

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک
پایان نامه کارشناسی ارشد

شبیه‌سازی مستقیم عددی جریان لایه‌مرزی، با استفاده از روش
تفاضلات محدود فشرده

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد مغربی

تهیه کننده:

مجید فیض آبادی فراهانی

صلى الله عليه وسلم

با حمد و سپاس فراوان پروردگار توانایی که با ارسال انبیاء و تزکیه و تعلیم، چراغ روشنی علم و دانش را در ضمیر تاریک انسانها شعله‌ور ساخت.

تقدیم به

خانوادہ

به خاطر همه چیز

تقدیر و تشکر

من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، به‌ویژه استاد محترم جناب آقای دکتر محمد جواد مغربی که با ارائه راهنمایی‌های مدیرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین جای دارد از دوستان گرامی خود، آقایان دکتر محسن زیوری رضاپور، مهندس احد ضرغامی، مهندس علیرضا سلیمی، مهندس فرزاد علی‌محمدی و بطور ویژه از برادر بزرگوارم مهندس جواد فیض‌آبادی فراهانی نیز تشکر نمایم و از درگاه خداوند طلب موفقیت در تمامی مراحل زندگی را برای ایشان خواستارم.

بهار ۱۳۸۶

چکیده

جریان لایه مرزی با شرایط فیزیکی دلخواه به جهت آنکه دارای کاربردهای عملی و صنعتی فراوانی است در زمره مهمترین مباحث مکانیک سیالات قرار گرفته است. به همین دلیل از همان زمانی که علم مکانیک سیالات بنا نهاده شده است مبحث فوق مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. وقتی سیال در مجاورت یک جسم جامد حرکت کند، تاثیر شرط عدم لغزش بصورت تنش برشی در آن آشکار می‌شود. با نفوذ این اثر به داخل جریان، لایه‌ای نازک به نام لایه‌مرزی تشکیل می‌شود که در این لایه سرعت در یک ضخامت کم از صفر تا اندازه سرعت در جریان پتانسیل خارج لایه مرزی تغییر می‌کند. توسط مفهوم لایه مرزی مسائل جریان لزج را که حل آنها با کاربرد معادله ناویر-استوکس برای میدان جریان کامل امکان ناپذیر بود، می‌توان حل نمود. از این‌رو ورود مفهوم لایه‌مرزی آغازگر عصر جدید مکانیک سیالات است

در این تحقیق سعی شده است تا با کمک شبیه‌سازی عددی و بدور از هر گونه مدل سازی و یا فرضی که برای ساده‌سازی، جریان لایه مرزی دو بعدی، غیر قابل تراکم را به روش حل عددی مستقیم تحلیل کنیم و پدیده خود تشابهی در پروفیل سرعت و گردابه مورد بررسی قرار گیرد. اغتشاشاتی نیز در ورودی جریان، منتج از حل پایداری جریان لایه مرزی و معادلات اور-سامرفیلد در سرعت عمود بر جریان قرار داده شده و ترم‌های تنش‌های رینولدزی هم مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: شبیه‌سازی مستقیم عددی، جریان لایه‌مرزی، تفاضلات محدود فشرده، معادلات ناویر-استوکس، آنالیز پایداری خطی، معادله اور-سامرفیلد

فصل اول

۱ مفهوم لایه مرزی
۲ ۱-۱- تاریخچه و مقدمه
۶ ۲-۱- لایه مرزی آرام
۶ ۱-۲-۱- تقریبهای لایه مرزی
۷ ۲-۲-۱- حل انتگرالی
۸ ۳-۲-۱- حل تشابهی
۸ ۴-۲-۱- حل‌های عددی
۹ ۳-۱- لایه مرزی مغشوش
۱۰ ۱-۳-۱- متوسط‌گیری زمانی
۱۱ ۲-۳-۱- روش انتگرالی
۱۴ ۳-۳-۱- حل‌های عددی
۱۵ ۴-۳-۱- مدل‌های توربولانس

فصل دوم

۱۸ کاربرد روش‌های عددی
۱۹ ۱-۲- مقدمه
۲۰ ۲-۲- مقایسه بین روشهای تئوریک با تحقیق آزمایشگاهی
۲۰ ۱-۲-۲- شبیه‌سازی شرایط واقعی
۲۰ ۲-۲-۲- توانایی شبیه‌سازی شرایط ایده‌آل
۲۰ ۳-۲-۲- سرعت بیشتر
۲۱ ۴-۲-۲- دستیابی به اطلاعات کامل‌تر
۲۱ ۵-۲-۲- هزینه کمتر

۲۴۳-۲ خصوصیات روشهای عددی.....
۲۵۴-۲ شبیه‌سازی عددی مستقیم.....
فصل سوم	
۲۹روابط ریاضی.....
۳۰۱-۳ مقدمه.....
۳۲۲-۳ معادلات حاکم.....
۳۵۳-۳ شرایط مرزی.....
۳۷۴-۳ شرایط اولیه.....
فصل چهارم	
۳۸محاسبات عددی.....
۳۹۱-۴ مقدمه.....
۳۹۲-۴ محاسبه مشتقات.....
۴۶۳-۴ شبکه محاسباتی (محدود کردن دامنه Y).....
۴۸۱-۳-۴ تبدیل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم.....
۴۹۲-۳-۴ شبکه‌های کشیده (فشرده).....
۵۵۴-۴ الگوی پیشروی در زمان.....
۵۹۵-۴ حل معادله پوآسون.....
۶۱۶-۴ انتگرال گیری.....
۶۲۷-۴ نتایج حل DNS برای جریان لایه مرزی دو بعدی آرام.....
۶۲۱-۷-۴ معادله بلازیوس.....
۶۴۲-۷-۴ گذر زمانی.....
۶۹۳-۷-۴ خودتشابهی.....
۷۳۴-۷-۴ کانتورهای سرعت و گردابه.....

۷۹ رشد ضخامت لایه مرزی..... ۴-۷-۵
۸۰ ضخامت لایه مرزی..... ۴-۷-۶
فصل پنجم	
۸۱ آنالیز پایداری خطی.....
۸۲ ۱-۵- مقدمه و تاریخچه.....
۸۶ ۲-۵- روش اغتشاشات جزئی در پایداری هیدرودینامیکی.....
۸۸ ۳-۵- بدست آوردن معادله اور- سامرفیلد.....
۹۲ ۱-۳-۵- معادله اور- سامرفیلد برای توابع جریان.....
۹۴ ۴-۵- پایداری جریان غیر لزج.....
۹۴ ۱-۴-۵- تئوری رایلی.....
۹۴ ۲-۴-۵- تئوری فجورت.....
۹۵ ۵-۵- پایداری جریان‌های لزج موازی.....
۹۸ ۶-۵- حل معادله اور- سامرفیلد.....
۹۸ الف - پایداری زمانی.....
۹۹ ب - پایداری مکانی.....
۱۰۰ ۱-۶-۵- حل مسأله مقدار ویژه.....
۱۰۱ ۲-۶-۵- حل بردارهای ویژه سرعت.....
۱۰۱ ۷-۵- روش طیفی.....
۱۰۲ ۱-۷-۵- تئوری ماتریس تفاضل چیشف.....
۱۰۳ ۲-۷-۵- روش نگاشت طیفی.....
۱۰۵ ۸-۵- نتایج پایداری.....
فصل ششم	
۱۰۹ جریان لایه مرزی مغشوش.....

۱۱۰ ۱-۶- مقدمه
۱۱۰ ۲-۶- نتایج شبیه سازی
۱۱۰ ۱-۲-۶- اغتشاشات ورودی
۱۱۸ ۲-۲-۶- خودتشابهی
۱۲۰ ۳-۲-۶- توزیع تنش رینولدز
۱۲۳ ۴-۲-۶- کانتورهای تنش رینولدز
۱۲۶ ۳-۶- نتیجه‌گیری
۱۲۷ ۴-۶- پیشنهادات برای تحقیقات آینده
۱۲۸ مراجع

فهرست شکل‌ها

۵ شکل (۱-۱): رشد لایه مرزی بر روی یک صفحه تخت.
۹ شکل (۲-۱): اندازه‌گیری سرعت یک نقطه در جریان آشفته.
۱۰ شکل (۳-۱): مقایسه شکل‌های پروفیل نمونه سرعت در لایه مرزی آرام و آشفته.
۱۲ شکل (۴-۱): یک نمونه پروفیل سرعت بی بعد برای جریان مغشوش بر روی صفحه صاف.
۲۱ شکل (۱-۲): مثالی از نتایج حاصل شده از روشهای عددی.
۲۲ شکل (۲-۲): نمودار کاهش هزینه محاسبات طی پیشرفت، در سخت افزار کامپیوتر در طول زمان.
۲۸ شکل (۳-۲): مقایسه بین انواع روشهای مدل سازی.
۳۱ شکل (۱-۳): شماتیکی از دامنه فیزیکی مسائل لایه مرزی.
 شکل (۲-۳): شماتیک از سیستم شبکه ای و علامت گذاری برای حل مسائل لایه مرزی بدون
۳۱ فشردگی در جهت y .
۴۲ شکل (۱-۴): تقریب مشتق اول تابع $y = 2x + \cos(3x)$.
۴۲ شکل (۲-۴): مرتبه دقت برای مشتق اول با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد.
۴۵ شکل (۳-۴): تقریب مشتق دوم تابع $y = 2x + \cos(3x)$.
۴۵ شکل (۴-۴): مرتبه دقت برای مشتق دوم با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد.
۵۰ شکل (۵-۴): لزوم فشردگی شبکه.
۵۱ شکل (۶-۴): مقایسه قلمروهای فیزیکی و محاسباتی.
۵۴ شکل (۷-۴): تقریب مشتق اول تابع $f(y) = 1 - \exp(-y)$ با توجه به فشردگی در جهت y .
۵۴ شکل (۸-۴): تقریب مشتق دوم تابع $f(y) = 1 - \exp(-y)$ با توجه به فشردگی در جهت y .
۵۵ جدول (۱-۴): طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم.
۵۷ جدول (۲-۴): طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم در یک گام زمانی.
 شکل (۹-۴): مقایسه بین نتایج عددی حاصل از روش رانج کوتای مرتبه سوم و حل دقیق تابع
۵۸ مدل (۳۶-۴).

- ۵۸ شکل (۴-۱۰): مرتبه دقت طرح پیشروی در زمان برای $\frac{du}{dt} = -u(t)$ با $u(0) = 1$
- ۶۳ شکل (۴-۱۱): مقایسه بین حل بلازیوس با روش DNS
- شکل (۴-۱۱): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در چهار فاصله مساوی در ابتدای جریان برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی.....
- ۶۴ شکل (۴-۱۲): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در چهار فاصله مساوی در ابتدای جریان برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی.....
- ۶۵ شکل (۴-۱۳): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در چهار فاصله مساوی در انتهای جریان برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی.....
- ۶۶ شکل (۴-۱۴): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در چهار فاصله مساوی در انتهای جریان برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی.....
- ۶۷ شکل (۴-۱۵): گذر زمانی گردابه، ω ، در چهار فاصله مساوی در ابتدای جریان برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی.....
- ۶۸ شکل (۴-۱۶): گذر زمانی گردابه، ω ، در چهار فاصله مساوی در انتهای جریان برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی.....
- ۶۸ شکل (۴-۱۷): پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی در ابتدای جریان.....
- ۶۹ شکل (۴-۱۸): پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی در انتهای جریان.....
- ۷۰ شکل (۴-۱۹): پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی در ابتدای جریان.....
- ۷۱ شکل (۴-۲۰): پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی در انتهای جریان.....
- ۷۲ شکل (۴-۲۱): کانتور مولفه افقی سرعت، u ، برای جریان لایه مرزی در کل دامنه مطابق با حل DNS بدون اغتشاش ورودی.....
- ۷۳

- شکل (۴-۲۲) : کانتور مولفه افقی سرعت ، u ، برای جریان لایه مرزی در ابتدای دامنه مطابق با
 حل DNS بدون اغتشاش ورودی..... ۷۴
- شکل (۴-۲۳): کانتور مولفه عمودی سرعت، v ، برای جریان لایه مرزی در کل دامنه مطابق با
 حل DNS بدون اغتشاش ورودی..... ۷۵
- شکل (۴-۲۴): کانتور مولفه عمودی سرعت، v ، برای جریان لایه مرزی در ابتدای دامنه مطابق با
 حل DNS بدون اغتشاش ورودی..... ۷۶
- شکل (۴-۲۵) : کانتور گردابه، برای جریان لایه مرزی در کل دامنه مطابق با حل DNS بدون
 اغتشاش ورودی..... ۷۷
- شکل (۴-۲۶) : کانتور گردابه، برای جریان لایه مرزی در ابتدای دامنه مطابق با حل DNS بدون
 اغتشاش ورودی..... ۷۸
- شکل (۴-۲۷): نمای رشد جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی مطابق با حل DNS..... ۷۹
- شکل (۴-۲۸): نمای شماتیک جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی..... ۷۹
- شکل (۴-۲۹): مقایسه ضخامت لایه مرزی حاصل از روش DNS با حل بلازیوس..... ۸۰
- شکل (۵-۱) : شماتیکی از وضعیتهای تعادل پایدار، تعادل ناپایدار، تعادل خنثی و تعادل مشروط... ۸۲
- شکل (۵-۲): نمای پروفیل سرعت بکار گرفته شده توسط پرائتل..... ۸۵
- شکل (۵-۳): در یک جریان می‌توان نواحی مختلفی را یافت که از بابت برخورد با اغتشاشات
 موجود در جریان متفاوت عمل می‌کنند..... ۸۸
- شکل (۵-۴): وجود نقطه عطف در پروفیل سرعت..... ۹۴
- شکل (۵-۵): انواع پروفیل سرعت..... ۹۵
- شکل (۵-۶): نمودار پایداری برای پروفیل‌های بدون و با نقطه عطف، به دست آمده از معادله اور-
 سامرفیلد..... ۹۶
- شکل (۵-۷): منحنی پایداری زمانی لایه مرزی برای صفحه تخت..... ۹۹
- شکل (۵-۸): منحنی پایداری زمانی لایه مرزی برای صفحه تخت..... ۱۰۰
- شکل (۵-۹): نگاشت بین صفحات مختلط α و ω ۱۰۱

- شکل (۵-۱۰): مقایسه بین قسمت حقیقی تابع ویژه $\varphi(y)$ ، برای حالتی که
 ۱۰۶ $\alpha = 0.23$, $Re_{\delta} = 1000$
- شکل (۵-۱۱): مقایسه بین مولفه‌های سرعت v در حالتی که $Re_{\delta} = 500$, $\alpha = 0.2$
 ۱۰۷
- شکل (۵-۱۲): مقایسه بین مولفه‌های سرعت u در حالتی که $Re_{\delta} = 500$, $\alpha = 0.2$
 ۱۰۸
- شکل (۶-۱): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در $x = 0.0$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه
 ۱۱۱ مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.....
- شکل (۶-۲): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در $x = 0.1$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی
 ۱۱۲ دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.....
- شکل (۶-۳): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در $x = 0.1$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی
 ۱۱۲ دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در هنگام پایدار ایستایی.....
- شکل (۶-۴): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در $x = 0.1$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه
 ۱۱۳ مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.....
- شکل (۶-۵): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در $x = 0.1$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه
 ۱۱۳ مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در هنگام پایدار ایستایی.....
- شکل (۶-۶): گذر زمانی گردابه، در $x = 0.1$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه
 ۱۱۴ با اغتشاش ورودی.....
- شکل (۶-۷): گذر زمانی گردابه، در $x = 0.1$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با
 ۱۱۴ اغتشاش ورودی در هنگام پایدار ایستایی.....
- شکل (۶-۸): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در $x = 1.3$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی
 ۱۱۵ دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.....
- شکل (۶-۹): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در $x = 1.3$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی
 ۱۱۵ دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در هنگام پایدار ایستایی.....
- شکل (۶-۱۰): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در $x = 1.3$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه
 ۱۱۶ مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی.....

- شکل (۶-۱۱): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در $x=1.3$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در هنگام پایدار ایستایی..... ۱۱۶
- شکل (۶-۱۲): گذر زمانی گردابه، در $x=1.3$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی..... ۱۱۷
- شکل (۶-۱۳): گذر زمانی گردابه، در $x=1.3$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در هنگام پایدار ایستایی..... ۱۱۷
- شکل (۶-۱۴): پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی..... ۱۱۸
- شکل (۶-۱۵): پروفیل گردابه، ω ، در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی..... ۱۱۹
- شکل (۶-۱۶): پروفیل تنش رینولدز $\overline{u'^2}$ ، در (۷) ایستگاه مساوی از ابتدای جریان، برای جریان لایه مرزی، مطابق با حل شبیه‌سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی..... ۱۲۰
- شکل (۶-۱۷): پروفیل تنش رینولدز $\overline{v'^2}$ ، در (۷) ایستگاه مساوی از ابتدای جریان، برای جریان لایه مرزی، مطابق با حل شبیه‌سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی..... ۱۲۱
- شکل (۶-۱۸): پروفیل تنش رینولدز $\overline{u'v'}$ ، در (۷) ایستگاه مساوی از ابتدای جریان، برای جریان لایه مرزی، مطابق با حل شبیه‌سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی..... ۱۲۲
- شکل (۶-۱۹): کانتور تنش رینولدز $\overline{u'^2}$ ، برای جریان لایه مرزی، مطابق با حل شبیه‌سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی..... ۱۲۳
- شکل (۶-۲۰): کانتور تنش رینولدز $\overline{v'^2}$ ، برای جریان لایه مرزی، مطابق با حل شبیه‌سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی..... ۱۲۴
- شکل (۶-۲۱): کانتور تنش رینولدز $\overline{u'v'}$ ، برای جریان لایه مرزی، مطابق با حل شبیه‌سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی..... ۱۲۵

فهرست علائم و نشانه‌ها

سرعت موج	c	لزجت	μ
مقدار حقیقی c	c_r	لزجت سینماتیکی، (μ/ρ)	ν
مقدار موهومی c	c_i	پارامتر دنباله کولز	Π
ضریب اصطکاک	C_f	طول موج	λ
اپراتور مشتق، (d/dy)	D	ماتریس قطری	Λ
ماتریس مرتبه N چیبیشف	D_N	تابع جریان	ψ
معادل $\sqrt{-1}$	i	تابع ویژه	φ
ماتریس واحد	I	تنش برشی لایه مرزی	τ
فشار	P	چرخش، سرعت زاویه‌ای	ω
عدد رینولدز	Re	ضخامت مومنتم	θ
چند جمله‌ای مرتبه n چیبیشف	T_n		
زمان	t		
پارامتر نگاشت	γ_0		
مولفه‌های کارتیزی سرعت	u, v, w		
نوسانات سرعت	u', v', w'		
مختصات کارتیزین	x, y, z		
عدد موج	α		
ضخامت لایه مرزی سرعت	δ		
ضخامت جابجایی	δ^*		
متغیر تشابه، پارامتر شبکه‌بندی	η		
پارامتر شبکه بندی	ξ		
		زیرنویس‌ها و بالا نویس‌ها	
		مشتق، نوسان	'
		متوسط زمانی	-
		متغیرهای بی بعد	*
		بحرانی	crit
		شرایط در جریان اصلی	∞
		مقادیر در دیواره	w

فصل اول

مفهوم لایه مرزی

۱-۱- تاریخچه و مقدمه

بشر از دیر باز بخشی از زندگی خود را صرف مطالعه و بررسی جریان سیالات نموده و طی قرون متمادی اصولی را جهت بیان جریان سیالات ارائه کرده است. اولین اصل توسط ارسطو در سال ۳۸۴-۳۲۲ قبل از میلاد ارائه شد. او بر این باور بود که توانایی یک جسم برای حرکت، مستقیماً به دانسیته محیط بستگی دارد و همچنین مقاومت اعمال شده در برابر حرکت نیز به دانسیته محیطی که در آن جسم حرکت می‌کند، بستگی دارد. در قرن هفدهم و در سال ۱۶۷۸ نیوتن (Newton) قانون مشهور خود را برای سیالات لزج بیان کرد. پس از او دانیل برنولی (Daneil Bernoulli) در سال ۱۷۳۸ رابطه انرژی را در مایعات بیان نمود و در همان دوران اویلر (Euler) با بکار بردن قوانین نیوتن در هر نقطه از سیال، معادله دیفرانسیلی حرکت را ارائه نمود که هنوز به نام خودش شهرت دارد. تفکر اویلر بر این اصل استوار بود که سیال هیچگونه تنش برشی را تحمل نمی‌نماید، بنابراین معادله دیفرانسیلی حرکت، که توسط اویلر ارائه شد، می‌توان برای سیالات کامل بکار گرفته شود. در همان دوران محققى به نام دالامبرت (D'Alembert) با معادلاتی شبیه به معادلات اویلر، نظریه مشهور خود را منتشر کرد و نشان داد که هیچگونه نیروی کششی بر روی اجسام متناهی وجود ندارد. موضوع آنچنان در تضاد با مشاهدات واقعی بود که چاره‌ای جز واگذاری آن به آینده وجود نداشت.

پیشرفت تحلیلی بعدی، اضافه شدن ترمهای مقاومت اصطکاکی به معادله اویلر بود. این امر با درجات مختلف دقت و صحت توسط ناویر (Navier) در سال ۱۸۲۷ و کوشی (Cauchy) در سال ۱۸۲۸، پواسون (Poisson) در سال ۱۸۲۹، سنت ونانت (Saint Venant) در سال ۱۸۴۳ و استوکس (Stokes) در سال ۱۸۴۵ انجام گردید. استوکس برای اولین بار از ضریب لزجت (μ) استفاده نمود. امروزه این معادلات به همراه معادله پیوستگی که اصول اساسی جریان سیال را بیان می‌کنند به معادلات ناویر-استوکس مشهور می‌باشد [۱].

در سال ۱۸۸۳ محقق دیگری به نام رینولدز (Reynolds) دریافت که جریان سیالات را باید به دو دسته تقسیم نمود.

۱- جریانهای آرام

۲- جریانهای مغشوش

جریانهای نوع اول در سرعتهای کم که ذرات در امتداد خطوط موازی با جداره می‌لغزند رخ می‌دهد و جریان نوع دوم در سرعتهای نسبتاً زیاد، که در آن ذرات حرکت موجی، ناشی از یک حرکت لرزشی در حول و حوش سرعت متوسط را به اجرا در می‌آورند، رخ می‌دهد. در سال ۱۹۰۴ محقق بنام پراتل (Prandtl) دریافت که اغلب میدانهای جریان ممکن است به دو ناحیه تقسیم شوند، یکی نزدیک مرز که سیال با جداره در تماس است و دیگری شامل بقیه جریان می‌باشد. او اعتقاد داشت که در ناحیه نزدیک مرز، که لایه مرزی نامیده می‌شود، اثر ویسکوزیته از اهمیت بیشتری برخوردار است، اما قسمت دیگر می‌تواند بعنوان سیال کامل در نظر گرفته شود [۱].

می‌توان اذعان کرد که در جریانهای عمومی، معادلات ناویراستوکس دهها سال بلااستفاده مانده بود و نقش چندانی در طراحی و توسعه اولیه هواپیماها و یا اصلاح کشتی‌ها نداشت. هنگام برخورد با یک مشکل ریاضی حذف بعضی پارامترها و ساده کردن معقول معادلات منطقی به نظر می‌رسد. این کار معمولاً بستگی به اهمیت و بزرگی آن پارامتر حذف شده در مقایسه با پارامترهای باقیمانده برای شرایط مورد نظر دارد.

برای اتخاذ روشی عاقلانه، لازم است که ابتدا متغیرهای مستقل و غیرمستقل را بصورت بدون بعد و نرمال و با تقریب در مرتبه واحد در آوریم. مثلاً می‌توان سرعت موضعی جریان u را با جریان آزاد U_∞ و مختصات محوری x را با طول جسم یا قطر لوله و یا دیگر طولها نشان داد. وقتی که چنین کاری برای معادله ناویراستوکس انجام گیرد یک ضریب $1/Re$ در تمام عبارت لزج ضرب می‌شود. که این عبارت برای بیشتر جریانهای بسیار بزرگ تقریباً 10^{-6} تا 10^{-4} خواهد بود.

در نظر اول ممکن است گمان کنیم که می‌توان از تمام عبارتی که در $1/Re$ ضرب شده‌اند صرف‌نظر کرد. زیرا عبارت دیگر ضرایب تقریباً مساوی واحد دارند. اما یک مسئله باقی می‌ماند و آن این

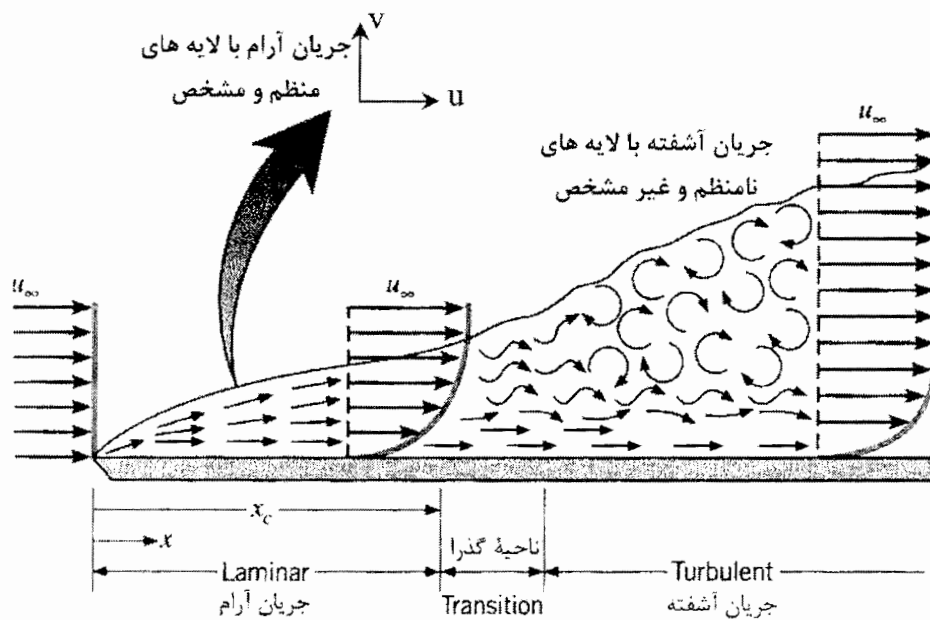
است که در معادلات جریان غیرلزج نمی‌توان نیروی نگهدارنده اصطکاک پسا و انتقال حرارت را پیش بینی کرد. این مسئله بصورت یک موضوع لاینحل باقی مانده بود تا اینکه تحلیلهای موثر لودویک پرائنتل (۱۹۰۴) وارد عمل شد. او استدلال می‌کرد که برای جریانهای با عدد رینولدز بزرگ، اثرات لزجت در طول یک لایه نازک، در امتداد سطح جامد محصور می‌شود. چنین منطقه‌ای وجود خواهد داشت، زیرا که سرعت باید از مقدار قابل توجه U_∞ در خارج لایه تا صفر در روی سطح تغییر کند. این موضوع حتی برای با جریانهای با لزجت پائین (Re بزرگ) گرادیانی بزرگ و نتیجتاً یک نیروی برشی ایجاد می‌کند. اگرچه این منطقه ممکن است بخش کوچکی از تمام منطقه جریان را اشغال کند، اما نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد. زیرا تمام انتقال اندازه حرکت و حرارت و جرم چه به سمت داخل صفحه و چه به خارج از صفحه در همین منطقه صورت می‌گیرد. در خارج از این لایه مرزی، جریان مانند یک جریان غیرلزج عمل خواهد کرد. لذا این ایده بسیار عالی و جدید که جریان را به دو منطقه تقسیم کنیم و برای هر منطقه معادلات مخصوص بخودش را در نظر بگیریم، متولد شد. برای جریان خارجی از اثر لزج صرف‌نظر می‌کنیم، و در آن از معادلات غیرلزج یعنی اوپلر استفاده می‌کنیم. برای جریان داخل لایه مرزی از یک فرم ساده معادلات ناویر-استوکس که شامل عبارت لزج می‌باشد استفاده می‌شود.

البته حل معادلات در دو منطقه، باید بطور مناسبی جمع شوند تا یک حل مرکب برای تمام جریان بدست آید. این ایده آنقدر قوی است که در شاخه‌های دیگر علوم در کنار دینامیک سیالات از آن استفاده شده‌است. عبارت، تحلیل لایه مرزی، نیز در حد وسیعی بصورت عام‌تری مورد استفاده گرفته است.

بصورت خلاصه لایه مرزی را می‌توان بصورت زیر تعریف کنیم:

وقتی سیال در مجاورت یک جسم جامد حرکت می‌کند تأثیر شرط عدم لغزش به صورت تنش برشی در آن آشکار می‌شود و سپس این اثر به داخل جریان نفوذ می‌کند که اندازه نفوذ این اثر بستگی به عدد رینولدز جریان دارد. در روی یک صفحه تخت اثر لزجت در $Re > 1000$ به لایه نازک در نزدیکی مرز به نام لایه مرزی محدود می‌شود که در این لایه سرعت در یک ضخامت کم از صفر تا اندازه سرعت در جریان پتانسیل خارج لایه مرزی تغییر می‌کند [۱].

در شکل (۱-۱) می‌توان رشد لایه مرزی بر روی یک صفحه تخت را مشاهده نمود؛ که در آن، فلشها، جریان هر مولکول از سیال را به همراه طی طریق لایه‌ای آنها را نشان می‌دهد. در این فصل مروری بر روشهای حل لایه مرزی یک سیال نیوتنی، غیرقابل تراکم در جریان دو بعدی می‌کنیم، تا بهتر با لایه مرزی آشنا شویم.



شکل (۱-۱): رشد لایه مرزی بر روی یک صفحه تخت

۱-۲- لایه مرزی آرام

لایه مرزی در کمتر از عدد رینولدز بحرانی به صورت آرام است یعنی اگر اغتشاشی وارد جریان سیال شود، سیال می‌تواند این اغتشاش را مستهلک کند و دچار آشفتگی نشود. رینولدز بحرانی بر حسب شرایط و نوع جریان تغییر می‌کند، مثلاً بر روی صفحه تخت رینولدز بحرانی در حدود 3×10^5 تا 10^6 است. در صورت نبودن اغتشاش سیال می‌توان در رینولدزی بسیار بالاتر از رینولدز بحرانی آرام بماند که البته ایجاد چنین محیطی مشکل است.

حلهای متفاوتی برای لایه مرزی آرام ارائه شده است که در ادامه به بررسی تعدادی از این روشهای حل می‌پردازیم.

۱-۲-۱- تقریبهای لایه مرزی

اساس تقریبهای لایه مرزی بر این مفهوم استوار است که لایه مرزی نازک است یعنی $\delta \ll x$ و این تقریب وقتی که $Re > 1000$ باشد به خوبی صادق است. دیگر تقریبهای که از این فرض ناشی می‌شود عبارتند از:

$$v \ll u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1-1)$$

این تقریبها ابتدا به وسیله پراتل در سال ۱۹۰۴ جهت به دست آوردن معادلات تقریبی لایه مرزی استفاده شد و باعث سادگی معادلات حرکت سیال شد.

در جریان دو بعدی و غیر قابل تراکم معادلات حرکت سیال به فرم معادلات (۱-۲) تبدیل می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{\rho dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

با حذف $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ و معادله ۲ مومنتم، معادلات از شکل بیضوی به شکل سهموی تغییر می‌یابد و

این تغییر درجهل عددی بسیار مناسبتر می‌باشد.

را بر حسب x به دست می‌آوریم. سپس می‌توان کمیتهای مهمی مثل تنش برشی، ضخامت جابجایی، ضخامت مومنتم را محاسبه کرد.

نتایج به دست آمده از این روش بر روی صفحه تخت دارای حدود ۱۰ درصد خطا می‌باشد [۱].

۱-۲-۳- حل تشابهی

با توجه به تشابهی که بین پروفیل‌های سرعت در کلیه مقاطع لایه مرزی وجود دارد می‌توان با استفاده از یک متغیر نظیر η به جای دو متغیر x و y معادلات لایه مرزی را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد که این معادله را می‌توان به روش عددی به راحتی حل کرد.

بلازیوس^۱ برای حل لایه مرزی بر صفحه تخت متغیر η را به شکل زیر معرفی کرد:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \quad (4-1)$$

و توانست به معادله دیفرانسیل (۵-۱) برسد:

$$f''' + ff'' = 0 \quad , \quad f'(\infty) = 1 \quad , \quad f'(0) = f(0) = 0 \quad (5-1)$$

حل بلازیوس به خوبی و با دقت بالا با نتایج تجربی مطابقت می‌کند.

۱-۲-۴- حل‌های عددی

با روش‌های عددی می‌توان معادلات دیفرانسیل لایه مرزی آرام را به خوبی و در شرایط مختلف حل کرد و جواب‌های با دقت بالا به دست آورد؛ و مسائل پیچیده‌ای که حل آنها از طریق دو روش قبل غیرممکن است را می‌توان با این روش در صورت در دسترس بودن کامپیوتر به راحتی حل کرد.

^۱ - Blasius

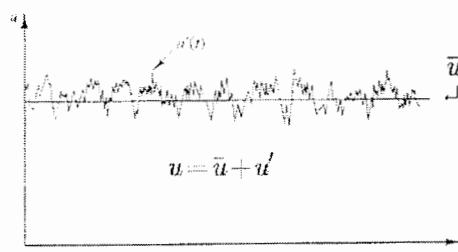
۱-۳- لایه مرزی مغشوش

با افزایش عدد رینولدز جریان به بیش از رینولدز بحرانی، آثار ناپایداری و تغییر رژیم در سیال ظاهر می‌شود و در اثر اغتشاش محیط، جریان سیال مغشوش می‌شود. عواملی که در اغتشاش سیال دخالت دارند عبارتند از: آشفتگی در خارج لایه مرزی، زبری سطح، انتقال حرارت، گرادیان فشار و ...

جریان آشفته موضوع تحقیقات زیادی بوده است و مقالات زیادی در این مورد هر سال منتشر می‌شود، ولی به علت پیچیدگی این پدیده هنوز تحلیل و تعریف کاملی از آن در دست نیست، اکنون با وجود روشهای جدید و کمک تجهیزات اندازه‌گیری دقیق اطلاعات زیادی درباره آشفتگی جریان از لحاظ فیزیکی و ریاضی می‌دانیم.

اگر سرعت در یک نقطه داخل جریان مغشوش اندازه‌گیری شود و بر حسب زمان رسم شود، شکل منحنی به صورت زیر می‌شود:

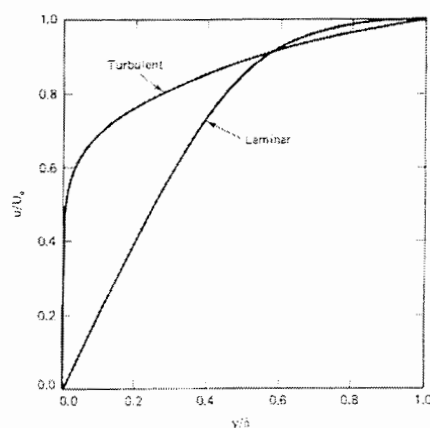
(\bar{u} مقدار متوسط دائمی و $u'(t)$ مولفه نوسانی سرعت می‌باشد)



شکل (۱-۲): اندازه‌گیری سرعت یک نقطه در جریان آشفته [۱]

یک منحنی نوسانی نامنظم و با دامنه نوسان ۵ تا ۱۰ درصد مقدار متوسط است، البته با تغییر محل نقطه اندازه‌گیری شکل نوسان هم عوض می‌شود. همه متغیرها مانند u و v و p و T و ... در جریان آشفته دارای چنین نوسانی می‌باشند [۱].

حل چنین جریانی به صورت مستقیم خارج از توانایی کامپیوترهای کنونی است. امونز^۱ (۱۹۷۰) به روشنی حد محاسبات توربولانس در یک لوله را مشخص کرد. او نشان داد که در رینولدز 10^7 حدود 10^{22} عمل عددی احتیاج است. اگر ما از نظر حجم حافظه کامپیوتر مشکل نداشته باشیم و سرعت کامپیوتر یک نانو ثانیه برای هر عمل باشد محاسبات حدود ۳۲۰۰۰ سال طول می‌کشد.



شکل (۱-۳): مقایسه شکل‌های پروفیل نمونه سرعت در لایه مرزی آرام و آشفته [۲]

۱-۳-۱- متوسط‌گیری زمانی

با توجه به ماهیت نوسانی جریان آشفته و مشکلاتی که برای حل مستقیم آن وجود دارد باید به نحوی از این نوسانات رهایی پیدا کرد. متوسط‌گیری زمانی از معادلات حرکت می‌تواند این مشکل را تا حدود زیادی رفع کند. همانطور که می‌دانیم هر متغیر لحظه‌ای مانند $\Phi(t)$ را می‌توان به دو مولفه متوسط $\bar{\Phi}(t)$ و مولفه نوسانی $\Phi'(t)$ تقسیم کرد. رابطه بین این کمیتها به صورت معادله (۱-۶) می‌باشد:

$$\Phi'(t) = \Phi(t) - \bar{\Phi}(t)$$

$$\bar{\Phi}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Phi(t) dt \quad (۱-۶)$$

T زمان متوسط‌گیری بسیار بزرگتر از زمان نوسان می‌باشد.

^۱ - Emmons

اگر از معادلات حرکت جریان دو بعدی متوسط‌گیری زمانی کنیم به معادلات رینولدز می‌رسیم:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cong U_c \frac{dU_c}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (7-1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \quad \tau = \rho \overline{u'v'}$$

می‌بینیم که متوسط‌گیری زمانی به معادلات جمله‌ای ناشناخته‌ای که به مولفه‌های نوسانی وابسته‌اند اضافه می‌کند و ما را با مشکل تازه‌ای مواجه می‌کند. جمله $\overline{\rho u'v'}$ انتقال مومنت ناشی از حرکت نوسانی را نشان می‌دهد و به تنش رینولدز معرف می‌باشد و به خواص جریان و خواص ترمودینامیکی سیال بستگی دارد و معمولاً با استفاده از نتایج تجربی مدل می‌شود. در ادامه چند روش معروف که می‌شود توسط آنها لایه مرزی جریان آشفته را حل کرد بررسی می‌شود.

۱-۳-۲- روش انتگرالی

از معادله ون کارمن می‌توان در جریان مغشوش هم استفاده کرد. در این حالت تنش رینولدز در تنش دیواره (τ_w) مستتر می‌باشد و برای حدس یک پروفیل مناسب در جریان مغشوش باید از داده‌های آزمایشگاهی و آنالیز ابعادی کمک گرفت.

با توجه به داده‌های آزمایشگاهی پروفیل سرعت جریان شامل سه ناحیه متفاوت داخلی، میانی و خارجی می‌باشد. در ناحیه داخلی تنش لزج ملکولی غالب است و رابطه بین سرعت و y در شکل بدون

بعد به صورت خطی می‌باشد یعنی $u^+ = y^+$ که $u^+ = \frac{\bar{u}}{v^*}$ و $y^+ = \frac{yv^*}{\nu}$ و $v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$

می‌باشد. این معادله در فاصله $0 \leq y^+ \leq 5$ معتبر است. فاصله $5 \leq y^+ \leq 30$ را لایه بافر^۱ می‌نامند.

