \quad (9-3)$$

در اینجا Z تابعی از موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است.

قابل ذکر است که برای اجتناب از ناپایداری‌های عددی می‌توان از تابع هویساید اصلاح شده زیر به

جای رابطه (۹-۳) استفاده نمود [۱۶]:

$$H(Z) = \begin{cases} 0 & Z < -\zeta \\ 0.5 + \frac{Z}{2\zeta} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi Z}{\zeta} & -\zeta < Z < \zeta \\ 1 & Z > \zeta \end{cases} \quad (10-3)$$

که در این رابطه ζ کوچک‌تر از ابعاد یک المان انتخاب می‌شود.

در رابطه (۵-۳)، F_m یک مجموعه از توابع غنی سازی هستند که رفتار نزدیک نوک ترک را تقریب

می‌زنند. این توابع بر حسب مختصات محلی نوک ترک (r و φ) عبارتند از [۱۱۸]:

$$\{F_m\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\} \quad (11-3)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۶-۳) تا (۸-۳) و (۱۱-۳) در رابطه (۵-۳)، مولفه‌های میدان جابجایی

در روش المان محدود توسعه یافته در جهت محورهای مختصات سراسری x و y را می‌توان به صورت

زیر نوشت:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^u(t) + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] b_n^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n1}^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n2}^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n3}^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n4}^u(t) \end{aligned} \quad (12-3)$$

$$\begin{aligned}
v(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^v(t) + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] b_n^v(t) \\
& + \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n1}^v(t) \\
& + \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n2}^v(t) \\
& + \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n3}^v(t) \\
& + \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n4}^v(t)
\end{aligned} \tag{۱۳-۳}$$

اگر ترک عایق فرض شود، میدان دما نیز در امتداد ترک ناپیوسته و شار حرارتی در نوک ترک تکین خواهد بود [۹۳]. بنابراین برای در نظر گرفتن ناپیوستگی دما می‌توان از تابع هویساید استفاده کرد. برای غنی سازی نوک ترک نیز باید میدان دمای نوک ترک را بررسی کرد. میدان دما مشابه میدان جابجایی برای مد پارگی (مد III) ترک است [۹۳].

$$T = -\frac{K_T}{k} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{۱۴-۳}$$

که در این رابطه k ضریب هدایت گرمایی و K_T ضریب شدت تنش گرمایی است.

با در نظر گرفتن رابطه (۱۴-۳) می‌توان میدان دما را مشابه میدان جابجایی گسسته سازی کرد، با این تفاوت که فقط از اولین تابع رابطه (۱۱-۳) برای غنی سازی گره‌های نوک ترک استفاده می‌شود [۱۰۱]. بنابراین میدان تغییر دما را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\theta(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^T(t) + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] b_n^T(t) \\
& + \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_n^T(t)
\end{aligned} \tag{۱۵-۳}$$

که در این رابطه $a_n^T(t)$ ، $b_n^T(t)$ و $c_n^T(t)$ مقادیر تغییرات دمای گره‌ها برای توابع شکل مربوطه هستند. روابط (۱۲-۳)، (۱۳-۳) و (۱۵-۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$u(x, y, t) = \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^u(t) + \sum_{n \in N_H} \Phi_n(x, y) b_n^u(t) + \sum_{n \in N_C} \sum_{m=1}^4 \Psi_{nm}(x, y) c_{nm}^u(t) \quad (16-3)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^v(t) + \sum_{n \in N_H} \Phi_n(x, y) b_n^v(t) + \sum_{n \in N_C} \sum_{m=1}^4 \Psi_{nm}(x, y) c_{nm}^v(t) \quad (17-3)$$

$$\theta(x, y, t) = \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^T(t) + \sum_{n \in N_H} \Phi_n(x, y) b_n^T(t) + \sum_{n \in N_C} \Psi_{n1}(x, y) c_{n1}^T(t) \quad (18-3)$$

در این روابط Ψ و Φ عبارت‌های غنی‌سازی میدان‌های جابجایی و دما هستند که به ترتیب وظیفه غنی‌سازی سطح و نوک ترک را بر عهده دارند. با توجه به روابط (۱۲-۳)، (۱۳-۳) و (۱۵-۳) این توابع را می‌توان به صورت زیر استخراج کرد:

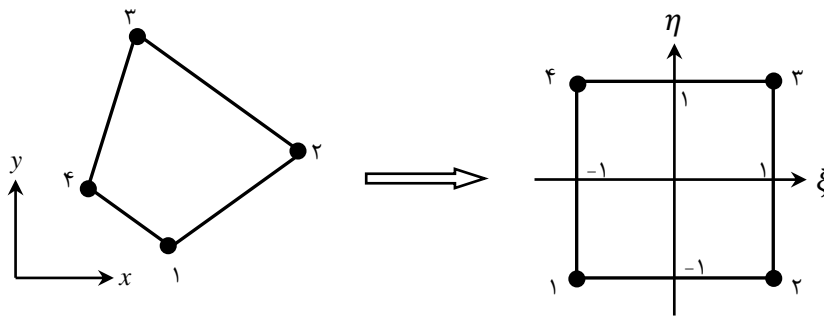
$$\Phi_n(x, y) = N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] \quad (19-3)$$

$$\Psi_n(x, y) = N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \right. \\ \left. \sqrt{r} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \right. \\ \left. \sqrt{r} \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] \quad (20-3)$$

با قرار دادن روابط (۱۶-۳) تا (۱۸-۳) در معادلات حاکم بر مسئله مورد نظر می‌توان معادلات حاکم را گسسته‌سازی کرد.

۳-۳- المان‌های ایزوپارامتریک تعمیم یافته

مطابق شکل (۲-۳) المان‌های ایزوپارامتریک مربعی یک المان چهار وجهی در دستگاه مختصات سراسری (x, y) را به یک مربع 2×2 در دستگاه محلی (ξ, η) نگاشت می‌کنند. مختصات x و y نقاط در المان اولیه از روابط زیر بدست می‌آیند [۱۱۸]:



شکل ۳-۲- المان محدود ایزوپارامتریک

$$x = \sum_{i=1}^4 x_i N_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 y_i N_i \quad (۳-۲۱)$$

که N_i همان توابع شکل المان محدود هستند که برای المان‌های ایزوپارامتریک با رابطه (۳-۴) بیان می‌شوند.

برای المان‌بندی یک لایه از جنس ماده تابعی می‌توان از المان‌های مدرج^۱ که توسط کیم و پائولینو [۱۲۰] پیشنهاد شده استفاده کرد. در این المان‌ها از توابع شکل یکسان برای درون‌یابی جابجایی‌ها، هندسه و پارامترهای ماده استفاده می‌شود. بنابراین این نوع فرمول‌بندی، فرمول‌بندی المانی ایزوپارامتریک تعمیم یافته^۲ (GIF) نامیده شده است.

برای تعبیه خواص ماده تابعی در مدل المان محدود توسعه یافته، تمامی خواص برای کلیه گره‌های المان‌ها با استفاده از مدل‌های میکرومکانیکی محاسبه می‌شوند. سپس خواص مورد نیاز برای هر نقطه گوسی در یک المان را می‌توان از روی خواص گره‌های المان مربوطه با استفاده از توابع شکل ایزوپارامتریک میان‌یابی کرد. بنابراین خواص ماده از قبیل مدول الاستیک E ، نسبت پواسون ν و چگالی ρ برای هر نقطه گوسی در یک المان را می‌توان بر حسب مختصات ξ و η و به کمک خواص گره‌های آن المان با استفاده از روابط زیر محاسبه و در معادلات مربوطه جایگزین نمود [۱۲۰]:

¹ Graded Elements

² Generalized Isoparametric Element Formulation

$$E = \sum_{i=1}^m N_i E_i, \quad v = \sum_{i=1}^m N_i v_i, \quad \rho = \sum_{i=1}^m N_i \rho_i \quad (22-3)$$

در این تحقیق از المان‌های ایزوپارامتریک تعمیم یافته برای المان‌بندی ماده تابعی استفاده می‌شود.

۳-۴- انتگرال گیری عددی

به طور کلی در روش المان محدود برای محاسبه انتگرال‌هایی که از گسسته‌سازی معادلات نتیجه می‌شوند، باید از روش‌های عددی استفاده کرد. در اینجا نیز برای محاسبه انتگرال‌ها از روش انتگرال گیری گاوس استفاده می‌شود.

برای محاسبه عبارت‌های انتگرالی از روش انتگرال گیری گاوس استفاده می‌شود. در روش گاوس

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \text{ به صورت زیر تقریب زده می‌شود [۱۲۱]:}$$

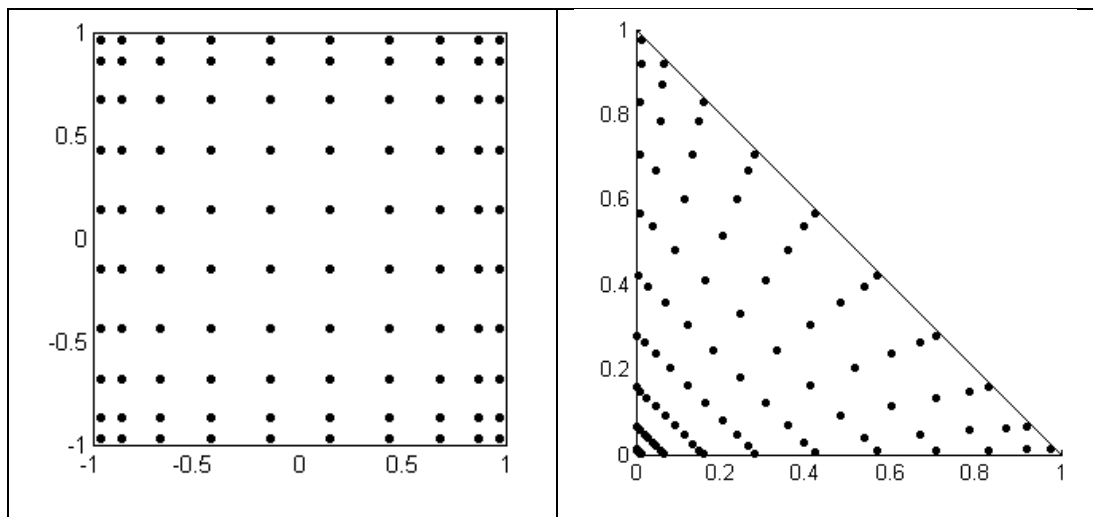
$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{nQ} f(\xi_i) w_i \quad (23-3)$$

در این رابطه w_i توابع وزنی، ξ_i مقادیر نقاط گاوسی و nQ تعداد نقاط گاوسی در حالت یک بعدی است.

با توجه به اینکه در روش المان محدود انتگرال‌گیری‌ها معمولاً بر روی سطح المان‌ها انجام می‌شوند، بنابراین به محاسبه انتگرال‌های دوگانه نیاز است. با استفاده از روش گاوس این انتگرال‌ها را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{nQ} \sum_{j=1}^{nQ} f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (24-3)$$

برنامه نوشته شده در این تحقیق امکان استفاده از حداکثر 21×21 ($nQ \times nQ$) نقطه گاوسی در یک المان برای انتگرال‌گیری دو بعدی را داراست. موقعیت نقاط گاوسی برای حالت nQ برابر با ۱۰ در یک المان مربعی و یک المان مثلثی در شکل (۳-۳) به تصویر کشیده شده است.

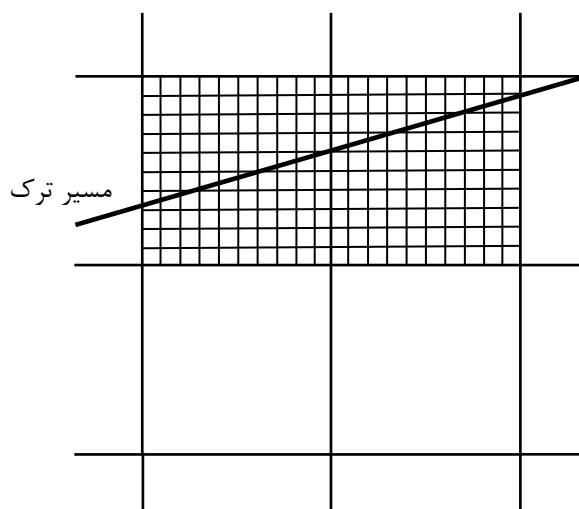


شکل ۳-۳- موقعیت نقاط گوسی در المان‌های مربعی و مثلثی در حالت $n_Q = 10$

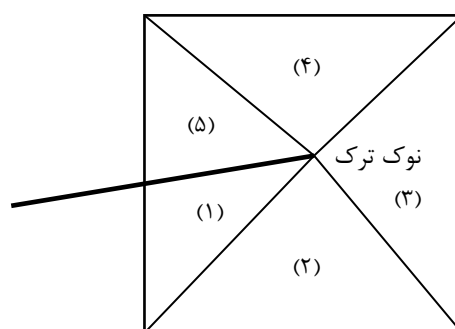
از آنجایی که روش گاوس نمی‌تواند انتگرال توابع غنی‌سازی را در المان‌هایی که توسط ترک بریده می‌شوند به طور دقیق محاسبه نماید، دالبو [۱۲۲] دو روش برای غلبه بر این مشکل ارائه کرد. اولین روش تقسیم بندی المان ترک خورده به المان‌های مثلثی کوچکتر در دو طرف ترک است به نحوی که لبه‌های این المان‌های مثلثی بر سطوح ترک منطبق باشند. دومین روش نیز تقسیم المان ترک خورده به المان‌های چهار ضلعی کوچکتر است.

در این تحقیق از روش دوم استفاده می‌شود و مطابق شکل (۳-۴) المان‌های ترک خورده به چهار ضلعی‌های کوچک‌تری تقسیم می‌شوند. برای انتگرال‌گیری و ارزیابی تابع هویساید، موقعیت مرکز هر یک از چهار ضلعی‌های کوچکتر نسبت به ترک ملاک قرار می‌گیرد. یعنی با قرار گرفتن مرکز چهارضلعی در یک طرف ترک، کل نقاط گوسی برای ارزیابی تابع هویساید در انتگرال‌گیری بر روی آن چهارضلعی در همان طرف در نظر گرفته می‌شوند.

المان نوک ترک نیز مطابق شکل (۳-۵) به چند مثلث تقسیم می‌شود تا اثر تکینی نوک ترک در عبارت زیر انتگرال حذف شود.



شکل ۳-۴- تقسیم بندی المان‌های شامل ترک برای انتگرال گیری عددی



شکل ۳-۵- تقسیم بندی المان شامل نوک ترک برای انتگرال گیری عددی

۳-۵- تعیین موقعیت نقاط نسبت به مسیر ترک

موقعیت استقرار نقاط (اعم از نقاط گره‌ای یا گاوسی) نسبت به مسیر ترک، یعنی اینکه نقاط در کدام طرف ترک قرار می‌گیرند، برای محاسبه تابع هویساید و انتگرال‌های عددی بر روی المان‌های شامل ترک یک مسئله مهم است.

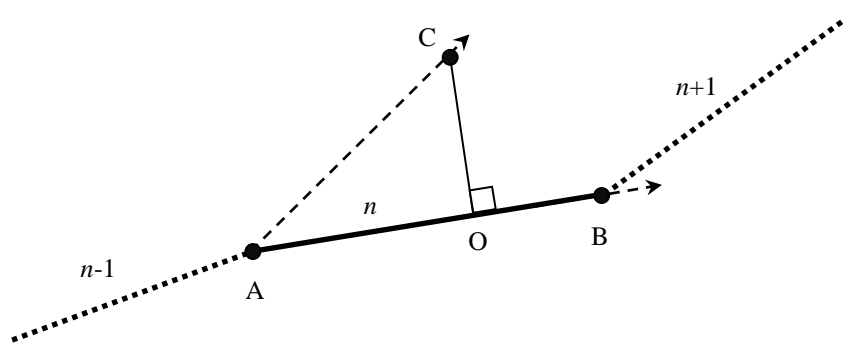
در این بخش با استفاده از روابط برداری الگوریتمی برای محاسبه تابع فاصله علامت‌دار (Z) در رابطه ۳-۹ و ۳-۱۰ که مشخص کننده فاصله و سمت قرارگیری نقاط از مسیر ترک است، ارائه

می‌شود. این تابع، تابع مجموعه تراز^۱ نامیده می‌شود. برای محاسبه این تابع به صورت زیر عمل می‌شود:

فرض می‌شود مسیر ترک شامل n بخش بوده که هر بخش یک خط راست است. مطابق شکل (۳-۶) نقاط A و B را نقاط ابتدا و انتهای بخش n ام از مسیر ترک و نقطه C را یک نقطه دلخواه فرض می‌کنیم. نقطه O نیز تصویر نقطه C بر روی خط AB می‌باشد. پارامتر rc که نسبت AO/AB می‌باشد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$rc = \frac{AC \cdot AB}{|AB|^2} \quad (۳-۲۵)$$

مقدار rc بیان کننده موقعیت تصویر نقطه C بر روی خط AB ، یعنی نقطه O است. جدول (۳-۱) تفاسیر استخراج شده از مقدار rc را بیان می‌کند.



شکل ۳-۶- موقعیت یک نقطه دلخواه نسبت به مسیر ترک

جدول ۳-۱- تفسیر پارامتر rc

مقدار rc	تفسیر بدست آمده
$rc = 0$	$O = A$
$rc = 1$	$O = B$
$rc < 0$	نقطه O روی امتداد بردار AB و قبل از نقطه A قرار دارد.
$rc > 1$	نقطه O روی امتداد بردار AB و بعد از نقطه B قرار دارد.
$0 < rc < 1$	نقطه O روی بردار AB (بین نقاط A و B) قرار دارد.

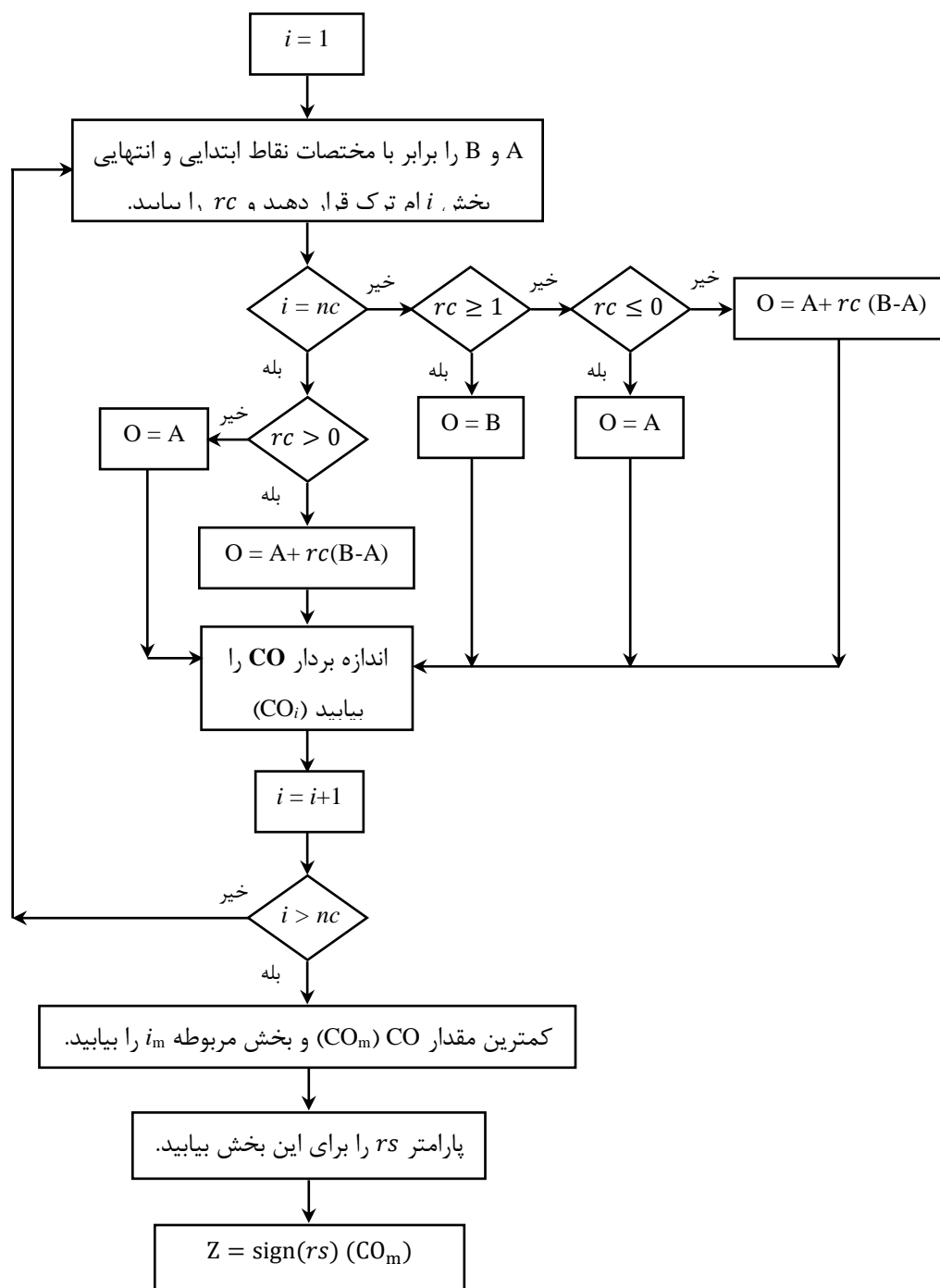
¹ Level set function

پارامتر rs نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$rs = \frac{\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}}{|\mathbf{AB}|^2} \quad (۳-۲۶)$$

هنگامی که $rs < 0$ باشد، نقطه C در سمت راست بردار \mathbf{AB} و هنگامی که $rs > 0$ باشد، نقطه C در سمت چپ بردار \mathbf{AB} قرار دارد. همچنین در صورتی که $rs = 0$ باشد، C بر روی بردار \mathbf{AB} واقع است.

فرض می‌شود مسیر ترک از nc بخش خطی تشکیل شده باشد و تغییر زاویه هر بخش نسبت به بخش قبلی از ۹۰ درجه بیشتر نشود. اکنون با استفاده از پارامترهای rs و rc و الگوریتم زیر می‌توان تابع فاصله (Z) را بدست آورد.



شکل ۳-۷- الگوریتم یافتن تابع فاصله Z

فصل چهارم

حل معادلات ترموالاستیک کلاسیک جفت شده

۴-۱- مقدمه

تئوری ترموالاستیسیته، رفتار اجسام الاستیک تحت اثر میدان‌های دمای غیر یکنواخت را توصیف می‌کند؛ بنابراین تعمیمی از تئوری الاستیسیته است. پدیده‌های گرما در الاستیسیته نخستین بار توسط دوهمال [۱۲۳] در سال ۱۸۳۷ مورد بحث قرار گرفتند. در سال ۱۸۸۵، نیومن [۱۲۴] معادله بدست آمده توسط دوهمال برای تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک را دوباره بدست آورد. در این تئوری معادلات حرکت یا تعادل شامل جمله دما هستند؛ اما معادله انتقال گرما مستقل از میدان کرنش است. پیشرفت بعدی در سال ۱۹۵۶ حاصل شد هنگامی که بیوت [۱۲۵] تئوری ترموالاستیسیته کوپله را معرفی کرد. این تئوری شامل دو معادله دیفرانسیل جزئی کوپل شده در بردار جابجایی و میدان دما است که یکی معادله هایپربولیک و دیگری پارابولیک است.

تئوری ترموالاستیسیته دینامیکی بر اساس معادله هدایت گرمایی فوریه به عنوان تئوری ترموالاستیسیته دینامیکی کلاسیک شناخته می‌شود. در تئوری کلاسیک فرض می‌شود که اغتشاشات گرمایی با سرعت‌های نامحدود در محیط انتشار می‌یابند.

راه حل‌های مسائل در ترموالاستیسیته دینامیکی بسیار مورد توجه قرار گرفته است و اولین راه حل تحلیلی برای یک مسئله مقدار مرزی اولیه در ترموالاستیسیته کلاسیک دینامیکی جفت نشده توسط دانیلوفسکایا [۱۲۶] ارائه شد. از جمله مطالعات مربوطه به روش‌های حل تحلیلی و تقریبی که قابلیت حل معادلات ترموالاستیک جفت شده و غیر جفت شده را دارند، می‌توان به کارهای ایگنازاک [۱۲۷] و هیتنارسکی و ایگنازاک [۱۲۸ و ۱۲۹] اشاره کرد.

حل تقریبی معادلات ترموالاستیک دینامیکی جفت شده نخستین بار با روش المان محدود توسط نیکل و ساکن [۱۳۰] ارائه شد. همچنین حل‌های تقریبی برای مسائل گرمایی-مکانیکی با معادلات ترمو الاستیسیته دینامیکی جفت شده و غیر جفت شده به کمک روش المان محدود توسط تینگ و چن [۱۳۱]، لیو و پانگ [۱۳۲]، تاما و رایلکار [۱۳۳-۱۳۷] و تاما و نامبورو [۱۳۸-۱۴۰] ارائه شده است.

در این فصل نحوه حل معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک جفت شده به کمک روش المان محدود توسعه یافته و با استفاده از المان‌های ایزوپارامتریک تعمیم یافته برای بکارگیری در مواد تابعی تشریح می‌شود.

۴-۲- استخراج معادلات ترموالاستیک جفت شده کلاسیک

یک سازه تحت شوک حرارتی باید با استفاده از شکل جفت شده معادلات ترموالاستیک و انرژی تحلیل شود. حل‌های تحلیلی این گونه از مسائل از نظر ریاضی پیچیده و محدود به یک جسم نامحدود یا نیم فضا^۱ با شرایط مرزی ساده هستند [۱۴۱].

در تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته خطی مولفه‌های تانسور کرنش، توابعی خطی از مولفه‌های تانسور تنش و مولفه‌های تانسور کرنش ناشی از تغییر دما هستند [۱۴۲ و ۱۴۳]. یعنی:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^T \quad (۱-۴)$$

که در این رابطه ε_{ij}^E کرنش الاستیک و ε_{ij}^T کرنش گرمایی است. یک المان از یک ماده همسانگرد را در نظر بگیرید که دمای آن از T_0 که در این دما کرنش‌ها و تنش‌ها صفر هستند به T افزایش می‌یابد. هیچ نیرویی به لبه‌های المان اعمال نمی‌شود. کرنش گرمایی این المان ناشی از تغییر دما عبارت است از:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_t (T - T_0) \delta_{ij} \quad (۲-۴)$$

در این رابطه α_t ضریب انبساط حرارتی خطی و δ_{ij} دلتای کرونکر است. مولفه‌های تانسور کرنش الاستیک به صورت خطی با مولفه‌های تانسور تنش متناسب هستند:

$$\varepsilon_{ij}^E = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (۳-۴)$$

^۱ Half-space

در این رابطه G مدول صلبیت برشی و ν نسبت پواسون است. رابطه (۳-۴) به عنوان قانون تشکیل دهنده الاستیسیته خطی یا قانون هوک شناخته می‌شود. با استفاده از معادلات (۲-۴) و (۳-۴)، تانسور کرنش نهایی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha_t (T - T_0) \delta_{ij} \quad (۴-۴)$$

معادله (۴-۴) را قانون تشکیل دهنده ترموالاستیسیته خطی می‌نامند. با حل این معادله برای σ_{ij} داریم:

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\varepsilon_{kk} - \frac{1+\nu}{\nu} \alpha_t (T - T_0) \right) \delta_{ij} \right] \quad (۵-۴)$$

روابط (۴-۴) و (۵-۴) را می‌توان بر حسب ثوابت لامه یعنی μ و λ نوشت:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha_t (T - T_0) \delta_{ij} \quad (۶-۴)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + [\lambda \varepsilon_{kk} - \alpha_t (3\lambda + 2\mu) (T - T_0)] \delta_{ij} \quad (۷-۴)$$

که در این روابط μ و λ عبارتند از:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۸-۴)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (۹-۴)$$

معادله حرکت بر حسب مولفه‌های تنش عبارت است از [۱۴۱]:

$$\sigma_{ij,j} + B_i = \rho \ddot{u}_i \quad (۱۰-۴)$$

در این رابطه B_i نیروی کالبدی بر واحد حجم در جهت i است. مولفه‌های تنش را می‌توان بر حسب جابجایی‌ها بیان کرد. برای این منظور ابتدا باید مولفه‌های کرنش را بر حسب جابجایی‌ها بیان نمود. برای مواد همسانگرد الاستیک خطی جابجایی‌های بسیار کوچک رابطه کرنش به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (۱۱-۴)$$

سپس رابطه (۱۱-۴) را در معادله (۷-۴) جایگذاری می‌شود.

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + [\lambda u_{k,k} - \alpha_t(3\lambda + 2\mu)(T - T_0)]\delta_{ij} \quad (12-4)$$

با جایگذاری معادله (12-4) در معادله (10-4) می توان معادله حرکت را بر حسب جابجایی ها نوشت.

$$[\mu(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + [\lambda u_{k,k} - \beta\theta]_{,i} + B_i = \rho\ddot{u}_i \quad (13-4)$$

که در این رابطه $\beta = \alpha(3\lambda + 2\mu)$ و $\theta = (T - T_0)$. بنابراین معادلات حرکت برای مسائل دوبعدی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$[2\mu u_{1,1}]_{,1} + [\mu(u_{1,2} + u_{2,1})]_{,2} + [\lambda u_{k,k} - \beta\theta]_{,1} + B_1 = \rho\ddot{u}_1 \quad (14-4)$$

$$[\mu(u_{2,1} + u_{1,2})]_{,1} + [2\mu u_{2,2}]_{,2} + [\lambda u_{k,k} - \beta\theta]_{,2} + B_2 = \rho\ddot{u}_2 \quad (15-4)$$

بر طبق قانون هدایت گرمایی فوریه، شار گرمایی عبوری از یک سطح واحد در واحد زمان به یک

محیط پیوسته متناسب است با توزیع دما و با رابطه تجربی زیر بیان می شود [141]:

$$q_i = -k_{ij}T_{,j} \quad (16-4)$$

در این رابطه k_{ij} ضرایب هدایت گرمایی برای یک ماده ناهمسانگرد¹ کلی هستند.

کلی ترین شکل قانون اول ترمودینامیک به صورت زیر بیان می شود [141]:

$$(k_{ij}T_{,j})_{,i} - c_t\rho\dot{T} - T_0\left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad (17-4)$$

این رابطه قانون تعادل حرارتی در یک جامد ناهمسانگرد ناهمگن را توصیف می کند. در این رابطه c_t

به عنوان گرمای ویژه شناخته می شود. برای یک جامد همسانگرد رابطه (17-4) را می توان به صورت

زیر نوشت:

$$(kT_{,i})_{,i} - c_t\rho\dot{T} - T_0\left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)\beta\dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \quad (18-4)$$

اگر علاوه بر شار حرارتی عبوری از مرز محیط پیوسته، گرما نیز با نرخ R بر واحد حجم و زمان در

جسم تولید شود، معادله (18-4) را می توان به صورت زیر اصلاح کرد:

¹ Anisotropic material

$$(kT_{,i})_{,i} - c_t \rho \dot{T} - T_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) \beta \dot{\epsilon}_{ii} + R = 0 \quad (19-4)$$

هنگامی که نرخ زمانی تغییر شرایط مرزی دمایی بر روی سازه یا نرخ زمانی تغییر منابع گرمایی در سازه قابل مقایسه با مشخصه‌های ارتعاشی سازه باشد، موج‌های تنش گرمایی ایجاد می‌شوند. تحت این شرایط، حل مسئله برای میدان‌های تنش و دما باید از طریق معادلات جفت شده ترموالاستیسیته بدست آید. معادلات کلی ترموالاستیسیته جفت شده کلاسیک عبارتند از معادله حرکت (۴-۱۳) و قانون اول ترمودینامیک (معادله ۴-۱۹). بنابراین معادلات حاکم برای یک جامد همسانگرد متشکل از یک ماده تابعی بر حسب مولفه‌های جابجایی و دما عبارتند از:

$$[\mu(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + [\lambda u_{k,k} - \beta \theta]_{,i} + B_i = \rho \ddot{u}_i \quad (20-4)$$

$$(kT_{,i})_{,i} - \rho c \dot{T} - T_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) \beta \dot{\epsilon}_{ii} + R = 0 \quad (21-4)$$

در غیاب منابع گرمایی و نیروهای کالبدی معادلات حاکم به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$[\mu(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + [\lambda u_{k,k} - \beta \theta]_{,i} = \rho \ddot{u}_i \quad (22-4)$$

$$(kT_{,i})_{,i} - \rho c \dot{T} - T_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) \beta \dot{\epsilon}_{ii} = 0 \quad (23-4)$$

شرایط مرزی دمایی بر روی لبه‌های جسم را بسته به اینکه لبه مورد نظر دما ثابت باشد یا یک

شار گرمایی از آن عبور کند؛ به ترتیب می‌توان با روابط (۴-۲۴ الف) و (۴-۲۴ ب) بیان کرد:

$$\theta = \theta_s \quad (4-24 \text{ الف})$$

$$\theta_{,n} + a\theta = b \quad (4-24 \text{ ب})$$

شرایط مرزی مکانیکی از طریق بردار تنش‌های سطحی^۱ بر روی مرز تعیین می‌شوند. مولفه‌های

نیروی مرزی از طریق فرمول کوشی^۲ به تانسور تنش مرتبط می‌شوند.

$$Tr_i^n = \sigma_{ij} n_j \quad (25-4)$$

¹ Traction vector

² Cauchy's formula

که در این رابطه Tr_i^n مولفه تنش سطحی بر روی سطح مرزی است که بردار یکه نرمال آن n می‌باشد.

۳-۴- گسسته سازی معادلات ترموالاستیک جفت شده کلاسیک

همان طور که قبلاً گفته شد، سیستم معادلات جفت شده (۲۲-۴) و (۲۳-۴) حل تحلیلی عمومی ندارند. برای حل آنها می‌توان از فرمول بندی المان محدود مبتنی بر روش گلرکین استفاده نمود. مدل المان محدود توسعه یافته مشابه مدل المان محدود است. برای هر المان مبنا (e) با این فرض که تمامی گره‌های آن با هر دو تابع غنی سازی، غنی شده‌اند؛ همان طور که در فصل سوم نشان داده شد، مولفه‌های جابجایی و تغییر دما با استفاده از روابط (۱۶-۳)، (۱۷-۳) و (۱۸-۳) تقریب زده می‌شوند که می‌توان این روابط را به صورت فشرده زیر نمایش داد:

$$u^e(x, y, t) = N_h(x, y)a_h^u(t) + \Phi_h(x, y)b_h^u(t) + \Psi_{hm}(x, y)c_{hm}^u(t) \quad (26-4)$$

$$v^e(x, y, t) = N_h(x, y)a_h^v(t) + \Phi_h(x, y)b_h^v(t) + \Psi_{hm}(x, y)c_{hm}^v(t) \quad (27-4)$$

$$\theta^e(x, y, t) = N_h(x, y)a_h^T(t) + \Phi_h(x, y)b_h^T(t) + \Psi_{hm}(x, y)c_{hm}^T(t) \quad (28-4)$$

$$h = 1, \dots, ne, \quad m = 1, \dots, 4$$

که ne تعداد نقاط گره‌ای در المان مبنا (e) است. این یک تقریب از نوع کانتروویچ^۱ است که توابع زمان و مکان به توابع مجزا تفکیک می‌شوند [۱۴۱]. در این رابطه مولفه‌های جابجایی و تغییر دما در هر گره تابع زمان هستند و تابع شکل $N_h(x, y)$ ، تابعی از متغیرهای مکان است. مشتقات اول و دوم مولفه‌های جابجایی و تغییر دما نسبت به زمان را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\dot{u}^e(x, y, t) = N_h(x, y)\dot{a}_h^u(t) + \Phi_h(x, y)\dot{b}_h^u(t) + \Psi_{hm}(x, y)\dot{c}_{hm}^u(t) \quad (29-4)$$

$$\ddot{u}^e(x, y, t) = N_h(x, y)\ddot{a}_h^u(t) + \Phi_h(x, y)\ddot{b}_h^u(t) + \Psi_{hm}(x, y)\ddot{c}_{hm}^u(t) \quad (30-4)$$

¹ Kantrovitch type of approximation

$$\dot{v}^e(x, y, t) = N_h(x, y)\dot{a}_h^v(t) + \Phi_h(x, y)\dot{b}_h^v(t) + \Psi_{hm}(x, y)\dot{c}_{hm}^v(t) \quad (31-4)$$

$$\ddot{v}^e(x, y, t) = N_h(x, y)\ddot{a}_h^v(t) + \Phi_h(x, y)\ddot{b}_h^v(t) + \Psi_{hm}(x, y)\ddot{c}_{hm}^v(t) \quad (32-4)$$

$$\dot{\theta}^e(x, y, t) = N_h(x, y)\dot{a}_h^T(t) + \Phi_h(x, y)\dot{b}_h^T(t) + \Psi_{hm}(x, y)\dot{c}_{hm}^T(t) \quad (33-4)$$

$$h = 1, \dots, ne, \quad m = 1, \dots, 4$$

با اعمال انتگرال باقی مانده وزنی نسبت به توابع وزنی $S_l(x, y)$ ، تقریب گلرکین را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{V(e)} (\sigma_{ij,j} + B_i - \rho\ddot{u}_i) S_l dV = 0 \quad l = 1, 2, \dots, ns, \quad i, j = 1, 2 \quad (34-4)$$

که در این رابطه توابع وزنی $S_l(x, y)$ همان توابع شکل المان محدود توسعه یافته هستند. یعنی،

$$S_l = \{N_1, N_2, N_3, N_4, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Psi_{1m}, \Psi_{2m}, \Psi_{3m}, \Psi_{4m}\} \quad m = 1, \dots, 4 \quad (35-4)$$

با اعمال فرمول بندی ضعیف^۱ به اولین عبارت رابطه (۳۴-۴) و استفاده از تئوری گاوس نتیجه می شود:

$$\int_{V(e)} (\sigma_{ij,j}) S_l dV = \int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j S_l dA - \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \quad (36-4)$$

در این رابطه n_j مولفه های بردار یکه نرمال خارجی بر روی مرز هستند. جایگذاری رابطه (۳۶-۴) در معادله (۳۴-۴) رابطه زیر را نتیجه می دهد:

$$\int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j S_l dA - \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV + \int_{V(e)} B_i S_l dV - \int_{V(e)} \rho \ddot{u}_i S_l dV = 0 \quad (37-4)$$

با در نظر گرفتن فرمول کوشی (رابطه ۲۵-۴) اولین عبارت از رابطه (۳۷-۴) را می توان به صورت

زیر نوشت:

$$\int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j S_l dA = \int_{A(e)} Tr_i^n S_l dA \quad (38-4)$$

با جایگذاری σ_{ij} از رابطه (۱۲-۴) در دومین عبارت از رابطه (۳۷-۴) رابطه زیر نتیجه می شود:

^۱ Weak formulation

$$\int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV = \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} [\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} - \beta \theta \delta_{ij}] dV \quad (39-4)$$

با جایگذاری روابط (38-4) و (39-4) در معادله (37-4)، معادله زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \int_{V(e)} \rho \ddot{u}_i S_l dV + \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} [\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij}] dV - \int_{V(e)} \beta \theta \frac{\partial S_l}{\partial x_i} dV \\ = \int_{V(e)} B_i S_l dV + \int_{A(e)} Tr_i^n S_l dA \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (40-4)$$