پروفیل سرعت در این قسمت نه خطی است و نه لگاریتمی و در حقیقت رابط بین ناحیه لگاریتمی و

^۱ - Buffer layer

خطی است. در سال ۱۹۶۱ اسپالدینگ^[۲] یک معادله به دست آورد که در فاصله $0 \leq y^+ \leq 100$ داده‌های آزمایشگاهی را می‌پوشاند.

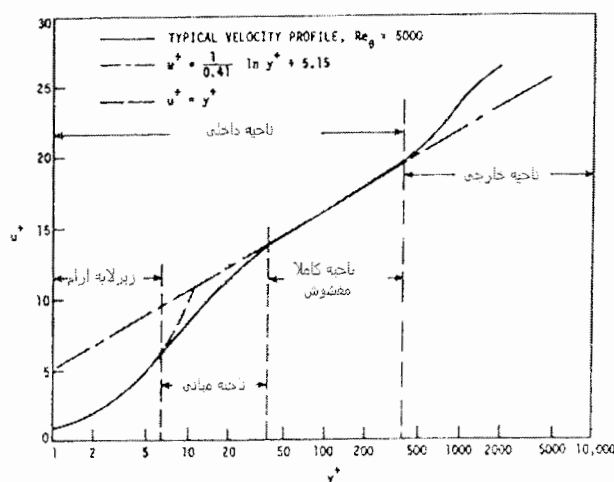
$$y^+ = u^+ + e^{-KB} \left[e^{ky^+} - 1 - Ky^+ - \frac{(Ky^+)^2}{2} - \frac{(Ky^+)^3}{6} \right] \quad (۸-۱)$$

برای لایه میانی معادله لگاریتمی زیر صادق است:

$$\frac{\bar{u}}{v^*} = \frac{1}{k} L n \frac{y v^*}{\nu} + B \quad ; \quad B = 5 \quad , \quad k = 0.41 \quad (۹-۱)$$

معادله (۹-۱) در گستره $35 \leq y^+ \leq 350$ معتبر است.

لایه خارجی، حساس به گرادیان فشار است و همانطور که در شکل (۴-۱) پیدا است یک انحراف از منحنی لگاریتمی دارد که وابسته به مقدار گرادیان فشار می‌باشد. کولز^(۱۹۰۹) با اضافه کردن یک تابع وابسته به (y/δ) به منحنی لگاریتمی یک تقریب خوب از دو ناحیه داخلی و خارجی به دست آورد.



شکل (۴-۱): یک نمونه پروفیل سرعت بی بعد برای جریان مغشوش بر روی صفحه صاف [۳]

- Spalding
- Coles

همانگونه که در شکل (۴-۱) می‌بینیم، ناحیه داخلی شامل زیر لایه آرام، ناحیه میانی و بخشی از ناحیه مغشوش است. معمولاً حد بالایی ناحیه داخلی را در $y = 400$ انتخاب می‌کنند. بقیه لایه مرزی مغشوش را ناحیه خارجی در نظر می‌گیرند.

$$u^- = \frac{1}{k} \operatorname{Ln} y^+ + B + \frac{2\Pi}{K} f\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (10-1)$$

$f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ را تابع جدائی^۱ می‌نامند، که به صورت زیر تقریب زده شده است:

$$f(\eta) = \operatorname{Sin}^2\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) = 3\eta^2 - 2\eta^3 \quad (11-1)$$

Π جدایی کولز، به گرادیان فشار وابسته می‌باشد. پروفیل کولز بیشتر ناحیه لایه مرزی را می‌پوشاند و برای به دست آوردن پارامترهای انتگرالی مناسب می‌باشد. خلاصه نتایج روش انتگرالی با پروفیل کولز به صورت معادله (۱۲-۱) می‌باشد:

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{\delta^*}{\delta} - \frac{2 - 3.2\Pi + 1.5\Pi^2}{k^2\lambda^2} \quad (12-1)$$

$$\lambda = \left[\frac{2}{c_f}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1 + \Pi}{k\lambda}$$

مقدار c_f که پارامتر مهم در محاسبات می‌باشد می‌تواند بر حسب Re_δ با جانشینی δ با y در فرمول کولز به دست می‌آید.

$$\lambda = \frac{1}{k} \operatorname{Ln} \frac{\operatorname{Re}_\delta}{\lambda} + B + \frac{2\Pi}{k} \quad (13-1)$$

روش انتگرالی، مناسب برای حل لایه مرزی بر روی صفحه تخت است، چون با صفر بودن گرادیان فشار رابطه انتگرالی مومنتم به شکل زیر کاهش می‌یابد.

$$c_f = 2 \frac{d\theta}{dx}$$

و برای سهولت محاسبات، پراتل در سال (۱۹۲۱) پروفیل توانی به صورت معادله (۱۴-۱) ارائه کرد:

^۱ - Wake

$$\frac{\bar{u}}{U_e} = \left[\frac{y}{\delta} \right]^{\frac{1}{7}} \quad (14-1)$$

که با نتایج به دست آمده از پروفیل لگاریتمی به خوبی برابری دارد.

۱-۳-۳- حل‌های عددی

حل انتگرالی نتایج بسیار مفیدی دارد ولی این روش هیچ اطلاعاتی در مورد توربولانس به ما نمی‌دهد و در ضمن پروفیل‌های ارائه شده دارای محدودیت کاربرد می‌باشند؛ مثلاً پروفیل جریانهای با مکش و تزریق در مرز را نمی‌توان با منحنی لگاریتمی تقریب زد. به همین دلیل اغلب در حل جریانهای آشفته از روشهای عددی به خصوص روش اختلاف محدود استفاده می‌شود. در روشهای عددی اغلب از معادله رینولدز استفاده می‌شود و تنش رینولدز را با روشهای مختلفی مدل می‌کنند.

بطور کلی شبیه‌سازی عددی جریان مغشوش را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد. ساده‌ترین و عملی‌ترین روش مورد استفاده در حال حاضر استفاده از معادله‌های ناویراستوکس متوسط زمانی به همراه یک مدل اغتشاش است. دومین مرحله از نظر پیشرفته بودن، استفاده از شبیه‌سازی معادله تابع زمانی با گردابه‌های بزرگ است.

در این روش، اثر گردابه‌های کوچکتر را با مدل‌های اغتشاش منظور می‌کنیم. سومین گروه شبیه‌سازی مستقیم عددی، گردابه‌های اغتشاش در همه اندازه‌هاست.

گروههای دوم و سوم در مراحل اولیه تولد خود هستند. یکی از محدودیتهای این روشها مشکل مربوط به ظرفیت کامپیوترهای امروزی است. در هر حال، با پیشرفت در صنعت کامپیوتر، شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ و اغتشاش کامل در دهه‌های آینده ممکن به نظر می‌رسد.

۱-۳-۴- مدل‌های توربولانس

اولین پیشنهاد برای مدل تنش‌های رینولدز را بوزینسک^۱ در سال (۱۸۷۷) ارائه کرد. وی نوشته مختصری روی فیزیک آشفتگی ارائه داد. او بیان کرده بود که حرکت آشفته، یک بی‌نظمی در طبیعت می‌باشد و نمی‌توان توسط قوانین حاکم و معین تحلیل کرد و باید از تئوری احتمالات استفاده نمود. وی مفهوم ویسکوزیته گردابه‌ای را با استفاده از تشابه تنش‌های مغشوش با تنش‌های لزج جریان آرام به فرم معادله (۱۵-۱) تعریف کرد.

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = -\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (15-1)$$

ν_t ویسکوزیته گردابه‌ای^۲ است و مقدار آن به شرایط جریان بستگی دارد و خاصیت سیال نیست. در جریان دو بعدی که تنش برشی آشفتگی مهم $-\overline{\rho u'v'}$ است رابطه (۱۵-۱) به فرم زیر ساده می‌شود.

$$\tau_{xy} = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (16-1)$$

در رابطه (۱۶-۱) فرض بر این است که ویسکوزیته گردابه‌ای همگن باشد.

مدل‌های توربولانس را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم کرد؛ مدل‌هایی که از مفهوم ویسکوزیته گردابی استفاده می‌کنند و مدل‌هایی که از این مفهوم استفاده نمی‌کنند.

دسته اول شامل مدل‌های صفر معادله‌ای، یک معادله‌ای و دو معادله‌ای و دسته دوم به مدل‌های تنش جبری، مدل‌های تنش رینولدز و مدل‌های چند معادله تقسیم می‌شوند.

مدل‌های صفر معادله‌ای، مدل‌های اغتشاشی هستند که معادلات انتقال کمیت‌های اغتشاشی را در بر ندارد. این مدل‌ها، مدل‌های ساده‌ای هستند که در آنها از مفهوم ویسکوزیته گردابه‌ای استفاده شده است.

^۱ - Boussinesq

^۲ - Eddy Viscosity

ویسکوزیته گردابی توسط آزمایش و با روش آزمون و خطا توسط فرمولهایی تعیین می‌شود. براساس چگونگی استفاده از مفهوم ویسکوزیته گردابه‌ای مدل‌های صفر معادله‌ای متفاوتی به وجود آمده است که به آنها اشاره می‌کنیم.

الف) ویسکوزیته ثابت

در این مدل ویسکوزیته گردابه‌ای ثابت می‌باشند و این تشریح چگونگی وضعیت جریان، بسیار ضعیف عمل می‌کند.

ب) تئوری طول اختلاط^۱

اولین و مشهورترین مدل توربولانس می‌باشد که با توجه به اهمیت مطالعه بر روی جریان درون لوله و جریان بالای مرزهای دارای شکل بخصوص، توسط پرائنتل در سال (۱۹۲۰) بیان شد. در این روش نوسانات توربولانس را به یک مقیاس طولی و گرادیان سرعت ارتباط می‌دهند و جملات انتقال آشفته را به طور منحصر بفردی با کمیت‌های متوسط موضعی جریان ارتباط می‌دهد.

$$-\overline{u'v'} = (Const)u'_{rms}v'_{rms} = (Const) \left[L_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \left[L_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] \quad (17-1)$$

L_1 و L_2 طول‌های اختلاط می‌باشد که برای سهولت طول L را به صورت معادله (۱۸-۱) تعریف

می‌کنیم:

$$L^2 = (Const)(L_1 L_2) \quad ; \quad \nu_t = L^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (18-1)$$

^۱ - Mixing Length model

در جریانهای پیچیده، مدل فوق کاربرد محدودی دارد چون مشکل محاسبه L به وجود می‌آید. برای بعضی از جریانهای ساده فرمولهایی برای L با کمک آزمایش به دست آمده است. مثلاً برای جریان روی صفحه تخت L به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = ky \left[1 - \exp\left(\frac{-y^+}{A}\right) \right], \quad A = 26, \quad y < 0.22\delta$$

$$L = 0.09\delta, \quad y > 0.22\delta$$

ج) مدل کردن بدون طول اختلاط

در این مدل برای ν_t با استفاده از آزمایش و محاسبات فرمولهایی را ارائه می‌دهند. اسپالدینگ (۱۹۶۱) [۲] برای لایه داخلی معادله زیر ارائه کرد:

$$z = ku^+ \quad ; \quad \nu_t = \nu k e^{-kB} \left[e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2} \right] \quad (19-1)$$

و برای لایه خارجی کلازر^۱ (۱۹۵۶) فرمول $\nu_t = 0.016 u_* \delta^*$ ، را به دست آورد که بعد به صورت معادله (۲۰-۱) اصلاح شد [۳].

$$\nu_t = \frac{0.016 u_* \delta^*}{\left[1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right]} \quad (20-1)$$

^۱ - Clauser

فصل دوم

کاربرد روشهای عددی

۲-۱- مقدمه

می‌توان گفت که در قرن گذشته مطالعه فرآیندهای جریان سیالات و انتقال حرارت، به دو روش اصلی که عبارتند از: تحقیق آزمایشگاهی و محاسبات عددی انجام شده است. اطلاعات دقیق در مورد یک فرآیند فیزیکی، غالباً توسط اندازه‌گیری عملی بدست می‌آید. بسیاری از این دستگاهها به علت بزرگ بودن نمونه مورد آزمایش بسیار گران خواهند بود، بنابراین آزمایش مورد نظر بر روی ماکتی انجام می‌شود و باید این نکته را یادآور شد که در بسیاری از حالتها مشکلات جدی اندازه‌گیری وجود داشته و وسایل اندازه‌گیری عاری از خطا نمی‌باشند. از طرف دیگر محاسبات عددی نیازمند هزینه کمتری می‌باشد اما لازمه آن ارائه روشهای حلی مناسب جهت حل مسائل است. روشهای حل تئوری ارائه شده عبارتند از، روش حل تحلیلی^۱ و روش حل عددی^۲.

با پیشرفت روز افزون تکنولوژی در ساخت وسایل، محققان بر آن شدند که با روشهای تحلیلی مسائل را مورد بررسی قرار دهند، اما پیچیدگی مسئله به حدی بود که برای بسیاری از مسائل جواب دقیق بدست نیامده، و از سوی دیگر روشهای عددی توسط محققان بکار گرفته شد و نتایج بدست آمده نشان داد که این روشها می‌توانند جوابگوی نیاز محققان باشند. البته منظور کاستن از اعتبار و ارزش روش تحلیلی نمی‌باشد، اما تقریباً تردیدی نیست که روشهای کلاسیک ریاضی، راه قابل استفاده‌ای را برای حل اکثر مسائل پیچیده مهندسی، ارائه نمی‌کنند. [۴]

^۱ - Analytical Method

^۲ - Numerical Method

۲-۲- مقایسه بین روش تئوریک با تحقیق آزمایشگاهی

محاسبات محاسبات تئوریک نسبت به یک تحقیق آزمایشگاهی عبارتند از:

۲-۲-۱- شبیه‌سازی شرایط واقعی

در تحقیقات آزمایشگاهی مواردی وجود دارد که مسئله مورد بحث از نظر فیزیکی باید تغییر داده شود. مثلاً برای بررسی اثر حرکت باد بر روی ساختمانهای بلند، به علت بزرگ بودن ابعاد مدلی ساخته شود و یا در بعضی آزمایشات نظیر بررسی حرکت سیال اطراف پره‌های توربین بخار لازم است از درجه حرارت‌های بالا استفاده شود که این کار در بسیاری از موارد امکان‌پذیر نمی‌باشد. اما در یک محاسبه تئوری شرایط واقعی به آسانی شبیه‌سازی می‌شود.

۲-۲-۲ - توانایی شبیه‌سازی شرایط ایده‌آل

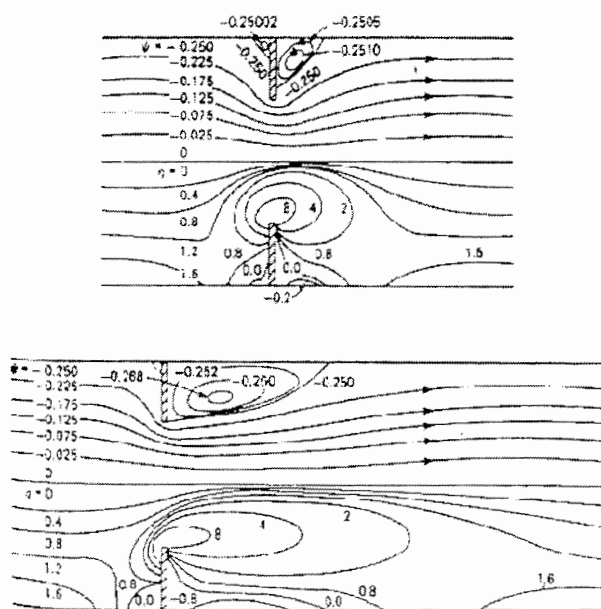
گاهی اوقات برای مطالعه برخی از پدیده‌ها، محقق توجهش را روی تعدادی از پارامترهای اصلی متمرکز نموده و تمام جنبه‌های دیگر را حذف می‌کند. به عنوان مثال می‌توان از دو بعدی بودن، ثابت بودن جرم مخصوص و یا وجود یک سطح آدیاباتیک نام برد. در یک کار محاسباتی این شرایط به آسانی و با دقت کامل می‌توانند برقرار شوند. در حالیکه حتی در یک آزمایش عملی دقیق به زحمت می‌توان به شرایط ایده‌آل نزدیک شد.

۲-۲-۳ - سرعت بیشتر

در محاسبات تئوری انجام شده برای مسئله‌ای خاص، می‌توان به راحتی شرایط اعمال شده برای پارامتری خاص را تغییر داد، (مثلاً عدد رینولدز) و این کار نیاز به وقت زیادی نخواهد داشت، اما در یک بررسی آزمایشگاهی برای تغییر هر یک از شرایط اعمال شده لازم است ساعتها وقت صرف نماییم.

۲-۲-۴- دست یابی به اطلاعات کامل تر

با استفاده از محاسبات تئوری می‌توان کلیه پارامترها، نظیر سرعت، فشار و دانسیته را در کل دامنه مورد بررسی بدست آورد اما در یک تحقیق آزمایشگاهی تنها در نقاطی خاص پارامترهای مورد نظر قابل اندازه‌گیری می‌باشند.

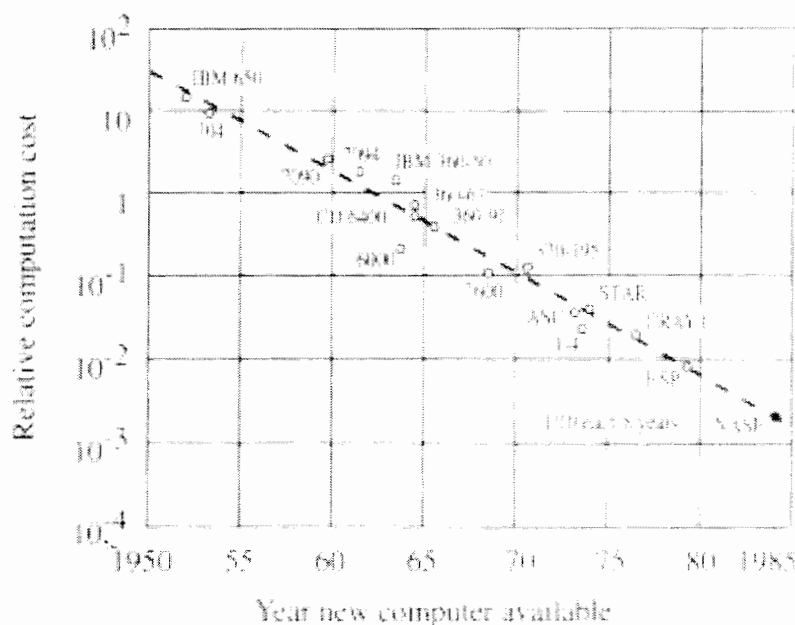


شکل (۲-۱): مثالی از نتایج حاصل شده از روشهای عددی [۱]

۲-۲-۵- هزینه کمتر

مهمترین فاکتور در شرایط کنونی جهان، صرف هزینه کمتر و بدست آوردن نتایج بهتر است. مهمترین امتیاز روشهای محاسباتی هزینه کمتر آنهاست، و این هزینه که بیشتر آن صرف استفاده از کامپیوتر می‌شود و در حال حاضر روز به روز رو به کاهش است.

در شکل (۲-۲) تغییرات هزینه نسبی محاسبات برای یک کار معمول بر حسب سال رسم شده است، این اطلاعات از آماری که توسط چپمن^۱ [۵] گرفته شده است، استخراج گردیده است.



شکل (۲-۲):

نمودار کاهش هزینه محاسبات (بر حسب زمان) طی پیشرفت، در سخت افزار کامپیوتر در طول زمان [۵]

امتیازات گفته شده در قسمت قبل به اندازه کافی مؤثر هستند که شخص را برای تحلیل کامپیوتری و عددی ترغیب نمایند. به هر حال، ایجاد علاقه کورکورانه مطلوب نیست. لذا مفید خواهد بود، که از موانع و محدودیتها نیز آگاه باشیم. برای بحث در مورد نارساییهای یک محاسبه تئوری، تقسیم کردن تمام مسائل عملی به دو گروه به شرح زیر مفید خواهد بود.

گروه الف: مسائلی که برای آنها یک بیان ریاضی مناسب می توان نوشت. (مانند: هدایت حرارت، جریانهای آرام، لایه های مرزی مغشوش ساده)

^۱ - Chapman

گروه ب: مسائلی که برای آنها هنوز یک بیان ریاضی مناسب به دست نیامده است. (مانند: جریان مغشوش پیچیده، جریانهای غیرنیوتنی معین، تشکیل اکسیدهای نیتروژن در احتراق مغشوش، بعضی جریانهای دو فازی)

می‌توان گفت، برای بیشتر مسائل گروه الف، حل تحلیلی اصولاً هیچ نوع نارسایی ندارد. بنابراین حل کامپیوتری نشان دهنده آن قسمت از روش کار است که بسیار برتر از مطالعه آزمایشگاهی است. با وجود این، گاهی با بعضی نارسایی‌ها مواجه می‌شویم. اگر پیشگویی دارای هدف بسیار محدودی باشد، (مانند پیدا کردن افت فشار کلی در یک دستگاه پیچیده) امکان ندارد هزینه محاسبه آن کمتر از هزینه یک آزمایش باشد. برای مسائل مشکل که دارای شکل هندسی پیچیده، غیر خطی‌های شدید، تغییرات حساس خواص سیال و غیره باشند، به دست آوردن یک حل عددی دشوار بوده و اگر احیاناً انجام شود بسیار گران خواهد بود.

مسائل گروه ب علاوه بر دارا بودن تمام نارسایی‌های گروه الف در اینکه نتایج محاسبات آنها تا چه حدی با واقعیت توافق دارند نیز، ابهام دارد. در چنین حالت‌های وجود بعضی نتایج آزمایشگاهی، می‌تواند بسیار موثر باشد.

۲-۳- خصوصیات روشهای عددی

اکثر روشهای عددی دارای تشابهات زیر می‌باشند:

- ۱- در همه روشها، تمام ناحیه مورد نظر، به اجزاء کوچک تقسیم شده و جواب پیوسته معادله را با مقادیر تفکیک شده در نقاط اجزاء، تعویض می‌کنند.
 - ۲- همه روشها، با تقریبهای مناسب یا توابعی مناسب از متغیرهای وابسته بین نقاط گره‌ها، یک سیستم معادلات جبری را از معادله دیفرانسیل استخراج می‌کنند.
 - ۳- سیستم معادلات جبری بدست آمده را با شرایط مرزی و اولیه مناسب حل کرده تا جواب عددی مربوط به همه نقاط شبکه بدست آید.
- از طرفی یک روش عددی خوب باید دارای مشخصات زیر باشد:

- ۱- از نظر ریاضی معتبر و منطقی باشد و پایه و اساس فیزیکی داشته باشد. (به جوابهای واقعی برسد و قابل اعمال بر مسائل عملی باشد)
 - ۲- نسبت به هندسه و ترکیب فیزیکی دامنه حل و طبیعت بارگذاری محدودیتی نداشته باشد.
 - ۳- روند فرمول‌بندی باید مستقل از شکل دامنه حل و شرایط مرزی باشد.
 - ۴- روش باید انعطاف پذیر باشد، تا درجات متفاوت تقریب بدون فرمول‌بندی مجدد مسئله قابل دسترسی باشد.
 - ۵- باید شامل یک روند منظم و قانونمند باشد تا بتواند به صورت خودکار روی کامپیوترها اجرا شود.
- روشهای عددی که بیشتر از سایر روشها در آنالیز جریان سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از:

۱- روش تفاضل محدود^۱ (FD)

۲- روش اجزاء محدود^۲ (FE)

۳- روش حجم محدود^۳ (FV)

^۱ - Finite Differences

^۲ - Finite Element

^۳ - Finite Volume

۲-۴- شبیه‌سازی مستقیم عددی^۱

حل عددی کامل معادلات ناویر- استوکس وابسته به زمان ، شبیه‌سازی مستقیم عددی نامیده می‌شود، که بطور کلی در آن همه مقیاس‌های مهم جریان را بدون استفاده از مدل‌های آشفتگی محاسبه می‌کنند.

نقطه شروع برای هر روش عددی، مشخص کردن مدل ریاضی است که شامل مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی و شرایط مرزی است. معادلاتی که برای بررسی انتخاب می‌شوند دارای ترم‌های غیرخطی هستند که می‌توان آنها را با مدل‌های ریاضی خاص و مناسب به صورت خطی تبدیل کرده و این مدل‌ها را جایگزین ترم‌های غیرخطی^۲ نمود. ولی وقتی که در معادلات ریاضی هیچ گونه دخل و تصرفی صورت نگیرد و هیچ‌گونه ساده سازی و یا مدل سازی^۳ در آن وارد نشود و به همان صورتی که تعریف شده حل عددی شود نتایج بسیار دقیق می‌باشند که در اصطلاح به این نوع حل عددی، "حل مستقیم عددی" گویند.[۶]

پایه و اساس روش DNS در جریان لایه مرزی برای نخستین بار توسط Orszag و Patterson (۱۹۷۲) بنا نهاده شد، آنها برای شبیه‌سازی مستقیم عددی لایه مرزی در عدد رینولدز ۳۲، از روش طیفی^۴ استفاده کرده بودند [۷]. گام مهم بعدی توسط Rogallo (۱۹۸۱) برداشته شد، او با استفاده از بسط و توسعه الگوریتم محاسباتی Orszag و Patterson، معادلات حاکم بر جریان توربولانس را به روش DNS محاسبه نمود و نتایج بدست آمده را با نتایج آزمایشگاهی و چندین روش توربولانس دیگر مقایسه نمود[۸]. در آن سالها بعلت ضعف کامپیوترها جریان به صورت همگن و تنها در یک جهت مورد مطالعه قرار می‌گرفت، و اجازه استفاده از روش DNS را در جریان توربولانس در نزدیکی جداره را، به کاربر نمی‌داد. در سال ۱۹۸۷ Kim و دیگر همکارانش توسط روش DNS جریان سیال را در داخل یک کانال با دیواره‌های موازی، مورد مطالعه قرار دادند [۹]. که پس از مقایسه عددی DNS با نتایج

^۱ - Direct numerical simulation (DNS)

^۲ - Non-Linear Terms

^۳ - Modeling

^۴ - Spectral methods

تجربی Kreplin و Eckelmann (۱۹۷۹) [۱۰] مطابقت بسیار خوبی را دریافت نمودند. Spalart (۱۹۸۸) توسط یک روش ابتکاری در DNS توانست، جریان لایه مرزی توربولانس را تحت گرادیان فشار صفر و مطلوب محاسبه نماید [۱۱]. درسالهای اخیر از جمله مطالعات انجام شده توسط این روش می‌توان به مطالعه جریان مختلط توسط Le و Moin (۱۹۹۴) [۱۲] و مطالعه بر روی پدیده جدایش در جریان لایه مرزی بر روی یک صفحه مسطح توسط Na و Moin (۱۹۹۶) [۱۳] اشاره نمود.

مطالعه بر روی جریان لایه مرزی تراکم پذیر توسط روش DNS نخستین بار توسط Feiereisen و همکارانش (۱۹۸۱) [۱۴] آغاز شد، ولی مطالعات جدی‌تر، به خاطر پیچیدگی‌های آن تا سالها مسکوت مانده بود و امروزه یکی از شاخه‌های مطالعات دانشمندان و کاربردهای ابر کامپیوترها می‌باشد.

DNS برای مطالعه فیزیک آشفتگی، توسعه مدلها و تئوریهای آن و در موارد خاص، برای پیش‌بینی و تحلیل جریان‌های مورد علاقه در مهندسی استفاده می‌گردد همچنین DNS در بررسی ساختار آشفتگی و مقایسه داده‌های تجربی استفاده می‌شود. اطلاعات بدست آمده از DNS در مدلسازی (به خصوص در اعداد رینولدز پایین) و کالیبره کردن وسایل اندازه‌گیری به کار گرفته می‌شود [۱۵]

DNS در حال حاضر یکی از کاربردهای ابر کامپیوترها می‌باشد. مشکلات موجود در انجام این محاسبات به دلیل وجود محدوده بسیار وسیع مقیاسهای طولی و زمانی در جریان آشفته است که باید در محاسبات در نظر گرفته شوند.

برای بدست آوردن نتایج دقیق در دینامیک جریان آشفته، لازم است تغییرات جریان در مقیاسهای بسیار کوچک محاسبه شوند. بسیاری از پدیده‌های که در یک جریان آشفته اتفاق می‌افتد، فرکانس‌های در حدود ۴ تا ۱۰ کیلو هرتز دارند و مقیاس مکانی این تغییرات در محدوده بسیار کوچکی در حدود ۱۰ تا ۱۰۰ میکرومتر می‌باشد [۱۶].

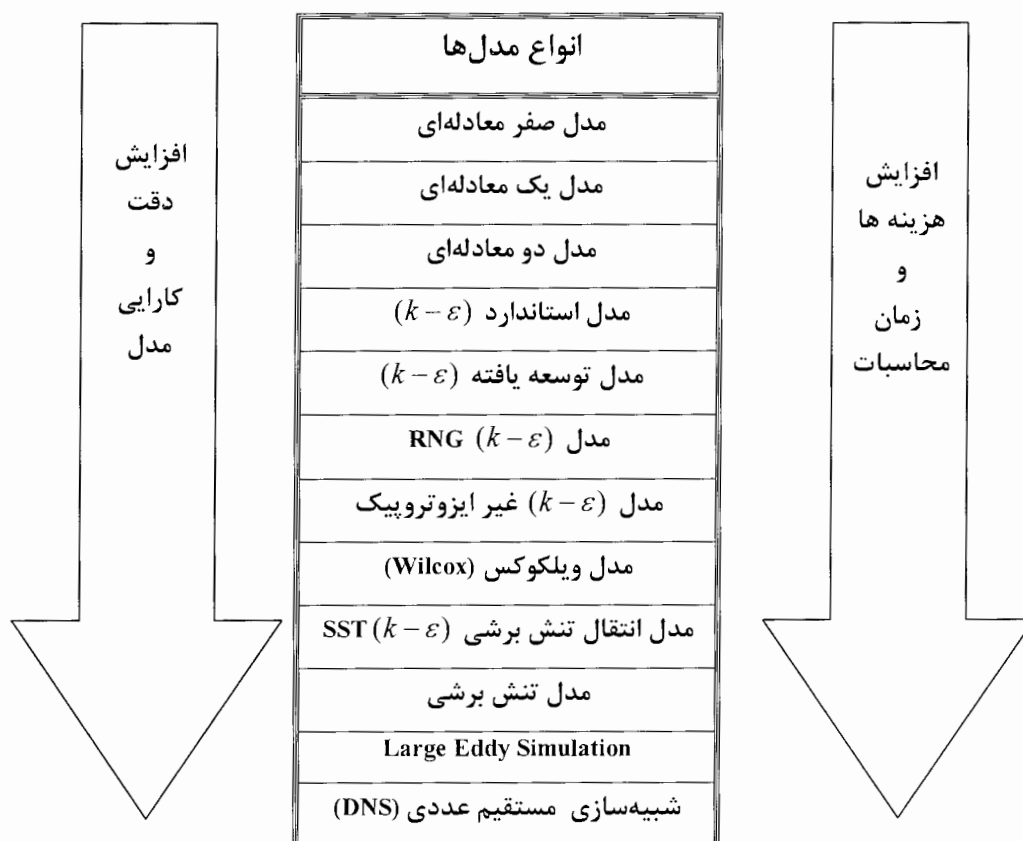
با در نظر گرفتن این تغییرات نیاز به شبکه محاسباتی بسیار ریز و قدمهای زمانی بسیار کوتاه می‌باشد، که به این ترتیب احتیاج به انجام محاسبات طولانی برای این امر مشخص می‌شود.

انجام آزمایشات فیزیکی یکی از روشهای معمول در بدست آوردن اطلاعات لازم برای مطالعه جریان سیال است. در این میان استفاده از شبیه‌سازی مستقیم عددی مزیت‌های بسیاری نسبت به انجام این

نوع آزمایشات دارد. یکی از مهمترین مزیتها در این میان بدست آوردن اطلاعات برای مطالعه جریان در نزدیکی دیواره است. در حالیکه انجام آزمایشات و اندازه‌گیری پارامترهای جریان در این ناحیه بسیار مشکل و با خطا همراه است، نتایج DNS می‌تواند اطلاعات کاملی از این پارامترها بدست آورد. از طرف دیگر در مدلسازی آشفتگی، نیاز است که اطلاعات مختلفی از جریان در یک نقطه و در یک زمان مشخص در دست باشد، که در آزمایشات نمی‌توان در یک لحظه و در یک نقطه همه پارامترهای مختلف جریان را اندازه‌گیری کرد. مشکل دیگر عدم امکان اندازه‌گیری بعضی از پارامترهای موجود در مدلهاست که نمی‌توان برای آن کمیت فیزیکی قابل اندازه‌گیری در نظر گرفت که جملات اتلاف تنش و توزیع مجدد از این دسته می‌باشند.

با این وجود به دلیل محدودیتهای موجود در توان محاسباتی کامپیوترهای امروزی، محاسبات DNS تنها منحصر به بعضی جریانهای با هندسه ساده و اعداد رینولدز پایین است و بنابراین استفاده از DNS در جریان آشفتنه منحصر به مطالعه بنیادی و کاربرد در مدل‌سازی می‌باشد.

به عنوان مثال برای انجام محاسبات DNS برای یک جریان ساده در کانال به ابعاد $1/10 \times 1/10 \times 1/10$ متر و در رینولدز بالا گردابه‌های به ابعاد $10 - 100$ میکرومتر تشکیل خواهند شد و بنابراین به شبکه محاسباتی با 10^6 تا 10^{12} گره احتیاج است که بتواند همه فرآیند آشفتگی جریان را مشخص کند، از طرف دیگر سریعترین تغییرات در چنین جریانی فرکانسی، در مرتبه 10 کیلو هرتز دارد که نیاز است معادلات در بعد زمان با استفاده از قدمهای زمانی 100 میکروثانیه گسسته سازی شوند. همچنین برای محاسبه DNS داخل لوله در عدد رینولدز 50000 به کامپیوتری احتیاج است که توان محاسباتی 10 میلیون بار بیشتر از سریعترین کامپیوترهای Cray موجود، داشته باشد. به این ترتیب احتیاج به مدل‌سازی جریان آشفتنه و استفاده از این مدل در انجام محاسبات تا سالها ادامه خواهد داشت و نیاز به تصحیح و طراحی مدل‌های بهتر همچنان احساس می‌شود [۱۶].



شکل (۲-۳): مقایسه بین انواع روشهای مدل سازی

فصل سوم

روابط ریاضی

۳-۱- مقدمه

در این فصل به مطالعه و بررسی

۱- معادلات حاکم

۲- شرایط مرزی

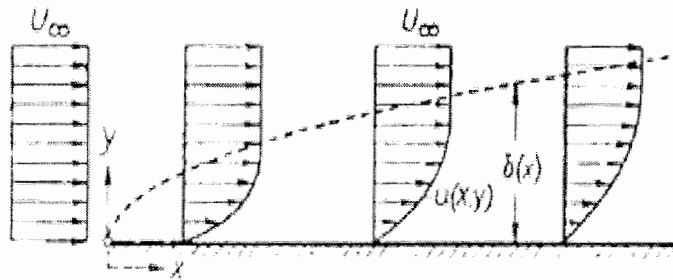
۳- شرایط اولیه

اقدام می‌نمائیم. هدف ما در این تحقیق، تنظیم برنامه‌ای کامپیوتری برای تحلیل مستقیم عددی معادلات ناویر-استوکس دو بعدی برای جریان لایه مرزی غیر قابل تراکم می‌باشد. دامنه محاسباتی جریان لایه مرزی مطابق شکل (۳-۱) در جهت اصلی جریان x محدود به طول دامنه فیزیکی جریان می‌باشد و در جهت عمود به جریان y از یک طرف محدود و از طرف دیگر نامحدود در نظر گرفته می‌شود. در جهات x و y از طرح اختلاف محدود فشرده^۱ استفاده شده است. در جهت عمود به جریان y از روش "فشرده سازی"^۲ جهت متناظر نمودن دامنه فیزیکی به دامنه محاسباتی به طول واحد استفاده شده است.

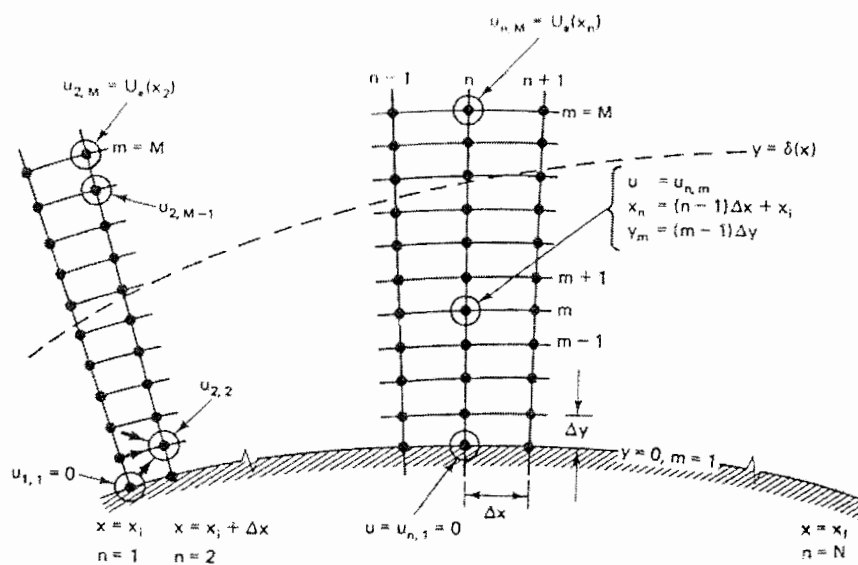
قبل از هر کاری ابتدا باید فرمول‌های ریاضی مناسب را برای جریان لایه مرزی دو بعدی غیر قابل تراکم، برای تشکیل کد، استخراج کرده و همه کمیت‌ها به وسیله مشخصه طول و مشخصه سرعت بی‌بعد شوند که در این ارتباط ضخامت لایه مرزی، δ_x و سرعت ورودی U_∞ به عنوان مقیاس‌های بی‌بعد کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند. معادلات بقای جرم و ناویراستوکس به وسیله این دو مقیاس مشخصه بی‌بعد می‌شوند. عدد رینولدز بدست آمده طبق این بی‌بعد سازی برابر است با $Re_x = \frac{U_\infty \delta_x}{\nu}$ ، که ν لزجت سینماتیک سیال عامل می‌باشد.

^۱- Compact Finite Difference Scheme

^۲- Mapping



شکل (۱-۳): شماتیک از دامنه فیزیکی مسائل لایه مرزی



شکل (۲-۳): شماتیک از سیستم شبکه ای و علامت‌گذاری برای حل مسائل لایه مرزی بدون فشرده سازی درجهت y

از طرفی برای بدست آوردن جواب یگانه یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای، به مجموعه‌ای از شرایط مکمل نیاز است تا توابع اختیاری حاصل از انتگرال‌گیری معادله دیفرانسیل پاره‌ای را معین کنیم (مانند ثابت‌های اختیاری در معادلات دیفرانسیل معمولی). شرایط یاد شده به عنوان شرایط مرزی و شرایط اولیه تقسیم می‌شوند.

شرایط اولیه، به معنی معلوم بودن مقدار متغیر وابسته در یک حالت اولیه است. شرایط مرزی، به معنی معلوم بودن مقدار متغیر وابسته و یا مشتقات آن در مرزهای قلمرو حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای است.

۳-۲- معادلات حاکم

پروفیل سرعت ورودی با یک جریان اولیه^۱ $U_0(y)$ مشخص شده است. جریان اجازه پیدا می‌کند که در جهت x توسعه یابد. در جهت y مجموعه از یک طرف نامحدود است. با توجه به قانون دوم نیوتن، معادلات مومنتوم برای یک ذره سیال نیوتنی معرفی می‌شود؛ این معادلات به معادلات ناویراستوکس معروفند. با توجه به بقای جرم، معادله پیوستگی برای جریان غیر قابل تراکم به صورت معادله (۱-۳) بدست می‌آید. در این تحقیق فرم چرخشی معادلات ناویر-استوکس را به صورت مستقیم و بدون استفاده از هر گونه مدل‌سازی و یا ساده‌سازی به صورت عددی حل می‌کنیم. به همین علت به این روش که در این برنامه مورد استفاده قرار می‌گیرد "حل مستقیم عددی"^۲ گویند. می‌دانیم فرم کلی معادله بی‌بعد شده ناویر-استوکس به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{U}) \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

حال برای تبدیل معادله ناویراستوکس به فرم محاسباتی مراحل ذیل را به ترتیب انجام می‌دهیم: با توجه به رابطه برداری مشخص (۲-۳):

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2-3)$$

برای مورد $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{U} = (U, V, W)$ ، معادله (۲-۳) به صورت معادله (۳-۳) در می‌آید:

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \omega \times \mathbf{U} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) \quad (3-3)$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \nabla \times \mathbf{U} \quad \text{که در آن}$$

¹- Initial Flow

²- Direct Numerical Simulation

با در نظر گرفتن رابطه (۱-۳) و (۲-۳) به رابطه (۴-۳) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{H} - \nabla \left(p + \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \mathbf{U}) \quad (4-3)$$

$$\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3) = \mathbf{U} \times \omega. \quad \text{که در آن}$$

با ضرب طرفین معادله (۴-۳) در بردار کرل $(\nabla \times)$ داریم:

$$\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{U})}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times \nabla \left(p + \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{U}) \quad (5-3)$$

از طرفی می‌دانیم که $\nabla(\text{scalar}) = 0$ می‌باشد. در نتیجه معادله (۵-۳) به فرم معادله (۶-۳) تبدیل خواهد شد:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (6-3)$$

با تکرار عمل ضرب بالا در معادله (۶-۳) به معادله زیر خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U})}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U})) \quad (7-3)$$

با بکار بردن معادله پیوستگی $(\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0$ و رابطه ریاضی مشخص زیر

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla^2 \mathbf{U}$$

به فرم محاسباتی (۸-۳) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \nabla^2 \mathbf{U}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \mathbf{U} \quad (8-3)$$

معادله (۸-۳) و معادله پیوستگی معادلات بی‌بعد شده با مقیاس مشخصه طول و سرعت می‌باشند.

که $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3) = \mathbf{U} \times \omega$ ترم‌های غیرخطی^۱ هستند. یکی از مشکلات اصلی در

حل معادلات ناویر-استوکس، مربوط به نبود اطلاعات برای فشار در مرزها می‌باشد.

^۱- Non linear term

عمده مزیت استفاده از فرم محاسباتی معادله ناویر- استوکس، کاهش تعداد متغیرهای مستقل در نتیجه کاهش فضای محاسباتی و همچنین عدم احتیاج به تعیین فشار در مرزهای مساله می‌باشد. از طرفی در قبال این دو مزیت تغییر مرتبه معادله دیفرانسیل حاکم از دو به چهار را نیز تجربه می‌کنیم.

در معادله (۸-۳) بردار سرعت \mathbf{U} به دو قسمت جریان پایه^۱ $(U_0(y), 0)$ و متغیرهای محاسباتی $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ به فرم معادلات (۹-۳) تجزیه می‌گردد:

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= (U, V) = U\hat{i} + V\hat{j} \\ U(x, y, t) &= u(x, y, t) + U_0(y) \\ V(x, y, t) &= v(x, y, t)\end{aligned}\quad (9-3)$$

همچنین با تعریف بردار H بصورت رابطه (۱۰-۳):

$$H = (H_1, H_2) = \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) \quad (10-3)$$

و بسط سمت راست رابطه (۱۰-۳) بصورت زیر:

$$\nabla \times \mathbf{U} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U & V & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$\mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ U & V & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \end{vmatrix} = V \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \hat{i} - U \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \hat{j}$$

مقادیر H_1 و H_2 بصورت معادلات (۱۱-۳) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}H_1 &= V \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ H_2 &= -U \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (11-3)$$

^۱ - Base flow

با اعمال آن همراه با معادلات (۹-۳) در فرم محاسباتی، معادله ناویر-استوکس (۸-۳) به معادله (۱۲-۳) دست خواهیم یافت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_1 - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_2 + \frac{1}{Re} \nabla^4 U \quad (12-3)$$

این معادله برای پیشروی محاسبات در دامنه زمان مورد استفاده قرار می‌گیرد. مولفه سرعت در جهت y هم به کمک معادله پیوستگی به راحتی بدست می‌آید.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x} \quad (13-3)$$

حال می‌توان مولفه ورتیسیتته (ω_3) را، با استفاده از تعریف آن براحتی بدست آورد.

$$\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

۳-۳- شرایط مرزی

بدلیل اینکه معادلات ناویر-استوکس و پیوستگی برای متغیرهای محاسباتی حل می‌شوند شرایط مرزی بر روی متغیرهای محاسباتی اعمال می‌شوند. معادله (۱۲-۳) یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهار می‌باشد، در نتیجه نیاز به اعمال چهار شرط مرزی داریم. مقادیر u در مرز ورودی^۱ و مرز خروجی^۲ مجموعه محاسباتی مشخص می‌باشد. همچنین با توجه به معادله پیوستگی، هم در مرزهای ورودی و خروجی مجموعه محاسباتی معلوم می‌باشند. این شرایط مرزی به شرایط دریشله^۳ و نیومن^۴ معروف می‌باشند.

در شبیه‌سازی، مولفه سرعت لحظه‌ای در جهت جریان اصلی در ورودی می‌تواند به صورت یک پروفیل چند جمله‌ای بصورت معادله (۱۴-۳) و یا پروفیل چند تکه‌ای بصورت (۱۵-۳) استفاده نمود.

¹ - Inflow Boundary Condition

² - Outflow Boundary Condition

³ - Dirichlit Boundary Condition

⁴ - Neumann Boundary Condition

$$U(y) = 0.332y - 0.0023y^4 + 1.998 \times 10^{-3}y^7 - 1.571 \times 10^{-7}y^{10} + 1.13 \times 10^{-9}y^{13} \quad (14-3)$$

$$U(y) = \begin{cases} 1.8y - 1.9683y^4 & \left(0 \leq y \leq \frac{4}{9}\right) \\ 1 - 0.897(1-y)^2 & \left(\frac{4}{9} \leq y \leq 1\right) \\ 1 & (y \geq 1) \end{cases} \quad (15-3)$$

قسمت اغتشاشی که ترکیبی از مودهای ویژه خطی می‌باشد، از محاسبات تحلیل پایداری خطی بدست می‌آید و برای شرایط مرزی ورودی اعمال می‌شود.

به بیان دیگر:

$$v(x, y, t) = A \cdot \text{Real} \left[V(y) e^{i(-\omega t)} \right] = A \cdot \text{Real} \left[(V_r + iV_i) \times e^{i(-\omega t)} \right]. \quad (16-3)$$

که در آن $V(y)$ ، تابع ویژه سرعت مربوط به ناپایدارترین مود معادله اور - سامرفیلد می‌باشد. A بعنوان ضریب نیروی دوبعدی^۱ مربوط به فرکانس اصلی و ناپایدارترین مود می‌باشد. پارامتر $\omega = \alpha C_{exit}$ می‌باشد که C_{exit} سرعت درخروجی است که از تحلیل پایداری می‌تواند نتیجه شود. پس از ساده‌سازی معادله (۱۶-۳) به معادله (۱۷-۳) خواهیم رسید.

$$v(x, y, t) = A \times (V_r \cos(\omega t) + V_i \sin(\omega t)). \quad (17-3)$$

در مرز خروجی هم از یک شرط مرزی جابجایی^۲ استفاده شده است. در مرز خروجی نباید هیچگونه برگشت جریان و یا وجود تأثیرات خروجی به داخل شبکه محاسباتی داشته باشیم. در این مرز از معادله جابجایی برای تولید شرط مرزی درپشته برای هر دو مولفه سرعت استفاده می‌کنیم که معادله آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (18-3)$$

^۱- Forcing

^۲- Convective Outflow Boundary Condition

در این معادله، مولفه‌های سرعت u و v جایگزین ψ می‌گردند. ضریب c برابر با سرعت کلی انتقال موج و یا سرعت متوسط جریان در جهت اصلی در مرز خروجی است. مقدار c بین صفر و یک می‌باشد. البته مقدار دقیق این پارامتر مشخص نیست و باید با تخمین مناسبی در مجموعه محاسباتی تعیین شود [۱۷].

۳-۴- شرط اولیه

شرط اولیه برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی همراه با اغتشاشات، نتیجه بدست آمده از جریان لایه مرزی دو بعدی در حالت پایدار زمانی می‌باشد که در آن شرط مرزی ورودی برابر با جریان اولیه می‌باشد و هیچگونه اغتشاش نداردیم. در لایه مرزی پایدار زمانی در گره‌های مختلف بعد از گذشت زمان، مقدار سرعت در آن دیگر تغییر نمی‌کند و مستقل از زمان و پایدار می‌گردد.

فصل چهارم

محاسبات عددی

۴-۱- مقدمه

در این فصل جزئیات روش‌های عددی استفاده شده در معادلات حاکم، جهت استفاده در برنامه کامپیوتری بطور کامل توضیح داده شده است. برای حل معادلات (۳-۱۲) و (۳-۱۳)، ما باید قادر به انجام اعمال زیر باشیم:

- ۱- محاسبه مشتقات مادی^۱
- ۲- حل معادله پوآسون برای حالت دو بعدی
- ۳- انتگرال گیری از معادله پیوستگی به منظور بدست آوردن v از معادله (۳-۱۳)
- ۴- محاسبه ترم‌های غیر خطی در معادله (۳-۱۲)
- ۵- پیشرفت زمانی (بدست آوردن داده‌های جدید، که به عنوان شرط اولیه برای زمان بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد).

۴-۲- محاسبه مشتقات

مشتقات مادی در این پژوهش، با استفاده از روش تفاضلات محدوده فشرده^۲ محاسبه گردیده است. این روش ابتدا توسط لیلی^۳ [۱۸] ارائه شد، ایشان مشتق اول تابع دلخواهی مانند $f(x)$ را بطور ضمنی^۴ مطابق معادله (۴-۱) بیان نموده:

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha + 2}{3\Delta x}(f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha - 1}{12\Delta x}(f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (4-1)$$

^۱ - Spatial

^۲ - Compact (pade) finite difference

^۳ - S.K.Lele

^۴ - Implicitly

که در آن علامت پریم نمایانگر مشتق اول، زبیاانگر شماره گره $(0 \leq j \leq J)$ و $\Delta x = L_x/J$ می باشد. اگر در معادله (۱-۴)، $\alpha = 1/4$ یا $\alpha = 1/3$ قرار داده شود به طرحهایی با مرتبه خطای چهارم و ششم می‌رسیم، در این صورت ترم قطری اصلی در طرف راست معادله (۱-۴) سه یا چهار برابر کوچکتر از دیگر ترم‌ها است. این مسئله می‌تواند موجب ایجاد شرایط ناهنجاری^۱ در ماتریس گردد. برای جلوگیری از این مسئله و اصلاح معادله هر دو طرف آن را در ضریب $1/\alpha$ ضرب می‌کنیم. در این صورت معادله (۱-۴) به فرم معادله (۲-۴) تغییر شکل خواهد یافت.

$$f'_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f'_j + f'_{j+1} = \frac{1 + 2/\alpha}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4 - 1/\alpha}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (۲-۴)$$

در مرزها یعنی جایی که $j=0$ یا $j=J$ است، از یک طرح مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f'_0 + 2f'_1 = \frac{1}{2\Delta x} (-5f_0 + 4f_1 + f_2) \quad (۳-۴)$$

$$f'_J + 2f'_{J-1} = \frac{1}{2\Delta x} (5f_J - 4f_{J-1} - f_{J-2}) \quad (۴-۴)$$

در همسایگی مرزها یعنی جایی که $j=1$ یا $j=J-1$ است از معادله (۲-۴) در حالتی که $\alpha = 1/4$ است، استفاده می‌شود.

همانطور که توسط لیلی بحث شده است، با قرار دادن $\alpha' = (16\alpha + 32)/(40\alpha - 1)$ به جای α در معادله (۲-۴) برای گره‌های $j=2$ و $j=J-2$ می‌توان پایداری و بقای عددی معادله

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} f(u)$$

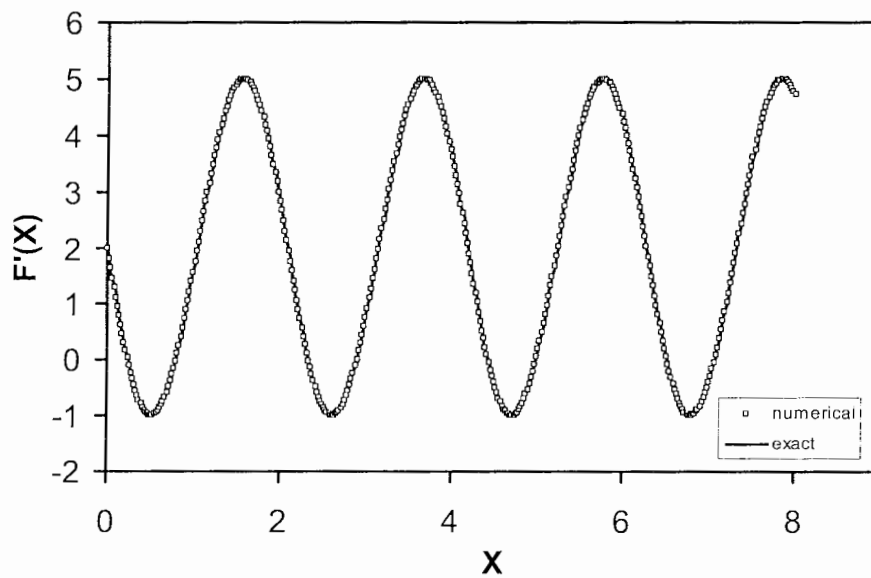
را تضمین نمود.

^۱ - Ill-conditioning

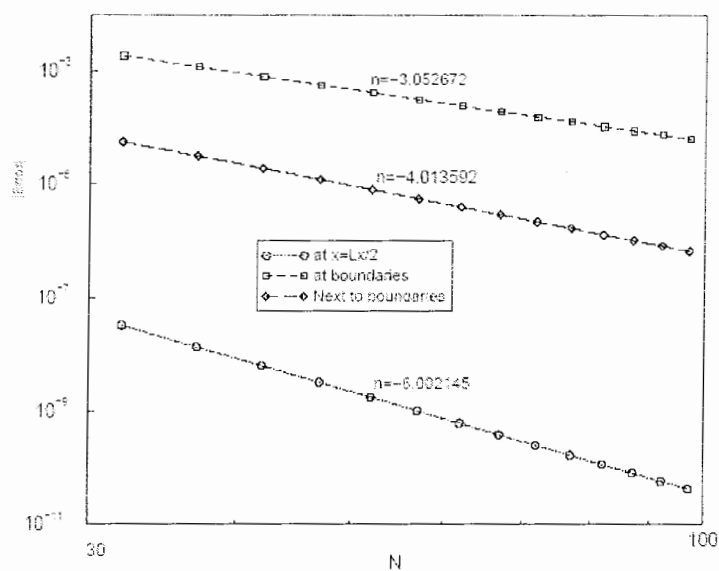
بطور خلاصه در صورتیکه در شکل کلی معادله، $\alpha=1/4$ قرار دهیم، ماتریس محاسبات به فرم $[A]_{n \times n} \times [F']_{n \times 1} = [B]_{n \times n} \times [F]_{n \times 1}$ خواهد بود. که در آن ماتریس‌های $[A]$ و $[B]$ ماتریس‌های ضرایب و ماتریس‌های $[F]$ و $[F']$ مقادیر توابع $f(x)$ و $f'(x)$ می‌باشد.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2\Delta x} & \frac{4}{2\Delta x} & \frac{1}{2\Delta x} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{-3}{\Delta x} & 0 & \frac{3}{\Delta x} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{-3}{\Delta x} & 0 & \frac{3}{\Delta x} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & \frac{-3}{\Delta x} & 0 & \frac{3}{\Delta x} & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & \frac{-3}{\Delta x} & 0 & \frac{3}{\Delta x} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{-1}{2\Delta x} & \frac{-4}{2\Delta x} & \frac{5}{2\Delta x} \end{bmatrix}$$

در شکل (۴-۱) مقایسه بین نتایج عددی مشتق اول و مقدار حقیقی تابع $y = 2x + \cos(3x)$ را می‌توان ملاحظه نمود. انتظار داریم که طرحی با مرتبه سوم در مرز و مرتبه خطای ششم در گره‌های مرکزی داشته باشیم. میزان دقت نیز در شکل (۴-۲) برای گره‌های مرزی و گره‌های داخلی ترسیم شده است.



شکل (۴-۱): تقریب مشتق اول تابع $y = 2x + \cos(3x)$



شکل (۴-۲): مرتبه دقت برای مشتق اول با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [۱۷]

معادله (۵-۴) مشتق دوم تابع $f(x)$ را نشان می‌دهد که یک طرح اختلاف محدود فشرده و با دقت مرتبه چهارم است.

$$\alpha f_{j+1}'' + f_j'' + \alpha f_{j-1}'' = \frac{4(1-\alpha)}{3\Delta x^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10\alpha-1}{12\Delta x^2}(f_{j-2} - 2f_j + f_{j+2}) \quad (5-4)$$

که در آن $\alpha = 1/4$ است. در اینجا نیز مسئله ناهنجاری هم مورد توجه قرار گرفته است. برای غلبه بر این مشکل، معادله (۵-۴) را در ضریب $1/\alpha$ ضرب می‌کنیم. در این صورت معادله به فرم زیر تغییر شکل خواهد داد:

$$f_{j+1}'' + \frac{1}{\alpha} f_j'' + f_{j-1}'' = \frac{4(1/\alpha-1)}{3\Delta x^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10-1/\alpha}{12\Delta x^2}(f_{j-2} - 2f_j + f_{j+2}) \quad (6-4)$$

در مرزهای جریان، حالت مرتبه سوم یک طرفه به کار برده می‌شود که به صورت زیر می‌باشد:

$$f_0'' + 11f_1'' = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_0 - 27f_1 + 15f_2 - f_3) \quad (7-4)$$

$$f_j'' + 11f_{j-1}'' = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_j - 27f_{j-1} + 15f_{j-2} - f_{j-3}) \quad (8-4)$$

از طرفی با مشتق‌گیری از معادله (۳-۴)، معادله (۹-۴) تولید می‌شود.

$$f_0'' + 2f_1'' = \frac{1}{2\Delta x}(-5f_0' + 4f_1' + f_2') \quad (9-4)$$

حال به سادگی می‌توان از معادله (۹-۴)، معادله (۱۰-۴) را بدست آورد.

$$f_0'' + 2f_1'' = \frac{-3}{\Delta x} f_0' + \frac{1}{2\Delta x}(f_0' + 4f_1' + f_2') \quad (10-4)$$

با جایگذاری طرف چپ معادله (۳-۴) (با فرض $\alpha = 1/4$) برای ترمهای داخل پرانتز در معادله (۱۰-۴) به

معادله زیر می‌رسیم:

$$f_0'' + 2f_1'' = \frac{-3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{(x=0)} - \frac{3}{2\Delta x^2}(f_0 - f_2) \quad (11-4)$$

معادله (۱۱-۴) زمانی در داخل مرزها به کار برده می‌شود که مقادیر تابع و مشتق آنها موجود باشند.

مشابه این روابط را می‌توان برای جریان خروجی از مرز، هنگامی که تابع و مشتق آن در دسترس است

بکار برد.

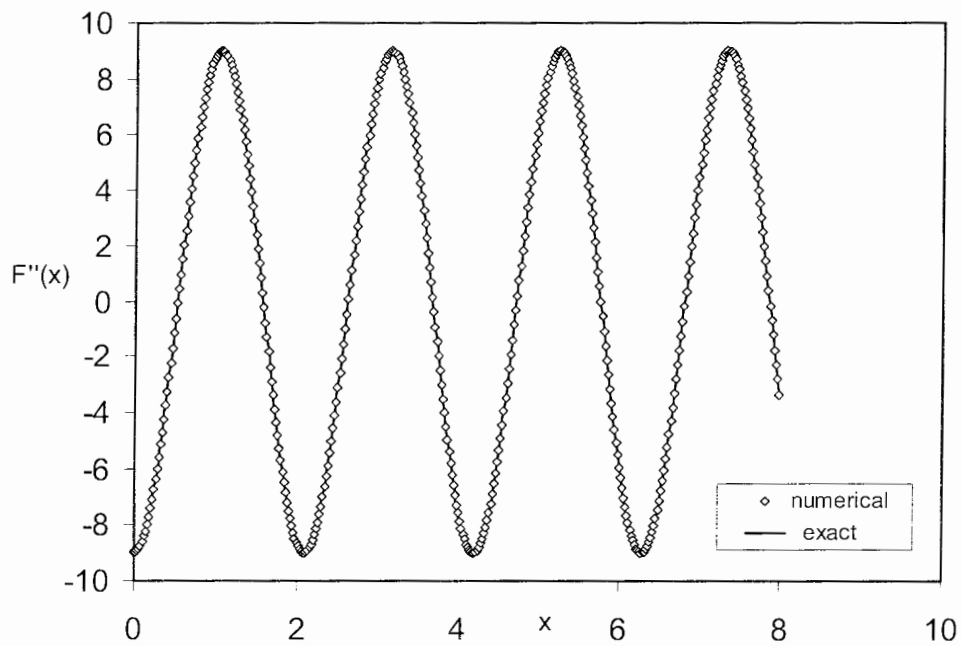
$$f_j'' + 2f_{j-1}'' = \frac{3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{(x=Lx)} - \frac{3}{2\Delta x^2} (f_j - f_{j-2}) \quad (۱۲-۴)$$

نزدیک مرزها یعنی جائیکه $j=1$ و $j=J-1$ است از طرح اختلاف محدوده فشرده مرتبه دوم استفاده شده است که با جایگزینی $\alpha = 1/10$ در معادله (۵-۴) بدست می‌آید.

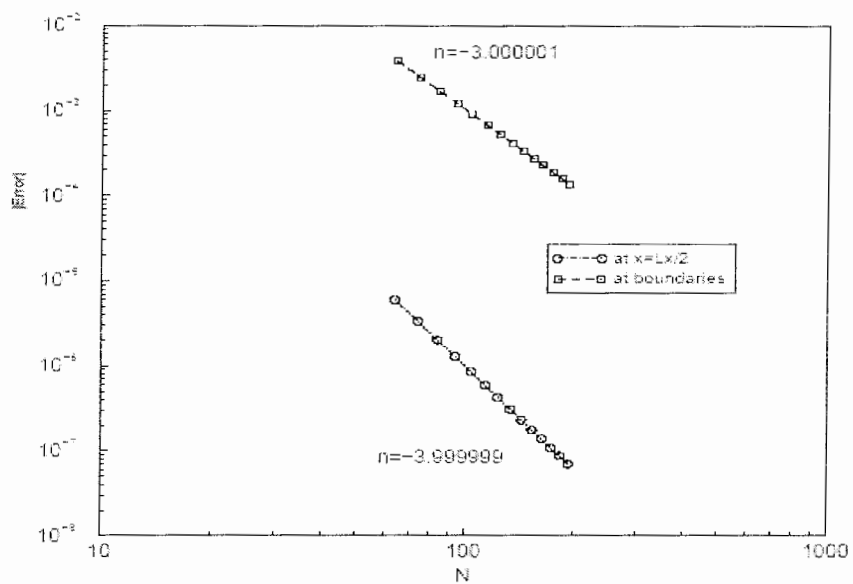
به طور خلاصه ماتریس محاسبات به فرم $[C]_{n \times n} \times [F'']_{n \times 1} = [D]_{n \times n} \times [F]_{n \times 1}$ خواهد بود. که در آن ماتریس‌های $[C]$ و $[D]$ ماتریس‌های ضرایب و ماتریس‌های $[F]$ و $[F'']$ مقادیر توابع $f(x)$ و $f''(x)$ می‌باشد.

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 11 & 1 \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} \frac{13}{\Delta x^2} & \frac{-27}{\Delta x^2} & \frac{15}{\Delta x^2} & \frac{-1}{\Delta x^2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{12}{\Delta x^2} & \frac{-24}{\Delta x^2} & \frac{12}{\Delta x^2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{2\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^2} & \frac{-9}{\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^2} & \frac{1}{2\Delta x^2} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^2} & \frac{-9}{\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^2} & \frac{1}{2\Delta x^2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & \frac{1}{2\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^2} & \frac{-9}{\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^2} & \frac{1}{2\Delta x^2} & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^2} & \frac{-9}{\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^2} & \frac{1}{2\Delta x^2} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{12}{\Delta x^2} & \frac{-24}{\Delta x^2} & \frac{12}{\Delta x^2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{-1}{\Delta x^2} & \frac{15}{\Delta x^2} & \frac{-27}{\Delta x^2} & \frac{13}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

در شکل (۳-۴) مقایسه بین نتایج عددی مشتق دوم و مقدار حقیقی تابع $y = 2x + \cos(3x)$ را می‌توان ملاحظه نمود. میزان خطا نیز در شکل (۴-۴) برای گره‌های مرزی و گره‌های داخلی ترسیم شده است.



شکل (۴-۳): تقریب مشتق دوم تابع $y = 2x + \text{Cos}(3x)$



شکل (۴-۴): مرتبه دقت برای مشتق دوم با بکار بردن طرح اختلاف محدود استاندارد [۱۷]

برای محاسبه مشتقات چهارم هم می‌توان اپراتور مشتق دوم را دوبار اعمال کرد، که در طرف راست معادله ناویر-استوکس و در قسمت ترم‌های لزجی وجود دارد.

۴-۳- شبکه محاسباتی (محدود کردن دامنه y)

برای حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در مکانیک سیالات، مشتقات پاره‌ای را باید تقریب زد. با این تقریبها، مشتقات پاره‌ای به عبارتهای تفاضل محدودی تبدیل می‌شوند که معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را به معادلات جبری تبدیل می‌کنند. معادلات جبری حاصل را معادلات تفاضل محدود می‌نامند. این معادلات جبری را در شبکه ایجاد شده در قلمرو مورد نظر حل می‌کنیم. بنابراین در داخل قلمرو و روی مرزهای آن، مجموعه‌ای از نقاط شبکه باید مشخص شود. معمولاً، قلمرو محاسبات به شکل مستطیل انتخاب می‌شود و نقاط داخلی شبکه بر روی خطوط شبکه توزیع می‌شوند. بنابراین، نقاط شبکه را می‌توان به راحتی نسبت به خطوط شبکه مشخص کرد. این نوع شبکه را شبکه باسازمان می‌نامند، که موضوع این پژوهش نیز می‌باشد. البته دسته دیگر از شبکه‌ها به گونه‌ای ساخته می‌شود که نقاط شبکه آنها را نمی‌توان بر روی خطوطی از شبکه که به صورت منظم تعریف شده‌اند، مرتبط کرد. این نوع شبکه را شبکه بی‌سازمان گویند. روشهای شبکه سازی را به طور کلی به صورت زیر دسته بندی می‌کنیم:

۱- شبکه سازی به روش جبری

۲- شبکه سازی با استفاده از معادلات دیفرانسیل

۳- شبکه سازی با استفاده از اعداد مختلط و نگاشت همدیس^۱

علاوه بر این، دستگاه شبکه‌ها را، به شبکه‌های ثابت و قابل تطبیق نیز تقسیم می‌کنند. بدیهی است که یک شبکه ثابت پیش از آغاز حل معادلات حاکم بر جریان سیال ایجاد می‌شود و مستقل از حل، ثابت می‌ماند. از سوی دیگر، در یک شبکه تطبیقی، شبکه همراه با نتایج حل معادلات سیال شکل می‌گیرد. به عنوان مثال، در یک موج ضربه‌ای، نقاط شبکه در حوالی نقاط با گرادیان زیاد متمرکز می‌شوند. یک

^۱ - Conformal mapping

نمونه از شبکه تطبیقی، شبکه‌ای است که توسط کردا^۱ [۱۹] برای حل جریان لزج مافوق صوت بر روی یک پله وارونه مورد استفاده قرار گرفته است. در این شبکه از تبدیل زیر استفاده می‌شود:

$$\Delta x = \frac{B\Delta\xi}{1+b(\partial g/\partial x)} \quad (۱۳-۴)$$

$$\Delta y = \frac{C\Delta\xi}{1+c(\partial g/\partial y)} \quad (۱۴-۴)$$

که در آن g متغیر اولیه میدان جریان است (مانند p, ρ یا T). اگر $g = p$ باشد معادلات (۱۳-۴) و (۱۴-۴) نقاط شبکه را در نواحی که گرادیان فشار زیاد است در فواصل کم از یکدیگر قرار می‌دهد و اگر $g = T$ باشد، نقاط شبکه در نواحی که گرادیان درجه حرارت زیاد است در فواصل کم از یکدیگر قرار می‌گیرند. B و C فاکتورهای مقیاس هستند. بقیه پارامترها در قسمت‌های بعد بصورت کامل تشریح می‌گردد. اما در این پژوهش به علت عدم نیاز به استفاده از شبکه تطبیقی از دستگاه شبکه ثابت استفاده شده است و همچنین به علت محاسن شبکه سازی جبری که عبارتند از:

- ۱- از نظر محاسباتی خیلی سریع‌اند.
 - ۲- متریک‌ها به صورت تحلیلی محاسبه می‌شوند. از این رو خطای عددی ناچیز است
 - ۳- ایجاد تراکم در مناطق مختلف شبکه به راحتی امکان پذیر است.
- از آن سود جسته شده است. باید توجه داشت که در هنگام شبکه سازی نکات زیر به طور کامل رعایت شوند:

- ۱- در هنگام تصویر کردن نقاط رابطه یک به یک رعایت شود، به طوری که خطوط هم‌خانواده شبکه، یکدیگر را قطع نکنند.
- ۲- هموار بودن توزیع نقاط شبکه
- ۳- عمود یا نزدیک به عمود بودن خطوط شبکه
- ۴- امکان تراکم یا انبساط نقاط شبکه

^۱-Corda

۴-۳-۱- تبدیل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم

معادلات جریان سیال شامل معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی است. گفتنی است که شکل و نوع معادلات تبدیل یافته، مانند معادله دیفرانسیل پاره‌ای اولیه باقی می‌ماند. یعنی اگر معادله اولیه سهموی است، معادله تبدیل یافته نیز سهموی خواهد بود. اثبات ریاضی این مطلب در مرجع [۲۰] آمده است. حال روابط زیر را بین فضای فیزیکی و فضای محاسباتی تعریف می‌کنیم.

$$\xi = \xi(x, y) \quad (15-4)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (16-4)$$

که در آن ξ محور مختصات در امتداد خطوط جریان بوده و η محور مختصات عمود بر سطح می‌باشد

قانون زنجیره‌ای برای مشتق‌های پاره‌ای به صورت رابطه (۱۷-۴) است.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (17-4)$$

مشتق‌های پاره‌ای را با استفاده از اندیسه‌ها نشان می‌دهیم مثلاً $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_x$ بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (18-4)$$

و به طریق مشابه

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (19-4)$$

حال معادله دیفرانسیل پاره‌ای مدلی را به صورت معادله (۲۰-۴) در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (20-4)$$

این معادله را با استفاده از معادلات (۱۷-۴) و (۱۸-۴) از فضای فیزیکی به فضای محاسباتی می‌بریم. نتیجه می‌شود:

$$\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + a \left[\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] = 0$$

که آن را به صورت زیر می‌نویسیم .

$$\left(\xi_x + a \xi_y \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(\eta_x + a \eta_y \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad (۲۱-۴)$$

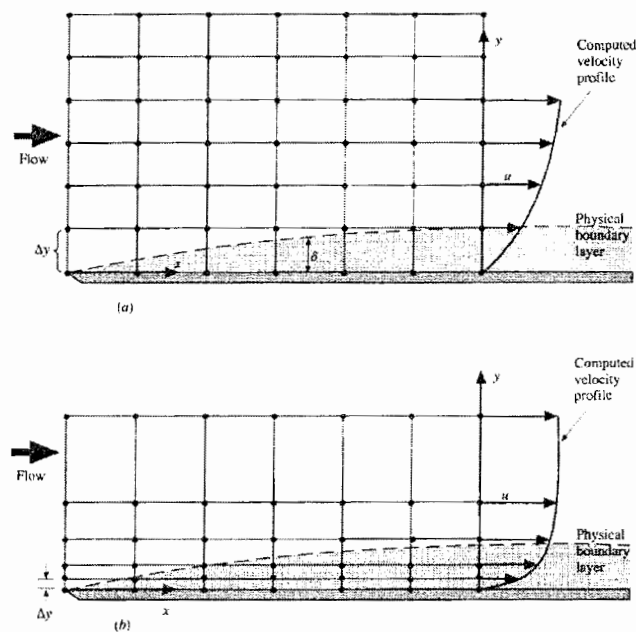
این معادله را در قلمرو محاسباتی حل می‌کنیم. قابل ذکر است که مشتقهای تبدیل ξ_x ، ξ_y و η_x ، η_y را باید از طریق روابط (۱۵-۴) و (۱۶-۴) محاسبه کرد. از مقایسه معادله دیفرانسیل پاره‌ای اولیه (۲۰-۴) با معادلات تبدیل یافته (۲۱-۴) کاملاً آشکار است که معادلات تبدیل یافته بسیار پیچیده‌تر از معادلات اولیه هستند و این مطلب عموماً درست است. بنابراین، فایده بکارگیری دستگاه مختصات کلی، به علت پیچیدگی حاصل، کمتر می‌شود، ولی در هر حال فواید آن بسیار بیشتر از مشکل مربوط به پیچیدگی معادلات تبدیل یافته است.

۴-۳-۲- شبکه‌های کشیده (فشرده)^۱

شبکه‌های کشیده یا فشرده شده یکی از تکنیکهای تولید شبکه می‌باشد. این روش شامل امتداد دادن شبکه موجود در امتداد یک یا چند محور مختصات می‌باشد. در جریانهای توأم با تمرکز گرادیانهای بزرگ در نواحی خاص برای نشان دادن خواص جریان به دقت بیشتری نیاز است. به عنوان مثال، جریان سیال لزج در نزدیکی دیواره‌ها دارای گرادیان بزرگی است. محاسبه دقیق گرادیان جریان در این نواحی نیاز به تعداد زیادی نقطه در شبکه قلمرو حل دارد. به جای استفاده از شبکه‌ای با توزیع یکنواخت در قلمرو فیزیکی، نقاط شبکه را می‌توان در نواحی با گرادیان بالا به صورت متراکم در آورد که در نتیجه آن تعداد کل نقاط شبکه کاهش می‌یابد و راندمان بالا می‌رود. در شکل (۵-۴) ضرورت

^۱ - Stretched (Compressed) grids

قرار دادن تعدادی از نقاط شبکه در لایه مرزی را به وضوح می‌توان مشاهده نمود. واضح است که امتیاز شبکه کشیده (یا فشرده) آنست که در جائیکه لازم است می‌توان نقاط شبکه را در میدان جریان قرار داد و همچنین در نواحی که نیازی به نقاط شبکه احساس نمی‌شود و یا نیاز کمتری احساس می‌شود نقاط شبکه را می‌توان از میدان جریان خارج نمود.



شکل (۴-۵): (a) هیچ یک از نقاط شبکه در لایه مرزی قرار ندارند
(b) تعدادی از نقاط شبکه در لایه مرزی قرار دارند

در این پژوهش نگاشت جبری^۱ با امکان ایجاد تراکم، بصورت معادلات (۴-۲۲) و (۴-۲۳) استفاده شده است. قابل ذکر است این شبکه برای محاسبات لایه مرزی مناسب است که به تراکم نقاط در نزدیکی سطوح جامد نیاز دارد. این عمل باعث صرفه جویی در هزینه محاسبات خواهد شد. این نگاشت جبری، دامنه فیزیکی $0 \leq y \leq L_y$ را به دامنه محاسباتی $0 \leq \eta \leq 1$ نگاشت می‌کند. فواصل گره‌ها در

^۱ - Algebraic mapping

مجموعه محدود شده یک اندازه و یکنواخت می‌باشند ولی در مجموعه فیزیکی این فواصل متساوی نیستند و در ناحیه‌ای بیشتر متمرکزند.

$$\xi(x, 0) = x \quad (22-4)$$

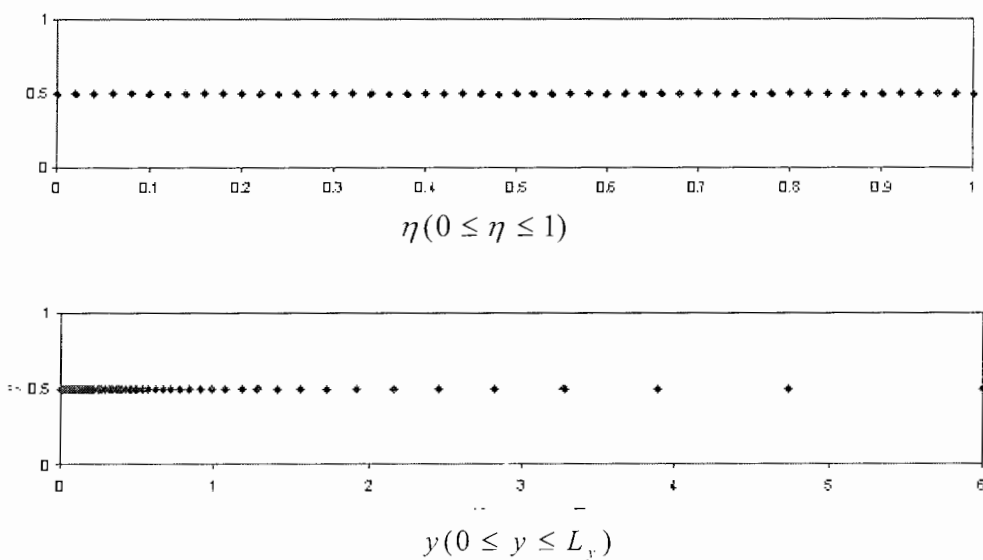
$$\eta(0, y) = \frac{y(L_y + y_0)}{L_y(y + y_0)} \quad (23-4)$$

که در این رابطه y_0 پارامتر نگاشت است و میزان کشیدگی را تعیین می‌کند.
معکوس رابطه بالا به صورت زیر است:

$$x(\xi, 0) = \xi \quad (24-4)$$

$$y(0, \eta) = \frac{L_y y_0 \eta}{y_0 + L_y(1 - \eta)} \quad (25-4)$$

در شکل (۴-۶) می‌توانیم توزیع شبکه را بر روی شبکه کشیده شده با $y_0 = 0.5$, $L_y = 6$, $N_y = 50$ با نگاشت ذکر شده، مشاهده نمود.