اکنون، المان مبنای e با تعداد ne گره در نظر گرفته می شود که تمامی گره های آن شامل هر دو تابع غنی سازی هستند. مولفه های جابجایی و تغییر دما در این المان با معادلات (26-4) تا (28-4) تقریب زده می شوند. با این تقریب ها، معادله (40-4) را در حالت تفکیک شده می توان با معادلات زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \left(\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV \right) \ddot{a}_h^u + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV \right) \ddot{b}_h^u + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Psi_{hm} dV \right) \ddot{c}_{hm}^u \\ + \int_{V(e)} S_{l,x} [(\lambda + 2\mu)(N_{h,x} a_h^u + \Phi_{h,x} b_h^u + \Psi_{hm,x} c_{hm}^u) \\ + \lambda(N_{h,y} a_h^v + \Phi_{h,y} b_h^v + \Psi_{hm,y} c_{hm}^v)] dV \\ + \int_{V(e)} \mu S_{l,y} (N_{h,y} a_h^u + \Phi_{h,y} b_h^u + \Psi_{hm,y} c_{hm}^u + N_{h,x} a_h^v \\ + \Phi_{h,x} b_h^v + \Psi_{hm,x} c_{hm}^v) dV \\ - \int_{V(e)} \beta S_{l,x} (N_h a_h^T + \Phi_h b_h^T + \Psi_{hm} c_{hm}^T) dV \\ = \int_{V(e)} B_x S_l dV + \int_{A(e)} Tr_x^n S_l dA \end{aligned} \quad (41-4)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV \right) \ddot{a}_h^v + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV \right) \ddot{b}_h^v + \left(\int_{V(e)} \rho N S_l \Psi_{hm} dV \right) \ddot{c}_{hm}^v \\
& + \int_{V(e)} \mu S_{l,x} (N_{h,x} a_h^v + \Phi_{h,x} b_h^v + \Psi_{hm,x} c_{hm}^v + N_{h,y} a_h^u + \Phi_{h,y} b_h^u \\
& + \Psi_{hm,y} c_{hm}^u) dV \\
& + \int_{V(e)} S_{l,y} [(\lambda + 2\mu)(N_{h,y} a_h^v + \Phi_{h,y} b_h^v + \Psi_{hm,y} c_{hm}^v) \\
& + \lambda(N_{h,x} a_h^u + \Phi_{h,x} b_h^u + \Psi_{hm,x} c_{hm}^u)] dV \\
& - \int_{V(e)} \beta S_{l,y} (N_h a_h^T + \Phi_h b_h^T + \Psi_{hm} c_{hm}^T) dV \\
& = \int_{V(e)} B_y S_l dV + \int_{A(e)} Tr_y^n S_l dA
\end{aligned} \tag{۴۲-۴}$$

$$l = 1, 2, \dots, ns, \quad h = 1, \dots, ne \quad m = 1, \dots, 4$$

معادلات (۴۱-۴) و (۴۲-۴) تقریب المان محدود توسعه یافته معادله حرکت هستند. تقریب

گلرکین معادله انرژی (رابطه ۴-۲۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{V(e)} \left(q_{i,i} + \rho c_t \dot{\theta} + T_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0} \right) \beta \dot{u}_{i,i} - R \right) S_l dV = 0 \quad l = 1, 2, \dots, ns \tag{۴۳-۴}$$

فرمول بندی انتگرالی گرادیان شار گرمایی $q_{i,i}$ برای مسائل دو بعدی را می‌توان به صورت زیر

بیان کرد [۱۴۱]:

$$\begin{aligned}
\int_{V(e)} q_{i,i} S_l dV &= \int_{V(e)} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) S_l dV \\
&= \int_{A(e)} (q_i n_i) S_l dA - \int_{V(e)} q_i \frac{\partial S_l}{\partial x_i} dV \quad l = 1, 2, \dots, ns
\end{aligned} \tag{۴۴-۴}$$

که در این رابطه $A(e)$ سطح مرزی المان e تحت شار حرارتی است. جایگذاری رابطه (۴۴-۴) در

معادله (۴۳-۴) و مرتب کردن عبارتهای آن رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\int_{V(e)} \rho c_t \dot{\theta} S_l dV - \int_{V(e)} q_i \frac{\partial S_l}{\partial x_i} dV + \int_{V(e)} T_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) \beta \dot{u}_{i,i} S_l dV = \quad (45-4)$$

$$\int_{V(e)} R S_l dV - \int_{A(e)} (q_i n_i) S_l dA \quad l = 1, 2, \dots, ns$$

در صورتی که تغییرات دما θ ، در مقایسه با دمای اولیه T_0 کوچک باشد، معادله (45-4) را

می‌توان به شکل ساده‌تر زیر نوشت:

$$\int_{V(e)} \rho c_t \dot{\theta} S_l dV - \int_{V(e)} q_i \frac{\partial S_l}{\partial x_i} dV + \int_{V(e)} T_0 \beta \dot{u}_{i,i} S_l dV = \quad (46-4)$$

$$\int_{V(e)} R S_l dV - \int_{A(e)} (q_i n_i) S_l dA \quad l = 1, 2, \dots, ns$$

با جایگذاری مولفه‌های جابجایی u_i و تغییر دما θ از روابط (4-26) تا (4-28) در رابطه (46-4)،

تقریب المان محدود توسعه یافته معادله انرژی جفت شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left(\int_{V(e)} \rho c_t S_l N_h dV \right) \dot{a}_h^T + \left(\int_{V(e)} \rho c_t S_l \Phi_h dV \right) \dot{b}_h^T + \left(\int_{V(e)} \rho c_t S_l \Psi_{hm} dV \right) \dot{c}_{hm}^T +$$

$$\left(\int_{V(e)} k_x S_{l,x} N_{h,x} dV \right) \dot{a}_h^T + \left(\int_{V(e)} k_x S_{l,x} \Phi_{h,x} dV \right) \dot{b}_h^T + \left(\int_{V(e)} k_x S_{l,x} \Psi_{1h,x} dV \right) \dot{c}_h^T +$$

$$\left(\int_{V(e)} k_y S_{l,y} N_{h,y} dV \right) \dot{a}_h^T + \left(\int_{V(e)} k_y S_{l,y} \Phi_{h,y} dV \right) \dot{b}_h^T + \left(\int_{V(e)} k_y S_{l,y} \Psi_{h1,y} dV \right) \dot{c}_h^T +$$

$$\left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l N_{h,x} dV \right) \dot{a}_h^u + \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Phi_{h,x} dV \right) \dot{b}_h^u + \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Psi_{hm,x} dV \right) \dot{c}_{hm}^u +$$

$$\left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l N_{h,y} dV \right) \dot{a}_h^v + \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Phi_{h,y} dV \right) \dot{b}_h^v + \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Psi_{hm,y} dV \right) \dot{c}_{hm}^v$$

$$= \int_{V(e)} R S_l dV - \int_{A(e)} (q_x n_x) S_l dA - \int_{A(e)} (q_y n_y) S_l dA$$

$$l = 1, 2, \dots, ns \quad h = 1, \dots, ne \quad m = 1, \dots, 4 \quad (47-4)$$

با مرتب سازی عبارتهای معادلات (41-4)، (42-4) و (47-4)، می‌توان آنها را در قالب معادلات

زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV \right) \ddot{a}_h^u + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV \right) \ddot{b}_h^u + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Psi_{hm} dV \right) \ddot{c}_{hm}^u + \\
& \left(\int_{V(e)} [(\lambda + 2\mu) S_{l,x} N_{h,x} + \mu S_{l,y} N_{h,y}] dV \right) a_h^u + \\
& \left(\int_{V(e)} [(\lambda + 2\mu) S_{l,x} \Phi_{h,x} + \mu S_{l,y} \Phi_{h,y}] dV \right) b_h^u + \\
& \left(\int_{V(e)} [(\lambda + 2\mu) S_{l,x} \Psi_{hm,x} + \mu S_{l,y} \Psi_{hm,y}] dV \right) c_{hm}^u + \\
& \left(\int_{V(e)} [\lambda S_{l,x} N_{h,y} + \mu S_{l,y} N_{h,x}] dV \right) a_h^v + \left(\int_{V(e)} [\lambda S_{l,x} \Phi_{h,y} + \mu S_{l,y} \Phi_{h,x}] dV \right) b_h^v + \\
& \left(\int_{V(e)} [\lambda S_{l,x} \Psi_{hm,y} + \mu S_{l,y} \Psi_{hm,x}] dV \right) c_{hm}^v - \int_{V(e)} \beta S_{l,x} (N_h a_h^T + \Phi_h b_h^T + \Psi_{hm} c_{hm}^T) dV \\
& = \int_{V(e)} B_x S_l dV + \int_{A(e)} Tr_x^n S_l dA \quad (48-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV \right) \ddot{a}_h^v + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV \right) \ddot{b}_h^v + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Psi_{hm} dV \right) \ddot{c}_{hm}^v + \\
& \left(\int_{V(e)} [\mu S_{l,x} N_{h,y} + \lambda S_{l,y} N_{h,x}] dV \right) a_h^u + \left(\int_{V(e)} [\mu S_{l,x} \Phi_{h,y} + \lambda S_{l,y} \Phi_{h,x}] dV \right) b_h^u + \\
& \left(\int_{V(e)} [\mu S_{l,x} \Psi_{hm,y} + \lambda S_{l,y} \Psi_{,x}] dV \right) c_{hm}^u + \\
& \left(\int_{V(e)} [\mu S_{l,x} N_{h,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} N_{h,y}] dV \right) a_h^v + \\
& \left(\int_{V(e)} [\mu S_{l,x} \Phi_{h,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} \Phi_{h,y}] dV \right) b_h^v + \\
& \left(\int_{V(e)} [\mu S_{l,x} \Psi_{hm,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} \Psi_{hm,y}] dV \right) c_{hm}^v - \\
& \int_{V(e)} \beta S_{l,y} (N_h a_h^T + \Phi_h b_h^T + \Psi_{hm} c_{hm}^T) dV = \int_{V(e)} B_y S_l dV + \int_{A(e)} Tr_y^n S_l dA \quad (49-4)
\end{aligned}$$

$$\left(\int_{V(e)} \rho c_t S_l N_h dV \right) \dot{a}_h^T + \left(\int_{V(e)} \rho c_t S_l \Phi_h dV \right) \dot{b}_h^T + \left(\int_{V(e)} \rho c_t S_l \Psi_{hm} dV \right) \dot{c}_{hm}^T +$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{V(e)} [k_x S_{l,x} N_{h,x} + k_y S_{l,y} N_{h,y}] dV \right) a_h^T + \left(\int_{V(e)} [k_x S_{l,x} \Phi_{h,x} + k_y S_{l,y} \Phi_{h,y}] dV \right) b_h^T + \\
& \left(\int_{V(e)} [k_x S_{l,x} \Psi_{h1,x} + k_y S_{l,y} \Psi_{hm,y}] dV \right) c_{hm}^T + \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l N_{h,x} dV \right) \dot{a}_h^u + \\
& \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Phi_{h,x} dV \right) \dot{b}_h^u + \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Psi_{hm,x} dV \right) \dot{c}_{hm}^u + \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l N_{h,y} dV \right) \dot{a}_h^v + \\
& \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Phi_{h,y} dV \right) \dot{b}_h^v + \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Psi_{hm,y} dV \right) \dot{c}_{hm}^v \\
& = \int_{V(e)} R S_l dV - \int_{A(e)} (q_x n_x) S_l dA - \int_{A(e)} (q_y n_y) S_l dA \quad (50-4) \\
& l = 1, 2, \dots, ns \quad h = 1, \dots, ne \quad m = 1, \dots, 4
\end{aligned}$$

معادلات (48-4)، (49-4) و (50-4) را می‌توان در غالب یک معادله ماتریسی مونتاز کرد. این

معادله، معادله جفت شده المان محدود توسعه یافته است که به صورت زیر بدست می‌آید:

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (51-4)$$

در این رابطه $[M]$ ، $[C]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی، و سفتی هستند. $\{\Delta\}$ بردار

مجهولات گره‌ای و $\{F\}$ بردار نیروهای گره‌ای است. برای یک المان مبنا (e) این ماتریس‌ها و بردارها

به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$[M]^{(e)} = \begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] & [M_{13}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [M_{24}] & [M_{25}] & [M_{26}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (52-4)$$

$$[C]^{(e)} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [C_{31}] & [C_{32}] & [C_{33}] & [C_{34}] & [C_{35}] & [C_{36}] & [C_{37}] & [C_{38}] & [C_{39}] \end{bmatrix} \quad (53-4)$$

$$[K]^{(e)} =$$

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] & [K_{15}] & [K_{16}] & [K_{17}] & [K_{18}] & [K_{19}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] & [K_{25}] & [K_{26}] & [K_{27}] & [K_{28}] & [K_{29}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [K_{37}] & [K_{38}] & [K_{39}] \end{bmatrix} \quad (54-4)$$

$$\{\Delta\}^{(e)} = \{a_h^u, b_h^u, c_{hm}^u, a_h^v, b_h^v, c_{hm}^v, a_h^T, b_h^T, c_{hm}^T\}^T, \quad (55-4)$$

$$h = 1, \dots, ne, \quad m = 1, \dots, 4$$

$$\{F\}^{(e)} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{V(e)} B_x S_l dV + \int_{A(e)} Tr_x^n S_l dA \\ \int_{V(e)} B_y S_l dV + \int_{A(e)} Tr_y^n S_l dA \\ \int_{V(e)} R S_l dV - \int_{A(e)} (q_x n_x) S_l dA - \int_{A(e)} (q_y n_y) S_l dA \end{array} \right\} \quad (56-4)$$

مولفه‌های ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی، خود ماتریس‌هایی هستند که می‌توان آنها را از معادلات (4-48)، (4-49) و (4-50) استخراج کرد. با انجام این کار مولفه‌های ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$[M_{11}] = [M_{24}] = \left[\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV \right] \quad (57-4)$$

$$[M_{12}] = [M_{25}] = \left[\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV \right] \quad (58-4)$$

$$[M_{13}] = [M_{26}] = \left[\int_{V(e)} \rho S_l \Psi_{hm} dV \right] \quad (59-4)$$

$$[C_{31}] = \left[\int_{V(e)} T_0 \beta S_l N_{h,x} dV \right] \quad (60-4)$$

$$[C_{32}] = \left[\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Phi_{h,x} dV \right], \quad (61-4)$$

$$[C_{33}] = \left[\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Psi_{hm,x} dV \right] \quad (62-4)$$

$$[C_{34}] = \left[\int_{V(e)} T_0 \beta S_l N_{h,y} dV \right], \quad (63-4)$$

$$[C_{35}] = \left[\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Phi_{h,y} dV \right] \quad (64-4)$$

$$[C_{36}] = \left[\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Psi_{hm,y} dV \right], \quad (65-4)$$

$$[C_{37}] = \left[\int_{V(e)} \rho c_t S_l N_h dV \right] \quad (66-4)$$

$$[C_{38}] = \left[\int_{V(e)} \rho c_t S_l \Phi_h dV \right] \quad (۶۷-۴)$$

$$[C_{39}] = \left[\int_{V(e)} \rho c_t S_l \Psi_{hm} dV \right] \quad (۶۸-۴)$$

$$[K_{11}] = \left[\int_{V(e)} \left((\lambda + 2\mu) S_{l,x} N_{h,x} + \mu S_{l,y} N_{h,y} \right) dV \right] \quad (۶۹-۴)$$

$$[K_{12}] = \left[\int_{V(e)} \left((\lambda + 2\mu) S_{l,x} \Phi_{h,x} + \mu S_{l,y} \Phi_{h,y} \right) dV \right] \quad (۷۰-۴)$$

$$[K_{13}] = \left[\int_{V(e)} \left((\lambda + 2\mu) S_{l,x} \Psi_{hm,x} + \mu S_{l,y} \Psi_{hm,y} \right) dV \right] \quad (۷۱-۴)$$

$$[K_{14}] = \left[\int_{V(e)} \left(\lambda S_{l,x} N_{h,y} + \mu S_{l,y} N_{h,x} \right) dV \right] \quad (۷۲-۴)$$

$$[K_{15}] = \left[\int_{V(e)} \left(\lambda S_{l,x} \Phi_{h,y} + \mu S_{l,y} \Phi_{h,x} \right) dV \right] \quad (۷۳-۴)$$

$$[K_{16}] = \left[\int_{V(e)} \left(\lambda S_{l,x} \Psi_{hm,y} + \mu S_{l,y} \Psi_{hm,x} \right) dV \right], \quad (۷۴-۴)$$

$$[K_{17}] = \left[- \int_{V(e)} \beta S_{l,x} N_h dV \right] \quad (۷۵-۴)$$

$$[K_{18}] = \left[- \int_{V(e)} \beta S_{l,x} \Phi_h dV \right] \quad (۷۶-۴)$$

$$[K_{19}] = \left[- \int_{V(e)} \beta S_{l,x} \Psi_{hm} dV \right] \quad (۷۷-۴)$$

$$[K_{21}] = \left[\int_{V(e)} \left(\mu S_{l,x} N_{h,y} + \lambda S_{l,y} N_{h,x} \right) dV \right] \quad (۷۸-۴)$$

$$[K_{22}] = \left[\int_{V(e)} \left(\mu S_{l,x} \Phi_{h,y} + \lambda S_{l,y} \Phi_{h,x} \right) dV \right] \quad (۷۹-۴)$$

$$[K_{23}] = \left[\int_{V(e)} \left(\mu S_{l,x} \Psi_{hm,y} + \lambda S_{l,y} \Psi_{hm,x} \right) dV \right] \quad (۸۰-۴)$$

$$[K_{24}] = \left[\int_{V(e)} (\mu S_{l,x} N_{h,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} N_{h,y}) dV \right] \quad (۸۱-۴)$$

$$[K_{25}] = \left[\int_{V(e)} (\mu S_{l,x} \Phi_{h,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} \Phi_{h,y}) dV \right] \quad (۸۲-۴)$$

$$[K_{26}] = \left[\int_{V(e)} (\mu S_{l,x} \Psi_{hm,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} \Psi_{hm,y}) dV \right] \quad (۸۳-۴)$$

$$[K_{27}] = \left[- \int_{V(e)} \beta S_{l,y} N_h dV \right] \quad (۸۴-۴)$$

$$[K_{28}] = \left[- \int_{V(e)} \beta S_{l,y} \Phi_h dV \right] \quad (۸۵-۴)$$

$$[K_{29}] = \left[- \int_{V(e)} \beta S_{l,y} \Psi_{hm} dV \right] \quad (۸۶-۴)$$

$$[K_{37}] = \left[\int_{V(e)} (k_x S_{l,x} N_{h,x} + k_y S_{l,y} N_{h,y}) dV \right] \quad (۸۷-۴)$$

$$[K_{38}] = \left[\int_{V(e)} (k_x S_{l,x} \Phi_{h,x} + k_y S_{l,y} \Phi_{h,y}) dV \right] \quad (۸۸-۴)$$

$$[K_{39}] = \left[\int_{V(e)} (k_x S_{l,x} \Psi_{hm,x} + k_y S_{l,y} \Psi_{hm,y}) dV \right] \quad (۸۹-۴)$$

مولفه‌های ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی المان مبنا را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی

کرد:

$$[M_{11}] = [M_{24}] = \int_{V(e)} \rho [S]^T [N] dV \quad (۹۰-۴)$$

$$[M_{12}] = [M_{25}] = \int_{V(e)} \rho [S]^T [\Phi] dV \quad (۹۱-۴)$$

$$[M_{13}] = [M_{26}] = \int_{V(e)} [\rho [S]^T [\Psi_1] \quad \rho [S]^T [\Psi_2] \quad \rho [S]^T [\Psi_3] \quad \rho [S]^T [\Psi_4]] dV \quad (۹۲-۴)$$

$$[C_{31}] = \int_{V(e)} T_0 \beta [S]^T [G_1] dV \quad (۹۳-۴)$$

$$[C_{32}] = \int_{V(e)} T_0 \beta [S]^T [G_3] dV \quad (94-4)$$

$$[C_{33}] = \int_{V(e)} [T_0 \beta [S]^T [G_5] \quad T_0 \beta [S]^T [G_6] \quad T_0 \beta [S]^T [G_7] \quad T_0 \beta [S]^T [G_8]] dV \quad (95-4)$$

$$[C_{34}] = \int_{V(e)} T_0 \beta [S]^T [G_2] dV \quad (96-4)$$

$$[C_{35}] = \int_{V(e)} T_0 \beta [S]^T [G_4] dV \quad (97-4)$$

$$[C_{36}] = \int_{V(e)} [T_0 \beta [S]^T [G_9] \quad T_0 \beta [S]^T [G_{10}] \quad T_0 \beta [S]^T [G_{11}] \quad T_0 \beta [S]^T [G_{12}]] dV \quad (98-4)$$

$$[C_{37}] = \int_{V(e)} \rho c_t [S]^T [N] dV \quad (99-4)$$

$$[C_{38}] = \int_{V(e)} \rho c_t [S]^T [\Phi] dV \quad (100-4)$$

$$[C_{39}] = \int_{V(e)} [\rho c_t [S]^T [\Psi_1] \quad \rho c_t [S]^T [\Psi_2] \quad \rho c_t [S]^T [\Psi_3] \quad \rho c_t [S]^T [\Psi_4]] dV \quad (101-4)$$

$$[K_{11}] = \int_{V(e)} ((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_1] + \mu[G_{14}]^T [G_2]) dV \quad (102-4)$$

$$[K_{12}] = \int_{V(e)} ((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_3] + \mu[G_{14}]^T [G_4]) dV \quad (103-4)$$

$$[K_{13}] = \left[\int_{V(e)} ((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_5] + \mu[G_{14}]^T [G_9]) dV \right.$$

$$\int_{V(e)} ((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_6] + \mu[G_{14}]^T [G_{10}]) dV \quad (104-4)$$

$$\int_{V(e)} ((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_7] + \mu[G_{14}]^T [G_{11}]) dV$$

$$\left. \int_{V(e)} ((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_8] + \mu[G_{14}]^T [G_{12}]) dV \right]$$

$$[K_{14}] = \int_{V(e)} (\lambda[G_{13}]^T[G_2] + \mu[G_{14}]^T[G_1])dV \quad (105-4)$$

$$[K_{15}] = \int_{V(e)} (\lambda[G_{13}]^T[G_4] + \mu[G_{14}]^T[G_3])dV \quad (106-4)$$

$$[K_{16}] =$$

$$\int_{V(e)} [(\lambda[G_{13}]^T[G_9] + \mu[G_{14}]^T[G_5]) \quad (\lambda[G_{13}]^T[G_{10}] + \mu[G_{14}]^T[G_6]) \quad (\lambda[G_{13}]^T[G_{11}] + \mu[G_{14}]^T[G_7]) \quad (\lambda[G_{13}]^T[G_{12}] + \mu[G_{14}]^T[G_8])]dV \quad (107-4)$$

$$[K_{17}] = - \int_{V(e)} \beta[G_{13}]^T[N]dV \quad (108-4)$$

$$[K_{18}] = - \int_{V(e)} \beta[G_{13}]^T[\Phi]dV \quad (109-4)$$

$$[K_{19}] =$$

$$- \int_{V(e)} [\beta[G_{13}]^T[\Psi_1] \quad \beta[G_{13}]^T[\Psi_2] \quad \beta[G_{13}]^T[\Psi_3] \quad \beta[G_{13}]^T[\Psi_4]]dV \quad (110-4)$$

$$[K_{21}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_2] + \lambda[G_{14}]^T[G_1])dV \quad (111-4)$$

$$[K_{22}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_4] + \lambda[G_{14}]^T[G_3])dV \quad (112-4)$$

$$[K_{23}] =$$

$$\int_{V(e)} [(\mu[G_{13}]^T[G_9] + \lambda[G_{14}]^T[G_5]) \quad (\mu[G_{13}]^T[G_{10}] + \lambda[G_{14}]^T[G_6]) \quad (\mu[G_{13}]^T[G_{11}] + \lambda[G_{14}]^T[G_7]) \quad (\mu[G_{13}]^T[G_{12}] + \lambda[G_{14}]^T[G_8])]dV \quad (113-4)$$

$$[K_{24}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_1] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_2])dV \quad (114-4)$$

$$[K_{25}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_3] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_4])dV \quad (115-4)$$

$$[K_{26}] = \left[\int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_5] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_9])dV \right. \\ \left. \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_6] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{10}])dV \right. \\ \left. \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_7] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{11}])dV \right. \\ \left. \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_8] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{12}])dV \right] \quad (116-4)$$

$$[K_{27}] = - \int_{V(e)} \beta[G_{14}]^T[N]dV \quad (117-4)$$

$$[K_{28}] = - \int_{V(e)} \beta[G_{14}]^T[\Phi]dV \quad (118-4)$$

$$[K_{29}] = \\ - \int_{V(e)} [\beta[G_{14}]^T[\Psi_1] \quad \beta[G_{14}]^T[\Psi_2] \quad \beta[G_{14}]^T[\Psi_3] \quad \beta[G_{14}]^T[\Psi_4]] dV \quad (119-4)$$

$$[K_{37}] = \int_{V(e)} (k_x[G_{13}]^T[G_1] + k_y[G_{14}]^T[G_2])dV \quad (120-4)$$

$$[K_{38}] = \int_{V(e)} (k_x[G_{13}]^T[G_3] + k_y[G_{14}]^T[G_4])dV \quad (121-4)$$

$$[K_{39}] = \\ \int_{V(e)} [(k_x[G_{13}]^T[G_5] + k_y[G_{14}]^T[G_9]) \quad (k_x[G_{13}]^T[G_6] + k_y[G_{14}]^T[G_{10}]) \quad (122-4) \\ (k_x[G_{13}]^T[G_7] + k_y[G_{14}]^T[G_{11}]) \quad (k_x[G_{13}]^T[G_8] + k_y[G_{14}]^T[G_{12}])]dV$$

ماتریس‌ها و بردارهای استفاده شده در این روابط برای یک المان چهار گره‌ای با $ne = 4$ عبارتند

از:

$$[S] = [N_1 \quad \dots \quad N_4 \quad \Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_4 \quad \Psi_{11} \quad \dots \quad \Psi_{44}] \quad (123-4)$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (124-4)$$

$$[\Phi] = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4] \quad (125-4)$$

$$[\Psi_1] = [\Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{13}, \Psi_{14}] \quad (126-4)$$

$$[\Psi_2] = [\Psi_{21}, \Psi_{22}, \Psi_{23}, \Psi_{24}] \quad (127-4)$$

$$[\Psi_3] = [\Psi_{31}, \Psi_{32}, \Psi_{33}, \Psi_{34}] \quad (128-4)$$

$$[\Psi_4] = [\Psi_{41}, \Psi_{42}, \Psi_{43}, \Psi_{44}] \quad (129-4)$$

$$[G_1] = [N_{1,x} \quad N_{2,x} \quad N_{3,x} \quad N_{4,x}] \quad (130-4)$$

$$[G_2] = [N_{1,y} \quad N_{2,y} \quad N_{3,y} \quad N_{4,y}] \quad (131-4)$$

$$[G_3] = [\Phi_{1,x} \quad \Phi_{2,x} \quad \Phi_{3,x} \quad \Phi_{4,x}] \quad (132-4)$$

$$[G_4] = [\Phi_{1,y} \quad \Phi_{2,y} \quad \Phi_{3,y} \quad \Phi_{4,y}] \quad (133-4)$$

$$[G_5] = [\Psi_{11,x} \quad \Psi_{12,x} \quad \Psi_{13,x} \quad \Psi_{14,x}] \quad (134-4)$$

$$[G_6] = [\Psi_{21,x} \quad \Psi_{22,x} \quad \Psi_{23,x} \quad \Psi_{24,x}] \quad (135-4)$$

$$[G_7] = [\Psi_{31,x} \quad \Psi_{32,x} \quad \Psi_{33,x} \quad \Psi_{34,x}] \quad (136-4)$$

$$[G_8] = [\Psi_{41,x} \quad \Psi_{42,x} \quad \Psi_{43,x} \quad \Psi_{44,x}] \quad (137-4)$$

$$[G_9] = [\Psi_{11,y} \quad \Psi_{12,y} \quad \Psi_{13,y} \quad \Psi_{14,y}] \quad (138-4)$$

$$[G_{10}] = [\Psi_{21,y} \quad \Psi_{22,y} \quad \Psi_{23,y} \quad \Psi_{24,y}] \quad (139-4)$$

$$[G_{11}] = [\Psi_{31,y} \quad \Psi_{32,y} \quad \Psi_{33,y} \quad \Psi_{34,y}] \quad (140-4)$$

$$[G_{12}] = [\Psi_{41,y} \quad \Psi_{42,y} \quad \Psi_{43,y} \quad \Psi_{44,y}] \quad (141-4)$$

$$[G_{13}] = [N_{1,x} \quad \cdots \quad N_{4,x} \quad \Phi_{1,x} \quad \cdots \quad \Phi_{4,x} \quad \Psi_{11,x} \quad \cdots \quad \Psi_{44,x}] \quad (142-4)$$

$$[G_{14}] = [N_{1,y} \quad \cdots \quad N_{4,y} \quad \Phi_{1,y} \quad \cdots \quad \Phi_{4,y} \quad \Psi_{11,y} \quad \cdots \quad \Psi_{44,y}] \quad (143-4)$$

اکنون برای ساده‌سازی ماتریس‌ها به منظور سهولت در پیاده‌سازی الگوریتم و برنامه‌نویسی، معادلات را به صورتی جابجا کرده که بردار مجهولات گره‌ای برای المان مبنای (e) که به طور کامل غنی‌سازه شده، به شکل زیر درآید:

$$\{\Delta\}^{(e)} = \{a_h^u, a_h^v, b_h^u, b_h^v, c_{hm}^u, c_{hm}^v, a_h^T, b_h^T, c_{hm}^T\}^T \quad (144-4)$$

$$h = 1, \dots, ne, \quad m = 1, \dots, 4$$

بنابراین ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی را برای المان مبنای می‌توان به شکل ساده زیر نوشت:

$$[M]^{(e)} = \begin{bmatrix} [M_1] & [0]_{48 \times 24} \\ [0]_{24 \times 48} & [0]_{24 \times 24} \end{bmatrix} \quad (145-4)$$

$$[C]^{(e)} = \begin{bmatrix} [0]_{48 \times 48} & [0]_{48 \times 24} \\ [C_1] & [C_2] \end{bmatrix} \quad (146-4)$$

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ [0]_{24 \times 48} & [K_3] \end{bmatrix} \quad (147-4)$$

بردار نیروی المان مبنای را نیز می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\{F\}^{(e)} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{V(e)} [B]^T \{Bf\} dV + \int_{A(e)} [B]^T \{Tr\} dA \\ \int_{V(e)} R [St]^T dV - \int_{A(e)} (q_x n_x + q_y n_y) [St]^T dA \end{array} \right\} \quad (148-4)$$

همچنین المان‌های ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$[M_1] = \int_{V(e)} \rho [B]^T [B] dV \quad (149-4)$$

$$[C_1] = \int_{V(e)} T_0 \beta [St]^T [S1] dV, \quad (150-4)$$

$$[C_2] = \int_{V(e)} \rho c_t [St]^T [St] dV \quad (151-4)$$

$$[K_1] = \int_{V(e)} [S2]^T [D] [S2] dV \quad (152-4)$$

$$[K_2] = - \int_{V(e)} \beta [S1]^T [St] dV \quad (153-4)$$

برای مواد همسانگرد $k_x = k_y = k$ ، بنابراین:

$$[K_3] = \int_{V(e)} k [S3]^T [S3] dV \quad (154-4)$$

که در این روابط،

$$[St] = [N_1 \quad \dots \quad N_4 \quad \Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_4 \quad \Psi_{11} \quad \dots \quad \Psi_{44}] \quad (155-4)$$

$$[B] =$$

$$\begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_4 & 0 & \dots & 0 & \Phi_1 & \dots & \dots & 0 & \Psi_{11} & \dots & \Psi_{44} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_1 & \dots & N_4 & 0 & \dots & \dots & \Phi_4 & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11} & \dots & \Psi_{44} \end{bmatrix} \quad (156-4)$$

$$[S1] = [N_{1,x} \quad \dots \quad N_{4,x} \quad N_{1,y} \quad \dots \quad N_{4,y} \quad \Phi_{1,x} \quad \dots \quad \Phi_{4,x} \quad \Phi_{1,y} \quad \dots \quad \Phi_{4,y} \quad \Psi_{11,x} \quad \dots \quad \Psi_{44,x} \quad \Psi_{11,y} \quad \dots \quad \Psi_{44,y}] \quad (157-4)$$

$$[S2] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{1,x} & \Phi_{2,x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & 0 & 0 \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & \Phi_{1,y} & \Phi_{2,y} \end{bmatrix} \quad (158-4)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{3,x} & \Phi_{4,x} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,x} & \dots & \Psi_{44,x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{1,y} & \dots & \Phi_{4,y} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,y} & \dots & \Psi_{44,y} \\ \Phi_{3,y} & \Phi_{4,y} & \Phi_{1,x} & \dots & \Phi_{4,x} & \Psi_{11,y} & \dots & \Psi_{44,y} & \Psi_{11,x} & \dots & \Psi_{44,x} \end{bmatrix}$$

$$[S3] =$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & \Phi_{1,x} & \Phi_{2,x} & \Phi_{3,x} & \Phi_{4,x} & \Psi_{11,x} & \dots & \Psi_{44,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & \Phi_{1,y} & \Phi_{2,y} & \Phi_{3,y} & \Phi_{4,y} & \Psi_{11,y} & \dots & \Psi_{44,y} \end{bmatrix} \quad (159-4)$$

ماتریس خواص $[D]$ برای حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای به ترتیب در روابط (۱۶۰-۴) و

(۱۶۱-۴) ارائه شده است:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (160-4)$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (۱۶۱-۴)$$

بردارهای نیروهای کالبدی $\{Bf\}$ و اثرات سطحی $\{Tf\}$ نیز عبارتند از:

$$\{Bf\} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}, \quad \{Tf\} = \begin{Bmatrix} Tr_x^n \\ Tr_y^n \end{Bmatrix} \quad (۱۶۲-۴)$$

با توجه به اینکه در غنی‌سازی المان‌های نوک ترک، برای تقریب دما فقط از یک تابع غنی‌سازی

استفاده می‌شود (رابطه ۳-۱۸)، باید روابط (۴-۲۸)، (۴-۱۴۴)، (۴-۱۵۵) و (۴-۱۵۹) را به صورت زیر اصلاح کرد:

$$\theta^e(x, y, t) = N_h(x, y) a_h^T(t) + \Phi_h(x, y) b_h^T(t) + \Psi_{h1}(x, y) c_h^T(t), \quad (۱۶۳-۴)$$

$$h = 1, \dots, ne$$

$$\{\Delta\}^{(e)} = \{a_h^u, a_h^v, b_h^u, b_h^v, c_{hm}^u, c_{hm}^v, a_h^T, b_h^T, c_h^T\}^T, \quad h = 1, \dots, ne \quad (۱۶۴-۴)$$

$$[St] = [N_1 \quad \dots \quad N_4 \quad \Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_4 \quad \Psi_{11} \quad \Psi_{21} \quad \Psi_{31} \quad \Psi_{41}] \quad (۱۶۵-۴)$$

$$[S3] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{4,x} & \Phi_{1,x} & \dots & \Phi_{4,x} & \Psi_{11,x} & \Psi_{21,x} & \Psi_{31,x} & \Psi_{41,x} \\ N_{1,y} & \dots & N_{4,y} & \Phi_{1,y} & \dots & \Phi_{4,y} & \Psi_{11,y} & \Psi_{21,y} & \Psi_{31,y} & \Psi_{41,y} \end{bmatrix} \quad (۱۶۶-۴)$$

برای محاسبه ماتریس‌های $[S1]$ ، $[S2]$ و $[S3]$ در صورت استفاده از المان‌های ایزوپارامتریک،

ابتدا باید مشتقات توابع شکل نسبت به دستگاه مختصات محلی (ξ, η) تعیین و با استفاده از ماتریس

ژاکوبی $[Ja]$ به دستگاه مختصات (x, y) انتقال یابند. ماتریس ژاکوبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[Ja] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \quad (۱۶۷-۴)$$

که مولفه‌های آن عبارتند از [۱۱۷]:

$$j_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 x_i N_{i,\xi}, \quad j_{12} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 y_i N_{i,\xi}, \quad (۱۶۸-۴)$$

$$j_{21} = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 x_i N_{i,\eta}, \quad j_{22} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 y_i N_{i,\eta}$$

بنابراین ماتریس‌های [S2] و [S3] را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$[S2] = \frac{1}{\det(\mathbf{J}_a)} \begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j_{21} & j_{11} \\ -j_{21} & j_{11} & j_{22} & -j_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & \dots & N_{4,\xi} & 0 & \dots & 0 \\ N_{1,\eta} & \dots & N_{4,\eta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_{1,\xi} & \dots & N_{4,\xi} \\ 0 & \dots & 0 & N_{1,\eta} & \dots & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \quad (169-4)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1,\xi} & \dots & \Phi_{4,\xi} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,\xi} & \dots & \Psi_{44,\xi} & 0 & \dots & 0 \\ \Phi_{1,\eta} & \dots & \Phi_{4,\eta} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,\eta} & \dots & \Psi_{44,\eta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Phi_{1,\xi} & \dots & \Phi_{4,\xi} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,\xi} & \dots & \Psi_{44,\xi} \\ 0 & \dots & 0 & \Phi_{1,\eta} & \dots & \Phi_{4,\eta} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,\eta} & \dots & \Psi_{44,\eta} \end{bmatrix}$$

$$[S3] = \frac{1}{\det(\mathbf{J}_a)} \begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} \\ -j_{21} & j_{11} \end{bmatrix} \quad (170-4)$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & \dots & N_{4,\xi} & \Phi_{1,\xi} & \dots & \Phi_{4,\xi} & \Psi_{11,\xi} & \Psi_{21,\xi} & \Psi_{31,\xi} & \Psi_{41,\xi} \\ N_{1,\eta} & \dots & N_{4,\eta} & \Phi_{1,\eta} & \dots & \Phi_{4,\eta} & \Psi_{11,\eta} & \Psi_{21,\eta} & \Psi_{31,\eta} & \Psi_{41,\eta} \end{bmatrix}$$

که در این روابط $\det(\mathbf{J}_a)$ دترمینان ماتریس ژاکوبی است. المان‌های ماتریس [S1] را می‌توان از ماتریس [S2] برداشت کرد. با توجه به اینکه توابع غنی سازی نوک ترک بر حسب مولفه‌های دستگاه مختصات قطبی نوک ترک (r و φ) تعریف شده‌اند، برای مشتق‌گیری می‌توان مولفه‌های مختصات قطبی در این توابع را بر حسب مولفه‌های مختصات دکارتی محلی نوک ترک (x_1 و x_2) به صورت زیر نوشت:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} \quad (171-4)$$

مشتق تابع دلخواه F نسبت به مولفه‌های دستگاه مختصات دکارتی محلی را می‌توان با استفاده از

روابط زیر بر حسب مولفه‌های دستگاه مختصات سراسری (x و y) نوشت [۱۱۸]:

$$F_{,x} = F_{,x_1} \cos(\omega) - F_{,x_2} \sin(\omega) \quad (172-4)$$

$$F_{,y} = F_{,x_1} \sin(\omega) + F_{,x_2} \cos(\omega)$$

که در این روابط ω زاویه بین دستگاه مختصات محلی نوک ترک و دستگاه مختصات سراسری است. x و y نیز با استفاده از رابطه (۳-۲۱) به ξ و η مرتبط می‌شوند.