شکل (۴-۶): مقایسه قلمروهای فیزیکی و محاسباتی

حال متریک‌های تبدیل را از روابط جبری (۴-۱۵) و (۴-۱۶) به روش تحلیلی محاسبه می‌کنیم.

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 \quad (۴-۲۶)$$

$$\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (۴-۲۷)$$

$$\xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad (۴-۲۸)$$

$$\eta_y = -\frac{y(L_y + y_0)}{L_y(y + y_0)^2} + \frac{L_y + y_0}{L_y(y + y_0)} = \frac{\eta y_0}{y(y + y_0)} \quad (۴-۲۹)$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر بصورت معادلات زیر می‌باشد:

$$\eta_{xy} = \frac{2y(L_y + y_0)}{L_y(y + y_0)^3} - \frac{2(L_y + y_0)}{L_y(y + y_0)^2} = -2 \frac{\eta y_0}{y(y + y_0)^2}$$

$$\eta_{yy} = -\frac{6y(L_y + y_0)}{L_y(y + y_0)^4} + \frac{6(L_y + y_0)}{L_y(y + y_0)^3} = 6 \frac{\eta y_0}{y(y + y_0)^3} \quad (۴-۳۰)$$

$$\eta_{yyy} = \frac{24y(L_y + y_0)}{L_y(y + y_0)^5} - \frac{24(L_y + y_0)}{L_y(y + y_0)^4} = -24 \frac{\eta y_0}{y(y + y_0)^4}$$

مشتقات در فواصل فیزیکی به وسیله قانون زنجیره‌ای به هم مرتبط می‌شوند. عبارتهای مشتق اول، دوم و چهارم در فواصل فیزیکی تابعی از مشتقات در دامنه محاسباتی به صورت زیر می‌باشد.

$$\frac{d}{dy} = \eta_y \frac{d}{d\eta}$$

$$\frac{d^2}{dy^2} = \eta_{yy} \frac{d}{d\eta} + \eta_y^2 \frac{d^2}{d\eta^2}$$

(۴-۳۱)

$$\frac{d^4}{dy^4} = \eta_{yyy} \frac{d}{d\eta} + (4\eta_y \eta_{yy} + 3\eta_y^2) \frac{d^2}{d\eta^2} + 6\eta_y^2 \eta_{yy} \frac{d^3}{d\eta^3} + \eta_y^4 \frac{d^4}{d\eta^4}$$

حال برای استخراج اپراتورهای مشتق برای تابع نگاشت، از مشتقات جزئی که در قسمت قبل برای محاسبه مشتقات در جهت جریان ذکر شد، سود می‌جوئیم. اگر معادلات بسط یافته را در نظر بگیریم مشتقات بصورت روابط (۴-۳۲) می‌باشد:

$$f'_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f'_j + f'_{j+1} = \frac{1+2/\alpha}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4-1/\alpha}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (۳۲-۴)$$

$$\alpha f''_{j-1} + f''_j + \alpha f''_{j+1} = \frac{4(1-\alpha)}{3\Delta x^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10\alpha-1}{12\Delta x^2} (f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2})$$

با توجه به مطالب گفته شده در قسمت محاسبه مشتقات معادلات (۳۲-۴) را می‌توان بصورت ماتریسی به فرم زیر تبدیل نمود^۱:

$$A_1 \frac{df}{d\eta} = B_1 f \quad (۳۳-۴)$$

$$A_2 \frac{d^2 f}{d\eta^2} = B_2 f$$

در جهت عمود بر جریان نیز می‌توانیم با توجه به معادلات (۳۱-۴) روابطی مشابه ارائه کنیم که بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{df}{dy} = \Lambda_1 A_1^{-1} B_1 \quad (۳۴-۴)$$

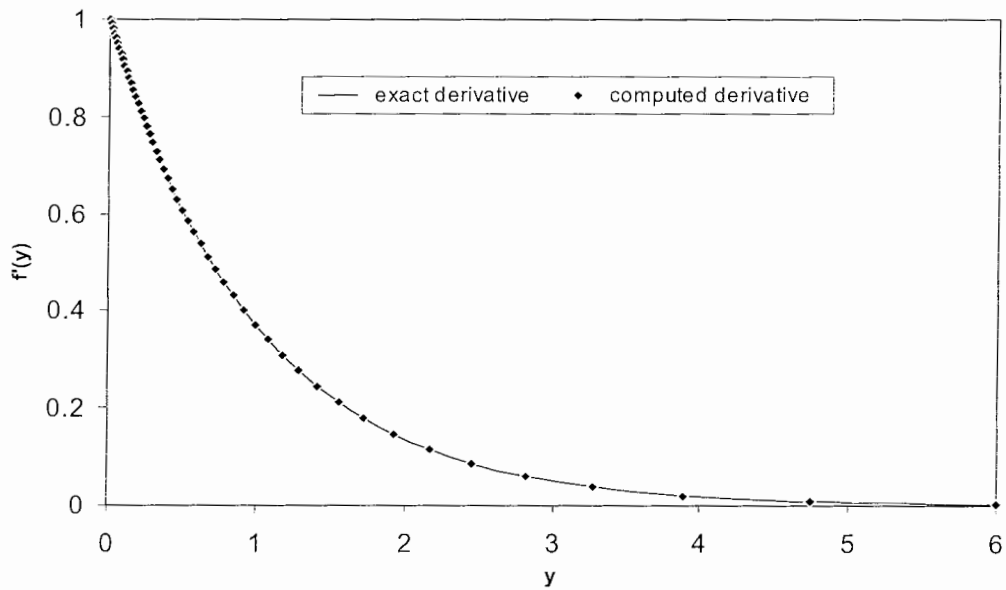
$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \Lambda_2 A_2^{-1} B_2 + \Lambda_3 A_1^{-1} B_1$$

که در این معادلات Λ_1 ، Λ_2 و Λ_3 ماتریس‌های قطری به ترتیب با مقادیر $\frac{\eta y_0}{y(y+y_0)}$ ،

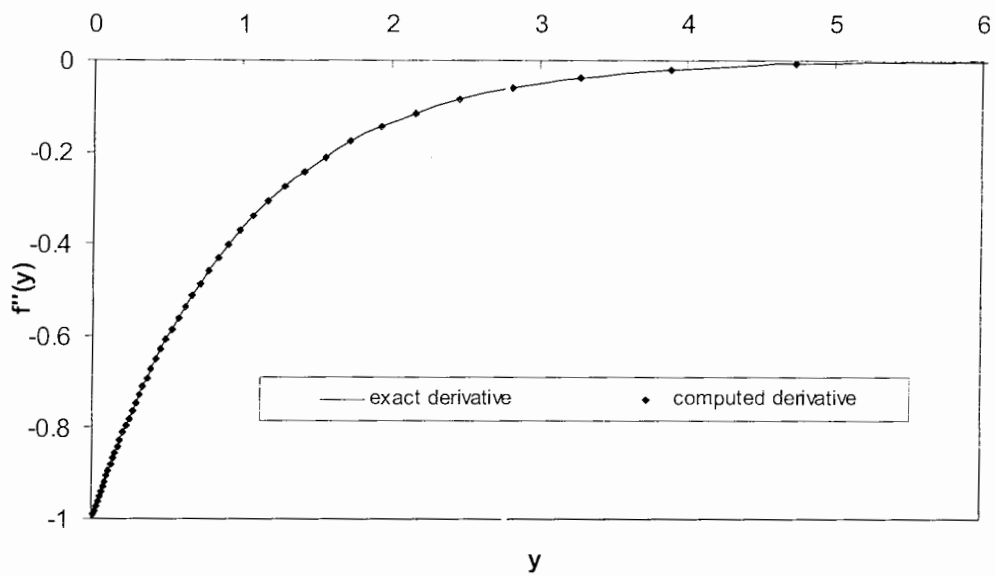
می‌شوند چرا که اولین و آخرین عضو در ماتریس‌های قطری Λ_1 ، Λ_2 و Λ_3 برابر صفر است.

در شکل‌های (۷-۴) و (۸-۴) می‌توانیم نتیجه این روش مشتق‌گیری را برای تابعی به فرم $f(y) = 1 - \exp(-y)$ ، با توجه به محدود کردن دامنه بصورت $y_0 = 0.5$ ، $L_y = 6$ ، $N_y = 50$ مشاهده نمود.

^۱ - نحوه بدست آوردن ضرایب A و B بطور کامل در قسمت محاسبات مشتقات توضیح داده شده است.



شکل (۷-۴): تقریب مشتق اول تابع $f(y) = 1 - \exp(-y)$ با توجه به فشرده سازی در جهت y



شکل (۸-۴): تقریب مشتق دوم تابع $f(y) = 1 - \exp(-y)$ با توجه به فشرده سازی در جهت y

۴-۴- الگوی پیشروی در زمان

برای انجام محاسبات و پیشروی در زمان، از طرح اختلاف زمانی رانج - کوتای مرتبه سوم فشرده^۱ که توسط رای^۲ [۲۱] ارائه شده است، استفاده می‌کنیم. کاربرد این روش را با در نظر گرفتن معادله مدل (۳۵-۴) و در نظر گرفتن جدول (۱-۴) تشریح می‌گردد:

$$du/dt = R(u) \quad (۳۵-۴)$$

جدول (۱-۴): طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم

زمان	اولین موقعیت	دومین موقعیت
t^n	u^n	$R(u^n)$
$t' = t^n + c_1 \Delta t$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$R' = R(u')$
$t'' = t' + (c_2 + d_2) \Delta t$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R) \Delta t$	$R'' = R(u'')$
$t^{n+1} = t'' + \Delta t$	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R') \Delta t$	

جدول (۱-۴) نشان می‌دهد که برای پیشروی زمانی معادله مدل (۳۵-۴) به اندازه Δt ، طرف راست معادله $(R(u))$ نیازمند محاسبه در سه زیر بازه زمانی است. در هر زیربازه زمانی، زمان به اندازه $(c_i + d_i) \Delta t$ افزایش می‌یابد و u بوسیله یک ترکیب خطی از R در مرحله زمانی حال و R در مرحله زمانی گذشته محاسبه می‌گردد. بعد از گذشت مرحله سوم، زمان برابر Δt و مقدار u محاسبه شده برابر مقدار u بعد از گذر از یک Δt زمانی است.

برای محاسبه ضرایب هم با معادل قرار دادن ضرایب حاصل از سری تیلور با طرح مذکور می‌توان اقدام نمود. در اینصورت داریم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1,$$

^۱ -Compact, third order, Runge-Kutte time differencing scheme

^۲ -A. Wray

$$c_1 c_2 + c_3 \left[\frac{d_2}{c_2} \left(1 + \frac{d_3}{c_3} \right) + c_2 \left(1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right] = \frac{1}{2},$$

$$c_1^2 c_2 + c_3 \left[c_1 + c_2 \left(1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right]^2 + c_1^2 d_3 = \frac{1}{3},$$

$$c_1 c_2 c_3 = \frac{1}{6}.$$

برای حل $d_1 = 0$ قرار می‌دهیم. نتیجه به صورت زیر است:

$$c_1 = 8/15 \quad d_1 = 0$$

$$c_2 = 5/12 \quad d_2 = -17/60$$

$$c_3 = 3/4 \quad d_3 = -5/12$$

تست زیر برای تعیین دقت طرح مذکور انجام شده است. $u(t) = e^{-t}$ همراه با شرط اولیه $u(0) = 1$ یک حل تحلیلی برای معادله (۴-۳۶) است.

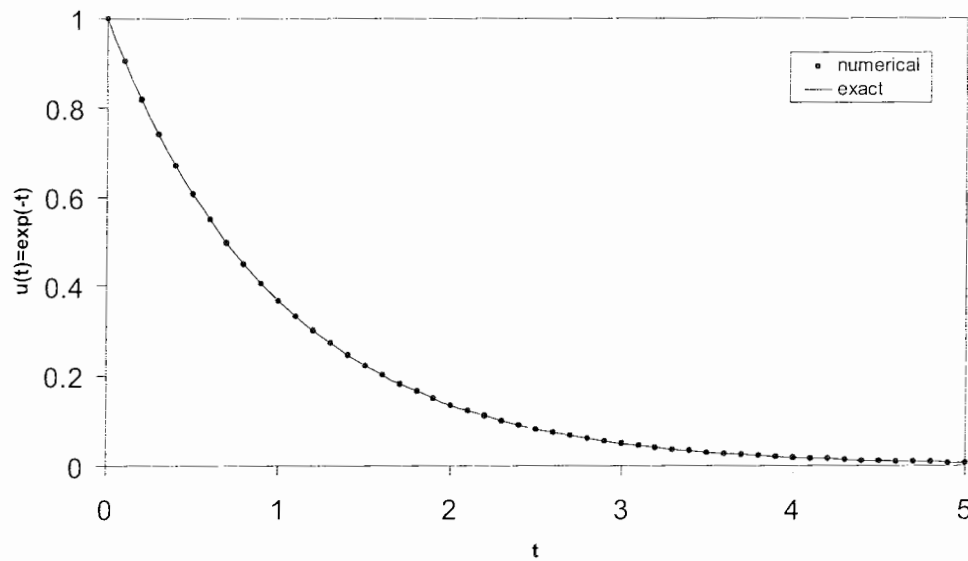
$$\frac{du}{dt} = -e^{-t} = R(u) \quad (۴-۳۶)$$

با توجه به معادله (۴-۳۶) و شرط اولیه آن، و با استفاده از روش اختلاف زمانی رانج - کوتای مرتبه سوم فشرده، مطابق با جدول (۴-۱)، مقدار تابع $u(t)$ در زمان $t = 0.1$ با گام زمانی $\Delta t = 0.1$ بصورت جدول (۴-۲) محاسبه گردیده است. قابل ذکر است که مقدار دقیق تابع در زمان $t = 0.1$ برابر با $u(0.1) = 0.904837$ می‌باشد.

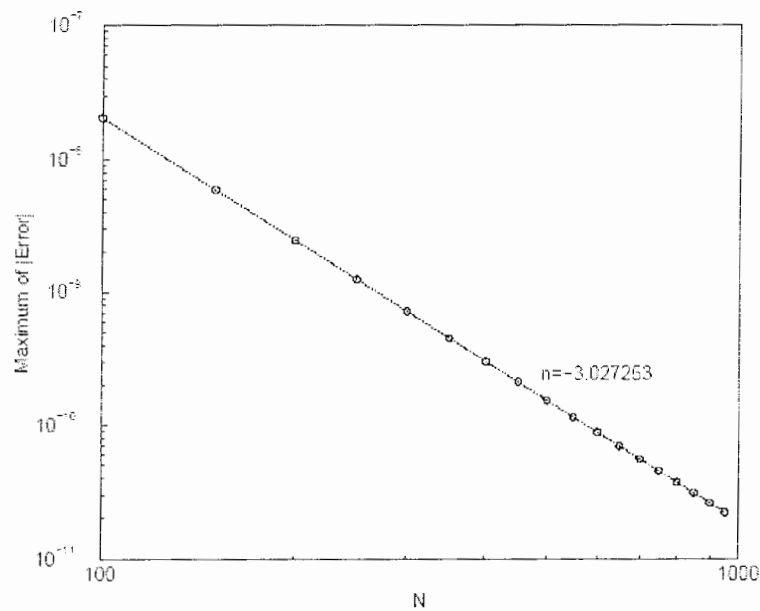
جدول (۲-۴): طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم در یک گام زمانی

زمان	اولین موقعیت	دومین موقعیت
$t^n = 0$	$u^n = 1$	$R(0) = -1$
$t' = 0.0533$	$u' = .9466$	$R' = R(u') = -0.9480639$
$t'' = 0.066$	$u'' = 0.935497$	$R'' = R(u'') = -0.9355069$
$t^{n-1} = 0.1$	$u^{n+1} = 0.904836$	

در شکل (۹-۴) مقایسه بین نتایج عددی حاصل از روش رانج کوتای مرتبه سوم و حل دقیق تابع مدل (۳۶-۴) با گام زمانی $\Delta t = 0.1$ برای یافتن $u(5)$ را مشاهده می‌کنیم. همچنین ماکزیمم خطا بین نتایج عددی و حل واقعی در شکل (۱۰-۴) رسم شده است که به روشنی نشان دهنده صحیح بودن دقت مرتبه سوم این طرح می‌باشد.



شکل (۴-۹): مقایسه بین نتایج عددی حاصل از روش رانج کوتای مرتبه سوم و حل دقیق تابع مدل (۴-۳۶)



شکل (۴-۱۰): مرتبه دقت طرح پیشروی در زمان برای $\frac{du}{dt} = -u(t)$ با $u(0) = 1$ [۱۷]

۴-۵- حل معادله پواسون^۱

بعد از محاسبه طرف راست معادله ناویر- استوکس و پیشروی در زمان، به معادله (۴-۳۷)، که به معادله پواسون مشهور است خواهیم رسید؛

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = R(x, y) \quad (۴-۳۷)$$

در معادله فوق مقدار R معلوم، و مقدار u مجهول می‌باشد.

فرض می‌کنیم که می‌خواهیم معادله پواسون را برای یک دامنه حل کنیم؛ ابتدا یک شبکه $I \times J$ به فرم زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{cccc} u_{1 \times 1} & u_{1 \times 2} & \dots & u_{1 \times J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2 \times 1} & u_{2 \times 2} & \dots & u_{2 \times J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{I \times 1} & u_{I \times 2} & \dots & u_{I \times J} \end{array}$$

حال با جایگزین نمودن اپراتورهای مشتقات دوم (بدست آمده از روش اختلاف محدود فشرده) به حل معادله (۴-۳۷) اقدام می‌نمائیم:

الف) مشتق مرتبه دوم در جهت X

$$Au_{xx} = Bu$$

که در آن u_{xx} مشتق دوم در جهت X است معادله بالا به شکل ماتریس به صورت زیر است:

$$A_{J \times J} u_{xxl \times J}^T = B_{J \times J} u_{1 \times J}^T \quad \Rightarrow \quad u_{xxl \times J}^T = (A_{J \times J}^{-1} B_{J \times J}) u_{1 \times J}^T$$

حال یک بار دیگر ترانهاده طرفین رابطه بالا را محاسبه می‌کنیم:

$$u_{xxl \times J} = u_{1 \times J} (A_{J \times J}^{-1} B_{J \times J})^T = UB$$

^۱ - Poisson

(ب) مشتق مرتبه دوم در جهت Y

$$Au_{yy} = Bu$$

که در آن u_{yy} مشتق دوم در جهت Y است معادله بالا به شکل ماتریس به صورت زیر است:

$$A_{I \times J} u_{yyI \times J} = B_{I \times I} u_{I \times J} \Rightarrow u_{yyI \times J} = (A_{I \times I}^{-1} B_{I \times J}) u_{I \times J} = AU$$

با جاگذاری این روابط و تبدیل R به فرم ماتریسی یعنی $R_{I \times J}$ در معادله پواسون داریم:

$$AU + UB = C \quad (۳۸-۴)$$

حال با توجه به روش حل بارتلز^۱ [۲۲] به حل معادله ماتریسی (۳۸-۴)، و در نهایت معادله پواسون اقدام می‌نماییم.

^۱-Bartels

۴-۶- انتگرال گیری

با حل معادله (۸-۳) می‌توان $u(x, y, t)$ را بدست آورد. برای محاسبه سرعت در جهت عرضی v از معادله پیوستگی بهره می‌گیریم. طبق معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (۳۹-۴)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (۴۰-۴)$$

چنانچه از طرح اختلاف محدود فشرده استفاده کنیم که ماتریس سمت راست معادله ۴-۲ دارای عناصر صفر بر روی قطر اصلی است و با این وضع نمی‌توان به انتگرال‌گیری پرداخت. جهت غلبه بر این مشکل با مشتق‌گیری از دو طرف معادله بر حسب y معادله (۴۱-۴) بدست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (۴۱-۴)$$

با وجود دو شرط مرزی برای v بصورت $y=0 \rightarrow v=0$ (شرط عدم لغزش) و $y=\infty \rightarrow v=0$ (اگر مرز دور دست را واقعاً دور از صفحه که تمام فعالیت‌های جریان در حوالی آن روی می‌دهد در نظر بگیریم، شرایط جریان آزاد را برای آن مرز می‌توان بکار برد، یعنی $(u=U_\infty, v=0)$ $y=y_{\max}$. [ب]) این معادله حل می‌شود.

۷-۴- نتایج حل DNS برای جریان لایه مرزی دو بعدی آرام

۴-۷-۱- معادله بلازیوس^۱

بلازیوس در سال ۱۹۰۸ حل لایه مرزی لایه‌ای روی یک صفحه تخت را پیدا کرد. ایشان با توجه به تشابهی که بین پروفیل‌های سرعت در کلیه مقاطع لایه مرزی وجود داشت، توانست با استفاده از یک متغیر نظیر η به جای دو متغیر x و y معادلات لایه مرزی را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کند. بلازیوس برای حل لایه مرزی بر روی صفحه تخت متغیر η را به شکل زیر معرفی کرد:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (42-4)$$

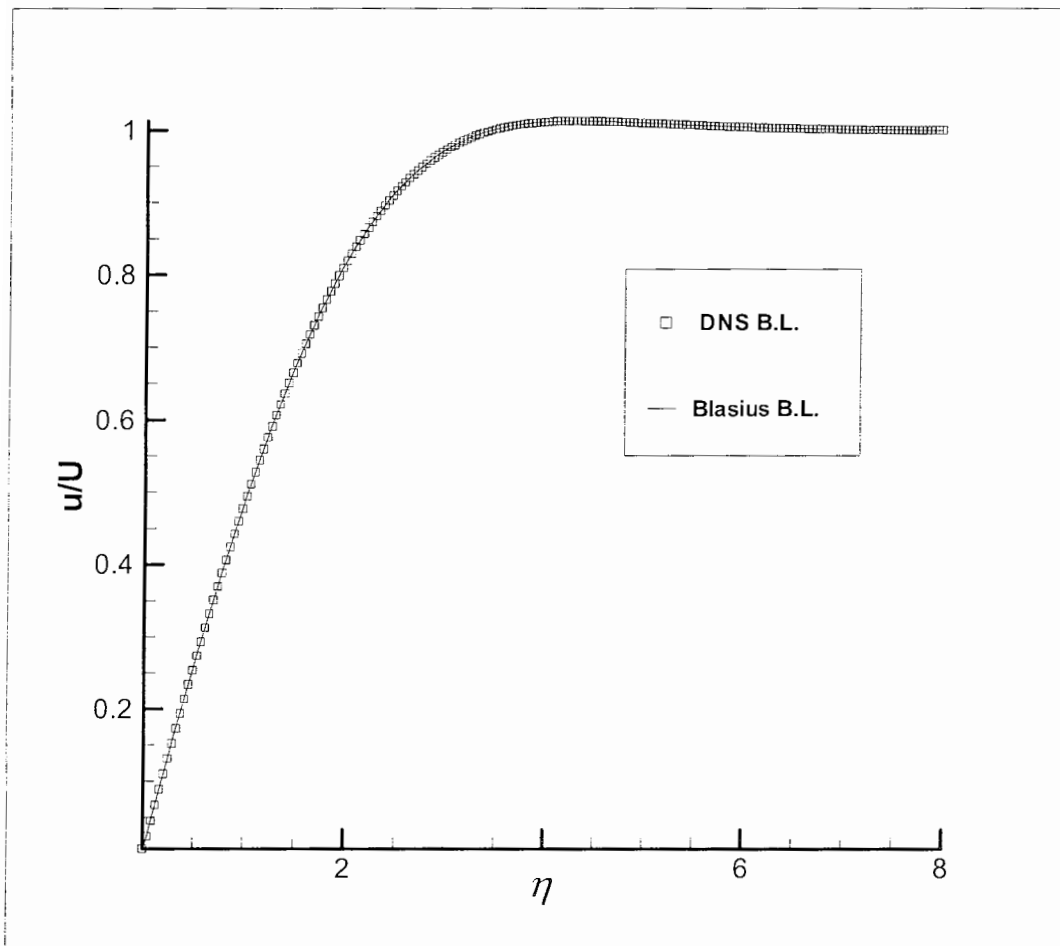
و توانست به معادله دیفرانسیل (۴۳-۴) برسد:

$$2f''' + ff'' = 0 \quad ; \quad f'(\infty) = 1 \quad ; \quad f'(0) = f(0) = 0 \quad (43-4)$$

معادله (۴۳-۴) را نمی‌توان به شکل بسته حل نمود؛ بلازیوس آن را با استفاده از بسط سری نمایی حول $\eta = 0$ ، که با بسط مجانبی برای $\eta \rightarrow \infty$ هماهنگ بود، حل کرد. همین معادله بعداً با دقت بیشتر مجدداً با استفاده از روش‌های عددی توسط هوارث^۲ [۲۳] حل شده؛ او نتایج را تا ۵ رقم اعشار بیان کرده است. با ترسیم $\frac{u}{U}$ بر حسب η با توجه به نتایج هوارث و مقایسه آن با نتایج حل مستقیم عددی، در شکل (۴-۱۱) صحت حل استفاده شده در این تحقیق آشکار می‌شود.

^۱ - Blasius

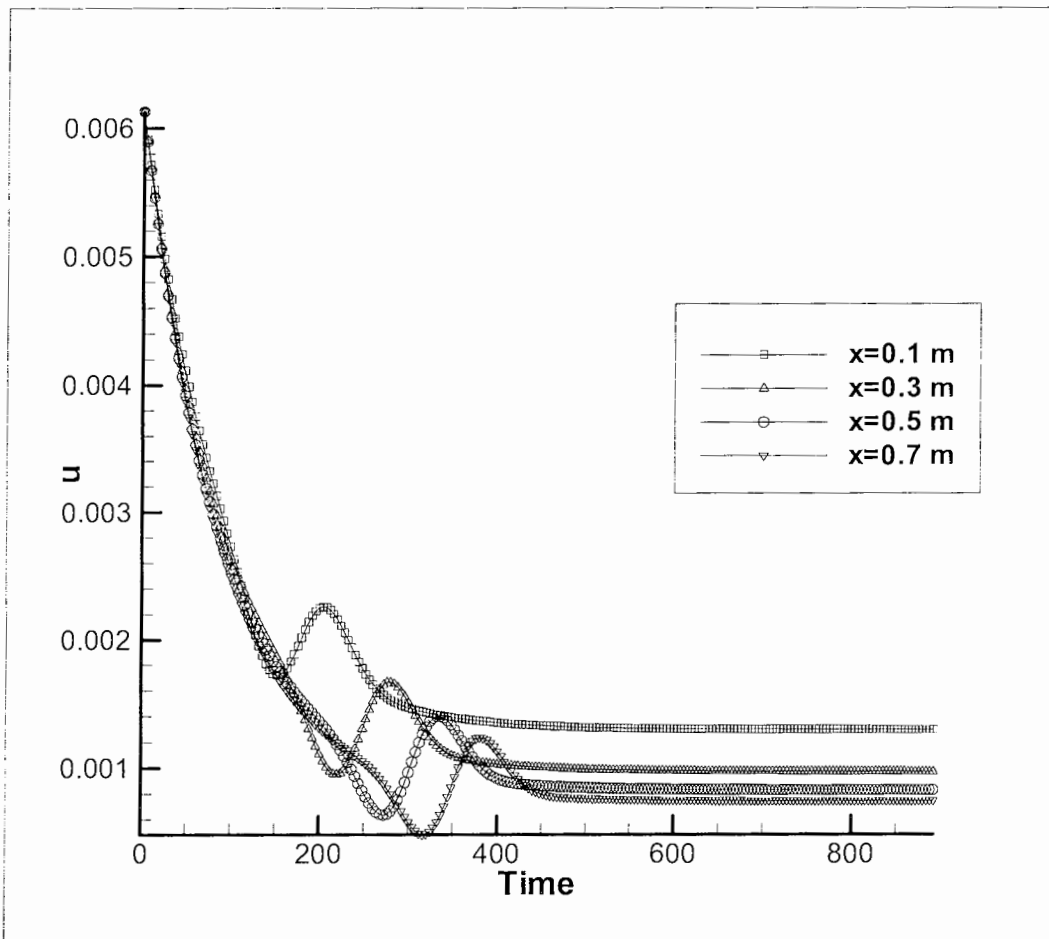
^۲ - Howarth



شکل (۴-۱۱): مقایسه بین حل بلازیوس با روش DNS

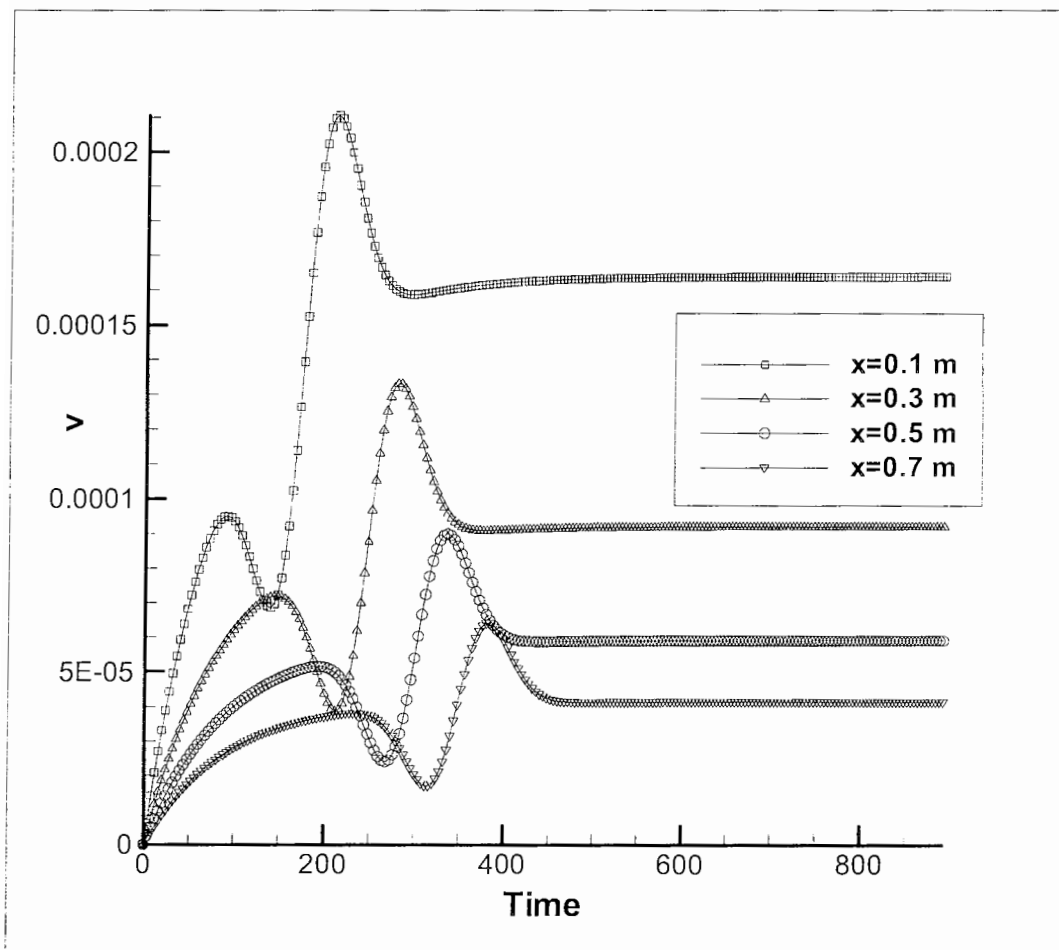
۴-۷-۲- گذر زمانی

برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی، بدون اغتشاشات ورودی انتظار داریم که سرعت لحظه‌ای و گردابه، در هر نقطه‌ای از دامنه، به یک حالت پایدار برسد. این موضوع کاملاً و بوضوح در شکل‌های (۴-۱۱) تا (۴-۱۶) نشان داده شده است.



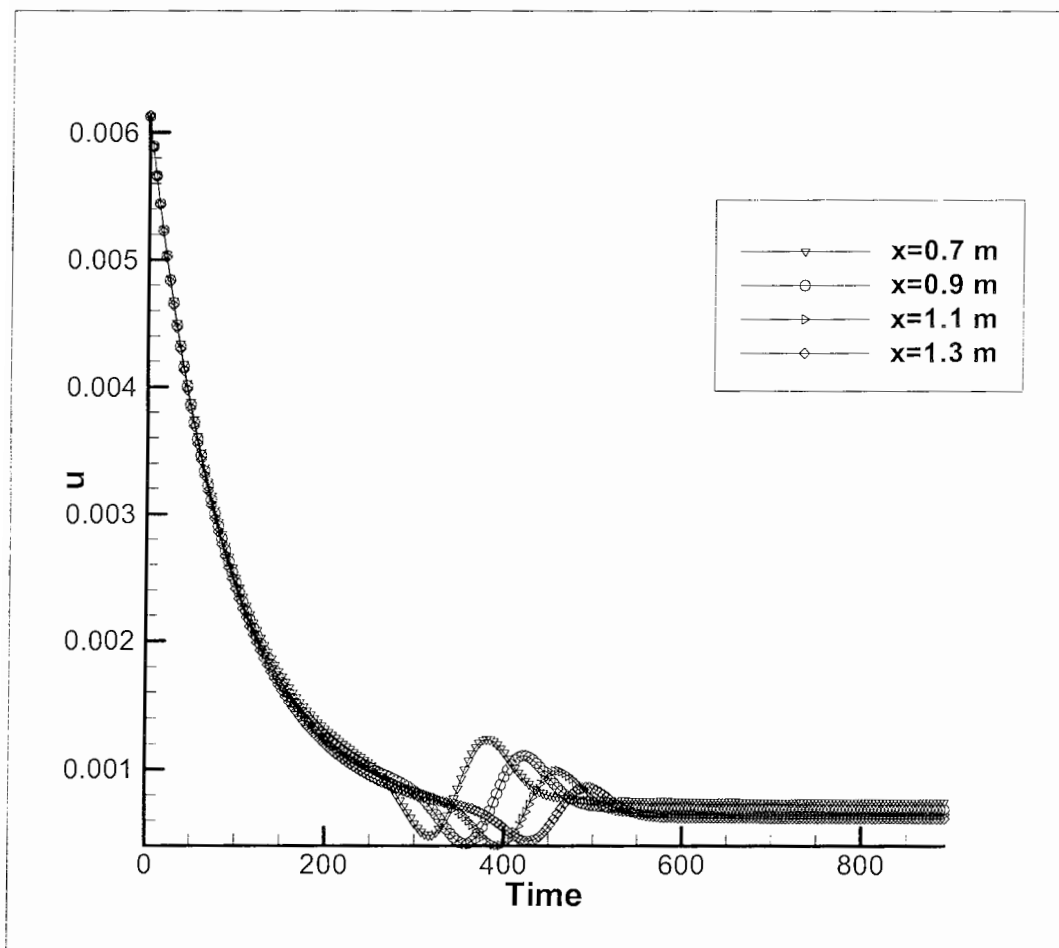
شکل (۴-۱۱): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در چهار فاصله مساوی در ابتدای جریان برای شبیه‌سازی جریان

لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی



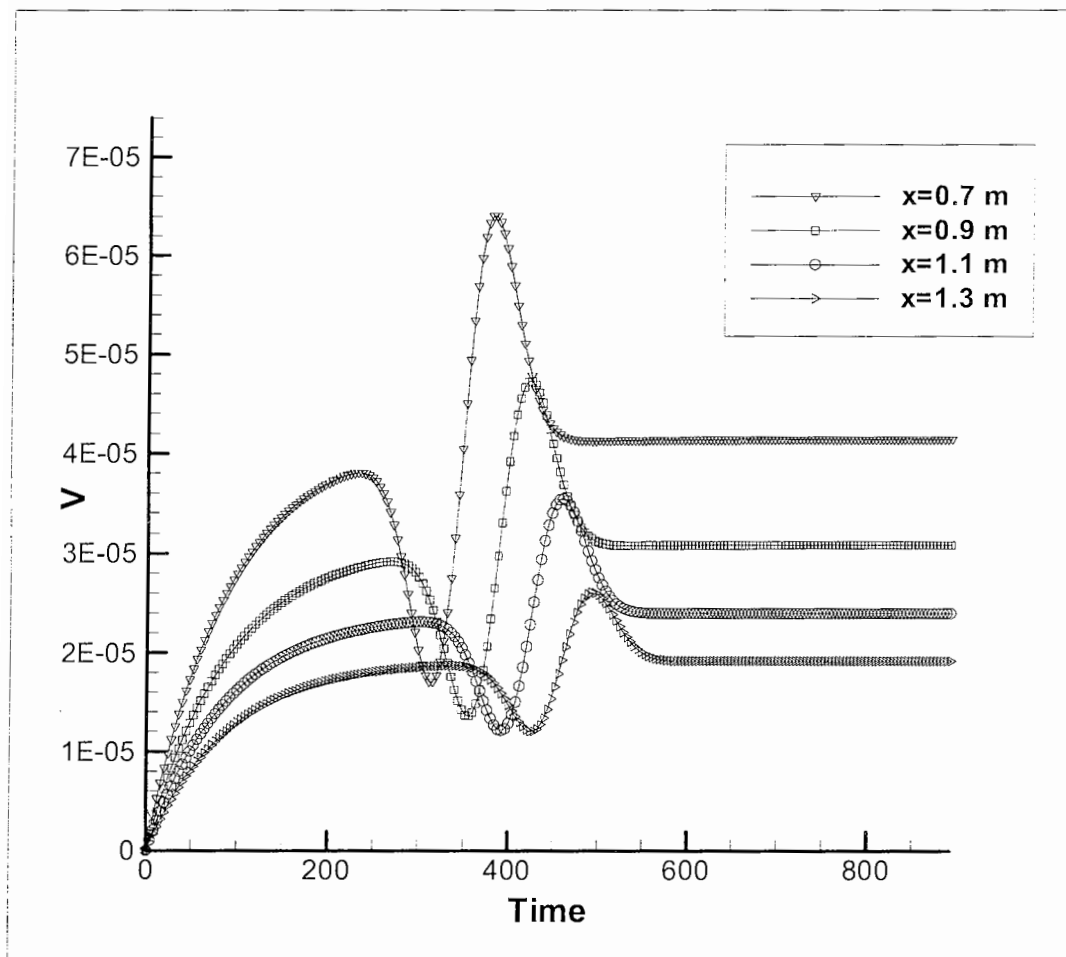
شکل (۴-۱۲): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در چهار فاصله مساوی در ابتدای جریان برای شبیه‌سازی جریان

لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی



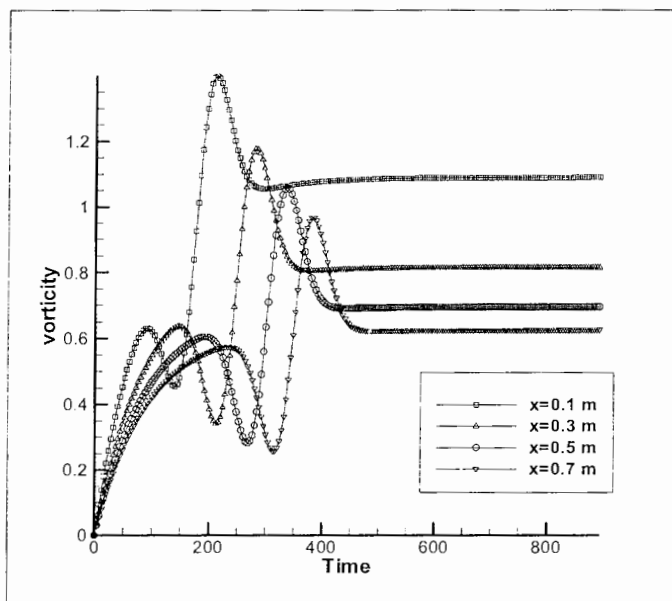
شکل (۴-۱۳): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در چهار فاصله مساوی در انتهای جریان برای شبیه‌سازی جریان

لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی



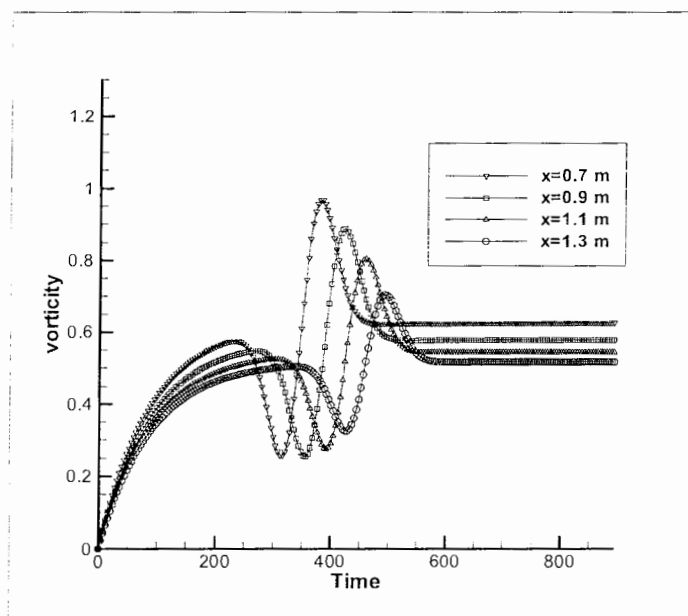
شکل (۴-۱۴): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در چهار فاصله مساوی در انتهای جریان برای شبیه‌سازی جریان

لایه مرزی دو بعدی بدون اغتشاش ورودی



شکل (۴-۱۵): گذر زمانی گردابه، ω ، در چهار فاصله مساوی در ابتدای جریان برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دو

بعدی بدون اغتشاش ورودی

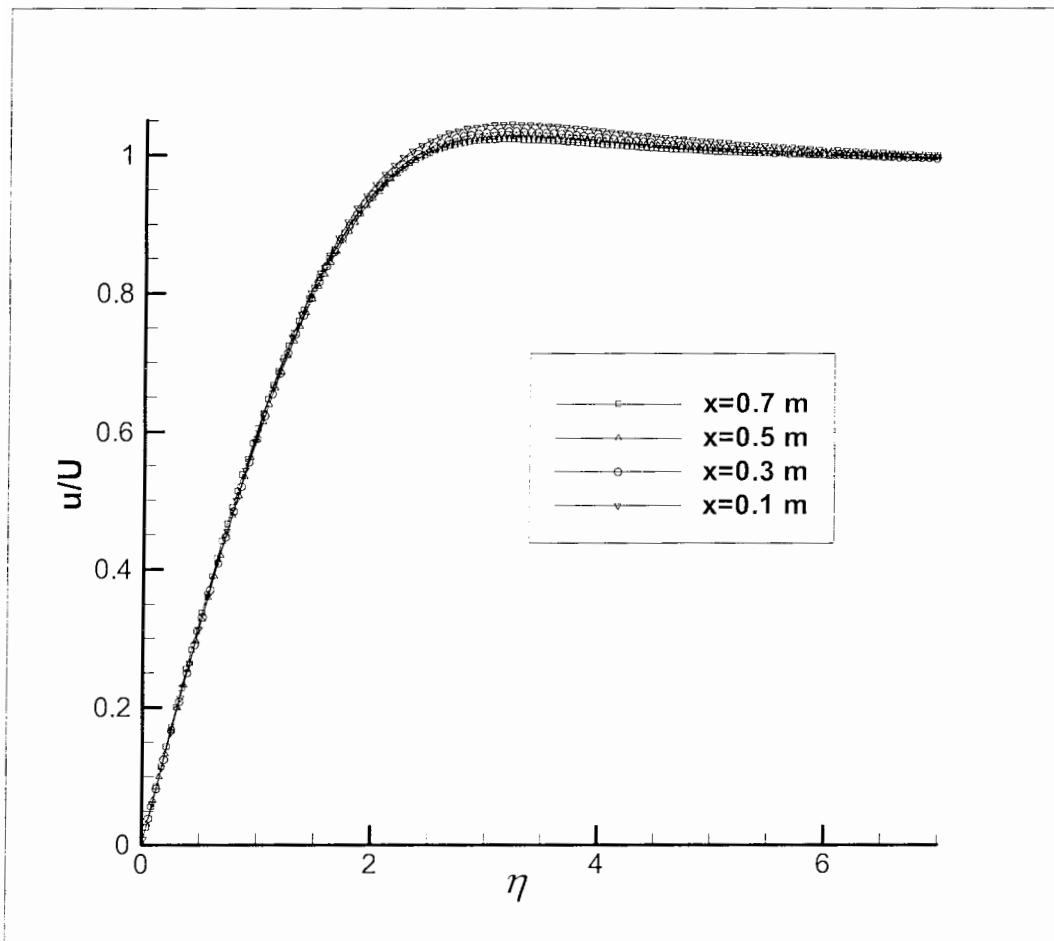


شکل (۴-۱۶): گذر زمانی گردابه، ω ، در چهار فاصله مساوی در انتهای جریان برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دو

بعدی بدون اغتشاش ورودی

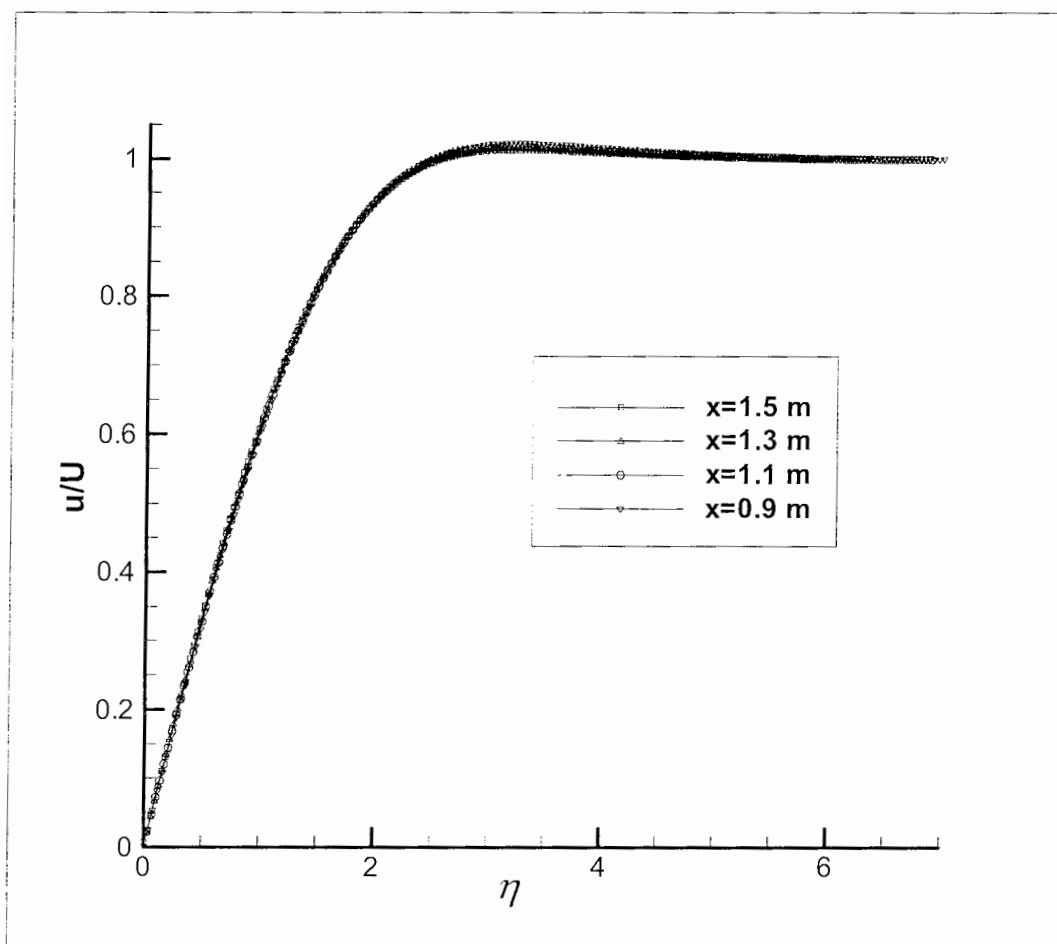
۴-۷-۳- خودتشابهی^۱

رفتار خودتشابهی سرعت جریان لایه مرزی آرام در شکل‌های (۱۷-۴) و (۱۸-۴) برای نقاط مختلف نشان داده شده است. در شکل (۱۹-۴) و (۲۰-۴) هم می‌توان خود تشابهی گردابه‌های لایه مرزی را دید مشاهده نمود.

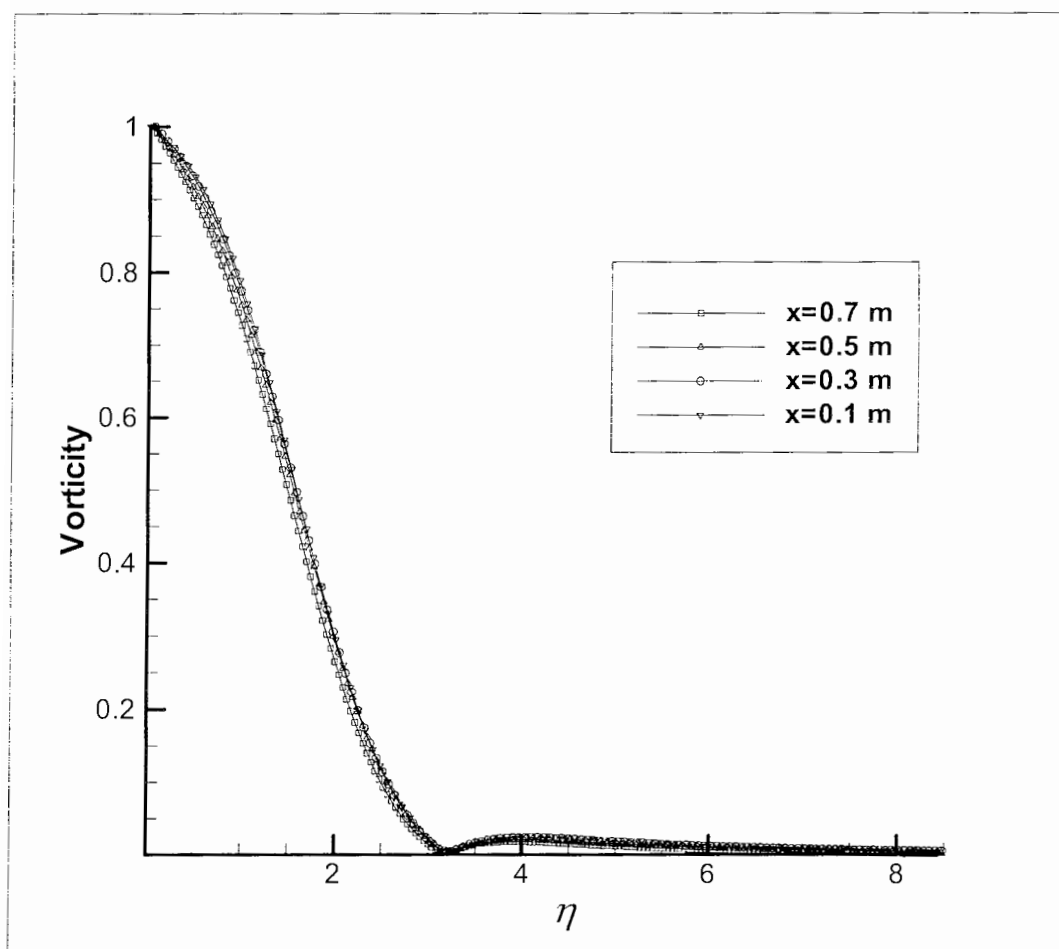


شکل (۱۷-۴): پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی در ابتدای جریان

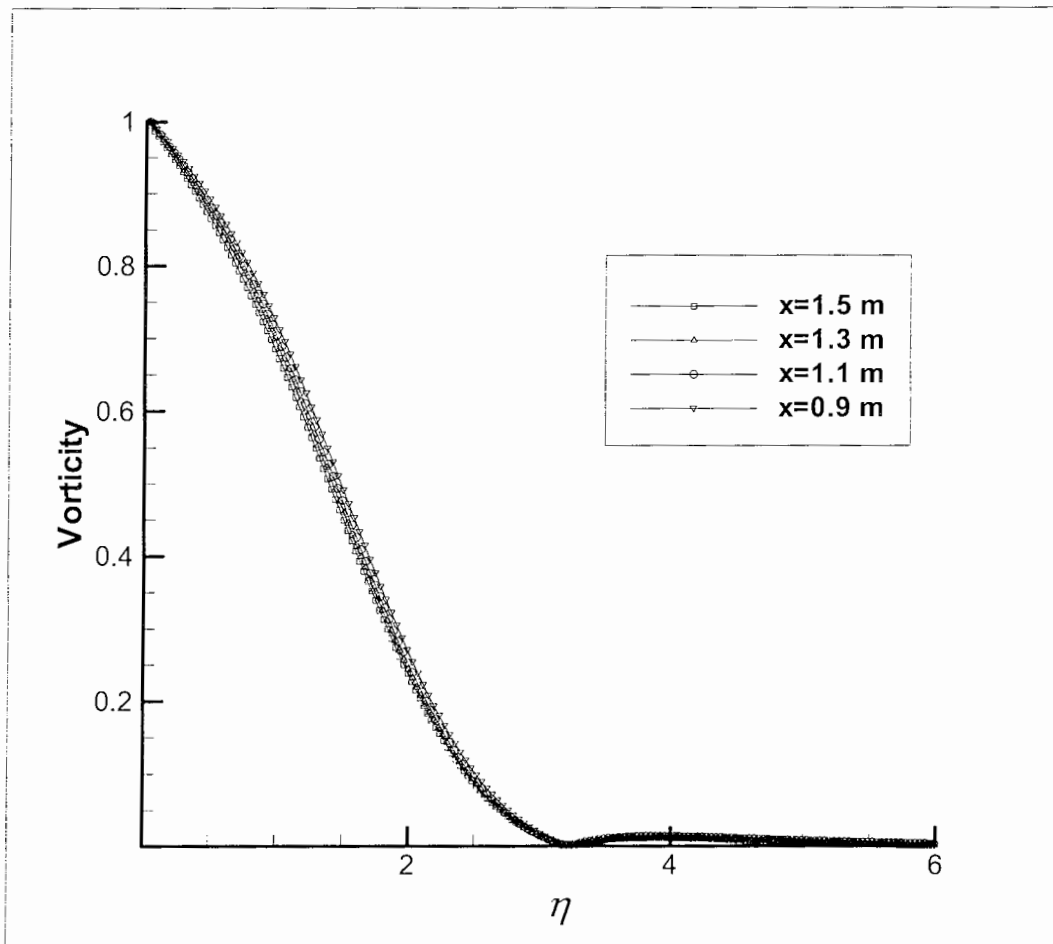
^۱ - self- similar



شکل (۴-۱۸): پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی در انتهای جریان

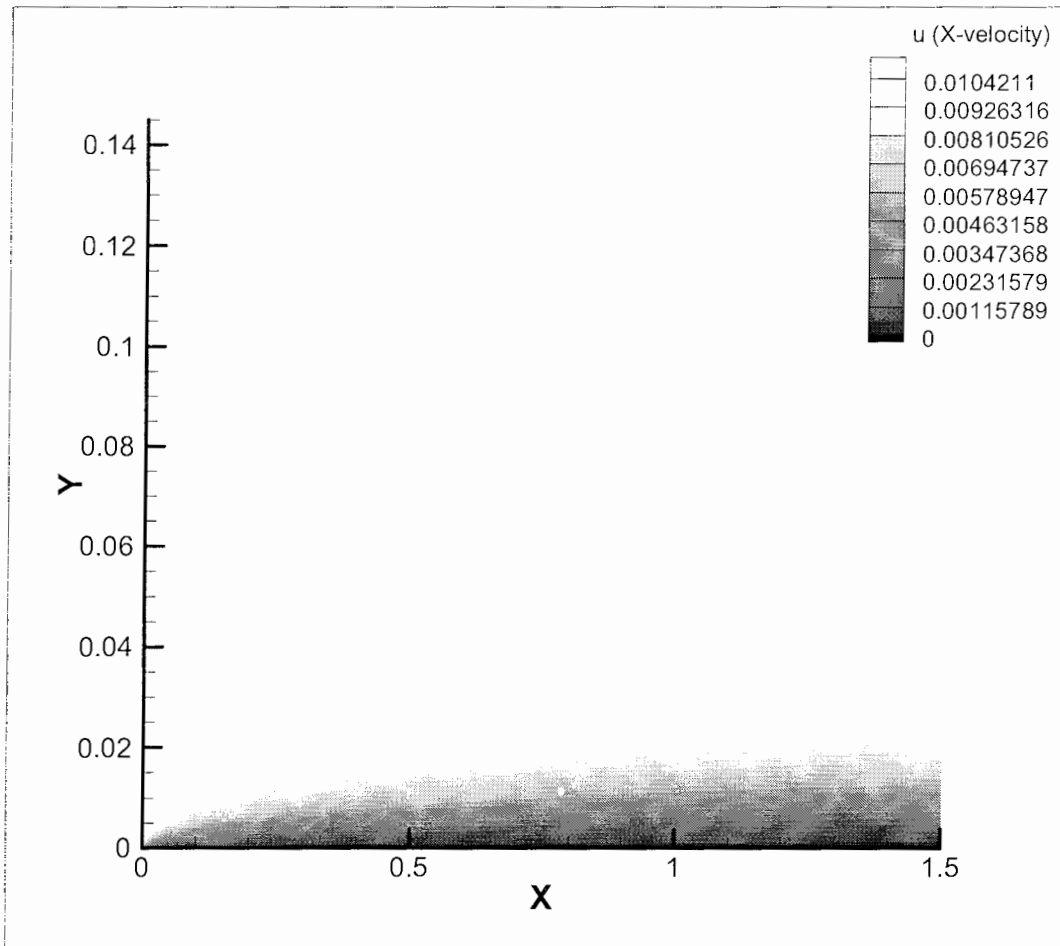


شکل (۴-۱۹): پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی در ابتدای جریان



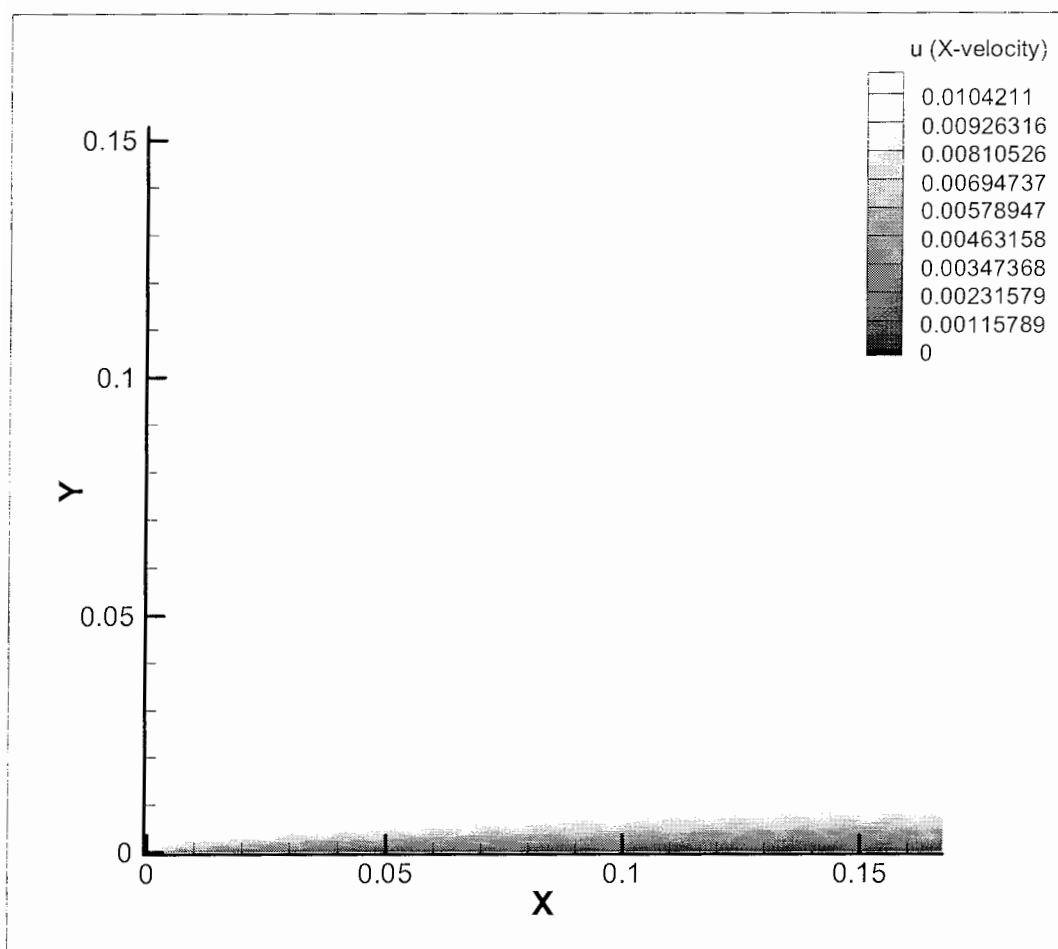
شکل (۴-۲۰): پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی بدون اغتشاش ورودی در چهار فاصله مساوی در انتهای جریان

۴-۷-۴ - کانتورهای سرعت و گردابه

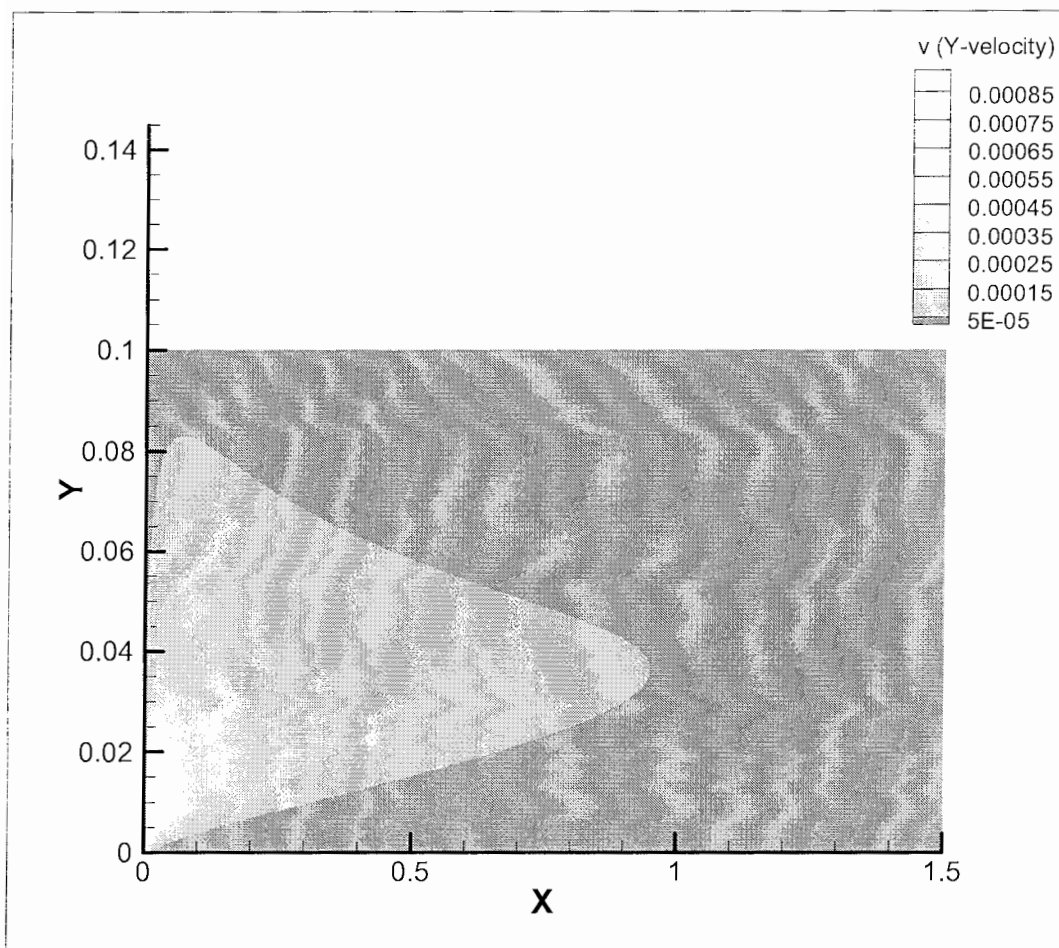


شکل (۴-۲۱): کانتور مولفه افقی سرعت، u ، برای جریان لایه مرزی در کل دامنه مطابق با حل DNS بدون اغتشاش

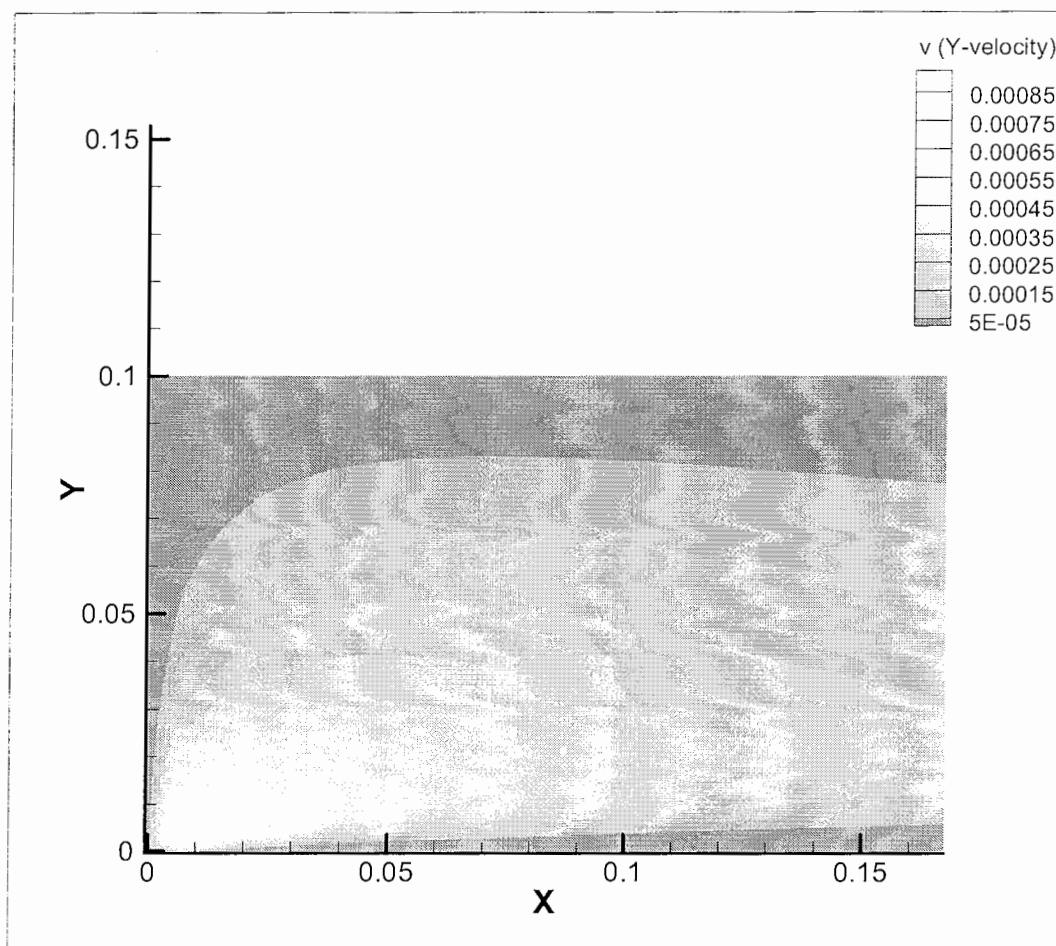
ورودی



شکل (۴-۲۲): کانتور مولفه افقی سرعت، u ، برای جریان لایه مرزی در ابتدای دامنه مطابق با حل DNS بدون اغتشاش ورودی



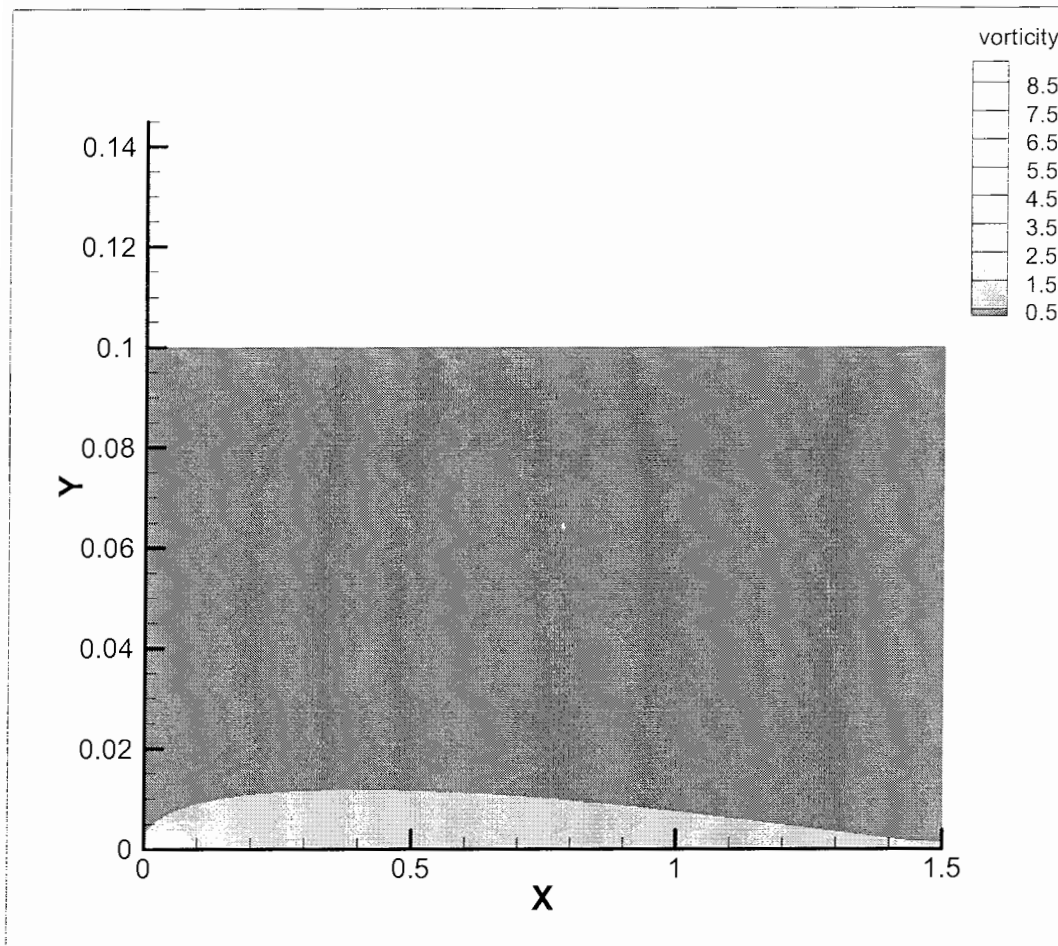
شکل (۴-۲۳): کانتور مولفه عمودی سرعت، v ، برای جریان لایه مرزی در کل دامنه مطابق با حل DNS بدون اغتشاش ورودی



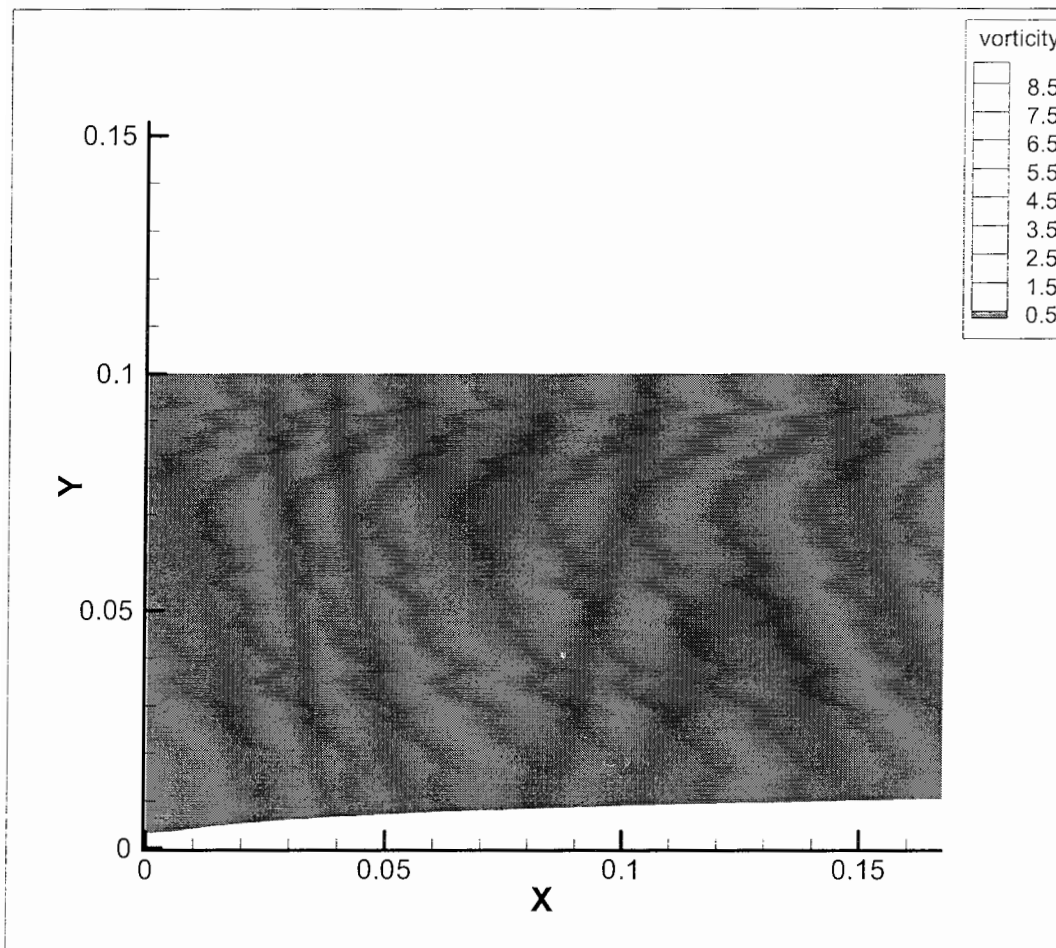
شکل (۴-۲۴): کانتور مولفه عمودی سرعت، v ، برای جریان لایه مرزی در ابتدای دامنه مطابق با حل DNS بدون اغتشاش ورودی

از نکات قابل توجه که در کانتور مولفه عمودی سرعت، v ، نشان داده شده است، آنستکه، v در لبه مرز صفر نمی‌باشد. این مسئله بعلت جابجایی جریان خارجی است. پنتون^۱ (۱۹۸۴) [۲۴] در کتاب خود در این مورد بحث جالبی را آورده است، که بطور خلاصه می‌توان گفت که در گرادیان‌های موافق، جریان می‌تواند به سمت دیوار حرکت کند. [۱]

^۱ - Panton



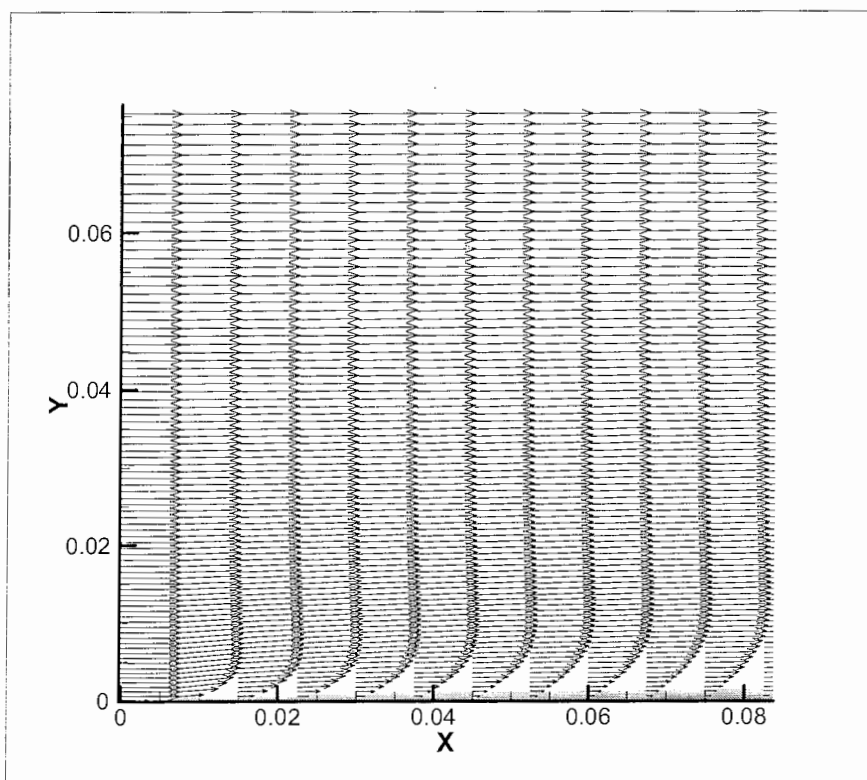
شکل (۴-۲۵) : کانتور گردابه، برای جریان لایه مرزی در کل دامنه مطابق با حل DNS بدون اغتشاش ورودی



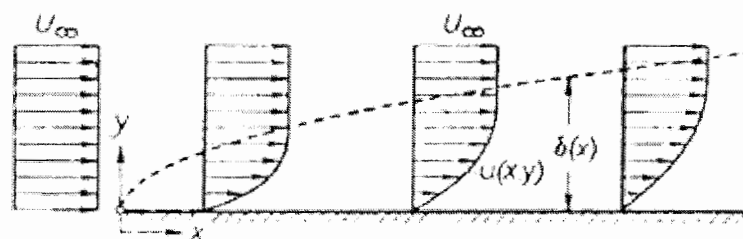
شکل (۴-۲۶): کانتور گردابه، برای جریان لایه مرزی در ابتدای دامنه مطابق با حل DNS بدون اغتشاش ورودی

۴-۷-۵- رشد ضخامت لایه مرزی

در شکل‌های (۲۷-۴) و (۲۸-۴) رشد ضخامت جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی با توجه به حل DNS و نمای شماتیک حاصل از نتایج شلختینگ^۱ [۲۵] مقایسه گردیده است.