۴-۴- روش نیومارک

روش نیومارک^۱ در طی پنجاه سال گذشته به طور گسترده برای حل عددی معادلات درجه دوم در دینامیک سازه‌ها و زمینه‌های مختلف دیگر مهندسی مکانیک بکار رفته و مورد مطالعه قرار گرفته است. پیاده‌سازی آسان و ویژگی‌های خوب این روش و مشتقات آن در خصوص میرایی عددی و بقای انرژی ستودنی است. خانواده نیومارک پرکاربردترین روش‌ها برای حل معادله حرکت گسسته‌سازی شده بوده و متشکل از معادلات زیر می‌باشند [۱۴۴]:

$$[M]\{\ddot{\Delta}_{n+1}\} + [C]\{\dot{\Delta}_{n+1}\} + [K]\{\Delta_{n+1}\} = \{F_{n+1}\} \quad (۱۷۳-۴)$$

$$\{\Delta_{n+1}\} = \{\Delta_n\} + \Delta t\{\dot{\Delta}_{n+1}\} + \Delta t^2(1/2 - \zeta)\{\ddot{\Delta}_n\} + \Delta t^2\zeta\{\ddot{\Delta}_{n+1}\} \quad (۱۷۴-۴)$$

$$\{\dot{\Delta}_{n+1}\} = \{\dot{\Delta}_n\} + \Delta t(1 - \gamma)\{\ddot{\Delta}_n\} + \Delta t\gamma\{\ddot{\Delta}_{n+1}\} \quad (۱۷۵-۴)$$

در این روابط پارامترهای ζ و γ مشخصات پایداری و دقت الگوریتم مورد نظر را تعیین می‌کنند. توجه کنید که اگر $\gamma = 0/5$ میرایی ویسکوز بر روی پایداری اثری ندارد. به علاوه هنگامی که $\gamma > 0/5$ اثر میرایی ویسکوز افزایش گام زمانی بحرانی روش‌های نیومارکی است که به صورت مشروط پایدار هستند [۱۴۴].

خانواده نیومارک شامل روش‌های ویژه‌ای است که خیلی شناخته شده و پرکاربرد هستند. روش شتاب متوسط^۲ یکی از پرکاربردترین این روش‌ها برای کاربردهای دینامیک سازه‌ای می‌باشد که بدون قید و شرط پایدار است. در این روش $\gamma = 0/5$ و $\zeta = 0/25$ هستند [۱۴۴].

از آنجایی که برای روش تفکیک واحد با الگوی نیومارک صریح^۳، گام زمانی پایدار مسئله غنی‌سازی شده کسر کوچکی از گام زمانی پایدار مسئله بدون توابع غنی‌سازی می‌باشد [۱۴۵] ما در این تحقیق الگوی شتاب متوسط را انتخاب کردیم که همواره پایدار است.

¹ Newmark method

² Average acceleration method

³ Explicit Newmark

هنگامی که روش المان محدود توسعه یافته برای شبیه سازی گسترش ترک دینامیکی استفاده می شود، شبکه در گذر از زمان t_n به t_{n+1} تغییر نمی کند؛ اما توابع شکل جدیدی به مدل اضافه می شوند تا رشد ترک را شبیه سازی کنند. بنابراین ماتریس های جرم، میرایی و سفتی در زمان t_n و t_{n+1} متفاوت هستند. با استفاده از روش نیومارک (الگوی شتاب متوسط) معادلات (۴-۱۷۳) تا (۴-۱۷۵) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد [۱۴۶]:

$$[M_{n+1}^{n+1}][\ddot{\Delta}_{n+1}^{n+1}] + [C_{n+1}^{n+1}][\dot{\Delta}_{n+1}^{n+1}] + [K_{n+1}^{n+1}][\Delta_{n+1}^{n+1}] = [F_{n+1}^{n+1}] \quad (۴-۱۷۶)$$

$$[\Delta_{n+1}^{n+1}] = [\Delta_n^{n+1}] + \Delta t [\dot{\Delta}_n^{n+1}] + \frac{\Delta t^2}{4} ([\ddot{\Delta}_n^{n+1}] + [\ddot{\Delta}_{n+1}^{n+1}]) \quad (۴-۱۷۷)$$

$$[\dot{\Delta}_{n+1}^{n+1}] = [\dot{\Delta}_n^{n+1}] + \frac{\Delta t}{2} ([\ddot{\Delta}_n^{n+1}] + [\ddot{\Delta}_{n+1}^{n+1}]) \quad (۴-۱۷۸)$$

در حالی که X_n^{n+1} یعنی بردار X در زمان t_n که بر مبنای توابع شکل در زمان t_{n+1} نوشته شده است. اکنون با قرار دادن روابط (۴-۱۷۷) و (۴-۱۷۸) در رابطه (۴-۱۷۶) معادله زیر بدست می آید:

$$\left([M_{n+1}^{n+1}] + \frac{\Delta t}{2} [C_{n+1}^{n+1}] + \frac{\Delta t^2}{4} [K_{n+1}^{n+1}] \right) [\ddot{\Delta}_{n+1}^{n+1}] = [F_{n+1}^{n+1}] - \quad (۴-۱۷۹)$$

$$[C_{n+1}^{n+1}] \left([\dot{\Delta}_n^{n+1}] + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\Delta}_n^{n+1}] \right) - [K_{n+1}^{n+1}] \left([\Delta_n^{n+1}] + \Delta t [\dot{\Delta}_n^{n+1}] + \frac{\Delta t^2}{4} [\ddot{\Delta}_n^{n+1}] \right)$$

با حل این معادله بردار شتاب در زمان t_{n+1} بدست می آید. بردارهای جابجایی و سرعت نیز با استفاده از بردار شتاب و به کمک روابط (۴-۱۷۷) و (۴-۱۷۸) محاسبه می شوند. درجات آزادی که در زمان t_{n+1} به مدل اضافه می شوند در ابتدا صفر منظور می شوند. یعنی [۱۴۶]:

$$[\Delta_n^{n+1}] = \begin{bmatrix} \Delta_n^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴-۱۸۰)$$

فصل پنجم

مکانیک شکست دینامیکی

۵-۱- مقدمه

مکانیک شکست دینامیکی زیر مجموعه مکانیک شکست است و شامل پدیده‌های شکستی می‌شود که نقش اینرسی ماده در آنها اهمیت دارد. اثرات اینرسی می‌توانند به دلیل اعمال بارگذاری سریع بر روی یک جسم ترک خورده یا بر اثر گسترش ترک سریع ایجاد شوند [۱۴۷].

در مسائل شکست دینامیکی میدان تنش موضعی اطراف ترک را می‌توان به تعیین ضرایب شدت تنش محدود کرد. در تئوری شکست، ضرایب شدت تنش برای تعیین رفتار شکست مورد استفاده قرار می‌گیرند. یعنی تعیین می‌کنند که ترک رشد خواهد کرد یا نه و اگر رشد می‌کند در چه جهتی و با چه سرعتی؟ بنابراین تعیین دقیق ضرایب شدت تنش در مسائل شکست الاستودینامیک خطی بسیار مهم است.

در این فصل ابتدا رابطه انتگرال برهمکنش برای مواد تابعی استخراج و سپس نحوه بدست آوردن ضرایب شدت تنش با استفاده از آن بررسی می‌شود. در نهایت معیار رشد ترک، سرعت و جهت رشد ترک مورد بررسی قرار می‌گیرند. روابط ارائه شده در این فصل مربوط به مسائل صفحه‌ای هستند؛ بنابراین فقط مد باز شدن^۱ (مد I) و مد برشی^۲ (مد II) و یا مد ترکیبی ترک در نظر گرفته می‌شود.

۵-۲- انتگرال J

مفهوم انتگرال J اولین بار توسط رایس [۱۴۸] و بر پایه فرضیه انرژی معرفی شد. رایس تغییرات انرژی پتانسیل هنگام رشد ترک در مواد الاستیک غیر خطی را مورد بررسی قرار داد و انتگرال J را به عنوان انتگرال خطی مستقل از مسیر و با مقداری برابر با کاهش در انرژی پتانسیل بر افزایش سطح ترک، فرمول‌بندی کرد. در این بخش روش توصیف شده در مرجع [۱۴۹] برای محاسبه انتگرال J در یک جسم تحت تنش‌های حرارتی، مورد استفاده قرار گرفته است. تغییر خواص ماده در المان مبنا برای محاسبه انتگرال J در مواد تابعی نیز در نظر گرفته می‌شود.

¹ Opening mode

² Shearing mode

انتگرال J را می‌توان بر روی یک مسیر کوچک صفر شونده حول نوک ترک به صورت زیر نوشت

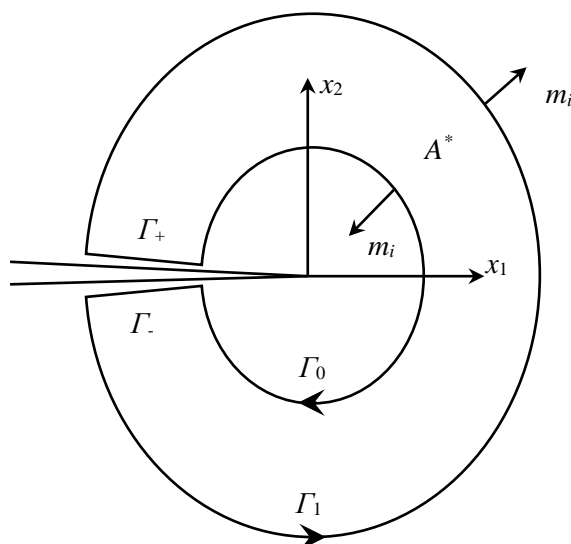
[۶۳، ۸۱ و ۱۰۱]:

$$J = \lim_{\Gamma_0 \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} \left[(SE + KE) \delta_{1i} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] n_i d\Gamma \quad (1-5)$$

در این رابطه SE و KE به ترتیب چگالی انرژی کرنشی و چگالی انرژی جنبشی و n_i بردار نرمال بر مسیر هستند. شکل معادله (۱-۵) برای تحلیل‌های عددی مناسب نیست؛ زیرا محاسبه تنش‌ها و کرنش‌ها در امتداد یک مسیر کوچک که به سمت صفر میل می‌کند، امکان‌پذیر نمی‌باشد. یک مسیر بسته $\Gamma^* = \Gamma_1 + \Gamma_+ + \Gamma_- + \Gamma_0$ مطابق با شکل (۱-۵) در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از تابع وزنی q که مقدار آن بر روی Γ_0 برابر با یک و بر روی Γ_1 برابر با صفر است، معادله (۱-۵) را می‌توان در امتداد این مسیر به صورت زیر نوشت [۱۰۱ و ۸۱]:

$$J = \lim_{\Gamma_0 \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - (SE + KE) \delta_{1i} \right] q m_i d\Gamma - \int_{\Gamma_+ + \Gamma_-} \sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q d\Gamma \right) \quad (2-5)$$

که در این رابطه m_i بردار نرمال بر مسیر است.



شکل ۱-۵- مسیر انتگرال J اطراف نوک ترک

فرض می‌شود که سطوح ترک عاری از تنش باشند؛ بنابراین $\sigma_{2j} = 0$ و با اعمال تئوری دیورژانس

داریم [۱۰۰]:

$$J = \int_{A^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - (SE + KE) \delta_{1i} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA + \quad (3-5)$$

$$\int_{A^*} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial (SE + KE)}{\partial x_1} \right] q dA$$

که در این رابطه

$$\sigma_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j - B_j \quad (4-5)$$

$$\sigma_{ij} u_{j,1i} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1} \quad (5-5)$$

چگالی انرژی کرنشی SE به صورت زیر تعریف می‌شود [۹۴]:

$$SE = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^m \quad (6-5)$$

که در این رابطه ε_{ij}^m کرنش مکانیکی است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_{ij}^m = \varepsilon_{ij} - \alpha_t \theta \delta_{ij} \quad (7-5)$$

در این رابطه ε_{ij} کرنش کل، α_t ضریب انبساط حرارتی خطی، θ تغییر نسبی دما و δ_{ij} دلتای کرونکر

است. بنابراین چگالی انرژی کرنشی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$SE = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \alpha_t \theta \delta_{ij}) \quad (8-5)$$

مشتق چگالی انرژی کرنشی نسبت به دستگاه مختصات محلی نوک ترک $(SE_{,1})$ ، که برای محاسبه

رابطه (۳-۵) مورد نیاز است، را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$SE_{,1} = \frac{\partial SE}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^m \quad (9-5)$$

در این رابطه $\sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^m$ را می‌توان به صورت زیر نوشت [۸۱]:

$$\sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^m = (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^m)_{,1} \varepsilon_{ij}^m = C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^m + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m \quad (10-5)$$

که در این رابطه C_{ijkl} مولفه‌های تانسور الاستیسیته زیر هستند [۱۱۸]:

$$C(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2G(\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\mathbf{x}) & 2G(\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & 2G(\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (۱۱-۵)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰-۵) در رابطه (۹-۵) نتیجه می‌شود:

$$SE_{,1} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m + \frac{1}{2} C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m + \frac{1}{2} C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^m \quad (۱۲-۵)$$

با استفاده از رابطه (۷-۵) می‌توان رابطه (۱۲-۵) را به صورت زیر بازنویسی کرد که مشابه رابطه

(۲۷) در مرجع [۷۴] است.

$$SE_{,1} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1} - \alpha_{t,1} \theta \sigma_{kk} - \alpha_t \theta_{,1} \sigma_{kk} + \frac{1}{2} C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^m \quad (۱۳-۵)$$

چگالی انرژی جنبشی KE به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$KE = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \quad (۱۴-۵)$$

مشتق چگالی انرژی کرنشی نسبت به محور x_1 ($KE_{,1}$) نیز عبارت است از:

$$KE_{,1} = \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1} + \frac{1}{2} \rho_{,1} \dot{u}_i \dot{u}_i \quad (۱۵-۵)$$

جایگذاری روابط (۵-۵)، (۶-۵)، (۱۴-۵) و (۱۵-۵) در معادله (۳-۵)، کلی‌ترین رابطه برای

انتگرال J در مواد تابعی را به صورت زیر نتیجه می‌دهد.

$$J = \int_{A^*} \left\{ \left[\sigma_{ij} u_{j,1} - \frac{1}{2} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^m \delta_{1i} - \frac{1}{2} \rho \dot{u}_k \dot{u}_k \delta_{1i} \right] q_{,i} \right. \\ \left. + \left[\sigma_{ij,i} u_{j,1} + \sigma_{ij} u_{j,1i} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m - \frac{1}{2} \sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^m - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \rho_{,1} \dot{u}_i \dot{u}_i \right] q \right\} dA \quad (۱۶-۵)$$

با استفاده از رابطه (۱۳-۵) می‌توان انتگرال J برای مواد تابعی را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\begin{aligned}
J = \int_{A^*} \left\{ \left[\sigma_{ij} u_{j,1} - \frac{1}{2} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^m \delta_{1i} - \frac{1}{2} \rho \dot{u}_k \dot{u}_k \delta_{1i} \right] q_{,i} \right. \\
+ \left[\sigma_{ij,i} u_{j,1} + \alpha_{t,1} \theta \sigma_{kk} + \alpha_t \theta_{,1} \sigma_{kk} - \frac{1}{2} C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^m - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1} \right. \\
\left. \left. - \frac{1}{2} \rho_{,1} \dot{u}_i \dot{u}_i \right] q \right\} dA \quad (17-5)
\end{aligned}$$

۵-۳- انتگرال برهمکنش

با محاسبه انتگرال J نمی‌توان مقادیر ضرایب شدت تنش مد I و مد II را به طور جداگانه محاسبه کرد. یایو و همکاران [۱۵۰] روش انتگرال برهمکنش را برای این منظور پیشنهاد کردند که در آن از جمع آثار دو حالت سینماتیکی قابل قبول از یک جسم برای استخراج ضرایب شدت تنش مد ترکیبی استفاده می‌شود.

در این بخش انتگرال برهمکنش با استفاده از برهم نهی میدان‌های واقعی و کمکی در انتگرال J مستقل از مسیر فرمول‌بندی شده و با استفاده از فرمول‌بندی غیر تعادلی بدست می‌آید. اکنون دو میدان واقعی $(\mathbf{u}, \varepsilon, \sigma)$ و کمکی $(\mathbf{u}^{aux}, \varepsilon^{aux}, \sigma^{aux})$ در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از رابطه (۱۶-۵) انتگرال J برای میدان‌های برهم نهی شده (J^S) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
J^S = \int_{A^*} \left\{ \left[(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{j,1} + u_{j,1}^{aux}) - \frac{1}{2} (\sigma_{jk} + \sigma_{jk}^{aux})(\varepsilon_{jk}^m + \varepsilon_{jk}^{aux}) \delta_{1i} \right. \right. \\
- \frac{1}{2} \rho (\dot{u}_k + \dot{u}_k^{aux})(\dot{u}_k + \dot{u}_k^{aux}) \delta_{1i} \left. \right] q_{,i} \\
+ \left[(\sigma_{ij,i} + \sigma_{ij,i}^{aux})(u_{j,1} + u_{j,1}^{aux}) + (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{j,1i} + u_{j,1i}^{aux}) \right. \\
- \frac{1}{2} (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(\varepsilon_{ij,1}^m + \varepsilon_{ij,1}^{aux}) \\
- \frac{1}{2} (\sigma_{ij,1} + \sigma_{ij,1}^{aux})(\varepsilon_{ij}^m + \varepsilon_{ij}^{aux}) - \rho (\dot{u}_i + \dot{u}_i^{aux})(\dot{u}_{i,1} + \dot{u}_{i,1}^{aux}) \\
\left. \left. - \frac{1}{2} \rho_{,1} (\dot{u}_i + \dot{u}_i^{aux})(\dot{u}_i + \dot{u}_i^{aux}) \right] q \right\} dA \quad (18-5)
\end{aligned}$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$J^s = J + J^{aux} + MI \quad (۱۹-۵)$$

که J همان انتگرال J (رابطه ۵-۱۶) و J^{aux} انتگرال J برای میدان کمکی است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$J^{aux} = \int_{A^*} \left\{ \left[\sigma_{ij}^{aux} u_{j,1}^{aux} - \frac{1}{2} \sigma_{jk}^{aux} \varepsilon_{jk}^{aux} \delta_{1i} - \frac{1}{2} \rho \dot{u}_k^{aux} \dot{u}_k^{aux} \delta_{1i} \right] q_{,i} \right. \\ \left. + \left[\sigma_{ij,i}^{aux} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1i}^{aux} - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,1}^{aux} - \frac{1}{2} \sigma_{ij,1}^{aux} \varepsilon_{ij}^{aux} \right. \right. \\ \left. \left. - \rho \dot{u}_i^{aux} \dot{u}_{i,1}^{aux} - \frac{1}{2} \rho_{,1} \dot{u}_i^{aux} \dot{u}_i^{aux} \right] q \right\} dA \quad (۲۰-۵)$$

MI نیز انتگرال برهمکنش است و در مختصات محلی نوک ترک به صورت زیر بدست می‌آید:

$$MI = MI_l = \int_{A^*} \left\{ \left[\sigma_{ij}^{aux} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1}^{aux} - \frac{1}{2} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{aux} \delta_{1i} - \frac{1}{2} \sigma_{jk}^{aux} \varepsilon_{jk}^m \delta_{1i} - \rho \dot{u}_k \dot{u}_k^{aux} \delta_{1i} \right] q_{,i} \right. \\ \left. + \left[\sigma_{ij,i}^{aux} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij,i}^{aux} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1i}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1i}^{aux} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{aux} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,1}^m - \frac{1}{2} \sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^{aux} - \frac{1}{2} \sigma_{ij,1}^{aux} \varepsilon_{ij}^m - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1}^{aux} \right. \right. \\ \left. \left. - \rho \dot{u}_i^{aux} \dot{u}_{i,1} - \rho_{,1} \dot{u}_i \dot{u}_i^{aux} \right] q \right\} dA \quad (۲۱-۵)$$

میدان‌های کمکی (جابجایی، تنش و ...) برای ترک‌های ایستا و ترک‌های متحرک در پیوست الف

ارائه شده‌اند.

۵-۳-۱- فرمول‌بندی‌ها برای مواد ناهمگن

در مواد ناهمگن هنگامی که یک ناحیه محدود برای محاسبه انتگرال برهمکنش انتخاب می‌شود،

به دلیل ناهمگنی خواص ماده، میدان‌های کمکی (جابجایی، تنش و کرنش) فقط برای موقعیت نوک

ترک صادق هستند. بنابراین از بین جابجایی، تنش و کرنش فقط دو میدان کمکی را می‌توان از

حل‌های مجانبی انتخاب نمود و کمیت دیگر را باید با در نظر گرفتن ناهمگنی ماده بدست آورد. در

نتیجه این کار عبارت‌های اضافی در فرمول‌بندی ظاهر می‌شوند تا اثر ناهمگنی ماده را جبران کنند.

در مواد ناهمگن به دلیل اختلاف بین خواص ماده در نوک ترک و فواصل دورتر از نوک ترک، سه فرمول‌بندی متفاوت ارائه شده که عبارتند از فرمول‌بندی غیر تعادلی^۱، ناسازگاری^۲ و تانسور تشکیل دهنده ثابت^۳. عبارتهای اضافی و فرمول‌بندی‌های مربوطه برای مواد ناهمگن توسط محققان مختلفی مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. دالبو و گوژ [۱۵۱] فرمول‌بندی ناسازگاری را ارائه کردند و با استفاده از آن ضرایب شدت تنش را برای یک ترک با جهت‌گیری دلخواه در مواد تابعی محاسبه نمودند. راثو و رحمان [۱۵۲] فرمول‌بندی‌های ناسازگاری و تانسور تشکیل دهنده ثابت را برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مواد تابعی به وسیله روش بدون المان گلرکین به کار گرفتند. کیم و پائولینو [۶۴] فرمول‌بندی غیر تعادلی را برای تعیین ضرایب شدت تنش در مواد تابعی به وسیله روش المان محدود ارائه کردند.

فرمول‌بندی غیر تعادلی از نظر تئوری معادل با فرمول‌بندی‌های ناسازگاری و تانسور تشکیل دهنده ثابت است؛ اما به لحاظ عددی دقت فرمول‌بندی تانسور تشکیل دهنده ثابت به خوبی فرمول-بندی‌های دیگر نیست؛ زیرا این روش مشتقات میدان‌های تنش و کرنش واقعی را که با روش عددی محاسبه می‌شوند به هم مرتبط می‌کند [۱۵۳].

در این تحقیق عبارت غیر تعادلی و فرمول‌بندی غیر تعادلی مربوطه برای تعیین انتگرال برهمکنش و ضرایب شدت تنش دینامیکی در مواد تابعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در ادامه هر سه فرمول‌بندی به طور مختصر معرفی می‌شوند.

الف- فرمول‌بندی ناسازگاری

در این فرمول‌بندی میدان کرنش کمکی به صورت زیر تعیین می‌شود [۶۳]:

$$\varepsilon_{ij}^{aux} = S_{ijkl}(\mathbf{x})\sigma_{kl}^{aux} \quad (22-5)$$

¹ Non-equilibrium

² Incompatibility

³ Constant constitutive tensor

که در این رابطه $S_{ijkl}(\mathbf{x})$ مولفه‌های ماتریس خواص در نقطه مورد نظر هستند. ماتریس $S(\mathbf{x})$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۱۸]:

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{E(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} 1 & -\nu(\mathbf{x}) & -\nu(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ -\nu(\mathbf{x}) & 1 & -\nu(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ -\nu(\mathbf{x}) & -\nu(\mathbf{x}) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \nu(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (23-5)$$

به طور کلی S_{ijkl} در نوک ترک با S_{ijkl} در فواصل دورتر از نوک ترک برابر نیست؛ یعنی $S_{ijkl}(\mathbf{x}) \neq (S_{ijkl})_{tip}$. قابل ذکر است که میدان تنش کمکی در نبود نیروهای کالبدی در حال تعادل است، یعنی $\sigma_{ij}^{aux} = 0$. اما میدان کرنش کمکی با میدان جابجایی کمکی سازگار نیست. به عبارت دیگر، $\varepsilon_{ij}^{aux} \neq (u_{i,j}^{aux} + u_{j,i}^{aux})/2$. بنابراین این ناسازگاری باید در فرمول‌بندی انتگرال برهمکنش در نظر گرفته شود.

ب- فرمول‌بندی تانسور تشکیل دهنده ثابت

در این فرمول‌بندی رابطه تنش کرنش به صورت زیر است [۶۳]:

$$\sigma_{ij}^{aux} = (C_{ijkl})_{tip} \varepsilon_{kl}^{aux} \quad (24-5)$$

در این رابطه $(C_{ijkl})_{tip}$ یک تانسور تشکیل دهنده ثابت است که در نوک ترک محاسبه می‌شود. برای مواد تابعی رابطه (۲۴-۵) فقط در نوک ترک برقرار است و در نقاط دیگر اطراف نوک ترک، $C_{ijkl}(\mathbf{x}) \neq (C_{ijkl})_{tip}$. بنابراین با افزایش فاصله از نوک ترک، خطا بیشتر می‌شود. میدان‌های تنش کمکی در تعادل هستند و میدان‌های کرنش کمکی نیز با میدان‌های جابجایی سازگارند.

ج) فرمول‌بندی غیر تعادلی

در این فرمول‌بندی جابجایی‌ها و کرنش‌های کمکی به طور مستقیم از حل‌های مجانبی (مانند حل ویلیامز^۱) بدست می‌آیند و تنش‌های کمکی به کمک مدل ساختمانی ناهمگن محاسبه می‌شوند.

^۱ Williams' solution

بنابراین کرنش‌های کمکی را می‌توان به صورت زیر با استفاده از جابجایی‌های کمکی بدست آورد

$$[۸۱]:$$

$$\varepsilon_{ij}^{aux} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{aux} + u_{j,i}^{aux}) \quad (۲۵-۵)$$

میدان تنش کمکی نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{ij}^{aux} = C_{ijkl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}^{aux} \quad (۲۶-۵)$$

واضح است که میدان تنش کمکی برای ترک‌های ایستا معادله تعادل را ارضاء نمی‌کند، یعنی $\sigma_{ij,j}^{aux} \neq 0$ همچنین معادله حرکت برای این میدان در ترک‌های متحرک صادق نیست، یعنی $\sigma_{ij,j}^{aux} \neq \rho \ddot{u}_i^{aux}$ زیرا برای مواد تابعی تانسور تشکیل دهنده شامل خواص مواد است که توابعی از موقعیت هستند. این شرط به ایجاد یک عبارت غیر تعادلی در فرمول‌بندی انتگرال برهمکنش منجر خواهد شد.

برای فرمول‌بندی غیر تعادلی روابط زیر را می‌توان نوشت که برای ساده‌سازی انتگرال برهمکنش مورد استفاده قرار می‌گیرند [۸۱ و ۹۴].

$$\sigma_{ij} u_{j,1i}^{aux} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{aux} \quad (۲۷-۵)$$

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} = C_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux} = \sigma_{kl}^{aux} \varepsilon_{kl}^m = \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}^m \quad (۲۸-۵)$$

$$\sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^{aux} = C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl,1}^m \varepsilon_{ij}^{aux} = C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,1}^m \quad (۲۹-۵)$$

$$\sigma_{ij,1}^{aux} \varepsilon_{ij} = C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^{aux} \varepsilon_{ij} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl,1}^{aux} \varepsilon_{ij} \quad (۳۰-۵)$$

در مورد میدان‌های واقعی، چون کمیت‌های آنها از شبیه‌سازی عددی بدست می‌آیند، مستقل از نوع فرمول‌بندی معادله حرکت و شرط سازگاری همواره ارضاء می‌شوند. یعنی:

$$\sigma_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j - B_i \quad (۳۱-۵)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (۳۲-۵)$$

$$\sigma_{ij}u_{j,1i} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij,1} \quad (33-5)$$

اکنون با استفاده از فرمول بندی غیر تعادلی، انتگرال برهمکنش (رابطه ۵-۲۱) را ساده سازی می کنیم. بنابراین با قرار دادن روابط (۵-۲۷) تا (۵-۲۹) در رابطه (۵-۲۱) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} MI_l = \int_{A^*} \left\{ [\sigma_{ij}u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{j,1} - \sigma_{jk}\varepsilon_{jk}^{aux}\delta_{1i} - \rho\dot{u}_k\dot{u}_k^{aux}\delta_{1i}]q_{,i} \right. \\ + \left[\rho\ddot{u}_j u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij,i}^{aux}u_{j,1} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij,1} - \sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij,1}^m \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}^m\varepsilon_{ij}^{aux}) - \frac{1}{2}\sigma_{ij,1}^{aux}\varepsilon_{ij}^m - \rho\dot{u}_i\dot{u}_{i,1}^{aux} - \rho\dot{u}_i^{aux}\dot{u}_{i,1} \right. \\ \left. - \rho_{,1}\dot{u}_i\dot{u}_i^{aux} \right] q \left. \right\} dA \quad (34-5) \end{aligned}$$

جایگزینی رابطه (۵-۷) در معادله (۵-۳۴) و ساده سازی آن رابطه زیر را نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} MI_l = \int_{A^*} \left\{ [\sigma_{ij}u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{j,1} - \sigma_{jk}\varepsilon_{jk}^{aux}\delta_{1i} - \rho\dot{u}_k\dot{u}_k^{aux}\delta_{1i}]q_{,i} \right. \\ + \left[\rho\ddot{u}_j u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij,i}^{aux}u_{j,1} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,1}^{aux} + \sigma_{kk}^{aux}(\alpha_{t,1}\theta + \alpha_t\theta_{,1}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}^m\varepsilon_{ij}^{aux}) - \frac{1}{2}\sigma_{ij,1}^{aux}\varepsilon_{ij}^m - \rho\dot{u}_i\dot{u}_{i,1}^{aux} - \rho\dot{u}_i^{aux}\dot{u}_{i,1} \right. \\ \left. - \rho_{,1}\dot{u}_i\dot{u}_i^{aux} \right] q \left. \right\} dA \quad (35-5) \end{aligned}$$

با قرار دادن رابطه (۵-۲۶) در معادله (۵-۳۵) و ساده کردن آن، کلی ترین رابطه انتگرال

برهمکنش در مختصات محلی نوک ترک برای مواد تابعی به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} MI_l = \int_{A^*} \left\{ [\sigma_{ij}u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{j,1} - \sigma_{jk}\varepsilon_{jk}^{aux}\delta_{1i} - \rho\dot{u}_k\dot{u}_k^{aux}\delta_{1i}]q_{,i} \right. \\ + \left[\rho\ddot{u}_j u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij,i}^{aux}u_{j,1} + \sigma_{kk}^{aux}(\alpha_{t,1}\theta + \alpha_t\theta_{,1}) \right. \\ \left. - (C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}^m\varepsilon_{ij}^{aux}) - \rho\dot{u}_i\dot{u}_{i,1}^{aux} - \rho\dot{u}_i^{aux}\dot{u}_{i,1} - \rho_{,1}\dot{u}_i\dot{u}_i^{aux} \right] q \left. \right\} dA \quad (36-5) \end{aligned}$$

در این رابطه عبارت $\rho\ddot{u}_j u_{j,1}^{aux}$ نماینده اثرات دینامیکی و عبارت $\sigma_{ij,i}^{aux}u_{j,1}$ ناشی از فرمول بندی غیر-

تعادلی برای میدان های کمکی است. همچنین قابل ذکر است که عبارت های $\sigma_{ij,i}^{aux}$ و

تغییرات دمایی را در رابطه لحاظ می‌کند. عبارت $\sigma_{kk}^{aux}(\alpha_{t,1}\theta + \alpha_t\theta_{,1})$ به دلیل ناهمگنی ماده تابعی ایجاد شده‌اند. نیز اثرات $C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}^m\varepsilon_{ij}^{aux}$

با توجه به اینکه محاسبه جابجایی‌ها، کرنش‌ها و تنش‌ها در روش المان محدود توسعه یافته در دستگاه مختصات سراسری انجام می‌شود، ابتدا باید انتگرال برهمکنش در دستگاه مختصات سراسری محاسبه و سپس به دستگاه مختصات محلی انتقال یابد. مولفه‌های انتگرال برهمکنش در دستگاه مختصات سراسری به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$(MI_n)_g = \int_{A^*} \left\{ [\sigma_{ij}u_{j,n}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{j,n} - \sigma_{jk}\varepsilon_{jk}^{aux}\delta_{ni} - \rho\dot{u}_k\dot{u}_k^{aux}\delta_{ni}] \frac{\partial q}{\partial X_i} + [\rho\ddot{u}_j u_{j,n}^{aux} + \sigma_{ij,i}^{aux}u_{j,n} + \sigma_{kk}^{aux}(\alpha_{t,n}\theta + \alpha_t\theta_{,n}) - (C_{ijkl,n}\varepsilon_{kl}^m\varepsilon_{ij}^{aux}) - \rho\dot{u}_i\dot{u}_{i,n}^{aux} - \rho\dot{u}_i^{aux}\dot{u}_{i,n} - \rho_{,n}\dot{u}_i\dot{u}_i^{aux}] q \right\} dA \quad (37-5)$$

$$n = 1, 2$$

در این رابطه X_i مولفه‌های دستگاه مختصات سراسری هستند. برای بدست آوردن مقادیر عددی رابطه (37-5) می‌توان از روش انتگرال گیری گوسی استفاده کرد. بنابراین رابطه (37-5) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(MI_n)_g = \sum_{elems} \sum_{Gauss\ pts.} \left\{ [\sigma_{ij}u_{j,n}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{j,n} - \sigma_{jk}\varepsilon_{jk}^{aux}\delta_{ni} - \rho\dot{u}_k\dot{u}_k^{aux}\delta_{ni}] \frac{\partial q}{\partial X_i} + [\rho\ddot{u}_j u_{j,n}^{aux} + \sigma_{ij,i}^{aux}u_{j,n} + \sigma_{kk}^{aux}(\alpha_{t,n}\theta + \alpha_t\theta_{,n}) - C_{ijkl,n}\varepsilon_{kl}^m\varepsilon_{ij}^{aux} - \rho\dot{u}_i\dot{u}_{i,n}^{aux} - \rho\dot{u}_i^{aux}\dot{u}_{i,n} - \rho_{,n}\dot{u}_i\dot{u}_i^{aux}] q \right\} \det(J) w_{gp} \quad (38-5)$$

$$n = 1, 2$$

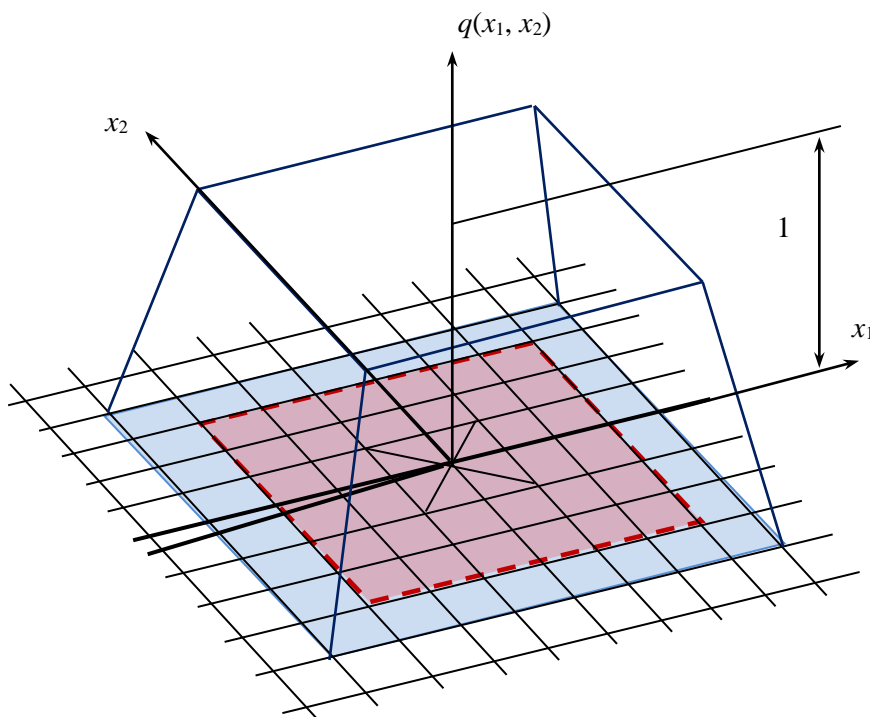
در این رابطه سیگمای اول شامل تمامی المان‌ها در داخل ناحیه انتگرال گیری (A^*) و سیگمای دوم شامل تمامی نقاط گوسی مربوط به توابع وزنی w_{gp} در داخل هر المان می‌باشد. $\det(J)$ نیز دترمینان ماتریس ژاکوبین است که مختصات (X_1, X_2) را به مختصات (ξ, η) مرتبط می‌کند.

در رابطه (۳۸-۵) تابع وزنی q مطابق با شکل (۲-۵) روی ناحیه انتگرال گیری تعریف می شود [۶۴].

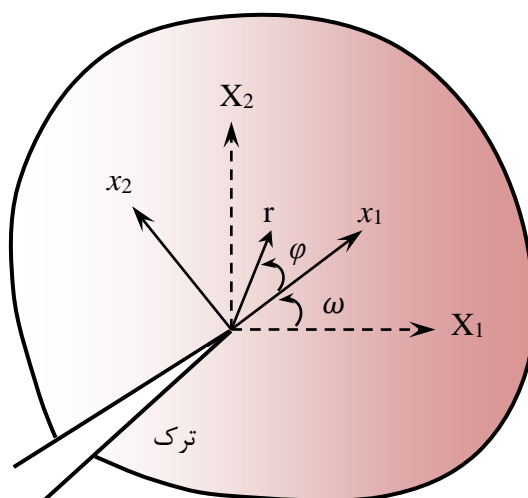
پس از بدست آوردن مولفه های انتگرال برهمکنش در دستگاه مختصات سراسری، اکنون می توان با استفاده از رابطه زیر انتگرال برهمکنش را در دستگاه مختصات محلی نوک ترک محاسبه نمود [۸۱].

$$MI_l = (MI_1)_g \cos \omega + (MI_2)_g \sin \omega \quad (۳۹-۵)$$

که در این رابطه مطابق شکل (۳-۵) زاویه بین دستگاه های مختصات سراسری و محلی نوک ترک است.



شکل ۲-۵- تابع وزنی مسطح q [۶۴]



شکل ۵-۳- دستگاه‌های مختصات سراسری و محلی در نوک ترک

۵-۴- محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی

۵-۴-۱- ضرایب شدت تنش برای ترک ایستا

رابطه بین ضرایب شدت تنش در حالت مد ترکیبی و انتگرال برهمکنش برای ترک ایستا به

صورت زیر است [۶۳]:

$$M_{I_l} = \frac{2}{E'} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \quad (۴۰-۵)$$

که در این رابطه E' عبارت است از:

$$E' = \begin{cases} E_{tip} & \text{تنش صفحه‌ای} \\ E_{tip}/(1 - \nu_{tip}^2) & \text{کرنش صفحه‌ای} \end{cases} \quad (۴۱-۵)$$

که E_{tip} و ν_{tip} به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون در نوک ترک هستند. برای محاسبه K_I در

رابطه (۴۰-۵)، $K_I^{aux} = 1$ و $K_{II}^{aux} = 0$ قرار داده می‌شوند. بنابراین K_I به صورت زیر بدست می‌آید:

$$K_I = \frac{E'}{2} M_l^{(1)} \quad (۴۲-۵)$$

همچنین برای محاسبه K_{II} در رابطه (۴۰-۵)، $K_I^{aux} = 0$ و $K_{II}^{aux} = 1$ قرار داده می‌شوند و K_{II} به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$K_{II} = \frac{E'}{2} M_l^{(2)} \quad (۴۳-۵)$$

قابل ذکر است که برای محاسبه $M_l^{(1)}$ از میدان کمکی مد اول و برای محاسبه $M_l^{(2)}$ از میدان کمکی مد دوم در رابطه انتگرال برهمکنش استفاده می‌شود.