شکل (۲۷-۴): نمای رشد جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی مطابق با حل DNS



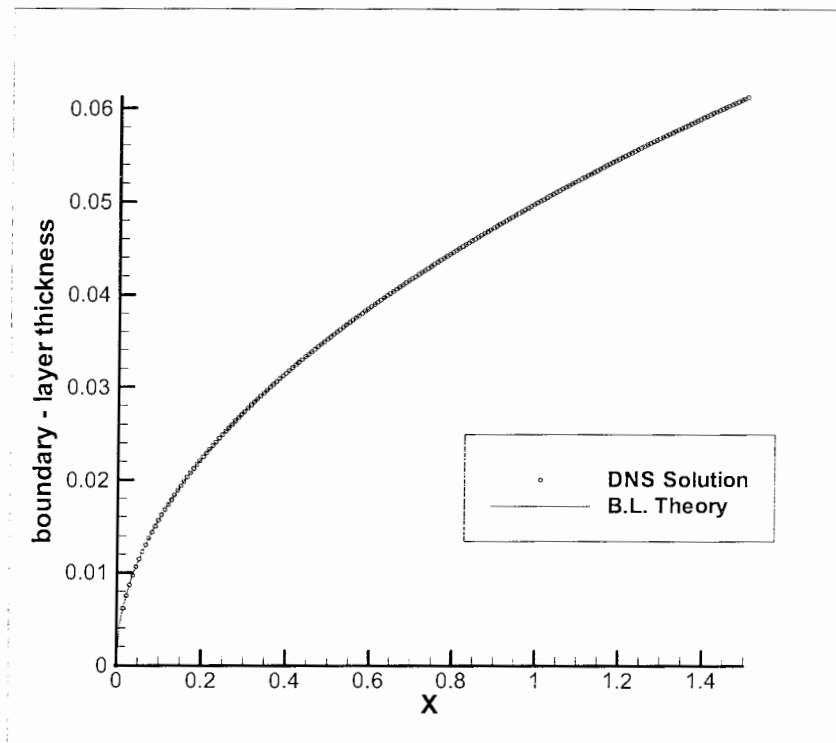
شکل (۲۸-۴): نمای شماتیک جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی [۲۵]

^۱ - Schlichting

۴-۷-۶- ضخامت لایه مرزی

با توجه به تعریف ضخامت لایه مرزی δ به عنوان فاصله y ، که به ازای آن $(u/U_\infty) = 0.99$ می‌باشد، اقدام به مقایسه بین حل بلازیوس و روش DNS می‌کنیم. لازم به ذکر است که، ضخامت لایه مرزی محاسبه شده توسط بلازیوس بصورت رابطه (۴-۴۴) می‌باشد [۲۵].

$$\delta_{99}(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (4-44)$$



شکل (۴-۲۹): مقایسه ضخامت لایه مرزی حاصل از روش DNS با حل بلازیوس

فصل پنجم

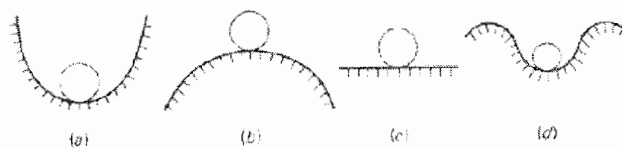
آنالیز

پایداری خطی

۵-۱- مقدمه و تاریخچه

تعداد زیادی از جریاناتی که با آنها سر و کار داریم جریاناتی هستند که ذاتاً ناپایدار هستند، بدین معنا که در مقابل حضور و یا تشکیل اغتشاشات احتمالی در جریان، نمی‌توانند مقاومتی از خود نشان داده و اغتشاشات مزبور در این محیط رشد می‌نمایند. این اغتشاشات می‌تواند از معابر بالادستی جریان به درون جریان وارد شده و یا به واسطه برهم کنش جریان با زبری دیواره، اغتشاشات ناشی از ارتعاش بدنه و حتی سر و صدای محیط، و حتی اغتشاشات ناشی از انجام واکنشهای شیمیایی و غیره باشد. این اغتشاشات همواره خود را به صورت تغییرات موضعی در اندازه و راستای سرعت، اندازه فشار، دما و چگالی جریان بروز می‌دهند.

به طور کلی یک سیستم هنگامی پایدار محسوب می‌گردد که در مقابل یک عامل اغتشاشی وارد شده وضعیت تعادلی خود را حفظ نماید و هنگامی ناپایدار محسوب می‌گردد که در مقابل عامل اغتشاشی وارد شده، از وضعیت تعادلی خود خارج شده و به وضعیت دیگری منتقل گردد.



شکل (۵-۱): شماتیکی از وضعیتهای تعادل پایدار، تعادل ناپایدار، تعادل خنثی و تعادل مشروط

در شکل (۵-۱) و حالت (a)، توپ در وضعیت تعادلی قرار دارد، به این معنا که چنانچه توپ در اثر اغتشاش از وضعیت تعادلی خود خارج گردد، مجدداً پس از چند نوسان حول حالت تعادل اولیه، به حالت تعادل اولیه باز می‌گردد، به این وضعیت اصطلاحاً حالت متعادل، اطلاق می‌گردد. به طور مشابه و در یک جریان سیال، در نواحی بسیار نزدیک به دیواره که به واسطه پایین بودن عدد رینولدز موضعی،

جریان کاملاً آرام می‌باشد، چنانچه به هر طریقی اغتشاشی در این لایه ایجاد گردد، اغتشاش مزبور به واسطه بالا بودن نیروهای لزجت سریعاً میرا شده و جریان کماکان حالت آرام خود را حفظ می‌نماید. ذکر این نکته حائز اهمیت است که، پایین بودن عدد رینولدز به معنای قویتر بودن نیروهای میرا کننده لزجت در مقابل نیروهای ضعیفتر اینرسی می‌باشد و بالعکس. در حالت (b)، توپ پس از اعمال یک اغتشاش، از وضعیت تعادل اولیه خود خارج شده و دیگر نمی‌تواند به خودی خود به این وضعیت تعادل اولیه باز گردد. به این وضعیت اصطلاحاً وضعیت نامتعادل اطلاق می‌گردد. به طور مشابه در یک جریان آشفته سروکار داریم، چنانچه به هر طریقی اغتشاشی در این لایه ایجاد گردد، اغتشاش مزبور به واسطه ضعیف بودن نیروهای لزجت، میرا نشده و بر آشفتگی جریان افزوده می‌گردد.

در حالت (c) نیز توپ پس از اعمال یک اغتشاش، به وضعیت تعادلی جدیدی منتقل می‌گردد، به این حالت اصطلاحاً حالت تعادل خنثی یا بی‌تفاوت اطلاق می‌گردد. در حالت (d) توپ در مقابل اغتشاشات کوچک، پایدار بوده ولی در مقابل اغتشاشات بزرگ ناپایدار می‌باشد [۱].

می‌دانیم که فرآیند انتقال یک حالت میانی برای عبور از جریان آرام به جریان آشفته (توربولانس) می‌باشد از آنجائیکه عامل اصلی آشفته شدن جریان آرام، تقویت شدن امواج اغتشاشی موجود در جریان است لذا بررسی‌ها بر روی جریان لایه مرزی تحت اغتشاشات کوچک نوسانی متمرکز گشته است.

فرآیند انتقال در لایه مرزی بر روی صفحه تخت مسأله‌ای است که هم بصورت تئوری و هم به صورت آزمایشهای تجربی، بسیار به آن توجه شده است و سالهای زیادی است که اذهان محققین را به خود مشغول کرده است.

بررسی تئوریک انجام شده بر این اساس است که یک جریان آرام تحت تاثیرات اغتشاشات کوچکی می‌باشد، که بعنوان مثال این اغتشاشات درون لوله و یا ابتدای ورود جریان و برخورد با جسم صلب بر اثر زبری سطح یا هر گونه بی‌نظمی ممکن است بوجود آید.

مطلب مهم پاسخ به این سؤال است که چه موقع اغتشاشات با گذشت زمان افزایش یافته یا مستهلک می‌گردند. اگر اغتشاشات با گذشت زمان از بین روند (مستهلک شوند)، جریان اصلی پایدار در نظر

گرفته می‌شود و در مقابل اگر اغتشاشات با گذشت زمان افزایش یابند جریان ناپایدار تلقی می‌گردد و در این حالت امکان عبور به توربولانس وجود خواهد داشت. برای پاسخ به این سؤال فوق تئوری پایداری خطی پایه‌گذاری شده است که موضوع اصلی آن تعیین مرز پایداری سیال برای یک جریان مفروض می‌باشد.

پیشگام تئوری پایداری، رینولدز^۱ (۱۸۸۳) است، چرا که برای اولین بار او بود که فرض کرد، حالت جریان آرام که پاسخی برای معادلات دیفرانسیل دینامیکی سیال است، نمایانگر نوع خاصی از جریان می‌باشد، که در محدوده معینی ناپایدار است (عدد رینولدز بحرانی) و به جریان توربولانس تبدیل می‌شود. تاکنون کارهای بسیاری بر روی فرضیه رینولدز صورت گرفته است که ابتدا بوسیله خود رینولدز و پس از او بطور قابل ملاحظه‌ای توسط رایلی^۲ (۱۸۸۷) پی‌گیری گردید. تلاش او به محاسبات پیچیده‌ای منجر شد، لذا برای مدت زیادی بر روی آن کاری انجام نگرفت. کارهایی که در ادامه کار رایلی انجام شد، ابتدأً محدود به، جریان کوت بودند. (یعنی حالتی که توزیع سرعت در جریان بین دو صفحه (دیواره) موازی، خطی باشد). مطالعات انجام شده، منجر به این نتیجه شد که چنین جریانهایی در تمام طول موج، پایدار باقی می‌ماند. پس از بدست آمدن این نتیجه منفی برای مدتی این ذهنیت وجود داشت که روش نوسانات کوچک برای حل تئوری مسأله انتقال^۳ نامناسب می‌باشد، البته پس از مدتی مشخص شد که چنین دیدگاهی حقیقت ندارد، زیرا جریان کوت یک مثال خیلی خاص می‌باشد. پس از آن بحث و بررسی با جزئیات کاملتر در حالتی که اثر ویسکوزیته را بطور کامل در نظر می‌گرفت، بوسیله سامرفیلد^۴ (۱۹۰۸)، میسز^۵ (۱۹۱۲) و هاپف^۶ (۱۹۱۴) صورت گرفت. معادلات حاکم بر تئوری پایداری توسط اور^۷ (۱۹۰۷) و سامرفیلد بطور مستقل بدست آمد، که بعدها به معادله اور - سامرفیلد مشهور گردید. معادله اور - سامرفیلد از اعمال شرایط خاصی از قبیل موازی و همگن

^۱ - O.Reynolds

^۲ - Lord Rayleigh

^۳ - Transition

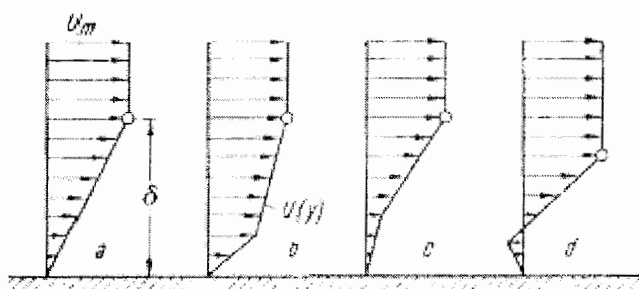
^۴ - A.Sommerfeld

^۵ - R.Von Misses

^۶ - Hopf

^۷ - W. Orr

بودن جریان و بسیار کوچک فرض نمودن اغتشاشات بر روی معادله ناویر - استوکس حاصل می‌گردد و چون در ابتدای جریان معمولاً این شرایط برقرار می‌باشد، می‌توان جواب این معادله را، جواب اولیه معادله ناویر - استوکس دانست. همچنین به کمک این معادله می‌توان اثر پارامترهای مختلف بر پایداری جریان را بررسی نمود، در سال ۱۹۲۱، پراتل^۱ تلاش کرد مسأله پایداری را با روشهای تئوری امتحان کند، منتها او بررسی پایداری لایه مرزی جریان آرام بر روی صفحه را بدون پیچیدگیهای بی‌فایده ریاضی با در نظر گرفتن پروفیل سرعت بصورت تکه‌های خطی دنبال کرد [۲۵].



شکل (۵-۲): نمای پروفیل سرعت بکار گرفته شده توسط پراتل (۱۹۲۱) [۲۵]

محاسبات انجام شده بوسیله تایت^۲ (۱۹۲۵)، که براساس معادله بدون اصطکاک پایداری انجام شد، نشان داد که برای پروفیل لایه مرزی در حالتیکه دارای تحدب باشد، پایداری حاصل می‌شود و در حالتیکه دارای تقعر باشد همیشه منجر به ناپایداری می‌شود. این بررسی این پیشگویی را که پروفیل سرعت دارای نقطه عطف، ناپایدار می‌باشد بیان نمود. صحت این مطلب بعدها بوسیله تالمیم^۳ (۱۹۳۵) تایید شد.

تحقیقات موفقیت آمیزی در مورد پدیده انتقال توسط شوبار^۴ (۱۹۴۷) منجر به توسعه تئوری پایداری خطی گردید. همچنین توسعه تئوری ناپایداری ثانویه توسط هربرت^۵ در دهه (۱۹۸۸) [۲۶] صورت

^۱ - L. Prandtl

^۲ - O. Tietjens

^۳ - W. B. Tollmien

^۴ - Schubauer

^۵ - Herbert

گرفت. تحقیقات وی باعث ایجاد یک فهم دقیق‌تر در چگونگی تسریع و یا به تأخیر افتادن پدیده انتقال در بسیاری از مسایل پیچیده شد. تحقیقات صورت گرفته توسط کاجانف^۱ (۱۹۹۴) [۲۷] بیانگر این مطلب بود که هنوز اطلاعات دقیقی در مورد مکانیزمی که منجر به ایجاد اختلال در جریان آرام و تبدیل آن به جریان مغشوش شود، وجود ندارد. بنابراین تحقیقات نوین در زمینه پدیده انتقال، بر مبنای استفاده از روشهای جدید عددی و آزمایشگاهی، برای بدست آوردن فهمی دقیق از این پدیده می‌باشد.

۵-۲- روش اغتشاشات جزئی در پایداری هیدرودینامیکی^۲

مشاهدات در پدیده آشفته‌گی بوضوح نشان می‌دهد که مرحله گذار نتیجه نهائی اغتشاشاتی است که ابتدا کوچک بوده ولی به مرور گسترش می‌یابد و این اغتشاشات کوچک مثلاً در اثر سر و صدا و علائم ناخواسته یا ارتعاش جزئی سطوح صلب، همواره و در زمینه هر جریانی وجود دارد، که ظاهراً تحت شرایطی در درون جریان این اغتشاشات خفه شده در حالیکه ممکن است، در شرایط دیگری تقویت شوند و با توجه به تجربه‌های رینولدز انتظار می‌رود که یک عدد رینولدز مناسب مرز بین دو حالت آرام و آشفته را مشخص کند. این حالت تشابه زیادی با ارتعاش سیستم‌های مکانیکی که در اوائل قرن نوزدهم تقریباً بطور کامل بررسی شده بود نشان می‌دهد. بنابراین تعجب آور نیست که کوشش می‌شد برای پاسخ به مسأله تعادل جریان هنگام اغتشاشات جزئی، روشهای کلی مشابهی مورد استفاده قرار بگیرد.

ممکن است این سؤال مطرح شود، که چه رابطه‌ای بین اغتشاشات جزئی و پایداری وجود دارد؟ جواب به این سؤال، مسأله پایداری هیدرودینامیکی می‌باشد.

^۱ - Kachanov

^۲ - Hydrodynamic stability

الگوریتم حل این مسأله به صورت زیر می‌باشد [الف].

۱- فرض کنیم Q_0 جواب معادله پایه می‌باشد. مثلاً Q_0 جواب حل کامل یا تقریبی معادله ناویراستوکس می‌باشد.

۲- فرض کنیم اغتشاش کوچک Q' باشد و متغیر $Q_0 + Q'$ را در معادله ناویراستوکس قرار داده ترم اصلی Q_0 را از معادله اصلی کسر می‌نماییم.

۳- معادله باقی مانده، معادله اغتشاش^۱ می‌باشد. تغییرات Q' (رشد یا کاهش در زمان و مکان) نشان دهنده پایداری یا ناپایداری Q_0 می‌باشد. معادله اغتشاش Q' معمولاً غیرخطی می‌باشد که به ندرت بکار می‌رود بنابراین فرض می‌کنیم اغتشاشات Q' کوچک است و از بسط جملات صرفنظر کرده و با حذف توانهای بالا یک معادله دیفرانسیل خطی برای متغیر Q' به دست می‌آید.

۴- معادلات اغتشاش، اکنون خطی شده‌اند و نیاز به ساده‌سازی به وسیله یک خصوصیت Q_0 در یک جهت دارد. به طور مثال، γ (فرض جریان موازی). به این طریق Q' می‌تواند در راستای موجهای انتقالی^۲ (تولیمین - شلختینگ)^۳ قرار گیرد و معادلات دیفرانسیل معمولی همگن^۴ برای متغیر γ ، Q' کاهش می‌یابد (معادله اور - سامرفیلد).

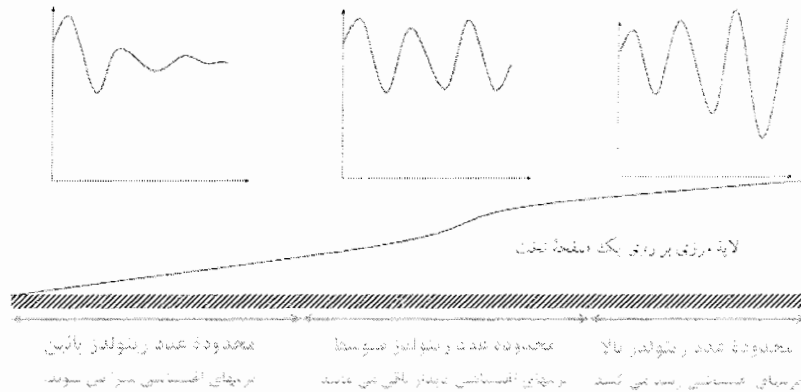
۵- اگر حل این معادله دیفرانسیل به حل حالت پایدار در هنگامیکه زمان به سمت بی‌نهایت میل نماید، برسد، آنگاه می‌گوییم حرکت پایدار است، در غیر اینصورت ناپایدار است. خاطر نشان باید شد، که ناپایداری لزوماً به معنی حرکت توربولانس نیست، بلکه ممکن است سیال به سمت موقعیت دیگر از حالت آرام میل کند.

¹ - Disturbance Equation

² - Traveling waves

³ - Tollemien - Schlichting waves

⁴ - Ordinary homogenous differential



شکل (۵-۳): در یک جریان می‌توان نواحی مختلفی را یافت که از بابت برخورد با اغتشاشات

موجود در جریان متفاوت عمل می‌کنند.

چنانچه مراحل ذکر شده قبلی را برای یک جریان آرام تراکم ناپذیر با مقادیر ثابت (ρ, μ, k, C_p) و بدون در نظر گرفتن اثرات جابجایی آزاد انجام دهیم به معادله‌ای به نام معادله اور-سامرفیلد خواهیم رسید. این معادله بیانگر رشد ناپایداری در یک جریان لزج می‌باشد.

۵-۳- بدست آوردن معادله اور-سامرفیلد

در این قسمت معادله اور-سامرفیلد را با استفاده از روش تحلیل پایداری اغتشاشات جزئی، که الگوریتم حل آن در قسمت قبل ارائه شد، بدست می‌آوریم. ابتدا معادلات پایه که همان معادلات پیوستگی و ناویر-استوکس تراکم ناپذیر بدون نیروی شناوری و بدون ترکیب با میدان دمایی می‌باشد را بیان می‌کنیم.

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad k = 1, 2$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i \quad j=1, 2 \quad i=1, 2 \quad (1-5)$$

از طرفی می‌دانیم که هر خاصیت از جریان در معادله‌های لایه مرزی مانند Q را می‌توان در هر لحظه به صورت مجموع مقدار میانگین زمانی \bar{Q} و مولفه نوسانی Q' بیان نمود. باید توجه داشت که میانگین‌گیری روی زمانی که نسبت به زمان نوسانات زیاد است انجام می‌شود. اگر \bar{Q} مستقل از زمان

باشد جریان متوسط زمانی، دایم است. حال فرض می‌کنیم که \bar{u}_i و \bar{p} جوابهای مستقل از زمان معادلات (۱-۵) باشند در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u_i(x, y, t) &= \bar{u}_i(x, y) + u'_i(x, y, t) \\ p(x, y, t) &= \bar{p}(x, y) + p'(x, y, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} &= 0 \quad k = 1, 2 \\ \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i \quad j=1, 2 \quad i=1, 2 \end{aligned} \quad (۲-۵)$$

u_i و p را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (۳-۵)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (۴-۵)$$

حال روابط (۳-۵) و (۴-۵) را در معادلات ناویر-استوکس و پیوستگی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{u}_k + u'_k)}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 (\bar{u}_i + u'_i) \end{aligned} \quad (۵-۵)$$

چون معادلات پایه در \bar{u}_i و \bar{p} صدق می‌کند، ترمهای مربوطه را حذف کرده و معادلات اغتشاشات را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u'_i \end{aligned} \quad (۶-۵)$$

معادله بدست آمده یک معادله غیر خطی می‌باشد با فرض اینکه مقدار اغتشاش در مقایسه با خط اصلی جریان کوچک باشد ($u'_i \ll u_i$) و صرفنظر کردن از توانهای بالای اغتشاشات ($u_i'^2, \dots$) معادله (۶-۵) را خطی می‌کنیم.

$$\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u'_i \quad (7-5)$$

با فرض همگن و موازی بودن جریان (یک بعدی) معادلات را به وسیله پارامترهای زیر بی‌بعد می‌کنیم.

$$t^* = \frac{U}{L} t, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad P^* = \frac{P}{\rho_0 U^2}, \dots$$

توجه: فرضیات جریان لایه مرزی و موازی بودن جریان، بصورت زیر بیان می‌شود:

$$u = U(y), \quad v = 0, \quad p = p(y)$$

فرم معادلات پیوستگی و معادلات ناویر-استوکس بعد از بی‌بعد سازی و انداختن (*) به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$\nabla \cdot u'_i \quad (8-5)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + U(y) \frac{\partial u'_i}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} \underline{i} = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u'_i$$

فرم گسترده معادلات فوق بصورت معادلات (۹-۵) می‌باشد:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U(y) \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \quad (9-5)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U(y) \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right)$$

با فرض اینکه قسمت اغتشاشاتی سرعت و فشار به صورت موجهای حرکتی باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u'(x, y, t) &= \hat{u}(y) \cdot \exp \{i(\alpha x - \omega t)\} \\ v'(x, y, t) &= \hat{v}(y) \cdot \exp \{i(\alpha x - \omega t)\} \\ p'(x, y, t) &= \hat{p}(y) \cdot \exp \{i(\alpha x - \omega t)\} \end{aligned} \quad (10-5)$$

که در آن $i \equiv \sqrt{-1}$ تابع مختلط، α عدد موج اغتشاش (2π تقسیم بر طول موج)، و مقدار $\omega = \alpha c$ می باشد که در آن c سرعت مختلط فاز ($c_r + ic_i$) می باشد.

با قرار دادن موجهای حرکتی (۱۰-۵) در معادلات (۹-۵) به فرم معادلات (۱۱-۵) دست خواهیم یافت:

$$\begin{aligned} \{D^2 - \alpha^2 - i\alpha \operatorname{Re}(U - c)\} \hat{u} &= \operatorname{Re}(DU) \hat{v} + i\alpha \operatorname{Re} \hat{p} \\ \{D^2 - \alpha^2 - i\alpha \operatorname{Re}(U - c)\} \hat{v} &= \operatorname{Re} D\hat{p} \\ i(\alpha \hat{u}) + D\hat{v} &= 0 \end{aligned} \quad (11-5)$$

که در آن $D = \frac{d}{dy}$ می باشد.

دستگاه معادلات (۱۱-۵) را می توان به یک معادله دیفرانسیل معمولی به شکل زیر تبدیل نمود:

$$(D^2 - \alpha^2)^2 \hat{v} = i\alpha \operatorname{Re} \{ (U - c)(D^2 - \alpha^2) \hat{v} - (D^2 U) \hat{v} \} \quad (12-5)$$

که به معادله اور-سامرفیلد مشهور می باشد.

شرط مرزی معادله (۱۲-۵) برای جریان لایه مرزی بصورت زیر می باشد:

$$v(0) = v'(0) = 0, \quad v(\infty) = v'(\infty) = 0.$$

همانطور که مشاهده می شود معادله اور-سامرفیلد یک معادله دیفرانسیل همگن از مرتبه چهارم می باشد. علاوه بر این چون تمام شرایط مرزی این معادله نیز همگن می باشد، این معادله به یک معادله مسأله مقدار ویژه^۱ تبدیل می گردد. به عبارت دیگر رابطه به شکل زیر می باشد.

$$F(\operatorname{Re} \delta, \alpha, U, C) = 0 \quad (13-5)$$

^۱ - Eigen value

۵-۳-۱- معادله اور- سامرفیلد برای توابع جریان^۱

یکی از فرضهای اساسی برای ساده‌سازی مسأله اور- سامرفیلد تعریف اغتشاش بصورت تابعی از خط جریان می‌باشد.

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) \exp(i\alpha(x - ct)) \quad (14-5)$$

با در نظر گرفتن معادله (۱۴-۵) مشاهده می‌کنیم که پایداری نسبت به زمان، به مقدار αc_i بستگی دارد. برای $\alpha c_i < 0$ میرائی وجود دارد (اغتشاش با زمان کاهش می‌یابد)، برای $\alpha c_i = 0$ یک حالت بی اثر و برای $\alpha c_i > 0$ تقویت اغتشاش و در نتیجه ناپایداری خواهیم داشت.

اجزاء سرعت موج دو بعدی را با توجه به تعریف خط جریان (۱۴-۵) بصورت زیر می‌توانیم تعریف کنیم:

$$u'(x, y, t) = \hat{u}(y) \cdot \exp(i\alpha(x - ct)) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (15-5)$$

$$v'(x, y, t) = \hat{v}(y) \cdot \exp(i\alpha(x - ct)) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

از طرفی روابط بین تابع ویژه $(\varphi)^2$ ، سرعت و فشار به صورت معادلات (۱۶-۵) تعریف می‌شود:

$$\hat{u}(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\hat{v}(y) = -i\alpha \varphi, \quad (16-5)$$

$$\hat{p}(y) = U' \varphi - (U - c) \varphi' - \frac{1}{\alpha \text{Re}} (\varphi''' - \alpha^2 \varphi').$$

با قرار دادن تابع جریان در معادله اور- سامرفیلد خواهیم داشت:

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = \frac{-i}{\alpha \text{Re}} [\varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi] \quad (17-5)$$

معمولاً برای محاسبات عددی از این شکل معادله اور- سامرفیلد استفاده می‌شود. برای شکل‌های پروفیل $U(y)$ قبل از اختراع کامپیوترهای رقمی بزرگ حل آن مشکل بود. به همین دلیل کارهای اولیه بر روی حالات پروفیل خطی ($u_0'' \equiv 0$) یا ($u_0 \sim y$) و یا جریان غیرلزج ($\text{Re} \rightarrow \infty$) متمرکز شده بود.

¹ - Stream function

² - Eigen function

از آنجائیکه معادله اور - سامرفیلد یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهار می‌باشد، که احتیاج به چهار شرط مرزی دارد، که این شرایط مرزی برای جریان لایه مرزی بصورت عدم وجود اغتشاش و گرادیان اغتشاش در مرز جریان آزاد ($+\infty$) و مرز صلب (0) می‌باشد .

از این رو شرایط مرزی دیریشله و نیومن برای معادله اور - سامرفیلد در نظر گرفته می‌شود .

$$\varphi(+\infty) = \varphi(0) = 0 \quad (18-5)$$

$$\varphi'(+\infty) = \varphi'(0) = 0 \quad (19-5)$$

فرم ماتریسی معادله اور - سامرفیلد بصورت زیر خواهد بود :

$$A\varphi = c\varphi \quad (20-5)$$

که در آن :

$$A = (D^2 - \alpha^2 I)^{-1} \left[\Lambda_U (D^2 - \alpha^2 I) - \Lambda_{U''} + \frac{i}{\alpha \text{Re}} (D^2 - \alpha^2 I) \right] \quad (21-5)$$

معادله (۲۰-۵) یک مسأله مقدار ویژه می‌باشد، که در آن:

- I ماتریس واحد از مرتبه N می‌باشد.
- N تعداد نقاطی که برای گسسته سازی در جهت y استفاده شده است.
- $\Lambda_{U''}, \Lambda_U$ ماتریسهای قطری بوده که مقادیر U, U'' در مختصات گسسته y بر روی قطر اصلی آنها قرار دارد.

۵-۴- پایداری جریان غیر لزج

یک فرض ساده کننده در معادله اور- سامرفیلد زمانی است که عدد رینولدز بسیار بزرگ باشد ($Re \rightarrow \infty$)، یا اینکه اثر لزجت از بین رفته باشد ($\nu \rightarrow 0$)، در اینصورت با حذف جملات مربوط به ویسکوزیته در معادله اور- سامرفیلد به معادله (۵-۲۲) که به معادله رایلی^۱ مشهور می‌باشد خواهیم رسید:

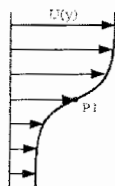
$$\varphi'' - \left(\frac{U''}{U-c} + \alpha^2 \right) \varphi = 0 \quad (۵-۲۲)$$

این معادله از مرتبه دو می‌باشد. لذا برای حل تنها به دو شرط نیاز داریم. از این معادله قضایای مهمی استخراج می‌گردد که در ذیل به آنها اشاره می‌نمائیم.

۵-۴-۱- تئوری رایلی (۱۸۸۰)^۲

شرط لازم برای ناپایداری، داشتن نقطه عطف^۳ در پروفیل سرعت می‌باشد. به عبارت

$$\text{دیگر} \left(\frac{d^2 U}{dy^2} = 0 \right)$$



شکل (۵-۴): وجود نقطه عطف در پروفیل سرعت

۵-۴-۲- تئوری فجورت (۱۹۵۰)^۴

شروط لازم دیگر برای جریان غیر لزج عبارتند از:

$$۱- \text{ مقدار گرادیان سرعت } \frac{dU}{dy} \text{ در نقطه عطف باید ماکزیمم باشد } \left| \frac{dU_{pl}}{dy} \right| \geq \left| \frac{dU}{dy} \right|$$

^۱ - Rayleigh Equation

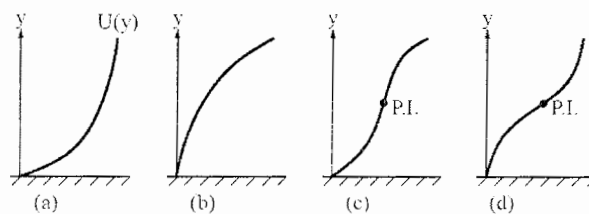
^۲ - O. Rayleigh

^۳ - Point of inflexion

^۴ - Fjortoft

۲- مقدار ضرب تفاضل پروفیل سرعت با مقدار سرعت در نقطه عطف در پروفیل مشتق دوم سرعت در تمام نقاط باید کمتر از صفر باشد.

$$\frac{d^2U}{dy^2}(U - U_{PI}) < 0$$



شکل (۵-۵): انواع پروفیل سرعت

بنابراین پروفیل‌های (a) و (b) در شکل بالا پایدار می‌باشد. (نقطه عطف ندارد)، پروفیل (c) پایدار است. $\frac{dU}{dy}$ در نقطه عطف مینیمم می‌باشد، اما پروفیل (d) ممکن است ناپایدار باشد.

۵-۵- پایداری جریانات لزوج موازی

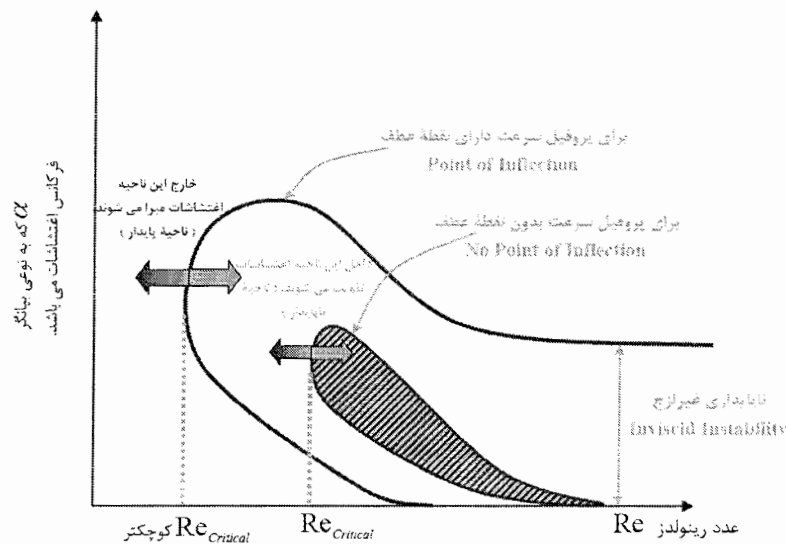
لایه مرزی تخت، جریان داخل لوله و کانال بدون گرادیان فشار هیچگونه نقطه عطفی در پروفیل سرعت خود ندارد و مطابق تئوری‌های پایداری غیرلزوج نباید هیچگونه ناپایداری داشته باشند ولی آزمایشات معمولی نشان داده است که تمام این جریانات در بعضی اعداد رینولدز ناپایدار می‌گردند. بنابراین، ویسکوزیته باید دلیلی بر ناپایداری باشد.

آنالیز پایداری جریانات لزوج توسط تولیمن (۱۹۲۹)^۱ آغاز گردید، او اثبات نمود که هر پروفیل لایه برشی^۲ برای مقادیر به اندازه کافی کوچک ویسکوزیته ناپایداری خطی دارد.

^۱ - W. Tollemien

^۲ - Shear layer profile

تمام تئوریهای لزج تأیید نموده‌اند که در اعداد رینولدز پایین (مثلاً در مرتبه ۱۰۰۰)، نواحی محدودی وجود دارند که در آن نواحی، اغتشاشات بی نهایت کوچک می‌توانند رشد نموده و بزرگ شوند. مرز این نواحی را اصطلاحاً منحنی خنثی^۱ می‌نامند. به واسطه شکل خاص این نواحی، آنها را منحنی‌های انگشتی می‌نامند. دو نمونه از این منحنی‌ها در شکل (۵-۶) نشان داده شده است.



شکل (۵-۶): نمودار پایداری برای پروفیل‌های بدون و با نقطه عطف، به دست آمده از معادله اور - سامرفیلد [۱].

در خارج از منحنی‌ها، تمام اغتشاشات میرا می‌شوند. (بالاخص در نواحی با عدد رینولدز بسیار پایین و یا لزجت بسیار بالا) چنانچه پروفیل سرعت $U(y)$ بدون نقطه عطف باشد، این پروفیل در اعداد رینولدز بالا حذف خواهد شد که در تطابق با شرط رایلی می‌باشد. در مقابل چنانچه پروفیل سرعت $U(y)$ دارای نقطه عطف باشد، منحنی انگشتی در اعداد رینولدز بی‌نهایت هم کماکان باز باقی می‌ماند. کوچکترین عدد رینولدز نظیر هر منحنی را اصطلاحاً عدد رینولدز بحرانی $Re_{Critical}$ می‌نامند. همانطور که در شکل (۵-۶) مشاهده می‌شود، پروفیل‌های سرعتی که دارای نقطه عطف می‌باشند، دارای عدد رینولدز بحرانی کوچکتر و ناحیه انگشتی وسیعتری می‌باشد. عبارت دیگر، از آنجا که نقاط

^۱ - Neutral Curve

داخل ناحیه انگشتی نقاطی هستند که اغتشاشات به ازای مقادیر رینولدز و فرکانس مربوطه رشد می‌نماید، پروفیل‌های سرعتی که دارای نقطه عطف در داخل خود هستند، دارای طیف وسیعتری از اغتشاشات ناپایدار کننده می‌باشند. اما محدوده عدد رینولدز و فرکانس پروفیل‌های بدون نقطه عطف، به مراتب کوچکتر از پروفیل‌های مجهز به نقطه عطف می‌باشد.

همانطور که در شکل (۵-۶) نشان داده شده است، در یک عدد رینولدز خاص، همواره با افزایش مقدار α ، به سمتی خواهیم رفت که اغتشاشات جریان، میرا خواهند شد. از سوی دیگر برای حالتی که با پروفیل سرعت دارای نقطه عطف سر و کار داریم، برای مقادیر کوچک α ، با افزایش عدد رینولدز به سمت ناپایداری و رشد اغتشاشات پیش خواهیم رفت. اما در جریاناتی که نقطه عطفی در پروفیل سرعت آنها مشاهده نمی‌شود، در یک مقدار α مشخص، فقط در محدوده خاصی از اعداد رینولدز رشد اغتشاشات را شاهد خواهیم بود. به عبارت دیگر، همانطور که از شکل مشخص می‌باشد، در مواقعی که با پروفیل‌های سرعت بدون نقطه عطف سر و کار داریم، بر خلاف تصور رایج، افزایش عدد رینولدز (حتی تا بی نهایت) نمی‌تواند باعث آشفته شدن جریان گردد. همانطور که قبلاً ذکر شد، در تئوری جریانات غیر لزج، پروفیل‌های بدون نقطه عطف همواره پایدار می‌باشند. لیکن در بررسی جدید که از حل عددی معادله اور-سامرفیلد به دست آمد، دیده می‌شود که به ازای محدوده خاصی از α و اعداد رینولدز می‌توان ناپایداری را در جریانات بدون نقطه عطف مشاهده نمود. گوئی لزجت باعث فعال شدن برخی از طول موجهای غیر فعال در جهت ناپایدار نمودن جریان شده است. مجدداً یادآوری می‌شود که منحنی مزبور برای بررسی رشد اغتشاشات در تمام جریانات (اعم از لزج و غیر لزج) ارائه شده است.

۵-۶- حل معادله اور- سامرفیلد

همانطور که ذکر شد معادله اور- سامرفیلد برای محاسبه پایداری جریانات لرج مورد استفاده قرار می‌گیرد، برای حل این معادله ویژه، دو روش وجود دارد.