۵-۴-۲- ضرایب شدت تنش برای ترک متحرک

رابطه بین ضرایب شدت تنش در حالت مد ترکیبی و انتگرال برهمکنش برای ترک متحرک به صورت زیر است [۱۵۴]:

$$M_{I_l} = \frac{2(1 - \nu_{tip}^2)}{E_{tip}} (\beta_1(\dot{a}) K_I K_I^{aux} + \beta_2(\dot{a}) K_{II} K_{II}^{aux}) \quad (۴۴-۵)$$

در این رابطه \dot{a} سرعت نوک ترک است و $\beta_1(\dot{a})$ و $\beta_2(\dot{a})$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\beta_1(\dot{a}) = \frac{4\alpha_d(1 - \alpha_s^2)}{(\kappa + 1)D(\dot{a})} \quad (۴۵-۵)$$

$$\beta_2(\dot{a}) = \frac{4\alpha_s(1 - \alpha_s^2)}{(\kappa + 1)D(\dot{a})} \quad (۴۶-۵)$$

که در این توابع κ ضریب کلوسوف^۱ است و به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵۴]:

$$\kappa = \begin{cases} (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{تنش صفحه‌ای} \\ 3 - 4\nu & \text{کرنش صفحه‌ای} \end{cases} \quad (۴۷-۵)$$

همچنین،

$$D(\dot{a}) = 4\alpha_d\alpha_s - (1 + \alpha_s^2)^2 \quad (۴۸-۵)$$

در این روابط α_s و α_d عبارتند از [۱۵۴]:

^۱ Kolosov coefficient

$$\alpha_d = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_d}\right)^2} \quad (49-5)$$

$$\alpha_s = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_s}\right)^2} \quad (50-5)$$

در حالی که c_d و c_s به ترتیب سرعت موج انبساطی^۱ و سرعت موج برشی^۲ هستند و به صورت توابعی از خواص ماده تعریف می‌شوند [۷۳ و ۱۴۷]. این سرعت‌ها برای حالت کرنش صفحه‌ای عبارتند از:

$$c_d(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{E(\mathbf{x})(1 - \nu(\mathbf{x}))}{(1 + \nu(\mathbf{x}))(1 - 2\nu(\mathbf{x}))\rho(\mathbf{x})}} \quad (51-5)$$

$$c_s(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{E(\mathbf{x})}{2(1 + \nu(\mathbf{x}))\rho(\mathbf{x})}} \quad (52-5)$$

برای حالت تنش صفحه‌ای نیز روابط زیر ارائه شده است.

$$c_d(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{E(\mathbf{x})}{(1 + \nu(\mathbf{x}))(1 - \nu(\mathbf{x}))\rho(\mathbf{x})}} \quad (53-5)$$

$$c_s(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{E(\mathbf{x})(1 - 2\nu(\mathbf{x}))}{2(1 + \nu(\mathbf{x}))(1 - \nu(\mathbf{x}))^2\rho(\mathbf{x})}} \quad (54-5)$$

۵-۵- معیار رشد ترک

پس از محاسبه K_I و K_{II} باید بررسی کرد که ترک رشد می‌کند یا نه و اگر رشد می‌کند در چه جهتی و با چه سرعتی رشد خواهد کرد. در این تحقیق از معیار ماکزیمم تنش مماسی^۳ به عنوان معیار رشد ترک استفاده می‌شود. تنش مماسی σ_h را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۱۴۷]:

$$\sigma_h = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sum_n^I (\varphi, \dot{a}) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sum_n^{II} (\varphi, \dot{a}) \quad (55-5)$$

¹ Dilatational wave speed

² Shear wave speed

³ Maximum hoop stress criterion

که در این رابطه $\Sigma_h^I(\varphi, \dot{a})$ و $\Sigma_h^{II}(\varphi, \dot{a})$ توابعی از زاویه φ (شکل ۵-۳) و سرعت نوک ترک \dot{a} هستند. هنگامی که ماکزیمم مقدار تنش مماسی (σ_{hmax}) در $\dot{a} = 0$ از تنش بحرانی (σ_{hc}) بیشتر شود، گسترش ترک شروع می‌شود. بنابراین شرط رشد ترک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{hmax}|_{\dot{a}=0} \geq \sigma_{hc}|_{\dot{a}=0} \quad (56-5)$$

تنش مماسی بحرانی (σ_{hc}) برای حالت مد I و با استفاده از چقرمگی شکست دینامیکی ($K_{Id}(\dot{a})$) که از آزمایشات بر روی ماده مورد نظر در حالت مد I بدست می‌آید، محاسبه می‌شود. بنابراین با جایگذاری $K_I = K_{Id}(\dot{a})$ ، $K_{II} = 0$ و $\varphi = 0$ در رابطه (۵۵-۵) σ_{hc} بدست می‌آید.

$$\sigma_{hc} = \frac{K_{Id}(\dot{a})}{\sqrt{2\pi r}} \sum_h^I(0, \dot{a}) \equiv \frac{K_{Id}(\dot{a})}{\sqrt{2\pi r}} \quad (57-5)$$

در پیاده‌سازی عددی، برای چک کردن معیار آغاز رشد ترک، وابستگی تنش مماسی به شعاع r (مخرج کسر در رابطه ۵۷-۵) حذف می‌شود؛ زیرا این عبارت در دو طرف رابطه وجود دارد. با تعریف یک ضریب شدت تنش مد I معادل $K_I^{eq}(\dot{a})$ ، معیار رشد ترک به صورت زیر در می‌آید:

$$K_I^{eq}(0) \geq K_{Id}(0) \quad (58-5)$$

که در این رابطه K_I^{eq} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_I^{eq}(\dot{a}) = K_I \sum_h^I(\varphi_c, \dot{a}) + K_{II} \sum_h^{II}(\varphi_c, \dot{a}) \quad (59-5)$$

با جایگذاری $\Sigma_h^I(\varphi_c, \dot{a})$ و $\Sigma_h^{II}(\varphi_c, \dot{a})$ در رابطه (۵۹-۵)، K_I^{eq} به صورت زیر ساده می‌شود [۱۴۶]:

$$K_I^{eq} = K_I \cos^3\left(\frac{\varphi_c}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \cos\left(\frac{\varphi_c}{2}\right) \sin\varphi_c \quad (60-5)$$

در این رابطه φ_c جهت گسترش ترک است که عمود بر جهت تنش مماسی ماکزیمم بوده و به صورت زیر بدست می‌آید [۱۵۵]:

$$\varphi_c = 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{4} \left[\frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right] \right), \quad -\pi < \varphi_c < \pi \quad (61-5)$$

۵-۵-۱- محاسبه سرعت رشد ترک

برای محاسبه سرعت نوک ترک در هنگام رشد رابطه زیر ارائه شده است [۱۵۵]:

$$\dot{a} = \begin{cases} 0 & \text{if } K_I^{eq} < K_{Ia} \\ c_r \left(1 - \left(\frac{K_{Ia}}{K_I^{eq}} \right)^2 \right) & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۶۲-۵)$$

در این رابطه c_r سرعت موج ریلی^۱ است که ماکزیمم سرعت نوک ترک تئوری می‌باشد و می‌توان آن

را بر حسب نسبت پواسون و سرعت موج برشی به صورت زیر تقریب زد [۱۴۷]:

$$c_r = c_s \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} \quad (۶۳-۵)$$

با توجه به وابستگی میدان‌های کمکی نوک ترک متحرک و ضریب شدت تنش معادل به سرعت

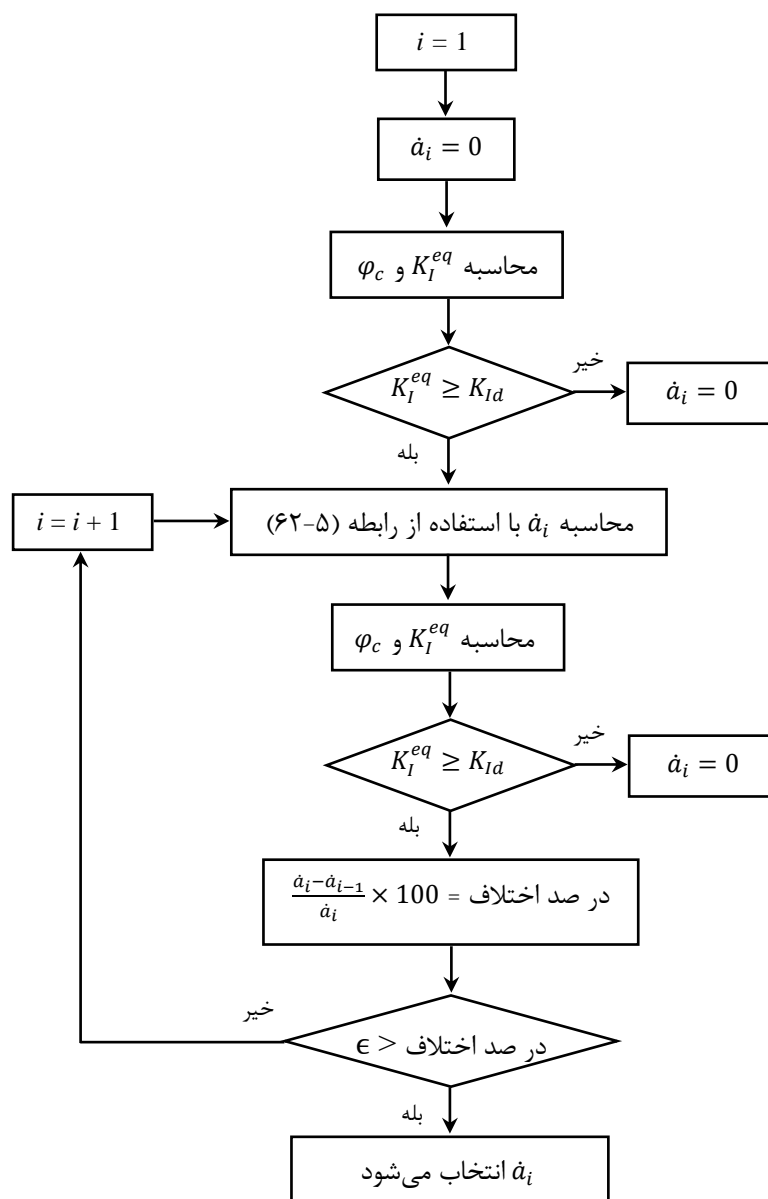
رشد ترک، الگوریتم زیر برای محاسبه دقیقتر سرعت رشد ترک ارائه و در این تحقیق مورد استفاده

قرار می‌گیرد.

در الگوریتم شکل (۴-۵) پارامتر ϵ تعیین کننده دقت محاسبه سرعت نوک ترک است که می‌تواند

به دلخواه انتخاب شود.

^۱ Rayleigh wave speed



شکل ۵-۴- الگوریتم محاسبه سرعت رشد ترک

فصل ششم

مثال‌های عددی

۶-۱- مقدمه

در این فصل ابتدا چهار مثال عددی حل شده و نتایج حاصل از آنها با نتایج تحلیلی و عددی موجود در مقالات مقایسه شده است. هدف از حل این مثال‌ها بررسی دقت و صحت روش حل ارائه شده در این تحقیق و برنامه نوشته شده است. سپس مسائل جدید دیگری جهت بررسی پدیده شکست دینامیکی مواد تابعی تحت شوک‌های گرمایی-مکانیکی تحلیل و بررسی شده‌اند. تمامی این مثال‌ها، به خاطر انطباق با شرایط مسائل حل شده موجود در مقالات، در حالت کرنش صفحه‌ای مورد تحلیل قرار گرفته‌اند.

در این تحقیق برای پیاده‌سازی روش المان محدود توسعه یافته و حل معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک جفت شده به منظور شبیه‌سازی مسائل مختلف شکست دینامیکی در مواد تابعی از محیط برنامه‌نویسی نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است.

۶-۱-۱- ویژگی‌های برنامه نوشته شده

برنامه نوشته شده در این تحقیق دارای ۳۹ زیر برنامه است که هر گونه تغییر برای کاربردهای دیگر را ساده می‌کند. ویژگی‌های برنامه نوشته شده در این تحقیق عبارتند از:

۱- یک زیر برنامه برای تولید شبکه نوشته شده که قادر به تولید شبکه برای یک هندسه مستطیلی با ابعاد دلخواه و تعداد المان دلخواه است. بنابراین تغییر المان‌بندی و اندازه المان‌ها به سادگی انجام می‌شود.

۲- برنامه قادر است مواد همگن و تابعی با خواص مکانیکی و گرمایی دلخواه را مدل‌سازی کرده و هر نوع پروفیل تغییر خواص ماده برای مواد تابعی را لحاظ کند.

۳- برنامه قادر به تحلیل مسائل صفحه‌ای در هر دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای است.

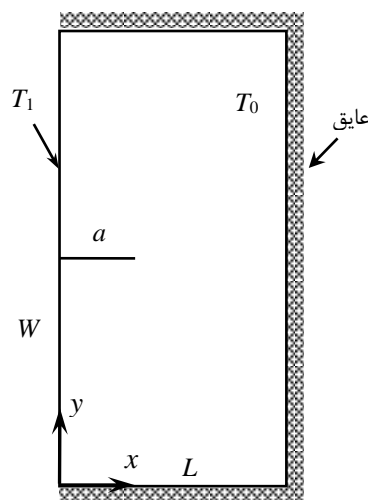
- ۴- برنامه دارای خروجی‌های گرافیکی بوده و کلیه کانتورهای جابجایی، دما، تنش‌ها و کرنش‌ها و همچنین شبکه‌ی شامل المان‌های غنی شده و شبکه تغییر شکل یافته در هر گام زمانی را ذخیره ه و در دسترس قرار می‌دهد.
- ۵- برنامه بسته به نیاز کاربر قادر است از 1×1 تا 21×21 نقطه گوسی را به منظور استفاده در انتگرال‌گیری گوسی روس سطح بکار گیرد. البته در مثال‌های حل شده فقط از تعداد 4×4 نقطه گوسی استفاده شده است.
- ۶- گام زمانی، تعداد المان‌های غنی شده نوک ترک و نیز اندازه ناحیه انتگرال‌گیری برای محاسبه انتگرال برهمکنش تحت کنترل کاربر بوده و به سهولت قابل افزایش یا کاهش هستند.
- ۷- برنامه قادر به مدل‌سازی کلیه ترک‌های لبه‌ای با زوایای مختلف و در حالت مد ترکیبی (غیر از مد III) است.

۶-۲- مثال اول: صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی

برای این مثال یک لایه دو بعدی الاستیک همسانگرد و همگن با یک ترک لبه‌ای مطابق با شکل (۶-۱) در نظر گرفته می‌شود. دمای اولیه لایه برابر با 400°K معادل با 127°C فرض می‌شود ($T_0 = 400^\circ\text{K}$). دمای سطح سمت چپ این لایه با فرایند رسانش در زمان $t = 0$ به سرعت به مقدار 350°K (77°C) کاهش پیدا می‌کند ($T_1 = 350^\circ\text{K}$). سطوح دیگر این لایه عایق حرارتی فرض می‌شوند.

در این مثال به خاطر انطباق شرایط حل مسئله با شرایط حل تحلیلی لی و سیم [۱۵۶] از عبارت جفت کننده مکانیکی-گرمایی در معادله انرژی صرف نظر می‌شود.

ابعاد این لایه عبارتند از $L = 0.001\text{m}$ ، $W = 0.002\text{m}$ و $a = 0.00005\text{m}$ (شکل ۶-۱). ضخامت لایه نیز 0.5m در نظر گرفته می‌شود. خواص ماده متشکله این لایه نیز عبارتند از $\rho = 5600\text{kg/m}^3$ ، $E = 117\text{GPa}$ ، $\nu = 0.333$ ، $\alpha_t = 7/118 \times 10^{-6}\text{K}^{-1}$ ، $c_t = 615/6\text{J/(kg}^\circ\text{K)}$ و $k = 2/0.36\text{W/(m}^\circ\text{K)}$.



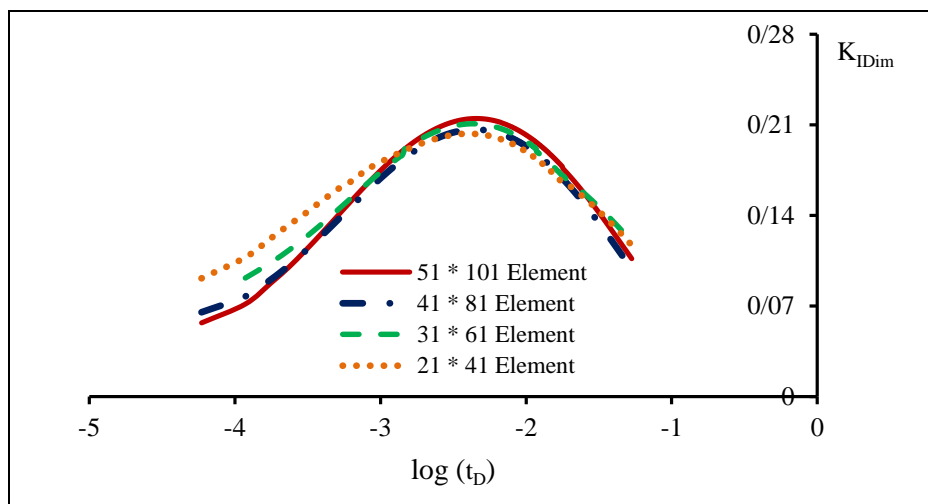
شکل ۶-۱- هندسه و ابعاد صفحه همسانگرد همگن دارای ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی

گام زمانی استفاده شده برای حل مسئله در قلمرو زمان نیز $\Delta t = 10^{-4}$ s می‌باشد. همچنین ناحیه انتگرال‌گیری برای محاسبه انتگرال برهمکنش و ضریب شدت تنش گرمایی گذرا، یک ناحیه مربعی با ابعاد $0.0001\text{m} \times 0.0001\text{m}$ در نوک ترک است. به منظور مقایسه با نتایج تحلیلی، ضرایب شدت تنش عددی بدست آمده با استفاده از رابطه زیر بی بعد شده‌اند [۱۵۶].

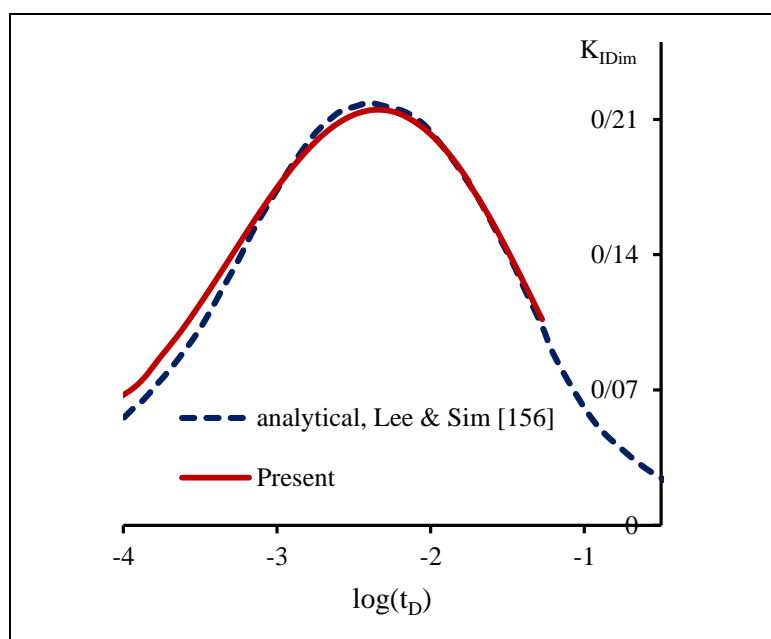
$$K_{IDim} = K_I(1 - \nu) / \{E\alpha_t(T_0 - T_1)L^{0.5}\} \quad (1-6)$$

$$t_D = kt / \rho c_t L^2 \quad (2-6)$$

برای انتخاب تعداد المان یک آزمون همگرایی انجام شده که نتایج آن در شکل (۲-۶) ارائه شده است. بنابراین یک شبکه شامل 55×105 المان مستطیلی چهار گره‌ای برای گسسته‌سازی هندسه مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرد. ضرایب شدت تنش عددی بدست آمده در این تحقیق با نتایج تحلیلی لی و سیم [۱۵۶] در نمودار شکل (۳-۶) مقایسه شده‌اند. شکل (۳-۶) نشان می‌دهد که منحنی‌های ضرایب شدت تنش گرمایی عددی و تحلیلی مطابقت خوبی با یکدیگر دارند. این مثال نشان دهنده قابلیت برنامه نوشته شده برای مدل‌سازی صفحات ترک‌دار همگن تحت شوک‌های گرمایی است.



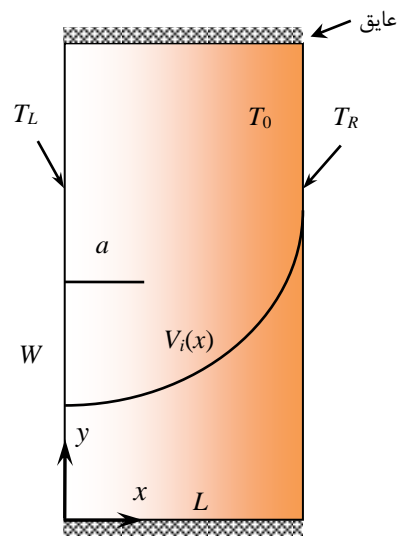
شکل ۶-۲- آزمون همگرایی ضرایب شدت تنش بدست آمده با تعداد المان‌های متفاوت برای مثال اول



شکل ۶-۳- نمودار ضرایب شدت تنش بی بعد شده در برابر لگاریتم زمان بی بعد شده برای مثال اول

۶-۳- مثال دوم: صفحه تابعی $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{Al}_2\text{O}_3$ با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی

یک صفحه دو بعدی از جنس ماده تابعی $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{Al}_2\text{O}_3$ دارای یک ترک لبه‌ای مطابق با شکل (۶-۴) در نظر گرفته می‌شود. ابعاد این صفحه عبارتند از $L = 0.001\text{m}$ و $W = 0.002\text{m}$. ضخامت



شکل ۶-۴- هندسه و شرط مرزی لایه تابعی $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{Al}_2\text{O}_3$ با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی

صفحه نیز 0.001m است. صفحه با دو طول ترک اولیه متفاوت تحلیل می‌شود که عبارتند از

$$a = 0.0003\text{m} \text{ و } a = 0.0001\text{m}$$

صفحه ابتدا در دمای اولیه $T_0 = 200^\circ\text{K}$ (-73°C) قرار دارد. دمای سطح سمت چپ ورق در زمان $t = 0$ به طور ناگهانی به $T_L = 190^\circ\text{K}$ کاهش می‌یابد؛ اما دمای سطح سمت راست همواره در مقدار 200 درجه کلوین ثابت باقی می‌ماند ($T_R = 200^\circ\text{K}$). سطوح دیگر عایق گرما فرض می‌شوند. بنابراین ترک در شرایط بارگذاری مد اول قرار دارد.

صفحه مورد نظر با تعداد 65×125 المان مربعی چهار گره‌ای شبکه بندی می‌شود. گام زمانی استفاده شده در این مثال عبارت است از $\Delta t = 0.0002\text{ s}$. همچنین یک محدوده مربعی شکل با ابعاد $2a \times 2a$ برای محاسبه انتگرال برهمکنش و ضریب شدت تنش K_I در نظر گرفته می‌شود.

در این مثال هدف مقایسه نتایج عددی بدست آمده با نتایج تحلیلی جین و پائولینو [۱] است. به همین دلیل برای انطباق شرایط حل مسئله با شرایط حل تحلیلی جین و پائولینو [۱] از عبارت جفت کننده مکانیکی-گرمایی در معادله انرژی صرف نظر می‌شود.

خواص مواد تشکیل دهنده این صفحه یعنی Al_2O_3 و Si_3N_4 در جدول (۶-۱) ثبت شده‌اند. همچنین فرض می‌شود که سطح سمت چپ صفحه Al_2O_3 خالص باشد و تغییر درصد حجمی Si_3N_4 در جهت محور x از رابطه (۲-۱) تبعیت کند. ضرایب شدت تنش محاسبه شده برای دو مقدار مختلف p ، با مقادیر به دست آمده توسط جین و پائولینو [۱] در شکل (۶-۵) مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. در این مثال ضرایب شدت تنش و زمان توسط روابط زیر بی بعد شده‌اند.

$$K_{IDim} = K_I(1 - \nu) / \{E\alpha_{t0}(T_0 - T_1)(\pi L)^{0.5}\} \quad (۳-۶)$$

$$t_D = k_0 t / \rho_0 c_{t0} L^2 \quad (۴-۶)$$

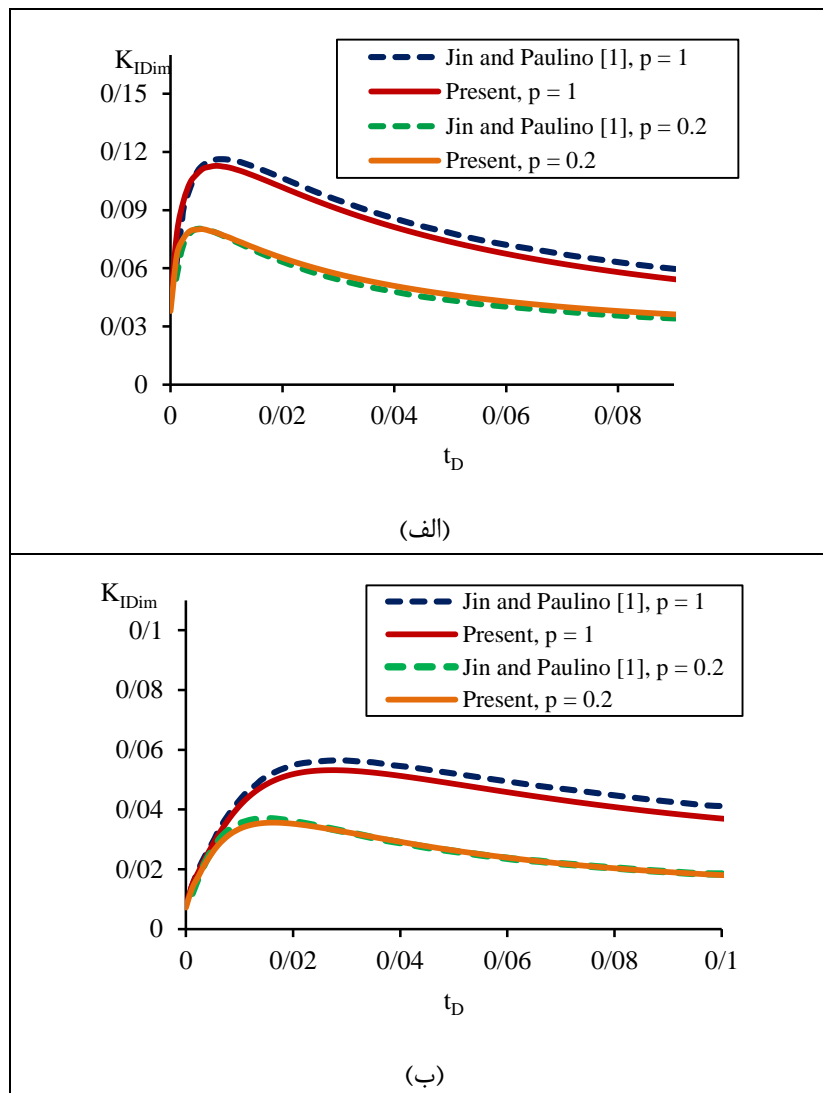
در روابط بالا خواصی که با اندیس صفر مشخص شده‌اند، خواص ماده مربوط به موقعیت $x = 0$ هستند (خواص Al_2O_3).

شکل (۶-۵) مطابقت خوبی را بین نتایج عددی و تحلیلی نشان می‌دهد. همچنین نشان می‌دهد که ضریب شدت تنش مد اول برای ترک قرار گرفته در لبه متشکل از Al_2O_3 در ماده تابعی Al_2O_3/Si_3N_4 تحت شوک حرارتی، با افزایش نمای p در رابطه (۲-۱) افزایش می‌یابد.

نتایج حاصل از این مثال بیانگر دقت بالای برنامه نوشته شده در این تحقیق برای مدل‌سازی مواد تابعی ترک‌دار تحت شوک‌های حرارتی هستند.

جدول ۶-۱ - خواص Al_2O_3 و Si_3N_4 [۴۵]

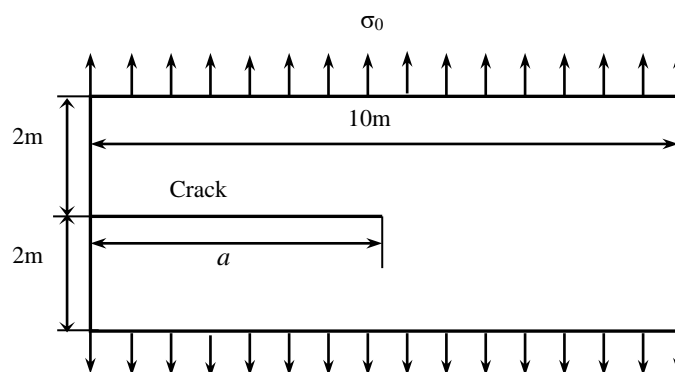
ماده	مدول یانگ (GPa)	نسبت پواسون	ضریب انبساط گرمایی ($10^{-6}/K$)	هدایت گرمایی (W/m-K)	چگالی (Kg/m ³)	ظرفیت گرمایی ویژه (J/Kg-K)	چقرمگی شکست (MPa.m ^{1/2})
Al_2O_3	۳۲۰	۰/۲۵	۸	۲۰	۳۸۰۰	۹۰۰	۴
Si_3N_4	۳۲۰	۰/۲۵	۳	۳۵	۳۲۰۰	۷۰۰	۵



شکل ۶-۵- مقایسه منحنی‌های ضرایب شدت تنش مد اول برای لایه تابعی تحت شوک حرارتی
 (الف) $a/L = 0.1$ (ب) $a/L = 0.3$

۶-۴- مثال سوم: صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک مکانیکی

در این مثال یک صفحه الاستیک دو بعدی با یک ترک لبه‌ای مطابق شکل (۶-۶) در نظر گرفته می‌شود. یک تنش کششی یکنواخت با مقدار $\sigma_0 = 63750 \text{ Pa}$ در زمان $t = 0$ به لبه‌های بالایی و پایینی آن وارد می‌شود. ابعاد لایه مطابق شکل (۶-۷) $4\text{m} \times 10\text{m}$ با ضخامت 1m است و شامل یک ترک اولیه با طول $a = 5\text{m}$ می‌باشد.



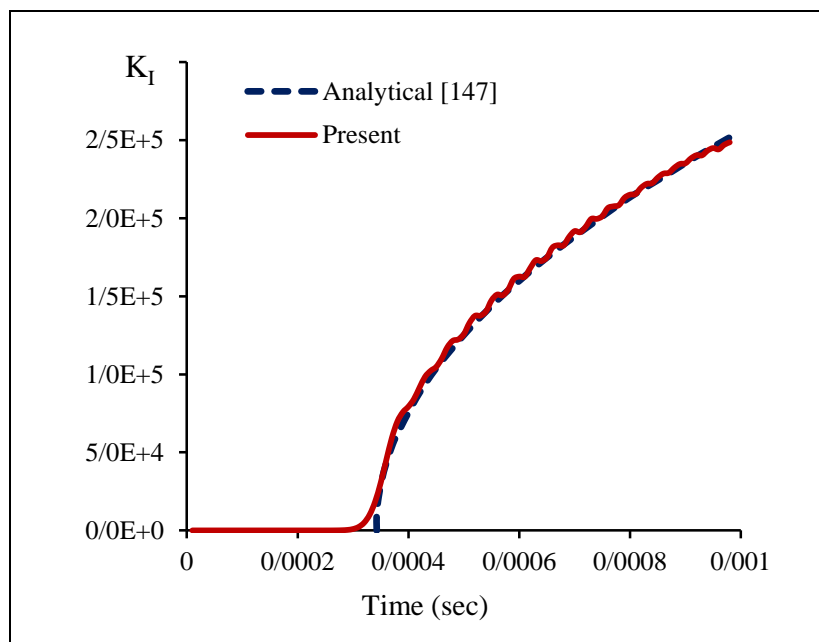
شکل ۶-۶- هندسه و نحوه بارگذاری صفحه همسانگرد همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک مکانیکی

این لایه از یک ماده همسانگرد و همگن تشکیل شده و خواص ماده تشکیل دهنده آن عبارت است از: $\rho = 7833 \text{ kg/m}^3$, $E = 200 \text{ GPa}$, و $\nu = 0.3$. این لایه با 81×201 المان مستطیلی چهار گره‌ای شبکه بندی می‌شود.

حل تحلیلی این مسئله توسط فروند [۱۴۷] برای یک صفحه بی‌نهایت ارائه شده است. در اینجا چون ابعاد ورق در نظر گرفته شده محدود است، شبیه‌سازی تا زمان $t = 3t_c$ متوقف می‌شود، یعنی قبل از اینکه موج‌های منعکس شده از لبه‌ها به نوک ترک برسند [۱۴۶]. در این مسئله t_c برابر است با C_d و $2/C_d$ بر طبق رابطه (۵-۵۱) برابر است با 5862 m/s . بنابراین زمان شبیه‌سازی در حدود $t = 0.001 \text{ s}$ بدست می‌آید. این زمان به ۱۰۰ گام زمانی تقسیم می‌شود در نتیجه گام زمانی مورد استفاده برای این مثال $\Delta t = 0.00001 \text{ s}$ است. در این مثال یک ناحیه مربعی به ابعاد $0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$ در نوک ترک برای محاسبه انتگرال برهمکنش و ضریب شدت تنش مد اول استفاده می‌شود.

مقادیر K_I به دست آمده برای این مسئله در نمودار شکل (۶-۷) با مقادیر تحلیلی ارائه شده توسط فروند [۱۴۷] مقایسه شده‌اند. می‌توان دید که نتایج مطابقت خیلی خوبی دارند. همچنین دیده می‌شود که منحنی حاصل از روش عددی حول مقادیر تحلیلی نوسان دارد که این پدیده در مراجع

[۱۰۰، ۱۰۱، ۱۴۶ و ۱۵۷] نیز برای روش المان محدود توسعه یافته گزارش شده است. این نوسانات



شکل ۶-۷- مقایسه ضریب شدت تنش K_I (Pa√m) به دست آمده در این تحقیق با مقادیر حل تحلیلی برای مثال سوم

مشخصه حل مسئله انتشار شوک توسط روش گسسته‌سازی المان محدود در قلمرو مکان و روش نیومارک در قلمرو زمان هستند [۱۰۱].

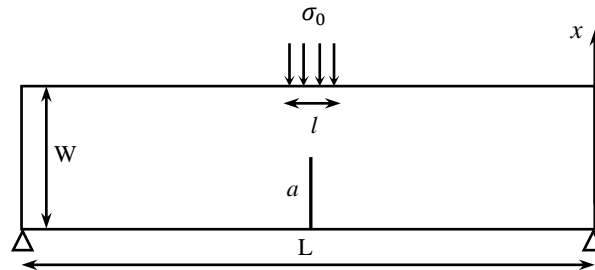
این مثال نشان دهنده قابلیت خیلی خوب روش ارائه شده و کد نوشته شده در این تحقیق برای حل مسائل تحلیل ترک تحت شوک مکانیکی است.

۵-۶- مثال چهارم: تیر همگن ترکدار تحت شوک مکانیکی

یک تیر ترکدار تحت خمش سه نقطه مطابق شکل (۶-۸) برای این مثال در نظر گرفته می‌شود. بارگذاری در حالت مد اول است و ضریب شدت تنش دینامیکی با استفاده از مقدار استاتیکی آن، که از رابطه زیر به دست می‌آید، بی بعد می‌شود [۱۴۶].

$$K_{Is} = \frac{6Ll\sigma_0}{4BW^2} \sqrt{\pi a \Phi \left(\frac{a}{W} \right)} \quad (5-6)$$

در این رابطه تابع $\Phi\left(\frac{a}{W}\right)$ عبارت است از:



شکل ۶-۸- هندسه تیر همگن ترک‌دار تحت شوک مکانیکی

$$\Phi\left(\frac{a}{W}\right) = 1.09 - 1.735 \frac{a}{W} + 8.2 \left(\frac{a}{W}\right)^2 - 14.18 \left(\frac{a}{W}\right)^3 + 14.57 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \quad (6-6)$$

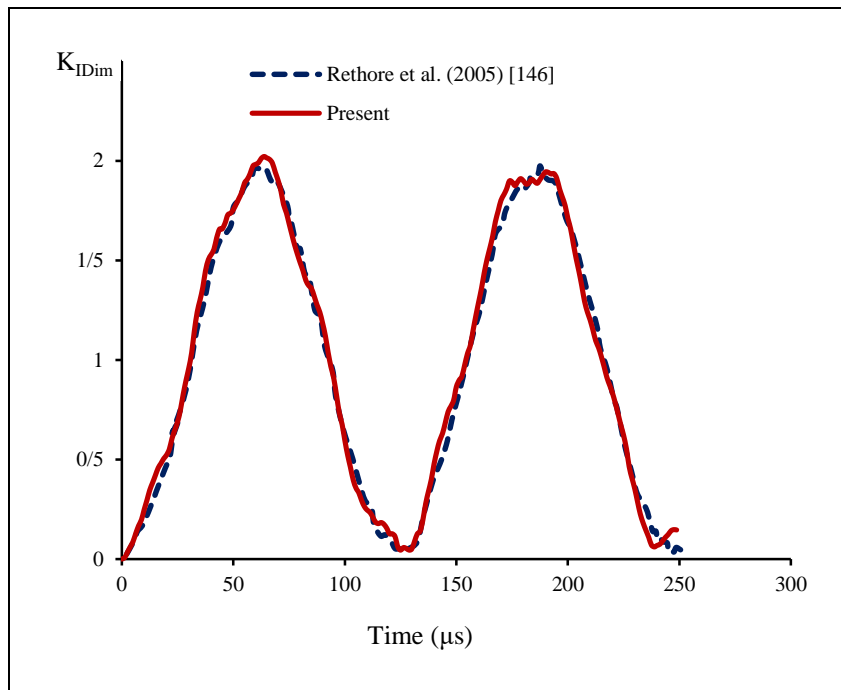
همچنین $L = 0.04 \text{ m}$ فاصله بین دو تکیه گاه، $a = 0.005 \text{ m}$ طول ترک، $W = 0.01 \text{ m}$ ارتفاع تیر و $B = 1 \text{ m}$ ضخامت تیر می‌باشند. بنابراین ضریب شدت تنش بی بعد عبارت است از:

$$K_{IDim} = \frac{K_I}{K_{Is}} \quad (7-6)$$

تیر از یک ماده همسانگرد و همگن با چگالی $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ ، مدول یانگ $E = 200 \text{ GPa}$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ تشکیل شده است. شبکه استفاده شده برای المان‌بندی این مسئله متشکل از 21×91 المان مستطیلی چهار گره‌ای است. ناحیه در نظر گرفته شده برای محاسبه انتگرال برهمکنش نیز یک مربع به ابعاد تقریبی $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ است. یک بار گسترده به مقدار $\sigma_0 = 400 \text{ Pa}$ در لحظه اولیه بر روی طولی به اندازه $l = 0.025 \text{ m}$ در مرکز تیر اعمال می‌شود. زمان شبیه‌سازی $250 \text{ } \mu\text{s}$ می‌باشد که به 200 گام زمانی تقسیم می‌شود.

منحنی ضریب شدت تنش بی بعد بر حسب زمان شبیه‌سازی در شکل (۶-۹) با منحنی ارائه شده در مرجع [۱۴۶] که آن هم با روش المان محدود توسعه یافته بدست آمده مقایسه شده است. نمودار

شکل (۶-۹) نشان می‌دهد که نتایج مطابقت بسیار خوبی با هم دارند و نیز ضریب شدت تنش دینامیکی بین صفر و دو برابر مقدار استاتیکی آن نوسان می‌کند.

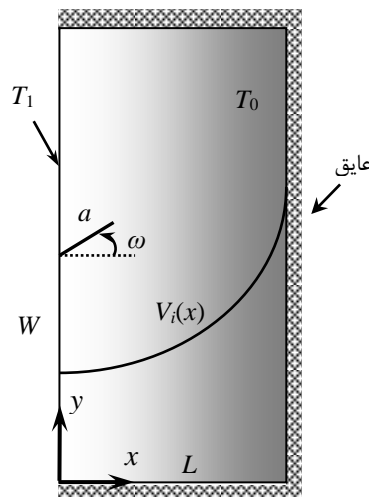


شکل ۶-۹- مقایسه منحنی‌های ضریب شدت تنش K_{IDim} بی بعد شده برای تیر تحت شوک مکانیکی برای مثال چهارم

۶-۶- مثال پنجم: رشد ترک در صفحه تابعی Al_2O_3/Si_3N_4

در این مثال ابتدا اثرات پروفیل تغییر کسر حجمی اجزای ماده تابعی و زاویه اولیه ترک بر روی ضرایب شدت تنش گرمایی مطالعه می‌شود. سپس پدیده رشد ترک در صفحه تابعی Al_2O_3/Si_3N_4 مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابعاد و شرایط مرزی صفحه مورد نظر دقیقاً مشابه مثال اول است. دمای اولیه صفحه برابر با $500^\circ K$ درجه کلوین انتخاب می‌شود ($T_0 = 500^\circ K$). در لحظه $t = 0$ یک شوک سرمایشی ($\theta = -50^\circ K$) مطابق شکل (۶-۱۰) به سطح سمت چپ صفحه اعمال می‌شود. طول اولیه ترک $a = 0.0001 m$ و جنس صفحه نیز ماده تابعی Al_2O_3/Si_3N_4 است که در ابزارهای برش استفاده

می‌شود. خواص مکانیکی و گرمایی Al_2O_3 و Si_3N_4 در جدول (۶-۱) ارائه شده است. سطح سمت چپ صفحه که در معرض شوک گرمایی قرار دارد Al_2O_3 خالص فرض می‌شود (مشابه کاربرد این مواد در ابزارهای برش).



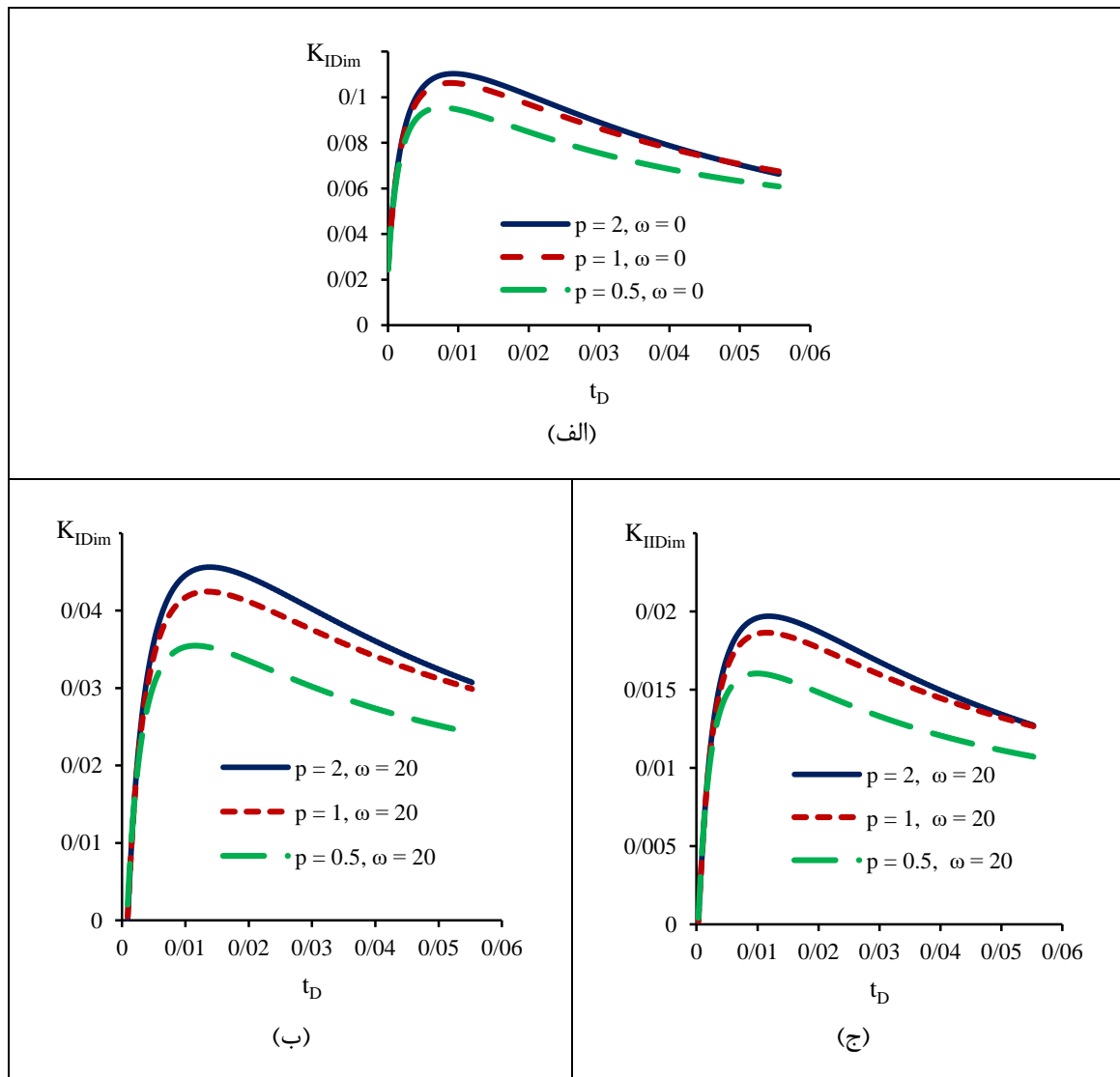
شکل ۶-۱۰- هندسه و شرایط مرزی لایه تابعی $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Si}_3\text{N}_4$ با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی (مثال پنجم)

تغییرات ماده در جهت محور x رخ می‌دهد و تغییر کسر حجمی Si_3N_4 در این جهت از معادله (۲-۱) پیروی می‌کند. یک شبکه با 65×125 المان مستطیلی چهار گره‌ای برای المان‌بندی صفحه انتخاب و گام زمانی نیز برابر با 0.001 ثانیه در نظر گرفته می‌شود.

برای مطالعه اثر پروفیل تغییر کسر حجمی اجزای ماده تابعی بر روی ضرایب شدت تنش، مسئله برای دو ترک با زوایای اولیه $\omega = 0$ و $\omega = 20$ درجه با سه مقدار متفاوت برای p حل می‌شود. تغییرات زمانی ضرایب شدت تنش دینامیکی مد I و II بی بعد شده برای مقادیر مختلف p در شکل (۶-۱۱) نشان داده شده است.

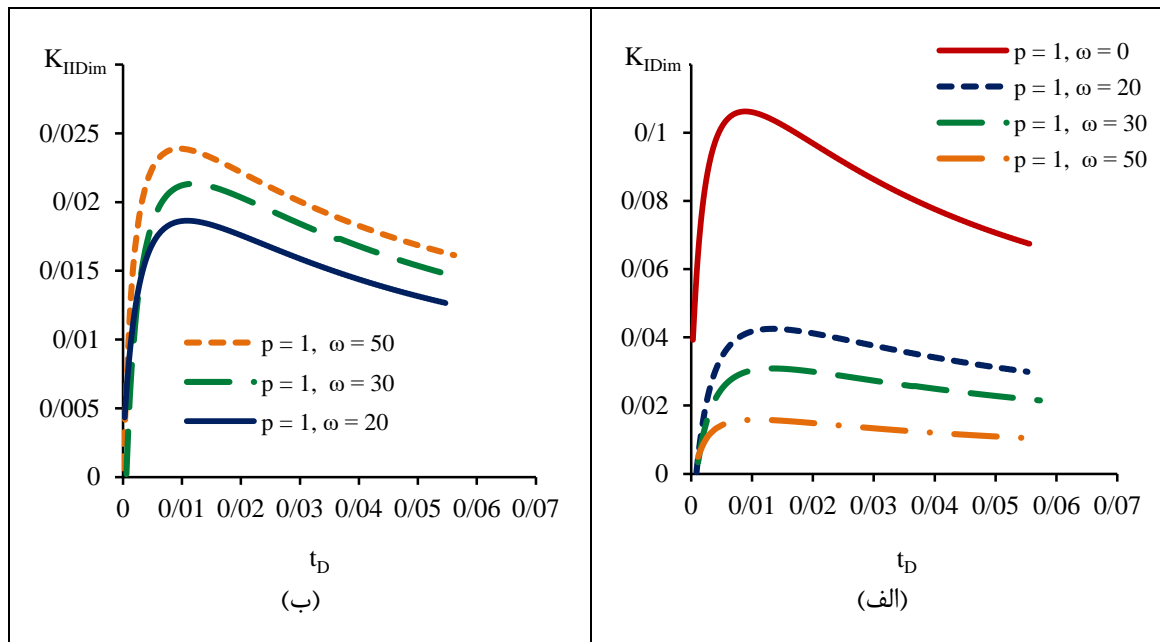
در این مثال برای بی‌بعدسازی ضرایب شدت تنش و زمان از روابط (۶-۳) و (۶-۴) استفاده شده است. شکل (۶-۱۲) نشان می‌دهد که افزایش پارامتر p باعث افزایش ضرایب شدت تنش می‌شود. تاثیر زاویه اولیه ترک بر روی مقادیر ضرایب شدت تنش برای حالت $p = 1$ در نمودارهای شکل

(۶-۱۳) نشان داده شده است. مطابق انتظار این نمودارها نشان می‌دهند که، صرف‌نظر از چگونگی تغییرات خواص ماده، افزایش زاویه اولیه ترک منجر به کاهش مقدار ضریب شدت تنش مد اول (K_I) و افزایش مقدار ضریب شدت تنش مد دوم (K_{II}) می‌شود.



شکل ۶-۱۱- مطالعه اثر پارامتر p بر روی ضرایب شدت تنش برای لایه تابعی Al_2O_3/Si_3N_4 به روش عددی حاضر، الف) K_I بی بعد برای ترک افقی، ب) K_I بی بعد برای ترک مایل با زاویه 20° درجه، ج) K_{II} بی بعد برای ترک مایل با زاویه 20° درجه

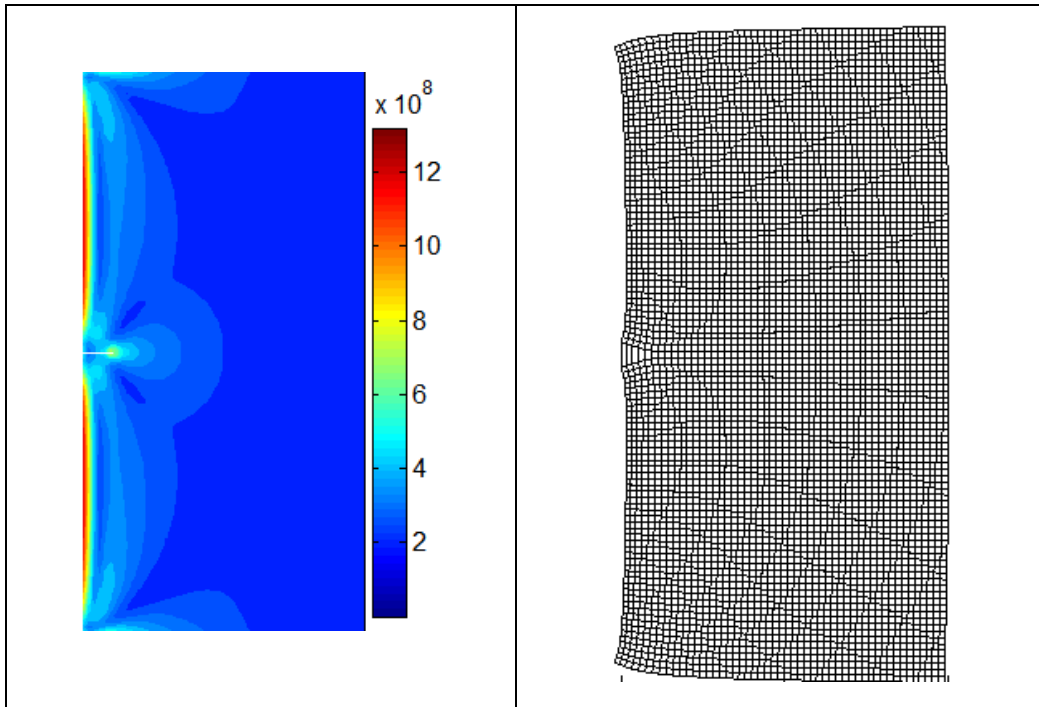
در ادامه این مثال، پدیده رشد ترک در لایه تابعی $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Si}_3\text{N}_4$ با یک ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. دمای اولیه صفحه 800°C درجه کلویین در نظر گرفته می‌شود و یک شوک سرمایشی به مقدار $\theta = -500^\circ\text{K}$ در لحظه اولیه به لبه سمت چپ اعمال می‌شود.



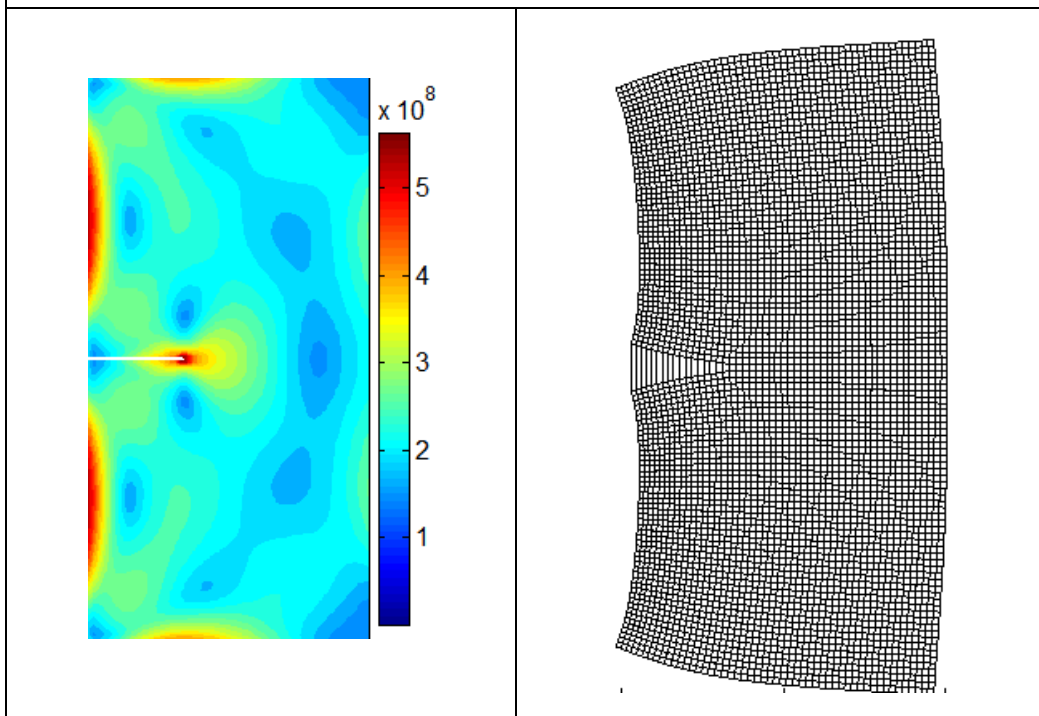
شکل ۶-۱۲- منحنی‌های ضرایب شدت تنش بی‌بعد برای ترک‌های لبه‌ای با زاویه اولیه متفاوت بر حسب درجه در لایه تابعی $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Si}_3\text{N}_4$ ، الف) K_I بی‌بعد، ب) K_{II} بی‌بعد

شکل (۶-۱۳) مسیر رشد ترک، کانتورهای تنش ون میزز و شبکه تغییر شکل یافته را در آستانه رشد ترک و بعد از زمان $t = 0.004$ s برای صفحه تابعی با $p = 1$ نشان می‌دهد. برای وضوح بیشتر، در ترسیم شبکه تغییر شکل یافته شکل (۶-۱۳)، جابجایی‌ها 50 برابر بزرگ شده‌اند.

شکل (۶-۱۴) نیز مسیر رشد ترک، کانتورهای تنش ون میزز و کانتورهای جابجایی در جهت u_y را برای یک صفحه تابعی با یک زاویه‌دار ($\omega = 20^\circ$) در حالت $p = 1$ تحت شوک گرمایی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که مسیر رشد ترک برای یک ترک زاویه‌دار نیز به صورت خط راست افقی می‌باشد.

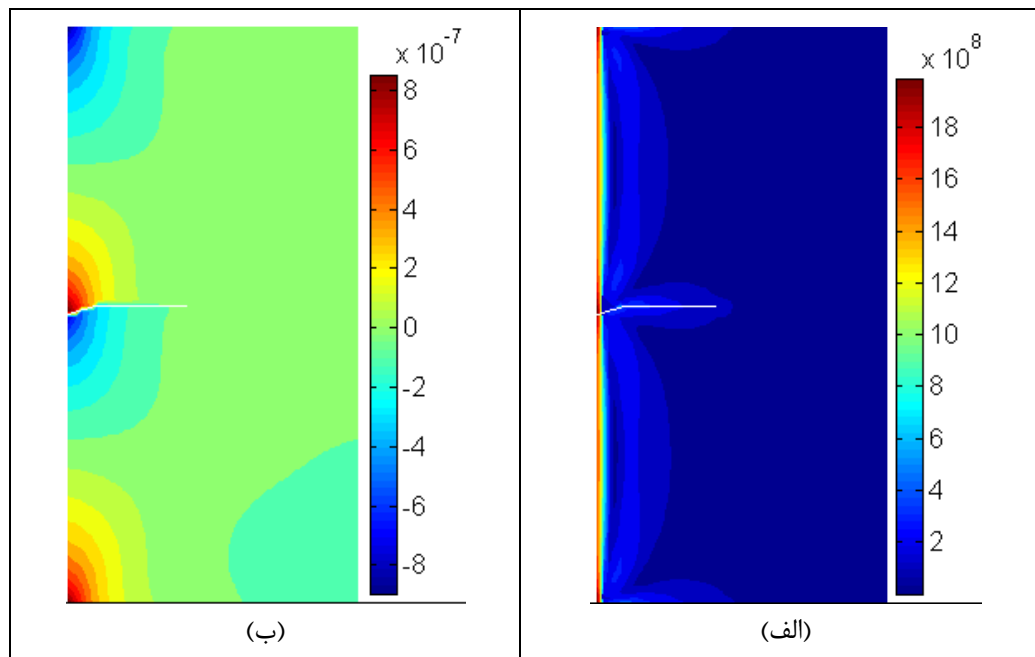


الف) آغاز رشد ترک



ب) $t = 0.004$ s

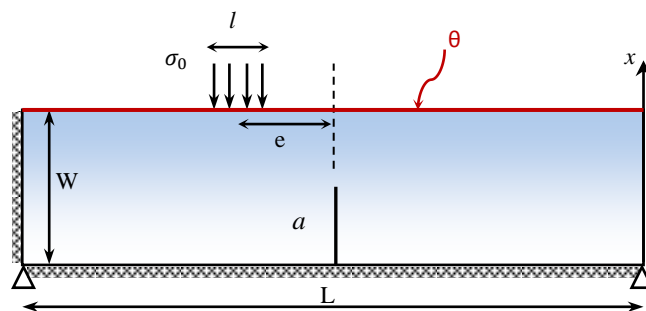
شکل ۶-۱۳- مسیر رشد ترک، کانتورهای تنش ون میزز با واحد پاسکال (Pa) و شبکه تغییر شکل یافته با جابجایی‌هایی که ۵۰ برابر بزرگ شده‌اند برای ترک لبه‌ای افقی در لایه تابعی $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Si}_3\text{N}_4$ تحت شوک گرمایی $\theta = -500 \text{ K}$ (مثال پنجم)



شکل ۶-۱۴- مسیر رشد ترک برای ترک لبه‌ای با زاویه اولیه ۲۰ درجه در لایه تابعی $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Si}_3\text{N}_4$ تحت شوک گرمایی $\theta = -500 \text{ K}$ در لحظه $t = 0.1 \text{ s}$ (الف) کانتورهای تنش ون میزز با واحد پاسکال (Pa)، (ب) کانتورهای جابجایی u_v با واحد متر (m)

۶-۷- مثال ششم: تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ترک لبه‌ای

یک تیر ترکدار ساخته شده از ماده تابعی شیشه/اپوکسی تحت شوک گرمایی-مکانیکی مطابق شکل (۶-۱۵) را در نظر می‌گیریم. هندسه تیر همانند تیر مثال چهارم است. بار مکانیکی و گرمایی بر روی سطح بالایی تیر اعمال و سطوح دیگر عایق فرض می‌شوند. خواص مواد تشکیل دهنده تیر در جدول (۶-۲) ارائه شده است.



شکل ۶-۱۵- هندسه و بارگذاری تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی-مکانیکی
جدول ۶-۲- خواص اپوکسی و شیشه [۶]

ماده	مدول یانگ (GPa)	نسبت پواسون	ضریب انبساط گرمایی ($10^{-6}/K$)	هدایت گرمایی ($W/m-K$)	چگالی (Kg/m^3)	ظرفیت گرمایی ویژه ($J/Kg-K$)	چقرمگی شکست ($MPa.m^{1/2}$)
اپوکسی	۳/۲	۰/۳۴	۵۵	۰/۱۸۸	۱۱۷۵	۱۲۰۰	۰/۶
شیشه	۷۰	۰/۲۳	۸/۳	۰/۹۳۷	۲۵۰۰	۸۸۰	۰/۷۵

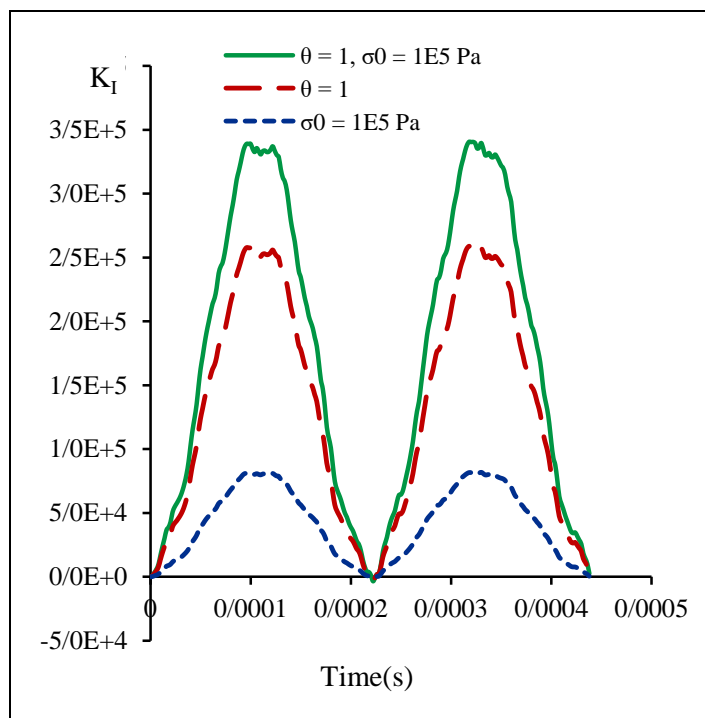
محور x به سمت بالا در نظر گرفته می‌شود. ماده‌ای که لبه پایینی تیر را تشکیل می‌دهد به عنوان ماتریس در نظر گرفته شده و تغییرات کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس از رابطه (۱-۲) پیروی می‌کند.

شبکه استفاده شده برای حل این مسئله متشکل از 45×175 المان مستطیلی چهار گره‌ای است. ناحیه در نظر گرفته شده برای محاسبه انتگرال برهم‌کنش یک مربع به ابعاد تقریبی $5mm \times 5mm$ است. گام زمانی برابر با $2 \mu s$ در نظر گرفته می‌شود.

ابتدا می‌خواهیم پاسخ تیر تحت شوک حرارتی، شوک مکانیکی و بارگذاری حرارتی-مکانیکی به طور همزمان را با هم مقایسه کنیم. فرض کنید که سطح زیرین تیر از جنس شیشه باشد و اپوکسی به عنوان ماده افزودنی در نظر گرفته می‌شود که تغییرات کسر حجمی آن از رابطه (۱-۲) به دست می‌آید. در رابطه (۱-۲)، مقدار p برابر با یک در نظر گرفته می‌شود ($p = 1$). در مرحله اول تیر تحت یک بار گسترده به مقدار $\sigma_0 = 0.1 \text{ MPa}$ که در لحظه اولیه بر روی طول $l = 0.025 \text{ m}$ در وسط تیر اعمال می‌شود ($e = 0$)، تحلیل می‌شود. در مرحله دوم فقط یک شوک حرارتی با مقدار $\theta = 1^\circ K$ بر

روی سطح بالایی تیر اعمال شده و پاسخ تیر بدست می‌آید. در انتها نیز پاسخ تیر تحت هر دو بار به طور همزمان بدست می‌آید.

منحنی‌های ضرایب شدت تنش K_I برای هر سه بارگذاری مکانیکی، حرارتی و ترکیب مکانیکی و حرارتی در شکل (۶-۱۶) ترسیم و با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

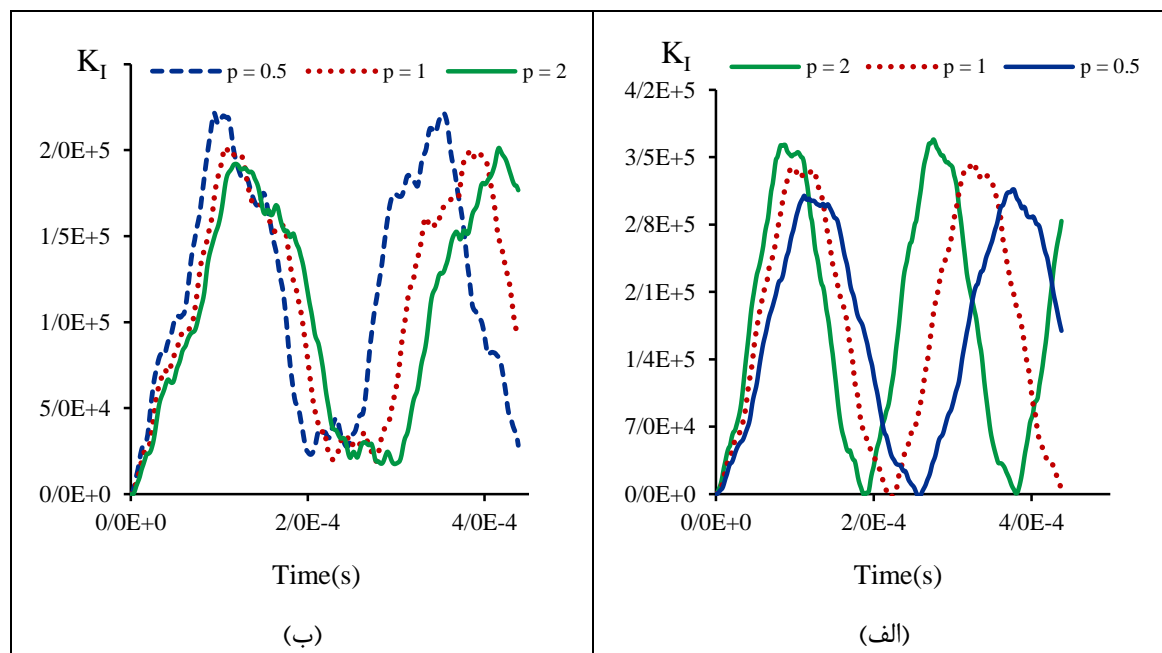


شکل ۶-۱۶- مقایسه منحنی‌های K_I با واحد $(\text{Pa}\sqrt{\text{m}})$ بر حسب زمان برای سه بارگذاری مکانیکی $\sigma_0 = 0.1 \text{ MPa}$ ، حرارتی $\theta = 1^\circ \text{K}$ و ترکیب این دو بر روی تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ماتریس شیشه

در ادامه اثر پارامتر p بر روی مقدار ضریب شدت تنش و خیز نقطه میانی تیر بررسی می‌شود. برای این منظور، دو تیر تحت شوک حرارتی $\theta = 1^\circ \text{K}$ و شوک مکانیکی $\sigma_0 = 0.1 \text{ MPa}$ که به طور همزمان اعمال می‌شوند را در نظر می‌گیریم. در تیر اول شیشه به عنوان ماتریس و در تیر دوم اپوکسی به عنوان ماتریس در نظر گرفته می‌شود. هر دو تیر با سه مقدار متفاوت $p = 0.5$ ، $p = 1$ و $p = 2$ تحلیل و نتایج در شکل (۶-۱۷) ارائه شده‌اند.

مشاهده می‌شود در صورتی که ماتریس شیشه باشد با افزایش p ، K_I افزایش می‌یابد و هنگامی که اپوکسی ماتریس باشد با افزایش p ، K_I کاهش می‌یابد. همچنین در شکل (۶-۱۷) مشاهده می‌شود که

سرعت رسیدن موج به نوک ترک با افزایش p در تیر با ماتریس شیشه افزایش یافته و در تیر با ماتریس اپوکسی کاهش می‌یابد.

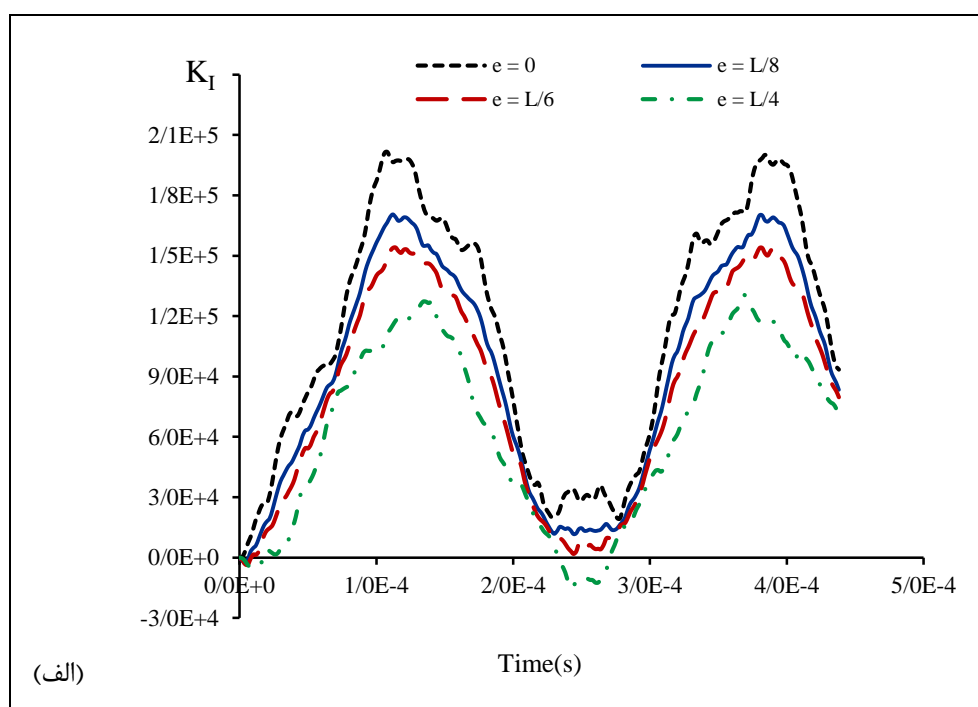


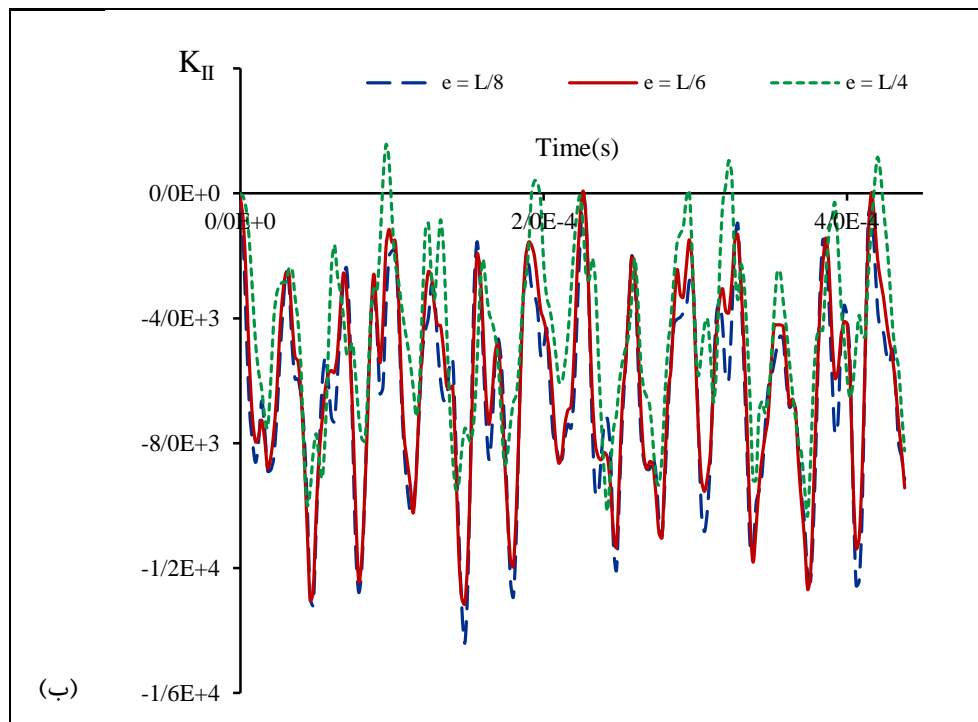
شکل ۶-۱۷- مقایسه منحنی‌های K_I با واحد $(\text{Pa}\sqrt{\text{m}})$ بر حسب زمان برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی تحت شوک حرارتی-مکانیکی با سه مقدار مختلف p . الف) ماتریس شیشه ب) ماتریس اپوکسی

در ادامه اثر تغییر مکان اعمال شوک مکانیکی بر روی یک تیر با ماتریس اپوکسی بررسی می‌شود. تیر نشان داده شده در شکل (۶-۱۵) در نظر گرفته می‌شود. تیر تحت شوک حرارتی $\theta = 1^\circ\text{K}$ و شوک مکانیکی $\sigma_0 = 0.1 \text{ MPa}$ به طور همزمان در لحظه اولیه قرار داده می‌شود. برای سه مقدار مختلف خروج از مرکزی بار (e) یعنی $e = L/8$ ، $e = L/6$ و $e = L/4$ ، ضرایب شدت تنش محاسبه و در شکل (۶-۱۸) نشان داده شده‌اند.

واضح است که شوک حرارتی ترک را در حالت مد اول قرار می‌دهد. بنابراین هنگامی که بار مکانیکی در مرکز تیر وارد می‌شود ترک در حالت مد اول است و ضریب شدت تنش K_{II} صفر

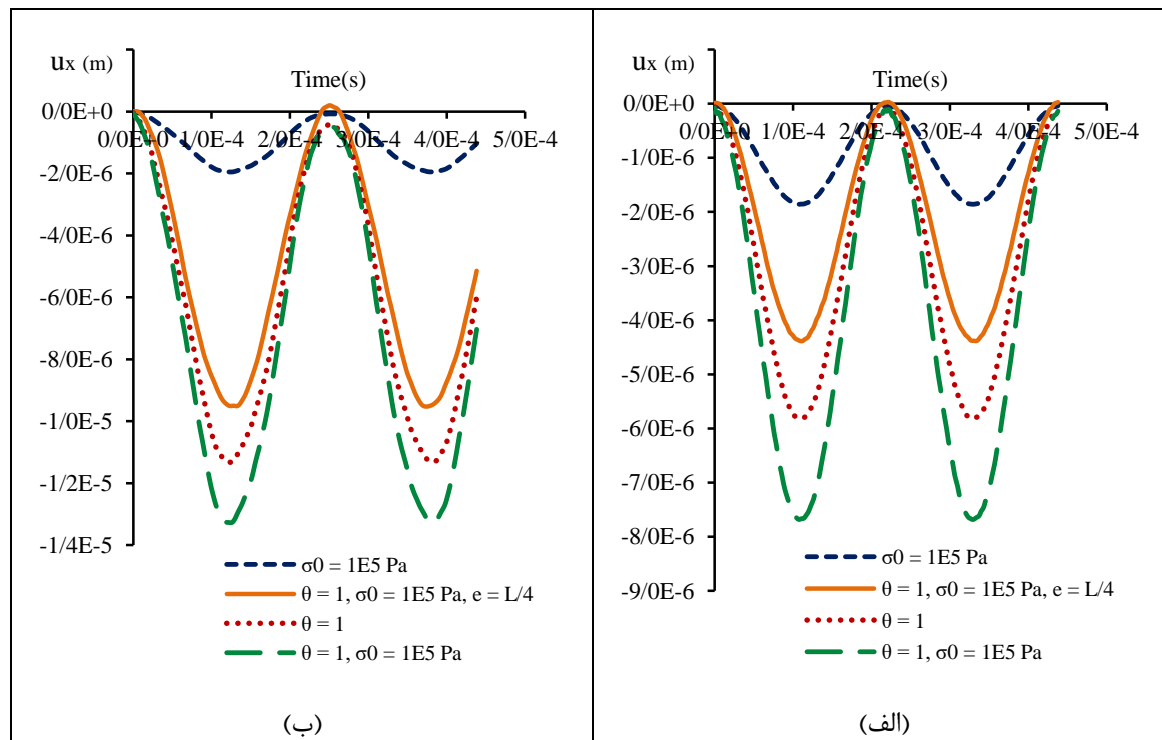
می‌باشد. شکل (۶-۱۸) نشان می‌دهد که با دور شدن بار مکانیکی از مرکز تیر، ترک در حالت مد ترکیبی قرار می‌گیرد و هرچه فاصله بار تا مرکز تیر بیشتر شود، K_I کاهش یافته زیرا مقدار ممان خمش در مرکز تیر کاهش می‌یابد. منحنی K_{II} نسبت به K_I نوسانات شدیدتری دارد و با خارج شدن بار از مرکز تیر و قرار گرفتن ترک در حالت مد ترکیبی ناگهان قله‌های این منحنی به بیشترین مقدار خود رسیده و با دور شدن بار مکانیکی از مرکز تیر به دلیل کاهش نیروی برشی در محل ترک، ارتفاع این قله‌ها کاهش می‌یابند.





شکل ۶-۱۸- مقایسه منحنی‌های ضرایب شدت تنش با واحد $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ماتریس اپوکسی تحت شوک حرارتی-مکانیکی با سه مقدار مختلف e ، الف) K_I ، ب) K_{II} منحنی‌های خیز نقطه میانی لبه بالایی تیر تابعی شیشه/اپوکسی تحت بارگذاری‌های گرمایی و مکانیکی برای حالت $p = 1$ در شکل (۶-۱۹) ارائه شده است. مقایسه منحنی‌های الف و ب در شکل (۶-۱۹) نتیجه می‌دهد هنگامی که ماتریس اپوکسی باشد خیز تیر بیشتر از زمانی است که ماتریس شیشه باشد و تیر با ماتریس شیشه زودتر از تیر با ماتریس اپوکسی به خیز بیشینه خود می‌رسد. به عنوان مثال برای بارگذاری گرمایی-مکانیکی بیشترین خیز تیر با ماتریس شیشه حدود $7/5 \mu\text{m}$ در زمان $100 \mu\text{s}$ و بیشترین خیز تیر با ماتریس اپوکسی حدود $13/5 \mu\text{m}$ و در زمان تقریبی $120 \mu\text{s}$ حاصل می‌شود.

شکل (۶-۱۹) نشان می‌دهد که با دور شدن محل اعمال بار مکانیکی از مرکز تیر، مطابق انتظار خیز تیر کاهش می‌یابد. همچنین می‌توان دید که خیز تیر تحت شوک گرمایی-مکانیکی بیشتر است از خیز حاصل از هر یک از بارگذاری‌ها هنگامی که به طور جداگانه به تیر اعمال شوند.