۱- پایداری زمانی

۲- پایداری مکانی

الف - پایداری زمانی^۱

اگر رشد اغتشاشات در زمان، در نظر گرفته شود در این صورت طول موج اغتشاشات $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ یک مقدار حقیقی و معلوم است. در این حالت معادله اور- سامرفیلد برای هر جفت از عددهای α و Re_s به یک معادله‌ای که دارای تابع ویژه $c = c_r + ic_i$ می‌باشد. تبدیل می‌گردد. در این صورت مسأله مقدار ویژه به صورت پارامتری زیر، معرفی می‌شود.

$$f(\text{Re}_s, U, \alpha, c_i, c_r) = 0 \quad (۲۳-۵)$$

که در آن c_r سرعت فازی اغتشاشات و c_i نشانگر رشد یا دمپ شدن اغتشاشات می‌باشد در این صورت داریم:

$$v'(y) = \hat{v}(y) \cdot \exp\{i\alpha(x - ct)\} \quad (۲۴-۵)$$

با توجه به اینکه ترم $\exp(i\alpha x)$ یک ترم پررودیک است، در نتیجه داریم

$$v'(y) = \hat{v}(y) \cdot \exp(\alpha c_i t + \alpha c_r t) \quad (۲۵-۵)$$

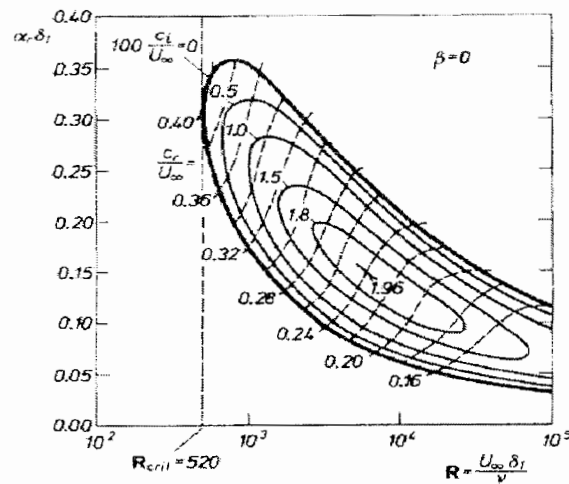
و از آن نتیجه می‌گیریم که رابطه رشد اغتشاشات و c_i به صورت زیر می‌باشد:

$c_i > 0$ رشد اغتشاشات نسبت به زمان و ناپایداری

$c_i = 0$ حالت خنثی

$c_i < 0$ دمپ اغتشاشات نسبت به زمان و پایداری

^۱ - Temporal Stability



شکل (۵-۷): منحنی پایداری زمانی لایه مرزی برای صفحه تخت (H.J.Ombrewski et al. (1969))

ب - پایداری مکانی^۱

اگر رشد اغتشاشات در مکان، در نظر گرفته شود در این صورت فرکانس امواج یک مقدار حقیقی و معلوم می‌شود و عدد موج یک مقدار مختلط است

$$f(\text{Re}_\delta, U, \omega, \alpha_r, \alpha_i) = 0 \quad (۲۶-۵)$$

$$v'(y) = \hat{v}(y) \cdot \exp\{i\alpha(x - ct)\} \quad (۲۷-۵)$$

با توجه به اینکه ترم $\exp(i\alpha_r x)$ یک ترم پررودیک است، در نتیجه داریم

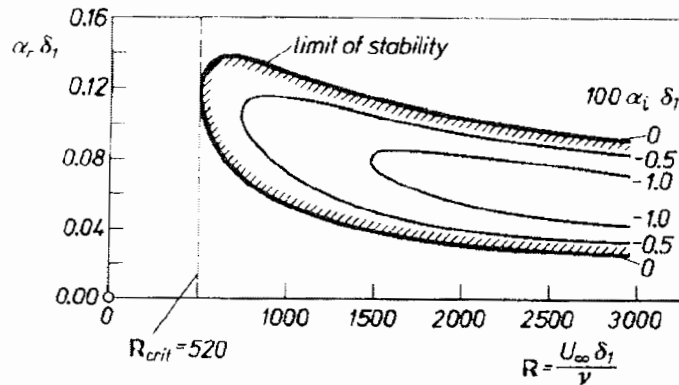
$$v'(y) = \hat{v}(y) \cdot \exp(i\alpha_r x + i\alpha_i x) \quad (۲۸-۵)$$

$\alpha_i < 0$ رشد امواج نسبت به مکان و ناپایداری

$\alpha_i > 0$ دمپ امواج و پایداری

$\alpha_i = 0$ حالت خنثی

^۱ - Spatial Stability



شکل (۸-۵): منحنی پایداری زمانی لایه مرزی برای صفحه تخت (R.Jordinson, (1970))

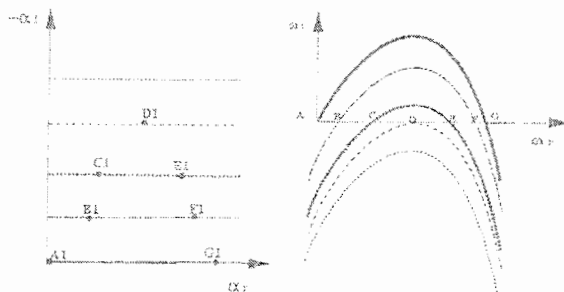
۵-۶-۱- حل مسأله مقدار ویژه

همانطور که در بخش قبلی مشخص شد، هیچ حل مستقیمی برای مسأله مقدار ویژه مکانی وجود ندارد و این بدلیل آن است که امکان ارزیابی ماتریس A در معادله (۵-۲۰) وجود ندارد. اما از نگرش نگاهت مختلط برای حل مکانی می‌توان استفاده کرد. ابتدا بایستی معادله اور-سامرفیلد زمانی برای عدد موجهای مختلط متفاوت حل شود و فرکانس زاویه‌ای (ω) محاسبه شود. بنابراین از یک نگاهت در ناحیه‌ای از فضای مختلط α (دوتایی‌های (α_r, α_i)) و ناحیه‌ای در فضای مختلط ω (دوتایی‌های (ω_r, ω_i)) استفاده کنیم باید توجه شود $\omega = \alpha c$ ، که در آن c شامل N مقدار ویژه مختلف می‌باشد.

نمای شماتیک از این نگاهت در شکل (۵-۹) نشان داده شده است [۱۷]. با توجه به هر α ، یک حل زمانی معادله اور-سامرفیلد برای ω وجود دارد. حل معادله مکانی اور-سامرفیلد (مقدار ویژه) در واقع عدد موجهای مکانی وابسته به فرکانسهایی با قسمت موهومی صفر می‌باشد.

وابستگی متقارن بین α های مختلف $(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1)$ و (A, B, C, D, E, F, G) ω در شکل (۵-۹) تشریح شده است. بنابراین در پی مشخص شدن $U(y)$ ، Re_δ و فرکانس، می‌توان به

سادگی عدد موج مکانی را بدست آورد. بردارهای ویژه که وابسته به مقادیر ویژه مکانی هستند نیز به راحتی بدست می‌آیند.



شکل (۵-۹): نگاشت بین صفحات مختلط α و ω [۱۷]

۵-۶-۲- حل بردارهای ویژه سرعت

با استفاده از فرضیات جریان موازی، حضور اغتشاشات سرعت و فشار بصورت موجهای حرکتی (معادلات (۵-۱۰))، بردارهای ویژه سرعت و فشار دو بعدی، مستقیماً با ارزیابی سمت راست معادلات (۵-۱۶) محاسبه می‌شود. در این تحقیق محاسبات پایداری خطی در فضای فیزیکی y ، با استفاده از روش نگاشت طیفی انجام گرفته است، که جزئیات آن در بخش بعدی تشریح می‌شود.

۵-۷- روش طیفی^۱

روش طیفی به همراه روش تفاضل محدود و المان محدود، یکی از سه روش اصلی در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می‌باشد. اگر حلی برای یک معادله دیفرانسیل معمولی یا جزئی با دقت بالا در یک محدود محاسباتی ساده^۲ با داده‌های هموار^۳ نیاز باشد، معمولاً روش طیفی بهترین گزینه است. از مزایای روش طیفی، دقت بسیار بالای این روش در مقایسه با روشهای المان محدود و یا تفاضل محدود می‌باشد.

^۱ - Spectral method

^۲ - Simple computational domain

^۳ - Smooth data

مرحله اول در روش طیفی این است که یک تابع تخمین انتخاب کنیم. انتخاب سریهای فوریه معمول است، اما اگر تابع حقیقی، متناوب نباشد با مشکل مواجه می‌شویم، بنابراین تخمین چند جمله‌ای پیشنهاد بهتری می‌باشد. چند جمله‌ای «چبیشف»^۱ یک انتخاب عمومی می‌باشد. فرم چند جمله‌ای چبیشف بصورت زیر ارائه می‌گردد.

$$\varphi(\eta) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\eta) \quad (29-5)$$

که در آن T_n توسط معادله (۳۰-۵) بدست می‌آید:

$$T_n(\eta) = \cos\left(\frac{n}{\cos(\eta)}\right) \quad (30-5)$$

چند جمله‌ایهای چبیشف در بازه $[0,1]$ به ازای جمیع نقاط η_i قرار می‌گیرد.

$$\eta_i = \cos\left(\frac{\pi i}{2N}\right) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (31-5)$$

۵-۷-۱- تئوری ماتریس تفاضل چبیشف

برای هر $N \geq 1$ ماتریس دیفرانسیل طیفی چبیشف D_N با $(N+1) \times (N+1)$ سطر و ستون که از 0 تا N نشان داده می‌شود، بصورت زیر می‌باشد:

$$\left. \begin{aligned} D_{ii}^1 &= -\frac{\eta_i}{2(1-\eta_i^2)} \\ D_{ij}^1 &= -\frac{c_j (-1)^{(i+j)}}{c_i (\eta_j - \eta_i)} \quad \text{if } i \neq j \text{ with } c_0 = 2, c_i = 1 \\ D_{ij}^k &= (D_{ij}^1)^k \end{aligned} \right\} \quad (32-5)$$

^۱ - Chebyshev polynomial

$$D_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2N^2+1}{6} & 2 \frac{(-1)^j}{1-x_j} & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1-x_i} & \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1+x_i} \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2}(-1)^N & -2 \frac{(-1)^{N+j}}{1+x_j} & \frac{2N^2+1}{6} \\ \hline \end{array}$$

۵-۷-۲- روش نگاشت طیفی^۱

عملگرهای مشتق ارائه شده فقط در بازه $\eta = [0,1]$ تعریف گشته است، ولی چون قلمرو فیزیکی جریان لایه مرزی $(0, L_y)$ می‌باشد، لذا نیاز به یک تغییر متغیر و یا به عبارتی، نگاشتی برای تبدیل قلمرو فیزیکی به قلمرو محاسباتی $[0,1]$ داریم.

نگاشت مورد نظر باید خصوصیات زیر را داشته باشد:

- ۱- نگاشت باید یک به یک باشد، یعنی خطوط شبکه هم خانواده نباید یکدیگر را قطع کنند.
 - ۲- از نقطه نظر عددی، در مناطقی که گرادیانهای شدید جریان وجود دارد، باید توزیع نقاط شبکه، متراکم، هموار و اعوجاج شبکه کم باشد.
 - ۳- خطوط شبکه باید متعامد و یا تقریباً متعامد باشند.
- تبدیل جبری مورد استفاده در این تحقیق، بصورت رابطه (۵-۳۳) می‌باشد که دامنه فیزیکی $(0 \leq y \leq L_y)$ را به محدوده محاسباتی $(0 \leq \eta \leq 1)$ تصویر می‌کند.

^۱- Mapped spectral method

$$y(0, \eta) = \frac{L_y y_0 \eta}{y_0 + L_y (1 - \eta)} \quad (33-5)$$

اطلاعات دقیق‌تر در مورد این نگاشت در فصل چهارم به طور کامل تشریح شده است.

تبدیلات معادلات دیفرانسیل، برای نگاشت محدوده فیزیکی به محدوده محاسباتی طبق قوانین زنجیره‌ای برای مشتقات پاره‌ای بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = f'(y) \quad , \quad D_{ij}^1(y) = D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (34-5)$$

$$D_{ij}^2(y) = D_{ij}^2(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \quad (35-5)$$

$$D_{ij}^3(y) = D_{ij}^3(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^3 + 3D_{ij}^2(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} \quad (36-5)$$

$$D_{ij}^4(y) = D_{ij}^4(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^4 + 6D_{ij}^3(\eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + D_{ij}^2(\eta) \left[3 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} \right] + D_{ij}^1(\eta) \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} \quad (37-5)$$

حال مسأله مقدار ویژه (۵-۲۰) با استفاده از مشتق‌های پاره‌ای فوق حل می‌شود. شرایط مرزی در دامنه محاسباتی بصورت زیر خواهد بود:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \quad (38-5)$$

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = 0 \quad (39-5)$$

حال مسأله بطور کامل محدود می‌شود و تحلیل پایداری خطی در یک پروفیل سرعت داده شده، می‌تواند انجام گیرد.

۵-۸- نتایج پایداری

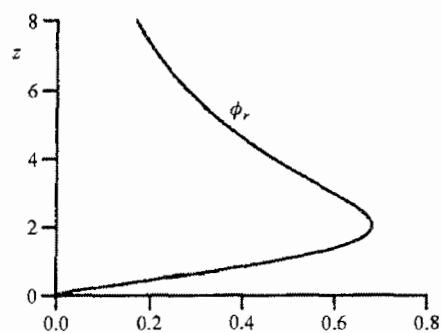
در این تحقیق پروفیل سرعت جریان اصلی در آنالیز پایداری خطی مکانی لایه مرزی دو بعدی، به صورت دو فرم زیر در نظر گرفته شده است:

$$U(y) = 0.332y - 0.0023y^4 + 1.998 \times 10^{-3}y^7 - 1.571 \times 10^{-7}y^{10} + 1.13 \times 10^{-9}y^{13} \quad (۴۰-۵)$$

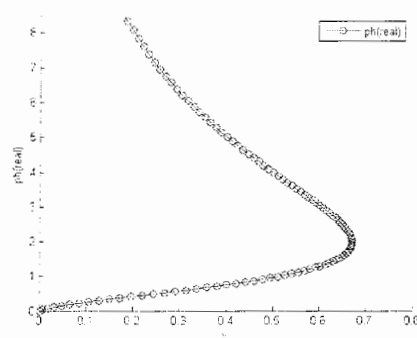
و

$$U(y) = \begin{cases} 1.8y - 1.9683y^4 & \left(0 \leq y \leq \frac{4}{9}\right) \\ 1 - 0.897(1-y)^3 & \left(\frac{4}{9} \leq y \leq 1\right) \\ 1 & (y \geq 1) \end{cases} \quad (۴۱-۵)$$

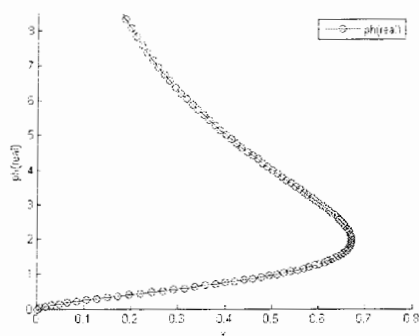
نتایج حل معادله اور-سامرفیلد، با نتایج بدست آمده توسط Schmid and Henningson (۲۰۰۱) [۲۸] و Drazin (۱۹۸۱) [۲۹] برای جریان لایه مرزی دو بعدی توسعه یافته مکانی مقایسه گردیده است.



نتایج Drazin (۱۹۸۱) [۲۹]



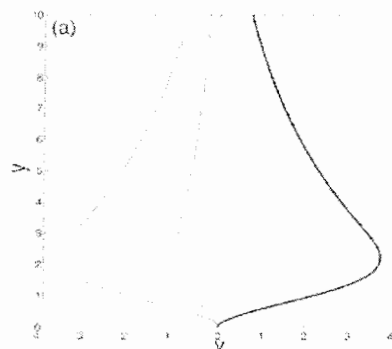
نتایج شبیه سازی طیفی با در نظر گرفتن پروفیل سرعت معادله (۴۰-۵)



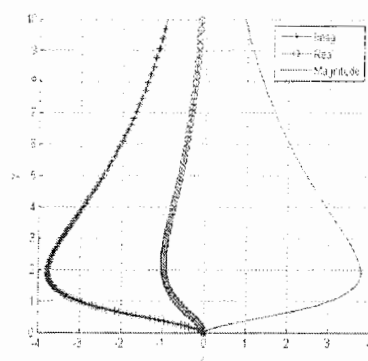
نتایج شبیه سازی طیفی با در نظر گرفتن پروفیل سرعت معادله (۴۱-۵)

شکل (۱۰-۵):

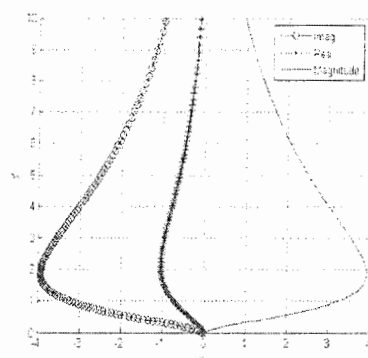
مقایسه بین قسمت حقیقی تابع ویژه $\phi(y)$ ، برای حالتی که $\text{Re}_\delta = 1000$ ، $\alpha = 0.23$



نتایج Schmid and Henningson (۲۰۰۱) [۲۸]



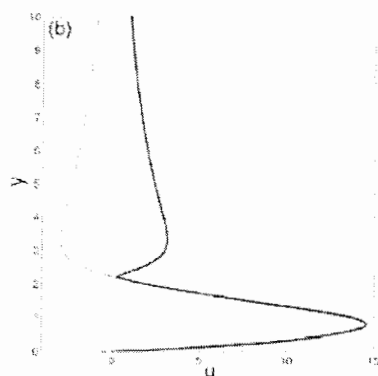
نتایج شبیه سازی طیفی با در نظر گرفتن پروفیل سرعت معادله (۴۰-۵)



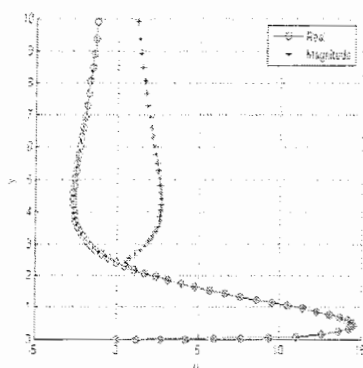
نتایج شبیه سازی طیفی با در نظر گرفتن پروفیل سرعت معادله (۴۱-۵)

شکل (۵-۱۱):

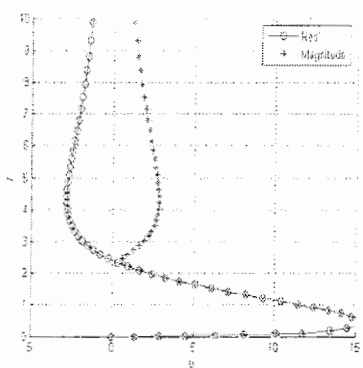
مقایسه بین مولفه‌های سرعت v در حالتی که $Re_\delta = 500$ ، $\alpha = 0.2$



نتایج Schmid and Henningson (۲۰۰۱) [۲۸]



نتایج شبیه سازی طیفی با در نظر گرفتن پروفیل سرعت معادله (۵-۴۰)



نتایج شبیه سازی طیفی با در نظر گرفتن پروفیل سرعت معادله (۵-۴۱)

شکل (۵-۱۲):

مقایسه بین مولفه‌های سرعت u در حالتی که $Re_0 = 500$, $\alpha = 0.2$

فصل ششم

جریان لایه‌مرزی

مغشوش

۶-۱- مقدمه

در این بخش جریان لایه مرزی دو بعدی را در حالتی توسعه می دهیم، که یک اغتشاش در ورودی قرار داده شده است. این اغتشاش در اصل تابع ویژه سرعت در جهت y ، منتج از حل معادله اور-سامرفیلد و تحلیل پایداری خطی جریان لایه مرزی می باشد (معادله ۳-۱۶). همانطور که در فصل سوم اشاره شد، در شبیه‌سازیهای مستقیم عددی جریان لایه مرزی از مولفه سرعت متقاطع جریان، (v) ، به عنوان اغتشاش استفاده می‌شود. زیرا v در شرط مرزی ورودی در حالت متقارن، نامتقارن و یا ترکیبی از این دو، شرایط حل پذیری را ارضاء می‌کند. برای جزئیات به مرجع [۱۷] رجوع شود.

۶-۲- نتایج شبیه سازی

در این قسمت نتایج شبیه سازی مستقیم عددی برای جریان لایه مرزی همراه با اغتشاشات ورودی شرح داده می‌شود.

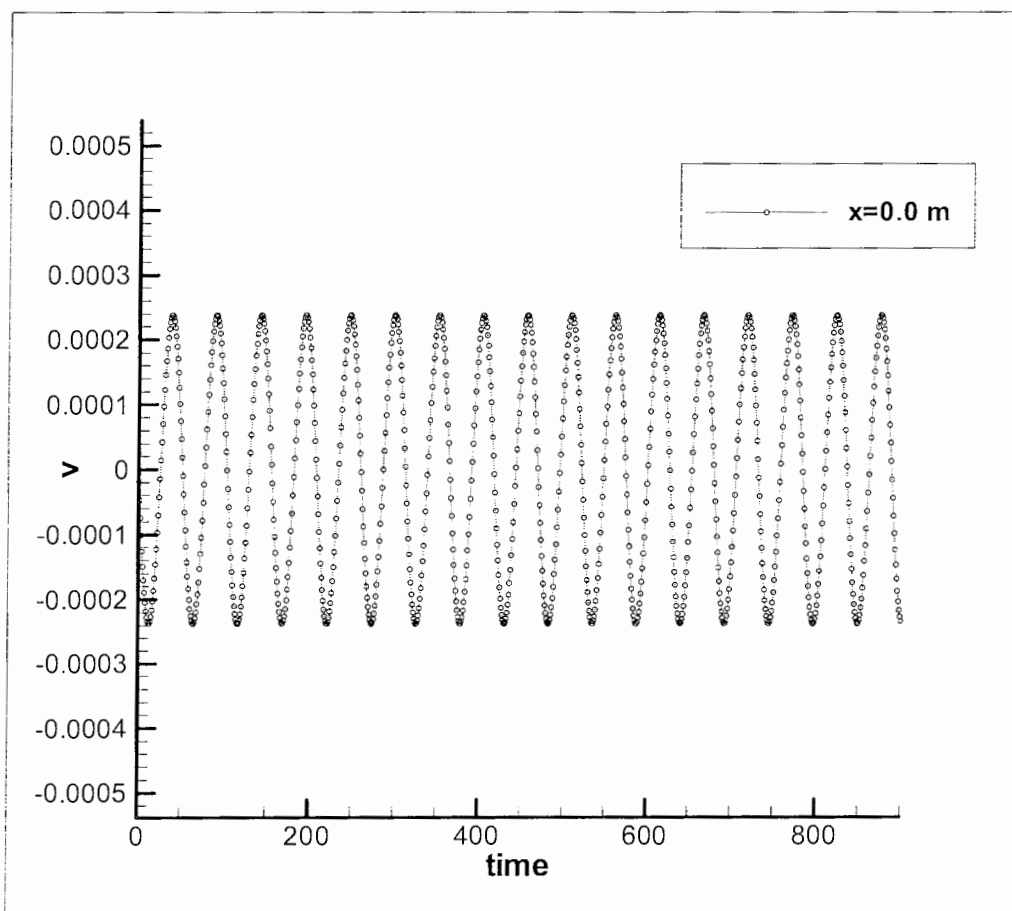
۶-۲-۱- اغتشاشات ورودی

با توجه به ناپایدارترین مود بدست آمده از تحلیل پایداری جریان لایه مرزی، مولفه‌های اغتشاش u و v بدست آمده‌اند. سرعت لحظه‌ای در شبیه‌سازی همراه با اغتشاشات باید به صورت آماری ساکن^۱ برسد و در این حالت سرعت متوسط مستقل از زمان است. در شکل (۶-۱) گذر زمانی مولفه عمودی سرعت در $x=0$ نشان داده شده است، همچنین گذر زمانی مولفه‌های سرعت u ، v و گردابه در دو

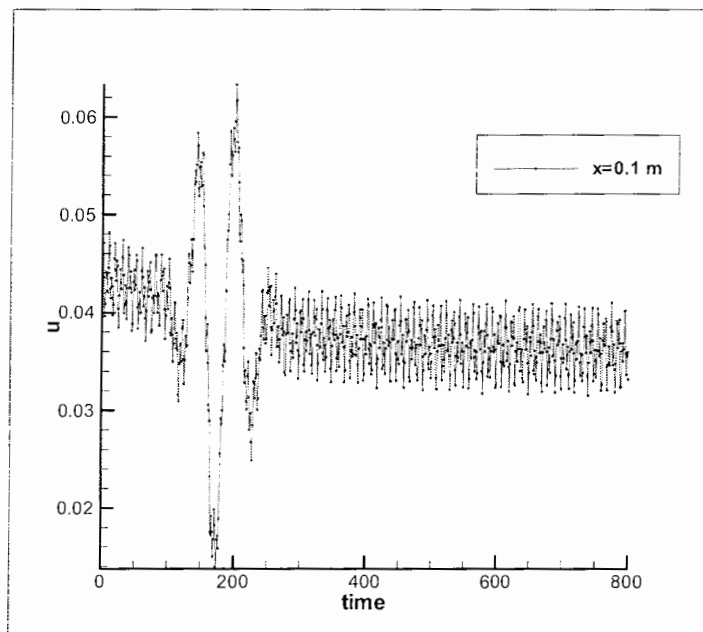
^۱ -Statistically Steady

فاصله مساوی در جهت طول L_x ، از ابتدا و انتها جریان در شکل‌های (۶-۲) تا (۶-۱۳) نمایش داده شده است.

با توجه به این شکل‌ها می‌توان ملاحظه کرد که، مولفه‌های سرعت u و v و گردابه، به یک حالت پایدار ایستایی رسیده‌اند و مقادیر متوسط آنها به لحاظ آماری نسبت به زمان تغییراتی ندارد. همچنین می‌توان مشاهده نمود که لایه کاملاً پریودیک می‌باشد، که این بخاطر نیروی خارجی اعمالی در ابتدای لایه می‌باشد.

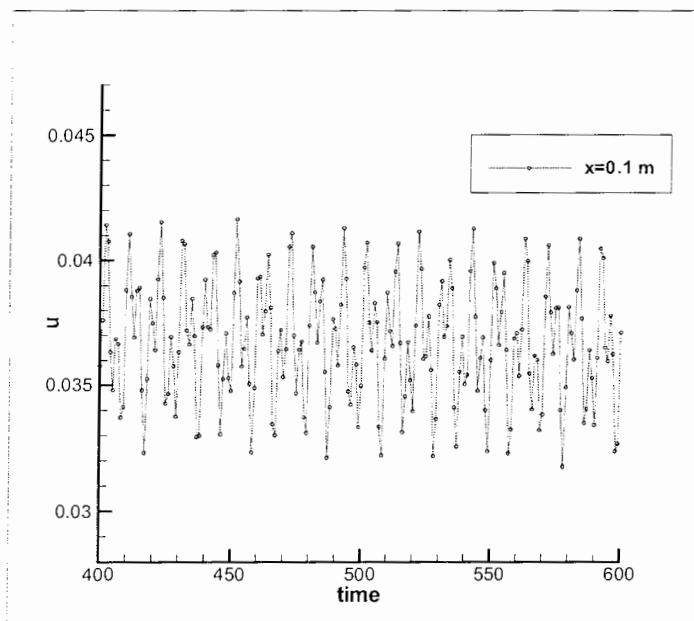


شکل (۶-۱): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در $x = 0.0$ ، برای شبیه سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی



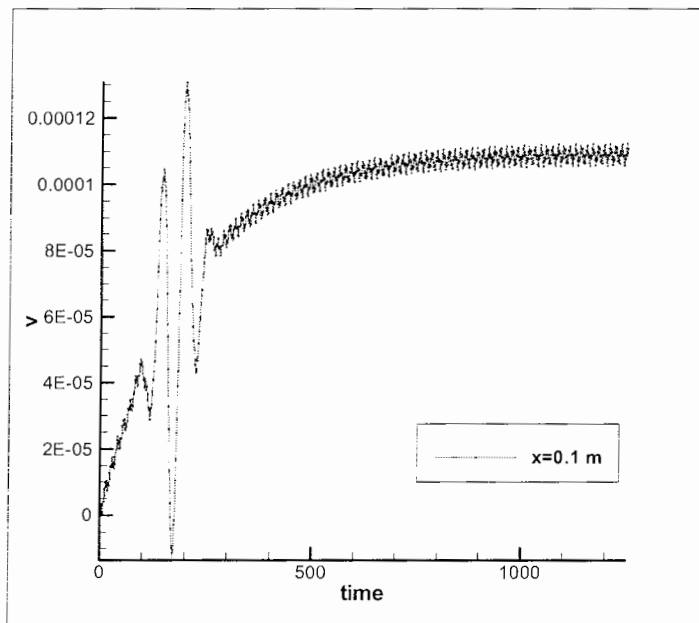
شکل (۶-۲): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در $x = 0.1$ ، برای شبیه سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با

اغتشاش ورودی

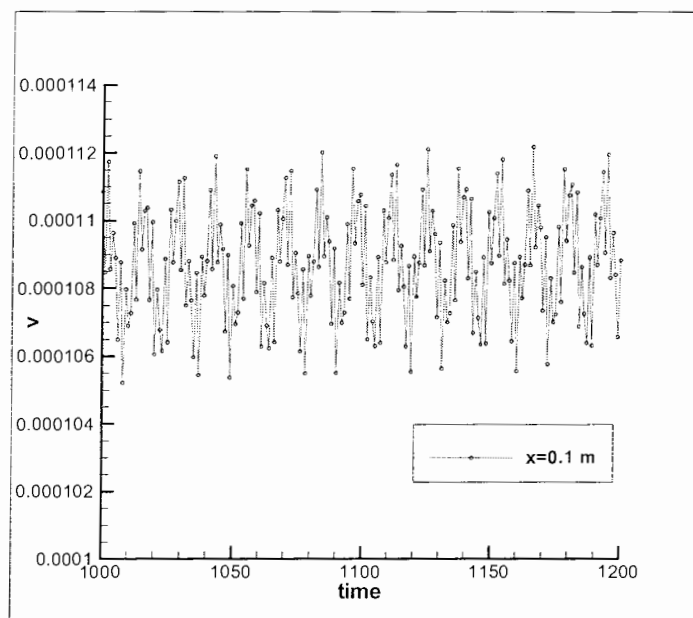


شکل (۶-۳): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در $x = 0.1$ ، برای شبیه سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با

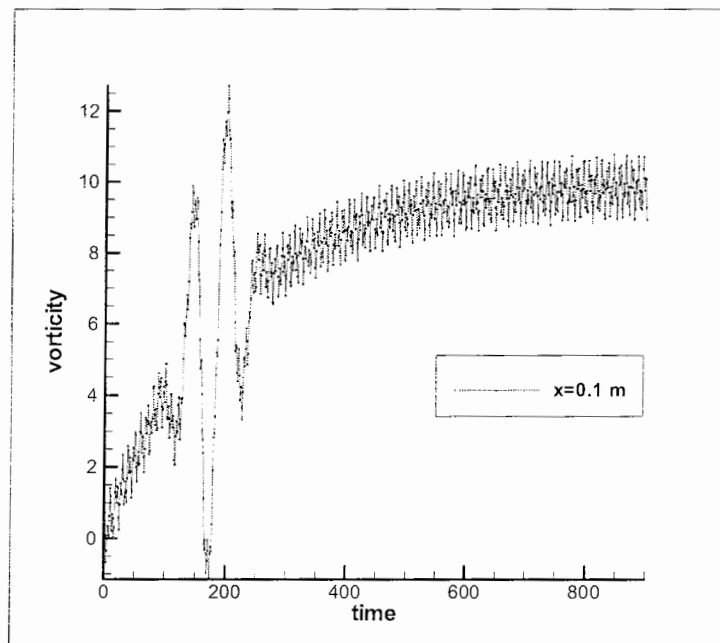
اغتشاش ورودی در هنگام پایدار ایستایی



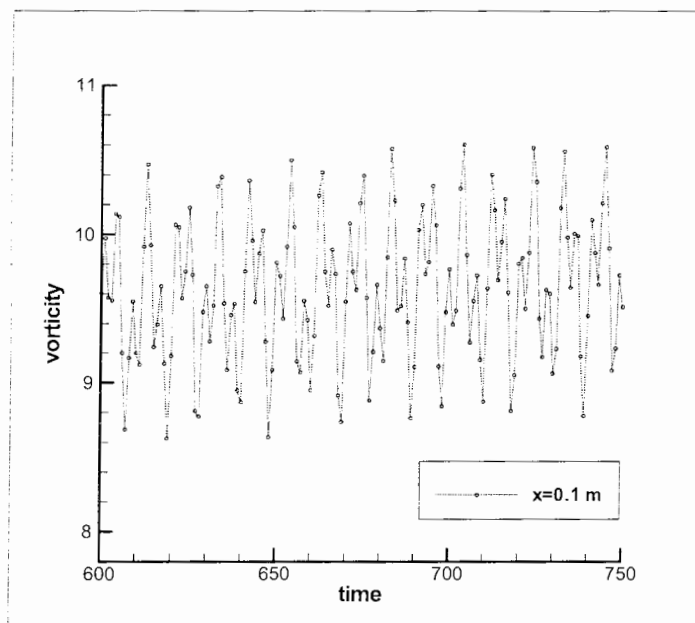
شکل (۴-۶): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در $x = 0.1$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی



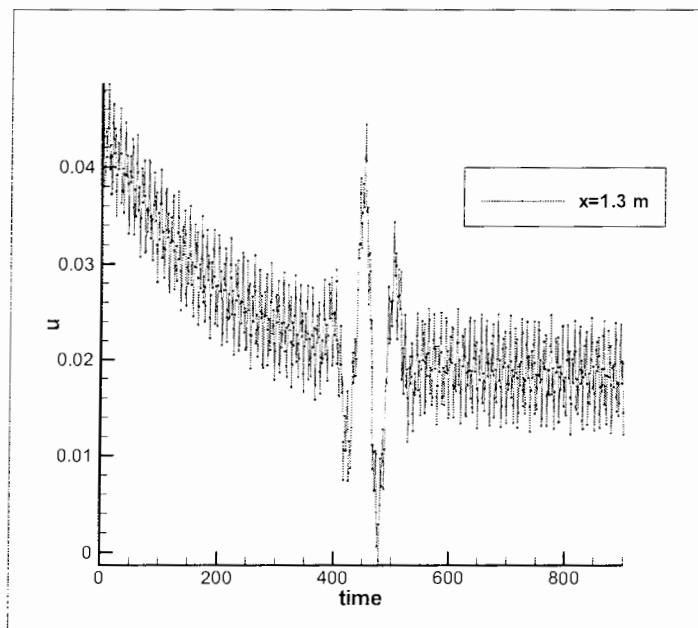
شکل (۵-۶): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در $x = 0.1$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در هنگام پایدار ایستایی



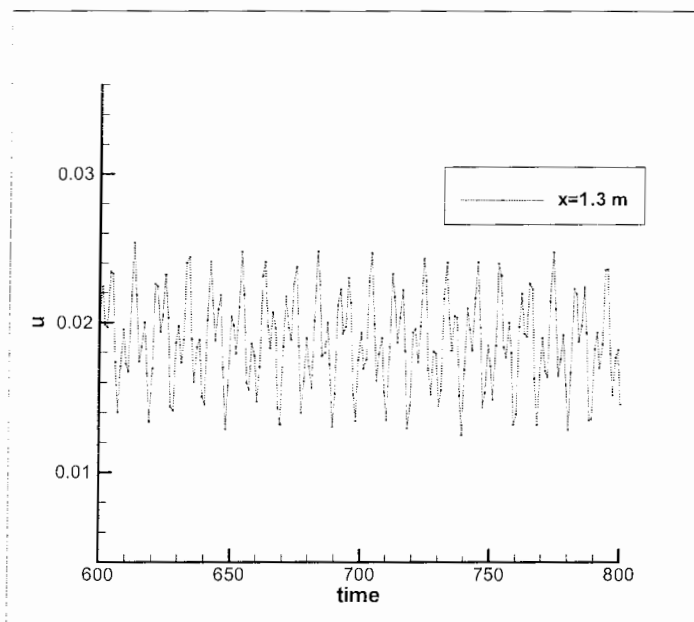
شکل (۶-۶): گذر زمانی گردابه، در $x = 0.1$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی



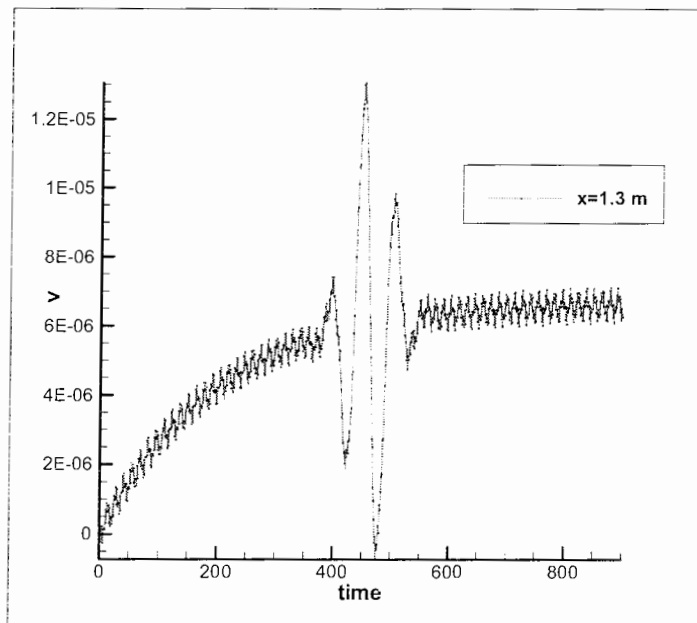
شکل (۶-۷): گذر زمانی گردابه، در $x = 0.1$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در هنگام پایدار ایستایی



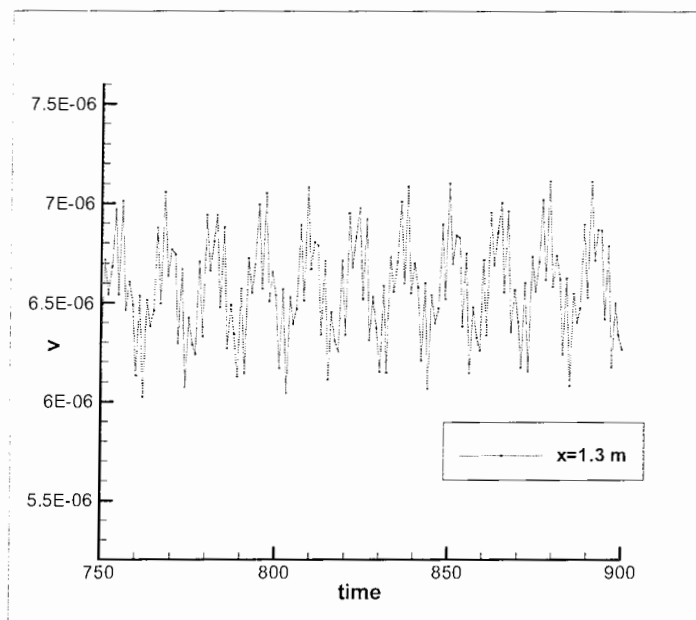
شکل (۶-۸): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در $x = 1.3$ ، برای شبیه سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی



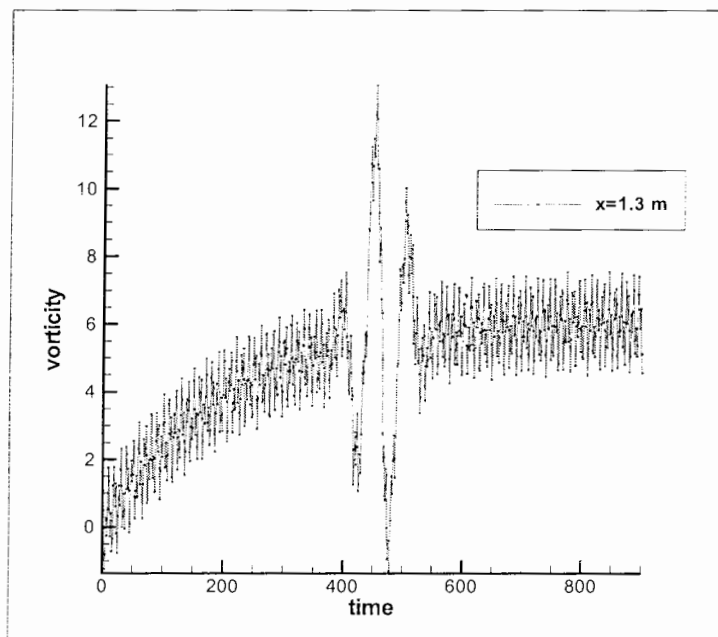
شکل (۶-۹): گذر زمانی مولفه افقی سرعت، u ، در $x = 1.3$ ، برای شبیه سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در هنگام پایدار ایستایی



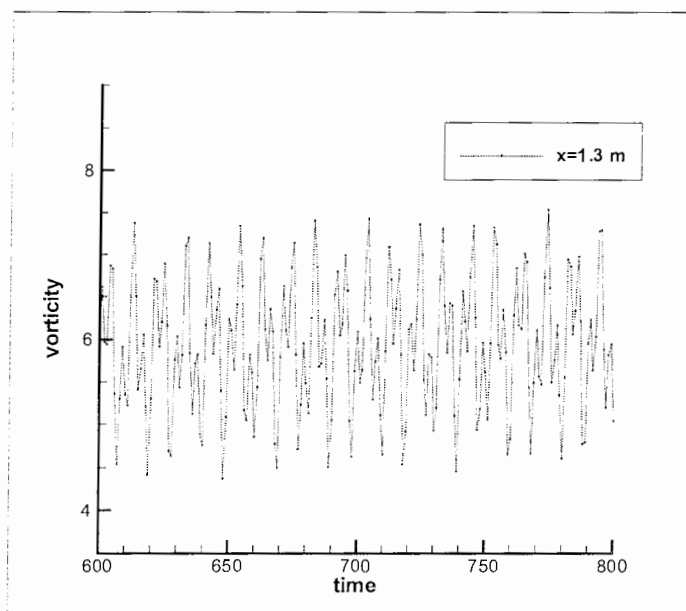
شکل (۶-۱۰): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در $x = 1.3$ ، برای شبیه سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی



شکل (۶-۱۱): گذر زمانی مولفه عمودی سرعت، v ، در $x = 1.3$ ، برای شبیه سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در هنگام پایدار ایستایی



شکل (۶-۱۲): گذر زمانی گردابه، در $x = 1.3$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی

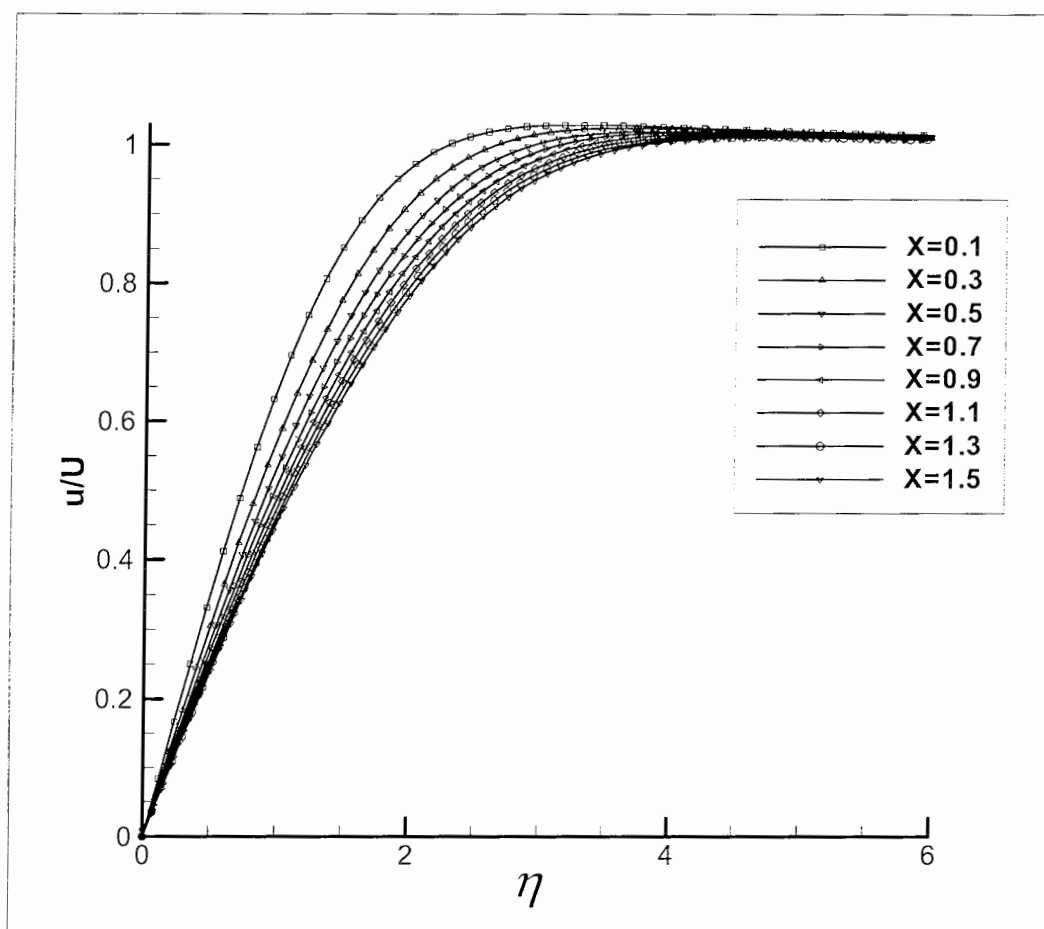


شکل (۶-۱۳): گذر زمانی گردابه، در $x = 1.3$ ، برای شبیه‌سازی جریان لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی

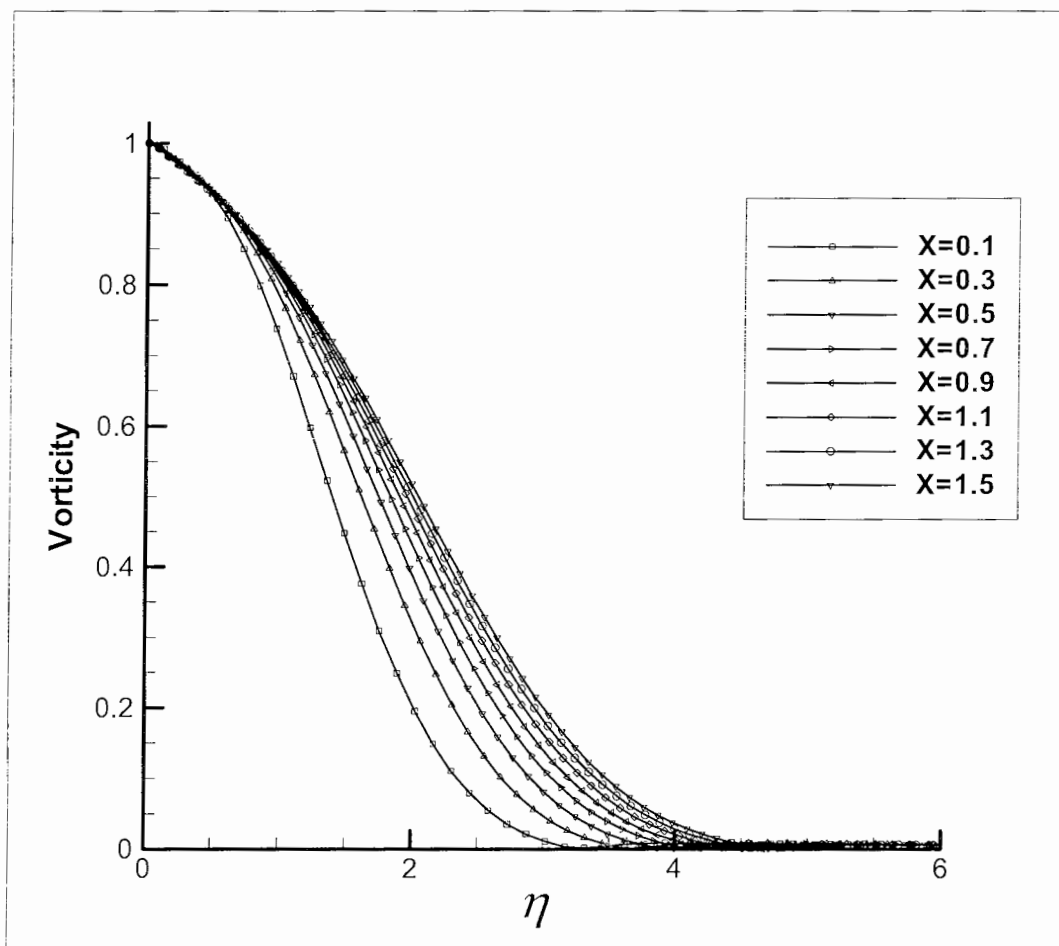
در هنگام پایدار ایستایی

۶-۲-۲- خودتشابهی

شکل‌های (۶-۱۴) و (۶-۱۵) نتایج شبیه‌سازی را به ترتیب برای سرعت و گردابه در جهت جریان اصلی در مختصات خودتشابهی در ایستگاههای مختلف نشان می‌دهد. در این شکل‌ها به خوبی می‌توان پدیده خودتشابهی را برای سرعت متوسط مشاهده کرد. همانطور که مشاهده می‌شود، پروفیل‌های جریان لایه مرزی بر هم منطبق نمی‌باشد، که این بدلیل اغتشاش خارجی اعمالی در ورودی جریان می‌باشد.



شکل (۶-۱۴): پروفیل سرعت u در مختصات خود تشابه برای شبیه‌سازی لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی

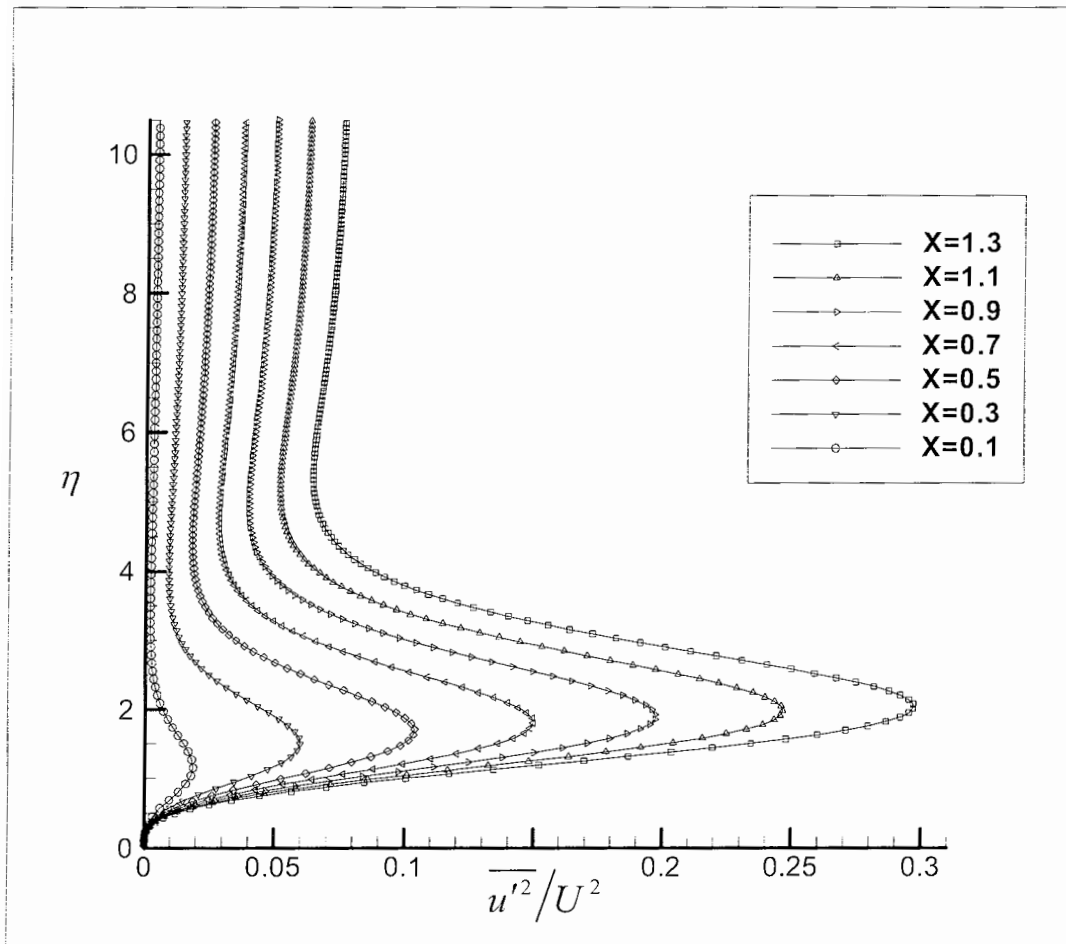


شکل (۶-۱۵): پروفیل گردابه، ω ، در مختصات خود تشابهی برای شبیه‌سازی لایه مرزی دوبعدی همراه با اغتشاش

ورودی

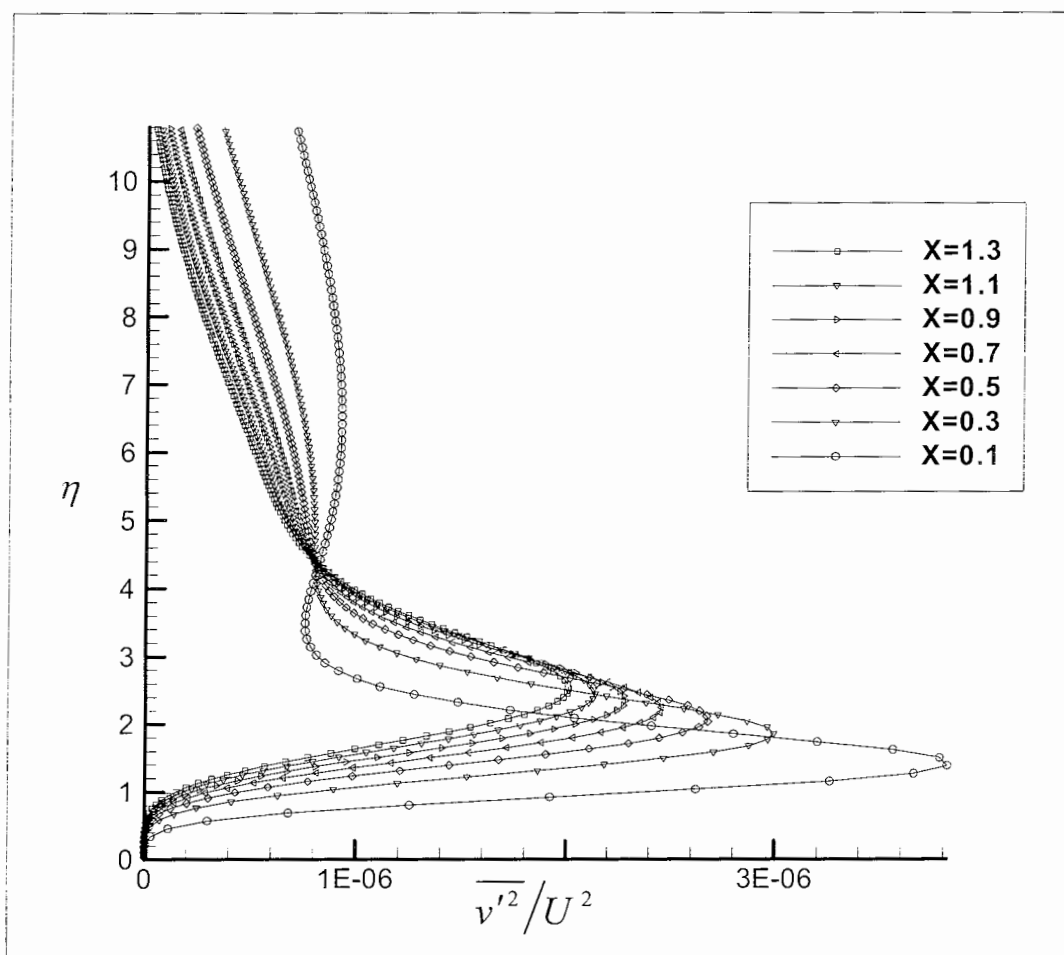
۶-۲-۳- توزیع تنش رینولدز^۱

در شکل‌های (۶-۱۶)، (۶-۱۷) و (۶-۱۸) توزیع شدت تنش‌های رینولدز نمایش داده شده است. این توزیعات نیز بیانگر رفتار غیر خودمشابهی لایه می‌باشند.

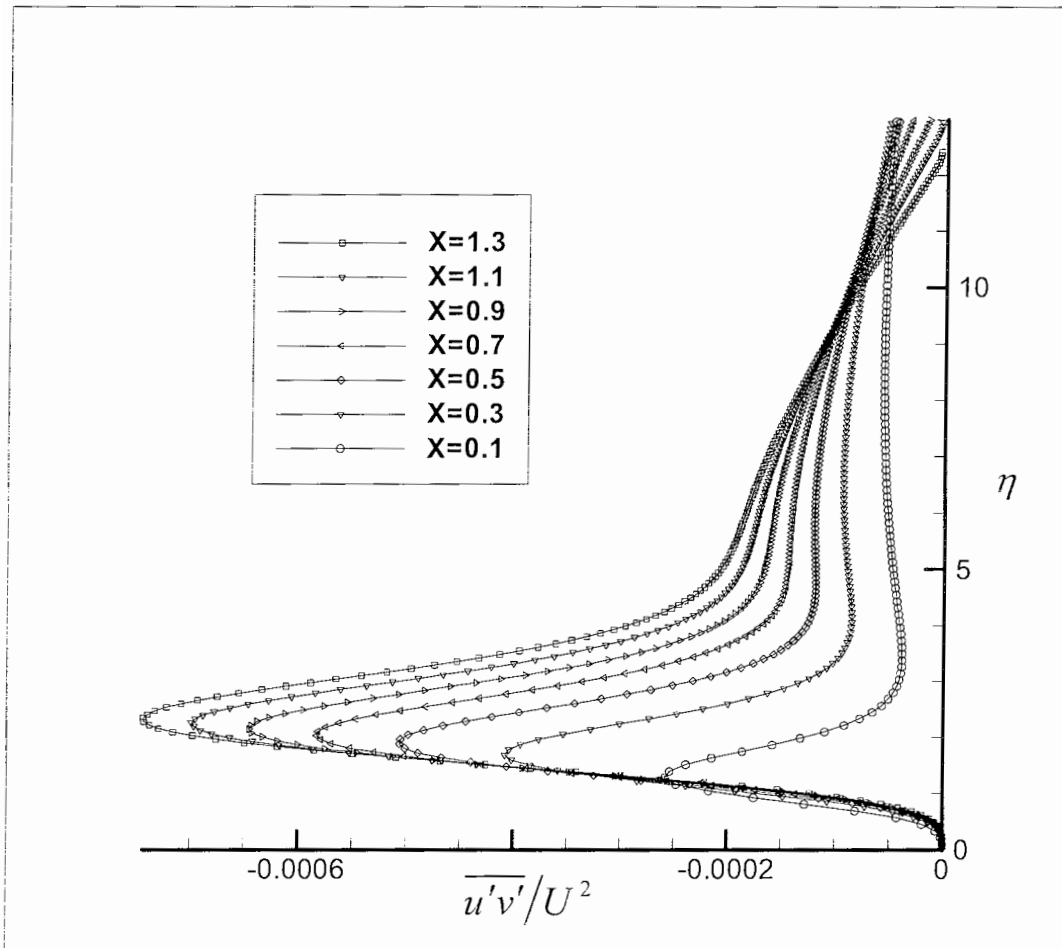


شکل (۶-۱۶): پروفیل تنش رینولدز $\overline{u'^2}$ ، در (۷) ایستگاه مساوی از ابتدای جریان، برای جریان لایه مرزی، مطابق با حل شبیه سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی

^۱ - Reynolds Stresses



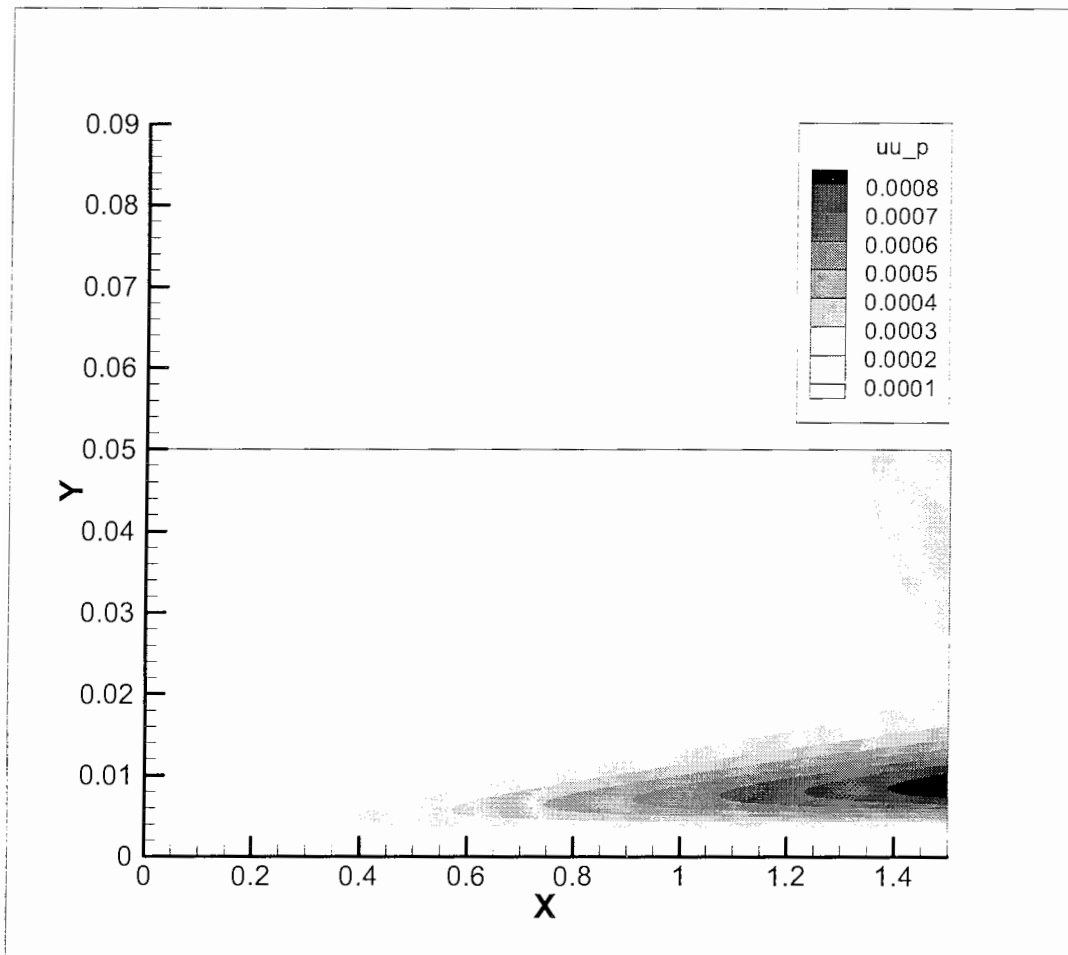
شکل (۶-۱۷): پروفیل تنش رینولدز $\overline{v'^2}$ ، در (۷) ایستگاه مساوی از ابتدای جریان، برای جریان لایه مرزی، مطابق با حل شبیه سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی



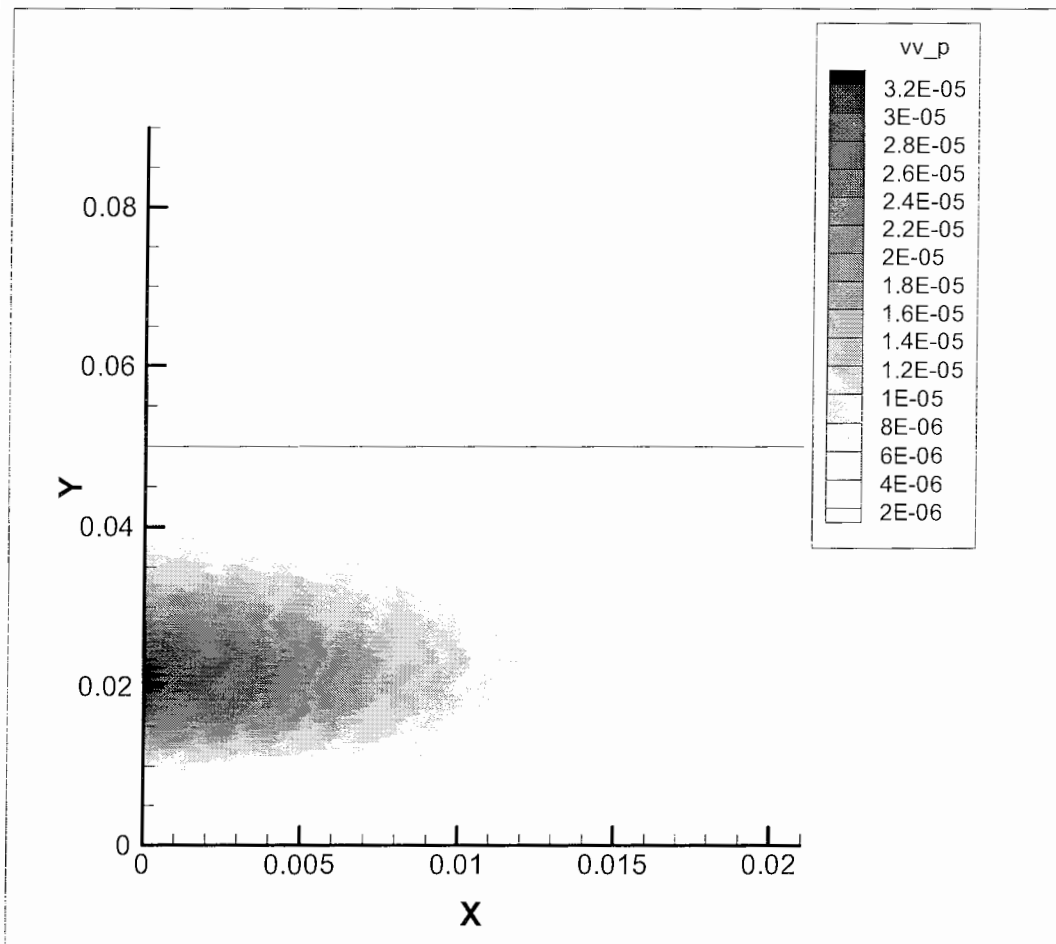
شکل (۶-۱۸): پروفیل تنش رینولدز $\overline{u'v'}$ ، در (۷) ایستگاه مساوی از ابتدای جریان، برای جریان لایه مرزی، مطابق با حل شبیه سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی

همانطور که در پروفیل‌های تنش برشی رینولدز در شکل‌های (۶-۱۶) تا (۶-۱۸) نمایش داده شده است، این تنش‌ها در نزدیکی دیواره بیشترین مقدار دارا بوده و کم کم افت پیدا می‌کند. همچنین اندازه $\overline{u'^2}$ بزرگترین مقدار در بین تنش‌های رینولدز می‌باشد. در عوض مولفه تنش $\overline{v'^2}$ که مولفه عمودی بر دیواره محسوب می‌گردد، به واسطه اثرات میراثی دیواره کمترین مقدار را بین تنش‌های رینولدزی را دارا می‌باشد.

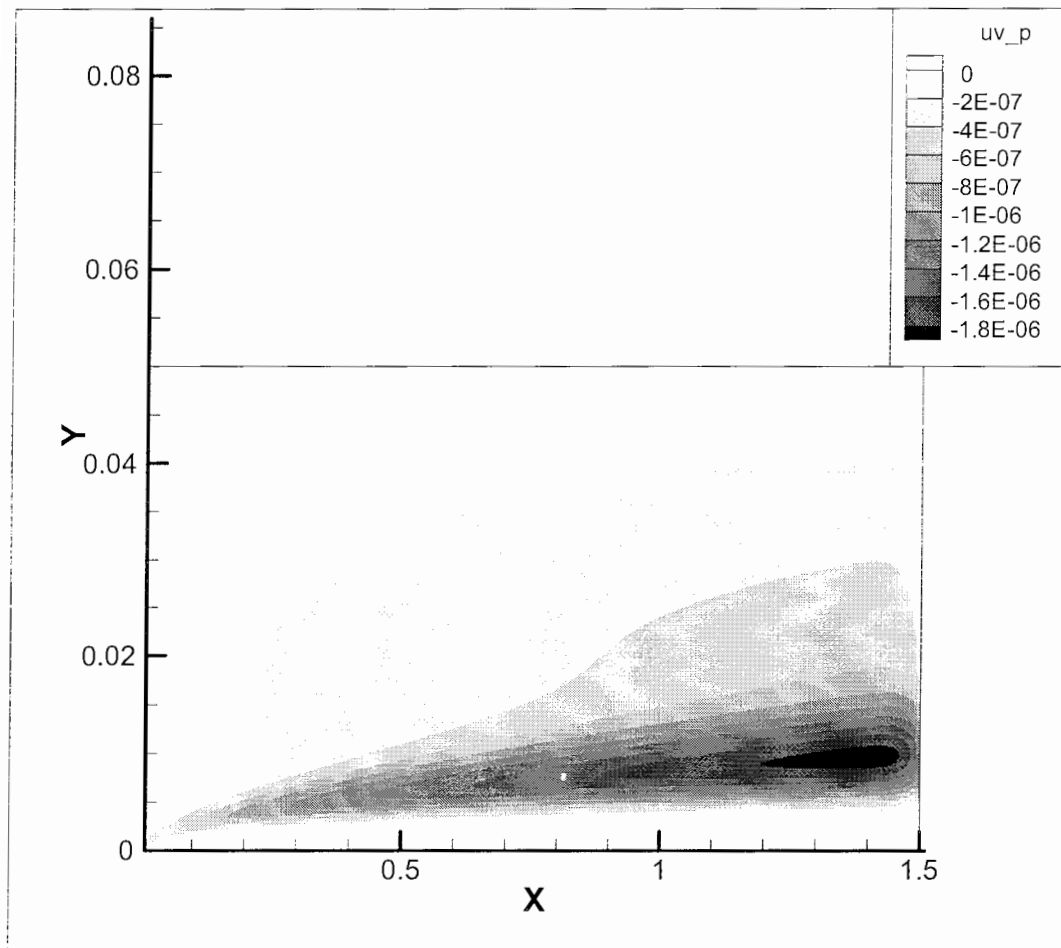
۴-۲-۶- کانتورهای تنش رینولدز



شکل (۶-۱۹): کانتور تنش رینولدز uu_p ، برای جریان لایه مرزی. مطابق با حل شبیه‌سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی



شکل (۶-۲۰): کانتور تنش رینولدز $\overline{v'^2}$ ، برای جریان لایه مرزی، مطابق با حل شبیه‌سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی



شکل (۶-۲۱): کانتور تنش رینولدز $\overline{u'v'}$ ، برای جریان لایه مرزی، مطابق با حل شبیه‌سازی مستقیم عددی، همراه با اغتشاش ورودی

۳-۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق شبیه‌سازی مستقیم عددی جریان اجباری^۱، دوبعدی، تراکم ناپذیر و ناپایدار برای جریان لایه مرزی انجام شد. از روش عددی برای بدست آوردن نتایج شبیه‌سازی استفاده شده است. در تحلیل پایداری خطی جریان لایه مرزی از روش نگاشت طیفی استفاده شده است، و نتایج بدست آمده با منابع منتشر شده معتبر مقایسه شده است.

برای شبیه‌سازی مستقیم عددی جریان لایه مرزی توسعه یافته مکانی، از روش تفاضل محدود فشرده در جهت اصلی جریان و از روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی در جهت عرضی جریان استفاده شده است. شرط مرزی ورودی، تولیدکننده جریان لایه‌مرزی اجباری می‌باشد. اغتشاشات ورودی بر اساس ناپایدارترین مود اغتشاشی بدست آمده از تحلیل پایداری خطی، در مرز ورودی اعمال شده‌اند.

با توجه به گذر زمانی مولفه‌های سرعت u و v ، ملاحظه می‌شود که این مولفه‌ها به یک حالت پایدار ایستایی رسیده‌اند و مقادیر متوسط آنها به لحاظ آماری نسبت به زمان تغییراتی ندارد.

نتایج خودتشابهی مولفه‌های سرعت و گردابه و همچنین تنشهای رینولدز نیز بدست آمدند. با توجه به این نتایج می‌توان فهمید که رفتارهای مولفه‌های سرعت و گردابه در جریان لایه مرزی اجباری کاملاً خود مشابه نمی‌باشند، که این بدلیل نیروی خارجی اعمالی در ورودی جریان می‌باشد.

^۱- forced

۴-۶- پیشنهادات برای تحقیقات آینده

- با توجه به تحلیل صورت گرفته، به منظور ادامه، تکمیل و بهبود آن پیشنهادات زیر توصیه می‌گردد:
- ۱- با گسترش حل ارائه شده و استفاده از رایانه‌های سریع‌تر، می‌توان جریان لایه‌مرزی را در حالت سه بعدی و اعداد رینولدز بالا، مورث مطالعه قرار داد.
 - ۲- روش عددی استفاده شده در این تحقیق، برای محاسبه مشتقات، روش تفاضل محدود فشرده می‌باشد. در این زمینه می‌توان از روشهای عددی دیگر مانند تفاضل محدود فوق فشرده^۱ که دارای دقتی به مراتب بالاتر می‌باشد، استفاده کرد.
 - ۳- نگاشت استفاده شده در این تحقیق تنها در جهت عمود بر جریان (y)، اعمال شده است. در این زمینه می‌توان علاوه بر این نگاشت، نگاشتی دیگر نیز در جهت جریان (x)، اعمال نمود، تا تغییرات در ورودی یا خروجی جریان بطور دقیق‌تر مورد بررسی قرار گیرد.
 - ۴- با توجه به اینکه شرایط مرزی، نشان دهنده سطح و فیزیک مورد مطالعه می‌باشد، با تغییر در شرایط مرزی و اعمال آن در معادلات، می‌توان حل را برای سطوح متنوع و هندسه‌های پیچیده‌تر، که از یک طرف محدود و از طرف دیگر نامحدود است، مورد بررسی قرار داده و به استخراج نتایج اقدام نمود.

^۱ - super compact finite difference

مراجع

- أ. احسان سلمانی ماهینی، (۱۳۸۴). "مطالعه و تحلیل عددی پایداری خطی جریان جت تراکم پذیر". پایان نامه کارشناسی ارشد. دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود.
- ب. ک. ا. هافمن ، اس، تی. چیانگ (۱۹۹۳). "دینامیک سیالات محاسباتی" ، ترجمه دکتر احمدرضا عظیمیان (۱۳۷۷)، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان

1. F.M. White, (1991). **Viscous Fluid Flow**, second ed., McGraw-Hill, New York
2. D.B. Spalding, (1961). **A single formula for the " law of wall"** .A.S.M.E. Transactions, Journal of Applied Mechanics, 28(3):455-458.
3. F.H. Clauser, (1956). **The turbulent boundary layer**. Adv. In Applied Mechanics., vol. 4, pp. 1-51, Academic,New York
4. H .Rouse,and Ince Simon,(1957). **History of Hydraulics**.New york, Dover
5. R.Chapman,(December1979). **Computational Aerodynamics Development and Outlook**, AIAA J., vol.17, no.12,pp. 1293-1313.
6. J. Mathieu, J.Scott, (2000). **An Introduction to Turbulent Flow**, Cambridge University Press.
7. S.A. Orszag and G.S. Patterson, (1972). **Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence**. *Phys. Rev. Lett.*, 28:76-79.
8. R.S. Rogallo, (1981). **Numerical experiments in homogeneous turbulence**. *NASA TM 81315*.
9. John Kim, Parviz Moin, and Robert Moser, (1987). **Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number**. *J. of Fluid Mech.*, 177:133 –166.
10. H. kreplin. And H. Eckelmann ,(1979). **Behaviour of the three fluctuating velocity components in the wall region of a turbulent channel flow**. *Physics of Fluids*, vol 22:1233-1239
11. R. Spalart, (1988). **Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re=1410$** *J. Fluid Mech.*, 187:61–98.

12. Hung Le, Parviz Moin, and John Kim, (1997). **Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step.** *J. of Fluid Mech.* 330:349–374.
13. Yang Na and Parviz Moin, (1996). **Direct numerical simulation of turbulent boundary layers with adverse pressure gradient and separation.** *Rep. TF-68. Thermosci. Div., Dept. Mech. Eng., Stanford.*
14. W.J. Feiereisen, W.C. Reynolds, and J.H. Ferziger, (1981). **Numerical simulation of a compressible, homogeneous turbulent shear flow.** *Rep. TF-13, Thermosci. Div., Dept. Mech. Eng., Stanford.*
15. N.N. Mansour, J. Kim, P. Moin, (1988). **Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow.** *J. Fluid Mech.* 194, 15– 44.
16. W.C. Reynolds, (1990). **The Potential and Limitations of Direct and Large Eddy Simulations.** In J.L. Lumley, editor, *Whither Turbulence? Turbulence at the Crossroads*, pages 313-343. Springer, New York.
17. M.J. Maghrebi, (1999). **A Study of Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three-Dimensional Plane Wake,** PhD thesis, **Department of Mechanical Engineering,** Monash University, Melbourne, Australia.
18. S.K. Lele, (1992). **Compact Finite Difference Scheme with Spectral-Like Resolution,** *Journal of Computational Physics*, 103, 16-12.
19. Corda, Stephen, (1992). **Numerical Investigation of the Laminar, Supersonic Flow over a Rearward-Facing Step Using an Adaptive Grid Scheme,** M.S thesis. Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, College Park.
20. J.F. Thompson, F.C. Thames, and C. W. Mastin, july (1977). **Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate System for the Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies,** NASA CR-2729.
21. A. Wray & M.Y. Hussaini, (1984). **Numerical Experiments in Boundary Layer Stability,** *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 392, pp 373-389.

22. R.H. Bartles & G.W. Stewart,(1972). **Solution of the Matrix Equation $AX+XB=C$** . Communications of the ACM, Vol 15, Number 9.
23. Howarth. L., (1983). **On the solution of the Laminar Boundary – Layer Equation**, Proceedings of the Royal Society of London , A164, pp. 547-479
24. Panton, R.L., (1984), **Incompressible Flow**, Wiley, New York.
25. H.Schlichting,(1979). **Boundary Layer Theory**, Mc Graw Hill.
26. Th. Herbert,(1988). **Secondary instability of boundary layers**. Ann Rev Fluid Mech:20:487–526.
27. Y. S. Kachanov, (1994). **Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition**, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 26, 411
28. P.J. Schmid and D.N. Henningson (2001), **Stability and Transition in Shear Flows** , Springer-Verlag.
29. P. G. Drazinand. and W. H. Reid. (1981), **Hydrodynamic Stability**, Cambridge Univ. Press, London

Abstract: Boundary layer flow with desired physical conditions is one of the important subjects of Fluid Mechanics, because of the practical and industrial application of boundary layer many researchers have concentrated on it. When a fluid is flowing in the vicinity of the solid boundary, the effect of no slip condition appears in the form of shear stress. By influencing of this effect a thin layer is created in the flow called boundary layer. Within this layer the velocity is changing from zero to the velocity of potential flow out of the boundary layer. As a result implementing of boundary layer simulation opens new vision into the science of Fluid Mechanics. In this study, direct numerical simulation of two-dimensional incompressible boundary layer is studied using compact finite difference scheme. The self-similarity of the time-averaged velocity and vorticity profile were studied. Orr-Sommerfeld equation was solved to facilitate the inflow boundary condition of DNS with a forcing. The turbulent intensities and Reynolds stress profile were also investigated in self-similar coordinate system. The results indicate that the boundary layer flow exhibits the self-similarity as the flow travels down stream.

Keyword: Direct Numerical Simulation (DNS), Boundary Layer Flow, Compact Finite Difference, Navier-Stokes Equation, Linear Stability Analysis, Orr-Sommerfeld Equation.