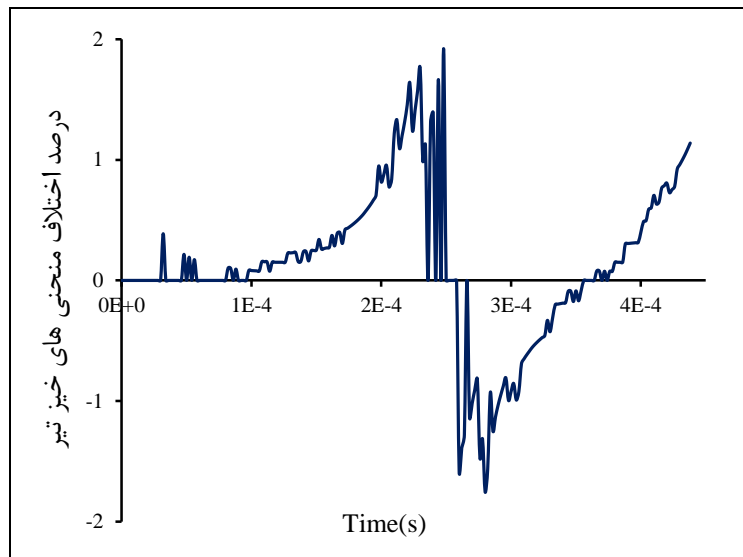


شکل ۶-۱۹- منحنی‌های جابجایی نقطه میانی لبه بالایی تیر تابعی شیشه/اپوکسی تحت شوک حرارتی و مکانیکی در حالت $p = 1$. (الف) ماتریس شیشه (ب) ماتریس اپوکسی
 به منظور بررسی اثر عبارت جفت‌کننده گرمایی-مکانیکی بر روی خیز تیر تابعی، اختلاف منحنی‌های خیز نقطه میانی لبه بالایی تیر با در نظر گرفتن عبارت جفت‌کننده و با صرف‌نظر از آن برای تیری با ماتریس اپوکسی و پارامتر $p = 1$ تحت شوک مکانیکی-گرمایی در شکل (۶-۲۰) ارائه می‌شود. درصد اختلاف خیزهای دو حالت با استفاده از رابطه زیر محاسبه و ترسیم می‌شود.

$$\text{درصد اختلاف خیزها} = \frac{u_{x\text{uncoupled}} - u_{x\text{coupled}}}{u_{x\text{coupled}}} \times 100 \quad (۸-۶)$$

در انتها پدیده رشد ترک در تیر تابعی شیشه/اپوکسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور یک تیر مطابق شکل (۶-۱۵) در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود طول ترک اولیه $a = 0.003$ m باشد. پارامتر پروفیل تغییر کسر حجمی اجزای ماده تابعی، p ، برابر با یک انتخاب می‌شود. ناحیه در نظر گرفته شده برای محاسبه انتگرال برهمکنش یک مربع به ابعاد تقریبی $2\text{mm} \times 2\text{mm}$ است. گام زمانی نیز برابر با $1 \mu\text{s}$ در نظر گرفته می‌شود.

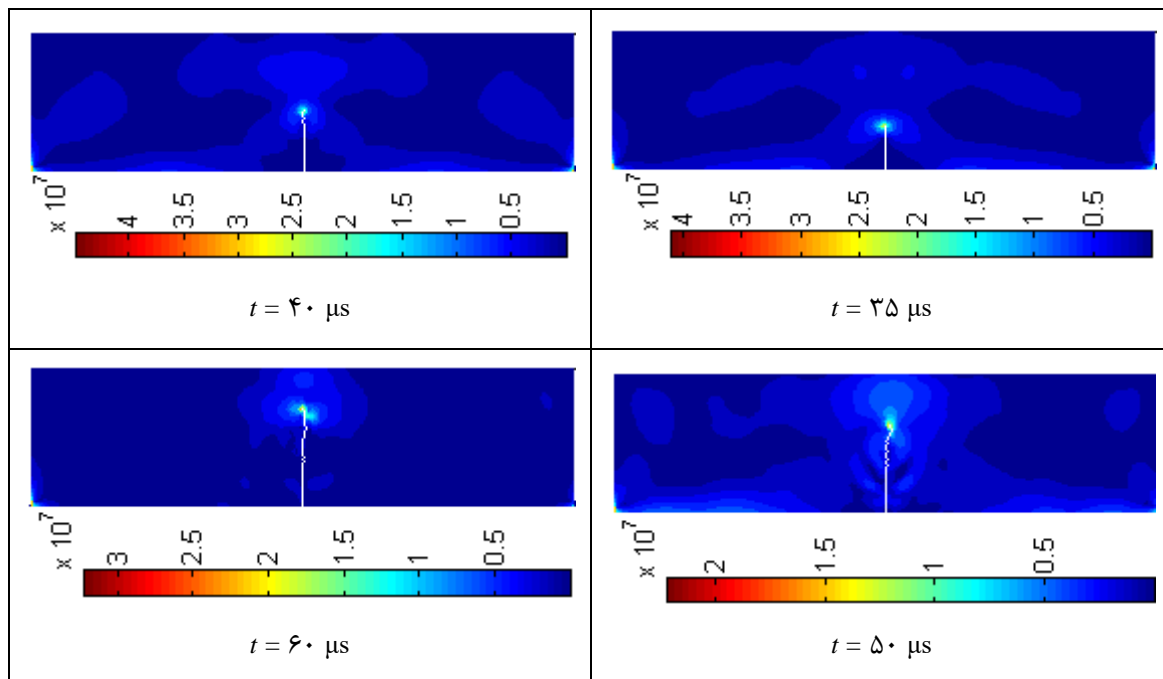
برای اینکه ترک رشد کند، باید بار افزایش یابد. بنابراین مقادیر شوک حرارتی و مکانیکی را به ترتیب به $\theta = 20^\circ\text{K}$ برای شوک گرمایی و $\theta = 10^\circ\text{K}$ و $\sigma_0 = 5\text{ MPa}$ برای شوک گرمایی-مکانیکی



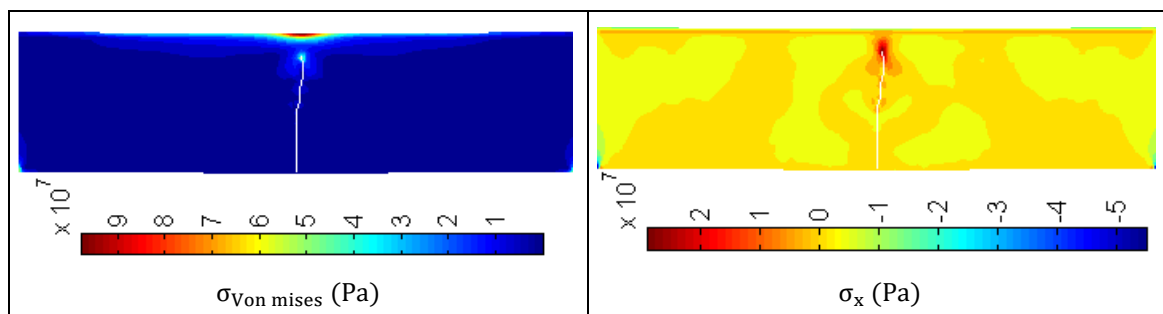
شکل ۶-۲۰- درصد اختلاف مقادیر خیز نقطه میانی لبه بالایی تیر حاصل از معادلات جفت شده و غیر جفت شده برای تیری با ماتریس اپوکسی و پارامتر $p = 1$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی افزایش می‌دهیم. همچنین بار مکانیکی به مرکز تیر اعمال می‌شود ($e = 0$).

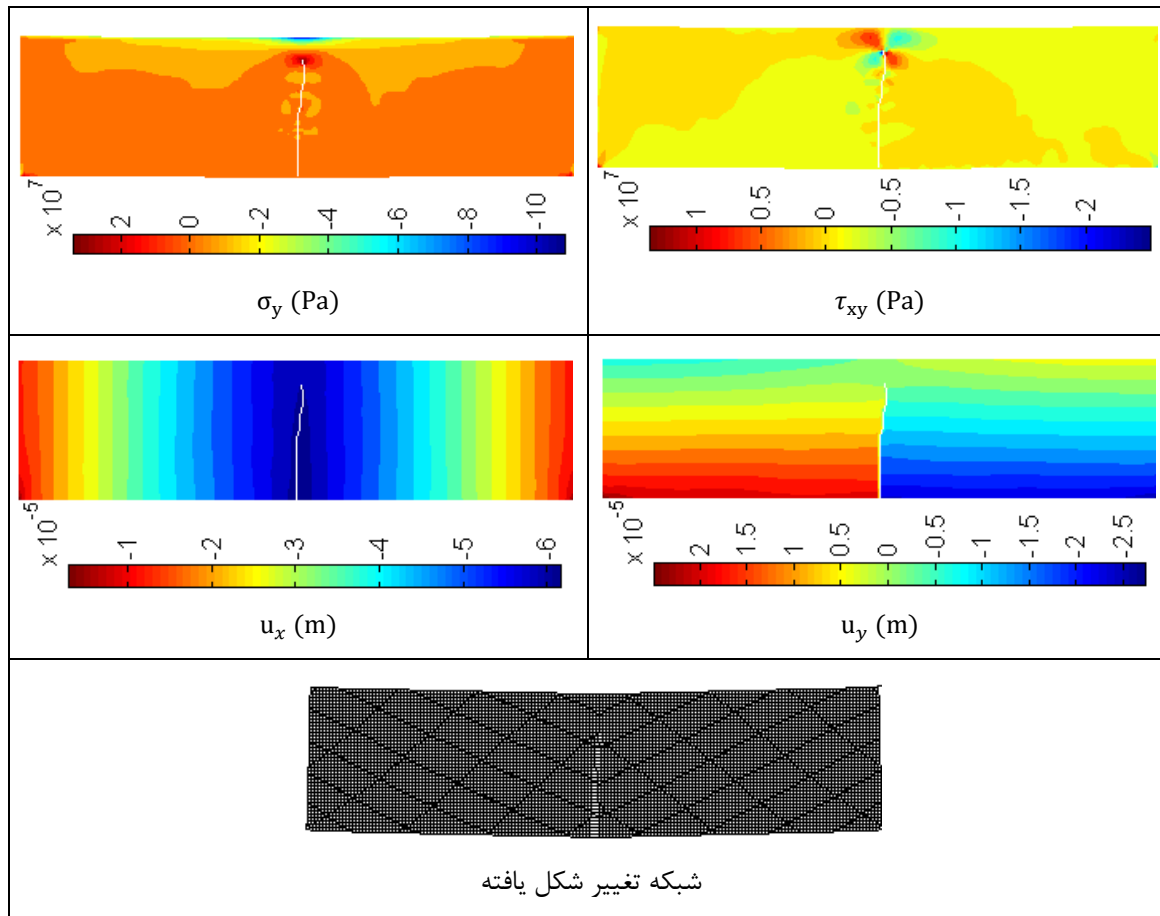
شکل (۶-۲۱) مسیر رشد ترک همراه با کانتورهای میدان تنش ون میزز را در یک تیر تابعی با ماتریس شیشه و $p = 1$ در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. این تیر فقط تحت شوک مکانیکی با مقدار $\sigma_0 = 5\text{ MPa}$ قرار گرفته است. همان طور که از قبل پیش بینی می‌شد، مسیر رشد ترک مستقیم الخط است.

شکل (۶-۲۲) مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش σ_x ، σ_y ، τ_{xy} و تنش ون میزز، کانتورهای جابجایی در جهت محورهای x و y و نیز شبکه تغییر شکل یافته برای یک تیر تابعی با ماتریس اپوکسی تحت شوک گرمایی نشان را می‌دهد. پارامتر p برای این تیر برابر با یک انتخاب می‌شود. کانتورها پس از گذشت ۱۰۰ میکرو ثانیه از زمان شبیه‌سازی ترسیم شده‌اند. برای ترسیم شبکه تغییر شکل یافته، جابجایی‌ها ۱۰ برابر بزرگتر شده‌اند تا تغییر شکل تیر و مسیر رشد ترک واضح‌تر مشاهده شود.



شکل ۶-۲۱- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای میدان تنش ون میزز با واحد پاسکال (Pa) در زمان‌های مختلف برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ماتریس شیشه در حالت $e = 0$ و $p = 1$ تحت شوک مکانیکی شکل (۶-۲۳) نیز مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش σ_x ، σ_y ، τ_{xy} و تنش ون میزز، کانتورهای جابجایی در جهت محورهای x و y و نیز شبکه تغییر شکل یافته برای یک تیر تابعی با ماتریس شیشه تحت شوک گرمایی را نشان می‌دهد. کانتورها پس از گذشت ۵۰ میکرو ثانیه از زمان شبیه‌سازی ترسیم شده‌اند. در اینجا نیز برای ترسیم شبکه تغییر شکل یافته، جابجایی‌ها ۱۰ برابر



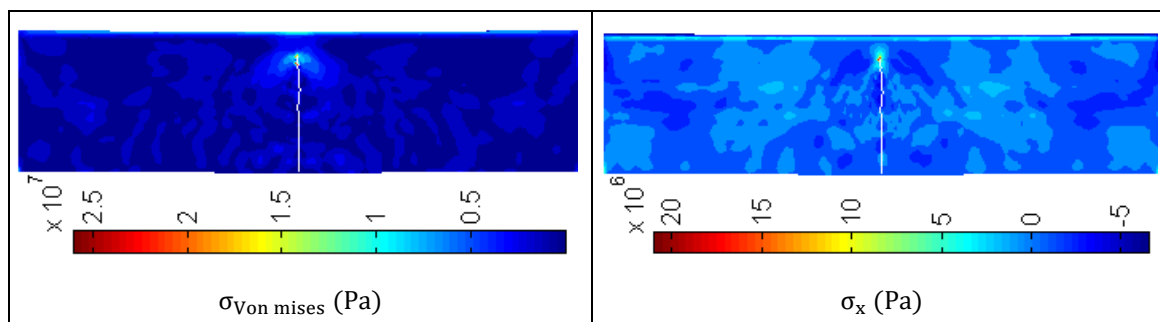


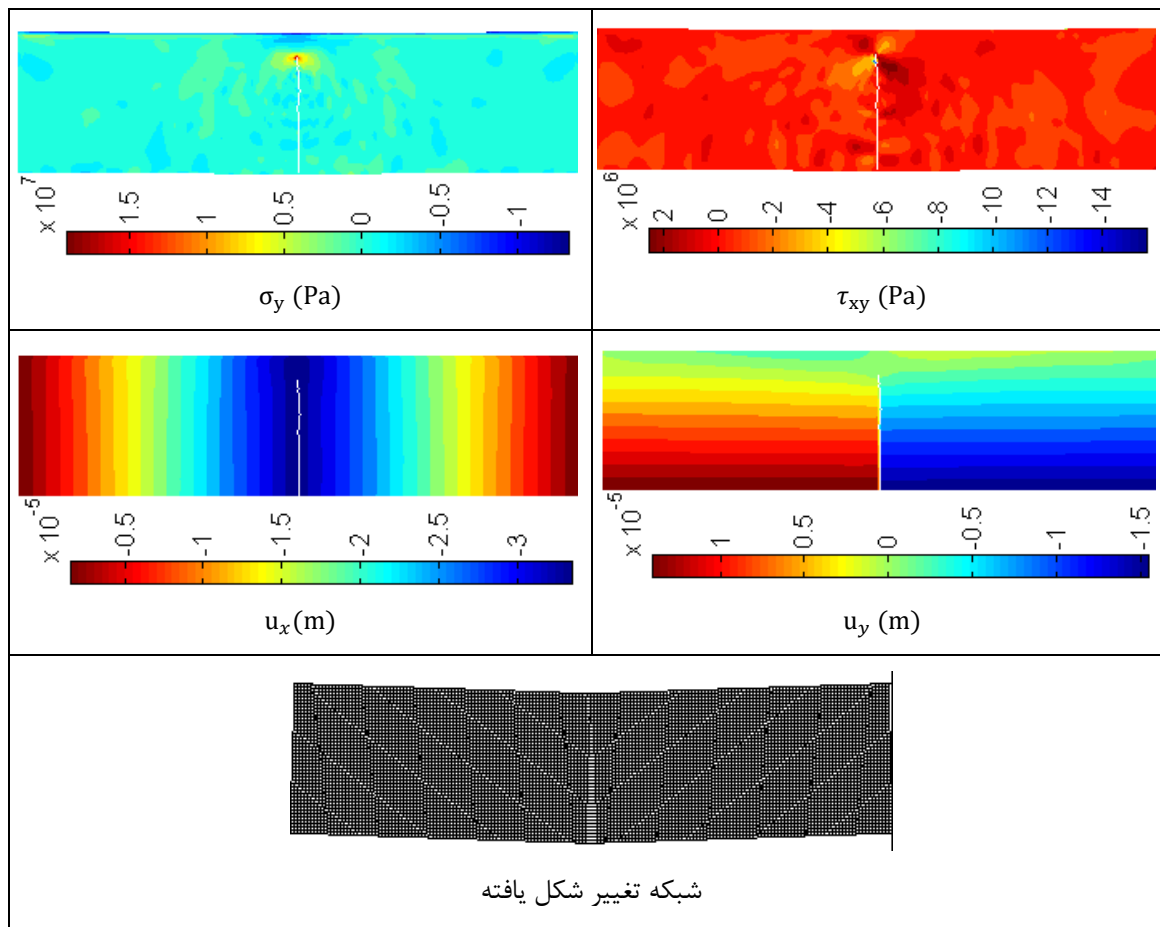
شکل ۶-۲۲- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش و جابجایی و نیز شبکه تغییر شکل یافته برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ماتریس اپوکسی در حالت $p = 1$ و $e = 0$ تحت شوک گرمایی $\theta = 20^\circ\text{K}$ در زمان

$$t = 100 \mu\text{s}$$

بزرگتر شده‌اند تا تغییر شکل تیر واضح‌تر دیده شود.

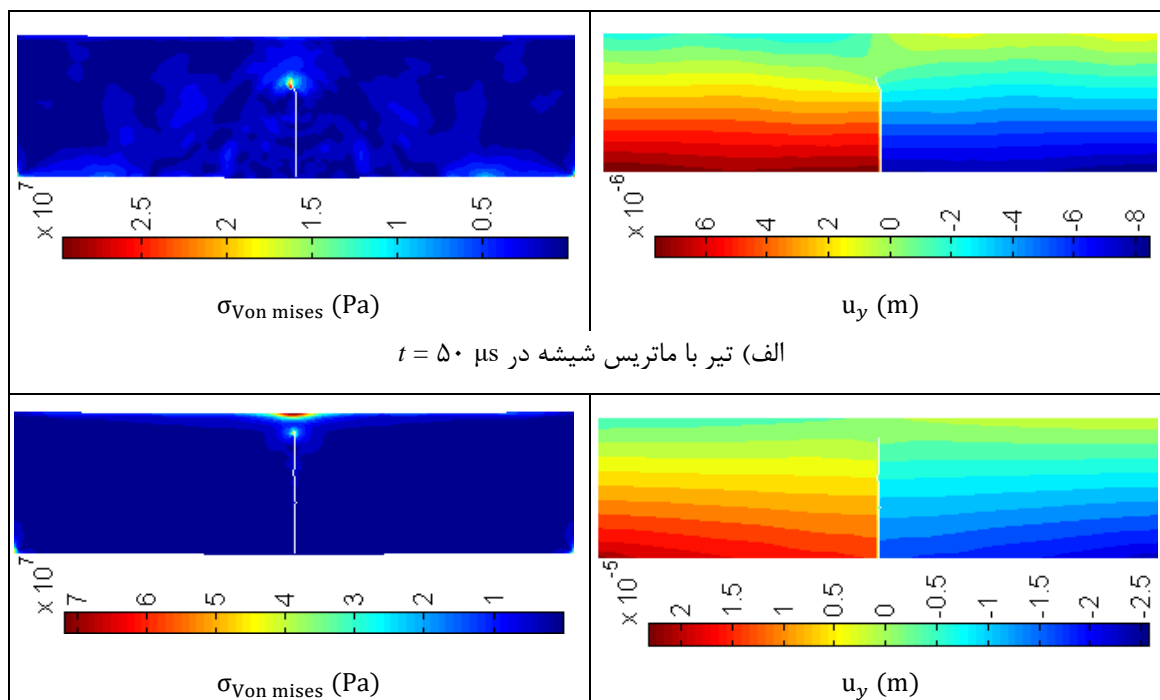
مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش و جابجایی در جهت محور y برای تیرهای تابعی با ماتریس‌های شیشه و اپوکسی تحت شوک گرمایی-مکانیکی به ترتیب در اشکال (۶-۲۳-الف) و (۶-۲۳-ب) ارائه شده‌اند.





شکل ۶-۲۳- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش و جابجایی و نیز شبکه تغییر شکل یافته برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی با ماتریس شیشه در حالت $p = 1$ و $e = 0$ تحت شوک گرمایی $\theta = 20^\circ\text{K}$ در زمان

$$t = 50 \mu\text{s}$$

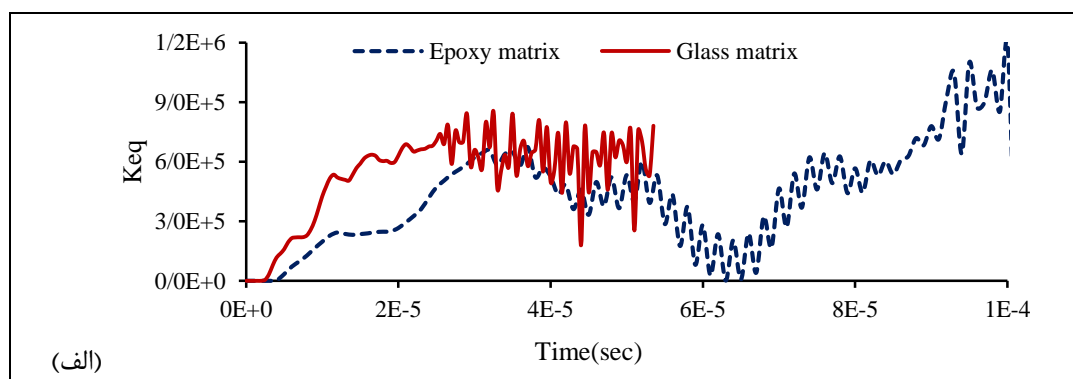


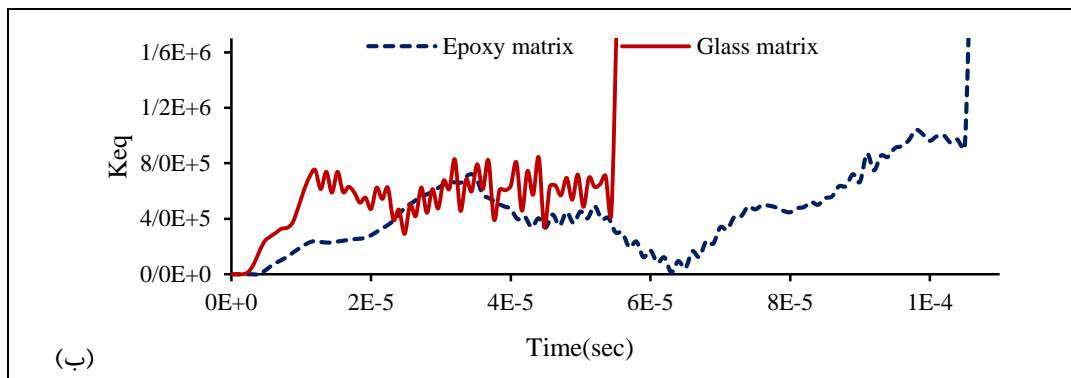
(ب) تیر با ماتریس اپوکسی در $t = 100 \mu\text{s}$

شکل ۶-۲۴- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای میدان تنش ون میزز و جابجایی در جهت طول تیر (۷) برای تیرهای تابعی شیشه/اپوکسی در حالت در حالت $e = 0$ و $p = 1$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی

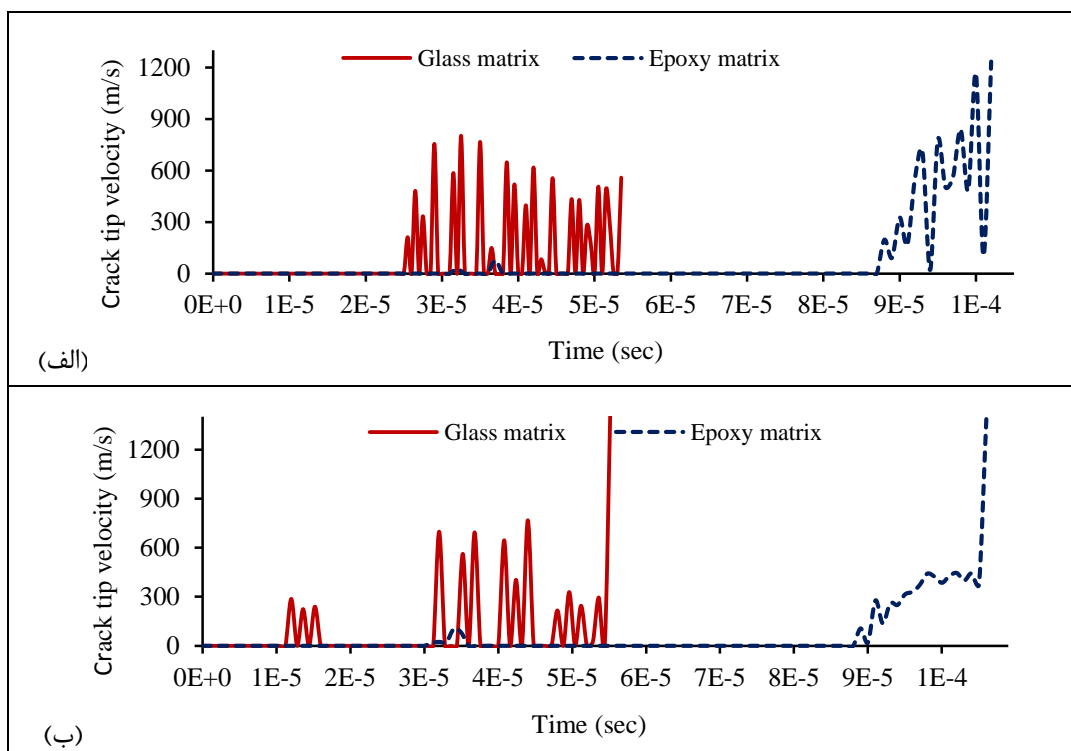
منحنی‌های ضریب شدت تنش معادل برای تیرهای تابعی شیشه/اپوکسی تحت شوک‌های گرمایی و گرمایی-مکانیکی در طی شبیه سازی به ترتیب در اشکال (۶-۲۴-الف) و (۶-۲۴-ب) ترسیم شده‌اند. شکل (۶-۲۵) نشان می‌دهد که ضریب شدت تنش معادل برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی ترکدار که ماتریس آن شیشه باشد بیشتر از تیر تابعی با ماتریس اپوکسی است.

شکل (۶-۲۶) منحنی‌های سرعت رشد ترک را برای تیرهای تابعی شیشه/اپوکسی با ترک لبه‌ای تحت شوک‌های گرمایی و گرمایی-مکانیکی نشان می‌دهد. نمودارهای شکل (۶-۲۷) نشان می‌دهند که آغاز رشد ترک تحت شوک گرمایی و گرمایی-مکانیکی در تیر تابعی با ماتریس شیشه نسبت به تیر تابعی با ماتریس اپوکسی سریعتر اتفاق می‌افتد.





شکل ۶-۲۵- منحنی‌های ضرایب شدت تنش معادل با واحد $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ برای تیر تابعی شیشه/اپوکسی در حالت $p = 1$ و $e = 0$ تحت الف) شوک گرمایی $\theta = 20^\circ\text{K}$ ب) شوک گرمایی-مکانیکی

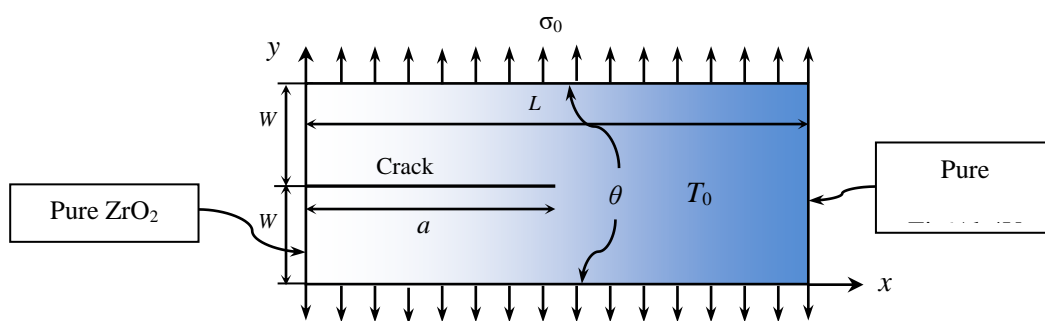


شکل ۶-۲۶- منحنی‌های سرعت رشد ترک برای تیر شیشه/اپوکسی در حالت $p = 1$ و $e = 0$ تحت الف) شوک گرمایی $\theta = 20^\circ\text{K}$ ب) شوک گرمایی-مکانیکی

۶-۸- مثال هفتم: صفحه تابعی $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ با ترک لبه‌ای

یک صفحه دو بعدی تابعی با یک ترک لبه‌ای مطابق شکل (۶-۲۷) برای این مثال در نظر گرفته می‌شود. جنس ماده تابعی تشکیل دهنده این صفحه شامل فلز Ti-6Al-4V و سرامیک ZrO_2 است که خواص آنها در جدول (۶-۳) ارائه شده است. لبه سمت چپ متشکل از ZrO_2 است و تغییر خواص

در جهت محور x اتفاق می‌افتد. تغییر کسر حجمی فاز Ti-6Al-4V از رابطه (۲-۱) تبعیت می‌کند. ابعاد صفحه عبارتند از $L = 0.1\text{m}$ و $W = 0.02\text{m}$. ضخامت صفحه 0.05m و طول ترک اولیه نیز $a = 0.05\text{m}$ است. برای المان‌بندی صفحه از یک شبکه با 81×201 المان مستطیلی چهار گره‌ای استفاده می‌شود. گام زمانی در نظر گرفته شده نیز $\Delta t = 0.1\mu\text{s}$ است. همچنین یک ناحیه با ابعاد $0.05\text{m} \times 0.05\text{m}$ برای محاسبه انتگرال برهمکنش در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۶-۲۷- شرایط بارگذاری صفحه تابعی $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ با یک ترک لبه‌ای

جدول ۶-۳- خواص ZrO_2 و Ti-6Al-4V [۱۰۰]

ماده	مدول یانگ (GPa)	نسبت پواسون	ضریب انبساط گرمایی ($10^{-6}/\text{K}$)	هدایت گرمایی (W/mK)	چگالی (Kg/m^3)	ظرفیت گرمایی ویژه (J/KgK)	چقرمگی شکست ($\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$)
Ti-6Al-4V	۶۶/۲	۰/۳۲۱	۱۰/۳	۱۸/۱	۴۴۱۰	۸۰۸/۳	۶۰
ZrO ₂	۱۱۷	۰/۳۳۳	۷/۱۱	۲/۰۳۶	۵۶۰۰	۶۱۵/۶	۴

یک تنش کششی با مقدار $\sigma_0 = 10\text{MPa}$ و یک شوک حرارتی سرمایشی ($\theta = -10^\circ\text{K}$) و

$\theta = -20^\circ\text{K}$ در زمان $t = 0\text{s}$ به لبه‌های بالایی و پایینی صفحه اعمال می‌شوند و لبه‌های دیگر عایق

فرض می‌شوند. دمای اولیه صفحه 300 درجه کلوین در نظر گرفته می‌شود ($T_0 = 300^\circ\text{K}$).

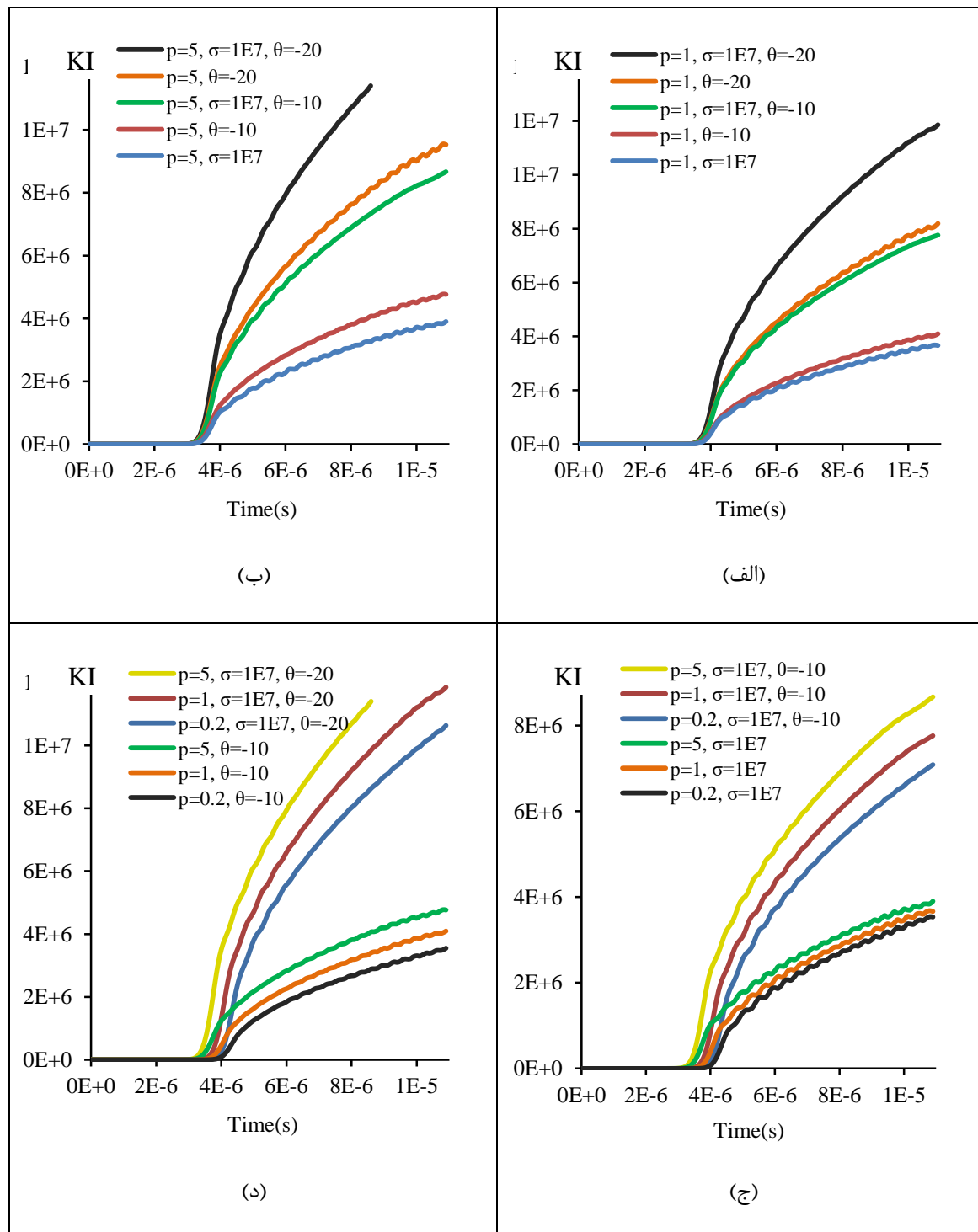
شبیه‌سازی در زمان $t = 10\mu\text{s}$ متوقف می‌شود، یعنی قبل از اینکه موج‌های منعکس شده از لبه

صفحه به نوک ترک برسند.

در این مثال نیز ابتدا اثر پروفیل تغییر کسر حجمی اجزای ماده تابعی بر روی ضرایب شدت تنش مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور سه مقدار برای p در نظر گرفته شده $p = 0.2$ ، $p = 1$ و $p = 5$ و مسئله برای این سه حالت حل می‌شود. منحنی‌های ضرایب شدت تنش مد اول در نمودارهای شکل (۶-۲۸) ترسیم شده‌اند.

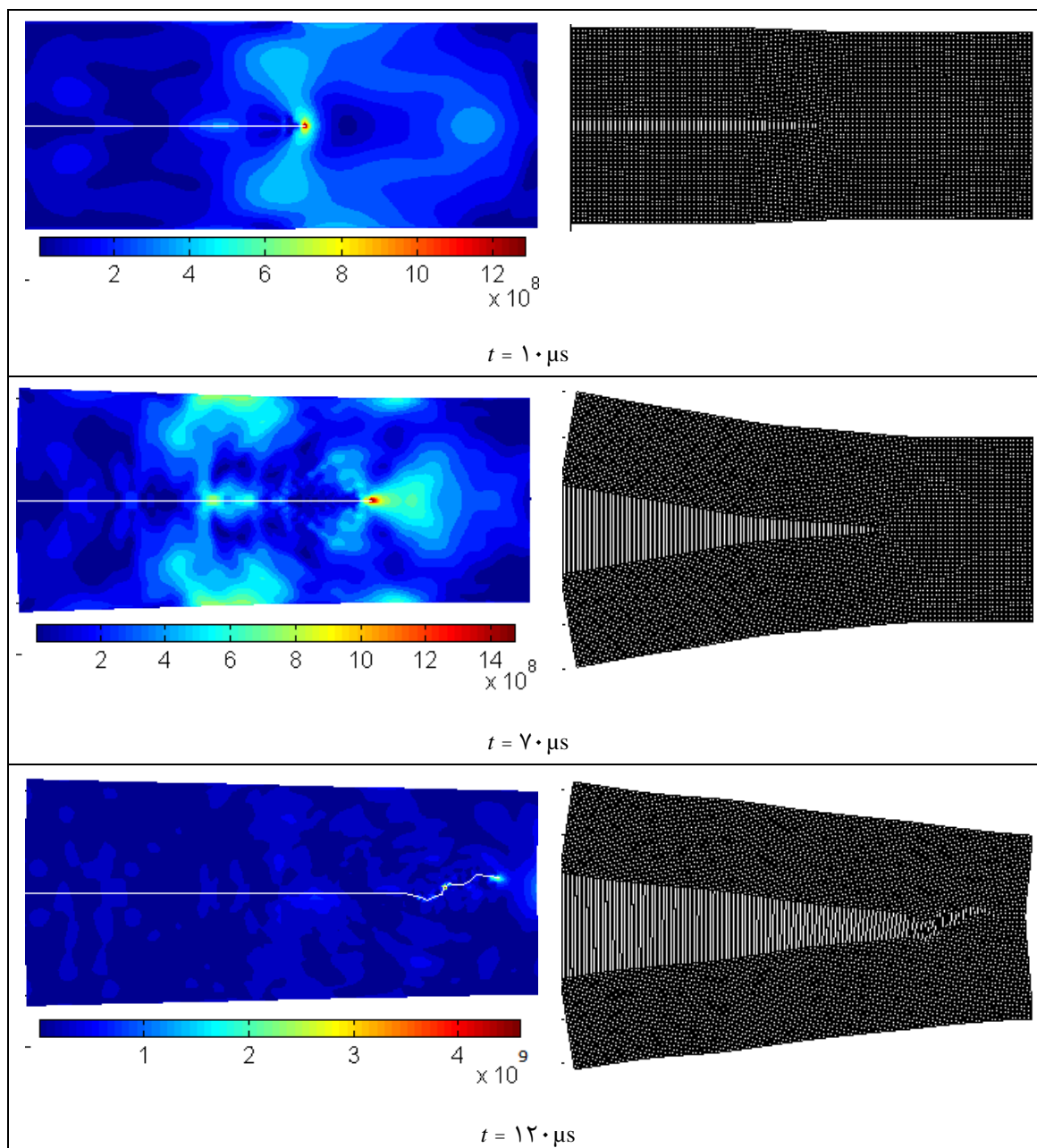
شکل‌های (۶-۲۸-الف) و (۶-۲۸-ب) نشان می‌دهند که ضریب شدت تنش مد اول ناشی از بارگذاری گرمایی-مکانیکی تقریباً برابر با جمع آثار ضرایب شدت تنش مربوط به بارگذاری‌های گرمایی و مکانیکی است هنگامی که به طور جداگانه اعمال شوند. شکل‌های (۶-۲۸-ج) و (۶-۲۸-د) نشان می‌دهند که افزایش پارامتر p ، صرفنظر از نوع بارگذاری، ضریب شدت تنش مد اول را افزایش می‌دهد.

در ادامه این مثال پدیده رشد ترک در این صفحه تابعی تحت شوک گرمایی-مکانیکی بررسی می‌شود. برای این منظور دمای اولیه صفحه برابر با 500°K در نظر گرفته می‌شود. مقادیر شوک حرارتی سرمایشی و شوک مکانیکی به ترتیب برابر با -100 درجه $(\theta = -100^\circ\text{K})$ و 200MPa ($\sigma_0 = 200\text{MPa}$) انتخاب می‌شوند. گام زمانی نیز $1/2\mu\text{s}$ انتخاب می‌شود. اندازه ناحیه انتگرال برهمکنش برای مسئله رشد ترک کوچکتر انتخاب می‌شود تا فقط بخش‌های مستقیم مسیر رشد ترک در این ناحیه قرار گیرند. بنابراین یک ناحیه مربعی شکل به ابعاد تقریبی $0.002\text{m} \times 0.002\text{m}$ برای محاسبه انتگرال برهمکنش در نظر گرفته می‌شود.

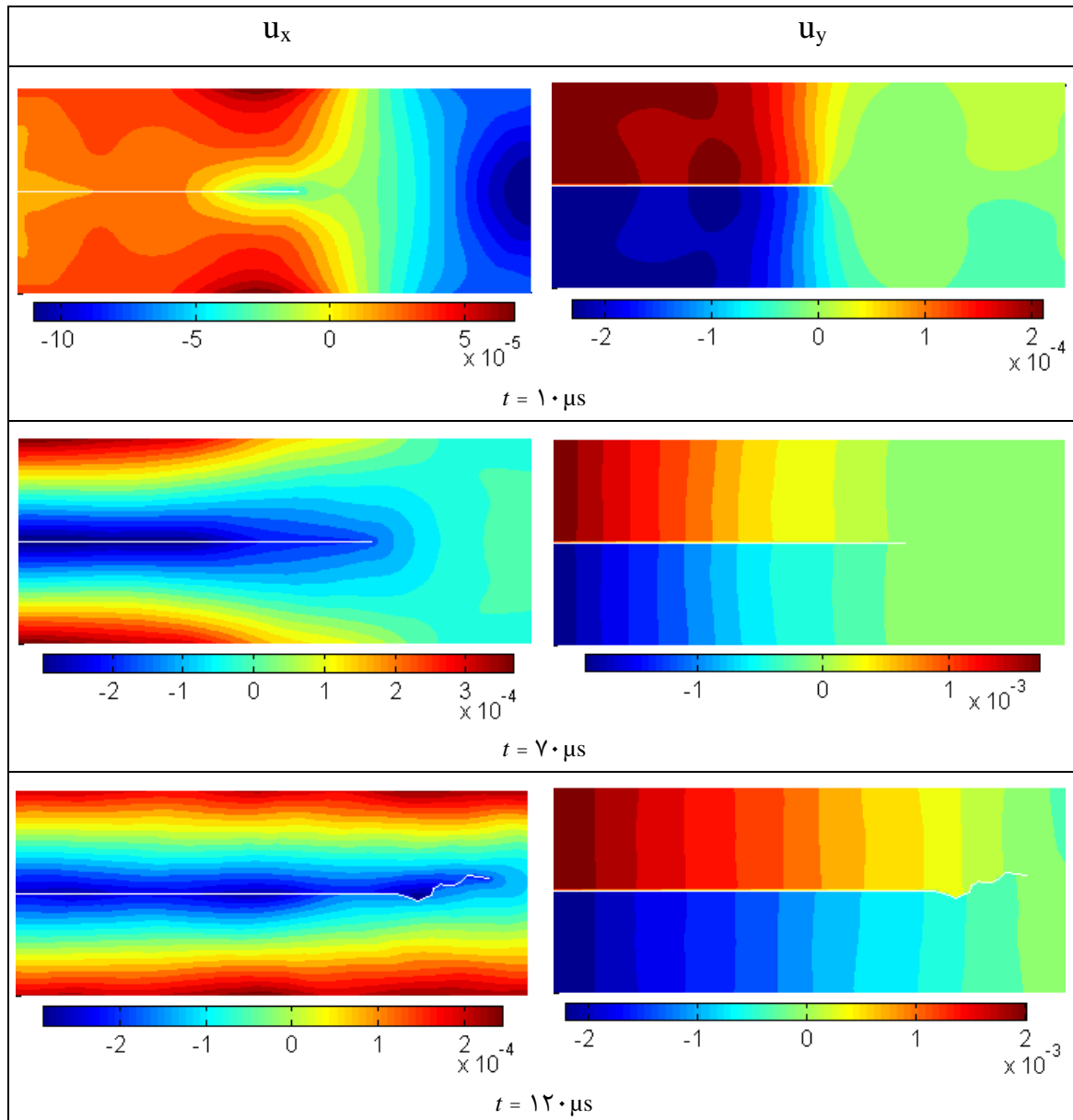


شکل ۶-۲۸- منحنی‌های ضریب شدت تنش با واحد $(\text{Pa}\sqrt{\text{m}})$ بر حسب زمان برای صفحه تابعی $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ تحت شوک‌های گرمایی و مکانیکی (الف) $(p = 1)$ ، (ب) $(p = 5)$ (ج) p متغیر، صفحه تحت شوک مکانیکی و شوک مکانیکی-گرمایی (د) p متغیر، صفحه تحت شوک گرمایی و شوک مکانیکی-گرمایی

اشکال (۶-۲۸) و (۶-۲۹) مسیر گسترش ترک همراه با کانتورهای تنش ون میزز، شبکه تغییر شکل یافته و میدان‌های جابجایی را برای یک صفحه تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با پارامتر $p = 0.2$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های $10\ \mu s$ ، $70\ \mu s$ و $120\ \mu s$ نشان می‌دهند. برای ترسیم شبکه تغییر شکل یافته در شکل (۶-۲۹)، برای وضوح بیشتر جابجایی‌ها ۵ برابر بزرگتر شده‌اند.

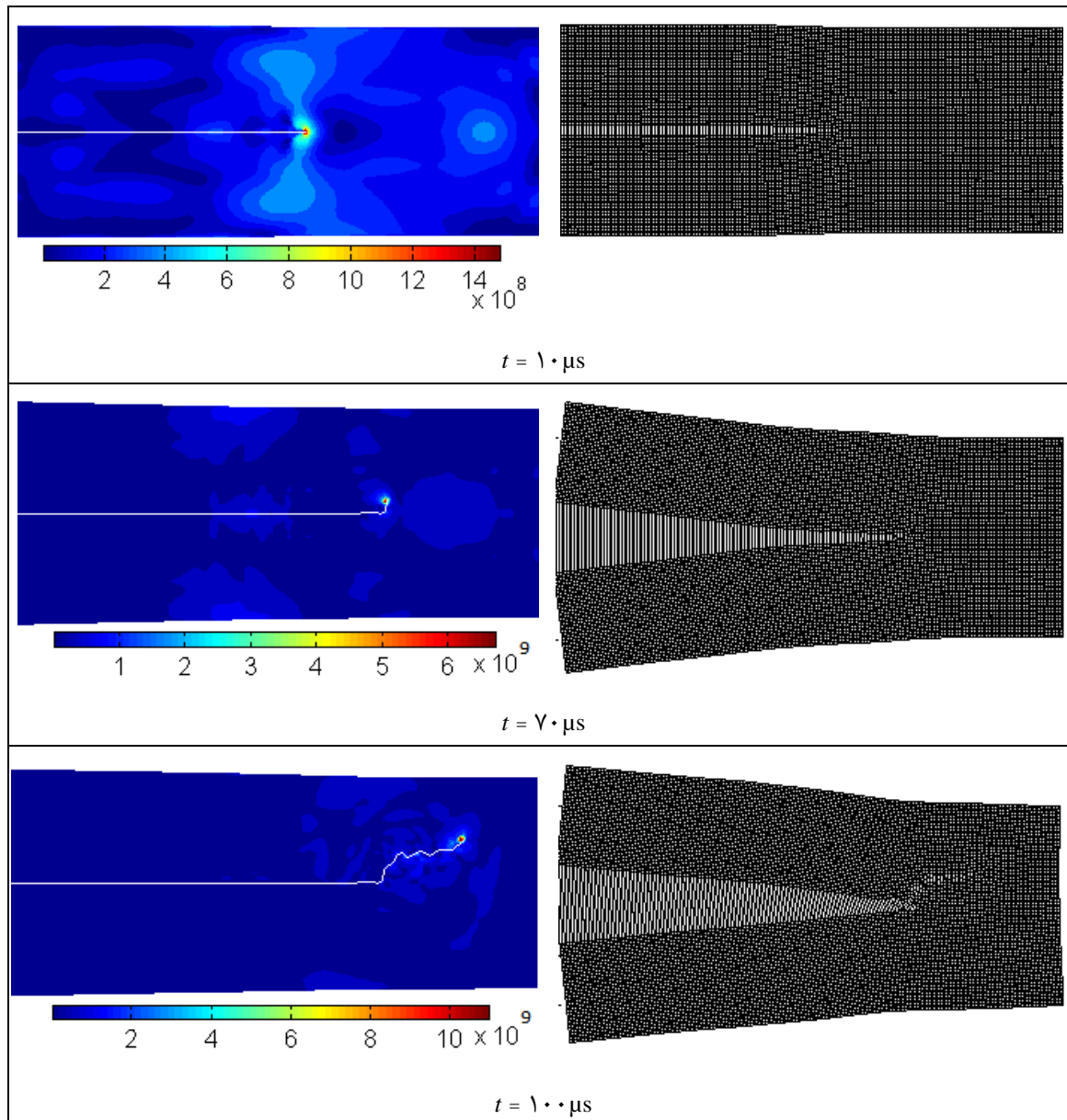


شکل ۶-۲۹- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش ون میزز با واحد Pa و شبکه تغییر شکل یافته برای صفحه تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با پارامتر $p = 0.2$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های مختلف



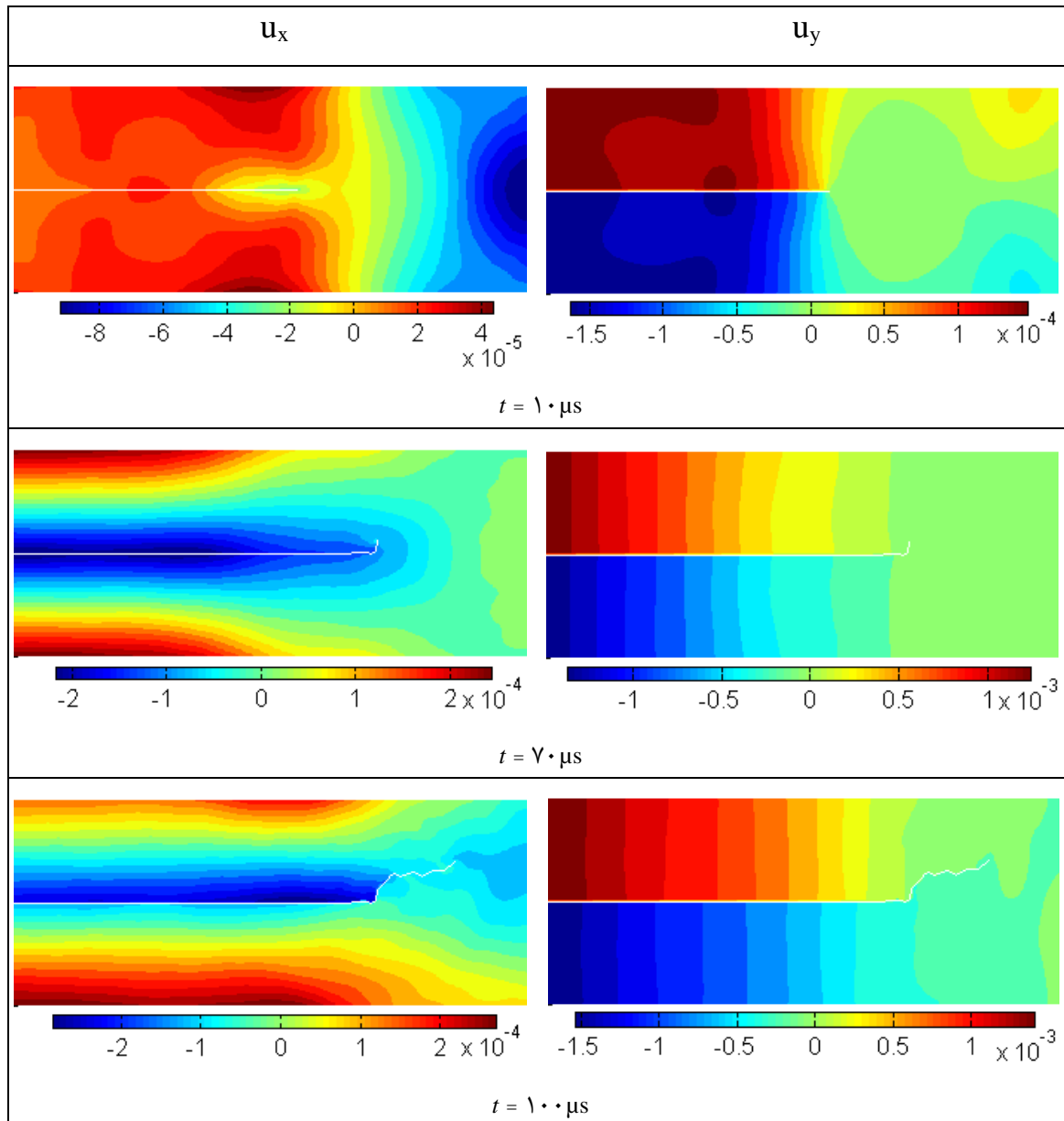
شکل ۳۰-۶- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای جابجایی با واحد متر برای صفحه تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با پارامتر $p = 0/2$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های مختلف

اشکال (۳۰-۶) و (۳۱-۶) میدان تنش ون میزز، شبکه تغییر شکل یافته و میدان‌های جابجایی را برای یک صفحه تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با پارامتر $p = 1$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های $10 \mu s$ ، $70 \mu s$ و $100 \mu s$ نشان می‌دهند. برای ترسیم شبکه تغییر شکل یافته در شکل (۳۱-۶) نیز به خاطر مشخص شدن بهتر مسیر رشد ترک جابجایی‌ها ۵ برابر بزرگتر شده‌اند.



شکل ۶-۳۱- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش ون میزز با واحد Pa و شبکه تغییر شکل یافته برای صفحه تابعی $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ با پارامتر $p = 1$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های مختلف

اشکال (۶-۳۲) و (۶-۳۳) نیز میدان تنش ون میزز، شبکه تغییر شکل یافته و میدان‌های جابجایی را برای یک صفحه تابعی $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ با پارامتر $p = 5$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های $5 \mu\text{s}$ ، $35 \mu\text{s}$ و $70 \mu\text{s}$ نشان می‌دهند. برای ترسیم شبکه تغییر شکل یافته در شکل (۶-۳۳) نیز به خاطر مشخص شدن بهتر مسیر رشد ترک از جابجایی‌هایی با مقادیر ۵ برابر بزرگتر استفاده شده است.

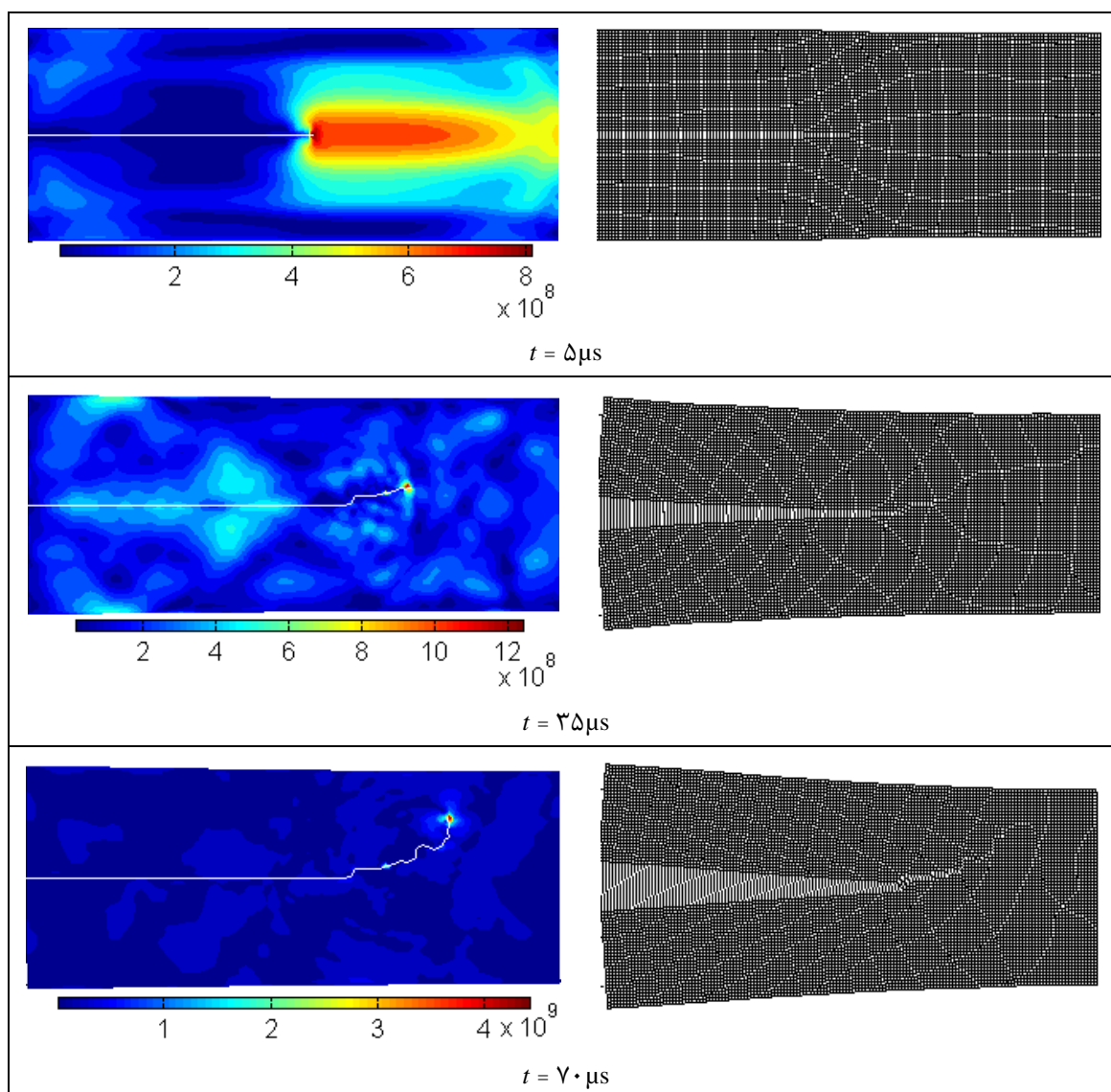


شکل ۶-۳۲- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای جابجایی با واحد متر برای صفحه تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با پارامتر $p = 1$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های مختلف

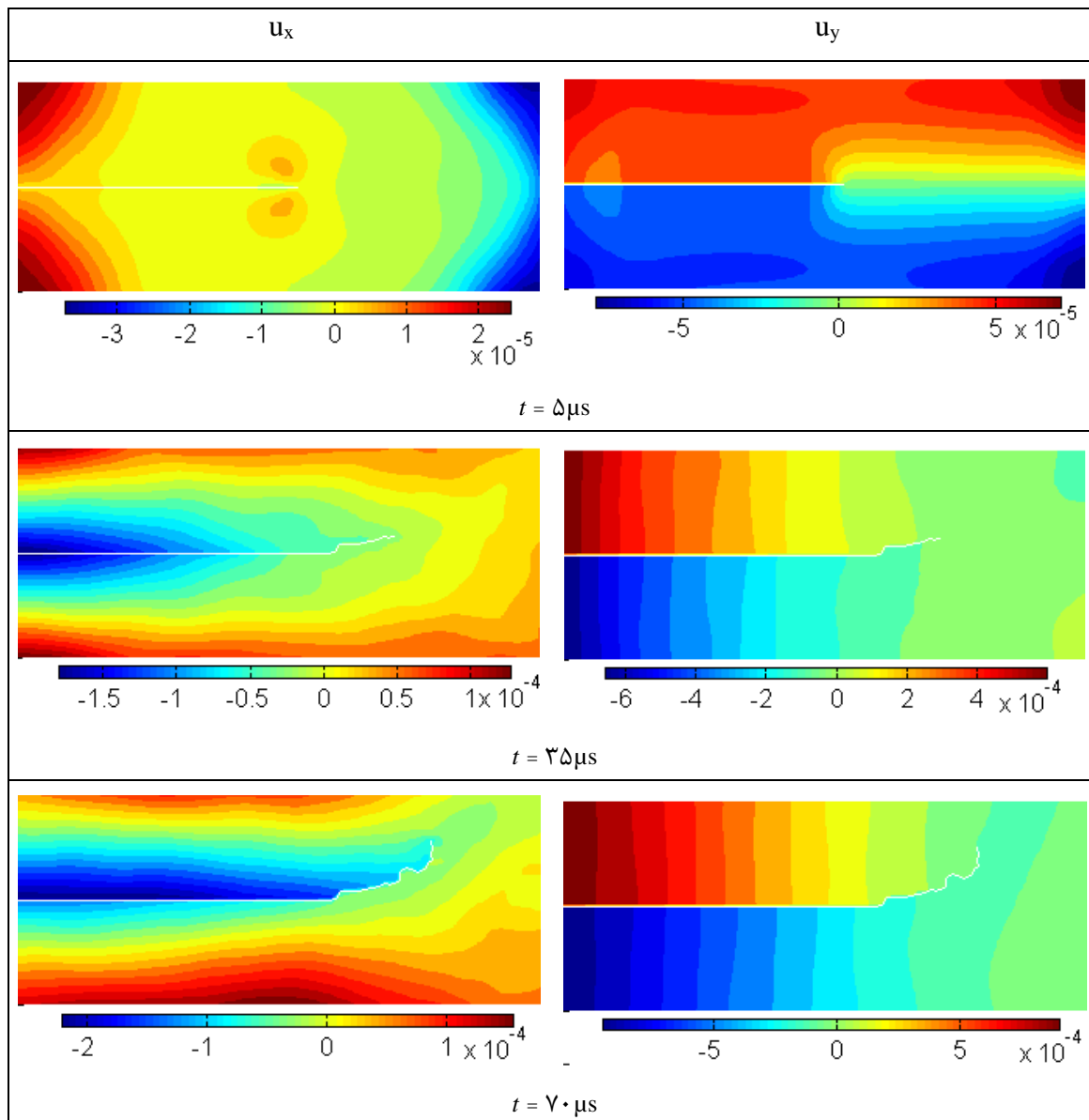
مسیرهای رشد ترک در صفحات تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با پارامترهای $p = 0/2$ ، $p = 1$ و $p = 5$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در نمودار شکل (۶-۳۵) ترسیم و با همدیگر مقایسه شده‌اند. نمودار شکل (۶-۳۵) نشان می‌دهد که مسیر رشد ترک برای صفحات با پارامترهای $p = 0/2$ ، $p = 1$ و $p = 5$ به ترتیب تا حدود ۸۰، ۷۰ و ۶۰ درصد طول صفحه به صورت افقی است. اما بعد از آن مسیر رشد

ترک منحرف می‌شود. این نمودار همچنین نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر p مسیر رشد ترک در زمان کمتری منحرف می‌شود و مقدار انحراف مسیر رشد ترک نیز بیشتر می‌شود.

دلیل این موضوع را می‌توان به کمک شکل (۲-۲) توضیح داد. شکل (۲-۲) نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر p تغییر خواص ماده تابعی با دور شدن از لبه سمت چپ در ابتدا با نرخ مکانی کمی انجام می‌شود؛ ولی در نزدیکی لبه سمت راست، خواص ماده تابعی با شیب زیاد به خواص ماده

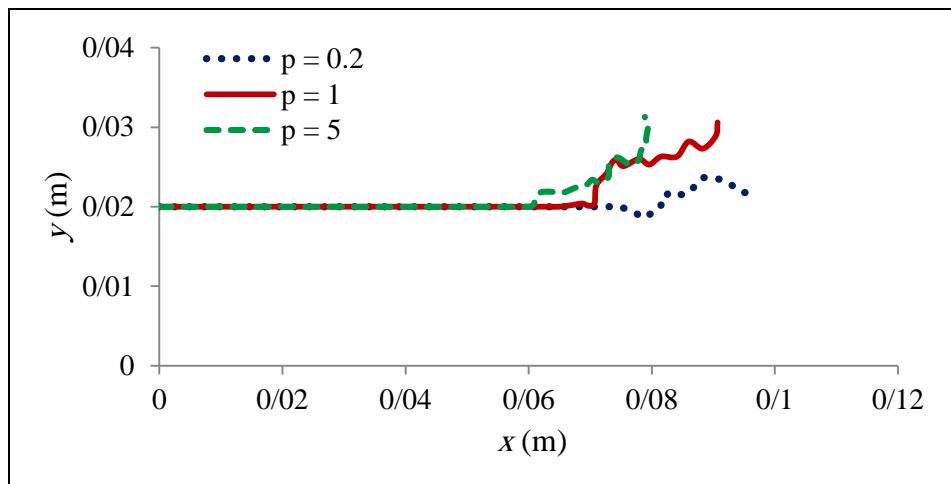


شکل ۶-۳۳- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای تنش ون میزز با واحد Pa و شبکه تغییر شکل یافته برای صفحه تابعی $\text{ZrO}_2/\text{Ti-6Al-4V}$ با پارامتر $p = 5$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های مختلف



شکل ۶-۳۴- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای جابجایی با واحد متر برای صفحه تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با پارامتر $p = 5$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در زمان‌های مختلف

تشکیل دهنده این لبه نزدیک می‌شود. با توجه به جدول (۶-۳) مشاهده می‌شود که چقرمگی $Ti-6Al-4V$ (ماده تشکیل دهنده لبه سمت راست) خیلی بیشتر از ZrO_2 (ماده تشکیل دهنده لبه سمت چپ) است. بنابراین نتیجه می‌شود که با افزایش پارامتر p ، چقرمگی ماده تابعی در ابتدای مسیر رشد ترک کاهش می‌یابد و موجب افزایش سرعت رشد ترک و ناپایداری بیشتر آن می‌شود. این

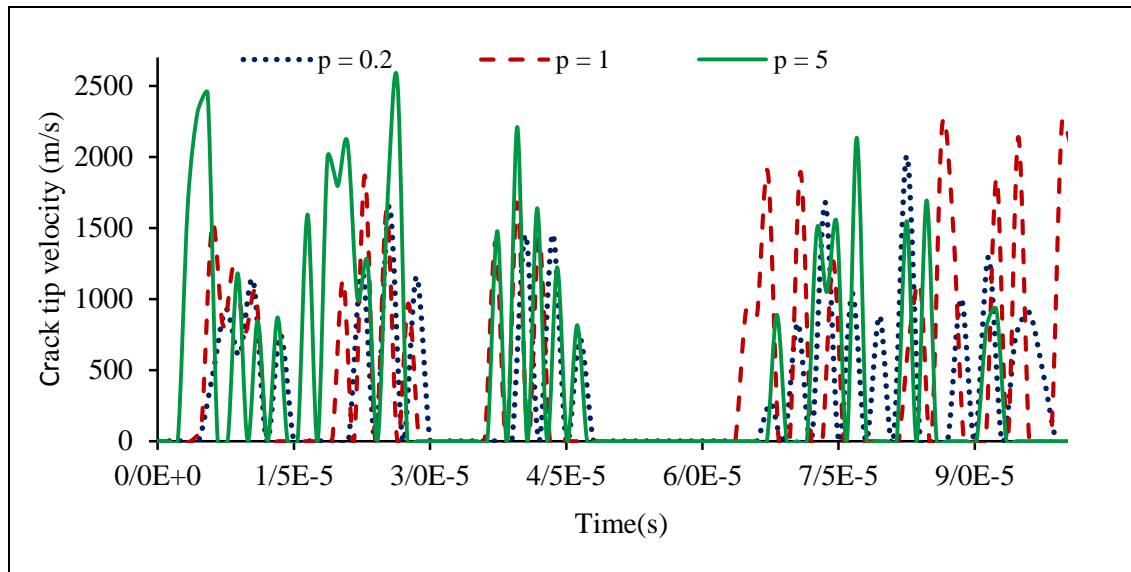


شکل ۶-۳۵- مقایسه مسیرهای رشد ترک در صفحه تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با پارامترهای $p = 0.2$, $p = 1$ و $p = 5$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی

ناپایداری و نیز تغییر سریع خواص ماده تابعی عواملی هستند که باعث انحراف سریعتر مسیر رشد ترک می‌شوند. بنابراین افزایش پارامتر p موجب می‌شود ترک تا عمق کمتری در جهت ضخامت ماده تابعی نفوذ کند.

بلیچکو و همکاران [۱۵۷] برای یک صفحه همگن مشابه تحت بارهای مکانیکی پیش‌بینی کردند که بعد از مرحله رشد ترک به صورت مستقیم، در صورتی که نرخ رهایی انرژی کرنشی بزرگتر یا مساوی دو برابر مقاومت ماده در برابر رشد ترک باشد، شاخه‌ای شدن ترک ممکن است اتفاق بیفتد.

منحنی‌های سرعت رشد ترک بر حسب زمان برای صفحات تابعی با پارامترهای $p = 0.2$, $p = 1$ و $p = 5$ تحت شوک گرمایی-مکانیکی در شکل (۶-۳۶) نشان داده شده اند. شکل (۶-۳۶) نشان می‌دهد که زمان آغاز رشد ترک به پروفیل تغییر کسر حجمی فازهای تشکیل‌دهنده ماده تابعی (پارامتر p) جفت شده است و گسترش ترک در صفحه‌ای با پارامتر p بیشتر، در زمان کمتری شروع خواهد شد. زیرا چقرمگی ماده تابعی با افزایش مقدار p در نوک ترک کاهش می‌یابد. همچنین برای صفحه تابعی مورد مطالعه، افزایش پارامتر p سرعت رشد ترک را افزایش می‌دهد. شکل (۶-۳۶) نشان می‌دهد که منحنی سرعت نوک ترک مربوط به حالت $p = 5$ تا زمان ۴۰ میکرو ثانیه، بالای منحنی‌های دیگر قرار گرفته است.



شکل ۶-۳۶- منحنی‌های سرعت گسترش نوک ترک بر حسب زمان برای صفحات تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با پارامترهای p مختلف تحت شوک گرمایی-مکانیکی

فصل هفتم

نتیجه گیری و پیشنهادات

۷-۱- مقدمه

در این رساله معادلات ترموالاستیک کلاسیک جفت شده با استفاده از روش‌های عددی المان محدود توسعه یافته و روش نیومارک برای مسئله گسترش ترک در مواد تابعی تحت شوک گرمایی- مکانیکی حل شدند. برای مدل‌سازی مواد تابعی در این رساله از مدل‌های میکرو مکانیکی و المان‌های ایزوپارامتریک تعمیم یافته استفاده شده است. بنابراین مواد تابعی به صورت واقعی و پیوسته مدل‌سازی شده‌اند. به دلیل بکارگیری این المان‌ها، ماتریس‌های حاصل از گسسته سازی معادلات ترموالاستیک جفت شده منحصر به فرد هستند.

۷-۲- نتایج بدست آمده

مهمترین دستاورد این رساله کد نوشته شده برای پیاده سازی و حل معادلات و شبیه سازی پدیده گسترش ترک است. این کد در محیط برنامه نویسی نرم افزار MATLAB نوشته شده است و قابل تغییر برای حل مسائل دیگر در این زمینه است. برای تایید صحت نتایج حاصل از این برنامه چهار مثال عددی در این رساله حل شده است. مقایسه نتایج حاصل از این مثال‌ها با نتایج موجود در مقالات معتبر، حاکی از دقت بالای برنامه نوشته شده و روش استفاده شده برای حل معادلات است. نتایج حاصل از حل مثال‌های عددی به صورت خلاصه در زیر ارائه شده‌اند:

۱- تحلیل صفحه تابعی Al_2O_3/Si_3N_4 با یک ترک در لبه متشکل از Al_2O_3 در معرض شوک حرارتی سرمایشی بر روی همین لبه، نشان داد که افزایش پارامتر p باعث افزایش ضرایب شدت تنش می‌شود. با توجه به شباهت خواص مکانیکی Al_2O_3 و Si_3N_4 به همدیگر، دلیل این افزایش تا حد زیادی به تفاوت ضریب انبساط گرمایی دو ماده مربوط می‌شود. افزایش پارامتر p مطابق شکل (۲-۲) باعث می‌شود ماده تابعی در طول محور x تا فاصله بیشتری خواص ماده تشکیل دهنده لبه سمت چپ (Al_2O_3) را حفظ کند. با توجه به اینکه Al_2O_3 ضریب انبساط گرمایی بیشتری دارد،

موجب باز شدن بیشتر لبه‌های نوک ترک تحت شوک سرمایه‌ی می‌شود. مسیر رشد ترک در این صفحه تحت شوک سرمایه‌ی صرفنظر از زاویه اولیه ترک، به صورت عمود بر سطح لبه است.

۲- تحلیل تیر تابعی شیشه اپوکسی نشان داد هنگامی که ترک در لبه با سفتی و چقرمگی بیشتر (شیشه) قرار داشته باشد و بارگذاری روی لبه نرم‌تر (اپوکسی) صورت گیرد، افزایش پارامتر p منجر به افزایش بیشینه مقدار ضریب شدت تنش می‌شود و هنگامی که ترک در لبه با سفتی و چقرمگی کمتر قرار داشته باشد و بارگذاری روی لبه سفت‌تر صورت گیرد، افزایش پارامتر p منجر به کاهش بیشینه مقدار ضریب شدت تنش می‌شود. بعلاوه برای یک مقدار p یکسان، بیشینه مقدار ضریب شدت تنش برای ترک قرار گرفته در لبه سفت‌تر بیشتر از بیشینه مقدار ضریب شدت تنش برای ترک واقع در لبه نرم‌تر است. همچنین هنگامی که ترک در ماده نرم‌تر قرار گیرد بیشینه خیز تیر بیشتر از زمانی است که ترک در ماده سفت‌تر واقع شود.

۳- در تیر تابعی شیشه/اپوکسی با مشخصات ارائه شده در این رساله تحت شوک گرمایی-مکانیکی سرعت رشد ترک هنگامی که ترک در لبه سفت‌تر واقع شود بیشتر از حالتی است که در لبه نرم‌تر قرار بگیرد. زمان آغاز رشد ترک نیز برای ترک قرار گرفته در لبه سفت‌تر کمتر است.

۴- تحلیل صفحه تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ با ترک لبه‌ای در لبه شامل ZrO_2 تحت شوک مکانیکی-گرمایی نشان می‌دهد که افزایش پارامتر p ، صرفنظر از نوع بارگذاری، ضریب شدت تنش مد اول را افزایش می‌دهد. زیرا با افزایش پارامتر p ، خواص ماده تابعی در نوک ترک به سمت ماده دارای مدول یانگ بیشتر (ZrO_2) متمایل می‌شود. سرعت رشد ترک نیز با افزایش پارامتر p افزایش می‌یابد؛ زیرا چقرمگی ماده متشکله لبه سمت چپ (ZrO_2) که ترک در آن واقع است کمتر از ماده دیگر است و افزایش پارامتر p نرخ مکانی تغییر خواص در جهت ضخامت ماده (جهت x) را کم می‌کند و ترک مسافت بیشتری را در ماده با چقرمگی کمتر طی می‌کند.

۵- ترک در صفحه تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ تحت بار دینامیکی کششی و شوک سرمایه‌ی ابتدا در حالت مد I قرار داشته و به صورت مستقیم الخط رشد می‌کند ولی در انتها ترک منحرف می‌شود.

انحراف مسیر ترک با افزایش پارامتر p زودتر رخ می‌دهد؛ زیرا با افزایش پارامتر p سرعت ترک و ناپایداری آن افزایش یافته و نیز خواص ماده با شیب بسیار زیاد در انتهای مسیر رشد ترک تغییر می‌کنند.

۷-۳- پیشنهادها

۱- همان‌طور که بیان شد در این رساله از معادلات ترموالاستیک کلاسیک جفت شده برای تحلیل صفحات تابعی با ترک‌های لبه‌ای تحت شوک گرمایی-مکانیکی استفاده شده است. به دلیل طبیعت پارابولیکی معادله انرژی در این معادلات، این تئوری یک سرعت نامحدود برای گسترش دما پیش‌بینی می‌کند. یعنی اگر ماده انتقال دهنده گرما در معرض یک توزیع دما قرار گیرد، اثرات اختلال فورا در فواصل بینهایت دورتر از مبدا آن احساس خواهند شد. این پدیده از نقطه نظر فیزیکی غیر واقعی است به ویژه در مسائلی که با ورود ناگهانی گرما در ارتباط هستند. بنابراین پیشنهاد می‌شود که برای تحلیل صفحات تابعی تحت شوک گرمایی-مکانیکی از تئوری‌های ترموالاستیسیته تعمیم یافته استفاده شود و نتایج حاصل با همدیگر مقایسه شوند. یک تئوری ترموالاستیسیته تعمیم یافته توسط لورد و شولمن [۱۵۸] در سال ۱۹۶۷ و تئوری ترموالاستیسیته تعمیم یافته دیگر توسط گرین و لیندزی [۱۵۹] در سال ۱۹۷۲ برای حالت ایزوتروپیک معرفی شدند. گرین و نقدی [۱۶۰] نیز در سال ۱۹۹۱ یک تئوری ترموالاستیسیته جدید ارائه کردند. بنابراین کلیه مراحل انجام شده در این رساله را می‌توان با این تئوری‌های تعمیم یافته تکرار کرد.

۲- با توجه به اینکه در این رساله فقط صفحات تابعی دارای ترک‌های لبه‌ای بررسی شده‌اند، پیشنهاد می‌شود پدیده رشد ترک‌های داخلی در صفحات تابعی تحت شوک گرمایی-مکانیکی شبیه سازی و مطالعه شود.

۳- با توجه به اینکه برنامه نوشته شده قابلیت شبیه سازی پدیده شاخه‌ای شدن ترک را ندارد، پیشنهاد می‌شود این قابلیت نیز به برنامه حاضر اضافه شود.

پیوست الف

میدان‌های کمکی نوک ترک

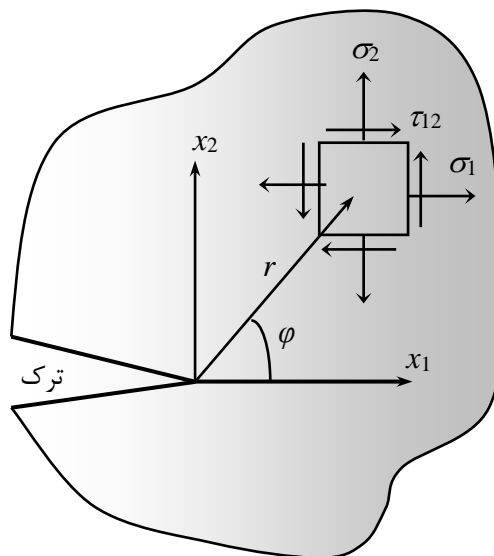
الف-۱- میدان‌های کمکی برای ترک ایستا

برای ترک نشان داده شده در شکل (الف-۱)، میدان‌های تنش و جابجایی کمکی اطراف نوک ترک همان میدان‌های مجانبی نوک ترک هستند که توسط ویلیامز [۶۰] بدست آمده‌اند. بنابراین برای ترک ایستا در مختصات محلی نوک ترک میدان‌های کمکی برای مد I عبارتند از [۱۶۱]:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \quad (\text{الف-۱})$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \quad (\text{الف-۲})$$

$$\tau_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \quad (\text{الف-۳})$$



شکل الف-۱- دستگاه مختصات محلی نوک ترک

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu_{Tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[\kappa_{Tip} - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \quad (\text{الف-۴})$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu_{Tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[\kappa_{Tip} + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \quad (\text{الف-۵})$$

که در این رابطه κ_{Tip} ضریب کلوسوف برای نوک ترک است که با رابطه (۴۷-۵) تعریف شده است.

برای ترک در مد II نیز میدان‌های کمکی به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\sigma_1 = \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right] \quad (\text{الف-۶})$$

$$\sigma_2 = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \quad (\text{الف-۷})$$

$$\tau_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \right] \quad (\text{الف-۸})$$

$$u_1 = \frac{K_{II}}{2\mu_{Tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[\kappa_{Tip} + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \quad (\text{الف-۹})$$

$$u_2 = \frac{-K_{II}}{2\mu_{Tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[\kappa_{Tip} - 1 - 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \quad (\text{الف-۱۰})$$

میدان‌های کمکی ارائه شده مربوط به مختصات محلی نوک ترک هستند. روابط زیر تنش‌ها در

دستگاه مختصات سراسری را به تنش‌ها در دستگاه مختصات محلی مرتبط می‌کند [۱۶۲]:

$$\sigma_1^g = \sigma_1^l \cos^2 \omega + \sigma_2^l \sin^2 \omega - \tau_{12}^l \sin(2\omega) \quad (\text{الف-۱۱})$$

$$\sigma_2^g = \sigma_1^l \sin^2 \omega + \sigma_2^l \cos^2 \omega + \tau_{12}^l \sin(2\omega) \quad (\text{الف-۱۲})$$

$$\tau_{12}^g = \tau_{12}^l \cos(2\omega) + 0.5(\sigma_1^l - \sigma_2^l) \sin(2\omega) \quad (\text{الف-۱۳})$$

در این روابط l مشخص کننده دستگاه مختصات محلی و g مربوط به دستگاه مختصات سراسری

است. ω نیز زاویه بین دستگاه‌های مختصات محلی و سراسری است.

الف-۲- میدان‌های کمکی برای ترک‌های متحرک

میدان‌های کمکی برای ترک‌های متحرک توسط سونسون و اینگرافی [۱۶۳] استخراج شدند. میدان‌های تنش و سرعت با میدان‌های استخراج شده توسط فروند [۱۴۷] مطابقت دارند. میدان‌های تنش برای ترک در مد I عبارتند از:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{D\sqrt{2\pi}} \left[(\alpha_s^2 + 1)(2\alpha_d^2 - \alpha_s^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_d}} \cos \frac{\varphi_d}{2} - 4\alpha_d\alpha_s \frac{1}{\sqrt{r_s}} \cos \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۱۴})$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{D\sqrt{2\pi}} \left[-(\alpha_s^2 + 1)^2 \frac{1}{\sqrt{r_d}} \cos \frac{\varphi_d}{2} - 4\alpha_d\alpha_s \frac{1}{\sqrt{r_s}} \cos \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۱۵})$$

$$\tau_{12} = \frac{K_I}{D\sqrt{2\pi}} \left[2\alpha_d(\alpha_s^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_d}} \sin \frac{\varphi_d}{2} - 2\alpha_d(\alpha_s^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_s}} \sin \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۱۶})$$

همچنین میدان‌های تنش برای ترک در مد II به صورت زیر ارائه شده‌اند:

$$\sigma_1 = \frac{K_{II}}{D\sqrt{2\pi}} \left[2\alpha_s^2(\alpha_s^2 - 1 - 2\alpha_d^2) \frac{1}{\sqrt{r_d}} \sin \frac{\varphi_d}{2} + 2\alpha_s(\alpha_s^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_s}} \sin \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۱۷})$$

$$\sigma_2 = \frac{K_{II}}{D\sqrt{2\pi}} \left[2\alpha_s(\alpha_s^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_d}} \sin \frac{\varphi_d}{2} - 2\alpha_s(\alpha_s^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_s}} \sin \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۱۸})$$

$$\tau_{12} = \frac{K_{II}}{D\sqrt{2\pi}} \left[4\alpha_d\alpha_s \frac{1}{\sqrt{r_d}} \cos \frac{\varphi_d}{2} - (\alpha_s^2 + 1)^2 \frac{1}{\sqrt{r_s}} \cos \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۱۹})$$

میدان‌های جابجایی و سرعت برای ترک در مد I عبارتند از:

$$u_1 = \frac{K_I\sqrt{2}}{\mu D\sqrt{\pi}} \left[(\alpha_s^2 + 1)\sqrt{r_d} \cos \frac{\varphi_d}{2} - 2\alpha_d\alpha_s\sqrt{r_s} \cos \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۲۰})$$

$$u_2 = \frac{K_I\sqrt{2}}{\mu D\sqrt{\pi}} \left[-\alpha_d(\alpha_s^2 + 1)\sqrt{r_d} \sin \frac{\varphi_d}{2} + 2\alpha_d\sqrt{r_s} \sin \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۲۱})$$

$$\dot{u}_1 = \frac{\dot{\alpha}K_I}{\mu D\sqrt{2\pi}} \left[-(\alpha_s^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_d}} \cos \frac{\varphi_d}{2} + 2\alpha_d\alpha_s \frac{1}{\sqrt{r_s}} \cos \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۲۲})$$

$$\dot{u}_2 = \frac{\dot{\alpha}K_I}{\mu D\sqrt{2\pi}} \left[-\alpha_d(\alpha_s^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_d}} \sin \frac{\varphi_d}{2} + 2\alpha_d \frac{1}{\sqrt{r_s}} \sin \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۲۳})$$

برای ترک در مد II نیز روابط زیر برای میدان‌های جابجایی و سرعت ارائه شده‌اند:

$$u_1 = \frac{K_{II}\sqrt{2}}{\mu D\sqrt{\pi}} \left[2\alpha_s \sqrt{r_d} \sin \frac{\varphi_d}{2} - (\alpha_s^2 + 1) \alpha_s \sqrt{r_s} \sin \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۲۴})$$

$$u_2 = \frac{K_{II}\sqrt{2}}{\mu D\sqrt{\pi}} \left[2\alpha_s \alpha_d \sqrt{r_d} \cos \frac{\varphi_d}{2} - (\alpha_s^2 + 1) \sqrt{r_s} \cos \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۲۵})$$

$$\dot{u}_1 = \frac{\dot{a}K_{II}}{\mu D\sqrt{2\pi}} \left[2\alpha_s \frac{1}{\sqrt{r_d}} \sin \frac{\varphi_d}{2} - (\alpha_s^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_s}} \sin \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۲۶})$$

$$\dot{u}_2 = \frac{\dot{a}K_{II}}{\mu D\sqrt{2\pi}} \left[-2\alpha_s \alpha_d \frac{1}{\sqrt{r_d}} \cos \frac{\varphi_d}{2} + (\alpha_s^2 + 1) \frac{1}{\sqrt{r_s}} \cos \frac{\varphi_s}{2} \right] \quad (\text{الف-۲۷})$$

در این روابط \dot{a} سرعت نوک ترک است و r_s ، r_d ، φ_s و φ_d به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$r_d = \sqrt{x_1^2 + \alpha_d^2 x_2^2} \quad (\text{الف-۲۸})$$

$$r_s = \sqrt{x_1^2 + \alpha_s^2 x_2^2} \quad (\text{الف-۲۹})$$

$$\varphi_d = \tan^{-1} \frac{\alpha_d x_2}{x_1} \quad (\text{الف-۳۰})$$

$$\varphi_s = \tan^{-1} \frac{\alpha_s x_2}{x_1} \quad (\text{الف-۳۱})$$

منابع

- 1- Jin Z. H. and Paulino G. H. (2001) "Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material" **Int. J. Fract.**, 107, pp 73-98.
- 2- Kuroda Y., Kusaka K., Moro A. and Togawa M. (1993) "Evaluation tests of ZrO₂/Ni functionally gradient materials for regeneratively cooled thrust engine applications" In: Holt J. B., Koisumi M., Hirai T. and Munir Z. A. editors. **Ceramic transactions, functionally gradient materials**, 34, Westerville, OH: **American Ceramic Society**; pp 289-296.
- 3- Takahashi H., Ishikawa T., Okugawa D. and Hashida T., (1993) "Laser and plasma-ARC thermal shock/fatigue fracture evaluation procedure for functionally gradient materials" In: Scheneider G. A, Petzow G. editors. Thermal shock and thermal fatigue behavior of advanced ceramics. Dordrecht: **Kluwer Academic Publishers**; pp 543-554.
- 4- Kawasaki A., Watanabe R., Yuki M., Nakanishi Y. and Onabe H. (1996) "Effect of microstructure on thermal shock cracking of functionally graded thermal barrier coatings studied by burner heating test" **Materials Transactions, JIM.**, 37, pp 788.
- 5- Noda N. (1999) "Thermal stresses in functionally graded materials" **J. of Therm. Stres.**, 22, pp 477.
- 6- Kirugulige M. S. (2007), Ph.D thesis, "A study of mixed-mode dynamic fracture in advanced particulate composites by optical interferometry, digital image correlation and finite element methods", Auburn University.
- 7- Atkinson C. and List R. D. (1978) "Steady state crack propagation into media with spatially varying elastic properties" **Int. J. of Engin. Scie.**, 16, pp 717-730.
- 8- Delale F. and Erdogan F. (1983) "The crack problem for a nonhomogeneous plane" **ASME J. of Appl. Mech.**, 50, pp 609-614.
- 9- Wang X. D. and Meguid S. A. (1994) "On the dynamic crack propagation in an interface with spatially varying elastic properties" **Int. J. of Fract.**, 69, pp 87-99.
- 10- Jin Z. H. and Noda N. (1994) "Crack tip singular fields in nonhomogeneous materials" **J. Appl. Mech.**, 61, pp 738-739.
- 11- Erdogan F. (1995) "Fracture mechanics of functionally graded materials" **Composites Engineering**, 5, pp 753-770.
- 12- Erdogan F. and Wu B. H. (1997) "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties" **ASME Journal of Applied Mechanics**, 64, pp 449-456.
- 13- Erdogan F. and Wu B. H. (1996) "Crack problems in FGM layers under thermal stresses" **J. of Therm. Stres.**, 19, pp 237-265.
- 14- Jin Z. H. and Batra R. C. (1996) "Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials" **J. Mech. Phys. Solid.**, 44, pp. 1221-1235.

- 15- Kokini K. and Choules B. D. (1995) "Surface thermal fracture of functionally graded ceramic coatings effect of architecture and materials" **Compos. Eng.**, 5, pp 865-877.
- 16- Kokini K. and Case M. (1997) "Initiation of surface and interface edge cracks in functionally graded ceramic thermal barrier coatings" **ASME J. Eng. Mater. Technol.**, 119, pp 148-152.
- 17- Babaei R. and Lukasiewicz S. A. (1998) "Dynamic response of a crack in a functionally graded material between two dissimilar half planes under anti-plane shear impact load" **Engineering Fracture Mechanics**, 60, pp 479-487.
- 18- Wang B. L., Han J. C. and Du S. Y. (1999) "Multiple crack problem in nonhomogeneous composite materials subjected to dynamic anti-plane shearing" **Int. J. Fract.**, 100, pp 343-353.
- 19- Gu P. and Asaro R. J. (1997) "Cracks in functionally graded materials" **Int. J. of Solids and Structures**, 34, pp 1-17.
- 20- Becker T. L., Cannon R. M. and Ritchie R. O. (2001) "Finite crack kinking and T-stresses in functionally graded materials" **Int. J. of Solids and Struc.**, 38, pp 5545-5563.
- 21- Wang L., Han J. C. and Du S. Y. (2000) "Thermoelastic fracture mechanics for nonhomogeneous material subjected to unsteady thermal load" **ASME J. of Appl. Mech.**, 67, pp 87-95.
- 22- Wang B. L., Han J. C. and Du S. Y. (2000) "crack problems for functionally graded materials under transient thermal loading" **J. of Thermal Stresses.**, 23, pp 143-168.
- 23- Weng Li. C., Duan G. J. and Zou Z. Z. (2001) "Dynamic stress intensity factor of a functionally graded material under antiplane shear loading" **Acta Mech.**, 149, pp 1-10.
- 24- Parameswaran V. and Shukla A. (2002) "Near-tip out of plane displacement fields for dynamic crack propagation in functionally graded materials" **Mech. Research Commu.**, 29, pp 397-405.
- 25- Parameswaran V. and Shukla A. (2002) "Asymptotic stress fields for stationary cracks along the gradient in functionally graded materials" **J. of applied mech.**, 3, pp 240-243.
- 26- Parameswaran V. and Shukla A. (1999) "Crack-tip stress fields for dynamic fracture in functionally gradient materials" **Mech. of Mater.**, 31, 579-5.
- 27- Ma L., Wu L.-Z. and Guo L.-C. (2002) "Dynamic behavior of two collinear anti-plane shear cracks in a functionally graded layer bonded to dissimilar half planes" **Mech. Research Commu.**, 29, pp 207-215.
- 28- Jin Z. H. and Paulino G. H. (2001) "Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material" **Int. J. Fract.**, 107, pp 73-98.
- 29- Meguid S. A., Wang X. D. and Jiang L. Y. (2002) "On the dynamic propagation of a finite crack in functionally graded materials" **Engin. Fract. Mech.**, 69, pp 1753-1768.

- 30- Chen J. Liu Z.X. Zou Z.Z. (2002) "Transient internal crack problem for a nonhomogeneous orthotropic strip (Mode I)" **Int. J. Eng. Sci.**, 40, pp 1761-1774.
- 31- Feng W. J., Zou Z. Z. (2003) "Dynamic stress field for torsional impact of a penny-shaped crack in a transversely isotropic functional graded strip" **Int. J. of Engin. Sci.**, 41, pp 1729-1739.
- 32- Guo L-C., Wu L-Z., Zeng T. and Ma L. (2004) "The dynamic fracture behavior of a functionally graded coating-substrate system" **Comp. Struc.**, 64, pp 433-441.
- 33- Jain N., Rousseau C. E. and Shukla A. (2004) "Crack-tip stress fields in functionally graded materials with linearly varying properties" **Theor. Appl. Frac. Mech.**, 42(2), pp 155-170.
- 34- Huang G. Y., Wang Y. S., (2004) "A new model for fracture analysis of a functionally graded interfacial zone under harmonic anti-plane loading" **Eng. Fract. Mech.**, 71, pp 1841-1851.
- 35- Wang B. L., Mai Y.-W., (2005) "A periodic array of cracks in functional graded materials subjected to thermo-mechanical loading" **Int. J. of Engin. Sci.**, 43, pp 432-446.
- 36- Wang B.-L. and Mai Y.-W. (2006) "A periodic array of cracks in functionally graded materials subjected to transient loading" **Int. J. of Engin. Sci.**, 44, pp 351-364.
- 37- Chalivendra V. B. and Shukla A. (2005) "Transient elastodynamic crack growth in functionally gradient materials" **J. Appl. Mech.**, 72, pp 237-248.
- 38- Jain N., Shukla A. and Chona R. (2006) "Asymptotic stress fields for thermo-mechanically loaded cracks in FGMs" **J. ASTM Int.**, 3, pp 78-90.
- 39- Chalivendra V. B. (2007) "Asymptotic analysis of transient curved crack in functionally graded materials" **Int. J. of Solids and Struct.**, 44, pp 465-479.
- 40- Guo L-C., Wu L-Z. and Zeng T. (2005) "The dynamic response of an edge crack in a functionally graded orthotropic strip" **Mech. Research Commu.**, 32, pp 385-400.
- 41- Chen J. Liu Z.X. (2005) "Transient response of a mode III crack in an orthotropic functionally graded strip" **Eur. J. Mech. A-Solid.**, 24, pp 325-336.
- 42- Hongmin X., Xuefeng Y., Xiqiao F. and Yeh H. Y. (2008) "Dynamic stress intensity factors of a semi-infinite crack in an orthotropic functionally graded material" **Mech. of Mater.**, 40, pp 37-47.
- 43- Xu H., Yao X., Feng X. and Hisen Y. Y. (2008) "Dynamic Stress Intensity Factors of a Semi-infinite Crack in an Orthotropic Functionally Graded Material" **Mech. of Mater.**, 40, pp 37-47.
- 44- Lee K. H., Chalivendra V. B. and Shukla A. (2009) "Dynamic crack-tip stress and displacement fields under thermomechanical loading in functionally graded materials" **J. Appl. Mech.**, 75(5), pp 1-7.
- 45- Feng Y. and Jin Z. (2009) "Thermal fracture of functionally graded plate with parallel surface cracks" **Acta Mechanica Solida Sinica**, 22(5), pp 453-64.

- 46- Kidane A., Chalivendra V. B., Shukla A. and Chona R. (2010) "Mixed-mode dynamic crack propagation in graded materials under thermo-mechanical loading" **Eng. Fract. Mech.**, 77, pp 2864-2880.
- 47- Chalivendra V. B. (2007) "Asymptotic analysis of transient curved crack in functionally graded materials" **Int. J. Solids Struct.**, 44, pp 465-479.
- 48- Zhang L. and Kim J. H. (2011) "Higher-order terms for the mode-III stationary crack-tip fields in a functionally graded material" **J. Appl. Mech.**, 78, pp 1-10.
- 49- Clements D. L. (2011) "On a displacement based solution to an antiplane crack problem for inhomogeneous anisotropic elastic materials" **J. Elast.**, 103, pp 137-152.
- 50- Gupta S., Abotula S., Chalivendra V. B., Shukla A. and Chona R. (2012) "Transient thermo-mechanical analysis of dynamic curving cracks in functionally graded materials" **Acta Mech.**, 223, pp 1485-1506.
- 51- Ekhlov A. V., Khay O. M., Zhang C., Sladek J. and Sladek V. (2012) "A BDEM for transient thermoelastic crack problems in functionally graded materials under thermal shock" **Comput. Mater. Sci.**, 57, pp 30-37.
- 52- Hosseini-Tehrani p., Eslami M. R. and Azari S. (2006) "Analysis of thermoelastic crack problems using Green-Lindsay theory" **J. of Therm. Stresses**, 29, pp 317-330.
- 53- Nakagaki M., Sasaki H. and Hagihara S. (1995) "PVP-Dynamic Fracture, Failure and Deformations" **ASME**, 300, pp 1-6.
- 54- Noda N. (1997) "Thermal Stress Intensity Factor for Functionally Graded Plate with an Edge Crack" **J. Therm. Stresses**, 20(3-4), pp 373-387.
- 55- Fujimoto T. and N. Noda (2000) "Crack Propagation in a Functionally Graded Plate Under Thermal Shock" **Arch. Appl. Mech.**, 70(6), pp 377-386.
- 56- Fujimoto T. and Noda N. (2001) "Two Crack Growths in a Functionally Graded Plate Under Thermal Shock" **J. Therm. Stresses**, 24, pp 847-862.
- 57- Kögl M. and Gaul L. in: L. Jentsch and F. Tröltzsch (Editors) (2000) "**Boundary Elements XXII**" WIT Press, Southampton, pp 565-577.
- 58- Kögl M. and Gaul L. (2003) "A boundary element method for anisotropic coupled thermoelasticity" **Arch. Appl. Mech.**, 73, pp 377-398.
- 59- Rousseau C.-E. and Tippur H. V. (2001) "Dynamic fracture of compositionally graded materials with cracks along the elastic gradient: experiments and analysis". **Mech. Mater.**, 33, pp 403-421.
- 60- Williams M. L. (1957) "On the stress distribution at the base of a stationary crack" **J. Appl. Mech., Trans. ASME**, 24(1), pp 109-114.
- 61- Rousseau C-E. and Tippur H. V. (2002) "Influence of elastic variations on crack initiation in functionally graded glass-filled epoxy" **Engin. Fract. Mech.**, 69, pp 1679-1693.
- 62- Kim J. H. and Paulino G. H. (2002) "Finite Element Evaluation of Mixed Mode Stress Intensity Factors in Functionally Graded Materials" **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, 53, pp 1903-1935.

- 63- Kim J. H. and Paulino G. H. (2003) "An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models" **Int. J. Numer. Meth. Engng**, 58, pp 1457-1497
- 64- Kim J. H. and Paulino G. H. (2003) "T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: a unified approach using the interaction integral method" **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 192, 1463-1494.
- 65- Wu C. C., He P. and Li Z., (2002) "Extension of J integral to dynamic fracture of functional graded material and numerical analysis" **Computers and Structures**, 80(5/6), pp 411-416.
- 66- Dolbow J. E. and Gosz M. (2002) "On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials" **Int. J. of Solids and Struct.**, 39, pp 2557-2574.
- 67- Zhang C., Sladek J. and Sladek V. (2003) "Effects of material gradients on transient dynamic mode-III stress intensity factors in a FGM" **Int. J. of Solids and Struct.**, 40, pp 5251-5270.
- 68- Ma L., Wu L.-Z., Guo L.-C. and Zhou Z.-G. (2005) "Dynamic behavior of a finite crack in the functionally graded materials" **Mech. Mater.**, 37, pp 1153-1165.
- 69- Ma L., Li J., Abdelmoula R. and Wu L.-Z. (2007) "Dynamic stress intensity factor for cracked functionally graded orthotropic medium under time-harmonic loading" **Euro. J. Mech. A/Solids**, 26, pp 325-336.
- 70- Xia C.-H. and Ma L. (2007) "Dynamic behavior of a finite crack in functionally graded materials subjected to plane incident time-harmonic stress wave" **Comp. Struct.**, 77, pp 10-18.
- 71- Wang B. L., Mai Y. W. and Zhang X. H. (2004) "Thermal shock resistance of functionally graded materials" **Acta Materialia**, 52, pp 4961-4872.
- 72- Wang W. and Nakamura T. (2004) "Simulations of crack propagation in elastic-plastic graded materials" **Mech. Mater.**, 36, pp 601-622.
- 73- Zhang Z. (J.) and Paulino G. H. (2005) "Cohesive zone modeling of dynamic failure in homogeneous and functionally graded materials" **Int. J. Plast.**, 21, pp 1195-1254.
- 74- Walters M. C., Paulino G. H. and Dodds R. H. (2004) "Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading" **Int. J. Solids and Struct.**, 41, pp 1081-1118.
- 75- Walters M. C., Paulino G. H. and Dodds R. H. (2006) "Computation of mixed-mode stress intensity factors for cracks in three-dimensional functionally graded solids" **J. Engin. Mech.**, 132(1), pp 1-15.
- 76- Paulino G. H. and Kim J.-H. (2004) "A new approach to compute T -stress in functionally graded materials by means of the interaction integral method" **Engin. Fract. Mech.**, 71, pp 1907-1950.
- 77- Kim J.-H. and Paulino G. H. (2004) "Simulation of crack propagation in functionally graded materials under mixed mode and non-proportional loading" **Int. J. Mech. Mater. Des.**, 1, pp 63-94.

- 78- Kim J.-H. and Paulino G. H. (2005) "Consistent formulations of the interaction integral method for fracture of functionally graded materials" **J. Appl. Mech.**, 72, pp 351-364.
- 79- Tillbrook M. T., Moon R. J. and Hoffman M. (2005) "Finite element simulations of crack propagation in functionally graded materials under flexural loading" **Engin. Fract. Mech.**, 72, pp 2444-2467.
- 80- Hosseini-Tehrani P. and Hosseini-Godarzi A. R. (2004) "Dynamic crack analysis under thermal shock considering Lord–Shulman theory" **Int. J. Therm. Scie.**, 43, pp 1003-1010.
- 81- Song S. H. and Paulino G. H. (2006) "Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method" **Int. J. Solids and Struct.**, 43, pp 4830-4866.
- 82- Khalmanova D. K. and Costanzo F. (2006) "Discontinuous Space-Time Galerkin Finite Element Method in Linear Dynamic Fully Coupled Thermoelastic Problems with Strain and Heat Flux Discontinuities" III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, 5-8 June, Lisbon, Portugal.
- 83- Sládek J., Sládek V., Zhang C. and Tan C. L. (2006) "Meshless local Petrov-Galerkin method for linear coupled thermoelastic analysis" **Computer Modeling in Engin. & Scie.**, 16, pp 57-68.
- 84- Sládek J. and Sládek V. (2006) "A meshless method in transient coupled thermoelasticity for orthotropic solids" **J. Mechanical Engin.**, 57, pp 189-207.
- 85- Sládek J., Sládek V. and Zhang C. (2008) "Evaluation of the Stress Intensity Factors for Cracks in Continuously Nonhomogeneous Solids, Part I: Interaction Integral" **Mech. Adv. Mater. and Struct.**, 6-7, pp 438-443.
- 86- Sládek J., Sládek V. and Zhang C. (2008) "Evaluation of the Stress Intensity Factors for Cracks in Continuously Nonhomogeneous Solids, Part II: Meshless Method" **Mech. Adv. Mater. and Struct.**, 6-7, pp 444-452.
- 87- Sládek J., Sládek V., Solec P., Tan C. and Zhang C. (2009) "Two- and Three-Dimensional Transient Thermoelastic Analysis by the MLPG Method" **Computer Modeling in Engin. and Scie.**, 47, pp 61-96.
- 88- Yildirim B., Dag S. and Erdogan F. (2005) "Three dimensional fracture analysis of FGM coatings under thermomechanical loading" **Int. J. Fract.**, 132, pp 369-95.
- 89- Yildirim B. (2006) "An equivalent domain integral method for fracture analysis of functionally graded materials under thermal stresses" **J. Therm. Stresses**, 29, pp 371-397.
- 90- Comi C. and Mariani S. (2007) "Extended finite element simulation of quasi-brittle fracture in functionally graded materials" **Comput. Methods Appl. Mech. Engng.**, 196, pp 4013-4026.
- 91- Dag S. (2007) "Mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials under thermal stresses: a new approach using Jk-integral" **J. Therm. Stresses**, 30, pp 269-96.

- 92- Song J.-H., (2008), Ph. D thesis, "Computations of the Dynamics Fracture of Quasi-Brittle Plane and Shell Structures by the Extended Finite Element Method" Northwestern University, Evanston, Illinois.
- 93- Duflo M. (2008) "The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics" **Int. J. for Num. Methods in Engin.**, 74, pp 827-847.
- 94- Amit K. C. and Kim J.-H. (2008) "Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials" **Engin. Fract. Mech.**, 75, pp 2542-2565.
- 95- Nazari M. B., Shariati M., Eslami M. R. and Hassani B. (2011) "Computation of Stress Intensity Factor in Functionally Graded Plates under Thermal Shock" **J. of Mech. Engin.**, 57(7-8), pp 622-632.
- ۹۶- محمد باقر نظری (۱۳۸۹)، رساله دکتری، "تعیین ضریب شدت تنش در یک ورق با ماده تابعی (FGM) تحت اثر بار مکانیکی و شوک حرارتی" دانشگاه صنعتی شاهرود.
- 97- Ayhan A. O. (2007) "Stress intensity factors for three-dimensional cracks in functionally graded materials using enriched finite elements" **Int. J. Solids and Struct.**, 44(25-26), pp 8579-8599.
- 98- Ayhan A. O. (2009) "Three-dimensional mixed-mode stress intensity factors for cracks in functionally graded materials using enriched finite elements" **Int. J. of Solids and Struct.**, 46(3-4), pp 796-810.
- 99- Yu H., Wu L., Guo L., Du S. and He Q. (2009) "Investigation of mixed-mode stress intensity factors for nonhomogeneous materials using an interaction integral method" **Int. J. Solids and Struct.** 46, pp 3710-3724.
- 100- Zamani A. and Eslami M. R. (2009) "Coupled Dynamical Thermoelasticity of a Functionally Graded Cracked Layer", **J. Therm. Stresses**, 32, pp 969-985.
- 101- Zamani A., Eslami M. R. (2010) "Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation" **Int J Solids and Struct.**, 47, pp 1392-1404.
- 102- Shaghghi Moghaddam A., Ghajar R. and Alfano M. (2011) "Finite element evaluation of stress intensity factors in curved non-planar cracks in FGMs" **Mech. Resea. Commu.**, 38(1), pp 17-23.
- 103- Hirai T. and Chen L. (1999), "Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan", **Mater. Sci. Forum**, 308, pp 509-514.
- 104- Chan S. H. (2001) "Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine" **Int. J. Thermal Sci.**, 40, pp 255-261.
- 105- Uemura S. (2003) "The activities of FGM on new applications" **Mater. Sci. Forum**, 423-425, pp 1-10.
- 106- Azadi M. and Azadi M. (2009) "Nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analysis of thick-walled FGM cylinder with temperature-dependent material properties using Hermitian transfinite element" **J. Mech. Sci. and Tech.**, 23, pp 2635-2644.
- 107- Shen H.-S. (2009) "**Functionally Graded Materials, Nonlinear Analysis of Plates and Shells**" Taylor & Francis Group, LLC.

- 108- Shukla A. (2006) “**Dynamic fracture mechanics**” World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, pp 273-308,
- 109- Hatta H. and Taya M. (1986) “Equivalent inclusion method for steady state heat conduction in composites” **Int. J. Engin. Scie.**, 24, pp 520-524.
- 110- Mori T. and Tanaka K. (1973) “Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions” **Acta Materialia**, 21, pp 571-574.
- 111- Weng G. J. (1984) “Some elastic properties of reinforced solids with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions” **Int. J. Engin. Scie.**, 22, pp 845-856.
- 112- Benveniste Y. (1987) “A new approach to the application of Mori Tanaka's theory in composite materials” **Mech. Mater.**, 6, pp 147-157.
- 113- Cox B. N., Gao H., Gross D. and Rittel D. (2005) “Modern topics and challenges in dynamic fracture” **J. Mech. and Phys. solids**, 53, pp 565-596,
- 114- Belytschko T. and Black T. (1999) “Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing” **Int. J. Nume. Meth. Engin.**, 45, pp 601-620.
- 115- Moës N., Dolbow J. and Belytschko T. (1999) “A finite element method for crack growth without remeshing” **Int. J. Nume. Meth. Engin.**, 46, pp 131-150
- 116- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., and Krysl P. (1996) “Meshless methods: An overview and recent developments” **Computer Meth. Appl. Mech. and Engin.**, 139(1-4), pp 3-47.
- 117- Melenk J. M. and Babuska I. (1996) “The partition of unity finite element method: Basic theory and applications” **Computer Meth. Appl. Mech. and Engin.**, 39, pp 289-314.
- 118- Mohammadi S. (2008) “**Extended Finite Element Method**” Blackwell Publishing Ltd.
- 119- Belytschko T., Gracie R. and Ventura G. (2009) “A Review of Extended/Generalized Finite Element Methods for Material Modelling” Northwestern University, Evanston, IL, U.S.A.
- 120- Kim J.-H. and Paulino G.-H. (2002) “Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials” **ASME J. Appl. Mech.**, 69, pp 502-514.
- ۱۲۱- پورپاک ع. م. (۱۳۸۳) “محاسبات عددی، آنالیز عددی کاربردی” انتشارات جهاد دانشگاهی.
- 122- Dolbow J. E., (1999) Ph. D thesis “An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics” Northwestern University, USA.
- 123- Duhamel J. M. C. (1837) “Second Memoire Sur les Phenomenes Thermomecaniques” **J. de l'Ecole Polytechnique**, 15, Cahier 25, pp 1.
- 124- Neumann F. (1885) “**Vorlesungen Uber die theorie der Elasticitat**” Meyer, Brestau, pp 1-57.
- 125- Biot M. A. (1956) “Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics” **J. Appl. Physics**, 27, pp 240.

- 126- Danilovskaya V. I. (1950) "Thermal Stress in Elastic Half-Space Arising After a Sudden Heating of its Boundary" **Prikl. MatMekh**, 14, pp 316.
- 127- Ignaczak J. (1989) "Generalized Thermoelasticity and Its Applications" **Thermal Stresses III**, Ed. Hetnarski R. B., Elsevier Science Publications, 3, Chap. 4, pp 279.
- 128- Hetnarski R. B. and Ignaczak J. (1994) "Generalized thermoelasticity: Response of semispace to a short laser" **J. Therm. Stresses**, 17(3), pp 377.
- 129- Hetnarski R. B. and Ignaczak J. (1993) "Generalized thermoelasticity: closed-form solutions" **J. Therm. Stresses**, 16(4), pp 473.
- 130- Nickell R. E. and Sackman J. L. (1968) "Approximate solutions in linear coupled thermoelasticity" **J. Appl. Mech.**, 35, pp 255.
- 131- Ting E. C. and Chen H. C. A (1982) "Unified Numerical Approach for Thermal Stress Waves" **Comp. and Struct.**, 15, pp 165.
- 132- Liu W. K. and Zhang Y. F. (1983) "Unconditionally stable implicit-explicit algorithms for coupled thermal stress waves" **Comp. Struct.**, 17, pp 371.
- 133- Tamma K. K. and Railkar S. B. (1987) "A generalized hybrid transfinite element computational approach for nonlinear/linear unified thermal/structural analysis" **Comp. and Struct.**, 26(4), pp 655.
- 134- Tamma K. K. and Railkar S. B. (1989) "Transfinite element methodology towards a unified thermal/structural analysis" **Comp. and Struct.**, 25(5), pp 649.
- 135- Tamma K. K. and Railkar S. B. (1987) "Nonlinear/Linear unified thermal stress formulations: Transfinite element approach" **Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.**, 64, pp 415.
- 136- Tamma K. K. and Railkar S. B. (1989) "On Heat Displacement Based Hybrid Transfinite Element Formulations for Uncoupled/Coupled Thermally Induced Stress Wave Propagation" **Comp. Struct.**, 30(5), pp 1025.
- 137- Tamma K. K. and Railkar S. B. (1988) "Special Purpose Hybrid Transfinite Elements and Unified Computational Methodology for Accurately Predicting Thermoelastic Stress Waves" **Comp. Struct.**, 28(1), pp 25.
- 138- Tamma K. K. and Namburu R. R. (1990) "A New Unified Architecture of Thermal/Structural Dynamic Algorithms: Applications to Coupled Thermoelasticity" **Comp. Struct.**, 37(4), pp 535.
- 139- Tamma K. K. and Namburu R. R. (1991) "Unified Finite Element Transient Analysis Formulations for Interdisciplinary Thermal-Structural Problems" Proc. Sixth Int. Conf. Num. Methods. Thermal Problems, Stanford, CA.
- 140- Tamma K. K. and Namburu R. R. (1991) "An Overview of New Computational Developments for Thermomechanical Problems" Proc. ASME Winter Annual Meeting, 91-WA-CIE-3, Atlanta, GA.
- 141- Hetnarski R. B. and Eslami M. R. (2009) "**Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications**" Springer.
- 142- Carlson D. E. (1972) "**Linear Thermoelasticity, Encyclopedia of Physics**" Vol. Via/2, C. Truesdell, ed., Springer, Berlin,.

- 143- Nowacki W. (1986) “**Thermoelasticity**” 2nd edition, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, and Pergamon Press, Oxford.
- 144- Hughes T. J. R. (1987) “**The finite element method**” Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey.
- 145- Gerlach C. (1999), Ph.D. Thesis, “Computational methods for the dynamic response of cracked specimens” Northwestern University, Evanston, Illinois.
- 146- Réthoré J., Gravouil A. and Combescure A. (2005) “A combined space–time extended finite element method” **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, 64, 260-284.
- 147- Freund L. B. (1990) “**Dynamic Fracture Mechanics**” Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.
- 148- Rice J. R. (1968) “A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks” **J. Appl. Mech.**, 35, pp 379-386.
- 149- Shih C. F., Moran B. and Nakamura T. (1986) “Energy Release Rate along a Three Dimensional Crack Front in a Thermally Stressed Body” **Int. J. Frac.**, 30, pp 79-102.
- 150- Yau J. F., Wang S. S. and Corten H. T. (1980) “A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity” **J. Appl. Mech.**, 47, pp 335-341.
- 151- Dolbow J. and Gosz M. (2000) “On the computation of mixed-mode stress intensity factors in functionally graded materials” **Int. J. Solids and Struct.**, 39 (9), pp 2557-2574.
- 152- Rao B. N. and Rahman S. (2003) “Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials” **Engng. Fract. Mech.**, 70 (1), pp 1-27.
- 153- Song S. H. (2003) Master Thesis “Dynamic stress intensity factors for homogeneous and non-homogeneous materials using the interaction integral method” Department of Civil and Environmental Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- 154- Menouillard T., Song J.-H., Duan Q. and Belytschko T. (2010) “Time dependent crack tip enrichment for dynamic crack propagation” **Int. J. Fract.**, 162, pp 33-49.
- 155- Freund L. B. (1972) “Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading, Pt. 1, Constant rate of extension” **J. Mech. Phys. Solid.**, 20(3), pp 129-140.
- 156- Lee K. Y. and Sim K. (1990) “Thermal Shock Stress Intensity Factor by Bueckner’s Weight Function Method” **Eng. Fract. Mech.**, 37, pp 799-804.
- 157- Belytschko T., Chen H., Xu J. and Zi G. (2003) “Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment” **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, 58, pp 1873-1905.
- 158- Lord H. W. and Shulman Y. (1967) “A Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity” **J. Mech. Phys Solids**, 15, pp 299-309.
- 159- Green A. E. and Lindsay K. E. (1972) “Thermoelasticity” **J. Elasticity**, 2, pp. 1–7.
- 160- Green A. E. and Naghdi P. M. (1993) “Thermoelasticity without Energy Dissipation” **J. Elasticity**, 31, pp 189–208.

161- Anderson T. L. (1995) “**Fracture mechanics**” 2nd edition, CRC Press LLC, Florida, USA.

۱۶۲- بی‌یر ف.، جانستون ر.، دی ولف ج. تی. و مازورک د. اف. (۱۳۸۷) “مقاومت مصالح” ویرایش پنجم، ترجمه افضلی م. ر. و ملکان م.، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف.

163- Swenson D. V. and Ingraffea A. R. (1988) “Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements: Theory and applications” **Computational mechanics**, 3, pp 381-397.

Abstract

In recent years, functionally graded materials were lionized increasingly by engineers and researchers due to their favorite and controllable mechanical and thermal properties. Functionally graded materials consist of ceramic and metal components, are the most conventional FGMs which vary gradually from ceramic phase in one side to metal phase on other side. These materials benefit of high fracture toughness and mechanical strength of metals and high thermal, corrosion and wear strength of ceramics simultaneously. Crack propagation phenomenon under dynamic loadings due to inherent brittleness of ceramics is important factor in failure of FGMs in many engineering applications. Therefore, the fracture analyses of FGMs under thermo-mechanical shocks are important to their durability in engineering applications.

In this thesis, the fracture behavior of functionally graded materials under thermo-mechanical shocks is investigated. For this purpose, classical coupled thermoelastic equations are used in calculations. First, these equations are discretized with extended finite element method in the space domain and then they are solved by the Newmark method in the time domain. In this thesis, micromechanical models for conventional composites with assist of generalized isoparametric element formulation, which continuously models the material properties across the elements, are used to estimate material properties of FG layers. The most general form of interaction integral is extracted for moving cracks in FGMs under thermo-mechanical loadings, and then it is employed to calculate the stress intensity factors at each time step.

All stages of problem solution from mesh generation to obtaining results were implemented in MATLAB programming environment. Four numerical examples are solved and obtained results are compared with existing analytical and numerical results in literature. Good accordance between these results verifies presented method and written code in this research. Finally, three numerical examples consist of an $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Si}_3\text{N}_4$ FG layer with edge crack under thermal shock, a glass/epoxy cracked FG beam under thermo-mechanical shock and a $\text{Ti-6Al-4V}/\text{ZrO}_2$ FG layer with edge crack under thermo-mechanical shock are solved. The effects of material properties variations profile on dynamic stress intensity factors are investigated in these examples. In addition, crack propagation path and speed are studied in these examples.

Keywords:

Dynamic Fracture, Crack Propagation, FGMs, Coupled Thermoelasticity, Thermo-mechanical Shock.



Shahrood University of Technology

Mechanical Engineering Faculty

**Numerical Analysis of Crack Propagation in a Functionally
Graded layer under Dynamic Loading and Thermal Shock**

Masoud Mahdizadeh Rokhi

Supervisor

Prof. Mahmoud Shariati

December 2012